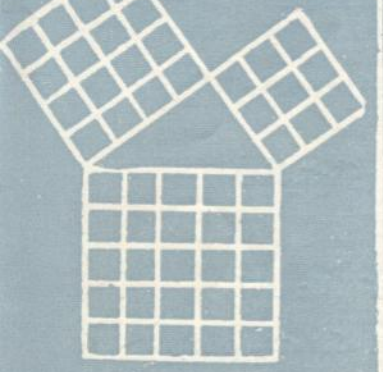
دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ
۹
شمارهٔ مسلسل
۴۶
تیر ماه
۱۳۴۷

یکان
مجلهٔ ریاضیات

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots\dots + x^n$$



دراین شماره:

دربارهٔ حل و بحث معادلات	مهدی مدغم	۵۵۷
نکاتی دربارهٔ هذلولی متساوی‌القطرین	جلال‌الله قراگزلو	۵۶۶
مسائل حل نشدهٔ ریاضی	ترجمه	۵۶۹
قضیهٔ دزارگ وراههای اثبات آن	ترجمهٔ: جعفر آقایانی‌چاوشی	۵۷۲
انتقادی‌برطرح وحل‌یك مسئلهٔ شیمی	باقر مظفرزاده	۵۷۶
خواص ومسائلی مربوط به میانه‌های مثلث	ترجمهٔ: محمدمهدی عابدی‌نژاد	۵۷۷
مسائل المپیاد ریاضی چکسلواکی	ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی	۵۸۰
کتابخانهٔ یکان	—	۵۸۵
روشی برای تعیین‌ریشهٔ مشترك دومعادله	حسین خبازیان	۵۸۶
نمودار شیمی‌آلی	غلامعلی جوانبخت	۵۸۸
راهنمای حل‌مسائل هندسه	ترجمه	۵۸۹
مسائل‌کنکور رشتهٔ تربیت دبیر دانشگاه مشهد	—	۵۹۳
Problems & Solutions	—	۵۹۵
داستانهای تفننی‌ریاضی	ترجمه	۵۹۶
سرگرمیهای ریاضی	—	۵۹۷
مسائل برای حل	—	۵۹۸
حل‌مسائل یکان شمارهٔ ۴۴	—	۶۰۱
ریاضی جدید، هندسهٔ مقدماتی	ترجمهٔ : مصحفی	۶۱۷

بها: بیست و پنج ریال

مقدمه بر

تئوری مجموعه ها

تألیف : علی‌اصغر هومانی

با مقدمه از استاد هشترودی

از انتشارات یکان ـ بها : ۵۰ ریال

یکان

مجلهٔ ریاضیات

هرماه یك بار منتشر می‌گردد

تاسیس : بهمن ۱۳۴۲

دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ نهم ـ شمارهٔ مسلسل: ۴۶

تیر ۱۳۴۷

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، **داود مصحفی**

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume IV , number 9, June. 1968

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

دربارهٔ مسائل مندرج دریکان

آقای **حسن گل محمدی** نوشته‌اندکه :

۱ـ مسئلهٔ شمارهٔ ۴۴۰۰ مندرج دریکان شمارهٔ ۴۴ در یك کتاب جبر قدیمی !

۲ـ مسئلهٔ شمارهٔ ۴۴۰۱ درکتاب ۲۵۰۰ مسئلهٔ مثلثات

۳ـ مسئلهٔ شمارهٔ ۴۴۰۹ درکتاب حل مسائل مثلثات

۴ـ مسئلهٔ شمارهٔ ۴۴۱۸ در کتاب حل‌المسائل هندسه مندرج می‌باشد .

فعالیتهای علمی در دبیرستانها :

آقای **عالم کفعمی خراسانی** از دبیرستان مهران زاهدان نوشته‌اندکه با همکاری ایشان و آقایان **محمد صادق طاهری** ، **مسعود و محمود سمیعی** و زیرنظر مدیر و دبیران دبیرستان نشریه‌ای دیواری تهیه کرده‌اند که شامل مطالبی مربوط به ریاضیات، فیزیك و شیمی ومسابقات می‌باشد.

بررسی کتاب مثلثات ششم ریاضی

دربارهٔ حل و بحث معادلات مثلثاتی

مهدی مدغم

یکی از مبحثهای مهم آموزش جبر و مثلثات ، حل و بحث معادلات است . حل بیشتر مسائل به حل معادله های یك مجهولی و چند مجهولی می‌انجامد . تعیین ماکزیمم ومی‌نیمم، نقاط عطف و حل مثلث هر کدام به یافتن جوابهای یك یا چند معادله مربوط می‌شود . با اینحال بنظر می‌رسد که در کتابهای درسی نکته‌های ناگفته دربارهٔ این مبحث بسیار است و غالباً، دانش‌آموزان معادلات را با دقت خاصی که لازمهٔ آنست حل نمی‌کنند و متوجه نکاتی که در حل آن باید در نظر بگیرند نیستند .

معادلات متنوعی که دراین‌اواخردرکتابهای حل‌المسائل یافته می‌شود یا بعضی معلمین برای حل یا امتحان به صورت پلی‌کپی به دانش‌آموزان می‌دهند اشکال بیشتری ایجاد نموده است . زیرا بعضی ازآنها یا بطور دقیق قابل حل نیستند و یا برای حل‌کامل آنها دقت فوق‌العاده زیادی لازم است و چون این‌کار ممکن نیست بناچار از میزان دقت‌کاسته می‌شود و معلم و دانش‌آموزان را به عدم دقت معتاد می‌سازد ، در نتیجه **پرورش دقت‌که یکی از هدفهای عمدهٔ تدریس ریاضی است فدای ابتکار و ابداع ناقص می‌گردد.**

اشکالهای فوق بیشتر در مثلثات مشهود است و در اینجا مواردی ازآن ذکر می‌شود :

۱ـ حل معادلهٔ مثلثاتی پارامتری ـ در مثلثات ششم ریاضی نوشته‌شده است« مقادیری‌از x ،که به ازای آنها اندازه‌های عددی A وB باهم مساوی شوند، جوابهای معادلهٔ A=B نامیده می‌شوند . . . مقصود از حل معادلهٔ مثلثاتی تعیین جوابهای آن است.»

با این دو تعریف ، در حل معادلات مثلثاتی با ضریب عددی اشکالی پیش نمی‌آید . مثلا اگر مقصود حل معادلهٔ:

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

باشد ابتدا $\sin x$ را حساب می‌کنیم . دو جواب $\sin x = 2$ و $\sin x = \frac{1}{2}$ بدست می‌آید . می‌گوئیم جواب اول قابل قبول نیست و در ازاء جواب دوم داریم :

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

بنابراین جوابهای این معادله :

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

خواهد بود .

حال فرض‌کنیم منظورحل معادله های مثلثاتی پارامتری باشد. به چند مثال زیر توجه نمائید :

۱ـ معادلهٔ زیررا حل‌کنید :

$$\sin^2 x - 2m^2 \sin x + m^4 - 4 = 0$$

از حل معادله‌که برحسب $\sin x$ درجه دوم است ، نتیجه می‌گیریم :

$$\sin x = m^2 - 2 \quad \text{و} \quad \sin x = m^2 + 2$$

بنابراین قاعدةً بایدگفت‌که جواب اول در ازاء هیچیك از مقادیر m قابل قبول نیست و جواب دوم موقعی قابل قبول خواهد بودکه ،

$$-\sqrt{3} < m < -1 \quad \text{و یا} \quad \sqrt{3} > m > 1$$

دراین‌صورت اگر $m^2 - 2 = \sin\alpha$ فرض شود داریم :

$$x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad \text{و} \quad x = \alpha + 2k\pi$$

اکنون حل یك معادلهٔ مثلثاتی پارامتری را از کتاب مثلثات ششم ریاضی در اینجا رونویس می‌کنیم (صفحهٔ ۳۵ مثال ۲).

مطلوبست حل و بحث معادلهٔ پارامتری :

$$m\sin^2 x - 2(m-2)\sin x + m + 2 = 0$$

حل معادله ـ بااستفاده ازدستور حل معادلات درجهٔ دوم خواهیم داشت :

$$\sin x = \frac{m-2 \pm \sqrt{-6m+4}}{m}$$

اگر فرض کنیم :

$$\frac{m-2+\sqrt{-6m+4}}{m} = \sin\alpha$$

$$\frac{m-2-\sqrt{-6m+4}}{m} = \sin\beta$$

جوابهای معادله عبارتند از :

$$x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = 2k\pi + \pi - \alpha$$

$$x = 2k\pi + \beta \quad \text{و} \quad x = 2k\pi + \pi - \beta$$

اما جواب :

$$\sin\beta = 1 - \frac{2+\sqrt{-6m+4}}{m}$$

را در نظر می گیریم اگر $m > \frac{2}{3}$ باشد $\sin\beta$ موهومی می‌شود که قابل قبول نیست اگر $m < 0$ باشد :

$$\frac{2+\sqrt{-6m+4}}{m}$$

منفی ودرنتیجه $\sin\beta$ ازیك بیشتر می‌شود که بازقابل قبول نیست واگر $0 < m < \frac{2}{3}$ باشد کسر :

$$\frac{2+\sqrt{-6m+4}}{m}$$

که صورتش از ۲ بیشتر ومخرجش عددی مثبت وکوچکتر از واحد است از ۲ بیشتر می‌شود و درنتیجه $\sin\beta$ از ۱ ـ کمتر می‌شود که آنهم قابل قبول نیست پس $\sin\beta$ و :

$$[x = \beta + 2k\pi \text{ و } x = \pi - \beta + 2k\pi]$$

که درکتاب به عنوان جـواب معرفی شده است هیچگاه قابل قبول نمی‌باشد .

۲ـ بحث در معادلات مثلثاتی ـ از مثلثات ششم ریاضی صفحهٔ ۳۴ شمارهٔ ۷ .

« ۳ ـ حل وبحث معادلات پارامتری مثلثاتی یك مجهولی : برای حل معادلات پارامتری یك مجهولی به طریقی که در شمارهٔ (۶) گفته شد عمل می کنیم .

برای بحث معادلات پارامتری مثلثاتی یك مجهولی باید مقادیر پارامتررا به طریقی تعیین کنیم که :

اولا ـ مقادیر خطوط مثلثاتی کمـان مجهول ، حقیقی باشند .

ثانیاً ـ اگر از حل معادله ، سینوس یا کسینوس کمـان مجهول محاسبه شده باشد ، مقدار سینوس یاکسینوس حاصل ، محصور بین (۱ ـ) و (۱ +) باشد .»

از عبارت بالا استنباط می‌شود که حل معادلهٔ پارامتری شامل بحث نمی‌شود . اما حل معادلهٔ پـارامتری و بحث آن نمی‌تواند از یکدیگر مجزا باشد زیرا همانطورکه دیدیم وقتی معادلهٔ پارامتری را حل می کنیم عبارتهائی بدست می‌آوریم که به ازاء بعضی از مقادیر پارامتر جواب معادله هستند و به ازاء بعضی از مقادیر دیگر جواب معادله نمی‌باشند . بنابراین حل معادله شامل آن می‌شودکه این عبارات را بـدست آورده علاوه برآن تعیین کنیم به ازاء چه مقادیر پارامتر جـواب معادله می‌باشند .

درسایر کتابهای‌درسی ومسائلی‌که برای امتحانات نهائی طرح شده جز در موارد استثنائی این موضوع رعایت شده و هرجا معادلهٔ پارامتری داده شد حل و بحث آن خواسته شده است . در کتـاب حل‌المسائلی‌که مؤلفین این کتاب تألیف نموده‌اند حـل معادلات پـارامتری را نیز شـامل بحث دانسته‌اند.

اما منظور ازبحث چیست ؟ ازآنچه درکتاب مثلثات ششم ریاضی نوشته شده است چنین برمی‌آیدکه جوابهـای معادلهٔ پارامتری را باید برحسب پارامتر بدست‌آورد سپس مقادیری از پارامتر راکه به‌ازاء آنها هریك از جوابها جداگانه قابل قبول می‌باشد تعیین نمود. مثلامعادلهٔ پارامتری :

$$m\sin^2 x - 2(m-2)\sin x + m + 2 = 0$$

را حل می‌کنیم داریم :

$$\sin\beta = \frac{m-2-\sqrt{-6m+4}}{m}$$

که به ازاء هیچیك از مقادیر m قابل قبول نیست و :

$$\sin\alpha = \frac{m-2+\sqrt{-6m+4}}{m}$$

که به‌ازاء $m < \frac{1}{2}$ قابل قبول است .

درکتاب به جای این معادلهٔ مثلثاتی، معادلهٔ جبری :

$$my^2 - 2(m-2)y + m + 2 = 0$$

اختیار و جوابهای این معادله با اعداد ۱+ و ۱ ـ مقایسه شده ونوشته شده‌است که مثلا اگر $m < 0$ باشد جواب بزرگتر یعنی (y'') و اگر $0 < m < \frac{1}{2}$ باشد جواب کوچکتر یعنی (y') و اگر $\frac{1}{2} < m < \frac{2}{3}$ باشد هردو ریشه غیرقابل‌قبولند

و اگر $m>\frac{2}{3}$ باشد معادله جواب ندارد واگر :

$$y'=\sin x=-1$$

باشد معادله دارای یك دسته جواب مضاعف به صورت :

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$$

است .

دراینجا و در مثالهای دیگری که به عنوان نمونه ارائه شده چنین می‌نماید که خود مؤلفین دچار تردید بوده‌اند زیرا در جدولها بحث برحسب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم جبری انجام گرفته است ولی حالات خاص آن که در پائین جدولها مورد بحث قرار گرفته بحث برحسب مجهول اصلی یعنی x شده است .

به عبارت دیگر ، درجدولها بحث شده است که جوابها به ازاء بعضی‌ازمقادیر m قابل قبول وبه ازاء برخی دیگرقابل قبول نیستند ولی در پائین جدولها بحث شده است که به ازاء فلان مقدار m تعداد جوابهای x چقدر است .

علاوه براین، منظور از اصطلاح یك دسته جواب معلوم نیست. اگر بخواهیم جوابهائی مانند :

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \quad و \quad x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

که شامل حرف k می‌باشند هریك را یك دسته جواب بدانیم این اشکال پیش می‌آید که :

$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

را یك دسته جواب و :

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \quad و \quad x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$$

$$x=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \quad و \quad x=2k\pi+\frac{5\pi}{3}$$

را چهار دسته جواب می‌دانیم درحالی که این‌چهار دسته جواب وآن یك دسته جواب تفاوتی باهم ندارند، یعنی باهم معادلند. اگربخواهیم کمانهائی راکه دارای یك مبدأ و یك‌انتها هستند یك دسته بدانیم‌آن وقت باید :

$$x=4k\pi+\frac{\pi}{6}$$

را نیم دسته جواب بدانیم که‌آن هم بی‌معنی بنظر می‌رسد .

برای بررسی نوع دیگری از بحث در معادلات مثلثاتی که حدود x تعیین شده باشد مثال زیر را از کتاب انتخاب می‌کنیم (صفحهٔ ۳۸ مثال ۳)

«مقادیر m را چنان تعیین کنید که جوابهای معادلهٔ

$$\cos x+\cos 2x=m$$

بین ۰ و $\frac{\pi}{3}$ محصور باشند.»

درکتاب $\cos x$ برابر y فرض شده و جوابهای معادلهٔ حاصل یعنی .

$$2y^2+y-m-1=0$$

با اعداد ۱+ و $+\frac{1}{2}$ مقایسه شده که نتیجهٔ جدول‌آن بدین قرار است :

$m<-\frac{9}{8}$ معادله جواب ندارد .

$\frac{-9}{8}<m<0$ معادله جواب قابل قبول‌ندارد .

$0<m<2$ فقط یك جواب معادله y' قابل قبول است .

$m>2$ معادله جواب قابل قبول ندارد.

برخلاف طریقهٔ مفصلی که برای حل این‌مسأله درکتاب ارائه شده حل‌آن بسیارآسان است . به این ترتیب که وقتی x از صفر تا $\frac{\pi}{3}$ ترقی می‌کند $\cos x$ از ۱ تا $\frac{1}{2}$ و $\cos 2x$ از ۱ تا $-\frac{1}{2}$ تنزل می‌نماید پس مجموع آنها از ۲ تا صفرتنزل می‌کند پس‌مقادیر m بین صفر و ۲ می‌تواند باشد .

البته اگر $0<m<2$ باشد تنها یکی از جوابهای معادله بین صفر و $\frac{\pi}{3}$ محصور می‌شود نه تمام جوابهای آن .

اما بهتر بود به جای حل این مسأله که پس‌ازآن به‌این صورت در هیچ جا حتی تمرینهای خود کتاب از آن استفاده نمی‌شود معادلاتی ازقبیل :

$$\begin{cases}\cos^2 x+2(a+1)\sin x-(4a+1)=0\\ \frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^3 x+\cos^3 x+\cos 2x=(m+1)(\sin x+\cos x)\\ \frac{5\pi}{12}<x<\frac{13\pi}{12}\end{cases}$$

حل و بحث می‌شد (تمرینهای شمارهٔ ۵۹ و ۷۴ از کتاب مثلثات ششم ریاضی) تا اولا دانش‌آموز مقصود از بحث این معادلات را بداند.

ثانیاً به نحوهٔ استفاده ازحدود x برای پیدا کردن حدود خطوط مثلثاتی موجود درمعادله پی‌ببرد.

از معادلاتی‌که به عنوان نمونه درکتاب حل وبحث شده و فوقاً به دوتای آنها اشـاره شد دقیقاً مقصود از حل و بحث چنین معادلاتی را نمی‌توان استنباط نمود.

درکتابهای جبر ومثلثات اصطلاحاتی‌ازقبیل حل‌معادله، بحث معادله، بحث‌درجوابهای‌معادله، بحث دروجودجوابهای‌معادله، بحث درامکان‌معادله، بحث‌درتعداد جوابهای معـادله، بحث در علامت جوابهای معادله و غیره بچشم می‌خورد که مفهوم دقیق بیشتر آنها معلوم نیست، درعمل بحث معادله ها و دستگاههای جبری درجهٔ اول به تعیین مقادیری از پارامتر می‌انجامـدکه به ازاء آنها معادله جواب دارد، وقتی در معادلهٔ درجهٔ دوم و سوم بحث می‌شود تعیین می‌کنند که به‌ازاء چه مقادیرپارامتر معادله دارای یك یا دو یا سه جواب است درمثلثات نه این‌است ونه‌آن، زیرا همانطورکه درمعادلهٔ:

$$m\sin^2 x-2(m-2)\sin x+m+2=0$$

دیدیم بحث درتعداد جوابها بی‌معنی بنظرمی‌رسد. یعنی‌همینکه معادله‌دارای جواب‌باشد تعداد جوابهای معادله بینهایت‌می‌شود.

بحث در تعداد جوابهای معادلهٔ:

$$my^2-2(m-2)y+m+2=0$$

هم‌که درکتاب انجام شده منطقی نیست زیرا قبلا ملاحظه شـد که این‌کار جوابهای غیرقابل قبول را نشان نمی‌دهد و کمکی به‌تفکیك جوابهای غیرقابل‌قبول نمی‌نماید.

بنظر می‌رسد مثالهای زیر روش مناسبتری را برای حل معادلات یك مجهولی مثلثاتی‌نشان دهد. دو معادلهٔ عددی برای توضیح مطلب ومقایسه با معادلات پارامتری حل شده است.

مثال ۱ ـ معادلهٔ:

$$2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$

را حل کنید.

حل ـ داریم:

$$\cos x=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \cos x=-2$$

جواب اول قابل قبول نیست و به ازاء جواب دوم داریم:

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

مثال ۲ ـ معادلهٔ:

$$\cos^2 x+2\cos x-m-2=0$$

حل ـ داریم:

$$\cos x=-1-\sqrt{m+3}$$
$$\cos x=-1+\sqrt{m+3}$$

مطابق حل‌مثال اول بایـد گفت جواب اول به ازاء هیچیك از مقادیر m قابل قبول نیست و جواب دومی وقتی قابل قبول است که:

$\sqrt{m+3}<1$ یا $m+3<1$ ویا $m<-2$

و ضمناً $m\geqslant-3$

پس با فرض $-3\leqslant m\leqslant-2$

اگر $-1+\sqrt{m+3}=\cos\alpha$

باشد داریم: $x=\pm\alpha+2k\pi$

مثال ۳ ـ مطلوبست حل معادلهٔ:

$$3\sin^2 x-(m+1)\sin x+1=0$$

حل ـ اگر $\sin x=y$ فرض‌کنیم داریم:

$$3y^2-(m+1)y+1=0$$

یا

$$y'=\frac{m+1+\sqrt{m^2+2m-11}}{6}$$

$$y''=\frac{m+1-\sqrt{m^2+2m-11}}{6}$$

جوابهای معادله را با $+1$ و -1 مقایسه می‌کنیم. خلاصهٔ مقایسه را در این‌جدول ملاحظه می‌کنید، بدیهی است‌که:

$$y''<y'$$

جدول تغییرات

m	$-\infty$		-7		-5		$-1-2\sqrt{3}$		$-1+2\sqrt{3}$		3		5		$+\infty$
Δ		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$af(1)$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$1+\frac{b}{2a}$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$af(-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$-1+\frac{b}{2a}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
	$y''<-1<y'<1$				$-1<y''<y'<1$				$-1<y''<y'<1$				$-1<y''<1<y'$		
			$-1=y''<y'<1$			$-1<y'=y''<1$				$-1<y'=y''<1$				$-1<y''<y'=1$	

در جوابهای زیر :

$y'=\sin\alpha$ و $y''=\sin\beta$

فرض شده است .

$m<-5$

$$\begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases}$$

$$x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

و $m=-5$

$$\begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} x=\beta+2k\pi \\ x=\pi-\beta+2k\pi \end{cases}$$

$-5<m<-1-2\sqrt{3}$

$$\begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} m=-1-2\sqrt{3} \\ m=-1+2\sqrt{3} \end{cases}$$

و $-1-2\sqrt{3}<m<-1+2\sqrt{3}$

جواب ندارد .

و

$$\begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases}$$

$-1+2\sqrt{3}<m<3$

$$\begin{cases} x=\beta+2k\pi \\ x=\pi-\beta+2k\pi \end{cases}$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$m=3$

و

$$\begin{cases} x=\beta+2k\pi \\ x=\pi-\beta+2k\pi \end{cases}$$

$m>3$

$$\begin{cases} x=\beta+2k\pi \\ x=\pi-\beta+2k\pi \end{cases}$$

مثال ۴ـ مطلوبست حل معادلهٔ :

$$m\sin^2 x-2(m-2)\sin x+m+2=0$$

(ازمتن کتاب)

حل ـ داریم :

$$y'=\frac{m-2+\sqrt{-6m+4}}{m}$$

$$y''=\frac{m-2-\sqrt{-6m+4}}{m}$$

بدیهی است که اگر $m>0$ باشد y' و اگر $m<0$ باشد y'' جواب کوچکتر معادله خواهد بود با توجه به این نکته جدولی که در کتاب بدست آمده است به ترتیب زیر اصلاح می‌شود :

m	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
	$-1<y''<1<y'$	$y'<-1<y''<1$	$y'<y''<-1<1$	معادله جواب ندارد		
مقایسه	$y=-\frac{1}{2}$	$y'=-5$ و $y''=-1$	$y'=y''<-1<1$			

مطابق با این جدول ملاحظه می‌شود که اگر $m<\frac{1}{2}$ باشد y'' قابل قبول است و هیچگاه y' قابل قبول نیست پس:

$$y''=\frac{m-2-\sqrt{-6m+4}}{m}=\sin\alpha$$

$$\begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases}$$

مثال ۵ـ مطلوبست حل معادلهٔ :

$$16\sin^2 x-8\sqrt{2}\sin x+1=0$$

وقتی $0<x<\frac{5\pi}{6}$ باشد .

حل ـ داریم

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}+1}{4} \quad \text{و} \quad \sin x=\frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

اما از روی دایرهٔ مثلثاتی دیده می‌شود که اگر :

$$0<\sin x<\frac{1}{2}$$

باشد به ازاء هرجواب برای $\sin x$ یك‌جواب قابل‌قبول‌واگر:

$$\frac{1}{2}<\sin x<1$$

باشد دوجواب قابل قبول داریم ، پس اگر :

$$\frac{\sqrt{2}+1}{4}=\sin\beta \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{2}-1}{4}=\sin\alpha$$

جوابهای قابل قبول معادله عبارتنداز:

$$x=\pi-\beta \quad \text{و} \quad x=\beta \quad \text{و} \quad x=\alpha$$

$$\left(\beta=\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}+1}{4} \quad \text{و} \quad \alpha=\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)$$

مثال ۶ـ مطلوبست حل معادلهٔ: $\cos^2 x=m\sin x$

وقتی $0<x<\frac{3\pi}{4}$ باشد .

حل ـ داریم $\sin^2 x+m\sin x-1=0$ و به‌فرض $\sin x=y$ می‌شود $y^2+my-1=0$

از روی دایرهٔ مثلثاتی دیده می‌شود که اگر :

$$0<y<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

باشد به ازاء هرجواب y یك جواب برای x پیدامی‌شودواگر:

$\frac{\sqrt{2}}{2}<y<1$ باشد به ازاء هرجواب y برای x دوجواب پیدا می‌شود اما چون $\frac{c}{a}<0$ است:

اگر $f(0)f(\frac{\sqrt{2}}{2})<0$ یا $-1(\frac{m\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2})<0$

یا $m>\frac{\sqrt{2}}{2}$

یك‌جواب قابل قبول است.

اگر $f(\frac{\sqrt{2}}{2})f(1)<0$ یا $0<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$

دوجواب قابل قبول است.

اگر $f(1)=0$ یا $m=0$ جواب‌مضاعف‌دارد

از حل معادله داریم $y=\frac{-m\pm\sqrt{m^2+1}}{2}$

که فقط جواب $\frac{-m+\sqrt{m^2+1}}{2}$ ممکن است‌قابل‌قبول باشد که اگر آنرا $\sin\alpha$ بگیریم :

$$\left(\alpha=\operatorname{Arcsin}\frac{-m+\sqrt{m^2+1}}{2}\right)$$

داریم :

$$x = \frac{\pi}{2} \ : \ m = 0$$

$$x = \pi - \alpha \ \text{و} \ x = \alpha \ : \ 0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \alpha \ : \ m \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

توجه به حل مثالهای بالامخصوصاً مقایسهٔ حل مثال چهارم باحل و بحث همین معادله، که در کتاب انجام شده و اشکال آن قبلا خاطر نشان شد، می‌نماید که با مختصر توضیحی می‌توان جوابهای قابل قبول معادله را از جوابهای غیر قابل قبول متمایز نمود و بخصوص دربرابر هر جواب معادله پارامتری می‌توان مقادیری از پارامتر را که به ازاء آنها جواب قابل قبول می‌باشد قرار داد و برطبق تعریف کتاب ، حل وبحث یك معادلهٔ پارامتری جز این چیزی نیست. فقط برای این منظور کافی است درنظر داشته باشیم که ازدومقدارمتمایز $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ که جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشند اگر $a > 0$ باشد داریم : $x' > x''$ و اگر $a < 0$ باشد داریم : $x' < x''$

از این گذشته باید ازتعداد اصطلاحاتی که در موردحل وبحث معادلات بکارمی‌رود کاست زیرا بکار بردن چنداصطلاح در یك مورد ، غالباً فکر دانش‌آموزان را مدتها بخود مشغول می‌دارد . دانش آموز دقیق می‌خواهد تفاوت بین حل معادله و حل و بحث معادله را بداند یا می‌خواهد بفهمد که بحث در یك معادله با بحث در جوابهای یك معادله فرق داردیانه این گونه سؤالات فکر او را مغشوش و وقتش را تلف‌می‌سازد.

درکتاب درضمن تمرینهای حل دستگاههای معادلات مثلثاتی تمرینهای شمارهٔ ۱۹و۲۵ دیده می‌شود که عیناً یکی می‌باشند جز اینکه درشمارهٔ ۱۹ حل دستگاه و در شمارهٔ ۲۵ حل وبحث آن خواسته شده‌است. در اینجا دانش‌آموز قیاس می‌کند که باید منظور از حل معادله و منظور از حل وبحث معادله یکی نباشد در حالی که می‌دانیم حل معادلهٔ پارامتری بدون تعیین مقادیری از پارامتر که در ازاء آنها جوابهاقابل قبولند ناقص است و در بعضی موارد نتیجه غلط می‌دهد (مثال ۲ صفحهٔ ۳۵ کتاب)

کلیهٔ این اصطلاحات را می‌توان درسه اصطلاح خلاصه کرد :

الف ـ حل معادله ـ و آن‌عبارتست ازتعیین‌مقادیر قابل قبولی که در معادله صدق‌می‌کنند. اگر معادله پارامتری باشد مقادیری از پارامتر را که به ازاء آنها جواب ، قابل قبول است باید مشخص نمود.

ب ـ بحث در تعداد جوابهای معادلهٔ پارامتری

در معادلات مثلثاتی به شرطی این کار ممکن است که حدود مجهول مشخص شده باشد.

ج ـ بحث‌درعلامت جوابهای معادلهٔ پارامتری جبری .

۴ـ شرط اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم فقط یك جواب بین α و β داشته باشد ـ در صفحهٔ ۵۴ نوشته شده است که چنانچه بخواهیم معادلهٔ کلاسیك مفروض فقط یك‌دسته‌جواب قابل‌قبول داشته‌باشدکافی‌است که درمعادلهٔ (۸) :

$$f(-1)f(1) < 0$$

باشد (معادلهٔ ۸ عبارتست از :

$$(2by^2 + 2a\sqrt{2}\,y - b - 2c = 0$$

اشکال اول اینکه‌اگر نتیجه‌ای راکه درکتاب جبر ششم ریاضی بدست آمده مبنی بر اینکه «شرط لازم‌وکافی برای آنکه فقط یك جواب معادلهٔ درجهٔ دوم $f(x) = 0$ بین α و β باشد آن است که $f(\alpha)f(\beta) < 0$ باشد» صحیح بدانیم چون در اینجا باید $-1 < y < 1$ باشد پس شرط اینکه فقط یکی از جوابهای معادلهٔ (۸) قابل قبول باشد آنست که :

$$af(1) < 0 \qquad f(-1) = 0$$

یا

$$af(-1) < 0 \qquad f(1) = 0$$

یا

$$f(1)f(-1) < 0$$

اما در اثبات آن قضیه در جبر ششم ریاضی نیزدقت نشده است. درست است که اگر $f(\alpha)f(\beta) < 0$ باشد فقط یك جواب بین α و β خواهیم داشت ولی عکس این مطلب صحیح نیست زیرا اگر یك جواب معادله بین α و β باشد یکی از دوحالت زیر پیش می‌آید یا :

$$y' < \alpha < y'' < \beta \ : \text{یا} \ \alpha < \delta' < \beta < \delta''$$

پس اگر بخواهیم‌فقط یك جواب معادله بین α و β باشد

کافی نیست که $f(\alpha)f(\beta)<0$ باشد.

مثلا اگر بخواهیم فقط یك جواب معادلهٔ:

$$(2m+3)x^2+2x+m+2=0$$

بین ۳+ و ۱- باشد باید $-2<m<-\frac{2}{3}$ باشد و حال آنکه بر طبق قاعده‌ای که در کتابهای درسی نوشته شده است جواب $m=-2$ بدست نمی‌آید.

۵- طرز نوشتن جواب - جوابهای دستگاه:

$$\begin{cases} tg\,x = tg\,2y \\ \sin x + 2\cos^2 y = 0 \end{cases}$$

به صورت زیر نوشته شده است:

$$(1)\quad \begin{cases} y = k_1\pi \\ x = k\pi + 2k_1\pi \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} y = k_2\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi + 2k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} y = k_3\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi + 2k_3\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

درصورتی که دستگاه جواب دوم به ازاء مقادیر فوق k و دستگاه جواب سوم به ازاء مقادیر زوج k در معادله صدق نمی‌نماید و بهتر بود از عبارات $2k$ و $2k+1$ استفاده می‌شد

۶- تقسیم معادله‌های یك دستگاه بر یکدیگر

صفحهٔ ۷۵ - ب.

«برای حل دستگاههای:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

عموماً به طریق زیر عمل می‌کنند.»

«ابتدا معادلهٔ دوم دستگاه را یك‌مرتبه ترکیب نسبت و یك‌بار تفضیل نسبت کرده، دومعادلهٔ حاصل را بر یکدیگر تقسیم می‌کنند تا معادلهٔ جدیدی متوافق با معادلهٔ دوم دستگاه‌مفروض بدست آید، سپس در معادلهٔ جدید صورت و مخرج کسر طرف اول را به حاصل‌ضرب عوامل تبدیل می‌کنند و...»

اولاً- معادلات متوافق قبلا تعریف نشده است گو اینکه منظور معادلات متعادل یاهم ارزاست‌که آنهم درجائی تعریف نشده است.

ثانیاً- این قاعده دانش‌آموز را به اشتباه می‌اندازد و تصور می‌کند بدون درنظر گرفتن نکاتی می‌توان در معادلات ترکیب نسبت و تفضیل نسبت‌کرده نتیجه را بر هم تقسیم‌نمود.

برای توضیح معادلهٔ $\frac{1-2x}{1+2x}=\frac{1-x}{1+x}$ را درنظر می‌گیریم که دارای جواب صفر می‌باشد. چون به طریق فوق عمل کنیم نتیجه می‌شود: $\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}$ که دارای جواب نیست. پس این عمل همواره معادلهٔ متعادل نتیجه نمی‌دهد.

۷- حل بعضی‌ازدستگاههای معادلات مثلثاتی

در بارهٔ راه حل دستگاههای معادلات مثلثاتی درکتاب فقط به ذکر این‌عبارت اکتفا شده است:

«صفحهٔ ۶۴-۱- عموماً برای‌حل دستگاه معادلهٔ مثلثاتی آن را به‌دستگاه معادلی که تعداد مجهولاتش کمتر باشدتبدیل می‌کنند وچون این عمل را به‌این‌طریق ادامه دهند حل‌دستگاه به حل معادلهٔ مثلثاتی یك مجهولی منجر می‌شود.»

مثل اینکه دودستگاه معادلات A وB را وقتی‌با هم‌معادل گویند که جوابهای دستگاه B در دستگاه A صدق نمایدوجز جوابهای دستگاه B مقادیر دیگری در دستگاه A صدق‌ننماید

اگر این تعریف صحیح باشد یك‌دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی را نمی‌توان با یك دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی‌معادل دانست یعنی دستگاهی را نمی‌توان تبدیل به دستگاه دیگری کرد که تعداد مجهولاتش کمتر باشد.

اماچگونه‌می‌توان‌دستگاهی‌را به‌دستگاه‌دیگری تبدیل‌کرد که‌ساده‌تر باشد یا تعداد مجهولاتش از مجهولهای دستگاه اول کمتر باشد؟ وبرای این‌کار چه عملیاتی مجاز می‌باشد؟ این موضوعی‌است که‌مورد اشکال بسیاری از دانش‌آموزان‌می‌باشد. اغلب مشاهده می‌شودکه طرفین معادلهٔ دستگاهی را بردیگری تقسیم و یا در دیگری ضرب می‌نمایند، یا طرفین معادله‌ای را به توان دو می‌رسانند و یا مجهولی رااز معادله‌ای بر حسب مجهولهایی دیگر پیدا کرده در معادله‌های دیگر قرارمی‌دهند بدون توجه به اینکه این عمل ممکن است شامل ضرب در عبارتی شامل مجهول و یا تقسیم بر آن باشد. به‌عبارت دیگر

توجه ندارند که نتیجهٔ این عملیات ممکن است بعضی از جوابهای دستگاه را حذف نماید و یا برعکس تولید جوابهای اضافی کند.

آنچه دربارهٔ حل دستگاهها در کتابهای درسی وجود دارد بسیار ناقص و فقط دربارهٔ دستگاههای درجهٔ اول است. طریقه‌های حذفی و تبدیلی و قیاسی که در کتابهای سوم و چهارم ارائه شده فقط برای حل دستگاههای درجهٔ اول است درحالی که در کلاس چهارم ریاضی برای حل مسائل فکری از راه جبر و برای حل بعضی از مسائل حساب توضیحی دربارهٔ حل دستگاهها بطور کلی، لازم بنظر می‌رسد.

نتیجه این می‌شود که وقتی دانش آموز با چنین دستگاههایی مواجه می‌شود برای حل آن طرقی را که برای حل دستگاههای درجهٔ اول خوانده است بکار می‌برد و همانطور که در بالا اشاره شد گاهی هم از ضرب و تقسیم معادلات استفاده می‌کند و غالباً هم به جواب صحیح می‌رسد و اگر هم جواب اضافی بدست آورد یا جوابی از معادله را حذف نماید متوجه نمی‌شود.

