دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ

۵

شمارهٔ مسلسل

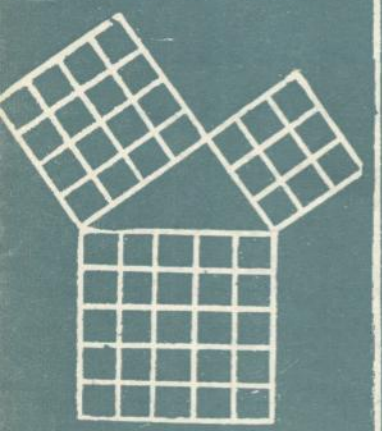
۴۲

بهمن ۱۳۴۶

یکان

مجلهٔ ریاضیات

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots\dots + x^n$$



بها: بیست و پنج ریال

دراین شماره:

قابل توجه

نمایندگان فروش یکان

۱ـ شماره‌های ۳۸، ۳۹، ۴۰ و ۴۱ کاملا بفروش رسیده است ودر حال حاضر از این شماره‌ها در ادارهٔ مجله موجود نیست.

از نمایندگانی که شماره‌های مزبوررا مازاد بر میزان مصرفی موجود دارند تقاضامی‌شودهرچه زودتر آنها را برگشت دهند.

۲ـ علاوه بر شماره‌های مزبور، شماره‌های:

۱ تا ۷، ۹ تا ۱۱، ۱۵ ـ ۱۷ تا ۲۵، ۲۸ تا ۳۱ نیز موجود نیست.

۳ـ دورهٔ صحافی شدهٔ سال سوم مجله برای فروش موجود است. بها: ۳۰۰ ریال

۴ـ جلد دوم «مسائلی از حساب استدلالی» موجود نیست از درخواست آن خودداری فرمائید.

۵ـ جلد اول «مسائلی ازحساب استدلالی» و همچنین «راهنمای ریاضیات متوسطه» تجدید چاپ شده برای فروش موجود است.

در انجمن معلمان ریاضی ایران

درجلسهٔ اخیر هیئت مجریان انجمن معلمان ریاضی ایران تصمیم گرفته شد که بعضی مطالب و قواعد که دانستن آنها برای دانش‌آموزان ضروری است اما در کتابهای درسی وجود ندارد به صورت نشریه‌ای تهیه شده توسط ادارات آموزش و پرورش در اختیار دبیران ریاضی گذاشته شود.

از عموم دبیران ریاضی تقاضا می‌شود که در تهیهٔ این مطالب با انجمن همکاری کرده پیشنهادهای خودرا مرقوم فرمایند:

نشانی: خیابان شاه ـ دبیرستان شمارهٔ ۱ آذر ـ انجمن معلمان ریاضی ایران

قابل توجه مشترکان یکان

اشتراك مجله شامل يك‌دورهٔ كامل آن است.

یکان سال فقط برای مشترکانی ارسال می‌شود که یکان را برای يك دورهٔ كامل مشترك شده باشند.

برای مشترکانی که بابت وجه اشتراك دورهٔ چهارم بدهی دارند یکان سال ارسال نخواهد شد مگر اینکه تا قبل ازپایان بهمن‌ماه جاری بدهی خودرا تسویه کنند. این موضوع شامل مشترکان ششماهه نیز می‌باشد.

کسی مشترك یکان محسوب می‌شود که رسید وجه اشتراك به امضای مدیر مجله را دردست داشته باشد،

یکان

مجلهٔ ریاضیات

هرماه يك‌بار منتشر می‌گردد

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ پنجم ـ شمارهٔ مسلسل: ۴۲

بهمن ۱۳۴۶

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی، **داود مصحفی**

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی: جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانکه صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume IV, number 5, Jan. 1968

subscription: $3

TEHERAN. P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

آکادمی علوم

حدود سه ماه از تشکیل وزارت علوم می‌گذرد . آنچه از فعالیتهای این وزارت تاکنون مشهود افتاده نمودار این حقیقت است که قدمهای اولیه محکم و استوار و درجهتی خالی از خطا وعاری از انحراف برداشته شده است . عمارتی رفیع در دست ساختمان است ، مسلماً پی‌ریزی آن باید درخورچنان رفعتی باشد .

دعوت به‌مراجعت به میهن از ایرانیانی که از جمله شخصیتهای علمی ممتاز معاصر بحساب می‌آیند وحتی اقامت موقت آنان درکشوری برای آن کشور افتخاری محسوب می‌شود ، و سپردن مقامات عالی علمی به این شخصیتها ، نه تنها به‌حیثیت و اعتبار علمی کشور می‌افزاید، بلکه موجب جلب مغزهای متفکر دیگرهم خواهدشد.

در بسیاری از کشورها مجمعی از دانشمندان عالیمقام به نام آدکامی علوم وجود دارد که عضویت در آن برای هردانشمندی افتخاری عالی محسوب می‌شود . هردانشمند جوان می‌کوشد با انجام تحقیقات ارزمند چنان موقعیتی کسب کند که به عضویت آکادمی علوم پذیرفته شود . هم اکنون بعضی از شخصیتهای علمی ایران عضویت آکادمی علوم چندین کشور را دارا می‌باشند .

امید است در وزارت علوم فکر ایجاد یك آکادمی طرف توجه باشد واثرات آن در راه جلب دانشمندان ایرانی مقیم خارج ازکشور ومخصوصاً در تشویق جوانان با استعداد به پژوهشهای علمی مورد بررسی واقع گردد .

عبدالحسین مصحفی

بررسی اثبات یك قضیه از

کتاب هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی

از : محمدحسن رزاقی خمسی

« این کتاب برطبق مادهٔ ۴ تصویبنامهٔ شمارهٔ ۹۱۸ هیئت دولت مورخ ۴۱/۱۲/۱۸ ومادهٔ یك تصویبنامهٔ قانونی ۴۴۸۴ مصوب ۴۲/۳/۱۸ از طرف کمیسیونهای منتخب شورای عالی فرهنگ برای تدریس دردبیرستانها برگزیده شد وطبق رأی شمارهٔ ۱۰۶۱ شورای عالی فرهنگ مورخ ۴۲/۸/۲۶ و رأی شمارهٔ ۱۰۶۴ مورخ ۴۲/۱۱/۲۹ ازنظرشیوهٔ خط فارسی **واز نظرمطالب در سازمان کتابهای درسی ایران بررسی و تصحیح گردیده است .** »

اینها جملات و عباراتی بودکه تقریباً در پشت جلد همهٔ کتابهای درسی بطوریکنواخت درج شده و من آنهارا از پشت جلدکتاب هندسه ومخروطات سال ششم ریاضی که موضوع بحث ماست عیناً دراینجا نقل کرده‌ام. بااین تفاوت که درچاپ امسال ایـن کتاب عبارت « **ازنظرشیوهٔ خط فارسی** » حذف شده است . واین بدان معنی است که آقایان اعضای سازمان کتابهای درسی ایران کاری به‌شیوهٔ خط فارسی ندارند، فقطازنظرمطالب کتاب را بررسی وتصحیح کرده‌اند!

درواقع و نفس‌الامرحداقل توقع‌وانتظارماوآنچه‌دردرجهٔ اول اهمیت قراردارد اینست که‌کتاب از نظر مطالب بررسی و تصحیح گردد. چون مطالب غلط علمی علاوه برآنکه به پیشرفت تحصیلات جوانان دانش آموز لطمه می‌زنـد زحمـات دستگاه آموزشی رابرباد داده وارزش علمی تحصیلات را بی‌اعتبارجلوه می‌دهد. باکمال تأسف باید گفت که مطالب غلط کتابهای‌ریاضی (غلط ازلحاظ موضوع که نتیجهٔ بی دقتی وعدم مطالعهٔ کافی‌است) همچنان در جای خـود باقی مانده‌اند و دراین چند سال کـه مسئولیت بررسی کتابهای درسی به‌عهدهٔ سازمان کتابهای درسی بودو وبا وجودی‌که این سازمان از لحاظ دسترسی به آخرین کتب درسی کشورهای پیشرفته وازلحاظ‌سایرامکانات مادی‌مجهز است امادرتصحیح غلطهای علمی کتابهای ریاضی بی‌اعتنایی بکار رفته‌است. **این‌همه‌شماره‌های موادقانونی وتصویبنامه، ارقام و اعداد ، نامه های صادرهٔ از مراجع رسمی ، که‌درفوق ملاحظه شد،خود به‌خودکاری انجام‌نداده و دردی را درمان نکردند!...**

اینجانب درشمارهٔ ۲ مجلهٔ یکان (مورخ اسفند ۱۳۴۲) مقاله‌ای‌تحت‌عنوان «**مطالبی چنددربارهٔ منحنی‌هذلولی ومجانبهای آن** » نوشتم وضمن یك بحث کلی نتیجه گرفتم‌که مطلب مندرج درصفحهٔ ۲۱۲ کتاب هندسه ومخروطات سال‌ششم ریاضی مطلب نادرستی است وباید اصلاح شود . درآن روزآن مقاله مورد توجه‌عده‌ای ازهمکاران صاحب نظرمن قرارگرفت، نحوهٔ استدلال راپسندیدند وجملگی راعقیده‌براین بودکه‌اشتباه کتاب به‌علت عدم وقوف به‌مطلب اصلی واساسی بوده‌است.چندی قبل برحسب تصادف سروکارمن بازباکتاب موردبحث‌افتاد.آن صفحه راگشودم تاببینم نحوهٔ اصلاح‌چگونه بوده است.متأسفانه مشاهده‌کردم‌که مطلب غلط همچنان‌دست نخورده‌باقی‌مانده‌است کتاب راورق زدم واغلاط دیگرراهم همچنان درجای خودباقی یافتم ، متأثرشدم وروی همین تأثیراین انتقادات اصولی را به رشتهٔ تحریردرآوردم. واکنون‌چون خوانندگان گرامی‌دسترسی به‌مجلهٔ یکان چهارسال پیش راندارندلذا لازم است یکی دیگر ازغلطهای‌کتاب رابه عنوان‌مشت‌نمونهٔ خرواردراینجا ارائه‌دهم. و همین یك نمونه کافی است تا معلوم شودکه‌کتاب تاچه اندازه عاری ازدقت بوده وازنظرآموزشی غیرقابل اعتماداست !

مبحثی‌که برای‌انتقاد انتخاب کرده‌ام مربوط‌است به‌یکی‌از مباحث مهم هندسه: «مبحث قوت نقطه ومحوراصلی دودایره».

در متمم هندسهٔ مسطحه قضیهٔ معروف زیر را داریم :

قضیه ـ مکان هندسی نقاطی‌که نسبت به دو دایره دارای قوتهای برابرمی‌باشند خطی‌است‌مستقیم عمود بر خط‌المرکزین دو دایره .

مبنای اثبات و استدلال این قضیه را دانش‌آموز سال‌ششم ریاضی درسال چهارم به دوصورت زیر دیده‌است :

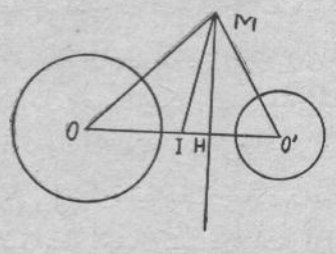
۱ـ مکان هندسی نقاطی کـه تفاضـل مربعات فواصلشان از دو نقطهٔ ثابت مساوی مقدار ثابت باشد خطی است مستقیم عمودبرخط واصل بین آن دو نقطه .

۲ـدرهرمثلث‌تفاضل مربعات دوضلع مساویست با دوبرابرضلع دوم در تصویر میانهٔ نظیرضلع سوم روی همین ضلع .

درسال چهارم این دوقضیه راکه دراصل یك قضیه‌است‌وبه دوصورت بیان شده است با درنظر گرفتن قدرمطلق اثبات می‌کنندومطلب می‌ماندتادرسال‌ششم بابکاربردن اندازه‌های جبری پاره خطهاتکمیل‌شود. غلط زنندهٔ کتاب هندسه ومخروطات سال ششم ریاضی این‌است که‌عیناً مطلب را به‌همان‌صورتی که‌دانش‌آموز درسال چهارم دیده است تکرارمی‌کند. بدون کمترین توجه به برنامهٔ سال ششم ریاضی که درآن بکاربردن اندازه های‌جبری پاره‌خطها الزامی وضروری است. چه‌اگراین قسمت مهم‌رعایت نشود اساساً کلیت و قاطعیت احکام هندسی نقض می‌شود . مثلادر همین مثال محوراصلی اگربگوئیم مکان هندسی نقاطی که‌ازآن نقاط بتوان دومماس‌برابر بردودایره رسم‌کردخطی است‌مستقیم عمودبرخط‌المرکزین دودایره، بیانی‌ناقص‌است. زیرا حکم‌کلی نیست‌وموارد‌ی یافت می‌شودکه درآن قسمتی ازمکان هندسی‌در داخل دودایره است‌ومماس وجودندارد. پس‌اگروجود مماس را عامل مثبت‌وعدم وجودمماس‌راعامل منفی فرض‌کنیم، همانطوری که به علت وجودمحوراصلی عامل‌مثبت نسبت به‌دودایره مشترك می‌باشد همانطورهم عامل منفی نسبت به‌دودایره مشترك است . پس می‌بینیم که قوت‌نقطه چیزی به‌مراتب بالاتروکلی‌ترازمماس است . اگرمنظورفقط رسم مماس‌باشدمسئله رامی‌توان به‌نحوی برای دانش‌آموز سال چهارم مطرح کرد ولی او برای قوت نقطه و بکار بردن اندازهٔ جبری پاره خطها مقدمات ذهنی ندارد واین دانش آموزسال ششم است‌که در اول سال تحصیلی کیفیت بکاربردن اندازهٔ جبری پاره خطهارا درهندسه فرامی‌گیرد. اساساً سرتاسرمتمم هندسهٔ مسطحه براین مبنا قرار دارد ومفاهیم عالیهٔ آن ازهمین جاسرچشمه می‌گیرد.

اکنون بپردازیم به نقل عین مطلب کتـاب دربارهٔ اثبات قضیهٔ محوراصلی‌که صورت‌آن دربالا ذکرشده است (صفحهٔ ۵۲ کتاب هندسه ومخروطات‌سال ششم ریاضی)

برهان‌ـهرگاه‌فاصله‌های‌نقطه‌ای‌مانند M راازمرکزهای دو دایره d و d' ، شعاعهای دو دایره را R و R' ، فاصلهٔ O از O'راa، وسط O'O را I ، تصویر M بر OO' را H وقوتهای نقطهٔ M رانسبت به دودایره ، p و p' بنامیم‌داریم:



$$p=d^2-R^2 \quad \text{و} \quad p'=d'^2-R'^2$$

حالافرض‌می‌کنیم کـه M نسبت به دودایره همقوه باشد یعنی‌فرض می‌کنیم‌که داشته‌باشیم:

$$(1)\quad d^2-R^2=d'^2-R'^2$$

رابطهٔ (۱) رابه این صورت می‌نویسیم :

$$(2)\quad d^2-d'^2=R^2-R'^2$$

از M به I ، وسط OO' وصل می‌کنیم :

در مثلث OMI :

$$(3)\quad d^2=MI^2+\frac{a^2}{4}+2\times\frac{a}{2}\times IH$$

درمثلث O'MI :

$$(4)\quad d'^2=MI^2+\frac{a^2}{4}-2\times\frac{a}{2}\times IH$$

چون طرفین دو رابطهٔ (۳) و (۴) را نظیربه نظیرازهم تفریق کنیم خواهیم داشت :

$$(5)\quad d^2-d'^2=2a\cdot IH$$

حال اگر در رابطهٔ (۵) به جای $d^2-d'^2$ مقدار مساوی باآن را از رابطهٔ (۲) قراردهیم، حاصل می‌شود :

$$(6)\quad R^2-R'^2=2a\cdot IH$$

وازرابطهٔ (۶) مقدار IH چنین بدست می‌آید :

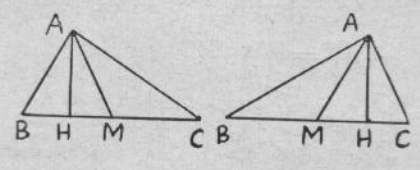
$$IH=\frac{R^2-R'^2}{2a}$$

بطوری که‌ملاحظه‌می‌شودرابطهٔ (۵) ویا(۶) غلطاست‌زیرا دراین بیان طرف دوم‌دوتساوی (۵)و(۶)مطلقاً مثبت گرفته‌شده است. درصورتی‌که این طور نیست؛ اگرشعاع دایرهٔ سمت چپ کوچکتر ازدایرهٔ دیگرباشد طـرف اول دو رابطهٔ (۵) و (۶) منفی است . عددمنفی چگونه ممکن است‌که باعدد مثبت‌برابر شود؟! کتاب غافل است ازاینکه مدتهاست‌که این مشکل به‌خاطر کلیت بیان استـدلال هندسی بوسیلهٔ دانشمند هندسه دان بـزرگ فرانسوی‌به‌نام (**میشل شال**) حل‌شده است. کتاب ازبکاربردن اندازه های جبری پاره‌خطها که قسمت اصلی و اساسی برنامهٔ هندسهٔ سال ششم ریاضی است بکلی بیگانه است و قضیه را در

همان صورت ابتدائی خود تکرار می‌نماید ومتوجه نیست که استدلال درمبحث قوت نقطه است .

واما توضیح دربارهٔ اصلاح مطلب : گفتیم که دانش آموز مبنای قضیه را درسال چهارم دیده است وآنچه سهم برنامهٔ سال ششم است تعمیم وکلیت موضوع می‌باشد. بدین معنی که در مورد تفاضل اعم ازاینکه حاصل منفی یا مثبت باشد درهر دو صورت فورمول واحدی بکارمی‌رود .

اگرقضیهٔ سال چهارم رابه صورت شمارهٔ (۲) که دربالا ذکرشده اختیارکنیم درمثلث ABC برای هر دوشکل (۱) و (۲) منحصراً یك رابطه که شامل هردوشکل می‌شودمی‌نویسیم :



(۱) (۲)

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{BC}.\overline{MH}$$

درمورد شکل (۱) چون $AB<AC$ ، طرف اول رابطهٔ فوق منفی است طرف دوم‌هم منفی‌است‌زیرا $\overline{BC}$ و $\overline{MH}$ مختلف‌العلامه هستند ودرمورد شکل (۲) طرف اول رابطه مثبت است طرف دوم هم مثبت می‌باشد زیرا $\overline{BC}$ و $\overline{MH}$ متحد العلامه هستند. براین مبنا رابطهٔ محوراصلی نوشته می‌شود:

$$\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = 2\overline{OO'}.\overline{IH}$$

ویا

$$\overline{IH} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$$

اگر $R>R'$ باشد $\overline{OO'}$ و $\overline{IH}$ دریك جهت و بالعکس اگر $R<R'$ باشد $\overline{OO'}$ و $\overline{IH}$ دردوجهت‌مخالف می‌باشد. ازاین‌بحث مختصر نتیجهٔ مهم و جالب زیر به صورت یك حکم کلی حاصل می‌گردد :

نتیجه ـ نقطهٔ H پای محور اصلی دودایره و مرکزدایرهٔ کوچکترهمواره‌دریك‌طرف نقطهٔ I وسط خط‌المرکزین دودایره قراردارند .

تشخیص جای نسبی نقاط و خطوط روی شکل هندسی ازمطالب اساسی ومهم است . ورزیدگی دانش‌آموز دراین باب معرف احاطه وتسلط اوست نسبت به مفاهیم‌هندسه. چون‌نقطهٔ H پای‌محوراصلی‌دودایره‌ازنقاط‌بسیارممتاز«هندسهٔ خطوط‌جهت‌دار» است، چه درقضایای بعدی‌وچه درحل‌مسائل همیشه به‌آن‌مراجعه می‌شود. فی‌المثل درصفحهٔ ۵۶ کتاب آنجائی که می‌خواهندثابت کنند اگرمراکزسه دایره بریك استقامت‌باشند مرکزاصلی‌آنها دربینهایت قرار دارد، محورهای اصلی دوبه دوی دوایررا رسم می‌کنند . چون دررسم محورهای اصلی دوایر مفاد نتیجهٔ فوق رعایت نشده محسوساً شکل‌غلط است !

خواص مثلث شبه قائمه

Pseudo rectangle triangle

تهیه از : **جعفرآقایانی چاوشی**

ششم ریاضی دبیرستان دکترنصیری

مثلثی که تفاضل دو زاویهٔ آن یك قائمه باشد مثلث شبه قائمه نامیده می‌شود . اگرمثلث ABC دررأس A شبه قائمه باشد یعنی داشته باشیم : $|\hat{B}-\hat{C}|=90$ دارای خواص زیرمی‌باشد .

۱ـ ارتفاع AH واسطهٔ هندسی‌است‌بین BH و CH

۲ ـ نیمساز های داخلی وخارجی زاویهٔ A با یکدیگر برابرند .

۳ـ ارتفاع AH بردایرهٔ محیطی مثلث مماس است.

۴ـ قرینهٔ رأس A نسبت به‌ضلع BC برنقطهٔ تلاقی ارتفاعات واقع است .

۵ـ مرکزدایرهٔ نه نقطهٔ مثلث (دایرهٔ اولر) روی ضلع BC واقع است .

۶ـ بین اندازه های ضلعها وشعاع دایرهٔ محیطی روابط زیربرقراراست .

$$b^2 - c^2 = 2aR \quad \text{و} \quad b^2 + c^2 = 4R^2$$

۷ـ اگرضلع BC از حیث اندازه و وضع ثابت مانده رأس A درصفحهٔ مثلث‌تغییرمکان دهدکه همواره مثلث‌شبه‌قائمه باقی بماند مکان A وهمچنین مکان نقطهٔ تلاقی ارتفاعات یك هذلولی متساوی‌القطرین خواهد بود .

ماتریس ودترمینان

با استفاده از منابع خارجی

تنظیم از : سید محمدکاظم نائینی

مثال ۲ـ ماتریس معکوس ماتریس:

$$M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & h \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

راحساب کنید .

ماتریس وارونهٔ این ماتریس

$$(M)^{*}=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

است .

حال ماتریس الحاقی راتعیین می‌کنیم و برای بدست آوردن جملات ماتریس الحاقی هرجمله نظیر ازماتریس وارونه را اختیار کرده سطروستون متلاقی درآن جمله راحذف می کنیم. دترمینان باقیمانده جملهٔ نظیر از ماتریس الحاقی است و علامت آن برای جملهٔ π_{ik} برابر $(-1)^{i+k}$ است .

$$(M)^{\pi}=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & e \\ c & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & g \\ c & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{pmatrix}$$

حال اگر حاصل ضرب $(M)(M)^{\pi}$ را تعیین کنیم خواهیم داشت :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}=\Delta\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\Delta(1)$$

که در آن Δ دترمینان وابسته به ماتریس (M) است. بنابراین ماتریس معکوس (M) به‌صورت $\frac{(M)^{\pi}}{\Delta}$ ظاهرخواهد شد :

$$\frac{(M)^{\pi}}{\Delta}=\frac{(1)}{(A)}=(A)^{-1}$$

دراین صورت خواهیم داشت :

$$\begin{pmatrix} \frac{ei-fh}{\Delta} & -\frac{bi-ch}{\Delta} & \frac{bh-ce}{\Delta} \\ -\frac{di-fg}{\Delta} & \frac{ai-cg}{\Delta} & -\frac{af-cd}{\Delta} \\ \frac{dh-eg}{\Delta} & -\frac{ah-bg}{\Delta} & \frac{ae-bd}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$=(M)^{-1}=\frac{(1)}{(M)}$$

اگر نقطهٔ M_0 به‌مختصات $(x_0$ و y_0 و $z_0)$ درفضا طبق قانون تبدیل $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ تبدیل یافته و M_1 به‌مختصات

(x_1 و y_1 و z_1) بدل گردد معادلات تبدیل به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{cases} x_1 = ax_0 + by_0 + cz_0 \\ y_1 = dx_0 + ey_0 + fz_0 \\ z_1 = gx_0 + hy_0 + iz_0 \end{cases}$$

حال اگر در این دستگاه مقادیر x_0 و y_0 و z_0 را برحسب x_1 و y_1 و z_1 حساب کنیم (طبق قاعدهٔ حل سه معادلهٔ سه مجهولی در حالت کلاسیك) معادلاتی به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{ei-fh}{\Delta}x_1 - \frac{bi-ch}{\Delta}y_1 + \frac{bh-ce}{\Delta}z_1 \\ y_0 = -\frac{di-fg}{\Delta}x_1 + \frac{ai-cg}{\Delta}y_1 - \frac{af-cd}{\Delta}z_1 \\ z_0 = \frac{dh-eg}{\Delta}x_1 - \frac{ah-bg}{\Delta}y_1 + \frac{ae-bd}{\Delta}z_1 \end{cases}$$

ماتریس در این تبدیل چنانکه ملاحظه می‌شود همان ماتریس معکوس است که قبلا بدست آورده‌ایم . به کمك معادلات فوق می‌توان از نقطهٔ M_1 به‌مبدل آن یعنی نقطهٔ M_0 رسید.

مثال عددی: مطلوبست مبدل نقطهٔ M_1 درفضا درصورتی که معادلات تبدیل به‌صورت زیر است :

$$M_1 \begin{cases} x_1 = 2x_0 - 3y_0 + 4z_0 \\ y_1 = 3x_0 - 2y_0 + 2z_0 \\ z_1 = 4x_0 - 5y_0 + 3z_0 \end{cases}$$

قانون تبدیل M_0 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ ماتریس

را به M_1 بیان می‌کند می‌خواهیم قانون تبدیل M_1 را به M_0 یعنی ماتریس معکوس را بدست آوریم اول دترمینان وابسته به ماتریس راطبق دستور ساروس حساب می‌کنیم.

$$\begin{array}{c|ccc|c} + \searrow & 2 & -3 & 4 & \swarrow - \\ + \searrow & 3 & -2 & 2 & \swarrow - \\ + \searrow & 4 & -5 & 3 & \swarrow - \\ & 2 & -3 & 4 & \Longrightarrow \Delta = -12-60-24+ \\ & 3 & -2 & 2 & 32+20+27 \end{array}$$

$$\Delta = -17$$

ماتریس وارونه را می‌نویسیم

$$(M)^{*} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

وبعد ماتریس الحاقی راحساب می‌کنیم (ازبیان جزئیات عمل خودداری می‌شود. به علت آنکه دریك مثال تمام نکات مربوط گفته شد)

$$(M)^{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_{11} = 4 & \pi_{12} = -11 & \pi_{13} = 2 \\ \pi_{21} = -1 & \pi_{22} = -10 & \pi_{23} = -8 \\ \pi_{31} = -7 & \pi_{32} = -2 & \pi_{33} = 2 \end{pmatrix}$$

و ازآنجا ماتریس معکوس با تقسیم کردن هرجمله از ماتریس الحاقی به Δ حاصل می‌شود .

$$(M)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{-17} & \frac{11}{17} & \frac{2}{-17} \\ \frac{1}{17} & \frac{10}{17} & \frac{8}{17} \\ \frac{7}{17} & \frac{2}{17} & \frac{2}{-17} \end{pmatrix}$$

ومعادلات تبدیل طبق این قانون به‌صورتهای زیرخواهدبود.

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{4}{17}x_1 + \frac{11}{17}y_1 - \frac{2}{17}z_1 \\ y_0 = \frac{1}{17}x_1 + \frac{10}{17}y_1 + \frac{8}{17}z_1 \\ z_0 = \frac{7}{17}x_1 + \frac{2}{17}y_1 - \frac{2}{17}z_1 \end{cases}$$

البته می‌توانستیم با استفاده از فرمولهایی که در حالت کلی بیان داشتیم همین نتیجه را بدست آوریم . برای واضح شدن مطلب بودکه جزئیات عمل بیان گردید.

در محاسبهٔ ماتریس معکوس این نکته کاملا مشخص است که اگرماتریس منظم ومربع شکل نباشد ماتریس معکوس ندارد.

در بعضی از ماتریسها گاهی اتفاق می‌افتدکه معکوس ماتریس باخود ماتریس برابر است مثلا در ماتریس $(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

معکوس آن $(M)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ است که با ماتریس اصلی مساوی است اگردرماتریسی این خاصیت برقرارباشد گویند : **انولوسیون ماتریسی** برقراراست .

تقسیم درماتریس - گفتیم که ماتریسها یك رشتهٔ کامل عناصر به عنوان عنصرعددی بوده وتمام عملیاتی راکه بر روی اعداد می‌توان انجام داد روی ماتریسهای عددی نیزمی‌توان انجام‌داد. این‌جعبه‌های بایگانی‌وقالبهای عددی بایکدیگرجمع ویا درهم ضرب وبرهم تقسیم می‌شوند و مجموعه‌ای ازمحاسبات

ماتریسی را بوجود می‌آورند که می‌توان آنرا به عنوان ادامهٔ جبر اعداد مرکب در نظر گرفت و خواهیم دید که اخیراً همین موجودات مجرد در نظریهٔ کوآنتوم و در سایر زمینه های علمی تعبیری جالب بدست آوردند.

درعملیات روی ماتریسها ملاحظه شد که این عملیات با اعمال روی اعداد جبری جزئی اختلافات داشتند که هریك جداگانه شرح داده شد . درجبر مقدماتی می‌دانیم که اگر $ax=b$ باشد برای اینکه x را حساب کنیم کافیست طرفین رابطه را در $\frac{1}{a}$ یعنی a^{-1} ضرب کنیم ؛ $x=\frac{b}{a}$. این عمل وقتی امکان‌دارد که $a\neq 0$ باشد.

عمل تقسیم درمحاسبات ماتریسی نیز تعریف مشابه باتعریف فوق دارد .

تعریف : اگر $(A)(x)=(B)$ باشد برای بدست آوردن ماتریس (x) طرفین رابطه رادر $(A)^{-1}$ ضرب می‌کنیم

$$(A)^{-1}(A)(x)=(A)^{-1}(B)$$

$$\Longrightarrow (1)(x)=(A)^{-1}(B)$$

$$(x)=\frac{(B)}{(A)}=\frac{1}{(A)}(B)$$

اگر رابطهٔ اصلی به‌صورت $(x)(A)=(B)$ بود می‌نوشتیم :

$$(x)(A)(A)^{-1}=(B)(A)^{-1}\Longrightarrow(x)(1)=\frac{(B)}{(A)}$$

$$=(B)\frac{1}{(A)}$$

چون درضرب ماتریسها گفتیم اگر جای عوامل ضرب را عوض کنیم ماتریس فرق می‌کند .

قضیهٔ اصلی : اگر

(۱): $(A)(B)=(A)(C)$ یا (۲): $(B)(A)=(C)(A)$

برقرار باشد $(B)=(C)$ است (به‌شرط $|A|\neq 0$)

اثبات ـ طرفین (۱) و (۲) رادر $(A)^{-1}$ ضرب می‌کنیم منتهی دررابطهٔ (۱) عامل $(A)^{-1}$ را مقدم ودررابطهٔ (۲) این عامل را مؤخرقرار می‌دهیم ؛

$$(A)^{-1}(A)(B)=(A)^{-1}(A)(C)\rightarrow$$

$$(1)(B)=(1)(C)\rightarrow(B)=(C)$$

$$(B)(A)(A)^{-1}=(C)(A)(A)^{-1}\rightarrow$$

$$(B)(1)=(C)(1)\rightarrow(B)=(C)$$

زیرا قبلا دیدیم که $(1)(B)=(B)(1)$

مثال ۱ـ اگر:

$$(A)=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}\quad\text{و}\quad(B)=\begin{pmatrix}4&1\\5&2\end{pmatrix}$$

باشد اولا مطلوبست محاسبهٔ $(x)=\frac{(A)}{(B)}$

ثانیاً مطلوبست محاسبهٔ $(x)=\frac{(B)}{(A)}$

حل ـ در ماتریس (A) ماتریس وارونه عبارتست از $(A)^{*}=\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}$ وماتریس وابسته $(A)^{\pi}=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&4\end{pmatrix}$

(ازفرمول کلی $(M)^{\pi}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ استفاده کنید)

و $|\Delta|_A=4-6=-2$ و ازآنجا

$$(A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}&\frac{3}{2}\\1&-2\end{pmatrix}$$

به همین ترتیب معکوس (B) را حساب می‌کنیم :

$$(B)^{*}=\begin{pmatrix}4&5\\1&2\end{pmatrix}$$

و $(B)^{\pi}=\begin{pmatrix}2&-1\\-5&4\end{pmatrix}$ و $|\Delta|_B=8-5=3$ وازآنجا

$$(B)^{-1}=\begin{pmatrix}+\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

باید ماتریس (x) راحساب کنیم اگر $(x)=\frac{(A)}{(B)}$ یا $(B)(x)=(A)$ باشد. طرفین رابطه‌رادر $(B)^{-1}$ ضرب می‌کنیم

$$(x)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}-\frac{2}{3}&2-\frac{1}{3}\\-\frac{20}{3}+\frac{8}{3}&-5-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

$$(x)=\begin{pmatrix}2&\frac{5}{3}\\-4&-\frac{20}{3}\end{pmatrix}$$

اگر $(y)=\frac{(B)}{(A)}$ یا $(A)(y)=(B)$ بودمی‌بایستی

ماتریس (y) راحساب می‌کردیم برای این کارطرفین رابطه‌را در $(A)^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$(y)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2+\frac{15}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \\ 4-10 & 1-4 \end{pmatrix}$$

$$(y)=\frac{(B)}{(A)}=\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

مثال ۳ـ خارج‌قسمت زیر را بدست‌آورید:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \div \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

اولی را (A) و دومی را (B) می‌نامیم.

ابتدا ماتریس معکوس (B)را بدست می‌آوریم. ماتریس وارونهٔ (B) عبارتست از:

$$(B)^{\pi}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و $|\Delta|_B=2$ وازآنجا

$$(B)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

بنابراین اگر $(x)=(A)(B)^{-1}$ باشد داریم:

$$(x)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

تمرین ـ اگرداشته باشیم:

$$(A)=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad (B)=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(C)=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad (D)=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

مطلوبست محاسبهٔ ماتریسهای زیر:

$$(x)=\frac{(A)}{(B)} \text{ و } (y)=\frac{(C)}{(A)} \text{ و } (z)=\frac{(D)}{(C)}$$

و

$$(t)=\frac{(B)}{(D)}$$

مثال ۲: اگر

$$(B)=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad (A)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

باشد مطلوبست محاسبهٔ خارج قسمت $(x)=\frac{(B)}{(A)}$

حل ـ ابتدا ماتریس وارونهٔ A را تشکیل می‌دهیم:

$$(A)^{\circledast}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

سپس ماتریس الحاقی (A) را حساب می‌کنیم:

$$\pi_{11}=+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad \pi_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\pi_{13}=+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=8 \qquad \pi_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}=16$$

$$\pi_{22}=+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2 \qquad \pi_{23}=-\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=5$$

$$\pi_{31}=+\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad \pi_{32}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2$$

$$\pi_{33}=+\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-5$$

برای تعیین جملات ماتریس الحاقی جملهٔ a_{ij}را ازماتریس وارونه اختیارکرده سطر و ستون مختوم به آن جمله راحذف کردیم (سطر iام و ستون jام) دترمینان باقیمانده با علامت $(-1)^{i+j}$ جملهٔ π_{ij} است پس‌ماتریس الحاقی (A) چنین‌است

$$(A)^{\pi}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 16 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

حال‌دترمینان وابسته به‌ماتریس A را طبق دستورساروس حساب می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|ccc|c} + \searrow & 0 & 1 & 1 & \swarrow - \\ + \searrow & 5 & 0 & 8 & \swarrow - \\ + \searrow & 2 & 0 & 0 & \swarrow - \\ & 0 & 1 & 1 & \\ & 5 & 0 & 8 & \end{array}$$

$$\Delta=0+0+16-0-0-0=16$$

اینك هرجملهٔ از ماتریس الحاقی راکه بر Δ تقسیم‌کنیم ماتریس معکوس بدست می‌آید:

$$(A)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

برای تعیین ماتریس(x) یعنی خارج قسمت ماتریس(B) بر (A) حاصل ضرب زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{16} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=(A)^{-1}(B)=\frac{(B)}{(A)}$$

بدیهی است که عمل ضرب امکان دارد زیرا تعداد ستونهای ماتریس $(A)^{-1}$ با تعداد سطرهای ماتریس (B) برابر است و ماتریس حاصل‌ضرب دارای سه سطر ویك ستون خواهد بود (۱ و ۳)=(۱ و ۳)(۳ و ۳)

$$(x)=\frac{(B)}{(A)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{81}{16} \\ -\frac{1}{16} \end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 \\ 81 \\ -1 \end{pmatrix}$$

مثال ۳ـ ماتریس

$$(A)=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

و

$$(B)=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

مفروضند مطلوبست محاسبهٔ ماتریس

$$(x)=\frac{(B)}{(A)}$$

ابتدا ماتریس وارونهٔ (A) را می‌نویسیم :

$$(A)^{*}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

سپس ماتریس الحاقی آنرا حساب می‌کنیم:

$$(A)^{\pi}=\begin{pmatrix} 17 & -13 & 14 \\ -14 & 14 & -14 \\ 12 & -10 & 14 \end{pmatrix}$$

زیرا :

$$\pi_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=17$$

$$\pi_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & +1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-13$$

$$\pi_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=14$$

$$\pi_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-14$$

$$\pi_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=14$$

$$\pi_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-14$$

$$\pi_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=12$$

$$\pi_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-10$$

$$\pi_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=14$$

حال دترمینان وابسته به ماتریس A را طبق دستور ساروس حساب می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|ccc|c} + \searrow & 4 & 3 & -1 & \swarrow - \\ + \searrow & 2 & 5 & 3 & \swarrow - \\ + \searrow & -2 & 1 & 4 & \swarrow - \\ & 4 & 3 & -1 & \\ & 2 & 5 & 3 & \end{array}$$

$$\Delta=80-2-18-10-12-24=14$$

ازتقسیم هریك از جملات ماتریس الحاقی به Δ ماتریس معکوس (A) حاصل می‌شود :

$$(A)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{17}{14} & \frac{-13}{14} & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{6}{7} & \frac{-5}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

اینك برای‌محاسبهٔ ماتریس‌خارج قسمت ماتریس $(A)^{-1}$ را در ماتریس (B) ضرب می‌کنیم. عمل ضرب امکان دارد زیرا (۲ و ۳)=(۲ و۳)(۳ و۳). تعداد ستونهای ماتریس معکوس با تعداد سطرهای ماتریس (B) برابر است و ماتریس

خارج قسمت دارای سه سطر و دوستون خواهد بود:

$$(x)=\frac{(B)}{(A)}=(A)^{-1}(B)=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{14} & \frac{-13}{14} & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{6}{7} & \frac{-5}{7} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{91}{14} & \frac{123}{14} \\ -6 & -8 \\ 5 & \frac{50}{7} \end{pmatrix}$$

تمرین ـ ماتریسهای زیرمفروضند.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

اولا ـ خارج قسمت $\frac{(A)}{(B)}$ و ثانیاً خارج قسمت $\frac{(B)}{(A)}$ را تعیین کنید.

