دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ

۲

شمارهٔ مسلسل

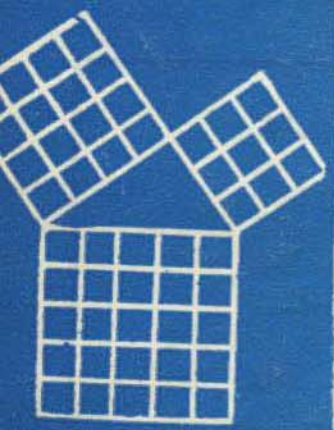
۳۹

آبان ۱۳۴۶

یغما

مجلهٔ ریاضیات

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots\dots + x^n$$



در این شماره:

ریاضیات کاربردی

دربارهٔ بررسی مثلثات ششم ریاضی	مدیر مجله	۶۹
اثبات	محمد طاهر معیری	۷۰
دترمینان	ترجمه ازفرانسه	۷۳
مراحل مهم علم نجوم	سید محمد کاظم نائینی	۷۷
مسائل حل‌نشدهٔ ریاضی	ترجمه	۷۹
قضایایی مربوط به‌محور اصلی	—	۸۲
دربارهٔ معادلات	ترجمهٔ : آقایانی چاوشی	۸۴
روشهای تعیین بخش‌پذیری بر ۷	پرویز شهریاری	۸۹
راهنمای حل مسائل شیمی	ترجمه	۹۳
راهنمای حل مسائل هندسه	ترجمهٔ: عطاءالله برزگرنیا	۹۵
راهنمای رسم فنی	ترجمهٔ:	۹۷
بی‌آنکه عصبانی شوید....	مهندس شیرمحمدی	۱۰۰
داستانهای تفننی ریاضی	ترجمهٔ:داود مصحفی	۱۰۳
سرگرمیهای ریاضی	ترجمه	۱۰۴
اصطلاحات فیزیکی ومعادل انگلیسی آنها	—	۱۰۶
Problems & Solutions	مهندس ارشاقی	۱۰۷
حل مسئلهٔ نمونه : تعمیم یك مسئله	—	۱۰۸
مسائل برای حل	ترجمهٔ : حسن مکارمی	۱۰۹
حل مسائل شمارهٔ ۳۷	—	۱۱۱
اظهارنظر دربارهٔ اصطلاحات ریاضی جدید	—	۱۱۶
ریاضی جدید	دکتر افضلی‌پور ـ آرام ـ آزرم	۱۲۴
پرسش و پاسخ	عبدالحسین مصحفی	۱۲۶
ازمیان نامه‌های رسیده ـ توضیح پلی‌تکنیك	—	۱۲۹
	—	۱۳۱

بها: بیست و پنج ریال

انتخابات

انجمن معلمان ریاضی

طبق دعوت قبلی که به عمل آمده بود عده‌ای ازمعلمان ریاضی تهران در تاریخ ۱۴ مهر در تالار اجتماعات دبیرستان آذر شمارهٔ ۱ حضور یافتند. آقای آذرنوش گزارش مختصر فعالیتهای دو سال گذشتهٔ انجمن را بیان داشت و پس ازآنکه چند نفر دیگر از حاضران بیاناتی ایراد داشته و پیشنهاد هایی مطرح کردند نسبت به انتخاب سی نفر اعضای شورای مرکزی اخذرأی بعمل آمد وآقایان زیرکه به‌ترتیب حائز اکثریت بودند به این سمت انتخاب شدند:

شهریاری ـ بحرانی ـ زاوشی ـ خسروی ـ عجدی ـ قراگزلو ـ بیرشك ـ علیم مروستی ـ آذرنوش ـ هاشمی ـ ارشاقی ـ مصحفی ـ لاهیجی ـ شمس‌آوری ـ خسروانی ـ کمال‌الدین بکتاشی ـ مهماندوست ـ ادیبی ـ امامی ـ نحوی ـ رباطی ـ ابوترابیان ـ دانشمند ـ معیری ـ شاهدی ـ جمال‌الدین بکتاشی ـ آزرم ـ صفوی ـ ترابیان ـ صمدی .

پس از آن بین حاضران از اعضای شورای مرکزی نسبت به انتخاب هیئتهای سه‌گانهٔ انجمن اخذ رأی بعمل آمد و اعضای هیئتها به ترتیب آراء به شرح زیر انتخاب شدند :

هیئت مجریان:

خسروی ـ مصحفی ـ شهریاری ـ آذرنوش ـ دانشمند

هیئت مشاوران:

بیرشك ـ بحرانی ـ زاوشی ـ لاهیجی ـ علیم‌مروستی ـ صفوی ـ کمال‌الدین بکتاشی .

هیئت داوران:

رباطی ـ ادیبی ـ شاهدی .

دورهٔ جلد کردهٔ یکان

تعدادی دورهٔ سوم و چند عدد از دورهٔ دوم یکان که در یك جلد صحافی شده در ادارهٔ مجله برای فروش موجوداست .

بهای هر دوره : ۳۰۰ ریال

توضیح

عدهٔ زیادی از خوانندگان مجله به نوع صحافی شمارهٔ۳۸ اعتراض کرده‌اند. به‌این وسیله خاطر نشان می‌سازدکه علت این امر اشکال فنی بوده‌که در چاپخانه پیش آمده و از طرف ادارهٔ مجله هم مورد اعتراض واقع شده است.

یکان

مجلهٔ ریاضیات

هرماه یك‌بار منتشر می‌گردد

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

دورهٔ‌چهارم ـ شمارهٔ دوم ـ شمارهٔ مسلسل: ۳۹

آبان ۱۳۴۶

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، **داود مصحفی**

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume IV , number 2 , Oct. 1967

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

ریاضیات کار بردی

ریاضیات، همانند دانش های دیگر ،آغا ز گاهش بر گرفته از طبیعت است .رویش آن هم نخست بر پایه ی کار برد ها یش بوده است .آ دمیان در زندگی روزانه ودر سر وکار هایی که با طبیعت پیرا مون خود داشته اند به سازو کارهایی برخورد می کرده اندکه ازآنها به دستورهایی از ریاضیات د ست می یافته اند.دانستنی های آنها از ریاضیات به این دستاورد ها خلاصه می شده است ودر کاربر د هایی که پیش می آمده از آنها بهره می گرفته اند.

مصر ی ها در بالا و پایین آمدن دوره ای سطح آ ب رود خانه ی نیل ، به تقسیم زمین های آماده برای کشاورزی نیاز داشته اند و از این راه به هندسه ی مساحت ها ، ودر ساختن آرامگاه های هرمی شکل شاهان هم به دستور های ساده ا ی مر بوط به محاسبه ی حجم ها ، دست یافتند. مهم ترین کشف آنها این بود که اگر اندازه های ضلع های مثلثی مضرب ها یی از سه عدد۳و۴و ۵باشند زاویه ی رو برو به ضلع بز رگتر قا ئمه است . آنان این پدیده را در کار ها ی هند سی گسترش دادند. چنانکه برای به دست آوردن نسبت محیط دایره به قطر آن، د نبا له ی مثلث هایی را رسم کردند که یکمی با ضلع های به اندازه ها ی۳و۴و۵ و از دومی به بعد، کوچکتر ین ضلع هر مثلث همان بزرگترین ضلع زاویه ی قائمه ی مثلث پیش از آن باشد .این ضلع از مثلث چهارم برابر با نسبت ۲۵۶به ۸۱ و برابر با ۳/۱۶ شد که آن را برابر با نسبت محیط به قطر دایره پذیرفتند .

با بلی ها ی دوران کهن بیشترین سرو کارشان با نجوم بود.آنها عدد نویسی به پایه ی شصت را به کار می برد ند . عددها ی صحیح را با یکا ی درجه و کسر هارا با دقیقه ،ثانیه ،ثالثه، . . .نشان می داد ند . برای محاسبه ها یی که پیش می آمد از جدول هایی بهره می گرفتند که آنها را روی خشت های پخته کنده کاری و نگهداری می کردند .

شیو ه ی عدد نویسی شصتگا نی با بلی ها تا سده های زیاد بر جای ماند و ریاضیدا نان و منجمان دو ره ی تمد ن اسلامی نیز آ ن را در محاسبه های نجو می خود بکار می بردند.

عبدالحسین مصحفی

دربارهٔ بررسی

مثلثات ششم ریاضی

نوشتهٔ : محمد طاهر معیری

(متن نوشته درتیرماه ۴۶ به‌دفتر مجله واصل شده است)

ازآنجاکه کتاب درسی‌مؤثرترین وسیلهٔ آموزش‌ومهمترین ابزارکار معلم است هرقدر در بهبود آن کوشش کنیم بجاست ، وهنوزهم درخورتوجه بیشتری است. درنظام آموزش و پرورش کشورهای پیشرفته بـه همان اندازه که تربیت معلم متخصص و کارآزموده موردنظر است به‌تهیهٔ کتابهای درسی خوب ومناسب نیز توجه دارند . نقش کتابهای درسی در امرآموزش‌وپرورش کمتر از اثر متد تدریس نیست وکتاب خوب از مهمترین‌وسائل پیشرفت کار معلم است. باید در نظرداشت که کتاب درسی‌فقط یك مجموعهٔ مدون علمی یا ادبی وصرف ، یك تألیف نمی‌تواند بود وآنچنان بایدفراهم شودکه علاوه براصالت موضوع وصحت بیان و سلاست قلم از اصول آموزش و پرورش دربارهٔ یادگیری وارتباط مطالب نیز بهره‌مند بوده وجنبهٔ آموزندگی قوی‌داشته باشد. خوشبختانه درکشور ما درچند سال تحصیلی اخیر برای تهیهٔ کتابهای درسی مفید کوشش خاص بعمل‌آمده و انصافاً در چاپ ومطالب بعضی کتابهای دورهٔ ابتدائی بهبود قابل‌ملاحظه حاصل شده است و باید امیدوار بود که این فعالیت به دورهٔ راهنمائی و متوسطه نیز سرایت کند وبه موازات سایرتحولات آموزش وپرورشی وضع‌تألیف‌وچاپ کتابهای درسی‌نیزدگرگون گردد . ضمناً باید توجه داشت که برای تهیهٔ کتابهای درسی مفیدکوشش همه‌جانبه لازم است وهمکاری علاقمندان ذیصلاحیت واستادان ودبیران مجرب هررشته بامؤلفان کتابها برای‌بهبود وضع تألیف ضرورت قطعی دارد .

اقدام آن مجلهٔ محترم در مورد بررسی کتابهای درسی موجود ونقد مطالب‌آنها درخور توجه‌وتشکر ومسلماً ازبهترین کوششهای یك مجلهٔ علمی و آموزشی است . نگارنده با امید آنکه سلسله مطالبی‌که دراین زمینه تهیه می‌شود به‌غرض‌آلوده نگرددودرعین‌حال‌مؤلفان‌محترم‌کتابهای‌درسی از بعضی‌تذکرات همکارانشان ، که لازمهٔ بهبود کتابهاست ، دل‌آزرده نشوند ، موفقیت مدیریت محترم مجله و سایرهمکاران گرامیشان را در ادامهٔ این بحث اساسی و برای به مقصود رساندن این کوشش بسیار با ارزش آرزومندم .

مقالهٔ همکار محترم جناب‌آقای عـجدی درشمارهٔ ۱۱ از دورهٔ سوم‌آن‌مجلهٔ گرامی‌که دربارهٔ کتاب‌مثلثات سال‌ششم‌ریاضی دبیرستانها تهیه شده بود نمونهٔ بسیارجالبی از این اقدام مفید است و می‌توان دیدکه در همین اولین قدم چه‌فرصت مناسب و قابل ملاحظه‌ای برای بهبود وضع‌کتابهای درسی‌فراهم می‌آید. نگارنده به‌محض‌وصول شمارهٔ اخیرمجله بحث مربوط به‌بررسی کتاب مثلثات سال ششم ریاضی را به‌دقت وباعلاقه مطالعه‌نمودم وبه‌همان‌نحوکه سالیان دراز از محضراستاد بهره‌مند بوده‌ام از مقالهٔ اخیر ایشان نیزلذت بردم ودریغ دانستم‌آنچه راکه در زمینهٔ این مطلب به‌نظرم می‌رسد بیان نکنم و کثرت کار مانع این باشدکه دراین خدمت اصولی و اساسی‌شرکت نداشته‌باشم.

درمقالهٔ‌موردبحث پیشنهادفرموده‌اندکه درکتابهای‌درسی به جای اصطلاح «خطوط مثلثاتی» عبارت «توابع‌مثلثاتی» بکار رود. به‌نظر اینجانب این موضوع اگرهم در دوره‌های بعدبیانی جامع وکامل باشد ، دردورهٔ متوسطه ومخصوصاً درسالهای‌چهارم و پنجم که درس مثلثات در شرف شروع است خالی از اشکال نیست و مستلزم آن خواهد بود کـه دانش آموزان با مفاهیم

متغیر وتابع آشنائی کافی داشته باشند، ضمناً ازبدو شروع درس مثلثات ودر همان جلسه‌ای که می‌خواهند با مفهوم جیب یاجیب‌تمام یك کمان آشناشوند متوجه باشند که این عوامل با تغییر زاویه یاکمان تغییر می‌کنند و ارتباط آنها را باکمان نظیر به صورت رابطهٔ تابع ومتغیر درك نمایند . مضافاً آنکه اگر $\sin x$ و $\cos x$ و $tg\,x$ و $cotg\,x$ را که حالتهای اصلی و بسیار سادهٔ تابعهای مثلثاتی از متغیر x هستند با عنوان تابع مثلثاتی مشخص کنیم برای تعریف تابعهای مفصلتر مثلثاتی مانند $\frac{\sin^2 x+1}{2\cos 2x-1}$ بکار بردن اصطلاح تابع تابع ضروری خواهد بود و در تعریف اولی تابعهای مثلثاتی نیز مشکلاتی فراهم خواهدآمد. بنابراین نگارنده به جای «خطوط مثلثاتی» یا «توابع مثلثاتی» برای مفاهیم اولیهٔ جیب وجیب تمام وظل وظل تمام کمان ، اصطلاح **«نسبتهای مثلثاتی»** را مناسب می‌دانم. باملاحظهٔ آنکه نسبتهای مثلثاتی یك کمان یایك زاویه اصولا اعداد جبری هستند ودرهمهٔ تعاریفی که از این مفاهیم ذکر می‌کنیم هریك از آنها به‌صورت نسبت اندازه‌های جبری یا عددی دوپاره خط نموده می‌شوند عبارت نسبتهای مثلثاتی برای بیان مقصود کاملا کافی است.

درقسمتی از بحث که روابط بین نسبتهای مثلثاتی بعضی کمانها مطرح است، اینجانب عقیده دارد که اصولا این‌موضوع درکتاب درسی مثلثات سال‌ششم به‌صورتی غیر ازآنچه موردنیاز بوده مطرح بحث قرارگرفته است . در اینجا مسألهٔ اساسی آنست که بتوانیم نسبتهای مثلثاتی‌متمم یا مکمل یك کمان‌را برحسب نسبتهای مثلثاتی همان کمان بدست‌آوریم و رابطه‌های بین نسبت‌های مثلثاتی کمانهائی راکه‌بین‌خودآنها رابطهٔ مشخص برقرار است تعیین کنیم . بنابراین بحث دربارهٔ وضع ابتدا و انتهای کمانها اصولا ضرورت ندارد و به جای عنوان نمودن مطلب به صورت :

«دوکمان که انتهای آنها نسبت به‌محور سینوسها قرینهٔ یکدیگرباشند ، دارای سینوسهای برابر وکسینوسها وتانژانتها وکتانژانتهای قرینه‌اند .»

باید به‌صورت یك فرع متذکر شویم :

«هرگاه مجموع دوکمان مضرب فرد π باشد سینوسهای آنها مساوی و سایر نسبتهای مثلثاتی آنها نظیر به نظیر قرینهٔ یکدیگرند.» بلافاصله از این دستورکلی ضمن یادآوری رابطهٔ بین کمانهای مکمل α و $\pi-\alpha$ دستورهای :

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$$

$$cotg(\pi-\alpha)=-cotg\alpha$$

را نتیجه گرفته و صورت کلی قضیه را با فرمولهای زیر بیان نمائیم :

$$\sin[(2k+1)\pi-\alpha]=\sin\alpha$$

$$\cos[(2k+1)\pi-\alpha]=-\cos\alpha$$

$$tg[(2k+1)\pi-\alpha]=-tg\alpha$$

$$cotg[(2k+1)\pi-\alpha]=-cotg\alpha$$

بااین ترتیب اولا مسألهٔ قرینه بودن انتهای کمانهانسبت به‌محور سینوسها که یك موضوع ثانوی ناشی از رابطهٔ بین‌خود کمانهاست به میان نمی‌آید که ضرورت بحث دربارهٔ مشترك بودن مبدأهای آنها را ایجاب کند .

ثانیاً از وجود رابطهٔ خاص بین کمانها وجود رابطه‌های بین نسبتهای مثلثاتی آنها را نتیجه گرفته‌ایم که همان هدف اصلی این بحث بوده است.

ثالثاً باید توجه داشت که مساوی بودن سینوسها وقرینه بودن سایرنسبتهای مثلثاتی دوکمان درحالت موردبحث ازقرینه بودن نقاط انتهائی آنها نسبت به‌محور سینوسها ناشی نیست و رابطه‌هائی که بین نسبتهای مثلثاتی برقرار است نتیجه و معلول رابطهٔ موجود بین خود کمانهاست ، چه‌ممکن است انتهای دو کمان نسبت به‌محور سینوسها قرینه باشندواما رابطه‌های‌مذکور بین نسبتهای مثلثاتی آنها برقرار نباشد ، از این جمله وقتی است که مبدأ کمانها مشترك نباشد یا مبدأهای دوکمان را بر مبدأ دایرهٔ‌مثلثاتی اختیار ننموده باشند واما نقاط انتهایی‌آنها نسبت به‌محور سینوسها قرینه باشند . بنابراین بایددرنظرداشت که بیان‌این مطلب به‌صورتی‌که درکتاب مثلثات سال ششم‌مطرح است نه‌تنها اشاره به مشترك بودن مبدأهای دوکمان ضروری است بلکه‌باید مبدأ مشترك‌آنها برمبدأ دایرهٔ مثلثاتی نیزمنطبق باشد. چه ممکن است مبدأ های دو کمان بر یکدیگر منطبق و انتهای‌آنها نسبت به محورسینوسها قرینه باشند واما رابطه‌های مورد بحث بین نسبتهای مثلثاتی آنها برقرار نباشد . مانند کمانهائی که مبدأ مشترك آنها انتهای قوس ۴۵ درجهٔ مثبت

دنباله در پائین صفحهٔ ۱۱۵

ترجمهٔ فصلی از کتاب «فرهنگ استدلالی ریاضیات»

Dictionnaire raisonné de mathématiques · par : WARUSFEL

DÉMONSTRATION = اثبات

[۱] یك **نظریهٔ**(۱) ریاضی قبل ازهرچیزشامل **عناصر اولیه**(۲) است که دربارهٔ آنها سؤالی مطرح نمی‌شود وبه**اصول متعارفی**(۳) یا **اصول‌موضوع**(۴) دسته‌بندی‌می‌شوند.می‌توان گفت که این عناصر اولیه موضوعهایی هستند که بنا بر تعریف قبول می‌شوند . برخلاف آنچه‌که اغلب تصور می‌کنند ، الزامی نیست که اصول موضوع حقایق مسلم باشند ، بلکه فرضهایی هستندکه ازپیش وضع می‌شوند ، البته با این شرط که نتایجی به اندازهٔ‌کافی متعدد دربر داشته باشند . این اصول اولین موضوعهای نظریه می‌باشند .

[۲] بعد از اصول که **مستقل‌ازهم**(۵) (هیچیك‌ازآنها ازبقیه نتیجه نمی‌شود) و **مربوط**(۶) (هیچیك ازآنها تناقضی‌را باعث نمی‌شود) فرض می‌شوند ، آنچه نظریه را به‌پیش می‌برد استفاده ازدلایل منطقی**تعویض**(۷) و**استنتاج**(۸) می‌باشد(«اگر حکم P راست باشد ، و اگر P ، Q را ایجاب‌کند ، درآن صورت‌حکم Q هم‌راست است»). بنابراین، منطق،که‌ریاضیات را بخش‌بندی نمی‌کند ، تنها وسیلهٔ قابل استفاده برای برپا-داشتن یك نظریه می‌باشد .

[۳] با شروع از اصول و **تعاریف**(۹) (که ملزومات مورد عمل‌را زیاد می‌کند) و به وسیلهٔ‌دلایل منطقی امکان‌استنتاج موضوعها یا **قضیه‌های**(۱۰) تازه‌ای فراهم‌می‌آید. این‌قضیه‌های تازه بر عناصر اولیه و قضیه‌هایی که تا کنون ثابت شده متکی می‌باشند . مثلا قضیه‌ای که ثابت می‌کند سه ارتفاع یك مثلث متقاربند امکان تعریف **مرکز ارتفاعیهٔ**(۱۱) مثلث را فراهم می‌آورد ، و از روی این تعریف قضیهٔ مربوط به تقارن مرکز ارتفاعیه نسبت به اضلاع ثابت می‌شود ، وغیره .

[۴] با اتکاء به این مبانی ، امکان یك بررسی منطقی خالص از اقسام اثبات فراهم می‌باشد . تجزیهٔ هر اثبات به مراحل‌اولیهٔ متکی بر اصول ، تعاریف وقضایای قبلی ، دربیشتر موارد خسته‌کننده می‌باشد . در عمل ، برحسب اهمیت آنچه که اثبات را مشخص کرده است ، مراحل متعددی را به صورت جهش و به طور ضمنی طی می‌کنند . اجتناب از توسل به **مشاهده**(۱۲) به ندرت امکان پذیر است ؛ برای هرطبقه‌ای از خوانندگان بخشی از متن بدیهی بنظرآمده مقام پست‌تری را دارامی‌باشد. مثلا **استدلال برگشتی(استقراء ریاضی)**(۱۳) اغلب اینچنین است .

[۵] هرقضیهٔ منطقی می‌تواند منبعی از اثبات‌باشد. بعضی ازآنها بیفایده هستند زیرا که چیزی را در برنخواهند داشت؛ مثلا **تعریف لفظ به لفظ**(۱۴) :

$$(A \text{ و } B) \Longrightarrow (A \text{ یا } B)$$

هیچگاه بکار نمی‌آید زیرا نمی‌تواند یك نظریه را به‌پیش ببرد .

[۶] بعضی از اثباتها مستقیم هستند و قضیهٔ موردنظر را بدون انحراف رهبری می‌کنند ؛ و در ضمن بسیار با ارزش و خیلی قشنگ هستند ، مثلا برای اثبات اینکه حاصل‌ضرب دو عدد صحیح فرد یك‌عدد فرد است‌کافی است‌که چنین نوشت :

$$(P): x = ۲a + ۱$$

1- Théorie. 2- Eléments primitifs 3- Axiomes. 4- Postulats.
5- Indépendant. 6- Cohérent. 7- Substitution. 8- Déduction.
9- Définitions. 10-Théorème. 11-Orthocentre. 12-Intuition.
13-Récurrence 14-Tautologie.

$(Q): y = ۲b + ۱$

$(R): z = xy$

P و Q و R تعاریفی‌هستند که با اصول حسابی، تعاریف وقضیه‌های قبلا ثابت شده ، **فرض** [۱] (A) را تشکیل‌می‌دهند.

$(S)\ \ z = (۲a + ۱)(۲b + ۱)$

S از (P و Q و R) با نوشتن متغیرهای x و y برحسب اعداد a و b نتیجه می‌شود :

$(T) : z = (۲a)(۲b + ۱) + ۱(۲b + ۱)$

زیرا بنا به خاصیت توزیعی ضرب نسبت به جمع :

$(S) \Longrightarrow (T)$

بنا به‌همان خاصیت ، $(T) \Longrightarrow (U)$ که :

$(U) : z = ((۲a \cdot ۲b) + (۲a \cdot ۱)) + ((۱ \cdot ۲b) + (۱ \cdot ۱))$

$(V) : z = ((۲a \cdot ۲b) + ۲a) + ((۱ \cdot ۲b) + ۱)$

بنا به حکم $x \cdot ۱ = x$ (که به عنوان اصل قبول شده باشد یا قضیه، برحسب اینکه حساب را چگونه بنا کرده باشند)؛

$(U) \Longrightarrow (V)$

$(W) : z = ((۲a \cdot ۲b) + ۲a) + (۲b + ۱)$

زیرا بنا به‌حکم :

$(V) \Longrightarrow (W)\ ;\ ۱ \cdot x = x$

$(X) : z = ((۲a \cdot ۲b) + ۲a + ۲b) + ۱$

$(W) \Longrightarrow (X)$ بنا به‌خاصیت‌شرکت‌پذیری‌عمل‌جمع.

$(Y) : z = (۲(a \cdot ۲b) + ۲a + ۲b) + ۱$

$(X) \Longrightarrow (Y)$ بنا به‌خاصیت شرکت‌پذیری‌عمل‌ضرب.

$(Z) : z = ۲(a \cdot ۲b + a + b) + ۱$

$(Y) \Longrightarrow (Z)$ بنا به خاصیت توزیعی عمل‌ضرب‌نسبت به عمل جمع .

اثبات طولانی است برای اینکه یازده **حکم** [۲] و هشت **استلزام** [۳] بکار رفت ، اما بدون اشکال ما را به **نتیجهٔ** [۴] موردنظر رهبری کرد .

با وجود این ، قسمتهایی را درتاریکی بجا گذاشته‌ایم.

نمای کلی اثبات باین شکل است :

$((A \Longrightarrow S)$ و $(S \Longrightarrow T)$ و $(T \Longrightarrow U)$ و ... و

$(Y \Longrightarrow Z)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow Z)$

دراین‌مورد می گویند که **سلسلهٔ استلزامات** [۵] را بکار برده‌ایم .

[۷] الف ـ سایر اثباتها کمتر ساده هستند ، امابعضی اوقات ضروری می‌باشند : مثالی از این نوع **برهان خلف** [۶] است که مورد استعمال مستمر دارد .

$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$

($\overline{P}$ نشانهٔ نفی P است واین رابطه به این معنی است‌که P باید Q را ایجاب کندونفی Q مستلزم نفی P باشد)استدلال شفاهی تابع تعریف لفظ به لفظی به شرح زیر می‌باشد (که نتیجهٔ قاطع اصول منطقی است) : «وضعی را درنظر می گیریم که P راست باشد . و اگر Q دروغ باشد ثابت خواهیم کرد که دراین صورت P هم باید دروغ باشد ، چون P نمی‌تواند درعین‌حال هم راست وهم دروغ باشدبنا براین فرض دروغ‌بودن Q پذیرفته نیست زیرا که چنین فرضی‌وجود P و $\overline{P}$ را با هم ایجاب کرد . بنابراین درحالتی‌که P راست باشد Q هم‌راست است ، به‌عبارت دیگر درچهارچوب نظریهٔ مورد بحث P ، Q را ایجاب می کند» .

(نباید فراموش کنیم که برهان خلف گاهی به صورت‌های دیگری ، که تبدیلات مختلف‌آن هستند ، ادا می‌شود) .

ب ـ برای مثال برهانی مربوط به اثبات قسمتی از **قضیهٔ بزو** [۷] را نقل می کنیم :

«اگر چهارعدد صحیح a ، b ، c و d به قسمی باشند که $ad - bc = ۱$ باشددوعدد a و b نسبت به‌هم اول‌خواهند بود .»

در اینجا حکم P به دوحکم پیوست به هم تجزیه‌می‌شود

$P : (H$ و $K)$

که در آن :

$H : (a ، b ، c ، d$ ، (اعداد صحیح‌اند

$K : (ad - bc = ۱)$

Q حکمی است که :

$Q :$ (a و b مقسوم علیه مشترکی بزرگتر ازیك ندارند) و $\overline{Q}$ یعنی نفی Q عبارتست‌از :

$\overline{Q} :$ (عدد مانند $n > ۱$ وجوددارد که هم a وهم b را بشمرد)

از (نفی Q) حکمهای زیر را نتیجه می گیریم (از توضیحات صرف‌نظر می کنیم) :

(R) : (a بر n بخش‌پذیر است)

(S) : (b بر n بخش‌پذیر است)

1- Hypothèse. 2- Proposition. 3- Implication. 4- Conclusion.
5-Chaîne d'implications.
6- Résonnement par l'absurde.
7- Bezout.

(T) : $(n > 1)$

(U) : (ac بر n بخش‌پذیر است)

(V) : (bd بر n بخش‌پذیر است)

(W) : ((ac − bd) بر n بخش‌پذیر است)

(X) : $(ac - bd \geqslant n)$

(Y) : $(ac - bd \neq 1)$

(Z) : (نفی P)

ج- باشروع‌ازفرض $(A \text{ و } \bar{Q})$ که درآن A مجموعه‌ای از P وقضایای تا کنون ثابت شده است ، یك متغیرمبتنی‌خواهد بود برتعیین دوقضیهٔ متضاد T و $\bar{T}$. برای مثال، بعد از(W) ممکن بودکه چنین ادامه داد :

(X') : (n یك را می‌شمرد)

(Y') : $(n \leqslant 1) \Longleftrightarrow \bar{T}$

و در این‌صورت می‌توان نوشت :

$((A \text{ و } \bar{Q}) \Longrightarrow T)$ و

$((A \text{ و } \bar{Q}) \Longrightarrow \bar{T}) \Longleftrightarrow ((A \text{ و } \bar{Q}) \Longrightarrow \bar{T})$

$(\bar{T} \Longrightarrow \overline{(A \text{ و } \bar{Q})}) \Longrightarrow ((A \text{ و } \bar{Q}) \Longrightarrow \overline{(A \text{ و } \bar{Q})})$ و

$\Longleftrightarrow ((A \text{ و } \bar{Q}) \Longrightarrow (\bar{A} \text{ یا } Q))$

چون A درست فرض شده است (مگرمی‌توان ازمجموعهٔ نتایجی‌که تاکنون بدست‌آمده و یا از فرض اینکه a وb وc وd اعداد صحیح هستند و $ad - bc = 1$ صرف‌نظر کرد ؟) بنابراین‌باید Q اختیارشودیعنی P درست است، به‌عبارت‌دیگر P ، Q را ایجاب می‌کند .

این تغییرات را می‌توان با تعریف لفظ به لفظ چنین بیان‌کرد .

$(((A \text{ و } \bar{Q}) \Longrightarrow T) \text{ و } ((A \text{ و } \bar{Q}) \Longrightarrow \bar{T})) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (A \Longrightarrow Q)$

[۸] الف - می‌دانیم‌که **معکوس** (۱) عبارتی از نوع $P\omega Q$ عبارتست از :

$R : (P\omega Q) = \bar{P}\,\omega\,\bar{Q}$

معکوس رابطهٔ‌استلزامی $(P \Longrightarrow Q)$ می‌شود$(\bar{P} \Longrightarrow \bar{Q})$ یا اینکه $(Q \Longrightarrow P)$.

ب- درعمل ، یك قضیه هرگز به صورت $P \Longrightarrow Q$ نیست بلکه بیشتر اوقات به فرم ربطی .

$(A \text{ و } B \text{ و } C \text{ و } \ldots \text{ و } K) \Longrightarrow Q$

است . مثلا درقضیهٔ بزو اگر A_0 مجموعهٔ قضیه‌های قبلا ثابت شده باشد می‌توانستیم چنین یادداشت کنیم :

$(A_0 \text{ و } H \text{ و } K) \Longrightarrow Q$

این قضیه با این فرم دوعکس می‌تواند داشته باشدکه با آنها می‌توان درستی را امتحان‌کرد :

$(A_0 \text{ و } H \text{ و } Q) \Longrightarrow K$

$(A_0 \text{ و } K \text{ و } Q) \Longrightarrow H$

ج- عکس اول درست است و در ضمن همهٔ نتایج قضیهٔ بزو را بدست می‌دهد ؛ اما عکس دوم مسلماً غلط است زیرا وقتی $ad - bc = 1$ باشد و a و b نسبت به یکدیگر اول باشند یا نباشند لازم نمی‌آیدکه c و d عددهای صحیح باشند.

د - اگر یك‌قضیه و یکی از عکسهای آن درست باشد می‌توانیم چنین بنویسیم :

$(A \text{ و } P) \Longrightarrow Q$

$(A \text{ و } Q) \Longrightarrow P$

یعنی اینکه .

$(A \text{ و } P) \Longleftrightarrow (A \text{ و } Q)$

وبرای اینکه Qدرست باشد P یك **شرط کافی**(۲) است.

برای اینکه P درست باشد Q یك **شرط لازم**(۳) است.

عکس قضیه نشان می‌دهدکه P همچنین شرطی‌لازم بوده‌و درنتیجه P (همچنین Q) یك شرط لازم و کافی می‌باشد .

برای مثال **قضیهٔ‌ویلسن**(۴) را در اینجا نقل می‌کنیم : شرط لازم و کافی برای اینکه :

(Q) : «p عددی است اول»

باشد این است که :

(P) : «$1 + (p - 1)!$ بر p قابل‌قسمت باشد»

ه - برای اثبات‌یك قضیه و یك عکس قضیه با هم، بعضی اوقات‌می‌توان بوسیلهٔ‌روابط **تعادلی متوالی**(۵) استدلال‌کرد:

1- Réciproque.

2- Condition suffisante.

3- Condition nécessaire.

4- Wilson.

5- Equivalences successives

$$(A \text{ و } P) \Longleftrightarrow (A \text{ و } P') \Longleftrightarrow (A \text{ و } P'')$$
$$\Longleftrightarrow \ldots (A \text{ و } Q)$$

در نتیجه :

$$(A \text{ و } P) \Longleftrightarrow (A \text{ و } Q)$$

این روش مخصوصاً وقتی که اثبات قضیه انجام محاسبات را ایجاب کند مناسبتر می‌باشد . برای مثال فرض A را از این قرار می‌دانیم که :

M و F و F′ سه نقطه از صفحهٔ جهت‌دار بوده مختصات آنها به ترتیب عبارت باشد از:

$(x \text{ و } y)$ و $(c \text{ و } 0)$ و $(-c \text{ و } 0)$ و $MF = r$ و $MF' = r'$

بوده r و r′ طولهای مثبت باشند . می‌خواهیم ثابت کنیم که :

$$(MF > MF') \Longleftrightarrow (x < 0)$$

منظماً چنین عمل می‌کنیم :

$$(MF > MF') \Longleftrightarrow (r > r') \Longleftrightarrow (r^2 > r'^2)$$
$$\Longleftrightarrow ((x-c)^2 + y^2) > ((x+c)^2 + y^2)$$
$$\Longleftrightarrow (-2cx > 2cx) \Longleftrightarrow (0 > 4cx)$$
$$\Longleftrightarrow (0 > x) \Longleftrightarrow (x < 0)$$

و- بعضی مواقع بعداز اثبات اینکه

$$(A \text{ و } P) \Longrightarrow (Q) \qquad (1)$$

می‌توان حکمی را یافت بقسمی که :

$$(A \text{ و } Q) \Longrightarrow (R) \qquad (2)$$
$$(A \text{ و } R) \Longrightarrow (P) \qquad (3)$$

در این صورت عکس $(A \text{ و } Q) \Longrightarrow (P)$ درست خواهد بود .

مثال - ثابت می‌کنند که: اگر یك ماتریس مربع منتظم باشد دترمینان آن مخالف صفر است (۱) ، می‌توان معادلهٔ ماتریسی $AX = B$ را حل کرد (۲) ، پس حاملهای ستونی A یك پایهٔ مرتبهٔ R^n تشکیل می‌دهند (۳) ، که به عنوان تعریف منتظم بودن A قبول می‌شود . علاوه بر آن ، هریك از خاصیتها توصیفی هستند به این معنی که می‌توان آنها را به‌عنوان تعریف قبول کرد زیراکه حکمهای عکس (۲) و (۳) به دلیل مشابه درست می‌باشند . یك چنین استدلالی که در اینجا بکار رفت استدلال **دوری**(۱) می‌باشد .

ز- بعضی‌ازاحکام‌عکس، بنا به‌استنباط متقابل‌مسلم‌می‌شوند مثلا اگر ثابت کرده باشند که :

$$(MF > MF') \Longrightarrow (x < 0)$$
$$(MF < MF') \Longrightarrow (x > 0)$$
$$(MF = MF') \Longrightarrow (x = 0)$$

عکس هریك از سه رابطهٔ استلزامی بالا نیز درست خواهد بود زیرا اگرمثلا $x < 0$ باشد دراین صورت‌نمی‌توانیم داشته‌باشیم $MF < MF'$ زیرا شرط این رابطه رابطهٔ $x \geqslant 0$ می‌باشد .

بنابراین $(x < 0) \Longrightarrow (MF > MF')$

[۹] الف- در بعضی مسائل مربوط به اعداد صحیح اثباتهای متعددی بوسیلهٔ **استدلال برگشتی (استقراء ریاضی)** انجام می‌گیرد. این اثباتها مبتنی بر موضوع زیر هستند ، که توسط بعضیها به عنوان قضیه اثبات می‌شود و بعضی دیگر آنرا به عنوان اصل قبول می‌کنند:

$$(p(1) \text{ و } (p(n)) \Longrightarrow p(n+1)))$$
$$\Longleftrightarrow p(n) \text{ ، } \forall n > 1$$

مقصود از $p(x)$ یعنی اینکه خاصیت p در ازاء x درست است .

ب - برای مثال با استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم که

$$2^n \geqslant n+1$$

داریم $2^1 = 2 \geqslant 1+1 = 2$ ، ازطرف‌دیگراگرداشته باشیم $2^n \geqslant n+1$ می‌توان نوشت :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geqslant 2(n+1) = 2n+2$$
$$= n + (n+2) \geqslant (n+1) + 1$$

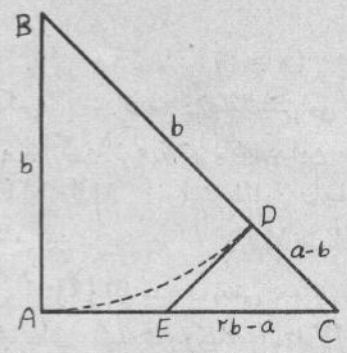
قضیه درازاء $n = 1$ درست است بنابراین در ازاء $n = 2$ هم درست خواهد بود و همین طور در ازاء $n = 3$ و غیره . اصل (یا قضیه) استقراء ریاضی این اطمینان را بوجودمی‌آورد که قضیه در ازاء هر عدد دلخواه از n درست می‌باشد.