برای اینکه اشکال کار دانش آموزان که نتیجهٔ کامل نبودن کتابهای درسی است روشنتر شود مثال سادهٔ زیر را انتخاب نموده به چند طریق حل می‌کنیم.

راه حلهای زیر مطابق با راه حلهائی است که دانش آموزان برای حل دستگاههای مشکلتر و بعضی از دستگاههای معادلات مثلثاتی استفاده می‌کنند. شاید آوردن این مثال ساده برای توضیح مطلب، مناسب نباشد ولی برای آنکه مقصود و منظور در میان حل دستگاههای پیچیده تر گم نشود و یا خواننده را خسته ننماید به ذکر این مثال اکتفا می‌شود.

مطلوبست حل دستگاه:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

حل اول- مقدار y را از معادلهٔ اول در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم معادلهٔ $x - x^4 = 0$ بدست می‌آید که دارای جوابهای $x = 0$ و $x = 1$ است که چون در معادلهٔ اول قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

حل دوم- مطابق با راه حل اول x را بدست آورده در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

حل سوم- طرفین معادله‌ها را یك بار درهم ضرب و یك بار بر یکدیگر تقسیم کرده طرفین ووسطین می‌کنیم نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} xy = x^2y^2 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \quad یا \quad \begin{cases} xy = x^2y^2 \\ x = y \end{cases}$$

از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $xy = 0$ که چون در معادلهٔ دوم قرار دهیم داریم $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ و علاوه بر آن نتیجه می‌شود که $xy = 1$ که با در نظر گرفتن معادلهٔ دوم

$$x^2 = 1 \quad x = \pm 1 \quad و$$

بدست می‌آید پس داریم:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

در مثال سادهٔ فوق مسلماً کمتر کسی پیدا می‌شود که راه حل دوم یا سوم را بکار برد و شاید بسیاری بدانند که معادلهٔ

$$x^4 - x = 0$$

نتیجه‌ای است از معادلهٔ دوم ومجذور معادلهٔ اول دستگاه. بنابراین جوابهائی که بدست می‌آید باید در معادلهٔ اول امتحان شود.

همچنین دستگاه:

$$\begin{cases} xy = x^2y^2 \\ x^2 = y^3 \end{cases}$$

نتیجه‌ای است از ضرب معادله‌های دستگاه در یکدیگر و این کار ممکن است جواب اضافی تولید نماید اما در دستگاههای معادله‌های مثلثاتی مثالهای بیشتری از این قبیل می‌توان یافت که بر خلاف دستگاه جبری فوق بیشتر دانش آموزان را به اشتباه می اندازد. برای مثال دستگاه معادله‌های پارامتری شمارهٔ ۱۹ صفحهٔ ۷۴ کتاب را به ازاء $a = -\sqrt{3}$ مطابق روش معمول حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sin 2x = -\sqrt{3}\sin y \\ \cos 2x + \cos 2y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \cos 2x - 2\sin^2 y = 0$$

$$\Longrightarrow \cos 2x - 2\frac{\sin^2 2x}{3} = 0$$

$$\Longrightarrow 2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \text{ و } -2 \Longrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$$

دنباله درصفحهٔ ۶۲۰

نکاتی چند دربارهٔ هذلولی

گردآورنده: جلیل‌الله قراگزلو

همکار ارجمند و پیشکسوت دانشمند آقای رزاقی‌خمسی طی دو مقاله مندرج در مجلهٔ یکان نکاتی مربوط بـه کتـاب هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی رایادآوری فرموده‌بودند

هرچند به مقالهٔاخیر ایشان از طرف سازمان کتـابهای درسی پاسخ داده شدکه درمجلهٔ یکان هم درج گردید امااین پاسخ قانع کنند نبود، به جای آنکه به اصل مـوضوع و بـه نکتهٔ مورد ایراد توجه شود دربـارهٔ برنامهٔ هندسهٔ چهـارم قلمفرسائی شده بود.

این نکته هم باید اضافه شودکه همهٔ مؤلفان کتاب‌مزبور مورد احترام معلمان ریاضی هستند و دانش و فضل آنان‌مورد تأیید همگان است . اگر این‌کتاب در سنوات اخیر زیر نظر خود مؤلفان‌آن چاپ می‌شد مسلما تغییرات مطلوب درآن‌بعمل آمده بود.

حق این بودکه سازمان کتابهای درسی ضمن بررسیهای چند سالهٔ خود لااقل اضافه می‌کردکه: محور اصلی دودایـره باید به دایرهٔ کوچکتر نزدیکتر باشد، درغیر آن ممکن‌است مکان هندسی مراکز دوایری باشد که دو دایـرهٔ مفروض را نصف می‌کنند.

اولین انتقاد همکار گرامی آقای رزاقی‌از کتاب‌هندسه و مخروطات مربوط به خواص هذلولی بود ، ایشان مرقوم داشته‌بودندکه معادلهٔ هر هذلولی نسبت به مجانبهایش به‌صورت

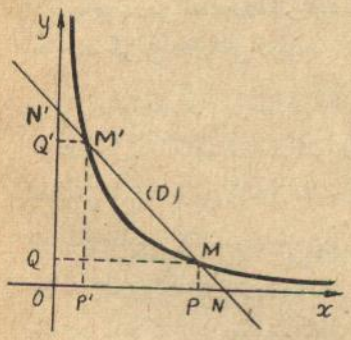
$$xy=\frac{a^2}{2}$$

است که‌اگر هذلولی متساوی‌المحورین باشد معادله دردستگاه محورهای قائم است و اگر هذلولی غیر مشخص باشد دستگاه محورهای مختصات مایل و منطبق بر مجانبها انتخاب‌می‌شود.

در مورد مطلب اخیر چند نکته تهیه کرده‌ام تاموضوع واضحتر شده‌ودانش‌آموزان به این وسیله به‌حل مسائل تازه‌ای راهنمائی شوند . امید است توفیق یافته مطلب اول رانیز مورد بررسی‌قراردهم .

❁❁❁

قضیه ـ قطعاتی از قاطع محصور بین هذلولی‌متساوی‌ـ المحورین و مجانبهای این منحنی با یکدیگر برابراند.



اثبات ـ فرض می‌کنیم قاطع (D) شاخه‌ای ازهذلولـی متساوی‌المحورین را درنقاط M و M' و مجانبهارادر N و N' قطع‌کرده باشد چون معادلهٔهذلولی‌متساوی المحورین :

$$xy=\frac{a^2}{2}$$

است اگر P و Q پای عمودهای وارد از M و P' و Q' پای عمودهای وارده از M' بر دومحور باشند خواهیم داشت:

$$\overline{PM}\times\overline{QM}=\overline{P'M'}\times\overline{Q'M'}$$

و از آنجا:

$$(1)\quad \frac{\overline{PM}}{\overline{P'M'}}=\frac{\overline{Q'M'}}{\overline{QM}}$$

و به سادگی به‌کمك تشابه مثلثهای موجود می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{Q'M'}}{\overline{QM}}=\frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN'}}\ ,\ \frac{\overline{PM}}{\overline{P'M'}}=\frac{\overline{MN}}{\overline{NM'}}$$

بارعایت رابطهٔ (۱) از مقایسهٔ دورابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

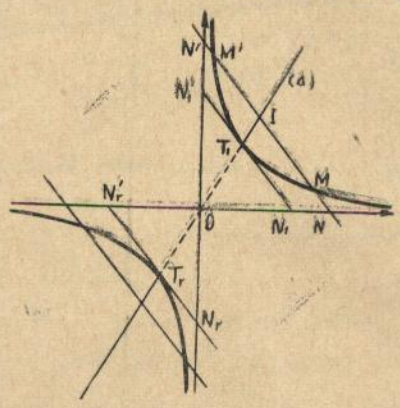
$$\frac{\overline{NM}}{\overline{NM'}}=\frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN'}}$$

که می‌توان آنرا به‌صورت زیر نوشت :

$$\frac{\overline{NM'}-\overline{NM}}{\overline{NM}}=\frac{\overline{MN'}-\overline{M'N'}}{\overline{M'N'}}$$

$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{NM}}=\frac{\overline{MM'}}{\overline{M'N'}} \Longrightarrow \overline{MN}=\overline{M'N'}$$

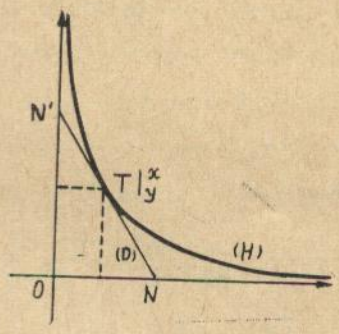
نتیجهٔ ۱ـ هرگاه قاطع (D) به موازات خود تغییر مکان یابد I وسط قاطع MM' همواره وسط NN' بوده در نتیجه مکان آن خطی خواهد بود که از O می‌گذرد. پس :



مکان هندسی اوساط اوتار موازی در هذلولی متساوی القطرین خطی است مار بر مرکز هذلولی

نتیجهٔ ۲ـ هرگاه درحین انتقال قاطع (D) به‌موازات خود نقاط M و M′ برهم منطبق شوند یا به گفتهٔ بهتر (Δ) بر هذلولی مماس گردد نقطهٔ تماس روی (Δ) خواهد بود یعنی نقطهٔ تماس وسط قطعه‌ای از مماس است که بین دومجانب محصور می‌باشد .

قضیه ـ مساحت سطح محصور بین مماس و مجانبهای هذلولی متساوی‌القطرین برابر a^2 است.



اثبات ـ فرض می‌کنیم (D) در نقطهٔ $T(x,y)$ بر هذلولی متساوی‌المحورین مماس بوده و محورها را در N و N′ قطع کرده باشد :

$$S=ONN' \text{ مساحت} = \frac{1}{2}ON\times ON'$$

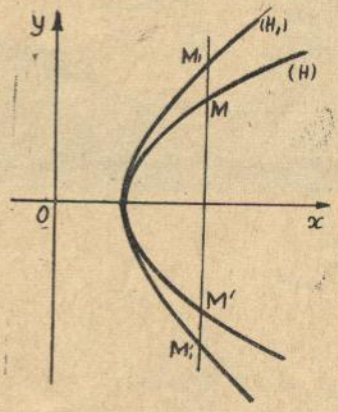
و چون T وسط NN' است پس : $x=\frac{1}{2}ON$

و $y=\frac{1}{2}ON'$ بوده درنتیجه:

$$S=\frac{1}{2}\times 2x\times 2y=2xy=2\times\frac{a^2}{2}=a^2$$

هذلولی متشابه باهذلولی متساوی‌المحورین

فرض می‌کنیم (H) یك هذلولی به رأسهای A و A′ و مرکز O و معادلهٔ : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ باشد.



هذلولی دیگر (H_1) را که متساوی‌المحورین بوده و رأسهای آن همان نقاط A و A′ و مرکزش همان نقطهٔ O باشد درنظر می‌گیریم واضح است که معادلهٔ این هذلولی ؟

$$x^2-y^2=a^2$$

خواهد بود ـ هرگاه خطی موازی محور y ها خارج ازفاصلهٔ ($+a$ و $-a$) هذلولی H را در M و M′ قطع کند عرضهای این نقاط ازرابطهٔ $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ بدست می‌آید و هرگاه M_1 و M'_1 نقاط برخورد همین خط با هذلولی (H_1) باشد عرضهای این نقاط ازرابطهٔ:

$$y=\pm\sqrt{x^2-a^2}$$

محاسبه می‌شود،

این روابط نشان می‌دهد در دوسوی محور x ها نقاطی ازدومنحنی با طولهای متساوی دارای عرضهای متناسب می‌باشندو نسبت بین عرضهای نقاط متناظر $+\frac{b}{a}$ ویا $-\frac{b}{a}$ است.

($+\frac{b}{a}$ هنگامی که دونقطهٔ تقاطع دریك طرف محور x ها باشند و $-\frac{b}{a}$ هنگامی که دو نقطهٔ تقاطع در طرفین محور x ها باشند) دراین حال گوئیم این دوهذلولی در همبستگی قائم محور x ها متشابه بوده و نسبت تشابه $\pm\frac{b}{a}$ است .

اینك با علم به این امر می‌توان خواص هذلولی متساوی‌المحورین را دربارهٔ هذلولی غیر مشخص تعمیم داد و نتایج زیررا بدست آورد .

نتیجهٔ ۱ـ اوساط اوتار هر هذلولی ، اوساط پاره خطهای نظیر آن اوتار محصور بین دو مجانب نیز می‌باشند .

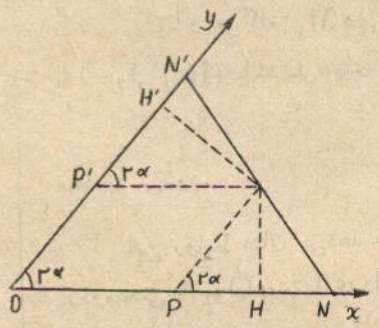
نتیجهٔ ۲ـ مکان هندسی اوساط اوتار موازی در هر هذلولی خطی است مار بر مرکز هذلولی .

نتیجهٔ ۳ـ نقاط تماس مماسهای موازی بر هذلولی روی همین مکان قرار دارند (مکان نتیجهٔ ۲).

نتیجهٔ ۴ـ مساحت مثلثی که اضلاع آن مجانبهای هذلولی و مماس غیر مشخصی بر هذلولی است مقداری است ثابت و برابر ab .

معادلهٔ هذلولی غیر مشخص نسبت به مجانبهایش (مختصات مایل)

نقطهٔ M را روی هذلولی در نظر گرفته و برای مجانبها طوری جهت در نظر می‌گیریم که طول و عرض مایل نقطهٔ M هر دو مثبت شوند.



هرگاه N و N′ نقاط تلاقی مماس بر هذلولی در نقطهٔ M با مجانبها باشند P و P′ تصاویر مایل M را روی محورهای مختصات مایل می‌یابیم (بوسیلهٔ رسم خطوط موازی محورها از M) می‌دانیم که:

$$\text{مساحت } ONN' = \frac{1}{2} ON \times ON' \times \sin 2\alpha = ab$$

که در آن 2α زاویهٔ بین دو مجانب بود در نتیجه :

$\sin\alpha = \frac{b}{c}$ و $\cos\alpha = \frac{a}{c}$ می‌باشد پس :

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2ab}{c^2}$$

و چون M وسط NN′ است خواهیم داشت:

$$\overline{OP} = x = \frac{1}{2} ON \text{ و } \overline{OP'} = y = \frac{1}{2} ON'$$

در نتیجه :

$$xy = \frac{1}{4} ON \times ON'$$

و یا :

$$ON \times ON' = 4xy$$

و از آنجا:

$$\text{مساحت } ONN' = \frac{1}{2} \times 4xy \times \frac{2ab}{c^2} = ab$$

و از آنجا:

$$xy = \frac{c^2}{4}$$

که درست مانند معادلهٔ هذلولی متساوی‌المحورین نسبت به مجانبهایش می‌باشد .

حاصل ضرب فواصل هر نقطهٔ هذلولی از دو مجانب

اگر H و H′ تصاویر نقطهٔ M روی دو مجانب باشند خواهیم داشت :

$$HM = PM \sin 2\alpha$$

و

$$H'M = P'M \sin 2\alpha$$

$$HM \times H'M = PM \cdot P'M \sin^2 2\alpha$$

و چون :

$$\sin 2\alpha = \frac{2ab}{c^2} \text{ و } PM \times P'M = xy = \frac{c^2}{4}$$

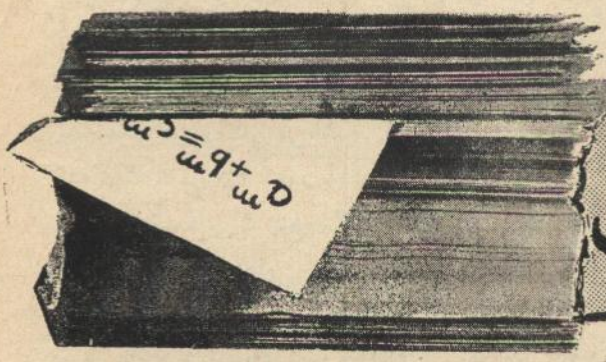
پس :

$$MH \times MH' = \frac{a^2b^2}{c^2}$$

پس :

حاصل ضرب فواصل هر نقطهٔ واقع بر هذلولی غیر مشخص از دو مجانب آن مقداری است ثابت و برابر است با :

$$\frac{a^2b^2}{c^2}$$



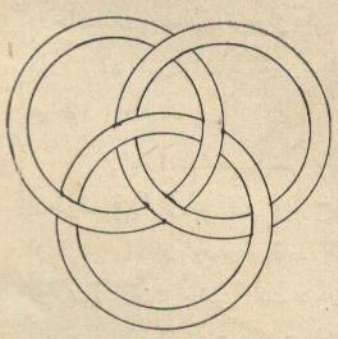
مسائل حل نشدهٔ ریاضی

تألیف :
C. STANLEY OGILVY
ترجمهٔ : ع . م.

بخش ششم — مسائل توپولوژی

اعداد را از خیلی قدیم می‌شناسیم . با آنها بزرگ شده‌ایم و هرروز با آنها سروکار داریم. آنها قسمتی اززندگی ما را تشکیل می‌دهند . هرچندکه اعداد موجوداتی به‌حد اعلای تجرد هستند با وجود این آنقدر با آنها مأنوس هستیم که به سادگی می‌توانیم آنها را فرا گیریم .

قلمر و توپولوژی‌ازنوع‌دیگر است. درمقایسه‌های روزانهٔ خود توپولوژی را بکارمی‌بریم بدون آنکه زبان‌خاصی برای آن داشته باشیم یا اینکه ازفن مربوط به‌آن با اطلاع باشیم . می‌دانیم‌که لنگه دستکش چپ به دست راست نمی‌رود ؛ اما چرا گوشی تلفن ، که درعین حال هم برای گوش و هم‌برای دهن درست شده ، برای هردو وجه صورت قابل استفاده‌است؟ چرا در بعضی حالات که یك نخ را پیچ وحلقه می‌دهیم گره ایجاد می‌شود اما در بعضی حالات دیگر با کشیدن یکی ازدو سرنخ همهٔ پیچ‌وحلقه‌ها ازبین‌می‌روند وگرهی‌هم ایجادنمی‌شود؟

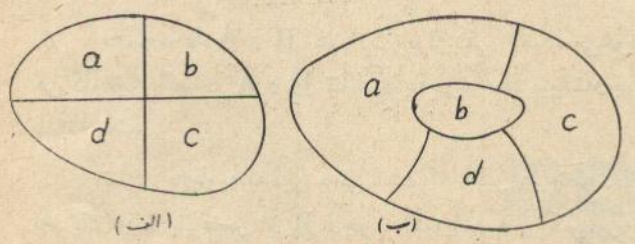


به شکل مقابل توجه کنید ، سه حلقه چگونه باهم درگیر شده‌اند ؟ آیا واقعاً این سه حلقه درگیرهستند ؟ هیچیك از حلقه‌ها از دیگری نگذشته اما درعین‌حال ازهم جدا نمی‌شوند .

برای ناظری‌که درقطب‌شمال ایستاده باشدهمهٔ جهتهارو به سمت جنوب است ؛ دراین نقطه محورهای مختصات مربوط به طول وعرض جغرافیائی‌را چگونه باید تعیین‌کرد ؟ باتوجه به اهمیت روزافزون نواحی قطبی آیا می‌توان تعریفی راقبول کردکه در هیچ نقطه ازکرهٔ زمین اشکال مزبور وجود نداشته باشد ؟

همهٔ این مسائل به توپولوژی مربوط می‌شوند ، خیلی وقت نیست‌که بررسی ریاضی مسائل توپولوژی آغاز شده است. در زمینهٔ توپولوژی که خود مولود قرن بیستم است مسائل‌حل نشده‌ای یافت می‌شود . بعضی از این مسائل به تازگی مطرح شده است . اما در بسیاری موارد باید زبان تازه‌ای آفرید تا بتوان آنها را شرح داد . مخصوصاً دربارهٔ اعداد زبانی‌وجود داردکه به‌آن مأنوس نیستیم .

قدیمی‌ترین مسئلهٔ توپولوژی‌که خیلی معروف است وبه سادگی طرح می‌شود مسئلهٔ مشهور چهار رنگ است‌که هنوزحل نشده است . موضوع از این قرار است که یك نقشهٔ جغرافیائی را باید چنان رنگ‌آمیزی کنیم که‌هیچ‌دوکشوری‌که مرزمشترك دارند دارای رنگ متشابه نباشند . البته اگر دوکشور فقطدر یك نقطه مشترك باشند دارای مرزمشترك شناخته نمی‌شوند . (مثل‌دوکشور a و c درشکل‌الف). برای‌بعضی‌نقشه‌هاچهاررنگ



(الف) (ب)

لازم است (شکل ب) ، اگر این نقشهٔ یك جزیره باشد می‌توان از رنگ کردن آب اطراف آن صرف نظر کرد ، یا اینکه آنرا همرنگ به ناحیهٔ b مشخص کرد . در این دو

حالت چهار رنگ کفایت می‌کند اما سه رنگ کافی نیست .

آیا نقشه‌هایی وجود دارد که برای آنها پنج رنگ الزامی باشد ؟ چنین نقشه‌هایی را نمی‌شناسند اما در ضمن کافی بودن چهار رنگ را هم نتوانسته‌اند ثابت کنند . (مسلم شده است که پنج رنگ همواره کافی می‌باشد). توانسته‌اند ثابت کنند که برای نقشه‌ای که شامل ۳۵ کشور باشد چهار رنگ کفایت می‌کند . بنابراین نقشه‌هایی که پنج رنگ را لازم داشته باشد اگر وجود هم داشته باشند نقشه‌هایی بسیار پیچیده می‌باشند .

از ۱۹۵۷ به بعد مجلهٔ ماهانهٔ «Scientific American» در هر یك از شماره‌های خود مقاله‌ای از **مارتن گاردنر** در بارهٔ ریاضیات تفریحی چاپ می‌کند . گاردنر قبلا در ۱۹۵۲ در یکی از داستانهای علمی که منتشر می‌کرد به نام «جزیره‌ای با پنج رنگ» ضمن استدلال خود مرتکب یك اشتباه شده بود. او بطور ضمنی قبول کرده بود که مسئلهٔ چهار رنگ به این معنی است که نقشه‌ای با پنج ناحیه فراهم کنیم که هیچیك از ناحیه‌ها با هر چهار ناحیهٔ دیگر مرز مشترك نداشته باشد . این موضوع به جای خود درست است و به آسانی ثابت می‌شود اما مسئلهٔ چهار رنگ نیست . داستان گاردنر مجدداً در ۱۹۵۸ در کتاب «تفریحات ریاضی» توسط **کلیفتن فادمیان** مطرح شد و گاردنر درشمارهٔ سپتامبر ۱۹۶۰ مجله اشتباه خود را یادآور شد و اضافه کرد که بازهم دلایلی در مورد تفسیر مسئله دارد ، وبسیاری ازخوانندگان علاقمند مجله گمان بردند که وی راه حل مسئله را درحالت کلی یافته است.

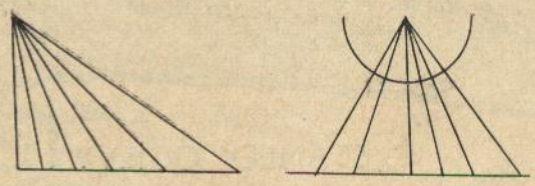
مسئلهٔ رنگ‌آمیزی روی کره و روی یك صفحه همانند است ؛ اما روی یك حلقه (لاستیك اتومبیل پر از باد) مسئله از قرار دیگر است . اگر زمین به شکل حلقه می‌بود برای رنگ آمیزی نقشهٔ آن تا هفت رنگ و مسلماً نه بیشتر ، لازم می‌شد. عجیب اینجا است کـه مسئله در بارهٔ حلقه حل شده است در صورتی کره وصفحه شکلهایی به‌مراتب ساده‌تر ازحلقه‌می‌باشند.

***

دومجموعهٔ A و B هم ارزتوپولژیکی نامیده می‌شوند هرگاه بین اعضای A و B تناظری دوسویه وهم پیوسته‌وجود داشته باشد .

تناظر دوسویه به این معنی است که نظیر هرعنصری از A یك وفقط یك‌عنصر از B وجود داشته‌باشد وبرعکس. برای تحقق یك چنین تناظری لازم نیست که اعضای دو مجموعه را شمرد ، بنابه تعریف کافی است که یك‌چنین تناظری را ملاحظه کرد . برای مثال فرض می‌کنیم A عبارت باشد از مجموعهٔ نقاط قطعه خطی به‌طول n سانتیمتر و B مجموعهٔ نقاط قطعه ـ خط به طول ۲n سانتیمتر باشد . شکل زیر نشان می‌دهد که چگونه یك تناظر دوسویه بین نقاط دوقطعه خط برقرار است ، پس دومجموعهٔ مزبور هم ارز می‌باشند .

همچنین یك نیمدایره با یك خط نامحدود هم‌ارزتوپولژیکی



می‌باشد ، زیرا بین نقاط آنها تناظری دوسوئی برقرار است (شکل را ملاحظه کنید)

تناظر هم پیوسته از این قرار است که اگر در تناظر بین A و B ، P نقطه‌ای از A و P′ نقطهٔ نظیر آن از B باشد وقتی در A نقطه‌ای به اندازهٔ دلخواه نزدیك به P اختیار کنیم ، نقطهٔ نظیر آن در B نیز کاملا به P′ نزدیك باشد .(در اینجا ازتعریف دقیق «پیوستگی» خودداری می‌شود) .

تناظر دو سویهٔ هم پیوسته را همئومورفیسم می‌نامند . دو مجموعه را هم ارزتوپولژیکی می‌گویند وقتی که همئومورف باشند . برخلاف تصور ، هر همئومورفیسم یك تبدیل یا تغییر شکل نیست، بلکه این حالت خاصی ازآن می‌باشد. دومجموعه هم ارزتوپولژیکی تعریف می‌شوند هرگاه بتوان یکی از آنها را (بوسیلهٔ تراکم یا اتساع بدون ایجاد شکستگی یا پارگی) به دیگری تبدیل‌کرد . این موضوع درست است اما نه درهمه حال .دوسطح کروی باشعاعهای مختلف ومماس داخلی درنظر می‌گیریم . اگر این دوکره را به صورت مماس خارج درنظر بگیریم مجموعهٔ نقاط آنها درحالت اول با مجموعهٔ نقاط آنها درحالت دوم هم‌ارز توپولژیکی است : یك همئومورفیسم وجود دارد . اما نمی‌توان با تغییرشکل حالت اول ، حالت دوم را بوجود آورد .

در بارهٔ همئومورفیسم یك قرص مدور با خودش قضیه‌ای ازطرف **ل.ا.ژ. براور** مطرح‌شده که بسیارجالب است؛مقصود از قرص مدور مجموعهٔ نقاط یك دایره وتمام نقاط داخلی آن می‌باشد . قضیه چنین است : در هرهمئومورفیسم‌قرص باخودش حداقل یك‌نقطهٔ ثابت وجود دارد . **اولام** دربارهٔ این‌تبدیل‌دو سؤال مطرح کرده است :

۱) اگر در همئومورفیسم قرص با خودش p نقطه‌ای اولیه و p′ مبدل آن باشد ، آیا مثلثی مانند $p_1p_2p_3$ وجود دارد که به اندازهٔ کافی کوچك بوده با مثلث نظیرش

$p'_1p'_2p'_3$ برابر باشد ؟ نقطهٔ ثابت را می‌توان داخل این مثلث یا جای دیگری ازقرص تصورکرد . لازم نیست که یکی ازنقاط p_1 و p_2 یا p_3 ثابت باقی‌بماند یا اینکه نقاط داخلی مثلث $p_1p_2p_3$ دارای تصاویری داخل مثلث $p'_1p'_2p'_3$ باشند .

درصورتی‌که پاسخ به پرسش اول اولام مثبت باشد آن ـ وقت پرسش دوم مطرح می‌شود : آیـا این چنین مثلثهایـی می‌توان تعیین‌کرد که درآنها زاویه‌ها به اندازه‌های معین‌معلوم می‌باشند ؟ برخلاف نقاط داخلی دایره ، مجموعهٔ نقاط‌محیطی آن درقضیهٔ براور صدق نمی‌کند . زیرا هر دوران حول مرکز دایره و به زاویهٔ n درجه ($n \neq 360°$) یك همئومورفیسم را تشکیل می‌دهد در حالی کـه در این تبدیل نقطهٔ ثابت وجود ندارد .

یکپارچگی خاصیتی است که به سادگی قابل مشاهده است ؛ مجموعهٔ نقاط داخلی یك دایره یکپارچه است،همچنین مجموعهٔ نقاط یك قطعه خط . متمم یك مجموعه نسبت به یك فضا عبارت از همهٔ نقاط این‌فضا (مثلا صفحه) است که به آن مجموعه تعلق نداشته باشند. متمم مجموعهٔ نقاط محیط‌یك‌دایره مجموعه‌ای است‌که یکپارچه نیست : زیرا هم نقاط خارجی و هم نقاط داخلی دایره را دربردارد واین دو گروه نقاط توسط محیط از هم جدا هستند .

به مسئلهٔ‌زیر توجه‌کنید: اگر C سطح محدود پیوسته‌ای بوده و متمم آن یکپارچه باشد ، آیا دارا بودن خاصیت نقطهٔ ثابت برای C الزامی است ؟ بدون اثبات گمان می‌کنند که جواب «آری» است . در اینجا آنچه اهمیت دارد یکپارچگی متمم می‌باشد : سطح یك حلقه یکپارچه است اما متمم آن این چنین نیست،مسلم‌است که‌سطح‌یك حلقه‌خاصیت‌نقطهٔ ثابت‌را ندارد.

یك کمـان مجموعـه‌ای است هم ارز توپولـژیکی بـا یـك قطعـه خط . ثـابت کـرده‌ایم کـه یك قطعـه خط با محمل خودش هم‌ارز توپولژیکی است . سطح یکپارچهٔ C را درنظر می‌گیریم که شامل بیش ازیك نقطه باشد ؛ اگر C باهرسطح یکپارچه‌ای که‌آنرا شامل بوده وبیش ازیك‌نقطه‌داشته باشد هم‌ارزباشد ، آیاامکان داردکه C یك‌شیء توپولژی‌بغیر از یك‌کمان باشد ؟ مدتها است‌که تصورمی‌کنند پاسخ‌به‌این‌سؤال منفی است ، اما ا.ا.مویایز نمونه‌ای خلاف‌آن یافته است.اما هنوزنمی‌دانندکه آیا غیر ازآن هم وجود دارد؟

***

دریك فضای سه‌بعدی دو منحنی از دوجانب بهم پیچیده نامیده می‌شوند هرگاه همئومورفیسمی وجود نداشته باشدکه‌در هرفضا تصاویر آن دو منحنی مشمول در دوکرهٔ هندسی جدا از هم باشند . هنوز روشی تحلیلی وجود نداردکه توسط‌آن‌بتوانند معلوم‌کنند دومنحنی بهم پیچیده هستند یا نه .

گره بودن خاصیتی است‌که تا اندازه‌ای‌از بهم‌پیچیدگی متفاوت می‌باشد . تعریف دقیق وعمومی یك‌گره مشخص‌نیست. ملاحظات‌زیرکه مسئلهٔ گره را جالب می‌سازنددرفضای‌سه‌بعدی حول وحوش آن گسترش می‌یابند . «تشریح دستگاه خطوط نیروی مغناطیسی‌که دریك سیم گره‌دار هادی الکتریك دریك مدار ایجاد می‌شود بسیارجالب است ؛ سیم بینهایت مرتبه نازك فرض می‌شود . مخصوصاً حالتی را درنظربگیریم‌که جریان از گرهی بـه شکل برگ‌گشنیز می‌گذرد . درفضای محیطی این مدار،آیا دستگاه خطوط نیروی مغناطیسی ازلحاظ توپولژیکی نشان دهندهٔ آنست‌که منحنی‌دارای‌گره است؟ یك‌چنین‌دستگاهی باید نشان دهندهٔ سازمانی توپولژی باشد،حتی وقتی‌که‌جریان ازسیم‌های مستقیم‌الخط می‌گذرد . محاسبات مربوط به خطوط نیروی مغناطیسی‌که توسط یك‌مدارشامل سه‌خط :

$$\begin{vmatrix} x=1 \\ y=0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} y=1 \\ z=0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} z=1 \\ y=1 \end{vmatrix}$$

ایجاد می‌شود یك‌چنین چیزی را نشان می‌دهد .

قضیهٔ دزارگ

و راههای مختلف اثبات آن

نوشتهٔ : KAIDY TAN
مجلهٔ : Mathematics Magazine

ترجمهٔ : جعفر آقایانی‌چاوشی
ششم ریاضی دبیرستان دکتر نصیری

قضیهٔ دزارگ ازجمله قضایای مهم هندسهٔ نو می‌باشد ودر واقع اساس هندسهٔ تصویری را تشکیل می‌دهد . نویسندهٔ مقاله، استاد **دانشسرای عالی فوچوفوکین چین** ، راههای مختلف اثبات این قضیه را گردآوری کرده است که ذیلا ابتدا صورت‌قضیه وبعدبرهانهای مختلف آن به‌نظر خوانندگان‌می‌رسد.

قضیهٔ دزارگ - اگر دومثلث تصویر مرکزی یکدیگر، یا دارای‌قطب‌مشترك باشند(یعنی اینکه‌خطوطی‌که رأسهای‌متناظر آنها رابه هم وصل می‌کنند‌دریك‌نقطه‌متقارب‌باشند) دراین - صورت‌تصویر محوری‌یکدیگر بوده‌یادارای‌محورمشترك می‌باشند (یعنی اینکه نقاط تلاقی ضلعهای‌متناظر آنها بریك خط مستقیم قرار دارند)

عکس قضیهٔ دزارگ به این ترتیب است که اگر نقاط تلاقی ضلعهای متناظر دومثلث روی یك خط مستقیم واقع باشند، خطوطی‌که رأسهای متناظر را به هم وصل می‌کنند دریك‌نقطه متقارب می‌باشند .

ابتدا به اثبات خود قضیه می‌پردازیم :

فرض- در دومثلث ABC و $A'B'C'$ خطوط AA' و BB' و CC' درنقطهٔ O متقارب هستند :

$$AA' \cap BB' \cap CC' = O$$

و BC و $B'C'$ یکدیگر را در P، CA و $C'A'$ یکدیگررا در Q و AB و $A'B'$ یکدیگر را در R قطع می‌کنند :

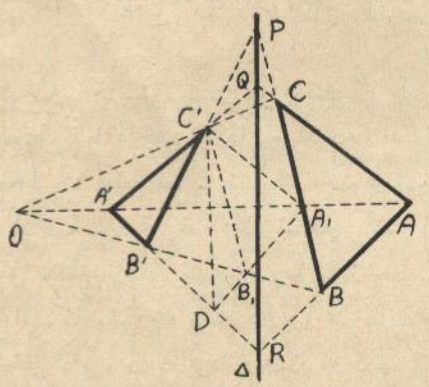
$$BC \cap B'C' = P \quad \text{و} \quad CA \cap C'A' = Q$$

$$\text{و} \quad AB \cap A'B' = R$$

حکم - باید ثابت‌کنیم‌که سه‌نقطهٔ P و Q و R بریك خط راست Δ واقع اند:

$$P \cup Q \cup R = \Delta$$

برهان ۱- از C' دوخط‌به‌ترتیب‌موازی‌با CBوCA رسم می‌کنیم‌که BB' و AA' را به ترتیب در B_1 و A_1



قطع می‌کنند و A_1B_1 را رسم کرده نقطهٔ تلاقی آن را بـا $A'B'$ به D نشان می‌دهیم و DC' را رسم می‌کنیم. خواهیم داشت :

$$\frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OA}{OA_1} \Longrightarrow B_1A_1 \parallel BA$$

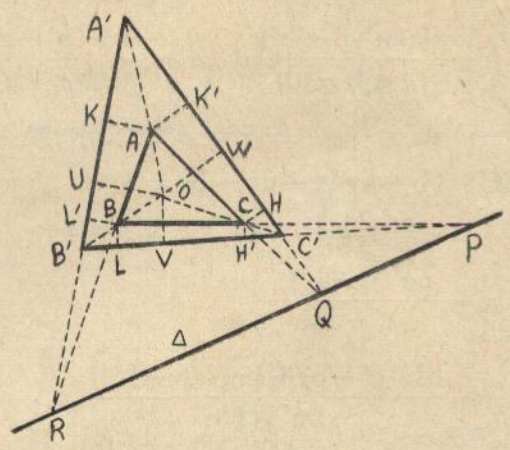
$$\frac{B'D}{B'R} = \frac{B'B_1}{B'B} = \frac{B'C'}{BP} \Longrightarrow C'D \parallel PR$$

$$\frac{A'D}{A'R} = \frac{A'A_1}{A'A} = \frac{A'C'}{A'Q} \Longrightarrow C'D \parallel QR$$

دوخط PR و QR که در R مشترك بوده و هردو با $C'D$ موازی هستند در استقامت یك خط مستقیم واقع‌اند .

