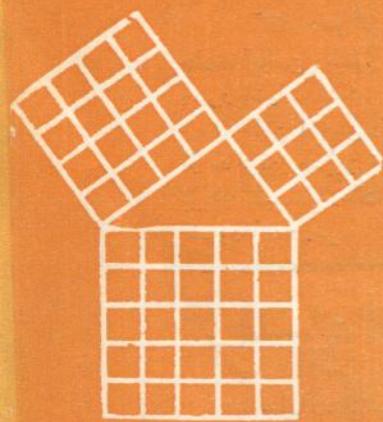
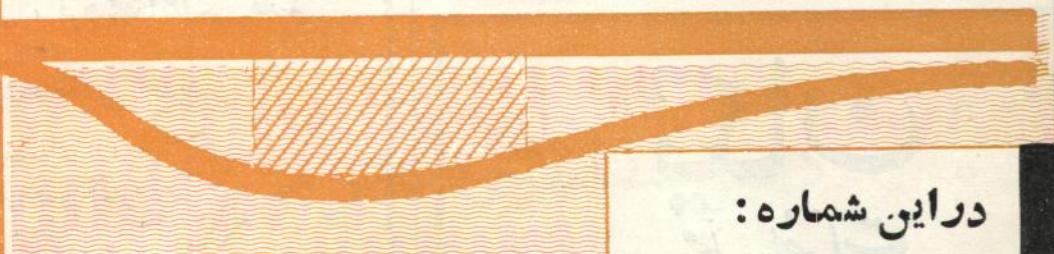


$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots + x^n$$



د

س



دراین شماره:

دیبرستانهای تجربی

مراحل مهم علم نجوم

درباره محور اصلی

د ترمهستان

مسائل حل نشده ریاضی

دوران محورهای مختصات

حل یک مسئله شیخ بهائی

مثلث

قابلیت تقسیم بر یک عدد

راهنمای حل مسائل هندسه

راهنمای رسم فنی

داستانهای فنی ریاضی

سرگردانی ریاضی

مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات داخلی دیبرستانها

حل مسئله نمو نه - مسئله سه کارخانه

بی آنکه عصبانی شوید

Problems & Solutions

مسائل برای حل

حل مسائل یکان شماره ۳۸

ریاضی جدید

عبدالحسین مصحفی

ترجمه

ترجمه: جعفر آقایانی

سید گاظم نایینی

ترجمه

علی عاطفی

علی رضائی

ترجمه

»

»

مهندس شهر محمدی

ترجمه

-

-

-

ترجمه: شاهپور گاظمی

ترجمه: کاراپتیان

-

-

-

-

-

-

از انتشارات یکان:

مقدمه بر

تئوری مجموعه ها

تألیف :

علی اصغر هومنی

به ضمیمه :

فرهنگ فارسی- انگلیسی ، فرهنگ انگلیسی- فارسی

اصطلاحات ریاضی جدید

با مقدمه ای از :

استاد دکتر محسن هشتروodi

آماده فروش است

بها: ۵۰ ریال

تشکر

استاد دانشمند آقای دکتر وازن آوانیسیان
مجموعه ای از جزوای مربوط به دروسی را که در دانشگاه
استراسبورگ زیر عنوان :

Algèbre Linéaire

ایراد کردند برای اداره مجله یکان ارسال داشته اند.
بدین وسیله از ایشان سپاسگزاری می شود و امیدوار است
وسائلی فراهم آید تا ترجمه به فارسی این دروس برای
استفاده علاقمندان در مجله یکان درج گردد.

انجمن ریاضی دبیرستان کمال

آقای حسن گل محمدی اطلاع داده اند که ازاوا یل آبان سال
جاری انجمن ریاضی دبیرستان کمال به سپرستی آقای رجائی
دبیر ریاضیات تشکیل شده و هفته سه بار تشکیل جلسه می دهد.
این انجمن دارای سه نوع عضو است: عضو هیئت مدیره که
از حائزین بهترین نمره ریاضی سال قبل هی باشد - عضو وابسته
برای کسب اطلاعات بیشتر ریاضی - عضو پیوسته برای جبران
کمبودهای درسی.

جلسات انجمن معلمان ریاضی

جلسات هیئت های سه گانه انجمن معلمان ریاضی ابتدا از
۱۹ هر پانزده روز یک بار عصر های یکشنبه از ساعت ۵ تا
۷ بعدازظهر در محل دبیرستان شماره ۱ آذر دایر است. حضور
همه معلمان ریاضی در این جلسات آزاد است.

عزیمت به فرانسه

آقای عطاء الله بزرگ نیما با استفاده از یک بورسواگذاری
دولت فرانسه برای مطالعه در آخرین پیشرفتهای علم شیمی به
کشور فرانسه عزیمت کردند.
مدیر و سایر نویسندهای مجله یکان توفیق همکارگرامی
خود را در آدامه مطالعات علمی آرزومندند.

یکان

محله ریاضیات

هرماه یک بار منتشر می گردد

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

دوره چهارم - شماره سوم - شماره مسلسل: ۴۰

آذر ۱۳۴۶

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: عبد الحسین مصطفی

مدیر داخلی، داود مصطفی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله زارنو، نزدیک شاهرضا، شماره ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج بضافه هزینه پست)

حساب بانکی: جاری ۳۰۹۵ شعبه لاله زارنو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume IV, number 3, Nov. 1967

subscription: \$3

TEHERAN . P.O. B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۵۲۸

دبیرستانهای تجربی

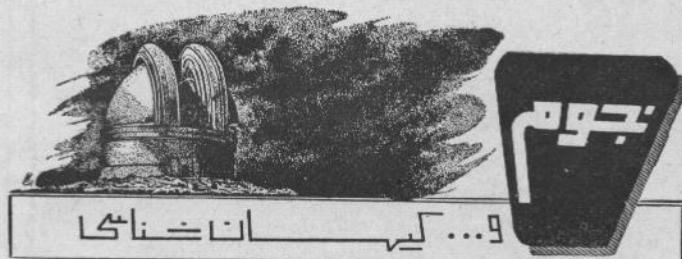
از ابتدای سال تحصیلی ۱۳۴۷-۴۸ بر نامه دوره راهنمائی ، طبق نظام نوین آموزش و پرورش ، به مرحله اجرا در می آید ؛ و بنابر قاعده ، سه سال بعد از آن مرحله اجرائی بر نامه دوره تعلیمات متوسطه نظری آغاز خواهد شد .

اگر قرار است بر نامه ریاضیات دوره های جدید تحصیلی هماهنگ بر نامه ریاضیات کشورهای پیشرفته و براساس ریاضیات جدید تنظیم شود ، شایسته است که همانند همان کشورها ، نخست بر نامه جدید دریک یا چند دبیرستان به عنوان آزمایش پیاده گردد و دقیقاً ارزشیابی شود ، آنگاه تجدید نظر های لازم در آن بعمل آمده در تمام دبیرستانهای کشور به مرحله اجرا گذاشته شود .

نیازی نیست که اجرای آزمایشی بر نامه های جدید دریک یا چند دبیرستان تجربی ، به بعد از خاتمه اجرای بر نامه دوره راهنمائی موکول شود ؛ اگر از هم اکنون مقدمات کار فراهم آید ، شروع به کار این دبیرستانها از ابتدای سال تحصیلی ۴۷-۴۸ عملی خواهد بود . در این صورت ، سه سال بعد از آن یعنی هنگامی که بنابر قاعده مرحله اجرائی دوره تعلیمات متوسطه نظری آغاز خواهد شد بر نامه هر بوط به آن از مرحله آزمایش گذشته نقایص آن بر طرف شده و می توان آنرا با قاطعیت (نه مانند سایر بر نامه ها به عنوان آزمایشی !) در دبیرستانهای سر تا سر کشور مجري داشت .

عبدالحسین مصحفی

مراحل مهم علم نجوم



ترجمه فصلی از کتاب *L'Astronomie Moderne* تألیف: TOCQUET

۳ = دوره نزدیک معاصر

مجموعه غیر از تعداد زیادی مقالات فلسفی و علمی شامل تأثیراتی از قرار زیر است: دوازده تألیف راجع به نجوم عملی، پانزده تألیف درباره تعلیم علم نجوم که از بین آنها نجوم برای همه مشهور است، ده تألیف درباره علوم مختلف، هفت تألیف فلسفی، هشت تألیف منبر به متافیزیک و شش تألیف ادبی. علاوه بر آن وی در زمینه‌های فنی مختلف تحقیقات ارزشمندی انجام داده است که مهمترین آنها تحقیقات درباره ستارگان دوقلو، در باره زهره، درباره ماه، درباره سیارات مخصوصاً مربوط که مورد توجه خاص او بوده می‌باشد. فلاماریون بیشتر از شصت گزارش به‌آکادمی علوم تقدیم داشته است. تعداد قابل توجهی از این گزارشها تحقیق و بحث درباره مطالعات نجومی است که خود یک مجموعه ارزشمند علمی را تشکیل می‌دهد.

یکی از آرزوهای فلاماریون این بود که رصدخانه‌ای شخصی دائمی باشد و بتواند اوقات فراغت خود را در آنجا به مشاهده آسمان پردازد. این آرزو در ۱۸۸۲ برآورده شد به این ترتیب که یکی از مریدان ناشناس وی یک ملک مرغوب واقع در Juvisy-sur-Orge را به وی هدیه کرد و در آنجا رصدخانه‌ای بنادکه در آن یک دوربین نصف النهاری به قطر ۲۴ سانتی‌متر بکار گذاشته شد. این رصدخانه با احداث یک ایستگاه جوشناسی ویک ایستگاه کسب اطلاعات از طریق اشعه کیهانی تکمیل گردیده است.

فلاماریون در همان سال ۱۸۸۲ مجله نجوم را تأسیس کرد که تا سال ۱۸۹۴ مربقاً منتشر می‌شد، در این سال نام مجله با عنوان *Bulletin de l'Association astronomique de France* عرض شد. این مؤسسه در ۱۸۸۷ با همکاری گروهی از منجمین مشهور تأسیس شده بود «گروهی از شخصیت‌هایی که سعی داشتند جهان را بشناسند، نظری را علی برجوم اشتغال داشتند، می‌کوشیدند تا علم آسمان را به صورت مفید و قابل استفاده توسعه دهند و

وجه امتیاز خاص این دوره از علم نجوم

فلاماریون
۱۸۴۲ - ۱۹۲۵
انتشارات مربوط به این علم است که به موزاییک سایر نشریات برای شاگردان خواندنی‌های علمی تهیه شده. در این مورد باید اذعان کرد، در ضمن مباحثات نمود، که اولین قدم را تحت رهبری کامیل فلاماریون فرانسویها برداشتهند.

کامیل فلاماریون (Camille Flammarion) که از یک خانواده دهقان در ۲۶ فوریه ۱۸۴۲ در Montigny-le-Roi (Haute-Marne) بدنیا آمد یکی از مروجین پژوهیات علم سماوی می‌باشد. در تمام عمرش کوشیده است که علم نجوم را بدون آنکه با بتدال بکشاند همکانی کند و شکفتیهای جهان را به عموم بفهماند. تا حد سماحت کار می‌کرد، دانشمندی بود که به منافع شخصی پشت پا زده بود، محققی بود که خستگی سرش نمی‌شد، زندگی این مرد فوق العاده وقف مطالعه و مخصوصاً ایجاد رغبت برای درک علم نجوم در دیگران بوده و همه عشق و علاقه شخصی وی در این علم خلاصه شده بود. می‌توان ادعای کرد که در تمام روی زمین و در تمام محاذل اجتماعی کمتر شخصی شناخته می‌شود که محضراً اینچنین باعظمت و درحال توسعه داشته باشد. اهمیل توشه می‌نویسد:

«بین مؤسسين آئينه‌ای بزرگ و بانيان مکاتيب فلسفی هم یك چنین شخصیت استثنائی به ندرت وجود دارد که در افکار عمومی این‌همه نفوذ داشته آثار وی هزاران طرفدار داشته هر روز مریدان علمی تازه‌ای پیدا کند.» حتی در عصر ما هم برای پیشاری از مردم نام فلاماریون مترادف با علم نجوم می‌باشد.

مجموعه آثار وی بیشمار و از لحاظ موضوع پراکنده است اما در هر حال عبارت می‌باشد از بیان ساده و موجز دانش. این

قضیه هایی مربوط به:

محور اصلی

دوایر متعددالمحور با دایره محيطی مثلث

ترجمه: جعفر آقایانی چاوشی

دانش آموز ششم ریاضی دبیرستان دکتر نصیری

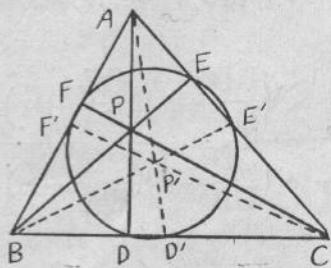
D.Moody Bailey

نوشتۀ:

Mathematics magazine

مجله:

بخش ۲



دایره محيطی مثلث سوائی DEF نقطه P را رسم کرده و فرض می کنیم این دایره اضلاع AB و CA و BC مثلث ABC را به ترتیب در نقاط F' و E' و D' قطع نماید. قطع خطهای CF' و BE' و AD' در یک نقطه متقابله بند، معلوم است که:

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{a'(\frac{BF}{FA} + 1)(\frac{AE}{EC} + 1) - b'(\frac{BD}{DC} + 1)(\frac{BF}{FA} + 1) + c'(\frac{BD}{DC} + 1)(\frac{CE}{EA} + 1)}{a'(\frac{BF}{FA} + 1)(\frac{AE}{EC} + 1) + b'(\frac{BD}{CD} + 1)(\frac{BF}{FA} + 1) - c'(\frac{BD}{CD} + 1)(\frac{CE}{EA} + 1)}$$

برای $\frac{AF'}{FB}$ و $\frac{CE'}{EA}$ مقادیری مشابه وجود دارد.

در مؤسسه را وظیفه‌ای برای خود بداند. چنانکه آنونس بزرگ توضیح می‌دهد: «وقتی که عده بالارود اثر آنها افزون می‌گردد و نیروی پراکنده آنها جمع می‌شود؛ حتی با حداقل همکاری بزرگترین بهره‌ها را بر می‌دارند که از نظر مطالعات شخصی هم برای آنها رجحان دارده».

مؤسسه نجومی دیگری مشابه با مؤسسه نجومی فرانسه در کشورهای دیگر تأسیس شده است: در بولن (۱۸۹۵)، در اسپانیا (۱۹۱۱)، در انگلستان در آلمان، در ایتالیا، در کشورهای متحده آمریکا. وغیره. دوره نزدیک معاصر به طور خلاصه از این قرار شد که از یک طرف در اثربالیتی‌های دانشمندان ریاضیدان علم مکانیک سماوی توسعه یافت، اوضاع سیارات منظومه شمسی در روی کره سماوی مشخص شد، با استفاده از طیف نورستار کان ساختمان اجرام سماوی معین گردید و بالاخره با پیدایش فن عکسبرداری از آسمان گام تازه‌ای در راه پیشرفت علم نجوم برداشته شد.

بنیه از صفحه قبل بالآخره از اثراين علم در رشد افکار و اندیشه‌ها استفاده کنند.» این مؤسسه به زودی به صورت یکی از بزرگترین مؤسسات علمی جهان در آمد. این مؤسسه را در زمان حاضر می‌توان یک فامیل بزرگ علمی شامل بیش از ۵۰۰۰ عضو تلقی کرد. در تهیه بولتن آن مهمندان دانشمندان و منجمین فرانسه و کشورهای دیگر همکاری می‌کنند و خوانندگان آنرا با آخرين پیشرفت‌های علم نجوم و علوم دیگری که به آن مربوط می‌شود در جریان می‌گذارند. جایگاه این مؤسسه که در شماره ۲۸ خیابان سرپانت پاریس واقع می‌باشد شامل یک رصدخانه کامل است که خود از چندین بخش مختلف تشکیل شده و مورد استفاده اعضاً مؤسسه است. بخش‌های مهم مؤسسه عبارتند از: بخش مشاهدات و مطالعات عملی در باره آسمان، کتابخانه، تالار کنفرانس، بولتن ماهانه و بولتن سالانه نجوم. هر قرد فرانسوی که به مطالعات نجومی علاقمند باشد باید قبول عضویت

هریک از سه جمله مخرج کسر اخیر را به صورت زیر می نویسیم :

$$a' \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) \left(\frac{AE}{EC} + 1 \right) = a' \left(\frac{AF}{FB} + 1 \right) \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right) \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = a' \left(\frac{AF}{FB} + 1 \right) \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right) \frac{BD}{DC}$$

$$b' \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) = b' \left(\frac{CD}{DB} + 1 \right) \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) \frac{BD}{DC}$$

$$c' \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right) = c' \left(\frac{CD}{DB} + 1 \right) \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right) \frac{BD}{DC}$$

اگر MNO محور اصلی دایره DEF با دایره محیطی مثلث ABC باشد طبق قضیه (۱) داریم :

$$\frac{BM}{MC} = - \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BD'}{D'C}$$

اگر به جای $\frac{BD'}{D'C}$ مقدارش را که قبلاً معین کردیم قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{BM}{MC} = - \frac{a' \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) \left(\frac{AE}{EC} + 1 \right) - b' \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) + c' \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right)}{a' \left(\frac{AF}{FB} + 1 \right) \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right) + b' \left(\frac{CD}{DB} + 1 \right) \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) - c' \left(\frac{CD}{DB} + 1 \right) \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right)}$$

به همین طریق می توان مقادیری مشابه برای نسبتهای $\frac{AO}{OB}$ و $\frac{CN}{NA}$ بدست آورد .

قضیه ۶ فرض می کنیم P نقطه‌ای واقع در صفحه مثلث و DEF مثلث سوایی آن باشد . محور اصلی دایره DEF با دایره محیطی اضلاع ABC ، AB ، AC و BC را به ترتیب در M و O و N قطع می کند و داریم :

$$\frac{BM}{MC} = - \frac{a' \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) \left(\frac{AE}{EC} + 1 \right) - b' \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) + c' \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right)}{a' \left(\frac{AF}{FB} + 1 \right) \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right) + b' \left(\frac{CD}{DB} + 1 \right) \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) - c' \left(\frac{CD}{DB} + 1 \right) \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right)}$$

$$\frac{CN}{NA} = - \frac{b' \left(\frac{CD}{DB} + 1 \right) \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) - c' \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right) \left(\frac{CD}{DB} + 1 \right) + a' \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right) \left(\frac{AF}{FB} + 1 \right)}{b' \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) \left(\frac{AF}{FB} + 1 \right) + c' \left(\frac{AE}{EC} + 1 \right) \left(\frac{CD}{DB} + 1 \right) - a' \left(\frac{AE}{EC} + 1 \right) \left(\frac{AF}{FB} + 1 \right)}$$

$$\frac{AO}{OB} = - \frac{c' \left(\frac{AE}{EC} + 1 \right) \left(\frac{CD}{DB} + 1 \right) - a' \left(\frac{AF}{FB} + 1 \right) \left(\frac{AE}{EC} + 1 \right) + b' \left(\frac{AF}{FB} + 1 \right) \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right)}{c' \left(\frac{CE}{EA} + 1 \right) \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right) + a' \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) \left(\frac{AE}{EC} + 1 \right) - b' \left(\frac{BF}{FA} + 1 \right) \left(\frac{BD}{DC} + 1 \right)}$$

اگر P را مرکز نقل مثلث انتخاب کنیم داریم :

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 1$$

پس دایره DEF دایرة نه نقطه (دایرة اولو) مثلث ABC می شود و از قضیه ۶ حاصل می گردد :

$$\frac{BM}{MC} = - \frac{a' + c' - b'}{a' + b' - c'}, \quad \frac{CN}{NA} = - \frac{a' + b' - c'}{b' + c' - a'}, \quad \frac{AO}{OB} = - \frac{b' + c' - a'}{a' + c' - b'}$$

با توجه به قضیه (۲) معلوم است که محور اصلی دایره نه نقطه با دایره محیطی مثلث، قطبی (Trilinear polar) فقط تلاقي ارتفاعات مثلث ABC است. این محور اصلی یعنی خط MNO محور ارتفاعی مثلث نامیده می‌شود.

قضیه ۶ A - فرض می‌کنیم نقطه ژرگون (Gergonne) مثلث ABC باشد. نقاط E و F و D نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث با اضلاع آن می‌شوند و داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{a+c-b}{a+b-c}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{a+b-c}{b+c-a}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{b+c-a}{a+c-b}$$

به جای طرف چپ این نسبتها مقادیر شان را از قضیه ۶ قرار می‌دهیم. چون دایره محاطی مثلث حالت خاصی از دایره (D') است که D' برهم منطبق شده‌اند پس داریم:

$$\frac{BM}{MC} = -\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BD'}{DC'} = -\left(\frac{BD}{DC}\right)' = -\left(\frac{a+c-b}{a+b-c}\right)'$$

به همین طریق نقاط E و F روی ضلع CA و F' روی ضلع AB برهم منطبق می‌شوند.

قضیه ۶ B - محور اصلی دایره محاطی با دایره محیطی مثلث ABC اضلاع AB، BC، CA و DE مثلث را به ترتیب در قطع می‌کنند و داریم:

$$\frac{BM}{MC} = -\left(\frac{a+c-b}{a+b-c}\right)', \quad \frac{CN}{NA} = -\left(\frac{a+b-c}{b+c-a}\right)', \quad \frac{AO}{OB} = -\left(\frac{b+c-a}{a+c-b}\right)'$$

اگر DEF مثلث سوایی نقطه P نسبت به مثلث ABC باشد، ممکن است امتداد AB و CA و BC اضلاع EF و FB و DE را به ترتیب در D'، E' و F' قطع کنند فرض کنیم O و N و M اوساط قطعه خطهای EE'، FF' و DD' باشند معلوم است که:

$$\frac{BM}{MC} = -\left(\frac{BD}{DC}\right)', \quad \frac{CN}{NA} = -\left(\frac{CE}{EA}\right)', \quad \frac{AO}{OB} = -\left(\frac{AF}{FB}\right)'$$

و نقاط M و N و O بریک استقامت هستند.

اگر P نقطه ژرگون باشد از قضیه فوق الذکر نتیجه می‌شود که اوساط EE'، FF' و DD' بر محور اصلی دایره محاطی و دایره محیطی واقع هستند.

فرض می‌کنیم که F و E و D به ترتیب به نقاط تماس دایره محاطی خارجی نظیر رأس A با اضلاع AB و CA و BC مثلث باشند. قطعه خطهای AD و BE و CF در نقطه P متقارب خواهد بود و داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{a+b-c}{a+c-b}, \quad \frac{CE}{EA} = -\frac{a+c-b}{a+b+c}, \quad \frac{AF}{FB} = -\frac{a+b+c}{a+b-c}$$

با بکار بردن قضیه (۱) و یا جانشین سازی در قضیه ۶ محور اصلی دایره محیطی و دایره محاطی خارجی معین می‌شود.

قضیه ۶ C - محور اصلی دایره محاطی خارجی نظیر رأس A و دایره محیطی مثلث ABC اضلاع AB، CA و BC را به ترتیب در نقاط O و N و M قطع می‌کنند داریم:

$$\frac{BM}{MC} = -\left(\frac{a+b-c}{a+c-b}\right)', \quad \frac{CN}{NA} = -\left(\frac{a+c-b}{a+b+c}\right)', \quad \frac{AO}{OB} = -\left(\frac{a+b+c}{a+b-c}\right)'$$

برای نقطه تماس دایره محاطی خارجی رأس B خواهیم داشت:

$$\frac{BD}{DC} = -\frac{a+b+c}{b+c-a}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{b+c-a}{a+b-c}, \quad \frac{AF}{FB} = -\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$\frac{BM}{MC} = -\left(\frac{a+b+c}{b+c-a}\right)', \quad \frac{CN}{NA} = -\left(\frac{b+c-a}{a+b-c}\right)', \quad \frac{AO}{OB} = -\left(\frac{a+b-c}{a+b+c}\right)'$$

برای دایره محاطی خارجی نظیر رأس C داریم:

$$\frac{BD}{DC} = -\frac{b+c-a}{a+b+c}, \quad \frac{CE}{EA} = -\frac{a+b+c}{a+b-c}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{a+c-b}{b+c-a}$$

و بوسیله کسرهای زیرمحور اصلی MNO معین می شود .

$$\frac{BM}{MC} = -\left(\frac{b+c-a}{a+b+c}\right)', \quad \frac{CN}{NA} = -\left(\frac{a+b+c}{a+c-b}\right)', \quad \frac{AO}{OB} = -\left(\frac{a+c-b}{b+c-a}\right)'$$

خواسته توجه دارد که نسبت های مشترک با محورهای اصلی که در قضیه B_6 و C_6 ذکر شده اند همه منفی هستند . نقطه P برای خواسته اختیاری است و می تواند مرکز دایره محاطی یا مرکز تقل ویانقطه دیگری از مثلث انتخاب شود . فرض کنید دو خط مستقیم در صفحه مثلث ABC اضلاع AB و BC و CA را به ترتیب در نقاط O و N و M و O' و N' و M' قطع نمایند . و این دو خط یعنی خطوط MNO و $M'N'O'$ یکدیگر را در P قطع کنند . همچنین امتداد قطعه خطهای AP و BP و CP با اضلاع AB و AC و BC به ترتیب در نقاط F و E و D متلاقی شوند . معلوم است که

$$\frac{BD}{DC} = -\left(\frac{BO}{OA} - \frac{BO'}{O'A}\right) : \left(\frac{CN}{NA} - \frac{CN'}{N'A}\right), \quad \frac{AF}{FB} = -\left(\frac{AN}{NC} - \frac{AN'}{N'C}\right) : \left(\frac{BM}{MC} - \frac{BM'}{M'C}\right),$$

$$\frac{CE}{EA} = -\left(\frac{CM}{MB} - \frac{CM'}{M'B}\right) : \left(\frac{AO}{OB} - \frac{AO'}{O'B}\right)$$

در قضیه A_6 و B_6 هرگاه خطوط MNO و $M'N'O'$ را محورهای اصلی انتخاب کنیم نقطه P محل تلاقی این محور-

های اصلی خواهد شد .

نقطه P علاوه بر آن مرکز املی دایره نه و نقطه ودایره محاطی و دایره محیطی مثلث ABC نیز می باشد . و نسبتهای $\frac{BM}{MC}$

$$\frac{AO'}{OB} : \frac{CN'}{NA} : \frac{B'M}{M'C} \text{ را می توان از پاراگراف آخر قضیه } A_6 \text{ معین کرد . و نیز نسبتهای } \frac{AO}{OB} : \frac{CN}{NA} \text{ و }$$

$$\frac{BM}{DC} = -\left(\frac{BO}{OA} - \frac{BO'}{O'A}\right) : \left(\frac{CN}{NA} - \frac{CN'}{N'C}\right) = \left(\frac{a-b}{c-a}\right) \left(\frac{a^3 + b^3 - 2c^3 + ac^3 + bc^3 - ab^3 - a'b}{a^3 + c^3 - 2b^3 + b^3c + ab^3 - a^3c - ac^3} \right). \text{ معین می شوند .}$$

به همین طریق برای $\frac{AF}{FB}$ و $\frac{CE}{EA}$ مقادیری نظری بدست می آیند .

قضیه ۷ - نقطه P را مرکز اصلی دایره محاطی ، دایره نه نقطه و دایره محیطی مثلث ABC انتخاب کرده و

مثلث سوائی آنرا در نظر می گیریم . داریم :

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{a-b}{c-a}\right) \left(\frac{a^3 + b^3 - 2c^3 + ac^3 + bc^3 - ab^3 - a'b}{a^3 + c^3 - 2b^3 + b^3c + ab^3 - a^3c - ac^3} \right)$$

$$\frac{CE}{EA} = \left(\frac{b-c}{a-b}\right) \left(\frac{b^3 + c^3 - 2a^3 + a^3b + a^3c - bc^3 - b^3c}{a^3 + b^3 - 2c^3 + ac^3 + b^3c - ab^3 - a^3b} \right)$$

$$\frac{AF}{FB} = \left(\frac{c-a}{b-c}\right) \left(\frac{a^3 + c^3 - 2b^3 + b^3c + ab^3 - a^3c - ac^3}{b^3 + c^3 - 2a^3 + a^3b + a^3c - bc^3 - b^3c} \right)$$

معلوم است که محور اصلی دوایر DEF و ABC با استفاده از قضیه 6 معین می شود . اگر $D'E'F'$ مثلث سوائی نقطه P' باشد محور اصلی دوایر $D'E'F'$ و ABC به همان طریق بدست می آید . بوسیله قضیه 6 می توان مرکز اصلی دوایر ABC و $D'E'F'$ و DEF را معین کرد .

فرض می کنیم P و P' دونقطه مزدوج هم گوش بوده و مثلث های سوائی آنها به ترتیب DEF و $D'E'F'$ باشد . از P عمودهایی بر اضلاع AB و CA و BC مثلث فروید آورده و پای آنها را به ترتیب I و H و G می نامیم و نیز از P' عمودهایی بر اضلاع این مثلث رسم کرده و پای آنها را I' و H' و G' می نامیم .

دترمینان

تنظیم از : سید محمد کاظم نائینی

با استفاده از منابع خارجی

دنباله از شماره گذشته

ستون اول ، دترمینان مخرج است .

مثال عددی: دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} 5x - 3y - 7 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

اول می نویسیم سپس دترمینان ضرائب را تشکیل می دهیم و از آنجا نتیجه می شود :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7 + 15 = 22$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 14 = 11$$

بنابراین :

$$y = \frac{11}{11} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1 \quad x = \frac{22}{11} = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2$$

بدهی است دستگاه وقی دادای جواب است که $\Delta \neq 0$ باشد . اگر $\Delta = 0$ باشد دستگاه نشدنی است و در این حالت اگر $\Delta_x = 0$ نیز صفر باشد دستگاه مبهم است در حل

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases}$$

درجه اول نیز دستوراتی مشابه وجود دارد : دستورات کرامر

اینکه موارد استعمال دترمینان را از ابتدائی ترین مرحله پیدا کنیم آن مورد بررسی قرار داده و گسترش دامنه وسیع آن را به خواص جالب جبر ماتریسی مرتبط می سازیم .

ساده ترین مرحله استفاده در حل دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول است که در سال سوم متوسطه تدریس می شود

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

چنانکه می دانیم برای حل این دستگاه از روش حذفی عمل کرده و مقادیر x و y بر حسب ضرایب به قرار زیر بدست می آیند :

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc} \quad y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

این دو کسر که به دستور کرامر معروفند مخرجهای مشترک دارند و چنانکه مشاهده می شود با توجه به تعریف دترمینان صورت و مخرج هر کدام یک دترمینان رسته ۱۲ است :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$$

صورت x مخرج صورت y

پس می توان نوشت :

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

که در آن Δx و Δy به ترتیب دترمینانهای

$$\begin{vmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{vmatrix}$$

فوق می باشند . در عمل هر سه ستون ضرایب را در دو سطر می نویسند سپس

به ترتیب ، ستون اول را حذف کرده به جایش ستون سوم را قرار می دهند ، Δx بدست می آید ، ستون دوم را حذف کرده ستون سوم را جایگزین آن می کنند : Δy نتیجه می شود و دو

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times (-3) - 1 \times 6 + 0 = 36$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{24}{12} = 2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{36}{12} = 3$$

به همین ترتیب به کمک نوعی استدلال که از حوصله‌این مقال خارج است (استدلال ازتریق بازگشت) وجود دستورات کرامر را برای حل دستگاه n معادله n مجهولی درجه اول به ثابت می‌رسانند. در این حالت دترمینان ضرائب یعنی Δ از رسته n است:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} \dots$$

با توجه به اینکه یک معادله درجه یک دو مجهولی نمودار جبری خطی مستقیم در صفحه است و یک معادله درجه یک سه‌جهولی نمودار جبری خط مستقیم در فضای است، یک معادله درجه یک n مجهولی نیز نمودار جبری خطی مستقیم در یک فضای n بعدی است.

تعییر هندسی حل دستگاه دو معادله دو مجهولی تعیین نقطه برخورد دو خط در صفحه و تعییر هندسی حل دستگاه سه معادله سه‌جهولی تعیین نقطه برخورد سه خط در فضای بالا از تعبیر هندسی حل دستگاه n معادله n مجهولی درجه اول تعیین نقطه برخورد n خط در یک فضای n بعدی است و بدیهی است وقتی که تجسم فضای n بعدی برای ما غیر ممکن است حتی تصور فضای n بعدی ما را در وادی مجهولات حیران می‌سازد یک مثال مثلثات: می‌دانیم که در هر مثلث بین

اضلاع و کسینوس زوایا روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} b \cos C + c \cos B = a \\ c \cos A + a \cos C = b \\ a \cos B + b \cos A = c \end{cases}$$

اگر بخواهیم این دستگاه را نسبت به اضلاع a و b و c حل کنیم آنرا به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} -a + b \cos C + c \cos B = 0 \\ a \cos C - b + c \cos A = 0 \\ a \cos B + b \cos A - c = 0 \end{cases}$$

در حل این دستگاه به صورتهای زیر درمی‌آید:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

که در آن

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & c & p \\ d & f & q \\ g & i & r \end{vmatrix},$$

چنانکه ملاحظه می‌شود Δ دترمینان ضرائب مجهولات است و برای تشکیل دترمینانهای مربوط به x و y و z به Δ ترتیب ستوں ضرائب آن مجهول را در Δ حذف کرده بهای آن ستوں اعداد ثابت را قرار می‌دهیم. در حقیقت Δ مفسر دستگاه است و بر حسب آنکه صفر یا مخالف صفر باشد دستگاه ممتنع یا دارای جواب خواهد بود.

مثال عددی: دستگاه سه معادله سه‌جهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -3y + z = -3 \end{cases}$$

ابتدا دترمینان ضرائب را نوشته محاسبه می‌کنیم سپس مقادیر x و y را طبق دستورات کرامر تعیین می‌نماییم.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -8 + 6 = -2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -0 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -0 - 18 + 30 = 12$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -18 - 0 + 6 = -24$$

اگر این دو ترمینان یعنی Δ و Δ^π را در هم ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$\Delta \cdot \Delta^\pi = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^2 \rightarrow \Delta^\pi = \Delta^2$$

و بهمین ترتیب ثابت می شود که دترمینان الحاقی رسته ۴ برابر Δ^3 و دترمینان الحاقی رسته n برابر Δ^{n-1} است. ضرب دو دترمینان بینی نحو صورت گرفت که اجزاء سطر اول را در اجزاء سطر اول دیگری یک یک ضرب کرده با هم جمع کردیم و جمله اول دترمینان حاصل ضرب قرار دادیم سپس برای جملات دوم و سوم سطر اول حاصل ضرب نیز همان اجزاء سطر اول ضرب را در اجزاء سطر دوم و سوم ضرب فیه ضرب می کنیم و برای تعیین اجزاء سایر سطراها نیز به همین ترتیب عمل می کنیم. مثال زیر این مطلب را واضح می کند.

مثال - دترمینان الحاقی Δ را به همان صورت دترمینان

بنویسید سپس حاصل ضرب $\Delta \Delta^\pi$ را بدست آورید :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(3-35) - 4(-1-10) + 1(-7-6) = -33$$

نسبت به سطر اول بسط داده شد.

اگر این دترمینان را نسبت به سطراها اول و دوم و سوم بسط دهیم تساویهای زیر را خواهیم داشت :

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 2 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = +1 \begin{vmatrix} 4 & 1 & +3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & -7 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & -1 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

در نتیجه معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = 2(-32) + 4(11) + 1(-13) \\ \Delta = -1(+3) + 3(0) + 5(-6) \\ \Delta = 2(12) + 7(-11) + 1(10) \end{array} \right.$$

دترمینان ضرائب که همان دترمینان الحاقی است به صورت

دترمینان ضرائب عبارتست از:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta_a = \begin{vmatrix} 0 & \cos C & \cos B \\ 0 & -1 & \cos A \\ 0 & \cos A & -1 \end{vmatrix}$$

و چنانکه ملاحظه می شود $\Delta_a = 0$ است و به همین ترتیب به آسانی ملاحظه می شود که $\Delta_b = 0$ و $\Delta_c = 0$

$$c = \frac{\circ}{\Delta}, b = \frac{\circ}{\Delta}, a = \frac{\circ}{\Delta}$$

است و چون a و b و c اضلاع مثلث و مخالف صفر اند لذا باید $\Delta = 0$ باشد

اگر دترمینان ضرائب یعنی Δ را بسط دهیم چنین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &+ \begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta = -1 + \cos C \cos A \cos B + \cos B \cos C \cos A + \cos A \cos C \cos B = 0$$

و نتیجه خواهد شد در هر مثلث رابطه زیر برقرار است:
 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$

- دترمینان وابسته یا الحاقی (ADJOINT)
 به عنوان مثال دترمینان 3×3 را در نظر می گیریم:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \Delta$$

اگر این دترمینان را نسبت به اعضای سطر اول بسط داده ضرائب $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ بنامیم سپس به همین ترتیب نسبت به اعضای دو سطر دیگر بسط داده و ضرائب را A_1, B_1, C_1 و A_2, B_2, C_2 و A_3, B_3, C_3 بنامیم خواهیم داشت :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 \\ \Delta = A_2 x_2 + B_2 y_2 + C_2 z_2 \\ \Delta = A_3 x_3 + B_3 y_3 + C_3 z_3 \end{array} \right.$$

دترمینان ضرائب را در دستگاه معادلات زیر دترمینان

وابسته یا الحاقی می نامند و آنرا به Δ^π نمایش می دهند:

$$\Delta^\pi = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

تمرین ۳: دترمینانهای زیر را نسبت به اجزاء هر سه ستون بسط دهید:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

تمرین ۴: دترمینان وابسته هر یک از دترمینانهای زیر را بنویسید:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

تمرین ۵: دترمینانهای زیر مفروضند:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 11 \\ 10 & 9 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

مطلوب است تعیین حاصل ضربهای زیر:

$$A \cdot B, B \cdot C, C \cdot D, A \cdot C, B \cdot D$$

$$\Delta^{\pi} = \begin{vmatrix} -32 & 11 & -13 \\ +3 & 0 & -6 \\ 17 & -11 & 10 \end{vmatrix}$$

زیر خواهد بود:
مقدار این دترمینان پس از محاسبه برابر ۱۰۸۹ است
که مربع (۳۳-۳۴)، اندازه دترمینان Δ است یعنی:

$$\Delta^{\pi} = \Delta^{\pi}$$

(در بسط Δ نسبت به سطر دوم توجه کنید که جمله اول عالمتش منفی و دومی مثبت و سومی منفی است درصورتی که در بسط Δ نسبت به سطر اول و سوم جمله اول مثبت، دوم منفی و سوم مثبت است)

$$\Delta \times \Delta^{\pi} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -32 & 11 & -13 \\ 3 & 0 & -6 \\ 17 & -11 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -33 & 0 & 0 \\ 0 & -33 & 0 \\ 0 & 0 & -33 \end{vmatrix} = (-33)^3$$

سطر اول Δ را یک یک در سطر اول و دوم و سوم Δ^{π}
ضرب کرده سطر اول حاصل ضرب نتیجه می شود.
تمرین ۱: دترمینانهای زیر را حساب کنید:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

تمرین ۲: دترمینانهای زیر را نسبت به اجزاء هر سطر بسط دهید:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

مسائل حل نشده ریاضی

تألیف:

C. STANLEY OGILVY

ترجمه: ع. م.

بخش چهارم - مسائل هندسه

بقیه از شماره گذشته

در یک صفحه دو خط وقی متقاطع اند که متوازی نباشند. در فضای از قرار دیگر است، دو خط که در یک صفحه واقع نباشند متقاطع نیستند (در این حالت متقاطع نامیده می‌شوند) و اگر دو خط در یک صفحه واقع باشند وقی که متوازی نباشند متقاطع خواهند بود. دو خط متقاطع یک و فقط یک عمود مشترک دارند که طول آن اقصی فاصله بین نقاط آن دو خط می‌باشد. در یک فضای سه بعدی چند خط می‌توان رسم کرد که اقصی فاصله هر کدام از آنها از بقیه پابرابر با یک واحد باشد؟ گمان می‌کنند که رسم ۷ خط امکان دارد اما هنوز توانسته‌اند این ادعا را ثابت کنند. امکان دارد که جواب مسئله بزرگتر از ۷ یا کوچکتر از آن باشد.

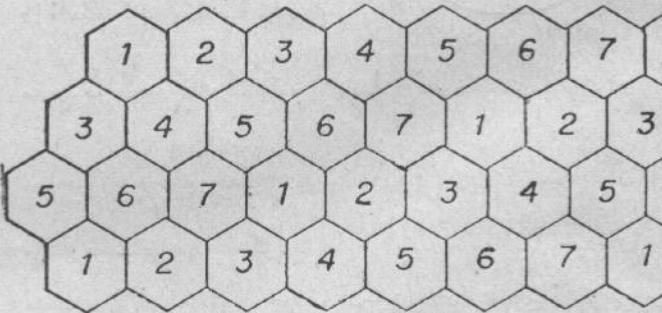
یک چند ضلعی محدب غیر منظم را در نظر می‌گیریم که تعداد رأسهای آن n باشد؛ اگر d فاصله بین دور آس دلخواه باشد، چند مقدار مختلف برای d وجود دارد؟ حداقل تعداد این مقادیر را $\frac{n}{3}$ دانسته‌اند. اما اردرس (Erdős) تصور

می‌کند که این حداقل باید $\frac{n}{3}$ باشد.

دو مسئله زیر مشغول کننده بوده اما مشکل می‌باشد و توسط استنفوس (Steinhous) طرح شده‌اند:

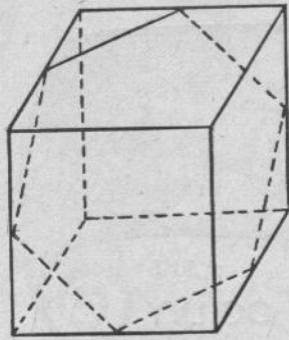
- (۱) یک میز بیلیارد در نظر می‌گیریم که کناره‌های آن منحنی محدبی را تشکیل می‌دهند. مثلثی مانند ABC فرض می‌کنیم که توب بیلیارد محیط آن را متناظراً می‌پیماید یعنی مسیر آن عبارت باشد از ...ABCABCABC. این مثلث را مثلث تناوبی می‌نامیم. محقق شده است که از بین مثلثهای محاط در محیط میز بیلیارد آنکه محیطش ماکزیمم است یک مثلث تناوبی است. آیا غیر از آن حداقل یکی دیگر وجود دارد؟

مسئله زیر توسط لئوموزر (Leo Moser) مطرح شده است: می‌خواهیم یک نقشه (مسطح) جغرافی را چنان رنگ آمیزی کنیم که هر دو نقطه به فاصله یک واحد در دو ناحیه با رنگ‌های مختلف واقع شوند. برای این کار حداقل چند نوع رنگ لازم است؟ از شکل زیر برمی‌آید که ۷ رنگ کافی است حتی اگر تعداد نواحی نامحدود اختیار شود. در این شکل هر عدد نماینده یک رنگ بوده و عده‌های مختلف نماینده



رنگ‌های متفاوت بوده و قطر هر یک از شش ضلعیها کمتر از واحد (مثلاً ۵۰۹۹) می‌باشد. صورت مسئله از این قرار است که آیا تعداد ۷ رنگ لازم است یا نه و حداقل تعداد رنگ‌های لازم چه می‌باشد؟

مسئله دیگری مشابه با مسئله بالا در مورد مثلث مطرح می‌شود: یک مثلث متساوی الاضلاع را روی یک نقشه جغرافی قرار می‌دهیم. حداقل با چند رنگ باید نقشه را رنگ آمیزی کرده باشیم تا سه رأس مثلث در سه ناحیه با رنگ‌های متفاوت واقع شوند؛ بنظر می‌رسد که مسئله برای یک نقشه مسطح قابل حل باشد اما برای نقشه‌های کروی هنوز راه حلی بدست نیامده است.



