



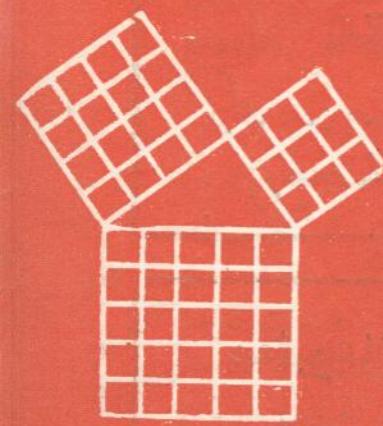
شماره مسلسل

۲۴

فروز دین - ۱ مرداد ۱۳۴۷

۱۳۴۷

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{n!} a^{n-n}x^n$$



بهای: بیست و پنج ریال

تلفن مجله: ۴۳۳۱۸۱



دراین شماره:

هزینه‌های ریاضی جدید

درباره حل مسائل یکان سال ۴۶

رادیوآسترونومی

مسائل حل نشده ریاضی

درسی از فیزیک، حرکت پرتابی

اصطلاحات فیزیکی و معادل
انگلیسی آنها

حل مسائل هندسه به کمک اعداد مخلوط

چهارضلعی محیطی محاطی

تحویل رادیکال مرکب با فرجاه ۳

راهنمای حل مسائل هندسه

Problems & Solutions

تصاعد حسابی هندسی

کتابخانه یکان

راهنمای رسم فنی

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

مسائل برای حل

حل مسائل یکان شماره ۴۳

۴۲۱ ترجمه: عبدالحسین مصححی

۴۲۳ —

۴۲۵ ترجمه: هوشنگ شریفزاده

۴۳۰ ترجمه

۴۳۳ ترجمه: شریفزاده

۴۳۸ مهندس ابرج ارشادی

۴۳۹ ترجمه: احمد قاضیزاده

۴۴۱ ترجمه: یعقوب گنجی

۴۴۳ ترجمه: جعفر آقابانی

۴۴۵ ترجمه

۴۴۸ —

۴۴۹ ترجمه: قوام نحوی

۴۵۰ —

۴۵۱ مهندس شیر محمدی

۴۵۳ —

۴۷۳ —

۴۷۸ —

توضیح

به علت تراکم مطالب چاپ مقالات :
سرگرمیها ، داستانهای تفہمی ، پاسخهای رسیده مر بوط
به حل مسائل شماره ۴۲ و ریاضی جدید
در این شماره میسر نشد و به شماره بعد موکول گردید
علاوه بر مطالب فوق چاپ چند مقاله دیگر از جمله «حل
مسئله مسابقه‌مندرج در شماره ۴۱» که آماده چاپ هم شده بود به
شماره بعد موکول شد .

توجه

برای کلیه مشترکانی که قبل از اسفند ۱۳۴۶، مجله یکان را
مشترک شده بودند یکان سال ۱۳۴۶ ارسال شده است. این مجله در تاریخ
۱۵ فروردین ۴۷ به نشانی مشترکان تحویل اداره پست شده
است .
از مشترکانی که مجله مزبور را دریافت نکرده و تاکنون
اداره مجله را مطلع نکرده‌اند تقاضا می‌شود مراتب را اطلاع
دهند .

یکان برای دانش‌آموزان کلاس‌های سوم

در اسفند ماه هر سال شماره مخصوصی به ضمیمه یکان
سال برای دانش‌آموزان کلاس سوم دبیرستان منتشر می‌شود .
اولین شماره از این مجله منتشر شده هم اکنون در دسترس
عالق‌مندان می‌باشد .

همه می‌خواهند، بدانند در فضای چه خبر است؟

محله فضا

برای دادن پاسخ به این پرسش منتشر می‌شود
محله فضا اول هر ماه

مطبوعاتی صابر خوش خلق

نمایندگی فروش مجله و انتشارات یکان

در سراب

چاپ دوم

یکان سال ۱۳۴۶

منتشر شد

با وجود کاغذ هرگز و بتر برها همان
۵ روبل است

یکان

محله ریاضیات

هرماه یک بار منتشر می‌گرد

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

دوره چهارم - شماره هفتم - شماره مسلسل : ۴۴

فروردین - اردیبهشت ۱۳۴۷

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبد الحسین مصطفی

مدیر داخلی، داود مصفی

نشانی اداره :

تهران، خیابان لالهزارنو، نزدیک شاهزاد، شماره ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۳۴۶۴

تلفن اداره : ۳۳۳۱۸۱

وجه اشتراک برای هر دوره ۲۰۰ رویال

(برای کشورهای خارج به اضافه هزینه پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبه لالهزارنو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume IV, number 7, April, 1968

subscription : \$3

TEHERAN P.O. B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۴۸

ریاضی جدید چه مزیتهاست دارد؟

ترجمه توسط: عبدالحسین مصطفی

از یکی از مجلات فرانسه

آیا تاکنون یک کتاب ریاضی جدید را بازگردانید؟ یک چنین کتابی مخلوط است از: عبارتهاست نازه، طرز بیانی جدید، عالمتهای عجیب و تعدادی نمودار، و این پرسش برای ما مطرح می‌شود که در آینده زبان فرزندان خود را چگونه باید درک کنیم؟ یک چنین انقلابی چه ضرورت دارد؟ چرا در پیرستانها، ریاضی جدید جانشین ریاضیات معمولی می‌شود؟ مقصود از این آموزش جدید چیست؟ مادموداً ب. یکی از استادان همتزار خواسته است که به این سوالات جواب دهد. سوالاتی که اولین اطفال را آنهمه به خود مشغول داشته و برای آنان این نگرانی را بوجود آورده است که مباداً بازیچه دست فرزندان خود شوند.



نسبت به عدددهای رومی حساب ابجد*، حتی عددنویسی در دستگاه به مبنای ۲، جدول جمع هربوت را تشکیل دهد.

- این موضوع چه نفعی می‌تواند داشته باشد؟

- قبول دارم که جدول جمع با حساب ابجد یا بارقهای رومی اهمیت عملی ندارد، اما کارماشینهای محاسبه باعدددهای است که در مبنای ۲ نوشته شده باشند و از این جهت از لحاظ ریاضی هم ما در عصر الکترونی خواهیم بود.

ریاضیات تمام قلمرو هارا

بتصرف درمی آورد

- می خواهید بگوئید که این فکر نو به جوان اجازه می‌دهد که خود را با جهان جدید تطبیق دهد. ولی ریاضیات معمولی بود که ارسال قمرهای مصنوعی و سایر پیشرفتهای فضایی را میسر ساخت.

- اگر صحبت از پیشرفتهای خاص و در شاخهایی بود که شما اسم بر دید در این صورت ریاضیات متداول کفایت می‌کرد. اما در دوره ما ریاضیات به کارهای مهندسی و تکنیکی ختم نمی‌شود، در حقیقت ریاضیات بخشی از فرهنگ می‌باشد.

در سابق، کسی که استعداد این نظام را نداشت متوجه رشته‌های ادبی می‌شد. امروزه، ریاضیات تقریباً تمام رشته‌ها

- امروزه «ریاضیات جدید» و «ریاضیات قدیم» را د. مقابل هم قرار می‌دهند. در سابق ریاضیات را حقایق همیشگی می‌دانستیم، آیا دچار اشتباه بوده‌ایم.

- مسلماً چنین نیست. آنچه در سابق حقیقت بوده است باز هم حقیقت می‌باشد، و نسل جدید هم مانند پدران خود، جذر، قضیه فیثاغورس و جدول ضرب را یاد خواهد گرفت، مزیت ریاضیات جدید مخصوصاً از آن جهت است که ایجاد قوه متفکره نوی را تحقق می‌بخشد.

- مقصود از «قوه متفکره نو» چیست؟

- قوه متفکرهای که قابلیت استدلال و ابداع داشته باشد سابق تحقیق ریاضیات عبارت بود از تکرار بیهوده جدولها، از حفظ کردن خواص اشکال و چگونگی تشکیل یک مادله، نتیجه آن این بود که درسن شانزده سالگی سه چهارم از جوانان از هر چه ریاضی است متنفر بودند.

فعلاً، ریاضیات جدید طفل را و می‌دارد که بیندیشد و «سهمی» باشد، خلاصه آنکه کشف کند. دیگر مانند سبق برای حل یک مسئله فقط نباید معادله را تشکیل دهد بلکه علاوه بر آن باید قابلیت آن را داشته باشد تا نتایج استدلال خود را برای دومنین و سومین مسئله هم تعمیم دهد. تنها نباید جدول جمع را فراگیرد بلکه باید چگونگی تشکیل این جدول را درک کند و آنرا برای اوتان دیگری نیز بکار ببرد، مثلاً بتواند

* از طرف مترجم

قدیمی که با آن مثلاً را آموخته اند ناسازگاری وجود دارد، مثلاً در تئوری مجموعه ها برای تساوی دو مجموعه یک تعریف انجام می‌گیرد. اما وقتی در ریاضیات قدیم از تساوی دو مثبت صحبت می‌شود کلمه «تساوی» معنی دیگری را می‌رساند. محصل ناچار است که گاهی این و گاهی آن تعریف را بیازی بگیرد و این امر در آغاز یک تعلیم تأسفآور است.

به عقیده من مطلوبتر آنست که آموزش ریاضیات جدید از دوره ابتدایی آغاز شود. این من موضع را به وزارت تذکر داده است و کمیسیون تجدید نظر با فعالیت شدید به بررسی موضوع اشتغال دارد. موضوع یک انقلاب مطرح نیست، بلکه کوشش می‌شود تحولی تدریجی در افکار انجام گیرد: هم در افکار محصلین و هم در افکار والدین آنها، والبته قبل از همه در افکار معلمان.

- ممکن است به من بگوئیم که چرا همه معلمان باروشهای جدید موافق نیستند؟

- به خاطر عکس العمل علیه نهضت بورباکی و به این بهانه که تجدید بنای ریاضیات اتفاقی است کلا خارج از زندگی واقعی، معلمانی که هنوزهم با روش‌های جدید مخالف هستند از آن می‌ترسند که در ریاضیات جدید بحث از موضوعات درمیان باشد که از استدلال روی اشیائی که حتی وجود آنها نیشناست منتج شده باشد. اولین کتابهای که بسیار منتزع تنظیم شده‌اند تأثیر آنان را شدیدتر کرده‌اند.

در حقیقت اینچنین نیست. برخلاف آنچه این‌آن تصور می‌کند، ریاضیات جدید قوه ابتکار را در محصلین پرورش می‌دهد و به جای کله‌های انشائی کله‌های فکور بوجود می‌آورد.

برگشت والدین به کلاس

- اینکه آموزش جدید جوانان را با کله‌های ریاضی بار می‌آورد چه بهتر و خیلی خوبست. احتیاج ما به تکنیسین روزافزون است. در مکتب جدید والدین محصلین کنار گذاشته شده‌اند و آنان نمی‌توانند در راهنمائی فرزندان خود نقشی داشته باشند. یا گمان نمی‌کنید که به این وسیله حاصل موجود بین نسل گذشته و نسل جدید بیش از پیش افزون گردد؟ ما والدین را کنار گذاشته‌ایم. بر عکس، می‌کوشیم که

رادربور گرفته است: روانشناسی، جامعه‌شناسی، زیست‌شناسی و حقیقتی است. هنر هنوز به‌زیر سلطه آن نیامده است اما تاچه مدت‌می‌تواند پایداری کند؟ هر چیز فعلی به زبان آمار بیان می‌شود. برای استفاده از ماشینها باید قبل از این اینفوگرافی از اطلاعات را روی فیشهای مخصوص جا داد و این کار تکنیک ریاضیات جدید است.

- اینطور گفتید که آموزش جدید به این خاطرگه پر جنب و جوش و رو ددار است خوشایند محصلین می‌باشد. با اینهمه وقتی یک کتاب ریاضیات جدید را بخواهند بازهم عالمهایی مجرد و عبارتها باید ناهائوس خواهند یافت. چند اصطلاح را اتفاقی نام می‌برم: «مفهوم مجموعه»، «رابطه تعلق داشتن»، «رابطه شامل»، «رابطه هم ارزی». آیا شما اینهارا غامض و هبهم نمی‌یابید؟

- این موضوع را باید کاملاً تشریح کرد. اگر به عمق مطلب توجه کنیم این اصطلاحات بسیار ساده هستند. مثالی در تقار بگیریم: محله‌ای که فعلاً در آن ساکن هستیم. برای توضیح مفهوم مجموعه چنین می‌گوییم «همه اشخاصی که در این محله ساکن هستند عضوهای یک مجموعه می‌باشند». درباره رابطه تعلق داشتن اینطور می‌گوییم «شما به مجموعه ساکنان این محله تعلق ندارید» و برای رابطه شامل می‌گوییم «من و دوستم، که هر دو در یک کوچه ساکن هستیم مجموعه‌ای تشکیل می‌دهیم که نیزه-مجموعه‌ای از مجموعه تمام ساکنان محله است» و برای رابطه هم ارزی چنین می‌گوییم «همه ساخته‌هایی که دونمای شمالی و جنوبی دارند برای همه اشخاصی از مجموعه که اینچنین وضعی را دارند هم ارز می‌باشند».

مالحظه می‌فرمایید که هیچیک از عبارتها مزبور نه مردم است و نه غامض. وهمه این تعاریف را می‌توان به صورت نمودار نمایش داد. با اسباب بازیهای رنگین و با وسائل مخصوصی که بتوان به آنها تغییر‌شکل داد تفہیم این اصطلاحات برای اطفال خوشایند خواهد بود.

شروع از دبستانها

- بعضی از والدین مخصوصاً از تشویش افکار فرزندان خود صحبت می‌کنند.

- اشکال عده ناشی از آنست که این دانش آموزان ریاضیات جدید را مخلوط با ریاضیات متداول آموخته یا هنوز می‌آموزند. تئوری مجموعه ها را به تازگی در کلاس اول دبیرستان وارد ساخته‌اند و متأسفانه بین زبان مجموعه‌ها و زبان

ارزشیابی صحیح کارداش آموز

- آخرین سؤال: آیا ریاضیات جدید به فرزندان ما آن امکان را می‌دهد که گلیم خود را از آب بپرسند؟
- مسلماً، فقط کافی است که در نحوه امتحان هم تجدیدنظر انجام گیرد. زیرا در نحوه امتحانی که فعلاً معمول است و از داش آموزان می‌خواهند که برای مسئله‌ای معادله مربوط را تشکیل دهنده استعدادها شناخته نمی‌شود؛
یک چنین تجدیدنظری از طرف والدین و مصلحین هم استقبال خواهد شد. درست در چنین موقعیتی است که آنان ارزش عملی دیبلوم جدید را درهمی‌یابند.

آنها بهترین حامیان ما نزد فرزندانشان باشند. سال گذشته، همکاران ما در لیون کلوب والدین را تشکیل دادند. حدود ۴۰ پدر و مادر هر پانزده روز یک بار به مدت دو ساعت دورهم جمع می‌شدند و دیگران کلاس‌های اول، دوم، سوم و چهارم همان تعلیمات محصلین را به آنان می‌آموختند. من گمان دارم که این جمیع مرکزی والدین (همکاری خانه و مدرسه) این ابتکار را در سایر شهرهای فرانسه هم بکار بندد. راجع به تشکیلات معلمان هم پیش بینی‌های لازم بعمل آمده است، چنان‌که در همین سال گذشته تنها در پاریس هفت مرکز کارآموزی برای آنها فراهم آمده است.

درباره حل مسائل مندرج در یکان سال ۱۳۴۶

دیگران محمد رضا شاه کرمانشاه نوشتند که در حل مسئله حساب کنکور دی‌ماه دانشکده پلی‌تکنیک باید بهجای:

$$\frac{1}{24} \log 180$$

نوشته شود $\frac{1}{24} \log 180$ - و جواب درست عبارت خواهد شد از:

$$A = 5000894$$

* آقای محمد رضا بزدان توضیح داده‌اند که:

- (۱) در شکل مربوط به مسئله مکانیک مندرج در بالای صفحه ۱۱۷ جرم پائین‌ترین وزنه m_3 است.
- (۲) در حل مسئله هندسه رشته ریاضی دانشسرای عالی فرمولهای مربوط به OM^1 و AM^1 باید به صورت زیر اصلاح شود.

$$\overline{AM^1} = \frac{b^1 + c^1}{2} - \frac{a^1}{4}, \quad \overline{OM^1} = \frac{R^1 + R^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\omega M = \frac{1}{2} \sqrt{R^1 + d^1}$$

(۳) مقدار صحیح طرف دوم تساوی سطر دوم صفحه ۷۲

$$\text{برابر است با } \frac{25}{144}$$

(۴) حل مسئله دوم رشته علوم تجربی دانشسرای عالی باید به صورت زیر اصلاح شود:

$$1 - (\log \alpha)^2 < 0 \Rightarrow \log \alpha > 1 \quad \text{یا} \quad \alpha > 10 \quad \text{یا} \quad \alpha < 0.1$$

(۵) در حل مسئله اول از رشته ریاضی دانشگاه ملی باید اصلاح زیر انجام گیرد:

$$A' = 4(m+2)^2 + 2m(4m+8) = 0$$

و محاسبات بعداز آن هم تصویح شود.

بعداز انتشار چاپ اول یکان سال ۱۳۴۶ ملاحظه شد که در محاسبات مربوط به حل بعضی مسائل اشتباههایی رخ داده است. عده‌ای از خوانندگان علاقمند مجله نیز این اشتباههای را یادآوری فرموده‌اند که در زیر منعکس می‌شود و از کسانی که یکان سال مزبور را مورد استفاده قرار می‌دهند تقاضا می‌شود به این نکات توجه داشته باشند. اصولاً توصیه می‌شود با توجه به راه حل هر مسئله محاسبات مربوط را شخصاً انجام دهند.

* آقای ابوتراب فرهیمی داش آموز پنجم ریاضی دیگران خیام نیشاور و حسین خبازیان داش آموز ششم ریاضی دیگران نمونه اصفهان نوشتند که در مسئله سوم از امتحان گروه دوم دانشگاه تهران باستی گفته می‌شد که عبارت E ضریبی از یک مربع کامل است و گرنه ممکن است که رابطه $pq + qr + rp = 0$ برقرار باشد اما عبارت E مثلاً به صورت $K^2 - DR^2$ که نمی‌توانیم آن را یک مربع کامل بشناسیم. مثال ساده عددی وقتی که:

$$p = -6, \quad q = -3, \quad r = 2$$

باشد.

* آقای حیدر شوکتی از درگز نوشتند که در حل مسئله جبر کنکور دی‌ماه دانشکده پلی‌تکنیک در محاسبه حجم مطلوب اشتباه شده است. مقصود حجمی است که از دوران سطح محصور بین منحنی و خطوط $x=2$ و $y=3$ (بالای خط $y=3$) حول خط $x=2$ می‌باشد و مقدار این حجم بر ابراست با:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [V = \pi \int_{\frac{y-2}{2}}^{\frac{k}{2}} \frac{-16}{y-2}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi \left[\frac{16k - 48}{k-2} \right] = 16\pi$$

* آقای مسعود کشمیری داش آموز ششم ریاضی

۱- در جمله «ده درصد از توان مولد برق شهر به مدت ۸ ساعت در روز صرف تبخیر آب با درجه حرارت ۲۵ درجه سانتیگراد در يك دیگ بخاره گردد.» قسمتی که در اینجا با حروف سیاه نوشته شده است بیشتر این مفهوم را دارد که آب در درجه حرارت 25°C تبخیر می شود و چنین استنباطی غلط نیست، زیرا اولاً مسئله جوشیدن آب مطرح نشده است و نقش دیگ بخار نه در صورت و نه در حل مسئله مشخص نشده است، ثانیاً تبخیر آب در هر درجه حرارتی امکان پذیر است، ولی بطوری که از حل مسئله (نه از صورت مسئله) استنباط می شود، تبخیر آب در صدرجه صورت گرفته است و حال آنکه هیچیک از معلومات صورت مشله نشان نمی دهد که آب در چنین درجه ای تبخیر شود. بخصوص که نامی از دیگ بخار برده شده است و معمولاً تبخیر آب در دیگ بخار در دمایی بالاتر از صدرجه صورت می گیرد. چه بهتر که اگر بنا باشد آب در صدرجه تبخیر شود بگوییم که در ظرف سر بازی می جوشد.

۲- عبارت «گرهای تبخیر آب در فشار هربوطه ۵۳۱ کالری» مؤید استدلال فوق می باشد. زیرا اولاً عبارت فشار هربوطه نشان می دهد که منظور مسئله فشاری بجز فشار جو است. ثانیاً اگر آب در فشار جو تبخیر می شد، گرمای تبخیر آن در حدود ۵۳۷ کالری می بود، و چون ۵۳۱ کمتر از ۵۳۷ است معلوم می شود که آب در فشاری بالاتر از فشار جو تبخیر می شود. این مفهوم را داوطلبان در کتاب فیزیک چهارم دیبرستان تحت عنوان فرهول رنیو دانسته اند.

به عقیده من، پس از اصلاح عبارات صورت مسئله و افزودن این مطلب که آب در فشار ثابت تبخیر می شود. راه حل این قسمت از مسئله به شرح زیر است:

گرمای تبخیر آب بر طبق فرمول رنیو یافرمول تقریبی رنیو با نقطه جوش آب بستگی دارد (البته بهتر است که در صورت مسئله فرمول رنیو که يك فرمول تجربی است تذکر داده شود):

$$L = 606.5 - 0.695t \quad \text{فرمول رنیو}$$

$$L = 608 - 0.7t \quad \text{فرمول تقریبی رنیو}$$

که t درجه جوش آب به مقادیر سانتیگراد و L گرمای تبخیر آب در دمای $t^{\circ}\text{C}$ بر حسب کالری است. L در مسئله معلوم است، بنابراین می توان t را تعیین کرد:

بر طبق فرمول تقریبی رنیو:

$$531 = 608 - 0.7t \Rightarrow t = 110^{\circ}\text{C}$$

معنی آب در شرایط مذکور در مسئله در دمای 110°C می جوشد مقدار آبی که در يك روز تبخیر می شود:

$$m = \frac{Q}{c(t_2 - t_1) + L} = \frac{2175 \times 10^5}{(110 - 25) + 531} \quad m = 446 \text{ kg}$$

* آقای مصطفی راستگردانی دانشآموز پنجم ریاضی دیبرستان صصاصی اراک نیز اشتباه مربوط به حل مسئله دوم علوم تجربی دانشسرای عالی را (که در بالا درج شد) یادآوری کرده اند.

* آقای بهروز یوسفی نوشته اند که به نظر ایشان در حل مسئله حساب گروه ریاضی کلاسهای شبانه دانشگاه تهران اشکالی وجود دارد: اگر عددی عددهای A و B را عاد کند عدد $5A - 2B = 51$ نیز عاد خواهد کرد اما عکس آن صحیح نیست، یعنی اگر عددی 51 را عاد کند لزومی ندارد که A و B را نیز عاد کند. مثلاً اگر فرض کنیم $A = 19$ و $B = 22$ داریم $5A - 2B = 51$ اما مقسم علیه های 51 یعنی 17 و 3 هیچیک از عددهای 19 و 22 را عاد نمی کند.

* آقای پرویز شکوهی نوشته اند که فکر نمی کنند مسئله دوم کنکور دانشکده نفت آبادان مندرج در يك آن سال جزو مسائل امتحان ورودی دانشکده مزبور باشد و ایشان این مسئله را نفرستاده اند.

یکان - این مسئله ضمن مسائل ارسالی آقای احمد حاجی باقر جزء سوالات کنکور دانشکده مزبور منظور شده است.

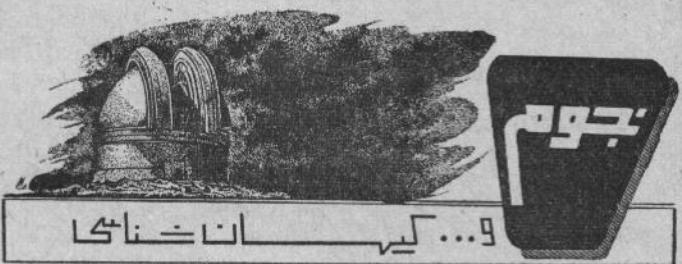
* آقای هوشنگ شریفزاده درباره حل مسائل فیزیک مندرج در یکان سال اصلاحات زیر را یادآوری کرده اند:

صفحه ستون سطر آنچه باید نوشته شود

$$\begin{aligned} x &= 220 / 5 \text{ cm} & 7 & 1 & 8 \\ E &= \frac{95 \times 49 \times 49 \times 9}{10^7} J \# 0 / 2052 J & 12 & 1 & 8 \\ P &= 231 W & 5 & 2 & 8 \\ &= \frac{15}{2} do_1 = \frac{15}{8} do_4 = si_4 & 1 & 13 & 1 \\ P &= \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 50 W & 1 & 26 & 1 \\ & \sqrt{2} \text{ حذف شود} & 2 & 27 & 1 \\ & - 5m & 16 & 2 & 27 \\ \times 80^2 \times \frac{419 \times 2}{1000} - 6 / 4 \text{ kgf} & 14 & 1 & 28 & 1 \\ \text{sol}_2 \# & 2 & 28 & 1 & 28 \end{aligned}$$

همچنین آقای شریفزاده راجع به حل مسائل کنکور دانشگاه صنعتی آریامهر شرح زیر را مرقوم داشته اند:

بنظر می رسد که صورت و نیز حل قسمت ۳ مسئله هشتم مسابقه ورودی دانشکده صنعتی آریامهر (تیرماه ۱۳۴۶) که در صفحات ۴۹ و ۵۱ یکان سال نوشته شده است بر طبق دلایل زیر ناقص باشد:



۹...کم از نهان

مقدمه کتاب:

رادیو آسترونومی

تألیف: I. CHKLOVSKI

ترجمه: هوشنگ شریفزاده

قبيل جانورشناسي يا گيامشناسي و غيره ، دل اساسی را بازي می کند ولی هرگز نمی تواند تنها وسیله برای شناخت پدیده های مورد مطالعه باشد.

روش بررسی و مشاهدات منجمین چگونه است؟ تنها منبع اطلاع از اجسام آسمانی یا کیهانی امواج الکترومagnetیکی است که بوسیله آنها منتشر یا منعکس می شود. ولی در این مورد نیز استثنای وجود دارد: اغلب اجسام آسمانی از خود تابش ایی می کنند که به تابش های کیهانی اولیه موسومند؛ این اشاعه که از هسته عناصر مختلف تشکیل شده اند با سرعت های سرمام آور و فوق العاده زیاد پس از برخورد با مالکولهای جو زمین ذرات جدیدی که به ثانویه موسومند بوجود می آورند. ذرات کیهانی اولیه یا ثانویه به کمک دستگاه های مختلف فیزیکی قابل بررسی می باشند. خورشید نیز ذراتی را که سرعت بسیار زیاد دارند منتشر می سازد. اینها اغلب یونهای یوریزون و کلسیم می باشند که انرژی آنها معمولاً کمتر از انرژی ذرات کیهانی اولیه اند. این اشاعه هنگامی بخصوص قابل بررسی و مشاهده اند که لکه های زیادی در خورشید پیدا می شود. ذراتی را که خورشید منتشر می کند در جو زمین نه و ده می کنند و شفق قطبی و آشتفتگی های مغناطیسی، که به بینظمی میدان مغناطیسی زمین توسط جریان ذرات باردار موسوم است، پدید می آورند. ولی استثنای مذکور، استنتاج کلی مارا تغییر نخواهد داد: کلیه اطلاعات علم جدید از طبیعت اجسام کیهانی براساس

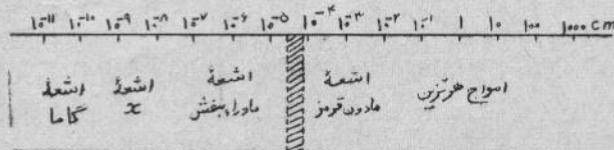
علم نجوم از کهن‌ترین علوم بشری بشمار می رود و یکی از امتیازاتش منشعب شدن آن به رشته های مختلف علم طبیعی است. علم نجوم، یا دانش ستارگان، بر خلاف فیزیک که مبتنی بر تجربه است، بر اساس مشاهده بوجود آمده است. فیزیک، دخالت شدید پژوهندگان را در پدیده مورد مطالعه ایجاد می کند برای روش نمودن خصوصیات یک پدیده ایجاد شرایطی که معمولاً در طبیعت وجود ندارد لازم است.

تا روزی که دست بشر به کرات آسمانی نرسد منجمین نمی توانند مستقیماً به مطالعه و تجربه بر روی اجسام آسمانی بپردازند مگر در درجه مورد استثنایی: نخستین مورد استثنای انجام آزمایش است بر روی اجسام آسمانی که از فضای بین سیارات به زمین افتاده اند مثلاً تعیین ترکیبات شیمیایی و ایزوتوپی سنگهای فضایی. دومین مورد استثنای مربوط به رادیو آسترونومی است و آن از هنگامی بوجود آمده است که امکان فرستادن امواج هر قریب به اجسام آسمانی و دریافت انعکاس آن پیدا شده است.

برای نخستین بار در تاریخ بشریت فاصله زمین تا کره ماه بطور تجربی محاسبه شد (فاصله زمانی که از فرستادن موج هر قریب به کره ماه تا برگشت آن طول می کشد). البته این فاصله را در گذشته به روش مشاهدات نوری بخصوص در موقع خسوف یا کسوف اندازه می گرفتند.

واضح است که مشاهده و دقت در مورد سایر علوم از

(اشعه‌قرمز) قرار دارد. عبارت «امواج الکتروماتیک» تابش‌ایین را بیان می‌کند که طول موج آنها بین صفر و بینهایت است. اشعه با طول موج کمتر از اشعه مرئی به اشعه فوق بنسخ موسوم‌اند و اشعه‌ای که طول موج آنها از طول موج اشعه فوق بنسخ - کمتر است به اشعه معجهول ** (تا ۱۵-۱۰ سانتیمتر) موسوم است. طول موج اشعه‌گاما بسیار بسیار کوچک است. تابش‌ایین که طول موج آنها بیش از اشعه قرمز است مادون قرمز نامیده می‌شود قلمرو اشعه غیر مرئی مادون قرمز (که اشعه‌حرارتی نیز نامیده می‌شوند). تا امواجی به طول موج یک میلیمتر گستردۀ شده است. بالاخره اشعه‌ای که طول موج آنها بلندتر از همه اینها است شامل گام امواج رادیو الکتریک است. کلیه تابش‌ایین که طول موج آنها مترازو از چند میلیمتر است. به قلمرو امواج هر تر تبلق دارند. در شکل (۱) تقسیمات امواج الکتروماتیک را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱- تقسیمات امواج الکتروماتیک. قسمت‌های اشاره شده مربوط به امواج مرئی است.

تا این اواخر، تقریباً کلیه اطلاعات ما از طبیعت و ماهیت اجسام آسمانی بر اثر تجزیه اشعه مرئی بدست آمده بود. چرا آنطور که باید و شاید از سایر اشعه الکتروماتیک استفاده نکرده‌اند.

هر جسم گرم، مثلاً خورشید، مرتبًا تابش‌ای الکتروماتیک با طول موجهای مختلف منتشر می‌سازد. پخش انرژی تابشی با طول موجهای مختلف، یعنی پخش طیف انرژی، فقط بر اثر حرارت جسم منتشر کننده است.

شکل (۲) چگونگی پخش و توزیع طیفی انرژی جسمی را نشان می‌دهد که دمای آن ۶۰۰۰ درجه است. دمای لایه سطحی خودشید، که اشعه آن به ما می‌رسد تقریباً نزدیک به ۶۰۰۰ درجه است. باید در نظر داشت که قسمت اعظم این تابشها از اشعه مرئی تشکیل شده‌اند. دمای لایه سطحی بعضی از ستارگان بین ۴۵۰۰ تا ۱۵۰۰۰ درجه است نتیجه می‌شود که با بررسی نور آنها قسمت اعظم تابش‌ای الکتروماتیک مورد

مطالعه و بررسی امواج الکتروماتیک که بوسیله این اجسام منتشر یا منعکس شده است بدست آمدند.

مطالعه امواج الکتروماتیک آسمانی، اطلاعات ذیقه‌متی در اختیار منجمین می‌گذارد.

منجمین می‌توانند با دقت زیاد محل و نوع حرکت تعداد زیادی از اجسام آسمانی را تعیین نمایند. زیرا جهاتی که به طرف کواكب متوجهند به کمک جهات انتشار امواج الکتروماتیک نظری این کواكب معین شده‌اند. بدون دیدن و مشاهده عینی ستارگان تعیین مکان و حرکت آنها در فضا غیر ممکن است. می‌توان اعتراض کرد که اغلب اجسام آسمانی که مکان و نوع حرکت آنها شناخته شده غیر قابل مشاهده‌اند: این ایراد بحاجت ولی باید گفت که بعضی از این کرات غیر قابل مشاهده بر کرات مجاور خود که قابل مشاهده‌اند تأثیر می‌نمایند مثل مشاهده مستقیم بعضی از اجسام آسمانی نسبتاً کوچک که جرم آنها در حدود جرم مشتری بوده و اطراف چند ستاره نزدیک، می‌چرخدند، غیر ممکن است ولی به کمک قوانین مکانیک آسمانی خصوصیات حرکت این ستارگان مشخص شده است.

منجمین به روش زیر موفق به تعیین ترکیبات شیمیائی لایه‌های فوقانی خورشید، سیارات، و ستارگان شده‌اند. بدون منظور طیف اشعه الکتروماتیکی را که از این اجسام به ما می‌رسد مورد مطالعه قرار می‌دهند. در حقیقت هر خط طیف «ورقة هویت» یک عنصر شیمیایی معین است.

تجزیه طیف نه تنها وجود عنصر غیر مشخص را در جو یک ستاره بلکه خواص آنرا نیز مشخص می‌سازد دما، فشار گاز وجود میدان مغناطیسی و سرعت حرکت وضعی ستاره را به کمک طیف می‌توان تعیین کرد.

یکی از مشخصات مهم یک ستاره، جریان کلی تابش‌ای است که از آن به زمین می‌رسد، شناسایی این جریان در اغلب حالات محاسبه فاصله آن ستاره را از زمین آسان می‌کند. کلیه روشهای مذکور متنهی به تجزیه امواج الکتروماتیکی می‌شود که بوسیله این ستارگان منتشر می‌شود.

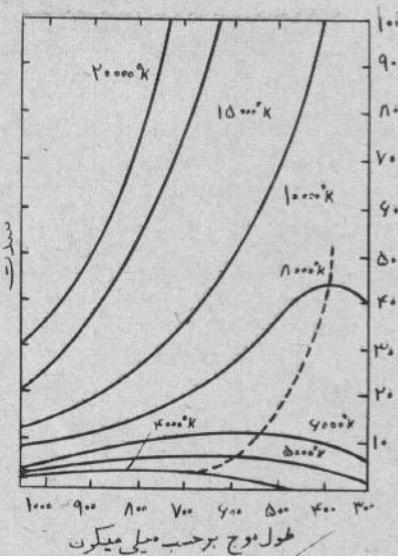
ما در بکار بردن جمله «امواج الکتروماتیک» تعداداریم و نمی‌توانیم در اغلب حالات جای آن را با جمله «امواج نورانی مرئی» عوض کنیم. زیرا امواج مرئی جزئی از طیف امواج الکتروماتیک را تشکیل داده‌اند.

مشخصه اصلی یک اشعه، یعنی طول موج، برای امواج مرئی بین ۴/۰ میکرون (اشعه بنسخ) تا ۷۵/۰ میکرون

تابش‌های فوق بنتش و نیز مادون قرمز غیر قابل روشنند. برای بررسی این اشعه آشکار کننده‌های مخصوصی بکار می‌برند. مثلاً برای آشکارساختن اشعه فوق بنتش از صفحه عکاسی و برای مادون قرمز از سلولهای فتوالکتریک مخصوص استفاده می‌کنند. این آشکار کننده‌ها از زمانی تقریباً جدید در نجوم مورد استفاده واقع شده‌اند: عکس برداری ازاواست قرن گذشته و سلولهای فتوالکتریک از چندسال قبل به این طرف بکار می‌روند بنابراین قبل از شناسایی این آشکار کننده‌ها، امکان بررسی سایر امواج الکترومagnetیک جز اشعة مرئی برای منجمین وجود نداشت. در مورد سوالی که قبل مطرح شد توضیح دیگری نیز لازم است بیان شود. قبل از اختراع نلسکوب، تابش الکترومagnetیک خارج از زمین باستی از جو که «دشمن موروثی» منجمین است عبور کند.

تایکوناختی لایه‌های جو و تغییرات آن در تصویر ستارگان لرزش ایجاد کرده و باعث تغییر دائمی پژوهش‌های منجمین می‌شود، ولی از همه بدتر این است که جو زمین قسمتی از امواج الکترومagnetیک مافوقی زمین را جذب می‌کند این جذب برای امواج مختلف که دارای طول موجه‌ای متفاوتی می‌باشد

یکسان نیست اشعة مرئی کمتر جذب می‌شوند**. بر عکس اشعة مافوق بنتش با طول موج کمتر از 290 میکرون کاملاً توسط جو جذب می‌شوند. بنابراین اشعه فوق بنتش خورشید، ستارگان و سیارات که طول موج آنها از 290 میکرون کمتر باشد هرگز به مانع رسید؛ در حالی که این گام از امواج الکترومagnetیک برای منجمین و فیزیکدانان فایده بخصوصی دارد اخیراً موفق به فرستادن مشکلهایی به مدار مافوق 400 کیلومتری زمین شده‌اند که مجهز به آشکار کننده‌های تابش‌های فوق بنتش هستند برای نخستین بار امواج کوتاه خورشید مورد بررسی قرار گرفت. زیرا در این ارتقای جو زمین بشدت رقیق و قدرت جذب آن خیلی ضعیف است***.



شکل ۲- پخش طیفی انرژی یک جسم ملتکه در دماهای مختلف

مطالعه قرار می‌گیرد. ستارگانی بسیار گرم وجود دارد که دمای سطح خارجی آنها 25000 درجه تا 50000 درجه و حتی تا 100000 درجه است. پس مقدار زیادی از انرژی نشري آنها از اشعه فوق بنتش تشکیل شده است.

شکل (۲) توزیع طیفی انرژی تابشی ستارگانی را نشان می‌دهد که دمای سطح خارجی آنها به ترتیب 100000 و 80000 و 15000 و 20000 درجه است. ستارگانی نیز وجود دارند که دمای سطح خارجی آنها 4000 و 3000 درجه و حتی کمتر است. قسمت اعظم انرژی نشري این گونه ستارگان را اشعه مادون قرمز و قسمت کمی از آن را اشعه مرئی تشکیل می‌دهد. شکل (۲) توزیع طیفی انرژی تابشی ستارگانی را نشان می‌دهد که دمای آنها 5000 و 4000 درجه است*

قسمت اعظم طیف یک ستاره یا یک جسم آسمانی غیرمشخص توسط منجمین قابل بررسی است. ستاره شناسان سعی می‌کنند که قلمرو پژوهش‌های خود را خواه در جوانب امواج بسیار کوتاه یا بسیار بلندتر از اشعه مرئی وسعت دهند.