برهان ۲- یکی ازدومثلث مثلا ABC را در نظر گرفته از رأسهای آن وهمچنین از O عمودهایی برضلعهای مثلث $A'B'C'$ رسم می‌کنیم (مطابق شکل) . تناسبهای زیررا می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{BL}{CH'} = \frac{BP}{CP} \quad \text{و} \quad \frac{CH}{AK'} = \frac{CQ}{AQ}$$



$$\frac{AK}{BL'}=\frac{AR}{BR}\ ,\ \frac{AK}{AK'}=\frac{OU}{OW}$$

$$\frac{BL}{BL'}=\frac{OV}{OU}\ ,\ \frac{CH}{CH'}=\frac{OW}{OV}$$

ازتناسبهای بالا نتیجه می‌شود :

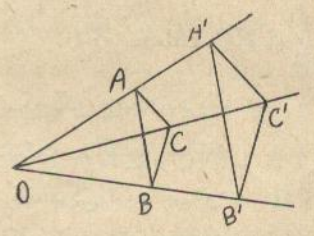
$$\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=\frac{BL}{CH'}\cdot\frac{CH}{AK'}\cdot\frac{AK}{BL'}=$$

$$=\frac{BL}{BL'}\cdot\frac{CH}{CH'}\cdot\frac{AK}{AK'}=$$

$$\frac{OV}{OU}\cdot\frac{OW}{OV}\cdot\frac{OU}{OW}=1$$

پس بنا به قضیهٔ منلائوس سه نقطهٔ P و Q و R بریك خط مستقیم واقع‌اند .

برهان ۳ـ لم : اگر دوضلع ازمثلثی نظیر به‌نظیر با دوضلع ازمثلث دیگر موازی بوده وخطهای واصل بین رأسهای متناظر دو مثلث در یك نقطه متقارب باشند آن دو مثلث مجانس یکدیگر بوده وضلعهای سوم آنها نیز موازی هستند .



زیرا اگر $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ و

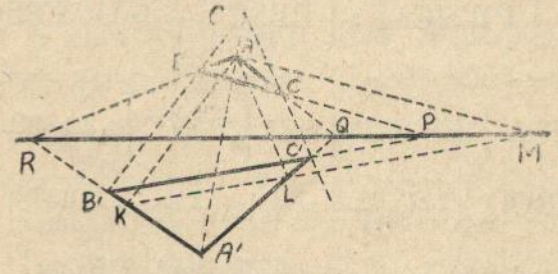
$AA' \cap BB' \cap CC' = O$

باشد داریم :

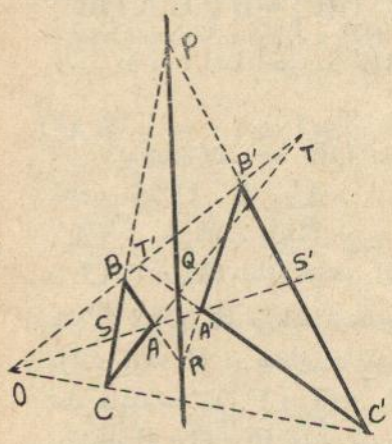
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}$$

و لم ثابت است .

اکنون به اثبات قضیهٔ دزارگ می‌پردازیم : از A بهموازات BB' و CC' رسم‌می‌کنیم تا A'B' و A'C' را به ترتیب در K و L قطع کنند . KL را رسم می‌کنیم . بنا به لم بالا مثلث OB'C' مجانس مثلث AKL است و B'C' با



KL موازی می‌باشد . از A موازی با BP رسم می‌کنیم تا KL را در M قطع کند. دومثلث ALM و CC'P متجانس هستند ونتیجه می‌شود که سه‌خط AC و LC' و MP درنقطهٔ Q متقارب باشند . به طریق مشابه ثابت می‌شود که دو مثلث AKM و BB'P متجانس‌بوده سه خط AB و KB' وMP درR متقارب‌هستند. بنا براین‌سه‌نقطهٔ P وQ وR برخط راستی‌واقع هستند که از M می‌گذرد .



برهان ۴ـ در مثلث OAB مورب A'B'R را درنظر می‌گیریم. بنا به‌قضیهٔ منلائوس داریم :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{AA'}}\cdot\frac{\overline{AR}}{\overline{BR}}\cdot\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}}=1$$

همچنین‌در مثلثهای OBC و OCA بنا به موربهای C'B'P و A'C'Q داریم :

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{BB'}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}\cdot\frac{\overline{CC'}}{\overline{OC'}}=1$$

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}\cdot\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}}=1$$

ازسه رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود :

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{BR}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}\cdot\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}}=1$$

و بنا به‌عکس قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شود که سه‌نقطهٔ P و Q و R بریك خط راست واقع‌اند.

برهان ۵ـ شکل مربوط به برهان ۴ را در نظر می‌گیریم. OA ضلعهای BC و B'C' را در S و S' قطع می‌کند. بنا به قضیهٔ خطوط متقارب نسبت به دستگاه اشعهٔ $O\{PBSC\}$، دو تقسیم $\{PBSC\}$ و $\{PB'S'C'\}$ با یکدیگر برابرند. نتیجه می‌شود که تقسیمهای مربوط به دو دستگاه خطوط $A\{PBSC\}$ و $A'\{PB'S'C'\}$ با یکدیگر و از آنجا تقسیمهای مربوط به دو دستگاه اشعهٔ $A\{PROQ\}$ و $A'\{PROQ\}$ با یکدیگر برابر باشند. وچون دودسته اشعهٔ اخیر در شعاع OAA' مشترك هستند بنابراین سه نقطهٔ P و Q و R روی یك خط راست واقع‌اند.

برهان ۶ـ باز هم شکل قبلی را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ تلاقی CA و OB' را T و نقطهٔ تلاقی C'A' و OB' را T' می‌نامیم.

$$\{CAQT\}=\{C'A'QT'\}$$

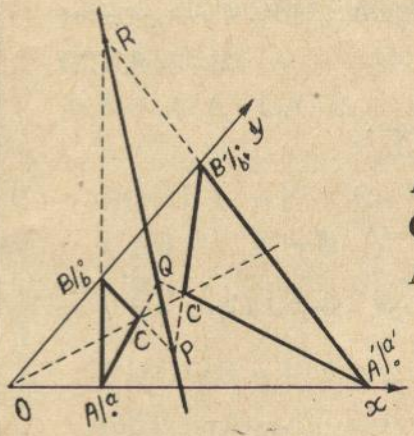
$$\Longrightarrow B\{CAQB'\}=B'\{C'A'QB\}$$

دو دسته اشعهٔ اخیر در BB' مشترك هستند پس:

$$PUQUR=\Delta$$

برهان ۷ـ خط QR را به‌بینهایت تصویر می‌کنیم و تصاویر نقاط O ، A ، A' و ... را به ترتیب O_1 ، A_1 ، A'_1 و ... می‌نامیم. درشکل جدید سه‌خط $A_1A'_1$ و $B_1B'_1$ و $C_1C'_1$ در O_1 متقارب بوده A_1B_1 با $A'_1B'_1$ و A_1C_1 با $A'_1C'_1$ موازی می‌باشد نتیجه‌می‌شودکه B_1C_1 با $B'_1C'_1$ موازی بوده P_1 در بینهایت واقع باشد، یعنی P_1 به Q_1R_1 تعلق داشته سه‌نقطهٔ P_1 و Q_1 و R_1 بریك‌خط‌راست واقع‌اند. درنتیجه P و Q و R نیز بریك خط راست واقع می‌باشند.

برهان ۸ـ محورهای مختصات را منطبق بر خطوط OAA' و OBB' اختیار کرده و فرض می‌کنیم:



$A(a,0)$ و $B(0,b)$

$A'(a',0)$ و $B'(0,b')$

$C(c,kc)$ و $C'(c',kc')$

معادله‌های AB و A'B' عبارت خواهدشد از:

$(AB):$

$$bx+ay-ab=0$$

$(A'B'):$

$$b'x+a'y-a'b'=0$$

و از این دومعادله خواهیم داشت:

$$R\left(x=\frac{aa'(b-b')}{a'b-ab'}\ \text{و}\ y=\frac{bb'(a'-a)}{a'b-ab'}\right)$$

وهمچنین خواهیم داشت:

$$(BC):(b-kc)x+cy-bc=0$$

$$(B'C'):(b'-kc')x+c'y-b'b=0$$

$$P\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{cc'(b-b')}{bc'-b'c} \\ y=\dfrac{bb'(c'-c)+kcc'(b-b')}{bc'-b'c} \end{array}\right.$$

$$(AC):\ kcx+(a-c)y-akc=0$$

$$(A'C'):kc'x+(a'-c')y-a'kc'=0$$

$$Q\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{aa'(c-c')+cc'(a'-a)}{ca'-c'a} \\ y=\dfrac{kcc'(a'-a)}{ca'-c'a} \end{array}\right.$$

رابطهٔ زیر به سادگی محقق می‌شود:

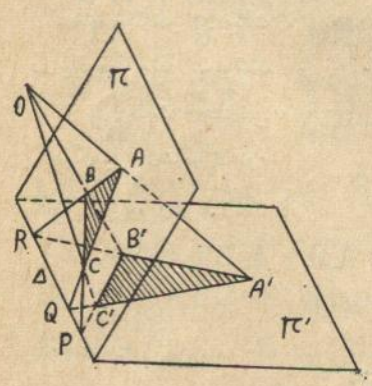
$$\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{y_Q-y_R}{x_Q-x_R}$$

ونتیجه می‌شودکه P و Q و R بریك خط راست واقع‌اند.

برهان ۹ـ با استفاده‌ازمختصات‌متجانس انجام‌می‌گیرد و به‌علت اینکه با برنامهٔ تحصیلات‌متوسطه ایران تطبیق‌نمی‌کند ازترجمهٔ آن خودداری می‌شود (مترجم)

استفاده ازهندسهٔ فضائی

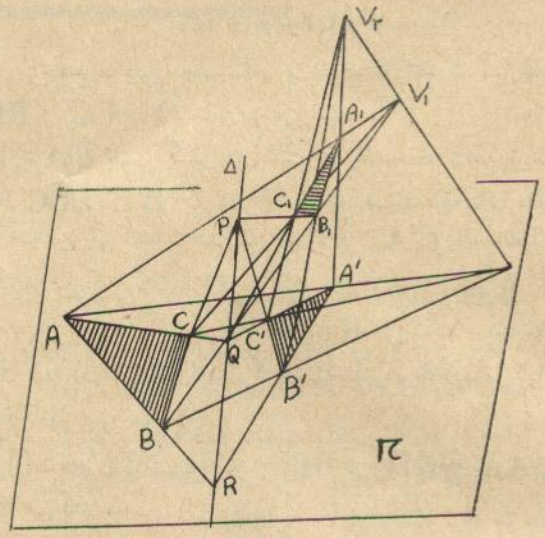
اگر دومثلث ABC و A'B'C' تصویر مرکزی یکدیگر بوده و در یك صفحه واقع نباشند به‌سادگی ثابت می‌شود که نقاط تلاقی‌ضلعهای متناظر آنها بر یك استقامت هستند؛ فرض می‌کنیم مثلث ABC در صفحهٔ π و مثلث A'B'C' درصفحهٔ π'



واقع‌باشد و π و π' درخط Δ متقاطع باشند. سه‌صفحهٔ (A'B' و AB و O) و π و π' دوبه‌دو متقاطع هستندپس فصل‌مشترکهای آنها یعنی سه خط AB و A'B' و Δ دریك نقطه مانند R

متقارب هستند . به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که Q و P نیز بر Δ قرار دارند .

برهان ۱۰ـ دومثلث ABC و A'B'C' که طبق فرض قضیه معین می‌باشند دریك صفحهٔ π فرض می‌شوند . از O



خطی رسم می‌کنیم که در صفحهٔ π واقع نباشد و بر آن دو نقطهٔ متمایز V_1 و V_2 انتخاب می‌کنیم که هردو دریك طرف O واقع باشند . دوخط V_1A و V_2A' که متکی به دو خط متقاطع هستند در یك صفحه واقع‌اند و در نقطهٔ A_1 متقاطع هستند . همچنین‌دوخط V_1B و V_2B' در B_1 ودوخط V_1C و V_2C' در C_1 متقاطع می‌باشند. مثلث $A_1B_1C_1$ صفحه‌ای مانند π_1 را مشخص می‌کند کـه با صفحهٔ π در خطی مانند Δ متقاطع است . بنا به آنچه قبلا ذکـر شد دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ به مرکز V_1 تصویر یکدیگرند . بنابراین R نقطهٔ تلاقی A_1B_1 با AB ، Q نقطهٔ تلاقی A_1C_1 با AC و P نقطهٔ تلاقی B_1C_1 با BC بر Δ واقع است . دو مثلث $A_1B_1C_1$ و A'B'C' به‌مرکز V_2 تصویریکدیگرند و نتیجه خواهدشدکه A_1B_1 و A'B' و Δ همچنین A_1C_1 و A'C' و Δ وبالاخره B_1C_1 و B'C' و Δ متقارب هستند یعنی A'B' از R ، A'C' از Q و B'C' از P می‌گذرد .

عکس قضیه

عکس قضیه‌را می‌توان با استفاده ازخودقضیه ویا مستقیماً ثابت‌کرد . چند راه اثبات آن ذیلا بیان می‌شود .

فرض ـ دو مثلث ABC و A'B'C' مفروض است و می‌دانیم که :

$$BC \cap B'C' = P \text{ و } CA \cap C'A' = Q$$
$$AB \cap A'B' = R \text{ و } P \cup Q \cup R = \Delta$$

حکم : باید ثابت‌کنیم که سه‌خط AA' و BB' وCC' دریك نقطهٔ O متقارب هستند ، یعنی :

$$AA' \cap BB' \cap CC' = O$$

برهان ۱ـ دومثلث BB'R و CC'Q به مرکز P تصویر یکدیگرند بنابراین بنا به‌خودقضیه نقاط تلاقی CC' و BB' یعنی O ، QC' و RB' یعنی A' ، QC و RB یعنی A بریك خط مستقیم واقع می‌باشند ، به‌عبارت دیگر سه خط CC' و AA' و BB' دریك نقطهٔ O متقارب می‌باشند .

برهان ۲ـ از C' به‌موازات QR وCB رسم‌می‌کنیم که B'R و BB' را در D و B_1 قطع می‌کنند و DB_1 را رسم می‌کنیم که AA' را در A_1 قطع می‌کند و $C'A_1$ را نیز رسم می‌کنیم (شکل برهان ۱) خواهیم داشت :

$$\frac{B'B_1}{B'B} = \frac{B'C'}{B'P} = \frac{B'D}{B'R} \Rightarrow B_1D \parallel BR$$

$$\frac{A'A_1}{A'A} = \frac{A'D}{A'R} = \frac{A'C'}{A'Q} \Rightarrow C'A_1 \parallel CA$$

نتیجه می‌شودکه دومثلث A_1B_1C' و ABC متجانس‌هستندو سه‌خط AA_1 یا AA' و BB' و CC' دریك‌نقطهٔ Oمتقارب باشند .

برهان ۳ـ درمثلث QCC' نسبت به مورب OAA' داریم :

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{C'O}} \cdot \frac{\overline{C'A'}}{\overline{QA'}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{CA}} = 1$$

در مثلث QPC' نسبت به مورب RA'B' و در مثلث QPC نسبت به‌مورب RAB داریم:

$$\frac{\overline{C'B'}}{\overline{PB'}} \cdot \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} \cdot \frac{\overline{QA'}}{\overline{C'A'}} = 1$$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = 1$$

از روابط بالا نتیجه خواهد شد که :

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{C'O}} \cdot \frac{\overline{C'B'}}{\overline{PB'}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{CB}} = 1$$

بنا به‌عکس قضیهٔ منلائوس درمثلث PCC' ، سه‌نقطهٔOو B و B' بریك خط راست واقع بوده درنتیجه سه‌خط AA' و BB' و CC' در O متقارب می‌باشند .

برهان ۴ـ اگر S نقطهٔ تلاقی OA و BC و S' نقطهٔ تلاقی OA' با B'C' باشد داریم :

$$A\left\{PQRS\right\} = A'\left\{PQRS'\right\}$$

و درنتیجه :

$$\left\{PCSB\right\}=\left\{PC'S'B'\right\}$$

و چون دو تقسیم اخیر در نقطهٔ P مشترك هستند پس BB' و CC' و SS' یا AA' درنقطهٔ O متقارب هستند .

برهان ۵ـ خط Δ یعنی PQR را به بینهایت تصویر می‌کنیم وتصاویر A ، A' و... را دراین تصویر A_1 و A'_1 و... می‌نامیم . درشکل حاصل B_1C_1 با $B'_1C'_1$ و C_1A_1 با $C'_1A'_1$ و A_1B_1 با $A'_1B'_1$ موازی است پس دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A'_1B'_1C'_1$ متجانس بوده سه خط $A_1A'_1$ و B_1B_1 و $C_1C'_1$ در O_1 متقارب هستند . پس درشکل اولیه هم سه‌خط AA' و BB' و CC' متقارب می‌باشند .

برهان ۶ـ اگر صفحه را دارای محورهای مختصات درنظر بگیریم ومعادله‌های ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC به‌ترتیب عبارت باشد از $u=0$ و $v=0$ و $w=0$ ومعادلهٔ خط PQR به‌صورت $s=0$ باشد چون $B'C'$ و BC با PQR متقارب هستند داریم :

$$s+lu=0$$

و همچنین داریم

$$s+mv=0$$

$$s+nw=0$$

ازمعادلات بالا نتیجه می‌شود که : $mv-nw=0$

این معادلهٔ خطی است که از A' نقطهٔ تلاقی $C'A'$ و $A'B'$ می‌گذرد . درضمن ملاحظه می‌شود که این خط از نقطهٔ تلاقی خطوط $v=0$ و $w=0$ نیز می‌گذرد. از این‌رومعادلهٔ مزبور معادلهٔ خط AA' است . معادلات BB' و CC' نیز عبارت خواهد شد از :

$$nw-lu=0 \quad \text{و} \quad lu-mv=0$$

ازجمع طرفین سه‌معادلهٔ‌مزبور نتیجه خواهد شد که AA' و BB' و CC' در O متقارب می‌باشند .

برهان ۷ـ اگر دو مثلث در یك صفحه واقع نباشند خطوط BC و $B'C'$ که در P متقاطع هستند صفحه‌ای مانند α را مشخص می‌کنند . همچنین CA و $C'A'$ یك صفحهٔ β را مشخص می‌کنند که بر Q می‌گذرد و AB و $A'B'$ نیز یك صفحهٔ γ را مشخص می‌کنند که بر R می‌گذرد . سه‌صفحهٔ α و β و γ دریك نقطهٔ O مشترك هستند بنا براین فصل‌مشترکهای دوبه‌دو آنها یعنی سه‌خط :

$$AA'=\beta\cap\gamma \quad \text{و} \quad BB'=\gamma\cap\alpha \quad \text{و} \quad CC'=\alpha\cap\beta$$

از O می‌گذرند .

راههای دیگر اثبات قضیه وعکس آنرا به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم .

انتقادی برطرح و حل مسألهٔ شیمی شمارهٔ ۴۳۴۹ مندرج در یکان شمارهٔ ۴۵

درطرح این‌مسأله دواصطلاح «ایزولوگ» و «ایزوستر» بکار برده شده است که درکتابهای درسی دورهٔ دبیرستان نیامده است‌وبرای من وبسیاری ازخوانندگان‌دیگر تازگی‌داشته‌است.

طرح‌کنندهٔ مسأله اصطلاح «ایزولوگ» را درصفحهٔ۴۲۹ شمارهٔ ۴۴ مسلسل (فروردین ـ اردیبهشت۱۳۴۷) یکان به‌این معنی بکار برده‌است: «جسم آلی‌ایزولوگ بااسیداستیك‌است بنا براین درفرمول‌مولکولی‌این‌جسم آلی‌دواتم کربن‌یافت‌می‌شود ...»

ببینیم‌این‌اصطلاح‌درمنابع‌مختلف به‌چه‌معنی آورده‌شده‌است:

در لاروس صفحهٔ ۲۴۸ جلد ششم سال ۱۹۶۲ پاریس : ایزولوگ به موادی اطلاق می‌شود که اسکلت کربنی یکسان‌ولی عوامل شیمیایی متفاوت دارند .

در انسیکلو پـدی علم شیمی صفحهٔ ۶۲۸ سال ۱۹۶۴ نیویورك : ایزولوگها سری ترکیبات کربنی شبیه به هم هستند که تفاوتی غیر ازتفاوت nCH_2 سری همولوگها دارند .

مثال ۱ـ C_2H_2 ، C_2H_4 ، C_2H_6

مثال ۲ـ C_6H_6 (بنزن) ، $C_{10}H_8$ (نفتالین) $C_{14}H_{10}$ (آنتراسن)

در انسیکلوپدی شیمی صفحهٔ ۹۸۴ جلد اول ۱۹۶۱ مسکو : مجموعهٔ کربورهای ئیدرژن و مشتقات آنها که عدهٔ اتمهای کربن برابر وگروه عامل یکسان دارند ولی درجات غیراشباعی‌آنها متفاوت‌است ردیف ایزولوگ‌را تشکیل‌می‌دهند.

مثال۱ـ CH_3-CH_3 ، $H_2C=CH_2$ ، $HC\equiv CH$

مثال ۲ـ CH_3-CH_2-COOH ، $CH_2=CH-COOH$ ، $CH\equiv C-COOH$

در اکثر کتابهای درسی خارجی اسمی هم از ایزولوگ برده نشده است . علت روشن است همانطور که می‌بینیم این اصطلاح هنوزمعنی روشن ودقیق خود را بدست نیاورده است .

اما دربارهٔ اصطلاح «ایزوستر» . در حل قسمت سوم مسأله صفحهٔ ۴۲۹ نوشته شده است : «چون گاز مجهول با اکسید دوکربن‌ایزوستر‌می‌باشد بنا براین ازنظر تعدادالکترون بایستی‌برابر باشندپس‌معلوم می‌شود که گازمجهول گازازت‌است:

$CO=6+8=14$ الکترون

$N_2=2\times7=14$ الکترون

اگر تعریف بالا را برای «ایزوستر» بپذیریم در آن صورت مثلا CH_4 ، NH_3 ، H_2O و HF نیزایزوسترند درصورتی‌که چنین نیست. درست‌است‌که CO و N_2 راایزوستر می‌نامند ولی نه به دلیل این‌که عدهٔ الکترونهای برابر دارند بلکه‌آرایش‌الکترونهای‌ظرفیتی‌اتمهای‌آنهاراشبیه به‌هم‌می‌دانند:

$:C\vdots\vdots O:$ و $:N\vdots\vdots N:$

با وجود مشکلات فراوانی‌که بخصوص دانش‌آموزان ، در یادگیری علم شیمی دارند به عقیدهٔ من شایسته نیست با پیش‌آوردن این نوع اصطلاحات دور از ذهن برمشکلات‌آنها بیفزائیم و این علم جالب و شیرین را درنظر آنها به صورت غولی جلوه گرسازیم .

باقر مظفرزاده

مسائلی در مورد میانه های مثلث

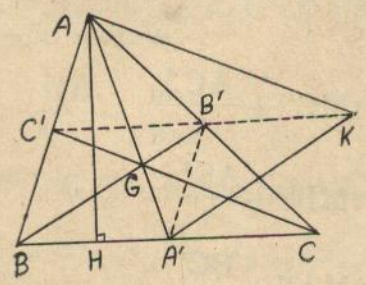
ترجمهٔ : محمد مهدی عابدی نژاد

دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان سخن

مقدمه : حل مسائل بخصوص مسائلی که دربارهٔ مثلث می‌باشد وقتی به سادگی انجام می‌گیرد که خواص مثلث را بخاطر داشته وموارد قابل استفاده را تفکیک کنیم .

آنچه که در زیر بیان می‌شود درواقع استفاده ازخواص میانه‌ها درحل‌مسائل هندسی بخصوص ترسیمات هندسی می‌باشد. باشدکه به دقت مورد استفاده قرارگیرد.

مسئلهٔ ۱ـ بامیانه‌های یك مثلث، مثلث جدیدی می‌توان ساخت که هریك از میانه‌های مثلث اخیر سه چهارم یکی از اضلاع مثلث‌اول می‌باشد .



اثبات : میانه‌های مثلث ABC را AA' و BB' و CC' ومحل برخوردآنها راG می‌نامیم. اگر B'C' خط واصل بین اوساط اضلاع AB و AC را به اندازهٔ خود تا K امتداد دهیم چهارضلعی AC'CK متوازی‌الاضلاع است پس AK=CC' ونیزچهارضلعی BA'KB' متوازی‌الاضلاع است وBB'=A'K. پس AA'K مثلثی است‌که اضلاع آن میانه های مثلث ABC می‌باشند ، خط LK یکی از میانه های این مثلث است . و داریم :

$$LK = B'K + B'L = B'C' + B'L$$
$$= \frac{BC}{۲} + \frac{BC}{۴} = \frac{۳}{۴}BC$$

و به همین ترتیب برای میانه‌های دیگر حکم ثابت می‌شود.

نتیجه ـ مثلثی درنظرمی‌گیریم (۱)، با میانه‌های این مثلث مثلث دیگری می‌سازیم (۲) و با میانه های مثلث (۲) مثلث (۳) را می‌سازیم . مثلثهای دیگری به همین ترتیب بنا می‌کنیم . با توجه به مسئلهٔ ۱ کلیهٔ مثلثهای فرد ۱ ، ۳ ، ۵ ، باهم و مثلثهای زوج نیز با یکدیگر متشابه می‌باشند و در هر گروه ، طول ضلع هر مثلث سه‌چهارم طول ضلع نظیر ازمثلث قبلی است .

مسئلهٔ۲ـ مساحت مثلثی‌که با میانه های یك‌مثلث تشکیل می‌شود سه چهارم مساحت مثلث اول است .

با توجه به شکل (۱) مساحت مثلث AA'K مساوی مجموع مساحتهای‌دومثلث ALK و KLA' می‌باشد. دومثلث اخیر باهم معادل هستند وارتفاعات وارد برقاعدهٔ مشترك KL ازآنها مساوی بوده ونصف ارتفاع وارد از رأس A بر قاعدهٔ BC می‌باشد . پس می‌توان نوشت که مساحت مثلث AA'K مساوی است با حاصل‌ضرب LK در ارتفاع AH از مثلث ABC بنابراین نسبت زیررا داریم :

$$\frac{S_{AA'K}}{S_{ABC}} = \frac{LK}{BC} = \frac{۳}{۴}$$

مسئلهٔ ۳ـ در هر دایره به تعداد زیادی مثلث می‌توان محاط نمودکه نقطه‌ای واقع در داخل دایره محل برخورد میانه‌های‌آنها باشد.

دایرهٔ O ونقطهٔG واقع در داخل‌آن را درنظرمی‌گیریم نقطه‌ای اختیاری ازمحیط دایره مانند A را به G وصل کرده به اندازهٔ $GA' = \frac{GA}{۲}$ امتداد می‌دهیم O مرکز دایره را به A' وصل‌کرده در A' عمودی بر OA' اخراج می‌کنیم تا دایرهٔ O را درB وC قطع‌کند. مثلث ABC با شرط‌مطلوب بدست می‌آید. وقتیA روی محیط‌دایرهٔ O تغییر مکان دهدA' دایره‌ای مجانس باآن درتجانس ($\frac{۱}{۲}$ ـ وG) را طی می‌کند ، اگر تمام دایرهٔ مجانس درداخل دایرهٔ O باشند هرنقطه‌ای از دایرهٔ O می‌تواند رأس A از مثلث مطلوب باشد . در غیر

این صورت دایرهٔ O کمانی را دارا خواهد بود که A بر آن نمی‌تواند قرار گیرد .

مسئلهٔ ۴ ـ مثلثی رسم کنید که از آن h_a ، m_a و A معلوم است .

به شکل (۱) نگاه کنید. مثلث AHA' قابل رسم است. و B' وسط AC تحت زاویهٔ $(180^\circ - A)$ از AA' رؤیت می‌شود (چرا ؟) و بنابراین روی کمان درخور زاویهٔ $(180^\circ - A)$ نسبت به AA' واقع است از طرفی B' بر خطی واقع است که L' وسط AH را به L وسط AA' وصل می‌کند. پس LL' کمان درخور مرسوم را در B' قطع می‌کند و مثلث به سادگی مشخص می‌گردد .

چند مسئله برای حل :

۵ـ تعیین کنید خطی که وسط یك میانه‌را به‌یکی از رئوس مثلث وصل می‌کند ضلع مقابل به این رأس را به چه نسبتی تقسیم می‌کند .

۶ـ مثلثی رسم کنید که سه خط متقارب مفروض محملهای میانه های آن باشند . ثابت کنید که یکی از رأسها را می‌توان به اختیار روی یکی از این سه خط انتخاب کرد .

۷ـ ثابت کنید خطی که ازمحل تقاطع میانه‌های یك مثلث به موازات یکی از اضلاع رسم شود مساحت مثلث را به دو قسمت به نسبت ۴ بر ۵ تقسیم می‌کند.

۸ـ ثابت کنید که خطهای واصل بین اوساط اضلاع یك مثلث آن را به چهار مثلث مساوی تقسیم می‌کنند.

۹ ـ ثابت کنید کوچکترین میانهٔ یك مثلث به بزرگترین ضلع وارد می‌شود و از آنجا نتیجه بگیرید که اگر دو میانه با اضلاع مربوط متناسب باشند مثلث متساوی‌الساقین است .

۱۰ خطی دلخواه ازمحل برخورد میانه های یك مثلث می‌گذرانیم . ثابت کنید مجموع فواصل دو رأس واقع در یك طرف از این خط مساوی است با فاصلهٔ رأس دیگر از آن.

۱۱ـ ثابت کنید مجموع جبری فواصل رأسهای یك مثلث ازهرخط واقع در صفحهٔ آن مساوی است با مجموع فاصله‌های اوساط اضلاع از همین خط .

۱۲ـ ثابت کنید مجموع میانه های هر مثلث از محیط کوچکتر واز سه چهارم آن بزرگتر است .

مثلثی با معلومات زیر رسم کنید .

۱۳ـ m_a و c و b

۱۴ـ b و m_b و m_c

۱۵ـ a و m_b و m_c

۱۶ـ h_a و m_b و m_c

(راهنمائی ـ فاصلهٔ G از BC مساوی ثلث h_a است) .

***

تعریف : مثلثی که رأسهای آن اوساط اضلاع یك مثلث باشد به مثلث میانه‌ای آن مثلث موسوم است .

واضح است که مرکز ثقل مثلث و مثلث میانه‌ای آن برهم منطبق بوده و مثلث میانه‌ای در تجانس (۲ ـ و G) مجانس مثلث ABC می‌باشد .

(مسئلهٔ زیر با استفاده از خاصیت اول توسط یکی از دوستان مترجم حل شده است. اصل مسئله با حل آن ، ازراهی متفاوت، در کتاب «تمرینهای ریاضیات مقدماتی» تألیف استاد هشترودی مندرج می‌باشد.)

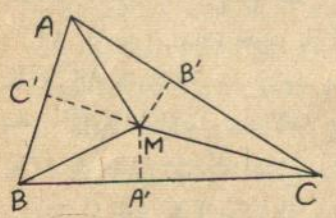
مسئلهٔ ۱۷ـ نقطه‌ای درسطح مثلث پیدا کنید که مجموع مربعات فواصل آن ازرؤوس می‌نیمم باشد .

اگر نقطه‌ای دلخواه مانند M در سطح مثلث ABC اختیار کنیم و A' و B' و C' اوساط اضلاع مثلث باشند می‌توانیم بنویسیم .

$$MA^2+MB^2=2MC'^2+\frac{AC'^2}{2}$$

$$MA^2+MC^2=2MB'^2+\frac{AC^2}{2}$$

$$MB^2+MC^2=2MA'^2+\frac{BC^2}{2}$$



طرفین روابط فوق را باهم جمع می‌کنیم برای اینکه مجموع حاصل می نیمم شود باید :

$$MA'^2+MB'^2+MC'^2$$

می‌نیمم گردد واگر اوساط اضلاع مثلث $A'B'C'$ را A'' و B'' و C'' بنامیم برای اینکه مجموع مزبور می‌نیمم باشد باید :

$$MA''^2+MB''^2+MC''^2$$

می‌نیمم گردد واگر عمل را به همین ترتیب ادامه دهیم ملاحظه می‌کنیم که درحد نقطه برمرکز ثقل مثلث منطبق می‌گردد .

***

تعریف ـ مثلث ABC را در نظر می‌گیریم . از رأسهای A و B و C خطوطی موازی BC ، AC و AB رسم می‌کنیم تا از تقاطع آنها مثلث جدیدی حاصل شود واضح است که هرمثلث و مثلثی که با ترتیب فوق بدست می‌آید مرکز ثقل منطبق دارند .

مسئلهٔ ۱۸ـ مثلثی رسم کنید که از آن A ، m_b ، m_c معلوم است .

حل ـ قطعه خط BB' را مساوی m_b جدا کرده مکان A یعنی کمان درخور زاویهٔ A را نسبت به آن رسم می‌کنیم . مجانس این مکان در تجانس (۱ − و B') مکان رأس C می‌باشد . G را روی BB' مشخص کرده به شعاع $\frac{2}{3}m_c$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا مکان رأس C را در C قطع کند و مثلث ABC را مشخص می‌کنیم .

مسئلهٔ ۱۹ـ مثلثی رسم کنید که از آن نسبت $\frac{m_b}{m_c}$ و a و b^2-c^2 معلوم است .

درهرمثلث اگر A و B و C رئوس و G مرکز ثقل باشد داریم :

$$\frac{GB}{GC}=\frac{m_b}{m_c}$$

پس برای رسم مثلث فوق ضلع a را رسم کرده مکان G را که $\frac{GB}{GC}$ ثابت است رسم می‌کنیم . بعد مجانس آن را به نسبت $\frac{1}{3}$ و به مرکز A' وسط BC بدست می‌آوریم که مکان رأس A خواهد بود . حال مکان دیگر رأس A راکه b^2-c^2 ثابت است رسم می‌کنیم تا رأس A مشخص شود .

مسئلهٔ ۲۰ـ نقطهٔ ثابت C رأس مربوط به زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که دورأس A و B ازآن‌همواره روی دو خط عمود برهم OX و OY واقعند مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ABC را وقتی A و B تغییر می‌کند پیدا کنید .

حل ـ خط AB همواره‌قطری‌ازدایرهٔ محیطی چهارضلعی OACB می‌باشد و M وسط AB روی عمود منصف وترOC از این دایره که خطی‌ثابت است واقع می‌باشد مکانG مجانس این خط به نسبت $\frac{2}{3}$ و به مرکز C می‌باشد .

تعریف : دو نقطه روی ضلع یك مثلث **نقاط ایزوتومیك** (Isotomic points) گفته‌می‌شوند اگراز وسط این ضلع متساوی‌الفاصله باشند . خطوطی‌که دو نقطهٔ ایزوتومیك را به رأس مقابل وصل می‌کند خطوط ایزوتومیك نام دارند . (Isotomic lines)

مسائل برای حل

مثلثی با معلومات زیر رسم کنید :

۲۱ـ m_b ، m_c و h_b

۲۲ـ b و c و m_b

۲۳ـ a و A و m_b

۲۴ـ $\frac{m_b}{m_c}$ و h_a و a

۲۵ـ اگر L مزدوج توافقی G نسبت بـه A و A' باشد (میانهٔ AA') ثابت کنید $LA'=AA'$

۲۶ـ مثلثی رسم کنید که ازآن G و یك رأس و امتداد دوضلع ماربراین رأس معلومند.

۲۷ـ مکان مرکز ثقل مثلثهائی را بیابید که قاعده و دایرهٔ محیطی ثابت دارند .

