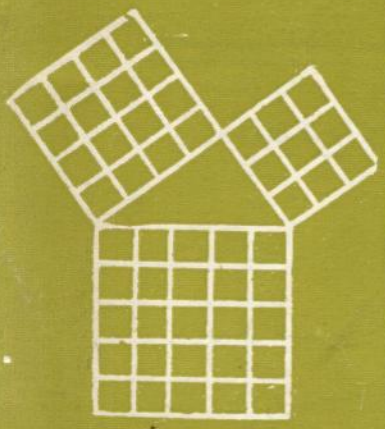
دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ
۱۰
شمارهٔ مسلسل
۴۷
مرداد
۱۳۴۷

یکان

مجلهٔ ریاضیات

دراین شماره:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots\dots + x^n$$



بها: بیست و پنج ریال

پایان دورهٔ چهارم

بااین‌شماره دورهٔ‌چهارم یکان پایان می‌یابد. به‌همین‌جهت به سلسله «مقالات «مسائل حل نشدهٔ ریاضی، راهنمای حل مسائل و داستانهای تفننی ریاضی» در این شماره پایان داده شد که‌بناچار صفحاتی بیشتر از مجله به‌این‌مقالات اختصاص یافت.

شمارهٔ بعدی مجله، یعنی اولین شمارهٔ از دورهٔ پنجم در ابتدای مهرماه تقدیم به علاقمندان می گردد.

قابل توجه مشترکان مجله

مدت اشتراك کسانی که مجله‌را ازابتدای دورهٔ‌چهارم مشترك بوده‌اند بااین‌شماره پایان می‌یابد.

اشخاص مزبور چنانچه مایل به تجدید اشتراك مجله هستند ضمن ارسال ۲۰۰ریال وجه اشتراك مراتب‌را بداداره مجله اطلاع دهند.

هر دوره اشتراك مجله شامل ده شمارهٔ مجلهٔ ماهانه و یك‌شمارهٔ یکان سال می‌باشد.

دربهای‌انتشارات دیگرمجله به‌مشترکان ۲۰٪ تخفیف داده می‌شود،

معرفی دانش‌آموزان رتبهٔ اول

بعضی از نمایندگان مجله درشهرستانها طبق معمول به ارسال عکس دانش‌آموزان رتبهٔ اول کلاسهای ششم مبادرت کرده‌اند. آنچه‌قبل‌از چاپ این شماره واصل‌شده‌بود درهمین‌مجله چاپ شد. بقیه وآنچه‌که ازطرف نمایندگان دیگر بعداً برسد درشمارهٔ بعدی مجله چاپ خواهد شد.

یکان

مجلهٔ ریاضیات

هرماه یك‌بار منتشر می‌گردد

تاسیس : بهمن ۱۳۴۲

دورهٔ‌چهارم ـ شمارهٔ دهم ـ شمارهٔ مسلسل: ۴۷

مرداد۱۳۴۷

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، داود مصحفی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume IV, number 10, July. 1968

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

تغییر سیستم آموزشی

فارغ‌التحصیلان مدارس متوسطه، همچنین لیسانسیه‌های دانشکده‌های مختلف کشور که برای ادامهٔ تحصیل یا استفاده از بورسهای مطالعاتی موقت به‌کشورهای مترقی می‌روند با اولین مشکلی که مواجه می‌شوند گذراندن مجدد دورهٔ دیپلم یا لیسانس مطابق با برنامهٔ تحصیلات آن کشور می‌باشد. اینان درهر رشته‌ای که قصد مطالعهٔ آن را داشته باشند قبلا مجبورند یك دوره مباحث مختلف ریاضیات جدید را فرا گیرند که نه تنها در برنامه‌های تحصیلی کشور ما نامی از آنها برده نشده، بلکه حتی کتابی هم که بتواند در این زمینه جوابگوی احتیاجات باشد به زبان فارسی چاپ نشده است.

درسالهای اخیر برنامه‌های‌تحصیلی بسیاری ازکشورها عمیقاً دستخوش تحول ودگرگونی شده است. اما برنامهٔمواد درسی مدارس‌ما هنوزهمان برنامه‌ای است که بیش‌ازسی‌سال‌ازتنظیم آن‌می‌گذرد.

هرچندکه وزارت آموزش و پرورش با صرف فعالیتها و بررسیهایی نظام جدیدی را برای آموزش ارائه داده و برطبق آن بـرنامه‌های تازه‌ای برای تحصیلات در مقاطع مختلف پیش‌بینی کرده که‌اجرای‌آن هم درچندسال اول دورهٔ ابتدایی عملی شده و با موفقیت توأم بوده است، اما سالها طول می‌کشد تا این رفرم شامل مدارس متوسطه گردد.

اخیراً گفتگو از آنست‌که برنامهٔ درسی مدارس متوسطه توسط وزارت علوم مورد تجدیدنظر واقع می‌شود. اگر قرار باشد این وزارت هم مطالعاتی را از نو آغازکند تا به دنبال آن برنامه‌هایی را تنظیم کند باز هم باید سالها منتظر بمانیم و با همین برنامهٔ ناقص و غلط فعلی بسازیم تا رفرم اساسی دربرنامهٔ تحصیلات انجام‌گیرد.

برنامهٔ تحصیلات و سیستم آموزشی کشور ما محتاج به تجدید نظر اساسی و فوری‌است. مهم نیست که چه وزارتخانه‌ای به‌این کار اقدام کند؛ بلکه آنچه اهمیت دارد انتخـاب شایستهٔ هیئت مأمور تنظیم برنامه می‌باشد؛ دبیری که به‌خاطر خوب اداره‌کردن کلاس معروفیت یافته است و تمـام اوقات خودرا صرف تدریس می‌کند، یعنی مانند نوارضبط صوت مطالب معینی را مرتباً تکرار می‌کند فرصت و حال مطالعات علمی را ندارد و برای تنظیم برنامه‌های تحصیلی شایستگی لازم را دارا نیست. استاد دانشگاه هم که از محیط مدارس متوسطه به دور است نمی‌تواند برنامه‌ای تنظیم کند که با قـوهٔ درك و استعداد دانش‌آموزان سازگاری داشته باشد.

اولین‌اقدام اساسی باید درزمینهٔ انتخاب یا تربیت متخصصینی بعمل آیدکه برای تنظیم یك‌برنامهٔ تحصیلی جامع و کامل از هرجهت شایستگی لازم را داشته باشند.

عبـدالحسین مصحفی

درسی از هندسه

ترجمهٔ فصلی از کتاب «هندسهٔ رشتهٔ ریاضی دبیرستانهای فرانسه»

شکلهای متساوی

هندسه، آنچنانکه اززبانهای دیگر ترجمه شده و در تعلیمات ما راه یافته و فعلا هم معمول است، ظاهراً ساختمان ذهنی مجردی است اما در اصل مبتنی بر مشاهده می‌باشد. اساس هندسهٔ متداول را مفاهیمی تجربی تشکیل می‌دهد که‌از بعضی شکلهای اولیه اخذ شده‌اند. در ابتدای آموزش هندسه این مفاهیم به‌عنوان «آنچه‌که باید بدون اثبات پذیرفته شود» آموخته می‌شوند، دراینجا می‌خواهیم چگونگی ترکیب وتألیف این مبانی را اجمالا بررسی کنیم.

این موضوع‌را هم باید یادآوری کنیم‌که منطقیون‌معلومات ناشی از مشاهدات حسی را قبول ندارند و از این جهت به استحکام بنای هندسی‌ما ایراد دارند. آنان مصرند که درصورت امکان هندسه‌ای بنا شود که کاملا مجرد باشد و با مشاهدات حسی ارتباطی‌نداشته باشد، هندسه‌ای باشد ذهنی محض وبرکنار ازتجربیات وجودی‌انسان. کوششهای آنان به موفقیت‌انجامیده است و بنای هندسی تازه‌ای، یعنی «هندسهٔ اصولی» را ایجاد کرده‌اند. اما در اینجا ازذکر کارهای آنان خودداری می‌شود.

کلیات

اصطلاحات اولیه ـ اصول

اصطلاحات اولیه ـ برای بیان مفاهیم اساسی که‌در مبنای هندسه بکار می‌رود ناگزیر هستیم کلماتی را استعمال کنیم که تعریف آنها غیرممکن می‌باشد، و ازاین رو آنها را **اصطلاحات اولیه** می‌نامیم. مثل: نقطه، مجموعهٔ نقاط (یا شکل)، خط، سطح، فضا، خط مستقیم، صفحه، وغیره. این موضوع نباید موجب تعجب باشد، زیرا اجبار در استعمال کلمات تعریف نشده منحصر به هندسه نیست، وقتی خواسته‌باشیم معنی کلمه‌ای را برسانیم مجبور هستیم که کلمات دیگری را بکار ببریم، برای معنی این کلمات تازه‌هم استعمال کلمات دیگری لازم است، اما چون تعداد کلمات مستعمل در هرزبان محدود می‌باشد نتیجه می‌شود که کلمات اولیه‌ای را بایدبدون تعریف قبول کرد. آنچه هم که در فرهنگهای لغات برای‌معنی کلمات‌بکارمی‌برند نوعی‌تسلسل دوری‌ناقص می‌باشد. ریاضیدانان قبول دارند که کلماتی یافت می‌شود که نمی‌توان آنها را معنی کرد.

اصول ـ مقصود از هندسه کشف واثبات‌خواص‌شکلهایی است که ابتدا از شکلهای اولیه به تدریج‌پدیدار شده ورفته‌رفته مفصل می‌شوند. اثبات یك خاصیت یعنی اینکه آن را از روی خواصی که قبلا شناخته شده است بااستنتاج‌منطقی بدست‌بیاورند. هندسه آغازی دارد، قضیه‌های اولیه را نمی‌توان اثبات‌کردمگر با استفاده از خواصی که منطقاً تعریف نشدنی هستند و ازنظر تجربه و مشاهده مسلم می‌باشند: این خواص **اصول** نامیده می‌شوند. قبول خاصیتی هندسی به عنوان مشاهده و مبتنی بر اصل، به این معنی است که آن خاصیت ابتدایی بوده‌بااستفاده ازخواص‌قبلی‌قابل‌اثبات‌نیست. هردفعه که‌مجبورمی‌شویم‌ومی گوئیم «مشاهده می‌شود که...»، «مسلم است که...»، وضعی تجربی را به عنوان‌اصل پذیرفته‌ایم. بیان‌یك اصل یعنی اعتراف به‌وجود خاصیتی‌که جز از راه مشاهده توجیه دیگری برای آن‌نمی‌توان کرد. از آنچه گفته شد چنین برمی‌آید که اگر مجموعهٔ اصول لازم برای بسط هندسه را درابتدا قبول کنیم بعدازآن‌به تکرار عبارات مزبور (مشاهده می‌شود که...، مسلم است‌که..) مجبور نخواهیم‌بود؛ برای یادآوری خاصیتی قبلی، چنانچه یك

اصل باشد کافی است که بگوئیم: «قبول کرده‌ایم که...» وچنانچه با دلیل منطقی و مبتنی بر اصول بدست آمده باشد کافی است که بگوئیم: «ثابت کرده‌ایم که...».

از راههای مختلف می‌توان تعداد احکامی را که بدون اثبات قبول‌می‌شوند به حداقل رساند، یعنی مجموعهٔ اصول‌اساسی را تشکیل داد که هریك ازآنها از بقیه مستقل باشد. امابرای احتراز از تطویل و تفصیل ، بیش از آنچه لازم است احکامی را به‌عنوان اصل قبول می‌کنیم، به عبارت دیگر خواصی را به عنوان اصل قبول می‌کنیم‌که می‌توان آنها را با استنتاج‌منطقی از خواصی که قبلا به عنوان اصل قبول شده است بدست آورد.

تشریح مفهوم اصلـ اصل یك موضوع هندسی‌است که از اثبات منطقی آن صرف‌نظر می‌شود: اصول **در ابتدا** اینچنین تعریف می‌شوند و بعد با شروع از آنها و ازراه‌منطقی هندسهٔ کلاسیك بوجود می‌آید.

به‌عبارت واضحتر، یك دستگاه اصول مجموعهٔ قوانین و قراردادهایی هستند که ازموضوعات مربوط جدا نمی‌باشند. اصول قوانینی هستندکه ذاتاً وضع شده‌اند ، می‌توان گفت‌که: «یك دستگاه اصول مجموعهٔقوانینی است‌که تعریف ضمنی‌ومستمر موضوع مورد بحث را میسر می‌سازد.»

درزمینهٔ اجتماعی علمی مربوط به‌قوانین وجود داردکه «حقوق» نامیده می‌شود؛ در زمینهٔ ریاضیات هم علمی مربوط به قوانین وجود داردکه « دستگاه اصولی » نام دارد. خواننده باید این‌اصول‌را بررسی‌کند، البته نه‌از این‌نظر که می‌خواهد یك دانشمند محقق باشد بلکه به این خاطر که به آنچه پایهٔ ریاضیات مورد مطالعهٔ اورا تشکیل می‌دهد آشنایی داشته باشد.

اهمیت ترسیم درهندسهـ معمول شده است که شکلهای‌هندسی‌را بوسیلهٔ ترسیم‌نمایش‌بدهند.قبلا نمایش شکلهای مسطح را درنظر بگیریم . این‌شکلها هرچند هم ماهرانه فراهم آمده باشند فقط می‌توانند نمایشی تقریبی از شکلهای واقعی موردنظر باشند ؛(یك خطرا هرچند نازك رسم کنیم باز دارای ضخامتی است)، معهذا و مخصوصاً اگر این شکلها به دقت‌رسم شده باشند نه‌تنها می‌توانند کمك و تکیه‌گاهی برای استدلالات باشند بلکه حتی موجب‌کشف روابط و خواصی می‌شوندکه‌تصور ما به تنهایی قادربه اظهار آن نمی‌باشد.

درهندسهٔفضایی، یك‌شکل‌فضایی رابه‌کمك بعضی‌قراردادها بوسیلهٔ یك شکل مسطح نمایش می‌دهند. دقت این شکلهاکمتر است و برای کشف خواص یا روابط جدید هم چندان مناسب نیستند. اهمیت آنها دراین است که به استدلال کمك می‌کنند و تصور ذهنی شکل مورد نظررا ساده‌تر فراهم می‌آورند. البته مقصود فوق وقتی برآورده است که شکل رسم شده زیاد درهم و برهم نباشد.

هندسهٔ آفین ـ هندسهٔ طولی *

هندسهٔ آفین ـ در هندسهٔ آفین مسائل مربوط به اوضاع نسبی‌خطوط و صفحات (توازی، تقاطع) و مسائل‌مربوط به ترتیب وجهت‌روی‌خطوط مورد مطالعه واقع می‌شود(حاملها، جمع حاملها،ضرب حاملها دریك عدد حقیقی ؛ همهٔ این‌خواص باتبدیلی‌فضایی‌موسوم‌به‌تبدیل‌آفین محفوظ می‌مانند).

از بین اصول مربوط به هندسهٔ آفین اصول زیر را نام می‌بریم :

ـ از دونقطهٔ متمایز یك و فقط یك خط مستقیم می‌گذرد.

ـ برسه نقطهٔ متمایز غیر واقع بریك خط مستقیم، یك و فقط یك صفحه می‌گذرد.

ـ اگر دونقطهٔ متمایز از خطی مستقیم برصفحه‌ای واقع شود تمام آن خط بر آن صفحه واقع می‌شود.

ـ از نقطهٔ واقع درخارج یك خط مستقیم ، یك و فقط یك خط مستقیم‌می‌گذرد که در صفحهٔ آن خط و نقطه واقع‌بوده با خط مفروض نقطهٔ مشترك نداشته باشد.

ـ هرصفحه فضارا به دونیم‌فضا تقسیم می‌کند. اگردونقطه در طرفین صفحه‌واقع‌باشند خط واصل بین‌دونقطه، نقطهٔمشترکی باصفحه خواهد داشت.

ـ بین هردونقطه از خط ،نقطهٔدیگری از آن‌خط وجود دارد .

ـ اگر A و B و C سه‌نقطه واقع بر یك خط مستقیم بوده B بین A و C واقع باشد و 'A و'B و'C تصویرهای موازی با صفحهٔمعین سه‌نقطهٔ مزبور بر یك خط باشند 'Bوسط 'A و 'C قرار خواهد داشت.

ـ و غیره.

در هندسهٔ آفین تعریف اندازهٔ جبری یك بردار به

* Géométrie affine - Géométrie métrique.

کمك بردار دیگری که با اولی دریك امتداد باشد امکان‌پذیر است اما مقایسهٔ‌طولی دو بردار با امتدادهای‌مختلف ممکن نیست. در این هندسه از اندازهٔ طولها و زاویه‌ها صحبتی نمی‌شودبلکه این مسائل موضوع‌اساسی هندسهٔ طولی است.

پایهٔ تجربی‌هندسهٔ‌طولی ـ مفهوم جسم ، شکل تغییر ناپذیر ـ بطور تجربی می‌دانیم که تفاوت جسم صلب یا شکل تغییر ناپذیر از جسم سیال یا شکل تغییر پذیرچیست، قطعه فلزی که در فشار وحرارت ثابت قرار داشته باشد وجزبا عملی مکانیکی تغییر شکل نمی‌دهد یك‌جسم صلب می‌باشد.وقتی که می‌گوئیم یك جسم صلب‌دارای ابعادی است به این معنی‌است که می‌توانیم نقاط روی آن‌را از هم تمیز دهیم، علاوه برآن با مفهوم فاصلهٔ بین این نقاط آشنایی داریم و می‌توانیم فواصل‌را به وسایلی، مثلا به‌کمك یك پرگار، با هم مقایسه‌کنیم. با توجه به اینکه این وسایل اجسام صلب هستند نتیجه می‌گیریم که یك جسم صلب یا شکل تغییرناپذیر را نمی‌توان قبلا ازنظـر ثابت بودن‌فواصل‌نقاط آن‌تعریف‌کرد. بعضی‌اجسام‌صلب رامحقق‌دانسته ازروی آن‌مفهوم مجرد صلب یا شکل تغییر ناپذیر و بالاخره تصوری برای اشکال‌را بوجود می‌آورند.مثلایك‌مفتول‌فلزی‌نازك تصوری‌از یك‌خط است. یك‌ورقهٔ‌نازك آهن‌تصوری‌ازیك‌سطح‌است و غیره .

هندسه‌دان از ترکیبات مختلف شکلهای اولیه شکلهای دیگری می‌آفریند به نوعی که عموماً صورت مادی ندارند.

تشریح مفهوم شکل ـ برای مثال جسم صلبی در نظر می‌گیریم که اطاق یك کلاس را مجسم می‌کند، این‌جسم صلب‌را S می‌نامیم. وقتی‌که یك‌صندلی یا یك‌میز را درکف‌این اطاق مستقر کنیم، هرنقطه‌ای از این صندلی یا میز را می‌توان نقطه‌ای واقع در S یاحتی جزئی ازآن دانست. برای‌نورافکنی که از سقف آویزان گردد یا قفسه‌ای‌که دردیوار نصب شودنیز وضع‌به‌همین‌منوال است.اگربعدازآن یکی ازاین چیزها را از جای خود برداریم می‌توان پرسید که آن درکجا واقع بود ؟ آن نقطهٔ مربوط به این چیز کجا بود؟ به این وسیله مفهوم «نقطهٔ واقع در یك جسم صلب S» بدست می‌آید. حتی اگر پیوستگی آن حقیقت مادی نداشته باشد. از تجرید مفهوم‌مزبور مفهوم نقطهٔ واقع بر یك شکل تغییر ناپذیر F بدست می‌آید حتی اگر ارتباط نقاط باشکل توسط شکلهای اولیه محقق‌نشده باشد (مثلا خطوطی که نقاط مورد سؤال را به‌برخی نقاط F وصل می‌کنند). به همین ترتیب می‌توان مفهوم نقاط واقع در خارج یك شکل تغییرناپذیر از هندسهٔ طولی را معلوم کرد ، مجموعهٔ‌این نقاط شکل تازه‌ای‌تشکیل می‌دهند که وصل به‌شکل F گفته می‌شود.

تساوی شکلهای تغییر ناپذیر ـ وقتی‌دانش‌آموزی را ملاحظه کنیم که در کلاس S خط‌کشی فلزی را که جسم‌صلب R می‌نامیم دستکاری می‌کند این مفهوم برای ما حاصل‌می‌شود که خطکش R نسبت به جسم S وضعهای مختلفی می‌تواند داشته باشد. وضعی از این اوضاع به صورت تجرید مجموعهٔ نقاطی از S می‌باشد که بر نقاط مختلف R منطبق می‌باشند ؛ به‌عبارت دیگر ، R نموداری از یك شکل F متشکل از نقاط واقع در S می‌باشد. ازنظر تجربی R جسمی صلب است. وقتی R دو وضع R_1 و R_2 اختیار کند درحقیـقت دوشکل F_1 و F_2 را مشخص کرده است ؛ این موضوع به زبان هندسی‌چنین بیان می‌شود: دوشکل F_1 و F_2 که توسط دووضع R_1 و R_2 از R مشخص‌می‌شوند دوشکل **مساوی** نامیده می‌شوند. دوجسم صلب قالبی را در نظر می‌گیریم که هردو از یك قالب بیرون آمده باشند، این دوجسم با یکدیگر برابرند؛ ایـن دو جسم تصوری از دوشکل هندسی را بدست می‌دهند که دوشکل هندسی مساوی نامیده می‌شوند. هرچند که انطباق نقطه به‌نقطهٔ دوجسم مادی ممکن نیست اما ازلحاظ هندسی این امکان هست که دو شکلی را که از تصور این دوجسم مادی بدست می‌آید قابل انطباق‌تصور کنیم. بطورخلاصه **دوشکل‌هندسی تغییر ناپذیر را متساوی گوئیم وقتی که تصوری از دو وضع مختلف یك جسم صلب، یا تصوری از دوجسم‌صلب متساوی باشند.** می‌توانیم بگوئیم که شکل F_1 با شکل F_2 برابر است وقتی‌که بتوان F_1 را نقطه به نقطه بر F_2 منطبق دانست .

تساوی دوشکل هندسی دارای خواص زیر است:

انعکاسی‌است (هرشکلی با خودش برابراست)

تقارنی‌است (اگر F_1 با F_2 برابر باشد، F_2 نیزبا F_1 برابر است)

انتقالی‌است (اگر دوشکل F_2 و F_1 باهم و دوشکل F_3 و F_1 نیز با هم برابـر باشند دوشکلا F_2 و F_3 با هـم برابرند).

بنابراین تساوی دوشکل تغییرناپذیر هندسی یك **رابطهٔ هم‌ارزی** است.

قبول می‌کنند که: یك‌نقطهٔ M_1 بر یك نقطهٔ M_2 قابل انطباق است : هردونقطه دو شکل متساوی می‌باشند. اگر F_1 و F_2 دوشکل‌متساوی باشندنقطهٔ M_1 از F_1 بریك‌نقطهٔ M_2 از F_2 قابل‌انطباق‌بوده‌واین‌دونقطه ، دونقطهٔ**متناظر** ازدوشکل‌متساوی

F_1 و F_2 نامیده می‌شوند، و اگر M_1 در F_1 شکلی مانند f_1 و M_2 در F_2 شکلی مانند f_2 را بپیماید دوشکل f_1 و f_2 هم دوشکل متناظر نامیده می‌شوند.

اصول هندسهٔ طولی ـ اصول‌اساسی تساوی دوشکل ازراه انطباق آنها ، که قبلا بیان شد با اصول دیگری مربوط به تساوی بعضی شکلها تکمیل می‌شود. به عنوان مثال :

ـ دوخط مستقیم، دو شکل متساوی هستند.

ـ دوخط $x'Ox$ و $x'_1O_1x_1$ که O و O' نقاطی‌ثابت از آنها هستند متساویند و آنهارا می‌توان چنان منطبق کرد که O و O_1 برهم و همچنین دونیم‌خط Ox و O_1x_1 و دونیم‌خط Ox' و $O_1x'_1$ برهم منطبق باشند.

ـ روی هرنیم‌خط مانند Ox یك و فقط یك‌نقطهٔ M وجود دارد بقسمی‌که قطعه خط OM با قطعه خط معلوم AB برابر باشد.

ـ دوصفحه، دوشکل متساوی‌هستند.

ـ و غیره...

موضوع دیگری که درهندسهٔ طولی‌مطالعه می‌شود مربوط ساختن اعداد به‌عناصر هندسی و تعریف بعضی اندازه‌هامی‌باشد (طول، اندازهٔ زاویه، مساحت، حجم) ؛ این اعداد **اجزاء طولی** و خواص مربوط به آنها **خواص طولی** نام‌دارند. در این‌باره هم‌از قبول اصول تازه‌ای ناگزیر می‌باشند. مثلا **اصل ارشمیدس** و **اصل کانتور** دربارهٔ طول یك قطعه‌خط، اصولی که تعریف اندازهٔ یك‌زاویه را میسر می‌سازد.

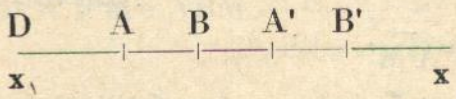
تعریف متری تساوی دوشکل

در آغاز هندسه برای بیان اصولی ، یا اثبات، تساوی دوشکل انطباق آنها تعریف می‌شود. اما این طریقه جز برای اشکال اولیه به‌راحتی نمی‌تواند مورداستفاده باشد. برای‌تساوی اشکال مرکب به‌دلایلی متشبث می‌شوند که درآنها مقادیرطولها و زاویه‌ها یعنی کمیتهای متری دخالت دارند؛ به عبارت دیگر تعریف از راه انطباق بوسیلهٔ تعریفی متری جانشین می‌شود که در همهٔ موارد قابل استفاده می‌باشد.

برای اینکه بررسی ماکاملا واضح باشد و اصول مربوط را بتوانیم متمایز سازیم بررسی خودرا به ترتیب زیر انجام می‌دهیم: فضای $\mathscr{E}_1$ متشکل‌از مجموعهٔ‌نقاط یك خط، فضای $\mathscr{E}_2$ متشکل‌از مجموعهٔ نقاط‌یك صفحه‌وفضای $\mathscr{E}_3$ متشکل‌از مجموعهٔ کلیهٔ نقاط.

تساوی مستقیم شکلهای روی یك خط

۱) روی خط D یك نقطهٔ A درنظر می‌گیریم و دو-نیم‌خط Ax و Ax_1 را که به‌این وسیله روی D معین می‌شود



مشخص می‌سازیم. فرض می‌کنیم F شکلی باشد که از مجموعهٔ نقاطی از D تشکیل می‌شود و A' نقطهٔ دیگری از D باشد. به‌عنوان اصل قبول می‌کنیم که می‌توانیم نیم خط Ax را بر نیم‌خط $A'x$ منطبق‌کنیم، همچنین دونیم‌خط متمم آنها، یعنی Ax_1 و $A'x_1$ نیز قابل انطباق هستند؛ درحقیقت قبول‌می‌کنیم که خط D می‌تواند روی خودش بلغزد، با لغزاندن D روی خودش ، شکل F به وضع F' در می‌آید. می‌گوئیم که شکل F' باشکل F مستقیماً مساوی می‌باشد.

استعمال کلمهٔ «لغزاندن» از آنجا ناشی شده است که دومیلهٔ فلزی مستقیم‌الخطرا می‌توان روی یکدیگر چنان‌جابجا کردکه در تمام طول‌خود برهم مماس باقی بمانند. ازیك‌چنین تجربه‌ای برمی‌آیدکه می‌توان دوشکل واقع‌روی‌یك خط ،دارای یك‌بعد ، را برهم منطبق‌کرد بدون آنکه نقاط واقع در خارج آن خط دخالت داده شوند.

۲) بردارهای متناظر F و F' ـ اگر $\overrightarrow{AB}$

برداری از F و $\overrightarrow{A'B'}$ بردار نظیر آن از F' باشد و B بر نیم‌خط Ax (یا Ax_1) و B' برنیم‌خط $A'x$ (یا Ax_1) درهمان جهت Ax (یا Ax_1) واقع باشد، دوبردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ همسنگ‌می‌باشند. بطورکلی هرشکلی از D که با $\overrightarrow{AB}$ مستقیماً مساوی باشد برداری خواهد بود مانند $\overrightarrow{A'B'}$ همسنگ بردار $\overrightarrow{AB}$.

برعکس، اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ دوبردار همسنگ‌واقع بر D باشند، بالغزاندن D روی خودش وقتی که A' بر A

منطبق شود B' به وضع B_1 قرار می‌گیرد بطوری‌که $\overrightarrow{A'B_1}$ با $\overrightarrow{AB}$ همسنگ می‌باشد و نتیجه می‌شود که B_1 یعنی B' بر B منطبق می‌باشد.

۳) شرط متری تساوی مستقیم دو شکل واقع روی یك خط.

قضیه ـ شرط لازم وکافی برای تساوی مستقیم دوشکل F و F' ازیك خط D آنست‌که اگر A و A' دونقطهٔ‌متناظر ثابت از دوشکل و M و M' دونقطهٔ متناظر متغیر از دوشکل باشد داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$$

از استدلالی که در قسمت ۲) انجام گرفت‌نتیجه می‌شود که شرط‌لازم است. برعکس، بالغزاندن D برخودش بقسمی که A' بر A منطبق شود M' هم بر M منطبق می‌گردد و چون M شکل F را بپیماید M' هم شکل F' را می‌پیماید پس دو شکل F و F' مستقیماً مساوی می‌باشند.

از شرط مزبور برمی‌آید که برای انطباق دوشکل ازیك خط که مستقیماً با هم برابرند کافی است خط را بر خودش لغزاندبقسمی که‌تنها یك نقطه از یك شکل اول بر نقطهٔ نظیرش از شکل دوم منطبق گردد.

تساوی مستقیم دوشکل واقع دریك صفحه

۱) فرض می‌کنیم π یك‌صفحه و $\overrightarrow{X}$ محوری از آن‌باشد که بوسیلهٔ نقطهٔ A به‌دونیم‌محور مثبت و منفی Ax و Ax_1 تقسیم شده‌باشد. محور $\overrightarrow{X}$ صفحهٔ π را به دونیم‌صفحهٔ چپ‌وراست π_1 و π_2 تقسیم می‌کند. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{X'}$ و $A'x'$ و $A'x'_1$ و π'_1 و π'_2 شکلهای متناظر شکلهای مزبور از صفحهٔ π باشند به‌عنوان اصل قبول کرده‌ایم که می‌توان A' را بر A، $\overrightarrow{X'}$ رابر $\overrightarrow{X}$، π'_1 را بر π_1 (درنتیجه، π'_2 را بر π_2) منطبق کردبدون آنکه نقطه‌ای از صفحهٔ π از آن خارج شود. به‌عبارت دیگر می‌توان صفحه را برخودش لغزاند.

اگر F شکلی ازصفحهٔ π و F' وضع جدید آن بعداز لغزش π برخودش باشد می‌گویند که دوشکل F و F' مستقیماً مساوی هستند.

استعمال کلمهٔ «لغزش صفحه برخودش» از آنجا ناشی‌شده است‌که یك صفحهٔ فلزی را می‌توان روی یك میز چنان‌جابجا کرد که همواره درتمام نقاط بر سطح آن مماس باشد. این مشاهدهٔ تجربی تعریف انطباق دوشکل واقع دریك‌صفحه، دارای دوبعد، را بدون دخالت نقاط واقع درخارج آن، میسر ساخته است.

۲) اجزاء متناظر در لغزش صفحه برخودش.

الف ـ فرض می‌کنیم AB و $A'B'$ دو قطعه خط‌متساوی از صفحهٔ π باشند. دو نیم‌خط Ax و $A'x'$ به مبدأهای A و A' را درنظر می‌گیریم که اولی شامل B و دومی شامل B' باشد می‌توان صفحه‌را برخودش لغزاند بقسمی‌که A' بر A، $A'x'$ بر Ax و درنتیجه B' بر B منطبق شود،

ب ـ اگر $(Ax$ و $Ay)$ و $(A'x'$ و $A'y')$ دوزاویهٔ هم‌جهت واقع درصفحهٔ π باشند وقتی این دوزاویه با هم‌مساوی باشند می‌توان صفحهٔ π را برخودش چنان لغزاند که A' بر A $A'x'$ بر Ax و درنتیجه $A'y'$ بر Ay منطبق شود.

اگر F و F' دوشکل از صفحهٔ π بوده و بایکدیگر مستقیماً برابر باشند شرطهای زیردربارهٔ آنها صادق است:

I ـ دوقطعه‌خط دلخواه متناظر بایکدیگر برابرند.

II ـ دوزاویهٔ جهت‌دار متناظر دلخواه (بین خطوط یا محورها) با یکدیگر برابرند.

چون تساوی دوقطعه‌خط یادوزاویهٔ جهت‌دار منطقاً معادل است با تساوی اندازه‌های آنها بنابراین شرایط‌فوق را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

الف ـ دوقطعه خط متناظر دلخواه دارای طولهای برابر باشند.

ب ـ دوزاویهٔ‌جهت‌دار متناظر دلخواه‌دارای اندازه‌های جبری برابر باشند.

بخصوص اگر ABC و $A'B'C'$ دو مثلث متناظر از دوشکل مستقیماً مساوی F و F' واقع در یك‌صفحهٔ π باشند، روابط زیررا می‌توانیم بنویسیم:

$$(a_1)\quad BC = B'C' \,،\, CA = C'A' \,،\, AB = A'B'$$

$$(b_1)\quad \begin{cases} (\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'} \text{ و } \overrightarrow{A'C'}) \\ (\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'} \text{ و } \overrightarrow{B'A'}) \\ (\overrightarrow{CA} \text{ و } \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'A'} \text{ و } \overrightarrow{C'B'}) \end{cases}$$

$$(b_2)\quad \begin{cases} (AB \text{ و } AC) = (A'B' \text{ و } A'C') \\ (BC \text{ و } BA) = (B'C' \text{ و } B'A') \\ (CA \text{ و } CB) = (C'A' \text{ و } C'B') \end{cases}$$

نشانه‌های بکاررفته هم‌معرف اجزاء هندسی وهم‌معرف اندازه‌های آنها می‌باشند.

۳) زاویهٔ دوشکل مستقیماً مساوی واقع در یك صفحه

فرض می‌کنیم F و F' دوشکل از صفحهٔ جهت‌دار π باشد که مستقیماً برابر می‌باشند. اگر $\vec{A}$ یك محور ثابت و $\vec{X}$ محور دلخواهی از F و $\vec{A'}$ و $\vec{X'}$ به ترتیب محورهای متناظر آنها از F' باشند می‌توانیم بنویسیم:

$$(\vec{A} \text{ و } \vec{X}) = (\vec{A'} \text{ و } \vec{X'})$$

با عوض کردن جای وسطین نتیجه می‌شود:

$$(\vec{X} \text{ و } \vec{X'}) = (\vec{A} \text{ و } \vec{A'})$$

یعنی اینکه زاویهٔ $(\vec{X} \text{ و } \vec{X'})$ دارای اندازهٔ جبری مستقل‌از وضع $\vec{X}$ می‌باشد و می‌توان گفت:

قضیه و تعریف ـ اگر دوشکل از یك صفحهٔ جهت‌دار باهم مستقیماً برابر باشند، زاویهٔ جهت‌دار محوری از شکل‌اول با محور متناظر آن‌از شکل دوم مستقل از این دومحورمی‌باشد. اندازهٔ جبری این زاویه، زاویهٔ شکل اول با شکل دوم نامیده می‌شود.

شرایط متری تساوی مستقیم دوشکل واقع در یك صفحه

قضیه ـ شرط لازم وکافی برای تساوی مستقیم دوشکل واقع در یك صفحهٔ جهت‌دار آنست که اگر A و B دو نقطهٔ ثابت و M نقطهٔ دلخواهی از F بوده A' و B' و M' به‌ترتیب نقاط متناظر آنها از F' باشد روابط زیر برقرار باشد:

$$(I) \quad \begin{cases} AB = A'B' \\ AM = A'M' \\ (\vec{AB} \text{ و } \vec{AM}) = (\vec{A'B'} \text{ و } \vec{A'M'}) \end{cases}$$

۱) لزوم‌شرط: اگر F و F' مستقیماً برابر باشندباتوجه به روابط (a_1) و (b_1) روابط (I) برقرار خواهدبود.