* بخاراط داشته باشد که تابش ستارگانی که از هم دور افتاده‌اند از قانون که با منحنی شکل (۲) تشریح شده تبعیت می‌نمایند.

** بنابراین باستی میزان جذب را برای مشاهدات نجومی کاملاً مشخص ساخت که آن هم به علت تغییرات سریع

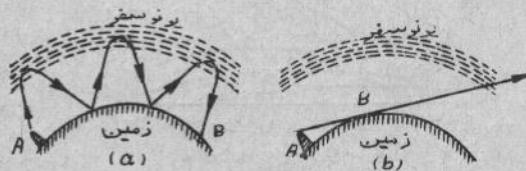
شرایط جوی که بطور تصادفی اتفاق می‌افتد آسان نیست.

*** در این اواخر اقمار مصنوعی که مجهز به دستگاه‌های کامل بودند توسط اتحاد جماهیر شوروی به مدار

1400 کیلومتری، یعنی به مداری که علاوه تأثیر جو ناچیز می‌باشد، فرستاده شدند و تحقیقات نجومی وارد مرحله جدیدی شده است.

فوائل دوره مورد استفاده واقع نمی‌شوند. در این حالت، علامت رادیو الکتریک به سادگی در فضای کیهانی ناپدید می‌شود. به همین علت است که تا امروز امواج تلویزیونی مگر در حدود افق قابل مشاهده فرستاده نمی‌شدند***.

شکل (۴a) انتشار امواج منعکسه بوسیله جو و شکل (۴b) انتشار امواج بسیار کوتاه را که در تلویزیون بکار می‌روند نشان می‌دهد.

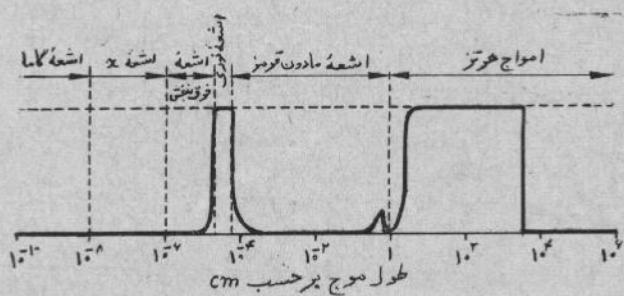


شکل ۴- انتشار امواج کوتاه معمولی (a) و امواج کوتاهی که در تلویزیون بکار می‌رود (b) به طول اجمالی

بنابراین در جو زمین دو «پنجره» شفاف وجود دارد: پنجره نوری که پردازه عبور برای امواج نور مرئی و کمی از اشعه فوق بنفش، که طول موجشان فردیک به امواج نوری، و جزئی از مادون قرمز مجاور به امواج نوری را صادر می‌کند. پنجره دوم یا پنجره رادیوآسترonomیک که برای امواج هرتز کیهانی شفاف می‌باشد. تا این اواخر پنجره دوم مورد استفاده واقع نشده بود و آن دو علت داشت: اول اینکه مقدار انرژی که از پنجره رادیوآسترonomیک به ما می‌رسد خیلی کمتر از مقدار انرژی است که از پنجره نوری به ما می‌رسد. منحنی شکل (۲) نشان می‌دهد که قسمت بزرگ انرژی که توسط ستارگان منتشر می‌شود در ناحیه امواج نور مرئی متمرکز است البته کمی هم در ناحیه فرق بنفش و مادون قرمز نزدیک به مرئی متمرکز است. محاسبه نشان می‌دهد که ستاره‌ای که دمای سطح خارجی آن 550°K درجه باشد جزو بسیار کوچکی از انرژی خود را تحت تشکیل امواج الکترومagnetیک که دارای طول موجی بیش از یک متر باشد می‌فرستد. بنابراین مقدار انرژی که از پنجره رادیوآسترonomیک بهما می‌رسد بسیار کم است. البته نه آنقدر کم که قابل تصور نباشد. دوم اینکه تا این اواخر، جذب و دریافت اشعة هرتز کیهانی بخصوص با حساسیت ضعیف آشکارسازها و آتنهای کوچک جهتیاب بسیار مشکل بود.

البته اگر اشعة هرتز کیهانی به قدر کفايت قوی بودند

اشعة مادون قرمز نیز بخصوص در جایی که بخار آب وجود داشته باشد بشدت جذب جو زمین می‌شود. شکل (۳) درجه شفاقت جو زمین را برای تابشهای با طول موج مختلف نشان می‌دهد. به بیان مجازی و استعاره‌ای، فلک را توسط یک «پنجره شفاف نوری» مشاهده می‌کنیم که منفذ کوچکی در جو ما دارد و تنها اشعة ما فوق زمین که طول موج آنها بین حدود پنجره شفاف و کوچک فوق باشد، برای منجمین و پژوهندگان قابل وصول می‌باشد. با توجه به شکل (۳) مشاهده می‌شود که پنجره شفاف و خیلی بزرگ‌تری نیز در جو ما وجود دارد. در حقیقت جو زمین پردازه عبور برای تابشایی صادر می‌کند که طول موج آنها از $1/25$ سانتیمتر تا $1/35$ متر باشد این پنجره البته در کام امواج هرتز قرار گرفته است. تابشایی که طول موج آنها کمتر از $1/25$ سانتیمتر باشد بوسیله مولکولهای اکسیژن و بخار آب جذب می‌شوند*



شکل ۳- شفاقت جو زمین برای امواج الکترومagnetیک با طول موجهای مختلف. طول موج بر محور طولها نقل شده است و بر محور عرضها درصد انرژی تابشی که از جو عبور می‌کند، برای هنستگامی که زاویه تابش موج الکترومagnetیک صفر درجه است، نقل شده است.

تابشایی که طول موج آنها بیش از $1/35$ متر است بوسیله لایه‌های فوقانی جو که هادی الکترومagnetیک جذب می‌شوند**. البته نمی‌توان طول موجی را مشخص کرد که تابش هر بوط به آن به طور کامل توسط جو جذب می‌شود. این طول موج بحرانی بستگی دارد به زاویه‌ای که تحت آن موج هرتز از جو زمین عبور می‌کند البته حالت فیزیکی جو نیز در این زاویه تأثیر دارد. اشعة با طول موج کمتر از ده متر از جو زمین بدون آنکه جذب شود عبور می‌کند. به همین علت است که این امواج، که در تلویزیون بکار می‌روند، هرگز برای

* بخاطر داشته باشید که جو زمین برای امواج تقریباً 8 میلیمتری نسبتاً شفاف است (شکل ۳ را نگاه کنید)

** باید اضافه کرد که اشعة مافق زمین که طول موج آنها بیش از $1/30$ متر باشد بشدت توسط یونکر (یونسفر) زمین منعکس می‌شوند.

*** فقط چند موج تلویزیونی می‌شناشیم که تا مسافت‌های قابل ملاحظه‌ای فرستاده شدند.

مطالعه اشعه منتشر از اجسام آسمانی در گام امواج هرتز که به معنای حقیقی خود، یعنی علم رادیو آستر و نومی، موسوم است دوم علم رادار آستر و نومی که مبتنی است بر فرستادن علامت رادیو الکتریک به طرف یک جسم آسمانی و دریافت منکسه آن. رادار آستر و نومی برخلاف رادیو آستر و نومی که بر اساس مشاهده می باشد مبتنی بر تجزیه است.

گرچه علم رادار آستر و نومی منجر به یک سری موقفيتهای جالب (از قبیل انعکاس بروی ماه، انعکاس بروی اختران) می شود، امکانات آن محدود است. حتی از نظر صنعتی، تنها اجسام آسمانی منظمه شمسی می توانند موج را دریافت کنند، زیرا ستارگانی که بنظر نزدیک می رستند از نظر ذریافت موج هرگز خیلی دورند. اصول موقفيتهای سالهای اخیر مبتنی بر علم رادیو آستر و نومی است.

آشکار کننده های به همان حساسیت قابل آشکار نمودن آنها بودند.

موقفيتهای جدید را دار به اضافه نمودن حساسیت پستهای آشکار ساز امواج متریک، دسیمتریک و سانیمتریک و تکمیل آنها کمک شایانی نمود. البته با اصلاح این دستگاهها هر چند هم تابش از پنجه رادیو آستر و نومی ضعیف باشد می توان اشعه هرگز کیهانی را دریافت و آشکار نمود.

ما امروز ناظر پیدایش و پیشرفت سریع علم جدید رادیو آستر و نومی و همچنین تلگراف پیشیم می باشیم. این دستگاه که اختراع خارق العاده پویوف دانشمند بزرگ رویی است که مورد استعمال جدید و بسیار مهمی در رادیو آستر و نومی دارد و وسیله بسیار گرانقیمتی است برای مطالعه طبیعت اجسام آسمانی.

امروز رادیو آستر و نومی به دور شته تقسیم شده است: اول

(بقیه از صفحه ۴۹۳)

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = \frac{20}{16} \end{cases}$$

قابل قبول نیست

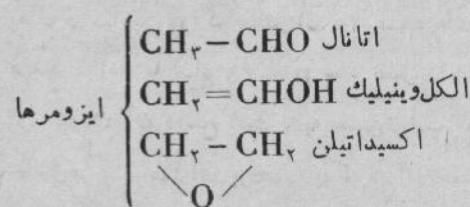
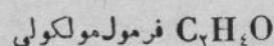
$$\begin{cases} x = 2 \\ z = \frac{9}{8} \end{cases}$$

قابل قبول نیست

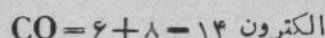
$$\begin{cases} x = 3 \\ z = \frac{17}{16} \end{cases}$$

قابل قبول نیست

$$x = 4$$



چون گاز مجهول با اکسید دوکربن ایزوستر می باشد بنابراین از نظر تعداد الکترون باقی می باشد باشندگان معلوم می شود که گاز مجهول گاز ازت است:



$N_2 = 2 \times 7 = 14$

$$\begin{cases} M' \\ M \end{cases}$$

$M' = 28$ مل گرم گاز مجهول

جرم مولکولی جسم آلی:

$$d = \frac{M}{M'} = \frac{11}{7} = \frac{M}{28} \quad M = 44 \quad \text{گرم}$$

جسم آلی ایزولوگ با اسید استیک است بنابراین در فرمول مولکولی این جسم آلی دو اتم کربن یافته می شود و فرمول مولکولی به صورت $C_xH_xO_2$ نوشته می شود:

$$C_xH_xO_2 = 44$$

$$12 \times 2 + x + 16z = 44$$

$$z = \frac{20 - x}{16}$$

یا

می دانیم که x و z اعداد صحیح هستند و بنابراین خواهیم داشت:

مسائل حل نشده ریاضی

تألیف:

C. STANLEY OGILVY

ترجمه: ع. م.

بخش پنجم - مسائل حساب

بیشتری را بدست خواهیم آورد؟ اگرچنان باشد می‌توانیم با
بزرگ کردن عدد p به هر تعداد که خواسته باشیم عده‌ای اول
را تعیین کنیم. اما متأسفانه اینچنان نیست، با مثالهای متعدد
می‌توان خلاف این موضوع را ثابت کرد. مثلاً در ازاء $p = 7$

$$X = n^2 - n + 7 \quad \text{داریم:}$$

که به ازاء همه مقادیر n کوچکتر از 7 عده‌ای مربوط اول
نیستند مثلاً به ازاء $n=2$ داریم $X=9$ ، معلوم نیست به چه
علت فقط تا $n=p=41$ وقتی که $p=41$ باشد فرمول اذ نوع
فوق الذکر به ازاء همه مقادیر $n < 41$ عده‌ای اول را بدست
می‌دهد.

* * *

ضریبهای عددی بسط $(a+b)^n$ ضریبهای دو جمله‌ای نامیده
می‌شوند، بسط $(a+b)^n$ را در نظر می‌گیریم:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

این فرمول را در $(a+b)$ ضرب می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

برای تعیین قانون تشکیل ضرایب فرض می‌کنیم،
در این صورت حاصل ضرب:

$$(a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

به صورت زیر درمی‌آید:

۱۳۲۱ ×

۱۱

۱۳۲۱

۱۴۶۴۱

این سؤال پیش‌آمده است که چند عدد اول از نوع:

$$\frac{1}{15^n - 1} \quad \text{می‌باشد.}$$

وجود دارد. هر عدد از این نوع از تکرار رقم یک تشکیل شده
است. تاکنون پاسخ پرسش مزبور معین نشده است. فقط معلوم
ساخته‌اند که به ازاء چهار مقدار ۱۹ و ۲۳ و ۲۹ از n عده‌ای
نظیر، اول می‌باشند. این چهار عدد عبارتند از: ۱ و ۱۱ و
۲۳ که از ۱۹ رقم یک و عدد دیگری که از ۲۳ رقم یک
تشکیل می‌شود. نسبت به بقیه مقادیر n هنوز معلوم نیست که
چند عدد اول وجود دارد، البته این احتمال وجود دارد که
تعداد عده‌ای اول از این نوع بینهایت باشد. اما غیر از آنچه
گفته شد در باره عده‌ای مزبور اطلاعات بیشتری بدست نیامده
است.

* * *

فرمول زیر تعدادی عده‌ای اول را بدست می‌دهد:

$$X = n^2 - n + 41$$

به ازاء مقادیر n کوچکتر از 41 عده‌ای نظیر همه اول
هستند. اما به ازاء $n=41$ عدد نظیر $X=41^2$ است که
اول نبودن آن واضح است. به همین ترتیب محقق می‌شود که
حاصل هر چند جمله‌ای بر حسب n که در آن جمله ثابت بزرگتر
از یک باشد حداقل برازء مقادیر n برابر با یک عدد اول است.
در فرمول بالا عدد ثابت 41 و عدد اول بود. اگر
به جای 41 عدد اول بزرگتر از آن انتخاب کنیم چند
جمله‌ای به شکل:

$$X = n^2 - n + p$$

که در آن p عدد اول بزرگتر از 41 باشد آیا عده‌ای اول

طبق قاعدة بالا به سادگی می‌توانیم از روی هر سطر، سطر بعدی را پیدا کنیم.

اگر N عددی بزرگ باشد احتمال اینکه يك عدد صحيح دلخواه $\frac{1}{\text{Log}N}$ «نزد يك به N » عددی اول باشد رفرانی مجانی برابر با فرازدارد.

در ۱۷۴۲ گلدن باخ از اولو تفاضا کرد که نسبت به حکم زیر تحقیق کرده درباره درستی یا نادرستی آن نظر بدهد . این حکم از این قرار است : هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت . مثلا $5 + 3 = 8$ ، برای این مثال یعنی عدد ۸ فقط یک حالت وجود دارد اما برای بعضی عددها چندون حالت وجود دارد . مثلا :

$$48 = 7 + 41 = 11 + 37 = 17 + 31 = 19 + 29$$

اول از اثبات صحت حکم مزبور عاجز ماند و در ضمن نتوانست نمونه های خلاف آنرا ارائه دهد . مسئله گلد باخ همچنان لایات کلیف باقی مانده است .

هر دو عدد اولی که اختلاف آنها ۲ واحد باشد عدد های اول دوقلو نامیده می شوند . مثل ۱۱ و ۱۳ یا ۲۹ و ۳۱ . به نظر می رسد که از این نوع عدها به تعداد بینهایت وجود داشته باشد اما فعلاً غیر از این چیزی نمی توان گفت .

تنهای راه عملی برای تشکیل جدولی از عده های اول از تا N استفاده از «غر بال ار اتسن» می باشد : همه عده های صحیح از ۱ تا N را متواالیاً می نویسند ، مضر بهای ۲ (غیر از ۲) را حذف می کنند ، بعد از آن ، از مضر بهای ۳ (غیر از خود ۳) آنها بای را که حذف نشده است حذف می کنند ، بعد مضر بهای ۵ و همین طور مضر بهای عده های اول بعد از ۵ را متواالیاً حذف می کنند تا آنجا که همه عده های غیر اول از ۱ تا N از غربال خارج شده عده های اول کوچکتر از N باقی بمانند .

در سال ۱۹۵۶ چند نفر از زیاضیده‌گان از جمله اولام غربال دیگری تا اندازه‌ای متفاوت از غربال اراتستن تشکیل داده و جدولی از اعداد به نام « عددهای جلیل » تهیه کردند. در شکل زیر چگونگی تعیین این عدد ها محصور بین ۱ و ۵۰ نموده شده است.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

一九八四·一

一四九四一

15101051

با ادامه عمل می‌توانیم سطوح مختلف هشتم حسابی پاسکال را تراویح کنیم.

11

1 2 1

一三三

一四九四

1010101

1710101017

1 1 1 1 1 1 1 1

هر عدد از جمیع دو عدد فوقانی متوالی خود بدهست می‌آید.
در بررسی عددهای اول به خاصیت جالبی از عددهای
جدول بالا پی برداشت: برای اینکه n همه عددهای سطر n am
(به استثنای اول و آخر) را بشمرد لازم و کافی است که n عددی
اول باشد. این موضوع برای عددهای ۵ و ۷ صدق می‌کند،
هر کدام از آنها بهتر قیب همه عددهای غیر از اول و آخر سطرهای
پنجم و هفتم را می‌شمرند. اما مثلاً برای ۴ یا ۶ این خاصیت
صادق نست.

صحت این موضوع از لحاظ تئوری کامل است اما علاوه بر اشکال مواجه می‌شود زیرا باید سطرهای جدول را برای عده‌های آن را نیز گمراه کرده باشد.

قضیه بالا به عدهای n هر بوط می‌شود که اول هستند.
اما آیا برای آنها که اول نیستند در هر حال صادق است؟ در
سطرهای نقطه عدهای غیر اول n بعضی عدهای بر n قابل قسمت
هستند درحالی که بقیه عدهای سطر مضری از n نمی‌باشند.
این دوسته اعداد را چگونه باید از هم تمیز داد؟ پاسخ به این
درست، حال هنوز معلوم نشده است.

چند عدد اول کوچکتر از عدد مفروض وجود دارد؟ پرسشی است که هنوز کسی توانسته است پاسخ آن را بیابد، و همچنین هنوز توانسته‌اند فرمول منبوط به این پرسش تعیین کنند. از ۱۸۹۶ تاکنون آنچه می‌دانند این است که اگر N عددی به اندازه کافی بزرگ باشد تعداد اعدادی اول کوچکتر از N تقریباً در حدود $\frac{N}{\log N}$ می‌باشد. (مقصود از \log لگاریتم طبیعی، یعنی لگاریتم به مبنای e است). این بدان معنی است که

بعد از ۱ و ۲ عدد های را نگاه می داریم که فقط به یک صورت برابر باشند با مجموع دو عدد قبلی مختلف از رشته . عددی را که می توان به چند نوع بدست آورد طرد می کنیم (مثل ۵) و همچنین بدیهی است عددی را که به هیچ ترتیب نمی توان بدست آورد کنار می گذاریم (مانند ۲۳) . فراوانی مجانی این رشته به چه صورت می باشد ؟

بعضی جفتها عدد های اول چنان هستند که می توان یکی را تصویر دیگری در یک آینه دانست (مثل ۱۳ و ۲۱ یا ۱۲۲۹ و ۹۲۲۱) . در این میان بعضی از آنها هم تصویر خودشان هستند مثل ۱۵۱ آیا از این نوع جفتها هم به تعداد نامحدود وجود دارد ؟ اگرچنین است فراوانی مجانی آنها چیست ؟

برای تبدیل $\frac{1}{13}$ به کسر اعشاری لازم است که یک را بر ۱۳ تقسیم کرد :

۱۰	۱۳
۱۰۰	۰۱
۹۰	۰۰۷
۱۲۰	۶
۳۰	۹
۴۰	۲
۱	۳
...	

کسر اعشاری حاصل مقنایب است و دوره تناوب آن ۶ رقمی است . زیرا در رشته باقیمانده های جزئی :
 $(1, 10, 9, 12, 3, 4)$

با زمین باقیمانده یک بدست آمد و در نتیجه بقیه باقیمانده ها هم به ترتیب تکرار می شوند . در تقسیم فوق تعداد باقیمانده های جزئی که تکرار می شوند برابر با ۶ است ، ممکن بود که غیر از این باشد اما مسلماً تعداد باقیمانده های جزئی از عدد ۱۳ کوچکتر خواهد بود . بطور کلی کسر اعشاری متناوبی

که از یک کسر $\frac{1}{n}$ نتیجه می شود حداقل می تواند دوره تناوبی با $n - 1$ رقم داشته باشد . وقتی که اولین باقیمانده تکرار شد ارقام خارج قسمت تکرار می شوند .

مسئله ای به شرح زیر را مطرح می کنیم . آیا عددی مانند

وجوه هارد که معکوس آن یعنی $\frac{1}{n}$ مبدل کسر اعشاری بقیه پائین صفحه ۴۷۷

طرز عمل از این قرار است : ابتدا از یک عدد هارا دو به دو شمرده طرد می کنیم که در نتیجه همه عدد های زوج حذف می شوند ، زیرا این عدد ها که در دفعه اول حذف شده اند یک خط رسم کرده ایم . اولین عدد حذف نشده (غیر از یک) عدد ۳ است ، از یک شروع کرده عدد های حذف نشده را ۳ به ۳ شمرده حذف می کنیم عدد هایی که باین وسیله حذف شده اند با دو خط مشخص کرده ایم . اولین عدد حذف نشده (غیر از یک) عدد ۷ است پس عدد های باقیمانده را ۷ به ۷ شمرده کنار می گذاریم . این عدد ها را با ۳ خط متغیر ساخته ایم . عمل را به همین ترتیب ادامه می دهیم عدد های باقیمانده یعنی ۱ ، ۳ ، ۹ ، ۱۲ ، ۳ ، ۱۳ و غیره عدد های جلیل می باشند .

بسیاری از خواص من بوط به عدد های اول درباره عدد های جلیل

محقق هی باشد . مثل فراوانی مجانی حول $\frac{1}{\log N}$ بسیاری هر دورشته یکی است : توزیع عدد های دو قلوی اول و دو قلوی جلیل تا عدد :

$$n = 100000$$

کاملاً مشابه است . همچنین معلوم شده است که تا :

$$n = 100000$$

هر عدد زوج برابر است با حداقل مجموع دو عدد جلیل .

این ملاحظات مسئله عدد های اول را از دید تازه ای مطرح ساخت . خواص جالبی که تا کنون تصور می شد خاص عدد های اول است و اکنون درباره عدد های جلیل هم صدق می کرد مجدداً عدد های اول را هم از لحاظ جالب بودن آنها وهم از لحاظ اهمیتی که دارند مورد توجه قرارداد . اگر خواص عدد های اول ناشی از آنست که آنها از نوعی غربال کردن اعداد بدست می آیند و همین خواص برای عدد های دیگری هم حقیقت دارد که آنها هم از همین راه حاصل می شوند اما اول نیستند ، در این صورت می توان گفت که بسیاری از محققین از مسیر صحیح منحرف شده اند . نقشی که اعداد اول در مجموعه اعداد صحیح ایفا می کنند انکار ناپذیر است ، بسیاری از تئوریهای ارزش نده وهم بمالحظات من بوط به اعداد اول بناسه اند . اما با وجود این ، یک قله تا زمانی رفیعت رین قلل بحساب می آید که قله ای مرتفع از آن کشف نشده باشد .

رشته اعداد :

$$10, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26 \dots$$

نیز توجه اولام را به خود جلب کرد . این رشته اعداد طبق قاعدة زیر تشکیل می شود : رشته اعداد طبیعی را در نظر می گینیم ،

حرکت پرتابی*

۴۰

ترجمه: هوشمنگ شریفهزاده

$$T = \frac{2u \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$$

مُؤلفه افقی سرعت در تمام مدت پرواز ثابت و برابر است و مسافت $PN = u \cos \alpha$ است با :

$$\frac{2u' \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{g \cos \beta}$$

وچون $PQ = \frac{PN}{\cos \beta}$ است، برد گلوله بر سطح شیبدار :

$$(1) \quad PQ = \frac{2u' \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{g \cos^2 \beta} = \text{برد گلوله}$$

حداکثر برد گلوله به ازای مقدار معینی از u و β چنین بدست می‌آید :

$$(2) \quad R = \frac{2u' \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{g \cos^2 \beta} \\ = \frac{u'}{g \cos^2 \beta} [\sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta]$$

چون β و u' مقادیر معینی هستند، جمله خارج از کروشه یعنی

برد پرتابی بر سطح شیبدار :

فرض می‌کنیم که گلوله‌ای با زاویه α نسبت به افق، از نقطه P واقع بر سطح شیبداری که زاویه آن با افق برابر β است چنان پرتاب شود که امتداد پرتاب در سطح قائمی باشد که مدار بر PQ خط بزرگترین شب

سطح شیبدار است. فرض می‌کنیم که برد گلوله PQ و ارتفاع QN از صفحه افقی که از P می‌گذرد برابر PN باشد.

را بذست آوریم، مُؤلفه حرکت را در امتداد عمود بر سطح شیبدار در نظر می‌گیریم.

مُؤلفه سرعت اولیه در امتداد عمود بر سطح شیبدار:

$u \sin(\alpha - \beta) - g \cos \beta$ است. در این امتداد شتاب برابر است با

اگر مدت زمان پرواز T باشد می‌توان نوشت :

$$u \sin(\alpha - \beta) \cdot T - \frac{1}{2} g \cos \beta \cdot T^2 = 0$$

* ۱- نامه‌هایی از خوانندگان مجله یکان دریافت شده است که ضمن اشاره به مقالاتی که تحت عنوان درسی از فیزیک و مکانیک در شماره‌های اخیر این مجله درج شده است، حل بعضی از تمرینها را خواسته‌اند. تعداد این گونه تمرینها زیاد است و حل آنها جای زیادی را در مجله اشغال می‌کند و بعلاوه حل بسیاری از آنها در یک کتاب تألیف شده و تا اواسط اردیبهشت‌ماه ۴۷ منتشر خواهد شد، به این دلایل از درج آنها در مجله یکان خودداری می‌شود. بعلاوه این تمرینها به این منظور نوشته شده که خوانندگو خود با توجه به حل مسائل نموده به حل آنها پردازد.

۲- نامه‌های متعدد دیگری از خوانندگان یکان دریافت شده است که ضمن آن خواسته‌اند تا مقالاتی درباره قوانین هاریوت، گیلوساک، ماشینهای ساده و قرقه‌های مرگ و تعادل های عیات در مجله یکان درج شود. مقالاتی در این زمینه تهیه شده است و بتدریج در مجله یکان درج خواهد شد.

ممکن است زاویه پرتاب را نسبت به سطح شیدار بسنجیم در ضمن حل مسائل باید توجه داشت که کدامیک از زوایا معلوم است.

اگر θ زاویه امتداد پرتاب با خط بزرگترین شب سطح شیدار باشد، مؤلفه‌های سرعت اولیه در امتداد عمود بر سطح شیدار $u \sin \theta$ و در امتداد موازی با سطح شیدار $u \cos \theta$ است.

مدت زمان پرواز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$u \sin \theta \cdot T - \frac{1}{2} g u \cos \theta \cdot T^2 = 0$$

در نتیجه:

$$(4) \quad T = \frac{2u \sin \theta}{g \cos \theta}$$

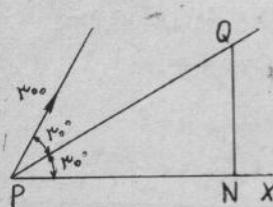
با توجه به اینکه مؤلفه افقی سرعت $u \cos(\beta + \theta)$ است یا با توجه به مؤلفه حرکت در امتداد سطح شیدار می‌توان برد گلوله را تعیین کرد.

در مدت T گلوله مسافت (R) را در امتداد سطح شیدار می‌پیماید. پس:

$$(5) \quad R = u \cos \theta \cdot T - \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot T^2$$

روابط (4) و (5) برای حل مسائلی که در آن تعیین مدت زمان پرواز برای برد معینی مورد نظر است بسیار مفیدی باشد از این دو معادله بسادگی می‌توان θ را حذف کرد.

مثال ۱ از پایین سطح شیداری که زاویه آن بالا قرار



درجه است، گلوله‌ای با سرعت ۳۰۰ و با زاویه ۶۰ درجه نسبت به افق به طرف بالا پرتاب شده است. برد گلوله را بر سطح شیدار و مدت زمان پرواز را تعیین کنید: $g = 10 \text{ m/s}^2$

حل - فرض می‌کنیم که PQ معرف سطح شیدار باشد و نقطه‌ای باشد که گلوله به سطح شیدار می‌رسد. مؤلفه سرعت اولیه در امتداد عمود بر سطح شیدار:

$$300 \sin 30^\circ = 150 \text{ m/s}$$

است. شتاب حرکت در امتداد عمود بر سطح شیدار:

$$g \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} g = 5\sqrt{3} \text{ m/s}^2$$

$\frac{u^2}{g \cos^2 \theta}$ مقداری است ثابت.

و R هنگامی ماکزیم می‌شود که عبارت داخل کروشه ماکزیم شود، و این عبارت نهض هنگامی ماکزیم می‌شود که:

$$\sin(2\alpha - \beta)$$

ماکزیم شود، یعنی $\frac{\pi}{4} - \beta = 2\alpha$ شود.

بنابراین برای $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ برد گلوله ماکزیم است.

α هنگامی دارای این مقدار است که:

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

باشد. یعنی امتداد پرتاب نیمساز زاویه بین امتداد سطح شیدار و امتداد قائم باشد.

ماکزیم برد برابر است با:

$$(3) \quad \frac{u^2}{g \cos^2 \theta} (1 - \sin \beta) = \frac{u^2}{g (1 + \sin \beta)}$$

از رابطه (2) برای برد معین (غیر از برد ماکزیم) با سرعت پرتاب معین، مقدار $(\beta - 2\alpha) \sin$ بدست می‌آید.

برای سینوس معینی دوزاویه کمتر از ۱۸۰ درجه وجود دارد، بنابراین برای زاویه $\beta - 2\alpha$ دومقدار بدست می‌آید.

اگر θ یکی از آن دومقدار باشد، دیگری $\theta - \pi$ است.

$$2\alpha - \beta = \theta$$

پس

$$\alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{\beta}{2}$$

یا

$$2\alpha - \beta = \pi - \theta$$

و

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\theta}{2}$$

یا

پس برای یک برد معین دوزاویه پرتاب وجود دارد. زاویه پرتاب برای برد ماکزیم برابر است با:

$$\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\beta}{2}\right)$$

و نیز:

$$\frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$$

یعنی امتداد پرتاب برای برد ماکزیم نیمساز دو امتداد پرتاب برای برد معین است.

در فوق امتداد پرتاب را بر حسب زاویه‌ای که با امتداد افقی می‌سازد بیان کردیم.

$$R = \frac{160 \times 1/4 \times 0/258}{3} = 19/2 \text{ m}$$

ب - مؤلفه سرعت اولیه در امتداد عمود بر سطح شیبدار:
 $20 \sin 75^\circ$

است .

مدت زمان پرواز t ثانیه است بطوری که :

$$20 \sin 75^\circ - \frac{5\sqrt{2}}{2} t = 0 \Rightarrow t = \frac{40 \sin 75^\circ}{5\sqrt{2}}$$

$$t = 8 \times \frac{0/966}{1/73} \neq 4/28$$

مؤلفه افقی سرعت $20 \cos 45^\circ = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$ است
 و فاصله‌ای که گلوله در مدت زمان t به موازات سطح افقی
 طی می‌کند :

$$\frac{8 \sin 75^\circ}{\sqrt{3}} \times 10\sqrt{2} \text{ m}$$

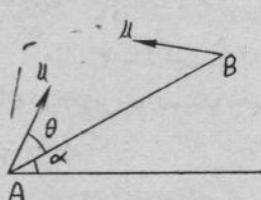
بنابراین برد گلوله بر سطح شیبدار :

$$R = \frac{8 \sin 75^\circ}{\sqrt{3}} \times \frac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{160 \times 1/4 \times 0/966}{3}$$

$$R \neq 72 \text{ m}$$

مثال ۳ - ثابت کنید که بازای سرعت پرتاب معینی، برد
 پرتاب بر سطح شیبداری که با افق زاویه α می‌سازد، بطرف پایین
 $\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$ برابر برد پرتاب براین سطح بطرف بالاست.

حل - فرض می‌کنیم u سرعت پرتاب و θ زاویه امتداد



پرتاب با امتداد سطح شیبدار
 باشد . وقتی که گلوله از
 بطرف بالا پرتاب می‌شود ،
 مدت زمان پرواز از رابطه زیر
 بدست می‌آید :

$$u \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2$$

$$t = \frac{2u \sin \theta}{g \cos \alpha}$$

۴ مدت زمان پرواز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$150t - \frac{1}{2} \times 5\sqrt{3} t^2 = 0$$

$$t = \frac{300}{5\sqrt{3}} = 20\sqrt{3} \approx 34.64$$

مسافتی که در این مدت زمان گلوله به موازات امتداد افقی طی
 می‌کند برابر است با :

$$PN = 20\sqrt{3} \times 150 = 3000\sqrt{3} \text{ m}$$

بنابراین برد گلوله بر سطح شیبدار :

$$PQ = \frac{PN}{\cos 30^\circ} = \frac{3000\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 6000 \text{ m}$$

مثال ۴ - گلوله‌ای با سرعت 20 m/s و با زاویه 45°
 درجه پرتاب می‌شود. برد این گلوله را بر سطح شیبداری که
 زاویه آن با افق 30° درجه است در دو حالت زیر پیدا کنید :

الف - گلوله بطرف بالای سطح شیبدار پرتاب می‌شود.
 بد - گلوله بطرف پایین سطح شیبدار پرتاب می‌شود.
 $(g = 10 \text{ m/s}^2)$

حل - الف - مؤلفه سرعت اولیه در امتداد عمود بر سطح
 شیبدار برابر است با :

$$20 \sin 15^\circ \text{ m/s}$$

مؤلفه شتاب در امتداد عمود بر سطح شیبدار :

$$g \cos 30^\circ = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ m/s}^2$$

است .

مدت زمان پرواز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$20 \sin 15^\circ t - \frac{5\sqrt{3}}{2} t^2 = 0$$

در نتیجه :

$$t = \frac{40 \sin 15^\circ}{5\sqrt{3}} = 8 \times \frac{0/258}{1/73} \neq 1/28$$

مؤلفه افقی سرعت $20 \cos 45^\circ = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$ است.

مسافتی که گلوله در مدت $\frac{8 \sin 15^\circ}{\sqrt{3}}$ ثانیه به موازات امتداد

$$10\sqrt{2} \times \frac{8 \sin 15^\circ}{\sqrt{3}}$$

بنابراین برد گلوله بر سطح شیبدار برابر است با :

$$R = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 8 \sin 15^\circ \times \frac{1}{\cos 30^\circ}$$

$$= \frac{160\sqrt{2}}{3} \times \sin 15^\circ$$

و مدت زمان پرواز برابر است با t که از رابطه زیر بدست می آید.

$$(1) \quad V \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2 = 0$$

مُولفه سرعت اولیه در امتداد موازی با سطح شیبدار $V \cos \theta$ و شتاب به طرف پایین سطح $g \sin \alpha$ است، بر دگله از زمان t از رابطه زیر بدست می آید :

$$(2) \quad R = V \cos \theta \cdot t - \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$

از (1) و (2) نتیجه می شود .

$$V \sin \theta \cdot t = \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2$$

$$V \cos \theta \cdot t = R + \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$

دورابطه بالا را مرتب کرده باهم جمع می کنیم :

$$V^* t^* = R^* + g R \sin \alpha \cdot t^* + \frac{g^*}{4} t^4$$

$$\frac{g^*}{4} t^4 + t^* (g R \sin \alpha - V^*) + R^* = 0$$

اگر t_1^* و t_2^* ریشه های این معادله دوم جذوری باشند ،

$$t_1^* + t_2^* = - \frac{4R}{g} \sin \alpha + \frac{4V^*}{g^*}$$

$$t_1^* t_2^* = \frac{4R^*}{g^*} \Rightarrow t_1^* t_2^* = \frac{4R}{g}$$

بنابراین :

$$t_1^* + t_2^* + 2t_1^* t_2^* \sin \alpha = \frac{4V^*}{g^*}$$

این رابطه مستقل از α است ،

مثال ۵ - از پایین سطح شیبداری که بالاف زاویه β می سازد گله ای بطرف بالاچنان پرتاب می شود که امتداد پرتاب با امتداد سطح شیبدار زاویه ای برابر α می سازد . ثابت کنید که بر دگله برای این سطح برابر است با :

$$R = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\cos \beta}$$

که در آن R بر دهان گله بسطح افقی است ، هنگامی که گله برای این سرعت و زاویه α نسبت به سطح افقی پرتاب شود ،

حل - (بطور خلاصه) با توجه به حل مسائل قبلی ، بر د

گله برای این سطح :

$$R' = \frac{2u^* \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{g \cos^* \beta}$$

بر دگله بطرف بالا برابر است با :

$$R_1 = \frac{2u \sin \theta}{g \cos \alpha} \times u \cos(\theta + \alpha) \frac{1}{\cos \alpha} = \\ = \frac{2u^*}{g} \times \frac{\sin \theta \cos(\theta + \alpha)}{\cos^* \alpha} = \\ = \frac{u^*}{g \cos^* \alpha} [\sin(2\theta + \alpha) - \sin \alpha]$$

هنگامی ماکزیمم می شود که :

$$\sin(2\theta + \alpha) = 1$$

شود در این صورت :

$$= \frac{u^*}{g \cos^* \alpha} (1 - \sin \alpha) \quad \text{بر د}$$

هنگامی که گله از B با همان زاویه بطرف پایین پرتاب می شود ،

مدت زمان پرواز همان مقدار قبلی یعنی $\frac{2u \sin \theta}{g \cos \alpha}$ است . اما مُولفه

افقی سرعت $(u \cos(\theta - \alpha))$ است ، بنابراین مسافتی که در مدت زمان

$$\frac{2u \sin \theta}{g \cos \alpha} \quad \text{طبی می شود برابر :}$$

$$\frac{2u^* \sin \theta \cos(\theta - \alpha)}{g \cos \alpha}$$

و بر دگله برابر است با :

$$R_2 = \frac{2u^* \sin \theta \cos(\theta - \alpha)}{g \cos^* \alpha} =$$

$$= \frac{u^*}{g \cos^* \alpha} [\sin(2\theta - \alpha) + \sin \alpha]$$

هنگامی ماکزیمم است که $\sin(2\theta - \alpha) = 1$ شود . در این

صورت :

$$= \frac{u^*}{g \cos^* \alpha} (1 + \sin \alpha) \quad \text{بر د}$$

بنابراین نسبت این دو بر د ماکزیمم برابر است با $\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$

مثال ۶ - اگر t_1 و t_2 کوتاه ترین و دراز ترین مدت

زمان پرواز برای رسیدن به بر د معینی بریک سطح شیبدار باشد

ثابت کنید که :

$$t_1^* + t_2^* + 2t_1^* t_2^* \sin \alpha$$

مقداری است ثابت و مستقل از α زاویه سطح شیبدار است با افق ، سرعت پرتاب معلوم است .