۲۸ـ نقطه‌ای مانند P واقع در داخل مثلث ABC در نظرگرفته تصاویر آن را بر اضلاع مثلث A' و B' و C' می‌نامیم (بترتیب بر BC و AC وAB). اوساط‌اضلاع $B'C'$ و $B'A'$ و $C'A'$ را A'' و C'' و B'' می‌نامیم و از این نقاط سه خط بـر اضلاع مثلث ABC عمود می‌کنیم ثابت‌کنید این سه عمود متقاربند .

۲۹ـ اگر K و K' دو نقطهٔ ایزوتومیك واقع برضلع BC از مثلث ABC باشند و خط AK ضلع $B'C'$ ازمثلث میانه‌ای را در K'' قطع‌کند نشان دهیـد که $K'K''$ از G گذشته و داریم : $\frac{GK'}{GK''}=\frac{2}{1}$

۳۰ـ اگر L' ، M' و M'' دوجفت نقاط ایزوتومیك واقع بـراضلاع AC ، AB از مثلث ABC بوده و L'' ، M'' عمل تقاطع‌خطوط BL ، CM با اضلاع $A'C'$ ، $A'B'$ ازمثلث‌میانه‌ای باشند ثابت‌کنیدمثلثهای $AL'M'$ و $A'L''M''$ مجانس یکدیگرند . مشخصات این تجانس را پیدا کنید . دو مثلث مجانس دیگر در شکل بیابید .

مثلثی با معلومات زیر رسم کنید :

۳۱ـ A ، $b+c$ ، m_c

۳۲ـ A ، h_b+h_c ، m_c

مسائل مسابقات ریاضی چکسلواکی

تنظیم از: Howard F. Fehr
مجلهٔ: The Mathematics Teacher

ترجمهٔ: جعفر آقایانی چاوشی
دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان دکتر نصیری

مقدمه: از سال ۱۹۵۰ به‌بعد هرسال مسابقات ریاضی مختلفی بین‌دانش‌آموزان دبیرستانهای چکسلواکی برگزار می‌شود و به‌برندهٔ هرمسابقه علاوه بر اعطای جوایز (که‌عموما کتابهای ریاضی است) گواهینامهٔ مخصوص نیز تعلق می‌گیرد. برندگان مسابقات علاوه برآن می‌توانند درالمپیاد بین‌المللی ریاضی که هرساله بین کشورهای اروپای شرقی انجام‌می‌گیرد شرکت کنند.

آموزش درکشور چکسلواکی شامل ۹سال دورهٔ تعلیمات عمومی است که برای همه‌اجباری می‌باشد، فارغ‌التحصیلان‌این دوره اگر خواسته باشند به‌تحصیلات‌دانشگاهی ادامه دهند در مدارس‌متوسطه مشغول تحصیل می‌شوند که دورهٔ آن ۳ سال‌است و شامل رشته‌های ریاضی، علوم و هنر می‌باشد، اما اگرمحصلی خودرا آمادهٔ‌ادامهٔ‌تحصیل دردانشگاه نیابد بعدازاتمام‌تحصیلات دورهٔ ابتدایی به مدارس فنی و حرفه‌ای می‌رود که دورهٔ آن ۴ سال می‌باشد.

مراحل مختلف مسابقات ریاضی

مسابقهٔ المپیاد ریاضی در چهار سطح برای چهار دسته به‌شرح زیر انجام می‌گیرد: گروه A شامل دانش‌آموزان‌سال سوم مدارس متوسطه و سالهای سوم وچهارم مدارس فنی. گروه B شامل دانش‌آموزان سال دوم مدارس متوسطه و مدارس‌فنی گروه C برای دانش‌آموزان سال اول مدارس متوسطه‌ومدارس فنی. گروه D شامل دانش‌آموزان سال آخر تحصیلات عمومی

مسابقات درگروه های B وC وD در مرکز ناحیه یا استان انجام می‌گیرد و مسابقهٔ در گروه A مخصوص تمام کشور است.

کمیتهٔ المپیاد که زیر نظر وزارت آموزش و آکادمی علوم چکسلواکی اداره‌می‌شود ازابتدای هرسال تحصیلی‌فعالیت خودرا برای برگزاری مسابقهٔ مربوط به آن سال آغازمی‌کند نشریات مخصوصی بین دانش‌آموزان همهٔ مدارس توزیع‌می‌کند کتابهایی را که می‌تواند مورد استفادهٔ داوطلبان شرکت در مسابقه واقع شود به آنان معرفی می‌کند.

شرکت در مسابقه چهار مرحله دارد: مرحلهٔ (a) که ارزیابی است و مرحلهٔ (b) که دراین دومرحله محصلین‌واجد شرایط هر دبیرستان انتخاب می‌شوند؛ مرحلهٔ (c) که ضمن آن محصلین واجد شرایط هر استان یا ناحیه انتخاب می‌شوند و بالاخره مرحلهٔ (d) که برای انتخاب محصلین ممتاز کشور جهت شرکت در المپیاد بین‌المللی انجام می‌گیرد.

در مرحلهٔ اول هدف کلی راهنمائی دانش‌آموز به‌روش صحیح حل مسائل است. سعی می‌شود شوق و استعداد حل‌مسائل در هردانش‌آموز ایجاد گردد. مسائلی در اختیاردانش‌آموزان گذاشته می‌شود و توصیه می‌گردد که آنها را با فکر خودحل کرده به دبیر مربوطه ارائه دهند. دبیر این راه حلها را مطالعه می‌کند بدون آنکه آنهارا با هم مقایسه یا نمره‌گذاری کند. بعد با هریك از محصلین دربارهٔ راه‌حلی که پیش‌گرفته بحث می‌کند واشتباههای وی را یادآوری می‌کند. به‌این‌طریق محصل آماده می‌شود تا در مرحلهٔ بعدی شرکت جوید.

این مسائل از مسائل معمولی دورهٔ تحصیلی مشکلتر است. یك دانش‌آموز با استعداد اجازه دارد که مسائل را با استفاده‌از معلوماتی بالاتر از کلاس خود حل‌کند. چنین‌محصلی راهنمائی می‌شود تا تکنیك عمومی حل مسائل را فرا گیرد و معلومات ریاضی خودرا تکمیل‌کند. مسائل در ماه نوامبر هر سال پخش می‌شوند و بهترین راه حلهائی که ارائه شده‌باشد ازطرف دبیران برای چاپ در مجلات ریاضی وفیزیك‌مخصوص محصلین ارسال می‌شود.

در شانزدهمین المپیاد (۶۷-۱۹۶۶) برای پذیرش در مرحلهٔ اول الزامی نبود که یك محصل تمام مسائل را حل‌کند

یا اینکه همهٔ مسائل را صحیح و کامل حل کرده باشد. امیداست که این روش ادامه یابد زیرا هدف کلی از اجرای مسابقات آماده کردن محصلین برای حل مسائل می‌باشد. تصور می‌رود که همهٔ محصلین مایل هستند که در دور اول مسابقات شرکت کنند زیرا هرچه باشد درحل مسائل مقدماتی تازگیهایی بدست می‌آورند.

در اولین مرحلهٔ مسابقه که ابتدای سال تحصیلی انجام می‌گیرد چهار مسئله برای حل داده می‌شود. چنانکه قبلا گفته شد حل این مسائل توسط معلمان خود محصلین بررسی می‌گردد راه حلهای این مسائل به سه دسته تقسیم می‌شوند: حل عالی، حل خوب، حلی که رضایت‌بخش نیست. دانش‌آموزی در این مرحله از مسابقه موفق است که حداقل سه مسئله را حل کرده و حل آن در دسته‌های عالی یا خوب باشد. معلم برای دانش‌آموزانی که موفق شده‌اند کلاس فوق‌العاده تشکیل می‌دهد و درآنجا به‌بحث و بررسی مسائل تازه‌تری می‌پردازد و از طرف دیگر راه حلهای این دانش‌آموزان را به کمیسیون مخصوصی تسلیم می‌کند. این‌کار در اواسط ماه فوریه انجام می‌گیرد. در این کمیسیون محصلینی که باید در مرحلهٔ دوم مسابقه شرکت کنند انتخاب می‌شوند. کمیسیون دانش‌آموزان موفق را از بین دبیرستانهای مختلف انتخاب و برای شرکت در دور دوم دعوت می‌کند که این اقدام در اوایل بهار انجام می‌گیرد. بالاخره در ماه مه از بین دانش‌آموزانی که دور دوم مسابقه را با موفقیت گذرانده‌اند برای شرکت در دور سوم دعوت می‌شود. کمیتهٔ مخصوصی که دارای هشت نفر عضو می‌باشد بعداز انجام مرحلهٔ سوم مسابقات، افرادی را تعیین می‌کند که باید درمرحلهٔ چهارم یعنی در المپیاد بین‌المللی که درماه ژوئیه تشکیل می‌شود شرکت کنند.

مسائل شانزدهمین المپیاد ریاضی

چکسلواکی - ۶۷ - ۱۹۶۶

از ترجمهٔ اعلامیهٔ کمیتهٔ المپیاد که ضمن آن به داوطلبان مسابقه توصیه‌هایی شده است خودداری می‌شود و ترجمهٔ مسائل مربوط درزیر به نظر خوانندگان می‌رسد

۱- مسائل مقدماتی

گروه A

۱- اگر d_1 و d_2 و d_3 سه‌عدد مثبت باشند بقسمی که:

$d_1<d_2<d_3$

باشد و c_1 و c_2 و c_3 سه‌عدد غیرمنفی باشند ثابت کنید که:

$$(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\frac{c_3}{d_3}\right)$$

$$\leq(c_1+c_2+c_3)^2\frac{(d_1+d_3)^2}{4d_1d_3}$$

راهنمائی- قبلا ثابت کنید که:

$$\frac{d_2}{d_1+d_3}+\frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_3}+\frac{1}{d_3}}\leq 1$$

۲- ثابت کنید که معادلهٔ:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

که در آن ضرایب a و b و c اعداد حقیقی هستند وقتی دارای یك ریشهٔ حقیقی و دوریشهٔ موهومی محض است که فقط و فقط داشته باشیم:

$$c=ab \quad , \quad b>0$$

۳- درکلاسی ۱۵ نیمکت دونفری وجود دارد و تعداد دانش آموزان ۲۷ نفرمی‌باشد- دونفرازاین دانش‌آموزان به‌علل روانشناسی باید با هم روی یك نیمکت بنشینند و هیچ نیمکتی نباید بدون دانش‌آموز باشد. چند راه برای نشستن کلیهٔ دانش‌آموزان وجوددارد؟

۴ - n نقطه $(n\geq 3)$ واقع‌دریك صفحه درنظرمی‌گیریم بقسمی که هیچ سه نقطه از آنها بر یك استقامت واقع نباشند. مجموعهٔ U را درنظر می‌گیریم که عناصر آن قطعه خطهایی باشد که n نقطهٔ مزبوررا دوبه‌دو به‌هم وصل می‌کنند. ثابت

کنید که همواره می‌توان از n نقطهٔ مفروض زیر مجموعه‌ای شامل نقاط A_1 و A_2 و ... A_k ، $(k \geq 3)$ چنان انتخاب کرد که قطعه خطهای :

$$A_1A_2 \text{ و } A_2A_3 \text{ و} \ldots \text{ و } A_{k-1}A_k \text{ و } A_kA_1$$

به مجموعهٔ U تعلق داشته باشند .

(یادآوری ـ این‌مسئله بوسیلهٔ استقراء ریاضی به‌سادگی حل می‌شود *).

گروه B

۱ـ تابع y ازمتغیر x به شکل:

$$y = a|x| + b|x-k|$$

را چنان مشخص کنید که در ازاء $x = -1$ و $x = 3$ مقدار تابع صفر شده و ماکزیمم تابع برابر با $y = 2$ باشد. بعداز تعیین ضرایب a و b و k نمایش هندسی تابع‌را نیز رسم‌کنید

۲ـ همهٔ عددهای طبیعی x را که در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند بدست آورید:

$$4^{x-1} + 7 \times 2^x + 48$$
$$= x(x-1)(x-2)\ldots(3)(2)(1)$$

۳ـ دایرهٔ $k = (S, r)$ و نقطهٔ A با شرط :

$$AS = d > r$$

و عدد مثبت $p > r$ مفروض است. دایره‌ای به شعاع p چنان رسم‌کنید که بر نقطهٔ A گذشته ودایرهٔ k را به دونیمدایره تقسیم کند. شرایط امکان مسئله را تعیین‌کنید .

۴ـ مکعب به یال ۶ واحد طول را می‌توان به :

$$6^3 = 216$$

مکعب واحد حجم تقسیم کرد ونیز می‌توان کره‌ای به قطر ۶ واحد طول را در مکعب مفروض محاط کرد. معلوم‌کنید که این‌کره چند عدد از مکعبهای واحد حجم را دربر می‌گیرد و تعداد رأسهای مکعبها که در خارج‌کره واقع می‌شوند چقدر است ؟

گروه C

۱ـ همهٔ جوابهای دستگاه معادلات زیررا پیدا کنید :

$$\begin{cases} x(x+y) + z(x-y) = 6 \\ y(y+z) + x(y-z) = -2 \\ z(z+x) + y(z-x) = 3 \end{cases}$$

۲ـ هرگاه p_1 و p_2 عددهای اول مخالف ۳و۵ باشند ثابت کنید که $p_1^4 - p_2^4$ مضربی از ۱۵ است.

۳ـ مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنیدکه اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ رأس آن و مجموع طولهای قاعده و یك ساق از آن‌معلوم باشد .

۴ـ دایرهٔ (S, r) ، یك نقطهٔ A واقع در داخل‌آن و عدد مثبت d مفروض است . وتری از دایره از نقطهٔ A گذشته و بوسیلهٔ این نقطه به دوقطعه با طولهای مخالف d تقسیم شده است .

الف) مقدار t طول این وتر و همچنین فاصلهٔ آنرا از مرکز دایره برحسب r و d و $v = SA$ بدست آورید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) کلیهٔ وترهایی را رسم کنید که دارای خاصیت مزبور باشند.

گروه D

۱ـ مربع $ABCD$ به ضلع a مفروض است. باخطوطی که موازی با AB و BC رسم می‌شوند مربع را به چهار ـ مستطیل P_A و P_B و P_C و P_D تقسیم می‌کنیم که به‌ترتیب رأسهای A و B و C و D را در بردارند و بین مساحتهای آنها تناسب زیر برقرار است .

$$P_A : P_B : P_C = 2 : 3 : 4$$

مطلوبست تعیین ابعاد این مستطیلها برحسب a ونسبت :

$$P_A : P_B$$

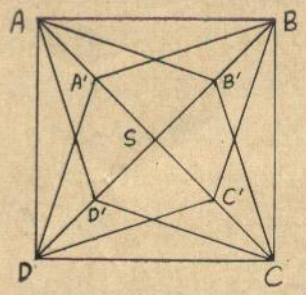
۲ـ سه ایستگاه اتوبوس به یك فاصله از یکدیگر واقع شده‌اند . اتوبوسی فاصلهٔ اول راباسرعت v کیلومتردرساعت ، فاصلهٔ دوم رابا سرعت ۱۰ کیلومتر درساعت کمتر از سرعت اولی وبالاخره فاصلهٔسوم‌را با سرعتی ۵ کیلومتردرساعت‌کمتر از سرعت‌دومی می‌پیماید.

الف) سرعت متوسطه تمام مسیررا برحسب v حساب کنید .

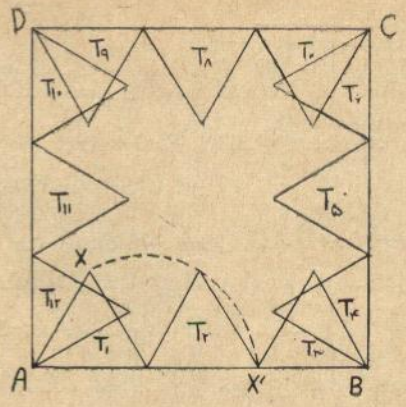
ب) آیا مقادیری از v وجود دارد که در ازاء آنها سرعت متوسط برابر $\frac{v}{2}$ باشد؟

* ذیل مسئله کتابهایی معرفی شده که در آنها در بارهٔ استقراء ریاضی بحث شده است.

۳- مربع ABCD به ضلع a مفروض است. نقطهٔ تلاقی دوقطر را S و اوساط AS ، BS و CS و DS را به ترتیب A' و B' و C' و D' می‌نامیم . معلوم کنید که چه‌قسمتی از مساحت مربع ABCD بوسیلهٔ مثلثهای A'C'B و A'C'D و B'D'C و B'D'A پوشیده‌می‌شود وهمچنین مساحت‌هشت‌ضلعی‌راکه از تقاطع ضلعهای دو چهارضلعی AB'CD' و A'BC'D بدست می‌آیدبرحسب a حساب کنید.



۴- مربع ABCD به طول ضلع ۹ سانتیمتر مفروض است. روی ضلعهای آن و درداخل مربع مثلثهای متساوی‌الاضلاع T_1 و T_2 و T_3 و...و T_{12} به طول ضلع ۳ سانتیمتر را به ترتیب زیرمی‌سازیم: ابتدا مثلث T_1 رامی‌سازیم، بعد بادورانی که مرکزآن رأس این مثلث واقع برضلع مربع باشدمثلث T_1 را به مثلث T_2 تبدیل می‌کنیم ، در این‌دوران رأس X ازمثلث



T_1 مسیر XX' را می‌پیماید. به‌همین ترتیب مثلث T_2 را به T_3 و T_3 را به T_4 و ... و بالاخره T_{11} را به T_{12} تبدیل می‌کنیم .

الف) مسیری را که X در همهٔ این دورانها می‌پیماید رسم کنید،

ب) طول تمام این مسیررا حساب کنید و آنرا بامحیط دایره‌های محیطی و محاطی مربع ABCD مقایسه کنید.

II- مسائل مسابقه (دور اول)

گروه A

۱- a و b دوعدد طبیعی فرد بوده و $a<b$ می‌باشد . مجموع تمام عددهای طبیعی بزرگتر از a و کوچکتر از b برابر است با ۱۰۰۰ ، دوعدد a و b را تعیین کنید .

۲- تعداد n صفحه در فضا در نظر می‌گیریم که هیچ دوتای آنها باهم و هیچ سه تای آنها با یك خط موازی نبوده و هیچ چهارتای آنها از یك نقطه نمی‌گذرند. معلوم کنید که این n صفحه فضا را به چند بخش تقسیم می‌کنند.

راهنمائی ـ قضیهٔ زیررا مورد توجه قرار دهید: اگر n خط در یك صفحه واقع بوده وهیچ‌دوتای آنها با هم موازی نباشند و هیچ سه تای آنها از یك نقطه نگذرند صفحه را به

$$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

ناحیه تقسیم می‌کنند * .

۳- دونقطهٔ Q و M بر کنار مستقیم یك استخر ویك نقطهٔ P در سطح استخر با هم مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر PM می‌سازند. شناگری می‌خواهد فاصلهٔ از P تا M رادرکمترین مدت بپیماید. وی‌برای این‌کار از P تا نقطهٔ X واقع بین Q و M را با سرعت ثابت v_1 شنا می‌کند و فاصلهٔ از X تا M را با سرعت ثابت v_2 می‌دود. اندازهٔ زاویهٔ QPX را تعیین کنید .

۴- چهاروجهی ABCD چنانست که :

$$AB=BC=CD=DA=1$$

می‌باشد. ثابت‌کنید که‌حجم این چهاروجهی ازلحاظ قدرمطلق حد اکثر برابر است‌با $\frac{\sqrt{3}}{27}$: چه موقع بااین مقداربرابر می‌باشد ؟

گروه B

۱- تغییرات تابع زیررا تعیین کرده نمایش هندسی

* مسئلهٔ نمونه مندرج در یکان شمارهٔ ۳۸، مترجم

آنرا رسم کنید :

$$y=\sqrt{|1-x|+1}-1$$

از راه محاسبه فواصلی را تعیین کنید که در آنها تابع صعودی یا نزولی است. سپس مقادیری از x را تعیین کنید که درازاء آنها مقادیر y بزرگتر از ۲ نباشد.

۲ـ کوچکترین عدد طبیعی N را تعیین کنید که دارای ۱۵ مقسوم‌علیه باشد. همچنین تمام اعداد کوچکتر از N را پیدا کنید که تعداد مقسوم‌علیه‌های آنها بیش از ۱۵ باشد.

۳ـ دستگاه معادلات زیر مفروض است که در آنها x و y و z مجهول و a و b پارامتر می‌باشند. مقادیر پارامترهای a و b را چنان تعیین کنید که دستگاه دارای بینهایت جواب باشد.

$$\begin{cases} x+ay=b \\ y-a^2z=1 \\ az+x=b+1 \end{cases}$$

۴ـ مکعب $ABCDA'B'C'D'$ را درنظر می‌گیریم که طول هریال آن مساوی واحد طول باشد. نقطه‌هایی مانند X را بر سطح این مکعب چنان تعیین کنید که $DX=\frac{2}{3}$ بوده کمترین فاصلهٔ X از S مرکز وجه $BCC'B'$ که درروی سطح اندازه گرفته می‌شود برابر با واحد باشد. راه ترسیمی تعیین جواب را نیز شرح دهید.

گروه C

۱ـ قطار عادی مسافربری با سرعت v_1 متر برثانیه در حال حرکت است ، قطار سریع‌السیر دیگری با سرعت v_2 متر بر ثانیه به موازات آن درحرکت بوده از آن جلو می‌افتد . مسافری از قطار عادی ملاحظه می‌کند که قطار سریع‌السیر در مدت t_1 ثانیه از جلو وی می‌گذرد اما برای شخصی که کنار راه آهن ایستاده باشد این مدت برابراست با t_2 ثانیه. از لحظه‌ای که لکوموتیو قطار سریع‌السیر به‌کنار آخرین واگن قطار عادی می‌رسد تالحظه‌ای که آخرین واگن قطار سریع‌السیر ازکنار لکوموتیو قطار عادی می‌گذرد مدت t_3 ثانیه طول می‌کشد . نسبت سرعتهای v_1 و v_2 را بر حسب مقادیر t_1 و t_2 و t_3 بدست آورید.

۲ ـ عددی سه رقمی اختیار کنید (مانند ۶۳۸) ، آن‌را مقلوب کرده و تفاضل مثبت عدد اختیاری و مقلوب آن‌راحساب کنید (مثلا ۱۹۸ = ۶۳۸ − ۸۳۶). عدد تفاضل را با مقلوب خودش جمع کنید (مثلا ۱۰۸۹ = ۸۹۱ + ۱۹۸). تعیین کنید که چه عددی بدست می‌آید. مسئله را درحالت کلی و بادلیل حل کنید .

۳ـ دودایرهٔ مختلف‌المرکز

$k_1=(S_1,r_1)$ و $k_2=(S_2,r_2)$

و یك عدد مثبت r مفروض است. دایرهٔ k به شعاع r را چنان رسم کنید که دایرهٔ k_1 را به دونیمدایرهٔ مساوی تقسیم‌کرده و خودش به‌وسیلهٔ دایرهٔ k_2 به دونیمدایرهٔ برابر تقسیم شود.

۴ـ مکعب $ABCDA'B'C'D'$ به طول یال واحد مفروض است. M نقطهٔ وسط یال $A'B'$ است. صفحهٔ P ازخط $C'M$ گذشته مکعب را به دوقسمت تقسیم می‌کند. حجم‌قسمتی که شامل رأس B است برابربا $\frac{1}{3}$ است. فاصلهٔ رأس B را از نقطهٔ تلاقی صفحهٔ P با یال AB بدست آورید .

گروه D

۱ـ درلحظهٔ ورود من به میدان شهر ، ساعت شهرداری ساعت ۸و۵۵ و ساعت سردرکلیسا ساعت ۸و۵۲ را نشان‌می‌داد . از میدان گذشته به عمارتی‌تاریخی که کنار میدان قرارداشت وارد شدم. در لحظهٔ ورودم به این عمارت ساعتی که آنجا نصب بود ساعت ۸و۵۱ را نشان می‌داد درحالی‌که در همین لحظه ساعت سردر کلیساساعت ۸و۵۶ را نشان می‌داد. اطلاعاتی راجع به ساعتهای مذکور به شرح زیر بدست آوردم : ساعت عمارت تاریخی هیچگاه جلو نیست، ساعت شهرداری معمولاجلو است ، اختلاف بین زمانی‌که ساعت کلیسا نشان می‌دهدبازمان حقیقی هیچگاه بیش از ۳ دقیقه نمی‌شود. درلحظهٔ ورود من به میدان شهر ساعت صحیح (برحسب دقیقه) چقدربوده است ؟

۲ـ الدا مشغول حل تکالیف شبانه‌اش بود. ازاوپرسیدم که چه مسئله‌ای را حل می‌کند. او پاسخ داد که عبارت:

$$\frac{x^2-3}{x+1}\ ?\ \frac{6x-7}{2x-1}$$

را ساده‌کرده حاصل آن‌را بدست‌آورده‌است . ملاحظه کردم که عبارت مخرج کسری‌که بدست آورده‌بود برابربود با :

$$2x^2+x-1$$

وعبارت صورت به‌شکل کلی‌زیر بود.

$$ax^3+bx^2+cx+d$$

که مقادیر ضرایب‌آن درخاطرم نیست. مقادیر ۲ و ۱و۰ = x را امتحان کردم در طرفین صدق کردند. اما وقتی ۳ = x را امتحان کردم درطرف چپ مقادیر ۳ و ۷ ودر طرف راست مقدار ۴ را داشتم. با این‌معلومات آیا می‌توانید ضرایب a و

b و c و d عبارت صورت کسری را که الدا بدست آورده بود تعیین کنید، و همچنین معلوم کنید که آیا حل الدا درست بوده است یا نه؟

۳ـ مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. مکان هندسی نقطه‌های X از سطح مثلث را تعیین کنید که داشته باشیم:

$AX > BX > CX$

برحسب اضلاع و زوایای مثلث ABC شرایطی را تعیین کنید که:

الف ـ مکان نقطه‌های X یك پنج‌ضلعی باشد.

ب ـ مکان نقطه‌های X یك شش‌ضلعی باشد.

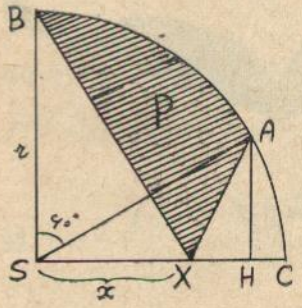
ج ـ مکان X منحصر به‌یك‌نقطه باشد.

د ـ هیچ نقطه‌ای جزء مکان X نباشد،

۴ـ ربع دایرهٔ SBC به مرکز S و به شعاع:

$SC = SB = r$

را درنظر می‌گیریم. نقطهٔ A را برکمان BC چنان تعیین می‌کنیم که اندازهٔ زاویهٔ BSA برابر با ۶۰ درجه باشد و X نقطه‌ای از SC می‌باشد.



الف ـ مساحت سطح P محصور بین AX و BX وکمان AB را برحسب $x = SX$ حساب کنید.

ب ـ به ازاء چه مقدار x مساحت P برابر خواهد شد با نصف مساحت ربع دایره؟ این مقدار x را با طول کمان BC مقایسه کنید.

کتابخانهٔ یکان

۱۲۰۰ مسئله

شامل جالبترین مسائل جبر و مثلثات و حساب استدلالی

برای داوطلبان کنکور دانشکده ها

قابل استفادهٔ دانش‌آموزان دورهٔ دوم دبیرستانها

تألیف:

جواد حریرچی ـ حسین امین‌الهی ـ مهداد تقوی

از انتشارات: کتابفروشی تهران

شامل ۱۲۷۶ مسئله در ۱۸۰ صفحه

بها: ۵۰ ریال

روشهای جبر

تنظیم: پرویز شهریاری

شامل روشهای مختلفی که یا درکتابهای درسی به سکوت برگزار شده و یا به اجمال ازآنها رد شده است.

برای دانش‌آموزانی‌که خارج از کتابهای درسی به دنبال مطالب تازه و مسائل نامتعارف هستند

دراین‌کتاب علاوه بر روشهای مختلفی‌که مورد بحث وبررسی قرارگرفته تعداد ۶۷۲ مسئله هم با روشهای مختلف حل شده است.

از انتشارات: گروه فرهنگی خوارزمی

مرکزپخش: مؤسسهٔ مطبوعاتی امیرکبیر

۶۰۰ صفحه ـ بها: ۲۰۰ ریال

راهنمای ریاضیات متوسطه

روشی برای تعیین ریشهٔ مشترك دو معادله

موارد استعمال

تنظیم از : حسین خبازیان

دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان نمونه اصفهان

اگر $x=\alpha$ ریشهٔ مشترك دومعادلهٔ $f(x)=0$ و $g(x)=0$ باشد داریم :

$$f(x)=(x-\alpha)f_1(x) \text{ و } g(x)=(x-\alpha)g_1(x)$$

وچنانچه $D(x)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترك دوعبارت $f(x)$ و $g(x)$ باشد مسلماً خواهیم داشت .

$$D(x)=(x-\alpha)D_1(x)$$

برعکس اگر $x=\alpha$ در معادلهٔ $D(x)=0$ صدق کند در هر یك از معادله های $f(x)=0$ و $g(x)=0$ نیز صدق کرده و نتیجه می‌شود که $x=\alpha$ ریشهٔ مشترك دو معادلهٔ مزبور می‌باشد .

پس برای اینکه معلوم کنیم دومعادله ریشهٔ مشترك دارند یا نه ، بزرگترین مقسوم علیه مشترك عبارتهای آنها را بدست می‌آوریم (راه سادهٔ آن طریقهٔ نردبانی است) . اگر دوعبارت نسبت به هم اول نباشند یعنی دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترکی از درجهٔ $n\geq 1$ باشند ، دو معادله دارای n ریشهٔ مشترك می‌باشند . برای تعیین این ریشه ها کافی است عبارت بزرگترین مقسوم علیه مشترك را مساوی صفرقرارداده معادلهٔ حاصل را حل کنیم . اگر دو عبارت نسبت به هم اول بودند ریشهٔ مشترك نخواهند داشت .

مثال ۱ـ تحقیق کنید که آیا دومعادلهٔ زیر ریشهٔ مشترك دارند یا نه؟ واگر ریشهٔ مشترك دارند آنرا تعیین کنید :

$$(1)\quad x^3-3x^2+5x-6=0$$

$$(2)\quad x^3-x^2-x-2=0$$

عبارت معادلهٔ (۱) را بر عبارت معادلهٔ (۲) تقسیم می کنیم ، باقیماندهٔ تقسیم عبارت می‌شود از :

$$(3)\quad -2x^2+6x-4$$

باقیماندهٔ تقسیم عبارت (۲) برعبارت (۳) می‌شود :

$$(4)\quad 3x-6$$

بالاخره باقیماندهٔ تقسیم عبارت (۳) بر عبارت (۴) برابر با صفر می‌شود. بنابراین دوعبارت (۱) و(۲) دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترکی به صورت $3(x-2)$ هستند و چون این عبارت نسبت به x از درجهٔ اول است و یك ریشهٔ $x=2$ دارد پس دومعادلهٔ (۱) و (۲) دارای یك ریشهٔ مشترك $x=2$ می‌باشند .

مثال ۲ـ نسبت به دو معادلهٔ :

$$(1)\quad x^3-2x^2-x+2=0$$

$$(2)\quad x^3-x^2-4x+4=0$$

به ترتیب بالا عمل می کنیم ، نتیجه می‌شود که :

$$(3)\quad x^2-3x+2$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عبارت (۱) و (۲) می‌باشد و چون سه جمله‌ای (۳) دارای دو ریشهٔ $x=2$ و $x=1$ است پس دو معادلهٔ (۱) و (۲) دارای دوریشهٔ مشترك $x=1$ و $x=2$ می‌باشند .

مثال ۳ـ به ازاء چه مقدار a دو معادلهٔ :

$$(1)\quad x^2+ax-3=0$$

$$(2)\quad x^2-3x+a=0$$

دارای یك ریشهٔ مشترك می‌باشند .

برای اینکه دومعادلهٔ (۱) و(۲) دارای یك ریشهٔ مشترك

باشند لازم وکافی است که دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترکی ازدرجهٔ یك باشند. باقیماندهٔ تقسیم عبارت (۱) برعبارت (۲) [درحقیقت تفاضل دوعبارت مزبور] برابر است با :

$$(۳) \quad (a+۳)x-(a+۳)$$

این عبارت از درجهٔ اول است پس باید هریك از دو عبارت (۱) و (۲) براین عبارت بخش پذیر باشد . ازتقسیم عبارت (۲) برعبارت (۳) باقیماندهٔ $a+۲$ بدست می‌آید . بنابراین باید داشته باشیم :

$$a+۲=۰ \Longrightarrow a=-۲$$

درازاء این مقدار از a عبارت (۳) می‌شود $۵x-۵$ که دارای ریشهٔ $x=۱$ می‌باشد که همین مقدار ، ریشهٔ مشترك دومعادلهٔ (۱) و (۲) خواهد بود .

موارد استعمال :

مثال ۴ـ چه رابطه‌ای بین p و q برقرار باشد تا معادلهٔ :

$$(۱) \quad f(x)=x^۳+px+q=۰$$

ریشهٔ مضاعف داشته باشد .