سپس معکوس خارج قسمت اولی را بدست آورده وصحت عملیات را تحقیق نمائید.

حل دستگاه معادلات جبری ـ یك دستگاه n معادلهٔ n مجهول جبری درجهٔ اول خطی را به‌صورت کلی زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

این دستگاه را به صورت سمبولیك زیر می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

و بطور ساده تر می‌توان دستگاه را به صورت زیر نوشت:

$$(A)(X)=(B)$$

در این معادله می‌توان نوشت:

$$(x)=\frac{(B)}{(A)}=(A)^{-1}(B)$$

و بدین ترتیب می‌توان یك دستگاه n معادلهٔ n مجهولی درجهٔ اول راحل کرده ومجهولات آنرا بدست آورد. به‌این‌قرار که‌ابتدا ماتریس‌معکوس‌ضرائب معادله را بدست‌آورده درماتریس‌مقادیر ثابت‌طرف‌دوم ضرب‌می‌کنیم. ماتریس مجهولات‌تعیین‌می گردد.

مثال ۱ : دستگاه دو معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} 3x-y=4 \\ 5x+3y=44 \end{cases}$$

این دستگاه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 44 \end{pmatrix}$$

و از آنجا:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 44 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

پس باید ماتریس‌معکوس $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ را بدست‌آوریم دراینجا

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=14$$

و $(A)^{*}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ و $(A)^{\pi}=\begin{pmatrix} 3 & +1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

و از آنجا:

$$(A)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{+1}{14} \\ \frac{-5}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

و لذا داریم:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & +1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 44 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 56 \\ 112 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

یعنی $x=4$ و $y=8$ است.

مثال ۲ـ دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیرراحل کنید.

$$\begin{cases} 3x-4y-3z=5 \\ 2x+3y+z=4 \\ 5x+7y+5z=21 \end{cases}$$

این دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 21 \end{pmatrix}$$

یا

$$(A)(X)=(B)$$

و از آنجا نتیجه می‌شود که : $(x)=\frac{(B)}{(A)}$. حال باید ماتریس معکوس (A) یعنی $(A)^{-1}$ را حساب کنیم. ابتدا ماتریس وارونه را می‌نویسیم :

$$(A)^{*}=\begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ & ۷ \\ -۳ & ۱ & ۵ \end{pmatrix}$$

حال ماتریس الحاقی (A) را تعیین می‌کنیم :

$$(A)^{\pi}=\begin{pmatrix} ۸ & -۱ & ۵ \\ -۵ & ۳۰ & -۹ \\ -۱ & -۴۱ & ۱۷ \end{pmatrix}$$

و اندازهٔ دترمینان وابسته به ماتریس (A) پس از محاسبه برابر $\Delta=۴۷$ است .

از تقسیم اجزاء ماتریس الحاقی به Δ ماتریس معکوس حاصل می‌شود :

$$(A)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{۸}{۴۷} & \frac{-۱}{۴۷} & \frac{۵}{۴۷} \\ \frac{-۵}{۴۷} & \frac{۳۰}{۴۷} & \frac{-۹}{۴۷} \\ \frac{-۱}{۴۷} & \frac{-۴۱}{۴۷} & \frac{۱۷}{۴۷} \end{pmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$(x)=\frac{(B)}{(A)}=(A)^{-1}(B)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(X)=\begin{pmatrix} \frac{۸}{۴۷} & \frac{-۱}{۴۷} & \frac{۵}{۴۷} \\ \frac{-۵}{۴۷} & \frac{۳۰}{۴۷} & \frac{-۹}{۴۷} \\ \frac{-۱}{۴۷} & \frac{-۴۱}{۴۷} & \frac{۱۷}{۴۷} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} ۵ \\ ۴ \\ ۲۱ \end{pmatrix}=\frac{۱}{۴۷}\begin{pmatrix} ۱۴۱ \\ -۹۴ \\ ۱۸۸ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۳ \\ -۲ \\ ۴ \end{pmatrix}$$

یعنی $x=۳$ و $y=-۲$ و $z=۴$ است

تمرین ـ دستگاههای زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} ۳x-۷y=-۸ \\ ۵x+y=۱۲ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} ۵x-۳y=-۱ \\ ۴x+۶y=۱۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۷x-۳y+۴z=۱۳ \\ ۳x+۴y-۵z=-۴ \\ ۵x+y-۲z=۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳x-۲y+۳z=۸ \\ ۵x-۷y+z=-۲ \\ ۳x+۵y-۴z=۸ \end{cases}$$

منابع :

کتابهایی که در تهیهٔ مقالات ماتریس و دترمینان مورد استفاده قرار گرفته است

JOHN L. KELLEY

introduction to Modern Algebra ($\frac{\text{ran nortrand}}{\text{east west press}}$)

W. W. SAWYER

Prelade to Mathematics
(Apelican Book) published by penguin book

Glicksman and Ruderman
Fundamentals for Aduanced Mathematics (aduance copy)

(Holt Rinehart Wiston)

Matrix Algebra (Theory and problems)
(Schaum Soutline series Newyorh)

دکتر وازگن آوانیسیان
آنالیز ریاضی ، مقدمه‌ای بر آنالیز نوین (انتشارات دانشگاه ملی)

دکتر احمد سادات عقیلی
محاسبات ماتریس (انتشارات دانشگاه)

مراحل مهم علم نجوم

ترجمهٔ فصلی از کتاب «L'Astronomie Moderne» تألیف : **TOCQUET**

٤- دورهٔ معاصر

شاید بتوان دورهٔ فعلی را از نقطهٔ نظر نجوم دورهٔ «انفجاری» نام نهاد. از یك‌طرف، به سبب تکمیل و پیشرفت لاینقطع فن‌ساختن ابزار، و همچنین به‌سبب بکاربردن‌روشهای جدید در ارصاد و مشاهدات آسمانی، کشفیات نجومی همچون ریتمهای یك موسیقی تند پیاپی جانشین یکدیگر شده‌اند؛ از طرف دیگر، نظریه‌هایی عرضه شده است که هریك جسورانه‌تر از دیگری بوده در سرحد فیزیك و متافیزیك قرار داشته‌اند. این نظریه‌ها گاهی آنچنان مشکل هستند که آنهارا خارج از فرمولهای ریاضی‌نمی‌توان توضیح داد، خیلی بهتر از نظریه‌های گذشته ساختمان‌جهان‌راتوجیه‌کرده و اغلب هم به طرزرضایت‌بخشی مواجه با حقیقت بوده‌اند.

اولین کشفی راکه باید نام‌بردمربوط به‌حدودسال ۱۹۱۰ و عبارت ازکشف اشعهٔ کیهانی می‌باشد. در اوایل سال ۱۹۱۲ **قانون سفه‌ئیدها** (La loi des Céphéides) توسط **میس لیویت** (Miss Leavitt) کشف شد که عمق یابی جهان را به سادگی میسر می‌سازد، یعنی می‌توان فواصل ستارگان حتی بسیار دور دست را تعیین کرد.

در همان زمان، منجم دانمارکی **هرتز پرونگ** (Hertzsprung) و منجم آمریکائی **راسل** (Russel) دیاگرام مشهور خودرا بیان کردند که به نام **دیاگرام هرتز پرونگ- راسل** نامیده شده و بیان‌می‌دارد که‌ستارگان به چندین طبقهٔ متمایز گروه‌بندی می‌شوند. تقریباً در همان زمان کشف ستارگان عجیب «کوتوله‌های سفید» انجام گرفت که مادهٔ آنها به نحو فوق‌العاده‌ای متراکم می‌باشد: جرم یك سانتیمتر مکعب از این ستارگان تا ۱۰۰ تن می‌رسد. فقط با نظریه‌های اتمی جدید می‌توان یك چنین حالت استثنائی از ماده را توجیه کرد.

در حدود سال ۱۹۱۶ ، یکی از بهترین متخصصین سحابیها ، دانشمند آمریکائی **هرلاو شاپلی** (Herlow Shapley) منجم رصدخانهٔ **مونت‌ویلسون** بااستفاده ازقانون سفه‌ئیدهافاصلهٔ بعضی از توده‌های‌ستارگان راتعیین‌کرد ودر همان زمان‌درصدد برآمد تا ساختمان کهکشان را تعیین کند. با شمارش و اندازه‌گیری ابعاد ۳۰ میلیارد ستاره‌های کهکشان ابعاد آنرا تعیین کرد. این ابعاد بامقادیر واقعی آنها تفاوت داشت،زیرا در آن عصر عامل جذب نور کهکشان بوسیلهٔ اشعهٔ کیهانی بحساب نمی‌آمدو نتیجهٔ محاسبات با اشتباه توأم بود . وی همچنین معلوم ساخت که خورشید تقریباً در دو ثلث یکی از شعاعهای کهکشان ابتدا از مرکز قرار دارد. این فاصله با ارزیابیهای تازه‌ای که انجام گرفته برابر است با ۳۲۶۰۰ سال نوری. ده‌سال بعداز آن یعنی در ۱۹۲۹ **اارت** (Oort) هلندی محقق ساخت که کهکشان دور خودش می‌چرخد و از این راه توانستند حجم آنرا ارزیابی کنند که تقریباً ۳۰۰ میلیارد برابر حجم خورشید می‌باشد.

حدود همان سالها، منجم و فیزیکدان انگلیسی **ادنگتن** (Eddington) معلوم‌کرد که ستارگان معمولی و همچنین ستارگان با جرم زیاد متشکل از گازهای کامل هستند وقسمت اعظم آنها شامل اتمهای یونیزه و الکترون می‌باشد، به‌عبارت دیگر آنها ازهمان چیزی ساخته شده‌اند که فعلا به‌آن پلاسما می‌گوئیم .

تا سال ۱۹۲۴ طبیعت سحابیهای حلزونی مورد مشاجره و اختلاف محققین بود . عده‌ای‌از منجمین تصور می‌کردندکه آنها قشری ازگازهای یکنواخت با ابعاد متوسط ، و احتمالا ماوراء کهکشان می‌باشند، برخلاف آنان عده‌ای دیگرآنهارا

به صورت مجموعهٔ نامحدودی از توده‌های ستاره‌ای و خارج از کهکشان می‌دانستند. باید اضافه کرد که بعداز آنکه **ویلیام هرشل** وقبل از وی ، **توماس رایت** و **کانت** سحابیهای را به صورت جزیره‌های جهانی تصور کردند این شك پدیدآمد که خارج ازکهکشان هم‌ستاره‌ای وجود داشته باشد، تاهنگامی که طیف نورسحابیها نشان داد که بسیاری از آنها شامل‌همان گازهایی می‌باشند که درکهکشان وجود دارد. این فکر هم تقویت شد که تعداد سحابیها از استوا به سوی قطبهای کهکشان افزایش می‌یابد. فعلا می‌دانیم که این پدیده ظاهری است واز آن جهت است که گازها و جرمهای سطح دستگاه کهکشان ما اشیاء دور را مخفی می‌سازد. به هرجهت، چنانکه گفته شد در آغاز قرن بیستم دربارهٔ سحابیها عقاید مختلفی وجود داشت که آیا آنها و مخصوصاً سحابیهای حلزونی به کهکشان ما تعلق دارند یا خارج از آن هستند ، تا اینکه در سال ۱۹۲۴ منجم آمریکایی **هبل** (Hubble) طبیعت سحابیها را مسجلا معلوم کرد . وی با آزمایش کلیشه های مربوط به سحابیهای حلزونی که در رصدخانهٔ منت ویلسن تهیه شده بود ثابت کرد که خطوط سفیدی که درطیف مشاهده می‌شودمربوط به ماده‌های ستارگان بوده ومشابه باکهکشان ما می‌باشد. علاوه برآن ، وی با استفاده ازسفه‌ئیدها فاصلهٔ این سحابیهای حلزونی را معلوم و ثابت کرد که در خارج کهکشان واقع شده‌اند. بعداً در آنها همهٔ چیزهای موجود در کهکشان را یافتند : ابرهای ستاره‌ای ، ابرهای درخشان یا تاریك ، نواختران ، توده های کروی و غیره . کمی بعد هبل کشف کرد که سحابیهای حلزونی با سرعتی متناسب با فاصلهٔ آنها ازکهکشان ما دور می‌شوند : این قانون که توسط منجم هلندی **دوسیته** (De Sitter) در ۱۹۱۷ بیان شد مبنای **نظریهٔ اتساع جهان** می‌باشد.

در همین زمان، **اینشتین** که بیوگرافی وی‌را ذیلا بیان می‌کنیم **نظریهٔ نسبیت** خود را عرضه‌کرد.

دنباله در شمارهٔ آینده

قضیهٔ پاسکال (بقیه از صفحهٔ ۲۹۶)

KPQ برگزینیم بنابه قضیهٔ منلائوس داریم :

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{KB}}{\overline{PB}} = 1$$

و

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{KD}} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{PA}} = 1$$

که ازضرب طرفین این دورابطه درهم وبا توجه به

$$\overline{KA} \cdot \overline{KB} = \overline{KC} \cdot \overline{KD}$$

درایم :

$$\frac{\overline{PR} \cdot \overline{PS}}{\overline{QR} \cdot \overline{PS}} \cdot \frac{\overline{QC} \cdot \overline{QD}}{\overline{PA} \cdot \overline{PB}} = 1 \Longrightarrow$$

$$\frac{\overline{PR} \cdot \overline{PS}}{\overline{RQ} \cdot \overline{QS}} \cdot \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{QC} \cdot \overline{QD}} = \frac{[Q]}{[Q]}$$

اکنون برای اثبات قضیهٔ پاسکال فرض می‌کنیم AB و DE در P و BC و EF در Q متقاطع باشند و CD ، BE و AF به‌ترتیب PQ را در R' ، G و R قطع کنند . دراین صورت بنابه قضیهٔ فوق درچهارضلعیهای ABEF و BCDE داریم :

$$\frac{\overline{PG} \cdot \overline{PR}}{\overline{QG} \cdot \overline{QR}} = \frac{[P]}{[Q]} = \frac{\overline{PG} \cdot \overline{PR'}}{\overline{QG} \cdot \overline{QR'}} \Longrightarrow$$

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{PR'}}{\overline{QR'}}$$

یعنی R و R' برهم منطبقند ویا به عبارت دیگر نقطهٔ تقاطع CD و FA بر روی خط PQ واقع است که این همان حکم قضیه است .

دنباله درپائین صفحهٔ بعد

بی آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

سیروس و جمشید و بهرام سه دوست صمیمی بودند. همسر بهرام عمرش را به شما داده‌و شوهرش را دست تنها گذاشته بود . سیروس هم همسر خودرا از دست داده و بـا دختری‌که از او برایش باقی مانده بود زندگی می‌کرد.

بعداز آنکه جمشید ازدواج کرد با همسرش توافق‌کردند که به اتفاق سایرین همه بـا هم یك‌جا زندگی‌کنند ودر خرج خانه شریك باشند. قرار گذاشتند اول هر ماه هرکدام از افراد (چه مرد و چه زن) مبلغ ۲۵۰ تومان برای‌خریدهای یومیه بپردازد ودرآخرماه اگروجهی زیاد آمد آنرا بین خود به تساوی تقسیم کنند.

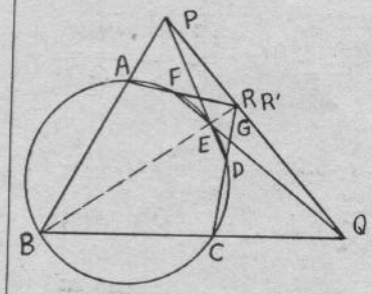
بعداز پایان ماه اول،کل خرج خانه‌آنها ۹۹۲ تومان شد ووقتی باقیماندهٔ وجه را بین‌خود تقسیم کردند مبلغی که به‌هرکدام رسید برحسب‌تومان عددی‌صحیح بود. سهم هرکدام چقدربوده‌است؟

پاسخ مسئلهٔ زیرهمین‌عنوان مندرج در یکان شمارهٔ گذشته:

یکی از تخته‌ها را باید درگوشهٔ خندق متکی به دوکنارهٔ عمود برهم آن قرار داد که با دو کناره یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین تشکیل بدهد. اگر طول تخته a باشد طول هرضلع این مثلث $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ می‌شود. تختهٔ دوم را باید از یك‌سر متکی به وسط تختهٔ اول و از سر دیگر متکی به گوشهٔ جزیره‌قرار داد . مسافتی که بوسیلهٔ سیاحان پیموده می‌شود بـرابـر است با : $\frac{a}{2}+a=\frac{3a}{2}$ یعنی یك‌برابر و نیم طول هر تخته. وعرض خندق ضلع یك چهار ضلعی محاطی است که زاویه های طرفیـن آن ۹۰ درجه (درکنارهٔ خندق) و ۴۵ درجه (درگوشهٔ جزیره) بوده دوضلع دیگرآن a (طول تختهٔ اول) و $\frac{a}{2}$ (نصف طـول تختـهٔ اول) می‌باشد. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس عرض خندق برابر با $\frac{3}{3}a\sqrt{2}$ حساب می‌شود .

قضیهٔ پاسکال (دنباله از صفحهٔ قبل)

۸ ـ با استفاده از قضیهٔ‌مراکزتجانس سه‌دایره



لم ـ هرگاه دایره‌ای بردودایرهٔ معلوم عمود باشد خط واصـل بین هر دونقطهٔ تقاطـع بر یکی از مراکز تجانس‌آنها می‌گذرد .

ازاثبات این‌قضیهٔ‌ساده صرف نظرکرده با پذیرفتن آن قضیهٔ پاسکال را به‌ترتیب زیراثبات می‌کنیم .

از هریك ازدو رأس متقابل شش ضلعی دایره‌ای عمودبر دایرهٔ مفروض گذرانده واین‌سه‌دایره راکه‌به‌ترتیب بر(A وD) و (E و B) و (F و C) مرورکرده‌اند دوایر C_1 ، C_2 وC_3 می‌نامیم . بنابه قضیهٔ فوق AB و DE هردوبریکی ازمراکز تجانس دوایر C_1 و C_2 می‌گذرند و بنابراین P نقطهٔ تلاقی آنها یکی از مـراکزتجانس دوایر C_1 و C_2 است . به دلیل مشابه Q یکی از مراکزتجانس دوایر C_2 و C_3 بـوده و R نیزیکی ازمراکزتجانس دوایر C_3 و C_1 می‌باشد .

بنا براوضاع‌مختلفی که رؤوس شش ضلعی نسبت به‌یکدیگر اختیارکنند سه نقطهٔ P ، Q و R یـا هـر سه مراکز تجانس مستقیم سه دایرهٔ C_1 ، C_2 و C_3می‌باشند یادوتای‌آنها مراکز تجانس معکوس ودیگری مرکزتجانس مستقیم سه دایره است و مامی‌دانیم که درهرحال این سه مرکز تجانس بر یك استقامت واقعند . بنابراین قضیه ثابت است .

دنباله دارد

بخش پنجم ـ مسائل حساب

نظریهٔ اعداد که گاهی حساب عالی نامیده می‌شود مسائل حل نشدهٔ فراوانی را شامل است و از این لحاظ با مشکل بسیار بزرگی درگیر می‌باشد . قبلا یادآوری شد که بسیاری از مسائل که درچهار چوب نظریهٔ اعداد حل نمی‌شوند. یا بسیار مشکل هستند بااستفاده ازآنالیز ریاضی به‌سادگی حل می‌شوند. نظریهٔ اعداد از حدود **اعداد طبیعی** (۱ ، ۲ ، ۳ و ...) پارا فراتر نمی‌نهد اما اغلب باکشفیات شگفتی روبرو می‌شود که روشهای عمومی مربوط به عملیات اتصالی قادر به حل آنها می‌باشند . در آنالیز متغیرهایی مطرح می‌شود که می‌توانند همهٔ مقادیر حقیقی ، صحیح یا (به تعداد نامحدود) محصور بین دو عدد صحیح را قبول کنند راه حلهای تازه بیشتر با استفاده از روشهای تحلیلی بدست آمده است و امید می‌رود که از این راه باز هم به پیشرفتهای دیگری نائل آیند .

مشهور ترین مسائل حل نشدهٔ بین تمام مسائل ریاضی **قضیهٔ آخر فرما** است. شاید بهتر باشد که بگوئیم **فرض فرما** زیرا از طرف وی برای آن اثباتی اقامه نشده است . معروف است که وی برای این قضیه اثبات شگفت انگیزی داشته است. اما بر خلاف سایر قضیه‌های خود که همه را با اثبات مدلل ساخته است برای این یکی دلیلی نیاورده است .

اگر x و y و z عدد های صحیح مثبت باشند معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ دارای جوابهای زیاد است مثلا :

$$3^2+4^2=5^2 \quad و \quad 5^2+12^2=13^2$$

و بطور کلی می‌توان فرمولهایی تنظیم کرد که همهٔ این جوابها را بدست بدهد ، که همه ساله بسیاری از آماتورهای حوصله دار دنبال آن هستند . در این باره چیزهایی تازه‌ای هم کشف شده است اما چندان جالب و شایان تقدیر نیست.

قضیهٔ آخر فرما از این قرار است که معادلهٔ :

$$x^n+y^n=z^n$$

به ازاء مقادیر صحیح $n>2$ جواب ندارد . قضیهٔ بسیارجالبی است و بنظر می‌رسد که درست هم باشد اما تاکنون اثبات آن انجام نگرفته است . با استفاده از یك ماشین الکترونی توانسته‌اند صحت حکم قضیه را برای مقادیر کوچکتر از ۲۰۰۰ محقق کنند. ممکن است که با تکمیل ماشینهای محاسبهٔ الکترونی بتوان قضیه را برای مقادیر دیگری از n تحقیق کرد اما آنچه لازم است و باید انجام گیرد که از عهدهٔ ماشینهای الکترونی خارج بوده و فقط بااستفاده از یك صفحهٔ کاغذ و یك مداد میسر خواهد بود اثبات قضیه برای تمام حالات می‌باشد. فرما ادعا کرده است که چنین اثباتی را می‌دانسته است. طی سالها ، ریاضیدانان زیادی کوشیده‌اند که این اثبات را بیابند عده‌ای از آنها بدون آنکه نسبت به فرما سوءظنی داشته باشند معتقد شده‌اند که وی در اثبات ادعائی خودش دوچارلغزش شده است . هر چند از همه این کوششها نتیجهٔ مطلوب عاید نشده اما نتایج جالب دیگری بدست آمده است. مهمترین ثمرهٔ این مساعی پیدایش شاخه‌ای ازریاضیات به نام نظریهٔ اعداد جبری می‌باشد .

نظریهٔ اعداد بیشتر دربارهٔ عددهای اول بحث می‌کند و تقریباً می‌توان گفت که نظریهٔ اعداد عبارتست از بررسی دربارهٔ عدد های اول . می‌دانیم که عدد اول عددی است که جز بر خودش و بر یك بر عدد دیگر قابل قسمت نیست. (مانند ۵ ، ۱۱ ، ۱۹ و غیره) . عددی که اول نباشد برابر است با حاصل ضرب چند عدد اول (مثلا ۱۵ برابر است با حاصل ضرب ۵ در۳). عددهای اول عددهای خاصی هستند ومشمول ملاحظات زیادی می‌شوند . همین موضوع ما را به مطالعهٔ بیشتر آنها ترغیب می‌کند .

درحال حاضر معلومات دربارهٔ عددهای اول جزئی است، فقط مسلم است که سلسلهٔ عددهای اول نامحدود است: عدد اول بزرگتر از همهٔ عددهای اول وجودندارد . اما این عدد های اول کدامند ؟ چگونه بفهمیم که یك عدد دلخواه ، مثلا ۳۹۶۱۷ عدد اول هست یا غیر اول ؟ عددهای اول کوچکتر از یك عدد مفروض مثلا ۳۹۶۱۷ را چگونه باید بیابیم ؟ فاصله های بین عددهای اول متوالی چگونه قرار گرفته‌اند؟ هیچیك ازپرسشهای بالا پاسخ ندارد .

برای تشخیص اینکه عددی اول هست یا نـه ، فقط یك طریق موجود است ؛ آن عدد را بر عددهای اول کوچکتر از جذر خود به ترتیب تقسیم کنند؛ تقسیم بر عددهای بزرگتر از جذر عدد مفروض لازم نیست ، زیرا خارج قسمت تقسیم یك عدد n بر عدد بزرگتر از $\sqrt{N}$ از $\sqrt{N}$ کوچکتر بوده و این عدد در تقسیمهای قبلی آزمایش شده است.

هنوز نتوانسته‌اند فرمولی تعیین کنند که از روی آن همهٔ عدد های اول را بدست آورند ، یا لااقل فرمولی پیدا کنند که غیر از عددهای اول عدد دیگری در آن صدق نکند . فرما گمان برده که چنین فرمولی را یافته اما این بار دوچار اشتباه شده است . فرمولی که وی ارائه داده عمومیت ندارد و عبارتست از .

$$x = 2^{2^n} + 1$$

هر عدد x که ازاین فرمول بدست آید **عدد فرما** نامیده می‌شود. عددهای فرما به‌ازاء مقادیر ۴ و۳ و۲ و۱ و ۰ $n=$ به‌ترتیب عبارتند از ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷و۶۵۵۳۷ که همهٔ آنها اول هستند . اما به‌ازاء $n=5$ داریم ۲۹۷ ۹۶۷ ۲۹۴ ۴ $F_5=$ که برابر است با حاصل ضرب ۶۴۱ در ۶۷۰۰۴۱۷ . به‌ازاء مقادیر $n>5$ عدد فرما بسیار بزرگ می‌شود. مسلم شده‌است که بعضی از عددهای فرما غیر اول هستند و معلوم نیست وقتی n بزرگ‌شودچه وضعی پیش می‌آید .

مرسن (Mersenne) دوست قدیمی فرما که یکی از ریاضیدانان آماتور قرن هفدهم بحساب می‌آید عددهای به شکل $2^k - 1$ را مورد مطالعه قرارداد . در بارهٔ این اعدادهم که به **عدد های مرسن** معروف هستند اطلاعات زیادی در اختیار نیست . یك عدد مرسن ممکن است که عدد اول باشد . به ازاء مقادیر۷ و ۵ و۳ و۲ $k=$ عدد مرسن $M=2^k-1$ به ترتیب برابر می‌شودبا ۱۲۷ و ۳۱ و ۷ و ۳ $=M$ که همه اول هستند . اگر k زوج بوده وبزرگتر از ۲ باشد مسلماً M غیر اول است زیرا.

$$M = 2^{2j} - 1 = (2^j + 1)(2^j - 1)$$

بطورکلی اگر k اول نباشد M هم اول نخواهدبود. اما به‌ازاء جمیع مقادیر اول k هم عدد M اول نیست :

$$M = 2^{11} - 1 = 23 \times 89$$

این سؤال پیش آمده است که اگر k اول بوده و خود یکی از عددهای مرسن باشد در این صورت عدد M نظیرآن هم اول خواهد بود ؟ دیدیم که عددهای ۳ و ۷ و ۳۱ و ۱۲۷ اول هستند . عددهای :

$$2^{127} - 1 \text{ و } 2^{31} - 1 \text{ و } 2^{7} - 1 \text{ و } 2^{3} - 1$$

نیز همه اول هستند. عدد $2^{11} - 1$ غیر اول است اما عدد بعد از آن یعنی $2^{13} - 1 = 8191$ اول است. آیا عدد $2^{8191} - 1$ نیز اول است ؟ این عدد به اندازه‌ای بزرگ است که بررسی آن معوق مانده بود تا اینکه بالاخره به‌کمك یك ماشین محاسبهٔ الکترونی توانستند معلوم کنند که این عدد اول نیست.

به موضوع عددهای فرما برگردیم. بعد از سال ۱۹۵۴ معلوم شده است که ، هیچیك از عددهای F_n محصور بین F_4 و F_{12} اول نیستند . بعداز F_{12} هم بعضی از آنها را غیراول یافته‌اند . بعضیها در صدد بر آمدند که اگر به ازاء $n>4$ عدد F_n اولی وجود دارد تشخیص دهند . عـدد مرسن $M=2^{8191}-1$ با عدد های متوالی خود فرق داشت ونسبت به $F_{13}=2^{8191}+1$ هم چنین گمانی می‌رفت اما بررسی آن عملی نبود تا اینکه در سال ۱۹۶۰ **ژ. ا. پاکسن** بعد از شش ساعت محاسبهٔ بوسیلهٔ ماشین IBM ۷۰۹۰ محقق کردکه F_{13} هم اول نیست . عدد غیراول دیگری به لیست عـددهای غیر اول فرما اضافه شد و همچنین این تصور که بین عددهای فرما و عدد های مرسن وجه تشابهی وجود دارد باطل از کار در آمد .

در بارهٔ عدد های مرسن این سؤال پیش آمد که اگر $M_k=2^k-1$ اول باشد آیـا عدد M_k+100 نیز اول خواهد بود ؟ این ادعا برای همهٔ عددهای مرسن مربوط بـه مقادیر $k<19$ صحت دارد . اما بـه ازاء مقادیر $k>19$ نمونه‌های زیادی یافته‌اند که این ادعا را رد می‌کند . اما نتوانسته‌اند همهٔ اعـداد بـه شکل M_k+100 را به ازاء $k>19$ مورد بررسی قرار دهند .

مشکل بزرگ مربوط به اعداد مرسن ، مشکلتر از آن مربوط به اعداد فرما ، بزرگ شدن سریع این اعداد است . مثلا F_{10} عددی است ۳۰۹ رقمی ، و دربارهٔ F_{36} **ادوارد لوکاس** گفته است که نوارکاغذی که این عدد روی‌آن نوشته شده باشدمی‌تواند تمام دور زمین راپپوشاند. **و . و . روزبال** در اثر خود دربارهٔ F_{73} نوشته است که اگر بخواهند این‌عدد

را با نمونهٔ حروف این کتاب (اثروی) چاپ کنند کتابهای حاصل چنان حجمی بوجود می‌آورد که همهٔ کتابخانه های دنیا مجموعاً چنان گنجایشی را نخواهند داشت. موضوع عجیب و خارق‌العاده کشف یکی از عاملهای عدد F_{1945} است که بزرگی آن قابل توصیف نیست. این عامل عبارتست از $5\times 2^{1947}+1$ و این خود رکورد جهانی است (تا ۱۹۶۱).

در این جا بی مناسبت نیست که به‌چگونگی نفوذ و پیشرفت در قلمرو مهیب این اعداد اشاره‌ای بشود. حکم «۱۲ با ۵ به‌مدولو[1] ۷ همنهشت[2] هست» که به‌صورت «$12\equiv 5 \pmod{7}$» نوشته می‌شود بـه این معنی است که اگر ۱۲ و ۵ را بر ۷ تقسیم کنند در هر دو حال یك باقیمانده بدست می‌آید. و همچنین $31\equiv 1 \pmod{3}$ یا $31\equiv 10 \pmod{3}$.

دربسیاری از عملیات حسابی، همنهشتی[3] همان خواص تساوی را دارد. ثابت می‌شود که می‌توان طرفین یك همنهشتی را در یك عدد ضرب کرد، طرفین یك همنهشتی را می‌توان مجذور کرد. مثلا از همنهشتی $4\equiv 1 \pmod{3}$ همنهشتیهای $20\equiv 5 \pmod{3}$ و $16\equiv 1 \pmod{3}$ نتیجه می‌شود. اهمیت همنهشتی در حساب از دو مثال زیر واضح می‌شود:

۱) هر مربع فرد به مدولو ۸ همنهشت با ۱ است. زیرا هر عدد فرد به مدولو ۸ با یکی از عددهای ۱، ۳، ۵ یا ۷ همنهشت می‌باشد. از مجذور کردن طرفین این همنهشتی نتیجه می‌شود که مربع ع د فرد به مدولو ۸ همنهشت است با یکی ازعددهای ۱، ۹، ۲۵ یا ۴۹. اما هریك از این عددها به مدولو ۸ همنهشت با ۱ هستند و حکم ثابت است.

۲) باقیماندهٔ تقسیم عدد 3^{155} بر ۷ چه عددی است؟

حل:

$$3^2=27\equiv -1 \pmod{7}$$

$$(3^2)^{33}=3^{99}\equiv(-1)^{33}=-1 \pmod{7}$$

$$3(3^{99})=3^{155}=3(-1)\equiv -3\equiv 4 \pmod{7}$$

شاید تعیین باقیماندهٔ تقسیم 3^{155} بر ۷ اهمیتی نداشته باشد اما عدد 3^{155} عددی است ۴۸ رقمی وملاحظه می‌شود که طریق بالاتا چه حد عمل را ساده ساخته است. استفادهٔ ازهمین روش بررسیهای بیشتری را در بارهٔ عددهایی از نوع عددهای فرما میسر ساخته است.

دراثر کوششهای مداومی که بین سالهای ۱۸۸۰ و ۱۹۲۵ انجام گرفت توانستند که مقسوم‌علیه‌های ۱۰ عدداز عددهای فرما محصور بین F_5 و F_{23} راتعیین کنند. بعد از آن دیگر تا ۲۸ سال پیشرفتی حاصل نشد. آنگاه، **جان. ل. سلفریج** بـه کمك SWAC ماشین محاسبهٔ الکترونی جدید مقسوم علیه‌های دو عدد دیگر از آنها را بدست آورد. در سالهای ۱۹۵۶ و ۱۹۵۷ **سلفریج ورافائل م. رابنسن** همان ماشین محاسبه را بکاربردند و مقسوم علیه‌های ۲۰ عدد دیگر از عددهای فرما را یافتند، که بسیاری ازآنها بزرگترین عددهای فرما بودکه تا آن زمان شناخته بودند.

مقسوم علیه‌های بعضی‌ازعددهای‌فوق‌العاده بزرگ فرمارا پیدا کرده‌اند اما برای به‌دوعدد نسبتاً کوچك F_7 و F_8 تحقیقهای زیاد و طولانی لازم شد؛ بعد از ۵۰ سال کوشش و تلاش تازه‌معلوم ساختند که این دو عدد اول نیستند. عدد F_7 دارای ۳۹ رقم است اما هیچیك از مقسوم علیه های آن شناخته نشده است، فقط این را می‌دانند که آنها حداقل ده رقمی هستند. هیچیك‌ازعددهای F_7 و F_8 مقسوم‌علیهی کوچکتر از 2^{32} یعنی ۴ ۲۹۴ ۹۶۷ ۲۹۶ ندارد.

نشریهٔ علمی

(دبیرستان درخشانی بنیس)

اولین شمارهٔ این نشریه که به‌صورت پلی‌کپی تهیه شده شامل مطالب زیر می‌باشد.

