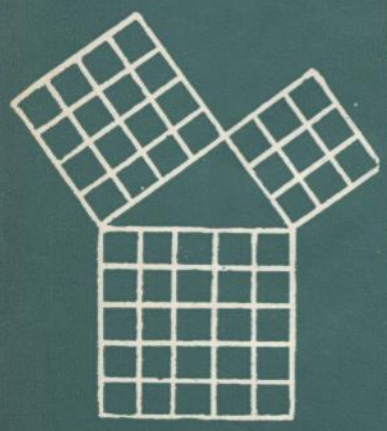
دورهٔ پنجم ـ شمارهٔ
۲
شمارهٔ مسلسل
۴۹
آبان
۱۳۴۷

یکان

مجلهٔ ریاضیات

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots\dots + x^n$$



بها : بیست و پنج ریال

دراین شماره :

مجموعهٔ علمی یکان

چاپ فروردین ۱۳۴۴

شامل مقالات و مسائل ممتاز ریاضی از:

استاد هشترودی ـ جهانگیر شمس آوری ـ احمد بیرشك ـ دکتر علاءِ کیائی ـ پرویز نیکخواه ـ عبدالحسین مصحفی ـ هوشنگ شریفزاده ـ مهندس نهورای ـ محمود روح الامینی ـ محمدحسن رزاقی خمسی ـ جلیل الله قراگزلو ـ محمد علی شیخان ـ مهدی مدغم .

نسخه‌هایی از مجموعهٔ مزبور برای فروش در دفتر مجله موجود است و به بهای ۶۰ ریال دردسترس علاقمندان قرار می‌گیرد.

برای مشترکان یکان تخفیف ۲۰٪ منظور می‌شود.

چاپ دوم یکان سال ۱۳۴۶

شامل مسائل امتحانات نهائی سال ۱۳۴۶ و حل آنها ، حل مسائل امتحانات ورودی سال ۴۶ دانشگاههای : تهران آریامهر ، صنعتی (پلی تکنیك) ، تبریز ، مشهد، گندی‌شاپور ملی ، دانشسرای عالی وکلاسهای شبانهٔ دانشگاه تهران .

نمونه‌ای ازمسائل امتحانات کشورهای فرانسه وانگلستان

بها : ۵۰ ریال

یکان

مجلهٔ ریاضیات

هرماه یك بار منتشر می‌گردد

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

دورهٔ پنجم ـ شمارهٔ دوم ـ شمارهٔ مسلسل: ۴۹

آبان ۱۳۴۷

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، داود مصحفی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume V, number 2, Oct. 1968

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

پرونده‌ای در
شورای عالی آموزش و پرورش

پس از مدتها سعادت دیدارش دست داد ، از حالم جویا شد ، و پس از آن پرسید که برنامهٔ اصلاحی هندسهٔ ترسیمی و رسم فنی ششم ریاضی چه مرحله‌ای را طی می‌کند ؟ گفتم که به قرار اطلاع یك سال است که برای تصویب به‌شورای عالی آموزش و پرورش ارجاع شده است ،...

دنبالهٔ کلام مرا او اداکرد : و در آنجا مدفون شده است .

شرح ما وقع ازاین قرار است که حدود یك سال و نیم پیش ، عده‌ای دعوت شدند تا باشرکت درکمیسیون مخصوصی نسبت به رفع نقص برنامهٔ ترسیمی و رسم فنی رشتهٔ ریاضی دبیرستانها تصمیم بگیرند .

سالها بود که دبیران ریاضی دبیرستانها از نارسائی برنامهٔ ریاضیات دبیرستان می‌نالیدند ، مقامات دانشگاهی پس از انجام هرکنکور ضعف پایهٔ علمی فارغ‌التحصیلان دبیرستان را اعلام می‌داشتند و لزوم اصلاح برنامه را یادآور می‌شدند ، دانش آموزان که به هنگام شرکت درکنکور دانشگاه درمی‌یافتندکه بسیاری از دروسی راکه یادگرفته‌اند در حقیقت برای آنان اتلاف وقت بوده است زیرا در هیچ موردی به‌کار آنها نمی‌آید ، صدای اعتراض خود را بلند می‌کردند ؛ اما همهٔ این فریادها به

جائی نمی‌رسید . حالا چرا به تشکیل کمیسیون مزبور اقدام شده بود ؟ سؤالی بود که دعوت شدگان به کمیسیون هم درپی پاسخ آن بودند ؛

معلوم شدکه انگیزهٔ تشکیل کمیسیون تذکر یکی‌ازدانشکده‌های فنی کشورهای خارج مبنی بر ضعف معلومات محصلین ایرانی (مشغول به تحصیل درآن دانشکده) در هندسهٔ ترسیمی و رسم فنی بوده است . هرچندکه فارغ‌التحصیلان مدارس متوسطه که برای ادامهٔ تحصیل به‌خارج ازکشور می‌روند اکثراً یکی دو دوره درکنکور دانشکده‌های داخلی شرکت‌کرده و توفیقی بدست نیاورده‌اند و ضعف آنان رادر یك مادهٔ درسی نمی‌توان دربارهٔ همهٔ محصلین ایرانی عمومیت داد ، معهذا اکنون‌که وسیلهٔ خیری فراهم شده و از طرف مقاماب دستور اصلاح برنامه صادر شده است ، باید از موقعیت استفاده‌کرد و تا آنجاکه میسر است نقایص برنامه‌را برطرف ساخت .

اعضای کمیسیون در طول یك تابستان گرم از استراحت بعد ازظهرهای خود صرف نظرکردند ، کارهای دیگر راکه داشتند به‌کنارگذاشتند ، به‌مذاکره و مطالعه و جر وبحث پرداختند و بالاخره اصلاحاتی را پیشنهادکردند . اما این پیشنهادها مورد قبول مقامات واقع نشد زیرا غیر از ترسیمی و رقومی مواد دیگری راهم شامل می‌شد .

بازهم جلسات کمیسیون تشکیل شد واین دفعه اصلاحی راکه پیشنهادکردند به‌ترسیمی و رقومی و رسم فنی منحصرمی‌شد . پیشنهاد مزبور برای اطلاع و اظهار نظر مقامات صاحب نظری خارج ازکادر وزارت آموزش و پرورش‌نیز ارسال شد و تأیید گردید ، و بالاخره برای تصویب به شورای عالی آموزش و پرورش ارسال گردید که از آن تاریخ تاکنون بیش از یکسال شمسی می‌گذرد،

در حال حاضر ایران تنها کشوری است که در مدارس آن هندسهٔ رقومی تدریس می‌شود. این مادهٔ درسی نه تنها برای ادامهٔ تحصیل دو دانشکده‌های فنی و صنعتی‌داخل و خارج کشور مورداحتیاج نیست، بلکه در مواردیگر و در اشتغال به کار وحرفه هم به درد محصل نمی‌خورد؛ بنابراین‌تدریس این ماده در حقیقت اتلاف وقت محصل و معلم می‌باشد. رسم فنی که برای ادامهٔ تحصیل در مدارس‌عالی فنی و حرفه‌ای مورد نیاز است و در امتحانات ورودی این دانشکده‌ها اهمیت خاص دارد در برنامهٔ تحصیلات متوسطهٔ ما مورد بی‌اعتنائی‌کامل واقع شده است؛ فقطدر کلاس پنجم ریاضی‌اگر مدیردبیرستان خواست می‌تواند از ساعات کاردستی یك ساعت را به رسم فنی اختصاص دهد.

نقایص عمده‌ای از این قبیل دربرنامهٔ موادریاضی دبیرستان‌وجود دارد که مکرراً توسط‌صاحب نظران یادآوری شده اماهیچگاه مورد توجه واقع نشده است، یك دفعه‌هم‌که تذکر یك دانشکدهٔ‌خارجی باعث شد تا اقدامی بکنند؛ عده‌ای را دعوت‌کردند ، چندین ماه وقت آنان را گرفتند و آخرالامر بدون آنکه حتی یك بارك‌الله هم تحویل آنان داده باشند ، با بی اعتنائی کامل نسبت به پیشنهادهای ایشان ، عملا به آنان فهماندند که دیگر دعوت به شرکت در چنین کمیسیونهایی را با خوشبینی قبول نکنند.

عبدالحسین مصحفی

دربارهٔ مسائل حل نشده

دکتر محسن هشترودی

درمسائل حل نشدهٔ ریاضی درمورد دنباله اعدادی‌که هر جمله مساوی مجموع جمل بعد باشد از طرف مؤلف شتابزدگی بعمل‌آمده است . به این‌معنی‌که اگرخاصیت مذکور به جمیع جمله‌های دنباله تعلق گیرد فقط دنبالهٔ تصاعد هندسی نزولی به قدر نسبت $\frac{1}{2}$ جواب مسئله خواهد بود . توضیح امرچنین است‌که از رابطهٔ :

$$u_1 = u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

حاصل می‌شود که :

$$2u_1 = u_1 + u_1 + u_3 + \cdots$$

می‌باشد و چون حد طرف دوم (مجموع جمله‌های یك رشته) برابر $2u_1$ مقدار معینی است رشتهٔ حاصل از دنباله همگرا خواهد بود و اگر جملهٔ اول u_1 را برابر واحد فرض کنیم (این‌فرض به‌هیچ وجه ازکلیت مطلب‌نمی‌کاهد).ودورابطهٔ:

$$u_{n-1} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

و

$$u_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

درنظر بگیریم نتیجه می‌شود که $u_{n-1} = 2u_n$. پس‌رشته یك تصاعد هندسی باقدرنسبت $\frac{1}{2}$ می‌باشد و

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

و تصاعد

$$1 \text{ و } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{4} \text{ و } \frac{1}{8} \text{ و } \cdots$$

بدست می‌آید .

اما اگر خاصیت مذکور دربرخی از جمل دنباله صادق باشد و به جمیع جمله‌ها تعلق نگیرد دراین صورت جواب روشن نیست .

در این مورد مسئله‌ای‌که از دیرباز (از زمان یونانیان و فیثاغورس) مطرح بوده است عنوان می‌کنم. مسئله به صورت ابتدائی خود تعیین وزنه‌هائی است‌که با ترازوی یك‌کفه به‌کمك این وزنه‌ها با یك توزین بتوان جمیع وزنه‌ها را ازیك واحد تا مجموع وزنه‌های مفروض‌بدست آورد. بقسمی‌که هروزنه در توزین فقط‌یك‌بار بکار رود .

یك جواب مسلم عبارتست از وزنه‌هائی که برابر واحد و دو و چهار ... تا 2^n باشند. زیراچنانکه می‌دانیم هرعددی را می‌توان ازمجموع قوائی از دو بدست‌آورد (زیرا هرعدددر مبنای شمارش دوبا ارقام صفر و یك نوشته می‌شود پس مجموع قوائی ازعدد ۲ می‌باشد) از جوابهای عادی‌که جمع وزنه‌ها برابر واحد باشند و یا n وزنهٔ برابر ۱ و ۲و۳ و...n داشته باشیم صرف‌نظرکرده‌ایم .

به بیان ریاضی مسئله چنین عنوان می‌شودکه دومجموعهٔ یك دنبالهٔ (محدود) اعدادکه با یك شروع می‌شوند مانند :

$$(u_1 = 1)(u_1 \text{و} u_2 \text{و} u_3 \text{و} \cdots)$$

اعداد u_k را چنان تعیین‌کنیدکه با جمع دوبه‌دو یا سه‌به‌سه یا چهار به چهار ... وبالاخره با مجموع جمیع اعدادمجموعه بتوان مجموعهٔ اعداد صحیح ازیك تا :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

را بدست آورد .

جواب مذکور درفوق عبارتست‌ازمجموعهٔ اعداد :

$$u_k = 2^{k-1} \text{ به ازاء } k = 1, 2, 4 \ldots n$$

و توضیح ریاضی مسئله چنین خواهد بود که برابری :

$$2^n - 1 - k = \sum_{h=1}^{h=n} \varepsilon_h \cdot 2^{h-1}$$

به ازاء جمیع مقادیر :

$$k = 0 \text{و} 1 \text{و} 2 \text{و} 3 \ldots 2^n - 2$$

همواره ممکن است و ε_h برابر صفر یا یك می‌باشد و هر عددفقط به‌یك صورت‌بدست‌می‌آید.ولی‌جوابهای‌دیگری‌نیزموجود است که شناخته نیست. فی‌المثل یکی ازجوابها n جملهٔ اول‌از

دنبالهٔ فیبوناچی است . یعنی در مجموعهٔ اعداد $(1,1,2,3,5,8 \ldots u_n)$ به تعداد n می‌توان جمیع اعداد را تا مجموع جمیع جمله های مجموعهٔ فوق با حاصل جمعهای دوبه دو وسه به سه و.. بالاخره مجموع جمیع جمل بدست آورد

(در دنبالهٔ فیبوناچی $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$ می‌باشد) یعنی به‌عبارت ریاضی برابری

$$S_n - k = \sum_{h=1}^{h=n} \varepsilon_h u_h$$

برای جمیع مقادیر :

$$k = 0,1,2,3 \ldots (S_n - 1)$$

ممکن است :

$$S_n = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + \cdots + u_n$$

و ε_h برابر صفر یا یك است . (باید متوجه بود کـه در دنبالهٔ فیبوناچی $S_n = u_{n\times 2} - 1$) بنابراین به فرض :

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$$

مقادیر جمله‌های $u_1 = 1$ و $u_2 = 1$ .. تا u_n برابری :

$$u_{n+2} - 1 - k = \sum_{h=1}^{h=n} \varepsilon_h u_h \quad (\varepsilon_h = 0 \text{ و } 1)$$

را برای جمیع مقادیر :

$$k = 0,1,2,3 \ldots (u_{n+2} - 2)$$

میسر می‌سازد . این تساوی گاهی به‌صور مختلف بدست‌می‌آید. اکنون فرض کنیم که ترازودو کفه‌ای است به زبان ریاضی‌ترکیب خطی ازجمله‌های یك مجموعهٔ :

$$(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n)$$

دوبه‌دو وسه به‌سه وچهار به‌چهار و...وبالاخره n به n با اعمال جمع وتفریق حسابی (یعنی ماندهٔ عمل تفریق‌مثبت باشد)جمیع اعداد را از یك تا :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

بدست دهد . $(u_1 = 1)$

یعنی برابری :

$$S_n - k = \sum_{h=1}^{h=n} \varepsilon_h u_h$$

برای جمیع مقادیر :

$$k = 0,1,2 \ldots (S_n - 1)$$

با مقادیر $(\varepsilon_h = 0,1,-1)$ همواره میسر باشد .

یك جواب مسئله با n جمله ازتصاعد هندسی:

$$(1,3,9,27, \ldots 3^{n-1})$$

تشکیل می‌شود . زیرا چنانکه می‌دانیم اعداد صحیح در مبنای شمارش ۳ بـا ارقام صفر و یك و دو نوشته می‌شود و چـون $3 - 1 = 2$ می‌باشد پس با اعمال جمع وتفریق‌حسابی می‌توان جمیع اعداد را ازقوای‌عدد ۳ بدست آورد .

یعنی برابری :

$$\frac{3^n - 1}{2} - k = \sum_{h=1}^{h=n} \varepsilon_h \times 3^{h-1}$$

برای جمیع مقادیر :

$$k = 0,1,2 \ldots \left(\frac{3^n - 1}{2} - 1\right)$$

به فرض $\varepsilon_h = 0,1,-1$

همواره میسر است (برای هر عدد فقط به‌یك صورت). همچنین با اعداد مثلث به‌صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ این امر ممکن است .

یعنی دنبالهٔ اعداد :

$$1,3,6,10,15 \ldots \frac{n(n+1)}{2}$$

با جمع و تفریق می‌تواند جمیع اعداد را تا مجموع دنبالـه بدست دهد .

بی‌شك جوابهای دیگری برای مسئله موجود است ولی بطورکلی شناخته نیست .

حال تصاعدهای حسابی را درنظربگیریم :

در تصاعد حسابی با قدرنسبت ۲ (یعنی اعداد فردمتوالی از ۱ تا $2n - 1$) مجموعهٔ $(1,3,5,7 \ldots 2n - 1)$ بدست می‌آید و با ترکیب خطی با عمل جمع وتفریق‌حسابی‌جمله‌های این مجموعه جمیع اعداد را از یك تا n^2 را می‌توان بدست آورد . یعنی به زبان ریاضی برابری:

$$n^2 - k = \sum_{h=1}^{h=n} \varepsilon_h (2h - 1)$$

برای جمیع مقادیر :

$$k = 0,1:2,3 \ldots (n^2 - 1)$$

به فرض $\varepsilon_h = 0,1,-1$ همواره ممکن است . یعنی این مجموعه نیز دارای خاصیت مجموعهٔ‌تصاعدهندسی‌باقدرنسبت ۳ می‌باشد وجواب دیگری از مسئلهٔ فوق است ولی دراین جـا ممکن است بعضی عددها به صورتهای مختلف بدست آید . در

تصاعد حسابی با قدرنسبت ۳ یعنی مجموعهٔ :

$$(۱،۴،۷،۱۰ \ldots ،۳n-۲)$$

جمیع اعداد صحیح از یك تا $\frac{n(۳n-۱)}{۲}$ رامی‌توان با ترکیب خطی با اعمال جمع و تفریق حسابی بدست آورد مگر عدد $\frac{۳n^۲-n-۶}{۲}$ راکه‌به‌هیچ وجه میسر نیست. یعنی به‌زبان ریاضی درمجموعهٔ مذکور برابریهای :

$$\frac{۳n^۲-n}{۲}-k=\sum_{h=۱}^{h=n}\varepsilon_h(۳h-۱)$$

به فرض $\varepsilon_h=۰،۱،-۱$ همواره میسراست مگر به‌ازاء $k=۳$ که‌به‌هیچ وجه ممکن‌نیست. (خوانندگان متوجه خواهند بود که چرا بجای تساوی لفظ برابری‌را بکار می‌بریم . زیرا در عدم امکان برابری نامساوی حاصل نمی‌شود و فقط امتناع صورت می‌دهد).

درتصاعد حسابی با قدرنسبت ۴ مثلا درمجموعهٔ :

$$۱،۵،۹،۱۳،۱۷$$

جمیع اعداد مثبت را ازیك تا ۴۵ می‌توان از روی این اعداد با جمع وتفریق حسابی (ماندهٔ مثبت) بدست‌آورد (برای بعضی عددها با صورتهای مختلف) مگر برای اعداد ۳۷ و ۴۱ و ۴۲ که چنین امری ممتنع است .

بطورکلی درمجموعهٔ : $۱،۵،۹،۱۳،۱۷ \ldots ۴n-۳$ با ترکیب خطی جمع وتفریق حسابی جمیع اعداد را از یك‌تا $\frac{n(۴n-۳)}{۲}$ می‌توان تشکیل داد مگر اعداد:

$$\frac{n(۴n-۳)}{۲}-۸ \quad \text{و} \quad \frac{n(۴n-۳)}{۲}-۴ \quad \text{و} \quad \frac{n(۴n-۳)}{۲}-۳$$

یا به زبان علائم ریاضی برابری :

$$\frac{n(۴n-۳)}{۲}-k=\sum_{h=۱}^{h=n}\varepsilon_h(۴h-۳) \quad (\varepsilon_h=۰،۱،-۱)$$

برای جمیع مقادیر :

$$k=۰،۱،۲،۵،۶،۷،۹ \ldots \left(\frac{n(۴n-۳)}{۲}-۱\right)$$

همواره ممکن است مگر به ازاء مقادیر $k=۳،۴،۸$ که برابری امکان پذیر نیست. باید توجه داشت که در این مثال برابریها برای‌مجموعهٔ مفروض به قراری است که ذکر شد به‌شرط آنکه $n\geqslant ۵$ باشد. برای $n=۴$ یعنی‌مجموعهٔ(۱،۵،۹،۱۳) علاوه براعداد ۲۵ و ۲۴ و ۲۰ تشکیل عدد ۱۱ نیز غیرممکن است وبرای $n=۳$ یعنی مجموعهٔ (۱ ، ۵ ، ۹) مثل حالت کلی اعداد ۷،۱۱،۱۲ را نمی‌توان‌تشکیل داد. وبرای $n=۲$ مسئله خود به‌خود روشن است ، چه مجموعه از (۱،۵) تشکیل شده است و دیده می‌شودکه فقط اعداد ۱،۴،۵،۶ را می‌توان تشکیل داد و اعداد ۲،۳ غیرممکن می‌باشند یعنی همان حالات $k=۳$ و $k=۴$، چه $k=۸$ عددی‌منفی تشکیل می‌دهد. یعنی در واقع فقط درحالت $n=۴$ است که علاوه برسه عدد مذکور درحالت‌کلی عدد ۱۱ نیز جزء اعداد ممتنع است .

مسئلهٔ‌کلی این ترکیبات را می‌توان چنین طرح کرد :

در دو مجموعهٔ :

$$S_n=(u_۱،u_۲ \ldots u_n)$$

به فرض $u_۱=۱$ و مجموعهٔ :

$$E_n(\varepsilon_۱ ، \varepsilon_۲ \ldots \varepsilon_n)$$

آیا می‌توان با ترکیبات خطی ازقبیل :

$$\sum_{۱،۱}^{n،n}\varepsilon_i\ u_j$$

(یعنی‌حاصل ضرب جمله‌ای ازمجموعهٔ اول درجمله‌ای ازمجموعهٔ دوم بقسمی که تعداد حاصل ضربها از n تجاوز نکند) جمیع اعداد متعلق به‌مجموعهٔ $G_s(v_۱،v_۲ \ldots v_s)$ را بدست آورد یا نه ؟ ممکن‌است حتی $u_۱\neq ۱$ باشد و دومجموعهٔ S و E دارای جمله‌های منفی نیز باشند . این مبحث در جبر نوین مربوط به جبر خطی و برابریها و نابرابریها و نامساویهای مربوط به روابط خطی است . بعضی ازمسائل این قسمت‌ازجبر نوین در ده سالهٔ اخیر بطور کامل مشخص شده‌اند (خصوصاً نامساویها) ولی مسئلهٔ کلی‌آن هنوز روشن نیست. درمسائل‌حل ناشدهٔ ریاضی بعضی مسائل به این قسمت جبر نوین مربوط می‌باشد .

نقدی بر روش آموزش شیمی

عطاءالله بزرگ‌نیا

آموزش شیمی درکشورمامبتنی برقبولانیدن حقایق تجربی به‌شکل الگوها وفرمولهای گوناگونی است‌که معلم به شاگردان القامی‌کند وازآنان می‌خواهدکه بدون چون و چرااین مطالب راپذیرند وبدون کم‌وکاست به‌حافظهٔ خودبسپرند ودرمواقع‌لزوم عینا بخاطرآورند. معلم‌کوشش می‌کندکه درحافظهٔ خستهٔ خود تا آنجائی‌که می‌تواند فرمولها والگوها وشرایط انجام‌واکنشها را نگه‌داردودرکلاس به‌شاگردان‌تحویل‌دهد. ودرمقابل‌ازشاگردان انتظار داردکه به‌منظورقدرشناسی‌اززحمات او، آنچه رابیان‌کرده است بدون‌کوچکترین‌دخل وتصرفی‌به‌حافظهٔ‌ناتوان خودبسپرند. وظیفهٔ معلم درکلاس بابیان فرمول چند واکنش و احیاناً ذکر شرایط واکنشها ونام چند شیمیدان ومخترع به‌پایان می‌رسد و شاگردان رادرحالی‌که دچاربی‌رغبتی فراوان ازاین علم‌شده‌اند به‌حال خودرها می‌کند.

آزمایش وتجربه‌که اساس‌آموزش شیمی است درکلاسهای ماکوچکترین نقشی‌ندارد. درکلاسهای سیکل اول دبیرستان‌که کلیهٔ موادبرنامه عملی والزاماً باید آزمایش شود، تنهابه حفظ مطالب وترسیم شکل دستگاهها اکتفا می‌شود. روش جزوه‌نویسی که بیهوده‌ترین‌ومبتذلترین روشهای‌آموزشی است‌به‌مقیاس‌وسیعی درآموزش مارواج دارد. معلمان ماسعی دارندکه با خرده‌گیری وارائهٔ‌اغلاط چاپی واحیاناً علمی، کتاب راکه به‌عنوان تنهاوسیلهٔ سنجش معلومات ومحك‌اطلاعات آنان دراختیاردانش‌آموز است تخطئه‌کرده واعتماد شاگردان رابه دانش خودجلب‌کنند وآنها را به‌جزوه نویسی‌تشویق نمایند. برای بیشترمعلمان ، این‌روش سنگری مستحکم دربرابرشاگردان‌کنجکاو ومنقدمحسوب می‌شود ونتیجهٔ‌آن‌کشتن حس‌انتقاد وفعالیت ذهنی دانش‌آموزاست. زیرا دانش آموز بدون آنکه فکرکند می‌نویسد و چنانچه درگفتار معلم شك وشبهه‌ای بنماید برای آنکه موضوع رامطرح‌کند باید به‌خود جرأت داده وسخنان معلم راقطع‌کند واین‌کاری است‌که غالب‌شاگردان ماشهامت انجام آنراندارند، چون اکثراً با اعتراض شدید معلم مواجه شده به‌اخراج‌ازکلاس تهدید می‌شوند.

طبیعتاً این نحوهٔ تدریس‌خشك وبی‌روح وغیرفعال می‌باشد وازاینهاگذشته، درسی‌که بدین شکل داده شود به‌عنوان مطلبی قطعی و تردید ناپذیر تلقی می‌شود. درصورتی که تاریخ علم نشان داده است که اطلاعات علمی همیشه موقتی است و کلمهٔ قطعی ومسلم را باید ازقاموس علم حذف‌کرد.

متأسفانه تاکنون درکشورما ارزشیابی دقیقی ازمیزان توفیق روشها درآموزش مواد برنامه بعمل نیامده است. با این حال به‌جرأت می‌توان پیش‌بینی کردکه نتیجهٔ چنین ارزشیابی بیهودگی این روش رامسلم وقطعی‌خواهدکرد.

اندوخته‌ای‌که شاگردان‌مادرمدت شش‌سال‌تحصیل دردورهٔ متوسطه ازاین علم بدست آورده‌اند ازچند فرمول خشك وبی ارتباط به‌یکدیگر، که بزحمت برای گذرانیدن امتحانات‌مسابقه درخاطر خودنگهداشته‌اند، تجاوزنمی‌کند. ازاینروجای آن دارد که حتی درلزوم آموزش این علم درمتوسطه‌تردیدشود.

غالب‌معلمان ماعدم موفقیت‌وبی‌علاقگی شاگردان رانسبت به‌این‌علم متوجه‌برنامه وکتاب می‌دانند. درضمن‌آنکه تاحدودی این نظرتأیید می‌شود معهذا مقصراصلی خود معلم است‌که‌هرگز به‌نتیجهٔ چنین‌سبك آموزشی فکر نکرده است. همین مطالب را می‌توان بابکاربردن شیوهٔ‌صحیح آموزش، مفید وآموزنده‌ساخت وبه‌نظرمن اصلاح روش‌آموزش مقدم برنوسازی واصلاح برنامه قراردارد.

برنامه هرقدرنووجامع ومتناسب‌باشد وقتی معلم نخواهد یانتواندآنرا باروش صحیح بیاموزد مفیدوثمربخش نخواهدبود وتازمانی‌که طرزتفکروسبك‌آموزش عوض‌نشودهرکوششی دراین موردبه‌نتیجهٔ‌مطلوب‌نخواهد رسید. یکی‌ازهدفهای‌انقلاب‌آموزشی باید اصلاح روشهای آموزش علوم دردورهٔ متوسطه وعالی‌باشد. گسترش سریع وبی‌سابقهٔ علم ونیازمندیهای روزافزون‌کشورمابه دانش پژوهان ومحققان ایجاب می‌کندکه دراسرع وقت به‌این امرمهم رسیدگی شود. بروزارت آموزش وپرورش فرض است که از روش جزوه نگاری‌که علم را به صورت‌کالای دستفروشی

دنباله پائین صفحهٔ ۱۱۲

مقالهٔ زیر نتیجهٔ کوششهای یك دانش‌آموز کلاس پنجم ریاضی درحل مسئلهٔ معروف چهاررنگ می‌باشد و از این‌نظر چاپ می‌شود، هرچندکه دراستدلال بکار رفته لغزشهایی مشاهده شود.

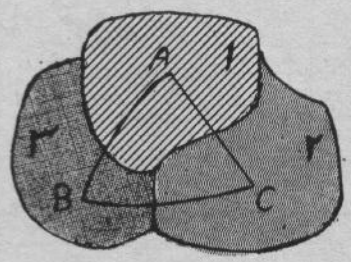
پژوهشی در مسئلهٔ چهار رنگ

نوشتهٔ : رهبر مقصودی
دانش‌آموز دبیرستان خواررمی شمارهٔ ۲

مسئلهٔ چهاررنگ که بارها دربارهٔ آن مقالاتی درمجلهٔ یکان چاپ شده و درچندکتاب دیگر ازجمله کتاب «یك ، دو ، سه، بینهایت» نیز به‌آن اشاره شده است عبارت ازاین است که برای رنگ کردن یك نقشهٔ جغرافیائی حداقل چند رنگ لازم‌است به‌نحوی که هیچ دوناحیهٔ مجاور دارای رنگ‌مشترك نباشند. عملا وجود چهار رنگ کفایت می‌کند اماتاکنون نتوانسته‌اند که برای این موضوع اثباتی ریاضی ارائه دهند . فقط بـر مبنای رابطهٔ اولر ، رابطهٔ بین تعداد نواحی و مرزها ونقاط برخوردمرزها توانسته‌اند ثابت کنند که همیشه پنج رنگ کافی است .

برای بررسی مسئله ابتدا ثابت می‌کنیم کـه هر نقشه‌را می‌توان به ترتیب زیر به‌یك **شبکه** تبدیل کرد: مقصود ازشبکه مجموعهٔ نقاط واقع در یك صفحه و خطوط (مستقیم یا منحنی) واصل بین دوبه‌دوی این نقاط می‌باشد بقسمی که هیچ دو خطی ازخطوط مزبور جز درنقاط مفروض متقاطع نباشند. نقاط‌مزبور را **رأسها** وخطوط واصل بین دوبه‌دو ازآنها را **یالهای**شبکه می‌نامیم .

هرنقشه ازتعدادی نواحی تشکیل شده است که این‌نواحی دوبه‌دو دارای‌مرز مشترکی می‌باشند. درهرناحیه ازنقشه نقطه‌ای انتخاب می‌کنیم و دونقطهٔ واقع در دو ناحیهٔ مجاور را با خطی (مستقیم یا منحنی) به‌هم وصل می‌کنیم که این‌خط ازمرزمشترك بین دوناحیه ، وفقط ازهمین‌مرز عبورکند . به این ترتیب یك نقشه به شبکه‌ای تبدیل می‌شود که‌تعداد رأسهای شبکه با تعداد نواحی نقشه و تعداد یالهای شبکه با تعداد مرزهای روی‌نقشه برابرمی‌باشد.



به این ترتیب رنگامیزی نقشه به رنگامیزی شبکه تبدیل‌می‌شود که مقصود از رنگامیزی شبکه نسبت دادن رنگها به رأسهای‌آن می‌باشد . مثلا اگر درشبکهٔ ABC شکل قبل به رأسهای A و B و C به ترتیب رنگهای سرخ و سبز و آبی را نسبت دهیم یعنی نواحی سه‌گانهٔ ۱ و ۲ و ۳ را به ترتیب با رنگهای‌مزبور رنگ‌کرده‌ایم.

یادآوری می‌کنیم که در ازاء هرناحیه ازنقشه یك رأس‌و در ازاء هرمرز بین نواحی فقط یك یال وجود دارد . نظیر دوناحیه‌ای‌که مجاورهستند دو رأس ازشبکه وجود داردکه یال بین آنها نظیر مرزبین این دوناحیه می‌باشد . هیچ دویالی از شبکه نمی‌توانند متقاطع بـاشند زیـرا در چنین صورتی رأس تازه‌ای بوجود می‌آیدکه نظیر آن ناحیه‌ای ازنقشه‌وجودندارد. بین هردو رأس هم بیش از یك یال نباید بگذرد زیرا هر یال نمایندهٔ مرز بین دوناحیه می‌باشد .

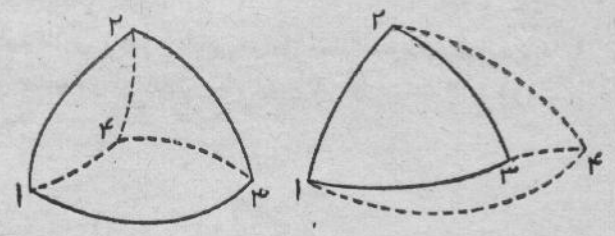
برای اینکه ثابت‌کنیم برای رنگامیزی یك شبکه چهار رنگ‌کافی‌است ابتدا معلوم می‌کنیم که چه رابطه‌ای بین رأسهای شبکه و حداکثر تعداد یالهای آن وجود دارد . ثابت می‌کنیم که اگر تعداد رأسهای شبکه معین باشد تعداد حداکثر یالهای آن و همچنین تعداد حداکثر ناحیه‌های شبکه از مقدار معینی تجاوز نمی‌کند .

درهرشبکه اگر V تعداد ناحیه‌ها ، S تعداد رأسها و A تعداد یالها باشد رابطهٔ زیر ، موسوم به رابطهٔ اولر ، بین‌آنها برقرار است :

$$V+S-A=۲$$

شبکه‌ای مثلثی‌شکل یعنی دارای سه‌رأس درنظر می‌گیریم اگریك رأس به‌ناحیهٔ داخلی این شبکه اضافه کنیم چون این رأس می‌تواند به‌هریك ازسه رأس دیگر متصل شود بنابراین به

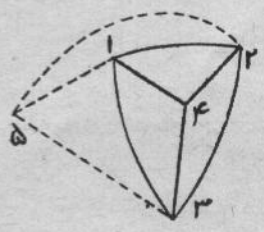
تعداد یالهای شبکه ۳ واحد افزوده می‌شود اما از روی رابطهٔ اولر معلوم خواهد شد که به تعداد ناحیه‌ها فقط ۲ واحد اضافه



می‌شود . چنانچه رأس مزبور را درناحیهٔ خارجی‌شبکه انتخاب کنیم نتایج فوق فرق نمی‌کند و باز هم به‌تعداد نواحی‌حداکثر ۲ واحد اضافه می‌شود .

درهرحال تعداد رأسهای دورهٔ ظاهری شبکه ۳ خواهد بود . یعنی اگر به‌شبکهٔ مثلثی شکلی رأسی (چه درناحیهٔ داخل وچه درناحیهٔ خارج) اضافه‌کرده‌وحداکثر یالهایی راکه‌می‌توان رسم‌کرد ، رسم‌کنیم ، به تعداد نواحی شبکه ۲ واحد اضافه می‌شود وتعداد رأسهای دورهٔ ظاهری شبکهٔ حاصل ۳ وهرناحیهٔ آن مثلثی شکل می‌باشد .

اگر شبکه‌ای چهاررأسی درنظر بگیریم که‌درآن‌حداکثر یالهای ممکن رسم شده باشد و رأس پنجم را به آن اضافه کنیم به تعداد یالها بازهم ۳ واحد و به تعداد ناحیه‌ها ۲ واحداضافه‌می‌شود زیرا اگر از رأس۴ که داخل‌ناحیهٔ ۳و۲و۱ واقع شده صرف نظر کنیم حالت قبلی‌پیش می‌آید .



رأس پنجم را چه به ناحیهٔ خارجی شبکهٔ چهار رأسی مفروض وچه به‌یکی ازناحیه‌های داخلی‌آن اضافه‌کنیم درنتیجه تغییری حاصل نمی‌شود .

چنانچه عمل را به ترتیب فوق ادامه دهیم هربار که یك رأس به شبکه‌ای اضافه کنیم و حداکثر تعداد ممکن یالها را رسم‌کنیم در ازاء آن به‌تعداد یالها ۳ واحد وبه تعداد ناحیه‌ها ۲ واحد اضافه می‌شود وناحیه‌های شبکهٔ حاصل همه مثلثی‌شکل هستند . این نتایج را به‌صورت قضیهٔ کلی زیر بیان می‌کنیم :

قضیه ـ هرگاه دریکی ازناحیه‌های شبکهٔ S رأسی P که حداکثر یالهای غیرمتقاطع آن رسم شده است رأسی اضافه کنیم ، این رأس حداکثر می‌تواند به سه‌رأس دیگر متصل باشد یعنی تعداد یالهای اضافه شده ۳ وتعداد ناحیه‌های اضافه شده ۲ خواهد بود .

زیرا وقتی در شبکهٔ P حداکثر یالهای ممکن رسم شده باشد در دورهٔ ظاهری‌آن فقط ۳ رأس وجود دارد و هر ناحیهٔ شبکه مثلثی شکل می‌باشد ، چه در غیرآن ، اگر مثلا در دورهٔ ظاهری ۴ رأس یا بیشتر وجود داشته باشد می‌توانیم دو رأس‌را ازناحیهٔ بیرون به‌هم وصل‌کنیم و این خلاف فرض است.همچنین اگر یك ناحیهٔ چهار رأسی وجود داشته باشیم می‌توانیم با رسم قطر آن یال تازه‌ای را رسم کنیم و این هم خلاف فرض است چون حداکثر تعداد یالهای ممکن در P رسم شده است .

نتیجه می‌گیریم که اگر در شبکه‌ای با حداکثر یالها ، رأسهای تازه‌ای یك‌به‌یك اضافه‌کنیم تعداد یالها ۳ به ۳ وتعداد ناحیه‌ها ۲به۲ اضافه می‌شود ، یعنی سه تصاعد حسابی خواهیم داشت با قدرنسبتهای ۱و۲و۳ . جمله‌های اول این تصاعدها را عناصر شبکهٔ مثلثی شکل اختیارمی‌کنیم، درموردآن داریم :

$$A_1 = 3 \quad و \quad S_1 = 3 \quad و \quad V_1 = 2$$

و جمله‌های nام از تصاعدهای مزبور عبارت خواهد شد از :

$$A_n = A_1 + (n-1) \times 3 = 3n$$

$$S_n = S_1 + (n-1) \times 1 = n + 2$$

$$V_n = V_1 + (n-1) \times 2 = 2n$$

از حذف n بین دو رابطهٔ اول ودوم یا دوم وسوم خواهیم داشت :

$$A_n = 3S_n - 6$$

$$V_n = 2S_n - 4$$

که این روابط در ازاء جمیع مقادیر n صحیح است.پس بطورکلی در هرشبکهٔ غیرمشخص داریم :

$$A = 3S - 6 \quad و \quad V = 2S - 4$$

* * *

قضیه ـ درهرشبکه حداقل یك رأس یافت می‌شود که تعداد یالهای ماربر آن‌کوچکتر از ۶ می‌باشد .

زیرا اگر شبکه‌ای S رأسی در نظر بگیریم که برهررأس آن حداقل ۶ یال گذشته باشد تعداد همهٔ یالهای آن حداقل برابر خواهد شد با :

$$A = \frac{6S}{2} = 3S$$

(هریالی‌که وجود داشته‌باشد بر دو رأس می‌گذرد) اما قبلا ثابت‌کردیم که باید داشته باشیم :

$$A = 3S - 6$$

بنابراین چنین شبکه‌ای وجود ندارد . بنابراین درهر شبکه حداقل یك رأس می‌توان یافت‌که تعداد یالهای ماربرآن کوچکتر از ۶ باشد .

درمورد شبکه‌ای‌که تعداد رأسهای‌آن بینهایت باشداگر رأسی پیدا نشودکه تعداد یالهای ماربر آن‌کوچکتر از ۶ باشد دراین صورت برهر رأس‌آن ۶ یال می‌گذرد . زیرا اگر بر هریك از رأسهای شبکه‌ای S رأسی به تعداد مساوی مثلا n یال گذشته باشد تعداد همهٔ یالها برابر می‌شود با :

$$A = \frac{nS}{۲}$$

و باید داشته باشیم :

$$A = ۳S - ۶$$

ازحذف A بین دو رابطهٔ مزبورنتیجه می‌شود :

$$n = ۶ - \frac{۱۲}{S}$$

S وهمچنین n عددی است صحیح ومثبت پس S اگر محدود باشد می‌تواند یکی ازمقادیر ۳ یا ۴ یا ۶ یا ۱۲ را اختیارکند و در ازاء آنها خواهیم داشت :

$S=۳$ ، $n=۲$ و $A=۳$

$S=۴$ ، $n=۳$ و $A=۶$

$S=۶$ ، $n=۴$ و $A=۱۲$

$S=۱۲$ ، $n=۵$ و $A=۳۰$

فقط وقتی تعداد رأسها بینهایت‌شود یعنی $S \to \infty$ حد n برابر خواهد شد با :

$$n = ۶$$

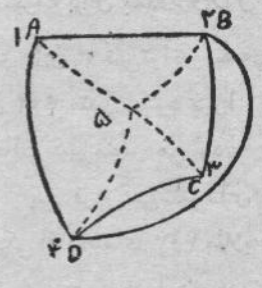
***

کافی‌بودن چهار رنگ برای رنگامیزی رأسهای شبکه

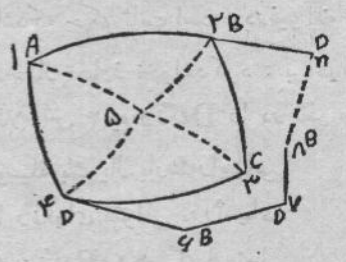
برای اثبات اینکه برای رنگامیزی یك شبکه چهاررنگ کافی است از استدلال بوسیلهٔ استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم : فرض می‌کنیم که بتوانیم رأسهای یك شبکهٔ S رأسی P را با چهاررنگ‌رنگامیزی‌کنیم . ثابت می‌کنیم که‌دراین صورت شبکهٔ S+۱ رأسی را نیز می‌توان با چهار رنگ رنگامیزی کرد .

اولا می‌دانیم که‌درهرشبکهٔ S+۱ رأسی،رأسی‌یافت‌می‌شود که تعداد یالهای ماربر آن کوچکتر از ۶ است . بدون اینکه درسایر قسمتهای شبکه تغییری دهیم این رأس را خارج‌می‌کنیم و رأسهای شبکهٔ S رأسی بدست‌آمده را رنگامیزی می‌کنیم که البته هر دو رأس متصل دارای رنگهای مختلف باشند . حال رأس خارج شده را به‌جای خود بر می‌گردانیم ویالهای مربوط را رسم می‌کنیم . اگر این رأس به یك یا دو یا سه رأس متصل باشدکه برای آن‌یك رنگ ازچهار رنگ‌بکار رفته‌کفایت‌می‌کند وتعداد رنگهای بکار رفته در شبکهٔ S+۱ رأسی همان چهار رنگ باقی می‌ماند .

اگر رأس مزبور به‌چهار رأس دیگر متصل باشد بنا به اثباتی‌که قبلا انجام شد داخل یك‌منحنی بسته قرار داردکه از حداقل سه یا ازهرچهار رأس می‌گذرد .



ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم‌که منحنی مزبور از چهار رأس می‌گذرد . اگر در رنگامیزی این چهار رأس سه رنگ بکار رفته باشد که برای رأس پنجم از رنگ چهارم استفاده می‌شود وحکم ثابت است . اما اگر چهار رأس مزبور دارای رنگهای متفاوت A و B و C و D باشند؛ یکی ازآنها مثلا رأس ۴ با رنگ D را درنظر می‌گیریم. اگر این رأس بوسیلهٔ یك یال یا بوسیلهٔ یك رشته رأسهایی که دارای رنگهای متوالی B و D می‌باشند به رأس ۲ متصل بود که نمی‌توان آنرا از D به رنگ B تبدیل‌کرد زیرادرمورد اول دو رأس متصل دارای یك رنگ می‌شوند و درمورد دوم باتبدیل رنگ‌رأس ۴ به B رنگهای رأسهای روی رشته به تناوب تغییر کرده وبالاخره رنگ‌رأس ۲ نیز به D تبدیل می‌گردد و در تعداد چهار رنگ‌مجموعهٔ چهار رأسی تغییری حاصل نمی‌شود .

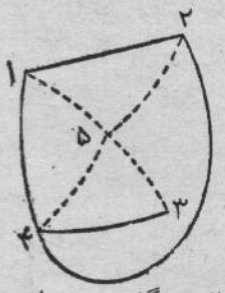


ولی می‌توان رنگ‌رأس ۳ را به A تبدیل‌کرد چون رأسهای ۱ و ۳ نمی‌توانند بوسیلهٔ یك یال متصل باشند چه در آن صورت لازم می‌آید که دریك شبکهٔ ۵ رأسی هریك از رأسها را به چهاررأس دیگر متصل‌کرده باشیم و تعداد یالهای این شبکه برابر خواهد بود با $A=۱۰$ درصورتی‌که حداکثر تعداد یالهای غیرمتقاطع‌یك شبکهٔ پنج رأسی طبق دستور $A=۳S-۶$ برابر است با ۹ و تناقض پیش می‌آید . بنابراین‌می‌توان رأس ۳ را از رنگ C به رنگ A تبدیل کرد و تعداد رنگهای مجموعهٔ چهار رأسی

برابر ۳ است . اگر رأس ۴ بـه رنگ D بـا رأس ۲ به‌رنگ B بوسیلهٔ متصل نباشد رأس ۴ را به رنگ B رنگامیزی می‌کنیم . پس با متصل شدن رأس ۵ به مجموعهٔ مزبور می‌توان رنگ‌چهارم را به این رأس نسبت داد . یعنی تعداد رنگهـای رأسهای شبکهٔ S+۱ رأسی برابر ۴ خواهد بود .

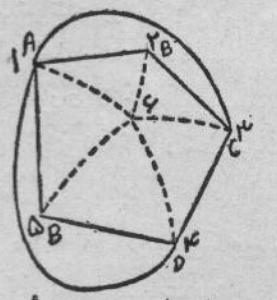
تبصره ـ رشته رأسهای پی‌درپی را که به رنگهای B و D هستند یك یال فرض می‌کنیم چون اولا مثل یك یال عمل می‌کند و اتصال رأسها را نشان می‌دهد . ثانیاً نباید با یـال دیگر متقاطع باشد .

درموردی که منحنی بسته‌ای که رأس موردنظر را در بـر دارد برسه رأس بگذرد و رأس چهارم را دربر گیرد بایدمتذکر شدکه رأس ۳ نمی‌تواند به هر دو رأس ۲و۴ متصل شود زیرا اثبات به حالت قبلی منجر می‌شود.



پس فرض می‌کنیم رأس۳فقط به یکی از رأسهای ۲و۴ مثلا به‌رأس ۴ متصل است . در این صورت در شبکه رأسی وجود داردکه ازآن فقط دویال می‌گذرد و دراین حال به‌جای آنکه رأس ۵ را از شبکه خارج کنیم رأس ۳ را خارج می‌کنیم و اثبات به‌حالتی منجر می‌شودکه درشبکه رأسی وجود داردکه از آن دویال می‌گذرد .

اگر درشبکهٔ S+۱ رأسی ، رأسی وجود نداشته باشد که تعداد یالهای ماربرآن یکی از اعداد ۱تا۴ باشدحتماًرأسی یافت می‌شودکه تعداد یالهای ماربر آن ۵ باشد . دراین حالت ابتدا فرض می‌کنیم که این رأس در داخل منحنی بسته‌ای قرار داردکه ازپنج رأس متصل به آن می‌گذرد و ثابت می‌کنیم کـه می‌توان این پنج رأس را با سه‌رنگ‌رنگامیزی کرد. اگرچنین باشدکه حکم ثابت است . درغیرآن تعداد رنگهای این‌پنج‌رأس ازچهار تجاوز نخواهدکرد . برای این منظور یکی از رأسها مثلا رأس ۴ به رنگD را در نظر می‌گیریم . اگر این رأس بوسیلهٔ یك یال یارشته‌رأسهایی با رنگهای متوالی به رأسهای ۲ به‌رنگB و۱ به‌رنگA متصل باشدکه نمی‌توان این رأس را به رنگهای A و B درآورد.

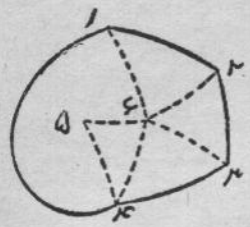


ولی می‌توان رأس ۳ به‌رنگ C با به رنگA تبدیل کرد ، چه در غیر این صورت رأس ۳ باید با یك یال و یا یك رشته رأسهای متوالی به رنگهای A و C به‌رأس ۱ متصل کرد و این‌غیرممکن است زیرا تعداد یالهای شبکه زیادتر ازحدنصاب خواهد شد :

$$A = \frac{۵+۵+۵+۵+۴+۴}{۲} = ۱۴$$

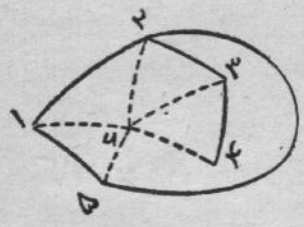
درصورتی کـه طبق رابطـهٔ $A = ۳S - ۶$ بر ۶ رأس جمعاً ۱۲ یال می‌گذرد ، بنابراین نمی‌توان رأس ۳ را به‌رأس۱ وهمچنین رأس ۵ را به رأس ۲ متصل کرد . دراین صورت‌تعداد رنگهای مجموعهٔ ۵ رأسی ۳ خواهد بود که با اضافه شدن رأس ۶ به‌مجموعهٔ‌ونسبت دادن رنگ چهارم به‌آن تعداد رنگهای لازم برای شبکهٔ S+۱ رأسی روی هم ۴ خواهد بود .

درموردی‌که رأس ۴ بوسیلهٔ یك رشته رأسها و یالها بـه رأسهای ۱و۲ متصل باشد اثبات به‌همین نحو است .



در موردی کـه منحنی بسته‌ای‌که رأس مورد نظر در داخل‌آنست از ۴ رأس متصل به‌آن بگذرد و رأس پنجم را در بر گیرد اثبات به حالتی منجر می‌شودکه درشبکه یك رأس وجود داردکه تعداد یالهای ماربر آن ۲ می‌باشد ، زیرا رأس ۵ فقط می‌تواند به یکی از رأسهای ۱و۴ متصل شود در صورتی که به هردوی آنها وصل شود حالتی است‌که اثبات آن قبلا بیان شده است .

اگر منحنی بستهٔ فوق از سه رأس متصل به رأس مذکور گذشته وبقیهٔ رأسهای متصل به آنرا در بر گیرد یکی از رأسها مثلا رأس ۳ فقط می‌تواند به‌رأس ۴ وفقط به‌یکی از رأسهای ۲ و۵ متصل شود وحالتهایی پیش می‌آیدکه اثبات آنها قبلا بیان شده است .



پس فرض می‌کنیم رأس ۳ به‌رأسهای ۴و۲ متصل باشد دراین‌صورت درشبکهٔ S+۱ رأسی ، رأسی یافت می‌شودکه تعداد یالهای ماربر آن ۳است پس به‌جای رأس ۶ این‌رأس را ازشبکه خارج می‌کنیم ومثل قبل ثابت می‌کنیم‌که تعداد رنگهای لازم برای رنگامیزی شبکه ۴ است .

نتیجه می‌گیریم‌که اگر برای رنگامیزی رأسهای شبکهٔ S رأسی چهار رنگ بکار رود برای رنگامیزی رأسهای شبکهٔ S+۱ رأسی نیز چهاررنگ بکار خواهد رفت.

با توجه به استدلال مذکور در فوق و با توجه به اینکه برای رنگامیزی شبکهٔ چهار رأس چهار رنگ کافی است نتیجه می‌گیریم‌که برای رنگامیزی شبکهٔ پنج رأس ، شش رأسی ،.. وبالاخره n رأسی فقط چهار رنگ کافی است . و با توجه بـه آنچه قبلا درمورد تبدیل نقشه به‌شبکه گفتیم نتیجه می‌گیریم‌که برای رنگامیزی هرنقشه نیز فقط چهاررنگ کافی‌است .

ملاحظات تاریخی در بارهٔ :

محاسبهٔ محیط دایره

فصلی از کتاب : Curiosités Géométriques

تألیف : E . Fourrey

ترجمهٔ : داوید ریحان

دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران

§ ۱- دورهٔ قبل ارشمیدس

مصریها - رساله آهمس (۲۰۰۰ سال قبل از میلاد) : «قطر مزرعهٔ مدوری ۹ تیر است ، وسعت آن چقدر است ؟

$\frac{1}{9}$ از ۹ متر می‌شود یك ، باقی می‌ماند ۸ ، هشت را هشت برابر می‌کنیم می‌شود ۶۴ ، وسعت آن ۶۴ ، (تیر مربع) است .»

طبق دستور بالا مساحت دایرهٔ به قطر d یا به شعاع r برابر است با :

$$(\frac{8}{9}d)^2=(\frac{16}{9}r)^2=(\frac{16}{9})^2r^2$$

یعنی مصریها به‌جای π مقدار :

$$(\frac{16}{9})^2=\frac{256}{81}\#3/1605$$

را بکار می‌برده‌اند که بامقدار واقعی آن اختلاف جزئی دارد.

هرم بزرگ - طبق عقیده‌ای که اولین مرتبه در ۱۸۶۰ توسط یك مهندس انگلیسی به نام **جان تیلر** ابراز شده‌است هرم بزرگ مصر (خئوپس ، قرن دوازدهم قبل از میلاد) به‌خاطر این بناشده که نسبت محیط دایره به‌شعاع آنرا به‌آیندگان اعلام کند .

این هرم منتظم و به‌قاعدهٔ مربع می‌باشد . توسط **هرودت** معلوم شده‌است که مساحت هروجه جانبی آن بامجذور ارتفاع برابراست. بااین فرض ، نسبت محیط قاعده به‌ارتفاع به‌سادگی معین می‌شود . ازحل این مسئلهٔ سادهٔ هندسی که اثبات آن را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم ، جواب ۶/۲۹۰ بدست می‌آید . این عدد باجزئی اختلاف برابر است بانسبت محیط دایره به شعاع آن (۶/۲۸۳) . آیا این امر می‌تواند دلیلی برصحت عقیدهٔ مهندسی انگلیسی باشد ؟ مسلماً نه ، فقط می‌توان آنرا یك تصادف ساده دانست .

دراندازه‌گیری ابعاد هرم بزرگ چیزهای دیگری نیزمی‌توان کشف کرد که سازندگان هرم به‌فکر آن نبوده‌اند از جمله اینکه **پیازی اسمیت** منجم اسکاتلندی معلوم ساخته است که در ابعاد هرم بزرگ یك دستگاه مقیاسات طول ووزن بکار رفته که برابعاد کرهٔ زمین وبعضی ملاحظات نجومی استوار می‌باشد .در اندازه‌گیریهای نسبی اجزاء مختلف ساختمان ، طول قطر زمین فاصلهٔ زمین تا خورشید ، مدت زمان یك سال وغیره ، ملاحظه می‌شود . منجم مزبور دراندازه‌گیریهای ابعاد اتاق داخلی هرم اعدادی بدست آورد که به‌بعضی وقایع تاریخی مربوط می‌شدوبر اساس آن وقایعی راهم پیش‌بینی کرد که هیچگاه بوقوع نینجامید.

کلدانیها و عبریها - کلدانیها محیط دایره را ۶ برابر شعاع آن می‌دانسته‌اند . آنها سال را به ۳۶۰ روز قسمت کرده‌اند ، ازاین جهت که تصور می‌کرده‌اند دایرهٔ مدارحرکت ظاهری خورشید دور زمین در روزهای مختلف کمانهای متساوی را می‌پیماید دایره را به ۳۶۰ جزء تقسیم کرده‌اند . ازطرف دیگر، در آثار تاریخ قدیم فقط درآنچه ازکلدانیها باقی مانده است به موضوع تقسیم دایره به ۶ قسمت برابر برمی‌خوریم .

باتوجه به‌خاصیت مذکور در فوق استناط می‌شود که اهالی قدیم بین النهرین شش ضلعی منتظم رابردایرهٔ محیطی آن منطبق می‌دانسته‌اند وبنابراین نزد آنان $\pi=3$ بوده است .درکتاب‌های مذهبی عبریها ، که با اقوام بابلی و آسوری مراوده داشته‌اند شواهدی وجود داردکه این موضوع را تأیید می‌کند .

تورات - دردو قسمت از این کتاب به‌ابعاد طشت مفرغی بزرگی که زینت بخش قصر سلیمان (۱۱۰۴ تا ۱۰۵۷ قبل از میلاد) در اورشلیم بوده اشاره‌شده است : «آخرالامر ، پادشاه

دریاچه‌ای ازمفرغ ساخت که‌ازهرطرف تاطرف دیگر آن ۱۰ ذراع بود، گرد بود و ۵ ذراع ارتفاع داشت. ریسمانی به‌طول ۳۰ ذراع دور آن رادر برداشت ،» ملاحظه می‌شودکه $\pi = \frac{30}{10} = 3$ حساب شده است .

در **تلمود** ، مجموعه‌ای که بعداً از تورات فراهم آمده‌است حکم زیر ملاحظه می‌شود : «آنچه که‌سه نخل دوری داشته باشد یك نخل پهنا خواهد داشت .» که بازهم برای π همان مقدار ۳ منظور شده است .

§ ۲- کارهای ارشمیدس

در مورد اینکه‌یونانیان‌قدیم قبل از ارشمیدس در تعیین محیط‌دایره‌برای π چه‌مقداربکارمی‌برده‌اند اطلاعی دردست‌نیست. ظاهراً اولین‌دفعه، ارشمیدس دانشمند بزرگ سیراکوز به‌محاسبهٔ مقدار تقریبی π برمبنای قواعد علمی مبادرت ورزیده است . شمه‌ای ازکارهای برجستهٔ وی را دربارهٔ این‌موضوع که ازکتاب «اندازهٔ دایره» اخذشده است ذیلا ذکرمی‌کنیم . این‌کتاب‌باید خلاصه‌ای ازیك کتاب کاملتر مربوط به‌خواص دایره باشد. درنقل موضوع علامتهای جدید رابه‌شرح زیر دخالت می‌دهیم .

r شعاع ، d قطر ، c محیط و C مساحت دایره . p_n محیط n ضلعی منتظم محیطی و p'_n محیط n ضلعی منتظم محاطی .

حکم I- هر دایرهٔ غیرمشخص‌معادل بایك مثلث قائم‌الزاویه است که یك‌ضلع‌زاویهٔ‌قائم‌آن‌برابر باشعاع دایره و ضلع دیگراین‌زاویه برابر باپیرامون همین‌دایره است .

مساحت‌مثلث‌قائم‌الزاویه را به T نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم‌که بتوانیم داشته باشیم : $C>T$ حال‌اگر : $C-T=A$ باشد چندضلعی منتظم به‌سهم m' و پیرامون p' و مساحت P'را در این دایره‌محاط می‌کنیم بطوری‌که $C-P'<A$ باشد. بنابراین‌داریم $P'>T$ یا $\frac{p'm'}{2} > \frac{cr}{2}$

اما این رابطه بیمعنی است زیرا داریم $p'<c$ و $m'<r$.

حال بافرض $C<T$ و $T-C=A$ چندضلعی‌منتظمی به‌سهم r ، پیرامون p ومساحت P راطوری بردایره‌محیطی‌کنیم‌که $P-C=A$ باشد. خواهیم داشت $P<T$ یا :

$$\frac{pr}{2} < \frac{cr}{2}$$

که این رابطه هم‌غیرممکن‌است زیرا $p>c$ می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌شودکه ؛ $C=T$

حکم II - دایره معادل مربعی است‌که‌نسبت‌ضلع‌آن به قطر دایره تقریباً درحدود نسبت ۱۱ به۱۴ می‌باشد . این‌حکم نتیجه‌ای از حکم I و حکم آینده می‌باشد وقاعدةً بایستی این حکم بعداً بیان شده‌باشد .

از I نتیجه‌می‌شود :

$$(1) \quad C=\frac{cr}{2}$$

و از III خواهیم داشت : $c=\frac{22}{7}d$ اگراین‌مقدار را در(۱) قرار دهیم خواهیم داشت :

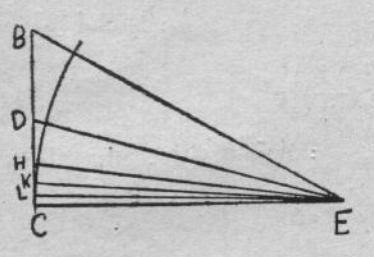
$$C=d^2 \times \frac{11}{14}$$

حکم III - محیط دایره برابراست باسه‌برابر قطربه‌اضافهٔ قطعه‌ای ازقطر که‌نسبت آن‌به‌قطر از $\frac{1}{7}$ کوچکتر واز $\frac{10}{71}$ بزرگتر است . به‌عبارت دیگر باید داشته باشیم :

$$3\frac{10}{71}d<c<3\frac{1}{7}d$$

اثبات قسمت اول :

$$C<3\frac{1}{7}d$$



دایرهٔ به مرکز E و بشعاع CE و مثلث قائم‌الزاویهٔ BEC قائمه در زاویهٔ C که درآن زاویهٔ CEB برابر ۳۰درجه است در نظر می‌گیریم ED ، EH ، EK و EL به ترتیب نیمسازهای زوایای CEB ، CED ، CEH ، CEK را رسم می‌کنیم .حال‌اگر نصف ضلع n ضلعی منتظم محیطی رابه a_n نمایش دهیم داریم :

$$CB=a_6 \text{ و } CD=a_{12} \text{ و } CH=a_{24} \text{ و } CK=a_{48}$$
$$\text{و } CL=a_{96}$$

ارشمیدس نامساوی‌زیر را بدون اثبات ارائه داده است:

$$\frac{r}{a_6} > \frac{265}{153} \quad \text{یا} \quad \frac{CE}{CB} > \frac{265}{153}$$

[در مثلث ECB داریم $BE=2CB$ و بنابراین ؛

$$\frac{\overline{CE}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{\overline{BE}^2-\overline{CB}^2}{CB^2} = 3$$

یا :

$$\left(\frac{۲۶۵}{۱۵۳}\right)^۲=\frac{۷۰۲۲۵}{۱۵۳^۲}=۳-\frac{۲}{(۱۵۳)^۲}$$

و از آنجا نتیجه می‌گیریم $\frac{\overline{CE}^۲}{\overline{CB}^۲}<\left(\frac{۲۶۵}{۱۵۳}\right)^۲$ ورابطهٔ (۱) بدست می‌آید .]

بنا برخاصیت نیمساز ED از زاویهٔ CEB داریم :

$$\frac{BE}{BD}=\frac{CE}{CD}$$

و

$$\frac{BE+CE}{BD+CD}=\frac{BE}{CB}+\frac{CE}{CB}=\frac{CE}{CD}$$

حال باتوجه به رابطهٔ (۱) وهمچنین $BE=۲CB$ داریم :

$$\frac{CE}{CD}>\frac{۵۷۱}{۱۵۳} \quad \text{یا} \quad \frac{r}{a_{۱۲}}>\frac{۵۷۱}{۱۵۳} \qquad (۱)$$

بادر نظر گرفتن مثلث‌قائم‌الزاویهٔ CED وبابکار بستن‌نامساوی

(۲)می‌توان‌نوشت: $\frac{\overline{DE}^۲}{\overline{CD}^۲}=\frac{\overline{CE}^۲}{\overline{CD}^۲}+۱>\frac{۳۴۹۴۵۰}{۱۵۳^۲}$

که اگر از روابط فون جذربگیریم (با تقریب) داریم :

$$\frac{DE}{CD}>\frac{۵۹۱۱}{۸}\times\frac{۱}{۱۵۳}$$

با توجه به‌خاصیت نیمساز EH از زاویهٔ CED داریم :

$$\frac{DE}{DH}=\frac{CE}{CH}$$

و

$$\frac{DE+CE}{DH+CH}=\frac{DE}{CD}+\frac{CE}{CD}=\frac{CE}{CH}$$

حال اگر مقادیر $\frac{DE}{CD}$ و $\frac{CE}{CD}$ را بـا تقریبی نظیر آنچه گذشت جانشین‌کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{CE}{CH}=\frac{r}{a_{۲۴}}>\frac{۱۱۶۲۱}{۸}\times\frac{۱}{۱۵۳} \qquad (۳)$$

به‌طریق مشابه عمل‌کرده خواهیم داشت :

$$\frac{CE}{CK}=\frac{r}{a_{۴۸}}>\frac{۲۳۳۴۱}{۴}\times\frac{۱}{۱۵۳} \qquad (۴)$$

$$\frac{CE}{CL}=\frac{r}{a_{۹۶}}>\frac{۴۶۷۳۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۵۳} \qquad (۵)$$

از نامساوی اخیر نتیجه میشود :

$$\frac{r}{p_{۹۶}}>\frac{۴۶۷۳۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۵۳\times(۹۶\times۲)}$$

$$\frac{p_{۹۶}}{d}<\frac{۱۴۶۸۸}{\frac{۴۶۷۳۱}{۲}}=۳+\frac{۱}{۷+\frac{۲}{۱۳۳۵}}$$

پس از ساده‌کردن‌داریم:

$$\frac{c}{d}<۳\frac{۱}{۷}$$

اثبات‌قسمت‌دوم: $c>۳\frac{۱۰}{۷۱}d$ ـ نیمدایرهٔ به قطر CA را در نظر می‌گیریم‌که مثلث قـائم‌الزاویهٔ CBA (قـائمه در رأس B) وبا زاویـهٔ $CAB=۳۰^\circ$ درآن محاط شده‌است . به‌ترتیب AD ، AH ، AK و AL نیمسازهای زوایـای CAB ، CAD ، CAH و CAK را رسم می‌کنیم .اگر ضلع n ضلعی منتظم محاطی را به a'_n نمایش دهیم داریم :

$$CB=a'_۶ ، CD=a'_{۱۲} ، CH=a'_{۲۴} ،$$
$$CK=a'_{۴۸} ، CL=a'_{۹۶}$$

ارشمیدس نامساوی زیر را ارائه‌می‌دهد :

$$\frac{AB}{CB}<\frac{۱۳۵۱}{۷۸۰}$$

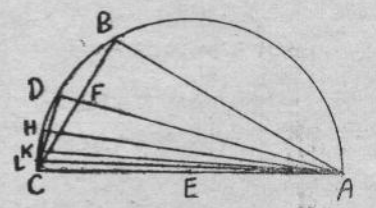
[از مثلث قائم‌الزاویهٔ CBA نتیجه می‌شود :

$$\frac{\overline{AB}^۲}{\overline{CB}^۲}=\frac{\overline{CA}^۲-\overline{CB}^۲}{\overline{CB}^۲}=۳$$

چون :

$$\left(\frac{۱۳۵۱}{۷۸۰}\right)^۲=۳+\frac{۱}{۷۸۰^۲}$$

داریم $\frac{\overline{AB}^۲}{\overline{CB}^۲}<\left(\frac{۱۳۵۱}{۷۸۰}\right)^۲$ و رابطهٔ فوق بدست می‌آید]



داریم :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{۱۵۶۰}{۷۸۰}$$

یا $۲=\frac{d}{a'_۶}$ (۱)

از طرف دیگر هرگاه محل‌تلاقی AD را با CB به F نمایش دهیم مثلثهای قائم‌الزاویهٔ CDA و FDC باهم متشابهندزیرا DAC∽DCB∽BAD بنابراین :

$$\frac{AD}{DC}=\frac{CD}{FD}=\frac{CA}{CF}$$

و از خاصیت نیمساز AF رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\frac{CA}{CF}=\frac{AB}{BF}=\frac{CA+AB}{CF+BF}=\frac{CA+AB}{CB}$$

$$\frac{AD}{CD}=\frac{CA+AB}{CB}=\frac{CA}{CB}+\frac{AB}{CB}<\frac{۲۹۱۱}{۷۸۰}$$

و ازآن نتیجه می‌شود که :

$$\frac{\overline{AD}^۲}{\overline{CD}^۲}<\frac{۸۴۷۳۹۲۱}{۷۸۰^۲}$$

$$\frac{\overline{AD}}{CD} = \frac{\overline{CD}}{CD} = \frac{\overline{CI}}{CD} < \frac{۹۰۸۲۳۲۱}{۷۸۰}$$

$$\frac{CI}{CD} = \frac{d}{a'_{۲}} < \frac{۳۰۱۳\frac{۳}{۴}}{۷۸۰} \qquad (۲)$$

به‌همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{d}{a'_{۱۴}} < \frac{۱۸۳۸\frac{۹}{۱۱}}{۲۴۰} \qquad (۳)$$

$$\frac{d}{a'_{۴۸}} < \frac{۱۰۰۹\frac{۱}{۶}}{۶۶}$$

$$\frac{d}{a'_{۹۶}} < \frac{۲۰۱۷\frac{۱}{۴}}{۶۶} \qquad (۵)$$

ازنامساوی اخیر بدست می‌آید:

$$\frac{d}{p'_{۹۶}} < \frac{۲۰۱۷\frac{۱}{۴}}{۶۶ \times ۹۶}$$

$$\frac{p'_{۹۶}}{d} > \frac{۲۵۳۴۴}{۹۰۶۹} = ۳\frac{۱۰}{۷۱\frac{۳۷}{۱۱۳۷}} > ۳\frac{۱۰}{۷۱}$$

تبصره : در مورد روش ارشمیدس برای تعیین مقادیر تقریبی $\frac{۲۶۵}{۱۵۳}$ و $\frac{۱۳۵۱}{۷۸۰}$ از $\sqrt{۳}$ بسیار بحث‌کرده‌اند. ما به‌این اکتفا می‌کنیم که $\frac{۵}{۳}$ را به عنوان این مقدار تقریبی بپذیریم و هرگاه به روش **هرون** در بارهٔ جذرگیری عمل کنیم عدد $\frac{۱۳۵۱}{۸۸۰}$ بدست می‌آید . بنظر می‌رسد استخراج جذر که در استدلال فوق به‌آن برخوردیم بدین طریقه بدست‌آمده باشد .

سایر مقادیر تقریبی π منسوب به ارشمیدس

هرون درکتاب خود «روابط متری» تذکرداده است که ارشمیدس مقادیر محدودتری برای π محاسبه‌کرده است .

[ارشمیدس‌دراثر خودبه‌نام «دربارهٔ‌شبه‌کره‌و شبه‌مخروط» نشان‌می‌دهدکه‌نسبت‌محیط‌هردایره به‌قطرآن‌بزرگتراز $\frac{۲۱۱۸۷۵}{۶۷۴۴۱}$ وکوچکتر از $\frac{۱۹۷۸۸۸}{۶۲۳۵۱}$ است .]

پل تانری چنین می‌نویسد :

$$\frac{۱۹۵۸۸۲}{۶۲۳۵۱} > \pi > \frac{۲۱۱۸۷۲}{۶}$$

$$۳/۱۴۶۰۶ > \pi > ۳/۴۱۵۹۰۴$$

ومقدار ۳/۴۱۶ π که در اغلب محاسبات امروزی به کار می‌بریم منسوب به ارشمیدس است .

§۳- دورهٔ بعدازارشمیدس

یونانیان : بنا به‌گفتهٔ **اطوقیوس . آپولونیوس** مقدار π را با تقریبی بیشتر از ارشمیدس بدست‌آورده است‌ولی نشانه‌ای از این موضوع دردست‌نیست.

بطلمیوس منجم بزرگ از راه تشکیل جدولی شامل طول اوتار به‌محاسبهٔ مقداری تقریبی‌از π موفق شد .

او دایره را به ۳۶۰ درجه وهرکدام از این درجات را به ۶۰ دقیقه و. . تقسیم می‌کند . به‌همین ترتیب شعاع دایره را که واحد فرض می‌کند به ۶۰ قسمت متساوی بازهم‌به نام درجه وهرکدام از این درجات را به ۶۰قسمت متساوی بازهم به نام دقیقه تقسیم می‌کند و درمی‌یابدکه طرل وتر کمان یك درجه برابر است با $۱ + \frac{۲}{۶۰} + \frac{۵۰}{۶۰^۲}$ که‌بنابرقراردادآنرا به‌صورت "۵۰ ′۲ °۱ می‌نویسد . با قبول اینکه این‌کمان با وتر خود محسوساً چندان تفاوتی تفاوتی نداردکمان ۶۰ درجه طولی برابر با $۱ + \frac{۲}{۶۰} + \frac{۵۰}{۶۰^۲}$ یا ′۵۰و°۱/۲خواهد داشت ودرنتیجه طول نیمدایره برابر با $۳ + \frac{۸}{۶۰} + \frac{۳۰}{۶۰^۲}$یا ′۳۰و°۳/۸ خواهد شد یعنی داریم :

$$\pi = ۳\frac{۱۷}{۱۲۰} = ۳/۱۴۱۶۶$$

چنانکه قبلا هم‌گفته شد ، **هرون** درمحاسبات عملی ودر آثار خود مقداری را که برای π بکار برده است مأخوذ از نتایج‌کار هندسه‌دان سبراکوز می‌باشد : «ارشمیدس ثابت کرده بودکه ۱۱ برابر مجذور قطر معادل ۱۴ برابر مساحت دایره است . هرگاه قطر دایره برابر با ۱۰ باشد داریم :

$$\frac{۱}{۱۴} \text{ و } \frac{۱}{۲} \text{ و } ۷۸ = \frac{۱۱۰۰}{۱۴} \text{ و } ۱۰۰ \times ۱۱ = ۱۱۰۰$$

و این مقدارمساحت دایره است» .

هرون درنوشته‌های خود حد اعلای مقدار π را که از

رابطهٔ بالا بدست می‌آید یعنی $\pi = \frac{22}{7}$ انتخاب کرده است .

این مقدار به‌صورت $\pi = 4(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{2 \times 7})$ نوشته‌می‌شود وبکاربردن آن‌درمحاسبات ایجاد اشکال نمی‌کند .

چینیها ـ دربخش دوم **چئو پی** یا «کتاب مقدس‌حساب» که در اواخر قرن سوم قبل ازمیلاد و دربارهٔ نجوم نوشته شده است ، عدد ۳ را به‌جای π بکاربرده‌اند . دایره وعدد۳مظهر آسمان ، مربع و عدد ۴ مظهرزمین بوده است . نمونه‌ای از این مجموعه به صورت زیر است : «قطری برابر $121\frac{75}{100}$ پا انتخاب‌کنید، آنرا درعدد ۳ ضرب‌کنید . مقدار $365\frac{1}{4}$پا بدست خواهد آمد» . چینیها مانند کلدانیها دایره را به ۳۶۰ قسمت متساوی تقسیم‌کرده‌اند درصورتی‌که طول آنرا $365\frac{1}{4}$ می‌دانسته‌اند ، همچنانکه سال هم نزد آنان برابر با $365\frac{1}{4}$ روز بوده است .

در زمانهای بعد ازآن **تسوچونگ‌چی** نویسندهٔ قرن ششم مقدار ارشمیدسی $\frac{22}{7}$ را بکاربرده است . از این موضوع برمی‌آید که درآن زمان کشفیات ریاضی یونانیان تاچین نفوذ کرده بوده است . تقریباً در همان زمان **لیوهوی** مقدار $\frac{157}{50} = 3/14$ را بکاربرده است .

رومیها ـ مساحان‌زمینهای‌زراعتی‌عموماً‌مقدارارشمیدسی $\pi = \frac{22}{7}$ را بکارمی‌برده‌اند مثال زیر به‌نقل ازکتاب«قوانین مساحی» اثر **ویترو ویوس روفوس** (قرن دوم) نقل می‌شود : «هرگاه دایره‌ای به‌قطر ۱۴ پا دردست باشد مساحت آنرا بدین طریق بدست می‌آوریم : قطر دایره را در خودش ضرب می‌کنیم تا ۱۹۶ بدست آید سپس آنرا درعدد ۱۱ ضرب می‌کنیم تا ۲۱۵۶ حاصل شود اگر این عدد را بر ۱۴ بخش کنیم ۱۵۴ که مساحت دایره است بدست می‌آید» . با این وصف مهندس **ویرتوو** (قرن اول) مقدار $\pi = 3\frac{1}{8}$ را که خطایش از $3\frac{1}{7}$ بیشتر است بکار برده است و از این جهت‌که مقدار مزبور درتبدیل به‌کسر اعشاری مناسبتراست‌نزد رومیان بیشتر معمول بوده‌است. خاطر نشان می‌کنیم که در **اپافرودیتوس** درکنارمقدار تقریبی $\pi = \frac{22}{7}$ به خطای‌فاحش $\pi = 4$ نیز برمی‌خوریم . این عدد در «احکام آلکوئین» در مورد محاسبهٔ مساحت دایره‌ای‌که محیط آن معلوم بوده بکار برده می‌شده است . هرگاه c پیرامون باشد مربع ربع این مقدار یعنی $\frac{c^2}{4^2}$ مساحت مطلوبست . با توجه به اینکه مقدار صحیح مساحت از رابطهٔ $\frac{c^2}{4\pi}$ بدست می‌آید از رابطهٔ مزبور برمی‌آیدکه مقدار π را برابر با ۴ فرض می‌کرده‌اند .

هندیها ـ سولوازوترا (قوانین ریسمان) : در مجموعه‌های قدیمی‌کتابهای مقدس هندسی دربارهٔ تربیع دایره قاعدهٔ زیر مشاهده می‌شود :

«قطر را به ۱۵ جزء تقسیم‌کنید و ۲ قسمت‌آنرابردارید باقیمانده تقریباً برابر با ضلع مربع است»

از این عبارت‌نتیجه می‌شودکه مقدار π برابر $\frac{26^2}{15^2}$ است و این مقدارمحسوساً با عدد ۳ برابراست. بی‌مناسبت نیست که یادآوری‌کنیم مقدار $\frac{26}{15}$ که‌برای $\sqrt{3}$ منظورشده درنوشته‌های هرون و نزد مساحان دیگر در مورد تعیین مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع مشاهده می‌شود .

یکی دیگر از نویسندگان مجموعه‌های مقدس هندسی ، **بودهایانا** قاعدهٔ زیر را بیان می‌کند :

برای تربیع دایره قطر را به ۸ قسمت تقسیم کنید و با برداشتن یك قسمت ۷ قسمت باقی خواهد ماندکه آنرا به ۲۹ جزء تقسیم‌کنید و ۲۸ قسمت آنرا بردارید ($\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{29}$ باقی خواهد ماند) $\frac{1}{8}$ یك بخش را از $\frac{1}{6}$ آن کم‌کنید و از مقدار فوق کسر کنید اگر d علامت قطر باشد ضلع مربع برابر خواهد بود با :

$$d\left[\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \times 29} - \left(\frac{1}{29 \times 8} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{19 \times 8 \times 6}\right)\right] = d\left[\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \times 29} - \frac{1}{8 \times 29 \times 6} + \frac{1}{8 \times 29 \times 6 \times 8}\right] = d \times 0/87868$$

واز رابطهٔ فوق مقدار π برابر با :

$$۴\times(۰/۸۷۸۶۸)^{۲}=۳/۰۸۸۳$$

خواهد بود .

قاعدهٔ زیر ازکتاب دروس حساب از **آریاب‌هاتا** اخذ شده است «به ۱۰۰ عدد ۴ را اضافه‌کنید سپس آنرا در۸ضرب کنید ومجدداً آنرا بـا ۶۲۰۰۰ جمع کنید تا مقدار تقریبی پیرامون دایره‌ای به قطر ۲۰۰۰۰ بدست‌آید» دراینجا داریم :

$$\pi=\frac{۶۲۸۳۲}{۲۰۰۰۰}=۳/۱۴۱۶$$

گانزا یکی از مفسران **بهاسکارا** چگونگی محاسبهٔ اخیر π را اینطورشرح می‌دهد .

قاعدهٔ مزبور که به قاعدهٔ محیطها موسوم است در اصل توسط ارشمیدس بیان شده اما درجهت دیگری تکمیل گردیده است که با روش هندسه‌دان یونانی متفاوت می‌باشد :

هرگاه قطر d برابر ۱۰۰ باشد شش‌ضلعی منتظم به‌ضلع $c=۵۰$ را درآن محاط می‌کنیم ، سپس c' ضلع دوازده‌ضلعی را ازفرمول زیر بدست می‌آوریم :

$$c'=\sqrt{\frac{d}{۲}(d-\sqrt{d^{۲}-c^{۲}})}$$

طبق‌همین‌فرمول اضلاع ۴۸،۲۴ و... ضلعی را محاسبه می‌کنیم پیرامون ۶،۱۲،۲۴،۴۸،۹۶،۱۹۲،۳۸۴ ضلعی به ترتیب برابر خواهد شد با :

$$\sqrt{۹۸۵۵۵}\ ،\ \sqrt{۹۸۱۳۳}\ ،\ \sqrt{۹۶۴۶۱}\ ،\ \sqrt{۹۰۰۰۰}$$
$$\sqrt{۹۸۶۹۴}\ ،\ \sqrt{۹۸۶۷۶}\ ،\ \sqrt{۹۸۶۶۱}$$

هندیها پیرامون ۳۹۴ ضلعی را نزدیك به پیرامـون دایره فرض‌کرده‌اند و ازآنجا نتیجه گرفته‌اندکه :

$$\pi=\frac{\sqrt{۹۸۶۹۴}}{۱۰۰}=۳/۱۴۱۶$$

براهماگوپتا (قرن‌هفتم) ـ نوشتهٔ زیرازاین‌ریاضیدان معروف هند است :

«عملا حاصل‌ضرب قطر ومجذورشعاع درعدد ۳ به ترتیب برابر با پیرامون ومساحت دایره است ولی جذر ۱۰ برابـر مجذور این مقادیر مساوی با پیرامون و مساحت صحیح دایره است . بنابه‌این روش پیرامون ومساحت دایره‌به‌ترتیب برابربا

$$\sqrt{۱۰\pi^{۲}}=\pi^{۲}\sqrt{۱۰}\quad و\quad \sqrt{۱۰d^{۲}}=d\sqrt{۱۰}$$

می‌باشد . براهماگوپتا $\sqrt{۱۰}$ را مساوی ۳/۱۶۲ و برابربا π درنظرگرفته است .

هانکل مورخ آلمانی در مقاله‌ای دربارهٔ انتخاب عدد مزبورتوسط هندیها چنین توضیح می‌دهد: درآن زمان استخراج جذر مشکل وخصوصاً ناراحت کننده بوده است . از این جهت پیرامون ۶،۱۲،۲۴،۴۸،۹۶ ضلعی محاطی به‌قطر ۱۰ را با اعداد: $\sqrt{۹۰۰}$ ، $\sqrt{۹۶۵}$ ، $\sqrt{۹۸۱}$ ، $\sqrt{۹۸۶}$ ، $\sqrt{۹۸۷}$ مشخص می‌کرده‌اند .

مقادیر فوق به‌سمت $\sqrt{۱۰۰۰}$ میل می‌کنند وبنظرمی‌رسد که هندیها این‌مقدار را برابر با محیط دایره فرض‌کرده‌اندکه نتیجه گرفته‌اند :

$$\pi=\frac{\sqrt{۱۰۰۰}}{۱۰}=\sqrt{۱۰}$$

بهاسکارا (قرن دوازدهم) ـ قاعدهٔ زیر مستخرج از لیلاواتی است : «هرگاه قطریك دایره در ۳۹۲۷ ضرب و بر ۱۲۵۰ تقسیم شود و یا اینکه در ۲۲ ضرب و بر ۷ تقسیم شود خارج‌قسمت تقریباً برابر بامحیط دایره است .

بنابه قانون‌اول که‌درمحاسبات‌ایجاد اشکال‌می‌کند داریم:

$$\pi=\frac{۳۹۲۷}{۱۲۵۰}=\frac{۳۹۲۷\times۱۶}{۱۲۵۰\times۱۶}=\frac{۶۲۸۳۲}{۲۰۰۰۰}$$

مقدار اخیر را **آریاب‌هاتا** نیزمشخص‌کرده بود . اماقانون دوم همان مقدار ارشمیدسی را مشخص می‌کند و درمی‌یابیم‌که دراین زمان کارهای یونانیان بوسیلهٔ هندیها شناخته شده است.

بهاسکارا مقدار $\frac{۷۵۴}{۲۴۰}=\pi$ راکه‌برابربا $\frac{۳۷۷}{۱۲۰}$ یـا $۳\frac{۷}{۱۲۰}$ می‌باشد نیز بکار می‌برده است . مقدار اخیر بوسیلهٔ بطلمیوس بدست‌آمده است و بازهم نفوذ علمی یونانیان را درهند آن روز تأیید می‌کند .

مسلمانان ـ در این‌باره به دلایل غیرقابل انکاری از نفوذهندیها برآثارریاضی‌مسلمانان برمی‌خوریم. **محمدبن‌موسی** در بخش هندسهٔ کتاب معروف خود «جبر» قاعدهٔ زیر را بیان می‌کند : «دریك دایره $۳\frac{۱}{۷}$ برابرقطربرابرباپیرامون‌آنست.

با وجود آنکه این قاعده کاملا صحیح نیست اما در زندگـی عملی قابل استفاده است . هندسه‌دانان دو مقدار دیگر بکـار می‌برند . اولی‌آنست‌که قطر را درخودش وسپس در ۱۰ضرب کنید و ازمقدار حاصل جذر بگیرید تا پیرامون بدست بیاید . هندسه‌دانان منجم‌قاعدهٔ زیر را بکارمی‌برند.قطررا در۶۲۸۳۲ ضرب و بر ۲۰۰۰۰ بخش می‌کنند ، خارج‌قسمت را برابر با پیرامون دایره فرض می‌کنند.»

دنبالهٔ مطلب صفحهٔ قبل درپائین صفحهٔ ۱۲۱ چاپ شده است .

درسی از شیمی

ساختمان شیمیائی وخواص ماده

ترجمه و تنظیم از : عطاءالله بزرگ‌نیا

****

آموزش شیمی که درگذشته مبتنی برحفظ و بخاطرسپردن فرمول واکنشها و پدیده‌های شیمیائی بود امروزه به نحو بارز و روزافزونی در جهت درك اساسی پدیده ها و پاسخ یافتن به پرسشهای «چگونه» و«چرا» و حل مسائلی که در قلمرو این‌علم مطرح می‌باشد، سوق یافته است.