می‌دانیم که اگر معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد این ریشه در معادلهٔ $f'(x)=۰$ نیز صدق خواهد کرد . پس باید شرطی را تعیین کنیم که معادلهٔ (۱) ومعادلهٔ زیر

$$(۲) \quad f'(x)=۳x^۲+p=۰$$

ریشهٔ مشترك داشته باشند . باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $f'(x)$ می‌شود :

$$(۳) \quad \frac{۲p}{۳}x+q$$

و باقیماندهٔ تقسیم عبارت (۲) بر عبارت درجهٔاول(۳)می‌شود:

$$\frac{۲۷q^۲}{۴p^۲}+p$$

این باقیمانده باید برابر باصفرباشد بنابراین شرط مورد نظر عبارت می‌شود از :

$$۲۷q^۲+۴p^۳=۰$$

مثال ۵ـ بین دو رابطهٔ زیر x را حذف کنید .

$$(۱) \quad ax^۲+bx+c=۰$$

$$(۲) \quad a'x^۲+b'x+c'=۰$$

کافی است شرطی را تعیین کنیم که دومعادله ریشهٔ مشترك داشته باشند.عبارتهای دو معادله باید دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترك از درجهٔ یك باشند ، ازتقسیم عبارت (۱) بر عبارت (۲) باقیمانده بصورت:

$$(۳) \quad \frac{ab'-ba'}{a'}x+\frac{ac'-ca'}{a'}$$

بدست می‌آید. هریك از دو عبارت (۱) و (۲) باید بر عبارت (۳) بخش‌پذیر باشد. یکی ازآنها مثلا عبارت (۲)رابرعبارت (۳) تقسیم کرده باقیمانده را برابر باصفر قرار می‌دهیم ، بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$(ac'-ca')^۲=(ab'-ba')(bc'-cb')$$

مثال ۶ـ معادلهٔ مکان‌هندسی نقطهٔ M را ازروابط زیر بدست‌آورید .

$$M\left(x=\frac{۲m}{۱+m^۲} \text{ و } y=\frac{۱-m^۲}{۱+m^۲}\right)$$

از این روابط خواهیم داشت :

$$m^۲x-۲m+x=۰ \qquad (۱)$$

$$(۱+y)m^۲+y-۱=۰ \qquad (۲)$$

مانند مثال ۵ عمل کرده بین دو معادلهٔ (۱) و (۲) پارامتر m را حذف می‌کنیم :

$$(xy-x-x-xy)^۲=(۲+۲y)(-۲y+۲)$$

$$\Longrightarrow x^۲+y^۲=۱$$

مثال ۷ـ معادلهٔ مکان هندسی نقاط نظیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع زیررا وقتی پارامتر m تغییرکند تعیین کنید :

$$y=\frac{x^۲+m}{x+m^۲}$$

معادله را نسبت به x مرتب می‌کنیم :

$$x^۲-xy+m-m^۲y=۰ \qquad (۱)$$

باید داشته باشیم

$$\Delta=y^۲-۴m+۴m^۲y=۰ \qquad (۲)$$

عرضهای نقاط نظیر ماکزیمم ومی‌نیمم درمعادلهٔ (۲) و مختصات آنها درمعادلهٔ (۱) صدق می‌کند . پس‌کافی است بین معادلات (۱) و (۲) پارامتر m را حذف کنیم ، برای این‌کار دومعادله را نسبت به m مرتب‌کرده مانند مثال ۶ عمل می‌کنیم. بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$y=۲x$$

تمرین

۱ـ مقادیر a و b را چنان تعیین‌کنیدکه معادلهٔ زیر دوریشهٔ مضاعف داشته باشد واین دوریشه را نیز پیداکنید .

$$x^۴-۶x^۳+۱۳x^۲+ax+b=۰$$

۲ـ درتابع زیروقتی پارامتر m تغییرکند معادلهٔ مکان هندسی نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم‌را بدست‌آورید .

$$y=\frac{m^۲x^۲-۲mx+۲}{۲x}$$

۳ـ به ازاء چه مقدار a منحنیهای نمایش هندسی دو تابع زیر برهم مماس هستند .

$$xy = ۱ \text{ و } a(x^۲+y^۲)=۱۶$$

۴ـ به‌ازاء چه مقدار a منحنیهای نمایش هندسی دوتابع زیر دردونقطهٔ قرینه برهم مماس می‌باشند .

$$۹x^۲+۴y^۲=۳۶ \text{ و } x^۲+y^۲=a$$

۵ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ زیررا تعیین کنید.

$$M\left(x=\frac{m^۲+m-۱}{m^۲+۱} \text{ و } y=\frac{m^۲-m+۱}{m}\right)$$

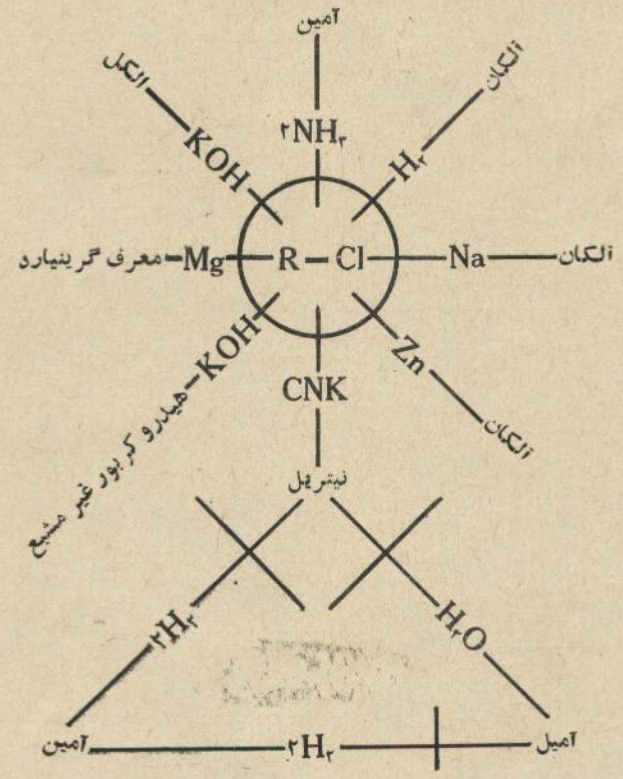
۶ـ مقادیر a و b و c را چنان تعیین کنید که هریك از کسرهای زیررا بتوان ساده کرد .

$$\frac{x^۴-۴x^۳+ax^۲+bx+c}{ax^۲+bx^۲+۲x+c}$$

$$\frac{x^۵-ax^۴+cx^۳-bx+c}{x^۳+ax^۲+bx+c}$$

نمودار راهنمای شیمی آلی

تهیه از: غلامعلی جوانبخت دبیر دبیرستانهای سبزوار



۱ـ اگر فرض کنیم R ریشهٔ متیل باشد از مشتق یك استخلافی متان باکلر می‌توان آنرا بدست‌آورد وچنانچه جسم حاصل را با $H_۲$ یا Na یا Zn ترکیب‌کنیم اتان‌تولید می‌شود. ازترکیب مجدد اتان با کلر ریشهٔ متیل به اتیل تبدیل می‌شود و...

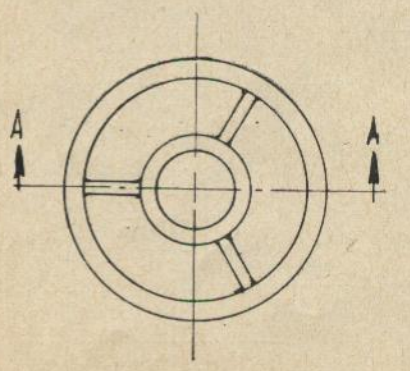
۲ـ ازاکسیداسیون ضعیف الکلها به‌تدریج آلدئیدها و اسیدها حاصل می‌شوند.

۳ـ ازشاخهٔ نیتریل به پائین، آمین را دهیدروژنه‌یا دهیدراته کنیم مجدداً نیتریل بدست می‌آید.

۴ـ ازترکیب $(C_۲H_۵Cl)R-Cl$ با KOH الکلی اتیلن بدست می‌آید. اتیلن باکلر روغن هلندی می‌دهد. از ترکیب مجدد روغن هلندی با پتاس الکلی استیلن حاصل می‌شودکه‌ازپلیمریزاسیون سه‌ملکول آن نیز بدست می‌آید که بوسیلهٔ آن می‌توان مشتقات مختلف حلقوی را تهیه‌کرد.

۵ـ ازترکیب مشتق هالوژنه هیدروکربورهای مشبع یا Mg مخلوط با اتر معرف گرینیارد بدست می‌آید .

توضیح



دررسم شکل ۱۲ از مقالهٔ «راهنمای رسم فنی» مندرج درشمارهٔ ۴۵ اشتباه شده است. تصویر افقی صحیح شکل مزبور مطابق شکل مقابل است.

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Résolution des Problèmes élémentaires de géométrie

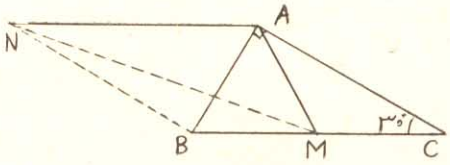
تألیف: **E. J. Honnet** چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳ ـ ترجمهٔ: ع. م.

بخش پنجم ـ چگونگی محاسبهٔ مساحت یك شکل

روش یکم ـ استفاده از فرمولهای کلاسیك

ضمن درس هندسه برای تعیین مساحت بعضی شکلهای خاص فرمولهایی ارائه می‌شود. اگر در مسئله‌ای موضوع محاسبهٔ یك چنین شکلی مورد نظر باشد کافی است اندازهٔ اجزائی از آن را که در فرمول مربوط لازم است محاسبه کرده با استفاده از فرمول مقدار مساحت را پیدا کرد.

مسئلهٔ ۶۲ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول وتر $BC=2a$ و اندازهٔ زاویهٔ C برابر با ۳۰درجه است. از B موازی با میانهٔ AM و از A موازی با BM رسم کرده متوازی‌الاضلاع AMBN را می‌سازیم. مساحت این متوازی‌الاضلاع را حساب کنید. مورد استعمال عددی وقتی $a=5^{cm}$ باشد.



معلومات:
$BC=2a$ و $\hat{C}=30^\circ$
$BM=MC$
$AN \parallel BC$ و $BN=AM$

حل ـ میانهٔ AM با نصف وتر BC یعنی با BM برابر بوده بنابراین متوازی الاضلاع AMBN لوزی می‌باشد. مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل‌ضرب طولهای دوقطر آن. پس بایدطولهای AB و MN را حساب کنیم. ضلع AB که روبرو به زاویهٔ ۳۰° است نصف وتر BC است یعنی:

$AB=a$

از طرف دیگر چون AN با MC هم موازی و هم مساوی است ANMC متوازی‌الاضلاع است و $MN=AC$ می‌باشد:

$$MN=AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=a\sqrt{3}$$

و مساحت چهارضلعی مطلوب برابر می‌شود با:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot MN=\frac{1}{2}\times a\times a\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$a=5^{cm}:\ S=\frac{25\sqrt{3}}{2}\#21/65cm^2$$

تمرینات

۳۴۱ـ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را حساب کنید وقتی که:

۱) طول ضلع آن $a=10$ باشد.
۲) طول ارتفاع آن $h=8$ باشد.
۳) طول شعاع دایرهٔ محاطی آن $r=3$ باشد.
۴) طول شعاع دایرهٔ محیطی آن $R=15$ باشد.

۳۴۲ـ مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را حساب کنید که طول هرساق آن $b=16$ باشد.

۳۴۳ـ روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض در ثلث آن ابتدا از رأس نقطه‌ای انتخاب کرده از آن موازی با اضلاع رسم می‌کنیم ؛ یك شش ضلعی تشکیل می‌شود. مساحت این شش‌ضلعی را برحسب a طول ضلع مثلث حساب کنید. مثال عددی $a=۹$.

۳۴۴ـ در ذوزنقه‌ای طولهای دوقاعده a و ۳a وطول یکی از دوساق برابر با a بوده این ساق با قاعدهٔ بزرگتر زاویهٔ °۴۵ می‌سازد، مساحت این ذوزنقه را برحسب a حساب کنید مثال عددی : $a=۵۸$.

۳۴۵ـ دریك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین دوقطر بر دوساق عمودمی‌باشند. اگر طول هر قطر ۴a وطول هر ساق ۳a باشد مساحت ذوزنقه را حساب کنید. مثال عددی: $a=۷۵$

۳۴۶ـ در متوازی‌الاضلاعی یك زاویه برابر °۶۰ و یکی از ضلعها دوبرابر ضلع دیگر است. نیمسازهای داخلی زاویه‌هارارسم می‌کنیم که ازتقاطع آنها مستطیلی بدست می‌آید مساحت این‌مستطیل را برحسب c ضلع کوچکترمتوازی‌الاضلاع حساب کنید. مثال عددی: $c=۱۲$

۳۴۷ـ در مسئلهٔ ۳۰۲ مساحت مربع MNPQ را حساب کنید .

۳۴۸ـ در مسئلهٔ ۳۰۸ مساحت مربع MNPQ را حساب کنید .

۳۴۹ـ در ۳۱۰ مساحت مثلث COF ومساحت‌ذوزنقهٔ ACFB را حساب کنید .

۳۵۰ـ در مسئلهٔ ۳۱۲ مساحت مثلث ABC راحساب کنید ،

۳۵۱ـ در مسئلهٔ ۳۱۴ مساحت مثلث ABC را حساب کنید .

۳۵۲ـ مساحت دایره در مسئلهٔ ۳۱۵ .

۳۵۳ـ مساحت ذوزنقه در مسألهٔ ۳۲۲

۳۵۴ـ مساحت ذوزنقه در مسألهٔ ۳۲۳

۳۵۵ـ مساحت شش‌ضلعی در مسألهٔ ۳۲۶

۳۵۶ـ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع در مسألهٔ ۳۳۰

تبصره ـ در محاسبهٔ عددی مساحتها باید توجه‌داشت که

اولا : مقادیر تمام اجزاء طولی برحسب یك واحدباشد

ثانیاً : واحد مساحت عبارت می‌شود از واحد مربع همان واحد طول. مثلا اگر واحد طول متر انتخاب شده باشد واحد سطح متر مربع خواهد بود .

روش دوم ـ استفاده از مقایسهٔ مساحتها

مساحت مورد محاسبه را با مساحتی که می‌شناسیم یا مساحتی که به سادگی‌می‌توان‌حساب کردمقایسه‌می‌کنیم. خواصی که در این مقایسه بکار می‌رود عبارتند از :

۱) نسبت مساحتهای دو مستطیل با قاعده‌های مشترك به نسبت ارتفاعهای آنها است.

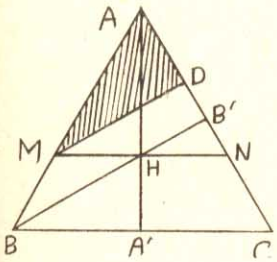
این خاصیت در مورد متوازی‌الاضلاع و مثلث تعمیم می‌یابد .

۲) نسبت مساحتهای دوشکل متشابه‌به نسبت مربع‌نسبت تشابه آنها است.

۳) اگر دومثلث در یك زاویه برابر یا مکمل باشند نسبت مساحتهای آنها برابر است‌با نسبت حاصل ضربهای‌ضلعهای این دوزاویه .

مسئلهٔ ۶۳ـ از نقطهٔ H محل تقاطع ارتفاعها مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $a=۱۰$ خط MN را موازی با BC و محدود به دوضلع دیگر رسم می‌کنیم . نقطهٔ M را به نقطهٔ D واقع در یك چهارم AC ابتدا از A وصل‌می‌کنیم مساحت مثلث AMD را حساب کنید.

معلومات
$$\left.\begin{array}{l} AB=BC=CA=a \\ AA'\perp BC, BB'\perp AC \\ AD=\frac{1}{4}AC \end{array}\right\}$$



حل ـ چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است پس ارتفاعات و میانه‌های آن برهم‌منطبق هستند و H دریك سوم AA' ابتدا از A' واقع است. دو مثلث AMN و ABC متشابه هستند وداریم

$$\frac{\text{مساحت } AMN}{\text{مساحت } ABC}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^۲=\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲=\frac{۴}{۹}$$

ازطرف دیگر چون AMN و AMD در ارتفاع مشترك

هستند پس :

$$\frac{\text{مساحت } AMD}{\text{مساحت } AMN}=\frac{AD}{AN}=\frac{AB}{۴}\circ\frac{۲AB}{۳}=\frac{۳}{۸}$$

از مقایسهٔ دورابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که :

$$\text{مساحت } AMD=\frac{\text{مساحت } ABC}{۶}=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۲۴}$$

$$a=۱۰^{cm} \quad ، \quad \text{مساحت } AMD \# ۷/۲۱^{cm^{۲}}$$

تبصره- می‌توانیم مسأله را ازراه زیرحل کنیم : چون دومثلث ABC و AMD در یك‌زاویه مشترك‌هستند بنابراین

$$\frac{\text{مساحت } AMD}{\text{مساحت } ABC}=\frac{AM\cdot AD}{AB\cdot AC}=\frac{۲a^{۲}}{۱۲a^{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

تمرینات

۳۵۷- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه درزاویهٔ A میانه‌ها در G متلاقی هستند. از G به موازات AB و AC رسم می‌کنیم که BC را در D و F قطع می‌کنند. بافرض:

$AB=۴a$

و $AC=۳a$ مساحت مثلث GDF را حساب کنید.

مثال عددی: $a=۷۲^{cm}$

۳۵۸- روی ضلعهای AB و BC و CA از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $a=۱۲$ به ترتیب نقاط M و N و P را در یك‌چهارم طول‌ضلع ابتدا از A و B و C تعیین کرده خطوط MM' و NN' و PP' را به ترتیب موازی با AC و AB و BC رسم می‌کنیم. مساحت مثلثی راکه توسط سه خط اخیر تشکیل می‌شود حساب‌کنید.

۳۵۹- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن طول ضلعهای زاویهٔ‌قائمه $AB=c=۵$ و $AC=b=۸$ می‌باشد مفروض است. نقطهٔ M را بریك‌چهارم AC ابتدا از A تعیین کرده به B وصل می‌کنیم . و نقطهٔ N را بر یك‌سوم BN ابتدا از B بدست آورده به C وصل می‌کنیم. مساحت مثلث BNC را حساب کنید .

۳۶۰- در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر با ۶۰° و $AB=۲c$ و $AC=\frac{۳c}{۲}$ است. نقطهٔ G مرکز ثقل‌مثلث را به رأسهای B و C وصل می‌کنیم. مساحت مثلث BCG را حساب کنید. مثال‌عددی: $c=۹$

۳۶۱- در مسألهٔ ۳۱۱ اگر O محل تلاقی دوقطر باشد مساحتهای دو مثلث AOB و COD راحساب کنید.

۳۶۲- در مسألهٔ ۳۰۶ مساحت مثلث ABD راحساب کنید .

۳۶۳- در مسألهٔ ۳۲۱ مساحتهای دومثلث AOB و DOF را حساب کنید.

۳۶۴- مساحت شش‌ضلعی در مسألهٔ ۳۲۴

۳۶۵- مساحت مثلث در مسئلهٔ ۳۲۵

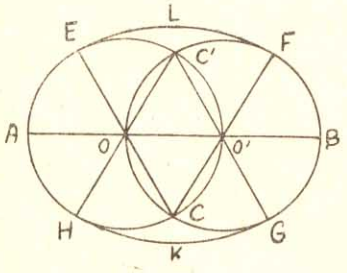
۳۶۶- مساحت شش‌ضلعی در مسئلهٔ ۳۲۶

روش سوم - مساحت مورد محاسبه برابر است با مجموع یا اختلاف دومساحت که با روشهای قبلی محاسبه می‌شوند.

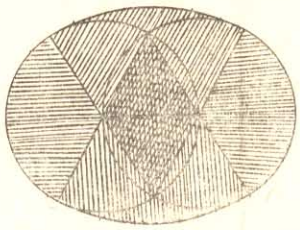
در متن درس برای بدست‌آوردن فرمول مساحت ذوزنقه از این روش استفاده می‌شود، مساحت ذوزنقه برابراست با مجموع مساحتهای دومثلث. برای تعیین مساحت یك قطعه دایره ، مساحت تاج دایره ، و غیره نیز از این روش استفاده می‌گردد .

بدنیست اگر شکلهای مختلف را که مساحت آنها مورد استفاده است روی شکل مربوط باهاشورهای مختلف از هم‌مجزا کنیم ، از این راه‌از بعضی اشتباهها یا فراموشکاریهاجلوگیری می‌شود . اهمیت این یادآوری در مسئلهٔ زیرمشاهده خواهد شد.

مسألهٔ ۶۴- مساحت‌مرغانهٔ به‌شکل مقابل را حساب‌کنید چگونگی ترسیم این مرغانه‌در مسألهٔ ۳۳۷ تشریح شده است.



۱ـ تجزیهٔ مساحت مورد محاسبه ـ این مساحت را که S می‌نامیم باید به مساحتهایی تجزیهٔ کنیم که محاسبهٔ هریك از آنها به‌سادگی میسر باشد. ملاحظه می‌کنیم که مساحت مرغانه برابر است بامجموع مساحتهای قطاع OEAH، قطاع O'FBG، قطاع CELF، قطاع C'HKG که از روی این مساحتها مساحت چهارضلعی OCO'C' راکم بکنیم (چنانکه ازهاشورزدن شکلهای مزبور برمی‌آید). اما دوقطاع OHAE و O'CBF با هم و دوقطاع CELF و C'HKG نیز باهم برابر بوده وچهارضلعی OCO'C' از دومثلث متساوی‌الاضلاع برابر تشکیل شده است بنابراین اگر مساحت قطاع OHAE را با S_1، مساحت قطاع CELF را با S_2 ومساحت مثلث OCO' را با S_3 نشان دهیم داریم:



$$S=2(S_1+S_2-S_3)$$

۲ـ محاسبهٔ مساحات ـ داریم:

$$OO'=OC=O'C=l$$

$$\angle OCO'=60^\circ \quad \text{و} \quad \angle COC'=120^\circ$$

$$S_1=\pi\times l^2\times\frac{120}{360}=\frac{\pi l^2}{3}$$

$$S_2=\pi\times 4l^2\times\frac{60}{360}=\frac{2\pi l^2}{3}$$

$$S_3=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S=2\left(\frac{\pi l^2}{3}+\frac{2\pi l^2}{3}-\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{l^2}{2}(4\pi-\sqrt{3})$$

$$l=4^{cm}\ ,\ S\#86/65^{cm^2}$$

تمرینات

۳۶۷ـ هریك از ضلعهای مربعی رااز طرفین به‌اندازهٔ نصف ضلع امتداد داده نقاط حاصل متوالیاً به‌هم وصل‌می‌کنیم، یك‌هشت‌ضلعی تشکیل می‌شود. مساحت این هشت ضلعی‌راحساب کنید به‌فرض آنکه طول ضلع مربع $a=12^{cm}$ باشد.

۳۶۸ـ روی هریك از ضلعهای یك شش‌ضلعی منتظم‌ودر خارج آن مربعی‌می‌سازیم‌و رأسهای مجاور را به هم‌وصل می‌کنیم یك دوازده‌ضلعی منتظم تشکیل می‌شود که مساحت آنرا باید برحسب $R=5$ شعاع دایرهٔ محیطی شش ضلعی مفروض حساب کنید.

۳۶۹ـ روی هریك از ضلعهای یك‌شش‌ضلعی منتظم ودر خارج آن مثلث متساوی‌الاضلاعی می‌سازیم و رأسهای خارجی این مثلثها را متوالیاً به‌هم وصل می‌کنیم. مساحت شش ضلعی منتظم حاصل را برحسب $R=18^{cm}$ شعاع دایرهٔ محیطی شش‌ضلعی مفروض حساب کنید.

۳۷۰ـ دردایرهٔ به شعاع $R=6^{cm}$ دو وتر متوازی چنان رسم‌می‌کنیم که یکی ازآنها ضلع شش ضلعی منتظم‌ودیگری ضلع سه ضلعی منتظم باشد. مساحت سطح محصور بین دایره و دووتر مزبوررا در دوحالتی‌که امکان دارد حساب کنید.

۳۷۱ـ بر دایرهٔ به شعاع $R=32^{mm}$ دوممماس‌چنان رسم می‌کنیم‌که باهم زاویهٔ 60° بسازند. مساحت سطح محصور بین دایره و این دوممماس را حساب کنید.

۳۷۲ـ در دایرهٔ به شعاع $R=125^{mm}$ دوقطرعمود برهم AB و CD را رسم می‌کنیم. به مرکز A وبه شعاع AC کمان CFD را رسم می‌کنیم که با AB در F متلاقی است. مساحت سطح محصور بین دوکمان CBD و CFD را حساب کنید.

۳۷۳ـ درمسألهٔ ۳۰۹ مساحت سطح محصوربین‌دودایره وممماس مشترك خارجی آنهارا حساب کنید.

۳۷۴ـ مساحت شکل مربوط به مسألهٔ ۳۳۸ را حساب کنید.

۳۷۵ـ در مسألهٔ ۳۳۶ مساحت سطح محصور بین‌کمان مرسوم و خطی‌که طرفین آنرا به هم وصل می‌کند حساب‌کنید

۳۷۶ـ در مسألهٔ ۳۳۵ مساحت سطح محصور بین کمان و خطی که دوسر آنرا به هم وصل می‌کند حساب‌کنید.

۳۷۷ـ در مسألهٔ ۳۳۹ مساحت سطح‌محصور بین‌منحنی و خطوط FD وGC وCD را حساب کنید.

تمرینات مربوط به مسائل محاسبه‌ای

۳۷۷ـ در ذوزنقهٔ قائم ABCD طول قاعدهٔ کوچکتر $CD=a=45^m$ و قاعدهٔ بزرگتر دوبرابر قاعدهٔ کوچکتر است و طول ارتفاع $AD=a$ می‌باشد. اگر دوقطر در I متلاقی باشند طولهای دوقطر و طولهای AI و BI و CI و DI را حساب کنید.

۳۷۹ـ به قطر هریك از ضلعهای یك مثلث قائم‌الزاویه و در یك طرف وتر نیمدایره‌ای می‌سازیم مساحت سطح‌دوهلالی حاصل را برحسب طولهای دو ضلع زاویهٔ قائمه حساب کنید.

۳۸۰ـ مساحت سطح دایرهٔ محاطی در یك‌لوزی را که

پائین صفحهٔ بعد

سؤالات امتحان ورودی کلاس تربیت دبیر رشتهٔ ریاضی

دانشگاه مشهد

فرستنده : عباس با وفای حقیقی*

۶ شهریور ۱۳۴۶ ـ مدت : دوساعت و ربع

جبر :

I- به‌فرض آنکه یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$ax^2+bx+c=0$$

مجذور ریشهٔ دیگر باشد ثابت کنید :

$$b^2=ac(3b-a-c)$$

II- حد تابع زیر را به ازاء $x=\pm\infty$ بدست آورید :

$$y=\sqrt{x^2-4x-1}-\sqrt{x^2+x-5}$$

III- تابع اولیهٔ تابع زیر را حساب کنید :

$$y=\frac{1}{\sqrt[5]{3-2x}}+\sqrt{x^7-8x^4}$$

هندسه وحساب :

I- هذلولی به‌کانونهای F و F' و رؤوس A و A' و مرکز O را درنظر می‌گیریم . نقطهٔ P را برشاخهٔ کانون F اختیار می‌نمائیم . وسط PF را M می‌نامیم نقطهٔ تلاقی OM و دایرهٔ به‌قطر AA' را T فرض می‌کنیم . ثابت کنید : TM=MF و از این رو نتیجه بگیرید که دایرهٔ بـه قطر FP بردایرهٔ به قطر AA' مماس است .

II- دستگاه دومعادلهٔ‌دومجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \log_5 x+\log_2 y=4 \\ xy=100 \end{cases}$$

III- اگر a و b نسبت‌به هم‌اول باشند ثابت کنید : کسر زیر غیرممکن التحویل است :

$$\frac{a^3+b^5}{a^2b^3}$$

بقیه ازصفحهٔ قبل

دوقطر آن به طولهای $2a$ و $2b$ می‌باشندحساب کنید. مثال‌عددی :

$$a=(\sqrt{3}+1)^{dm} \quad \text{و} \quad b=(\sqrt{3}-1)^{bm}$$

۳۸۱ـ دودایرهٔ O و O' یکدیگر را به زاویهٔ قائمه‌قطع می‌کنند. طول خط‌المرکزین آنها دوبرابر شعاع دایرهٔ O و شعاع این دایره $R=15^{cm}$ است. مساحت سطح مشترك دو دایره را حساب کنید.

۳۸۲ـ دو دایرهٔ O و O' متخارج هستند. شعاع دایرهٔ کوچکتر r و از دایرهٔ بزرگتر 7r و طول خط‌المرکزین 12r است. مماسهای مشترك خارجی دو دایره را رسم می‌کنیم محیط شکل حاصل را بـرحسب $r=7/5^{cm}$ حساب کنیـد.

۳۸۳ـ همان مسألهٔ قبل وقتی که به جای مماسهای مشترك خارجی مماسهای مشترك داخلی را رسم کنیم و شعاعهاو خط‌المرکزین r و 4r و 10r باشد.

۳۸۴ـ هریك از رأسهای مربعی را مرکز قرار داده کمانهایی رسم می‌کنیم که از مرکز مربع گذشته بین دوضلع از آن محصورباشند. محیط و مساحت هریك ازدوگلبادی‌راکه تشکیل می‌شود برحسب طول ضلع مربع $a=\sqrt{2}^{dm}$ حساب کنید .

۳۸۵ـ در دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R دوقطرعمود برهم AB و CD را رسم می‌کنیم. به قطرهریك از شعاعهای AO و BO و CO و DO دایره‌هایی رسم می‌کنیم. مساحت سطح محصور بین‌دایرهٔ مفروض وچهار دایرهٔ مرسوم رابرحسب $R=12^{cm}$ حساب کنید.

۳۸۶ـ روی قطعه خط AB به طول $l=15^{cm}$ نقطهٔ C را چنان تعیین می‌کنیم‌که $AC=2CB$ باشد. روی‌هریك از قطعه خطها و در یك طرف AB مثلثهای متساوی‌الاضـلاع ACD و BCF را می‌سازیم و DF را رسم می‌کنیم. طـول DF و مساحت سطح‌چندضلعی ADFB را حساب کنید.

---

* چون سؤالات مزبور دریکان سال ۱۳۴۶ چاپ نشده‌است به این وسیله برای اطلاع علاقمندان چاپ می‌شود .

مثلثات

۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)=\sqrt{2}$$

۲ـ تابع اولیهٔ تابع زیر را بدست آورید :

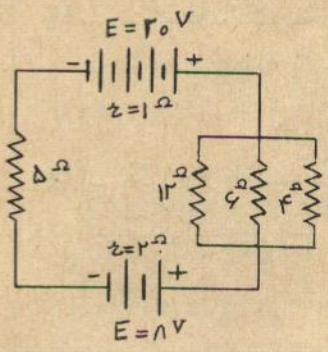
$$y=\cos x(1-\cos 2x)^2+tg^2 3x$$

۳ـ درمثلث ABC ارتفاع BB' ازوسط ارتفاع AA' می‌گذرد ثابت کنید :

$$tg B=2\,cotg C$$

مکانیك ـ فیزیك (رشتهٔ ریاضی)

مسئلهٔ اول : یك باطری به نیروی محرکهٔ ۲۰ ولت و مقاومت درونی ۱ اهم با باطری دیگری به‌نیروی محرکهٔ ۸ ولت ومقاومت‌درونی ۲ اهم بطور متقابل قرار گرفته ومجموعاً با یك مقاومت ۵ اهمی و سه مقاومت انشعابی ۱۲ و ۶ و ۴ اهمی بطور متوالی بسته شده‌اند (مطابق شکل). اندازهٔ شدت‌جریان‌رادرهریك از۴مقاومت‌و اختلاف پتانسیل‌دوسرهریك ازباطریها را حساب کنید .



مسئلهٔ دوم : دو جسم از دو ارتفاع متفاوت سقوط کرده و دریك زمان معین به‌زمین می‌رسند جسم اول درمدت یك‌ثانیه وجسم دوم درمدت ۲ ثانیه راه را طی می‌کند . اختلاف ارتفاع این دوجسم چقدر است ؟

سؤالات مشترك فیزیك

(رشته‌های تربیت دبیرعلوم تجربی و ریاضی)

۱ـ توان را تعریف کنید و واحد آنرا در دستگاه CGS و MKS علمی و MTS بنویسید .

۲ـ خواص اشعهٔ کاتودیك را تعریف کنید .

۳ـ هوای لولهٔ بازی به ارتعاش درمی‌آید . در طول لوله ۲ گره به فاصلهٔ ۲۰ سانتیمتر تشکیل شده است .

اولا : طول لوله را معلوم کنید .

ثانیاً : این لوله هارمونیك چندم خود را می‌دهد ؟

ثالثاً : اگر سرعت صوت در داخل لوله ۳۲۰ متر بر ثانیه باشد تعداد ارتعاشات آنرا حساب کنید .

سؤالات شیمی معدنی

۱ـ 100^{cc} آب کلر را با مقدار کافی‌یدور پتاسیم ترکیب می‌کنیم محلول حاصل بوسیلهٔ 25^{cc} ازمحلول هیپوسولفیت‌سدیم $\frac{N}{10}$ بیرنگ می‌شود . فرمول واکنشها را بنویسید و ارزش آب‌کلر را حساب کنید .

$$I=127 \quad S=32 \quad Na=23$$

۲ـ فرمول فعل وانفعالات آمونیاك را براملاح مس و آلومینیوم بنویسید .

۳ـ یك فرمول ازخاصیت اکسیدکنندگی ویك فرمول‌از خاصیت احیاءکنندگی آب اکسیژنه بنویسید.

۴ـ فرمول گسترده پیروفسفات سدیم وسولفیت پتاسیم را ترسیم نمائید .

سؤالات شیمی آلی

۱ـ درجهٔ الکلی شرابی ۱۱/۵ می‌باشد. اگراین‌شراب را به سرکه تبدیل نمائیم اولا غلظت اسید بدست‌آمده را حساب کنید درصورتی‌که راندمان عمل ۹۰٪ باشد . ثانیاً 25^{cc} از محلول این اسید بوسیلهٔ چند cc محلول پتاس $\frac{N}{5}$ خنثی می‌شود ($D=0/8$)

۲ـ طرزتهیهٔ سیانوژن وآسپرین را بنویسید (یك‌طریقه برای هر مورد)

۳ـ فرمول پلیمریزاسیون استیلن را درمجاورت کلرور ـ کوئیورو نوشته نام جسم حاصل را ذکرکنید .

۴ـ فرمول تهیهٔ دی‌کلرو دو پروپان از استن را بنویسید

۵ـ فرمولهای زیر را کامل کنید :

$$C_2H_5-CHO+SO_4H_2+MnO_4K \longrightarrow$$

$$CH_2=CH_2+ClOH \longrightarrow$$

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(The Mathematics Student Journal. Vol. 13, Num. 3)

Problem 34-The sum of consecutive positive integers beginning with 1, is called **a triangular number** (e.g. $6=1+2+3$). Prove:

a) If T is a triangular number then $8T+1$ is a perfect spuare.

b) If $8N+1$ (N integral) is a perfect square, then N is a triangular number.

Solution- a) if T is a triangular number, then T may be represented as $n(n+1)/2$ (n a positive integer) Then

$$8T+1=8[n(n+1)/2]+1$$
$$=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

a perfect spuare.

b) If $8T+1$ is a square, it is the square of an odd integer. We may therefore let

$$8T+1=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$$

From this we obtain $T=n(n+1)/2$, Which, as in a) is the formula for a triangular number.

Problem 35- Under the integers

1,2,3,4,5,6,7,

write another arrangement of the same integers. Find the absolute values of the differences in each column. Prove that these absolute differences cannot all be different.

For example:

1	2	3	4	5	6	7
2	6	3	5	7	1	4
1	4	0	1	2	5	3

First solution- The absolute values of the differences in the third row must be 0,1,2,3,4,5,6 in some order. Also the algebraic differences must add up to zero because the sum of the integers in the second row is the same as the sum in the top row. Thus we want to know if.

1) $0\pm1\pm2\pm3\pm4\pm5\pm6=0$

is possible for some choice of signs. But the left side of (1) contains 3 odd numbers which, regardless of signs, will combine to give an odd number; and the even numbers, regardless of signs will combine to give an even number. Since an odd and even number cannot combine to give zero, (1) is impossible Therefore the absolute differences in row 3 cannot all be different.

→

نویسندگان { ژ . گامو
م . استرن

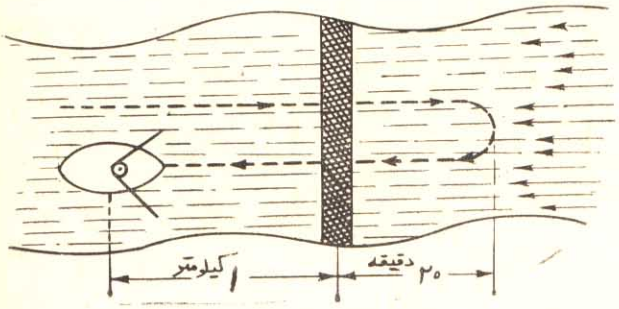
ترجمه از فرانسه

باشگاه دریانوردان

۲- بطری روی آب

یکی از اعضای باشگاه اظهار عقیده کرد که مسئلهٔ حرکت قایق بادبانی در هوای کاملا آرام که قبلا تعریف شد به نظریهٔ نسبیت اینشتین مربوط می‌باشد . یکی دیگر از اعضاء که با مطبوعات علمی سروکار داشت گفت که نمی‌توان این موضوع را کلا به نظریهٔ نسبیت مربوط دانست زیرا هرحرکتی بطورکلی نسبی است . این عضو باشگاه اظهار داشت مسئلهٔ دیگری در نظر دارد که کلید حل آن نوع انتخاب دستگاه مقایسه می‌باشد :

قایقرانی با قایق خود رودخانه‌ای را درجهت سربالائی آب می‌پیمود . بطری نیمه پری از شراب بر دماغهٔ این قایق نهاده شده بود. وقتی که قایق اززیر پلی می گذشت تکانی مختصر به قایق واردآمد و بطری دراثر اصابت به دیوارهٔ پل به سطح آب افتاد . قایقران که متوجه سقوط بطری درآب نشده بود به راه خود ادامه داد. اما بیست دقیقه بعد از زمان سقوط بطری ، قایقران مشاهده کرد که بطری در جای خود نیست و فهمید که درآب افتاده است ، پس دور زد ورودخانه را درجهت جریان آب شروع به پیمودن کرد (اززمان مربوط به دورزدن قایقران می‌توانیم صرف نظر کنیم) تا بطری خود را بیابد . قایقران خونسردی خودرا از دست نداده بود و رودخانه را با همان سرعت قبلی که داشت طی می‌کرد . اما سرعت آن نسبت به خشکی که قبلا برابر بود با اختلاف سرعت قایق و آب فعلا با مجموع این دو سرعت برابر بود . قایقران مجدداً از زیر پل گذشت و درست درفاصلهٔ یك کیلومتری ازپل بطری خودرا یافت و آنرا از سطح آب گرفت . بااین معلومات ، می‌توانید بگوئید سرعت جریان آب چقدر بوده است ؟

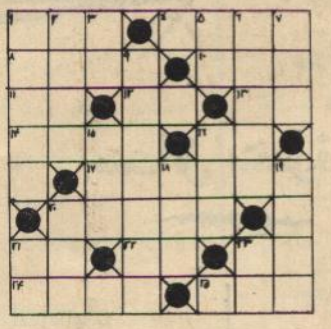


چند نفر ازاعضای باشگاه که سابقهٔ مطالعهٔ ریاضیات داشتند سعی کردند که مسئله راحل کنند، حتی یکی ازآنان راه‌حل جبری مسئله را پیش گرفت اما یك معادله بدست آورد با دو مجهول ، سرعت قایق نسبت به آب و سرعت آب نسبت به خشکی . اما هیچکدام راه‌حلی برای مسئله پیدا نکردند واظهار عقیده کردند که برای حل مسئله معلوم دیگر لازم است .