حل - فرض می کنیم که V سرعت پرتاب و θ زاویه پرتاب نسبت به سطح شیبدار باشد .

مُولفه سرعت اولیه در امتداد عمود بر سطح شیبدار $V \sin \theta$

و برد گلوله بر سطح افقی وقتی که با زاویه α نسبت به افق پرتاب شود:

$$R = \frac{V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$R' = R \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\cos \beta}$$

تمرین

۱- از نقطه‌ای واقع بر سطح شیداری که با قائم زاویه β درجه می‌سازد، گلوله سنگینی طرف بالای سطح شیدار پرتاب می‌شود. حرکت در صفحه قائم خط بزرگترین شب سطح شیدار انجام می‌گیرد. سرعت اولیه پرتاب برابر $V \cos \beta$ است و وجهت اولیه حرکت با امتداد قائم زاویه β می‌سازد. ثابت کنید که مدت زمان

$$\text{پرواز گلوله } \frac{u}{g}, \text{ برد گلوله } \frac{u^2}{2g} \text{ و سرعت گلوله هنگام برخورد با سطح شیدار } u \sin \beta \text{ و امتداد حرکت در این هنگام افقی است.}$$

۲- گلوله‌ای با سرعت V چنان پرتاب می‌شود که امتداد حرکت آن، هنگام برخورد با سطح شیداری که با امتداد افقی زاویه 30° درجه می‌سازد، عمود بر سطح شیدار باشد. ثابت کنید که

$$\text{برد گلوله براین سطح برابر است با } \frac{4V^2}{7g}$$

۳- در صفحه قائم خط بزرگترین شب سطح شیداری که با افق زاویه α می‌سازد، گلوله‌ای با سرعت V و با زاویه پرتاب $\alpha + \theta$ پرتاب می‌شود. برد گلوله براین سطح چقدر است؟ اگر امتداد حرکت گلوله هنگام برخورد به سطح شیدار افقی باشد، ثابت کنید که

$$\tan \theta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$$

۴- دو سطح شیدار A و B در دارای بال مشترک می‌باشند. از B گلوله‌ای طرف بالا پرتاب می‌شود بطوری که درست از A و C می‌گذرد. حرکت در صفحه قائمی که خطوط بزرگترین شب شیدار را در بردارد برداشت زمان پرواز افزایی سطح شیدار با افق به ترتیب α و β وزاویه پرتاب θ باشد، ثابت کنید که:

$$\tan \theta = \tan \alpha + \tan \beta$$

۵- بر سطح شیداری که زاویه آن با افق برابر α است گلوله‌ای با سرعت V پرتاب می‌شود. ثابت کنید که برد ماکریم گلوله براین سطح $R = \frac{V^2}{g} \times \frac{1}{1 + \sin \alpha}$ است.

پائین صفحه بعد

۶- حداکثر برد افقی گلوله‌ای که با سرعت معین پرتاب می‌شود برابر 3000 متر است. حداکثر برد این گلوله بطرف بالا و نیز بطرف پائین سطح شیداری که با افق زاویه 30° درجه می‌سازد چقدر است؟ سرعت گلوله به همان اندازه قبلي است.

جواب: 2000 متر، 6000 متر

۷- اگر حداکثر برد گلوله‌ای برابر سطح شیدار برابر R و مدت زمان پرواز برای رسیدن به این برد برابر T باشد، ثابت کنید که:

$$R = \frac{1}{4} g T^2$$

۸- گلوله‌ای با سرعت 100 m/s و با انحراف 60° درجه از پائین سطح شیداری که زاویه شب آن 30° درجه است پرتاب می‌شود. حرکت در صفحه قائمی انجام می‌گیرد که خط بزرگترین شب سطح شیدار را در بردارد. برد گلوله و نیز مدت زمان پرواز را پیدا کنید.

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

۹- گلوله‌ای با سرعت 392 m/s و با انحراف 75° پرتاب می‌شود. برد گلوله را بر سطح شیداری که با افق زاویه 45° درجه می‌سازد در دو حالت پیدا کنید:

الف- گلوله بطرف بالای سطح شیدار پرتاب می‌شود:

ب- گلوله بطرف پائین سطح شیدار پرتاب می‌شود.

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

جواب: تقریباً 8 کیلومتر، تقریباً 14 کیلومتر

اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از: مهندس ایرج ارشاقی

۱۳. الکتریسیته ساکن

STATIC ELECTRICITY

ELECTROSCOPE	الکتروسکوپ
INSULATOR	عایق
CONDUCTOR	هادی
FRICTION	اصطکاک
REPEL	دفع کردن
ATTRACT	جذب کردن
CONDENSER	خازن
INDUCTION	القاء

PRACTICE YOUR READING

Electricity is of two kinds, positive and negative. Like charges repel; unlike charges attract.

The electric charge resides on the outside of a conductor. It has its greatest density where the curvature is greatest.

۱۴. الکتریسیته

CURRENT

DIFFERENCE OF POTENTIAL

RESISTANCE	مقاومت
SPECIFIC RESISTANCE	مقاومت مخصوص
OPEN CIRCUIT	مدار باز
TRANSFORMER	مبدل
ELECTRIC FIELD	میدان الکتریکی
COIL	سیم پیچ
SERIES GROUPING	بهم بستن بطور متواالی
PARALLEL GROUPING	موازی
INTERNAL RESISTANCE	مقاومت داخلی

PROBLEMS

An electric current of one ampere will deposit 0.001118 g. of silver per second. If 0.5 g. of silver were deposited in 5 min., what was the strength of the current?

The heating coils of an electric ironer use 6 amperes on a 220 - volt circuit. What is the resistance?

بقیه از صفحه قبل

شیب صفحه را ذر بردارد . ثابت کنید که زاویه‌ای که گلوله آن دوباره به سطح برخورد می‌کند برابر φ است بطوری که:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg} \theta}{3 - \operatorname{tg} \theta}$$

گلوله را با چه زاویه‌ای پرتاب کنیم تا هنگامی که دوباره به سطح برخوردمی کند، حرکتش در امتداد افقی باشد.

جواب : $\operatorname{Arctg} 2$

همچنین ثابت کنید که پس از مدت زمانی برابر $\frac{2}{3}$ مدت

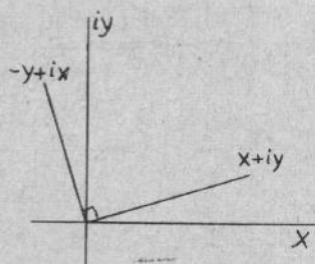
زمان پرواز، فاصله قائم گلوله از سطح برابر است با $\frac{2R}{9}$

۱۲ - از نقطه‌ای واقع بر سطح شیبداری که زاویه آن با افق برابر ۴۵ درجه است، گلوله‌ای با زاویه θ پرتاب می‌شود، مسیر حرکت در صفحه قائمی است که خط بزرگترین

حل مسائل هندسه به کمک اعداد مختلط

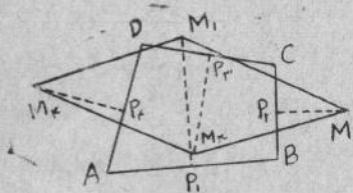
ترجمه: احمد قاضی‌زاده

دانشجوی رشته ریاضی دانشسرای عالی تهران



با استدلالی مشابه ثابت می‌شود که ω^2 با $P(\omega)$ زاویه 230° درجهت مثلثاتی می‌سازد.
با توجه به کیفیات اخیر و اینکه $\omega^3 = 1$

$\omega + \omega^2 = 0$ است ذیلاً به حل مسائل می‌پردازیم:
قضیه ۱ - درجهارضلی (محدب یا مقعر) اگر عمودمنصفهای اضلاع AB و DC را متقابل طرف داخل سطح چهارضلعی و عمودمنصفهای AD و BC ممتند به طرف خارج سطح



چهارضلعی رسم کنیم و روی این چهار عمودمنصف طولهای متناسب با اضلاع مرتبه جدای کنیم چهار نقطه‌ای که به این ترتیب حاصل می‌شوند رأسهای یک متوازی الاضلاع اند.

حالات خاص: اگر در یک چهارضلعی اوساط اضلاع را بهم وصل کنیم شکل حاصل متوازی الاضلاع خواهد بود.
برهان: اگر

$$DA = s, CD = r, BC = q, AB = p$$

باشد خواهیم داشت:

$$P_1M_1 = KPi, P_2M_2 = -Kqi, P_3M_3 = Kri \quad \text{و} \quad P_4M_4 = -KSi$$

عدد ثابت دلخواهی است (K)

باد نظر گرفتن مسیر $AP_1M_1M_2P_2A$ خواهیم داشت:

$$\frac{P}{2} + KPi + M_1M_2 + Kqi + \frac{S}{2} = 0$$

واز آنجا

$$M_1M_2 = \frac{P}{2} + \frac{S}{2} + KPi + Kqi$$

$$*\sqrt[2]{1} = \sqrt{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2K\pi}{3} + i \sin \frac{2K\pi}{3}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \omega \quad \text{و} \quad x_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2$$

از مجله: The Mathematics teacher

نوشته: B. J. Garfunkel

در ریاضیات همواره سعی برای حل مسائل که نه راه حلها نوینی پیدا کنند و مسائل جدید را به راه حلها قدیمی حل کنند امادر بعضی موارد لازم می‌آید مسائل قدیمی را با همان روش قدیمی حل کنند. تقریباً مدل سال پیش C.A.Lalant و سایر ریاضیدانان آن عصر به روش نمایش برداری در صفحه گوس (صفحه‌ای که اعداد مختلط در آن نموده می‌شود) به حل مسائل بخصوصی در هندسه مسطحه مبادرت ورزیدند. در این مقاله ضمن مقدماتی به یادآوری این روش برای حل چند مسئله می‌پردازیم.

اگر \vec{P} پاره خط جهت داری در صفحه گوس باشد که آنرا با P نمایش می‌دهیم: $\vec{P} = pi$ یا P نمایش همان پاره خط است هنگامی که P باندازه 90° درجه درجهت مثلثاتی (خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) دوران کند زیرا:

$$P = x + yi \Rightarrow Pi = -y + xi$$

و حاصل ضرب شبیهای خطوط P و Pi برای خواهد بود.

$$\left(\frac{y}{x} \right) \left(-\frac{x}{y} \right) = -1$$

به عنین طریق اگر ω و ω^2 دوریشه از دیشهای سوم واحد

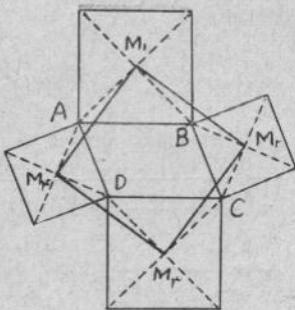
باشد $* P(\omega)$ و $P(\omega^2)$ نمایش دوران یافته P باندازه های 120° و 240° درجهت مثلثاتی خواهد بود زیرا:

$$P = x + yi \Rightarrow$$

$$P(\omega) = -\frac{1}{2}(x + y\sqrt{3}) + \frac{i(x\sqrt{3} - y)}{2}$$

و اگر زاویه بین P و $P(\omega)$ را θ فرمی کنیم طبق فرمول زیر

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$



مربعها خود رأسهای یک مربع می باشند (اثبات این قضیه به راههای دیگر بی اندازه طولانی است) .

برهان : فرض می کنیم که :
 $CB = DA = q$ ، $DC = AB = P$

بنابراین :

$$DM_1 = \frac{P}{2} - \frac{P}{2}i , \quad CM_1 = -\frac{P}{2} - \frac{P}{2}i$$

$$CM_2 = \frac{q}{2} - \frac{q}{2}i , \quad BM_2 = -\frac{q}{2} - \frac{q}{2}i$$

$$AM_1 = \frac{P}{2} + \frac{P}{2}i , \quad BM_1 = -\frac{P}{2} + \frac{P}{2}i$$

$$M_1 M_2 = \frac{P+q}{2} + \frac{P-q}{2}i$$

$$M_1 M_1 = \frac{-P+q}{2} + \frac{P+q}{2}$$

بنابراین :

$$M_1 M_2 = M_1 M_1 \quad \text{و} \quad (M_1 M_2)i = M_1 M_1$$

و در نتیجه : $M_1 M_2 \perp M_1 M_1$

به همین طریق می توان نشان داد که

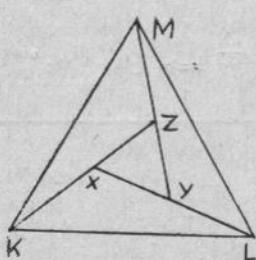
$$M_1 M_3 \perp M_3 M_2 \quad \text{و} \quad M_1 M_3 = M_3 M_2$$

قضیه اثبات می کردد .

با این روش بسیاری از مسائل جالب هندسه به کمک اعداد مختلف قابل حل می باشند .

تمرين

مسئله ۱ - ثابت کنید که اقطار یک مربع برحهم عمودند .



مسئله ۲ - در شکل مقابله مثلث XYZ متساوی الاضلاع بوده و

$$XK = YL = ZM$$

می باشد . ثابت کنید که مثلث KLM متساوی الاضلاع است .

دنباله پائین صفحه ۴۴۳

با در نظر گرفتن مسیر $P_2 C P_2 M_2 M_3 P_3$ خواهیم داشت :

$$\frac{q}{2} + \frac{r}{2} + Kqi + M_2 M_3 + kri = 0$$

وازان رو

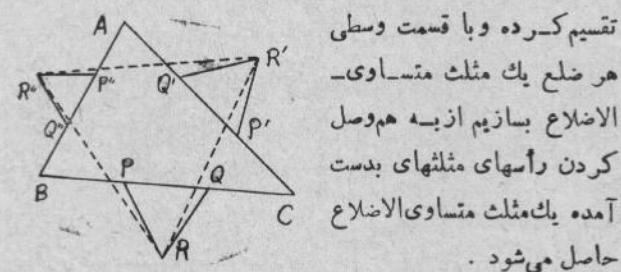
$$M_2 M_3 = -\frac{q}{2} - \frac{r}{2} - Kqi - Kri$$

$$M_2 M_1 = M_2 M_3 + p + q + r + s = 0 \quad \text{داریم :}$$

وقصیه اثبات می گردد .

قصیه ای که در زیر بیان می شود منسوب به ناپلئون بنیارت می باشد .

قضیه ۳ - اگر هر ضلع یک مثلث را به سه قسمت متساوی



تقسیم کرده و با قسمت وسطی هر ضلع یک مثلث متساوی - الاضلاع بسازیم از میمه هم وصل کردن رأسهای مثلثهای بدست آمده یک مثلث متساوی الاضلاع حاصل می شود .

اگر P ، Q ، R ، P' ، Q' و R'' نقاطی باشند که اضلاع AB و CA و BC را به ترتیب به سه قسمت متساوی تقسیم کرده باشند و مثلثهای PQR و $P'Q'R'$ و $RR'R''$ متساوی الاضلاع باشند باید ثابت کنیم که مثلث $RR'R''$ نیز متساوی الاضلاع است .

برهان : با فرض $CA = q$ ، $BC = P$ و $AB = p + q$ خواهیم داشت :

$$RR' = -\frac{p}{3}\omega^i + \frac{p+q}{3} - \frac{q}{3}\omega$$

$$R'R'' = -\frac{q}{3}\omega^i + \frac{q}{3} - \frac{p}{3} - \frac{q}{3} + \frac{(p+q)\omega}{3}$$

$$R'R'' = -\frac{p}{3} + \frac{(p+q)\omega}{3} - \frac{q\omega^i}{3}$$

$$R''R = \frac{(p+q)\omega^i}{3} - \frac{p+q}{3} + \frac{p}{3} - \frac{p\omega}{3}$$

$$R''R = -\frac{q}{3} + \frac{p\omega}{3} + \frac{(p+q)\omega^i}{3}$$

بنابراین $(R'R'')\omega = R'R'' = (RR')\omega$ و $R'R''$ متساوی الاضلاع است .

قضیه ۴ : روی اضلاع متساوی الاضلاع $ABCD$ مربع های در خارج سطح آن می سازیم . ثابت کنید که مراکز این

بحثی در چهارضلعی محیطی محاطی

ترجمه : یعقوب گنجی
دانشجوی دانشسرای عالی تهران

نوشتہ : L. CARLITZ
Math. Magazine مجله :

$$(4) R' - d' = 2Rr \frac{IP}{BP}$$

از مقایسه این رابطه با فرمول (۱) کافی است ثابت کنیم :

$$\frac{IP}{BP} = \lambda$$

و چون BP و IP اضلاع مثلث BIP هستند باید ثابت کنیم

$$\text{که : } \frac{\sin IBP}{\sin BIP} = \lambda \quad \text{و اما :}$$

$$IBP = BAI + IBA = \frac{1}{4}(\beta + \gamma) + \frac{1}{4}(\gamma + \delta)$$

$$= \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \frac{1}{4}(\gamma - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{4}(\alpha - \gamma)$$

و در مثلث BIP :

$$IBP = 180^\circ - (BPI + BIP)$$

$$= 180^\circ - [\frac{\alpha}{4} + 90^\circ - \frac{1}{4}(\alpha - \gamma)]$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{4}(\alpha + \gamma)$$

و از آنجا :

$$\frac{IP}{BP} = \frac{\sin IBP}{\sin BIP} = \frac{\cos \frac{1}{4}(\alpha + \gamma)}{\cos \frac{1}{4}(\alpha - \gamma)} = \lambda$$

با توجه به این رابطه و رابطه (۴) فرمول (۱) ثابت است.

حال برای اثبات رابطه (۲) گوئیم که از رابطه :

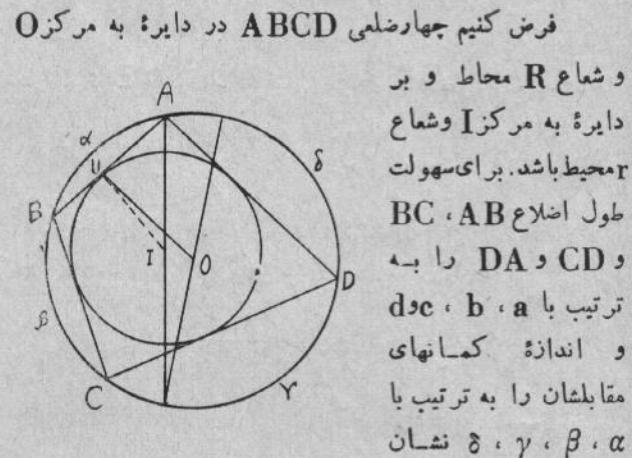
$$a+c=b+d$$

نتیجه می شود :

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\delta}{2}$$

و یا :

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{4}(\alpha + \gamma) \cos \frac{1}{4}(\alpha - \gamma) &= \\ &= \sin \frac{1}{4}(\beta + \delta) \cos \frac{1}{4}(\beta - \delta) \end{aligned}$$



فرمود کنیم چهارضلعی $ABCD$ در دایره به مرکز O و شعاع R محاط و بر دایره به مرکز I و شعاع r محیط باشد. برای سهولت طول اضلاع BC , AB , DA و CD را به d_c , b , a , c و اندازه کمانهای مقابلشان را به ترتیب با α , β , γ , δ نشان

می دهیم بافرض $OI=d$ می خواهیم فرمول نظری فرمول معروف اول در مثلث (که به صورت $R' - d' = 2Rr$ نوشته می شود) بدست آوریم. می خواهیم ثابت کنیم در چهارضلعی های محیطی - محاطی رابطه ای به صورت :

$$(1) R' - d' = 2\lambda Rr$$

وجود دارد که در آن λ بر حسب اندازه زوایای چهارضلعی با رابطه :

$$(2) \lambda = \frac{\cos \frac{1}{4}(\alpha + \gamma)}{\cos \frac{1}{4}(\alpha - \gamma)} - \frac{\cos \frac{1}{4}(\beta + \delta)}{\cos \frac{1}{4}(\beta - \delta)}$$

و بر حسب اضلاع با فرمول :

$$(3) \lambda' = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(ac+bd)}$$

مشخص می شود.

اثبات - نقطه تلاقی AI با دایرة محیطی را P نامیده و نیز قطر POQ از این دایره را رسم می کنیم . اگر از I عمود IU را بر AB فرود آوریم از تشابه مثلثهای BPQ و PQ تیجه می شود $\frac{PQ}{AI} = \frac{BP}{IU}$ و $PQ = 2R$ که چون $AI \cdot BP = 2Rr$ داریم

$AI \cdot BP = 2Rr$ است این رابطه به صورت $AI \cdot BP = 2Rr$ درست آید $AI \cdot IP = R' - d'$ که از مقایسه آن با رابطه $AI \cdot IP = R' - d'$ داریم :

$$ab+cd \quad \text{و}$$

$$ad+bc \quad \text{و} \quad ac+bd$$

مفهوم هندسی ساده‌ای دارند. بدین ترتیب که مجموع حاصل ضربهای انتخابی از سه چهارضلعی محیطی هستند که با تبدیل حاصل می‌شوند.

یک نتیجه جالب که از روابط (۱) و (۲) حاصل می‌شود نامساوی $R > \frac{\sqrt{2}}{2}$ است که تساوی موقی برقرار است که چهارضلعی مرربع باشد. این حالت خاص از یک قضیه کلی‌تر است اما اثبات فرمول ساده‌فلی نیز از چند نظر نافع است.

$$\lambda > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{این رابطه با توجه به فرمول (۱) با رابطه}$$

معادل است. با توجه به اینکه $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ یا $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ یا $\alpha + \gamma < 180^\circ$. در حالت اول داریم:

$$\cos \frac{1}{4}(\alpha + \gamma) > \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و از آنجا:

$$\lambda = \frac{\cos \frac{1}{4}(\alpha + \gamma)}{\cos \frac{1}{4}(\alpha - \gamma)} > \cos \frac{1}{4}(\alpha + \gamma) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

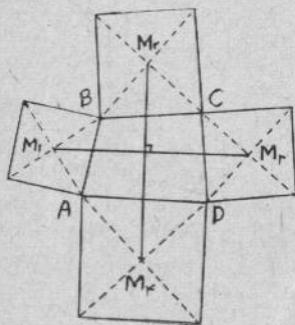
و در حالت دوم از مقدار دیگر λ در رابطه (۲) استفاده کرده و به همین نتیجه می‌رسیم.

ضمنا از رابطه اخیر نتیجه می‌شود که هنگامی λ می‌نیم و مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است که $\alpha - \gamma = 90^\circ$ که از آنجا با توجه به رابطه $b=d$ ، $a=c$ و در نتیجه $a+c=b+d$ می‌شود که با توجه به رابطه $a+c=b+d$ حاصل می‌شود:

$$a = b = c = d$$

یعنی در این حالت چهارضلعی محیطی محاطی مرربع می‌باشد.

مسئله ۴ - اگر روی اضلاع چهارضلعی محدب ABCD



$$M_1M_2 \perp M_3M_4$$

یکان دوره چهارم

مربعهای بسانید و M_1, M_2, M_3, M_4 من کز-
های این مربعها باشند
ثابت کنید.
اولاً
 $M_1M_2 = M_3M_4$
ثانیاً

که چون $\frac{1}{4}(\alpha + \gamma)$ و $\frac{1}{4}(\beta + \delta)$ مقادیر این رابطه بیان شوند:

$$\lambda = \frac{\cos \frac{1}{4}(\alpha + \gamma)}{\cos \frac{1}{4}(\alpha - \gamma)} = \frac{\cos \frac{1}{4}(\beta + \delta)}{\cos \frac{1}{4}(\beta - \delta)}$$

در اینجا که همان رابطه (۲) است.

برای اثبات رابطه (۳) چنین می‌نویسیم:

$$a = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \quad b = 2R \sin \frac{\beta}{2}, \quad c = 2R \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$d = 2R \sin \frac{\delta}{2}$$

$$\begin{aligned} ab + cd &= 4R^2 (\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}) \\ &= 4R^2 (\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\gamma - \delta}{2}) \\ &= 4R^2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \delta}{2} \end{aligned}$$

$$ad + bc = 4R^2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$ac + bd = 4R^2 \sin \frac{\alpha + \delta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$a + c = 4R \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(ac+bd)} = \frac{\sin \frac{\alpha + \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha + \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha - \gamma}{2}} = \lambda^2$$

دبایله از صفحه ۴۴۰

مسئله ۳ - اگر اضلاع مقابل یک ششضلعی (محدب یا

مساوی و موازی

باشند ثابت کنید که

راهنمای مبتلهای متساوی

الا-اعی که روی اضلاع

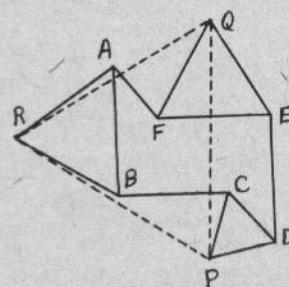
یا درهیان ششضلعی

و مکلف خارج سطح آن

ساخته شوند رأسهای

یاک مثلث متساوی

الاضلاع اند.



تحویل رادیکال مرکب

ترجمه: جعفر آقايانى چاوشى
دانش آموز ششم رياضي دبيرستان دكت نصیر

نوشته: KADIYTAN
مجله: Math. Magazine

$$(x^3 - 27) - 3(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 6) = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 5$$

$$\sqrt[3]{72 - 32\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5}$$

در حالت کلی موارد زیر را در نظر می گيريم:

I - فرض می کنیم که a و b و x و y عدد های
منطق بوده و b و y محدود کامل بباشند و داشته باشیم:

$$\sqrt{a \pm b} = x \pm \sqrt{y}$$

طرفین را مکعب می کنیم:

$$a \pm b = x^3 + 3xy \pm (3x^2 + y)\sqrt{y}$$

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} y = b \\ 3x^2 + y = k \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{k-b}{3}}$$

مثال ۱ - در تحویل رادیکال مرکب مثال قبل طبق:

بالا عمل می کنیم:

$$\sqrt[3]{72 - 32\sqrt{5}} = x - \sqrt{y}$$

خواهیم داشت:

$$y = 5 \quad x = \sqrt{\frac{32 - 5}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

مثال ۲ - در حل معادله درجه سوم:

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

داریم:

$$D = \left(-\frac{14}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3 = 50$$

$$\Lambda = \sqrt[3]{72 + \sqrt{500}} = \sqrt[3]{72 + 5\sqrt{2}} = m + \sqrt{n}$$

$$n = 2 \quad m = \sqrt{\frac{5-2}{3}} = 1 \quad A = 1 + \sqrt{2}$$

$$B = \sqrt[3]{72 - \sqrt{500}} = 1 - \sqrt{2}$$

ریشه های معادله درجه سوم به صورت:

$$x^3 + px + q = 0$$

عبارتند از:

$$x_1 = A + B \quad x_2 = A\omega + B\omega$$

$$x_3 = A\omega^2 + B\omega^2$$

که در آن:

$$\omega = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

$$A = \sqrt{-\frac{q}{4} + \sqrt{D}} \quad B = \sqrt{-\frac{q}{4} - \sqrt{D}}$$

اگر D مربع کامل باشد مقادیر A و B به آسانی حساب می شوند. اما اگر D مربع کامل نباشد چگونه باید مقادیر A و B را حساب کرد؟

ابتدا به ذکر یک مثال می پردازیم، می خواهیم:

$$\sqrt[3]{72 - 32\sqrt{5}}$$

ا به رادیکال های ساده تحویل کنیم، فرض می کنیم:

$$\sqrt[3]{72 - 32\sqrt{5}} = x - \sqrt{y}$$

$$\sqrt[3]{72 + 32\sqrt{5}} = x + \sqrt{y}$$

طرفین دورابطه بالا را عضو در هم ضرب می کنیم:

$$\sqrt[3]{5184 - 5120} = x^2 - y$$

$$4 = x^3 - y \quad (1)$$

همچنین طرفین یکی از دو رابطه را به توان سوم می رسانیم:

$$72 - 32\sqrt{5} = x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 2xy - y\sqrt{y}$$

از این رابطه نتیجه می شود:

$$72 = x^3 + 2xy \quad (2)$$

از حذف y یعنی روابط (1) و (2) معادله زیر بدست

می آید:

$$x^3 - 3x - 18 = 0$$

$$x^3 - 3x - 27 + 9 = 0$$

ریشهای معادله عبارت خواهد شد از :

$$x_1 = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$$

$$x_2 = A\omega + B\omega^2 = \dots = -1 + i\sqrt{6}$$

$$x_3 = A\omega^2 + B\omega = \dots = -1 - i\sqrt{6}$$

مثال ۳ در تحویل رادیکال مرکب :

$$\sqrt[3]{28\sqrt{14} - 100\sqrt{2}}$$

ابندا آن را به صورت رادیکالی در می آوریم که فقط شامل یک جمله اصم باشد و بعد به ترتیب بالا عمل می کنیم :

$$\sqrt[3]{28\sqrt{14} - 100\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\sqrt[3]{50 - 19\sqrt{7}}$$

$$\sqrt[3]{50 - 19\sqrt{7}} = x - \sqrt{y}$$

$$y = 7, x = \sqrt{\frac{19 - y}{3}} = 2$$

$$\sqrt[3]{28\sqrt{14} - 100\sqrt{2}} = -\sqrt{2}(2 - \sqrt{7}) \\ -\sqrt{14} - 2\sqrt{2}$$

مثال ۴ به ترتیب مثال قبل، خواهیم داشت :

$$\sqrt[3]{54\sqrt{3} + 41\sqrt{15}}$$

$$= \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18 + \frac{41}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3}} \\ = \dots = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

II - y مضربی از یک مجدور کامل باشد مثلا:

$$y = y'm^n$$

که y' مضربی از مجدور کامل نباشد. از رابطه :

$$\sqrt[3]{a \pm k\sqrt{b}} = x \pm m\sqrt{y}$$

بنا به آنچه گذشت نتیجه می شود: $b = y'$ و از مکعب کردن طرفین خواهیم داشت:

$$a \pm k\sqrt{b} = x' + xm'b \pm (2x'm + m^2b)\sqrt{b} \\ a = x' + xm'b$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{3b} \left(\frac{a}{x'} - x' \right)}$$

به قرض اینکه a و b و x و m عددهای صحیح باشند می توان با استفاده از نظریه اعداد مقادیر مورد قبول آنها را بدست آورد.

مثال ۵ در مورد $\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}}$ طبق دستور بالا

اولاً باید $\frac{99}{x}$ عدد صحیح باشد یعنی x برابر باشد

با یکی از عددهای ۱، ۳، ۹، ۲۷، ۸۱ و ۲۴۳.

ثانیاً باید $x^2 - \frac{99}{x}$ مضربی از ۶ بود. باشد. آزمایش هر یک از عقسوم علیهای ۹۹ مقدار قابل قبول برای عبارت خواهد شد از $x = 3$ بنابراین $m = 2$ بدست آمده و داریم :

$$\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

تبصره - می توانیم $2\sqrt{2}$ را به صورت $25\sqrt{8}$ نوشت و مانند مورد I عمل کنیم، یعنی :

$$y = 8, x = \sqrt{\frac{25 - 8}{3}} = 3$$

$$\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2}$$

- III بطور کلی فرض می کنیم که داشته باشیم :

$$\sqrt{h\sqrt{a} \pm k\sqrt{b}} = l\sqrt{x} \pm m\sqrt{y}$$

که a و b و x و y عددهای منطق باشند. اگر x و y هیچیک مضربی از یک مجدور کامل نباشد و $y = b$ و $x = a$ بوده واز مکعب کردن طرفین رابطه نتیجه خواهد شد :

$$h = al^2 + 2blm^2$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{3b} \left(\frac{h}{l} - al^2 \right)}$$

اگر مقادیر مورد نظر عددهای صحیح باشند با استفاده از نظریه اعداد می توان آنها تعیین کرد.

مثال ۶ در مورد $\sqrt[3]{54\sqrt{3} + 41\sqrt{15}}$ باید ۱

عقسوم علیه ای از ۵۴ اختیار شود بطوری که $\frac{54}{1} = 54l^2$ مضربی از $15 = 3 \times 5$ باشد. $l = 1$ در شرایط مزبور صدق می کند و خواهیم داشت :

$$\sqrt[3]{54\sqrt{3} + 41\sqrt{15}} = 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$$

تبصره - اگر a مضرب b باشد برای اینکه m عدد صحیح باشد باید h نیز مضرب b باشد یعنی :

$$h = h_1 b, a = a_1 b$$

و در این صورت خواهیم داشت :

$$m = \sqrt{\frac{1}{3b} \left(\frac{h_1}{l} - a_1 l^2 \right)}$$

مثال در مورد $\sqrt[3]{28\sqrt{14} - 100\sqrt{2}}$ داریم

$$a_1 = 14, b = 2, h_1 = 28, l = 2, a_1 = 19$$

عقسوم علیه های ۱۹ عبارتند از ۱ و ۱۹. ۱ - ۱ قابل قبول است و در ازاء آن $m = 2$ بدست آمده داریم :

$$\sqrt[3]{28\sqrt{14} - 100\sqrt{2}} = \sqrt{14} - 2\sqrt{2}$$

مسائل مقدماتی هندسه

Résolution des Problèmes élémentaires de géométrie

تألیف: E. J. Honnet - ترجمه: ع. م. چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳

بخش سوم

فصل سوم. چگونگی اثبات یک رابطه متری غیر مشخص

مجموع مربعات دو ضلع.

تفاضل مربعات دو ضلع.

حاصل ضرب دو ضلع.

طول قطعاتی که توسط نیمساز یا دایره‌های محاطی روی اضلاع جدا می‌شود.

(۳) روابط متری در دایره، مثل روابط مربوط به قوت نقطه نسبت به دایره.

برای حل مسائل از نوع فوق دو روش در زیر ارائه می‌شود. این دو روش مشابه با روش اثبات اتحادها در جبر می‌باشد.

حل این نوع مسائل که قسمت عمده مسائل محاسبه‌ای را تشکیل می‌دهد منوط به شناختن روابط متری کلاسیک و استفاده از محاسبات جبری می‌باشد.

بعضی از روابط که اطلاع بر آنها در حل این نوع مسائل لازم است از این قرار می‌باشد:

۱) روابط بین اندازه‌های اضلاع یک مثلث قائم الزاویه و قضیه فیثاغورس.

۲) روابط بین اندازه‌های اضلاع یک مثلث غیر مشخص: مربع ضلع مقابل به زاویه حاده یا زاویه منفرجه.

روش یکم - محاسبه مستقیم اجزاء رابطه

حکم: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$
اثبات. قطرهای AC و BD در یک نقطه O یکدیگر

را نصف می‌کنند. بنابراین BO میانه مثلث BAC و DO میانه مثلث DAC است و در هر دو از این مثلثها داریم:

$$AB^2 + BC^2 = 2BO^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$AD^2 + CD^2 = 2DO^2 + \frac{AC^2}{2}$$

از جمع نظیر به نظری طرفین دورابطه بالا و با توجه به اینکه

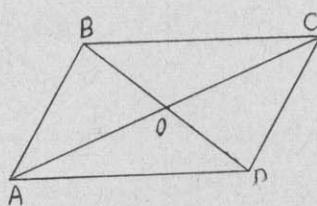
$$2BO^2 + 2DO^2 = \frac{BD^2}{2} + \frac{BD^2}{2} = BD^2$$

با استفاده از روابط متری کلاسیک مقدار هر یک از از جمله‌های یکی از طرفین را بدست آورده و عبارت حاصل را ساده و عمل می‌کنیم تا عبارت طرف دوم رابطه بدست آید.

مسئله ۵۲

نابت کنید که در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات چهار ضلع برابر است با مجموع مربعات دو قطر.

فرض: $ABCD$ متوازی الاضلاع است.



رابطه مطلوب محقق می شود.

تمرینات

- ۳۷۳ - در مثلث متساوی الساقین ABC به قاعده BC عمود CD را بر AB رسم می کنیم. ثابت کنید که مجموع مربعات سه ضلع مثلث برابر است با :

$$BD^2 + 2DA^2 + 2CD^2$$

- ۳۷۴ - در مسئله قبل، وقتی مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد رابطه مزبور به چه صورت در می آید؟

- ۳۷۵ - مثلث ABC قائم در زاویه A مفروض است. از نقطه D وسط ضلع AB عمود DE را بر وتر رسم می کنیم. ثابت کنید که :

$$EC^2 - EB^2 = AC^2$$

- ۳۷۶ - ثابت کنید که در هر مثلث مجموع مربعات سه میانه برابر است با $\frac{3}{4}$ مجموع مربعات سه ضلع

- ۳۷۷ - دو دایره متساوی O و O' عمود بر یکدیگر

روش دوم - تحقیق رابطه

$$PB^2 = c^2 + d^2 \quad PD^2 = a^2 + b^2$$

از جمع طرفین رابطه های بالا به ترتیب زیر خواهیم داشت:

$$PA^2 + PC^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$PB^2 + PD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

و نتیجه می شود که :

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

تمرینات

- ۳۸۳ - ثابت کنید که اگر دو مثلث قائم الزاویه متشابه باشند، حاصل ضرب وترها برابر است با مجموع حاصل ضرب های ضلعهای متناظر.

- ۳۸۴ - از نقطه O واقع در صفحه مثلث ABC عمودهای OH و OG و OF را بر AB و BC و AC رسم می کنیم. ثابت کنید که :

$$AF^2 + BG^2 + CH^2 = BF^2 + CG^2 + AH^2$$

- ۳۸۵ - از نقطه P واقع بر قطر AB از نیم دایره O نیم وتر OG را عمود بر قطر اخراج می کنیم و همچنین PR به نقطه H انتهای شعاع عمود بر AB وصل می کنیم. ثابت

هر یک از جمله های رابطه را بر حسب یک طول بدست آورده و محقق می کنیم که عبارتهای طرفین باهم متحدد هستند.

- ۳۸۶ - ثابت کنید که مجموع مربعات فوائل هر نقطه واقع در داخل مستطیل از دوران مقابل برابر است با مجموع مربعات فوائل آن نقطه از دو رأس دیگر.

فرض: مربع مستطیل ABCD و نقطه P واقع در داخل آن.

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

اثبات - از نقطه P عمودهایی بر چهار ضلع رسم کرده و طول این عمودهای a, b, c, d فرض می کنیم داریم:

$$PE = AF = DH = a, \quad PG = BF = CH = c$$

در مثلثهای قائم الزاویه PAF, PBF, PCH, PDH به ترتیب می توانیم بنویسیم:

$$PA^2 = a^2 + d^2, \quad PC^2 = b^2 + c^2$$

کنید که :

$$MC' = CH' + MH' - 2CH \cdot MH$$

$$MD' = CH' + MH' + 2CH \cdot MH$$

از جمع نظیر به نظری طرفین تساویهای فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} MA' + MB' + MC' + MD' &= \\ - 2AG' + 2MG' + 2CH' + 2MH' & \end{aligned} \quad (1)$$

در مثلثهای قائم الزاویه OCH و OAG داریم :

$$AG' = OA' - OG' \quad CH' = OC' - OH'$$

چون MGOH مستطیل است داریم :

$$MG = OH \quad MH = OG$$

و رابطه (1) به صورت زیر در می آید :

$$\begin{aligned} MA' + MB' + MC' + MD' &= \\ 2(OA' - MH') + 2MG' + 2(OC' - MG') + & \\ + 2MH' & = 2OA' + 2OC' = 4R \end{aligned}$$

که R شعاع دایره مقدار ثابت می باشد.