اطلاعات ما دربارهٔ پدیده های شیمیائی به مقیاس وسیعی مبتنی بر کیفیات وحقایق تجربی وعملی،شناسائی و تعمیم‌الگوها ونمونه‌ها وتجرید مفاهیم ودرآوردن‌آنها به بیان وقالب تئوریها می‌باشد.

این نظریات غالباً پاسخ به «چگونه و چرا» هائی است است که درمورد الگوها ومدلهای متداول درشیمی وجود دارد. مدلها غالباً به شکل نشانه‌ها، طرحها و نمودار هائی است که پدیده‌های محیط ما راکه جنبهٔ حسی وتجربی دارند با معنی و رسا می‌سازند .

تحولاتی که اخیراً درتئوریهای شیمی بویژه در تئوریهای مربوط به ساختمان ماده پدید آمده موجب شده است که این الگوها ومدلها به شکل عبارات ومعادلات ریاضی که غالباً جنبهٔ عملی نداشته ازحدودآزمایش و احتمالا درك شاگردان عادی خارج است درآید. بااین‌حال کوششهای فراوانی شده است که بابکاربردن شیوه‌های ابداعی درك مفاهیم اساسی راکه مبتنی بر نظریات مربوط به ساختمان ماده است بسط وگسترش دهد و خوانندگان را به خواص وکیفیت ماده راهنمائی کند.

این بخش برمبنای چنین اندیشه‌ای تدوین‌یافته وچکیدهٔ کوششهائی است که دراین راه صرف شده است . مطالعهٔ دقیق این بخش وحل تمرینهای مربوط به‌آن‌آمادگی لازم را برای پی بردن به ساختمان شیمیائی و خواص ماده درخواننده ایجاد می‌کند. امیدوار است‌که مورد استفادهٔ خوانندگان عزیز قرار گیرد .

***

نظریهٔ مقدماتی ساختمان اتمی‌بیشتر مبتنی بر**مدل اتمی بر (Bohr)** می‌باشد. دراین نظریه، الکترونها طبق اصول و قوانین معینی‌که به شکل معادلات ریاضی بیان می‌شود به دور هسته می‌گردند. حرکت الکترونها به دور هسته‌مشابه حرکت سیارات به دور خورشید ودرمسیر یا منطقه‌ای (غالباً به شکل دایره نشان داده‌می‌شود)که قشر، لایه، یا سطح انرژی نام‌دارد صورت می‌گیرد. لایه‌های الکترونی به‌ترتیب ازداخل به‌خارج با حروف K، L، M، N، O و غیره نشانه‌گذاری شده‌اند. مدارحرکت الکترونها ظاهراًکمتر از مدار سیارات به دور خورشید مشخص‌است. حرکت الکترونهارا به‌دور هسته می‌توان به هجوم زنبورهای عسل به دورکندوی خود تشبیه کرد. در این حرکت بظاهر اتفاقی الکترونها گاهی به هسته نزدیك وگاهی ازآن دور می‌شوند ودرنتیجه فضای خالی دور هسته را تا حدودی پر می‌کنند. میدان الکتریکی ناشی‌ازجذب ودفع متقابل‌الکترونها وهسته‌ها، حجم هراتمی‌را مشخص‌کرده وآنرا ازسایر اتمها متمایز می‌سازد.

ابهامات وپیچیدگیهائی که درنمایش الکترونی بر وجود داشت درنظریهٔ جدید اتمی که بیشتر به**نظریهٔ کوانتم** معروف است با بیان روشنتری تفسیر شده‌اند؛ درنظریهٔ اخیر به‌استثنای قشر K، قشرهای اصلی (L، M، N، O، P وغیره) دیگر ازتعداد مختلفی سطوح فرعی با انرژیهای متفاوت تشکیل

شده‌اند. این سطوح فرعی با حروف s، p، d، f نشان داده می‌شوند. آرایش الکترونی اتم عناصر و افزایش . . . تدریجی الکترونها درمدلهای اتمی که باازدیاد عدد اتمی پدید می‌آید ازقواعد ونظام معینی پیروی می‌کنند. این‌قواعد شامل‌چگونگی آرایش الکترونها درمدارهای الکترونی ممکن (اربیتال) که تشکیل لایه‌های فرعی را داده‌اند نیز می‌باشد.

تعداد اربیتالها در لایه های فرعی بستگی به‌نوع ویژهٔ لایه دارد. دانستن انرژی نسبی لایه‌های اربیتال واشغال این لایه‌ها بوسیلهٔ الکترونهااطلاعات سودمندی‌دربارهٔ امکان‌ترکیب، نوع پیوندها و اتصالهایی که عنصری در آن شرکت می‌کند و همچنین ظرفیت، درجهٔ اکسیداسیون و سایر خصوصیات عنصر به ما می‌دهد. تعداد صحیح سطوح انرژی بستگی تام به نوع اتم‌دارد ویك‌سطح انرژی‌لازم معین دراتمهای مختلف تاحدودی متفاوت است. پاره‌ای وجوه مشترك بین سطوح فرعی لایه‌های مختلف ازجهت انرژی لازم وجود دارد.

پائینترین سطح فرعی انرژی ازیك لایهٔ بزرگتر ممکن است انرژی کمتری از برخی از سطوح انرژی بالاتر از لایهٔ کوچکتر بعدی داشته باشد.

بحث کوتاهی دربارهٔ ساختمان اتمی ، ملکولی وپیوندهای شیمیائی

۱- نظریهٔ مقدماتی اتمی

I-آرایش الکترونی. طبق‌نظریهٔمقدماتی‌اتمی‌الگویا مدل هر اتم از سه ذرهٔ اساسی: پروتون ، الکترون ونوترون تشکیل شده است . ذرات سنگین یعنی پروتونها و نوترونها تشکیل ذرهٔ کوچك ولی متراکمی به نام هسته را داده‌اند . الکترونها درسطوح مختلف انرژی به‌نام لایه پایدار به‌دورهسته می‌گردند. لایهٔ پایدار، منطقهٔ‌کم وبیش مشخصی‌است‌که درآنجا الکترونها به دور هسته می‌گردند . لایهٔ K یعنی نزدیکترین لایه‌ها به هسته، حداکثر می‌تواند ۲ الکترون داشته باشد واین دوالکترون دارای‌کمترین انرژی می‌باشند، لایهٔ بعدی یعنی‌لایهٔ L حداکثر ۸الکترون وسومین لایه یعنی‌لایهٔM تا۱۸الکترون می‌تواند داشته باشد. حداکثر الکترون درلایهٔ اخیربرای‌عنصر کلسیم (عدد اتمی ۲۰) وعناصر ماقبل آن ۸ است. شکل زیر آرایش الکترونی عنصرکلسیم را نشان می‌دهد و ترتیب‌آن از این‌قرار است:

لایهٔ K دوالکترون، لایهٔ L هشت، لایهٔ M هشت ولایهٔ N دارای دو الکترون می‌باشد. حداکثر الکترون درلایه‌های اصلی بعداز M به ترتیب عبارتند از : N=۳۲ ، O=۳۲ P=۱۰ و Q=۳

مفاهیم اساسی مربوط به ساختمان چنین الگوهائی عبارتند از:

۱- عدد اتمی هرعنصر (Z) - معرف تعدادپروتونها درهستهٔ یك اتم‌آن عنصر می‌باشد.

۲- جرم‌اتمیهرعنصر- برابرمجموع جرم‌پروتونها و نوترونهای تشکیل دهندهٔ اتم‌آن عنصر است (ازجرم الکترونها که بسیار ناچیزاست صرف نظر می‌شود). جرم هریك از ذرات سنگین اتم (پروتون ونوترون) در حدود یك واحد جرم اتمی (یك واحدجرم اتمی $۱/۶۶۰ \times ۱۰^{-۲۴}$ گرم‌است).

۳- عدد جرم (A) برای هرعنصر برابرمجموع‌تعداد پروتونها و نوترونهای هستهٔ اتم‌آن عنصر می‌باشد.

مشخصات اتم عناصر بوسیلهٔ نشانهٔ عمومی$_{Z}X^{A}$ که درآن X به جای علامت اختصاری عناصر است معرفی می‌شود. بدیهی است دراین‌نشانه اطلاعات لازم برای شناسائی ساختمان اتمی هرعنصروجود دارد. مثلا فراوانترین ایزوتوپهای‌اکسیژن‌بدین شکل $_{۸}O^{۱۶}$ معرفی می‌شود. تعداد نوترونها در هر اتم برابر تفاضل Z از A یعنی$N = A - Z$ می‌باشد. بنابراین هستهٔاتم اکسیژن مزبور شامل ۸ پروتون و ۸ نوترون می‌باشد . تعداد الکترونها دراتم اکسیژن برابر ۸ است. درلایهٔK دوالکترون و درلایهٔ L، ۶=۲ - ۸ الکترون وجود دارد.

۴- وزن اتمی - وزن اتمی هرعنصر معدل وزن اتم ایزوتوپهای طبیعی‌آن عنصر است به مبنائی که وزن فراوانترین ایزوتوپ‌کربن‌باعدد جرمی ۱۲ دقیقاً برابر ۱۲/۰۰۰۰اختیار شده باشد .

در جداول اوزان اتمی عناصر غالباً اعداد سر راست و صحیحی دیده می‌شودکه با اعداد اوزان اتمی واقعی اندکی اختلاف دارند زیرا برای‌آسان شدن محاسبات نزدیکترین‌عدد صحیح به اوزان اتمی واقعی را انتخاب می‌کنند مثلا به جای جرم اتمی دقیق لیتیوم‌که ۶/۹۴۰ می‌باشد عدد ۷ را قرار می‌دهند .

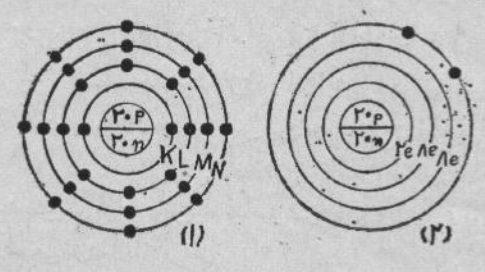
۵ـ آرایش الکترونی ـ در جداول تناوبی عناصر معمولا درمقابل نشانهٔ هر عنصر چند عدد پشت سر هم ردیف شده‌است. هریك‌ازاین تعدادالکترونها را درلایه‌ای نشان‌می‌دهد بدیهی است‌که نخستین عدد مربوط به لایهٔ K و عدد بعدی به لایهٔ L وبه همین‌ترتیب آخرین عدد معرف تعدادالکترونها درآخرین لایه است.

جدول تناوبی عناصر شامل مشخصات فوق‌الذکر برای ۱۰۲ عنصر می‌باشد. وبراساس این مشخصات می‌توان آرایش الکترونی ۱۰۲ عنصرجدول را نمایش داد. برای‌آخرین عنصر جدول که‌آرایش الکترونی آن از همه مفصلتر و دارای ۱۰۲ الکترون می‌باشد تعدادالکترونهای درلایه‌های K و L وM و N وO وP وQ به‌ترتیب ۲ و ۸ و ۱۸ و ۳۲ و ۳۲ و ۸ و ۲ می‌باشد.

نظر به‌اینکه جدول تناوبی‌برمبنای عدد اتمی تنظیم شده است ازاین رو تعداد الکترون هرعنصری ازجدول برابرشمارهٔ خانهٔ‌آن عنصر درجدول یا عدد اتمی‌آن عنصر واز خانه‌ای به خانهٔ بعدی یك واحد به‌آن ، افزوده می‌شود . با توجه به این امر تعیین لایهٔ انرژی مناسب هرالکترون به‌آسانی امکان‌پذیر است باید دانست‌که دربعضی خانه‌های جدول افزایش‌الکترون به‌جای‌آنکه موجب پیدایش لایهٔ انرژی بالاترشود. موجب‌تغییر درلایهٔ انرژی ماقبل می‌شود.

بنابرآنچه گفته شد با استفاده ازجدول تناوبی به‌سهولت می‌توان اطلاعات لازم برای‌آگاهی ازآرایش الکترونی عناصر ونمایش‌آنها بدست‌آورد.

شکلهای‌زیر دونمونه از طرز نمایش آرایش الکترونی درلایه‌های‌اصلی را برای عنصر کلسیم نشان می‌دهد.



نمایش‌آرایش الکترونی اتم‌کلسیم $_{20}Ca^{40}$

برای‌گروههای عناصر (I تا VII):

۱ـ شمارهٔ لایه‌های اصلی درهراتم برابر شمارهٔ دوره یا تناوبی است که‌آن عنصر جزءآنست.

۲ـ تعداد الکترون در آخرین لایهٔ الکترونی اتم هر عنصر با شمارهٔ گروهی که‌آن عنصر بدان تعلق دارد مطابقت می‌کند .

۳ـ هرگاه عدد دورا ازشمارهٔ تناوب مربوط به هرعنصر بکاهیم‌باقیمانده تعدادلایه‌هائی‌راکه‌شامل حداکثر تعدادالکترون هستند نشان می‌دهد . چنانچه تعداد الکترونهای باقیمانده پس از پر شدن این لایه‌هاکافی برای پر کردن لایهٔ بعدی نباشد . این تعداد الکترون معرف‌عدهٔ الکترونهای آخرین لایه است.

۴ـ تفاضل شمارهٔ‌گروه از شمارهٔ الکترونهای باقیمانده تعداد الکترونهای لایهٔ ماقبل آخر را مشخص‌می‌کند .

برای‌آنکه‌نمایش اتم عناصر ساده‌ترشود به‌جای‌قراردادن نقطه در ازاء الکترونهای لایه‌های داخلی ، عدد معرف تعداد الکترونها را باعلامت اختصاری الکترون (e) درروی هر یك از این لایه‌ها قید می‌کنند(شکل۲)

مثال : ساختمان اتمی عنصر کلسیم را رسم‌کنید.

حل : با پیروی از مراحلی‌که در فوق ارائه شد چنین نتیجه می‌شود :

۱ ـ نظربه اینکه‌کلسیم در دورهٔ چهارم جدول تناوبی عناصر قرار دارد دارای چهارلایهٔ اصلی الکترونی می‌باشد .

۲ ـ کلسیم‌جزءگروه‌دوم جدول و بنابراین در مدارچهارم ۲ الکترون دارد .

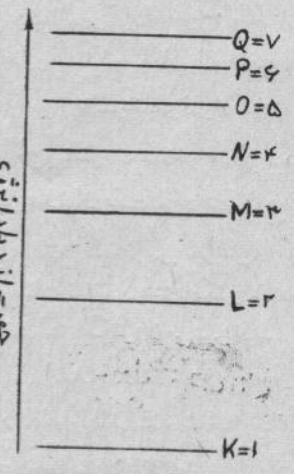
۳ـ تفاضل‌شمارهٔ گروه ازشمارهٔ تناوب برابر ۲ = ۲ − ۴ است . از این رو دارای دولایهٔ الکترونی کامل‌می‌باشد. یکی لایهٔ K با دو الکترون و دیگری لایهٔ L با ۸الکترون .

۴ـ چون از تعدادکل الکترونهای اتم‌کلسیم تعداد الکترونهای دو مدارکامل K و L را بکاهیم تعدادالکترون باقیمانده برابر ۱۰ = ۱۰ − ۲۰ می‌شودکه‌اگر از این تعداد شمارهٔ گروه عنصر کلسیم راکم‌کنیم ۸ = ۲ − ۱۰ خواهد شد و این عدد تعداد الکترونها را در لایهٔ M (لایهٔ بعد از L) نشان می‌دهد .

تعداد نوترون‌در هستهٔ اتم‌کلسیم برابر A − Z یعنی : ۲۰ = ۲۰ − ۴۰ است .

بدین ترتیب ساختمان اتمی عنصر کلسیم بطورکامل تعیین می‌شود .

در شکل (۲) موقعیت نسبی مخصوص به‌سطوح انرژی نشان داده شده است.



هریك ازاین سطوح انرژی بوسیلهٔ عددی(n) کـه درجلوآنهـا قرار دارد مشخص می‌شود .

مثلا پائینترین سطح انرژی (K) باعدد (۱) و دومین سطح انرژی (L) باعدد (۲) وبه‌همین ترتیب معرفی می‌شوند. این اعدادکه مقادیر مختلف n را تشکیل می‌دهندگاهی به نام اعدادکوانتم موسومند .

الگوهای‌مقدماتی‌اتم‌که برپایهٔ سطوح اصلی انرژی‌ساخته شده‌اند به‌نحو رضایت بخشی خواص عناصر رابیان‌می‌کند .

نتایج‌کلی‌که‌ازبررسی عناصر بویژه ۲۰ عنصر اولیهٔ‌جدول تناوبی عناصر بدست می‌آید از این قرار می‌باشد :

۱ـ در آخرین لایهٔ انرژی هیچیك عناصر بجز pd_{4} بیش از ۸ الکترون وجود نـدارد . (این نتیجه به‌نام قانـون هشت [illegible]م است).

۲ ـ بجز هلیوم‌که دارای دو الکترون ولایهٔ الکتـرونی آن‌کامل‌است، سایرگازهای بی‌اثر(نئون ، آرگون ، کریپتون، گزنون‌ورادون)درآخرین‌لایهٔ الکترونی خوددارای ۸الکترون هستند .

علت بی‌اثـری و فقـدان میل ترکیبی در این عنـاصر، پایداری آرایش الکترونی‌آنهاست. بدیهی است‌که بی اثربودن هلیوم‌از نظرشیمیائی به‌سبب این است‌که در تنها لایهٔ الکترونی خود یعنی لایهٔ K دارای دو الکترون می‌باشد .

۳ ـ بقیهٔ‌عناصرکم‌وبیش دارای فعـالیت شیمیائی هستندو این فعالیت بستگی به‌نیروئی داردکـه موجب پیدایش آرایش نوین‌الکترونی برای هرعنصرهنگام مجاور شدن باعناصردیگر می‌شود .نتیجهٔ این آرایش‌نوین تشکیل‌لایه‌های هشت‌الکترونی تاحد امکان می‌باشد . این عمل‌که آنرا دگـرگونی یـا تغییر شیمیائی می‌نـامیم و متضمن پیوستگی و یگـانگی (تـرکیب) اتمهاست . بدین منظور صورت می‌گیردکه آخرین لایهٔ اتمهای واکنش‌کننده شامل هشت الکترون شود بدیهی است‌عناصری‌که عدد اتمی آنها ۱ و ۳ و ۴ است درترکیب ، آرایش پایداراتم هلیوم راکه شامل یك جفت الکترون است پیدامی‌کنند.

۴ ـ عناصرفلزی‌که‌در آخرین لایهٔ الکترونی خودتعداد کمی‌الکترون دارند درطی‌دگرگونیهای‌شیمیائی‌الکترونهای‌این لایه را از دست می‌دهند .

۵ـ عناصر غیرفلزی که در آخرین لایهٔ الکترونی‌خود تعداد نسبتاً زیادی‌الکترون دارند درطی دگرگونیهای‌شیمیائی تعدادی‌الکترون‌می‌گیرند .

درجدول تناوبی به‌خط‌پلکانی‌شکلی که‌فلزات‌وغیرفلزات راازهم‌جدامی‌کند توجه نمائید. این‌خط براساس قانونی که (R. T Sanderson) برای‌تشخیص‌فلزاز غیرفلز پیشنهادکرده ترسیم شده‌است . طبق این قانون‌که در مورد همهٔ عناصرسوای هیدرژن صادق است. هرگاه تعداد.الکترونهای‌در آخرین لایهٔ الکترونی عنصری مساوی یاکمتر از شمارهٔ دورهٔ یـا تناوب مربوط به‌آن عنصر باشد آن عنصر فلز وهرگاه تعدادالکترونها در آخرین لایه یك یا دو واحد بیشتر از شمارهٔ تناوب عنصر باشد ، ممکن‌است آن‌عنصر برخی ازخواص فلزی را از خود نشان دهد .

۶ـ والانس یا **ظرفیت ترکیبی اتم** هرعنصربرابر باتعداد الکترونهائی‌است‌که یك اتم ازآن عنصرازدست می‌دهد، می‌گیرد یا با اتمهای دیگر به شرکت می‌گذارد. الکترونهـای شرکت‌کنندهٔ دراین تبادلات‌که معمولا (نه‌همیشه) الکترونهای آخرین لایهٔ اتم هستند، الکترونهای والانس نامیده می‌شوند .

۷ـ ازتناوب دوم به‌بعد، درهرتناوب (عناصری‌که بطور افقی‌دریك خط قراردارند)باافزایش تدریجی عدداتمی خاصیت فلزی متدرجاً کم می‌شود و متقابلا خاصیت غیرفلـزی افزایش می‌یابد بطوری‌که مثلادرتناوب دوم‌لیتیوم فلزی ترین و فلوئور غیرفلزی ترین عناصراین تناوب است .

بدیهی است‌که این‌کیفیت‌مخصوص عناصرفعال جدول‌است وعناصرغیرفعال (گازهای بی‌اثر) راشامل نمی‌باشد .

یکی ازنشانه های‌چنین‌گرایشی درخـواص تغییرتدریجی خواص ترکیبات‌ئیدروکسید (OH) این عناصرمی‌باشد. مثلادر تنـاوب سوم ئیـدروکسید هـای سدیم و منیزیم ($NaOH$ و $Mg(OH)_2$) خاصیت‌بازی‌شدیددارند. درصورتی‌که‌ئیدروکسید-های P و S ازقبیلH_3PO_4 یا$PO(OH)_3$ و H_2SO_4 یا $SO_2(HO)_2$ اسیـد هستند وئیـدروکسید هـای Al و Si مثل $Al(OH)_3$ بینابین وبی‌تفاوت هستند بطوری‌که هم‌بااسیدهای قوی وهم بابازهای قوی می‌توانند ترکیب شوند .

۸ ـ برای عناصرفعال یك‌گروه یاخانواده (عناصرردیف عمودی جدول مانند خانوادهٔ I و IIوغیره):

الف ـ خاصیت فلزی باافزایش عدداتمی زیادمی‌شود(این کیفیت بویژه‌درمورد عناصرگروههای I و IIصادق است).

ب ـ با افزایش عدداتمی خاصیت و فعالیت غیر فلزی در عناصریك‌گروه (بویژه عناصرگـروههای VI و VII تـدریجا کم می‌شود .

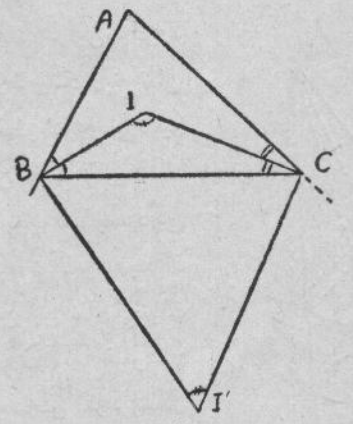
درحقیقت می‌توان‌گفت‌که همچون گـروههای I و II در سایرگروهها نیزافزایش عدد اتمی موجب افزایش شعاع اتمی و در نتیجـه افـزایش خاصیت فلزی ونقصان خاصیت غیر فلزی می‌شود. مثلادربین عناصرگروه هفتم فلوئورازهمه فعالتر و I از همه غیرفعالترمی‌باشد. بطوری‌که ید خواصی همچون فلزات از خودنشان می‌دهد ؛ عنصری است جامد و خاکستری رنگ‌که تا حدی جلای فلزی دارد .

دنباله درشمارهٔ بعد

** قضایایی در موردنیمسازهای زاویه‌های مثلث **

ترجمهٔ : محمد مهدی عابدی نژاد
دانشجوی دانشگاه آریامهر

۱ـ زاویهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویه ازمثلث برابر است با مجموع زاویهٔ یك قائمه ونصف زاویهٔ دیگر مثلث :



$$I = ۱۸۰^\circ - \left(\frac{B}{۲} + \frac{C}{۲}\right)$$

$$I = ۹۰^\circ + \left[۹۰^\circ - \left(\frac{B}{۲} + \frac{C}{۲}\right)\right]$$

$$I = ۹۰^\circ + \frac{A}{۲}$$

۲ـ زاویهٔ بین نیمسازهای خارجی دوزاویه ازمثلث برابر است با تفاضل زاویهٔ یك قائمه برنصف زاویهٔ سوم مثلث .

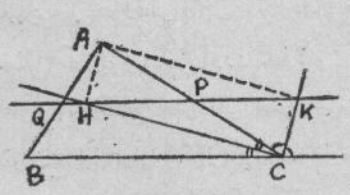
زیرا چهارضلعی $BICI'$ محاطی است و داریم :

$$I' = ۱۸۰^\circ - I = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ + \frac{A}{۲}) =$$

$$= ۹۰^\circ - \frac{A}{۲}$$

۳ـ تصویر هر رأس مثلث برنیمساز (داخلی یا خارجی) زاویهٔ دیگر برخطی قراردارد که براوساط دوضلع مجاور به‌آن رأس می گذرد .

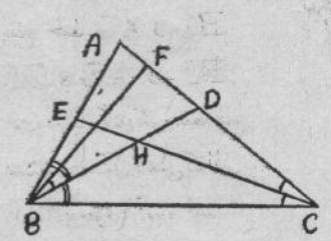
اگر H و K تصویرهای رأس A بر نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ C باشد چهار ضلعی $AHCK$ مستطیل است ودر نتیجه



اولا HK و AC منصف یکدیگر ندیعنی HK از P وسط AC می گذرد وثانیاً دو زاویهٔ PHC و PCH با یکدیگر برابرند وچون دو زاویهٔ PCH و HCB برابر هستند پس دو زاویهٔ PHC و HCB با یکدیگر برابر بوده ونتیجه می‌شودکه خط KH با ضلع BC موازی باشد . بنابراین خط KH از نقاط P و Q اوساط اضلاع AC و AB می گذرد .

۴ـ ازقضیهٔ ۳ نتیجه می‌شودکه چهارنقطهٔ تصاویرهررأس مثلث برنیمسازهای داخلی وخارجی زاویه‌های دیگر بریك خط راست واقع‌اندکه براوساط اضلاع رأس مزبور می‌گذرد .

۵ـ درهرمثلث نیمساز داخلی زاویهٔ بزرگتر از نیمساز داخلی‌زاویهٔ کوچکتر، کوچکتر است . به‌عبارت دیگر، درهر مثلث کوچکترین نیمسازداخلی مربوط بـه بزرگترین زاویه و بزرگترین نیمساز داخلی مربوط به کوچکترین زاویه است .



فرض می‌کنیم‌که درمثلث ABC داشته باشیم :

$$B > C$$

BD و CE به ترتیب نیمسازهای داخلی‌زاویه‌های Bو B باشند . می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که :

$$BD < CE$$

داخل زاویهٔ DBA زاویهٔ DBF را مساوی با زاویهٔ $ACE = ECB$ جدا می‌کنیم‌که البته F روی قطعه‌خط DA واقع می‌شود . اگر G و H به‌ترتیب محل برخورد BFوBD با CE باشد دومثلث FBD و FGC متشابهند و داریم :

$$\frac{BF}{CF} = \frac{BD}{CG}$$

درمثلث BFC زاویهٔ FCB اززاویهٔ FBC کوچکتر است پس $BF < CF$ و ازآنجا ازتناسب بالا نتیجه می‌شودکه $BD < CG$ اما $CG < CE$ است پس : $BD < CE$

تبصره ـ با استفاده از قضیهٔ بالا می‌توان قضیهٔ داگر در

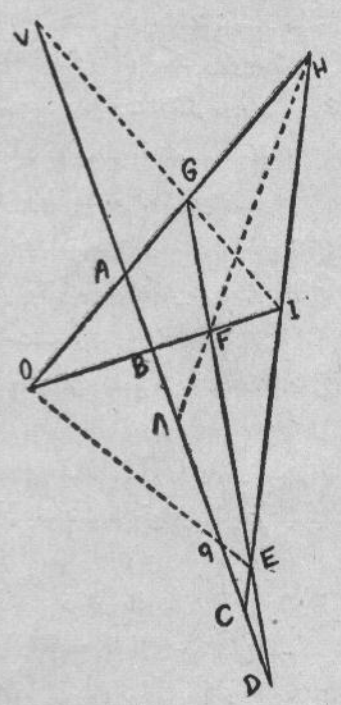
دنباله پائین صفحه ۸۷

خواص پنج ضلعی کامل

ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

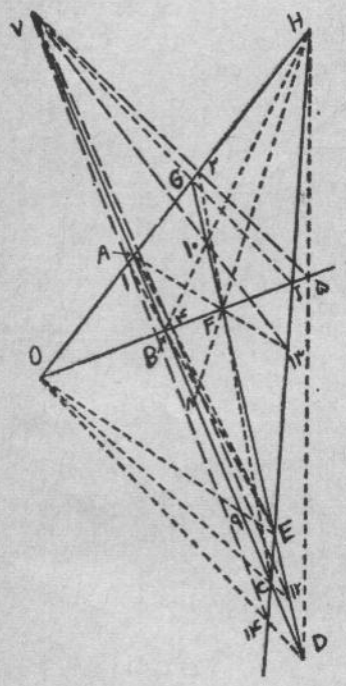
William H. Bunch
Mathematics Magazine

دربارهٔ چهارضلعی کامل وخواص آن تحقیقات کافی انجام گرفته است اما در مورد شکل کامل متشکل ازپنج خط مطالب کم ومختصری گفته‌شده است. مقالهٔ زیر به بحث وبررسی بعضی خواص پنج‌ضلعی کامل اختصاص داده شده است . بحث وبررسی ما صرفاً درحالتی است که هیچ دوخط از پنج خط مفروض باهم موازی نباشند وهمچنین هیچ سه خطی ازآنها متقارب نباشند .



در شکل مقابل پنج خط AG و HI و GF و AB و BF دوبه‌دوبایکدیگر متقاطع هستند وشکل کاملی که‌از آنها بوجود آمده است پنج‌ضلعی کاملی نامیده می‌شود . از چهار خط AG و HI و GF و BI چهارضلعی کامل بوجود می‌آید که اقطار HF و GI و DE ازآن خط پنجم یعنی AB را به ترتیب درنقاط ۸و۷و۹ قطع می‌کنند . اگر چهارضلعیهای کامل دیگری راکه ازخطوط‌دیگر حاصل می‌شود درنظر بگیریم به‌ترتیب بالا نقطه‌های دیگری بدست خواهدآمد رویهم پنج چهار ضلعی کامل خواهیم داشت و مجموعاً ۱۵ نقطه بوجود می‌آید . این پانزده نقطه را نقاط V می‌نامیم .

ثابت می‌کنیم که ۲۵ خط به انضمام پنج خط مفروض ، وجود داردکه هرپنج عدد ازآنها ازیکی ازنقاط V می‌گذرند و هر سه نقطه از نقاط V روی یکی از خطوط مزبور واقع می‌باشند . این گروه خطوط بیست وپنج‌تائی را خطوط v می‌نامیم تعیین نقاط V چنانکه قبلا بیان شد به‌سادگی انجام می‌گیرد وبعد از تعیین این نقاط‌می‌توان از روی آنها خطوط v را مشخص کرد (شکل مقابل) .



دو خط متقاطع OH و OI را می‌توانیم حالت خاص یك مقطع مخروطی:

Degenerate Conic

شامل نقاط H و A و G و F و I و B فرض کنیم . دراین صورت بنا به‌قضیهٔ پاسکال درمورد مقاطع مخروطی نقاط تلاقی AF و HI و HB و FG و IG و AB بریك خط مستقیم قرار دارند که این نقاط ، نقاط ۱۳و۱۰و۷ می‌باشند وخط (۱۳و۱۰و۷)یکی ازخطوط v می‌باشد .

قطر DH ازچهارضلعی ACEG روی OI نقطهٔ ۵ را تعیین می‌کند وقطر CF از چهار ضلعی BCEF روی OH نقطهٔ ۲ را بوجود می‌آورد . اکنون EG و EH را حالت خاص یك مقطع مخروطی تصور می‌کنیم . پس نقاط حاصل از تقاطع HD و FI ، CF و GH ، CD و GI یعنی نقاط ۵و۲و۷ روی یك خط قراردارندکه یکی دیگرازخطوط v می‌باشد.

به همین ترتیب می‌توان نقاط ۱۲و۴و۷ ، ۱۴و۱و۷ و خطوط مربوطرا تعیین‌کرد .

تاکنون یازده نقطه ازنقاط V را مشخص کرده‌ایم ؛ قبلا نقاط ۷و۸و۹ را بریکی ازپنج خط مفروض بدست‌آورده‌بودیم. همچنین پنج‌خط ازخطوط v را تعیین کرده‌ایم که همه ازنقطهٔ ۷ می‌گذرند . خط IG نیز ازنقطهٔ ۷ می‌گذرد اما این‌خط از گروه خطوط v نیست . از این‌گروه خطوط منحصراً ۵ خط از نقطهٔ ۷ می‌گذرند . با روش مشابه تمام نقاط V وتمام خطوط v بدست خواهند آمد که هرپنج خط از خطوط v دریکی از نقاط V متقاطع‌اند وهرسه نقطه ازنقاط V روی یکی‌ازخطوط v قراردارند. شکل سادهٔ پنج ضلعی به‌این ترتیب می‌توان‌شکل کاملی‌راکه‌ازشکل‌ساده‌پنج‌ضلعی‌اولیه بوجودمی‌آید مشخص کرده و رسم کرد .

دوخط ازپنج خط اولیه را درنظر می‌گیریم ؛ OH با سه‌نقطهٔ ۱و۲و۳ واقع برآن و OI با سه‌نقطهٔ ۴و۵ و ۶ واقع برآن که حالت خاص یك مقطع مخروطی را مشخص می‌کند . خط‌گذرندهٔ بر نقاط ۱و۶ را به ۱،۶ وهمچنین خط‌گذرندهٔ بر دونقطهٔ ۲و۵رابا ۲،۵ ونقطهٔ تلاقی دوخط ۱،۶ و ۲،۵ را به‌صورت ۲،۵-۱،۶ نشان می‌دهیم . هر دو خط با سه‌نقطهٔ واقع برآن حالت خاص یك مقطع مخروطی را مشخص می‌کندکه از آن شش خط پاسکال ونه بیشتر حاصل می‌شود . نسبت به‌دوخط انتخابی ، خطوط پاسکال عبارتند از :

a	b	c
۱,۶-۲,۵	۱,۶-۳,۴	۳,۴-۲,۵
۳,۶-۲,۲۴	۲,۶-۳,۵	۱,۴-۲,۶
۱,۴-۳,۵	۲,۴-۱,۵	۱,۵-۳,۶

d	e	f
۱,۵-۲,۶	۳,۵-۱,۶	۱,۶-۲,۴
۳,۵-۲,۴	۲,۶-۳,۴	۳,۶-۲,۵
۱,۴-۳,۶	۲,۵-۱,۴	۱,۵-۳,۴

اولین نقطه ازهریك ازسه‌گروه اول را درنظرمی‌گیریم، یعنی نقطهٔ ۲،۵-۱،۶ را از a ، ۳،۴-۱،۶ را از b و ۲،۵-۳،۴ را از c مثلثی خواهیم داشت با سه خط ۱،۶ و ۲،۵ و ۳،۴ که هررأس‌آن یك‌نقطهٔ پاسکال ازیك خط پاسکال است . مجدداً نقاط دوم ازهریك ازسه‌گروه را انتخاب‌می‌کنیم مثلثی بدست‌می‌آید با اضلاع ۱،۵ و ۲،۴ و ۳،۶.اضلاع‌متناظر این مثلثها عبارتند از ۱،۵ و ۱،۶ ، ۲،۴ و ۲،۵ ، ۳،۶ و ۳،۴ وبدیهی است‌که این اضلاع یکدیگر را درنقطه‌های ۱و۲ و۳واقع بر OH قطع می‌کنند.بنا به‌قضیهٔ ذرارگ خطوط‌پاسکال aوbوc وهمچنین خطوط پاسکال dوeوf دریك نقطه متقاربند.

شش خط پاسکال مزبور و دو خطی را که به‌عنوان مقطع مخروطی انتخاب شدکه این شش‌خط ازآن حاصل گردید یك گروه پاسکال می‌نامیم . چون پنج خط دوبه‌دو تشکیل ده زوج می‌دهند و ازهرزوج ده‌گروه پاسکال تشکیل‌می‌شود رویهم شصت خط خواهیم داشت . وچون هرگروه شامل دومجموعهٔ سه خطی متقارب می‌باشد پس شصت خط مزبور سه به سه در بیست نقطه متقارب می‌باشند . هریك ازنقاط پاسکال باید بتواند رأس‌مثلثی باشد که در آن قضیهٔ ذرارگ معمول باشد بنابراین هیچیك از بیست نقطهٔ مزبور نقطهٔ پاسکال نیست.

خواننده می‌تواند لیست‌کامل شصت خط مزبور را ترتیب دهد و ازآن میان خطوط v ونقاط V را مشخص‌کند. بیست‌و پنج خط v عبارت خواهد شد از :

۱،۲،۳ ، ۴،۵،۶ ، ۷،۸،۹ ، ۱۰،۱۱،۱۲ ، ۱۳،۱۴،۱۵

۱،۱۱،۵ ، ۱،۴،۱۳ ، ۱،۸،۱۲،۱،۹ ،۱۴ ، ۲،۶،۱۵

۲،۱۱،۱۴ ، ۲،۱۰،۷ ، ۲،۹،۵ ، ۳،۱۲،۱۳ ، ۳،۷،۱۵

۳،۴،۸ ، ۳،۶،۱۰ ، ۴،۱۰،۱۴ ، ۴،۷،۱۱ ، ۵،۷،۱۳

۵،۱۲،۱۵ ، ۶،۸،۱۴ ، ۶،۹،۱۲ ، ۸،۱۱،۱۵، ۱۰،۱۳،۹

قضایائی در مورد نیمساز...(بقیه ازصفحهٔ ۸۵)

مثلثی دو نیمساز داخلی برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است، را به سادگی اثبات کرد .

مسائل برای حل

۱- یك رأس مثلثی ثابت است وضلع مقابل به این‌رأس با طول متغیر روی خط ثابتی قرار دارد . مکان هندسی‌تصاویر رأس ثابت مزبور را بر نیمسازهای زاویه‌هـای دو رأس دیگـر بدست‌آورید .

۲- ثابت‌کنیدکه‌تصاویردو رأس B و C ازمثلث ABC برنیمساز داخلی (یا خارجی) زاویهٔ A با وسط ضلع BC مثلث متساوی‌الساقینی می‌سازندکه ساقهای‌آن با ضلعهای AB و AC موازی است .

۳- اگـر خط واصل بین پاهای نیمسازهای داخلی دو زاویه ازمثلث با ضلع سوم مثلث موازی باشد آن مثلث‌متساوی‌الساقین است .

۴- ثابت‌کنیدکه درهرمثلث مجموع معکوسات طولهای نیمسازهای داخلی ازمجموع معکوسات‌اندازه‌های‌اضلاع بزرگتر است .

چگونه می‌توان مسائل ریاضی را بسادگی حل کرد؟

تألیف : René Boinel

بخش یکم ـ تحرك عملی اشکال اولیهٔ هندسی

-۲-

تحرك عملی خط

I ـ با در نظر گرفتن یك خط دلخواه می‌توان همچنین ملاحظه کرد :

۱ ـ نقاط مهمی که خط از آنها می گذرد .

۲- خطوطی که از نقاط مهم ، موازی بااین خط یا عمود بر آن رسم می‌شود . این ملاحظات مخصوصاً وقتی که خط متغیر است قابل توجه می‌باشد : تعیین تصویر یك نقطهٔ ثابت بر این خط مفید می‌تواند واقع شود .

II ـ بادرنظر گرفتن یك خط و یك نقطهٔ خارج آن همچنین می‌توان ملاحظه کرد :

۱ـ خطی که از نقطهٔ مزبور موازی باآن خط رسم می‌شود.

۲ـ خطی که از این نقطه برخط عمود می‌شود، که ضمناً برهرخطی که با خط مزبور موازی باشد ومخصوصاً برخطی که ازآن نقطه به موازات خط مزبور رسم می‌شود ، عمود می‌باشد (این نکته قابل اهمیت است که از نقطهٔ مزبور می‌توان درعین حال دوخط مهم رسم کرد یکی موازی باخط مفروض و دیگری عمود برآن . این نقش دوگانهٔ نقطهٔ مزبور در موارد مختلف می‌تواند اهمیت اساسی داشته باشد . مثلا ارتفاعات یك مثلث درعین حال عمود منصفهای ضلعهای مثلثی هستند که هرضلع آن ازرأس مثلث مفروض گذشته باضلع مقابل موازی می‌باشد. وازاین جهت ، تقارب ارتفاعات یك مثلث به تقارب عمود منصفهای ضلعهای مثلث منجر می‌شود .)

۳ ـ تصویر نقطه برخط .

۴ـ قرینهٔ نقطه نسبت به خط .

۵ ـ قرینهٔ خط نسبت به نقطه .

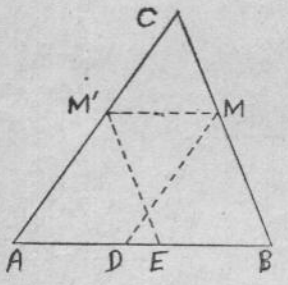
۶ ـ دایره‌ای که برنقطه می‌گذرد و برخط مماس است ، دایره‌ای به مرکز نقطه و مماس برخط .

۷ـ اگر نقطهٔ مهمی ازخط مفروض را نیز درنظر بگیریم ، دایره‌ای که براین نقطه و برنقطهٔ مفروض و بر قرینهٔ آن نسبت به خط می گذرد .

III ـ با در نظر گرفتن یك قطعه خط ویك نقطه می‌توان همچنین ملاحظه کرد :

۱ـ مثلثی که از نقطهٔ مفروض و نقاط دو سرقطعه خط تشکیل می‌شود .

۲ـ قطعه خطی که از نقطهٔ مفروض موازی ومساوی باقطعه خط رسم می‌شود .



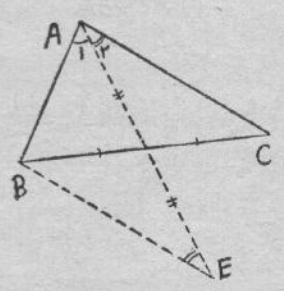
۳ ـ اگر قطعه خط AB ثابت و نقطهٔ C متغیر باشد ؛ هر نقطهٔ M (یا M') که BC (یا AC) را به نسبت معین تقسیم کند ، خطی که از این نقطه موازی با ضلع متغیر مقابل رسم شود AB را در نقطهٔ ثابت D (یا E) قطع می کند .

۴ ـ اگر قطعه خط AB متغیر و نقطهٔ C ثابت باشد ملاحظهٔ خطی که از C واز وسط AB می گذرد در مواردی، قابل توجه است.

۵ـ اگر از A به D وسط قطعه خط BC وصل کرده و آنرا تا E به اندازهٔ DE=AD امتداد دهیم مثلث BDE که تشکیل می‌شود بامثلث ADC برابر است .