آنکه مسئله را مطرح ساخته بود اظهار داشت که راه‌حل آن بسیار ساده است و با همین معلومات قابل حل می‌باشد . نکته اینجا است که باید دستگاه مقایسه را چنان انتخاب کرد که با رودخانه قابل انطباق باشد . رودخانه را به صورت یك دریاچهٔ ساکن فرض می‌کنیم ، در این صورت خشکی و پل نسبت به رودخانه متحرك خواهند بود . اگر قایق برسطح آب دریاچه در حرکت باشد و چیزی ازآن به سطح آب بیفتد، وقتی که قایقران ۲۰ دقیقه بعد متوجه سقوط آن جسم شود و برای بازگرفتن آن دور زده مراجعت کند ، در مراجعت فقط ۲۰ دقیقه صرف خواهد کرد ، زیرا دراین مدت آن جسم

سرگرمی‌های ریاضی

جدول اعداد



طرح : محمود سمیعی

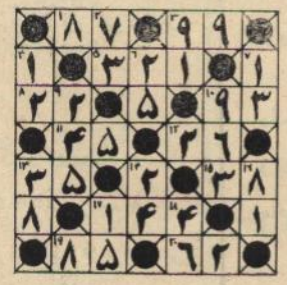
کلاس چهارم ریاضی دبیرستان مهران زاهدان

افقی : ۱ـ به صورت $\overline{aba}$ ومربع کامل است . ۴ـ معادل عددی «مجلهٔ یکان بهترین راهنما است» به حساب ابجد . ۸ـ کوچکترین عددی که برهریك از عددهای از ۱ تا ۱۰ قابل قسمت است . ۱۰ـ مقلوبش مضربی است از ۷ و ازتوان ششم یك عدد. ۱۱ـ رقم‌یکانش مجذور رقم دهکان آن است . ۱۲ـ تکرار یك رقم . ۱۳ـ مجذور خارج قسمت تقسیم عدد ۱۲ افقی برعدد ۲۱ افقی . ۱۴ـ عدد متشکل از دو رقم سمت راستش ثلث عددی است که از دو رقم سمت چپش تشکیل می‌شود و اگر یك واحد بررقم دهکانش بیفزائیم عدد حاصل متقارن است . ۱۶ـ جذر عدد ۷ قائم . ۱۷ـ سمت چپش اولین سه رقم فرد وسمت راستش آخرین سه‌رقم زوج واقع شده است . ۲۰ـ به‌صورت $\overline{ab۵ba}$ است که $\overline{ab}$ همان عدد ۱۳ افقی است . ۲۱ـ جذر عدد ۱ افقی . ۲۲ـ مقلوب عدد ۱۶ افقی . ۲۳ـ تعداد خانه‌های سفید جدول . ۲۴ـ مجذور عدد ۱۲ افقی . ۲۵ـ ثلث آن مربع کامل و ربع آن مکعب کامل است .

قائم : ۱ـ سلسلهٔ اعداد طبیعی (تا حد امکان) . ۲ـ به‌صورت : $\overline{a(۲a+۱)(۴a+۱)a}$ است . ۳ـ همان عدد ۲۲ افقی . ۵ـ مجموع‌عددهای ۱۱ افقی و ۲۱ قائم . ۶ـ درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند .

$$x^{۲}-۸۴۸۱۷x+۸۴۸۱۶=۰$$

۷ـ هم خودش و هم مقلوبش مجذورکامل است . ۹ـ اگر سه واحد به‌آن بیفزائیم وحاصل‌را مقلوب کنیم حاصل ضرب شمارهٔ سال تأسیس مجلهٔ یکان در شمارهٔ حساب بانکی این مجله بدست می‌آید . ۱۵ـ تکرار یك رقم . ۱۶ـ ارقامش تصاعدهندسی می‌سازند. ۱۸ـ توان‌نهم یك عدد. ۱۹ـ چهاربرابرجذرربع مجذورعدد ۱۴ افقی. ۲۰ـ عددی‌است متقارن . ۲۱ـ مجموع رقمهایش ۲۰ است . ۲۳ـ جذر دو برابرش با خمسش برابر است .



حل جدول شمارهٔ قبل

تعیین عدد

عدد پنج رقمی A را چنان تعیین کنید که‌عدد شش‌رقمی $\overline{۱[A]}$ سه برابر عدد شش رقمی $\overline{[A]۱}$ باشد .

کدام سنگین‌تر است ؟

دو صندوق مکعب شکل با ابعاد کاملا مساوی در اختیار داریم که هردوی آنها از گلوله‌ها کروی‌شکل کاملا پرهستند . دریکی ازدوصندق ۲۷ گلولهٔ هم اندازه و در دیگری ۶۴ گلولهٔ هم‌اندازه (اما کوچکتر از گلوله‌های صندوق اول) جاگرفته است. وزن مخصوص تمام گلوله‌های دو صندوق مساوی است . کدام یك ازدوصندوق مزبورسنگینتر است؟

پاسخ تعیین سن :

ازحل معادلات :

$$\begin{cases}\overline{ab}-\overline{ba}=۹(a-b)=۲x\\ \overline{ba}=۱۰x\end{cases}$$

نتیجه خواهد شد :

$$۴a=۵b \Longrightarrow a=۵ \text{ و } b=۴$$

احمد ۵۴ سال ، هوشنگ ۴۵ سال و علی ۴/۵ سال دارد .

پاسخ چقدر ازشمع سوخته است :

اگر x طول شمع بلندتر و y طول شمع کوتاهتر باشد داریم :

$$x-\frac{y}{۲}=۲\times\frac{y}{۲}\Longrightarrow x=\frac{۳}{۲}y$$

مسائل برای حل

مسائل متفرقه

۴۴۴۸ـ فرستنده: **قوام نحوی** از اصفهان

اگر S_1 و S_2 و S_3 به ترتیب مجموع n جمله ، ۲n جمله و ۳n جمله از اولین جملات یك تصاعد هندسی باشند ثابت کنید که :

$$S_1^2+S_2^2=S_1(S_2+S_3)$$

۴۴۴۹ـ ترجمه از فرانسه

دستگاه زیررا حل کنید به فرض آنکه a و b دوعدد مثبت باشند .

$$\begin{cases}(ax)^{\log a}=(by)^{\log b}\\ b^{\log x}=a^{\log y}\end{cases}$$

۴۴۵۰ـ از: **غلامرضا فرزین** دانشجوی سال دوم دانشکدهٔ افسری .

عدد $\overline{abc}$ را با شرط زیر تعیین کنید.

$$\overline{abc}=abc(a+b+c)$$

۴۴۵۱ـ از مجلهٔ ریاضیات مقدماتی .

ثابت کنید که اگرمجموع مربعات سه عدد (عددصحیح حسابی) بر۷ قابل قسمت باشد حاصل ضرب آنها نیز بر۷قابل قسمت است.

۴۴۵۲ـ ترجمه از فرانسه

n عددی است صحیح و مثبت، ثابت کنید که‌عدد:

$$A=10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$$

در ازاء همهٔ مقادیر n بر ۱۱۱ و در ازاء مقادیر فرد n بر ۷ و ۱۳ قابل قسمت است و همچنین ثابت کنید که عدد:

$$B=10^{9n}+10^{6n}+1$$

در ازاء همهٔ مقادیرفرد n بر۷ و ۱۱ و ۱۳ قابل قسمت است و درسایر حالات باقیماندهٔ تقسیم آنرا بر ۷ و ۱۱ و ۱۳و۱۱۱ پیدا کنید.

۴۴۵۳ـ از مجلهٔ ریاضیات مقدماتی

تصاعدی حسابی تعیین کنید که نسبت بین مجموع n جملهٔ اول آن و مجموع ۲n جملهٔ اول آن مستقل ازn باشد.

۴۴۵۴ـ از : **محمدرضا یزدان**

اولا عبارت زیررا نسبت به x مرتب کنید :

$$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)+(x+4)(x+5)(x+6)+\dots+(x+3n-2)(x+3n-1)(x+3n)$$

ثانیاً حدود n را تعیین کنید برای آنکه معادلهٔ :

$$f(x)=0$$

فقط دارای یك ریشهٔ حقیقی باشد.

۴۴۵۵ـ معادلهٔ زیر مفروض است:

$$mx^2-mpx+p=0$$

چه رابطه‌ای بین m و p برقرار باشد تا ریشه‌های معادله‌یکی برابربا سینوس و دیگری برابربا تانژانت یك‌کمان α باشد. به فرض آنکه چنین رابطه‌ای برقرار باشدمقدار m رابرحسب α بدست آورید.

۴۴۵۶ـ از **ابوالفضل فتح‌الله‌زاده**

اگر ۲p محیط ، S مساحت و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی معلوم باشد معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن عبارت باشد از r_a و r_b و r_c شعاعهای‌دایره‌های محاطی‌خارجی مثلث.مثال‌عددی: $2p=7$ و $S=4$ و $r=0/5$

۴۴۵۷ـ از **ابوالفضل فتح‌الله زاده**

اندازهٔ زاویهٔ A از مثلثی معلوم است و می‌دانیم که:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{k}{h_a}$$

که k مقدار معلومی است. اندازه‌های زاویه‌های B و C را پیدا کنید .

۴۴۵۸ـ اگر x و y دو زاویهٔ حاده باشند ثابت کنید که :

$$\sin^3 x = \frac{1}{2}\sin y \implies \cos^3 x \geqslant \frac{1}{2}\cos y$$

۴۴۵۹ـ از **حسین خبازیان** ششم ریاضی
دبیرستان نمونه اصفهان

تابع به‌شکل :

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+e=0$$

را چنان تعیین کنید که به ازاء جمیع مقادیر پارامتر d نقاط نظیر ماکزیمم و می‌نیمم منحنی نمایش تابع بر دایرهٔ :

$$x^2+y^2=5$$

قرار داشته باشند. ثابت کنید که منحنی نمایش تابع حاصل همواره بر دونقطهٔ ثابت می‌گذرد. تابع را چنان مشخص کنید که مماسهای بر منحنی در دو نقطهٔ ثابت مزبور روی محور طولها متقاطع بوده و بر یکدیگر عمود باشند.

۴۴۶۰ـ از **محمدرضا یزدان**

ثابت کنید که در هر مثلث بین اندازه‌های اضلاع و اندازه‌های میانه‌ها نامساوی زیر برقرار است:

$$\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{ab+bc+ca} < \frac{3}{2}$$

۴۴۶۱ـ از مجلهٔ دانش‌آموز ریاضی .

در مثلثی بین اندازه‌های ارتفاع وارد بر ضلع BC و دوضلع AB و AC رابطهٔ $h_a = bc$ برقرار است . ثابت کنید که مقدارعددی مساحت این مثلث از $\frac{1}{2}$ کوچکتر است

۴۴۶۲ـ ترجمه از فرانسه .

مثلث ABC با اندازه‌های اضلاع $a>b>c$ وسه‌عدد $a+x$ و $b+x$ و $c+x$ مفروض است.

x درچه‌روابطی باید صدق کندتا سه‌عدد مزبوراندازه‌های ضلعهای مثلثی مانند $A'B'C'$ باشند که اندازهٔ زاویهٔ A' از آن 120° باشد. ثابت کنیدکه مسئله همواره دارای یك‌جواب است .

۴۴۶۳ـ از **عبدالعلی کشاورز** پنجم ریاضی
دبیرستان‌رازی شیراز

مثلث ABC درزاویهٔ A قائمه است. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABC و ABH وACH را به ترتیب I_1 و I_2 و I می‌نامیم ثابت کنید که $IA = I_1I_2$

۴۴۶۴ـ از مجلهٔ تربیت ریاضی

مثلث ABC و نقطهٔ M واقع در صفحهٔ آن مفروض است . قرینهٔ M را نسبت به ضلعهای BC و CA و AB به ترتیب A' و B' و C' می‌نامیم .

۱) ثابت کنید که عمودهای مرسوم از A و B و C بر $B'C'$ و $C'A'$ و $A'B'$ دریك نقطهٔ O متقارب هستند.

۲) اگر α و β و γ به ترتیب تصویرهای M روی ضلعهای BC و CA و AB و ω مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $\alpha\beta\gamma$ باشد ثابت کنید که ω وسط MI است.

۳) در حالتی که M برمرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC منطبق باشد نقاط ω و O چه وضعی خواهند داشت؟ در این حالت چه خاصیتی از مثلث را می‌توان نتیجه گرفت؟

۴) در حالتی که M بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع باشد مثلثهای $A'B'C'$ و $\alpha\beta\gamma$ چه وضعی را خواهند داشت؟

۴۴۶۵ـ ترجمهٔ : **محمدمهدی عابدی‌نژاد** ششم‌ریاضی
دبیرستان سخن .

در مثلث ABC مرکز دایرهٔ محیطی را با O و اوساط اضلاع BC و CA و AB را به ترتیب با A' و B' و C' نشان می‌دهیم .تصاویر A' را بر OB و OC با D و D' ، تصاویر B' را بر OA و OB با E و E' و تصاویر C' را بر OC و OA با F و F' نشان می‌دهیم . ثابت کنید :

$$\sqrt{\frac{DD'}{a}}+\sqrt{\frac{EE'}{b}}-\sqrt{\frac{FF'}{c}}=\frac{R+r}{R}$$

r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث می‌باشد .

۴۴۶۶ـ از **محمدمهدی عابدی‌نژاد**

ثابت کنید که بین اشعهٔ دوایر محاطی خارجی مثلث و p نصف محیط آن نامساوی زیر برقراراست و تساوی درچه‌حالتی می‌تواند باشد.

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2 \geqslant p^2$$

۴۴۶۷ـ ترجمه از فرانسه

سهمی (C) و نقطهٔ M واقع بر آن مفروض است. قائم در نقطهٔ M بر سهمی آنرا در نقطهٔ دیگر N قطع می‌کند و قرینهٔ MN نسبت به خطی که از M موازی خط هادی سهمی رسم شود سهمی را در نقطهٔ دیگر P قطع می‌کند. ثابت کنید که مثلث MNP قائم‌الزاویه است.

۴۴۶۸ـ ترجمه از فرانسه

بیضی (E) مفروض است، مکان هندسی نقاطی مانند M را تعیین کنید که اگر مماسهای MP و MQ را بر بیضی رسم کنیم، G مرکز ثقل مثلث MPQ روی بیضی (E) واقع باشد .

۴۴۶۹ـ ترجمه از فرانسه

دو نقطهٔ ثابت F و F′ به فاصلهٔ $EF' = 2c$ مفروض است Δ عمود منصف FF′ را رسم کرده بر آن نقطهٔ دلخواه P را انتخاب می‌کنیم و (C) دایرهٔ محیطی مثلث PFF′ را رسم می‌کنیم که Δ را در نقطهٔ دیگر P′ قطع می‌کند. دایرهٔ (P) به مرکز P و به شعاع $\frac{PF}{e}$ را در نظر می‌گیریم که e عددی است مثبت و مخالف با یك.

الف ـ نقطهٔ P را چگونه باید انتخاب کرد که دو دایرهٔ (C) و (P) در دو نقطهٔ M و M′ متقاطع باشند.

ب ـ بافرض اینکه M و M′ وجود دارند خطوط MM′ و PF یکدیگر را در H قطع می‌کنند. ثابت کنید که مثلثهای PMH و PFM متشابه هستند.

ج ـ از قسمت ب نتیجه بگیرید که:

۱) مکان H خطی است مانند Δ′ موازی با Δ.

۲) مکان M و M′ منحنی مقطع مفروطی (Γ) است که F کانون و Δ′ خط هادی نظیر آن می‌باشد.

۳) قطبی H نسبت به دایرهٔ (P) خط FP′ است.

۴) منحنی (Γ) و دایرهٔ (P) در M و M′ مماس می‌باشند.

داستانهای تفننی (بقیه ازصفحهٔ ۵۹۶)

که روی آب افتاده ازجای خود حرکت نکرده است. در این مسئله هم، اگر رودخانه‌راساکن فرض کنیم ازلحظه‌ای که قایقران دور می‌زند تا وقتی که بطری را ازآب می‌گیرد فقط ۲۰ دقیقه می‌گذرد. یعنی از زمان سقوط بطری درآب تا زمان بازگرفتن آن رویهم ۴۰ دقیقه گذشته و در این مدت، پل نسبت به رودخانه یك کیلومتر تغییر مکان داده است. بنابراین سرعت حرکت پل نسبت به رودخانه، یعنی درحقیقت سرعت جریان رودخانه نسبت به پل و خشکی برابر است با یك کیلومتر در ۴۰ دقیقه که برابر می‌شود با ۱/۵ کیلومتر درساعت.

آنکه خواسته بود مسئله را از راه جبرحل کند اظهار داشت که ازاین‌راه سرعت قایق نسبت به رودخانه بدست نمی‌آید. بازهم مسئله دو مجهول دارد.

کسی که مسئله را طرح کرده و حل آنرا بیان داشته بود پاسخ داد که این موضوع به جای خود درست است اما سرعت قایق نسبت به آب نه‌درحل مسئله مورد استعمال دارد و نه‌درصورت مسئله مورد سؤال واقع شده است. در راه حل جبری مسئله دو مجهول در نظر گرفته شده درحالی که فقط یك معادله تشکیل می‌شود. درحقیقت مجهول دوم حذف می‌شود اما چون‌معادله در بادی‌امر پیچیده بنظر می‌رسد حذف مجهول مزبور هم در ابتدا بچشم نمی‌خورد. یك معادله‌خواهیم‌داشت بایك مجهول ومسئله کامل می‌باشد.

Problems and Solutions (on page 595)

Second solution– Let the absolute differences

$$|1-x_1|,\ |2-x_2|,\dots,\ |7-x_7|$$

Where the x's represent the integers 1 to 7 in som order, all be different. Them

$$(1)\quad |1-x_1|+|2-x_2|+\dots+|7-x_7| = 0+1+\dots+6$$

and

$$(2)\quad |1-x_1|^2+|2-x_2|^2+\dots+|7-x_7|^2 = 0+1+4+\dots+36=91$$

Note that $|1-x_1|^2 = 1^2-2x_1+x_1^2$, etc

If we expand the left side of (2) and rearrange the terms, we abtain:

$$(3)\quad (1^2+2^2+\dots+7^2)-2(x_1+2x_2+\dots+7x_7)+(x_1^2+x_2^2+\dots+x_7^2)=91$$

But

$$1^2+2^2+\dots+4^2=x_1^2+x_2^2+\dots+x_7^2=140$$

Therefor

$$140-2(x_1+2x_2+\dots+7x_7)+140=91$$

This is impossible because the left member is even, and the right is odd. Therefore the absolute differences cannot all be different.

حل مسائل یکان شمارهٔ : ۴۴

کلاس چهارم طبیعی

۴۳۹۴ـ ریشهٔ مشترك دو معادلهٔ زیـر را بدست آورده سپس مقدار m را پیدا کنید .

$$\begin{cases} x^m - 4x + 2 = 0 \\ x^m - x^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

حل ـ طرفین دو معادله را نظیر به‌نظیر ازهم کم می‌کنیم هرجواب ازمعادلهٔ حاصل ریشهٔ مشترك دو معادله است :

$$-4x + 2 + x^2 + 2 = 0 \quad \text{یا} \quad x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad \text{و} \quad x = 2$$

$$2^m - 8 + 2 = 0 \quad , \quad 2^m = 6 \quad \text{و} \quad m = \frac{\log 6}{\log 2}$$

۴۳۹۵ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مجموع دو ضلع AB و AC برابر است با $b+c=14$ و فاصلهٔ M وسط وتر BC از K نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی با وتر برابر است با $MK=1$ ، مطلوبست محاسبهٔ طولهای: وتر، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و تعیین نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ α نصف زاویهٔ B

توجه ـ این مسئله توسط آقـای **حسین خبازیان** دانش‌آموز دبیرستان نمونه اصفهان طرح و حل شده است اما ضمن چاپ صورت مسئله (دریکان شمارهٔ ۴۴) نام ایشان ازقلم افتاده است که به این وسیله یادآوری می‌شود .

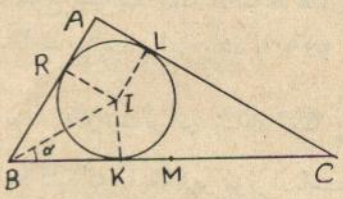
حل ـ فرض می‌کنیم $b>c$ باشد در این‌صورت داریم:

$$MK = MB - BK = \frac{a}{2} - (p-b) =$$

$$\frac{a}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-c}{2} = 1$$

$$\begin{cases} b - c = 2 \\ b + c = 14 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} b = 8 \\ c = 6 \end{matrix}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{100} = 10$$



چهارضلعی ARIL مربع است بنابراین :

$$r = AR = p - a = 2$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ BIK :

$$tg\alpha = \frac{IK}{BK} = \frac{r}{p-b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

کلاس چهارم ریاضی

۴۳۹۶ـ دستگاه سـه معادلهٔ سه مجهولی زیر را حـل کنید :

$$\begin{cases} a^2b^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = a^2c^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) \\ \qquad\qquad = b^2c^2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = a^2 + b^2 + c^2 \end{cases}$$

حل ـ طرفین رابطهٔ اول (تساوی مضاعف) را جمله به جمله در $\frac{xyz}{a^2b^2c^2}$ ضرب می‌کنیم و با توجه به خواص تناسب خواهیم داشت :

$$\frac{a^2}{xy+xz} = \frac{b^2}{yz+yx} = \frac{c^2}{zx+zy}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2(xy+yz+zx)} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} xy+xz=2a^2 \\ yz+xz=2b^2 \\ zx+zy=2c^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} xy=a^2+b^2-c^2 \\ yz=b^2+c^2-a^2 \\ zx=c^2+a^2-b^2 \end{cases}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{b^2+c^2-a^2}}$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{(b^2+a^2-c^2)(b^2-a^2+c^2)}{a^2+c^2-b^2}}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{(c^2+b^2-a^2)(c^2-b^2+a^2)}{a^2+b^2-c^2}}$$

۴۳۹۷ـ اگر S_1 و S_2 و S_3 و . . . S_p به ترتیب حد مجموع بینهایت جمله ازتصاعد های هندسی باشند که جملهٔ اول آنها به ترتیب برابر باشد با ۱ و۲ و۳ و... و p و قدرنسبت آنها به ترتیب برابر باشد با $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و... و $\frac{1}{p+1}$ ثابت کنید که رابطهٔ زیر برقرار است :

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_p=\frac{p(p+3)}{2}$$

حل ـ به ترتیب داریم :

$$S_1=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \text{ و } S_2=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$$

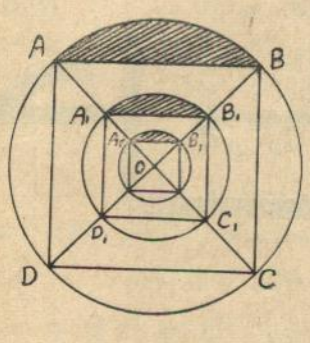
$$\text{و . . . } S_p=\frac{p}{1-\frac{1}{p+1}}=p+1$$

$$S_1+S_2+\cdots+S_p=2+3+4+\cdots+p+1$$

$$=\frac{p}{2}(p+3)$$

۴۳۹۸ـ مربع $ABCD$ به طول ضلع a و به مرکز O مفروض است . مربعهای $A_1B_1C_1D_1$ و $A_2B_2C_2D_2$ و ... را چنان رسم می‌کنیم که همه با مربع مفروض هم مرکز بوده A_1 وسط OA، A_2 وسط OA_1 و A_3 وسط OA_2.... باشد ودایره های محیطی همهٔ این‌مربعها را نیز رسم می‌کنیم. مطلوبست محاسبهٔ حد مجموع مساحتهای محصور بین ضلعها وکمانهای AB و A_1B_1 و A_2B_2 و...

حل ـ قطعه دایره‌های مورد نظر دو به دو باهم متشابه هستند و نسبت تشابه آنها متوالیاً برابر با $\frac{1}{2}$ است. پس‌نسبت مساحتهای آنها متوالیاً برابر با $\frac{1}{4}$ می‌باشد .



اگر مساحت سطح محصور بین‌وتر وکمان AB را با S_1 و حد مجموع مساحتهای مورد نظررا با S نشان دهیم داریم :

$$S=S_1(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots)$$

$$S=S_1\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}S_1$$

$$S_1=\frac{1}{4}(\pi\overline{OA}^2)-\frac{1}{4}\overline{AB}^2=\frac{a^2}{8}(\pi-2)$$

$$S=\frac{a^2}{6}(\pi-2)$$

۴۳۹۹ـ در مثلث ABC که زاویهٔ A از مجموع دو زاویهٔ B و C بزرگتر است نقطه‌های D و F را برضلع BC چنان انتخاب می‌کنیم که زاویهٔ BAF با زاویهٔ C و زاویهٔ CAD با زاویهٔ B برابر باشد و عمود های DM و FN و AH را به ترتیب بر AC و AB و BC رسم می‌کنیم . روابط زیررا ثابت کنید ومعلوم کنید درچه صورت امتداد MD NF یکدیگر را روی AH قطع می‌کنند .

$$\frac{CH}{BH}=\frac{CM}{AM}=\frac{AN}{BN} \quad (1)$$

$$AM^2+AB^2+CH^2+DM^2=$$
$$AN^2+AC^2+BH^2+NF^2 \quad (2)$$

$$\frac{AM\cdot CM-DM^2}{CD\cdot AD}=\frac{BN\cdot AN-NF^2}{BF\cdot AF}$$
$$=\cos(B+C) \quad (3)$$

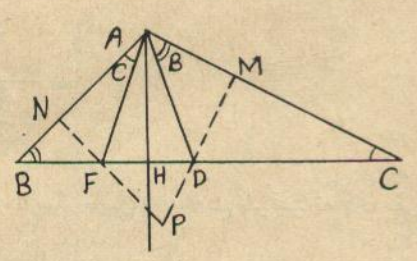
حل ـ هریك از زاویه‌های AFB و ADC بازاویهٔ $180^\circ-(B+C)=A$ برابر بوده مثلث ADF متساوی‌الساقین می‌باشد.

سه‌مثلث ABC و ABF و ACD دوبه دو بایکدیگر متشابهند بنابراین اجزاء متناظرآنها با یکدیگر متناسب بوده صحت رابطه (۱) محقق می‌باشد .

بنا به قضیهٔ فیثاغورس رابطه‌های زیررا داریم :

$$AN^2+NF^2=AF^2=AD^2=AM^2+MD^2$$

$$AB^2-BH^2=AH^2=AC^2-CH^2$$



ازروی این روابط رابطهٔ (۲) بدست می‌آید .

از تشابه دو مثلث ADM و BNF همچنین دو مثلث ANF و CDM داریم :

$$\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BF} \text{ و } \frac{CM}{CD}=\frac{AN}{AF} \quad (1)$$

$$\frac{MD}{CD}=\frac{NF}{AF} \text{ و } \frac{MD}{AD}=\frac{NF}{BF} \quad (2)$$

طرفین تناسبهای (۱) را درهم و طرفین تناسبهای (۲) را نیز در هم ضرب کرده حاصل را ازهم کم می‌کنیم تساوی اول رابطهٔ (۳) بدست می‌آید. ازطرف دیگر داریم :

$$\frac{BN\cdot AN-NF^2}{BF\cdot AF}=\frac{BN\cdot AN-BF^2+BN^2}{BF\cdot AF}$$

$$=\frac{BN\cdot AB-BF^2}{BF\cdot AF}=\frac{BF\cdot BH-BF^2}{BF\cdot AF}$$

$$=\frac{BH-BF}{AF}=\frac{FH}{AF}=\cos AFH=\cos(B+C)$$

P نقطهٔ تلاقی MD و NF وقتی AH (عمود منصف DF) واقع می‌شود که مثلث PDF متساوی‌الساقین باشد یعنی دو زاویهٔ MDC و NFB با یکدیگر برابر باشند که نتیجه می‌شود :

$$90^\circ-C=90^\circ-B \Longrightarrow B=C$$

کلاس پنجم طبیعی

۴۴۰۰ـ فرمول کلی توابع درجهٔ دومی را بنویسید که منحنی نمایش تغییرات آنها از دو نقطهٔ A(۳ و ۱−) و B(۱ و ۱−) بگذرند. از بین این توابع آنرا معلوم کنید که اگر P نقطهٔ تلاقی منحنی نمایش آن با نیم محور Ox باشد زاویهٔ BPA قائمه باشد . معلوم کنید در حالت اخیر خطی که از مبدأ مختصات گذشته و بر منحنی مزبورمماس باشد با BC موازی است .

حل ـ داریم :

$$y=ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases}3=a-b+c\\-1=a+b+c\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}c=1-a\\b=-2\end{cases}$$

$$y=ax^2-2x+1-a$$

فرض می‌کنیم P(α و ۰) وقتی زاویهٔ BPA قائمه باشد داریم :

$$\frac{3}{-1-\alpha}\times\frac{-1}{1-\alpha}=-1 \Longrightarrow \alpha=2$$

$$0=3a-4+1-a \Longrightarrow a=1$$

$$y=x^2-2x$$

منحنی از مبدأ می‌گذرد و ضریب زاویهٔ مماس برآن در مبدأ برابر است با :

$$y'=2x-2 \text{ ، } m=-2$$

که برابر می‌شود با ضریب زاویهٔ خط BC .

۴۴۰۱ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\text{Arc}\cos 2x=\text{Arc}\sin x$$

$$\text{Arc}\cos 2x=\alpha \text{ ، } \cos\alpha=2x$$

$$\text{Arc}\sin x=\beta \text{ ، } \sin\beta=x$$

$$\alpha=\beta \text{ ، } \cos\alpha=\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}$$

$$2x=\sqrt{1-x^2} \Longrightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

تبصره ـ درحل معادلهٔ اصم اخیر باید توجه داشته باشیم که x نمی‌تواند منفی باشد .

کلاس پنجم ریاضی

۴۴۰۲ـ تابع $y=\frac{a}{x}$ مفروض است . مماس در هر نقطه برمنحنی محور طولهارا در A ومحور عرضها را در B قطع می‌کند. اگر O مبدأ مختصات باشد ثابت کنید که مساحت مثلث OAB مقداری است ثابت و بستگی به نقطهٔ تماس ندارد

و این مقدار ثابت را تعیین کنید . به ازاء چه مقادیر از a مساحت مثلث مزبور برابر با یك واحد سطح می‌باشد ؟

حل- اگر $x=\alpha$ طول نقطهٔ تماس فرض شود معادلهٔ مماس عبارت می‌شود از :

$$y-\frac{a}{\alpha}=-\frac{a}{\alpha^2}(x-\alpha)$$

و خواهیم داشت :

$$A(x=2\alpha \text{ و } y=0) \text{ و } B(x=0 \text{ و } y=\frac{2a}{\alpha})$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\left|2\alpha\times\frac{a^2}{\alpha}\right|=|2a|$$

$$|2a|=1 \implies a=\pm\frac{1}{2}$$

۴۴۰۳- معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\cos 2(n+1)x+\sin(n+3)x-\sin(n-1)x+1=0$$

حل- معادله به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$2\cos^2(n+1)x+2\sin 2x\cos(n+1)x=0$$

$$\cos(n+1)x[\cos(n+1)x+\sin 2x]=0$$

$$\cos(n+1)x=0 \implies x=\frac{2k\pi+\pi}{2(n+1)}$$

$$\cos(n+1)x=-\sin 2x=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$$

$$x=\frac{4k\pi-\pi}{2(n+3)} \text{ یا } x=\frac{4k\pi+\pi}{2(n-1)}$$

۴۴۰۴- نوع مثلثی را تعیین کنید که بین زاویه‌های آن رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}=\frac{2\sin A}{\sin B+\sin C-\sin A}$$

حل- داریم :

$$\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\frac{2\sin A}{\sin B+\sin C-\sin A}=\frac{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

از مقایسهٔ حاصل دوعبارت طرفین تساوی مفروض نتیجه می‌شود :

$$\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2} \implies A=\frac{\pi}{2}$$

۴۴۰۵- سه نقطهٔ A و B و C واقع در یك صفحهٔ P و غیرواقع بریك خط مستقیم مفروض است .

۱- ثابت کنید که اگر یك قطعه خط MM' ازهریك از سه نقطهٔ A وB وC تحت زاویهٔ قائمه رؤیت شود ازهرنقطهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC به زاویهٔ قائمه دیده خواهد شد .

۲- نظیر هرنقطهٔ فضائی M نقطه‌ای مانند M' وجود داردکه قطعه خط MM' ازهریك ازنقطه های A و B و C به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود . ثابت کنید جز در یك حالت استثنائی نقطهٔ M' منحصر به فرد است .

۳- مکان نقطهٔ M' را در دو حالت زیر تعیین کنید:

الف - M خطی عمود برصفحهٔ P را بپیماید .

ب - M خطی متقاطع با دایرهٔ ABC را بپیماید اما این خط در صفحهٔ P واقع نبوده ونیز برآن عمود نمی‌باشد.

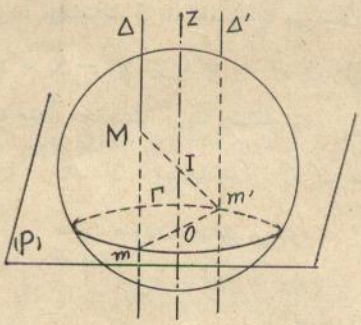
حل- ۱-کرهٔ به قطر MM' برهریك از سه نقطهٔ A و B و C می‌گذرد ، در نتیجه دایرهٔ Γ دایرهٔ محیطی مثلث ABC رادربرداشته و MM' از هرنقطهٔ این دایره به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود .

۲- اگر M برصفحهٔ P واقع نباشد فقط یك‌کره وجود داردکه دایرهٔ Γ را شامل بوده بر M می گذرد . مرکز این کره نقطهٔ تلاقی محور دایرهٔ Γ با صفحهٔ عمود منصف AM می‌باشد. دراین صورت قطر MM' ازکرهٔ مزبور از هر نقطهٔ دایرهٔ Γ به زاویهٔ قائمه دیده خواهد شد . چون‌کرهٔ مزبور و همچنین قطرنظیر نقطهٔ M منحصر به فرد است نقطهٔ M' نیز منحصر به فرد می‌باشد .

اگر M بر دایرهٔ Γ واقع باشد دراین صورت بینهایت نقطهٔ M' با شرط مطلوب وجود خواهد داشت. مکان این نقاط

M' خطی است عمود برصفحهٔ P که پای آن قرینهٔ M نسبت به O مرکز دایرهٔ ABC می‌باشد .

۳ـ الف ـ اگـر مکان M خط Δ عمود برصفحهٔ P و m نقطهٔ تلاقی Δ با صفحهٔ P بر دایرهٔ Γ واقع باشـد و m' قرینهٔ m نسبت به O و Δ' خطی باشد که در m' عمود برصفحهٔ P اخراج شود وقتی M خط Δ را بپیماید نقطهٔ M' نظیر آن بر m' واقع خواهد بود اما اگر M بر m منطبق باشد M' نظیر آن برخط Δ' واقع است . بنابراین مکان M' خط Δ' می‌باشد .

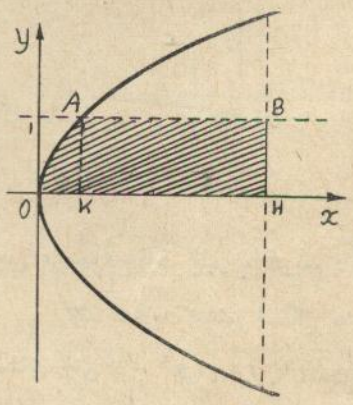


اگر m بر Γ واقع نباشد m' هم بر Γ واقع نبوده اما درهرحال m و m' نسبت به O قرینه بوده باز هم مکان M' خط Δ' است که قرینهٔ Δ نسبت به Oz می‌باشد .

ب ـ وقتی M بر خطی مانند D واقع باشد که دایرهٔ Γ را در N قطع می‌کند M' قرینهٔ M نسبت به یك نقطهٔ I از Oz بوده m و m' تصویرهای قائم M و M' برصفحهٔ P نسبت به O قرینه می‌باشند . اگر d تصویر D بر صفحهٔ P و d' قرینهٔ d نسبت به O باشد m' بـر d' واقع بوده مکان M' خطی است مانند D' که از N' قرینهٔ n نسبت به O گذشته و d' تصویر آن بر صفحهٔ P می‌باشد که n نقطهٔ تلاقی دیگر d با Γ است .