تمرینات

- ۲۸۸ - مسئله ۵۴ را با استفاده از تمرین ۵۹ حل کنید
راه حل بسیار ساده خواهد بود.

- ۲۸۹ - مسئله ۵۴ را در نظر بگیرید و ثابت کنید که:

$$AC' + CB' + BD' + DA' =$$

- ۳۹۰ - در مسئله ۵۴ اگر M ثابت مانده ووترها حول آن بچرخند ثابت کنید که $AB' + CD'$ برابر مقدار ثابت باقی ماند.

- ۳۹۱ - دو دایره متحدة مرکز را در نظر می گیریم، از نقطه P واقع بر دایره کوچکتر وتر دلخواه PC را در دایره کوچکتر ووتر AB از دایره بزرگتر را عمود بر PC رسم می کنیم. ثابت کنید که وقتی وترها حول P بچرخند اما همواره عمود بر هم باقی بمانند دو مجموع زیر برابر مقدار ثابت باقی مانند.

$$PA' + PB' + PC' =$$

$$AC' + CB' + AB' =$$

- ۳۹۲ - دو دایره متحدة مرکز مفروض آنند. نقطه متغیر

واقع بر یکی از آنها را به طرفین قطر AB از دیگری وصل می کنیم. ثابت کنید هر گام M و AB تغییر کنند مجموع $MA' + MB'$

برابر مقدار ثابت باقی ماند.

- ۳۹۳ - دایرة O و نقطه A در خارج آن مفروض است

قاطع متغیر ABC را نسبت به دایره رسم می کنیم ثابت کنید

$$2PG' + 2PH' = AB'$$

- ۳۸۶ - در دایرۀ O یک وتر AC چنان رسم شده است که قطر MN را در نقطه B قطع کرده و با آن زاویه ۴۵ درجه می سازد ثابت کنید که :

$$2AB' + 2BC' = MN'$$

- ۳۸۷ - در مربع ABCD از رأس A خطی رسم می کنیم که BC را در M و CD را در I قطع می کند. ثابت کنید که:

$$\frac{1}{AM'} + \frac{1}{AI'} = \frac{2}{AC'}$$

حالت خاص - در بعضی از مسائل، به جای آنکه اثبات یک رابطه داده شده مورد نظر باشد، می خواهند تا ثابت شود که یک عبارت معین برابر با مقدار ثابت باقی می ماند هر چند که بعضی از اجزای اشکل مر بوط به آن رابطه از لحاظ وضع بالاز لحاظ طول متغیر باشد. در این حال هم روشهای سابق قابل استفاده است اما چون مقدار ثابت معلوم نیست روش دوم معمولاً قبل اعمال نیست. در این حالت می توان با رسم خطوط تازه وضع خاصی از اجزاء مورد نظر را در نظر گرفته مقدار ثابت را معلوم ساخت و بعد مانند روشهای قبلی عمل کرد.

مسئله ۵۴ - دو وتر

در دایرۀ O دو وتر AB و CD بر یکدیگر عمودند

ثابت کنید که هر کاه نقطه M بر انداد وترها تقسیم می کند مجموع مربعات چهار قطبی ای که توسط M روی

وترها جدا می شود برابر مقدار ثابت باقی ماند.

فرض: وتر AB بر وتر CD در M عمود است.

حکم: ثابت $MA' + MB' + MC' + MD' =$
اثبات - از O مرکز دایرۀ به طرفین وترها وصل کرده و عمودهای OG و OH را بر AB و CD و OG رسم می کنیم.

مطابق با شکل داریم:

$$MA = AG - MG \quad MC = CH - MH$$

$$MB = BG + MG = AG + MG$$

$$MD = DH + MH = CH + MH$$

$$MA' = AG' + MG' - 2AG \cdot MG$$

$$MB' = AG' + MG' + 2AG \cdot MG$$

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(Mathematics Magazine. Volume 40, Number 4)

— QUICKIES —

30- Show that the inequality:

$$\left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| < a^2, (a \neq 0)$$

can be solved without including the condition $q(x) > 0$ (or $q(x) < 0$) when determining the solution interval(s).

31- Prove or disprove: If $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ exists for each x in $[a, b]$, then $\int_a^b f(x) dx$

exists.

32- How many primes p exist such that:

p , $p+2d$, and $p+4d$ are all primes where d is not divisible by 3?

33- Show that if A is an n square matrix and each row (column) sums to c , then c is a characteristic root of A .

(Answers On page 472)

بعضی که طول ضلعهای آن برابر مقدار ثابت باقی بماند و نقطه‌های B و D روی دایره به مرکز P تغییر مکان دهند حاصل ضرب $PA \cdot PC$ برابر مقدار ثابت باقی می‌ماند.

که $AB \cdot AC$ برابر مقدار ثابت است.

۳۹۴- نقطه ثابت P را روی قطر AC از لوزی $ABCD$

در نظر می‌گیریم. ثابت کنید هر گاه لوزی تغییر شکل بدهد

استفاده از مساحت

مساحت‌های دو مثلث ACP و ABP بنا بر این:

$$\frac{1}{2}AB \cdot PN + \frac{1}{2}AC \cdot PM = \frac{1}{2}AC \cdot BH$$

و نتیجه می‌شود:

$$PN + PM = BH$$

تمرینات

۳۹۵- ثابت کنید که مجموع فواصل هر نقطه واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر است با طول ارتفاع مثلث.

۳۹۶- ثابت کنید که مجموع فواصل هر نقطه واقع در داخل n ضلعی منتظم از اضلاع برابر است با n برابر طول سهم n ضلعی:

۳۹۷- اگر H نقطه تلاقی ارتفاعهای AA' , BB' , CC' از مثلث ABC باشد ثابت کنید که:

$$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1$$

روش خاص اثبات بعضی روابط متrix بر مبنای مقایسه مساحتها قرار دارد. با توجه به اینکه مساحت یک شکل برابر است با مجموع مساحت‌های قسمتهای آن، رابطه‌ای بدست می‌آید که از روی آن می‌توان رابطه مفروض را نتیجه گرفت.

مسئله ۵۵- از نقطه P واقع بر قاعده BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC عمودهای AB , AC , PN و PM رسم می‌کنیم. ثابت کنید که:
 $PM + PN$ برابر است با ارتفاع وارد بر یکی از دوساق:

$$\left. \begin{aligned} AB &= AC \\ PM \perp AC, PN \perp AB \\ BH \perp AC \end{aligned} \right\}$$

$PM + PN = BH$ حکم:

اثبات- مساحت مثلث ABC برابر است با مجموع

تصاعد ((عددی - هندسی))

Arithmetico-geometrical progression

ترجمه: قوام نوعی

$$\begin{aligned}
 (1-x)^n &= a + dx + dx^2 + \dots + \\
 &\quad + dx^{n-1} - [a + (n-1)d]x^n \\
 &= a - [a + (n-1)d]x^n + dx(1+x+x^2+ \\
 &\quad + \dots + x^{n-1}) = \\
 &= a - [a + (n-1)d]x^n + \frac{dx(1-x^{n-1})}{1-x} \\
 S_n &= \frac{a - [a + (n-1)d]x^n}{1-x} + \frac{dx(1-x^{n-1})}{(1-x)^2} \\
 &\quad : \text{مثال - محاسبه مجموع } n \text{ جمله:} \\
 S_n &= 1 + 2 \times 3 + 3 \times 3^2 + 4 \times 3^3 + \dots + \\
 &\quad + n \times 3^{n-1} \\
 &\quad : \text{داریم:} \\
 a &= 1, \quad d = 1, \quad x = 3 \\
 S_n &= \frac{1 - (1+n-1)3^n}{1-3} + \frac{3(1-3^{n-1})}{(1-3)^2} \\
 &= \frac{1 - n \times 3^n}{-2} + \frac{3(1-3^{n-1})}{4} \\
 &= \frac{2n \times 3^n - 3^n - 2 + 3}{4} = \frac{1}{4}[3^n(2n-1)+1]
 \end{aligned}$$

نحوهای جدید و آموزنده

مسائل حساب استدلالی

جهت استفاده داوطلبان کنکور و سال ششم ریاضی
 تألیف: جواد حریرچی
 از انتشارات: کتابفروشی تهران
 چاپ دوم - بها: ۴۰ ریال

رشته: ریاضیات
 $a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + \dots + [a+(n-1)d]x^{n-1}$
 که در آن ضرایب $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ هندسی تشکیل می‌دهند
 و جمله‌های $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ تصاعد عددی
 تصاعد «عددی - هندسی» نامیده می‌شود. مثل رشته‌های:
 $1, 2 \times 3, 3 \times 9, 4 \times 27, \dots, n \times 3^n$ و
 $1, 3x, 9x^2, 27x^3, \dots, (1+4n)x^{n-1}$

محاسبه مجموع n جمله از تصاعد عددی - هندسی

مجموع n جمله اول را به S_n نشان می‌دهیم:

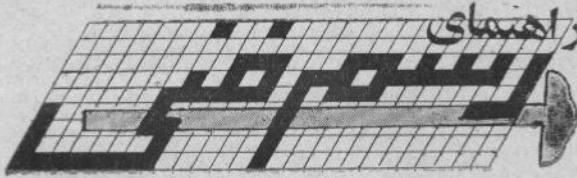
$$\begin{aligned}
 S_n &= a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + \dots + \\
 &\quad + [a+(n-1)d]x^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad : \text{طرفین را عضو به عضو در } x \text{ ضرب می‌کنیم:} \\
 xS_n &= ax + (a+d)x^2 + (a+2d)x^3 + \dots + \\
 &\quad + [a+(n-1)d]x^n
 \end{aligned}$$

طرفین رابطه دوم را از طرفین رابطه اول عضو به عضو کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

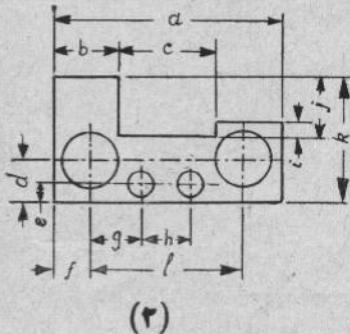
کتابخانه یکان





اندازه نویسی

استفاده از خط کش و غیره) رسم می کنند. در رسم آنها باید دقت کافی بعمل آورد چون در غیر این صورت شکل ظاهری رسم به صورت نامطلوبی در-

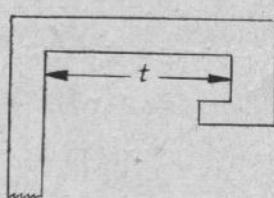


اندازه گذاری شود عمود بر امتداد آن بعد رسم می شوند.

همانطور که در شکل ۲ مشاهده می کنید خطوط امتداد برای اندازه نویسی هر بعدی که رسم شده است بعد مر بوطه را قطع ننموده و نسبت به آن در فاصله کمی قرار دارند. خطوط امتداد باید به طریقی رسم شوند که تقریباً ۲ تا ۳ میلیمتر از انتهای سهم آخرین خط اندازه امتداد داشته باشند. در بعضی از موارد

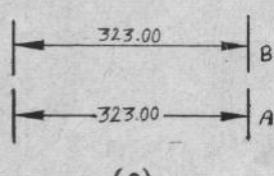
ممکن است از خط مقارن به عنوان خط امتداد استفاده نمود، (اندازه های g و h) و d (غیره در شکل ۲) ممکن است همچنین

در بعضی حالات خطوط اندازه را بین دو خط اصلی جسم قرار داد. (شکل ۳)



(۳)

ارقام را باید در وسط خطوط اندازه (معمولًا با حروف لاتین) نوشت. برای این هنرمند ممکن است جای لازم برای



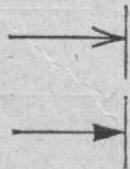
(۴)

است ارقام را در بالای خطوط اندازه نوشت (شکل ۴).

بعد از ترسیم تصاویر مختلف یک جسم لازم است اندازه قسمهای مختلف جسم به صورتی روشن و قابل درک در روی نقشه نشان داده شوند. بدینه است در صورتی که ابعاد و قسمهای مختلف یک جسم در نقشه فاقد اندازه باشد استفاده عملی از آن نقشه غیر ممکن بوده و در نتیجه آن نقشه از نظر فنی بدون ارزش خواهد بود. برای نشان دادن اندازه ها در روی نقشه از علامات و قوانین مخصوصی استفاده می شود. با استفاده از این علامات و پیروی از دستورات مر بوطه می توان نقشه را طوری آماده کرد که تجسم و درک آن برای عموم افرادی که با رسم فنی آشنائی دارند به راحتی امکان پذیر باشد.

از جمله علاماتی که در رسم فنی برای اندازه نویسی از آنها استفاده می شود خطوط اندازه (دیمانسیون) و خطوط امتداد می باشد.

خطوط اندازه عبارت از پاره خط های هستند که بطور معمول موازی با امتداد بعد هر دو خط امتداد و عمود بر آنها رسم می شوند. (شکل ۱)، در دو انتهای خطوط اندازه باید فاش یا سهمهایی رسم نمود. سهمهای خطوط اندازه را می توان به دو صورت مطابق آنچه که در شکل ۱ نشان داده شده رسم کرد. سهمهای پر (نوع A)

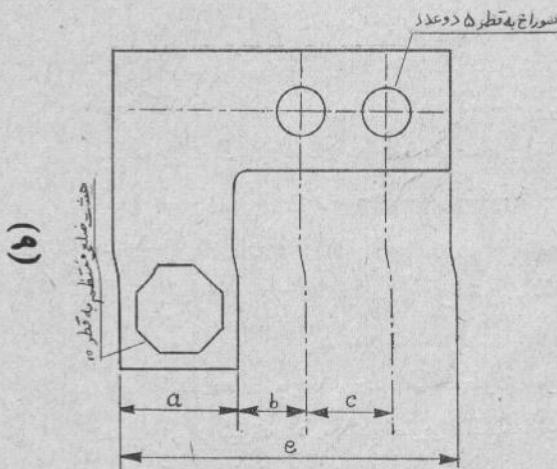


بیشتر معمول است. این سهمهایا کاملا به شکل مثلث متساوی الساقین بوده و در دو طرف هیچگونه انحنای ندارند.

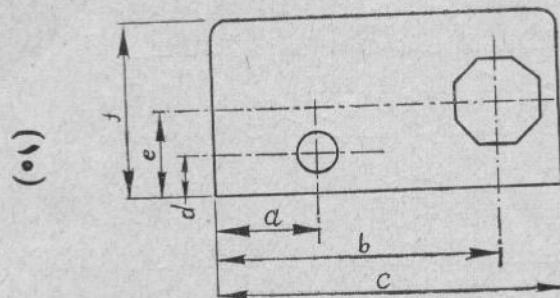
(۱)

اندازه قاعدة این مثلث تقریباً مثلث طول دوضلوع می باشد. مسلماً کلیه سهمهای روی یک نقشه باید از یک نوع بوده و تاحد ممکن یکتاخت و یک اندازه رسم شوند. ولی در صورتی که بعدی آن اندازه کوتاه باشد که جای کافی برای رسم سهمی یا اندازه معمول روی آن نباشد می توان در انتهای خطوط اندازه سهمهای کوتاهتری رسم نمود. اندازه سهمهای نسبت به اندازه کلی نقشه ممکن است تغییر کند، ولی معمولاً برای نقشه های فضیها کوچک طول سهم را در حدود ۳ میلیمتر و برای نقشه های بزرگ ۵/۴ میلیمتر انتخاب می کنند باید دقت کرد که انتهای سهمهای کاملا در روی خط امتداد ختم شود. سهمهای اعممولاً با دست آزاد (بدون

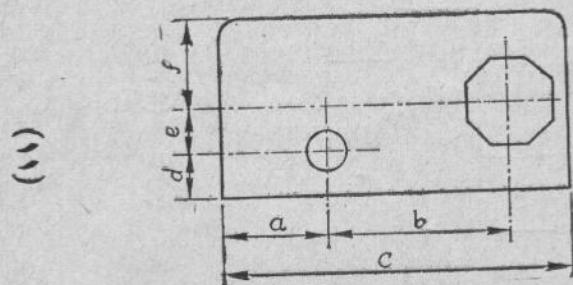
را مورد نظر قرار می‌دهیم. و در این شکل یکی از اندازه‌ها (مثلاً d) در روی نقشه اضافی نوشته شده چون باداشتن اندازه‌های e و c و b و a و e قابل محاسبه است*. بنابراین



بهتر است تصویر فوق را به صورت شکل ۱۹ اندازه نویسی نمود. اندازه‌هارا ممکن است نسبت به یک مبدأ ثابت و یا نسبت به یکدیگر نوشت. در شکل ۱۵ اندازه‌ها نسبت به ضلع چپ



وضلع پائینی تصویر نوشته شده‌اند در صورتی که ممکن بود

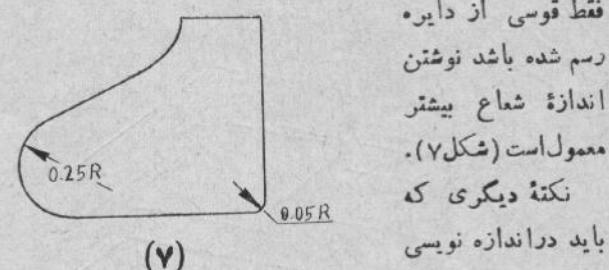


اندازه‌هارا مطابق شکل ۱۱ نسبت به یکدیگر نوشت. نوع اول (شکل ۱۵) از آنجهت که اگر در نوشتن یکی از اندازه‌ها

در صورتی گهمطا بق شکل ۵، (و یا اندازه‌های e و d و e و d غیره در شکل ۲) لازم باشد ارقام را درجهت عمودی بنویسیم باشد ارقام را طوری نوشت که اگر صفحه کاغذ را ۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران بدھیم اندازه مربوطه درست مقابله چشم قرار گیرد.

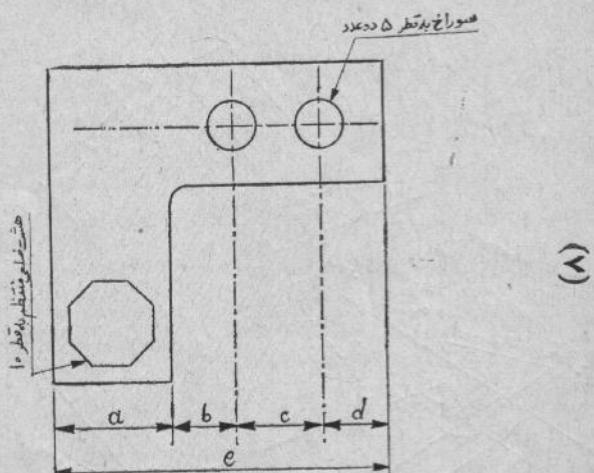
در صورتی که بعضی از ابعاد آنقدر کوتاه باشند که جدادن سهمها و یا ارقام بین دو خط امتداد مربوطه ممکن نباشد می‌توان یکی از روشهای

که در نوشتن اندازه‌های e و f و z در شکل ۲ بکار رفته است بکاربرد. برای نشان دادن اندازه دواین در صورتی که دایره بطور کامل رسم شده باشد معمولاً اندازه قطر دایره را مطابق شکل (۶-A و B) اندازه نویسی می‌کنند و درحالی که فقط قوسی از دایره رسم شده باشد نوشتن اندازه شعاع بیشتر معمول است (شکل ۷).



نهایت دیگری که باید در اندازه نویسی

حتماً مورد دقت قرار گیرد آنست که باید سعی نمود تا خطوط اندازه اضافی و غیر لازم در روی رسم موجود نباشد مثلاً شکل ۸



* در بعضی موارد برای آنکه اطمینان حاصل شود که در اندازه نویسی اشتباهی رخ نداده ممکن است یک اندازه اضافی نیز در روی رسم نوشت درجینیں صورتی بهتر است در کنار این اندازه عبارت «REF» که علامت اختصاری کلمه «REFERENCE» می‌باشد اضافه نمود (استاندارد امریکا)

تصویر مر بوطه موازی هستند).

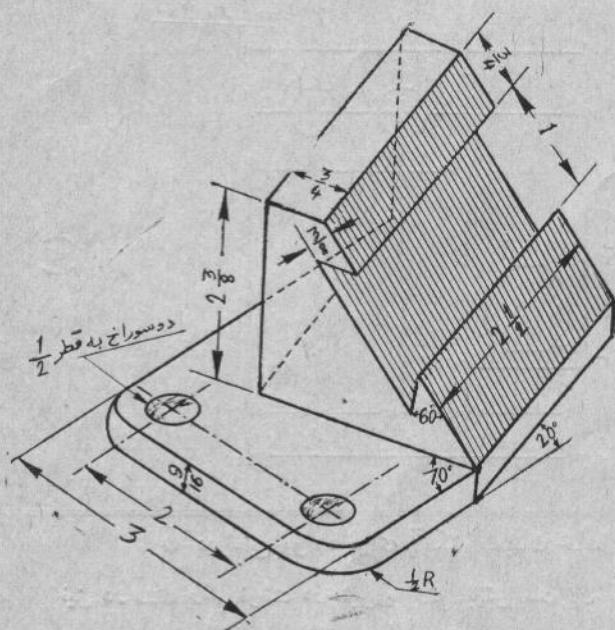
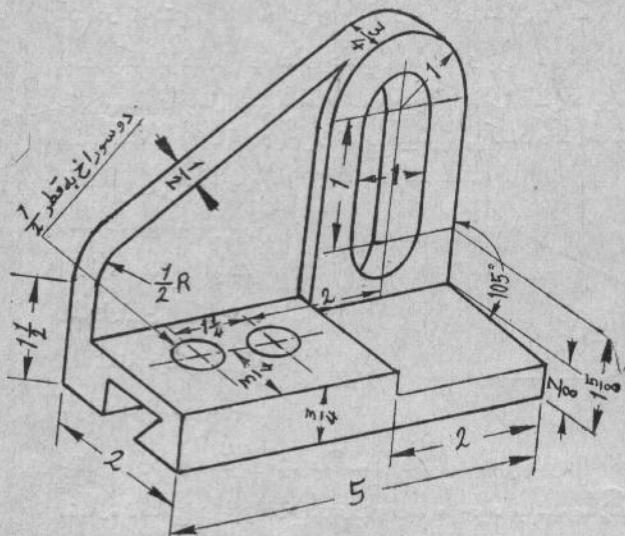
اگر خطوط اندازه مطابق شکل ۱۲ پشت سر هم قرار می‌گیرند بهتر است که آنها را در امتداد یکدیگر قرار داد و لی اگر انجام این کار مشکل باشد اندازه نویسی به صورت شکل ۱۳ نیز قابل قبول است.

- خطوط اندازه بزرگتر باید همیشه در خارج از خطوط اندازه کوتاهتر قرار گیرند. در غیر این صورت خطوط اندازه بلندتر خطوط امتداد اندازه‌های کوچکتر را قطع نموده و باعث ایجاد اشتباه می‌شوند.

- هر گز خطوطی مثل خط تقارن و خطوط اصلی جسم باید به عنوان خط اندازه مورد استفاده قرار گیرد.

تهریفات

از تصاویر افقی، قائم و نیمرخ چپ اشکال ۱۴ و ۱۵ را دسم نموده و اندازه‌های مر بوطه را روی تصاویر نشان دهید.



اشتباهی رخ ذهد ذر سایر اندازه‌ها تأثیری نخواهد داشت مطمئن‌تر به نظر می‌رسد ولی در عین حال همانطور که ملاحظه می‌کنید این نوع اندازه نویسی فضای بیشتری را اشغال می‌کند. **یادداشت‌ها** - در بسیاری از موارد لازم است در روی تصاویر توضیحات مختصری را نوشت. در چنین حالتی مطابق آنچه که در شکلهای ۸ و ۹ نشان داده شده از علامات فلش که معمولاً تحت زاویه ۶۰ درجه رسم شده و انتهای آنها به یک قطعه خط افقی ختم می‌شود استفاده می‌کنند. نوشته‌ها بایدهمیشه در امتداد افقی باشند.

اصولی را که باید در نوشتن اندازه‌ها

رعایت نمود

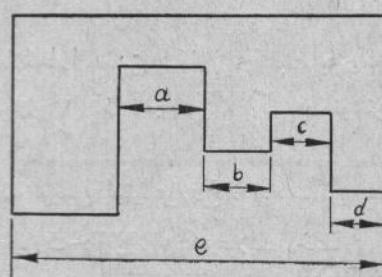
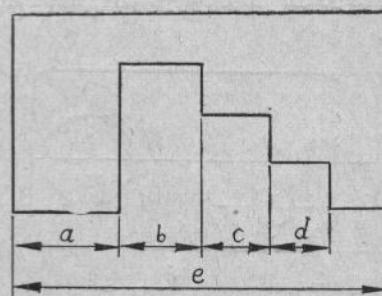
اندازه‌هارا باید تا حد امکان طوری نوشت که بین دو تصویر قرار گیرند (در بالای تصویر افقی، پائین و طرف راست تصویر قائم و طرف چپ تصویر نیمرخ).

- تا آنجا که ممکن است باید خطوط اندازه در خارج تصاویر رسم شوند.

- ابعادی که در یک یا چند تصویر نمایان می‌شوند باید فقط در یکی از تصاویر اندازه نویسی شوند.

- فاصله خطوط اندازه نسبت به بعد مر بوطه در حدود ۱۵ تا ۱۲ میلیمتر می‌باشد. در صورتی که در جایی به چند خط اندازه به موازات یکدیگر رسم شوند باید فاصله اولین خط اندازه نسبت به بعد مر بوطه در حدود ۱۵ تا ۱۲ میلیمتر بوده و فاصله سایر خطوط اندازه نیز حداقل ۱۵ میلیمتر باشد.

- اندازه‌هارا باید روی تصاویری گذاشت که ابعاد آن تصاویر دارای طول حقیقی می‌باشند (چنین ابعادی با صفحه



مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات آخر سال کلاس‌های چهارم و پنجم دبیرستان‌ها

(خرداد ۱۳۴۶)

ب - همان حجم پر منگنات در مجاورت اسید سولفوریک با چه حجم آب اکسیژن ۲۰ حجم بی رنگ می‌شود.
ج - نمک تولید شده فمل و افعال اول را متبلور می‌کنیم ۲/۵ گرم نمک متبلور بدست می‌آید تعداد ملکولهای آب متبلور آن را حساب کنید.

داوطلبان هنرمندانه کازرون طرح: جواهری

۱- الف - جسمی شامل ۹۲/۳ درصد کربن و ۷/۷ درصد هیدروژن است. ساده‌ترین فرمول این جسم را بیابید.
ب - جسمی به فرمول $n(\text{CH}_n)$ و جرم ملکولی ۷۸ است را بیابید.

۲- جرم اتمی کلر معمولی را ۳۵/۵ فرض می‌کنند. اگر این کلر محلولی از ۲۵٪ ایزوتوپ ۳۷ باشد. درصد ایزوتوپ ۳۵ را پیدا کنید.
۳- محلولی است از روی و اکسید روی که چون در جوهر گوگرد رقیق حل شود حجم گاز حاصل در شرائط متعارفی ۵/۲۲۴ لیتر خواهد بود. پیدا کنید مقدار روی را در محلول. در ضمن فرمول معادله واکنش‌های انجام یافته را بنویسید.

۴- چه حجم هوا در شرائط متعارفی برای تشویه کامل ۱۶۰ گرم زغال ۷۵٪ خالص لازم است.

۵- ۱۰۰ میلی‌لتر سود سوزآور یک ملکول گرم در لیتر چه حجم محلول نرمال جوهر نمک را خنثی می‌کند.

کلاس چهارم ریاضی

جبیر

دبیرستان اسرار سیز وار

دبیر: فامیلی - فرستنده: محمد خسرو جردی

۱- رادیکال مرکب $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ مفروض است. چه

کلاس چهارم طبیعی

شیوه‌ی

دبیرستان بزرگ هجرد کازرون
دبیر: جواهری

۱- برای خنثی کردن محلولی از سولفات سدیم و جوهر گوگرد به جرم ۱ گرم ۲۰۰ میلی‌لتر سود سوزآور مصرف می‌شود. فرمول معادله واکنش انجام گرفته را نوشته و مقدار هریک از اجزاء محلول را حساب کنید.

۲- فاکتور محلول ۳/۶۵ گرم در لیتر جوهر نمک، ۳۶/۵ گرم در لیتر اسید کلریدریک، ۹۸ گرم در لیتر جوهر گوگرد و ۸ گرم در لیتر سود سوزآور را حساب کنید.

۳- حجم گاز حاصل از ترکیب ۰/۶۵ گرم روی را با جوهر گوگرد رقیق در دمای ۲۷/۳ درجه سانتیگراد و فشار یک اتمسفر حساب کنید.

۴- گرم اکسید مس پس از ترکیب با اسید سولفوریک چند گرم سولفات مس متبلور تولید می‌کند؟

۵- ۱۰۰ گاز نیتروژن با چه حجم گاز تیدریز در شرائط متعارفی ترکیب می‌شود و حجم گاز حاصل در همین شرائط چقدر است؟

دبیرستان شاپور اسکو

دبیر: نقی زاده هاکوئی - فرستنده: علائی
۱- ۱۶۴ گرم مس خالص با اسید سولفوریک غلیظ حرارت می‌دهیم معین کنید:

الف - اگر گاز متصاعد شده را از محلول پر منگنات

۱/۲۵ ملکول گرم در لیتر عبور دهیم چه حجم آن را بی رنگ می‌کند.

دارای ریشه‌های حقیقی است.

۳- دستگاه دو معادله دومجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x - y - xy = 29 \\ xy(y - x) = 180 \end{cases}$$

دیبرستان پهلوی ملایر

دیبر : گلستانی - فرستنده : حسینی علمداری

۱- مخرج کسر $\frac{5}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}}$ را گویا کنید.

۲- دستگاه زیر را حل و بحث کنید .

$$\begin{cases} x + my = 3m \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases}$$

دیبرستان پهلوی همدان

دیبور : بهمن از گمی - فرستنده : فقیری مقدم، جوادر بندی، حسن امیدی

۱- عبارت زیر را به دو عامل ضرب تجزیه کنید :

$$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 21x + 12$$

۲- به فرض اینکه $a \neq b$ باشد ثابت کنید :

$$a^4 + b^4 > a^3b^1(a^4 + b^4)$$

۳- معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌ها ایش

جوابهای این دستگاه باشد :

$$\begin{cases} xy^3 + yx^3 - xy = 8 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

۴- معادله اصم زیر را از راه تبدیل به معادله درجه دوم حل نمایید :

$$\sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}} + 2\sqrt[3]{\frac{2x^3 + 2}{x}} + \sqrt[3]{4} = 0$$

۵- معادله درجه دوم :

$$x^4 - (m+2)x^2 + 2m - 1 = 0$$

مفروض است :

اولاً- ثابت کنید به ازای جمیع مقادیر m معادله فوق دارای دو ریشه متمایز است .

ثانیاً- اگر m واسطه هندسی مابین ریشه‌های معادله باشد مقادیر عددی m را بدست آورید .

دیبرستان حافظ

دیبر : قرایی زاده - فرستنده : حسن سلیمانی

۱- حدود x را طوری تعیین کنید که کسر :

$$\frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 2}$$

شرطی بین A و B برقرار باشد تا بتوانیم دو عدد منطق x و y را چنان تعیین کنیم که داشته باشیم :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

با استفاده از رابطه مطلوب مقدار رادیکال مرکب زیر را باید :

$$S = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

۲- عبارت $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 19$ را

بر حسب قوای نزولی $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ مرتب کنید .

۳- در کثیرالجمله زیر مقدار k را چنان پیدا کنید که

عبارت $x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz$ بر $x + y + z$ بخش پذیر باشد .

$$F(z) = F(x) \quad F(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{و}$$

مقدار z را بر حسب y تعیین کنید .

دیبرستان الهی

فرستنده : حسین یعقوب پور ، مجید خوشنودی

۱- نقطه‌ای مانند M را روی ارتفاع AH از مثلث ABC چنان پیدا کنید که اگر از آن نقطه خطی به موازات BC رسم نمائیم تا AC و AB را به ترتیب در K و D قطع کند و از K و D عمودهای بر BC وارد کنیم و پای آنها را E و F بنامیم. محیط مستطیل DEFK برابر ۱۸ سانتیمتر باشد درصورتی که طول ارتفاع AH برابر ۶ سانتیمتر و اندازه BC مساوی ۱۵ سانتیمتر است .

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{باشد حاصل عبارت}$$

$$\frac{ff(x)-1}{fff(x)+1} \quad \text{را پیدا کنید .}$$

۳- مطلوب است محاسبه $(\sqrt[3]{2} + 1)^3 + (\sqrt[3]{2} - 1)^3$

بدون اینکه آنها را به توان برسانید :

دیبرستان اهیو کبیر یزد

دیبر : علی اهیینیان - فرستنده : جلیل روحانی فرد

۱- مطلوب است محاسبه S و P از روابط زیر :

$$S = (\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{37 + 20\sqrt[3]{2}}(2\sqrt[3]{2} - 4)$$

$$P = (\gamma - 4\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{\gamma + 4\sqrt[3]{2}}) + (\gamma + 4\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{\gamma - 4\sqrt[3]{2}})$$

۲- ثابت کنید که اگر معادله :

$$ax^4 + 2bx^2 + c = 0$$

دارای دوریشهٔ موهمی باشد معادله :

$$a^4x^4 + 2abx^2 - ac + 2b^4 = 0$$

بین اعداد -1 و $+1$ محصور باشد.

۲- معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3-3x^2+x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3-2x-1}}$$

۳- دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{xz}}{\sqrt{x}+\sqrt{z}} = \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{zy}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} = \frac{6}{5} \end{cases}$$

دیبرستان خسروی مشهد

دیبر: تجلی - فرستنده: غلامحسین شافعی

۱- حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$\left[\frac{\sqrt{\frac{y}{2}} \times \sqrt{\frac{y+1}{4}} \times \sqrt{\frac{2y}{2-y}}}{2 \times \sqrt{\frac{2-y}{2}}} \right]^{-\frac{1}{y}} = ?$$

۲- معادله $(m-1)x^2 - (m-1)x - m = 0$

مفروض است:

اولاً- m را چنان تعیین کنید که تفاضل مربعات ریشه ها

برابر 3 باشد خواهید دید برای m دو جواب بدست می آید.

بوسیله محاسبه جواب قابل قبول آن را تعیین کنید.

ثانیاً- حدود m را چنان تعیین کنید که سه جمله ای زیر

همواره منفی باشد.

$$(m-1)x^2 - (m-1)x - m$$

گروه فرهنگی خوارزمی

۱- اولاً اگر $y = \frac{1}{x}$ فرض شود حاصل

$$\frac{1}{x^2} + x^2 + mx + m = \frac{1}{x^2} + x^2 + 2x^2 + 5x^2 - 32x^2 + 10x^2 - 5x^2 + 6 = 0$$

ثانیاً- معادله زیر را حل کنید:

$$6x^6 + 5x^5 - 32x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 2 + \sqrt{2}(x^2 + 2) = 0$$

۲- اولاً عبارت $(2 + \sqrt{2})(x^2 + 2)$ را به صورت

ضرب یک عامل درجه اول و یک عامل درجه دوم تجزیه کنید:

ثانیاً معادله $0 = (2 + \sqrt{2})(x^2 + 2) - x^2$ را حل

کنید.

دیبرستان خیام

دیبر: کربیه - فرستنده: محمود حقانی

۱- p و q را چنان تعیین کنید که عبارت زیر مکعب

کامل شود:

$$x^4 + (p+q)x^3 + (p-q)x^2 + 1$$

۲- حدود x را چنان تعیین کنید که:

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2} < \frac{x+2}{x+3}$$

دیبرستان رازی تبریز

۱- دستگاه زیر را حل نمائید:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ (x+\sqrt{x})(y+\sqrt{y})=24 \end{cases}$$

مطلوبست حل معادله زیر:

$$(x^4 + x^3 - 1)^4 - 17x^4(x^3 + x^2 + 16x^3) = 0$$

دیبرستان دکتر خانعلی

دیبر: عزت خواه - فرستنده: محمد واحدی

۱- a و b و c را طوری تعیین کنید که عبارت:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + c$$

بر $x-1$ قابل قسمت باشد.

۲- مخرج کسر زیر را گویا کنید:

$$\frac{1}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{4}}$$

۳- m را بطریقی تعیین کنید که یکی از ریشه های

معادله زیر $(2 - x)$ باشد پس از تعیین m ریشه های معادله

را حساب کنید:

$$2x^5 + (m+1)x^4 + (1+8m)x^3 - (7+m)x^2 - (6m-1)x + 6 = 0$$

دیبرستان دکتر نصیری

دیبر: ترقی - فرستنده: حسن پناهیان ، پرویز

احتشامی

۱- معادله اصم زیر را حل کنید:

$$\sqrt{722-x} - \sqrt{16-x} = 2$$

۲- سه جمله ای $x^2 + mx + m$ مفروض است. مقدار

را طوری تعیین کنید که عبارت مفروض به ازاء جمیع مقادیر

x بزرگتر از $\frac{3}{16}$ باشد.

دیبرستان دکتر هوشیار

دیبر: صدیق آراء - فرستنده: کیومرث تقی زاده

هوشمنگ امیر شکاری

۱- مخرج کسر زیر را گویا کنید:

۱۲

$$\frac{1}{\sqrt{49} - \sqrt{25} + \sqrt{25}}$$

$$\begin{aligned} & \text{کنید:} \\ & (x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-1)^{-\frac{1}{2}} + \\ & + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

۲- معادله زیر را حل کرده و جوابهای آن را بدست آورید:

$$6x^2(x^2-4) - 7x(x^2-1) + 6 = 0$$

دیبرستان هنرمند (تبریز)

دیبر: عزیز حسینی - فرستنده: احمد پارسیان

۱- m را چنان تعیین کنید که معادله:

$$(x+1)(x^2+2mx+m+12) = 0$$

دارای ریشه مضاعف باشد.

۲- در معادله:

$$x^4 + 8x^3 + ax^2 + bx - 400 = 0$$

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که عدد (۴) ریشه مضاعف معادله باشد و سپس دو ریشه دیگر معادله را بدست آورید.

۳- ثابت کنید که معادله:

$$x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 12x + 2 = 0$$

دارای چهار ریشه است که مجموع دو ریشه از آن با مجموع دو ریشه دیگر برابر است و ریشهها را پیدا کنید.