ملاحظهٔ اخیر کاملا سودمند است و تبدیلات مفیدی را باعث می‌شود مخصوصاً اینکه مثلث BDE خود به عناصر واشکال تازه‌ای مربوط می‌شود . مثلا می‌خواهیم ثابت کنیم که درهرمثلث از دو زاویه‌ای که بین میانه و دو ضلع مجاور تشکیل می‌شود

آنکه با ضلع کوچکتر مجاور است بزرگتر می‌باشد. درمثلث ABC میانهٔ AD را رسم می‌کنیم با فرض:



$AB < AC$

می‌خواهیم ثابت کنیم که

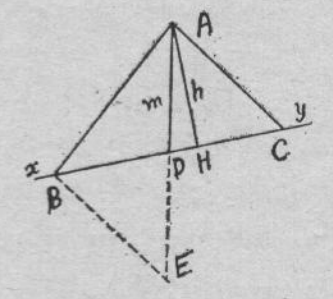
$\angle A_1 > \angle A_2$

است. باید معلوم کنیم که این دوزاویهٔ مجاور را چگونه باهم مقایسه کنیم. اگر به ترتیبی که قبلا گفته شد عمل کنیم زاویهٔ E که تشکیل می‌شود بازاویهٔ A_2 برابر است. مسئله منوط به‌این می‌شود که دو زاویهٔ A_1 و E راباهم‌مقایسه کنیم. این دو زاویه دوجزء ازمثلث ABE می‌باشند وچون:

$BE = AC$

داریم $AB < BE$ و نتیجه می‌شود که $\angle A_1 > \angle E = \angle A_2$

مثال دیگر: می‌خواهیم مثلثی رسم کنیم که از آن طول ارتفاع $AH = h$ و طول میانهٔ $AM = m$ و نسبت‌دوضلع $\frac{AB}{AC} = \frac{p}{q}$ معلوم‌است. مسئله را می‌توان از اینجا شروع کنیم‌که یك خط xy و یك‌نقطهٔ A به فاصلهٔ h از آن انتخاب کنیم. دایره‌ای به‌مرکز A و به‌شعاع m که رسم‌کنیم خط xy را درD قطع‌می‌کند که‌وسط ضلع BC ازمثلث مطلوب‌می‌باشد.



حال برای تعیین نقاط B و C باید چاره‌ای اندیشیم. زیرا A معلوم است و B و C مجهول (اگر B و C معلوم‌بود و Aمجهول دراین صورت مکان A مشخص بود). استفاده از تبدیلی که قبلاگفته شد اشکال مزبور را رفع می‌کند؛ اگر ADرا به‌اندازهٔ خود تا E امتداد دهیم داریم:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{p}{q}$$

کافی‌است مکان نقاطی را رسم‌کنیم‌که نسبت فواصل آنها ازدو نقطهٔ‌ثابت A وE برابر بامقدار ثابت فوق است. ازتلاقی‌مکان مزبور با xy نقطهٔ B بدست می‌آید.

مثال سوم ـ مثلثی رسم‌کنیم‌که اندازه‌های دوضلع:

$AB = c$ و $AC = b$

و میانهٔ $AM = m$ معلوم است. ممکن است ابتدا اینطور عمل‌کنیم‌که یك نقطهٔ A اختیارکرده به‌مرکز آن سه دایره به شعاعهای b و c و m رسم‌کنیم، بعداً باید قاطعی چنان رسم‌کنیم که بوسیلهٔ سه‌دایرهٔ مزبور به‌دوقسمت برابر تقسیم شودو دوچار اشکال می‌شویم. امااگر روش قبلی را بکار ببندیم در مثلث ABE داریم $AB = c$ و $BE = b$ و $AE = 2m$، این مثلث بامعلوم بودن اندازه‌های سه ضلع قابل رسم‌است‌و ازروی آن مثلث ABC مشخص می‌شود.

۶ ـ متوازی الاضلاعی که از قطعه خط و نقطهٔ مفروض تشکیل می‌شود، یعنی در نظرگرفتن قرینهٔ نقطه نسبت به وسط قطعه‌خط.

۷ ـ اگر نقطه را به‌وسط قطعه خط وصل‌کنیم دو مثلث که تشکیل می‌شود بایکدیگر معادل‌هستند.

۸ـ اگر AB قطعه خط و O نقطهٔ خارج آن باشد، نقطهٔM که‌قطعه خط ABرا به‌نسبت k تقسیم‌کند‌نسبت مساحت‌های دو مثلث OAM و OMB برابر با k است.

۹ ـ اگر AB قطعه خط و C نقطهٔ خارج آن باشد، وقتی داشته باشیم $BA = BC$ اگر AB را از جهت B به‌اندازهٔ خودش امتداد دهیم مثلث ACD در زاویهٔ C قائمه می‌باشد.

IV ـ با در نظر گرفتن دوخط می‌توان همچنین ملاحظه کرد:

۱ ـ نقطهٔ تقاطع آنها.

۲ـ نقاط مهمی‌که خطوط مزبور از آنها می‌گذرند.

۳ ـ زاویه‌ای‌که آن دوخط باهم می‌سازند (اگر دو خط مزبور بردو نقطهٔ قابل توجه بگذرند نقطهٔ تقاطع آنها برکمان درخور زاویهٔ ثابتی قرار داردکه بردو نقطهٔ مزبورمی‌گذرد).

۴ ـ نیمسازهای زاویه‌هایی‌که دو خط باهم می‌سازند.

۵ ـ قرینهٔ هرخط نسبت‌به‌خط دیگر.

V ـ بادرنظر گرفتن دوخط ویك نقطهٔ خارج آنها می‌توان همچنین ملاحظه‌کرد:

۱ـ خطوطی که‌ازنقطهٔ مزبور موازی با دو خط رسم‌شود.

۲ـ خطوطی‌که ازآن نقطه عمود بر دوخط رسم می‌شود (نقطه و پاهای دو عمود و نقطهٔ تلاقی دوخط یك‌چهار ضلعی محاطی بوجود می‌آورند).

۳ـ خطی‌که از نقطهٔ تلاقی دوخط و از نقطهٔ مزبور می‌گذرد.

۴ـ خطی‌که به‌انضمام خط قبلی ودوخط‌مفروض یك‌دستگاه اشعهٔ توافقی می‌سازد.

۵ ـ قطبی نقطهٔ مفروض نسبت به‌دوخط.

VI ـ بادر نظرگرفتن دو قطعه خط می‌توان همچنین

ملاحظه کرد :

۱- مجموع یا تفاضل آنها ، مجموع یا تفاضل قطعاتی که به‌ترتیب باآنها برابرند .

۲- حاصل‌ضرب‌وخارج‌قسمت آنها و حاصل‌ضرب‌وخارج‌قسمت قطعاتی منسوب به‌آنها (مخصوصاً اینکه اگر خارج‌قسمت دوقطعه خط معلوم باشد خارج قسمت مربعات یا مکعبات آنها نیز معلوم است). مثلا اگر دومثلث قائم‌الزاویه داشته باشیم که ارتفاعات آنها معلوم باشد نسبت ارتفاعات و همچنین نسبت مربعات آنها معلوم بوده در نتیجهٔ آن نسبت‌حاصل‌ضرب‌قطعاتی که توسط ارتفاعات روی وترهای دو مثلث ایجاد می‌شود نیز معلوم خواهد بود .

۳-قطعاتی که ازیك نقطه موازی‌ومساوی باقطعات‌مفروض رسم شود و مثلثی که توسط‌آنها پدید می‌آید .

۴- اگردوقطعه خط دریك‌سر مشترك باشند مثلا AB و BC وD وسط BC باشد خطی از D موازی با AB رسم شود خط AC را در E قطع‌می‌کند بقسمی‌که E وسط AC است .

۵ - اگرAB وBCدو قطعه‌خط مفروض در یك امتداد بوده‌ودر B مشترك باشند واز A و C دوخط موازی‌باهم رسم کنیم هرخط که‌از B بگذرد ودوخط موازی مزبور رابه ترتیب در D و E قطع کند داریم :

$$\frac{AD}{CE}=\frac{DB}{BE}=\frac{AB}{BC}$$

تناسب بالا در هر دو حالت‌که AB و BC هم‌جهت یامختلف الجهت باشند برقرار است .

۶- اگر دوقطعه خط AB و AC در A مشترك‌باشند وسه‌خط‌که در M متقارن هستند به‌ترتیب از A و B و C گذشته باشند، از یك نقطهٔ 'Aواقع برMA که موازی با AB وAC رسم‌کنیم تا MB و MC را به ترتیب در'B و'C قطع کنند داریم :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$$

درحالت‌خاصی که AB وAC دریك امتداد باشندهرخط که بوسیلهٔ خطوط متقارب MA و MB و MC قطع شود به نسبت دوقطعه خط مزبور تقسیم می‌شود . همچنین اگر در این حالت خط دلخواه xy از M گذشته باشد خطوطی‌که از B و C به موازات MA رسم شوند روی xy دوقطعه خط متناسب باقطعات مزبور پدید می‌آورند .

۷-اگر AB وAC دریك‌امتدادو هم‌جهت‌بوده‌وحاصل‌ضرب AB.AC برابر بامربع قطعه خط دیگری مانند KL باشد .

الف - می‌توان‌دایره‌ای‌درنظر گرفت‌که بر B و C می‌گذرد و مماسهای مرسوم بر آن از A طولی برابر باطول KL دارد .

ب- مثلث قائم‌الزاویه‌ای در نظر گرفت‌که AC وتر و KL یك ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن بوده AB تصویر این‌ضلع بر وتر باشد .

VII- بادر نظر گرفتن سه قطعه خط می‌توان همچنین ملاحظه‌کرد :

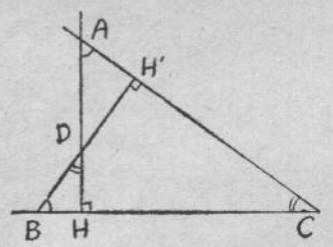
۱- مثلثی‌که توسط سه قطعه خط مزبور ساخته‌می‌شود.

۲- اگر AB و BC و CA سه قطعه خط‌باشندکه مثلثی ساخته باشند ، AB و CB را از طرف B به اندازهٔ طولی متناسب بااین دوقطعه خط تا 'A و'C امتداددهیم 'A'C با AC موازی وباآن به نسبت مزبور متناسب می‌باشد .

۳ - اگر دو قطعه خط باهم زاویهٔ ثابت بسازند و قطعه خط سوم با دو قطعه خط مزبور مثلثی تشکیل دهد واین قطعه خط‌طول‌ثابت‌داشته باشد دایرهٔ محیطی مثلث مزبور دارای‌طول قطر ثابت می‌باشد .

VIII- با در نظر گرفتن چهار خط می‌توان همچنین ملاحظه‌کرد :

۱ - چهار ضلعی‌که ازآنها تشکیل می‌شود .



۲ - اگر مطابق شکل‌بعضی ازچهار خط دو به‌دو بر هم عمود باشنددو زاویهٔ C وD همچنین دو زاویهٔ A B باهم برابرند ، دو مثلثBDH و 'ADH وهمچنین دومثلث 'BCH و ACH باهم متشابهند و چهارضلعی 'DHCH محاطی است‌وخواص دیگر .

IX - بادر نظرگرفتن یك چهار ضلعی محاطی می‌توان همچنین ملاحظه‌کرد :

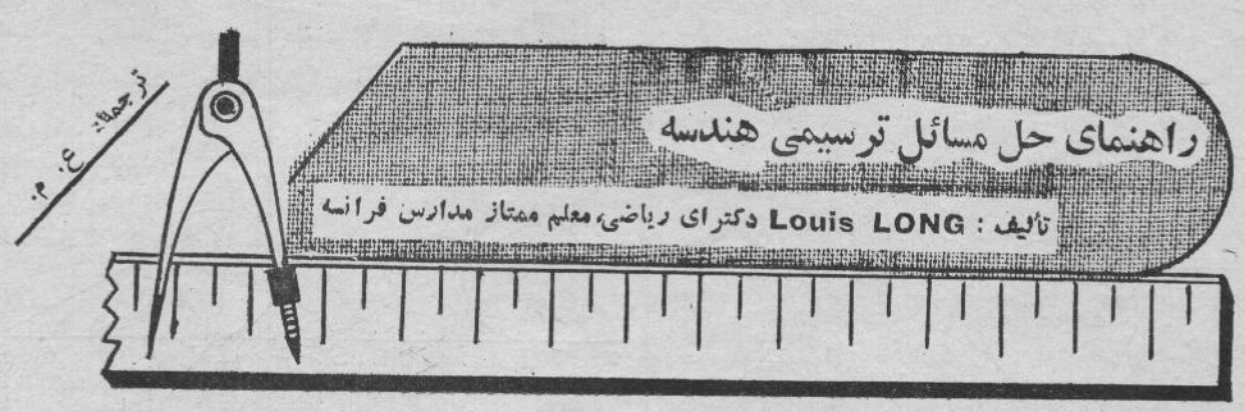
۱- حاصل‌ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل‌ضربهای اضلاع مقابل.

۲ -زاویه‌های بین‌دو قطر و اضلاع مقابل باهم‌برابراند.

۳-زاویه‌های روبرو مکمل‌اند وهرزاویهٔ خارجی بازاویهٔ داخلی روبرو برابر است .

۴-خواص ناشی‌از دایره‌ای‌که برسه رأس چهارضلعی‌می‌گذرد (وبر دایرهٔ محیطی منطبق است) .

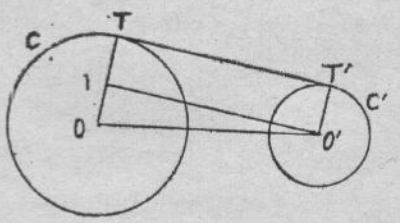
دنباله پائین صفحهٔ ۱۰۵



فصل دوم ـ بعضی ترسیمات کلاسیك

مسئلهٔ ۱ ـ مماس مشترك دودایرهٔ (C) و (C′) به مرکزهای O و O′ را رسم‌کنید .

۱) مماس مشترك خارجی ـ مسئله را حل شده می‌انگاریم و فرض می‌کنیم TT′ مماس مشترك خارجی دو دایره باشد ، نقاط تماس T و T′ را به O و O′ مرکزهای دو دایره وصل کرده و از O′ به موازات TT′ رسم‌می‌کنیم تا OT را در I قطع‌کند . اگر R و R′ شعاعهای دو دایره‌باشد داریم :

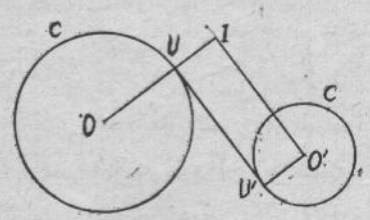


$$OI = R - R'$$

و خط O′I بردایرهٔ (C″) به مرکز O و به شعاع $R - R'$ مماس می‌باشد . به‌فرض $OO' = d$ در حالت $d > R - R'$ یعنی وقتی O′ خارج (C″) باشد مسئله دوجواب داردکه‌نسبت به OO′ متقارن می‌باشندکه در این حالت دایره‌های (C) و (C′) نه متداخل هستندو نه مماس داخل . اگر $d = R - R'$ یعنی O′ روی (C″) واقع‌باشد یعنی اینکه دو دایره مماس‌داخل باشند مسئله‌یك جواب دارد .درحالت $d < R - R'$ که‌دودایره متداخل هستند O″ داخل‌دایرهٔ (C″) واقع شده و مسئله‌جواب ندارد .

۲)مماس‌مشترك داخلی ـ باز هم‌مسئله را حل‌شده‌انگاشته UU′ را مماس مشترك داخلی فرض می‌کنیم در اینجا O′I که به ترتیب سابق رسم شود بر دایرهٔ به شعاع :

$OI = R + R'$ و به مرکزO مماس‌است اگر $d > R + R'$ باشد یعنی دو دایرهٔ مفروض متخارج باشند مسئله دوجواب‌دارد اگر $d = R + R'$ باشد یعنی دودایره مماس‌خارج باشندمسئله دارای یك‌جواب است .اگر $d < R + R'$ باشدیعنی دو دایره نه متخارج باشند و نه مماس خارج ، مسئله جواب‌نخواهد داشت .



نتیجهٔ‌کلی آنکه ، دو دایره‌که متخارج باشد چهار مماس مشترك دارند ، دو دایرهٔ مماس خارج دارای سه مماس مشترك هستند ، دو دایرهٔ متقاطع دومماس مشترك دارند ، دو دایرهٔ مماس‌داخل دارای یك مماس مشترك می‌باشند و بالاخره دو دایرهٔ متداخل مماس مشترك ندارند .

مسئلهٔ ۲ـ مطلوبست رسم سهمی‌که از آن‌کانون F ودو نقطهٔ M و M′ معلوم است .

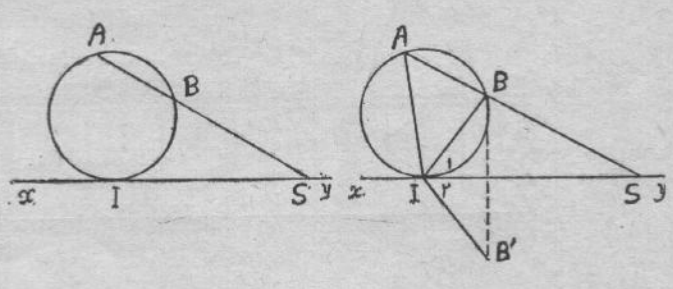
این‌مسئله به‌مسئلهٔ قبل رجوع می‌شود . خطهادی‌عبارتست از مماس مشترك دو دایرهٔ به‌مرکزهای M و M′ وبه‌شعاعهای MF و M′F.این دو دایره در یك نقطه‌مشترك‌هستندبنابراین درحالت‌کلی مسئله دارای دو جواب است . درحالت خاصی‌که سه نقطهٔ M و M′و F بریك خط راست واقع باشند یعنی دو دایره مماس‌خارج باشند مماس مشترك داخلی نمی‌تواند جواب باشد زیرا خط هادی سهمی ازکانون آن نمی‌گذرد .

مسئلهٔ ۳ـ دایره‌ای رسم‌کنیدکه بر دو نقطهٔ A و B بگذرد و برخط مفروض xy مماس باشد . مسئله را حل شده فرض‌می‌کنیم . AB و xy در S متلاقی هستند و داریم :

$$\overline{IS}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB} \quad (1)$$

که I نقطهٔ تماس دایره باخط می‌باشد . هردایره‌ای‌که جواب

مسئله باشد مرکزش برعمود منصف AB و همچنین بر عمودی واقع است‌که در I بر xy اخراج‌شود .



بحث- برای امکان مسئله لازم‌وکافی است I که دررابطهٔ (۱) صدق‌می‌کند وجود داشته باشد . رابطهٔ مزبور وقتی محقق است‌که طرف دوم آن منفی‌نباشد و تعبیر هندسی این موضوع ازاین قرار است‌که دو نقطهٔ A و B طرفین xy واقع‌نباشند.

اگر A و B در یك طرف xy واقع باشند دو نقطهٔ I و I' وجود داردکه نسبت به S قرینهٔ یکدیگرند ، مسئله دو جواب دارد .

در حالتی‌که یکی از دو نقطه ، مثلا B ، روی xy باشد سه نقطهٔ B و I و I' منطبق بوده و مسئله یك‌جواب‌دارد.

راه حل دیگر - اگر B' قرینهٔ B نسبت به xy باشد داریم :

$$\text{ز}ASy = \text{ز}AIS + \text{ز}A$$

دو زاویهٔ I_1 و A که اندازهٔ هریك از آنها نصف اندازهٔ کمان BI است بایکدیگر برابرند پس زاویهٔ A با زاویهٔ I_2 برابر است وداریم :

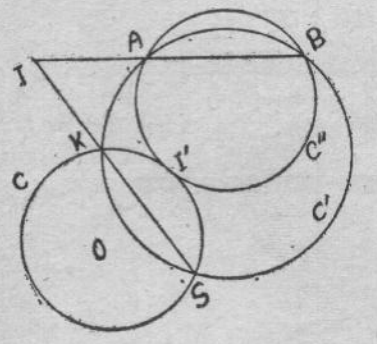
$$\text{ز}ASy = \text{ز}AIS + \text{ز}I_2 = \text{ز}AIB'$$

و نتیجه‌می‌شودکه I نقطهٔ تلاقی خط xy باکمان‌درخور زاویهٔ ASy مار برنقاط A و B' می‌باشد .(دوکمان درخور وجود داردکه نسبت به AB' متقارن هستند).

تبصره- مسئلهٔ کلاسیکی‌که به مسئلهٔ ۳ منجر می‌شود عبارتست ازتعیین‌فصل مشترك یك خط ویك سهمی . حالت خاص تطابق دو جواب عبارتست از تعیین مماس برسهمی .

مسئلهٔ۴- دایره‌ای‌رسم کنیدکه برنقطهٔ مفروض A بگذرد و بردو خط D و D' مماس باشد . مرکز دایره برنیمساز زاویهٔ دو خطD و D' واقع‌است بنابراین دایرهٔ مطلوب بر A' قرینهٔ A نسبت به‌این نیمساز نیز می‌گذرد . مسئله منجر به ایس می‌شود که دایره‌ای رسم کنیم که بر A و A' بگذرد و بر خط D (یا D') مماس باشدکه همان مسئله ۳ می‌باشد .

مسئلهٔ۵- دایرهٔ (C) به‌مرکز O ودو نقطهٔ A و B واقع درصفحهٔ آن مفروض است . دایره‌ای رسم کنیدکه بر A و B بگذرد و بردایرهٔ (C) مماس باشد .



دایرهٔ کمکی (C') را رسم می‌کنیم که بر A و B بگذرد و با دایرهٔ (C) در نقاط K و S متقاطع باشد و فرض می‌کنیم (C'') دایرهٔ مطلوب باشدکه در I' بردایرهٔ (C) مماس باشد . I نقطهٔ تلاقی AB و KS مرکز اصلی سه دایرهٔ (C) و (C') و (C'') است و در نتیجه اگر از I بردایرهٔ (C) مماس‌کنیم نقطهٔ تماس همان I' است . مرکز دایرهٔ (C'') از یك‌طرف بر عمود منصف AB و ازطرف دیگر بر OI' قرار دارد .

بحث- اگرازI بتوان دو مماس بر (C) رسم‌کردمسئله دارای دو جواب متمایز است و این درصورتی‌است‌که I خارج دایرهٔ (C) باشد و برای این‌کار لازم وکافی است‌که دو نقطهٔ A و B هردو درخارج دایرهٔ (C) یاهردو در داخل آن واقع باشند.درحالتی‌که‌یکی‌ازدو نقطهٔ A و B درداخل (C) ودیگری در خارج آن‌واقع باشدمسئله جواب ندارد . اگر یکی از دونقطه بردایرهٔ (C) واقع باشدI هم برآن‌نقطه واقع شده و مسئله فقط یك جواب‌دارد .

تبصره- مسئلهٔ کلاسیکی‌که به مسئلهٔ ۵ منجر می‌شود تعیین فصل‌مشترك یك خط بایك بیضی یایك هذلولی است. بیضی است وقتی‌که A و B داخل (C) باشندوهذلولی است وقتی‌که A و B خارج (C) باشند . حالت خاص انطباق دوجواب در موردی است‌که‌خط بر بیضی‌یاهذلولی مماس باشد.

مسئلهٔ ۶- دو قطعه خط رسم کنیدکه مجموع آنها s و واسطهٔ هندسی آنها m معلوم است . نیمدایرهٔ C به قطر :

$$AB = s$$

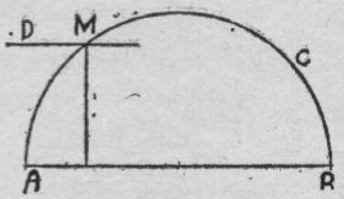
را رسم می‌کنیم و به فاصلهٔ m از AB خط D را موازی با آن رسم‌می‌کنیم و فرض می‌کنیم این خط نیمدایرهٔ C رادر M قطع‌کند .اگر I تصویر قائم M بر AB باشد داریم :

$$\overline{MI'} = \overline{AI \cdot IB} \quad \text{و} \quad AB = AI + IB$$

یعنی AI و BI جوابهای مسئله می‌باشند .

بحث- اولا ملاحظه می‌شودکه نظیر هرجواب ، جواب دیگری‌وجود داردکه قرینهٔ آن نسبت به‌عمود منصف AB می‌باشد. اگر D با C متقاطع باشد مسئله دوجواب متمایزدارد

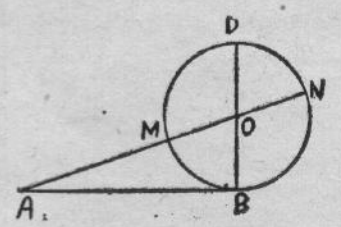
و این در صورتی‌است‌که $m<\frac{s}{2}$ باشد. وقتی‌که $m=\frac{s}{2}$ باشد دو جواب منطبق می‌باشند و اگر m از این مقدار تجاوزکند مسئله جواب‌ندارد .



تبصرهٔ ۱ ـ ازشکل این مسئله برمی‌آیدکه هرچه m مقدارکمتری داشته باشد اختلاف طولهای AI و BI بیشتر خواهد بود .ماکزیمم مقدار m وقتی‌است‌که AI و BI متساوی باشند و نتیجه می‌گیریم‌که : اگر دو مقدار دارای مجموع ثابتی باشند هرچه اختلاف آنهاکمتر باشد حاصل‌ضرب آنها بیشتر خواهد بود ، حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم‌است که آن‌دومقدار باهم برابر باشند و این مقدار ماکزیمم‌مجذور نصف مجموع آنها است . مثلا مساحت یك مستطیل با محیط ثابت وقتی‌حداکثر مقدار خود را دارا است‌که مستطیل مزبور مربع باشد .

تبصرهٔ ۲ـ رابطهٔ $m<\frac{S}{2}$ به صورت $S>2m$ نوشته شده و ازآن نتیجه می‌شودکه اگر حاصل ضرب دو مقدار متغیر ثابت باشد هرچه اختلاف آن دو مقدارکمتر باشدمجموع کمتری خواهند داشت‌و مجموع آنها وقتی می‌نیمم است‌که آن دو مقدار باهم برابر باشند ، این مقدار می‌نیمم دو برابر جذر حاصل‌ضرب آنها می‌باشد . مثلا اگر مستطیلی دارای مساحت ثابت باشد محیط آن‌وقتی می‌نیمم است‌که مستطیل مزبور مربع باشد .

مسئلهٔ۷ـ دو قطعه خط‌رسم کنید که‌اختلاف آنها d و واسطهٔ‌هندسی آنها m معلوم است . قطعه خط AB به‌طول m را رسم‌می‌کنیم . در B عمودی بر AB اخراج‌کرده روی آن

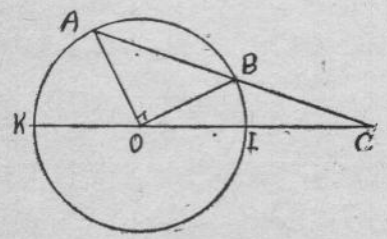


طول $BD=d$ را تعیین‌می‌کنیم و دایرهٔ (C) به مرکز O و به قطر BD رارسم‌می‌کنیم . خط AO که رسم شود دایرهٔ(C) را در M و N قطع می‌کند . AM و AN طولهای مطلوب هستند زیرا :

$$AN-AM=d \quad \text{و} \quad \overline{AB}^2=m^2=AM\cdot AN$$

تبصره ـ بر خلاف مسئلهٔ قبل ، این مسئله همواره‌دارای جواب‌است .

مسئلهٔ ۸ـ ضلع ده‌ضلعی منتظم محاطی‌وهمچنین ده‌ضلعی کوکبی‌محاط‌دردایرهٔ به‌شعاع R رارسم‌کنید دایره‌ای رسم‌می‌کنیم به‌شعاع $r=\frac{R}{2}$ و دو شعاع عمود برهم OA و OB از آن را رسم‌کرده AB را به اندازهٔ BC مساوی با AB امتداد می‌دهیم‌وقطر CIOK را رسم می‌کنیم CI ضلع ده ضلعی‌منتظم محدب و CK ضلع ده ضلعی منتظم‌کوکبی محاط در دایرهٔ به شعاع R می‌باشد.زیرا داریم :



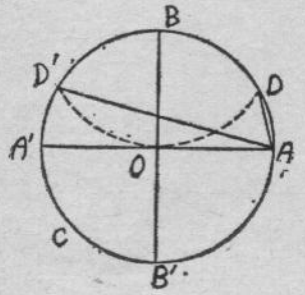
$$AB=r\sqrt{2}=\frac{R}{\sqrt{2}}=CB$$

و $CA=R\sqrt{2}$

$$CK-CI=2r=R$$

$$CI\cdot CK=CB\cdot CA=\frac{R}{\sqrt{2}}\cdot R\sqrt{2}=R^2$$

مسئلهٔ ۹ـ مطلوبست رسم‌ضلع‌دوازده ضلعی منتظم محدب و همچنین کوکبی‌محاط‌در دایرهٔ C به‌مرکز O و به شعاع R.



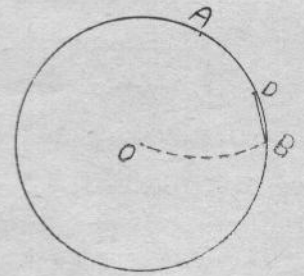
دو قطر عمود برهم AA' و BB' رارسم می‌کنیم . به مرکز B و به شعاع R کمانی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C را در D و D' قطع کند . AD ضلع دوازده ضلعی‌منتظم‌محدب و AD' ضلع دوازده ضلعی منتظم‌کوکبی است . زیرا داریم :

$$\widehat{AD}=\widehat{AB}-\widehat{BD}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$$

$$\widehat{ABD'}=\widehat{AB}+\widehat{BD'}=90^\circ+60^\circ=150^\circ$$

مسئلهٔ ۱۰ـ ضلع پانزده ضلعی منتظم محدب محاط در دایرهٔ C به مرکزO و به‌شعاع R را رسم‌کنید ، نقطهٔA راروی‌دایره‌انتخاب‌می‌کنیم. به‌مرکزA وبه‌شعاع R کمانی

رسم می‌کنیم که دایرهٔ C را در B قطع می‌کند، بعد از آن بر کمان AB



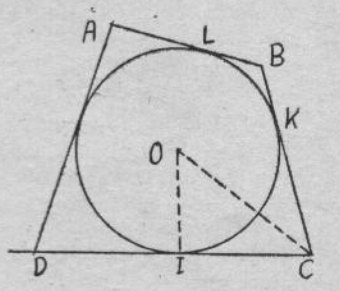
D را چنان انتخاب می‌کنیم که AD ضلع ده ضلعی منتظم محدب محاط در دایرهٔ C باشد. BD ضلع پانزده ضلعی محدب است زیرا :

$$\widehat{AB}-\widehat{AD}=۶۰^\circ-۳۶^\circ=۲۴^\circ$$

تمرینات

۱ـ چهارضلعی محیط بر دایرهٔ معلومی را رسم کنید بنا بر آنکه دو ضلع متوالی AB و BC و زاویهٔ BCD از آن معلوم باشد.

[در اینجا هفت شرط معلوم است ؛ چهار ضلعی باتقریب دوران حول مرکز O معلوم است یعنی اگر یك چهارضلعی باشرایط داده شده رسم شود از دوران آن حول نقطهٔ O می‌توان به تعداد نامحدود از آن رسم کرد.



نقطهٔ I را به دلخواه بر دایره انتخاب می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ OIC با معلوم بودن ضلع $OI=R$ و زاویهٔ حادهٔ :

$$OCI=\frac{BCD}{۲}$$

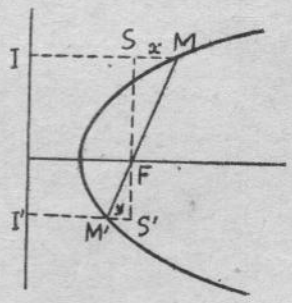
رسم می‌شود. با معلوم شدن نقطهٔ C چهار ضلعی به‌سادگی مشخص می‌شود.]

۲ـ مماسی بر بیضی مفروض چنان رسم کنید که مجموع فواصل کانونها از آن برابر با مقدار معلوم l باشد. [مماس مزبور بر دایرهٔ به‌مرکز O ، مرکز بیضی ، و به شعاع $\frac{l}{۲}$ نیز مماس است ، مسئله منجر به این می‌شود که دوطول x و y را چنان تعیین کنیم که مجموع آنها l و واسطهٔ هندسی آنها b باشد ، که b طول نصف قطر کوتاه بیضی است. بامعلوم شدن x و y مثلث قائم‌الزاویهٔ FF'S رسم می‌شود که زاویهٔ S از آن قائمه و طول SF' برابر با $|x-y|$ است. FS امتداد مماس را مشخص می‌کند.]

۳ـ مماسی بر بیضی مفروض چنان رسم کنید که تفاضل فواصل کانونها از آن برابر با مقدار معلوم d باشد.

[دو طول x و y یعنی فواصل کانونها از مماس با معلوم بودن تفاضل وواسطهٔ هندسی معین می‌شوند. بعد از آن کافی است که روی دایرهٔ اصلی نقاط M و N را چنان تعیین کنیم که از F و F' به‌ترتیب به فاصله‌های x و y واقع باشند.]

۴ـ در سهمی مفروض وتری چنان رسم کنید که از کانون گذشته و به‌طول معین l باشد.



[مطابق شکل داریم :

$$MF+FM'=l$$

$$p+x+p-y=l$$

$$x-y=l-۲p$$

از تشابه دو مثلث FSM و FS'M' نتیجه می‌شود :

$$\frac{x}{y}=\frac{FM}{FM'}=\frac{p+x}{p-y}$$

$$۲xy=p(x-y)$$

$$xy=\frac{p(l-۲p)}{۲}$$

مسئله به‌این منجر می‌شود که دوطول x و y را بامعلوم بودن تفاضل وواسطهٔ هندسی مشخص کنیم.]

۵ـ سهمی رسم کنید که از آن وتر کانونی عمود بر محور و محور معلوم باشد.

(کانون وخط هادی به‌سادگی تعیین می‌شوند)

۶ـ مماس مشترك دوسهمی را که در کانون مشترك هستند رسم کنید.

(تصویر کانون مشترك بر مماس باید بر مماسهای در رأس دو سهمی واقع باشد بنابراین بر I نقطهٔ تلاقی این دو مماس واقع است. مماس مطلوب خطی است که در I عمود بر IF اخراج شود.)

۷ـ دوسهمی درخط هادی مشترك هستند. نقاط تقاطع آنها را تعیین کنید.

[اگر M نقطهٔ مشترك دو سهمی باشد هریك از فواصل MF و MF' با فاصلهٔ M از خط هادی مشترك برابر است. بنابراین M برعمود منصف FF' قرار دارد و مسئله به این

منجر می‌شود که فصل‌مشترك این عمود منصف را با یکی از دو سهمی تعیین کنیم .]

۸ـ مثلث ABC را با معلوم بودن A' و B' و C' پای ارتفاعات آن رسم کنید .

(کافی است که نیمسازهای خارجی زوایای مثلث ارتفاعیهٔ A'B'C' را رسم کنیم .)

۹ـ مثلث ABC را رسم کنید که از آن M و N پای ارتفاعات وارد از رأسهای B و C معلوم بوده و علاوه بر آن B و C بر خط معلوم D واقع باشند .

[چهار ضلعی BMNC در دایرهٔ به‌قطر BC محاط است مرکز این دایره عبارتست از نقطهٔ تلاقی خط D با عمودمنصف قطعه خط MN . این دایره با معلوم شدن مرکز رسم شده نقاط B و C و از روی آن رأس A معین می‌شود .]

۱۰ـ مثلث ABC را رسم کنید که رأس A ، H مرکز ارتفاعیه و O مرکز دایرهٔ محیطی آن معلوم است .

[AH دایرهٔ محیطی را در A' قطع می‌کند و BC عمود منصف AH' می‌باشد .]

فصل سوم ـ ترسیماتی که به‌تعیین یك یا چند نقطه منجر می‌شود

۱ ـ ترسیماتی که به‌تعیین یك نقطه منجر می‌شود

حل تعداد زیادی از مسائل ترسیمی به‌تعیین یك نقطه منجر می‌شود . یك نقطهٔ M عموماً فصل مشترك دو مکان هندسی است. برای تعیین هریك از این دو مکان شرطی لازم است . ابتدا یکی از معلومات را نادیده می‌گیریم در این صورت مکان M یك منحنی خواهد بود مانند L. بعد معلومی را که از روی آن L بدست آمده کنار می‌گذاریم و از معلوم دیگر استفاده می‌کنیم، منحنی مکان دیگر ، L' معین می‌شود . اکنون فقط کافی است که فصل مشترك دو منحنی L و L' را تعیین کنیم .

مسئلهٔ ۱ـ نقطهٔ M را بیابید که از سه نقطهٔ معلوم A و B و C به‌یك فاصله باشد . یکی از معلومات ، مثلا نقطهٔ C را کنار می‌گذاریم ، نقطهٔ M که از دو نقطهٔ A و B به یك فاصله باشد بر خط D عمودمنصف AB واقع است . اکنون معلوم دیگری مثلا B را ، کنار می‌گذاریم . نقطهٔ M که از A و C به‌یك فاصله باشد روی خط D' عمودمنصف AC قرار دارد . برای تعیین M کافی است که فصل مشترك D و D' را تعیین کنیم.

بحث ـ اگر D و D' متوازی نباشند یعنی سه نقطهٔ A و B و C روی یك خط راست واقع نباشند مسئله یك جواب منحصر به‌فرد دارد. اما اگر A و B و C روی یك خط راست باشند D و D' متوازی بوده و مسئله جواب ندارد .

می‌دانیم دو نقطهٔ M که به این وسیله تعیین می‌شود همان مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد .

مسئلهٔ ۲ـ مثلث ABC را رسم کنید که از آن ضلع $BC = a$ ، ارتفاع $AH = h$ و میانهٔ $AM = m$ معلوم است .

قطعه خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم . فعلا مسئله از این قرار است که یك نقطهٔ A، رأس مثلث را پیدا کنیم. یك مکان A با استفاده از معلوم h پیدا می‌شود . مجموعهٔ نقاطی که از BC به فاصلهٔ h هستند دو خط D و D' است که هردو با BC موازی بوده به‌فاصلهٔ h از آن قرار دارند . مکان دیگر M که از روی معلوم m پیدا می‌شود مجموعهٔ نقاطی است که از M وسط BC به‌فاصلهٔ m قرار دارند که این مکان دایره‌ای است به‌مرکز M و به‌شعاع m. با رسم دو مکان مزبور و تعیین فصل‌مشترك آنها رأس A معین می‌شود .

بحث ـ باتوجه به‌اینکه BC محور تقارن جوابها است می‌توانیم عجالتاً بحث را به‌نصف مختصر کنیم :

یکی از دو خط موازی با BC مثلا D و نیمدایرهٔ به‌مرکز M و به‌شعاع m را در نظر می‌گیریم که هردو در یك طرف BC رسم شوند. اگر $h < m$ باشد خط و نیمدایره دو نقطهٔ تقاطع دارند و مسئله دارای دو جواب است که نسبت به‌عمودمنصف BC متقارن بوده و معکوساً بایکدیگر برابرند. اگر $h = m$ باشد دو جواب مزبور منطبق می‌شوند و مثلث حاصل متساوی‌الساقین است . در حالت $h > m$ مسئله جواب ندارد .

مسئلهٔ ۳ـ خط D و نقطهٔ A واقع بر آن و نقطهٔ O واقع در خارج آن مفروض است . روی D نقطهٔ M را چنان پیدا کنید که مجموع فواصل آن از A و O برابر با مقدار معلوم l باشد .

اگر نقطهٔ O را کنار بگذاریم وطول معلوم l را روی D ابتدا از A نقل کنیم نقطه‌ای مانند S بدست می‌آید. نقطهٔ M

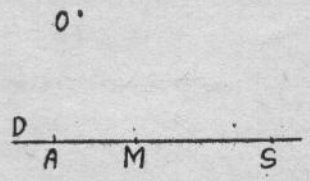
بر AS قرار داده و داریم :

$$MA+MS=l$$

و باید داشته باشیم :

$$MA+MO=l$$

بنابراین $MO=MS$ بوده و M برعمودمنصف OS واقع است. عمود منصف OS و خط D یکدیگررا در یك نقطه قطع می‌کنند و مسئله فقط یك جواب دارد.



تبصرهـ اگر OM، را به‌اندازهٔ $MT=MA$ امتداد دهیم داریم $OT=l$، اما دراین حالت T نقطهٔ ثابتی نیست و عمل مزبور مناسب نیست.

مسئلهٔ ۴ـ در دایرهٔ معلوم به‌مرکز O و به‌شعاع R قطر MN را چنان رسم کنید که از نقطهٔ معلوم A به‌زاویهٔ معین α دیده شود.

از اینکه O وسط MN است اگر A' قرینهٔ A رانسبت به O تعیین کنیم چهارضلعی $AMA'N$ متوازی‌الاضلاع است که یك قطرآن $A'A=2AO$ و زاویهٔ $MAN=\alpha$ از آن معلوم است وطول قطر $MN=2R$ نیز معلوم می‌باشد. زاویهٔ AMA' مکمل زاویهٔ MAN بوده و اندازهٔ آن‌معین می‌باشد. نقطهٔ M از یك طرف بردایرهٔ مفروض واقع است و از طرف دیگر برکمان درخور زاویهٔ مکمل زاویهٔ α مار بر A و A' قرار دارد. بارسم مکان مزبور وتعیین نقطهٔ تلاقی آن با دایرهٔ مفروض نقطهٔ M پیدا می‌شود.

مسئلهٔ ۵ـ قطعه خط AB ؛ نقطهٔ C روی آن وخط D که بر A می‌گذرد مفروض است. روی D نقطهٔ M راچنان تعیین کنید که ازآن دو قطعه خط AC و BC به‌یك زاویه‌دیده شوند. اگر C' مزدوج توافقی C نسبت به A و B باشد، نقطهٔ M فصل‌مشترك D بادایرهٔ به‌قطر CC' می‌باشد.

۲ ـ ترسیماتی که تعیین یك نقطه برای حل آنها کافی نیست

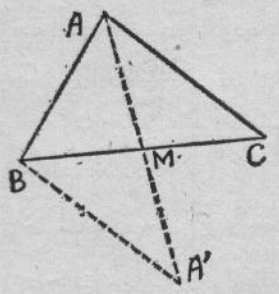
در بسیاری از مسائل ترسیمی معلومات آنچنان است که حل مسئله باتعیین یك نقطه انجام نمی‌گیرد. در این حالت ممکن‌است که شکل دیگری مرتبط باشکل اول پیدا کرد که بارسم آن، شکل مطلوب هم معین بشود.

مسئلهٔ ۱ـ مثلثی‌رسم کنید که ازآن طولهای دوضلع :

$$AC=b \text{ و } AB=c$$

و طول میانهٔ $AM=m$ معلوم است.