مسائل حل نشدهٔ ریاضی- بحثی درتاریخ فیزیك وشیمی معاصر- مسائل جدید ریاضی-لغات واصطلاحات علمی وترجمهٔ فارسی آنها - شگفتیهای بدن‌شما- تمرینات دیکتهٔ زبان‌انگلیسی سؤالات امتحانی نمونه از دیکتهٔ انگلیسی.

سرپرستی‌این نشریه راآقای **محمدعلی ترابی** بعهده دارد.

کتابها و نشریه‌هایی‌که به ادارهٔ مجله واصل شده است.

۱- Modulo ۲- Congru ۳- Congruence

راههای مختلف اثبات

قضیهٔ پاسکال

تنظیم‌از: KALDY TAN دانشسرای عالی فوکین ، فوچو، چین

ترجمهٔ : یعقوب گنجی

دانشجوی دانشسرای عالی

مجلهٔ : Mathematics Magazine

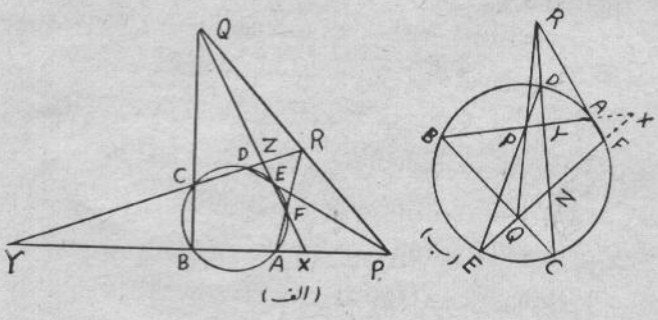
این مقاله براساس درسهائی است که نویسنده درچندسال اخیر به دانشجویان دانشسرای عالی فوکین می‌داده است . اما دراینجا بااصطلاحات واضافات چندی بیان شده‌است. بایددانست که تدریس این مطلب به خاطر آن بوده است که ارزش زیادی درتربیت معلمین آینـدهٔ هندسه ازجهت روشهای مختلف حـل مسائل عالی‌ومقدماتی هندسی دارد وعلاوه برآن مطالعهٔ‌آن‌برای سایرخوانندگان نیزمفید و جالب می‌باشد . دراینجا به اثبات حالت خاص‌قضیهٔ پاسکال ازراههای هندسی خالص‌اکتفا می‌شود. چون روشهای تحلیلی را به سادگی می‌توان درکتابهای درسی هندسهٔ تحلیلی پیداکرد.

قضیهٔ پاسکال ([که درحالت‌کلی به صورت **درهرشش ضلعی محـاط در یک مقطع مخـروطی نقاط تقاطع اضلاع مقابل بریك استقامتند** مترجم]) بیان مـی‌شود بسیارمهم بوده وقضیهٔ اصلی هندسهٔ تصویری (یا هندسهٔ ترکیبی جدیدکه هندسهٔ مکان نیزگفته شده‌است) می‌باشد. این قضیه‌را **بلزپاسکال** درسال ۱۶۳۹ در۱۶ سالگی کشف‌کرده است که دراینجا فقط حالت خاصی ازآن ([یعنی وقتی مقطع مخروطی دایره باشد]) موردبحث واقع می‌شود.

قضیه ـ درهرشش ضلعی محاطی نقاط تقاطع اضلاع مقابل بریك استقامتند .

برهان ـ فرض می‌کنیم کـه شش ضلعی ABCDEF محاطی بوده و نقاط تقاطع اضلاع مقابل AB و DE ، BC و EF و CD و FA به‌ترتیب P ، Q و R باشند.می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که این‌سه نقطه بریك استقامتند .

۱ـ با استفاده از نظریهٔ موربات ـ سه ضلـع غیر متوالی AB و CD و EF را امتداد می‌دهیم تاازتقاطع‌آنها مثلث XYZ حاصل شود. (شکلهای الف و ب) سه ضلع دیگر شش ضلعی‌یعنی BC و DE و FA رابه‌ترتیب به‌عنوان‌موربها انتخاب می‌کنیم . در این صورت بنا بـه **قضیهٔ منلائـوس**



می‌توان نوشت :

$$\frac{\overline{QZ}}{\overline{QX}}\cdot\frac{\overline{BX}}{\overline{BY}}\cdot\frac{\overline{CY}}{\overline{CZ}}=1$$

و

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{DY}}{\overline{DZ}}\cdot\frac{\overline{EZ}}{\overline{EX}}=1$$

و

$$\frac{\overline{RY}}{\overline{RZ}}\cdot\frac{\overline{FZ}}{\overline{FX}}\cdot\frac{\overline{AX}}{\overline{AY}}=1$$

که چون این سه رابطه راعضوبه عضو درهم ضرب‌کنیم،داریم :

$$\frac{\overline{QZ}}{\overline{QX}}\cdot\frac{\overline{PX}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{RY}}{\overline{RZ}}\cdot\frac{\overline{AX}\cdot\overline{BX}}{\overline{EX}\cdot\overline{FX}}\cdot\frac{\overline{CY}\cdot\overline{DY}}{\overline{AY}\cdot\overline{BY}}\cdot\frac{\overline{EZ}\cdot\overline{FZ}}{\overline{CZ}\cdot\overline{DZ}}=1 \qquad (1)$$

اما داریم :

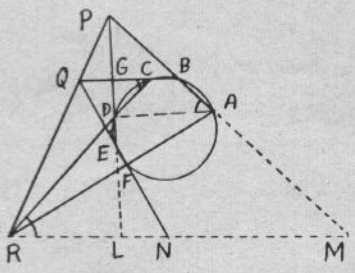
$$\overline{EZ}\cdot\overline{FZ}=\overline{CZ}\cdot\overline{DZ} \text{ و } \overline{CY}\cdot\overline{DY}=\overline{AY}\cdot\overline{BY} \text{ و } \overline{AX}\cdot\overline{BX}=\overline{EX}\cdot\overline{FX}$$

که ازآنجا رابطهٔ (۱) به‌صورت زیردرمی‌آید :

$$\frac{\overline{QZ}}{\overline{QX}}\cdot\frac{\overline{PX}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{RY}}{\overline{RZ}}=1$$

وبنا به‌عکس قضیهٔ منلائوس سه نقطهٔ P ، Q ، R بریك امتداد قراردارندوحکم ثابت است .

۲ـ با استفاده از قضیهٔ خطوط متقارب ـ از R خطی به‌موازات BC می‌کشیم تا امتدادهای DE ، EF و AB



را به ترتیب در L ، N و M قطع کند . از D به A و M وصل کرده و نقطهٔ تقاطع BC و DE را G می‌نامیم . از برابری زوایای DAB و DRM که هردو با DCG مساویند نتیجه می‌شود که چهارضلعی DAMR محاطی بوده و از آنجا

$$\text{زاویه } DMR = \text{زاویه } DAR \quad \text{و یا} \quad \text{زاویه } DMR = \text{زاویه } DEQ$$

یعنی چهارضلعی DMNE نیز محاطی بوده و بنابراین:

$$LE \cdot LD = LN \cdot LM$$

که با توجه به این رابطه و تشابه مثلثهای EGQ و ELN می‌توان نوشت :

$$(۲) \quad \frac{GE}{GQ} = \frac{LE}{LN} = \frac{LM}{LD}$$

و نیز بنا به رابطهٔ $GC \cdot GB = GD \cdot GE$ و تشابه مثلثهای GCD و LRD :

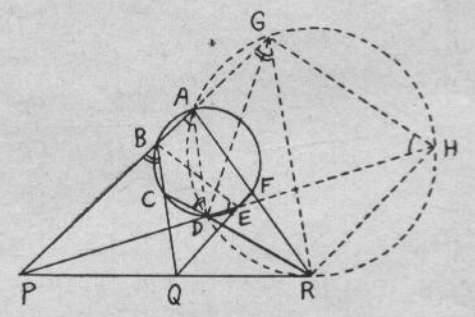
$$(۳) \quad \frac{LD}{LR} = \frac{GD}{GC} = \frac{GB}{GE}$$

از روابط ۲ و ۳ داریم :

$$\frac{GE}{GQ} \cdot \frac{GB}{GE} = \frac{LM}{LD} \cdot \frac{LD}{LR} \Longrightarrow \frac{GB}{GQ} = \frac{LM}{LR}$$

یعنی خطوط MB ، LG و RQ در P متقاربند یا به‌عبارت دیگر P ، Q و R بر یک استقامتند .

۳ـ با استفاده از اشکال متجانس ـ دایرهٔ محیطی مثلث ADR امتدادهای PA و PE را به ترتیب در G و H



قطع می‌کند. اگر اقطار AD و BE را رسم کرده مثلث GHR را ساخته و از G به D وصل کنیم با توجه به خواص چهارضلعیهای محاطی داریم :

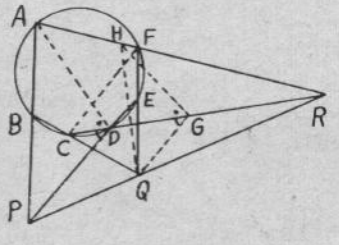
$$\text{زاویه } DEB = \text{زاویه } DAB = \text{زاویه } DHG \Longrightarrow BE \parallel GH$$

$$\text{زاویه } DEQ = \text{زاویه } DAR = \text{زاویه } DHR \Longrightarrow EQ \parallel HR$$

$$\text{زاویه } PBQ = \text{زاویه } CDA = \text{زاویه } AGR \Longrightarrow QB \parallel RG$$

یعنی اضلاع دو مثلث متشابه BEQ و GHR نظیر به نظیر متوازیند و بنابراین دو مثلث مجانس هم بوده و از آنجا BG و EH و QR در P متقاربند و حکم ثابت است .

۴ ـ بازهم استفاده از تجانس ـ از Q خطی موازی PD می‌کشیم تا DR را در G قطع کند. از G نیز خطی موازی DA می‌کشیم تا AR را در H قطع نماید . و از H به Q وصل کرده قطر CF را نیز می‌کشیم. زوایای CGQ و CFQ که هردو با CDP برابرند.

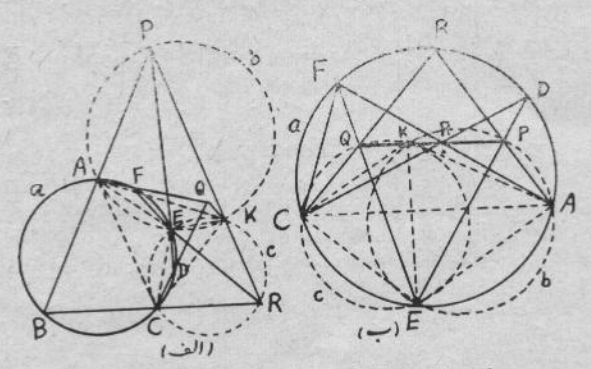


مساوی می‌شوند پس چهارضلعی CQGF محاطی است. همچنین زوایای HGC و HFC که هردو با ADC برابرند مساوی هستند. چهارضلعی CQGH نیز محاطی است. از آنجا پنج ضلعی CQGFH محاطی شده و در نتیجه زوایای GHQ و DAB که هردو با GCD برابرند مساوی می‌شوند. یعنی اضلاع دو مثلث متشابه QGH و PDA نظیر به نظیر موازیند پس دو مثلث متجانس شده و AH و DG و PQ در R متقاربند و قضیه ثابت است .

۵ ـ با استفاده از خواص زوایای محاط در دایره

ابتدا رابطهٔ زیر را ثابت می‌کنیم :

$$(۴) \quad \text{زاویه } ARC = \text{زاویه } APE + \text{زاویه } EQC$$



در شکل الف داریم :

$$\text{زاویه } APE = \frac{۱}{۲}(\widehat{BCD} - \widehat{EFA})$$

$$\text{زاویه } EQC = \frac{۱}{۲}(\widehat{FAB} - \widehat{CDE})$$

$$\text{زاویه } ARC = \frac{۱}{۲}(\widehat{ABC} - \widehat{DEF})$$

وازآنجا :

$$\text{ز}APE+\text{ز}EQC=$$

$$\frac{1}{2}(\widehat{BCD}-\widehat{CDE})+\frac{1}{2}(\widehat{FAB}-\widehat{EFA})$$

$$=\frac{1}{2}(\widehat{BC}-\widehat{DE})+\frac{1}{2}(\widehat{AB}-\widehat{EF})$$

$$=\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{BC})-\frac{1}{2}(\widehat{DE}+\widehat{EF})$$

$$=\frac{1}{2}(\widehat{ABC}-\widehat{DEF})=\text{ز}ARC$$

ودرشکل ب داریم :

$$\text{ز}APE=\frac{1}{2}(\widehat{AE}+\widehat{DB})$$

$$\text{ز}EQC=\frac{1}{2}(\widehat{EC}+\widehat{BF})$$ و

$$\text{ز}ARC=\frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{DF})$$

وازآنجا :

$$\text{ز}APE+\text{ز}EQC=\frac{1}{2}(\widehat{AE}+\widehat{EC})+$$

$$+\frac{1}{2}(\widehat{DB}+\widehat{BF})=\frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{DF})=\text{ز}ARC$$

حال اگردوایر محیطی مثلثهای APE و EQC رارسم کرده و آنها را به ترتیب O' و O'' نامیده و نقطهٔ تقاطع دومشان رابا K نمایش دهیم ونیزمثلث ACK را رسم نموده ازE به رؤوس آن وصل کرده و به‌منظوراختصارازوایای جهت‌دار استفاده کنیم درهر دو شکل داریم :

$$\text{ز}PKE=\text{ز}BAE=\text{ز}BCE=\text{۲قائمه}-\text{ز}EKQ$$

یعنی دوزاویهٔ(جهت‌دار) EKQ و PKE مکمل‌اند ودرنتیجه نقاط P ، K و Q بریك استقامتند ،

واما دردوایر O' و O'' به ترتیب داریم :

$$\text{ز}EQC=\text{ز}EKC \text{ و } \text{ز}APE=\text{ز}AKE$$

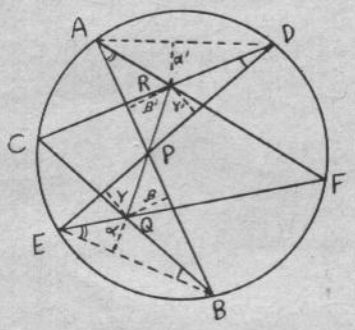
که از جمع کردن آنها و با توجه به رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود $\text{ز}ARC=\text{ز}AKC$ یعنی چهارضلعی ARKC محاطی بوده و $\text{ز}RKA=\text{ز}RCA$

واما :

$$\text{ز}RCA=\text{ز}DCA=\text{ز}DEA=\text{ز}PEA=\text{ز}PKA$$

درنتیجه $\text{ز}RKA=\text{ز}PKA$ یعنی نقاط P ، K و R بریك استقامتند. بنابراین چهار نقطهٔ P ، K ، Q و R بریك استقامتند وقضیه ثابت است .

۶ـ استفاده ازمکان هندسی ـ از Q عمودهائی بر BE ، AB و DE فرودآورده طولهای آنهارا به ترتیب با α ، β و γ نمایش می‌دهیم . همچنین از R عمودهائی برAD AB و DE فرودآورده طولهایشان رابه ترتیب α' ، β' و γ' می نامیم .



باتوجه بداینکه :

$$\text{ز}CBA=\text{ز}CDA$$

و $\text{ز}EBC=\text{ز}EDC$

نتیجه می‌شود :

$$\frac{\alpha}{\gamma'}=\frac{QB}{RD}=\frac{\beta}{\alpha'}$$

وبه طریق مشابه داریم :

$$\frac{\alpha}{\beta'}=\frac{QE}{RA}=\frac{\gamma}{\alpha'}$$

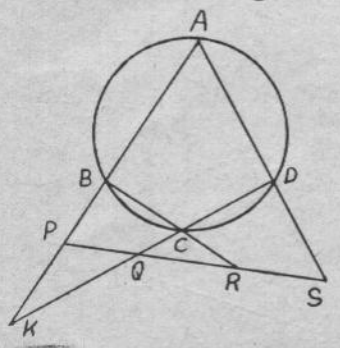
ازاین دو رابطه نتیجه می گیریم :

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\beta'}{\gamma'} \text{ ویا } \alpha\alpha'=\beta\gamma'=\beta'\gamma$$

اما می‌دانیم که مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصلشان‌از دوخط متقاطع مقدارثابتی باشد دوخط متقاطع است که برنقطهٔ تقاطع دوخط مفروض می گذرند . بنابراین با توجه به رابطهٔ اخیر P ، Q و R بریك استقامت واقعند .

۷ ـ استفاده از خواص چهارضلعی محاطی

لم ـ هرگاه خط راستی چهارضلع AB ، BC ، CD DA ازیك چهارضلعی محاطی را به‌ترتیب درنقاط P ، R Q و S قطع کند رابطهٔ زیر برقرار است :



$$\frac{\overline{PR}\cdot\overline{PS}}{\overline{QR}\cdot\overline{QS}}=\frac{[P]}{[Q]}$$

که درآن [P] و [Q] به ترتیب قوتهای نقاط P و Q نسبت‌به دایرهٔ محیطی چهارضلعی مزبورند .

اثبات ـ اگر نقطهٔ تقاطع اضلاع AB و CD را K نامیده و خطوط BCR و ADS را به عنوان موربهای مثلث

دنباله پائین صفحهٔ ۳۲۵

اثبات چند نامساوی مهم

موارد استعمال در اثبات نامساویهای دیگر

تنظیم از: **افراسیاب ملکی**

با استفاده از منابع خارجی

۱. نامساوی کوشی - شوارز (Cauchy - Schwarz):

هرگاه a_1 و a_2 و ... a_n و b_1 و b_2 و ... b_n مقادیر حقیقی دلخواهی باشند همواره نامساوی زیر برقرار است:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

که با استفاده از علامت مجموع چنین نوشته می‌شود:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

اثبات ـ می‌دانیم که:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2\geqslant 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2x^2+2a_kb_kx+b_k^2)\geqslant 0$$

به جای k مقادیر از ۱ تا n قرار داده و طرفین نامساویهای حاصل را باهم جمع می‌کنیم:

$$a_1^2x^2+2a_1b_1x+b_1^2\geqslant 0$$

$$a_2^2x^2+2a_2b_2x+b_2^2\geqslant 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\geqslant 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\geqslant 0$$

$$a_n^2x^2+2a_nb_nx+b_n^2\geqslant 0$$

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

فرض می‌کنیم:

$$A=\sum_{k=1}^{n}a_k^2 \quad و \quad B=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k \quad و \quad C=\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

بنابراین:

$$Ax^2+2Bx+C\geqslant 0$$

چون سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم اخیر به ازاء جمیع مقادیر x غیر منفی است. بنابراین مبین آن همواره غیر مثبت می‌باشد:

$$\Delta=4B^2-4AC\leqslant 0 \implies B^2\leqslant AC$$

یعنی:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

به سهولت مشاهده می‌شود که درحالت:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_k}{b_k}$$

نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

۲. نامساوی مربوط به واسطهٔ هندسی و واسطهٔ عددی چند عدد:

هرگاه x_1 و x_2 و ... x_n اعداد مثبتی باشند نامساوی زیر همواره برقرار است:

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

طرف اول نامساوی واسطهٔ هندسی و طرف دوم واسطهٔ عددی اعداد x_1 و x_2 و ... x_n است. ازاین نامساوی بر می‌آید که واسطهٔ هندسی چندعدد هیچگاه از واسطهٔ عددی آنها بیشتر نخواهد بود.

برای اثبات این نامساوی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف ـ اگر $a_1>1$ و $0<a_2<1$ باشد نتیجه می‌شود:

$$(A)\quad a_1+a_2>a_1\cdot a_2+1$$

زیرا از ضرب طرفین دو نامساوی

$$a_1-1>0 \quad و \quad 1-a_2>0$$

در یکدیگر نامساوی (A) حاصل می‌شود.

ب ـ هرگاه a_1 و a_2 و ... a_n اعداد مثبتی باشند که حاصل ضرب آنها برابر یك باشد مجموع آنها از n کمتر نخواهدبود، یعنی بافرض $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$ باید ثابت کرد

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$$

برای اثبات درستی مطلب اخیر دوحالت در نظر می‌گیریم : حالت‌اول تمام‌اعداد a_1 و a_2 و ... a_n هریك برابرواحد باشنددر این صورت $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ بوده و تساوی برقرار است . حالت دوم فرض کنیم اعداد a_1 و ... a_n مساوی نیستند دراین‌حالت‌از روش استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم؛ به‌سادگی مشاهده می‌گردد که اگر $a_1 \cdot a_2 = 1$ باشد $a_1 + a_2 \geqslant 2$ می‌باشد زیرا :

$$(a_1 + a_2)^2 = 4a_1a_2 + (a_1 - a_2)^2$$

و در نتیجه : $a_1 + a_2 \geqslant 2$

اکنون فرض‌می‌کنیم :

$$\begin{cases} a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1 \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n > n \end{cases}$$

و $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot a_{n+1} = 1$

باید ثابت کنیم که $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geqslant n + 1$ در حاصل‌ضرب $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot a_{n+1} = 1$ همهٔ عوامل از یك بزرگتریاازیك‌کوچکتر نیستند، لااقل‌یکی‌ازعوامل‌ازیك‌بزرگتر ویکی‌ازآنها از یك‌کوچکتر است: برای سهولت فرض می‌کنیم $a_1 > 1$ و $a_2 < 1$ باشد . (این فرض مجاز است زیراعوامل ضرب بریکدیگر رجحانی‌ندارند) در این مورد نامساوی(A) بدست می‌آید.

فرض می‌کنیم $b = a_1 \cdot a_2$ و چون در حاصل‌ضرب منظور کنیم می‌شود : $b \cdot a_3 \cdots a_n \cdot a_{n+1} = 1$

این حاصل‌ضرب دارای n عامل است بنابراین:

$$b + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geqslant n$$

از جمع طرفین این نامساوی با طرفین نامساوی (A) نتیجه می‌شود $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geqslant n + 1$ بنابراین‌ثابت شد که اگرنامساوی برای n عامل درست باشدبرای $(n+1)$ عامل نیز درست است و چون در مورد $n = 2$ هم نامساوی برقرار است پس‌در هرحال برقرار خواهد بود. حال می‌پردازیم به اثبات نا مساوی اصلی :

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = a$$

$$\Longrightarrow \frac{x_1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{x_2}{\sqrt[n]{a}} \cdots \frac{x_n}{\sqrt[n]{a}} = 1$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sqrt[n]{a}} \geqslant n$$

$$\Longrightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

مورد استعمال

چند مسئله دربارهٔ نامساویها

مسئلهٔ ۱ـ هرگاه x_1 و x_2 و ... x_n اعداد مثبت‌باشند و P عدد صحیح مخالف صفر باشد و فرض‌کنیم :

$$M_P = \left(\frac{x_1^P + \cdots + x_n^P}{n} \right)^{\frac{1}{P}}$$

اولا ثابت کنید اگر $P > 0$ باشد $M_P < M_{2P}$.

ثانیاً اگر $q < 0 < P$ باشد ثابت کنید :

$$M_q < \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} < M_P$$

(P و q عدد صحیح و x_1 و ... x_n غیر مساوی فرض شده‌اند).

مسئلهٔ ۲ـ اگر

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8 \quad \text{و} \quad a > 0 \quad \text{و} \quad b > 0 \quad \text{و} \quad c > 0$$

باشد ثابت کنید :

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant \frac{64}{3}$$

مسئلهٔ ۳ـ اگر

$$abc = 8 \quad \text{و} \quad a > 0 \quad \text{و} \quad b > 0 \quad \text{و} \quad c > 0$$

باشند ثابت‌کنید:

$$a + b + c \geqslant 6 \quad \text{و} \quad a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 24$$

و $ab + ac + bc \geqslant 12$

مسئلهٔ ۴ـ اگر a_1 و a_2 و ... a_n اعدادحقیقی متحدالعلامت بوده و هریك از (-1) بزرگتر باشند.

ثابت کنید :

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + \cdots + a_n$$

مسئلهٔ ۵ـ اگر $x > -1$ و n عدد صحیح مثبت‌باشد ثابت کنید : $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ «نامساوی برنولی»

مسئلهٔ ۶ـ بافرض $n > 1$ و صحیح بودن n ثابت‌کنید:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{و} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$$

مسئلهٔ ۷ـ دو عدد ثابت a و b مفروضند. ثابت‌کنید

چنانچه برای هر عدد دلخواه مثبت ε نا مساوی :

$$a-\varepsilon<b<a+\varepsilon$$

برقرار باشد به ناچار، $a=b$ است .

مسئلهٔ ۸ـ ثابت کنید :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4\right)$$

مسئلهٔ ۹ـ فرض کنیم a و b اعداد صحیح و مثبت باشند ثابت کنید $\sqrt{2}$ همیشه بین دوکسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{a+2b}{a+b}$ قرار دارد و معلوم کنید کدام کسر به $\sqrt{2}$ نزدیکتر است .

حل مسائل

حل مسئلهٔ ۱ـ

نامساوی کوشی ـ شوارز را می‌نویسیم :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

در این نامساوی فرض می‌کنیم :

$$a_k=x_k^P \text{ و } b_1=b_2=\dots=b_n=1$$

یعنی : $a_1=x_1^P$ و $a_2=x_2^P$

الی آخر در نتیجه نامساوی زیر حاصل می‌گردد:

$$(x_1^P+x_2^P+\dots+x_n^P)^2<(x_1^{2P}+x_2^{2P}+\dots+x_n^{2P})(1+1+\dots+1)$$

$$(x_1^P+\dots+x_n^P)^2<n\cdot(x_1^{2P}+x_2^{2P}+\dots+x_n^{2P})$$

$$[(x_1^P+\dots+x_n^P)^2]^{\frac{1}{2P}}<n^{\frac{1}{2P}}\cdot(x_1^{2P}+\dots+x_n^{2P})^{\frac{1}{2P}}=n^{\frac{1}{2P}}\cdot n^{\frac{1}{2P}}\left(\frac{x_1^{2P}+\dots+x_n^{2P}}{n}\right)^{\frac{1}{2P}}$$

$$\left(\frac{x_1^P+\dots+x_n^P}{n}\right)^{\frac{1}{P}}<\left(\frac{x_1^{2P}+\dots+x_n^{2P}}{n}\right)^{\frac{1}{2P}}$$

نامساوی مربوط به واسطهٔ عددی و هندسی را می‌نویسیم :

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \qquad (1)$$

دراین نامساوی $a_k=x_k^P$ قرار می‌دهیم :

$$\sqrt[n]{x_1^P\cdot x_2^P\cdots x_n^P}<\frac{x_1^P+x_2^P+\dots+x_n^P}{n}$$

و با توجه به مثبت بودن P نتیجه می‌گردد:

$$(A)\qquad \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}<\left(\frac{x_1^P+\dots+x_n^P}{n}\right)^{\frac{1}{P}}$$

همچنین در نامساوی (۱) ، $a_k=x_k^q$ قرار داده و بادرنظر گرفتن $q<0$ نامساوی :

$$(B)\qquad \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}>\left(\frac{x_1^q+\dots+x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

با ملاحظهٔ نامساویهای (A) و (B) حاصل می‌شود :

$$\left(\frac{x_1^q+x_2^q+\dots+x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}<\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}<\left(\frac{x_1^P+x_2^P+\dots+x_n^P}{n}\right)^{\frac{1}{P}}$$

(با توجه به مفروضات مسئله حالت تساوی برقرار نیست).

حل مسئلهٔ ۲ـ با استفاده از نامساوی $M_{2p}>M_P$ (مسئلهٔ قبل) با قرار دادن $p=2$ و $n=3$

و $x_1^2=a^2$ و $x_2^2=b^2$ و $x_3^2=c^2$

و اینکه a و b و c ممکن است مساوی‌باشند نتیجه می‌گردد:

$$\left(\frac{a^4+b^4+c^4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\geq\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a^4+b^4+c^4\geq\frac{64}{3}$$

حل مسئلهٔ ۳ـ در هر مورد از نامساوی مربوط به واسطهٔ عددی و هندسی استفاده می‌کنیم :

$$\frac{ab+ac+bc}{3}\geq\sqrt[3]{ab\cdot ac\cdot bc}=\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\sqrt[3]{64}=4$$

$$ab+ac+bc\geq 12$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{8}=2$$

$$a+b+c\geq 6$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot c^3}=abc=8$$

$$a^3+b^3+c^3\geq 24$$

حل مسئلهٔ ۴ـ ابتدا حالت $n=2$ را ثابت می‌کنیم:

$$(1+a_1)(1+a_2)=1+a_1+a_2+a_1a_2\geq 1+a_1+a_2$$

(چون $a_1a_2 \geqslant 0$ است) .

اکنون فرض می‌کنیم نامساوی برای حالت $n=n$ صحیح باشد، آنرا برای حالت $(n+1)$ اثبات می‌کنیم :

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqslant 1+a_1+\cdots+a_n$$

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1}) \geqslant 1+a_1+ +\cdots+a_n+a_{n+1}+a_{n+1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

با توجه به اینکه : $a_{n+1}(a_1+\cdots+a_n) \geqslant 0$

است : لذا:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n+1}) \geqslant 1+a_1+ +\cdots+a_{n+1}$$

پس بنا به اثبات از راه استقراء ریاضی نامساوی همواره صحیح است .

حل مسئلهٔ ۵ـ در مسئلهٔ قبل فرض می‌کنیم :

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=x$$

$$(1+x)(1+x)\cdots(1+x) > 1+x+\cdots+x$$

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

حل مسئلهٔ ۶ـ در نامساوی مسئلهٔ قبل ابتدا فرض می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+n\cdot\frac{1}{n}=2$$

در ثانی نامساوی واسطهٔ عددی و هندسی را بکار می‌بریم.

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$$

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

حل مسئلهٔ ۷ـ از نامساوی مفروض دو نامساوی :

$$a-b<\varepsilon \quad \text{و} \quad b-a<\varepsilon$$

نتیجه می‌شود که باید به ازاء هر مقدار $\varepsilon>0$ برقرار باشد. اگر $a>b$ باشد $a-b=\delta>0$ می‌گردد وچنانچه $\delta=\varepsilon$ بگیریم $a-b=\varepsilon$ خواهد بود وباتوجه به‌نامساوی :

$$a-b<\varepsilon$$

ممکن نیست همچنین اگر $b>a$ باشد نتیجه می‌شود

$$b-a=\varepsilon>0$$

و این نیز ممکن نیست پس باید $a=b$ باشد .

حل مسئلهٔ ۸ـ نامساوی کوشی ـ شوارز را بکار می‌بریم :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right)^4 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^2$$

فرض می‌کنیم : $x_k=a_kc_k$ و $y_k=b_k$

در نتیجه :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_kc_k\right)^4 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2c_k^2\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^2$$

از طرفی :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2c_k^2\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4\right)$$

و نتیجه می‌شود :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_kc_k\right)^4 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2c_k^2\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4\right)$$

حل مسئلهٔ ۹ـ برای کسر $\frac{a}{b}$ دو حالت:

$$\frac{a}{b}<\sqrt{2} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b}>\sqrt{2}$$

را در نظر می‌گیریم زیرا چون $\frac{a}{b}$ منطق است نمی‌تواند برابر $\sqrt{2}$ باشد.

(الف $\frac{a}{b}>\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}>2 \Rightarrow a^2>2b^2$

$$\Rightarrow a^2+2ab+b^2>2b^2+2ab+b^2$$

$$\Rightarrow (a+b)^2>2b(a+b)+b^2$$

$$\Rightarrow 1>\frac{2b}{a+b}+\frac{b^2}{(a+b)^2}$$

$$2>1+\frac{2b}{a+b}+\frac{b^2}{(a+b)^2}=\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}>\frac{a+2b}{a+b}\,\frac{a}{b}>\sqrt{2}>\frac{a+2b}{a+b}$$

چنانچه $\frac{a}{b}<\sqrt{2}$ باشد به طریق مشابه نتیجه می‌شود $\frac{a+2b}{a+b}<\sqrt{2}<\frac{a}{b}$ یعنی درهر حال $\sqrt{2}$ بین دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{a+2b}{a+b}$ قرار دارد. در هر دوحالت کسر $\frac{a+2b}{a+b}$ به $\sqrt{2}$ نزدیکتر می‌باشد. زیرا در حالت اول $\sqrt{2}-\frac{a+2b}{a+b}<\frac{a}{b}-\sqrt{2}$ و در حالت دوم : $\frac{a+2b}{a+b}-\sqrt{2}<\sqrt{2}-\frac{a}{b}$ است. دونامساوی اخیر با توجه به اینکه در حالت اول $\frac{a}{b}>\sqrt{2}$ و در حالت دوم $\frac{a}{b}<\sqrt{2}$ می‌باشد به سهولت اثبات می‌گردد.

نقاط متناظر مثلث و مثلث میانه‌ای آن

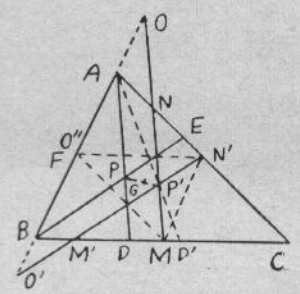
نوشتهٔ: D. MOODY BAILEY

مجلهٔ: Mathematics Magazine

ترجمهٔ: احمد شاهورانی

دانشجوی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

M، N′، O″ اوساط اضلاع BC، CA و AB از مثلث ABC می‌باشند. قطعات MN′ و MO″ و O″M به ترتیب با اضلاع AB، BC و AC از مثلث مفروض موازی و مساوی با نصف آنها هستند. مثلث ABC و مثلث میانه‌ای آن MN′O″ نسبت به مرکز ثقل مشترکشان G و به نسبت ۲ متجانس بوده و این مرکز، مرکز تشابه این دو مثلث مستقیماً متشابه می‌باشد.



نقطهٔ دلخواه P را درصفحهٔ مثلث ABC انتخاب کرده و از A، B و C به آن وصل نموده امتداد می‌دهیم تا اضلاع AB و AC و BC را به ترتیب در نقاط F، D و E قطع کند. اگر P′ نقطه‌ای از مثلث MN′O″ و مجانس P باشد شعاعهای MP′، N′P′ و O″P′ به ترتیب با شعاعهای AP و BP و CP موازی می‌باشند و قطعهٔ PP′ از G گذشته و داریم $PG = ۲GP'$.