۲) کفایت‌شرط: فرض می‌کنیم روابط (I) برقرارباشد، از اولین‌رابطه برمی‌آید که می‌توان صفحهٔ π را بر خودش چنان لغزاند که A' بر A و B' بر B منطبق شود. ازرابطهٔ سوم نتیجه می‌شودکه در این‌صورت نیم خط $A'x'$ که شامل نقطهٔ M' است بر نیم‌خط Ax که شامل نقطهٔ M است منطبق می‌شود و بالاخره ازرابطهٔ دوم نتیجه می‌شودکه M' بر M منطبق می‌شود. چون M درشکل اول و M' درشکل‌دوم‌می‌تواند تغییر مکان دهد پس دوشکل F' و F نقطه به نقطه برهم‌منطبق بوده مستقیماً برابر می‌باشند.

حالات تساوی مستقیم دومثلث واقع در یك صفحه

اگر درقضیهٔ بالا نقطهٔ M را ثابت و غیر واقع بر AB اختیارکنیم شرطی‌کافی برای تساوی مستقیم دو مثلث ABM و $A'B'M'$ بدست‌آورده‌ایم. این دومین حالت ازحالات‌کلاسیك تساوی دو مثلث است، اما ازنقطهٔ نظر جهت دار بودن زاویه دقیقتر بیان شده است.

حالت اول تساوی دومثلث را نیزمی‌توان به همین‌ترتیب تصریح‌کرد. ثابت می‌کنیم‌که اگر ABM و $A'B'M'$ دومثلث واقع درصفحهٔ P بوده وداشته باشیم:

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ (AB \text{ و } AM) = (A'B' \text{ و } A'M') \\ (BA \text{ و } BM) = (B'A' \text{ و } B'M') \end{cases}$$

دو مثلث مزبور مستقیماً برابر می‌باشند.

زیرا، از رابطهٔ اول برمی‌آیدکه می‌توانیم صفحهٔ P را چنان برخودش بلغزانیم‌که A' بر A و B' بر B منطبق شود. از دو رابطهٔ دیگر نتیجه می‌شودکه در لغزش مزبور، محمل $A'M'$ برمحمل AM همچنین محمل $B'M'$ برمحمل BM منطبق‌می‌شود. وچون AM و BM متمایز از AB هستند M' بر M منطبق می‌شود.

به این ترتیب مشاهده می‌شودکه چگونه حالات تساوی دومثلث براصول هندسی متکی می‌باشند.

تساوی بعضی شکلهای اولیهٔ فضایی

۱) صفحهٔ π، محور $\vec{X}$ واقع برآن و نقطهٔ A روی این محور درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم π_1 یکی از دو نیم صفحه باشدکه‌توسط $\vec{X}$ روی π ایجاد می‌شود و E_1 و E_2 دو نیم فضای طرفین صفحهٔ π باشند بقسمی‌که اگر ناظری روی $\vec{X}$ چنان دراز بکشدکه جهت مثبت محور در جهت ازپا به سر او باشد E_1 سمت چپ و E_2 سمت راست وی قرار بگیرد. صفحهٔ π' و اجزاء $\vec{X'}$ و A' و π'_1 و E'_1 و E'_2 ازآن‌را به‌ترتیب متناظر با اجزاء صفحهٔ π انتخاب می‌کنیم. به عنوان اصل قبول می‌کنیم‌که می‌توان $\vec{X'}$ را بر $\vec{X}$ چنان منطبق‌کردکه A' بر A و نیم صفحهٔ π'_1 برنیم صفحهٔ π_1 منطبق شود که درنتیجهٔ آن نیم صفحهٔ π'_2 برنیم صفحهٔ π_2 ونیم فضای E'_1 برنیم‌فضای

E_1 و بالاخره نیم فضای E'_2 بر نیم‌فضای E_2 منطبق خواهد شد.

۲) تساوی مثلثها درفضا

قضیه ـ اگر دو مثلث دارای ضلعهای برابر باشند با یکدیگر برابرند.

دومثلث ABC و $A'B'C'$ را درنظر می‌گیریم که به ترتیب در دوصفحهٔ π و π' واقع بوده و داشته باشیم:

$$AB=A'B' \text{ و } CA=C'A' \text{ و } BC=B'C'$$

نقطهٔ A خط محمل AB را به دونیم خط تقسیم می‌کندکه یکی ازآنها شامل نقطهٔ B است، این نیم خط را Ax می‌نامیم. خط AB صفحهٔ π را به دو نیم صفحه تقسیم می‌کندکه یکی‌از آنها شامل نقطهٔ C است، این نیم صفحه را π_1 می‌نامیم. اجزاء متناظر اجـزاء مزبور مربوط به شکل شـامل مثلث $A'B'C'$ را به ترتیب $A'x'$ و π'_1 می‌نامیم.

بنا برآنچه درقسمت ۱) قبول‌کردیم A' را بر A، $A'x'$ را بر Ax و π'_1 را بر π منطبق می‌کنیم. چون بنا به فرض $AB=A'B'$ است نقطهٔ B' بر B منطبق می‌شود. اگر C_1 وضع جدید C' درانطباق‌مزبور باشد ازتساویهای

$$AC=A'C_1=A'C' \text{ و } BC=B'C_1=B'C'$$

نتیجه می‌شودکه دونقطهٔ A' و B' درعین حال ازدونقطهٔ C و C_1 متساوی‌الفاصله هستند. اگر C و C_1 متمایز باشند خط $A'B'$ عمود منصف قطعه خط CC_1 است‌که این غیرممکن‌است زیرا C و C_1 دریك نیم صفحهٔ π_1 واقع هستند. بنابراین C_1 بر C منطبق است و دومثلث ABC و $A'B'C'$ منطبق بوده با یکدیگر برابرند.

شرایط متری تساوی دوشکل فضایی

قضیه ـ شرط لازم وکافی برای تساوی دوشکل فضایی F و F' آنست‌که اگر A و B و C سه نقطهٔ ثابت غیرواقع بر یك استقامت، و M نقطه‌ای‌متغیر ازشکل F بوده و A' و B' و C' و M' نقاط متناظرآنهاازشکل F' باشندداشته باشیم:

$$(I)\begin{cases} AB=A'B' \text{ و } CA=C'A' \text{ و } BC=B'C' \\ BM=B'M' \text{ و } AM=A'M' \\ \text{فرجه‌های جهت دار} \begin{cases} (ABC \text{ و } \overrightarrow{AB} \text{ و } ABM) \\ (A'B'C' \text{ و } \overrightarrow{A'B'} \text{ و } A'B'M') \end{cases} \text{هم جهت و هم اندازه باشند.} \end{cases}$$

۱) لزوم شرایط ـ وقتی دو شکل F و F' برابر باشند قطعه خطهای متناظر ازآنها طولهای مساوی وفرجه‌های متناظر ازآنها اندازه‌های مساوی دارند و شرایط (I) برقرار می‌باشد.

۲) کفایت شرایط ـ فرض می‌کنیم شرایط (I) برقـرار باشد. بنابرروابط اولین سطر، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ برابرهستند ومی‌توان A را بر A' و B را بر B' و C را بر C' منطبق‌کرد. اگر M_1 وضع جدید M در انطباق مزبور باشد، دوفرجهٔ جهت دار

$$(A'B'C' \text{ و } \overrightarrow{A'B'} \text{ و } A'B'M')$$

و

$$(A'B'C' \text{ و } \overrightarrow{A'B'} \text{ و } A'B'M_1)$$

که دارای همان جهت و همان اندازهٔ فرجهٔ

$$(ABC \text{ و } \overrightarrow{AB} \text{ و } ABM)$$

هستند خود دارای جهت واندازهٔ مشترك می‌باشند. وچون این دو فرجه دروجه $(A'B' \text{ و } C')$ و یال $\overrightarrow{A'B'}$ مشترك هستند دو نیم صفحهٔ $(A'B'M)$ و $(A'B'M_1)$ منطبق می‌باشند، یعنی چهار نقطهٔ A' و B' و M' و M_1 در یك صفحه قرار داشته ودونقطهٔ M' و M_1 دریك طرف خط $A'B'$ قراردارند ازروابط سطر دوم (I) و باتوجه به روابط

$$A'M'=A'M_1(=AM) \text{ و}$$
$$B'M'=B'M_1(=BM)$$

نتیجه می‌شودکه یا M_1 و M' منطبق باشند یا خط $A'B'$ عمود منصف قطعه خط $M'M_1$ باشد. اماحالت اخیرغیر ممکن است زیراکه M' و M_1 دریك طرف $A'B'$ قراردارند. پس M' و M_1 یعنی M و M' منطبق می‌باشد. چون M نقطهٔ متغیری از F و M' نظیرآن از F' می‌باشد نتیجه می‌شودکه دوشکل F و F' نقطه به نقطه برهم منطبق بوده با یکدیگر برابر می‌باشند.

قضیهٔ بالا پایهٔ تساوی دوشکل فضایی غیرمشخص می‌باشد؛ برای اینکه ثابت‌کنیم دوشکل فضایی F و F' متساوی هستند سه نقطهٔ ثابت A و B و C ویك نقطهٔ متغیر M از F انتخاب کرده نقاط ثابت A' و B' و C' ونقطهٔ متغیر M' را از F' چنان انتخاب می‌کنیم‌که روابط (I) برقرارباشد، دراین‌صورت تساوی دوشکل مزبور محقق شده است.

فواصل

نوشتهٔ: PRESTON C. HAMMER
مجلهٔ: Mathematic's Student

ترجمهٔ: یعقوب گنجی
دانشجوی ریاضی دانشسرایعالی تهران

حتی درچهارسال‌تحصیل در دانشکدهٔ علوم ریاضی، شما با انواع فواصلی که مؤلف در اینجا از آنها سخن گفته است آشنا نخواهید شد. اگرچه این مطالب تازگی نداشته و ابتدا در پنجاه سال‌پیش **مینکوفسکی** دربارهٔ آنها بحث‌کرده‌است.

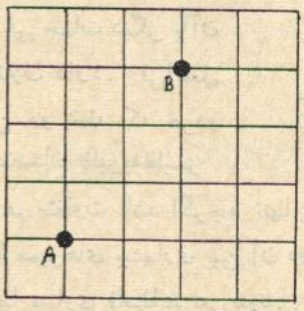
در اطراف ما مقیاسهای گوناگونی از فاصله وجوددارد که معمولا دارای چنین عنوانی بنظر نمی‌رسند. فی‌المثل اگر یك شرکت هواپیمائی آگهی‌کندکه: «دوساعت ازشیکاگو به میامی» این بدان معنی است‌که فاصلهٔ دومکان را می‌توان بوسیلهٔ مدت زمانی‌که در طول مسافرت از یکی به‌دیگری‌صرف می‌شود سنجید. بشر از هزاران سال پیش به اهمیت کاربرد مدت زمان به عنوان مقیاس فاصله پی برده است. هرچندتسلط هندسهٔ اقلیدسی بسیاری از ریاضیدانان را به پذیرش یك نوع فاصله موسوم به متریك راهنمائی‌کرد که شامل مفهوم «وقت به‌عنوان فاصله» نمی‌شود.

گفتیم‌که چندین نوع فاصله وجود دارد. مثلا. بعضی اوقات ما باید فاصلهٔ مکانی از مکان دیگر را به‌عوض‌ذکرطول مسیر یا وقت مصروفه در مسافرت بین آن دو مکان، وسیلهٔ هزینهٔ مسافرت در آن فاصله مشخص نمائیم. کاربرد هزینه به‌عنوان فاصله، داشتن فاصلهٔ منفی را نیز ممکن می‌سازد. به‌عنوان مثال، بعضی اوقات بعداز یك سخنرانی در سر میز شام برای من‌درآمدی حاصل شده و مخارج سفرم نیز پرداخت گردیده است. بدین‌جهت خرج سفر برای من ۵۰ دولار منفی شده است هرگاه که همین اندازه درآمد کسب‌کرده باشم.

نوع‌دیگری‌از فاصله‌وجود دارد که درنسبت خویشاوندی بکار می‌رود شما ممکن‌است نسبتهای «دور» ونسبتهای«نزدیك» داشته باشیدکه البته قوانین به‌منظور تقسیم ارث «نزدیکی‌نسبت خویشاوندی» را برای هریك از ورثهٔ یك فرد معلوم می‌دارند واضح است که این‌گونه فواصل‌هندسی نبوده و خیلی عمومی‌تر وکلی‌تر از آن هستندکه در این مقال دربارهٔ آنها بحث‌نمائیم

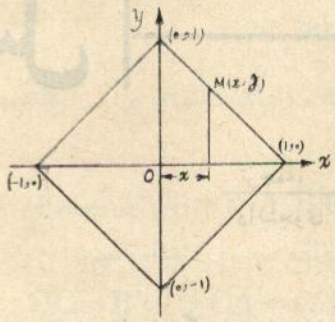
حتی اندازه‌گیری سادهٔ فاصله برروی زمین، اغلب به خاطر لزوم اجتناب از موانع و پستی و بلندیهائی که‌ضمن مسافرت درپیش است مستلزم اشکالاتی می‌باشد. یا اینکه حتی درشهری که به طریق زیبائی‌خیابان بندی شده و همهٔ‌خیابانها کاملا متوازی یا کاملا متعامدند ما نمی‌توانیم کوتاهترین‌فاصلهٔ بین هردونقطه را به جهت موانع یعنی خانه‌هائی‌که بین آن دونقطه وجوددارد اندازه‌بگیریم. مینکوفسکی برای سنجش‌این نوع فاصله تسهیلاتی ایجاد کرده است.

فاصله دریك شهر- فرض‌کنیم که ما درشهری‌زندگی می‌کنیم که خیابانها همه شرقی-غربی یا شمالی-جنوبی‌هستند می‌خواهیم فقط دربارهٔ فاصلهٔ بین چهارراهها در چنین شهری صحبت کنیم. (شکل ۱) برای بدست‌آوردن کوتاهترین راه از نقطهٔ A به‌نقطهٔ B باید جمعاً طول سه ساختمان پیوسته به‌هم(block) را درجهت شمال و طول دوساختمان متصل به‌هم‌را درجهت مشرق بپیمائیم. که‌اگرهمهٔ این‌ساختمانها مربع شکل باشند فاصلهٔ از A تا B، ۵ واحد (یعنی ۵برابر ضلع مربع) می‌شود. البته به این‌نکته‌هم باید توجه‌کرد که برای رفتن از A به Bراههای مختلف و متساوی‌الطولی‌وجود دارد (چند راه؟).



به‌منظور ارائهٔ یك راه سادهٔ ریاضی برای بررسی چنین فاصله‌ای مینکوفسکی تصورنوع جدیدی از «دایره» را معمول ساخت. بدین‌ترتیب‌که درصفحهٔ مختصات مربعی بنا کرد که اقطارش منطبق بر محورهای مختصات بوده و طول قطرش دو واحد باشد. آنگاه نوع جدیدی از فاصله را بررسی کرد که بر اساس آن فاصلهٔ هرنقطهٔ محیط مربع از مرکز آن مساوی واحد باشد. (شکل ۲) از آنجا که این مربع برای تشریح‌نوع

جدیدی از فاصله بکار می‌رود ممکن است این سؤال پیش بیاید که فاصلهٔ دو نقطهٔ :



$(x_1 و y_1)$ و $(x_2 و y_2)$ را چگونه می‌توان پیدا کرد؟ درجواب بایدگفت این فاصله مساوی:

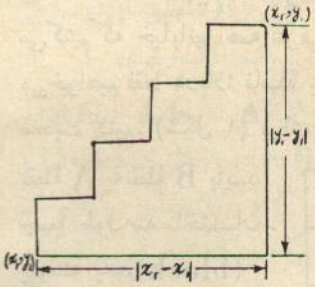
$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

یعنی‌مجموع قدرمطلقهای تفاضل طولها و تفاضل عرضهای دو نقطه می‌گردد (شکل ۳). به‌همین‌ترتیب در مورد مربع اگر $M(x و y)$ یکی از نقاط آن باشد فاصله‌اش از مرکز مساوی:

$$|x - 0| + |y - 0| = |x| + |y| = 1$$

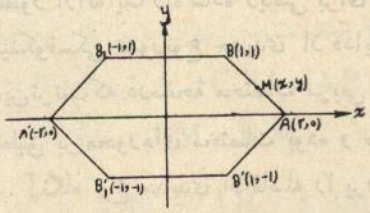
می‌شود زیرا معادلهٔ محیط مربع به صورت $|x| + |y| = 1$ می‌باشد . (شکل ۲).

اکنون بر اساس این نوع فاصله که آن را فاصلهٔ مربعی می‌نامیم مسائل جالبی برایمان مطرح می‌شود. زیرا فاصلهٔ مربعی از بعضی جهات با فاصلهٔ معمولی مشابه بوده و از برخی جهات دیگر باآن اختلاف دارد. فی‌المثل بین دو نقطه که هردو مختصشان نظیر به‌نظیر



با هم متفاوت باشد اگرچه تنها یك فاصلهٔ مربعی وجود دارد اما مسیرهای بیشماری بین آن دو نقطه می‌توان یافت که طول آنها مساوی فاصلهٔ مربعی شود.

به عنوان یك تمرین ، پیشنهاد می‌شود که معادلهٔ «بیضی» را که مکان هندسی نقاط $M(x و y)$ است بطوری‌که مجموع فواصلشان از دو نقطهٔ $F(1 و 0)$ و $F'(-1 و 0)$ مساوی ۴ باشد بنویسیم .

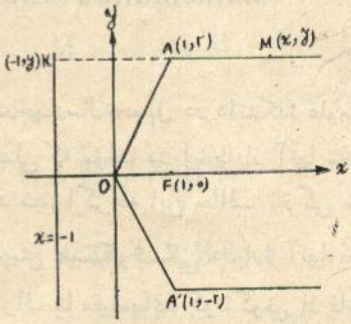


حلـ با توجه به تعریف فاصلهٔ دو نقطه دربالا داریم :

$$|x - 1| + |y| + |x + 1| + |y| = 4$$

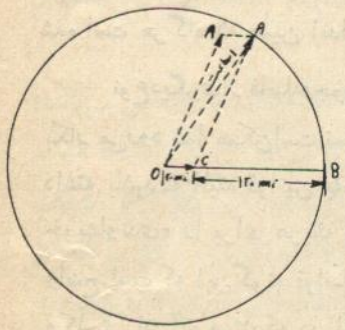
$$\Longrightarrow \quad |x - 1| + |x + 1| + 2|y| = 4$$

که این معادلهٔ بیضی است (و نمایش‌هندسی آن شکل ۴ می‌باشد که در درون‌آن بیضی که براساس تعریف فاصلهٔ معمولی رسم شود قرار گرفته و تنها در نقاط A و A' با آن مشترك‌است. مترجم)



و یا معادلهٔ «سهمی» که مکان هندسی نقاط $M(x و y)$ است بطوری‌که فاصله‌شان از خط $x = -1$ و نقطهٔ $F(1 و 0)$ مساوی باشد به‌صورت : $|x + 1| = |x - 1| + |y|$ می‌باشد که نمودار آن در شکل ۵ رسم شده است. (و در درون آن سهمی که بربنیاد تعریف فاصلهٔ معمولی رسم می‌شود قرارگرفته و درنقاط O ، A و A' با آن مشترك است. مترجم)

فاصلهٔ زمانیـ فاصلهٔ‌مربعی مینکوفسکی یکی‌ازفواصلی است که برروی اشکال محدبی‌که او بررسی‌کرد پایه‌گذاری شده‌است. نوع دیگری از فاصله وجود دارد که خیلی بیشتراز فاصلهٔ مربعی با فاصلهٔ معمولی اختلاف دارد. برای تشریح این نوع فاصله فرض می‌کنیم هواپیمائی در هوای آزاد با سرعت ۱۲۰ میل برساعت حرکت می‌کند و بادی از طرف مغرب با سرعت‌ثابت ۲۰ میل برساعت‌می‌وزد. اگراین هواپیما هنگام‌ظهر درست بالای سرشما باشد در ساعت یك کجا خواهد بود؟پاسخ این مسئله در شکل ۶ داده شده‌است. هواپیما برروی دایره‌ای است به‌شعاع ۱۲۰ میل‌که مرکز آن در بیست‌میلی مشرق‌جائی که شما هنگام ظهر بودید قراردارد. و برحسب جهات مختلفی‌که برای حرکت اختیار کند پس از یك‌ساعت پرواز از نقطهٔ O به نقاط مختلفی‌از این دایره خواهد رسید . برای رسیدن به نقطهٔ A در یك ساعت ، خلبان باید درراستای CA



(یعنی از O به‌موازات CA) پرواز نماید که مسیرش در این حال از زمین در امتداد خط OA دیده می‌شود.

حال به این نکته توجه می‌کنیم در ساعت نیم، دایره‌ای که هواپیما برروی آن قرار خواهد داشت فاصلهٔ (معمولی) نقاط مختلفه‌اش از O نصف فاصلهٔ نقاط متناظرشان در دایرهٔ اصلی از O می‌باشد. دراین«فاصلهٔ دایره‌ای» که O را«مرکز» آن می‌نامیم تنها دوجهت (شمال و جنوب یافت می‌شود که‌فاصلهٔ زمانی درحرکت درآن جهات‌و جهات مخالف آنهامساوی‌است چنانکه‌فاصلهٔزمانی‌از O به B یك‌ساعت است و ازB به O $\frac{۱۴۰}{۱۰۰}$ ساعت یا یك ساعت و۲۴ دقیقه است.

محیط دایرهٔ یك ساعته کوتاهترین فاصلهٔ زمانی است که هواپیما دور آن پرواز می‌کنند. این مطلب از محاسبهٔ یك انتگرال بیضوی نتیجه می‌شود که جوابی بیش از ۲π ساعت بدست می‌دهد.

هندسه‌هائی با چنین فواصل ، هندسه‌های مینکوفسکی نامیده می‌شوند که به‌همان نسبت که مسائل حل نشدهٔ زیادی‌در آنها وجود دارد شامل نتایج جالبی راجع به آن مسائل نیز می‌باشند. فی‌المثل، شما می‌توانید یك‌چندضلعی محدب و مثلا یك مثلث متساوی‌الاضلاع به‌عنوان «دایرهٔ واحد» و هر نقطهٔ‌داخل آن‌را به‌عنوان «مرکز» اختیارکنید. آنگاه می‌توانید «بیضیها» «سهمیها» و منحنیهای دیگری براساس‌این فواصل رسم‌کنید درحالت دایرهٔ اخیر، چهار طریق برای رسم یك بیضی با دو کانون وجود دارد.

قضیه‌ای از هندسه

نوشتهٔ: Venelaos Tissopouluso
مجلهٔ: Mathematic's Student

ترجمهٔ: یعقوب گنجی
دانشجوی ریاضی‌دانشسرای عالی تهران

قضیهٔ زیر توسط دانش‌آموز پانزده‌سالهٔ یونانی کشف‌شده است. قبل ازبیان قضیه تعاریف مربوط به‌بعضی اجزاءساختمانی آن یادآوری می‌شود.

هرگاه در مثلث ABC ، G مرکز ثقل ، H محل برخوردسه ارتفاع . C′ و B′ نقاط تماس‌دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A با ضلعهای AB و AC ، N نقطهٔ تلاقی خطوط BB′ و CC′ باشد.

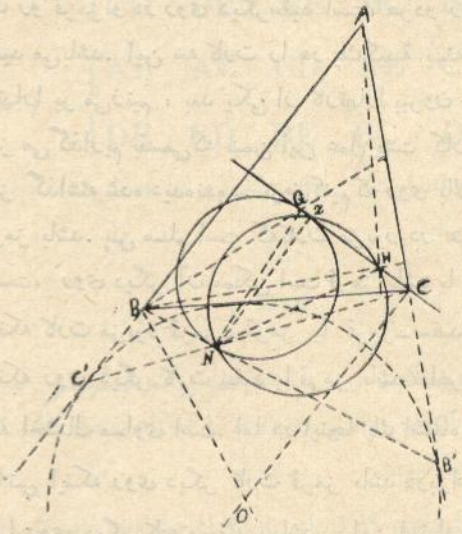
دایرهٔ به‌قطر GN به‌نام**دایرهٔ نوبرگ** Neuberg

دایرهٔ به‌قطر HN به‌نام **دایرهٔ فوهرمن** Fuhrmann.

خط مار بر GH به‌نام **خط اولر** Euler موسوم است

قضیه ـ درهرمثلث ، نقطهٔ تقاطع دوم‌دایره‌های‌نوبرگ و فوهرمن برخط اولر قراردارد.

اثبات ـ اگر NZ وتر مشترك دو دایرهٔ مزبور باشد هریك‌از زاویه‌های GZN و NZH قائمه است (محاطی‌روبرو



به‌قطر). مجموع دوزاویهٔ مزبور با یك زاویهٔ نیم‌صفحه برابر است. پس Z بر خط NH واقع است.

مسائل حل نشدهٔ ریاضی

تألیف:
C. STANLEY OGILVY
ترجمهٔ: ع. م.

بخش هفتم ـ احتمالات و آنالیز ترکیبی

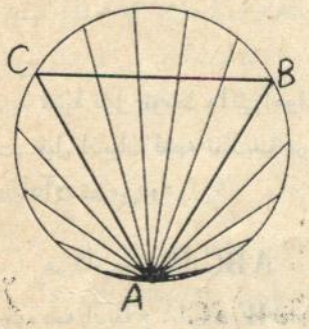
هیچیك از شاخه‌های ریاضیات مانند نظریهٔ احتمالات پراز دامهای پنهانی نیست. در این زمینه است که پاسخهای نادرست به سادگی در متون چاپی راه می‌یابند. خود متخصصین هم در چنین تله‌هایی گرفتارمی‌شوند، چه رسد به تازه‌کارهای کم حوصله وقتی‌که با مسئله‌ای مواجه می‌شوند که موضوع آن عبارتست از: «چقدر شانس وجود دارد برای آنکه ....».

برای اینکه نمونه‌ای از این دامهارا که باعث گرفتاری خیلیها شده است نشان داده باشیم مثال مشهور و سادهٔ زیر را یادآوری می‌کنیم. سه‌کارت همشکل با رنگهایی به شرح زیر انتخاب می‌کنیم: هردو روی اولی قرمز است، کارت دومی در یك رو قرمز و در روی دیگرسفید است، هردو روی کارت‌سوم سفید می‌باشد. این سه کارت را در یك‌کیسهٔ بسته می‌اندازیم و آنهارا بر می‌زنیم، بعد یکی از کارتهارا بیرون آورده روی میز می‌گذاریم بقسمی‌که ضمن این عمل پشت کارت که روی میز گذاشته شده دیده‌نشود. فرض‌کنیم که روی بالایی این کارت قرمز باشد. پس مسلم است که‌کارت مزبور در هردو رو سفید نیست، روی دیگر آن ممکن است قرمز باشد یا سفید بر حسب آنکه کارت مزبور قرمز ـ قرمز یا قرمز ـ سفید باشد. برای آنکه روی دیگر کارت سفید یا قرمز باشد ظاهراً بنظرمی‌رسد که احتمال مساوی است. اما در اینجا یك اشتباه وجود دارد؛ شانس اینکه روی دیگر کارت قرمز باشد دوبرابر شانسی‌است تا روی دیگر کارت سفید باشد. این اشتباه ناشی ازآنست که دربسیاری‌از مسائل احتمالات نکتهٔ اصلی‌را فراموش‌می‌کنند وآن‌عبارتست‌از لزوم تعیین و قایعی‌که احتمال‌آنها برابراست.

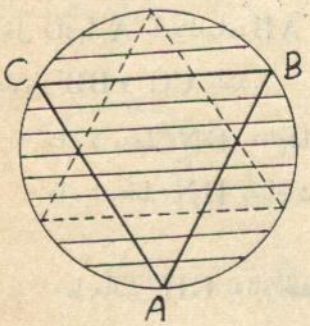
دو واقعه وجود دارد اما احتمال آنها برابر نیست. درحقیقت سه‌حالت وجود دارد:

روی اول کارت قرمز ـ قرمز روشده باشد، یاروی دوم آن، یاروی قرمز کارت قرمز ـ سفید. برای این سه‌حالت احتمال مساوی است. در دوحالت آن روی دیگر کارت قرمز است و فقط در یك حالت آن روی دیگر کارت سفید می‌باشد.

نکتهٔ ظریف این مسئله چگونگی تعیین وقایعی است که احتمال وقوع‌آنها برابر می‌باشد.



برای مسئله‌ای هم‌که هم‌اکنون‌مطرح‌می‌شودنیز اینچنین‌است. می‌خواهیم دردایرهٔ مفروض وتری به دلخواه رسم کنیم. برای اینکه این وتر از ضلع مثلث منتظم محاط در دایرهٔ مزبور بزرگتر باشد احتمال‌چقدر است؟



برای رسم وتر مزبور بطور اتفاقی دوطریقه موجود است: می‌توان مثلا یك‌سر همهٔ وترها را نقطهٔ اختیاری A از دایره گرفت و معلوم‌کرد که توزیع A′ سر دیگر وترها روی دایره از چه قرار است. اگر ABC مثلث منتظم محاط دردایره باشد احتمالات مربوط به اینکه A′

روی یکی از کمانهای AB ، BC یا CA واقع شود با یکدیگر برابر است. پس احتمال اینکه وتر A.A′ از AB بزرگتر باشد برابر است با $\frac{1}{3}$.

طریقهٔ دیگر اینکه وترهارا موازی و متساوی‌الفاصله از هم رسم کنیم به این نتیجه می‌رسیم که دربرابر هر وتری که از AB کوچکتر باشد یك وتر وجود داردکه ازAB بزرگتر است. پس احتمال اینکه وتر مرسوم از AB بزرگتر باشد برابر $\frac{1}{2}$ است. از دوپاسخ مزبور کدام درست است؟ احتمال هیچکدام. در این مسئله مفهومهای«تصادف» و «احتمال برابر» دقیقاً تعریف نشده است و علی‌رغم ظاهر امر معلوم نیست‌وتری که به طور تصادف انتخاب شود چه می‌باشد.

***

فرانک‌هاترن راهنمای‌تعلیماتی ریاضی ایالت‌نیویورك مسئلهٔ زیررا مطرح کرده است: روی ضلعهای مستطیلی که‌طول آن دوبرابر عرضش می‌باشد سه نقطه بطور تصادفی انتخاب می‌کنیم. برای‌اینکه‌این سه‌نقطه رأسهای‌یك‌مثلث منفرجه‌الزاویه باشند احتمال چقدر است؟ بنظر می‌رسد که در اینجا برای تعریف تصادف اشکال کمتری وجود داشته باشد. می‌توان‌مسئله را از راه هندسهٔ تحلیلی حل‌کرد به این ترتیب که مختصات سه نقطهٔ واقع بر اضلاع مستطیل را غیر مشخص انتخاب کرد. اما تاکنون جواب مسئله بدست نیامده است.

***

جالب است که مسئلهٔزیر در حدود بیست سال‌جزءمسائل حل نشده می‌باشد. سه شخص‌که به‌ترتیب l و m و n سکه در اختیار دارند نوعی بازی شیر یا خط می‌کنند : آنکه‌سکه‌اش به وجهی غیر از وجوه دوسکهٔ دیگر بیفتد برنده است ودوسکهٔ دیگررا برای خود برمی‌دارد ووقتی هرسه سکه به یك وجه بیفتد بازی پوچ است. بطور متوسط چند دفعه بازی لازم است‌تا یکی ازبازیکنان‌کنار برود.

***

حل مسائل احتمالات در هرحال متکی به‌آنالیز ترکیبی می‌باشد. مسئلهٔ زیر معلوم می‌سازد که مسائل آنالیز ترکیبی به چه سادگی طرح و به چه شکلی حل می‌شوند:

نوار کاغذی راکه سرتاسر آن با n تمبر پست‌چسبانیده شده است به چند طریق می‌توان تا کرد؟ هرخط تا درست باید در محلی باشدکه کناره‌های دوتمبر مجاور هم‌واقع‌شده‌اند و پهنای نوار هم درست به اندازهٔ طول یك تمبر است. وقتی n کوچك باشدمی‌توان عملا تعداد دفعات تا کردن را معلوم‌ساخت اما آنچه مورد نظر است تعیین فرمولی کلی است که ازروی آن در ازاء مقادیر مختلف n تعداد جوابها بدست آید.

می‌توان مسئله را پیچیده‌تر کردو آنرا تعمیم داد؟ یك کارت راه راه با N خط تا را به چند طریق می‌توان تا کرد؟

***

مسئلهٔ زیر نمونه‌ای از مسائل مجردآنالیز ترکیبی است فرض می‌کنیم n شیء از انواع مختلف داشته باشیم و n عددی فرد باشد. اشیاء را دوبه‌دو اختیارکرده جنسهای حاصل‌را در n ستون چنان قرار می‌دهیم که هرستون شامل $\frac{n-1}{2}$ جفت باشد و یك شیء درهرستون جز یك دفعه ظاهرنشود. چگونگی ترتیب ستونها و ترتیب جفتها مهم نیست. معلوم کنید که‌توزیع فون را به چند طریق می‌توان انجام داد؟. برای مثال درازاء $n=3$ اشیاء را A و B و C فرض می‌کنیم. جفتهای ممکن عبارت می‌شود از AB ، AC و BC وچون‌درهرستون جز یك جفت واقع نمی‌شود پس جواب عبارت از این است که فقط یك راه وجود دارد. در ازاء $n=5$ اشیاء را A و B و C و D و E فرض می‌کنیم. در این حالت طرق مختلفی وجود دارد از جمله دوراه زیر :

$$1)\ \begin{cases} AB & AC & AD & AE & CE \\ CD & DE & BE & BC & BD \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} AB & AC & CD & AE & CE \\ DE & BD & BE & BC & DA \end{cases}$$

تعداد راهها چقدراست؟ بطور کلی برای n شیء تعدادطرق چقدر می‌باشد ؟

***

مسئلهٔ «پنج‌گوی قرمز» توسط **هربرت فیلیپس** طرح شده است که کتاب ریاضی مشهوری را به نام مستعار **کالیبان** به چاپ رسانده است:

معلمی تعدادی گلوله‌های بارنگهای متفاوت رادرکیسه‌ای ریخته است. محصلی پنج‌گلوله را بطور تصادفی از کیسه‌بیرون می‌آورد. هرپنج گلوله قرمز می‌باشد. معلم می‌گوید: «برای

چنین واقعه‌ای شانس یك بر دواست». در کیسه چندگلوله‌وجود داشته است و چند عدد از آنها قرمز بوده است؟

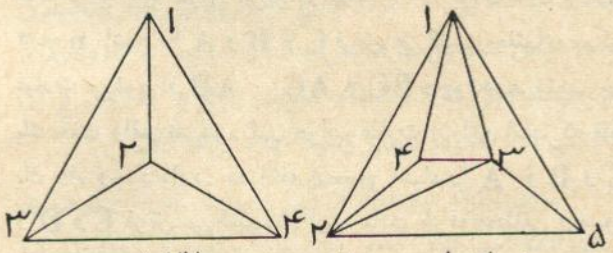
کالیبان مسئله را چنین حل کرده است: کیسه شامل ۱۰ گلوله است که ۹ عدد از آنها قرمز هستند:

اولا آیا راه حل کالیبان منحصراًدر مورد پنج گلوله میسر است؟

ثانیاً اگر مقصود انتخاب ۶ گلوله باشد آیا مسئله قابل حل است؟ آیا یك حل کلی وجود دارد؟ دراین‌باره‌اطلاعاتی جمع‌آوری شده است که خوانندهٔ علاقـمند می‌تواند در پـی آنها باشد .

***

در یك صفحه n نقطه درنظر می‌گیریم و هر نقطه رابا یك خط متصل، مستقیم یا منحنی ، به هر یك از نقاط دیگر وصل می‌کنیم . حداقل تعداد نقاط تقاطع خطوط حـاصل چقدر می‌تواند باشد؟ این حداقل را با X_n نشان مـی‌دهیم.