اگر میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش از طرف M امتداد دهیم تا A' بدست آید، مثلث MBA' بامثلث MAC برابر بوده و BM' با $AC=b$ برابر می‌باشد. درمثلث ABA' طول‌سه‌ضلع‌معلوم‌است:



$$AB=c \text{ و } BA'=b \text{ و } AA'=2m$$

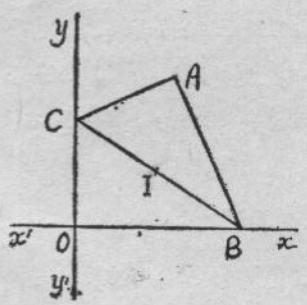
بارسم مثلث اخیر، مثلث ABC به‌سادگی تعیین می‌شود.

بحث ـ مثلث ABC وقتی بدست‌می‌آید که مثلث ABA' قابل رسم باشد. برای اینکه سه عدد معلوم بتوانند اندازه‌های ضلعهای مثلثی باشند لازم وکافی است که هریك از سه عدد مزبور از مجموع دوعدد دیگر کوچکتر باشد. بنابراین باید داشته باشیم :

$$c<b+2m \text{ و } b<c+2m \text{ و } 2m<b+c$$

مسئلهٔ ۲ـ دو خط عمود برهم $x'x$ و $y'y$ و یك نقطهٔ A مفروض‌است. یك نقطهٔ B بر $x'x$ و یك نقطهٔ C بر $y'y$ چنان تعیین کنید که BC به‌طول معلوم l بوده و زاویهٔ BAC قائمه باشد.

اگر O نقطهٔ تلاقی $x'x$ و $y'y$ و I وسط BC باشد چهار ضلعی OBAC محاط در دایرهٔ به قطر BC یعنی دایرهٔ به مرکز I و به شعاع $\frac{l}{2}$ می‌باشد. نقطهٔ I از برخورد دو دایرهٔ به شعاع $\frac{l}{2}$ یکی به مرکز O و دیگری به‌مرکز A



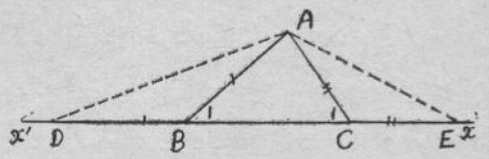
بدست می‌آید . همچنین می‌توان I را از تلاقی یکی از دو دایرهٔ مزبور باعمود منصف AO بدست آورد . بعد از تعیین I کافی است که به‌مرکز I و به‌شعاع $\frac{1}{2}$ دایرهٔ دیگری رسم‌کرد تا از تلاقی آن باخطوط مفروض نقاط B و C بدست آید .

مسئلهٔ ۳ـ چهار ضلعی محدب ABCD را رسم‌کنید که ازآن اندازه‌های ضلعهای AB و BC و CD و زاویه‌های متقابل B و D معلوم است .

قبلا می‌توان قسمتی ازشکل را رسم‌کرد : مثلث ABC بامعلوم بودن دوضلع AB و BC وزاویهٔ بین آنها B رسم می‌شود . رأس چهارم D از یك طرف بردایرهٔ به مرکز C و به‌شعاع CD و ازطرف دیگر برکمان درخور زاویهٔ D که بر A و C می‌گذرد قرار دارد . ازرسم دو مکان مزبور و تعیین نقطهٔ تلاقی آنها نقطهٔ D بدست می‌آید . (ازدوکمان درخور مار بر A و C فقط باید آنرا رسم‌کرد که با B در یك طرف AC واقع است) .

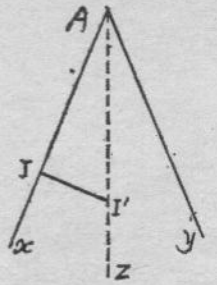
مسئلهٔ ۴ـ مثلثی رسم‌کنید که محیط آن $2p$ و دوزاویهٔ B و C ازآن معلوم است .

راه حل۱ـ مسئله راحل شده‌فرض‌کرده روی $x'x$ محمل BC قطعات $BD=AB$ و $CE=CA$ را جدامی‌کنیم .



داریم $BD=2p$ که معلوم می‌باشد. ازطرف دیگر زاویهٔ B_1 زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین ABD بوده دو برابر زاویهٔ D می‌باشد . زاویهٔ C_1 نیز دو برابر زاویهٔ E است . بنابراین اندازه‌های زاویه‌های D وE معلوم بوده مثلث ADE بامعلوم بودن دو زاویهٔ وضلع بین قابل رسم‌است که از روی‌آن نقطهٔ A معلوم شده و بعد بارسم عمودمنصفهای ضلعهای AE و AD نقاط B و C معین می‌شوند .

راه حل‌دوم ـ زاویهٔ xAy راکه مقدار آن معلوم است :

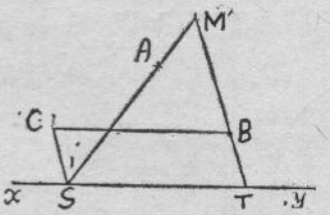


$[180^\circ-(B+C)]$

و Az نیمساز آنرا رسم می‌کنیم . روی Ax طول AI را برابر با p نصف محیط جداکرده در I عمودی بر Ax اخراج می‌کنیم تا Az را در I' قطع کند . I' مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC می‌باشد . بارسم دایرهٔ مزبور و باتوجه به‌اینکه مقدارزاویهٔ B معلوم است ضلع BC (مماسی براین دایره‌که با Ax زاویهٔ معین بسازد) رسم می‌شود .

مسئلهٔ ۵ـ دونقطهٔ A و B معلوم‌است . یك نقطهٔ M چنان بیابیدکه زاویهٔ AMB مقدار معلومی داشته واز تقاطع MA وMB باخط معلوم xy قطعه خط به‌طول معین $ST=l$ جدا شود .

مسئله را حل‌شده فرض‌می‌کنیم . از B طول $\overline{BC}$ را موازی و مساوی با $\overline{TS}$ رسم می‌کنیم . نقطهٔ C نقطهٔ ثابتی‌است و چهار ضلعی TBCS متوازی الاضلاع بوده خواهیم داشت :



$SC=TB$

و دو زاویهٔ S_1 و M نیز با یکدیگر برابر هستند . نقطهٔ S فصل مشترك xy با مکان هندسی نقاطی‌است که ازآنها CA به زاویهٔ معین M دیده می‌شوند ، باتعیین S نقطهٔ M به‌سادگی معین می‌شود .

تبصره ـ در استفادهٔاز مجموعهٔمعلومات مسئله بایدروشی را انتخاب‌کرد تاهرچه ممکن است اجزاء ثابت بیشتری‌بدست بیاید . مسئلهٔ قبل به‌این ترتیب به نتیجه رسید که یك نقطهٔ جدید و ثابت C ویك زاویهٔ جدید و ثابت S بدست آمدکه رأس آن روی خط مفروض قرار داشت .

راه حل مسئلهٔ قبل با جابجاکردن نقاط A و B فرق نمی‌کند . به‌این معنی‌که می‌توان از A مساوی و موازی با $\overline{ST}$ رسم کرد تانقطهٔ ثابت C' بدست آید و از روی آن نقطهٔ T و بعد نقطهٔ M را تعیین‌کرد .

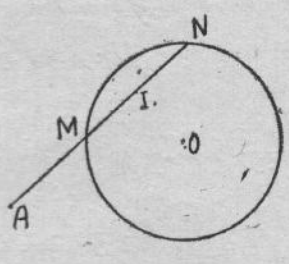
۳- ترسیم بعضی از خطوط

یك خط با دو نقطه یا با یك نقطه و امتداد معین می‌شود. یك نقطه و امتداد درحقیقت همان دو نقطه است که یکی از آنها در بینهایت واقع شده است .

برای رسم خط مطلوبی که بریك نقطهٔ معلوم بگذرد کافی است که نقطهٔ دیگری از آن‌را معلوم کرد. تقریباً در بیشتر موارد تعیین یك خط منوط به‌تعیین یك نقطه می‌شود . برای تعیین این یك نقطه باید مکانهایی رسم‌شود که تعیین آنها هرچه بیشتر ممکن است ساده‌تر باشد . همچنین ممکن است که یك خط با امتدادش معین بشود .

برای رسم خطی که امتداد آن معلوم است فقط کافی است که یك نقطه از آنرا معین کرد .

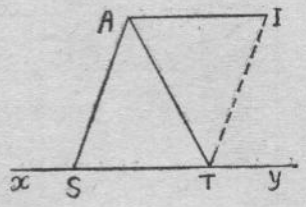
مسئلهٔ ۱ـ نقطهٔ A و دایرهٔ C به مرکز O مفروض است . از A قاطعی مانند D رسم کنید که از دایرهٔ C به‌مرکز O و به‌شعاع R وتر MN به طول معین ۲a راجدا کند .



A یك نقطه از D معلوم است وکافی است نقطهٔ دیگری از آنرا تعیین کنیم. می‌توانیم یکی از نقاط تلاقی D و C یعنی یا M یا N راتعیین کنیم یك مکان این نقطه یعنی دایرهٔ C معلوم است اما تعیین مکان دوم آن تااندازه‌ای بغرنج است . نقطهٔ I وسط MN بردایرهٔ "C به‌قطر AO قرار دارد . اگر A را به I نقطهٔ دلخواهی از "C وصل کرده بر AI طول IM = a را جدا کنیم وقتی I بر "C تغییر کند مکان M حالت خاصی ازمنحنی موسوم به کنکوئید دایره است که حلزون پاسکال نامیده می‌شود ورسم این مکان به‌سادگی میسر نیست . همین اشکال هم برای تعیین N وجود دارد .

اما ملاحظه می‌کنیم که اگر I وسط MN تعیین شود قاطع D مشخص خواهد شد . I از یك طرف بردایرهٔ "C و از طرف دیگر بردایرهٔ به‌مرکز O و به‌شعاع $\sqrt{R^2-l^2}$ قرار دارد و به‌سادگی تعیین می‌شود . (قبلا در مقدمهٔ کتاب راه حل این مسئله را شرح داده‌ایم).

مسئلهٔ ۲ـ نقطهٔ A و خط xy مفروض است . از A دو خط چنان رسم کنید که بایکدیگر زاویهٔ معلوم α ساخته‌وروی xy قطعه‌ای به‌طول معلوم l جدا کنند .



مسئله راحل‌شده فرض می‌کنیم . $\overline{AI}$ را موازی و مساوی با ST رسم می‌کنیم . I نقطهٔ ثابتی است . چهار ضلعی ASTI متوازی‌الاضلاع است . SA ؛ TI موازی است و زاویهٔ ATI بازاویهٔ $SAT=\alpha$ برابر می‌باشد. نقطهٔ T فصل مشترك xy با مکان هندسی نقاطی است که ازآنها قطعه‌خط AI به‌زاویهٔ ثابت α دیده می‌شود . پس از تعیین T نقطهٔ S به سادگی بدست می‌آید.

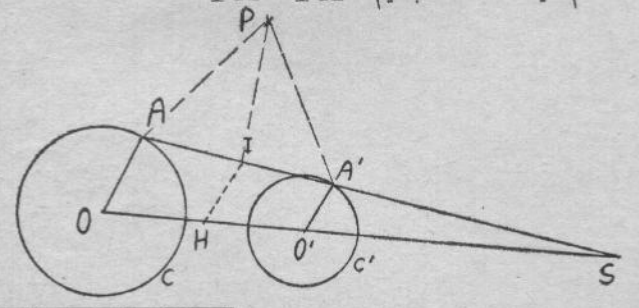
تبصره ـ این مسئله رامی‌توان حالت خاصی از مسئلهٔ ۵ قسمت قبل دانست .

مسئلهٔ ۳ـ دو خط متوازی D و D′ و دو نقطهٔ A و B مفروض است . از B قاطع "D را چنان رسم کنید که D و D′ را در M و N قطع کند بقسمی که M و N از A به یك فاصله باشند .

نقطهٔ I وسط MN را تعیین می‌کنیم . این نقطه از D و D′ به‌یك فاصله‌است و یك مکان آن خطی است موازی ومتساوی‌الفاصله از D و D′ : ازطرف دیگر از تساوی AM = AN نتیجه می‌شود که AI بر MN عمود باشد و مکان دیگر I دایره‌ای است به قطر AB و از این رو نقطهٔ I بدست می‌آید.

مسئله ممکن است دوجواب یایك جواب داشته یا اصلا جواب نداشته باشد .

مسئلهٔ ۴ـ دو دایرهٔ C و C′ به مرکزهای O و O′ و به‌شعاعهای R و R′ و یك نقطهٔ P واقع درخارج هریك از آن دو مفروض است . دو شعاع متوازی OA و O′A′ چنان رسم کنید که داشته باشیم PA = PA′



مطلوب مسئله‌رسم‌خط AA' است . اگر S نقطهٔ تلاقی AA' با OO' باشد داریم :

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{R}{R'}$$

ونتیجه می‌شود S همان مرکز تجانس دودایره بوده نقطهٔ‌ثابت و مشخصی می‌باشد . ازطرف دیگر اگر I وسط AA' باشد. برای اینکه $PA=PA'$ باشد لازم وکافی است‌که PI بر AA' عمودباشد . اگر I را به H وسط OO' وصل‌کنیم HI با OA و $O'A$ موازی بوده‌ودرحالتی AO و $O'A'$ هم‌جهت باشند داریم :

$$IH=\frac{OA+O'A'}{۲}=\frac{R+R'}{۲}$$

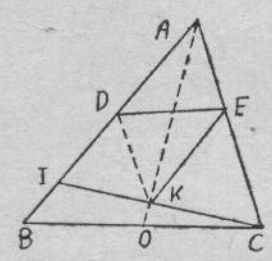
و اگر OA و $O'A'$ مختلف‌الجهت باشند داریم :

$$IH=\frac{|OA-O'A'|}{۲}=\frac{|R-R'|}{۲}$$

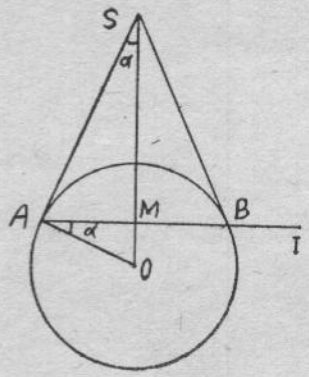
I که ازیك‌طرف بردایرهٔ به قطر PS وازطرف‌دیگر بردایرهٔ‌به مرکز H و به‌شعاع IH قراردارد بارسم این‌دو دایره مشخص می‌شود وپس از آن رسم خط IS نقاط A و A' را بدست می‌دهد .

مسئلهٔ ۵ـ مثلث ABC مفروض است . خطی موازی با BC چنان‌رسم‌کنید که AB را در D و AC را در E قطع کرده‌وداشته باشیم $AD=CE$.

اگر $\overline{EK}$ را موازی‌ومساوی‌وهم جهت $\overline{AD}$ رسم کنیم‌چهارضلعی $AEKD$ متوازی الاضلاع است‌ودر نتیجه اگر K تعیین شود مسئله حل شده است زیرا کافی‌است از K به موازات AB و AC رسم کرد تا D E بدست آیند.مثلث CEK متساوی‌الساقین است امتداد CK با AB در I متلاقی‌می‌شود بقسمی که $AI=AC$ می‌باشد.قطر AK از متوازی الاضلاع $AEKD$ از وسط DE ودر نتیجه از O وسط BC می‌گذرد. بنابراین K از تلاقی دو خط AO و CI بدست می‌آید .



مسئلهٔ ۶ ـ بر دایرهٔ مفروض C به‌مرکز O وبه‌شعاع R دو مماس چنان رسم‌کنیدکه بایکدیگر زاویهٔ معلوم ۲α ساخته و وتر D که نقاط تماس را بـه هم‌وصل می‌کند از نقطهٔ معلوم I بگذرد .



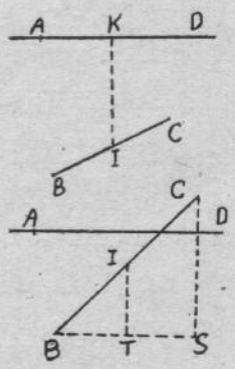
اگر وتـر D مشخص شود مسئله حل شده است . از این‌وتر یك نقطهٔ I معلوم است وکافی است نقطهٔ‌دیگری از آنـرا تعیین‌کنیم . اگر A و B نقـاط تماس مماسهای مطلوب و M وسط AB باشد OM بر AB عمود است و در نتیجه M بردایرهٔ C' به قطر OI قراردارد . از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویـهٔ OMA داریم :

$$OM=OA\sin OAM=R\sin\alpha=\text{ثابت}$$

M بر دایرهٔ C'' به مرکز Oو به‌شعاع ثابت اخیر قرار دارد رسم دایره‌های C' و C'' نقطهٔ M را بدست می‌دهد .

مسئلهٔ ۷ـ سه نقطهٔ A و B و C غیر واقع بریك خط راست مفـروض است . از A خط D را چنـان رسم‌کنید کـه مجموع فواصل B و C از D برابر باطول‌معین l باشد .

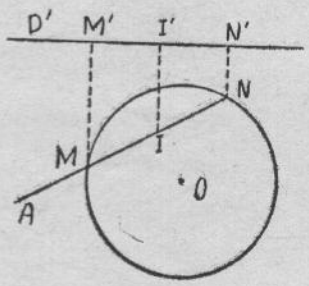
حالت اول ـ خط D باقطعه خط BC متقاطع نبـاشد . اگر K تصویرقائم I وسط BC بر D باشد ، K از یك طرف بر دایرهٔ C' به‌مرکز I وبـه شعـاع $IK=\frac{l}{۲}$ واز طرف دیگربر دایرهٔ C'' به‌قطر AI قرار داشته با رسم این دودایره مشخص می‌شود وازآنجا خط D بدست می‌آید .



حالت دوم ـ D قطعـه خط BC را قطع کند . اگر از B موازی با D واز C عمود بر D رسم کنیم تایکدیگر را در S قطع‌کنند و T وسط BS را تعیین‌کنیم نقطهٔ T از یك طرف بردایرهٔ به قطر BI و ازطرف دیگر بر دایرهٔ به مرکز I و به‌شعاع $\frac{CS}{۲}=\frac{l}{۲}$ واقع است. بـا رسم این دودایـره نقطهٔ T واز روی آن امتداد D وخود D مشخص می‌شود .

مسئلهٔ ۸ـ از نقطهٔ مفروض A خطی چنان رسم‌کنید که دایرهٔ مفروضی را در دو نقطهٔ M و N قطع کند بقسمی کـه مجموع فواصل این‌دونقطه ازخط معلوم D' برابر با طول‌معلوم l باشد. باتعیین I وسط MN قاطع مطلوب معین می‌شود . یك

مکان I دایرهٔ به قطر AO است و مکان دیگر آن خطی است موازی با D′ و به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ از آن .



تمرینات

۱ـ نقطه‌ای تعیین کنید که ازسه خط مفروض به یك فاصله باشد .

۲ـ دایره‌ای باشعاع معلوم رسم کنید که بردو نقطهٔ مفروض بگذرد .

۳ـ دایره‌ای رسم کنید که برخط مفروضی در نقطهٔ معین مماس باشد و از نقطهٔ معین دیگر بگذرد .

۴ـ روی دایرهٔ C به مرکز O دو نقطهٔ A و B مفروض است . از A و B به‌ترتیب دو وتر متوازی AM و BN را چنان رسم کنید که مجموع طولهای آنها برابر با مقدارمعلوم 2l باشد .

[اگر C′ وسط AB باشد کافی است که K وسط MN را تعیین کرد . یك مکان K دایره‌ای است به‌مرکز C′ وبه‌شعاع l و مکان دیگر آن دایره‌ای است به‌مرکز O وبه شعاع OC′.]

۵ـ همان مسئلهٔ قبل وقتی‌که اختلاف طولهای AM و BN معلوم باشد .

[اگر I تصویر B روی AM باشد مثلث قائم‌الزاویهٔ BAI ودر نتیجه زاویهٔ A معین خواهدشد.]

۶ـ سه دایرهٔ متساوی مفروض است . نقطه‌ای تعیین‌کنید که مماسهای مرسوم ازاین نقطه برسه دایره دارای طولهای برابر باشند .

(نقطهٔ مزبور مرکز اصلی سه دایره است که در حالت تساوی سه دایره بر مرکز دایرهٔ مار بر سه مرکز منطبق می‌باشد .)

۷ـ دایره‌ای رسم کنید که بردایرهٔ مفروض C به مرکز O و به‌شعاع R وبر خط مفروض D در نقطهٔ معین مماس باشد .

[A را در A′ برخط D′ که به‌فاصلهٔ R موازی با D رسم‌می‌شودتصویر کنید و O′ مرکز دایرهٔ مطلوب عبارت‌خواهد شداز نقطهٔ تلاقی‌عمودمرسوم از A بر D باعمود منصف A′O.]

۸ـ برنقطهٔ مفروض O دایره‌ای به شعاع R بقسمی‌رسم کنیدکه مماس مرسوم از A′ براین دایره برابر باطول معین l باشد .

۹ـ مثلث ABC را رسم کنیدکه ازآن طول ضلع AB=c و طول ارتفاع h_b و طول‌میانهٔ m_a معلوم است .

(مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB بامعلوم بودن وتر ویك ضلع قابل رسم است . اگر B′ قرینهٔ B نسبت به A باشدیك‌مکان C خط AH ومکان دیگر آن دایرهٔ به مرکز B′ وبه شعاع 2m است .)

۱۰ـ مثلث ABC رارسم کنیدکه از آن طول ضلع a، زاویهٔ A و نقطهٔ D پای نیمساز زاویهٔ داخلی A معلوم‌می‌باشد.

(ابتدا BC=a را رسم کنید . یك مکان A مکان هندسی نقاطی است که‌از آنها BC به زاویهٔ معین A دیده‌می‌شود .مکان دیگر A دایرهٔ به‌قطر DD′ است که D′ مزدوج توافقی D نسبت به B و C می‌باشد .)

۱۱ـ از نقطهٔ مفروض A قاطعی چنان رسم کنیدکه D′ وتر حاصل‌ازآن‌دردایرهٔ‌مفروض C توسط‌وترمفروض D به‌دوقسمت متساوی تقسیم شود .

(نقطهٔ S وسط D′ نقطهٔ تلاقی D بادایرهٔ به‌قطر AO است .)

۱۲ـ دوخط‌متوازی D و D′ ودونقطهٔ A و B مفروض است . از A قاطع D″ راچنان رسم کنیدکه عمود مرسوم ازB بر D″ آنرا در I قطع کند بقسمی‌که MI : IN=K باشد. K عدد معلوم و M و N نقاط تلاقی D″ با D و D′ می‌باشد.

(اولین مکان I خطی است موازی با D که نسبت فواصل آن از D و D′ با K برابر باشد . مکان دیگر I دایرهٔ به قطر BA است .)

۱۳ـ در دایرهٔ مفروض C مثلث قائم‌الزاویهٔ BAE را چنان محاط کنیدکه اندازهٔ یك زاویهٔ حاده و I یك نقطهٔ‌یکی از ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ آن معلوم باشد .

[B نقطهٔ تلاقی دایرهٔ C با مکان هندسی نقاطی است،که ازآنها OI به زاویهٔ معین دیده می‌شود.]

۱۴ـ همان مسئله وقتی‌که I متعلق به وتر مثلث باشد

(دراینجا هیچ اشکالی وجود ندارد ، وترمثلث از O و I می‌گذرد . در حالتی‌که I بر O منطبق باشد مثلث از لحاظ اندازه معین اما ازنظر وضع نامعین می‌باشد) .

۱۵ـ خط D را چنان رسم‌کنیدکه فواصل آن‌ازدو نقطهٔ مفروض P و Q به ترتیب برابر با a و b باشد .

(D مماس مشترك دو دایرهٔ به مرکزهای P و Q و به شعاعهای a و b می‌باشد.)

۱۶- مثلث ABC را رسم کنید که از آن زاویهٔ B و ارتفاع $AH=h$ ومیانهٔ $AM=m$ معلوم است.

(مثلث AMH قابل رسم است. B نقطهٔ تلاقی MH با خطی است که از A گذشته با AH زاویهٔ متمم زاویهٔ B می‌سازد.)

۱۷- نقطهٔ A وخط D مفروض است. دایره‌ای به‌شعاع معلوم R رسم کنید که بر A بگذرد واز D وتری به‌طول معلوم 2l جدا کند.

(یك مکان O مرکز دایره، دایره‌ای است به مرکز A و به‌شعاع R ومکان دوم آن خطی است موازی با D وبه‌فاصلهٔ $\sqrt{R^2-l^2}$ از آن.)

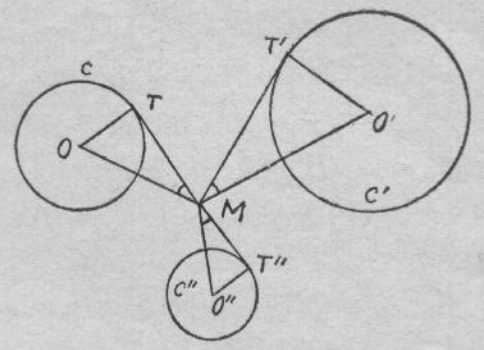
۱۸- بردو نقطهٔ مفروض A و B دوخط چنان رسم کنید که با یکدیگر زاویهٔ معین ساخته و از دایرهٔ مفروض C به مرکز O وبه‌شعاع R دو وتر به‌طولهای برابر جدا کنند.

(اگر M نقطهٔ تلاقی دوقاطع باشد می‌توان C′ دایرهٔ محیطی مثلث ABM را رسم کرد. اگر I وسط کمان AB ازاین دایره باشد نیمساز D زاویهٔ M از I وهمچنین از O می‌گذرد. خواننده باید حالات مختلف را درنظرگرفته بحث مسئله را انجام دهد.)

۱۹- نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که ازآن دو دایرهٔ مفروض C و C′ به مرکزهای O و O′ به زاویه‌های معلوم دیده شوند.

(M نقطهٔ تلاقی دو دایره است که به ترتیب بادایره‌های مفروض متحدالمرکز می‌باشند.)

۲۰- نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که ازآن سه دایرهٔ مفروض C و C′ و C″ به مرکزهای O و O′ و O″ به شعاعهای R و R′ و R″ به زاویه‌های برابر دیده شوند.



[ازمثلثهای متشابه MTO و MT′O′ نتیجه می‌شود:

$$\frac{MO}{MO'}=\frac{R}{R'}=k$$

نقطهٔ M روی مکان هندسی نقاطی است که نسبت فواصل آنها از O و O′ برابر با k است. همچنین M روی مکان هندسی نقاطی است که نسبت فواصل آنها از O و O″ برابر با $\frac{R}{R''}=k'$ می‌باشد.]

۲۱- دایرهٔ C″ را چنان رسم کنید که محیط هریك از دو دایرهٔ مفروض C و C′ به‌مرکزهای O و O′ وبه شعاعهای R و R′ را نصف کند وازنقطهٔ معلوم A بگذرد.

(اگر O″ مرکز دایرهٔ مطلوب و r شعاع آن باشد داریم:

$$\overline{O''O}^2+R^2=r^2 \quad \text{و} \quad \overline{O''O'}^2+R'^2=r^2$$

$$\overline{O''O'}^2-\overline{O''O}^2=R^2-R'^2$$

O″ روی مکان هندسی نقاطی واقع است که اختلاف مربعات فواصل آنها ازدو نقطهٔ ثابت O و O′ برابر با مقدار ثابت $R^2-R'^2$ می‌باشد. این مکان خطی است مانند D که قرینهٔ محور اصلی دو دایرهٔ C و C′ نسبت به‌عمودمنصف OO′ می‌باشد. همچنین O″ بر خط D′ واقع است که بر OA عمود بوده قرینهٔ محور اصلی دایرهٔ C ونقطهٔ A نسبت به‌عمود منصف OA می‌باشد.)

۲۲- دایره‌ای رسم کنید که محیط هریك از سه دایرهٔ مفروضی را نصف کند.

۲۳- دایرهٔ Γ را چنان رسم کنید که بر هر یك از سه دایرهٔ مفروض C و C′ و C″ به مرکز های O و O′ و O″ عمود باشد.

(I مرکز Γ همان مرکز اصلی سه‌دایره می‌باشد.)

۲۴- دایره‌ای چنان رسم کنید که اگرازسه‌نقطهٔ مفروض A و B و E مماسهایی برآن رسم کنیم طولهای سه مماس به‌ترتیب با مقادیر معلوم l و l′ و l″ برابر باشد.

[اگر O مرکز و r شعاع دایرهٔ مطلوب باشد روابط زیر را داریم:

$$l^2+r^2=\overline{OA}^2 \quad \text{و} \quad l'^2+r^2=\overline{OB}^2$$

$$l''^2+r^2=\overline{OE}^2$$

و نتیجه می‌شود که:

$$\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=l^2-l'^2 \qquad (1)$$

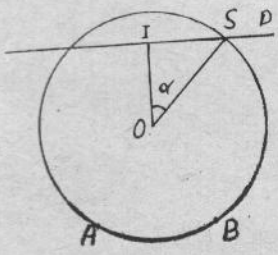
$$\overline{OA}^2-\overline{OE}^2=l^2-l''^2 \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که O نقطهٔ تلاقی دو

خط است که هر کدام مکان هندسی نقاطی‌است که تفاضل‌مربعات فواصل‌آنها از (B و A) و (E و A) برابر با مقدار ثابت باشد .]

۲۵ـ دونقطهٔ A و B ویك خط D مفروض است . بر A و B دایره‌ای بگذرانیدکه خطDرا به زاویهٔمعین قطع کند

[در مثلث قائم‌الزاویهٔ OIS داریم :



$$OI = OS\cos\alpha = OB\cos\alpha$$

نتیجه می‌شود :

$$\frac{OB}{OI} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

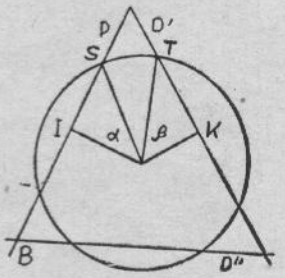
O روی یك هذلولی واقع است که B یك کانون و D خط هادی نظیر این کانون می‌باشد . مکان دیگر O عمودمنصف AB است ومسئله عبارت می‌شود ازتعیین فصل مشترك یك خط با یك هذلولی .]

۲۶ـ دایره‌ای رسم کنیدکه بردوخط مفروض D و D' وهمچنین بردایرهٔ مفروض C به‌مرکزO وبه شعاع r مماس باشد

[D_1 را به‌فاصلهٔ r موازی با D رسم می‌کنیم . O' مرکز دایرهٔ مطلوب از O و D_1 به یك فاصله است و در ضمن بر نیمساز زاویهٔ دوخط قرار دارد . مسئله عبارت‌می‌شودازتعیین فصل‌مشترك یك خط با یك سهمی .]

۲۷ـ دایرهٔ C را چنان رسم کنیدکه با سه‌خط مفروض D و D' و D'' زاویه‌های معین α و β و γ بسازد .

[اگر I و K تصویرهای O مرکز دایرهٔ مطلوب بر D و D' و R شعاع این دایره باشد داریم :



$$\frac{OI}{OK} = \frac{R\cos\alpha}{R\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = k$$

O روی مکان نقاطی واقع است که نسبت فواصل آنها از دوخط D و D' برابر مقدارثابت k است. این مکان‌مجموعهٔ دوخط است . همچنین O روی مکان نقاطی واقع است که نسبت فواصل آنها از D و D'' برابربا مقدارثابت k' است.]

۲۸ـ مثلث ABC را رسم کنیدکه ازآن اندازهٔ ووضع زاویهٔ A ، امتداد و اندازهٔ ضلع BC=a ویك نقطهٔ M از دایرهٔ محیطی‌آن معلوم است .

(بنابه قضیهٔ سمسون تصویرهای M برسه‌ضلع روی‌یك‌خط راست واقع‌اند . به‌این ترتیب یك نقطه از BC و درنتیجه‌ضلع BC معین می‌شود .)

۲۹ـ ازمثلث ABC زاویهٔ A هم از لحاظ اندازه و هم ازلحاظ وضع معین است و S قطب ضلع BC نسبت به‌دایرهٔ محیطی معلوم می‌باشد ، مثلث را رسم کنید .

۳۰ـ مثلث ABC مفروض است . نقطهٔ M را روی AB ونقطهٔ N را روی AC چنان‌انتخاب کنیدکه BM=CN بوده و MN طول معلوم l را داشته باشد .

[با رسم $\overline{NK}$ موازی ومساوی و هم جهت با $\overline{MB}$ مثلث KNC که بدست می‌آید متساوی‌الساقین است . نقطهٔ K از یك‌طرف‌روی خط CI قراردارد‌که I بر AB بوده‌و AI=AC می‌باشد ، و ازطرف دیگر درمتوازی‌الاضلاع BMNK داریم BK=MN=l ونقطهٔ K بر دایرهٔ به مرکز B وبه‌شعاع l واقع می‌باشد.]

۳۱ـ همان مسئله با این تفاوت که MN به جای طول معین در امتداد معلومی باشد .

(راه‌حل مشابه است فقط مکان دوم K خطی است‌که از B در امتداد معلوم رسم می‌شود.)

۳۲ـ دو دایرهٔ متحدالمرکز C و C' به مرکز O و یك‌نقطهٔ A مفروض است . از A قاطعی رسم کنیدکه یکی از دو دایره را در B و دیگری را در C قطع کند بقسمی‌که BC به‌طول معین l باشد .

(اندازه‌های سه‌ضلع مثلث OBC و رأس O ازآن‌معلوم است ، رأس C نقطهٔ تلاقی یکی ازدوایر بامکان هندسی نقاطی است‌که از آنها قطعه خط OA بـه زاویهٔ معین OCA دیده می‌شود .)

۳۳ـ دایرهٔ C ودونقطهٔ A و B واقع برآن مفروض است . براین دایره نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که مجموع فواصل M از A و B برابر با طول معین l باشد.

[با امتداد دادن AM تا B' که AB'=l باشد یك مکان B' دایرهٔ C' به مرکز A و به‌شعاع l است ومکان دوم آن مکان هندسی نقاطی است که از آنها قطعهٔ AB به زاویهٔ برابر با یك‌چهارم‌کمان AB دیده شود.]

۳۴ـ دایرهٔ C به شعاع معلوم R را چنان‌رسم‌کنیدکه نسبت به آن نقطهٔ مفروض I و خط مفروض D قطب و قطبی یکدیگر باشند .

[اگر O مرکز دایرهٔ مطلوب و S تصویر O روی D و K وسط IS باشد داریم :

$$OI \cdot OS = R^2$$

$$(OK+KS)(OK-KS) = \overline{OK}^2 - \overline{KS}^2 = R^2$$

$$[\overline{OK}^2 = R^2 + \overline{KS}^2 =$$ ثابت

۳۵- بیضی رسم کنید که F و F' کانونها و D مماس بر آن معلوم است .

(کافی است که I قرینهٔ F را نسبت به D تعیین کرد . I نقطه‌ای از دایرهٔ هادی نظیر کانون F' است که این دایره و در نتیجه بیضی مشخص می‌شود .)

۳۶- بیضی رسم کنید که یك کانون F ، و سه مماس بر آن معلوم است .

۳۷- بیضی رسم کنید که یك کانون F ، دو مماس بر آن و نقطهٔ تماس یکی از این دو مماس معلوم است .

۳۸- بیضی رسم کنید که کانون F ، مماس D و رأس A از قطر اطول معلوم است.

۳۹- بیضی رسم کنید که یك کانون F یك مماس D و رأس B از قطر اقصر معلوم است .

۴۰- بیضی E را رسم کنید که یك نقطهٔ M از آن و قطر اطول AA' از لحاظ اندازه و از لحاظ وضع معلوم می‌باشد .

(M' قرینهٔ M را نسبت به O وسط AA' تعیین کنید نقطهٔ F' از تلاقی AA' با بیضی E' به مرکز O و به کانونهای M و M' بدست می‌آید) .

۴۱- بیضی رسم کنید که از آن ۲a و ۲b اندازه‌های دو قطر اطول و اقصر ، یك نقطهٔ M و یك کانون F معلوم است.

(یك مکان F' دایرهٔ به مرکز F و به شعاع :

$$2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$$

و مکان دیگر آن دایره‌ای است به مرکز M و به شعاع $2a - MF$.)

۴۲- بیضی رسم کنید که از آن کانون F ، یك نقطهٔ M و دو مماس D و D' معلوم است .

۴۳- بیضی رسم کنید که از آن یك نقطهٔ M ، یك کانون F و رأس B از قطر اقصر معلوم است.

۴۴- بیضی رسم کنید که رأسهای A و A' از قطر اطول و یك مماس D از آن معلوم است .

(نقاط تلاقی دایرهٔ اصلی با D تصاویر کانونها روی D می‌باشد)

۴۵- بیضی رسم کنید که O مرکز آن مماسهای D و D' از آن و ۲a طول قطر اطول معلوم است .

۴۶- بیضی رسم کنید که یك کانون F دو نقطهٔ M و M' و ۲a طول قطر اطول معلوم است .

۴۷- هذلولی رسم کنید که کانونها و یك مماس بر آن معلوم است .

۴۸- هذلولی رسم کنید که از آن یك کانون و سه مماس معلوم است .

۴۹- هذلولی رسم کنید که یك کانون ، دو مماس و نقطهٔ تماس یکی از این مماسها معلوم است .

۵۰- هذلولی رسم کنید که کانونها و امتداد یك مجانب آن معلوم است .

۵۱- هذلولی رسم کنید که یك کانون ، یك مجانب و ۲a طول قطر قاطع از آن معلوم است .

۵۲- هذلولی رسم کنید که یك مماس ، یك مجانب و یك کانون آن معلوم است .

۵۳- سهمی رسم کنید که خط هادی و دو نقطه از آن معلوم است .

۵۴- سهمی رسم کنید که مماس در رأس و دو مماس دیگر آن معلوم است .

۵۵- سهمی رسم کنید که رأس و نقطه‌ای که مماس در آن با محور و خط هادی زاویه‌های متساوی می‌سازد معلوم است.

(یك مکان F دایرهٔ به قطر AM است و مکان دیگر آن دایره‌ای است به قطر I'I" که I' و I" نقاطی هستند که AM را به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنند .)

۵۶- یك منحنی مقطع مخروطی را مشخص کنید که یك خط هادی D و سه نقطهٔ متمایز A و B و C از آن معلوم است ،

(اگر A' و B' و C' تصاویر سه نقطهٔ مزبور روی D باشد داریم :

$$\frac{AF}{AA'} = \frac{BF}{BB'} = \frac{CF}{CC'} = e$$

و نسبتهای زیر معین هستند :

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AA'}{BB'} \quad \text{و} \quad \frac{BF}{CF} = \frac{BB'}{CC'}$$

و نتیجه می‌شود که F محل تقاطع دو دایره است که مرکزهای آنها به ترتیب روی AB و BC واقع است .)

حل مسائل نمونه

خط منصف محیط و مساحت چهار ضلعی

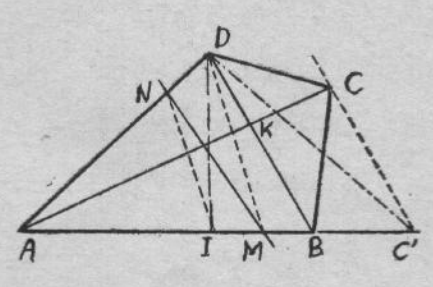
از مجلهٔ : Mathematics Magazine
طرح از : Kaidy Tan ، چین-حل از: حسین دمیر ، آنکارا

ترجمهٔ : حسینعلی شاهورانی
دانشجوی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

۴۹/۱- خطی رسم کنید که محیط و مساحت چهارضلعی مفروض را نصف کند .

برحسب اینکه خط مطلوب دوضلع مجاور یا دوضلع مقابل را قطع کند دوحالت در نظر می‌گیریم . حالتی هم وجود دارد که خط از رأس چهارضلعی بگذرد .

حالت اول- چهارضلعی ABCD را درنظر می‌گیریم اولا خطی رسم می‌کنیم که مساحت آنرا نصف کند ثانیاً شرطی را تعیین می‌کنیم که خط مزبور محیط چهارضلعی را نیز نصف کند.



الف - از C موازی با BD رسم می‌کنیم تاامتداد AB را در C' قطع کند . دومثلث BC'D و BCD با یکدیگر معادل هستند و نتیجه می‌شود که مثلث ADC' با چهارضلعی ABCD معادل می‌باشد . نقطهٔ I وسط AC' ویك نقطهٔ M از AB را درنظر می‌گیریم . از I موازی با DM رسم می‌کنیم تا AD را در N قطع کند . دومثلث IMN و IDN معادل‌اند و در نتیجه مثلث AMN با مثلث AID معادل می‌باشد وچون این مثلث با مثلث DIC' معادل است پس مساحت مثلث ANM برابر است با نصف مساحت مثلث ADC' یعنی برابراست با نصف مساحت چهارضلعی ABCD. به‌عبارت دیگر خط MN مساحت چهارضلعی مفروض را نصف می‌کند .

ب- باید نقطهٔ M را چنان انتخاب کنیم که خط MN علاوه برمساحت ، محیط چهارضلعی را نیز نصف کند .

فرض می‌کنیم :

$$AM=m \text{ و } AN=n \text{ و } AB=a \text{ و } BC=b$$
$$CD=c \text{ و } DA=d \text{ و } AK=\alpha \text{ و } BK=\beta$$
$$CK=\gamma \text{ و } DK=\delta \text{ و } AC=p$$

که K نقطهٔ تلاقی دوقطر است . داریم :

$$\frac{AC'}{AC}=\frac{AB}{AK}=\frac{a}{\alpha} \quad \text{و} \quad \frac{AM}{AD}=\frac{AI}{AN}$$

نتیجه می‌شود :

$$AC'=\frac{a\cdot AC}{\alpha}=\frac{pa}{\alpha}$$

$$mn=AI\cdot AD=\frac{AC'\cdot AD}{۲}=\frac{pad}{۲\alpha}$$

$$۲mn=\frac{pad}{\alpha} \qquad (۱)$$

برای اینکه MN محیط چهارضلعی را نصف کند باید داشته باشیم :

$$m+n=\frac{۱}{۲}(a+b+c+d) \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که m و n ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند :

$$۲x^۲-(a+b+c+d)x+\frac{pad}{\alpha}=۰$$

MN وقتی وجود دارد که شرایط زیر برقرار باشند :

$$m<b \text{ و } n<d$$
$$a+b+c+d=۲m+۲n<۲b+۲d$$
$$(I)\ b+c<a+d$$

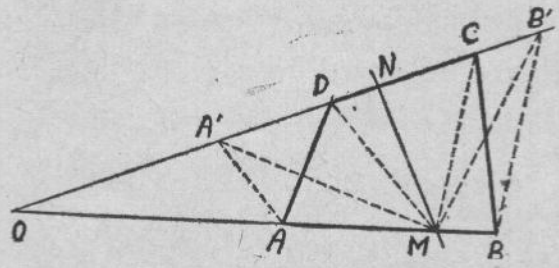
$$\frac{pad}{\alpha} = 2mn \leq 2ad$$

$p \leq 2\alpha$ یا $\alpha + \gamma \leq 2\alpha$

(II) $\alpha \geq \gamma$

(III) $\Delta = (a+b+c+d)^2 - \frac{8pad}{\alpha} \geq 0$

حالت دوم ـ درچهارضلعی مفروض ABCD ابتدا خطی رسم می‌کنیم که دوضلع مقابل را قطع کرده چهارضلعی را به دوقسمت معادل تقسیم کند . برای این کار نقطهٔ دلخواه M را روی AB اختیارکرده از B موازی‌با MC و ازA موازی



با MD رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع CD را به ترتیب در B' و A' قطع‌کنند . مثلث AMD با مثلث A'MD ، مثلث MCB با مثلث B'CM معادل است. بنابراین چهار ضلعی ABCD که ازمثلثهای AMD و MCD و MCB ترکیب شده با مجموع‌مثلثهای A'MD و MCD و B'CM یعنی با مثلث MA'B' معادل می‌باشد . اگر N نقطهٔوسط ضلع A'B' باشد خط MN مثلث MA'B' ودر نتیجه چهارضلعی مفروض را به دوقسمت معادل تقسیم می‌کند .