MP′ را امتداد می‌دهیم تا CA و AB را به‌ترتیب در نقاط N و O قطع کند. اندازه‌های اضلاع BC، CA و AB از مثلث مفروض را به ترتیب a و b و c فرض می‌کنیم؛ نظر به‌اینکه AP و MN موازی هستند، می‌توان نوشت:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{DM}{MC} = \frac{DC - \frac{a}{۲}}{\frac{a}{۲}}$$

هر گاه در رابطهٔ فوق به جای DC مساوی آن:

$$\frac{a}{\frac{BD}{CD} + ۱}$$

را قرار دهیم رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{DM}{MC} = \frac{۱ - \frac{BD}{DC}}{۱ + \frac{BD}{DC}}$$

حال نسبت قطعه‌هائی که خط MNO روی اضلاع مثلث پدید می‌آورد معلومند یعنی داریم:

$$(۱) \quad \frac{DM}{MC} = ۱$$

$$(۲) \quad \frac{CN}{NA} = \frac{۱ - \frac{BD}{DC}}{۱ + \frac{BD}{DC}}$$

می‌توان نسبت $\frac{AO}{OB}$ را با استفاده از رابطهٔ منلائوس بدست آورد:

$$\frac{BM}{MC} \times \frac{CN}{NA} \times \frac{AO}{OB} = -۱$$

و از این نتیجه می‌گیریم:

$$(۳) \quad \frac{AO}{OB} = -\frac{۱ - \frac{BD}{DC}}{۱ + \frac{BD}{DC}}$$

N′P′ را امتداد می‌دهیم تا اضلاع AB و BC را به ترتیب در نقاط O′ و M′ قطع نماید. BE و M′N′ موازی بوده بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{EN'}{N'C} = \frac{EC - \frac{b}{۲}}{\frac{b}{۲}}$$

و هرگاه به جای EC مساوی آن $\frac{b}{\frac{AE}{EC}+1}$

را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{BM'}{M'C}=\frac{1-\frac{AE}{EC}}{1+\frac{AE}{EC}}$$

با استفاده از نسبتهای فوق و قضیهٔ منلائوس نسبت قطعاتی که بوسیلهٔ قطعه خط M'N'O' روی اضلاع مثلث ایجاد می‌شوند عبارت خواهند بود از:

$$(4)\quad \frac{BM'}{M'C}=\frac{1-\frac{AE}{EC}}{1+\frac{AE}{EC}}$$

$$(5)\quad \frac{CN'}{N'A}=1$$

$$(6)\quad \frac{AO'}{O'B}=-\frac{1+\frac{AE}{EC}}{1-\frac{AE}{EC}}$$

AD' از P' نقطهٔ تقاطع خطوط MNO و M'N'O' گذشته است: پس معلوم است که :

$$[1]\quad \frac{BD'}{D'C}=\frac{\frac{BO}{OA}-\frac{BO'}{O'A}}{\frac{CN}{MA}-\frac{CN'}{M'A}}$$

با استفاده از روابط (۳) ، (۶)، (۲) و (۵) و جانشین کردن مقادیرشان در سمت راست رابطهٔ فوق داریم:

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{\frac{BD}{DC}+\frac{AE}{EC}}{\frac{BD}{DC}+\frac{BD}{DC}\times\frac{AE}{EC}}$$

می‌توان در صورت این کسر به جای نسبت $\frac{AE}{EC}$ مساوی آن

$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}$$

را قرار داد زیرا طبق رابطهٔ سوا داریم :

$$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=1$$

با قراردادن مقادیرفوق در صورت و حذف‌فاکتور مشترك $\frac{BD}{DC}$ از صورت و مخرج‌داریم :

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{\frac{AF}{FB}+1}{\frac{AE}{EC}+1}$$

حال‌می‌توان خطوط BP' و CP' را وصل نموده‌امتداد داد تا CA و AB را به ترتیب در نقاط E' و F' قطع کند. با استفاده از رابطهٔ [۱] نتیجه می‌شود :

$$\frac{CE'}{E'A}=-\frac{\frac{CM}{MB}-\frac{CM'}{M'B}}{\frac{AO}{OB}-\frac{AO'}{O'B}}$$

و

$$\frac{AF'}{F'B}=-\frac{\frac{AN}{NC}-\frac{AN'}{N'C}}{\frac{BM}{MC}-\frac{BM'}{M'C}}$$

اگر A' ، B' ، C' را به ترتیب جانشین M ، N' و O" بنمائیم A'B'C' مثلثی است که از بـه هم وصل کـردن اوساط اضلاع مثلث ABC بدست آمده است، پس قضیـهٔ زیر نتیجه می‌شود :

قضیه ـ P و P' دو نقطه در صفحهٔ مثلث ABC می‌باشند از A و B و C به نقطهٔ P وصـل کرده امتداد می‌دهیم تـا اضلاع BC و AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E و F و همچنین از A و B و C به P' وصل نموده امتـداد می‌دهیم تا اضلاع BC و AC و AB را در D' و E' و F' قطع نماید. اگر نقطهٔ P' در مثلث A'B'C' وضعی متجانس با وضع نقطهٔ P در مثلث ABC داشته باشد می‌توان نوشت:

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{\frac{AF}{FB}+1}{\frac{AE}{EC}+1}\quad و\quad \frac{CE'}{E'A}=\frac{\frac{BD}{DC}+1}{\frac{BF}{FA}+1}$$

و

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{\frac{CE}{EA}+1}{\frac{CD}{DB}+1}$$

یك مثال از مورد استعمال این قضیه ـ فـرض

می‌کنیم P **نقطهٔ لموان** (نقطهٔ تلاقی شبه میانه‌ها) مثلث ABC باشد بنا براین :

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c^2}{b^2}$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{b^2}{a^2} \quad و \quad \frac{CE}{EA}=\frac{a^2}{c^2}$$

پس نقطهٔ P' مقادیر نسبی زیررا دارا است :

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2} \qquad \frac{CE'}{E'A}=\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$$

یعنی P' نقطهٔ لموان مثلث $A'B'C'$ می‌باشد.

مثال ۲ـ P مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است بنابراین :

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}\right)$$

$$\frac{CE}{EA}=\frac{a^2}{c^2}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}\right)$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}\right)$$

P'، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ یا مرکزدایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث ABC بوده و نسبتهای زیر را خواهد داشت :

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{b^2(a^2+c^2-b^2)+a^2(b^2+c^2-a^2)}{c^2(a^2+b^2-c^2)+a^2(b^2+c^2-a^2)}$$

$$\frac{CE'}{E'A}=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)}{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)}$$

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}{b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

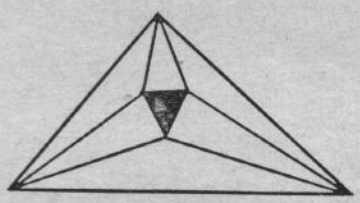
می‌توان P را مرکز دایرهٔ محاطی و یا نقطهٔ بروکارد ازمثلث ABC انتخاب کرد، نسبتهای مربوط به نقطهٔ P' نظیرآن‌در مثلث $A'B'C'$ محاسبه خواهند شد .

یادآوری ـ تمام مقادیری که در نسبتهای مندرج دربالا بکار برده شد اندازهٔ‌جبری می‌باشد. به این ترتیب مثلا نسبت $\frac{BD}{DC}$ مثبت خواهد بود اگر D بین B و C واقع باشد و منفی خواهد بود اگر D در امتداد BC اما در خارج‌قطعه خط BC واقع باشد .

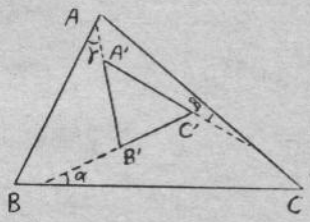
قضیه‌ای دربارهٔ مثلث مورلی

از ماهنامهٔ ریاضیات آمریکا

ترجمهٔ : **غلامحسین بهفروز**



شکل ۱



شکل ۲

اگر هریك از زاویه‌های مثلث غیر مشخص ABC را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم، از برخورد دو به‌دو خطوط حاصل مثلثی بدست می‌آید که متساوی‌الاضلاع است (مجموعهٔ علمی یکان سال). این مثلث به نام‌مثلث مورلی معروف می‌باشد (شکل ۱) .

مثلث ABC و یك مثلث دلخواه $A'B'C'$ واقع در داخل آنرا در نظر می‌گیریم. اگر α ، β ، γ زاویه‌های‌بین اضلاع متناظر از این دو مثلث باشد (شکل ۲) روابط زیر برقرار می‌باشد:

$$A'=A+\beta-\gamma \text{ و } B'=B+\gamma-\alpha \text{ و } C'=C+\alpha-\beta$$

حال قضیهٔ زیررا مطرح می‌کنیم :

قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آنکه اضلاع مثلث مورلی مربوط به مثلث ABC با اضلاع مثلث مورلی مربوط به مثلث $A'B'C'$ نظیر به نظیر با هم موازی باشند آنست‌که داشته باشیم :

$$\frac{B-C}{3}=\alpha+\frac{B'-C'}{3}$$

که با در نظر گرفتن جهت زاویه‌ها نتیجه خواهد شد:

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

به آسانی ثابت می‌شود که شرط فوق وقتی‌که $A'B'C'$ یکی از هشت مثلث زیر باشد برقرار خواهد بود :

۱) مثلث میانه‌ای مثلث ABC

۲) مثلث ارتفاعیه مثلث ABC

۳) مثلثی که از وصل کردن مراکز دایره‌های‌محاطی خارجی بدست می‌آید

۴) مثلثی‌که از وصل کردن نقاط تماس اضلاع مثلث ABC با دایرهٔ محاطی داخلی بدست می‌آید.

۵ و ۶ و ۷) مثلثهایی که ازوصل‌کردن نقاط تماس‌اضلاع مثلث ABC با دوایر خارجی آن بدست می‌آید.

۸) مثلثی که از خطوط مماس بردایرهٔ محیطی مثلث ABC در رأسهای آن بدست می‌آید :

نکاتی چند دربارهٔ معادلات

ترجمهٔ : **مهداد تقوی**

دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان خوارزمی

I)ـ عدد بزرگتر و کوچکتر از حدود ریشه‌ها:

عدد a را زمانی بالاتر (و یا بزرگتر) از حدود ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $f(x)=0$ گوئیم که هیچیك از ریشه‌ها بزرگتر از عدد a نباشند.

عدد b را هنگامی پائینتر و یا (کوچکتر) از حدود ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $f(x)=0$ گوئیم که هیچیك از ریشه‌های این معادله از عدد b کوچکتر نباشد.

قضیهٔ زیر برای تعیین اینکه عددی بالاتر و پائینتر از حدود ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ است ، مفید خواهد بود.

فرض می‌کنیم $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$ که در آن a_n ، ... ، a_2 ، a_1 و a_0 اعداد حقیقی بوده و $a_0>0$ است :

الف ـ اگر در تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ (که $a\geqslant 0$ است) تمام ضرایب خارج قسمت مثبت و یا بعضی از آنها صفر بودند در آن هنگام a بالاتر از حدود ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $f(x)=0$ خواهد بود.

ب ـ اگر در تقسیم $f(x)$ بر $x-b$ (که $b\leqslant 0$ است) ضرایب خارج قسمت یکی درمیان مثبت و منفی و یا صفر شدند، در آن هنگام b از حدود ریشه‌های معادله پائینتر خواهد بود.

II)ـ قانون علامات مربوط به دکارت ـ اگر جملات $f(x)$ (که ضرایب آن اعداد حقیقی هستند) به ترتیب نزولی مرتب شوند وقتی که دو جملهٔ متوالی مختلف‌العلامه باشند یك تغییر علامت بحساب می‌آید. مثلا چند جمله‌ای :

$$x^3-2x^2+3x-12$$

دارای سه تغییر علامت می‌باشد و عبارت زیر دارای چهار تغییر علامت است :

$$27x^7-6x^5-4x^4+x^2-2x+4$$

قانون علامات ـ «تعداد ریشه‌های مثبت معادلهٔ:

$$f(x)=0$$

یا برابر است با تعداد تغییر علامات $f(x)$ و یا به اندازهٔ یك عدد زوج از آن کمتر است. تعداد ریشه‌های منفی معادلهٔ $f(x)=0$ یا مساویست با تغییر علامت $f(-x)$ و یا به‌اندازهٔ یك عدد زوج از آن کمتر می‌باشد».

مثلا در معادلهٔ :

$$f(x)=x^9-2x^5+2x^2-3x+12=0$$

چهار تغییر علامت وجود دارد ، ازاین رو تعداد ریشه‌های مثبت $f(x)=0$ یا برابر است با ۴ یا (۲ − ۴) ویا (۴ − ۴) ، از طرف دیگر داریم :

$$f(-x)=(-x)^9-2(-x)^5+$$
$$+2(-x)^2-3(-x)+12=$$
$$=-x^9+2x^5+2x^2+3x+12=0$$

$f(-x)$ دارای فقط یك تغییر علامت است و از این رو می‌توان گفت $f(x)=0$ دارای یك ریشهٔ منفی است ، و چون این معادله دارای ۰ ، ۲ ویا ۴ ریشهٔ مثبت است، پس حداقل دارای چهار ریشهٔ مختلط می‌باشد : [۴ (۱ + ۴) − ۹] .

III. تشکیل معادلات

۱ـ ضرب هر ریشه درمقداری ثابت ـ برای بدست آوردن معادله‌یی که هر ریشهٔ آن k برابر هر یك از ریشه‌های معادلهٔ مفروضی باشند ، جملهٔ دوم معادلهٔ مفروض را در k ، جملهٔ سوم معادلهٔ مفروض را در k^2 و... ضرب می‌کنیم. مثلا

معادله‌یی که ریشه های آن دوبرابر ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^3-3x^2-10x+24=0$$

باشند عبارت خواهدبود از :

$$x^3-3x^2(2)-10x(2^2)+24(2^3)=0$$

$$x^3-6x^2-4x+192=0$$

۲ـ تغییر علامت هرریشه ـ برای یافتن معادله‌یی که هرریشهٔ آن قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ مفروضی باشد، علامت جمل درجهٔ فرد را تغییر می‌دهیم مثلا اگر ۱ ، $-\frac{1}{2}$ و۲ریشه‌های معادلهٔ $2x^3+3x^2-3x-2=0$ باشند ، اعداد ۱ − ، $+\frac{1}{2}$ و ۲ − ریشه‌های معادلهٔ زیر خواهند بود :

$$2x^3-3x^2-3x+2=0$$

۳ـ کم کردن مقداری ثابت از ریشه‌ها ـ برای بدست آوردن معادله‌یی که ریشهٔ آن بـه اندازهٔ مقدار ثـابت h از ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ کوچکتر باشد. ابتدا $f(x)$ را بر $(x-h)$ تقسیم کرده باقیماندهٔ این عمل تقسیم، ضریب جملهٔ ماقبل آخرمعادلهٔ مطلوب خواهد بود، سپس خارج قسمت رادوباره بر $(x-h)$ تقسیم نموده باقیماندهٔ این عمل تقسیم ضریب جملهٔ ماقبل آخر معادلهٔ مطلوب خواهد بود و به همین ترتیب عمل را ادامه داده سایر ضرایب را نیز بدست می‌آوریم. راه انجام این عمل استفاده از قانون تقسیم ذهنی خواهد بود .

مثال ـ معادله‌ای تشکیل دهید که هـر ریشه‌اش از ریشهٔ معادلهٔ زیر سه واحد کمتر باشد:

$$2x^3-17x^2+26x+45=0$$

عبارت معادله را بر $x-3$ تقسیم می‌کنیم خارج قسمت به صورت $2x^2-11x-7$ و باقیمانده برابربـا ۲۴ بدست می‌آید. در تقسیم $2x^2-11x-7$ بر $x-3$ خارج قسمت برابر $2x-5$ و باقیمانده برابر ۲۲ − می‌شود. و بالاخـره در تقسیم $2x-5$ بر $x-3$ خارج‌قسمت وباقیمانده به ترتیب برابر با ۲ و ۱ می‌شود. پس معادلهٔ مطلوب عبارتست از :

$$2y^3+y^2-22y+24=0$$

IV)ـ روابط بین ضرایب وریشه‌های یک معادله

معادلهٔ زیررا در نظر می‌گیریم :

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0 \quad (1)$$

روابط زیر بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ بالا برقرار است :

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=p_1 \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_nx_1=p_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n p_n \end{cases}$$

V)ـ ریشه‌های گویـای یک معادله ـ اگر:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

باشد و a_n، . . . ، a_0 اعداد گویا بوده و به فرض اینکه این معادله دارای یک ریشهٔ منطق به صورت سادهٔ p/q باشد ، در این حالت p مقسوم علیهی از a_0 و q مقسوم‌علیهی از a_n خواهد بود . برای روشن شدن موضوع مثالی ذکر می‌کنیم :

مثال ـ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ چهارم :

$$6x^4+x^3+11x^2+2x-2=0$$

را بدست آورید.

مقسوم‌علیه‌های ۶ عبارتند از ۱± ، ۲± ، ۳± و ۶± ومقسوم‌علیه‌های ۲ − عبارتنداز: ۱± و ۲± . به‌سادگی معلوم خواهد شدکه فقط جواب $-\frac{1}{2}$ قابل‌قبول می‌باشد. معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$(x+\frac{1}{2})(6x^3-2x^2+12x-4)=0$$

برای عبارت داخل‌پرانتز نیز به‌همان روش راعمل‌کرده و به‌این نتیجه می‌رسیم‌که یک ریشهٔ آن $x=\frac{1}{3}$ است و معادله به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})(x^2+2)=0$$

تمرینات :

مربوط به قسمت I ـ حدود بالاتر و پائینترازریشهٔ حقیقی دو معادلهٔ زیر را بیابید. (مقادیر a و b را بـدست آوریـد) .

a) $-x^3-3x^2+5x+4=0$

b) $x^3+x^2-6=0$

۲ـ ریشه‌های حقیقـی معادلهٔ :

$$4x^3+15x-36=0$$

را بیابید .

مربوط به قسمت II ـ ۱ـ از قانون علامات دکارت استفاده کرده و تعیین کنید که معادلات زیر دارای چند ریشهٔ مثبت و چند ریشهٔ منفی و چند ریشهٔ مختلط می‌باشد:

a)- $2x^3+3x^2-13x+6=0$

b)- $x^4-2x^2-3x-2=0$

c)- $x^2-2x+7=0$

d)- $2x^4+7x^2+6=0$

e)- $x^4-3x^2-4=0$

f) $-x^3+3x-14=0$

g)- $x^6+x^2-1=0$

h)- $x^6-3x^2-4x+1=0$

۲ـ از قانون علامات دکارت استفاده کرده ریشه‌های گویای معادلات زیررا بدست آورید:

a) $x^3-x^2+3x-27=0$

b) $x^3+2x+12=0$

e) $2x^5+x-66=0$

مربوط به قسمت III ـ معادله هایی بنویسید که ریشه‌های آنها چندبرابر ریشه‌های معادله‌های زیر باشد:

a) $x^3-x^2-7x+3=0$ (۲)

b) $x^3-19x-30=0$ (۳)

c) $x^4+\frac{3x^2}{5}-\frac{4}{25}=0$ (۵)

d) $32x^4-2x-1=0$ (۴)

e) $2x^5+3x^2+1=0$ (−۳)

f) $x^5-12x^2-16x+192=0$ (۱/۴)

۲ـ ریشه‌های معادلهٔ:

$$54x^3-9x^2-12x-4=0$$

را بوسیلهٔ قانون ضرب یك عدد ثابت در ریشه‌های یك معادله بدست آورید.

۳ـ معادلهٔ:

$$64x^4-32x^3+4x^2-8x-3=0$$

را به روش معادلهٔ قبل حل کنید.

مربوط به تغییر علامت ریشه‌ها ـ معادلاتی بنویسید که ریشه‌های آنها قرینهٔ ریشه‌های معادلات زیر باشد.

a) $3x^5-10x^4-3x+15=0$

b) $x^4-5x^2+4=0$

c) $x^6-9x^4+169x^2-144=0$

کم کردن عددی از ریشه‌های یك معادله ـ معادله‌یی بنویسید که ریشه‌های آن به اندازهٔ دوواحد از ریشه‌های معادلهٔ $x^4-12x-5=0$ کمتر باشد.

مربوط به قسمت IV) ـ معادله‌یی بنویسید که ریشه‌های آن ۴ − ، ۲ − ، ۳ و ۱ + باشد.

۲ـ مقدار k را طوری معین کنید که یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^3-8x^2+9x+k=0$ دوبرابر دیگری باشد.

۳ـ معادلهٔ $2x^4+8x^3+5x^2-3x+6=0$ را به معادله‌یی که دارای جملهٔ درجهٔ سوم نباشد تبدیل کنید:

۴ـ مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^3-2x^2-23x+k=0$$

را محاسبه کنید.

۵ـ دوریشهٔ معادلهٔ:

$$3x^3-17x^2+ax+b=0$$

۲ و ۴ است ریشهٔ سوم و مقادیر b و a را بیابید.

۶ـ معادلهٔ $x^3-9x+k=0$ مفروض است k را به طریقی بیابید که:

الف) ـ ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

ب) ـ سه ریشه به تصاعد هندسی باشند.

ج) ـ سه ریشه به تصاعد عددی باشند.

د) ـ یکی از ریشه‌ها برابر $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})$ باشد.

۷ـ اگر ریشه‌های معادلهٔ:

$$2x^3-5x^2+6x-1=0$$

a و b و c باشند، معادله‌یی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ باشند.

۸ـ اگر a و b و c ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^3-2x^2+3x-4=0$$

باشند، مقادیر عددی عبارات زیررا محاسبه کنید:

a) $ab+bc+ca$ ، b) $a^2+b^2+c^2$

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ، d) $a^3+b^3+c^3$ و

e) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$ و

راهنمایی ـ می‌دانیم معادله‌ای که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادلهٔ فوق باشد به صورت زیر خواهد بود:

$$4x^3-3x^2+2x-1=0$$

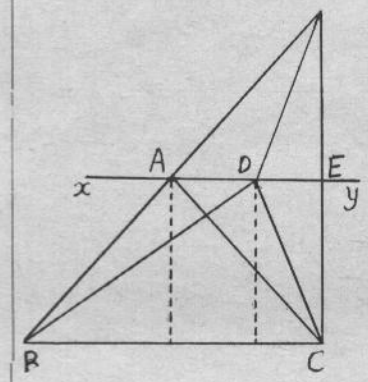
و نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{4}$$

ماکزیمم و می‌نیمم در هندسهٔ مسطحه

مهربان پروز

قضیهٔ اول ـ درمثلثهای متعادل که دارای یك‌ضلع ثابت هستند محیط مثلث متساوی‌الساقین می‌نیمم است.



برهان ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC و مثلث DBC معادلند. از این رو ارتفاع نظیر رأس A با ارتفاع نظیر رأس D برابر بوده و AD موازی با BC است. امتداد خط AD را به xy نمایش می‌دهیم. AB را به اندازهٔ خودش تا F امتداد داده و از F به C وصل می‌کنیم. xy عمود منصف FC است چون AC = AF و xy از وسط FB به موازات BC رسم شده است. روابط زیر را داریم:

$$FD = DC$$

$$BD + FD = BD + DC$$

$$BF = AB + AF = AB + AC$$

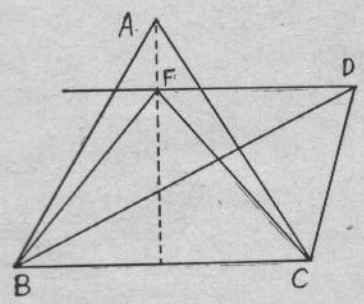
با توجه به مثلث BFD:

$$BF = AB + AF < BD + DF$$

$$AB + AC < BD + DC$$

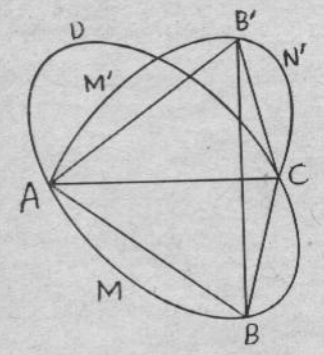
نتیجه ـ درمثلثهای متعادل محیط مثلث متساوی الاضلاع می‌نیمم است.

قضیهٔ دوم ـ بین مثلثهای متساوی‌المحیطی که دارای یك‌ضلع ثابت هستند مساحت مثلث متساوی‌الساقین ماکزیمم است.



برهان ـ محیط مثلث متساوی‌الساقین ABC بامحیط مثلث BDC برابر است از D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ارتفاع AE مثلث ABC را در F قطع کند مثلث متساوی‌الساقین FBC و مثلث DBC معادلند و با توجه به قضیهٔ یك محیط FBC کوچکتر از محیط DBC است چون محیط FBC کوچکتر از محیط ABC است. به سهولت می‌توان ثابت کرد که مساحت ABC از مساحت FBC یعنی از مساحت DBC بزرگتر است:

$$S_{ABC} > S_{FBC} = S_{DBC}$$



نتیجه ـ در مثلثهای متساوی‌المحیط مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از همه بزرگتر است.

قضیهٔ سوم ـ بین مثلثهائی که دارای دو ضلع متساوی هستند آن مثلثی که زاویهٔ بین دوضلع متساویش قائمه باشد دارای مساحت ماکزیمم است (اثبات به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود).

قضیهٔ چهارم ـ بین تمام اشکال متساوی‌المحیط سطح دایره ماکزیمم است

برهان ـ فرض می‌کنیم ABCD بزرگترین سطح ممکن بین تمام اشکال متساوی‌المحیط رادارا باشد. خط AC راطوری رسم می‌کنیم که محیط ABCD را به دو قسمت متساوی تقسیم کند. در این‌صورت سطح ABC با سطح ADC متساوی می‌شود. اگر این مدعا صحیح نباشد فرض می‌کنیم مساحت ABC بزرگتر از مساحت ACD است و در نتیجه مساحت AB'C قرینهٔ ABC نسبت به‌محور AC از مساحت ADC بزرگتر است و بطور کلی:

$$S_{ABCB'A} > S_{ABCDA}$$

درصورتی که محیطها متساویند وشکل ABCDA بزرگترین سطح را دارا نیست و این خلاف فرض است.

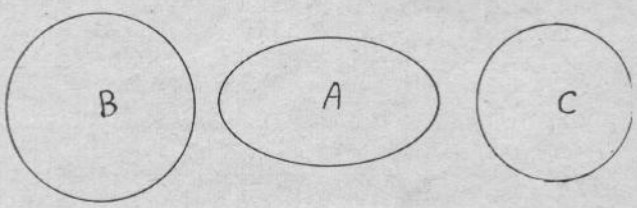
نتیجه می‌شود که AC سطح را هم به دو قسمت متساوی تقسیم می‌کند.

نقطهٔ دلخواه B را روی محیط انتخاب کرده و ثابت خواهیم کرد زاویهٔ ABC قائمه است.

اگر این زاویه قائمه نباشد می‌توان با تغییر مکان A و C سطح ABC و AB'C را افزایش دهیم تا زاویهٔ مزبور قائمه گردد (قضیهٔ‌سوم) بدون آنکه طول خطوط AB و BC و AB' و B'C و همچنین مساحت قطعات AMB و BNC و AM'B' و B'N'C تغییر کند. به این ترتیب سطح شکل ABCB'A بزرگتر شده است بدون آنکه محیطش تغییر کند واین‌خلاف فرض است.

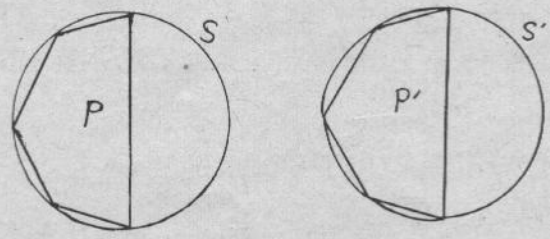
چون B نقطهٔ دلخواه‌است پس‌تمام‌نقاط‌دارای این‌خاصیت می‌باشند و ABC مکان هندسی نقاطی است که A و C از آنها به زاویهٔ قائمه دیده می‌شوند یعنی نیم دایره خواهد بود.

قضیهٔ پنجم ـ بین تمام اشکال متعادل محیط دایره می‌نیمم است.



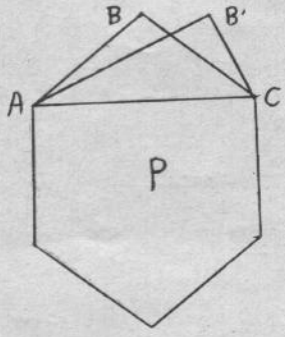
برهان ـ شکل A با دایرهٔ (C) متعادل است. باید اثبات کردکه محیط C از محیط A کمتر است دایره‌ای متساوی‌المحیط با (A) رسم می‌کنیم. که مساحت A ازمساحت B کمتر است (قضیهٔ چهارم) و به این ترتیب مساحت C از مساحت B کمتر خواهد بود و از دو دایره دایرهٔ کوچکتر دارای محیط اقصر است.

قضیهٔ ششم ـ بین کثیرالاضلاعهائی که دارای‌اضلاع برابرند مساحت کثیرالاضلاع محاطی ماکزیمم‌است.



برهان ـ اضلاع n ضلعی P' با اضلاع n ضلعی‌محاطی P برابر است

روی اضلاع P' قطعات A'، B'، C'، D' و E'را برابربا A، B، C، D و E می‌سازیم. محیط S' با محیط S برابر است و طبق قضیهٔ چهارم مساحت S بزرگتر است‌از مساحت S'. چون مساحات A و B و... با A' و B' و C'... برابرند لازم است‌که مساحت P بزرگتر از مساحت P' باشد.

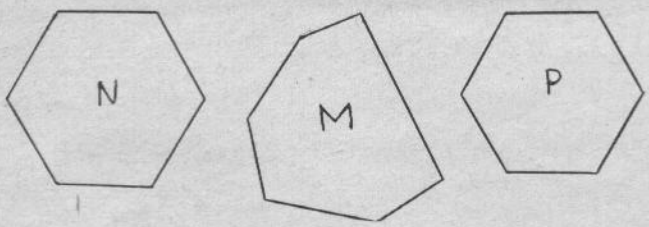


قضیهٔ هفتم ـ بین چندضلعیها متساوی المحیطی که تعداد اضلاع آنها برابر است مساحت کثیرالاضلاع منتظم ماکزیمم‌است.

برهان ـ اگرمساحت P بین تمام کثیرالاضلاعهای متساوی‌المحیط با تعداد اضلاع برابر ماکزیمم باشد باید ثابت کرد که P یك چندضلعی منتظم است اگر اضلاع AB' و B'C مساوی نبودند مثلث متساوی‌الساقین ABC محیطی مساوی محیط AB'C داشت با مساحتی بزرگتر از آن که می‌توانست جای مثلث AB'C باشد. بنابراین‌مساحت P بیشتر می‌شد بی‌آنکه محیط یا تعداد اضلاع P تغییر کند. این نشان می‌دهد که باید تمام اضلاع مساوی باشند.

اما مساحت کثیرالاضلاعهایی که تعداد اضلاع آنها مساویست وقتی ماکزیمم است که قابل محاط در دایره باشد (قضیهٔ ۶) پس لازم است که P یك چند ضلعی منتظم باشد.

قضیهٔ هشتم ـ بین‌تمام چند ضلعیهای متعادل که تعداد اضلاعشان یکی است محیط چند ضلعی منتظم می‌نیمم است.



برهان ـ P یك چندضلعی منتظم است و M چند ـ ضلعی دیگری است معادل با P که تعداد اضلاعش با آن یکی است. حال چندضلعی منتظم N را در نظر می‌گیریم که محیط وتعداد اضلاعش‌با M برابراست. با استفاده ازقضیهٔ هفتم می‌توانیم‌بگوئیم که‌مساحت M ودرنتیجه مساحت P ازمساحت N کمتراست. اما از دو چند ضلعی منتظم‌آنکه مساحتش کمتراست دارای محیط کوچکتر است.

راهنمای ریاضیات متوسطه

وضع دومنحنی در نقطهٔ مشترك آنها

امکان اینکه دو منحنی در یك نقطه، هم بر یکدیگر مماس باشند و هم از یکدیگر بگذرند

عبدالحسین مصحفی

در صفحهٔ محورهای مختصات، دو منحنی (C) و (C') به معادله‌های زیررا در نظر می‌گیریم :

$$(C) : f(x \text{ و } y) = 0$$

$$(C') : y_1 = g(x)$$

منحنی (C) صفحه را بـه دو ناحیه (نـاحیـهٔ I و ناحیهٔ II) تقسیم می‌کند. ثابت می‌شود کـه عبارت $f(x \text{ و } y)$ به ازاء مختصات نقطه‌های واقع در هر ناحیه علامت ثابت دارد ؛

اگر $M(\alpha \text{ و } \beta)$ نقطه‌ای از صفحه باشد وقتی M بـر (C) واقع باشد داریم $f(\alpha \text{ و } \beta) = 0$ و درغیر آن

$$f(\alpha \text{ و } \beta) \neq 0$$

بوده یا مثبت است و یا منفی. اگر M در ناحیهٔ I واقع‌باشد و $f(\alpha \text{ و } \beta)$ مثلا مثبت باشد در این صورت وقتی M در ناحیهٔ I تغییر مکان دهد $f(\alpha \text{ و } \beta)$ مثبت باقی می‌ماند . اما اگـر M در ناحیهٔ II واقع شود $f(\alpha \text{ و } \beta)$ منفی خواهد شد.

برای اینکه‌معلوم کنیم منحنی (C') نسبت به منحنی(C) چه وضعی را دارد عبارت $f(x \text{ و } y_1)$ را تشکیل می‌دهیم(یعنی بین معادله‌های دو منحنی، y را حذف می‌کنیم) خواهیم‌داشت:

$$f(x \text{ و } y_1) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$$

بنا برآنچه‌که در نظریهٔ معادلات ثابت می‌شود معادلهٔ :

$$f(x \text{ و } y_1) = 0 \qquad (1)$$

حد اکثر ممکن است که n جواب داشته باشد (در این مقاله هرجا که از جواب یا ریشـهٔ معادلـه صحبت شود مقصود ریشهٔ حقیقی است). اگر n فرد باشد معادله حداقل دارای‌یك‌جواب خواهد بود. اگر n زوج باشد ممکـن است که معادلـه هیچ جوابی نداشته باشد .

وقتی که معادلهٔ (۱) جواب نداشته باشد عبارت

$$f(x \text{ و } y_1)$$

به ازاء مختصات جمیع نقاط‌مربوط علامت ثابت داشته‌در نتیجه تمام منحنی (C') در یکی از دوناحیـهٔ I یا II از منحنـی (C) واقع می‌باشد .

اگر معادلهٔ (۱) جـواب داشته باشـد در این صـورت دو منحنی (C) و (C') به تعداد جوابهای‌معادله، نقطهٔ‌مشترك خواهند داشت و برای اینکه وضع دو منحنی را در این نقاط مشترك معلوم کنیم حالتهای زیررا در نظر می‌گیریم .

الف ـ اگر $x = \alpha$ یك ریشهٔ سـادهٔ معادلهٔ (۱) باشد عبارت $f(x \text{ و } y_1)$ به‌ازاء $x = \alpha$ صفر شده و **تغییر علامت می‌دهد** ، در این صورت دو منحنی در نقطـهٔ بـه طول α متقاطع اند یعنی از یکدیگر عبور می‌کنند. وقتی که معادلـهٔ (۱) دارای nریشهٔ ساده باشد دو منحنی دارای nنقطهٔ تقاطع بوده و هر قطعه از منحنی (C') که بین دو نقطهٔ تقاطع‌متوالی محصور باشد به تمامی در یکی از دو ناحیهٔ منحنی (C) قرار خواهد داشت .

ب ـ اگر $x = \alpha$ ریشهٔ مکرر ، مثلا مرتبهٔ p ، معادلهٔ (۱) باشد یعنی داشته باشیم :

$$f(x \text{ و } y_1) = (x - \alpha)^p \varphi(x) \ , \ \varphi(\alpha) \neq 0$$

در این صورت :

۱)اگرpزوج‌باشد $f(x \text{و} y_1)$ درازاء $x = \alpha$ صفرشده‌اما **تغییرعلامت‌نمی‌دهد.** درنتیجه‌منحنی (C') ازمنحنیCعبور

نخواهد کرد. ممکن است که دومنحنی درنقطهٔ به طول $x=\alpha$ بر یکدیگر مماس باشند .

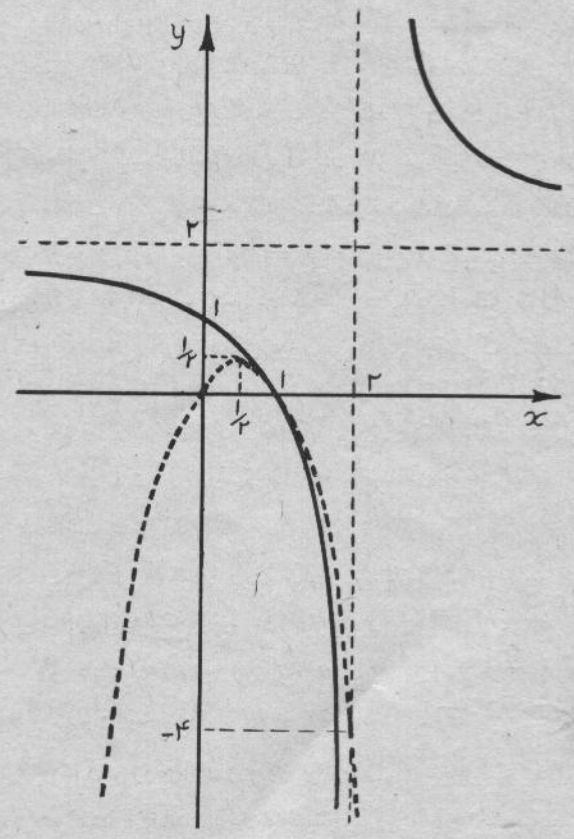
۲) اگر p فردباشد $f(x,y_1)$ درازاء $x=\alpha$ صفرشده و تغییر علامت می‌دهد؛ منحنی (C') در نقطهٔ به طول $x=\alpha$ با منحنی (C) مشترك بوده و از آن می گذرد. البته در این حالت ممکن است که دو منحنی ضمن اینکه بر هم مماس هستند از یکدیگر عبور کنند. در حالت خاصی که (C') عبارت‌باشد ازخط مستقیم ومعادلهٔ (۱) ریشهٔمکررمرتبهٔ ۳ داشته‌باشد. خط (C') در نقطهٔ به طول α بر منحنی (C) مماس بوده و از آن می گذرد واین‌نقطه **نقطهٔ عطف منحنی** (C) نامیده‌می‌شود.

تبصره ـ در حالتی که معادلهٔ (۱) ریشهٔ مکرر $x=\alpha$ داشته‌باشدبرای تعیین اینکه دو منحنی در نقطهٔ به طول $x=\alpha$ مماس‌هستند یانه‌مناسبتر آنست که طبق نظریهٔ مشتقات عمل شود. (منحنیهای توابعی که در تحصیلات دبیرستانی مطرح می‌شوند در چنین وضعی عموماً بر یکدیگر مماس خواهند بود).