ج- موضوع بسیار مهمی که در نظریهٔ اعداد مورد استعمال دارد **برگشت متنازل**(۲) یا **نزول لایتناهی**(۳) می‌باشد. مثلا عدد مثبتی مانند x وجود ندارد که x^2 برابر باشد با مجموع اعداد a^4 و b^4 ، زیرا که ثابت می‌کنند در این صورت عددی کوچکتر از x مانند y وجود دارد که همین خاصیت را دارا باشد و همچنین عددی کوچکتر از y مانند z هم وجود دارد که باز دارای همین خاصیت باشد. و غیره. اما چون در پایان x عمل ، دیگر عدد مثبتی وجود نخواهد داشت بنابراین وجود عدد x غیر ممکن می‌باشد ؛ یعنی هیچ مجذور کاملی وجود نداردکه برابر باشد با مجموع دوتوان چهارم ,

برای اینکه ثابت شود $\sqrt{2}$ اصم است می‌توان ازنزول

۱- Cyclique. ۲- Récurrence descendante. ۳- Descente infinie

لایتناهی استفاده کرد اگر یك مثلث قائم ـ الزاویهٔ متساوی الساقین ABC وجود داشته باشد که در آن طول وتر BC برابر با a و طول هریك از دو ضلع دیگر برابر با b بوده و a و b مضربهای مشترکی از یك عدد مانند q باشند (q جزء صحیحی از a و b باشد) در این صورت q هریك از اعداد (۲b − a) و (a − b) و (a − b) را نیز خواهد شمرد و این اعداد هم اندازه‌های ضلعهای مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری می‌باشند (مثلث DCE روی شکل فوق) و هریك از ضلعهای مثلث اخیر از نصف ضلع نظیر مثلث ABC کوچکتر می‌باشد.



چنانچه n عددی باشد که 2^n بزرگتر از نسبتهای $\frac{a}{q}$ یا $\frac{b}{q}$ باشد بعد از n عمل، مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقینی یافت می‌شود که اندازه‌های ضلعهای آن کوچکتر از q می‌باشد اما q باید همین اندازه‌ها را هم بشمرد و این غیر ممکن است بنا بر این فرض ما غلط بوده و عدد q وجود ندارد.

[۱۰] برای اثبات وجود عنصری که خاصیت معین p را دارا باشد از دو راه می‌توان عمل کرد:

الف ـ یك چنین عنصری را واقعاً بسازیم (اگر موضوع عدد باشد آنرا حساب کنیم). مثلا برای اثبات اینکه حاصل ضرب مجموع دو مربع در مجموع دو مربع برابر است با مجموع دو مربع، کافی است که اتحاد زیر را ارائه دهیم:

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

ب ـ می‌توان ثابت کرد که فرض: «عنصری وجود ندارد که خاصیت p را دارا باشد» غیر ممکن است. این برهان خلف، صحیح می‌باشد اما عملا هیچ وسیله‌ای را برای ساختن عنصر (یا عنصرهای) مطلوب بدست نمی‌دهد. مثلا، **کانتور**(۱) با اثبات اینکه مجموعهٔ اعداد جبری شمارش پذیر است و مجموعهٔ اعداد حقیقی این چنین نیست ثابت کرد که بینهایت عدد **غیر جبری**(۲) وجود دارد. اما وی هیچ روشی را معین نکرده است که از آن حتی یك عدد غیر جبری بدست آید.

مثال دیگر، در قضیهٔ **برل ـ لبك**(۳) از راه برهان خلف ثابت می‌شود که «از هر دسته مجموعه‌های باز که یك مجموعهٔ محدود بسته را می‌پوشانند عدهٔ محدودی از باز ها را می‌توان استخراج کرد»، اما راهی ارائه نمی‌شود که بتوان این بازهای با تعداد محدود را انتخاب کرد. متأسفانه یك چنین اثباتهائی بسیار است و گاهی هم بسیار ضروری می‌باشند.

[۱۱] یك نوع اثبات خاص مبتنی بر این است که توسط یك **نمونهٔ خلاف**(۴) اشتباه حکم را مدلل کرد. مثلا برای اثبات اینکه همیشه نمی‌توان ترتیب دو نشانهٔ «lim» را عوض کرد کافی است که مثال زیر را در نظر بگیریم:

$$1=\lim_{n\infty}(\lim_{m\infty}\frac{m-n}{m+n})\neq\lim_{m\infty}(\lim_{n\infty}\frac{m-n}{m+n})$$
$$=-1$$

تنها با یك مثال کافی است که غلط بودن یك حکم را ثابت کرد؛ آنچه گفته شد با روابط هم ارزی منطقی زیر (به کمك چندی نماها(۵)) متناظر می‌باشد:

$$\overline{(\forall x)P(x)} \Longleftrightarrow (\exists x)\overline{P(x)}$$
$$\overline{(\exists x)P(x)} \Longleftrightarrow (\forall x)\overline{P(x)}$$

[۱۲] گاهی بعضی قضیه‌های کم اهمیت را که در یك نظریه مستقیماً مطلوب نیست اما استدلال نسبتاً طولانی را به سادگی به مراحلی تجزیه می‌کند به عنوان موضوعی بدیهی قبول کرده آنها را **لم**(۶) می‌نامند. لم که به صورت یك قضیهٔ مخصوص در نظر گرفته می‌شود به خواننده اجازه می دهد که پیشرفت اثبات را به نحو رضایت بخش‌تری ملاحظه کند.

از طرف دیگر، بعضی قضیه ها هستند که از یك قضیهٔ ثابت شده بلافاصله نتیجه می‌شوند؛ این قضیه ها **نتیجه** یا **فرع**(۸) نامیده می‌شوند. این مفاهیم بطور قاطع ذاتی هستند.

مثلا در اثبات **قضیهٔ فیثاغورس** برای اثبات اینکه مجذور وتر، BC^2 برابر است با مجموع مجذورات دو ضلع دیگر، AB^2+AC^2

ابتدا به صورت لم بیان می‌کنند که مثلثهای ABH و ACH که توسط ارتفاع AH تشکیل می‌شوند با مثلث ABC متشابه می‌باشند. آنگاه روابط

$$BA^2=BH\cdot BC \quad \text{و} \quad CA^2=CH\cdot CB$$

را ثابت کرده و از روی آن رابطهٔ فیثاغورس را بدست می‌آورند

بقیه در صفحهٔ ماقبل آخر

۱- Cantor. ۲- Transcendant. ۳- Borel - Lebesgue. ۴- Contrexemple.
۵- Quantificateurs. ۶- Lemme. ۷- Corollaire.

دترمینان

تنظیم از : سید محمدکاظم نائینی

با استفاده از منابع خارجی

به دنبال قضایایی مربوط به دترمینان که دریکان شمارهٔ قبل چاپ شد اینك چند مثال حل‌می‌شود وبعد چند تمرین‌ذکر می‌شود تا خوانندگان با حل آنها با این قبیل محاسبات آشنایی بیشتری حاصل کنند .

مثال ۱ـ مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

سطر اول را ازسطر دوم وسوم و چهارم عضو به‌عضو کم کردیم حال دترمینان را نسبت به‌ستون یك بسط می‌دهیم :

$$\begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix} \times$$

$$\times (b-a)(c-a)(d-a)$$

فاکتور گرفته شد

حال اعضای سطر اول را ازسطر دوم وسوم کم می‌کنیم :

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-b & c^2-b^2+a(c-b) \\ 0 & d-b & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix}$$

چون‌نسبت به‌ستون اول‌بسط داده شود نتیجه می‌گردد .

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & c^2-b^2+a(c-b) \\ d-b & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 1 & d+b+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \times$$

$$\times \left[\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & d \end{vmatrix} + \overset{\text{صفر}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & b \end{vmatrix}} + \overset{\text{صفر}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{vmatrix}} \right]$$

جواب :

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

تمرین ۱ـ مقادیر دترمینان‌های زیررا حساب کنید :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

تمرین۲ـ دترمینانهای زیر را حساب کنید :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{vmatrix}$$

تمرین۳ـ دترمینانهای زیر را حساب کنید :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

جواب ۲: $4\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)$

جواب ۳: $(a+b+c)^2$

تمرین۴ـ دترمینانهای زیر را حساب کنید :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 9 & 12 & 18 \\ 7 & 16 & 12 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & k & l \end{vmatrix}$$

(جواب ۳۶۰) (جواب ۲۱۶ −)

تمرین۵ـ دترمینانهای زیر را حساب کنید :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

جواب $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

مثال۲ـ مقدار دترمینان زیر را که به دترمینان قرینه معروف است حساب کنید :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} =$$

حال در این دترمینان اعضای سطر اول را از سطر دوم و سوم و چهارم کم می‌کنیم :

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -a & c-b & b-c \\ 0 & c-a & -b & a-c \\ 0 & b-a & a-b & -c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -a & c-b & b-c \\ c-a & -b & a-c \\ b-a & a-b & -c \end{vmatrix}$$

حال اعضای ستون دوم را به اعضای ستون اول و اعضای ستون سوم را به اعضای ستون دوم اضافه می‌کنیم :

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} c-a-b & 0 & b-c \\ c-a-b & a-c-b & a-c \\ 0 & a-c-b & -c \end{vmatrix}$$

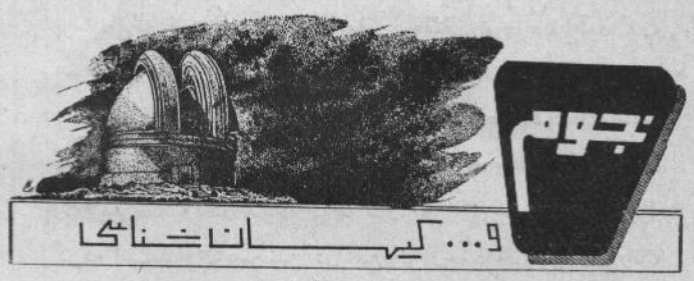
$$= (a+b+c)(c-a-b)(a-c-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b-c \\ 1 & 1 & a-c \\ 0 & 1 & -c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(c-a-b)(a-c-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b-c \\ 0 & 1 & a-b \\ 0 & 1 & -c \end{vmatrix}$$

جواب :

$$= (a+b+c)(c-a-b)(a-c-b)(b-a-c)$$

دنباله دارد



مراحل مهم علم نجوم

ترجمهٔ فصلی از کتاب «L'Astronomie Moderne» تألیف : **TOCQUET**

۳ - دورهٔ نزدیك معاصر

استفاده از طیف نور

پیشرفتهای علم نجوم ، که صحبت‌ازآن بوده ، به‌جائی کشانده شد که می‌توان آنرا « ریاضی » ستارگان نامید . این پیشرفتها ، نه به وضع ستارگان ارتباطی داشت ، نه‌به‌طبیعت آنها ، نه‌به‌ساختمان آنها ونه‌به‌اوضاعی که برسطح یااعماق آنها حکومت می‌کرد . یك چنین مطالعاتی‌جز با تکمیل ابزار نوری ، مخصوصاً طیف نگار ، امکان نداشت.

کمی به‌عقب بر گردیم؛ پیش‌ازاین گفتیم که **فرانهوفر** کشف کرده بودکه طیف‌نور خورشید شامل تعداد زیادی خطوط سیاه می‌باشد. وی‌همچنین محقق ساخته بودکه طیف مربوط به‌فلزی تبخیرشده واقع درقوس ولتائی دارای‌خطوط درخشان‌می‌باشد.

سر داوید بروستر (Sir David Brewster) (۱۷۸۱ - ۱۸۶۸) عضو مؤسسهٔ سلطنتی انگلستان و استاد فیزیك دانشگاه **سنت آندروس (اکس)** در ۱۸۲۲ ثابت کرد که خطوط درخشان مربوط به نوری است که از گاز های مشتعل صادر می‌شود . **(فوکس‌تالبو)** (Fox Talbot) (۱۸۰۰-۱۸۷۷) عضو مؤسسهٔ سلطنتی در ۱۸۲۶ با آزمایشهایی که روی نور اجسام مختلف انجام داد نتیجه گرفت که از روی طیف مربوط به‌یك جسم مشتعل می‌توان همهٔ مواد سازندهٔ آن جسم را تعیین کرد . **ویلیام سوان** (William Swan) (۱۸۹۴ - ۱۸۱۹) استاد فیزیك سنت‌آندروس و **فرانسسکو زانتدچی** (Francesco Zantedeschi) (۱۷۹۷-۱۸۷۳) استاد فیزیك **دانشگاه پادو** به‌جای اینکه طیف را روی یك پرده بدست‌آورند طرحی ریختند که طیف را دریك وسیلهٔ قابل‌حمل‌ونقل، اسپکترسکپ، ضبط کنند . **ژول پلوکر** (Jules Plücker) استاد **دانشگاه بن** (آلمان) در ۱۸۵۷ ثابت‌کرد که گازهای مشتعل طیفهایی بوجود می‌آورند که دارای یك رشته خطوط اختصاصی درخشان می‌باشند ، حال آنکه جامدات و مایعاتی که دراثر حرارت زیادمنیر شده باشند طیفهایی بدون خطوط روشن بوجود می‌آورند .

فرانهوفر قبلا متوجه شده بودکه درطیف سدیم گازی‌شکل ، خطوط زرد درخشان همان محلی را اشغال می‌کنند که خطوط سیاه در طیف خورشید . **بروستر** (Brewster) در ۱۸۴۹ ملاحظهٔ فوق را نسبت به‌سایر خطوط تعمیم داد . از اینرو است که **(لئون فوکو)** (Léon Foucault) فیزیکدان رصدخانهٔ پاریس دربارهٔ خطوط طیفی خورشیدی چنین اظهار عقیده کرد : «اینها نتیجهٔ تأثیر جو خورشید بر اشعهٔ ساطع‌ازآن‌بوده وهریك‌طیف‌مربوط به‌یك‌ماده می‌باشند».

فعلا همهٔ شرایط جمع شده بود برای اینکه در مطالعات طیفی روشی مناسب بوجود آید . این افتخار نصیب آلمانیها شد ؛ **کیرشف** (Kirchhoff)(۱۸۲۴-۱۸۸۷) و **بنسن** (Bunsen) (۱۸۱۱-۱۸۹۹) این روش اعجاب انگیز را ابداع کردند که «آنالیز طیفی» نامیده می‌شود . این روش این امکان را فراهم می‌آورد که از روی نوع خطوط طیف مربوط به یك منبع نور وترتیب آنها مواد متشکلهٔ این منبع‌را بشناسند . به عبارت واضحتر ؛ یك شعاع نورانی که از یك ستارهٔ دور دست به‌دستگاه طیف نگار بتابد این‌امکان را بوجود می‌آورد که بادقت کامل معلوم شود این ستاره از چه موادی ساخته شده است . بنابه اصل **دپله - فیزو** (Principe

(Doppler-Fizeau) تغییر مکان خطوط طیف مربوط به یك ستاره نسبت به‌وضع عادی آنها اجازه می‌دهد که دقیقاً معلوم شود آیا این ستاره به‌ما نزدیك می‌شود یا اینکه ازما دورمی گردد وسرعت این حرکت هم به‌دقت معلوم شود .

از انگلیسیها **ویلیام میلر** (William-Miller) (۱۸۷۰-۱۸۱۷) ، **ویلیام هوگنز** (William-Huggins) (۱۹۱۰-۱۸۲۴) ، از ایتالیائیها **دوناتی** (Donati) (۱۸۷۳ - ۱۸۲۶) ، **سچی** (Secchi) (۱۸۷۸-۱۸۱۸) ، از فرانسویها **ژانس** (Janssen) (۱۹۰۷-۱۸۲۴)، ازآمریکائیها **پیکرینگ** (Pickering) (۱۹۱۹-۱۸۴۶) ، ازآلمانیها **وگل** (Vogel) -۱۸۴۱) ۱۹۰۷) **وماکس‌ولف** (Max Wolf) (۱۹۳۲-۱۸۶۳) دربارهٔ آنالیز طیفی کار کردند و در اثر کوششهای ایشان بعضی عناصر موجود در خورشید ، درستارگان ، در سحابیها ، درستارگان دنباله‌دار ودرسیارات شناخته شدند . شاخهٔ جدیدی از نجوم پدید آمده بود به‌نام نجوم فیزیکی یا آسترو فیزیك که خود به چند شاخهٔ دیگر تقسیم می‌شد : فیزیك خورشیدی که موضوع مطالعهٔ آن ساختمان خورشید بود ، فیزیك کیهانی که دربارهٔ ساختمان ستارگان مطالعه می‌کرد و فیزیك سیارات که ترکیبات سیارات را مورد مطالعه قرار می‌داد .

در رأس آفرینندگان این نظام جدید مخصوصاً باید از **سکی ، ژانسن و دلاندر** نام برد .

شهرت عمدهٔ **ر.پ. آنجلوسکی** مدیر رصدخانهٔ کالج رمی‌بیشتر مربوط به‌مطالعات‌روی خورشید است . بعضی‌منجمان مدعی بودند که زبانه های قرمزی که به هنگام کسوف کامل در اطـراف خورشید مشاهده می‌شود تصورات بصری است اما سکی برای اولین بار اعلام‌کردکه این زبانه‌ها حقیقی‌هستند. همچنین وی برای اولین بار توجه پیدا کـرد کـه لکه‌های خورشید نوری سرخ رنگ صادر می‌کنند . سکی در اثرش به‌نام «خورشید» نظریه‌ای راجع به‌خورشید اظهار داشته است. وی فرض می‌کند که خورشید به صورت توده‌ای سیال با درجهٔ حرارت بسیار زیاد بوده و فلزات موجود درسطح آن به حالت بخار دائم می‌باشند . این بخارات که در قسمتهای بالامشتعل هستند . پوششی بوجود می‌آورند که فتو سفر خورشید است . اشعه‌ای که ازاین جو صادر می‌شود دارای طیف خط دار هستند زیراکه ازیك طبقهٔ بخارات بسیار سرد فلزات به‌نام کروموسفر عبور می‌کنند . بالاتر ازاین طبقه ، پوششی دیگر وجود دارد که همان تاج خورشید است . تودهٔ داخلی خورشید ازحرکات شدید در هیجان است که ازاثر آن طبقات فتوسفر وکرموسفر برپا می‌شوند و از آن فورانهایی حقیقی بوجود می‌آید کـه همان زبانه‌های خورشید می‌باشد .

بازهم ، سکی اولین کسی است که وجود لکه‌های سفید رنگ با شکل متغیر رادرقطبین سیارهٔ مریخ اعلام داشته است وی این نظر را در اثری که به سال ۱۸۵۹ چاپ‌کرده اظهار کرده است . وی همچنین در این اثر وجود خطوطی آبی‌رنك را در مریخ اعلام‌کرده کـه بعدهـا به‌نام « کانالهای مریخ » معروف شده است .

طبقه‌بندی واقعی ستارگان نیز ازکارهای سکی است .

ژول ژانسن مـانند سکی یکی از مـروجین فیزیك خورشیدی است ، و در اثر کشفیات شخصی وی این علم به پیشرفتهای فوق‌العاده‌ای نائل‌آمده است. ژانسن در ابتدا نقاش بود اما بعد به‌فیزیك وریاضیات پرداخت . درسالهای ۱۸۵۲ و ۱۸۵۵ در این علوم لیسانسیه شد . در ۱۸۶۰ باگذراندن رساله‌ای دربارهٔ مشاهدات عنوان دکترا بدست آورد . وی نمونه‌ای از آنهایی است که تمام عمر خود را وقف تحقیقات علمی‌کرده‌اند ؛ هیچگاه شانه از زیربار خالی نکرد ، اظهار خستگی‌ننمود ، باهر سنی که داشت ازهمراهی باهیچ میسیون علمی حتی بامأموریتهای خطرناك سرباز نزد ، وبالاخره موفق شد علم نجوم فیزیکی را بـه پیشرفت کامل برساند . از بین میسیونهایی که وی از طرف آکادمی علوم مأموریت شرکت درآنهاراداشته یکی‌مربوط به‌مشاهدهٔ کسوف کامل‌خورشید۱۸۶۸ در **جنتور** (هندوستان) است که در نتیجهٔ آن وی موفق شد طبیعت زبانه‌های خورشید را معین‌کند . یکی هم مربوط بـه کسوف‌کامل ۱۸۷۱ آسیا است‌که مطالعهٔ راجع به‌تاج خورشید را برای وی میسر ساخت . در ۱۸۷۶ مـأموریت یافت کـه رصدخانـه‌ای اختصاصی مربوط به تحقیقات نجوم فیزیکی در پاریس بنانهد . خود وی اولین مدیر این رصدخانه می‌باشد . این رصدخانه ابتدا در **مونت مارت** ساخته شد و بعد در سال ۱۸۷۷ به ساختمانهای کاخ قدیمی واقع در **مدن** منتقل شد.

طیف ستارگـان کـه قبلا توسط **فرانهوفر** در ۱۸۲۳ موردمطالعه واقع شده بودبعداً به‌وجه خاصی ازطرف **دوناتی** در ۱۸۶۰ ، **هوگنز ومیلر**در۱۸۶۲ و۱۸۶۴ و**پیکرینگ** در۱۸۸۱ موردبررسی وتحقیق قرارگرفت ، در۱۸۸۴ **دونر** سوئدی فهرستی شامل خطوط طیفی ۳۵۲ ستاره منتشر ساخت. عـلاوه بـر آن از طـرف منجمین فـرانسوی **شارل ولف** (Charles wolf) و **ژرژ ریه** (George Rayet)

سه‌ستارهٔ کوچك خیلی نزدیك به‌هم درصورت فلکی دجاجه کشف کردند که طیف آنها از لحاظ خطوط روشنی که داشت قابل توجه بود . ازآن زمان، این ستارگان به‌نام «ستارگان ولف‌ـ ریه» نامیده می‌شوند .

درمطالعات‌طیفی سحابیها اولین کشف مهم توسط **هوگنز** در ۱۸۶۴ بعمل آمد . وی در طیف کهکشان **هلیکس** سه خط روشن مجزا ازهم مشاهده کرد درصورتی که انتظارداشت طیفی متصل باخطوط تاریك مانند طیف ستارگان مشاهده کند. او به‌ناحق این‌خطوط را به‌جسمی ناشناس به‌نام نبولیوم‌مربوط دانست‌که ازجمله عناصری است که در شرایط خاص فیزیکی وجود دارند . اما وی ازراه استدلال دریافت که سحابی مورد آزمایش گازی شکل بوده است . این مشاهده موجب آن شد که همچنانکه هرشل پیش‌بینی کرده بود کهکشانها به دودستهٔ بزرگ تقسیم شوند. کهکشانهای گازی و کهکشانهایی که به صورت تودهٔ ستارگان هستند .

استفاده از آنالیز طیفی در مطالعهٔ ستارگان دنباله دار برای اولین‌بار توسط **دوناتی** در۱۸۶۴ ، **سکی** و **هوگنز** در ۱۸۶۶ و**سکی** و **ولف** در ۱۸۶۸ عملی شد اینان محقق ساختندکه ستارگان دنباله‌دار شامل هیدروکربورها می‌باشند.

استفاده ازطیف نور درمطالعات مربوط به‌اجزاء سیارات اولین دفعه نسبت به‌ماه انجام گرفت . مطالعهٔ طیف نورانعکاسی ماه توسط **هوگنز**، **دیلر** و **ژانسن** این نتیجه را دربرداشت که ماه دارای جو نیست .

غیر ازآنچه که گفته شد روش طیفی دیگری توسط **دوپلر** (Doppler) اتریشی و**فیزو** (Fizeau) فرانسوی ابداع شدکه بدان وسیله سرعت شعاعی ستارگان تعیین می‌شد (سرعتی که ستارگان درجهت شعاع بصری دارا می‌باشند).

عکسبرداری نجومی

همزمان با طیف نگاری ، فن دیگری درنجوم دورهٔ معاصر نزدیك راه یافت که نتایج فوق‌العاده‌ای به‌بارآورد . این‌فن ، عکسبرداری نجومی بود . اهمیت این فن از ۱۸۳۹ شروع شد . در آن زمان، **آراگو**ضمن گزارش کشفهای عالی**نیپس** (Niepce) و **داگر** (Daguerre) به آکادمی علوم ، تأثیر شایانی را که این‌فن می‌تواند درتوسعهٔ علم نجوم داشته باشدگوشزدنمود.

دیری نپائید که پیش‌بینی‌های وی جامهٔ حقیقت به خود پوشید . در ۱۸۴۵ **فیزو** و **فوکو** اولین عکس راازخورشید برداشتند. یکی‌ازپیشقدمان عکسبرداری نجومی**وارن‌دولارو** (Waorren de la Rue) انگلیسی عضومؤسسهٔ سلطنتی است کـه در ۱۸۵۹ بهترین عکسهائی از ماه ، خورشید ، مشتری وزحل برداشت و در **کیو** (Kew) اقدام به ساختن یك فوتوهلیوگراف (دستگاه مخصوص عکسبرداری ازخورشید) کردکه امکان بررسیهای روزانهٔ لکه‌های خورشید را فراهم می‌ساخت .

منجم آمریکایی **دراپر** (Draper) در ۱۸۷۱ اولین عکس ازطیف ستارهٔ نسر واقع را فراهم آورد که درآن چهار خط ملاحظه می‌شد . **هوگنز** بین سالهای ۱۸۷۵ و ۱۸۸۲ باموفقیت توانست که ازطیفهای ستارگان ، ستارگان دنباله‌دار وکهکشانهـا عکسبرداری کند . وی در ۱۸۹۷ موفق شدکـه عکسهای‌رنگی‌ازطیفهای مربوط به‌چندستارهٔ دوقلورا تهیه‌کند.

تاقبل‌ازسال ۱۸۹۲ درهیچیك ازمشاهدات قرص‌خورشید هرچند هم که بزرگ شده بود ، کرموسفر قابل بررسی نبود. دراین سال ، منجم فرانسوی **هانری دلاندر** (Henri Deslandres) و منجم آمریکایی **ژرژ الری هال** (George Ellery Hale) به‌استعانت دستگاه عکسبردار طیف خورشید که تفکیك اشعهٔ خورشید را میسرمی‌ساخت موفق شدند که تمامی کرموسفر را مورد بررسی قراردهند .

دریاسالار **موشه** (Mouchez) (۱۸۹۲-۱۸۲۱) که یکی ازمنجمین عالیقدر است وبعد از **لووریه** به مدیریت رصدخانهٔ پاریس منصوب شده و به خاطر مشاهداتش در هنگام عبور زهره از مقابل خورشید در ۱۸۷۴ مشهور می‌باشد در ۱۸۸۴ عکسهای قابل توجهی را به آکادمی علوم عرضه داشت که توسط برادران **پل** و **پرسپرهانری** (Paul - Prosper Henry) در رصدخانهٔ پاریس از قسمتی از کهکشان راه شیری گرفته شده بود فکر تکمیل این عکسها انگیزه‌ای شد تاوی به تهیهٔ یك نقشهٔ عکسبرداری شده از تمام آسمان بپردازد . برای این کار چهار کنگره در سالهای ۱۸۸۷ ، ۱۸۸۹ ، ۱۸۹۱ و۱۸۹۶ دررصدخانهٔ پاریس‌تشکیل شد و تصمیم براین اتخاذ شد کـه کرهٔ سماوی به ۱۸ منطقه تقسیم شود وتهیهٔ عکس هر قسمت به‌یکی ازرصدخانه‌های جهان اختصاص یابد . برای تهیهٔ نقشه‌ای از تمام آسمان پیش بینی شد که پنج هزار قطعه عکس۱۶×۱۶ سانتیمتر لازم می‌باشد. برای اینکه‌آثارعکاسی حاصل محفوظ بماندلازم‌بودکه‌هرعکس را روی ورقه‌های مسی به‌اندازه‌های مناسب برگردان کنند . این اوراق اسناد گرانبهائی می‌باشند .

باعکسبرداری نجومی ، غیر ازتهیهٔ نقشهٔ کرهٔ آسمان ، نقشهٔ کاملی بامقیاس بزرگ از کرهٔ ماه نیز فراهم آمد .

نقشه‌های ترسیمی متعددی ازکرهٔ ماه تهیه شد : از جمله نقشه‌های **بر ومادلر** (Beer ، Mädler)، نقشه‌های **نیسن**

(پائین صفحهٔ ۸۳)

مسائل حل نشدهٔ ریاضی

تألیف:
C. STANLEY OGILVY
ترجمهٔ: ع. م.

بخش چهارم - مسائل هندسه

بقیه از شمارهٔ گذشته

در هندسهٔ مسطحه، قطر یك شکل عبارتست از بزرگترین خطی که‌می‌توان بین دو نقطه از نقاط آن‌شکل رسم کرد. از بین شکلهای مسطحه‌ای که محیط و قطر آنها مقدار معلوم است کدام است که دارای مساحت مینیمال می‌باشد؟ این سؤال به نظریهٔ مجموعه‌های محدبی مربوط می‌شود که اجزاء آنها بطور عجیبی مختلط می‌باشند. بهره برداری از یك چنین ملاحظاتی انجام می‌گیرد که دقیقاً به نظریهٔ تحلیلی نامساویها مربوط می‌باشند، و در همین زمینه است که مسائل حل نشدهٔ دیگری مطرح می‌شود.

شکل مسطح و محدب F را درنظر می‌گیریم که دوقاطع عمود بر هم به طولهای a و b محیط آن P را به چهارقسمت برابر تقسیم کرده باشند. چنین فکرمی‌کنند که حداقل مقدار $2(a+b)$ برابر با P می‌باشد. تساوی $2(a+b)=P$ جز درمورد مستطیل صدق نمی‌کند که دقیقاً یك شکل محدب نیست. همچنین تصور می‌کنند که حداقل مقدار $(a+b)$ برابر باقطر F می‌باشد. اما هیچ یك از این خواص هنوز ثابت نشده است.

دایره منحنی مسطحی است که همه وترهای آن که بر نقطهٔ معلوم (مرکز) می‌گذرند دارای طول ثابت می‌باشند. اما این خاصیت خاص دایره نیست: منحنیهای محدب دیگری وجود دارند که دارای چنین خاصیتی می‌باشند. آیا منحنی مسطح، محدب یا مقعر، وجود دارد که درآن همهٔ وترهای گذرندهٔ بردو نقطهٔ A و B با هم برابر باشند یعنی همهٔ وترهایی که بر A می‌گذرند و همهٔ وترهایی که بر B می‌گذرند دارای طولهای مساوی با هم باشند؟

۱- فضای سه بعدی اقلیدسی جسم محدب S و یك نقطهٔ دلخواه O واقع در داخل آن و نقطهٔ P را به نوعی درنظر می‌گیریم که‌طول قطعه خط OP برابر باشد با مساحت مقطع جسم S باصفحهٔ عمود بر OP و گذرندهٔ بر O. وقتی که‌صفحهٔ قاطع‌حول O بچرخد آیا نقطهٔ P سطحی محدب ایجاد خواهد کرد؟

ساقه‌ای استوانه‌ای شکل همگن با مقطع دایره فرض می‌کنیم که سبك بوده و به‌هر وضعی که‌آنرا روی آب قراردهیم به حال‌تعادل واقع شود یعنی اگرآنرا حول محورش‌بچرخانیم تعادل آن به هم نخورد. **ه. اوئرباخ** معلوم کرده است که این خاصیت مخصوص‌دایره نیست بلکه برای منحنیهای دیگری هم‌صدق‌می‌کند. **هوگواستنهوس** دربحث‌مربوط به‌این‌منحنیها چنین‌می‌گوید «ازراه‌محاسبه‌معلوم‌می‌شود که این‌منحنیها از نوعی هستند که‌هروتر که‌محیط آنهارا به‌اوقسمت برابر تقسیم کند درعین حال مساحت آنها رانیز به‌دوقسمت برابر تقسیم کندو نتیجه‌می‌شود که‌این‌خاصیت به‌دایره اختصاص ندارد» مجموعهٔ این‌ادعاها مبهم است‌زیرا به وضوح نمی‌دانند که «خاصیت» از چه قرار است در موردا‌ینکه این خاصیت که هر وتری که محیط را به دو قسمت برابر تقسیم کند در عین حال مساحت را هم به دو قسمت برابر تقسیم کند منحصر به دایره نیست امری واضح است و احتیاجی به یاد آوری آن نیست؛ چنانچه در مورد مستطیل هم صادق است‌وبسیاری ازاشکال‌دیگر، اما یك چنین شکلهایی برای‌اجسام شناورحالت‌تعادل‌پایدار ایجادنمی‌کنند؛ یك‌تختهٔ بامقطع مستطیل را فقط در دو وضع می‌توانیم روی آب قرار دهیم تا به حال تعادل باشد. شرط فیزیکی تعادل یك جسم آنست که مرکز ثقل‌قسمت غوطه‌ور آن با مرکزثقل تمام جسم روی یك خط‌قائم قرارداشته باشند.

این مسئله در هندسهٔ سه بعدی هنوز حل نشده‌است. آیا جسم محدبی که در تمام اوضاع بتواند روی آب تعادل خود را حفظ کند الزاما کره است؟

مسائلی نظیراین باز هم می‌توان مطرح کرد یکی از این

نوع را **ه . ت . کرافت** طرح کرده‌است. وی مقاطع مسطح مختلف یك جسم صلب محدب را بـه ترتیب زیر دسته بندی و نامگذاری کرده است :

V : مقاطعی که از جسم حجم معین جدا می‌کنند .

S : مقاطعی که‌قسمت معینی ازسطح‌جسم را جدا می‌کنند

P : مقاطعی که دارای مساحت معلومی هستند .

T : مقاطعی که با صفحات مماس بر جسم در همهٔ نقاط تقاطع زاویهٔ معین می‌سازند .

آنگاه مسائلی مطرح می‌شود که درآنها دوشرط ازچهار شرط بالا شرکت داده شده است مثلا جسمی تعیین شود که هر مقطع از نوع V در عین حال از نوع S هم باشد، کره مسلماً چنین جسمی است . غیر از این چقدر سؤالهای دیگر از این نوع می‌شود مطرح کرد ؟

در بارهٔ شکلهای مسطح محاط دریك چندضلعی مطالعات مختلفی انجام گرفته است . آیا با بعضی شرایط امکان دارد که وقتی این منحنیها روی خودشان می‌لغزند در هر حال بر همهٔ ضلعهای چند ضلعی مماس باشند؟غیراز دایره منحنیهای دیگری به تعداد نامحدود وجود دارد که در یك n ضلعی محاط بوده وقتی روی خودشان، می‌لغزنـد بر ضلعهای n ضلعی مماس باقی می‌مانند . ازبین این منحنیها کدام است که دارای کوچکترین مساحت باشد ؟ درحالتهای $n > 4$ پاسخ به‌این سؤال پیدا نشده است. هرچنداین‌سؤالها به صورت مجرد ریاضی مطرح می‌شوند اما گاهی در مکانیك هم موارد استعمال دارند .

در هریك از زمینه های خاص اشخاصی وجود دارند که چنان شیفتهٔ وضع مخصوص‌یك مسئله شده‌اند که همهٔ اوقات آزاد وحتی فعالیتهای شغلی خودرا فدای حل مسئله‌کرده در آن راه مهارتی فوق‌العاده بـدست آورده‌انـد . یکی از این اشخاص **میخائیل گلدبرگ** سرمهندس ادارهٔ‌تسلیحات نیروی دریائی ایالات متحدهٔ آمریکااست که مخصوصاً دربارهٔ منحنیهای‌محاطی، که قبلاازآن نام‌برده‌شد،فعالیتهای‌جالبی‌انجام‌داده‌است وی‌این منحنیها راگردان نامیده است؛ در جزوه‌ای‌که به سال ۱۹۵۷ منتشرساخته دربارهٔ گردانهایی‌که درشرایطمسئلهٔ مذکوردرفوق صـدق می‌کند تحقیقات خـود را شرح داده است . وی مسئلهٔ دیگری از همان نوع به صورت زیر مطرح کرده است : «آیا غیرازکره اجسام دیگری وجود دارندکه برسه وجه یك‌منشور منتظم مثلث القاعده مماس‌بوده چون در جهتهای مختلف روی خودشان دوران‌کنند همواره‌برسه وجه‌منشور مماس‌باقی‌بمانند؟»

در هر منحنی محدب می‌توان سه وتر رسم کرد که از وسط یکدیگر گذشته‌با یکدیگرزاویهٔ شصت درجه بسازند. این موضوع را **استنهوس** ثابت کرده‌است ؛ وی تصور می‌کندکه این خاصیت برای هر منحنی سادهٔ محدب یا غیر محدب صدق می‌کند اما نتوانسته است‌این ادعا را ثابت‌کند .

غیرممکن است که بتوان یك سطح محدب بسته را تغییر شکل داد؛این خاصیت مورد استعمالی درشکل تخم مرغهادارد، اگر بنا باشد تخم مرغ به شکل دیگری ساخته شود لازم‌است که پوست آن خیلی ضخیمتر باشد. سطح یك توپ پینگ پنگ‌در تغییر شکل یا پاره می‌شود و یا کشیده می‌گردد . اگر از یك سطح محدب قطعه‌ای، هرچقدر که کوچك باشد ، بیرون بکشند در این صورت آن سطح تغییر شکل خواهد داد . اما اگر در آن‌سطح شکافی ایجادکنند یابعضی نقطه‌های تنهای‌آنرا بردارند در این صورت نمی‌دانند آیا چنین‌کاری برای تغییر شکل سطح کافی هست یا نه ؟

هر چند وجهی مـحدب بسته‌ای صلب است (شکل آن لایتغیر است) . اما **هیلبرت** و **کهن‌وسن** نشان‌دادندکه چند-وجهیهای بستهٔ غیر محدب (یعنی تورفته) وجود داردکه وجوه آنها را می‌توان بین هم عوض کرد . آنچه نامعلوم است این می‌باشدکه نمی‌دانندکدام تغییرمکان حجم را تغییرمی‌دهد .

