دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ

۱

شمارهٔ مسلسل

۳۸

مهر ۱۳۴۶

یکان

یکان ریاضیات

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \dots\dots + x^n$$

بها: بیست و پنج ریال

دراین شماره:

آغاز دورهٔ چهارم

با این شماره دورهٔ جدید مجله با تعداد صفحات بیشتر آغاز می‌شود. سعی شده است مطالبی که در مجله چاپ می‌شود ضمن آنکه در حدود برنامهٔ ریاضیات دبیرستان است حاوی اطلاعات تازه‌ای برای خوانندگان باشد.

امیداست علاقمندان مجله نظریات خودرا دربارهٔ مندرجات آن مرقوم و ارسال دارند تا بهتر از گذشته بتوانیم موجبات رضایت خوانندگان را فراهم آوریم.

***

در چند ماه اخیر مقالات متعددی به ادارهٔ مجله واصل شده است که همه برای چاپ در مجله مناسب می‌باشد. این مقالات درمجله چاپ خواهد شد اما اگردرچاپ آنها تأخیری روی دهد فقط به علت کثرت مقالات وارده است. چاپ نشدن مقاله‌ای در شمارهٔ مقارن باارسال آن دلیل رد آن مقاله‌نیست بلکه در شماره‌های بعدی به چاپ خواهد رسید.

***

عده‌ای ازدانش‌آموزان پرسشهائی مطرح می‌کنند بدون آنکه نام و نشانی خودرا ذکرکنند. به پرسشهایی ترتیب‌اثر داده می‌شود که نام، نشانی وپایهٔ تحصیلی فرستندهٔ آن به‌وضوح ذکر شده باشد.

انجمن معلمان ریاضی

جلسهٔ مجمع عمومی انجمن معلمان ریاضی که قرار بود در ۱۰ شهریور تشکیل شود به علت عدم اطلاع عدهٔ زیادی از معلمان از تاریخ تشکیل آن به‌تاریخ ۱۴ مهر موکول شد.

مراتب‌ازطرف انجمن توسط دبیرستانها به اطلاع‌دبیران ریاضی خواهد رسید.

تسلیت

مصیبت وارده را به استاد معظم جناب آقای دکتر محسن‌هشترودی وخانوادهٔ محترم تسلیت‌عرض می‌کند.

عبدالحسین مصحفی

تبریک

انتصاب جناب‌آقای دکترهوشنگ‌منتصری را به‌ریاست دانشگاه تبریزتبریک‌گفته و امیدوار است فعالیتهای مجدانهٔ ایشان موجبات ارتقاء بیش از پیش مقام ارجمند استادان ودانشجویان را در جامعه فراهم‌آورده پیشرفت علمی دانشگاه را با پیشرفتهای علمی جهان هماهنگ سازد.

عبدالحسین مصحفی

یکان

مجلهٔ ریاضیات

هرماه یک‌بار منتشر می‌گردد

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

دورهٔ چهارم ـ شمارهٔ یکم ـ شمارهٔ مسلسل: ۳۸

مهر ۱۳۴۶

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : **داود مصحفی**

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیک شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

وجه اشتراک برای هر دوره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume IV , number 1 , Setp. 1967

subscription : $3

TEHERAN . P.O. B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

مصاحبه با استاد

مهندس عبدالله ریاضی

بیوگرافی – تحصیلات ابتدایی را دراصفهان و تحصیلات متوسطه را درتهران گذراندم. درسال۱۳۰۳ وارد خدمت دروزارت‌معارف (آموزش و پرورش) شدم. ابتدا سمت آموزگاری داشتم بعد به تدریس ریاضیات مدارس متوسطهٔ تازه تأسیس مشغول‌شدم. در ۱۳۰۷ به‌منظور تحصیلات عالیه عازم اروپا شدم. بعداز آنکه به اخذ درجهٔ لیسانس‌علوم و تخصصی مهندسی برق و ئیدرولیك موفق شدم در ۱۳۱۲ به ایران برگشتم. از آن زمان تاکنون با سمت استادی به تدریس در دانشکدهٔ فنی اشتغال داشته‌ام.

از ۱۳۱۵ تا ۱۳۲۴ معاونت دانشکدهٔ فنی و از ۱۳۳۳ تا ۱۳۴۲ ریاست این دانشکده را عهده‌دار بوده‌ام. در ۱۳۴۲ به ریاست مجلس شورای ملی انتخاب شدم، اما این امر مانع از تدریس در دانشکده نبوده است. کتابهایی در رشته‌های علمی و صنعتی تألیف کرده‌ام.

در سالهای ۱۳۰۵ تا ۱۳۰۷ با همکاری مرحوم **حسین هورفر** و آقای **علی اکبر ناصحی** که تدریس ریاضیات مدارس متوسطهٔ آن زمان را به عهده داشتیم **«مجلهٔ ریاضیات»** را تهیه و چاپ و منتشر می‌کردیم. این مجله با چاپ سنگی تهیه می‌شد و مورد توجه محصلین رشتهٔ ریاضی بود.

نظرات دربارهٔ ریاضیات دبیرستان

چه نوع ریاضیاتی باید در دبیرستان تدریس‌شود؟

اصولا، ریاضیات بردو قسم است؛ یك نوع‌آن ریاضیات محض است که علمی ظریف و زیبا است. کسی که ریاضیدان باشد در علوم دیگر هم تسلط خواهد داشت. اما ریاضیاتی که دردبیرستان تدریس می‌شود مقدمه‌ای‌است برای تحصیل‌علوم تجربی و طبیعی و بدیهی‌است که مقدمه باید با مؤخره تطابق داشته باشد؛ علوم در تحول هستند وهر تحولی درعلوم، تحول در ریاضیات را ایجاب می‌کند. پیشرفت در علوم محتاج به حل مسائل و مشکلات ریاضی است. بسیاری از دانشمندان که در ریاضیات آثاری دارند در حقیقت ریاضیدان نبوده‌اند بلکه برای آنها مشکلات علمی پیش می‌آمده است که به‌ناچارمجبور بوده‌اند برای‌حل این‌مشکلات به‌ریاضیات متوسل شوند. **فوریه** در دیوارکشی روی رودخانه و محاسبهٔ درجهٔ نفوذ حرارت در آن بامسئله‌ای‌ریاضی مواجه‌شد و درنتیجهٔ حل‌آن **سری‌فوریه** را ارائه داد. **لروجرولند** در تعیین سطح متوسط آب دریا آنالیز هارمونیك را ابداع کرد.

سابقاً معمول چنین بود هرکس در رشته‌ای که کار می‌کرد وقتی ایجاب می‌کرد به مطالعهٔ ریاضیات مورد لزوم می‌پرداخت. بعداً درصدد برآمدند و مدارس متوسطه‌را تأسیس کردند که در آنها ریاضیات مورد نیاز سایر علوم آموخته شود تا وقتی به تحصیلات عالی می‌پردازند مقدمات را کاملا فرا گرفته باشند.

تأسیس مدارس مهندسی

قبل‌ازسال ۱۷۴۷ مدرسهٔ مهندسی‌وجودنداشت. اشخاصی بودند که به‌آنها **ژنی** (نابغه) می‌گفتند. این اشخاص‌درخدمت ارتشها بودندومسائل‌مختلف نظامی‌را ازهرنوع حل می‌کردند. از این جهت ژنی (وبعداً: **انژنیور Ingérieur**) نامیده می‌شدند که در حل مسائل متنوع مهارت و ورزیدگی داشتند.

اولین‌بار، فرانسویها که در تهیهٔ شبکهٔ راهسازی وسیعی درکشورشان به‌متخصصین احتیاج پیداکردند به تأسیس مدرسهٔ مهندسی به‌نام: **Ecole des ingérieurs civils** اقدام کردند.

بعداز آن **مدرسهٔ پلی‌تکنیک** توسط **مونژ** دایر شد که احتیاجات ارتش و مؤسسات دولتی را از لحاظ افراد متخصص فنی تأمین می‌کرد. بعد **مدرسهٔ مهندسی معادن** تأسیس شد.

فارغ‌التحصیلان مدارس مهندسی چه در اروپا و چه در آمریکا کلیهٔ مسائل مهم علمی، صنعتی و اقتصادی را حل می‌کردند. پیشرفتهای بعدی درعلم و صنعت مدیون آنها است. دراواخر قرن نوزدهم وقتی‌که صنعت به صورت کنونی درآمد معلوم شد که فارغ‌التحصیلان مدارس مهندسی برای ادارهٔ صنایع کافی نیستند و به وجود افراد متخصصی که در رشتهٔ صنعتی خاص ورزیدگی عملی داشته باشند احتیاج می‌باشد. این بود که به تأسیس مدارس تکنیك اقدام شد. فارغ‌التحصیلان این مدارس یعنی تکنیسین‌ها در کاری‌که برای آن تربیت شده‌اند فعالیت می‌کنند. اما مهندسین در حل مسائل متنوع علمی و فنی مهارت دارند.

ریاضیات متوسطه مقدمه‌ای برای تحصیلات عالی است؛

درتحصیلات متوسطه، ریاضیات را برای این می‌خوانند که دروس دورهٔ تحصیلات عالی را بفهمند. ریاضیات فکر را توسعه می‌دهد و انسان را درتجزیه وتحلیل امور وقضایارهبری می‌کند البته اگردرست‌آموخته شده باشد. باید دانش‌آموزان به فکرکردن درست عادت کنند و خود بتوانند به کشف قضایا و حل مسائل نایل آیند. نه اینکه چندفرمول و چند مسئله را حفظ کنند. حفظ‌کردن علم نیست، یك‌نفر چند مسئله‌را حفظ کرده باشد و نفر دیگر اسامی کسبهٔ یك خیابان را، بین‌آنها فرقی نیست.

پیشرفتهای علمی روش حل‌مسائل فنی را دگرگون ساخته‌است؛

حدود شصت سال پیش که صنعت تازه شروع شده بود و فیزیك مراحل ابتدایی را می‌گذراند مهندسین ناچار بودندکه مسائل خودرا از راه **کاوش** حل‌کنند به این مناسبت هندسه مقام بسیاربالائی‌را درکار مهندسی اشغال می‌کرد. وقتی **مونژ** هندسهٔ ترسیمی را اختراع‌کرد راه جدیدی برای مهندسین‌باز شد. اما امروز صنعت و فیزیك تا جائی‌ترقی‌کرده و به پایه‌ای رسیده است که کاوش جای خودرا به **مسائل آماری** داده است. در بسیاری از موارد محاسبه جای کاوشهای هندسی را گرفته است ومخصوصاً اختراعات مربوط به‌مغزهای الکترونیکی کار محاسبات را بسیار ساده‌کرده است.

لزوم تجدید نظر دربرنامهٔ ریاضیات دبیرستان

در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانها باید عمیقاً تجدید نظر شود، بطور کلی باید اصول را عوض‌کرد. مطالب فعلی را شاگرد باید شخصاً کشف‌کند. بسیاری از مطالب، مخصوصاً قسمتهای عمده‌ای از هندسه لازم نیست. دانستن مقدمات کافی است. بیش از آن اتلاف وقت است. هندسهٔ ترسیمی فقط در مواردی برای آرشیتکت‌ها اهمیت دارد.

پایهٔ معلومات محصلین ضعیف است؛

اکثر محصلین فعلی در معلومات متوسطه ضعیف هستند، آنها زحمت خود را می‌کشند، شاید چندین برابر آنچه که لازم‌است وقت‌صرف می‌کنند اماده‌یك‌آنرا هم نتیجه نمی‌گیرند، دانش‌آموزان به این موضوع توجه ندارند، معلمان آنها هم متوجه نیستند. علت اصلی آنست که محصلین آنطورکه لازم بوده است مقدمات را درك نکرده‌اند، پایهٔ تحصیلات ابتدائی آنها ضعیف می‌باشد، در دورهٔ اول متوسطه اصول ریاضیات را درست نفهمیده‌اند. دردورهٔ دوم علوم تازه‌ای در مقابل آنها قرار می‌گیرد. آن وقت محصلین که مقدمات را نمی‌دانند و با علوم متعدد و معلمان مختلف سر وکار پیدا می‌کنند به‌ناچار مطالب را حفظ می‌کنند. در حل مسائل نمی‌شود از حافظه استفاده کرد. باید پایه قوی شده‌باشد تا محصل شخصاً بتواند مسائل را حل کند. مخصوصاً در دورهٔ اول باید پایهٔ حساب و هندسهٔ محصلین تقویت شود تا در دورهٔ دوم آمادگی کامل داشته باشند.

درفرانسه‌معمول بودکه بین محصلین تمام‌کشورمسابقات ریاضی برگزارمی‌شد؛ این‌کار خیلی خوب بود وموجب می‌شد پایهٔ درسی محصلین تقویت شود.

نقص دیگر برنامهٔ فعلی ریاضیات دبیرستان،

موضوع دیگر آنکه در برنامهٔ فعلی ریاضیات ما دروس مختلف زیاد خرد شده است. در دورهٔ دوم باید تمام ریاضیات حداکثر در دروس حساب و هندسه جمع شود، تمام دروس‌باید دنبالهٔ هم و متصل به هم باشد. در انگلستان که تمام ریاضیات به صورت واحد آموخته می‌شود نتایج خوب بدست آورده‌اند.

چرا محصلین درکنکور دانشگاه موفق نمی‌شوند؟

در کشور ما محصلین خیلی خوب هستند، زحمت هم می‌کشند اماچون پیوستگی مطالب را درك نکرده‌اند درکنکور دانشگاه موفق نمی‌شوند.معلمان دروس مختلف هم متفاوت‌هستند وباعث می‌شودکه محصلین دروس را بیشتر مستقل از هم بدانند، وظیفهٔ معلمان است که با مراجعات مکرر به دروس گذشته دنبالهٔ مطالب را حفظ‌کنند و همچنین همواره پیوستگی دروس را در نظر بگیرند.

یك بار مجبور شدیم برای دانشکدهٔ فنی کلاس تهیه‌دایر کنیم ودرآن‌پیوستگی‌دروس رابه‌دانشجویان حالی‌کنیم. اگردر برنامه‌ها تجدیدنظر شود و پیوستگی دروس محفوظ بماند دیگر احتیاجی نیست‌که شاگردان بعدازاخذ دیپلم، تابستان‌خودرا در کلاسهای کنکور و تقویتی بگذرانند. اینگونه محصلین

وقتی هم که درکنکور موفق شوند آدمهای خسته‌ای هستند و برای درك دروس دانشگاه آمادگی کافی ندارند. اگر برنامه‌ها به ترتیب صحیح اصلاح شود بسیاری از مشکلات فعلی برطرف خواهدشد.

دانشگاه برای پذیرفتن دانشجویان بیشتر گنجایش دارد

بسیاری ازمردم خیال‌می‌کنند نپذیرفتن‌دانشجویان بیشتر در دانشگاه به علت کمبود جا است درصورتی که چنین‌نیست؛ با پیشرفت فعلی کشور به آدمهای فنی احتیاج زیاد است اما آمار نشان‌می‌دهد که‌همواره عدهٔ دانشجویانی‌که به‌رشته‌های‌ادبی و اجتماعی وارد می‌شوند به مراتب بیشتر از رشته های علمی‌و فنی‌است. مملکت احتیاج دارد، امکانات‌هم فراهم است، اما به علت نقص معلومات متوسطهٔ محصلین تعداد کمی درکنکور موفق می‌شوند وگرنه تاچهار برابر عدهٔ فعلی می‌توان دانشجو پذیرفت.

تازه از این عده که درکنکور قبول می‌شوند بیش از پنجاه درصد آنها در خود دانشکده ها به زحمت می‌افتند زیرا هم در متوسطه پیوستگی دروس را درك نکرده‌اند و هم خودشان را خسته کرده‌اند. این نقص که رفع‌شد محصلین‌کشور خودمان خواهند توانست جای ده‌هاهزار اشخاص متخصص در رشته‌های مختلف را که کشور احتیاج دارد و در وضع حاضر از خارج می‌آیند بگیرند، هم به کشور خودشان خدمت بهتری انجام می‌دهند و هم برای خودشان زندگی بهتری تهیه می‌کنند.

برنامهٔ درسی کشورهای دیگر چگونه است؛

از کشورهای مختلف دیدن کرده ووضع تحصیلات آنها را مطالعه کرده نزد خودم تجزیه و تحلیل کرده‌ام تا بهترین روش را برای کشور خودمان اتخاذ کنیم.

در **روسیه** تحصیلات عمومی ده سال است، دوسال‌دیگر جزء دانشگاه است. هر دانشکده دو سال تهیه دارد. به این وسیله بسیاری ازمشکلات حل‌وازاتلاف وقت جلوگیری‌می‌شود.

در**انگلستان** بعدازسال سوم متوسطه، مدرسهٔ متوسطه‌ای مانند کشور ما وجود ندارد. هرکس برای ورود به دانشکدهٔ معین باید تحصیلات مخصوص داشته باشد. در مدارس عالی از بین داوطلبان‌آنهایی راکه سن‌کمتر ومعدل بیشتر دارندانتخاب می‌کنند. مخصوصاً سن کمتر را ترجیح می‌دهند در مدرسهٔ پلی‌تکنیك‌هم‌کسی راکه بیش‌از۲۱سال داشته‌باشد قبول‌نمی‌کنند.

طرحی برای تحصیلات متوسطه؛

به‌وزارت آموزش وپرورش پیشنهاد کرده بودم که‌بعداز دورهٔ تعلیمات عمومی (دورهٔ آن بر حسب مقتضیات هرقدر که می‌خواهد باشد) تحصیلات در رشته های مختلف در هر مادهٔ درسی درچهار سطح ۱،۲،۳ و۴ انجام بگیرد. محصلی‌می‌تواند سطح ۲ را ببیند که سطح یك را با موفقیت گذرانده باشد و همین طور برای سطحهای بعدی. مدارس متوسطه وهنرستانها هرکدام موادمخصوصی‌را در سطوح معین بیاموزند. هردانشکده اعلام می‌کند که برای پذیرش دانشجو، از هر مادهٔ درسی سطح معینی را لازم دارد. محصلین هم اگر یك سطح پائین‌را توانستند با موفقیت بگذرانند آمادگی خواهند داشت که سطح بالاتررا هم بگذرانند وگرنه در رشتهٔ دیگر به تحصیل مشغول می‌شوند. بعداز پایان تحصیلات هم اگر در دانشکده‌ای قبول نشدند می‌توانند ازآنچه فراگرفته‌اند درراههای دیگر استفاده کنند. دیگر مانند امروز دیپلم بدست آنها نمی‌دهند که نه در دانشکده‌ای توفیق یابند و نه حاضر باشند به کار آزاد اشتغال ورزند و این دیپلم برای آنها بلائی باشد. این کار از وظایف وزارت آموزش وپرورش است که نسبت به‌اجرای آن اقدام‌کند.

جوانان سرمایهٔ کشور هستند. از اتلاف وقت آنان در دورهٔ متوسطه وبعد باید جلوگیری‌شود. سرگردان شدن‌جوانان به اجتماع لطمه وارد می‌آورد.

رفع اشکال تربیت دبیر

فایدهٔ مهم دیگر این طرح موضوع تربیت‌دبیر است که بسیار ساده خواهد شد. تربیت دبیر برای سطح یك کار ساده‌ای است و برای سطحهای بالاتر هم دبیران کمتری لازم است.

معلم باید علاقمند باشد:

در قدیم پایهٔ‌معلومات محصلین قوی بود. علت اساسی‌آن علاقمندی معلمان بود. آن‌موقع معلمان درجهٔ لیسانس نداشتند اما در کار خود ورزیده بودند. فعلابسیاری از معلمان درورود به کلاس و خروج از آن وظیفهٔ خودرا تمام‌شده می‌دانند. آن علاقمندی که لازم است درآنان وجود ندارد. معلمان باید سعی کنند محصلین خودشان استدلال‌کنند و بسیاری از مطالب را شخصاً کشف کنند. بعضی از محصلان برای اثبات قضایااستدلالی بهتر از کتاب می‌آورند. وجه امتیاز عمده‌ای که مرحوم **غلامحسین رهنما** برسایرمعلمان ومؤلفان‌کتب ریاضی داشت این بود که همواره محصلین را تشویق می‌کرد تا بعضی راه حلها را شخصاً کشف کنند، درکتابهای درسی هم که تألیف کرده در بسیاری از موارد اثبات را به‌عهدهٔ متعلم گذاشته‌است.

مثلثات برای سال ششم ریاضی

توسط : غلامرضا عسجدی

--۳--

در شمارهٔ گذشته چون راجع به یك اشتباه چاپی تذکری داده شده بود لازم می‌دانم به عرض خوانندگان عزیز برسانم که وجود غلطهای چاپی در مطبوعات کشور ما با وضع فعلی چاپخانه‌ها تقریباً امر اجتناب ناپذیر است .

برای اینکه کتابها بی‌غلط چاپ شوند ازجملهٔ مسائل لازم توجه به‌وضع روانی و حقوق مادی و اطلاعات فنی کارگران چاپخانه‌هااست . شنیده‌ام که در بعضی از کشورهای مترقی برای کسی که بتواند دریك کتاب درسی یك اشتباه چاپی پیدا کند جایزهٔ نقدی بزرگ تعیین می کنند به‌علت اینکه در این قبیل کتابها اصلا اشتباه پیدا نمی‌شود . به هر حال از مسئولان محترم مجلهٔ یکان و کارکنان چاپخانهٔ آذر که این مجله در آنجا چاپ می‌شود کمال تشکر را دارم که نسبت به مندرجات این مجله سعی کامل بکار می‌برند و اشتباهات چاپی در این مجله از مجلات مشابه دیگر به‌مراتب کمتر است با وجود این از خوانندگان محترم تقاضادارم که‌درشمارهٔ گذشته صفحهٔ ۳سطر ۱۱ به‌اصطلاح فرانسوی جدولهای حاشیهٔ لگاریتم tables d'interpolation که غلط‌چاپ‌شده‌و همچنین صفحهٔ۷سطر ۱۴ به‌ترکیب «بااین کتاب» که به‌صورت «به‌این کتاب» نوشته‌شده و ممکن است‌معنی‌عبارت را تغییر بدهد بذل توجه فرمایند .

حل نامعادلهٔ $\cos x - p > 0$

این نامعادله را به‌صورت $\cos x > p$ می‌نویسیم اگر p محصور بین (۱ −)و (۱) باشدنامعادله جواب دارد و برای تعیین جوابهای آن ، دایرهٔ مثلثاتی را رسم کرده روی محور کسینوسها پاره خط OP را به طریقی جدا می‌کنیم که $\overline{OP} = P$ باشدشکل۲...

۱۸
۴/۷۷/۵

توضیح ـ درحل این نامعادله نظیر همان اشتباهی که در حل نامعادلهٔ ، $\sin x - q > 0$ وجود داشته رخ داده‌است‌یعنی عوض اینکه p محصوربین (۱ −) و (۱) باشد باید فقط کمتر از (۱) باشد، شرح وحل کلی آن شبیه همانست که در شمارهٔ گذشته متذکرشدم و ازتکرار آن صرف‌نظر می‌شود بدیهی‌است اگر راه حل این دونامعادله درکتاب درسی‌تغییر بایدراه حل‌دو نامعادلهٔ $\sin x - q < 0$ و $\cos x - p < 0$ نیز که درصفحات ۷۷ شمارهٔ ۳ و ۷۸ شمارهٔ ۵ ذکرشده به تبعیت از آنها تغییر خواهدکرد .

بطورکلی برای حل نامعادلات مثلثاتی به طریق زیر عمل می‌کنیم :

ابتدا تمام جمله‌ها رابه یك طرف‌نامعادله انتقال داده و عبارت حاصل را ساده‌می‌کنیم

در مرحلهٔ دوم با استفاده از دستور های جبری وروابط مثلثاتی عبارت‌مزبور رابه‌حاصل‌ضرب عاملها تبدیل می‌کنیم .

در مرحلهٔ آخر با استفاده از قاعدهٔ حل نامعادلات جبری ومطالبی‌که در این فصل‌دیده‌ایم جوابهای نامعادله را تعیین می‌کنیم .

۱۹
۱۰/۸۱/۵

توضیح ـ در این بیان قاعدهٔ کلی برای حل نامعادلات مثلثاتی داده نشده‌بلکه یك راهنمائی مختصر بعمل آمده است. بادر نظر گرفتن مطالب فصل پنجم کتاب وعرایضی که نسبت به مندرجات این‌فصل‌عرض شدحدود استفاده از این راهنمائی‌نیز محدود است . معمولا دراکثر کتابهای درسی نا معادلات را چه جبری و چه مثلثاتی به‌چند دسته از قبیل :

۱ـ نامعادلات درجهٔ اول .

۲ ـ نامعادلات درجهٔ دوم .

۳ ـ نامعادلات از درجات بالاتروقابل تجزیه

۴ ـ نامعادلات کسری

۵ـ نامعادلات اصم

تقسیم بندی می‌کنندو برای هر کدام قاعدهٔ مخصوص ذکر می‌کنند . سپس به‌دانش آموزان توصیه‌می‌کنند که در حالت کلی از ترکیب قواعد مزبور برای‌حل نامعادله استفاده نمایند ،این کار درکتاب مورد بحث نشده و اگرهم شده باشد بسیار ناقص است .

باوجود این ، طرح قاعدهٔ کلی و همه جانبه برای حل نامعادلات امکان پذیر است . فعلا برای رعایت اختصار از ذکر آن‌که مقدمه‌ای هم لازم دارد صرف‌نظرمی‌شود .

اصلا خوب‌بود به‌عوض‌فصل‌پنجم یافصل نامعادلات‌مثلثاتی که به تصدیق خودکتاب(پاورقی صفحهٔ ۷۶) جزء برنامهٔ ششم ریاضی نیست مطالعهٔ علامت و تغییر علامت یك‌عبارت‌مثلثاتی را ضمن تعیین تغییرات توابع مثلثاتی به تفصیل بیان می‌کردند تا برای رسم منحنیها بکار آید برخلاف این منظور در فصل ششم کتاب ابداً ذکری از قاعده و توضیح نکات و خصوصیات‌توابع مثلثاتی به‌میان نیامده فقط دورهٔ تناوب‌که راجع به‌آن‌هم‌مطلبی به‌عرض خوانندگـان محترم خواهـد رسید تعریف شده است . مطلب عمده دراین قسمت بیان سه مثال است‌بقسمی‌که فصل ششم کتاب‌را عوض فصل تعیین‌تغییرات و رسم منحنیهای توابع‌مثلثاتی می‌توان فصل سه مثال نامید .

گویا در تألیف‌کتاب نظر این بوده است‌که تدریس‌جبر ومثلثات درکلاس ششم‌ریاضی بوسیلهٔ یك دبیر انجام‌شود که‌بعدها این مقصود جامهٔ عمل نپوشیده است . دیگر این عیب مربوط‌به کتاب نیست‌بلکه مربوط به‌برنامهٔ تحصیلات است‌که مثلاآموزش مشتق توابع‌مثلثاتی را دریك‌کلاس بدست یك‌دبیر بسپارد ورسم منحنی همان تابع مثلثاتی را درکلاس دیگر و درکتاب دیگر بدست دبیردیگر . خدا می‌داند چه‌ضررهااز این سهل‌انگاریها نصیب دانش آموزان می‌شود . خوانندهٔ محترم بـاید درنظـر بگیرد که‌تمام‌دبیرستانهای‌کشور نظیر چند دبیرستان ملی‌خاص نیست‌که دبیران‌و اساتید آنها از سطح بالا باشندیابودجهٔ مالی آنها کفایت کندکه‌بتوانند بادرسهای فوق‌العادهٔ شبانه ویاروزانه نقائص‌کتاب‌و یابرنامه‌ها را جبران و دانش آموزان خودرادر قسمتهای‌درسی‌تقویت نمایند . بسیاری از مدارس و دانش‌آموزان کشور هیچ‌نیروی اضافی ندارند، تنها اتکاء آنها به‌کتاب‌درسی و معلم مربوط است ولذا دارنده‌ها جلو می‌روند و ندارها عقب می‌مانند، چه استعدادها در این وسط می‌سوزد ونابود می‌شود!؟

۲۰
۱/۸۶/۶

تناوب ـ می‌دانیم اگر کمان x از صفر تا 2π تغییر کند، $\sin x$ و $\cos x$ تمام مقادیر واقع‌در فاصلهٔ (۱+ و ۱−) را اختیار می‌کنندوچنانچه کمان x از 2π تا 4π یا از 4π تا 6π یـا ... تغییرکند ، $\sin x$ و $\cos x$ مقادیر واقع در فاصلهٔ (۱+ و ۱−) را به‌همان ترتیب‌اختیار خواهند کرد . این خاصیت را تناوب می‌گویند و مفهوم آن چنین بیان‌می‌شودکه $\sin x$ و $\cos x$ متناوبند و دورهٔ تناوب آنها 2π است .

تناوب و دورهٔ تناوب‌که به ترتیب بالا تعریف شده است از لحاظ ریاضی دقیق و قانع‌کننده نمی‌باشد .

توضیح ـ اگرتعریف بالا صحیح باشد باید برای‌دورهٔ تناوب تابع یك مقدار منحصر به‌فرد نتیجه شود در صورتی‌که مطابق‌همان تعریف‌می‌توانیم نتیجه بگیریم‌که دورهٔ تناوب $\sin x$ و $\cos x$ مثلا 4π یا 6π است زیرا اگربنویسیم :

تناوب ـ می‌دانیم اگرکمان x از صفر تـا 4π تغییرکند $\sin x$ و $\cos x$ تمام مقادیر واقع در فاصلهٔ (۱+ و ۱−) را اختیار می‌کنند و چنانچه‌کمان x از 4π تا 8π یا از 8π تا 12π یا ... تغییر کند $\sin x$ و $\cos x$ مقادیر واقع درفاصلهٔ (۱+ و ۱−) را به همان ترتیب اختیار خواهندکرد این خاصیت را تناوب می‌گویند و مفهوم آن چنین بیان می‌شودکه $\sin x$ و $\cos x$ متناوبند و دورهٔ تناوب آنها 4π است .

این دوتعریف باهمدیگر چه تفاوت دارند؟ هیچ،پس‌دورهٔ تناوب $\sin x$ و $\cos x$ می‌تواند 2π ویا 4π و یا 6π و یا .... باشد یعنی تعریف‌کتاب قانع‌کننده ودقیق نیست. درتعریف‌اول $\sin x$ و $\cos x$ مقادیر واقع مابین (۱+ و ۱−) را فقط‌یك مرتبه‌می‌پیمایند و در تعریف‌دوم دومرتبه لیکن بیان‌کتاب نسبت به این موضوع ناظر نیست و قیدی هم‌نکرده است. درصفحهٔ۱۸ کتاب مثلثات سال پنجم ریاضی مـوضوع تناوب و دورهٔ تناوب نسبتهً بهترتعریف‌شده ولی‌آنهم نقص دارد . اگر بخواهیم این تعریف از لحاظ منطق ریـاضی سالم و دقیق باشد بـاید چنین بنویسیم :

تابع $f(x)$ را متناوب می‌گویند در صورتی‌که اولا یك مقدار مثبت a پیدا شود که به‌ازاء جمیع مقادیر x داشته‌باشیم

$$f(x)=f(x+a)$$

ثانیا اگر هرمقدار مثبت 'a کوچکتر از a فرض‌شود $(a'<a)$ داشته باشیم $f(x)\neq f(x+a')$. در این صورت مقدار a را دورهٔ تناوب‌تابع $f(x)$ می‌نامند:

دورهٔ تناوب هر تابع متناوب کوچکترین مقدار مثبت است که اگر آنرا به متغیر اضافه کنیم مقدار تابع فرق نکند.

به سهولت می‌توان نتیجه گرفت که در تابع متناوب a خواهیم داشت:

$$f(x)=f(x+na)$$

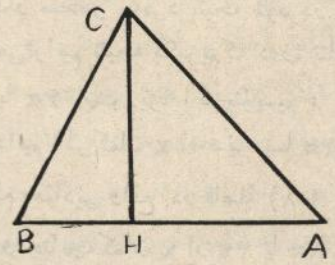
که در آن n عدد صحیح مثبت و یا منفی است.

بااین‌تعریف دورهٔ تناوب $\sin x$ و $\cos x$ فقط 2π ودورهٔ تناوب $tg x$ و $cotg x$ فقط π خواهدبود. دورهٔ تناوب هر تابع مثلثاتی دیگر را نیز پیدا می‌کنیم

۴۱/۹۸ و ۹۷/۷

روابط بین‌اضلاع وکسینوس زوایای‌مثلث

مثلث ABC وارتفاع CH آنرا رسم می‌کنیم اگر زاویهٔ A حاده باشد (شکل۳) می‌توان چنین نوشت:

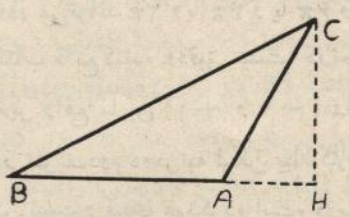


(شکل۳)

$$(I)\quad a^2=b^2+c^2-2cAH$$

واگر زاویهٔ A منفرجه باشد (شکل۴) می‌توان چنین نوشت:

$$(II)\quad a^2=b^2+c^2+2cAH$$



(شکل ۴)

توضیح- بطوری‌که خوانندهٔ محترم ملاحظه می‌فرمایددر کتاب درسی از دو قضیهٔ هندسهٔ مقدماتی و تقریباً از دو طریقهٔ جداگانه فرمول

$$a^2=b^2+c^2-2cb\cos A$$

به‌ثبوت رسیده است.

درصورتی‌که به نظر اینجانب بهتر بودکه درکلاس ششم ریاضی که پایان تحصیلات دبیرستان است این دوقضیه هم در هندسه و هم در مثلثات به صورت یك قضیه بیان شود. موارد دخالت جبر وعلامت جبری در هندسه ومکانیك و فیزیك‌فراوان است لیکن در این مختصر مجال بحث نیست.

به هر حال اگر AB را محور جهت دار و جهت‌مثبت آنرا از A به B انتخاب کنیم رابطهٔ فوق درهردوحالت‌چنین

$$a^2=b^2+c^2-2c\cdot\overline{AH}$$

نوشته‌می‌شود (هردوشکل) که درآن $\overline{AH}$ یك طول جبری‌است.

این رابطه چه زاویهٔ A حاده باشد و چه منفرجه صدق می‌کند و اگر زاویهٔ A قائمه باشد $\overline{AH}=0$ و فرمول تبدیل به حکم قضیهٔ فیثاغورث می‌شود و چون در هردوحالت

$$\overline{AH}=b\cos A$$

است پس همواره دریك مثلث غیر مشخص رابطهٔ

$$a^2=b^2+c^2-2cb\cos A$$

بر قرار است.

۳۲/۲/۱۱۷۶

حل‌مثلث درحالتی‌که دوضلع‌وزاویهٔ‌مقابل به یکی از آنها معلوم است.

درمثلث ABC فرض‌می‌کنیم‌اضلاع $AB=c$ و $AC=b$ و زاویهٔ B معلوم باشند برای حل مثلث دستگاه زیررا تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} A+B+C=\pi \\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C} \end{cases}$$

از رابطهٔ

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

حاصل می‌شود:

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}$$

طرف دوم این تساوی معلوم‌است وفرض می‌کنیم برابر سینوس زاویهٔ حادهٔ α باشد، بنا بر این خواهیم داشت $\sin C=\sin\alpha$ وازآنجا:

$$C=\alpha \quad \text{یا} \quad C=\pi-\alpha$$

(جواب $\pi-\alpha$ در صورتی قابل قبول‌است که $B+C$ از 180° کوچکتر باشد)

در رابطهٔ $A+B+C=\pi$ به جای B وC مقادیرشان‌را قرار داده و زاویهٔ A راحساب می‌کنیم به ازای $C=\alpha$ حاصل می‌شود:

$$A=\pi-(B+\alpha)$$

و به ازای $C=\pi-\alpha$ خواهیم داشت $A=\alpha-B$

برای محاسبهٔ a در رابطهٔ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

به جای A مقدارش را قرار می‌دهیم چنانچه دو جواب $C=\alpha$ و $C=\pi-\alpha$ قابل قبول باشند برای a نیز دومقدار

$$a=\frac{b\sin(\alpha-B)}{\sin B} \quad \text{و} \quad \frac{b\sin(B+\alpha)}{\sin B}$$

بدست می‌آید

تبصره ــ درهندسه دیده‌ایم اگر ازمثلثی دوضلع و زاویهٔ مقابل به‌یکی از آنها معلوم باشد و مثلث را رسم کنیم، برحسب آنکه ضلع مقابل به‌زاویهٔ معلوم بزرگتر یاکوچکتر ازضلع دیگر باشد به ترتیب یك مثلث یا دومثلث حاصل می‌شوند.