(الف) (ب)

در شکل الف ملاحظه می‌شود که چهارنقطه را می‌توان دو به دو چنان به‌هم وصل کرد که هیچ خط ، خطوط دیگررا قطع نکند یعنی $X_4 = 0$. در شکل ب ملاحظه می‌شود کـه خط واصل بین نقطهٔ ۴ و نقطهٔ ۵ به هرترتیب یکی ازخطوط دیگر را قطع خواهد کـرد پس $X_5 = 1$. محتمل است کـه $X_6 = 3$ باشداماموضوع مدلل نشده است. مقصود تعیین‌فرمولی کلی برای تعیین X_n می‌باشد یا تعیین روشی که بتوان آنرا محاسبه کرد. اگر به جای صفحه سطح کروی هم انتخاب شود مسئلهٔ مربوط بیش از این حل نشده است.

***

بخش را با مسئله‌ای‌ساده وتفننی خاتمه می‌دهیم، هرچند که به‌زحمت می‌توان به آن عنوان مسئله داد اما در چگونگی استدلال مربوط به میانگینها و احتمالات حائز اهمیت است.

تنها اطلاعاتی‌که دربارهٔ یك عدد مانند x داریم این‌است که بین ۹ و ۱۱ محصور می‌باشد؛ بـرای چه مـقدار از آن بیشترین احتمال وجوددارد؟ اگر مسئله را خیلی مبهم‌می‌یابید می‌توانید آنرا به نوع دیگر مطرح کنید از شما می‌خواهندکه مقداری برای x درنظر بگیرید و به نسبت خطای نسبی حاصل جریمه می‌شوید. برای اینکه ماکزیمال جریمه‌ای‌که خواهیـد پرداخت تا حد امکان کم باشد چه عددی‌را انتخاب می‌کنید در نظر اول شما عدد ۱۰ را انتخاب می‌کنید، ماکزیمال خطا در هرجهت یك است. اما ۹/۹ بر آن ترجیح دارد زیرا در این صورت ضرری که متوجه‌شما خواهد شد با خطایی به‌نسبت ۱۰٪ از مقدار واقعی آن خواهد بود. اگر x نزدیك به۹باشد خطایی بالاتر از ۱۱٪ خواهید داشت.

می‌توان مسئله را از راه جبر حل‌کرد . اگر x عـدد مجهول باشد برای اینکه خطای نسبی در هردوجهت‌برابر باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{x-9}{9} = \frac{11-x}{11}$$

ببینیم وقتی‌که فاصله را زیاد کنیم چه پیش می‌آید. مثلا فرض کنیم مقصود تعیین عددی واقع در فاصلهٔ ۱ تا ۱۰۰ باشد با محاسبه‌ای مشابه، نتیجه‌خواهدشد که x نزدیك به ۲است:

$(x = 1/98)$

و این‌جواب‌صحیح‌است و خطا ماکزیمال در هردوجهت ۱۰۰٪ است. اما در اینجا یك ایراد وارد است. آیـا می‌توان گفت «مقداری از x که بیشترین احتمال را دارد» آنست که‌خطای نسبی مربوط به آن ماکزیمال باشد؟ اشخاص‌معدودی این‌فکر را قبول دارندکه‌در فاصلهٔ ۱تا۱۰۰ عددی‌که‌بیشترین‌احتمال‌را داشته باشد ۲ است.

موضوع‌از این قرار است‌که «مقدار با بیشترین‌احتمال» وجود ندارد. معلومات مسئله کافی نیست و همهٔ اعداد احتمال برابر دارند.

بخش هشتم ـ مسائل مربوط به مجموعه‌های نامحـــــــدود

خارج‌قسمت دوعدد صحیح p و q به صورت $\frac{p}{q}$ نوشته شده عدد منطق نامیده می‌شود. اگر عددهای منطق را بوسیلهٔ نقاط یك خط نشان دهیم همواره بین هردوعدد منطق r_1 و r_2 هرچند نزدیك به هم که انتخاب شوند، عدد منطقی مانند r_3 وجود دارد. مثلا می‌توان r_3 را واسطهٔ عددی r_1 و r_2 درنظر گرفت. به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ عددهای منطق روی یك‌خط در همه جا متراکم است. همچنین، دریك صفحه مجموعهٔ‌نقاطی که مختصات آنها منطبق باشد در همه جا متراکم است.

اولام سؤال زیررا مطرح کرده است: آیا می‌توان مجموعهٔ نقاط را دریك صفحه چنان مشخص‌کرد که فاصلهٔ‌هردو نقطهٔ دلخواه عددی منطق باشد؟ اگر مجموعه‌ای این شرط را دارا باشد آیا در همه‌جامتراکم است ؟ برای مجموعه‌ای که در یك بعد تشکیل شده باشد شرط اول صادق است، اما سؤال‌فقط درمورد یك بعد نیست.

***

درنظریهٔ **کانتور** دو مجموعه‌دارای یك عدد اصلی‌نامیده می‌شوند هرگاه هرعنصر از یکی از آنها با یك و فقط یك‌عنصر از دیگری متناظر باشد. هر مجموعه‌ای که بین عناصر آن و عناصر مجموعهٔ‌عددهای مثبت تناظر دوسویه برقرار باشددارای عدد اصلی $\aleph_0$ (الف‌صفر) شناخته می‌شود. مثلا عدد اصلی مجموعهٔ عددهای صحیح مربع کامل $\aleph_0$ است زیرا تناظرزیر برقرار می‌باشد:

$$\begin{array}{cccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ ۱ & ۴ & ۹ & ۱۶ & ۲۵ & \cdots \end{array}$$

نظیر هرعدد N عدد N^2 وجود دارد و برعکس. هرچند که مجموعهٔ‌عددهای مربع کامل‌زیر مجموعه‌ای‌است‌ازمجموعهٔ‌عددهای صحیح اما عدد اصلی آنها یکی است. در نظریهٔ بینهایتها کل همیشه بزرگتر از جزء خود نیست.

می‌دانند که مجموعهٔ همهٔ نقاط یك‌خط ، اعم از منطق یا غیر منطق ، دارای عدد اصلی بزرگتر از $\aleph_0$ می‌باشد. کانتور با روش مخصوص خودش که امروز مشهور می‌باشد ثابت کرد که بین مجموعهٔ نقاط حقیقی و مجموعهٔ عددهای صحیح مقابلهٔ یك به یك‌برقرار نیست. عدد اصلی مجموعهٔ نقاط حقیقی $2^{\aleph_0}$ می‌باشد.

اگر یك دترمینان رتبهٔ n به چند جمله‌ای جبری بسط داده شود، این چندجمله‌ای دارای $n!$ جمله می‌باشد. تعریف دترمینانی که حد یك دترمینان رتبهٔ n باشد وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند جالب است ؛ می‌دانند که بسط آن دارای $2^{\aleph_0}$ جمله است. اما آنچه نامعلوم است چگونگی تشکیل تناظر دوسویه بین جملات این بسط و نقاط یك خط می‌باشد.

***

از بین مسائل حل‌نشدهٔ مربوط به مجموعه‌های نامحدود فرض پیوستگی کانتور از همه مشهورتر است:

تساوی: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

به این معنی است که کوچکترین بینهایت بزرگتر از $\aleph_0$ عبارتست از تعداد نقاط روی یك خط که «توان اتصال» نامیده می‌شود. موضوع ازاین‌قرار است که ثابت شود آیا فرض‌مزبور صحیح است یانه. خود کانتور تصور کرده است که این فرض صحیح می‌باشد. حکم مزبور معادل با حکم زیر است: هر زیر مجموعهٔ نامحدود پیوسته‌ای یا هم توان با مجموعهٔ‌عددهای صحیح است و یا هم‌توان با هر اتصال ؛ حد وسط وجود ندارد

در ۱۹۴۷ **گودل** مسئله را در مجلهٔ ماهانهٔ ریاضیات آمریکا مطرح کرد و ملاحظاتی چند به آن اضافه نمود: برای توان اتصال نمی‌توان حد بالائی اختصاص داد . «آیا این‌توان بر طبق قاعده است یا غیر عادی است؟ قابل حصول است یا نه؟ ...خصوصیت هم‌انتهائی آن چیست؟»

گودل تمایل داشته است که فرضیه را بالاخره نادرست بیابد. ازجمله دلایل وی خصوصیت غیرمنتظره وغیر قابل قبول نتایج بدست آمده‌است. اما «خاص» و «غیر قابل تصور» بودن قضیه‌ای دلیلی بر نادرستی آن نیست. ریاضیات پر از قضایای

کاملا درستی است که از لحاظ حسی و عینی غیر ممکن بنظر می‌رسند. اما به همان نسبت که معلومات ما زیاد می‌شودمسائل تازه‌ای هم مطرح می‌شود.

نمونهٔ تازه‌ای از امکانات عجیب و غریب منتج از این فرضیه چنین است : رابطهٔ $2^{N_0} = N_1$ از حکم زیر حاصل می‌شود: سه‌مجموعهٔ E_i ($i = 1$ و ۲ و ۳) که صفحهٔ اقلیدسی‌اجتماع آنهارا تشکیل بدهد و سه خط D_i از صفحه ($i = 1$ و ۲ و ۳) را درنظر می‌گیریم که مجموعهٔ E_i هرخط موازی با D_i را در تعدادمحدودی نقاط قطع بکند. دراین‌صورت می‌توان‌حکمی راثابت کرد که فرضیهٔ اتصال را دربر دارد.

بخش نهم ـ مسائل تغییرات

مسائل تغییرات به‌مسائلی گفته می‌شود که موضوع‌آنها تعیین فرم، طریقه یا ساختمانی است که بتوان‌بعضی جوابهای مینیمال یا اپتیمال رابدست‌آورد. دربخشهای اول ودوم‌نمونه‌ای از این مسائل را مطرح کرده‌ایم.

مسئله‌ای قدیمی معروف به **مسئلهٔ پلاتو** نوعی از این مسائل است. **ژ. ا. ف. پلاتو** خواسته است‌کوچکترین مساحت محدود به یك منحنی غیر مسطح را تعیین‌کند. جواب عمومی این مسئله در ۳۱ـ۱۹۳۰ توسط **تیبورراده** و **ژس دوگلاس** پیدا شده است.

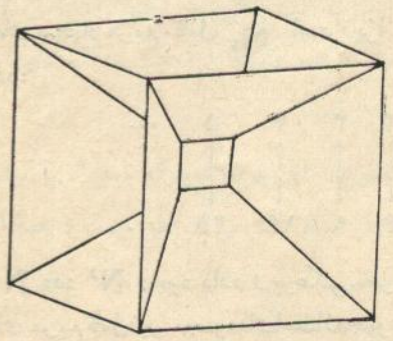
دونقطهٔ A و B را روی یك بیضی درنظر می‌گیریم . کوچکترین منحنی واصل بین این‌دونقطه را بقسمی‌تعیین کنید که‌مساحت‌بیضی را به دوقسمت معادل ویکپارچه تقسیم کند. آیا درحالتی‌که A و B منطبق باشندمسئله جواب دارد؟ یك‌منحنی بستهٔ ساده روی یك‌کره درنظر می‌گیریم. کوچکترین مساحت محدود به این منحنی‌که ضمناً کره را به دوحجم متعادل تقسیم کند کدام است؟ اینهم مسئلهٔ پلاتو است منتهی با یك شرط تکمیلی و شاید قابل حل نباشد. هنوز برای هیچیك از این سؤالات پاسخی بدست نیاورده‌اند .

***

مسئلهٔ ترسیمی: از نقطهٔ مفروض P واقع در داخل یك مثلث خطی چنان رسم‌کنید که مساحت مثلث را به دوقسمت S و S′ چنان تقسیم کند که یکی از آنها دوبرابردیگری‌باشد ($S = 2S'$). رسم این خط منحصراً به کمك خط‌کش وپرگار بسیار مشکل و یا غیر ممکن خواهد بود. اما مسئله غیر ازاین است. وقتی P بر مرکز ثقل مثلث انتخاب شود مسئله غیر ممکن است (هرخط که بر مرکز ثقل مثلث بگذرد مثلث را به دوقسمت متعادل تقسیم می‌کند). اما برای اوضاع دیگر P اینچنین خطوطی وجود دارد. مسئله عبارتست از تعیین سطحی از مثلث که اگر P در آنجا انتخاب شود هیچ خط ماربر P وجود نداشته باشد که مساحت مثلث را به دوقسمت S و 2S تقسیم کند. به عبارت دیگر ؛ فرض می‌کنیم همهٔ خطوطی را رسم کرده باشیم که مساحت مثلث را به دوقسمت S و 2S تقسیم می‌کنند، قسمت از سطح مثلث باقی خواهد ماندکه این خطوط از آنجا نمی‌گذرند، مقصود تعیین این ناحیه است ، معلوم نیست که این ناحیه یکپارچه باشد.

***

ریچاردکورانت و هربرت رینس در مجموعهٔ «ریاضیات چیست» نوعی روش فیزیکی برای تعیین جواب‌مسئلهٔ پلاتو درحالات خاصی بکار برده‌اند. جسمی درنظر می‌گیریم که با استفاده از سیمهای نازك آهنی درست شده باشد.این‌جسم را درداخل آب صابون فروبرده و بعد آنرا به‌دقت بیرون می‌کشیم. پوستهٔ نازك کف صابونی که در هر وجه آویزان شده است مساحت مینیمال را نشان می‌دهد. برای اینکه معلوم کنیم با یك حجم معین کدام شکل است که مساحت می‌نیمم دارد می‌توانیم حجم معینی از هوارا به داخل آب صابون‌بدمیم حبابهای کروی شکل صابون که خارج می‌شودنشان می‌دهدکه



چنین شکلی‌کره است. اگر با استفاده از سیمهای آهنی‌مکعبی تهیه کنیم و آنرا داخل آب‌صابون فرو برده بیرون بکشیم ، شکلی از پوسته‌های آب صابون تشکیل‌می‌شود شامل سیزده‌وجه

تقریباً مسطح (مطابق شکل مقابل)؛ همهٔ وجوه مستوی نیستندو سطح کوچك مرکزی هم کاملا مربع نیست. کورانت و ربنس عقیده داشته‌اند تعیین چنین سطوحی به طریقی که گفته شد این امکان را خواهد داد که از راه هندسهٔ تحلیلی هم می‌توان آنها را پیدا کرد اما تا کنون که بیست سال از آن تاریخ گذشته است (تاتاریخ تألیف کتاب) هنوز پیشرفتی حاصل نشده است .

***

در یك صفحه‌دو قطعه خط AB و CD با طولهای برابر را درنظر می‌گیریم . قطعه خط AB را جابجا می‌کنیم تا بدون آنکه طولش تغییر کند بر CD منطبق شود. این تغییر مکان چگونه باید انجام گیرد تا مجموع مسیرهای پیموده‌شده توسط A و B مینیمال باشد. آیا برای‌یك‌چنین تغییر مکانهایی قانونی کلی وجود دارد؟ می‌توان به‌جای مجموع مسیرهای پیموده‌شده خواست تا حداقل جذر مجموع مربعات مسیرها تعیین‌شود.

می‌توان مسئلهٔ تغییر مکان را به‌نحو زیر تعمیم داد: دو شیء هندسی معادل A و B در نظر می‌گیریم، با چه تغییر مکانی شیء A را بر B منطبق کنیم تامجموع مسیرهای‌پیموده شده توسط هریك از نقاط A مینیمال باشد. برای اینکه معلوم کنیم اینچنین مسائل تا چه حد جالب هستند متذکر می‌شویم که دربعضی مسائل مکانیك، مثلا در هیدرو دینامیك ، جریانات بسیار متواتر شرایطی را دارا هستندکه با آنچه قبلا گفتیم فوق‌العاده متشابه می‌باشد.

***

قطعه‌ای که از طرفین آویزان شده باشد شکلی به‌خود می‌گیرد که به منحنی شنت (زنجیر) موسوم است و معادلهٔ مربوط به‌آن کاملا معروف می‌باشد. قسمت پائینی این قطعهٔ آویزان شده را در یك مایع مثلا آب فرو می‌بریم. شنت به سه قطعه تقسیم می‌شود که یك قسمت آن درداخل‌آب و دوقسمت دیگر آن خارج‌ازآب‌واقع است. آیا می‌توان برحسب‌معلومات مسئله زاویه‌ای را که‌قطعهٔ‌مزبور در نقطهٔ ورودش به آب‌می‌سازد تعیین‌کرد. این مسئله زیاد مشکل نیست اما از زمان طرح‌آن تاکنون که حدوده‌سال است کسی‌رابه خودمشغول نداشته‌است.

بخش دهم ـ مسائل آنالیز

شاخهٔ مهم آنالیز موضوع اصلی تحقیقات ریاضیدانها در دوقرن اخیر می‌باشد. بسط منطقی حساب دیفرانسیل وهمچنین مادهٔ اولیهٔ قسمت مهمی از ریاضیات عملی از آن جمله است.در حقیقت می‌توان گفت که بیش از نصف علوم ریاضی متکی بر آنالیز هستند. در این‌بخش مسائلی را مطرح می‌کنیم که وجه مشترك آنها در این است که همه به آنالیز ریاضی کشانده می‌شوند. اولین آنها مسئله‌ای است جبری ونسبتاً ساده:

می‌دانیم که تصاعد هندسی عبارتی است به‌شکل‌زیر :

$$a+ar+ar^{2}+\cdots+ar^{n}$$

اگر قدرنسبت r از لحاظ قدر مطلق کوچکتر از یك باشد در این صورت وقتی $n \to \infty$ مجموع رشته دارای حدی است. مثلا در ازاء $a=\frac{1}{2}$ و $r=\frac{1}{2}$ داریم:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n}}+\cdots$$

که حد مجموع آن یك می‌باشد.

در این رشته جمله‌ای وجود دارد (مثلا جملهٔ اول) که به‌تنهائی برابر است با مجموع بقیهٔ جمله‌ها . حال این سؤال پیش می‌آید: آیا تصاعد هندسی دیگری وجود دارد که این خاصیت را دارا باشد؟ رشتهٔ $\frac{1}{2^{n}}$ این خصوصیت را دارد که‌هر جملهٔ آن دارای خاصیت مزبور می‌باشد . بدون اینکه مطمئن باشند تصور می‌کنند که این خاصیت منحصر به رشتهٔ‌مزبوراست.

***

پل اردس دربارهٔ نامساویها مسائل زیادی طرح(وحل) کرده است. سه مسئلهٔ حل‌نشدهٔ از آنها بدون هیچ توضیحاتی‌در زیر نقل می‌شود:

۱) به‌فرض آنکه m و n دوعدد صحیح باشند که در نامساویهای:

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n}>\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \left(1-\frac{1}{m-1}\right)^{n}<\frac{1}{2}$$

صدق کنند ثابت کنید که :

$$(m-1)^{n}>(m-2)^{n}+(m-3)^{n}+\cdots+1^{n}$$

$$(m+1)^{n}<m^{n}+(m-1)^{n}+\cdots+1^{n}$$

ثابت کنید که نامساوی :

$$m^n > (m-1)^n + (m-2)^n + \dots + 1^n$$

در بینهایت حالت صحیح و در بینهایت حالت غلط است.

۲) فرض می‌کنیم که:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n$$

رشته‌ای ازعددهای صحیح مثبت باشند. دراین‌صورت داریم:

$$\sup[(a_i \text{ و } a_j)] > \frac{38n}{147} - c$$

که c مستقل از n بوده و مقصود از $(a_i$ و $a_j)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a_i و a_j می‌باشد.

الف ـ این موضوع را ثابت کنید :

ب ـ مقدار c را تعیین کنید.

ج ـ ثابت‌کنید که افزایش اپتیمال است.

۳) فرض می‌کنیم‌که :

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$$

$$b_1 < b_2 < \dots < b_l \leq n$$

دورشته عددهای صحیح باشند بقسمی که حاصل ضربهای $a_i b_j$ مختلف باشند. ثابت کنید که :

$$kl < c\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$$

خود اردس عقیده داشته است که‌حکم مزبور برای بعضی‌مقادیر کلی c درست است و افزایش اپتیمال می‌باشد.

***

به‌تعداد نامحدود می‌توان معادلات جبری صحیح و منطق را تشکیل داد که در آنها ضرایب صحیح بوده و ضریب‌جملهٔ بزرگترین درجه یك باشد و همهٔ ریشه‌های آنها مگر یك در فاصلهٔ معینی واقع‌باشند. اگر شماخواسته باشید اینچنین‌معادله‌ای تشکیل دهید سعی می‌کنید معادله‌ای انتخاب کنید که ضرایب آن کوچك باشند. آیا برای این کار وسیله‌ای در اختیارهست؟ به عبارت ساده‌تر ، از بین معادلات درجهٔ n که شرایط فوق‌الذکر را دارا باشند کدام است که ضرایب آن‌کوچکترین مقادیررا دارند؟

***

اگر درزمینه‌ای که دربارهٔ آن کارهای زیادی انجام گرفته است کاری ابتکاری انجام دهیم بسیار جالب خواهدبود به شما نصیحت می‌کنیم که اگر دربارهٔ حساب دیفرانسیل‌ونوع استدلال مربوط به آن اطلاعی ندارید دومسئلهٔ زیررا کنار بگذارید .

تابع رابطه‌ای‌است بین دومتغیر. وقتی که یك دایره یا یك سهمی رسم می‌کنیم،

منحنی نمایش هندسی یك تابع را مشخص کرده‌ایم . همچنین معادلهٔ $y = x^2$ رابطه‌ای است بین x و y، بامجذور کردن مقادیر x مقادیر نظیر آنها از y بدست می‌آید . تابع معکوس از لحاظ جبری یعنی اینکه بتوانیم از روی مقادیر y مقادیر x را با همان کیفیت تعیین کنیم که می‌شود $x = y^2$. باحل این معادله نسبت به y خواهیم داشت $y = \pm\sqrt{x}$. اگر از مقادیر منفی صرف نظر کنیم تابع معکوس $y = x^2$ عبارت خواهد شد از $y = \sqrt{x}$.

در نظریهٔ توابع تابع معکوس‌یك تابع (f) را به‌صورت f^{-1} نشان می‌دهند. تساوی $f^{-1}(f(x)) = x$ تعریف یك‌تابع معکوس می‌باشد. مثلا درمثال قبلی داریم:

$$f(x) = x^2 \text{ و } f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$$

تابع معکوس چیزی است که عمل تابع را کان لم‌یکن‌می‌سازد و همچنین است تابع معکوس یك تابع معکوس:

$$f(f^{-1}(x)) = x \; ; \; (\sqrt{x})^2 = x$$

$x+2$ و $x-2$ یا $\log x$ و e^x نیز توابع معکوس‌هم‌می‌باشند

فعلا به کلاسهای بالاتر می‌پردازیم و از بسط سریها گفتگو می‌کنیم. بسط زیررا در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

بسط:

$$f^{-1}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

را چنان تعیین کنیم‌که $f(f^{-1}(x)) = x$ باشد. موضوع عبارت از این است که بسط یك تابع معکوس را ، اگروجود داشته باشد ، به صورت سری تعیین کنیم . مسئله عبارتست از پیداکردن مقادیر b برای آنکه داشته باشیم :

$$x = a_0 + a_1(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) + a_2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) + \dots$$

بدون آنکه عمومیت را کنار گذاشته باشیم می‌توانیم‌فرض‌کنیم:

$$a_0 = b_0 = 0 \quad \text{و} \quad a_1 = b_1 = 1$$

و از روی آن مقادیر b_n را برحسب مقادیر a_n یکی به یکی حساب‌کرد. اما محاسبات مربوط بسیار پیچیده است وتاکنون قاعدهٔ معینی شناخته نشده است. یعنی فرمولهایی بدست نیامده است(تا ۱۹۵۶) که‌مقادیر b_n را برحسب مقادیر a_n بدست‌بدهد

دنباله در پائین صفحهٔ ۶۴۰

***

درسی از حساب

نامحدود بودن اعداد اول

تهیه از محمود کاشانی با استفاده از کتاب : Element of Number Theory

اعداد اول نامحدوداند . این قضیه که اثبات سادهٔ آن منسوب به اقلیدس می‌باشد درکتاب درسی مندرج است . قضیهٔ مزبور اثبات دیگری نیز دارد که گرچه مشکل ونامأنوس است با این حال مطالعهٔ آن راقم این سطور را بی‌اختیار به حیرت وتحسین مبتکر آن واداشت که ازچه پیچ و خمهائی گذر کرده و به چه مقصدی منتهی شده است . همین امر انگیزهٔ نگارش مقاله‌ای شدکه ازنظر می‌گذرد.

درك اثبات قضیه مستلزم دانستنیهائی است که مقدمتاً از ذکر آنها ناگزیریم و به‌ترتیب عبارتند از :

۱)ـ e علامت عددی است اصم وتقریباً مساوی :

۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸

که درریاضیات عالی نقش مهم وفراوانی دارد. لگاریتم درپایهٔ این عدد را با علامت L ویا ln نشان می‌دهند .

۲)ـ ثابت می‌کنند به ازاء عدد دلخواه k می‌توان عدد صحیح N را بقسمی پیداکرد که داشته باشیم :

$$(3\ln N)^k < N$$

اثبات این‌موضوع بااستفاده ازآنالیز که دربرنامه‌های ریاضیات عالی ما قرار داردکار ساده‌ای بوده و در ردیف دروس عادی و معمولی است .

۳)ـ اگر p عددی اول و p^α بزرگترین عددی باشد که در شرط $p^\alpha < N$ صدق کند واضح است که همهٔ اعداد :

$$p^1 \text{ و } p^2 \text{ و } \dots \text{ و } p^\alpha$$

از N کوچکتر بوده (فقط درحالت خاص p^α می‌تواند مساوی N باشد) وتعداد این‌اعداد همان α است و خواهیم داشت:

$$\alpha < \frac{\ln N}{\ln p}$$

که‌اگر به‌جای p عدد ۲ راقراردهیم‌چون $p \geq 2$ است بازخواهیم‌داشت

$$\alpha < \frac{\ln N}{\ln 2}$$

وازآنجا :

$$\alpha < \frac{\ln N}{\ln 2} + 1$$

۴)ـ درصورتی‌که خواسته باشیم تعداد اعدادکوچکتراز N را پیداکنیم که درتجزیهٔ آنها دوعامل اول به نام p_1 و p_2 وجود داشته باشد این تعداد کوچکتر از :

$$\left(\frac{\ln N}{\ln 2} + 1\right)^2$$

خواهد بود زیرا اگر شکل عمومی این اعداد را با a نشان دهیم خواهیم داشت :

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} < N$$

که a شامل همهٔ اعداد جدول زیر می‌شود :

$$1 \times p_1^1 \text{ و } 1 \times p_1^2 \text{ و } \dots \text{ و } 1 \times p_1^{\alpha_1}$$

$$p_2 \times p_1^1 \text{ و } p_2 \times p_1^2 \text{ و } \dots \text{ و } p_2 \times p_1^{\alpha_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_2^{\alpha_2} \times p_1^1 \text{ و } p_2^{\alpha_2} \times p_1^2 \text{ و } \dots \text{ و } p_2^{\alpha_2} \times p_1^{\alpha_1}$$

چنانکه ملاحظه می‌شود این جدول شامل α_2 سطر و α_1 ستون بوده وتعداد اعداد آن $\alpha_1\alpha_2$ می‌شود که به‌موجب (۳) α_1 و α_2 هردو از $\frac{\ln N}{\ln 2} + 1$

پس :

$$\alpha_1\alpha_2<(\frac{\ln N}{\ln 2}+1)^2$$

۵) ـ به همان ترتیبی که درشمارهٔ (۱۴) دیده شد ثابت می‌شودکه اگر اعداد اول p_1 و p_2 و . . . وp_k را در نظر بگیریم تعداد اعدادی‌که در تجزیهٔ آنها این اعداد وجود دارد یعنی اعداد به صورت :

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

کوچکتر از :

$$(\frac{\ln N}{\ln 2}+1)^k$$

می‌باشد .

واینك اثبات قضیه :

قضیه ـ ثابت‌کنید تعداد اعداد اول نامحدود است .

اثبات ـ اعداد اول p_1 و p_2 و ... و p_k را درنظر گرفته ثابت‌می‌کنیم جزاین‌اعداد اول بازهم اعداد اول دیگری وجود دارد. برای این‌کار عدد بزرگتر از ۲ و به نام N را بقسمی اختیار می‌کنیم‌که ضمناً داشته باشیم :

$$(3\ln N)^k<N$$

حال همهٔ اعدادی راکه از Nکوچکتر بوده ودرتجزیهٔ آنها یك یا چند یا همهٔ اعداد اول p_1 و p_2 و ... p_k وجود دارد در نظر می‌گیریم . اگر این تعداد را m بنامیم خواهیم داشت:

$$m<(\frac{\ln N}{\ln 2}+1)^k<(3\ln N)^k<N$$

یعنی در بین اعداد کوچکتر از N عددی یافت می‌شودکه در تجزیهٔ آن هیچیك از اعداد اول p_1 و p_2 و . . . وp_k نباشد پس‌درتجزیهٔ آن عددیاآن‌اعداد عوامل اول دیگری‌غیراز p_1 تا p_k خواهد بود و حکم ثابت است .

مسائل حل نشده

بقیه ازصفحهٔ ۶۳۸

سری نامحدود :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

همگرا است‌یاواگرا (معلوم‌شده است که‌همگرامی‌باشد).

سری زیر چگونه است؟

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

بطور کلی عبارت $\xi(n)$ را برای سری زیر بکار می‌برند:

$$\xi(n)=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots$$

به ازاء همهٔ مقادیر n که عبارت طرف راست یك سری‌همگرا باشد تابع یك معنی را دارد. اینهم معلوم است که مثلا به‌ازاء $n=1$ داریم :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

که یك‌سری واگرا است.

دربارهٔ تابع زتا و گسترش آن درصفحهٔ اعداد مختلط مسائل حل‌نشدهٔ زیادی‌وجود داردکه‌از بین آنها **فرض‌ریمن** مشهور می‌باشد اما طرح آن در اینجا برای ما دشوار است . اما این یکی‌که مطرح‌می‌شود برای طرح ساده می‌باشد. به‌نوعی خارق‌العاده معلوم کرده‌اندکه:

$$\xi(2),\ \xi(4),\ \ldots,\ \xi(2n)$$

همه‌مضربی منطبق از توان‌زوجی از π می‌باشند:

$$\xi(2)=\frac{\pi^2}{6}\quad \text{و}\quad \xi(4)=\frac{\pi^4}{90}\quad \text{و}\ \ldots$$

فرمول کلی عبارتست از :

$$\xi(2n)=\frac{2^{2n-1}|B_{2n}|}{(2n)!}\pi^{2n}$$

که در آن B_{2n} **عددهای برنولی** بوده و در هرحال قابل محاسبه می‌باشند. مسئله عبارتست از تعیین فرمولی کلی برای زتاهای فرد: $\xi(2n+1)$. بعضیها نوشته‌اند که تاکنون‌چنین فرمولی شناخته‌نشده است. کارهای تازه‌ای هم انجام گرفته‌است که این ادعا را تأیید می‌کند اما اثباتی که انجام گرفته نارسا بوده است.

پایان‌کتاب

تعمیم قضیه‌های سوا و منلائوس در بارهٔ اشکال فضایی

تنظیم از : داوید ریحان
ششم ریاضی دبیرستان اتحاد

ابتدا قضیه‌های سوا و منلائوس یادآوری می‌شود :

قضیهٔ منلائوس ـ اگر موربی‌ضلعهای BC و CA و AB ازمثلث ABC را به ترتیب در α و β و γ قطع کند خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = ۱ \qquad (۱)$$

عکس قضیهٔ منلائوس ـ اگر α و β و γ بترتیب برضلعهای BC و CA و AB ازمثلث ABC واقع باشند و رابطهٔ (۱) برقرار باشد در این‌صورت سه‌نقطهٔ α و β و γ بر یك خط مستقیم واقع‌اند.

قضیهٔ سوا ـ اگرازنقطهٔ O واقع درصفحهٔ مثلث ABC به رأسهای A و B و C وصل کنیم وخطوط حاصل ، ضلعهای مقابل را به ترتیب در α و β و γ قطع کنند ، خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -۱ \qquad (۲)$$

عکس قضیهٔ سوا ـ اگر α و β و γ به ترتیب بر-ضلعهای BC و CA و AB ازمثلث ABC واقع بوده‌ورابطهٔ (۲) برقرار باشد درآن صورت سه خط $A\alpha$ و $B\beta$ و $C\gamma$ در یك نقطه متقارب هستند .

نتیجهٔ ۱ـ اگر نقطهٔ O را به سه نقطهٔ A و B و C ازیك خط مستقیم وصل‌کنیم داریم :

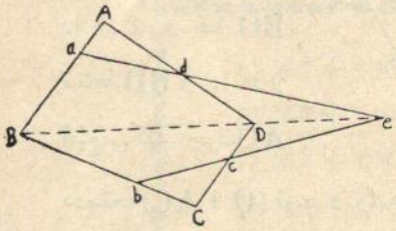
$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA \sin COA}{OB \sin COB}$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\text{مساحت } AOC}{\text{مساحت } BOC} = \frac{OA \cdot OC \cdot \sin COA}{OB \cdot OC \cdot \sin COB} = \frac{OA \sin COA}{OB \sin COB}$$

تعمیم

قضیهٔ منلائوس درچهارضلعی چپ ـ هرگاه صفحهٔ P ضلعهای AB ، BC ، CD و DA از چهارضلعی چپ ABCD را به ترتیب‌درنقاط a و b و c و d قطع کندرابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{\overline{aA}}{\overline{aB}} \cdot \frac{\overline{bB}}{\overline{bC}} \cdot \frac{\overline{cC}}{\overline{cD}} \cdot \frac{\overline{dD}}{\overline{dA}} = ۱ \qquad (۳)$$



اثبات ـ اگر e نقطهٔ تلاقی صفحهٔ P با قطر BD باشد ، سه نقطهٔ a و d وe بریك خط راست واقع بوده نسبت به مورب ade درمثلث ABD خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{aA}}{\overline{aB}} \cdot \frac{\overline{eB}}{\overline{eD}} \cdot \frac{\overline{dD}}{\overline{dA}} = ۱$$

همچنین نسبت به مورب bce در مورد مثلث BCD داریم :

$$\frac{\overline{bB}}{\overline{bC}} \cdot \frac{\overline{cC}}{\overline{cD}} \cdot \frac{\overline{eD}}{\overline{eB}} = ۱$$

از ضرب طرفین دو رابطه دریکدیگر رابطهٔ (۳) نتیجه خواهد شد .

قضیهٔ عکس ـ اگر چهارنقطهٔ a و b و c و d بـه ترتیب برضلعهای AB و BC و CD و DA از چهار ضلعی چپ ABCD واقع بوده و رابطهٔ (۳) برقرار باشد ، چهار نقطهٔ مزبور دریك صفحه واقع‌اند .

اثبات ـ صفحهٔ P را درنظر می‌گیریم که برسه نقطهٔ a و b و c بگذرد . این صفحه ضلع AD را در d′ قطع می‌کند و داریم :

$$\frac{\overline{aA}}{\overline{aB}} \cdot \frac{\overline{bB}}{\overline{bC}} \cdot \frac{\overline{cC}}{\overline{cD}} \cdot \frac{\overline{d'D}}{\overline{d'A}} = ۱$$

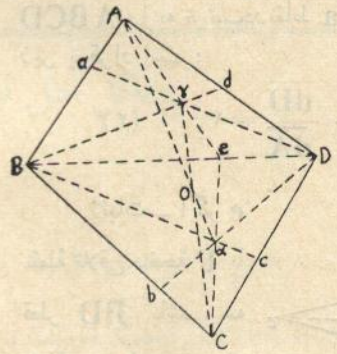
ازمقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ مفروض (۳) نتیجه‌می‌شود:

$$\frac{\overline{d'D}}{\overline{d'A}} = \frac{\overline{dD}}{\overline{dA}} \Longrightarrow d' \equiv d$$

یعنی صفحهٔ abc شامل d نیز می‌باشد.