نجوم (دنباله از صفحهٔ ۸۱)

(Neison)، نقشه‌های**لرمن** (Lohrmann). این نقشه‌ها هرچند که به نسبت خوب بودند اما هیچکدام به‌دقت یك نقشهٔ عکسبرداری شده نبودند، برای اینکه پستی وبلندیهای فراوان سطح‌کرهٔ ماه به‌وضوح معین شوند مدارك غیرقابل انکاری لازم بود وتهیهٔ این‌چنین مدارکی جز ازراه عکسبرداری میسرنبود ازاین جهت ودراثر فعالیتهای **موریس‌لووی** (Maurice Loewy) که پس ازمرگ **تیسران** نامزد مدیریت رصدخانهٔ پاریس شده بـود . ازطرف این رصدخـانه به‌کمك یك ابزار استوائی آرنج دار با فاصلهٔ کانونی ۱۸ متر به تهیهٔ نقشهٔ عکسبرداری شده ازکرهٔ ماه اقدام شد. این فعالیت پس‌ازمرگ لووی‌توسط دستیارانش **پیرپوئیزو** (Pierre Puiseux) و **م . لومروان** (M. le Morvan) دنبال شد . اینان هردو منجم وعضو رصدخانهٔ پاریس بودند و اولی علاوه برآن عضو مؤسسه‌ای بود که بایستی دربارهٔ ماه و کهکشان مطالعات دقیق بعمل آورد . این اطلس که از کرهٔ ماه تهیه شد یکی از آثار عالی و پرافتخاری است که حتی تا سالهای اخیر مورد استفادهٔ دانشمندان متخصص درامور ماه واقع می‌شد .

قضیه هایی مربوط به:

محور اصلی

دوایر متحدالمحور با دایرهٔ محیطی مثلث

نوشتهٔ: D.Moody Bailey

مجلهٔ: Mathematics magazine

ترجمه: جعفر آقایانی چاوشی

دانش آموز ششم ریاضی دبیرستان دکتر نصیری

(توجه ـ روابط مندرج در مقالهٔ زیر برای اندازهٔ جبری قطعات منظور شده است).

D و D' دو نقطه از ضلع BC از مثلث ABC می‌باشند دو دایرهٔ اختیاری (C و B) و (D' و D) اولی بر B و C و دومی بر D و D' می‌گذرد و ممکن است متقاطع باشند یا نباشند.

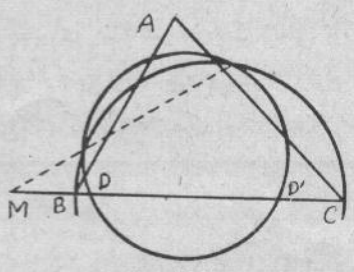
فرض می‌کنیم محور اصلی این دو دایره ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کند. این نقطه دارای یك قوت مشترك نسبت به دو دایره است. یعنی:

$$MB\cdot MC = MD\cdot MD'$$

با توجه به شکل (۱) داریم:

$$MB(MB+BD+DC) = (MB+BD)(MB+BD')$$

از این رابطه پس از عملیات لازم نتیجه می‌شود:



(شکل ۱)

$$(\alpha)\quad MB = \frac{(BD\cdot BD')}{(DC-BD')}$$

اکنون نسبت $\frac{MB}{MC}$ را بررسی می‌نمائیم

این نسبت را می توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MB}{(MB+BD+DC)}$$

مقدار MB را از رابطهٔ (α) در طرف راست رابطهٔ اخیر قرار می‌دهیم:

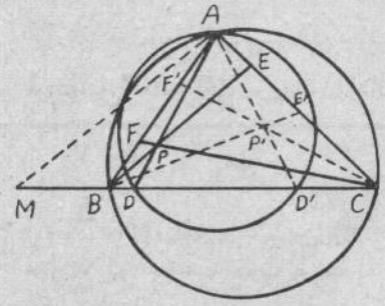
$$\frac{MB}{MC} = \frac{BD\ BD'}{BD\cdot BD'+(BD+DC)(DC-BD')} = \frac{BD\cdot BD'}{DC(BD+DC-BD')} = \frac{BD\cdot BD'}{DC(BC-BD')} = \frac{BD}{DC}\cdot\frac{BD'}{D'C}$$

با توجه به اینکه $MB = -BM$ است خواهیم داشت:

$$\frac{BM}{MC} = -\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BD'}{D'C}$$

این رابطه هنگامی‌که M بین C و B و یا در سمت راست C باشد نیز برقرار است.

از آنچه که ذکر شد نتایج زیر حاصل می گردد.



قضیهٔ ۱ـ به فرض اینکه D و D' دو نقطه روی ضلع BC از مثلث ABC باشد، محوراصلی دو دایره‌ای که یکی از رئوس B و C مثلث و دیگری از نقاط D و D' می گذرد، اگر ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کند، داریم:

$$\frac{BM}{MC} = -\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BD'}{D'C}$$

به طریق متشابه ثابت می‌شود که اگر دو نقطهٔ E و E' روی ضلع CA و دونقطهٔ F و F' روی ضلع AB واقع باشند

محور اصلی دو دایرهٔ (E' و E) و (C و A) اگر ضلع CA را در نقطهٔ N قطع کند داریم :

$$\frac{CN}{NA} = -\frac{CE}{EA} \cdot \frac{CE'}{E'A}$$

و اگر محور اصلی دو دایـرهٔ اختیـاری (F و F') و (A و B) ضلع AB را در نقطهٔ O قطع کند داریم:

$$\frac{AO}{OB} = -\frac{AF}{FB} \cdot \frac{AF'}{F'B}$$

فرض می‌کنیم دو نقطهٔ P و P' دو نقطه از مثلث ABC باشند کـه **مثلث سوائی** (Cevian triangles) آنها به ترتیب DEF و $D'E'F'$ باشد. می‌توانیم از دایره های اختیاری (C و B) و (D' و D) آن دو دایره را انتخاب کنیم که از رأس A مثلث مفروض بگذرند. بنابراین دایـرهٔ (C و B) دایرهٔ محیطی مثلث می‌شود، همچنین می‌توانیم ازدوایر اختیاری (A و C) و (E' و E) دو دایره‌ای را اختیار کنیم که از رأس B بگذرند. و همچنین از دوایر اختیاری (F و F') و (A و C) آن دایره‌ها را اختیار کنیم که هر دو از رأس C مرور کنند . در این حالت نیز دوایر (A و C) و (A و B) مانند دایرهٔ (C و B) همان دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌شوند . اکنون محور اصلی دایرهٔ محیطی مثلث و دایرهٔ ADD' ضلع BC را در M قطع می‌کنند. پس .

$$\frac{BM}{MC} = -\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BD'}{D'C}$$

و محور اصلی دایرهٔ محیطی مثلث و دایرهٔ CFF' ضلع AB را در O قطع می‌کند .

$$\frac{AO}{OB} = -\frac{AF}{FB} \cdot \frac{AF'}{F'B}$$

پس داریم:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AO}{OB}$$

$$= -\left(\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}\right)\left(\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B}\right)$$

بنا به قضیهٔ **سوا** هر یك از حاصل ضربهای :

$$\left(\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}\right)$$

و

$$\left(\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B}\right)$$

مساوی ۱+ است پس:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AO}{OB} = -1$$

و طبق قضیهٔ **منلائوس** معلوم می‌شود که نقاط M و N و O بر یك استقامت هستند.

قضیهٔ ۲ـ به فرض اینکه دونقطهٔ P و P' دو نقطه از مثلث ABC باشند که مثلثهای سوائـی آنها DEF و $D'E'F'$ باشد ومحوراصلی دایرهٔ محیطی مثلث و دایرهٔ ADD' ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کند و نیز محور اصلی دایرهٔ محیطی مثلث و دایرهٔ BEE' ضلع CA را در نقطـهٔ N و محور اصلی دایرهٔ محیطی مثلث و دایرهٔ CFF' ضلع AB را در O قطع کند داریم :

$$\frac{BM}{MC} = -\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BD'}{D'C}$$

و

$$\frac{CN}{NA} = -\frac{CE}{EA} \cdot \frac{CE'}{E'A}$$

و

$$\frac{AO}{OB} = -\frac{AF}{FB} \cdot \frac{AF'}{F'B}$$

و نقاط O و N و M بر یك استقامت می‌باشند.

در قضیهٔ (۲) فرض‌می‌کنیم p' محل تلاقی ارتفاعات‌مثلث باشد، می‌دانیم که :

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}$$

و

$$\frac{CE'}{E'A} = \frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}$$

و

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}$$

که در آن a و b و c به ترتیب اندازه‌های اضلاع BC و CA و AB مثلث مفروض هستند . در این حال زاویهٔ $AD'D$ یك قائمه است و AD قطر دایرهٔ ADD' می‌شود. قضیهٔ زیر که حالت خاصی از قضیهٔ (۲) است نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۲A ـ اگر P نقطه‌ای از مثلث ABC باشد که مثلث سوائی‌آن DEF باشد. سه‌محور اصلی‌مربوط به‌دایرهٔ محیطی و سه دایرهٔ به قطر AD و BE و CF اضلاع AB و CA و BC را به ترتیب در نقاط O و N و M قطع می‌کنند که بر یك استقامت بوده و داریم :

$$\frac{BM}{MC} = -\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}\right)\frac{BD}{DC}$$

$$\frac{CN}{NA}=-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}\right)\frac{CE}{EA}$$ و

$$\frac{AO}{OB}=-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}\right)\frac{AF}{FB}$$ و

اکنون یك منحنی مقطع مخروطی واقع در صفحهٔ مثلث ABC را در نظر می‌گیریم که ضلع BC را در D و 'D ، ضلع CA را در E و 'E و ضلع AB را در F و 'F قطع کند . بنا به قضیهٔ **کارنو** (Carnot) داریم :

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1$$

و قضیهٔ (۲) به طریق زیر تعمیم می‌یابد :

قضیهٔ ۲ B ـ اگر یك منحنی مقطع مخروطی اضلاع BC و CA و AB از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط D ، 'D و E و 'E ، F و 'F. قطع کند، سه‌محور اصلی دایرهٔ محیطی مثلث و دایره‌های ADD' و AEE' و CFF' به ترتیب اضلاع BC و CA و AB را در سه‌نقطه واقع بر یك استقامت قطع می‌کنند.

دوباره فرض کنیم که P نقطه ای ازمثلث ABC باشد که مثلث سوائی‌اش DEF باشد. دایره‌های ADM و BEN و CFO را رسم کرده و فرض می‌کنیم محور اصلی دایرهٔ محیطی و دایرهٔ ADM ضلع BC را در 'D و محور اصلی دایرهٔ محیطی و دایرهٔ BEN ضلع CA را در 'E و بالاخره محور اصلی دایرهٔ محیطی مثلث و دایرهٔ CFO ضلع AB را در 'F قطع کند . از قضیهٔ ۱ حاصل می‌شود :

$$\frac{BD'}{D'C}=-\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BM}{MC}$$

$$\frac{CE'}{E'A}=-\frac{CE}{EA}\cdot\frac{CN}{NA}$$ و

$$\frac{AF'}{F'B}=-\frac{AF}{FB}\cdot\frac{AO}{OB}$$ و

$$\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}=$$ و

$$=-\left(\frac{B'D}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AO}{OB}\right)$$

قضیهٔ سوا نشان می‌دهد که :

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

و از قضیهٔ منلائوس حاصل می‌شود.

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AO}{OB}=-1$$

بنابراین :

$$\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1$$

و طبق‌عکس‌قضیهٔ سوا محورهای اصلی 'AD و 'BE و 'CF باید دریك نقطه متقارب باشند. 'P نقطهٔ تلاقی سه محور اصلی دارای یك قوت مشترك نسبت به چهاردایرهٔ ABC و ADM و BEN و CFO می‌باشد بنابراین مرکز اصلی این چهار-دایره است .

قضیهٔ ۳ ـ P با مثلث سوائی آن DEF نقطه‌ای از صفحهٔ مثلث ABC می‌باشد. نقاط M و N و O بر یك استقامت بوده و به ترتیب روی اضلاع BC و CA و AB قرار دارند. سه محور اصلی دایرهٔ محیطی و دوایر ADM و BEN و CFO در یك نقطه مانند 'P متقاربند که 'P مرکز اصلی این چهار دایره بوده و نسبتهای زیر بر قرار می‌باشد .

$$\frac{BD'}{D'C}=-\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BM}{MC}$$

$$\frac{C'E}{E'A}=-\frac{CE}{EA}\cdot\frac{CN}{NA}$$ و

$$\frac{AF'}{F'B}=-\frac{AF}{FB}\cdot\frac{AO}{OB}$$ و

اگر P محل تلاقی ارتفاعات مثلث باشد AM و BN و CO، اقطار دوایر ADM و BEN و CFO خواهند بود و قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۳A ـ اگر نقاط M و N و O ، بریك‌استقامت بوده و به ترتیب روی اضلاع BC و CA و AB از مثلث ABC باشند. سه محور اصلی دایرهٔ محیطی مثلث وسه‌دایره‌ای که اقطارشان AM و CO و BN است اضلاع AB و CA و BC مثلث را به ترتیب در نقاط 'D و 'E و 'F قطع‌می‌کنند قطعه خطهای 'AD و 'BE و 'CF درنقطهٔ 'P مرکز اصلی چهار دایره متقاربند ونسبتهای زیربرقرار می‌باشد:

$$\frac{BD'}{D'C}=-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}\right)\frac{BM}{CM}$$

$$\frac{CE'}{E'A}=-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}\right)\frac{CN}{NA}$$

$$\frac{AF'}{F'B}=-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}\right)\frac{AO}{OB}$$

فرض می‌کنیم P و P' که مثلثهای سوائی آنها DEF و D'E'F' است نقاط تلاقی خطوطی باشند که نسبت به نیمساز-های زاویه‌های مثلث قرینه‌اند (Isogonal Conjugates) خط مار بر P' اضلاع BC و CA و AB را به ترتیب در نقاط O و N و M قطع می‌کند و نقطهٔ تلاقی محور اصلی دایرهٔ محیطی و دایرهٔ BEN را با ضلع CA را E" ، نقطهٔ تقاطع محور اصلی دایرهٔ محیطی و دایرهٔ ADM ، با ضلع BC ، D" و نقطهٔ تقاطع محور اصلی دایرهٔ محیطی و دایرهٔ CFO را با ضلع AB ، F" می‌نامیم.

سه خط BF" و AD" و CF" در نقطهٔ P" متقاربند ، این نقطه مرکز اصلی دوایر ABC و ADM و BEN و CFO است .

از آنجا که خط MNO از P" می‌گذرد معلوم می‌شود که :

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BO}{OA}+\frac{AE'}{E'C}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \qquad [2]$$

از این رابطه حاصل می‌گردد:

$$\frac{CN}{NA}=\frac{CE'}{E'A}-\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BO}{OA}$$

$$=\frac{CE'}{E'A}-\frac{CD'}{D'B}\cdot\frac{BO}{OA}$$

بنا به قضیهٔ سوا :

$$\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1$$

است پس دو مقدار $\frac{CD'}{D'B}$ و $\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{CE'}{E'A}$ معادلند .

و چون P و P' دو نقطهٔ Isogonal Conjugates هستند ، معلوم است که :

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BD'}{D'C}=\frac{c^2}{b^2}$$

و

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{CE'}{E'C}=\frac{a^2}{c^2}$$

و

$$\frac{CD'}{D'B}=\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{BD}{DC}$$

و

$$\frac{CE'}{E'A}=\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{CE}{EC}$$

بنابراین :

$$\frac{CN}{NA}=\frac{CE'}{E'A}-\frac{CD'}{D'B}\cdot\frac{BO}{OA}$$

$$=\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{AE}{EC}-\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BO}{OA}$$

بالاخره با بکاربردن قضیهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{CE''}{E''A}=-\frac{CE}{FA}\cdot\frac{CN}{NA} \qquad (3)$$

و

$$\frac{BF''}{F''A}=\frac{BF}{FA}\cdot\frac{BO}{OA} \qquad (4)$$

اکنون عبارت :

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{BF''}{F''A}+\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{CE''}{E''A}$$

را درنظر می‌گیریم:

با استفاده از روابط (۳) و (۴) خواهیم داشت :

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{BF''}{F''A}+\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{CE''}{E''A}=$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{BO}{OA}-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{CN}{NA}$$

اگر در رابطهٔ اخیر به جای $\frac{CN}{NA}$ مقدارش‌را از رابطهٔ (۱) و به جای $\frac{BF}{FA}$ مساویش $\frac{CE}{EA}\cdot\frac{BD}{DC}$ را قرار دهیم داریم :

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{BF''}{F''A}+\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{CE''}{E''A}=-1$$

این می‌رساند که نقطهٔ P" محل تلاقی محورهای اصلی BE"و AD"و CF" باید روی‌دایرهٔ محیطی مثلث باشدپس قوت نقطهٔ F" نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث صفر است و چون این نقطه مرکز اصلی سه‌دایرهٔ دیگراست بناچارقوتش نسبت به‌این دوایر صفر خواهد بود . در نتیجه این چهار دایره از نقطهٔ P" می‌گذرند .

قضیهٔ ۳ B ـ P و P" نقاط تلاقی خطوطی می‌باشند که هر دو تای آنها نسبت به یك نیمساز زاویه از مثلث ABC قرینه بوده DEF مثلث سوائی P می‌باشد . خط مستقیم مار بر P' اضلاع AB و CA و BC را به ترتیب در نقاط O و N و M قطع می‌کند . دوایر CFO و BEN و ABC دارای یك نقطهٔ مشترك هستند. بدیهی است که چهار دایرهٔ

محیطی چهار مثلثی که ازتقاطع دو به دوی چهار خط در یك صفحه پدید می‌آیند دارای یك نقطهٔ مشترك می‌باشند. قضیهٔ B۳ نشان می‌دهد که چگونه چهار مثلث دیگر را تعیین می‌کنند که دارای همان خاصیت می‌باشند.

در قضیهٔ فوق‌الذکر نقاط P و P' هنگامی بر هم منطبق خواهند شد که P مرکز دایرهٔ محاطی داخلی یا مرکز دایرهٔ محاطی خارجی یکی از مثلثهای مفروض باشد. قضیهٔ B۳ وقتی که خط MNO حول یکی از این نقاط بچرخد بازهم برقرار خواهد بود.

فرض می‌کنیم خط MNO در قضیهٔ B۳ ازدو نقطهٔ P' و Q که به‌ترتیب Isotomic و Isogonal Conjugates های نقطهٔ P هستند بگذرد. اگر GHI مثلث سوائی نقطهٔ Q باشد برای نقاط P' و Q نسبتهای زیررا خواهیم داشت:

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{CD}{DB}$$

و

$$\frac{CE'}{E'A}=\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{AE}{EC}$$

و

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{BF}{FA}$$

و

$$\frac{BG}{GC}=\frac{CD}{DB}\quad,\quad\frac{CH}{HA}=\frac{AE}{EC}$$

و

$$\frac{AI}{IB}=\frac{BF}{FA}$$

خط MNO از نقطهٔ P' می‌گذرد ومی‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BO}{OA}+\frac{AE'}{E'C}\cdot\frac{CN}{NA}=1$$

و با ملاحظهٔ [۲] داریم.

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{BO}{OA}+\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \qquad (5)$$

از اینجا معلوم می‌شود که خط MNO شامل نقطهٔ Q نیز هست. همچنین داریم:

$$\frac{AI}{IB}\cdot\frac{BO}{OA}+\frac{AH}{HC}\cdot\frac{CN}{NA}=1$$

$$\frac{BF}{FA}\cdot\frac{BO}{OA}+\frac{CE}{EA}\cdot\frac{CN}{NA}=1 \qquad (6)$$

از حل معادلات (۵) و (۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{CN}{NA}=\left(\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}\right)\frac{AE}{EC}$$

و

$$\frac{AO}{OB}=\left(\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\right)\frac{BF}{FA}$$

نسبتهای $\frac{CN}{NA}$ و $\frac{AO}{OB}$ معلوم هستند و قضیهٔ منلائوس نشان می‌دهد که:

$$\frac{BM}{MC}=\left(\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2}\right)\frac{CD}{DB}$$

برای نقطهٔ P'' مرکز اصلی دوایر ABC و ADM و BEN و CFO داریم:

$$\frac{BD''}{D''C}=-\frac{BD}{DC}\cdot\frac{BM}{MC}$$

به جای $\frac{BM}{MC}$ مقدارش را از رابطهٔ فوق‌الذکر قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود:

$$\frac{BD''}{D''C}=\frac{(c^2-a^2)}{(a^2-b^2)}$$

به طریق مشابه خواهیم داشت،

$$\frac{AF''}{F''B}=\frac{b^2-c^2}{c^2-a^2}\quad و\quad\frac{CE''}{E''A}=\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}$$

بنا براین نقطهٔ P'' نقطهٔ **اشتینر** (Steiner) مثلث ABC می شود.

قضیهٔ C۳ ـ فرض می‌کنیم P نقطه‌ای واقع در صفحهٔ مثلث ABC باشد و DEF مثلث سوائی آن‌باشد. خطراستی که از isogonal و isotomic Conjugates نقطهٔ P می‌گذرد اضلاع AB و CA و BC را به ترتیب در O و N و M قطو می‌کند. دایره های ABC و ADM و BDN و CFO از نقطهٔ اشتینرمثلث مرورمی‌کنند. درصفحهٔ مثلث ABC تعداد دوایری از این نوع چه خواهد بود!

دو خط MNO و M'N'O' را در نظر می‌گیریم که ضلعهای مثلث ABC را قطع‌کنند. دایرهٔمحیطی مثلث ABC و دایره‌های AMM' و BNN' COO' را رسم می‌کنیم. با استفاده از خواص خطوط متوازی و با توجه به قضیه‌های ۲ و ۳ به‌سادگی قضیهٔ زیر نتیجه خواهد شد:

قضیهٔ ۴ ـ دو خط راست اضلاع BC و CA و AB از مثلث ABC را به ترتیب در O و N و M و O' و N' و M' قطع می‌کنند. سه محور اصلی دایرهٔ محیطی مثلث و دایره‌های AMM' و BNN' و COO' اضلاع AB

دنباله پائین صفحهٔ ۱۲۸

راهنمای ریاضیات متوسطه

دربارهٔ معادلات جبری

پرویز شهریاری

۱۰ ـ گویا کردن معادلات به صورت

$$\sqrt[3]{u} \pm \sqrt[3]{v} = a$$

با توجه به اتحاد :

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$$

طرفین معادلهٔ مفروض را مکعب می‌کنیم :

$$u \pm v \pm 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} \pm \sqrt[3]{v}) = a^3$$

وچون طبق فرض داریم : $\sqrt[3]{u} \pm \sqrt[3]{v} = a$ ، معادلهٔ مفروض به‌صورت زیر در می‌آید :

$$u \pm v \pm 3a\sqrt[3]{uv} = a^3$$

$$\Longrightarrow u \pm v - a^3 = \mp 3a\sqrt[3]{uv}$$

که اگر مجدداً طرفین معادله را مکعب کنیم ، به صورت زیر که معادله‌ای گویاست درمی‌آید :

$$(u \pm v - a^3)^3 = \mp 27a^3uv$$

مثال ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sqrt[3]{2x-3} + \sqrt[3]{3x+2} = 3$$

حل ـ بامکعب کردن طرفین معادله ، بدست می‌آید :

$$2x - 3 + 3x + 2 + 9\sqrt[3]{(2x-3)(3x+2)} = 27$$

ویا پس ازعملیات لازم :

$$9\sqrt[3]{6x^2 - 5x - 6} = 28 - 5x$$

دوباره طرفین معادله را مکعب می‌کنیم ، که پس‌ازمنظم کردن به‌معادلهٔ زیرخواهیم رسید :

$$125x^3 + 2274x^2 + 8115x - 26326 = 0$$

این معادله به‌صورت زیر تجزیه پذیر است :

$$(x-2)(125x^2 + 2524x + 13163) = 0$$

ریشهٔ عامل درجهٔ اول $x = 2$ و ریشه‌های عامل درجهٔ دوم موهومی است .

دراین معادله احتیاجی نیست که جواب بدست آمده راآزمایش کنیم ، زیرا طرفین معادله را دوباربه‌توان ۳ رساندیم وچون ۳ عددی است فرد ؛ جواب حقیقی اضافی در معادله وارد نمی‌شود وجواب بدست آمده قابل قبول است .

۱۱ـ یك نکته

می‌دانیم که در معادلات گنگ وقتی لااقل فرجهٔ یکی‌از رادیکالها زوج باشد ، اکثراً برای حل ناچار می‌شویم طرفین معادله را یك یا چندبار به‌توان زوج برسانیم واین عمل باعث می‌شود که ریشه‌های معادله یا معادلات دیگری را در معادلهٔ مفروض ما داخل کند . از این رو باید ریشه‌هائی که از این راه بدست می‌آید مورد آزمایش قرار گیرد تا ریشه‌های معادلهٔ مفروض ازبقیه جدا شود .

بهترین روش برای آزمایش ریشه‌ها اینست که‌آنها را در معادلهٔ اصلی (ویا یکی ازصورتهای معادلهٔ قبل ازمجذورکردن آن) امتحان کنیم ، تا معلوم شود که در معادله صدق می‌کند یا نه .

گاهی دیده شده است که بعضی ازمؤلفین کتب درسی ویا حل‌مسائل برای‌آزمایش‌ریشه‌ها به‌راه دیگری متوسل می‌شوند، بدین صورت که اگر به‌ازاء جواب بدست‌آمده ، تمام مقادیر زیر رادیکالها مثبت شود . آنرا قابل قبول ودرغیراین‌صورت خارجی تلقی می‌کنند .

این روش بکلی نادرست است وباید فراموش شود . به‌دو مثال زیر توجه بفرمائید :

مثال۱ ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{2x-5}$$

حل ـ اگر طرفین معادله را مجذور کنیم ، داریم :

$$x-3+x+2+2\sqrt{(x-3)(x+2)}$$
$$=4+2x-5+4\sqrt{2x-5}$$

ویا پس از خلاصه کردن :

$$\sqrt{x^2-x-6}=2\sqrt{2x-5}$$

دوباره طرفین معادله را مجذور می‌کنیم :

$$x^2-x-6=8x-20 \Rightarrow x^2-9x+14=0$$

این معادلهٔ درجهٔ دوم دوجواب ۲ و ۷ را قبول دارد و هردو جواب هم در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند زیرا هرکدام ازآنها را که درمعادله قراردهیم به‌یك اتحاد عددی می‌رسیم ، درحالی‌که $x=2$ در حوزهٔ رادیکالهای حقیقی ، برای معادلهٔ مفروض نیست .*

دراین مثال می‌بینیم که به‌ازاء $x=2$ مقادیر زیر بعضی ازرادیکالها منفی می‌شود ، درحالی‌که جواب معادله هست .

مثال ۲ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=5$$

حل ـ طرفین معادله را مجذور می‌کنیم :

$$2x-1+x-1-2\sqrt{(2x-1)(x-1)}=25;$$

و یا :

$$3x-27=2\sqrt{2x^2-3x+1}$$

مجدداً طرفین معادله را مجذور سپس ساده می‌کنیم :

$$x^2-150x+725=0 \Rightarrow x=5 \text{ و } 145$$

ازاین‌دوجواب $x=145$ درمعادلهٔ اصلی‌صدق می‌کند، در حالی‌که $x=5$ ریشهٔ معادلهٔ مفروض نیست و در آن صدق نمی‌کند .

دراین مثال با وجودی که $x=5$ درحوزهٔ رادیکالهای حقیقی است ، جواب معادله نیست .

۱۲ـ معادلات معکوسه

تعریف وشناسائی ـ به معادله‌ای معکوسه گوئیم که اگر α درآن صدق کند $\frac{1}{\alpha}$ و یا $-\frac{1}{\alpha}$ ـ هم درآن صدق کند که در صورت اول **معکوسهٔ مثبت** و در صورت دوم **معکوسهٔ منفی** نامیده می‌شود . به‌عبارت دیگر :

معکوسهٔ مثبت معادله‌ای است که باتبدیل x به $\frac{1}{x}$ به‌خودش تبدیل شود ،

ومعکوسهٔ منفی معادله‌ای است که باتبدیل x به $-\frac{1}{x}$ به خودش تبدیل شود .

ازاین تعریف نتایج زیر مستقیماً بدست می‌آید :

I ـ معادلهٔ معکوسهٔ منفی نمی‌تواند ازدرجهٔ فرد باشد.

II ـ اگر معادلهٔ معکوسهٔ مثبت از درجهٔ فرد باشد ، حتماً ریشه‌ای مساوی ۱ یا ۱ ـ خواهد داشت ، زیرا این دو عدد تنها اعداد حقیقی هستند که باعکس خود برابرند .

بنابراین سمت چپ معادلهٔ معکوسهٔ مثبت از درجهٔ فرد همواره بر $x-1$ یا $x+1$ قابل قسمت است که پس ازتقسیم به‌معادلهٔ معکوسهٔ مثبت ازدرجهٔ زوج خواهیم رسید .

با این مقدمات روشن می‌شود که برای بحث در حل معادلات معکوسه ، کافی است به معادلات معکوسهٔ از درجهٔ زوج بپردازیم ، بعد ازاین هرجا ازمعادلهٔ معکوسه نام ببریم ، منظور معادلهٔ معکوسه ازدرجهٔ زوج است .

معادلهٔ زیررا که ازدرجهٔ $2n$ است درنظر می‌گیریم :

$$ax^{2n}+bx^{2n-1}+cx^{2n-2}+\dots+fx^n+\dots+$$
$$+mx^2+ux+p=0 \quad (1)$$

برای اینکه این معادلهٔ معکوسهٔ مثبت باشد ، باید با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ تغییر نکند ، با این تبدیل به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$px^{2n}+nx^{2n-1}+mx^{2n-2}+\dots+ \quad (2)$$
$$+fx^n+\dots+cx^2+bx+a=0$$

و برای اینکه معادلات (۱) و(۲) هم ارز باشند ، باید ضرایب متناسبی داشته باشند ، یعنی :

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{n}=\frac{c}{m}=\dots=\frac{f}{f}=\dots=\frac{m}{c}=\frac{n}{b}=\frac{p}{a}$$

که ازآنجا بدست می‌آید :

$$a=p;\ b=n;\ c=m;\ \dots$$

یعنی برای اینکه معادله‌ای معکوسهٔ مثبت باشد باید ضرایب مجهولات ازدو طرف دو به دو مساوی باشند .

برای شناسائی معادلهٔ معکوسهٔ منفی هم می‌توان باروشی

---

*) فقط به یك شرط می‌توان ازجواب $x=2$ صرف‌نظر کرد وآن اینست که درصورت مسئله ذکر شده باشد که جوابها باید درحوزهٔ رادیکالهای حقیقی باشد .

شبیه روش بالا به‌نتایج زیر رسید :

I ـ در معادلهٔ معکوسهٔ منفی ، وقتی بزرگترین توان مضربی از ۴ باشد ، ضرایب تـوانهای زوج از طرفین با هم مساوی وضرایب توانهای فرد ازطرفین قرینهٔ یکدیگرند .

II ـ وقتی که بزرگترین توان معادلهٔ معکوسهٔ منفی مضربی از ۴ نباشد ، ضرایب توانهای زوج از طرفین قرینهٔ یکدیگر وضرایب توانهای فرد از طرفین مساوی یکدیگرند .

روش حل ـ برای حل معادلات معکوسه باید $x+\frac{1}{x}$ (درمورد معکوسهٔ مثبت) و یا $x-\frac{1}{x}$ (درمورد معکوسهٔ منفی) به عنوان مجهـول کمکی اختیار شود . در چنین صورتی بـه معادله‌ای خواهیم رسید که درجهٔ آن نصف درجهٔ معادلهٔ اصلی است وبه‌شرط قابل حل بودن معادلهٔ جدید ، جوابهای معادلهٔ اصلی هم بدست می‌آید .

مثال۱ـ این معادله را حل کنید :

$$2x^4-13x^3+24x^2-13x+2=0$$

حل ـ اگر طرفین معادله را بر x^2 تقسیم کنیم بدست می‌آید :

$$2x^2-13x+24-\frac{13}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2(x^2+\frac{1}{x^2})-13(x+\frac{1}{x})+24=0;$$

اگر فرض کنیم $x+\frac{1}{x}=t$ ، به سادگی (با مجذور کردن طرفین آن) بدست می‌آید : $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

بنابراین معادلهٔ مفروض به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$2(t^2-2)-13t+24=0;$$

$$2t^2-13t+20=0 \Rightarrow t=4 \text{ و } \frac{5}{2};$$

$$t=4 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=4 \Rightarrow x^2-4x+1=0;$$

$$x_1=2+\sqrt{3};\ x_2=2-\sqrt{3}$$

$$t=\frac{5}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2-5x+2=0;$$

$$x_3=2\ ;\ x_4=\frac{1}{2}$$

مثال ۲ ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$30x^8-73x^7+90x^6-292x^5+150x^4-292x^3+90x^2-73x+30=0$$

حل ـ طرفین معادله را بر x^4 تقسیم می‌کنیم، بامختصر تغییری به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$30(x^4+\frac{1}{x^4})-73(x^3+\frac{1}{x^3})+90(x^2+\frac{1}{x^2})-292(x+\frac{1}{x})+150=0$$

اگر فرض کنیم : $x+\frac{1}{x}=t$ خواهیم داشت :

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2\ ;\ x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t\ ;$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=t^4-4t^2+2$$

درنتیجه معادلهٔ مفروض به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$30(t^4-4t^2+2)-73(t^3-3t)+90(t^2-2)-292t+150=0$$

ویا پس از ساده کردن :

$$30t^4-73t^3-30t^2-73t+30=0$$

ولی این خود یك معادلهٔ معکوسهٔ مثبت درجهٔ چهارم است ، طرفین آنرا بر t^2 تقسیم می‌کنیم :

$$30(t^2+\frac{1}{t^2})-73(t+\frac{1}{t})-30=0$$

که بافرض $t+\frac{1}{t}=p$ می‌شود :

$$30(p^2-2)-73p-30=0$$

و یا :

$$30p^2-73p-90=0$$

با حل این معادلهٔ درجهٔ دوم مقادیر p بدست می‌آید :

$$p=\frac{73\pm127}{60}\ ;\ p_1=\frac{10}{3}\ ;\ p_2=-\frac{9}{10}\ ;$$

$$p=\frac{10}{3} \Rightarrow t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3} \Rightarrow t_1=3;t_2=\frac{1}{3}$$

$$p=-\frac{9}{10} \Rightarrow t+\frac{1}{t}=-\frac{9}{10}$$ (ریشه‌های موهومی)

یعنی برای t دوریشهٔ حقیقی و دو ریشهٔ موهومی بدست می‌آید، حال به‌محاسبهٔ مقادیرحقیقی x می‌پردازیم :

$$t=3 \Longrightarrow x+\frac{1}{x}=3 \Longrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$t=\frac{1}{3} \Longrightarrow 3x^2-x+3=0$$ (ریشه‌های موهومی)

به‌این ترتیب معادلهٔ درجهٔ هشتم مفروض دوریشهٔ حقیقی وشش ریشهٔ موهومی دارد .

مثال ۳ـ معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$2ax^4-(2a^2+3a-2)x^3+(3a^2-4a-3)x^2+(2a^2+3a-2)x+2a=0$$

حل ـ این ، یك معادلهٔ معکوسهٔ منفی است وبنابراین باید آنرا نسبت بـه $x-\frac{1}{x}$ منظم کنیم ، طرفین معادله رابر x^2 تقسیم می‌کنیم ، می‌شود :

$$2a(x^2+\frac{1}{x^2})-(2a^2+3a-2)(x-\frac{1}{x})+(3a^2-4a-3)=0$$

با فرض $x-\frac{1}{x}=t$ خواهیم داشت :

$$(x-\frac{1}{x})^2=t^2 \Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$$

وبنابراین معادلهٔ مفروض به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$2a(t^2+2)-(2a^2+3a-2)t+(3a^2-4a-3)=0$$

و یا :

$$2at^2-(2a^2+3a-2)t+(3a^2-3)=0;$$

ابتدا مبین معادله را محاسبه می‌کنیم :

$$\Delta=(2a^2+3a-2)^2-8a(3a^2-3)=$$
$$=4a^4-12a^3+a^2+12a+4$$
$$=(2a^2-3a-2)^2$$

و بنابراین داریم :

$$t=\frac{(2a^2+3a-2)\pm(2a^2-3a-2)}{4a}$$

$$t_1=\frac{3}{2}\ ;\ t_2=\frac{a^2-1}{a}\ ,$$

$$t=\frac{3}{2} \Longrightarrow x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow x_1=2\ ;\ x_2=-\frac{1}{2}$$

$$t=\frac{a^2-1}{a} \Longrightarrow x-\frac{1}{x}=\frac{a^2-1}{a}$$

$$\Longrightarrow x_3=a\ ;\ x_4=-\frac{1}{a}$$

۱۳ ـ معادلاتی که با روش معادلات معکوسه حل می‌شوند

معادلاتی ازنوع :

$$ax^4+bx^3+cx^2\pm bkx+ak^2=0;$$
$$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3\pm ckx^2+dk^2x\pm ak^3=0;$$

.....

را می‌توان با همان روش معادلات معکوسه حل کرد ، منتهی در اینجا باید معادله را برحسب $(x\pm\frac{k}{x})$ مرتب نمود .

مثال۱ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$2x^4-15x^3+35x^2-30x+8=0$$

حل ـ طرفین معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم :

$$2(x^2+\frac{4}{x^2})-15(x+\frac{2}{x})+35=0$$

با فرض $x+\frac{2}{x}=t$ ، خواهیم داشت :

$$(x+\frac{2}{x})^2=t^2 \Longrightarrow x^2+\frac{4}{x^2}=t^2-4$$

وبنابراین معادلهٔ مفروض به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$2(t^2-4)-15t+35=0;$$

$$2t^2-15t+27=0 \Longrightarrow t=\frac{9}{2}\ \text{و}\ 3$$

$$t=\frac{9}{2} \Longrightarrow x+\frac{2}{x}=\frac{9}{2}$$

$$\Longrightarrow 2x^2-9x+4=0\ ;\ x_1=4\ ;\ x_2=\frac{1}{2}$$

$$t=3 \Longrightarrow x+\frac{2}{x}=3 \Longrightarrow x^2-3x+2=0;$$
$$x_3=1;\ x_4=2$$

مثال ۲ . مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$2x^4+7x^3-34x^2-21x+18=0$$

←

درسی از حساب

دربارهٔ بخش پذیری اعداد

I - بخش‌پذیری بر ۷

ترجمه از کتاب «در راه ریاضیات» تالیف: KORDIEMSKY

روش یکم ـ برای نمونه، عدد ۵۲۳۹ را در نظر می‌گیریم و آنرا به صورت زیر می‌نویسیم:

$$10^3\times 5+10^2\times 2+10\times 3+6$$

دراین رابطه، مبنای ۱۰ را با مبنای ۳ عوض‌می‌کنیم:

$$3^3\times 5+3^2\times 2+3\times 3+6=168$$

از اینکه عدد حاصل یعنی ۱۶۸ بر ۷ بخش‌پذیر باشد یا نباشد نتیجه می‌گیریم که عدد مفروض بر ۷ بخش‌پذیر است یانه، عدد ۱۶۸ و در نتیجه عدد ۵۲۳۹ بر ۷ بخش پذیر می باشد.