مثال ـ

معلوم کنید که دومنحنی نمایش تغییرات توابع زیر نسبت به یکدیگر چه وضعی دارند.

$$y_1=\frac{2x-2}{x-2} \quad و \quad y=-2x^2+2x$$



$$f(x \text{ و } y)=y+2x^2-2x=0$$

$$f(x \text{ و } y_1)=\frac{2x-2}{x-2}+2x^2-2x=0$$

بعداز انجام عملیات و اختصار داریم :

$$f(x \text{ و } y_1)=\frac{2(x-1)^3}{x-2}=0$$

معادلهٔ اخیر دارای ریشهٔ مکرر مرتبهٔ سوم $x=1$ می‌باشد . دومنحنی توابع مفروض در نقطهٔ به طول $x=1$ بر یکدیگر مماس بوده و از هم می‌گذرند. دو منحنی در این نقطه بر هم مماس هستند زیرا:

$$y'=-4x+2 \;،\; x=1 \;،\; m=-2$$

$$y'_1=\frac{-2}{(x-2)^2} \;؛\; x=1 \;،\; m'=-2$$

$$m=m'$$

مسئله :

تحقیق کنید که امکان دارد منحنی تابع هموگرافیك‌و منحنی تابع درجهٔ دوم در یك نقطه هم بر یکدیگر مماس بوده و هم از یکدیگر بگذرند .

توابع را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y=\frac{px+q}{x+r} \quad و \quad y=ax^2+bx+c$$

از حذف y بین دو معادله و بعداز اختصار خواهیم داشت:

$$(1) \quad f(x)=ax^2+(ar+b)x^2+(br+c-p)x+cr-q=0$$

برای اینکه این معادله ریشهٔ مکرر مرتبهٔ سوم داشته باشد از دو راه عمل می کنیم .

راه‌اول ـ شرط لازم‌وکافی برای اینکه معادلهٔ $f(x)=0$ ریشهٔ مکرر مرتبهٔ سوم داشته باشد آنست که سه‌معادلهٔ :

$$f(x)=0 \quad و \quad f'(x)=0 \quad و \quad f''(x)=0$$

ریشهٔ مشترك داشته باشند :

$$(2) \quad f'(x)=3ax^2+2(ar+b)x+br+c-p=0$$

$$(3) \quad f''(x)=6ax+2(ar+b)=0$$

معادلهٔ (۳) نسبت به x از درجهٔ اول است یعنی فقط دارای یك جواب‌می‌باشد . بنابراین معادله‌های (۱)و(۲)و(۳) حداکثر امکان دارد که دارای یك ریشهٔ مشترك باشند . سه معادلهٔ مزبور نسبت به a و b و c همچنین نسبت به p و q و r

از درجهٔ اول هستند و با معلوم بودن مقدار x و معلوم بودن یکی از دو تابع می‌توان تابع دیگر را مشخص کرد.

راه دوم- $x=\alpha$ را ریشهٔ مکرر مرتبهٔ سوم معادلهٔ (۱) فرض می‌کنیم ، بنابراین اتحاد زیررا خواهیم داشت:

$$ax^3+(ar+b)x^2+(br+c-p)x+ \\ +cr-q\equiv a(x+\alpha)^3$$

چون طرف‌دوم را بسط داده ضریبهای جمله‌های همقوه را برابر قراردهیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ar+b=3a\alpha \\ br+c-p=3a\alpha^2 \\ cr-p=a\alpha^3 \end{cases}$$

از بررسی این دستگاه نیز نتایجی کـه قبلا ذکـر شد حاصل می‌شود.

مثال- اگر منحنیهای دو تابع

$$y=\frac{x+1}{x-1} \text{ و } y=ax^2+bx+c$$

بر یکدیگر مماس بوده و در نقطهٔ تماس از هم بگذرند طول این نقطه‌را بر حسب a بدست آورید و درازاء $a=\frac{1}{4}$ تابع درجهٔ دوم را مشخص کنید.

حل- به ترتیب راه دوم عمل می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\begin{cases} b=3a\alpha+a \\ c=3a\alpha^2+3a\alpha+a+1 \\ c=-a\alpha^3-1 \end{cases}$$

از حذف c بین دو معادلهٔ آخر دستگاه نتیجه می‌شود:

$$a\alpha^3+3a\alpha^2+3a\alpha+a+2=0$$

$$a(\alpha+1)^3+2=0 \implies \alpha=-(1+\sqrt[3]{\frac{2}{a}})$$

پس طول نقطهٔ مورد نظر برابر است با :

$$x=1+\sqrt[3]{\frac{2}{a}}$$

درازاء $a=\frac{1}{4}$ داریم:

$$x=3 \text{ و } \alpha=-3 \text{ ؛ } b=-2 \text{ و } c=\frac{23}{4}$$

$$y=\frac{1}{4}x^2-2x+\frac{23}{4}$$

تبصره - معادلهٔ مماس مشترك دو منحنی مزبور در نقطهٔ تماس آنها عبارتست از:

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

تمرینات :

۱- وضع هریك از دومنحنی به معادلات زیر را در نقطهٔ مشترك آنها معلوم کنید :

$$y=\sqrt{x^3-x} \text{ و } x^2+y^2=1$$

$$y=x^2-1 \text{ و } y=\sqrt{x^2}-1$$

۲- تحقیق کنید که منحنیهای نمایش دو تابع

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+a} \text{ و } y=\frac{x(x^2-1)}{a+1}$$

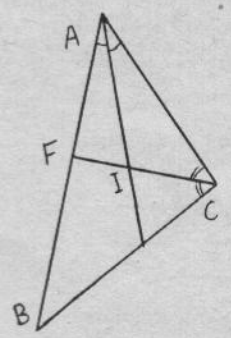
به ازاء جمیع مقادیر a در نقطهٔ ثابتی بر یکدیگر مماس می‌باشند و به ازاء فقط یك مقدار a در این نقطهٔ تماس از هم می‌گذرند. این مقدار a را معلوم کنید.

تعیین مختصات مراکز دوایر محاطی مثلث

برحسب مختصات رأسها وطول ضلعهای مثلث

محمد حسن عاملی گنابادی

دبیر دبیرستانهای مشهد



اگر I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و CF نیمساز داخلی زاویهٔ C از مثلث ABC باشدمی‌دانیم که

$$FA=\frac{bc}{a+b} \text{ و } \frac{IF}{IC}=\frac{FA}{CA}$$

$$\implies \frac{FA}{CA}=\frac{c}{a+b}$$

روابط برداری زیر رامی‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\overrightarrow{IF}}{\overrightarrow{IC}}=-\frac{c}{a+b} \text{ و } \frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{FB}}=-\frac{b}{a}$$

چون رابطه‌های برداری مزبوررا برمحور $x'x$ تصویر کنیم خواهیم داشت

$$\frac{x_A-x_F}{x_B-x_F}=-\frac{b}{a} \implies x_F=\frac{ax_A+bx_B}{a+b}$$

$$\frac{x_F-x_I}{x_C-x_I}=-\frac{c}{a+b} \implies x_I=\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}$$

و همچنین خواهیم داشت: $y_I=\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}$

برای I' مرکز دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A خواهیم داشت

$$I'(x=\frac{ax_A-bx_B-cx_C}{a+b+c} \text{ و } y=\frac{ay_A-by_B-cy_C}{a+b+c}$$

برای I'' و I''' روابط مشابهی بدست می‌آید .

تابع $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$ در چه فاصله‌ای معین است؟ آیا این تابع فقط در فاصلهٔ $x\geq 1$ معین است؟ آیا تابع مزبور به‌صورت $y=\sqrt{x^2-x}$ نوشته شده و درفاصله های $x\geq 1$ و $x<0$ معین می‌باشد؟

آیا می‌توان $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ را به‌صورت $\sqrt{a\cdot b}$ نوشت؟

از مجلهٔ : The Mathematic Teacher

ترجمهٔ : حسن مکارمی

دانش‌آموزششم ریاضی دبیرستان‌سخن

تعریف ۱ـ اگر a عددی حقیقی و $N\geq 0$ باشد و داشته باشیم $a\cdot a=N$ خواهیم داشت $\sqrt{N}=|a|$ و برعکس رابطهٔ $\sqrt{N}=|a|$ فقط وفقط وقتی برقرار است که $a\cdot a=N$ باشد.

تعریف ۲ـ اگر a عددی حقیقی و $N<0$ بوده و i عددی باشد که در رابطهٔ $i\cdot i=-1$ صدق کند از رابطهٔ : $ai\cdot ai=N$ خواهیم داشت : $\sqrt{N}=|a|i$ و برعکس ؛ رابطهٔ $\sqrt{N}=|a|i$ فقط و فقط وقتی بر قرار خواهد بود که داشته باشیم : $ai\cdot ai=N$.

بررسی سؤال

سه حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اول ـ داشته باشیم $a\geq 0$ و $b\geq 0$ ؛

اگر فرض کنیم که $\sqrt{a}=|x|$ و $\sqrt{b}=|y|$

بنا به تعریف ۱ داریم :

$$x\cdot x=a \text{ و } y\cdot y=b$$

$$\Longrightarrow a\cdot b=x\cdot x\cdot y\cdot y$$

$$a\cdot b=(x\cdot y)\cdot(x\cdot y) \Longrightarrow \sqrt{a\cdot b}=|x\cdot y|$$

از طرف دیگر داریم :

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=|x|\cdot|y|$$

و چون $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$ بنابراین :

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

حالت‌دوم ـ داشته باشیم $a<0$ و $b\geq 0$

اگر فرض کنیم که $\sqrt{b}=|y|$ و $\sqrt{a}=|x|i$ بنا به تعریفهای ۱ و ۲ خواهیم داشت :

$$xi\cdot xi=a \text{ و } y\cdot y=b$$

$$ab=xi\cdot xi\cdot y\cdot y=(xyi)\cdot(xyi)$$

$$\sqrt{ab}=|xy|i$$

از طرف دیگر داریم :

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=|x|i\cdot|y|=|x|\cdot|y|i=|xy|i=\sqrt{ab}$$

بنابراین اگر یکی از دو مقدار a و b مثبت و دیگری منفی باشد خواهیم داشت :

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

حالت سوم ـ وقتی‌که $a<0$ و $b<0$ باشد.

فرض می‌کنیم $\sqrt{a}=|x|i$ و $\sqrt{b}=|y|i$ بنابه‌تعریف ۲ خواهیم داشت :

$$xi\cdot xi=a \text{ و } yi\cdot yi=b$$

$$xi\cdot xi\cdot yi\cdot yi=a\cdot b$$

$$ab=(xy)\cdot(xy)\cdot i\cdot i\cdot i\cdot i$$

$$=(-1)(-1)(xy)(xy)=(xy)\cdot(xy)$$

$$\Longrightarrow \sqrt{ab}=|xy|$$

از طرف دیگر :

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=|x|i\cdot|y|i=|x|\cdot|y|ii$$

$$=(-1)|x|\cdot|y|$$

و چون $|xy|=|x|\cdot|y|$ بنابراین :

$$\sqrt{a}\ \sqrt{b}=-|xy| \Longrightarrow \sqrt{ab}\neq\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

نتیجه ـ وقتی می‌توانیم $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ را به صورت $\sqrt{ab}$ بنویسیم (و برعکس) که حداقل یکی از دو مقدار a یا b مثبت (یا صفر) باشد .

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des Problèmes élémentaires de géométrie

تألیف: E. J. Honnet چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳ ـ ترجمهٔ: ع. م.

بخش سوم ـ فصل یکم ـ چگونگی اثبات روابطی به صورت: $M:N=P:Q$ یا $A\times B=C\times D$

روش سوم ـ به کمك قوهٔ نقطه نسبت به دایره

قبلا تعریف قوت یك نقطه نسبت به یك دایره یادآوری می‌شود:

حالت اول ـ نقطهٔ P راخارج دایرهٔ O درنظر می‌گیریم. اگراز P قاطع PAB ومماس PC رانسبت به دایرهٔ O رسم کنیم ثابت می‌شود که حاصل ضرب $PA\cdot PB$ بامجذور مماس $\overline{PC}^2$ برابر بوده وبرابر با مقدار ثابت می‌باشد.

$$PA\cdot PB=\overline{PC}^2=k^2$$

این مقدارثابت قوت نقطهٔ P نسبت به‌دایرهٔ O نامیده می‌شود. اگر d فاصلهٔ P تا O مرکزدایره و R شعاع دایره باشد ثابت می‌شود که:

$$d^2-R^2=k^2$$

حالت دوم ـ اگر نقطه‌ای واقع درداخل دایرهٔ O بوده وازآن قاطع PAB رانسبت به دایره رسم کنیم و d فاصلهٔ P تامرکز دایره و R شعاع دایره باشد، ثابت می‌شود که:

$$PA\times PB=k^2=R^2-d^2$$

دراین حالت، این مقدارعبارت خواهد بود از قوت نقطهٔ P نسبت به‌دایرهٔ O.

حالتهای خاص:

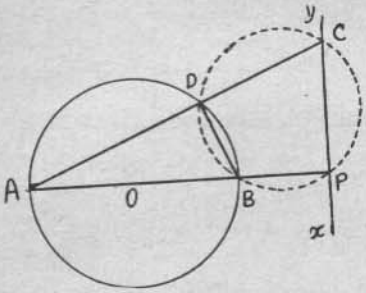
اگرP روی دایره‌واقع باشد $d=R$ و $d^2-R^2=0$ بوده قوت نقطه نسبت به دایره برابر با صفرمی‌باشد.

اگرP درمرکزدایره واقع باشد $d=0$ و $R^2=k^2$ خواهد بود.

از آنچه گفته شد برای اثبات رابطهٔ مورد نظر به این ترتیب استفاده می‌شود که ثابت کنیم چهارقطعه خط مربوط چهار قطعهٔ قاطعی هستند که از یك نقطه نسبت به یك دایره رسم شده است. لازم نیست که حتماً دایره‌ای درشکل وجود داشته باشد، بلکه می‌توان با وجود یك چندضلعی یایك چهارضلعی محاطی وجود دایره را مسلم کرد.

مسئلهٔ ۴۸ ـ روی قطر AB از دایرهٔ O یك نقطهٔ P اختیارکرده ازاین نقطه عمودی برقطرمزبوراخراج می‌کنیم: روی این عمود یك نقطهٔ C انتخاب‌کرده CA رارسم می‌کنیم که دایره را در D قطع می‌کند. ثابت کنید که:

$$AB\cdot AP=AD\cdot AC$$



فرض: AB قطر دایره، $xy\perp AB$

حکم:

$$AB\cdot AP=AD\cdot AC$$

اثبات ـ زاویهٔ BPC بنابه فرض قائمه است. زاویهٔ ADB هم‌که دردایرهٔ O محاط بوده و روبرو به قطراست قائمه می‌باشد، پس زاویهٔ BDC قائمه بوده و چهار ضلعی PBDC محاطی می‌باشد. نسبت به دایرهٔ محیطی این چهار ضلعی، قوت نقطهٔ A از یك طرف برابراست با $AD\cdot AC$ وازطرف دیگر برابر است با $AB\cdot AP$ بنابراین‌داریم:

$$AB\cdot AP=AD\cdot AC$$

تبصره ـ رابطه‌ای که ثابت شدبه وضع نقطهٔ C روی xy بستگی‌ندارد. هرنقطه مانند M که ازxy اختیارشود نظیرآن نقطه‌ای مانند M' روی دایره وجود دارد که رابطهٔ:

$AM\cdot AM'=AB\cdot AP$ برقرار باشد. خط xy منعکس دایرهٔ O در انعکاس به‌قطب A نامیده می‌شود.

تمرینات

۲۲۶ ـ دریك دایرهٔ O دو وتر AB و CD را رسم می‌کنیم که در P متقاطع می‌باشند؛ قرینهٔ B را نسبت به P تعیین کرده F می‌نامیم. برسه نقطهٔ D ، A ، F دایره‌ای می‌گذرانیم که CD را در G قطع می‌کند. ثابت کنید که :

$$PC\cdot PD=PD:PG$$

ازاین موضوع چه‌نتیجه‌ای مربوط به‌قطعه خطهای PC و PG بدست می‌آورید.

۲۲۷ ـ روی قطر AB ازدایرهٔ O دونقطهٔ C و Dرا به یك فاصله ازمرکزانتخاب کرده و دریك طرف قطر خطوط متوازی CM و DN رامحدودبه دایره رسم‌می‌کنیم. ثابت کنید که :

$$CM\cdot DN=CA\cdot CB=DA\cdot DB$$

۲۲۸ ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مفروض‌است. دایره‌ای رسم‌می‌کنیم که بردورأس A و B وبر M وسط وتر BC بگذرد این دایره AC رادر F قطع می‌کند. ثابت کنیدکه :

$$\frac{FC}{BC}=\frac{AM}{AC}$$

۲۲۹ ـ اگر H نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای AA' ، BB' و CC' ازمثلث ABC باشد ثابت کنیدکه :

$$AH\cdot AA'=AB'\cdot AC=AC'\cdot AB$$

۲۳۰ ـ مسئلهٔ قبل رادرنظرمی‌گیریم. ثابت کنیدکه:

$$AH\cdot A'H=BH\cdot B'H=CH\cdot C'H$$

۲۳۱ ـ از نقطهٔ دلخواه P واقع بر وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC عمودی بر وتر رسم می‌کنیم که AC را در N و AB رادر M قطع می‌کند. ثابت کنیدکه :

$$BA\cdot BM=BP\cdot BC$$

$$NA\cdot NC=NM\cdot NP$$

$$MA\cdot MB=MN\cdot MP$$

۲۳۲ ـ درنقطهٔ N وسط وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC عمودی‌بروتراخراج کرده روی‌آن‌طول NM رابرابر با میانهٔ AN انتخاب می‌کنیم. خطوط BM و AC یکدیگر رادر P وخطوط CM و AB یکدیگررا در Q قطع‌می‌کنند. ثابت کنید که :

$$PA\cdot PC=PB\cdot PM \text{ و } QA\cdot QB=QC\cdot QM$$

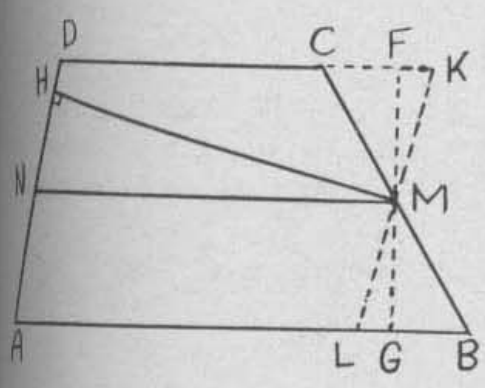
روش چهارم ـ به کمك شکلهای معادل

عموماً مساحت یك شکل برابراست باحاصل ضرب اندازه‌های دوقطعه خط مربوط به‌آن شکل. مثلامساحت مربع‌مستطیل برابراست باحاصل ضرب اندازه های دوضلع مجاور آن. چنین عادت شده‌است که مساحت یك شکل را به صورت حاصل ضرب دوقطعه خط ازآن می‌نویسند. مثلا مساحت مستطیل ABCD رابه صورت $AB\times AC$ می‌نویسند.

برای اینکه ثابت کنیم حاصل ضرب دوقطعه خط باحاصل ضرب دوقطعه خط دیگربرابراست کافی است‌که ثابت کنیم هر یك ازاین دوحاصل ضرب مساحت یك شکل یادومساحت‌متساوی (مربوط به‌دوشکل متعادل) رابیان می‌کنند.

مسئلهٔ ۴۹ ـ از نقطهٔ M وسط ساق BC از ذوزنقهٔ ABCD موازی بادوقاعده رسم‌می‌کنیم تاساق AD رادر N قطع کند وخطی عمودبر دوقاعده رسم می‌کنیم که AB رادرG و CD را در F قطع می‌کند و عمود MH رابر AD رسم می‌کنیم. ثابت کنید که :

$$AD\cdot MH=MN\cdot FG$$



فرض:
$MC=MB$
$MN \parallel AB$ و CD
$FG \perp AB$ و CD
$MH \perp AD$

حکم

$$AD\cdot MH=MN\cdot FG$$

اثبات ـ می‌دانیم که MN که یك ساق‌ذوزنقه‌را نصف کرده با دو قاعده موازی است ساق AD رانصف می‌کند و طول آن برابراست بانصف مجموع‌طولهای دوقاعده. FG ارتفاع‌ذوزنقه است بنابراین حاصل‌ضرب $MN\cdot FG$ برابرمی‌شود بامساحت ذوزنقه :

ازM خطی‌موازی‌با AD رسم‌می‌کنیم‌تا CD وAB رادر K وL قطع کند. چهارضلعی KLAD متوازی‌الاضلاع بوده‌وبا ذوزنقهٔ ABCD معادل‌است، زیرادومثلث CMK و BML متساوی می‌باشند. مساحت متوازی الاضلاع مزبور برابراست‌با حاصل ضرب قاعدهٔ آن AD در ارتفاعش MH ، بنابراین حاصل ضرب $AD\cdot MH$ نیزبرابر است بامساحت‌ذوزنقه پس:

$$AD\cdot MH=MN\cdot FG$$

تمرینات

۲۳۳ ـ اگر AH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باشد ثابت کنید که :

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH$$

۲۳۴ ـ درمتوازی الاضلاع ABCD ازرأس A عمودهای AM و AN را بر دوضلع مجاور CD و CB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که دوقطعه خط AM و AN بادوضلع CD و CB معکوساً متناسب‌اند .

۲۳۵ ـ درمتوازی‌الاضلاع ABCD از رأس A عمودهای AM و AN را بـه ترتیب برضلع BC و بر قطر BD رسم می‌کنیم . ثابت کنید کـه AM و AN با BC و BD معکوساً متناسب هستند .

۲۳۶ ـ درمتوازی‌الاضلاع ABCD ازرأسهای A وB عمودهای AM و BN را برقطرهای BD وAC رسم‌می‌کنیم. ثابت کنید که این‌عمودها باقطرهای نظیر ،معکوساً متناسب‌هستند.

۲۳۷ ـ ثابت کنید که درهرمتوازی‌الاضلاع فاصله‌های‌هر نقطهٔ قطر ازدوضلع مجاور بااین دوضلع معکوساً متناسب‌هستند .

۲۳۸ ـ ثابت کنید کـه در هرمثلث ارتفاعات با ضلعهای نظیر ،معکوساً متناسب هستند .

۲۳۹ ـ ثابت کنید که درهر مثلث فـواصل نقطهٔ ثقل از ضلعهای مثلث باضلعهای نظیر ، معکوساً متناسب هستند .

تمرینات مربوط به‌فصل یکم

۲۴۰ ـ نیمدایرهٔ به‌مرکز O و به قطر AB ویك نقطهٔ P واقع برقطر آن مفروض است . P را بـه نقطهٔ دلخواه M از نیمدایره وصل می‌کنیم و درنقطهٔ M عمودی بر MP اخراج می‌کنیم که مماسهای درنقاط A و B بر نیمدایره رادر C وD قطع کند، ثابت کنید که :

$$AC \cdot BD = AP \cdot PB$$

۲۴۱ ـ چهارضلعی ABCD بردایرهٔ O محیط است ، ضلعهای AD و BC در M وN بـر دایره مماس می‌باشند و قطر AC در I با MN متلاقی می‌باشد. ثابت کنید که:

$$\frac{IA}{IC} = \frac{MA}{NC}$$

۲۴۲ ـ دودایرهٔ متخارج O و O′ متخارج‌هستند؛شعاع‌های متوازی OA و O′C رارسم می‌کنیم. خط AC با OO′ درP وبا دایره‌های O و O′ مجددادر B و D متلاقی‌می‌شود ثابت کنید که :

$$PA \cdot PD = PC \cdot PB$$

۲۴۳ ـ دودایرهٔ O و O′ در A و B متقاطع هستند. نقطهٔ P را برامتداد AB اختیارکرده ازآن دوقاطع PCD و PFG رابه ترتیب نسبت به O و O′ رسم می‌کنیم . ثابت کنید که :

$$PC \cdot PD = PF \cdot PG$$

(مسئله رابرای دوحالت رسم کنید، یك حالت که P بین A و B باشد، حالت دیگر که P خارج A و B باشد) .

۲۴۴ ـ دودایرهٔ O و O′ در A مماس خارج هستند . نقطهٔ M راخارج دایره‌هاچنان‌انتخاب می‌کنیم که MA نیمساز زاویهٔ OMO′ باشد واز M مماسهای MT و MT′ را بردو دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید که:

$$\frac{MT}{MT'} = \frac{OA}{O'A}$$

۲۴۵ ـ در چهارضلعی محاطی OBAC می‌دانیم که OB = OC به مرکز O وبه شعاع OB دایره‌ای رسم‌می‌کنیم وبرآن نقطهٔ M راچنان انتخاب می‌کنیم که M و O دریك طرف BC واقع‌باشند. MBوMC را رسم می‌کنیم که نیمساز خارجی زاویهٔ A رادر D و F قطع می‌کنند ثابت کنید که:

$$AF \cdot AD = AB \cdot AC$$

۲۴۶ ـ (قضیهٔ پاپوس) یك‌چهارضلعی دریك دایره‌محاط است . ثابت کنید که حاصل ضرب فاصله‌های هر نقطه ازدایره‌از دوضلع مقابل چهارضلعی برابراست با حاصل ضرب فواصل‌آن نقطه ازدوضلع‌دیگر.

۲۴۷ ـ ازرأس A مثلث ABC خط Ax راموازی‌با BC رسم‌می‌کنیم واز M وسط BC خط دلخواهی رسم‌می‌کنیم که Ax را در N ، AB رادر P و AC رادر Q قطع می‌کند . ثابت کنید که :

$$\frac{PN}{PM} = \frac{QN}{QM}$$

۲۴۸ ـ اگر I و I′ مرکزهای‌دایره های محاطی‌داخلی و محاطی خارجی داخل زاویهٔ A ازمثلث ABC باشد ثابت کنید که :

$$AB \cdot AC = AI \cdot AI'$$

۲۴۹ ـ دو دایرهٔ O و O′ متخارج هستند چهار مماس مشترك آنهارا رسم می‌کنیم . مماسهای مشترك خارجی در S و مماسهای مشترك داخلی در T متلاقی می‌شوند. ثابت کنید که S و T برخط‌المرکزین واقع بوده وداریم :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{TO'}{TO}$$

نویسندگان : ژ. گامو
م. استرن

ترجمه از فرانسه

کارمند بازنشستهٔ راه‌آهن

۴ - کبوتران نامه‌بر

در ملاقات دیگری که بین جانسون مکانیسین بازنشستهٔ راه‌آهن ودکتر پزشك ناحیه روی‌داد. جانسون داستانی از یك مأموریت جالب که در زمان اشتغال به‌کار برای وی اتفاق افتاده بود برای دکترشرح داد : روزی ازطرف هیأت نقل‌وانتقالات به وی مأموریت دادند تابه هنگام کار دریکی ازترنهای عادی دوکبوترنامه‌بر را بـاخود ببرد وآنها را دقیقاً در فاصلهٔ ۸۰ کیلومتری یکدیگرودرست به فاصلهٔ یك ساعت از هم رهاکند .

خوشبختانه قسمتی ازمسیری که راه‌آهن ازآن‌می گذشت کاملاهموار بود. طول‌این قسمت که درآن‌راه‌آهن هم به‌خط‌مستقیم بود برابر با ۱۶۰ کیلومتر بود وبه علاوه بـه نحوی بود که ترنها این فاصلهٔ ۱۶۰ کیلومتری رادرست در مـدت ۲ ساعت می‌پیمودند. دراین فاصله ایستگاههایی وجـود داشت و درآنها ترنها به نسبت تعداد مسافرانی که پیاده یا سوار می‌شدند توقف داشتند، اما باکم و زیادکردن سرعت ، این زمانـهای توقف جبران می‌شد ودرنتیجه ، فاصلهٔ ۱۶۰ کیلومتری درست در ۲ ساعت طی می‌شد.

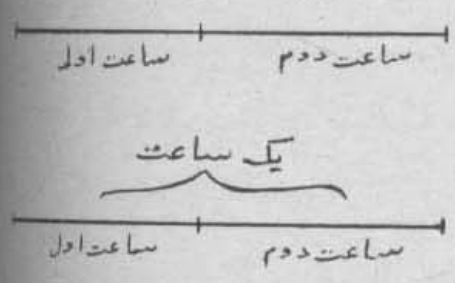
اما ازاین که مافاصلهٔ ۱۶۰ کیلومتری را درمدت ۲ساعت طی‌می کردیم وسرعت‌متوسط‌ما ۸۰ کیلومتردرساعت بودنمی‌توان مطمئن بودکه در هرحال و یك فاصلهٔ زمانی یك ساعتی وجود داشته که طی‌آن مسافت ۸۰ کیلومترپیموه می‌شد .

دکتر اظهار داشت :

ـ این چنین نیست. بدون درنظرگرفتن تغییرات‌سرعت درفاصلهٔ ۲ ساعت به سادگی می‌توان ثابت کردکه در هرحال فاصله‌ای یك ساعتی‌وجودداشته است که‌طی‌آن مسافت ۸۰ کیلو- متر پیموده می‌شده است . راه سادهٔ اثبات این مطلب ازایـن قراراست :

فاصلهٔ دوساعتی رابه دوفاصلهٔ یك ساعتی تقسیم می کنیم . فرض می کنیم که نه دریك ساعت اول ونه دریك ساعت دوم‌دقیقاً مسافت ۸۰ کیلومتر رانپیموده باشید، وگرنه مسئله خیلی ساده خواهد بود . بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که دریك ساعت اول سرعت متوسط‌شما کمتراز ۸۰ کیلومتردرساعت ودردومین ساعت بیشترازاین مقداربوده است . ملاحظه خواهیدکردکه اگـربه ترتیب عکس فرض کنیم اثبات فرق نخواهدکرد .

یك فاصلهٔ‌یك‌ساعتی مجزا درنظرمی‌گیریم‌وآن رامتدرجاً درطول مسیر (مطابق شکل) جا می‌دهیم بقسمی که ابتدا یك ساعت اول‌وبعد به‌تدریج یك ساعت‌دوم رادربر گرفته‌باشد دراین یك‌ساعت مجزا که آن را درطول مسیرپخش کردیم

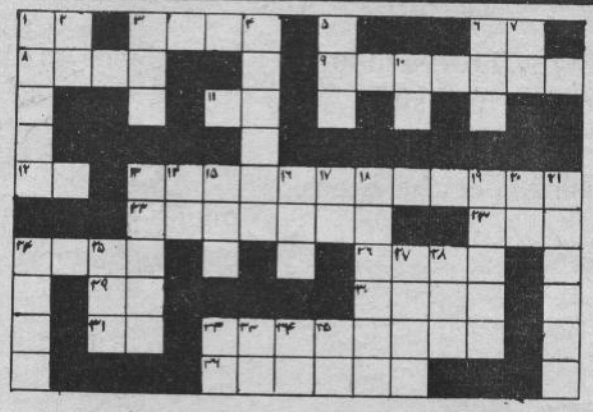


سرعت متوسط همان سرعت مطلوب می‌باشد . چون این فاصله یك ساعت اول را در بر دارد بنابراین در ابتدای آن سرعت متوسط کمتراز ۸۰ کیلومتردر ساعت می‌باشد. وچون یك ساعت دوم راهم دربر می گیرد بنابراین در پایان سرعت متوسط آن بیشتراز ۸۰ کیلومتر خواهد بود .

ملاحظه می کنیم که‌درطول یك‌ساعت سرعت‌متوسط بین‌دو مقدارمحصورمی‌ماند، یکی کمتراز۸۰ کیلومتردرساعت ودیگری بیشترازآن. بنابراین بخشی ازمسیر وجود داردکه ضمن‌آن به هنگام این فـاصلهٔ یك ساعتی سرعت متوسط دقیقاً برابربا ۸۰ کیلومتردرساعت می‌باشد وحکم ثابت است .

مکانیسین بازنشسته حق را به جانب دکترداده و چنین اظهار داشت :

ـ آنچه گفتید به‌جای خوددرست است: اما این‌موضوعی نبودکه به هیأت نقل وانتقالات رابکارآید، برای اینکه‌هیچگاه من نمی‌توانستم شروع این فـاصلـه را تعیین‌کنم ، و در نتیجه نمی‌توانستم ساعت رهاشدن کبوتران رامعلوم کنم. فعلاهم‌چنانچه مایل باشید مسئلهٔ کوچکی که سراغ دارم مطرح کنم، شایدبرای شماجالب باشد. قرارشدکه‌این مسئله برای جلسهٔ بعدمطرح‌شود.



جدول اعداد

طرح از: محمد اسماعیل قدس

دانش‌آموز

ششم ریاضی دبیرستان صفائی‌سمنان

افقی :

۱ـ حاصل x از رابطهٔ :

$$x = a^{3\log_a 2 + 2\log_a 3}$$

۳ـ سال تأسیس مجلهٔ یکان. ۶ـ ثلث عدد ۱ افقی. ۸ـ مقلوبش مکعب کامل است. ۹ـ عددی که از چهاررقم سمت راست آن تشکیل می‌شود مقلوب عددی است که از چهاررقم سمت چپ آن تشکیل می‌شود و تفاضل این دوعدد برابر با ۲۷۲۷ است. ۱۱ـ متمم حسابی عدد ۱ افقی. ۱۲ـ واسطهٔ حسابی عددهای ۶ افقی و ۱۱ افقی. ۱۳ـ ارقام عدد π. ۲۲ـ ارقام متوالی. ۲۳ـ ازسه‌رقم متفاوت تشکیل‌شده وچون خود عدد یا مقلوب آن را با یك جمع کنیم در هر دو حال مجذور کامل بدست آید. ۲۴ـ تکرار یك رقم. ۲۶ـ رقمهای فردمتوالی ۲۹ـ مقلوبش ده‌برابر خودش می‌باشد. ۳۰ـ عددی به شکل $\overline{(3a)(2a)(2a)a}$. ۳۱ـ نصف عدد ۲ قائم . ۳۲ـ تکرار مجذور عدد ۱۷ قائم. ۳۶ـ اگر یك واحد به آن افزوده شود از یك طبقهٔ بالاتر گردد.

قائم: ۱ـ چون باهزار برابرعدد ۲ قائم جمع شود سه‌برابرعدد ۱۹ قائم بدست‌آید. ۲ـ تکرار یك رقم. ۳ـ تکرار یك‌رقم ۴ـ اگرعددی که از سه‌رقم سمت راست آن تشکیل شده‌است از عددمتشکل از سه‌رقم سمت چپ آن کم کنیم دوبرابر عدد ۳ قائم حاصل شود. ۵ـ اگر آنرا بر صد تقسیم کنیم باقیمانده‌مکعب کامل بوده وسه‌برابر خارج قسمت می‌باشد. ۶ـ رقمهای متوالی. ۷ـ دوبرابر شمارهٔ دهگان عدد ۶ قائم. ۱۰ـ یك دهم عدد۲۳ افقی. ۱۳ـ شمارهٔ تلفنی که در این مجله‌مندرج‌است. ۱۴ـ در تمام سالهای قرن پانزدهم وجود دارد. ۱۵ـ حاصل ضرب ۱۷ دریك‌عددمکعب کامل. ۱۶ـ توانی ازعدد ۶ افقی. ۱۷ـ حاصل‌ضرب عدد ۱۴ قائم در نصف خودش . ۱۸ـ چون بایك جمع شودعددی بدست‌می‌آید که‌مقلوب آن یك‌رقمی خواهدبود. ۱۹ـ غیراز رقم‌یکان بقیهٔ‌رقمهای آن برابر هستند ومجموع تمام رقمهای عدد برابر ۱۶ است. ۲۰ـ دوبرابرعدد ۱۱افقی. ۲۱ـ مجموع رقمهایش۱۶است و مقلوبش با خودش برابراست. ۲۴ـ سالی که‌درآن هستیم. ۲۵ـ مقلوبش با خودش برابراست . ۲۷ـ متمم حسابی مقلوبش با سه برابرعدد ۳ قائم برابر است. ۲۸ـ ده‌برابر عدد ۲۰ قائم. ۳۲ـ نه‌برابر عدد۳۱ افقی. ۳۳ـ مقلوبش مضربی ازعدد ۶افقی است. ۳۴ـ همان خاصیت عدد ۲۹ افقی را دارد. ۳۵ـ مجذور کامل است.