قضیهٔ سوا در چهارضلعی چپ ـ برنقطهٔ O و هر یك ازضلعهای چهارضلعی چپ ABCD صفحاتی می‌گذرانیم که ضلعهای مقابل ، یعنی AB ، BC ، CA و AD را به ترتیب در a و b و c و d قطع می‌کنند . رابطهٔ زیر برقرار می‌باشد :

$$\frac{\overline{aA}}{\overline{aB}} \cdot \frac{\overline{bB}}{\overline{bC}} \cdot \frac{\overline{cC}}{\overline{cD}} \cdot \frac{\overline{dD}}{\overline{dA}} = ۱ \qquad (۴)$$



اثبات ـ صفحهٔ (O و AC) خط BD را در e قطع می‌کند و خط AO صفحهٔ BCD را در α و خط BO صفحهٔ ABD را در γ قطع‌می‌کند. چون AO درصفحهٔ (O و AC) است و C هم درهمین‌صفحه است‌بنابراین α بر BC واقع است . به همین ترتیب نتیجه خواهد شدکه α بر bD و Ce ونیز γ برخطوط Bd و Da و Ac واقع بوده و در دومثلث ABD و BCD بنا به قضیهٔ سوا به‌ترتیب‌خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{aA}}{\overline{aB}} \cdot \frac{\overline{eB}}{\overline{eD}} \cdot \frac{\overline{dD}}{\overline{dA}} = -۱$$

$$\frac{\overline{bB}}{\overline{bC}} \cdot \frac{\overline{cC}}{\overline{cD}} \cdot \frac{\overline{eD}}{\overline{eB}} = -۱$$

از ضرب طرفین دو رابطه در یکدیگر ، رابطهٔ مطلوب نتیجه خواهد شد.

عکس قضیه ـ بیان عکس قضیه و اثبات آن به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود .

قضیهٔ منلائوس در کنج سه وجهی ـ اگر یك صفحهٔ P وجوه BSC و CSA و ASB از کنج سه وجهی SABC را به ترتیب درخطوط Sα و Sβ و Sγ قطع کند . رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{\sin\alpha SB}{\sin\alpha SC} \cdot \frac{\sin\beta SC}{\sin\beta SA} \cdot \frac{\sin\gamma SA}{\sin\gamma SB} = ۱ \qquad (۵)$$

اثبات ـ صفحه‌ای‌درنظر می‌گیریم که یالهای کنج را در A و B و C وفصل مشترکهای صفحهٔ P با وجوه را به‌ترتیب در α و β و γ قطع کند سه‌نقطهٔ α و β و γ بریك خط مستقیم واقع بوده و درمثلث ABC داریم :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = ۱ \qquad \text{(الف)}$$

به موجب نتیجهٔ ۱ داریم :

$$\text{(ب)} \quad \begin{cases} \dfrac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \dfrac{SB}{SC} \cdot \dfrac{\sin\alpha SB}{\sin\alpha SC} \\[2ex] \dfrac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \dfrac{SC}{SA} \cdot \dfrac{\sin\beta SC}{\sin\beta SA} \\[2ex] \dfrac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \dfrac{SA}{SB} \cdot \dfrac{\sin\gamma SA}{\sin\gamma SB} \end{cases}$$

طرفین روابط (ب) را درهم ضرب می‌کنیم ، با توجه به رابطهٔ (الف) رابطهٔ مطلوب نتیجه می‌شود .

عکس قضیه ـ به سادگی بیان شده و اثبات می‌شود .

قضیهٔ سوا در کنج سه وجهی ـ برخط SO و هر یك ازیالهای SA و SB و SC از کنج سه وجهی SABC صفحاتی می‌گذرانیم که وجوه مقابل را به ترتیب در Sα و Sβ و Sγ قطع می‌کنند . رابطهٔ زیر برقرار می‌باشد :

$$\frac{\sin\alpha SB}{\sin\alpha SC} \cdot \frac{\sin\beta SC}{\sin\beta SA} \cdot \frac{\sin\gamma SA}{\sin\gamma SB} = -۱ \qquad (۶)$$

اثبات ـ این قضیه وعکس آن مانند قضیهٔقبل وبااستفاده از روابط (ب) انجام می‌گیرد .

نتیجهٔ ۲ـ اگر SB و SC و Sα سه خط ازیك صفحه بوده و SA خطی واقع درخارج آن صفحه باشد داریم :

$$\frac{\sin\alpha SB}{\sin\alpha SC} = \frac{\sin\alpha . SAB}{\sin\alpha . SAC} \cdot \frac{\sin ASB}{\sin ASC}$$

تمرینات

۱ـ با استفاده ازقضیهٔ سوا ثابت کنید که در هر مثلث : نیمسازهای زاویه‌ها ، میانه‌ها ، ارتفاعات ، خطوطی که رأسها را به نقاط تماس دایرهٔ محاطی با ضلعهای مقابل وصل می‌کنند دریك نقطه متقاربند .

۲ـ ازنقطهٔ O واقع در صفحهٔ مثلث ABC به رأسهای

مثلث وصل می‌کنیم که ضلعهای مقابل را در A' و B' و C' قطع می‌کنند. BC و $B'C'$ یکدیگر را در D، CA و $C'A'$ یکدیگر را در E، AB و $A'B'$ یکدیگر را در F قطع می‌کنند. ثابت کنید که D و E و F بر یك استقامت هستند.

۳ـ مثلث ABC و نقطهٔ O واقع در صفحهٔ آن مفروض است. قرینهٔ هریك از خطوط AO و BO و CO را به ترتیب نسبت به نیمساز زاویهٔ نظیر رسم می‌کنیم. ثابت کنید که سه خط حاصل در یك نقطه متقارب هستند.

۴ـ درهر رأس مثلث مماسی بر دایرهٔ محیطی رسم می‌کنیم ثابت کنید نقاطی که از تلاقی این مماسها با ضلعهای مقابل بدست می‌آیند بر یك خط مستقیم واقع‌اند.

۵ـ موربی ضلعهای BC و CA و AB ازمثلثی را به ترتیب در D و E و F قطع می‌کند. اگر D' و E' و F' مزدوجهای توافقی D و E و F نسبت به دو رأس نظیر ازمثلث باشد. ثابت کنید که:

الف ـ خطوط AD' و BE' و CF' متقاربند:

ب ـ سه نقطهٔ D' و E' و F' بر یك استقامت واقع‌اند.

* * *

۶ـ ثابت کنید در هر کنج سه وجهی: صفحات نیمساز فرجه‌ها، صفحات ماربر یالها و بر نیمسازهای وجوه مقابل، صفحاتی که برهریال گذشته و بر وجوه مقابل عمود هستند در یك خط مشترك می‌باشند.

آیا از رابطه‌های زیر تعجب نمی کنید؟

طرح از: **جعفر بنائی**

کرسی ریاضی دانشکدهٔ افسری

$$(۱\times۲+۲\times۴)^۲=(۱^۲+۲^۲)(۲^۲+۴^۲)$$
$$(۱\times۲+۲\times۴+۳\times۶)^۲=(۱^۲+۲^۲+۳^۲)(۲^۲+۴^۲+۶^۲)$$
$$(۱\times۲+۲\times۴+۳\times۶+۴\times۸)^۲=(۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲)(۲^۲+۴^۲+۶^۲+۸^۲)$$
$$(۱\times۲+۲\times۴+۳\times۶+۴\times۸+۵\times۱۰)^۲$$
$$=(۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+۵^۲)(۲^۲+۴^۲+۶^۲+۸^۲+۱۰^۲)$$

$$(۱۲\times۲۱+۲۴\times۴۲)^۲=(۱۲^۲+۲۴^۲)(۲۱^۲+۴۲^۲)$$
$$(۱۰۲\times۲۰۱+۲۰۴\times۴۰۲)^۲=(۱۰۲^۲+۲۰۴^۲)(۲۰۱^۲+۴۰۲^۲)$$
$$(۱۰۰۲\times۲۰۰۱+۲۰۰۴\times۴۰۰۲)^۲=(۱۰۰۲^۲+۲۰۰۴^۲)(۲۰۰۱^۲+۴۰۰۲^۲)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[(۴۲+۲۴)(۴۲-۲۴)+(۶۳+۳۶)(۶۳-۳۶)]^۲$$
$$=[(۴۲+۲۴)^۲+(۶۳+۳۶)^۲][(۴۲-۲۴)^۲+(۶۳-۳۶)^۲]$$
$$[(۴۰۲+۲۰۴)(۴۰۲-۲۰۴)+(۶۰۳+۳۰۶)(۶۰۳-۳۰۶)]^۲$$
$$=[(۴۰۲+۲۰۴)^۲+(۶۰۳+۳۰۶)^۲][(۴۰۲-۲۰۴)^۲+(۶۰۳-۳۰۶)^۲]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

عده‌ای از خوانندگان بارها خواسته‌اند تا مطالبی دربارهٔ خواص لگاریتم ، بخصوص لگاریتم به مبنای غیر از ده ، درمجله درج شود . مقالهٔ زیرکه مدتها قبل وصل شده است به همین منظور در زیر چاپ می‌شود . یادآوری می‌شودکه درشمارهٔ مسلسل پنجم ازمجله نیز مطالبی دربارهٔ لگاریتم چاپ شده است .

قضایایی دربارهٔ لگاریتم

تنظیم از: غلامحسین بهفروز

اگر $a^x = N$ و N مثبت باشد . بنا به تعریف x را لگاریتم عدد N درمبنای a می‌گویند و چنین نمایش می‌دهند :

$$a^x = N \Longleftrightarrow \log_a N = x$$

درتمام کتابهای درسی چهارقضیهٔ زیر به نام خواص لگاریتم ذکر شده است :

$$\text{I)}\quad \log_a X \cdot Y = \log_a X + \log_a Y$$

$$\text{II)}\quad \log_a \frac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$$

$$\text{III)}\quad \log_a X^n = n \log_a X$$

$$\text{IV)}\quad \log_a \sqrt[n]{X} = \frac{1}{n} \log_a X$$

علاوه برچهار قضیهٔ مهم فوق قضایای زیر هم درمبحث لگاریتم وجوددارد که درحل مسائل مورد استفاده واقع می‌شود :

$$\text{V)}\quad \frac{\log_b N}{\log_a N} = \log_b a$$

زیرا :

$$\begin{cases} \log_b N = x \\ \log_a N = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b^x = N \\ a^y = N \end{cases} \Longrightarrow b^x = a^y$$

$$\Longrightarrow \log_b(b^x) = \log_b(a^y) \Longrightarrow x \log_b b = y \log_b a$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{y} = \log_b a \Longrightarrow \frac{\log_b N}{\log_a N} = \log_b a$$

$$\text{VI)}\quad \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

$$\begin{cases} \log_b a = x \\ \log_a b = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b^x = a \\ a^y = b \end{cases} \Longrightarrow (a^y)^x = a$$

$$\Longrightarrow a^{xy} = a \Longrightarrow xy = 1 \Longrightarrow \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

$$\text{VII)}\quad \frac{\log_a N}{\log_a M} = \log_M N$$

$$\begin{cases} \log_a N = x \\ \log_a M = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^x = N \\ a^y = M \end{cases} \Longrightarrow a = M^{\frac{1}{y}}$$

$$\Longrightarrow N = M^{\frac{x}{y}} \Longrightarrow \log_M N = \frac{x}{y}$$

$$\Longrightarrow \frac{\log_a N}{\log_a M} = \log_M N$$

VIII) $\log_a N = \log_{a^n} N^n$

$$\log_a N = x \Longrightarrow a^x = N \Longrightarrow (a^x)^n = N^n$$

$$\Longrightarrow (a^n)^x = N^n \Longrightarrow \log_{a^n} N^n = x$$

$$\Longrightarrow \log_{a^n} N^n = \log_a N$$

IX) $\log_{\frac{1}{m}} \frac{1}{n} = \log_m n$

$$\log_{\frac{1}{m}} \frac{1}{n} = -\log_{\frac{1}{m}} n = -\frac{1}{\log_{\frac{1}{n}} m}$$

$$= -\frac{1}{-\log_n m} = \frac{1}{\log_n m} = \log_m n$$

$$\Longrightarrow \log_{\frac{1}{m}} \frac{1}{n} = \log_m n$$

X) $\frac{\log_a N}{\log_{\lambda a} N} = 1 + \log_a \lambda$

$$\begin{cases} \log_a N = x \\ \log_{\lambda a} N = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^x = N \\ (\lambda a)^y = N \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a^x = (\lambda a)^y \Longrightarrow \log_a (a^x) = \log_a (\lambda a)^y$$

$$\Longrightarrow x \log_a a = y \log_a \lambda a \Longrightarrow$$

$$x = y(\log_a a + \log_a \lambda) \Longrightarrow \frac{x}{y} = 1 + \log_a \lambda \Longrightarrow$$

$$\frac{\log_a N}{\log_{\lambda a} N} = 1 + \log_a \lambda$$

چند مثال :

مثال ۱) اگر $\log_{12} 2 = a$ باشد مطلوبست محاسبهٔ $\log_6 16$ برحسب a.

$$\log_6 16 = \frac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \frac{4 \log_{12} 2}{\log_{12}(\frac{12}{2})} = \frac{4a}{1-a}$$

مثال ۲) اگر $\log_6 2 = \alpha$ و $\log_6 5 = \beta$ باشد مقدار $\log_3 5$ را برحسب α و β حساب کنید.

$$\log_3 5 = \frac{\log_6 5}{\log_6 3} = \frac{\beta}{\log_6(\frac{6}{2})} = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

مثال ۳) اگر $\log_{14} 7 = a$ و $\log_{14} 5 = b$ باشد $\log_{35} 28$ را برحسب b و a حساب کنید.

$$\log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14} \frac{28 \times 7}{7}}{\log_{14} 5 \times 7} = \frac{\log_{14} \frac{(14)^2}{7}}{\log_{14} 5 + \log_{14} 7}$$

$$= \frac{2-a}{b+a}$$

مثال ۴) مقادیر :

$$A = (7)^{\log_7 3}$$

و

$$B = (343)^{(1 - 2\log_{49} 13)}$$

را خلاصه کنید .

حل :

$$A = (7)^{\log_7 3} \Longrightarrow \log_7 A = \log_7 3 \Longrightarrow A = 3$$

$$B = (343)^{(1 - 2\log_{49} 13)} = (7^3)^{(1 - \log_7 13^2)}$$

$$= 7^{3(1 - \log_7 13)}$$

$$\log_7 B = 3(1 - \log_7 13)\log_7 7 = 3(1 + \log_7 \frac{1}{13})$$

$$= 3\frac{\log_7 7}{\log_{\frac{7}{13}} 7} = \frac{3}{\log_{\frac{7}{13}} 7}$$

$$\log_7 B^{\frac{1}{3}} \cdot \log_{\frac{7}{13}} 7 = 1 \Longrightarrow B^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{13}$$

$$\Longrightarrow B = (\frac{7}{13})^3$$

چند تمرین

۱ـ ثابت کنید که تساوی زیر برقرار است ،

$$\log 2 = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdots \log_{10} 9$$

و نتیجه بگیرید که :

$$\log_n 2 = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdots \log_n (n-1)$$

۲ـ به فرض آنکه :

$$\log_a x = p \quad \text{و} \quad \log_b x = q \quad \text{و} \quad \log_{abc} x = r$$

باشد مقدار $\log_c x = ?$ چقدر می‌شود ؟

جواب: $\log_c x = \dfrac{pqr}{pq-(p+q)r}$

۳ـ اگر $\log_{ab} d = x$ باشد مقدار :

$$A = \log_{ab\sqrt{b}} \sqrt[5]{a}$$

را حساب کنید (جواب $A = \dfrac{5x-3}{6}$)

۴ـ تساوی زیررا ثابت کنید :

$$\text{I)} \quad -\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\cdots\sqrt[3]{3}}}}}_{n \text{ دفعه}} = n$$

$$\text{II)} \quad \log_{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n} N = \frac{1}{\dfrac{1}{\log_{a_1} N} + \dfrac{1}{\log_{a_2} N} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{a_n} N}}$$

یا

$$\log_{\prod_{i=1}^{n} a_i} N = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\log_{a_i} N}}$$

$$\text{III)} \quad \log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a \ : \ a \neq 1$$

و $c > 0$ و $b > 0$ و $a > 0$ و $c \neq 1$ و $b \neq 1$

$$\text{VI)} \quad \frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \cdots + \frac{1}{\log_n N} = \frac{1}{\log_{n!} N}$$

$$n! = 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$$

۵) ثابت کنید به شرطی که $a^2 + b^2 = c^2$ باشد تساوی زیر برقرار است.

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$$

مثال ۵) ثابت کنید تساوی زیر برقراراست.

$$\frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_{a^2} N} + \frac{1}{\log_{a^3} N} + \frac{1}{\log_{a^4} N} + \frac{1}{\log_{a^5} N} = 15 \log_N a$$

$$\frac{1}{\log_a N} = \log_N a \quad \text{و} \quad \frac{1}{\log_{a^2} N} = \frac{2}{2\log_{a^2} N} = \frac{2}{\log_{a^2} N^2} = \frac{2}{\log_a N} = 2 \log_N a$$

$$\frac{1}{\log_{a^3} N} = 3 \log_N a \quad \text{و} \quad \frac{1}{\log_{a^4} N} = 4 \log_N a$$

و

$$\frac{1}{\log_{a^5} N} = 5 \log_N a$$

طرف اول $= (1+2+3+4+5) \log_N a = 15 \log_N a$

مثال ۶) ثابت کنید تساوی زیر برقرار است:

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}$$

$$\frac{1}{\log_{abc} N} = \log_N abc = \log_N a + \log_N b + \log_N c = \frac{1}{\log_a N} = \frac{1}{\log_b N} + \frac{1}{\log_c N} =$$

$$= \frac{\log_a N \log_b N + \log_b N \log_c N + \log_c N \log_a N}{\log_a N \log_b N \log_c N}$$

و رابطهٔ مطلوب نتیجه می‌شود.

راهنمای ریاضیات متوسطه

تشکیل معادله‌ای که هر ریشه‌اش تابع معینی از ریشهٔ معادلهٔ مفروض باشد

حسین خبازیان

دبیرستان نمونه اصفهان

معادلهٔ زیر مفروض است .

$$(1)\quad f(x)=0$$

فرض می‌کنیم x ریشهٔ این معادله باشد . می‌خواهیم معادله‌ای تشکیل دهیم که اگر X ریشهٔ آن باشد داشته باشیم :

$$(2)\quad X=g(x)$$

برای این کار ، از رابطهٔ (۲) ، x را برحسب X بدست می‌آوریم .

$$(3)\quad x=h(X)$$

ودرمعادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم :

$$(4)\quad f[h(X)]=0$$

که معادلهٔ مطلوب می‌باشد.

مثال ۱ـ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر مفروض است .

$$x^2+x-3=0$$

اگر x' و x'' ریشه های این معادله باشد معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که بین X' و X'' ریشه‌های آن x' و x'' روابط زیر برقرار باشد .

$$\begin{cases} X'=2x'-1 \\ X''=2x''-1 \end{cases}$$

ریشهٔ معادلهٔ مفروض را x و از معادلهٔ مطلوب را X فرض می‌کنیم . باید داشته باشیم .

$$X=2x-1$$

از این رابطه خواهیم داشت :

$$x=\frac{X+1}{2}$$

معادلهٔ مطلوب عبارت می‌شود از :

$$\left(\frac{X+1}{2}\right)^2+\left(\frac{X+1}{2}\right)-3=0$$

$$X^2+4X-9=0$$

مثال ۲ـ معادله‌ای تشکیل دهید که بین X ریشهٔ آن و x ریشهٔ معادلهٔ مفروض:

$$x^2+px+q=0$$

رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$X=\frac{ax+b}{cx+d}$$

ازاین رابطه خواهیم داشت :

$$x=\frac{b-dX}{cX-a}$$

این مقداررا درمعادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم :

$$\left(\frac{b-dX}{cX-a}\right)^2+p\left(\frac{b-dX}{cX-a}\right)+q=0$$

بعداز ساده‌کردن معادلهٔ مطلوب حاصل می‌شود .

مثال ۳ـ معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه هایش عبارت باشد از مقادیر :

$$\cos^2\frac{\pi}{7} \quad و \quad \cos^2\frac{2\pi}{7} \quad و \quad \cos^2\frac{3\pi}{7}$$

ابتدا معادله‌ای تشکیل می‌دهیم با ریشه‌های :

$$\cos\frac{2\pi}{7} \quad و \quad \cos\frac{4\pi}{7} \quad و \quad \cos\frac{6\pi}{7}$$

برای این‌کار چنین عمل می‌کنیم :

$$7x = 2k\pi \text{ و } x = 0 \text{ و } \frac{2\pi}{7} \text{ و } \frac{4\pi}{7} \text{ و } \ldots$$

$$4x = 2k\pi - 3x \Longrightarrow \cos 4x = \cos 3x$$

$$8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$8\cos^4 x - 4\cos^3 x - 8\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

با حذف ریشهٔ $\cos 0 = 1$ وبا فرض $X = \cos x$ خواهیم داشت:

$$8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0 \quad (1)$$

با توجه به رابطهٔ :

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$$

و با فرض :

$$X' = \cos\frac{2\pi}{7} \text{ و } X'' = \cos\frac{4\pi}{7} \text{ و } X''' = \cos\frac{6\pi}{7}$$

$$y' = \cos^2\frac{\pi}{7} \text{ و } y'' = \cos^2\frac{2\pi}{7} \text{ و } y''' = \cos^2\frac{3\pi}{7}$$

داریم :

$$2y = 1 + X \Longrightarrow X = 2y - 1$$

درمعادلهٔ (۱) منظورکرده حاصل را ساده می‌کنیم .

$$8(2y-1)^3 + 4(2y-1)^2 - 4(2y-1) - 1 = 0$$

$$64y^3 - 80y^2 + 24y - 1 = 0$$

توجه ـ درمورد استفاده از روش بالا بـرای تشکیل معادلات جبری که ریشه‌های آنها مقادیرمثلثاتی کمانهای مختلف باشد مثالهای متعددی ضمن مقالهٔ «معادلات جبری با ریشه های مثلثاتی» در یکان شمارهٔ ۴۵ مندرج می‌باشد. به مثال زیر نیز توجه فرمائید ـ یکان

* * *

راه سادهٔ حل مسئلهٔ ۱۱ ازمسائل جبر ومثلثات امتحان ورودی ۱۳۴۶

دانشکدهٔ علوم دانشگاه مشهد

فرستنده : محمد تقی مقدادیان

اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه های معادلهٔ :

$$x^3 - 5x^2 + 7 = 0$$

باشد ، معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل دهیدکه ریشه‌های آن عبارت باشد از :

$$1 + 2x_1 \text{ و } 1 + 2x_2 \text{ و } 1 + 2x_3$$

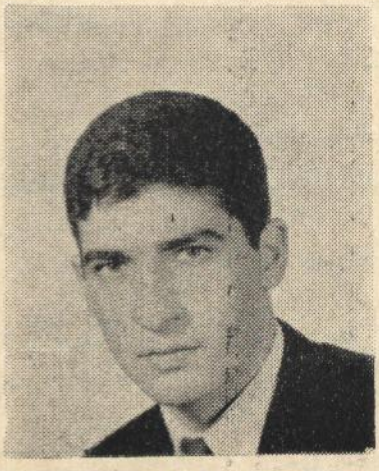
حل ـ ریشهٔ معادلهٔ مفروض را x و از معـادلهٔ مطلوب را X فرض می‌کنیم . داریم :

$$X = 1 + 2x \Longrightarrow x = \frac{X-1}{2}$$

ودرمعادلهٔ مفروض منظور می‌کنیم :

$$\left(\frac{X-1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{X-1}{2}\right)^2 + 7 = 0$$

$$X^3 - 13X^2 + 23X + 45 = 0$$



دانش‌آموزرتبهٔ اول کلاس ششم ریاضی

استان اصفهان

آقای سید علی میربد
دبیرستان حکیم سنائی
جمع نمرات کتبی : ۱۸۶٫۵۸
معدل کل : ۱۹٫۱۱

فرستندهٔ خبر : نمایندگی مجلهٔ یکان دراصفهان ـ کتابفروشی امید

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des Problèmes élémentaires de géométrie

تألیف: E. J. Honnet چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳ ـ ترجمهٔ: ع. م.

بخش چهارم

بررسی اجمالی مسائل مکانهای هندسی و مسائل ترسیمی

فصل یکم ـ مکانهای هندسی

در اوایل کتاب مکان هندسی تعریف شد و یادآوری گردید که هرمسئلهٔ مربوط به مکان هندسی در حقیقت مستلزم حل دومسئله است:

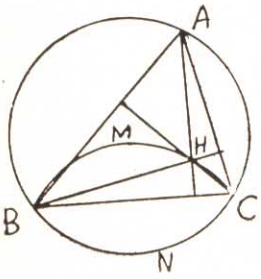
۱) ثابت شود همهٔ نقاطی که شرط مفروض را شامل هستند بریك شکل معین واقع می‌باشند.

۲) برعکس، ثابت شود هر نقطه از این شکل معین شرط مفروض را شامل می‌باشد.

اشکال عمده‌ای که درحل مسائل مربوط به‌مکانهای هندسی وجود دارد نامعلوم بودن آن چیزی است که باید ثابت شود. درهمهٔ مسائلی که تاکنون بررسی کردیم از همان ابتدا، حکم یعنی آنچه که باید ثابت شود، معلوم بود و ماقبل ازحل مسئله آن را مشخص می‌کردیم. اما درمورد مسائل مکانهای هندسی چنین نیست؛ ابتدا باید معلوم ساخت که چه‌چیز باید ثابت‌شود و آنگاه به اثبات آن، وعکس آن، مبادرت کرد.

مثال زیر را که درمقدمهٔ کتاب بیان کردیم درنظر می‌گیریم:

مثلث حاده‌الزوایای ABC در دایرهٔ O محاط بوده ضلع BC ازآن ثابت‌اما رأس A روی دایره تغییرمکان‌می‌دهد مکان هندسی نقطهٔ تلاقی ارتفاعات چیست؟



فعلا معلوم نیست که چه باید ثابت شود و مسئله نوعی معما است. اما وقتی کشف کنیم که مکان مطلوب عبارتست از قرینهٔ کمان کوچکتر BC نسبت به‌ضلع BC آنگاه می‌توانیم مسئله را به صورت زیر بیان کنیم:

مثلث‌حاده‌الزوایای ABC دردایرهٔ O محاط بوده ضلع BC ازآن ثابت است و رأس A روی‌دایره‌تغییرمکان می‌دهد. ثابت‌کنیدکه مکان هندسی H نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث کمانی است که قرینهٔ کمان BC نسبت به‌ضلع BC می‌باشد.

اکنون مسئله‌ای وعکس آن باید ثابت شود. هریك از این‌مسائل‌راطبق‌روش معمول خودبا فرض‌وحکم مشخص‌می‌کنیم:

مسئلهٔ اول :

فرض:
- $C<90^\circ$ ز و $B<90^\circ$ ز
- $BAC<90^\circ$ ز محاطی
- BC ثابت
- H نقطهٔ تلاقی ارتفاعات
- BMC قرینهٔ کمان BNC نسبت به BC

حکم : H روی کمان BMC واقع است .

مسئلهٔ دوم :

فرض:
- $C<90^\circ$ ز ، $B<90^\circ$ ز
- $BAC<90^\circ$ ز محاطی
- BC ثابت
- H نقطه‌ای است ازکمان BMC
- کمان BMC قرینهٔ BNC نسبت به BC

حکم : H نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است .

درحل مسائل مکانهای هندسی سؤال زیر مطرح‌می‌باشد **چگونه بایدمکان راکشف کرد؟** برای این کار ممارست، بررسی شکل و استدلال لازم می‌باشد . در ضمن بکـار بستن توصیه‌هایی که درمقدمهٔ کتاب تشریح شد مؤثر خواهد بود . از جمله اینکه «شکل مربوط کاملا دقیق رسم شود» بیش از هر چیز به کشف مکان کمك خواهدکرد .

خط و دایره ابتدایی‌ترین مکانهای هندسی می‌باشند . اگر سه‌نقطه ازمکان را دقیقاً رسم‌کنیم که به اندازهٔ کافی ازهم فاصله داشته باشند از روی شکل می‌توان حدس زد که آیا این سه‌نقطه بریك خط مستقیم واقع‌اند یا نه ، یعنی اینکه آیامکان مطلوب خط مستقیم است یا کمانی از دایره . به این وسیله می‌توان درمقدمه دربارهٔ تعیین نوع شکل مکان ردیابی‌کرد.

وقتی معلوم شد که مکان خط یا دایره است بهتر آنست که آن را رسم کرده معلوم‌کردکه نقطهٔچهارم ازآن‌شرط‌مفروض را شامل می‌باشد یا نه . اکنون که مکـان دقیقاً رسم شده است باید معلوم کرد که نسبت به قسمتهای ثابت شکل چه وضعی را دارد . به چه نقاط یا خطوط ثابتی از شکل متکی است . اگر مکان خط مستقیم است ، آیا با خط ثابتی ازشکل موازی‌است؟ یا اینکه با خط ثابتی از شکل زاویهٔ ثابتی می‌سازد ؟ برکدام نقطهٔ ثابت ازشکل می‌گذرد ؟ اگر مکان دایره است . آیا بر نقاط ثابتی ازشکل می‌گذرد؟ مرکز آن کدام نقطهٔ ثابت‌ازشکل است ؟ و شعاع آن با چه طول ثابتی از شکل برابر می‌باشد ؟

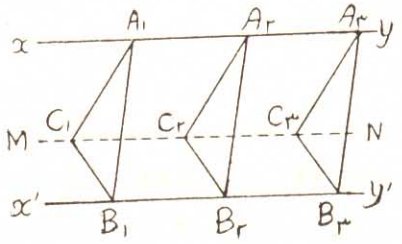
در بـارهٔ مکانهای ابتدایی ذیلا چند مسئلهٔ نمونه حل می‌شود :

گروه یکم ـ مکان خط مستقیم است

الف ـ خط با خط ثابتی موازی است .

مثال ـ مثلث ABC تغییرمکان می‌دهد بقسمی کـه رأسهای A و B ازآن‌بردوخط متوازی xy و $x'y'$ می‌لغزند و AB امتداد ثابتی را حفظ می‌کند . مکان هندسی رأس C را تعیین‌کنید .

جستجوی مکان ـ مثلث را در سه وضع مختلف و دقیقاً



رسم می‌کنیم . مشاهده می‌شودکه سه نقطهٔ C_1 و C_2 و C_3 بر یك خط مستقیم موازی با xy و $x'y'$ واقع هستند .

ادامهٔ حل مسئله ـ اولا اثبات اینکه اوضاع مختلف‌رأس C یعنی نقاط C_1 و C_2 و C_3 برخط MN که با xyو$x'y'$ موازی است واقع می‌باشند . برای این‌کار کافی است‌که ثابت کرد خط C_1C_2 وهمچنین خط C_1C_3 با xy موازی است (برای اثبات این موضوع روش سوم ازفصل چهارم بخش دوم را بکار ببرید)

ثانیاً ـ بایدثابت کرد که اگر یك نقطهٔ C_3 روی MN انتخاب شود می‌توان مثلثی مساوی با ABC چنان رسم کرد که C_3 یك رأس آن بوده وضلع A_3B_3 ازآن بین xyو$x'y'$ محصور بوده و با AB موازی باشد . این‌قسمت هم‌که‌عبارتست از اثبات تساوی دو مثلث و اثبات اینکه دوخط با هم موازی هستند درفصل‌های گذشته بررسی شده است . به خواننده توصیه می‌شودکه حل مسئله را ادامه دهد . تمرینهای زیرهم در همین باره است.

تمرینات

۳۸۷ـ خط xy ونقطهٔ O واقع در خارج آن مفروض است . نقطهٔ O را به یك نقطهٔ A از xy وصل می‌کنیم . هرگاه A بر xy تغییر مکان دهد، مکان نقطهٔ وسط OA چه

خواهد بود ؟

۳۸۸ـ دوخط متوازی xy و $x'y'$ مفروض است. نقطهٔ M بر xy و نقطهٔ N بر $x'y'$ حرکت می‌کند. مکان هندسی وسط MN را پیدا کنید .

۳۸۹ـ قاعدهٔ BC از مثلث ABC ثابت است و رأس A از آن بر خطی موازی با قاعده حرکت می‌کند . مکان هندسی نقطهٔ تلاقی میانه‌ها چیست ؟

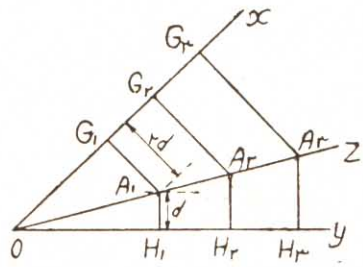
۳۹۰ـ دایرهٔ O و دوشعاع عمود برهم OA و OB ازآن مفروض‌است . ازنقاط A و B خطوطی‌موازی باضلعهای زاویهٔ قائمهٔ xMy که وضع ثابتی داشته و در خارج دایره واقع‌است رسم می‌کنیم‌که یکدیگررا در F قطع می‌کنند. هرگاه زاویهٔ AOB حول نقطهٔ O بچرخد مکان نقطهٔ F چه‌خواهد بود ؟

***

ب ـ خط با خط ثابتی ازشکل زاویهٔ ثابت می‌سازد .

مثال ـ مکان هندسی نقاطی را تعیین‌کنیدکه فاصلهٔ آنها ازیك ضلع زاویهٔ ثابتی دو برابر فاصلهٔ آنها از ضلع دیگر آن زاویه است .

جستجوی مکان ـ زاویهٔ xOy را درنظر گرفته‌سه نقطهٔ



A_1 و A_2 و A_3 را دقیقاً چنان تعیین می‌کنیم‌که شرط‌مفروض دربارهٔ آنها صدق کند برای تعیین‌این نقاط چنین عمل‌می‌کنیم خطی موازی با Oy و به فاصلهٔ d ازآن رسم می‌کنیم . خط دیگری موازی با Ox و به فاصلهٔ $2d$ ازآن رسم می‌کنیم.این دوخط درنقطه‌ای مانند A_1 متلاقی می‌شوند . با تغییر دادن مقدار d، نقاط دیگر A_2 و A_3 را بدست می‌آوریم . ملاحظه خواهیم‌کردکه سه نقطهٔ A_1 و A_2 و A_3 برخط مستقیمی‌مانند Oz واقع هستندکه از O می‌گذرد .

ادامهٔ حل مسئله ـ اولا باید ثابت کنیم هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از Ox دوبرابر فاصله‌اش از Oy باشد بر Oz واقع است . برای این‌کارکافی است ثابت کردکه زاویهٔ OA_1 با Ox برابر است با زاویهٔ OA_2 با Ox یعنی سه نقطهٔ O و A_1 و A_2 بریك خط راست واقع هستند. برای این‌کارخطوط G_1H_1 و G_2H_2 را رسم‌می‌کنیم چهارضلعیهای $OH_1A_1G_1$ و $OH_2A_2G_2$ محاطی هستند و نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ G_1OA_1 و $G_1H_1A_1$ باهم همچنین دو زاویهٔ G_2OA_2 و $G_2H_2A_2$ با هم برابر هستند. ازتشابه دومثلث $A_1G_1H_1$ و $A_2G_2H_2$ نتیجه‌می‌شودکه‌دوزاویهٔ $G_1H_1A_1$ و $G_2H_2A_2$ با هم برابرند . درنتیجه دو زاویهٔ G_1OA_1 و G_2OA_2 با هم برابر می‌باشند .

ثانیاً بایدثابت‌کنیم‌که‌هر نقطه از Oz اختیارشودفاصله‌اش از Ox دوبرابر فاصله‌اش از Oy می‌باشد . می‌دانیم‌که :

$$\frac{A_1H_1}{A_1G_1} = \frac{1}{2}$$

است . اگر A_3 نقطهٔ دلخواهی از Oz باشد با توجه به‌روش یکم ازفصل سوم بخش یکم خواهیم داشت .

$$\frac{A_3H_3}{A_3G_3} = \frac{A_1H_1}{A_1G_1} = \frac{1}{2}$$

تمرینات

۳۹۱ـ زاویهٔ xOy و خط AB محصور بین اضلاع آن مفروض است . طول خط AB متغیر است اما امتداد آن ثابت می‌باشد . مکان هندسی وسط AB را تعیین کنید .