برهان ـ دوعدد m رقمی N و P را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$N=10^{m-1}a_{m-1}+10^{m-2}a_{m-2}+\dots+10a_1+a_0$$

$$P=3^{m-1}a_{m-1}+3^{m-2}a_{m-2}+\dots+3a_1+a_0$$

طرفین رابطهٔ دوم را جمله به جمله از طرفین رابطهٔ اول کم می‌کنیم.

$$N-P=(10^{m-1}-3^{m-1})a_{m-1}+(10^{m-2}-3^{m-2})a_{m-2}+\dots+(10-3)a_1$$

بنابر قضیهٔ تقسیم جمله‌ای به‌صورت x^n-a^n بردوجمله‌ای $x-a$ هر یك از پرانتزهای 10^i-3^i بر $10-3=7$ بخش پذیر است بنابر این تفاضل $N-P$ بر ۷ بخش‌پذیر می‌باشد. پس اگر P هم بر ۷ بخش پذیر باشد نتیجه‌می‌شود که N نیز بر ۷ بخش‌پذیر است و البته اگر P بر ۷ بخش‌پذیر نباشد N نیز بر ۷ بخش پذیر نیست.

راه عملی ساده تر ـ از سمت چپ شروع کرده اولین رقم عدد را در ۳ ضرب و حاصل را با رقم دوم جمع می‌کنیم. حاصل جمع را بر ۷ تقسیم کرده ماندهٔ بدست آمده را ۳ برابر کرده حاصل را با رقم سوم جمع می‌کنیم و این حاصل جمع را نیز بر ۷ تقسیم‌کرده وعمل را به همین‌ترتیب ادامه می‌دهیم. اگر باقیماندهٔ آخرین تقسیم برابر صفر باشد عدد مفروض بر ۷ بخش پذیر می‌باشد. در عملیات بالا هردفعه می‌توان به جای عددی، باقیماندهٔ تقسیم آنرا بر ۷ اختیار کرد.

مثال ـ عدد ۴۸۹۱۶ را در نظر می‌گیریم و به ترتیب بالا عمل می‌کنیم (هرجا که به جای عددی باقیماندهٔ تقسیم آن را بر ۷ قرار دهیم علامت $\equiv$ را بکار می‌بریم).

$$4\times 3=12 \text{ و } 12+8=20\equiv 6$$

دنباله از صفحهٔ قبل

حل. با تقسیم طرفین معادله بر x^2 بدست می‌آید:

$$2\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{3}{x}\right)-34=0;$$

با فرض $x-\frac{3}{x}=t$ خواهیم داشت:

$x^2+\frac{9}{x^2}=t^2+6$ وبنابراین معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$2(t^2+6)+7t-34=0$$

$$\Longrightarrow 2t^2+7t-22=0:\ t=2 \text{ و } -\frac{11}{2};$$

$$t=2 \Longrightarrow x-\frac{3}{x}=2 \Longrightarrow x^2-2x-3=0;$$

$$x_1=-1\ :\ x_2=3$$

$$t=-\frac{11}{2} \Longrightarrow x-\frac{3}{x}=-\frac{11}{2}$$

$$\Longrightarrow 2x^2+11x-6=0;$$

$$x_3=\frac{1}{2}\ ;\ x_4=-6$$

دنبالهٔ این بحث درشمارهٔ بعد

که ممکن است چنین عمل کنیم:

$$۴\times۳=۱۲\equiv۵\ .\ ۵+۸=۱۳\equiv۶$$

عمل را ادامه می‌دهیم:

$$۶\times۳=۱۸\equiv۴ \text{ و } ۴+۹=۱۳\equiv۶$$

$$۶\times۳=۱۸\equiv۴ \text{ و } ۴+۱=۵\equiv۵$$

$$۵\times۳=۱۵\equiv۱ \text{ و } ۱+۶=۷\equiv۰$$

بنابراین عدد مزبور بر ۷ بخش پذیر است.

برهان ـ اگر عدد مفروض N به صورت زیر باشد:

$$N=۱۰^{m-۱}a_{m-۱}+۱۰^{m-۲}a_{m-۲}+$$
$$+\dots+۱۰a_۱+a_۰$$

عملیاتی که گفته شد چنین خواهد بود:

$$۳a_{m-۱}+a_{m-۲}$$
$$۳^۲a_{m-۱}+۳a_{m-۲}+a_{m-۳}$$
$$۳^۳a_{m-۱}+۳^۲a_{m-۲}+۳a_{m-۳}+a_{m-۴}$$

.....

$$P=۳^{m-۱}a_{m-۱}+۳^{m-۲}a_{m-۲}+$$
$$+\dots+۳a_۱+a_۰$$

چنانکه معلوم شد $N-P$ بر ۷ بخش‌پذیر است و در نتیجه هریك از دو عدد N و P در تقسیم بر ۷ مانده‌ای برابر خواهند داشت. در عمل به جای عددی مثل ۳^ia_i باقیماندهٔ تقسیم آنرا بر ۷ قرار می‌دهیم که در بخش پذیری $N-P$ بر ۷ تأثیری نخواهد داشت.

روش دوم ـ تفاوت عمدهٔ این روش با روش یکم این است که عمل را از رقم سمت راست عدد شروع می‌کنیم. برای نمونه عدد ۳۷۱۸۴ را در نظر می‌گیریم وچنین عمل می‌کنیم:

$$۴\times۵=۲۰\equiv۶ \text{ و } ۶+۸=۱۴\equiv۰$$

$$۰\times۵=۰\equiv۰ \text{ و } ۰+۱=۱\equiv۱$$

$$۱\times۵=۵\equiv۵ \text{ و}$$

از رقم ۷ صرف نظر می‌شود

$$۵\times۵=۲۵\equiv۴ \text{ و } ۴+۳=۷\equiv۰$$

عدد مفروض بر ۷ بخش‌پذیر است.

برهان ـ فرض می‌کنیم:

$$N=۱۰^{m-۱}a_{m-۱}+۱۰^{m-۲}a_{m-۲}$$
$$+\dots+۱۰a_۱+a_۰$$

عملیاتی که باید انجام دهیم در حقیقت از قرار زیر است.

$$۵a_۰+a_۱$$
$$۵^۲a_۰+۵a_۱+a_۲$$
$$۵^۳a_۰+۵^۲a_۱+۵a_۲+a_۳$$

.....

$$P=۵^{m-۱}a_۰+۵^{m-۲}a_۱+\dots+۵a_{m-۲}+a_{m-۱}$$

طرفین رابطهٔ اخیررا در عدد $۱۰^{m-۱}$ ضرب کرده و از حاصل، عدد N را کم می‌کنیم، می‌شود:

$$۱۰^{m-۱}P-N=(۵۰^{m-۱}-۱)a_۰+$$
$$+۱۰(۵۰^{m-۲}-۱)a_۱+\dots+$$
$$+۱۰^{m-۲}(۵۰-۱)a_{m-۲}$$

هر یك از دو جمله‌ایهای داخل پرانتز ها بر

$$۵۰-۱=۴۹$$

و بنابراین بر ۷ بخش‌پذیر بوده و چون $۱۰^{m-۱}$ بر ۷ بخش پذیر نیست نتیجه می‌شود که باقیمانده‌های تقسیم هریك از دو عدد P و N بر ۷ با یکدیگر برابر است؛ اگریکی از آنها بر ۷ بخش‌پذیر باشد دیگری هم بخش‌پذیر است.

روش سوم ـ از سمت راست شروع کرده اولین رقم را دو برابر کرده از حاصل رقم دوم را کم می‌کنیم. این باقیمانده را دو برابر کرده رقم سوم را به آن اضافه می‌کنیم و عملیات جمع و تفریقهای متوالی را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. هرجا هم که عمل تفریق ممکن نباشد عدد ۷ یا مضربهایی از آن را به مفروق منه اضافه می‌کنیم. بر حسب اینکه آخرین باقیمانده بر ۷ بخش‌پذیر باشد یا نباشد عددمفروض هم بر ۷ بخش پذیر است یا نیست.

خواننده می‌تواند این روش را آزمایش کند و برهان مربوط به آنرا (که تا اندازه‌ای مشکل است) شخصاً بیابد.

***

سه قضیه مربوط به بخش‌پذیری بر ۷ در زیر بیان و اثبات آن به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود:

۱ـ اگر یك عدد دو رقمی بر ۷ بخش‌پذیر باشد چون آنرا مقلوب کرده و بر حاصل رقم دهگان عدد مفروض را بیفزائیم عددی که بدست می‌آید بر ۷ بخش‌پذیر خواهد بود.

$$۱۴\equiv۰\ ;\quad ۴۱+۱=۴۲\equiv۰$$

۲ـ اگر عدد سه رقمی دلخواهی بر ۷ بخش‌پذیر باشد چون آنرا مقلوب کنیم و از آن تفاضل رقم یکان عدد مفروض را بر رقم سدگان آن کم کنیم عدد حاصل نیز بر ۷ بخش‌پذیر خواهد بود.

$$۱۲۶\equiv۰\ ;\quad ۶۲۱-(۶-۱)=۶۱۶\equiv۰$$

$$۶۹۳\equiv۰\ ;\quad ۳۹۶-(۳-۶)=۳۹۹\equiv۰$$

۳ـ اگر مجموع رقمهای یك عدد سه رقمی برابر با ۷ باشد به شرط اینکه رقمهای یکان و دهگان عدد مفروض برابر باشند، عدد مفروض بر ۷ بخش‌پذیر است. مانند عددهای ۱۳۳ و ۵۱۱ و ۳۲۲

راهنمای حل مسائل شیمی

مؤلفان : Favre et Gautier

مترجم : عطاءالله بزرگ نیا

فصل دوم ـ مسائل شیمی

تعیین فرمول یك جسم از روی نسبت درصد عناصر تشکیل دهندهٔ آن

۵۳ـ فرض می‌کنیم که نسبت در صد عناصر در یك ترکیب سه‌عنصری معلوم باشد .

هرگاه A و B و C نشانه‌های عناصر تشکیل دهندهٔ جسم و a و b و c به ترتیب جرم اتمی این عناصر و M جرم ملکولی جسم مرکب فرض شود فرمول جسم مورد نظر : $A_\alpha B_\beta C_\gamma$ می‌باشد .

در ۱۰۰ گرم این جسم a' گرم ازعنصر A و b' گرم ازعنصر B و c' گرم ازعنصر C وجود دارد .

بنابراین : $a'+b'+c'=100$ (۱)

می‌دانیم که طبق (بند ۲)

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=M \quad (2)$$

و

$$\frac{a\alpha}{a'}=\frac{b\beta}{b'}=\frac{c\gamma}{c'} \quad (3)$$

با استفاده ازخواص روابط مساوی و باتوجه به‌تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم :

$$\frac{a\alpha}{a'}=\frac{b\beta}{b'}=\frac{c\gamma}{c'}=\frac{M}{100} \quad (4)$$

مقادیر a و b و c که جرم اتمی عناصر A و B و C هستند همیشه معلوم می‌باشند . مقادیر a' و b' و c' نیز که از معلومات مسئله است . بنابراین هرگاه مقدار عددی M معلوم باشد به‌آسانی می‌توان مقادیر α و β و γ را ازمعادلهٔ (۴) بدست آورد .

۵۴ـ تبصره ـ هرگاه نسبتهای معلوم نسبت درصد نباشد محاسبهٔ نسبت درصد لازم نیست . در این صورت جمع مقادیر a' و b' و c' دیگر برابر ۱۰۰ نخواهد بود بلکه برابر مقدار m می‌باشد که باید در رابطهٔ (۴) به جای ۱۰۰ قرار داد و درحل مسئله هیچگونه تغییری رخ نمی‌دهد .

۵۵ـ نظر به‌اینکه‌مقادیر a'، b'، c' و M مبنای تجربی دارند وهمیشه تقریبی هستند از اینرو مقادیر α و β و γ نیز بطور تقریبی بدست می‌آیند . تقریب حاصل ، بستگی به‌خطائی دارد که درتعیین مقدار M و مقادیر عناصر در نمونهٔ جسم رخ داده است .

بدیهی است مقادیر α و β و γ که معرف تعداد اتمهای عناصر در ملکول یك جسم مرکب است همیشه اعداد صحیح هستند از اینرو باید به‌جای اعدادکسری و تقریبی نزدیکترین اعداد صحیح به‌آنها را قرار داد . خلاصه اینکه چون میزان دقت اندازه‌گیری معمولا مشخص نیست تعیین این اعداد بطور دقیق امکان‌پذیر نیست .

۵۶ـ روش مذکور همیشه دارای خطای زیاد است . زیرا اندازه‌گیری a' و b' و c' از یك طرف و M از طرف دیگر که هر کدام به‌روش تجربی خاص و با خطاهای متفاوت صورت می‌گیرد . موجب خطای زیاد در این روش می‌شود . مثلا هرگاه M ازطریق اندازه‌گیری چگالی بدست آید احتمال خطا درآن به‌مراتب بیشتر ازتعیین نسبت درصد (روش تجزیه وتوزین دقیق) می‌باشد .

هرگاه M را موقتاً کنار بگذاریم . تنها رابطهٔ (۳)

باقی می‌ماند :

$$\frac{a\alpha}{a'}=\frac{b\beta}{b'}=\frac{c\gamma}{c'}$$

بدیهی است از این رابطه مقادیر α و β و γ بدست نمی‌آید . بلکه نسبت آنها یا در صورت لزوم دستگاههائی از بینهایت اعداد صحیح متناسب با α و β و γ که در بین آنها اعداد α و β و γ نیز وجود دارد حاصل می‌شود .

هرگاه ازبین‌این دستگاهها ، دستگاهی‌که از ساده‌ترین اعداد ممکن تشکیل شده است برگزینیم ، با استفاده ازاین اعداد فرمول موقتی $A_{\alpha'}B_{\beta'}C_{\gamma'}$ یعنی ساده‌ترین فرمولی که با نسبت درصد جسم مطابقت دارد بدست می‌آید . بدیهی است فرمول جسم مضرب n از این فرمول و به شکل : $A_{n\alpha'}B_{n\beta'}C_{n\gamma'}$ می‌باشدکه در آن تنها تعیین مقدار n باقی می‌ماند و برای یافتن آن کافیست مقدار تقریبی جرم ملکولی M را بدانیم . جرم ملکولی بر اساس فرمول $A_{\alpha'}B_{\beta'}C_{\gamma'}$ برابر M' خواهد شدکه M مضرب nام آن است یعنی $M=nM'$ و ازآنجا n بدست می‌آید .

مقدار n همیشه تقریبی است و برای‌آنکه مسئله ممکن گردد باید نزدیکترین عدد صحیح به‌آنرا اختیارکنیم. بعلاوه غالباً n عددی است‌کوچك وخطای نسبی هرقدرهم بزرگ‌باشد تقریب n بیش ازنیم واحد نخواهد بود .

مثالـ ازتجزیهٔ جسمی نتایج زیر حاصل شده است :

کربن : ٪۴۹/۳۱ ، اکسیژن : ٪۴۳/۸۴

ئیدروژن : ٪۶/۸۵

چگالی به‌حالت بخار جسم ۵/۵ می‌باشد . فرمول جسم را تعیین‌کنید .

برای حل مسئله از روش اول استفاده می‌کنیم .

جرم ملکولی تقریبی جسم $۵/۵\times۲۹=۱۵۹$ است و از روی آن بدست می‌آید :

$$\alpha=\frac{۱۵۹\times۴۹/۳۱}{۱۰۰\times۱۲}=۶/۵۳$$

$$\beta=\frac{۱۵۹\times۴۳/۸۴}{۱۰۰\times۱۶}=۴/۳۵$$

$$\gamma=\frac{۱۵۹\times۶/۸۵}{۱۰۰\times۱}=۱۰/۸$$

نزدیکترین عدد صحیح به این اعداد ۷ و ۴ و ۱۱ می‌باشد . اما نسبتهای بین اعداد با نسبتهائی‌که طبق رابطهٔ (۳) بدست می‌آیدکاملا متفاوت است :

$$\frac{۱۲\alpha}{۴۹/۳۱}=\frac{۱۶\beta}{۴۳/۸۴}=\frac{\gamma}{۶/۸۵}$$

ازآنجا : $\frac{\alpha}{\gamma}=۰/۶۰$ و $\frac{\beta}{\gamma}=۰/۴۰$ ودرنتیجه ساده‌ترین ضرایب عناصر ، اعداد ۳ و ۲ و ۵ خواهد شد . و چون جرم ملکولی‌درفرمولی با این‌ضرایب برابر $M'=۷۳$ است . مقدارعددی n برابر $n=\frac{M}{M'}=\frac{۱۵۹}{۷۳}$ و اندکی کمتر از ۲/۲ می‌شود بدیهی است ، مقدار n را باید معادل ۲ درنظر گرفت و دراین‌صورت فرمول قطعی جسم $C_۶O_۴H_{۱۰}$ وجرم ملکولی آن ۱۴۶ می‌باشد .

با وجود همهٔ دقتی که در تجزیهٔ عناصر می‌شود به سبب خطائی‌که در اندازه‌گیری M رخ می‌دهد کاربری روش اول نتیجهٔ غلط می‌بخشد .

۵۷ـ گاهی ممکن است اطلاعات مربوط به‌خواص‌جسم بتواند با قاطعیت فرمول آنرا مشخص‌کند دراین‌صورت‌دانستن M ضرورت ندارد . مثلا ممکن است خواص جسم‌تعداد اتمهای یکی ازعناصر را در ملکول‌آن نشان دهد و از روی آن بتوان فرمول جسم را بدون دانستن جرم ملکولی بدست‌آورد .

۵۸ـ با وجود این درتمام حالات بایستی ابتدا فرمول موقت یا ساده‌ترین فرمول جسم یا به عبارت دیگر نسبتهای $\frac{\beta}{\alpha}$ و $\frac{\gamma}{\alpha}$ را بدست‌آورد و بطوری‌که در مسئلهٔ یك (بند ۵۵) بیان شد این نسبتها تقریبی هستند اما چون در اینجا انتخاب نزدیکترین عدد صحیح انجام نمی‌شود وساده‌ترین نسبت اعداد حاصل را بدست می‌آورند حل مسئله دقیقتر می‌شود . هرگاه تقریب درصد معمول نباشد باید درصحت محاسبه تردید کرد .

مثالـ فرمول جسمی را پیدا کنیدکه نسبت‌درصدآن‌از این‌قرار است :

کربن : ٪۳۸/۹ ، ئیدرژن : ٪۸/۹

اکسیژن : ٪۵۲/۲

حلـ رابطهٔ (۳) به‌شکل زیر درمی‌آید :

$$\frac{۱۲\alpha}{۳۸/۹}=\frac{\beta}{۸/۹}=\frac{۱۶\gamma}{۵۲/۲}$$

ازاین رابطه نسبت $\frac{\beta}{\gamma}=۲/۷۴$ و $\frac{\gamma}{\alpha}=۱/۰۳$ بدست آید . هرگاه α را برابر یك فرض کنیم $\beta=۲/۷۴$ و $\gamma=۱/۰۳$ خواهد شد . وچون مقدار γ نزدیك به یك است

بقیه در صفحهٔ ۱۰۳

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des Problèmes élémentaires de géométrie

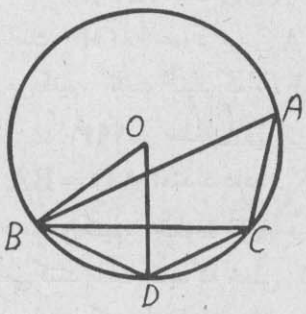
تألیف: E. J. Honnet چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳ ـ ترجمهٔ: ع. م.

فصل چهارم ـ چگونه ثابت کنیم که دو خط متوازی‌اند.

روش چهارم ـ استفاده از خواص وترهای متوازی در دایره

ثابت می‌شود که اگر دو وتر از یك دایره متوازی باشند کمانهای واقع بین آنها با هم برابراند. عکس این قضیه به شرح زیر بیان می‌شود: وترهای نامساوی که نقاط انتهای دو کمان متساوی ازیك دایره را به هم وصل می‌کنند با یکدیگر موازی هستند.

مسئلهٔ ۴۱ـ در مثلث ABC محاط در دایرهٔ O زاویهٔ A دو برابر زاویهٔ B است؛ شعاع OD را عمود بر BC رسم می‌کنیم. ثابت کنید که چهار ضلعی ABDC ذوزنقه است.



فرض: $\hat{A} = 2\hat{B}$ ، $OD \perp BC$

حکم: $DC \parallel AB$

اثبات ـ باید ثابت کنیم که AB با DC موازی است. شعاع OD بر وتر BC عمود است بنابراین از وسط کمان BC می‌گذرد یعنی دو کمان BD و DC با یکدیگر برابراند. چون زاویهٔ محاطی B نصف زاویهٔ محاطی A است بنابراین کمان AC نصف کمان BC بوده با کمان BD برابر می‌شود. بنابراین دو وتر AB و DC (که نا مساوی‌اند) نقاط انتهای کمانهای متساوی AC و BD را به هم وصل کرده‌اند و با یکدیگر موازی می‌باشند

تمرینات:

۱۸۳ـ در دایرهٔ به مرکز O وتر AB را در نظر می‌گیریم و دو وتر BD و AE در یك طرف AB طوری رسم می‌کنیم که با AB زاویه های برابر بسازند. ثابت کنید که AB با DE موازی است. شکل را در دو حالت رسم کنید: دو وتر AE و BD یکدیگر را داخل یا خارج دایره قطع کنند.

۱۸۴ـ روی دایرهٔ به مرکز O دو نقطهٔ A و B را در نظر می‌گیریم؛ دو وتر دلخواه AM و AN را رسم کرده وتر BM′ را موازی با AM و وتر BN′ را موازی با AN رسم می‌کنیم. ثابت کنید که MN′ با M′N موازی است.

۱۸۵ـ وتر AB در دایرهٔ به مرکز O مفروض است. M وسط کمان بزرگتر AB می‌باشد. وترهای AN و BP نیمسازهای زاویه‌های MAB و MBA را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که اولا NP با AB موازی است ثانیاً اگر I نقطهٔ تلاقی AN و BP باشد چهار ضلعی MPIN متوازی‌الاضلاع می باشد.

روش پنجم ـ استفاده از عکس قضیهٔ تالس

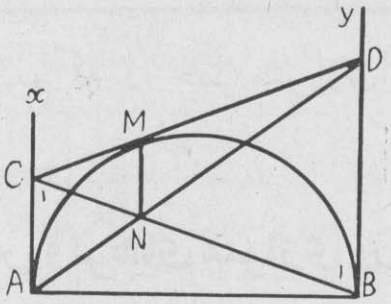
الف ـ اگر خطی ضلع AB از مثلث ABC را در M و ضلع AC ازآنرا در N قطع کند و تناسب

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \quad \text{یا} \quad \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \quad \text{یا}$$

$$\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC} \quad \text{یا} \ldots$$

برقرار باشد خط MN با ضلع BC موازی می‌باشد.

مسئلهٔ ۴۲ـ از نقاط A و B طرفین قطر AB از نیمدایرهٔ به مرکز O دو مماس Ax و By را بر نیمدایره رسم می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه M از نیمدایره را در نظر گرفته در این نقطه هم‌مماسی بر نیمدایره رسم می‌کنیم که Ax را در C و By را در D قطع



می‌کند. خطوط AD و BC یکدیگر را در N تلاقی می‌کنند ثابت کنید که MN با AC موازی است.

فرض: Ax و By و CD بر O مماس هستند.

حکم: $MN \parallel AC$

اثبات ـ خطوط AC و BD با هم موازی هستندزیرا هر دو بر AB عمود هستند. دو مثلث NAC و NBD متشابه اند و در نتیجه:

$$\frac{AN}{ND}=\frac{AC}{BD}$$

دو مماس CA و CM و همچنین دو مماس DB و DM که از یك نقطه بر نیمدایره رسم شده اند با هم برابراند بنابر این تناسب بالا چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{AN}{ND}=\frac{CM}{DM}$$

و بنا بر عکس قضیهٔ تالس درمثلث DAC ، خط MN با خط AC موازی می‌باشد.

تمرینات:

۱۸۶ـ روی ضلعهای چهارضلعی ABCD چهار طول AM و AN و CP و CQ را به ترتیب برابر با یك‌چهارم AB و AD و CB و CD جدا می‌کنیم. ثابت کنید چهار ضلعی MPQN متوازی‌الاضلاع است.

۱۸۷ـ نیمسازهای زاویه های A و D از متوازی ـ الاضلاع ABCD قطرهای BD و AC را در نقطه های M و N قطع می‌کنند. ثابت کنید که MN با AD موازی است.

۱۸۸ـ رأسهای A و B و C از یك مثلث ABC را به یك نقطهٔ O از صفحهٔ آن وصل می‌کنیم. نقطهٔ A' را روی OA در نظر گرفته از آن به موازات AB و AC رسم می‌کنیم تا اولی OB را در B' و دومی OC را در C' قطع کند. ثابت کنید که $B'C'$ با BC موازی است.

۱۸۹ـ مسئلهٔ قبل را در حالتی حل کنید که A' در امتداد OA واقع باشد.

۱۹۰ـ مسئلهٔ قبل را در موردیك چند ضلعی دلخواه حل کنید.

۱۹۱ـ چهار ضلعی ABCD مفروض است. از B موازی با CD رسم می‌کنیم که AC را در F قطع می‌کند و از C موازی با AB رسم می‌کنیم که BD را در G قطع می‌کند. ثابت کنید که FG با AD موازی است.

***

ب ـ حالت خاص: خطی که اوساط دوضلع از یك‌مثلث را به هم وصل می‌کند با ضلع دیگر مثلث موازی است.

خطی که‌اوساط دوساق یك ذوزنقه (یا یك‌متوازی‌الاضلاع) را به هم وصل می‌کند با دو قاعدهٔ ذوزنقه موازی است.

تمرینات:

۱۹۲ـ مثلث ABC درنیمدایرهٔ O به قطر AB محاط است. OF را عمود بر AC و OG را عمود بر BC رسم می‌کنیم. ثابت کنید که FG با AB موازی است.

۱۹۳ـ ضلع BA از یك مثلث ABC را به طول $AD=BA$ امتداد داده و CF را موازی و مساوی با BA رسم می‌کنیم. خطوط AF و DC یکدیگر را در M قطع می‌کنند ثابت کنید که خطی که نقطهٔ M را به وسط ضلع BC وصل می‌کند با AB موازی است.

۱۹۴ـ شش ضلعی منتظم ABCDFG در دایرهٔ به مرکز O محاط است. عمودهای OM و ON و OP را به ترتیب بر ضلعهای AB و CD و FG رسم می‌کنیم. ثابت

کنید که هر یك از سه خط PM و PN و MN با قطر از شش ضلعی که دو رأس مقابل را به هم وصل می‌کند موازی می‌باشد.

۱۹۵ـ دو دایرهٔ O و O′ در B مماس خارج هستند. مماس مشترك خارجی MN و مماس مشترك داخلی یکدیگررا در A قطع می‌کنند. OA و O′A را رسم می‌کنیم که BM و BN را به ترتیب در C و D قطع می‌کنند. ثابت کنید که CD با MN موازی است.

۱۹۶ـ نیمدایرهٔ به مرکز O و به قطر AB و M نقطه‌ای از آن مفروض است. مماسهای بر نیمدایره در نقاط A و B و M یکدیگر را در N و P قطع می‌کنند. ON و OP را رسم می‌کنیم که AM و BM را در C و D قطع می‌کنند. ثابت کنید که CD با AB موازی است.

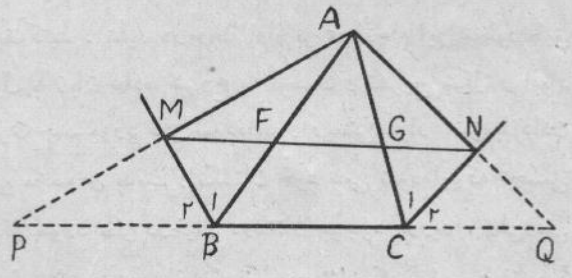
***

ج ـ تعمیم قضیهٔ تالس وعکس آن ـ اگر درمثلث ABC از A به نقاط D و F و G از BC وصل کنیم و خطی مانند xy خطوط AB ، AD ، AF ، AG و AC را در M ، N ، P ، Q ، R قطع کند روابط زیر بر قرار است.

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AD}=\frac{AP}{AF}=\frac{AQ}{AG}=\frac{AR}{AC}$$

برعکس اگر برخطوط مزبور نقاط M و N و...و R به قسمی واقع باشند که رابطه‌های بالا برقرار باشد این نقاط بر خطی موازی با BC قرار دارند.

مسئلهٔ ۴۳ـ از رأس A مثلث ABC خطوط AM و AN را عمود بر نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C رسم می‌کنیم ثابت کنید که MN بر اوساط ضلعهای AB و AC گذشته و با BC موازی است.



فرض: $B_1=B_2$ و $C_1=C_2$ ، $AN \perp CN$ و $AM \perp BM$

حکم: $AG=GC$ و $AF=FB$ ، $MFGN \parallel BC$

اثبات ـ AM و AN را امتداد می‌دهیم تا خط BC را در P و Q قطع کنند. مثلثهای ABP و ACQ متساوی‌الساقین هستند، زیرا در این مثلثها، نیمساز و ارتفاع منطبق است. بنابراین $AM=MP$ و $AN=NQ$ می‌باشد و روابط زیررا خواهیم داشت:

$$\frac{AM}{AP}=\frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{AN}{AQ}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین چهارنقطهٔ M ، F ، G ، N بر یك خط مستقیم موازی با BC واقع اند.

تمرینات

۱۹۷ـ در دایرهٔ به مرکز O وتر AP را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M وسط این وتر و H وسط وتر MP باشد. از H وتر BC را عمود بر AP رسم می‌کنیم. ثابت کنید که نقطهٔ M ونقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلثهای ABC و ABH و ACH روی خطی موازی با BC قرار دارند.

۱۹۸ـ از طرفین قاعدهٔ کوچکتر CD از ذوزنقهٔ ABCD خطوطی موازی با دو ساق رسم می‌کنیم که قاعدهٔ بزرگتر را در F و K و قطرهای BD و AC را در M و N قطع می‌کنند از F و K به موازات AC و BD رسم می‌کنیم که BC و AD را در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که نقطه‌های M ، N ، P و Q بر خطی موازی با AB واقع‌اند.

۱۹۹ـ دردایرهٔ به قطر AB وتر AC را رسم کرده وآنرا به اندازهٔ خود تا E امتداد می‌دهیم. وتر AD راعمود بر AC رسم کرده و آنرا نیز به اندازهٔ خود تا F امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که نقاط F و B و E روی خطی موازی با DC واقع‌اند.

راهنمای رسم فنی

تنظیم از : مهندس علی شیر محمدی

درملاقاتی‌که اخیراً بین اینجانب ومدیر مجلهٔ یکان روی داد این نکته مورد گفتگو بودکه از جمله دروسی که مورد توجه زیاد دانش آموزان بوده و متاسفانه در برنامه‌های فعلی دبیرستانی موقعیت مناسب وامکانات کاملی برای فراگرفتن آن نیست رسم فنی است .. بهترین مدعای این‌حقیقت علاوه برتجربیات وتماسهای مستقیمی‌که مدیرمحترم مجله بادانش‌آموزان داشته‌اند ، تعداد قابل‌توجه نامه‌هائی است که دانش‌آموزان دبیرستانی وعلاقمندان به‌فراگرفتن رسم‌فنی به دفترمجله ارسال‌داشته وهمگی تقاضا داشته‌اند صفحاتی چند ازمجله به‌این موضوع اختصاص داده شود .

این نکته نیز درخور توجه است که رسم فنی علاوه برخاصیت گشایش و انبساط فکری و قوهٔ تجسم وتخیلی که دردانش‌آموزان بوجود می‌آورد امروزه دربیشتر نقاط دنیا ازدروس اصلی و مهم سالهای آخردبیرستان وسالهای اول دانشکده‌های مهندسی وفنی محسوب شده ونیز در امتحانات ورودی اغلب دانشکده‌ها مورد درخواست می‌باشد .

اینك‌باعث نهایت‌خوشوقتی است‌که درآغازسال تحصیلی این‌امکان فراهم شده‌که درهرشماره ازمجله بامراجعه به‌کتب ونشریات خارجی که دردسترس می‌باشد ، مقاله‌ای ساده و قابل درك برای علاقمندان به‌فراگرفتن رسم فنی ودانش‌آموزان گرامی باروش صحیح منتشرشود. باشدکه این‌خدمت ناقابل مورد توجه دانش‌آموزان محترم واقع شده و از این راه مجلهٔ وزین یکان قدمی دیگر در راه پیش برد مقاصد اصلی خود برداشته ونیزافتخاری بزرگ نصیب اینجانب شده باشد .

علی شیرمحمدی

رسم فنی چیست ؟

طبق تعریفی‌که بسیاری ازمنابع خارجی برای این‌رشتهٔ علمی نموده‌اند ، رسم فنی عبارت ازتنها زبان بین‌المللی است که برای کلیهٔ متخصصین فن ، از هر ملیت ودارای هر زبان که باشند ، قابل درك می‌باشد. دراین زبان به جای کلمات و حروف ازخطوط و علامات واختصاراتی چند استفاده می‌شود . بدیهی است علت انتخاب این زبان به‌خاطر سادگی و اختصار ونحوهٔ کامل ودقیق توصیف وتشریح شکل ووضع ظاهری اجسام مختلف بوسیلهٔ آن می‌باشد . بطور مسلم برای بسیاری از شما تا به‌حال اتفاق افتاده است‌که بخواهید جسم و یا شکلی را که احیاناً دارای یك شکل منظم هندسی نبوده برای دوستتان تعریف‌کنید . شاید در وهلهٔ اول برای انجام این منظور طبق معمول با زبان ساده شروع به توصیف و تشریح شکل و ابعاد ظاهری جسم مورد نظر نموده‌اید ودربعضی موارد نیز با دادن شکلی مخصوص بدست وانگشتان خود سعی نموده‌ایدکه تجسمی ازشکل مورد نظر درخیال دوستتان بوجود آورید ، ولی‌وقتی با همهٔ تلاش خود باقیافهٔ مبهم دوستتان که معلومست از همهٔ تلاشهای شما چیزی عایدش نشده مواجه شدید ، فوراً در جستجوی قلم وکاغذی برآمده وبا کشیدن چند تصویر و نشان دادن اندازه‌ها موفق می‌شوید جسم را به‌صورت بهتر وواضح‌تری برای دوستتان تعریف نمائید. شما درحقیقت وقتی به‌کمك

«زبان کلمات» موفق به تشریح ابعاد و شکل ظاهری جسم نشدید، از زبان «خطوط و علامات» و یا به عبارت دیگر از «رسم فنی» استفاده نموده و بدینوسیله در انجام مقصود موفق شده‌اید.

امروزه در کلیهٔ کارخانه‌ها و مراکز صنعتی و فنی جهان، برای ساختن هر جسمی چه یك وسیلهٔ کوچك الکتریکی و مکانیکی و چه ساختمانی عظیم پس از آنکه محاسبات لازم مهندسی برای ساختن آن بعمل آمد، نتیجهٔ همهٔ این محاسبات فقط وفقط به‌صورت رسم فنی درروی کاغذی خلاصه شده و برای اجراء دراختیار کارفرما و کارگر گذاشته‌می‌شود. همین نقشه و یا رسم کافیست که کلیهٔ اطلاعات لازم را به نحوی کاملا دقیق و حساس در اختیار شخص سازنده گذاشته و حتی مشخص سازد که هر قسمت از وسیلهٔ مورد نظر باید از چه جنسی بوده و توسط چه ماشینی ساخته شود. باذکراین مقدمات شایداهمیت شایان توجه رسم‌فنی تااندازه‌ای روشن‌شده باشد. حال ببینیم برای فراگرفتن صحیح این زبان فنی چه مقدماتی موردلزوم است؟

وسایل لازم وطرز استفاده از آنها

از اصول مسلمی که باید در رسم فنی رعایت شود «دقت وحساسیت» در کار است. بدیهی است برای انجام این منظور در دست داشتن وسایلی دقیق و حساس ضروری می‌باشد. با اینحال نباید فکر کنید که برای تمرین وکار دردورهٔ دبیرستان همهٔ وسایلی که احیاناً درروی میز یك نقشه‌کش در یك کارخانهٔ صنعتی می‌بینید برای شما نیز مورد لزوم خواهد بود. وسایل اصلی لازم برای تمرینات دورهٔ دبیرستان که اغلب با مداد انجام می‌گیرد به‌قرار زیر می‌باشد.

۱ ـ تخته رسم وخط‌کش تی (T)

۲ ـ یك خط‌کش مدرج که فقط برای اندازه‌گیری بکار می‌رود.

۳ ـ دو گونیای نسبتاً بزرگ، یکی ۳۰ـ۶۰ درجه و یکی ۴۵ درجه ویك نقالهٔ ۱۸۰ درجه ویا ۳۶۰ درجه.

۴ ـ یك جعبهٔ پرگار از نوع مرغوب، که دارای پرگار اصلی باجای مداد، یك پرگارتقسیم کننده (که درهر دو انتهای شاخه‌های آن فقط سوزن فلزی نصب شده) و یك پرگار مخصوص‌رسم دایره‌های خیلی کوچك باشد.

۵ ـ یك یا دوعدد منحنی فرانسه (پیستوله)

۶ ـ مدادهای مخصوص رسم فنی ازنوع اعلا وازدرجات H و 2H و 3H و 4H و F و HB و B و 2B.

۷ ـ یك چاقوی کوچك مخصوص تراشیدن مداد، و یك قطعه کاغذ سمباده ازدرجه نسبتاً نرم.

۸ ـ مداد پاك‌کن ازانواع نرم وخشن که در روی کاغذ از خود رنگ باقی نگذارد. و یك فرچهٔ ظریف برای زدودن مانده‌های مداد پاك‌کن ازروی کاغذ.

۹ ـ یك نوار چسب برای چسبانیدن کاغذ روی تخته رسم.