دیبرستان همیر (تبریز)

دیبر: حسینی - فرستنده: قادر افتخاری

۱- ثابت کنید که اعداد $\frac{-7 \pm \sqrt{21}}{2}$ ریشه‌های معادله

$$z^2 + 7z^2 - 23z - 50 = 0$$

۲- کسر زیر را گویا کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$$

دیبرستان همیر گان (لاهیجان)

دیبر: آذر دیبرستان - فرستنده: حمید اکرامی

۱- چند جمله‌ای درجه سوم (x) را چنان پیدا کنید که

به ازاء $x = 9$ برابر با (-۹) بوده و بعلاوه داشته باشیم:

$$f(x) - f(x-2) = 6x^2 + 32x - 6$$

۲- در معادله $5x^2 + px + q = 0$ ضرایب p و q را

را چنان پیدا کنید که اگر یک واحد به هریک از ریشه‌های

۳- معادله زیر را حل کنید:

$$\sqrt[3]{5+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{5-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{25}$$

دیبرستان سلطانی (نو) شیراز

دیبر: سین سلطانی

۱- اولاً حدود m را طوری تعیین کنید که سه جمله‌ای

درجه دوم پارامتری زیر همیشه منفی باشد:

$$(m-1)x^2 - (2m+1)x + 3m = 0$$

ثانیاً - در وجود علامت ریشه‌های معادله:

$$(m-1)x^2 - (2m+1)x + 3m = 0$$

بر حسب مقادیر مختلف پارامتر m بحث کنید:

ثالثاً - m را طوری تعیین کنید که بین ریشه‌های معادله

$$\text{فوق } ('x \text{ و } "x) \text{ رابطه } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{13}{16} \text{ برقرار باشد و}$$

سپس به ازاء $m = 2$ مقدار عبارت $'x^3 + x^2x^3 + x^2x^3$ را تعیین کنید.

۲- معادله اصم زیر را حل و بحث کنید:

$$\left[\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{a})}{x} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{a} = 0$$

۳- کسر زیر را به ساده‌ترین شکل خود تبدیل کنید:

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \dots}{\sqrt{y^2x^2} + \sqrt{z^2} - \sqrt{xyz}}$$

دیبرستان علمیه

دیبر: عطار نژاد - فرستنده: حمید برنوش

۱- دومعادله درجه دوم:

$$x^4 - px^2 + q = 0 \quad x^2 + px + q = 0$$

مفروض آن‌د p و q را طوری تعیین کنید که اگر یک واحد بر هریک از دوریشه معادله اول اضافه کنیم یک ریشه معادله دوم حاصل گردد.

۲- مطلوب است تعیین مقدار a و b بطوری که یکی از ریشه‌های معادله معکوسه زیر $x = 2$ باشد:

$$ax^4 + bx^2 - 5x^2 + bx + a = 0$$

و ریشه‌های معادله را پس از تعیین a و b محاسبه کنید.

دیبرستان محمد رضا شاه

دیبر: محمود غفاری - فرستنده: شهریار لطفی

۱- عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت خود در آورده سپس مقدار حاصل را به ازاء $(\sqrt{2} + 1)$ حساب

$$\log_x 2 + \log_x 5 = 2/5 \quad (ج)$$

$$\log_b a \times \log_a b = 1$$

می توانید استفاده کنید :

$$\frac{\log x + 2}{x^4} = 10 \log x + 1 \quad (د)$$

- ۴- شخصی ۱۰۰۰۰ ریال سرمایه را با نرخ مجھولی به مرا بجهه مرکب می گذارد اگر به مدت معامله یکسال اضافه شود اصل و سود آن شخص ۱۶/۶۷۴ ریال زیاد می شود و اگر مدت معامله یکسال کم شود از اصل و سود ۶۳۶ ریال کم می شود نرخ و مدت معامله را پیدا کنید .

دیرستان های ۴۵ شهریور آبادان

دیر : گلشن - فرستنده : پیروز بیمنش

۱- تعدادی کودک به ترتیب ورودشان به کودکستان کل چیدند و بعد گلهای را در یک سبد جمع کرد . بطور مساوی بین خود تقسیم کردند بهر کودک ۵۰ عدد گل رسید مطلوب است تعداد کودکان :

۲- دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \log_{xy}(x-y) = 1 \\ \log_{xy}(x+y) = 0 \end{cases}$$

دیرستان پهلوی همدان

دیر : از گمی - فرستنده : جواد دربندی ، حسین فقیه‌ی مقدم

۱- معادله زیر را حل کنید :

$$\sqrt[n]{\frac{x}{a}} + \sqrt[n+1]{\frac{x}{a}} + \dots + \sqrt[n+1]{(n+1)\log_a x} = na$$

۲- هر گاه در یک تصاعد حسابی مجموع سه جمله اول و مجموع سه جمله دوم و مجموع جمله‌های ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ تشکیل تصاعد هندسی بدهند ثابت کنید جمله سوم و هشتم بیست و سوم این تصاعد همواره تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند .

دیرستان حاج قوام شهر از

دیر : سلطانی

۱- معادله زیر را حل کنید :

$$\frac{2-x}{x+2} = \frac{2x+3}{3x+1} \quad 125 = 0/008$$

۲- ثابت کنید جمله $n+1$ ام تصاعد هندسی که جمله اولش a و جمله سومش p است مساوی با جمله $n+1$ ام تصاعد هندسی است که جمله اول آن a و جمله پنجمش p می‌باشد

معادله فوق اضافه کنیم اعداد حاصل ریشه‌های معادله $x^3 - p^3 x + pq = 0$ گردد .

همه‌ی محاسب

دیرستان اسرار سبز وار

دیر : سعائی

۱- مطلوب است تعیین x از معادله :

$$(\sqrt[n]{x})^{\log_a x + 2} = 8$$

۲- مطلوب است حل معادله :

$$\sqrt[x]{\frac{x+1}{8x+1}} = \sqrt[4]{\frac{4^{2x}+4}{4}}$$

۳- راجنان تعیین کنید که ریشه‌های معادله دوم جذوری :

$$a^4 - \frac{5}{2}a^2 + m = 0$$

تشکیل تصاعد عددی دهنده .

دیرستان الی

دیر : هنرمند ادبی

مطلوب است حل معادله :

$$\log_2 x + \log_2 x + \log_2 x + \dots = 2$$

دیرستان آندریشه

دیر : رنگچی

۱- مطلوب است مجموع عبارت زیر :

$$(1+2\sqrt{2})+(5+4\sqrt{2})+(3+4)+(13+16\sqrt{2})+\dots$$

۲- اگر S_m و S_n مجموع m و n جمل اولیه یک تصاعد حسابی باشند بطوری که داشته باشیم :

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^t}{n^t}$$

نسبت I_m به I_n را پیدا کنید :

$$\frac{I_m}{I_n} = ?$$

۳- معادلات زیر را حل کنید :

(الف)

$$(\sqrt{2-\sqrt{2}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{2}})^x = 4$$

$$\sqrt{\frac{\log \sqrt{x}}{x}} = 10 \quad (ب)$$

دیبرستان خسروی (مشهد)

دیبر: احمدزاده - فرستنده: غلامحسین شافعی

۱- دریک تصاعد عددی مجموع سه جمله اول آن ۱۵ و

مجموع سه جمله آخر آن ۵۷ و مجموع تمام جملات ۱۲۰ است.

اولاً - تصاعدرا مشخص کنید.

ثانیاً - بین جمله های سوم و چهارم آن ۴ واسطه عددی

درج کنید.

۲- $\log b = \frac{1}{1/32512}$ و $\log a = \frac{1}{1/52271}$

باشد مطلوبست محاسبه:

$$\log \frac{a\sqrt[b]{b}}{b}$$

گروه فرهنگی خوارزمی

فرستنده: محمدحسین نظامی نراقی

۱- اگر $a^x + b^y = 6ab$ باشد ثابت کنید:

$$\log(a+b) + c \log(a-b) = \frac{1}{2} \log 2$$

۲- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^x \\ y^{x+y} = x^y \end{cases}$$

دیبرستان دکتر خانعلی

دیبر: عزت خواه - فرستنده: محمد واحدی

۱- معادله زیر را حل کنید:

$$\log(x-3) + \log \sqrt{\frac{x+3}{10}}$$

$$\log \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 12}{100}} = 2 \log \sqrt{(x-4)}$$

دیبرستان دکتر نصیری

دیبر: ایزدی - فرستنده: حسن پناهیان، پرویز احتشامی، عبدالله نقی

۱- مجموع چهار جمله از یک تصاعد هندسی $\frac{20}{9}$ و نسبت مجموع دو جمله اول و سوم به مجموع دو جمله دوم و چهارم مساوی ۳ است تصاعدرا مشخص کرده و حد مجموع جمله های آن را بدست آورید.

۲- از رابطه:

$$\log_x z \times \log_z y + \log_z x = \log_y xy \times \log_z y - \log_x y \times \log_z y$$

مسائل هندسه

دیبرستان اسرار (سبز وار)

دیبر: رستمی - فرستنده: محمد خسرو جردی

۱- مثلثی با داشتن محل تلاقی ارتفاع و میانه و نیمساز زاویه رأس A با دایره محيطی مثلث مفروض می باشد رسم کنید. همین مسئله را حل کنید در صورتی که منصف زاویه A و ضلع b و قطعه ای از ضلع c محصور بین رأس C و موقع منصف زاویه A در دست است.

۲- مطالوبست محاسبه اضلاع مثلث قائم الزاویه ای که فواصل مرکز دایره محاطی آن از دو انتهای وتر برابر $\frac{1}{13}$ و $\frac{1}{104}$ باشد.

دیبورستان پهلوی ملایر

دیبور: دیانت - فرستنده: رحمون حسینی علمداری

۱- در یک ظرف مسی به حجم ۶۰۵ گرم مقدار ۴۰۵ گرم آب موجود بیک قطعه یخ به وزن ۵۵ گرم روی آن شناور می باشد. ۲۰ گرم بخار آب صدرجه در ظرف وارد می کنیم دمای تعادل را تعیین کنید در صورتی که گرمای ویژه مس ۱/۰ و گرمای ویژه آب یک و گرمای ذوب یخ ۸۵ کالری و گرمای تبخیر آب در صدرجه ۵۴۰ کالری و نقطه جوش آب ۱۰۰° فرض می شوند (از تلفات حرارتی صرف نظر می شود).

۲- استوانه ای است به ارتفاع ۲۵ سانتیمتر که ۳ سانتیمتر آهن و بقیه آن چوبی است. استوانه را در مایع به وزن مخصوص ۫ وارد می کنیم. استوانه در مایع شناور شده و فقط ۵ سانتیمتر آن خارج از مایع قرار می گیرد تعیین کنید وزن مخصوص مایع را در صورتی که وزن مخصوص آهن ۷/۸ گرم نیرو بر سانتیمتر مکعب و وزن مخصوص چوب ۰/۶ گرم نیرو بر سانتیمتر مکعب باشد.

دیبورستان خسروی همشهرد

دیبور: دارا - فرستنده: غلامحسین شافعی

لکوموتیوی به وزن ۵۵ تن در سطح شبکه برشب ۰/۵۲ با سرعت ثابت ۵۴ کیلومتر در ساعت حرکت می کند.

او لا - نیروی موتور.

ثانیاً - قدرت موتور را بر حسب اسب بخار پیدا کنید.

ثالثاً - اگر موتور آن دارای دواستوانه باشد و سطح مقطع هر پیستون ۱۵ cm² و فشار بخار دیگ ۲/۵ کیلو گرم بر سانتیمتر هر بیستون ۴۰۰ دور می زند و فشارهای کمی کم باشند.

هر پیستون ۴۰۰ دور در هر دقیقه ۶۰۰ دور می زند و فشارهای کمی کم باشند.

بر سانتیمتر مریع است.

گروه فرهنگی خوارزمی

فرستنده: محمدحسین نظامی نراقی

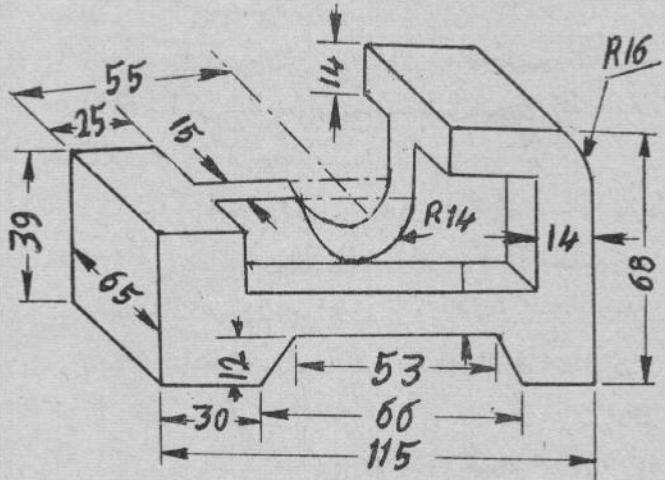
۱- در دواستوانه ای به سطح مقطع ۱۰۰ سانتیمتر مربع پیستون بی وزنی تا ارتفاع ۳۵ cm از انتهای دواستوانه قرار دارد استوانه محتوی گاز کاملی به درجه حرارت ۲۷° = t سانتیگراد و فشاریک اتمسفر است.

الف - پیستون را در سانتیمتر بالا می بینیم و در ارتفاع ۴۵ سانتیمتری از سطح قاعده نگه می داریم و درجه حرارت دواستوانه را به ۱۲۷° = t سانتیگراد می دسایم فشار جدید چقدر است.

ب - سپس درجه حرارت راهمن ۱۲۷° = t نسبت نگهداشته پیستون را از محل جدید به جای اول برمی گردانیم فشار را در این حالت حساب کنید.

دیبورستان همراهان زاهدان

دیبور: هندس برهنگانی - فرستنده: عالم کفعی



فیزیک

گروه فرهنگی آرش

دیبور: هرتضی کسرائی

۱- جسمی است به شکل استوانه به ارتفاع ۲۳ سانتیمتر که ۲۰ سانتیمتر آن از جنس چوب به وزن مخصوص ۵/۰ گرم نیرو بر سانتیمتر مکعب ۶ cm³ آن از جنس مس به وزن مخصوص ۲/۸ گرم نیرو بر سانتیمتر مکعب و قائم در مایع به وزن مخصوص ۲/۸ گرم نیرو بر سانتیمتر مکعب شناور می کنیم معین کنید ارتفاع قسمت غوطه ور آن را.

دیبورستان پهلوی اراك

دیبور: آقشاھی - فرستنده: مصطفی راستگردانی

۱- بالنی است به حجم یک لیتر، آن را پراز اتر صفر درجه می کنیم آن را تا چدمائی گرم کنیم تا ۲۹/۴۶ سانتیمتر مکعب اتر از آن بیرون برسیزد. ضرب ب انساط حجمی مطلق اتر ۴/۱۵ × ۱۵ ضرب ب انساط حجمی بالن ۲۷ × ۱۰^{-۴} است.

دیبورستان پهلوی بهبهان

دیبور: جاویدان - فرستنده: عبدالرسول شکوری

۱- مکعبی است از چوب به ضلع ۱۰ cm، روی آب شناور است بطری که ۵ cm آن خارج از آب است معلوم کنید:

او لا - وزن مخصوص چوب را.

ثانیاً - حداقل چند گرم آهن باید به آن بینندیم تا در آب غوطه ور شود وزن مخصوص آهن ۷/۸.

د بیرونستان همچو تبریز

دبیر: لامعی - فرستنده: قادر افتخاری

نقطه‌جوش آب در پائین و در بالای کوهی به ترتیب ${}^{\circ}155$

و ${}^{\circ}98$ سانتیگراد است. تعیین کنید:

اولاً - فشارهوا را در بالای کوه وارتفاع کوه.

ثانیاً - تعیین کنید مقدار حرارت لازم برای اینکه یک

لیتر آب صفر درجه را کاملاً در قله کوه به حالت بخار درآورد.

(وزن مخصوص متوسط هوا $1/5$ گرم در لیتر فرض می‌شود).

مسائل شیمی

گروه فرهنگی آرش

دبیر: رئوف درویش

۱ - ۲ گرم سولفور طبیعی آهن (پیریت) به درجه خلوص

56% را بر شته می‌کنیم.

اولاً - حجم هوای لازم برای ۳ عمل را بدست آورید.

ثانیاً - گاز حاصل چندسانیمترا مکعب سود $5/2$ نرمال را خنثی می‌کند.

ثالثاً - اگر گاز حاصل را اورد آب اکسیژن کنیم اسید حاصل چندسانیمترا مکعب آمونیاک با مشخصات زیر را خنثی می‌کند.

$$D = 0/88 \quad (\%35 \text{ N})$$

د بیرونستان بواسطه گازرون

دبیر: جواهری

۱ - اولاً - فرمول معادلات شیمیائی تبدیل کر بورکلیم را به آمونیاک بنویسید.

ثانیاً - به کمک روابط زنجیری نشان دهید که از 5400 کیلو گرم کربورکلیم چند کیلو گرم گاز آمونیاک بدست می‌آید.

۲ - مخلوطی از سولفات و سولفیت پتاسیم $3/22$ گرم جرم دارد و از ترکیب آن با اسید سولفوریک $64/0$ گرم گاز تولید می‌شود.

اولاً - فرمول معادله شیمیائی واکنش انجام یافته را نوشه.

ثانیاً - مقدارهایی از دونمک را حساب کنید.

گروه فرهنگی خوارزمی

فرستنده: محمدحسین نظامی نراقی

۱ - برای خنثی نمودن کامل 5000 میلی لیتر اسید سولفوریک

$5/56$ گرم کربنات سدیم $46/0$ گرم سودمصرف شد. حساب کنید

یکان دوره چهارم

غلظت معمولی و غلظت ملکولی اسید را.

$$\begin{array}{llll} O=16 & Na=23 & Mn=55 & K=39 \\ Ba=137 & C=12 & H=1 & S=32 \end{array}$$

کلاس پنجم طبیعی

مثلثات

گروه فرهنگی آرش

دبیر: شاملو

۱ - معادلات زیر را حل کنید.

$$\sin 2x + \sin x = 0$$

$$2 \sin x \cos \frac{\pi}{\lambda} + 2 \cos x \sin \frac{\pi}{\lambda} = 2$$

$$2(\sin^4 x - \sin^2 x) = \sqrt{2}$$

د بیرونستان سلطانی (نو) شیراز

۱ - جوابهای عمومی و جوابهای بین صفر و π معادله زیر را تعیین کنید:

$$\cot^2 x - (2 - \sqrt{2}) \cot x - 2\sqrt{3} = 0$$

۲ - حاصل کسر زیر را بدست آورید:

$$\frac{2\cos 108^\circ + \sin 342^\circ + \cos(-72^\circ)}{\sin 162^\circ + 2\sin 18^\circ - \sin(-18^\circ) - 2\sin 198^\circ} = ?$$

۳ - درستی رابطه زیر را تحقیق کنید:

$$\frac{1}{\sin x \cos x} + \tan^2 x + \cot^2 x = \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x}{\cos^2 x}$$

شیمی

دبیرستان بزرگ مجرد گازرون

دبیر: جواهری

۱ - $6/69$ گرم از اکسید سرب را با اکسید کربن ترکیب کردیم. کاهش جرم $48/0$ گرم گردید. فرمول اکسید سرب را پیدا کنید.

۲ - بر 1000 از محلول یکی از نمکهای باریم بقدر کافی سولفات سدیم افزودیم. رسوبی به وزن $5825/0$ گرم تولید گردید. غلظت Ba در محلول چقدر بوده است.

دبیرستان بهبهانی گازرون

دبیر: جواهری

۱ - $1/044$ گرم از نیترات یکفلز دوظرفی توسط سولفات.

سديم ۹۳۲/۰ گرم رسوب داده است. پيدا کنيد جرم اتمي فلز.
۲- سولفات روی متبلور ۶۴٪ / ۲۲ روی دارد. جرم تقریبی
روی را پيدا کنيد درصورتی که بدانيم اين جسم بازاج سبز (زانع
سياه) همشكل (Isomorphe) است.

داوطلبان هتفرقه شهرستان کازرون

طرح: جواهري

۱- ۲/۵ گرم بلورهای کاتکبودرا حرارت می‌دهيم، در
نتیجه ۱/۶ گرم جسم بدون آب بجا می‌ماند. پيدا کنيد فرمول
سولفات مس متبلور را.

۲- ۱۰cc از يك محلول جوهر نمک توسط ۵cc از يك باز
نرمال (۲N) خشی شده است. پيدا کنيد غلط معمولی جوهر
نمک را.

۳- PH يك محلول دسي نرمال بازرا حساب کنيد.
۴- ۱۰cc آب اکسیژن ۱۱/۲ حجم، چند گرم سولفات
فروبي آب را در محیط اسید سولفوریک اکسیدمي کند؟

۵- ۱ گرم آلياً طلا و مس را در جوهر شوره معمولی انداخته
و می‌جوشانيم، ۷۵/۰ گرم آن حل نمی‌شود.

اولاً- فرمول معادله واکنش انجام گرفته را نوشه.

ثانیاً- عبارت‌لارا به رسم بازار حساب کنيد.

کلاس پنجم رياضي

جبر

دبيرستانهای آذربایجان

فرستنده: غلامحسین فلاحتي

۱- (۲-۰ و ۲۰ A و B)

$$C(3m+1 + 3m^2 + 9m)$$

رؤوس مثلث ABC می‌باشند. مختصات محل تلاقی سه میانه
مثلث را بدست آوريد و معادله مكان هندسي آنرا وقتی پارامتر m
تفصيلمي کند بدست آوريد.

۵- مشتق تابع $y = \sqrt{3tg^2 4x^3}$ را حساب کنيد.

دبيرستان اديب

دبير: آذر هوشمنگ - فرستنده: سيدحسين بي بالك

اولاً- در تابع $y = \frac{mx+n}{x+p}$ مقادير m و n و p را

را بقsmi تعبيin کنيد که منحنی نمايش آن محور x هارا در نقطه

A به طول ۳ قطع نماید و نقطه (۱۱۰) مرکز تقارن آن باشد.

و سپس جدول ومنحنی (C_۱) نمايش تغيرات $y_1 = \frac{x-3}{x-1}$
را درسم کنيد.

ثانیاً - در تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ مقادير a و b

و c را چنان تعبيin کنيد که منحنی نمايش آن منحنی (C_۱) را
درروي محور x ها قطع نموده و در نقطه B واقع برمحور y ها
بر آن مماس باشد. سپس جدول ومنحنی (C_۲) نمايش تغيرات
تابع $y_2 = 2x^3 + 2x^2 + x - 2$ را در همان دستگاه منحنی (C_۱)
رسم نماید.

ثالثاً - معادله مماس مشترك دو منحنی فوق (BT) را
نوشته و آنرا رسم نماید. ضمناً تائزانت زاويه مابین ماسهای بردو
منحنی فوق را در نقطه A واقع برمحور x ها بدست آورده و فاصله
را از همسرمشترك BT بدست آوريد و ثابت کنید اگر نقطه‌اي مانند

D قرينه B نسبت به (۱۱۰) باشد بر منحنی (C_۱) واقع می‌شود.
رابعاً - نقطه‌اي مانند M از خط $y = 2x^3 + 3$ را چنان
پيدا کنيد که بتوان از آن نقطه دوم ماس عمود برهم بر منحنی (C_۲)
رسم نمود سپس معادله يك ماس که ضریب زاویه ااش منفی است نوشته و
مختصات نقطه تماس واقع بر آنرا بدست آوريد.

دبيرستان بحر العلوم بروجرد

دبير: جوادي - فرستنده: حسين نوري

۱- معادله خطی را تعبيin کنيد که منحنی :

$$y = \frac{3x^2 - 2mx}{x-m}$$

در ازاء جمیع مقادیر m بر آن مماس شود.

۲- مشتق تابع $y = \sqrt{x}$ را در نقطه‌اي به طول

$\frac{1}{2}$ مستقيماً از روی تعریف مشتق حساب کنيد و مشتق تابع :

$$y = tg^2 x + \cos^2 x$$

را با استفاده از قواعد مشتق گيري حساب کنيد.

دبيرستان حاج قوام شيراز

دبير: حسين سلطاني

۱- تابع $y = mx^3 - (m-1)x^2 - (m-1)$ مفروض است:

اولاً ثابت کنيد منحنیهاي نمايش تابع فوق به ازاء جمیع
مقادير m از سه نقطه ثابت گه مختصاتشان را تعبيin خواهيد
کرد می‌گذرند. به چه دليل اين سه نقطه بر يك استقامتند.

ثانیاً - معادله مماس بر منحنی را در يك نقطه اختباری
واقع بر منحنی که طولش (a) است بنويسيد ثابت کنيد اين

هماس منحنی را در يك نقطه دیگر که طولش مساوی (2α) است قطع می کند.

۲- نقاط A و B به ترتیب به طولهای (۱) و (۲) بر محور طولها واقع اند دو خط متغیر یکی از A و دیگری از B می گذرد بطوری که نقطه تلاقی آنها همواره روی محور عرضها قرار دارد. از A و B دو خط دیگر بر خطوط مذکور عمود شده‌اند. مطلوبست مکان هندسی نقطه M محل تلاقی این دو خط.

دیبرستان خیام

دیبر: مشگانی - فرستنده: همایی غرویان
خط D به معادله $y = 2mx - m = 0$ مفروض است:
اولاً ثابت کنید که خط D به ازاء جمیع مقادیر m بر نقطه ثابت A مرور می کند.
ثانياً معادله:

$$(1 - 4m)x^2 + (1 - 4m)x - m = 0$$

را در نظر می گیریم و بر خط D نقاط P و Q را بقسمی انتخاب می کنیم که طولهای آنها به ترتیب مساوی x' و x'' ریشه‌های معادله فوق باشند. ثابت کنید که نقاط P و Q به ازاء مقادیر m نسبت به نقطه (۰) و $\frac{1}{2}$ قرینه یکدیگرند.

دیبرستان دکتر هوشیار

دیبر: صدیق آراء - فرستنده: طهمورث تقیزاده

۱- مقدار حقیقیتابع $\frac{\sqrt{3x+2} - \sqrt{x+6}}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+6}}$
را به ازاء $x = 2$ تعیین کنید.

۲- در نقطه A(۱۹۵) و B(-۴) و خط D به معادله $6 - 2y = 3x$ مفروض است:

اولاً - مختصات' A' قرینه A را نسبت به D تعیین کنید.
ثانياً - بر D نقطه M را طوری تعیین کنید که:

$$MA + MB$$

کمترین مقدار ممکنه را اختیار نماید.

دیبرستان شاهپور شیراز

دیبر: دستغیبی - فرستنده: محبوب

۱- نقاط A(۲۰۵) و B(۱۹۱) مفروض است. روی خط $2 - 2y = x$ نقطه‌ای بدلست آورید که فاصله آن نقطه تا خط AB برابر ۲ واحد طول باشد. (دوجواب)
۲- دوتایی زیر مفروضند:

$$y = (m+1)x^2 + mx$$

$$y = \frac{3x}{4x+4}$$

مقدار m را طوری تعیین کنید که منحنی دو تابع فوق یکدیگر را در مبدأ مختصات به زاویه 45° قطع کند (زاویه بین دو مسas در مبدأ 45° شود) و سپس منحنی تابع

$$y = \frac{3x}{4x+4}$$

را بدون استفاده از مشتق رسم کنید.

$$3- \text{تابع } y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

دو کثیرالجمله از x هستند، اگر صورت و مخرج دارای يك ریشه مشترک باشند ثابت کنید معادله $[Q(x)]^2 = y$ حد. اقل دارای دوریشة مساوی است.

دیبرستان فردوسی

دیبر: پرتوی - فرستنده: حسن فیضی آذر

۱- فاصله مرکز تقارن منحنی:

$$xy - 2y - 4x - 1 = 0$$

را از خط D به معادله $y - x - 8 = 0$ پیدا کنید.

۲- تابع $x^2 + \cos 4x = y$ مفروض است. نشان دهید بین مشتق دوم و سوم تابع رابطه زیر برقرار است:

$$\left(\frac{y'' - 2}{16}\right)^2 + \left(\frac{y'''}{64}\right)^2 = 1$$

دیبرستان فرگام

دیبر: محمد نوری - فرستنده: حمید نیکجو

۱- جدول و منحنی (α) نمایش هندسی تابع:

$$y = \frac{3x - 3}{x + 1}$$

را رسم کنید.

۲- در عدد نقاط تلاقی خط D به معادله:

$$y = \lambda x + 1$$

با منحنی α به ازاء مقادیر مختلف λ بحث کنید.

۳- در حالانی که خط D منحنی α را در دو نقطه قطع می گند نقاط تلاقی را N و M می نامیم. مطلوبست تعیین رابطه ای بین طولهای نقاط M و N که به مقدار λ بستگی نداشته باشد.

۴- تصاویر N و M را بر محور x نقاط' M' و N' می نامیم. تحقیق کنید که نقطه‌ای مانند P روی منحنی (α) وجود دارد که اگر تصویر آن را روی محور x ، P' بنامیم مقدار' N' \times P' M' برابر عدد ثابتی می گردد. مختصات نقطه P و مقدار ثابت را بدست آورید.

بنامیم مقدار' N' \times P' M' برابر عدد ثابتی می گردد. مختصات

دیبرستان فیروز بهرام فرستنده: اردشیر گشتابی

۱- نقطه (۱۶۳) A رأس مثلث است که خطوط :

$$4y + 3x - 4 = 0 \quad 5y - 3x = 1$$

معادلات دو ارتفاع این مثلث، شکل را درم و مختصات دو رأس دیگر و معادله BC را بدست آورید:

دیبرستان فیوضات مشهد

دیبر: هزیدی - فرستنده: محسن هخما

۱- تحقیق کنید به ازاء جمیع مقادیر a منحنی نمایش

$$\text{تفییرات تابع } y = \frac{(a-1)x+2}{x+a} \text{ از دو نقطه ثابت A و B}$$

که مختصات آنها تعیین خواهد کرد می‌گذرد.

۲- به ازاء چه مقادیری از a قابع فوق همواره صعودی یا نزولی است. a را طوری تعیین کنید که مماس بر منحنی در نقطه D واقع بر محور y ها با نیمساز ربع اول موازی باشد.

دیبرستان گلشن راز شبستر

دیبر: با همت - فرستنده: پریچهره

۱- مشتق تابع زیر را بدست آورید:

$$y = \sin^3 2x - 2\cos^3 2x + x \tan^3 2x$$

۲- ناحیه‌ای از صفحه محورهای مختصات را باید که مختصات نقاط آن ناحیه در نامساوی زیر صدق کنند.

$$y < \sqrt{x+3}$$

دیبرستان محمد رضا شاه کرمان

۱- مقدار حقیقی کسر زیر را به ازاء $x = -2$ بدست

آورید:

$$y = \frac{x + \sqrt{x+6}}{x+2}$$

۲- مشتق تابع زیر را حساب کنید:

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(x^2+1)^3}}$$

دیبرستان مهران (زاهدان)

فرستنده: عالم کفعی

۱- تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ مفروض است. a و b و c و d را بقیه تعیین کنید که نقطه ماکزیمم منحنی تابع روی محور y و عرض آن ۴ باشد و نقطه می‌نیعم تابع روی محور x واقع و طول آن ۲ باشد.

$$2 - \text{مطابق است معادله قائم بر منحنی } y = \frac{3 \sin x}{4x+2} \text{ در}$$

$$\text{نقطه‌ای به طول } x = \frac{\pi}{6}$$

۳- دو محور OX و OY مفروض است. خط D محور OX را در نقطه A و محور OY را در نقطه B قطع می‌کند بطریقی که OA = OB = ۱ می‌باشد. خط دیگر D' موازی محور OY را در نقطه C بطریقی قطع می‌کند که OC = ۲

می‌باشد. حالا از نقطه O خطی با ضریب زاویه m رسم می‌کنیم فرض می‌کنیم که D را در نقطه P و خط D' را در نقطه Q قطع کند:

اولاً مطلوب است محاسبه OQ.

ثانیاً مکان هندسی وسط PQ وقتی m تغییر کند.

دیبرستان نهادی شیراز

دیبر: خلیل همت - فرستنده: همایون دیبری
۱- تابع $y = x^2 - x + 1$ مفروض است. از مبدأ مختصات خطی چنان مرور نموده که بر منحنی تابع قائم است مختصات نقطه برخورد آن را با منحنی پیدا کنید.
۲- دو معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a'x^2 + b'x + c = 0$$

مفروضند. روی محور x نقاط A و B و C و D را طوری انتخاب می‌کنیم که به ترتیب طولهای آنها ریشه‌های این دو معادله باشند. مطلوب است تعیین رابطه‌ای بین ضرایب این دو معادله بطوری که این چهار نقطه تشکیل تقسیم توافقی بدهند.
۳- ثابت کنید منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y = a(x^2 - 1)^2 + \frac{x^4}{2}$$

به ازاء جمیع مقادیر در دونقطه ثابت بر دو خط ثابت مماس است مختصات این دو نقطه و معادلات این دو خط را بدست آورید.

دیبرستان نمونه اصفهان

دیبر: امام جمعه زاده - فرستنده: حسین خبازیان
۱- تابع:

$$y = x^2 - 2(3m+5)x + 3m + 25$$

مفروض است:

اولاً- به ازاء چه مقادیری از m منحنی تابع محور x را در دونقطه قطع می‌کند.

ثانیاً- رابطه مستقلی از m بین ریشه‌های معادله:

$$x^2 - 2(3m+5)x + 3m + 25 = 0$$

تعیین کنید و ثابت کنید وقتی منحنی تابع محور x ها را در

مقدار آن را به ازاء 25° و 40° بددست آورید.

- در صورتی که داشته باشیم :

$$k^{\sin}(x+y) = \sin^2 x + \sin^2 y - 2 \sin x \sin y \cos(x-y)$$

ثابت کنید داریم :

$$\tan x = \frac{1 \pm k}{1 \mp k} \tan y$$

دیبرستان ادب

دیبر : دانا - فرستمنده : سید حسین بی باک

- معادله زیر را حل کنید :

$$\sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = \frac{3}{2}$$

دیبرستان با باک

دیبر : هیرزا طاهری -

فرستمنده : اسماعیل اسماعیلی

- اگر $\sin x$ واسطه هندسی بین $\sin y$ و $\cos y$ باشد
رابطه زیر را بددست آورید :

$$\cos 2x = 2 \cos^2(45^\circ + y)$$

- در صورتی که A و B و C زوایای یک مثلث باشند

حاصل کسر زیر را پیدا کنید :

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

دیبرستان پهلوی همدان

دیبر : سوری - فرستمنده : علی اصغر فقیهی مقدم

- با فرض اینکه $\frac{2ab}{a^2+b^2} = \tan x$ و x زاویه حاده

و $a > b > 0$ باشد مقدار این عبارت را حساب کنید:

$$a^2 \sin^2 \frac{x}{2} + b^2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

دیبرستان خیام

دیبر : مشگانی - فرستمنده : همایی غرویان

$\sqrt{7} \sin x - \cos x + 2$: ثابت کنید که :

مربع کامل است.

- از رابطه :

$$(1+m \cos x)(1-m \cos y) = 1 - m^2$$

رابطه زیر را نتیجه بگیرید :

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1+m}{1-m} \tan \frac{y}{2}$$

دو نقطه M' و M'' قطع می کند m هرچه باشد روی محور x ها نقطه ای مانند A وجود دارد بطوری که :

$$AM' \times AM'' = \frac{K}{4}$$

(K) مقداری است ثابت که تعیین می کنید.

دیبرستان فوربخش (رشت)

دیبر : هیرمشعشی - فرستمنده : سید رضا هیرزند

- نقاط $B(b+a, b), A(2a-b, 2a-b)$

$$C(b-a, 2a+b)$$

رؤوس مثلثی فرض می شوند.

الف. در صورتی که G نقطه تلاقی میانه های مثلث ABC

بر روی خط $\frac{4}{3}x$ واقع و زاویه بین ضلع AC و خط

$$D=3x-5y=0$$

برابر 45° باشد a و b و مختصات سه رأس مثلث را بیاورد.
(جوابی را اختیار کنید که مختصات رؤوس کسری نباشد.)

ب - اگر $(0, 0), A(1, 3), B(4, 1)$ و $C(4, 3)$ فرض

شود مثلث ABC را رسم و طول ارتفاع AH وارد بر ضلع BC و مساحت این مثلث را حساب کنید.

مثلثات

دیبرستانهای آذربایجان

فرستمنده : غلام حسین فلاحتی

- به فرض آنکه انتهای کمان x در ناحیه اول باشد
از رابطه $\tan x = \cot g x$ ابتدا $\tan x$ و سپس نسبتهاي
مثلثاتی x را بددست آورید.

- اگر $\frac{b}{a} = \tan \alpha$ باشد عبارت :

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

را قابل محاسبه بوسیله لگاریتم نمائید.

- اگر بین زوایای مثلث ABC رابطه :

$$\frac{\sin B}{\cos C} = \sin A + \cos A \cot g B$$

برقرار باشد ثابت کنید مثلث قائم الزاویه است.

دیبرستان ادب اصفهان

دیبر : گوهري - فرستمنده : محمود مسعود

- عبارت زیر را قابل محاسبه بوسیله لگاریتم نموده و

دیپرستان صهصامی (اراک)

دیپر: ناظمی - فرستنده: همهدی داوری

۱- معادله زیر را حل کرده جوابهای بین صفر و 2π آنرا

تعیین کنید:

$$\operatorname{tg}x = 2\sqrt{3}(1 - \cos x)$$

$$2-\text{ در صورتی که } \cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ باشد مطلوب است}$$

مقدار $\cos 4x$ و از آنجا کمان حاده x را تعیین کنید.

دیپرستان علم

دیپر: شریفی - فرستنده: حسن بلوری

۱- از رابطه زیر مقدار k و نسبتهای مثلثاتی زاویه φ

را چنان تعیین کنید که تساوی زیر همواره برقرار باشد:

$$4\sin x + 3\cos x = k \sin(x + \varphi)$$

۲- نوع مثلثی را تعیین کنید که بین زوایای آن رابطه زیر

برقرار باشد:

$$\cos A + \cos B = \sin C$$

دیپرستان فردوسی رضائیه

دیپر: دیلمقافی - فرستنده: حسن فیضی آذر

۱- هرگاه A و B و C زوایای مثلثی باشند عبارت

زیر را قابل محاسبه به لگاریتم کنید:

$$\sin A + \sin B - \sin C$$

دیپرستان فرمام

دیپر: طاهری - فرستنده: حمید نیکجو

۱- ثابت کنید اگر:

$$\operatorname{Arctg}x + \operatorname{Arctg}(1-x) = 2\operatorname{Arctg}\sqrt{x-x^2}$$

۲- تحقیق کنید اگر رابطه:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 1 + 2\operatorname{tg}^2\beta$$

برقرار باشد رابطه زیر برقرار است:

$$\cos 2\beta = 1 + 2\cos 2\alpha$$

۳- تحقیق کنید در رابطه:

$$(b^2+c^2)(\cos x - \cos a)^2 + b^2(\sin x - \sin a)^2 = c^2(2 + \cos x + \cos a)^2$$

می توان رابطه $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{a}{2} \pm \frac{2c}{b}$ را نتیجه گرفت:

دیپرستان فیروز بهرام

فرستنده: اردشیر گشتاسبی

۱- تحقیق کنید اگر در مثلثی رابطه:

$$\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 0$$

باشد یکی از زوایا 60° می باشد.