دراینجا نیز بطوری‌که مشاهده شد درحل مثلث دو دسته جواب حاصل گردید که ممکن‌است هردو دسته یا یکی ازآنها قابل قبول باشد.

توضیح ـ حل مثلث دراین حالت یکی از قسمتهای‌اساسی برنامهٔ مثلثات ششم ریاضی‌است.

متاسفانه مندرجات کتاب درسی برای این موضوع هم‌از لحاظ بحث مثلثاتی و هم از لحاظ جنبهٔ هندسی که به صورت تبصره به آخر آن اضافه شده ناقص و اشتباه آمیز است:

معلوم نیست آیا نظر این بوده که مثلث را حل و بحث نمایند و یا اینکه دانش‌آموزان را نسبت به حل آن راهنمائی کنند. به هرحال هیچکدام از دو منظور به خوبی انجام نشده است؛

اگر پس از نوشتن تناسب اضلاع با سینوسهای زوایای مقابل مسئله را ختم کرده باقی را بـه عهدهٔ دانش آمـوزان می‌گذاشتند بهتر بود. به عقیدهٔ‌اینجانب اگر شخص و یاکتابی در یك مورد ساکت بماند خیلی بهتر از این است که راه نا‌ـ صواب بپیماید.

بحث‌درامکان‌مثلث‌رادراین‌حالت‌فقط‌منوط به‌نسبت‌هندسی دوضلع معلوم‌آن برحسب اینکه این نسبت‌بزرگتروياکوچکتر از واحد باشد دانسته‌اند و این موضوع در تبصرهٔ صفحهٔ ۱۱۸ به‌وضوح نوشته شده در صورتی‌که این طور نیست، درکـجـای هندسه‌چنین چیزی دیده‌ایم؟

بحث در امکان مثلث در این حالت بستگی به سه‌عامل دارد :

۱ـ مقدار ارتفاع مثلث ABC که از رأس A خارج می‌شود. باید این ارتفاع کوچکتر و یا مساوی ضلع معلوم b مقابل به زاویهٔ معلوم B باشد تاوجود مثلث امکان پذیر گردد، از ذکر این موضوع بدیهی غفلت شده است.

۲ـ اندازهٔ زاویهٔ B برحسب اینکه حاده و یا قائمـه و منفرجه باشد در بحث مسئله دخالت دارد از ذکر این نکته هم غفلت شده است

۳ـ نسبت هندسی دوضلع معلوم مثلث یعنی مقدار $\frac{b}{c}$ بر حسب اینکه این نسبت بزرگتر و یا مساوی و یا کوچکتر از واحد باشد دخالت دارد فقط این قسمت درنظرگرفته شده است آنهم با اغماض از حالت مخصوص $b=c$ بدیهی‌است اگر از سه عامل نامبرده فقط به یکی توجه کنیم بحـث مسئله صحیح نخواهد شد و نشده‌است.

نکتهٔ قابل توجه اینکه ممکن است مثلث در ایـن حالت یك جواب و یا دو جواب داشته باشد و یا اصلا جواب نداشته باشد به این جهت در هندسه و مثلثات‌این‌حالت مثلث راحالت مشکوك می‌نامند.

نبودن جواب را کتاب درسی اصلا توجه نکرده است.

اگرچه منظور اینجانب در اینجاکتاب‌نویسی نیست‌لیکن برای استفادهٔ دانش‌آموزان بحث ایـن مسئلـه را هم‌از جنبهٔ مثلثاتی و هم از جنبهٔ هندسی آن بطور جداگانـه ذیلا یادآور می‌شویم:

بحث مثلثاتی ـ قبلا درنظر می‌گیریم که طبق‌معلومات مسئله دو طول b و c مثبت بوده وزاویهٔ B چون مربوط به‌یك مثلث‌است لزوماً بین صفر و۱۸۰درجه قراردارد. ازرابطهٔ:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

حاصل می‌شود : $\sin C=\frac{c\sin B}{b}$ ، طرف دوم ایـن تساوی معلوم است، با فرض $\frac{c\sin B}{b}\leqslant 1$ و یا $b\geqslant c\sin B$

می‌توانیم آنرا برابر سینوس زاویهٔ مثبت و حادهٔ α اختیارکنیم بنابراین خواهیم داشت $\sin\alpha=\frac{c\sin B}{b}$ ویا: $\sin C=\sin\alpha$

و لذا برای زاویهٔ C دو جواب پیدا می‌شود

$$C_1=\alpha \quad و \quad C_2=\pi-\alpha$$

چون زاویهٔ B معلوم است جوابهای زاویهٔ‌سوم مثلث‌یعنی A چنین است:

$$A_1=\pi-(\alpha+B) \quad و \quad A_2=\alpha-B$$

هردو جواب A_1 وA_2 به حکم مفروضات‌مسئله‌کوچکتر از ۱۸۰ درجه هستند. پس تنها شرط اینست که‌آنهامثبت‌باشند برای تشخیص این منظور دوحالت مجزی درنظر می‌گیریم:

الف‌ـ $B<90^\circ$ با این فرض زاویهٔ A_1 حتمـاً قابل قبول است برای اینکه جواب A_2 نیز قابل قبول باشد بایـد $\alpha-B>0$ ویا $\alpha>B$ ویا $\sin\alpha>\sin B$

بالاخره $c>b$ باشد دراین صورت برای مثلث دو جواب متمایز A_1BC_1 و A_2BC_2 بدست می‌آید ولی اگر $c<b$ باشد تنها جواب مثلث A_1BC_1 خواهد بود درحالت مخصوص $c=b$ زاویهٔ $A_2=0$ می‌شود و مثلث A_2BC_2 منجر به یك پاره‌خط می‌گردد.

ب ـ $180^\circ>B\geqslant 90^\circ$ بااین فرض جواب A_2 مطمئناً قابل قبول نیست پس برای مثلث دو جواب نمی‌تواند وجود داشته باشد برای اینکه لااقل جواب A_1 قابل قبول باشد باید:

$$A_1>0 \text{ یا } \pi-\alpha-B>0 \text{ ویا } \pi-B>\alpha$$

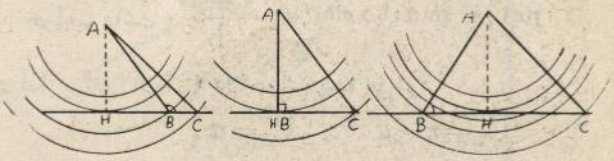
و چون هر دو طرف این نامساوی زاویهٔ حاده هستند پس باید $\sin B>\sin\alpha$ بوده بالاخره $b>c$ باشد بدیهی است اگر $b<c$ باشد مسئله دراین حالت جواب نخواهد داشت درحالت مخصوص $b=c$ باز مثلث تبدیل به خط می‌شود.

می‌توانیم خلاصهٔ بحث فوق را در جدول زیر نشان دهیم

$b<c\sin B$	مسئله جواب ندارد		
$b\geqslant c\sin B$	$B<90^\circ$	$b<c$	مسئله دوجواب دارد
		$b\geqslant c$	مسئله یك جواب دارد
	$B\geqslant 90^\circ$	$b>c$	مسئله یك جواب دارد
		$b\leqslant c$	مسئله جواب ندارد

در این جدول جوابهای حالت حد که در آنها مثلث تبدیل به پاره‌خط می‌شود به‌حساب جواب حقیقی نیامده است.

رسم و بحث هندسی ـ رسم مثلث درحالتی که زاویهٔ B و ضلع $AB=c$ و ضلع $AC=b$ از آن معلوم باشد. سابقاً در برنامهٔ دورهٔ اول دبیرستان بود حالا نمی‌دانم دانش‌آموزان تا چه اندازه به این مسئله آشنا هستند به هر حال توضیح نمی‌دهم اما می‌توانند در سه شکل زیر نتیجهٔ بحث مثلثاتی جدول بالا را با ترسیم هندسی مطابقت بدهند.



در هر سه حالت $AH=c\sin B$

اکنون خوانندهٔ محترم می‌تواند این شکل را با تبصرهٔ صفحهٔ ۱۱۸ کتاب درسی مقایسه و توجه فرماید که چه اندازه در آن بیان، تسامح و یا اشتباه وجود دارد.

مسئلهٔ نقشه ـ سه نقطهٔ A و B و C مفروضند می‌خواهیم درصفحهٔ ABC نقطه‌ای مانند M طوری تعیین کنیم که از این نقطه اضلاع AB و BC به ترتیب به زوایای α و β دیده شوند

۲۳
۱۱/۷۶/۱/۴

راه حلی که به این مسئله داده شده عیناً مانند سایر کتاب‌های درسی است لیکن بهتر است به عنوان بحث و یا تبصره در پایان راه حل اضافه شود که اگر $\alpha+\beta+B=180^\circ$ باشد مسئله مبهم و فرمول مربوط قابل اجرا نیست و دراین حالت چهارضلعی ABCM محاطی می‌شود. دلیل این تذکر از روی فرمولهای کتاب روشن است، مراجعه‌کننده متوجه خواهد شد.

***

خلاصه:

این بود خلاصهٔ نظر اینجانب در مورد کتاب مثلثات سال ششم ریاضی. البته این نظر راجع به مطالبی بوده است که در کتاب مزبور نوشته شده ولی نسبت به مطالب دیگر که خود عقیده دارم دراین قبیل کتابها نوشته شود چیزی معروض نگردیده است، همچنین راجع به تقدم و تأخر مطالب و فصل‌بندی آنها و تمرینات و مسائل حل شده و حل نشدهٔ کتاب اصلا وارد بحث نشده‌ام زیرا این کار وقت و فرصت کافی لازم و باذوق شخصی هر فرد بستگی دارد.

بار دیگر از سازمان کتابهای درسی و ذوات محترم که نام آنان در پشت جلد این کتاب به عنوان مؤلف نوشته شده صمیمانه معذرت می‌خواهم و تأکید می‌کنم که تحریر این اظهار نظر به خاطر دانش‌آموزان بوده است. همچنین خدمت دوستان و همکاران محترم خوش‌باور که عقیده دارند برای رفع معایب کارها باید تذکر داده شود درود فراوان می‌فرستم لیکن نسبت به بعضی از مأموران وزارت آموزش و پرورش و اعضاء سابق کمیسیونهای شورای عالی فرهنگ که قبلا این کتاب را بررسی نموده‌اند نمی‌توانم بدون نظر باشم. استدعا می‌کنم اگر در نوشتهٔ اینجانب سهو و یا خطائی مشاهده فرمودند بوسیلهٔ نامهٔ یکان اظهار فرمایند موجب استفادهٔ عموم و امتنان قلبی ارادتمند خواهد بود و اگر خطائی وجود ندارد اقدام مناسب فرمایند تا کتاب‌های درسی اصلاح شود. عرایضی هم به حضور جناب آقای وزیر آموزش و پرورش دارم که طرح آنها در یك مجلهٔ فنی و ریاضی مناسب نیست اگر اجازه فرمایند درمحضرشان به عرض خواهد رسید.

خداوند بزرگ به مردم این سرزمین به خصوص جوانان تصمیم راسخ عنایت فرماید که با گامهای بلند و استوار به‌سوی ترقی و کمال پیشروی نمایند:

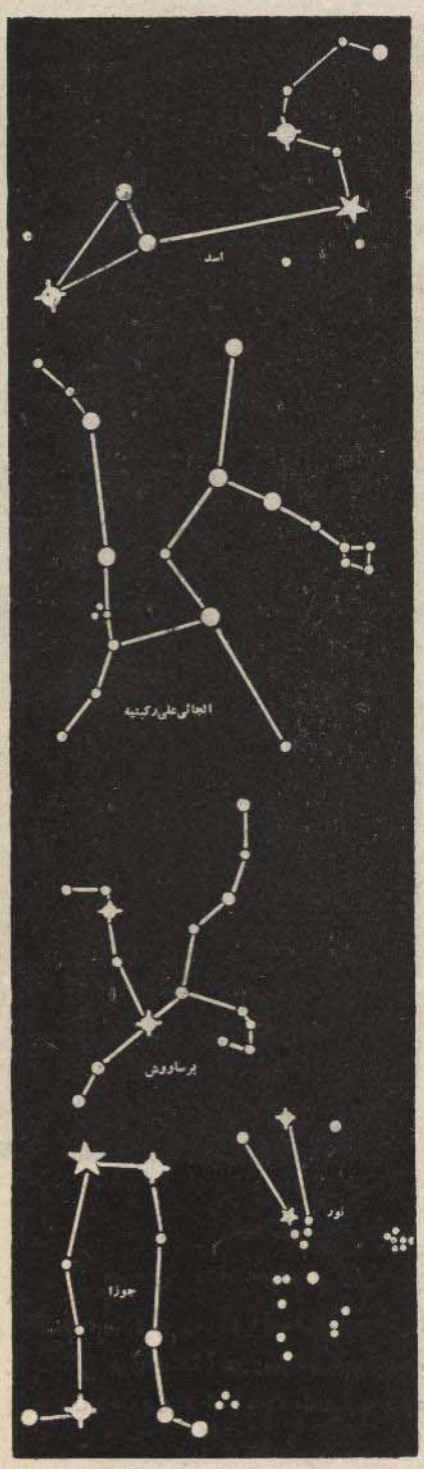
حدیث آرزومندی که در این نامه ثبت افتاد
همانا بی غلط باشد که حافظ داد تلقینم

پایان

یکان ـ راجع به مطالبی که درچندشمارهٔ یکان زیر عنوان بررسی کتاب مثلثات برای ششم ریاضی درج شد از طرف صاحب‌نظران نامه‌هائی به ادارهٔ مجله واصل شده است. این نامه‌ها و نامه‌های دیگری که واصل شود به ترتیب در شماره‌های بعدی یکان چاپ سپس بررسی کتاب دیگری آغاز خواهد شد.

صورتهای فلکی

تاریخی که مقابل هر صورت فلکی (بعد از نام لاتین آن) درج شده موقعی از سال را تعیین می‌کند که در حدود آن در ساعت ۹ شب آن صورت فلکی در نصف‌النهار تهران واقع است و چنانچه بالای افق تهران باشد بهترین موقعیت برای مشاهدهٔ آن خواهد بود



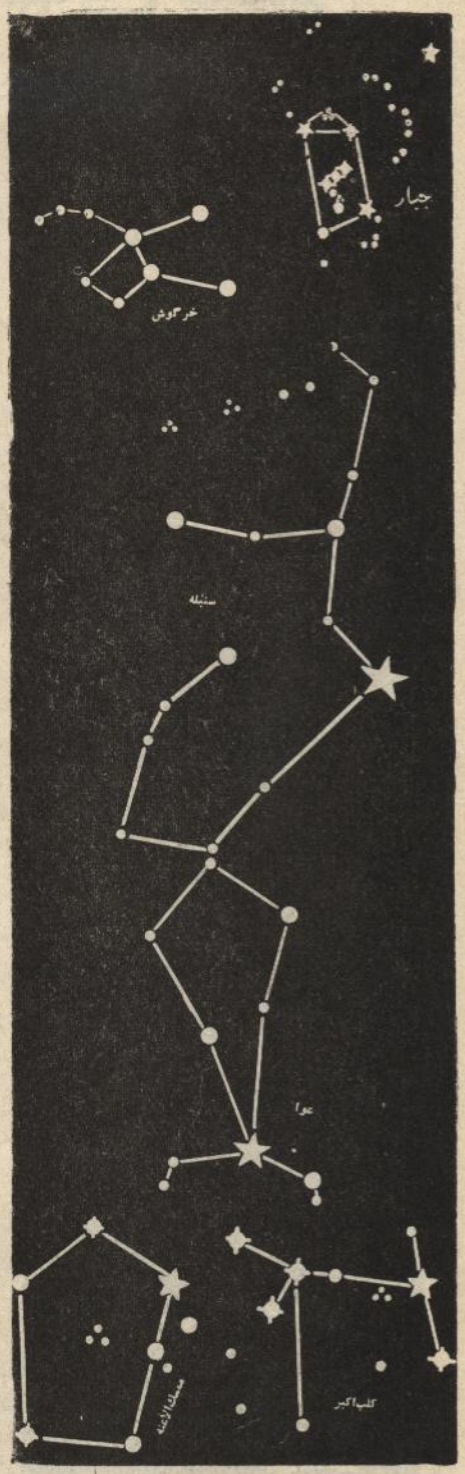
ارنب (خرگوش)	Lepus	۲۷ اسفند
اسد (شیر)	Leo	۱۱ خرداد
اکلیل شمالی = فکه (کاسهٔ درویشان)	Corona borealis	۳۰ مرداد
اکلیل جنوبی	Corona austrina	۱۴ مهر
الجاثی علی رکبتیه (زانو بر زمین زده)	Hercule	۲۴ شهریور
باطیه (بادیه)	Crater	۵ تیر
برساوش (حامل رأس الغول)	Perseus	۲۶ بهمن
تنین (اژدها)	Draco	۱۹ شهریور
ثور (گاو)	Taurus	۱۷ اسفند
جبار (شکارچی)	Orion	۲۷ اسفند
جدی (بزغاله)	Capricornus	۲۰ آبان
جوزا (توأمان)	Gemini	۲۴ فروردین
حمل (بره)	Aries	۱۱ بهمن
حوا	Ophiuchus	۲۴ شهریور
حوت (ماهی)	pisces	۱۱ دی
حوت جنوبی	Piscis austrinus	۱۰ آذر
حیه (مار)	Serpens	۳۰ مرداد
دب اکبر = بنات النعش (خرس بزرگ = هفت برادران)	Ursa major	۲۱ خرداد
دب اصغر (خرس کوچک)	Ursa minor	۲۵ مرداد
دجاجه	Cygnus	۱۰ آبان
دلفین	Delphinus	۱۵ آبان
دلو	Aquarius	۱۰ آذر
ذات الکرسی (بر تخت نشسته)	Cassiopeia	۲۱ دی
ذئب = سبع (گرگ)	Lupus	۲۰ مرداد
سرطان (خرچنگ)	Cancer	۱۷ اردیبهشت
سفینه (کشتی)	Carina	۱۷ اردیبهشت
سنبله (خوشه)	Virgo	۲۵ خرداد
سهم (پیکان)	Sagitta	۲۹ مهر

بقیهٔ صورتهای فلکی

شجاع(= مار باریك)	Hydra	۲۱ خرداد
شراع (کشتی بادبانی)	Vela	۲۶ اردیبهشت
شعر برنیکی (گیسوان برنیس)	Coma Berenices	۱۵ تیـــر
شلیاق (چنك رومی)	Lyra	۱۴ مهـــر
صلیب جنوبی	Crux	۱۵ تیـر
عقاب	Aquila	۲۹ مهـر
عقرب (کژدم)	Scorpius	۱۹ شهریور
عنقاء (سیمرغ)	Phoenix	۲۱ دی
عوا (گاوچران)	Boötes	۱۶ مرداد
غراب (کلاغ)	Corvus	۱۵ تیر
فرس‌اعظم (اسب بزرگ)	Pegasus	۲۰ آذر
قطعة الفرس (اسب کوچك)	Equuleus	۲۰ آبان
قنطورس	Centaurus	۲۰ تیر
قوس (= تیرانداز)	Sagittarius	۱۹ مهر
قیطس (نهنگ)	Cetus	۱ بهمن
قیقاوس(کیکاوس)	Cepheus	۱۵ آذر
کلب‌اکبر (سگ بزرگ)	Canis major	۱۹ فروردین
کلب‌اصغر (سگ کوچك)	Canis minor	۳ اردیبهشت
مثلث	Triangulum	۶ بهمن
مجمره (عودسوز)	Ara	۱۹ شهریور
مرأةالمسلسله (زن زنجیرشده)	Andromeda	۱۱ دی
ممسك الاعنه	Auriga	۱ فروردین
میزان	Libra	۲۱ مرداد
نهر	Eridanus	۷ اسفند
وحیدالقرن (اسب شاخدار)	Monoceros	۲۳ فروردین
یمامه (کبوتر)	Columba	۱ فروردین

صورتهای فلکی جدید (واقع در نیمکرهٔ جنوبی کرهٔ آسمانی)

آتشدان (اجاق)	Fornax	۱۶ بهمن
اره ماهی	Dorado	۲۲ اسفند
پرگار	Circinus	۱ مرداد
تراز	(Niveau)	۴ شهریور



اساطیر

قیقاوس پادشاه حبشه است وکاسیوپا (ذات‌الکرسی) ملکهٔ او و آندرومد (مرأة المسلسله) دختر او می‌باشد . دختران بر زیبائی فوق‌العادهٔ آندرومد حسدبردند وبه نپتون شکایت کردند. نپتون دستور داد تا آندرومد را به زنجیر کردند و بعدتنین را به پاسداری وی بگماشت .

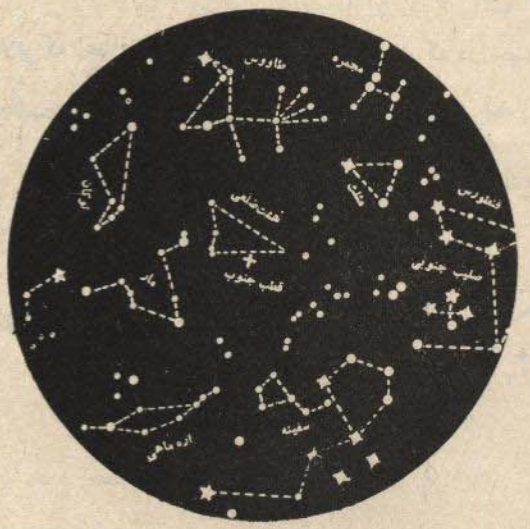
برساوش پسر زئوس است . وقتی‌که به‌دنیا آمد او را به دریا انداختند .ماهیگیری وی‌را نجات داد و نزد پادشاه‌برد. برساوش، چون‌بزرگ شد مأمورشد غولی‌راکه دشمن پادشاه‌بود بکشد . بعد ازکشتن غول در مراجعت برحال آندرومد آگاه می‌شودپس تنین رامی‌کشد و آندرومد را نجات داده به‌همسری خود درمی‌آورد .

اساطیر

برنیس ملکهٔ بطلمیوس پادشاه مصر بود و گیسوانی قشنگ و افشان داشت. بطلمیوس برای جنگ از مصر خارج شده بود . ملکه نذر کرد که اگر همسرش به‌سلامت باز گردد گیسوان خودرا به معبد زهره هدیه کند . وقتی که بطلمیوس به سلامت باز گشت برنیس به‌نذر خود وفا کرد اما در اولین شب گیسوان اورا از معبد ربودند . این واقعه موجب ناراحتی پادشاه و ملکه شد. منجم دربار مجموعه‌ای از ستارگان را که هنوز نامی بر آنها نهاده نشده بود گیسوان برنیس نامید و اظهار عقیده کرد که زئوس خدای خدایان گیسوان برنیس را به آسمان برده در میان ستارگان قرار داده است .

بقیهٔ صورتهای جنوبی فلکی

تلمبهٔ هوائی	Antila	۶ خرداد
توکان (نوعی مرغ برزیلی)	Tucuna	۶ دی
حربا (آفتاب‌پرست)	Chamaeleon	۱۶ خرداد
درنا	Grus	۱۰ آذر
زرافه	Camelopardalus	۵ فروردین
سپر	Scutum	۱۴ مهر
ساعت	Horologium	۲۶ بهمن
سوسمار	Lacerta	۱۰ آذر
شبکیه	Reticulum	۱ اسفند
شراع	Vela	۲۶ اردیبهشت
شصت درجه‌ای (نوعی ابزار نجومی)	Sextans	۶ خرداد
طاوس	Pavo	۲۴ مهر
قطب نما	Pyxis	۱۷ اردیبهشت
قلم حکاکی	Caelum	
کارگاه سنگتراشی	Sculptor	۱۱ دی
گونیا	Norma	۴ شهریور
ماهی پرنده	Volans	۳ اردیبهشت
مثلث جنوبی	Triongulum australe	۴ شهریور
مرغ بهشتی	Apus	۳۰ مرداد
مگس	Musca	۱۰ تیر
میز	Mensa	۳ فروردین
میکرسکپ	Microscopium	۲۰ آبان
هشت ضلعی	Octans	۲۰ آبان
هندو	Indus	۲۵ آبان
یوز	Lynx	۷ اردیبهشت



توضیح :

جدول مندرج در بالا از کتاب :

Etoiles . par : Herbert S . ZIM , PH.D

اقتباس شده و با توجه به‌اختلاف ساعت پاریس ـ تهران واینکه حرکت هر ثابته نسبت به‌نصف‌النهار هر محل در ۲۴ ساعت به مدت ۴ دقیقه تقدم دارد تاریخهای مربوط حساب شده است .

دترمینان

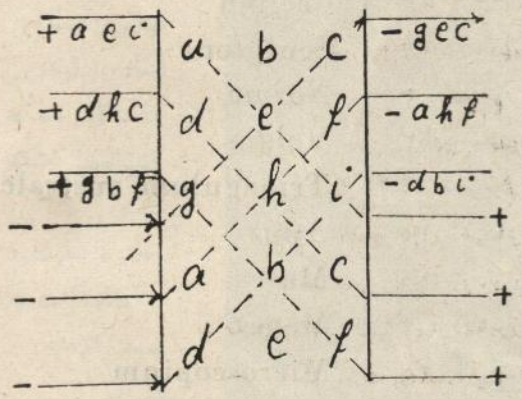
تنظیم از : سید محمدکاظم نائینی

با استفاده از منابع خارجی

دستور ساروس Sarus ـ برای تعیین جملات و بسط دترمینان رستهٔ سه به ترتیب زیرعمل می‌کنیم :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

دردترمینان مقابل دوسطر اول ودوم رازیر سطر سوم می‌نویسیم حاصل ضرب هر سه‌عددی که روی اقطار مربع و خطوطی که با قطرها



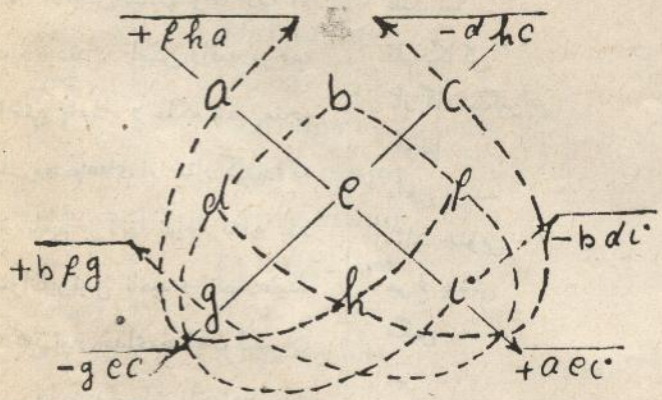
موازی است قرار دارند تشکیل می‌دهیم مجموع این حاصل ـ ضربها مقدار عددی دترمینان است علامت جملات که اعضای آن روی قطر درجهت فلش قرار دارند ↘ مثبت و علامت جملاتی که اعضای آن روی قطری قرار دارند که در جهت این فلش است ↙ منفی اختیار می‌شود .

دستور ساروس را می‌توان با تکرار ستون اول و دوم بعد از ستون سوم نیز بکار برد نتیجه یکی‌است .

در این حالت نیز خواهیم داشت :

$$\Delta = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi$$

در دترمینان رستهٔ سه به‌شکل زیر نیز می‌توان جملات و علامت آنها را تعیین کرد .



علامت حاصل ضرب اعدادی که روی فلش‌ها درجهت حرکت عقربه‌های ساعت قرار دارند مثبت و علامت حاصل ضرب اعدادی که روی فلشها برخلاف حرکت عقربه‌های ساعت قرار دارند منفی اختیار می‌شود .

مثال ـ مقدار دترمینان Δ را حساب کنید :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۷ \\ ۸ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$+ \searrow + \searrow + \searrow \swarrow - \swarrow - \swarrow -$$

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۷ & ۵ & ۲ \\ ۸ & ۱ & ۰ & ۸ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ۲\times۲\times۰ + ۳\times۷\times۸ + ۴\times۵\times۱ - ۳\times۵\times۰ - ۲\times۷\times۱ - ۴\times۲\times۸$$

$$\Delta = ۰ + ۱۶۸ + ۲۰ - ۰ - ۱۴ - ۶۴ =$$

$$= ۱۸۸ - ۷۸ = ۱۱۰$$

دنباله در صفحهٔ ۶۷

راهنمای ریاضیات متوسطه

دربارهٔ معادلات جبری

پرویز شهریاری

راه حل معادلات درجهٔ اول ودرجهٔ دوم بر همه روشن است و احتیاجی به گفتگو در بارهٔ آنها نیست، برای‌معادلات درجهٔ سوم ودرجهٔ چهارم‌هم راه حلهای کلی درجبر وجوددارد. منتهی این راه حلها اغلب منجر به عملیات مفصل می‌شود و برای رسیدن به جواب دقت زیادی‌لازم دارد. به همین مناسبت در عمل از حل کلی اینگونه معادلات صرف‌نظر و در مواردکلی به راه حلهای تقریبی قناعت می‌شود.

درجبر ثابت شده‌است که معادلات بالاتر ازدرجهٔ‌چهارم درحالت کلی نمی‌توانند به طریق جبری حل شوند و بنابراین کوشش در راه حل معادلات کامل درجهٔ پنجم و بالاتر بدون ثمر می‌ماند.

با همهٔ اینها گاهی. با استفاده از بعضی روشهای ساده می‌توان معادلاتی را که از درجات بالا هستند حل کرده و جوابهای تحقیقی آنها را بدست‌آورد وما در این مقاله به‌بعضی از این روشها که گمان می‌رود کمتر دربارهٔ آنها گفتگو شده است می‌پردازیم:

۱ـ حل معادلات به‌صورت:

$$(x+a)^4+(x+b)^4=c$$

این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$[(x+\frac{a+b}{2})+\frac{a-b}{2}]^4+[(x+\frac{a+b}{2})-\frac{a-b}{2}]^4=c$$

که اگر برای سهولت کار فرض کنیم:

$$x+\frac{a+b}{2}=t;\quad \frac{a-b}{2}=\alpha$$

معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$(t+\alpha)^4+(t-\alpha)^4=c$$

که پس از بازکردن پرانتزها و جمع جبری جملات متشابه به معادلهٔ دو مجذوری زیر می‌رسیم:

$$2t^4+12\alpha^2t^2+(2\alpha^4-c)=0 \qquad (1)$$

ازاین معادله مقادیر t سپس مقادیر x (حقیقی‌یاموهومی) بدست می‌آید.

توضیحـ اگر در معادلهٔ (۱) فرض کنیم $t^2=y$ معادله‌ای درجهٔ دوم نسبت به y بدست می‌آید:

$$2y^2-12\alpha^2.y+(2\alpha^4-c)=0$$

و این به معنای آنست که توانسته‌ایم معادلهٔ درجهٔ چهارم مفروض را به معادله‌ای درجهٔدوم تبدیل کنیم (یعنی درجهٔمعادله را نصف کنیم). می‌توان به این حکم کلیت بخشید؛ بدین معنی که اگر همین روش را برای معادله‌ای به صورت:

$$(x+a)^{2n}+(x+b)^{2n}=c$$

بکار بریم به معادله‌ای از درجهٔ n خواهیم رسید.

مثال ۱ ـ مطلوبست حل معادلهٔ:

$$(x+2)^4+(x+5)^4=17$$

حلـ فرض می‌کنیم: $x+\frac{7}{2}=t$، دراین‌صورت به ترتیب خواهیم داشت:

$$(t-\frac{3}{2})^4+(t+\frac{3}{2})^4=17;$$

$$2t^4+27t^2-\frac{55}{8}=0;$$

$$t^2=\frac{-27\pm\sqrt{27^2+55}}{4}=\frac{-27\pm28}{4};$$

$$t^2=\frac{1}{4}\Longrightarrow t=\pm\frac{1}{2}$$

$t^2 = -\frac{55}{4}$ (ریشه‌های موهومی)

$$t=\frac{1}{2} \Longrightarrow x+\frac{7}{2}=\frac{1}{2} \Longrightarrow x=-3$$

$$t=-\frac{1}{2} \Longrightarrow x+\frac{7}{2}=-\frac{1}{2} \Longrightarrow x=-4$$

مثال ۲ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر:

$$(x+1)^6+(x+5)^6=730$$

حل ـ $x+3=t$ فرض می‌کنیم، می‌شود:

$$(t-2)^6+(t+2)^6=730;$$

که پس از بازکردن پرانتزها وخلاصه کردن خواهیم‌داشت:

$$t^6+60t^4+240t^2-301=0$$

و با فرض $t^2=y$ بدست می‌آید:

$$y^3+60y^2+240y-301=0$$

مجموع ضرایب این معادله برابر صفر است و بنابراین عبارت سمت چپ تساوی بر $y-1$ قابل قسمت است با تجزیهٔ عبارت سمت چپ تساوی خواهیم داشت:

$$(y-1)(y^2+61y+301)=0$$

و از آنجا:

$$y-1=0 \Longrightarrow y=1$$

$$y^2+61y+301=0 \Longrightarrow y=\frac{-61\pm\sqrt{2517}}{2}<0$$

$$y=1 \Longrightarrow t^2=1 \Longrightarrow t=\pm 1$$

$$t=1 \Longrightarrow x+3=1 \Longrightarrow x_1=-2$$

$$t=-1 \Longrightarrow x+3=-1 \Longrightarrow x_2=-4$$

دو جواب دیگر y منفی است و بنابراین برای t و در نتیجه برای x ریشه های موهومی بدست می‌آید.

معادلهٔ درجهٔ ششم دارای دو ریشهٔ حقیقی و چهارریشهٔ موهومی است.

۲ـ حل معادلات به صورت:

$$(1) \quad (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$$

این معادله رابه‌شرطی می‌توان حل کرد که از چهارعدد a ، b ، c و d مجموع دوعدد با مجموع دوعدد دیگر برابر باشد. مثلا اگر داشته باشیم: $a+b=c+d$، معادلهٔ(۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$[x^2+(a+b)x+ab][x^2+(c+d)x+cd]=m$$

که اگر فرض کنیم:

$$x^2+(a+b)x=x^2+(c+d)x=t$$

خواهیم داشت:

$$(t+ab)(t+cd)=m$$

و یا:

$$t^2+(ab+cd)t+(abcd-m)=0$$

که معادله‌ای درجهٔ دوم و قابل حل است.