شش ضلعی منتظم خواهد بود.
آنچه جایاب است اینکه این
قطعه بزرگترین قطعه در
یک مکعب نمی باشد . آلان
رو همید ثابت کرده است که
بزرگترین قطعه در یک
مکعب باید شامل دویال
متوازی غیر واقع در یک
وجه باشد (اگر حجم مکعب
واحد باشد مساحت این قطعه برابر $\frac{1}{2}$ خواهد بود).

استوانه دواری را در نظر می گیریم و فرض می کنیم
ارتفاع آن h و شعاع قاعده اش r باشد .

بزرگترین قطعه مسطح آن چیست؟ قطعه بیضوی که از



تقاطع یک صفحه قطري با
استوانه بdst می آید (شکل)
مقابل) اينچنین مقطعی نیست.
بزرگترین قطعه بوسیله
صفحه ای حادث می شود که
تقریباً قائم بود و دوقاعده
را قطع کند . زاویه این

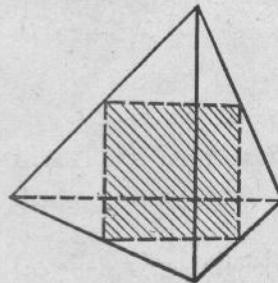
صفحه با محور قائم استوانه به نسبت $\frac{h}{r}$ بستگی دارد . می توان

مساحت قطعه را بر حسب $\frac{h}{r}$ بدست آورد و از روی تغییرات آن
ماکزیمم را محاسبه کرد . اما از این راه معادله پیچیده ای
بدست می آید که تعیین جواب آن جز از راه محاسبه تقریبی
امکان پذیر نیست . هنوز فرمولی بدست نیاورده اند که از روی
آن مساحت ماکزیمم را بر حسب h و r حساب کنند .

۲) توپ کوچکی در نظر می گیریم که ، در داخل یک
چهار وجهی منتظم در جهش باشد بدون آنکه با يالها تماس
حاصل کند . به شرط آنکه از قوه تقل صرف نظر کنیم آیا
برای این توپ یک مسیر تناوبی وجود دارد ؟

مثلث ABC را در نظر می گیریم : یک مثلث PQR که در مثلث ABC محاط شده آنرا به چهار مثلث تقسیم می کند . آیا امکان دارد که محیط مثلث PQR از محیط هر یک از سه مثلث دیگر کوچکتر باشد؛ در حالی که P و Q و R اوساط اضلاع باشند چهار مثلث دارای محیطهای برابر خواهند بود .

به سادگی ثابت می شود که بزرگترین قطعه خط محصور بین دونقطه از محیط مثلث همان بزرگترین ضلع مثلث می باشد . آیا در فضای سه بعدی هم این حکم صادق است ؟ یعنی آیا بزرگترین قطعه مسطح یک چهار وجهی همان بزرگترین وجه آن می باشد ؟ ظاهراً بنظر می آید که چنین باشد اما هنوز برای این سوال پاسخی صریح بدست نیامده و نسبت به آن مشکوک هستند . اگر هر قطعه مسطح از چهار وجهی را یک مثلث بدانیم کاملاً اشتباہ کرده ایم . شکل مقابل یک چهار وجهی منتظم را نشان می دهد که با یک قطعه مربع به دو قسمت تقسیم شده است .



اگر مکعبی را با صفحه ای که بر مرکز آن گذشته و بر یکی از قطرهای آن عمود است قطع کنیم ، قطعه یک

پاسخ مسئله زیر چنین آن «بی آنکه هصباتی شوید» هندریج در یکان شهرهای گذشته:

و یک نفر وجود دارد که باهمه افراد جمعیت دوست است (نظیر عدد ۱ - n) اما این دو موضوع با هم مغایرت دارد، زیرا اگر یک نفر با همه افراد جمعیت دوست باشد دیگر فردی بدون دوست وجود نخواهد داشت . بنابراین فرض اینکه «هیچ دونفری وجود ندارد که عده دوستان آنها با هم برابر باشد» غیر ممکن است .

اگر n عده افراد جمعیت مورد نظر باشد ، چنانچه فرض کنیم هیچ دونفری از بین افراد جمعیت وجود ندارد که عده دوستان آنها با هم برابر باشد در این صورت عده دوستان هر یک از افراد جمعیت برابر با یکی از اعداد زیر خواهد بود :

۱ - ۲۶ - ۳۶ - ۴۶ - ... - n

یک نفر وجود دارد که ابدآ دوست ندارد (نظیر عدد صفر)

راهنمای ریاضیات متوسطه

دوران محورهای مختصات

محاسبه حد بعضی از توابع

تنظیم از، علی عاطفی - دبیرستان طباطبائی

I - دوران محورهای مختصات و موارد استعمال آن

از تصویر طرفین رابطه (۱) بر y' نتیجه خواهد شد:

$$y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \quad (3)$$

روابط (۲) و (۳) مختصات قدیم یک نقطه M را بر حسب مختصات جدید آن بعد از دوران محورهای مختصات بدست می‌دهد.

مثال - درستگاه محورهای مختصات xOy معادله یک

$$\text{منحنی } (C) \text{ عبارتست از } \frac{1}{x} = y. \text{ محورهارا به زاویه } 45^\circ \text{ درآید. معادله}$$

دوران می‌دهیم تا به وضع دستگاه جدید XOY درآید. معادله منحنی (C) را نسبت به دستگاه جدید تعیین کنید.

بنابراین روابط (۲) و (۳) داریم:

$$x = \frac{X\sqrt{2}}{2} - \frac{Y\sqrt{2}}{2} \quad \text{و}$$

$$y = \frac{X\sqrt{2}}{2} + \frac{Y\sqrt{2}}{2}$$

این مقادیر را در معادله منحنی (C) منظور می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (X - Y) \times \frac{\sqrt{2}}{2} (X + Y) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{X'}{2} - \frac{Y'}{2} = 1$$

تبصره - به طریقی که در مثال بالا ذکر شد بطور کلی

ثابت می‌شود که منحنی نمایش هندسی هر تابع هموگرافیک

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} \quad (\text{یک هذلولی است.})$$

موردن استعمال

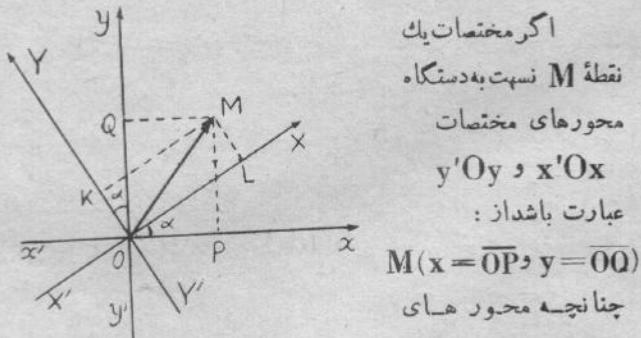
بنابرآنچه در مخروطات سال ششم ریاضی اثبات می‌شود:

منحنی (C) نمایش هندسی تابع

$$Ax' + By' + Cx + Dy + E = 0 \quad (4)$$

یک مقطع مخروطی است. به این معنی که:

انتقال محورهای مختصات و موارد استعمال آن در برنامه ریاضیات دبیرستان منظور شده و تدریس می‌شود. در بسیاری از کشورها، دوران محورهای مختصات نیز در برنامه تعلیمات متوسطه منظور شده است. اما در کشور ما آموزش این مبحث به سالهای اول داشکده ها حالله شده است. درصورتی که، چنانچه ذیلا ملاحظه خواهد شد، یک مبحث ساده بوده وعلاوه بر آنکه مطابق با معلومات ریاضی متوسطه قابل درک است در حل مسائل ریاضیات دبیرستان هم موارد استعمال گوناگون دارد.



اگر مختصات یک نقطه M نسبت به دستگاه محورهای مختصات $y'oy$ و $x'ox$ عبارت باشد از:

$$M(x = \overline{OP}, y = \overline{OQ})$$

چنانچه محورهای

مختصات را حول نقطه O به اندازه زاویه α دوران می‌دهیم تا به وضع $X'OX$ و $Y'OY$ درآیند و واضح است که:

$$(x'x + X'X) = (y'y + Y'Y) = \alpha$$

فرض می‌کنیم مختصات نقطه M نسبت به دستگاه محورهای XOY عبارت باشد از:

$$M(X = \overline{OL}, Y = \overline{OK})$$

رابطه پرداری زیر را درنظر می‌گیرید:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LM} \quad (1)$$

طرفین این رابطه را بر x' تصویر می‌کنیم: می‌شود:

$$x = \overline{OL} \cos \alpha + \overline{LM} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$$

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \quad (2)$$

و معادله منحنی به صورت زیر درمی آید.

$$\frac{X'}{2(\sqrt{2}+1)} - \frac{Y'}{2(\sqrt{2}-1)} = 1$$

که منحنی مربوط، یک هذلولی است.

موارد استعمال دیگر

ثابت کنید که منحنی به معادله

$$x^2 + y^2 + 6xy + 4x - 4y + a = 0$$

دارای دو محور تقارن است. معادلات این محورها را بدست آورید.

محورهای مختصات را به زاویه α دوران می‌دهیم. بعد از

اختصار خواهیم داشت:

$$x'(1 + 3\sin 2\alpha) + y'(1 - 3\sin 2\alpha) + 6xy\cos 2\alpha + 4x(\cos \alpha - \sin \alpha) - 4y(\cos \alpha + \sin \alpha) + a = 0$$

با انتخاب

$$\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

نتیجه می‌شود:

$$4x^2 - 2y^2 - 4y\sqrt{2} + a = 0$$

محورهای مختصات را انتقال می‌دهیم تا $O'(-\sqrt{2}, 0)$

مبدأ جدید باشد، خواهیم داشت

$$4x^2 - 2y^2 + a + 4 = 0$$

با تبدیل $x = -y$ - و y به y - معادله فرق نمی‌کند. بنابراین

محورهای جدید محورهای تقارن منحنی هستند. چون معادلات

این محورهارا نسبت به محورهای اولیه حساب کنیم می‌شود:

$$y = x - 2 \quad y = -x$$

اگر $A = B$ باشد، $C = A$ یک دایره است (برای آنکه یک دایره حقیقی باشد شرط دیگری لازم است).

اگر $A \neq B$ هملا متناسب باشد یعنی $A \subset B$ باشد، C یک بیضی است.

اگر $B \subset A$ باشد یعنی A و B مختلف العلامت باشند، C یک هذلولی است.

اگر یکی از مقادیر A و B صفر باشد، C یک سهمی است.

این قضیه به صورت کلی زیر تعمیم می‌یابد:

قضیه - هر تابع که بر حسب x و y از درجه دوم باشد به شکل کلی:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

معادله یا: منحنی مقطع مخروطی می‌باشد.

برای اثبات، محورهای مختصات را دوران می‌دهیم و زاویه دوران را چنان تعیین می‌کنیم که معادله منحنی نسبت به دستگاه جدید فاقد جمله xy یعنی به شکل معادله (4) باشد و در این صورت بنابر آنچه قبلیابان شد منحنی نمایش هندسی تابع یک مقطع مخروطی بوده و نوع آن نیز مشخص می‌شود.

مثال - معادله $x^2 - xy + 1 = 0$ را در نظر می‌گیریم
محورهای مختصات را به زاویه α دوران می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$X'(\cos \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) + Y'(\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha) - XY(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) + 1 = 0$$

برای اینکه معادله فاقد جمله XY باشد باید داشته باشیم:

$$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}$$

II - راهی ساده برای محاسبه حد در توابع اصم

به تابع کسری وغیر اصم تبدیل کرد و آنکاه مقدار حد مورد نیاز را از روی تابع اخیر بدست آورد. طرز عمل به قرار زیر است:

$$P(x) = z \quad \text{به فرض: } z = \sqrt[mn]{P(x)} \quad \text{داریم:}$$

واز رابطه اخیر حاصل خواهد شد:

$$\sqrt[n]{P(x)} = z \quad \text{و} \quad \sqrt[m]{P(x)} = z$$

در نتیجه:

$$\frac{\sqrt[m]{P(x)} + A}{\sqrt[n]{P(x)} + B} = \frac{z + A}{z + B}$$

انجام پارهای محاسبات روی تابع اصم پیچیده و دشوار است. از آن جمله تعیین حد توابعی است نظیر:

$$y = \frac{\sqrt[m]{P(x)} + A}{\sqrt[n]{P(x)} + B}$$

وقتی که مثلا $x \rightarrow \infty$ یک کثیر الجمله است و A و B مقادیر ثابت‌اند.

ولی برای سهولت محاسبه، با انتخاب متغیر جدیدی به صورت:

$$z = \sqrt[mn]{P(x)}$$

در مثال زیر مخرج تابع اصم نیست :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x+1}}{(x-1)^2}$$

به ترتیب چنین عمل می کنیم :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x+1}}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x+1}}{(x-1)^2}$$

اکنون فرض می کنیم :

$$x^2 = z^{18} \quad z = \sqrt[3]{x^2}$$

از رابطه اخیر معلوم است وقتی $x \rightarrow 1$ ، $x^2 \rightarrow 1$ ، لذا :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x+1}}{(x-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^6 - 2z^3 + 1}{(z^3 - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^3 - 1)^2}{(z^3 - 1)^2(z^6 + z^3 + 1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z^6 + z^3 + 1)} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

اما وقتی $x \rightarrow 1$

$$z \rightarrow \sqrt[mn]{P(x)} = z_0$$

لذا :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[mn]{P(x)} + A}{\sqrt[mn]{P(x)} + B} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z + A}{z + B}$$

در صورتی که به جای دو عدد A و B دو عبارت جبری غیر اصم داشته باشیم فقط کافیست آنها را بر حسب مقسیم جدید نوشته و در تابع قرار دهیم .

مثال -

مطلوب است تعیین

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} + 1}$$

$$z = \sqrt[3]{x+1}$$

اگر فرض کنیم :

خواهیم داشت :

$$\sqrt[3]{x+1} = z^3 \quad \sqrt[3]{x+1} = z^3$$

وروشن است که وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $z \rightarrow \infty$. بنابراین :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} + 1} &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3 + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

حل یک مسئله از مسائل شیخ بهائی

دریکان شماره یکم به نقل از خلاصه الحساب شیخ بهائی زیر عنوان مسائل لایحل هفت مسئله درج شده بود . آقای علی رضائی دیر دانشمند ریاضیات (فعلا بازنشسته) حل یکی از این مسائل را مرقوم داشته اند که در زیر جای می شود :

چون این مقادیر را در معادلات (۱) و (۲) منظور کنیم نتیجه خواهد شد :

$$x^4 = \frac{\alpha^4 + 4}{4}$$

و در ازاء مقادیر مختلف α می توان مقادیر نقطه a و b و x را تعیین کرد . مثلا :

$$\alpha = 0 : \sqrt{a} = 1 , \sqrt{b} = 1 , x^4 = 1$$

$$\alpha = 1 : \sqrt{a} = \frac{9}{4} , \sqrt{b} = \frac{1}{4} \quad x^4 = \frac{5}{4}$$

و در حالت خاص $\alpha = 10$ داریم :

$$\sqrt{a} = 26 \quad x^4 = 26 \quad \sqrt{b} = 16$$

علی رضائی

دریکان شماره یکم به نقل از خلاصه الحساب شیخ بهائی زیر عنوان مسائل لایحل هفت مسئله درج شده بود . آقای علی

رضائی دیر دانشمند ریاضیات (فعلا بازنشسته) حل یکی از این مسائل را مرقوم داشته اند که در زیر جای می شود :

مطلوب است حل هر یک از دو معادله زیر :

$$x^4 + 10 = \sqrt{a} - 10 = \sqrt{b}$$

معادلات را در حالت کلی زیر حل می کنیم :

$$(1) \quad x^4 + \alpha = \sqrt{a}$$

$$(2) \quad x^4 - \alpha = \sqrt{b}$$

معادله (۱) را چنین می نویسیم :

$$x^4 - \alpha = \sqrt{a} - 2\alpha$$

تساوی زیر را در نظر می گیریم :

$$\sqrt{a} - 2\alpha = (\sqrt{a} - \alpha)^2$$

که از آن نتیجه خواهد شد :

$$\sqrt{a} = \left(\frac{\alpha + 2}{2}\right)^2$$

و از معادله (۲) نیز حاصل می شود :

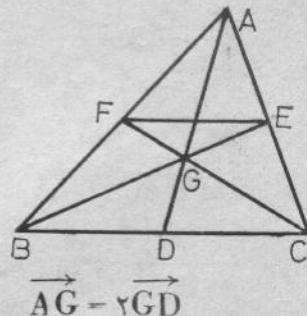
$$\sqrt{b} = \left(\frac{\alpha - 2}{2}\right)^2$$

مثلث

$b=c \Leftrightarrow \begin{array}{c} \wedge \quad \wedge \\ B=C \end{array}$
مثلث همساوی الاضلاع است اگر ضلع آن باهم برابر باشند:
 $a=b=c \Rightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$

مثلث قائم الزاویه است اگر مثلث $\begin{array}{c} \wedge \\ A = \frac{\pi}{2} \end{array}$ باشد، در این صورت ضلع BC وتر نامیده می‌شود.

[۳] همیانه خطی است که یک رأس را به وسط ضلع مقابل



$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$$

و رابطه‌های مشابه آن برقرار بوده و همچنین:

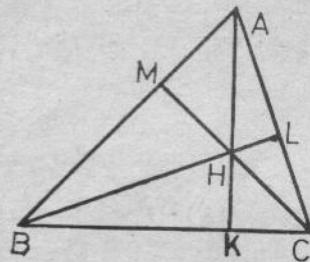
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$$

به علاوه \overrightarrow{EF} با \overrightarrow{BC} موازی است و:

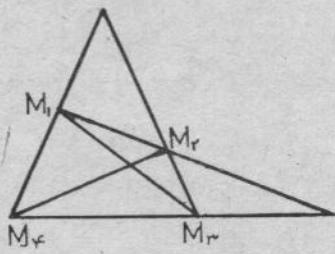
$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

(نقطه G مرکز ثقل مثلث DEF نیز می‌باشد).

[۴] ارتفاع مثلث خطی است که از یک رأس A به



یک نقطه H به نام مرکز ارتفاعی (Orthocentre)



نقطه K از ضلع BC
وصل شود که KA بر
K عمود باشد
تصویر قائم A بر BC
نامیده می‌شود
سه ارتفاع در

متقاربند.
اگرچه این نقطه
و M₁, M₂, M₃ در
رادیکالیک صفحه در
نظر بگیرید می‌توانیم یک

[۱] شکل حاصل از سه نقطه که بر یک خط مستقیم واقع نباشند. و به معنی وسیعتر، قسمتی از صفحه که به سه ضلع CA و BC، B، A محدود باشد.

یه هر مثلث عموماً شش عدد نسبت داده می‌شود:

- اندازه‌های سه ضلع که با $a=BC$ و $b=CA$ و $c=AB$ نشان داده می‌شود.

- سه زاویه که با $\begin{array}{c} \wedge \quad \wedge \quad \wedge \\ C, B, A \end{array}$ نشان داده می‌شوند

بقسمی که A عبارت باشد از زاویه $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
اندازه‌های ضلعها سه عدد مثبت بوده و بین آنها شش رابطه برقرار می‌باشد از جمله:

$$|b-c| < a < b+c$$

که به نامساوی مثلثی مینکوسکی معروف می‌باشد
اگر مثلث بدانند که $c < b < a$ کافیست که رابطه بالا را نوشته و وجود یک مثلث به ضلعهای a, b, c را محقق سازند.
روابط دیگر از این رابطه نتیجه می‌شوند.

عدد $a+b+c=2p$ همیط مثلث نامیده می‌شود.

سه زاویه مثلث چنان هستند که:

$$\begin{array}{c} \wedge \quad \wedge \quad \wedge \\ A+B+C=\pi \text{(modulo } 2\pi) \end{array}$$

چنانچه از بین زاویه‌های برداری آنها را در نظر بگیرند که از لحاظ قدر مطلق کوچکتر از π رادیان هستند
سه زاویه دارای یک علامت خواهند بود. با توجه به این شرط
این اندازه‌هارا مثبت و محصور بین صفر و π برابر با سه
زاویه هندسی محدب در A, B, C انتخاب می‌کنند بقسمی
که: اگر داشته باشیم:

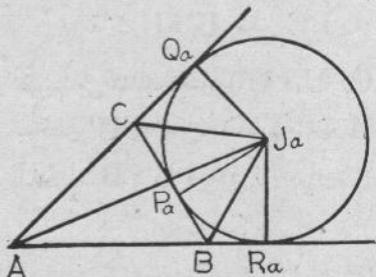
$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \wedge \quad \wedge \quad \wedge \\ A+B+C=\pi \end{array} \\ \begin{array}{c} \wedge \quad \wedge \quad \wedge \\ A>B>C \end{array} \end{array} \right. \begin{array}{l} a>b>c \end{array}$$

[۲] یک مثلث همساوی الساقین است اگر دو ضلع آن با هم برابر باشند که در این حال نتیجه خواهد شد دو زاویه مقابل به آنها نیز برابر اند، و بر عکس یعنی:

$$AQ = AR = p - a = \frac{b+c-a}{2}$$

$$BR = BP = p - b \quad CP = CQ = p - c$$

با این موضوع هم اشاره شود که H مرکز دایره محاطی مثلث KLM می باشد.



دایره محاطی خارجی داخل زاویه A می باشد. شاعر این دایره با r_a و نقاط تماس آن باضلعها به P_a ، Q_a و R_a نشان داده می شود و رابطه های زیر برقرار است :

$$AQ_a = AR_a = p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$CP_a = CQ_a = p - b \quad BR_a = BP_a = p - c$$

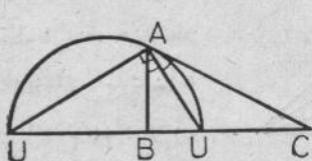
بالاخره چهار زاویه ای (Orthocentrique) $IJ_aJ_bJ_c$ می باشد.

[۸] سه نقطه O و G و H بر یک خط مستقیم موسوم به خط اوپلر قرار دارند و داریم :

$$\overrightarrow{HG} \perp \overrightarrow{GO}$$

$$H \quad \omega \quad G \quad O$$

نقطه ω وسط OH مرکز دایره اوپلر یا دایره نه نقطه است که بر اواسط اضلاع چهار زاویه ای ارتوسانتریک E (D) و F (C) و G (B) و H (A) و اواسط اضلاع و اواسط (CH, BH, AH) و فوئر باخ دایره اول بر هر یک از دایره های محاطی داخلی و خارجی مثلث متسام می باشد. دایره اول مجанс دایره محیطی مثلث در تجانس به مرکز G و به نسبت $(\frac{1}{2})$ می باشد، در



این تجانس مجанс عبارت مثلث ABC می شود از مثلث DEF و اگر U

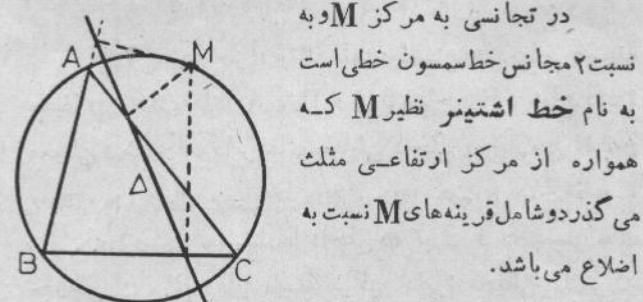
چهار زاویه ای (Quadrangle) بسازیم که این چهار نقطه چهار رأس آن و شش خط M_iM_j شش ضلع آن باشد (از تلاقی دو به دوی این ضلعها هفت رأس پدید می آید). اگر یکی از این نقطه ها مرکز ارتفاعی مثلثی باشد که توسط سه نقطه دیگر تشکیل می شود چهار زاویه ای را (Orthocentrique) می نامند. مثلسدر اس مثلث ABC مرکز ارتفاعی آن یک چهار زاویه ای تشکیل می دهد که در ضمن A مرکز ارتفاعی مثلث BCH می باشد؛ چهار نقطه نسبت به یکدیگر وضعی مقارن دارند.

[۹] عمود منصف یک ضلع مثلث مثلث BC مکان نقطه هایی مانند M می باشد که $MB = MC$ است: این مکان خط منطبقی است که بر BC عمود بوده از وسط آن D می گذرد. سه عمود منصف ضلعهای مثلث در یک نقطه O به نام هر سر دایره محیطی مثلث متقابله است. شاعر این دایره به R نشان داده می شود. قرینه مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به هر ضلع بر دایره

محیطی مثلث واقع است. O مرکز ارتفاعی مثلث DEF می باشد. دایره محیطی همچنین مکان نقطه هایی مانند M است که :

$$(MB \cdot MC) = (AB \cdot AC)$$

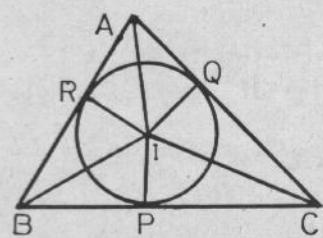
اگر M نقطه ای از دایره محیطی مثلث باشد تصویرهای M بر سه ضلع مثلث بر یک خط راست به نام خط سمسون قرار دارند.



[۱۰] سه نیمساز داخلی

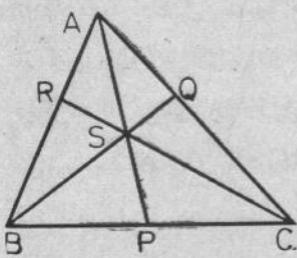
مثلث در یک نقطه I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث متقابله شاعر این دایره به ω نشان داده می شود. دایره محاطی در نقاط R، P و Q بر ضلعهای AB، CA و BC

مثلث متسام است که این نقاط داخل مثله ها واقع بوده و داریم:



می‌دهند که متساوی‌الاضلاع است و به مثلث مورلی (Morley) معروف می‌باشد

[۱۱] سه نقطه P، Q و R را به ترتیب روی ضلعهای



مثلث داده شده است :

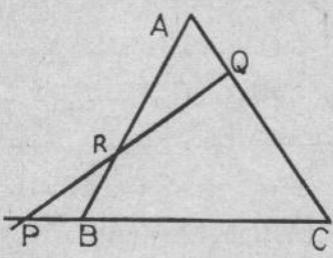
قضیه سوا (Céva) :

شرط لازم و کافی برای اینکه سه خط PQ، AP و CR در یک نقطه S متقابل باشند این است که

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

و بنا به قضیه ژرگون (Gergonne) :

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PA}} + \frac{\overline{QS}}{\overline{QB}} + \frac{\overline{RS}}{\overline{RC}} = +1$$



قضیه منلاوس (Menelaüs) :

شرط لازم و کافی برای اینکه سه نقطه R، Q و P متقابل باشند آنست که :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = +1$$

[۱۲] بین اجزاء هر یک مثلث: اضلاع a و b و c نصف محیط p، زاویه‌های A، B و C، مساحت S، شاعع دایره r، محیطی و شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی R، r_a، r_b و r_c، میانه‌ها m_a، m_b و m_c، ارتفاعات h_a، h_b و h_c، نیمسازهای داخلی α، β و γ و نیمسازهای خارجی α'، β' و γ' فاصله مرکز دایره محیطی تا مرکز دایره محاطی داخلی OI=d روابطی برقرار است (که نمونه آنها به ترتیب زیر بوده و باجا بجا کردن دوری حروف بقیه آنها بدست می‌آید):

$$A+B+C=\pi$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a = b \cos C + c \cos B$$

U نقاط تلاقی نیمسازهای داخلی زاویه A با ضلع BC باشد (این نقاط اغلب پای نیمساز داخلی و پای نیمساز خارجی نامیده می‌شوند) داریم :

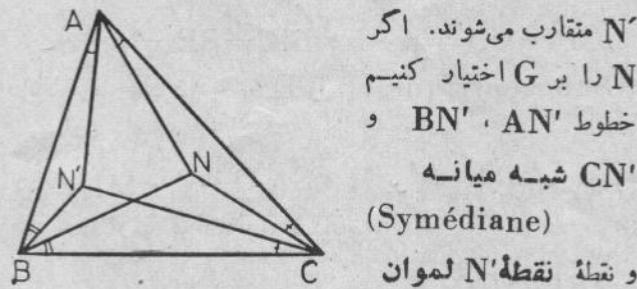
$$\frac{UB}{UC} = \frac{U'B}{U'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

نقاط U و U' ضلع BC را به نسبتها $\frac{c}{b}$ و $\frac{c}{b}$ تقسیم می‌کنند. تقسیم (U' و U و C و B) توافقی بوده و دایره به قطر UU' مکان نقاطی مانند M است که نسبت فاصلهای آنها از B و C مقدار ثابت است :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

دایره مزبور بر دایره محیطی مثلث عمود می‌باشد.

[۱۳] سه خط در نظرمی گیریم که از A و B و C گذشتند یک نقطه N واقع در داخل مثلث متقابل باشند قرینه هریک از این خطها را نسبت به نیمساز زاویه مربوط رسم می‌کنیم. سه خط حاصل در یک نقطه N' متقابل می‌شوند. اگر N را بر G اختیار کنیم خطوط BN'، AN' و CN' شباهه میانه (Symédiane)



و نقطه N' لموان (Lemoine)

مثلث نامیده می‌شود.

هر دو خط را که نسبت به یک نیمساز قرینه باشند مانند

AC) (AN و AN') یا (AB)

و (BA) بنابر تعریف زوج

خطوط هم گوش (Isogonale)

می‌نامند. ارتفاع AK و

شعاع دایره محیطی AO

نسبت به ضلعهای زاویه A هم

گوش هستند بنا بر این نقاط O و H نقاط تلاقی دو دسته خطوط هم گوش می‌باشند

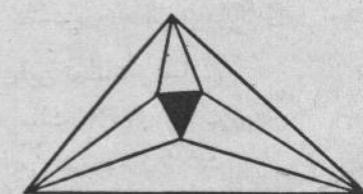
در حالت خاص،

خطوطی که هریک از

زاویه‌های مثلث را به

سه قسمت برابر بخش

کنند مثلثی تشکیل



دو مثلث مشهور است:

$$C=C' \quad , \quad B=B'$$

حالت اول -

$$A=A' \quad , \quad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$$

حالت دوم -

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

حالت سوم -

حالت قابل توجهی از تشابه از این قرار است که یک مثلث قائم الزاویه ABC توسط ارتفاع نظیر رأس زاویه قائم A یعنی AK به دو مثلث متشابه با خودش و با یکدیگر تقسیم می شود.

اگر خطی دو ضلع AB و AC (یا امتداد آنها) را در B' و C' قطع کند و با CB موازی باشد دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه خواهند بود (قضیه تالس).

همه مثلثهای متساوی الاضلاع ، و همچنین همه مثلثهای قائم الزاویه متساوی الساقین باهم متشابه هستند. حالتای هم - اندازه بودن و همچنین حالتای تشابه برای دو مثلث قائم الزاویه به صورت ساده تر در می آیند. این نکته را که باید بسادآوری کنیم که حالت $b=b'$ ، $c=c'$ ، $A=C$ جز در حالتی که c بزرگترین ضلع باشد تساوی دو مثلث را ایجاد نمی کند.

[۱۵] روابط بین اندازه های اجزاء یک مثلث و قاعده داشت:

$$B+C=\frac{\pi}{2}$$

$$BA^2= BK \cdot BC$$

قضیه فیثاغورس -

$$BC^2=AB^2+AC^2$$

$$KA^2=-KB \cdot KC$$

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$$

در مثلث قائم الزاویه ، مرکز ارتفاعی بر رأس A و مرکز دایره محیطی بر نقطه D وسط وتر BC منطبق می باشد.

(Pseudo - rectangle) یک مثلث شبه قائم

نامیده می شود اگر $|B-C|=\frac{\pi}{2}$ باشد: در این مثلث روابطی نظیر روابط مربوط به مثلث قائم الزاویه بدست می آید.

[۱۶] اگر مثلث متساوی الساقین باشد، $B=C$ ، در این صورت ارتفاع، میانه، عمودمنصف و نیمساز داخلی مربوط به رأس A و قاعده BC همه برمیگویند تقارن مثلث منطبق

$$bc \sin A = ah_a = 2S$$

$$abc = 4RS$$

$$S = pr = (p-a)r_a$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ = \sqrt{r_a r_b r_c} = 2R \sin A \sin B \sin C$$

$$\alpha = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}, \quad a' = \frac{2bc}{b-c} \sin \frac{A}{2}$$

$$r = (p-a) \tan \frac{A}{2}, \quad r_a = p \tan \frac{A}{2}$$

$$4R = r_a + r_b + r_c - r$$

رابطه اول:

$$d^2 = R(R - 2r)$$

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2$$

رابطه اخیر به صورت :

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

نیز نوشته می شود با رابطه :

$$AB^2 - AC^2 = 2DK \cdot BC$$

موضوع قضیه میانه می باشد .

[۱۳] دو مثلث هم اندازه (Isométrique) هستند

(سابقاً گفته می شد متساوی اند) اگر ضلعها و زاویه های آنها از لحاظ قدر مطلق با هم برابر باشند: در این صورت همه مقادیر مربوط به آنها با هم برابرند. وجود یک ایزومنتری که یکی را به دیگری تبدیل کند لازم و کافی می باشد: این ایزومنتری مستقیم است اگر زاویه های متساوی هم علامت باشند و در غیر آن معکوس است، در هر حال تغییر مکان نامیده می شود. برای اینکه دو مثلث هم اندازه باشند سه شرط لازم و کافی قابل توجه معرف است که سابقاً حالت های تساوی دو مثلث گفته می شد:

$$C=C' \quad , \quad B=B' \quad , \quad a=a'$$

$$c=c' \quad , \quad b=b' \quad , \quad A=A'$$

$$c=c' \quad , \quad b=b' \quad , \quad a=a'$$

[۱۴] دو مثلث همانند (متشابه) خواهند بود اگر مقادیر مطلق زاویه های آنها با هم برابر باشند: در این حالت ضلعهای آنها با هم متناسب خواهند بود. وجود تشابهی که یکی را به دیگری تبدیل کند لازم و کافی است. از این باست سه شرط لازم و کافی معرف می باشد که به حالت های تشابه

هر گاه يالهای مقابل بر هم عمود باشند: $AB \perp CD$ ، $AD \perp BC$ ، $AC \perp BD$ باشد وجود دو شرط آن کافی است.

در چنین چهار وجهی چهارخطی که از هر رأس بروجه مقابل عمود باشند در يك نقطه بنام مرکز ارتفاعی متقارب هستند. يك چهار وجهی منتظم است اگر شش يال آن با هم برابر باشند، در اين صورت وجوه سنتهای متساوی الاضلاع خواهند بود. هر چهار وجهی منتظم (Orthocentrique) می باشد.

حجم يك چهار وجهی برابر است با حاصل ضرب مساحت يك وجه در يك سوم ارتفاع تغییر آن.

[۱۸] مثلث کروی شکلی است که از تقاطع دو به دو سه دایره عظیمه در روی يك کره پدیده می آید. اجزاء مثلث کروی (کروی بهم شش زاویه است) از روی فرمولهای مثلثات کروی حساب می شود.

می باشند. در مثلث متساوی الاضلاع، علاوه بر آن، نقاط G، H، O و I نیز بر یکدیگر منطبق هستند که این نقطه مرکز مثلث نامیده می شود. اندازه هر يك از سه زاویه برابر با $\frac{\pi}{3}$ و طول ارتفاع برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h = a$ می باشد.

[۱۷] در فضای R^3 (يعني سه بعدی) شکل حاصل از چهار نقطه غیر واقع بر يك صفحه چهار وجهی نامیده می شود که به چهار وجه مثلث شکل محدود است. مرکز ثقل هر چهار وجهی در سه چهارم هر يك از خطوطی واقع است که يك رأس را به مرکز ثقل وجه مقابل وصل می کند و همچنین در وسط هر يك از سه خطی است که اوساط دویال مقابل را به هم وصل می کند. يك چهار وجهی (Orthocentrique) نامیده می شود

درباره بخش پذیری اعداد

درسی از حساب

ترجمه از کتاب «در راه ریاضیات» تألیف: KORDIEMSKY

II - بخش پذیری بر اعداد ۱۳ ۱۲۹ ۱۹۹

مثال ۱ - عدد ۲۰۷۵۴۲۷ بر ۱۹ بخش پذیر است زیرا:

$$\begin{aligned} 2 \times 9 &= 18 \equiv -1 \\ -1 \times 9 &= -9 + 7 = -2 \\ -2 \times 9 &= -18 \equiv 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 - 5 &= -4 \\ -4 \times 9 &= -36 \equiv 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 + 4 &= 6 \\ 6 \times 9 &= 54 \equiv 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 - 2 &= 14 \equiv -5 \\ -5 \times 9 &= -45 \equiv 12 \end{aligned}$$

$$12 + 7 = 19 \equiv 0$$

مثال ۲ - بخش پذیری عدد ۸۱۴۵۲ بر عدد ۱۳:

$$\begin{aligned} 8 \times 3 &= 24 \equiv -2 \\ -2 - 1 &= -3 \\ -3 \times 3 &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -9 + 4 &= -5 \\ -5 \times 3 &= -15 \equiv -2 \\ -2 - 5 &= -7 \equiv 6 \\ 6 \times 3 &= 18 \equiv 5 \end{aligned}$$

$$5 + 2 = 7$$

و عدد مفروض بر ۱۳ بخش پذیر نیست.

یکان دوره چهارم

برای اینکه معلوم کنیم عدد مفروض N بر عددی مانند a بخش پذیر است یا نه، روش کلی آنست که از عدد N عدد دیگری مانند P چنان بدست آوریم که $N - P = N + P$ و یا $N = a^n + b^n$ بر a و b جمله‌ای استفاده می کنیم.

برای تعیین بخش پذیری عددی بر یکی از اعدادهای ۱۹۹ ۱۷۹ ۱۳ از سمت چپ عددمن بورشروع کرده اولین رقم را به ترتیب در ۳ یا ۷ یا ۹ ضرب کرده از حاصل، رقم بعدی را کم می کنیم. باقیمانده را باز در ۳ یا ۷ یا ۹ ضرب کرده حاصل را با رقم سوم جمع می کنیم و عملهای جمع و تفریق‌های متوالی را به همین ترتیب ادامه می دهیم. بر حسب اینکه آخرین باقیمانده بر ۱۳ یا ۱۷ یا ۹ بخش پذیر باشد یا نباشد عدد مفروض نیز بر ۱۳ یا ۱۷ یا ۹ بخش پذیر می باشد یا نمی باشد.

III- روش کلی برای بخش پذیری بر یک عدد دلخواه

p باشد اختیار می کنیم :

$$d = 10^n - 1, n = 1, 2, 3, 5, 7, \dots$$

$$n = 1, d = 9 : p = 3$$

$$n = 3, d = 999 : p = 37$$

$$n = 5, d = 99999 : p = 41 \text{ و } 271$$

و چنین عمل می کنیم :

۱) از سمت راست شروع کرده عدد مفروض را به گروههای n رقمی تقسیم می کنیم. ممکن است که تعداد ارقام آخرين گروه کمتر از n باشد.

۲) تمام گروهها را باهم جمع می کنیم.

بر حسب اینکه حاصل جمع بدست آمده مضرب p باشد یا نباشد، عدد مفروض بر p بخش پذیر می باشد یا نمی باشد.

تبصره - در صورتی که حاصل جمع گروهها بیش از n رقم داشته باشد می توان عملیات بالا را نسبت به آن تکرار کرد تا حاصل جمع باحداکثر n رقم بدست آید.

مثال - بخش پذیری عدد ۴۶۰۶۹۸۱ بر ۳۷ - در ازاء $p = 3$ داریم $n = 3$ پس عدد را به گروههای سه رقمی تقسیم می کنیم :

$$4|606|981$$

$$981 + 606 + 4 = 1591$$

$$1 + 591 = 592 \equiv 0 \pmod{37}$$

بنابراین عدد مفروض بر ۳۷ بخش پذیر است.

نکته - روشهایی که در این شماره و در شماره گذشته

یکان در مورد تعیین بخش پذیری بر یک عدد بیان شد و روشهای دیگری که وجود دارد عموماً آنقدر مفصل هستند که عملاً ترجیح می دهنند اذاین رو شها صرف نظر کرده مستقیماً عمل تقسیم را نجات دهنند. از همین جهت هم در کتابهای درسی مربوط به اعداد از ذکر این چنین رو شهای خودداری می شود و برای عده ای این تصور پیش می آید که چنین رو شهای اصولاً وجود ندارد. این عده می کوشند شخصاً به کشف رو شها پردازند در صورتی آنچه بدست می آورند قبل از توسط دیگران بیان شده است منتهی آن اندازه که اینان تصور می کنند واجد اهمیت نیست.

موضوعی که در اینجا یاد آوری می شود این است که در چندین سال گذشته انتشار یکان مقاله های متعددی در مورد دقایق تقسیم بر اعدادی مانند ۷ و ۱۳ و ۱۹ و واصل شده است که به علل فوق الذکر از درج آنها در مجله خودداری شده است.

الف - برای تعیین بخش پذیری بر عدد اول p ابتدا عدد به شکل $+1 = 10^n$ را چنان انتخاب می کنیم که مضرب p باشد.

$$d = 10^n + 1 : n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$n = 1, d = 11 : p = 11$$

$$n = 2, d = 101 : p = 101$$

$$n = 3, d = 1001 : p = 7 \text{ و } 11 \text{ و } 13$$

$$n = 4, d = 10001 : p = 73 \text{ و } 137$$

در ازاء هر یک از عده های p عدد نظیر آن n را در نظر

گرفته و به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱) عدد را درجهت از راست به چپ به گروههای n رقمی تقسیم می کنیم. البته آخرين گروه سمت چپ ممکن است تعداد رقمها یش کمتر از n باشد.

۲) از سمت راست شروع کرده گروهها را شماره گذاری می کنیم.

۳) گروههای شماره فردا باهم و گروههای شماره زوج را باهم جمع می کنیم.

۴) از حاصل جمعهای بدست آمده آنرا که کوچکتر است از دیگری کم می کنیم.

بر حسب اینکه تفاضل اخیر بر p قابل باشد یا نباشد عدد مفروض بر p قابل قسمت است یا نیست.

مثال - تعیین بخش پذیری عدد ۱۵ رقمی :

$$837362172504831$$

بر عدد های ۷۳ و ۱۳۷

در ازاء $p = 73$ یا $p = 137$ داریم $n = 4$ بنابراین عدد مفروض را از سمت راست به گروههای چهار رقمی تقسیم و بنای دستور عمل می کنیم.

$$837|3621|7250|4831$$

$$4831 + 3621 = 8452$$

$$7250 + 837 = 8087$$

$$8452 - 8087 = 365$$

عدد ۳۶۵ بر ۷۳ بخش پذیر است اما بر ۱۳۷ بخش پذیر

نیست بنابراین عدد پاتزده رقمی مفروض بر ۷۳ بخش پذیر بوده اما بر ۱۳۷ بخش پذیر نمی باشد.