دیپرستان دارالفنون

دیپر: دوست حقیقی - فرستنده: منصور شکری

۱- معادله مثلثاتی:

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = m$$

مغروض است:

۱- اولاً m را بطریقی تعیین کنید که یک ریشه معادله

باشد.

۲- ثانیاً - به فرض آنکه $m = -\frac{1}{2}$ باشد معادله را حل

گنید و جوابهای بین صفر و 2π را تعیین کنید.

۳- در صورتی که x و y و z زوایای مثلثی باشند درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin x + \sin y - \sin z} = \cot \frac{x}{2} \cdot \cot \frac{y}{2}$$

دیپرستان رضاشاہ کبیر (همدان)

دیپر: کاوه - فرستنده: عنایت الله قره خانلو

۱- اگر $\cos x + \sin y = b$ و $\sin x + \cos y = a$

باشد مطلوب است محاسبه $\cos(x+y)$ و $\sin(x+y)$

دیپرستان شاهپور رشت

دیپر: مظفری

۱- اگر $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ و α حاده باشد از رابطه زیر

را بر حسب α محاسبه نمایید:

$$\operatorname{tg}x = \frac{1+2\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$$

۲- عبارت زیر را قابل محاسبه به لگاریتم و مقدار عددی آن را محاسبه کنید.

$$S = 1 + \cos 72 + \cos 144 + \cos 72 \cos 144$$

دیپرستان شاهپور شیراز

دیپر: اشرف - فرستنده: مجحوب

۱- اگر $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\cos a}{\cos b}$ و $x+y+a+b=\pi$

باشد. ثابت کنید:

$$\operatorname{tg}x \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}a \operatorname{tg}y = 2$$

۲- هرگاه $\operatorname{tg}^3 x = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$ باشد به فرض

عبارت را قبل محاسبه به لگاریتم نموده و زاویه x را

بر حسب φ حساب کنید.

دیبرستان نوربخش (رشت)
دیبر: آخوندزاده — فرستنده: سید رضا میرزندگان

۱- و a و b را طوری تعیین کنید که عبارت زیر به ازاء جمیع مقادیر x برقرار باشد.

$$\frac{a \sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x - \sin x} = 1 + \tan 2x$$

دیبرستان هماق

دیبر: افضل — فرستنده: احمد صفائی پور

۱- از رابطه: $1 + 2 \tan^2 \alpha = 1 + 2 \tan^2 \beta$ رابطه:

$$\cos 2\beta = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

را نتیجه بگیرید.

۲- $\sin 5x$ را بر حسب $\sin x$ حساب کرده و به کمک آن معادله زیر را حل کنید.

$$\sin 5x = 16 \sin^5 x$$

و جوابهای بین صفر و 2π را مشخص کنید.

مسئائل هندسه

دیبرستانهای آذربایجان

فرستنده: غلامحسین فلاحتی

۱- صفحه P و دو نقطه A و B در خارج آن طوری قرار دارند که نسبت فواصل آنها از صفحه P برابر m است:

$$\left(\frac{AA'}{BB'} = m \right)$$

مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحه P که نسبت فواصل آنها از دو نقطه A و B برابر $\frac{MA}{MB}$ باشد.

۲- اولاً ثابت کنید مکان هندسی نقاطی ناقاط تماس مماسهایی که از نقطه A واقع در خارج کرده بر آن رسم می‌شوند دایره‌ای است که مرکز آن روی خط AO (مرکز کره) قرار دارد.
ثانیاً اگر شعاع کره مساوی ۴ سانتیمتر و سطح عرقچینی که صفحه مکان فوق الذکر از کره جدا می‌کند برابر $50/24$ سانتیمتر مربع باشد شعاع عرقچین را تعیین کنید.

۳- ثالثاً اگر AM یکی از مماسهای مرسوم از نقطه A به کره باشد حجم جسم حاصل از دوران مثلث AMO حول OA را تعیین کنید.

دیبرستان ادب (اصفهان)

دیبر: خاتون آبادی — فرستنده: محمود مسعود

۱- صفحه‌ای از یک خط راست می‌گذرد و کره‌ای را قطع می‌کند. مطلوب است تعیین مکان هندسی مرکز مقطعهای

۲- معادله $1 = \sin 4x + \cos 4x$ را حل و جوابهای کلی را بدست آورید.

دیبرستان فیوضات مشهد

دیبر: هزینه‌ی — فرستنده: محسن محملی

۱- عبارت زیر را قابل محاسبه لگاریتمی نمایید:

$$\sin^4 a + \sin^4 b - \sin^4(a+b)$$

دیبرستان گلشن راز شبستر

دیبر: باهشت — فرستنده: یعقوب پریچهره

۱- اگر کمان x ریشه معادله:

$$\cos 2x - \sin x = \frac{1}{2}$$

باشد $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

اولاً $\sin x$ و $\cos 4x$ را حساب کنید:

ثانیاً اندازه زاویه x را بدست آورید.

دیبرستان مهران (زاہدان)

فرستنده: عالم گفعی

۱- هریک از مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ را حساب کنید:

$$m \sin x + \cos x = m$$

۲- مقدار حقیقی X را حساب کنید:

$$X = \sqrt{1 + \sin a + \cos a + \sin a \cos a}$$

دیبرستان نهضت شیراز

دیبر: همت — فرستنده: همایون دیبری

۱- در مثلث قائم الزاویه ABC (قائم در A) داریم:

$$m = \frac{b+a}{c}$$

اولاً - مطلوب است محاسبه $\frac{B}{2} \tan \frac{B}{2}$ بر حسب m .

$$\frac{B}{2} = \frac{m-1}{m+1}$$

ثانیاً - اگر باشد مطلوب است محاسبه C و B .

ثالثاً - به ازاء چه مقدار از m زاویه B کوچکترین زاویه مثلث می‌شود.

دیبرستان نهضت اصفهان

دیبر: افضل — فرستنده: حسین خمایران

۱- ثابت کنید اگر در مثلثی رابطه:

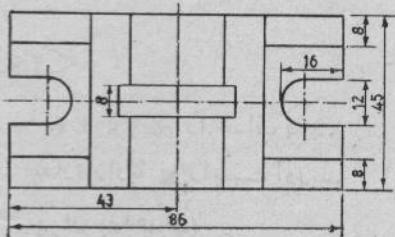
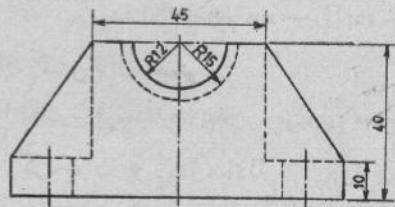
$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$$

برقرار باشد مثلث قائم الزاویه است.

رسم فنی

دیبرستان آذر شماره ۱

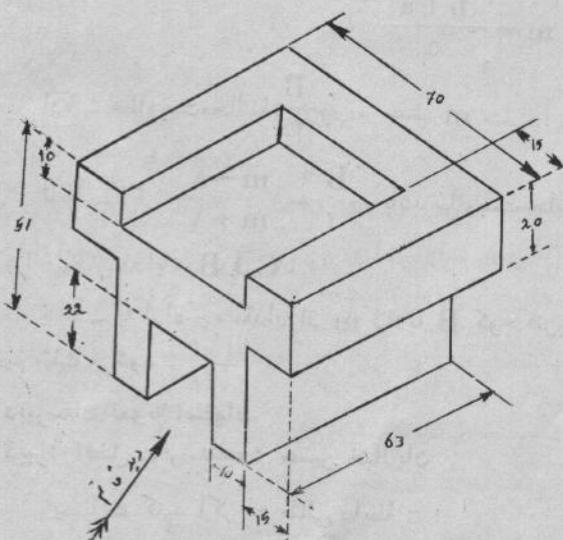
دیبر : مهندس پازوکی - فرستنده: خاله حسین فلاحتی



تصاویر زیر را با مقیاس ۱۰۰ رسم کرده و اندازه گذاری کنید :

- ۱- برش تصویر جلو (به جای تصویر جلو)
- ۲- تصویر چپ .
- ۳- تصویر بالا .

دیبرستان ابن سینا رضائیه
فرستنده: هوشنگ امیر فتحی



مطلوب است دسم تصاویر زیر با مقیاس ۱۰۰

- ۱- تصویر قائم
- ۲- تصویر افقی
- ۳- تصویر نیم راست .

حاصل .

۱- اگر حجم حاصل از دوران متوازی الاضلاع ABCD را حول دو ضلع متواالی AB و AD بـ. ترتیب V_1 و V_2 باشد ثابت کنید .

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{AD}{AB}$$

دیبرستان با باک

دیبر : واجد سمیعی - فرستنده: اسماعیل اسماعیلی

۱- در مثلث ABC زاویه $A = 105^\circ$ و $B = 45^\circ$ و

ضلع \overline{AB} مفروض است و خط عمود AM بر صفحه مثلث رسم شده است.

اولا طریقه تعیین نقطه M از عمود AM بطوری که $CMB = 90^\circ$ باشد شرح دهید .

ثانیاً به فرض آنکه فرض فوق حل شده باشد طول AM را حساب کنید . (بر حسب a).

دیبرستان شاهپور شیراز

دیبر : زمانیان - فرستنده: مجتبی

۱- دو خط متقاطع عمود بر هم By و Ax و AB]

AB عمود مشترک آنها است پاره خط MP بطول ثابت

$|K>1$ طوری تغییر می کند که همواره M بر x و P بر

واقع است ثابت کنید زاویه MP و AB ثابت می ماند .

ثانیاً مکان هندسی نقطه O وسط MP را تعیین کنید .

دیبرستان فردوسی

دیبر : قهرمان صولتی - فرستنده: حسن فیضی آذر

۱- منشور مایلی است که مقطع قائم آن یکشش ضلعی

منتظم به ضلع ۸ سانتیمتر و طول یال جانبی آن ۲۰ سانتیمتر است

و باصفحه قاعده زاویه 60° درجه می سازد پیدا کنید مساحت

قاعده و سطح کل و ارتفاع و حجم منشور را .

دیبرستان فرگام

دیبر : خضرائی - فرستنده: محمد نیکجو

۱- دو صفحه متعامد PQ و AB مفروضند و خط $X=2$ قسمتی

از فصل مشترک این دو صفحه می باشد. مثلث متساوی الساقین ABC را روی صفحه P و مثلث متساوی الساقین ABD را روی صفحه Q می سازیم بطوری که :

$$a = BC = CA = AD = BD$$

باشد اگر M وسط CD و N وسط AB باشد .

۱- ثابت کنید خط MN عمود مشترک دو خط AB و CD است .

دیبرستان گلشن راز شبستر

دیبر : باهتمت - فرستنده: پریچهره

۱- دو دایره O و 'O' مماس خارج هستند و 'AA' یک

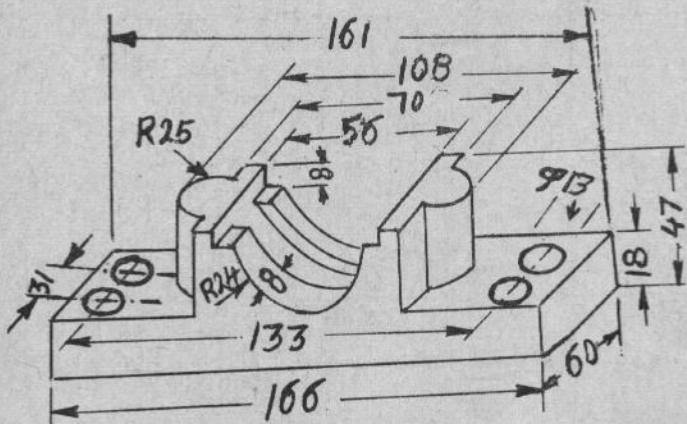
ماس مشترک خارجی آنها است . ثابت کنید اگر شکل حول

خط 'OO' دوران کند مساحت سطح حاصل از دوران 'AA'

واسطه هندسی است ما بین مساحات حاصل از دوران دو دایره .

مقیاس ۱ ° مطلوبست رسم تصاویر قائم، افقی و نیم رخ راست.

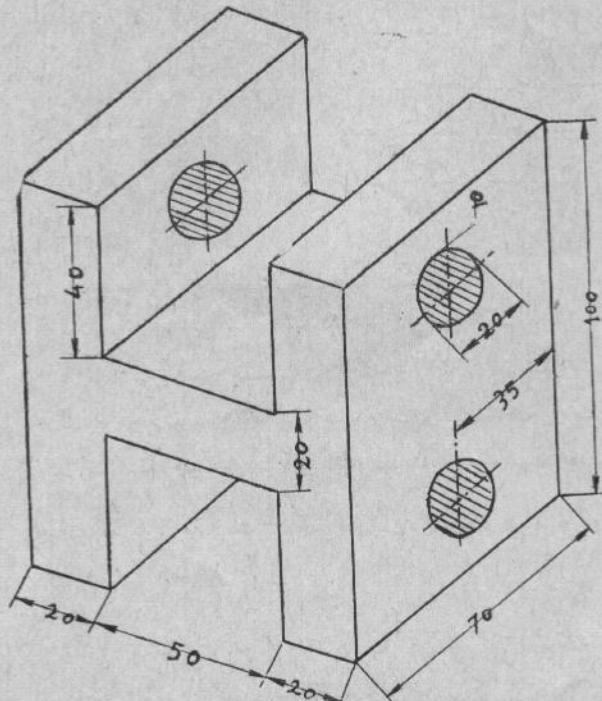
دیبرستان مهران زاهدان



مطلوب است رسم تصاویر : قائم ، افقی ، برش جانبی

دیارستان آهونه اصفهان

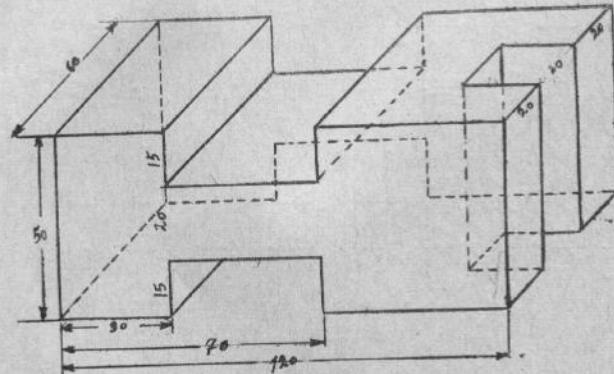
دبير: شاهدیا - فرستنده: حسين خیازیان



نمای اصلی و نمای سطحی و نمای جنبی با اندازه های
کامل ترسیم گردد.

دار الفنون سقان بير دل

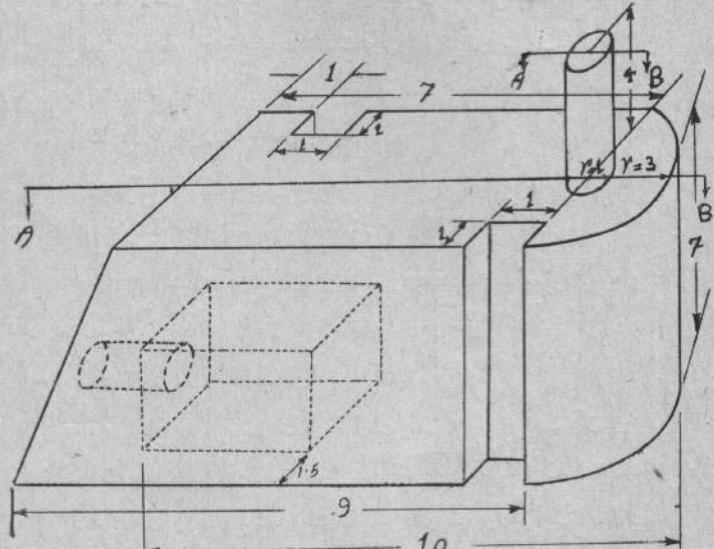
دیور: شهنازی - فرستنده: منصور شکری



تصاویر افقی، قائم و نیمچه را بدست آوردید.

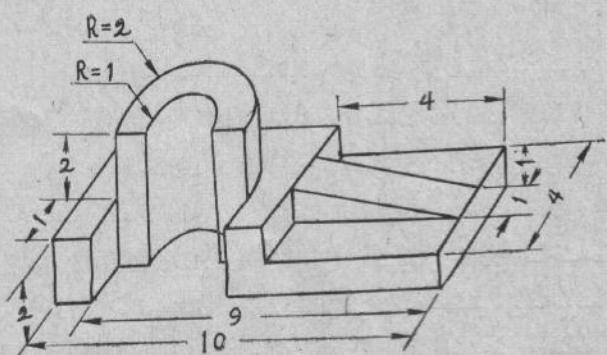
دیم و سقان شاهپور شیراز

د بیرون: فرمائیان



رسم تصاویر (نیمرخ چپ) و نمایش مقطع AB در تصویر قائم و اندازه گذاری کامل، در جسم سوراخی است هر کجا ز مکعبی به ضلع ۳ و استوانه ای به قطر ۲.

دایر: محمدی - فرستنده: محمدی داودی



فیزیک

دیبرستانهای آذربایجان

فرستنده: غلامحسین فلاحتی

۱- زاویه رأس منشوری 45° است. اگر یک شاعع نورانی ساده عمود بر یک وجه این منشور بتابد مماس بر وجه دیگر آن خارج می‌شود.

اولاً - ضریب شکست منشور را پیدا کنید.

ثانیاً - اگر این منشور عدسی محدب مقعری که شاعع سطح محدب آن 15 cm سانتیمتر است و سطح مقعر آن 15 cm سانتیمتر است درست کنیم تقارب آن چه می‌شود.

ثالثاً - اگر طرف گود عدسی را از آب خالص به ضریب

شکست $\frac{3}{2}$ پر کنیم تقارب دستگاه چند دیوپتری است؟

$$\sqrt{2} = 1.4$$

دیبرستان شاهپور

دیبور: نیکنامی، مویرس -

فرستنده: سید هدایت الله نظری نژاد

۱- جسمی است به طول 2 cm سانتیمتر روبروی عدسی همگرائی واقع شده است. تصویر حقیقی آن در فاصله 3 cm سانتیمتری عدسی و به طول 4 cm سانتیمتر تشکیل می‌شود.

اولاً - محل حسم را پیدا کنید.

ثانیاً - فاصله کانونی عدسی را بدست آورد و همگرائی آن را تعیین کنید. اگر شاعع انحنای طرفین عدسی است در آورده با یک مولد به نیروی الکتروموتوری $R_1 = R_2 = 15\text{ cm}$ باشد ضریب شکست عدسی را حساب کنید.

دیبرستان فردوسی رضاییه

دیبور: سحابی - فرستنده: حسن فیضی آذربایجان

۱- بین دو نقطه A و B که اختلاف پتانسیل ثابت 42 V ولت برقرار بوده و جریان همیشه از A به سوی B می‌باشد دو انشعاب وجود دارد. انشعاب اول شامل یک مولد به نیروی

محرك E و مقاومت داخلی $\frac{1}{5}\text{ A}$ و یک آمپرسنج به مقاومت

$\frac{1}{2}\text{ A}$ بطور متواالی با آن می‌باشد و در انشعاب دوم یک موتور به نیروی ضد محرك 12 V ولت و مقاومت داخلی یک اهم

و یک مقاومت $\frac{1}{4}\text{ A}$ بطور متواالی با آن بسته شده و آمپرسنج عدد $3A$ را نشان می‌دهد.

اولاً - نیروی محرك مولد را حساب کنید.

ثانیاً - توان کلی مصرفی را در مدار دوم بر حسب کیلووات

بدست آورید.

۲- درختی به ارتفاع 25 m و در فاصله 4 km کیلومتر از دور بین گالیله قرار گرفته در حالیکه چشم ناظر روی کانون

عدسی چشمی است تحت زاویه $\frac{1}{20}$ رادیان بوسیله دوربین رؤیت می‌شود. اگر فاصله کانونی عدسی چشمی 5 cm سانتیمتر و فاصله دو عدسی 42 cm سانتیمتر باشد فاصله آخرین تصویر را از عدسی چشمی محاسبه نماید و مسیر اشعه نور را بکشید.

دیبرستان فیوضات

دیبور: فکرت - فرستنده: محسن مخلصی

۱- دو مولد مشابه که نیروی محرك و مقاومت داخلی هر کدام 4 A ولت و 2 A اهم است بطور موازی بهم بسته شده و به یک موتور به مقاومت داخلی یک اهم و نیروی ضد محرك E و یک مقاومت خارجی $2\Omega = R_1$ بطور متواالی بسته شده اند در موقعی که موتور نیچر خد شد جریان دوبرابر حالتی می‌شود که موتور در حال گردش باشد نیروی ضد محرك و شدت و توان کل موتور را پیدا کنید.

دیبرستان گلشن راز شیستر

دیبور: جوانی - فرستنده: پریچهره

۱- سیمی به طول 31 cm و به قطر 2 mm میلیمتر و به مقاومت مخصوص $6 \times 10^6 \text{ ohm}$ اهم سانتیمتر موجود است: اولاً مقاومت سیم را پیدا کنید.

ثانیاً به فرض اینکه مقاومت سیم 3 ohm اهم باشد آن را به صورت یک بویین حلقوی، شکل که شاعع هر حلقة آن 5 cm سانتیمتر است در آورده با یک مولد به نیروی الکتروموتوری 78 A و مقاومت داخلی $1/5\text{ ohm}$ اهم و یک موتور M به نیروی ضد محرك E نا معلوم و مقاومت داخلی $2/5\text{ ohm}$ اهم بطور سری بهم بسته و بویین را در داخل کالریمتری که محتوی 300 g آب است قرار می‌دهیم.

۱) در مدت 13 s دقیقه و 56 s ثانیه درجه حرارت آب کالریمتر 32°C درجه سانتیگراد بالا می‌رود شدت جریان رادر مدار حساب کنید.

۲) نیروی ضد الکتروموتوری موتور را تعیین کنید.

۳) توان مکانیکی موتور را بدست آورد.

۴) اختلاف پتانسیل دوسر موتور و دوسر مولد را حساب کنید.

ثانیاً - بویین را از داخل کالریمتر خارج ساخته سطح آن را بر سطح نصف النهار مغناطیسی زمین منطبق می‌کنیم اندازه شدت میدان را در مرکز حلقه بدست آورید. اگر عقر به مغناطیسی

کوچک در مرکز حلقه قرار گیرد. زاویه چرخش آن را بدست آورید (مؤلفه افقی میدان مغناطیسی زمین ۱۲ ارستد فرض شود).

بنویسید .
دیبرستان بواسحق کازرون
دیبر: جواهروی

۱- مقداری کلر رادر مجاورت چسب نشاسته وارد محلول یودور پتاسیم نمودیم برای زایل شدن رنگ آبی 25°C محلول دسی نرمال تیوسولفات سدیم (هیپوسولفیت سدیم) مصرف گردید پیدا کنید چرم ید را که در عمل اول آزاد شده است .

۲- می خواهیم 414 g کیلو گرم سرب را به ماسیکو:

Masicot

تبديل کنیم .

اولاً شرائط عمل را بنویسید .

ثانیاً- در صورتی که راندمان عمل 99% باشد مقدار ماسیکو تهیه شده چقدر است .

دیبرستان دارالفنون

دیبر: مشرف ، حنایی - فرستنده : منصور شکری

۱- آلیاژی از سه فلز سرب آهن و مس را در اسید سولفوریک گرم و غلیظ حل کرده ایم چون محیط عمل سرد گردد مقداری آب مقطر اضافه شود رسوبی به وزن $15/15\text{ g}$ بر جای می ماند که صاف نموده و جدا می کنیم سپس به حجم محلول باقیمانده آنقدر آب اضافه می کنیم تا یک لیتر شود 50°C از این محلول صاف شده را با 100°C پرمنگنات پتاسیم دسی نرمال در مجاورت اسید سولفوریک اکسید می شود . در آزمایش دیگر 100°C از محلول صاف شده را با سولفوردید ترکیب می کنیم رسوبی به وزن $3/68\text{ g}$ گرم بدست می آید پیدا کنید وزن آلیاژ را .

دیبرستان رازی تبریز

فرستنده: غلامحسین زادگان

۱- آلیاژی از مس و روی آهن به وزن $1/9\text{ g}$ موجود است آن را ابتدا در اسید سولفوریک رقیق و سپس در اسید سولفوریک غلیظ حل می کنیم حجم گازهای بدست آمده $5/672\text{ ml}$ لیتر می باشد پس از عمل تبخیر نمکهای حاصل $8/38\text{ g}$ گرم نمک متبلور بدست می آید . پیدا کنید وزن هریک از فلزها و حجم هریک از گازها و وزن هریک از نمکهای متبلور را در صورتی که بدانیم سولفات آهن و سولفات روی هر کدام با ۷ ملکول آب و سولفات مس با ۵ ملکول آب متبلور می شوند .

$\text{Cu} = 1 \quad \text{O} = 1 \quad \text{H} = 1 \quad \text{F}_e = 56 \quad \text{Zn} = 65 \quad \text{S} = 32$

شیوه

دیبرستان انهای آذر

فرستنده: غلامحسین فلاحت

۱- محلولی دارای سولفات سدیم و سولفیت سدیم است . بر 100°C از این محلول کلرور باریم زیاد می ریزیم رسوبی بوزن $4/5\text{ g}$ گرم تولید می شود که اگر این رسوب رادراسید کلرئیدریک بریزیم $2/17\text{ g}$ گرم از وزن رسوب کم می شود غلفت و فاکتور هر یک از دونه ک را در محلول اولیه حساب کنید .

۲- مقداری چدن را که دارای 96% درصد آهن است در اسید سولفوریک رقیق حل می کنیم و حجم محلول حاصل را با آب مقطر به یک لیتر می رسانیم . بر 100°C آن قطره قطره پرمنگنات پتاسیم دسی نرمال می ریزیم مشاهده می شود که از این محلول پرمنگنات پتاسیم می رنگ می شود معین کنید : اولاً- وزن چدن مورد آزمایش را .

ثانیاً- 100°C دیگر محلول (سولفات فرو) با چه حجمی از آب اکسیژن 28 ml حجمی تر کیب می شود .

$$\text{S} = 32 \quad \text{O} = 16 \quad \text{H} = 1 \quad \text{Ba} = 137.6$$

$$\text{Mn} = 55 \quad \text{K} = 39 \quad \text{Fe} = 56$$

گروه فرهنگی آرش

دیبر: محمد رئوفی درویش

۱- آلیاژی از مس و قلع را در اسید نیتریک رقیق حل می کنیم . حجم محلول حاصل را با آب مقطر به 50°C می رسانیم . اولاً 50°C از محلول را با مقدار کافی آهک محلول و حرارت می دهیم گاز را وارد 50°C اسید سولفوریک دسی نرمال می کنیم مشاهده می شود که برای خنثی کردن کامل اسید 20°C سود $\frac{1}{10}$ نرمال لازم است .

ثانیاً بر روی 50°C دیگر از این محلول تیدرزن سولفوره تا حد اشباع عبور می دهیم رسوب حاصل را پس از اضافه و شستشو خشک می کنیم ملاحظه می شود که $2/524\text{ g}$ گرم بر وزن کاغذ صافی افزوده می گردد در صورتی که از فلزات را در آلیاژ حساب کنید .

ثالثاً اگر بخواهیم کاتیون Cu^{+2} و Sa^{+2} را در محلول فوق جدا کنیم طریقه عمل را با ذکر فرمولهای مربوطه

بود.

دیبرستان مهران (زاهدان)

طراح: پرویز اعلم - فرستنده: عالم گفغمی

۱- مخلوطی از کلرورسدیم و کلرورپتاسیم ۱۳/۲ گرم وزن دارد آن را در مقداری آب حل کرده، حجم آن را به یک لیتر می‌رسانیم بر آن ۱۰۵cc آن چند قطره کرومات پتاسیم محلول افزود و تا تولید رنگ قرمز آجری محلول نیترات نقره نرمال افزوده‌ایم (کرومات پتاسیم معروف است). حجم نیترات نقره نرمال مصرف شده ۲۰cc شده است نسبت درصد دوجسم را در مخلوط پیدا کنید.

$$Na = 23 \text{ و } K = 39 \text{ و } Cl = 35/5$$

دیبرستان نوربخش (رشت)

دیبر: صفوي زاده

۱- یک گرم چدن را در اسید سولفوریک رقیق حل کرده و حجم محلول را به ۵۵cc می‌رسانیم. بر روی ۱۰cc نموده‌ایم تا بطور کامل متبلور شود اگر در این عمل ۴۱/۷ گرم نمک بلورین با ۷ ذره آب متبلور ایجاد شود تحقیق کنید جرم اتمی فلز مجھول را.

پتاسیم زایل نمی‌شود تعیین کنید درجه خلوص چدن را.

دیبرستان فردوسی رضائیه

دیبر: هرادخان - فرستنده: حسن فیضی آذر

۱- بعداز حل کردن قطعه‌ای از آلباتر مس و روی در اسید سولفوریک غلیظ و گرم حجم حاصل را به ۲۰۰ سانتیمتر مکعب رسانده و در ۲۰cc از آن محلول گاز نیدرژن سولفوره وارد می‌کنیم ۰/۴۸ گرم رسوب تولید می‌شود و چون ۱۰۰cc دیگر محلول را تبخیر کنیم وزن نمکهای متبلور حاصل رویهم ۱۱/۹۹ گرم می‌گردد پیدا کنید عیار هریک از دو فلز را (سولفات مس با ۵ ملکول آب و سولفات روی با ۷ ملکول آب متبلور است).

$$Cu = 64 \text{ و } Zn = 65 \text{ و } O = 16 \text{ و } S = 32$$

دیبرستان فیوضات مشهد

دیبر: مدرسی - فرستنده: محسن محمدری

۱- ۸/۴ گرم از یک فلز دو ظرفیتی مجھول را در اسید سولفوریک غلیظ و گرم حل کرده محلول حاصل را تبخیر نموده‌ایم تا بطور کامل متبلور شود اگر در این عمل ۴۱/۷ گرم نمک بلورین با ۷ ذره آب متبلور ایجاد شود تحقیق کنید جرم اتمی فلز مجھول را.

ثانیاً اگر فرض کنیم که این نمک در آب قابل حل شده باشد محلولدارای چه فاکتور و غلط ملکولی خواهد

ANSWERS (Quickies on page 448)

30- It has often been assumed that the solution leads to three conditions namely:

$$(1) \quad q(x) < 0$$

$$(2) \quad -a^2q(x) > p(x) \quad \text{and}$$

$$(3) \quad p(x) > a^2q(x)$$

However, conditions (2) and (3) imply (1) for $a^2q(x) < -p(x)$ and:

$$a^2q(x) < p(x)$$

Adding these inequalities gives $2a^2q(x) < 0$ which is equivalent to (1). A similar argument holds when $q(x) > 0$

31- The statement is true and follows from a result of E. W. Chittenden

which states that under the hypotheses of the statement, the set of discontinuities of f is countable.

32- Now p must be of the form $3, 3m+1$ or $3m+2$, while d must be of the form $3m+1$ or $3m+2$. Going through the six possibilities, we find there is only one prime, $p=3$.

33- If the argument of the characteristic function of A is set equal to c , adding the first $n-1$ rows (columns) to the n th row (column) yields a determinant whose n th row (column) is zero. Thus c is a characteristic root of A .

مسئلہ پرائی حل

دانش آموزان هر کلاس می توانند راه حل مسائلی مر بوط به کلاس خود را گه شماره مسئله با علامت «*» شخص شده است به اداره مجله ارسال دارند . از ارسال حل مسائل فاقد علامت * و همچنین از ارسال حل مسائل مر بوط به کلاس های پائین آر خودداری شود روی ورقه حل مسئله نام و کلاس و دبیرستان مر بوط به صراحت نوشتہ شود .

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_p = \frac{p(p+2)}{2}$$

۴۳۹۸ - از : حسن خجسته پی

مربع ABCD بطول ضلع a و به مرکز O مفروض است . مر بهای A، B، C، D و A₁، B₁، C₁، D₁ و ... راچنان رسم می کنیم که همه با مربع مفروض هم مرکز بوده A₁ وسط رسم می کنیم که همه با مربع مفروض هم مرکز بوده A₁ وسط A₂ ، OA₃ و سط A₄ ، OA₅ و سط A₆ ... باشد . و دایره های محیطی همه این مر بهها را نیز رسم می کنیم . مطلوب است مجامسه حدمجموع مساحت های محصور بین ضلعها و کمان های AB و ... A₁B₂ ، A₁B₁

۴۳۹۹ - از : یدالله ارضی (۴۴/۱/۱۱)

در مثلث ABC که زاویه A از مجموع دو زاویه C و B بزرگتر است نقطه های D و F را بر ضلع BC چنان انتخاب می کنیم که زاویه BAF با زاویه CAD باز اویه B باز اویه BAF و زاویه DMF باز اویه AH را به ترتیب برابر باشد و عمدهای DM و FN و AH را به ترتیب بر AC و AB و BC و AB رسم می کنیم . روابط زیر را ثابت کنید .

$$\frac{CH}{BH} = \frac{CM}{AM} = \frac{AN}{BN}$$

$$AM' + AB' + CH' + DM' = AN' + AC' + BH' + AF'$$

$$\frac{AM \cdot CM - DM'}{CD \cdot AD} = \frac{BN \cdot AN - NF'}{BF \cdot AF} = \cos(B+C)$$

و معلوم کنید در چه صورت امتداد MD و NF یکدیگر را روی قطع می کنند .

کلاس پنجم طبیعی

۴۴۰۰ - فرمول کلی توابع درجه دومی را بنویسید که منحنی نمایش تغییرات آنها از دو نقطه (۱۶) - (۱۵) و (۱۵) - (۱۶)

کلاس چهارم طبیعی

۴۳۹۴ - از عبدالله آویج دانشجوی دانشگاه آریامهر دو معادله زیر دارای یک ویژه مشترک هستند .

$$x^m - 4x + 2 = 0$$

$$x^m - x^t - 2 = 0$$

ویژه مشترک را ب دست آورده سپس مقدار m را پیدا کنید .

۴۳۹۵ - در مثلث قائم الزاویه ABC مجموع دو ضلع AC و AB برابر است با $b+c=14$ و فاصله M وسط وتر BC از K نقطه تماس دایرة محاطی داخلی باوتر برابر است با MK ، مطلوب است مجامسه طولهای : وتر ، شعاع دایرة محاطی داخلی و تبعین نسبتهاي مثلثاتی زاویه α نصف زاویه B .

کلاس چهارم ریاضی

۴۳۹۶ - از : کاظم حافظی دبیر دبیرستان درخشانی بنیس .

دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} a'b'(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = a'c'(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}) = b'c'(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \\ xy + yz + zx = a' + b' + c' \end{cases}$$

۴۳۹۷ - ترجمه : قوام نحوی
اگر S₁ و S₂ و ... و S_p به ترتیب حد مجموع بینهایت جمله از تصاعد های هندسی باشد که جمله اول آنها به ترتیب برای باشد با ۱ و ۲ و ۳ و ... و p و قدر نسبت آنها به ترتیب برای باشد با $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و ... و $\frac{1}{p}$ ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است .

$$\frac{1}{p+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{p}$$

یکان دوره چهارم

به زاویه قائم دیده می شود . ثابت کنید جز در حالت استثنائی نقطه M' منحصر به فرد است .

۳- مکان نقطه M' را در در حالت زیر تعیین کنید .

الف - M' خطی عود برقصفه P را پیماید .

ب - M' خطی متقطع با دایره ABC را پیماید اما این خط در صفحه P واقع نبوده و نیز بر آن عمود نمی باشد .

کلاس ششم طبیعی

۴۴۰۶ - فرستنده : پرویز خواجه خلیلی دانشجوی
دانشگاه آریامهر

سطحی را که بین سه می $x = 2x^2 + y$ و محور x ها و خطوط $x = 3$ و $y = 1$ محصور است حول محور Ox دوران می دهیم .
مقدار حجم حادث را حساب کنید .

۴۴۰۷ - از : بختیار علیمحمد سلطانی
معادله زیر را در حالت $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ حل کنید .
 $a \cos mx + b \sin mx + c \cos nx + d \sin nx = 0$

کلاس ششم ریاضی

۴۴۰۸ - ترجمه : قوام نحوی
تابع زیر مفروض است .

$$(I) y = \frac{(x-a)(ax+1)}{1+x^2}$$

۱- به ازاء دو مقدار قرینه a_1 و a_2 - از a وضع دو منحنی نظیر را نسبت بهم معلوم کنید .

۲- ثابت کنید بذاراء جمیع مقادیر a (غیر از ± 1) تابع (I) دارای یک ماکریم و یک می نیم است . مقادیر ماکریم و می نیم و همچنین مقادیر x نظیر آنها نسبت بهم چه وضعی دارند ؟
۳- به فرض $a > 0$ جدول تغییرات تابع را در ازاء مقادیر $a = 1$ و $a < 1$ و $a = -1$ و $a > -1$ و $a < -1$ و $a = 0$ و $a = -0$ رسم کنید .

۴- اگر α و φ دو زاویه باشند بقsmی که $\operatorname{tg} \alpha = a$ و $\operatorname{tg} \varphi = x$ باشد تابع (I) را می توان به فرم زیر نوشت :

$$y = A \sin 2(\varphi - \alpha)$$

که A تابعی است از α

۵- اگر φ_1 و φ_2 به ترتیب مقادیر غیر مشخصی از φ و M_1 و M_2 نقطه نظیر آنها را از منحنی تابع y و x

بگذرند . ازین این توابع آن را معلوم کنید که اگر P نقطه تلاقی منحنی نمایش آن با نیم محور Ox باشد زاویه BPA قائم است . معلوم کنید که در حالت اخیر خطی که از مبدأ مختصات گذشته و بر منحنی مزبور مماس باشد با BC موازی است .

۴۴۰۹ - فرستنده : سعید فرشاد دانشجوی دانشکده علوم تبریز .

معادله زیر را حل کنید .

$$\operatorname{Arccos} 2x = \operatorname{Arcsin} x$$

کلاس پنجم ریاضی

۴۴۰۳ - فرستنده : نادر بزرگی دانش آموز دیبرستان البرز

تابع $y = \frac{a}{x}$ مفروض است . مماس در هر نقطه بر منحنی محور طولها را دارد A و محور عرضها را دارد B قطع می کند . اگر O مبدأ مختصات باشد ثابت کنید که مساحت مثلث OBC مقداری است ثابت و بستگی به نقطه تمساص ندارد و این مقدار ثابت را تعیین کنید . به ازاء چه مقداری از a مساحت مثلث مزبور برابر با یک واحد سطح می باشد ؟

۴۴۰۴ - از : بختیار علیمحمد سلطانی
معادله زیر را حل کنید .

$$\cos 2(n+1)x + \sin(n+3)x - \sin(n-1)x + \\ + 1 = 0$$

۴۴۰۵ - از : حسین خبازیان دانش آموز ششم ریاضی دیبرستان نمونه اصفهان نوع مثلثی را تعیین کنید که بین زاویه های آن رابطه زیر برقرار باشد :

$$\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \frac{2 \sin A}{\sin B + \sin C - \sin A}$$

۴۴۰۶ - ترجمه از فرانسه

سه نقطه A و B و C واقع در یک صفحه P وغیر واقع بر یک خط مستقیم مفروض است .