۳۹۲ـ زاویهٔ xOy ونقطهٔ ثابت A واقع برضلع Oy مفروض است . دایره‌ای رسم می‌کنیم که در A بر Oy مماس باشد ومرکز آن درهمان طرفی از Oy واقع باشد که Ox واقع است . خطی موازی با Ox دریك نقطهٔ M بر دایره مماس می‌کنیم . مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید هرگاه شعاع دایره متغیر باشد .

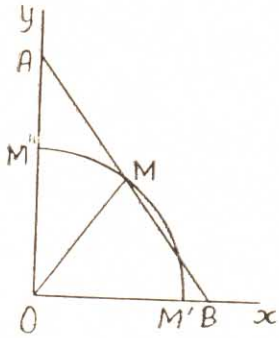
گروه دوم ـ مکان دایره است

دایره مکان هندسی نقاطی است‌که ازنقطهٔ ثابت به‌فاصلهٔ ثابت می‌باشند. درحالتی که‌یك‌مکان‌هندسی‌دایره‌باشد می‌توان از تعریف‌مزبوراستفاده‌کرد. یعنی‌ثابت‌کردکه‌فاصلهٔ‌نقطهٔ‌متغیر ازیك‌نقطهٔ ثابت‌همیشه‌ثابت‌است . اگرثابت‌شده‌باشدخطوطی‌که نقطه‌را به دو نقطهٔ ثابت‌وصل‌می‌کنندبایکدیگرزاویهٔ به اندازهٔ ثابت می‌سازند در این صورت مکان کمان دایرهٔ درخور زاویهٔ مزبور است که برآن دو نقطهٔ ثابت می‌گذرد .

به ملاحظات زیر توجه کنید :

الف ـ فاصلهٔ هر نقطهٔ مکان تا نقطهٔ ثابتی ثابت باقی می‌ماند .

مثال ـ قطعه خط A B با طول ثابت l داخل زاویهٔ قائمهٔ xOy چنان تغییر مکان می‌دهد که همواره A بر Oy و B بر Ox واقع است مکان هندسی نقطهٔ M وسط A B چیست؟



جستجوی مکان ـ رسم دقیق شکل درسه وضع نشان خواهد داد که مکان مطلوب خط مستقیم نیست . مکان دایره‌ای به‌مرکز O و به‌شعاعی برابر با نصف طول AB .

حل ـ مثلث AOB درزاویهٔ O قائمه‌است. بنابراین میانهٔ OM ازآن بانصف وتر یعنی AB برابر است . نقطهٔ O ثابت و طول OM هم‌ثابت است .پس‌مکان M دایره‌ای است به‌مرکز O و به‌شعاع $\frac{l}{2}$

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این‌است که آیا تمام دایرهٔ مزبور مکان M می‌باشد یاقسمتی ازآن ؟ بررسی شکل محقق خواهد ساخت که مکان مطلوب فقط ربع دایره‌ای از دایرهٔ مزبور است که‌بین Ox و Oy محصور می‌باشد .

این‌موضوع حائز کمال‌اهمیت‌است که‌در بسیاری ازمسائل مکان محدود می‌باشد . لازم است که ازروی اوضاع مختلفی که نقطهٔ متغیر می‌تواند اختیار کند حدود مکان را مشخص ساخت

حل‌مسئلهٔ بالا به‌ترتیب زیر تکمیل می‌کنیم :

حدود مکان ـ خط AB همواره داخل زاویهٔ xOy باقی‌می‌ماند.واضح‌است که M وسط AB نیز داخل زاویهٔ‌مزبور واقع‌بوده‌مکان آن‌دارای دوحد M' و M'' است . این دوحد درحالاتی است که AB یابر Ox یابر Oy منطبق باشد .پس مکان ربع دایرهٔ به‌مرکز O و به‌شعاع $\frac{l}{2}$ و محدود بین نقاط M' و M'' می‌باشد .

تمرینات :

۳۹۳ ـ دایرهٔ O ونقطهٔ A ازآن‌مفروض است . در A مماس AB را بر دایره رسم می‌کنیم . اگر طول AB ثابت باشد وقتی A بردایره تغییر مکان دهد مکان نقطهٔ B چه خواهد بود ؟

۳۹۴ـ دردایرهٔ‌مفروض O وتر AB به‌طول ثابت اوضاع مختلف را اختیار می‌کند . مکان هندسی M وسط AB را تعیین کنید .

۳۹۵ـ ازهر نقطهٔ دایرهٔ مفروض O قطعه خطی باطول ثابت ، در امتداد ثابت ودر جهت ثابت رسم می‌کنیم . مکان هندسی انتهای قطعه خطهارا تعیین کنید .

۳۹۶ ـ نقاط مختلف دایرهٔ O را به نقطه M واقع در خارج‌آن وصل‌کرده وقطعه خطهای حاصل رابه‌اندازه نصف‌طول خود امتداد می‌دهیم . مکان هندسی نقاط حاصل راپیدا کنید .

۳۹۷ ـ دودایرهٔ هم‌مرکز مفروض‌است . زاویهٔ قائمه‌ای چنان تغییر مکان می‌دهد که‌یك‌ضلعش همواره بریك دایره‌وضلع دیگرش همواره بردایرهٔ دیگر مماس است . مکان هندسی رأس این‌زاویه راپیداکنید .

۳۹۸ـ قطعه خط AB به طول ثابت l مفروض است . دودایره بریکدیگر مماس بوده‌یکی ازآنها در A و دیگری در B بر AB مماس می‌باشد . وقتی شعاعهای این دودایره تغییر کند مکان هندسی نقطهٔ تماس آنها راتعیین کنید .

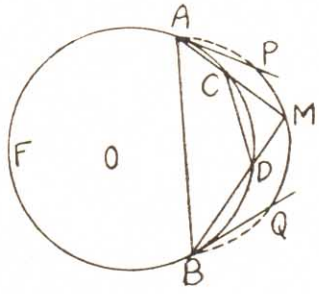
۳۹۹ـ دایرهٔ O به شعاع R مفروض است. مکان هندسی مراکز دوایری به‌شعاع ۲R را تعیین کنید که دایرهٔ O رادر درطرفین هریك ازقطرهایش قطع‌می‌کنند .

***

ب ـ خطوطی که نقطهٔ متغیر را به‌دو نقطهٔ ثابت وصل می‌کنند با یکدیگر زاویهٔ ثابت می‌سازند .

مثال ـ دردایرهٔ O وتر AB ثابت است ووتر CD از لحاظ طول ثابت امااز لحاظ وضع متغیر می‌باشد واز وتر AB کوچکتراست . خطوط AC و BD یکدیگر را در M تلاقی می‌کنند . وقتی وترCD داخل کمان کوچکتر AB تغییرمکان دهد مکان‌هندسی M راتعیین کنید .

جستجوی مکان ـ رسم سه‌وضع از CD نشان می‌دهد که سه نقطهٔ حاصل بر یك دایره واقع هستند ؛ از روی شکل نه مرکز این دایره‌معلوم می‌شود و نه شعاع آن اما ملاحظه می‌شود که A و B خود وضعی‌از اوضاع M هستند پس دایرهٔ مکان بر A وB می‌گذردو نتیجه‌می‌شود اندازهٔ زاویهٔ AMB باید ثابت باشد.



حل ـ زاویهٔ M زاویه‌ای است که رأس آن در خارج دایره واقع شده است پس اندازهٔ آن برابر است با :

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD}) = \alpha$$

طول وتر AB و طول وتر CD ثابت است پس اندازه‌های کمانهای AB و CD ثابت بوده نتیجه می‌شود که اندازهٔ زاویهٔ M نیز ثابت باشد. ضلعهای زاویهٔ M بر A و B می‌گذرند پس مکان M کمان دایرهٔ در خور زاویهٔ α است که بر A و B می‌گذرند.

حدود مکان ـ نقطهٔ A حد اوضاع مختلف C و نقطهٔ B حد اوضاع مختلف D است. در این دو حالت، AC به‌صورت مماس AP و BD به صورت مماس BQ در می‌آید. بنابراین مکان M قسمتی از کمان فوق‌الذکر است که به نقاط P و Q محدود می‌شود.

تمرینات

۴۰۰ـ از نقطهٔ A واقع درخارج دایرهٔ O قاطع ABC را بر دایره رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ وسط کمان BC را پیدا کنید.

۴۰۱ـ مثلث ABC دردایرهٔ O محاط است. ضلع BC ثابت بوده اما رأس A روی کمان بزرگتر BC تغییر مکان می‌دهد. مکان هندسی نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث را تعیین کنید.

۴۰۲ـ مسئلهٔ قبل را در نظر گرفته مکان هندسی I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را پیدا کنید.

۴۰۳ـ از نقطهٔ A انتهای قطر AB از دایرهٔ O وتر متغیر AC را رسم کرده آنرا به طول CM = CB امتداد می‌دهیم. مکان هندسی M را پیدا کنید.

۴۰۴ـ از نقطهٔ A واقع درخارج دایرهٔ O قاطع ABC را رسم می‌کنیم ودر نقطهٔ M وسط BC عمود MD را به اندازهٔ MA بر BC اخراج می‌کنیم. مکان هندسی D را پیدا کنید.

***

ج ـ مکانهای دیگر

دربارهٔ مکانهای دیگر به‌راهنمائیهای اجمالی اکتفامی کنیم در بسیاری از موارد برای اینکه ثابت کنیم یك مکان خط یا دایره است می‌توان قضایای زیررا مورد استفاده قرار داد:

ـ مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت برابر مقدار ثابت k است دایره‌ای است که قطر آن بر محمل دو نقطهٔ ثابت واقع بوده آنرا به نسبت توافقی k تقسیم می‌کند

ـ مکان هندسی نقاطی که مجموع مربعات فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت مقدار ثابت است دایره‌ای است که مرکز آن در وسط قطعه‌خط واصل بین دو نقطهٔ ثابت واقع است.

ـ مکان هندسی نقاطی که تفاضل مربعات فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت مقدار ثابت است خطی است عمود بر خط واصل بین دو نقطهٔ ثابت.

فصل دوم ـ ترسیمات هندسی

موضوع مسائل ترسیمات هندسی در مقدمهٔ کتاب تشریح شد. دراین فصل دربارهٔ روش کلی این نوع مسائل راهنمائیهائی انجام می‌گیرد و مسائل نمونهٔ ساده‌ای طرح و حل می‌شود. این نکات اجمالی خواننده را به حل مسائل پیچیده‌تر رهبری خواهد کرد

روش کلی

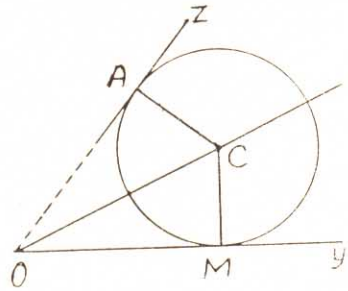
مسئله را حل شده فرض می‌کنیم، به‌این‌معنی که شکلی ابتدایی رسم می‌کنیم که تقریباً به شکل مطلوب نزدیك باشد.

شکل رسم‌شده را بررسی می‌کنیم، یعنی‌ازروی شکلی که رسم کرده‌ایم روابطی وضعی یا اندازه‌ای بین اجزاء آن بدست می‌آوریم.

راه ترسیم شکل‌را می‌یابیم، یعنی از روی‌روابط بدست آمده چگونگی تعیین هر جزء را از روی جزء دیگر معلوم می‌کنیم و به این‌وسیله ازروی اجزاء معلوم، شکل را مشخص می‌کنیم.

مثال ـ دایره‌ای رسم کنید که در نقطهٔ A برخط‌معلوم Az و علاوه بر خط معلوم xy مماس باشد.

اگر مسئله را حل‌شده فرض کنیم و C مرکز دایرهٔ مطلوب باشد ملاحظه می‌کنیم که شعاع CA بر Az عمود است. پس یك مکان C خطی است که در A عمود بر Az اخراج می‌شود. اگر



M نقطهٔ تماس دایره با xy باشد از تساوی CA = CM نتیجه می‌شود که C بر نیمساز زاویهٔ دوخط Az و xy واقع است. پس یك مکان دیگر C نیمساز زاویهٔ AOM می‌باشد. نقطهٔ C نقطهٔ تلاقی دو مکان مزبور خواهد بود. بنابراین برای رسم‌شکل:

Az را امتداد می‌دهیم تا xy را در O قطع کند. نیمساز زاویهٔ O را رسم می‌کنیم و در A عمودی بر Az اخراج می‌کنیم. از تلاقی دوخط مزبور مرکز دایره بدست می‌آید.

بحث مسئله ـ برای هریك ازمسائل ترسیمی بحث‌لازم است که به ترتیب زیر باید انجام گیرد:

۱) امکان‌مسئله ـ باید شرایطی را تعیین‌کرد تا ازروی معلومات مسئله رسم شکل مورد نظر ممکن باشد.

۲) تعداد جوابها ـ وقتی‌که مسئله ممکن است باید معلوم کرد که چند شکل مطابق آنچه موردنظر است می‌توان رسم‌کرد، به‌عبارت دیگر مسئله چند جواب دارد.

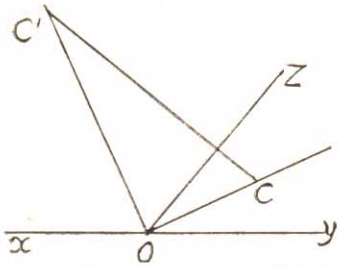
برای بحث در مسئلهٔ ترسیمی عموماً چنین عمل‌می‌کنند:

۱ـ صورت مسئله را در نظر می‌گیرند، برای اینکه بتوان مسئله را حل‌کرد چه عناصری باید مشخص بشوند؟ مثلا برای تعیین یك نقطه معمولا رسم دوخط لازم است. پس باید معلوم کرد به‌چه شرطی این دوخط متقاطع هستند، یعنی‌تعیین آن نقطه‌ممکن می‌باشد.

۲ـ برای تعیین تعداد جوابها این سؤال مطرح‌می‌شود که: حال‌که برای تعیین آن نقطه رسم دوخط لازم است آیا این دوخط فقط به یك‌صورت رسم می‌شوند یا به‌نوعهای مختلف و ازتلاقی آنهاچند نقطه بدست می‌آید؟ پاسخ به این‌سؤال‌تعداد جوابها را معلوم می‌سازد.

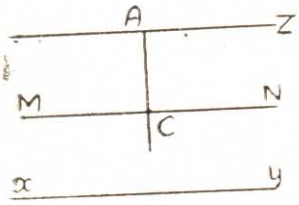
بحث مثال قبل ـ ۱) امکان مسئله: رسم دایره‌وقتی ممکن است که مرکز آن معین شود. این مرکز از تلاقی دو خط، یکی عمودی که در A بر Az رسم می‌شود و دیگری، نیمساز زاویهٔ O بدست می‌آید. پس برای اینکه مسئله ممکن باشد لازم است که این دوخط متقاطع باشند یعنی با یکدیگر موازی نباشند. چون AC بر Az عمود است بنابراین OC باید با AZ زاویه‌ای بسازد که یك قائمه نباشد.

۲) تعداد جوابها ـ C نقطهٔ تلاقی عمودی است که در A بر AZ اخراج می‌شود بانیمساززاویهٔ O. در هر نقطه‌فقط یك خط می‌توان بر خطی عمود کرد؛ اما دوخط با یکدیگر دو



زاویه می‌سازند، برای دوخط AZ و xy دو نیمساز زاویه‌رسم می‌شود. پس مسئله حد اکثر می‌تواند دوجواب داشته‌باشد.

حالتهای خاص ـ اگر AZ و xy متوازی باشند، نیمساز زاویهٔ O عبارت می‌شود از خط MN که با دوخط مزبور موازی بوده و ازآنها به یك فاصله است و این خط منحصر به‌فرد است. پس



در این‌حالت مسئله فقط یك جواب دارد.

اگر AZ و xy منطبق باشند هر دایره‌ای که در A بر AZ مماس باشد در همان نقطه بر xy هم مماس است و در این حالت مسئله به تعداد نامحدود جواب دارد و می‌گویند که مسئله **مبهم** است.

بطور خلاصه:

اگر AZ و xy متقاطع باشند مسئله دوجواب دارد.

اگر AZ و xy متوازی و متمایز باشند مسئله یك جواب دارد.

اگر AZ و xy منطبق باشند مسئله مبهم است یعنی‌به تعداد نامحدود جواب دارد.

تبصره ـ بحث درمسائل ترسیمی که معلومات آنها اندازه‌های زوایا است عموماً بسیار مشکل است و جز باکمك مثلثات بطور کامل عملی نیست. در اینگونه مسائل معمولا فقط معلوم می‌کنند که چه موقع مسئله ممکن است و تعدادجوابهای آن چقدر است بدون آنکه روابط لازم بین مقادیر معلوم را تعیین‌کرده و شرایط را بررسی‌کنند.

ملاحظات مربوط به‌شکل

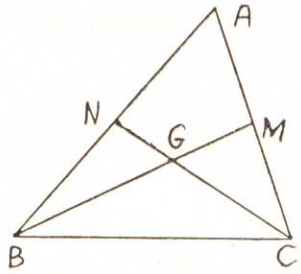
I ـ ازهمهٔ معلومات‌استفاده شده‌باشد. رسم‌شکل ابتدایی مورد نظر به‌تنهائی کافی نیست. باید در آن همهٔ‌خطوط یا زاویه‌های معلوم بکاررفته باشد. این عملی نیست مگر آنکه به روابط لازم برای رسم اشکال توجه داشته باشیم.

برای مثال، اگر مقصود رسم مثلثی باشد که ازآن یك ضلع، میانهٔ نظیر این ضلع و زاویهٔ مقابل به آن معلوم‌باشد، باید روی شکلی که رسم می‌شود میانه نیز رسم شده باشد. یا اگر بگویند: مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم‌کنید که از آن

طول وتر و شعاع دایرهٔ محاطی معلوم است. باید دایرهٔ محاطی و همچنین خطوطی که مرکز آنرا مشخص می‌سازند رسم شده باشد.

در مسئلهٔ: مثلثی رسم کنید که یك ضلع، مجموع دوضلع دیگر و زاویهٔ بین این دوضلع معلوم است. در شکل ابتدایی مربوط به این مسئله باید یك ضلع را ابتدا ازرأس زاویهٔ معلوم به اندازهٔ ضلع دیگر امتداد داد تا مجموع دوضلع مشخص شده باشد.

II اجزائی ازشکل را معلوم ساخت که رسم آنها ساده است ـ این اجزاء که رسم آنها به سادگی میسر است کمك می‌کند تا رسم بقیهٔ شکل میسر باشد. در حقیقت این اجزاء پایه‌ای برای رسم‌شکل می‌باشند. این اجزاء گاهی مستقیماً از روی اجزاء معلوم و گاه از اجزائی که به اجزاء معلوم مجاور هستندتعیین می‌شوند.



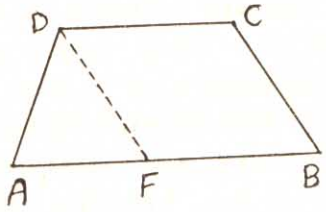
مثال ۱ـ مثلثی رسم کنید که از آن یك ضلع و میانه‌های دوضلع دیگر معلوم است.

توجه به شکل معلوم می‌سازد که‌رسم مثلث B G C به سادگی میسر است. زیرا اندازه‌های سه‌ضلع آن معلوم است:

$$BC \text{ و } BG = \frac{2}{3}BM \text{ و } CG = \frac{2}{3}CN$$

بارسم مثلث BCG رسم مثلث ABC به‌سادگی انجام‌می‌گیرد.

مثال ۲ـ



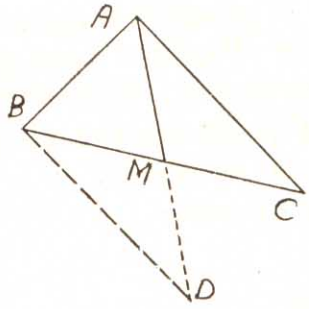
ذوزنقه‌ای رسم کنید که اندازه‌های چهارضلع آن معلوم است.

اگر DF راموازی با CB رسم کنیم مثلث ADF بدست می‌آید که اندازه‌های سه‌ضلع آن معلوم است:

$$AD \text{ و } DF = CB \text{ و } AF = AB - CD$$

از روی این مثلث تکمیل‌شکل‌ورسم ذوزنقهٔ مطلوب میسرمی‌شود

مثال ۳ـ مثلثی رسم کنید که از آن اندازه‌های دوضلع ومیانهٔ نظیر ضلع سوم معلوم است. هرسه جزء معلوم مجاوربه A هستند اما رابطه‌ای بین آنهاظاهر نیست اما اگر میانهٔ AM رابه اندازهٔ خودش تاD امتداد

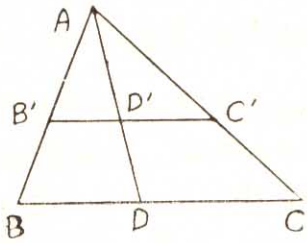


دهیم‌مثلث ABD بوجودمی‌آید که اندازه‌های سه‌ضلع آن‌معلوم می‌باشد:

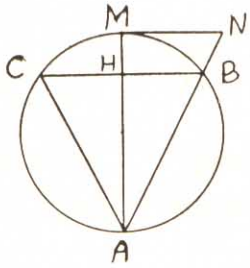
$$AB \text{ و } BD = AC \text{ و } AD = 2AM$$

بارسم این مثلث، مثلث ABC مشخص می‌شود.

III جانشین کردن شکل مورد نظر با شکلی مشابه که ترسیم آن میسر است ـ اگر نسبت تشابه دو شکل معلوم باشد از روی یکی از آنها می‌توان دیگری‌رامعین کرد.



مثال ۱ـ مثلثی رسم کنیدکه اندازه‌های‌دو زاویه وطول نیمساززاویهٔ سوم معلوم است. روی قطعه خطی مانند B′C′ مثلث A′B′C′ را چنان می‌سازیم که اندازه‌های زاویه‌های B′ و C′ از آن برابر با اندازه‌های زاویه‌های معلوم باشد. AD′ نیمساز زاویهٔ A از مثلث را رسم‌کرده آنرا از طرف D′ تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم که AD با طول نیمساز داده شده برابر باشد. اکنون‌کافی است از D موازی با B′C′ رسم‌کرد تاامتدادهای AB′ و AC′ را در B و C قطع کرده مثلث ABC مشخص شود.



مثال ۲ـ در دایرهٔ به شعاع‌معلوم R مثلث‌متساوی‌الساقینی چنان محاط کنید که قاعده‌اش با ارتفاعش برابر باشد.

مثلث AMN را چنان‌رسم می‌کنیم‌که AM قطر دایره بوده MN بر AM عمود باشد و طول MN نصف‌طول AM باشد خط AN دایره را در B قطع می‌کند. از B موازی با MN رسم کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در C قطع کند. از تشابه دومثلث ABH و AMN نتیجه می‌شودکه:

$$AH = 2BH$$

و چون $BC = 2BH$ است پس $BC = AH$ می‌باشد ومثلث ABC مثلث مطلوبست.

هندسه شامل مسائل متعددی مربوط به ترسیمات می‌باشد که یکی پس ازدیگری مشکلتر وپیچیده‌تر می‌شود. دراینجا از ذکراین‌نوع‌مسائل‌خودداری می‌شود. اما راهنمائیهایی که‌انجام گرفت درحل همهٔ آنها سودمند خواهدبود.

پایان کتاب

PROBLEMS AND SOLUTIONS

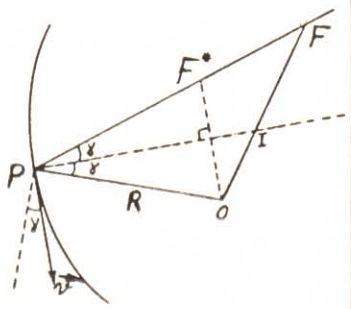
ELLIPSE OF LEAST ECCENTRICITY

N. X. VINH

Mathematics Magazine

36 – This note presents a problem of geometry with application to astronautics.

In figure, **O** is the center of the earth and **P** is a point on the top of the sensible atmosphere at a distance **R** from **O**. A satellite, following an elliptic trajectory, re-enters the atmosphere at the poin P and its velocity $\vec{V}$ makes an angle γ with the local horizontal which is the perpendicular to **OP** at the point **P**. Let **F** be the second focus of the elliptic trajectory, the first focus being the point **O** by kepler's first law. It is known from the geometry of the conic that $\angle$ **OPF** $= 2\gamma$. Hence, for a given angle γ (re-entry angle), the locus of **F** is the ray **PΔ** making an angle 2γ with the direction **PO**. Of the infinite number of possible trajectories one looks for the elliptic flight path with the least numerical eccentricity.



Since **P** is a point on the ellipse,

OP + PF = 2a = major axis

OF = 2c = focal distance.

Therefore

$$e = \frac{c}{a} = \frac{OF}{OP + PF}$$

The problem is to find the point **F** on the straight line **PΔ** such that the ratio $\frac{OF}{OP + PF}$ is a minimum.

(1) **Trigonometric solution** - Let $x = \angle POF$. By the law of sines

$$\frac{OF}{\sin 2\gamma} = \frac{PF}{\sin x} = \frac{R}{\sin(2\gamma + x)}$$

Therefore

$$OF = \frac{R \sin 2\gamma}{\sin(2\gamma + x)}, \quad PF = \frac{R \sin x}{\sin(2\gamma + x)}$$

and

$$e = \frac{\sin 2\gamma}{\sin x + \sin(2\gamma + x)}$$

$$= \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\gamma \cos x + (1 + \cos 2\gamma) \sin x}$$

$$= \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma \cos x + \sin x \cos \gamma} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + x)}$$

Hence **e** is a minimum when

$$x = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

The point **F** is at **F***

(2) **Geometric solution** – Let **I** be the intersection of **OF** and the bisector of the angle **OPF**. Then

$$\frac{IF}{IO} = \frac{PF}{PO}$$

$$\frac{IF + IO}{IO} = \frac{PF + PO}{PO} \text{ and } \frac{OF}{OI} = \frac{OP + PF}{OP}$$

Therefor

$$e = \frac{OF}{OP + PF} = \frac{OI}{OP}$$

Since **OP** is fixed, the ratio is a minimum when **OI** is a minimum, i.e., when **OF** is perpendicular to the bisector of the angle **OPF**.

باشگاه دریانوردان

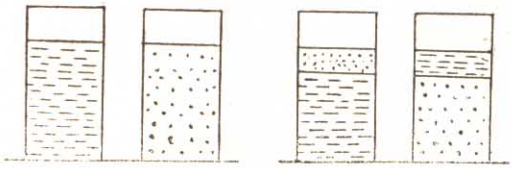
۳ - جین و آب

بازهم یك مسئله ، توسط یکی دیگر از اعضای باشگاه به شرح زیر مطرح شد :

دو لیوان داریم که کاملا همشکل و هم اندازه هستند . در یکی از آنها آب معدنی خالص ودر دیگری دقیقاً به همان اندازه جین خالص ریخته‌ایم . یك استکان جین از لیوان دوم برمی‌داریم و آنرا در لیوان اول یعنی در لیوان آب می‌ریزیم . محتوی این لیوان‌را خوب بهم می‌زنیم و بعد از مخلوط حاصل یك استکان برداشته در لیوان دوم یعنی در لیوان جین می‌ریزیم. حالا به من بگوئید که آیا آب موجود در لیوان اول بیشتر است یا جین موجود در لیوان دوم ؟

یکی از اعضای باشگاه اظهار داشت که مطمئناً مقدار جین موجود در لیوان دوم بیشتر است، زیرا استکانی جین برداشته‌ایم و به جای استکانی از مخلوط ریخته‌ایم که باز هم جین داشته است .

اولی که مسئلهٔ را مطرح کرده بود پاسخ داد که هرچند این پاسخ ظاهراً منطقی بنظر می‌رسد اما درست نیست ، و خودش چنین استدلال کرد :



قبل از اختلاط　　بعد از اختلاط

در ابتدا دو لیوان به یك حجم محتوی مایع بوده‌اند . بعد از آنکه یك استکان از محتوی لیوان دوم برداشته ودر لیوان اول ریخته‌ایم و باز یك استکان از محتوی لیوان اول را در لیوان دوم ریخته‌ایم بازهم در هریك از دو لیوان به یك اندازه و به همان حجم اول ، مایع وجود دارد . بنابراین آنچه از جین لیوان دوم کم شده باشد جای آن آب اضافه شده است و این مقدار جین در لیوان اول ریخته شده که به جای آن آب برداشته شده است . در نتیجه آن اندازه جین که در لیوان دوم وجود دارد به همان اندازه آب در لیوان اول یافت می‌شود .

چند نفر از اعضای باشگاه اظهار داشتند که از این استدلال چیزی نفهمیدند و آن عضو توضیحات بیشتری به این شرح بیان داشت :

بهتر است که مسئله را با استفاده از اعداد حل کنیم . فرض کنیم که در ابتدا محتوی هریك از دو لیوان ۳ دسیلیتر بوده و گنجایش استکان یك دسیلیتر باشد . وقتی یك دسیلیتر از جین لیوان دوم برداریم و در آب لیوان اول بریزیم ، در لیوان دوم دو دسیلیتر جین و در لیوان اول ۴ دسیلیتر مخلوط آب و جین خواهیم داشت. نسبت اختلاط آب و جین در لیوان اول ۳ به یك است. وقتی از این مخلوط یك دسیلیتر برداریم در حقیقت $\frac{۳}{۴}$ دسیلیتر آب و $\frac{۱}{۴}$ دسیلیتر جین برداشته‌ایم . و چون این مقدار را به دو دسیلیتر جین موجود در لیوان دوم اضافه کرده‌ایم پس

مقدار جین موجود درلیوان دوم برابر است با $2\frac{1}{4}$ دسیلیتر .

درلیوان اول مقدارآبی که باقی مانده است برابر است با $\frac{3}{4}$ از ۳ دسیلیتر که برابر می‌شود با $\frac{9}{4}$ یعنی $2\frac{1}{4}$ دسیلیتر . بنا- براین حجم‌آب باقی مانده در لیوان اول برابر است با حجم جین موجود درلیوان دوم .

٤- قایق در سطح دریاچه

مسئلهٔ دیگری توسط عضو دیگر باشگاه مطرح شدکه از این قرار بود: قایقی پر از خرده‌های سنگین آهن برسطح‌آب دریاچهٔ پشت یك سد شناور بود . به علت نامعلومی ، اشخاصی که درون قایق بودند همهٔ خرده‌های‌آهن موجود در قایق را به درون‌آب دریاچه انداختندتاآنجاکه قایق کاملا ازخرده‌آهنها خالی شد. مسئله از این قرار است که‌آیا بااین عمل درارتفاع آب سطح دریاچه تغییر حاصل شده است یا نه ؟

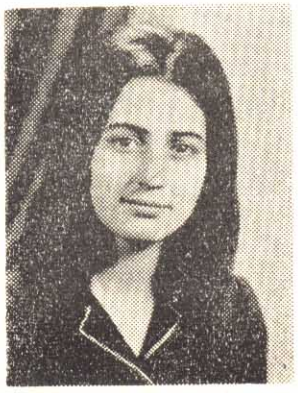
یکی از اعضای باشگاه اظهار عقیده کردکه هیچ تغییری حاصل نمی‌شود. دیگری عقیده داشت‌که سطح‌آب بالاتر آمده است. آنکه مسئله را مطرح کرده بود چنین گفت :

این‌مسئله را برای یك فیزیکدان شرح داده‌ام واوچنین استدلال کرده است: بنا به قانون ارشمیدس هرجسمی‌که درسطح آب غوطه ور باشد به اندازهٔ حجم‌آب هموزنش در آب فرو می‌رود .آهن به مراتب ازآب سنگینتر است. وقتی قایق پراز خرده‌های سنگین‌آهن‌باشد دستگاه مادی قایق و خرده‌های‌آهن حجمی بزرگتر از حجم خالص‌آهنها دارد بنابراین به اندازهٔ همین‌حجم درآب جا باز می‌کند. قایق‌که درآب فرو رفته باشد سطح‌آب دریاچه بالا خواهد آمد. اما وقتی‌که خرده‌های آهن را درون‌آب بیندازند از یك طرف قایق سبك شده‌کمتر در آب فرو می‌رود درنتیجه سطح‌آب دریاچه پائین می‌آید و از طرف دیگر مقدار حجمی‌که توسط خرده هـای‌آهن درون‌آب اشغال می‌شود مساوی با حجم خالص همان‌آهنها می‌باشدکه به مراتب ازحجم قایق‌کمتر است . یعنی‌آب به اندازهٔ حجم خرده آهنها بالا می‌آید ودرمقابل به مقدار بیشتری یعنی معادل باحجم قایق پائین می‌رود و نتیجه آن می‌شودکه با ریختن خرده های‌آهن به درون‌آب دریاچه ، سطح‌آب پائینتر می‌رود .

یکی‌ازاعضای باشگاه خواست تا توضیحات بیشتری داده شود وشخص اول چنین گفت :

جسم دیگری را درنظر بگیریم . به‌گفتهٔ منجمین بعضی ازستارگان ، مثلا جفت شعرای یمانی ، از مادهٔ بسیار سنگینی که میلیونها مرتبه ازآب سنگینتر است تشکیل شده‌اند . یك سانتیمتر مکعب ازمادهٔ یك چنین ستاره‌ای حداقل یك تن وزن دارد . اگر این یك سانتیمتر مکعب به وزن یك تن را داخل قایق بگذارند باعث می‌شودکه قایق به تمامی در آب فرو رود که در مقابل سطح‌آب دریاچه بالا می‌آید . اما اگر این یك سانتیمتر مکعب جسم سنگین را درون آب بیندازند فقط یك سانتیمتر مکعب حجم‌آب را اشغال می‌کند ودراین حال بالا- آمدگی‌سطح‌آب نامحسوس بوده قابل‌اغماض می‌باشد. بنابراین وقتی جسم سنگین داخل قایق باشد سطح آب دریاچه بالاتر از وقتی است‌که‌آن جسم را از قایق برداشته به درون‌آب انداخته باشند .

* * *



دانش‌آموز رتبهٔ اول کلاس ششم طبیعی

استان اصفهان

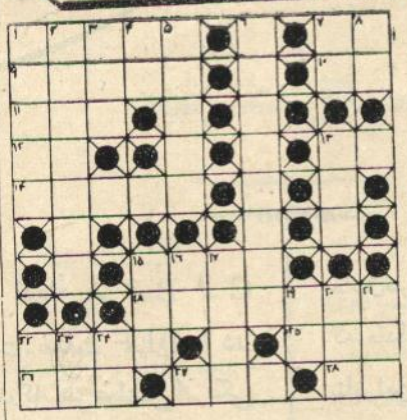
دوشیزه اما زرگریان
دبیرستان‌دخترانه ملی شاه عباس‌کبیر
جمع نمرات کتبی : ۱۴۹٫۲۵
معدل‌کل ۱۹٫۲۴

فرستندهٔ خبر : نمایندگی مجلهٔ یکان دراصفهان -کتابفروشی امید

سرگرمیهای ریاضی

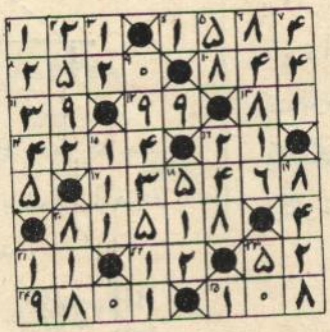
جدول اعداد

طرح : منصورقزوینی
دانش‌آموز دبیرستان حکیم ثنائی اصفهان



افقی- ۱- ارقامش از چپ به راست تصاعد حسابی می‌سازند که مجموع جملات آن مربع کامل است. ۷- ماکزیمم مساحت مربع-مستطیلهایی که محیط آنها برابر مقدار ثابت ۱۴ است. ۹- عددی‌است فرد به صورت $\overline{ababa}$ که $b=a^{۲}$ است. ۱۰- توان‌چهارم رقم a ازعدد ۹ افقی. ۱۱- ارقامش ازراست به چپ‌تصاعد هندسی می‌سازند که جملهٔ اول آن و همچنین قدرنسبتش کوچکترین مقدار ممکن را دارا می‌باشند. ۱۲- تعداد ناحیه‌هایی از صفحه‌که توسط ۹ خط دو به دو متقاطع پدید می‌آید (از هر نقطهٔ تقاطع بیش از دوخط نگذشته است). ۱۳- عددی است زوج که مربع رقم یکان خود می‌باشد. ۱۴- لگاریتم آن در مبنای ۹ برابر است‌با۵. ۱۵- بزرگترین عددممکن که رقم سدگان آن چهاربرابر رقم یکانش می‌باشد. ۱۸- اگر ازرقم یکان آن صرف نظر کنیم مربع عدد ۱۳ قائم است. ۲۲- حاصل ضرب جذرعدد ۱۳ افقی درعدد ۱۱ افقی. ۲۵- نصفش توان سوم ریشهٔ دوم عدد ۱۳ افقی است. ۲۶- چهاربرابر عدد ۲۱ قائم. ۲۷- در مبنای ۹ تفاضل لگاریتم عدد ۱۴ افقی براین عدد برابر است با ۲ . ۲۸-تکرار یك رقم و عددی است اول.