اگر O نقطهٔ تلاقی AB و CD باشد فرض‌می‌کنیم :

$OM = m$ و $ON = n$ و $OA = a'$ و $OB = b'$

$OC = c'$ و $OD = d'$ و $OA' = a''$ و $OB' = b''$

ازترسیمات بالا داریم :

$$\frac{m}{c'} = \frac{b'}{b''} \quad \text{و} \quad \frac{m}{d'} = \frac{a'}{a''}$$

$$2n = a'' + b'' = \frac{a'd'}{m} + \frac{b'c'}{m} = \frac{a'd' + b'c'}{m}$$

$$2mn = a'd' + b'c'$$

برای اینکه خط MN محیط چهارضلعی را نیز نصف‌کند باید داشته باشیم :

$$MA + AD + DN = MB + BC + CN$$

$$(m - a') + d + (n - d') = (b' - m) + + b + (c' - n)$$

$$2(m+n) = (a' + b' + c' + d') + (b - d)$$

ونتیجه می‌شودکه m و n ریشه‌های معادلهٔ زیرمی‌باشند:

$$2x^2 - (a' + b' + c' + d' + b - d)x + a'd' + b'c' = 0$$

برای اینکه MN وجود داشته باشد شرایط زیر باید برقرار باشد :

$a' < m < b'$ و $d' < m < c'$

که نتیجه می‌شود :

$a + b + c > d$ و $a + c + d > b$

و این نامساویها همواره برقرار است .

چگونه .... (بقیه از صفحهٔ ۹۰)

X- با درنظرگرفتن یك‌متوازی‌الاضلاع می‌توان‌همچنین ملاحظه‌کرد :

۱- از رسم ارتفاعات مستطیلی معادل بامتوازی الاضلاع تشکیل می‌شود .

۲- دو قطر منصف‌یکدیگرند و متوازی‌الاضلاع رابه‌مثلث‌هایی دوبه دو متساوی یا متعادل تقسیم می‌کنند .

XI- با درنظر گرفتن یك‌لوزی می‌توان همچنین‌ملاحظه کرد :

۱ - مستطیلی‌که باآن معادل است .

۲ - قطرها عمود منصف یکدیگرند و زاویه‌های لوزی‌را نصف می‌کنند.

۳ ـ دایره‌ای‌که درلوزی محاط است .

XII ـ بادرنظر گرفتن یك ذوزنقه می‌توان همچنین ملاحظه‌کرد :

۱ - مستطیلی‌که ازدو قاعده و ارتفاعات تشکیل‌می‌شود.

۲- خطی‌که اوساط دوساق را به‌هم وصل می‌کندبادوقاعده موازی است وطول آن برابر است بانصف مجموع طولهای دو قاعده .

۳ - مثلثی‌که از امتداد دوساق پدید می‌آید وخطی‌که از رأس این مثلث برقاعده عمود می‌شود .

۴- اگر ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد : خطی‌که ازرأس موازی باساق مقابل رسم شود یك متوازی‌الاضلاع و یك مثلث متساوی‌الساقین‌پدید می‌آورد - اگر ABCD ذوزنقهٔمتساوی‌الساقین به‌قاعدهٔ بزرگتر AB باشد دایرهٔ به‌مرکز C وبه‌شعاع CB قاعدهٔ AB را در E قطع می‌کند و داریم :

$$AB \cdot AE = AC^2 - CB^2$$

۵ - خطی‌که از وسط یك ساق موازی با ساق مقابل رسم شود متوازی‌الاضلاعی معادل با ذوزنقه تشکیل می‌دهد .

مسائلی از استاد هشترودی

برای دانش آموزان سال ششم ریاضی

I)ـ زاویهٔ ثابت $xOy=\alpha$ درصفحه مفروض است . نقطهٔ M رابرروی Ox ونقطهٔ N را برروی Oy چنان تعیین می‌کنیم که $\overline{OM}^2=k\cdot\overline{ON}$ باشد (k نمایندهٔطولی‌ثابت‌است) محقق کنید که اوضاع مختلف خط MN برسهمی ثابتی مماس است .

II)ـنقطهٔ A برضلع Ox زاویهٔ ثابت $xOy=\alpha$ نقطهٔ ثابتی است. نقطهٔ متغیر B را برضلع OB انتخاب می‌کنیم و برروی BA نقطهٔ M راچنان تعیین‌می‌کنیم که:

$$\overline{BO}^2=\overline{BA}\times\overline{BM}$$

باشد :

۱) مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین‌کنید.

۲) ثابت‌کنیدکه‌نیمساز زاویهٔ OMB بر نقطهٔ ثابتی‌مانند I می‌گذرد (تعیین نقطهٔ I)

۳) ثابت‌کنیدکه نسبت $\frac{\overline{OM}+\overline{MA}}{\overline{MI}}$ مقداری است ثابت .

III)ـ رأس A و امتداد های اضلاع AB و AC مثلثی درصفحه ثابت‌است. ضلع BC چنان تغییرمی‌کندکه‌نسبت سطح‌ومحیط مثلث ABC تغییرنمی‌کند. ثابت‌کنید که اوضاع مختلف دایرهٔ محیطی مثلث ABC همواره بر دایرهٔ ثابتی مماس است .

IV)ـ ثابت‌کنیدکه:

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{4}}+\dots+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}=\cot g\frac{\alpha}{2^{n+1}}-\cot g\alpha$$

V) ـ درمثلثی رؤوس B و C وزاویهٔ A ثابت‌اند . برروی نیمساززاویهٔ A طول $\overline{AM}$ را برابر $\frac{AB+AC}{2}$ تعیین می‌کنیم .مطلوبست‌مکان‌هندسی نقطهٔ M.

VI) ـ ازچهارضلعی چهار ضلع و مجموع دو زاویه (مجاوریا مقابل) معلوم‌است. چهارضلعی‌رارسم‌کنید.

VII) ـ درمعادلهٔ درجهٔچهارم:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

رابطهٔ

$$(ab-c)^2=(a^2-\frac{8b}{3})(\frac{b^2}{36}-d)$$

بین ضرائب‌برقراراست. ثابت‌کنیدکه چهارریشهٔمعادله‌نسبت‌به‌هم رابطهٔ توافقی دارند . دراین صورت معادله‌قابل‌حل‌است آنرا حل‌کنید .

VIII)ـ معادلهٔ درجهٔ سوم :

$$t^3+3xt^2+yt+xy-2x^3=0$$

نسبت به t مفروض‌است. معادله راحل‌کنید.

اگر x و y مختصات نقطه‌ای درصفحهٔxOy فرض‌شوند سهمی وجودداردکه اگرنقطهٔ (x و y) دردرون آن باشد معادلهٔ مفروض نسبت به t فقط یك ریشهٔ حقیقی دارد و اگـراین نقطه بیرون این‌سهمی باشد هرسه ریشهٔ معادله حقیقی‌است‌وبالاخره اگرنقطهٔ مذکوربرروی این سهمی واقع شود سه‌ریشهٔ معادله با هم‌برابرند ومعادلهٔ مفروض نسبت‌به t مکعب‌کامل است .

IX) ـ ثابت‌کنیدکه اگر n به‌سمت بینهایت میل‌کند حد مجموع:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\dots\dots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}+\dots$$

برابر $\frac{\pi}{4}$ است .

X) ـ اگردرمثلثی نیمساززاویهٔ A نیمساززاویهٔ بین ارتفاع ومیانهٔ نظیرضلع a باشد مثلث قائم‌الزاویه است ،

XI) ـ اگر مجموع سینوسهای دو قوس برابر a و مجموع کوسینوسهای آنها b باشد مجموع دوقوس همواره قابل قبول بوده وجوددارد ولی تفاوت دوقوس زاویه قابل قبول نیست مگر به‌شرط $|a| < ۲$ و $|b| < ۲$ توضیح مطلب .

XII) ـ دودایره دردونقطهٔ A و B متقاطع‌اند. نقطهٔ M رابه دلخواه مثلا برروی دایرهٔ O انتخاب می‌کنیم .

ثابت کنید کـه حاصل ضـرب $\overline{MA} \times \overline{MB}$ باقوت‌نقطهٔ M نسبت به‌دایرهٔ O' متناسب است :

XIII) ـ محور x'Ox (نقطهٔ O ثابت است) درصفحهٔ ثابت‌است. همچنین‌نقطهٔ A درصفحه نقطهٔ ثابتی است. نقطهٔ‌متغیر P رابرمحور x'Ox چنان‌تعیین می‌کنیم که:

$$\overline{PA} \times \overline{PM} - \overline{PO}^{۲} = k$$

مقدارثابتی باشد (k ممکن‌است مثبت یامنفی باشد). مکان‌هندسی نقطهٔ M راباتغییر P برروی x'Ox تعیین کنید به‌فرض‌آنکه نقاط P و A و M به‌یك امتداد واقع باشند .

XIV) ـ از مسئلهٔ قبل نتیجه بگیرید که قطبیهای نقطهٔ ثابت A نسبت به دوایری که همگی دارای یـك محـور اصلی ثابت‌اند، برنقطهٔ ثابتی مانند A' می‌گذرد واین نقطه را تعیین‌کنید .

XV) ـ تصاویر نقطهٔ تلاقی اقطارچهار ضلعی بر روی چهارضلع چهار نقطهٔ معلوم E و F و G و H می‌باشندچهار ضلعی را رسم کنید .

XVI) ـ درچهارضلعی مجموع دوضلع مقابل وزاویهٔ آنها دردست است فاصله های بین‌اوساط اضلاع مقابل نیزمعلوم است. بادانستن‌زاویهٔ دوقطرچهارضلعی رارسم‌کنید.

XVII) ـ حدعبارت زیررا وقتی r به سمت بینهایت میل می‌کند تعیین‌کنید :

$$\operatorname{arctg}\frac{۱}{۲} + \operatorname{arctg}\frac{۲}{۱۱} + \operatorname{arctg}\frac{۳}{۴۶} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{۲r}{r^{۴}+r^{۲}+۲} + \cdots$$

XVIII) ـ معادلهٔ درجهٔ سوم:

$$ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d = ۰$$

راباتبدیل $x = \frac{\alpha y + \beta}{y + ۱}$ به‌صورت‌معادلهٔ‌ناقص $Ay^{۳} + B = ۰$ درآورده وبرحسب‌مقادیر α و β وپارامترهای معادله ریشه‌های معادله را بحث کنید .

XIX) ـ ثابت‌کنیدکه ریشهٔ kام (k عدد صحیح و مثبت) هرعدد N به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$\sqrt[k]{N} = \sqrt{a_۱ \sqrt{a_۲ \sqrt{a_۳ \sqrt{a_۴ \sqrt{\cdots\cdots}}}}}$$

مقادیر $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و $a_۴$ و .... بـرابر N یا برابر یك می‌باشند .

XX) ـ همچنین ریشهٔ kام (k مثبت وصحیح) هرعدد N رابه‌صورت زیرممکن است محاسبه‌کرد :

$$\sqrt[k]{N} = \sqrt[۳]{a_۱ \sqrt[۳]{a_۲ \sqrt[۳]{a_۳ \sqrt[۳]{a_۴ \cdots}}}}$$

مقادیر $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و $a_۴$ و... برابر N یایك‌یا $\frac{۱}{N}$ می‌باشند.

دراین دومسئله تحقیق‌کنید که دنبالهٔ اعداد $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و $a_۴$ و.... چه‌موقع محدوداند وچه موقع نامحدود؟

XXI)ـ مجموع‌رشتهٔ:

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۲۱} + \frac{۳}{۹۱} + \cdots + \frac{n}{n^{۴}+n^{۲}+۱}$$

رااز‌روی n تعیین‌کنید وحدآنرا وقتی n بینهایت می‌شودتعیین کنید .

این مسئله بادانستن مجموع توسط استقرای ریاضی در مجلهٔ یکان حل شده است. دراین جا مقصود تعیین مجموع جمل مفروض است مستقیماً نـه از روی دانستن قبلـی و استفاده از استقرای تام.

XXII) ـ کثیرالاضلاع‌منتظم n ضلعی‌دردایرهٔ به‌شعاع r محاط است ونقطهٔ A نقطه‌ای ثابت ازصفحه‌است‌که بـرروی قطر $OA_۱$ دایرهٔ به‌فاصلهٔ $\overline{OA} = d$ ازمرکزدایره قراردارد. اگررؤوس کثیرالاضلاع‌منتظم نقاط $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و A_n... باشندثابت‌کنیدکه :

$$\overline{AA_۱} \cdot \overline{AA_۲} \cdot \overline{AA_۳} \cdots\cdots \overline{AA_n} = d^{n} - r^{n}$$

(اثبات برای حالات سادهٔ :

$n = ۲$ و $n = ۳$ و $n = ۴$ و $n = ۶$)

XXIII) ـ مکان هندسی نقاطی‌که مجموع قوای kام (k عددصحیح‌ومثبت‌باشرط $۲ < k < n - ۱$ می‌باشد) فواصل‌آنها از n ضلع کثیرالاضلاع منتظمی مقداری ثابت باشد دایره‌ای است متحدالمرکز باکثیرالاضلاع منتظم .

اثبات برای حالات :

$$\begin{cases} n = ۶ \\ k = ۲ \end{cases} \quad \begin{cases} n = ۴ \\ k = ۲ \text{ و } ۳ \end{cases} \quad \begin{cases} n = ۳ \\ k = ۲ \end{cases}$$

باید متوجه بودکه فاصلهٔ نقطه از دو ضلع یك زاویه وقتی مثبت

دنباله پائین صفحه ۱۱۱

مسائل برای حل

دانش آموزان هر کلاس می‌توانند راه حل مسائلی مربوط به‌کلاس‌خود راکه شمارهٔ مسئله باعلامت ✱ مشخص شده است به ادارهٔ مجله ارسال دارند . از ارسال‌حل‌مسائل فاقدعلامت مزبور وهمچنین از ارسال حل‌مسائل مربوط‌به کلاسهای پائین‌تر خودداری شود روی هرورقه‌حل‌مسائل نام وکلاس و دبیرستان مربوط به‌صراحت نوشته شود.

کلاس چهارم طبیعی

۴۹/۲ـ از **کاظم‌حافظی** دبیر دبیرستان درخشانی بنیس

به‌فرض $a \neq 0$ ثابت‌کنیدکه معادلهٔ زیر دارای جواب نیست :

$$\sqrt{ax^2+x-1} - \sqrt{ax^2+x+1} = 1$$

۴۹/۳ فرستنده : **حسین دهقان**پنجم ریاضی‌دبیرستان سعدی اصفهان

چهار ضلعی ABCD و نقطهٔ ثابت O واقع در داخل آن‌مفروض‌است. ثابت‌کنیدکه اگر هرخط از O بگذرد محیط چهارضلعی را به‌دو قسمت متساوی تقسیم‌کند چهارضلعی مزبور متوازی‌الاضلاع می‌باشد .

کلاس چهارم ریاضی

توجه‌ـ رابطهٔ مربوط به مسئلهٔ ۴۸/۹ مندرج درشمارهٔ پیش به‌علت سهل‌انگاری، غلط‌گیر چاپخانه به‌صورت نا درست چاپ شده‌است . درست آن چنین است :

$$\left(a^{\log_a b}\right)^{\log_{b^n} a^n} = ?$$

✿ **۴۹/۴ ـ** ترجمه از مجلهٔ «دانش آموز ریاضی»

از روابط زیر مقادیر x و y رابرحسب a و b بدست آورید :

$$a = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad b = \frac{y}{x^2+y^2}$$

✿ **۴۹/۵ـ** از **کاظم حافظی**

به فرض $abc = 1$ درستی تساوی زیر را ثابت‌کنید :

$$\frac{1}{(bc)^n+b^n+1} + \frac{1}{(ca)^n+c^n+1} + \frac{1}{(ab)^n+a^n+1} = 1$$

✿ **۴۹/۶** مثلث ABC قائمه درزاویهٔ C مفروض‌است. به قطر هریك از اضلاع و در خارج مثلث نیمدایره‌ای رسم‌می‌کنیم وچهار ضلعی EFGH را برشکل حاصل‌چنان محیط‌می‌کنیم‌که EF و GH با BC و FG و EH با AC موازی باشند . ثابت‌کنیدکه چهار ضلعی EFGH مربع است .

۴۹/۷ ـ ترجمه از مجلات خارجی .

در دایرهٔ به‌مرکز O وتر AB را رسم‌کرده و بر این وتر نقاط C و D را چنان انتخاب می‌کنیم‌که :

$$AC = CD = DB$$

باشد . ثابت‌کنیدکه سه زاویهٔ AOC و COD و DOB هر سه‌باهم مساوی نیستند .

۴۹/۸ـ از رابطهٔ زیر مقدار x را بر حسب y بدست آورید :

$$y = 10^{-\log|x-1|}$$

کلاس پنجم طبیعی

۴۹/۹ـ اولا برمحور x'x دو نقطهٔ A به‌طول ۵ و B به‌طول ۹ را درنظرگرفته و برهمین محور دونقطهٔ D و E را چنان تعیین‌کنیدکه داشته باشیم :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB} = \frac{15}{13}$$

ثانیاً برنیم‌محور Oy نقطهٔ C راچنان پیداکنیدکه‌زاویهٔ DCE قائمه باشد . پس از تعیین C معلوم‌کنیدکه خطوط CD و CE نیمسازهای زاویهٔ ACB می‌باشند.

۴۹/۱۰ ـ از مصطفی گودرزی طائمه

درستی رابطهٔ زیر راثابت‌کنید :

$$tg1^\circ tg7^\circ tg11^\circ tg13^\circ tg17^\circ tg19^\circ tg23^\circ tg29^\circ tg31^\circ tg37^\circ tg41^\circ tg43^\circ tg47^\circ tg49^\circ tg53^\circ tg59^\circ tg61^\circ \times tg67^\circ tg71^\circ tg73^\circ tg77^\circ tg79^\circ tg83^\circ tg89^\circ = 1$$

کلاس پنجم ریاضی

✿ **۴۹/۱۱ ـ** ترجمه ازمجلهٔ «دانش آموز ریاضی»

نقطهٔ P داخل مربع ABCD چنـان واقع شده است که داریم :

$$PA = 3 \quad و \quad PB = 5 \quad و \quad PD = 7$$

طول ضلع مربع را حساب کنید .

۴۹/۱۲ـ ذوزنقهٔ بارأسهای زیر مفروض است :

$$A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. ، \quad B\left|\begin{matrix}6\\0\end{matrix}\right. ، \quad C\left|\begin{matrix}4\\6\end{matrix}\right. ، \quad D\left|\begin{matrix}1\\6\end{matrix}\right.$$

برساق AD نقطهٔ E و برساق BC نقطهٔ F راچنان تعیین کنید که EF واسطهٔ توافقی AB و CD باشد .

✿ **۴۹/۱۳ـ** از معادلهٔزیرمقدارکمان‌حادهٔ x را بدست آورید :

$$2\sin^2(x+72^\circ) - \cos(198^\circ - x) = 1$$

۴۹/۱۴ـ از محمد مهدی عابدی نژاد دانشجوی دانشگاه آریامهر

خط xy و دونقطهٔ A و B غیر واقع دریك‌صفحه‌مفروض است .برخط xy نقطهٔ C را چنان تعیین‌کنیدکه زاویهٔ BCy دو برابر زاویهٔ ACx باشد .

کلاس ششم طبیعی

۴۹/۱۵ـ ازاکبر ابراهیمیان ششم‌ریاضی دبیرستان سعدی اصفهان

دو تابع زیر برحسب متغیر x مفروض است .

$$y = (\sqrt{x} + \sqrt{x-a})^m \qquad \begin{cases} a \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$z = (\sqrt{x} - \sqrt{x-a})^m$$

ثابت‌کنیدکه بین دو تابع مزبور و مشتقهای آنها رابطهٔ زیـر برقرار است :

$$\frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = 0$$

۴۹/۱۶ـ خط به‌معادلهٔ زیر مفروض است :

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = 1 - \sqrt{3}$$

به ازاء چه مقادیر α این‌خط از نقطهٔ وسط قطعه‌خط واصل بین نقاط نظیرماکزیمم ومی‌نیمم تابع‌زیرمی‌گذرد:

$$y = x^3 - 6x^2 + 14$$

کلاس ششم ریاضی

۴۹/۱۷ـ از حسین خبازیـان دانشجوی دانشگاه آریا مهر

منحنی (E) به معادلهٔ زیر مفروض است :

$$(E) \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

براین منحنی دو نقطهٔ M و N را چنـان انتخاب می‌کنیم‌کـه زاویهٔ MON قائمه باشد (O مبدأ مختصات) و عمود OH را بر MN رسم می‌کنیم. وقتی M و N بشرط فوق بـرمنحنی تغییرمکان دهند معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ H را بدست‌آورید.

✿ **۴۹/۱۸ـ** تغییرات‌تابع زیر را تعیین‌کنیدومعادلات مجانبهای آنرا بدست آوریدوهمچنین معـادلات مماسهای بـر منحنی‌را در نقطه‌ای از آن به‌طول یك بدست آورید :

$$y = |x-1| + \left|\frac{x-1}{x}\right|$$

✿ **۴۹/۱۹ـ** فـرستنـده : **حسن گل محمدی** ششم ریاضی دبیرستان خوارزمی ۳

در معادلهٔ زیر مقدار α را چنان تعیین‌کنیدکـه بین x' و x'' جوابهای معادله رابطهٔ $x' + x'' = k\pi + \frac{\pi}{3}$ بر قرار باشد :

$$(1 + 2\cos\alpha)\,tg\,x + (1 + \cos\alpha)\,cotg\,x = \sin\alpha$$

۴۹/۲۰ ـ از شاهرخ شمیم

ثابت‌کنیدکه اگر داشته باشیم :

$$\cos(\varphi + \theta) = n\cos\varphi$$

خواهیم داشت :

$$cotg(\varphi + \theta) = \frac{n\sin\theta}{1 - n\cos\theta}$$

و معادلهٔ زیر راحل‌کنید :

$$cotg\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

۴۹/۲۱ـ از مظاهر امینی

ثابت‌کنیدکه‌عددی باچهار رقم بامعنی نمی‌توان‌یافت‌که در

رابطهٔ زیر صدق کند :

$$\overline{mcdu}=\overline{mc}^{2}+\overline{du}^{2}$$

۴۹/۲۲ـ درتقسیم دو عدد ۱۳۸۷۵ و ۹۴۹ بر عددی به‌ترتیب باقیمانده‌های ۱۵ و ۱۳ بدست آمده‌است. عددمقسوم‌علیه را تعیین کنید .

۴۹/۲۳ـ فرستنده : **داوید ریحان**

چهارنقطهٔ A و B و C و D روی یك‌خط راست‌واقع‌اند. براین خط دو نقطهٔ P و Q را چنان تعیین کنید که هم‌نسبت‌به A و B و هم‌نسبت به C و D مزدوج توافقی باشند . بحث کنید .

۴۹/۲۴ـ ترجمه از فرانسه

بیضی (E) که درآن‌طول قطر اطول وهمچنین طول قطر اقصر برابر مقدار ثابت است حول مرکز خود O می‌چرخد . براین بیضی متغیر مماسی رسم می‌کنیم که با نیمساز زاویه‌ای که محورکانونی بیضی باامتداد ثابت Δ می‌سازد موازی می‌باشد . پوش این مماس را تعیین کنید .

مسائل متفرقه

برای داوطلبان امتحانات ورودی دانشکده‌ها

۴۹/۲۵ـ از **اکبر ابراهیمیان**

نوع مثلثی را تعیین کنیدکه رابطهٔ زیر بین‌زاویه‌های آن برقرار باشد :

$$tg^{3}A+tg^{3}B+tg^{3}C=3(tgA+tgB+tgC)$$

۴۹/۲۶ـ از **محمدرضا یزدان** دانشجوی دانشکدهٔ صنعتی تهران

به‌فرض‌اینکه a و b و c عددهای‌صحیح‌ومثبت‌باشندصحت نامساوی زیر را ثابت کنید .

$$\frac{a^{3}(b+c)+b^{3}(c+a)+c^{3}(a+b)}{a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+c^{2}a^{2}}\geqslant 2$$

۴۹/۲۷ـ فرستنده: **حسن گل محمدی**

ثابت کنیدکه‌در هرمثلث بین اندازه‌های اضلاع ،اندازه‌های‌ارتفاعات‌و سینوس زوایا و p نصف محیط رابطهٔ زیربرقرار است :

$$\frac{a}{2h_a}+\frac{b}{2h_b}+\frac{c}{2h_c}+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{p}{2}$$

۴۹/۲۸ـ فرستنده : **داوید ریحان**

به‌فرض‌اینکه d_1 و d_2 و d_3 فواصل مرکز دایرهٔ محاطی داخلی‌مثلث تامراکزدایره‌های محاطی‌خارجی و R شعاع‌دایرهٔ محیطی آن باشد ثابت کنیدکه :

$$d_1^{2}+d_2^{2}+d_3^{2}<12R^{2}$$

۴۹/۲۹ـ فرستنده : **منوچهر دهقان** دبیر دبیرستانهای شهرکرد

اگر a و b عددهای حقیقی و ثابت باشند بدون استفاده از مشتق می‌نیمم عبارت زیر را پیدا کنید :

$$f(x)=(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)\times$$
$$\times(x-a-b)$$

۴۹/۳۰ـ فرستنده: **دانش عمرانی** ازانگلستان.

ثابت کنید هرگاه در مثلثی خطوطی که ازپای نیمسازهای دو زاویه برضلعهای مقابل‌عمود می‌شوند باهم‌برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است .

۴۹/۳۱ـ ترجمه از انگلیسی

وتر AB در دایرهٔ به‌مرکز O مفروض است . وترCD را در این دایره رسم‌می‌کنیم که از M وسط AB بگذرد . در نقاط C و D مماسهایی بردایره رسم می‌کنیم که امتداد AB را به‌ترتیب در P و Q قطع‌می‌کنند ثابت‌کنیدکه :

$$CP=DQ \quad و \quad PA=BQ$$

۴۹/۳۲ـ ترجمه از «مجلهٔ ریاضیات» چاپ‌آمریکا

اگر x عدد صحیح مثبت باشد تابع $y=f(x)$ را چنان تعیین کنیدکه داشته باشیم :

$$\left(1-\frac{1}{2x}\right)(2x)^{2}-2y<1$$

۴۹/۳۳ـ ترجمه از مجلهٔ مزبور

سفینهٔ فضایی چه مداری را بپیماید تا سرنشین‌آن درهر لحظه قرصهای ماه و زمین را به‌یك زاویه رؤیت کند .

مسائل فیزیك

انتخاب توسط : حسین فرمان

۴۹/۳۴ـ فرستنده : **اردشیر گشتاسبی** ششم ریاضی دبیرستان فیروز بهرام

اتومبیلی به‌جرم ۴۰۰۰ پاند باسرعت ۳۰ مایل درساعت درحرکت است . اگر این اتومبیل‌با اتومبیل دیگری به‌جرم ۲۰۰۰ پاندکه باسرعت ۱۵ مایل در ساعت در حرکت می‌باشد

برخورد کند و سپرهای آنها پس از تصادف بهم قفل شوند دستگاه دواتومبیل باچه سرعتی حرکت می کند . $g=32ft/s$

۴۹/۳۵ـ فرستنده : **غلامرضا میرزا خانی**
ششم ریاضی دبیرستان فیروز بهرام .

یك صفحهٔ دایرهٔ شکل افقی حول محور حرکت دورانی متشابه دارد . برروی این صفحه دوجرم m و M بر امتداد یك شعاع و بفواصل a و ۲a از مرکز قرص قرارگرفته‌اند و بوسیلهٔ نخ محکمی بهم متصل‌اند . ضریب اصطکاك صفحه برای هردو جسم μ است . ثابت کنید در لحظه‌ای که دو جسم در آستانهٔ لغزش به سمت خارج‌اند اندازهٔ سرعت زاویه‌ای صفحه از رابطهٔ :

$$\omega^2=\frac{\mu g(M+m)}{a(2M+m)}$$

بدست می‌آید . همچنین تابعی بدست آورید که کشش نخ را در این حالت بدست دهد .

۴۹/۳۶ـ از **حسین خبازیان**
دانشجوی دانشگاه آریامهر .

جسمی بجرم ۲ کیلوگرم تحت تأثیر نیروی متغیر :

$$F=2\vec{V}\times\vec{\gamma}$$

روی سطحی بنیروی اصطکاك $\vec{R}=2t$ حرکت می‌کند ($\vec{V}$ و $\vec{\gamma}$ سرعت و شتاب جسم برای نیروی واردهٔ F هستند). مطلوبست معادلهٔ حرکت جسم درصورتی که مبدأ را جائی اختیار کنیم که در آن نقطه در لحظهٔ $t=0$ جسم دارای سرعت $1m/s$ باشد .

۴۹/۳۷ـ از **حسین خبازیان**

جسمی بجرم ۱ کیلوگرم تحت تأثیر نیروی افقی :

$$F=6t+2$$

نیوتن قرارمی‌گیرد وروی سطح بدون اصطکاك شروع به حرکت می کند وپس از ۲ ثانیه بسطحی که دارای اصطکاك می‌باشد می‌رسد بطوری که حرکت آن یکنواخت می‌شود . درصورتی که تمام نیروی اصطکاك بگرما تبدیل شود مطلوبست :

۱) معادلهٔ حرکت جسم در مراحل اول و دوم .

۲) کاری که نیروی F پس از t ثانیه ازشروع حرکت انجام می‌دهد .

۳) مقدار درجهٔ حرارت گلوله برحسب تغییرات زمان (گرمای ویژهٔ جسم ۰/۰۰۴ و $J=4$ ژول برکالری).

مسائل شیمی

۴۹/۳۸ـ از **صفرعلی لشکربلوکی** دانشجوی دانشکدهٔ فنی .

محلول اسید یك ظرفیتی ۰/۰۵ ملکول گرم در لیتر در دست است . مطلوبست تعیین نقطهٔ انجماد این محلول در صورتی که PH محلول فوق ۲ و $K=1850$ باشد .

۴۹/۳۹ـ فرستنده : **سید رضا میرزنده دل**
دانشجوی دانشکدهٔ فنی تبریز

25^{cc} محلول اسیدفسفریك را بکمك یك پی‌پت برداشته در بشیری می‌ریزیم وبرآن یکی دو قطره هلیانتین می‌افزائیم و از بورتی قطره‌قطره سود $\frac{N}{10}$ بر آن اضافه می‌کنیم .

پس از افزایش 50^{cc} رنگ گلی محلول تغییر می‌کند . غلظت اسید را حساب کنید. اگرازفنل فتالئین بعنوان معرف استفاده می‌کردیم چند cc سود برای ایجاد رنگ ارغوانی مصرف می‌شد.

۴۹/۴۰ـ فرستنده : **سیدرضا میرزنده دل**

از احتراق کامل مقداری متان ، ۲/۰۱۹۴ گرم آب به صورت مایع حاصل می‌شود و ۱۱/۹۵ کالری حرارت تولید می‌گردد. حرارت تشکیل متان را بیابید بفرض اینکه حرارت تشکیل گازکربنیك ۹۴ کالری و ازآب در شرایط فوق ۶۹ کالری است .

دنبالهٔ مسائل از استاد هشترودی (بقیه ازصفحهٔ ۱۰۷)

است که نقطه دردرون فرجهٔ زاویه باشد. برای حالتی که نقطه بیرون فرجهٔ یك زاویه اززوایای کثیرالاضلاع باشد فاصله منفی تلقی می‌شود .

برای $k=1$ مکان هندسی وجود ندارد وجمیع نقاط صفحه نسبت به کثیرالاضلاع منتظم دارای فواصلی هستند که مجموع آنها مقدارثابتی است (برای $k=n$ مکان منحنی است ازدرجهٔ $2n$ که خطوط سیکلیك صفحه مجانبی آنهاست).

XXIV)ـ چهارضلعی ABCD مفروض است مطلوب است مکان هندسی نقاطی مانند M بقسمی که مجموع سطوح مثلثهای MAB و MCD برابر مجموع سطوح مثلثهای MBC و MAD گردد.

سطح مثلث منفی است اگر رأس مثلث بیرون فرجهٔ زاویه‌ای ازچهارضلعی باشد.

XXV)ـ درچهارضلعی که هم محیطی وهم محاطی است شعاعهای R و r دوایرمحیطی ومحاطی دردست است.

بادانستن دوضلع مقابل چهارضلعی رارسم کنید.

دنباله در شمارهٔ بعد

ریاضی جدید (بقیه از صفحهٔ ۱۲۴)

قاعدهٔ ذوزنقه نامیده می‌شوند. دوضلع دیگر دو ساق ذوزنقه‌نام دارند.

متوازی‌الاضلاع: ذوزنقه‌ای است که‌علاوه بردوقاعده دو ضلع روبروی دیگر آن نیز با هم موازی باشند.

متوازی‌الاضلاع (d و c و b و a) یك چهار ضلعی است که درآن:

$D(a \text{ و } b) \parallel D(c \text{ و } d)$ و $D(b \text{ و } c) \parallel D(d \text{ و } a)$

می‌باشد. در فصلهای آیندهٔ کتاب خواهیم دیدکه شکل اخیر در هندسهٔ مقدماتی شکلی اساسی می‌باشد.

واضح است‌که پوش محدب متوازی‌الاضلاع (a و b و c و d) عبارتست از اشتراك P نوارهای بستهٔ:

$[D(a \text{ و } b)$ و $D(c \text{ و } d)]$ و $[D(b \text{ و } c)$ و $D(d \text{ و } a)]$

P محدب وشامل نقاط a و b و c و d و درنتیجه شامل‌متوازی‌الاضلاع (d و c و b و a) می‌باشد، کافی است ثابت‌کردکه هر مجموعهٔ محدب C شامل (d و c و b و a)، شامل P نیزمی‌باشد.

زیرا اگر m نقطه‌ای از P باشد خطی‌که از m موازی با $D(d \text{ و } a)$ رسم شود قطعه خطهای $[a \text{ و } b]$ و $[c \text{ و } d]$ را در نقاط x و y قطع می‌کند، زیرا m به نوار $[D(a \text{ و } b)$ و $D(b \text{ و } c)]$ تعلق دارد. اما m که به‌نوار $[D(a \text{ و } b)$ و $D(c \text{ و } d)]$ تعلق دارد به $D(x \text{ و } y)$ و به‌ناچار به قطعه خط $[x \text{ و } y]$ تعلق خواهد داشت. پس m به C تعلق دارد.

برعکس، دو نوار $[A \text{ و } A']$ و $[B \text{ و } B']$ که امتدادهای متفاوت‌داشته باشنددرمجموعهٔ محدبی مانند P متقاطع‌می‌باشند. اگر نقاط تقاطع زوجهای خطوط $(A \text{ و } B)$ و $(A' \text{ و } B)$ و $(A \text{ و } B')$ و $(A' \text{ و } B')$ را به‌ترتیب a و b و a' و b' بنامیم چهار ضلعی $(a \text{ و } b \text{ و } a' \text{ و } b')$ متوازی‌الاضلاعی است‌که $[a \text{ و } a']$ و $[b \text{ و } b']$ قطرهای آن می‌باشند. پوش محدب این متوازی‌الاضلاع P است. مجموعهٔ نقاط این پوش محدب صرف‌نظر از نقاطی که به مرز آن یعنی به متوازی‌الاضلاع $(a \text{ و } b \text{ و } a' \text{ و } b')$ تعلق دارند **داخل** این‌متوازی‌الاضلاع نام‌دارد متمم P در π اصطلاحاً **خارج** متوازی‌الاضلاع نامیده می‌شود.

تبصره ـ ذوزنقهٔ غیر پنجره‌ای $Q = (a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d)$ با قاعده‌های $[a \text{ و } b]$ و $[c \text{ و } d]$ را در نظر می‌گیریم. نقاط b و c در یك نیم‌صفحه به‌کنارهٔ $D(a \text{ و } d)$ قراردارند وگرنه قطعه‌خط $[b \text{ و } c]$ با خط $D(a \text{ و } d)$ در یك نقطهٔ p متقاطع بوده و خطی که از p موازی با یکی از قاعده‌های Q رسم شود قطعه خط $[a \text{ و } d]$ را قطع خواهدکردکه این نقطه فقط می‌تواند p باشد. در این صورت ذوزنقهٔ Q پنجره‌ای بوده و خلاف فرض است. به همان ترتیب معلوم خواهد شدکه a و d در یك نیم صفحه به کنارهٔ $D(b \text{ و } c)$ قرار دارند. پوش محدب Q عبارتست از اشتراك P نیم صفحه‌هایی‌که کناره‌های آنها اضلاع ذوزنقه بوده و هریك شامل رأسهایی از Q است که به نوارآن تعلق ندارد. فرض می‌کنیم C مجموعهٔ محدبی شامل Q و m نقطه‌ای از P باشد. نقطهٔ m به‌نوار $[D(c \text{ و } d)$ و $D(a \text{ و } b)]$ تعلق دارد وخطی که ازm موازی باکناره‌های این نواررسم شود قطعات $[b \text{ و } c]$ و $[d \text{ و } a]$ را به‌ترتیب در p و q قطع می‌کند. نقطهٔ q که به $[b \text{ و } c]$ تعلق دارد مانند m به نیم صفحهٔ $(D(a \text{ و } d)$ و $b)$ تعلق خواهد داشت. پس m به نیم خط $[p \text{ و } \overrightarrow{pq}]$ تعلق خواهد داشت. به‌همین ترتیب m به نیم خط $[q \text{ و } \overrightarrow{qp}]$ تعلق خواهد داشت. نتیجه می‌شودکه m به‌قطعه خط $[p \text{ و } q]$ دونتیجه به C و ازآنجا به P تعلق دارد.

مثلثها، متوازی‌الاضلاعها و ذوزنقه‌های غیر پنجره‌ای دارای این‌خاصیت مشترك می‌باشندکه پوش محدب آنهااشتراك نیم صفحه‌هایی است که کناره‌های آنها اضلاع این چند ضلعیها بوده و آنها را در بر دارند. این چند ضلعیهای خاص حدود حوزهٔ چند ضلعیهای محدب را تعیین می‌کنند یعنی مرز حوزهٔ چند ضلعی‌محدبی‌هستندکه داخل‌این چند ضلعیها نامیده‌می‌شود.

نقدی بر... (بقیه ازصفحهٔ ۷۰)

درآورده است‌بشدت جلوگیری‌کندودرتدریس کتابهای درسی‌که‌با صرف هزینه وبدست‌کارشناسان مجرب‌آن وزارت تهیه شده است پا فشاری نماید. ازکسانی‌که مدعی وجود اغلاطی درکتابهای درسی هستند دعوت بعمل‌آوردکه ایراد های خودرا رسماً به‌آن وزارت خانه بنویسند وکمیسیونهائی با نظر دبیران مجرب وبا سابقه به‌منظور رسیدگی دقیق به‌این امرتشکیل دهد. آموزش شیمی‌که علمی است **تجربی** براساس تجربه وآزمایش صورت گیرد. درکلاسهای دورهٔ اول‌که اجرای امتحان شیمی به صورت کتبی نمی‌تواند ملاکی برای سنجش معلومات عملی شاگردان باشد امتحان‌کتبی حذف، وامتحان عملی جایگزین شود. در توسعهٔ آزمایشگاهها واستفادهٔ ازآنها دردرس اقدامات لازم‌بعمل آید. ازانتشارکتابهای حل‌المسائل شیمی‌که غالبا توسط اشخاص بی‌صلاحیت صرفاً به‌منظورسودجوئی‌نگاشته شده‌وپرازاغلاط‌علمی فاحش وزننده می‌باشد جلوگیری بعمل‌آید. درمواد برنامه‌ها و کتابها تجدید نظرکلی بعمل‌آید وقوانین ونظریاتی که سبب پیشرفت علم اعتبارخودراازدست داده‌اندحذف‌شود وبجای آنها مطالب اساسی وپایه‌ای‌که بینش شاگردان را برای درك مفاهیم افزایش می‌دهد وارد می‌شود.

امید است باتوجهی‌که اولیاء وزارت آموزش وپرورش‌و همکاران‌گرامی به‌این‌امرمهم دارندآموزش شیمی برمبنای علمی محکمی استوارشود.

حل مسائل یکان شمارهٔ : ۴۷

****

۴۴۷۱ـ آقای دبیر کثیر الجملهٔ $f(x)$ را باضرایب صحیح روی تختهٔ سیاه نوشت و خطاب به دانش‌آموزان اظهار داشت که: امروز جشن سالروز تولد پسر من است که A سال را پشت سر گذاشته است . باتوجه به اینکه :

$$f(A)=A \text{ و } f(0)=p$$

و p عدد اول بزرگتر از A است ، سن پسر مرا تعیین کنید .

حل ـ فرض می‌کنیم که :

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

از رابطهٔ $f(0)=p$ نتیجه می‌شود که $a_0=p$ و از رابطهٔ $f(A)=A$ خواهیم داشت :

$$a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+p=A$$

لازم می‌آید که p بر A قابل‌قسمت باشد اما بنابه فرض p عددی است اول و بزرگتر از A پس مقدار قابل قبول برای A فقط $A=1$ است یعنی پسر آقای دبیر یك سال را پشت سر گذاشته است .

۴۴۷۲ـ شعاع دایره چقدر باشد تا مساحت قطاعی که محیطش $2a$ است بزرگترین مقدار خود را داشته باشد .

حل ـ اگر R شعاع دایره و x طول کمان قطاع برحسب رادیان باشد ، p محیط و S مساحت قطاع به‌ترتیب برابر است با :

$$P=x+2R \text{ و } S=\frac{1}{2}xR$$

$$P=2a\Longrightarrow x=2a-2R$$

$$S=(a-R)R$$

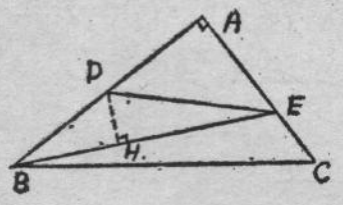
دو عامل R و $2a-R$ دارای مجموع ثابت هستند پس حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم :

$$a-R=R\Longrightarrow R=\frac{a}{2}$$

۴۴۷۳ـ مثلث ABC مفروض است .اولا نقطهٔ D را برضلع AB و نقطهٔ E را برضلع AC چنان تعیین کنید که سه مثلث ADE و DBE و EBC معادل باشند.