مثال ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$(x^2+6x+8)(x^2-8x+15)=72$$

حل ابتدا هریك در دوپرانتز سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم:

$$(x+2)(x+4)(x-3)(x-5)=72$$

و چون داریم: $2-3=4-5$

معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^2-x-6)(x^2-x-20)=72$$

و اگر $x^2-x=t$ فرض کنیم به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$t^2-26t+48=0 \Longrightarrow t=2 \text{ و } 24$$

$$t=2 \Longrightarrow x^2-x=2 \Longrightarrow x_1=-1;\ x_2=2$$

$$t=24 \Longrightarrow x^2-x=24$$

$$\Longrightarrow x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{97}}{2}$$

حالت خاص ـ وقتی‌که درمعادلهٔ (۱) مقادیر a، b، c و d به تصاعد حسابی باشند، علاوه برروش بالا از قضیهٔ زیر هم می‌توان استفاده کرد:

قضیه ـ اگر به حاصل‌ضرب چهارجملهٔ متوالی از یك تصاعد حسابی توان چهارم قدرنسبت را اضافه کنیم، یك‌مجذور کامل بدست می‌آید

اثبات ـ چهار جملهٔ متوالی تصاعد حسابی‌را باقدرنسبت d به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a;\ a+d;\ a+2d;\ a+3d$$

حاصل‌ضرب این چهارجمله را می‌توان چنین نوشت:

$$P=a(a+d)(a+2d(a+3d)$$
$$=[a(a+3d)][(a+d)(a+2d)]$$
$$=(a^2+3ad)[(a^2+3ad)+2d^2]$$
$$=(a^2+3ad)^2+2d^2(a^2+3ad)$$

وواضح است‌که اگر به‌این حاصل‌ضرب d^4 اضافه، نتیجه یك مجذور کامل می‌شود:

$$(a^2+3ad)^2+2d^2(a^2+3ad)+d^4$$
$$=[(a^2+3ad)+d^2]^2$$

مثال- مطلوبست حل و بحث معادلهٔ زیر:

$$(x+b)(x+a+b)(x+2a+b)\times$$
$$\times(x+3a+b)=k$$

حل- برای سهولت کار $x+b=t$ فرض می‌کنیم، می‌شود:

$$t(t+a)(t+2a)(t+3a)=k$$

اگر به طرفین تساوی a^4 را اضافه کنیم بدست‌می‌آید:

$$(t^2+3at+a^2)^2=k+a^4$$

و یا:

$$t^2+3at+a^2=\pm\sqrt{k+a^4}$$

به این ترتیب معادلهٔ درجهٔ چهارم به دومعادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود

$$x=-b+\frac{-3a\pm\sqrt{5a^2\mp\sqrt{k+a^4}}}{2}$$

بحث: اگر $k+a^4<0$ یعنی $k<-a^4$ باشدمعادله چهار ریشهٔ موهومی دارد.

اگر $k=-a^4$ باشد، معادله دو ریشهٔ مضاعف زیررا خواهد داشت:

$$x=-b+a\times\frac{-3\pm\sqrt{a}}{2}$$

اگر $k>-a^4$ باشد: اولا $5a^2+\sqrt{k+a^4}$ همیشه مثبت و بنابراین دو جواب حقیقی وجود دارد. ثانیاً عبارت $5a^2-\sqrt{k+a^4}$ در حالت $k=\frac{9}{16}a^4$ مساوی صفر و به‌ازاء $k>\frac{9}{16}a^4$ مثبت‌است. بنابراین‌درحالت‌اول‌معادله یك‌ریشهٔ مضاعف درحالت دوم دوریشهٔ حقیقی دیگر هم دارد.

خلاصهٔ بحث در جدول زیر دیده می شود:

چهار ریشهٔ موهومی	$k<-a^4$
دوریشهٔ حقیقی‌ساده و دو ریشهٔ موهومی	$-a^4<k<\frac{9}{16}a^4$
دو ریشهٔ مضاعف	$k=-a^4$
یك ریشهٔ مضاعف و دو ریشهٔ ساد،	$k=\frac{9}{16}a^4$
چهارریشهٔ حقیقی ساده	$k>\frac{9}{16}a^4$

توضیح- در معادلهٔ (۱)، با توجه به شرط معادله، توانستیم از معادلهٔ درجهٔ چهارم به معادلهٔ درجهٔ دوم برسیم. می‌توان مسئله را کلی‌تر طرح کرد به این ترتیب:

معادلهٔ زیررا در نظرمی گیریم:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\cdots=m \quad (2)$$

فرض می‌کنیم درسمت چپ معادلهٔ (۲) $2n$ پرانتزوجود داشته باشد و بین مقادیرثابت این پرانتزها روابط زیربرقرار باشد:

$$a+b=c+d=\cdots$$

دراین صورت اگر طبق روش قبل عمل کنیم، به‌معادله‌ای ازدرجهٔ n خواهیم رسیدکه به شرط قابل حل‌بودن، جوابهای معادلهٔ اصلی هم بدست می‌آید.

مثال- معادلهٔ زیرراحل کنید:

$$x(x-4)(x-2)(x-1)^2(x+2)+66=0$$

حل- معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$[x(x-2)]\times[(x-4)(x+2)]\times(x-1)^2+$$
$$+66=0$$

و یا:

$$(x^2-2x)(x^2-2x-8)(x^2-2x+1)+66=0$$

که با فرض $x^2-2x=t$ خواهیم داشت:

$$t(t-8)(t+1)+66=0$$
$$\Longrightarrow t^3-7t^2-8t+66=0$$

این معادله به صورت زیر قابل تجزیه است:

$$(t+3)(t^2-10t+22)=0$$
$$t+3=0 \Longrightarrow t_1=-3$$
$$t^2-10t+22=0 \Longrightarrow t_{2,3}=5\pm\sqrt{3}$$

و ازآنجا مقادیر x بدست می‌آید:

$t_1=-3 \Longrightarrow x^2-2x+3=0$ ریشه‌های موهومی

$$t_2=5+\sqrt{3} \Longrightarrow x^2-2x-(5+\sqrt{3})=0$$
$$\Longrightarrow x=1\pm\sqrt{6+\sqrt{3}}$$
$$t_3=5-\sqrt{3} \Longrightarrow x^2-2x-(5-\sqrt{3})=0$$
$$\Longrightarrow x=1\pm\sqrt{6-\sqrt{3}}$$

۳- حل معادلات به‌صورت:

$$(ax+b)^4+(cx+d)^4=(\alpha x+\beta)^4$$

با شرایط: $a+c=\alpha$ و $b+d=\beta$

معادله را به ترتیب به صورتهای زیر می‌نویسیم:

$$[(ax+b)^2+(cx+d)^2]^2$$
$$-2(ax+b)^2(cx+d)^2=(\alpha x+\beta)^4$$

و سپس :

$$\left\{[(a+c)x+(b+d)]^2-2(ax+b)(cx+d)\right\}^2$$
$$-2(ax+b)^2(cx+d)^2=(\alpha x+\beta)^4$$

وبا توجه به‌شرایط $a+c=\alpha$ و $b+d=\beta$ خواهیم داشت :

$$(\alpha x+\beta)^4+4(ax+b)^2(cx+d)^2-$$
$$-4(ax+b)(cx+d)(\alpha x+\beta)^2-$$
$$-2(ax+b)^2(cx+d)^2=(\alpha x+\beta)^4$$

که پس از ساده‌کردن چنین می‌شود :

$$2(ax+b)(cx+d)[(ax+b)(cx+d)-$$
$$-2(\alpha x+\beta)^2]=0$$

که دیگر قابل حل است.

مثال ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$(2-x)^4+(2x-1)^4=(x+1)^4$$

حل ـ اگر با روش بالا عمل کنیم ، به ترتیب خواهیم داشت :

$$[(2-x)^2+(2x-1)^2]^2-2(2-x)^2(2x-1)^2$$
$$=(x+1)^4 ;$$

$$[(x+1)^2-2(2-x)(2x-1)]^2-$$
$$-2(2-x)^2(2x-1)^2=(x+1)^4 ;$$

$$2(2-x)^2(2x-1)^2-4(2-x)(2x-1)\times$$
$$\times(x+1)^2=0 ;$$

$$2(2-x)(2x-1)(4x^2-x+4)=0 ;$$

$$x_1=2 \quad ; \quad x_2=\frac{1}{2}$$

دو ریشهٔ دیگر موهومی است .

۴ـ تبدیل نقش مجهول و پارامتر

به‌معادلهٔ زیر توجه‌کنید :

$$2x^4+x^3-(3a+2)x^2+2x+a^2-1=0$$

این معادله‌نسبت به x ازدرجهٔ چهارم است وبنا براین‌نمی‌توان از راه حلهای عادی برای حل آن استفاده کرد . ولی همین معادله نسبت به a از درجهٔ دوم است و اگر نقش مجهول و پارامتر را باهم‌عوض کنیم نسبت‌به a معادله‌ای درجهٔ دوم وقابل حل می‌شود :

$$a^2-3x^2\cdot a+(2x^4+x^3-2x^2+2x-1)=0$$

شرط اینکه از این راه بتوان بنتیجه رسید اینست که جوابهای a نسبت به x مقادیری گویا باشند . بنابراین قبل‌از همه مبین معادله را حساب می‌کنیم :

$$\Delta=9x^4-4(2x^4+x^3-2x^2+2x-1)=$$
$$=x^4-4x^3+8x^2-8x+4=(x^2-2x+2)^2$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$a=\frac{3x^2\pm(x^2-2x+2)}{2} ;$$

$$a_1=x^2+x-1 \quad ; \quad a_2=2x^2-x+1$$

به‌این ترتیب معادلهٔ درجهٔ چهارم مفروض به دو معادلهٔ درجهٔ دوم زیر منجر می‌شود :

$$x^2+x-(a+1)=0 \quad ; \quad 2x^2-x+(1-a)=0$$

وازآنجا جوابهای x بدست می‌آید :

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{4a+5}) ;$$

$$x_{3,4}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{4a-3}) ;$$

بحث : اگر $a>\frac{3}{4}$ باشد ، معادله چهار ریشهٔ حقیقی دارد .

اگر $-\frac{5}{4}<a<\frac{3}{4}$ باشد ، معادله دو ریشهٔ حقیقی ودو ریشهٔ موهومی دارد .

اگر $a<-\frac{5}{4}$ باشد ، چهار ریشهٔ معادلـه موهومی است .

در حالت خاص $a=\frac{3}{4}$ ، معادله یك ریشهٔ مضاعف و دو ریشهٔ سادهٔ حقیقی دارد .

وبالاخره درحالت $a=-\frac{5}{4}$ ، معادله یك ریشهٔ مضاعف حقیقی ودو ریشهٔ سادهٔ موهومی دارد .

مثال ۲ـ معادلهٔ زیررا حل کنید .

$$x^3-(3+\sqrt{3})x+3=0$$

حل ـ اگر بخواهیم این معادله را با روش مذکور حل کنیم، بهتر است $a=\sqrt{3}$ فرض کنیم :

$$x^3-(a^2+a)x+a^2=0$$

سپس معادله را نسبت به a منظم می‌کنیم:

$$(1-x)a^2-x\cdot a+x^3=0$$

ریشه‌های این معادله (نسبت به a) چنین‌اند:

$$a=\frac{x\pm(x-2x^2)}{2(1-x)}\Longrightarrow a_1=x\ ;\ a_2=\frac{x^2}{1-x}$$

که اگر به‌جای a مقدارش $\sqrt{3}$ را قراردهیم ، خواهیم داشت :

$$x=\sqrt{3}\ ;\ x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$$

و از آنجا :

$$x_1=\sqrt{3}\ ;\ x_{2,3}=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}$$

مثال ۳ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$(ax^2+bx+c)^2=x^2(x^2+bx+c)$$

حل ـ اگر فرض کنیم $bx+c=t$ خواهیم داشت :

$$(ax^2+t)^2=x^2(x^2+t)\Longrightarrow$$

$$t^2+x^2(2a-1)t+x^4(a^2-1)=0$$

معادله نسبت به t از درجهٔ دوم است ، جوابهای t چنین‌اند :

$$t=\frac{-x^2(2a-1)\pm x^2\sqrt{5-4a}}{2}$$

که اگر به‌جای t مقدارش را قرار دهیم به دو معادلهٔ درجهٔدوم زیر (نسبت به x) می‌رسیم :

$$(1-2a\pm\sqrt{5-4a})x^2-2bx-2c=0$$

۵ـ استفاده از بعضی روابط مثلثاتی

معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\sqrt{3}\qquad(1)$$

ضرایب مجهول درکسر سمت‌چپ تساوی همان ضرایب بسط $tg3\alpha$ است‌وبنابراین اگر $x=tg\alpha$ فرض کنیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}=\sqrt{3}\Longrightarrow tg3\alpha=tg\frac{\pi}{3}\ ;$$

$$3\alpha=k\pi+\frac{\pi}{3}\Longrightarrow\alpha=\frac{1}{3}k\pi+\frac{\pi}{9}$$

وبنا براین :

$$x=tg(\frac{1}{3}k\pi+\frac{\pi}{9})$$

معادلهٔ (۱) ، معادله هـای درجهٔ سوم است و بنابراین حداکثرسه‌جواب حقیقی دارد؛

$$k=0\Longrightarrow x_1=tg20^\circ$$

$$k=1\Longrightarrow x_2=tg80^\circ$$

$$k=-1\Longrightarrow x_3=-tg40^\circ$$

وبه این ترتیب جوابهای معادلهٔ درجهٔ سوم بدست آمد.

توضیح ـ اگر معادلهٔ درجهٔ سوم (۱) را منظم کنیم ، می‌شود .

$$x^3-3\sqrt{3}x^2-3x+\sqrt{3}=0$$

که با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها درمعادلهٔ درجهٔ سوم ، روابط زیر بدست می‌آید :

$$tg20^\circ-tg40^\circ+tg80^\circ=3\sqrt{3}$$

$$tg20^\circ tg40^\circ+tg40^\circ tg80^\circ-tg20^\circ tg80^\circ=3$$

$$tg20^\circ tg40^\circ tg80^\circ=\sqrt{3}$$

مثال ۴ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر:

$$32x^5-40x^3+10x=1$$

حل ـ بافرض $x=cos\alpha$ خواهیم داشت :

$$2(16cos^5\alpha-20cos^3\alpha+5cos\alpha)=1\Longrightarrow 2cos5\alpha=1\ ;$$

$$cos5\alpha=cos\frac{\pi}{3}\Longrightarrow\alpha=\frac{2}{5}k\pi\pm\frac{\pi}{15}$$

واز آنجا :

$$x=cos(\frac{2}{5}k\pi\pm\frac{\pi}{15})$$

که اگر مقادیر مختلف k را درنظربگیریم ، پنج‌جواب برای x بدست می‌آید :

$$k=0\Longrightarrow x_1=cos12^\circ$$

$$k=1\Longrightarrow\begin{cases}x_2=cos84^\circ=sin6^\circ\\ x_3=cos60=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$k=2\Longrightarrow\begin{cases}x_4=cos156^\circ=-cos24^\circ\\ x_5=cos132^\circ=-cos48^\circ\end{cases}$$

البته در اینجاباتوجه به‌معلوم بودن خطوط مثلثاتی قوس ۳۰ درجه و $sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ می‌توان $cos12^\circ$ و بقیه جوابها را به‌صورت جبری درآورد .

همچنین شبیه مثال ۱ می‌توان با استفاده از روابط بین

ریشه‌ها و ضرایب در یك معادلهٔ درجهٔ ۵، پنج رابطهٔ مثلثاتی نتیجه گرفت.

۶- جستجوی ریشه‌های گویا

قبلا چند قضیه را یادآوری می‌کنیم:

۱) روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادلهٔ درجهٔ n:

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l=0$$

اگر n ریشهٔ این‌معادله را(حقیقی یا موهومی) x_1، x_2، x_3، ... و x_n فرض کنیم خواهیم داشت:

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l \equiv$$
$$\equiv a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)$$

از این اتحاد روابط زیر بدست می‌آید:

$$\Sigma x_1=x_1+x_2+\dots+x_n=-\frac{b}{a}$$

$$\Sigma(x_1x_2)=x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n=\frac{c}{a}$$

$$\Sigma(x_1x_2x_3)=-\frac{d}{a}$$

$$\Sigma(x_1x_2x_3x_4)=\frac{e}{a}$$

.....

$$x_1x_2x_3\dots x_n=(-1)^n\frac{l}{a}$$

۲) قضیه: اگر درمعادله‌ای ضریب بزرگترین درجه مساوی واحد باشد، معادله دارای ریشه‌ای به‌صورت $\frac{p}{q}$ نیست (p و q نسبت به‌هم اولند).

اثبات ـ معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$$x^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l=0 \quad (\ )$$

(ضرایب اعدادی صحیح‌اند).

اگر این معادله ریشه‌ای به صورت $\frac{p}{q}$ داشته باشد، پس از قرار دادن این مقدار به‌جای x بدست می‌آید:

$$p^n=-q(bp^{n-1}+cqp^{n-2}+\dots+kq^{n-2}p+lq^{n-1})$$

طرف دوم تساوی مضربی است از q و بنابراین باید p^n ودر نتیجه p هم مضربی از q باشد که با توجه به فرض (p و q نسبت به‌هم اولند) غیرممکن است.

نتیجه ـ ریشهٔ گویای معادلهٔ (۱) (اگر چنین ریشه‌ای وجود داشته باشند) مقسوم علیهی (مثبت یامنفی) از مقدارثابت l خواهد بود (چون قدر مطلق حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابراست باقدر مطلق l).

مثال ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$x^4+5x^3-2x^2 \quad 9x+5=0$$

حل ـ حاصل‌ضرب‌ریشه‌ها در این معادله برابر است با ۵ و بنابراین ریشه‌های احتمالی گویای این معادله (که حتماً صحیح‌اند) جزء مقسوم‌علیه‌های مثبت یا منفی ۵ هستند. این مقسوم‌علیه‌ها عبارتند از ۱± و ۵± و به‌سادگی دیده‌می‌شود که ۵ − و ۱ + دراین معادله صدق می‌کنند. باتوجه به این اطلاع می‌توان عبارت درجهٔ چهارم سمت‌چپ تساوی‌را تجزیه کرد:

$$(x-1)(x+5)(x^2+x-1)=0$$

واز آنجا جوابهای معادله بدست می‌آید:

$$x_1=1\ ;\ x_2=-5\ ;\ x_{3,4}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$$

***

درحالتی که ضریب بزرگترین درجهٔ معادله مساوی‌واحد نباشد ($a\neq1$) به‌شرط صحیح بودن همهٔ ضرایب با توجه به اینکه قدر مطلق حاصل‌ضرب ریشه‌ها مساوی $\left|\frac{l}{a}\right|$ است، اگر معادلهٔ ریشهٔ گویائی داشته باشد، این ریشه به صورت کسری است‌که صورت آن مقسوم‌علیهی از l ومخرج آن مقسوم‌علیهی از a است.

مثال ـ مطلوبست حل‌معادلهٔ زیر:

$$2x^4+3x^3-10x^2-2x+3=0$$

حل ـ قدرمطلق حاصل‌ضرب ریشه‌ها دراین‌معادله‌مساوی $\frac{3}{2}$ است و بنابراین ریشه‌های گویای معادله (اگر چنین ریشه‌هائی وجود داشته باشند) یکی از اعداد زیرهستند:

$$\pm1\ ;\ \pm3\ ,\ \pm\frac{1}{2}\ ;\ \pm\frac{3}{2}$$

وبه سادگی روشن می‌شود که اعداد $\frac{1}{2}$ و ۳− در

معادله صدق می‌کنند ومعادله به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$(2x-1)(x+3)(x^2-x-1)=0 \;;$$

$$x_1=\frac{1}{2} \;;\; x_2=-3 \;;\; x_{3,4}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$$

۷. راه حلهائی برای معادلات درجهٔ سوم ودرجهٔ چهارم

قبلا متذکر می‌شویم که اگر درمعادلهٔ درجهٔ n :

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l=0$$

تغییر مجهول $x=X-\frac{b}{na}$ بدهیم به‌معادلهٔ درجهٔ n جدیدی می‌رسیم که فاقد توان $(n-1)$ است .

به‌این ترتیب هرمعادلهٔ کامل درجهٔ سوم را می‌توان به صورت زیر درآورد :

$$x^3+px+q=0 \qquad (1)$$

وهمچنین هرمعادلهٔ درجهٔ چهارم کامل را به‌صورت‌زیر:

$$x^4+px^2+qx+r=0 \qquad (2)$$

اکنون به‌حل معادلهٔ $x^3+px+q=0$ می‌پردازیم:

اتحاد زیررا درنظر می‌گیریم:

$$x^3+px+q\equiv\alpha(x+a)^3+\beta(x+b)^3 \qquad (I)$$

اگر دراین‌اتحاد بتوانیم ضرایب نامعلوم α ، β ، a و b را معین کنیم ، حل معادله به‌انجام می‌رسد. با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مساوی‌دردوطرف به‌دستگاه زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ a\alpha+b\beta=0\\ a^2\alpha+b^2\beta=\frac{p}{3}\\ a^3\alpha+b^3\beta=q\end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه بدست می‌آید : $\alpha=1-\beta$

که اگر در ۳ معادلهٔ بعدی قراردهیم می‌شود:

$$\left|\begin{array}{l}\beta(a-b)=a\\ \beta(a^2-b^2)=a^2-\frac{p}{3}\\ \beta(a^3-b^3)=a^3-q\end{array}\right. \qquad (II)$$

به‌ترتیب معادلات دوم وسوم این دستگاه را برمعادلهٔ اول تقسیم می‌کنیم ، می‌شود :

$$\begin{cases}a+b=\frac{3a^2-p}{3a}\\ a^2+ab+b^2=\frac{a^3-q}{a}\end{cases}$$

ویا پس از ساده‌کردن :

$$\begin{cases}ab=-\frac{p}{3}\\ ab(a+b)=-q\end{cases}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases}a\cdot b=-\frac{p}{3}\\ a+b=\frac{3q}{p}\end{cases} \qquad (III)$$

از این دستگاه مقادیر a و b سپس باکمك معادلهٔ اول دستگاه(II) مقدار β بدست‌می‌آید، α هم‌ازرابطهٔ $\alpha=1-\beta$ محاسبه می‌شود .

توضیح ـ روشن است‌که اتحاد (I) وقتی برای‌مقادیر حقیقی برقرار است‌که معادلهٔ (۱) تنها یك ریشهٔ حقیقی داشته باشد ، زیرا معادلهٔ :

$$\alpha(x+a)^3+\beta(x+b)^3=0$$

یك ریشهٔ حقیقی بیشتر ندارد . از طرف دیگر برای حقیقی بودن مقادیر a و b ، باید ریشه‌های دستگاه III ، یعنی‌ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر حقیقی باشند :

$$3pt^2-9qt-p^2=0$$

مبین این معادله چنین است :

$$\Delta=81q^2+12p^3=3(4p^3+27q^2)$$

بنابراین شرط اینکه معادلهٔ (۱) تنها یك ریشهٔ حقیقی داشته باشد، اینست که $4p^3+27q^2>0$ باشد .

عین همین روش را برای معادلهٔ (۲) هم می‌توان بکار برد وضرایب نامعلوم را در اتحاد زیر بدست آورد:

$$x^4+px^2+qx+r=\alpha(x+a)^4+\beta(x+b)^4$$

سپس معادله را حل کرد .

ولی باید توجه داشت که اگر چه این روش برای حل معادلات درجهٔ سوم و چهارم کلی بنظر می‌رسد ، درعمل منجر به‌محاسبات طولانی و مفصل می‌شود و به ندرت می‌توان از آن استفاده کرد .

مثال ۱ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$x^3+6x^2+15x+14=0$$

حل- ابتدا با تبدیل $x = X - 2$ معادله را به‌صورت زیر درمی‌آوریم:

$$x^3 + 3x + 8 = 0$$

اتحاد زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$x^3 + 3x + 8 \equiv \alpha(x+a)^3 + \beta(x+b)^3$$

دستگاه زیر بدست می‌آید،

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ a\alpha + b\beta = 0 \\ a^2\alpha + b^2\beta = 1 \\ a^3\alpha + b^3\beta = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ \beta(a-b) = +a \\ \beta(a^2 - b^2) = a^2 - 1 \\ \beta(a^3 - b^3) = a^3 - 8 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b = \dfrac{a^2 - 1}{a} \\ a^2 + ab + b^2 = \dfrac{a^3 - 8}{a} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ab = -1 \\ a + b = 8 \end{cases}$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$a = 4 + \sqrt{17} \; ; \quad b = 4 - \sqrt{17}$$

سپس

$$\alpha = \frac{17 - 4\sqrt{17}}{34} \; ; \quad \beta = \frac{17 + 4\sqrt{17}}{34}$$

حقیقی بودن مقادیر a، b و α، β به‌معنای اینست که معادلهٔ درجهٔ سوم مفروض تنها یك ریشهٔ حقیقی دارد.

اکنون برای بدست‌آوردن این ریشهٔ حقیقی معادلهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\alpha(x+a)^3 + \beta(x+b)^3 = 0$$

که از آنجا مقدار حقیقی x بدست می‌آید:

$$x = -\frac{a\sqrt[3]{\alpha} + b\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}} \; ;$$

$$x = X - 2 = -\left(2 + \frac{a\sqrt[3]{\alpha} + b\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}}\right)$$

۸- استفاده از وجود رابطه‌ای بین بعضی از ریشه‌ها

مطلب را باذکر یك مثال روشن می‌کنیم:

مسئله- m را چنان پیدا کنید که مجموع دوریشه از معادلهٔ:

$$x^4 - 8x^3 + mx^2 + 128x + 165 = 0$$

مساوی ۶ باشد و سپس معادله را حل کنید:

حل- از روابط بین ریشه‌ها وضرایب استفاده‌می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

و چون طبق‌فرض داریم $x_1 + x_2 = 6$، بدست‌می‌آید:

$$x_3 + x_4 = 2$$

رابطهٔ حاصل ضربهای دو به دوی ریشه ها را می‌نویسیم

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = m$$

و یا:

$$x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = m$$

و یا:

$$x_1x_2 + x_3x_4 = m - 12 \qquad (1)$$

ورابطهٔ حاصل‌ضربهای سه‌به‌سه ریشه‌ها:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -128$$

و یا:

$$x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -128$$

ویا:

$$2x_1x_2 + 6x_3x_4 = -128$$

$$x_1x_2 + 3x_3x_4 = -64 \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_3x_4 = m - 12 \\ x_1x_2 + 3x_3x_4 = -64 \end{cases}$$

و ازآنجا:

$$x_1x_2 = \frac{3m + 28}{2} \; ; \quad x_3x_4 = -\frac{m + 52}{2}$$

حاصل‌ضرب چهارریشه را می‌نویسیم:

$$x_1x_2x_3x_4 = 165 \qquad (3)$$

به جای x_1x_2 و x_3x_4 مقادیرشان را قرار می‌دهیم، می‌شود :

$$-\frac{m + 52}{2} \times \frac{3m + 28}{2} = 165$$

ویا:

$$3m^2 + 184m + 2116 = 0$$

$$m_1 = -46 \; ; \quad m_2 = -\frac{46}{3}$$

ابتدا $m = -46$ را در نظر می‌گیریم، رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$\begin{cases} (x_1x_2) + (x_3x_4) = -58 \\ (x_1x_2)(x_3x_4) = 165 \end{cases}$$

از اینجا مقادیر x_1x_2 و x_3x_4 بدست می‌آید ، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$t^2 + 58t + 165 = 0$$

جوابهای t مساوی ۵۵ − و ۳ − می‌شود که با توجه به رابطهٔ(۲) خواهیم‌داشت:

$$x_1x_2=-55\ ;\quad x_3x_4=-3$$

وبالاخره باکمك دستگاههای زیرمقادیر جوابها بدست می‌آید:

$$\begin{cases}x_1+x_2=6\\ x_1x_2=-55\end{cases};\quad \begin{cases}x_3+x_4=2\\ x_3x_4=-3\end{cases}$$

جواب:

$$x_1=-5\ ,\ x_2=11\ ,\ x_3=-1 \text{ و } x_4=3$$

۹- نکته‌ای دربارهٔ حل بعضی از معادلات گنگ

قبل از اینکه به‌گویاکردن یك معادلهٔ گنگ بپردازیم، همیشه بهتر است احتمال تجزیهٔ عبارت را در نظر بگیریم، برای این منظور ابتدا جملات گویا و یا جملات گنگ را (هرکدام که ساده‌تر است) تجزیه می‌کنیم و ریشه‌های آنرا در قسمت دیگر آزمایش می‌کنیم، اگر ریشهٔ مشترك داشته باشند، به معنای اینست که معادله قابل تجزیه است.

مثال- معادلهٔ زیررا حل کنید،

$$x^2-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}=2$$

حل- معادله را چنین می‌نویسیم:

$$(x^2-3x-2)+$$
$$+(x-1)(x+1)\sqrt{(x-2)(x+2)}=0$$

اعداد ۱ − و ۲ + در هردوعبارت (عبارت گویا وعبارت گنگ) صدق می‌کنند، بنابراین می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$(x+1)^2(x-2)+$$
$$+(x-1)(x+1)\sqrt{x-2)(x+2)}=0$$

ویا:

$$(x+1)\sqrt{x-2}\,[(x+1)\sqrt{x-2}+$$
$$+(x-1)\sqrt{x+2}\,]=0$$

و ریشه‌های معادله بدست می‌آید:

$$x_1=-1 \text{ و } x_2=2$$

(مقدار داخل کروشه مخالف صفر است).

این بحث را در شمارهٔ دیگری از مجله دنبال می‌کنیم

خواص جالب منحنی ((سیکلوئید))

نوشتهٔ: Martin Gardner درمجلهٔ: Scientific American

ترجمهٔ: حسن کریم‌زاده رغبتی دانشجوی دانشگاه صنعتی آریامهر

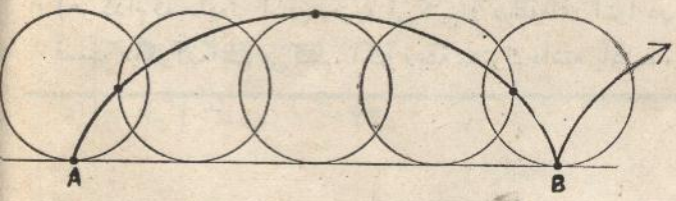
آیا در گردش چرخهای یك اتومبیل، نقاط بالایی سریعتر از نقاط پائینی حرکت می‌کنند؟ این بحث خودمانی به مسئلهٔ قدیمی زیر شباهت دارد: مردی دور تنهٔ یك درخت می‌گردد وسعی دارد سنجابی را که آن طرف تنه واقع است ببیند. اما سنجاب هم به‌دور تنه می‌گردد بطوری که همواره با شخص مزبور متقابل بوده از نظر وی پنهان می‌ماند. در این صورت وقتی که مرد به دور درخت گردیده است آیا به‌دور سنجاب‌هم چرخیده است یا نه؟

ویلیام جیمز این مسئلهٔ مهم متافیزیکی را در فصل دوم کتاب خود «پراگماتیسم» مورد بحث قرار داده ونتیجه گرفته است که قبلا باید معلوم کرد منظور از «به دور» چه می‌باشد. دربارهٔ مسئلهٔ چرخهای اتومبیل هم قبلا باید دربارهٔ معانی دقیق کلمات بکار برده شده توافق حاصل کنیم. منظور ما از نقاط بالا وپائین چرخ، نقاطی هستند که در هرلحظه معین دربالا و پائین چرخ قرار دارند. مبنای مقایسه برای سریعتر حرکت کردن آن نقاط هم، سرعت خطی آن نقاط نسبت به زمین می‌باشد. با این توضیحات باکمال تعجب باید گفت که در گردش چرخ اتومبیل برروی زمین، نقطه‌های بالایی چرخ سریعتر از نقاط پائینی آن حرکت می‌کنند.

صحت این ادعا را می‌توان با آزمایش ساده‌ای محقق کرد؛ فنجانی انتخاب کنید و ته آنرا با کاغذ سفید بپوشانید. بامداد سیاه پررنگ تعدادی از قطرهای این کاغذ را، همانند پره های یك‌چرخ، رسم کنید. فنجان را به پهلو خوابانیده و آن را در حوزهٔ دید خود بغلتانید. حرکت فنجان‌را باچشمان خود تعقیب‌نکنید بلکه به نقطهٔ دوردستی خیره شوید بطوری که چشمان‌شما هنگام غلتیدن فنجان حرکت‌نکند. متوجه خواهید شد که پره های سیاه فقط در قسمت پائین قابل رؤیت می‌باشند قسمت بالا به‌رنگ خاکستری درهم وبرهم مشاهده می‌شود. علت این امر آنست که درقسمت بالا پره‌ها با سرعت بیشتری ازبرابر دیدگان‌شما می‌گذرند. نقاشان‌هم برای‌اینکه درشکه یاکالسکه‌ای را درحال حرکت‌نشان دهند ازهمین پدیدهٔ آشنا استفاده‌می‌کنند یعنی فقط پره‌های قسمت پائین هر چرخ را بطور وضوح رسم می‌کنند:

دایره‌ای درنظر می‌گیریم که برخطی تکیه داشته روی‌آن بدون لغزش بغلتد.

درشکل زیر اوضاع دایره پس‌از هرربع دور نشان‌داده شده و منحنی مسیر حرکت یك نقطه ازآن رسم شده است. این منحنی **سیکلوئید** نامیده می‌شود.



فرض می‌کنیم که دایره باسرعت ثابتی‌بغلتد. به سادگی مشاهده می‌شود که نقطهٔ مفروض برای یك لحظه درنقطهٔ A روی زمین بی‌حرکت می‌ماند سپس به تدریج به سرعتش‌افزوده می‌گردد تا اینکه در نقطهٔ ماکسیمم قوس سیکلوئید سرعت آن ماکسیمم می‌گردد و آنگاه باشتاب منفی‌به‌حرکت ادامه می‌دهد تا اینکه دوباره در نقطهٔ B به زمین برسد. اگر دایره به‌غلتیدن ادامه دهد نقطهٔ مفروض یك سری قوس تولید می‌کند و در هریك ازگوشه ها سرعت آن به صفر می‌رسد. شتاب نقطه برروی منحنی با شتاب حرکت نوسانی ساده مطابقت دارد. یعنی منحنی‌نمایش تغییرات شتاب نقطه برحسب زمان یك‌منحنی سینوسی است. درچرخهایی مانند چرخهای قطار که دارای‌لبهٔ بیرون‌آمده می‌باشند، نقاطی که برروی این لبه واقعند قوسهای حلقه مانندی در زیر سطح ریل ایجاد می‌کنند و در این هنگام در حقیقت به‌سمت عقب حرکت می‌کنند.

درحالت عمومی وقتی که یك منحنی متکی برمنحنی‌دیگر بدون لغزش بغلتد هر نقطه ازآن منحنی بوجود می‌آورد که **رولت** نامیده می‌شود.

ساده‌ترین رولتها سیکلوئید است.

منحنی سیکلوئید به‌خاطر خواص زیبا وجالبش وهمچنین به خاطر منازعات تاریخی بسیار زیادی که بر سر آن بین ریاضیدانان والامقام در گرفته است بـه نام **«هلن هندسه»** مشهور می‌باشد.

هیچکس نمی‌داند چه‌کسی برای اولین مرتبه به ارزش مطالعهٔ خواص سیکلوئید پی برد. آنچه معلوم است قبل ازسال ۱۵۰۰ میلادی ذکری ازآن به‌میان نیامده است. اولین مقالهٔ مهم‌دربارهٔاین منحنی بوسیلهٔ فیزیکدان ایتالیائی **اوانگلیستا تریچلی** یکی ازشاگردان **گالیله** به رشتهٔ تحریـر درآمد. چهارده سال بعد **بلز پاسکال** به هنگامی‌که ریاضیات را بـه خاطر زندگی وتفکر مذهبی ترك کرده بود به دندان‌دردشدیدی مبتلا شد. برای اینکه درد دندان را فراموش‌کند به تفکر در بارهٔ سیکلوئید مشغول شد و بدین ترتیب درددندان او از بین رفت. وی این‌موضوع را به‌فال نیك گرفت ونتیجه‌گیری کرد که خداوند با افکار او مخالفت ندارد. بعدازآن، هشت روزدیگر را با تعمق زیاد به تحقیق دربارهٔ این منحنی پرداخت. نتایج قابل‌ملاحظه‌ای راکه بدست‌آوردابتدا بوسیلهٔ یك‌سلسله انتقادات بر ریاضیدانان دیگر و بعد به صورت یك مقاله انتشار داد.