کلاس ششم طبیعی

۴۴۰۶ـ سطحی راکه بین سهمی $y^2=2x$ ومحور xها وخطوط $x=3$ و $y=1$ محصور است حول محور Ox دوران می‌دهیم . مقدار حجم حـادث را حسـاب کنید .



حل ـ مطابق شکل V حجم مطلـوب عبارتست از مجموع دو حجم ، یکی V_1 حجم حادث ازدوران سطح OAK ودیگری V_2 حجم حادث ازدوران مستطیل $ABHK$ که $A(\frac{1}{2}$ و $1)$ و $B(3$ و $1)$ می‌باشد .

$$g(x)=y^2=2x$$

$$G(x)=x^2+c$$

$$V_1=\pi\left[x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$$V_2=\pi AK^2\cdot KH=\frac{5\pi}{2}$$

$$V=V_1+V_2=\frac{11\pi}{4}$$

۴۴۰۷ـ معادلهٔ زیررا در حالت :

$$a^2+b^2=c^2+d^2$$

حل کنید :

$$a\cos mx+b\sin mx+c\cos nx+d\sin nx=0$$

حل ـ با فرض :

$$\frac{d}{c}=tg\theta \quad و \quad \frac{b}{a}=tg\varphi$$

معادله به صورت زیردرمی‌آید:

$$\frac{a}{\cos\varphi}[\cos(mx-\varphi)]+\frac{c}{\cos\theta}[\cos(nx-\theta)]=0$$

$$\cos\varphi=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad و \quad \cos\theta=\frac{\pm c}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$a^2+b^2=c^2+d^2 \Longrightarrow \frac{a}{\cos\varphi}=\frac{\pm c}{\cos\theta}$$

$$\cos(mx-\varphi)=\pm\cos[\pi-(nx-\theta)]$$

$$x=\frac{k\pi+\pi+\varphi+\theta}{m+n}$$

$$x=\frac{k\pi+\pi+\varphi-\theta}{m-n}$$

کلاس ششم ریاضی

۴۴۰۸ـ تابع زیر مفروض است :

$$(I) \quad y=\frac{(x-a)(ax+1)}{1+x^2}$$

۱ـ به ازاء دو مقدار قرینهٔ a_1 و $-a_1$ از a وضع دومنحنی نظیررا نسبت به هم معلوم کنید .

۲ـ ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر a (غیر از ۱±) تابع (I) دارای یك ماکزیمم و یك می‌نیمم است عکس‌هم مقادیر ماکزیمم ومی‌نیمم وهمچنین مقادیر x نظیر آنها نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۳ـ به فرض $a \geqslant 0$ جدول تغییرات تابع را به ازاء مقادیر $a > 1$ و $a < 1$ و $a = 1$ ومنحنی نمایش تغییرات تابع را به ازاء ۲ و ۱ و $\frac{1}{2}$ و $a = 0$ رسم کنید.

۴ـ اگر α و φ دوزاویه باشند بقسمی که داشته باشیم:

$$tg\varphi = x \quad و \quad tg\alpha = a$$

ثابت کنید تابع (I) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$y = A \sin 2(\varphi - \alpha)$$

که A تابعی‌است از α:

۵ـ اگر φ_1 مقدار غیرمشخصی از φ و x_1 مقدار نظیر x و M_1 نقطهٔ نظیر منحنی تابع y باشد و نقاط M_2 و M_3 نقاط متناظر منحنی تابع (I) برای مقادیر:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{3} \quad و \quad \varphi_3 = \varphi_1 - \frac{\pi}{3}$$

باشند ثابت کنیدکه عرض نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث $M_1M_2M_3$ مستقل از φ_1 است وطول نقطهٔ G را برحسب φ_1 حساب کنید وتغییرات این طول را وقتی φ_1 ازصفر تا π تغییر کند بدست آورید.

۶ـ مشتق دوم تابع (I) راگرفته وفرض می‌کنیم:

$$\frac{4a}{1-a^2} = m$$

با توجه به روابط $tg\alpha = a$ و $tg\varphi = x$ ثابت کنید جوابهای معادلهٔ $y'' = 0$ همان جوابهای معادلهٔ:

$$tg3\varphi = tg2\alpha$$

خواهد بود و از روی آن نتیجه بگیریدکه منحنی تابع (I) دارای سه نقطهٔ عطف می‌باشد.

حل ـ اگر دو مقدار a_1 و $-a_1$ را به α نسبت دهیم می‌شود:

$$y_1 = \frac{(x-a_1)(a_1x+1)}{1+x^2}$$

$$y_2 = \frac{(x+a_1)(-a_1x+1)}{1+x^2} = -\frac{(-x-a_1)(-a_1x+1)}{1+x^2}$$

اگر به ازاء $x = \alpha$ داشته باشیم $y = \beta$ پس به ازاء:

$$x = -\alpha$$

$$y = -\beta$$ داریم:

و نتیجه می‌شودکه دو منحنی دوتابع نظیر y_1 و y_2 نسبت به مبدأ مختصات قرینه هستند یا می‌توان گفت‌که چون با تبدیل x به $-x$، y نیزبه $-y$ تبدیل می‌شود پس دو منحنی نسبت به مبدأ مختصات قرینه هستند.

۲ـ از تابع مشتق می‌گیریم پس از اختصار می‌شود:

مبین صورت مشتق می‌شود:

$$y' = \frac{(a^2-1)x^2+4ax-(a^2-1)}{(1+x^2)^2}$$

$$\Delta = 4a^2+(a^2-1)^2 = (a^2+1)^2$$

$$\left| x' = \frac{1+a}{1-a} \quad و \quad x'' = \frac{a-1}{1+a} \right|$$

چون مبین همیشه مثبت است تابع دارای ماکزیمم و می‌نیمم می‌باشد.

غیراز $a = \pm 1$ که در ازاء آن‌عبارت صورت‌مشتق‌ازدرجهٔ‌اول خواهد شد:

حاصل ضرب ریشه‌های مشتق می‌شود:

$$\frac{c}{a} = -\frac{a^2-1}{a^2-1} = -1$$

که طولهای نقاط نظیر ماکزیمم و می‌نیمم عکس هم هستند با علامت مخالف. برای یافتن‌این نقاط چون طولهای این دونقطه مقادیر گویا هستند می‌توان مستقیماً آنها را در تابع گذاشت یا اینکه عبارت تابع را نسبت به x مرتب کنیم.

$$x^2(y-a)+x(a^2-1)+a+y = 0$$

$$\Delta = -4y^2+a^4+2a^2+1 = 0$$

$$\left| y = \pm\frac{a^2+1}{2} \right|$$

که حاصل جمع ریشه های آن:

$$y'+y'' = -\frac{b}{a} = 0$$

پس عرضهای نقاط نظیر ماکزیمم ومی‌نیمم قرینه‌اند.

۳ـ علامت مشتق بستگی به ضریب درجهٔ دوم صورت مشتق یعنی a^2-1 دارد و به فرض $a \geqslant 0$ سه حالت داریم:

حالت اول ـ $a < 1$ پس $a^2-1 < 0$ وجدول تغییرات

به صورت زیر است :

x	$-\infty$		$\frac{a-1}{a+1}$		$\frac{1+a}{1-a}$		$+\infty$
y'	۰	−	۰	+	۰	−	۰
y	a ↘		$-\frac{a^2+1}{2}$	↗	$\frac{a^2+1}{2}$	↘	a

این تابع همیشه پیوسته است .

حالت دوم ـ $a>1$ و $a^2-1>0$ و جدول تغییرات می‌شود :

x	$-\infty$		$\frac{1+a}{1-a}$		$\frac{a-1}{a+1}$		$+\infty$
y'	۰	+	۰	−	۰	+	۰
y	a ↗		$\frac{a^2+1}{2}$	↘	$-\frac{a^2+1}{2}$	↗	a

حالت سوم ـ $a=1$ پس :

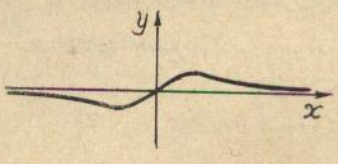
$$y=\frac{x^2-1}{1+x^2} \quad \text{و} \quad y'=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y'		−	۰	+	
y	۱ ↘		−۱	↗	۱

این تابع کسری به فرض $a\neq 0$ صورتش دارای دوجواب a و $-\frac{1}{a}$ است و به ازاء $x=0$ ، $y=-a$ می‌باشد.

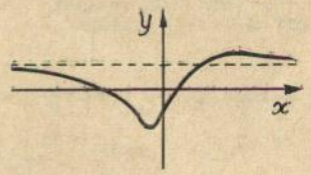
اگر $a=0$ باشد داریم :

$$y=\frac{x}{1+x^2} \quad \text{و} \quad y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

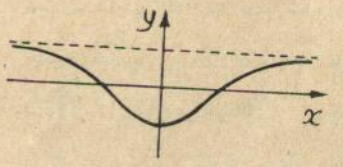


x	$-\infty$		−۱		+۱		$+\infty$
y'	۰	−	۰	+	۰	−	۰
y	۰ ↘		$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	۰

اگر $a=\frac{1}{2}$ باشد چون $a<1$ تابع به ازاء $x=-\frac{1}{3}$ دارای می‌نیمم $-\frac{5}{8}$ و به ازاء $x=3$ دارای ماکزیمم $\frac{5}{8}$ و تابع به ازاء $\frac{1}{2}$ و $x=-2$ صفر می‌شود :



$a=\frac{1}{2}$

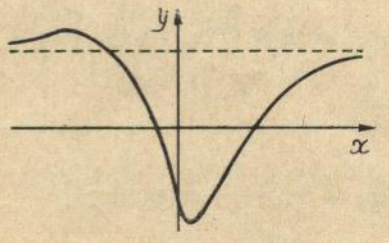


$a=1$

اگر $a=2$ باشد چون $a>1$ است تابع به ازاء :

$x=-3$

دارای ماکزیمم $\frac{5}{2}$



و به ازاء $x=\frac{1}{3}$ دارای می‌نیمم $-\frac{5}{2}$ است و تابع به ازاء $-\frac{1}{2}$ و $x=2$ صفر می‌شود :

۴ـ اگر $a=tg\alpha$ و $x=tg\varphi$ باشد داریم :

$$y=\frac{(tg\varphi-tg\alpha)(tg\varphi tg\alpha+1)}{1+tg^2\varphi}$$

$$=\cos^2\varphi\times\frac{(\sin\varphi\cos\alpha-\cos\varphi\sin\alpha)(\sin\varphi\sin\alpha+\cos\varphi\cos\alpha)}{\cos^2\varphi\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\alpha}\times 2\sin(\varphi-\alpha)\cos(\varphi-\alpha)$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\alpha}\sin 2(\varphi-\alpha)=A\sin 2(\varphi-\alpha)$$

۵ـ مقادیر عرضهای نقاط M_1 و M_2 و M_3 به صورت زیر می‌باشد :

$$y_1=\frac{1}{2\cos^2\alpha}\sin 2(\varphi_1-\alpha)$$

$$y_2 = \frac{1}{2\cos^2\alpha}\sin 2(\varphi_1 + \frac{\pi}{3} - \alpha)$$

$$y_3 = \frac{1}{2\cos^2\alpha}\sin 2(\varphi_1 - \frac{\pi}{3} - \alpha)$$

اگر ψ عرض نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث باشد داریم:

$$\psi = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{1}{6\cos^2\alpha}[\sin 2(\varphi_1 - \alpha) +$$

$$+ \sin 2(\varphi_1 + \frac{\pi}{3} - \alpha) + \sin 2(\varphi_1 - \frac{\pi}{3} - \alpha)]$$

$$= \frac{1}{6\cos^2\alpha}[\sin 2(\varphi_1 - \alpha) + 2\sin 2(\varphi_1 - \alpha)\cos\frac{2\pi}{3}]$$

عبارت داخل کروشه صفر شده و $\psi = 0$ است و نقطهٔ G به‌ازاء جمیع مقادیر φ_1 روی محور طولهاست و طولهای نقاط M_1 و M_2 و M_3 می‌شوند:

$$x_1 = tg\varphi_1 \text{ و } x_2 = tg(\varphi_1 + \frac{\pi}{3}) \text{ و } x_3 = tg(\varphi_1 - \frac{\pi}{3})$$

اگر X طول نقطهٔ G باشد داریم:

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} =$$

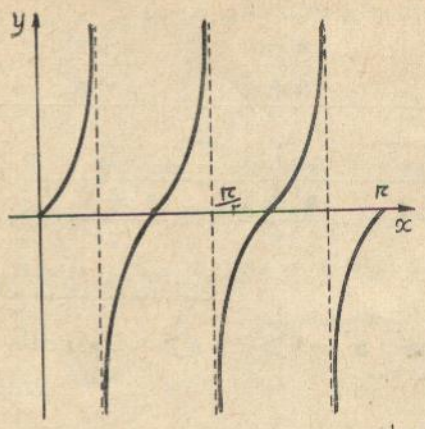
$$\frac{1}{3}[tg\varphi_1 + tg(\varphi_1 + \frac{\pi}{3}) + + tg(\varphi_1 - \frac{\pi}{3})]$$

که تابعی است از φ_1 ودورهٔ تناوب آن ازصفر است تا π ، اگر φ_1 از صفر تا π تغییر کند تابع X معین است مگر بـه ازاء $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و مشتق $tg\varphi_1$ می‌شود $\frac{1}{\cos^2\varphi_1}$ و به همین ترتیب مشتق x_2 می‌شود $\frac{1}{\cos^2(\varphi_1 + \frac{\pi}{3})}$ وسومی :

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi_1 - \frac{\pi}{3})}$$

که همیشه مثبت وتابع همیشه‌صعودی است. جدول تغییرات تابع X به صورت زیر است :

φ_1	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
X'		+		+		+		+	
X	0	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$	↗	$-\infty$	↗	$+\infty$



۶- داریم :

$$y' = \frac{(a^2-1)x^2 + 4ax - (a^2-1)}{(1+x^2)^2}$$

به فرض $\frac{4a}{1-a^2} = m$ داریم :

$$y' = (a^2-1)\frac{x^2 - mx - 1}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' = (a^2-1) \times \frac{-2x^3 + 3mx^2 + 6x - m}{(x^2+1)^3}$$

مقادیر جوابهای $y'' = 0$ ریشه‌های معادله زیر می‌باشد:

$$-2x^3 + 3mx^2 + 6x - m = 0$$

که به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$x \times \frac{3 - x^2}{1 - 3x^2} = \frac{m}{2}$$

و

$$tg3\varphi = tg\varphi \times \frac{3 - tg^2\varphi}{1 - 3tg^2\varphi}$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2a}{1 - a^2} = \frac{m}{2}$$

و بنابراین مقادیری از φ که برای آنها $y'' = 0$ بـاشد در رابطهٔ $tg3\varphi = tg2\alpha$ صدق می‌کنند و برای آنکه نقطهٔ M بطور کامل منحنی را طی‌کند باید φ از صفر تا π تغییر کند. زیرا در رابطهٔ : $tg\varphi = x$ جمیع مقادیر خودرا خواهـد داشت و مقادیری از x که دررابطهٔ $y'' = 0$ صدق کند باید:

$$tg3\varphi = tg2\alpha$$

باشد و جوابهای معادلهٔ $tg3\varphi = tg2\alpha$ می‌شود :

$$\varphi = \frac{2\alpha}{3} + K\frac{\pi}{3}$$

که در فاصلهٔ 0 و π دارای سه جواب است و معادلهٔ $y'' = 0$ نیز دارای سه‌جواب بوده و منحنی تابع دارای سه‌نقطهٔ عـطف می‌باشد .

۴۴۰۹ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\cos(x-\alpha)-\sin 4\alpha=\frac{1}{4}\sin 2(x+\alpha)$$

حل ـ معادله را به صورت زیر نوشته عمل می کنیم:

$$\cos[(x+\alpha)-2\alpha]-\frac{1}{2}\sin(x+\alpha)\cos(x+\alpha)$$
$$=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$$

بعداز بسط اولین جمله و اختصار خواهیم داشت:

$$[\cos(x+\alpha)-2\sin 2\alpha][2\cos 2\alpha-\sin(x+\alpha)]=0$$

یا داریم :

$$\cos(x+\alpha)=2\sin 2\alpha$$

که به شرط $\sin^2 2\alpha\leqslant\frac{1}{4}$ و با فرض $\cos\beta=2\sin 2\alpha$ خواهیم داشت :

$$x=2k\pi\pm\beta-\alpha$$

و یا داریم :

$$\sin(x+\alpha)=2\cos 2\alpha$$

که به‌شرط $\cos^2 2\alpha\leqslant\frac{1}{4}$ و با فرض $\sin\gamma=2\cos 2\alpha$ خواهیم داشت :

$$x=2k\pi+\gamma-\alpha \quad \text{یا} \quad x=2k\pi+\pi-\gamma-\alpha$$

۴۴۱۰ـ کسر غیرممکن‌التحویل $\frac{a}{b}$ به چه‌صورت باشد تا $\frac{a+b}{b-a}$ با یك عدد صحیح و $\frac{a}{a+b}$ با یك کسر اعشاری تحقیقی برابر باشد. ثابت کنید که در این‌صورت کسر $\frac{a}{b}$ مولد کسر اعشاری متناوب ساده است. درصورتی که $\frac{a}{a+b}$ مولد کسر اعشاری با سه رقم اعشار باشد کسر $\frac{a}{b}$ را مشخص کنید.

حل ـ اگر a و b نسبت به هم اول باشند $a+b$ و $b-a$ نیز نسبت به‌هم اول می‌باشند. بنابراین کسر :

$$\frac{a+b}{b-a}$$

وقتی با یك‌عدد صحیح برابر است که داشته باشیم:

$$b-a=1 \quad \text{یا} \quad b=a+1$$

دراین‌صورت کسر $\frac{a}{a+b}$ به‌صورت $\frac{a}{2a+1}$ درمی‌آید مخرج این کسر عددی‌است‌فرد، پس وقتی این کسر مولد کسر اعشاری تحقیقی است که داشته باشیم:

$$2a+1=5^k \implies a=\frac{5^k-1}{2}$$

و

$$b=\frac{5^k+1}{2}$$

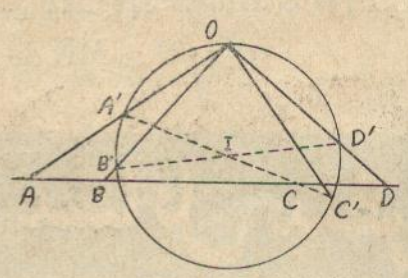
$$\frac{a}{b}=\frac{5^k-1}{5^k+1}$$

عدد 5^k+1 از سمت راست به ۲۶ ختم می‌شود پس نصف آن یعنی b از سمت راست به ۳ ختم می‌شود یعنی b نه‌توانی از ۲ ونه‌توانی از ۵ بوده کسر $\frac{a}{b}$ مولدکسر اعشاری متناوب ساده است .

وقتی کسر $\frac{a}{a+b}$ یعنی $\frac{a}{2a+1}$ مولد کسر اعشاری تحقیقی با سه رقم اعشار باشد داریم :

$$2a+1=5^3 \implies a=62 \text{ و } b=63$$

۴۴۱۱ـ چهار نقطهٔ A ، B ، C و D به‌همین‌ترتیب بریك خط مستقیم واقع‌اند. انعکاسی را تعیین کنید که A' ، B' ، C' و D' مبدلهای نقاط مزبور در آن چهار رأس یك مستطیل باشند. به چه شرطی این مستطیل مربع می‌باشد؟



حل ـ O قطب انعکاس بر خط Δ (خطی‌که بر چهار-نقطهٔ مفروض‌می گذرد)واقع نیست. در انعکاس به‌قطب O منعکس Δ دایره‌ای است که بر O می گذرد. چهارضلعی $A'B'C'D'$ که دردایرهٔ مزبور محاط است وقتی مستطیل است که $B'D'$ و $A'C'$ قطرهایی از دایره باشند یعنی داشته باشیم:

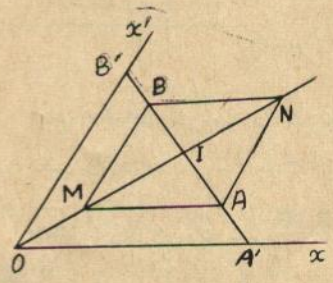
$$\angle A'OC'=\angle B'OD'=90^\circ$$
$$\implies \angle AOC=\angle BOD=90^\circ$$

بنابراین نقطهٔ O عبارتست از نقطهٔ تلاقی دودایره یکی به‌قطر AC و دیگری به قطر BD.

برای‌اینکه مستطیل مزبور مربع باشد لازم‌است که $A'C'$ و $B'D'$ بر یکدیگر عمود باشند که دراین حال نتیجه خواهد شد که دودایرهٔ به قطرهای AC و BD بریکدیگر عمودبوده

چهار نقطهٔ مفروض تقسیم توافقی می‌سازند.

۴۴۱۲ـ دو نقطهٔ A و B بر شاخهٔ هذلولی (H) با مجانبهای Ox و Ox' مفروض است. متوازی الاضلاع AMBN را چنان رسم می‌کنیم که ضلعهایش با مجانبهای هذلولی متوازی باشند. ثابت کنید که قطر MN از O می‌گذرد.



موارد استعمال ـ با معلوم بودن سه نقطه و امتداد مجانبهای یک هذلولی مرکز آنرا از راه ترسیم بیابید.

حل ـ اگر I مرکز متوازی‌الاضلاع و A' و B' نقاط تلاقی AB با Ox و Ox' باشد نقطهٔ I که وسط AB واقع است وسط $A'B'$ نیز واقع بوده و داریم:

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}=\frac{\overline{IB}}{\overline{IB'}}$$

AM و BM مجانبهای Ox و Ox' در تجانس به مرکز I و به نسبت $\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}$ بوده نتیجه می‌شود که IM بر O می‌گذرد. به‌همین ترتیب ثابت خواهد شد که IN نیز بر O می‌گذرد. بنابراین MN بر O می‌گذرد.

مسائل متفرقه

۴۴۱۳ـ ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases}\sin mx+\sin nx=a\\ \cos mx+\cos nx=b\\ \sin 2mx+\sin 2nx=c\end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$(a^2+b^2)(2ab-c)=4ab$$

حل ـ از تقسیم طرفین دو رابطهٔ اول و دوم بر یکدیگر و بعد از اختصار خواهیم داشت.

$$tg\,\frac{m+n}{2}x=\frac{a}{b}\qquad(1)$$

همچنین از ضرب دو رابطهٔ مزبور در یکدیگر و بعد از عملیات لازم خواهیم داشت:

$$(\sin 2mx+\sin 2nx)+2\sin(m+n)x=2ab$$

$$c+\frac{4tg\frac{m+n}{2}x}{1+tg^2\frac{m+n}{2}x}=2ab$$

از رابطهٔ اخیر با استفاده از رابطهٔ (۱) رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید.

۴۴۱۴ـ معادلهٔ $x^3-6x+4=0$ و عبارت:

$$f(x)=x^4-6x^2+5x-1$$

مفروض است. اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله باشند بدون حل معادله، معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش $f(x_1)$ و $f(x_2)$ و $f(x_3)$ باشد.

حل ـ اگر مقدار عبارت $f(x)$ در ازاء x از معادلهٔ مفروض برابر با X باشد دو معادلهٔ زیر ریشهٔ مشترک خواهند داشت:

$$\begin{cases}x^3-6x+4=0\\ x^4-6x^2+5x-1=X\end{cases}$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$x^4-6x^2+5x-1-X$$
$$=(x^3-6x+4)x+x-1-X$$
$$x-1-X=0\implies x=X+1$$
$$(X+1)^3-6(X+1)+4=0$$
$$X^3+3X^2-3X-1=0$$

۴۴۱۵ـ هرگاه عددهای α، β، γ و δ چنان باشند که:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}=0$$

باشد تساوی زیر را ثابت کنید:

$$64\alpha\beta\gamma\delta-[4\Sigma\alpha\beta-(\Sigma\alpha)^2]^2=0$$

حل ـ اگر a و b و ... l ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ nام:

$$f(x)=0$$

باشند داریم:

$$f(x)=(x-a)(x-b)\dots(x-l)$$

معادله‌ای که ریشه‌های آن a^2 و b^2 و ... l^2 باشد عبارتست از:

$$\varphi(x)=(x-a^2)(x-b^2)\dots(x-l^2)$$
$$\varphi(x)=(\sqrt{x}-a)(-\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}-b)$$
$$(-\sqrt{x}-b)\dots(\sqrt{x}-l)(-\sqrt{x}-l)(-1)^n$$
$$\varphi(x)=(-1)^n f(\sqrt{x})f(-\sqrt{x})$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ و $\sqrt{\gamma}$ و $\sqrt{\delta}$ ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^4+bx^2+cx+d=0$$

باشند. معادله‌ای که ریشه‌هایش α و β و γ و δ باشد عبارت می‌شود از :

$$(x^2+bx+c\sqrt{x}+d)(x^2+bx-c\sqrt{x}+d)=0$$

$$x^4+2bx^3+(b^2+2d)x^2+(2bd-c^2)x+d^2=0$$

$$\alpha\beta\gamma\delta=d^2$$

$$\Sigma\alpha\beta=b^2+2d$$

$$\Sigma\alpha=-2b$$

ورابطهٔ داده شده محقق می‌شود.

۴۴۱۶ـ در معادلهٔ :

$$x^3+(a-2)x^2+x-1=0$$

اولا مقدار پارامتر a را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌ها رابطهٔ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=1$ برقرار باشد.

ثانیاً a را چنان تعیین کنید که مقدار :

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

می‌نیمم باشد.

حل ـ داریم :

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)[(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)]+3x_1x_2x_3=-(a-2)[(2-a)^2-3]+3=1$$

$$(1-a)^2(4-a)=0 \Longrightarrow a=1 \text{ یا } 4$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(2-a)^2-2$$

این عبارت وقتی می‌نیمم است که $(2-a)^2$ می‌نیمم باشد یعنی داشته باشیم $a=2$

۴۴۱۷ـ مجموع n جملهٔ اول از یك رشته برابر است با

$$S_n=\frac{n}{3n+1}$$

جملهٔ nام و بقیهٔ جمله‌های رشته را تعیین کنید.

حل ـ داریم :

$$S_{n-1}=\frac{n-1}{3(n-1)+1}=\frac{n-1}{3n-2}$$

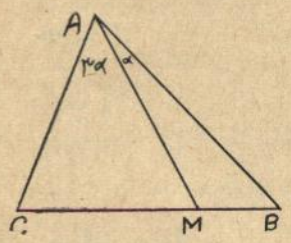
$$1=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{3n+1}-\frac{n-1}{3n-2}=\dots=\frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$$

وجمله‌های رشته به ترتیب عبارت می‌شوند از:

$$\frac{1}{1\times4} \text{ و } \frac{1}{4\times7} \text{ و } \frac{1}{7\times10} \text{ و} \dots$$

$$\frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$$

۴۴۱۸ـ در مثلث ABC از A خطی رسم می‌کنیم که ضلع BC را در M قطع کند و زاویهٔ MAC سه برابر زاویهٔ MAB باشد. به فرض $\frac{CM}{BM}=k$ زاویهٔ A را بر حسب b ، c و k بدست آورید .



مثال عددی:

$k=4$ و $c=1$ و $b=2$

حل ـ دو مثلث AMB و AMC در ارتفاع نظیر رأس A مشترك هستند پس نسبت مساحتهای آنها برابر است با:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{BM}{CM}=\frac{1}{k}$$

ازطرف دیگر داریم:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AB\cdot AM\sin\alpha}{AC\cdot AM\sin3\alpha}=\frac{c}{b}\times\frac{\sin\alpha}{\sin3\alpha}=\frac{c}{b(3-4\sin^2\alpha)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{c}{b(3-4\sin^2\alpha)}=\frac{1}{k}$$

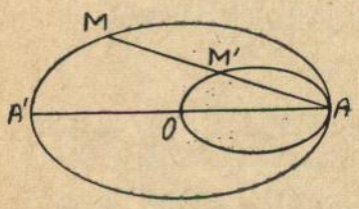
$$3-2(1-\cos2\alpha)=\frac{ck}{b}$$

$$\cos2\alpha=\cos\frac{A}{2}=\frac{ck-b}{2b}$$

$$b=2 \text{ و } c=1 \text{ و } k=4 : \cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$$

$$A=120^\circ \text{ و } a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \text{ و } a=\sqrt{7}$$

۴۴۱۹ـ مطلوبست تعیین مکان هندسی اوساط وترهایی که در بیضی مفروض از A انتهای قطر بزرگتر رسم می‌شوند .

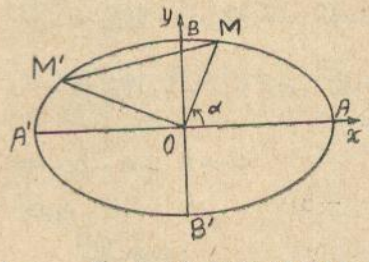


حل ـ اگر AM یکی از این وترها و M' وسط AM باشد داریم :

$$\frac{\overline{AM'}}{\overline{AM}}=\frac{1}{2}$$

نقطهٔ A ثابت است پس مکان M' مجانس مکان M درتجانس $\left(A \text{ و } \frac{1}{2}\right)$ بوده یك بیضی است به قطر AO

۴۴۲۰ـ در بیضی مفروض وتر MM' را چنان رسم کنید که طول آن می‌نیمم بوده از مرکز بیضی به‌زاویهٔ قائمه دیده شود.



حل ـ M و M' را بر بیضی چنان انتخاب می‌کنیم که زاویهٔ MOM' قائمه باشد. مرکز بیضی را مبدأ مختصات و محور طولها را منطبق بر محور کانونی بیضی انتخاب می‌کنیم معادلهٔ بیضی عبارت می‌شود از:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

فرض می‌کنیم زاویهٔ جهت‌دار OM با محور طولها برابر با α باشد در این‌صورت x و y مختصات M عبارت خواهند شد از:

$$x=OM\cos\alpha \quad \text{و} \quad y=OM\sin\alpha$$

$$OM^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)=1$$

$$\frac{1}{OM^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$$

با تبدیل α به $\frac{\pi}{2}+\alpha$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{OM'^2}=\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}$$

$$\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OM'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \qquad (1)$$

$$\frac{OM^2+OM'^2=MM'^2}{OM^2\cdot OM'^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

$$MM'^2=OM^2\cdot OM'^2\times\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \qquad (2)$$

از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که $\frac{1}{OM^2}\times\frac{1}{OM'^2}$ وقتی ماکزیمم است که $OM^2=OM'^2$ باشد اما وقتی حاصل ضرب مزبور ماکزیمم باشد حاصل ضرب:

$$OM^2\cdot OM'^2$$

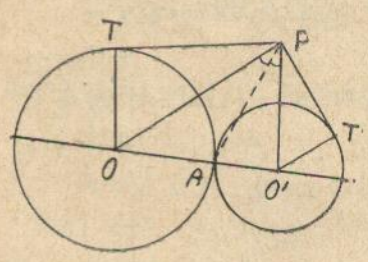
می‌نیمم خواهد بود و در این حالت بنا به رابطهٔ (۲) مقدار MM'^2 در نتیجه طول MM' می‌نیمم می‌باشد.

از تساوی $OM=OM'$ نتیجه خواهد شد که:

$$\alpha=\pm 45^\circ \quad \text{یا} \quad \pm 135^\circ$$

بنابراین برای رسم وتر مطلوب کافی است نقاط تلاقی نیمسازهای محورها را با بیضی تعیین کنیم. مسئله دارای چهار جواب است و این چهار جواب مربعی محاط در بیضی را تشکیل می‌دهند.

۴۴۲۱ ـ دو دایرهٔ مماس خارج مفروض است. مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که نسبتهای مماسهای مرسوم از آن نقاط بر دو دایره به نسبت شعاعهای دو دایره باشد.



حل ـ اگر P یکی از نقاط مکان باشد داریم:

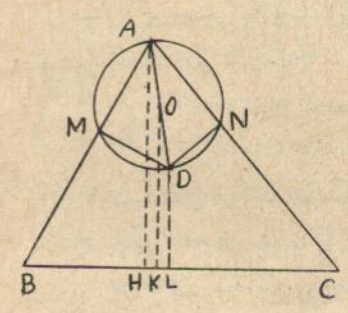
$$\frac{PT}{PT'}=\frac{OT}{O'T'}$$

دو مثلث PTO و $PT'O'$ متشابه می‌شوند و از آنجا:

$$\frac{PO}{PO'}=\frac{R}{R'}$$

و در این حالت می‌دانیم که مکان P دایره‌ای است به قطر AA' که A نقطهٔ تماس مشترک دو دایره و A' مزدوج توافقی A نسبت به O و O' می‌باشد.

۴۴۲۲ـ نقطهٔ N بر ضلع AC و نقطهٔ M بر ضلع AB از مثلث ABC واقع بوده رابطهٔ:



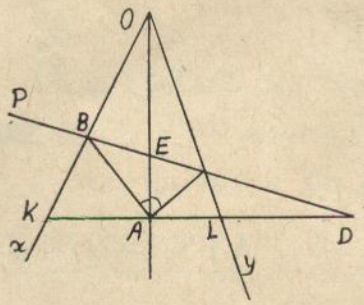
$$CN\cdot CA=BM\cdot BA$$

برقرار است. عمود مرسوم در N بر AC با عمود مرسوم در M بر AB یکدیگر را در D تلاقی می‌کنند. مکان هندسی نقطهٔ D را تعیین کنید.

حل ـ چهارضلعی $AMDN$ محاطی است و O مرکز دایرهٔ محیطی آن وسط AD می‌باشد. از رابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود که دو نقطهٔ B و C نسبت به دایرهٔ مزبور دارای یک قوت می‌باشند بنابراین $CO=BO$ بوده نقطهٔ O بر عمودمنصف ضلع BC واقع است. اگر عمودهای AH، OK و DL را بر BC رسم کنیم K وسط HL واقع است و چون K و H ثابت هستند پس L نیز ثابت بوده مکان D عمودی است که در L بر BD اخراج شود.

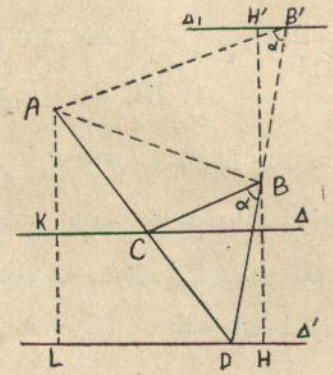
۴۴۲۳ـ زاویهٔ xOy ، نقطهٔ A واقع در داخل آن و نقطهٔ P واقع در خارج آن مفروض است. از P خطی‌چنان رسم کنید که اگر Ox را در B و Oy را در C قطع کند خط OA نیمساز زاویهٔ ABC باشد.

حل ـ اگر PBC قاطع مطلوب باشد ودوزاویهٔ OAB و OAC با هم‌برابر باشند و نیمساز زاویهٔ خارجی BAC را رسم کنیم که قاطع مزبور را در D قطع کند $(BECD)$ توافقی بوده و OD و OE مزدوج توافقی نسبت به دوشعاع Ox و Oy می‌باشند. خط DA ضلعهای Ox و Oy را در K و L قطع می‌کند و $(KALD)$ نیز توافقی است.



بنابراین برای رسم‌قاطع مطلوب از A عمودی بر OA اخراج می‌کنیم که Ox و Oy را در K و L قطع‌می‌کند. نقطهٔ D مزدوج توافقی A را نسبت به K و L تعیین‌می‌کنیم. خط PD قاطع مطلوبست.

۴۴۲۴ـ دو خط متوازی Δ و Δ' و دونقطهٔ A و B واقع در یك صفحه مفروض‌اند. از A خطی چنان رسم کنید که Δ و Δ' را در C و D قطع کرده قطعه‌خط DC از نقطهٔ B به زاویهٔ معین α دیده شود.