ب - برای تعیین بخش پذیری عدد مفروضی بر عدد اولی مانند p عدد به شکل $-1 - d = 10^n$ (فرد) را که مضرب

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Résolution des Problèmes élémentaires de géométrie

تألیف: E. J. Honnet - ترجمه: ع. م. چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳.

فصل چهارم - چگونه ثابت کنیم که دو خط متوازی‌اند. روش ششم - به کمک سومین خط موازی

تمرینات فصل چهارم

۳۵۶ - مثلث ABC در زاویه A قائم است. در خارج مثلث دو خط BX و Cy را چنان رسم می‌کنیم که با ضلعهای AF و CA زاویه‌های ۴۵ درجه بسازند. از A عمودهای BA و AG را بر BX و Cy رسم می‌کنیم. ثابت کنید که سه نقطه G و AG و GF بریک خط راست واقع بوده و چهارضلعی BCGF ذوزنقه است.

۳۵۷ - زاویه xOy و یک نقطه A روی ضلع OX مفروض است؛ دایره‌ای رسم می‌کنیم که در A بر OX مماس باشد و بر این دایره مماسهای موازی با Oy رسم می‌کنیم. اگر M و N نقاط تمساص این مماسها باشند ثابت کنید که AM و AN با نیمسازهای زاویه xOy موازی هستند.

۳۵۸ - دو دایره دلخواه رسم می‌کنیم که هردو بر نقاط طرفین ضلع BC از مثلث ABC بگذرند. این دایره‌ها ضلع AB را در NM و ضلع AC را در P قطع می‌کنند. ثابت کنید که MP با NQ موازی است.

۳۵۹ - میانه‌های AM، BN و CP از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. از N میانه‌ای CP رسم می‌کنیم که امتداد BC را در F قطع می‌کند. از F میانه‌ای با BN و از C میانه‌ای با CP رسم می‌کنیم که در D متقاطع می‌شوند. ثابت کنید که سه نقطه P، M، D بریک استقامت بوده و موازی و متساوی می‌باشد.

۳۶۰ - ارتفاعهای AA'، BB' و CC' از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. عمود CH را بر AC و عمود BG را بر AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که BC و GH موازی‌اند.

۳۶۱ - ثابت کنید خطوطی که نقطه تلاقی نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع را به هم وصل می‌کنند با ضلعهای متوازی‌الاضلاع موازی می‌باشند.

خاصیت مورد استفاده از این قرار است: اگر دو خط با خط سوم موازی باشند بایکدیگر موازی می‌باشند. بنابراین وقتی خواسته باشیم ثابت کنیم دو خط با هم موازی هستند می‌توانیم خط سومی از شکل را پیدا کنیم و ثابت کنیم که هریک از آن دو خط با این خط سوم موازی می‌باشد.

تمرینات:

۳۵۰ - ثابت کنید که اگر اوساط ضلعهای یک چهارضلعی را متواالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است.

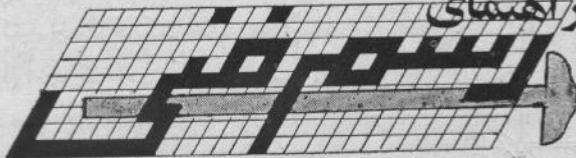
۳۵۱ - روی ضلعهای متساوی AC و AB از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و در خارج آن دو مربع و ABDF و FHGD را می‌سازیم و ACGH کنید که این دو خط باهم موازی هستند.

۳۵۲ - ثابت کنید که در هر چهارضلعی اوساط دو ضلع مقابل و اوساط دو قطر چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع می‌باشند.

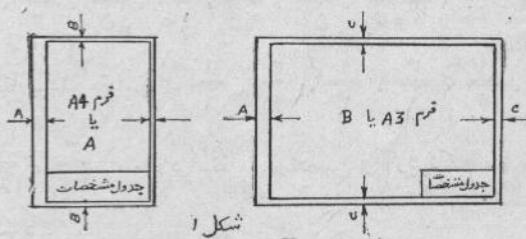
۳۵۳ - در یک مثلث ABC میانه‌های AM، BN و CP در G متقاطع‌اند. اگر F وسط AG و D وسط BG باشد ثابت کنید که FDMN متوازی‌الاضلاع است.

۳۵۴ - ساقهای یک ذوزنقه ABCD را امتداد می‌دهیم تا در E متقاطع شوند. اگر M و N و P و Q به ترتیب اوساط AC، BE، AE و BD باشند ثابت کنید که چهارضلعی MNQP ذوزنقه است.

۳۵۵ - مثلث ABC در دایره به مرکز O محاط است اگر H نقطه تلاقی ارتفاعهای مثلث و N وسط AH و P وسط AB و Q وسط AC باشد. ثابت کنید خط HP با خط OQ موازی است. همچنین ثابت کنید که OPNQ متوازی‌الاضلاع است.

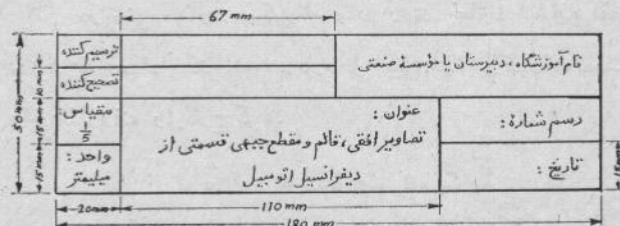


شکل عمومی کاغذ رسم، جدول مشخصات و استانداردهای موجود



بعد	استاندارد آلمانی به میلیمتر (mm)	استاندارد آمریکائی به اینچ (in.)
A	25	1
B	5	$\frac{1}{16}$
C	10	$\frac{3}{8}$

جدول مشخصات که در شکل (۱) محل آن تعیین شده از ضروریات رسم فتی است. از بین فرمها پیشنهاد شده برای جدول مشخصات آنچه که برای تعریفات دیبرستان مناسب به نظر می‌رسد در شکل (۲) نشان داده شده است. از این کادر می‌توان در هر دو فرم A4 و A3 استفاده نمود.



شکل ۲

در نظر داشته باشید که ضخامت خطوط حاشیه و جدول مشخصات باید در حدود ۱/۵ برابر ضخامت خطوط اصلی تصاویر رسم باشد.

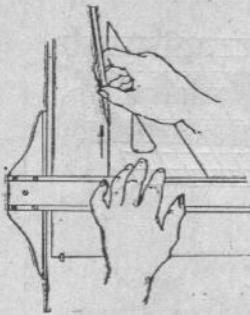
مقیاس و واحد مقیاس (یا اشل) معلوم می‌کند که اندازه‌های طولی تصاویر رسم نسبت به جسم اصلی چه اندازه

اندازه کاغذهای رسم به صورتهای گوناگون توسعه سازمانهای استاندارد کشورهای مختلف و مؤسسات بین‌المللی استاندارد ها پیشنهاد شده است. در اروپا بیشتر از استانداردهای آلمانی (DIN) و در آمریکا از استانداردهای پیشنهاد شده توسط «انجمن استانداردهای آمریکائی» (ASA) استفاده می‌شود. ماقاسهای ممکن از استانداردهای بین‌المللی که مورد قبول اغلب موافق صنعتی جهان است استفاده خواهیم کرد و در صورتی که در بعضی موارد کمیت و یا عالمتی به صورت بین‌المللی و استاندارد نشده باشد از استانداردهای اروپائی (که در ایران بیشتر معمول است) استفاده می‌کنیم و پیشنهادهای انجمن استانداردهای آمریکائی را نیز به منتظر اطلاع ذکرمی کنیم.

تعدادی از فرم‌های پیشنهاد شده برای کاغذ رسم

استاندارد آلمانی (DIN 476)		استاندارد آمریکائی ASA Z 1401 – 1946	
فرم	ابعاد به میلیمتر (mm)	فرم	ابعاد به اینچ (in.)
A0	841 × 1194	E	۳۴ × ۴۴
A1	594 × 841	D	۲۲ × ۳۴
A2	420 × 594	C	۱۷ × ۲۲
A3	297 × 420	B	۱۱ × ۱۷
A4	210 × 297	A	$\frac{1}{2} \times 11$
A5	148 × 210		

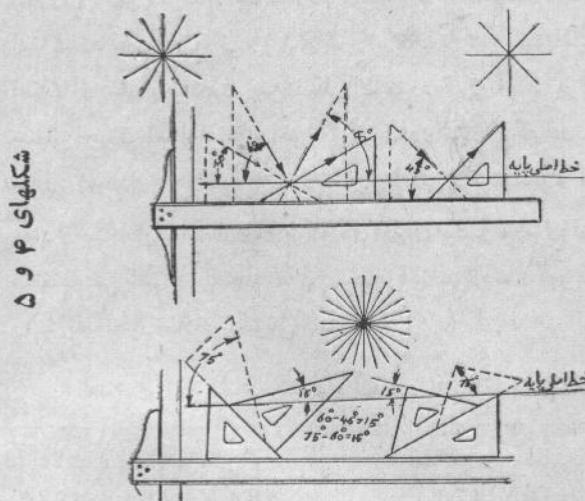
برای تعریفات دوره دیبرستان اندازه فرم‌های A4 و A3 که معادلهای آنها در استانداردهای آمریکائی به ترتیب A و B می‌باشد مناسب به نظر می‌رسند. سازمانهای نامبرده برای حاشیه‌های لازم در فرم‌های فوق مقادیری را که به کمک شکل (۱) وجود زیر نشان داده شده پیشنهاد می‌کنند.



رسم زوایای مختلف نشان می‌دهند - سعی کنید جهت حرکت مداد مطابق باشد با آنچه که در شکل با علامت فلش مشخص شده است.

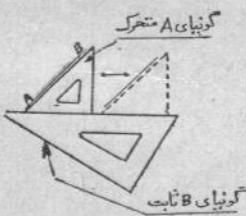
برای رسم خطوط موازی
می‌توان بطریقه زیر عمل کرد: فرض کنید لازم است چند خط به موازات خط ثابت AB شکل (۶) رسم شود.

برای این منظور باید وتر گونیای (A) را مطابق شکل بر روی خط AB منطبق کرده و بعداً گونیای (B) را به طریقی که وتر آن بایکی از اضلاع گونیای (A) در تماس باشد با دست چپ



ثابت نگاه داشت. حال در صورتی که گونیای (A) را به آرامی روی گونیای (B) بلغ زانیم خطوطی که بوسیله وتر آن رسم می‌شوند با خط AB موازی خواهند بود. به جای گونیای (B) می‌توان از بعد خط کش تی (T) نیز استفاده کرد.

برای رسم خطی عمود بر
یک خط مطابق شکل (۷) ابتدا باید گونیارا بر خط مورد نظر منطبق کرده و بعد خط کش تی (T) (و یا گونیای دیگری) را بر یکی از اضلاع آن منطبق



شکل ۷

کرده و آن را بادست چپ ثابت نگاه داشت. آنگاه باید گونیا را مطابق شکل (۷) ۹۰ درجه چرخانید. در این حالت وتر گونیا بر خط مورد نظر عمود خواهد بود و با لغزانیدن گونیا بعقب و جلویی توان خطوطی عمود بر خط مورد نظر به هر تعداد که لازم باشد رسم کرد. توجه کنید که در این حالت بعد کوتاه خط کش تی (T) بالبه تخته رسم در تماس نمی‌باشد.

کوچک و یا بزرگ شده‌اند. مثلاً وقتی یک کارگر فنی در کادر مشخصات رسم مقیاس $\frac{1}{5}$ را مشاهده کند متوجه می‌شود که جسمی را که او باید بسازد ۵ برابر از تصاویر نشان داده شده در روی کاغذ رسم بزرگتر خواهد بود. قبل از شروع به ترسیم باید با در نظر گرفتن فضای موجود در روی کاغذ رسم مقیاس صحیحی را انتخاب نمود.

در استانداردهای اروپائی (سیستم متری) بیشتر مقیاسهای $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{50}$, ... و در آمریکا بیشتر مقیاسهای $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...، مورد استفاده مهندسین و آرشیتکت‌ها قرار می‌گیرد.

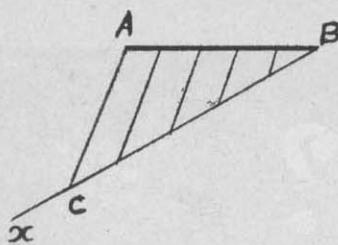
واحد عبارت است از طولی که ابعاد جسم‌اصلی بوسیله آن اندازه گیری می‌شود. معمولاً در روی خطوط اندازه یادیمان سیون (که بعداً مفصلات توضیح داده خواهند شد) واحد نیز در کنار اعداد باعلام اختصاری مشخص می‌شود.

علامات اختصاری بین‌المللی که برای واحدها بکار می‌روند در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند.

میلیمتر (mm)	سانتیمتر (cm)	متر (m)
50 mm	50 cm	10 m
25 mm	25 cm	10 m
10 mm	10 cm	10 m
اینج (in) و یا (") مثلاً 10in و یا "10	فوت (ft) و یا (') مثلاً 20ft و یا '10	(ممول در آمریکا)

در بعضی موارد ممکن است در روی خطوط اندازه فقط به نوشته اعداد اکتفا نموده و در محل تعیین شده در کادر مشخصات واحد بکار رفته را درج کرد.

از گونیاهای استفاده بیشتری بکنیم
بطور کلی به غیر از خطوط افقی که با خط کش تی (T) رسم می‌شوند. در رسم بقیه خطوط باید از گونیا استفاده کرد. طریقه رسم خطوط قائم بوسیله گونیا در شکل (۳) نشان داده شده است. بخاطر داشته باشید که برای رسم خطوط قائم همواره ضلع عمودی گونیا باید در سمت چپ و تر قرار گیرد. خطوط قائم، همواره از سمت پائین به بالا رسم می‌شوند.
شکل‌های (۴) و (۵) طریقه استفاده از گونیا هارا برای



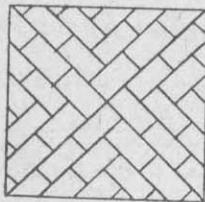
شکل ۱۰

تقسیم در روی خط
خطوطی به موازات
رسم می کنیم، قطعه خط
به n قسمت مساوی
 تقسیم خواهد شد.

تمرینات

دقیق کنید در این تمرینات و بسیاری از تمرینهای دیگر لازم است ابتدا پاره خطهای کامل را رسم کرده و بعد قسمتهای اضافی آن را پاک کنید. برای این منظور می‌توان ابتدا از مدادهای درجه $3H$ و یا $4H$ که نوک آنها کاملاً به شکل مخروطی تیز شده باشد استفاده کرد. پس از پاک کردن قسمتهای اضافی برای تکمیل رسم از مدادهای H و یا $2H$ استفاده کنید، در ضمن نوشتن اندازه های مربوط فعلاً ضروری نیست.

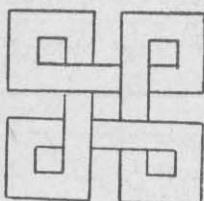
تمرین ۱ - شکل ۱۱ . استفاده از گونیای 45 درجه و خطکش (T). مربعی به ضلع 8 سانتیمتر رسم کرده اقطار آن



شکل ۱۱

این تمرین قدرت دست را برای شروع و توقف در رسم قطعه خطهای کوچک زیاد می کند.

تمرین ۳ - شکل (۱۲) . رسم خطوط افقی و قائم . با استفاده از گونیا و خطکش (T) مربعی به ضلع دلخواه رسم کنید اضلاع پائینی و سمت راست آن را بوسیله پرگار تقسیم کنید (بطوری) که در متن شرح داده شد) به هفت قسمت مساوی تقسیم کنید. بعد با مر اجعه به شکل ۱۲ رسم را تکمیل کنید .

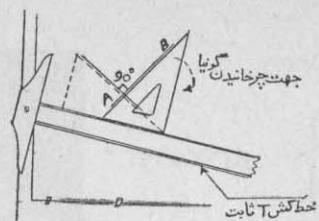


شکل ۱۲

تمرین ۳ - شکل (۱۳). دایره ای به شعاع 5 سانتیمتر و 12 قطر آنرا که بایکدیگر زوایای 15 درجه می سازند رسم کنید (با استفاده از خطکش تی (T) و گونیای $30^\circ - 60^\circ$ و 45°) . با مراجعة به شکل ۱۳ رسم را کامل کنید .

شکل ۱۳

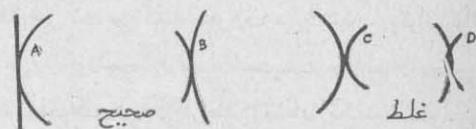
پائین صفحه بعد



شکل ۷

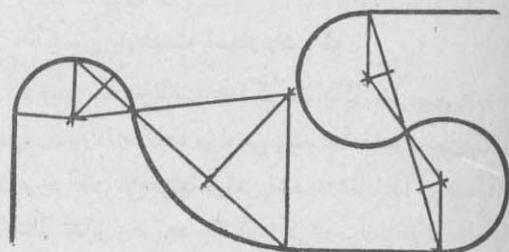
خطوط مماس

در رسم فنی مکرراً لازم است خطی را مماس بر دایره هو یا دایره ای را مماس بر دایره دیگر رسم کرد. نکته ای که باید در رسم مماسها مورد دقت قرار گیرد این است که دو خط مماس بر یکدیگر باید دارای ضخامت مساوی بوده و در نقاط تماس کاملاً بر میگردند. شکل (۸) این نکته را بخوبی روشن می سازد. در مماسهای C و D خطوط گرچه بایکدیگر در تماسند



شکل ۸

ولی در نقطه تماس ضخامت آنها کاملاً بر یکدیگر منطبق نیست . در رسم مماسها باید قضایای مربوط به خطوط مماس را (که در هندسه فرآگرفته اید) مورد توجه داشته باشید : « خط المركzin دو دایره مماس بر هم از نقطه تماس می گذرد. شعاع نقطه تماس خط و دایره بر خط مماس عمود است وغیره » شکل (۹)



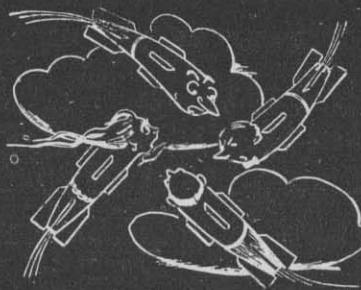
شکل ۹

تقسیم یک خط به چند قسمت مساوی

فرض کنید لازم است خط AB ، شکل ۱۵ ، به n قسمت مساوی تقسیم شود. برای این منظور از نقطه (B) خط دلخواه Bx را رسم کرده با استفاده از پرگار تقسیم کنید (که در انتهای شاخهایش فقط دو سوزن نصب شده است) n قسمت مساوی بر روی آن جدامی کنیم تا نقطه (C) بددست آید . حال از نقاط

نویسندهان : ?
ژ. گامو
م. استرن

ترجمه از فرانسه



داستانهای تفتنی ریاضی

کارمند بازنشسته راه آهن

۳ - ترددی که از کنار یکدیگر می گذرند

از شهرها حرکت می کنند معروف می باشند . بسیار اتفاق افتاده که شخص مزبور مجبور شده است پشت مانع راه بند، اتومبیل خود را متوقف کند و پشت فرمان انتظار بکشد تا زمانی که ترن تجاری با آن کنندی که حرکت می کند و با دنباله دور و درازش بگذرد و راه برای اتومبیل وی بازشود . او به من گفت که ترجیح می دهد تابه جای یک رشته، دور شته راه آهن وجود داشته باشد، زیرا گاهی پیش آمده که دو ترن در جهت های مخالف از آن راه می گذرند و این باعث می شود که زمان توقف اجباری وی مضاعف گردد .

آیا به عقیده شما این شخص درست پیش بینی می کند ؟
یعنی اگر دور شته راه آهن وجود داشته باشد زمان توقف وی در حالت اخیر گمراحت می شود ؟

مکانیسین بازنشسته اظهار داشت که :

- کاملاً صحیح است : اگر تعداد کل ترنها بیکه دور شته راه آهن را مورد استفاده قرار می دهند با تعداد ترنها بیکه روی یک رشته حرکت می کنند برابر باشد در تقاطع آنها زمان انتظار به حد وسط قابل خواهد یافت . اگر دو ترن باهم از معبیر بگذرند زمان توقف اجباری در راه بسته برابر آن دو درست برابر است با زمان توقف برای یک ترن تنها .

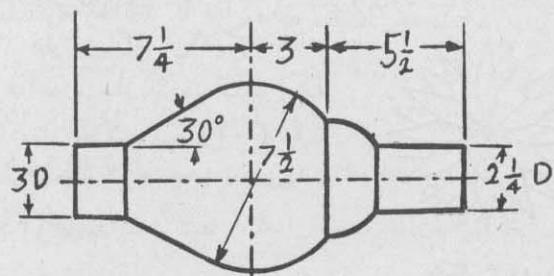
دکتر پاسخ داد :

- این موضوع درست، اما برای وقته که محل عبور ترنها از یکدیگر درست محل تقاطع جاده بارا راه آهن باشد . در حال تنهایی غیر از این، وضع از قرار دیگر خواهد بود، یک حالت هم که ممکن است پیش بباید حالتی است که وقتی لکوموتیو یکی از ترنها به معبیر برسد که درست و اگر اتفاقاً بیکی ترن دیگر در حال گذشتن

چند روزی از ملاقات دکتر و جانسن گذشته بود که تلفن منزل جانسن زنگ زد . از آن طرف، دکتر از مکانیسین تقاضا کرد که اگر ممکن است در بعد از ظهر آن روز وی را در مطبش ملاقات کند . جانسن که باز نشسته بود و همه اوقات را آزادی داشت دعوت دکتر را پذیرفت و عصر به ملاقات وی رفت . در آنجا دکتر گفت که با معماه تازه ای مواجه شده است و آنرا برای جانسن چنین شرح داد :

- با یکی از بیمارانم راجع به آنچه که برای تو پیش آمد بود صحبت کردم و او در مقابل مسئله ای من بوطبه خودش را برای من بیان کرد : این شخص برای رفتن سرکارش از راهی باید بگذرد که یک رشته تنهای راه آهن را قطع می کند؛ این یک رشته راه آهن اغلب برای عبور ترنها تجاری مورد استفاده واقع می شود که هم از لحاظ طول و هم از این نظر که به کنندی و برای عبور

تمرين ۴ - شکل ۱۴ در این تمرين از واحد اینچ استفاده شده است و می توانید مقیاس را $\frac{1}{2}$ انتخاب کنید .



شکل ۱۴

مکانیسین اظهارداشت حالتی را بررسی کنند که ترنهای وقتی در محل تقاطع از یکدیگر می‌گذرند لکوموتیو یکی در نیمه طول دیگری واقع شده باشد و دکتر چنین پاسخ داد:

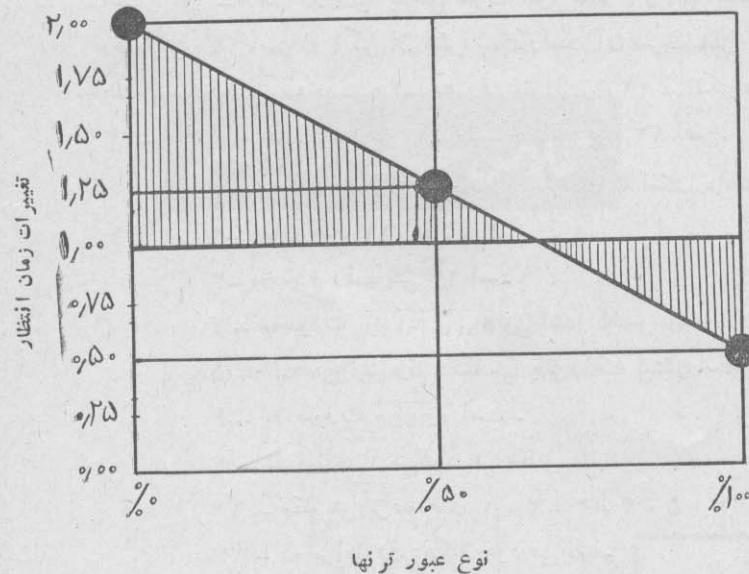
- خیلی ساده است، چنین حالتی معادل است باوقتی که تعداد ترنها نصف بوده اما طول هر کدام یک برابر نیم بزرگتر باشد.
- در چنین وضعی احتمال مربوط به اینکه وقتی به محل تقاطع بر سیم که راه بسته باشد در $\frac{1/5}{2}$ ضرب می‌شود و حد متوسط زمان انتظار برای بازشنan راه در $1/5$ ضرب می‌شود. رویهم، ترقی زمان متوسط انتظار برابر می‌شود با:

$$\frac{1/5}{2} \times 1/5 = 1/125$$

بنابراین در عبور نیم طول ترنها زمان انتظار $12/5$ درصد افزایش خواهد داشت:

مکانیسین گفت که برای یک چنین وضعی عمل محاسبه ناجور است و دکتر چنین توضیح داد:

- جواب آنهم قابل تأمل است. فعلاً نمودار سه حالت گفته شده را رسم بکنیم.



مالحظه می‌شود که سطح کل متناظر با افزایش زمان متوسط به طور قابل ملاحظه‌ای از سطح متناظر با کاهش زمان متوسط بیشتر است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که طور متوسط، رو بروشدن دو ترن در معتبرهای مختلف باعث می‌شود که به مدتی بیشتر از وقتی که همان تعداد ترن بر یک رشته راه آهن می‌گذرند فجایه بسته باشد.

باشد. راجع به این حالت چه می‌گوئید؟

مکانیسین پاسخ داد:

- بین این حالت و حالتی که دو ترن در آن محل ابدأ تقاطعی نداشته باشند هیچ فرقی نیست.

دکتر اظهارداشت:

- در این مورد شما اشتباه می‌کنید. اجازه بدھید تا با محاسبات مقدماتی دلیل اشتباه شمارا برایتان توضیح دهم. فرض می‌کنیم که به طور متوسط در هر جهت یک ترن از راه آهن بگذرد، زمان عبور هر ترن از معتبر محل تقاطع ۶ دقیقه باشد. با این مفروضات زمان توقف پشت راه بندرا حساب می‌کنیم؛ احتمال اینکه اتومبیل موقعی به محل تقاطع بر سر که ترن از آن می‌گذرد یعنی راه بسته باشد برابر با یک بر ده است. احتمال اینکه درست موقعی بر سر که ترن به معتبر می‌رسد برابر است با احتمال آنکه درست موقعی که ترن آنجا را ترک می‌کند.

رویهم رفته وی باید سه دقیقه انتظار بکشد تا ترن بگذرد.

بنابراین زمان متوسط توقف $0/3$ دقیقه خواهد شد.

اکنون حالت فوق العاده‌ای را در نظر بگیریم که ترن‌هادر محل تقاطع به وضعی از یکدیگر بگذرند که لکوموتیو یکی در مقابل واگن انتهایی دیگری واقع شده باشد. خیلی ساده است که اگر تعداد ترنها را نصف بگیریم و در عوض طول هر ترن را دو برابر در نظر بگیریم در نتیجه فرقی حاصل نخواهد شد. احتمال مربوط به اینکه باره بسته رو بروشید همان احتمال قبلی خواهد بود. اما اگر پشت راه بند توقف کرده باشد زمان انتظار شما دو برابر خواهد شد. بنابراین یک چنین دو ترن برای اتومبیل سواری که مجبور به توقف شده وضعی دو مرتبه بدتر ایجاد می‌کند:

مکانیسین در حالی که به موضوع فکر می‌کرد گفت:

- واضح است که اگر بین عبور دو ترن از محل تقاطع چند دقیقه‌ای فاصله باشد، اتومبیل سوار می‌تواند از این مدت زمان استفاده کرده قبل از عبور ترن دیگر از راه آهن بگذرد و این حالت بر حالتی که دو ترن متوالیاً از معتبر بگذرند فجایه را در تمام طول مدت بسته نگاه دارند برقراری دارد.

دلتار گفت:

- خوشحالم که موضوع را درک کرده اید. فعلاً به این نتیجه رسیده‌ایم که در حال کلی که ترنها از یکدیگر می‌گذرند زمان توقف نصف می‌شود و در حالت خاصی که در عبور از معتبر لکوموتیو یکی مقابل واگن انتهایی دیگری واقع می‌شود. زمان توقف دو برابر می‌گردد.

چگونه؟

تعدادی مکعبهای چوبی را به یک سازنده ابزار بازی دادند تا بروج و آنها تعداد معینی از حروف وارقام را حک کند. صنعتگر دریافت که برای حک این تعداد حروف وارقام تعداد وجوه مکعبهای سپرده شده کافی نیست؛ بلکه باید تعداد وجوه آنها دو برابر شود. این صنعتگر چه روشی را بکار ببرد تا بدون اینکه مکعبهای دیگری دریافت کند تعداد وجوه لازم را بدست آورد؟

تعیین و همیل

اگر به صورت و مخرج کسر $\frac{1}{3}$ مقدار مخرج را بیفزایم کسری دو برابر آن بدست می‌آید. اگر این عمل را نسبت به کسر $\frac{1}{5}$ انجام دهیم کسری سه برابر آن حاصل می‌شود. کسری تعیین کنید که چون مخرج آن را بر صورت و مخرج بیفزایم کسر حاصل $\frac{11}{2}$ برابر کسر مفروض گردد.

پاسخ تعیین طول ترن

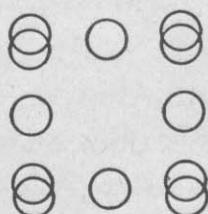
سرعت تغییر مکان مسافر ترن دوم نسبت به ترن اول برابر است با $45 + 36 = 81$

$$\frac{81000}{3600} = \frac{45}{2}$$

این طول ترن اول برابر است با

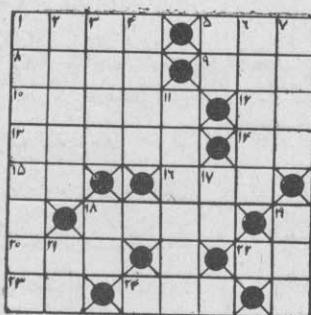
$$\frac{45}{2} \times 6 = 135\text{m}$$

پاسخ معما مهره‌ها



جدول اعداد

طرح از: محمود مسعود ششم ریاضی دیبرستان ادب اصفهان



افقی: ۱- در مبنای ۹ به صورت ۱۸۸۶ نوشته می‌شود. ۵- در رابطه زیر صدق می‌کند: $aaa = 3a \times 3a$. ۸- همان عدد ۵ افقی که ممت پچ آن رقم ۲ اضافه شده است. ۹- از رقمهای متوالی تشکیل شده است. ۱۰- تفاضل آن از متم حسا بیش برای برآست با $12 \cdot 23080 - 130 = 2359$. ۱۲- مقلوبش همه اعداد را می‌شمرد. ۱۳- به صورت $ababa$ بوده و مجموع رقمهایش $1+3+5 = 9$ است. ۱۴- دو برابر عدد ۲۲۵ افقی. ۱۵- مجموع رقمهایش مرربع کامل است. ۱۶- اگر در رقم یکانش ضرب شود عدد ۲۳۵۹ بدست آید. ۱۸- مجموع رقمهایش ۱۹ است و اگر از صفر سمت راست آن صرف نظر کنیم بقیه رقمهایش تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند. ۲۰- سه رقم متوالی. ۲۲- تکرار رقم یکان عدد ۲۳ افقی. ۲۳- جذرش مجدد است. ۲۴- متم حسابی عدد ۱۲ افقی.

قائم: ۱- رشته اعداد طبیعی (تاخدی که امکان داشته است). ۲- همان عدد ۱۳ افقی.

۳- مجموع رقمهایش ۲۴ است.

۴- به صورت $ab(a+1)b$ می‌باشد.

۵- از ده برابر رقم دهگانش یک واحد بیشتر است.

۶- به صورت $abcba$ است.

۷- در مبنای ۷ می‌شود 30214 .

۱۱- مقلوبش بر عدهای $1, 2, 3, 4, 5, 6, 9$ بخش پذیر است.

۱۷- ده برابر رقم دهگان خود می‌باشد.

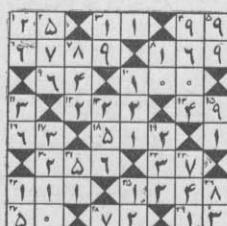
۱۸- مربيع یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد

۵ افقی.

۱۹- اگر عدد ۲۴ افقی را abb فرض

کنیم این عدد می‌شود: aab .

حل جدول شماره ۵۳



مسائل انتخابی از

مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

سه ماهه اول سال تحصیلی ۱۳۴۵ - ۴۶

۲- صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt{1+x+\sqrt{1+2x}} + \sqrt{1+x-\sqrt{1+2x}} = \sqrt{2(1+2x)}$$

۳- سه عدد x و y و z متناسب با اعداد a و b و c

پیدا کنید بطوری که $2x + 4z - 3y = m$

(حالت خاص $a = 3$ و $b = -7$ و $c = -2$ و $m = 95$)

کلاس چهارم ریاضی

جبر

دبیرستان ارشاد

دبیر: فروغی - فرستنده: حسن گل محمدی

۱- حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a^4}}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{a^5}}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{a^6}}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{a^7}}}$$

۲- مطلوب است حل و بحث معادله زیر:

$$\frac{x+2a}{x-2a} - \frac{x+3a}{x-3a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x+a}{x-2a} + \frac{a-x}{x-2a} = \frac{1}{2}$$

کلاس چهارم طبیعتی

جبر

دبیرستان پهلوی همدان

دبیر: از گمی - فرستنده: جواد دربندی

۱- عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$x^3 - 21x - 30$$

$$x^{4n} - 13x^{2n} + 36$$

$$a^{4n} + b^{4n} + a^{2n} \times b^{2n}$$

$$(2a - 2c - b)^3 + (2b - 2a - c)^3 + (2c - 2b - a)^3$$

$$2- \text{حاصل کسر } \frac{x^3 + 2x - 2}{x} \text{ را در ازاء}$$

$$x = \sqrt{7 + \sqrt{12}} - \sqrt{7 - \sqrt{12}}$$

بدست آورید.

$$3- \text{حاصل ضرب زیر را بدست آورید.}$$

$$(\sqrt{125} - \sqrt{40} + \sqrt{12} - \sqrt{27})(\sqrt{625} - \sqrt{320} + \sqrt{75} - \sqrt{48})$$

دبیرستان دولتی کیوان

دبیر: خانم کیخانزاده - فرستنده: زینبندۀ گودرزی

۱- عبارت زیر را گویا و خلاصه کنید.

$$\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

دیبرستان ملی ۴۵ شهر یورآبادان

فرستنده: پیروز بنوش

۱- درستی رابطه زیر را تحقیق کنید.

$$\begin{aligned} & \left(x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + \dots + x^{\frac{n+1}{n+2}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{2}} + \dots + y^{\frac{n+1}{n+2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = (x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

۲- مخرج کسر زیر را گویا کنید و آن را ساده کنید.

$$\frac{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}}$$

۳- کسر زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{\left[(2 - x^{\frac{1}{2}}) \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - 2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}) \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

دیبرستان پهلوی اراك

دیبر: محمدی - فرستنده: مصطفی راستگردافی

۱- عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{3x^3 + 4x^2 + 7x + 2}{3x^3 + 10x + 3}$$

۲- کثیرالجمله درجه دومی تشکیل دهید که ضریب درجه

دوم آن ۱ و بر (۳ - x) بخش پذیر بوده و نیز باقیمانده آن بر (۱ - x) برابر ۲ باشد.

دیبرستان پهلوی ساری

دیبر: مهران - فرستنده: محمد مقدسی

۱- عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right) : \left(1 + \frac{x}{a} \right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) : \left(1 - \frac{x}{a} \right)}$$

۲- مقادیر a و b و c را طوری تعیین کنید که عبارت

$x^3 + ax^2 + bx + c$ بر عبارت $2 - x - x^2$ بخش پذیر

بوده و باقیمانده آن بر $-3 - x$ برابر ۴۰ گردد.

۳- اگر $\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} = 1$ باشد مقدار عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = x^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{3}{4}} - 3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x^r}} + \frac{1}{\sqrt[n]{x^s}} + \frac{1}{\sqrt[n]{x^t}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n+1}}} =$$

باشد ثابت کنید.

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x^r} + \sqrt[n]{x^s} + \sqrt[n]{x^t} = kx^r$$

دیبرستان جوینی قوچان

دیبر: عبداللهی - فرستنده: بهروز نوبهار

۱- صحبت تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{\sqrt[4]{2} + 1}} - \sqrt[4]{\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{\sqrt[4]{2} - 1}}}{\sqrt[4]{\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{\sqrt[4]{2} + 1}}} = \sqrt[4]{2}$$

$$2- در کسر \frac{a^r + 1}{2a^r - 5a + 2} اگر a را به r$$

$$\text{تبديل کنیم به صورت } x + \frac{by + z}{b^r + h} \text{ تبدیل می شود مطلوب است}$$

تعیین مقادیر h و z و y و x و b و r

دیبرستان دکتر نصیری

دیبر: ترقی - فرستنده: عبدالله نقی

۱- معادلات اصم زیر را حل کنید

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x$$

$$\sqrt{(x^2 + 24)^2 + 6} = -5\sqrt{x^2 + 24}$$

۲- ثابت کنید عبارت $(5x^3 - 4x - 3)^3 + (5x^3 - 4x - 3)^2 + (5x^3 - 4x - 3)$ قابل قسمت است.

دیبرستان شاهپور (شیراز)

دیبر: دستغیب - فرستنده: حمید جعفری - رسول رزاقی

۱- اگر $f(x) = x^3 + 2x + 3$ باشد مطلوب است محاسبه عبارت زیر:

$$A = \frac{f(2x) - f(x) - x^r}{f(-1)}$$

دیبرستان ارشاد
دیبر : سیستانی - فرستنده : حسن گل محمدی
مقدار y را از رابطه لگاریتمی زیر حساب کنید.

$$\log_2 \frac{\log_4 \frac{\log_2 \frac{\log_5 \frac{\log_4}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{5}}}{y} = 2$$

دیبرستان پهلوی ساری
دیبر : مهران - فرستنده : محمد مقدسی
۱- مقدار A را از رابطه زیر بدست آورید.

$$A = 9 + 5 - (1 - \log_{\sqrt{2}}) - 2 \log_{\sqrt[3]{2}}$$

دیبرستان پهلوی (ملایر)
دیبر : گلستانی فرستنده : رسول طلائی
۱- ثابت کنید $\frac{21}{20} > \frac{100}{100}$ می باشد.
۲- معین کنید ۴۵۴۶ چند رقم دارد.
دیبرستان پهلوی همدان
دیبر : ازگمی - فرستنده : جواد دربندی
۱- معادله زیر را حل کنید.
$${}_{100} \log(x+1) + {}_{100} \log(x+2) + {}_{100} \log(x+3) = 50$$

۲- بفرض آنکه $\log a \cdot \log b \cdot \log c = \log x$ باشد ثابت کنید :

$$\log a \cdot \log b + \log b \cdot \log c + \log c \cdot \log a = \log_a x + \log_b x + \log_c x$$

دیبرستان حاج قوام
دیبر : سلطانی مقدم - فرستنده : مجتبی محزون
۱- اگر a و b و c جمل متواالی یک تصاعد هندسی باشند روابط زیر را ثابت کنید.

$$1) (a^r + b^r)(b^r + c^r) = (ab + bc)^r$$

$$2) a^r b^r c^r (\frac{1}{a^r} + \frac{1}{b^r} + \frac{1}{c^r}) = a^r + b^r + c^r$$

۲- اگر داشته باشیم :

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

مطلوب است محاسبه :

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

گروه فرهنگی خوارزمی دیبرستان شماره ۱
دیبر : مؤمنی - فرستنده : مجید فارسی - علی مرعشی
۱- تصاعد حسابی را پیدا کنید که جمله اول آن یک

۴- اگر $a + b + c = 0$ باشد ثابت کنید:

$$a^r(b+c)^r + b^r(c+a)^r + c^r(a+b)^r + (a^r + b^r + c^r)(ab + bc + ca) = 0$$

۳- تحقیق کنید که عبارت:

$$x^{2a} - a^r x^r + 2x(a^r - x^{a-1}) - a^r + 1$$

بر $(1-x)$ بخش پذیر است.

۴- معادله درجه سومی با ضرایب گویا پیدا کنید که يك ریشه آن $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ باشد.

دیبرستان نادرشاه (مشهد)
دیبر : بقائی - فرستنده : احمد صدر
۱- معادله زیر را حل و بحث کنید.

$$\frac{a(x-a)}{b} = x + \frac{b(b-x)}{a}$$

۲- معادله اصم زیر را حل کنید (جوابها را امتحان کنید).

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{2(x^2+1)}$$

دیبرستان هدایت شیراز
دیبر : صادقی - فرستنده : غلامرضا شیرزادی
۱- اگر

$$\frac{a^r}{m^r} + \frac{b^r}{n^r} + \frac{c^r}{p^r} = 1 \text{ بوده و } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

باشد ثابت کنید که :

$$\frac{x^r}{m^r} + \frac{y^r}{n^r} + \frac{z^r}{p^r} = \frac{x\sqrt{xy} + y\sqrt{yz} + z\sqrt{zx}}{a\sqrt{ab} + b\sqrt{bc} + c\sqrt{ac}}$$

۲- اگر a و b اعداد مثبت بوده و $a+b=1$ باشد ثابت کنید که :

$$(a + \frac{1}{a})^r + (b + \frac{1}{b})^r \geq \frac{25}{2}$$

متهم حساب

دیبرستان شماره (۱) و (۲) آذر
دیبر : مهندس پایافر - فرستنده : حمید قیدر
۱- مطلوب است حل معادله زیر

$$\log[3 + 2 \log(1+x)] = 0$$

از نقطه A محل تقاطع قاطعی چنان رسم کنید که تفاضل آن دو وتری که در دو دایره بوجود می آید برابر ۱ باشد.

۲- مثلث ABC مفروض است نیمساز زاویه خارجی A را رسم کرده ثابت کنید که اگر از نقطه دلخواه M به دو سر خط BC وصل کنیم محیط ABC کوچکتر از MBC می باشد.

دیبرستان پس ازه سخن
دیبر : ذوالقدر

۱- از مثلثی سه عمود منصف اضلاع و یک نقطه از یک ضلع معلوم است آن را رسم کنید.

۲- مطلوبست تعیین مکان هندسی وسط قطعه خطی بطول ثابت $|AB|$ ، که دوسرش بر روی دو خط عمود برهم حرکت نماید.

۳- مجموع زوایای داخلی یک چند ضلعی ۱۶ قائم است
تعداد اضلاعش چقدر است.

دیبرستان مهر (قبریز)
دیبر : پور رضا

۱- از چهار ضلعی ABCD معلومات زیر در دست است آن را رسم کنید.

قطر BD و فاصله نقطه C از BD و زاویه C و ضلع AB وزاویه A

دیبرستان
دیبر : نادر دیلمقانیان

۱- مثلثی رسم کنید که طول دو ضلع و طول نیمساز زاویه بین آن دو ضلع معلوم است.

فیزیک

دیبرستان پهلوی (بهبهان)

دیبر : جاویدان - فرستنده : شکوری
لوله‌ای به بلندی $1/2$ متر به وزن ۲۵ کرم بوسیله دو رشته طناب قائم که به دو انتهای آن بسته شده است. بطور افقی آویزان شده است. وزنه ۱۸۵ کیلو گرمی را به فاصله ۴۰ سانتیمتری یکی از طنابها به ضلع آویزان می کنیم نیروی کشش هر طناب را حساب کنید.