۱- ثابت کنید که اگر یک قطعه خط MM' از هر یک از

سه نقطه A و B و C تحت زاویه قائم رویت شود از هر نقطه

دایره محیطی مثلث ABC به زاویه قائم دیده خواهد شد .

۲- نظیر هر نقطه فضای M نقطه ای مانند M' وجود دارد که قطعه خط MM' از هر یک از نقاط A و B و C واقع

نقاط متناظر منحنی تابع (I) برای مقادیر

مسائل متغّر قه

۴۴۱۳ - از: بختیار علی‌محمد سلطانی ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases} \sin mx + \sin nx = a \\ \cos mx + \cos nx = b \\ \sin 2mx + \sin 2nx = c \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$(a^2 + b^2)(2ab - c) = 4ab$$

۴۴۱۴ - از: حسین خبازیان

معادله $x^3 - 6x^2 + 4 = 0$ و عبارت

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 1$$

مفروض است. اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله باشد بدون حل معادله، معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هاش $f(x_1)$ و $f(x_2)$ باشد.

۴۴۱۵ - فرستنده: اسحق باور ساد بیرستانهای

مسجد سليمان

هرگاه عددی $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ چنان باشد که:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta} = 0$$

باشد تساوی زیر را ثابت کنید:

$$64\alpha\beta\gamma\delta - [\sum \alpha\beta - (\sum \alpha)^2]^2 = 0$$

۴۴۱۶ - از: مسعود حبیب‌الله زاده پنجم ریاضی

دیرستان خوارزمی ۱

$$x^3 + (a-2)x^2 + x - 1 = 0$$

اولاً - مقدار پارامتر a را چنان تعیین کنید که بین ریشه ها

رابطه $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1$ برقرار باشد.

ثانیاً - را چنان تعیین کنید که مقدار $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ می‌نیمم باشد.

۴۴۱۷ - از: حسین فقیهی مقدم پنجم ریاضی

دیرستان بهلوی همدان

مجموع n جمله اول از یک رشته برآراست با:

$$S_n = \frac{n}{2n+1}$$

جمله n این رشته واقعیه جمله‌های آن را بدست آورید.

۴۴۱۸ - از: حسین علوی پنجم ریاضی دیرستان

بهلوی ساری

در مثلث ABC از A خطی رسمی کنید که ضلع BC را

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_3 = \varphi_1 - \frac{\pi}{3}$$

باشد ثابت کنید که عرض نقطه مرکز مثلث P مستقل از φ_1 است و طول نقطه G را بر حسب φ_1 حساب کرده تغییرات آن را وقتی φ_1 از صفرتا π تغییر کند بدست آورد.

$$6 - \text{بافرض } \frac{2a}{1-a^2} = m \text{ ثابت کنید که جوابهای معادله}$$

$y'' = 0$ مشتق دوم تابع (I) است) همان جوابهای معادله $\tan 3\varphi = \tan 2\alpha$ می‌باشد و از روی آن نتیجه بگیرید که منحنی تابع (I) (دارای سه نقطه عطف می‌باشد).

۴۴۰۹ - از: ناصر شاهیر پنجم ریاضی دیرستان

هدایت سندنج

معادله زیر را حل کنید:

$$\cos(x - \alpha) - \sin 4\alpha = \frac{1}{4} \sin 2(x + \alpha)$$

۴۴۱۰ - کسر غیر ممکن التحويل $\frac{a}{b}$ به چه صورت

$$\frac{a+b}{a-b} \text{ برابر با یک عدد صحیح و کسر}$$

برابر با یک کسر مولد اعشاری تحقیقی باشد. ثابت کنید که در

این صورت کسر $\frac{a}{b}$ مولد کسر اعشاری متناوب ساده است. در

صورتی که $\frac{a}{a+b}$ مولد کسر اعشاری باشد رقم اعشار باشد کسر

$\frac{a}{b}$ را مشخص کنید.

۴۴۱۱ - ترجمه از فرانسه

چهار نقطه D, C, B, A به معین ترتیب بر یک خط

مستقیم واقع‌اند. انگل‌سی را تعیین کنید که A'

مبدل‌های نقاط مفروض در انگل A مزبور چهار رأس یک مستطیل

باشند. به چه شرطی این مربع مستطیل یک مربع می‌باشد؟

۴۴۱۲ - ترجمه از فرانسه

دونقطه A و B بر شاخه‌های (H) (باجنبهای Ox)

و Ox' مفروض است. متواء‌الايلاع $AMBN$ را چنان رسم

می‌کنیم که ضلعها با مجنبهای هذلولی موازی باشند.

ثبت کنید که قطر MN از O می‌گذرد.

مورد استعمال - باملاع بودن سه نقطه و امتداد مجنبهای

یک هذلولی مرکز آن والازطريقه ترسیم باید.

را درنظر می‌گیریم که A یک رأس آن و H نقطه تلاقی ارتفاعهای آن بوده شماع دایره محیطی آن با ارتفاع وارد از رأس A برابر باشد.

الف - مکان هندسی نقطه M وسط ضلع BC را تعیین کنید.

ب - پوش دایره محیطی مثلث مذکور را تعیین کنید.

مسائل فیزیک

انتخاب اوسط : هوشگ شریفزاده

برای کلاس‌های چهارم

۴۴۲۶ - فرستنده : یوسف‌کشاورز ، چهارم طبیعت

دیستان کورش کبیر گچساران

دومیله فلزی A و B یک سانتی‌متر اختلاف طول دارند که ضریب انبساط طولی آنها به ترتیب عبارتست از :

$$\lambda_B = 16 \times 10^{-6} \quad \lambda_A = 12 \times 10^{-6}$$

طول اولیه آنها را طوری تعیین کنید که اختلاف طول این دومیله در تمام درجات ثابت و برابر با یک سانتی‌متر باقی بماند.

۴۴۲۷ - فرستنده : یوسف‌کشاورز

دومیله آهنی بدطولهای l_1 و l_2 و $AC = l_1$ و $AB = l_2$ باهم زاویه قائم تشکیل داده اند. ضریب انبساط میله BC و ترمثلث قائم الزاویه ABC راچنان تعیین کنید که در تمام درجات زاویه A قائم باقی بماند.

برای کلاس‌های پنجم

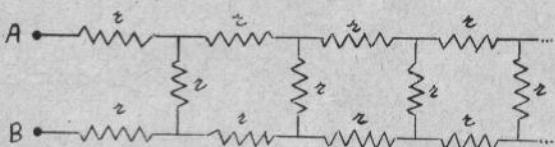
۴۴۲۸ - از : عالم‌کفعی دیستان مهران زاهدان

سه مقاومت چنان تعیین کنید که اگر به طور انشعابی بینندیم مقاومت معادل دو اهم شود و اگر به طور متواالی بینندیم مقاومت کل برابر ۱۱۵ اهم گردد. بفرض اینکه شدت جریان در یکی از انشعابهای مذکور دو برابرشد جریان در انشعاب دیگری است.

۴۴۲۹ - فرستنده : رسول آژیری دیستان‌ها

گچساران

در شکل زیر تعدادی مقاومت π بین دو نقطه A و B



در M قطع کند وزاویه MAC سه برابر زاویه MAB باشد.

به فرض $\frac{CM}{BM} = k$ زاویه A را بحسب b و c بدست آورید.

مثال عددی : $b = 2$ و $c = 1$ و $k = 4$

۴۴۲۹ - فرستنده : اسماعیل بابلیان دیر

دیستان‌های خمین

مطلوبست تعیین مکان هندسی اوساط و تراهایی که در بینی مفروض از A انتهای قطر بزرگتر رسم می‌شوند.

۴۴۳۰ - از : محمد‌محمدی عابدی نژادش ریاضی دیستان سخن

در بینی مفروض و تر MM راچنان رسم کنید که طول آن می‌نیم بوده از مرکز بینی بدوازی قائم دیده شود.

۴۴۳۱ - فرستنده : نادر بزرگی دیستان البرز

دودایره ماس خارج مفروض است مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که نسبتی ای مساحه‌ای مرسوم از آن نقاط بر دودایره به نسبت شاعرهای دودایره باشد.

۴۴۳۲ - ترجمه : محمد‌محمدی عابدی نژاد

نقطه N بر ضلع AC و نقطه M بر ضلع AB از مثلث واقع بوده رابطه CN.CA = BM.BA برقرار است. عمود مرسم در N بر AC با عمود مرسم در M بر AB یکدیگر را در D تلاقی می‌کنند. مکان هندسی نقطه R از بینی کنید.

۴۴۳۳ - از : سید حسن نبوی پنجم ریاضی دیستان

هدف ۱

زاویه xOy ، نقطه A واقع در داخل آن و نقطه P واقع در خارج آن مفروض است. از P خطی چنان رسم کنید که اگر رادر B و Oy رادر C قطع کند خط OA نیمساز زاویه BAC باشد.

۴۴۳۴ - فرستنده کان : آلبورت رهبان ، محمد‌محمدی عابدی نژاد

دو خط متوالی ℓ و ℓ' و دو نقطه A و B واقع دریک صفحه مفروض اند. از A خطی چنان رسم کنید که ℓ و ℓ' رادر C و D قطع کرده قطعه خط DC از نقطه B بدوازی معین دیده شود.

۴۴۳۵ - ترجمه از فرانسه

دونقطه ثابت A و H مفروض است. مثلث متغیر ABC

را حساب کنید.
ثانياً - اگر

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_{n-1}$$

$$K = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_n}{n}$$

باشد شتاب را بر حسب

کشش مساوی نخها را حساب کنید.

۴۴۳۳ - از: کاظم تشكیری ششم ریاضی دبیرستان پهلوی همدان

به انتهای یک میله نازک و بی وزن فلزی به طول l گلوله‌ای به جرم m و به سطح آن نیز گلوله دیگری به جرم m متصل است انتهای دیگر میله به نقطه O آویزان است. زمان تناوب این پاندول ازچه رابطه‌ای بددست می‌آید؟

۴۴۳۴ - فرستنده: مسعود فاخری دانشجوی

پلی‌تکنیک یک مقاومت و یک خازن بطور سری برای فرکانس متغیری

وصل شده‌اند. ولتاژ دوساین مدار V ولت می‌باشد.

(۱) ثابت کنید که مقدار ولتاژ دوس خازن برابر است با

$$V_c = V \cos(\operatorname{Arctg} \frac{N}{N_0})$$

که N فرکانس و $N_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ می‌باشد.

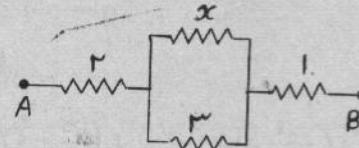
(۲) ثابت کنید مقدار ولتاژ دو سر مقاومت به صورت

$$V_R = V \cos(\operatorname{Arctg} \frac{N}{N_0})$$

می‌باشد.

بسته شده‌است. اگر تعداد مقاومتها بینهاست فرض شود مقاومت معادل بین دو نقطه A و B را بذست آورید.

۴۴۳۵ - فرستنده: رسول آژیری
در شکل زیر مقاومت x را طوری تعیین کنید که مقاومت معادل بین دو نقطه A و B برابر با همان مقاومت x باشد.



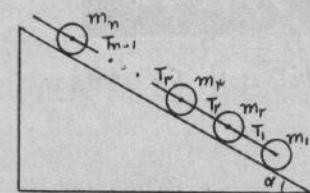
برای کلاس‌های ششم و داوطلبان کنکور
۴۴۳۶ - فرستنده: محمد صادق ابریشمی دانشجوی

وزارت پست و تلگراف P_A و P_B در قایقی به وزن P به فاصله دو نفر به وزنهای P_A و P_B در قایقی به وزن P از یکدیگر عوض کنندجهت و مقدار تغییر مکان قایق را حساب کنید. از اصطکاک آب صرف نظر شود.

۴۴۳۷ - از: حسین خبازیان - ششم ریاضی دبیرستان نمونه اصفهان

تمدد n جسم به جرم‌های m_1 و m_2 و m_3 و ... و m_n متواالاً روی سطح شیبداری قرار گرفته و بوسیله نیزی به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر

ضریب اصطکاک بین آنها و K_1 و K_2 و ... و K_n باشد. اولاً - کشش نخ- T_1 و ... و T_n



مسائل حل نشده (بقیه از صفحه ۴۳۲)

(۱۳). توزیع اینچنین عدد هایی بین عدد های اول طبق قاعدة معین نیست. وقتی n ترقی کند چگونه فواعلی در رشته اعداد طبیعی ایجاد می‌کند؟ باید امیدوار بود که بتوانند این فواعل را اندازه بگیرند. آیا این اعداد به ندوات وجود دارند؟ اطلاعات فعلی ما برای پاسخ دادن به این سؤال کافی نیست. تقریباً ثلث اولین عده‌های اول این چنین خاصیتی را دارند و این نسبت بین عدد های اول کوچکتر از ۱۰۰۰ تقریباً ثابت باقی مانند. آیا وقتی این خاصیت برای عده‌های اول بزرگتر هم صادق باشد بین تعداد همه عده های اول و آنها بی که این خاصیت را دارند چه نسبتی برقرار است؟ آیا این نسبت به سمت حد معینی مخالف با صفر می‌گردد؟ طبقه‌ای از اعداد وجود دارد که فرآوانی مجذوب آنها با $\frac{1}{\log N}$ برابر نیست، اما این موضوع نسبی است.

تمدد با دوره تناوب $1 - n$ رقم (حداکثر) باشد؛ اولین عدد از این اعداد ۷ است:

۱۰	۷
۳۰	۵/۱۴۲۸۵۷....
۲۰	
۶۰	
۴۰	
۵۰	
۱	
۰۰	

ملاحظه می‌شود که کلیه باقیماندهایی که امکان دارد (عددهای ۱ تا ۶) در عمل تقسیم ظاهر شده‌اند و دوره تناوب ۶ رقمی است. تاکنون طریق کلی عده‌های از نوع فوق تعیین نشده است. لازم است که عدد مورد نظر اول باشد اما این شرط کافی نیست (مثال

حل مسائل ریاضی: ۴۲

هرستند پس $OG = OG - BG$ و از تساوی دو مثلث OCG و BPG نتیجه می‌شود $OC = BP$ بنا بر این داریم :

$$OC = BC - CG$$

$$OJ = BC - CG + CJ = \frac{FC}{2} - \frac{CJ}{2} + CJ - \frac{FC + CJ}{2} = \frac{FJ}{2}$$

و چون هر یک از کمانهای BG و BO و OG از دایره BCG به اندازه 120° درجه است پس :

کلاس چهارم ریاضی

- ۴۳۱۱ - اگر داشته باشیم :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

$$\begin{aligned} \text{سچمه‌ای زیر نسبت به } x \text{ مرربع کامل نباشد.} \\ (a^2 + c^2 + e^2)x^2 + 2(ab + cd + ef)x + b^2 + d^2 + f^2 \end{aligned}$$

حل - باید داشته باشیم :

$$\Delta' = (ab + cd + ef)^2 - (a^2 + c^2 + e^2)(b^2 + d^2 + f^2) =$$

این رابطه بعداز اختصار می‌شود :

$$\Delta' = -(af - be)^2 - (ad - bc)^2 - (cf - ed)^2 \quad \text{با نوچه به رابطه مفروض } \Delta' \text{ بوده و در نتیجه سچمه‌ای مزبور مرربع کامل می‌باشد.}$$

- ۴۳۱۲ - دو معادله درجه دوم چنان تعیین کنید که ریشه‌های هر یک از آنها به ترتیب برابر باشند با مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله دیگر.

حل - دو معادله را به صورت زیر فرض می‌کنیم :

$$(E) \quad x^2 - px + q = 0$$

$$(E') \quad x^2 - p'x + q' = 0$$

کلاس چهارم طبیعی

- ۴۳۱۳ - به ازاء چه مقدار از زاویه u ($u < 90^\circ$) معادله درجه دوم زیر دارای جواب است و این جواب را معلوم کنید :

$$x^2 + 2(1 - \cos u)x + 2(1 - \cos u) = 0$$

حل - میان معادله را تشکیل می‌دهیم :

$$\Delta' = (1 - \cos u)^2 - 2(1 - \cos u) = (1 - \cos u)(1 - \cos u - 2)$$

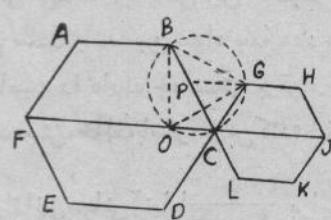
$$\Delta' = (1 - \cos u)(-1 - \cos u) = -(1 - \cos u)(1 + \cos u)$$

$$\Delta' = -(1 - \cos^2 u) = -\sin^2 u$$

مقدار $\sin^2 u$ هیچگاه منفی نیست بنا بر این غیر از 0 که در ازاء آن $\Delta' = 0$ است به ازاء سایر مقادیر u مقدار Δ' منفی بوده معادله جواب نخواهد داشت . تنها در یک حالت $u = 0$ معادله جواب دارد . و در این حالت معادله چنین می‌شود :

$$x^2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$$

- ۴۳۱۰ - دوشش ضلیع منتظم و نامساوی $ABCDEF$ و $CGHJKL$ (رأسهای آنها درجهت حرکت عقربه‌های ساعت حرف‌گذاری شده است) در خارج یکدیگر واقع بوده اما در رأس C مشترک هستند و نقاط D و G بر یک استقامت واقع اند . تابت کنید که دایره محیطی مثلث BCG خط FJ را در نقطه O وسط آن قطع می‌کند و مثلث BOG متساوی الاضلاع است .



حل - در مثلث PCG متوازی الاضلاع $CP = CG$ مزدیم و چون هر یک از دو کمان BG و OG به اندازه 120° درجه

$$2) \quad d < \frac{b}{2} = \frac{a+c}{4} \quad \text{یا} \quad 2d < \frac{a+c}{4} + \frac{a-c}{2}$$

$$\Rightarrow d < \frac{3a-c}{8}$$

از جمع عضو به عضو نامساوی‌های (۱) و (۳) نامساوی‌های (۵) و از جمع طرفین پنج نامساوی از (۱) تا ۵ نامساوی (۶) بدست می‌آید.

G - ۴۳۱۴ نقطه تلاقی میانهای مثلث ABC است.

ثابت کنید که اگر رابطه $b^2 + c^2 = 2a^2$ بین اندازه‌های ضلعها برقرار باشد نیمساز زاویه BAC و نیمساز زاویه BGC روی ضلع BC یکدیگر را قطع می‌کنند.

حل - با توجه به روابط :

$$m_b = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} = \frac{2c^2}{4}$$

$$m_c = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{2b^2}{4}$$

خواهیم داشت :

$$\frac{GB}{GC} = \frac{m_b}{m_c} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{AC}$$

و بنا به قضیه مربوط به نیمساز حکم ثابت است.

G - ۴۳۱۵ سه دایره به مرکزهای M و N و O غیر

واقع بر یک خط مفروض است. دایره‌های (M) و (N) در نقطه C مماس خارج هستند.

دایره‌های (O) و (M) در نقطه A مماس داخل می‌باشند و دایره‌های

(O) و (N) در نقطه B مماس داخل می‌باشند

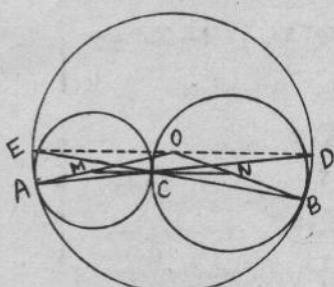
خطوط BC و AC را رسم می‌کنیم که دایرة (O) را به ترتیب در D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید سه نقطه D و O و E در یک خط مستقیم واقع اند.

حل - OE و OD را رسم می‌کنیم، داریم :

$$\angle ADO = \angle DAO = \angle ACM$$

$$\angle BEO = \angle EBO = \angle NCB$$

دو خط OD و OE با MN موازی بوده دریک امتداد واقع اند



باید p و q ریشه‌های معادله (E') و p' و q' ریشه‌های معادله (E) باشند. بنابراین باید داشته باشیم :

$$(1) \quad \begin{cases} p' + q' = p \\ p'q' = q \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} p + q = p' \\ pq = q' \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} p + q = p' \\ p'q = q' \end{cases}$$

از جمع عضو به عضو رابطه‌های (۱) و (۳) با هم و (۲) و (۴) با هم خواهیم داشت :

$$\begin{cases} q + q' = 0 \\ p'q' + pq = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} q + q' = 0 \\ q(p - p') = 0 \end{cases}$$

اگر $q = 0$ باشد معادله‌های (۱) و (۳) به یک معادله $p = p'$ تبدیل شده و معادله‌های مطلوب عبارت می‌شوند از :

$$(E_1) \quad x^2 - px = 0$$

$$(E_1') \quad x^2 - px = 0$$

اگر $p = p'$ باشد از معادله‌های (۱) و (۳) نتیجه می‌شود. $q = 0$ و $q' = 0$ و باز هم همان معادله‌های (E) و (E') بدست می‌آید.

- ۴۳۱۳ اگر a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلثی بوده و تصاعد حسابی با قدر نسبت d تشکیل دهند، نامساوی‌های زیر را محقق کنید :

$$1) \quad d < c$$

$$2) \quad d < \frac{b}{2}$$

$$3) \quad d < \frac{a}{3}$$

$$4) \quad d < \frac{3a - c}{8}$$

$$5) \quad d < \frac{a + 3c}{6}$$

$$6) \quad d < \frac{7a + 4b + 11c}{40}$$

حل - به ترتیب داریم :

$$1) \quad a - b < c \Rightarrow d < c$$

$$2) \quad a - c < b \quad 2d < b, d < \frac{b}{2}$$

$$3) \quad a < b + c \quad \text{یا} \quad a < (a - d) + (a - 2d)$$

$$\Rightarrow d < \frac{a}{3}$$

کلاس پنجم طبیعی

۴۳۱۶ تابع زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} ax' + (b - m)x + c - n = 0 \\ a'x' + (b' - m)x + c' - n = 0 \end{cases}$$

دارای دوریشه مشترک هستند و خواهیم داشت :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b - m}{b' - m} = \frac{c - n}{c' - n}$$

$$\Rightarrow m = \frac{ab' - ba'}{a - a'}, \quad n = \frac{ac' - ca'}{a - a'}$$

و معادله خط قاطع مشخص می شود .

۴۳۱۹ - تابع $y = x^2 + x - 1$ مفروض است . اگر

منحنی (C) نمایش تابع ، خط Δ به معادله $y = ax + b$ را در دو نقطه به طولهای x' و x'' قطع کند فرمول کلی تابع درجه دومی را تعیین کنید که منحنی نمایش آنها خط Δ را در دو نقطه به طولهای $x' - x''$ و $x'' - x'$ قطع می کنند . در امکان این مسئله بحث کنید . از بین این تابع آن را مشخص کنید که ضریب جمله درجه دوم آن برابر با یک بوده و منحنی (C') نمایش هندسی آن با (C) دارای مماس مشترکی به معادله :

$$y = 3x - 2$$

باشد . نقاط تماس هریک از منحنیهای (C) و (C') را با خط مماس مشترک بدست آورید .

حل - طولهای نقاط تلاقی (C) با Δ یعنی x' و x''

ریشهای معادله زیر می باشند :

$$(1) \quad x^2 + (1 - a)x - 1 - b = 0$$

و معادله درجه دومی که ریشه هایش x' و x'' باشد عبارت است از :

$$(2) \quad k(x^2 - (1 - a)x - 1 - b) = 0$$

که در آن k عدد ثابت می باشد . این معادله را به صورت زیر درمی آوریم :

$$kx^2 - k(1 - a)x - k(1 + b) + ax + b = ax + b$$

$$kx^2 + (ak - k + a)x + b - bk - k = ax + b$$

و فرمول کلی تابع مطلوب عبارت می شود از :

$$(3) \quad y = kx^2 + (ak - k + a)x + b - bk - k$$

شرط امکان مسئله آنست که معادله (1) دارای جواب باشد یعنی :

$$\Delta = (1 - a)^2 + 4(1 + b - bk - k) > 0 \quad \text{یا} \quad a^2 - 2a + 4b + 5 > 0$$

ثانیا $a = 1$ است و تابع (3) عبارت می شود از .

$$(4) \quad y = x^2 + (2a - 1)x - 1$$

$$y = x^2 - 2(2a + 1)x + 8a - 4$$

می نیم تابع خود تابعی است بر حسب a ، ماکریم این تابع را تعیین کنید .

حل - اگر m مقدار می نیم باشد طبق فرمول مربوطه

داریم :

$$m = \frac{4(8a - 4) - 4(2a + 1)^2}{4}$$

$$= -4a^2 + 4a - 5$$

و مقدار ماکریم تابع اخیر برای است با :

$$\frac{4(-5)(-4) - 16}{-16} = -4$$

۴۳۱۷ - اولا ثابت کنید که اگر $a = b + c$ باشد

خواهیم داشت :

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$$

ثانیاً معادله زیر را حل کنید :

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x$$

حل - از رابطه مفروض داریم :

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}(b + c) = \frac{\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}$$

و از این رابطه ، رابطه مطلوب حاصل می شود :

ثانیاً - چون $x = 2x + 3x$ بنا بر این داریم :

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad \text{یا}$$

$$\operatorname{tg} 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{K_1 \pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{K_2 \pi}{3}$$

کلاس پنجم ریاضی

۴۳۱۸ - اگر دو منحنی به معادلات :

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{و} \quad y = a'x^2 + b'x + c'$$

در دو نقطه متقاطع باشند معادله خطی را تعیین کنید که بر نقاط تقاطع آنها می گذرد .

حل - معادله خط را به صورت $y = mx + n$ فرض می کنیم بنا بر این دو معادله زیر :

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = mx + n \\ a'x^2 + b'x + c' = mx + n \end{cases}$$

برای اینکه این تابع بر خط $2 - 3x = y$ مماس باشد باید معادله :

$$x^2 + (2a - 1)x - 1 = 3x - 2$$

$$x^2 + 2(a - 2)x + 1 = 0$$

ریشه متعارف داشته باشد :

$$a^2 - (a - 2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ و } 1$$

در ازاء $a = 1$ همان تابع مفروض بددست می‌آید تابع مطلوب در ازاء $a = 3$ بددست می‌آید و عبارتست از :

$$y = x^2 + 5x - 1$$

بسادگی معلوم خواهد شد که تابع مفروض در نقطه (1) و تابع اخیر در نقطه (5 - 1) بر خط $y = 3x - 2$ مماس می‌باشند.

- ۴۳۲۰ - در تابع $y = \sqrt{\sec 2x}$ ثابت کنید که :

$$y'' = 3y^5 - y$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{\cos 2x}}, \quad y' = \frac{\tan 2x}{\sqrt{\cos 2x}} \\ = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^3 2x}}$$

$$y'' = \frac{2 + \sin^4 2x}{\sqrt{\cos^5 2x}} - \frac{2 - \cos^4 2x}{\sqrt{\cos^5 2x}}$$

$$y'' = 2[\sqrt{\frac{1}{\cos^4 2x}}]^5 - \sqrt{\frac{1}{\cos^4 2x}} - 3y^5 - y$$

- ۴۳۲۱ - اگر داشته باشیم :

$$A = \cos 2\alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha$$

$$B = \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$$

$$k = \frac{A'}{\sin^3 3\alpha} + \frac{B'}{\cos^3 2\alpha}$$

حل - داریم :

$$\cos 2\alpha = \cos(3\alpha - \alpha) = \cos 3\alpha \cos \alpha + \sin 3\alpha \sin \alpha$$

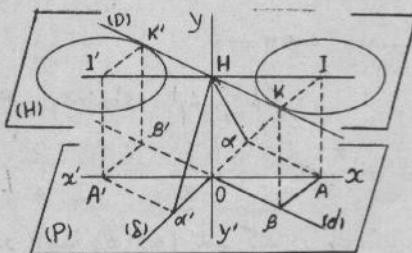
$$A = \sin 3\alpha \sin \alpha$$

$$B = \cos 3\alpha \cos \alpha$$

$$k = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$$

- ۴۳۲۲ - دو خط عمود بر هم x' و y' که در O مشترک هستند مفروض است . بر x' دو نقطه A و A' به فاصله های $OA = OA' = a$ از O تعیین کرده خط غیر مشخص (D) را در نظر می‌گیریم

بعضی که در نقطه ای مانند H بر y' عمود بوده و دو صفحه (D) و [A] و [A'] بر یکدیگر عمود باشند . صفحات (P) و (H) را به ترتیب در O و H عمود بر y'



پس در مثلث قائم الزاویه $\triangle OH\alpha$ میانه OH با نصف وتر یعنی $O\alpha$ و $O\alpha'$ برابر است . اگر β و β' به ترتیب تصویرهای A و A' بر (d) باشد از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که :

$$A'\beta' = O\alpha' = OH, \quad A\beta = O\alpha = OH$$

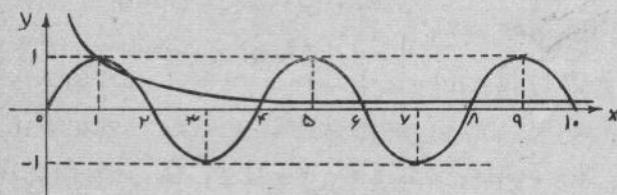
یعنی (d) مماس مشترک دو دایره به مرکزهای A و A' و به شاعر برابر با OH واقع در صفحه (P) می‌باشد .

اگر دوایر مذکور و (d) را بر صفحه (H) تصویر کنیم به سادگی نتیجه خواهد شد که (D) مماس مشترک دو دایره به مرکزهای I و I' و به شاعر برابر با OH واقع در صفحه (H) می‌باشد . I و I' به ترتیب تصویرهای قائم A و A' بر (d) باشند .

۲) در مثلثهای قائم الزاویه $\triangle O\beta'K$ و $\triangle O\beta'K'$ داریم :

$$OK' = O\beta' + \beta'K' = O\beta' + A\beta' = OA' = a \\ \Rightarrow OK' = OK = a$$

x	.	$+ \infty$
y'	-	,
y	$+ \infty$	0



در فاصله مزبور دو منحنی دارای ۶ نقطه تقاطع می‌باشند. پس معادله مفروض در این فاصله دارای ۶ جواب است که کوچکترین آنها $x = 1$ می‌باشد.

کلاس ششم ریاضی

۴۳۴۵- دوتابع زیر را در نظر می‌گیریم :

$$y_1 = ax\sqrt{x^2 + 1} \quad y_2 = \frac{bx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

۱- خط Δ به معادله $x = k$ منحنی (C_1) نمایش هندسی تابع y_1 را در M و منحنی (C_2) نمایش هندسی تابع y_2 را در N قطع می‌کند. اگر مثلث MNO در رأس O شبیه قائم است و (C_1) و (C_2) در نقطه O مبدأً مختصات بریکتیگر مماس باشند مقادیر a و b را تعیین کنید به شرط آنکه مقادیر طول و عرض هریک از نقاط M و N هم‌لامتحان باشند. (مثلث ABC به رأس A شبیه قائم نامیده می‌شود هرگاه تفاضل دوزاویه B و C برابر 90° درجه باشد).

۲- به فرض $a = b = 1$

اولاً منحنیهای (C_1) و (C_2) را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کرده وضع نسبی آنها را در O تعیین کنید.

ثانیاً معلوم کنید به ازاء چه مقادیر از خط (D) به معادله:

$$y = \lambda x$$

با هریک از منحنیهای C_1 و C_2 علاوه بر O متقطع می‌باشد. اگر (D_1) و (D_2) دو وضع از (D) باشند که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم محورها قرینه یکدیگر باشند و (D_1) منحنی

نقطه‌های K و K' بر کرده به مرکز O و به شما a فراردارند.

کلاس ششم طبیعی

۴۳۴۳- معادله هذلولی را تعیین کنید که رأسهای روی کانونهای بیضی به معادله :

$$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$$

قرارداشته در رأسهای بیضی نیز روی کانونهای هذلولی واقع باشد.

حل- معادله بیضی را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a = 4, b = 3 \text{ و } c = \sqrt{7}$$

و برای هذلولی خواهیم داشت :

$$a' = \sqrt{7}, c' = 4 \text{ و } b' = 3$$

و معادله آن عبارت خواهد شد از :

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$9x^2 - 7y^2 - 63 = 0 \quad \text{یا}$$

۴۳۴۴- منحنیهای نمایش دوتابع :

$$y = \sin \frac{\pi x}{2} \quad y = \frac{1}{x}$$

را وقتی x در فاصله $(0, 15)$ تغییر کند در یک شکل رسم کنید و از روی آن معلوم کنید که معادله $x \sin \frac{\pi x}{2}$ در فاصله مزبور دارای چند جواب است و کوچکترین جواب را تعیین کنید.

حل- تابع مثلثاتی با دوره تناوب 4 است، منحنی آن را در فاصله $(0, 15)$ رسم کرده آن را انتقال می‌دهیم.

مشتق دوتابع برآورده است با :

$$y' = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \quad y' = -\frac{1}{x^2}$$

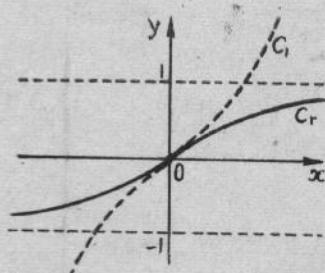
جدول تغییرات و شکل دومنحنی به قرار زیر است:

x	0	1	2	3	4
y'	+	0	-	0	+
y	0	-1	0	1	0

دو منحنی در O بر یکدیگر مماس هستند و هم از یکدیگر می‌گذرند نیمساز اول و سوم مماس مشترک آنها است. وقتی

$$\frac{y_1}{x} \text{ حد } x \rightarrow +\infty \text{ برابر } \frac{y_2}{x} \text{ برابر } 1$$

صفراست پس تحدب (C_1) در شاخه با طولهای مثبت آن به صفت



یهای منفی و از (C_2) به صفت عوای مثبت است
ودر شاخه با طولهای منفی به ترتیب عکس. مبدأ مختصات برای هر دو منحنی نقطه عطف می‌باشد.

ثانیاً - از معادلات :

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+1} = \lambda x & x=0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lambda x & \sqrt{x^2+1} = \lambda \\ & \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

نتیجه می‌شود که λ باید مثبت باشد و با این شرط داریم

$$(1) \quad x^2 = \lambda^2 - 1 \quad (2) \quad x^2 = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2}$$

خط (D) غیر از مبدأ و قطبی با منحنی (C_1) متقاطع است که باشد و این شرط برای منحنی (C_2) می‌شود $1 < \lambda < \infty$.
 (D_1) و (D_2) که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند دارای معادله‌های به صورت :

$$y = \lambda x \quad y = \frac{1}{\lambda} x$$

می‌باشد طولهای نقاط M و N نقاط تقاطع خطوط مزبور با منحنی‌های C_1 و C_2 به ترتیب برابر می‌شود با :

$$x_M = \sqrt{\lambda^2 - 1} \quad x_N = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} = \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

نقاط M و N همطول می‌باشند.

ثالثاً - در تابع y_1 اگر فرض کنیم $u = x^2 + 1$ داریم
و $u' = 2x$

$$y_1 = \frac{1}{2} u' u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{2} u^{\frac{3}{2}} + C_1$$

$$Y_1 = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} + C_1$$

منحنی (C_1) را در M و (D_2) منحنی (C_2) را در N قطع کند ثابت کنید که M و N روی خطی عمود بر x قراردارند.
پالثاً - مساحت سطح محصور بین دو منحنی و مبدأ مختصات و خط $x = k$ را حساب کنید.

حل - چون x و y طول و عرض هر یک از نقطه‌های M و N هم‌لامن استند a و b هر دو مثبت می‌باشند. مشتق دو تابع بعد از اختصار می‌شود:

$$y_1' = \frac{2ax^2 + a}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad y_2' = \frac{b}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

دو منحنی در مبدأ برهم متعاضند پس :

$$m_1 = m_2 : a = b$$

اگر H نقطه تلاقی D با x باشد چون مثلث OMN در شبیه قائم است و OH ارتفاع نظیر رأس O است بنابراین :

$$OH^2 = \overline{HN} \cdot \overline{HM}$$

$$x^2 = y_1 \cdot y_2 = abx^2 \Rightarrow ab = 1$$

$$\begin{cases} a = b > 0 \\ ab = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$

۲- هریک از دو تابع درازاء جمیع مقادیر x معین و اتصالی است. مشتق هریک از دو تابع :

$$y_1' = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad y_2' = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

درازاء جمیع مقادیر x مثبت است پس هریک از دو تابع همواره صعودی می‌باشد. وقتی $x \rightarrow \pm \infty$ در تابع اول داریم :

$$y_1 \rightarrow \pm \infty$$

اما در تابع دوم :

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ y_2 \rightarrow 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ y_2 \rightarrow -1 \end{cases}$$

جدول تغییرات و شکل دو منحنی به قرار زیر است :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y_1'	+	+	
y_1	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y_2'	+	+	
y_2	-1	\nearrow	1

باید داشته باشیم :

$$0 < \frac{B-C}{2} < \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \frac{B-C}{2} < 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{l'}{2a'} + \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow l' < (2 - \sqrt{2})a'$$

با شرط اخیر داریم :

$$\begin{cases} \frac{B-C}{2} = \arccos\left(\frac{l'}{2a'} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

و زاویه‌های B و C تعیین می‌شوند.

ثالثاً - زاویه BIC برابر است با :

$$\pi - \frac{B+C}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}$$

و در مثلث BIC طبق روابط سینوسها داریم :

$$BI = \frac{a \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{3\pi}{4}}, \quad CI = \frac{a \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$BI = a \sqrt{2} \sin \frac{C}{2}, \quad CI = a \sqrt{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$BI \cdot CI = 2a' \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{l'}{2}$$

۴۳۲۷ - عدد های صحیح a واقع بین ۱۰۰ و ۲۰۰ را تعیین کنید برای آنکه معادله $0 = ax^2 + x - 6$ دارای دو جواب منطق باشد.

حل - در معادله مفروض باید داشته باشیم :

$$4 = 1 + 24a = N' \Rightarrow a = \frac{N' - 1}{24}$$

a عدد صحیح است پس او باشد فربداش مثلاً فرض می‌کنیم:
 $N = 2M + 1$

$$a = \frac{(2M+1)^2 - 1}{24} = \frac{M(M+1)}{6}$$

حاصل ضرب $M(M+1)$ باید بر ۶ بخش پذیر باشد و علاوه بر آن در شرط :

$$100 < a < 200 \Rightarrow 600 < M(M+1) < 1200$$

$$y_r = \frac{u'}{\sqrt{u}} \Rightarrow Y_r = \sqrt{u} + C_r$$

$$Y_r = \sqrt{x^r + 1} + C_r$$

$$S_1 = \left[\frac{1}{r}(x^r + 1) \sqrt{x^r + 1} \right]^k$$

$$S_1 = \frac{1}{r} [(k^r + 1) \sqrt{k^r + 1} - 1]$$

$$S_r = [\sqrt{x^r + 1}]^k = \sqrt{k^r + 1} - 1$$

$$S = S_1 - S_r = \dots$$

۴۳۲۸ - در مثلث قائم الزاویه A زاویه A قائم بوده طول وتر $BC = a$ و حاصل ضرب $CE \cdot BD$ نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C برابر l' می‌باشد. اولاً صحت رابطه زیر را تحقیق کنید.

$$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{l'}{4a}$$

ثانیاً - زاویه‌های B و C را یافته بحث کنید.