خرید تمبر

مشتری صدریال به فروشندهٔ تمبر داد و گفت:

تعدادی تمبر دوریالی، به‌تعداد دوبرابر آن تمبر یك ریالی و بقیهٔ مبلغ را تمبر ۵ریالی بدهید. تعداد هریك‌ازتمبر های درخواستی چقدر است؟

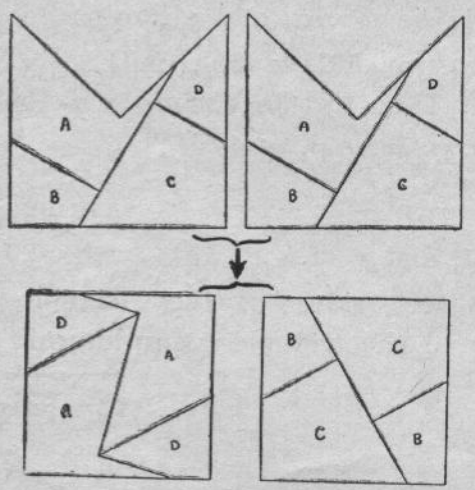
سن مامان چقدر است؟

فرشته‌از پدرش‌پرسید: مامان چندسال دارد؟

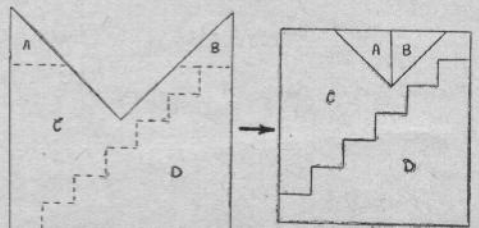
بابا جواب داد: مجموع سن‌های من و مامان و تو رویهم، ۷ سال است. سن من ۶ برابر سن تو است. وقتی‌توسن‌مامان‌را داشته‌باشی مجموع سن‌های‌ما دو برابرمجموع فعلی است: سن مامان چقدر است؟

مربوط به شمارهٔ گذشته :

عدد آشنا = ۲۴۶۳



پاسخ برش ←



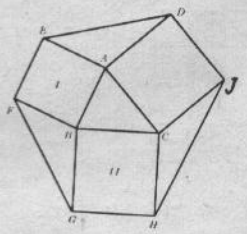
حل جدول

۸	۶	۴	۳	⊘	۸	۱
۶	⊘	۲	۷	۲	⊘	۱
۴	۸	⊘	۱	۲	۱	⊘
۲	۵	۶	⊘	⊘	۶	۶
⊘	۱	۶	⊘	۲	۹	⊘
۳	⊘	۶	۴	۴	⊘	۷
۶	۶	⊘	۰	⊘	۹	۲

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(The Mathematics Student Journal)

Problam 26– ABCD, CBGH, and BAEF are squares constructed on the sides of ΔABC, as fig. DE, EF, and HI are drawn. If the sum of the measures of the areas



of squares I and II is equal to the measure of the area of the rest of the ftgure, find the measure of $\angle ABC$. Prove your answer.

Solution– Because

$$\sin(180^\circ - \angle ABC) = \sin \angle ABC$$

and AB=BF and BC=BG the measures of the areas of ΔBFG and ΔABC are equal Similarly, the measures of the areas of ΔADE and ΔCHJ equal that of ΔABC. The measure of the area of region :

$ACJD = (AC)^2$, of $I = (AB)^2$, of $II = (BC)^2$ and of

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin ABC$$

The sum of the measures of the areas of the triangles is thus:

$$2 \cdot AB \cdot BC \cdot \sin ABC$$

From the 4 given data:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 + 2 \cdot AB \cdot BC \sin ABC$$

Then:

$$\sin ABC = [(AB)^2 + (BC)^2 - (AC)^2]/2 \cdot AB \cdot BC = \cos ABC$$

(Law of cosines)

Hence $m\angle ABC = 45^\circ$

* * *

Problem 27– If the measures of the angles of a triangle are in arithmetic progression, must the triangle be equilatral, if in addition:

a) The measures of the sides are in arithmetic progression?

b) The measures of the sides are in geomtric progression?

Solution– Let the measures of the angles of this triangle be:

$\theta - x$, θ, and $\theta + x$.

Since their sum $3\theta = 180^\circ$, we have $\theta = 60^\circ$

Part a: Let the measures of the sides of the triangle be $a-b$, a, and $a+b$, so that the side of measure a is opposite the 60° angle. Then by thelaw of cosines:

$$a^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2 - 2(a++b)(a-b)\cos 60^\circ$$

Then since $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, this becomes:

$$3b^2 = 0, \text{ or } b = 0$$

Therefore the three sides of the triangle are equal, and the triangle is equilateral.

Part b: Let the measures of the sides of the triangle be a/r, a, and ar, opposite angles of measure: $60^\circ - x$, 60°, and $60^\circ + x$ respectively. Then by the Cosine Law:

$$a^2 = a^2r^2 + a^2/r^2 - 2a^2\cos 60^\circ$$

This leads to $r^4 - 2r^2 + 1 = 0$, from which $r^2 = 1$, and $r = 1$.

Thus all three sides of the triangle are equal, and the triangle is equilateral.

حل مسائل نمونه

مسئله‌ای اقتباس از
مسئلهٔ فاگنانو

نوشتهٔ : ا . زیرك زاده

ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان دکتر نصیری

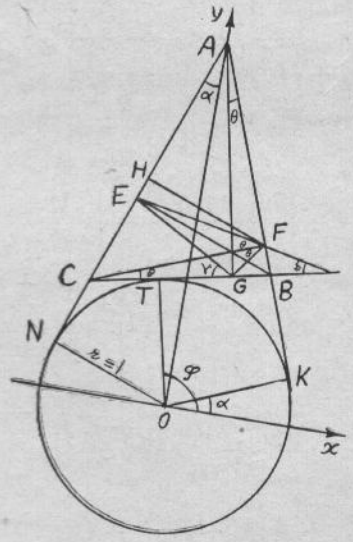
مجلهٔ : Mathematics Magazine

مسئلهٔ زیر در ۱۷۷۵ توسط **فاگنانو** طرح و اثبات شده است.

بین تمام مثلثهای محاط در یك مثلث حاده‌الزوایا، مثلث ارتفاعیه کمترین محیط را دارد.

بعدها این مسئله ازراههای دیگری ثابت شده است که بهترین آنها از **شوارز** * می‌باشد. ما اکنون ثابت می‌کنیم که:

۴۳۰۸ ـ درمثلث حاده‌الزوایا، محیط مثلث ارتفاعیه‌از نصف محیط مثلث کوچکتر یا باآن مساوی است، تساوی وقتی برقراراست که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.



اثبات ـ مثلث حاده‌الزوایای ABC را درنظر گرفته ارتفاعهای AG ، BE ، CF و مثلث ارتفاعیه EFG ازآن رارسم می‌کنیم. محیط مثلث ABC را با l ومحیط مثلث EFG را با p می‌نمائیم. دایرهٔ O محاطی خارجی داخل زاویهٔ A ازمثلث را رسم می‌کنیم که بر ضلعهای BC ، AC ، AB به‌ترتیب در T و N و K مماس می‌شود. می‌دانیم که محیط مثلث ABC برابر است با $2AN = 2AK$ بنابراین اگر دایرهٔ O و AN و AK ثابت بوده اما BC تغییرمکان دهد بقسمی که T بر کمان (کوچکتر از نیمدایرهٔ) KN باقی بماند مقدار l محیط مثلث ABC ثابت باقی خواهدماند. ثابت می‌کنیم که با تغییر BC به شرح فوق، مقدار p محیط مثلث ارتفاعیه تغییر کرده و هنگامی ماکزیمم می‌شود که مثلث ABC متساوی‌الساقین گردد.

نقطهٔ O را مبدأ مختصات و امتداد OA یعنی Oy را محورعرضها و Ox عمودبر Oy رامحورطولها و شعاع دایرهٔ O رابرابرواحد انتخاب می‌کنیم. اگر α نصف زاویهٔ BAC و φ زاویهٔ OT با Ox و θ و γ و δ به ترتیب زاویه‌های GEB ، CGE وزاویهٔ بین EF با BC باشد می‌دانیم که AG ، BE و CF به‌ترتیب نیمسازهای زاویه‌های G و E و F ازمثلث EFG می‌باشند (چهارضلعیهای BCEF و ABGE محاطی هستند پس:

$$\text{ز}BEF = \text{ز}BCF \quad \text{و} \quad \text{ز}BEG = \text{ز}BAG$$

وچون $\text{ز}BAG = \text{ز}BCF$ پس $\text{ز}BEF = \text{ز}BEG = \theta$).

داریم:

$$EG + GF = \frac{EF \cdot \cos\delta}{\cos\gamma}$$

$$p = EF + EG + GF = EF\left(1 + \frac{\cos\delta}{\cos\gamma}\right)$$

$$\gamma = 2\alpha \quad \text{و} \quad \delta = \gamma - 2\theta = 2\alpha - 2\theta$$

$$\text{ز}B = \text{ز}TON \quad \text{و} \quad NOx = \alpha \; ; \; B = \varphi - \alpha$$

$$B = \frac{\pi}{2} - \theta \Longrightarrow \varphi - \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\alpha - \theta = \varphi - \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \delta = 2\varphi - \pi$$

$$p = EF\left(1 - \frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\alpha}\right)$$

* یك راه هندسی اثبات مسئله پنج‌سال قبل توسط آقای **حسین غیور** در «نشریهٔ مهرگان برای دانش‌آموزان» چاپ شده است.

از F عمود FH را بر AC فرودمی‌آوریم، داریم:

$$EF=\frac{FH}{\cos\theta}=\frac{CF\cos 2\alpha}{\cos\theta}=\frac{AC\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos\theta}$$

$$AC=AN-NC=\cot g\alpha-\cot g\frac{\varphi+\alpha}{2}$$

$$EF=\left(\cot g\alpha-\cot g\frac{\varphi+\alpha}{2}\right)\frac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}$$

$$EF=\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\varphi}$$

$$p=\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\varphi}\left(1-\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\alpha}\right)=$$

$$4\cos\alpha\sin\varphi-2\sin 2\alpha$$

p تابعی است ازمتغیر φ ، مشتق آن را تعیین می‌کنیم

$$p'=4\cos\alpha\cos\varphi$$

$$p'=0\Longrightarrow\cos\varphi=0\Longrightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$\cos\alpha$ همیشه مثبت است ووقتی φ حاده باشد. p' مثبت واگر φ منفرجه باشد p' منفی است. پس تابع p درازاء $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ماکزیمم است. دراین حال مثلث ABC به رأس A متساوی‌الساقین بوده ومقدار p برابر می‌شودبا

$$p=4\cos\alpha-2\sin 2\alpha$$

اگر مثلث ABC متساوی الساقین باقی مانده درآن زاویهٔ رأس یعنی 2α تغییر کند خواهیم داشت :

$$p'=-4\sin\alpha-4\cos 2\alpha$$

$$p'=0\Longrightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}\ \text{و}\ 2\alpha=A=\frac{\pi}{3}$$

p وقتی ماکزیمم است که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد و دراین حال ماکزیمم p برابرخواهدبودبا :

$$p_{Max}=\frac{1}{2}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که درهرحال :

$$p<\frac{1}{2}$$

راه حل تحلیلی مسئلهٔ آپولونیوس

ترجمه و تنظیم از: **مصطفی گودرزی طائمه**

حل مسئلهٔ ۴۲۴۰ مندرج دریکان شمارهٔ ۴۰

سه دایرهٔ C_1 و C_2 و C_3 به مرکزهای

$P_1(a_1$ و $b_1)$ و $P_2(a_2$ و $b_2)$ و $P_3(a_3$ و $b_3)$

وبه‌شعاعهای r_1 و r_2 و r_3 مفروض‌اند. مطلوبست تعیین‌مختصات مرکز وطول شعاع دایره‌ای که برسه دایرهٔ مفروض مماس باشد.

حل- شرط لازم وکافی برای اینکه دودایرهٔ C و C_1 به مرکز های P و P_1 وبه شعاعهای r و r_1 بر هم مماس باشندآنست که ،

$PP_1=r+r_2$ مماس خارج

$PP_1=|r-r_1|$ مماس داخل

که بطورکلی عبارت می‌شوداز:

$$\overline{PP_1}^2=(r\pm r_1)^2$$

اگر $P(a$ و $b)$ و $P_1(a_1$ و $b_1)$ فرض‌شود این‌رابطه‌می‌شود:

$$(1)\quad (a-a_1)^2+(b-b_1)^2=(r\pm r_1)^2$$

برای اینکه دایرهٔ C بردایره های C_2 و C_3 نیز مماس باشد باید داشته باشیم :

$$(2)\quad (a-a_2)^2+(b-b_2)^2=(r\pm r_2)^2$$

$$(3)\quad (a-a_3)^2+(b-b_3)^2=(r\pm r_3)^2$$

با فرض $A_1=-2a_1$ و $B_1=-2b_1$ و

$C_1=\mp 2r_1$ و $D_1=a_1^2+b_1^2-r_1^2$

وروابطی مشابه آنها برای مقادیر A_2 و B_2 و .:. و D_3 معادلات (۱) و (۲) و (۳) به صورتهای زیر نوشته می‌شوند.

$$(4)\quad a^2+b^2-r^2+A_1a+B_1b+C_1r+D_1=0$$

$$(5)\quad a^2+b^2-r^2+A_2a+B_2b+C_2r+D_2=0$$

$$(6)\quad a^2+b^2-r^2+A_3a+B_3b+C_3r+D_3=0$$

طرفین این‌معادلات را دوبه‌دو ازهم کم می‌کنیم و بافرض

$E_2=A_1-A_2$ و $F_2=B_1-B_2$

$G_2=C_1-C_2$ و $H_2=D_2-D_2$

$E_3=A_1-A_3$ و ....

خواهیم داشت :

$$(7)\quad E_2a+F_2b+G_2r+H_2=0$$

$$(8)\quad E_3a+F_3b+G_3r+H_3=0$$

ازاین دومعادله بافرض :

$$J_1=\frac{F_2G_3-F_3G_2}{E_2F_3-F_2E_3}\ \text{و}\ K_1=\frac{F_2H_3-F_3H_2}{E_2F_3-F_2E_3}$$

$J_2=\ldots$ و $K_2=\ldots$

خواهیم داشت :

$$(9)\quad a=J_1r+K_1$$

$$(10)\quad b=J_2r+K_2$$

چون این مقادیررا دررابطهٔ (۴) قراردهیم بافرض

$$L=J_1^2+J_2^2-1$$

$$M=2J_1K_1+2J_2K_2+A_1J_1+B_1J_2+C_1$$

$$N=K_1^2+K_2^2+A_1K_1+B_1K_2+D_2$$

معادلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$Lr^2+Mr+N=0$$

از این معادله با شرط $M^2-4LN\geqslant 0$ مقدار r و از روی آن با استفاده از معادلات (۹) و (۱۰) مقادیر a و b معلوم می‌شود. با توجه به‌اینکه r نمی‌تواند منفی باشد مسئله حداکثر ممکن است که ۸ جواب داشته باشد .

مسائل برای حل

دانش‌آموزان هر کلاس می‌توانند راه‌حل مسائلی مربوط به کلاس خود را که شمارهٔ مسئله با علامت «✱» مشخص شده است به ادارهٔ مجله ارسال دارند. از ارسال حل مسائل فاقد علامت ✱ و همچنین از ارسال حل مسائل مربوط به کلاسهای پائین‌تر خودداری شود. روی ورقهٔ حل مسئله نام و کلاس و دبیرستان مربوط به صراحت نوشته شود.

کلاس چهارم طبیعی

۴۳۰۹ـ به‌ازاء چه مقدار از زاویهٔ u $(u<90^\circ)$ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر دارای جواب است و این جواب را معلوم کنید.

$$x^2+2(1-\cos u)x+2(1-\cos u)=0$$

۴۳۱۰ـ ترجمهٔ **جعفر آقایانی چاوشی**

دو شش ضلعی منتظم و نامساوی ABCDEF و CGHJKL (رأسهای آنها در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرف گذاری شده است) در خارج یکدیگر واقع بوده اما در رأس C مشترک هستند و نقاط D، C و G بر یک استقامت واقع‌اند. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث BCG خط FJ را در نقطهٔ O وسط آن قطع می‌کند و مثلث BOG متساوی‌الاضلاع است.

کلاس چهارم ریاضی

۴۳۱۱ـ از **محمد آگاه**، دانشجو

ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

سه‌جمله‌ای زیر، نسبت به x، مربع کامل می‌باشد:

$$(a^2+c^2+e^2)x^2+2(ab+cd+ef)x+b^2+d^2+N^2$$

✱ **۴۳۱۲ـ** دو معادلهٔ درجهٔ دوم چنان تعیین کنید که ریشه‌های هریک از آنها به ترتیب برابر باشند با مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ دیگر.

۴۳۱۳ـ از **حسن چاکری**، پنجم ریاضی دبیرستان پهلوی کاشان.

اگر a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلثی بوده و تصاعد حسابی باقدر نسبت d تشکیل دهند، نامساویهای زیر را محقق کنید:

۱) $d<c$ ۲) $d<\frac{b}{2}$ ۳) $d<\frac{a}{3}$

۴) $d<\frac{3a-c}{8}$ ۵) $d<\frac{a+3c}{6}$

۶) $d<\frac{7a+4b+11c}{40}$

۴۳۱۴ـ از **محمد صادق نهاوندی** دبیرستان امیرکبیر زنجان

G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC است. ثابت کنید که اگر رابطهٔ $b^2+c^2=2a^2$ بین اندازه‌های ضلعها برقرار باشد نیمساز زاویهٔ BAC و نیمساز زاویهٔ BGC روی ضلع BC یکدیگر را قطع می‌کنند.

✱ **۴۳۱۵ـ** ترجمه از مجلهٔ «دانش‌آموز ریاضی»

سه دایره به مرکزهای M و N و O غیر واقع بر یک خط مفروض است. دایره‌های (M) و (N) در نقطهٔ C مماس خارج هستند. دایره‌های (M) و (O) در A مماس داخل می‌باشند و دایره‌های (N) و (O) نیز در B مماس داخل می‌باشند. خطوط AC و BC را رسم می‌کنیم که دایرهٔ (O) را به ترتیب در D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید سه نقطهٔ D و O و E بر یک خط مستقیم واقع‌اند.

کلاس پنجم طبیعی

۴۳۱۶ـ از **حسین علوی** دبیرستان پهلوی ساری

تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y=x^2-2(2a+1)x+8a-4$$

می‌نیمم تابع خود تابعی است برحسب a ، ماکزیمم این تابع را تعیین کنید.

۴۳۱۷ـ اولا ثابت کنید که اگر $a=b+c$ باشد خواهیم داشت :

$$tg a - tg b - tg c = tg a\, tg b\, tg c$$

ثانیاً معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$tg 3x = tg 2x + tg x$$

کلاس پنجم ریاضی

۴۳۱۸ـ از **محمد مهدی عابدی نژاد**

ششم ریاضی دبیرستان سخن

اگر دو منحنی با معادلات:

$$y=ax^2+bx+c \quad و \quad y=a'x^2+b'x+c'$$

در دو نقطه متقاطع باشند معادلهٔ خطی را تعیین کنید که بر نقاط تقاطع آنها می‌گذرد .

۴۳۱۹ـ تابع زیر مفروض است

$$y=x^2+x-1$$

اگر منحنی (C) نمایش تابع ، خط Δ به معادلهٔ :

$$y=ax+b$$

را در دو نقطه به طولهای x' و x'' قطع کند فرمول کلی توابع درجهٔ دومی را تعیین کنید که منحنی نمایش آنها خط Δ را در نقطهٔ به طولهای $-x'$ و $-x''$ قطع می‌کنند. در امکان این مسئله بحث کنید . از بین این توابع آنرا مشخص کنید که ضریب جملهٔ درجهٔ دوم آن برابر با یك بوده و منحنی (C') نمایش هندسی آن با (C) دارای مماس مشترکی به معادلهٔ $y=3x-2$ باشد. نقاط تماس هریك ازمنحنیهای (C) و (C') را با خط مماس مشترك بدست آورید.

۴۳۲۰ـ فرستنده **سیروس مریوانی** ،

پنجم ریاضی دبیرستان آذر ۱

اگر $y=\sqrt{\sec 2x}$ باشد ثابت کنید که:

$$y''=3y^5-y$$

۴۳۲۱ـ از **ابوالفضل فتح‌الله‌زاده**

اگر داشته باشیم :

$$A=\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha$$

$$B=\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 3\alpha$$

$$K=\frac{A^2}{\sin^2 3\alpha}+\frac{B^2}{\cos^2 3\alpha}$$

مقدار عددی K را تعیین کنید .

۴۳۲۲ـ ترجمه از فرانسه

دو خط عمود برهم $x'x$ و $y'y$ که در O مشترك هستند مفروض است. بر $x'x$ دو نقطهٔ A و A' به فاصله‌های:

$$OA=OA'=a$$

از O تعیین کرده خط غیر مشخص (D) را در نظر می‌گیریم بقسمی که در نقطه‌ای مانند H بر $y'y$ عمود بوده ودو صفحهٔ [(D) و A] و [(D) و A'] بر یکدیگر عمود باشند.صفحات (P) و (H) را به ترتیب در O و H عمود بر $y'y$ مرور داده و تصویر قائم (D) را بر (P) به (d) نمایش می‌دهیم.

۱) ثابت کنید که (d) مماس مشترك داخلی دو دایرهٔ به مرکزهای A و A' و با شعاع مساوی OH واقع در صفحهٔ (P) می‌باشد. در صفحهٔ (H) دو دایرهٔ به شعاع مساوی با OH وجود دارد که (D) مماس مشترك آنها می‌باشد . I و I' مرکزهای این دو دایره را تعیین کنید .

۲) اگر K و K' نقاط تماس (D) با دایره‌های (I) و (I') باشد طولهای OK و OK' را برحسب a حساب کنید

کلاس ششم طبیعی

۴۳۲۳ـ ترجمهٔ **منوچهر دهقان**

دبیر دبیرستانهای شهر کرد

معادلهٔ هذلولی را تعیین کنید که رأسهایش روی کانونهای بیضی به معادلهٔ :

$$9x^2+16y^2-144=0$$

قرار داشته ورأسهای بیضی نیزروی کانونهای هذلولی واقع باشد

۴۳۲۴ـ منحنیهای نمایش دوتابع :

$$y=\sin\frac{\pi x}{2} \quad و \quad y=\frac{1}{x}$$

را وقتی x در فاصلهٔ (۱۰ و ۰) تغییر کند در یك شکل رسم کنید و از روی آن معلوم کنید که معادلهٔ $x\sin\frac{\pi x}{2}=1$ درفاصلهٔ مزبور دارای چندجواب است و کوچکترین جواب آنهارا تعیین کنید .

کلاس ششم ریاضی

۴۳۲۵ـ دوتابع زیررا درنظرمی‌گیریم:

$$y_1=ax\sqrt{x^2+1} \quad و \quad y_2=\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$$

۱ـ خط Δ به معادلهٔ $x=k$ منحنی (C_1) نمایش‌هندسی تابع y_1 را در M و منحنی‌تابع (C_2) نمایش هندسی تابع y_2 را در N قطع می‌کند. اگر مثلث MNO در رأس O شبه قائمه بوده و (C_1) و (C_2) در نقطهٔ O (مبدأ مختصات) بـر یکدیگر مماس باشند مقادیر a و b را تعیین کنید بـه شرط آنکه‌مقادیر طول‌وعرض‌هریك‌از نقاط M و N هممعلامت باشند.

(مثلث ABC به رأس A شبه قائمه نامیده می‌شود هرگاه تفاضل دو زاویهٔ B و C برابر ۹۰ درجه باشد)

۲ـ به فرض $a=b=1$

اولامنحنیهای (C_1) و (C_2)رادر یك دستگاه‌محورهای مختصات رسم کرده وضع نسبی‌آنها را در نقطهٔ O تعیین‌کنید.

ثانیاً معلوم کنید که به ازاء چه مقادیر از λ خط(D) به معادلهٔ $y=\lambda x$ با هریك از منحنیهای C_1 و C_2 علاوه بـر O متقاطع می‌باشد. اگر (D_1) و (D_2) دو وضع از(D)باشند که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم محورها قرینهٔ یکدیگر باشند و (D_1) منحنی (C_1) را در M و (D_2) منحنی (C_2) را در N قطع کند ثابت کنید که M و N روی خطی عمود بر $x'x$ قرار دارند.

ثالثاًمساحت‌سطح محصور بین دو منحنی و مبدأمختصات و خط $x=k>0$ را حساب کنید .

۴۳۲۶ـ فرستنده : **قوام نحوی**

دبیر دبیرستانهای اصفهان

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC زاویهٔ A قائمه بوده طول وتر $BC=a$ و حاصل‌ضرب نیمسازهای داخلی زاویه های B و C برابر با l^2 می‌باشد.

اولا صحت رابطهٔ زیررا تحقیق کنید:

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{l^2}{4a^2}$$

ثانیاً زاویه‌های B و C را یافته‌و بحث کنید.

ثالثاً اگرI مرکز دایرهٔمحاطی داخلی مثلث باشدصحت رابطهٔ زیررا محقق‌کنید: $BI\cdot CI=\frac{l^2}{2}$

۴۳۲۷ـ ترجمه از مجلهٔ «دانش‌آموز ریاضی»

عددهای صحیح a واقع بین ۱۰۰ و ۲۰۰ را تعیین کنید برای آنکه معادلهٔ $ax^2+x-6=0$ دارای دوجواب منطق باشد .

۴۳۲۸ـ از **حسین خبازیان**

ششم ریاضی دبیرستان نمونه اصفهان

بیضی (E) به قطر اطول AA' و به قطر اقصر BB' مفروض است. به قطرهای AA' و BB' دایره‌های (α)و(β) را رسم می‌کنیم. در امتداد BB' نقطهٔ P را انتخاب کرده‌از آن قاطعی رسم می‌کنیم که بیضی را در C و D و دایره (β) را در A و B قطع بکند. اگر M مزدوج توافقی P نسبت‌به A وB باشدثابت‌کنیدکه‌مزدوج توافقی P نسبت‌به C و D نیز M می‌باشد.

حکم مزبور را در حالتی ثابت‌کنیدکه P' را درامتداد AA' اختیارکرده قاطعی رسم‌کنیم تا دایرهٔ (α) را در A' و B' و بیضی را در C' و D' قطع‌کند .

مسائل متفرقه

۴۳۲۹ـ معادلات زیررا حل‌کنید :

$$1)\quad 50\times\frac{2^{x^2}}{125^x}=\frac{1}{2}\times\frac{8^x}{(5^x)^x}$$

$$2)\quad (a^x-3)a^{2x}-a^{-x}+3=0$$

✲ **۴۳۳۰ـ** ترجمه از روسی توسط :

مصطفی گودرزی طائمه

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\frac{(39-x)\sqrt[5]{x-6}-(x-6)\sqrt[5]{39-x}}{\sqrt[5]{39-x}-\sqrt[5]{x-6}}=30$$

۴۳۳۱ـ ترجمه از مجلهٔ «دانش‌آموز ریاضی»

اگرداشته باشیم :

$f(n)=f(n-1)+2n-1$ ، $n>1$ و $f(1)=1$

مقدار $f(2n)$ را برحسب n بدست آورید.

✲ **۴۳۳۲ـ** از **کاظم حافظی**

مقصود از $\prod_{n=1}^{n}f(n)$ یعنی حاصل ضرب n عامل :

$$f(1)f(2)f(3)\dots f(n-1)f(n)$$

مطلوبست تعیین حاصل‌ضربهای زیر :

$$P=\prod_{n=0}^{n}(4^{3^n}-2^{3^n}+1)$$

۴۳۳۳ـ ترجمهٔ: **جعفر آقایانی چاوشی**

ابعاد مستطیلهایی را تعیین کنید که در آنها مقدار عددی محیط بامقدار عددی مساحت مساوی بوده وبرابر با عددصحیح مفروض باشد ، مسئله را برای مثلث قائم الزاویه‌وبرای مربع بررسی کنید .

✲ ۴۳۳۴ـ ترجمهٔ: **جعفر آقایانی چاوشی**

رأسهای مقابل یك چهار ضلعی کامل را به ترتیب A و A′ ، B و B′ ، C و C′ می‌نامیم . ثابت کنید :

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}$$

۴۳۳۵ـ فرستنده، **محمدرضا نادری**

دانشجوی دانشسرای عالی اهواز

از نقطهٔP واقع در داخل مثلث ABC عمودهای PH، PK ، PLرا به ترتیب بر ضلعهای BC ، CA و AB رسم می‌کنیم ثابت کنید که :

$$(BH^2 - CH^2) + (CK^2 - AK^2) + (AL^2 - BL^2) = 0$$

۴۳۳۶ـ از **علی‌اکبر ایزدفر**

دبیر دبیرستانهای قزوین

مثلثی رسم کنید که در آن $BC = a$ و $b + c = l$ و $h_b + h_c = k$ معلوم است. همچنین مثلثی رسم کنید که از آن $BC = a$ و $|b - c| = l$ و $|h_b - h_c| = k$ معلوم باشد.

۴۳۳۷ـ ترجمهٔ : **مهرداد بزرگزاد**

مطلوبست رسم مثلثی با معلومات زاویهٔ A ، ضلع BC و مجموع دو ارتفاع BE و CF .

۴۳۳۸ـ ترجمه از روسی توسط :

حبیب‌الله گلستان زاده

روی ضلعهای BCAB وCA ازمثلث ABC نقطه‌های M وN وPرا به ترتیب چنان انتخاب می‌کنیم که داشته‌باشیم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \frac{1}{4}$$

خطوط AN ، BP و CM را رسم می‌کنیم ، ازتلاقی آنهامثلث KLR بوجودمی‌آید. مساحت این مثلث رابرحسب مساحت مثلث ABC بدست آورید.

✲ ۴۳۳۹ـ ترجمه از فرانسه

۱) مکان هندسی قطبهای انعکاسهایی را تعیین کنید که دوخط متقاطع مفروض را به دو دایرهٔ متساوی تبدیل می‌کنند.

۲)قطبهای انعکاسهایی‌راتعیین کنید که درآنهاسه ضلع یك مثلث مفروض به‌سه دایرهٔمتساوی تبدیل‌می‌شوند. ثابت کنید که‌در این‌انعکاسها مبدل دایرهٔ محیطی مثلث دایره‌ای است متساوی‌با سه دایرهٔ دیگر.

مسائل فیزیك

ترجمه و انتخاب توسط: **هوشنگ شریفزاده**

برای کلاسهای چهارم

۴۳۴۰ـ از: **جواد جمشیدی**

شعاع بالنی را محاسبه‌کنید که اگر m حجم از گاز A به جرم ملکولی a و n حجم از گاز B به جرم مولکولی b در آن وارد کنیم و آنرا در گاز C به جرم مولکولی c قرار دهیم در شرایط متعارفی بالن به حالت غوطه‌ور باقی‌بماند در صورتی‌که جرم هرمتر مکعب لفاف بالن در شرایط متعارفی p کیلوگرم باشد.

✲ ۴۳۴۱ـ وزن ظاهری یك جسم در مایعی به وزن مخصوص d_1 برابر P_1، و درمایعی به‌وزن مخصوص d_2برابر P_2 ، و در مایعی به وزن مخصوص d_3 برابر P_3 است ثابت کنید که :

$$(d_2 - d_3)P_1 + (d_3 - d_1)P_2 + (d_1 - d_2)P_3 = 0$$

۴۳۴۲ـدر مایعی به وزن‌مخصوصS_1وزن ظاهری‌جسمی W_1 است، ودرمایعی به وزن مخصوص S_2 وزن ظاهری همان جسم W_2 است .

۱ـ وزن واقعی جسم چقدر است؟

۲ـ وزن ظاهری این جسم در مایعی به وزن مخصوص

$$\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$$

چقدر خواهد بود؟

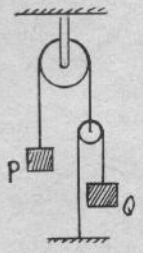
برای کلاسهای پنجم

۴۳۴۳ـ یك دستگاه‌عکسبرداری طوری میزان شده‌است که از جسمی‌که به فاصلهٔ ۱/۵ متری عدسی دستگاه قراردارد تصویر واضحی بر فیلم تشکیل می‌دهد. اگر بخواهیم ازجسمی که در فاصلهٔ ۴ متری از عدسی قرار دارد تصویر واضحی بر فیلم تشکیل دهیم، باید دستگاه را چنان میزان کنیم که عدسی ۴ میلیمتر به فیلم نزدیك شود. تعیین کنیداگربخواهیم این‌دستگاه را روی بینهایت میزان کنیم، چقدر دیگر باید عدسی را به فیلم نزدیك کنیم؟

برای کلاسهای ششم

✻ ۴۳۴۴ـ ترجمهٔ: **بهروز نوبهار**

ششم ریاضی دبیرستان جوینی قوچان



اگر دستگاه قرقره (مطابق شکل مقابل) را ازحالت سکون‌رها نمائیم ، سرعت وزنهٔ Q را پس از $h = 72cm$ سقوط بیابید. از اصطکاك و جرم قرقره ها صرف نظر می‌شود و فرض می‌کنیم :

$$P = Q = 10kgf$$

ضمناً کشش نخ را نیز پیدا کنید.

۴۳۴۵ـ از **سیروس نخعی آشتیانی**

ششم ریاضی دبیرستان هدف ۱

از نقطهٔ A روی سطح شیبداری که با افق زاویهٔ α می‌سازد، جسمی را روی این‌سطح رها می‌کنیم، در همین‌لحظه از نقطهٔ A جسم دیگری‌را تحت زاویهٔ β (نسبت به‌صفحهٔ‌افق) و با سرعت اولیهٔ v_0 پرتاب می‌کنیم. پس از t ثانیه دوجسم به یکدیگر برخورد می‌کنند. ثابت کنید دوزاویهٔ α و β متمم یکدیگر بوده و سرعت اولیهٔ جسم از دستور :

$$v_0 = \frac{1}{2} g t \cos\alpha$$

بدست می‌آید.

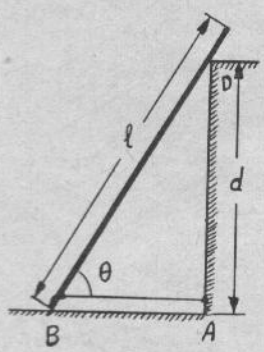
✻ ۴۳۴۶ـ ترجمهٔ: **بهرام حسینخانی**

ششم ریاضی دبیرستان قطب دزفول

جسم A به وزن P روی سطح شیبدار D که با افق زاویهٔ α می‌سازد در حال‌پائین آمدن است وبه‌وسیلهٔ نخی که‌از قرقرهٔ C عبور می‌کند به جسم B به وزن Q متصل است. (از جرم نخ صرف نظرمی‌شود). فشار تولید شده ازسطح شیبدارD به لبه E را حساب کنید .

برای فارغ‌التحصیلان کلاسهای ششم

✻ ۴۳۴۷ـ ترجمهٔ: **سیدجلال آشفته**، دانشجو



میلهٔ BC به طول l وبه‌وزن W بر سطح افقی بدون اصطکاك و برنقطهٔD ، مطابق شکل‌زیر، متکی است بطوری که زاویهٔ BC با افق برابر θ و نقطهٔ B به وسیلهٔ‌ریسمانی به موازات سطح افقی به A وصل شده است. فاصلهٔ $AD = d$ است.

۱ـ نیروهای مؤثر را مشخص کنید.

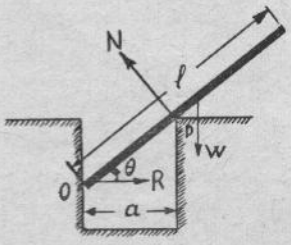
۲ـ شرط تعادل رابنویسیدوبه‌وسیلهٔ آن روابط نیروهای مؤثرمجهول را برحسب θ و W و d و l بدست‌آورید.

مقادیر عددی :

$$d = 10^{ft} \text{ و } l = 14^{ft} \text{ و } W = 18^{lb} \text{ و } \theta = 60^\circ$$

۴۳۴۸ـ ترجمهٔ: **سیدجلال آشفته**

یك‌میله به طول l و به وزن W مطابق‌شکل زیر داخل حفره‌ای قرار دارد. وضع تعادل آنرا با یافتن نیروهای مؤثر مشخص کنید در صورتی که دیوارهٔ طرف‌چپ حفره‌بدون اصطکاك می‌باشد و در این حالت زاویهٔ θ را بر حسب a و l بیابید.