شیمی

دیبرستان شماره ۹ آذر

دیبر : مهرگان - فرستنده : حمید قیدر
۱- بر محلولی از کلرور دوشو سولفیت سدیم و سپس کلرور باریم اضافه می کنیم در نتیجه $466/0$ گرم رسوب

وجمله دوم و هم‌وسیجهار آن تشکیل یک تصاعد هندسی بدene.
 $a+5=41 \rightarrow a=36$ دایرۀ عددی بین $(a+5) \rightarrow (a+4)$ درج کنید اگر واسطۀ ششم مساوی ۱۱۳ باشد تمام واسطه ها را بنویسید.

۳- تعیین کنید چند عدد چهار رقمی مضرب ۳۱ داریم
دهمین آنها چه عددی است.

دیبرستان دکتر نصیری

دیبر : ایزدی - فرستنده عبدالله نقی

۱- اگر $\log_{\alpha} 21 = x$ باشد مطلوبست محاسبه $\log_{\alpha} 27$

۲- ثابت کنید اگر داشته باشیم.

$$\log_a c \times \log_b a + \log_a x \times \log_b a - \log_b ac = 1$$

$x = ab$ خواهیم داشت

دیبرستان شاهپور (شیراز)

دیبر : جوادپور - فرستنده : حمید جعفری

$$\log_b x = \frac{\log_a x + \log_c x}{2}$$

باشد رابطه $\log_c b = a^x = (ac)$ برقرار است.

۲- در صورتی که $\log 2 = 0,30103$ باشد معادله زیر را حل کنید.

$$4^x + 10^x = 6 \times 25^x$$

دیبرستان هدایت شیراز

دیبر، بهروز - فرستنده : غلامرضا شیرزادی

۱- اگر سعدد تشکیل تصاعد هندسی بدene ثابت کنید که حاصل ضرب این اعداد مکعب کامل است و مجموع این اعداد بر مجموع مرتبهای این اعداد بخش پذیر است.

۲- اگر $\sqrt[3]{8}$ و $\sqrt[3]{8a}$ و b تشکیل تصاعد عددی بدene ثابت کنید.

$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 = abc$$

۳- معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{3x} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = 4$$

گندسه

دیبرستان رهنما

دیبر : حسن مولائی

۱- دو دایرۀ متقاطع و غیرمتتساوی 0° و 10° مفروضند.

محلول سود سوز آور خنثی شود پیدا کنید PH و POH محلول سود را

د - چه مقدار از این اسید را باید انتخاب کرد و چه مقدار آب باید به آن اضافه نمود تا یک لیتر محلول سانتی-نرمال بdest آید اگر نتیجت استید فاکتور را پیدا کنید آن را $\frac{1}{10}$ بگیرید.

۲- ۱ گرم سنگ آهک را در 100 cc جوهر نمک نرمال می اندازیم. برای خنثی شدن کامل اسید باید 50 cc محلول سود سوز آور 100 cc نرمال اضافه کرد پیدا کنید درجه خلوص سنگ آهک را.

دیبرستان پهلوی بهبهان

دیبر : هروجی - فرستنده: موسی خبازه ،

محلوای است از جوهر نمک 100 cc آن بوسیله 24 cc سود به فاکتور $25/0$ خنثی می شود در آزمایش دیگر 50 cc از این اسید با 15 cc پتانس به فاکتور غیر مشخص خنثی می شود. در آزمایش سوم 20 cc از این پتانس می تواند 16 cc جوهر گوگرد را خنثی کند. غلظت جوهر گوگرد را حساب کنید .

کلاس پنجم ریاضی

جبر

دیبرستان امیر کبیر

دیبر: بنائی - فرستنده: احمد صدر

۱- نقطه A به طول ۱ - بروی نیمساز ربع دوم و دونقطه (۲ و $B(5)$ و $B(1 - 3a)$ مفروضند:
۱- مطلوبست تعیین a به قسمی که :
الف - سه نقطه C و B و A بر یک استقامت باشند .
ب - از نقطه C پاره خط AB بزاویه قائمه دیده شود
ج - نقطه C روی عمود منصف قطعه خط AB واقع شود .

د - فاصله نقطه C از نیمساز ربع اول مساوی $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ باشد .

۲- با فرض $a = 2$ مساحت مثلث ABC و طول شعاع دایره محیطی آن را حساب کنید :

۳- محور مختصات را به موازات خود به نقطه G محل

تولید می شود چه حجم آب آهک $74/0$ گرم در لیتر برای تهیه کلرور دوشوی فوق مصرف شده است .

دیبرستان امیر کبیر

دیبر : آنهائی و دیلمقانی - فرستنده : آهنگاز

۳ گرم آلومینیم ناخالص را با سود سوز آور گرم و غلظت تر کیب می کنیم حجم هیدروژن بdest آمده $3/36$ لیتر حجم سود مصرف شده 50 cc می باشد .

اولا درجه خلوص آلومینیم را پیدا کنید .

ثانیا غلظت محلول سود را محاسبه کنید .

ثالثا هیدروژن حاصل چند گرم اکسید فریک را در گرما احیاء می کند .

کلاس پنجم طبیعتی

فیزیک

دیبرستان پهلوی (بهبهان)

دیبر: جاویدان - فرستنده: موسی خبازه

۱- آئینه ای از جسمی تصویری می دهد حقیقی و سه برابر جسم در صورتی که فاصله جسم تا تصویرش 60 cm باشد مطلوبست نوع آئینه و شعاع انحنای آن .

۲- در دو ظرف A و B به ارتفاع 12 cm به ترتیب آب و بنزین می ریزیم کدامیک از دو ظرف گودتر بنظر می رسد و در ظرفی که بنظر کم عمق تر است تاچه اندازه مایع از همان جسم بریزیم تا گودی دو ظرف بنظر یکسان باشد (ضریب شکست آب $\frac{4}{3}$ و بنزین $\frac{3}{2}$)

شیمی

دیبرستان بهبهانی (کازرون)

دیبر: جواهری

۱- بر 100 cc محلول ClH بقدر کافی نیترات نقره می ریزیم رسوب سفید به وزن $1/435$ گرم تولید می شود مطلوبست :

الف - فرمول معادله شیمی عکس العمل فوق الذکر به طریقه یونی و تحقیق در باره اینکه واکنش فوق کامل است و بناقص .
ب - تعیین غلظت معمولی ، غلظت ملکولی ، غلظت یونی و نرمالیتۀ محلول اسید .

ج - اگر 10 cc از محلول اسید فوق الذکر با 100 cc

دیگرستان پهلوی ساری
دیگر: مهران - فرسنده: محمد مقدسی

۱- اگر

$$y = \text{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \quad x = -\text{Arc} \sin \frac{\sqrt{15}}{10}$$

و انتهای کمان x و y در ربع سوم باشند حاصل $(\operatorname{tg}(x-y))$ را بدست آورید.

۲- مقدار θ را طوری تعیین کنید که عبارت زیر بستگی به x نداشته باشد.

$$\frac{\operatorname{atg} x + (a-2)\cos x}{(a+1)\cos x - (a-1)\operatorname{tg} x}$$

دیگرستان پهلوی ملایر
فرسنده: منصور توفیقی

۱- نقاط A و B روی خطی که از B بر AB عمود است واقع می‌باشد از نقطه C خطی به موازات AB و از نقطه A خطي موازی BC . رسم می‌کنیم مختصات نقطه D محل تلاقی این دو خط را معین کنید و تحقیق کنید چهارضلعی $ABCD$ مربع است و مرکز آن روی نیمساز ربع اول واقع است نقطه E را به طول 1 روی نیمساز ربع دوم اختیار می‌کنیم مطلوبست محاسبه طول محیط و مساحت مثلث ABE .

دیگرستان حاج قوام شیراز

دیگر: سلطانی - فرسنده: گیانی

۱- تابع $y = \frac{(m-1)x+2m}{mx-1}$ مفروض است.

اولاً - ثابت کنید که نمایش هندسی تابع فوق به ازاء جمیع مقادیر m از دو نقطه ثابت که مختصات آن را تعیین خواهید کرد می‌گذرد.

ثانیاً - m را طوری تعیین کنید که نمایش هندسی تابع فوق به خط مستقیم تبدیل گردد.

ثالثاً - اگر $(1-p)(1-q) = 0$ به ترتیب اوساط اضلاع AB و BC از مربع $ABCD$ باشد مختصات رؤوس این مربع را بدست آورید.

۲- اولاً به فرض آنکه $a < b < c < d$ باشد ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر m معادله:

$$(x-a)(x-c) + m(x-b)(x-d) = 0$$

دارای ریشه‌های حقیقی است.

ثانیاً - معادله درجه دوم:

$$(x-2)(x-4) + m(x-3)(x-5) = 0$$

تلاقی میانهای مثلث انتقال می‌دهیم مختصات رؤوس جدید مثلث را بدست آورید.

دیگرستان البرز

دیگر: زاویشی - فرسنده: ژوزف صالح

۱- مثلث قائم الزاوية ABC با $A = 90^\circ$ رأس A روی محور x' و رأس B روی محور y' و رأس C روی خط $3x - 4y = 0$ واقعند در صورتی که نقطه تلاقی سه

$$\text{میانه مثلث } \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) \text{ باشد.}$$

الف - مختصات رؤوس مثلث را حساب کنید.

۲- اگر رؤوس مثلث $A(3, 0)$, $B(0, 1)$ و $C(0, 3)$ باشد طول پاره خط DD' را حساب کنید (D و D' محل تلاقی نیمسازهای زاویه A با ضلع BC می‌باشد).

۳- نقاط A و B به طولهای 4 و 2 روی محور x' واقعند. مطلوبست معادله مکان هندسی نقاطی M

$$\text{بگویی که } \operatorname{tg} \angle AMB = \frac{3}{4} \text{ باشد.}$$

دیگرستان ایرانشهر (بزد)

دیگر: امینیان - فرسنده: ولی پور گرمه

۱- ثابت کنید که منحنی‌های نمایش تابع:

$$y = \frac{mx^2 + (4-2m)x + m - 2}{x^2 + 1}$$

به ازاء جمیع مقادیر m از نقطه ثابتی می‌گذرند.

۲- دو سر قطر مربعی هستند که از آن A و C نقطه تلاقی خط k : $x = -k$ با نیمساز ربع دوم و C محل تلاقی خط $2k$: $y = 2k$ با نیمساز ربع اول باشد مختصات D و B دو رأس دیگر این مربع را بدست آورید.

۳- مکان هندسی نقطه تلاقی دو خط به معادلات:

$$ax + y - (a-1) = 0 \quad \text{و} \quad x - ay = a$$

را تعیین کنید.

دیگرستان پهلوی زنجان

دیگر: میربها - فرسنده: شهاب اجلی

۱- مثلث ABC که در آن $AB = 2$ و $AC = 3$ و $B(2, 0)$ می‌باشد مفروض است مطلوبست مختصات نقطه D پای نیمساز زاویه A .

۲- نقاط A و B به طولهای 1 و 2 روی محور x' : Ox مفروضند نقطه M به طول x را چنان تعیین کنید که:

$$\overline{AM} + \overline{BM} = a$$

باشد و به ازاء مقادیر مختلف a که منجر به تغییرات x می‌شود بحث کنید.

دیبرستان شاهپور (شیراز)
دیبر: دستگاهی - فرستنده: محمد صادق رجائی
۱- دو خط $x = 1$ و $y = x + 1$ مفروضند اگر
این دو خط محور x ها را به ترتیب در نقاط A و B قطع
کنند نقطه C روی محور x چنان پیدا کنید که داشته باشیم

$$\frac{CA}{CB} + \frac{OA}{OB} = 0$$

دیبرستان صفایی (سمان)
دیبر: لاسجردی - فرستنده: ایزد پناه
۱- سه نقطه A و B و C روی محور x' واقعند
صحت رابطه زیر را ثابت کنید.

$$BC + OB' \cdot CA + OC' \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AD = 0$$

دیبرستان گلشنراز (شیخسر)
دیبر: باهمت - فرستنده: پریچهر
۱- a و b را طوری بیا بینید که نقاط $(a-1)$ و $D(a-1-a, b+1)$ و $B(a+1, b+1)$ و $C(a-1, b)$ بر یک استقامت باشند.

دیبرستان محمد رضا شاه پهلوی - شیراز
فرستنده: مجتبی
خطوط d_1 و d_2 به معادلات:

$4x + 4y + 1 = 0$ و $ax + ay - 1 = 0$ و $4x + 4y + 1 = 0$
به معادلات $x + 2y = 1$ و $x + 2y = 2x + 2$ مفروض است
مقدار a را طوری تعیین کنید تا خطی که از نقطه تلاقی دو خط
زاویه دو خط d_1 و d_2 باشد (بدون استفاده از برخورد خطوط
زاویه \angle_1 و \angle_2).

۲- دو خط d و Δ به ترتیب به معادلات:

$$2y + x + 2 = 0 \quad 2y = 3x - 1$$

مفروض است اگر خط d معادله ارتفاع AH و Δ معادله ارتفاع BH' از مثلث ABC باشند مختصات سه رأس مثلث را حساب کنید در صورتی که رأس C روی محور Oy قرارداشته باشد
زاویه $\angle AOB$ قائم باشد.

۳- تابع زیر مفروض است ثابت کنید در ازاء جمیع مقادیر a و b منحنی های نمایش این تابع از یک نقطه ثابت که مختصات آن را تعیین خواهید کرد می گذرد.

$$(x^2y^2 - xy^4 - 2) + (x^4y - y^2x^2 - 2) = xy(x - y) - 1$$

دیبرستان مهرآئین

دیبر: اردشیری - فرستنده: کیانی

۱- از مثلث غیر مشخصی $A(2, 3)$ یک رأس و معادله

مفروض است به ازاء چه معادلین m ریشه های این معادله عکس یکدیگرند.

دیبرستان خوارزمی شماره ۳
دیبر: فروغی - فرستنده: سخاوت
۱- زاویه ماین دو خط که معادلات آنها به صورت زیر داده شده است بدهست آورده و معادله نیمساز زاویه این دو خط را بنویسید:

$$2y^2 + 3(1-x)y - 2x^2 - x + 1 = 0$$

۲- نقطه $A(6, 4)$ یکی از رؤوس مستطیل $ABCD$

مفروض است $M(3, 5)$ مرکز مستطیل و مساحت آن ۲۰ واحد مربع است مختصات رؤوس مستطیل را بدهست آورید.

دیبرستان دکتر گریم فاطمی (اهواز)

دیبور: گیتی زاده - فرستنده: شاهرخ شمیر
سه نقطه :

$$C(5a^2 + 5a - 3) + B(a + 193a) + A(a^2 + 1)$$

مفروضند:

۱- ثابت کنید کلیه مثلثهای که از تغییر پارامتر a بدست می آیند با یکدیگر متشابهند.

۲- مقدار a را به طریقی تعیین کنید که مرکز دایره محیطی مثلث بر روی خط $x = 1$ واقع باشد.

۳- مثلث ABC به ازاء $a = \sqrt{5}$ در نظر می گیریم. مثلث دیگر $A'B'C'$ را بطریقی تعیین کنید که اضلاع از اضلاع مثلث ABC بزرگتر و نسبت تشابه آنها برابر $\sqrt{5}$ باشد
این دو مثلث را در صفحه محور ها رسم کنید.

دیبرستان سخن (پسران)

دیبر: سید محمد کاظم نائینی - فرستنده: فروتن
۱- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 189 \\ x + y + \sqrt{x+y} = 13 \end{cases}$$

۲- ثابت کنید شرط اینکه دستگاه:

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx^2 + dy^2 = 1 \end{cases}$$

فقط یک رشته جواب داشته باشد این است که:

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d} = 1$$

دیبرستان شاه عباس (اصفهان)

دیبر: قیاسیان - فرستنده: مظاہر امینی

۱- معادله خطی بنویسید که از نقطه $A(3, 6)$ گذشته و حاصل ضرب عرض از مبدأ و طول از مبدأ آن ۱۲ باشد.

ثانیاً مختصات رؤوس دیگر را حساب کنید.

۲- نقاط $(2 - 0)$ و $(0 - 0)$ A و B

مفردند. خطی از مبدأ مختصات جنان عبور دهد که هر گاه نقاط بر خورد خط فوق با خطوط AC و BC به ترتیب D و F باشد نقطه O وسط خط DF باشد.

ثانیاً مستطیل PMQR را در مثلث ABC محوط می‌کنیم اگر نقاط M و Q بر خط AB و نقاط R و P به ترتیب بر خطوط AC و CB منطبق باشد مکان هندسی محل برخورد اقطار مستطیل PMQR را محاسبه کنید.

۳- معادله زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 19 \\ x^2 + y^2 - x^2 y^2 = 133 \end{cases}$$

۴- خط D به معادله $2x - 4y = 2$ و خط D' به

معادله $3x + 3y = 3$ مفردند. مختصات نقطه A را جنان تعیین کنید که مجموع فواصل نقطه A از دو خط D و D' برابر باشد.

دیبرستان هدف ۳

دیبر: قوامی - فرستنده: شهاب ذکاوی

۱- دو نقطه:

$$B(3 - m, m + 2) \text{ و } A(m + 3, 3m + 2)$$

مفردند. m را طوری تعیین کنید که هر نقطه از نیمساز ربع دوم از A و B به یک فاصله باشد.

۲- $A(5, 4)$ یک رأس و $K(1, 4)$ محل تلاقی دو قطر CAB می‌باشد که در آن $\angle CAB = 45^\circ$

$$DAB = 2CAB$$

AB ساق است.

۱- مختصات رؤوس B و C و D را بدست آورید

۲- مساحت مثلث CDA را محاسبه نمایید.

مثلثات

گروه فرهنگی آرش

دیبر: بهنیا

۱- θ را بین معادلات زیر حذف کنید:

$$\frac{x}{\cos \theta} = x' - y' \tan \theta \quad \text{و} \quad \frac{y}{\cos \theta} = y' + x' \tan \theta$$

دیبرستان ادیب

دیبر: دانا - فرستنده: محمد تقی معیر

۱- خطوط مثلثاتی $\frac{9\pi}{8}$ را حساب کنید در صورتی که:

$$C_A = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

باشد.

دو میانه عبارتند از $x + 1 = 0$ و

$$2y - 5x + 12 = 0$$

مختصات رؤوس دیگر این مثلث را تعیین کنید.

دیبرستان نمازی

دیبر: همت - فرستنده: حسین شهپری

۱- خط L به معادله $ax + by + a + b = 0$

محور طولها را در نقطه P و محور عرضها را در نقطه Q تلاقی

می‌کند و نقطه $(\frac{b}{a}, \frac{a}{b})$ R مفترض است وقتی a و b مقادیر

مختلف اختیار نمایند مکان هندسی نقطه S رأس چهارم متوازی الاضلاع

را که با OG و OR ساخته می‌شود تعیین نماید (O مبدأ

مختصات و G مرکز ثقل مثلث PQR است).

۲- تحقیق کنید که خط D به معادله:

$$(2m^3 + m^2 - m + 2)x + (-2m^3 + m^2 +$$

$$+ m - 1)y - 5m^3 + m - 4 = 0$$

به ازاء جمیع مقادیر m از نقطه تابی می‌گذرد مختصات این

نقطه را تعیین کنید.

۳- اگر a و b مختصات نقطه M از صفحه مختصات

باشد مکان M را پیدا کنید بقسمی که معادله:

$$a^2 x^2 + 2ab(a+b)x + ab + b^2 - a^2 = 0$$

دارای جواب مضاعف باشد ثانیاً مکان M را باید بطوری که

به ازاء جمیع مقادیر x سه جمله طرف اول معادله مثبت باشد.

دیبرستان نوربخش (رشت)

دیبر: هیر مشعشعی - فرستنده: رضا میرزنده دل

۱- x' و x'' ریشهای حقیقی معادله زیر هستند،

$$4x^2 - 2(2m+3)x + m^2 + 2m - 7 = 0$$

مطلوب است حدود m به شرط اینکه بین ریشه‌ها نامساوی

زیر برقرار باشد:

$$x' x'' + x'' x' > 2(x' + x'')$$

۲- روی یک محور دو نقطه A و B مفترض است. نقطه‌ای

مثل M جنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\frac{2MA}{3MB} + \frac{2MB}{2MA} = \frac{13}{6}$$

سپس تحقیق کنید که آیا نقطه M می‌تواند بین A و B واقع باشد.

دیبرستان نوباوگان ضرابی

دیبر: حریرچی - فرستنده: اکرم حبیبی

۱- نقطه $(3, 0)$ مرکز مربع ABCD می‌باشد

اگر رأس A بر مبدأ مختصات منطبق باشد.

اولاً مربع را از لحاظ هندسی رسم کنید.

دیبرستان امیر کبیر

دیبر: تقائی - فرستنده احمد صدر

۱- در صورتی که :

$$\operatorname{tg} 2x \operatorname{cotg}(x-y) = 1 \quad \text{و} \quad \operatorname{cotg}(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

باشد مطلوب است محاسبه کمانهای x و y :

۲- اولاً از معادله :

$$(2m+1)\sin^2 x - 2m\sin x \cos x + m\cos^2 x = 0$$

معادله درجه دومی بر حسب $\operatorname{tg} x$ نتیجه بگیرید.

ثانیاً - m را به قسمی تعیین کنید که:

الف - جوابهای معادله حاصل متمم یکدیگر باشند.

ب - یکی از جوابهای معادله $\frac{5\pi}{4} = x$ گردد سپس

به ازای $m = 0$ معادله را حل کرده جوابهای محصورین

صفرو 2π را مشخص کنید:

دیبرستان البرز

دیبر: بهمنیار - فرستنده: زوزف صالح

۱- جوابهای بین 2π و 4π معادله زیر را حساب کنید

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \sin x \cdot \operatorname{cotg} x$$

دیبرستان سخن (پسران)

دیبر: تصیری - فرستنده: احمد فروتن

۱- معادله زیر را حل کنید و جوابهای بین صفر و 2π

آن را بدست آورید:

$$\frac{\cos x + 2\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{5 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{m-4}{m+1}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{3m-1}{m+2} \quad ۲- هر گاه$$

باشد m را طوری تعیین کنید که کمانهای x و y مکمل یکدیگر باشند.

دیبرستان شاهدخت

دیبر: شیخان

$$\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad ۱- می‌دانیم \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

محاسبه مقدار $\operatorname{tg} x$:

۲- مطلوب است تعیین ساده‌ترین رابطه بین a و b بطریقی که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \operatorname{atg}\varphi + \cos\varphi = a \\ \sin\varphi - a = b \end{cases}$$

دیبرستان فیوضات مشهد

فرستنده: محسن مخلی

۱- بین روابط زیر x را حذف کنید،

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = a \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = b \end{cases}$$

$$2- \text{می‌دانیم: } \operatorname{tg} a + \frac{1}{\cos a} = 2 \quad \text{می‌باشد مطلوب است}$$

تعیین خطوط مثلثاتی a در صورتی که a در ربع اول باشد.

دیبرستان فردوسی

دیبر: گریهی - فرستنده: فخرخ ترمای

۱- در صورتی که انتهای کمان α در ربع اول بین

$$\text{صفرو} \frac{\pi}{4} \text{ و} \frac{\pi}{16} \text{ باشد خطوط مثلثاتی کمان} x \text{ را تعیین کنید.}$$

دیبرستان قطب دزفول

دیبر: فخر عطار - فرستنده: صادق مهردادی

۱- از تساوی زیر a و b و c را تعیین کنید.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a \cos^4 x + b \cos^4 x + c$$

۲- معادله مثلثاتی زیر مفروض است:

$$(m \sin^2 x + \sin 2x + (m-1) \cos^2 x) = 2$$

m را طوری تعیین کنید که $\frac{\pi}{4} = x' + x'' = \frac{\pi}{4}$ گردد.

دیبرستان گلشنراز (شبستر)

دیبر: با همت - فرستنده: پریچهر

۱- به ازاء چه مقداری از a کسر زیر بستگی به π ندارد

$$\frac{(3-a)\sin x - (3a-1)\cos x}{(2+3a)\cos x + (2+a)\sin x}$$

دیبرستان مجیدی (اراک)

دیبر: محمدی - فرستنده: محسن امیری

۱- سری زیر را حساب کنید:

$$S = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + \cos \frac{n\pi}{n}$$

دیبرستان نمازی (شیراز)

دیبر: همت - فرستنده: دیبری

۱- ثابت کنید که اگر α کمانی باشد که انتهای آن در ربع اول است. داریم:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha > 2$$

۲۰ کاری حاده است و داریم :

$$\begin{cases} \cot(K\pi + \frac{\pi}{4} + \alpha) - 4x = \tan(K'\pi + \frac{\pi}{4}) \\ \sin(3K''\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha) + \sqrt{x + \cos \frac{\pi}{3}} = 0 \end{cases}$$

مقدار x را حساب کنید) (K و K' و K'' اعداد صحیح اند).

دیرستان نوربخش (رشت)

دیر، آخوندزاده - فرستنده: سید رضا میرزندہ دل

۱- اگر داشته باشیم :

$$3\sin(5x+y) = 5\sin(3x+y)$$

ثابت کنید:

$$4\tan x = \tan(4x+y)$$

دیرستان دایت (سنندج)

دیر، عطائی - فرستنده: اسعد اردلان

۱- اگر x_1 و x_2 و x_3 و x_4 که به ترتیب صعودی قرار دارند کوچکترین چهار زاویه مثبت باشند که سینوس آنها برابر k است در صورتی که $1 > k > 0$ باشد ثابت کنید

$$4\sin x_1 + 3\sin \frac{x_2}{2} + 2\cos \frac{x_3}{2} + \sin \frac{x_4}{2} = 4k$$

دیرستان هدف شماره (۳)

فرستنده: حمد جناتی

۱- به ازاء چه مقادیر m می‌توانیم داشته باشیم :

$$\cos x = \frac{m^2 - 2m}{m - 1}$$

در این حال $\tan x$ را حساب کنید.

۲- اگر A و B زوایای مثلثی باشند که در روابط زیر صدق نمایند این زوایا را بر حسب رادیان حساب کنید.

$$\begin{cases} \cos A \cos B = \frac{1}{2} \\ \frac{\sin A}{\sin B} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

دیرستان هدف ۳ (دختران)

دیر، شیخان

$$1- می‌دانیم \tan a + \frac{1}{\cos a} = 2 \text{ است و انتهای کمان } a$$

در ربع اول است مطلوب است محاسبه $\sin a$.

۲- معادله زیر را حل کنید. جوابهای کلی و جوابهای واقع بین صفر و 2π را با استفاده از جدول تعیین کنید.

$$2\sin^3(x + \frac{\pi}{5}) + (1 - \sqrt{3})\cos(x + \frac{\pi}{10}) = \sqrt{2}$$

مسائل هندسه فضائی

دیرستان البرز

دیر: بهمنیار - فرستنده: روزف صالح

۱- مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی در صفحه R که مجموع مرباعات فواصل آن نقاط از دو نقطه ثابت A و B خارج از صفحه مقدار ثابت k^2 باشد.

دیرستان پهلوی (ملایر)

فرستنده - توفیقی

۱- خطی چنان رسم کنید که يك سرش روی خط مفروض D و يك سر دیگر آن در داخل صفحه مفروض P و نقطه مفروض O وسط آن باشد.

دیرستان خرداد

دیر: محمود کاشانی

۱- صفحه P و خط L مفروضند از خط L صفحه‌ای مرور دهید که با صفحه P زاویه α بازد.

۲- هر صفحه‌ای که از نیمساز یک زاویه بگذرد با اضلاع آن زاویه زوایای متساوی می‌سازد.

دیرستان دکتر محمود شیوه

دیر: شیخان

۱- چهار وجهی $ABCD$ مفروض است.

اولاً ثابت کنید که چهار قطعه خط که هر يك از آنها يك رأس چهار وجهی را به محل تلاقی میانه های مثلث وجه مقابل به آن رأس وصل می‌کنند متقارنند و نقطه مشترک آنها

$\frac{3}{4}$ طول هر يك از آنها ابتدا از رأس قرار دارد.

ثانیاً - اگر دو وجه DBC و ABC مثلث های متساوی الساقین برای به قاعدة مشترک BC بوده و فرجه نظریه ای BC برای 60° و طول يال $BC = 2a$ و $AD = a$ باشد طول عمود مشترک دو يال متناظر AD و BC و طول سایر يالهای چهار وجهی و نیز سطح و حجم آنرا بر حسب a حساب کنید.

دیرستان سخن (پسران)

دیر: ذوالقدر - فرستنده: احمد فروتن

۱- خط D و پاره خط BC که با D متناظر است

مفروضند بر خط D نقطه A را چنان بیاید که :

$$\angle BAC = 90^\circ$$

باشد.

۲- صفحه ثابت P و مثلث ABC مفروضند. از نقطه دلخواه O واقع در خارج آنها به A و B و C وصل

اولاً - ثابت کنید زاویه SAB زاویه مسطحة دو صفحه $B'C$ و SAC می باشد .
ثانیاً - اگر از نقطه B دو عمود BE و BD را به ترتیب بر SC و SA فرود آوریم ثابت کنید که :

$$SE \times SC = SD \times SA = SB$$

و از آنجا نتیجه بگیرید که چهار ضلعی $ADEC$ محتاطی است.
ثالثاً - ثابت کنید که خط SE بر صفحه BDE عمود است .

دیبرستان نوربخش (رشت)

دیبر: آخوندزاده - فرستمنده: سید: ضا هیورزندہ دل
۱- دو خط متقاطع D و L که در ارج صفحه P قرار دارند مفروضند مطلوب است مکان هندسی نقاطی از فضای که از صفحه به فاصله l بوده و از دو خط D و L به يلا، فاصله باشد .

دیبرستان نادر شاه (مشهد)

دیبر: بقائی - فرستمنده: احمد صدر

۱- دایره به قطر AB روی صفحه P مفروض است نقطه M را بر روی محیط دایره در نظر می گیریم از نقطه A عمود AS را بر صفحه P اخراج کرده و نقطه S را به دو نقطه M و B وصل می نماییم از نقطه A عمودی AC و AN را به ترتیب بر خطوط SB و SM فرود دی آوریم .
اولاً ثابت کنید :

$$SA^2 = SN \cdot SM = SC \cdot SB \quad SMB = 90^\circ$$

ثانیاً - ثابت کنید دو مثلث CN و SMB متشابهند
۲- مکان هندسی نقاطی را در صفحه P بیابید که تفاصل مربوطات فواصلشان از دو نقطه معلوم A و B واقع در خارج مساوی مقدار معلوم l باشد .

دیبرستان هدف شماره ۳

۱- دایره O به شعاع R در صفحه P مفروض است از نقطه A روی صفحه دایره ($AO = 2R$) خطی بر صفحه عمود می کنیم و روی آن $AB = R\sqrt{3}$ جدا می کنیم اگر از نقطه A مماسهای AC و AD را بر دایره رسم کنیم :
الف - ثابت کنید $BC = CO$ بر BC بوداست و $BD = CO$ بر BD باشد .

ب - اگر از نقطه A بر صفحه مثلث BCP عمودی رسم کنیم ثابت کنید نقطه H پایی این بود مرکز دایره محیطی مثلث BCD می باشد .

ج - تاثر انتزاعیه فرجهای که صفحه دایره با صفحه مثلث BCD می سازد حساب کنید .

نموده امتداد می دهیم تا صفحه P را به ترتیب در A' و B' و C' قطع نمایند ثابت کنید اگر O در فضای تغییر نماید خطوط $A'C'$ و $B'C'$ هر یک از نقطه ثابتی می گذرند که این سه نقطه ثابت بر یک خط راست واقع اند

دیبرستان فردوسی (تبریز)

دیبر: حسینی - فرستمنده: فرخ قوامی

۱- دو خط L و A' و دو نقطه A و A' داده شده است از A و A' دو خط موازی چنان رسم کنید که اولی L و دومی A' را قطع کند .

دیبرستان فردوسی (رضائیه)

دیبر: صولتی - فرستمنده عبادی ، فیضی آذر آزموده

۱- بر سه رأس مثلث ABC سه صفحه موازی و متساوی الفاصله چنان مرور دهید که یکی از آنها از نقطه مفروضی واقع در خارج صفحه مثلث بگذرد .

دیبرستان محمد رضا شاه پهلوی (رشت)

دیبر: فردادی - فرستمنده: سالار محمودی

۱- سه محور ثابت و متحداً الجهة و غیر واقع در یک صفحه مفروض آند . سه نقطه ثابت A و B و C به ترتیب بر سه محور واقع آند و سه نقطه مقعر A' و B' و C' به ترتیب بر سه محور چنان حرکت می کنند که مجموع جبری :

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

برابر با مقدار K باقی می ماند ثابت کنید که مرکز G' مثلث $A'B'C'$ نقطه ثابتی است و بر عنکس یعنی اگر G' ثابت فرض شود و رابطه (1) برقرار خواهد بود .

۲- دو خط متعامد و متناظر By و Ax مفروض است و

$$AB = a$$

عمود مشترک آنها می باشد قطعه خط MP با طول ثابت چنان تغییر مکان می دهد که M همواره بر Ax و P همواره بر By واقع است ($b > a$) .

الف - ثابت کنید که اندازه زاویه دو خط AB و MP مقدار ثابت است .

ب - مکان هندسی I نقطه وسط MP را تعیین کنید .

دیبرستان مجیدی (اراک)

دیبر: نشادیان - فرستمنده: محسن امیری

مثلث قائم الزاویه ABC ($A = 90^\circ$) مفروض است . از نقطه B عمود BS را بر صفحه مثلث اخراج کرده و نقطه S را به نقاط C و A وصل می کنیم .

و فلز حاصل را در آب می اندازیم که تا کاملاً فاپدید شود آنگاه بر محلول حاصل تورنسل می دیزیم برای تغییر رنگ

معروف 5cc اسید کلریدریک نرمال مصرف می نماییم ملاحظه می کنیم که باز رنگ تورنسل تغییر نمی کند برای تغییر رنگ 5cc سانتیمتر مکعب اسید سولفوریک 50% ملکول گرم

در بینر لازم است پیدا کنید:

اولاً - درجه خلوص نمک طعام را.

ثانیاً - حجم گاز تیدرزن متصاعد شده در عمل دوم در شرائط متعدد و همچنین در فشار ثابت و حرارت $22/3$ درجه سانتیگراد،

ثالثاً - تعیین غلظت معمولی و غلظت پنی و نرمالیته اسید سولفوریک.

رابعاً - PH و POH اسید فوق الذکر.

خامساً - چه حجم از این اسید را باید انتخاب کرد و چه مقدار از آب مقطر باید به آن اضافه نمود تا یک لیتر محلول نیم نرمال اسید سولفوریک بدست آید.

سادساً - اگر نیم لیتر از اسید سولفوریک اولیه اسیدا غلیظ نموده سپس قطعه مسی در آن بیندازیم تا کاملاً حل شود (به کمک حرارت) و محلول حاصل را به ملاتیت تبخیر نماییم جسم بلورینی به وزن $25/21$ گرم تولید می شود پیدا کنید تعداد ذرات آب تبلور سولفات مس را.

سابعاً - تعداد اتم گرمهای مس که در عمل شرکت کرده است حساب کنید.

ثامناً - نسبت درصد آب و سولفات مس بی آب را در سولفات مس متبادر حساب کنید.

تاسماً - اگر این کمک در آب تبلور خود حل شود غلظت معمولی آنرا حساب کنید در صورتی که از تغییر حجم صرف نظر کنیم.

دیبرستان جوینی (قوچان)

دیبر عطاران - فرستمند: بهروز نوبهار

1cc از یک محلول اسید سولفوریک و اسید کلریدریک

30cc بوسیله 10cc از یک محلول سود دسی نرمال خنثی می شود 10cc دیگر از همان محلول اولیه را با کارور باریم ترکیب می کنیم $233/50$ گرم رسوب بدست می آید مطلوبست غلظت و فاکتور هریک از اسیدها.

دیبرستان دکتر کریم فاطمی (اهواز)

دیبر: کامکار - فرستمند: شاهرخ شعیم

۱- تعیین کنید برای رقیق کردن یک محلول اسید-

۲- صفحه P و خط D که در نقطه O آن را قطع کرده مفروض است از نقطه O در صفحه P خطی رسم کنید که با خط D زاویه α بسازد.

دیبرستان هدف ۲ (دختران)

دیبر: شیخان

۱- سه خط دو به دو متقاطع d_1 و d_2 مفروض اند متوالی اضلاعی رسم کنید که یک ضلع آن موازی d_1 ممکن به دو خط متقاطع d_1 و d_2 بوده و ضلع دیگر آن به طول معلوم l روی d_2 قرار گرفته باشد.

فیزیک

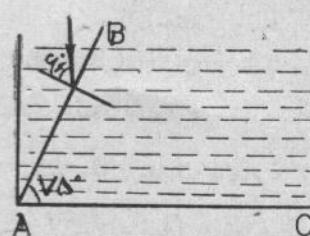
دیبرستان سخن (پسران)

۱- آئینه مهدی که قطر دهانه آن 25cm سانتیمتر و شعاع آن یک متر است مطلوبست محاسبه قطر میدان دید آئینه.

۲- ظرفی به شکل مکعب مستطیل پراز مایعی به ضریب $\sqrt[2]{2}$ است سطح AB آن را روی مایعی به ضریب شکست $\sqrt[2]{2}$ قرار می دهیم لوزی با زاویه 45° درجه به سطح جانبی ظرف برخورد می کند با محاسبه تعیین کنید نور با چه زاویه ای از کف ظرف یعنی AB وارد مایع می شود.

دیبرستان هدف شماره ۳

فرستمند: جهانشاه منصوری - شهاب ذکاوی



۱- در درون ظرف A و B مطابق شکل مایعاتی به ضریب شکست $\sqrt[2]{2}$ و $233/50$ دارد و ریخته شده است و مطابق شکل یک شعاع

نور بر سطح AB فصل مشترک این دو مایع می تابد این شعاع از سطح AC در تحت چه زاویه ای خارج می شود و زاویه انحراف آن چقدر است.

شیمی

دیبرستان بواسحق (کازرون)

دیبر: حسین جواهری - فرستمند سید مسعود هدایتزاده

۱- گرم نمک طعام جامدرا تجزیه الکتریکی نموده

دارای $\text{PH} = 12$ می باشد فاکتور و غلظت و غلظت ملکولی آن را حساب کنید.

۲- مخلوطی از کلرورسدیم و کلرورپتاسیم و کلرورآمونیوم روی هم $7/36$ گرم وزن دارند. نصف این مخلوط را با سودتکلیس می کنیم گاز حاصل 30 سانتیمتر مکعب اسید سولفوریک یک نرمال را ختنی می کند نصف دیگر مخلوط را در آب حل می کنیم و بقدر کافی محلول نیترات نقره می افزاییم $8/61$ گرم رسوب حاصل می گردد وزن هریک از سه کلرور را در مخلوط حساب کنید.

کلاس ششم طبیعی

چیز

دیبرستان دانش اسکو

دیبر : اسکوئی - فرسنده : خلیل علمداری میلانی اولاً معادله دایره ای را پیدا کنید که در نقطه به عرض 4 بر خط l به معادله $y = \frac{1}{3}x + 3$ مماس بوده و محور x هارا در نقطه ای به طول یک قطع کند.

ثانیاً - دایره ای به معادله :

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$

را رسم کنید.

ثالثاً - از نقطه تلاقی خط l با محور y ها مماس دیگری بر دایره رسم می کنیم معادله این مماس و مختصات نقطه تماس را پیدا کنید.

رابعاً - بیضی به معادله :

$$9x^2 + 26x + 25y^2 - 20y + 211 = 0$$

را در همان دستگاهی که دایره رسم شده است رسم نمایید.

دیبرستان شهرپرست

دیبر : شیخان

$$1 - مشتق تابع y = \frac{x + \cos 2x}{1 + \sin 2x}$$

را حساب نموده ساده کنید.

۲- اولاً مشتق تابع :

$$4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 13 = 0$$

را بدست آوردید.

ثانیاً - در نقطه تلاقی نمایش هندسی معادله فوق با

سولفوریک با غلظت $24/5$ گرم در لیتر چند سانتیمتر مکعب از آن را باید با 85 سانتیمتر مکعب از محلول دیکری از همین اسید با فاکتور $125/0$ مخلوط کرد تا فاکتور محلول اسید بدست آمده $1/10$ گردد.

۲- PH یک محلول پتاس 3 می باشد غلظت و فاکتور محلول پتاس را حساب کنید.

دیبرستان سخن (یسران)

دیبر : فرزاد - فرسنده : احمد فروتن

۱ - $1/8$ گرم از یک اکسید فلز دو ظرفیتی را با اسید کلریدریک به طور کامل ترکیب کرده ایم در این عمل 40 از اسید کلریدریک نرمال مصرف شده است با استفاده از اطلاعات خود جنس فلز را تشخیص دهید.

۲- PH محیط اسید سولفوریک $\frac{1}{10}$ نرمال را محاسبه کنید.

دیبرستان صصاصی ارالا

دیبر : نوروزیان - فرسنده : هادی کارگشای

۱ - $1/6$ ملکول گرم سولفات فرو را با $33/1$ گرم نیترات یک فلز دو ظرفیتی مجهول مخلوط کرده ایم و با آن آزمایش‌های زیر را انجام می دهیم.

الف - $\frac{1}{2}$ مخلوط را با اسید سولفوریک حرارت می دهیم

یون Fe^{++} از بین می روود و عمل کامل می شود . از روی اعمال مربوط جنس فلز مجهول را تشخیص دهید .

ب - مخلوط با قیمانده را صاف می کنیم و محلول زیر صافی را با آمونیاک ترکیب می نماییم رسوبی بدست می آید این رسوب را تکلیس می نماییم وزن جسم جامد حاصل چقدر است.

ج - اگر سولفات فروی اولیه را در محیط اسید سولفوریک با پرمنکنات پتاسیم $\frac{N}{10}$ آزمایش می کردیم چند سانتیمتر مکعب پرمنکنات بی رنگ می شد .

دیبرستان محمد رضا شاه (کرمانشاه)

دیبر : صدیق کاکیان - فرسنده : شهریار لطیفی

۱ - 10 اسید سولفوریک دارای $49/0$ گرم اسید می باشد. در صورتی که درجه تقدیک 60% فرض شود آن PH را حساب کنید :

$$(\log 2 = 0/30103) \quad \log 3 = 0/47712$$

دیبرستان هدف شماره ۳

۱- یک محلول سود که یونیزاسیون آن صد درصد است



و چگالی به حالت بخار آن نسبت به H برابر ۳۰ باشد فرمول ملکولی جسم را پیدا کنید.

-۲ ۲/۴۶ گرم از یک جسم آلی نیتروروژن دار را مورد تجزیه قرار داده ایم در نتیجه تولید ۵/۲۸ گرم اندرونید کربنیک و 1120^{cc} بخار آب شده است. از طرفی چون $1/23$ گرم از همین ماده آلی را با آهک سده حرارت داده و گاز قلیائی حاصل را وارد اسید سولفوریک دو نرمال نمائیم از این اسید مصرف می شود. از طرف دیگر محلول حاصل از $6/15$ گرم این جسم در 400 گرم بنزین در $4/86$ درجه منجمد می شود. چنانچه نقطه انجاماد بنزین خانصر $5/5$ درجه باشد فرمول ملکولی جسم را تعیین کنید در صورتی که a برای 100 گرم بنزین $2/51$ باشد. (اگر نتوانستید جرم ملکولی را پیدا کنید آنرا 123 بگیرید).

دیبرستان دولتی دانش اسکو

دیبر: تقیزاده هاکوئی - فرستمند: خلیل علمداری میلانی.