طرز استفاده از وسایل فوق اگر چه تا اندازه‌ای ساده بنظر می‌رسد ولی برای آنکه از کار خود نتیجهٔ مطلوبی بدست آورید وظرافت ودقت لازم دررسمهایتان بچشم بخورد نکات زیر باید همواره مورد نظرتان باشد:

قبل از شروع کار همواره دواصل مهم «نظافت» و «دقت وحساسیت» را در نظر بیاورید. اطمینان داشته باشید که قبل ازاینکه خود را آماده کار بدانید دستهایتان را شسته و وسایل رسم (خط‌کش T وتخته رسم. گونیاها ... و غیره) را با پارچه‌ای نم‌دار وبعد باپارچه‌ای خشك که دارای خاصیت الکتریسیته دهندگی نباشد تمیز کرده‌اید.

برای حفظ دقت وحساسیت علاوه بردقت نظرخودشخص، حساسیت وسایل نیز اهمیت زیادی دارند. سعی کنید تا در اثر بی‌احتیاطی وسایل کارتان ازروی میز به‌زمین نیفتند و یا موقع استفاده از آنها با آنان با حالتی خشن رفتار نکنید. وسایل کارتان‌را همیشه دوست بدارید ودرحفظ آنها بکوشید. محل کارتان نیز باید همیشه محلی ساکت و آرام باشد ـ رادیو تلویزیون و آهنگهای تند دشمنان اصلی دقت و حساسیت شما می‌باشند.

نور باید همواره ازسمت چپ به‌روی تخته رسم بتابد تا سایهٔ دست و بعد گونیا و مداد مانع کار نشود. در ضمن کاملا دقت کنید که صفحهٔ کاغذ ازنور کافی برخوردار باشد.

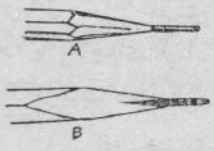
تخته رسم را در جائی قرار دهید که اطمینان دارید که‌در اثر حرکات ضعیف دست‌وغیره تغییر محل نخواهد داد.

خط‌کش تی (T) را درروی تخته رسم طوری قرار دهید که بعد کوتاه آن (که معمولادارای ضخامت بیشتری‌است وبه دیوارهٔ تخته رسم تکیه می‌کند) همیشه در زیر دست چپ قرار گیرد ـ باهمین دست باید خط‌کش تی (T) را برروی تخته رسم بلغزانید ـ هر موقع که از خط‌کش تی (T) برای کشیدن خطوط افقی ویاتکیه دادن گونیا (که بعداً شرح داده می‌شود) استفاده می‌کنید، دقت کنید که بعد کوتاه و ضخیم

خط‌کش بادیوارهٔ چپ تخته رسم کاملا در تماس باشد . آنگاه باید برای ثابت ماندن خط‌کش تی (T) دست چپ خود را برروی تیغهٔ دراز خط‌کش تکیه داده وکارتان را شروع کنید.

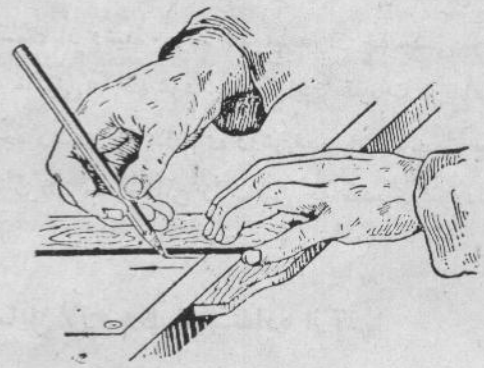
در استفادهٔ از **پرگار** باید دقت کنید تانوك سوزن‌کاغذ را سوراخ ننموده وفقط اثر کوچکی در روی کاغذ باقی‌گذارد در غیراین صورت دایرهٔ شما دارای شعاع ثابتی نبوده وظرافت کارتان نیز ازبین می‌رود . درموقع رسم دایره باید دقت کرد که فشار دست کاملا ثابت و یکنواخت باشد و مخصوصاً پرگار باسرعت مساوی درروی کاغذ بچرخد . تادایرهٔ حاصله دارای ضخامتی یکنواخت باشد . پیچ بالای پرگار (در محلی که دوشاخه به هم متصل می‌شوند) باید همیشه محکم باشد بطوری که‌برای بازوبسته‌کردن پرگار (کم وزیادنمودن‌شعاع پرگار) مقداری نیروی دست لازم بوده و شاخه‌های پرگار به خودی خود نسبت به‌هم تغییر فاصله ندهند .

مداد ـ تراشیدن نوك مدادها دررسم فنی اهمیت زیادی دارد . برای رسم خطوط مستقیم بهتر است نوك مدادها به‌جای‌اینکه دارای شکـل مخروطی باشند بـه صورت تیغه‌ای تراشیده شوند . (مطابق شکل)



برای این منظور ابتدا چوب روی مداد را به اندازهٔ کافی بتراشید (شکل A) آنگاه مداد را کاملا به‌صورت قائم‌در روی کاغذ سمباده با رأس حرکت دهید . تا انتهای ذغال مداد کاملاصاف‌ومسطح‌شود. بعدانتهای مدادرا به‌صورت افقی درروی کاغذ سمباده خوابانیده وبدون آنکه آن را دردست بچرخانید آهسته به‌چپ وراست حرکت دهید . آنگاه مداد را به اندازهٔ ۱۸۰ درجه در دست چرخانیده و طرف مقابل ذغال را نیز به صورت تیغه‌ای بر روی کاغذ سمباده بسائید : (شکل B) بهتر است بعد از این کار عیناً عملیاتی را که بر روی کاغذ سمباده انجام‌داده‌اید برروی‌یك‌قطعه‌کاغذ صاف‌نیز تکرار کنید تا گردها وناهمواریهای ریز نیز ازبین برود . بدیهی است موقع کشیدن خط ، لبهٔ پهن‌نوك مداد باید به‌موازات بعد خط‌کش ویاگونیا بوده و در تمام طول خط فشار و سرعت دست ثابت بماند . ـ همچنین درموقع رسم خط دقت‌کنید که ساعد دست راستتان به جائی تکیه نداشته و دست راست به‌راحتی بتواند در هر طرف حرکت کند . مداد نیز باید کمی مایل به‌جهت‌حرکت (از چپ به‌راست برای خطوط افقی) باشد تا به‌آسانی برروی کاغذ و لبهٔ خط‌کش وگونیاها بلغزد (شکل پائین). ازلحاظ سختی وسستی بطور کلی هرچقدر درجهٔ (H) مداد زیادتر باشد مدادسخت‌تر وکم‌رنگ بوده ودیرتر سائیده خواهد شد . درمقابل هراندازه درجهٔ B مداد زیادتر بشود به‌همان نسبت‌مداد نرمتروپررنگتر بوده وزودتر سائیده می‌شود ،

مثلا مدادهای H ازمدادهای 2H ومدادهای 3B از 2B نرمتر می‌باشد . برای رسم خطوط اصلی رسم معمولا مدادهای 2H نتیجهٔ رضایت بخشی می‌دهند ولی بر حسب نوع کاغذ و مقدار فشاری که بنا به‌عادت هر ترسیم کننده‌ای برروی مداد وارد می‌آورد ممکنست مدادهای دیگری نیزمناسب باشند .



کاغذ رسم ـ باید از جنس خوب و مـرغوب انتخاب شود. استعمال‌کاغذهای‌متوسط ازآنجهت‌صحیح‌نیست‌که ممکنست دراثر حرکت نوك مداد خراش برداشته ونیز درموقع استعمال مداد پاك‌کن کاغذ سائیده و احیاناً سوراخ شود . برای ثابت نمودن کاغذ در روی تخته رسم بهتر است به طریق زیر عمل نمود . ابتدا خط‌کش تی (T) را مطابق دستور در روی تخته رسم در پائین‌ترین وضعیت ممکن قرار داده و بعدکاغذ را در زیرآن بلغزانیدتالبهٔ پائین‌کاغذکاملا بالبهٔ پائین تیغهٔ خط‌کش برروی هم منطبق شوند . آنگاه با دست راست کاغذ را ثابت نگهداشته وبادست چپ خط‌کش را چندبار آهسته برروی کاغذ بلغزانید تا کاغذ کاملا بر سطح تخته تماس داشته و دارای ناهمواری وچین و چروك نباشد آنگاه گوشه‌های کاغذرا با قطعات کوچك نوار چسب برروی تخته رسم ثابت کنید .

درمورد استفاده از گونیاها وخط‌کش T و پرگار بعداً بحث بیشتری خواهیم داشت ـ برای خاتمهٔ این بحث لازمست همواره نکات زیر مورد نظرتان باشد :

هرگزخط‌کش مدرج را برای‌کشیدن خط مورداستفاده قرار ندهید .

هرگز ازلبهٔ پائین خط‌کش تی (T) برای رسم خطوط استفاده نکنید .

هرگز برای بریدن کاغذ ازلبهٔ خط‌کش وگونیا استفاده ننموده و لبهٔ چاقو ویا تیغ را نیز برای ایجاد برش مستقیم با خط‌کش‌ها درتماس نگذارید .

هرگز درتراشیدن نوك مداد حتی برای رسم یك‌قطعه‌خط کوچك ازبکار بردن طرز صحیح صرف نظر نکنید .

هرگز درنزدیکی کاغذ رسم نوك مداد را نتراشید .

هرگز سوزن نوك پرگارها را درتخته ومیز فرونبرید.

هرگز به‌محل اتصال شاخه‌های پرگار روغن نزنید .

هرگز اجازه ندهید وسایل اضافی وغیرلازم دوروبرشما تجمع کنند .

هرگز کاغذ رسم را تا نزنید .

تمرینات ـ ازبین شکلهای موجود درکتابهایتان چند شکل راانتخاب نموده برای مدت ۳۰ ثانیه به هر یك ازآنها نگاه کنید وبعد بلافاصله چشم رااز کتاب برداشته و سعی کنید شکل را درنظر خود باحداکثر جزئیات ممکنه مجسم سازید .

۲ ـ به‌هریك ازاشکال به‌مدت ۳۰ ثانیه نگاه کنیدآنگاه بلافاصله چشم را از کتاب برداشته و سعی کنید شکل را با حداکثر جزئیات ممکنه درروی کاغذی رسم نمائید بعد شکلی راکه خودتان کشیده‌اید بااشکال اصلی‌مقایسه نموده اشتباهات آن را تصحیح نمائید ـ این تمرینات قوهٔ تجسم شما را زیاد می‌کند ، سعی کنید در هر دفعه شکل پیچیده‌تری را برای تمرین انتخاب کرده باشید .

راهنمای شیمی (بقیه ازصفحهٔ ۹۶)

آنرا واحد اختیار می‌کنیم . اما اگر مقدار β را ۳ اختیار کنیم در حدود $\frac{1}{12}$ خطای نسبی قائل شده‌ایم و چنین خطائی درتجزیه قابل‌قبول نیست .

اگر α را معادل ۳ اختیار کنیم برای β عدد ۸/۲۲ بدست می‌آید که چون آنرا ۸ بگیریم . خطای تجزیه را در حدود $\frac{1}{40}$ درنظر گرفته‌ایم که تاحدی قابل قبول است. بالاخره هرگاه α را معادل ۴ اختیار کنیم برای β مقدار ۱۰/۹۶ بدست می‌آید که بی‌شك به‌جای‌آن باید عدد ۱۱ را قرار داد .

اما هنگامی‌که اعداد در حدود خطاهای جایز واقع شده باشند به‌هیچ وجه نمی‌توان مطمئن شد که اعداد واقعی اعدادی باشند که تقریب کمتری دارند . بنابراین نمی‌توان در بین دو دستگاه‌اعداد ۳ ، ۸ ، ۳ و ۴ ، ۱۱ ، ۴ یکی را انتخاب کرد مگر وقتی‌که عدد جرم ملکولی نتواند تردید را ازبین ببرد . با انتخاب دستگاه اعداد ۳ و ۸ و ۳ جرم ملکولی $M=92$ و با دستگاه دوم M برابر ۱۲۳ می‌شود . هرگاه مقدارتقریبی جرم ملکولی مثلا ۱۰۰ باشد باید دستگاه اول را با وجود کمی دقت قبول کرد .

بطوری‌که ملاحظه می‌شود حتی درمواردی‌که تنها ساده‌ترین فرمول موردنظر باشد همیشه‌می‌توان ازجرم ملکولی صرف‌نظر کرد .

بی آنکه عصبانی شوید
این مسئله را حل کنید

ثابت کنید که بین جمعیت دنیا (یاهرجمعیتی) حداقل دو نفر یافت می‌شوند که عدهٔ دوستان آنان با یکدیگر برابر است .

ترجمهٔ : داود مصحفی

پاسخ مسئلهٔ زیرهمین عنوان مندرج دریکان شمارهٔ گذشته

الف ـ اگر t تعداد دقیقه‌های بعد ازساعت ۶ باشد ، عقربهٔ ساعتشمار ساعت میدان شهر با عقربهٔ ساعتشمار ساعتی‌که وقت‌صحیح‌را نشان‌می‌دهدوقتی‌منطبق‌خواهدبودکه $30+\frac{t}{12}=t$ باشد . برای‌عقربهٔ دقیقه‌شمار نیزهمین رابطه باید برقرارباشد از رابطهٔ بالا نتیجه خواهد شد $t=32\frac{8}{11}$ دقیقه ، یعنی ساعت میدان‌شهر درساعت ۶ و $32\frac{8}{11}$ دقیقه بعد از ظهر وقت صحیح را نشان می‌دهد .

ب ـ دراین حال معادلهٔ مربوطه برای عقربهٔ ساعتشمار عبارتست از : $30+\frac{t}{12}\equiv 30+t \Longrightarrow (\text{mod } 60)$

وبرای عقربهٔ دقیقه‌شمارعبارتست‌از : $t=\frac{t}{12}(\text{mod } 60)$

کوچکترین‌مقدارقابل‌قبول t برابراست‌با $65\frac{5}{11}$ دقیقه.

بنابراین وقت بازرسی مأمورین ساعت ۷ و $5\frac{5}{11}$ دقیقه بوده‌است

نویسندگان : ژ. گامو
م. استرن

ترجمه از فرانسه

کارمند بازنشستهٔ راه‌آهن

۱. تماشای عبور ترنها

در جلگه‌های وسیع مرکزی ایالات متحدهٔ آمریکا شهر کوچك پرت افتاده‌ای قرار داشت . آقای **ویلیام جانسن** مکانیسین بازنشستهٔ راه‌آهن ، این شهر بی سروصدا وآرام را برای سکونت خوداختیار کرده بود. خط اصلی راه‌آهن شرقی-غربی ایالات متحده از این شهر می‌گذشت که ویلیام جانسن سالهای زیادی از عمر خودش را در کارکردن روی همین خط گذرانده بود .

بیماری‌عجیبی گریبانگیرجانسن شده ووی‌رارنج می‌داد؛ پاسی از شب‌گذشته ازخواب‌بیدار می‌شد و دیگر هرچه می‌کرد خوابش نمی‌برد . یك شب گمان کردکه ممکن است گردش‌در جاده های اطراف شهر برای وی درمانی باشد ، از خانه بیرون‌آمد وگردش‌کنان‌به قدم زدن مشغول‌شد. یك موقع خود را در حدود ایستگاه راه آهن یافت ، در آنجا توقف کرد و غرق در تفکرچشم برخطوط راه آهن دوخت. ترنی به‌ایستگاه نزدیك می‌شدوغرش لکوموتیوآن سکوت فضارادرهم می‌شکست. مشاهدهٔ ترن پیرمرد کارمند بازنشسته راه آهن را به هیجان آورد بطوری که وقتی به منزل برگشت خیلی خوب توانست بخوابد و به خواب برود .

بعد از مدتی که هرشب این ماجرا تکرار می‌شد برای جانسن معمای جالبی پیش آمد: از ترنهایی‌که از جلوچشم‌وی می‌گذشتند تعدادآنهایی‌که ازمغرب به مشرق می‌رفتند به مراتب بیشتر از تعدادآنهایی بودکه درجهت ازمشرق به‌مغرب حرکت می‌کردند ، در صورتی که جانسن به خوبی می‌دانست که روی راه‌آهن مزبور تعدادترنهایی‌که به‌سمت مشرق می‌روند درست به اندازهٔ تعداد ترنهایی‌است‌که به سمت مغرب‌حرکت می‌کنند. ابتدا گمان بردکه باصرهٔ وی خطا می‌کند ، پس برای اینکه مطمئن شودازاولین ترنی که ازجلو وی گذشت شروع کرد و هر یك از ترنها را برحسب جهتی‌که داشتند بانشانه‌های E و O در دفترچهٔ یادداشت خود علامتگذاری‌کرد. در پایان یك هفته وقتی علامتها راشمرد ۵ عدد E داشت و ۲ عدد O. هفتهٔ بعد هم شمارش راتکرارکرد وباز دقیقاًهمان نتیجه را بدست‌آورد. وی همیشه سرساعت معین ازخواب‌بیدارمی‌شد ، همیشه سرساعت معین ، کمی قبل از ورود ترن مغرب به مشرق ، به ایستگاه می‌رسید .

جانسن‌که از این موضوع متعجب شده بود تصمیم‌گرفت بررسی آماری همه جانبه‌ای روی مسئله انجام دهد ومشاهدات خود را به ساعات معینی محدود نکرده آنرا برای تمام طول شبانه روزگسترش دهد . از یکی از دوستانش خواهش کرد تا جدولی از ساعات مختلف را به دلخواه ترتیب دهد مثلا ساعت ۹ و ۳۵ دقیقه ، ظهر ، ساعت ۱۵ و ۷ دقیقه و غیره ، درست در رأس هریك از این ساعات به ایستگاه مراجعه کرده معلوم کند اولین ترنی‌که می‌گذرد درچه جهت است. از این کار هم نتیجه‌ای مانند قبل بدست آورد ؛ از صد ترنی که گذشته بود تقریباً ۷۵ عدد آن به‌طرف مشرق و ۲۵ عددآن به‌طرف مغرب حرکت کرده بود .

جانسن گیج شده بود ، برای بررسی دقیقتر موضوع به نزدیکترین ایستگاه بزرگ مجاور مسافرت کرد و در آنجا تحقیق کردکه‌آیا بعضی‌ترنهاکه به سمت مغرب حرکت می‌کنند از مسیر خود روی خط دیگر منحرف می‌شوند ؟ به وی اطلاع دادند که چنین نیست ؛ همهٔ ترنها طبق برنامهٔ تنظیمی حرکت می‌کنند و علاوه بر آن تعداد ترنهایی که پائین می‌آیند درست برابر است باتعداد ترنهایی‌که بالا می‌روند. معمابرای جانسن وحشت انگیزشده بود. بیدارخوابیش دو باره عودکرد و واقعاً دوچاربیماری شد .

پزشك ناحیه در عیادت ازجانسن ماوقع را شنید وچون علاوه برپزشکی که حرفه‌اش بود ریاضیات راهم به خاطر علاقهٔ به‌آن فراگرفته بود و مخصوصاً در جمع آوری معماهای‌ریاضی شوقی‌داشت مسئله‌برایش بسیارجالب‌آمد چون‌تاکنون‌بااینچنین معمایی روبرو نشده بود . کمی در بارهٔ مسئله فکر کرد و بعد چنین توضیح داد :

ـ باید فرض‌را براین بگیریم‌که ترنها طبق برنامهٔمعین بدون انحراف‌حرکت می‌کنند واهمیتی ندارد که شما چه‌ساعتی به ایستگاه برسید .

فرض می‌کنیم‌که هرزمان در هر یك از دوجهت یك‌ترن روی‌خط وجودداشته‌باشد، ترنهایی‌که پائین‌می‌آیند در سرساعت از ایستگاه بگذرند وتر نهائی که بالا می‌روند وقتی ازایستگاه می‌گذرند که ربع ساعت از سر ساعت گذشته باشد . در هر جهت‌ترنهایی به‌تعدادبرابروجودخواهد داشت. باید معلوم‌کنیم وقتی شما به‌ایستگاه می‌رسیدکدام ترن برای اولین بار ازجلو چشم شما می‌گذرد. اگر شماکمی ازساعت‌گذشته ، قبل ازربع، به‌ایستگاه‌برسیدمثلا بین‌ساعت‌یك‌وساعت‌یك‌وربع‌بعدازظهر ،اولین ترنی که از ایستگاه می‌گذرد ترنی است که بالا می‌رود و آن موقع ساعت یك و ربع خواهد بود . اما اگر شما بعد از یك ساعت وربع‌به ایستگاه‌برسید این ترن را نخواهید دید. اولین ترنی‌که خواهید دید در ساعت ۲ خواهد بود و ترنی است که پائین می‌رود.

چنانچه در ساعات مختلف روز واتفاقی به ایستگاه‌بروید شانس اینکه در ربع اول ساعت برسید یا سه ربع بعدازآن به نسبت یك برسه خواهد بود. بنابراین احتمال اینکه اولین‌ترن پائین رونده باشد سه برابر بزرگتراز احتمال مربوط به ترن بالا رونده می‌باشد. واین همانست‌که شما مشاهده‌کرده‌اید.

جانسن در پاسخ پزشك اظهار داشت :

ـ من‌که نفهمیدم . هر چند که در ریاضیات قوی نیستم اما اینقدر می‌دانم‌که اگر احتمال ترن پائین رونده بیشتر از ترن بالارونده باشد از آن نتیجه خواهد شد که تعداد ترنهای پائین رونده بیشتراست. این‌یك موضوع مسلم است .

پزشك تبسم‌کنان اظهار داشت :

ـ نه ، چنین نیست ، شمادقیقاً متوجه موضوع نشده‌اید. اولین ترنی‌که به ایستگاه می‌رسد بیشتر محتمل است به پائین بیاید تا اینکه روبه سمت بالا باشد، زیرا احتمال اینکه شمادر زمان بین‌گذشت‌ترن پائین رونده و ترن بالا رونده به‌ایستگاه برسید سه مرتبه زیادتر است اما شما بطور متوسط زمان بسیار بیشتری را باید به انتظار بگذرانید .

مکانیسین حیرت زده گفت ازاینکه باید زمان بیشتری‌در درانتظار باشدچیزی دستگیرش نشده‌است‌وپزشك‌چنین توضیح‌داد:

ـ اگر شما قبل‌از ربع به ایستگاه برسید اولین ترنی‌که خواهدگذشت روبه سمت بالا خواهد بود، برای اینکه شما این ترن راببینید لازم نیست‌که بیش از ربع ساعت در انتظارباشید بطور متوسط شما به مدت هفت دقیقه‌ونیم در انتظار خواهیدبود. اما اگر شما درست بعد از حرکت ترن بالارونده به ایستگاه برسید باید سه ربع ساعت انتظار بکشید تا ترن پائین رونده برسد . احتمال اینکه اولین ترن پائین رونده باشد سه برابر بزرگتراست، اما شما هم باید زمانی سه‌برابر بیشتر درانتظار باشید . در نتیجه تعادل برقرار می‌شود .

در یادداشتهایی که شما فراهم آورده‌اید شاید نسبت یك بر سه را دقیقاً بدست نیاورده باشید اما مسلماً نسبتی در همین حدود یافته‌اید . با فرض اینکه تعداد ترنهایی که در هریك‌از دو سمت می‌گذرد برابر است مشاهدات شما را در یك دورهٔ طولانی‌به نوع دیگری نمی‌توان‌توجیه‌کرد. بین عبورترن‌پائین رونده تا ترن بالا رونده زمان‌کوتاهتری را بایدگذراند تابین ترن بالارونده و ترن‌پائین رونده .

جانسن در حالی‌که سرش را می‌خاراند گفت که دراین باره باید بیندیشد وضمناً سؤال‌کردکه آیااین امر به‌چگونگی جدول ساعات حرکت‌ترنها بستگی دارد؟پزشك چنین پاسخ‌داد:

ـ بدون در نظر گرفتن برنامهٔ ساعات هم می‌توان مسئله را توضیح داد. برای مثال فرض می‌کنیم‌فقط یك ترن‌سوپرشف بین شیکاگو و لوس آنجلس درآمد و رفت باشد. ما تقریباً در ۸۰۰ کیلومتری شیکاگو و۲۴۰۰ کیلومتری لوس‌آنجلس واقع شده‌ایم . اینطور در نظر می‌گیریم که شما در یك ساعت حتمی به ایستگاه می‌رسید . در آنجا به احتمال تمام ترن را مشاهده خواهید کرد . چون فاصلهٔ ازاینجا تا لوس‌آنجلس سه برابر فاصلهٔ از اینجا تا شیکاگو است بنا براین شانس اینکه ترن به سمت مغرب باشد سه برابر شانس آنست‌که ترن به سمت مشرق باشد . اگرترن غربی باشد با گذشتن از اینجا متوجه مشرق خواهد شد. فعلا هم‌که، همچنانکه چنین است ، ترنهای‌زیادی بین شیکاگو و لوس‌آنجلس در رفت و آمد هستند باز ایستگاه به‌همان وضع خواهد بود ، اولین‌ترنی‌که می‌گذرد احتمال‌کامل داردکه به سمت‌مشرق درحرکت باشد.

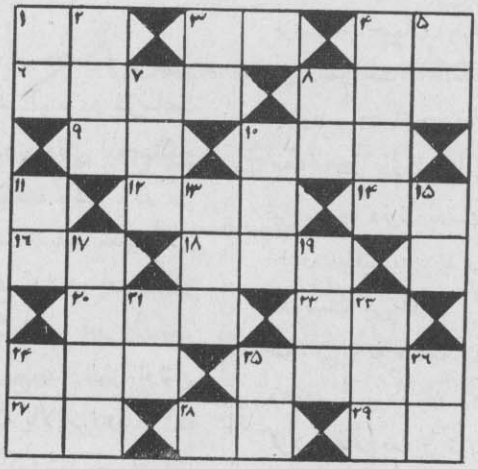
آقای جانسن‌کلاهش را برداشت ، دست دکتر را فشرد و اظهار داشت :

ـ بسیار متشکرم ، همین بهترین مداوای من بود. گمان می‌کنم دیگر احتیاجی به نسخه و دارو نباشد.

سرگرمیهای ریاضی

جدول اعداد

طرح از: فرخ صادقی



افقی :

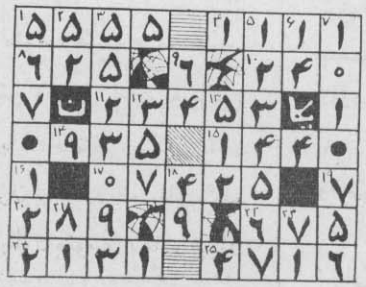
۱ ـ سمت راست مجذورش واقع می‌شود . ۳ ـ تکرار یك رقم ۴ ـ ندبرابرعدد ۳ افقی ۶ ـ ازرقمهای متوالی تشکیل شده است . ۸ ـ ار ارقام متفاوت‌تشکیل شده هم خودش وهم مقلوبش مربع کامل است . ۹ ـ مجموع ۸ عدد فرد متوالی. ۱۰ ـ مقلوبش یك رقمی می‌شود . ۱۲ ـ تکراریك رقم . ۱۴ ـ بزرگترین عدد دورقمی که رقم یکان آن ۵ واحد بیش از رقم دهگان آن است . ۱۶ حاصل ضرب دوعدد فرد متوالی ومقلوبش مجذورکامل است .۱۸ ـ توان نهم یك عدد . ۲۰ ـ نصف عدد ۱۸ افقی . ۲۲ ـ متمم حسابی عدد ۱۶ افقی. ۲۴ ـ نصف عدد ۱۲افقی. ۲۵ ـ رقمهاهایش تصاعد هندسی می‌سازند. ۲۷ ـ دوبرابرعدد ۱ افقی ۲۸ـ مقلوبش که ازمتمم حسابی‌خودعدد یك واحدکمتراست مکعب کامل می‌باشد.۲۹ ـجذر عدد ۸ افقی .

قائم : ۱ ـ دوبرابرعدد۲۹افقی ۲ـمجذورکامل‌است. ۳ـ عددی اول .۴ـ جذرش‌از عدد ۴ افقی یك واحدکمتر است. ۵ ـ همان عدد ۴ افقی. ۷ ـ رقمهـایش تصـاعد هندسی نزولی می‌سازند. ۸ ـ جذرعدد ۱۰ افقی ۱۰ ـ متقارن ومجذورکامل . ۱۱ ـ مقلوب عدد ۱۶ افقی .۱۳ ـ همان عدد ۲۰ افقی ۱۵ ـ مقلوب عدد ۳ قائم. ۱۷ ـ رقمهایش به ترتیب نزولی تصاعد حسابی می‌سازند ۱۹ـ عددی متقارن . ۲۱ـ متم حسابی عدد۱۴افقی. ۲۳ـ رقمهایش به‌ترتیب نزولی تصاعد حسابی می‌سازند . ۲۴ ـ مقلوب عدد ۲۱ قائم . ۲۵ ـ کوچکترین مقسوم علیه دورقمی عدد ۲۸ افقی. ۲۶ ـ تفاضل رقمهایش برابر۵ است .

تفریق جالب

۹۸۷۶۵۴۳۲۱ ـ
۱۲۳۴۵۶۷۸۹

۸۶۴۱۹۷۵۳۲



حل جدول شمارهٔ گذشته

معمای مهره‌ها

چنانکه درشکل بالا می‌بینید با ۱۲ عدد مهره یك مربع ساخته‌ایم که درهرضلع آن ۴ عدد مهره‌وجود دارد . این ۱۲ مهره را چنان‌قرار دهید که مربعی بسازند که درهرضلع آن ۵ عدد مهره باشد .

تعیین طول ترن

دوترن روی دورشته خط موازی به‌طرف یکدیگر درحرکت هستند . سرعت اولی ۳۶ کیلومتر درساعت و ازدومی ۴۵ کیلومتردرساعت است . مسافری که درترن دوم مستقر است ملاحظه می‌کندکه زمان گـذشتن واگنهای ترن اول ازجلوی وی ۶ ثانیه است . طول این تـرن چقدر است ؟

مربوط به شمارهٔ گذشته

پاسخ تعیین ارقام :

۹۳۷۶

پاسخ بازی اعداد :

درهریك ازاعداد مزبور هریك از رقمهای دهگانه یك باروفقط یك باربکاررفته و علاوه برآن‌هرکدام از چهار عدد مزبور بر عـددهای از۲ تا ۱۸ بخش پذیر می‌باشد .

اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از : مهندس ایرج ارشاقی

۹ - شکست نور
Refraction of light

Index of refraction	ضریب شکست
Critical Angle	زاویهٔ حد
Total reflection	انعکاس کامل
Incident ray	شعاع تابش
Refracted ray	شعاع منعکس

Practice Your Reading

The index of refraction of any substance is the ratio of the speed of light in air to its speed in that substance.

The third law of refraction says that the index of refraction for any two media is constant, no matter what the angle of incidence.

Total reflection always occurs when the angle of incidence exceeds the critical angle.

۱۰ - عدسی ها
Lenses

Convex lens	عدسی محدب
Concave lens	عدسی مقعر
Principal focus	کانون اصلی
Virtual focus	کانون مجازی
Magnifier	ذره بین
Spherical aberration	خطای کرویت
Nearsightedness	نزدیك بینی
Farsightedness	دوربینی
Astronomical instruments	وسائل نجومی
Eyepiece	عدسی چشمی

Problems

An object is located 12 cm. from a convex lens of 5 cm. focal length. How far from the lens will the image be formed?

In optical instruments where reflection is required, which would be better, mirrors or prisms?

۱۱ - تجزیهٔ نور
DisPersion light

Primary colors	رنگهای اصلی
Spectrum	طیف
Polarized light	نور پلا ریزه
Interference of light	تداخل نور
Monochromatic	یکرنگ
Transparent	شفاف
Opaque	کدر (غیر شفاف)
Copmlementary colors	رنگهای مکمل

Questions

A dark green automobile goes through a tunnel illuminated with sodium vapor lamps. What color does it appear to be? What color would the car be if the tunnel were equipped with mercury vapor lamps?

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(Mathematics magazine · Vol.39 , No 1)

Problem 15. Determine the values of n for which $\sum_{k=1}^{n} k^5$ is a perfect square.

Solution I. If $n \geq 1$, we have

$$S_5 = \sum_{k=1}^{n} k^5 = (n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12$$

So that we must find , say ,

$$3y^2 = 2n^2+2n-1 ,$$

for S_5 to be a square

Then , let $n = 3x+1$, where we get

$$(1) \quad y^2 = 6x^2+6x+1.$$

We now solve for (1) by employing Euler's formula ; he treated

$$ax^2+bx+c=y^2,$$

given the solution

$$x=f \ , \ y=m$$

Set $x=f+uz$, $y=m+vz$, Then $(v^2-au^2)z = 2auf-2vm+bu$. Since $a=b=6$ is positive and not a square , we can make

$v^2-au^2=1$ (a pell equation)

and obtain an infinite number of integral solutions.

The first few examples are

(with $a=b=6$ and $c=1$)

$x = 0,4,44,\ldots,$

$y = 1,11,109,\ldots,$

So that in the proposed problem (since $n=3x+1$) we have: $n = 1,13,133\ldots$

Solution II. The formula for the sum is well known, and is

$$\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

If n is any integer , a factor 4 cancels from the numerator and denominator, from either the n^2 or $(n+1)^2$ terms. So we have to make $2n^2+2n-1=3m^2$ where m is integral. This may be written

$$(2n+1)^2 = 6m^2+3$$

Thus $2n+1$ must contain a factor 3 , and writing $2n+1=3N$ we obtain the equation $3N^2-2m^2=1$. Solutions of this equation may be obtained by the method of continued fractions. Expressing $(2/3)^{1/2}$ as a continued fraction, we obtain

$$\frac{2^{1/2}}{3} = \frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\cdots$$

and the first, third, fifth, seventh convergents supply solutions of the equation: The convergents are 1,4/5, 9/11,40/49, 89/109, 396/485, 881/1079, and hence the required values of N are 1,9,89,881,... and thus values of n are 1,13,133,1321,...

حل مسائل نمونه

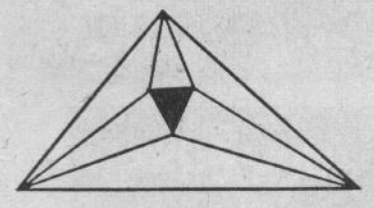
تعمیم یك مسئله

از مجلهٔ: The Mathematics Teacher

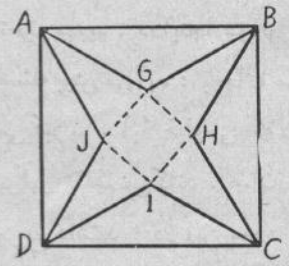
ترجمهٔ : حسن مکارمی
دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان سخن

۴۱۸۵ - خطوطی که زاویه‌های یك مربع را به n قسمت برابر تقسیم می‌کنند

درهر مثلث سه نیمساز زاویه‌ها دریك نقطه به نام مرکز دایرهٔ محاطی متقاربند . آنچه توسعهٔ ریاضیات را در این باره میسر ساخته است قضایای مربوط به‌خواص نیمسازهای زاویه‌ها می‌باشد . شاید به خاطر اینکه تقسیم زاویه به‌سه قسمت برابر میسر نیست درهندسه به نیمسازها و خواص آنها توجه بیشتری شده است . اولین‌بار دراواخر ۱۸۹۹ **مورلی** (Morely) به این نکته پی برد که از تقاطع خطوطی که زاویه‌های مثلث را به‌سه قسمت برابر بخش می‌کنند مثلثی متساوی‌الاضلاع پدید می‌آید .



اکنون به‌جای مثلث مربع را که یك‌چهار ضلعی خاص است در نظر می‌گیریم . آیا خطوطی که زاویه‌های مربع را به قسمتهای برابر بخش می‌کنند همان خواصی را دارند که در مورد مثلث ذکر شد ؟ نیمسازهای زاویه‌های مربع همان قطرهای مربع بوده ودرمرکز مربع متقارب می‌باشند .



خطوطی درنظرمی‌گیریم که زاویه‌های مربع را به سه‌قسمت برابرتقسیم‌می‌کنند آیا چهار ضلعی‌که ازتقاطع خطوط مجاور پدید می‌آید چهار ضلعی خاصی است ؟ سؤالاتی که در زیر مطرح می‌شود ما را به‌پاسخ دادن به سؤال بالا راهنمائی می‌کند ؛

آیا GI با AD و BC موازی است ؟

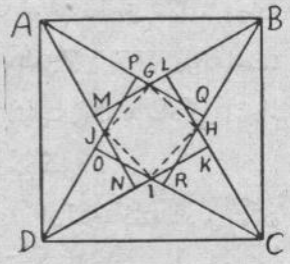
آیا JH با AB و CD موازی است؟

آیا GI بر JH عمود است ؟

آیا نقطهٔ تلاقی GI و JH همان مرکز مربع است ؟

آیا چهار نقطهٔ G ، H ، I ، J ازمرکز مربع به‌یك فاصله‌اند ؟

بعد ازبررسی پرسشهای بالا این مطلب ثابت می‌شود که چهار ضلعی GHIJ مربع می‌باشد .



برای تحقیق بیشتر دربارهٔ مسئله خطوط غیر مجاوررا درنظر می‌گیریم . آیاچهار ضلعی KLMN که از تقاطع این خطوط پدید می‌آید چه نوع چهار ضلعی می‌باشد ؟ در مثلث AND اندازهٔ زاویهٔ DAN برابر ۳۰ درجه واندازهٔ زاویهٔ NDA برابر ۶۰ درجه است بنابراین زاویهٔ AND قائمه می‌باشد . به این ترتیب ثابت می‌شود که KLMN مربع مستطیل است . دو مثلث AND و CDK متساوی‌اند پس AN=DK همچنین دو مثلث AMB و ADN با هم برابراند. پس AM=DN ونتیجه می‌شود که MN=NK ومستطیل KLMN مربع می‌باشد .

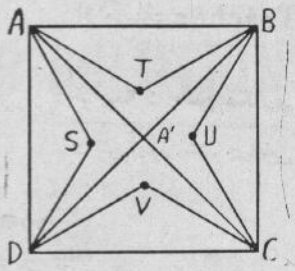
چهارضلعی OPQR نیزمربع می‌باشد که ضمناً بامربع KLMN برابر است .