ثانیاً اگر مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه و $AC=b$ و $AB=c$ باشد فاصلهٔ D را از خط BE برحسب b و c حساب کنید.

حل ـ اولا نقطهٔ E را چنان انتخاب می‌کنیم که CE ثلث CA باشد در این‌صورت مساحت مثلث BCE یك سوم مساحت مثلث ABC یعنی نصف مساحت مثلث ABE است . نقطهٔ D را وسط ضلع AB اختیار می‌کنیم دو مثلث AED و BED بایکدیگر و با مثلث BCE معادل می‌باشند .



ثانیاً چون مساحت مثلث DBE یك سوم مساحت مثلث ABC است بنابراین :

$$\frac{1}{2}DH\cdot BE=\frac{1}{6}AB\cdot AC\Longrightarrow DH=\frac{bc}{3BE}$$

$$BE^2=AB^2+AE^2=c^2+\left(\frac{2b}{3}\right)^2=\frac{4b^2+9c^2}{9}$$

$$BF=\frac{1}{3}\sqrt{4b^2+9c^2} \text{ و } DH=\frac{bc}{\sqrt{4b^2+9c^2}}$$

۴۴۷۴ـ تابع زیر مفروض است :

$$y=x^2+px+q$$

چه رابطه‌ای بین p و q برقرار باشد تا منحنی نمایش تابع نیمساز ربع اول و سوم را درسه نقطه قطع کند و این سه نقطه و مبدأ مختصات یك تقسیم توافقی تشکیل دهند .

حل ـ مقادیر x_1 و x_2 و x_3 طولهای نقاط تلاقی منحنی

بانیمساز محورها ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند :

$$x^3+qx+q=x \text{ یا } x^3+(p-1)x+q=0$$

بنا به روابط بین ضرایب وریشه‌ها داریم :

$$(1)\quad x_1+x_2+x_3=0$$

$$(2)\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p-1$$

$$(3)\quad x_1x_2x_3=-q$$

برای اینکه نقاط مزبور بامبدأ مختصات تقسیم توافقی تشکیل دهند باید داشته باشیم :

$$(4)\quad \frac{2}{x_1}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$$

از تقسیم طرفین‌رابطهٔ (۲) برطرفین رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1-p}{q}-\frac{1}{x_1}$$

که چون در رابطهٔ (۴) منظورکنیم حاصل می‌شود :

$$\frac{3}{x_1}=\frac{1-p}{q} \Longrightarrow x_1=\frac{3q}{1-p}$$

از روابط (۱) و (۳) به ترتیب خواهیم داشت :

$$x_2+x_3=-x_1=-\frac{3q}{1-p}$$

$$x_2x_3=-\frac{q}{x_1}=\frac{p-1}{3}$$

و در رابطهٔ (۲) منظور می‌کنیم :

$$x_2x_3+x_1(x_2+x_3)=p-1$$

$$\frac{p-1}{3}+\frac{3q}{1-p}\left(-\frac{3q}{1-p}\right)=p-1$$

بعد از اختصار نتیجه‌می‌شود :

$$2(p-1)^3+27q^2=0$$

۴۴۷۵ـ اگر داشته باشیم :

$$\alpha+\beta+\gamma=\mathrm{Arc}\sin m$$

و $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ ریشه‌های معادلهٔ :

$$a\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma x^3+bx^2+cx+d=0$$

باشند هریك از روابط زیر را نتیجه‌بگیرید :

$$m=\frac{d-b}{a}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=-\frac{d}{a}$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{c\pm\sqrt{a^2-(d-b)^2}}{a}$$

حل- از رابطهٔ مفروض داریم :

$$m=\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$m=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha tg\beta tg\gamma)$$

بنابه روابط بین ضرایب‌وریشه‌های معادلهٔ مفروض داریم :

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=-\frac{b}{a\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\qquad(1)$$

$$tg\alpha tg\beta tg\gamma=-\frac{d}{a\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\qquad(2)$$

و نتیجه می‌شود :

$$m=\frac{-b+d}{a}$$

از رابطهٔ (۲) باحذف مخرج‌مشترك نتیجه‌می‌شود :

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=-\frac{d}{a}$$

از بسط رابطهٔ :

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\sqrt{1-m^2}$$

و بااستفاده از روابط‌بدست‌آمده رابطهٔ سوم مطلوب‌نتیجه‌خواهد شد .

۴۴۷۶ـ تابع اولی تابع زیررا تعیین‌کنید :

$$y=\frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}$$

حل- رادیکالها رابه فرجهٔ مشترك تبدیل‌کرده ومخرج راگویا می‌کنیم ، بعد از اختصار نتیجه‌می‌شود :

$$y=\frac{\sqrt[14]{x}\,(\sqrt[14]{x^4}-\sqrt[14]{x^3}+\sqrt[14]{x^2}-\sqrt[14]{x}+1)}{x}$$

وخواهیم داشت :

$$Y=14\left[\frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}-\frac{1}{4}\sqrt[14]{x^4}+\frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3}-\frac{1}{2}\sqrt[14]{x^2}+\sqrt[14]{x}\right]+C$$

۴۴۷۷ـ تابع اولی تابع زیررا تعیین‌کنید :

$$y=tg^{2n}x$$

حل- به‌ترتیب زیر عمل‌می‌کنیم :

$$y = tg^{2n}x + tg^{2n-2}x \quad tg^{2n-2}x - tg^{2n-4}x +$$
$$+ tg^{2n-4}x + \dots + tg^{4}x + tg^{2}x \quad tg^{2}x \quad 1 + 1$$
$$y = (1 + tg^{2}x)[tg^{2n-2}x - tg^{2n-4}x + \dots +$$
$$+ tg^{2}x \quad 1] + 1$$
$$Y = \frac{1}{2n-1} tg^{2n-1}x + \frac{1}{2n-3} tg^{2n-3}x +$$
$$+ \dots + \frac{1}{3} tg^{3}x - tgx + x + C$$

۴۴۷۸- نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$tg^{2}\frac{B+C}{2} = tgB\,tgC$$

حل- داریم :

$$tg^{2}\frac{B+C}{2} \quad cotg^{2}\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{1-\cos A}$$

$$tgB\,tgC = \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} =$$

$$= \frac{\cos(B \quad C) - \cos(B+C)}{\cos(B \quad C) + \cos(B+C)} = \frac{\cos(B-C) + \cos A}{\cos(B-C) - \cos A}$$

$$\frac{\cos(B-C) + \cos A}{\cos(B-C) - \cos A} = \frac{1+\cos A}{1-\cos A}$$

$$\frac{\cos(B-C)}{\cos A} = \frac{1}{\cos A}$$

یا $\cos A = 0 \Longrightarrow A = 90^\circ$

یا $\cos(B-C) = 1 \Longrightarrow B = C$

۴۴۷۹- مطلوبست حل معادلهٔ زیر برحسب x :

$$\sum_{r=0}^{n} p^{x+r} = \sum_{r=0}^{n} q^{x+r}$$

حل- معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{x} = \frac{\Sigma q^{r}}{\Sigma p^{r}}$$

$$\Sigma q^{r} = 1 + q + q^{2} + \dots + q^{n} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$\Sigma p^{r} = \frac{P^{n+1} - 1}{p - 1}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{x} = \frac{(q^{n+1} - 1)(p - 1)}{(p^{n+1} - 1)(q - 1)} = A$$

$$x = \log A \div [\log p - \log q]$$

۴۴۸۰- معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$cotg\,2x = tg^{3}x$$

حل- داریم :

$$\frac{1 - tg^{2}x}{2\,tg\,x} = tg^{3}x$$

$$2tg^{4}x + tg^{2}x - 1 = 0$$

$$tg\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } x = k\pi \pm Arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴۴۸۱- ابعاد مستطیلی برحسب دسیمتر عددهای صحیح و برحسب متر عددهای اعشاری می‌باشند . محیط مستطیل بر حسب متر و مساحت آن‌بر حسب مترمربع بایك عدد بیان‌می‌شوند . ابعاد مستطیل را پیدا کنید .

حل- فرض می‌کنیم ابعاد مستطیل برحسب دسیمتر x و y باشد (هیچیك‌از دوعدد x و y بر ۱۰ قابل قسمت‌نیست زیرا این مقادیر برحسب متر عددهای اعشاری هستند). بنابه فرض داریم :

$$\frac{x}{10} \times \frac{y}{10} = 2\left(\frac{x}{10} + \frac{y}{10}\right)$$

$$xy = 20(x+y)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$$

هریك از مقادیر x و y چون مثبت است باید از ۲۰ بزرگتر باشد ، فرض‌می‌کنیم :

$$x = 20 + u \text{ و } y = 20 + v$$

$$\frac{1}{20+u} + \frac{1}{20+v} = \frac{1}{20}$$

$$20(u+v+40) = (20+u)(20+v)$$

بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$uv = 400 = 2^{4} \times 5^{2}$$

چون x و همچنین y بر ۲۰ قابل قسمت‌نیست بنابراین :

$$\begin{cases} u = 2^{4} = 16 \\ v = 5^{2} = 25 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 45 \end{cases}$$

که تنها جواب قابل قبول مسئله می‌باشد .

۴۴۸۲- عددی چهار رقمی مضرب ۹ را پیداکنیدکه دارای ۱۲ مقسوم‌علیه باشد و مجموع مقسوم‌علیه‌های آن‌مضرب ۸ بوده و ۱۸ مقسوم‌علیه داشته باشد .

حل - عدد را A و مجموع مقسوم‌علیه‌های آنرا S فرض می‌کنیم . باید داشته باشیم :

$$A = 3^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots \text{ و } \alpha > 2$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots=12$$

$$S=2^{\alpha'}b'^{\beta'}c'^{\gamma'}\ldots \text{و} \alpha'\geq 3$$

$$(\alpha'+1)(\beta'+1)(\gamma'+1)\ldots=18$$

با توجه به‌اینکه:

$$12=1\times 12=2\times 2\times 3=4\times 3=6\times 2$$

$$18=1\times 18=9\times 2=6\times 3=3\times 3\times 2$$

و باتوجه به‌اینکه $A<10^4$ است خواهیم داشت :

$$A=3^2bc \text{ یا } 3^2b^2 \text{ یا } 3^2b^3 \text{ یا } 3^5b$$

$$S=2^8b' \text{ یا } 2^5b'^2$$

اما می‌دانیم که :

$$S=\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\times\ldots$$

و اگر فرض کنیم $A=3^2bc$ بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$S=13(b+1)(c+1)=2^8b'$$

$$\begin{cases} b'=13 \\ (b+1)(c+1)=2^8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} b=7 \\ c=31 \end{matrix}$$

$$A=1953$$

و به‌همین‌ترتیب حالات مختلف را امتحان کرده وبالاخره نتیجه خواهدشدکه تنها جواب مسئله همان عدد $A=1953$ می‌باشد.

۴۴۸۳ـ ثابت کنیدکه‌مجموع هردوعددفرد متوالی که‌هیچ‌کدام مضرب ۳ نباشند مضربی است از ۱۲ .

حل ـ فرض‌می‌کنیم $A=2n-1$ و $B=2n+1$ دوعدد فرد متوالی باشند در این‌صورت داریم :

$$S=A+B=4n$$

باقیماندهٔ تقسیم‌عدد A بر۳یا ۱ یا ۲ است. اگر باقیماندهٔ تقسیم A بر ۳ عدد یك باشد دراین صورت نتیجه می‌شودکه B بر ۳ قابل قسمت است‌که قابل قبول نیست . اگر باقیماندهٔ تقسیم A بر ۳ برابر ۲ باشد باقیماندهٔ تقسیم B بر۳ برابر یك بوده و خواهیم داشت :

$$\begin{cases} A=2n-1=3k+2 \\ B=2n+1=3(k+1)+1 \end{cases} \Longrightarrow n=3(k+1)$$

n مضرب ۳ ودر نتیجه $S=4n$ مضرب ۱۲ است .

۴۴۸۴ـ سه‌عدد صحیح مخالف صفر تصاعدی هندسی‌می‌سازندکه‌قدر نسبت‌آن نیز عدد صحیح است. اگر به‌کوچکترین این عددها ۹ واحد بیفزائیم عدد حاصل با دوعدد دیگر تصاعدی حسابی تشکیل می‌دهند . کلیهٔ مقادیر ممکن عددهای مزبور را تعیین‌کنید .

حل ـ اعداد را a و aq و aq^2 فرض می‌کنیم . برحسب اینکه‌کدامیك ازاین سه عددکوچکتر باشد وبرحسب اینکه کدامیك ازجمله‌های تصاعد حسابی جملهٔ وسط آن باشد حالات مختلف زیر را داریم :

۱) $aq+aq^2=2(a+9)$

$a(q^2+q-2)=18$

$a(q+2)(q-1)=18$

$a=1$ و $q=4$ یا $a=-9$ و $q=-1$

۲) $aq+(a+9)=2aq^2$

$a(2q^2-q-1)=9$

$a(2q+1)(q-1)=9$

$q=-2$ و $a=1$

۳) $aq^2+(a+9)=2aq$

$a(q^2-2q+1)=-9$

$a(q-1)^2=-9$

$a=-1$ و $q=4$ یا -2

$a=-9$ و $q=2$

۴) $a+aq^2=2(aq+9)$

$a(q-1)^2=18$

$a=2$ و $q=4$ یا -2

۵) $a+aq=2(aq^2+9)$

$a(2q+1)(q-1)=-18$

$a=-2$ و $q=-2$

حالات دیگری که می‌توان درنظرگرفت جواب قابل‌قبول بدست نمی‌دهند . بنابراین عددهای مطلوب عبارتند از :

(۴ و ۲ و ۱ −) و (۱۶ − و ۴ − و ۱ −)

و (۳۶ − و ۱۸ − ۹ −) و

(۹ − و ۹و۹ −) و (۱۶ و ۴ و ۱) و (۸ و ۴ − و ۲)

(۸ − و ۴ و ۲ −) و (۴ و ۲ − و ۱)

۴۴۸۵ـ ثابت‌کنیدکه حاصل‌عبارت :

$$A_n=7^n(3n+1)-1$$

به ازاء مقادیر مثبت n بر ۹ بخش‌پذیر است .

حل ـ ازروش استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم ، به‌ازاء $n=1$ داریم $A_1=27$ که بر ۹بخش پذیر است . فرض می کنیم به‌ازاء $n=k$ رابطه محقق باشد ثابت‌می‌کنیم‌که به‌ازاء $n=k+1$ نیز محقق‌می‌باشد . داریم :

$$d=7^{k+1}[3(k+1)+1]-1-[7^k(2k+1)-1]$$

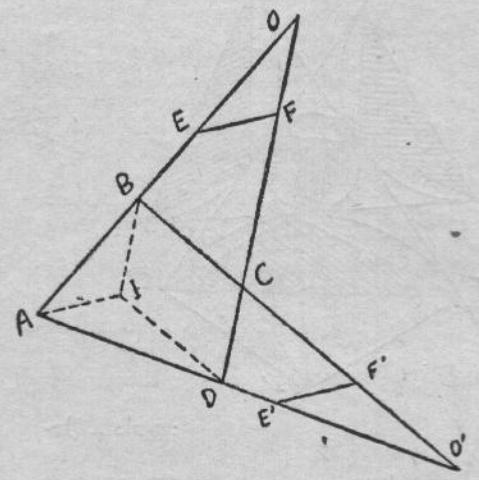
$d = 7^k(18k + 27) =$ مضرب ۹

چون A_1 مضرب ۹است واگر A_k مضرب ۹ باشد :

$A_{k+1} - A_k$

و درنتیجه A_{k+1} نیز مضرب ۹ است . بنابراین به‌ازاء جمیع مقادیر n عدد A_n بر ۹ بخش پذیر است .

۴۴۸۶ـ اضلاع AB وCD ازچهار ضلعی $ABCD$ یکدیگر را در O واضلاع AD و BC یکدیگر را در O' قطع می‌کنند . روی OA ، OC ، $O'A$ و $O'C$ به ترتیب



قطعات OE ، OF ، $O'E'$ و $O'F'$ را مساوی با AB ، CD ، و AD و BC جدا می‌کنیم . ثابت‌کنیدکه EF با $E'F'$ موازی است .

حل ـ خطی‌که از B موازی با CDوخطی‌که از D موازی با BC رسم شود یکدیگر را در I قطع می‌کنند . از تساوی مثلثهایBAI و OEF نتیجه می‌شودکه EF و AI با یکدیگرمساوی‌و موازی باشند .از تساوی دو مثلث $O'E'F'$ و AID نیز نتیجه می‌شودکه $E'F'$ و AI با یکدیگرمساوی و موازی‌باشند . بنابراینEF و $E'F'$ باهم موازی وهمچنین مساوی هستند .

۴۴۸۷ـ مثلث ABC دردایرهٔ به‌شعاع R محاط است . قطرهای دایره را از A و B و C رسم می‌کنیم‌که با دایره در نقاط دیگر A' و B' و C' متقاطع می‌باشند . اگر r شعاع‌دایرهٔ‌محاطی داخلی مثلث مفروض باشد ثابت‌کنیدکه‌محیط شش ضلعی $AB'CA'BC'$ برابراست با $4(R+r)$

حل ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABB' داریم :

$AB' = 2R\cos B' = 2R\cos C$

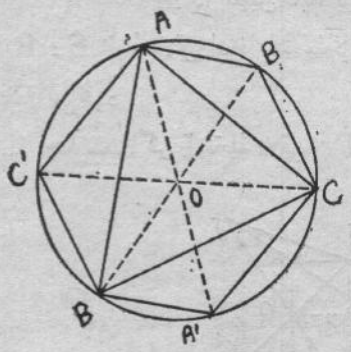
و به همین ترتیب خواهیم داشت :

$AC' = 2R\cos B$ و $BC' = 2R\cos A$

$BA' = 2R\cos C$

و $CA' = 2R\cos B$

$CB' = 2R\cos A$



از جمع طرفین روابط بالا با فرض اینکه P محیط شش ضلعی باشد داریم :

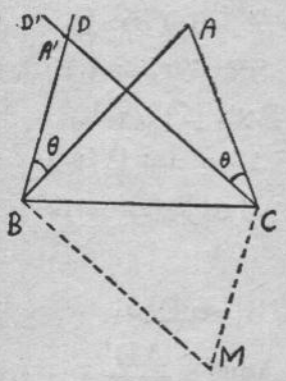
$P = 4R(\cos A + \cos B + \cos C)$

$$P = 4R\left(4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1\right)$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$P = 4(R + r)$

۴۴۸۸ـ مثلث ABC مفروض است . ضلعهای BA و CA را به‌ترتیب حول B و C به‌اندازهٔ زاویهٔ θ ودریك‌جهت دوران‌می‌دهیم و وضع جدید آنها را به‌ترتیب D و D'می‌نامیم. ازنقاط B و C خطوط Δ و Δ' را موازی با D و D' رسم می‌کنیم‌که یکدیگر را در M قطع می‌کنند . وقتی θ تغییر کند مکان نقطهٔ M چه می‌باشد .



حل ـ اگر A' نقطهٔ تلاقی D و D' باشد زاویهٔ :

$A' = BA'C$

یا برابر است با :

$A' = 180^\circ - (B + \theta + C - \theta)$

$A' = 180^\circ - (B + C) = A$

و یا مکمل این زاویه می‌باشد .

درمتوازی‌الاضلاع $MBA'C$ دو زاویهٔ‌متقابل A' و M بایکدیگر برابرند. پس زاویهٔ M با زاویهٔ A برابر است و مکان M کمان درخور زاویهٔ A یا مکمل‌آن است‌که بر B وCمی‌گذرد وعبارتست ازقرینهٔ دایرهٔ محیطی مثلث نسبت به‌ضلع BC که‌بر نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث نیز می‌گذرد .

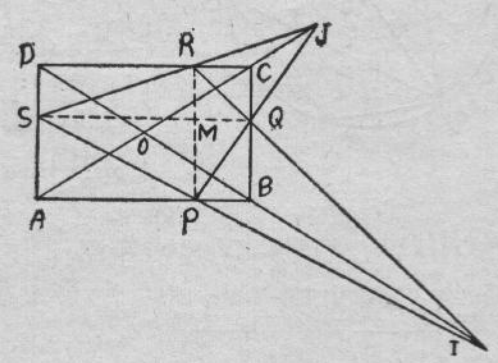
۴۴۸۹ـ مربع مستطیل $ABCD$ به‌مرکز O را در نظرمی‌گیریم . نقطهٔ M را درصفحهٔ مستطیل اختیارکرده‌وآنرا به‌ترتیب‌درP و Q و R و S برضلعهایAB،BC،CDوDA تصویر می‌کنیم .

۱) ثابت‌کنیدکه خطوط PS و QR روی خط BD و

خطوط QP و RS روی خط AC متقاطع می‌باشند .

۲) مکان M را تعیین کنید برای آنکه هریك از نقاط P، Q، R و S نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلثی باشدکه ازسه نقطهٔدیگر تشکیل می‌شود .

حل- اگر I نقطهٔ تلاقی PS و BD باشد بنا به‌قضیهٔ



منلائوس درمثلث ABD داریم :

$$\frac{\overline{ID}}{\overline{IB}}\cdot\frac{\overline{SA}}{\overline{SD}}\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=1$$

این رابطه به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{\overline{ID}}{\overline{IB}}\cdot\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}\cdot\frac{\overline{RC}}{\overline{RD}}=1$$

وبنا به‌عکس قضیهٔ منلائوس در مثلث BCD لازم می‌آید که I روی RQ قرار داشته باشد. به‌طریق مشابه ثابت می‌شود که J نقطهٔ تلاقی SR و PQ روی AC واقع است .

۲) اگر مثلا P مرکز ارتفاعیهٔ مثلث QRS باشد P' قرینهٔ P نسبت به خط QS بردایرهٔ محیطی مثلث مزبور واقع خواهد بود وبرای این‌کار لازم وکافی است که داشته باشیم:

$$\overline{MP'}\cdot\overline{MR}=\overline{MQ}\cdot\overline{MS}\quad(1)$$

اگر E وسط PR و F وسط QS باشد داریم :

$$\overline{MP}\cdot\overline{MR}=\overline{ME}^2-\frac{PR^2}{4}=ME^2-\frac{AD^2}{4}$$

$$\overline{MQ}\cdot\overline{MS}=MF^2-\frac{QS^2}{4}=MF^2-\frac{AB^2}{4}$$

که چون در رابطهٔ (۱) منظورکنیم نتیجه می‌شود :

$$ME^2+OE^2-\frac{1}{4}(AD^2+AB^2)=0$$

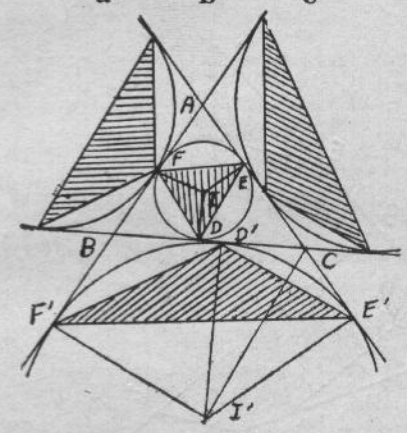
$$OM^2=\frac{AD^2+AM^2}{4}=\frac{BD^2}{4}=OB^2$$

داریم OM=OB و مکان M دایرهٔ محیطی مستطیل می‌باشد .

۴۴۹۰- مثلثی‌راکه رأسهای‌آن نقاط تماس دایرهٔمحاطی یك مثلث با ضلعهای آن می‌باشد مثلث تماسی می‌نامیم . هرگاه S مساحت مثلث ABC و T و T_a و T_b و T_c به ترتیب مساحتهای مثلثهای تماسی داخلی و خارجی مثلث باشد ثابت کنیدکه :

$$(1):\quad T_a+T_b+T_c-T=2S$$

$$(2):\quad \frac{1}{T_a}+\frac{1}{T_b}+\frac{1}{T_c}=\frac{1}{T}$$



حل ـ داریم :

$$T=\frac{1}{2}[IE\cdot IF\sin(\pi-A)+IF\cdot ID\sin(\pi-B+$$
$$+ID\ IE\sin(\pi-C)]$$

$$T=\frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$T=\frac{1}{2}r^2\times\frac{p}{R}=\frac{Sr}{2R}$$

$$T_a=\frac{1}{2}r_a^2(\sin B+\sin C-\sin A)$$

$$T_a=\frac{1}{2}r_a^2\times\frac{p-a}{R}=\frac{Sr_a}{2R}$$

$$T_b=\frac{Sr_b}{2R}\ ,\ T_c=\frac{Sr_c}{2R}$$

به سادگی ثابت می‌شودکه :

$$r_a+r_b+r_c-r=4R$$

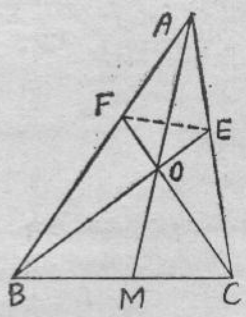
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

و دو رابطهٔ (۱) و (۲) محقق می‌باشد .

۴۴۹۱- هرگاه O نقطه‌ای‌ازمیانهٔ AM مثلث ABC باشد وخطوط BO و CO ضلعهای AC و AB را به ترتیب در E و F قطع کنند ثابت کنید که اگر AB>AC باشد

$BE > CF$ خواهد بود.

حل- طبق قضیهٔ سوا داریم :



$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

وچون $BM=MC$ پس داریم:

$$\frac{AF}{FB}=\frac{AE}{CE}$$

خط EF با BC موازی است

و درنتیجه داریم :

$$\frac{BE}{BO}=\frac{CF}{CO}$$

وچون $BO>CO$ است پس $BE>CF$ می‌باشد .

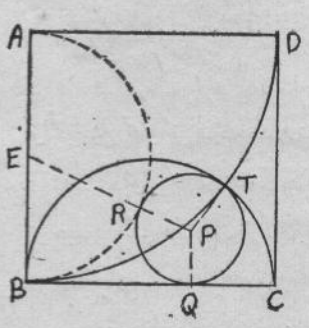
۴۴۹۲- ثابت کنید که درهر مثلث بین R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی نامساوی (یاتساوی) زیر برقرار است :

$$\frac{r}{R}+\frac{R}{r}\geqslant\frac{5}{2}$$

حل- در هر مثلث داریم $R\geqslant 2r$ ، فرض می‌کنیم $R=2r+x$ که $x\geqslant 0$ (اگرمثلث متساوی‌الاضلاع باشدداریم $x=0$) دراین‌صورت خواهیم داشت :

$$\frac{r}{R}+\frac{R}{r}=\frac{1}{2}-\frac{x}{2R}+2+\frac{x}{r}=\frac{5}{2}+\frac{x(2R-r)}{2Rr}\geqslant\frac{5}{2}$$

۴۴۹۳- مربع $ABCD$ مفروض است. ربع دایرهٔ BD بمرکز A ونیمدایرهٔ به قطر BC را درداخل مربع رسم می‌کنیم که غیر از B در نقطهٔ T متقاطع می‌باشند . ثابت کنید دایرهٔ (P) که در T بر نیمدایرهٔ BC ودریك نقطهٔ Q بر ضلع BC مماس باشد بردایرهٔ به‌قطر AB نیز مماس می‌باشد.



حل- B را مبدأ مختصات، محورطولها رامنطبق بر BC ومحورعرضهارامنطبق بر BA و طول نقطهٔ C را واحدفرض می‌کنیم یعنی $C(1,0)$. دراین صورت بعد ازمحاسبات لازم خواهیم داشت :

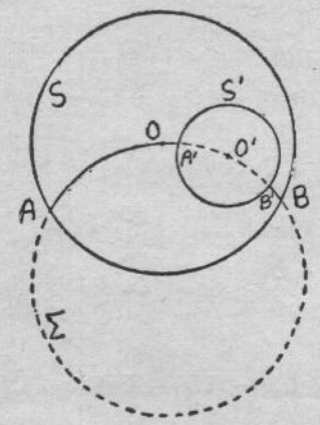
$$T\left(\frac{4}{5}\text{ و }\frac{2}{5}\right)\text{ و }P\left(\frac{2}{3}\text{ و }\frac{2}{9}\right)\text{ و }PT=PQ=\frac{2}{9}$$

اگر E وسط AB باشد خواهیم داشت :

$$EP=\frac{13}{18}=\frac{1}{2}+\frac{2}{9}=ER+RP$$

یعنی دایره‌های (E) و (P) در R برهم مماس هستند .

۴۴۹۴- کرهٔ به‌مرکز O' وبه‌شعاع R' داخل کرهٔ به مرکز O وبه شعاع R قراردارد وکرهٔ Σ بر O و O' گذشته با دوکرهٔ مزبورمتقاطع می‌باشد . مساحت سطحی ازکرهٔ Σ را که بین کره‌های O و O' محصور است برحسب R و R' حساب کنید .



حل- سطح حاصل عبارتست ازتفاضل سطح عرقچین کروی AOB از کرهٔ Σ که داخل کرهٔ S واقع شده وسطح عرقچین کروی $A'O'B'$ از کرهٔ Σ که داخل کرهٔ S' قرار دارد وبرابر می‌شود با :

$$\pi\overline{OA}^2-\pi\overline{O'A'}^2=\pi(R^2-R'^2)$$

۴۴۹۵- دونقطهٔ ثابت F و P مفروض است . بیضی متغیر (E) را درنظر می‌گیریم که F یك کانون آن بوده و از نقطهٔ P بگذرد وطول قطر اقصرآن مقدارثابت $2b$ باشد .

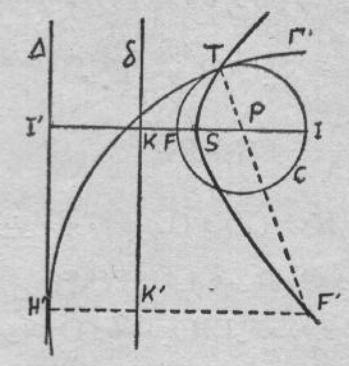
۱) اگر F' کانون دیگر این بیضی و (Γ') دایرهٔ هادی نظیرآن باشد ثابت کنید که (Γ') بر دایرهٔ ثابتی مانند (C) و همچنین برخط ثابتی مانند Δ مماس است .

۲) وضع F' را چنان تعیین کنید که طول قطر اطول بیضی (E) می‌نیمم باشد . مقادیرنظیر $2c$ فاصلهٔ کانونی، $2a$ طول قطر اطول و z خروج ازمرکز بیضی را برحسب b و $FP=x$ حساب کنید .

۳) اگر b ثابت باقی مانده و x از صفر تا $+\infty$ ترقی کند جدول تغییرات ومنحنی نمایش z را رسم کنید . اگر λ عددی محصوربین صفر ویك باشد دومقدار x_1 و x_2 برای x وجود داردکه در ازاء آن $z=\lambda$ می‌باشد . رابطه‌ای مستقل از λ بین x_1 و x_2 تعیین کنید .

حل- هرنقطه ازبیضی مرکز دایره‌ای است که بر یك

کانون‌می‌گذردو بر دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر مماس است . بنابراین دایرهٔ (Γ') بر دایرهٔ ثابت (C) به‌مرکز P و به شعاع PF مماس می‌باشد . قوت نقطهٔ F نسبت بـه دایرهٔ (Γ') برابر است با :



$$p=\overline{FF'}^2-4a^2=4c^2-4a^2=-4b^2=cte$$

درانعکاس به‌قطب F وبه‌قوت $-4b^2$ که دایرهٔ (Γ') غیرمتغیر باقی می‌ماند منعکس دایرهٔ ثابت (C) خط‌ثابتی مانند Δ است‌که بر (Γ') مماس می‌باشد ونتیجه می‌شودکه‌مکان نقطهٔ F' یك‌سهمی (P) است به‌کانون P وخط هادی (δ) .

۲) قطر اطول بیضی برابر است‌با شعاع $F'H'$ ازدایرهٔ (Γ') و وقتی می‌نیمم است‌که F' بر S از سهمی (P) منطبق باشد ودراین حال داریم :

$$2c=FS \quad و \quad 2a=I'S$$

$$\overline{FS}=\overline{FP}+\overline{PS}=\overline{FP}+\frac{1}{2}\overline{PK}=\overline{FP}+\frac{1}{2}\overline{FI'}$$

$$\overline{FP}=x \quad و \quad \overline{FI}\cdot\overline{FI'}=-4b^2 \quad و \quad \overline{FI'}=-\frac{2b^2}{x}$$

$$\overline{FS}=x-\frac{b^2}{x}=\frac{x^2-b^2}{x} \quad و \quad 2c=FS=\frac{|x^2-b^2|}{x}$$

$$\overline{I'S}=\overline{I'K}+\overline{KS}=\overline{FP}+\frac{1}{2}\overline{I'F}=x+\frac{2b^2}{x}$$

$$2a=\frac{x^2+b^2}{x}$$

$$z=\frac{c}{a}=\frac{|x^2-b^2|}{x^2+b^2}$$

۳) اگر $x<b$ باشد داریم :

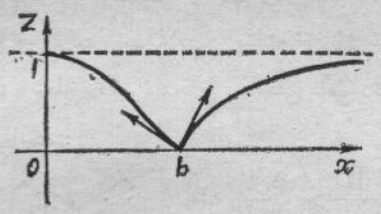
$$z=-\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2} \quad و \quad z'=\frac{-4b^2x}{(x^2+b^2)^2}$$

و اگر $x\geqslant b$ باشد داریم :

$$z=\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2} \quad و \quad z'=\frac{4b^2x}{(x^2+b^2)^2}$$

جدول تغییرات وشکل‌منحنی تغییرات z به‌صورت زیرمی‌باشد .

x	0		b		$+\infty$
z'	0	$-$		$+$	
z	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1



از روی شکل منحنی برمی‌آیدکه خط $z=\lambda$ در ازاء مقادیر $0<\lambda<1$ دردونقطه منحنی را قطع می‌کند یکی به طول x_1 ودیگری به‌طول x_2 ریشه‌های مثبت دومعادلهٔ زیر :

$$\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}=\lambda \quad و \quad \frac{-x^2+b^2}{x^2+b^2}=\lambda$$

خواهیم داشت :

$$x_1=b\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \quad و \quad x_2=b\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$$

و نتیجه می‌شود :

$$x_1x_2=b^2$$

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شماره ۴۷

۶۴۸۱- محمد باقری - علی اصغراسکندربیاتی .

۶۴۷۲- احمد توسلی - حسن گل محمدی - شهریـار کوزه کنانی - محمد باقری - ابوالفضل فتح‌الله‌زاده .

۴۴۷۳- ابراهیم ذوالقدری - علی صفرزاده امیری - احمد توسلی - جعفر ترکیان - سیروس مریوانی - محمد حسن نیك‌بخش تهرانی - محمد رضاکسائی - اکبرابراهیمیان - جلیل راشد - داود خدادادی - داود سازگاری - کیهان خمامیور - توحید زرگرارشادی- قربان هدایتی - حسن‌حسین گل‌محمدی محمدبابائی ،

۴۴۷۴- ابراهیم ذوالقدری - احمد توسلی.

۴۴۷۵ـ ابراهیم ذوالقدری. رحمن حسینی علمداری. فریدون زهرائی ـ احمد توسلی.رحمت ستوده ـ حسن گل‌محمدی حمیدمقدم‌زاده ـ اکبرابراهیمیان ـ داودسازگاری. توحیدزرگر ارشادی ـ محمد سمیعی فرد ـ شهریارکوزه کنانی ـ محمدباقری ابوالفضل فتح‌الله‌زاده ـ دوست خدادادی ـ محمدرضا کسائی.

۴۴۷۶ـ ابوالفضل فتح‌الله زاده ـ دولت خدادادی ـ اکبر ابراهیمیان.

۴۴۷۷ـ حسن گل محمدی ـ حسین مهدیزاده.

۴۴۷۸ـ ابراهیم ذوالقدری ـ احمد توسلی ـ رحمت ستوده ـ عباس پاسدار ـ جعفر ترکیان ـ کیوان جمالپور ـ داود سازگاری ـ شهریار کوزه کنانی ـ فریدون زهرائی ـ فرهاد رحیم‌زاده ـ اکبر ابراهیمیان.

۴۴۷۹ـ احمد توسلی ـ علی‌صفرزاده‌امیری ـ میرخالق قلعه‌سری ـ فریدون زهرائی ـ بهرام آزاد ـ میرخالق‌قلعه‌سری محمد بابائی ـ توحید زرگر ارشادی ـ اکبر ابراهیمیان.

۴۴۸۰ـ ابراهیم‌ذوالقدری ـ داودلاسمی ـ عباس پاسدار محمد بابائی ـ میوخالق قلعه‌سری ـ عیسی فیروز دهقان ـ حسن گل‌محمدی ـ جعفر ترکیان ـ غلامعلی ستارزاده ـ توحیدزرگر ارشادی ـ کیوان‌جمالپور ـ محمدباقری ـ ابوالفضل‌فتح‌الله‌زاده دولت خدادادی ـ محمدحسن نیک‌بخش ـ اکبر ابراهیمیان.

۴۴۸۱ـ توحید زرگر ارشادی ـ علی اکبر صادقیان ـ محمد باقری ـ دولت خدادادی.

۴۴۸۳ ـ احمد توسلی ـ توحید زرگر ارشادی ـ محمد سمیعی فرد ـ محمد باقری ـ دولت خدادادی.

۴۴۸۵ـ غلامعلی ستار زاده ـ توحید زرگر ارشادی ـ علی اصغر وفائی ـ محمد حسن نیک‌بخش تهرانی ـ محمد رضا کسائی ـ علی‌صفرزاده امیری.

۴۴۸۶ـ احمد توسلی ـ بهزادسپهربند ـ داودسازگاری کیوان جمالپور ـ جلیل راشد.

۴۴۸۷ـ احمد توسلی ـ محمد بابائی ـ تقی توانای‌ـ رشید ـ توحید زرگر ارشادی ـ علی اکبر صادقیان.

۴۴۸۸ـ احمد توسلی ـ توحید زرگر ارشادی ـ بهزاد سپهربند ـ علی اکبر صادقیان ـ علی اصغر اسکندر بیاتی ـ جلیل راشد.

۴۴۸۹ـ احمد توسلی ـ بهزاد سپهربند ـ محمد باقری

۴۴۹۱ـ تقی توانا ـ محمدبابائی ـ جهانبخش‌جهانسوز رحمن حسینی علمداری ـ احمدتوسلی ـ میر خالق قلعه‌سری ـ حسن‌گل‌محمدی ـ توحید زرگر ارشادی.

۴۴۹۲ـ اکبر ابراهیمیان ـ بهرام رزمپوش ـ فتح الله زاده ـ احمدتوسلی ـ غلامعلی احسانی ـ توحید زرگر ارشادی.

۴۴۹۳ـ احمد توسلی.

ملاحظات تاریخی..... (بقیه ازصفحهٔ ۸۰)

تاکنون‌دانستیم که یکی ازحدود $\frac{22}{7}$ بوسیلهٔ **ارشمیدس**، مقدار $\sqrt{10}$ بوسیلهٔ **براهماگوپتا** و مقدار تقریبی $\frac{62832}{20000}$ بوسیلهٔ **آریاباهاتا** مشخص شده است.

محمد همچنین ازدستور هرونی.

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{2\times 7}\right)$$

استفاده کرده است. یکی از مؤلفین سوری به نام **بهاءالدین** (قرن ۱۶) در کتاب خود موسوم به «خلاصهٔ حساب» مقدار $4\left(1 - \frac{3}{14}\right)$ را معادل با π دانسته است. درخاتمه یك روش عملی محاسبهٔ π را که توسط منجمان اسلامی حدود قرن ۱۳ بکار رفته و درسال ۱۸۶۰ بوسیلهٔ **وپکه** اعلام شده است‌ذکر می‌کنیم.

ابوالوفا (قرن دهم) با فرض‌آنکه شعاع دایره برابر با واحد و به ۶۰ جزء تقسیم شده باشد بوسیلهٔ محاسباتی‌که با عملیات بطلمیوس مغایرت داشته دریافته است‌که طول وتر کمان نیم‌درجه معادل است با:

$$\frac{31}{60^2} + \frac{24}{60^3} + \frac{55}{60^4} + \frac{54}{60^5} + \frac{55}{60^6}$$

بعد از ابوالوفا با استفاده ازنتایج‌کار وی‌محاسبات‌ادامه یافته و محیط ۷۲۰ ضلعی منتظم محاطی وهمچنین محیطی را بدست‌آوردند و دریافتند که‌محیط‌دایره ازسه‌برابر قطر به‌اندازهٔ

$$\frac{10}{70 + \frac{38}{60} + \frac{14}{60^2} + \frac{29}{60^3}} = 0/141568$$

بیشتر است وبرای π عدد ۳/۱۴۱۵۶۸ را بدست آوردند. حال با فرض واحد بودن شعاع و با درنظرگرفتن طول وتر کمان نیم درجه‌که بوسیلهٔ ابوالوفا بدست‌آمده است طول کمان ۱۸۰° برابر با ۳/۱۴۱۵۵ بدست می‌آیدکه این‌مقدارمعادل با π خواهد بود.

یکانـ دربین کارهای ریاضیدانان اسلامی در محاسبهٔ مقدار π آنچه بیش از همه اهمیت دارد مربوط به‌ریاضیدان بزرگ ایرانی **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** است (قرن هشتم هجری) که متأسفانه نویسندهٔ کتاب‌بالا از آن بی‌اطلاع بوده است.

هندسهٔ مقدماتی

(از مجموعهٔ : چه می‌دانم ؟ تألیف : André DELACHET ، ترجمهٔ : عبدالحسین مصحفی)

دنباله ازشمارهٔ پیش

§ ۱۱ـ مفهوم مجموعه‌های محدود ـ مفهوم مجموعهٔ محدود می‌تواند مستقل از هر مفهوم اندازه تعریف‌شودو ازآن بسیاری خواص ازنوع توپولژی نتیجه می‌شودکه ازبین آنها بعضی راکه ساده ترهستند به‌عنوان نمونه مطرح می‌کنیم .

تعریف ـ شکلی مانند X را محدود می‌نامیم هرگاه در ازاء هرامتداد δ شکل مزبور در نواری به‌امتداد δ واقع‌باشد.

قضیهٔ ۱ـ هرمجموعهٔ متناهی محدود است .

فرض می‌کنیم‌که X شامل n نقطهٔ a_1 و a_2 و ... و a_n و δ امتدادی دلخواه و B خطی به امتدادی غیراز δ باشد . تصاویر n نقطهٔ X را در امتداد δ و روی B به b_1 و b_2 و ... b_n می‌نمائیم . B را جهت دار می‌کنیم . بین n نقطهٔ b_i ($i = 1$ و ۲ و ... و n) یك نقطهٔ b_k و یك نقطهٔ b_h وجود دارد بقسمی‌که در ازاء هر i متمایز از k و h داشته باشیم :

$$b_k \prec b_i \prec b_h$$

در این صورت بنا به‌خاصیت C مربوط به نوارهای صفحه‌نتیجه می‌شودکه هر b_i به نوار بستهٔ $[D_k$ و $D_h]$ که‌کناره‌های آن از b_k و b_h گذشته در امتداد δ هستند قرار داشته باشد . همهٔ نقاط X در نوار مزبور واقع‌اند، بنابراین X محدوداست.