-۱ از تجزیه $\frac{1}{100}$ ملکول گرم از یک الكل اشاع شده

یک ظرفیتی 896 سانتیمتر مکعب گاز کربنیک و $\frac{1}{20}$ ملکول گرم آب حاصل شده است فرمول الكل فوق را پیدا کرده و تمام ایزو مررهای آن را رسم کنید.

دیبرستان فخر الدین (گرگان)

دیبر: فرقانی - فرستمند: ژند

-۱ دو هیدروکربور A و B موجود است چگالی هیدروکربور A نسبت به B مساوی $\frac{15}{14}$ می باشد از طرفی چگالی مخلوط هیدروکربورهای A و B نسبت به اندرونید $\frac{2}{3}$ می باشد در صورتی که حجم A دوبرابر حجم B مخلوط باشد.

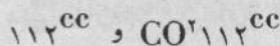
اولاً - جرم ملکولی هر یک از هیدروکربورهای اندرونید آورید.

ثانیاً - در صورتی که A اشاع شده و B از نوع هیدروکربورهای اتیلنی باشد فرمول هر یک را تعیین نمائید

$$\text{C} = 12 \quad \text{H} = 1 \quad \text{O} = 16$$

گروه فرهنگی فرگام

-۱ $0/15$ گرم از یک جسم آلی را تجزیه نموده:



نهادر H ها خطوطی بر منحنی نمایش نموده ایم معادلات مماسها را بنویسید و سپس زاویه بین دو خط مماس را بدست آورید.

$$-3 \text{ تابع } \frac{(m+1)x - 1}{mx + m + 1} = y \text{ مفروض است.}$$

اولاً - m را طوری تعیین کنید که تابع همواره صعودی با نزولی بوده یا تبدیل به مقدار ثابتی شود.

ثانیاً - m را طوری تعیین کنید که منحنی فوق محور y را در نقطه ای به عرض $(1 -)$ قطع کند.

ثالثاً - جدول تغییرات منحنی (c) نمایش تابع:

$$y = \frac{2x - 1}{x + 2}$$

را رسم کنید.

راباً - از محل تلاقی مجانبهای منحنی (c) خطی با ضریب زاویه a می گذرانیم در حدودی که a تغییر می کند تا منحنی c را قطع کند ثابت کنید در نقطه تلاقی نسبت به محل تلاقی مجانبهای قرینه یکدیگرند.

دیبرستان: فردوسی (گلپایگان)

دیبر: حبیبی - فرستمند: مصطفی جابری

-۱ اولاً m را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش تابع:

$$y = x^3 - 4x^2 - mx + 2m$$

بر خط $y = 4x + 5$ مماس باشد.

ثانیاً - منحنی و خط را نسبت به یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

-۲ معادله دایره ای را بنویسید که بر محورهای مختصات مماس بوده و فاصله مرکزان از خط $x + y = 4$ برابر $\sqrt{2}$ باشد.

-۳ معادله $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$ را حل کرده و جوابهای کلی و همچنین جوابهای محصور بین صفر و 2π را بدست آورید:

شیوه های

دیبرستان دختران بهبهانی کازرون

دیبر: جواهری

-۱ $1/3$ گرم از یک ماده آلی را تجزیه کرده ایم در

نتیجه تولید 224^{cc} گاز کربنیک شده در ضمنن، در همین نمونه $0/02$ گرم هیدرژن وجود داشته مطلوبست.

اولاً - ترکیب درصد عنصر مشکله جسم.

ثانیاً - ساده ترین فرمول جسم.

ثالثاً - در صورتی که ساده ترین فرمول جسم به صورت

که از مبدأ مختصات بر منحنی دسم می‌شوند تعیین کنید و مختصات پاها را قائم را حساب کنید.

۲- معادلات خطوط مجانب منحنی به معادله

$$x^2 - 3 \pm \sqrt{x^2 - x + 5} = y \text{ را تعیین کنید.}$$

دیبرستان امیر گبیر

دیبر: بقائی - فرستمنده: احمد صدر

$$1 - \text{در تابع } y = \frac{x^2 - m}{mx^2 - x + m + 1} \text{ حدود } m$$

را بقسمی تعیین کنید که منحنی نمایش تابع فوق دارای ۲ و یا یک مجانب موازی محور عرضها بوده و یا دارای چنین مجانبی نباشد m را چنان تعیین کنید که تابع فوق خط $y = 1$ را قطع نکند.

دیبرستان پهلوی ساری

دیبر: ههران - فرستمنده: محمد مقدسی

$$1 - \text{منحنی } c \text{ به معادله } y = \frac{x^2 - 2ax + b}{x + a}$$

مفروض است.

الف - مکان هندسی نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنی را پیدا کنید و قوی که b ثابت بماند b تغییر کند.

ب - مقادیر a و b را تعیین کنید بطوری که حاصل ضرب ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۴ گردد و مرکز تقارن روی خط $y = b - 4$ قرار داشته باشد.

دیبرستان دین و دانش (قم)

دیبر: محمد عابدی - فرستمنده نوجوان

۱ - ثابت کنید جمیع منحنی های

$$m^2 - 2my - x^2 + 1 = 0$$

بردايرة ثابتی مماس می باشد.

دیبرستان دکتر گریم فاطمی

دیبر: نجفی - فرستمنده: مسعود برگتی

$$1 - \text{تابع } y = \frac{ax^2 + bx - 1}{ax^2 + x - b}$$

الف - اگر (a, b) باشد به ازاء جمیع مقادیر مختلف a و b درجه تغییرات تابع بحث کنید.

ب - ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر b منحنی تابع فوق بر منحنی تابع $x^2 + x + 1 = y$ در نقطه ای به طول یک مماس است.

$$2 - \text{تابع } y = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$$

الف - ضرایب a و b و c را طوری باید که نقطه $(0, 1)$ مرکز تقارن منحنی بود و خط $-x - 2y = 0$ بر منحنی

بخار آب در شرائط متعارفی بدست آمده است از طرف دیگر می‌دانیم که این جسم اسیدی است یک ظرفیتی و نسبت وزن سدیم به وزن نمک سدیم آن اسید $28/0$ است معین کنید فرمول آن را.

کلاس ششم ریاضی

جبر

دیبرستان شماره ۱۹۳ آذربایجان

دیبر: آذرنوش - فرستمنده: صراف فهار

$$1 - \text{مقدار تابع } y = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x}{x^2} \text{ بردار آزاد } x = \text{ پیدا کنید.}$$

$$2 - \text{معادله خط قائم بر منحنی } 3 - 2x^2 + 2x = y \text{ را در نقطه } (2, 2) \text{ بنویسید.}$$

۳ - مکان هندسی نقطه

$$P\left(x = \frac{\sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha + 1}{1 + \sin^2 \alpha}, y = \frac{3(1 - \sin^2 \alpha)}{1 + \sin^2 \alpha}\right)$$

وقتی که α جمیع مقادیر را اختیار کند تعیین کنید و چنانکه این مکان هندسی مرکز تقارنی دارد آنرا پیدا کنید.

گروه فرهنگی آرش

دیبر: برهنیا

$$1 - \text{تابع } y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + b}$$

کنید به ازاء جمیع مقادیر b و a منحنی نمایش تابع فوق از نقطه ثابتی می گذرد و تحقیق کنید این نقطه مرکز تقارن منحنی می باشد.

$$2 - \text{تابع } y = \frac{x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx - 4}{x^2 - mx^2 + nx + p}$$

مفروض است ضرایب را با شرائط زیر بدست آورید.
الف - صورت کسر دارای دوریشه مساوی و دوریشه قرینه است.

ب - خط $3 = x$ یکی از مجانبهای منحنی است.

ج - به ازاء $2 = x$ تابع فوق مبهم و به صورت $-$ می باشد که مقدار حقیقی آن به سمت ۲ میل می کند.

دیبرستان ادیب

دیبر: طاهری - فرستمنده: جعفر صادقی

$$1 - \text{در تابع } y = \frac{2}{x^2 - 1} = \text{اولاً معادلات خطوط قائمی}$$

الف. بدون استفاده از مشتق ثابت کنید: بازه جمیع مقادیر a تابع فوق دارای یک ماکریتم و یک مینیمم است و مقادیر ماکریتم و مینیمم آن را پیدا کنید.

ب - مقدار عددی a را طوری بیاورد که میان y_1 و y_2 مقادیر ماکریتم و مینیمم تابع فوق را برابر $3y_1, y_1 - y_2$ و $y_2 = 13$ برقرار باشد.

د بیرونستان: محمد قزوینی
د بیرون: رجایی - فرستنده: سعید قاجار

$$1 - \text{مقدار حقیقی کسر } \frac{\cos^2 mx}{\sin^2 2x} \text{ بازه مقادیر } m$$

$$2 - \text{تابع } y = ax - \sqrt{x^2 - 1} \text{ مفروض است مقدار این تابع را به ازاء مقادیر مختلف } a \text{ و } x = +\infty \text{ حساب کنید.}$$

د بیرونستان هدایت شیراز
د بیرون: اردشیری - فرستنده: دانشور

$$1 - \text{تابع } y = 2x + \sqrt{ax^2 + bx - 2} \text{ مفروض است. ضرایب } a \text{ و } b \text{ را طوری تعیین کنید که خط } y = x + 1 \text{ مجانب منحنی آن باشد.}$$

مثلثات

گروه فرهنگی آرش

د بیرون: بهنیا - فرستنده: طاهری
1 - مطلوبست حل و بحث معادله زیر:

$$\sin(\pi \cos x) - \cos(\pi \sin x) = 0$$

2 - معادله زیر را حل کنید و جوابهای کلی و جوابهای پیش از صفر و π را بدست آورید.

$$(\sin 2x + 3)\sin^3 x - (\sin 2x + 3)\sin^2 x + 1 = 0$$

د بیرونستان شماره ۱ و ۳ آذر

د بیرون: طاهری - فرستنده: صراف نهار
1 - عبارت زیر را قابل محاسبه لکاریتی کنید.

$$S = \cos(\alpha + \beta)\cos\gamma + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \sin(\alpha + \beta)\sin\gamma$$

2 - معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3x}{2}\right) = m \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

3 - معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$2\cos a \sin^2 x - 2\sin a \cos^2 x = \sin(x - a)$$

عمود باشد و مختصات پای قائم را حساب کنید.

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

ب - خط $y = m$ منحنی تابع B در A قطع می کند اگر A' و B' تصاویر A و B بر محور طول باشند ثابت کنید:

اولاً دوایری به قطر A' و دارای یک محور اصلی آند.

ثانیاً بردایره ثابتی عمودند و معادله دایره را تعیین کنید.

اگریکی از دوایر به قطر B' منعکس خط $x = 1$

نسبت به مبدأ مختصات باشد معادله این دایره را معین کرده

و مقدار m را در این حالت بدست آورید.

د بیرونستان شاهدخت

د بیرون: عبدالله‌ی

$$y = \frac{x^2 - mx + m^2}{x - m}$$

مفروض است.

ثابت کنید که منحنی های تابع مفروض همواره بر یک خط ثابت مماس بوده و دارای مجانب مشترک ثابتی می باشند.

2 - معادله مماس و قائم بر منحنی (y) به معادله

$$\sqrt{2}x^2 + y^2 + 1 = 0$$

بنویسید و همچنین مجانب های منحنی y را پیدا کرده و تحقیق کنید مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است.

$$3 - \text{مقدار حقیقی عبارت } \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} \text{ را در ازاء } x = 0 \text{ تعیین کنید.}$$

د بیرونستان شاهپور شیراز

د بیرون: اطلاعات - فرستنده: غلامرضا قابل

1 - خط $y = m$ منحنی (c) نمایش تغییرات تابع

$$y = \frac{x^2 + 1}{1 - x}$$

حدود m را طوری تعیین نمایید که طول یک نقطه برخوردین

اعداد ۱ و ۲ و طول دیگرین ۲ و ۵ قرار گیرد و تحقیق کنید

فقط به ازاء یک مقدار صحیح m این وضع صورت می گیرد.

2 - مختصات مرکز تقارن تابع معکوس تابع

$$y = \frac{x^2 + 1}{1 - x}$$

د بیرونستان گلشنگ از شبستر

د بیرون: باهمت - فرستنده: کلاهی شبستری

$$1 - \text{تابع } y = \frac{x^2 - 2ax}{ax + 1} \text{ مفروض است.}$$

دیبرستان ادب

دیبر: طاهری - فرستنده: هیرزازاده

۱- اولاً معادله مثلثاتی

$$m \sin^2 x - (m+1) \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

راحل و بحث کنید ،

ثانیاً m را طوری تعیین نمایید که $\sin x$ و $\cos x$ ریشه‌های معادله باشند باشیم :

$$2 \sin(x' + x'') = 3 \cos(x' - x'')$$

۲- معادله مثلثاتی زیر را حل و بحث کنید :

$$(m+1) \cos 2x - 8m (\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}) +$$
$$+ 7m - 4 = 0$$

۳- دستگاه دومعادله دومجهولی زیر را حل و بحث کنید :

$$\begin{cases} \sin x = a \sin y \\ \tan x = a \tan y \end{cases}$$

دیبرستان امیر کبیر

دیبر: بقائی - فرستنده: احمد صدر

۱- معادله $m \cos^2 x - 2 \cos x - m = 0$ مفروض است

اگر $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای معادله (۱) باشند معادله ای تشکیل دهید که جوابهای آن $\sin x$ و $\cos 2x$ باشد .

۲- اولاً مطلوب است حل و بحث معادله زیر :

$$(m+1) \sin x + \cos x - m \sin^2 \frac{x}{2} - 2m \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

ثانیاً m را طوری تعیین کنید که یکی از جوابهای معادله فوق برابر $2A \operatorname{arctg} 1$ گردد .

ثالثاً m را بقسمی تعیین کنید که داشته باشیم :

$$2 \cos(\frac{x'}{2} - \frac{x''}{2}) = \sin(\frac{x'}{2} + \frac{x''}{2})$$

دیبرستان خرد

دیبر: صداقت کیش

۱- دستگاه دومعادله دومجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{5}{4} \\ \tan x = \sqrt{3} \tan y \end{cases}$$

دیبرستان خوارزمی شماره ۱

دیبر: چاوشیان

۱- معادله

$$(m+5) \sin^2 x + m \sin 2x + (m-3) \cos^2 x = -2$$

یکان دوره چهارم

مفروض است .

اگر x' و x'' ریشه های معادله باشند m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$x' + x'' = -\frac{\pi}{4}$$

دیبرستان دکتر گریم فاطمی

دیبر: نجفی

۱- رابطه ای مستقل از α بین x و y بدست آورید :

$$\begin{cases} x = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \\ y = \tan \alpha (\cos \alpha + 1) + 1 \end{cases}$$

دیبرستان دکتر محمود شیمی

دیبر: عبدالله

۱- معادله زیر را حل و بحث کنید :

$$\sin^2 x + \lambda \cos^2 x = m (\sin x + 2 \cos x)$$

۲- معادله زیر را حل کنید :

$$\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin \frac{x}{2} (\sqrt{3} \sin \frac{x}{2}) +$$

$$+ 2 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{3} - 2 = 0$$

دیبرستان شاهدخت

دیبر: عبدالله

۱- عبارت زیر را قابل محاسبه لگاریتمی کنید :

$$2\sqrt{2} \sin x - \cos 2x - 8\sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

۲- معادله

$$\cos^2(3x - \frac{\pi}{12}) + a \cos(\frac{7\pi}{12} - 3x) + b = 0$$

مفروض است .

$$\text{اولاً اگر } x' - x'' = \frac{\pi}{6} \text{ باشد ثابت کنید که بین } a \text{ و } b$$

رابطه $a^2 + 2b + 1 = 0$ برقرار است .

$$\text{ثانیاً اگر } \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = b \text{ باشد مقدار عددی } b \text{ را}$$

حساب کرده سپس معادله حاصل را حل کنید و جوابهای بین صفر و π را بدست آورید .

دیبرستان صفائی سمنان

دیبر: فاضلی - فرستنده: شریف عرب اسماعیلی

۱- معادله زیر را حل و بحث کنید :

$$\tan x - \tan 3x = m \tan 2x$$

دیبرستان فراغت

دیبر: طاهری

۱- m راچنان تعیین کنید که درجه های معادله زیر متمم یکدیگر باشند.

$$x' + x'' = 90$$

$$m \sin^2 x - (m+1) \sin x + m - 1 = 0$$

۲- ربع دیگر OAB به شاعع R مفروض است شاعع اختیاری OC را رسم می کنیم واز C خطی موازی OA رسم

می کنیم تا AB D تلاقی نماید. مفرض اینکه x باشد زاویه x را طوری تعیین کنید که مساحت ذوزنقه $ACDO$ برابر mR^2 باشد (بحث)

دیبرستان فخر الدین گران

دیبر: هشکین قلم - فرستنده: ژند

۱- نامعادله زیر را در فاصله 0 و 2π حل کنید:

$$\frac{\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1}{\tan^2 x - 3} > 0$$

دیبرستان کریم فاطمی

فرستنده: محمد رضا نادری

۱- عبارت زیر را قابل محاسبه لگاریتمی کنید:

$$\sin(a+b+c) - \sin a - \sin b - \sin c$$

۲- در معادله:

$$(m-1) \sin 2x + \cos 2x + 2m = 0$$

m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$x' - x'' = \frac{\pi}{2}$$

۳- در دستگاه:

$$\cos 2x = a \sin y$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 1$$

a را طوری تعیین کنید که x و y با هم برابر شوند.

دیبرستان گلشنفر از (شبستر)

دیبر: باهمت - فرستنده: سعید فرشاد

۱- دیشه های قابل قبول معادله:

$$2 \sin^2 x + 4 \sin x + 1 = 0$$

را قابل محاسبه لگاریتمی کنید.

۲- نامعادله زیر را حل کنید:

$$\frac{\sin x + \cos x - \sin x \cos x + 1}{\sin x + \sin 2x} > 0$$

۳- حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$S = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 3a} + \dots + \frac{1}{\sin na}$$

دیبرستان نادرشاه (مشهد)

دیبر: بقائی - فرستنده: احمد صدر

۱- معادله زیر را حل و بحث کنید:

$$(\sin x - \cos x) \sin \alpha + (\sin x + \cos x) \cos \alpha = m$$

دیبرستان هدایت سمندج

دیبر: عطائی - فرستنده: بدخشان

۱- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x + \sin y - \sin x \sin y = \sqrt{2} - \frac{4}{3} \end{cases}$$

حساب استدلالی

دیبرستان شماره ۳ آذر

دیبر: ربانی - فرستنده: رضا صراف نهار

۱- ثابت کنید اگر n عددی فرد باشد عدد:

$$A = 8^n + 9^n - 17^n$$

همواره بر ۵۱ بخش پذیر است.

۲- عدد چهار رقمی $N = \overline{medu}$ را از روابط زیر بدست بیاورید:

$$\begin{cases} \overline{uc} = c^2 \\ \overline{md} = md + c + u + 1 \end{cases}$$

دیبرستان آرش

دیبر: از گمی

۱- عدد \overline{abcde} را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\overline{cd} = 2(\overline{ab} + 2) = 5e$$

۲- جوابهای صحیح و مثبت x و y را از معادله سیال زیر بدست آورید.

$$x^2 - y^2 = 3(x - y) + 99$$

گروه فرهنگی بابکان

دیبر: از گمی - فرستنده: محمد رضا بهادری

۱- ارقام x و y و z را از رابطه:

$$(54622)_7 = (20xy5)_z$$

حساب کنید. پس از تعیین x و y و z عدد $(20xy5)$ را در عدد (345) در مبنای z ضرب کنید و حاصل ضرب را در مبنای z بدست آورید.

۲- جوابهای صحیح و مثبت x و y را از معادله زیر

پیدا کنید:

$$y^2 + 12y = x^2 - x - 7$$

دیبرستان دکتر فاطمی
دیبر: گیتی زاده

۱- مطلوبست تعیین اعداد چهار رقمی که بر ۲۴ و ۳۶ و ۳۵ بخش پذیر و باقیمانده تقسیمشان بر ۲ باشد.

۲- عدد \overline{xyz} در مبنای ۸ نوشته شده است ارقام x و y را طوری تعیین کنید که این عدد در همین مبنای 4×12 قابل قسمت باشد.

۳- ثابت کنید دو عدد $3^{4n+1} + 2^{5n+1}$ و $7 - 2^{5n+5}$ دارای رقم میکان متساوی میباشند.

۴- تعیین کنید عمل زیر در چه مبنایی انجام شده است:

$23 \times 24 + 23 + 24 - 136 = 524$

۵- اگر $4a + c - 2b$ باشد ثابت کنید در هر مبنای بزرگتر از ۴ عدد سه رقمی \overline{abc} بر ۱۲ بخش پذیر است.

دیبرستان شاهدخت

دیبر: عبدالله‌ی

۱- هر گاه $\overline{\alpha\beta\gamma}x = \overline{\alpha\beta\gamma}y = \overline{\alpha\beta\gamma}(531)$ باشد.

الف- مقادیر عددی x و y و α و β و γ را تعیین کنید.

ب- حاصل ضرب $\overline{(531)} \times \overline{(423)}$ را در مبنای ۶ بدست آورید.

۲- اعدادی را پیدا کنید که اگر ۳۶۷ را بر آنها تقسیم کنیم خارج قسمت تقریبی نقصانی تا یک واحد تقریب آنها مضربی از ده باشند.

دیبرستان فخرالدین (گرگان)

دیبر: سیدین- فرستنده: محمد همدی زند

۱- اعداد P و Q را طوری تعیین کنید که هر گاه مجموع ارقام P را با عدد Q جمع کنیم حاصل برابر ۹ و هر گاه مجموع ارقام عدد Q با عدد P جمع کنیم حاصل ۸۱ گردد.

۲- عدد \overline{N} مفروض است.

اولا- مطلوبست تعیین اعدادی مانند a که اگر آنها در N ضرب کنید اگر کوچکترین عدد 22 را در N ضرب کنیم ثانیاً ثابت کنید اگر کوچکترین عدد 22 را در N ضرب کنیم این حاصل ضرب در مبنای ۷ بر عدد 111 (۱۱) بخش پذیر است.

۳- مطلوبست تعیین دو عدد N و N' که هر دو مجاز کامل هستند و تفاضل آنها ۲۵۹۲ است و بین این دو عدد فقط سه مجاز دیگر وجود دارد.

گروه فرهنگی فرگام

دیبر: محمد نوری- فرستنده: عنقائی

۱- عددی دو رقمی در پایه ۱۴ جنان پیدا کنید که متمم

۳- در یک عمل تقسیم باقیمانده ۱۷ است اگر یک صفر بین رقم یکان و دهگان مقسم قرار دهیم و تقسیم را مجدد انجام دهیم باقیمانده صفر و خارج قسمت جدید از خارج قسمت قبلی ۱۶۹ واحد بیشتر می‌شود عوامل تقسیم را پیدا کنید.

دیبرستان حوینی چوچان

دیبر: عبدالله- فرستنده: بهروز نویهار

۱- دو عدد a و b داریم اگر عدد بزرگتر را بر عدد کوچکتر تقسیم کنیم خارج قسمت را با باقیمانده جمع کرده و این مجموع را بر ۳ تقسیم کنیم باقیمانده برابر باقیمانده تقسیم a بر b می‌شود.

دیبرستان حاج قوام

دیبر: سلطانی- فرستنده: جلال افراصیابی

۱- ثابت کنید در سلسله فیبوناچی

$a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ و $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

همواره روابط زیر برقرار است :

(الف) $a_{n+2} = 1 + a_0 + a_1 + \dots + a_n$

(ب) $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-2}$

۲- مقلوب هریک از دو مقدار :

$9(a-b)$ و $(abc)_7$ و $(cba)_7$ را بدست آورید :

۳- معادله سیاله زیر را حل کنید :

$$a+b+c+d = ab+cd$$

دیبرستان خرد

دیبر: هریماندوست- فرستنده: زینعلی

۱- ثابت کنید در هر مبنای a بزرگتر از ۴ عدد

$$(x-3)(x-2)^{44}$$

مربع کامل یک عدد دو رقمی است که آن را در مبنای x تعیین خواهید کرد.

دیبرستان دکتر محمود شیمه‌ی

دیبر: عبدالله

۱- هر گاه :

$$(280)_x = (352)_y = \text{med}$$

باشد مقدار عددی x و y و m و c و d را پیدا کنید.

$$2- \text{اگر } \frac{x^2 + 8x - 5}{x^2 + 2x - 3} = y \text{ فرض شود به ازاء}$$

چه مقدار x و y صحیح و مثبت می‌گردد ..

۳- عدد سه رقمی $N = \overline{\alpha\beta\gamma}$ را طوری تعیین کنید که :

$$15\alpha = 20\beta + 3\gamma$$

باشد.

به ترتیب ۲۹۲ و ۱۱۹ و ۱۴۲ هستند مقسوم علیه و خارج -
قسمت را حساب کنید .

- اگر $A = 3a - 2b + 5$ مضرب ۱۳ باشد ثابت
کنید عدد ۱ $B = 2a + 3b - 1$ مضرب ۱۳ است .

دیبرستان هدایت سندخ
دیبر : عطائی - فرستمنده : بدخشن - آرمد

- مطلوب است $x \in \mathbb{Q}$ با استفاده از رابطه زیر:
 $(cd\bar{u})_x + (cd\bar{u})_{x-2}$
- عددی را باید که چون در ۳۳۲۶۷ ضرب شود
همه رقمهای عدد حاصل ۸ شود .

مسائل هندسه مخروطات

دیبرستان شماره ۳ آذر

دیبر : نحوی - فرستمنده : رضا صراف نهار
مثلث ABC مفروض است میانه های 'BB' و 'CC' را
رسم می کنیم ثابت کنید ارتفاع AH محور اصلی دو دایره به
قطراهای 'BB' و 'CC' می باشد .

دیبرستان دکتر محمود شیمی مامقانی . شاهدخت .
خرداد .

دیبر : شیخخان

- دو بردار به اندازه ۵ و ۷ مفروضند در صورتی که
اندازه برآیند این دو بردار $\sqrt{39}$ باشد .

اولا - اندازه تفاضل هندسی را بدست آورید .
ثانیا - حاصل ضرب داخلی آن دو بردار را بدست آورید .
- دایره ای را رسم کنید که جزء دوازده دستگاهی بوده
و بر خط مفروضی مماس باشد .

- بر وسط هر ضلع مثلث غیر مشخص ABC خطی بر
آن عمود نموده درجهت خارج بر روی آنها برداری به اندازه
همان ضلع جدا می کنیم ثابت کنید برآیند سه برداری که به
این ترتیب بدست می آیند برابر صفر است .

- دایره ای رسم کنید که جزء دوازده دستگاهی بوده و
بر دایره مفروضی عمود باشد .

مسائل رقومی و ترسیمه

دیبرستان شماره ۳ آذر

دیبر : ارشادی - فرستمنده : رضا صراف نهار
- محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید . واحد
سانسیمتر . مقیاس شبصفحه P را به شیب یک در طرف چپ کاغذ موادی

یکان دوره چهارم

خسابی آن در پایه ۱۲ با همان ارقام و همان ترتیب نوشته شود
- مطلوب است تعیین کوچکترین عددی که رقم سمت
راست آن ۸ بوده و چون رقم سمت راست آفراء داشته و در
سمت چپش قرار دهیم عدد حاصل چهار برابر عدد اول شود .

دیبرستانهای محمد قزوینی
دیبر : صیامی - فرستمنده : فرهودی - سعید قاجار

- ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر K عدد:

$$N = 5^{2K+3} + 3^{2K+3} \times 2^K$$

بر عدد ۱۹ بخش پذیر است K عددی است صحیح و حسابی)
- تعدادی سکه های ده ریالی (به قطر ۳ سانتیمتر) و ۵
ریالی (به قطر ۲ سانتیمتر) و یک ریالی (به قطر ۲ سانتیمتر)
و یک دیالی (به قطر یک سانتیمتر) به ارزش ۲۴۱ ریال در کنار
هم قرار داده و خطی از سکه ها به طول یک متر تشکیل داده ایم .
مطلوب است تعیین هر یک از سکه ها بنا بر آنکه عمل با حداقل
مقدار انجام گرفته باشد .

- در صورتی که داشته باشیم $a > c > b$ درستی بر ابری
زیر را ثابت کنید :

$$\begin{aligned} & [(abc)_x - (cba)_x] + \\ & [\text{مقلوب عدد حاصل کرده اول در همان مبنای}] + \\ & = \overline{[10(x-2)(x-1)]_x} \end{aligned}$$

- ثابت کنید که به ازاء هیچیک از مقادیر n عدد:

$$P = 2^{5n} + 2^n \times 47^n + 3 \times 5^n$$

بر عدد ۳۱ بخش پذیر نیست .

دیبرستان کیمیان نو

دیبر : ربانی - فرستمنده : بیات

- سلسله طبیعی اعداد را بدون جدا کردن ارقام از یک تا
عدد سه رقمی N و خود این عدد را به دنبال هم نوشته ایم مقدار
ارقامی که بکار رفته دو بر ابر عدد N است این عدد را تعیین
کنید .

- ثابت کنید در ازاء جمیع مقادیر صحیح $2 < n$ عدد

$$A = 7^n + 7^{n-1} - 5^5$$

بر ۱۰۰ بخش پذیر است

دیبرستان گلشنفرار (شبستر)

دیبر : باهمت - فرستمنده : گلاهی شبستری -
سعید فرشاد .

- به ازاء چه مقادیری از x و y و z عدد $2xyz$

بر ۲۹ ۲۹ قابل قسمت است .

- در تقسیم عدد ۹۹۴۷۵ بر عددی با قیمانده های جزئی

بر روی O واقع بوده و زاویه خط BC با افق تصویر 25° است و بر خط AB در فضا عمود باشد. 8 در سمت بالای کاغذ واقع است.

۷- هرم $SABC$ را رسم و مرئی و مخفی نمایید.
۸- عمود مشترک خط OS و BM را روی شکل رسم کنید.

مسئله اول ترسیمی: نقطه aa' را به فاصله 5 از خط ارض بقسمی تعیین کنید که به فاصله یک واحد بالای صفحه نیمساز فرجه اول فضای باشد.

مسئله دوم: از نقطه aa' واقع بر خط ارض خطی رسم کنید که تصویرش ab و طول حقیقی آن 1 معلوم باشد $a'b'$ را بیابید.

دیبرستان خوارزمی شماره ۱

دبیر: قهرمی - فرستنده: فرخ صادقی

واحد سانتیمتر مقیاس $1:1$ ، محورهای کاغذ را محور مختصات بگیرید.

۱- a به رقم 5 و b به رقم 8 را مشخص کنید، ab و اساس خط AB را به وسیله محاسبه بدست آورید و زاویه خط AB را با صفحه مقایسه به وسیله تستیج بدست آورید.

۲- صفحه P را بر خط AB بگذارید بطوری که با صفحه مقایسه زاویه 45° درجه تشکیل دهد و جوابی را اختیار کنید که افقیهای آن با محور اقصر کاغذ موازی باشند، مقیاس شب صفحه را طرف چپ کاغذ رسم کنید.

۳- از نقطه B خط BC را به شب $\frac{1}{2}$ در صفحه P رسم کنید (C طرف چپ و بالای B است).

۴- زاویه حقیقی ABC را به وسیله تستیج بدست آورید.
۵- لوزی $ABCD$ را کامل کنید (ملخص آفرایش).

۶- از مرکز لوزی که O می‌نماییم $SO = 10$ رابر صفحه P عمود کنید (S زیر صفحه لوزی)
۷- هرم $SABCD$ را رسم کنید.

۸- مجدداً بالای صفحه P منشور قائم ناقصی با شرایط زیر رسم کنید،

$$AE = 8\sqrt{2} \text{ و } BF = 6\sqrt{2} \text{ و } CG = 10\sqrt{2}$$

۹- این دو جسم را جدا کانه به فرض آنکه سطح آنها کدر باشد مرئی و مخفی کنید.

با محور اطول با ترقی رقوم از پائین به بالا رسم کنید بطوری که افقیه رقوم یک آن از مرکز کاغذ بگذرد. نقطه O را در این صفحه روی محور اطوار کاغذ اختیار کنید.

اولاً - ملخص لوزی $ABCD$ واقع در این صفحه را

طوری رسم کنید که O مرکز آن و قطر AC به شب $\frac{1}{3}$ و به طول حقیقی 8 باشد، AC محور اقصی کاغذ را در طرف راست مرکز کاغذ قطع می‌کند رقوم A از رقوم C کمتر و رقوم B مساوی 2 است.

ثانیاً - اگر از نقطه O عمودی بر صفحه P اخراج و روی آن نقطه‌ای مانند F چنان تعیین کنید که :

$$OF = 5\sqrt{2} \text{ و } F \text{ زیر صفحه } P \text{ باشد.}$$

ثالثاً - ملخص منشوری که یک قاعده‌اش لوزی $ABCD$ و یک یالش BF باشد رسم نموده خطوط مرئی و مخفی آن را مشخص کنید.

دیبرستان انوشیروان دادگر دبیر: هم‌مندس خوئی

مسئله: واحد سانتیمتر - مقیاس $1:1$ محور اقصر را افقی و محور قائم را عمود منصف آن انتخاب نمایید.

۱- نقطه b را به فاصله 4 سمت راست مرکز کاغذ روی محور اقصر در نظر گرفته از این نقطه خط $a'b$ را به شب $\frac{2}{3}p$ بقسمی رسم کنید که نقطه a بر روی محور اطول قرار گیرد و a زیر مرکز کاغذ واقع شود.

۲- بر خط $a'b$ صفحه P را بقسمی مرور دهید که افقیهایش موازی محور اقصر بوده و یک مقیاس شب صفحه را در سمت چپ کاغذ رسم نمایید.

۳- در صفحه P از نقطه A خط m را به شب $\frac{1}{2}p$ بقسمی رسم کنید که اثرش سمت چپ کاغذ قرار گیرد.

۴- مثلث ABC را در صفحه P به نحوی رسم نمایید که C بر روی خط AM واقع و $BC = 9$ باشد. رقوم نقطه C از a کمتر خواهد بود.

۵- نقطه O مرکز دایره محاطی مثلث ABC را تعیین نموده خط OI را که تصویرش موازی محور قائم و به طرف بالای کاغذ ممتد است رسم کنید.

۶- از نقطه B خط BS را بقسمی مرور دهید که S

۲- از نقطه A در صفحه P خطی رسم کنید که با اثر صفحه در فضای زاویه $\alpha = 30$ درجه بسازد وافقیه رقوم ۳ صفحه رادر سمت چپ محور قائم کاغذ قطع کند نقطه b₂ را بر روی این خط انتخاب نمایید.

۳- قطعه خط a₂d₂ را در صفحه P بر خط AB عمود کنید.

۴- در نقطه A کنج سه قائم ABDE را بازد بقسمی که خط AE بوده و رقوم E از A بیشتر باشد.

۵- خطوط AB و AE سه خط اول اس مجاور یک کنج یک مکعب مستطیل می باشند آنرا نمایش داده مرئی و مخفی نمایید.

۶- صفحه Q را که افقیه رقوم ۵ آن بر محور اقص منطبق وزاویه اش با صفحه افق نصف زاویه صفحه P با افق تصویر است در سمت راست کاغذ نشان داده و ترقی رقوم آن خلاف ترقی رقوم صفحه P می باشد.

۷- عمود مشترک افقیه رقوم ۵ صفحه Q را با خط AE از مکعب مستطیل روی شکل رسم نمایید.

۸- مقطع مکعب مستطیل فوق را با صفحه Q تعیین کرده و آن را نسبت به جسم مرئی و مخفی کنید.
مسئله اول ترسیمهی: نقطه 'aa' را به فاصله ۵ از خط اارض بقسمی تعیین کنید که قرینه آن نسبت به صفحه قائم تصویر به فاصله یک بالای نیمساز دوم قرار گیرد.

مسئله دوم: از نقطه 'aa' واقع بر خط اارض خطی رسم کنید که با صفحه افق زاویه $\alpha = 30$ درجه بسازد و تصویر قائمش با خط اارض زاویه 45° درجه تشکیل دهد.

دبیرستان زاگرس

دبیر: هندس خوئی

مسئله: واحد سانتیمتر، مقیاس ۱:۱، محور اطول و اقصر کاغذ را مرتبه قائم وافقی انتخاب کرده محل تلاقی آنها را مرکز بنامید.

۱- صفحه P که اثرش بر محور اقص کاغذ منطبق و ترقی رقوم آن از بالا به پائین بوده وزاویه اش با افق تصویر 45° است در سمت چپ کاغذ رسم کنید.

۲- از نقطه b₂ واقع در صفحه P که تصویرش بر محور قائم کاغذ منطبق است خطی مرور دهید که شب آن $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$ بوده و بر روی آن نقطه d₂ را که تصویرش سمت راست محور قائم است انتخاب نمایید.

دبیرستان راه نو

دبیر: هندس خوئی

محور اقص کاغذ افقی و محور اطول را قائم، محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ انتخاب شود.

۱- نقطه a₂ به فاصله ۴ سمت بالای محور اقص و به فاصله ۳ سمت راست محور قائم کاغذ تصویر می شود. از این نقطه خط AC

را به شب $p = \frac{1}{2}$ بقسمی رسم کنید که نقطه C آن در سمت چپ مرکز روی محور اقص واقع شود.

۲- بر خط AC صفحه ای به اساس i = مرور دهید و یک مقیاس شب صفحه را در سمت چپ کاغذ بقسمی رسم کنید که ترقی رقومش از پائین به بالا باشد.

۳- به قطر AC در صفحه P مستطیل ABCD را بنا کنید که b₂ سمت راست a₂c₂ قرار گیرد.

۴- از نقطه c₂ خط c₂y₂ را به شب $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ بقسمی رسم کنید که تصویرش موازی محور اطول و ترقی رقومش از بالا به پائین باشد.

۵- متوالی السطوحی که قاعده اش مستطیل ABCD و یک یال جانبی آن CG می باشد رسم و آنرا مرئی و مخفی کنید.

۶- مقطع متوالی السطوح را با صفحه افقی رقوم ۴ تعیین کرده مرئی و مخفی نمایید.

۷- ارتفاع متوالی السطوح را که از مرکز قاعده فوقانی می توان رسم کرد مشخص نموده اندازه حقیقی آن را شاند دهید
۸- عمود مشترک خط CG و خط BD را روی شکل رسم کنید.

مسئله اول ترسیمهی: قرینه نقطه 'aa' به بعد ۵ و ارتفاع ۲ را نسبت به خط اارض نشان دهید.

مسئله دوم: از نقطه 'aa' به بعد ۳ واقع در نیمساز اول خطی رسم کنید که تصویر b از آن به بعد ۲ نیز معلوم بوده و AB = ۱ نیز در دست باشد. ملخص خط را مشخص نمایید.

دبیرستان رهمها

دبیر: هندس خوئی

واحد سانتیمتر، مقیاس ۱:۱ محورهای افقی و قائم کاغذ را محور اقص و اطول و محل تلاقی آنها مرکز کاغذ انتخاب شود.

۱- نقطه a₂ بر مرکز کاغذ منطبق است. صفحه P را از نقطه A بقسمی مرور دهید که افقیه هایش موازی محور اقص و شب صفحه با ابریک واحد و ترقی رقوم مقیاس شب از بالا به پائین است، یک مقیاس شب صفحه را در سمت چپ کاغذ رسم کنید.

۷- عمود مشترک یال SA و قطر BD از مستطیل $ABCD$ را رسم نمایید.

مسئله دوم : مقیاس شبیه صفحه P را با اساس ۶ در کنار چپ کاغذ به موازات محور اطول به طریقی رسم کنید که اثرش از مرکز کاغذ بگذرد و ترقی رقومهاش از پائین به بالا باشد . در این صفحه نقطه O_2 را بر روی محور اطول انتخاب کنید .

۱- نقطه O_2 مرکز دایره محیطی ذوزنقه a,b,c,d از صفحه P می باشد که شاعع دایره ۴ است این ذوزنقه را رسم کنید (a سمت چپ b و d سمت چپ c قرار داردند).

۲- بر قطر a,c ذوزنقه فوق صفحه Q را بر صفحه P عمود کنید و یک مقیاس شبی از این صفحه را رسم نمایید .

۳- تصاویر نقاط b و d را بر روی صفحه Q تعیین کنید .

۴- خط بزرگترین شبی صفحه Q را از نقطه a رسم کنید . آنرا تا نقطه s_8 مدرج نمایید .

۵- ملخص هرم $SABCD$ را رسم نموده مرئی و مخفی خطوط آنرا رعایت کنید .

۶- مقدار حقیقی زاویه $a_1 s_8 b_1$ را بدست آورید .

دیبرستان سینما (اهواز)
دیبر: گیتی زاده

محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید محل تلاقي آنها مرکز کاغذ - واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ است .

مسئله اول : ۱- نقطه a را بر روی محور اقصر کاغذ و به فاصله ۲ سمت چپ مرکز و نقطه c را که تصویر آن در بالای محور اقصر و به فاصله ۷ از محور اطول کاغذ و راست آن قرار دارد با فرض $AC = \sqrt{24}$ بیابید .

۲- بر خط a,c صفحه P را با شبی ۱ بگذرانید و مقیاس شبی از آنرا به موازات محور اطول کاغذ می باشد در کنار چپ کاغذ رسم کنید همچنین مقیاس شبی صفحه دیگر P را که با صفحه P موازی و محور اقصر افقی رقوم (۱۲) آن می باشد در کنار راست کاغذ رسم نمایید .

۳- دو نقطه a و c دو رأس غیر متواالی شش ضلعی منتظمی از صفحه P است که تصویر رؤوس آن متواالاً و درجهت مثلثاتی a و b و c و d و e و f نامیده می شوند و رقوم آنها مثبت می باشد ملخص این شش ضلعی را رسم کنید .

۴- شش ضلعی فوق الذکر قاعدة فوقانی منشور منتظمی است که قاعدة دیگر این منشور در صفحه P قرار دارد ملخص منشور را رسم و خطوط مرئی و مخفی آنرا از یکدیگر تمیز بدهید .

۳- قطعه خط BD قطر لوزی $ABCD$ واقع در صفحه P است که رأس c آن سمت چپ bd واقع است ملخص لوزی را رسم کنید .

۴- صفحه Q را به موازات صفحه P و به فاصله ۱۵ واحد است در بالای آن رسم نمایید . یک مقیاس شبی آن را در سمت چپ نشان دهید .

۵- قطعه خط b,s_1 را که تصویرش با سمت راست محور افسر زاویه 120° درجهت مثلثاتی می سازد بقسمی رسم کنید که در صفحه Q واقع شود .

۶- هرم $SABCD$ را رسم و مرئی و مخفی کنید .

۷- مقطع هرم را با صفحه افقی رقوم ۵ بدست آورید و آن را مرئی و مخفی کنید .

۸- اندازه حقیقی زاویه SBC را در سمت چپ کاغذ مشخص نمایید .

مسئله اول ترسیمه : فاصله نقطه $'aa'$ از خط اراضی ۵ و مجموع فواید از صفحات نیمساز اول و دوم I می باشد ملخص نقطه را در ربع اول نشان دهید .

مسئله دوم : بر خورد خط مفروض $'dd'$ را با صفحه نیمساز اول ($'aa'$) و یا صفحه نیمساز دوم ($'bb'$) یافته و اندازه حقیقی قطعه خط AB را روی یک شکل نشان دهید .

دیبرستان دکتر گریم فاطمی (اهواز)
دیبر: گیتی زاده

محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید محل تلاقي آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ است .