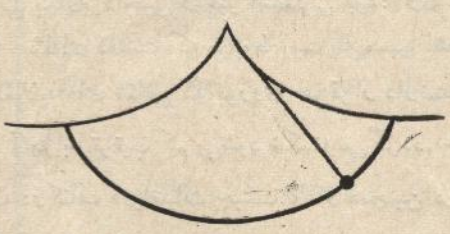
یکی از ساده‌ترین سؤالها دربارهٔ سیکلوئید این است‌که طول آن چقدر است؟

فرض‌کنید که دایرهٔ مولدآن به‌قطرواحد باشد بنابراین طول خط هادی AB برابرباعدد اصم π می‌باشد. انتظارمی‌رفت که طول منحنی نیز یك عدد اصم باشد اما **سر کریستف رن** آرشیتکت مشهور انگلیسی ظاهراً اولین‌کسی بود کـه در سال ۱۶۵۸ میلادی ثابت کرد که طول یك قوس سیکلوئیـد دقیقـاً چهاربرابر طول قطر دایرهٔ مولد آن می‌باشد.

مساحت سطح زیر منحنی سیکلوئید قبلا اندازه‌گرفته‌شده بود. **گالیله** حدس زده بود که این مساحت باید π برابـر مساحت دایرهٔ مولد آن باشد. وی این برآورد را بـه ایـن وسیله بدست آورده بودکه دایرهٔ هادی و یك‌قوس سیکلوئید را از مادهٔ نازکی بریده وزن آنها را با هم مقایسه کـرده بود. **تریچلی** ثابت‌کردکه مساحت زیرمنحنی دقیقاً سه‌برابرمساحت دایرهٔ مولد آن می‌باشد، آنچه‌که مایهٔ تعجب همـکاران وی گردید. اما درحقیقت این‌موضوع قبلابوسیلهٔریاضیدان‌فرانسوی **ژیل‌پرسون‌دوروبروال** محقق شده بود اما تریچلی از آن اطلائی نداشت. **دکارت** که مسئله را بسیارکوچك وبی‌اهمیت تلقی می‌کرد راه ساده‌تری برای تعیین این مساحت پیدا کرد وی موضوع رسم مماس بر منحنی سیکلوئیدرا مطرح کرد وبر سرآن‌بین وی و **روبروال** مشاجرهٔ تلخی درگرفت. امروزه همهٔ این مسائل در کلاسهای آنالیز سال اول دانشکده ها حل می‌شود (دراین‌کلاسها، این منحنی‌را «منحنی‌دانشجو»می‌نامند زیراکه‌تعیین‌پاسخهای سؤالهای مربوط به‌آن‌بسیارساده‌است)اما در قرن هفدهم، آنالیز هنوز مراحل اولیهٔ خودرا طی‌می‌کرد.

خواص مکانیکی سیکلوئـید همانـند خواص هندسی آن قابل ملاحظه است. در فیزیك دبیرستانی آموخته‌ایم‌که زمـان تناوب نوسانات پاندول به دامنهٔ نوسان بستگی نـدارد، ایـن قانون یك قانون تقریبی است، هنگامی‌که دامنهٔ نوسان زیاد باشد اختلافاتی جزئی مشاهده می‌شود. یك پاندول بـر روی چه مسیری باید حرکت کند تازمان‌تناوب نوسانات‌آن به‌دامنهٔ نوسان‌بستگی نداشته باشد. منحنی چنین مسیری **ایزوکرون** نامیده می‌شود و نخستین بارتوسط فیزیکدان هلندی **کریستیان هویگنس** کشف شد که وی این کشف خود را بسال ۱۶۷۳ اعلام نمود. اگر دوقوس سیکلوئید را وارونه‌کرده و پاندولی چنان بیاویزیم‌که بین این دو قوس نوسان‌کند، پاندول‌منحنی رسم خواهد کرد که گستردهٔ منحنی سیکلوئید نامیده می‌شود. معلوم می‌گردد که گستردهٔ سیکلوئید، سیکلوئید دیگری به همان اندازه می‌باشد. پاندول سیکلوئیدی دارای زمان تناوب ثابتی می‌باشد.

برای نوسانات کوچك، یك قوس دایره آنقدر شبیه بـه قسمت مرکزی یك سیکلوئید می‌باشد که پاندول دوار تقریبـا دارای زمان تناوب ثابتی است، اما اگر نوسانات، حتی به مقدار خیلی‌کم‌تغییر کنند خطاهای دورانی‌باهم جمع می‌گردند.



برای مثال، اگرپاندولی‌که ثانیه را می‌زند دارای قوس مدور نوسانی‌برابر با ۲ درجه باشد. ترقی این‌قوس به۳درجه باعث خواهدشد که زمان تناوب آن هرروز ۰/۶۶ ثانیه‌عقب بیفتد. هویگنس یك‌ساعت پاندولی ساخت (اولین‌ساعت‌پاندولی که ساخته شد) که پاندول‌آن قابل انحناء بود و بین دو قـوس سیکلوئیدی‌نوسان می‌کرد. بدبختانه اصطکاك برروی‌سیکلوئیدها باعث‌ایجاد خطای بیشتری‌شد. ساعتسازان ترجیح دادند ساعتی

بسازند که در آن پاندول دورانی نوسان ثابت، و در نتیجه بازمان تناوب ثابت، کار گذاشته شده باشد.

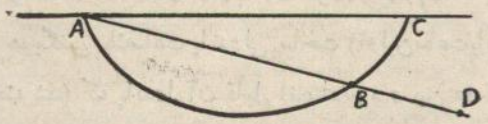
هویگنس همچنین کشف کرد که سیکلوئید **توتوکرون** یعنی دارای سرازیری یکنواخت می‌باشد. یك گلوله درنظر بگیرید که درون یك سیکلوئید و بدون اصطکاك بغلتد، درهر نقطه از منحنی که گلوله رها شود برای رسیدن آن به پائین منحنی زمان ثابتی لازم است، کاسه‌ای درنظر بگیرید که هر مقطع آن بوسیلهٔ صفحهٔ قائمی که از مرکز کاسه می‌گذرد یك سیکلوئید باشد. گلوله هائی که در ارتفاعات مختلف برروی کاسه رها شوند باهم به مرکز کاسه می‌رسند و هریك ازآنها با حرکت نوسانی‌ساده مانندیك پاندول ایزوکرن‌حرکت می‌کنند.

براکیستوکرون یا منحنی با سریعترین سرازیری

بیست سال بعد کشف گردید، دونقطهٔ A و B در نظربگیرید که B پائینتر از A قرار داشته اما با آن روی یك خط قائم واقع نباشد. برای اینکه گلوله‌ای، بدون اصطکاك، فاصلهٔ از A تا B را درکمترین مدت بپیماید مسیر آن چه منحنی باید باشد؟ این مسئله اولین بار درسال ۱۶۹۶ بوسیلهٔ **جوهان برنولی** فیزیکدان و ریاضیدان سویسی در مجلهٔ علمی مشهور آن روزگار «Acta Eruditorum» مطرح شد،

این مسئله ابتدا توسط برادر جوهان، **ژاکوب** و بعد توسط **لایبنیتز** و**نیوتن** و دیگران حل‌شد. نیوتن این‌مسئله و مسئلهٔ دیگری مربوط به‌آن‌را در۱۲ ساعت حل‌کرد (مسئلهٔ در ساعت ۴ بعداز ظهر به‌او رسید ووی آنرا تا ساعت ۴ بعداز نیمه شب حل‌کرده حل‌آنرا صبح ارسال داشت). خوانندگان حدس زده‌اند که براکیستوکرون یك سیکلوئیدبود. روش حلی که برنولی بکاربرد حسی و غیر استدلالی بود؛ وی مسئله را معادل با مسئله‌ای دانست که مربوط است به مسیر اشعه نوری که بوسیلهٔ لایه های شفافی که برروی هم قرار دارند و وزن مخصوص آنها به ترتیب کم می‌شود شکسته می‌گردد. حل‌کامل این مسئله درکتاب «ریاضیات چیست؟» و همچنین درکتاب «علم مکانیك» درج شده است.

دونقطهٔ A و Bرا درنظرمی‌گیریم (مطابق شکل زیر). مقصود تعیین براکیستوکرونی است که این دونقطه را به هم وصل



می‌کند. آنچه قبلا باید تعیین شود شعاع دایره‌ای است که هنگامی در زیرخط AC می‌غلتد تولیدیك سیکلوئید بنماید که از A شروع شده و از B بگذرد. برای این کار دایره‌ای رسم می‌کنیم که در A بر AC مماس بوده و زیر آن واقع باشد، نقطه‌ای از آن را علامت می‌گذاریم، اگر دایره متکی به AC بغلتد وضعی از آن‌را درنظر می‌گیریم که نقطهٔمزبور درنقطه‌ای مانند D برAB واقع‌شود. تمام سیکلوئیدها متشابه هستند بنابراین

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\text{شعاع دایرهٔ مرسوم}}{\text{شعاع دایره مطلوب}}$$

و از روی‌آن شعاع دایرهٔ مطلوب بدست می‌آید، اگر روی این منحنی گلوله‌ای را در A رها کنیم تا به B برسد هرچندکه قسمتی از مسیر آن سربالایی است با وجود این گلوله زودتر از موقعی‌که روی خط مستقیم AB حرکت کند به B می رسد، حتی هنگامی‌که دونقطهٔ A و B دریك سطح افقی قرار داشته باشند برای اینکه گلوله‌ای فاصلهٔ از A تاB را در کوتاهترین مدت بپیماید باز هم مسیر آن یك سیکلوئید می‌باشد. (مسلم است که در این حال گلوله بر خط افقیAB اصلا حرکت نمی‌کند).

خوانندهٔ‌علاقمند به‌سادگی‌می‌تواندمدلی‌ازبراکیستوکرون را فراهم آورد، فنجانی انتخاب کنید، یك قطعه نخ را دریك دور به‌دورفنجان پیچانده دوسرآن‌را به دوطرف تخته‌ای‌محکم کنید، بطوری‌که فنجان همواره برتخته مماس بوده روی آن بتواند بغلتد. یك مداد سیاه را بوسیلهٔ نوارچسب درداخل فنجان محکم کنید.

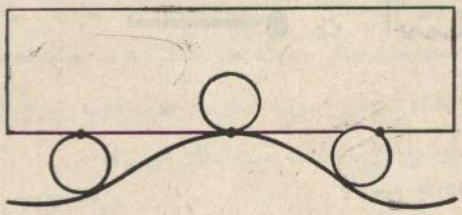
حال اگر کاغذی برروی دیواربچسبانیدوتخته‌رابه‌صورت افقی طوری نگاهدارید‌که وقتی فنجان می‌غلتد نوك مداد روی کاغذ تکیه داشته باشد، در این‌صورت منحنی که مداد روی کاغذ رسم می‌کند یك سیکلوئید می‌باشد.

می‌توانید سیمی محکم را مطابق با منحنی رسم شده خم کرده، مدلی از سیکلوئید بدست آورید. همچنین می‌توانید با برش یك تخته مطابق با منحنی مزبور و عمودی قرار دادن آن یك جادهٔ سیکلوئیدی درست کنید و مهره‌ای روی‌آن قرار داده بغلتانید. ممکن است به‌همین ترتیب دوجادهٔ دیگر یکی به شکل قوس دایره و دیگری را به خط مستقیم فراهم آورید.

سه جادهٔ مزبور را طوری پهلوی هم قرار دهید که گلوله‌های واقع بر آنها بتوانند با هم در یك‌لحظه رها شوند (می‌توان گلوله های فولادی بکار برده آنها را بوسیلهٔ مغناطیس نگاه داشت وبا فشاردادن یك تکمه آنها را با هم رها ساخت). اگر این سه جاده به یك جادهٔ افقی منتهی شوند وگلوله‌ها به‌رنگ های مختلف تهیه شده باشند مشاهده خواهیدکرد که گلولهٔ جادهٔ سیکلوئیدی در پیشاپیش همه درحرکت است، پس ازآن گلولهٔ جادهٔ دایره‌ای و آخر همه گلولهٔ جادهٔ مستقیم حرکت می‌کند.

سیکلوئید دارای خواص مکانیکی جالب دیگری نیزمی‌باشد. چنانکه **گالیله** حدس زده بود محکم‌ترین قوس برای یك پل قوس سیکلوئیدی است، بسیاری از پلهای بتونی دارای قوس سیکلوئیدی می‌باشند. چرخ دنده‌ها اغلب به صورت سیکلوئیدی بریده می‌شوند زیرا دراین‌صورت اصطکاك مربوط‌به درگیرشدن دنده ها تقلیل می‌یابد.

استانلی اوگیلوی در یکی از کتابهایش مسئله را به وضع دیگر مطرح‌کرده است؛ وی این سؤال را طرح کرده است که : یك دایره برروی چه منحنی باید بغلتد تا مسیریك نقطه ازآن یك‌خط راست‌باشد؟ لوکوموتیوی را درنظر بگیرید که هرچرخ آن درکنارهٔ لوکوموتیو به محور آن متصل است،



خط آهن را چگونه باید خم‌کنیم تا هنگامی‌که این‌لوکوموتیو عجیب و غریب برروی آن حرکت می‌کند همواره افقی باقی بماند و هیچگاه به این طرف و آن طرف متمایل نگردد؟ منحنی‌مطلوب، برخلاف انتظارشما خوانندهٔ عزیز، سیکلوئید نیست!

بی‌آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

الف_ ساعت میدان شهر زوریخ در ساعت ٦ بعد از ظهر یك روز بطور عجیب و ناگهانی تغییر ماهیت داد به قسمی که اهالی شهر تصور کردند که ساعت افسون شده است؛ عقربه های ساعتشمار و دقیقه شمار آن ناگهان تغییر جا داده و هریك وظیفهٔ دیگری را بر عهده‌گرفت: عقربهٔ ساعتشمار ۱۲ مرتبه تند تراز عقربهٔ دقیقه‌شمار شروع به حرکت کرد. با این ترتیب، اولین دفعه‌ای که بعد از ساعت ۶، این ساعت وقت صحیح را نشان دهد چه ساعتی خواهد بود؟

ب_ ساعتسازی در همان شب شروع به اصلاح ساعت‌کرد، اما در اثر اشتباه وی دو چرخ‌دندهٔ ساعت تغییر جا دادند و در نتیجه در ساعت ٦ صبح رزز بعد که ساعت مجددا شروع به کار کرد عقربهٔ ساعتشمار آن ۱۲ مرتبه تند تر از عقربهٔ دقیقه شمار حرکت می‌کرد. اما وقتی که مأمورین مربوط برای بازرسی آمدند، ساعت وقت صحیح را نشان می‌داد. مأمورین در چه ساعتی برای بازرسی آمدند؟

ترجمهٔ: داود مصحفی

پاسخ مسئلهٔ زیر همین عنوان مندرج در یکان شمارهٔ قبل

صفحهٔ ۴۸ را ملاحظه فرمائید

ترجمهٔ فصلی از کتاب «فرهنگ استدلالی ریاضیات»

Dictionnaire raisonné de mathématiques · par : WARUSFEL

استقراء ریاضی

آنچه ذیلا چاپ می‌شود ترجمهٔ فصلی است به عنوان Rècurrence که در فارسی به «استقراء ریاضی» عنوان شده است. درکتاب «مدخل‌منطق صورت» تألیف دکتر مصاحب به عنوان «استقراء ضعیف» و «استقراء قوی» بیان شده است.

[۱] در تعریف مجموعهٔ N اعداد صحیح طبیعی اصل موضوع **پئانو** بکار می‌رود که به استقراء ریاضی اختصاص‌دارد (در اصول بندیهای دیگر به‌صورت قضیه بیان می‌شود). این اصل موضوع از این قرار است :

ـ اگر خاصیتی، که مقصود اثبات صحت آن نسبت‌به‌یك عددصحیح غیرمعین n می‌باشد ، برای عدد خاص n_0 (عموماً ۱) برقرار باشد ،

ـ اگر وقتی‌که این خاصیت برای یك عدد دلخواه m بزرگتر از n_0 (و احیاناً برای همهٔ عددهای واقع بین n_0 و m) برقرار است ، بتوانند ثابت کنندکه برای عددمتوالی m یعنی $m' = m+1$ نیز برقرار است ؛

ـ در این صورت ، این خاصیت برای هر عدد صحیح بزرگتر یا مساوی n_0 برقرار خواهد بود .

[۲]استدلال بوسیلهٔ استقراء ریاضی استدلالی است که‌این اصل را بکار می‌برد . مثلا اگر خواسته باشیم ثابت‌کنیم که عدد $(10^n - 1)$ به ازاء هر مقدار صحیح n بر ۹ بخش‌پذیر است ؛

ـ توجه‌داریم که این‌خاصیت به ازاء $n=0$ و $n=1$ برقراراست(زیراهریك‌از عددهای صفر و ۹ بر۹ بخش‌پذیراند).

ـ اگرm عددی‌بزرگتر ازیك باشد و عدد $(10^m - 1)$ بر ۹ بخش پذیر باشد یعنی داشته باشیم $10^m - 1 = 9a$ می‌توانیم بنویسیم :

$$10^{m+1} - 1 = 10(10^m - 1) + 9 = 10 \times 9a + 9 = 9(10a + 1)$$

ـ بنا به‌اصل موضوع فوق‌الذکر حکم می‌کنیم که‌خاصیت مزبور به ازاء هرعدد صحیحی برقرار خواهد بود . می‌توانیم درستی این‌اصل را بررسی‌کنیم : خاصیت برای $n=1$ برقرار است (مستقیماً محقق می‌باشد) . در اثباتی‌که فوقاً بعمل آمد m را مساوی یك انتخاب‌کنیم نتیجه خواهد شدکه خاصیت‌در ازاء $n=2$ درست است . همین استدلال را برای $m=2$ ادامه دهیم‌نتیجه می‌شودکه در ازاء $n=3$ نیز خاصیت‌برقرار است و غیره . . . می‌توانیم بادرنظر گرفتن اعداد متوالی به تعداد دلخواه عمل را تا هر عدد غیر مشخص ادامه دهیم و بنابراین ، اصل موضوع مزبور محقق می‌باشد . توالی اعداد طبیعی‌نیز بنابه‌اصل مزبور مسلم می‌شود : مجموعهٔ اعدادطبیعی بدون بریدگی است . در آخر مقاله نمونه‌ای از مجموعه‌ای را ذکر می‌کنیم‌که اصول اول پئانودر آن صادق است اما دارای خاصیت توالی نیست : از این جهت که از دو مجموعهٔ کاملا متمایز ترکیب یافته است .

[۳] اشکال اساسی‌که در اثبات وجود دارد در عبور از m به m' است ، وگرنه در تحقق سادهٔ حالات خاص مشکلی پیش نمی‌آید . از این جهت اغلب به‌ناحق از این قسمت صرف نظر می‌کنیم . در صورتی‌که رعایت آن لازم است . مثلاباسهل انگاری از اینکه موضوع را برای حالتهای خاص بررسی‌کنیم می‌توانیم ثابت‌کنیم‌که عدد $(10^n + 1)$ بر ۹ بخش‌پذیراست. زیرا اگر $10^m + 1$ بر ۹ بخش پذیر باشد یعنی‌داشته‌باشیم: $10^m + 1 = 9b$ خواهیم داشت :

$$10^{m+1} + 1 = 10(10^m + 1) - 9 = 10 \times 9b - 9 = 9(10b - 1)$$

در صورتی‌که‌این موضوع هیچگاه درست نیست .دراینجا مایك قضیهٔ درست $P \Longrightarrow Q$ راثابت‌کرده‌ایم اما حکمهای P و Q هر دو نادرست می‌باشند [قابلیت تقسیم $(10^m + 1)$ و $(10^{m+1} + 1)$ بر ۹] .

بسیاری‌از قضایاکه‌برای عددهای صحیح‌کوچك ، برقرار هستند بنظر می‌رسدکه بطورکلی محقق باشند . منطقی است‌که

این قضایا از راه استقراء ریاضی ثابت شوند (در این حال فقط **استقراء** گفته می‌شود) اما از استنتاج سریع باید پرهیز داشت . مثلا ، اگر p عددی اول باشد عدد p^2 عدد :

$$(2^{p-1}-1)$$

را نخواهد شمرد. زیرا که می‌توان این موضوع را به ازاء مقادیر

$$p=2 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 11 \text{ و } \ldots$$

محقق کرد . اما اگر اعداد اول را متوالیاً امتحان کنیم وقتی که به ۱۰۹۳ برسیم ملاحظه می‌کنیم که دیگر ، قضیه صحیح نیست (این قضیه برای همهٔ اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰۰۰۰ غیر از دو عدد ۱۰۹۳ و ۳۵۱۱ محقق می‌باشد) .

در اثبات بوسیلهٔ استقراء ریاضی از دخالت دادن بعضی اجزاء بی‌معنی نیز باید احتراز داشت که در این صورت اثبات درست نخواهد بود . در این باره مثال مشهور زیر مورد دارد که ثابت می‌کنند کلیهٔ نقاط واقع بر یك صفحه روی یك خط قرار دارند ؛ n نقطهٔ متمایز از یك صفحه را در نظر می‌گیرند و می‌خواهند ثابت کنند که خطی مانند D وجود دارد که همهٔ این نقاط را شامل باشد . می‌گویند که قضیه برای $n=1$ و $n=2$ محقق است . آنگاه فرض می‌کنند که قضیه برای $n=m$ محقق باشد و $(m+1)$ نقطهٔ دلخواه در نظر می‌گیرند . نقاط M_1 ، M_2 ، ... M_m به خط D تعلق دارند و

$$M_2M_3\cdots M_{m+1}$$

خطی مستقیم مانند D' است. D و D' که در M_2 و M_m مشترك هستند منطبق بوده در نتیجه $(m+1)$ نقطه‌ای که تصادفی اختیار شده‌اند بر یك خط مستقیم D قرار دارند !

(۴) یك رشتهٔ ترجیعی (Suite récurrente)

رشته‌ای مانند u_n است که هر جملهٔ آن با استفاده از جمله (یا جمله‌های) ما قبل تعریف می‌شود . مثلا **رشتهٔ حسابی با قدر نسبت a** :

$$u_0=b \text{ و } u_n=u_{n-1}+a(=b+na)$$

رشتهٔ هندسی با قدر نسبت a

$$u_0=b \text{ و } u_n=u_{n-1}\times a(=b\times a^n)$$

(رشته‌های مزبور **تصاعد** نامیده می‌شوند).

مثال زیر کاملا مشهور است : فرض کنیم :

$$u_n=u_{n-1}+n \text{ و } u_0=0$$

u_n مجموع n عدد صحیح اولیه بوده و (بوسیلهٔ استقراء ریاضی) ثابت می‌شود که :

$$u_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

مثال دیگر **رشتهٔ فیبوناچی** است .

$$u_0=u_1=1 \text{ و } u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$$

که در آن می‌توانند با یك دستور ساده u_n را بر حسب n حساب کنند (حالت عمومی اینچنین نیست) . اولین جمله‌های رشته عبارتند از :

$$1 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 8 \text{ و } 13 \text{ و } 21 \text{ و } 34 \text{ و } 55 \text{ و } \ldots$$

$$2^n\sqrt{5}u_{n-1}=(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n$$

در محاسبهٔ جذر اعداد هم دستورهای استقراء ریاضی بکار می‌آیند : در این مورد یکی از دوسری به شرح زیر را که در حدود $\sqrt{A}$ متقارب است بکار می‌برند :

$$x_1=y_1=1$$

$$x_{n+1}=\frac{A+x_n}{x_n+1} \text{ و } y_{n+1}=\frac{1}{2}\left(y_n+\frac{A}{y_n}\right)$$

از راه استقراء ریاضی ثابت می‌کنند که اگر :

$$u=1+\sqrt{A} \text{ و } v=1-\sqrt{A}$$

باشد x_n و y_n از دستورهای زیر معین می‌شوند :

$$x_n=\sqrt{A}\,\frac{u^n+v^n}{u^n-v^n} \text{ و } y_n=x_m \text{ ، } m=2^{n-1}$$

اگر به وسیله‌ای بدانند وقتی که n به سمت بینهایت میل می‌کند x_n دارای حدی مانند x است در این صورت x ریشهٔ معادلهٔ زیر می‌باشد :

$$x=\frac{A+x}{x+1} \text{ یا } x^2=A$$

بالاخره درحالت $A>0$ نتیجه می‌شود که $x=\sqrt{A}$

(۵) نمونه‌ای از مجموعه‌ای را ارائه دهیم که اصول اول پئانو در آن صدق می‌کند اما آخرین اصل پئانو در آن صادق نیست . مجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

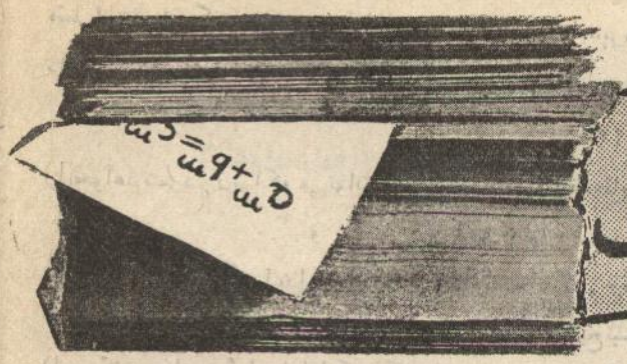
$$E=\left(1 \text{ و } \frac{3}{2} \text{ و } \frac{7}{4} \text{ و } \frac{15}{8} \text{ و } \frac{31}{16} \text{ و } \ldots \text{ و } 34 \text{ و } 8 \text{ و } \frac{34}{16} \text{ و } \frac{17}{8} \text{ و } \frac{9}{4} \text{ و } \frac{5}{2} \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 6 \text{ و } 10 \text{ و } \ldots\right)$$

که از اجتماع اعداد زیر تشکیل شده است :

$$a_h=2-2^{1-h} \text{ و } b_k=2+2^{-k}$$

که h عدد طبیعی و k عدد صحیح نسبی می‌باشد . عدد تالی a_h عبارتست از a_{h+1} و از b_k عبارتست از b_{k+1} . هر عددی یك عدد تالی دارد مگر $a_1=1$ که دارای تالی نیست. هر عددی یك عدد ما قبل دارد . دو عدد فقط و فقط وقتی برابر هستند که عددهای تالی آنها با هم برابر باشند : در نتیجه هر a_h از دیگر a_hها و همچنین از b_kها متفاوت است

پائین صفحهٔ ۲۹



مسائل حل نشدهٔ ریاضی

تألیف :
C. STANLEY OGILVY
ترجمهٔ : ع . م.

بخش چهارم ـ مسائل هندسه

مسائل هندسهٔ محض مجموعهٔ پهناوری‌را تشکیل می‌دهند. یك نمونه از آنها از این قرار است:

«چهار وجهی ABCD را درنظر می گیریم و فرض می کنیم L دومین نقطهٔ **لموان** (Lemoine) آن باشد(یعنی نقطه‌ای که فاصلهٔ آن از هر وجه با شعاع دایرهٔ محیطی این وجه متناسب باشد). خطوطی درنظر می گیریم که بر L گذشته و زوجهای ضلعهای BC و DA ، CA و DB ، AB و DC را قطع کنند، مزدوج توافقی L را نسبت به زوجهای نقاط تقاطع مزبور به ترتیب L' و L" و L''' می نامیم ثابت کنید که :

۱ـ نسبت به کرهٔ محیطی چهاروجهی ABCD ، چهار وجهی LL'L"L''' مزدوج چهاروجهی مفروض می‌باشد.

۲ـ صفحهٔ قطبی هریك از نقاط L ، L' ، L" و L''' نسبت به کرهٔ ABCD به ترتیب بر صفحهٔ قطبی این نقاط نسبت به چهار وجهی ABCD منطبق می‌باشد.

فهم سادهٔ مطالب بالا مستلزم تحمل زحمات بسیار است. باوجوداینکه دراین‌دامنه ازهندسهٔ محض، تعداد محدودی نکات هیجان‌انگیز لذت بخش هم وجود دارد امادر هرحال، اشتغال به آن یك نوع تمرین فکری است که در قرن نوزدهم بیشتر از امروز طرف توجه بوده است.

مسئلهٔ زیر تااندازه‌ای مشکل است: «دسته‌ای‌ازسهمیهای (P) به ترتیب زیر مشخص شده است: M رأس هریك از این سهمیها بر منحنی مسطح مفروض واقع است و F کانون آن شعاع انحناء MC از منحنی مزبور را به نسبت معینی تقسیم می‌کند. با این ترتیب ، هر سهمی P با پوش دسته سهمیهای (P) سه نقطهٔ تماس دارد که یکی همان M است و دوتای‌دیگر هم در فاصلهٔ محدود واقع می‌باشند. وتر واصل بین دو نقطه بر خطی که M را به وسط شعاع انحنای منحنی پوش منحنی مفروض در C وصل می کند عمودمی‌باشد. اگر D نقطهٔ‌تقاطع وتر مزبور با MF باشد DC=MF خواهد بود.» مقصود از حل مسئله اثبات مطالب فوق می‌باشد ،

این دو مسئله تاسال ۱۹۵۷ هنوز لاینحل بودند.

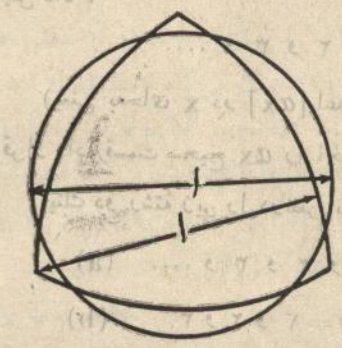
در مسئلهٔ دوم، بدون شك مناسبتر آنست که هندسهٔ‌محض راکنار گذاشته و هندسهٔ تحلیلی را به‌میان آورد اما بلادرنگ نقطهٔ ضعفی مشاهده می‌شود که از این قرار است: بنظر نمی‌رسد که مجموعهٔ مفروضاتی که برای منجر شدن به جوابی کاملا خاص وضع شده است برای استقرار شرایط مطلوب‌کافی باشد در نتیجه‌برای تعمیم مناسب نتایج حاصل موقعیتهای نادری‌وجود دارد. در حل مسائلی‌که جواب آنها هنوز بدست نیامده‌کمتر باید صادقانه عمل‌کرد، قبلا باید زیبائی که در آنها نهفته است کشف کرد؛ تاریخ نشان می‌دهد که در بیشتر مواقع‌نسبت به ارزش بعضی قضایای ریاضی قضاوتهایی عجولانه شده است. فعلا مقدمه را کوتاه می‌کنیم و مطالب فوق را کنار می گذاریم تا مسائلی را مطرح کنیم که خیلی ساده بنظر می‌رسند ، یا اینکه تعمیمهای بسیار وسیعی را دربر دارند.

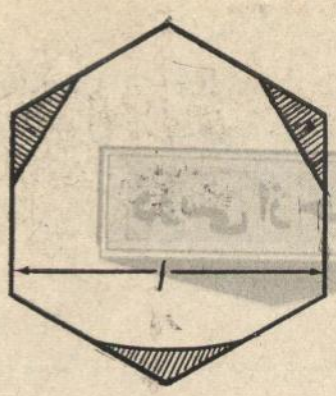
***

هندسهٔ جدید مسائلی را به میان کشیده است که برای دانش‌آموزان دبیرستانی نا شناخته می‌باشد. حتی نوع طرح مسائل در این هندسه با هندسهٔ معمولی‌اقلیدسی تفاوت‌کلی‌دارد.

و مشکلاتی که در اینجا پدید می‌آید از نوع دیگر است. تا آنجا که بعضی اوقات توضیح خود کلمهٔ «هندسه» هم به اشکال بر می‌خورد. تصور **سطوح با مساحت می‌نیمم** چندمسئلهٔ جالب را به میان آورده است. مسئلهٔ زیر تا اندازه‌ای قدیمی است و منسوب به **لبسگ** (Lebesgue) می‌باشد:

دریك صفحه، سطح یا مجموعهٔ نقاطی رادرنظرمی گیریم که حداکثر فاصلهٔ بین هردو نقطه از آن کوچکتر یا مساوی با ۱ باشد؛ اندازه و شکل سطح می‌نیممی که این مجموعهٔ نقاط را دربر می‌گیرد چیست؟ هر قطعه خط واقع در داخل این سطح باید طولی حداکثر برابر با ۱ داشته باشد؛ سطح‌مورد نظر باید همهٔ این قطعه خطهارا در بر گیرد. دایرهٔ به قطر ۱ قابل‌قبول نیست زیرا چنانچه درشکل‌مقابل ملاحظه‌می‌شود منحنی که از سه کمان از دایرهٔ به شعاع یك تشکیل‌شده‌است‌دارای عرض ثابت برابریك بوده، فاصلهٔ هیچ دو نقطه‌ای از آن بیشتر از یك نیست اما دایرهٔ به قطر یك آنرا به تمامی نپوشانده است. بهترین جواب تقریبی که تا کنون برای این مسئله شناخته شده است سطح به شکل زیر است، شش ضلعی منتظم به دایرهٔ محاطی باقطر یك را در نظر گرفته و از سه گوشهٔ آن، مطابق شکل، ناحیه‌هایی را حذف بکنیم. مسئله باید بیشتر از این بررسی‌شود.





مسئلهٔ دیگری که با الهام از مسئلهٔ بالا توسط **لئوموزه** (Leo Moser) طرح شده به‌شرح‌زیر است.

تعدادی مربع در نظر می‌گیریم که مجموع مساحتهای آنها برابر یك واحد سطح باشد، این مربعهارا در یك صفحه پراکنده می‌کنیم بدون اینکه سطح یکدیگررا بپوشانند، فرض می‌کنیم که این مربعها تاحدامکان نزدیك به‌هم واقع شده‌باشند. به‌فرض اینکه تعداد این مربعها وابعاد آنها دلخواه باشدمقصود تعیین کوچکترین مربعی‌است که برهمهٔ این مربعها محیط‌باشد. به‌عبارت دیگرمی‌توان چنین گفت: به‌فرض اینکه مربعهای‌داده شده‌به‌شایسته‌ترین وضعی که ممکن است منظم شده باشند، مربعی که همهٔ آنها را دربر می‌گیرد حداقل چه‌اندازه‌ای می‌تواند داشته باشد؟ در اینجا هم راهی گمراه‌کننده مشاهده می‌شود؛ زیرا مسئله‌فقط شامل‌سه‌پارامتراست: تعداد مربعها، اندازهٔ هریك ازآنها ووضع آنها، شرایط موردنظرعبارتنداز: مجموع‌مساحتها برابر یك واحد سطح باشد، هرجزئی مربع‌باشد و سطحی که مجموعه را می‌پوشاند مربع باشد.

استقراء ریاضی (دنبالهٔ صفحهٔ ۲۷)

(زیرا $b_k > 2$ و $a_h < 2$)، همچنین‌هر b_k از دیگر b_k ها واز a_h ها متفاوت می‌باشد. با وجود این، اصل استقراء ریاضی در مجموعهٔ E صدق نمی‌کند. مثلا اگر خواسته باشیم که‌ثابت کنیم هر عنصر x از E کوچکتر از ۲ است:

ـ در ازاء $a_1 = 1$ صحیح است.

ـ فرض کنیم که به ازاء $m = a_h$ درست باشد. چون

$$m' = a_{h+1} = 1 + \frac{1}{2} a_h$$

بنابراین m' از $1 + \frac{1}{2} \times 2 = 2$ کوچکتر است:

ـ فرض کنیم که به ازاء $m = b_k$ صحیح باشد. چون:

$$b_{k+1} = b_k - 2^{-k-1}$$

از b_k کوچکتراست پس m' از m و بنابراین از ۲ کوچکتر است.