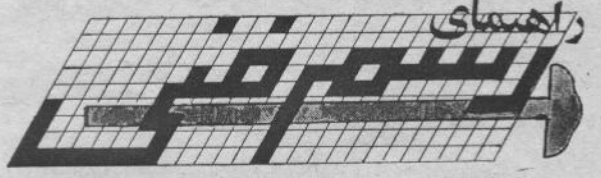
یك مسئلهٔ شیمی

برای استفادهٔ داوطلبان کنکور و دانش‌آموزان ششم ریاضی و طبیعی

طرح از: **محمد رسولزاده** دبیر شیمی دبیرستانهای تبریز

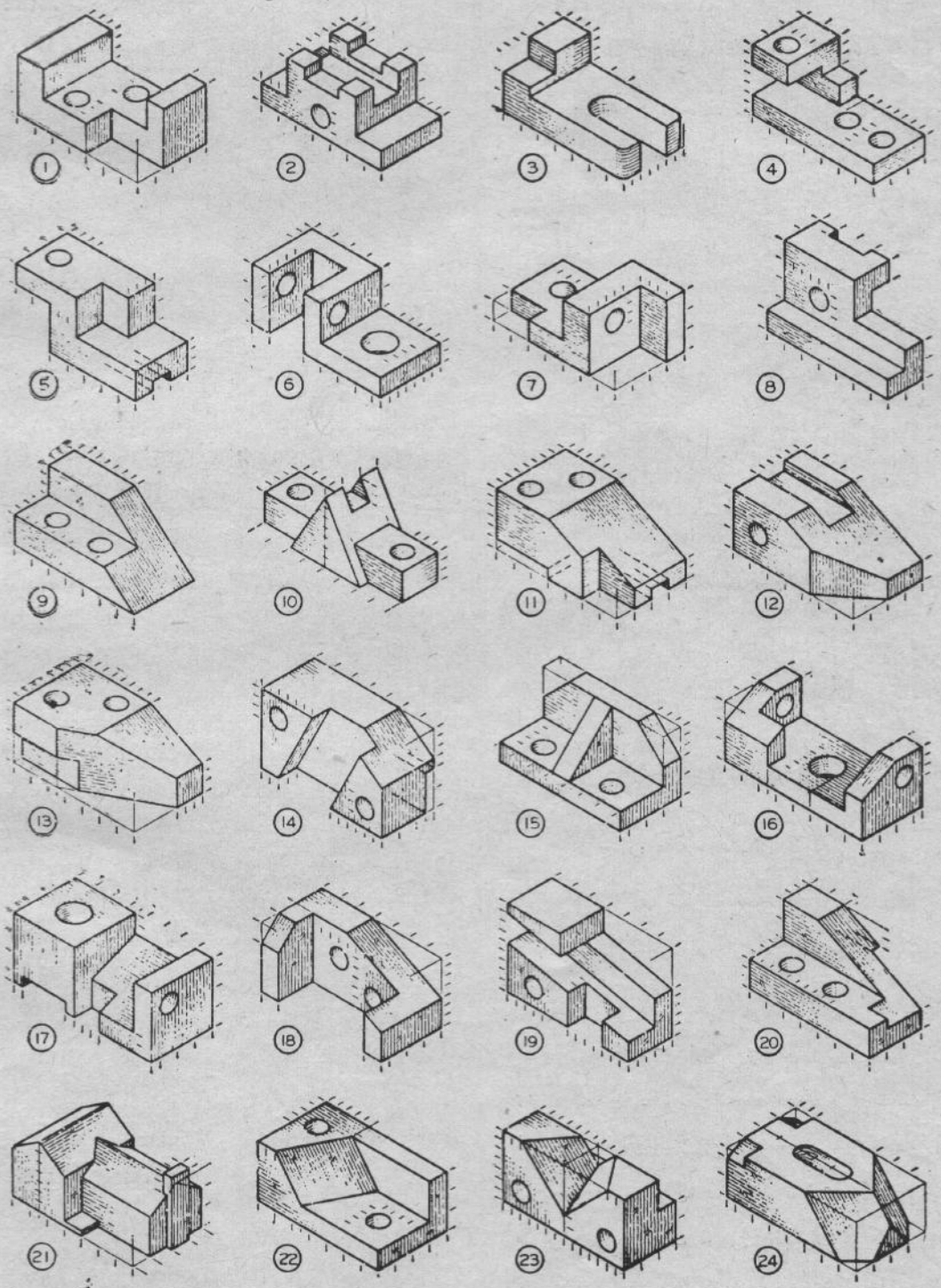
۴۳۴۹ـ تکاثف نسبی بخار جسمی مرکب از کربن و هیدروژن و اکسیژن و ایزولوك با اسید استیك نسبت به‌گازD برابر $\frac{11}{7}$ می‌باشد. هرگاه ۰/۷ گرم از گاز مجهول D را با ۰/۱۲ گرم گاز هیدروژن مخلوط کرده در ظرف ۴ لیتری تخلیه شده واردکنیم و به صد درجهٔ‌حرارت سانتی‌گرادبرسانیم فشارمخلوط برابر ۰/۶۵ اتمسفرمی‌شود. اولافرمول مولکولی این‌جسم را تعیین کنید. ثانیاً تحقیق‌کنید این جسم‌آلی دارای سه ایزومر می‌باشد. فرمول تفسیری هرکدام را بنویسید ثالثاً نام گاز D را پیدا کنید در صورتی‌که بدانیم این گازمجهول با گاز اکسید دوکربن ایزوستر می‌باشد.

دنبالهٔ قضیهٔ پاسکال در پائین صفحهٔ ۲۸۹ درج شده است



مهندس محمود خوئی

تمرین رسم فنی برای دانش آموزان کلاس پنجم ریاضی



مطلوبست رسم تصویر قائم از دید F و تصاویر افق و نیمرخ چپ در ناحیهٔ اول فضا با اندازه گذاری

توضیح - دنبالهٔ مطالب زیر عنوان «راهنمای رسم فنی» مندرج درشمارهٔ ۴۱ در شمارهٔ ۴۳ چاپ خواهد شد

حل مسائل یکان شمارهٔ : ۴۰

کلاس چهارم طبیعی

۴۲۳۱ ـ تعیین حاصل‌ضرب زیر :

$$S=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt[4]{2})\cdots(1+\sqrt[2^n]{2})$$

طرف دوم رایك دفعه در $(1-\sqrt[2^n]{2})$ ضرب ویك دفعه بر آن تقسیم می‌کنیم . باتوجه به اینکه :

$$(1+\sqrt[2^n]{2})(1-\sqrt[2^n]{2})=1-\sqrt[2^{n-1}]{2}$$

$$(1-\sqrt[2^{n-1}]{2})(1+\sqrt[2^{n-1}]{2})=1-\sqrt[2^{n-2}]{2}$$

. . . . . .

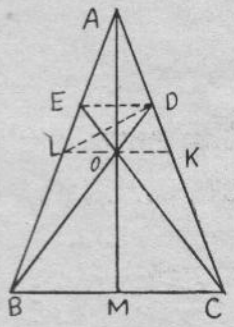
$$(1-\sqrt[4]{2})(1+\sqrt[4]{2})=1-\sqrt{2}$$

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=1-2=-1$$

نتیجه خواهد شد که :

$$S=\frac{-1}{1-\sqrt[2^n]{2}}$$

۴۲۳۲ ـ مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ مفروض است . میانهٔ AM را رسم کرده از نقاط B و C به O وسط AM وصل کرده وامتداد می‌دهیم تا AC و AB را در D و E قطع کنند. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی $ADOE$ یك ششم مساحت مثلث ABC است.



حل ـ از O موازی با BC رسم می‌کنیم که AB و AC رادر K و L قطع می‌کند . L وسط AB و K وسط AC است. DE و DL رانیزرسم می‌کنیم .دومثلث ODE و LDE معادل هستند بنابراین مساحت چهارضلعی $ADEO$ که آنرا با S_1 نمایش می‌دهیم برابر است با مساحت مثلث ADL . مساحت مثلث ADL نصف مساحت مثلث ABD است . پس مساحت ABD برابر می‌شود با $2S_1$ و چون مساحت AEO برابر با نصف S_1 است پس مساحت AOB برابرمی‌شود با :

$$2S_1-\frac{1}{2}S_1=\frac{3}{2}S_1$$

دومثلث ABO و BOM معادل هستند ومساحت مثلث ABM نصف مساحت مثلث ABC یعنی S است بنابراین داریم :

$$\frac{3}{2}S_1=\frac{1}{4}S \Longrightarrow S_1=\frac{1}{6}S$$

کلاس چهارم ریاضی

۴۲۳۳ ـ مخرج کسر زیر را گویا کنید .

$$F=\frac{1}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^3+(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})^3+(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})^3}$$

حل ـ طبق اتحاد شرطی

$$a+b+c=0 \Longrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

کسر F به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})}$$

صورت ومخرج رادرعبارت زیر ضرب می‌کنیم

$$P=(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{z^2})(\sqrt[3]{z^2}+\sqrt[3]{zx}+\sqrt[3]{x^2})$$

نتیجه خواهد شد :

$$F=\frac{P}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

۴۲۳۴ ـ اثبات نامساوی زیر به شرط $l<k<n$

$$\sqrt{n-k}+\sqrt{n+k}<\sqrt{n-l}+\sqrt{n+l}$$

حل ـ اگر طرفین نامساوی راکه هر دومثبت هستند

مجذور کنیم نامساوی دیگری معادل باآن بدست می‌آید :

$$n-k+n+k+2\sqrt{n^2-k^2}<$$
$$n-l+n+l+2\sqrt{n^2-l^2}$$

$$\sqrt{n^2-k^2}<\sqrt{n^2-l^2} \Longrightarrow n^2-k^2<n^2-l^2$$

نامساوی اخیر بنا به نامساوی مضاعف مفروض همواره برقرار است پس نامساویهای معادل با آن نیز برقرار می‌باشند .

۴۲۳۵ـ تعیین x از رابطهٔ زیر .

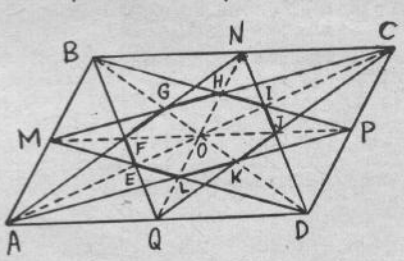
$$\log_{\log_b x} a^n = n$$

حل ـ بنا به تعریف لگاریتم داریم :

$$(\log_b x)^n = a^n \Longrightarrow \log_b x = a \Longrightarrow x = b^a$$

۴۲۳۶ـ در متوازی‌الأضلاع ABCD از هریك از نقطه‌های M ، N ، P و Q اوساط ضلعهای AB ، BC ، CD و DA به دو رأس مقابل وصل می‌کنیم .

اولا ثابت کنید که هر دو خط از خطوط حاصل با یکی از قطرهای AC و BD یا یکی از دو خط MP و NQ در یك نقطه متقارب می‌باشند و به این ترتیب هشت نقطه بدست می‌آید .



ثانیاً این هشت نقطه را متوالیاً به‌یکدیگر وصل می‌کنیم. مساحت هشت ضلعی حاصل را بر حسب مساحت متوازی‌الاضلاع بدست آورید ،

حل ـ در هر متوازی‌الاضلاع BCPM خط NO که اوساط دو ضلع مقابل را به هم وصل می‌کنند از نقطهٔ H محل تلاقی دو قطر MC و BP می‌گذرد. به همین ترتیب سه خط AP و MD و QO در L و سه خط BQ و AN و MO در F و سه خط ND و CQ و PO در J متقارب هستند . در مثلث ABC سه میانهٔ AN و BO و CM در یك نقطهٔ G متقاربند. وبه‌همین ترتیب خطوط BP و DN و CO در I و خطوط CQ وDO و AP در K و خطوط DM وAO و BQ در E متقارب می‌باشند .

ثانیاً ـ مساحت متوازی‌الاضلاع مفروض رابا S ومساحت هشت ضلعی EFGHIJKL را با S_1 نمایش می‌دهیم . مثلث OHG با مثلث GHN و مثلث GFO با GMF معادل است و چون دو مثلث GHN و GMF نیز متعادل هستند (دوخط FH و MN با یکدیگر موازی‌اند) بنابراین دومثلث OGH و OGF باهم معادل هستند. باتوجه به تقارن نسبت به O معلوم خواهدشدکه هرهشت مثلثی که از وصل کردن O به‌رأسهای هشت ضلعی تشکیل شده باهم معادل بوده مساحت هرکدام از آنها $\frac{S_1}{8}$ می‌باشد وداریم:

$$S_{NOF}=\frac{3S_1}{8}=\frac{1}{4}S_{NAQ}=\frac{1}{8}S_{NQAB}=\frac{1}{16}S$$

$$\Longrightarrow S_1=\frac{1}{6}S$$

کلاس پنجم طبیعی

۴۲۳۷ ـ خطوط D و D' به معادله های

$$2y+x-4 \text{ و } 2y-x=2$$

یکدیگررا در P قطع می‌کنند . مختصات P را حساب کنید و معادلهٔ Δ که با OP موازی بوده‌عرض ازمبدأ آن b است‌بدست آورید. خط Δ دوخط D و D' رادر Q و R قطع می‌کند . مقدار b راچنان تعیین کنید که چهارضلعی POQR متوازی‌الاضلاع باشد .

حل ـ

$$P\begin{cases}2y-x=2\\2y+x=4\end{cases} \Longrightarrow P(1 \text{ و } \frac{3}{2})$$

$$m_{OP}=\frac{3}{2} \Longrightarrow (\Delta) : y=\frac{3}{2}x+b$$

$$Q\begin{cases}2y-x=2\\y=\frac{3}{2}x+b\end{cases} \Longrightarrow Q(1-b \text{ و } \frac{3-b}{2})$$

$$R\begin{cases}2y+x=4\\y=\frac{3}{2}x+b\end{cases} \Longrightarrow R(\frac{2-b}{2} \text{ و } \frac{6+b}{4})$$

$$x_P+x_Q=x_O+x_R \Longrightarrow b=2$$

۴۲۳۸ـ معادلهٔ $x^2+2ax+b=0$ را در نظر می‌گیریم. به‌فرض آنکه جوابهای این معادله عبارت باشنداز:

$$x'=tg(\frac{3\pi}{2}+\alpha) \text{ و } x''=cotg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$$

مقدار b را بدست آورید و نیز مقدار $tg\alpha$ را برحسب a حساب

کرده و اگر $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد دستور کلی تعیین کمانهای α را بدست آورید.

حل ـ

$$x'=-cotg\alpha \quad و \quad x''=tg\alpha$$

$$b=x'x''=-tg\alpha cotg\alpha=-1$$

$$x'+x''=-2a \quad یا \quad tg\alpha-cotg\alpha=-2a$$

$$tg\alpha-\frac{1}{tg\alpha}=-2a \quad یا \quad tg^2\alpha+2atg\alpha-1=0$$

$$tg\alpha=-a\pm\sqrt{a^2+1}$$

$$a=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ tg\alpha=1 \quad یا \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4} \quad یا \quad k\pi-\frac{\pi}{6}$$

کلاس پنجم ریاضی

۴۲۳۹ـ معادلات اضلاع مثلثی عبارتند از :

$$AB:\ 2x-(1-b)y-2a=0$$

$$BC:\ (b-2)x+y-b=0$$

$$CA:\ bx+ay-ab=0$$

به‌فرض اینکه معادلهٔ :

$$(\lambda+3)x+(5-\lambda)y-8=0$$

معرف دسته خطوطی باشد که از G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC می‌گذرند مقادیر ضرایب a و b را بدست آورید.

حل ـ ابتدا مختصات سه رأس مثلث را حساب کرده‌از روی آن مختصات G را تعیین می‌کنیم می‌شود :

$$G\ (x=\frac{a+1}{3} \quad و \quad y=\frac{b+2}{3})$$

معادلهٔ دسته خطوط به صورت :

$$(x-y)\lambda+3x+5y-8=0$$

نوشته شده درنتیجه مختصات نقطهٔ ثابت دسته خطوط می‌شود:

$$G(x=1 \quad و \quad y=1)$$

$$\frac{a+1}{3}=1 \Longrightarrow a=2 \quad و \quad \frac{b+2}{3}=1 \Longrightarrow b=1$$

۴۲۴۰ـ حل این مسئله زیر عنوان «حل مسائل نمونه» در همین شماره مندرج است.

۴۲۴۱ـ تعیین مقدار x از روابط زیر:

$$\begin{cases} x=tga+tgb \\ 2x=tg^2a+tg^2b \\ 3x=tg^3a+tg^3b \end{cases}$$

حل ـ روابط را چنین می‌نویسیم :

$$\begin{cases} x=tga+tgb \\ 2x=(tga+tgb)^2-2tgatgb \\ 3x=(tga+tgb)^3-3tgatgb(tga+tgb) \end{cases}$$

از معادلات اول ودوم نتیجه می‌شود :

$$tga\ tgb=\frac{x^2-2x}{2}$$

که چون در معادلهٔ سوم منظور کنیم بعداز اختصار خواهیم داشت :

$$x(x^2-6x+6)=0 \qquad (1)$$

با توجه به اینکه باید دستگاه :

$$\begin{cases} tga+tgb=x \\ tga\cdot tgb=\frac{x^2-2x}{2} \end{cases}$$

یا معادلهٔ حلال آن

$$Z^2-xZ+\frac{x^2-2x}{2}=0$$

دارای جواب باشد که شرط آن عبارت می‌شود از:

$$\Delta=x^2-2(x^2-x)\geqslant 0 \quad یا$$

$$-x^2+2x\geqslant 0 \Longrightarrow 0\leqslant x\leqslant 2$$

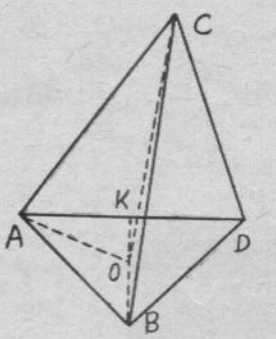
جوابهای قابل قبول معادلهٔ (۱) عبارت خواهد شداز:

$$x=0 \quad و \quad x=3-\sqrt{3}$$

۴۲۴۲ـ در چهاروجهی ABCD داریم :

$$AB=BD=2/5 \quad و \quad AD=3$$

$$CA=CB=CD=4$$



مقدار کسینوس α زاویهٔ میل خط AC را نسبت به‌صفحهٔ ABD بدست آورید.

حل ـ O تصویر C بر صفحهٔ ABD مرکز دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الساقین ABD می‌باشد .

در این مثلث داریم :

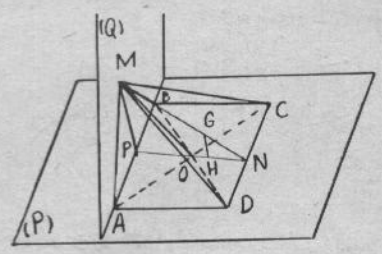
$$BK=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AK}^2}=2$$

$$\sin A=\frac{BK}{AB}=\frac{2}{2/5}=\frac{4}{5}$$

$$2R=\frac{BD}{\sin A} \Longrightarrow R=OA=\frac{25}{16}$$

$$\cos\alpha=\frac{OA}{AC}=\frac{25}{64}$$

۴۲۴۳ـ در صفحهٔ P مربع ABCD به طول ضلع a مفروض است. صفحهٔ Q را بر AB و عمود بر صفحهٔ P می‌گذرانیم. مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحهٔ Q را تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آنها از رأسهای مربع برابر مقدار ثابت k^2 باشد. اگر G مرکز ثقل مثلث MCD باشد مکان هندسی نقطهٔ G را نیز پیدا کنید.



حل ـ اگر O مرکز مربع و P وسط AB باشد داریم:

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=k^2$$

$$MA^2+MC^2=2MO^2+a^2$$

$$MB^2+MD^2=2MO^2+a^2$$

$$4MO^2+2a^2=k^2 \quad \text{و} \quad MP^2=MO^2-PO^2$$

$$MP^2=\frac{k^2-3a^2}{4}$$

به شرط $k>a\sqrt{3}$ مکان M دایره‌ای خواهد بود به مرکز P و به شعاع $\frac{\sqrt{k^2-3a^2}}{2}$.

ثانیاً ـ اگر از G موازی با MP رسم کنیم تا صفحهٔ P را در H قطع کند خواهیم داشت:

$$\frac{GH}{PM}=\frac{NG}{NM}=\frac{1}{3}$$

نقطهٔ H و طول GH ثابت می‌باشد. پس مکان G دایره‌ای است واقع در صفحهٔ موازی Q و به مرکز H و به شعاع

$$\frac{\sqrt{k^2-3a^2}}{6}$$

کلاس ششم طبیعی

۴۲۴۴ـ A و B نقاط نظیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع

$$y=x^3-3x+a$$

می‌باشند. مطلوبست تعیین مقدار a برای آنکه دایرهٔ به قطر AB بر خط به معادلهٔ $y=x+\lambda$ مماس باشد.

حل ـ اگر C وسط AB باشد داریم:

$$y'=3x^2-3=0$$

$$\Longrightarrow A(1 \text{ و } a-2) \quad \text{و} \quad B(-1 \text{ و } a+2)$$

$$C(0 \text{ و } a) \quad \text{و} \quad R=\frac{AB}{2}=\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=5 \\ y=x+\lambda \end{cases}$$

$$2x^2+2(\lambda-a)x+(\lambda-a)^2-5=0$$

$$\Delta=(\lambda-a)^2-2(\lambda-a)^2+10=0$$

$$(\lambda-a)^2=10 \Longrightarrow a=\lambda\pm\sqrt{10}$$

۴۲۴۵ـ به‌ازاء چه مقادیر از کمان α خط به‌معادلهٔ:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$$

از مرکز دایرهٔ به معادلهٔ زیر می‌گذرد:

$$x^2+y^2+2x-6y=0$$

حل ـ معادلهٔ دایره می‌شود:

$$(x+1)^2+(y-3)^2=10 \Longrightarrow C(-1 \text{ و } 3)$$

$$-\cos\alpha+3\sin\alpha=1$$

چون بنا به قاعدهٔ مربوط به معادلهٔ کلاسیک نوع اول عمل کنیم خواهیم داشت:

$$\alpha=2k\pi+\pi \quad \text{یا} \quad \alpha=2k\pi+2\operatorname{Arccotg}3$$

کلاس ششم ریاضی

۴۲۴۶ـ اگر معادلهٔ محور اصلی دو دایرهٔ:

$$(C):(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=4$$

$$(C'):(x-\beta)^2+(y-\gamma)^2=9$$

عبارت باشد از $x-3y+2=0$ مقادیر α و β و γ را پیدا کنید.

حل ـ معادلهٔ محور اصلی دو دایرهٔ (C) و (C') از تفاضل معادلات آنها بدست می‌آید که عبارت می‌شود از:

$$2(\alpha-\beta)x+2(\beta-\gamma)y+\gamma^2-\alpha^2-5=0$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \alpha-\beta=\frac{1}{2} \\ \beta-\gamma=-\frac{3}{2} \\ \gamma^2-\alpha^2-5=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{3}{4} \\ \beta=\frac{7}{4} \\ \gamma=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

۴۲۴۷ـ اولا ثابت کنید اگر در تابع $y=f(x)$ یا $f(x \text{ و } y)=0$ تبدیل $x=y-b$ و $y=x+b$ را انجام دهیم و عبارت

تابع فرق نکند خط به معادلهٔ $y=x+b$ محور تقارن منحنی نمایش تابع است.

ثانیاً معلوم کنید برای اینکه خط به معادلهٔ

$$y=-x+b$$

محور تقارن یك منحنی باشد چه تبدیلاتی از نوع تبدیلات فوق را باید انجام دهیم تا عبارت تابع فرق نکند.

ثالثاً با استفاده از آنچه گفته شد چگونه می‌توان معلوم کرد یك منحنی دارای محور تقارنی موازی با یکی از نیمسازهای محورها هست یا نه؟

حل ـ می‌دانیم که اگر در تابع $y=f(x)$ یا

$$f(x \text{ و } y)=0$$

الف ـ x را به y و y را به x تبدیل کنیم و عبارت تابع فرق نکند نیمساز ربع اول و سوم محورها محور تقارن منحنی است.

ب ـ تبدیل $x=-y$ و $y=-x$ را انجام دهیم و عبارت تابع فرق نکند نیمساز ربع دوم و چهارم محور تقارن منحنی است.

اولا و ثانیاً ـ $y=f(x)$ یا $f(x \text{ و } y)$ را در نظر می‌گیریم. محورهای مختصات را انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ $O'(b \text{ و } 0)$ مبدأ جدید باشد. در دستگاه جدید $XO'Y$ تبدیل $(X=Y \text{ و } Y=X)$ معلوم می‌کند که آیا نیمساز ربع اول وسوم محورها یعنی خط به معادلهٔ $Y=X$ محور تقارن منحنی تابع $Y=f(X)$ یا $f(X \text{ و } Y)=0$ هست یا نه و تبدیل

$$(X=-Y \text{ و } Y=-X)$$

تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم یعنی خط به معادلهٔ $Y=-X$ را معلوم می‌کند. اما داریم:

$$X=x \text{ و } Y=y-b$$

و نتیجه خواهد شد که:

الف ـ وقتی خط به معادلهٔ $y=x+b$ (خط موازی با نیمساز اول و سوم) محور تقارن یك منحنی است که تبدیل:

$$(x=y-b \text{ و } y=x+b)$$

معادلهٔ منحنی را تغییر ندهد.

ب ـ وقتی خط به معادلهٔ $y=-x+b$ (موازی نیمساز دوم و چهارم) محور تقارن منحنی است که تبدیل:

$$(x=-y+b \text{ و } y=-x+b)$$

معادلهٔ منحنی را تغییر ندهد.

ثالثاً ـ برای اینکه معلوم کنیم یك منحنی محور تقارنی موازی با نیمساز محور ها دارد یا نه، تبدیلات فوق را عمل می‌کنیم و شرطی می‌نویسیم تا معادلهٔ منحنی فرق نکند. دراین صورت اگرچنین شرطی امکان داشت منحنی‌دارای‌چنین‌محور تقارنی می‌باشد که معادلهٔ آنهم با تعیین b بدست آمده است.

مثال ۱ـ ثابت کنید که خط به‌معادلهٔ $y=x-1$ محور تقارن منحنی نمایش تابع $y=\frac{x+1}{x-2}$ می‌باشد.

x را به $y+1$ و y را به $x-1$ تبدیل می‌کنیم:

$$x-1=\frac{y+2}{y-1} \Longrightarrow y=\frac{x+1}{x-2}$$

معادلهٔ منحنی فرق نکرد پس خط مزبور محور تقارن منحنی می‌باشد.

مثال ۲ـ ثابت کنید که منحنی نمایش تابع:

$$(x+y)^2=2(x+3y-1)$$

دارای محور تقارنی به معادلهٔ $y=-x+2$ می‌باشد.

تبدیل $x=-y+2$ و $y=-x+2$ را انجام می‌دهیم:

$$(-y-x+4)^2=2(-y-3x+7)$$

بعد از اختصار همان معادلهٔ مفروض بدست می‌آید. پس خط مزبور محور تقارن منحنی است.

مثال ۳ـ منحنی نمایش تابع:

$$y=5x+2\pm 2\sqrt{6x^2+3}$$

دارای دومحور تقارن به‌موازات نیمسازهای زاویه‌های محورها می‌باشد. معادلات آنها را بدست آورید.

حل ـ تابع مفروض بعداز اختصار چنین می‌شود:

$$x^2+y^2-10xy+20x-4y-8=0$$

فرض می‌کنیم $y=x+b$ محور تقارن منحنی باشد پس‌تبدیل $x=y-b$ و $y=x+b$ را انجام می‌دهیم:

$$(y-b)^2+(x+b)^2-10(y-b)(x+b)+$$
$$+20(y-b)-4(x+b)-8=0$$

$$x^2+y^2-10xy+(12b-4)x+$$
$$+(-12b+20)y+12b^2-24b-8=0$$

برای اینکه این معادله همان معادلهٔ مفروض باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 12b-4=20 \\ -12b+20=-4 \\ 12b^2-24b-8=-8 \end{cases} \Longrightarrow b=2$$

پس خط $y=x+2$ یك محور تقارن منحنی است.

به طریق مشابه ثابت خواهد شد که خط:

$$y=-x+2$$

نیز محور تقارن منحنی می‌باشد.

۴۲۴۸ـ حل معادلهٔ زیر :

$$(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x)(\cos^2 x+$$
$$+\cos^2 2x+\cos^2 3x)=2\sin^2 3x\cos^2 2x\cos^2 x$$

حل ـ عبارت طرف دوم را به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم که به صورت زیر در می‌آید:

$$\ldots=(\sin 3x\cos 3x+\sin 2x\cos 2x+\sin x\cos x)^2$$

طبق اتحاد لاگرانژ

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$$
$$\equiv(bx-ay)^2+(cx-az)^2+(cy-bz)^2$$

معادلهٔ مزبور عبارت می‌شود از :

$$(\sin 2x\cos x-\sin x\cos 2x)^2+$$
$$+(\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x)^2$$
$$+(\sin 3x\cos 2x-\sin 2x\cos 3x)^2=0$$
$$2\sin^2 x+\sin^2 2x=0 \Longrightarrow \sin^2 x=0 \text{ و } x=k\pi$$

۴۲۴۹ـ۱) کوچکترین عدد صحیح را پیدا کنید بقسمی که نصف آن مربع کامل و ثلث آن مکعب کامل باشد .

۲) کوچکترین عدد صحیح را پیدا کنید که نصف آن مربع کامل، ثلث آن مکعب کامل و خمس آن توان پنجم کامل باشد .

حل ۱ـ عدد مطلوب به فرم زیر است:

$$N=2^{2k+1}\times 3^{3l+1}$$

بقسمی k و l در روابط زیر صدق کنند

$$2k+1=3m \text{ و } 3l+1=2n$$

عددهای m و l فرد هستند. کوچکترین عدد به ازاء $m=l=1$ عبارت می‌شود از:

$$N=2^3\times 3^4=648$$

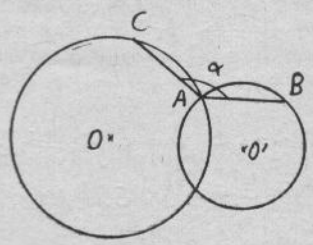
۲) عدد مطلوب به فرم زیر است :

$$N=2^{2k+1}\times 3^{3l+1}\times 5^{5n+1}$$
$$2k+1=15m \text{ و } 3l+1=10n \text{ و } 5h+1=6p$$

کوچکترین عدد به ازاء $m=n=p=1$ حاصل می‌شود که برابر است با :

$$N=2^{15}\times 3^{10}\times 5^6=30233088\times 10^6$$

۴۲۵۰ـ دو دایرهٔ O و O′ در نقطهٔ A مشترک هستند وتر AB را در دایرهٔ O و وتر AC را در دایرهٔ O′

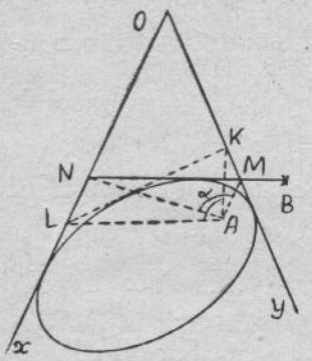


چنان رسم کنید که $AB=AC$ بوده و زاویهٔ BAC برابر با مقدار معلوم α باشد.

حل ـ اگر مسئله حل شده باشد چون دایرهٔ O′ را حول نقطهٔ A به زاویهٔ α دوران دهیم نقطهٔ B بر نقطهٔ C منطبق خواهد شد. بنابراین برای حل مسئله دایرهٔ O′ را به مرکز A و به زاویهٔ α دوران می‌دهیم تا دایرهٔ O را در C قطع کند، با تعیین نقطهٔ C نقطهٔ B نیز بدست خواهد آمد. مسئله حد اکثر دوجواب می‌تواند داشته باشد.

۴۲۵۱ ـ زاویهٔ xOy و نقطهٔ A واقع درداخل آن و یك نقطهٔ دیگر B واقع درصفحهٔ آن مفروض است . از B خطی رسم کنید که اگر Ox رادر M و Oy رادر N قطع کند زاویهٔ MAN برابر بامقدار معلوم α باشد.

حل ـ قطعه خط مماس متحرك محصور بین دومماس ثابت بر بیضی ازهر کانون بیضی به‌زاویهٔ ثابت دیده می‌شود . نقاط K و L رابر Oy و Ox چنان انتخاب می‌کنیم که قطعه خط KL از A به زاویهٔ α دیده شود. بیضیی رسم می‌کنیم که برسه‌خط Ox و Oy و KL مماس بوده یك کانون آن A باشد خطی که از B براین بیضی مماس شود خط‌مطلوب خواهد بود .



مسائل متفرقه

۴۲۵۲ـ حل دستگاه معادلات زیر:

$$\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2\\ \log_{y^3} x^2=3-7\log_{y^3} 2\end{cases}$$

معادلهٔ اول چنین می‌شود :

$$\log_y x+\frac{1}{\log_y x}=2 \Longrightarrow \log_y x=1 \Longrightarrow x=y$$

درمعادلهٔ دوم قرارمی‌دهیم که چنین می‌شود:

$$\frac{2}{3}=3-7\log_{y^3} 2 \Longrightarrow \log_{y^3} 2=\frac{1}{3}$$
$$\Longrightarrow y=x=2$$

۴۲۵۳ ـ اگرعدد $n+2$ رقمی A_n به شکل

$$A_n=\overline{1(a+1)(a+1)\cdots(a+1)a}$$

باشد حاصل جمع زیررا حساب کنید .

$$S=\sum_{n=0}^{n} A_n$$

$$\Sigma A_n=\overline{1a}+\overline{1(a+1)a}+\overline{1(a+1)(a+1)a}+\dots+\overline{\underbrace{1(a+1)\dots(a+1)}_{n\text{مرتبه}}a}$$

حل ـ داریم

$$\Sigma A_n=1\times\overline{1a}+11\times\overline{1a}+\dots+11\dots11\times\overline{1a}$$

$$\Sigma A_n=\frac{1}{9}\times\overline{1a}(9+99+999+\dots+\underbrace{99\dots9}_{n+1\text{مرتبه}})$$

$$\Sigma A_n=\frac{1}{9}\times\overline{1a}\left(\frac{10^{n+2}-10}{10-1}-n\right)=$$

$$\left(\frac{10^{n+2}-9n-10}{81}\right)\overline{1a}$$

۴۲۵۴ ـ درمثلث ABC نقاط M ، N و P رابه ترتیب برضلعهای BC ، CA و AB چنان انتخاب شده‌اند که:

$$\frac{BM}{BC}=\frac{CN}{CA}=\frac{AP}{AB}=K$$

می‌باشد. اگرسه‌خط AM ، BN و CP دریك نقطهٔ I متقارب باشند ثابت کنید که این خطوط میانه های مثلث می‌باشند.

حل ـ بنابه قضیهٔ سوا وصرف نظرازعلامت داریم:

$$\frac{MB}{MC}\times\frac{NC}{NA}\times\frac{PA}{PB}=1$$

$$\frac{ak}{a-ak}\times\frac{bk}{b-bk}\times\frac{ck}{c-ck}=1$$

$$k^3=(1-k)^3 \implies k=\frac{1}{2}$$

یعنی M ، N و P اوساط اضلاع می‌باشند.

۴۲۵۵ ـ روی ضلعهای AB ، BC و CA از مثلث ABC نقطه های M ، N و P را چنان انتخاب می کنیم که:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=K$$

اگر نسبت مساحت مثلث MNP بمساحت مثلث ABC را y فرض کنیم حدودتغییرات y راتعیین کنید، درحالت $y=0/28$ مقدار K نظیرآنرا معلوم کنید.

حل ـ اگردومثلث دریك زاویه مساوی (یامکمل) باشند نسبت مساحتهای آنها برابراست بانسبت حاصل ضربهای اضلاع این زاویه . مساحت مثلث ABC رابا S و ازمثلثهای AMP ، BMN ، CPN و MNP رابه ترتیب با S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 نمایش می‌دهیم . روابط زیررا داریم :

$$\frac{S_1}{S}=\frac{AM}{AB}\times\frac{AP}{AC}=\frac{K}{K+1}\times\frac{1}{K+1}=\frac{K}{(K+1)^2}$$

$$\frac{S_2}{S}=\frac{S_3}{S}=\frac{K}{(K+1)^2}$$

$$y=\frac{S_4}{S}=\frac{S-(S_1+S_2+S_3)}{S}=1-\frac{3K}{(K+1)^2}$$

این معادله را نسبت به K مرتب می کنیم می‌شود :

$$(y-1)K^2+(2y+1)K+y-1=0$$

$$\Delta=12y-3\geqslant 0 \implies y\geqslant\frac{1}{4}$$

به‌ازاء $y=0/28$ بعدازاختصارخواهیم داشت :

$$6K^2-13K+6=0 \implies K=\frac{3}{2}\ \text{یا}\ \frac{2}{3}$$

۴۲۵۶ ـ تابع y رابه صورت چندجمله‌ای صحیح نسبت به x چنان تعیین کنید که اگر y' مشتق آن باشد داشته باشیم:

$$y-y'=x^n$$

حل ـ چون تفاضل هرتابع چندجمله‌ای صحیح بامشتق آن‌چندجمله‌ای است‌همدرجهٔ خود تابع، بنابراین تابع مطلوب ازدرجهٔ n می‌باشد وآنرا به‌صورت زیرفرض می کنیم .

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

$$y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-1}$$

چون تفاضل دوچندجمله‌ای بالارا تعیین کرده متحد با x^n قرار دهیم ضرایب معلوم می‌شوند .