مسئله اول : ۱- نقطه a بر روی محور اقصر و به فاصله ۲ سمت چپ مرکز تصویر شده است . نقطه b را به طریقی پیدا کنید که شبی خط a,b مساوی ۱ بوده b زیر محور اقصر و به فاصله ۱ سمت راست محور اطول واقع باشد .

۲- نقطه d_2 را چنان تعیین کنید که d بر روی محور اطول واقع و AD بر AB عمود باشد .

۳- ملخص مستطیل $ABCD$ و یک مقیاس شبی از صفحه آن را رسم کنید .

۴- طولهای AD و BD را محاسبه نمایید .

۵- دو خط a,d_2 و a,b دو یال یک کنج سه قائم و فرض می شوند ملخص یال دیگر این کنج را رسم کنید و بر روی آن نقطه s_8 را بدست آورید .

۶- ملخص هرم $SABCD$ را رسم و خطوط مرئی و مخفی آنرا مشخص کنید .

۵- اگر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ قاعده هرمی باشد که تصویر S رأس آن بر صفحه P نقطه d رأس چهارم متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد ملخص هرم را رسم کنید در صورتی که صفحه SAB با صفحه مقایسه زاویه 45° می‌سازد (توضیح اینکه این صفحه جواب دیگر صفحه‌ایست که در قسمت ۲ مسئله رسم کردند) .

۶- در صورت کدر بودن هسم آنرا مرئی و مخفی نمایید .

۷- ملخص مقطع این هرم را با صفحه افقی رقوم ۱ بdst آورده آنرا نسبت به وجه هرم مرئی و مخفی نمایید .

۸- زاویه بین دو وجه SBC و SAB را نمایش دهید (زاویه حقیقی)

دیبرستان مردم
دیبر: مهندس خوائی

واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محور اقصر کاغذ افقی محور اطول را قائم و محل تلاقی آنها را مرکز انتخاب نمایید .

۱- افقیه a_5m_5 به طول حقیقی ۱۰ تصویرش بر محور اقصر کاغذ منطبق بوده a به فاصله ۵ سمت چپ مرکز کاغذ و m سمت راست آن واقع است . بر این خط صفحه P را به شیب $\frac{2}{3} = p$ به قسمی مرور دهید که ترقی رقوم بزرگترین شیب آن از پائین به بالا باشد یک مقیاس شیب صفحه را در سمت چپ کاغذ رسم کنید .

۲- از نقطه P را به اساس یک بقسمی مرور دهید که افقیهای آن در تصویر با محور اقصر زاویه 35° درجه بساند و امتداد ترقی رقوم مقیاس شیب آن از راست به چپ و بالا به پائین باشد یک مقیاس شیب آن را سمت پائین کاغذ رسم نمایید .

۳- قطعه خط b_3a_5 فصل مشترک دو صفحه P و P' را مشخص نمایید .

۴- مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AC = BC = 8$ می‌باشد در صفحه P رسم کنید C بالای کاغذ و رقومش از A بیشتر است .

۵- نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC را مشخص نمایید .

۶- خط KD که تصویرش موازی محور قائم کاغذ و نقطه K به ارتفاع 8 بر روی خط قائم مارب O مرکز

مسئله دوم: ۱- دو نقطه b و c بر روی محور اقصر کاغذ و به فاصله ۶ از یکدیگر قرار دارند و نسبت به مرکز کاغذ متقاضی می‌باشند و b سمت راست واقع شده است این دو نقطه دو رأس از مثلث متساوی‌الاضلاع Abc هستند که شیب ضلع Ac برابر ۱ و b بالای محور اقصر می‌باشد ملخص این مثلث را رسم و رقوم مثبت رأس A را تا $1/10$ تقریب حساب کنید .

۲- مثلث Abc قاعده چهار وجهی منتظم می‌باشد که رأس S در بالای صفحه قاعده قراردارد ملخص چهار وجهی را رسم کنید و خطوط مرئی و مخفی آنرا تعیز بدهید .

۳- بر خط b_5c_5 صفحه P را با شیب ۱ مرور دهید و مقیاس شیب آنرا در کنار چپ کاغذ با ترقی رقوم رو به بالا رسم نمایید .

۴- اگر a تسطیح نقطه D از صفحه P در حول اثر این صفحه باشد ترفع این نقطه و رقوم آنرا که مثبت فرض می‌شود تا $1/10$ تقریب حساب کنید .

۵- مقدار حقیقی زاویه مسطحه فرجه دو صفحه P و Abc را بدست آورید .

۶- نقطه e را با فرض $bE = cE = 90^\circ$ پیدا کرده ملخص هرم $EbDe$ را رسم کنید .

دیبرستان گلشن راز «شبستر»
دیبر: با همت - فرستنده: سعید فرشاد
محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید . واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ است .

۱- نقطه a را روی محور اقصر و به فاصله ۴ سمت چپ محور اطول و نقطه b را روی محور اطول و به فاصله ۳ زیر محور اقصر در نظر بگیرید شیب و اساس خط b_5a_5 را حساب کنید .

۲- صفحه P راطوری رسم کنید که از خط b_5a_5 گذشته و با صفحه مقایسه زاویه 45° بساند از دو جواب آنرا اختیار کنید که مقیاس شیبیش موازی محور اطول است مقیاس شیب این صفحه را سمت چپ کاغذ و به فاصله ۲ از کنار کاغذ رسم کنید .

۳- از نقطه b_5c_5 خط b_5c_5 را در صفحه P چنان رسم کنید که $BC = 7$ باشد و c سمت راست محور اطول قرار گیرد .

۴- ملخص متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را رسم کرده رقوم رأس D را پیدا کنید .

که مثلث DEF در صفحه' P قرار گیرد. منشور را مرئی و مخفی نمایید. صفحه افق را حاکی ماوراء بدانید.

۵- صفحه' Q که بروسط یال BF عمود می باشد بوسیله بزرگترین شبیش در پائین کاغذ مشخص کنید.

۶- مقطع منشور را با صفحه' Q بدست آورده مرئی و مخفی نمایید.

۷- خط MΔ را که تصویرش بر محور اقص کاغذ منطبق است بقسمی مدرج کنید که با BC زاویه حقیقی ۴۵ درجه در فضا تشکیل دهد.

۸- عمود مشترک خط MΔ را با افقیدای که از ۴ می گذرد و تصویرش به موازات محور قائم کاغذ است روی شکل رسم نمایید.

مسئله اول ترسیمی: از نقطه' aa به ارتفاع ۳ واقع در صفحه نیمساز دوم خطی رسم کنید که با صفحه افق زاویه ۲۵ درجه بسازد و صفحه نیمساز اول را در نقطه B به ارتفاع يك قطع کند.

مسئله دوم: از نقطه' aa به بعد ۵ و ارتفاع ۱ نیمرخی رسم کنید که به فاصله ۳ از خط اراض بوده و نقطه' bb محل تلاقی آن را با صفحه نیمساز اول تعیین کنید.

دبیرستان نظام وفا
دبیر: گیتیزاده

محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید و احتمالاتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است.

مسئله اول - مقیاس شبیب صفحه' P را در کنار چپ کاغذ با اساس ۱ به طریقی رسم کنید که اثر آن بر محور اقص کاغذ منطبق و ترقی رقومهایش از بالا به پائین باشد. در این صفحه نقطه' a را بر مرکز کاغذ انتخاب کنید.

۱- در صفحه' P خط a₁b₂ را با شبیب $\frac{1}{2}$ رسم کنید. سمت چپ a قرار دارد.

۲- در صفحه' P خط a₂c₂ بر خط a₁b₂ عمود کنید.

۳- ملخص مستطیل ABCD را رسم نمایید.

۴- بر قطر BD صفحه' Q را با شبیب $\frac{1}{3}$ مرور دهید و ترقی رقومهای مقیاس شبیب آنرا از پائین به بالا اختیار کنید.

۵- از نقطه' a خطی بر صفحه' P عمود کرده E نقطه تلاقی آنرا با صفحه' Q بدست آورید.

دایره محیطی مثلث ABC واقع است و با صفحه' P موازی می باشد رسم نموده و بر روی این خط نقطه S را بقسمی انتخاب کنید که SK = ۹/۲۵ و رقوم S بیش از K باشد.

۷- هرم SABC را رسم و مرئی و مخفی نموده و مقطع آنرا با صفحه عمود منصف خط قائم OK بیا بید.

۸- عمود مشترک خط KS و AM را روی شکل رسم نمایید.

مسئله اول ترسیمی: از نقطه' aa به بعد ۳ و ارتفاع ۴ خطی رسم کنید که با صفحه افق زاویه $\alpha = 45^\circ$ بسازد و بر خط اراض متکی باشد.

مسئله دوم: قطعه خط افقی' aca'c قطر لوزی است که $\frac{AC}{2}$ اگر امتداد تصویر قائم BD داده شده باشد ملخص لوزی ABCD را رسم کنید.

دبیرستان مرجان
دبیر: مهندس خوئی

واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱، محور اقص کاغذ افقی و محور اطول را قائم اختیار کرده محل تلاقی آنها مرکز کاغذ می باشد.

۱- نقطه' O تصویرش بر محور اقص کاغذ به فاصله ۳ سمت چپ مرکز واقع است از این نقطه دو خط OB و OC را که مرتبأ با صفحه افق تصویر زوایای

$$\beta = \text{Arc} \tg \frac{2}{3} \quad \alpha = 45^\circ$$

می سازند و قطعه خط واصل بین نقاط b و c آثار دو خط مزبور برای ۷ بوده و از نقطه ثابت m واقع بر محور اقص به فاصله ۵ سمت راست مرکز کاغذ می گذرد رسم نمایید.

$$mb > mc > ob > oc$$

و b و c زیر محور اقص می باشند.

۲- مثلث ABC را که BC قاعده و O مرکز ثقل آنست کامل نموده ملخص آن را رسم و صفحه مثلث را با بزرگترین شبیش P مشخص نمایید.

۳- صفحه' P را به فاصله ۳ به موازات صفحه' P رسم کرده و يك مقیاس شبیب آن را نشان دهید. از دوجواب آنرا که' P زیر P است انتخاب کنید.

۴- منشور مثلث القاعدة ABCDEF را که يالهای جانبی به شبیب $p = 1$ و تصویر آنها موازی محور اقص بوده و تنزل رقوم آنها از چپ به راست می باشد بقسمی رسم کنید

۸- نسبت حجم هرم $SABCD$ را بر حجم مکعب مستطیل $ABCDEFGH$ حساب کنید.

دیبرستان همایون شماره ۱
دیبر. مهندس خوئی

واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱، محورهای اقصر و اطول کاغذ راافقی و قائم اختیار نموده و محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید.

۱- صفحه P که افقیه رقوم ۳ آن بر مرکز کاغذ مرور کرده و مقیاس شب آن با محور قائم کاغذ موازی است و در سمت چپ کاغذ قرار دارد با صفحه افق تصویر زاویه

$$\alpha = \text{Arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

می‌سازد و ترقی رقوم آن از پائین به بالا است. یک مقیاس شب صفحه را رسم کنید.

۲- از نقطه a_3 واقع در صفحه P که به فاصله ۲ سمت چپ مرکز کاغذ واقع است خطی رسم کنید که تصویرش با اثر افق صفحه زاویه 60° درجه بسازد و آن را در سمت چپ a قطع کند و نقطه b را روی آن مشخص کنید.

۳- اساس و شبیه وطول حقیقی قطعه خط ab رادیقیاً حساب نمائید.

۴- بر روی قطعه خط AB در صفحه P مثلث $a_3b_3c_3$ را بقسمی رسم کنید که ارتفاع مثلث نظیر رأس c برابر 6 بوده و رأس c سمت راست ab قرار گیرد.

۵- مثلث فوق قاعده منشوری است که يالهای جانبی افقی بوده که تصویرشان موازی محور قائم و به طول هشت و قاعده دیگر در سمت بالای کاغذ قرار دارد. منشور را رسم و مرئی و مخفی نمائید.

۶- صفحه Q را عمود بر صفحه P بقسمی رسم کنید که در افقیه رقوم ۳ مشترک بوده و یک مقیاس شب صفحه Q در سمت راست کاغذ رسم کنید.

۷- مقطع صفحه Q را در منشور فوق بدست آورده مرئی و مخفی نمائید.

۸- حجم منشور فوق را دقیقاً محاسبه کنید.

مسئله ۱ ترسیه‌ی - نقطه $'aa'$ را بقسمی تعیین کنید که فاصله اش از خط اراضی 5 بوده و فاصله اش از نیمساز اول یک واحد بیش از فاصله اش از نیمساز دوم باشد.

مسئله ۲ - خطی رسم کنید که دو خط منصب و یک خط غیر مشخص مفروض را قطع نموده و بر نیمرخ مفروض $'b'a'$ متکی باشد.

۶- ملخص مکعب مستطیلی را رسم کنید که قاعده اش AE و یک یالش $ABCD$ باشد و خطوط مرئی و مخفی آنرا از یکدیگر تمیز بدهید.

مسئله دوم : ۱- اگر محور طولها منطبق بر محور اقصر کاغذ و محور عرضها منطبق بر محور اطول کاغذ اختیار شود نقطه a_1 و c_1 را با فرض $(a_2 + c_2) - (a_1 + c_1)$ بدست آورید و طول قطعه خط AC را محاسبه کنید.

۲- بر خط a_1c_1 صفحه P را به طریقی بگذرانید که مقیاس شبیش به موازات محور اطول کاغذ باشد.

۳- مثلث $a_1b_1c_1$ را در صفحه P بقسمی رسم کنید که شعاع دایره محاطیش مساوی 2 بوده سمت چپ a باشد.

۴- بر ضلع a_1b_1 صفحه قائمی مرور دهید و در این صفحه نقطه q را سمت راست محور اطول با فرض :

$$ASB = 45^\circ$$

تعیین ملخص هرم $SABC$ را رسم نمائید.

۵- صفحه قائم فوق الذکر را در حول اثرش به اندازه 45° به طرف پائین کاغذ منحرف می‌کنیم وضع جدید هرم فوق و رقوم جدید رأسهای آنرا تا $1/10$ تقریب تعیین و مرئی و مخفی آنرا رعایت نمائید.

دیبرستان نمازی (شیراز)

دیبر : کهنگی - فرستنده: فرقانی، درعنائی

۱- مقیاس شب صفحه P را که با صفحه مقایسه زاویه 45° می‌سازد کنار چپ کاغذ موازی محور اطول به فاصله 10 از آن طوری مدرج کنید که اثر آن از مرکز کاغذ گذشته ترقی رقومش به سمت بالا باشد.

۲- چهارضلعی محاطی $a_1b_1c_1d_1$ را در این صفحه طوری اختیار کنید که $AC = 90^\circ$ و $ABC = 90^\circ$ و پاره خط ab سمت راست محور اطول و پاره خط cd سمت چپ آن و a به فاصله 9 از محور اطول واقع شود.

۳- ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است.

۴- نقطه S را زیر صفحه P به فاصله 4 از آن طوری اختیار کنید که داشته باشیم $SA = SB = SC$

۵- ثابت کنید مثلث ASC قائم الزاویه است.

۶- مستطیل $ABCD$ قاعده تحتانی مکعب مستطیلی است که مجموع رقومهای دوسریال جانبی AE آن 18 می‌باشد ملخص قاعده دیگر این مکعب مستطیل را تعیین کنید.

۷- ملخص جسم حاصل از هرم $SABCD$ و مکعب مستطیل فوق را کامل کرده خطوط مرئی و مخفی آنرا تمیز دهید.

دیبرستان‌همایون شماره ۲
دیبر : مهندس خوئی

واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محل تلاقی در محورافقی
و قائم کاغذ را مرکز بنامید.

۱- صفحه P که بزرگترین شب آن موازی محور قائم
کاغذ و افقی رقوم ۲ آن بر مرکز کاغذ می‌گذرد با شب
 $a = p$ در سمت چپ کاغذ رسم کنید بقسمی که ترقی رقوم آن
از بالا به پائین باشد. نقطه a_2 را به فاصله ۴ سمت چپ محور
قائم در صفحه P انتخاب نمایید.

۲- از نقطه a_2 در صفحه P خط $a_2 b_5$ را به شب
 $b = \frac{1}{2} p$ رسم کنید بقسمی که b سمت راست a قرار گیرد.

۳- از نقطه a_2 خط AE را بر صفحه P عمود نموده و
 $E = 10$ AE را بقسمی مشخص کنید که رقوم E از A بیشتر
باشد.

۴- از نقطه b_5 خطی مرور دهید که بر b_5 عمود
بوده و نقطه c آن بر روی محور اقصر کاغذ قرار گیرد.

۵- تصویر مستطیل ABCD را کامل نموده و وسعت
حقیقی آن را با تسطیع مستطیل در سمت پائین کاغذ نشان دهید.

۶- متوازی السطوحی که قاعده اش ABCD و خط الرأس
جانبی آن AE است مشخص نموده و هرگز و مخفی نمایید.

۷- مقطع متوازی السطوح را با صفحه افقی رقوم ۴
تعیین نموده و آن را مرئی و مخفی نمایید.

۸- از نقطه G از خط الرأس CG خطی به قاعده
ABCD عمود کرده یا عموه را تعیین کنید.

مسئله ۱ ترسیمهی - بر روی خط dd' نقطه 'aa' را
بقسمی تعیین کنید که ارتفاع آن ۲ برابر بعده باشد.

مسئله ۲ - نقطه 'cc' را روی نیمرخ مفروض 'aba'b'
به نحوی مشخص نمایید که نسبت فواصلش از دو اثر نیمرخ بر ابر
باشد.

مکانیک

دیبرستان شماره ۲ آذر
دیبر : عظیمی و بروخیم - فرستنده: صراف نهار

۱- گلوله A به جرم ۴۰ کیلوگرم بر روی سطح شب
داری قرار گرفته است که با افق زاویه 30° تشکیل می‌دهد
و به آن نخنی متصل است که از روی قرقمه‌ها گذشته و به

انتهای دیگر نخ گلوله B به جرم ۶۰ کیلوگرم متصل است
که بر روی سطح شب داری قرار گرفته که با افق نیز زاویه
۳۰ درجه می‌سازد دستگاه بدون سرعت اولیه رها می‌شود معین
کنید سرعت دستگاه پس از طی مسافت ۸ متر $s = 10m$

دیبرستان شماره ۱ آرش

دیبر : گتیرانی

۱- از نقطه A واقع بر بالای سطح شب داری به زاویه
شب ۳۰ درجه گلوله‌ای بدون سرعت اولیه‌ها می‌شود و پس از
طی مسافت $AB = 10m$ واردیک سطح افقی می‌گردد و در سطح
افقی پس از طی مسافت $BC = 8m$ وارد سطح شبیدار CD
به زاویه شب 30° می‌شود.

الف - اگر نیروی اصطکاک صفر باشد تا چه مسافتی از
سطح CD بالا خواهد رفت.

ب - اگر نیروی اصطکاک معادل $1/10$ وزن گلوله باشد
 $g = 10m/s^2$

دیبرستان ادب

دیبر : مهندس کارآموز - فرستنده: میرزازاده - جعفر
صادقی

۱- پاندول ساده‌ای که طول آن یک متر است و در
طرف راست نخ آن میخی به دیوار کوییده شده و فاصله آن
میخ از نقطه تعلیق $5/10$ متر است اگر پاندول را در طرف چپ
۴ درجه منحرف کرده رها کنیم تعیین کنید در طرف راست
چه اندازه منحرف می‌شود سرعت خطی پاندول را در نقطه A
بدست آورید.

دیبرستان دکتر فاطمی (اهواز)

دیبر : توکلیان

۱- جسمی بدون سرعت اولیه از ارتفاع H بطور قائم
رها می‌شود. در لحظه شروع سقوط جسم آونگی بر روی سطح
زمین در همان محل شروع به نوسان می‌کند و در مدت سقوط
جسم آونگ ۵ نوسان کامل انجام می‌دهد ارتفاع H را محاسبه
نمایید در صورتی که طول آونگ $1/6$ متر و عدد $3 = \pi$ باشد
 $g = 10m/sec^2$

۲- جرم هر یک از دو وزنه ماشین آتدی ۱۰۰ گرم و
جرم سرباری که بر روی یکی از وزنهایها قرار می‌گیرد ۵۰
گرم است.

اولاً شتاب دستگاه و نیروی کشن نخ را محاسبه نمایید
(از جرم نخ صرف نظر می‌شود)

پس از دو ثانیه از شروع حرکت ماشین وزنهای کسری را

و نیروی ترمهز چقدر است برای قسمت اخیر حرکت معادلات سرعت و حرکت را بنویسید.

فیزیک

دیپرستان ملی آرش
دیپر حبیب الله معلم

۱- در تجربه یانگ فاصله دوشکاف ۲ میلیمتر و نوارها روی صفحه‌ای به فاصله یک متر از دوشکاف تشکیل شده و عرض هر نوار روشن $1/3$ میلیمتر است.
اولاً طول موج نور را حساب کنید.
ثانیاً فرکانس این نور و همچنین طول موج آن را در شیشه به ضریب شکست $1/5$ حساب کنید

گروه فرهنگی خوارزمی شماره ۱

دیپر: راد منش - فرستنده: اسماعیل شاهی

۱- لوله کنیتی محتوی هوای صفر درجه است و بوسیله پیستونی هوای داخل آن مرتعش می‌شود پیستون در ثانیه ۲۵۰ ارتعاش می‌کند فاصله توده اول از سومین توده چقدر است سرعت صوت در هوای داخل لوله 330m/s است.
ثانیاً اگر لوله را در داخل یک گاز سه‌اتمی که چگالی آن نسبت به هوا $\frac{20}{21}$ است پرکنیم فاصله دو توده گرد متواالی چقدر می‌شود درجه حرارت این گاز $120/12^{\circ}\text{C}$ است:

$$\gamma_2 = \frac{7}{5} \quad \gamma_1 = \frac{4}{3}$$

۲- دو نت پیانو اکتاو باهم فاصله دارند اگر نت بمتر را تار مرتعشی به طول 135cm و نت ذیپر تر را تار دیگری به طول 4 سانتیمتر توکید کند و نیروی کشن تارها باهم مساوی باشند نسبت جرم واحد طول دو تار را پیدا کنید.

دیپرستان دکتر گریم فاطمی
دیپر توکلیان

۱- معادله حرکت ارتعاش نقطه A و B به ترتیب عبارتند از:

$$x_A = \sqrt{3} \sin 200\pi t$$

$$x_B = 3 \sin 200\pi t$$

اولاً پریود، فرکانس و طول موج این دو حرکت ارتعاشی را تعیین کنید در صورتی که سرعت ارتعاشات این دو منبع در هیچ‌طی قابل ارتعاش 200 متر در ثانیه باشد.

ثانیاً نقطه M در محیط قابل ارتعاش و به فاصله 50 cm

روی آن قرار دارد وارد ظرف مایعی به جرم مخصوص $13/6$ می‌گردد حساب کنید درجه ارتفاعی از سطح مایع وزنه خواهد ایستاد (جرم مخصوص وزنهای و سریار $6/8$ گرم بر سانتیمتر مکعب است).

گروه فرهنگی فرگام

دیپر: عبدالحسن راستی

۱- دو وزنه A و B که جرم هریک 35 کیلوگرم است بوسیله نخی به هم متصل شده‌اند در روی سطح شب داری به زاویه 35° قرار گرفته‌اند ضریب اصطکاک جسم A مساوی $0/15$ و برای جسم B برای $0/25$ می‌باشد شتاب حرکت و نیروی کشن نخ را بدست آوردید $g = 10\text{m/s}^2$

دیپرستان قناد (بابل)

دیپر: جعفرزاده - فرستنده: نصرت‌الله حقیقت

۱- گلوله‌ای را روی سطح شبداری که نیروی اصطکاک آن $\frac{1}{5}$ وزن گلوله است با سرعت اولیه 3 متر در ثانیه به طرف پائین رها می‌کنیم اگر گلوله مسافت 12 متر و با حرکت متشابه التغییر تند شونده در مدت 2 ثانیه طی نماید زاویه شب سطح را تعیین نمائید ($g = 10\text{m/s}^2$) در این لحظه گلوله وارد سطح افقی شده و تحت تأثیر نیروی اصطکاکی این سطح پس از طی مسافت 9 متر می‌ایستد مقدار گرمای حاصل را در اثر اصطکاک سطح افقی تعیین کنید.

$$j = 4/2j/\text{cal}$$

دیپرستان هدایت سمندج

دیپر: علی محمدیان - فرستنده: جمشید آرمند

۱- ماشینی به جرم 2 تن از حال سکون در یک جاده افقی شروع به حرکت می‌کند و پس از یک دقیقه سرعتش به 72 کیلومتر در ساعت می‌رسد در صورتی که ضریب اصطکاک سطح افقی $K = 0/01$ فرض شود نیروی موتور اتومبیل را حساب کنید.

اتومبیل با همین سرعت به روی سطح شبداری به شب $0/05$ می‌رسد و بالا می‌رود راننده می‌خواهد بر روی جاده حرکت ماشین تند شونده و شتاب آن 50 سانتیمتر بر ثانیه 20 باشد در صورتی که نیروی اصطکاک بر روی جاده شبدار 25 کیلوگرم باشد نیروی موتور در جاده شب دار را حساب کنید. پس از 15 ثانیه حرکت بر روی سطح شب دار راننده موتور را خاموش کرده و ترمهز می‌نماید اتومبیل پس از طی مسافت 15 متر می‌ایستد چه نیروی اتومبیل را از حرکت بازداشت و

عملیات مربوط ۱/۴۳۵ گرم رسوب سفید کلرور نقره حاصل می شود. ۰/۹۴۵ گرم بوسیله تجربه ۰/۲۴ گرم کربن و ۰/۲۷ گرم آب می دهد. از طرفی ۱/۸۹ گرم از آن جسم با ۲۵cc سید نرمال خنثی می شود فرمول جسم را تعیین کرده و تعیین کنید محلول یک درصد آن درجه درجه بخ می بندد

دیبرستان ۶ بهمن (خوی)

دیبر: مهندس زکر یازاده - فرستنده: حبشه زاده

برای تهیه الكل اتیلیک از کربنات کلسیم و زغال و آب چه واکنشایی باید انجام گیرد و اگر کربن ۷۵٪ خالص باشد از ۱۲۵ گرم کربن چقدر الكل بدست می آید و چقدر کربنات کلسیم برای این عمل لازم است.

دیبرستان شاهپور (شیراز)

دیبر: کیان - فرستنده: غلامرضا قابل

۰/۲۵ گرم از یک ییدروکربور را در ۱۰۰ گرم حلالی حل می کنیم نزول نقطه انجماد همان قدر می شود که ۰/۱۱۵ گرم الكل اتیلیک در همان مقدار گرم از همان حلال حل می کنیم تعیین کنید جرم ملکولی ییدروکربور را.

ثانیاً اگر یک گرم از همان ییدروکربور که کربن دارد مورد احتراق قرارداد و گازها را پس از عبور از ظرف اسید سولفوریک در ۲ لیتر آب آهک وارد می کنیم تعیین کنید کاهش فاکتور محلول آب آهک و فرمول ییدروکربور را.

دیبرستان صفائی (سمنان)

دیبر: مهدوی - فرستنده: شریف عرب اسماعیلی

از سوختن کامل ۱/۷۶ گرم ییدروکربور اشباع شده ای ۰/۲۸ گرم CO₂ پدید می آید فرمول خام آنرا مشخص کنید و گسترده ایزومرهای ممکن را بنویسید و بگویید این ییدروکربورها جزء کدام دسته از ییدروکربورها می باشد (با دلیل)

دیبرستان فرگام

- از احتراق ۰/۲۴۴ گرم ماده آلی که مرکب از کربن و اکسیژن و ییدرژن است ۰/۵۸۱ گرم CO₂ و ۰/۲۹۷ گرم آب بدست آمده است از طرف دیگر آزمایش نشان می دهد که چگالی به حالت بخار جسم نسبت به هوایی ۰/۲۱ و ۰/۲۶ می باشد فرمول ملکولی ماده را بنویسید و در صورتی که بدانیم جسم مذبور الكل است ایزو مررهای آن را رسم کنید.

دیبرستان گلشنوار (شیمتر)

دیبر: اشرفی زاده - فرستنده: سعید فرشاد

- ۰/۵۴ گرم از یک اسید متوازیک آلی را می سوزانیم پائین صفحه بعد

از منبع A ۱۰۰ سانتیمتر از منبع B قرار دارد معادله حرکت ارتعاشی که از نقطه A و B به نقطه M می رسد جدا گانه بنویسید.

ثالثاً معادله حرکت ارتعاشی نقطه M را نوشته دامنه واختلاف فاز آن را با دو منبع از راه محاسبه و ترسیم بدست آورید.

شیوه های

گروه فرهنگی آرش

دیبر: بزرگ نیما

۱- ۱۵cc از ییدروکربور را با ۱۴۰cc اکسیژن در آبسنجی وارد کرده در آن جرقه الکتریک برقرار می کنیم ۰/۲۵ گاز باقی می ماند که ۰/۲۵ آن قابل جذب پتانسیل و بقیه جذب فسفر می شود فرمول ییدروکربور را پیدا کنید.

۲- ترکیبی شامل ۴۹٪ کربن و ۲/۷۲ ییدرژن است. جرم ملکولی آن ۱۴۷ می باشد از طرفی ۲/۵۶۱ میلی گرم از این ترکیب را هر گاه با سدیم حرارت داده و محصول عمل را با اسید نیتریک و نیترات نقره بیامیزیم ۵ میلی گرم کلرور نقره تولید می کند. فرمول این جسم را بدست آورید.

دیبرستان شماره ۳ آذر

دیبر: همین بخت - فرستنده: رضا صراف نهار

۱/۸ گرم جسم آلی را تجزیه می کنیم ۱۳۴۴ سانتی متر مکعب کاز کربنیک و ۰/۵۸ گرم بخار آب تولید می شود. اولاً فرمول ساده جسم را بیابید

ثانیاً در آزمایش دیگر ۳/۶ گرم از همان جسم را در ۱۰۰ گرم اسید استیک حل می کنیم محلول حاصل در ۰/۵۶۱ درجه منجذب می شود و اگر ۱/۵ گرم جسم آلی را که جرم ملکولی آن ۳۵ می باشد در ۱۰۰ گرم اسید استیک حل کنیم محلول حاصله در ۰/۹۵ درجه منجذب می شود جرم ملکولی و فرمول بسته جسم مورد آزمایش را تعیین کنید.

ثالثاً به فرض اینکه جسم مذبور یک عامل اسیدی و یک عامل الكلی داشته باشد فرمول نیم گستردگی آنرا بنویسید و کلیه ایزومرهای آن را بیابید.

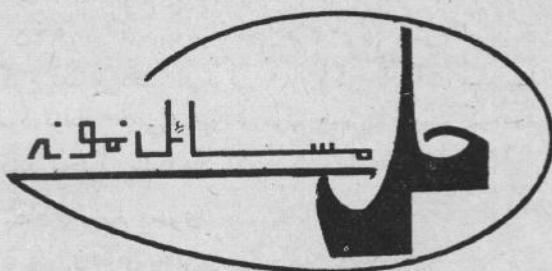
دیبرستان خوارزمی شهره ۱

دیبر: کمالی - فرستنده: فرج صادقی

- برای تعیین مقدار کلر که یک عامل اسیدی هم دارد ۰/۹۴۵ گرم آن را مطابق دستور عمل می کنیم در نتیجه پس از

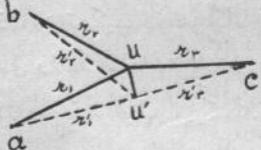
مسئله سه کارخانه

ترجمه: شاهپور کاظمی



مینیمم باشد.
در حالت خاص که $k_1 = k_2 = k_3$ باشد مسئله چنین می‌شود: مطلوبست تعیین نقطه‌ای که مجموع فواصل آن از سه رأس مثلث مفروض مینیمم باشد. این مسئله از مسائل مشهور هندسه است و راه حل آن در کتابهای هندسه موجود می‌باشد.

مسئله سه کارخانه از راههای مختلف حل می‌شود. در این مقاله راه حل هندسی آن ارائه خواهد شد: ابتدا تغییرات C را بر حسب تغییرات u بدست می‌آوریم. فرض می‌کنیم u وضع جدید u' باشد. بردار b



تغییر مکان u' را $\Delta u'$ می‌نامیم. فاصله‌های جدید r_1' و r_2' از سه نقطه مفروض یعنی r_i' از رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$r_i' = \sqrt{r_i^2 + \Delta^2 - 2r_i \Delta \cos \varphi_i} \quad \# r_i - \Delta \cos \varphi_i$$

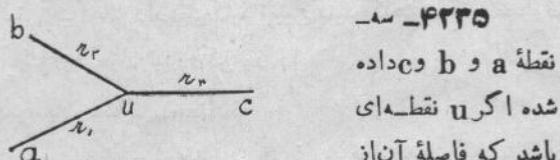
(برای مقادیر کوچک Δ)

بنابراین مقدار تغییر C (یعنی ΔC) بر حسب تغییرات u چنین می‌شود:

$$\Delta C \neq -k_1 \Delta \cos \varphi_1 - k_2 \Delta \cos \varphi_2 - k_3 \Delta \cos \varphi_3$$

سه کارخانه a و b و c مورد خام مورد احتیاج خود k_1 و k_2 را از انبار u تهیه می‌کنند. هزینه حمل و نقل مناسب با فاصله و مقدار است. انبار u در چه محلی انتخاب شود تا مجموع هزینه حداقل باشد؟ مسئله‌ای مشابه با آن از این قرار است: از دو محل a و b نفت یا گاز را بوسیله دولوله تا نقطه u آورده از آنجادو لوله را یکی کرده محتوی آنها با هم تا نقطه c جو بین می‌باشد با فرض اینکه قطرهای لوله‌ها متفاوت باشد نقطه u در چه محلی انتخاب شود تا هزینه رساندن گاز به نقطه c حداقل باشد؟

از لحاظ هندسی مسئله چنین مطرح می‌شود:



-۴۴۳۵-

نقطه w و d و e و b و c را می‌داند. شده اگر u نقطه‌ای باشد که فاصله آن از k_1 و k_2 و k_3 و r_1 و r_2 و r_3 باشد و u برای اینکه:

$$C = k_1 r_1 + k_2 r_2 + k_3 r_3$$

ثانیاً ۴۴/۰ گرم از این جسم را با کلر در سایده مجاور می‌کنیم جسم کلرداری که وزن آن ۱۳/۱ است بدست می‌آید فرمول آن را بنویسید و تمام ایزو مرها را آن را رسم و نامگذاری کنید.

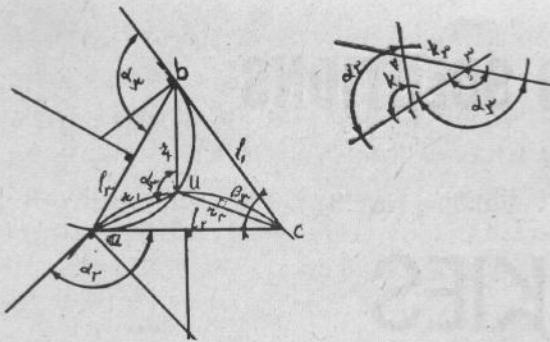
۳- بیرونی هدف شماره ۳
فرستنده: شاهرخ ذکاوی

۱- در یک ئیدروکر بور گازی شکل تعداد اتمهای ئیدروژن ۲ برابر تعداد اتمهای کربن است و چگالی آن نسبت به هیدروژن ۱۴ می‌باشد فرمول این ئیدروکر بور را تعیین کنید.

باقیه از صفحه قبل ۷۹۲ ۵۰/۰ گرم ایندرید کر بنیک ۳۲۴ و ۰/۳۲۴ گرم آب تولید می‌شود. در آزمایش دیگر از سوختن ۹۴/۰ گرم از ملح نقره همان اسید ۲۱۶/۰ گرم نقره باقی مانده است. مطلوب است تعیین فرمول خام و فرمول گسترشده و ایزو مرها را اسید منبور.

۵- بیرونی مروی

دیبر: ثقة الاسلامی - ناصر الملک - فرسنده: جواد جمشیدی
۱- کربور ئیدروژنه اشیاع شده‌ای داریم که چگالی آن آن نسبت به هیدروژن مساوی ۲۲ است تعیین کنید:
اولاً فرمول کربور مزبور را



بحث - برای اینکه مسئله ممکن باشد لازم است که سه مقدار k_1 و k_2 و k_3 بقسمی باشند که بتوان مثلثی بسازند. در ضمن وقتی مینیموم وجود دارد u داخل مثلث abc واقع خواهد بود. زیرا اگر نقطه‌ای روی محیط مثلث اختیار کرد و آنرا به سمت خارج مثلث حرکت دهیم هر r_i و در نتیجه مقدار C زیاد می‌شود. این خاصیت ایجاد می‌کند که مثلاً $\alpha_2 > \beta_2$ باشد و برای اینکه مینیموم وجود داشته باشد باید:

$$\cos \alpha_2 = \frac{k_2^2 - k_1^2 - k_3^2}{2k_1 k_3} < \frac{1_1^2 + 1_2^2 - 1_3^2}{21_1 1_2} = \cos \beta_2$$

و به همین ترتیب برای مقادیر α_1 و α_2 . البته ساده‌تر آنست که u را بدست آورده و ثابت کرد که داخل مثلث واقع می‌شود و به کمک نقاط دیگر ثابت کرد که نقطه نمی‌تواند ماکزیمم باشد بلکه مینیموم است.

تبصره - در حالت $k_1 = k_2 = k_3$ مثلثی که این سه طول می‌سازند متساوی‌الاضلاع بوده وزاویه‌یین دو بردار k_1 و k_2 برابر 120° می‌باشد و در این حالت u نقطه‌ای است که از آن هر ضلع مثلث abc به زاویه 120° دیده می‌شود.

اگر بردارهای k_i را طوری تعیین کنیم که با بردارهای r_i دارای یک امتداد باشند و طول k_i آنها در رابطه‌های:

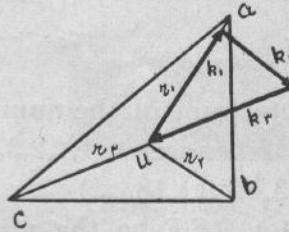
$$\vec{k}_i = \frac{\vec{k}_i \vec{r}_i}{|\vec{r}_i|}$$

صدق کند عبارت ΔC به صورت زیر در می‌آید:

$$\Delta C = -1(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) \cdot \vec{u}$$

در نقطه‌ای که

C مینیموم است این تغییر باید برای هر بردار کوچک Δ برابر صفر گردد و نتیجه می‌شود در نقطه‌ای که C مینیموم است باید:



$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$$

ترسیم - می‌دانیم برای اینکه مجموع هندسی سه بردار k_1 و k_2 و k_3 را بگزینیم باید آنها مثلثی را تشکیل دهند. این شرط امتداد نسبی بردارهای k_1 و k_2 و k_3 و از آنجا امتدادهای aub و buc و cua با معلوم بودن قاعده و اندازه زاویه رأس قابل ترسیم است: u بر کمان در خور زاویه aub که بین a و b می‌گذرد واقع است و به همین ترتیب کمان در خور مار بر b و c . شکل زیر رسم کامل مسئله را برای یک مقدار k_1 و k_2 و k_3 نشان می‌دهد.

ب) آنکه عصیانی شوید این مسئله را حل کنید

مسئله‌ای از ارشمیدس: گله‌گاوی، شامل گاوهای نر و ماده، از چهار دست - ۴: سیاه، سفید، خالخال و قهوه‌ای تشکیل شده است.

بین گاوهای نر؛ تعداد گاوهای سفید نصف به علاوه ثلث تعداد گاوهای سیاه و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است؛ تعداد گاوهای سیاه ربع به علاوه خمس تعداد گاوهای خالخال و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است؛ تعداد گاوهای خالخال سدس به علاوه سمع تعداد گاوهای سفید و بیشتر از گاوهای قهوه‌ای است.

بین گاوهای ماده؛ تعداد گاوهای سفید ثلث به علاوه ربع تعداد تمام گاوهای سیاه گله است؛ تعداد گاوهای سیاه ربع به علاوه خمس تعداد گاوهای خالخال تمام گله است؛ تعداد گاوهای خالخال خمس به علاوه سدس تعداد تمام گاوهای قهوه‌ای گله است؛ تعداد گاوهای قهوه‌ای سدس به علاوه سمع تعداد تمام گاوهای سفید گله است.

تعداد هر دسته از گاوهای سفید، سیاه، قهوه‌ای و خالخال نر و ماده گله را تعیین کنید.

ترجمه: هر ارج کار اپتیمان

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(Mathematics magazine . Vol.39 , No . 3)

QUICKIES

Problem 16. Determine all the numbers which are both Fibonacci (1,1,2,3,5, 8, ...) and Lucas (1,3,4,7,11,18, ...)

Problem 17. Let D,E,F be the midpoints of the arcs BC,CA,AB of the circumcircle of an acute triangle ABC and let L,M,N be the feet of the perpendiculars from D,E,F respectively, upon BC,CA,AB. If r is the inradius of triangle ABC, show that

$DL+EM+FN+r$
is equal to the Circumdiameter $2R$.

Problem 18. Show that all the points at infinity lie on exactly one straight line.

Problem 19. Show that if p_1 and p_2 are successive odd primes and if $p_1+p_2=2q$ then q is composite

Problem 20. Plant an orchard of 20 trees in 10 rows of 5 trees each

ANSWERS

16- $F_4 < L_3 < F_5 < L_4 < F_6$. The Lucas-Fibonacci recursion guarantees that $F_6 < L_5 < F_7 < \dots$ By induction, the two sequences remain strictly interleaved . Hence, 1 and 3 are the only numbers Common to both sequences

17. Extend DL,EM,FN to meet at the circumcenter O.

Since $OL+OM+ON=R+r$,

We have $3R-(DL+EM+FN)=R+r$

Or $2R=DL+EM+FN+r$

18. Let P,Q,R be any three distinct points at infinity . Choose real lines p,q,r to pass through these points, respectively. These lines determine a real triangleABC. Now P,Q,R divids the sides of triangle ABC in the ratio- $1.(-1)(-1)(-1)=-1$. Hence P,Q,R are collinear by the theorem of Menelaus.

19. We have

$$p_1 < \frac{p_1+p_2}{2} < p_2$$

and

$$q = \frac{p_1+p_2}{2}$$

Thus, since p_1 and p_2 are successive primes, q is not a prime

20. Plant five trees forming the pentagon 1 2 3 4 5. Then plant five at these intersections of pairs of opposite sides, as (12)(34),..., (52)(13). Plant five more at the intersections of pairs of diagonals,as (13) (24), ..., (52) (13), and plant the last five at the intersections of side - diagonal pairs, as (12) (35),..., (51) (24). The first of the four pentagons must be such that none of the 15 pairs of lines are parallel, so that it can not, for example, be regular on any finite form

مسائل پرایی حل

دانش آموزان هر کلاس می توانند راه حل مسائلی مربوط به کلاس خود را که شماره مسئله با علامت «★» مشخص شده است به اداره مجله ارسال دارند . از ارسال حل مسائل فاقد علامت ★ و همچنین از ارسال حل مسائل مربوط به کلاس های پائین تر خودداری شود . روی ورقه حل مسئله نام و کلاس و دبیرستان مربوط به صراحت نوشته شود .