رأسهای دومربع مزبور یك هشت ضلعی تشکیل می‌دهند

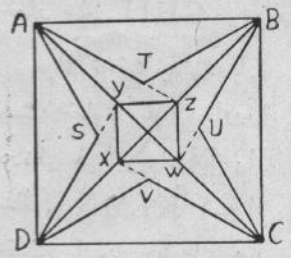
که می‌توان از تساوی مثلثها خواص زیر را برای آن ثابت بکنیم :

$$LP = MO = QK = NR \quad \text{و}$$

$$ON = MP = LQ = PK$$



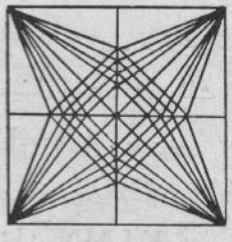
مسئله را تعمیم داده خطوطی در نظر می‌گیریم که زاویه‌های مربع را به چهار قسمت برابر بخش می‌کنند . دو خط از این خطوط قطرهای مربع هستند و خطوط دیگر نیمسازهای زاویه‌های بین ضلعها و قطرهای مربع می‌باشند . نقاط T و U و V و S که از تقاطع خطوط اخیر حاصل می‌شوند مرکزهای دایره‌های محاطی مثلثهایی هستند که بوسیلهٔ دو قطر مربع تشکیل می‌شود . دو خط SV و TV با یکدیگر برابراند ، بریکدیگر عموداند و منصف یکدیگر می‌باشند بنابراین چهار ضلعی STUV مربع می‌باشد .



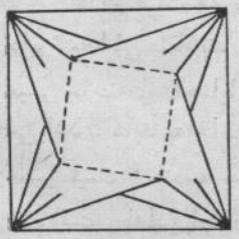
از خطوط مزبور خطوط غیر مجاور را در نظر می‌گیریم. مطابق شکل، چهارضلعی WXYZ مربع است. اثبات آن به سادگی انجام می‌گیرد .

از آنچه گفته شد می‌توان قضیهٔ کلی زیر را بیان کرد :

از تقاطع خطوطی که زاویه‌های یك مربع را به n قسمت برابر می‌کنند ($n > ۲$) یك مربع پدید می‌آید. رأسهای این مربع بر عمودمنصفهای ضلعهای مربع قراردارند. در حقیقت هر چهار نقطه‌ای که بر عمودمنصفهای ضلعهای مربع واقع بوده وازمرکزمربع به یك فاصله باشند. رأسهای یك مربع



می‌باشند شکل بالا خطوطی را نشان می‌دهد که زاویه‌های مربع را به سه قسمت، چهار قسمت، پنج قسمت و . . . تقسیم کرده‌اند. در تمام مربعهایی که تشکیل شده است ، رأسها برعمود منصف‌های ضلعهای مربع قرار دارند ، ضلعها با ضلعهای مربع اصلی زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازند ، قطرها درمرکزمربع اصلی متقارب می‌باشند. البته غیر از مربعهای مربور ، مربعهای دیگری وجود دارد که از تقاطع خطوط غیر مجاور تشکیل می‌شوند. برای اثبات مطالب بالا ابتدا ثابت می‌شود که چهارضلعی حاصل مستطیل است بعد بااستفاده ازتساوی مثلثها ثابت می‌شود که آن چهار ضلعی مربع می‌باشد .



برای مثال خطوطی را در نظر می‌گیریم که زاویه‌های مربع را به پنج قسمت برابر تقسیم می‌کنند . برای اینکه مثلا ثابت کنیم زاویهٔ B′ قائمه است ابتدا اندازهٔ زاویهٔ DB′A را حساب می‌کنیم . این اندازه برابر است با

$$۱۸۰ - (\frac{۹۰}{۵} + \frac{۹۰}{۵} + \frac{۹۰}{۵}) = ۱۲۶^\circ$$

مجموع اندازه‌های زاویه‌های AB′C′ و DB′E′ برابراست با

$$۱۸۰ - \frac{۱۸۰}{۵} = ۱۴۴^\circ$$

بنابراین اندازهٔ زاویهٔ C′B′E′ برابر می‌شود با

$$۳۶۰^\circ - (۱۲۶ + ۱۴۴) = ۹۰^\circ$$

بررسی بیشتر

درآنچه گفته شد خواص نیمسازهای زاویه‌ها را برای خطوطی که زاویه‌ها را به n بخش تقسیم می‌کنند تا اندازه‌ای تعمیم دادیم . دراینجا سؤالهای بیشتری برای تعمیم کاملتر مسئله پیش می‌آید : به‌جای مربع ، مربع مستطیل را در نظر می‌گیریم . آیا خطوطی که زاویه‌های مستطیل را به n قسمت برابر تقسیم می‌کنند ، همان خواصی را دارند که در مورد مربع داشتند ؟ در این مورد باید بیشتر بررسی کرد .

مسائل برای حل

دانش آموزان هر کلاس می‌توانند راه حل مسائلی مربوط به‌کلاس خود راکه شمارهٔ مسئله باعلامت «*» مشخص شده است به‌ادارهٔ مجله ارسال دارند. از ارسال حل مسائل فاقد علامت * و همچنین از ارسال حل مسائل مربوط به‌کلاسهای پائین‌تر خودداری شود. روی ورقهٔ حل مسئله نام و کلاس و دبیرستان مربوط به صراحت نوشته شود.

کلاس چهارم طبیعی

۴۱۸۶ ـ به‌فرض اینکه داشته باشیم.

$$x^3-3x^2+3x=6$$

مقدار x را تعیین کرده به‌ازاء آن حاصل عبارت زیر را به‌ساده‌ترین صورت بدست آورید.

$$\frac{x^3-3x^2}{x-1}$$

۴۱۸۷ ـ درمربع ABCD ازهر رأس ودرداخل آن دو خط رسم می‌کنیم که هر کدام با یك ضلع مربع زاویهٔ $\alpha<45^\circ$ بسازند. نقاط تلاقی خطوط مجاور را M، L، K و N می‌نامیم. ثابت کنید که چهار ضلعی KLMN مربع بوده وقطرهای مربع مفروض محورهای تقارن آن می‌باشند.

کلاس چهارم ریاضی

* **۴۱۸۸ ـ** از **علی نصر** دانش‌آموز دبیرستان البرز

ثابت کنید که عبارت

$$x^5-8x^4+19x^3-9x^2-27$$

برتوان سوم یك دو جمله‌ای قابل قسمت‌است. این دو ـ جمله‌ای وهمچنین خارج قسمت تقسیم را پیدا کنید.

* **۴۱۸۹ ـ** از **کاظم حافظی**

ثابت کنید که عبارت

$$(ax^k+c)^{2n+1}+(cx^k+a)^{2n+1}$$

برعبارت x^k+1 قابل قسمت است.

* **۴۱۹۰ ـ** از **سعید فرشاد** دانشجوی دانشکدهٔ علوم ـ تبریز

اولا صحت تساوی زیررا محقق کنید.

$$x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$$

ثانیاً ازمعادلهٔ زیر مقدار x را بدست آورید

$$2^{\log_3 x}+x^{\log_3 2}=32$$

۴۱۹۱ ـ به‌فرض اینکه:

$$f(x)=\log x$$

و

$$f\{f[f(x)]\}=2$$

باشد مقدار x را حساب کنید.

۴۱۹۲ ـ از **لهراسب گرشاسب**، یزد

دایرهٔ به شعاع R مفروض است. مطلوبست تعیین تعداد دایره‌های به‌شعاع R که بردایرهٔ مفروض وهردو دایرهٔ مجاور بریکدیگرمماس باشند.

* **۴۱۹۳ ـ** از **حسن رئیسی** ششم ریاضی دبیرستان طبری آمل

هواپیمائی‌درامتدادی مستقیم وموازی سطح‌زمین باسرعت ثابت درحال حرکت است. میله‌ای به‌طول h' به‌طور قائم در زمین نصب شده است. شخصی که ارتفاع چشمش تاسطح زمین مقدار ثابت l می‌باشد نوك میله ویك نقطهٔ ثابت از هواپیما را در امتداد یکدیگر درنظر گرفته درامتداد خطی‌مستقیم موازی باهواپیما چنان حرکت می‌کند که همواره نقطهٔ ثابت مزبوراز هواپیما را درامتداد نوك میله رؤیت‌کند. درصورتی‌که شخص مزبور پس ازیك دقیقه مسافت d متررا پیموده باشد سرعت هواپیما را حساب‌کنید.

کلاس پنجم طبیعی

۴۱۹۴ ـ فرستنده: **مصطفی گودرزی طائمه**

در مثلث ABC نقاط P و M و N به ترتیب اوساط

اضلاع BC و BA و AC می‌باشد با فرض P(۲ و ۲ −)و N(۴ و ۱ −) و M(۲ و ۱ −) مختصات سه رأس مثلث را بدست آورده از راه محاسبه و مقایسهٔ طول ضلع BC و طول میانهٔ AP نوع زاویهٔ A را معلوم کنید .

۴۱۹۵ـ از **سید جمال آشفته**

مقدار عددی حاصل عبارت زیر را حساب کنید :

$$A=(1+\sin\frac{5\pi}{6})(1+\sin\frac{4\pi}{3})\times$$
$$\times(1+\sin\frac{7\pi}{6})(1+\sin\frac{2\pi}{3})$$

کلاس پنجم ریاضی

✻ ۲۱۹۶ـ ترجمه از «مجلهٔ ریاضیات مقدماتی»

روی یك محور x´x پنج نقطهٔ A ، B ، C ، I ، و J چنان انتخاب شده است‌که رابطهٔ زیر برقرار می‌باشد

$$(1)\quad \frac{\overline{IA}}{\overline{JA}}+\frac{\overline{IB}}{\overline{JB}}+\frac{\overline{IC}}{\overline{JC}}=0$$

۱) از رابطهٔ (۱) رابطهٔ زیر را بدست آورید :

$$(2)\quad \frac{3}{\overline{JI}}=\frac{1}{\overline{JA}}+\frac{1}{\overline{JB}}+\frac{1}{\overline{JC}}$$

۲) از رابطهٔ (۲) رابطهٔ (۱) را بدست آورید.

۳) اگر O نقطه‌ای غیر واقع بر x´x باشد خطی که موازی با OJ رسم شود خطوط OA ، OB ، OC و OIرا به ترتیب در a ، b ، c و i قطع می‌کند . رابطهٔ زیر را ثابت کنید :

$$(3)\quad \overline{ia}+\overline{ib}+\overline{ic}=0$$

۴) عکس حکم (۳) را بیان کرده و آنرا ثابت کنید.

✻ ۴۱۹۷ـ ترجمه از روسی توسط : **حبیب‌الله گلستان زاده**

اگر x کمان حاده باشد ازهریك از رابطه های زیر مقدار x را بدست آورید :

$$(1)\quad 81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$$

$$(2)\quad 4^{tg^2 x}+2^{\frac{1}{\cos^2 x}}-80=0$$

$$(3)\quad (\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$$

۴۱۹۸ـ از : **محمدمهدی عابدی‌نژاد** ششم‌ریاضی دبیرستان سخن.

دو صفحهٔ متوازی P و Q ویك خط Δ غیرموازی بااین صفحات و دونقطهٔ A و B در خارج دو صفحه و در یك‌طرف صفحهٔ P مفروض است . نقطهٔ M را بر P و نقطهٔ N را بر Q چنان تعیین کنید که MN با Δ موازی بوده طول خط شکستهٔ AMNB می‌نیمم گردد.

کلاس ششم طبیعی

۴۱۹۹ـ تابعی به‌صورت چند جمله‌ای صحیح درجهٔ‌سوم چنان تعیین کنید که در نقطهٔ به طول (۱ −) بر محورطولها مماس بوده علاوه بر آن محور طولها را در نقطهٔ به طول ۲و محور عرضها را در نقطهٔ به عرض (۲ −) قطع کند. پس از تعیین تابع حدود m را تعیین کنید برای آنکه خط به‌معادلهٔ $y=mx+h$ بتواند بر منحنی مزبور مماس باشد .

۴۲۰۰ـ اگر α کمان محصور بین صفر و π باشد مقدارآنرا چنان تعیین کنید که معادلهٔ :

$$\cos\alpha\sin x+2\sin\alpha\cos x=2$$

فقط یك دسته جواب داشته باشد . پس از تعیین α دستورکلی ریشهٔ معادله را بدست آورید .

کلاس‌ششم ریاضی

۴۲۰۱ـ از **محمد صادق نهاوندی** ششم ریاضی دبیرستان امیرکبیر زنجان .

اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-p^2x+p^2q^2=0$ دو ریشه داشته و ریشهٔ x' در شرط $x'\geqslant 2q^2$ صدق کند ثابت کنید که ریشهٔ x'' در شرط $q^2<x''<2q^2$ صدق‌خواهد کرد .

۴۲۰۲ـ از **سید جلال آشفته** دانشجوی دانشگاه آریامهر

سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ و خط Δ به معادلهٔ $y=ax+b$ مفروض است. اگر Δ سهمی را در Aو B و محور تقارن سهمی را در N ومحورطولها رادر M قطع کند چه رابطه ای بین a و b و c بر قرار باشد تا چهارنقطهٔ A ، B ، M و N یك تقسیم توافقی تشکیل دهند .

✻ ۴۲۰۳ـ از **سید جلال آشفته**

فاصلهٔ یك نقطهٔ M از O مبدأ مختصات را با r وزاویهٔ

(Ox و OM) را با α نشان می‌دهیم. مختصات M را بر حسب r و α بنویسید. نقطهٔ M را بر منحنی به معادلهٔ

$$[2(x^2+y^2)-x]^2=y^2(x^2+y^2)$$

چنان تعیین کنید که فاصله‌اش تا مبدأ مختصات ماکزیمم یا می‌نیمم باشد.

۴۲۰۴ـ از **محمد مهدی عابدی‌نژاد** ششم ریاضی دبیرستان سخن.

اگر x کمان محصور بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ باشد حد کسر زیر را وقتی $x \to 0$ تعیین کنید

$$\frac{\mathrm{Arctg}\,mx+\mathrm{Arcsin}\,mx}{\mathrm{Arctg}\,nx+\mathrm{Arcsin}\,nx}$$

۴۲۰۵ـ ✻ از **سعید فرشاد** دانشجوی دانشکدهٔ علوم تبریز.

معادلهٔ زیر را حل و بحث کنید:

$$tg^2 3x\, tg 4x+(a+1)tg 3x-a\,tg 4x=0$$

۴۲۰۶ـ ✻ اگر در رابطهٔ

شه (آریا+مهر) $=(8+4)1346$

هر حرف نمایندهٔ یك رقم باشد این رقمها را بدست آورید.

۴۲۰۷ـ از: **ایرج ادیبی**

در رابطهٔ زیر هر حرف نمایندهٔ یك رقم است و $B=I$ می‌باشد. رقمهای مربوط به حروف را تعیین کنید:

```
 CORON+
 ATION
-------
INABAN
```

۴۲۰۸ـ ترجمه از فرانسه

در یك صفحه مثلث متساوی‌الساقین $\alpha\beta\gamma$، یك نقطهٔ A و یك دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R با وضع ثابت مفروض می‌باشند. نقطهٔ دلخواه B را بر دایره انتخاب کرده مثلث ABC را متشابه باو مثلث $\alpha\beta\gamma$ درهمان جهت رسم می‌کنیم مطلوبست تعیین مکان هندسی نقطهٔ C

مسائل متفرقه

۴۲۰۹ـ ✻ از: ع. م. در دوجمع زیر:

```
 +ش ا ه          +ش ا ه ن ش ا ه
 ت ا ج     و     آ ر ی ا م ه ر
-------          -----------------
 آ ب ا ن          ت ا ج گ ذ ا ر ی
```

ـ هر حرف نمایندهٔ یك رقم می‌باشد،

ـ ممکن است که حروف مختلف نمایندهٔ رقمهای متشابه باشند،

ـ «آ» و «ا» نمایندهٔ دو رقم متفاوت هستند.

ـ رقم سمت‌چپ هیچیك از اعداد صفر نیست،

رقمهای مربوط به حروف را چنان تعیین کنید که رقم یکان حاصل جمع بزرگتر کوچکترین مقدار ممکن را داشته و این حاصل جمع مضرب ۳ باشد.

۴۲۱۰ـ ترجمه از انگلیسی، فرستنده: **پرویز خواجه خلیلی** دانشجوی دانشگاه آریامهر

ثابت کنید که اگر معادلهٔ:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

دارای ریشهٔ مکرر مرتبهٔ سوم باشد مقدار این ریشه برابر

$$\frac{6c-ab}{3a^2-8b}$$

خواهد بود با.

۴۲۱۱ـ از: **لهراب گرشاسب**، یزد

مطلوبست تعیین تعداد دایره های به شعاع r که هر یك از آنها بر دایرهٔ به شعاع R و همچنین هر دو تای آنها که مجاورند بر یکدیگر مماس باشند. بحث کنید و حالات خاص را توجیه نمائید.

۴۲۱۲ـ ✻ از **محمدمهدی عابدی نژاد**، دبیرستان سخن.

ثابت کنید که هر یك از دو رابطهٔ زیر از دیگری نتیجه می شود.

$$1)\quad \sin x+\sin y+\sin z+\sin x\sin y\sin z=0$$

$$2)\quad tg\frac{x}{2}+tg\frac{y}{2}+tg\frac{z}{2}+tg\frac{x}{2}tg\frac{y}{2}tg\frac{z}{2}=0$$

۴۲۱۳ـ ✻ از: **محمدمهدی عابدنژاد**

در مثلثی شعاع یکی از دایره های محاطی خارجی سه برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی است. ثابت کنید شعاعهای دایره های محاطی خارجی تصاعد توافقی و اضلاع مثلث تصاعد عددی تشکیل می دهند.

۴۲۱۴ـ فرستنده: **مهدی داوری** ششم ریاضی صمصامی دبیرستان اراك

از یك نقطهٔ O واقع در داخل مثلث ABC به سه‌رأس وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا ضلعهای BC، CA، AB را به ترتیب در A'، B' و C' قطع کنند. ثابت کنید که

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1$$

(قضیهٔ ژرگون)

✻ **۴۲۱۵ـ** از **سید حسن نبوی** دبیرستان هدف ۱

مطلوبست تعیین مکان هندسی نقاطی مانند M بقسمی که اگر A و B دو نقطهٔ ثابت باشند داشته باشیم :

$$\alpha\cdot\overline{MA}^2\pm\beta\cdot\overline{MB}^2=k^2$$

α و β ضرایب ثابت هستند .

۴۲۱۶ـ از **سید حسن نبوی**

زاویهٔ xOy و نقطهٔ P واقع در خارج آن مفروض است از P خطی چنان رسم کنید که Oy را در A و Ox را در B قطع کرده و داشته باشیم :

$$\beta\cdot OB-\alpha\cdot OA=1$$

α و β ضرایب ثابت هستند .

✻ **۴۲۱۷ـ** ترجمه از روسی توسط : **حبیب‌الله گلستان زاده**

به‌فرض آنکه $\log_y x$ و $\log_z y$ و $\log_x z$ تصاعد حسابی تشکیل دهند هریك از دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}2x^2=y^2+z^2\\ xyz=64\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}2x^4=y^4+z^4\\ xyz=8\end{cases}$$

۴۲۱۸ـ ترجمهٔ : **جعفر آقایانی چاوشی** ششم ریاضی دبیرستان دکتر نصیری

رشتهٔ فیبوناچی باجملهٔ عمومی $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ با شرط $F_1=F_2=1$ مشخص می‌شود ثابت کنید که n امین جملهٔ این رشته در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}<F_n<\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

بقیهٔ مسائل مسابقهٔ ریاضی بین

کانادا و ایالات متحدهٔ آمریکا

مترجم و فرستنده : **فرهاد مجیدی آهی** دانشجوی دانشگاه آریامهر

۴۲۱۹ـ چند ضلعی مقعری در یك مربع به ضلع واحد محاط شده‌است. ثابت کنید مجموع مجذورات ضلعهای آن کوچکتر یا مساوی با عدد ۴ است .

۴۲۲۰ـ ثابت کنید که بین هر ده عدد صحیح متوالی حد اقل یکی از آن اعداد مضربی از اعداد دیگر نیست .

۴۲۲۱ـ اگر p_1 و p_2 و ... و p_n عدد های صحیح و مثبت باشند ثابت کنید وقتی که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$$

واگر (الف) باشد سری زیر همگراخواهد بود.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+p_1+\cdots+p_n)^2}\cdot p_n$$

۴۲۲۲ـ n نقطه روی یك صفحه داده شده است که هیچ سه نقطهٔ آنها بریك استقامت نیست و $n\geqslant 3$ است . ثابت کنید چند ضلعی ساده‌ای وجود دارد که این نقاط رأسهای آن می‌باشند.

مسائل فیزیك

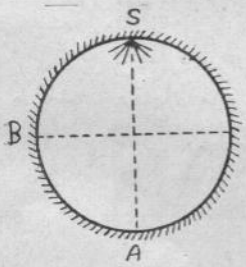
انتخاب توسط : هوشنگ شریفزاده

توضیح ـ مسئلهٔ ۴۱۸۳ مندرج در شمارهٔ ۳۸ از **بهروز پرهامی** دانشجوی دانشکدهٔ فنی تهران بوده است که متاسفانه نام ایشان از قلم افتاده است .

✻ **۴۲۲۳ـ** برای کلاسهای چهارم

A نقطهٔ اثر نیروهای $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ ، $\vec{AD}$ ، $\vec{AE}$ ، $\vec{AF}$ می باشد . نقاط B ، C ، D ، E و F انتهای بردار هائی که معرف این نیروها می‌باشند با نقطهٔ A یك شش‌ضلعی منتظم تشکیل می‌دهند. اگر اندازهٔ بزرگترین نیرو برابریك نیوتن باشد برآیند این نیروها چند نیوتن است .

برای کلاسهای پنجم



۴۲۲۴ـ یك چراغ برق از S بالاترین نقطهٔ یك تونل (مطابق شکل) آویزان است. روشنائی در B چند برابر روشنائی در A است ؟

✻ **۴۲۲۵ـ** یك نقطهٔ نورانی به شدت ۱۰ شمع به فاصلهٔ ۵۰ سانتیمتر از یك پرده واقع است . در طرف دیگر این نقطه و به فاصلهٔ ۴۰ سانتیمتر از آن آئینهٔ تختی به موازات پرده قرار دارد بطوری که سطح منعکس کنندهٔ آن به طرف پرده است . شدت روشنائی در نزدیکترین نقطهٔ پرده از نقطهٔ نورانی چقدر است ؟

برای کلاسهای ششم

✻ **۴۲۲۶ـ** آسانسوری با شتاب ثابت γ پائین می‌آید پس از مدتی برای چند لحظه سرعتش ثابت می‌شود و بالاخره با شتاب ثابت γ متوقف می‌شود. در صورتی که مسافت کل برابر s و زمان کل برای پائین آمدن t باشد ثابت کنید مدت زمانی که آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کرده‌است برابر است با :

$$\sqrt{t^2-\frac{4s}{\gamma}}$$

✲ **۴۲۲۷ـ** قطاری با شتاب ثابت حرکت می‌کند. ابتدا وانتهای قطار از یك نقطهٔ معین به ترتیب با سرعتهای u و v می‌گذرد. تعیین کنید که در نصف مدت زمانی که تمام این قطار ازاین نقطه می‌گذرد چه نسبتی ازطول قطار از این نقطه می‌گذرد.

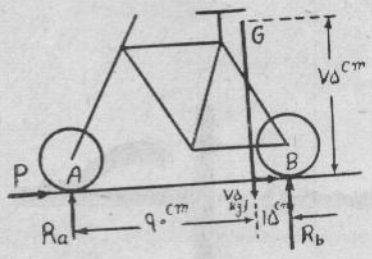
۴۲۲۸ـ فرستندگان: **بهروز قاجار و عنایت‌اله طوماریان** دانشجویان دانشکدهٔ پلی تکنیك

از قطره چکانی تعداد n قطره در هرثانیه خارج‌می‌شود می‌خواهیم فاصلهٔ x بین هر دوقطرهٔ پیاپی را برحسب t (یعنی زمان) پیدا کنیم. از مقاومت هوا صرفنظر می‌شود،

✲ **۴۲۲۹ـ** برای فارغ‌التحصیلان کلاسهای ششم

وزن دوچرخه‌سواری با دوچرخه‌اش ۷۵kgf است و مرکز ثقل آنها در ۷۵ سانتیمتری سطح‌زمین و ۱۵ سانتیمتری محور عقب واقع است (منظور از محور عقب خطی است که از نقطهٔ اتکای چرخ عقب بر زمین عمود است). فاصلهٔ بین مراکز چرخها ۱۰۵^{cm} است. دوچرخه باسرعت ۲۴km/h برجادهٔ مسطحی حرکت می‌کند و ناگهان ترمزها را می‌گیرد و پس‌از طی ۱۲ متر متوقف می‌شود. مؤلفه های قائم نیروهای واکنش زمین را بر چرخها در دو حالت زیر پیدا کنید:

الف‌ـ قبل از ترمز کردن. ب‌ـ بعداز ترمز کردن.



بررسی کتاب (بقیه از صفحهٔ ۷۱)

باشد ویکی ازآنها مساوی ۴۰ درجه ودیگری ۵۰ درجه‌باشد. بنابراین بیان‌مطلب به‌صورتی که درکتاب، وهمچنین در مجلهٔ یکان، مطرح است درعین‌آنکه‌کافی نیست، موردنیاز هم نیست، و اصولا بحث دربارهٔ وضع ابتدا و انتهای این‌کمانها بر دائرهٔ مثلثاتی فقط هنگام اثبات رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی این‌قبیل کمانهـا ضرورت حاصل می‌کند ودرحقیقت انتهای دوکمان که مجموع آنهـا مضرب فرد π و مبدأهای آنهـا برمبدأ دایرهٔ مثلثاتی منطبق است نسبت به محور سینوسها قرینه و در نتیجه ملاحظه می‌شود کـه سینوسهای آنها مساوی و سایـر نسبتهای مثلثاتی آنها نظیر به‌نظیر قرینهٔ یکدیگرند. لذا در بیان اصل مطلب نباید رابطهٔ سینوسها وسایر نسبتهای مثلثاتی بین‌کمانها را به وضع مبدأ وانتهای آنها بردایرهٔ مثلثاتی نسبت داد زیرا تصور قرینه بودن انتهای کمانها نسبت به محور سینوسها بـا تساوی سینوسهای دوکمان مرادف است و مسألهٔ اساسی دراین موضوع درك علتی است‌که این‌کیفیت را بوجود آورده است و باملاحظهٔ آنکه اصولا هدف از طرح موضوع همان است‌که از روابط خاص موجود بین کمانها به‌رابطه‌هائی که بین نسبتهای مثلثاتی‌آنها برقرار است پی‌ببریم اصولا دخالت دادن یك‌عامل اضافی وغیرلازم و تحمیل آن به حافظهٔ دانش‌آموزان ضرورت ندارد زیرا در این صورت دانش آموزان مجبورند از رابطهٔ بین‌کمانها بدواً به قرینه بودن انتهای آنها نسبت بـه محور سینوسها سپس به‌تساوی سینوسهای دوزاویه پی‌ببرند وبهترآنست که مطلب تسلسل منطقی خودرا حفظ‌کند واصولا از رابطهٔ بین کمانهـا مستقیماً رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی آنهـا را بخاطر آوریم.

بـه‌همین‌ترتیب نگارنده معتقد است‌که سایر احکام نظیر نیزبه صورتهای زیر درکتابهای درسی مطرح شود.

۱ـ هرگاه دو کمان قرینهٔ یکدیگر باشند کسینوسهای آنها مساوی و سایر نسبتهای مثلثاتی آنها نظیر به نظیر قرینهٔ یکدیگرند. به‌این معنی که:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$
$$cotg(-\alpha) = -cotg\alpha$$

واز اینجا با تعمیم قضیه درحالت کلی متذکر می‌شویم‌که:

هرگاه‌مجموع‌دوکمان مضرب‌زوج‌π باشد کسینوسهای‌آنها مساوی‌وسایر نسبتهای‌مثلثاتی‌آنها نظیر به‌نظیر قرینهٔ یکدیگرند یعنی:

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin\alpha \quad \text{و} \quad \ldots$$

۲ـ هرگاه تفاضل دوکمان مساوی π باشد سینوسها و کسینوسهای‌آنها نظیر به‌نظیر قرینه وتانژانتها وکتانژانتهایشان مساوی یکدیگرند. یعنی:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$tg(\pi + \alpha) = tg\alpha$$
$$cotg(\pi + \alpha) = cotg\alpha$$

وبه‌همان ترتیب باتعمیم مطلب درحالت کلی خواهیم داشت:

هرگاه تفاضل دوکمان مضرب فرد π باشد سینوسها و کسینوسهای آنها نظیر به‌نظیر قرینه و تانژانتها و کتانژانتهای آنها نظیر به‌نظیر مساوی یکدیگرند.

محمد طاهر معیری ـ تیرماه ۱۳۴۵

حل مسائل یکان شمارهٔ : ۳۷

۴۱۱۶ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$(3-x)^4+(2-x)^4=(5-2x)^4$$

حل ـ با فرض $x-2=t$ و $x-3=z$ خواهیم داشت:

$$z^4+t^4=(z+t)^4$$

$$\Longrightarrow zt(2z^2+3zt+2t^2)=0$$

$$zt=0\begin{cases}3-x=0 \Longrightarrow x_1=3\\ 2-x=0 \Longrightarrow x_2=2\end{cases}$$

$$2z^2+3zt+2t^2=0$$

$$2(2-x)^2+3(3-x)(2-x)+2(2-x)^2=0$$

به سادگی معلوم خواهد شد که معادلهٔ درجهٔ دوم اخیر ریشهٔ حقیقی ندارد.

۴۱۱۷ـ معادلهٔ زیر (معادلهٔ دکارت) را حل کنید:

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$$

حل ـ معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^3(x-4)-19x(x-4)+30(x-4)=0$$

$$x-4=0 \Longrightarrow x_1=4$$

$$x^2-19x+30=x^3-3x^2+$$
$$+3x^2-9x-10x+30$$
$$=(x-3)(x^2+3x-10)=0$$

$$x-3=0 \Longrightarrow x_2=3$$

$$x^2+3x-10=0 \Longrightarrow x_3=2 \text{ و } x_4=-5$$

۴۱۱۸ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\log_{\sin x}2\times\log_{\sin^2 x}3=1$$

حل ـ با توجه به فرمول

$$\log_b a\cdot\log_a b=1$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$\log_2\sin x\times\log_3\sin^2 x=1$$

با فرض $\log_2\sin x=z$ داریم:

$$\log_3\sin^2 x=2\log_3\sin x$$
$$=2\log_2\sin x\times\log_3 2=2z\log_3 2$$

$$2z^2\log_3 2=1 \Longrightarrow z=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}$$

$$\log_2\sin x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}$$

$$\Longrightarrow \sin x=2^{\pm\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}}$$

$$x=k\pi+(-1)^k\operatorname{Arcsin}2^{-\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}}$$

۴۱۱۹ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x$$
$$=(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^3$$

حل ـ با توجه به اتحاد:

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$$
$$=3(a+b)(b+c)((c+a)$$

خواهیم داشت:

$$(\sin x+\sin 2x)(\sin 2x+\sin 3x)\times$$
$$(\sin 3x+\sin x)=0$$

$$8\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin 2x\cos x=0$$

و جوابهای معادله عبارت خواهد بود از:

$$x_1=\frac{2k\pi}{3} \text{ و } x_2=\frac{2k\pi}{5} \text{ و } x_3=\frac{2k\pi}{2}$$

۴۱۲۰ـ مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید:

$$P=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\cos^4\frac{7\pi}{16}$$

حل ـ

$$P=\frac{1}{4}[(1-\cos\frac{\pi}{8})^2+(1-\cos\frac{3\pi}{8})^2+$$
$$+(1-\cos\frac{5\pi}{8})^2+(1-\cos\frac{7\pi}{8})^2]$$

$$P=\frac{1}{4}[4-2(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+$$

$$+\cos\frac{7\pi}{8})+(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8})]$$

$$P=\frac{1}{4}[4-2(2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{8}+2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{8})+$$

$$+\frac{1}{2}(4+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4})]$$

$$P=\frac{1}{4}[4+\frac{1}{2}(4+2\cos\pi\cos\frac{3\pi}{4}+2\cos\pi\cos\frac{\pi}{4})]$$

$$P=\frac{1}{4}[4+2+\cos\pi(\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4})]=\frac{3}{2}$$

۴۱۲۱ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\sin^{10}x+\cos^{10}x=\frac{29}{16}\cos^4 2x$$

حل ـ معادلهٔ فوق را می‌توانیم به صورت زیربنویسیم:

$$(\sin^2 x)^5+(\cos^2 x)^5=\frac{29}{16}\cos^4 2x$$

$$(\frac{1-\cos 2x}{2})^5+(\frac{1+\cos 2x}{2})^5=\frac{29}{16}\cos^4 2x$$

$$(1-\cos 2x)^5+(1+\cos 2x)^5=58\cos^4 2x$$

بعداز اختصار خواهیم داشت:

$$24\cos^4 2x-10\cos^2 2x-1=0$$

$$\cos 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\implies x_1=k\pi\pm\frac{\pi}{8} \quad \text{و}$$

$$x_2=k\pi\pm\frac{3\pi}{8}$$

۴۱۲۲ـ مطلوبست محاسبهٔ a و b بطوری که چند جمله‌ای های:

$$x^3+ax^2+11x+6 \quad \text{و} \quad x^3+bx^2+14x+8$$

دارای عامل مشترك به صورت x^2+px+q باشند.

حل ـ دو چندجمله‌ای را از هم کم می‌کنیم:

$$x^3+bx^2+14x+8-x^3-ax^2-11x-6$$
$$=(b-a)x^2+3x+2$$

حال چندجمله‌ای اول را در ۸ و دومی را در ۶ ضرب کرده و از تفاضل آنها خواهیم داشت:

$$2x\left\{x^2+(4a-3b)x+2\right\}$$

می‌دانیم که دو چندجمله‌ای فوق هم بر عبارت

$$(b-a)x^2+3x+2$$

و هم بر عبارت

$$x^2+(4a-3b)x+2$$

قابل‌قسمت می‌باشد. پس دراین صورت باید ضرایب دوعبارت فوق متساوی باشند.

$$\frac{3}{4a-3b}=b-a=1 \implies a=6 \text{ و } b=7$$

۴۱۲۳ـ ثابت کنید که عدد زیر اصم است:

$$\sqrt{1965^{1966}+1968^{1967}}$$

حل ـ نسبت به تقسیم بر ۱۰ داریم:

$$1965^{1966}\equiv 5(\text{mod. } 10)$$

$$1968^{1967}\equiv 8^{4\times 491+3}\equiv 2(\text{mod. } 10)$$

$$(1965)^{1966}+(1968)^{1967}\equiv 7(\text{mod. } 10)$$

رقم یکان عدد حاصل در زیر رادیکال برابر ۷ است و چون مجذور هیچ عددی به رقم ۷ ختم نمی‌شود بنابراین‌عدد داده شده اصم می‌باشد.

۴۱۲۴ـ سهمی به‌معادلهٔ $y^2=2Px$ مفروض‌است ثابت کنید محور اصلی هر دو دایره‌ای که قطر آنها یك وتر کانونی باشد (وتری که از کانون می‌گذرد) از رأس سهمی می‌گذرد.

حل ـ معادلات دوایر مفروض را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}(c_1) & (x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-R_1^2=0\\ (c_2) & (x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2-R_2^2=0\end{cases}$$

از تفاضل دو معادلهٔ بالا معادلهٔ محور اصلی آنها بدست می‌آید:

$$2x(\alpha_2-\alpha_1)+2y(\beta_2-\beta_1)+\alpha_1^2-\alpha_2^2+$$
$$+\beta_1^2-\beta_2^2+R_2^2-R_1^2=0$$

کافیست ثابت کنیم که مختصات رأس سهمی یعنی $V(0,0)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند برای این کار باید ثابت کنیم:

$$(1)\quad \alpha_1^2-\alpha_2^2+\beta_1^2-\beta_2^2+R_2^2-R_1^2=0$$

فرض می‌کنیم که قطر دایرهٔ (c_1) AA' و قطر دایرهٔ (c_2) BB' و مختصات این نقاط چنین باشد.

$$A\left|\begin{matrix}\frac{a_1^2}{2p}\\ a_1\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad A'\left|\begin{matrix}\frac{a_2^2}{2p}\\ a_2\end{matrix}\right. \quad \text{و}$$

$$B\left|\begin{matrix}\frac{b_1^2}{2p}\\ b_1\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad B'\left|\begin{matrix}\frac{b_2^2}{2p}\\ b_2\end{matrix}\right.$$

مختصات مراکز دوایر وطول شعاعها می‌شود:

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{a_1^2+a_2^2}{4p}\\ \beta_1=\dfrac{a_1+a_2}{2}\end{cases}\quad و$$

$$\begin{cases}\alpha_2=\dfrac{b_1^2+b_2^2}{4p} \qquad R_1^2=\left(\dfrac{\overline{AA'}}{2}\right)^2\\ \qquad\qquad =\left(\dfrac{a_1^2-a_2^2}{4p}\right)^2+\left(\dfrac{a_1-a_2}{2}\right)^2\\ \beta_2=\dfrac{b_1+b_2}{2} \qquad R_2^2=\left(\dfrac{\overline{BB'}}{2}\right)^2\\ \qquad\qquad =\left(\dfrac{b_1^2-b_2^2}{4p}\right)^2+\left(\dfrac{b_1-b_2}{2}\right)^2\end{cases}$$

اما خطوط AA' و BB' ازکانون سهمی یعنی نقطهٔ

$$F(\frac{p}{2} \text{ و } 0)$$

می‌گذرند یعنی داریم:

$$m_{FA}=m_{AA'} \Longrightarrow \frac{a_1}{\frac{a_1^2}{2p}-\frac{p}{2}}=\frac{a_2-a_1}{\frac{a_2^2}{2p}-\frac{a_1^2}{2p}}$$

$$\Longrightarrow a_1a_2=-p^2$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که:

$$b_1b_2=-p^2$$

در نتیجه:

$$(2)\quad a_1a_2=b_1b_2$$

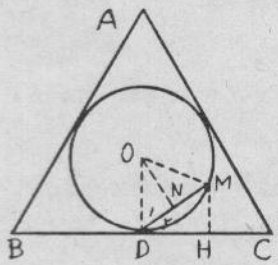
و رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{a_1^2a_2^2}{4p^2}-\frac{b_1^2b_2^2}{4p^2}+a_1a_2-b_1b_2=0$$

و این رابطه با توجه به رابطهٔ (۲) برابر با صفر است

۴۱۲۵ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC به‌رأس A مفروض است. اگر D نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با ضلع BC ، M نقطه‌ای از این دایره ، r شعاع آن و H تصویر M بر BC باشد ثابت کنید که:

$$MD^2=2r\cdot MH$$



و در حالتی که r و MH اضلاع مثلث قائم‌الزاویه به وتر MD باشند مقدار r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث را برحسب r حساب کنید.