استدلال استقراء ریاضی دقیقاً درست بکار رفته است و جوابی بدست داده است که برای a_h محقق است اما برای b_k غلط می‌باشد. این از آن جهت است که نتوانسته‌اند یك a_h را با رشته‌ای از اعداد متوالی به یك b_k مربوط سازند.

اصل استقراء ریاضی از این جهت صادق است که‌برای هر زیر مجموعهٔ‌محدود به حدودی از N خاصیت محدودبودن را قبول دارند. اما اغلب مناسبتر می‌دانند که از روی N نامتناهی را نیز تعریف کنید، درصورتی‌که در اصول پئانو و در ازاء استقراء ریاضی این کلمه به میان نمی‌آید، در اصول بندیی که خاصیت «هر زیر مجموعهٔ ناتهی از N دارای عنصر می‌نیممی‌است» کافی‌است برای مجموعه‌ای ازاعداد صحیح‌عنصری مانند m را در نظر گرفت که برای آن، خاصیت غلط باشد؛ بنابراین برای عدد ماقبل آن n درست بوده و بالاخره برای $n' = m$ نیز صادق خواهد بود و تناقض پیش می‌آید.

درسی از حساب

تابع قسمت صحیح

تنظیم از : محمود کاشانی ، با استفاده از منابع خارجی

یادآوری ـ قبل از شروع بحث اصلی یادآورمی‌شویم که منظور از علامت $[x]$ عبارتست از بزرگترین عددصحیح که از x بیشتر نباشد مثلا :

$[-۲/۳] = -۳$ و $[۱۴] = ۱۴$ و $[\sqrt{۵}] = ۲$ و $[۳/۰۷] = ۳$

اصطلاحاً تابع $[x]$ را تابع قسمت صحیح x می‌نامند

(the integral part of x)

مقدمه ـ به‌عدد $\sqrt{۲}$ توجه کنید ؛ اگر حاصل ضربهای این عدد را در اعداد صحیح از ۱ تا پنج بدست آوریم به‌ترتیب خواهیم داشت :

$$(۱) \quad \sqrt{۲} \text{ و } ۲\sqrt{۲} \text{ و } ۳\sqrt{۲} \text{ و } ۴\sqrt{۲} \text{ و } ۵\sqrt{۲}$$

اگر خواسته باشیم قسمت صحیح هریك از اعداد رشتهٔ (۱) را بدست آوریم کافیست مقدار تقریبی مناسبی از $\sqrt{۲}$ را پیداکرده حاصل رادرعدد جلوی رادیکال ضرب کنیم و از این حاصل‌ضرب مقدار صحیحش را اختیارکنیم ، به این ترتیب خواهیم داشت :

$$[\sqrt{۲}] = ۱ \text{ و } [۲\sqrt{۲}] = ۲ \text{ و } [۳\sqrt{۲}] = ۴ \text{ و}$$
$$(۲) \quad [۴\sqrt{۲}] = ۵ \text{ و } [۵\sqrt{۲}] = ۷$$

از مقایسهٔ رشته‌های (۱) و (۲) این نکته آشکارمی‌شود که اگر برای تشکیل (۱) بدون استثناء از همهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۵ استفاده کنیم بعضی از این اعداد از ۱ تا۵ در رشتهٔ (۲) هم هستند ، مانند ۱ و ۲ و ۴ و ۵ ولی بعضی دیگر مانند ۳ در رشتهٔ(۲) وجود ندارند و به‌جای آنها اعداد دیگری مانند ۷ را خواهیم داشت .

حال‌اگر در تابع $[x\alpha]$ که در آن α مثبت و غیرصحیح فرض می‌شود به‌جای x اعداد صحیح را تا آنجاکه‌لازم باشد قرار دهیم رشتهٔ اعداد صحیح دیگری بدست خواهد آمدکه چنانچه دیدیم‌این رشته اعداد صحیح شامل همهٔ اعدادی‌نخواهد بودکه به x داده‌ایم و ضمناً رشتهٔ مزبور را باید به صورت‌زیر نمایش داد :

$$[\alpha x] \ , \ x = ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } \ldots$$

(یعنی به‌جای x در $[\alpha x]$ اعداد صحیح ۱ و ۲ و.... را قرار داده قسمت صحیح αx را اختیارکنید).

اینك دو رشتهٔ زیر را درنظر بگیرید :

$$[x\sqrt{۲}] \cdot x = ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } \ldots \quad (a)$$

$$[y(۲+\sqrt{۲})] \cdot y = ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \quad (b)$$

اگر به‌جای x و y اعدادی در دو رشته قراردهیدخواهید دید هر عدد صحیح که از (a) بدست آید در (b) نیست و هر عددصحیح که از (b) بدست آید در (a) یافت نمی‌شود بالاخره هیچ عدد صحیحی نیست که در هیچ‌کدام از این دو رشته نباشد منتها فقط در یکی از آنها خواهد بود . اینك این سؤال پیش می‌آیدکه α و β باید چطور باشند تا در رشتهٔ :

$$[\alpha x] \text{ و } x = ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } \ldots$$

$$[\beta y] \text{ و } y = ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } \ldots$$

تواماً همهٔ اعداد صحیح‌را بدون تکرار نشان دهند یعنی هرعدد صحیح فقط از یکی از این دو رشته بدست آید .

قضیه ـ α و β را اعداد مثبت فرض‌کرده و به جای x و y در توابع $[\alpha x]$ و $[\beta y]$ همهٔ اعداد صحیح را قرارمی‌دهیم در اینصورت دو رشتهٔ عدد صحیح بدست خواهد آمد یکی‌از $[\alpha x]$ و دیگری از $[\beta y]$. ثابت‌کنید شرط لازم وکافی برای آنکه اعداد صحیحی‌که از این دو رشتهٔ $[\alpha x]$ و $[\beta y]$ پیدا می‌شود شامل‌همهٔ اعداد طبیعی ۱ و ۲ و ۳ و . . . باشد در هر عدد فقط از یکی از این‌دو رشته پیدا شودآنست‌که اولا α اصم باشد و ثانیاً $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=۱$ باشد .

اثبات ـ اولا شرط لازم است ـ یعنی فرض می‌کنیم $[\alpha x]$ و $[\beta y]$ دارای شرایط مسئله هستند و باید ثابت کنیم اولا α اصم است و ثانیاً $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ است .

عدد صحیح و مثبت N را درنظر می‌گیریم همهٔ اعداد صحیح و مثبت از ۱ تا N در یکی از توابع $[\alpha x]$ و $[\beta y]$ قرار دارند و برای پیدا کردن آنها باید در هریك از دوتابع به تدریج به x و y اعداد صحیح ۱ و ۲ و ... را دادومتوجه بودکه حاصل $[\alpha x]$و $[\beta y]$ از N بیشتر نشود. بزرگترین عددی که به x تعلق خواهدگرفت باهمان حرف x نشان می‌دهیم(که ممکن است برای رفع اشتباه آن را مثلا با x_1 نمایش‌داد)وبه این ترتیب برای این بزرگترین عدد خواهیم داشت :

$$[\alpha x]\leqslant N \quad (1)$$

بطوری‌که $[\alpha(x+1)]>N$ (۱'). با مختصر دقتی معلوم می‌شودآن عدد x که در (۱) صدق می‌کند ضمناً تعداد اعدادی را نشان می‌دهدکه به ازاء آنها داریم $[\alpha x]\leqslant N$ به‌همین‌دلیل بزرگترین عددکه‌در (۳) $[\beta y]\leqslant N$ صدق می‌کند تعداداعداد y را نشان می‌دهدکه به ازاء آنها داریم $[\beta y]\leqslant N$ و چون باید تمام اعداد N از $[\alpha x]$ و $[\beta y]$ بدست آیندپس :

$$x+y=N \quad (3)$$

از (۱) و (۲) معلوم می‌شودکه $\alpha x=N+m$ و یا :

$$x=\frac{N}{\alpha}+\frac{m}{\alpha}$$

که $\frac{m}{\alpha}$ را λ می‌نامیم و در نتیجه داریم $x=\frac{N}{\alpha}+\lambda$

و معلوم است‌که λ عددی است مستقل از N (زیرا اگر N تغییر کند ممکن‌است m تغییر کند ولی این تغییر از حدمعینی تجاوز نخواهدکرد به(۱) و (۱') توجه‌کنید).

به همین ترتیب خواهیم داشت $y=\frac{N}{\beta}+\lambda_1$ که در اینجا λ_1 عددی است‌که از مقدار محدودی تجاوز نمی‌کند و به مقدارN بستگی‌ندارد . از (۳) و (۴) و (۵) نتیجه‌می‌شود:

$$\frac{N}{\alpha}+\lambda+\frac{N}{\beta}+\lambda_1=N$$

که پس از تقسیم طرفین به N و با فرض $N\to\infty$ خواهیم داشت :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \quad (6)$$

حال اگر در (۶) ، $\alpha=\frac{a}{b}$ باشد که a و b اعداد صحیح فرض می‌شوند در این‌صورت خواهیم داشت :

$$[\alpha b]=[\beta(a-b)]$$

و این مخالف فرض است زیراکه یك‌عدد از $[\alpha x]$ با عددی از $[\beta y]$ برابر شده است .

ثانیاً شرط‌کافی است ـ یعنی اگر α اصم و رابطهٔ :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$$

برقرار باشد هرعدد صحیح و مثبت c از یکی از توابع $[\alpha x]$ و $[\beta y]$ و فقط از یکی ازآنها بدست می‌آید .

اثبات ـ فرض می‌کنیم x_0 و y_0 که به‌ترتیب ازتساویهای $x_0=\frac{c}{\alpha}+\xi$ و $y_0=\frac{c}{\beta}+\eta$ بدست‌می‌آیندکوچکترین‌اعدادی باشندکه در شرایط $x_0\geqslant\frac{c}{\alpha}$ و $y_0\geqslant\frac{c}{\beta}$ صدق می‌کنند .

(مثلا اگر $c=17$ اختیار شده و α برابر $\sqrt{2}$ فرض شودکوچکترین عدد صحیحی‌که ما اسم آنرا x_0 گذاشته‌ایم و در شرایط $x_0\geqslant\frac{17}{\sqrt{2}}$ صدق می‌کند عدد ۱۲ است . برای‌تحقیق مقدار تقریبی $\frac{17}{\sqrt{2}}$ را حساب کند و آنرا با همهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۱۲ مقایسه نمائید خواهید دید اولین‌عددکه از $\frac{17}{\sqrt{2}}$ بزرگتر است ۱۲ می‌باشد) .

بنابراین‌برای $x\lesseqgtr x_0$ داریم $[\alpha x]\lesseqgtr c$ و برای $y\lesseqgtr y_0$ نیز داریم $[\beta y]\lesseqgtr c$ همچنین $0<\xi<1$ و $0<\eta<1$ و $\alpha\xi$ و $\beta\eta$ اصم اند اما ازطرفی داریم :

$$x_0+y_0=\frac{c}{\alpha}+\frac{c}{\beta}+\xi+\eta=c\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+$$
$$+\xi+\eta=c+\xi+\eta$$

که چون x_0 و y_0 و c اعداد صحیح‌اند پس باید $\xi+\eta$ عدد صحیح باشد و نیز این عدد صحیح حداکثر می‌تواند مساوی ۱ باشد پس $\xi+\eta=1$ و یا $\frac{\alpha\xi}{\alpha}+\frac{\beta\eta}{\beta}=1$ و از مقایسه با :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$$

نتیجه می‌گیریم که‌یکی از اعداد $\alpha\xi$ و $\beta\eta$ و فقط یکی ازآنها بیشتر از ۱ و دیگری‌کوچکتر از ۱ است و بنابراین یکی از اعداد $[\alpha x_0]$ و $[\beta y_0]$ مساوی است با c و فقط یکی از این اعداد با c برابراست .

قابلیت تقسیم بر $\overline{\alpha 9}$

یعقوب گنجی

دانشجوی ریاضی دانشسرایعالی تهران

قاعده ـ برای آنکه ببینیم عدد $n+1$ رقمی

$$N_{n+1}=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\cdots a_2 a_1 a_0}$$

بر $\overline{\alpha 9}$ قابل‌قسمت است یا خیر، چنین عمل می کنیم:

اولین عدد سمت راست (a_0) را $\alpha+1$ برابر کرده با رقم بعدی (a_1) جمع می‌کنیم می شود $[(\alpha+1)a_0+a_1]$ چنانچه این مجموع بیش از $\overline{\alpha 9}$، شد $\overline{\alpha 9}$ واحد ازآن کم کرده وباقیمانده را $\alpha+1$ برابر نموده بارقم بعدی (a_2) جمع می کنیم چنانچه بیش از $\overline{\alpha 9}$ گردید $\overline{\alpha 9}$ واحد ازآن کاسته باقیمانده را $\alpha+1$ برابر نموده با رقم بعدی (a_3) جمع می کنیم وعمل رابه‌همین ترتیب تاآخر ادامه‌می‌دهیم. اگر آخرین باقیمانده صفر شد عدد مزبور بر $\overline{\alpha 9}$ بخش‌پذیر است ودرغیراین صورت برآن بخش پذیر نخواهد بود.

برای روشن شدن ذهن خواننده و سادگی اثبات ابتدا این روش را برای عدد ۱۹ (یعنی به ازاء $\alpha=1$) ثابت کرده سپس آنرا تعمیم می‌دهیم.

اثبات برای ۱۹ ـ اگر عدد

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\cdots a_2 a_1}$$

را با A نمایش دهیم می‌توان نوشت:

$$N_{n+1}=10A+a_0=19(A+a_0)-9(A+2a_0)$$
$$\Longrightarrow 9(A+2a_0)=19(A+a_0)-N_{n+1}$$

که چنانچه باقیماندهٔ تقسیم N_{n+1} را بر ۱۹ (باقیماندهٔ حقیقی نامیده و) با R نمایش دهیم رابطهٔ اخیر به‌صورت زیر در می‌آید:

$$9(A+2a_0)=19(A+a_0)-(19k+R)$$
$$=19(A+a_0-k)-R$$
$$\Longrightarrow 9(A+2a_0)=19K-R$$

که چون به‌جای A دراین رابطه مقدارش را بگذاریم حاصل می‌شود:

$$(1)\quad 9(\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\cdots a_2 a_1}+2a_0)=19K-R$$

و بدین ترتیب قاعده برای اعداد دورقمی (یعنی به‌ازاء $n=1$) ثابت‌است وبرای‌اثبات‌آن(به‌ازاء $n=2,3,4,\ldots$ و n یعنی) برای اعداد ۳، ۴، ۵، ... و $n+1$ رقمی باید به‌ترتیب ثابت کنیم که مجموعهای زیر فقط به ازاء $R=0$ بر ۱۹ قابل قسمت هستند.

$$S_3=2(\overbrace{2a_0+a_1}^{S_2})+a_2=2^2a_0+2a_1+a_2$$
$$N_3=\overline{a_2a_1a_0}\quad \text{برای}$$

$$S_4=2S_3+a_3=2^3a_0+2^2a_1+2a_2+a_3$$
$$N_4=\overline{a_3a_2a_1a_0}\quad \text{برای}$$

$$S_5=2S_4+a_4=2^4a_0+2^3a_1+2^2a_2+2a_3+a_4$$
$$N_5=\overline{a_4a_3a_2a_1a_0}\quad \text{برای}$$

.....

$$(2)\quad S_{n+1}=2S_n+a_n$$
$$=2^na_0+2^{n-1}a_1+2^{n-2}a_2+$$
$$+\cdots+2^2a_{n-2}+2a_{n-1}+a_n$$

$$N_{n+1}=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\cdots a_2 a_1 a_0}\quad \text{برای}$$

برای اثبات درحالت کلی (یعنی برای S_{n+1}) رابطهٔ (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$9(2a_0+a_1+10a_2+\cdots+10^{n-3}a_{n-2}+$$
$$+10^{n-2}a_{n-1}+10^{n-1}a_n)=19K-R$$

اکنون اگر طرفین این‌رابطه را در 2^{n-1} ضرب کرده و طرفین رابطهٔ (۲) را ۹ برابر کرده در زیر آن بنویسیم داریم:

$$9(2^na_0+2^{n-1}a_1+2^{n-2}\times 20a_2+$$
$$+\cdots+2^2\times 20^{n-3}a_{n-2}+2\times 20^{n-2}a_{n-1}+$$
$$+20^{n-1}a_n)=19\times\underbrace{2^{n-1}K}_{K'}-2^{n-1}R$$

$$9(2^na_0+2^{n-1}a_1+2^{n-2}a_2+\cdots+2^2a_{n-2}+$$
$$+2a_{n-1}+a_n)=9S_{n+1}$$

که چون طرفین رابطهٔ زیری‌را از بالائی کم کنیم حاصل

می‌شود:

$$9[2^{n-2}(20-1)a_2+\dots+2^2(20^{n-3}-1)a_{n-2}+$$
$$+2(20^{n-2}-1)a_{n-1}+(20^{n-1}-1)a_n)=$$
$$=19K'-2^{n-1}R-9S_{n+1}$$

که هریك از پرانتزهای طرف اول این رابطه بر ۱۹ قابل قسمت هستند. (زیرا

$$(20^m-1=(19+1)^m-1=19\beta+1-1=19\beta$$

یعنی همهٔ جملات طرف اول بر ۱۹ قابل قسمتند که در نتیجه مجموعشان نیز بر ۱۹ بخش‌پذیر بوده و طرف اول مضربی‌از ۱۹می‌شود پس‌طرف دوم تساوی نیزمضربی از ۱۹ بوده‌وازآنجا

$$\boxed{2^{n-1}R+9S_{n+1}=19\gamma}$$ که از آن نتیجه می‌شود که

فقط به ازاء $R=0$ ، S_{n+1} بر ۱۹ قابل قسمت می‌باشد.

تبصره ـ چنانچه دررابطهٔ اخیر به‌جای S_{n+1} مساویش $19\gamma'+R'$ را که درآن R' آخرین باقیمانده‌ای است که با بکاربردن‌قاعدهٔ‌فوق بدست می‌آید) بگذاریم حاصل می‌شود:

$$2^{n-1}R+9(19\gamma'+R')=19\gamma \Longrightarrow 2^{n-1}R$$

$$=19(\gamma-9\gamma')-9R' \Longrightarrow \boxed{R=\frac{19\lambda-9R'}{2^{n-1}}}$$

و برای عدد n رقمی $\boxed{R=\frac{19\lambda-9R'}{2^{n-2}}}$

که درآن R باقیماندهٔ حقیقی، R' باقیماندهٔ ظاهری و λ کوچکترین عددی است که به‌ازاء آن $19\lambda-9R'$ بر 2^{n-2} قابل قسمت می‌گردد. واضح است که با محاسبهٔ R' (بوسیلهٔ روش فوق) می‌توان R رامحاسبه نمود.

تعمیم ـ اثبات قاعدهٔ فوق برای $\overline{\alpha 9}$ عیناً همان روشی است که برای اثبات به ازاء $\alpha=1$ یعنی در مورد ۱۹ بکار رفت واگردراثبات روشی برای ۱۹همه‌جا به‌جای۱۹، $\overline{\alpha 9}$ وبه جای۹، $\overline{(\alpha-1)9}$ وبه جای ۲، $\alpha+1$ ونیز به‌جای $A+a_0$ $A+\alpha a_0$ بگذاریم قاعده برای قابلیت تقسیم بر $\overline{\alpha 9}$ ثابت می‌شود و در این‌حالت رابطهٔ $R=\frac{19\lambda-9R'}{2^{n-2}}$ به صورت

$$\boxed{R_\alpha=\frac{\overline{\alpha 9}\lambda-\overline{(\alpha-1)9}R'\alpha}{(\alpha+1)^{n-2}}}$$ در می‌آید که بـه ازاء

$\alpha=0$ (یعنی بخش‌پذیری اعداد بر ۹) داریم:

$$R_0=\frac{9\lambda-\overline{(-1)9}R'_0}{1^{n-2}} \Longrightarrow R_0=9\lambda-\overline{(-1)9}R'_0$$

که اگر برای $\overline{(-1)9}$ مفهوم عدد قائل شویم داریم،

$$R_0=9\lambda-(-10+9)R'_0 \Longrightarrow$$
$$R_0=9\lambda+R'_0 \Longrightarrow R_0-R'_0=9\lambda$$

که چون R'_0 و R_0 هردو از ۹ کوچکترند بایده $\gamma=$ شود که در این صورت $R_0=R'_0$ می‌گردد که این همان مطلبی است که قبلا می دانستیم همچنین وقتی درقاعدهٔ مزبوربه جای α، صفر بگذاریم قاعدهٔ قابلیت تقسیم بر ۹ بدست می‌آید که همان روش معمولی است.

دانش‌آموزان رتبهٔ اول کلاسهای ششم

رشتهٔ ریاضی استان اصفهان

حسین جلالی کوشکی
دبیرستان حکیم‌سنائی
معدل کتبی ۱۹/۲۰
معدل کل ۱۹/۷۴

رشتهٔ طبیعی استان اصفهان

عباس‌عطارزاده‌جوزدانی
دبیرستان سعدی
معدل کل ۱۸/۸۷

رشتهٔ ریاضی استان گیلان

علی‌اکبر صنعتی دافچاهی
دبیرستان محمدرضاشاه پهلوی
معدل کل ۱۸/۳۴

رشت ـ کتابفروشی طاعتی
نمایندگی یکان

اصفهان ـ کتابفروشی امید، نمایندگی یکان

درسی از فیزیك و مکانیك

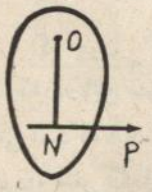
گشتاور نیرو

ترجمهٔ : هوشنگ شریفزاده

گشتاور نیروها ازموضوعاتی است که‌درك کامل آن درحل بسیاری از مسائل‌فیزیك و مکانیك کمك شایانی می‌کند . در این مقاله گشتاور نیرو طوری تشریح شده است که‌برای کلیهٔ دانش آموزان دورهٔ دوم دبیرستانها مفید باشد . ضمناً با استفاده ازاصل گشتاورها به‌حل مسئلهٔ مهمی اقدام شده است : **چرا شاهین ترازو افقی می‌ایستد؟**

۱ ـ گشتاور نیرو

اگر یك دستگاه نیرو بریك‌جسم صلب اثر کنند ممکن است که منجر به‌چرخاندن‌جسم شوند . اگرفقط‌یك‌نیرو برجسم صلبی که یك نقطهٔ ثابت دارد اثر کند ، جسم‌مایل است که حول آن نقطه بچرخد ، مگر درحالتی که امتداد نیرو ازآن نقطهٔ ثابت بگذرد (۱) . این مطلب تصور **اثر چرخانیدن** (۲) یا **گشتاور** (۳) یك نیرو راکه‌معمولا به صورت زیر بیان می‌شود به وجود می‌آورد :



شکل ۱

گشتاور یك نیرو نسبت به‌یك نقطهٔ معین برابراست با حاصل‌ضرب نیرو در فاصلهٔ آن نقطه از امتداد نیرو .

بنابراین گشتاور نیروی P ، که امتدادآن مطابق شکل‌است ، نسبت‌به نقطهٔ O برابراست با $P \times ON$، که ON فاصلهٔ نقطهٔ O است از امتداد نیروی P.

واضح است که‌اگرامتداد P از O بگذرد ، گشتاور P نسبت به O برابر صفر است .

اگر O نقطه‌ای ثابت ازجسم باشد ،که مقطع آن جسم باصفحه‌ای که‌شامل O وP است مطابق شکل نشان داده‌شده‌است حاصل‌ضرب $P \times ON$ اندازهٔ تمایل P است برای چرخاندن جسم‌حول O . قدرت‌چرخانیدن هنگامی‌زیادتر می‌شود که (۱) یا P زیادتر شود ، (۲) یا فاصلهٔ P از O زیادترشود .

گشتاور یك‌نیرو نسبت‌به‌یك نقطه ، برحسب‌جهتی که‌نیرو مایل است جسم را حول یك نقطه بچرخاند ، ممکن است مثبت یا منفی باشد .

در شکل بالا نیروی P مایل است که جسم را در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت بچرخاند . درچنین حالتی می‌گویند که گشتاور نیرو **مثبت** است . اگر نیرو مایل باشد که جسم را درجهت گردش عقربه‌های ساعت بچرخاند گشتاور آن را **منفی** می‌نامند .

وقتی که چند نیروبریك‌جسم اثر می‌کنند ، **مجموع‌جبری گشتاورهایشان** از جمع کردن گشتاورهای هریك از نیروها با توجه به‌علامت آنها بدست می‌آید .

گشتاور یك‌نیرو هم‌دارای بزرگی‌وهم‌دارای جهت‌است ، و بنابراین یك‌کمیت برداری است .

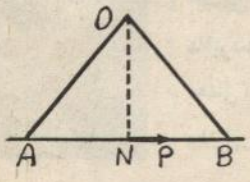
واحد گشتاور یك‌نیرو برابر است باواحد نیر وضرب در واحدطول ، مثلا پوندال‌فوت یا دین سانتیمتر .

۲ ـ نمایش تصویری‌یك‌گشتاور

اگر طول AB بر امتداد نیروی P معرف بزرگی نیروی P باشد ،گشتاور P نسبت به O برابر است با :

$AB \times ON$

و مساحت مثلث AOB برابر است با $\frac{1}{2} AB \times ON$



شکل ۲

؛ بنابراین گشتاور P نسبت به نقطهٔ O برابر است با دوبرابر مساحت مثلث AOB . بااستفاده

(۱) در حقیقت ، به نقطه‌ای که جسم درآنجا ثابت است نیروهای دیگر اثر می‌کنند (۲) Turning effect (۳) moment

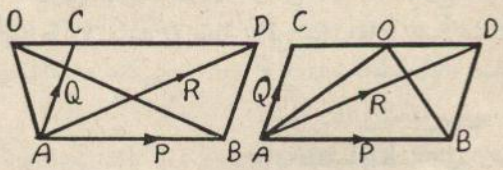
از این طریقه برای نمایش گشتاور ، قضیهٔ اساسی گشتاورهای نیروهای متقارب را ثابت می‌کنیم .

۳ ـ مجموع جبری گشتاورهای دو نیرو نسبت به هر نقطه‌ای که درصفحهٔ آن نیروها باشد مساوی است با گشتاور برآیند آن نیروها نسبت به آن نقطه (قضیهٔ وارینیون)

دو حالت درنظر می‌گیریم :

(۱) فرض می‌کنیم که نیروها در یك نقطه برخورد کنند.

فرض می‌کنیم که نیروهای P و Q مطابق شکلهای ۳و۴ بر A اثر می‌کنند و نیز O نقطه‌ای است واقع در صفحهٔ



شکل۴ شکل۳

این دو نیرو . OC را به موازات امتداد P رسم می‌کنیم تا امتداد Q را در C قطع کند . فرض می‌کنیم که AC معرف بزرگی Q و باهمین مقیاس AB معرف P باشد. متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم می‌کنیم و OA و OB را نیز رسم‌می‌کنیم. AD معرف R برآیند P و Q است .

در هر یك ازشکلهای ۳ و ۴ می‌توان نوشت :

گشتاور P نسبت به O برابر است با $2\Delta AOB$

گشتاور Q نسبت به O برابر است‌با $2\Delta AOC$

گشتاور R نسبت به O برابر است با $2\Delta AOD$

همچنین $\Delta AOB = \Delta ADB = \Delta ADC$

در شکل ۳ گشتاورها هر دو مثبت می‌باشند و مجموع جبری آنها از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$2\Delta AOB + 2\Delta AOC = 2\Delta ADC + 2\Delta AOC$$

گشتاور R $= 2\Delta OAD =$

درشکل ۴ گشتاورها غیر همسویند ، یعنی گشتاور P مثبت و گشتاور Q منفی است ؛ مجموع جبری آنها :

$$2\Delta AOB - 2\Delta AOC = 2\Delta ADC - 2\Delta AOC$$

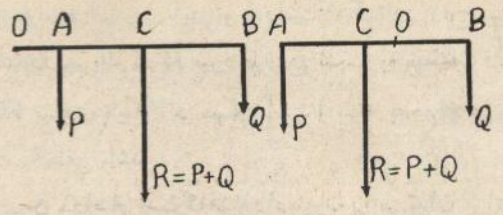
گشتاور R $= 2\Delta OAD =$

۲) فرض می‌کنیم که نیروها متوازی باشند .

فرض می‌کنیم که P و Q نیروهای متوازیی باشند که مطابق شکلهای ۵ و ۶ اثر می‌کنند و O نقطه‌ای از صفحهٔ این دو نیرو باشد .

OAB را عمود بر نیروها رسم‌می‌کنیم تا امتدادنیروها را در نقاط A و B قطع کند .

برآیند R (مساوی $P+Q$) با P و Q موازی است .



شکل۶ شکل۵

و بر نقطه‌ای مانند C از خط AB اثر می‌کند ، بطوری که:

$$P \times AC = Q \times CB$$

در شکل ۵مجموع گشتاورهای P و Q نسبت به O برابر است با :

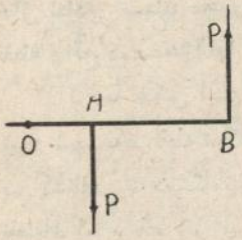
$$P \cdot OA + Q \cdot OB$$
$$= P(OC - AC) + Q(OC + CB)$$
$$= (P+Q)OC =$$ گشتاور R نسبت به O

در شکل ۶ مجموع گشتاورهای P و Q نسبت به O برابراست با :

$$P \cdot OA - Q \cdot OB$$
$$= P(OC + AC) - Q(BC - OC)$$
$$= (P+Q)OC + P \cdot AC - Q \cdot BC$$
$$= (P+Q)OC =$$ گشتاور R نسبت به O

۴ ـ اگر نیروها تشکیل یك زوج دهند برآیند وجود ندارد و قضیه صادق نیست .

در این حالت به آسانی می‌توان ثابت کرد که مجموع گشتاورهای نیروهایی که‌تشکیل یك زوج نیرو را داده‌اند نسبت به هر نقطه‌ای که در صفحهٔ این نیروها واقع باشد مقداری است ثابت .



شکل۷

فرض می‌کنیم P ، P زوج‌نیرویی باشد که مطابق شکل ۷ اثرمی‌کنند و O نقطه‌ای از صفحهٔ این دو نیرو باشد .

OAB را عمود بر امتداد این دو نیرو رسم می‌کنیم تا امتدادهای این دو نیرو رادر A و B قطع کند .

مجموع گشتاورها نسبت به O برابراست با :

$$P \cdot OB - P \cdot OA$$
$$= P(OB - OA)$$
$$= P \cdot AB$$

یعنی بستگی به‌محل نقطهٔ O ندارد .

حاصل‌ضرب $P \cdot AB$ که در آن P بزرگی هریك از نیروهای زوج است‌و AB فاصلهٔ عمودی دو نیرواست‌به گشتاور

زوج موسوم است . باید توجه‌داشت که گشتاور زوج برابراست با گشتاور هریك از دو نیروی زوج نسبت به نقطه‌ای واقع بر امتداد نیروی دیگر ، و ممکن است ، بسته به‌جهت چرخش‌زوج مثبت یا منفی باشد .

۵ ـ واضح است که‌قضیهٔ وارینیون را می‌توان برای‌هرچند نیروکه دارای یك برآیند باشند تعمیم داد . زیرا قضیه برای هردو نیرویی که‌تشکیل‌زوج نیرو نمی‌دهند صادق است. بنابراین برای برآیند این دو نیرو و نیروی دیگر ، اگر باهم تشکیل زوج ندهند ، صادق است . همین‌طور برای برآیند دو نیروی اخیر با نیروی دیگر با همان شرایط صادق است . پس قضیه برای برآیند تمام نیروها به‌استثنای آخرین نیرو صادق است . این برآیند باآخرین نیرو نمی‌تواند تشکیل زوج نیرو بدهد، زیرا بنا به‌فرضی که‌کردیم نیروها دارای یك برآیند می‌باشند. پس قضیه برای آخرین نیرو و برآیند بقیهٔ نیروها صادق‌است و می‌توان اصل گشتاورها را به‌صورت زیر بیان کرد :

اگر چند نیروی واقع‌در یك صفحه بر یك‌جسم صلب اثر کنند و دارای برآیند باشند، مجموع جبری گشتاورهایشان نسبت‌به‌هر نقطه‌ای واقع‌در صفحهٔ نیروها برابراست باگشتاور برآیندشان نسبت به‌این نقطه .

۶ـ اگر دستگاهی از نیروهای واقع‌در یك صفحه درحال تعادل‌باشند ، برآیندشان صفر است ، و بنابراین گشتاور آنها نسبت به‌هر نقطه باید صفر باشد .

پس وقتی‌که یك‌دستگاه نیروهای واقع دریك‌صفحه در حال تعادل هستند مجموع جبری گشتاورهای آنها نسبت‌به‌هر نقطهٔ واقع درصفحهٔ آنها صفر است .

لزوماً عکس این مطلب درست نیست . زیرا گشتاور نیرو نسبت به‌هر نقطه‌ای که برخط اثر نیرو واقع است صفراست، پس گشتاور یك دستگاه نیروهای‌واقع در یك صفحه نسبت‌به‌هر نقطه‌ای که برخط اثر نیروی برآیند واقع است صفر است.

بنابراین‌وقتی که می‌گوئیم مجموع گشتاورهای‌یك‌دستگاه نیروهای واقع دریك صفحه نسبت به‌یك نقطه صفر است ، لازم نیست که آن دستگاه به‌حال تعادل‌باشد ، چه ممکن است که‌این نقطه برخط اثر نیروی برآیند دستگاه واقع باشد .

۱ـ ارتفاع‌مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر ۲۰cm است . نیروهای ۱ و ۲ و ۴ نیوتن به ترتیب در امتداد اضلاع AB ، BC ، و CA اثر می‌کنند . گشتاور این دستگاه نیروها را نسبت‌به‌هریك از رئوس مثلث تعیین‌کنید .

جواب : نسبت به A و B و C به ترتیب ۰/۴و۰/۶و۰/۲ نیوتن ـ متر

۲ـ چهار نیروکه اندازهٔ آنها ۳ و ۴ و ۵ و ۶ کیلوگرم نیرواست‌به‌ترتیب در امتداد اضلاع مربعی به‌ضلع ۲۰cm و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت اثر می‌کنند . گشتاورهای این نیروها را نسبت به(۱) مرکز مربع ، (۲) محل تلاقی نیروهای ۳kgf و ۶kgf بدست آورید.

جواب : ۱/۸kgf·m ، ۱/۸kgf·m

۳ـ در امتداد اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۶۰cm نیروهای ۴ و ۵ و ۶ کیلوگرم نیرو به ترتیب‌در جهتهای BC و CA و AB اثر می‌کنند . مجموع گشتاورهای این نیروها را نسبت به نقطهٔ تلاقی میانه‌های این مثلث‌تعیین کنید .

جواب $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ kgf·m

۴ـ نیروهای ۲و۴و۲و۴ نیوتن درامتداد اضلاع AB و CB ، DC و DA از مربع ABCD به ضلع ۳۰cm اثر می‌کنندمجموع گشتاورهای این نیروهارانسبت به (۱)مرکز مربع ، (۲) نقطهٔ A بدست‌آورید .

جواب : صفر ، ۱/۸N·m

۵ـ بریك‌خط افقی ازچپ به‌راست به‌ترتیب نقاط A وB و C و D قرارگرفته‌اند . فاصلهٔ هر یك از این نقاط از نقطهٔ مجاور ۳۰cm است . بر B نیرویی‌معادل ۲N وعمودبرAD به طرف پائین‌اثر می‌کند . بر C نیرویی معادل ۴N به‌طرف بالا طوری اثرمی‌کندکه باجهت CD زاویهٔ ۳۰° می‌سازد . بر D نیرویی معادل یك نیوتن عمود بر AD به‌طرف بالا اثرمی‌کند .مجموع گشتاورهای‌این‌نیروها رانسبت به(۱)A ، (۲)C تعیین کنید .