۴۲۳۶* - ترجمه از روسی توسط : حبیب الله

گلستان زاده

در متوازی الاضلاع ABCD از هر یک از نقاط های N، M، P، Q اوساط ضلعهای AB، BC، CD، DA به دور ایمن مقابله وصل می کنیم . اولاً ثابت کنید که هر دو خط از خطوط حاصل بایکی از قطعه های AC و BD یا یکی از دو خط MP و NQ هستند . دویکی نقطه متقابل هی باشند و به این طریق هشت نقطه بدست می آید .

ثانیاً این هشت نقطه را متوالیاً به یکدیگر وصل می کنیم . مساحت هشت ضلعی را بر حسب مساحت متوازی الاضلاع بدست آورید .

کلاس پنجم طبیعی

۴۲۳۷ - خطوط D و D' به معادله های $2y - x = 2$ و $2y + x = 4$

یکدیگر را در یک نقطه P قطع می کنند . مختصات P را حساب کنید و معادله خط \square را بدست آورید بنا بر آنکه \square با OP موازی بوده عرض از مبدأ \square برابر با b باشد . خط \square دو خط D و D' را در Q و R قطع می کند . مقدار b را چنان تعیین کنید که چهار ضلعی POQR متوازی الاضلاع باشد .

۴۲۳۸ - معادله $x^2 + 2ax + b = 0$ را در نظر می کیریم . به فرض آنکه جوابهای این معادله عبارت باشند از :

$$x'' = \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) \quad x' = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

مقدار b را بدست آورید و نیز مقدار $\operatorname{tg} \alpha$ را بر حسب a حساب

کرده و اگر $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد دستور کلی تعیین کمانهای x را بدست آورید .

کلاس چهارم طبیعی

۴۲۳۹ - حاصل ضرب زیر را بدست آورید :

$$S = (\underbrace{1 + \sqrt{2}}_{4}) (\underbrace{1 + \sqrt{2}}_{4}) (\underbrace{1 + \sqrt{2}}_{4}) \dots (\underbrace{1 + \sqrt{2}}_{4})$$

۴۲۴۰ - ترجمه از روسی توسط : حبیب الله -

گلستان زاده

مثلث متساوی الساقین $(AB = AC)$ ABC مفروض است . میانه AM را رسم کرده از نقاط B و C به O وسط AM وصل کرده و امتداد می دهیم تا AC و AB را در D و E قطع کنند . ثابت کنید که مساحت چهار ضلعی ADOE یک ششم مساحت مثلث ABC است .

کلاس چهارم ریاضی

۴۲۴۱ - از : محمد هبدهی عابدی نژاد . ششم

ریاضی دبیرستان سخن

مخرج کسر زیر را گویا کنید

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^3 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^3}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2}$$

۴۲۴۲ - ترجمه : قوام نحوی ، دبیرستانهای اصفهان .

اگر $|k| < n$ باشد صحیح نامساوی زیر را محقق کنید .

$$\sqrt{n-k} + \sqrt{n+k} < \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$$

۴۲۴۳* - فرستنده : محمد ضمیری ، از مسجد سلیمان .

از رابطه زیر مقدار x را بدست آورید .

$$\log_{\log_b x} a^n = n$$

کلاس پنجم ریاضی

۴۲۴۹ - فرستنده : علی رضا هلکی دانشجوی
هندسی عالی .

معادلات اضلاع مثلثی عبارتند از :

$$AB : 2x - (1 - b)y - 2a = 0$$

$$BC : (b - 2)x + y - b = 0$$

$$AC : bx + ay - ab = 0$$

به فرض اینکه معادله

$$(\lambda + 3)x + (5 - \lambda)y - 8 = 0$$

معرف دسته خطوطی باشد که از G نقطه تلاقی میانه‌های مثلث ABC می‌گذرند مقادیر ضرایب a و b را بدست آورید .

۴۲۵۰ - اقباس و تنظیم از : مصطفی گودرزی طائمه

سدایر C₁, C₂, C₃ به مرکزهای (a₁, b₁) و P₁ (a₂, b₂) و P₂ (a₃, b₃) و به شعاعهای r₁ و r₂ و r₃ مفروض‌اند . مطلوب است تعیین مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ای که بر سه دایره فوق میانس باشد .

۴۲۵۱ - از : محمد مهدی عابدی نژاد

مقدار x را با استفاده از روابط زیر بدست آورید :

$$\begin{cases} x = tg\alpha + tg\beta \\ 2x = tg^2\alpha + tg^2\beta \\ 3x = tg^3\alpha + tg^3\beta \end{cases}$$

۴۲۵۲ - ترجمه جمشید همیقیان دانشجوی دانشکده علوم اصفهان

در چهار وجهی ABCD داریم :

$$AB = BD = 2/5 \quad AD = 3$$

$$CA = CB = CD = 4$$

مقدار کسینوس زاویه میل خط AC را نسبت به صفحه ABD بدست آورید .

۴۲۵۳ - از : سید جلال آشفته دانشجوی دانشگاه آریامهر .

در صفحه P مربع ABCD به طول ضلع a مفروض است . صفحه Q را بر AB و عمود بر صفحه P می‌گذاریم . مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحه Q را تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آنها از رأسهای مربع برابر مقدار ثابت K باشد . اگر G مرکز نقل مثلث MCD باشد مکان هندسی نقطه G را نیز پیدا کنید .

کلاس ششم طبیعی

۴۲۴۴ - از : کاظم حافظی

B و A نقاط ظیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y = x^3 - 2x + a$ برای آنکه دایره به قطر AB برخط به معادله $y = x + \lambda$ مماس باشد .

۴۲۴۵ - به ازاء چه مقادیر از کمان α خط به معادله $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1$ از مرکز دایره به معادله زیر می‌گردد .

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$$

کلاس ششم ریاضی

۴۲۴۶ - از : عبدالله آویج دانشجوی دانشگاه آریامهر

اگر معادله محور اصلی دو دایره

$$(C) : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 4$$

$$(C') : (x - \beta)^2 + (y - \gamma)^2 = 9$$

عبارت باشد از . $x - 3y + 2 = 0$ مقادیر α و β و γ را پیدا کنید .

۴۲۴۷* - اولاً ثابت کنید اگر در تابع

$y = f(x)$ و $y = f(x) - b$ را انجام دهیم و عبارت تابع فرق نکند خط به معادله $y = x + b$ محور تقارن منحنی نمایش تابع است . ثانیاً معلوم کنید برای اینکه خط به معادله $y = -x + b$ محور تقارن یک منحنی باشد چه تبدیلاتی از نوع تبدیلات فوق را باید انجام دهیم تابع فرق نکند .

ثالثاً با استفاده از آنچه گفته شد چگونه می‌توان معلوم کردیک منحنی دارای محور تقارنی موازی با یکی از نیمسازهای محورها هست یا نه ؟

مثال ۱ - ثابت کنید که خط به معادله $1 - x = y$ محور

تقارن منحنی نمایش تابع $y = \frac{x+1}{x-2}$ می‌باشد .

مثال ۲ - ثابت کنید که منحنی نمایش تابع

$(x+y)^2 = 2(x+3y-1)$ دارای محور تقارنی به معادله $-x+2-y=0$ می‌باشد .

مثال ۳ - منحنی نمایش تابع :

$$y = 5x + 2 \pm 2\sqrt{6x^2 + 3}$$

دارای دو محور تقارن به موازات نیمسازهای محورها می‌باشد .

معنی مترادفات این دو محور تقارن را بدست آوردید.

۴۲۵۵* - اقتباس از یک مسئله روسی توسط -

حبيب الله لستانزاده

روی ضلعهای AB و BC ، CA از مثلث ABC نقطه‌های M و N را به ترتیب چنان انتخاب می‌کنیم که داشته

$$\frac{MA}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = K \quad \text{باشیم :}$$

اگر نسبت مساحت مثلث MNP به مساحت مثلث ABC را y فرض کنیم حدود تغییرات y را تعیین کنید . در حالت $y=0/28$ مقدار K نظیر آنرا معلوم کنید .

۴۲۵۶* - از : علی بیات مختاری دیرستان

خیام نیشابور
تابع y را به صورت چندجمله‌ای صحیح نسبت به x چنان تعیین کنید که اگر y مشتق آن باشد داشته باشیم :

$$y - y' = x^n$$

۴۲۵۷* - ترجمه : جعفر آقایانی چاوشی
ثابت کنید در هر مثلث مجموع فواصل مرکز دایره محیطی از سه ضلع برابر است با مجموع شعاع دایره محیطی و شعاع دایره محاطی داخلی .

۴۲۵۸* - ترجمه : جعفر آقایانی چاوشی
اگر H نقطه تلاقی ارتفاعهای AD و CF و BE شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC باشد ثابت کنید :

$$HD + HE + HF < 2r$$

۴۲۵۹ - ترجمه : اکبر حسنی از : مهندسی ریاضی آمریکا .

R اگر a و b و c اندازه‌های ضلعها ، S مساحت ، ABC شعاع دایره محیطی و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث باشد صحبت نامساوی‌های زیر را ثابت کنید .

$$1) \quad 4\sqrt{r}S < \frac{abc}{a+b+c}$$

$$2) \quad 2\sqrt{r}S < 9rR$$

$$3) \quad \cot A + \cot B + \cot C >$$

$$\frac{\sqrt{r}(a'+b'+c')}{abc}$$

$$4) \quad \cosec A + \cosec B + \cosec C > 2\sqrt{r}$$

۴۲۶۰ - ترجمه از فرانسه

تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$y = E(x) + \sqrt{x - E(x)} \quad x > 0$$

که در آن مقصود از (x) بزرگترین عدد صحیح موجود در x می‌باشد ، ثابت کنید که این تابع اتصالی است و نمایش هندسی

معادلات این دو محور تقارن را بدست آوردید .

۴۲۶۱* - از : ابوالفضل فتح‌الله‌زاده

معادله زیر را حل کنید :

$$(\sin^1 x + \sin^2 x + \sin^3 x)(\cos^1 x + \cos^2 x + \cos^3 x) \\ = 2 \sin^1 x \cos^1 x \cos^1 x$$

۴۲۶۲* - ترجمه : قوام نحوی

۱) کوچکترین عدد صحیح پیدا کنید بقسمی که نصف آن مربع کامل و نثل آن معکب کامل باشد .

۲) کوچکترین عدد صحیح پیدا کنید که نصف آن مربع کامل ، نثل آن معکب کامل و خمس آن توان پنجم کامل باشد .

۴۲۶۳* - فرستنده : آلبرت رهبان

دو دایره O و Q در نقطه A مشترک هستند ، وتر AB را در دایره O و وتر AC را در دایره Q چنان رسم کنید که $AB = AC$ بوده و زاویه BAC برابر با مقدار معلوم α باشد .

۴۲۶۴* - زاویه xOy و نقطه A واقع در داخل آن و یک نقطه دیگر B ، واقع در یک صفحه مفروض آنده . از خطی رسم کنید که اگر Ox را در M و Oy را در N قطع کند زاویه MAN برابر با مقدار معلوم α باشد .

مسئل متفرقه

۴۲۶۵* - از : محمد همدی عابدی نژاد

دستگاه معادلات زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} \log \frac{x}{y} + \log \frac{y}{x} = 2 \\ \log \frac{y^2}{x^2} = 3 - 7 \log \frac{y^2}{x^2} \end{cases}$$

۴۲۶۶* - از : بختیار علی‌محمد سلطانی

اگر عدد $(n+2)$ رقمی A_n به شکل $A_n = \overline{1(a+1)(a+1)\dots(a+1)a}$

باشد حاصل جمع زیر را حساب کنید :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

۴۲۶۷* - از : بختیار علی‌محمد سلطانی

در مثلث ABC نقاط N, M و P را به ترتیب بر ضلعهای BC و CA و AB چنان انتخاب شده‌اند که :

$$\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = K$$

می‌باشد . اگر سه خط BN ، AM و CP در یک نقطه I

آنرا سکنید ،

۴۲۶۱ - ترجمه از فرانسه

u_n عددی است مثبت و مخالف با $\sqrt{2}$ ، رشته اعداد زیر را در نظر می گیریم

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n, \dots$$

که هر جمله آن از رابطه زیر مشخص می شود ،

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{u_{n-1}} \quad (1)$$

۱ - ثابت کنید که ابتداء از u_1 این دسته مرتبه تناولی است اما دائما هر جمله آن بزرگتر از $\sqrt{2}$ باقی ماند و نتیجه بگیرید که وقتی که $n \rightarrow \infty$ جمله u_n دارای حدی است و این حد را پیدا کنید .

۲) اگر زوج $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ را مختصات نقطه ای از منحنی (C) به معادله

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{x} \quad x > 0$$

فرض کنیم نتایج قبلی را مجدداً بدست آورید .

۳) ثابت کنید که رابطه (1) را می توان به صورت زیر درآورد .

$$\frac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha} = \left(\frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} + \alpha} \right)^2$$

α عدد مثبتی است که باید آنرا تعیین کنید . از روی آن مقدار u_n را بر حسب n و $a = \left(\frac{\alpha - u_0}{u_0 + \alpha} \right)^{2^n}$ بدست آورید و مجدداً حد u_n را وقتی $n \rightarrow \infty$ تعیین کنید .

مسائل فیزیک

ترجمه و انتخاب توسط : هوشنگ شریفزاده

برای کلاس های چهارم

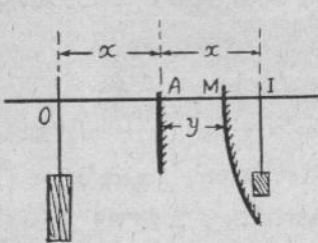
۴۲۶۲ - فرنی به ازای وزنه 200 gf مقدار 13 mm بر طولش اضافه می شود . تعیین کنید که به ازای وزنه 380 gf چقدر بر طولش افزوده می شود .

۴۲۶۳ - افزایش طول فرنی به ازای وزنه 500 g f برابر 29 mm است . چه وزنی می تواند طول فرن را 38 mm میلیمتر اضافه کند .

۴۲۶۴ - دونیروی عویند بر هم را به وسیله دو بردار عمود بر هم که طول آنها به ترتیب $1/8 \text{ cm}$ و 8 cm است نمایش داده ایم درصورتی که هر سانتیمتر معرف نیرویی بر این $2/5 \text{ kg f}$ باشد بزرگی نیرویی بر آیند را تعیین کنید .

برای کلاس های پنجم

۴۲۶۵ - برای تعیین فاصله کانونی یک آینه محدب آزمایش به شرح زیر ترتیب داده ایم :



در مقابل آینه محدب M ، آینه تحت کوچکی را نزدیک آن طوری می گذاریم که نصف آینه محدب را پوشاند . سنجاق O را به آینه چندان دور و نزدیک می کنیم تا تصویر قسمت بالای سنجاق در آینه محدب با تصویر قسمت پائین آن در آینه تحت در یک امتداد دیده شوند (طرف صیقلی هردو آینه به طرف سنجاق است) . فاصله آینه تحت را از آینه محدب y و از سنجاق X فرض می کنیم . سه بار آزمایش کردیم . نتایج به شرح زیر بود :

$$y_1 = 0/5 \text{ cm} , x_1 = 4/5 \text{ cm} \quad -1 \\ y_2 = 0/8 \text{ cm} , x_2 = 5/8 \text{ cm} \quad -2 \\ y_3 = 0/9 \text{ cm} , x_3 = 5/9 \text{ cm} \quad -3$$

فاصله کانونی آینه محدب را حساب کنید .

برای کلاس های ششم و فارغ التحصیلان دیپرستازها ۴۲۶۶ - ترجمه به روز قاجار دانشجوی سال سوم دانشکده صنعتی .

چهار گوی فلزی تحت تأثیر نیروی وزن خود در یک لحظه از نقطه O در امتداد چهار سطح شیبدار OA ، OB ، OC و OD که زاویه های آنها با سطح افق به ترتیب α ، β ، γ و 90° است شروع به حرکت می کنند . ثابت کنید در هر لحظه t این گلوله هایک دایره مارب O تشکیل می دهند . وزن هر گلوله W و سطح شیبدار بدون اصطکاک فرض می شود .

* ۴۲۶۷ - ترجمه : سید جلال آشفته دانشجوی دانشگاه آریامهر .

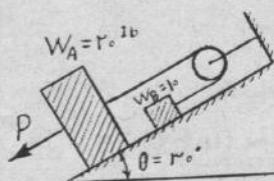
پیدا کنید نیروی P (در شکل مقابل) برای شروع حرکت دستگاه . درصورتی که می دانیم ضریب اصطکاک بین سطح

و دو جسم برای $\frac{1}{4}$ و امتداد نیروی P و دوری سمان به موازات سطح شیبدار می باشد .

* ۴۲۶۸ - ترجمه : سید جلال آشفته

یک استوانه به وزن W و به شعاع R روی یک سطح افقی قرار دارد بقسمی که سطوح دو قاعده آن بر سطح افقی عمودی باشند . نیروی افقی P که به فاصله h از سطح افقی بر استوانه وارد می شود آنرا بدون چرخش باشتات γ به حرکت در می آورد . درصورتی که ضریب اصطکاک بین استوانه و سطح افقی μ باشد مطلوب است محاسبه P و h بر حسب W و μ و R و γ . مقادیر عددی :

$$g = 32/2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} , \gamma = 8 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} , R = 2 \text{ ft} , W = 20 \text{ lb}$$



حل مسائل کنکور: ۳۸

زیر (که در آنها k عدد فرد است) محقق خواهد شد:

$$\frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{c^k} = \frac{1}{a^k + b^k + c^k}$$

$$\frac{1}{(a+b+c)^k} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^k$$

a, b, c سه عدد نسبی بوده و دو به دو غیر متساوی می باشند.

۱) ثابت کنید که عبارت زیر همواره مخالف با صفر می باشد :

$$\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}$$

۲) هم ارزی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(b-c)} + \frac{b}{(c-a)} + \frac{c}{(a-b)} = 0$$

حل - ۱) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} =$$

$$\frac{(a-b)(c-a)+(b-c)(a-b)+(c-a)(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$= \dots = -\frac{1}{2} \left[\frac{(b-c) + (c-a) + (a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} \right]$$

باتوجه به شرایط مفروض ، صورت کسر اخیر مخالف صفر است
بنابراین :

$$[\forall a, \forall b, \forall c, a \neq b \neq c]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \neq 0$$

کلاس چهارم طبیعی

۴۱۴۵ - اولا برای اینکه عبارت $(x+1)^8$ را بر حساب می کنیم از رابطه اخیر x را بر حساب

ثانیاً با توجه به بسط اخیر خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+1}{2} : 8(x+1)^8 = 8 \left(\frac{y+1}{2} + 1 \right)^8 \\ &= y^8 + 8y^7 + 27y^6 + 27 \\ &= (2x-1)^8 + 8(2x-1)^7 + 27(2x-1)^6 + 27 \end{aligned}$$

۴۱۴۶ - اگر من کز مک متوالی الاصلان را بوسیله یک خط (مستقیم یا منحنی) به نقطه دلخواهی از محيط آن وصل کنیم و بعد قرینه این خط را نسبت به من کز متوالی الاصلان بدست آوریم . متوالی الاصلان به دو قسمت متساوی تقسیم خواهد شد . مسئله را برای چند ضلعیهایی که دارای من کز تقارن باشند می توانیم تعمیم دهیم .

کلاس چهارم ریاضی

۴۱۴۳ - هر گاه داشته باشیم :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

بعد از تحویل به یک مخرج و اختصار نتیجه خواهد شد که :

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

$$\Rightarrow a = -b \text{ یا } b = -c \text{ یا } c = -a$$

وهر یک از مساوی اخیر را که اختیار کنیم از روی آن متساویهای

۱۲ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{a}{(b-c)^r} + \frac{b}{(c-a)^r} + \frac{c}{(a-b)^r} = \\ = \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \left(\frac{1}{b-c} + \right. \\ \left. + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) - S \end{aligned}$$

که عبارتست از :

$$\begin{aligned} S = \frac{a}{b-c} \left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) + \\ \frac{b}{c-a} \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \right) + \frac{c}{a-b} \left(\frac{1}{b-c} + \right. \\ \left. + \frac{1}{c-a} \right) = - \left[\frac{a}{(c-a)(a-b)} + \right. \\ \left. + \frac{b}{(a-b)(b-c)} + \frac{c}{(b-c)(c-a)} \right] = 0 \end{aligned}$$

بنابراین داریم :

$$\begin{aligned} \frac{a}{(b-c)^r} + \frac{b}{(c-a)^r} + \frac{c}{(a-b)^r} = \\ = \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \left(\frac{1}{b-c} + \right. \\ \left. + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه عبارت داخل پرانتز دوم از طرف دوم مخالف صفر است (قسمت ۱) بنابراین شرط لازم و کافی برای اینکه یکی از دو عبارت :

$$\begin{aligned} A = \frac{a}{(b-c)^r} + \frac{b}{(c-a)^r} + \frac{c}{(a-b)^r} \\ B = \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \end{aligned}$$

برابر با صفر باشد آنست که دیگری برابر با صفر باشد یعنی :
 $A = 0 \iff B = 0$

۴۱۶۴ - بنابراین تعریف داریم:

$$\forall x > 0 : x^a = N \iff a = \log_x N$$

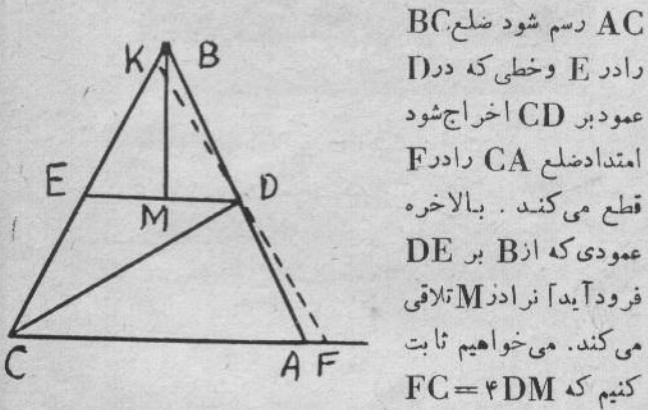
$$N^n = (x^a)^n = (x^n)^a \iff a = \log_{x^n} N^n$$

$$\log_x N = \log_{x^n} N^n \quad \text{بنابراین}$$

باتوجه به این رابطه خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \log_x \Delta + \log_{x^2} \Delta + \dots + \log_{x^n} \Delta^n = \log_x \Delta + \\ + \log_x \Delta + \dots + \log_x \Delta = n \log_x \Delta = -2n \\ \Rightarrow \log_x \Delta = -2 \Rightarrow x = \sqrt[n]{\Delta} \end{aligned}$$

۴۱۶۵ - در مثلث ABC که $AB = BC$ نیمساز داخلی قطع می‌کند. خطی که از D موازی با زاویه ABC را در CD دارد.



رسم شود ضلع AC
دادر E و خطی که در
عمود بر CD اخراج شود
امتداد ضلع CA را در
قطع می‌کند . بالاخره
عمودی که از B بر
فرود آید \square نرا از M تلاقي
می‌کند. می خواهیم ثابت
 $FC = 4DM$

حل - مثلث CFK متساوی الساقین است درنتیجه
که $DK = DF$ و سطح DE موافقی باضلع
از مثلث CFK رسم شده است بانصف این ضلع برابر است پس
 $FC = 2DE = 4DM$

۴۱۶۶ - مطلوب رسم خطی موازی با یک ضلع مثلث است
که محیط ذوزنقه حادث برابر مقدار معلوم I باشد .
حل - اگر DE خط مطلوب باشد چون آنرا امتداد
دهیم تا Cy و Bx نیمسازهای خارجی زاویه های B و C را
در G و F قطع کند داریم $DG = DB$ و $EF = EC$ و چون
از G موازی با Cy دست کنیم تا امتداد CB را در L قطع کند
خواهیم داشت :

$$BC + CE + ED + DB = BC + FG$$

$$= BC + CL = 2BC + BL = I$$

طول $BL = I - 2BC$ معلوم خواهد بود . بنابراین برای
تبیین خط DE ابتدا نقطه L را تعیین کرده از روی آن نقطه
و بالآخره DE را بdest می آوریم . شرط امکان مسئله آنست
که $I > 2BC$ باشد .

کلاس پنجم طبیعتی

۴۱۶۷ - جواب مسئله خواهد شد :

$$P = 4x^3 + 4y^3 - 4ax - 4ay + 4a^3$$

۴۱۴۸ - طبق رابطه شال داریم :

$$\widehat{A} = \widehat{AC} - \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AB} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

شش ضلعی 'ABC A'B'C' منتظم بوده و اندازه کلی کمانهایی که مبدأ مشترک آنها A و انتهای هر یکی بر یکی از رأس‌ای : ن صلعی واقع باشد عبارتست از :

$$\widehat{AM} = \frac{2K\pi}{3}$$

کلاس پنجم ریاضی

۴۱۴۹ - معادله درجه دوم زیر مفروض است :

$$(E) x^2 - 3mx + mp - 1 = 0$$

که در آن x مجهول بوده و m و p دو پارامتر می‌باشند.

۱) اگر α عدد دلخواهی باشد مقادیر m و p را چنان تعیین کنید که ریشه‌های معادله (E) عبارت باشند $\alpha - 1 - \alpha + 1$

۲) مقادیر m و p را چنان تعیین کنید که دو مقدار $\alpha - 1$ و $\alpha + 1$ در معادله (E) صدق کنند. توضیح دهید که چرا برای دو حالت (۱) و (۲) جوابهای یکسان بسته نباید. اگر به جای مقادیر $\alpha - 1$ و $\alpha + 1$ به ترتیب مقادیر $\alpha - 1 - \alpha^2$ و $\alpha^2 + 2\alpha + 1$ اختیار شود چه وضعی پیش خواهد آمد؟ حل (۱) معادله (E) را تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن

$\alpha - 1$ و $\alpha + 1$ باشد:

$$(E') x^2 - [(\alpha - 1) + (\alpha + 1)]x + (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 0$$

$$(E') x^2 - 2\alpha x + 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

برای اینکه دو معادله (E) و (E') دارای ریشه‌های مشترک باشند لازم و کافی است که :

$$\begin{cases} 3m = 2\alpha \\ mp - 1 = 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} m = \alpha \\ mp = \alpha(2\alpha - 1) \end{cases}$$

از معادله اول داریم $m = \alpha$ و در این صورت معادله دوم چنین می‌شود :

$$\alpha p = \alpha(2\alpha - 1)$$

الف - اگر $\alpha \neq 0$ باشد خواهیم داشت :

ب - اگر $\alpha = 0$ باشد داریم $m = 0$ و مقدار p نامعین بوده معادله (E) به صورت

$$(E'') x^2 - 1 = 0$$

درست آید که ریشه‌هایش 1 و -1 می‌باشد.

(۲) باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} (\alpha - 1)^2 - 3m(\alpha - 1) + mp - 1 = 0 \\ (2\alpha + 1)^2 - 3m(2\alpha + 1) + mp - 1 = 0 \end{cases}$$

بعد از ساده کردن داریم :

$$(1) \left\{ \alpha^2 - (3m + 2)\alpha + 3m + mp = 0 \right.$$

$$(2) \left\{ 4\alpha^2 - 2(3m - 2)\alpha - 3m + mp = 0 \right.$$

از تفریق تظیر به قطیر طرفین این دو معادله و بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$(3) \alpha(\alpha + 2) = m(\alpha + 2)$$

الف - اگر $\alpha \neq -2$ باشد داریم $m = \alpha$ و در از آن

هر یک از معادلات (۱) و (۲) به صورت

$$(4) \alpha p = \alpha(2\alpha - 1)$$

در آمده که در دو حالت $\alpha = 0$ یا $\alpha \neq 0$ همان نتایج قسمت (۱) بدست می‌آید.

ب - اگر $\alpha = -2$ باشد معادله (۳) نسبت به m

مبعهم بوده و از معادله (۱) نتیجه خواهد شد که

$$mp = -9m - 8$$

و در این صورت معادله (E) به صورت زیر درست آید:

$$(E'') x^2 - 3mx - 9(m+1) = 0$$

در این معادله اعداد

$$[\alpha - 1]_{-2} = -3 \quad [2\alpha + 1]_{-2} = -3$$

صدق می‌کنند اما این دو عدد (متساوی) فقط یکی از ریشه‌های معادله (E) بود، و ریشه دیگر آن $(m+1)$ خواهد بود. اگر $\alpha \neq -2$ باشد این ریشه باریش دیگر معادله برای نخواهد بود اما اگر $m = -2$ باشد در آن صورت معادله (E'') همان معادله (E) است که در آن $\alpha = -2$ ریشه داشته باشد. بنابراین از دو قسمت (۱) و (۲) نتایج یکسان بسته نمی‌آید.

توضیح - یک معادله درجه دوم جدا کثیر دارای دوریش (متمازی یا مضاعف) می‌باشد، اگر دو عدد همتمازی u و v در یک معادله درجه دوم صدق کنند می‌توان حکم کرد که این دو عدد ریشه‌های آن می‌باشند. اما اگر $u = v$ باشد در این صورت اگر معادله درجه دوم موردنظر ریشه مضاعف داشته باشد که این ریشه مضاعف همان مقدار $u = v$ خواهد بود در غیر آن علاوه بر $u = v$ مقدار دیگری که یافت می‌شود که در معادله صدق خواهد کرد.

در حالی که مقادیر $1 - \alpha^2$ و $\alpha^2 + 1$ اختیار شوند

چون تساوی

$$\alpha^2 - 1 = 2\alpha^2 + 1 \Rightarrow \alpha^2 = -2$$

نیز در همان صفحه واقع بوده و هر دو در یک نقطه E ضلع CD را قطع خواهند کرد و خواهیم داشت :

$$\frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

$$(1) AC \cdot BD = AD \cdot BC \quad \text{یا}$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$(2) AD \cdot BC = AB \cdot CD$$

$$(3) AB \cdot CD = AC \cdot BD$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

کلاس ششم طبیعی

-۴۱۵۳- برای اینکه منحنی نمایش تابع :

$$y = 2 \cos(ax - \frac{\pi}{3})$$

در نقطه بطول $x = \frac{2\pi}{3}$ بر خط بمعادله $y + ax = 1$ مماس شود باید داشته باشیم :

$$[y' = -2a \sin(ax - \frac{\pi}{3})]_{x=\frac{2\pi}{3}} = -a$$

$$\sin(2a - 1)\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow a = 3K + \frac{3}{4} \quad \text{یا} \quad a = 3K' + \frac{7}{4}$$

اگر a مثبت و کوچکتر از یک باشد مقدار آن فقط برابر با $\frac{3}{4}$ خواهد بود.

-۴۱۵۴- حاصل عبارت

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\sin 5x}{\sin 2x} + \dots + \frac{\sin nx}{\sin nx} \\ & - \left(\frac{\cos 3x}{\cos x} + \frac{\cos 5x}{\cos 2x} + \dots + \frac{\cos nx}{\cos nx} \right) \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = 2$$

غیرممکن است بنا بر این از هر دو قسمت (۱) و (۲) نتایج یکسان بددت خواهد آمد.

-۴۱۵۵- بافرض $x + y = a$ حدود تغییرات عبارت ذیر را تعیین کنید :

$$\frac{x^3 + 2xy^2 + 3y^3}{x^3 + y^3}$$

حل- عبارت را برابر m گرفته و چنین عمل می کنیم :

$$m = \frac{(x+y)^3 - 2xy(x+y) + 2y^2(x+y)}{(x+y)^3 - 2xy}$$

$$m = \frac{a^3 - 3axy + 2ay^2}{a^3 - 2xy}$$

چون $x - y = a$ قرارداده ساده کنیم می شود:

$$m = \frac{5ax^2 - 7a^2x + 3a^3}{2x^3 - 2ax + a^3}$$

باید معلوم کنیم به ازاء چه مقادیر x برای m مقداری بددت می آید برای این کار عبارت بالا را نسبت به x مرتب می کنیم ، می شود :

$$(5a - 2m)x^3 + a(2m - 7a)x + a^3(3a - m) = 0$$

$$\Delta = a^3[-4m^2 + 16am - 11a^2]$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \frac{a}{2}(4 - \sqrt{5}) < m < \frac{a}{2}(4 + \sqrt{5})$$

-۴۱۵۶- از روابط α و $p = 1 + \cos^2 \alpha$

نتیجه خواهد شد :

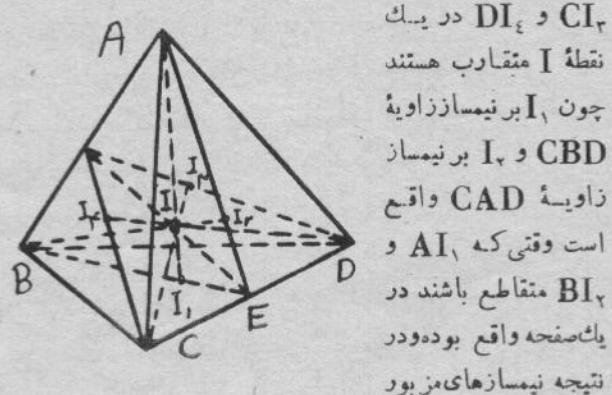
$$p + q = 3 \quad p^2 + q^2 = 27 - 9pq$$

$$pq = (2 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha)$$

$$= 9 - 9 \cos^4 \alpha + 9 \cos^2 \alpha$$

$$2(p^2 + q^2) + 9q^2 = 27(1 + \cos^2 \alpha)$$

-۴۱۵۷- چهار نقطه A، B، C و D غیر واقع در یک صفحه را در نظر می گیریم . اگر مرکزهای دایره های محاطی مثلثهای ABC، DAB، CDA و BCD را به ترتیب BI₁ و I₂، AI₁ و I₃ و CBI₁ و I₄ بنامیم و فرض کنیم چهار خط AI₁، BI₂، CI₃ و DI₄ در یک نقطه I متقابل هستند



چون BI₁ بر نیمساز زاویه CBD و I₄ بر نیمساز زاویه CAD واقع است وقتی که AI₁ و BI₂ متقاطع باشند در یک صفحه واقع بوده و در نتیجه نیمسازهای مزبور

ضریب زاویه های مماسهای بر دو منحنی در نقاط تقاطع عبارت خواهد شد از $-5a - \frac{7}{3}$ و با شرط $a > 0$ باید داشته باشیم.

$$-\Delta a - \frac{7}{3} = \pm 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۴۱۵۷- تابع $y^2 - 2xy - 1 = 0$ داده شده است.

منحنی نمایش تغییرات این تابع ازدواخه متمایز (Γ_1) و (Γ_2) تشکیل شده است.

۱- معادلات (Γ_1) و (Γ_2) را به صورت $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بدست آورید.

۲- اگر α_1 طول نقطه غیر مشخصی از شاخه (Γ_1) باشد ثابت کنید روی شاخه (Γ_2) نقطه به طول α_2 یافت می شود
بطوری که :

$$f'(\alpha_1) = g'(\alpha_2)$$

۳- معادلات قائم بر (Γ_1) و (Γ_2) را در نقاط A_1 و A_2 محل برخورد آنها با محور عرضها می نویسیم . ملاحظه می شود که این دو قائم با یکدیگر موازیند . تعبیر هندسی این تووازی چیست ؟

۴- قائم بر (Γ_1) در نقطه A_1 و مماس بر (Γ_2) در نقطه A_2 یکدیگر را در نقطه A_3 قطع می کنند مختصات A_3 را بذست آورید و اندازه زاویه $A_2 A_3 A_1$ را بر حسب رادیان حساب کنید .

حل :
۱

$$y^2 - 2xy - 1 = 0 \Rightarrow y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$g(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} \quad f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

۲

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(\alpha_1) = 1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$g'(\alpha_2) = 1 - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + 1}}$$

برای آنکه $f'(\alpha_1) = g'(\alpha_2)$ لازم است که $\alpha_2 = -\alpha_1$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

$$\frac{\sin 3nx}{\sin nx} - \frac{\cos 3nx}{\cos nx} = 2$$

برابر خواهد شد با $2n$.

کلاس ششم ریاضی

۴۱۵۵- اگر β و α مرکز تقارن منحنی به معادله

$$x^3 - \lambda xy + \lambda^2 x + y - 1 = 0$$

فرض شود چون محورهای مختصات را انتقال داده و ω را مبدئی

جدید اختیار کنیم معادله منحنی می شود :

$$x^3 - \lambda xy - (2\alpha + \lambda\beta + \lambda^2)x + (\lambda\alpha + 1)y + K = 0$$

و خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \lambda\alpha + 1 = 0 \\ 2\alpha + \lambda\beta + \lambda^2 = 0 \end{cases}$$

از حذف λ بین دو تساوی اخیر نتیجه می شود :

$$\beta = \frac{2\alpha^3 + 1}{\alpha}, \quad \beta' = \frac{4\alpha^3 - 1}{\alpha^2}$$

$$\beta' = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \quad \beta = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

با ازاء چه مقادیر a منحنیهای

$$(C) : 5ax^3 + y^2 = 5a^3 + a$$

$$(C') : 7x^3 - 3y^2 = 4a$$

یکدیگر را به زاویه 45° قطع می کنند .

حل - ابتدا معلوم می کنیم با ازاء چه مقادیر a دو منحنی

متقاطع هستند : از حذف y بین دو معادله خواهیم داشت :

$$(15a + 7)x^3 = a(15a + 7)$$

اگر $a = -\frac{7}{15}$ باشد معادله اخیر مبهم است اما منحنیهای

(C) و (C') دارای معادلات مشابه بوده بر یکدیگر منطبق

می باشند . چنانچه $a = -\frac{7}{15}$ باشد خواهیم داشت $x^3 = a$
که به شرط $a > 0$ جواب خواهد داشت .

نتیجه کلی آنکه وقتی $a > 0$ باشد دو منحنی متقاطع

بوده و مختصات نقاط تقاطع آنها عبارت خواهد بود از :

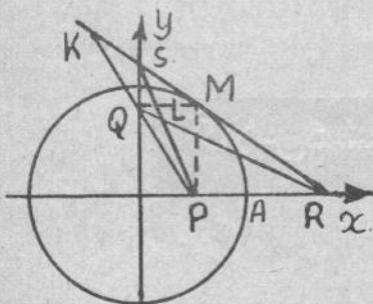
$$A(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) \quad B(-\sqrt[3]{a}, -\sqrt[3]{a})$$

۲) مقادیری از a را تعیین کنید که در ازاء آنها :

الف - طول نقطه K برابر ۱ باشد.

ب - عرض نقطه K برابر ۱ باشد.

ج - نقطه L به دایره به معادله زیر تعلق داشته باشد



$$x^2 + y^2 = \frac{112}{169}$$

حل - فرض

$$a \neq \frac{k\pi}{2} : \text{می کنیم}$$

و خواهیم داشت :

$$P(\cos a, 0), Q(0, \sin a)$$

$$R\left(-\frac{1}{\cos a}, 0\right), S\left(0, -\frac{1}{\sin a}\right)$$

معادلات RS و PQ می شود :

$$PQ : x \sin a + y \cos a = \sin a \cos a$$

$$RS : x \cos a + y \sin a = 1$$

از حل دستگاه دو معادله اخیر نتیجه خواهد شد :

$$K(x = \frac{\cos^2 a}{\cos 2a}, y = \frac{-\sin^2 a}{\cos 2a})$$

اگر $\cos 2a = 0$ باشد نقطه K درینهایت دوریکی از نیمسازهای زاویه دوم محور واقع خواهد شد.

$$QR : x \sin a \cos a + y = \sin a$$

$$PS : x + y \sin a \cos a = \cos a$$

$$L(x = \frac{\cos^2 a}{1 - \sin^2 a \cos^2 a}, y = \frac{\sin^2 a}{1 - \sin^2 a \cos^2 a}) \quad -(2)$$

$$\text{الف } x_k = 1 \implies \cos^2 a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos^2 a (\cos a - 1) = \cos^2 a - 1 = (\cos a + 1)(\cos a - 1)$$

$$\cos a \neq 1 \implies a = 2k\pi \pm \operatorname{Arccos} \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{ب) } y_k = 1 \implies \dots \implies a = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \operatorname{Arccos} \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$(3) \frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{(1 - \sin^2 a \cos^2 a)^2} = \frac{112}{169}$$

$$\implies 28 \sin^4 2a + 28 \sin^2 2a - 228 = 0$$

$$\implies a = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, a = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

در این صورت :

$$g'(\alpha_2) = g'(-\alpha_1) = 1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + 1}} = f(\alpha_1)$$

اما وقتی $\alpha_2 = -\alpha_1$ باشد خواهیم داشت :

$$g(\alpha_2) = g(-\alpha_1) = -\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 + 1} = -f(\alpha_1)$$

و معلوم می شود که نقاط بسی طولهای α_1 و α_2 نسبت به مبدأ مختصات قرینه اند.

- ۳- داریم :

$$g'(0) = 1 \text{ و } A_2(x=0, y=-1) \quad f'(0) = 1 \text{ و } A_1(x=0, y=1)$$

درنتیجه معادلات قائم بر (Γ_1) و (Γ_2) عبارتند از :

$$y = -x + 1 \text{ و } y = -x - 1$$

که با یکدیگر موازینند. علت این توازی، تقارن بین نقاط (Γ_1) و (Γ_2) نسبت به مبدأ می باشد. زیرا خطوط مماس بر دو منحنی در نقاط متقاضی متوatzیند.

- ۴- معادله مماس بر (Γ_2) در نقطه A_2 چنین است :

$$y = x - 1$$

و مختصات A_2 ریشه های دستگاه زیر است :

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

که عبارتست از: $x = 0$ و $y = 0$ لذا قائم و مماس مورد نظر یکدیگر را روی محور طولها قطع می کنند.

- ۵- از آنجا که مثلث $A_1A_2A_3$ ، یک مثلث قائم الزاویه

$$A_2A_1A_3 = \frac{\pi}{4}$$

- اثبات هماری زیر :

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 0 \iff \sin 4x + \cos 2x = 0$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 4(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x -$$

$$-\sin x) = (\cos x - \sin x)(1 + 4 \sin x \cos x)$$

$$= \frac{\cos 2x(1 + 2 \sin 2x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin 4x + \cos 2x}{\sin x + \cos x}$$

- ۶۱۵۹- روی دایرة مثلثی نقطه M را در نظر گرفته

اندازه جبری کمان AM (A) مبدأ کمانها را a فرض می کنیم.

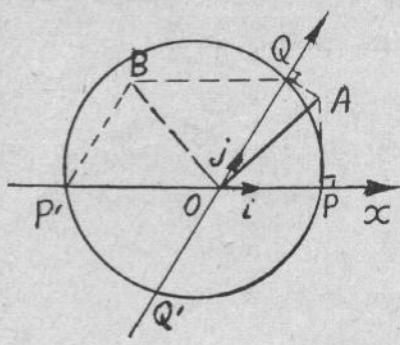
تصاویر قائم M را بر x محور کسینوسها و بر y سینوسها

نمایم. Q می نامیم. مماسی بر دایرة در R و S

عموماً غیر از حالات خاص دومحور مزبور را به ترتیب در R و S قطع می کند.

۱) اگر K نقطه تلاقی PQ و RS و L نقطه تلاقی RQ و PS باشد مختصات K و L را بحسب a بدست آورید.

- داریم :



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} &= \\ \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ'} &= \\ a \cdot \overrightarrow{OP'} &= -b \\ \overrightarrow{OP'} &= -\frac{b}{a} \\ \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'B} \\ &= \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{b}{a} \vec{i} + b \vec{j} : \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} \left(-\frac{b}{a} \vec{i} + \right. \\ \left. + b \vec{j} \right) = -\frac{b}{a} \overrightarrow{OA} \cdot \vec{i} + b \overrightarrow{OA} \cdot \vec{j} = \\ -\frac{b}{a} \times a + b = 0 \end{aligned}$$

بنابراین دو خط \overrightarrow{OA} و \overrightarrow{OB} بريكدها عموداند.