حل ـ در مثلث متساوی‌الساقین ODM داریم:

$$DM=2r\cos D_1 \qquad (1)$$

$$\cos D_1=\sin D_2=\frac{MH}{DM}$$

و رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$DM^2=2r\cdot MH$$

۲) داریم:

$$MD^2=r^2+MH^2 \Longrightarrow 2rMH=r^2+MH^2$$

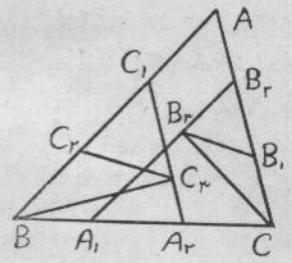
$$\Longrightarrow r=MH$$

یعنی مثلث قائم‌الزاویهٔ مذکور متساوی‌الساقین است ودر آن داریم:

$$S=\frac{r^2}{2} \quad و \quad p=r\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$r'=\frac{S}{p}=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)r$$

۴۱۲۶ـ مثلث ABC که در آن اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۶۰ درجه است مفروض است بر ضلعهای AB و BC و CA در جهت از A به B و از B به C و از C به A نقطه های C_1 و C_2 و A_1 و A_2 و B_1 و B_2 چنان انتخاب می‌کنیم که هر ضلع مثلث به سه قسمت متساوی تقسیم شود. در داخل مثلث مثلثهای متساوی الاضلاع $C_1C_2C_3$ و $B_1B_2B_3$ را می‌سازیم. ثابت کنید که هر یك از زاویه‌های BC_3A_2 و CB_3A_1 قائمه می‌باشند.



حل ـ چون زاویه های A و C_1 هر کدام ۶۰ درجه هستند بنابر این C_1C_3 و AC موازی بوده و لازم می‌آید که C_1C_3 و C_3A_2 در یك امتداد باشند.

درمثلث C_1C_3B میانهٔ C_3C_2 بانصف ضلع BC_1 برابر است بنابراین مثلث در زاویهٔ C_3 یعنی زاویهٔ BC_3A_2 قائمه است. به طریق مشابه ثابت خواهد شد که زاویهٔ CB_3A_1 نیز قائمه است.

۴۱۲۷ـ α و β دو کمان حادهٔ متمایز بوده و با هم صفر نمی‌شوند. ثابت کنید که:

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{tg\alpha+tg\beta}{2}$$

حل- فرض می‌کنیم:

$$tg\frac{\alpha}{2}=u \text{ و } tg\frac{\beta}{2}=v \quad (0\leqslant u<1 \text{ و } 0\leqslant v<1)$$

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{u+v}{1-uv}$$

$$\frac{1}{2}(tg\alpha+tg\beta)=\frac{1}{2}\left(\frac{2u}{1-u^2}+\frac{2v}{1-v^2}\right)$$
$$=\ldots=\frac{(u+v)(1-uv)}{(1-u^2)(1-v^2)}$$

ونامساوی مذکور درصورت مسئله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{u+v}{1-uv}<\frac{(u+v)(1-uv)}{(1-u^2)(1-v^2)}$$

با توجه به اینکه:

$$u+v\geqslant 0 \text{ و } 1-uv>0$$
$$(1-u^2)(1-v^2)>0$$

خواهیم داشت:

$$(1-u^2)(1-v^2)<(1-uv)^2$$

نامساوی اخیر چنین می‌شود:

$$-u^2-v^2<-2uv \text{ یا } (u-v)^2>0$$

چون نامساوی اخیر (باتوجه به شرایط صورت مسئله) محقق‌است بنابراین نامساویهای قبلی وبالاخره نامساوی‌مطلوب بر قرار می‌باشد.

۴۱۲۸- به فرض اینکه $f(x)=0$ یك معادلهٔ کامل‌از درجهٔ n بوده و دارای n ریشهٔ متمایز و مخالف صفر x_1 و x_2 و... و x_n باشد

۱) عبارات زیر را محاسبه کنید:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ و } \frac{f''(x)}{f(x)}-\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2$$

۲) با استفاده از حاصل عبارتهای بالا مجموعهای زیر را حساب کنید:

$$S_{-1}=\Sigma\frac{1}{x_i} \text{ و } S_{-2}=\Sigma\frac{1}{x_i^2} \text{ و}$$

$$S=\sum_{i<j}\frac{1}{x_ix_j}$$

حل- می‌توانیم ضریب بزرگترین درجهٔ معادله را برابر با یك اختیار کنیم بنابراین:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$f'(x)=(x-x_2)\cdots(x-x_n)+$$
$$+(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+\cdots+$$
$$+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+$$
$$+\cdots+\frac{1}{x-x_n}=\Sigma\frac{1}{x-x_i}$$

از طرفین رابطهٔ اخیر مشتق می‌گیریم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}=\frac{f''(x)}{f(x)}-\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2=$$
$$=-\left[\frac{1}{(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x-x_2)^2}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1}{(x-x_n)^2}\right]=-\Sigma\frac{1}{(x-x_i)^2}$$

۲) درروابط بالا اگر $x=0$ اختیار شود نتیجه خواهد شد.

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\Sigma\left(-\frac{1}{x_i}\right) \Longrightarrow S_{-1}=-\frac{f'(0)}{f(0)}$$

$$S_{-2}=\left[\frac{f'(0)}{f(0)}\right]^2-\frac{f''(0)}{f(0)}$$

و با توجه به اتحاد $S_{-1}^2=S_{-2}+2S$ نتیجه خواهد شد:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(0)}{f'(0)}$$

۴۱۲۹- به فرض اینکه $A(x)$ و $B(x)$ و $C(x)$ سه چندجمله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی بوده، A و B ریشهٔ مشترك نداشته و داشته باشیم:

$$(1)\quad A^2+B^2=C^2$$

۱) ثابت کنید که C دارای ریشه‌های حقیقی نبوده. A و B دارای ریشه‌های حقیقی و متمایز می‌باشند.

۲) ثابت کنیدکه $C+A$ و $C-A$ و $C+B$ و $C-B$ ریشه‌های مضاعف حقیقی دارند.

۳) به‌فرض $A=(x-a)(x-b)$ و $a\neq b$ صورت کلی B و C را بنویسید واگر ریشه‌های B عبارت باشد از a' و b' رابطهٔ بین a و b و a' و b' را بدست آورید:

حل- اگر $x=x_0$ یك ریشهٔ حقیقی $C=0$ باشد خواهیم داشت:

$$[A(x_0)]^2+[B(x_0)]^2=0$$
$$\Longrightarrow A(x_0)=0 \text{ و } B(x_0)=0$$

که ممکن نیست زیرا بنابه فرض A و B نمی‌توانندریشهٔ مشترك داشته باشند بنابراین C ریشهٔ‌حقیقی نخواهد داشت.

رابطهٔ (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(۲)\quad A^۲=C^۲-B^۲=(C-B)(C+B)$$

اگر A یك ریشهٔ موهومی x_0 داشته باشد دارای ریشهٔ موهومی $\bar{x}_0$ مزدوج x_0 نیز خواهد بود و در این صورت این دوریشهٔ موهومی دریکی از دو عامل $C-B$ یا $C+B$ مثلا $C-B$ نیز صدق می‌کنند و خواهیم داشت:

$$C-B=\lambda A \quad , \quad A^۲=\lambda A(C+B)$$

$$C+B=\frac{۱}{\lambda}A \implies B=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{\lambda}-\lambda)A$$

یعنی B و A دارای ریشه‌های یکسان می‌باشند و خلاف فرض است. بنابراین A وB دارای ریشه‌های حقیقی می‌باشند

۲) اگر a و b$(a\neq b)$ ریشه های A باشند این مقادیر با توجه به رابطهٔ (۲) ریشه‌های مضاعف حاصل‌ضرب $(C-B)(C+B)$ می‌باشند و چون a و b دو عامل حاصل‌ضرب را با هم صفر نمی‌کنند (زیرا در این صورت لازم می‌آید که A و B ریشهٔ مشترك داشته باشند) بنابراین یکی از دو عامل ریشهٔ مضاعف a و دیگری ریشهٔ مضاعف b خواهد داشت.

به طریق مشابه ثابت می‌شود که اگر a' و b'ریشه‌های B باشند ریشه‌های مضاعف $C+A$ و $C-A$ خواهند بود.

۳) ازقسمت (۲) نتیجه می‌شود که عدد حقیقی $\lambda\neq\pm۱$ وجود دارد بقسمی که:

$$C+B=\lambda(x-a)^۲$$

$$C-B=\frac{۱}{\lambda}(x-b)^۲$$

از جمع دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$B=\frac{۱}{۲}[\lambda(x-a)^۲+\frac{۱}{\lambda}(x-b)^۲]$$

$$=\frac{۱}{۲\lambda}[(\lambda-۱)x-(\lambda a-b)][(\lambda+۱)x-(\lambda a+b)]$$

$$C=\frac{۱}{۲\lambda}[\lambda^۲(x-a)^۲+(x-b)^۲]$$

اگر a'وb'ریشه‌های B باشند بنا بر روابط بالا خواهیم داشت:

$$a'=\frac{\lambda a-b}{\lambda-۱} \text{ و } b'=\frac{\lambda a+b}{\lambda+۱}$$

$$\lambda(a'-a)=a'-b \text{ و } \lambda(b'-a)=b-b'$$

از حذف λ بین این دو رابطه و بعداز اختصار خواهیم داشت:

$$۲(ab+a'b')=(a+b)(a'+b')$$

۴۱۳۰ـ مطلوبست حل وبحث معادلهٔ زیر:

$$|x-|x-۱||=(m-۱)x+۱$$

حل ـ می‌دانیم که اگر $x\geqslant۱$ باشد داریم:

$$|x-۱|=x-۱$$

و اگر $x<۱$ باشد داریم: $|x-۱|=۱-x$ بنابراین، در حالتی که $x\geqslant۱$ باشد داریم:

$$x-|x-۱|=x-(x-۱)=۱$$

و اگر $x<۱$ باشد داریم:

$$x-|x-۱|=x-(۱-x)=۲x-۱$$

و بالاخره:

$$x\geqslant۱ \implies |x-|x-۱||=۱$$

$$\frac{۱}{۲}<x<۱ \implies |x-|x-۱||=|۲x-۱|=۲x-۱$$

$$x<\frac{۱}{۲} \implies |x-|x-۱||=۱-۲x$$

و معادلهٔ مفروض بایکی ازدستگاههای زیر معادل خواهد بود:

$$\text{I}\begin{cases}۱=(m-۱)x+۱\\ x\geqslant۱\end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases}۲x-۱=(m-۱)x+۱\\ \frac{۱}{۲}<x<۱\end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases}۱-۲x=(m-۱)x+۱\\ x<\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

نتیجهٔ بحث و حل معادلات درجهٔ اول‌شرطی بالا ازاین قرار خواهد شد:

۱) اگر $m<-۱$ باشد معادلهٔ مفروض فقط یك‌ریشهٔ $x=۰$ خواهد داشت:

۲) اگر $m=-۱$ باشد معادله به تعداد بینهایت جواب دارد که در نامساوی $x<\frac{۱}{۲}$ صدق می‌کنند.

۳) اگر $-۱<m<۱$ باشد معادله دو ریشه دارد به شرح زیر:

$$x=۰ \quad \text{و} \quad x=\frac{-۲}{m-۳}$$

۴) اگر $m=1$ باشد معادله علاوه بر جواب $x=0$ دارای جوابهای $x\geq 1$ نیز می‌باشد.

۵) اگر $m>1$ باشد معادله فقط یك ریشهٔ $x=0$ دارد.

۴۱۳۱ـ ثابت کنید آیا یك چهارضلعی ABCD وجود دارد که در آن طولهای ضلعها وقطرها عدد های منطق بوده اما فاصله‌های رأسها تا نقطهٔ تلاقی دو قطر عددهای اصم باشند؟

حل ـ مختصات رأسهای چهار ضلعی را:

$(x_2 \text{ و } y_2)$ و $(x_1 \text{ و } y_1)$ و $(0 \text{ و } r)$ و $(0 \text{ و } 0)$

فرض می‌کنیم. مختصات نقطهٔ تلاقی دو قطر به صورت زیر حساب خواهد شد:

$$\left(\frac{rx_1y_2}{ry_1+x_1y_2-x_2y_1} \text{ و } \frac{ry_1y_2}{ry_3+x_1y_2-x_2y_1}\right)$$

اگر فاصلهٔ این نقطه راتا هر یك از رأسها حساب کرده ساده کنیم عبارتهایی بدست خواهد آمد که هریك از اجزاء آن منطق بوده در نتیجه خود عبارت هم منطق می‌باشد. بنا بر این چهار ضلعی با شرایطی که در صورت مسئله ذکر شده وجود نخواهد داشت.

۴۱۳۲ـ دو مجموعهٔ A و B داده شده است. کلیهٔ مجموعهای X را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$A\cap X=B$$

حل ـ اولا رابطهٔ بالا ایجاب می‌کند که $B\subset A$ باشد زیرا:

$$\forall m\in B \Longrightarrow m\in A\cap X \Longrightarrow m\in A$$

همچنین:

$$m\in B \Longrightarrow m\in X$$

و چنانچه C مجموعه‌ای باشد که با شرط

$$A\cap(B\cup C)=B$$

تعیین می‌شود خواهیم داشت:

$$X=B\cup C$$

زیرا:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$=B\cup(A\cap C)$$

و چون $B\subset A$ بنا بر این: $A\cap B=B$

و باید داشته باشیم:

$$B\cup(A\cap C)=B \Longrightarrow A\cap C=\emptyset$$

بنا براین مجموعه‌های مطلوب عبارتند از:

$$X=B\cup C\ ;\quad A\cap C=\emptyset$$

یعنی X عبارتست از اجتماع مجموعهٔ B با مجموعهٔ دلخواه C که با A متمایز باشد.

۴۱۳۳ـ A و B دوزیر مجموعه از یك مجموعهٔ E می‌باشند. مجموعه های متمم A و B را نسبت به E به‌ترتیب با $\bar{A}$ و $\bar{B}$ نشان می‌دهیم. روابط هم ارزی زیر را ثابت کنید:

۱) $A\subset B \Longleftrightarrow A\cap\bar{B}=\emptyset$

۲) $A\subset B \Longleftrightarrow \bar{A}\cup B=E$

حل ـ ابتدا فرض می‌کنیم: $A\subset B$. اگر m عنصر دلخواه متعلق به E باشد داریم:

$$m\in A \Longrightarrow m\in B$$

بنابراین m به $\bar{B}$ تعلق نداشته در نتیجه:

$$A\cap\bar{B}=\emptyset$$

اکنون فرض می‌کنیم که $A\cap\bar{B}=\emptyset$ دراین صورت اگر $m\in A$ باشد m به $\bar{B}$ تعلق نداشته در نتیجه $m\in B$ و از آنجا: $A\subset B$

۲) ابتدافرض‌می‌کنیم که $A\subset B$، چنانچه m عنصر دلخواه متعلق به E باشد

a) $m\in\bar{A}\cup B \Longrightarrow m\in\bar{A}$ یا $m\in B$

b) $m\in E \Longrightarrow m\in\bar{A}$ یا $m\in A$

و نتیجه می‌شود $m\in\bar{A}\cup B$ و داریم:

$$A\subset B \Longrightarrow \bar{A}\cup B=E$$

ثانیاً فرض می‌کنیم که $\bar{A}\cup B=E$ در این صورت اگر m به A متعلق باشد به $\bar{A}$ تعلق نداشته و چون به E تعلق دارد پس جزء B بوده در نتیجه:

$$A\subset B \Longrightarrow \bar{A}\cup B=E$$

۴۱۳۴ـ A و B دو زیر مجموعه از یك مجموعهٔ R می‌باشند. متممهای A و B را نسبت به R به ترتیب با $\bar{A}$ و $\bar{B}$، مجموعهٔ عنصرهائی از A را که به B تعلق نداشته باشند با $A-B$ ومجموعهٔ‌عنصرهای B راکه‌به A تعلق نداشته‌باشند با $B-A$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید.

$$(A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})=(A-B)\cup(B-A)$$

حل ـ اگر E مجموعهٔ طرف اول و F مجموعهٔ طرف دوم رابطه باشد کافیست که ثابت کنیم $E\subseteq F$ و $F\subseteq E$.

اولا ـ برای اثبات $E\subseteq F$ اگر $x\in E$ و بنابراین $x\in A\cup B$ و $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$ باشد نتیجه خواهد شد از $x\in A$ نتیجه می‌شود که x به $\bar{A}$ تعلق ندارد و از $x\in\bar{B}$ نتیجه می‌شود که x به B تعلق ندارد بنابراین $x\in A-B$ یعنی

$x \in F$ می‌باشد.

اگر $x \in B$ و $x \in \bar{A}$ باشد ، x به $\bar{B}$ و A تعلق نداشته بنابر این $x \in B - A$ در نتیجه $x \in F$

به همین طریق محقق می‌شود که :

$$x \in \bar{A} \quad \text{یا} \quad x \in \bar{B} \Longrightarrow x \in F$$

نتیجه آنکه :

$$x \in E \Longrightarrow x \in F \Longrightarrow E \subseteq F$$

ثانیاً ـ اگر $x \in F$ باشد یا $x \in A - B$ یا

$$x \in B - A$$

بوده در حالت اول x به A تعلق داشته اما به B تعلق‌ندارد پس

$$x \in A \text{ و } x \in \bar{B} \Longrightarrow x \in A \cup B \text{ و}$$

$$x \in \bar{A} \cup \bar{B} \Longrightarrow x \in E$$

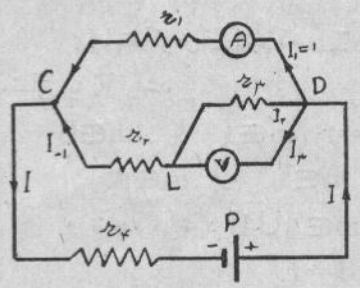
به همین طریق محقق خواهد شد که:

$$x \in B - A \Longrightarrow x \in E$$

پس از $x \in F$ نتیجه خواهد شد $x \in E$ یعنی $F \subseteq B$.

اما $E \subseteq F$ و $F \subseteq E$ ایجاب می‌کند که: $E = F$

۴۱۳۵ـ پیل P به نیروی محرکهٔ ۲۴ ولت و مقاومت داخلی ناچیز مطابق شکل به یك مدار الکتریکی جریان



می‌فرستد مقدارجریانی که دستگاه‌آمپرمتر نشان می‌دهدبرابر یك آمپر و ولتمتری که در مدار قرار گرفته ۸ولت را نشان می‌دهد مطلوبست‌محاسبهٔ مقاومت داخلی هریك از وسائل‌اندازه گیری در مدار قرار گرفته‌اند.

حل ـ مقدار جریان I_2 را که از مقاومت

$$r_3 = 200^{\Omega}$$

می‌گذرد حساب می‌کنیم :

$$I_2 = \frac{V_D - V_L}{r_3} = \frac{8}{200} = 0/04$$

در این حالت جریانی که از ولتمتر می‌گذرد:

$I_3 = I - (I_1 + I_2) = I - 1/04$ امپر است

حال می‌توانیم برای مدار PDVLCP بنویسیم:

$$E = (V_D - V_L) + r_2(I - 1) + I \times r_4$$

$$24 = 8 + 5(I - 1) + 15I \Longrightarrow I = 1/05A$$

بنابراین :

$$I_3 = I - 1/04 = 0/01A$$

و مقاومت داخلی ولتمتر برابر است با :

$$R = \frac{V_D - V_L}{I_3} = \frac{8}{0/01} = 800^{\Omega}$$

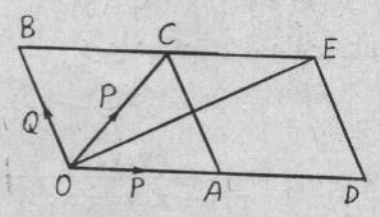
حال برای پیداکردن مقاومت داخلی آمپرمتر (r) قانون اهم را برای مدار PDACP می‌نویسیم:

$$E = (r + r_1)I_1 + r_4 I$$

$$24 = (r + 8) \times 1 + 15 \times 1/05$$

$$\Longrightarrow r = 0/25^{\Omega}$$

۴۱۳۶ـ برآیند نیروهای متقارب P و Q برابر P است ثابت‌کنید که اگر P دو برابر شودبرآیند جدید عمود بر Q است .



حل ـ فرض می‌کنیم که OA و OB معرف P و Q باشند پس OC قطر متوازی‌الاضلاع OABC، که معرف R یعنی برآیند است ، برابراست با OA

OA را طوری تا D ادامه می‌دهیم که $AD = OA$ باشد، پس OD معرف $2P$ است و برآیند Q و $2P$ با قطر متوازی‌الاضلاع ODEB یعنی با OE نشان داده می‌شود.

$$BC = OA = P$$

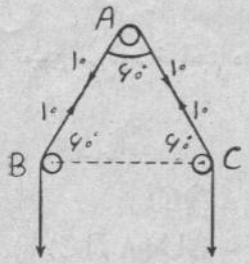
$$CE = AD = P$$

$$CB = CE = CO$$

پس BE قطر دایره‌ای‌است که‌از O می‌گذرد بنابراین:

$$BOE = 90^{\circ}$$

۴۱۳۷ـ دو وزنه که وزن هریك $10kgf$ است به دو انتهای نخ سبکی متصل است . این نخ از روی سه میخ صیقلی که به دیوار کوبیده شده می‌گذرد میخها طوری به دیوار کوبیده شده‌اند که شکل یك مثلث متساوی الاضلاع با قاعده افقی را مجسم می‌کند تعین کنایدکه‌بر میخها چه نیروئی‌فشار می‌آورد ؟



حل ـ فرض می‌کنیم که A و B و C جای میخها باشد چون میخهاصیقلی‌فرض می‌شوند. کشش نخ درتمام‌قسمتها یکسان است و برابر با $10kgf$

نیروئی که بر میخ A فشار وارد می‌آورد برآیند کشش های ۱۰kgf است که باهم زاویهٔ ۶۰° می‌سازند اگر بزرگی این برآیند Rkgf باشد، داریم:

$$R^2=10^2+10^2+2\times10\times10\cos60=3\times10^2$$

$$R=17/3\,kgf$$

نیروئی که بر B یا C فشار می‌آورد برآیند کششهای ۱۰kgf است که با هم‌زاویهٔ ۱۵۰° می‌سازند. اگر بزرگی این برآیند Skgf باشد:

$$S^2=10^2+10^2+2\times10\times10\times\cos150^\circ=26/8$$

$$S=5/2\,kgf$$

چون مؤلفه‌های نیروها درهرحالت متساوی است جهات نیروهای فشاری بر میخها نیمساز زاویه هایی است که بین اجزای نخ در دو طرف میخ وجود دارد.

۴۱۳۸ـ یك قطار باری به طول ۶۳۰ متر و یك‌قطار مسافربری به طول ۱۲۰ متر بر دو مسیر مستقیم متوازی به ترتیب باسرعتهای ثابت ۴۸km/h و ۱۰۲km/h حرکت می‌کنند: چه مدت طول می‌کشد تا دو قطار از یکدیگر رد شوند درصورتی که:

الف‌ـ دو قطار در یك جهت حرکت می‌کنند.

ب ـ دو قطار در دو جهت متقابل حرکت می‌کنند.

حل‌ـ الف‌ـ می‌شود چنین تصور کرد که قطار باری ساکن است و قطار مسافربری باسرعت (۱۰۲ − ۴۸)km/h حرکت می‌کند برای اینکه این قطار از قطار باری رد شود باید مسافتی برابر (۱۲۰+۶۳۰)m را طی کند این مسافت با سرعت ثابت ۱۰۲ − ۴۸ = ۵۴km/h = ۱۵m/s طی می‌شود مدت زمان لازم برای طی آن:

$$t=\frac{120+630}{15}=50s$$

ب ـ می‌شود چنین تصور کرد که قطار باری ساکن است وقطار مسافربری باسرعت (۱۰۲+۴۸)km/h حرکت می‌کند مدت زمان مطلوب برابر است با :

$$t=\frac{120+630}{(102+48)\times\frac{1000}{3600}}$$

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۷

فرید فاضل بسطامی ـ سیروس مریوانی ـ محمد علی موحدیان ـ ایوب فروزنده ـ جعفرآقایانی چاوشی ـ علی‌اصغر فقیهی مقدم ـ اکبر ابراهیمیان ـ عزیزالله صادقیان ـ محمد علی عبائیان ـ حسین حاجی باقر ـ رحمت ستوده ـ مجید کلاقیچی ـ محسن هاشمی نژاد ـ رحیم جوان آزاد ـ نادر بزرگی ـ محمد رضا صابری ـ منوچهر گوهرریزی ـ عبدالحسین مهدیپور ـ حسن‌خجسته‌یی‌ـ هاشم‌موسوی ـ هدایت طوماریان ـ عبدالعلی علیزاده ـ ایرج بختیاری ـ عبدالمجید جمالی ـ حسین فقیهی ـ غلامرضا انصاری‌ـ کاظم ملك زاده ـ زهرا ذوالفقاری ـ فرشاد اسکندر بیاتی ـ محمود انصاری ـ مصطفی میرزا کوچك ـ پرویزعزتیار ـ شهردخت محب زاده‌ـ شاهرخ میرمیرانی ـ غلامرضا نیك رفتار ـ سید مرتضی حسینی خرمی ـ گلریز عزتیار‌ـ فروتن آقائی ـ احمد مینائی ـ محمد جواد هدایتی ـ مسعودحبیب‌اللهزاده ـ فریبرزفرازدلی ـ اردشیر گشتاسبی ـ علی‌اکبرصادقیان‌ـ حمیدرضا شاه علی ـ حسین‌علوی شهرام ذکاوتی ـ فتح‌الله‌کلیائی ـ شمس‌الدین شاه‌علی ـ ساسان رحمتیان ـ احمد توسلی ـ ابراهیم ذوالقدری ـ اکبر حاجی حسین زاده‌ـ عزت‌الله مجرد ـ سید مهدی حمیدی ـ فرامرز‌ـ یزدانی ـ غلامرضا میرزاخانی مصباح جاوید ـژاله قهرمانی‌ـ اکبرمبلغ ومحمدرضا نادری‌ـ جمال آشفته‌ـ یحیی میراب‌زاده اردکانی ـ علی اصغر اسکندر بیاتی ـ حجت‌الله بابائی ـ محسن تقوی‌ـ مصطفی‌کریمی ـ مسعود بهمنی ـامان‌الله‌امین‌نیا محمد رضا عرب زاده ـ ماشاالله سعید ـ حسن چاکری ـ حسین شیخ عطار ـ مسعود لادیان ـ حسین شیشه‌گر ـ منصور خلیلی‌ـ علیرضا میر محمد صادق ـ محمد مقدسی ـ حمید رضا خاکپور بهمن کمالی ـ جمشید وزیر زاده ـ سیروس لطیفی ـ ولی پور کرامتی ـ عالم‌کفعمی ـ حسن گل محمدی ـ علیرضا ناظم‌زاده هوشنگ امیرفتحی ـ خجسته نیك‌بخش‌ـ توحید زرگرارشادی ـ داداش حسین زاده‌ـ علی‌اصغرخاکبازان‌ـرحمن حسینی‌علمداری.

اظهار نظر دربارهٔ

معادل فارسی اصطلاحات ریاضی جدید

در مجلهٔ شمارهٔ گذشته در شروع مبحث ریاضیات جدید از خوانندگان صاحب نظر تقاضا شده بود که راجع به معادل فارسی اصطلاحات تازهٔ ریاضی نظر خودرا مرقوم دارند. این تقاضا به‌صورت نامه‌هایی که خدمت بعضی از استادان و صاحب نظران ارسال شد تجدید گردید. دانشمندانی که در چنین موارد از اظهار نظر مضایقه ندارند به تقاضا جواب داده‌اند که نظریات آنان به ترتیب وصول به دفتر مجله در زیر چاپ می‌شود. علاوه برآن استاد دکتر هشترودی شفاهی اظهار عقیده کردند که فعلا اصطلاحات مختلفی که معمول است با هم بکار رود، بعدها یکی از آنها مورد قبول عموم واقع شده و بقیه منسوخ می‌شود.

نکته‌ای که لازم به یادآوری است تشتت آراء و اختلاف سلیقه‌ها در انتخاب اصطلاحات می‌باشد که مخصوصا برای طالبان و دانشجویان کار را مشکل ساخته است. فی‌المثل، یك استاد در تدریس یا تالیف خود در مقابل اصطلاح فرانسوی Sous-ensemble یا اصطلاح انگلیسی Sub-set اصطلاح فارسی «مجموعه» را بکار می‌برد اما استاد دیگر برای همین مفهوم اصطلاح «مجموعك» را انتخاب کرده است و اگر دانشجویی در محفل درس یك استاد، اصطلاح مورد قبول استاد دیگر را برزبان آورد مورد اعتراض شدید واقع می‌شود.

امید است که وضعی پیش آید تااین تشتت آراء جای خودرا به‌اتحاد آراء داده و مشکلاتی که ازاین بابت وجود دارد رفع گردد.

★ ★ ★

دکتر علی افضلی‌پور

استادومدیر گروه آموزشی‌ریاضی دانشکدهٔ علوم

باتوجه به‌آنکه در کتاب «**متغیرهای مختلط**» که قریب‌یك ماه قبل‌چاپ‌آن درسلسلهٔ انتشارات دانشگاه تهران به پایان رسیده در مفاهیم مورد بحث مفصلا مطالعه شده‌است.
این‌جانب معادلهای زیرین رابرای لغاتی‌که استفسار شده است پیشنهاد می‌نماید.

نگار	Image	نگارش	Application
ثابت	Contante	پیشرو	Départ
کانونی	Canonique	تعریف	Definition
برنگاری	Surjection	چشمه	Source.
درنگاری	Injection	رسید	Arrivée
دونگاری	Bijection	مقدار	Valeur
دوسوئی	Biunivoque	آماج	But

ضمناً چون «**مجوعه**» ترجمهٔ Collection است این‌جانب سالها است درکتابها و درتدریس خود«**دسته**» رابه عنوان ترجمهٔ Ensemble بکار می‌برم. همچنین اغلب در مجلهٔ یکان مشاهده کرده‌ام که Imaginaire با کلمهٔ «**موهومی**» (که به‌هیچ وجه زیبا نیست) ترجمه می‌شود. به نظر این جانب کلمهٔ «**انگاری**» از هر لحاظ مناسبتر است. بالاخره برای گسترش دستهٔ E درخودش که برای آن نامی در نظر گرفته نشده اصطلاح «**خودنگاری**» را پیشنهاد می‌نمایم.

۴۶/۷/۵

***

احمد آرام

۱- Application مترادف با Correspondance است وبه‌نظر بنده «**تناظر**» یا «**همبستگی**» برای آن شاید شایسته‌تر باشد.

۲ـ همان‌گونه که برای Arrivée **مقصد** انتخاب شده بهتر آن است که برای Départ هم **مبدأ** انتخاب شود .

۳ـ Canonique در ریاضی به‌معنی کلی و اصلی یا اساسی است وهر یك از این سه کلمه را می‌توان به جای آن گذاشت .

۴ـ برای انژکسیون، سورژکسیون و بیژکسیون سه کلمهٔ **درافکند** (یا درنهاد)، **برافکند** (یا برنهاد) **ودوافکند** (یا **دونهاد**) را پیشنهاد می‌کنم . به‌جای **گسترش دوسوئی** هم **گسترش دوسویه** شاید شایسته‌تر باشد .

۸ مهر ۴۶

***

حسین آزرم

۱ـ اشخاصی که بامجلات ونشریات علمی جهان آشنایی دارند ناظر دگرگونی علم ریاضی درجهان امروزونیز تحول عمیق واساسی برنامه‌های درسی ریاضی دبیرستانها بوده وخوب می‌دانند که در این سالها تلاش فراوان بعمل می‌آید که وحدتی بین رشته‌های مختلف ریاضی ایجاد شود . کنفرانسها وسمینارهایی ازدانشمندان وعلمای ریاضی‌جهان درنقاط مختلف به این منظور تشکیل می‌شود و هدف این اجتماعات وضع یك منطق مستدل به‌منظور ایجاد وحدت مزبور و به عبارت دیگر حذف کلمهٔ «ریاضیات» وجایگزین نمودن کلمهٔ «ریاضی» به جای آنست . باتوجه به‌این مقدمهٔ کوتاه آیا بهتر نیست که عنوان مقالاتی که بر اساس ریاضی جدید در مجلهٔ یکان درج می‌شود به‌جای «ریاضیات» ، **«ریاضی جدید»** باشد ؟

۲ـ کلمهٔ Application که در کتابهای فرانسه ـ زبان به‌عنوان یك اصطلاح بکار رفته درکتابهای انگلیسی زبان معادل آن استعمال نشده است . معادل این کلمه در فارسی «گسترش» انتخاب شده ولی ظاهراً تصور می‌رود کلمهٔ «تأثیر» یا بهتر«اثر» مناسبتر باشد. مثلا درهمان مثالهایی که درشمارهٔ ۳۸ یکان آمده است شاید مناسبتر باشد بگوئیم « اثر امتحان جبر تسلیم اوراق امتحانی ازطرف دانشجویان به‌ممتحنین‌است» ویا در مثال دیگر « اثر داشتن حساب پس‌انداز... » ـ «اثر بازی کودکان ...» وغیره .

۳ـ درتعریف این اصطلاح که ضمناً باتعریف « تابع » بستگی دارد به‌نظراین‌جانب لازم بودکه‌قبلا«نسبت» و «نسبیت» وانواع آن که از مشهورترین مباحث مجموعه‌ها است به تفصیل یادآوری می‌شد ، گر چه در د و شمارهٔ ۵و ۶ دورهٔ دوم مجلهٔ یکان تحت عنوان «رابطه‌ها» اشاره‌ای به‌این موضوع رفته است ولی آن مختصر کافی نیست :

۴ـ نکتهٔ دیگری که درتعریف کلمهٔ گسترش یادآوری آن ضرورت دارد این است که اصولا در یك نسبیت مجموعهٔ حرکت یا آغاز بامجموعهٔ تعریف متفاوت است . به‌همین‌جهت گسترش چنین تعریف می‌شود :

گسترش تابعی است که در آن مجموعهٔ تعریف برمجموعهٔ حرکت منطبق باشد

۵ ـ کلمات سورژکسیون ، انژکسیون و بیژکسیون متأسفانه تاامروزمعادل فارسی‌ندارند. شاید باتعریف مشروحتر آنها به شکل زیر معادل فارسی برای آنها بنظر برسد :

الف ـ گسترش مجموعهٔ E **روی** مجموعهٔ F را سورژکتیو گویند اگر و فقط اگر هر عنصر y از F تصویر لااقل یك‌عنصر x از E باشد : $f(E)=F$. دراین گسترش:

a ـ مجموعهٔ تعریف بر E منطبق است .

b ـ مجموعهٔ مقادیر بر F منطبق است .

c مجموعهٔ F شامل هیچ نقطهٔ‌آزاد نیست .

d ـ تمام نقاط F ساده ویا مکرر هستند .

مثال ـ شکل اول صفحهٔ ۶۴ (اگر وارونه چاپ نشده بود).

ب ـ گسترش مجموعهٔ E **در** مجموعهٔ F را انژکتیو گویند اگر و فقط اگر به هرعنصر F تنها یك پیکان از E برسد : $f(E)\subset F$

دراین گسترش :

a ـ مجموعهٔ E برمجموعهٔ تعریف منطبق است .

b ـ تمام نقاط E ساده هستند .

c ـ در E نقطهٔ آزاد وجود ندارد .

d ـ بعضی از نقاط F آزاد هستند .

به‌عبارت دیگر اگر x_1 و x_2 دو عنصر از E باشندداریم

$$\forall x_1 ، \forall x_2 ، x_1 \in E ، x_2 \in E ، x_1 \neq x_2$$

$$\Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2) \text{ و } f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$$

ج ـ گسترشی که در آن واحد سورژکتیو و انژکتیو باشد موسوم است به‌بیژکتیو (ترجمهٔ دوسوئی برای آن مناسب است) . دراین گسترش :

a ـ مجموعهٔ تعریف برمجموعهٔ E منطبق است .

b ـ مجموعهٔ مقادیر برمجموعهٔ F منطبق است .

c ـ هیچیك از دو مجموعهٔ E و F نقطهٔ آزاد و نیز نقطهٔ مکرر ندارند .

d ـ گسترش وارونه‌ای از F به سوی E وجود دارد:

$$E \xrightarrow[\text{Bijec.}]{f} F \Longleftrightarrow F \xrightarrow[\text{Bijec.}]{f^{-1}} E$$

پائین صفحهٔ بعد

ریاضی جدید

ترجمه و تنظیم از: عبدالحسین مصحفی

با استفاده از کتابهای چاپ فرانسه

گسترش (دنباله ازشمارهٔ پیش)

۳ - ترکیب دو یا چند گسترش

۱/۳ - تعریف

سه مجموعهٔ E و F و G ودو گسترش L_1 و L_2 را در نظر می‌گیریم ، L_1 گسترش E در (یا روی) F است یعنی‌از یك عنصر x متعلق به E یك وفقط یك عنصر متعلق به F را بدست می‌دهد .

$$\forall x\in E;\exists^* y\in F : x \underset{L_1}{\nearrow} y; L_1(E)\subseteq F$$

L_2 گسترش F در(یاروی) G است، یعنی از یك عنصر y متعلق به F یك و فقط یك عنصر z متعلق به G را بدست می‌دهد .

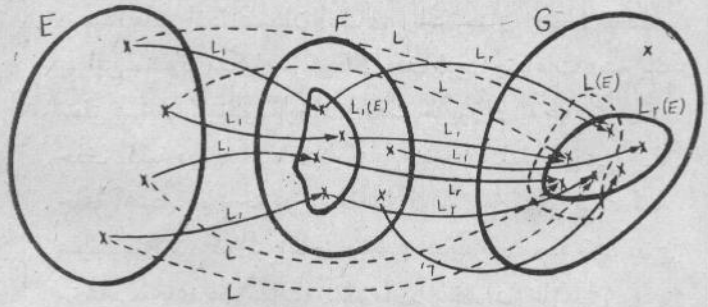
$$\forall y\in F;\exists^* z\in G : y \underset{L_2}{\nearrow} z; L_2(F)\subseteq G$$

در این صورت عموماً گسترشی مانند L وجود خواهد داشت که گسترش E در (یاروی) G بوده از یك عنصر x متعلق بـه E یك و فقط یك عنصر x متعلق بـه G را بدست می‌دهد :

$$x \underset{L_1}{\nearrow} y \underset{L_2}{\nearrow} z \;;\; L(E)=L_2(L_1(E))\subseteq G$$

$$x \underset{L}{\nearrow} z$$

گسترش L را گسترش مرکب L_1 و L_2 تعریف کرده به صورت $L=L_1\times L_2$ یا $L=L_2\circ L_1$ نشان می‌دهیم .