جواب : ۱/۵N·m ، ۰/۹N·m

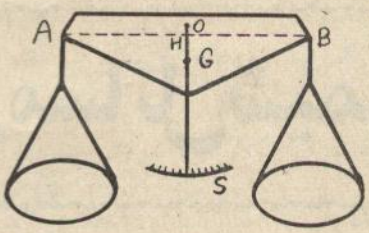
۶ ـ نیروهای۱ و۲ و۳ و ۴ و ۵ و۶ پاند وزن‌به‌ترتیب در امتداد اضلاع AB ، BC ، CD ، DE ، EF ، FA از یك شش‌ضلعی منظم وارد می‌شوند . اگر طول ضلع این۶ضلعی ۲فوت‌باشد ، مجموع گشتاورهای نیروها را نسبت به (۱)مرکز شش‌ضلعی (۲)A تعیین کنید .

جواب $21\sqrt{3}$lb-ft ، $21\sqrt{3}$lb-ft

ترازو

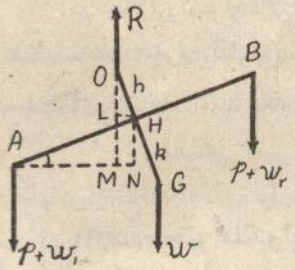
ترازو تشکیل شده است از شاهین‌محکمی‌که‌به دو انتهای آن کفه‌ها آویزانند (شکل) . دو انتهای شاهین راباخط نقطه‌چین AB به‌هم‌وصل کرده‌ایم . نقطهٔ اتکا O است وکفه‌ها به‌نقاط

A و B آویزانند . شاهین‌طوری‌ساخته‌شده است که G، مرکز ثقل . زیر خط AB و O نقطهٔ اتکا، خیلی نزدیک به AB است بطوری که وقتی که‌شاهین افقی‌قرار می‌گیرد، G و H (نقطهٔ وسط AB) بر خط‌قائمی واقعند که از O می‌گذرد. بنابراین وقتی که‌شاهین افقی‌است ، وزنه‌های کفه‌ها و محتویاتش بافواصل مساوی بر نقطهٔ اتکا اثر می‌کنند . عقربه‌ای که محکم به‌شاهین چسبیده است و بر AB عمود است حول صفحهٔ مدرج S دوران می‌کند و نشان‌می‌دهد که چه موقعی شاهین افقی است .



وزنهای کفه‌هاو متعلقاتش (نخ و ..) بایستی‌مساوی‌باشند. ما اکنون‌نشان خواهیم دادکه ، هنگامی که این شرایط برقرار باشد ، شاهین فقط هنگامی‌می‌تواند به وضع افقی بایستدکه وزنه‌های متساوی‌در کفه‌هاقرار گیرد ،وکه اگر وزنه‌هانامتساوی باشند ، شاهین زاویهٔ معینی با افق می‌سازد .

نقاط A و B و O و H و G در شکل زیر برای وضعیتی مشخص‌شده‌اند که‌شاهین AB با افق زاویهٔ θ می‌سازد.



فرض می‌کنیم :

وزن هریك ازکفه‌ها $p=$

وزن شاهین $w=$

وزن وزنه‌هایی که درکفه‌ها قرار می‌دهیم w_1 و w_2

طول هریك از بازوها

$a=$ (یعنی $AH=BH=a$)

$h=OH$

$k=HG$

نیروهایی که بر شاهین اثرمی‌کنند :

$p+w_1$ و $p+w_2$ قائم به‌طرف پایین موثر برنقاط A و B،

w قائم به‌طرف پایین موثر بر G ؛

عکس‌العمل R قائم به طرف بالا موثر بر O

در شکل داریم :

$$LH=h\sin\theta \ , \ AN=a\cos\theta \ , \ \widehat{LOH}=\theta$$

و فاصلهٔ G از خط قائمی که از H می‌گذرد برابر است با :

$k\sin\theta$

فاصلهٔ $p+w_1$ از O برابر است با :

$$AM=a\cos\theta-h\sin\theta$$

فاصلهٔ $p+w_2$ از O برابراست با :

$$=a\cos\theta+h\sin\theta$$

فاصلهٔ w از O برابراست با $=h\sin\theta+k\sin\theta$

گشتاور نیروها را نسبت به O تعیین می‌کنیم . در نتیجه می‌توان :

$$(p+w_1)(a\cos\theta-h\sin\theta)=w(h+k)\sin\theta+(p+w_2)(a\cos\theta+h\sin\theta)$$

در نتیجه :

$$tg\theta=\frac{(w_1-w_2)a}{(w_1+w_2+2p)h+w(h+k)}$$

این نتیجه نشان می‌دهدکه اگر وزن وزنه‌های داخل کفه‌ها باهم مساوی باشند ، یعنی $w_1=w_2$ باشد ، θ صفر است و شاهین می‌تواند فقط در وضع افقی بماند .

اگر وزن‌وزنه‌ها باهم متفاوت باشند شاهین زاویهٔ معینی با افق خواهد ساخت . بایستی‌توجه‌کردکه اگر f و k هردو صفر باشند ، یعنی مرکز ثقل شاهین و مرکز تعلیق برهم‌و بر خط AB منطبق باشند ، وقتی‌که وزنه های مساوی‌درکفه‌ها قرار گیرد، شاهین می‌تواند در هر وضعیتی قرارگیرد و اگر وزن وزنه‌هانامتساوی باشد شاهین فقط به وضعیت قائم باقی می‌ماند.

راهنمای حل‌مسائل‌هندسه (دنباله از صفحهٔ ۴۲)

تمرینات

۱۷۹ـ از نقطهٔ P واقع بر خط AB دو نیم‌خط PM و PN را برابر بایکدیگر و دریك طرف AB رسم می‌کنیم که با AB زاویه های برابر بسازند ثابت کنید که MN با AB موازی است.

۱۸۰ـ ثابت کنید خطی که پای ارتفاعهای نظیر دو ساق از مثلث متساوی‌الساقین را به هم وصل می‌کند با قاعدهٔ مثلث موازی است.

۱۸۱ـ نیمدایرهٔ به مرکز O مفروض است، دوشعاع OM و ON را عمود بر هم رسم می‌کنیم و MG و NH را عمود برقطر رسم می‌کنیم. اگر I و I' مرکزهای دایره‌های محاطی مثلثهای MOG و NOH باشد ثابت کنیدکه II' با قطر نیمدایره موازی است.

۱۸۲ـ وتر AB در دایرهٔ O مفروض است. بر این وتر دو نقطهٔ C و D، طرفین M وسط AB به یك فاصله‌از آن در نظر گرفته از این نقاط عمودهای FG و HK را عمود بر AB رسم می‌کنیم. ثابت کنیدکه FH و GK با AB موازی هستند.

راهنمای حل مسائل شیمی

مؤلفان : Favre et Gautier مترجم : عطاءالله بزرگ نیا

بخش دوم

فصل اول ـ قوانین مربوط به جرم ملکولی

I ـ جرم ملکولی وچگالی گازها :

۳۸ـ تعریف ـ چگالی نسبت به هوا ، یا بـه عبارت ساده‌تر چگالی یك گاز ، برابراست با نسبت جرم حجم معینی از این گاز به‌جرم هم حجم و هم شرایط آن (حرارت‌وفشار)از هوا . وچون‌حجم گاز راواحد اختیار کنیم نتیجه می گیریم که: جرم مخصوص یاجرم‌واحدحجم یك گاز (μ) برابراست باحاصل ضرب چگالی آن (d) در جرم واحد حجم هوا(a) در همین درجهٔ حرارت و فشار :

$$\mu = ad$$

۳۹ـقانون آووگادرو و آمپرـجرم‌ملکولی گازهای مختلف متناسب باچگالی آنهاست .

تعاریف فوق و قانون آووگادرو و آمپر در موردکلیهٔ اجسام به‌حالت گازی صادق است (چگالی بخار)

۴۰ـ کاربریـهرگاه چگالی (d) جسمی به‌حالت‌بخار معلوم باشد ، جرم ملکولی (M) تقریبی آن از رابطهٔ ثابت جرم‌ملکولی وچگالی بدست می‌آید . برای این منظورکافیست چگالی گازی راکه دارای جرم ملکولی معینی است‌بدانیم .

- **مثال** ـجرم ملکولی (M) گازی‌که چگالی آن۱/۵۲ است محاسبه‌کنید . درصورتی‌که بدانیم چگالی اکسیژن‌برابر با $d_O = ۱/۰۵$ است .

با استفاده از قانون آووگادرو می‌توان نوشت :

$$\frac{M}{۱/۵۲} = \frac{O_۲}{d_O} = \frac{۳۲}{۱/۱۰۵}$$

از آنجا:

$$M = \frac{۳۲ \times ۱/۵۲}{۱/۱۰۵} = ۴۴$$

تبصره ـ هرگاه به‌جای چگالی اکسیژن چگالی‌ئیدرژن معلوم باشد چنین خواهیم داشت :

$$\frac{M}{۱/۵۲} = \frac{H_۲}{d_H}$$

در حالاتی‌کـه چگالی هیچیك ازگازها جزء معلومات مسئله نباشد . جرم ملکولی‌را می‌توان بااستفاده از رابطهٔ زیر بدست آورد .

$$\frac{M}{d} = \frac{O_۲}{d_O} = \frac{H_۲}{d_H} = ۲۹$$

۴۱ ـ حجم ملکولی ـ از قانون آووگادرو چنین نتیجه می‌شود : «حجمی‌که توسط یك ملکول‌گرم ازکلیهٔ گازها تحت شرایط ثابت از حـرارت و فشار اشغال می‌شود (U) بـا یکدیگر برابر است»

نظر به اینکه جرم هرگاز برابر حاصل‌ضرب حجم در جرم مخصوص آنست بنابراین :

$$M = Uad$$

یا :

$$U = \frac{۱}{a} \times \frac{M}{d}$$

از روی معلومات مسئله‌که برای تعیین نسبت $\frac{M}{d}$ (بنـد ۴۰) داده شده است می‌توان مقدار U را محاسبه‌کرد .

هرگاه معلومات لازم برای یافتن U داده نشده باشد . حجم ملکولی را در شرایط متعارفی و برابر :

$$U = U_o = ۲۲/۴ \text{ لیتر}$$

در نظر می گیریم .

۴۲ ـ رابطهٔ $\frac{M}{d}=ua$ معرف جرم ۲۲/۴ لیتر (حجم ملکولی) هوا تحت شرایط متعارفی می‌باشد . و آنرا معادل ۲۹ در نظر می‌گیریم . این عدد تقریباً برابر حاصل‌ضرب $u=۲۲/۴$ و $a=۱/۳$ است .

۴۳ـ هرگاه d معرف چگالی گاز مفروضی نسبت به گاز دیگر (خالص نه مانند هوا مخلوط) باشد رابطهٔ $\frac{M}{d}$ معرف جرم ملکولی گاز اخیر خواهد بود .

II ـ قوانین رائول

۴۴ـ تعریف ـ غلظت ملکولی یك محلول معرف تعداد ملکولهای جسم حل شده در ۱۰۰ گرم حلال است .

۴۵ـ نزول نقطهٔ انجماد (کریومتری) ـ هر حلال خالصی تحت فشار متعارفی در درجهٔ ثابتی منجمد می‌شود و چون مقداری از یك جسم را در آن حل کنیم محلول حاصل در درجهٔ حرارتی پائینتر از درجهٔ حرارت انجماد حلال شروع به انجماد می نماید . اختلاف بین این دو درجه حرارت را نزول نقطهٔ انجماد حلال نامند .

۴۶ ـ محلولهای رقیق و غیر الکترولیت در این مورد از قانون رائول پیروی می کنند .

قانون رائول (درمورد نزول نقطهٔ انجماد) ـ نزول نقطهٔ انجماد محلولهای مختلف یك حلال متناسب با غلظت ملکولی آنهاست .

نزول نقطهٔ انجماد محلولهایی که غلظت ملکولی آنها یك است (یك ملکول گرم جسم حل شده در ۱۰۰۰ گرم حلال) نزول ملکولی نامیده می‌شود و اگر حلال آب باشد مقدار آن برابر ۱°/۸۵ می‌باشد .

۴۷ـ هرگاه p معرف مقدار گرم جسم حل شده در ۱۰۰۰ گرم حلال و M جرم ملکولی جسم حل شده باشد نسبت $\frac{p}{M}$ غلظت ملکولی را نشان می‌دهد . اگر نزول نقطهٔ انجماد محلول را با Δt و نزول ملکولی را با k نشان دهیم رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\Delta t=k\frac{p}{M}$$

این رابطه را می‌توان به‌شکل زیر نمایش داد :

$$\frac{\Delta t}{k}=\frac{p}{M}$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود که نزول نقطهٔ انجماد برابر حاصل ضرب نزول ملکولی در تعداد ملکول گرم جسم حل شده موجود در ۱۰۰۰ گرم حلال است . معمولا قانون رائول به‌شکل فرمول فوق مورد استفاده قرار می گیرد .

۴۹ ـ نزول ملکولی برای ۱۰۰ گرم حلال

هرگاه تعداد ملکول گرم جسم حل‌شده در ۱۰۰ گرم حلال را به p نمایش دهیم فرمول رائول به‌شکل زیر در می‌آید.

$$\Delta t=k'\frac{p}{M}$$

در این فرمول $k'=۱۰k$ و مقدار عددی آن برای آب برابر $k'=۱۸°/۵$ می‌باشد .

بدیهی است این فرمول مانند فرمول قبلی فقط در مواردی صادق است که محلول رقیق و غیر الکترولیت باشد .

نسبت $\frac{p}{M}$ در این رابطه نیز معرف غلظت ملکولی و k' نزول ملکولی است . اما نزول ملکولی در این حالت قابل اندازه گیری نخواهد بود چه محلول یك ملکول گرم در ۱۰۰ گرم آب یا حلال دیگر را نمی‌توان محلول رقیق دانست.

۵۰ ـ ثابت کریسکوپی ـ هرگاه p معرف مقدار گرم جسم حل‌شده در یك گرم حلال باشد . در فرمول :

$$\Delta t=K\frac{p}{M}$$

$K=۱۰۰۰k$ و مقدار عددی آن برای آب ۱۸۵۰° است . نکته‌ای که در مورد k' گفته شد به طریق اولی درمورد k نیز صادق است ضریب K را **ثابت کریوسکوپی** نامند.

۵۱ ـ کاربری ـ از قانون رائول می‌توان برای تعیین جرم ملکولی اجسام مرکب محلول و غیر الکترولیت استفاده کرد مشروط براینکه نزول نقطهٔ انجماد محلول این اجسام معلوم باشد . (کریومتری)

۵۲ ـ ابولیومتری (اندازه‌گیری صعود نقطهٔ جوش) ، تونومتری .

بالا رفتن نقطهٔ جوش و کاهش نسبی ماکزیموم فشار در یك محلول رقیق و غیر الکترولیت نیز از قوانینی مشابه ، آنچه در فوق بیان شد پیروی می کنند و می‌توان برای محاسبهٔ جرم ملکولی مورد استفاده قرار داد .

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des Pnoblèmos èlèmentaires de gèometrie

تألیف: **E. J. Honnet** چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳ ـ ترجمهٔ: ع. م.

فصل چهارم ـ چگونه ثابت کنیم که دوخط متوازی‌اند:

مسئلهٔ مقدماتی اثبات توازی دوخط موارد استعمال‌زیاد دارد و در موارد مختلف بکار می‌آید، مثلا برای اینکه ثابت کنیم که: دوزاویه باهم برابراند (قاطعی که دوخط متوازی‌را قطع می‌کند، زاویه‌هائی که ضلعهایشان‌متوازی‌اند، یك چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی یا مربع است و ازآن تساوی دو قطعه خط را نتیجه بگیریم، برای اینکه ثابت‌کنیم: دو مثلث متشابه هستند، یك‌رابطهٔ نسبی بین‌قطعه خطها رابدست آوریم

روش یکم ـ استفاده از خواص زاویه‌هائی که یك قاطع دردوخط پدید می‌آورد

می‌دانیم که اگر خطی دوخط دیگررا قطع کند و:

۱ـ دوزاویهٔ متبادل داخلی یا دو زاویهٔ متبادل خارجی برابر باشند،

۲ـ دوزاویهٔ متقابل داخل و خارج برابر باشند،

۳ـ دوزاویهٔ متقابل داخلی یا دوزاویهٔ متقابل خارجی مکمل باشند،

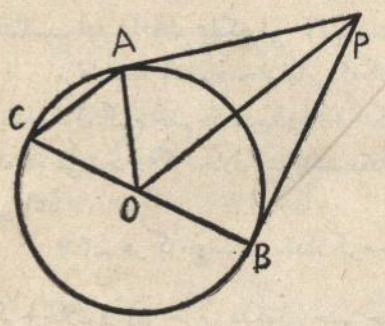
دراین صورت دوخط مزبور باهم موازی می‌باشند،

مسئلهٔ ۳۷ـ از نقطهٔ P واقع در خارج یك دایرهٔ O مماسهای PA و PB را بر این دایره رسم می‌کنیم و نقطهٔ A را به نقطهٔ B انتهای قطر دایره که از B رسم می‌شود وصل می‌کنیم. ثابت کنید که AC با PO موازی است.

فرض: PA و PB مماس بر O ، BC قطر O

حکم: $AC \parallel OP$

اثبات ـ زاویهٔ C زاویه‌ای محاطی‌است و اندازهٔ آن برابر بانصف اندازهٔ کمان AB می‌باشد. زاویهٔ AOB مرکزی است و اندازهٔ آن‌برابر اندازهٔ کمان AB است، خط PO نیمساز زاویهٔ AOB است (مسئلهٔ ۱۹) بنا‌براین اندازهٔ زاویهٔ POB برابر بانصف اندازهٔ کمان AB بوده درنتیجه‌دوزاویهٔ C و POB با هم برابراند، این دوزاویه نسبت به دو خط CA و OP وقاطع BC متقابل داخل وخارج هستند بنابراین دوخط AC وPO با هم موازی می‌باشند.



تمرینات

۱۶۳ـ دو دایره در نقطهٔ A مماس خارج هستند، از A دو قاطع BAC و DAE را رسم می‌کنیم (B وD دریك دایره‌واقع‌اند). ثابت‌کنیدکه BD باCE موازی است(تمرین ۹۱ را ملاحظه کنید).

۱۶۴ـ دودایره درA مماس خارج هستند، ازA قاطع BAC را رسم کرده در هریك از نقاط B و C مماسی بر

دایرهٔ نظیر رسم می‌کنیم. ثابت کنید که این دو مماس متوازی‌اند.

۱۶۵ـ دو مسئلهٔ بالا را در حالتی که دو دایره مماس داخل باشند بررسی و حل کنید.

۱۶۶ـ دو دایره به مرکزهای O و O' در نقطهٔ A مماس هستند؛ در دایرهٔ O یك وتر AM و در دایرهٔ O' وتر AN را عمود بر AM رسم می‌کنیم. ثابت کنید که OM با O'N موازی است.

۱۶۷ـ دو دایرهٔ O و O' در A و B متقاطع هستند، از نقاط A و B دو قاطع دلخواه MAM' و NBN' را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که MN با M'N' موازی است.

۱۶۸ـ نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ O مفروض است، به مرکز A دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر قطر BC مماس باشد؛ از نقاط B و C دو مماس بر دایرهٔ (A) رسم می‌کنیم، ثابت کنید که این دو مماس باهم موازی هستند.

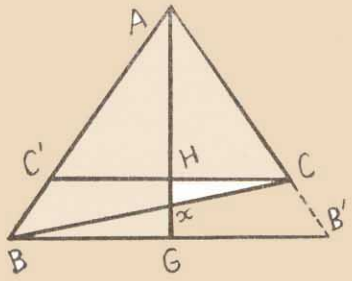
۱۶۹ـ چهارضلعی ABCD محاط در دایرهٔ O مفروض است؛ ضلعهای مقابل AB و CD را امتداد می‌دهیم تا در M متلاقی شوند. ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ M با یکی از نیمسازهای زاویهٔ دوقطر چهارضلعی موازی است.

روش دوم ـ استفاده از عمود مشترك

می‌دانیم که: دو خط عمود بر خط سوم، با یکدیگر موازی‌اند.

حالت عکس این خاصیت در فصل گذشته برای اثبات اینکه دو خط بر هم عمودند مورد استفاده واقع شد (روش چهارم).

مسئلهٔ ۳۸ ـ



مثلث ABC مفروض است. بر ضلع AB و درجهت از A به B طول AC' را برابر با AC و بر ضلع AC در جهت از A به C طول AB' را برابر با AB جدا می‌کنیم. ثابت کنید که CC' با BB' موازی است.

فرض: $AC' = AC$ ، $AB' = AB$

حکم: $CC' \parallel BB'$

اثبات ـ خطوط AC و AC' برابرند پس مثلث ACC' متساوی‌الساقین بوده قاعدهٔ CC' از آن بر نیمساز زاویهٔ A عمود می‌باشد. مثلث ABB' نیز متساوی‌الساقین است و قاعدهٔ BB' از آن بر نیمساز زاویهٔ A عمود است. نتیجه می‌شود که دو خط CC' و BB' که هر دو بر نیمساز Ax از زاویهٔ A عمود هستند با یکدیگر موازی می‌باشند.

تمرینات

۱۷۰ـ ضلعهای دوزاویه، یکی حاده و دیگری منفرجه نظیر به نظیر بر یکدیگر عمودند. ثابت کنید که نیمسازهای این دو زاویه با یکدیگر موازی‌هستند.

۱۷۱ـ اگر دو زاویهٔ مقابل از یك چهارضلعی قائمه باشند. نیمسازهای دوزاویهٔ دیگر با یکدیگر موازی‌اند.

۱۷۲ـ دریك مثلث متساوی‌الساقین ABC روی دوساق و ابتدا از رأسهای قاعدهٔ BC دو طول برابر BM و CN را جدا می‌کنیم. ثابت کنید که MN با قاعدهٔ BC موازی است.

۱۷۳ـ درچهارضلعی ABCD داریم که $AB = AD$ و $BC = CD$، ضلعهای مقابل‌را امتداد می‌دهیم تا در M و N متلاقی شوند. ثابت کنید که MN با BD موازی‌است.

۱۷۴ـ مثلث ABC در دایرهٔ O محاط است. قطر AD از دایره و ارتفاع CH از مثلث‌را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که BD با CH موازی است.

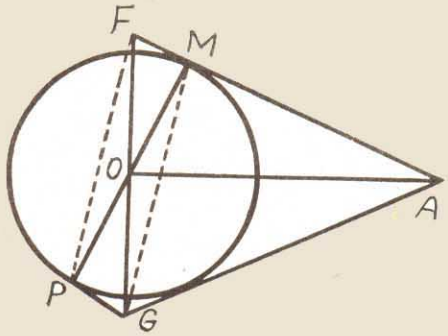
روش سوم ـ استفاده از خواص متوازی‌الاضلاع

الف ـ اگر ثابت کنیم که یك چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است نتیجه خواهیم گرفت که ضلعهای مقابل آن با یکدیگر موازی‌اند. برای اینکه ثابت کنید یك چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است کافی است که یکی از شرایط زیر را به آن محقق کنیم:

زاویه‌های روبروی آن برابر باشند،
زاویه‌های مجاور آن مکمل باشند،
ضلعهای روبروی آن برابر باشند،
دوضلع روبروی آن برابر و موازی باشند،

دو قطر آن منصف یکدیگر باشند.

مسئلهٔ ۳۹ـ از نقطهٔ A واقع در خارج دایرهٔ O دو مماس AM و AN را بر دایره رسم می‌کنیم، قطر MP و قطر عمود بر AO را رسم می‌کنیم که امتدادهای AM و AN را در F و G قطع می‌کند. ثابت کنید که PG با AM موازی است.



فرض: AM و AN بر O مماس‌اند
MP قطر است.
قطر FG بر AO عمود است

حکم: PG ∥ AM

اثبات ـ خطوط PF و MG را رسم می‌کنیم، چهار ـ ضلعی PFMG تشکیل می‌شود که ثابت می‌کنیم متوازی‌الاضلاع است زیرا دو قطر آن MP و FG یکدیگر را در O نصف می‌کنند برای اینکه MP که قطر دایره است در O نصف می‌شود و FG که بر AO نیمساز زاویهٔ MAN عمود است بوسیلهٔ این نیمساز ودوضلع زاویه نصف می‌شود. وقتی که چهار ضلعی مزبور متوازی‌الاضلاع باشد دوضلع مقابل آن یعنی PG و FM متوازی هستند.

تمرینات

۱۷۵ـ قطعه خط AB و نقطهٔ O در خارج آن مفروض است، اگر A'B' قرینهٔ AB نسبت به O باشد ثابت کنید که A'B' با AB و A'B با AB' موازی است.

۱۷۶ـ از نقاط تقاطع A و B دو دایره دو قاطع متوازی MAN و PBQ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که MP و NQ مساوی و موازی و MN و PQ مساوی هستند.

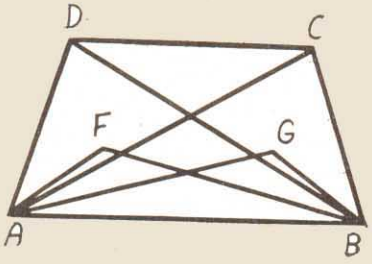
۱۷۷ـ از نقطهٔ M وسط ضلع AB از مثلث ABC خط دلخواهی رسم می‌کنیم که AC را در N قطع می‌کند و MN را درجهت از N به M به طول MP برابر با MN امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که PB با AC موازی است.

۱۷۸ـ در یك مثلث ABC میانه‌های AM و BN را رسم می‌کنیم، از N به موازات BC واز C به موازات BN رسم می‌کنیم که یکدیگر را در P قطع می‌کنند، اگر D وسط PN باشد ثابت کنید که CD با MN موازی است.

* * *

ب ـ اگر دو خط موازی باشند فاصلهٔ نقاط یکی از دیگری ثابت است و برعکس، اگر دو نقطه از یك خط به‌یك فاصله باشند خط واصل بین آنها باخط اول موازی است. از این خاصیت استفاده می‌شود برای اینکه ثابت کنیم یك چهار ـ ضلعی مستطیل (حالت خاص متوازی‌الاضلاع) است.

مسئلهٔ ۴ـ دوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD که در آن AD = BC مفروض است. قطرهای AC و BD و نیمسازهای زاویه‌های DAB و DBA را رسم می‌کنیم که در F متلاقی می‌شوند و نیمسازهای CBA و CAB را رسم می‌کنیم که در G متقاطع می‌شوند. ثابت کنید که FG با AB موازی است.



فرض:
AD = BC
زDAB = زABC
زFAD = زFAB
زGBC = زGBA
زFBA = زFBD
زGAB = زGAC

حکم: FG ∥ AB

اثبات ـ مثلثهای ABC و ABD برابرند (در حالت دوضلع و زاویهٔ بین آنها). مثلثهای FAB و GAB درضلع AB مشترك هستند، زاویه‌های FAB و GBA که هر کدام نصف زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ دوزنقه هستند نیز با هم برابرند، زاویه‌های FBA و GAB نیز باهم برابراند زیرا دو ـ زاویهٔ CAB و DBA با هم برابر بوده نیمه های آنها نیز با هم برابر خواهند بود: در نتیجه دومثلث FAB و GAB با هم برابر بوده ارتفاعهای نظیر در آنها برابر می‌باشند یعنی دو نقطهٔ F و G از ضلع AB به یك فاصله بوده بنا براین GF با AB موازی است.

دنباله در پائین صفحهٔ ۳۷

نویسندگان : ژ. گامو
م. استرن

ترجمه از فرانسه

نیکلای جوان

۲- بازی ساختمانی

خلاصهٔ داستان قبلی :

نیکلا جوانی بودکه به‌بازی شطرنج علاقهٔ بسیار داشت‌وخیلی مایل بود که در «باشگاه‌مردان شطرنج‌باز» پذیرفته شده اجازه داشته باشد با دیگر اعضای آن به بازی شطرنج بپردازد. اما اعضای قدیمی باشگاه که همه مردان مسن وجا افتاده بودند فقط به‌این دلیل که نیکلا هنوز خیلی جوان‌است از انجام تقاضای وی سرباز می‌زدند . نیکلا برای اینکه ثابت‌کند رشد فکری اش به‌اندازه‌ای هست‌که بتواند در بازیهای ماهرانهٔ شطرنج شرکت کند برای اعضای باشگاه معمایی طرح کرد که از حل آن عاجز ماندند و بعد خودش پاسخ معما را شرح داد .

یکی‌از اعضای قدیمی باشگاه که اندیشهٔ خلاق نیکلا، وی را به‌شدت تحت‌تأثیر قرار داده بود پیشنهاد کرد که نیکلا به عضویت باشگاه پذیرفته شود. اما یکی دیگر از اعضا با حدت زیاد با این پیشنهاد مخالفت‌کرد و چنین اظهار عقیده نمودکه نیکلا هنوزجوان‌است ونمی‌تواند گریبان خودرا ازبعضی‌حواس‌پرتیها یا سربه هوائیها نجات بخشد . این عضو نیکلا را تا به‌آن حد حقیرشمردکه به‌وی، پیشنهاد کرد با مکعبهای چوبی به‌بازی پرداخته خودرا سرگرم کند.

عضوحامی نیکلا متقابلا وباهمان تندی چنین پاسخ داد :

– این موضوع مرا به‌یاد مسئله‌ای انداخت‌که عبارتست از رویهم سوارکردن‌مهره‌های دومینو ، این مسئله برای‌آقایان حضار جالب خواهد بود . یکی دیگر از اعضاء در حالی‌که‌از طرح چنین مسئله‌ای قیافهٔ نفرت‌بار به‌خودگرفته بود غرولندکنان گفت‌که :

– حیف نیست‌که وقت‌خودرا دربارهٔ بازی بچگانهٔ رویهم سوارکردن دومینوها تلف‌کنیم !؟

اولی جواب داد :

– اول اجازه بدهید مسئله را مطرح‌کنم ، اگربرای‌شما آموزنده نبود آن وقت اعتراض‌کنید . این عضو مسئله را به این شرح توضیح داد :

فرض می‌کنیم هر تعداد دومینو که لازم باشد در اختیار داشته‌باشیم . می‌خواهیم با روی هم قرار دادن دومینوها ستون مایلی بسازیم‌که میل‌آن نسبت به‌سطح زمین، کوچکترین زاویهٔ ممکن باشد ، البته مختار خواهیم بود که هر دومینو را روی دومینوی قبلی به هر اندازه که مایل باشیم لغزانده کنار آن نگاهداریم ، اما باید که دومینوها روی هم مستقرشده و ستونی که تشکیل می‌شود پابرجا بماند و فرو نریزد ، حداکثر چه تعدادی از دومینو لازم است ؟

مسئله طرف توجه عده‌ای از اعضاء واقع شد و بعضی از آنها بلافاصله شروع به آزمایش کردند تامعلوم کنند ارتفاع یك‌چنین‌ستونی را تاچه اندازه‌می‌توانند بالا ببرند. نتیجهٔ همهٔ آزمایشها این بودکه حداکثر می‌توانستند یك دومینو را روی دومینوی دیگر چنان متکی کنند که نصف آن در خارج قرار بگیرد .

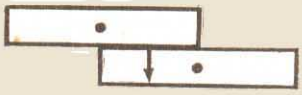
عضو حامی نیکلا درحالی‌که لبخند تمسخرآمیزی به‌لب داشت‌اظهارداشت‌که همهٔ این پاسخها نادرست است. سایراعضاء ازوی خواستندکه خودش پاسخ مسئله را بگوید وآنهارابیشتر درانتظار نگذارد. وی‌چنین پاسخ داد:

ـ نکتهٔ مهمی از نظر شامخفی مانده است، نتیجهٔ مسئله برخلاف تصور شما عدد بزرگتری خواهد بود. مایل باشید باید این عدد راحساب کنید. اعضاء باشگاه اظهار داشتند که حوصلهٔ محاسبه ندارند وتقاضا کردند که خود آن عضو پاسخ راشرح دهد. اما آن عضو روبه نیکلا کرده ازوی پرسید :

ـ توچطور ؟ دوست عزیز ؛ آیا می‌توانی این مسئله را حل کنی ؟

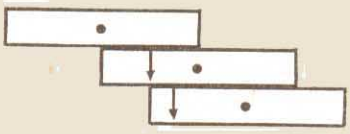
نیکلا گفت که حل مسئله را دریافته است و چنین توضیح داد :

ـ حل مسئله خیلی ساده است، می‌توانیم پابرجائی ستون را از روی ارتفاع آن قسمت به قسمت بررسی کنیم : حداکثر جلورفتگی بالا ترین دومینو نسبت به دومینوی زیر آن به اندازهٔ نصف طول دومینو است .



اکنون مرکز ثقل دو دومینوئی که به این ترتیب روی هم ودربالای ستون قرار گرفته‌اند تعیین می کنیم. هردومینو مکعب‌ـ مستطیل یکنواختی است ومرکز ثقل آن درمرکز آن می‌باشد. مرکز ثقل دستگاه دو دومینوئی که به‌شکل بالا واقع شده باشند در یك چهارم طول هردومینو ابتدا از حد داخلی قرار دارد .

برای اینکه دستگاه شامل این دو دومینو روی دومینوی سوم باحداکثر جلورفتگی پابرجا باشد باید مرکز ثقل مجموعهٔ آن بالای لبهٔ دومینوی زیرین واقع شود درنتیجه، جلورفتگی دومینوی وسط ازدومینوی زیرین برابر با یك چهارم طول یك دومینو خواهد بود .



مرکز ثقل مجموعهٔ سه دومینو (به شکل بالا) در فاصلهٔ $\frac{1}{6}$ طول یك دومینو ابتدا ازلبهٔ داخلی دومینوی زیرین قرار دارد. بنابراین وقتی این مجموعهٔ سه دومینو راروی دومینوی چهارم، باحداکثر جلورفتگی، درنظر بگیریم مقدار جلورفتگی دومینوی سوم (از بالا) ازلبهٔ دومینوی چهارم (زیرین) برابر با $\frac{1}{6}$ طول یك دومینو است .

چون استدلال رابه‌همین ترتیب ادامه دهیم معلوم خواهد شد که کل جلورفتگی وقتی که تعداد دومینوها نـامحدود باشد برابر است با :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\dots+\dots$$

که واحد طول یك دومینو می‌باشد .

یکی از اعضا که بنظر می‌رسید ریاضیدان باشد خطاب به کسی که مسئله را مطرح ساخته بود اظهار داشت :

ـ آیا استنتاج بالا ازلحاظ ریاضی درست است ؟

این یکی چنین پاسخ داد :

ـ مسلماً کـه درست است ، فرمول را می‌توانیم چنین بنویسیم :

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\dots\right)$$

آنچه داخل پرانتز واقع شده سری هـارمونیك نامیده می‌شود که یك سری واگرا است، یعنی مجموع آن ممکن است از یك عدد دلخواه بزرگتر باشد . این موضوع را خیلی ساده می‌شود محقق ساخت. سری را چنان دسته‌بندی می کنیم که مجموع هریك از دسته‌ها بزرگتر از $\frac{1}{2}$ باشد، مثلا به صورت زیر:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$

مجموع کسرهای داخل هرپرانتز از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است .

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

وبه همین ترتیب تابه آخر.