قضیهٔ ۲ـ اگر X در دونوار باامتدادهای متفاوت‌واقع باشد محدود خواهد بود .

فرض‌کنیم‌که X مشمول در دو نوار $[A$ و $A']$ و $[B$ و $B']$ با امتدادهای α و β باشد . E مجموعهٔ فصل‌مشترك این دونوار محدب بوده و شامل X می باشد . نقاط تلاقی خطوط A و B ، A و B' ، A' و B' ، A و A' رابه ترتیب با p و q و p' و q' می‌نمائیم .

فرض می‌کنیم δ امتداد دلخواهی متمایز از α و β باشد . مجموعهٔ متناهی چهار نقطهٔ $\{p$ و q و p' و $q'\}$ که محدود است مشمول در نوار $[D$ و $D']$ به‌امتداد δ می‌باشد . این نوار محدب است و هرنقطه‌ای از هریك ازقطعات $[p$ و $p]$ و $[q$ و $p']$ و $[p'$ و $q']$ و $[p$ و $q']$ مشمول در آن می‌باشد .

فرض‌می‌کنیم m نقطه‌ای از X باشد . خطی‌که از m و مثلا در امتداد β رسم شود قطعات $[q$ و $p]$ و $[p'$ و $q']$ را به ترتیب در r و r' قطع می‌کند زیرا که m به نوار $[B$ و $B']$ تعلق دارد. نقطهٔ m که به $[A$ و $A']$ تعلق‌دارد به $[r$ و $r']$ نیزمتعلق‌است بنابراین r و r' به $[D$ و $D']$ تعلق‌داشته ودرنتیجه m نیز به $[D$ و $D']$ تعلق دارد .

بنابراین درازاءهرامتداد δ هرنقطه‌ای از X به‌نوارهای به امتداد δ تعلق دارد . X مشمول در این نوار و در نتیجه محدود می‌باشد .

قضیهٔ ۳ـ هرمجموعهٔ محدود مشمول در یك سمپلکس است وبرعکس .

آنچه را دراثبات‌قضیهٔ قبل بکار رفت در نظر می‌گیریم .

فرض می‌کنیم u نقطه‌ای از A باشد بقسمی‌که q بین p و u واقع باشد . خط $D(u$ و $p')$ با B موازی نیست زیرابر p' می‌گذرد و بر B' هم‌که شامل u نیست نمی‌تواند منطبق‌باشد . پس‌این خط با B در نقطهٔ منحصر v متقاطع‌می‌باشد . بنا به خاصیت P_2 مربوط به تصویر مایل ، p' تصویر q روی $D(p'$ و $u)$ ودر امتداد B بین v و u قراردارد. همچنین q'

تصویر p' روی $D(p$ و $q')$ و در امتداد A بین v و p قرار خواهد داشت . مجموعهٔ E فصل مشترك نوارهای بستهٔ $[A'$ و $A]$ و $[B'$ و $B]$ مشمول در سمپلکسی است که پوش محدب سه نقطه‌ای $\{p$ و u و $v\}$ می‌باشد . بنابراین X مشمول در این سمپلکس است . عکس قضیه واضح‌است .

تبصره ـ از آنچه‌گذشت‌نتیجه می‌شودکه بینهایت سمپلکس شامل X وجود دارد . تقریباً واضح است‌که مجموعهٔ همهٔ این سمپلکسهاعموماًدرحد پائین به‌سمپلکسی‌که شامل X باشدمحدود نیست . خواننده می‌تواند بادر نظر گرفتن مجموعهٔ محدودی شامل چهاز نقطه و ازروی شکل نتیجهٔ مزبور را بدست آورد. بخصوص باید حالتی را درنظر داشت‌که این سمپلکس‌باپوش محدب X منطبق باشد .

§ ۱۲ ـ فهرست برخی اشکال متداول

شاید ضروری نباشد اما از این نظرکه استعمال بعضی اصطلاحات‌کار ما را در دنبالهٔ کتاب آسان می‌کند ذیلا بعضی اشکال هندسی متداول را یادآوری می‌کنیم :

۱) قطاع زاویه‌ای ـ دو نیم صفحهٔ بستهٔ $(.$ و $X)$ و $(.$ و $Y)$راکه‌کناره‌های X و Y آنها در O متقاطع هستند در نظرمی‌گیریم .فصل‌مشترك این دو نیم صفحه مجموعهٔ محدبی است‌که‌آنراکه قطاع‌زاویه‌ای‌محدب می‌نامیم.(قبلا زاویهٔ‌محدب نامیده می‌شد) .

این قطاع زاویه‌ای محدب به‌دو نیم خط $[O$ و $\overrightarrow{Ox}]$ و $[O$ و $\overrightarrow{Oy}]$ محدود است‌که اولی بایك نقطهٔ x از X متمایز از O و متعلق به‌نیم صفحهٔ باز) . و Y(ودومی بایك نقطهٔ y از Y متمایز از O و متعلق به‌نیم‌صفحهٔ‌باز). و X(مشخص می‌شود .

این شکل با مفروضات $[O$ و $\overrightarrow{Ox}]$ و $[O$ و $\overrightarrow{Oy}]$ کاملا مشخص می‌شود و عبارتست از فصل مشترك دو نیم صفحهٔ $(D(O$ و $x)$ و $y)$ و $(D(O$ و $y)$ و $x)$. این قطاع زاویه‌ای رابه‌صورت $(O$ و $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy})$ نشان می‌دهیم و O را رأس وهریك از نیم خطهای $[O$ و $\overrightarrow{Ox}]$ و $[O$ و $\overrightarrow{Oy}]$ را ضلعهای آن می‌نامیم .

قطاع زاویه‌ای محدب صرف‌نظر از ضلعهای آن **باز** نامیده شده وبه‌صورت $(O$ و $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy})$ نشان داده می‌شود. واضح است‌که این شکل بازهم محدب است زیرا فصل مشترك دونیم صفحهٔ باز $(D(O$ و $x)$ و $(D(O$ و $y)$ و $x)$ می‌باشد .

در صفحهٔ π مجموعهٔ متمم یك قطاع زاویه‌ای محدب $(O$ و Ox و $Oy)$ **قطاع زاویه‌ای مقعر** نامیده می‌شود. اگر این شکل‌را با S نشان دهیم بازهم O رأس و نیم خطهای $[O$ و $\overrightarrow{Ox}]$ و $[O$ و $\overrightarrow{Oy}]$ ضلعهای آن نام دارند . از این جهت که x و y به S تعلق دارند اما هر نقطهٔ متعلق به فاصلهٔ $]y$و $y[$ به‌آن تعلق ندارد زیراکه به متمم‌آن تعلق دارد واضح است‌که S مقعر می‌باشد .

قطاع زاویه‌ای‌مقعر نیز بامشخص شدن ضلعهایش مشخص می‌شود واگر ضلعهای آن‌کنارگذاشته شوند شکل‌حاصل‌قطاع زاویه‌ای مقعر **باز** نام دارد. چنین شکلی نسبت به صفحهٔπمتمم یك قطاع زاویه‌ای محدب بسته می‌باشد .

از صرف‌نظر کردن رأس‌یایك ضلع قطاع زاویه‌ای شکل‌های‌دیگری‌بوجود می‌آیدکه چون خیلی‌کم متداول هستند آنها را با نام مخصوص نمی‌نامیم .

تبصره ـ اگر m نقطهٔ دلخواهی ازقطاع زاویه‌ای به رأس O وبه ضلعهای$[O$ و $\overrightarrow{Ox}]$ و $[O$ و $\overrightarrow{Oy}[$ و متمایز از O باشد نیم‌خط $[O$ و $\overrightarrow{Om}[$ به این قطاع تعلق خواهدداشت.

زیرا اگر قطاع‌محدب باشدهر نقطهٔn ازنیم‌خط: $[O$ و $\overrightarrow{Om}]$ با m قطعه خط $[n$ و $m]$ را مشخص می‌کندکه نه با X و نه باY متقاطع‌نیست: n به دو نیم‌صفحهٔ $(X$ و$m)$ و $(Y$ و $m)$ ودرنتیجه‌به‌فصل مشترك آنها تعلق دارد . در مورد قطاع‌محدب باز نیز خاصیت مزبور صادق بوده و به‌سادگی محقق می‌شود.

اگر قطاع زاویه‌ای مقعر باشد باز هم خاصیت مزبور صادق است . زیرا وقتی m به‌یکی از ضلعهای آن تعلق داشته باشدکه موضوع محقق است . اگر m به‌قطاع زاویه‌ای مقعر باز تعلق‌داشته باشد به‌متمم‌آن‌درπیعنی به: $(O$ و $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy})$ تعلق نخواهدداشت . واگر a نقطه‌ای از قطعه خط $[O$ و$m]$ باشدکه به‌این قطاع متعلق نباشد به $(O$ و $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy})$ تعلق داشته در نتیجه‌نیم‌خط $[O$ و $\overrightarrow{Oa}[$ مشمول در $(O$و$\overrightarrow{Ox}$و$\overrightarrow{Oy})$ بوده و از آنجا نتیجه می‌شودکه m به‌نیم خط $[O$ و $\overrightarrow{Oa}[$ و در نتیجه به $(O$ و $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy})$ تعلق داشته باشدکه‌خلاف‌فرض است زیرا m به متمم این شکل در π تعلق داشت .

بنابراین می‌توان‌هرقطاع زاویه‌ای را اجتماعی از نیم‌

خطهای به مبدأ O دانست و از آن ، قضیهٔ زیر به‌سادگی نتیجه می‌شود :

قضیهٔ ۱ـ هر قطاع زاویه‌ای محدب به رأس O و به ضلعهای $]O, \overrightarrow{Ox}[$ و $]O, \overrightarrow{Oy}[$ اجتماع نیم‌خطهای به مبدأ O است‌که همه با قطعه خط $[x, y]$ متقاطع می‌باشند .

فرع ـ قطاع زاویه‌ای مقعر به رأس O و بـه ضلعهای $]O, \overrightarrow{Ox}[$ و $]O, \overrightarrow{Oy}[$ اجتماع نیم خطهای به‌مبدأ O است است‌که با فاصلهٔ باز $]x, y[$ نقطهٔ مشترکی ندارند .

اثبات دقیق این خواص و اثبات خواص مشابه با آنها مربوط به‌قطاع زاویه‌ای محدب یا مقعر به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود .

۲ ـ چند ضلعیها : دو قطعه خط را متوالی می‌نامیم هرگاه در یك سر مشترك باشند وغیرازاین نقطهٔ مشترکی‌نداشته باشند. مجموعه‌ای ازقطعه خطهای متوالی راکه هردو قطعه خط متوالی از آن دارای یك محمل نباشد **خط شکسته** می‌نامیم. هریك از دو سر این قطعه خطها یك **رأس** و هریك از این قطعه خطهایك **ضلع** خط‌شکسته نامیده می‌شود. اصطلاحاً محمل هریك از ضلعهای خط شکسته را نیز ضلع خـط شکستهٔ مزبور می‌نامند. اما به عبارت‌صحیح ، این محملها امتداد اضلاع خط شکسته نامیده می‌شوند .

وقتی تعداد ضلعهای خط‌شکسته محدود باشد می‌توان آنها را شمرد و مرتب‌کرد . چنانچه چنین خط شکسته‌ای دارای n رأس باشدمی‌توان این رأسهارا برحسب n به‌صورت a_i $(1 \leq i \leq n)$ مرتب‌کرد و چنانچه $i<j$ باشد رأس a_i را مقدم بر رأس a_j نامید : $a_i \prec a_j$. این رابطه یك رابطهٔ ترتیبی است اولین رأس یعنی a_1 و آخـرین رأس یعنی a_n **طرفین** خط شکسته نام دارند .

خط شکسته‌ای که طرفین آن برهم منطبق بـاشند **خط شکستهٔ بسته** یا **چند ضلعی** نام دارد . بنابراین یك چند ضلعی شکل بسته‌ای است‌که تشکیل شده است از ؛

الف ـ تعداد محدودی نقطه‌که به‌ترتیب خاصی مرتب شده باشند و هر سه نقطهٔ متوالی بریك خط واقع نباشند .

ب ـ قطعه خطهای متوالی‌که هریك بین دو نقطهٔ متوالی تشکیل می‌شود که بقسمی که اولین نقطهٔ هر قطعه خط آخرین نقطهٔ قطعه خط قبلی باشد .

عناصر چند ضلعی همان رأسها و ضلعها نامیده می‌شوند. قطعه خطی‌که دو رأس غیر متوالی چنـد ضلعی را به هم وصل می‌کند **قطر** چند ضلعی نام دارد . محمل این قطعه خط را نیز اصطلاحاً قطر و به‌عبارت صحیح امتداد قطرچند ضلعی می‌نامند.

یك چندضلعی ممکن است‌که «نقطهٔ مضاعف» داشته باشد به‌این معنی‌که حداقل دوضلع غیرمتوالی‌ازآن نقطهٔ مشترك‌داشته باشند . چنین چند ضلعی **پنجره‌ای** نامیده می‌شود .

چند ضلعیها را برحسب تعداد ضلعهای‌آنها به‌طبقات زیر تقسیم می‌کنند .

* مجموعهٔ سه نقطهٔ a و b و c غیرواقع بریك خط‌چند ضلعی است که **مثلث** نام دارد و با (a و b و c) و در حالتی کـه اشتباهی پیش نیاید بـا abc نموده می‌شود . رأسهـا و ضلعهای مثلث مزبور همـان رأسهـا و ضلعهـای سه نقطه‌ای $\{a, b, c\}$ می‌باشند . واضح است‌که مثلث قطر ندارد و پوش محدب آن سمپلکس پوش محدب سه نقطه‌ای $\{a, b, c\}$ می‌باشد . مجموعهٔ نقاط این سمپلکس که به ضلعهای مثلث‌تعلق نداشته باشند **نقطه‌های داخلی** مثلث abc نام دارند . متمم سمپلکس مزبور در π اصطلاحاً **خارج** مثلث abc نامیده می‌شود .

* مجموعهٔ چهار نقطهٔ $\{a, b, c, d\}$ کـه هیچ سه نقطه از آنهـا بـر یـك خط نباشند سه چند ضلعی را مشخص می‌کندکه هریك ازآنها شامل چهار رأس و چهار ضلع بوده و **چهارضلعی** نامیده می‌شود. این‌سه‌چهارضلعی به‌ترتیب عبارتند از :

چهارضلعی‌که ضلعهای آن به‌ترتیب [a و b] و [b و c] و [c و d] و [d و a] وقطرهای آن [a و c] و [b و d]بوده و با (a و b و c و d) نشان داده می‌شود .

چهار ضلعی به‌ضلعهای [a و c] و [b و c] و [b و d] و [d و a] با قطرهای [a و b] و [c و d] که با (a و c و b و d) نشان داده می‌شود .

چهارضلعی (a و c و d و b) با ضلعهای [a و c] و [c و d] و [b و d] و [a و b] و بـا قطرهـای [a و d] و [b و c] .

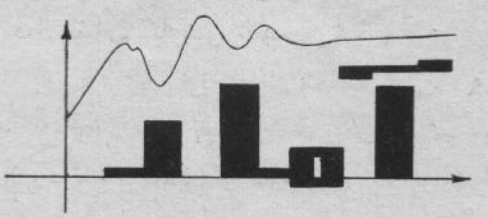
درهرچهار ضلعی دوضلع غیرمجاور **ضلعهـای روبرو** و همچنین دو رأس غیر مجاور ، رأسهای روبرو نامیده می‌شود دو رأس روبرو از چهار ضلعی طرفین قطری ازآن می‌باشند .

دو نوع چهار ضلعی خاص راکه استعمال فراوان دارند ذیلا تعریف می‌کنیم :

ذوزنقه ـ چهار ضلعی است‌که حد اقل‌دوضلع‌آن با هم موازی باشند . این دوضلع به‌ناچار دوضلع روبرو هستند و دو

دنباله درصفحهٔ ۱۱۲

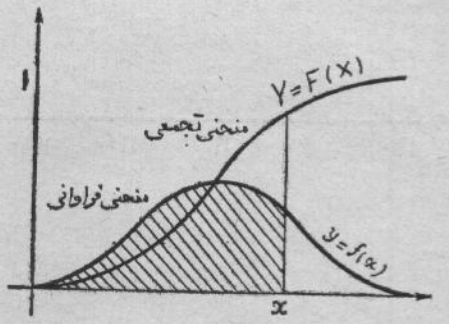
Initiation à la
STATISTIQUE
Classes de 1er B et D
par: M. HAGEGE



دنباله از شمارهٔ پیش

منحنی فراوانی ومنحنی تجمعی

فرض کنیم که قد تمام فرانسویها را اندازه بگیرند و هیستوگرام فراوانیهای نسبی رشتهٔ آماری حاصل را رسم کنند. در اینجا تعداد داده‌ها آنقدر زیاد است (۴۸ میلیون...) که مجبورند فاصلهٔ طبقات را بسیار کوچك اختیارکنند. فرض کنیم که بتوانند این فاصله را به‌سمت صفر میل دهند، در این صورت هیستوگرام فراوانیهای نسبی و چند ضلعی فراوانیهای نسبی هریك دارای یك منحنی حد خواهند بود که **منحنی**

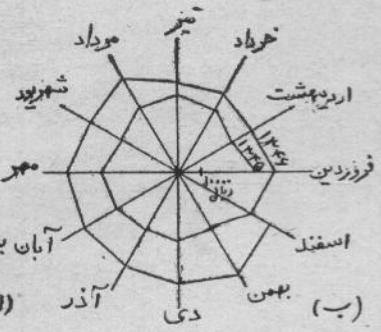


فراوانی نامیده‌می‌شود. در چنین شرایطی چندضلعی‌فراوانی‌های نسبی تجمعی نیز دارای یك‌منحنی حد به‌نام **منحنی تجمعی** نظیر منحنی فراوانی می‌باشد، بین این دو منحنی همان روابط برقرار است: درهر نقطهٔ‌دلخواه به‌طول x، مساحت سطح واقع زیر منحنی فراوانی و سمت چپ خط به‌طول x برابر است با عرض نقطهٔ به طول مزبور و واقع بر منحنی تجمعی.

۵- نمودارهای دیگر

الف ـ در اغلب موارد، مثلا در جغرافی، نمودارهای مختلفی مشاهده می‌کنیم از قبیل: نمودار هرمی مربوط به سنین، نمودار دایره‌ای(شکل‌الف)، نمودار ستاره‌ای(شکل‌ب)، نمودار شمشی (شکل‌ج).

(الف)



(ب)

نمودار درآمدماهانهٔ یك سینما در دوسال متوالی

نمودار صنعت و تجارت فرانسه (در ۱۹۶۵). جهان=۱۰۰

نمودار بودجهٔ خانوادگی در ۱۹۶۱ (منبع INSEE)

ب ـ نمودار با مقیاس لگاریتمی

فرض کنیم که خواسته باشیم تغییرات شاخص قیمتها رااز ۱۹۰۰ تا ۱۹۶۰ به‌صورت هندسی نمایش دهیم . مبنا را ۱۰۰ و برای ۱۹۱۴ انتخاب می‌کنیم ، در ۱۹۰۰ می‌شود ۸۷ ،در ۱۹۱۶ داریم ۱۰۰ ، ۱۹۲۰ می‌شود ۵۰۰ ، در ۱۹۴۸داریم ۱۰۰۰۰ و بالاخره در ۱۹۶۰ می‌شود ۱۹۰۰۰ . اگرخواسته باشیم نمودار مقادیر فوق‌که اینهمه اختلاف بین آنها است‌با مقیاس‌حسابی‌ترتیب دهیم دوچار اشکال می‌شویم . ازطرف‌دیگر در چنین نموداری ترقی ۱۰۰ تا ۱۲۰ با افزایش ۵۰۰ تا ۵۲۰ برابر جلوه می‌کند زیرا :

$$۱۲۰ - ۱۰۰ = ۵۲۰ - ۵۰۰ = ۲۰$$

درصورتی که ترقی اولی ۲۰٪ است اما ترقی دومی برابر است‌با۴٪. موضوع‌مهم‌نمایش هندسی ترقی نسبی $\frac{۲۰}{۱۰۰}$ و $\frac{۲۰}{۵۰۰}$ می‌باشد .برای این‌کار نمایش هندسی بامقیاس لگاریتمی برای عرضها رابکار می‌بریم :

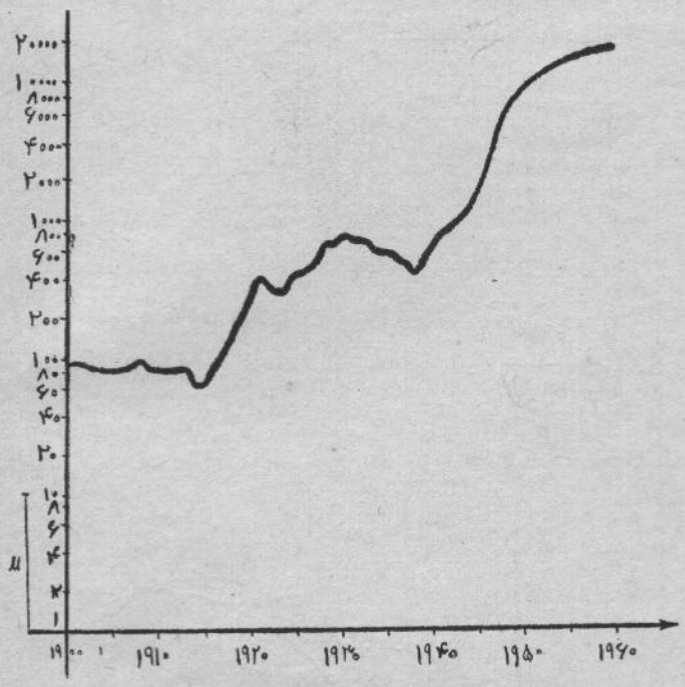
روی Ox واحد ۲ میلیمتر را انتخاب می‌کنیم که معرف یك‌سال‌می‌باشد ، روی Oy واحد $u = ۳$ سانتیمتر را انتخاب می‌کنیم . در مقابل نقطهٔ به عرض $log۱ (= ۰)$ عدد یك و در مقابل نقطهٔ به‌عرض$log۲ (= ۰/۳۰۱)$ عدد ۲ و در مقابل‌نقطهٔ به عرض $log۳ (= ۰/۴۷۷)$ عدد ۳ می‌نویسیم و غیره .

لگاریتم بعضی اعداد در جدول‌زیریادداشت می‌شود :

عدد	۱	۲	۴	۶	۸
لگاریتم	۰	۰/۳۰۱	۰/۶۰۲	۰/۷۷۸	۰/۹۰۳
عدد	۱۰	۲۰	۴۰	۶۰	۸۰
لگاریتم	۱	۱/۳۰۱	۱/۶۰۲	۱/۷۷۸	۱/۹۰۳
عدد	۱۰۰	۲۰۰	۴۰۰	۶۰۰	۸۰۰
لگاریتم	۲	۲/۳۰۱	۲/۶۰۲	۲/۷۷۸	۲/۹۰۳
عدد	۱۰۰۰	۲۰۰۰	۱۰۰۰۰	۲۰۰۰۰	
لگاریتم	۳	۳/۳۰۱	۴	۴/۳۰۱	

هریك از فاصله‌های ۱تا۱۰ ، ۱۰تا۱۰۰ ، ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ و غیره‌برابریك‌واحد انتخابی‌می‌باشد ($u = ۳cm$ ، ۳سانتیمتر مدول مقیاس لگاریتمی نامیده می‌شود).

به ترتیب فوق عرض نقطهٔ به طول ۱۹۰۰ برابر است با $log۸۷$ و عرض بقیهٔ نقاط هم به‌همین ترتیب معین می‌شود . از وصل نقاط به‌یکدیگر نمودار زیر را خواهیم داشت :



درمنحنی‌شکل‌بالا ترقی ۱۰۰ تا ۱۲۰ (۲۰٪) به‌صورت افزایش عرضی زیر نموده می‌شود :

$$log۱۲۰ - log۱۰۰ = log۱/۲ = ۰/۰۷۹u$$

و ترقی ۵۰۰ تا ۶۰۰ (۲۰٪) عبارت خواهد شد از :

$$log۶۰۰ - log۵۰۰ = log۱/۲ = ۰/۰۷۹u$$

تمرینات :

۱ـ معلوم کنید که‌درهریك از آمارگیریهای زیرخصوصیت مورد نظر اتصالی است یا انفصالی :

الف‌ـ تعدادبشقابهای فروخته شدهٔ ماهانه در یك‌فروشگاه بزرگ .

ب ـ درجهٔ حرارت هوای پاریس در ساعت۷ تمام‌روزها.

ج ـ مدت دوام لوله‌های الکترون مولد موج .

د ـ تعداد داوطلبان دیپلم درهر سال .

۲ـ طبق پرسشنامه‌ای که‌در یك دهستان پخش‌وجمع‌آوری

شده است در بارهٔ تعداد فرزندان هر خانوار نتایج زیر بدست آمده است :

تعداد فرزندان	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد خانوارها	۱۰۵	۱۳۹	۹۷	۶۳	۴۷	۳۳	۱۰	۴	۲

۱) فراوانیهای نسبی خانوارهایی را تعیین کنید که دارای تعداد معین k $(0<k<8)$ فرزند می‌باشند و نمودار آنرا رسم کنید .

۲) فراوانیهای نسبی تجمعی خانوارهایی را تعیین کنید که تعداد فرزندان آنها کوچکتر یا مساوی با x باشدو نمودار آنرا رسم‌کنید .

۳) فراوانیهای نسبی فرزندان متعلق به خانوارهایی که k فرزنددارند چیست ؟ $(0<k<8)$ و نمودار آنرا رسم‌کنید.

۴) فراوانیهای نسبی تجیعی فرزندان متعلق به‌خانواده‌هایی را تعیین‌کنیدکه تعداد فرزندانشان کوچکتر یا مساوی x باشد و نمودار را رسم‌کنید .

(سؤال امتحانی ۱۹۶۳ الجزایر)

۳ـ دراولین مثالی‌که در شروع کتاب ذکر کردیم‌نمایش هندسی تابع :

$$G(x)=x(X>x)$$

که عبارتست از تعداد خانواده‌هایی‌که تعداد فرزندانشان بیشتر از x است ، رسم‌کنید و رابطهٔ بین‌این تابع و تابع $f(x)$ (مذکور در مثال مزبور) را تعیین‌کنید .

۴ـ ۵ سکه راباهم ۱۰۰۰ دفعه شیرباخط کرده‌و هردفعه تعداد شیری‌که روشده یادداشت‌کرده‌اند . نتایج طبق جدول زیر است :

تعداد دفعاتی‌که شیررو شده	۰	۱	۲	۳	۴	۵	
تعداد دفعاتی‌که سکه‌ها انداخته شده	۳۶	۱۴۵	۳۴۳	۲۸۷	۱۶۰	۲۹	۱۰۰۰

نمایش هندسی فراوانیها و منحنی تجمعی را رسم‌کنید .

۵ـ طبق‌آمارگیری‌که درسال ۱۹۵۶ بعمل آمده توزیع محصول زراعتی برحسب‌کشتزارها به‌شرح زیر بوده است :

تعداد (توزیع‌در٪)	سطح‌کشتزارها
۶/۶	کمتر از ۱ هکتار
۱۰/۲	۱ هک تا ۱/۹۹هک
۱۸/۲	۲ « « ۴/۹۹ «
۲۰/۸	۵ « « ۹/۹۹ «
۲۳/۵	۱۰ « « ۱۹/۹۹ «
۱۶/۵	۲۰ « « ۴۹/۹۹ «
۴/۲	بیشتر از ۵۰ «
۱۰۰/۰	

هیستوگرام فراوانیهای نسبی وچند ضلعی فراوانیهای نسبی تجمعی رارسم‌کنید (به‌نامساوی‌بودن طبقات توجه داشته باشید .)

(۱۹۶۴ ، مراکش)

۶ـ رشتهٔ‌آماری زیر مربوط‌به‌توزیع روزنامه‌های‌ابالتی برحسب تیراژ متوسط آنها مفروض است :

از	۵۰۰۰	تاکمتراز	۱۰۰۰۰ :	۱۶
«	۱۰۰۰۰	«	۳۰۰۰۰ :	۲۴
«	۳۰۰۰۰	«	۵۰۰۰۰ :	۱۶
«	۵۰۰۰۰	«	۷۰۰۰۰ :	۱۴
«	۷۰۰۰۰	«	۱۰۰۰۰۰ :	۱۴
«	۱۰۰۰۰۰	«	۱۵۰۰۰۰ :	۱۰
«	۱۵۰۰۰۰	«	۲۰۰۰۰۰ :	۴
	بیشتر از		۲۰۰۰۰۰ :	۲

با توضیح صریح مفروضات ، برای‌این رشته نمودارهای زیر را رسم‌کنید :

الف ـ چند ضلعی فراوانیهای تجمعی

ب هیستوگرام .

ج ـ چند ضلعی‌فراوانیها .

توضیح دهیدکه چگونه می‌توان از چندضلعی فراوانیهای تجمعی‌هیستوگرام را بدست آورد و از هیستوگرام به‌چندضلعی فراوانیها رسید .

(۱۹۶۳ فرانسه)

۷ـ جدول زیر مفروض است :

ردیف	دستمزد یك ساعت	تعداد کارگران
۱	از ۳۰ تا ۳۵	۲۰۰
۲	« ۳۵ « ۴۰	۲۳۷
۳	« ۴۰ « ۴۵	۹۹۳
۴	« ۴۵ « ۵۰	۱۲۰۵
۵	« ۵۰ « ۵۵	۱۴۲۲
۶	« ۵۵ « ۶۰	۱۹۶۱
۷	« ۶۰ « ۶۵	۳۰۵۴
۸	« ۶۵ « ۷۰	۳۰۸۸
۹	« ۷۰ « ۷۵	۲۶۴۰
۱۰	« ۷۵ « ۸۰	۱۵۱۳
۱۱	« ۸۰ « ۸۵	۷۰۶
۱۲	« ۸۵ « ۹۰	۴۲۱
۱۳	« ۹۰ « ۹۵	۷۵

هیستوگرام فراوانیها و چند ضلعی فراوانیهای تجمعی را رسم کنید . معلوم کنید که دستمزد چند کارگر محصور بین ۷۲ و ۸۸ است و آنرا از روی نمودار نیز تحقیق کنید .

(۱۹۶۴ ، گینه)

۸ـ در آزمایشی تستی که از یك عدهٔ محصلین همدوره بعمل آمده طبقه بندی امتیازات به شرح زیر می‌باشد (حداقل امتیازات ۱۰ و حداکثر آن ۱۹۰ است) :

بیش از	۱۰	و حداکثر تا	۳۰	:	۴
«	۳۰	«	۵۰	:	۱۷
«	۵۰	«	۷۰	:	۶۳
«	۷۰	«	۹۰	:	۸۳
«	۹۰	«	۱۱۰	:	۷۲
«	۱۱۰	«	۱۳۰	:	۳۳
«	۱۳۰	«	۱۵۰	:	۲۱
«	۱۵۰	«	۱۷۰	:	۵
«	۱۷۰	«	۱۹۰	:	۲

هیستوگرام مربوط را رسم کنید .

(۱۹۶۰، الجزایر)

۹ـ تعداد حسابهای جاری را که هرسال دریك بانك باز شده است از ابتدای ۱۹۵۰ سال تأسیس آن صورت برداری کرده‌اند . نتایج به‌شرح جدول زیر بوده است .

۱) جدول را تکمیل کنید .

۲) دو نمودار رسم کنید .

الف ـ بااستفاده از از داده‌های دو ستون اول جدول .

ب ـ با استفاده از داده‌های تجمعی .

۳) از چه‌نموداری بهتر می‌توان توسعهٔ این‌بانك‌را بررسی کرد؟ این‌توسعه در چه سالی حداکثر بوده است ؟

(۱۹۶۵، الجزایر)

سال	تعداد حسابهای جدید	جمع
۱۹۵۰	۱۸۰	۱۸۰
۱۹۵۱	۶۵۴	
۱۹۵۲	۶۳۰	
۱۹۵۳	۷۲۸	
۱۹۵۴	۸۱۰	
۱۹۵۵	۶۳۲	
۱۹۵۶	۵۵۹	
۱۹۵۷	۹۶۱	
۱۹۵۸	۱۶۶۴	
۱۹۶۰	۱۰۱۲	

۱۰ـ دو محور متعامد رسم کنید و آنها را به ترتیب زیر مدرج کنید : محور افقی با مقیاس حسابی و محور قائم را با مقیاس لگاریتمی از ۱ تا ۱۲ بااستفاده از معلومات زیر :

$log 2 = 0/30103$ ، $log 3 = 0/47712$

$log 7 = 0/84510$ ، $log 11 = 1/04139$

۲) با استفاده از دو محور مزبور تولیدات دوکارخانه به‌شرح زیررا با مختصات نیم‌لگاریتمی نمایش دهید (بر حسب میلیون تن) :

	۱۹۵۷	۱۹۶۱
کارخانهٔ A	۲	۶
کارخانهٔ B	۴	۱۲

باوصل‌کردن نقاط مربوط به‌هرکارخانه دو قطعه خط متوازی بدست می‌آید . علت را توضیح دهید .

(۱۹۶۳، فرانسه)

۱۱ـ دومین شکل از مثمال ۱ مذکور در ابتدای کتاب را در نظر بگیرید . ثابت کنید که ضریب زاویه‌های خطوط AB و BC، ... و IJ به‌ترتیب باعرض نظیر ازهیستوگرام متناسب می‌باشند. واحدسطح راچگونه بایدانتخاب کرد تاضریب‌زاویه‌های مزبور باعرضهای نظیر متساوی باشند ؟

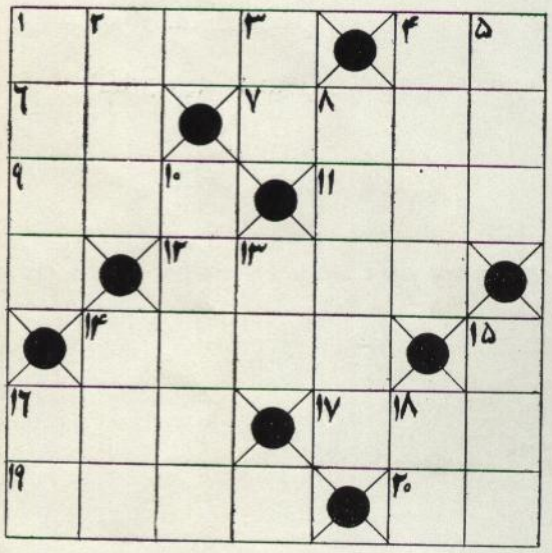
توجه :

عده‌ای گله‌کرده‌اندکه چرا جدول ارسالی ایشان درمجله چاپ نشده است . برای اطلاع این عده وسایرخوانندگان یاد آوری می‌شودکه :

۱ـ تقریباً همهٔ جدولهایی‌که به‌دفترمجله واصل می‌شود به‌صورت اصلی خود قابل چاپ درمجله نیست . طرح‌کننده قبلا عددی رادرنظرگرفته وبعد خاصیتی ازآن راذکرکرده است . در صورتی‌که آن خاصیت درموردعددهای دیگری نیزصدق می‌کند ودربسیاری ازموارد چه‌درردیف افقی وچه درردیف قائم عدد های مختلفی بدست می‌آیـد و از این جهت جدول مطلـوب مشخص نمی‌شود . مواردی پیش آمده کـه تعیین عدد مورد نظر از روی خاصیتی‌که ذکـرشده غیر ممکن می‌باشد .

۲ـ جدولهای رسیده‌کـه بعد از بررسی قابـل اصلاح تشخیص داده شود شماره‌گذاری می‌شوند وبه ترتیب وپس‌ازاصلاحات لازم درشماره های مختلف مجله درج می‌گردند. هـم‌اکنون تعدادی جدول برای چاپ درمجله موجود می‌باشد؛ پس‌اگرجدول تازه‌ای برسد وقابل اصلاح باشد برای چندین ماه دیگردرمجله چاپ خواهد شد.

۳ـ ازطرح‌کنندگان محتـرم جـدول اعداد خواهشمند است قبل ازارسال جدول‌آنرا شخصاً امتحان‌کنند. یعنی سعی‌کنند ازروی شرحی‌که نوشته‌اند اعداد جدول رابدست آورند. اگر درچنین‌کاری موفق شدندآنگاه آنرا برای چاپ درمجله ارسال دارند .



جدول اعداد

طرح از: ابوالفضل فتح‌الله زاده

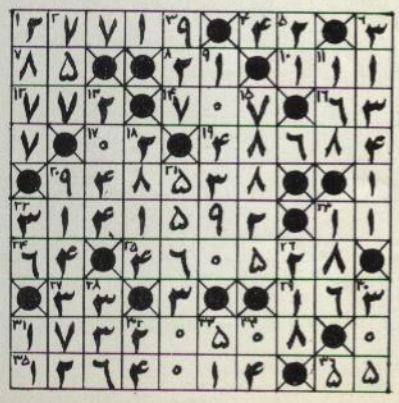
افقی: ۱ـمضرب ۹ است‌ودرضمن ۲۰۶ برابرمجموع ارقامش‌می‌باشد. ۴ـ مقلوب عدد۱۶قائم. ۶ـ اگررقم یکان‌عددمبنااختیارشود رقم‌دهگان‌آن برابر می‌شود بالگاریتم عدددرمبنای‌مزبور. ۷ـبرابراست باتوان‌چهارم‌مجموع‌ارقامش واین‌مجموع یك‌رقمی‌است. ۹ـتکراریك‌رقم. ۱۱ـ توان‌سوم جذرعدد ۶ افقی‌ـ ۱۲ـ به‌صورت $\overline{abba}$ است واگریك‌واحدبه‌آن اضافه‌شود مجذورکامل‌گردد. ۱۴ـ به‌شکل $\overline{abab}$ ومضرب ۷۵ است. ۱۶ـ ارقامش‌متوالی‌وازچپ‌به‌راست به ترتیب‌نزولی‌قرارگرفته‌اند. ۱۷ـ مقلوبش‌باعدد۶افقی‌برابرمی‌شود. ۱۹ـرقمهای سدگان‌وهزارگان عدد۱۴افقی‌جابجاشده تااین عددحاصل شده‌است. ۲۰ـاگر این عدد را به صورت $\overline{ab}$ ومتمم حسابی‌آنرا با N نشان دهیم داریم :

$$N+\overline{ba}=۹\overline{ab}+۱$$

قائم : ۱ـ به‌صورت $\overline{aba(b+۲)}$ است. ۲ـ ارقامش‌تصاعد عددی‌نزولی‌می‌سازند. ۳ـ مقلوبش چهاربرابرثلث‌عدد ۱۸ قائم‌است. ۴ـ ۸۰۰واحدبیش از عدد. ۱۲ افقـی. ۵ـ مجموع ارقامش بایدا۱۴ باشد. ۸ـ اگـر بررقم یکانش تقسیم شود مجموع ارقام خارج قسمت برابراست باعدد ۲۰ افقی . ۱۰ـارقامش متوالی‌وبه‌ترتیب صعودی‌قرارگرفته‌اند. ۱۳ـمکعب رقم‌بکاررفتهٔ‌درعدد ۹افقی. ۱۴ـ هفت‌برابرثلث‌عدد ۹افقی. ۱۵ـ مقلوبش‌باخودش برابراست ۱۶ـ به صورت $\overline{ab}$ که دررابطهٔ زیرصدق می‌کند :

$$\overline{ab}=a^۲+b^۲-۴$$

۱۸ـ حاصل‌ضرب ارقامی‌که درنوشتن عددهای ۹ افقی و ۱۴ قائم بکار رفته‌است.



حل جدول شمارهٔ پیش

تهیهٔ کتب علمی برای خواستاران

همانطورکه درشمارهٔ گذشته به اطلاع خوانندگان رسید فهرست کتب علمی نشرشده ازطرف ناشران مختلف با ذکر نام مؤلف یا مترجم و بهای کتاب به تدریج در یکان چاپ می‌شود . خواستاران این کتابها می‌توانند وجه لازم را بوسیلهٔ حوالهٔ بانکی یا هر وسیلهٔ قابل اطمینان دیگر به دفتر مجله ارسال دارند و نشانی کامل خود را اطلاع دهند تا کتاب درخواستی تهیه شده برای آنان ارسال شود . برای مشترکان یکان دربهای کتب مزبور به‌نسبت ده درصد تخفیف منظور می‌شود. تخفیف مشترکان بابت انتشارات یکان مانند سابق همان بیست درصد است .

دنباله ازشمارهٔ پیش

حل المسائل و کلیات شیمی ـ حبیب الله رضوانی، قاسم سقزچی ۱۲۵ ریال
حل المسائل مکانیك ـ عرب اف ، رادمنش ۹۰ «
خودآموز مکانیك ـ علی نورصادقی ۹۰ «
راهنمای جبر کنکور ـ بهنیا ، چاوشیان ، قوام‌زاده ۹۰ «
۷۰۰ مسئلهٔ جبر ومثلثات وحساب ۲۰ «
مسائل جبر وراهنمای حل آن ـ ازگمی، امامی، بهنیا، شهریاری ۱۱۰ «
کتاب کنکور ـ مهندس رضاکیان‌زاد ۱۵۰ «
خودآموز شطرنج ـ مهدی آذریزدی ۳۰ «
شطرنج وتئوری آن ـ سروش استپانیان ۲۲۰ «
نجوم برای همه ـ حسینعلی رزم‌آرا ۷۰ «
حل المسائل حساب استدلالی ـ ابوالقاسم قربانی ۵۰ «

حل مسائل مثلثات سیکل دوم ـ صفاری ، قربانی ۶۰ ریال
حل مسائل مثلثات ۶ ریاضی ـ ازگمی، امامی، شهریاری، شیخ‌رضائی ۱۳۵
حل مسائل مثلثات داوطلبان کنکور ـ امامی، شهریاری ۹۰ «
حل مسائل مکانیك ـ ابوالقاسم قربانی ۷۰ «
حل مسائل مکانیك نوین ـ رضاقلی‌زاده، حاج‌سیدجوادی ۷۰ «
حل المسائل هندسه جلد ۱ ـ صفاری، قربانی ۷۰ «
حل المسائل هندسه جلد ۲ ـ « « ۵۰ «
حل المسائل هندسهٔ رقومی ـ امامی، بهنیا، شهریاری، شیخ‌رضائی ۱۱۰
راهنمای امتحانات جبر ومثلثات ـ صفاری، قربانی ۴۰ «
دورهٔ کامل شیمی نوین ـ رضاقلی‌زاده، رهنما، حاج‌سیدجوادی ۲۵۰ «
دورهٔ کامل فیزیك نوین ـ نوروزیان، رفیع‌زاده، بروخیم ۲۰۰ «
نه مقاله هندسه ـ صفاری ، قربانی ۱۵۰ «