راه دوم ـ فرض می کنیم رابطهٔ مطلوب برقرار باشد از طرفین آن متوالیاً مشتق‌می گیریم. چون‌تابع y ازدرجهٔ n است بنابراین مشتق مرتبهٔ $n+1$ ام‌آن صفر بوده خواهیم داشت:

$$y-y'=x^n$$

$$y'-y''=nx^{n-1}$$

$$y''-y'''=(n-1)nx^{n-2}$$

.....

$$y^{(n)}-y^{(n+1)}=1\times2\times3\times\dots\times(n-1)n$$

ازجمع نظیر به نظیر طرفین تساویهای بالاخواهیم داشت :

$$y = x^n n + x^{n-1} + (n-1)nx^{n-2} + \cdots + 1\times 2\times 3\times \cdots \times (n-1)n$$

۴۲۵۷ ـ ثابت کنید در هر مثلث مجموع فواصل مرکز دایـرهٔ محیطی از سه ضلع برابر است با مجموع شعاع دایرهٔ محیطی وشعاع دایرهٔ محاطی داخلی .

حل ـ اولا به‌سادگی می‌توان ثابت کرد (باارائهٔ یك نمونه) که حکم مزبور در مورد مثلث منفرجـه‌الزاویه صادق نیست . اگردرمثلث حاده‌الزوایای ABC نقطهٔ O مرکزدایرهٔ محیطی و A' و B' و C' به‌ترتیب‌اوساط اضلاع BC ، CA و AB باشد زاویهٔ $A'OB$ با زاویهٔ A برابراست ونتیجه می‌شودکه $OA' = R\cos A$ و به همین ترتیب OB' و OC' تعیین‌شده خواهیم داشت :

$$OA' + OB' + OC' = R(\cos A + \cos B + \cos C)$$
$$= R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = R + r$$

۴۲۵۸ ـ اگر H نقطهٔ تلاقی ارتفاعات AD ، BE و CF و R شعاع دایـرهٔ محاطی داخلـی مثلث ABC باشد ثابت کنید که : $HD + HE + HF \leqslant 3r$

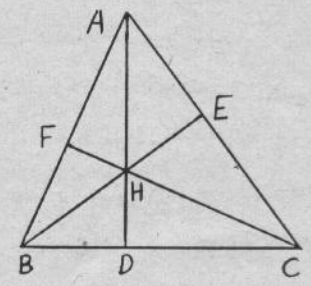
حل ـ اولا به‌سادگی(باارائهٔ یك نمونه) ثابت می‌شودکه حکم در مورد مثلث منفرجه الزاویه صادق نیست .

ثانیاًوقتی مثلث حادالزوایا باشد درمثلث HBC داریم:

$$HD = \frac{a}{tg B + tg C} = 2R\cos B\cos C$$

و خواهیم داشت :

$$HD + HE + HF = 2R(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$$



فرض می‌کنیم یکی اززاویه‌های مثلث مثلا C ثابت‌مانده دوزاویهٔ دیگرتغییر کنند دراین صورت تابع:

$$y = \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] +$$
$$2\cos C\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} =$$
$$\frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos C + 2\cos C\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

وقتی‌ماکزیمم‌است که $A = B$ باشد. اگرزاویهٔ دیگری ازمثلث راثابت اختیارکنیم بازمعلوم خواهدشدکه y وقتی ماکزیمم‌است که دوزاویهٔ دیگر باهم برابر باشند . نتیجه می‌شودکه تابع y وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

بنابراین داریم :

$$\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A \leqslant \frac{3}{4}$$

تساوی وقتی است که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشدکه در این حالت هم $R = 2r$ بوده خواهیم داشت :

$$HD + HE + HF \leqslant 3r$$

۴۲۵۹ـ اگر a ، b و c اندازه‌های ضلعها، S مساحت، R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد صحت نامساویهای زیر را ثابت کنید :

۱) $4\sqrt{3}S \leqslant \frac{9abc}{a+b+c}$

۲) $2\sqrt{3}S \leqslant 9rR$

۳) $\cot g A + \cot g B + \cot g C \geqslant \frac{\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{9abc}$

۴) $\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C \geqslant 2\sqrt{3}$

حل ـ می‌دانیم که درهرمثلث :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow$$

$$a + b + c \leqslant 3\sqrt{3}R \quad (\alpha)$$

$$R = \frac{abc}{4S} \Longrightarrow a + b + c \leqslant \frac{3\sqrt{3}abc}{4S} \Longrightarrow$$

$$4\sqrt{3}S \leqslant \frac{9abc}{a+b+c}$$

۲) باتوجه به اینکه $2S = r(a+b+c)$ از نامساوی (α) نتیجه خواهدشد :

$$2S \leqslant 3\sqrt{3}rR \Longrightarrow 2\sqrt{3}S \leqslant 9rR$$

۳) درهرمثلث داریم :

$$abc(cotg A + cotg B + cotg C) = 2R(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C) = 2R\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right) = R(a^2+b^2+c^2)$$

$$cotg A + cotg B + cotg C = \frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}$$

با توجه به رابطهٔ (α) نامساوی مطلوب بدست می‌آید .

۴) باتوجه به روابط سینوسها خواهیم داشت:

$$\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C = 2R\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

اما می‌دانیم که :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$$

وازروی آن نامساوی مطلوب‌حاصل می‌شود .

۴۲۶۰ ـ ثابت‌کنید که تابع :

$$y = E(x) + \sqrt{x - E(x)} \quad , \quad x \geqslant 0$$

اتصالی است و منحنی نمایش هندسی آنرا رسم‌کنید . مقصود از $E(x)$ بزرگترین عددصحیح موجود در x می‌باشد .

حل ـ اگرداشته‌باشیم $n < x < n+1$ خواهیم‌داشت $E(x) = n$ وتابع‌به‌صورت $y = n + \sqrt{x-n}$ بدست‌می‌آید که باید ثابت‌کنیم به‌ازاء مقادیرصحیح x پیوسته است.

به ازاء $x = n$ $(n > 0)$ داریم $E(x) = n$ و

$$y = n + \sqrt{n-n} = n$$

به ازاء $x = n - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ داریم $E(x) = n - 1$

$$y = n - 1 + \sqrt{n - \varepsilon - (n-1)} = n - 1 + \sqrt{1-\varepsilon}$$

وقتی $\varepsilon \to 0$ یعنی x با مقادیر کوچکتر از n به سمت n میل کند حد y برابرمی‌شود با $n - 1 + 1 = n$

به‌ازاء $x = n + \varepsilon$ ، $(\varepsilon > 0)$ داریم $E(x) = n$ و

$$y = n + \sqrt{n + \varepsilon - n} = n + \sqrt{\varepsilon}$$

وقتی $\varepsilon \to 0$ یعنی n با مقادیر بزرگتراز n به‌سمت n میل کندحد y برابرمی‌شود با n .

بنابراین تابع‌مفروض به‌ازاء $x = n$ پیوسته است .

وقتی $x = 0$ باشد $y = 0$ بوده‌ودر ازاء $x = \varepsilon$ داریم $y = \sqrt{\varepsilon}$ که اگر $\varepsilon \to 0$ حد y برابر باصفرمی‌شود. بنابراین تابع به ازاء جمیع مقادیرمتعلق به فاصلهٔ $[0 \text{ و } +\infty]$ پیوسته می‌باشد .

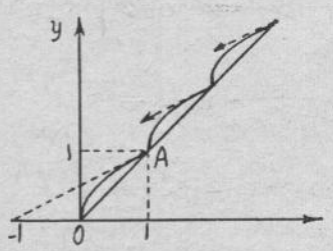
برای رسم منحنی نمایش تابع قبلا ملاحظه می‌کنیم که :

$$E(x+1) = E(x) + 1$$

$$y(x+1) = E(x+1) + \sqrt{x+1-E(x+1)} = E(x) + 1 + \sqrt{x - E(x)}$$

$$y(x+1) = y(x) + 1$$

نتیجه می‌شود که اگر (C_0) منحنی نمایش تابع درفاصلهٔ $(0 \text{ و } 1)$ باشد برای رسم (C_1) منحنی مربوط به‌فاصلهٔ $(1 \text{ و } 2)$ کافی است که C_0 را به بردار $\overrightarrow{OA}$ انتقال داد . وبه همین ترتیب دنبالهٔ منحنی رارسم‌کرد. امادر فاصلهٔ $(0 \text{ و } 1)$ تابع به‌صورت $y = \sqrt{x}$ می‌باشد که مشتق‌آن‌در ازاء $x = 0$ برابربا ∞ و در ازاء $x = 1$ برابر با ۱ است ، یعنی منحنی درمبدأ برمحور y هاودرنقطهٔ $(1 \text{ و } 1)$ برخط به ضریب زاویهٔ ۱ مماس است .



۴۲۶۱ ـ u_0 عددی است‌مثبت ومخالف با $\sqrt{2}$ ،رشتهٔ اعداد زیررا درنظرمی‌گیریم :

$$u_0 \text{ و } u_1 \text{ و } u_2 \text{ و } \dots \text{ و } u_{n-1} \text{ و } u_n \text{ و } \dots$$

که هرجملهٔ‌آن ازرابطهٔ زیرمشخص می‌شود .

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{2} + \frac{1}{u_{n-1}} \qquad (1)$$

۱ـ ثابت کنیدکه ابتدا از u_1 این رشته مرتباً نزولی است اما دائماً هرجملهٔ‌آن بزرگتراز $\sqrt{2}$ باقی‌می‌ماند ونتیجه بگیرید وقتی $n \to \infty$ جملهٔ u_n دارای حدی است و این حد را پیداکنید .

۲ـ اگر زوج $(u_{n-1} \text{ و } u_n)$ را مختصات نقطه‌ای از منحنی (C) به‌معادلهٔ:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \quad , \quad x > 0$$

فرض‌کنیم نتایج قبل را مجدداً بدست‌آورید .

۳ـ ثابت‌کنیدرابطهٔ (۱) رامی‌توان به‌صورت زیردرآورد.

$$\frac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha} = \left(\frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} + \alpha}\right)^2$$

α عدد مثبتی است‌که باید آنرا تعیین‌کنید . ازروی‌آن مقدار u_n رابرحسب n و $a = \left(\frac{u_0 - \alpha}{u_0 + \alpha}\right)^2$ بدست‌آورید ومجدداً حد u_n راوقتی $n \to \infty$ تعیین‌کنید .

حل - ۱- داریم :

$$u_n-\sqrt{2}=\frac{u_{n-1}}{2}+\frac{1}{u_{n-1}}-\sqrt{2}=$$

$$\frac{(u_{n-1}-\sqrt{2})^2}{2u_{n-1}}\Longrightarrow u_n\geqslant\sqrt{2}$$

وچون درحالت خاص داریم:

$$u_1-\sqrt{2}=\frac{(u_0-\sqrt{2})^2}{2u_0}>0\Longrightarrow u_n>\sqrt{2}\,(n\geqslant1)$$

$$u_n-u_{n-1}=\frac{u_{n-1}}{2}+\frac{1}{u_{n-1}}-u_{n-1}=$$

$$\frac{2-u^2_{n-1}}{2u_{n-1}}<0\Longrightarrow u_n-u_{n-1}<0$$ یا

$$u_n<u_{n-1}$$

ونتیجه خواهدشد :

$$\forall n\geqslant1\ ;\ \sqrt{2}<u_n<u_{n-1}$$

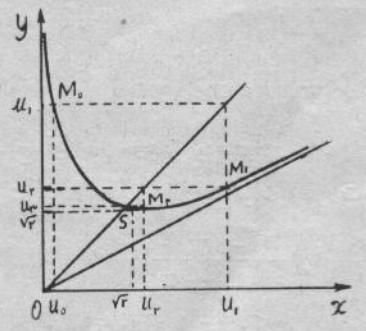
بنابراین رشتهٔ u_n نزولی بوده‌وقتی $n\to\infty$ دارای حدی‌مانند λ $(\lambda\geqslant\sqrt{2})$ می‌باشد وچون u_n و u_{n-1} هردودارای یك حد λ هستند بنابه رابطهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$\lambda=\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{\lambda}\ \text{یا}\ 2\lambda^2=\lambda^2+2\Longrightarrow\lambda=\sqrt{2}$$

۲- جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع در ازاء مقادیر $x>0$ به‌شرح زیراست :

$$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\ \text{و}\ y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-2}{2x^2}$$

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



منحنی شاخه‌ای است از هذلولی که محور y ها و خط $y=\frac{x}{2}$ مجانبهای آن می‌باشند. اگر M_0 نقطه‌ای از منحنی بامختصات $(u_0$ و $u_1)$ باشد نقطه های :

$M(u_{n-1}$ و $u_n)$ و ... و $M_2(u_2$ و $u_3)$ و $M_1(u_1$ و $u_2)$

تمام روی شاخهٔ Su از منحنی قرار دارند . از روی منحنی و طریقهٔ ترسیمی تعیین نقاط به سادگی معلوم می‌شودکه:

$$\forall n\geqslant1:\sqrt{2}<u_n<u_{n-1}$$

$$M_n\to S\Longrightarrow u_n\to\sqrt{2}$$

۳- باید داشته باشیم :

$$\frac{u_n-\alpha}{(u_{n-1}-\alpha)^2}=\frac{u_n+\alpha}{(u_{n-1}+\alpha)^2}=\frac{2u_n}{2(u^2_{n+1}+\alpha^2)}=\frac{2\alpha}{4\alpha u_{n-1}}$$

$$u_n=\frac{u^2_{n-1}+\alpha^2}{2u_{n-1}}=\frac{u_{n-1}}{2}+\frac{\alpha^2}{2u_{n-1}}$$

$$\alpha=\sqrt{2}\ \text{و}\ \frac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}=\left(\frac{u_{n-1}-\sqrt{2}}{u_{n-1}+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{u_1-\sqrt{2}}{u_1+\sqrt{2}}=\left(\frac{u_0-\sqrt{2}}{u_0+\sqrt{2}}\right)^2=a$$

$$\frac{u_2-\sqrt{2}}{u_2+\sqrt{2}}=\left(\frac{u_1-\sqrt{2}}{u_1+\sqrt{2}}\right)^2=a^2$$

.....

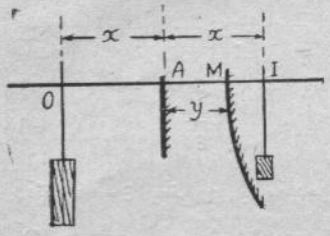
$$\frac{u_{n-1}-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}=a^{2^{n-1}}\Longrightarrow u_n=\sqrt{2}\,\frac{1+a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^{n-1}}}$$

$$a=\left(\frac{u_0-\sqrt{2}}{u_0+\sqrt{2}}\right)^2<1\ ,\ \left|\begin{matrix}n\to\infty\\ a^{2^{n-1}}\to0\end{matrix}\right.\ ;\ u^n\to\sqrt{2}$$

مسائل فیزیك

۴۲۶۵- برای تعیین فاصلهٔ کانونی یك آینهٔ محدب آزمایشی به‌شرح زیر ترتیب داده‌ایم :

درمقابل آینهٔ محدب M ، آینهٔ تخت کوچکی را نزدیك آن طوری می گذاریم که نصف آینهٔ محدب را بپوشاند. سنجاق O را به آینه چندان دور ونزدیك می کنیم تا تصویر قسمت بالای سنجاق در آینهٔ محدب با تصویر قسمت پایین آن در آینهٔ تخت دریك امتداددیده‌شوند(طرف صیقلی هردو آینه به‌طرف سنجاق است). فاصلهٔ آینهٔ تخت رااز آیینهٔ محدب y وازسنجاق x فرض می کنیم .



سه بارآزمایش کردیم. نتایج هر آزمایش به‌شرح زیر بود:

۱- $x_1=4/5\text{cm}$ ، $y_1=0/5\text{cm}$

۲- $x_2=5/8\text{cm}$ ، $y_2=0/8\text{cm}$

۳- $x_3=5/9\text{cm}$ ، $y_3=0/9\text{cm}$

فاصلهٔ کانونی آینهٔ محدب را حساب کنید .

حل ـ می‌توان نوشت :

$$p = OM = x + y$$

$$p' = MI = x - y$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = -\frac{1}{f} \Longrightarrow f = \frac{x^2 - y^2}{2y}$$

$$f_1 = \frac{4/5^2 - 0/5^2}{2 \times 0/5} = 20\,cm$$

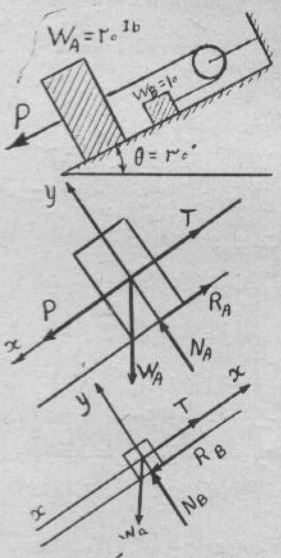
$$f_2 = 20/6\,cm$$

$$f_3 = 18/9\,cm$$

بنابراین فاصلهٔ کانونی آینه برابراست با :

$$f = \frac{20 + 20/6 + 18/9}{3} = 19/8\,cm$$

۴۲۶۷ـ پیدا کنید نیروی P را درشکل زیر برای شروع حرکت دستگاه درصورتی که می‌دانیم ضریب اصطکاك بین سطح ودوجسم برابر $\frac{1}{4}$ وامتداد نیروی P ودوریسمان بموازات سطح شیب‌دار می‌باشد.



حل ـ کلیهٔ نیروهای وارد بردوجسم را جداگانه مشخص نموده شرط شروع حرکت را می‌نویسیم .

$$A \begin{cases} P + W_A \sin\theta - R_A - T = 0 \\ N_A - W_A \cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} T - R_B - W_B \sin\theta = 0 \\ N_B - W_B \cos\theta = 0 \Longrightarrow \end{cases}$$

$$T = \mu W_B \cos\theta + W_B \sin\theta$$

$$P = -W_A \sin\theta + \mu W_A \cos\theta + T$$

$$P = -W_A \sin\theta + \mu W_A \cos\theta + \mu W_B \cos\theta + W_B \sin\theta$$

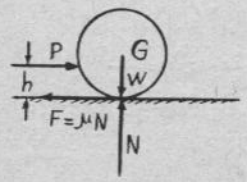
$$P = \mu \cos\theta (W_A + W_B) + \sin\theta (W_B - W_A)$$

محاسبهٔ عددی :

$$P = \frac{1}{4} \times 0/866(20 + 10) + \frac{1}{2}(10 - 20)$$

$$= 1/495^{lb}$$

۴۲۶۸ ـ یك استوانه به وزن W وبه شعاع R روی یك سطح افقی قراردارد مطابق شکل زیر نیروی افقی P که به فاصلهٔ h ازسطح افقی براستوانه وارد می‌شود بدون چرخش آنرا با شتاب γ به حرکت درمی‌آورد .



درصورتی که ضریب اصطکاك بین استوانه وسطح افقی μ باشد مطلوبست محاسبهٔ P و h بر حسب W و μ و R و γ . مقادیر عددی

$W = 20^{lb}$ و $R = 2^{ft}$ و $\gamma = 8^{ft}/sec^2$ و $g = 32/2^{ft}/sec^2$

حل ـ

$$\Sigma F_x = P - \mu N = \frac{W}{g}\gamma$$

$$\Sigma F_g = N - W = 0 \Longrightarrow W = N$$

$$P = \mu W + \frac{W}{g}\gamma = W(\mu + \frac{\gamma}{g})$$

$$\Sigma \overrightarrow{M}_G = 0 = (R - h)P - R\mu W = 0$$

$$RP - hP = R\mu W \Longrightarrow hP = R(P - \mu W)$$

$$h = R(1 - \mu W / P)$$

$$h = R(1 - \frac{\mu W}{W(\mu + \frac{\gamma}{g})}) \Longrightarrow h = \frac{R\gamma}{\gamma + \mu g}$$

محاسبهٔ عددی :

$$P = 20(0/2 + \frac{8}{32/2}) \# 8/97^{lb}$$

$$h = \frac{2 \times 8}{8 + 0/2 \times 32/2} = \frac{16}{14/44} \# 1/11^{ft}$$

ریاضی جدید

ترجمه و تنظیم از: عبدالحسین مصحفی
با استفاده از کتابهای به زبان فرانسه

چند جمله‌ای جبری

۱ـ در مجموعهٔ اعداد حقیقی دو زیر مجموعه در نظر می‌گیریم؛ اولی شامل عنصر **غیرمشخص** x و عنصرهایی‌است که از بتوان‌رساندن آن بدست می‌آیند :

$x^1=x$ و x^2 و x^3 و... و x^p و...

(p عددی است صحیح و مثبت)

و عمل زیر در آن مجری است

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

که شامل عنصر بی‌اثر $x^0=1$ می‌باشد.

این زیر مجموعه را H می‌نامیم.

دومین زیر مجموعه که همان مجموعهٔ R است شامل

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ۴۰

دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی:

۴۲۳۵ـ رضا رحیمیان دبیرستان صارمیه اصفهان ـ بهرام کمالی دبیرستان هدایت سنندج ـ محمد اسحق لهراسبی دبیرستان دکتر نصیری ـ بهمن کمالی دبیرستان ابن‌یمین‌مشهد ـ فاضل نقدی دبیرستان مشعل‌هدایت ـ مجید نهضت ـ احمد تاجمهری دبیرستان محمد رضاشاه پهلوی ـ باقر پژولی دبیرستان هدایت سنندج ـ حسینی‌هاشمی دبیرستان ادیب ـ منصور رحمتیان دبیرستان پانزدهٔ بهمن بهشهر ـ عطاءالله ویسی دبیرستان هدایت سنندج ـ مجتبی اخگر ژند دبیرستان شاهپور ـ رحیم باجغلی دبیرستان سعدی اصفهان ـ سید مجتبی حسنی‌زاده دبیرستان پهلوی ایلام احمد سعیدی دبیرستان پهلوی تهران ـ سعید میرسعیدی فراهانی دبیرستان خوارزمی ۱ ـ پشوتن گشتاسبی دبیرستان فیروز بهرام

کلاس ششم ریاضی

۴۲۴۷ـ جلال اشجعی

۴۲۵۱ـ عبدالمجید چیت‌سازان ـ علی‌اصغر اسکندر بیاتی دبیرستان بهمن قلهك

متفرقه

۴۲۵۵ـ حسن چاکری ـ جلال اشجعی

۴۲۵۶ـ عبدالحسن کوچکان ـ حسن چاکری دبیرستان پهلوی کاشان ـ محمود آقازاده دبیرستان البرز ـ جلال اشجعی محمود امیری دبیرستان خیام نیشابور ـ عمران تقی خانی دبیرستان نظام ـ محمد سعیدی دبیرستان امیرکبیر ـ عباسعلی رضوانی دبیرستان سعدی ساری ـ حسین ماهرو دبیرستان پهلوی کاشان ـ سیدجلال آشفته ـ بهروز نوبهار دبیرستان جوینی قوچان ـ منصور خاکسار دبیرستان محمدرضا شاه کرمانشاه ـ عبدالله احمدیان دبیرستان ملکی مشهد ـ احمد ابریشم‌چی دبیرستان پهلوی کاشان ـ عبدالمجید چیت‌سازان.

۴۲۵۷ـ نصرالله حقیقت ـ حسین خبازیان دبیرستان نمونه اصفهان ـ حسن آقائی دبیرستان پیرنیا ـ احمد توسلی دبیرستان ابن‌سینا رضائیه ـ ناصر پهلوان دبیرستان شرف ـ سیدجمال آشفته ـ علی‌اصغر اسکندر بیاتی ـ حسن چاکری ـ علی‌اکبر صادقیان دبیرستان پهلوی ساری

۴۲۵۸ـ مسعود رحمتیان ـ سیدجمال آشفته ـ علی اصغر اسکندر بیاتی.

۴۲۶۵ـ محمد حسین نظامی دبیرستان خوارزمی ـ بهرام رزمپوش دبیرستان حکمت ـ احمد توسلی ـ فرید فاضل بسطامی دبیرستان البرز ـ ابراهیم ذوالقدری دبیرستان شاهپور شیراز.

۴۲۶۷ـ احمد ابریشم‌چی ـ نصرالله حقیقت دبیرستان قناد بابل ـ عبدالله احمدیان دبیرستان ملکی مشهد ـ بهروز نوبهار اردشیر گشتاسبی دبیرستان فیروز بهرام ـ غلامرضا میرزاخانی دبیرستان فیروز بهرام ـ حسین خبازیان ـ سید جمال آشفته علی اصغر تعویذی

۴۲۶۸ـ علی اصغر تعویذی ـ جلال اشجعی ـ حسین خبازیان.

عددهای حقیقی

a و b و c و ... و l و ...

می‌باشد که هر کدام آنهارا **ضریب** می‌نامیم.

۲ـ عنصرهایی‌را در نظر می‌گیریم که هر کدام شامل عنصری از H و عنصری از R بوده به صورت ax^p نوشته می‌شوند وعملیات زیر در مورد آنها مجری می‌باشد:

$$a(bx^p)=(ab)x^p=abx^p$$

$$(ax^p)(bx^q)=(ab)(x^px^q)=abx^{p+q}$$

$$1x^m=x^m \text{ و } ax^0=a$$

نسبت به این عملیات $1x^0=1$ عنصر بی‌اثر می‌باشد.

هرعنصر به‌صورت ax^m را **یك جمله‌ای**، a را **ضریب** آن و m توان x را **درجهٔ** آن می‌نامیم.

جمله‌های همدرجه، **جمله‌های متشابه** نامیده‌می‌شوند.

۳ـ مجموعهٔ $\mathscr{P}$ را در نظر می‌گیریم که شامل عنصرهای جمله‌های جبری ax^p ، bx^q و ... بوده و در آن عمل جمع بین جمله‌های جبری که به صورت ax^p+bx^q نوشته می‌شود عنصر دیگری از مجموعه را بدست بدهد و در مورد جمله‌های متشابه داشته باشیم:

$$ax^p+bx^p=(a+b)x^p$$

و نسبت به‌عمل جمع عنصر بی‌اثری به‌صورت $0x^p=0$ داشته باشد.

هر عنصر از مجموعهٔ $\mathscr{P}$ را **چند جمله‌ای** نامیده به‌صورت کلی زیر نمایش می‌دهیم:

$$P_n=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l$$

عددهای a ، b ... و k و l ضریبهای چندجمله‌ای، و n درجهٔ چندجمله‌ای نامیده می‌شود. مثلا چندجمله‌ای:

$$P_4=5x^4-3x^3+\frac{2}{5}x^2+\sqrt{2}x-8$$

از درجهٔ ۴ بوده و ضریبهای آن ابتدا از جملهٔ بزرگترین‌درجه به ترتیب عبارتند از:

$$5 \text{ و } -3 \text{ و } \frac{2}{5} \text{ و } \sqrt{2} \text{ و } -8$$

اگر درجهٔ یك چند جمله‌ای و ضریبهای آن به ترتیب معلوم باشندآن چندجمله‌ای‌مشخص می‌شود. بنابراین می‌توانیم هر چند جمله‌ای را با ضرایب‌آن نمایش دهیم، به‌صورت زیر:

$$P_n=[a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } \dots \text{ و } k \text{ و } l]$$

مثلا چندجمله‌ای مثال بالا چنین نمایش داده می‌شود:

$$P_4=[5 \text{ و } -3 \text{ و } \frac{2}{5} \text{ و } \sqrt{2} \text{ و } -8]$$

و مقصود از:

$$P_3=[1 \text{ و } 0 \text{ و } -3 \text{ و } -2]$$

چندجمله‌ای $P_3=x^3-3x-2$ می‌باشد.

چند جمله‌ای درجهٔ صفر فقط شامل یك ضریب مثل a است؛

$$P_0=ax^0=a \quad , \quad P_0=-2x^0=-2$$

چندجمله‌ای خاصـ ممکن‌است‌یك چندجمله‌ای‌در نظر بگیریم که درآن‌تمام‌ضریبهاصفر باشد: این‌چنین چندجمله‌ای را چندجمله‌ای‌خاص‌یاچندجمله‌ای‌صفر می‌نامیم‌و با $P_{\circledast}$ نشان‌می‌دهیم:

$$P_{\circledast}=[0]=[0 \text{ و } 0]=\dots=[0 \text{ و } 0 \text{ و } \dots \text{ و } 0]=0$$

$P_{\circledast}$ نسبت به عمل جمع چند جمله‌ایها عنصر بی اثر می‌باشد.

در جمع دو چند جمله‌ای، درجهٔ چند جمله‌ای مجموع، همان درجهٔ چند جمله‌ای است که بزرگتر بوده‌است یعنی:

$$n>m \; ; \; P_n+P_m=S_n$$

درجهٔ یك چند جمله‌ای P رابا $d(P)$ نمایش می‌دهند و مقصود از $\delta(P)$ کوچکترین درجه‌ای است که جملات P دارا می‌باشند. اگر درچند جمله‌ای مرتب (نزولی):

$$P_n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_kx^k$$

$a_n\neq 0$ و $a_k\neq 0$ باشد داریم:

$$\delta(P)=k \text{ و } d(P)=n$$

$$P_4=7x^4-x^3+3x+12$$

$$d(P)=4 \text{ و } \delta(P)=0$$

$$P_3=-x^3+6x^2 \; ; \; d(P)=3 \text{ و } \delta(P)=2$$

تساوی $d(P)=\delta(P)$ وقتی صادق است که P یك ـ جمله‌ای باشد.

در جمع چند جمله‌ایهای P و P' داریم:

$$d(P)>d(P') \iff d(P+P')=d(P)$$

$$\delta(P)<\delta(P') \iff \delta(P+P')=\delta(P)$$

مثال ـ داشته باشیم:

$$P=x^4+3x^2+5x \; , \; d(P)=4 \; , \; \delta(P)=1$$

$$P'=3x^3-x^2-4x+5$$

$$d(P')=3 \; , \; \delta(P')=0$$

$$P+P'=x^4+3x^3+2x^2+x+5$$

$$d(P+P')=4=d(P) \text{ و } \delta(P+P')=0=\delta(P')$$

عمل تفریق چندجمله‌ایها عکس‌عمل‌جمع آنها تعریف‌می‌شود

$$P_m-P_n=D_p \iff D_p+P_n=P_m$$

حاصل ضرب چند جمله‌ای در یك عدد :

چند جمله‌ای :

$$P=ax^n+bx^{n-1}+\dots+kx+l$$

و عدد $r\neq 0$ را درنظر می‌گیریم . چندجمله‌ای :

$$Q=rax^n+rbx^{n-1}+\dots+rkx+rl$$

که به صورت $Q=rP$ نشان داده می‌شود حاصل‌ضرب چند ـ جمله‌ای P در عدد r می‌باشد.

درحالت‌خاص $r=-1$ چند جمله‌ای $-P$ قرینهٔ‌چند ـ جمله‌ای P نامیده می‌شود. مجموع دوچند جمله‌ای که قرینهٔ یکدیگر باشند برابر با صفرمی‌باشد .

چند جمله‌ایهای مستقل ـ دوچند جمله‌ای P و Q را مستقل از یکدیگر گویند هرگاه نتوان دو عدد مخالف‌صفر r_1 و r_2 را چنان تعیین‌کرد که حاصل جمع r_1P+r_2Q مساوی باصفرباشد . به عبارت دیگر ضریبهای آنها نظیر به نظیر متناسب نباشند.

ترکیب خطی چند جمله‌ایها ـ چند جمله‌ایهای A و B و C و عددهای α ، β و γ را درنظر می‌گیریم .

چند جمله‌ای :

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C$$

ترکیب خطی چند جمله‌ایهای مزبور و عدد های α و β و γ ضریبهای این ترکیب نامیده می‌شود. مثلا اگرداشته باشیم:

$$A=\delta x^3-\gamma x^2+\beta x+\alpha$$
$$B=\gamma x^3+\delta x^2-\alpha x+\beta$$
$$C=-\beta x^3+\alpha x^2+\delta x+\gamma$$
$$D=-\alpha x^3-\beta x^2-\gamma x+\delta$$

ترکیب خطی آنها با ضرایب α و β و γ و δ عبارت خواهد شد از :

$$P=\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D=\dots=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$$

حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای ـ چند جمله‌ایهای:

$$P_n=[a_n\,،\,a_{n-1}\,،\dots،a_1\,،\,a_0]$$
$$P_m=[b_m\,،\,b_{m-1}\,،\dots،b_1\,،\,b_0]$$

را در نظر می‌گیریم. اگر داشته‌باشیم:

$$C_{n+m}=a_nb_m$$
$$C_{n+m-1}=a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m$$
$$C_{n+m-2}=a_nb_{m-2}+a_{n-1}b_{m-1}+a_{n-2}b_m$$

.....

$$C_0=a_0b_0$$

چند جمله‌ای :

$$P_{n+m}=[C_{n+m}\,،\,C_{n+m-1}\,،\dots،C_1\,،\,C_0]$$

حاصل‌ضرب دوچندجمله‌ای P_n و P_m تعریف می‌شود . عمل ضرب چند جمله‌ایها ، مانند عمل جمع آنها عملی داخلی در مجموعهٔ $\mathscr{P}$ بوده مستقل از ترتیب عوامل، شرکت پذیر و نسبت به عمل جمع توزیعی است.

مثال: فرض می‌کنیم :

$$P_3=2x^3-4x^2+x-5=[2\text{و}-4\text{و}1\text{و}-5]$$
$$P_2=x^2-1=[1\text{و}0\text{و}-1]$$

خواهیم داشت :

$$C_5=2+0=2$$
$$C_4=2\times 0+-4\times 1=-4$$
$$C_3=2\times(-1)+(-4)\times 0+1\times 1=-1$$
$$C_2=-4(-1)+1\times 0+(-5)\times 1=-1$$
$$C_1=1\times(-1)+(-5)\times 0=-1$$
$$C_0=(-5)(-1)=5$$

و حاصل‌ضرب عبارت می‌شود از:

$$P_5=[2\text{و}-4\text{و}2\text{و}9\text{و}-1\text{و}5]$$
$$=2x^5-4x^4-x^3-x^2-x+5$$

توان یك جمله‌ای ـ توان rام یك چندجمله‌ای P_n عبارتست‌از :

$$(P_n)^r=\underbrace{P_n\cdot P_n\cdot P_n\dots P_n}_{r\text{ مرتبه}}\,،$$

$$d(P_n)^r=rd(P_n)$$

حالت‌خاص ـ توان دوجمله‌ای از دستور معروف به **دو جمله‌ای نیوتن** حساب می‌شود:

$$(x+a)^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}a+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\times 2}x^{n-2}a^2+\dots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1\times 2\times 3\times\dots\times p}x^{n-p}a^p+$$
$$+\dots+a^n$$

ضریبهای دوجمله‌ای نیوتن به ازاء مقادیر مختلف n جدولی تشکیل می‌دهندکه به **مثلث حسابی پاسکال(خیام)** معروف است:

n	ضرایب
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
⋮	.....

توجه

تاکنون چندین دفعه یادآوری شده و باز هم تذکر داده می‌شود : اشخاصی که مطلب یا مسئله‌ای برای درج در مجله ارسال می‌دارند نام و نشانی کامل خود را روی ورقهٔ کاغذی که مطلب را نوشته‌اند به وضوح مرقوم دارند. باوجود این ، مکرر نامه‌هایی دریافت می‌شود که ضمن آن یا اشخاصی پرسش کرده یا مطلب و مسئله‌ای برای درج در مجله نوشته‌اند اما فراموش کرده‌اندکه نشانی خود را مرقوم دارند . ناچار بوده‌ایم‌که این نامه‌ها را کنار بگذاریم، حتی اگرشامل مطالب مفیدی هم بوده باشد .

تقاضا می‌شود اشخاصی‌که هر نوع مطلب برای مجله می‌نویسند به‌نکات زیر توجه فرمایند :

۱ـ مطلب را یك‌روی کاغذ و با خط خوانا بنویسند .

۲ـ روی صفحهٔ کاغذ نام و نشانی کامل خود را مرقوم دارند .

۳ـ مطالب مختلف را روی صفحات جداگانه بنویسند . دراین‌صورت ضمن هرمطلب نام و نشانی خود را جداگانه بنویسند .

۴ـ اگرمطلبی راترجمه‌کرده‌اند عنوان کتاب یامجلهٔ مربوط ونام مؤلف وتاریخ چاپ آن را بنویسند.

۵ـ توجه داشته باشندکه مطلب یا مسئلهٔ ارسالی ایشان قبلا در نشریات فارسی چاپ نشده باشد .

۶ـ اگرضمن نامهٔ خود پرسش می‌کنند یا از مطلبی انتقاد می‌کنند و نمی‌خواهند نام ایشان در مجله چاپ شود ضمن‌نامه نام ونشانی کامل خود را بنویسند و ضمناً متذکر شوند تا از چاپ نام آنان خودداری شود.