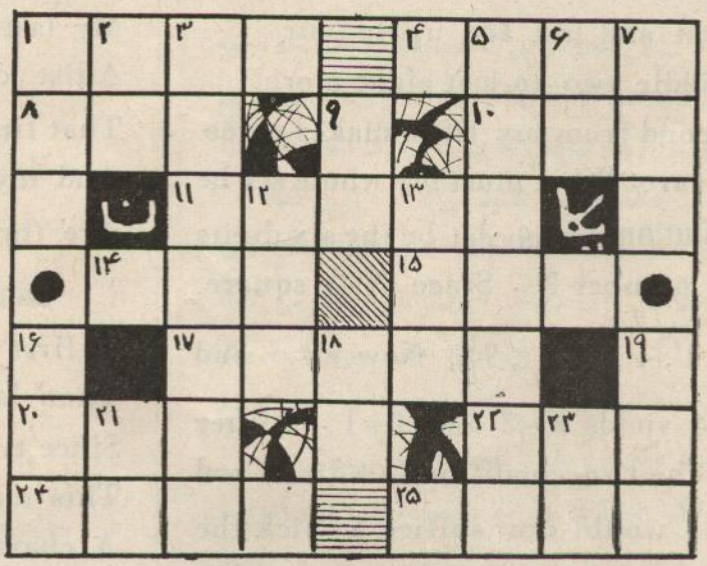
چنانچه خواسته باشید ستونی که می‌سازید به‌مقدارمعینی تمایل داشته باشد می‌توانید از روی فرمولی که نیکلا ارائـه داد تعداد لازم دومینوها را حساب کنید .

اختلاف اساسی که بین این محاسبه ومحاسبهٔ شما وجود دارد این است که شما می‌خواستید ابتدا از پائین ارتفاع ستون را حساب کنید ، اما در این محاسبه ، بالاترین دومینو مبدأ اختیار شده است و چنانچه ملاحظه کردید نتیجه بـه سادگی بدست آمد .

سرگرمی‌های ریاضی

جدول اعداد

طرح از: مسعود سمیعی، دبیرستان مهران زاهدان



افقی: ۱ـ پنج برابر عدد ۴ افقی. ۴ـ تکرار یك رقم. ۸ـ توان زوج رقم یکان عدد افقی. ۱۰ـ عددی به شکل $\overline{abc}$ که برابر است با (a^3+b^2). ۱۱ـ عدد ۳۴۱۷ که به مبنای ۶ نوشته شده باشد. ۱۴ـ CMXXXV ۱۵ـ مجذور نصف شمارهٔ دهگان عدد ۱۰ افقی. ۱۷ـ بر عدد ۲۲ افقی و بر مقطع دو رقمی عدد ۴ افقی قابل قسمت بوده مقلوب آن مضرب ده است. ۲۰ـ چون از مقلوبش کم شود رقم یکان تفاضل ۳ باشد، ۲۲ـ تفاضل آن بر عدد ۸ افقی ده برابر رقم یکانش است. ۲۴ به حساب ابجد به صورت «یغ‌قلا» نوشته می‌شود. ۲۵ـ حاصل‌ضرب مجذورات رقمهای دوم وسوم عدد ۵ قائم در هفتمین عدد اول بعداز صد.

قائم: ۱ـ ارقامش تصاعد می‌سازند ۲ـ مقلوبش جذر عدد ۸ افقی است. ۳ـ خودش ومجموع مربعات ارقامش مضرب ۹ است. ۵ـ ارقام متوالی. ۶ـ مجموع رقمهایش ۵ است. ۷ـ عدد متقارن. ۹ـ مجموع ضرایب دربسط $(a+b)^6$. ۱۲ـ ارقامش فرد و متوالی هستند. ۱۳ـ ۶۴ برابر مجموع ارقامش است. ۱۶ـ چون ۱ ازآن کم کنیم حاصل مجذور کامل باشد. ۱۸ـ مجذور مجموع رقمهای عدد ۲۴ افقی. ۱۹ـ رقمهایش همان رقمهای عدد ۲۲ افقی است. ۲۱ـ مجذور کامل است. ۲۳ـ مقلوبش جذر عدد ۲۰ افقی است.

تعیین ارقام

اگر هرحرف نمایندهٔ یك رقم درعددنویسی به‌مبنای ده باشد، ارزش حروف مربوط به‌ضرب زیررا تعیین کنید.

× ی ك ا ن
ی ك ا ن
ی ك ا ن....

بازی اعداد

خواص مشترك اعداد زیررا تعیین کنید:

۲۴۳۸۱۹۵۷۶۰
۴۷۵۳۸۶۹۱۲۰
۳۷۸۵۹۴۲۱۶۰
۴۸۷۶۳۹۱۵۲۰

پاسخ سرگرمی فکری

مربوط به یکان شمارهٔ ۳۷

۶۳۲ − ۴۱ = ۵۹۱
− − +
۴۸۱ : ۳۷ = ۱۳
۱۵۱ × ۴ = ۶۰۴

حل جدول شمارهٔ پیش

۸	۱	●	۴	۴	●
۲	●	۶	۷	۲	۶
●	۶	●	۴	۶	۲
۲	۵	۶	●	۹	●
۴	۶	۱	۴	●	۲
●	۵	۲	●	۷	۱

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(Mathematics magazine · Vol.40 , No 2)

Problem 14

My first and last add up to four
My middle two to just eight more?
My second from my fifth makes three
I'm square! What must my whole six be

Solution: Let abcdef be the six digits of the number N · Since N is square, $f \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, Now $a \neq o$ and $a+f=4$ yields $a=3$ and $f=1$ · Either one of the two conditions $c+d=12$ and $e-b=3$ would now suffice to pick the unique solution $N=337561$ among the18 entries in a table of squares that satisfy the other conditions ·

✲ ✲ ✲

The problem brought out the poetic impulses of the following solvers

R , H . Anglin , Danville , virginia

Make a square of five - eight - one
You'll have my six when you are done

Michael Goldberg Washington,D . C .

If six digits I'm to be ·
The digits in my root are three ·
Since four is sum of first and last
And nought as first can not be passed
And squares can't end in three or two
My last as one or nought might do
A list of squares will quickly show
That final nought we must forego
And my six digits , when all done
Are three three seven, five six one

Sidney Kravitz , Dover , New jersey

If first and last add up to four
Then last is nought or one , none more·
Since two or three for last can't be
This makes the first a four or three
A chart of n square now will show
That you do not have far to go ·
You take the square of five eight one
It's three three seven five six one

Herbert R . Leifer . Pittsburgh , Pennsy - Ivania

Add three to one to get the four
Add seven to five to get eight more
Take three from six and find the three
Square five eight one and all six see

Julius P . Ordona Iowa State Uuiversity

Three three, seven, five,six and one,
The number search wasn't so much fun
For tables square are always there,
But rhymes are rare for all math's care

حل مسائل نمونه

حل یك مسئله با روش استقراء ریاضی

ترجمهٔ : **مصباح جاوید** دانش آموز دبیرستان آزمون

۴۱۲۹ ـ هر خط(مستقیم نا محدود) صفحه‌را به‌دو ناحیه تقسیم می‌کند . دوخط متقاطع‌صفحه را بـه چهار ناحیه تقسیم می‌کنند . سه‌خط دوبدو متقاطع که هرسه از یك نقطه نگـذشته باشند صفحه را به هفت ناحیه تقسیم می‌کنند . تعیین کنید :

اولا n خط دو به‌دو متقاطع که از هر نقطهٔ تقاطع آنها بیش از دو خط نمی‌گذرد صفحه را به‌چند ناحیه تقسیم‌می‌کنند؟

ثانیاً ـ اگر تعداد p خط از n خط مزبور با یکدیگر موازی باشند و بقیه دو به دو متقاطع بوده از هر نقطهٔ تقاطع بیش از دوخط نگذرد ، صفحه به‌چند ناحیه تقسیم‌می‌شود ؟

ثانیاً اگر c خط از n خط‌مزبور متقارب و بقیه‌دو به‌دو متقاطع و غیر متقارب باشند تعداد نـاحیه‌های حـاصل چقدر است ؟

رابعاً ـ اگر تعدادی از خطوط متوازی و تعدادی ازآنها متقارب باشند صفحه به‌چند بخش تقسیم می‌شود ؟

حل ـ

حالت اول ـ تعداد ناحیه‌هایی راکه بوسیلهٔ n خط‌پدید می‌آید با R_n نمایش می‌دهیم : اگر خط $(n+1)$ ام را طبق شرایط‌رسم کنیم،این‌خط، n خط دیگررادر n نقطه‌قطع‌می‌کند و از $n+1$ ناحیه پدید آمده گذشته هرکدام از ناحیه‌ها را به دو ناحیهٔ جدید تقسیم می‌کند . بنابراین تعداد ناحیه‌هایی که اضافه می‌شود $(n+1)$ بوده و داریم :

$$R_{n+1}=R_n+(n+1)$$

با توجه به اینکه ؛ یك خط صفحه را به‌دو ناحیه تقسیم می‌کند، دوخط متقاطع صفحه رابه ۴ ناحیه تقسیم می‌کندو.... می‌توانیم بنویسیم :

$$R_1=2$$

$$R_2=2+2$$

$$R_3=3+2+2$$

$$R_4=4+3+2+2$$

$$R_5=5+4+3+2+2$$

.....

$$R_n=n+(n-1)+\dots+4+3+2+2$$

بنابراین چنین خواهیم داشت :

$$R_n=2+2+3+4+\dots+n$$

$$R_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

حالت دوم ـ هردوخط از n خط کـه‌بایکدیگرموازی باشند سبب می‌شودکه از تعداد ناحیه‌های مربوط به n خطدو به دو متقاطع یك عددکم شود . پس وقتی p خط از nمزبور با یکدیگر موازی باشند تعداد ناحیه‌هایی که کم می‌شودبرابر خواهد بـود بـا $\frac{p(p-1)}{2}$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$R_n=1+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{p(p-1)}{2}$$

مثلا اگر ۴ خط بکشیم که سه‌تای آنها باهم موازی‌باشند تعداد ناحیه‌های حاصل برابر است با :

$$R_4=1+\frac{4(4+1)}{2}-\frac{3(3-1)}{2}=8$$

حالت سوم ـ حالت اول را در نظر می‌گیریم . هرخط که از نقطهٔ‌تقاطع دو خط دیگر بگذرد از تعدادکل نقاط‌تقاطع یکی و همچنین از تعدادکل ناحیه‌ها نیز یك واحدکم می‌کند. بنابراین خواهیم داشت :

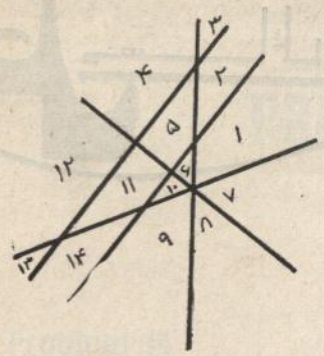
$$R_n=1+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(c-1)(c-2)}{2}$$

مثلا اگر سه‌خط متقارب را خط چهارمی قطع کند (وبا آنها متقارب نباشد) تعداد ناحیه‌های پدید آمده برابر خواهد بود با :

$$R_4 = 1 + \frac{4(4+1)}{2} - \frac{(3-1)(3-2)}{2} = 10$$

حالت چهارم ـ اگر J تعداد خطوط هر دسته خط متوازی و k تعداد خطوط هر دسته خط متقارب باشد تعداد کل ناحیه‌های حاصل از رابطهٔ زیر بدست می‌آید .

$$R_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} - \left[\frac{p_1(p_1-1)}{2} + \dots + \frac{p_j(p_j-1)}{2}\right] - \left[\frac{(c_1-1)(c_1-2)}{2} + \dots + \frac{(c_k-1)(c_k-2)}{2}\right]$$



مثال ـ در شکل بالا داریم :

$n = 5 \ , \ p_1 = 2 \ , \ c_1 = 3$

$$R_5 = 1 + \frac{5 \times 6}{2} - \frac{2 \times 1}{2} - \frac{2 \times 1}{2}$$

$R_5 = 14$

پاسخ مسئلهٔ زیر عنوان « بی آنکه عصبانی شوید ... » مندرج در یکان شمارهٔ قبل

ساعت دیواری ، یك ساعت حقیقی را ۵۸ دقیقه نشان می‌دهد . برای هریك ساعت ساعت دیواری ، ساعت پاندول دار ۶۲ دقیقه نشان می‌دهد . در نتیجه ، برای هر دقیقهٔ ساعت دیواری ، ساعت پاندول دار $\frac{62}{60}$ دقیقه و برای ۵۸ دقیقهٔ آن (یعنی برای یك ساعت حقیقی) $\frac{58 \times 62}{60}$ دقیقه‌را نشان می‌دهد.

به‌طریق مشابه معلوم خواهد شد که برای $\frac{58 \times 62}{60}$ دقیقهٔ ساعت پاندول دار (یعنی یك ساعت حقیقی) ، ساعت شماطه‌دار $\frac{58}{60} \times \frac{58 \times 62}{60}$ دقیقه‌را نشان خواهد داد و این مدت راساعت مچی برابر با :

$$\frac{58 \times 62 \times 58}{60 \times 60} \times \frac{62}{60}$$

دقیقه نشان می‌دهد که تقریباً ۵۹/۸۶ دقیقه می‌شود .

بنابراین برای یك ساعت حقیقی ، ساعت مچی به اندازهٔ ۰/۱۴ دقیقه تأخیر دارد که این تأخیر برای ۷ ساعت می‌شود $0/14 \times 7 = 0/98 \neq 1$ دقیقه . پس وقتی ساعت ساعتساز ساعت ۱۹ را نشان می‌دهد ساعت مچی ، ساعت ۱۸ و ۵۹ دقیقه‌را نشان خواهد بود .

مسائل برای حل

دانش آموزان هر کلاس می‌توانند راه حل مسائلی مربوط به‌کلاس خود راکه شمارهٔ مسئله باعلامت «★» مشخص شده است به‌ادارهٔ مجله ارسال دارند. از ارسال حل مسائل فاقد علامت ★ و همچنین از ارسال حل مسائل مربوط به‌کلاسهای پائین‌تر خودداری شود. روی ورقهٔ حل مسئله نام‌و کلاس و دبیرستان مربوط به صراحت نوشته شود.

کلاس چهارم طبیعی

۴۱۴۰ـ از کاظم حافظی

اولا ـ عبارت $8(x+1)^3$ را برحسب $y=2x-1$ مرتب کنید. ثانیاً کسر زیر را به مجموع چند کسر ساده تبدیل کنید.

$$\frac{8(x+1)^3}{(2x-1)^4}$$

۴۱۴۱ ـ به وسیلهٔ خطی (مستقیم یا منحنی و یا شکسته) مرکز یك متوازی الاضلاع را به نقطهٔ دلخواهی از محیط آن وصل می‌کنیم. خطی دیگر را چگونه رسم کنیم تا متوازی‌الاضلاع به دو قسمت متساوی تقسیم شود. مسئله را برای چه نوع شکلهایی می‌توانیم تعمیم دهیم؟

کلاس چهارم ریاضی

۴۱۴۲ ـ از مصطفی گودرزی طائمه

هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

ثابت کنید که به فرض اینکه k عددی فرد باشد خواهیم داشت:

$$\frac{1}{a^k}+\frac{1}{b^k}+\frac{1}{c^k}=\frac{1}{a^k+b^k+c^k}=$$

$$=\frac{1}{(a+b+c)^k}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^k$$

★ ۴۱۴۳ـ ترجمه از مجلهٔ «تربیت ریاضی»

a و b و c سه‌عدد نسبی بوده و دو به دو غیر متساوی می‌باشند.

۱) ثابت کنید که‌عبارت زیر همواره مخالف باصفر می‌باشد:

$$\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}$$

۲) هم ارزی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$$

۴۱۴۴ـ اولا ثابت کنید که:

$$\log_x N=\log_{x^n} N^n$$

ثانیاً از رابطهٔ زیر مقدار x را بدست آورید.

$$\log_x 5+\log_{x^2} 25+\log_{x^3} 125+\dots+$$

$$+\log_{x^n} 5^n=-2n$$

۴۱۴۵ـ ترجمه از روسی توسط: **مصطفی گودرزی طائمه**

در مثلث ABC داریم $AB=BC$. نیمسازداخلی زاویهٔ C ضلع AB رادر D قطع می‌کند خطی که از D موازی با AC رسم می‌شود ضلع BC را در E تلاقی می‌کند و خطی که در D عمود بر CD اخراج شود امتداد ضلع CA را در F قطع می‌کند. بالاخره عمودی که از B بر DE فرود آید آنرا در M تلاقی می‌کند. ثابت کنید که: $FC=4DM$.

۴۱۴۶ ـ ترجمهٔ: **آلبرت رهبان**

خطی موازی یك ضلع مثلث چنان رسم کنید که محیط ذوزنقهٔ حادث برابر مقدار معلوم l باشد بحث کنید.

کلاس پنجم طبیعی

۴۱۴۷ ـ ترجمهٔ : **مصطفی گودرزی طائمه**

مربع ABCD به‌طول ضلع a چنان واقع‌شده است که رأس A ازآن‌بر مبدأ مختصات ، ضلع AB ازآن برنیم‌محور Ox و ضلع AD از آن برنیم محور Oy قرارگرفته است . اگر M(x و y) نقطه‌ای از صفحه و :

$$P=\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2+\overline{MD}^2$$

باشد مقدار P را برحسب x و y و a مشخص کنید .

۴۱۴۸ـ A و B و C سه نقطه واقع بر یك دایرهٔ جهت دار می‌باشند . اگر A مبدأکمانها اختیار شود اندازهٔ کلی کمانهایی که انتهای آنها نقطهٔ C باشد برابر با :

$$2k\pi+\frac{2\pi}{3}$$

خواهد بود . اما اگر B مبدأکمانها اختیار شود اندازهٔ کلی کمانهای به منتهای C عبارت می‌شود از : $2k'\pi+\frac{\pi}{3}$

اولااندازهٔ کلی کمانهایی رابنویسید که‌ابتدای‌آنها بر A وانتهای آنها بر B واقع است . ثانیاً اگر A' و B' و C' به ترتیب قرینه‌های نقاط A و B و C نسبت به مرکزدایره باشد نوع شش ضلعی ABCA'B'C' را معین کرده اندازهٔ کلی کمانهایی رابنویسید که‌مبدأهمهٔ آنها A وانتهای آنها بریکی ازرأسهای شش ضلعی مزبور واقع باشد .

کلاس پنجم ریاضی

✻ ۴۱۴۹ ـ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر مفروض است :

$$(E)\quad x^2-3mx+mp-1=0$$

که درآن x مجهول بوده‌و m و p دوپارامترمی‌باشند.

۱) اگر α عدددلخواهی باشد مقادیر m و p راچنان تعیین کنید که ریشه‌های معادلهٔ (E) عبارت باشند از $\alpha-1$ و $2\alpha+1$

۲)مقادیرm و p را چنان تعیین کنید که دو مقدار:

$\alpha-1$ و $2\alpha+1$ ،

در معادلهٔ (E)صدق کنند . توضیح دهید که چرا برای دوحالت (۱)و(۲) جوابهای یکسان بدست‌نمی‌آید. اگر به‌جای مقادیر $\alpha-1$ و $2\alpha+1$ به‌ترتیب مقادیر : α^2-1 و $2\alpha^2+1$ اختیار شود چه وضعی پیش خواهد آمد ؟

✻ ۴۱۵۰ ـ ترجمه از فرانسه :

با فرض $x+y=a$ حدود تغییرات عبارت زیر را تعیین کنید :

$$\frac{x^3+2xy^2+3y^3}{x^2+y^2}$$

۴۱۵۱ ـ فرستنده : **مسعود معتمدی** ، آبادان

اگر داشته باشیم :

$$p=1+\sin^2\alpha \quad و \quad q=1+\cos^2\alpha$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$2(p^3+q^3)+9q^2=27(1+\cos^4\alpha)$$

۴۱۵۲ـ ترجمه از فرانسه

چهار نقطهٔ A و B و C و D غیر واقع در یك صفحه مفروض اند . اگر I_1 و I_2 و I_3 و I_4 به ترتیب مرکزهای دایره‌های محاطی‌داخلی مثلثهای BCD ، CDA ، DAB و ABC باشد به‌فرض اینکه چهار خط AI_1 و BI_2 و CI_3 و DI_4 در یك‌نقطهٔ I متقارب‌باشند چه رابطه‌ای بین طولهای قطعه خطهای واصل بین نقاط A و B و C و D برقرار خواهد بود ؟

کلاس ششم طبیعی

۴۱۵۳ ـ در تابع :

$$y=2\cos(ax-\frac{\pi}{3})$$

مقدار a را چنان‌تعیین کنید که منحنی نمایش تابع در نقطهٔ به‌طول $x=\frac{2\pi}{3}$ برخط به معادلهٔ $y+ax=1$ مماس گردد در صورتی که می‌دانیم a عددمثبت کوچکتر ازیك‌می‌باشد.

۴۱۵۴ ـ از **محمدعلی عبائیان** ، دبیرستان پهلوی بهبهان .

حاصل عبارت زیر را حساب کنید :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\sin 6x}{\sin 2x}+\dots+\frac{\sin 3nx}{\sin nx}$$
$$-\left(\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{\cos 6x}{\cos 2x}+\dots+\frac{\cos 3nx}{\cos nx}\right)$$

کلاس‌ششم ریاضی

۴۱۵۵ ـ از **محمد صادق ابریشمیان**

منحنی به معادلهٔ زیر مفروض است :

$$x^2-\lambda xy+\lambda^2x+y-1=0$$

معلوم کنید که این منحنی به ازاء چه مقادیر از λ دارای مرکز تقارن است . مختصات مرکز تقارن را برحسب λ تعیین کرده معادلهٔ مکان آنرا وقتی که λ تغییر کند بدست آورید . اگر عرض مرکز تقارن را تابع طول آن فرض کنیم مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم این تابع را حساب کنید .

۴۱۵۶ ـ از کاظم حافظی

منحنیهای (C) و (C′) به معادله‌های زیر را در نظر می‌گیریم :

$$(C)\quad : 5ax^2+y^2=5a^2+a$$

$$(C')\quad 7x^2-3y^2=4a$$

به ازاء چه‌مقادیر a این دو منحنی متقاطع هستند. مقدار a را چنان تعیین کنید که دو منحنی بایکدیگر زاویهٔ ۴۵ درجه بسازند .

*** ۴۱۵۷ ـ طرح : علی عاطفی**

تابع $y^2-2xy-1=0$ داده شده است . منحنی نمایش تغییرات این تابع از دو شاخهٔ متمایز (Γ_1) و (Γ_2) تشکیل شده است .

۱) معادلات (Γ_1) و (Γ_2) را به صورت $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بدست آورید .

۲) اگر α_1 طول نقطهٔ غیرمشخص از شاخهٔ (Γ_1) باشد ثابت کنید که روی شاخهٔ (Γ_2) نقطه‌ای به‌طول α^2 یافت می‌شود بقسمی که :

$$f'(\alpha_1)=g'(\alpha_2)$$

۳) (Γ_1) و (Γ_2) محور عرضها را به ترتیب در A_1 و A_2 قطع می‌کنند . معادلهٔ قائم بر (Γ_1) را در A_1 وقائم بر (Γ_2) را در A_2 بنویسید . ملاحظه خواهید کرد که این‌دو قائم متوازیند ، تعبیر هندسی این توازی چیست ؟

۴) قائم بر (Γ_1) در A_1 و مماسی بر (Γ_2) در A_2 یکدیگر رادر A_3 قطع می‌کنند . مختصات نقطهٔ A_3 واندازهٔ زاویهٔ $A_2A_1A_3$ را برحسب رادیان بدست آورید .

۴۱۵۸ ـ از حسن چاکری ، دبیرستان پهلوی کاشان

ثابت کنید که دو معادلهٔ زیر هم‌ارزهستند :

$$\sin 3x+\cos 3x=0$$

$$\sin 4x+\cos 2x=0$$

*** ۴۱۵۹ ـ** ترجمه از مجلهٔ «ریاضیات مقدماتی»

روی دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ M را در نظر گرفته اندازهٔ جبری کمان AM (A مبدأ کمانها) را a فرض می‌کنیم . تصاویر قائم M را بر محور کسینوسها ، x′x و بر محور سینوسها ، y′y به‌ترتیب P و Q می‌نامیم. مماسی بردایره در M عموماً غیر از حالات خاص دو محور مزبور را به‌ترتیب R و S قطع می‌کند .

۱) اگر k نقطهٔ تلاقی PQ و RS و L نقطهٔ تلاقی PS و RQ باشد مختصات نقطه‌های k و L را بر حسب a بدست آورید .

۲) مقادیری از a را تعیین کنید که در ازاء آنها :

الف ـ طول نقطهٔ k برابر با ۱ باشد .

ب ـ عرض نقطهٔ k برابر با ۱ باشد .

ج ـ نقطهٔ L به دایرهٔ به معادلهٔ زیر تعلق داشته باشد :

$$x^2+y^2=\frac{112}{169}$$

۴۱۶۰ ـ از حسن نوریان ، همدان.

مطلوبست عدد شش رقمی زیر :

$$\overline{abaaba}=1001\overline{aa}^2$$

۴۱۶۱ ـ ثابت کنید که در هردستگاه عددنویسی به‌مبنای x حاصل ضربهای عدد $x-1$ در دو عدد صحیح و مثبتی که مجموع آنها $x+1$ باشد با ارقام یکسان امابه ترتیب عکس نوشته می‌شوند .

*** ۴۱۶۲ ـ** ترجمه از مجلهٔ «ریاضیات مقدماتی»

حاملهای واحد دو محور x′Ox و y′Oy رابه ترتیب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌نامیم (واحد برای هردو محور یکی است). تصویر قائم نقطهٔ A واقع در صفحهٔ دو محور و متمایز از O را روی محور x′x به p و روی محور y′y به Q نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم :

$$\overline{OP}=a \quad و \quad \overline{OQ}=b$$

۱) حاصل‌ضربهای $\vec{OA}\cdot\vec{i}$ و $\vec{OA}\cdot\vec{j}$ را برحسب a و b بدست آورید .

۲) اگر Q′ قرینهٔ Q نسبت به O باشد، دایرهٔ PQQ′ محور x′x رادر نقطهٔ دیگر P′ قطع می‌کند، رأس چهارم متوازی‌الاضلاع P′OQB را B می‌نامیم . حاصل $\vec{OA}\cdot\vec{OB}$ راحساب کرده نتیجهٔ حاصل‌ازآن را بیان کنید .

مسائل متفرقه

*** ۴۱۶۳ ـ** ترجمهٔ از «مجلهٔ ریاضیات، آمریکا»

در رابطهٔ زیر حروف نمایندهٔ ارقام هستند و دردستگاه

به مبنای ۱۰ نوشته‌شده است ، این اعداد را بیابید :

$$COS^2+SIN^2=UNO^2$$

۴۱۶۴ ـ از مجلهٔ مزبور .

بزرگترین مقسوم‌علیه به‌فرم 2^k هریك از عددهای رشتهٔ ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۲ ، ۱۴ و ... رشتهٔ 2^2 ، 2^3 ، ۲ ، 2^2 ، ۲ و .... را تشکیل می‌دهد . جملهٔ nام این رشته را بیابید .

۴۱۶۵ـ ترجمه، فرستنده : **هراج کاراپتیان ،محمد مهدی عابدی نژاد**

اگر داشته باشیم :

$$\sin x = n \sin(\alpha - x)$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$tg\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{n-1}{n+1}tg\frac{\alpha}{2}$$

سپس معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin x = 3\sin(20^\circ - x)$$

۴۱۶۶ ـ از **سعید فرشاد**

معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید :

$$\sum_{n=0}^{n=3}(tg2^n x + cotg2^n x)=0$$

۴۱۶۷ ـ فرستنده : **مصطفی گودرزی طائمه**

مجموع زیر را بدست آورید :

$$S=\frac{2x-a}{x^2-ax+a^2}+\frac{4x^3-2a^2x}{x^4-a^2x^2+a^4}+\dots+$$
$$+\frac{2^n x^{2^n-1}-2^{n-1}x^{(2^{n-1}-1)}a^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}a^{2^n}}$$

۴۱۶۸ـ مترجم وفرستنده: **محسن هاشمی‌نژاد** :بیرستان ابن‌سینا رضائیه

مجموع زیر را حساب کنید :

$$S=\sum_{r=1}^{r=n} r(r+1)(r+2)\dots(r+k-1)$$

۴۱۶۹ ـ مترجم و فرستنده : **سعید فرشاد**

حد زیر را تعیین کنید :

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+n)}$$

۴۱۷۰ ـ از **محسن هاشمی‌نژاد** .

n عددی است صحیح و مثبت به ازاء $x>1$ صحت نامساوی زیر را محقق کنید :

$$x^{n-1}+\frac{n-1}{x}>n$$

۴۱۷۱ ـ ترجمه از «مجلهٔ ریاضیات» توسط **جعفر آقایانی چاوشی**.

ثابت کنید که در هرمثلث بین R و r شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی داخلی و اندازه‌های ارتفاعهای AD و BE و CF نامساوی (یاتساوی) زیر برقرار است .

$$AD+BE+CF<2R+5r$$

۴۱۷۲ ـ ترجمه از مجلهٔ مزبور توسط **جعفر آقایانی** .

نامساوی مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\left(\frac{\alpha+\sin\alpha}{\pi}\right)^2+\cos^4\frac{\alpha}{2}<1 \quad (-\pi<\alpha<+\pi)$$

مسائل مسابقهٔ ریاضی (ویلیام لوول) بین کانادا و ایالات متحده آمریکا

۱۹ نوامبر ۱۹۶۶ ـ مدت ۶ ساعت

مترجم و فرستنده : **فرهاد مجیدی آهی** دانشجوی دانشگاه آریا مهر

۴۱۷۳ ـ رشتهٔ (۱،۱،۱،۲،۲،...) راکه جملهٔ عمومی آن در حالتی‌که n زوج باشد به صورت $\frac{n}{2}$ و در حالتی‌که n فرد باشد به‌صورت $\frac{n-1}{2}$ نوشته می‌شوددر نظرمی گیریم.

اگر f(n) مجموع n جمله از رشتهٔ مزبور و x و y عددهای صحیح ومثبت بوده $x>y$ باشد ثابت کنید که :

$$xy=f(x+y)-f(x-y)$$

۴۱۷۴ـ اگر a و b و c اندازه‌های اضلاع ، p نصف محیط و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی یك مثلث باشد ثابت کنید که :

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}>\frac{1}{r^2}$$

۴۱۷۵ ـ به‌فرض $0 < x_1 < 1$ و

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n) \; ; \; n = 1, 2, \ldots$$

ثابت کنید که :

$$\lim_{n \to \infty} n x_n = 1$$

۴۱۷۶ ـ ثابت کنید که بعد از حذف جذر اعداد صحیح و مثبت از یك لیست اعداد ، رشتهٔ اعدادی که بدست می‌آید دارای جملهٔ عمومی به‌صورت $n + \left\{ \sqrt{n} \right\}$ می‌باشد .

مقصود از $\left\{ \sqrt{n} \right\}$ نزدیکترین عدد صحیح به $\sqrt{n}$ می‌باشد.

۴۱۷۷ ـ ثابت کنید که :

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots}}}}$$

(مسائل دیگر این مسابقه درشمارهٔ بعدی یکان درج می‌شود).

مسائل فیزیك

ترجمه و انتخاب توسط : هوشنگ شریفزاده

۴۱۷۸ ـ برای کلاسهای چهارم

خط AB را با خط‌کشی اندازه می‌گیریم که ضخامتشان ۸mm است و دو انتهای A و B را فقط بایك چشم که آن هم به فاصلهٔ ۳۰cm از خط AB واقع است با درجات خط‌کش تطبیق می‌کنیم . طولی که بر خط‌کش می‌خوانیم ۲۳/۴cm است. مقدار خطای مشاهده چقدر است ؟ طول AB چقدر است؟

۴۱۷۹ برای کلاسهای پنجم

O ، چشم ناظر OH ، در ۱/۵۸ متری سطح زمین است و ستون قائمی را که به فاصلهٔ AH = ۱۰m از ناظر قرار دارد تحت زاویهٔ ۳۰° می‌بیند . بلندی ستون را تعیین کنید (در صورت لزوم برای حل مسئله از رابطهٔ مثلثاتی :

$$tg(a - b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a\,tg\,b}$$

استفاده کنید).

۴۱۸۰ ـ قطر ظاهری بالونی به‌مرکز S و به‌قطر ۱۰ متر برای ناظر O برابر $\frac{1}{100}$ رادیان است . در صورتی که OS با امتداد افقی زاویهٔ ۳۰° بسازد ، ارتفاع بالون را ازسطح زمین پیدا کنید .

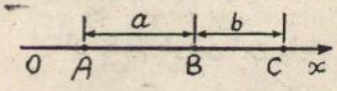
۴۱۸۱ ـ کلاس ششم ریاضی

اگر برآیند نیروهای 3p و 5p مساوی 7p باشد ، زاویهٔ بین نیروها را تعیین کنید ،

۴۱۸۲ ـ نقطه‌ای دارای دو سرعت متساوی دردو جهت معین‌است . اگر بزرگی یکی از دو سرعت نصف شود ، زاویه‌ای که جهت برآیند باجهت سرعت دیگر می‌سازد نیز نصف‌می‌شود. ثابت کنید که زاویهٔ بین دو سرعت ۱۲۰° است .

۴۱۸۳ ـ برای کلاسهای ششم ریاضی‌وطبیعی

سه نقطهٔ A و B و C واقع در روی یك محور Ox مطابق شکل مفروضند AB = a و BC = b می‌باشد. سه متحرك باسرعت‌های ثابت U و V و W اولی از A دومی از B و سومی از C در یك لحظه در جهت مثبت محور Ox شروع بحرکت‌می‌کنند



برای اینکه این سه متحرك باهم به‌یك‌نقطه برسند چه‌رابطه‌ای باید بین‌مقادیر فوق برقرار باشد. بادرنظر گرفتن این رابطه بافرض معلوم بودن U و W مقدار V را بطور ترسیمی معین کنید .

۴۱۸۴ ـ اتومبیلی که باشتاب ثابت γ برمسیری مستقیم حرکت می‌کند ، از مقابل قرارگاه پلیس راه می‌گذرد . پلیس به رانندهٔ این‌اتومبیل مظنون می‌شود و با اتومبیل خودباشتاب ثابت $\frac{4}{3}\gamma$ به تعقیب آن می‌پردازد . سرعت اتومبیل اول‌هنگامی که از یك‌چهار راه می‌گذرد u می‌باشد و سرعت اتومبیل‌پلیس در این چهارراه که ۳ ثانیه بعد به‌آن می‌رسد ، $\frac{1}{3}u$ است . پس از مدتی اتومبیل پلیس به اتومبیل فراری می‌رسد در این لحظه سرعت اتومبیل فراری ۲۷m/s و سرعت اتومبیل پلیس ۳۱m/s است. γ و u ونیز فاصلهٔ دو متحرك را دراین‌لحظه از چهار راه مذکور پیدا کنید ،

حل مسائل یکان شمارهٔ : ۳۶

۴۰۹۲ـ اگر $c>b>a>0$ و $a+b>c$ باشد ثابت کنید

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}>\frac{c}{c+1}$$

حل ـ با توجه به‌روابط داده می‌توان نوشت:

$$abc+a+b-c+2ab>0$$

این عبارت‌را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a(1+bc+b+c)+b(c+a+1+ac)-c(a+b+ab+1)>0$$

$$a(1+b)(1+c)+b(1+c)(1+a)>c(1+a)(1+b)$$

از تقسیم طرفین این رابطه بر عبارت

$$(1+a)(1+b)(1+c)>0$$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{c}{1+c}$$

۴۰۹۳ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر:

$$\frac{x^4+2ax^3+(a^2+1)x^2+2bx+b^2}{x^4+2ax^3+(a^2-1)x^2-2bx-b^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$$

حل ـ کسر فوق را ترکیب صورت و تفضیل در مخرج می‌کنیم پس از ساده کردن می‌شود:

$$\frac{(x^2+ax)^2}{(x+b)^2}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \Longrightarrow \frac{x^2+ax}{x+b}=\pm\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\beta x^2+(a\beta-\alpha)x-\alpha b=0$$

$$\Longrightarrow x=\frac{-(a\beta-\alpha)\pm\sqrt{(a\beta-\alpha)^2+4\alpha\beta b}}{2\beta}$$

$$\beta x^2+(a\beta+\alpha)x+\alpha b=0$$

$$\Longrightarrow x=\frac{-(a\beta+\alpha)\pm\sqrt{(a\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta b}}{2\beta}$$

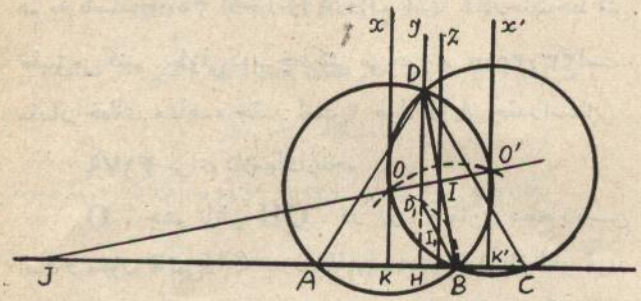
۴۰۹۴ـ روی خط Δ سه نقطهٔ A و B و C (B بین A و C) چنان انتخاب شده است که $AB=2BC=2a$ می‌باشد.