مسائل متفرقه

۴۱۶۳ در رابطه زیر حروف نماینده ارقام هستند و اعداد درستگاه به مبنای ۱۵ نوشته‌اند. مطلوب است تعیین این اعداد

$$\cos^{\circ} + \sin^{\circ} = \text{UNO}^{\circ}$$

حل - اولاً باید داشته باشیم:

$$S^{\circ} + N^{\circ} = O^{\circ} \pmod{10}$$

که در آن $S \neq 0$ است و می‌توانیم به ازاء مقادیر مختلف N که عبارت باشند از:

$$N = 0 \dots 9$$

مقادیر نظیر S و O را تعیین کنیم. مثلاً درازاء $= 0$ رقمهای S و N چنان باید انتخاب شوند که مجموع آنها ۱۰ باشد.

ثانیاً - سه عدد مطلوب سه عدد فیثاغورسی می‌اشند.

برای تعیین اعداد فیثاغورسی از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم.

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 k^2$$

که x و y مقادیر دلخواه هستند. با تشکیل جدول اعداد فیثاغورسی سه رقمی و با درنظر گرفتن شرایط اولاً، خواهیم داشت:

$$391^2 + 120^2 = 409^2$$

۴۱۶۰ - تعیین عدد شش رقمی زیر

$$\overline{abaaba} = 1001 \overline{aa}^2$$

$$\Rightarrow 1001 \overline{aba} = 1001 \overline{aa}^2 \Rightarrow \overline{aba} = \overline{aa}^2$$

جواب قابل قبول $b = 2$ و $a = 1$ بدست می‌آید.

۴۱۶۱ - در هر دستگاه عدد نویسی به مبنای x حاصل

ضربهای عدد $1 - x$ در دو عدد صحیح و مثبتی که مجموع آنها

$x + 1$ باشد با ارقام یکسان اما به ترتیب عکس نوشته‌می‌شوند.

اگر $x - \alpha < 0$ باشد دو عدد $x - \alpha$ و α دارای

مجموع $+ 1$ بوده و داریم :

$$\begin{aligned} (x - 1)(x - \alpha) &= (x - 1 - \alpha)x + \alpha = \\ &= \frac{(x - 1 - \alpha)\alpha}{(x - 1 - \alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x - 1)(1 + \alpha) &= \alpha x + (x - 1 - \alpha) = \\ &= \frac{\alpha(x - 1 - \alpha)}{x - 1 - \alpha} \end{aligned}$$

فرع - اگر $1 - \alpha = 1$ اختیار شود داریم :

$$(x - 1)^2 = \frac{2(x - 1)}{(x - 2)\alpha} = \frac{2(x - 1)}{\alpha(x - 2)}$$

یعنی در هر مبنای عدد نویسی، مجدول بزرگترین رقم و دو برابر این رقم مقلوب یکدیگر می‌باشند.

۴۱۶۲ - حاملهای واحد دوم محور Ox و Oy را به ترتیب i و j می‌نامیم (واحد برای هر دو محور یکی است). تصویر قائم نقطه

واقع در صفحه دوم محور و متمایز از O را روی محور x با

به P و روی محور y به Q نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم :

$$\overrightarrow{OQ} = b \quad \overrightarrow{OP} = a$$

(۱) حاصل ضربهای $i \cdot j$ و $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}$ را بحسب a و b بدست آورید.

(۲) اگر Q' قرینه Q نسبت به O باشد. دایره PQO

محور x' را در نقطه دیگر P' قطع می‌کند. رأس چهارم

متوازی الأضلاع $P'QOB$ را B می‌نامیم. حاصل $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

را حساب کرده نتیجه حاصل از آن را بیان کنید.

حل - (۱) داریم :

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QA}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \vec{i} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) \cdot \vec{i} - \overrightarrow{OP} \cdot \vec{i} + \overrightarrow{PA} \cdot \vec{i} = a \\ &\quad (\overrightarrow{PA} \cdot \vec{i} = 0) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{j} = (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QA}) \cdot \vec{j} = \overrightarrow{OQ} \cdot \vec{j} +$$

$$+ \overrightarrow{QA} \cdot \vec{j} = b$$

$$\begin{aligned}
 & (\cot g x - \cot g \gamma x) + \cot g x + \\
 & + (\cot g \gamma x - \cot g \delta x) + \cot g \gamma x + \\
 & + (\cot g \delta x - \cot g \alpha x) + \cot g \delta x + \\
 & + (\cot g \alpha x - \cot g \beta x) + \cot g \alpha x = 0 \\
 \Rightarrow \cot g x & = \cot g \beta x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\beta}
 \end{aligned}$$

٤١٦٧ - تعيين مجموع زير:

$$S = \frac{rx - a}{x^r - ax + a^r} + \frac{rx^r - ra^r x}{x^{r+1} - a^r x^r + a^{r+1}} + \dots + \frac{r^n x^{n-1} - r^{n-1} a^{n-1} x}{x^{n+1} - a^{n-1} x^{n-1} + a^n}$$

حل - اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^n x^{n-1} - x^{n-1} x^{n-1} (x^{n-1} - 1) a^{n-1}}{x^n - a x^{n-1} x^{n-1} + a^n} = \\
 & = \frac{x^n x^{n-1} (2x^{n-1} + a^{n-1})}{x^{n+1} + a x^n x^{n-1} + a^{n+1}} \\
 & - \frac{x^{n-1} x^{n-1} (2x^{n-1} + a^{n-1})}{x^n + a^{n-1} x^{n-1} + a^n} =
 \end{aligned}$$

n را به ترتیب برابر با مقادیر از ۱ تا n قرار داده طرفین تساویها حاصل را با هم جمع می کنیم نتیجه خواهد شد:

$$S = \frac{x^n x^{n-1} (x^n + a^n)}{x^{n+1} + a^n x^n + a^{n+1}}$$

٤١٦٨ - محاسبة مجموع زير:

$$S = \sum_{r=1}^{r=n} r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1)$$

حل- اتحاد زیر را در نظر می گیریم :

$$= \frac{r(r+1)(r+2)\dots(r+k-1)}{k+1}$$

۲) را به ترتیب برابر با مقادیر از ۱ تا n قرار داده طرفین تساویهای حاصل را با هم جمع می‌کنیم می‌شود :

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k+1}$$

یکان دوره چهارم

-۴۹۶۴ بزرگترین مقسوم علیه به فرم 2^k هر یک از عددهای رشته $2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ و ... رشته $2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ و ... را تشکیل می‌دهد. جمله n ام این رشته را حساب کنید.

حل - اگر a_n جمله nام این رشته باشد بطور کلی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_{\gamma n+1} &= \gamma^1 \\ a_{\gamma n+\gamma} &= \gamma^2 \\ a_{\gamma n+\zeta} &= \gamma^r \\ &\vdots \\ a_{\gamma^r n + \gamma^{r-1}} &= \gamma^r \end{aligned}$$

بنابراین برای هر عدد n باید آنرا به فرم $1 - 2^x m + 2^x$ در نظر گرفت و جمله نظیر از رشته را تعیین کرد.

تیصره - اگر عدد $2n$ را درستگاه به مبنای ۲ بنویسیم
تعداد صفرهای سمت راست عدد حاصل برابر است با بزرگترین
توان عدد ۲ موجود در عدد هفروض.

۴۱۶۵ - اثبات اینکه:

$$\sin x = n \sin(\alpha - x) \implies$$

حل- از تساوی اول نتیجه می‌شود.

$$\frac{\sin x - \sin(\alpha - x)}{\sin x + \sin(\alpha - x)} = \frac{n-1}{n+1}$$

از تبدیل عبارتهای صورت و مخرج کسر اول به حاصل ضرب
تساوی دوم بدست خواهد آمد. با توجه به آنچه گفته شد
خواهیم داشت :

$$\sin x = \gamma \sin(90^\circ - x) \implies \tan(x - 90^\circ) = -\frac{1}{\gamma} \tan 90^\circ$$

$$x = 180^\circ \mathbf{k} - \text{Arc} \frac{tg 10^\circ}{\sqrt{3}} + 10^\circ$$

٤١٦٦ - حل معادلة مثلثاتي، زیر:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg} y^n x + \operatorname{cotg} y^n x = 0$$

حل - با توجه به اتحاد :

$$tg x = \cot g x - \sqrt{cot g} \sqrt{x}$$

معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

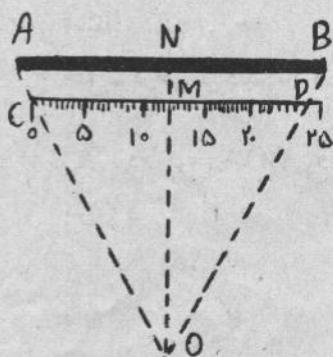
معادله $y' = \alpha$ یک جواب دارد و جوابهای دیگر آن می‌شود:

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{4}{\pi - 4} \Rightarrow \alpha = \pm 1/46$$

با تعیین مشتق ثانی "y" و تعیین علامت آن در ازاء ریشه‌های مشتق معلوم خواهد شد که تابع y در ازاء $\alpha = \pm 1/46$ دارای ماکزیمم برابر یک و در ازاء $\alpha = \pm 1/46$ دارای مینیمم برابر $0/92$ می‌باشد بنابراین و با توجه به اینکه تابع اتصالی است خواهیم داشت:

$$y < 1$$

مسائل فیزیک



درجات خطکش تطبیق می‌کنیم. طولی که بر خطکش می‌خوانیم $AB = 23/4 \text{ cm}$ است. مقدار خطای مشاهده چقدر است؟ طول CD چقدر است؟

حل- فرض می‌کنیم که O محل چشم و CD خطکش باشد.

بر طبق شکل می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{ON}{OM}$$

$$\frac{AB - CD}{CD} = \frac{ON - OM}{OM}$$

$AB - CD$ خطای مشاهده است. آن را به e نمایش می‌دهیم. و OM فاصله بالای خطکش (محلی) که درجات بر آن حک شده است) تا چشم می‌باشد برابر است با $(30 - 0/8) \text{ cm}$

پس:

$$\frac{e}{23/4} = \frac{0/8}{29/2} \Rightarrow e = 23/4 \times \frac{8}{29/2}$$

$$e = 9 \text{ mm}$$

یعنی خطای مشاهده حداقل برابر 6 mm است و

۴۱۶۹- تعیین حد زیر:

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+n)}$$

$$y = \lim \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})\dots(2)}$$

$$= \lim \sqrt[n]{1 \times 1 \times \dots \times 2} = 1$$

۴۱۷۰- اثبات صحت نامساوی زیر به فرض $x > 1$ و

اینکه n صحیح و مثبت می‌باشد:

$$x^{n-1} + \frac{n-1}{x} > n$$

حل- با توجه به اینکه $x > 1$ است داریم:

$$\frac{x^n - 1}{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} > n$$

$$\Rightarrow x^{n-1} > nx - n \Rightarrow x^{n-1} + n - 1 > nx$$

از تقسیم طرفین نامساوی اخیر بر x نامساوی موردنظر بدست می‌آید.

۴۱۷۱- ثابت کنید که در هر مثلث ABC بین ارتفاعات CF و BE و AD و r شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی نامساوی زیر برقرار است:

$$AD + BE + CF < 2R + 5r$$

حل- اگر H نقطه تلاقی ارتفاعات باشد داریم:

$$(1) \quad HA + HB + HC = 2R + 2r$$

$$(2) \quad HD + HE + HF < 3r$$

و در نتیجه نامساوی مطلوب بدست می‌آید. برای اثبات تساوی (1) و نامساوی (2) دو مسئله جداگانه طرح می‌شود که در بخش مسائل برای حل همین شماره مندرج است.

۴۱۷۲- اثبات نامساوی زیر:

$$\left(\frac{\alpha + \sin \alpha}{\pi}\right)^2 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} < 1, \quad (-\pi < \alpha < +\pi)$$

حل- فرض می‌کنیم:

$$y = \left(\frac{\alpha + \sin \alpha}{\pi}\right)^2 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$= \left(\frac{\alpha + \sin \alpha}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2}\right)^2$$

مشتق این تابع را تعیین می‌کنیم بعد از ساده کردن می‌شود:

$$y' = (1 + \cos \alpha) \left[\frac{2}{\pi} (\alpha + \sin \alpha) - \frac{\sin \alpha}{2} \right]$$

با امتداد افقی زاویه 30° بسازد. ارتفاع بالون را از سطح زمین پیدا کنید.

حل - اگر h ارتفاع بالون از سطح زمین باشد:

$$h = OS \sin \alpha$$

از طرفی شاعر بالون :

$$OS = 200 \times 5 = 1000 \text{ m} \quad \text{یا} \quad R = \frac{1}{200} OS$$

$$h = 1000 \times \frac{1}{2} = 500 \text{ m} \quad \text{پس}$$

۴۱۸۱ - اگر برآیند نیروهای $3P$ و $5P$ مساوی باشد، زاویه بین نیروهای $7P$ تعیین کنید.

حل - اگر θ زاویه بین نیروهای $3P$ و $5P$ و $7P$ باشد، زاویه بین نیروهای $3P$ و $5P$ تعیین کنید.

$$R^2 = 9P^2 + 25P^2 + 30P^2 \cos \theta$$

و چون $R = 7P$ است:

$$49P^2 = 49P^2 + 25P^2 + 30P^2 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

۴۱۸۲ - نقطه‌ای دارای دو سرعت متساوی در دو جهت معین است. اگر بزرگی کی از دو سرعت نصف شود، زاویه ای که جهت برآیند باجهت سرعت دیگر می‌سازد نیز نصف می‌شود. ثابت کنید که زاویه بین دو سرعت 120° است.

حل - در ابتدا که $OA = OB$ است $\alpha = \beta$.

وقتی که $OB = \frac{1}{2} OA$ می‌شود زاویه α سه برابر زاویه β می‌شود: یعنی داریم:

$$\alpha + \beta = 4x \quad \beta = x \quad \alpha = 3x$$

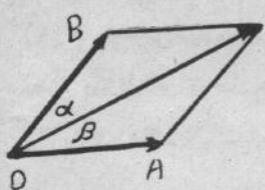
می‌توان نوشت:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\sin 3x}{\sin x} = 2$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad \text{اما}$$

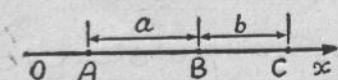
$$3 \sin x - 4 \sin^3 x = 2 \sin x$$

پس



از حل این معادله جواب قابل قبولی که برای x بدست می‌آید 30° است. بنابراین $\alpha + \beta$ یعنی زاویه بین دو سرعت 120° است.

۴۱۸۳ - سه نقطه A و B و C واقع در روی محور مطابق شکل مفروضند $a = AB$ و $b = BC$ و $c = OC$ می‌باشد. سه

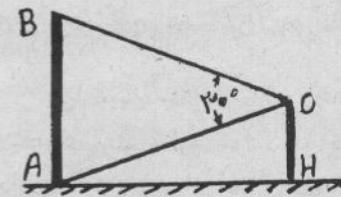


متوجه با سرعتهای ثابت U و V و W اولی از A دومی از B و سومی از C در یک لحظه درجهت مثبت محور OX شروع

بنابراین طول خط AB برابر 24 cm است.

۴۱۷۹ -

چشم ناظر OH ، در $1/58$ متری از سطح زمین است و ستون قائمی را که بفاصله $AH = 10 \text{ m}$



از ناظر قرار دارد تحت زاویه 30° می‌بیند. بلندی ستون را تعیین کنید (در صورت لزوم برای حل مسئله از رابطه مثلثاتی:

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

استفاده کنید).

حل - فرض می‌کنیم: $OH = h$ ، $AH = l$

$$\angle OAH = \alpha, \quad \angle BOA = \alpha, \quad AB = x$$

پس:

$$\tan \alpha = \frac{h}{l}$$

$$\frac{x - h}{l} = \tan(\alpha - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha \tan \alpha_1}$$

یا:

$$\frac{x - h}{l} = \frac{\tan \alpha - \frac{h}{l}}{1 + \frac{h}{l} \tan \alpha}$$

پس از ساده کردن:

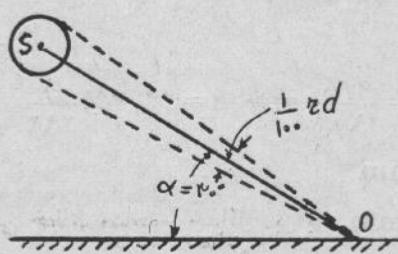
$$x = \frac{l + h}{h + l \cot \alpha}$$

با بکار بردن مقادیر عددی:

$$x = \frac{10 + 1/58}{1/58 + 10 \times 1/732} = 5/42 \text{ m}$$

۴۱۸۰ - قطر ظاهری بالونی به مرکز S و به قطر 10 m

برای ناظر O برابر $\frac{1}{100}$ رادیان است. در صورتی که OS



AM را در P قطع کند داریم: $\overline{PM} = V$
۴۱۸۴ - اتومبیلی که با شتاب ثابت γ بر مسیری مستقیم حرکت می‌کند، از مقابل قرارگاه پلیس راه می‌گذرد. پلیس به رانته این اتومبیل مظنون می‌شود و با اتومبیل خود با شتاب ثابت $\frac{1}{3}\gamma$ به تعقیب آن می‌پردازد. سرعت اتومبیل اول هنگامی که از یک چهار راه می‌گذرد u_1 می‌باشد و سرعت اتومبیل پلیس در این چهار راه که ۳ ثانیه بعد به آن می‌رسد، در این پس از مدتی اتومبیل پلیس به اتومبیل فراری می‌رسد. در این لحظه سرعت اتومبیل فراری $27m/s$ و سرعت اتومبیل پلیس $31m/s$ است. γ و u_1 و نیز فاصله دو متحرک را در این لحظه از چهار راه مذکور پیدا کنید.

حل - اگر فاصله دو متحرک از چهار راه مذکور x باشد
برای اتومبیل فراری می‌نویسیم:

$$V' - u_1 = 2\gamma x$$

و برای اتومبیل پلیس می‌نویسیم:

$$V' - \frac{1}{3}u_1 = 2 \times \frac{1}{3}\gamma x$$

از این دو معادله نتیجه می‌شود:

$$12V' - 9V' = 11u_1$$

پس:

$$u_1 = \frac{12 \times 27^2 - 9 \times 31^2}{11} = 9$$

$$\Rightarrow u = 3m/s$$

و نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} V - u = \gamma t \\ V' - \frac{1}{3}u = \frac{4}{3}\gamma(t - 3) \end{cases}$$

$$V' - \frac{1}{3}u = \frac{4}{3}(V - u) - 4\gamma$$

یا:

$$\gamma = \frac{V}{3} - \frac{1}{4}(V' + u) = \frac{1}{2}m/s^2$$

پس

$$x = \frac{V' - u}{2\gamma} = 27^2 - 3^2 = 720m$$

و

پاسخهای درست و سیلد هر بوط به حل مسئله ۳۸

- هاشم موسوی - عیدالحسین کوچکان - مسعود حبیب‌الله زاده

- عبدالحسین کوچکان - محمد مقدسی

- محمد مقدسی

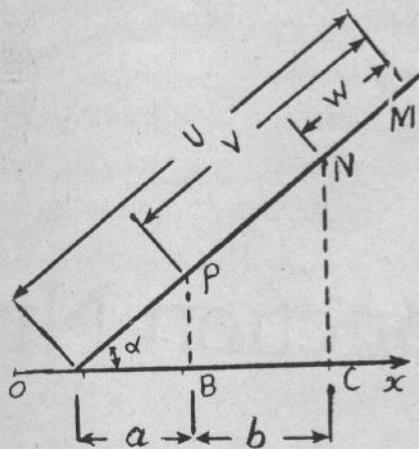
- محسن هاشمی تزاد - حسین ادیب - امان‌الله امین‌نیا - جلال اشجعی - محمدعلی موحدیان - محمد بلوریان

- محمد موحدیان - حسین ادیب - محمد مقدسی - حمید رستگار - جلال اشجعی - بهمن گیلکی - حسن خجسته‌یی

- علی‌مراد تقی‌پور - حمیدرضا رحیمی

- علی‌اصغر اسکندریانی - حسین خبازیان.

به حرکت می‌کنند. برای اینکه این سه متحرک با هم به یک نقطه بر سند چه رابطه‌ای باید بین مقادیر فوق برقرار باشد. بادرنظر گرفتن این رابطه بافرض معلوم بودن U و W مقدار V را بطور ترسیمی معین کنید.



حل - اگر نقطه A را به عنوان مبدأ سنجه فاصله در نظر بگیریم پس از t ثانیه متحرک‌های فوق از A بفواصل زیرند:

$$x_1 = Ut \quad x_2 = a + Vt \quad x_3 = a + b + Wt$$

پس در لحظه‌ای که این سه متحرک به هم می‌رسند روابط زیر برقرارند:

$$Ut = a + Vt = a + b + Wt$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$t = \frac{a}{U-V} = \frac{b}{V-W}$$

از رابطه فوق نتیجه می‌گیریم که $U > V > W$ و رابطه مطلوب عبارتست از:

$$\frac{a}{U-V} = \frac{b}{V-W}$$

اگر صورتها را با هم و مخرجهای را با هم جمع کنیم نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{U-V} = \frac{a+b}{U-W}$$

از رابطه فوق طریقه ترسیمی ذیر نتیجه می‌شود:
از نقطه A خطی به زاویه α رسم کرده روی آن طول را مساوی U اختیار کرده از انتهای آن $\overline{AM} = W$ رسم کنیم. حال اگر از B خطی موازی \overline{CN} رسم نمائیم تا

دانشآموزان گلاس ششم ریاضی

- ۴۱۵۷ - حسن چاکری دیارستان پهلوی (کاشان) -

علی‌اصغر اسکندریانی دیارستان بهمن قلهک - جلال اشجعی دیارستان حکمت (قم) - ولی‌پور کراحتی دیارستان ایرانشهر (بزد) - محمد مقدسی دیارستان پهلوی ساری

- ۴۱۵۹ - حسن چاکری

- ۴۱۶۰ - حسین خبازیان دیارستان نمونه (اصفهان) - محمد بلوریان دیارستان شاهرضا (مشهد) - جلال اشجعی

مسائل متفرقه

- ۴۱۶۶ - محمد مقدسی - اصغر بوستانی - محسن هاشمی تزاد

یکان دوره چهارم

ترجمه و تنظیم از:
عبدالحسین مصطفی

ریاضی جدید

تابع عددی = Fonction Numérique

مجموعه‌ای که در سطر (۱) مشخص شده شامل a و b است: این مجموعه یک کوچکترین عنصر دارد که همان a است و همچنین یک بزرگترین عنصر دارد که همان b می‌باشد. این مجموعه یعنی $[a \text{ و } b]$ را فاصله بسته (۲) می‌نامند.

مجموعه $[a \text{ و } b]$ که در سطر (۲) مشخص شده است شامل a و b نبوده، نه کوچکترین عنصر دارد و نه بزرگترین عنصر و فاصله باز (۳) نامیده می‌شود.

مجموعه‌های $[b \text{ و } a]$ و $[a \text{ و } b]$ نیمه‌باز (۴) نامیده می‌شوند؛ اولی شامل b هست اما شامل a نیست، بزرگترین عنصری دارد که همان b است و کوچکترین عنصر ندارد؛ دومی شامل a بوده و شامل b نمی‌باشد، کوچکترین عنصری دارد که a است و دارای بزرگترین عنصر نیست.

نشانه « ∞ » که در سطرهای از پنجم تا هشتم جدول بکار رفته است و «بینهایت» خوانده می‌شود معروف یک عدد نیست، از این جهت بکارمی‌رود که مورد استفاده است و با استفاده از آن بسیاری از نظریه هارا به سادگی می‌توان عمومیت داد.

مجموعه اعداد حقیقی عبارتست از فاصله

$[-\infty \text{ و } +\infty]$

وقتی که مقصود تعیین یک فاصله باشد بدون اینکه بسته بودن یا باز بودن آن مورد نظر باشد معمولاً آنرا با یک حرف مثل I نمایش می‌دهند که کناره‌ها به صورت اندیس و نمای آن نوشه می‌شوند و یا اینکه به صورت $(b \text{ و } a)$ نشان می‌دهند.

کسٹرش که قبلاً تعریف شد و خواص آن بیان گردید یک تعریف عام می‌باشد. در حالت خاص، کسٹرش با اصطلاحات دیگری عنوان می‌شود؛ کسٹرشی که در آن مجموعه مبدأ و مجموعه مقصد مجموعه نقاط صفحه باشد تبدیل (۱) نامیده می‌شود؛ کسٹرش مجموعه اعداد حقیقی در یاروی خود مجموعه، تابع (به عبارت دقیقت، تابع عددی) نامیده می‌شود.

قبل از تعریف تابع، تعریف فاصله یادآوری می‌شود:

فاصله (۲) – فاصله مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که طبق جدول زیر مشخص می‌شود:

	مجموعه اعداد حقیقی	فاصله مریوط
۱	$a < x < b$	$[a \text{ و } b]$
۲	$a < x < b$	$]a \text{ و } b[$
۳	$a < x < b$	$[a \text{ و } b[$
۴	$a < x < b$	$]a \text{ و } b]$
۵	$a \leq x$	$[a \text{ و } +\infty[$
۶	$a < x$	$]a \text{ و } +\infty[$
۷	$x \leq a$	$] -\infty \text{ و } a]$
۸	$x < a$	$] -\infty \text{ و } a[$

عدادهای a و b را که در سطرهای از یکم تا چهارم بکار رفته است گفته (۳) های فاصله و تفاصل $a - b$ را وسعت (۴) فاصله یا طول (۵) فاصله می‌نامند.

1- Transformation. 2- Intervalle. 3- borne. 4- Amplitude. 5- Longueur.

6- Intervalle fermé. 7- Intervalle ouvert. 8- Semi-ouvert.

تابع

تعریف - اگر R مجموعه اعداد حقیقی و X و Y دو زیرمجموعه از آن باشند یعنی $X \subseteq R$ و $Y \subseteq R$ گسترش به مبدأ X و به مقصود Y را تابع عددی متغیر حقیقی می‌نامند. این گسترش را با f نشان داده و از این به بعد آنرا فقط تابع می‌نامیم. عدد $x \in X$ را متغیر مستقل^(۱) (و یا فقط همتغیر) و تصویر آن یعنی $y \in Y$ را متغیر تابع^(۲) (یا فقط تابع)، مجموعه X را مجموعه تعریف^(۳) و مجموعه Y را مجموعه مقادیر^(۴) می‌نامند و چنین می‌نویسند:

$$\forall x \in X, f(x) \wedge y \in Y$$

و یا به صورت معمولی تر:

$$\forall x \in X, y = f(x)$$

وقتی عدد $x \in X$ مشخص باشد آنرا نقطه^(۵) نامیده یا به یکی از صورتهای x_1, x_2, \dots یا با یکی از حروف اول X باشد. چنانچه به ازای $x \in X$ مقدار $f(x)$ برابر با صفر گردید یعنی $f(x) = 0$ باشد عدد x را صفر تابع f می‌گویند.

طرق تعیین یک تابع - مقصود از تعیین یک تابع f پیدا کردن وسیله‌ای است که توسط آن بتوان در ازای هر مقدار از X مقدار نظیر آن $f(x)$ را بدست آورد.

الف - یک تابع ممکن است بایک فرهنگ جبری معین شود. مثل

$$f(x) = \frac{x-3 + \sqrt{25-x^2}}{(x-1)(x-2)}$$

این فرمول مقدار $f(x)$ را وقتی که x متعلق به یکی از فاصلهای $I_1 = [-5, 1], I_2 = [2, 5]$ باشد بدست می‌دهد. در این تابع مجموعه تعریف عبارتست از: $X = I_1 \cup I_2 \cup I_3$

ب - یک تابع ممکن است از طریق هندسی معین شود. مثلاً اگر x اندازه یک کمان باشد در ازای هر عدد x عددی به نام $\sin x$ تعریف می‌شود که مقدار $\sin x$ از طریق هندسی معین می‌گردد. البته جدولهایی وجود دارد که در ازای هر مقدار x مقدار دقیق یا تقریبی $\sin x$ را بدست می‌دهد.

ج - یک تابع ممکن است به وسیله یک فرمول جبری معین شود و نه از راه هندسی مشخص گردد. نوعی از این توابع از راه آزمایش‌های تجربی تعریف می‌شوند. مثلاً از راه تجربه معلوم می‌کنند که $v(p)$ حجم یک گاز بر حسب p فشار وارد به آن (در شرایط معینی از دما) چه مقدار می‌باشد.

1- Variable indépendante. 2- Variable dépendante. 3-Ensemble de définition. 4- Ensemble des valeurs. 5- Point. 6- Identité 7- Fonction constante.

داریم :

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 1) \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = (x+1)^2$$

$$z = g \circ f = g(f(x)) = \frac{(x^2 - 1) + 1}{(x^2 - 1) - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 2}$$

تمرینات

۱- در هر یک از تابعهای زیر، X مجموعه تعریف و Y مجموعه مقادیر را تعیین کنید :

$$y = 5x - 3 \quad y = \frac{3x+4}{5x-3} \quad y = \sqrt{5x-3}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5x-3}} \quad y = |x| \quad y = \sin x \quad y = \cos x$$

۲- در تابعهای زیر $f(g(x))$ و $g(f(x))$ را بایکدیگر مقایسه کنید .

$$1) \quad f(x) = 2x^2 - 1 \quad g(x) = 4x^3 - 3x$$

$$2) \quad f(x) = \frac{2x}{1-x^2} \quad g(x) = \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$$

$$3) \quad f(x) = \sqrt{x^2+1} \quad g(x) = \sqrt{x^2+2x}$$

۳- نمایش هندسی هر یک از تابعهای زیر را رسم کنید .

$$y = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2}$$

$$y = |x+2| + |x+1| + |x| + |x-1| + |x-2|$$

$$y = \sqrt{x^2+1} + 2\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x^2}$$

$$y = (-1)^{E(x)} [x - E(x)]$$

۴- فرمول مربوط به تابع معکوس هر یک از تابعهای زیر را تعیین کنید .

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad y = \sqrt{x^4+1} \quad x > 0$$

$$y = \frac{x^2+1}{2x} \quad x > 0 \quad y = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad x > -1$$

۵- تابع f معلوم است بقسمی که :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

آیا تابعی مانند φ وجود دارد که داشته باشیم :

$$\varphi(f(x)) = x$$

نمایش هندسی تابع (۱) - اگر f تابعی باشد که نظریه هر عدد $x \in X \subseteq R$ یک عدد $y = f(x)$ را بدهد در حقیقت یک رابطه دوتایی بین x و $y = f(x)$ است .

در صفحه محورهای مختصات $x' O x$ و $y' O y$ هر زوج عددهای $(y \text{ و } x)$ یک نقطه M را مشخص می کند (x و y مختصات M ناهمده می شوند). به این ترتیب هر تابع f مجموعه نقاطی از صفحه محورهای مختصات را مشخص می کند. این مجموعه نقاط را نمایش هندسی تابع f می نامند .

تابع معکوس (۲) - اگر تابع f ، که گسترش مجموعه اعداد حقیقی R در خودش می باشد، دو سویه باشد در این صورت گسترش معکوس f^{-1} وجود دارد که آنرا تابع معکوس تابع f می نامند.

$$x \setminus \begin{matrix} f \\ \nearrow \end{matrix} \nearrow y = f(x)$$

$$y \setminus \begin{matrix} f^{-1} \\ \nearrow \end{matrix} \nearrow x = f^{-1}(y)$$

راجع به تابع معکوس بعداً به تفصیل بیشتر صحبت خواهد شد)

تابع تابع یا تابع هر کب - اگر f تابعی باشد که به g ازای هر $y \in Y \subseteq R$ مقدار $x \in X \subseteq R$ را بدهد و g تابعی باشد که به ازای هر y مقدار $z \in Z \subseteq R$ را بدهد . در این صورت تابع مرکب $g \circ f$ وجود دارد که به ازای هر x مقدار z را بدهد . تابع مرکب $g \circ f$ را تابعی می گویند .

$$x \setminus \begin{matrix} f \\ \nearrow \end{matrix} \nearrow y \setminus \begin{matrix} g \\ \nearrow \end{matrix} \nearrow z$$

$$y = f(x) \quad z = g(y) : z = g(f(x))$$

تبصره - باید توجه داشت که معکوس عدد $\frac{1}{f(x)}$ با

تابع معکوس f یعنی $(x)^{-1}$ از یکدیگر متمایز هی باشند. مثلاً

اگر داشته باشیم $y = f(x) = \sin x$ داریم :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sin x}$$

$$f^{-1}(x) = \sin^{-1} x = \arcsin x$$

همچنین حاصل ضرب $g(x) \cdot f(x)$ را باید با تابع

مرکب $g \circ f$ یعنی $z = g(f(x))$ آشنا کرد . مثلاً اگر داشته باشیم :

$$f(x) = x^2 - 1 \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

محور اصلی (بقیه از صفحه ۱۳۸)

مثلث GHI (یا' H'I') ، اصطلاحاً مثلث پدال (Pedal triangle) نقطه P (یا' P) و دایره GHI (یا' G'H'I') دایره پدال نقطه P (یا' P') نامیده می‌شود. شش نقطه I' و H' و G' و H و I و G روی دایره‌ای هستند که مرکز آن وسط PP' است و خواهیم است :

$$\frac{BG}{GC} = \frac{2a'(\frac{AE}{EC}) + a' + c' - b'}{2a'(\frac{AF}{FB}) + a' + b' - c'}, \quad \frac{BG'}{G'C} = \frac{2a'(\frac{AE'}{EC'}) + a' + c' - b'}{2a'(\frac{AF'}{FB'}) + a' + b' - c'}$$

به همین ترتیب می‌توان مقادیری برای نسبتها را بدست آورد .

در طرف راست کسر $\frac{BG'}{G'C}$ می‌توانیم به جای $\frac{AF'}{FB}$ و $\frac{AE'}{EC}$ به ترتیب مقادیر آنها را که عبارتند از :

$$\frac{b'}{a'} \cdot \frac{BF}{EA}, \quad \frac{c'}{a'} \cdot \frac{CE}{EA}$$

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{AF'}{FB'} = \frac{b'}{a'}, \quad \frac{CE}{EA} \cdot \frac{CE'}{E'A} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BD'}{B'C} = \frac{c'}{b'}$$

برای دونقطه مزدوج هم گوش همیشه بر قرار هستند داریم :

$$\frac{BG'}{G'C} = \frac{\frac{2a'(\frac{AE'}{EC}) + a' + c' - b'}{2a'(\frac{AF'}{FB'}) + a' + b' - c'}}{\frac{2c'(\frac{CE}{EA}) + a' + c' - b'}{2b'(\frac{BF}{FA}) + a' + b' - c'}} = \frac{\frac{2a'(\frac{AE'}{EC}) + a' + c' - b'}{2a'(\frac{AF}{FB}) + a' + b' - c'}}{\frac{2c'(\frac{CE}{EA}) + a' + c' - b'}{2b'(\frac{BF}{FA}) + a' + b' - c'}}$$

قضیه (۱) نشان می‌دهد که محور اصلی دایره پدال GHI (یا' H'I') و دایره محیطی ABC ضلع BC را در نیمه M قطع می‌کند . بنابراین داریم :

$$\frac{BM}{MC} = -\frac{BG}{GC} \cdot \frac{BG'}{G'C} = -\left(\frac{2a'(\frac{AE}{EC}) + a' + c' - b'}{2a'(\frac{AF}{FB}) + a' + b' - c'} \right) \left(\frac{2c'(\frac{CE}{EA}) + a' + c' - b'}{2b'(\frac{BF}{FA}) + a' + b' - c'} \right)$$

قضیه ۸ - نقطه P و مثلث سوائی آن DEF را در نظر می‌گیریم . محور اصلی دایره پدال نقطه P و دایره محیطی ABC اضلاع AB و CA و BC را به ترتیب در O و N و M قطع می‌کنند و داریم :

$$\frac{BM}{MC} = -\left(\frac{2a'(\frac{AE}{EC}) + a' + c' - b'}{2a'(\frac{AF}{FB}) + a' + b' - c'} \right) \left(\frac{2c'(\frac{CE}{EA}) + a' + c' - b'}{2b'(\frac{BF}{FA}) + a' + b' - c'} \right)$$

$$\frac{CN}{NA} = -\left(\frac{2c'(\frac{CD}{DB}) + b' + c' - a'}{2c'(\frac{CE}{EA}) + a' + c' - b'} \right) \left(\frac{2a'(\frac{AF}{FB}) + a' + b' - c'}{2c'(\frac{CD}{DB}) + b' + c' - a'} \right)$$

$$\frac{AO}{OB} = -\left(\frac{2c'(\frac{CD}{DB}) + b' + c' - a'}{2c'(\frac{CE}{EA}) + a' + c' - b'} \right) \left(\frac{2b'(\frac{BD}{DC}) + b' + c' - a'}{2a'(\frac{AE}{EC}) + a' + c' - b'} \right)$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{a' + c' - b'}{a' + b' - c'}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{a' + b' - c'}{b' + c' - a'}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{b' + c' - a'}{a' + c' - b'}$$

فرض کنیم مقادیر

مربوط به مثلث سوائی نقطه تلاقی ارتفاعات مثلث باشد. در روابط قضیه ۸ به آسانی معلوم می‌شود که ضریب

$\frac{BM}{MC}$ می‌باشد و از این طریق حکم قضیه ۶ A را می‌توان ثابت نمود. بار دیگر فرض می‌کنیم P مرکز نقل مثلث ABC

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 1 \quad \text{و قضیه ۸ چنین می‌شود:}$$

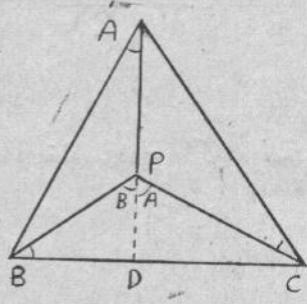
قضیه ۸-A - محور اصلی دایره پدال مرکز نقل و دایره محیطی مثلث ABC اضلاع AB، CA و BC را به ترتیب در O و N و M قطع می‌کنند و داریم.

$$\frac{BM}{MC} = -\left(\frac{3a^2 + c^2 - b^2}{3a^2 + b^2 - c^2}\right) \left(\frac{3c^2 + a^2 - b^2}{3b^2 + a^2 - c^2}\right)$$

$$\frac{AO}{OB} = -\left(\frac{3c^2 + b^2 - a^2}{3c^2 + a^2 - b^2}\right) \left(\frac{3b^2 + c^2 - a^2}{3a^2 + c^2 - b^2}\right) \quad \text{و} \quad \frac{CN}{NA} = -\left(\frac{3b^2 + a^2 - c^2}{3b^2 + c^2 - a^2}\right) \left(\frac{3a^2 + b^2 - c^2}{3c^2 + b^2 - a^2}\right)$$

فرض می‌کنیم P نقطه‌ای در صفحه مثلث ABC باشد بطوری که زاویه‌های Brocard و PAB، PBC، PCA متساوی باشند. نقطه P را نقطه بروکارد منفی مثلث می‌گویند.

نقطه مزدوج هم گوشة نقطه P را نقطه بروکارد منفی مثلث می‌گویند. امتداد AP ضلع BC را در D قطع می‌کند معلوم است که $BPD = B$ و $DPC = A$ وزاویه APB مکمل زاویه B است. بنابراین طبق قانون سینوسها در مثلث PAB داریم:



$$\frac{BP}{c} = \frac{\sin PAB}{\sin B} \quad (1) \quad \text{یا} \quad \sin PAB = \frac{BP \sin B}{c}$$

به همین ترتیب در مثلث PBC داریم:

$$(2) \quad \sin PBC = \frac{PC \sin C}{a}$$

از تساوی زوایای PBC و PAB نتیجه می‌شود:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{c \sin C}{a \sin B} = \frac{c^2}{ab}$$

قانون سینوسها را برای مثلثهای PBC، PBD، PDC و PBC بکار می‌بریم حاصل می‌شود:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BD}{PC} \cdot \frac{\sin BPD}{\sin DPC} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{\sin B}{\sin A} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{a^2}$$

به همین طریق مقادیر $\frac{AF}{FB}$ و $\frac{CE}{EA}$ معلوم شده برای نقطه بروکارد منفی خواهیم داشت.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{b^2}{c^2}$$

و برای نقطه بروکارد منفی خواهیم داشت:

$$\frac{CE'}{EA'} = \frac{b^2}{c^2}, \quad \frac{AF'}{FB'} = \frac{c^2}{a^2}$$

قضیه ۸-B - محور اصلی دایره پدال نقطه بروکارد منفی (منفی) و دایره محیطی ABC اضلاع BC، CA و AB را در نقاط O و N و M قطع می‌کند و داریم.

$$\frac{BM}{MC} = -\frac{c^2}{b^2} \left(\frac{2a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - b^4}{2a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - c^4} \right), \quad \frac{AO}{OB} = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{2b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 - a^4}{2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - a^4} \right)$$

بحث و محاسبه در شیمی

(حل المسائل شیمی)

برای استفاده دانش آموزان سالهای ششم ریاضی و طبیعی و داوطلبان کنکور

ترجمه و تنظیم:

ر. یکتا گنجه‌ای

ن. موسوی

م. صیانتی

با استفاده از آخرین کتابهای فرانسوی و انگلیسی

ناشر: کتابفروشی شازده کوچولو - تهران پارس

پخش از: مؤسسه مطبوعاتی امیر کبیر

بهای: ۱۴۵ ریال

مشترکان یکان برای دریافت این کتاب می‌توانند با دفتر مجله تماس بگیرند

کتاب یکان

برای دانش آموزان دوره اول دبیرستان

شامل مقالات و سرگرمیهای فکری و مسائل امتحانات
داخلی کلاسهاي سوم درامنندماه منتشر می شود.
مسائل امتحانات داخلی سال تحصیلی گذشته کلاسهاي سوم
دبیرستانها برای درج در این مجموعه قبول می شود.

زیر چاپ:

جزوه سوم مسائل از حساب استدلالی

شامل: مسائل مربوط به تقسیم

تألیف: محمود کاشانی

راهنمای حل مسائل شیمی

شامل مقالاتی که زیر این عنوان در یکان چاپ شده
به انضمام یک بخش حل مسائل نمونه
و یک بخش مسائل برای حل

ترجمه: عطاء الله بزرگ نیا

تهرینهای ریاضیات مقدماتی

تألیف: استاد دکتر محسن هشت رو دی
۱۲۰ ریال - ۱۵۰ ریال

سرگرمیهای جبر

ترجمه: پرویز شهریاری

۶۰ ریال - ۱۰۰ ریال

در اداره مجله یکان موجود است.

چاپ سوم راهنمای ریاضیات متوسطه
چاپ دوم - جزوی اول مسائل حساب استدلالی

گروه فرهنگی خرداد

جدید کلاس‌های شبانه

برای کلاس‌های: ششم ریاضی - ششم طبیعی - کنکور فنی - کنکور پزشکی -
کنکور علوم - کنکور حقوق - کنکور ادبیات - دروس تقویتی - تک درسی

مانند کلاس‌های سابق

طرح برنامه ۲۵ ساعت تدریس در هفته

از اول آذر ماه دایر است

نشانی: سعدی شمالی - چهار راه سید علی - دبیرستان خرداد

تلفن: ۳۰۵۴۵۸ - ۳۱۶۹۸