بقیه از صفحهٔ قبل

۶- راجع به موضوع وجود مشکل عمده در تـرجمهٔ اصطلاحات«ریاضی‌جدید» وانتخاب‌معادل‌فارسی‌آنها نظراینجانب برخلاف آنچه‌که مرقوم داشته‌اید این نیست‌که این امر به‌نظر ورأی فردی صاحبنظران‌واگذارشودزیرا این‌رویه تشتت ایجاد خواهد کرد . کمااینکه امروز این تشتت وجود دارد وهرکس به‌سلیقهٔ شخصی خود معادلی برای آن واژه‌هـا بکار می‌برد . بدون هیچ تردید ریاضی جدید دربرنامه‌های دبیرستانی کشور ما جای خود را دیر یا زود باز خواهد کرد وبحث درموافقت ویا مخالفت باآن بکلی بیمورد است .

کشورهـای پیشرفته مدتها دچار این بحث بوده‌اند ؛ **کانتور** واضع ریاضی جدید دراثر حملات مخالفان به‌خصوص **کرونکر** دیوانه شد ودرتیمارستان جان سپرد ـ کشور فرانسه پس ازسالها گفتگو وبحث بالاخره در سال ۱۹۶۲ برنامه‌های ریاضی‌خود رابراساس «مجموعه‌ها» و ریاضی جدید تنظیم نمود وکتابهای درسی دبیرستانی خود را براساس آن تدوین وچاپ کرده‌اند . کشور بلژیك دراین زمینه از اکثرکشورهاجلوتر است وکشورهای دیگرنیزکم وبیش به‌این بحث خاتمه داده‌اند وروش جدیدراپذیرفته‌اند. بنابراین بحث‌ما دراین‌باره بیهوده است وباید بدانیم‌که ریاضی قدیم باهمهٔ اهمیتی که داشت دیگر جزء تاریخ علم شده است. بنابراین پیشنهاد اینجانب این‌است که اکنون که مجلهٔ یکان دراین‌امر پیشقدم شده است ازعده‌ای ارباب نظر و افراد صلاحیت‌دار دعوت کند کـه با تبادل نظر یکدیگر به‌این امر مهم بپردازند . باشد که روزی این اقدام مجلهٔ یکان مفید واقع شود : روزی که مقامات رسمی آموزشی کشور به‌این امر توجه پیدا کنند . (۴۶/۷/۹)

(L_1 سمت راست و L_2 سمت چپ واقع شود) . روابط تابعی گسترشهای بالا چنین خواهد بود :

$$y = L_1(x) \ ، \ z = = L_2(y) = L_2(L_1(x)) = L(x)$$

(z تابع تابع x خوانده می‌شود)

به‌همان ترتیب که ترکیب دو گسترش تعریف‌شد ترکیب چند گسترش $(L_n \circ \ldots \circ L_3 \circ L_2 \circ L_1)$ به سادگی تعریف می‌شود .

مثال ـ به آغاز مجموعهٔ Z اعداد صحیح نسبی گسترش L_1 را که «سه برابر کردن» باشد و به‌آغاز $L_1(Z)$ گسترش L_2 را که «افزودن ۲» باشد درنظر می‌گیریم . مجموعهٔ تصویر L_1 عبارتست از $L_1(Z) \subset Z$ و مجموعهٔ تصویر L_2 عبارتست از $L_2(L_1(Z)) \subset Z$. اگر x عددصحیح نسبی باشد عبارت تابعی L_1 می‌شود $y = 3x$ واز L_2 می‌شود $z = y + 2$ در این صورت گسترش مرکب $L = L_2 \circ L_1$ وجود دارد که عبارت تابعی آن عبارتست از $z = 3x + 2$.

۲/۳ ـ ترکیب یك گسترش و وارونه‌اش را با I و عکس آنرا با J نشان می‌دهیم :

$$I = L^{-1} \circ L \quad \text{و} \quad J = L \circ L^{-1}$$

اگر $x \searrow \underline{I} \nearrow x$ باشد I گسترش **یکسان** نامیده می‌شود .

۳/۳ ـ خواص ترکیب دو گسترش

الف : استقلال از ترتیب عوامل ـ اغلب داریم

$$L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$$

یعنی ترکیب دو گسترش (یا چندین گسترش) به ترتیب عوامل بستگی‌دارد . (به‌همین جهت $L_2 \circ L_1$ را گسترش‌مرکب «L_2 توسط L_1» می‌خوانیم ونمی گوئیم «ترکیب L_1 و L_2» بنابراین $L_1 \circ L_2$ خوانده خواهدشد: «گسترش مرکب L_2 توسط L_1»).

در مثال بالا عبارت تابعی $L = L_2 \circ L_1$ عبارت بود از $z = 3x + 2$ اما عبارت تابعی $L' = L_1 \circ L_2$ عبارت خواهد شد از $Z' = 3(x+2)$ و $L \neq L'$ است.

مثال دیگر ـ اگرداشته باشیم

$$x \searrow \underline{L_1} \nearrow y = x^2 \searrow \underline{L_2} \nearrow z = \sin y$$

ترکیب $L = L_2 \circ_1 L$ عبارت می‌شود از

$$z = \sin x^2$$

در صورتی که ترکیب $L' = L_1 \circ L_2 \ldots\ldots$ عبارت خواهد شد از

$$\forall x ، x \searrow \underline{L_2} \nearrow y' = \sin x \searrow \underline{L_1} \nearrow y'^2 = (\sin x)^2$$

ملاحظه می‌شود که

$$z' = \sin^2 x \neq \sin x^2 = z \ ; \ L \neq L_1$$

ممکن‌است داشته‌باشیم $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$ یعنی‌ترکیب دو گسترش مستقل ازترتیب عوامل باشد . مثلا در :

$$\forall x ، x \searrow \underline{L_1} \nearrow x + 2 \searrow \underline{L_2} \nearrow x + 2 - 3 = x - 1$$

$$\forall x ، x \searrow \underline{L_2} \nearrow x - 3 \searrow \underline{L_1} \nearrow x - 3 + 2 = x - 1$$

داریم : $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$

ب ـ شرکت پذیری درترکیب سه گسترش :

$$L_3 \circ (L_2 \circ L_1) = (L_3 \circ L_2) \circ L_1$$

مثال فرض می‌کنیم ترکیبهای L_1 و L_2 و L_3 عبارت باشند از :

$$x \searrow \underline{L_1} \nearrow y = x^2 \quad \text{و} \quad y \searrow \underline{L_2} \nearrow z = y + 4$$

$$\text{و} \quad z \searrow \underline{L_3} \nearrow u = z'$$

دراین صورت داریم :

$$x \searrow \underline{L_1 \circ L_2} \nearrow z = x^2 + 4 \quad \text{و}$$

$$x \searrow \underline{L_3 \circ (L_2 \circ L_1)} \nearrow u = 2x$$

$$y \searrow \underline{L_3 \circ L_2} \nearrow u = y' \quad \text{و}$$

$$x \searrow \underline{(L_3 \circ L_2) \circ L_1} \nearrow u = 2x$$

ج ـ ترکیب دویکسانی

$$L_1 = L_2 \ \text{و} \ L_3 = L_4 \implies L_3 \circ L_1 = L_4 \circ L_2$$

د ـ اختصار از چپ جایز است :

$$L_1 \circ L = L_2 \circ L \implies L_1 = L_2$$

اما اختصار از راست عموما جایز نیست .

$$L \circ L_1 = L \circ L_2 \implies L_1 \neq L_2$$

مثال :

$$\forall x ، x \begin{cases} \xrightarrow{L_2} -x \\ \xrightarrow{L_1} +x \end{cases} \quad \begin{cases} \xrightarrow{L} x^2 \\ \xrightarrow{L} x^2 \end{cases}$$

۴/۳ ـ تکرار یك گسترش

اگر L یك گسترش E درخودش باشد ترکیب

$$L \circ L \circ L \circ \ldots \circ L \quad (\text{n مرتبه})$$

را تکرار مرتبهٔ n ام ترکیب L نامیده با L^n نشان می‌دهند (بعضیها آنرا توان nام گسترش L می‌نامند)

مثال ـ اگر x و a و b متعلق به مجموعهٔ R اعداد حقیقی باشند وداشته باشیم .

$$L(x) = ax + b \quad \text{یا}$$

$$\forall x ، x \searrow \underline{L} \nearrow y_1 = ax + b$$

دراین صورت

$$\forall x ، x \searrow \underline{L \circ L} \nearrow y_2 = ay + b =$$

$$= a(ax + b) + b = a^2 x + ab + b$$

$$\forall x \,,\ \underline{L\circ L\circ L} \nearrow y_3 = ay_2 + b = \\ = \dots = a^3x + a^2b + ab + b$$

و .....

تمرینات

۱ ـ به‌فرض اینکه L_1 و L_2 تقارنهای محوری مجموعهٔ نقطه‌های صفحهٔ P نسبت به دو محور تقارن متوازی a_1 و a_2 باشند .

الف ـ خواص مربوط به گسترشهای L_1 و L_2 را مشخص کنید .

ب ـ آیا نسبت به L_1 وهمچنین نسبت به L_2 شکلها یا نقطه‌های غیر متغیر وجود دارد ؟

ج ـ ترکیبهای $L_2 \circ L_1$ و $L_1 \circ L_2$ چگونه هستند؟

د ـ نسبت به‌ترکیب $L_2 \circ L_1$ چه‌شکلهایی غیرمتغیرهستند

۲ ـ اگر x متعلق به‌مجموعهٔ اعداد حقیقی و L_1 و L_2 گسترشهای باعبارتهای تابعی

$$y = L_1(x) = 3x \text{ و } z = L_2(y) = y + 2$$

و L ترکیب $L_2 \circ L_1$ باشد تحقیق کنید که

$$L^{-1} = L_1^{-1} \circ L_2^{-1}$$

۳ ـ اگر L یك گسترش E در خودش باشد و فرض کنیم که :

$$L_1 = L \text{ و } L_2 = L\circ L \text{ و } L_3 = L\circ L\circ L \text{ و} \dots$$

ثابت کنید که اگر p و q دوعدد طبیعی باشند داریم :

$$\forall p \text{ و } \forall q : Lp\circ Lq = Lq + Lp = Lp + q$$

۴ ـ دومجموعهٔ E و F و L گسترش E در F مفروض است ، فرض می‌کنیم K گسترش F در E وجود داشته باشد بقسمی که

$$L\circ K = I_E \text{ و } K\circ L = I_F$$

I_E گسترش یکسان E درخودش و I_F گسترش یکسان F در خودش می‌باشد .

ثابت کنید که L گسترش دوسوئی بوده و K گسترش وارونهٔ L می‌باشد .

محور اصلی

(بقیه از صفحهٔ ۸۸)

و CA و BC را در سه‌نقطه واقع بریك استقامت قطع‌می‌کنند نقاط D و D' را مزدوج توافقی رئوس B و C در نظر می‌گیریم یعنی :

$$\frac{DD'}{D'C} = -\frac{BD}{DC}$$

محور اصلی دوایر ABC و ADD' ضلع BC را در D'' قطع می‌کند بنا بر قضیهٔ (۱) داریم :

$$\frac{BD''}{D''C} = -\frac{BD}{DC}$$

بنا براین داریم:

$$\frac{BD'}{D'C} = \left(\frac{BD}{DC}\right)^2$$

به این وسیله می‌توان از راه ترسیم نسبتی مساوی با مربع نسبت مفروضی را تعیین کرد،

قضیهٔ ۵ـ اگر D و D' نسبت به B و C دو رأس مثلث ABC مزدوج توافقی باشند، محور اصلی دایره های ABC و ADD' ضلع BC را در D'' قطع می‌کند وداریم

$$\frac{BD''}{D''C} = \left(\frac{BD}{DC}\right)^2$$

اکنون دایرهٔ AD''D' را رسم کرده و فرض می‌کنیم محور اصلی این دایره ودایرهٔ محیطی مثلث ABC ضلع BC را در D''' قطع نماید. خواهیم داشت :

$$\frac{BD'''}{D'''C} = -\frac{BD''}{D''C} \cdot \frac{BD'}{D'C} = \left(\frac{BD}{DC}\right)^3$$

که طریقهٔ ترسیم مکعب یك نسبت‌را معین می‌کند . این طریقه را می‌توان تا هر قدر که خواست ادامه داد و ترسیم نسبت $\left(\frac{BD}{DC}\right)^n$ را معین کرد که در آن n عددی است صحیح و مثبت .

شاید خوانندگان علاقمند باشند که حالتهای مختلف قضیهٔ بالا را با توجه به قضیه های عکس آن بررسی کنند. نویسنده راههای مختلفی از ترسیم بدست آورد که دایره های (B و C) ، (A و C) و (B و A) در یك نقطهٔ Q مشترك باشند هر چند که دایره های (D و D') ، (E و E') و (F و F') متغیر باشند .

اما خوانندگان باید در حالتهای مختلف علامات‌مربوط رادر نظر داشته باشند. وقتی D بین C وB قرار بگیردنسبت $\frac{BD}{DC}$ مثبت است و اگرD در امتداد BC و خارج پاره‌خط BC باشد نسبت $\frac{BD}{DC}$ منفی خواهد بود.

دنباله دارد

پرسش و پاسخ

درچند هفتهٔ اخیر چندین نامه داشته‌ایم که نویسندگان آنها پرسیده‌اند: **تنها با یك وسیلهٔ پرگار چگونه می‌توان مرکز یك دایرهٔ مرسوم را تعیین کرد؟** به این وسیله به اطلاع علاقمندان به این موضوع می‌رساند که حل این مسئله و راه ترسیم آن در «مجموعهٔ علمی یکان سال، فروردین ۱۳۴۴» مندرج می‌باشد.

***

پرسش ـ اگر داشته باشیم $tg\frac{x}{2}=\frac{3}{4}$ و خواسته باشیم سایر نسبتهای مثلثاتی کمان x را حساب کنیم از دو راه می‌توان عمل کرد؛ یا اینکه مستقیماً از دستورهای «تعیین نسبتهای مثلثاتی یك کمان برحسب تانژانت نصف آن کمان» استفاده کنیم که دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\sin x=\frac{24}{25} \text{ و } \cos x=\frac{7}{25} \text{ و } tg\,x=\frac{24}{7}$$

اما ممکن است بعد ازمحاسبهٔ $tg\,x$ با استفاده ازروابطی که بین $\sin x$ و $\cos x$ با $tg\,x$ موجود است استفاده کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$tg\,x=\frac{24}{7} \Longrightarrow \sin x=\pm\frac{24}{25} \text{ و}$$

$$\text{و} \cos x=\pm\frac{7}{25}$$

چرا دوجواب متفاوت بدست می‌آید؟

علی تقیان ـ دبیرستان سعدی اصفهان

پاسخ ـ در دستورهایی از قبیل:

$$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

مقصود ازعلامت «±» یعنی: «یا + ، یا −» به این معنی که ازدوعلامت + یا − فقط یکی باید انتخاب شود. انتخاب این علامت هم با توجه به اینکه انتهای کمان x درکدام بخش از دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد صورت می‌گیرد. در مسئلهٔ مورد نظر شما چون $tg\frac{x}{2}=\frac{3}{4}<1$ است بنابراین:

$$2K\pi<\frac{x}{2}<2K\pi+\frac{\pi}{4} \quad \text{یا}$$

$$2K\pi+\pi<\frac{x}{2}<2K\pi+\frac{5\pi}{4} \quad \text{یا}$$

می‌باشد و از آنجا:

$$4K\pi<x<4K\pi+\frac{\pi}{2} \quad \text{یا}$$

$$6K\pi<x<4K\pi+\frac{5\pi}{2}=6K\pi+\frac{\pi}{2} \quad \text{یا}$$

می‌باشد که نتیجه می‌شود انتهای کمان x در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی واقع بوده همهٔ نسبتهای مثلثاتی آن مثبت می‌باشند.

***

پرسش ـ درمسابقهٔ امتحان‌ورودی یك دانشکده‌موضوع یك سؤال شیمی عبارت بود از «طرز تهیهٔ آمونیاك به طریقهٔ بوش» چون در کتابهای فعلی از این طریقه ذکری نشده است دربارهٔ آن توضیح دهید.

حجت‌الله بابائی (۴۶/۳/۱۳)

پاسخ (از: عطاءالله بزرگ‌نیا)ـ **روش بوش (Bosch)** یکی ازمهمترین روشهای صنعتی تهیهٔ ئیدروژن است. در این روش مخلوط **گاز آب** ($CO+H_2$) و **بخار آب** را از روی کاتالیزر گرم که معمولا اکسید آهن فعال شده با نیکل یا کرم است عبور می‌دهند، اکسید کربن به گاز کربنیك اکسیدمی‌شود

$$CO+H_2O\rightarrow CO_2+H_2$$

برای جدا کردن گاز کربنیك‌ازئیدروژن برروی مخلوط با فشارآب می‌پاشند، گاز کربنیك درآب حل شده ازئیدروژن که تقریباً درآب نامحلول است جدا می‌شود. باقیماندهٔ اکسید کربن را با شستشوی گازها بوسیلهٔ محلول آمونیاکی فرمیات کوئیورو و یا محلول غلیظ‌سود در ۲۵۰° حرارت‌جذب می‌کنند محصول ترکیب اکسیدکربن با سود فرمیات‌سدیم است.

$$CO+NaOH\rightarrow H-COONa$$

پرسش ـ در حل مسئلهٔ کنکور ورودی سال ۱۳۴۵ دانشکدهٔ صنعتی تهران که دریکان سال ۴۵ مندرج‌است دوایراد

وجود دارد که خلاصهٔ آن به شرح زیر است :

۱ـ نیروی مقاوم ۹/۶kgf نیست بلکه ۶kgf است.

۲ـ درحل مسئله نوشته شده است $T = ۵/۴kgf = ۵۴N$ مگر ممکن است که واحدهای بین‌المللی درشهری که شتاب ثقل درآنجا $۱۰m/s^۲$ است عوض شود و یك کیلوگرم نیرو که همیشه و درهمه‌جا باید برابر ۹/۸۱ نیوتن دانسته شود ، در این مسئله ۱۰ نیوتن دانسته شده است . مثل این است که واحد طول (متر) که در همه‌جا ۱۰۰cm است در جایی به اقتضای مسئله ۱۰۵cm شود .

کامبیز علوی (۴۶/۲/۱۷)

پاسخ ـ (ازهوشنگ شریفزاده)

۱ـ دراین مورد در صفحهٔ ۴۸ مجلهٔ یکان شمارهٔ ۳۵ تذکر داده شده است .

۲ـ توجه شما را به تعاریف زیر جلب می‌کنیم :

الف : نیوتن واحد نیرو است و آن نیرویی است که به جرم یك کیلوگرم شتابی برابر $۱m/s^۲$ بدهد. (درحقیقت نیوتن نیرویی است مستقل ازمکان و این یکی از وجوه امتیاز دستگاه بین‌المللی جدیداست) .

ب ـ کیلوگرم نیرو واحد نیرو است وآن نیرویی است که ازطرف زمین برجرم یك کیلوگرم وارد می‌شود (اقتباس‌از دایرةالمعارف لاروس بزرگ جلد ۶ تحت عنوان

kilogramme – poids

ج ـ کیلوگرم نیرو واحد نیرو است وآن نیرویی است که به جرم یك کیلوگرم شتابی برابر g ، شتاب جاذبهٔ‌زمین، بدهد و g درنقاط مختلف زمین تفاوت می‌کند . پس کیلوگرم نیرو درنقاط مختلف‌زمین تفاوت می‌کند(اقتباس‌ازدایرةالمعارف بریتانیکا جلد ۱۰ تحت‌عنوان **gram**) .

برای اینکه اطلاعات بیشتری در این زمینه و بخصوص در بارهٔ آحاد بین‌المللی بدست آورید به کتاب زیر مراجعه کنید :

نام کتاب :

Etude critique du SYSTÉME MÉTRIQUE

مؤلف :

Maurice Danloux Dumesmils

ناشر :

Gauthier – Villars – Paris 1962

پرسش ـ آیا همگرایی دو عدسی که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند معنایی دارد یا خیر و اگر چنین چیزی، امکان دارد به چه طریقی بدست می‌آید ؟

مهران شهابی

پاسخ (از هوشنگ شریفزاده) ـ اگر یك دسته اشعهٔ متوازی به یك‌عدسی (عدسی L) بتابد وپس ازخروج به‌یك‌دسته اشعهٔ مخروطی که رأس‌آن F است ، تبدیل شود ، فاصلهٔ‌عدسی را تا F فاصلهٔ کانونی عدسی می‌گوییم . اکنون به جای‌عدسی L یك دستگاه نوری قرار می‌دهیم . اگر این دستگاه بتواند همان دسته اشعهٔ متوازی را به همان دسته اشعهٔ مخروطی‌تبدیل کند ، می‌گوییم که فاصلهٔ کانونی دستگاه برابر فاصلهٔ کانونی عدسی L است ؛ و بنابراین همگرایی آن برابر همگرایی عدسی L است .

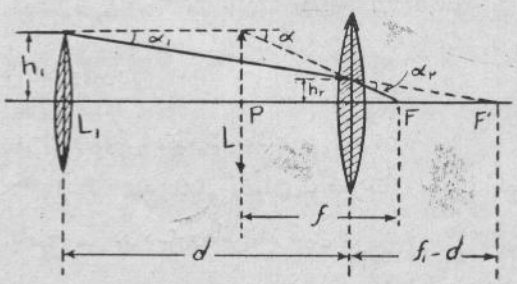
فرض می‌کنیم که دستگاه نوری از دوعدسی همگرای $L_۱$ و $L_۲$ که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار گرفته‌اند تشکیل شده است . یك دسته اشعهٔ متوازی به $L_۱$ می‌تابد . زاویهٔ انحراف این دسته اشعه برای عبور ازعدسی $L_۱$ برابر $\alpha_۱$ است. بطوری که مطابق شکل(۱) می‌توان نوشت :

$$\alpha_۱ = \frac{h_۱}{f_۱}$$

دسته اشعه‌ای که ازعدسی $L_۱$ گذشته است پس ازعبوراز عدسی $L_۲$ بازهم منحرف می‌شود . زاویهٔ انحراف برابر است با $\alpha_۲$.

برطبق شکل (۲) به سادگی می‌توان دریافت که باتقریب کافی :

$$\alpha_۲ = \frac{h_۲}{f_۲}$$



(شکل ۱)

اما برطبق شکل (۱) :

$$h_۲ = h_۱ \frac{f_۱ - d}{f_۱}$$

پس :

$$\alpha_۲ = h_۱ \frac{f_۱ - x}{f_۱ f_۲}$$

بقیه در صفحهٔ ماقبل آخر

از میان نامه‌های رسیده

یکی از خوانندگان مجله در تاریخ ۴۶/۲/۳۰ طی نامه‌ای به ادارهٔ مجله نوشته بود که : «راه حلی که برای مسئلهٔ مکانیك مسابقهٔ ورودی دانشکدهٔ پلی‌تکنیك (تیرماه ۴۵) در یکان سال چاپ شده گرچه صحیح و منطقی بنظر می‌رسد ولی از طرف دانشکده راه حل زیر ارائه شده و فقط کسانی که مسئله را از راه مزبور حل کرده‌اند نمرهٔ کامل گرفته اند ؛ راه حل مزبور به این طریق است :

$$F-R=m\gamma$$

نیروهایی که در مقابل حرکت ایستادگی می‌کنند:

$$\gamma=0 \;:\; F=R=6$$

خواهشمند است تحقیقات لازم‌را بعمل‌آورده نتیجه‌را برای استحضار عموم در مجله چاپ کنید».

چندنفر از دبیران فیزیك که مورد مشاوره واقع شدند در این باره اظهار داشتند که $\gamma=0$ شرط لازم است ولی کافی نیست ، چه ممکن است $\gamma=0$ باشد اما حرکت وجود داشته باشد (حرکت یکنواخت) ، در حالی که طبق شرایط مسئله حرکت وجود ندارد.

ازطرف ادارهٔ مجله مراتب فوق به‌انضمام راه حل مسئله مندرج در یکان سال جهت اظهار نظر برای مقامات دانشکدهٔ پلی‌تکنیك ارسال شد. در پاسخ ، شرح زیر واصل شد که عین آن چاپ می‌شود :

«برای پیداکردن مقدار نیروی اصطکاك باید همانطور که‌در مجلهٔ یکان نشان داده شده ابتدا نیروی ماکزیمم اصطکاك (kp_B+kp_C) را با نیروی محرك (F) مقایسه کرد. اگر F بزرگتر باشد مقدار نیروی اصطکاك وارده همان

$$kp_B+kp_C$$

خواهد بود . اگر F کوچکتر باشد در آن صورت چون دستگاه ابتدا در حال سکون بوده است‌در این حالت‌باقی خواهدماند ونیروی‌اصطکاك اجباراً باید مساوی ومختلف‌الجهت با نیروی محرك F باشد .

در مورد ایرادی که برخی از دبیران فیزیك و مکانیك وارد نموده‌اند باید توضیح داده شود که ما می‌گوئیم چون دستگاه ساکن است پس $\gamma=0$ می‌باشد نه آنکه چون $\gamma=0$ است پس دستگاه ساکن می‌باشد و بنابراین ایراد فوق وارد نیست . »

توجه خاص مقامات محترم دانشکده به موضوع مورد بحث و توضیحاتی که در این باره داده‌اند مورد سپاسگزاری است .

***

آقای **کامبیز علوی** در بارهٔ مسئلهٔ مذکور در فوق توضیحاتی داده‌اند که پاسخ مربوط به آن در بخش «پرسش‌و پاسخ» همین شماره چاپ شده است .

***

آقای **افراسیاب ملکی** دبیر دبیرستانهای‌تفرش‌شرحی مرقوم داشته‌اند که در زیر چاپ می‌شود :

اینجانب ضمن مطالعهٔ مسئلهٔ مخروطات کنکور سال ۴۵ دانشگاه آریامهر به نکته‌ای برخوردکه تذکر آنرا بی‌مناسب نمی‌داند. البته هرفردی که به استدلال ضمنی که در حل‌مسئله وجود دارد توجه‌کند به این نکته پی خواهد برد. حل مجدد آن با توضیح مختصر با بیان استدلال مربوط تقدیم می‌گردد.

در این حل مجدد مطلب تازه‌ای جز آنچه که دریکان سال چاپ شده وجود ندارد فقط شرح کوتاه و تعیین یك‌دسته جواب که قبلا معلوم نگردیده بیان شده است، این شرح‌شاید بتواند مورد استفادهٔ کسانی قرار گیرد که قبلا بطور کامل قانع نشده‌اند .

در دستگاه مختصات xOy نقاط $A(x_1 \text{ و } y_1)$ و $B(x_2 \text{ و } y_2)$ ماکزیمم و می‌نیمم منحنی نمایش تابع

$$x^2-xy+ax-cy+b=0$$

(هذلولی) می‌باشند در صورتی‌که رابطهٔ $x_1x_2+y_1y_2=0$ بین مختصات‌آنها برقرار بوده‌ودرضمن این دونقطه روی‌منحنی

$$x^2+y^2+2x-6y=0$$

(دایره) نیز واقع باشند مطلوبست‌تعیین مقادیر عددی a وb وc

$$y^2-xy+ax-cy+b=0$$

$$y=\frac{x^2+ax+b}{x+c}$$

$$\Longrightarrow\; y'=\frac{x^2+2cx+(ac-b)}{(x+c)^2}$$

$$(1)\quad x^2+2cx+(ac-b)=0$$

x_1 و x_2 جوابهای معادلهٔ اخیر می‌باشند لذا

$$x_1x_2=ac-b$$

اکنون معادلهٔ هذلولی را نسبت به x مرتب و مبین معادلهٔ حاصل را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$x^2+(a-y)x+(b-cy)=0$$
$$\Delta=(a-y)^2-4(b-cy)=0$$
$$\Longrightarrow (2)\ y^2+2(2c-a)y+a^2-4b=0$$

y_1 و y_2 نیز جوابهای این معادله‌اند لذا

$$y_1y_2=a^2-4b$$

بنابراین :

$$x_1x_2+y_1y_2=ac-b+a^2-4b$$
$$=a^2+ac-5b=0$$

از جمع معادلات (۱) و (۲) و با توجه به رابطهٔ:

$$x_1x_2+y_1y_2=0$$

نتیجه می‌شود :

$$(3)\quad x^2+2cx+y^2+2(2c-a)y=0$$

مختصات نقاط A و B در معادلهٔ (۳) که معادلهٔ دایره می‌باشد صدق می‌کنند. اکنون دوحالت در نظر می‌گیریم : اولا دایرهٔ مفروض و دائرهٔ به معادلهٔ (۳) بر هم منطبق‌اندزیرا سه نقطهٔ مشترك دارند ، مبدأ مختصات و نقاط A و B پس باید :

$$x^2+y^2+2cx+2(2c-a)y$$
$$\equiv x^2+y^2+2x-6y$$

$$\begin{cases}2c=2\\2(2c-a)=-6\\a^2+ac-5b=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{vmatrix}a=5\\b=6\\c=1\end{vmatrix}$$

حالت دوم اینکه دایرهٔ مذکور و دایرهٔ معادلهٔ (۳)فقط دو نقطهٔ مشترك دارند یعنی ممکن است A یا B بر مبدأقرار گیرند برای وجود چنین حالتی لازم استمعادلات (۱)و(۲) هرکدام یك جواب صفر داشته باشند یعنی باید $ac-b=0$ و $a^2-4b=0$ و همچنین باید هذلولی از مبدأ بگذرد یعنی $b=0$ باشد دراین‌صورت $(x_1=0$ و $y_1=0)$ و A

$B(x_2=-2c$و$y_2=2a-4c)$

با توجه به روابط اخیر و اینکه B باید روی دایرهٔ مفروض قرار گیرد مقادیر عددی $a=b=c=0$ و

$c=-1\quad a=b=0$

حاصل می‌گردد .

در حالتی که a و b و c هر سه صفر باشند هذلولی‌به دوخط راست $x=0$ و $y=x$ تبدیل می‌گردد و درحالت بعد هذلولی به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{x-1}$ نتیجه می‌شود که دارای‌تمام خصوصیات مذکور در مسأله است .

***

آقای **حسن گل‌محمدی** از دبیرستان کمال و عده‌ای از دانش‌آموزان **دبیرستان پهلوی اهرارسباران** ضمن نامه‌های مشروحی خواسته‌اندکه مطالب بیشتری‌مخصوص‌دانش‌آموزان کلاسهای چهارم‌و پنجم دبیرستان در مجله درج گردد و مخصوصاً مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها به هر ترتیب‌در مجله چاپ شود .

ـ همان‌گونه که در سال قبل عمل شد هر سال سه‌شمارهٔ آذرماه ، اسفند ماه و اردیبهشت ماه مجله به چاپ منتخب مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها اختصاص خواهد داشت .

***

آقای **جلال غفوری** نوشته‌اندکه چاپ بعضی ازمطالب از قبیل «راهنمای حل مسائل هندسه» زائد می‌باشد و شایسته‌تر است که مطالب مفید دیگری جایگزین آن شود.

ـ بعضی مطالب که در یك مجله چاپ می‌شود برای عده‌ای از خوانندگان آن مفید و برای عده‌ای دیگر زائد بنظر می‌رسد. البته اگر اکثریت خوانندگان مایل به درج چنین مطالبی درمجله‌نباشند به ناچار ازدرج‌دنبالهٔ‌آن‌خودداری خواهد شد .

***

● آقای **پرویز برادران شکوهی** نوشته‌اند که : مطالب و مسائلی مخصوص دانشجویان در مجله چاپ شود ـ مجله‌ها و کتابهای ریاضی چاپ کشورهای خارج و محل‌فروش آنها معرفی شود ـ صفحاتی از مجله به درج مطالب و مسائلی در بارهٔ مکانیك اختصاص یابد .

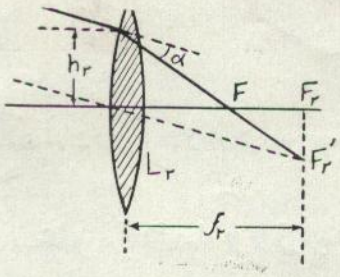
● آقای **بهاء الدین هنربخش** دبیر دبیرستانهای زنجان مرقوم داشته‌اند حال که در ایران مجله‌ای مخصوص فیزیك چاپ نمی‌شود بجا است که‌همانند کتابهای درسی‌ریاضی کتابهای درسی فیزیك هم از طرف صاحب‌نظران مورد بررسی واقع شده مراتب در مجله چاپ شود .

● آقای **حسین خبازیان** از دبیرستان نمونهٔ اصفهان پیشنهاد کرده‌اندکه هر چندماه‌یك‌بار مسئله‌ای به عنوان‌مسابقه در مجله چاپ شود .

● آقای **حسن گل‌محمدی** نوشته‌اندکه مسئلهٔ۴۰۹۵ و آقای **حسین خبازیان** نوشته‌اند که مسئلهٔ ۴۱۴۲ مندرج در یکان‌در چندین کتاب حل‌المسائل‌چاپ ایران درج می‌باشد

بقیه ازصفحهٔ ۱۳۰

فرض می‌کنیم که به جای این دستگاه دو عدسی می‌توان عدسیی مانند L در نقطهٔ P قرار داد به طوری که اگر همان دسته اشعهٔ متوازی به این عدسی بتابد به دسته اشعهٔ مخروطیی مانند دسته اشعهٔ



(شکل ۲)

مخروطی حاصل از دستگاه دوعدسی تبدیل شود . اگر f فاصلهٔ کانونی این عدسی باشد ، مطابق شکل (۱) می‌توان نوشت :

$$\alpha = \frac{h_1}{f} = \alpha_1 + \alpha_2$$

پس :

$$\frac{h_1}{f} = \frac{h_1}{f_1} + h_1 \frac{f_1 - d}{f_1 f_2}$$

درنتیجه :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

اگر فاصلهٔ عدسی L تا محل عدسی L_2 برابر a باشد مطابق شکل می‌توان نوشت :

$$\frac{a}{f} = \frac{h_1 - h_2}{h_1} \Longrightarrow a = f\,\frac{d}{f_1}$$

$$a = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \times \frac{d}{f_1} \Longrightarrow a = \frac{d f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

البته ممکن است که این نتایج را با روشهایی دیگر نیز بدست آورد .

نمایندگان فروش مجله و نشریات یکان در شهرستانها

(مکمل فهرست مندرج درشمارهٔ گذشته)

بهشهر	نمایندگی اطلاعات
خرم‌آباد لرستان	کتابفروشی محمدی
دزفول	آقای عبدالمجید فخر عطار
زابل	آقای سیدمحمد بنی‌هاشمی
سمنان	مطبوعاتی هاشمی
فسا	آقای محمدباقر اسلامی‌پور
کرمان	فروشگاه دهستانی
مشهد	کتابفروشی غفرانی

درضمن درشمارهٔ گذشته به جای **کتابفروشی موسوی** در **مسجد سلیمان** «کتابفروشی مولوی» و به جای آقای **غلام بیک‌زاده** در **کرج** «غلام بهزادی» چاپ شده بود که بدین وسیله تصحیح می‌شود .

اثبات (بقیه ازصفحهٔ ۷۶)

یك نتیجه (یا فرع) قضیهٔ فیثاغورس عبارت از این است که طول قطر مربع به ضلع یك، برابر $\sqrt{2}$ است.

همچنین، لم «اگر دوعدددر m ضرب شوند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها نیز در m ضرب می‌شود» اثبات **قضیهٔ گوس** را خیلی ساده می‌سازد : «اگر a و b نسبت به یکدیگر اول باشند و a حاصل ضرب bc را بشمرد در این صورت عدد c را نیز خواهد شمرد»

[۱۳] در پایان به نقل اصل **دیریکله ـ کلافلی**(۲) می‌پردازیم (یا به‌عبارت دیگر، **جعبه ها یا کشوها**). این اصل اثبات قضیه‌های وجودی را میسر می‌سازد ، اما متأسفانه برای قضیه‌های ساختمانی مورد ندارد زیرا در حقیقت یك‌نوع برهان خلف می‌باشد . این اصل به سادگی قبول می‌کند که اگر n عنصر بین m مجموعه توزیع شده باشند و اگر m دقیقاً کوچکتر از n باشد در این صورت حداقل یك مجموعه وجود دارد که شامل دوعنصر ازعنصرهای مزبور می‌باشد. نوع تقریباً متفاوت با آن بیان می‌کند که اگر n عنصر بین n مجموعه توزیع شده باشند ، بدون اینکه دو عنصر با هم‌دریك مجموعه واقع شده‌باشند، دراین صورت هرمجموعه دقیقا شامل یك عنصر از این عنصرها خواهد بود. آنچه گفته شد درحساب زیاد بکار می‌آید.

۱- Principe de Dirichlet - Schläfli

گروه فرهنگی خرداد

برای کلاسهای شبانه: دورهٔ اول دبیرستان ـ دورهٔ دوم دبیرستان (طبیعی ـ ریاضی) ـ کنکور (پزشکی ـ فنی ـ کشاورزی ـ علوم) **همه روز ثبت نام می کند.**

در کلاسهای شبانهٔ خرداد

آقایان زیر تدریس می کنند:

فیزیک
- اسلامی
- بزازی
- پیسوده
- رسولی
- دکتر زادپرور
- مجدی

شیمی
- بزرگ نیا
- مظلومی
- نعیمی
- نعمت

طبیعی
- ابو
- پاک روان
- صابر
- میرزاده
- نصیری انصاری

ریاضیات
- آزرم
- افشار
- بحرانی
- بحری
- ذاکر هنجنی
- زاوشی
- فاضلی
- قراگزلو
- لاهیجی
- محمدی (مسعود)
- مرتضوی
- نقیه

ادبیات فارسی
- آیت اللهی
- دکتر سلامیان
- فرساد
- صمدی
- گنجی
- مبین
- هنجنی

زبان خارجه
- اصغری
- بقائی
- توحیدی
- دادگر
- دهگان
- رکنی
- معاونی

نشانی: سعدی شمالی ـ چهار راه سیدعلی ـ دبیرستان خرداد

تلفن: ۳۰۵۴۵۸ ـ ۳۱۶۹۸