قائم : ۱- به‌صورت $\overline{abccd}$ است وچون با$\overline{abc}$ جمع شود عدد۱ افقی بدست‌آید ۲- متمم حسابی مقلوبش برابراست با ۳۷۰۷. ۳- مقلوب عددی که از سه رقم سمت چپ عدد ۱ افقی تشکیل می‌شود. ۴- جوابی از معادلهٔ زیر $x^{۲}-۱۷۹x+۷۹۰۰=۰$ ۵- به‌این‌ترتیب بدست می‌آیدکه در عدد۹ افقی جای a وb‌را عوض کنیم. ۶- حاصل‌ضرب عدد ۷ افقی درعدد ۲۰۱۰۴۰۲. ۷- مقلوب عدد ۱۰ افقی. ۸- مقلوب عدد ۷ افقی. ۱۳ صد واحد کمتر ازعدد ۲۶ افقی . ۱۵ و ۱۶- دوعدد متمم حسابی یکدیگر. ۱۷- ارقامش به ترتیب تناسب عددی تشکیل می‌دهند. ۱۹- مجموع عددهای ۱۳ افقی و ۷ قائم. ۲۰-مجموع ارقامش برابر ۱۰ است. ۲۱- مجذور عدد۲۸ افقی. ۲۲- دوبرابرعدد ۷ افقی. ۲۳- چهار واحد بیشتر از عدد ۱۹ قائم. ۲۴- همان عدد ۲۲ قائم .



حل جدول شمارهٔ قبل

ارقام را پیدا کنید

ترجمهٔ : هراچ کارابتیان

هرحرف نمایندهٔ یك رقم‌است و حروف مختلف نمایندهٔ رقمهای متفاوت می‌باشند. با توجه به عمل جذر زیرمقادیر حروف‌راتعیین کنید.

```
√ abcbaded      eafg
  f
 acb
  da
   bfad
   hdda
    chhed
    chhed
```

پاسخ تعیین عدد

بنا به‌فرض داریم:

$$۱۰A+۱=۳(A+۱۰۰۰۰۰)$$
$$\Longrightarrow A=۴۲۸۵۷$$

پاسخ کدام سنگینتر است

درردیف‌هریال ازصندوق‌اول ۳ گلوله و ازصندوق دوم‌چهارگلوله قرارگرفته است. وچون‌دوصندوق‌با ابعاد مساوی هستند بنابراین نسبت قطر هرگلوله از صندوق اول به گلولهٔ صندوق دوم برابراست با$\frac{۳}{۴}$ درنتیجه نسبت حجم وهمچنین‌نسبت وزن آنها برابر می‌شود با$\frac{۲۷}{۶۴}$. اگر وزن هرگلوله ازصندوق اول را واحد فرض‌کنیم، وزن هر گلوله از صندوق دوم برابر است‌با $\frac{۲۷}{۶۴}$ ووزن دوصندوق به ترتیب برابر خواهد شد با :

$$۲۷\times۱=۲۷$$ و
$$۶۴\times\frac{۲۷}{۶۴}=۲۷$$

یعنی‌دوصندوق‌دارای وزنهای‌متساوی می‌باشند.

حل مسائل نمونه

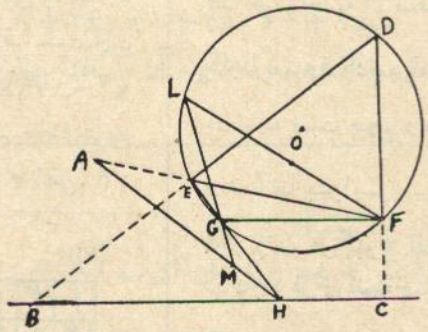
مسئلهٔ کاستیلون

فرستنده : **محمود محمودی مجدآبادی**
دانشجوی رشتهٔ ریاضی دانشسرای عالی تهران

۴۴۷۰ ـ یك دایره و سه نقطهٔ A و B و C واقع در صفحهٔ آن مفروض است. مثلث DEF را در دایرهٔ مزبور چنان محاط کنید که هر ضلعش از یکی از نقاط مفروض بگذرد.

این مسئله ابتدا بوسیلهٔ **کرامر** مطرح شده و بعد در سال ۱۷۷۶ توسط ریاضیدان ایتالیائی **کاستیلون** حل گردیده است. حالت خاصی ازاین مسئله توسط **پاپوس** در قرن چهارم میلادی طرح شده است ، بدین معنی که سه نقطهٔ A و B و C بریك خط انتخاب شده‌اند ،

حل مسئله ـ مسئله را حل شده فرض می‌کنیم از F موازی با BC رسم می‌کنیم تا دایره را در G قطع کند و GE را رسم می‌کنیم تا BC را در H قطع کند . دو مثلث



BEH و BDC متشابهند . زیرا زاویهٔ B درهر دو مشترك است و دوزاویهٔ BHE و BDC باهم برابرند زیرا هردو با زاویهٔ HGF برابر می‌باشد. خواهیم داشت .

$$\frac{BH}{BD}=\frac{BE}{BC} \Longrightarrow BH=\frac{BD\cdot BE}{BC}$$

حاصل‌ضرب BD.BE برابراست باقوت نقطهٔ B نسبت به دایره که مقدار آن معلوم است و چون طول BC هم معلوم است بنابراین موقع H روی BC معلوم می‌باشد.

AH را وصل کرده وازF موازی باAH رسم می‌کنیم تا دایره را در L قطع کند و LG رانیز رسم‌می‌کنیم‌تا AH را در M قطع کند. دومثلث AEH و MGH متشابهند زیرا زاویهٔ H درهردو مشترك است ودوزاویهٔ E و M که هردو با زاویهٔ L مکمل می‌باشند بایکدیگر برابرند. خواهیم داشت :

$$\frac{HM}{HE}=\frac{HG}{HA} \Longrightarrow HM=\frac{HG\ HE}{HA}$$

حاصل‌ضرب HG.HE که برابراست‌باقوت H نسبت به دایرهٔ وهمچنین طول HA معلوم است پس موقع M برAH معلوم می‌باشد. دوزاویهٔ AHB وLFG باهم‌برابرند زیرااضلاعشان نظیر به نظیر متوازی‌می‌باشند. بنابراین حل مسئله به‌این منجر می‌شودکه ابتدا H وبعد M را باشرایط مذکور درفوق تعیین کنیم بعد زاویهٔ دلخواهی برابر با زاویهٔ AHB در دایره محاط‌کرده دایرهٔ دیگری هم مرکز با دایرهٔ مفروض و مماس بروتر مقابل به زاویهٔ محاطی مزبور رسم می‌کنیم . از M بر دایرهٔ اخیر مماس می‌کنیم تا دایرهٔ مفروض را درG وL قطع کند و از این نقاط موازی با AM و BC رسم می‌کنیم‌که یکدیگررا روی دایره در F قطع می‌کنند . باتعیین F دو رأس دیگر مثلث به سادگی مشخص می‌شوند .

بحث در مسئله به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

* * *

مسائل برای حل

مسائل متفرقه

۴۴۷۱ـ ترجمهٔ: **جعفر آقایانی چاوشی**

آقای دبیر کثیرالجملهٔ $f(x)$ را با ضرایب صحیح روی تختهٔ سیاه نوشت و خطاب به دانش‌آموزان اظهار داشت‌که : امروز جشن سالروز تولد پسر من است‌که A سال را پشت سر گذاشته است . با توجه به اینکه :

$$f(A)=A \text{ و } f(0)=p$$

و p عدد اول بزرگتر از A است ، سن پسر مرا تعیین‌کنید .

۴۴۷۲ فرستنده : **منوچهر دهقان**

دبیر دبیرستانهای شهرکرد

شعاع دایره چقدر باشد تا مساحت قطاعی‌که محیطش $2a$ است بزرگترین مقدار خودرا داشته باشد .

۴۴۷۳ـ ترجمه‌از مجلهٔ «ریاضیات مقدماتی»

مثلث ABC مفروض است .

اولا نقطهٔ D را برضلع AB ونقطهٔ E را برضلع AC چنان تعیین‌کنید‌که سه مثلث ADE و DBE و EBC معادل باشند .

ثانیاً اگر مثلث ABC درزاویهٔ A قائمه و $AC=b$ و $AB=c$ باشد فاصلهٔ‌را D را از خط BE برحسب b و c حساب‌کنید .

۴۴۷۴ـ فرستنده : **مهرداد بزرگمهر**

تابع زیر مفروض است.

$$y=x^3+px+q$$

چه رابطه‌ای بین p و q برقرار باشد تا منحنی نمایش تابع نیمساز ربع اول و سوم را درسه نقطه قطع‌کند و این سه نقطه و مبدأ مختصات یك تقسیم توافقی تشکیل دهند.

۴۴۷۵ـ از **رافیك میناسیان**

اگر داشته باشیم :

$$\alpha+\beta+\gamma=\operatorname{Arcsin} m$$

و $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ ریشه‌های معادلهٔ :

$$a\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma x^3+bx^2+cx+d=0$$

باشند هریك از روابط زیررا نتیجه بگیرید .

$$m=\frac{d-b}{a}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=-\frac{d}{a}$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{c\pm\sqrt{a^2-(d-b)^2}}{a}$$

۴۴۷۶ـ فرستنده : **منوچهر دهقان**

تابع اولی تابع زیررا تعیین‌کنید.

$$y=\frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}$$

۴۴۷۷ـ از **محمدرضا یزدان**

تابع اولی تابع زیررا تعیین‌کنید .

$$y=tg^{2n}x$$

۴۴۷۸ـ فرستنده : **حسن گل‌محمدی**

نوع مثلثی را تعیین‌کنید‌که در آن رابطهٔ زیر برقرار باشد .

$$tg^2\frac{B+C}{2}=tgB\,tgC$$

۴۴۷۹ـ فرستنده : **حسن گل محمدی**

مطلوبست حل معادلهٔ زیر برحسب x

$$\sum_{r=0}^{n} p^{x+r} = \sum_{r=0}^{n} q^{x+r}$$

۴۴۸۰ـ از : **کاظم حافظی**

معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$cotg^{2}x = tg^{3}x$$

۴۴۸۱ـ ترجمه ازفرانسه

ابعاد مستطیلی برحسب دسیمتر عددهای صحیح وبرحسب متر عددهای اعشاری می‌باشند. محیط مستطیل بـرحسب متر و مساحت آن برحسب متر مربع بایك عدد بیان می‌شوند . ابعاد مستطیل را پیدا کنید .

۴۴۸۲ـ فرستنده : **محمود محمودآبادی**

دانشجوی ریاضی دانشسرای عالی

عـددی چهار رقمی مضرب ۹ را پیدا کنیدکه دارای ۱۲ مقسوم علیه باشد و مجموع مقسوم علیه های آن مضرب ۸ بوده ۱۸ مقسوم علیه داشته باشد .

۴۴۸۳ـ ترجمه از «مجلهٔ ریاضیات ، آمریکا»

ثابت کنید مجموع هر دو عدد فرد متوالی که هیچکدام مضرب ۳ نباشند مضربی است از ۱۲

۴۴۸۴ـ ترجمه از «مجلهٔ ریاضیات ، آمریکا»

سه عدد صحیح مخالف صفر تصاعدی هندسی می‌سازند که قدرنسبت آن نیز عدد صحیح است. اگر به کوچکترین این عددها ۹ واحد بیفزائیم عدد حاصل با دو عدد دیگر تصاعدی حسابی تشکیل می‌دهد. کلیهٔ مقادیر ممکن عددهای مزبوررا تعیین کنید.

۴۴۸۵ـ فرستنده : **جواد منیر واقفی** از انگلستان

ثابت کنید که حاصل عبارت :

$$A = 7^{n}(3n+1) - 1$$

به ازاء مقادیر مثبت n بر ۹ بخش‌پذیر است .

۴۴۸۶ـ فرستنده : **محمد مهدی عابدی نژاد**

اضلاع AB و CD از چهارضلعی $ABCD$ یکدیگررا در O و اضلاع AD و BC یکدیگررا در O' قطع می‌کنند. روی OA ، OC ، $O'A$ و $O'C$ به ترتیب قطعات OE ، OF ، $O'E'$ و $O'F'$ را مساوی با AB ، CD ، AD ، و BC جدا می‌کنیم . ثابت کنیدکه EF با $E'F'$ موازی است.

۴۴۸۷ـ ترجمه ازکتاب‌ریاضی دبیرستانی فرانسه .

مثلث ABC دردایرهٔ به شعاع R محاط است قطرهای دایـره را از A و B و C رسم می‌کنیم که با دایره در نقـاط دیگر A' و B' و C' متقاطع می‌باشند . اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی‌مثلث مفروض باشد ثابت کنیدکه محیط شش‌ضلعی $AB'CA'BC'$ برابر است با : $4(R+r)$

۴۴۸۸ـ ترجمه از فرانسه

مثلث ABC مفروض است.ضلعهای BA و CA را به ترتیب حول B و C به اندازهٔ زاویهٔ θ و دریك جهت دوران می‌دهیم و وضع جدیدآنها را به ترتیب D و D' می‌نامیم . از نقاط B و C خطوط Δ و Δ' را موازی با D و D' رسم می‌کنیم که یکدیگررا در M قطع می‌کنند. وقتی θ تغییر کند مکان نقطهٔ M چه می‌باشد .

۴۴۸۹ـ ترجمه از فرانسه

مربع مستطیل $ABCD$ به‌مرکز O را درنظرمی گیریم. نقطهٔ M را درصفحهٔ مستطیل اختیارکرده وآن‌را به ترتیب در P ، Q ، R و S برضلعهای AB ، BC ، CD و DA تصویر می‌کنیم .

۱) ثابت کنیدکه خطوط PS و QR روی خط BD و خطوط QP و RS روی خط AC متقاطع می‌باشند.

۲) مکان M را تعیین‌کنید برای‌آنکه هریك ازنقاط P ، Q و R و S نقطهٔ تلاقی‌ارتفاعات مثلثی‌باشدکه از سه‌نقطهٔ‌دیگر تشکیل می‌شود .

۴۴۹۰ـ ترجمهٔ : **جعفر آقایانی چاوشی**

مثلثی را که رأسهای آن نقاط تماس دایرهٔ محاطی یك مثلث با ضلعهای آن می‌باشد مثلث تماسی می‌نامیم . هرگاه S مساحت مثلث ABC و T و T_a و T_b و T_c بـه ترتیب مساحتهای مثلثهای تماسی دایرهٔ محاطی داخلی و دایره های محاطی خارجی‌مثلث‌باشد ثابت کنیدکه :

$$(1) \quad T_a + T_b + T_c - T = 2S$$

$$(2) \quad \frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} + \frac{1}{T_c} = \frac{1}{T}$$

۴۴۹۱ـ ترجمهٔ : **جعفر آقایانی چاوشی**

هرگاه O نقطه‌ای ازمیانهٔ AM مثلث ABC باشد و خطوط BO و CO ضلعهای AC و AB را به ترتیب در E و F قطع کنند ، ثابت‌کنیدکه اگر $AB > AC$ باشد :

$$BE > CF$$

خواهد بود .

۴۴۹۲ـ ترجمه از«مجلهٔ ریاضیات، آمریکا»

ثابت کنید که درهر مثلث بین R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی نامساوی (یا تساوی) زیر برقرار است .

$$\frac{r}{R}+\frac{R}{r}\geqslant\frac{5}{2}$$

تساوی وقتی برقرار است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

۴۴۹۳ـ ترجمه از «مجلهٔ ریاضیات، آمریکا»

مربع ABCD مفروض است. ربع دایرهٔ BD به‌مرکز A ونیمدایرهٔ به قطر BC را در داخل مربع رسم می‌کنیم که غیراز B درنقطهٔ T متقاطع می‌باشند. ثابت کنید دایره‌ای که در T بر ربع دایرهٔ BD ودریك نقطهٔ Q برضلع BC مماس باشد بر نیمدایرهٔ به قطر AB نیز مماس می‌باشد .

۴۴۹۴ـ ترجمه ازفرانسه

کرهٔ به مرکز O' و به شعاع R' داخل کرهٔ به‌مرکز O و به شعاع R قرار دارد وکرهٔ Σ بر O و O' گذشته با دو کرهٔ مزبور متقاطع می‌باشد . مساحت سطحی ازکرهٔ Σ راکه بین کره‌های O و O' محصوراست برحسب R و R' حساب کنید .

۴۴۹۵ـ از مسائل کنکور کشورهای خارج

دو نقطهٔ ثابت F و P مفروض است . بیضی متغیر (E) را درنظر می‌گیریم که F یك کانون آن بوده واز نقطهٔ P بگذرد وطول قطر اقصرآن مقدار ثابت $2b$ باشد.

۱) اگر F' کانون دیگر این بیضی و (Γ') دایرهٔ هادی نظیرآن باشد ثابت کنید که (Γ') بردایرهٔ ثابتی مانند (C) و همچنین برخط ثابتی مانند Δ مماس است .

۲) وضع F' را چنان تعیین کنید که طول قطر اطول بیضی (E) می‌نیمم باشد. مقادیر نظیر $2c$ فاصلهٔ کانونی، $2a$ طول قطر اطول و z خروج از مرکز بیضی را بر حسب b و $FP=x$ حساب کنید .

۳) اگر b ثابت باقی مانده و x ازصفر تا $+\infty$ ترقی کند جدول تغییرات و منحنی نمایش z را رسم کنید . اگر λ عددی محصور بین صفر ویك باشد دومقدار x_1 و x_2 برای x وجود داردکه درازاءآن $z=\lambda$ می‌باشد. رابطه‌ای مستقل از λ بین x_1 و x_2 تعیین کنید .

آیا می‌توانید قالبهایی از نوع زیر بسازید ؟

طرح از: **جعفر بنائی**

کرسی ریاضیات دانشکدهٔ افسری

$$\sqrt{\frac{42^2+63^2+84^2}{24^2+36^2+48^2}}=\sqrt[n]{\frac{42^n+63^n+84^n}{24^n+36^n+48^n}}$$

$$\sqrt{\frac{402^2+603^2+804^2}{204^2+306^2+408^2}}=\sqrt[n]{\frac{402^n+603^n+804^n}{204^n+306^n+408^n}}$$

. . . . . .

اگر a و b و c اضلاع و A و B و C زوایای یك مثلث باشند داریم :

$$(a\sin A+b\sin B)^2=(a^2+b^2)(\sin^2 A+\sin^2 B)$$

$$(b\sin B+c\sin C)^2=(b^2+c^2)(\sin^2 B+\sin^2 C)$$

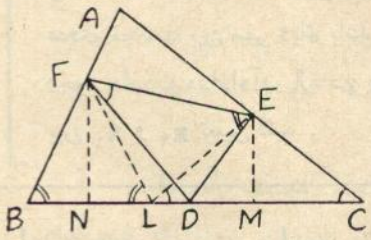
$$(c\sin C+a\sin A)^2=(c^2+a^2)(\sin^2 C+\sin^2 A)$$

$$(a\sin A+b\sin B+c\sin C)^2=(a^2+b^2+c^2)(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$$

حل مسائل یکان شمارهٔ ۴۵

۴۴۰۹ـ نقطه‌های D و E و F را برضلعهای BC و AC و AB ازمثلث ABC چنان انتخاب می‌کنیم که مثلث DEF با مثلث ABC متشابه باشد . اگر MN تصویر EF بر BC باشد ثابت کنیدکه طول MN نصف طول BC است .

حل ـ بر BC نقطهٔ L را چنان انتخاب می‌کنیم که LM = CM باشد . مثلث ELC متساوی‌الساقین بوده نتیجه می‌شود که زاویهٔ ELC با زاویهٔ ECL برابر باشد و چون زاویهٔ ECL با زاویهٔ EFD برابر است پس دوزاویهٔ ELD و EFD با هم برابر

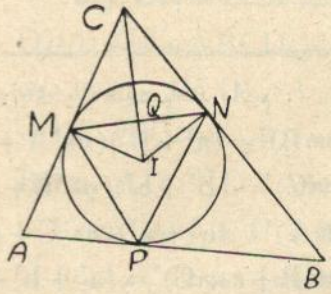


بوده چهارضلعی EFLD محاطی است. نتیجه می‌شودکه زاویهٔ FLD مکمل زاویهٔ FED باشد . زاویهٔ FLB مکمل زاویهٔ FLD و زاویهٔ FED با زاویهٔ FBL مساوی است . پس دو زاویهٔ FBL و FLB با هم برابر بوده مثلث FBL متساوی‌الساقین است و BN = NL می‌باشد .

$$\left.\begin{array}{l} ML = MC \\ NB = NL \end{array}\right\} \Longrightarrow MN = \frac{BC}{۲}$$

۴۴۱۰ـ اگر P و M و N نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با ضلعهای آن باشد . طول ضلعهای مثلث PMN را برحسب a و b و c طول ضلعهای مثلث بدست آورید .

حل ـ اگر I مرکز دایرهٔ محاطی و Q نقطهٔ تلاقی IC با MN باشد دو مثلث IMQ و IMC متشابه بوده و داریم :



$$\frac{MQ}{MI} = \frac{MC}{IC} \Longrightarrow$$

$$MQ = \frac{MI\ MC}{IC}$$

$$MN = ۲MQ \text{ و } IM = r \text{ و } MC = p - c$$

$$IC = \sqrt{IM^۲ + MC^۲} = \sqrt{r^۲ + (p-c)^۲}$$

$$MN = \frac{۲r(p-c)}{\sqrt{r^۲ + (p-c)^۲}}$$

و

$$MP = \frac{۲r(p-a)}{\sqrt{r^۲ + (p-a)^۲}}$$

$$PN = \frac{۲r(p-b)}{\sqrt{r^۲ + (p-b)^۲}}$$

با توجه به اینکه داریم :

$$r = \frac{abc}{۴\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

مقادیر فوق برحسب طولهای سه ضلع بدست آمده است .

۴۴۱۱ـ ثابت کنیدکه بین y' و y'' مشتقهای اول و دوم تابع $y = \frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}$ و خود تابع رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{۴y^۲ - ۳y - ۱}{y+۱} = \left(\frac{y''}{y'}\right)^۲$$

حل ـ داریم :

$$y' = \frac{-۴x}{(x^۲-۱)^۲} \text{ و } y'' = \frac{۴(۳x^۲+۱)}{(x^۲-۱)^۳}$$

$$\frac{yy'}{y''} = -\frac{x(x^۲+۱)}{(۳x^۲+۱)}$$

$$x^۲ = \frac{y+۱}{y-۱} \Longrightarrow \frac{y'}{y''} = -\frac{x}{۲y+۱}$$

$$x^۲ = \left(\frac{y'}{y''}\right)^۲ (۴y^۲ + ۴y + ۱) = \frac{y+۱}{y-۱}$$

$$\left(\frac{y''}{y'}\right)^۲ = \frac{۴y^۲ - ۳y - ۱}{y+۱}$$

۴۴۱۲ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sqrt{۱۷ + x - ۸\sqrt{x+۱}} + \sqrt{۲۶ + x - ۱۰\sqrt{x+۱}} = ۱$$

حل- داریم :

$$17+x-8\sqrt{x+1}=(4-\sqrt{x+1})^2$$

$$26+x-10\sqrt{x+1}=(5-\sqrt{x+1})^2$$

و معادلهٔ مطلوب به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$|4-\sqrt{x+1}|+|5-\sqrt{x+1}|=1$$

حالتهای زیر را درنظر می‌گیریم :

الف ـ داشته باشیم :

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}\leq 4\\ \sqrt{x+1}<5\end{cases}\Longrightarrow x\leq 15$$

و خواهیم داشت :

$$4-\sqrt{x+1}+5-\sqrt{x+1}=1$$

$$2\sqrt{x+1}=8 \Longrightarrow x=15$$

ب ـ داشته باشیم :

$$\begin{cases}4<\sqrt{x+1}\\ 5\geq\sqrt{x+1}\end{cases}\Longrightarrow 15<x\leq 24$$

و خواهیم داشت:

$$-4+\sqrt{x+1}+5-\sqrt{x+1}=1 \Longrightarrow 1=1$$

که رابطه‌ای است مستقل از x

ج ـ داشته باشیم :

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}>4\\ \sqrt{x+1}\geq 5\end{cases}\Longrightarrow x\geq 24$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$-4+\sqrt{x+1}-5+\sqrt{x+1}=1$$

$$\sqrt{x+1}=5 \Longrightarrow x=24$$

نتیجهٔ کلی آنکه معادله دارای جوابهای نامحدود زیر می‌باشد :

$$15\leq x\leq 24$$

۴۴۱۳ـ اگر $y=ax^m+bx^{-n}$ و a و b دوعدد صحیح و m و n دوعدد صحیح ومثبت باشند مقادیر m و n را چنان تعیین‌کنیدکه داشته باشیم :

$$x^2y''+2xy'=12y$$

حل- داریم :

$$y'=max^{m-1}-nbx^{-n-1}$$

$$y''=m(m-1)ax^{m-2}+n(n+1)bx^{-n-2}$$

در رابطهٔ داده شده منظور کرده و ساده می‌کنیم ؛ حاصل می‌شود :

$$m(m+1)ax^m+n(n-1)bx^{-n}=12ax^m+12bx^{-n}$$

$$\begin{cases}m(m+1)=12\\ n(n-1)=12\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}m=3\\ n=4\end{cases}$$

۴۴۱۴ـ p تابعی است برحسب متغیر r با رابطهٔزیر:

$$p=A+Br^{-2}+Cr^2$$

صحت رابطهٔ زیر را تحقیق‌کنید :

$$rp''+3p'=8Cr$$

حل- داریم :

$$p'=-2Br^{-2}+2Cr$$

$$p''=6Br^{-4}+2C$$

$$rp''+3p'=\dots=8Cr$$

۴۴۱۵ـ مقدار x را برحسب n چنان تعیین‌کنید که تابع زیر ماکزیمم باشد.

$$y=\left[x^{\frac{2}{n}}-x^{\frac{n+1}{n}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

حل ـ مشتق‌تابع‌راتعیین‌کرده حاصل را برابرصفرقرار می‌دهیم نتیجه‌خواهدشد :

$$\frac{2}{n}x^{\frac{2-n}{n}}=\frac{n+1}{n}x^{\frac{1}{n}}$$

$$2x^{\frac{2-n}{n}}=(n+1)x^{\frac{1}{n}}$$

$$2^nx^{2-n}=(n+1)^nx$$

$$\frac{2^n}{x^{n-2}}=(n+1)^nx$$

$$x^{n-1}=\frac{2^n}{(n+1)^n} \quad \text{و} \quad x=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

۴۴۱۶ـ تابع $y=f(x)$ و پارامتر a را چنان تعیین کنیدکه بین مشتقات تابع رابطهٔ :

$$y''(x-1)+2y'=2a$$

برقرار بوده ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی نمایش تابع درنقطهٔ $A(2\text{ و }1)$ برابر با ۲ و ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی تابع $g=y'$ در ازاء $g=1$ برابر با صفر باشد .

حل- از طرفین رابطهٔ داده شده نسبت به x تابع اولیه می‌گیریم نتیجه‌می‌شود :

$$y'(x-1)+y=2ax+b$$

$$y'=\frac{2ax+b-y}{x-1}$$

$$(x=2 \text{ و } y=1 \text{ و } y'=2) \Longrightarrow 4a+b=3$$

$$g=y' \Longrightarrow g'=y''$$

$$g'(x-1)+2g=2a$$

$$(g=1 \text{ و } g'=0) \Longrightarrow a=1 \Longrightarrow b=-1$$

$$y'(x-1)+y=2x-1$$

$$y(x-1)=x^2-x+c$$

$$(x=2 \text{ و } y=1) \Longrightarrow c=-1$$

$$y=\frac{x^2-x-1}{x-1}$$

۴۴۱۷ـ تابع $F(x \text{ و } y)=0$ را بقسمی تعیین کنید که منحنی نمایش آن از $A(-2 \text{ و } 1)$ گذشته وبین مشتقات آن رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$y'[(x+y)^2-1]=1$$

حل ـ می‌توان نوشت :

$$y'(x+y)^2=1+y'$$

$$y'=\frac{1+y'}{(x+y)^2}$$

$$u=x+y \Longrightarrow u'=1+y'$$

$$y=-\frac{1}{x+y}+C$$

$$(x=-2 \text{ و } y=1) \Longrightarrow C=0$$

$$y=-\frac{1}{x+y} \text{ یا } y^2+xy+1=0$$

۴۴۱۸ـ از دستگاه زیر مقادیر کمانهای α و φ را برحسب m بدست آورید :

$$\begin{cases} tg^3\varphi=tg(\alpha-3\varphi) \\ m\,tg^3\varphi=\sin(\alpha-3\varphi) \end{cases}$$

حل ـ از دستگاه بالا خواهیم داشت :

$$\frac{\cos(\alpha-3\varphi)}{\cos^3\varphi}=\frac{\sin(\alpha-3\varphi)}{\sin^3\varphi}=m$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha-3\varphi)=m\cos^3\varphi \\ \sin(\alpha-3\varphi)=m\sin^3\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\cos(\alpha-3\varphi)=m(\cos 3\varphi+3\cos\varphi) \\ 4\sin(\alpha-3\varphi)=m(3\sin\varphi-\sin 3\varphi) \end{cases}$$

طرفین رابطهٔ اول این دستگاه را در $\cos 3\varphi$ و ازدومی را در $\sin 3\varphi$ ضرب کرده نتایج را از هم کم می‌کنیم ، بعد از اختصار نتیجه خواهد شد :

$$4\cos\alpha=m(1+3\cos 4\varphi)$$

ازطرف دیگر داریم :

$$\begin{cases} 16\cos^2(\alpha-3\varphi)=m^2(\cos 3\varphi+3\cos\varphi)^2 \\ 16\sin^2(\alpha-3\varphi)=m^2(3\sin\varphi-\sin 3\varphi)^2 \end{cases}$$

ازجمع طرفین دو رابطهٔ اخیر وبعد از اختصار خواهیم داشت :

$$\cos 4\varphi=\frac{8-5m^2}{3m^2}$$

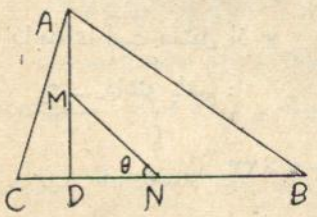
و از روی آن نتیجه خواهد شد :

$$\cos\alpha=\frac{2-m^2}{m}$$

۴۴۱۹ـ درمثلث ABC ارتفاع AD را رسم کرده وسط AD را M و وسط BC را N می‌نامیم . به فرض اینکه B و C زاویه‌های حاده بوده و B از C کوچکتر باشد ثابت کنید که θ زاویهٔ حاده‌ای که MN با BC می‌سازد از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\cot g\theta=\cot g B-\cot g C$$

حل ـ مطابق شکل



داریم:

$$AD=b\sin C$$

$$MD=\frac{b\sin C}{2}$$

$$DN=CN-CD$$

$$DN=\frac{a}{2}-b\cos C$$

$$\cot g\theta=\frac{DN}{MD}=\frac{a-2b\cos C}{b\sin C}$$

$$\cot g\theta=\frac{\sin A-2\sin B\cos C}{\sin B\sin C}$$

$$\cot g\theta=\frac{\sin(B+C)-2\sin B\cos C}{\sin B\sin C}$$

$$\cot g\theta=\frac{\sin C\cos B-\sin B\cos C}{\sin B\sin C}$$

$$\cot g\theta=\cot g B-\cot g C$$

۴۴۲۰ـ مطلوبست تعیین حد کسر زیر وقتی $x\to 1$

$$\frac{\operatorname{Arctg} mx-\operatorname{Arctg} m}{x-1}$$

حل ـ این کسر به ازاء $x=1$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$

درمی‌آید . فرض می‌کنیم :

$$\mathrm{Arctg}\, mx = \alpha \;:\; tg\alpha = mx \text{ و } x = \frac{tg\alpha}{m}$$

اگر $x \to 1$ خواهیم داشت $\alpha = \mathrm{Arctg}\, m$. فرض می‌کنیم :

$$\alpha = \beta + \mathrm{Arctg}\, m \;:\; x \to 1 \;:\; \beta \to 0$$

کسر مفروض به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{\beta}{\frac{tg\alpha}{m} - 1} = \frac{\beta}{\frac{tg\beta + m}{m(1 - m\,tg\beta)} - 1} =$$

$$= \frac{m\beta - \beta m^2 tg\beta}{tg\beta + m^2 tg\beta} = \frac{m - m^2 tg\beta}{\frac{tg\beta}{\beta} + \frac{m^2 tg\beta}{\beta}}$$

وقتی $x \to 1$ یعنی $\beta \to 0$ حد کسر برابر خواهد شد با $\frac{m}{1+m^2}$

۴۴۲۱ـ اگر $\frac{\pi}{2} \geqslant x \geqslant 0$ باشد نامساویهای زیر را ثابت کنید :

$$x - \sin x \leqslant \frac{1}{6}x^3$$

$$2x < \sin x + tg\, x$$

$$\sqrt{\cos x} < \cos\frac{x}{2}$$

حل‌ـ اگردوتابع $f(x)$ و $g(x)$ درازاء $x = 0$ مقادیر مساوی داشته باشند برای مقادیر مثبت x وقتی $f(x) > g(x)$ است که $f'(x) > g'(x)$ باشد .

برای اثبات نامساوی اول تابع زیر را درنظر می‌گیریم

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \sin x - x$$

چون در ازاء $x = 0$ مقدار تابع صفر می‌شود پس اگر ثابت کنیم این تابع صعودی است نتیجه خواهد شد که $y \geqslant 0$ بوده نامساوی محقق می‌باشد . مشتق تابع را تعیین می‌کنیم :

$$y' = \frac{1}{2}x^2 + \cos x - 1$$

که در ازاء $x = 0$ برابر صفر است پس باید ثابت کنیم که $y' \geqslant 0$ است و برای این کار باید $y'' > 0$ باشد

$$y'' = x - \sin x$$

$$y''' = 1 - \cos x \geqslant 0 \Longrightarrow y'' \geqslant 0 \Longrightarrow y' \geqslant 0 \Longrightarrow y \geqslant 0$$

برای دو نامساوی دیگر هم به ترتیب فوق عمل می‌کنیم .

۴۴۲۲ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد N بر عدد a برابر با یك باشد ثابت کنید که $N^p - mN + m - 1$ بر a بخش‌پذیر است . m عددی است صحیح .

حل‌ـ باقیماندهٔ تقسیم عدد N^p بر a برابر است با $1^p = 1$ و باقیماندهٔ تقسیم mN بر a برابر است با : $m \times 1 = m$ بنابراین باقیماندهٔ تقسیم عبارت مزبور بر a برابر است با :

$$1 - m + m - 1 = 0$$

۴۴۲۳ـ هرگاه p عدد اول باشد و باقیماندهٔ تقسیم p^2 بر ۳ مخالف باشد با باقیماندهٔ تقسیم p بر ۳ ، ثابت کنید که مجموع زیر بر ۳ قابل قسمت است .