حل ـ فرض می‌کنیم ACD قاطع مطلوب باشد. از A موازی با BC رسم می‌کنیم تا BD را در B' قطع کند. زاویهٔ B' با زاویهٔ B برابر بوده به‌اندازهٔ α است. از B' خط Δ_1 را موازی با Δ و Δ' رسم می‌کنیم و مطابق شکل از A و از B عمودهایی بر Δ و Δ' و Δ_1 رسم می‌کنیم. تناسبهای زیررا داریم:

$$\frac{BH'}{BH}=\frac{BB'}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{AK}{KL}=k \quad (1)$$

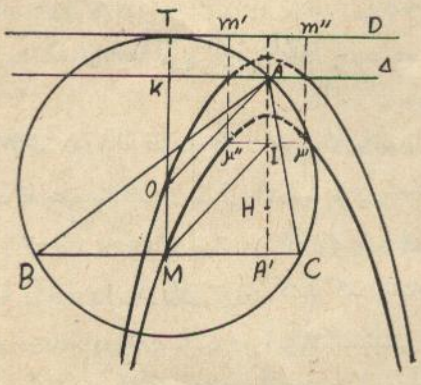
بنابراین برای رسم قاطع مطلوب چنین عمل می‌کنیم : عمود BH را بر Δ' رسم کرده روی آن نقطهٔ H' راچنان تعیین می‌کنیم که تناسب (۲) برقرارباشد (برای این کار می‌توان‌از P نقطهٔ تلاقی BK با Δ' به A وصل‌کرد تا BH را قطع کند). از H' خط Δ_1 را موازی با Δ رسم می‌کنیم . بر B و H' کمان در خور زاویهٔ α را رسم می‌کنیم. اگر این کمان Δ_1 را درنقطه‌ای‌مانند B' قطع کند، خط $B'B$ را رسم‌می‌کنیم تا Δ' را در D قطع کند. خط AD قاطع مطلوب می‌باشد .

۴۴۲۵ـ دونقطهٔ ثابت A و H مفروض است. مثلث‌متغیر ABC را در نظر می‌گیریم که A یك رأس آن و H نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای آن بوده شعاع دایرهٔ محیطی آن با ارتفاع وارد از رأس A برابر باشد.

الف ـ مکان هندسی نقطهٔ M وسط ضلع BC را تعیین کنید .

ب ـ پوش دایرهٔ محیطی مثلث مزبوررا تعیین کنید.

حل ـ فرض می‌کنیم ABC مثلثی باشد که شرایط مطلوب در آن صدق می‌کند. پای ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC را با A' ، وسط AH رابا I ، خط موازی با BC



مرسوم از A را با (Δ) و تصویر قائم M را بر (Δ) با K نشان می‌دهیم . اگر O مرکز دایرهٔ‌محیطی مثلث ABC باشد:

$$AH=2OM$$

بوده و در نتیجه $AI=OM$ و چهارضلعی $OAIM$ متوازی‌الاضلاع است و $MI=OA$ و چون :

$$OA=AA'=MK$$

پس $MI=MK$ و نقطهٔ M به سهمی تعلق دارد که I کانون آن و (Δ) خط هادی آن می‌باشد.

برعکس اگر یك نقطهٔ M ازاین سهمی‌وسط ضلع BC ازمثلثی باشدکه درشرایط گفته شده صدق‌کند و O نقطه‌ای‌باشد که MO موازی وهمجهت با IA باشد دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OA خط MO راوقتی‌قطع می‌کندکه $OA>OM$ یا $IM>IA$ بوده نقطهٔ M درخارج دایرهٔ به مرکز I وبه

شعاع IA واقع باشد . این دایره سهمی را در دو نقطهٔ μ' و μ'' قطع می‌کند و نتیجه می‌شود که M باید برقسمتی ازسهمی واقع باشد که دریك طرف خط $\mu'\mu''$ و درطرف دیگر A واقع باشد . بنابراین مکان M دو کمان از شاخه‌های سهمی است که ازیك طرف به μ' و μ'' محدود بوده و ازطرف‌دیگر نامحدود می‌باشند .

ب- از رابطهٔ $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{IA}$ نتیجه می‌شود که مکان O مبدل مکان M در انتقال به حامل $\overrightarrow{IA}$ می‌باشد . اگر (D) مبدل خط (Δ) در انتقال مزبور باشد مکان O دو کمان از سهمی به‌کانون A و به خط هادی (D) است که ازیك طرف نامحدود و از طرف دیگر به (Δ) محدود می‌باشند . چنانچه m' و m'' تصویرهای μ' و μ'' بر (D) باشند پوش دایرهٔ به مرکز O و ماربر A قسمتی از خط (D) است که خارج قطعه خط $m'm''$ قرار دارد .

مسائل فیزیك

۴۴۲۶- دومیلهٔ فلزی B و A یك سانتیمتر اختلاف طول دارند که ضریب انبساط طولی آنها به ترتیب عبارتند از :

$$\lambda_A=12\times10^{-6} \quad و \quad \lambda_B=16\times10^{-6}$$

طول اولیهٔ آنها را طوری تعیین کنید که اختلاف طول این دومیله درتمام درجات ثابت وبرابریك سانتیمتر باقی‌بماند

حل- برای اینکه اختلاف طول دو میله ثابت بماند باید تغییرات طول آنها در تمام درجات مساوی باشد یعنی :

$$\Delta l_A=\Delta l_B$$

وبنابه فرض داریم :

$$\begin{cases} l_A-l_B=1 \\ \Delta l_A=\Delta l_B \end{cases} \qquad \begin{cases} l_A-l_B=1 \\ l_A\lambda_A\Delta t=l_B\lambda_B\Delta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_A-l_B=1 \\ 12\times10^{-6}l_A=16\times10^{-6}l_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_A-l_B=1 \\ 3l_A-4l_B=0 \end{cases}$$

ازحل این دستگاه :

$$l_A=4cm \quad و \quad l_B=3cm$$

بدست می‌آید .

۴۴۲۷- دومیلهٔ آهنی به‌طولهای $AB=l_1$ و $AC=l_2$ با هم زاویهٔ قائمه تشکیل داده‌اند . ضریب انبساط میلهٔ BC وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را طوری تعیین کنید که درتمام درجات زاویهٔ A قائمه باقی بماند .

حل- چون مثلث ABC قائمه‌الزاویه است پس :

$$(1) \quad L^2=l_1^2+l_2^2$$

و نیز برای اینکه زاویهٔ $A'=90^\circ$ باشد باید داشته باشیم :

$$(2) \quad L'^2=l'^2_1+l'^2_2$$

ولی اضلاع مثلث $A'B'C'$ از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} L'=L(1+\lambda' t) \\ l'_1=l_1(1+\lambda t) \\ l'_2=l_2(1+\lambda t) \end{cases}$$

که اگر این مقادیر را در رابطهٔ (۲) قراردهیم خواهیم داشت :

$$L^2(1+\lambda' t)^2=l_1^2(1+\lambda t)^2+l_2^2(1+\lambda t)^2$$

$$L^2(1+\lambda' t)^2=(1+\lambda t)^2(l_1^2+l_2^2)$$

و با درنظر گرفتن رابطهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$L^2(1+\lambda' t)^2=(1+\lambda t)^2L^2 \Longrightarrow$$

$$1+\lambda' t=1+\lambda t \Longrightarrow \lambda=\lambda'$$

یعنی باید میلهٔ BC آهنی باشد.

۴۴۲۸- سه مقاومت چنان تعیین کنید که اگر به طور انشعابی ببندیم مقاومت معادل ده اهم و چنانچه به طور متوالی ببندیم مقاومت کل برابر ۱۱۰ اهم شود ، به‌فرض اینکه شدت جریان دریکی از انشعابهای مذکور دوبرابر شدت جریان در انشعاب دیگری است .

حل- داریم :

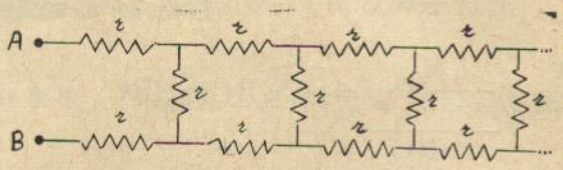
$$\begin{cases} R=R_1+R_2+R_3 \\ \dfrac{1}{R'}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3} \\ \dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{I_2}{I_1} \end{cases}$$

$$I_2=2I_1 \Longrightarrow \frac{I_2}{I_1}=2 \Longrightarrow \frac{R_1}{R_2}=2$$

$$\begin{cases} R_1 = 2R_2 \\ \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=\frac{1}{10} \\ R_1+R_2+R_3=110 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} R_1 = 60\ \Omega \\ R_2 = 30\ \Omega \\ R_3 = 20\ \Omega \end{cases}$$

۴۴۲۹ـ درشکل زیر تعدادی مقاومت r بین دو نقطهٔ A و B بسته شده است . اگر تعداد مقاومتها بینهایت فرض



شود مقاومت معادل بین دونقطهٔ A و B را بدست آورید .

حل ـ اگر فرض کنیم که مقاومت معادل بین A و B برابر با x باشد مدارفوق را ازدونقطهٔ C و D قطع می‌کنیم. در این‌صورت مقاومت معادل بین دونقطهٔ C و D نیز x خواهد بود که این مقاومت x با مقاومت MN انشعابی است ومی‌توان چنین نوشت :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{x}+\frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad R=\frac{rx}{r+x}$$

و یا

$$r+r+\frac{rx}{r+x}=x$$

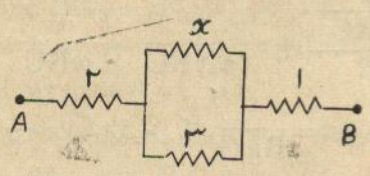
از آنجا

$$x^2-2rx-2r^2=0$$

و یا

$$x=r(1+\sqrt{3})$$

۴۴۳۰ـ درشکل زیر مقاومت x را طوری تعیین کنید که مقاومت معادل بین دونقطهٔ A و B مساوی خود مقاومت x باشد .



حل ـ ابتدا مقاومت معادل ۳ و x را حساب می‌کنیم

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\Longrightarrow R=\frac{3x}{x+3}$$

سپس مقاومت معادل بین A و B را حساب می‌کنیم .

$$R'=2+\frac{3x}{x+3}+1$$

بنا به‌فرض مسئله باید داشته باشیم :

$$2+\frac{3x}{x+3}+1=x \Longrightarrow x=\frac{3(1+\sqrt{5})}{2}$$

۴۴۳۱ـ دونفر به وزنهای P_A و P_B درقایقی به‌وزن P به فاصلهٔ l ازیکدیگر نشسته‌اند اگر این دو شخص جایشان را عوض کنند جهت ومقدار تغییر مکان قایق را حساب کنید . از اصطکاك آب صرف‌نظر می‌شود .

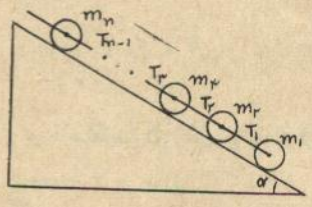
حل ـ فرض‌می‌کنیم قایق به‌قدر x به‌طرف راست‌حرکت کند . چون مرکز ثقل دستگاه روی محورافقی‌حرکت‌نمی‌کند می‌توان نوشت :

$$Px+P_A(x+l)+P_B(x-l)=0$$

$$x=\frac{P_B-P_A}{P+P_A+P_B}l$$

اگر $P_B>P_A$ باشد قایق به طرف راست و اگر $P_A>P_B$ باشد به‌طرف چپ به قدر حساب شدهٔ بالا حرکت خواهدکرد .

۴۴۳۲ـ مقدار n جسم‌به جرمهای m_1 و m_2 و ... و m_n متوالیاً روی سطح شیبداری قرارگرفته‌وبوسیلهٔ نخی به‌یکدیگر متصل شده‌اند . اگر ضریب اصطکاك بین آنها و سطح به ترتیب K_1 و K_2 و .. و K_n باشد .



اولا ـ کشش نخهای T_1 و T_2 و ... T_{n-1} را حساب کنید .

ثانیا ـ اگر

$$T_1=T_2=T_3=\dots=T_{n-1}$$

باشد شتاب را برحسب :

$$K=\frac{K_1+K_2+\dots+K_n}{n}$$

وکشش مساوی نخها را حساب کنید .

حل ـ اولا داریم :

$$(P_1+P_2+\dots+P_n)\sin\alpha-(K_1P_1+K_2P_2+$$
$$+\dots+K_nP_n)\cos\alpha=(m_1+m_2+\dots+m_n)\gamma$$

$$P_1\sin\alpha-T_1-K_1P_1\cos\alpha=m_1\gamma$$

$$T_1=g(m_1\sin\alpha-K_1m_1\cos\alpha)-m_1\gamma$$

$$(P_1+P_2)\sin\alpha-(K_1P_1+K_2P_2)\cos\alpha-T_2$$
$$=(m_1+m_2)\gamma$$

از روی این رابطه T_2 و بعد به‌همین ترتیب سایر کشش نخها حساب می‌شوند . ثانیاً داریم :

$$P_2 \sin\alpha - K_2 P_2 \cos\alpha + T_1 - T_2 = m_2\gamma$$

$$\Longrightarrow \gamma = g(\sin\alpha - K_2\cos\alpha)$$

و به‌همین ترتیب بالاخره خواهیم داشت :

$$\gamma = g(\sin\alpha - K_2\cos\alpha) = g(\sin\alpha - K_2\cos\alpha)$$

$$= \ldots = g(\sin\alpha - K_n\cos\pi\alpha)$$

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_n = K$$

$$\gamma = g(\sin\alpha - K\cos\alpha)$$

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_{n-1} = 0$$

۴۴۳۳ـ به انتهای یك میلهٔ نازك و بی‌وزن فلزی به طول l گلوله‌ای به جرم m و به وسط آن نیز گلولهٔ دیگری به جرم m متصل است . انتهای دیگر میله به نقطهٔ O آویزان است . زمان تناوب این پاندول ازچه رابطه‌ای بدست می‌آید.

حل ـ دستگاه یك پاندول مرکب است و زمان تناوب آن از رابطهٔ:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mag}}$$

بدست می‌آید . مقدار I برابر است با :

$$I = ml^2 + m\frac{l^2}{4}$$

$$I = \frac{5ml^2}{4}$$

و a فاصلهٔ مرکز ثقل تا نقطهٔ O برابر است با :

$$2m \times a = m \times l + m\frac{l}{2}$$

$$a = \frac{3l}{4}$$

بنابراین داریم :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5ml^2}{4}}{2m\frac{3l}{4}g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{6g}}$$

۴۴۳۴ـ یك مقاومت و یك خازن بطور سری برای فرکانس متغیری وصل شده‌اند . ولتاژ دوسر این مدار V ولت می‌باشد .

۱) ثابت کنید که مقدار ولتاژ دوسر خازن برابر است با

$$V_c = V\cos\left(\mathrm{Arctg}\frac{N}{N_0}\right)$$

که N فرکانس و $N_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ می‌باشد .

۲) ثابت کنید مقدار ولتاژ دوسر مقاومت بصورت :

$$V_R = V\cos\left(\mathrm{Arctg}\frac{N_0}{N}\right)$$

می‌باشد .

حل ـ ابتدا شدت جریان I را حساب کرده سپس بقیهٔ مسئله را حل می‌کنیم مقاومت ظاهری مدار برابر است با :

$$Z = \sqrt{\left(R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}\right)} = \frac{\sqrt{(R^2C^2\omega^2+1)}}{C\omega}$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\frac{\sqrt{(R^2C^2\omega^2+1)}}{C\omega}} =$$

$$= V\frac{C\omega}{\sqrt{(1+R^2C^2\omega^2)}}$$

$$\frac{N}{N^0} = \frac{N}{\frac{1}{2\pi RC}} = \overbrace{2\pi N}^{\omega} RC = \omega RC$$

$$V_c = IZ_c = I \times \frac{1}{C\omega} = V\frac{C\omega}{\sqrt{(1+R^2C^2\omega^2)}} \times \frac{1}{C\omega}$$

$$= \frac{V}{\sqrt{(1+R^2C^2\omega^2)}}$$

حال اگر فرض کنیم $tg\theta = RC\omega$ که مقدار معادل $\frac{N}{N_0}$ است داریم :

$$V_c = \frac{V}{\sqrt{(1+tg^2\theta)}} = V\cos\theta =$$

$$V\cos(\mathrm{Arctg}RC\omega) = V\cos\left(\mathrm{Arctg}\frac{N}{N_0}\right)$$

درمورد مقاومت داریم :

$$V_R = IR = V\frac{C\omega}{\sqrt{(1+R^2C^2\omega^2)}} \times R =$$

$$= V\frac{RC\omega}{\sqrt{(1+R^2C^2\omega^2)}}$$

$$\frac{N_0}{N} = \frac{\frac{1}{2\pi RC}}{N} = \frac{1}{2\pi NRC} = \frac{1}{\omega RC}$$

حال اگر فرض کنیم $tg\alpha = \frac{1}{R\omega C}$ داریم :

$$V_R = V\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{R^2C^2\omega^2}\right)}} =$$

$$V\frac{1}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)}} = V\cos\alpha =$$

$$V\cos\left(\mathrm{Arctg}\frac{1}{RC\omega}\right) = V\cos\left(\mathrm{Arctg}\frac{N_0}{N}\right)$$

ریاضی جدید

هندسهٔ مقدماتی

(از مجموعهٔ : چه می‌دانم ؟) — تألیف : André DELACHET ترجمهٔ : عبدالحسین مصحفی

دنبالهٔ شمارهٔ پیش

§۴- نمونهٔ جبری هندسه‌ای که اصول سابق‌الذکر در آن صادق است

درپاراگراف قبل ثابت شد هندسه‌هایی که اصول §§ ۱ و ۲ درآنها صادق است اگروجود داشته باشند یکسان هستند. این مسئله را فعلا از راه جبری بررسی می‌کنیم ، بعضی‌عناصر جبری را شناخته شده و موجود فرض می‌کنیم و از روی آنها موجودیت هندسه را محقق می‌سازیم.

فرض می‌کنیم K یك هیئت (۱) جا بجائی (مستقل از ترتیب‌عوامل)[2] باشد.مجموعهٔ K.K اززوجهای مرتب (x و y) ازعناصر K را صفحهٔ π می‌نامیم. عنصری مانند :

$$m=(x \text{ و } y)$$

ازK.Kرا نقطه‌و x وyرامختصات m می‌نامیم. مجموعه‌ای ازنقاط صفحه را خط می‌نامیم هرگاه مختصات x و y این نقاط در رابطه‌ای به شکل :

$$ux+vy+w=0 \quad (1)$$

صدق کنند که u و v و w عنصرهایی از K بوده و u و v باهم صفر نمی‌شوند . رابطهٔ (۱) را معادلهٔ خط مربوط می‌نامیم.

ثابت‌می‌کنیم‌که K.K شامل‌این خطوط ،اصول §§ ۱ و ۲راصادق‌است .

۱- اصول وجودی : اگر K هیئتی باشد حداقل شامل دوعنصر ۰ و ۱، در این صورت π شامل حداقل چهار نقطهٔ متمایز:

$$a=(0 \text{ و } 0) \text{ و } b=(0 \text{ و } 1) \text{ و } c=(1 \text{ و } 0) \text{ و } d=(1 \text{ و } 1)$$

وازآنجا شامل حداقل دوخط X و Y به معادله‌های :

$$x=0 \text{ و } y=0$$

می‌باشد. (این دوخط متمایزهستند ، زیرا مثلا Y شامل نقطهٔ b است‌که این نقطه به X تعلق ندارد)

به علاوه ، هرخط A از π که توسط معادلهٔ (۱) معین می‌شود شامل حداقل دونقطه از π است :

اگر $v\neq 0$ باشد A بر دونقطهٔ زیر می‌گذرد .

$$p(0 \text{ و } -\frac{w}{v}) \text{ و } q(1 \text{ و } \frac{w-v}{v})$$

اگر $u\neq 0$ باشد A بردونقطهٔ زیرمی‌گذرد :

$$p'(-\frac{w}{v} \text{ و } 0) \text{ و } q'(\frac{w-v}{u} \text{ و } 1)$$

۲- اصول عرضی - برای اینکه ثابت‌کنیم این‌اصول هم درπ صادق است قبلا معلوم می‌کنیم چه شرطی لازم و کافی است تا دو معادلهٔ زیر یك خط D را معین کنند .

$$(1) \quad ux+vy+w=0$$

$$(2) \quad u'x+v'y+w'=0$$

1- Corps 2- Commutatif.

(u و v باهم، همچنین u′ و v′ باهم صفر نمی‌شوند)

برای اینکه چنین باشد لازم وکافی است که هر نقطه‌ای که مختصاتش در (۱) صدق می‌کند در (۲) هم صدق کند. فرض می‌کنیم مثلا $v\neq 0$، در این‌صورت یك عنصر منحصر از K، مثلا k وجود دارد بقسمی که $v'=kv$ باشد. x را عنصری از K انتخاب می‌کنیم، نقطهٔ m(x و y) فقط و فقط وقتی به خط به معادلهٔ (۱) تعلق خواهد داشت که داشته باشیم:

$$y=-\frac{ux+w}{v}$$

دو معادلهٔ (۱) و (۲) وقتی وفقط وقتی یك خط را معین‌می‌کنند (با توجه به اینکه $v'=kv$) که به ازاء هرمقدار x از K داشته باشیم:

$$(۳)\quad u'x-k(ux+w)+w'=0$$

$$(۴)\quad (u'-ku)x+w'-kw=0$$

چون K شامل عنصر صفر است باید داشته باشیم:

$$(۵)\quad w'=kw$$

وچون K شامل عنصر یك نیز هست پس:

$$(۶)\quad u'=ku$$

ازشرط $v'=kv$ وازرابطهٔ (۶) برمی‌آید که k نمی‌تواندصفر باشد مگراینکه u′ و v′ باهم صفر باشند و این خلاف فرض است.

برعکس، از وجود عنصری مانند $k\neq 0$ از K بقسمی که:

$$u'=ku \text{ و } v'=kv \text{ و } w'=kw$$

باشد برمی‌آید که درازاء هرمقدار از x و y داریم:

$$u'x+v'y+w'=k(ux+vy+w)$$

ونتیجه می‌شودکه (۱) و (۲) به ازاء مقادیر x و y باهم صفر می‌شوند. عناصر u و v و w را ضرایب معادلهٔ (۱) می‌نامیم ومی‌توان بیان کنیم که:

قضیهـ یك شرط لازم وکافی برای آنکه دو معادلهٔ (۱) و (۲) معرف یك خط باشندآنست که ضرایب معادلات مزبور نظیر به نظیر متناسب باشند.

اکنون آماده هستیم که محقق کنیم π اصول عرضی را صادق است

صدق I_1ـ دونقطهٔ متمایز m(x و y) و m′(x′ و y′) را درنظر می‌گیریم. برای اینکه خطی مانند D تعیین کنیم که بردونقطهٔ m و m′ بگذرد لازم وکافی است سه عنصر u و v و w از K را چنان تعیین کنیم که دردستگاه زیرصدق کنند و u و v باهم صفر نباشند.

$$I\quad \begin{cases} ux+vy+w=0 \\ ux'+vy'+w=0 \end{cases}$$

ازاین دستگاه برمی‌آید که:

$$u(x-x')=v(y'-y)$$

چون m و m′ متمایز هستند تساویهای $x=x'$ و $y=y'$ باهم نمی‌توانند برقرارباشند. فرض‌می‌کنیم که $x\neq x'$، دراین صورت عنصر منحصر به فردی مانند k از K خواهیم داشت بقسمی که:

$$v=k(x-x')$$

این مقدار v را در رابطه قرار داده پس از اختصار خواهیم داشت:

$$u=k(y'-y)$$

و ازدستگاه معادلات I خواهیم داشت:

$$w=k(yx'-xy')$$

پس اگر خطی مانند D وجود داشته باشدکه بر m و m′ بگذرد، این خط منحصر بوده ومعادلهٔ‌آن باضریبی متناسب با k چنان نوشته می‌شودکه u و v باهم صفرنباشند. اگر X و Y مختصات نقطهٔ غیرمشخصی ازخط مزبورباشدداریم:

$$(۲)\quad (x-x')X+(y'-y)Y+yx'-xy'=0$$

برعکس، به‌سادگی‌ثابت می‌شودکه مختصات m و m′ درمعادلهٔ (۲) صدق می‌کند.

صدق I_2ـ فرض می‌کنیم m(a و b) نقطه‌ای از π و D خطی به معادلهٔ:

$$ux+vy+w=0$$

و D′ خطی به معادلهٔ:

$$u'x+v'y+w'=0$$

باشدکه بر m می‌گذرد یعنی داشته باشیم.

$$u'a+v'b+w'=0$$

(u و v باهم وهمچنین u′ و v′ باهم صفر نمی‌شوند)

می‌گوئیم $D'\parallel D$ هرگاه‌که: یا $D=D'$ باشد (اگر m روی D باشد)، یااینکه $D'\cap D=\emptyset$ (اگر m روی D نباشد).

اگر m روی D باشد D′ وجود داشته و منحصر است زیرا منطبق بر D است و باید داشته باشیم:

$$u'=ku \text{ و } v'=kv \text{ و } w'=kw$$

که k عنصر دلخواه از K بوده و مخالف صفر می‌باشد.

اگر m روی D نباشد D′ باید بقسمی انتخاب شودکه:

$$u'a+v'b+w'=0 \quad (۱)$$

بوده و دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر جواب نداشته باشد .

$$(I)\quad \begin{cases} ux+vy+w=0 \\ u'x+v'y+w'=0 \end{cases}$$

بنا به نظریهٔ حل دستگاههای دومعادلهٔ دو مجهولی‌خطی، شرط اخیر وقتی برقرار است که داشته باشیم :

$$(۲)\quad uv'-vu'=0$$

$$(۳)\quad uw'-wu'\neq 0$$

u و v باهم صفر نمی‌شوند ، فرض می‌کنیم $u\neq 0$ در این صورت عنصر منحصر به فرد k از K وجود خواهد داشت که داشته باشیم $u'=ku$ وازآنجا از (۲) نتیجه خواهد شد:

$$v'=kv$$

واز (۳) خواهیم داشت :

$$w'\neq kw$$

و از (۱) نتیجه خواهد شد :

$$w'=-k(ua+vb)$$

و این شرط با (۳) متوافق است زیرا m روی D نبوده و داریم :

$$ua+vb+w\neq 0$$

بنابراین D' وجود داشته ومنحصر به فرد است و معادلهٔ آن عبارتست از :

$$u(x-a)+v(y-b)=0$$

حالت خاص ـ K هیئتی است جابجائی و محدود و می‌توانیم حالتهای خاص زیر را درنظر بگیریم :

۱) K جز دو عنصر نداشته باشد . این دوعنصر الزاماً صفر، عنصربی‌اثر عمل جمع ، ویك ، عنصر بی‌اثر عمل ضرب خواهند بود . K جابجائی است ، جدول جمع وجدول ضرب درآن به صورت زیر نوشته می‌شود .

+	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۰

×	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

نتیجه خواهد شد که π شامل چهار نقطه است که مختصات آنها تبدیلات مختلف دوعنصر ۰ و ۱ می‌باشد :

a(۰ و ۰) و b(۰ و ۱) و c(۰ و ۱) و d(۱ و ۱)

۶ خط وجود خواهد داشت که این نقاط را دوبه‌دو به هم وصل می‌کنند ومعادلات آنها به قرار زیراست :

$$\begin{cases} D(a \text{ و } b)\ x=0 \\ D(c \text{ و } d)\ x=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} D(a \text{ و } c)\ y=0 \\ D(b \text{ و } d)\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(a \text{ و } d)\ x+y=0 \\ D(b \text{ و } c)\ x+y=1 \end{cases}$$

صفحهٔ π دارای سه وفقط سه امتداد متمایز است : هریك‌ازآنها مربوط به دو خط از ۶ خط مزبور است .

بنابرآنچه در §۳ دیدیم این صفحه یك ایزومورفیسم را محقق می‌کند که اصول §§ ۱ و۲ درآن صادق بوده وعدداصلی خطوط ۲ می‌باشد .

۲) K جز سه عنصر نداشته باشد ـ بجز ۰ و ۱ عنصر دیگری متعلق به K وجود دارد که آنرا با ۱ـ مشخص‌می‌کنیم. جدولهای جمع و ضرب به صورت زیر نوشته می‌شوند .

+	۰	۱	−۱
۰	۰	۱	−۱
۱	۱	−۱	۰
−۱	−۱	۰	۱

×	۰	۱	−۱
۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	−۱
−۱	۰	−۱	۱

نتیجه می‌شود که π شامل ۹ نقطه است به شرح زیر :

a(۰ و ۰) b(۰ و ۱) c(۰ و −۱)

d(۱ و ۰) e(۱ و ۱) f(۱ و −۱)

g(−۱ و ۰) h(−۱ و ۱) k(−۱ و −۱)

۱۲ خط درصفحه وجود دارد با معادله‌های‌زیرو هرکدام برسه نقطه‌ای که مقابل آنها یادداشت شده می‌گذرند .

$$\begin{cases} x=0 & (a \text{ و } b \text{ و } c) \\ x=1 & (d \text{ و } e \text{ و } f) \\ x=-1 & (g \text{ و } h \text{ و } k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 & (a \text{ و } d \text{ و } g) \\ y=1 & (b \text{ و } c \text{ و } h) \\ y=-1 & (c \text{ و } f \text{ و } k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=0 & (a \text{ و } f \text{ و } h) \\ x+y=1 & (b \text{ و } d \text{ و } k) \\ x+y=-1 & (c \text{ و } e \text{ و } g) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=0 & (a \text{ و } e \text{ و } k) \\ x-y=1 & (c \text{ و } d \text{ و } h) \\ x-y=-1 & (b \text{ و } f \text{ و } g) \end{cases}$$

۱۲ خط مزبور سه به سه متوازی هستند و به ۴ گروه تقسیم می‌شوند که هر گروه یك امتداد مجزا را مشخص می‌کند . از هر نقطهٔ صفحه چهار خط متمایز می‌گذرد .

این صفحه یك ایزومورفیسم را محقق می‌سازد که اصول §§ ۱ و ۲ درآن صادق بوده عدد اصلی خطوطش ۳ می‌باشد .

که چون در معادلهٔ دوم به‌جای $\cos 2x$ مقدارش $\frac{1}{2}$ را قرار دهیم $\cos 2y = \frac{1}{2}$ و $y = \pm\frac{\pi}{6} + k'\pi$ بدست می‌آید پس دستگاه معادلات دارای جوابهائی به صورت:

$$(1)\quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} + k'\pi \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + k'\pi \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} + k'\pi \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + k'\pi \end{cases}$$

خواهد بود که اگر دستگاه اول جوابهارا در معادلهٔ اول قرار دهیم داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6} + k'\pi\right)$$

و این تساوی موقعی صحیح است که k' فرد باشد. در جوابهای شمارهٔ (۲) و (۳) و (۴) نیز چنین اشکالی وجود دارد. پس جوابهای فوق جوابهای دستگاه نیستند یعنی جوابهای حاصل از معادلهٔ دوم را بایددر معادلهٔ اول امتحان کرد و این اشکال موقعی بارز می‌شود که بخواهیم دستگاه معادلات داده شده در کتاب یعنی:

$$\begin{cases} \sin 2x = a\sin y \\ \cos 2x + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

را حل کرده و جوابهائی را که برحسب کمانهائی مانند α و β بدست می‌آیند در معادلهٔ اول امتحان کنیم. دستگاه:

$$\begin{cases} \cos x = a\cos 2y \\ \cos y = a\cos 2x \end{cases}$$

از تمرینهای کتاب و دستگاه:

$$\begin{cases} \cos x + 2\cos y = 1 \\ \sin x = m\sin y \end{cases}$$

از سؤالهای امتحانی از این قبیل هستند.

❀❀❀

آنچه‌که دربارهٔ دستگاههای معادلات مثلثاتی گفته شد طریقه‌های غلطی است که عموم دانش‌آموزان بکار می‌برند و شایدراهنمای آنان بعضی ازکتابهای حل‌المسائل باشد که گناه این گونه کتابها را به‌عهده کتابهای درسی ومؤلفین آن نمی‌توان گذاشت‌اما مسلماً نقص کتابهای‌درسی‌است که‌دانش‌آموزرا به سوی کتابهای حل‌المسائل درست یا نادرست هدایت‌می‌کند.

در مورد دستگاههای معادلات مثلثاتی کاملا این نقص مشهود است. زیرا حل دستگاههای معادلات مثلثاتی پارامتری مسکوت گذاشته شده و حتی یك دستگاه نمونه نیز حل نشده است. نتیجهٔ این نقص آنست که عموماً برای حل یك دستگاه آن را به معادله‌ای یك‌مجهولی تبدیل کرده و به تعیین شرایط قابل قبول‌بودن جوابهای این معادله قناعت می‌کنند که کافی نیست. از طرف دیگر تمرینهای حل شده درکتاب بسیار ساده و با تمرینهائی که حل آن به‌عهدهٔ‌دانش‌آموزان گذاشته شده قابل مقایسه نیست به این‌جهت نمی‌تواندراهنمای دانش‌آموزان در حل دستگاههای مثلثاتی باشد.

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ٤٤

۴۴۱۴ـ محمدتقی‌اولیائی ـ عبدالمجید جمالی ـ مجتبی محزون ـ احمد توسلی ـ مهدی اکبر ـ مصطفی راستگردانی ـ مجید فارسی ـ علی رحیم‌پور ـ محمد سمیعی‌فرد ـ مصباح جاوید ـ حسن گل‌محمدی ـ محمدتقی مقدادیان ـ سلیمان نصرت‌آبادی.

۴۴۱۵ـ سلیمان نصرت‌آبادی ـ عبدالمجید جمالی ـ محمدتقی اولیائی ـ احمد توسلی ـ مصطفی راستگردانی ـ سام متین ـ مجید فارسی ـ امان‌الله‌امین‌نیا.

۴۴۱۷ـ امان‌الله‌امین‌نیا ـ عبدالمجیدجمالی ـ عبدالرسول جمالی ـ محمدتقی اولیائی ـ مجتبی‌محزون ـ مصباح جاوید ـ محمد باقری ـ احمدتوسلی ـ حسین دهقان ـ سید محمدبنی‌هاشم محمدعلی‌شبستری ـ محمد کشتی‌آراء ـ ارسام‌صبری.

۴۴۱۹ـ محمدرضا نادری ـ محمدباقری ـ مصباح‌جاوید هوشنگ علمداری ـ مجتبی محزون ـ امان‌الله‌امین‌نیا.

۴۴۲۰ـ مصباح جاوید ـ داوید ریحان

۴۴۳۲ـ احمد توسلی ـ امان‌الله‌امین‌نیا.

۴۴۲۳ـ امان‌الله‌امین‌نیا ـ محمدسمیعی‌فرد ـ علی‌صفرزاده امیری ـ علی‌رضا حبیب‌زاده ـ رضا شجره طوبی.

۴۴۲۴ـ احمد توسلی ـ علی‌اصغراسکندر بیاتی.

برای دانش‌آموزان ممتاز رشتهٔ ریاضی و
داوطلبان کنکور که به دنبال مطالب تازه و
روشهای کلی حل مسائل نامتعارف می‌باشند

کتاب :

روشهای جبر

تنظیم از : پرویز شهریاری

در ۶۰۰ صفحه منتشر شد

مؤسسهٔ انتشارات امیر کبیر

شما می‌توانید این کتاب و کتب دیگر را از تلفن ۳۳۶۹۳۵
بخواهید و در مدت کمی در منزل یا محل کار خودتان دریافت دارید.

نشریهٔ ممتاز یکان

تمرینهای ریاضیات مقدّماتی

تألیف : دکتر محسن هشترودی

با جلد شمیز بها : ۱۲۰ ریال

با جلد زرکوب بها : ۱۵۰ ریال

از انتشارات یکان

سرگرمیهای جبر

ترجمهٔ : پرویز شهریاری

با قطع جیبی و کاغذ کتاب

بها : ۶۰ ریال

با قطع بزرگ و کاغذ و جلد مرغوب

بها : ۱۰۰ ریال

از انتشارات یکان :

روش سادهٔ

حل مسائل شیمی

برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم دبیرستان و

داوطلبان امتحانات ورودی دانشکده‌ها

از چاپ خارج شد ـ بها : ۲۰ ریال

برای کلیهٔ مشترکان یکان کارت مخصوص تخفیف به ضمیمهٔ مجلهٔ شمارهٔ ۴۶ ارسال شد

قابل توجه داوطلبان امتحانات ورودی دانشکده‌ها

چاپ دوم یکان سال ۱۳۴۶

شامل حل مسائل

امتحانات نهائی کلاسهای ششم طبیعی وریاضی،امتحانات ورودی دانشگاه تهران ، دانشگاه آریامهر،دانشکدهٔ پلی‌تکنیک،دانشسرای عالی ، دانشگاه مشهد ، دانشگاه تبریز ، دانشگاه گندی شاپور ، دانشگاه ملی و مؤسسه‌های دیگر .

نمونه‌ای از مسائل امتحانات نهایی کشور فرانسه

امتحانات G.C.E. انگلستان

برای فروش موجود است ـ بها : ۵۰ ریال