ثالثاً - اگر I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث باشد صحت رابطه زیر را محقق کنید :

$$BI \cdot CI = \frac{l'}{2}$$

حل - طبق فرمولهای مربوط و با توجه به اینکه :

$$\sin A = 1$$

است داریم :

$$BD = \frac{a \sin C}{\cos \frac{B}{2}}, \quad CE = \frac{a \sin B}{\cos \frac{C}{2}}$$

$$BD \cdot CE = \frac{a' \sin B \sin C}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = 4a' \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{l'}{4a'}$$

ثانیاً - از رابطه اخیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{2} \left[\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right] = \frac{l'}{4a'}$$

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{l'}{2a'} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مختصات نقاط U و V از حل دستگاه معادلات بینی و خط PM بدست می‌آید.

$$\begin{cases} b'x' + a'y' = a'b' \\ y = mx + y_1 \end{cases}$$

$$(a'm' + b')x' + 2a'my_1 x + a'(y_1 - b') = 0$$

و x_5 جوابهای این معادله می‌باشند پس :

$$x_5 + x_6 = -\frac{2a'my_1}{a'm' + b'} \quad x_5 x_6 = \frac{a'(y_1 - b')}{a'm' + b'}$$

طول نقطه M از دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + y_1 \\ y_1 y_2 = b' \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{b' - y_1}{my_1}$$

برای اینکه ثابت کنیم M مزدوج توافقی P نسبت به U و V است کافی است رابطه زیر را محقق کنیم:

$$\frac{2}{x_1} = \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6} = \frac{x_5 + x_6}{x_5 x_6}$$

بنابراین که بدست آورده‌ایم داریم :

$$\frac{2my_1}{b' - y_1} = \frac{-2amy_1}{a'm' + b'} \times \frac{a'm' + b'}{a'(y_1 - b')} = \frac{2my_1}{b' - y_1}$$

یعنی رابطه مزبور برقرار می‌باشد.

نسبت به نقطه P' به طریق مشابه با طریق بالا حکم مربوط ثابت خواهد شد.

مسائل متغّرّقه

- ۴۳۲۹ - معادلات زیر را حل کنید :

$$50 \times \frac{2x^1}{125x} - \frac{1}{2} \times \frac{x}{(5x)x}$$

$$(a^x - 2)a^{2x} - a^{-x} + 3 = 0$$

حل - معادله اول را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$5^1 \times 2 \times 2^x \times 2 \times 5^x = 2^2 x \times 5^3 x$$

$$10^x + 2 = 10^3 x \Rightarrow x^1 + 2 = 3x$$

$$x^1 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ و } 2$$

صدق گند. مضارب ۶ محصور بین ۶۰۰ و ۱۲۰۰ را درنظر گرفته، از روی آن مقادیر قبل قبول M را تعیین می‌کنیم و نتیجه می‌شود :

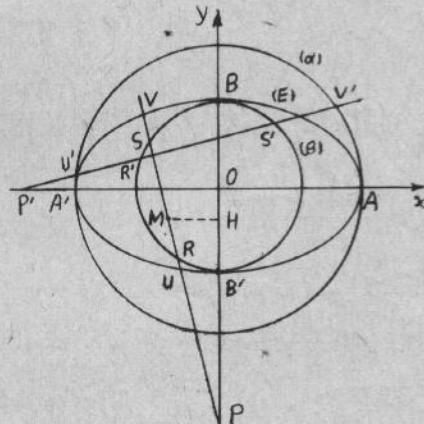
$$M = 24 \text{ یا } 32 \text{ یا } 30 \text{ یا } 29 \text{ یا } 27 \text{ یا } 26 \text{ یا }$$

$$a = 100, 112, 126, 145, 155, 176, 187$$

- ۴۳۲۸ - بیضی (E) به قطر اطول AA' و به قطر اقصیر BB' مفروض است . به قطرهای AA' و BB' دایره‌های (α) و (β) را رسم می‌کنیم . در امتداد BB' نقطه P را انتخاب کرده از آن قاطعی رسم می‌کنیم که بیضی را در U و V و دایره (β) را در R و S قطع بکند. اگر M مزدوج توافقی P نسبت به R و S باشد ثابت کنید که مزدوج توافقی P نسبت به U و V نیز همان M می‌باشد .

حکم مزبور را در حالتی ثابت کنید که P' را در امتداد AA' اختیار کرده قاطعی رسم کنید تا (α) را در R' و S' و بیضی را در U' و V' قطع کند .

حل - محورهای x و y منطبق بر AA' و BB' را اختیار کرده و فرض می‌کنیم :



$$P \left| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & \end{matrix} \right. \quad M \left| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & \end{matrix} \right. \quad R \left| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & \end{matrix} \right. \quad S \left| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ y_4 & \end{matrix} \right.$$

$$U \left| \begin{matrix} x_5 & y_5 \\ y_5 & \end{matrix} \right. \quad V \left| \begin{matrix} x_6 & y_6 \\ y_6 & \end{matrix} \right.$$

اگر H تصویر M بر BR' باشد MH قطبی P نسبت به دایره (β) است و داریم :

$$\overline{OP} \cdot \overline{OH} = b' \Rightarrow y_1 \cdot y_4 = b'$$

ضریب زاویه خط PM را m فرض می‌کنیم پس معادله آن می‌شود:
 $y = mx + y_1$

از جمع تقطیر به تقطیر طرفین روابط بالا نتیجه می‌شود:

$$f(2n) = 1 + 2 + 3 + \dots + 4n - 1$$

طرف دوم مجموع $2n$ جمله از رشته اعداد فرد می‌باشد بنابراین:

$$f(2n) = (2n)^2 = 4n^2$$

$$\sum_{n=1}^{\frac{n}{2}} f(n) = 43333 \quad \text{یعنی حاصل ضرب}$$

عامل:

$$f(1)f(2)f(3)\dots f(n-1)f(n)$$

مطلوب است تعیین حاصل ضربهای زیر:

$$P = \prod_{n=0}^{\frac{n}{2}} (4^{3^n} - 2^{3^n} + 1)$$

حل - داریم:

$$P = (4 - 2 + 1)(4^2 - 2^2 + 1)(4^4 - 2^4 + 1)$$

$$\dots (4^{3^n} - 2^{3^n} + 1)$$

بازوچه بروابط:

$$3(4 - 2 + 1) = 2^3 + 1$$

$$(2^2 + 1)(4^2 - 2^2 + 1) = 2^5 + 1$$

$$(2^4 + 1)(4^4 - 2^4 + 1) = 2^{12} + 1$$

.....

$$(2^{3^n} + 1)(4^{3^n} - 2^{3^n} + 1) = 2^{3^n+1} + 1$$

خواهیم داشت:

$$P = \frac{1}{3}(2^{3^n+1} + 1)$$

۴۳۳۳ - ابعاد مستطیلها بیانی را تعیین کنید که در آنها مقدار

عددی محیط با مقدار عددی مساحت مساوی بوده و برابر با عدد صحیح مفروض باشد. مسئله را برای مثلث قائم الزاویه و برای مربع بررسی کنید.

حل - ابعاد مستطیل را با x و y و عدد مربوط به مساحت و محیط را با N نمایش می‌دهیم.

$$xy = 2(x+y) = N \Rightarrow y = \frac{N}{x}$$

$$2x^2 - Nx + 2N = 0 \Rightarrow x = \frac{N \pm \sqrt{N^2 - 16N}}{4}$$

شرط امکان مسئله آنست که $N > 16$ باشد.

در ازاء مقادیر ۲۵ و ۱۸ و ۱۶ و $N = 16$ ابعاد مستطیلها

مربوط عبارت خواهد شد از:

$$(4/5) \text{ و } (6/5) \text{ و } (10/5)$$

با فرض $A = 2^x$ معادله دوم به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$(A - 2)A^2 - \frac{1}{A} + 3 = 0$$

$$A^4 - 3A^2 + 2A - 1 = 0$$

$$(A^2 - 1)(A^2 + 1) - 2A(A^2 - 1) = 0$$

$$(A^2 - 1)(A^2 - 3A + 1) = 0$$

$$A = a^x = \pm 1 \text{ یا } \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = 0 \quad \text{با} \quad x = \log\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \circ \log a$$

۴۳۳۰ - معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{(39-x)\sqrt{x-6} - (x-6)\sqrt{39-x}}{\sqrt{39-x} - \sqrt{x-6}} = 30$$

حل - معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(39-x)\sqrt{\frac{x-6}{39-x}} - (x-6)}{1 - \sqrt{\frac{x-6}{39-x}}} = 30$$

با فرض $\frac{x-6}{39-x} = u^5$ و بعد از اختصار خواهیم داشت:

$$\frac{32u(1-u^4)}{(1+u^5)(1-u)} = 30$$

$$10u^4 - 21u^3 + 10u^2 - 21u + 10 = 0$$

معادله‌ای است درجه چهارم کامل معکوسه، طبق قاعدة مربوط

عمل می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$u = 2 \quad \text{و} \quad x = 2 \times 38$$

۴۳۳۹ - اگر داشته باشیم:

$$f(n) = f(n-1) + 2n - 1 \quad n > 1$$

مقدار $f(2n)$ را بر حسب n بدست آورید.

حل - روابط زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = f(1) + 3$$

$$f(3) = f(2) + 5$$

.....

$$f(2n-1) = f(2n-2) + 4n - 2$$

$$f(2n) = f(2n-1) + 4n - 1$$

در مورد مثلث قائم الزاویه داریم :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y+\sqrt{x^2+y^2}} = N$$

$$y = \frac{N}{x}$$

نتیجه خواهد شد:

$$2x^2 - (N+4)x + 4N = 0$$

از روی این معادله x بر حسب N حساب می‌شود. شرط امکان جواب $N > 24$ خواهد بود.

در مورد مربع داریم $x^2 = 4x = N$ و فقط یک جواب $x = 4$ وجود دارد.

- رأسهای مقابل یک چهارضلعی کامل را به ترتیب C' , C , B' , B , A' , A می‌نامیم. ثابت کنید :

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}$$

حل - در هر یک از چهار مثلثی که در چهارضلعی کامل وجود دارد بنا به روابط سینوسها خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} \quad \frac{AB'}{AC'} = \frac{\sin C'}{\sin B'}$$

$$\frac{A'C'}{A'B} = \frac{\sin B}{\sin C'} \quad \frac{A'C}{A'B'} = \frac{\sin B'}{\sin C}$$

و رابطه داده شده به صورت زیر نوشته شده محقق می‌باشد:

$$\frac{\sin C}{\sin B} \cdot \frac{\sin C'}{\sin B'} \cdot \frac{\sin B}{\sin C'} \cdot \frac{\sin B'}{\sin C} = 1$$

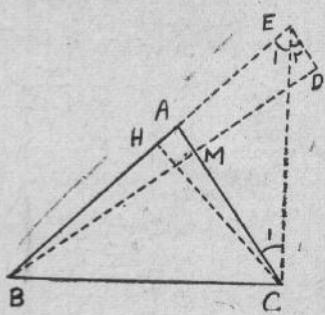
- از نقطه P واقع در داخل مثلث ABC عمدهای PK , PH و PL را به ترتیب بر ضلعهای BC و AB CA می‌کنیم. ثابت کنید که :

$$(BH' - CH') + (CK' - AK') + (AL' - BL') = 0$$

حل - با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلثهای قائم‌الاگر که تشکیل می‌شود عبارت طرف اول تساوی بالا عبارت خواهد شد از :

$$(PB' - PC') + (PC' - PA') + (PA' - PB') = 0$$

- مثلثی رسم کنید که در آن $a = BC$ و $b + c = k$, $b + c = l$ معلوم است. همچنین مثلثی رسم کنید که از آن : $|h_b - h_c| = k$, $|b - c| = l$, $BC = a$ معلوم باشد.



حل - اگر

مثلث رسم شده باشد
ارتفاع BM را به
 $MD = CH$
امتداد داده و از
موازی با AC رسم
می‌کنیم تا امتداد
قطع E در BA باشد
کند. داریم :

$$BE = b + c = l \quad BD = h_b + h_c = k$$

زاویه AED با زاویه A از مثلث برابر است و هر یک از دو زاویه E , E' با زاویه C , C' برابر بوده خط EC نیمساز زاویه BED می‌باشد و راه حل زیر نتیجه می‌شود:

مثلث قائم الزاویه BDE را با معلوم بودن وتر $BE = l$ و یک ضلع $BD = k$ رسم می‌کنیم. دایره به مرکز B و به شاعر a نیمساز زاویه BED را در C قطع می‌کند و از تلاقی عمود منصف EC با BE نقطه A را بدست می‌دهد. مسئله حداکثر دو جواب دارد.

در مورد معلوم بودن تفاضل دوضلع با تفاضل دو ارتفاع راه ترسیم مشابه می‌باشد با این تفاوت MD را روی MB به اندازه CH جدا می‌کنیم.

- مطلوب است رسم مثلثی با معلومات زاویه A ,

ضلع BC و مجموع دو ارتفاع CF و BE .

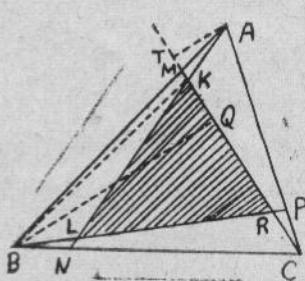
حل - راه ترسیم نقطه قبل است با این تفاوت که مثلث قائم الزاویه BDE با معلوم بودن وتر و یک زاویه حاده رسم می‌شود.

- روی ضلعهای AB , BC و CA از مثلث

نقشه‌های N , M و P را به ترتیب چنان اختیار می‌کنیم که داشته باشیم :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \frac{1}{4}$$

خطوط BP , AN و CM را رسم می‌کنیم از تلاقی آنها مثلث KLR بوجود می‌آید مساحت این مثلث را بر حسب مساحت مثلث ABC بدست آورید.



و $SH' = SH$ که از رابطه زیر معین می‌شوند:

$$\overline{SH} \cdot \overline{SH_1} = \overline{SH'} \cdot \overline{SH'_1} = p$$

اگر دو دایره مساوی باشند، $SH_1 = SH'_1$ بوده و در نتیجه می‌شود:

$$SH = SH'$$

بنابراین مکان S عبارتست از نیمسازهای زاویه‌هایی که دو خط Δ و Δ' با هم می‌سازند. نقطه O محل تلاقی دو خط از این مکان مستثنی است.

۲) بنابر آنچه قبلاً ثابت شد قطبهای انعکاسهای مطلوب مرکزهای دایره‌های محاطی مثلث می‌باشد. یکی از این انعکاسها مثلاً انعکاس به قطب I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث را در نظر می‌گیریم. در این انعکاس منعکسهای سه ضلع مثلث سه دایره متساوی می‌شود به مرکزهای ω_1 و ω_2 که هر سه در Δ مشترکند و دو به دو در سه نقطه A' و B' و C' منقطع می‌باشند. این نقاط منعکسهای نقاط A و B و C می‌باشند؛ پس منعکس دایره O محیطی مثلث دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ می‌باشد.

نقطه I مرکز دایره O محیطی مثلث $A'B'C'$ است اما دایره محیطی مثلث $'A'B'C'$ عبارتست از مجانس دایره اول (نه نقطه) مثلث $\omega_1\omega_2\omega_3$ در تجانس به مرکز I و به نسبت ۲ بنابراین دایره O با دایره محیطی مثلث $\omega_1\omega_2\omega_3$ و در نتیجه با هر یک از سه دایره ω_1 و ω_2 و ω_3 برابر می‌باشد.

مسئل فیزیک

۴۳۴۵ - شاعر بالن را محاسبه کنید که اگر m حجم

از گاز A به جرم مولکولی a و n حجم از گاز B به جرم مولکولی b در آن وارد نمائیم و آنرا در گاز C به جرم مولکولی c قرار دهیم در شرایط متعارفی بالن به حالت غوطه‌ور باقی بماند در صورتی که جرم هر ترکیب لفاف بالن در شرایط متعارفی p کیلو گرم باشد.

حل - برای آنکه بالن به حالت غوطه‌ور در گاز C باقی بماند باید وزن آن با وزن گاز هم حجمش متساوی باشد و

حل - BQ و AT را عمود بر CM رسم می‌کنیم.

مساحت‌های دو مثلث AKC و BKC را به ترتیب S_1 و S_2

فرض می‌کنیم داریم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{KC \cdot QB}{KC \cdot AT} = \frac{BQ}{AT}$$

از تشابه دو مثلث BQM و ATM داریم:

$$\frac{BQ}{AT} = \frac{BM}{MA} = 4 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 4$$

و اگر مساحت مثلث AKB را S_3 فرض کنیم به طریق مشابه

خواهیم داشت:

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_2} = \frac{S_1 + S_3}{S_2} = 4 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2} = 4 + \frac{1}{4} + 1$$

به فرض اینکه S مساحت مثلث ABC و S_1 مساحت مثلث KLR باشد رابطه اخیر برابر می‌شود با:

$$\frac{S}{S_2} = \frac{21}{4} \text{ یا } S_2 = \frac{4}{21} S$$

سه مثلث CLA و BRC و AKC با هم معادل هستند. بنابراین:

$$S_1 = S - 2 \times \frac{4}{21} S = \frac{2}{7} S$$

۱) مکان هندسی قطبهای انعکاسهای راتبین کنید که دو خط منقطع مفروض را به دو دایره متساوی تبدیل می‌کنند.

۲) قطبهای انعکاسهای را تعیین کنید که در آنها سه

ضلع یک مثلث مفروض به سه دایره متساوی تبدیل شوند.

ثابت کنید که در این انعکاسهای مبدل دایره محیطی مثلث دایره‌ای است متساوی با سه دایره دیگر.

حل - ۱) فرض می‌کنیم Δ و Δ' دو خط و S نقطه‌ای

از صفحه بوده تصویرهای آن

بر Δ و Δ' به ترتیب H و H' باشد. در انعکاس به قطب S و SH قوت p منعکسهای Δ و Δ' دو دایره است به قطرهای SH_1 و

-۴۳۴۲ در مایعی به وزن مخصوص S_1 وزن ظاهری جسمی W_1 است و در مایعی به وزن مخصوص S_2 وزن ظاهری آن W_2 است:

- ۱- وزن واقعی جسم چقدر است؟
- ۲- وزن ظاهری این جسم در مایعی به وزن مخصوص

$$\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$$

حل - ۱- می‌توان نوشت:

$$(1) \quad W_1 = W - VS_1$$

$$(2) \quad W_2 = W - VS_2$$

از تفاضل این دو رابطه V ، حجم جسم، بدست می‌آید:

$$V = \frac{W_1 - W_2}{S_2 - S_1}$$

بنابراین W وزن واقعی جسم:

$$W = W_1 + VS_1 = W_1 + \frac{W_1 - W_2}{S_2 - S_1} \times S_1$$

$$W = \frac{S_1 W_1 - S_2 W_2}{S_1 - S_2}$$

-۳- وزن ظاهری جسم در مایعی به وزن مخصوص.

$$S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$$

برابر است با W_2 بطوری که:

$$(3) \quad W_2 = W - VS_2$$

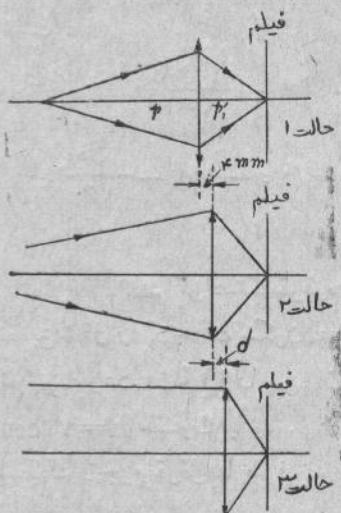
از روابط (۱) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$W_2 = W_1 + V(S_1 - S_2)$$

$$W_2 = W_1 + \frac{W_1 - W_2}{S_2 - S_1} (S_1 - \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2)$$

$$W_2 = \frac{1}{2}(W_1 + W_2)$$

-۴۳۴۳- یک دستگاه عکسبرداری طوری میزان شده است



که از جسمی که در فاصله ۱/۵ متری عدسی دستگاه قرار دارد تصویر واضحی بر فیلم تشکیل می‌دهد اگر بخواهیم از جسمی که در فاصله ۴ متری از عدسی قرار دارد تصویر واضحی بر فیلم تشکیل دهیم، باید دستگاه را چنان میزان کنیم که عدسی

اگر شعاع کره R باشد داریم:

$$V_A = \frac{4\pi m R^r}{2(m+n)}, \quad V_B = \frac{4\pi n R^r}{2(m+n)}$$

$$M_A = a \times \frac{4\pi m R^r}{2(m+n)} \times \frac{22/4}{1000}$$

$$= \frac{4000\pi am R^r}{3 \times 22/4(m+n)}$$

به طریق مشابه خواهیم داشت:

$$M_B = \frac{4000\pi bn R^r}{3 \times 22/4(m+n)}$$

$$m = 4\pi R^r \times 1000 \times p = 4000\pi p R^r \quad \text{وزن گاز هم حجم:}$$

$$M_H = \frac{4000\pi c R^r}{3 \times 22/4}$$

باید داشته باشیم:

$$M_A + M_B + m = M_H$$

$$\frac{4000\pi am R^r}{3 \times 22/4(m+n)} + \frac{4000\pi bn R^r}{3 \times 22/4(m+n)}$$

$$+ 4000\pi p R^r = \frac{4000\pi c R^r}{3 \times 22/4}$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$R = \frac{3 \times 22/4(m+n)p}{(c-a)m + (c-b)n}$$

-۴۳۴۴- وزن ظاهری یک جسم در مایعی به وزن مخصوص

برابر d_1 و در مایعی به وزن مخصوص d_2 برابر d_2 در مایعی به وزن مخصوص d_3 برابر P_3 است. ثابت کنید که

$$(d_1 - d_3)P_1 + (d_2 - d_1)P_2 + (d_1 - d_2)P_3 = 0$$

حل - اگر حجم جسم V و وزن آن در خلاء برابر باشد می‌توان به ترتیب چنین نوشت:

$$P - P_1 = d_1 V, \quad P - P_2 = d_2 V$$

$$P - P_3 = d_3 V$$

از این روابط نتیجه می‌شود:

$$d_1 - d_3 = \frac{P_3 - P_1}{V}, \quad d_2 - d_3 = \frac{P_2 - P_3}{V}$$

$$d_1 - d_2 = \frac{P_1 - P_3}{V}$$

بنابراین می‌توان رابطه مورد اثبات را چنین نوشت:

$$\frac{P_3 - P_1}{V} \times P_1 + \frac{P_1 - P_3}{V} \times P_2 + \frac{P_2 - P_3}{V} \times P_3$$

که برابر است با صفر.

می شود و فرض می کنیم :

$$P = Q = 10 \text{ kgf}$$

ضمناً کشش نخ را نیز پیدا کنید.

حل - اگر کشش نخ برای وزنه Q ، T باشد برای وزنه $2T$ بوده و شتاب وزنه P نصف شتاب وزنه Q می باشد

$$\begin{cases} Q - T = \frac{Q}{g} \gamma \\ 2T - P = \frac{\gamma}{2} \times \frac{P}{g} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2Q - P = \gamma \left(\frac{2Q}{g} + \frac{P}{2g} \right)$$

$$2 \times 10 - 10 = \gamma (2 \cdot 10 / 5) \Rightarrow \gamma = 4 \text{ m/s}^2$$

$$V' = 2\gamma x \quad \text{یا} \quad V' = 2 \times 4 \times 0 / 72 = 5 / 72$$

$$\Rightarrow V = 2 / 4 \text{ m/s}$$

$$Q - T = \frac{Q}{g} \gamma \quad \text{یا} \quad T = 10 - \gamma$$

$$\Rightarrow T = 10 - 4 = 6 \text{ kg.f}$$

$$T' = 2T = 12 \text{ kg.f}$$

۴۳۴۵ - از نقطه A روی سطح شیبداری که با افق

زاویه α می سازد، جسمی را بر روی این سطح رها می کنیم. در همین لحظه از نقطه A جسم دیگری را تحت زاویه β (نسبت به صفحه افق) و با سرعت اولیه v_0 پرتاب می نماییم، پس از t دو جسم به یکدیگر برخورد می کنند، ثابت کنید :

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

است و سرعت اولیه جسم از دستور :

$$v_0 = \sqrt{gt \cos \alpha}$$

بدست می آید .

حل - معادلات پارامتری حرکت پرتابی :

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \beta \\ y = - \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \beta \end{cases}$$

شتاب حرکت روی سطح شیب دار :

$$\gamma = g \sin \alpha$$

مسافت طی شده روی سطح شیب دار :

$$l = \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha$$

معادلات پارامتری حرکت روی سطح شیب دار :

$$\begin{cases} x = l \cos \alpha \\ y = - l \sin \alpha \end{cases}$$

۴ میلیمتر به فیلم نزدیک شود. تعیین کنید اگر بخواهیم این دستگاه را روی بینهایت میزان کنیم، چقدر دیگر باید عدسی را به فیلم نزدیک کنیم .

حل - برای حالت اول می توان نوشت :

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f} \quad \text{حالت اول}$$

$$(1) \quad \frac{1}{150} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f} \quad \text{برای حالت دوم می توان نوشت :}$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} = \frac{1}{f} \quad \text{حالت دوم}$$

$$(2) \quad \frac{1}{400} + \frac{1}{p'_1 - 0 / 4} = \frac{1}{f}$$

از (1) و (2) نتیجه می شود :

$$\frac{1}{150} - \frac{1}{400} = \frac{1}{p'_1 - 0 / 4} - \frac{1}{p'_1}$$

$$\frac{5}{1200} = \frac{0 / 4}{p'_1 (p'_1 - 0 / 4)}$$

$$p'_1 - 0 / 4 p'_1 - 96 = 0$$

برای p'_1 دو جواب بدست می آید :

$$p'_1 = -9 / 8 \text{ cm} , \quad p'_1 = 10 \text{ cm}$$

اما می دانیم تصویری که بر فیلم تشکیل می شود، تصویری حقیقی است. پس جواب منفی p'_1 قابل قبول نیست. با بکار بردن جواب مثبت p'_1 در رابطه (1) :

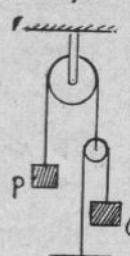
$$f = \frac{150 \times 10}{150 + 10} = \frac{150}{16} \text{ cm}$$

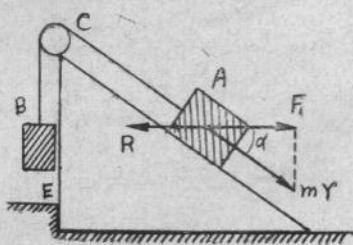
وقتی که دوربین عکاسی برای بینهایت میزان شده است تصویر در کانون عدسی تشکیل می شود و بنابراین فاصله عدسی تا فیلم بر این فاصله کانونی عدسی خواهد بود. در این صورت می توان نوشت :

$$d = p'_1 - f = p'_1 - 0 / 4 - \frac{150}{16} = (10 - 0 / 4 - \frac{150}{16}) \text{ cm}$$

$$d = 2 / 25 \text{ mm}$$

۴۳۴۶ - اگر دستگاه قرقره مطابق شکل را از حالت مکون رها نماییم. سرعت وزنه Q را پس از $h = 72 \text{ cm}$ سقوط بیا بید. از اصطکاک و جرم قرقره ها صرف نظر





باافق زاویه α می‌سازد
در حال پائین آمدن
است و به وسیله نخی
که از قرقره C عبور
می‌گند به جسم B
وزن Q متصل است

(از جرم نخ صرف نظر نمی‌شود) فشار تولید شده از سطح شبیدار
به لب E را حساب کنید :

حل

$$\Sigma F = (P+Q) \frac{\gamma}{g}$$

$$P \sin \alpha - Q = (P+Q) \frac{\gamma}{g}$$

$$\gamma = g \frac{P \sin \alpha - Q}{P+Q}$$

$$R = F_i \text{ و } F = m \cdot \gamma$$

$$F = P \frac{P \sin \alpha - Q}{P+Q}$$

$$F_i = P \cos \alpha \cdot \frac{P \sin \alpha - Q}{P+Q}$$

$$R = P \left(\frac{P \sin \alpha - Q}{P+Q} \right) \cos \alpha$$

۴۳۴۷ - ميله BC به طول l و به وزن W بر سطح افقی بدون اصطکاک و نقطه D مطابق شکل زیر ممکن است بطوری که زاویه BC با افق برابر θ و نقطه B بوسیله ریسمانی به موازات سطح افقی باشد. AD = d وصل شده است. فاصله A نیروهای مؤثر را مشخص کنید.

۲ - شرط تعادل را بنویسید و بوسیله آن روابط نیروهای

مؤثر مجهول را برحسب θ و W

$$d = 1 \text{ بدهست آورید: } \theta = 60^\circ \text{ و } d = 1 \text{ ft} \Rightarrow W = 18 \text{ lb}$$

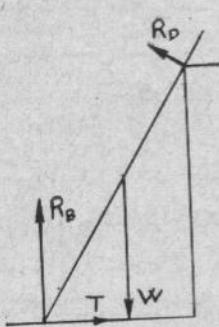
حل - (شکل الف) صورت

مسئله با مفروضات آنرا نشان

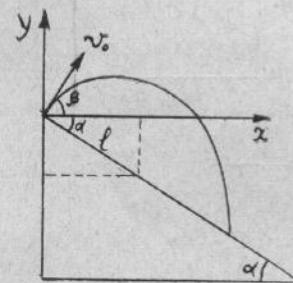
می‌دهد و در شکل (ب) نیروهای

مؤثر مشخص شده است بطوری که:

۱ - نیروی W که وزن ميله



$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$



برای تلاقي دو منحرک
نظر به آنکه مبدأ زمان
و مکان برای هر دو
یکسان است کافی است
داشته باشیم :

$$\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha \cos \alpha = v_0 t \cos \beta$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \alpha = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \beta$$

$$v_0 \cos \beta = \frac{1}{2}gt \sin \alpha \cos \beta$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gt^2 \cos^2 \alpha = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \beta$$

و از آنجا :

$$v_0 \cos \beta = \frac{1}{2}gt \sin \alpha \cos \alpha$$

$$v_0 \sin \beta = \frac{1}{2}gt \cos \alpha$$

از تقسیم دو رابطه برهم نتیجه می‌شود:

$$\cot \beta = \tan \alpha = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

و یا :

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

برای تعیین β کافی است معادلات دستگاه (۱) را مریع کرده با هم جمع کنیم:

$$v_0^2 = \frac{1}{4}g^2 t^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha)$$

$$v_0^2 = \frac{1}{4}g^2 t^2 \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4}g^2 t^2 \cos^4 \alpha$$

$$v_0 = \frac{1}{2}gt \cos \alpha$$

۴۳۴۸ - جسم A به وزن P روی سطح شبیدار D ک

مُؤثر نسبت به نقطه O صفر شود پس :

$$\sum F_x = 0 \implies R - N \sin \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \implies N \cos \theta - W = 0$$

$$\sum M_O = 0 \implies \frac{a}{\cos \theta} \times N - \frac{1}{2} \times W \cos \theta = 0$$

$$N = \frac{W \cos^2 \theta}{2a}, \quad R = \frac{W \cos^2 \theta \sin \theta}{2a}$$

$$N = \frac{W}{\cos \theta}, \quad \frac{\cos^2 \theta}{2a} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{2a}{1}} \quad (1)$$

از رابطه (1) معلوم می‌شود در حالتی که $\theta = 0$ باشد ۱ خواهد بود یعنی ميله از وسط در نقطه D قرار می‌گیرد و به صورت افقی در می‌آید.

- تکالف نسبی بخار جسمی مرکب از کربن و هیدرژن و اکسیژن و ایزولوک با اسید اسپیک نسبت به گاز D برابر $\frac{11}{7}$ است. هر گاه 120 گرم از گاز مجهول D را با 120 گرم گاز هیدرژن مخلوط کرده در ظرف ۴ لیتری تخلیه شده وارد کنیم و به صدرجه حرارت سانتیگراد برسانیم فشار مخلوط برابر 1650 اتمسفر می‌شود.

اولاً فرمول مولکولی این جسم را تعیین کنید.

ثانیاً تحقیق کنید این جسم آلی دارای سه ایزومرمی باشد فرمول تفسیری هر کدام را بنویسید.

ثالثاً نام گاز D را پیدا کنید در صورتی که بدانیم این گاز مجهول با گاز اکسید دوکربن ایزوستر می‌باشد.

حل - داریم :

$$PV = nRT$$

در رابطه فوق R ثابت همکانی گازها بوده و مقدار آن برابر 10820 لیتر اتمسفر می‌باشد.

$$1085 \times 4 = 7 \times 10820 (100 + 272)$$

مولکول گرم گاز مجهول و گاز هیدرژن

مل گرم هیدرژن
۱

گرم
۲

$$x = 106$$

$$1012$$

$$\text{مل گرم گاز مجهول: } 1085 - 106 = 1025$$

دنباله پائین صفحه ۴۳۹

است و بر وسط آن وارد می‌شود در امتداد قائم است.

- نیروی عکس العمل نقطه D که با جهت مثبت محور

$$\frac{\pi}{2} + \theta \text{ می‌سازد.}$$

- نیروی کشن دیسمان در امتداد جهت مثبت x می‌باشد.

- نیروی عکس العمل سطح افقی شرط تعادل آنست که

تصاویر نیروهای مؤثر بر هریک از دو محور صفر شود. و همچنین کشناور نیروها نسبت به یک نقطه مثلث B صفر باشند این صورت :

$$\sum F_x = 0 \implies T - R_D \sin \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \implies R_D \cos \theta + R_B - W = 0$$

$$\sum M_B = 0 \implies \frac{d}{\sin \theta} \times R_D - \frac{1}{2} \cos \theta \times W = 0$$

$$\implies R_D = \frac{W \sin \frac{\pi}{2} \theta}{4d}, \quad T = \frac{W \sin^2 \theta \cos \theta}{2d}$$

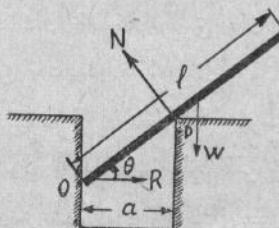
$$R_B = \frac{W(2d - l \sin \theta \cos \theta)}{2d}$$

و چون مقادیر عددی را در روابط فوق قرار دهیم خواهیم داشت:

$$R_D = 5/46 \text{ lb} \quad T = 3/72 \text{ lb} \quad R_B = 15/3 \text{ lb}$$

- یک ميله به طول l و بوزن W مطابق شکل زیر در داخل حفره ای قرار دارد. وضع تعادل آنرا با یافتن

نیروهای مؤثر مشخص کنید
در صورتی که دیواره طرف
چپ حفره بدون اصطکاک
می‌باشد و در این حالت
زاویه θ را بر حسب a
باید.



حل - نیروهای مؤثر بر ميله عبارت است از نیروی W

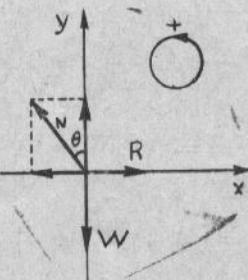
ميله که بر وسط آن و به موازات خطوط قائم مشخص می‌شود. دوم

نیروی عکس العمل سطح که R می‌باشد و درجهت مثبت محور x می‌باشد

وارد می‌شود و نیروی سوم عکس العمل N در نقطه D می‌باشد.

می‌دانیم شرط تعادل آنست که تصاویر نیروها بر هریک از دو

محور مجموعاً صفر شود و همچنین مجموعه کشناور نیروهای



نموده ای جدید و آموزنده

مسائل حساب استدلالم

شامل جالب ترین مسائل جبر و مثلثات و حساب استدلالم

برای داوطلبان نئونکور دانشگاه ها و قابل استفاده

دانش آموزان دوره دوم دبیرستانها

جواد حیری‌چی

تألیف حسین امین‌الهی

حمدار تقتوی

جست استفاده داوطلبان نئونکور و سال ششم ریاضی

تألیف: جواد حیری‌چی

دبیر علوم ریاضی دبیرستانهای تهران

چاپ دوم، با تجلیل نظر کلی و اضافات

از امتیازات کتاب فروشی تهران

تهران بار ارشیه گرانه

تهران: نام نهاد

تمدن ۲۷۳۲

پاسار مجیدی - کوچه حاج نایب

عالقمدان می توانند از کلیه کتاب فروشیهای معتمد تهران و شهرستانها ابتداخ فرمایند

ضمیمه: یکان سال ۱۴۴۶

برای دانش آموزان کلاس سوم دبیرستانها

شامل:

مسائل امتحانات داخلی سال تحصیلی ۱۳۴۵-۴۶ کلاس‌های سوم دبیرستانهای مختلف،

مسائل تفهی و قدری و در عین حال ریاضی.

مقالات و مطالعه که علاوه بر دانش آموزان کلاس‌های سوم برای دانش آموزان کلاس‌های پائینتر و دیگران هم قابل استفاده است.

این مجله چاپ شده و با بهای ۱۲ ریال در دسترس
عالقمدان می باشد.

کتاب فروشی فخر رازی - خیابان شاه آباد - تلفن ۳۰۴۴۳۲۰

مرکز فروش انتشارات یکان

گروه فرهنگی خرداد

برای کلاس‌های جدید کنکور

فنی - پزشکی - علوم - کشاورزی - حقوق - ادبیات

همه روزه ثبت نام می‌کند.

سازمان آموزشی کلاس‌های شبانه خرداد به شرح زیر است:

ریاضیات	ادبیات	فیزیک	شیمی	طبیعتی	زبان خارجه
آزم	آیت‌الله‌ای	آزادی	آزادی	آزادی	اصغری
بحرانی	اسدی	انصاریان	انصاریان	انصاریان	بقائی
بحری	حمیدی	صمدی	صمدی	صمدی	دادگر
مهرندس بارگی	فرساد	مبین	مبین	مبین	رکنی
پور فتحی	ملحیج	میرفتاھی	میرفتاھی	میرفتاھی	دهگان
زاوشی	هنجدی	هنجدی	هنجدی	هنجدی	معاونی
صدری					
عطار نژاد					
فاضلی					
قراءگزلو					
لاهیجی					
مسعود و حمدی					
مدغم					
مرتضوی					
نقیه					
واجد سهیعی					

نشانی: چهار راه سید علی

دبیرستان خرداد

تلفن { ۳۰۵۴۵۸
۳۲۱۶۹۸