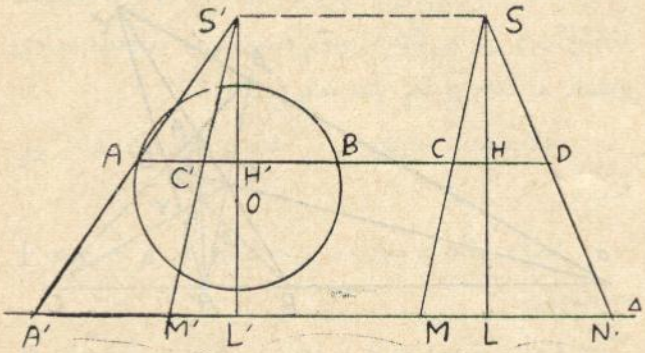
$$p^{2n+1} + p^{2n-2} + \dots + p + n$$

حل‌ـ حکم مسئله درصورتی مورد دارد که $p \neq 3$ باشد. بنا به فرض $p^2 - p$ بر ۳ قابل‌قسمت‌نیست. بنابراین باقیماندهٔ تقسیم p بر ۳ فقط می‌تواند ۲ (یا ۱ ـ) باشد . دراین صورت باقیماندهٔ تقسیم هرتوان فردی بر ۳ نیز برابر با ۱ ـ بوده باقیماندهٔ تقسیم عبارت :

$$p^{2n+1} + p^{2n-2} + \dots + p$$

بر ۳ برابر است با $n(-1) = -n$ ونتیجه‌می‌شود که‌عبارت مفروض بر ۳ قابل قسمت است .

۴۴۲۴ـ خطی موازی امتداد معین Δ چنان رسم کنید که دایرهٔ معلوم O را در A و B وضلعهای زاویهٔ معلوم S را در C و D قطع کرده نسبت قطعه خط AB برقطعه خط CD برابر مقدار معین K باشد .



حلـ اگر مسئله حل شده باشد بقسمی که ABCD قاطع مطلوب باشد و داشته باشیم :

$$\frac{AB}{CD}=k$$

از S عمودی بر Δ رسم می‌کنیم که آنرا در L وقاطع را در H قطع می‌کند ومی‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{CH}{CD}=\frac{ML}{MN}=l$$

از O مرکز دایره OL′ را عمود بر Δ رسم می‌کنیم که قاطع را در H′ قطع می‌کند و از S موازی با Δ رسم می‌کنیم که OL′ را در S′ قطع می‌کند وبالاخره از S′ موازی با SM رسم می‌کنیم که Δ را در M′ تلاقی می‌کند داریم :

$$C'H'=CH=l\cdot CD$$

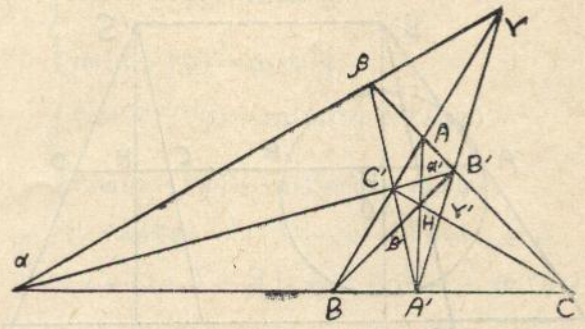
$$\frac{AB}{CD}=k \Longrightarrow \frac{AB}{C'H'}=kl$$

$$(1)\quad \frac{A'L'}{M'L'}=\frac{AH'}{C'H'}=۲kl$$

راه حل مسئله از این قرار می‌شود که پس از تعیین S′ و رسم خطوط S′L′ و S′M′ نقطهٔ A′ را بر Δ چنان‌تعیین‌کنیم که نسبت (۱) برقرار باشد . پس ازتعیین A′ نقطهٔ A تعیین شده وقاطع رسم می‌شود .

۴۴۲۵ـ درمثلث ABC نقاط A′ و B′ و C′ به‌ترتیب پای ارتفاعات نظیر رأسهای A و B و C می‌باشد . اگر α نقطهٔ‌تلاقی BC با B′C′، β نقطهٔ‌تلاقی AC با A′C′ و γ نقطهٔ تلاقی A′B′ با AB باشدثابت‌کنید که‌سه نقطهٔ‌تلاقی α و β و γ بریك استقامت واقعند .

حلـ می‌دانیم که ارتفاعات مثلث ABC نیمسازهای



زاویه‌های مثلث‌ارتفاعیهٔ A′B′C′ می‌باشند. بنابراین α و α′ مزدوج توافقی نسبت به B′ و C′ بوده دستگاه اشعهٔ :

(A·αC′α′B′)

توافقی بوده خواهیم داشت :

$$(1)\quad \frac{\alpha B}{\alpha C}=\frac{A'B}{A'C}$$

و به طریق مشابه نتیجه خواهیم گرفت که :

$$(2)\quad \frac{\beta C}{\beta A}=\frac{B'C}{B'A}$$

$$(3)\quad \frac{\gamma A}{\gamma B}=\frac{C'A}{C'B}$$

از تشابه دو مثلث A′HB و AHB′ خواهیم داشت :

$$(4)\quad \frac{BA'}{AB'}=\frac{HB}{HA}$$

و به طریق مشابه خواهیم داشت :

$$(5)\quad \frac{B'C}{BC'}=\frac{HC}{HB}$$

$$(6)\quad \frac{C'A}{CA'}=\frac{HA}{HC}$$

طرفین روابط (۱) و (۲) و (۳) را درهم وطرفین روابط (۴) و (۵) و (۶) را درهم ضرب می‌کنیم نتیجه خواهد شد :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=۱$$

بنا به عکس قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شودکه سه نقطهٔ α و β و γ بریك خط مستقیم واقعند .

۴۴۲۶ـ از رابطهٔ زیر مقادیر عددی عاملهای A و B و... و J را بدست‌آورید .

$$A+AB+ABC+ABCD+ABCDE+ABCDEF+ABCDEFG+ABCDEFGH+ABCDEFGHI+ABCDEFGHIJ=۲۸۷۹$$

حلـ هریك از جملات ودرنتیجه مجموع طرف‌اول بر A قابل‌قسمت‌است وچون ۲۸۷۹ عدداول‌است‌پس نتیجه‌می‌شود که:

$$A=۱$$

و تساوی بالا به صورت زیر درمی‌آید .

$$B(۱+C+CD+\cdots+CDEFGHIJ)=۲۸۷۸=۲\times۱۴۳۹$$

عدد ۱۴۳۹ اول است وچون مجموع داخل پرانتز بزرگتراز ۲ است پس :

$$B=۲$$

و تساوی چنین خواهد شد :

$$C(1+D+DE+\cdots+DEFGHIJ)$$
$$=1438=2\times 719$$

عدد ۷۱۹ اول است پس : $C=2$

به طریق مشابه خواهیم داشت :

$$D=2 \text{ و } E=2 \text{ و } F=2$$
$$G(1+H+HI+HIJ)=88=2\times 44$$
$$=4\times 22=8\times 11$$

اگر ۴۴ و ۲۲ و ۱۱ و ۸ و ۲ = G انتخاب شود عاملهای H ، I و J برابر با یك بدست می‌آید. فرض می‌کنیم :

$$G=4$$

و خواهیم داشت :

$$H(1+I+IJ)=21=3\times 7$$
$$H=3$$
$$I(1+J)=6 \Longrightarrow I=2 \text{ و } J=2$$

۴۴۲۷ـ قرینهٔ میانهٔ نظیر یك رأس مثلث را نسبت به نیمساز زاویهٔ همان رأس شبه میانه می‌نامیم ثابت‌کنیدکه اگردر مثلثی دو شبه میانه باهم برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است .

حل ـ اگر k_a شبه میانهٔ نظیر رأس A ازمثلث ABC به طول ضلعهای a و b و c باشد بنا به قضیهٔ استوارت طول هریك از قطعه خطهایی‌که توسط این شبه میانه روی ضلع BC تشکیل می‌شود برابر است با :

$$\frac{ab^2}{b^2+c^2} \text{ و } \frac{ac^2}{b^2+c^2}$$

و ازآنجا نتیجه خواهد شدکه :

$$k_a=\frac{bc\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{b^2+c^2}$$
$$k_b=\frac{ac\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{a^2+c^2}$$

از تساوی $k_a=k_b$ یا $k_a^2=k_b^2$ نتیجه خواهد شد :

$$(b^2-a^2)[4a^2b^2c^2+2c^4(a^2+b^2)+2c^6$$
$$+a^2b^2(a^2+b^2)]=0$$

و از تساوی اخیر نتیجه می‌شودکه :

$$a^2=b^2 \Longrightarrow a=b$$

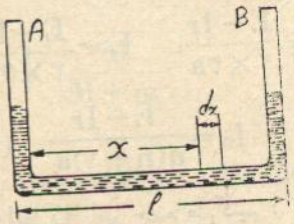
مسائل فیزیك

۴۴۲۸ـ لوله‌ای به‌طول l و به‌شکل U محتوی مقداری مایع است .

اولا اگرلوله را با شتاب γ به طرف راست حرکت دهیم اختلاف ارتفاع مایع در دو طرف چقدر خواهد بود.

ثانیاً اگر لوله را حول یکی از شاخه‌های آن بچرخانیم در این حالت اختلاف ارتفاع دو طرف چقدر است؟

حل ـ اگر اختلاف ارتفاع در دو طرف h باشد وجرم واحد طول مایع را m فرض کنیم مطابق فرمول



$$F=m\gamma$$

داریم :

$$h=\frac{l\gamma}{g} \quad \text{یا} \quad mgh=ml\gamma$$

ثانیاً اگرلولهٔ به شکل U حول شاخهٔ A دوران‌کند هر نقطه از مایع دارای نیروی گریز از مرکز خواهد بود طبق فرمول $F=mr\omega^2$ خواهیم داشت :

$$mgh=m\omega^2\int_0^l x\,dx \quad \text{ویا} \quad mgh=m\omega^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^l$$

$$h=\frac{l^2\omega^2}{2g}$$

۴۴۲۹ـ مدار انشعابی در نظر می‌گیریم‌که مدار اول شامل ۲ × ۱ مقاومت و مدار دوم شامل ۳ × ۲ و مدار سوم شامل ۴ × ۳ و .... مدارآخر شامل $n(n+1)$ مقاومت است دوسر انشعاب را به‌پیلی‌که نیروی محرکهٔ‌آن E ولت ومقاومت داخلی‌آن r اهم می‌باشد می‌بندیم درصورتی‌که مقاومتها مساوی ومقدار هرکدام a اهم باشد مطلوبست :

اولا ـ شدت جریان در هر مدار و مداری‌که شامل پیل است .

ثانیاً ـ مقاومت معادل را برحسب n و a و r و E حساب‌کنید .

ثالثاً ـ مقاومت معادل و شدت جریان درهرمدار وقتی‌که تعداد ردیفها یعنی انشعابها به سمت ∞ میل‌کند .

حل ـ اختلاف پتانسیل در هرمدار مسدود صفر است بنابراین :

$$E-Ir=(1\times 2a)I_1$$
$$E-Ir=(2\times 3a)I_2$$
$$E-Ir=(3\times 4a)I_3$$
$$E-Ir=[n(n+1)a]I_n$$

$$I=I_1+I_2+I_3+\dots+I_n=\sum_{n}^{n=1} I_n \quad (1)$$

ونتیجه می‌شود :

$$I_1=\frac{E-Ir}{1\times 2a} \quad I_2=\frac{E-Ir}{2\times 3a} \quad I_3=\frac{E-Ir}{3\times 4a}$$

$$I_n=\frac{E-Ir}{n(n+1)a} \quad (2)$$

روابط را باهم جمع می‌کنیم :

$$I_1+I_2+I_3+\dots+I_n=\frac{E-Ir}{a}\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$I=\frac{E-Ir}{a}\times\frac{n}{n+1} \Longrightarrow$$

$$I=\frac{nE}{(a+r)n+a} \quad (3)$$

وچون مقدار I را در روابط (۲) قرار دهیم

$$I_1=\frac{(n+1)E}{(a+r)n+a}\times\frac{1}{1\times 2}$$

$$I_2=\frac{(n+1)E}{(a+r)n+a}\times\frac{1}{2\times 3}$$

$$I_3=\frac{(n+1)E}{(a+r)n+a}\times\frac{1}{3\times 4}\dots$$

$$I_n=\frac{(n+1)E}{(a+r)n+a}\times\frac{1}{n(n+1)} \quad (4)$$

ثانیاً اگر مقاومت معادل را R بنامیم داریم :

$$E-Ir=IR$$

و چون ازرابطهٔ (۳) مقدار I را درآن بگذاریم :

$$E-r\times\frac{nE}{(a+r)n+a}=R\times\frac{nE}{(a+r)n+a}$$

$$\Longrightarrow R=\frac{n+1}{n}a \quad (5)$$

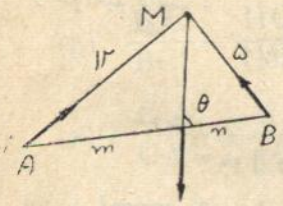
ثالثاً : اگر در روابط (۳) و (۴) و (۵) مقدار n را به سمت ∞ میل دهیم نتیجه می‌شود :

$$I=\frac{E}{a+r} \quad I_1=\frac{E}{a+r}\times\frac{1}{1\times 2}$$

$$I_2=\frac{E}{a+r}\times\frac{1}{2\times 3}$$

$$I_3=\frac{E}{a+r}\times\frac{1}{3\times 4}\dots I_n=\frac{E}{a+r}\times\frac{1}{n(n+1)}$$

۴۴۳۰ـ میله‌ای به‌طول ۱۳ واحد بوسیلهٔ دو نخ به طولهای ۵ و ۱۲ واحد به نقطهٔ ثابتی وصل شده است . میل میله را نسبت به قائم بیابید.



حلـ مطابق شکل داریم :

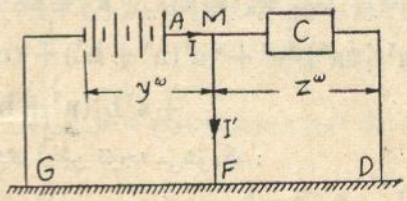
$$(m+n)cotg\theta=n\,cotg A-m\,cotg B$$

$$13\,cotg\theta=\frac{13}{2}(cotg A-cotg B)$$

$$cotg A=\frac{12}{5} \text{ و } cotg B=\frac{5}{12} \Longrightarrow cotg\theta=\frac{119}{120}$$

۴۴۳۱ـ مولد A در تلگرافخانه‌ای دارای نیروی الکتروموتوری ۵۰ ولت ومقاومت‌درونی۱۵ اهم‌می‌باشد.مقاومت خط تلگرافی۸۰ اهم ومقاومت گیرندهٔ C برابر ۵ اهم‌واتصال با زمین بطوری خوبست که می‌توان مقاومتهای دیگر را صفر فرض کرد. ناگهان درنقطه‌ای از خط بوسیلهٔ مقاومت x اتصالی با زمین پیدا می‌شود و در این هنگام شدت جریان درپست فرستنده ۰/۸۴ آمپر و درگیرنده ۰/۰۸۴ آمپر است .این پیش‌آمد درکجای خط رخ داده و مقاومت x چه اندازه است.

حلـ فرض می‌کنیم حادثهٔ اتصال در نقطهٔ M اتفاق



افتاده و فاصلهٔ اهمی این نقطه تا نقطهٔ A و C به‌ترتیب y و z باشد داریم :

$$y+z=80^{\omega} \qquad (1)$$

جریان I' که از x می‌گذرد برابر است با :

$$I'=0/84-0/084=0/756 \text{ آمپر}$$

از دوشبکهٔ MCDF و AMFG چنین بدست می‌آید:

$$(z+5)I_1-xI'=0 \qquad (2)$$

$$(15+y)I-50+xI=0 \qquad (3)$$

از جمع روابط (۲) و (۳) رابطهٔ (۴) حاصل می‌شود:

$$yI+zI_1=50-15I-5I \qquad (4)$$

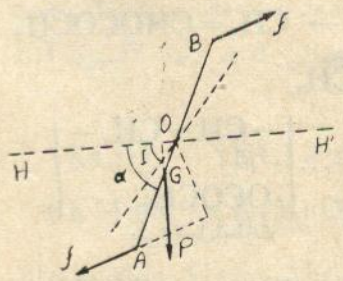
چون y را بین روابط (۱) و (۴) حذف کنیم خواهیم داشت:

$$z=\frac{95I+5I_1-50}{I-I_1}=\frac{30/22}{0/756}\#40 \text{ اهم}$$

یعنی نقطهٔ M درست در وسط راه واقع است و از معادلهٔ (۲) مقدار $x=5$ اهم بدست می‌آید.

۴۴۳۲ـ عقربه‌ای که‌درسطح نصف‌النهارمغناطیسی به‌آزادی می‌تواند برگرد محور افقی دوران کند بجای آنکه با سطح افق زاویهٔ $47'$ و 63° بسازد زاویهٔ 68° می‌سازد و این‌برای آن است که مرکز ثقل G عقربه درست برمحور دوران آن قرار ندارد . اگر وزن عقربه ۲۰ گرم و فاصلهٔ مرکز ثقل تا محور دوران $0/5\,cm$ وطول عقربه $8\,cm$ باشد چه‌وزنه‌ای باید برکنار B آن گذاشت تا به حال افقی بایستد.

حل ـ زاویهٔ تمایل حقیقی را I وزاویهٔ تمایل ظاهری عقربه‌را α ووزن آنرا P و طول‌آنرا $2l$ و فاصلهٔ مرکزثقل G تا نقطهٔ تعلیق O را d ووزنه‌ای‌را که باید بر B گذاشت تا عقربه به‌حال افقی بایستد x فرض می‌کنیم.



هنگامی که‌پیش از افزودن x عقربه درتحت‌اثرمیدان‌زمین به حال تعادل است حاصل جمع گشتاورهای نیروهای Af و GP نسبت به نقطهٔ تعلیق O صفر است یعنی:

$$2f\times OA'-P\times OG=0$$

یا

$$2fl\sin(\alpha-I)-Pd\cos\alpha=0$$

و چون عقربه بواسطهٔ افزودن وزنهٔ x به حال افقی در آید مجموع گشتاورها چنین می‌شود . اگر f را از این دورابطه حذف کنیم خواهیم داشت:

$$x=\frac{Pd}{l}\times\frac{\sin\alpha\cos I}{\sin(\alpha-I)}$$

$$=\frac{20\times 0/5}{4}\times\frac{\sin 68\cos 67^{\circ}47'}{\sin(4^{\circ}13')}\#13/94 \text{ گرم}$$

۴۴۳۳ـ پسری که روی زمین‌ایستاده است می‌تواندتوپی به وزن m را افقی با سرعت u پرتاب کند اگر او روی یك تنهٔ درخت بایستد بطوری‌که‌تنهٔ درخت بتواند به‌آسانی‌درجهتی که توپ پرتاب شده حرکت‌کند وپسر همان مقدار انرژی‌سابق را مصروف نماید ثابت‌کنید سرعت پرتاب برابراست‌با:

$$u\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

که M جرم پسر است .

حل ـ E_1 انرژی است که پسر برای جرم m ازآن استفاده‌می‌کند :

$$E_1=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mu^2 \qquad (1)$$

E_2 انرژی است که پسر بکار می‌برد و v_1 سرعت جرم M و u_1 سرعت جرم m است.

$$E_2=\frac{1}{2}(M+m)v_1^2+\frac{1}{2}(m)u^2$$

معادلات حرکت :

$$(M+m)v_1=mu$$

$$v_1=\frac{mu}{M+m}$$

$$E_1=E_2$$

$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}(M+m)v_1^2+\frac{1}{2}mu_1^2$$

$$u^2=\frac{mu^2}{M+m}+u_1^2$$

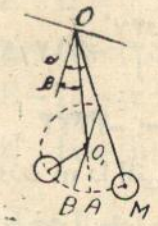
$$u_1^2=u^2\left(1-\frac{m}{M+m}\right)=u^2\frac{M}{M+m}$$

و

$$u_1=u\sqrt{\frac{M}{m+M}}$$

۴۴۳۴ـ وزنهٔ M به جرم m بوسیلهٔ نخ OM به‌طول l ازنقطهٔ ثابت O آویخته شده است‌وقتی‌که $t=0$ است‌ریسمان OM زاویهٔ α با خط قائم می‌سازد و سرعت وزنهٔ M صفراست

در مسیر حرکت M نخ OM به میخ نازك O_1 که عمود بر صفحهٔ مسیر است برخورد می‌کند (شکل زیر) موقعیت مکانی میخ از $OO_1 = h$ و زاویهٔ β معلوم می‌شود. می‌نیمم مقدار زاویهٔ α راطوری تعیین کنید که وقتی ریسمان OM به میخ‌می‌خورد دور آن بپیچد. از اندازهٔ‌میخ صرف نظر می‌شود.



حل ـ با استفاده از قضیهٔ فرس‌ویو می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = [(l-h)\cos\beta]mg \quad (a)$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = [2(l-h)]mg \quad (b)$$

دورابطهٔ(a) و (b) را جمع می‌کنیم نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = [(l-h)\cos\beta + 2(l-h)]mg \quad (c)$$

اما می‌بایست $v_C^2 = (l-h)g$ باشد تادورآن بپیچد. ودرضمن داریم:

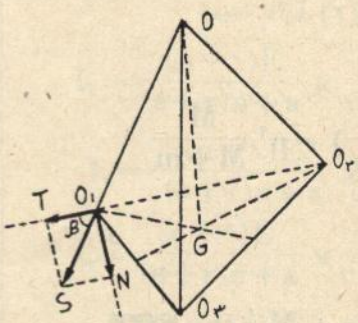
$$v_A^2 = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha)$$

دررابطهٔ (c) می‌گذاریم وپس از ساده‌کردن نتیجه می‌شود:

$$\cos\alpha = [\frac{h}{l}(\frac{3}{2} + \cos\beta) - \frac{3}{2}]$$

۴۴۳۵ـ سه کره به‌شعاع r را روی زمین قرارمی‌دهیم و یك کرهٔ دیگر به شعاع r را روی‌آنها می‌گذاریم ومجموعهٔ آنها را بوسیلهٔ نخی‌که دورسه‌کرهٔ پائین می‌بندیم نگاه می‌دارم کشش نخ‌را حساب‌کنید.

حل ـ مراکزاین‌چهار کره یك چهار وجهی منتظم تشکیل می‌دهند که وجوهش‌مثلثهای متساوی‌الاضلاع به‌ضلع 2r هستند و رأسهای این چهاروجهی‌مراکز کره‌ها است. اگر نیروئی که کرهٔ بالائی به کره‌های پائینی وارد می‌کند S بگیریم و آن را روی ارتفاع هرم تصویر کنیم خواهیم داشت



$$3S\cos\theta = P$$

و یا

$$3S \times \frac{O_2b}{OO_2} = P$$

$$S = \frac{\sqrt{6}}{6}P$$

و این نیروی S را به دونیروی T و N تجزیه‌می‌کنیم. نیروی N باعکس‌العمل زمین‌خنثی شده ونیروی T بطور افقی به‌ریسمان وارد می‌شود و $T = S\cos\beta$

$$T = \frac{\sqrt{2}}{6} \quad \text{ویا} \quad T = \frac{\sqrt{6}}{6}P \times \frac{2\sqrt{3}}{6} \quad \text{ویا}$$

و خود نیروی T را درامتداد دوطناب تجزیه می‌کنیم:

$$S' = \frac{\sqrt{6}}{18} \quad \text{ویا} \quad 2S'\cos 30 = T$$

۴۴۳۶ـ از ترکیب‌استیلن و اسیداستیك جسم A بدست می‌آید. از پلیمریزاسیون n ملکول A پلیمر B بدست‌می‌آید اگراین‌پلیمررا باسودترکیب کنیم پلیمرجدید C ومادهٔ‌غیرپلیمر D حاصل می‌شود درصورتی‌که از راندمان فعل و انفعالات صرف‌نظر نمائیم. مطلوبست:

۱ـ فرمول تمام فعل و انفعالات و نام مواد A وB وC و D.

۲ـ درصورتی‌که وزن O برابر m گرم باشد مطلوبست محاسبهٔ n و جرم ملکولی پلیمرهای B و C.

۳ـ از اثر بوتانال برروی‌پلیمرC چه جسمی‌پدیدمی‌آید ونام آن چیست وگستردهٔ یك حلقهٔ آنرا رسم نمائید.

حل ـ

$$CH_3COOH + CH \equiv CH \rightarrow CH_2 = CHOCOCH_3$$

$$nCH_2 = CHOCOCH_3 \rightarrow \ldots \left[\begin{array}{l} -CH-CH_2- \\ \quad | \\ \quad OCOCH_3 \end{array} \right]_n$$

پلی‌وینیل‌استات

$$\left[\begin{array}{l} -CH-CH_2- \\ \quad | \\ \quad OCOCH_3 \end{array} \right]_n \ldots + nNaOH$$

$$\rightarrow \ldots \left[\begin{array}{l} -CH-CH_2- \\ \quad | \\ \quad OH \end{array} \right] - nCH_3COONa$$

پلی‌وینیل‌الکل — استات‌سدیم

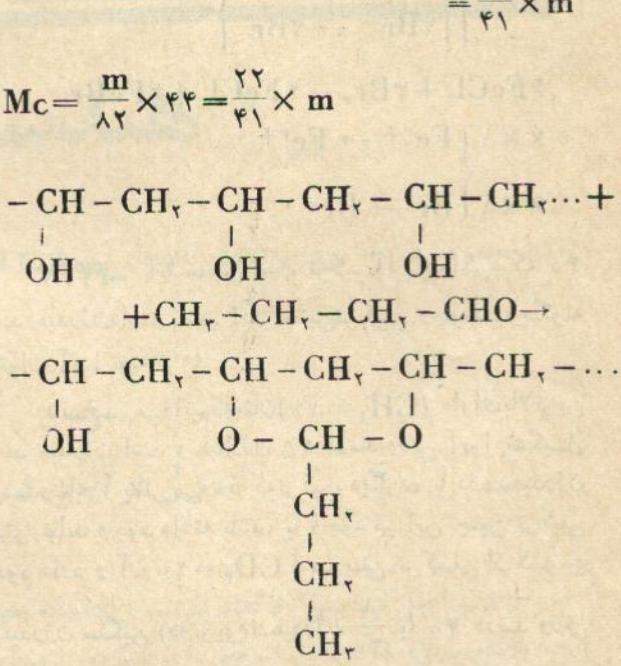
جسم D استات سدیم است که وزن آن m گرم می‌باشد:

$$n \times ۸۲ = m \; ; \; n = \frac{m}{۸۲}$$

برای محاسبهٔ جرم ملکولی B و C:

$$M_B = \frac{m}{۸۲} \times (\text{وزن ملکولی یك حلقه}) = \frac{m}{۸۲} \times ۸۶ = \frac{۴۳}{۴۱} \times m$$

$$M_C = \frac{m}{۸۲} \times ۴۴ = \frac{۲۲}{۴۱} \times m$$



نمایش فوق یك حلقه از **پلی وینیل بوتیرال** است که نام صنعتی این پلیمر بوتوار می‌باشد.

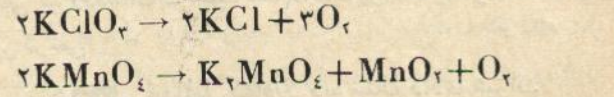
۴۴۳۷ـ آیا واکنش شیمیائی وجود دارد که درآن :

الف ـ اکسیژن اکسید شود؟

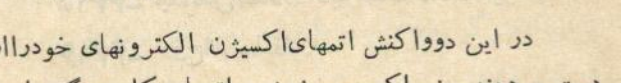
ب ـ هیدرژن احیا شود؟

ج ـ اکسیژن اکسیدشودو در همان‌حال هیدرژن احیاشود؟

پاسخ ـ الف ـ واکنشهائی که در آنها اکسیژن آزاد می‌شود مانند :



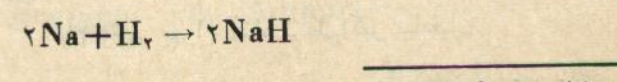
$$۲KClO_۳ \rightarrow ۲KCl + ۳O_۲$$



$$۲KMnO_۴ \rightarrow K_۲MnO_۴ + MnO_۲ + O_۲$$

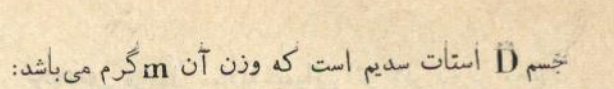
در این دوواکنش اتمهای اکسیژن الکترونهای خودرااز دست می‌دهند یعنی اکسید می‌شوند و اتمهای کلر ومنگنز احیا می‌شوند.

ب ـ در واکنش تشکیل هیدرورها هیدرژن آزاد احیا می‌شود :



$$۲Na + H_۲ \rightarrow ۲NaH$$

همچنین در واکنش آزادشدن هیدرژن ازآب یااسیدنیزهیدرژن احیا می‌شود:



$$۲HCl + Zn \rightarrow ZnCl_۲ + H_۲$$

ج ـ درتجزیهٔ آب به هیدرژن واکسیژن ، اکسیژن‌اکسید و هیدرژن احیا می‌شود.

۴۴۳۹ـ آیا ممکن است عنصری خودرا اکسیدکند؟

پاسخ ـ عنصر به‌صورت مادهٔ ساده ممکن است خودرا اکسید و درنتیجه خودرااحیاکندمانند:

$$۳Cl_۲ + ۶KOH \rightarrow ۵KCl + KClO_۳ + ۳H_۲O$$

همچنین‌درواکنش یك‌مادهٔ مرکب‌مانند:

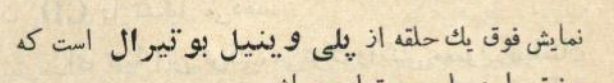
$$۴KClO_۳ \rightarrow KCl + ۳KClO_۴$$

و یا در واکنش اثر دومادهٔ مرکب که ظرفیت عنصر درآنها متفاوت است مانند :

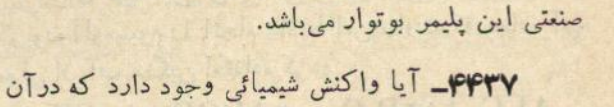
$$KClO_۳ + ۶HCl \rightarrow KCl + ۳Cl_۲ + ۳H_۲O$$

۴۴۴۰ ـ می‌دانیم که از تأثیر ید براسید پرکلریك ید جانشین‌کلرمی‌شود .آیا این عمل با موقعیت هالوژنهادر جدول تناوبی عناصر مطابقت دارد ؟

پاسخـ معمولا می‌گوئیم کلر فعالتر ازیود است. البته درست است‌ولی‌بهتر است بگوئیم کلر به‌عنوان‌اکسیدکننده‌فعالتر از یود است. بنابراین در هردوواکنش بظاهر متفاوت:



$$Cl_۲ + ۲HI \rightarrow ۲HCl + I_۲$$



$$۲HClO_۴ + I_۲ \rightarrow ۲HIO_۴ + Cl_۲$$

کلر اکسیدکننده و یود احیاکننده است.

۴۴۴۱ـ آیا ممکن است واکنش اکسیداسیون و احیا بدون تماس مستقیم اکسیدکننده و احیاکننده انجام پذیرد؟

پاسخـ واکنش اکسیداسیون و احیا در الکترولیز بدون تماس مستقیم‌اکسیدکننده و احیا کننده صورت می‌گیرد.

۴۴۴۲ـ می‌دانیم که‌کلر اکسیدکننده قویتر ازاکسیژن است اماکلر را می‌توان‌از اسید کلریدریك به کمك بی‌اکسید منگنز و موادیگری که اکسیژن زیادی‌دارند جدا کرد. این پدیده را چگونه توضیح می‌دهید؟

پاسخـ بسیاری از مواد مرکب اکسیژن‌دار مانند: $MnO_۲$ ، $KMnO_۴$ ، $KClO_۳$ و $K_۲Cr_۲O_۷$ اکسیدکننده‌اند. لکن اکسیژن این مواد عنصر اکسیدکننده نیست . اکسیدکننده درهریك از این مواد عنصری است که بالاترین درجهٔ اکسیداسیون را دارد (منگنز، کلروکروم).

۴۴۴۳ـ آیا کربور هیدرژنی وجود دارد که بر اثر

سوختن آن در کلر و در اکسیژن حجمهای مساوی اکسید کننده بکاررود؟

پاسخ ـ معادله‌های کلی سوختن کربور هیدرژن در کلر و در اکسیژن چنین است:

$$C_xH_y + \frac{y}{2} Cl_2 \rightarrow xC + yHCl$$

$$C_xH_y + (x + \frac{y}{4})O_2 \rightarrow xCO_2 + \frac{y}{2} H_2O$$

بر طبق شرایط مسئله:

$$\frac{y}{2} = x + \frac{y}{4} \Longrightarrow x = \frac{y}{4}$$

و تنها کربور ئیدرژن جوابگوی این شرط CH_4 (متان) است.

۴۴۴۴ـ می‌دانیم که روی به‌شدت با اسید سولفوریك ترکیب می‌شود . اما با افزودن استات سدیم به آن خروج حبابهای گاز به‌شدت کند می‌شود. چرا؟

پاسخ ـ با افزودن استات سدیم اسیداستیك تشکیل می‌شود. اسیداستیك اسید ضعیفی است و در نتیجه غلظت یونهای هیدرژن کاهش می‌یابد وواکنش بکندی صورت می گیرد.

۴۴۴۵ ـ فرمول معادلهٔ شیمیائی اثر محلول نیترات نقره‌را یك‌بار بر محلول کلرور فروو بار دیگر برمحلول کلرور فریك بنویسید .

پاسخ ـ

$$3FeCl_2 + 3AgNO_3 \rightarrow 3Ag + 2FeCl_3 + Fe(NO_3)_3$$

$$\begin{cases} 3\times1 & Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+} \\ 3\times1 & Ag^{+} \rightarrow Ag^{\circ} \end{cases}$$

$$FeCl_3 + 3AgNO_3 \rightarrow 3AgCl + Fe(NO_3)_3$$

$$(Cl^- + Ag^+ \rightarrow AgCl)$$

۴۴۴۶ـ فرمول معادلهٔ شیمیائی اثر کلر را بر محلول برومور فرو و فرمول معادلهٔ شیمیائی اثر بروم را بر محلول کلرور فرو بنویسید .

پاسخ ـ

$$3Cl_2 + 2FeBr_2 \rightarrow 2FeCl_3 + 2Br_2$$

$$\begin{cases} 2\times3 & (Cl^{\circ} \rightarrow Cl^-) \\ 2\times1 & \begin{bmatrix} Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+} \\ 2Br^- \rightarrow 2Br^{\circ} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$6FeCl_2 + 3Br_2 \rightarrow 4FeCl_3 + 2FeBr_3$$

$$\begin{cases} 6\times1 & Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+} \\ 6\times1 & Br^{\circ} \rightarrow Br^- \end{cases}$$

۴۴۴۷ـ آیا ممکن است ترکیب‌آلی پیداکرد که ۴۰ درصد هیدرژن‌داشته باشد. اگر چنین‌ترکیبی وجودداردچگونه می‌توان آنرا تهیه‌کرد؟

پاسخ ـ می‌دانیم که‌متان($CH_4 = 16$) دارای‌بالاترین درصد هیدرژن است و هیدرژن ۲۵ درصد وزنی آنرا تشکیل می‌دهدوظاهراً بنظر می‌رسد که‌ترکیب دیگری با درصدهیدرژن بیشتر نباید وجود داشته باشد. با وجود بر این چنین ترکیبی وجود دارد و آن $CD_4 = 20$ است یعنی ترکیبی از کربن و هیدرژن سنگین (دوتریوم). هیدرژن $\frac{8}{20}$ یا ۴۰ درصد وزنی متان CD_4 را تشکیل می‌دهد.

برای تهیهٔ این ترکیب می‌توان واکنش معمولی‌تهیهٔ‌متان ازکربور آلومینیوم را انجام داد با این تفاوت که بجای آب معمولی از آب سنگین استفاده کرد:

$$Al_4C_4 + 12D_2O \rightarrow 4Al(OD)_3 + 3CD_4$$

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ۴۵

۴۴۱۰ـ عبدالمجید جمالی دبیرستان حکمت فسا ـ بهرام آزاد دبیرستان حکمت فسا.

۴۴۱۱ـ عبدالمجید جمالی ـ ناصر حاجی‌عسگری ـ مجید حقیقت دبیرستان صفائی‌سمنان ـ علی روستائی ـ علی‌اکبر صادقیان دبیرستان پهلوی ساری.

۴۴۱۲ـ دوست خدادادی ـ بهرام‌آزاد ـ علی‌روستائی ـ علی‌اکبرصادقیان.

۴۴۱۳ـ روح‌الله صادقلو ـ ناصر حاج‌عسگری ـ مجید حقیقت ـ علی‌روستائی ـ علی‌اکبرصادقیان ـ علی‌کریمی .

۴۴۱۴ـ عبدالمجید جمالی ـ روح‌الله صادقلو ـ ناصر حاج‌عسگری ـ غلامعلی صادقی ـ علی‌روستائی ـ علی‌اکبرصادقیان مجید حقیقت ـ علی‌اکبر دانشمند دبیرستان‌ادیب ـ مهین فرازدل عیسی فیروزدهقان ـ حمید مقدم‌زاده دبیرستان پهلوی ساری ـ علی‌کریمی.

۴۴۱۵ـ عبدالعلی‌کشاورز دبیرستان رازی شیراز.

۴۴۱۶ـ روح‌الله صادقلو.

۴۴۱۹ـ عبدالمجید جمالی ـ ناصر حاج عسگری ـ علی‌اکبرصادقیان ـ بهرام آزاد ـ مهین فرازدل.

۴۴۲۰ـ ناصرحاج‌عسگری ـ مهین فرازدل ـ عبدالعلی کشاورز.

۴۴۲۷ـ بهرام آزاد ـ علی‌اکبر صادقیان.

ریاضی جدید

هندسهٔ مقدماتی

(از مجموعهٔ : چه می‌دانم ؟) — تألیف : André DELACHET ترجمهٔ : عبدالحسین مصحفی

اصول ترتیبی و بخشی و نتایج اساسی آنها

§ ۵ - اصل ترتیبی[1] و تعاریف - برای اینکه مفهوم اولیهٔ «وضع نسبی» نقاط روی یك خط را بیان کرده باشیم اصل زیررا ذکر می‌کنیم :

O - روی هر خط می‌توان دو رابطهٔ ترتیبی متقابل تعیین کرد. یك خط که شامل یکی از این دو رابطه باشد خط جهت - دار[2] نامیده می‌شود .

برای رابطهٔ ترتیبی مزبور نشانه‌های $\geq$ و $\leq$ را اختیار می‌کنیم. نشانهٔ $\leq$ خوانده می‌شود : «مقدم است بر» و نشانهٔ $\geq$ خوانده می‌شود : «مقدم یا منطبق است بر».

تعریف ۱ - خط $D(a \text{ و } b)$ که با دو نقطهٔ متمایز a و b مشخص شده است **جهت دار** تعریف می‌شود هرگاه بتوان روی آن یك رابطهٔ ترتیبی چنان تعیین کرد که $a \leq b$ باشد. در این‌صورت می‌گویند که خط D از a به سوی b جهت داراست، یا اینکه می گویند a درچپ b واقع است ویااینکه b در راست a قرار دارد.

تعریف ۲ - اگر $a = b$ باشد مجموعهٔ $\{a\}$ و اگر $a \neq b$ باشد مجموعهٔ نقاط x از خط جهت دار $D(a \text{ و } b)$ را به شرط $a \leq x \leq b$ **قطعه خط**[3] $[a \text{ و } b]$ می‌نامند. نقطه‌های a و b دو سر قطعه خط $[a \text{ و } b]$ وخط $D(a \text{ و } b)$ **محمل**[4] قطعه خط مزبور نامیده می‌شود . وقتی محمل جهت دار باشد قطعه خط هم به تبعیت از آن ودرهمان جهت، جهت‌دار خواهد بود.

تعریف ۳ - مجموعهٔ (که احیاناً امکان دارد تهی باشد) نقاط x از خط جهت دار $D(a \text{ و } b)$ را که در $a < x < b$ صدق می کنند **فاصلهٔ باز** $]a \text{ و } b[$ نامیده می‌شود که اغلب فقط فاصله گفته می‌شود. پس فاصلهٔ باز عبارتست ازیك قطعه خط بدون نقاط دوسر آن. اگر $x \in]a \text{ و } b[$ باشد گفته می‌شود که x بین a و b واقع است و یا به عبارت دیگر : a و b در طرفین x قراردارند.

مجموعهٔ نقاط x از خط جهت دار $D(a \text{ و } b)$ که در $a \leq x < b$ صدق می کنند **فاصلهٔ نیم باز از راست** $[a \text{ و } b[$ از خط مزبور نامیده می‌شود . این فاصله ممکن است که منحصر به نقطهٔ a باشد . یك چنین فاصله‌ای معرف قطعه خطی است بدون حد سمت راست اما شامل حد سمت چپ .

فاصلهٔ نیم باز ازچپ $]a \text{ و } b]$ عبارتست از مجموعهٔ نقاط

1- Axiome d'ordre. 2- Orienté. 3- Segment. 4- Support.

x از خط D(a و b) که در $a < x < b$ صدق می‌کنند. این فاصله معرف قطعه خطی است شامل حد سمت راست اما بدون حد سمت چپ

درتمام فواصل مزبور نقاط a و b دو حد و D(a و b) محمل نامیده می‌شود.

تعریف ۴ـ از اصل o نتیجه می‌شود که هر نقطهٔ a از یك خط D آنرا به دو زیرمجموعهٔ جدا ازهم بخش می‌کند بقسمی که اجتماع این دو زیر مجموعه و a همان خط D می‌باشد. خط D الزاماً شامل نقطهٔ دیگری مانند b متمایز از a می‌باشد. این خط را درجهت از a به b جهت دار فرض می‌کنیم. هریك ازدو زیرمجموعه‌ای که توسط a تعیین می‌شود. **نیم خط باز به مبدأ a** نامیده می‌شود. این دو نیم خط به ترتیب عبارتند از: مجموعهٔ نقاط x از D بقسمی که $a < x$ است و به $]a$ و $\overrightarrow{ab}[$ نشان داده می‌شود که ممکن است حداقل شامل یك نقطهٔ b باشد، مجموعهٔ (احیاناً تهی) نقاط x بقسمی که $x < a$ باشد که به $]\overrightarrow{ba}$ و $a[$ نشان داده می‌شود.

درحالتی که برای تعیین جهت D نقطهٔ دوم b اختیار نشده باشد دو نیم خط مزبور را به ترتیب به صورتهای $]o$ و $a[$ و $]a$ و $o[$ نشان می‌دهند. اگر نقطهٔ a را به هریك از این نیم خطها ملحق کنیم آنهارا **نیم خط بستهٔ به مبدأ a** نامیده به صورتهای زیر نشان می‌دهند:

$[a$ و $\overrightarrow{ab}]$ یا $[a$ و $o[$

$]\overrightarrow{ba}$ و $a]$ یا $]o$ و $a]$

تعریف ۵ ـ زیر مجموعهٔ X که مشمول در π است **محدب**[1] نامیده می‌شود هرگاه اگر شامل دو نقطهٔ a و b باشد تمام قطعه خط [a و b] را دربرداشته باشد.

واضح است که اگر A و B دومجموعهٔ محدب باشند فصل مشترك آنها تهی نیست و مجموعهٔ $A \cap B$ نیز محدب است؛ اگر a و b به $A \cap B$ تعلق داشته باشند و A و B محدب باشند، قطعه خط [a و b] که درعین حال هم به A و هم به B تعلق دارد به فصل مشترك آنها تعلق خواهد داشت. بطورکلی اشتراك چند مجموعهٔ محدب، خود مجموعه‌ای است محدب.

§ ۶ـ اصل بخشی[2] ـ دراین پاراگراف فرض می‌کنیم که هرخط از صفحه شامل بیش از دو نقطهٔ متمایز می‌باشد. در جاهای دیگر کتاب، که خلاف این باشد به صراحت ذکر خواهد شد.

تعریف مقدماتی ـ دو نقطهٔ a و b را **واقع در یك طرف** خط D می‌نامیم هرگاه که قطعهٔ [a و b] و خط D نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. درحالت خاصی که D(a و b) باخط D موازی به معنی تام کلمه است a و b دریك طرف D واقع هستند.

مجموعهٔ (π − D) مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که به D تعلق ندارند. مسلم است که رابطهٔ «a و b در یك طرف D واقع‌اند» بین نقاط مجموعهٔ مزبور یك رابطهٔ انعکاسی است، زیرا اگر $a = b$ باشد قطعهٔ [a و b] به مجموعهٔ {a} تبدیل شده وچون a روی D نیست بدیهی است که «a و a دریك طرف D واقع می‌باشند».

رابطهٔ مزبور تقارنی است زیرا دو قطعهٔ [a و b] و [b و a] درحقیقت یك مجموعه هستند. برای اینکه رابطهٔ مزبور یك رابطهٔ هم ارزی باشد لازم است که انتقالی هم باشد، از این جهت اصل زیر یعنی (اصل بخشی) را قبول می‌کنیم:

P ـ رابطهٔ «دریك طرف D بودن» انتقالی است.

رابطهٔ هم‌ارزی مزبوررا با $\mathscr{R}$ نشان می‌دهیم که چنین تعریف می‌شود:

برای تمام نقاط a و b از (π − D) داریم:

$$a \mathscr{R} b \Longleftrightarrow [a \text{ و } b] \cap D = \emptyset$$

مجموعهٔ خارج قسمت $(\pi - D)/\mathscr{R}$ شامل دوکلاس π_1 و π_2 می‌باشد؛ مجموعهٔ (π − D) محققاً تهی نیست زیرا در π حداقل یك نقطهٔ a واقع درخارج D وجود دارد. اگر مثلاً π_1 شامل نقطهٔ b باشد (احیاناً ممکن است که b بر a منطبق باشد) بقسمی که a و b دریك طرف D واقع باشند دراین صورت π_2 مجموعهٔ (احیاناً تهی) ازنقاط c می‌باشد که D وقطعهٔ [a و c] متقاطع هستند. هریك از مجموعه‌های π_1 و π_2 را **نیم صفحهٔ باز به کنارهٔ D** نامیده و آنهارا به ترتیب با: (a و D) و (D و a) نشان می‌دهیم. این دو مجموعه نسبت به D قرینهٔ یکدیگر نامیده می‌شوند. باید به یاد داشت که حداقل یکی از

1- Convexe. 2- Axiome de partage.

دو مجموعهٔ مزبور تهی نیست، علیهذا ممکن است که گاهی برای ما پیش آید که نتوانیم معلوم کنیم کدامیك از آنها تهی نیست، در این صورت آنها را با) ۰ و D(و) D و ۰ (نشان می‌دهیم .

هریك ازمجموعه‌های $\pi_1 \cup D$ و $\pi_2 \cup D$ را **نیم صفحهٔ بستهٔ به کنارهٔ D** می‌نامیم و به ترتیب با (D و a) یا (۰ و D) و (a و D) یا (۰ و D) نشان می‌دهیم .

قضیه ـ هر نیم‌صفحه (بازیا بسته) مجموعه‌ای است محدب.

اثبات ـ اگر a و b دو نقطه از یك نیم صفحهٔ باز به کنارهٔ D باشند قطعهٔ [a و b] با D نقطهٔ مشترك ندارد . فرض می‌کنیم x نقطه‌ای از [a و b] باشد ، اگر نقطه‌ای مانند y وجود داشته باشد که بین D و [a و x] مشترك باشد چون [a و x] مشمول در [a و b] است پس باید y به [a و b] تعلق داشته باشد که اینهم غیرممکن است .

اگر a و b دونقطه ازیك نیم صفحهٔ بستهٔ به کنارهٔ D باشند علاوه برحالتی که [a و b] به نیم صفحهٔ باز باهمان کناره تعلق دارد حالتهای زیررا نیز باید درنظر بگیریم:

۱° ـ a به D تعلق داشته و b به D تعلق نداشته باشد .

۲° ـ b به D تعلق داشته و a به D تعلق نداشته باشد .

۳° ـ a و b هردو به D تعلق داشته باشند.

در دوحالت اول ودوم ، [a و b] جز یك نقطه با D مشترك نیست ، هرنقطهٔ دیگری ازاین قطعه یادرانتهای آن روی D منطبق است ویا درخارج D واقع است، به‌هرجهت استدلال قبل به قوت خود باقی است .

درحالت سوم ، D(a و b) که در دونقطه با D مشترك است بر D منطبق است و هرنقطه‌ای از [a و b] روی D واقع خواهد بود. *

§ ۷ـ **نوار صفحه ـ** نوار صفحه برای ما یك مفهوم عینی وشهودی داردکه عبارتست از قسمتی از یك صفحهٔ فیزیکی که بین دو خط فیزیکی متوازی محصورباشد. برای این مفهوم یك تعریف دقیق بیان می‌کنیم :

تعریف ۱ـ فرض می‌کنیم دو خط متمایز D و D' با یکدیگر موازی باشند و a نقطه‌ای از D و a' نقطه‌ای از D' باشد. اشتراك دونیم صفحهٔ (a و D') و (a' و D) را نوار بستهٔ به‌کناره های D و D' نامیده و به [D' و D] نشان می‌دهیم .

واضح است که یك نوار بسته تهی نیست؛ زیرا شامل تمام نقاط قطعهٔ [a' و a] و بخصوص شامل نقاط a و a' می‌باشد . نوار صفحه مجموعه‌ای است محدب.

تبصره ـ اگر یکی از دو نیم صفحه باز باشد مثلا (a' و D)، ودیگری بسته باشد، نوارمربوط **نیم باز** نامیده‌شده با [D' و D[نشان داده می‌شود. این نواز بازهم محدب و ناتهی است ، زیرا شامل فاصلهٔ نیم باز ازچپ [a' و a[می‌باشد .

اگر هردو نیم صفحه باز باشند؛ (a' و D و) a و D') نوار **باز** نامیده شده با]D' و D[نشان داده می‌شود . این نوار همواره محدب است اما احیاناً ممکن است که تهی باشد .

امتداد مشترك کناره‌های یك نوار، امتدادآن نوارنامیده می‌شود .

تعریف ۱ که بیان شد با تعریف زیر معادل است:

تعریف۲ـ نوار بسته اجتماعی ازقطعات [a' و a] است که درآنها a نقطهٔ غیرمشخصی از D و a' نقطه غیرمشخصی از D' می‌باشد.

زیرا اگر [D' و D] نواری باشد که بنا به تعریف ۱ معین شده است و m نقطه‌ای متعلق به‌آن باشد، خط دلخواهی مانند B که از m بگذرد و با D موازی نباشد D را در b و D' را در b' قطع می‌کند. نقطهٔ m به نیم‌صفحهٔ بستهٔ (a' و D) تعلق دارد و b' هم به همین نیم صفحه متعلق است پس قطعهٔ [b' و m] با خط D نقطهٔ مشترك ندارد ، b' نمی‌تواند به قطعهٔ [b و m] تعلق‌داشته باشد زیرا دراین صورت قطعهٔ مزبور خط D' را قطع کرده‌است که آنهم غیرممکن‌است زیرا m و b هردو به نیم صفحهٔ (a و D') تعلق دارند . بنابراین m به قطعهٔ [b' و b] تعلق دارد ، یعنی اینکه حداقل یك قطعه خط

حالتهایی را که نیم صفحه تهی یا منحصر به یك نقطه باشدکنار گذاشته‌ایم : در این حالتها واضح است که مجموعه محدب می‌باشد .

وجود داردکه یك سر آن روی D وسر دیگر آن روی D' واقع است .

برعکس، اگر [D' و D] بنابه‌تعریف ۲ معین شده باشد و m نقطه‌ای ازنوار مزبور باشد نقطه‌ای مانند b بر D و نقطه‌ای مانند b' بر D' وجود دارد بقسمی‌که m به قطعهٔ [b' و b] تعلق داشته باشد . اگر a نقطه‌ای از D باشد چون D با D' موازی است نقطه هـای a و b به نیم صفحهٔ (D' و a) تعلق خواهند داشت. نقطهٔ m که به‌قطعهٔ [b' و b] تعلق دارد یا بر b روی D منطبق است ویا از b و b' متمایز بوده خط (D(m و b خط D' را در b' خارج قطعهٔ [b و m] قطع می‌کند و m و b دریك طرف D' قرارداشته نقطهٔ m به نیم صفحهٔ (D' و a) تعلق دارد. بالاخره ممکن است نقطهٔ m بر b' منطبق بوده‌روی D' واقع باشد . درتمام حالات m به نیم صفحهٔ (D' و a) تعلق خواهد داشت . به طریق مشابه محقق خواهد شدکه m به هم صفحهٔ (D و a') نیز تعلق داشته ونتیجه می‌شود هر نقطه‌ای از نوار [D' و D] با تعریف ۲ معین شده باشد بـه مجموعهٔ معین شدهٔ توسط تعریف ۱ نیز تعلق خواهد داشت .

تحقق دومورد زیررا به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم :

هر نوارنیم‌باز]D' و D[را می‌توان به صورت اجتماعی از فاصله‌های نیم باز]a و a'[تعریف‌کردکه a نقطهٔ دلخواهی از D و a' نقطهٔ دلخواهی از D' باشد .

هر نوار باز]D' و D[را می‌توان به صورت اجتماعی از فاصله‌های باز]a' و a[تعریف‌کردکه a و a' به تـرتیب نقاط دلخواهی از D و D' باشند.

با استفاده از اصول ترتیبی و بخشی می‌توان خاصیتی اساسی و عینی را به شرح زیر برای نوارهای صفحه ثابت‌کرد:

C ـ اگر {D' و D} یك جفت خطوط متوازی و a و a' و b و b' نقاطی باشندکه دونقطه‌ای {a و b} به D و دونقطه‌ای {a' و b'} به D' تعلق داشته باشـد هرخط‌که با جفت خطوط مزبور موازی بوده وقطعه خط [a و a'] راقطع کند قطعه‌خط [b و b'] را نیز قطع خواهدکرد.

برای اثبات فرض می‌کنیم‌که A خطی باشد موازی با D و متمایز از D' که قطعه خط [a و a'] را قطع بکند . اگر قطعه خط [b و b'] خط A را قطع نکند ، چون D و D' متوازی هستندقطه خط [b' و a'] با A متقاطع نیست و بنابه اصل **P** قطعه خط [b و a'] نیز با A متقاطع نمی‌باشد . اما چون D با A موازی است قطعه خط [a و b] با A متقاطع نبوده و بنا به **P** قطعه خط [a و a'] نیز با A متقاطع نخواهد بود و این خلاف فرض است . بنابراین [b و b'] نیز با A متقاطع می‌باشد .

ازخاصیت **C** خواص زیر نتیجه می‌شود :

P_1 ـ اگر A یك خط ، [a و b] یك‌قطعه‌خط ، و δ امتدادی متمایز از امتدادهای A و D(a و b) باشد، تصویر قطعه خط [a و b] در تصویر مایل f به امتداد δ وروی A عبارتست از : [f(a) و f(b)]

P_2 ـ اگر A و B دوخط و δ امتدادی‌باشد متمایزاز امتدادهای A و B ، تصویر A روی B درتصویر مایل f به امتداد δ خاصیت زیر را دارا خواهد بـود : اگر m نقطهٔ دلخواهی از قطعه خط [a و b] متعلق به A باشد ، f(m) به قطعه خط [f(a) و f(b)] تعلق خواهد داشت خاصیت‌اخیر را می‌توان به صورت زیر بیان‌کرد :

P'_2 اگر A و B دوخط جهت دار باشند وδ امتدادی غیراز امتدادهای A و B باشد . تصویر مایل A روی B به موازات δ ازلحاظ ترتیب یك‌ایزومورفیسم می‌باشد ، به عبارت دیگر f یا صعودی است ویانزولی.

این موضوع را نیز به‌خواننده واگذار می‌کنیم‌که‌تحقیق کند تعریفهای ۱ و ۲ مربوط به نوار بسته باتعریف زیرمعادل می‌باشند :

تعریف ۳ـ اگر D و D' دو خط متوازی و متمایز باشند و a نقطه‌ای از D و a' نقطه‌ای از D' باشد، نواربستهٔ به‌کناره‌های D و D' عبارتست از اجتماع خطوط متوازی با D و D' که با قطعه خط [a' و a] متقاطع باشند.

خواننده می‌تواند برای نوارهای نیم باز و باز نیز یك چنین تعریفی را بیان‌کند .

§ ۸ـ تعیین اصول معادل با اصل بخشی

ملاحظه شدکه از اصل **P** خاصیت محسوس **C** نتیجه‌شد. می‌خواهیم معلوم‌کنیم‌که‌آیا **C** با **P** معادل است یا نه . برای این‌کار قبلا تعریفی بیان می‌کنیم‌که موجب اختصار در الفاظ می‌باشد :

تعریف ـ اگر یك سه نقطه‌ای داشته باشیم به رأسهای a و b و c هریك ازقطعات [b و c] و [c و a] و [a و b] را به ترتیب ضلعهای‌آن سه نقطه‌ای روبرو به رأسهای a و b و c می‌نامیم .

ثابت می‌کنیم‌که **C** حکم زیررا ایجاب می‌کند . که به‌نام قضیهٔ **پاخ** معروف‌است:

p : هرخط‌که یك ضلع سه‌نقطه‌ای راقطع‌کند یك ضلع دیگرآنرا نیز قطع خواهدکرد.

فرض می‌کنیم که خط D با [b و a] در 'c متقاطع باشد . خطوط A و B و C را درنظر می‌گیریم‌که با D موازی بوده به ترتیب از **a** و **b** و **c** گذشته باشند . چون C با D موازی است به به اصل I_7 دوخط C و D(a و b) در یك نقطهٔ "c متقاطع می‌باشند ودراین صورت یکی از حالتهای زیررا خواهیم داشت :

۱°- "c روی [a و b] باشد در این‌صورت 'c یا روی ["c و a] است یاروی ["c و b] ، درحالت اول بنابه‌خاصیت **C** مربوط به نوار [A و C] خط D با [c و a] و درحالت دوم با [c و b] متقاطع می‌باشد .

۲°- "c روی [a و b] نیست ، دراین‌صورت **a** یاروی ["c و 'c] است‌که با فرض جهت دار بودن D(a و b) از **a** به سوی **b** خواهیم داشت :

$$c'' < a \leq c' \leq b$$

و بنا به P'_2 اگر f تصویر مایل D(a و b) روی D(c و b) به موازات D باشد خواهیم داشت :

$$f(c'') < f(a) \leq f(c') \leq f(b)$$

و چون $f(c'')=c$ و $f(b)=b$ پس D قطعهٔ [c و b] را در $f(c')$ قطع می‌کند ؛ یا اینکه b روی ["c و 'c] است‌که به طریق مشابه نتیجه خواهد شد که D با [c و a] متقاطع می‌باشد .

ازطرف دیگر واضح است‌که $P \Longrightarrow p$ ، زیرا بنابه **p** اگر D نه [b و a] راقطع‌کند و نه [c و b] را، [a و c] را نیز قطع نخواهدکرد بنابراین D الزاماً یا [b و a] یا [c و b] را قطع خواهدکرد .

نتیجه‌آنکه :

$$P \Longrightarrow C \Longrightarrow p \Longrightarrow P$$

پس :

$$C \Longrightarrow P \text{ و } p \Longrightarrow C$$

یعنی خواص **P** و **C** و **p** منطقاً معادل هم می‌باشند.

دنباله دارد

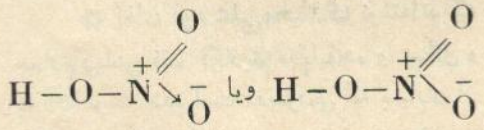
پاسخ به یك پرسش

آقای **علی‌رضا زرین قلم** دربارهٔ حل مسئلهٔ‌کنکور دانشکدهٔ پلی‌تکنیك مندرج دریکان سال ۴۶ چنین نوشته‌اند :

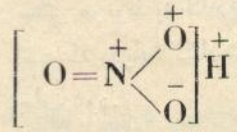
«گستردهٔ‌اسید پیکریك (۲ و ۴ و ۶ تری نیتروفنل) به صورتی‌که رسم شده اشتباه‌است، زیرا ازت بیش از دوالکترون نمی‌تواند با اکسیژن به شکل کووالانس به اشتراك بگذارد و اکسیژن دیگر به شکل‌کوردینانی با ازت قرار می‌گیرد ، به این‌ترتیب که دو الکترون ازت‌به وسیلهٔ ازت‌و اکسیژن مشترك است ...»

پاسخ :

نیتروژن در ترکیب با اکسیژن ابتدا یك الکترون از دست می‌دهد و به $\overset{+}{N}$ (شبیه اتم C با چهار الکترون جفت نشده) تبدیل‌می‌شود که می‌توانددرچهارپیوندشیمیائی(کووالانس) با اتمهای اکسیژن شرکت‌کند . بنابراین فرمول ساختمانی اسید نیتریك را به شکل :



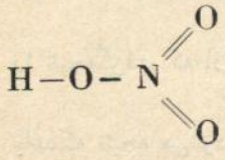
یا



نمایش‌می‌دهند. علامت (→) که جهت‌آن ازنیتروژن به‌اکسیژن است نشان می‌دهدکه پیوند بین این دواتم ازراه جفت‌الکترونی صورت می‌گیردکه بوسیلهٔ اتم نیتروژن برای «استفادهٔ مشترك» واگذار شده است .

اما تحقیقات اسپکتروسکوپی نشان داده است‌که اتمهای اکسیژن درپیوند با اتم نیتروژن هم ارزشند. یعنی امکان‌انتقال یك الکترون از نیتروژن به هریك از اتمهای اکسیژن یکسان است . به همین جهت‌گاهی فرمول ساختمانی اسید نیتریك را به شکل :

مشخص می‌کنند . با وجود براین از نظر سادگی درکتابهای کلاسیك فرمول ساختمانی اسید نیتریك را به صورت :



نمایش می‌دهند .

باقرمظفرزاده

از میان نامه های رسیده

✿ آقای **قوام نحوی** دبیر دبیرستانهای اصفهان‌ضمن نظریات مختلفی که راجع به‌مندرجات یکان اظهار داشته‌اند نوشته‌اند که :

ـ دربخش مسائل برای حل، در مسائلی‌که زیر عنوان مسائل متفرقه درج می‌شود بهتر است که مشخص شود هرمسئله مربوط به‌کدام کلاس می‌باشد تا مثلا دانش‌آموز کلاس پنجم ریاضی بداند کدام مسائل‌را می‌تواند حل‌کند و حل‌کدام‌مسائل از قوهٔ او خارج می‌باشد .

ـ دربارهٔ‌ترتیب چاپ مسائل یا مقالات شایسته‌تراست‌که ابتدا مسائل یا مقالات رسیده از آقایان دبیران و بعد مسائل‌یا مقالات رسیده از طرف دانش‌آموزان چاپ شود.

ـ درشماره‌های عادی و مخصوصاً دریکان سال، علاوه‌بر درج مسائل امتحانات نهایی و مسابقات دانشگاهی، مقالات علمی سودمند و تازه‌ای از آقایان اساتید دانشگاه یاشخصیتهای معروف علمی کشور و نظریات جدید آنها وهمچنین شرح‌حال دانشمندان معاصر یاگذشتهٔ‌کشور درج گردد.

ـ نام وعکس و شرح‌حال دانش‌آموزان برجسته و ممتاز شهرهای مختلف و آنان که در امتحانات یا مسابقات اول می‌شوند در مجلهٔ یکان چاپ شود.

ـ دربارهٔ اینکه مسائلی‌از اشخاص در مجله چاپ‌می‌شود وبعداً تذکر داده می‌شودکه در فلان کتاب فارسی هم نوشته است، باید درنظر داشت که ممکن است شخصی مسئله‌ای را از یك‌کتاب خارجی ترجمه‌کرده برای درج در مجله ارسال دارد بدون آنکه اطلاع داشته باشد که این مسئله را شخص دیگری هم‌بانقل و ترجمهٔ ازهمان کتاب‌درکتابی‌فارسی چاپ‌کرده‌است .

ـ در بعضی از شماره‌های مجله مطالبی درج می‌شودکه زیاد مورد استفادهٔ دانش‌آموزان عادی نیست. می‌توان به‌جای این نوع مقالات، مطالبی درج کردکه جبران کمبود مطالب‌و مسائل بعضی کتابهای درسی را بنماید .

✿ آقای **کریم عبدالشاه** از سمنان نوشته‌اندکه راجع به مطلب صفحهٔ ۴۴۳ یکان درصورتی می‌توان ازرابطهٔ:

$$72-32\sqrt{5}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y}$$

رابطهٔ:

$$(1)\quad 72=x^3+3xy$$

را نتیجه‌گرفت که اولا $\sqrt{y}=\sqrt{5}$ بوده وثانیاً :

$$3x^2+y=32$$

باشدکه نتیجه می‌شود $x=\pm 3$. اما رابطهٔ (۱) به ازاء:

$$x=-3$$

صادق نیست پس فقط $x=3$ قابل قبول بوده و دیگر احتیاجی به عملیات بعدی نیست.

راجع به‌قسمت I مندرج در همین صفحه هم باید گفت‌که به این موضوع توجه نشده است که آیا رادیکال موردنظر را می‌توان به صورت $x+\sqrt{y}$ درآورد یا نه، اگر دراین قسمت توجه‌کنیم می‌فهمیم که چون :

$$a=x^2+3xy \text{ و } y=b \text{ و } x=\sqrt{\frac{k-b}{3}}$$

است پس باید :

$$a=\sqrt{\frac{k-b}{3}}\left(\frac{k+8b}{3}\right)$$

باشد. اما این مقدار دررادیکال مرکب :

$$\sqrt{68-32\sqrt{5}}$$

صدق نمی‌کند. پس این رادیکال قابل تبدیل نیست.

✿ آقای **محمدرضا عربزاده** از زاهدان نوشته‌اندکه در حل مسئلهٔ ریاضی کنکور دانشگاه آریامهر مندرج دریکان سال ۴۶ به شرح:

«مطلوبست تعیین تابع $y=f(x)$ که منحنی نمایش آن در نقطه‌ای به‌طول $\frac{1}{2}$ برمحور طولها مماس‌بوده ورابطهٔ:

$$y''(y'-1)=4x$$

برقرارباشد»

یك‌جواب ازقلم‌افتاده است. دوتابع زیر هر دودرشرایط‌مطلوب صدق می‌کنند:

$$y=x^2+x-\frac{3}{4}$$

$$y=-x^2+x-\frac{1}{4}$$

✿ آقای **ناصر رزمجو** نوشته‌اندکه در امتحان ورودی بعضی از دانشکـده‌ها معادلات دیفرانسیل حتی ازرستهٔ ۲مطرح می‌شود که این نوع معادلات از برنامهٔ دبیرستانها خارج است و درسالهای اول و دوم دانشکده‌ها تدریس می‌شود. آیا در امتحانات ورودی دانشکده‌ها می‌توان چنین سؤالاتی را طرح کرد ؟

✿ آقای **نورعلی‌محمدی** نوشته‌اند که در متمم‌حساب چهارم ریاضی فقط لگاریتم درپایهٔ ده و مسائل و قضایای‌مربوط به آن نوشته شده است درصورتی که بسیاری از مسائل کنکور بیشتر مربوط به لگاریتم در مبناهای غیر از ده می‌باشد.مناسب است که دربارهٔ لگاریتم درپایهٔ غیر از ده مطالبی در مجله چاپ شود.

✿ دوشیزه **سونیا خوش‌لب** نیز نوشته‌اند که درمجله

مطالبی مربوط به لگاریتم چاپ شود و همچنین در هر شماره مسائل بیشتری برای حل درج گردد.

✿ آقای **سعید ترابی** نوشته‌اند که راجع به هندسهٔ ترسیمی‌هم مسائلی در مجله چاپ شود.

✿آقای **محمد لطفی** وهمچنین آقای **عبدالحمید هدایتی** نوشته‌اندکه‌شرح حال بعضی ازریاضیدانان‌ودانشمندان ایرانی درمجله چاپ شود

* * *

راجع به مسائل مندرج در یکان

✿ مسئلهٔ ۴۴۴۹ قبلا درخود مجلهٔ یکان و همچنین‌در بسیاری از کتابهای حل‌المسائل چاپ شده است.

تقی سیاحتگر ـ حسین دهقان ـ احمد محقق

✿ مسئله‌های ۴۳۲۰ و ۴۴۱۵ درکتابهای حل‌المسائل چاپ شده‌اند.

مهرداد کاظم‌زاده

✿ مسئله‌های ۴۴۱۲ و ۴۳۳۰ درکتابهای حل‌المسائل چاپ شده است .

حسن گل محمدی

توجه:

بسیاری‌ازخوانندگان مجله مکرر خواسته‌اند تا کتابهای ریاضی مورد استفادهٔ محصلین کلاسهای متوسطه (چه به‌زبان فارسی وچه به زبان‌خارجی) درمجله معرفی‌شود .

درمورد کتابهای به‌زبان فارسی هرکتابی که به ادارهٔ مجله واصل شود به خوانندگان معرفی می‌گردد.

اما درموردکتابهای ریاضی خارجی از چندلحاظ اقدام مزبور عملی نیست.

فهرست مندرجات دورهٔ چهارم یکان

***

راهنمای ریاضیات متوسطه

***

درسی ازحساب

***

درسی ازفیزیك

***

راهنمای حل مسائل هندسه

***

شیمی

***

رسم فنی

***

مسائل حل نشدهٔ‌ریاضی

مباحث متفرقه

***

حل مسائل نمونه

***

مسائل برای حل

***

مسائل انتخابی ازمسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

***

مسائل مسابقات و کنکور

***

Problems and Solutions

***

اصطلاحات فیزیکی و معادل فارسی آنها

***

حل مسائل :

***

داستانهای تفننی ریاضی

***

سرگرمیهای ریاضی

***

بی‌آنکه عصبانی شوید ....

***

پرسش و پاسخ

***

ازمیان نامه‌های رسیده

دنباله از صفحهٔ قبل

*
**

عناوین بخشهای یکان سال ۴۶

دربارهٔ سؤالات امتحانی ـ حل مسائل ریاضی ، فیزیك وشیمی امتحانات نهائی سال ۱۳۴۶ (کلاس‌ششم طبیعی خرداد وشهریور، کلاس ششم ریاضی خرداد و شهریور) ـ حل مسائل ریاضی، فیزیك وشیمی امتحانات ورودی سال ۱۳۴۶ دانشگاه تهران ، دانشگاه صنعتی آریامهر، دانشکدهٔ صنعتی (تیر ، دی) دانشسرای عالی ، دانشگاه تبریز ، دانشگاه مشهد ، دانشگاه گندی‌شاپور، کلاسهای‌شبانهٔ‌دانشگاه‌تهران، دانشگاه‌ملی‌ایران‌وچند مؤسسهٔ دیگر. نمونه‌ای‌ازمسائل امتحانات نهائی‌کشور فرانسه ـ مسائلی از فیزیك ومکانیك ـ مسائل .G.C.E انگلستان

***

عناوین مندرجات ضمیمهٔ یکان سال۴۶ برای دانش‌آموزان دورهٔ اول دبیرستانها

دانستنیها ازریاضی جدید ـ ریاضیدانهای بزرگ ایران ـ چند مسئلهٔ ساده ـ تفریح با اعداد ـ قوانین‌کپلر ـ بازی با اشکال حل‌جبری بعضی ازمعماها ـ موش خوردن هم حساب دارد ـ تفنن درنوشتن اعداد ـ به‌کمك جبرحل‌کنید ـ اعداد بزرگ ـ قالبهایی ازاعداد ـ سعی‌کنید فوراً جواب دهید ـ جادوی اشکال ـ مسائل امتحانات داخلی‌کلاسهای سوم دبیرستانها ـ پاسخها.