۱) اگر R طول معلومی باشد دو دایره به شعاع R و به مراکز O و O′ چنان رسم کنید که اولی بر A و B ودومی بر B و C بگذرد و O و O′ هردو در یك طرف Δ واقع باشند. بر حسب مقادیر مختلف R بحث کنید. مکان هندسی نقاط O و O′ را وقتی که R تغییر می‌کند معلوم کنید.

۲)ـ دو دایرهٔ O و O′ غیر از B در یك نقطهٔ دیگر D متلاقی می‌شوند. مکان هندسی نقطهٔ D را وقتی که R تغییر می‌کند تعیین کنید

۳) اگر J و I به ترتیب نقاط تلاقی OO′ با AC و BD باشد طول BJ را بر حسب a و BD حساب کرده وقتی R تغییر می‌کند مکان I را معلوم کنید

حل ـ به مرکز B و به شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم که عمودمنصف AB را در O و عمود منصف BC را در O′ قطع کند ودایره های مطلوب بامعلوم‌بودن مرکز وشعاع مشخص می‌شوند.



برای اینکه نقطه های O و O′ بدست آیند لازم است که:

$$R>\frac{AB}{2}=a \quad و \quad R>\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$$

مقادیری از R که در هردونامساوی بالا صدق کنند عبارتست‌از

$$R>a$$

وقتی که R از a تا $+\infty$ تغییر کند مکان O تمام نیم‌خط Kx یعنی قسمتی از عمودمنصف AB می‌باشد که‌بالای Δ واقع است ومکان O′ نیم خط O′x′ قسمتی ازعمودمنصف BC است که بالای Δ واقع بوده و انتهای پائینی آن O′

رأس مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $BC=a$ می‌باشد.

۲) زاویه‌های مجاور و مکمل ABD و CBD در دو دایرهٔ متساوی به شعاع R محاط هستند نتیجه می‌شود که کمان CBD از دایرهٔ O' با کمان AD از دایرهٔ O برابر بوده دو وتر AD و CD با هم برابر باشند. بنابر این مثلث ADC متساوی‌الساقین بوده نقطهٔ D بر عمود منصف AC یعنی بر Hy واقع است. وقتی‌که $R=a$ باشد نقطهٔ D به وضع D_1 است که نقطهٔ تلاقی دایرهٔ به قطر AB با Hy می باشد. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ D عبارتست از نیم خط D_1y

۳) OO' عمودمنصف BD است و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BIJ و BHD متشابه بوده داریم

$$\frac{BJ}{BD}=\frac{BI}{BH} \text{ و } BI=\frac{BD}{2} \text{ و } BH=\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow BJ=\frac{BD^2}{a}$$

درتجانس به مرکز B و به‌نسبت $\frac{1}{2}$ نقطهٔ I مجانس نقطهٔ D می‌باشد بنابراین مکان I نیم خطی است که در تجانس مزبور مجانس نیم D_1y است و عبارتست از نیم خط I_1Z که با D_1y موازی بوده و I_1 نقطهٔ وسط BD_1 است.

۴۰۹۵ـ بین روابط زیر x و y و z را حذف کنید

$$\begin{cases} y^2+z^2=ayz \\ z^2+x^2=bxz \\ x^2+y^2=cxy \end{cases}$$

حل ـ طرفین روابط فوق را به ترتیب بر yz و xz و xy تقسیم می‌کنیم خواهیم داشت:

$$(1)\quad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}=a \quad \text{و} \quad (2)\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=b \quad \text{و}$$

$$(3)\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=c$$

ازضرب طرفین این سه رابطه نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=abc$$

که پس از ساده‌کردن نتیجه می‌شود:

$$2+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=abc$$

و به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-4=abc$$

و با توجه به رابطه های (۱) و (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$a^2+b^2+c^2-abc=4$$

۴۰۹۶ـ اگر داشته باشیم:

$$f(x)=\frac{a^{\log x}-a^{\log\frac{1}{x}}}{a^{\log x}+a^{\log\frac{1}{x}}}$$

ثابت کنید:

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)-f(y)}{1-f(x)f(y)} \text{ و } f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

حل ـ چون درعبارتهای

$$\frac{f(x)-f(y)}{1-f(x)f(y)} \quad \text{و} \quad \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

مقادیر $f(x)$ و $f(y)$ را قرار داده و ساده کنیم نتیجه می‌شود

$$\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}=\frac{a^{\log xy}-a^{\log\frac{1}{xy}}}{a^{\log xy}+a^{\log\frac{1}{xy}}}=f(xy)$$

و به همین ترتیب صحت رابطهٔ دوم ثابت می‌شود.

۴۰۹۷ـ اگر n عدد صحیح مثبتی باشد ثابت کنید که:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

حل ـ می‌دانیم: $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ و از این نامساوی نتیجه می‌شود که

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}>\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

صورت و مخرج کسر طرف اول را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم

$$\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n+1-n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

و به طریق مشابه از نامساوی $\sqrt{n}>\sqrt{n-1}$ نتیجه می‌شود که:

$$2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}>\frac{1}{\sqrt{n}}$$

بنابراین:

$$2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}>\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}$$

۴۰۹۸- مجموع زیررا برحسب n بدست آورید

$$S_n=(11)_2+(22)_3+(33)_4+\cdots(\overline{nn})_{n+1}$$

حل-

$$S_n=(1\times2+1)+(2\times3+2)+$$
$$+(3\times4+3)+\cdots+[n(n+1)+n]$$
$$=\Sigma n^2+2\Sigma n$$

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

۴۰۹۹- مجموع زیررا برحسب n حساب کنید

$$S_n=1\times3^2+3\times5^2+5\times7^2+$$
$$+\cdots+(2n-1)(2n+1)^2$$

حل- داریم

$$1\times3^2=8(1)^3+4(1)^2-2(1)-1$$
$$3\times5^2=8(2)^3+4(2)^2-2(2)-1$$
$$5\times7^2=8(3)^3+4(3)^2-2(3)-1$$

.....

$$(2n-1)(2n+1)^2=8(n)^3+4(n)^2-2(n)-1$$

از جمع این روابط حاصل می‌شود:

$$S_n=8(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)+$$
$$+4(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-2(1+$$
$$+2+3\cdots+n)-n$$

و یا:

$$S_n=2n^2(n+1)^2+\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$
$$-n(n+1)-n$$

$$S_n=\frac{n}{3}(6n^3+16n^2+9n-4)$$

۴۱۰۰- در کره‌ای به شعاع R منشور منتظمی به‌قاعدهٔ n ضلعی چنان محاط کنید که حجم آن ماکزیمم باشد.

ثانیاً چه‌نوع منشور منتظمی محاط کنیم تا ماکزیمم‌حجم آن $2R^3$ باشد.

حل- اگر r شعاع دایرهٔ محیطی قاعدهٔ منشور یعنی شعاع مقطع صفحهٔ قاعدهٔ منشور باکره و h فاصلهٔ مرکز کره تا صفحهٔ قاعدهٔ منشور باشد (مرکز کره از صفحات دو قاعده به‌یك فاصله‌است) داریم:

$$r^2=R^2-h^2$$

S مساحت قاعدهٔ منشور برابراست با

$$S=\frac{n}{2}r^2\sin\frac{360^\circ}{n}=\frac{n}{2}(R^2-h^2)\sin\frac{360^\circ}{n}$$

V حجم منشور برابر می‌شود:

$$V=S\times2h=nh(R^2-h^2)\sin\frac{360^\circ}{n}$$

نسبت به متغیر h از تابع V مشتق می‌گیریم

$$V'=n(R^2-3h^2)\sin\frac{360^\circ}{n}$$

$$V'=0\Longrightarrow h=\frac{R\sqrt{3}}{3}:V_{Max}$$
$$=\frac{2nR^3\sqrt{3}}{9}\sin\frac{360}{n}$$

ثانیاً باید داشته باشیم

$$\frac{2nR^3\sqrt{3}}{9}\sin\frac{360^\circ}{n}=2R^3$$
$$\Longrightarrow\sin\frac{360}{n}=\frac{3\sqrt{3}}{n}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{n}<1\Longrightarrow n>3\sqrt{3}$$

و تنها مقدار قابل قبول n عبارت می‌شود از $n=6$

۴۱۰۱- اگر $f(x)$ کثیرالجمله‌ای باشد شامل قوای مثبت و صحیح x و $f'(x)$ مشتق آن باشد تابع

$$y_1=f(x)$$

$z=\frac{y_2}{y_1}$ و $y_2=f[f'(x)]$ را چنان مشخص کنید که اگر باشد داشته باشیم

$$\lim_{x\to\pm\infty}z=1 \quad \text{و} \quad \lim_{z\to\pm\infty}x=\pm1$$

حل- اگر تابع $y_1=f(x)$ نسبت به x از درجهٔ n باشد $f'(x)$ نسبت به x از درجهٔ $n-1$ و تابع

$$y_2=f[f'(x)]$$

نسبت به x از درجهٔ $n(n-1)$ خواهد بود و چون وقتی $x\to\pm\infty$ حد $\frac{y_2}{y_1}$ برابر با ۱ است بنابراین دو تابع y_2 و y_1

نسبت به x ازدرجهٔ برابر هستند پس

$$n(n-1)=n \Longrightarrow n=2$$

$$y_1=ax^2+bx+c \quad y'_1=2ax+b$$

$$y_2=a(2ax+b)^2+b(2ax+b)+c$$
$$=4a^2x^2+2ab(2a+1)x+ab^2+c$$

$$z=\frac{y_2}{y_1}=\frac{4a^2x^2+2ab(2a+1)x+ab^2+c}{ax^2+bx+c}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} x=\pm 1 \Longrightarrow [ax^2+bx+c]_{\pm 1}=0$$

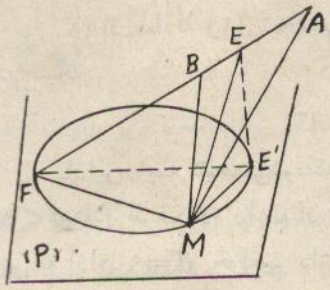
$$\Longrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a+c=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} z=1 \Longrightarrow \frac{4a^3}{a}=4a^2=1$$

$$\Longrightarrow a=\pm\frac{1}{2} \text{ و } c=\mp\frac{1}{2}$$

$$y_1=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \text{ یا } y_1=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

۴۱۰۲ـ صفحهٔ P و دو نقطهٔ A وB واقع در خارج آن مفروض‌است. مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ P را بیابید که‌نسبت فواصل آنها از A و B برابر با مقدار معلوم k باشد.



حل ـ اگر M نقطه‌ای از مکان مطلوب و E و F نقاطی باشند که قطعه خط AB را به‌نسبت k تقسیم‌می‌کنند.

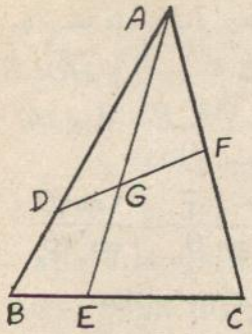
از روابط

$$\frac{AM}{BM}=k \text{ و } \frac{AE}{BF}=\frac{AF}{BF}=k$$

نتیجه می‌شود که نقاط E وF به ترتیب پای نیمسازداخلی و نیمساز خارجی زاویهٔ AMB از مثلث AMB می‌باشند و در نتیجه زاویهٔ EMF قائمه‌بوده تصویر آن بر صفحهٔ P یعنی زاویهٔ FME' نیز قائمه است. پس مکان M دایره‌ای است به قطر E'F

۴۱۰۳ـ در مثلث ABC نقاط D و E و F را به ترتیب بر اضلاع AB و BC و CA انتخاب می‌کنیم. اگر G نقطهٔ تلاقی AE و DF باشد ثابت کنید

$$\frac{DG}{FG}=\frac{AD\cdot BE\cdot AC}{AF\cdot CE\cdot AB}$$



حل ـ دو مثلث ABE و ACE و همچنین دو مثلث ADG وAGF درارتفاع مشترک هستند بنابراین نسبت مساحتهای آنها برنسبت قاعده‌های آنهامی‌باشد پس:

$$\frac{BE}{EC}=\frac{AB\cdot AE\sin\alpha}{AC\cdot AE\sin\beta}=\frac{AB\cdot\sin\alpha}{AC\sin\beta}$$

$$\frac{DG}{GF}=\frac{AD\cdot AG\sin\alpha}{AF\cdot AG\sin\beta}=\frac{AD\sin\alpha}{AF\sin\beta}$$

از رابطهٔ اول نتیجه می‌شود:

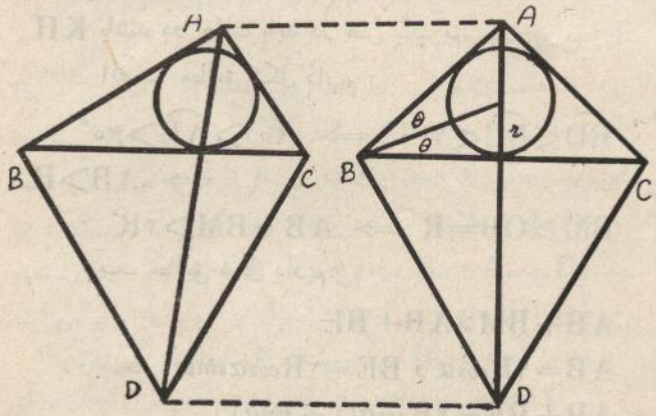
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{BE\cdot AC}{EC\cdot AB}$$

که چون در رابطهٔ دوم منظور کنیم رابطهٔ مطلوب‌بدست می‌آید.

۴۱۰۴ـ اگرIمرکز دایرهٔمحاطی داخلی مثلث ABC و r طول شعاع این دایره باشد ثابت کنید که:

$$AI+BI+CI\geqslant 6r$$

حل ـ بنا برقضیه‌ای که اثبات آن در یکی از شماره‌های یکان ارائه خواهد شد اگر P نقطه‌ای واقع در داخل مثلث ABC و BCD مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد که درخارج‌مثلث ABC واقع باشدنامساوی $AP+BP+CP\geqslant AD$ برقرار می‌باشد. فرض‌می‌کنیم که $y=\frac{AD}{r}$ و ماکزیمم آن را تعیین می‌کنیم. اگر ضلع BC و طول ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ثابت بماند ملاحظه می‌شود که AD وقتی می‌نیمم است که مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد. نصف زاویهٔ B را θ



فرض می‌کنیم خواهیم داشت:

$$y=\frac{AD}{r}=\frac{\sqrt{3}+tg2\theta}{tg\theta}$$

و

$$y=\sqrt{3}cotg\theta+\frac{2cos^2\theta}{cos2\theta}$$

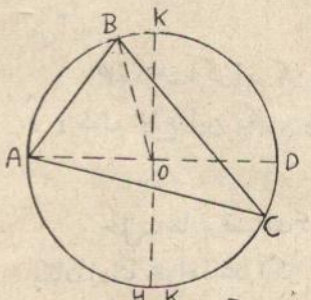
$$y'=\frac{-\sqrt{3}}{sin^2\theta}-\frac{2sin2\theta}{cos^2 2\theta}$$

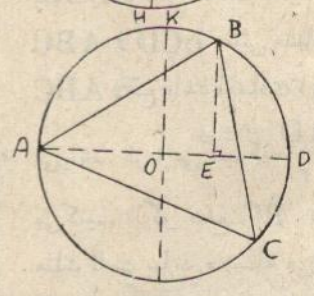
درازاء $\theta=30^\circ$ مشتق صفر شده وتابع دارای می‌نیممی برابر با ۶ می‌باشد بنابراین:

$$\frac{AD}{r}\geqslant 6 \Longrightarrow AI+BI+CI\geqslant AD\geqslant 6r$$

۴۱۰۵ـ مثلث ABC در دایرهٔ O محاط است به‌قسمی که مرکز دایره داخل مثلث واقع است. ثابت کنید که حداقل مقدار محیط مثلث می‌تواند دوبرابر قطر دایره باشد.

حل ـ چون مرکز دایرهٔ محیطی مثلث در داخل مثلث واقع است بنابراین هر سه زاویهٔ مثلث حاده بوده و در نتیجه حداقل یکی‌ازآنها کوچکتر از ۶۰ درجه و حداقل یکی ازآنها بزرگتر از ۶۰درجه (والبته کوچکتر از ۹۰درجه) می‌باشد. فرض می‌کنیم A زاویه‌ای از مثلث باشد که کوچکتر از ۶۰ درجه است در نتیجه اندازهٔ کمان BC کوچکتر از ۱۲۰° خواهد بود. قطر AD وقطر KH از دایره را عمود بر AD رسم می‌کنیم. دونقطهٔ B وC طرفین AD واقع‌اند یعنی BC و AD دریك نقطهٔ M متقاطع‌اند اما برحسب اینکه این‌دونقطه در یك طرف یاطرفین KH باشند دو حالت باید در نظر بگیریم.





الف ـ مطابق شکل داریم:

$$\widehat{BD}<\widehat{BC}<120^\circ \Longrightarrow 90^\circ>\widehat{AB}>60^\circ$$
$$\Longrightarrow AB>R$$

$$BM>OB=R \Longrightarrow AB+BM>2R$$

ب ـ مطابق شکل داریم:

$$AB+BM\geqslant AB+BE$$

$$AB=2Rcos\alpha \text{ و } BE=2Rcos\alpha sin\alpha$$

$$AB+BE=2Rcos\alpha(1+sin\alpha)$$

اگر فرض کنیم $y=cos\alpha(1+sin\alpha)$ چون از روی تعیین علامت y' تغییرات تابع را وقتی α بین صفر و ۴۵° تغییر می‌کند تعیین کنیم معلوم خواهد شد که در این فاصله می‌نیمم y برابر یك‌باشد یعنی $1\leqslant y\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$ بنابراین:

$$AB+BM\geqslant 2R$$

بوده و به همین ترتیب:

$$AC+CM\geqslant 2R$$

بوده نتیجه می‌شود که

$$AB+BC+CA\geqslant 4R$$

۴۱۰۶ـ عددی چهار رقمی چنان تعیین کنید که شرط زیر در آن صدق کند.

$$\overline{mcdu}=m+c^2+d^3+u^4$$

حل ـ باید $u>3$ باشد اگر $u=2K$ باشد نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} K=2 & u=4 \\ K=3 & u=6 \\ K=4 & u=8 \end{cases}$$

از آنجا معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\overline{mcd4}=256+m+c^2+d^3 \qquad (1)$$

$$\overline{mcd6}=1296+m+c^2+d^3 \qquad (2)$$

$$\overline{mcd8}=4196+m+c^2+d^3 \qquad (3)$$

۱) از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود که فقط $m=1$ است در نتیجه:

$$\overline{1cd4}=257+c^2+d^3$$

ازاین‌رابطه نتیجه‌می‌شودکه باید $d=9$ باشدزیرا اگر $d<9$ باشد طرف دوم رابطه از ۱۰۰۰ کوچکتر خواهد شد پس به ازاء $d=9$ خواهیم داشت:

$$\overline{1c94}=1086+c^2$$

از این معادله نتیجه می‌شودکه باید c^2 به۸ ختم شودکه امکان ندارد.

۲) از معادلهٔ ۲ نتیجه می‌شود که m یا برابر ۱ است و یا برابر ۲ است اما به ازاء $m=1$ خواهیم داشت:

$$\overline{1cd6}=1297+c^2+d^3$$

که نتیجه می‌شود $c\geqslant 2$ اما به ازاء جمیع مقادیر c از ۲ بزرگتر جواب نخواهیم داشت مگر به ازاء $c=3$ درآن صورت $d=0$ است بنابراین: $\overline{mcdu}=1306$

و به ازاء $m=2$ جواب نخواهیم داشت.

۳) در معادلهٔ (۳) باید ۵ یا۴ $m=$ باشد ولی اگرمثل بالا عمل کنیم برای c یا d جواب قابل قبول نخواهیم داشت پس معادلهٔ ۳ جواب ندارد.

حالت دوم ـ اگر $u=2K+1$ باشد نتیجه‌می‌شود که:

$$\begin{cases} K=2 & u=5 \\ K=3 \Rightarrow & u=7 \\ K=4 & u=9 \end{cases}$$

و از آنجا سه معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\overline{mcd5}=m+c^2+d^3+625 \qquad (1)$$

$$\overline{mcd7}=m+c^2+d^3+2401 \qquad (2)$$

$$\overline{mcd9}=m+c^2+d^3+6561 \qquad (3)$$

پس از بسط هریك از معادلات نتیجه می‌شود که‌دومعادلهٔ (۲) و (۳) جواب ندارند اما از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود که ۳ یا $m=2$ است. به ازاء $m=2$ خواهیم داشت:

$$\overline{2cd7}=c^2+d^3+2403$$

ازاین رابطه نتیجه می‌شود که:

$$\overline{24d7}=2419+d^3$$

d^3 باید به ۸ ختم شود و در نتیجه $d=2$ قابل قبول است

پس:

$$\overline{mcdu}=2427$$

و به ازاء بقیهٔ مقادیر c جواب نخواهیم داشت. به ازاء $m=3$ معادلهٔ (۲) جواب نخواهد داشت:

۴۱۰۷ـ به ازاء چه مقادیر n مجموع زیر مربع کامل است:

$$\sum_{k=1}^{n} k^5$$

حل این مسئله در شمارهٔ بعدی مجله زیر عنوان «حل مسائل نمونه» درج خواهد شد.

۴۱۰۸ـ ـ یك محور وروی آن یك مبدأ O و دونقطهٔ A و B باطولهای‌مثبت a و b($a<b$)داده‌شده است. براین محور دونقطهٔ I و J تعیین می‌کنیم بقسمی که:

$$\overline{OI}^2=\overline{OJ}^2=ab$$

باشد (I بین A و B) و زوجهای نقاط

$(A_1$ و $B_1)$ و $(A_2$ و $B_2)$ و ... و $(A_n$ و $B_n)$ و ...

انتخاب شده‌اندکه طولهای آنها در روابط زیر صدق می‌کنند

$$a_1=\frac{a+b}{2} \text{ و } a_2=\frac{a_1+b_1}{2} \text{ و ... و}$$

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \text{ و ...}$$

$$b_1=\frac{2ab}{a+b} \text{ و } b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1} \text{ و ... و } b_n$$

$$=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} \text{ و ...}$$

۱) نقاط A_1 و B_1 چگونه روی محور واقع شده‌اند؟ آنها را از راه ترسیم تعیین کنید وبعداز آن از راه تعمیم نوع شکل حاصل از پنج نقطهٔ O و A_{n-1} و B_{n-1} و A_n و B_n را تعیین‌کنید و از آن اوضاع نسبی نقاط A ، B ، A_1 ، B_1 ، ... ، A_n و B_n و ... را معلوم کنید.

۲) ثابت‌کنید که.

$$ab=a_1b_1=a_2b_2=\dots=a_nb_n=\dots$$

و از روی آن اوضاع نسبی زوجهای نقاط

$(A_1$ و $B_1)$ و $(A_2$ و $B_2)$ و ... و$(A_n$ و $B_n)$ ...

را نسبت به زوج (I و J) تعیین کنید و نوع تغییر مکان این نقاط را وقتی عدد صحیح n ترقی می‌کند معلوم نمائید.

۳) نامساویهای زیررا ثابت کنید.

$$a<b_1<b_2<\dots<b_n<\dots<\sqrt{ab}$$
$$<\dots<a_n<\dots<a_2<a_1<b$$

$$A_1B_1<\frac{1}{2}AB \text{ و } A_2B_2<\frac{1}{2}A_1B_1$$

$$A_nB_n<\frac{1}{2}A_{n-1}B_{n-1} \text{ و ... و}$$

و نتیجه بگیرید که:

$$A_nB_n<\frac{1}{2^n}AB$$

وقتی $n\to\infty$ حد تفاضل a_n-b_n را تعیین کرده در این حال وضع نقاط A_n و B_n را معلوم کنید.

۴) دوعدد از نوع (a_n و b_n) نسبت به $\overline{ab}$ را چه وضعی خواهند داشت؟ وبا استفاده از آن مقدار $\sqrt{2}$ راحساب کنید.

حل ـ تعیین A_1 واضح است (وسط AB)، برای‌تعیین B_1 از O مماس OT را بر دایرهٔ به قطر AB رسم‌کرده T را بر محور تصویر می‌کنیم که B_1 بدست می‌آید و چنانچه‌به مرکز O و به شعاع OT دایره‌ای رسم کنیم محور را در I و J قطع می‌کند.

به همان ترتیب که از روی A و B نقاط A_1 و B_1 تعیین شدند از روی نقاط A_1 و B_1 نقاط A_2 و B_2 بدست می‌آیند. یعنیA_2 وسط A_1B_1 و B_2 مزدوج توافقیO نسبت به A_1B_1 می‌باشد. بالاخر نتیجه خواهد شد که A_n وسط $A_{n-1}B_{n-1}$ و B_n مزدوج توافقیO نسبت‌به $A_{n-1}B_{n-1}$ می‌باشد. وقتی n ترقی‌کند نقاط A_n به سمت A میل می‌کنند در حالی‌که نقاط B_n به ترتیب از B فاصله می‌گیرند.

۲) از ضرب مقادیر a_i و b_i در یکدیگر رابطه محقق

می‌شود. این رابطه نشان می‌دهد که:

$$\overline{OI}^2 - \overline{OJ}^2 = \overline{OA_i}\cdot\overline{OB_i}$$

یعنی هرزوج نقاط (A_i و B_i) نسبت به I و J مزدوج توافقی می‌باشند و وقتی n ترقی کند نقاط A_n از سمت راست و نقاط B_n از سمت چپ به I نزدیك می‌شوند، همواره یك نقطهٔ A_i سمت راست B_i قرار دارد.

۳) از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که:

$$OA<OB_1<\dots<OB_n<\dots<OI<\dots$$
$$\dots<OA_n<\dots<OA_1<OB$$

و نامساویهای مندرج درصورت مسئله محقق می‌باشند.

داریم:

$$A_1B_1=a_1-b_1=\dots=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

$$A_1B_1-\frac{1}{2}AB=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}-\frac{b-a}{2}$$
$$=\dots=-\frac{a(b-a)}{(a+b)}<0$$

یعنی $A_1B_1<\frac{1}{2}AB$ و به همین‌ترتیب از روی A_1 و B_1 می‌توان نامساویهای دیگر رانتیجه گرفت.

$$A_nB_n<\frac{1}{2^n}AB \implies a_n-b_n<\frac{1}{2^n}(b-a)$$

نتیجه می‌شود که اگر n ترقی کند فاصلهٔ a_n-b_n یعنی A_nB_n به سمت صفر میل خواهد کرد و چون I همواره بین A_n و B_n واقع‌است و ثابت می‌باشد بنابراین I حدنقاط‌مزبور خواهد بود.

۴) با توجه به نامساویهای

$$b_n<\sqrt{ab}<a_n \text{ و } a_n-b_n<\frac{b-a}{2^n}$$

a_n و b_n مقادیرتقریبی اضافی‌و نقصانی $\sqrt{ab}$ باتقریب $\frac{b-a}{2^n}$ می‌باشند.

اگر $a=1$ و $b=2$ اختیار شود $\sqrt{ab}=\sqrt{2}$ بوده و داریم:

$$a_1=\frac{3}{2} \text{ و } b_1=\frac{4}{3} \quad , \quad \frac{4}{3}<\sqrt{2}<\frac{3}{2}$$

$$a_2=\frac{17}{12} \text{ و } b_2=\frac{24}{17} \quad , \quad \frac{24}{17}<\sqrt{2}<\frac{17}{12}$$

$$a_3=\frac{577}{408} \text{ و } b_3=\frac{816}{577} \quad , \quad \frac{816}{577}<\sqrt{2}<\frac{577}{408}$$

$$\frac{577}{408}=1/414215\dots \quad \text{و} \quad \frac{816}{577}=1/414211\dots$$

$$1/414211<\sqrt{2}<1/414216\dots$$

مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ تا ۰/۰۰۰۰۱ تقریب نقصانی برابراست با ۱/۴۱۴۲۱

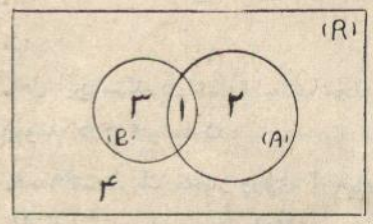
۴۱۰۹ـ یك مجموعهٔ R درنظرمی‌گیریم. اگر A زیر مجموعه‌ای از R باشد، زیر مجموعهٔ A را با $\overline{A}$ و چنانچه A محدود باشد تعداد عناصر آنرا با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

۱) مجموعهٔ R را به‌صورت یك‌مستطیل‌ودو زیر مجموعهٔ A و B را با دودایرهٔ متقاطع (A) و (B) نمایش دهید. هر یك از چهار ناحیه‌ای راکه داخل مستطیل تشکیل می‌شود با استفاده از علامتهای $\cup$ و $\cap$ بین A و B نشان دهید وثابت کنید:

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B} \text{ و } \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$$

$$(1) \quad n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

۲) سه زیر مجموعهٔ A و B و C از R را در نظر می‌گیریم و آنها را به‌صورت سه دایرهٔ دوبه‌دو متقاطع(A) و (B)و(C)داخل‌مستطیل(R) نمایش‌می‌دهیم که ناحیهٔ‌داخلی‌مستطیل را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنند. هریك از این هشت ناحیه را با استفاده از نشانه‌های اشتراك و اجتماع بین A و B و C نشان‌دهید و رابطه‌ای‌نظیررابطهٔ (۱) برای $n(A\cup B\cup C)$ بدست آورید.



حلـ مطابق‌شکل، ناحیهٔ (۱) مجموعهٔ عنصرهایی را نشان‌می‌دهدکه هم به A و هم به B یعنی به $A\cap B$ تعلق دارند. ناحیهٔ (۲) مجموعهٔ عنصرهایی رانشان می‌دهدکه به A و به $\overline{B}$ یعنی به $A\cap\overline{B}$ تعلق دارند.

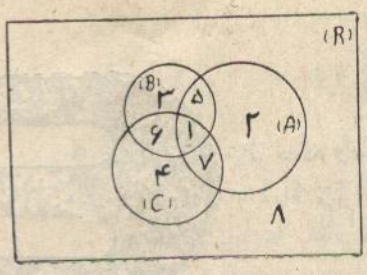
ناحیهٔ (۳)مجموعهٔ عنصرهای‌متعلق به $B\cap\overline{A}$ وبالاخره ناحیهٔ (۴)مجموعهٔ عنصرهای‌متعلق به $A\cup B$ یعنی‌متمم $A\cup B$ را نشان‌می‌دهد.

از روی شکل، روابط مطلوب به سادگی‌محقق‌می‌شوند.

تعداد عنصرهای متعلق به ناحیه‌های ۱و۲ و ۳و ۴ را به ترتیب با n_1 و n_2 و n_3 و n_4 می‌نمائیم. مشاهده‌می‌شودکه:

$$n(A\cup B)=n_2+n_3+n_1$$
$$n_2=n(A)-n_1 \text{ و } n_3=n(B)-n_1$$
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n_1$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

۲) شکل مقابل را در نظر می‌گیریم، برای هر یك از هشت ناحیه داریم:



ناحیهٔ ۱ : $A\cap B\cap C$

ناحیهٔ ۲ : $A\cap(\overline{B\cup C})$

ناحیهٔ ۳ : $B\cap(\overline{C\cup A})$

ناحیهٔ ۴ : $C\cap(\overline{A\cup B})$

ناحیهٔ ۵ : $(A\cap B)\cap\overline{C}$

ناحیهٔ ۶ : $(B\cap C)\overline{A}$

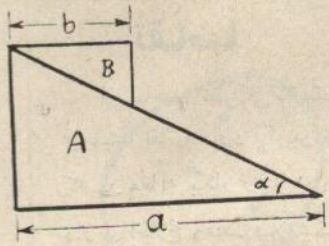
ناحیهٔ ۷ : $(C\cap A)\overline{B}$

ناحیهٔ ۸ : $\overline{A\cup B\cup C}$

چون نظیر آنچه که در قسمت (۱) عمل شد عمل کنیم خواهیم داشت:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$$
$$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+$$
$$+n(A\cap B\cap C)$$

۴۱۱۰ـ منشور همگن B روی منشور همگن A که آنهم روی سطح افقی است قرار گرفته است (مقطع دو منشور مطابق شکل مقابل است). وزن منشور A سه برابر وزن منشور B است به فرض اینکه از تماس منشورها و سطح افقی هیچگونه اصطکاکی وجود نداشته باشد طول l مقدار تغییر مکان منشور A را روی سطح افقی تعیین کنید وقتی که B لیز می‌خورد و به پائین می‌رسد.



حل ـ چون مرکز ثقل دستگاه روی محور xها حرکت نمی‌کند می‌توان نوشت:

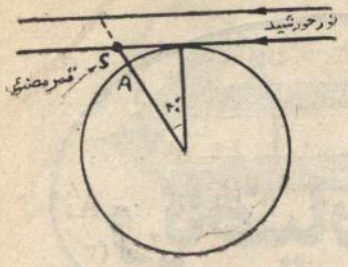
$$P_A\cdot l_A+P_B\cdot l_B=0 \quad \text{و} \quad P_A=3P_B$$

l_B مقدار مسافتی است که P_B روی محور xها می‌پیماید).

$$P_A\cdot l+P_B\left(l-\frac{a-b}{\cos\alpha}\times\cos\alpha\right)=0$$

$$\Longrightarrow l=\frac{a-b}{4}$$

۴۱۱۱ـ قمر مصنوعی معمولا به‌صورت یك‌شیئی نورانی در آسمان دیده می‌شود. حداقل ارتفاع قمر مصنوعی که بالای خط استوای زمین حرکت می‌کند از زمین چقدر باشد تا درست ۲ ساعت بعد از غروب آفتاب در سمت الرأس قابل رؤیت باشد طول شعاع زمین برابر است با: $6/37\times10^6 m$



حل ـ زمین در ۲۴ ساعت ۳۶۰ درجه می‌چرخد پس در دو ساعت 30° می‌چرخد.

مطابق شکل در نقطهٔ A دو ساعت بعد از غروب است. برای اینکه قمر مصنوعی دو ساعت بعد از غروب بالای سر دیده شود باید بر امتداد AS و در قسمت خط‌چین شکل باشد حداقل ارتفاعی که قمر مصنوعی باید داشته باشد برابر AS است برطبق شکل می‌توان نوشت:

$$\frac{r}{r+h}=\cos 30^\circ$$

$$h=r\frac{1-\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$h=6/37\times10^6\times\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$h=9/9\times10^5 m$$

۴۱۱۲ـ در یك عدسی همگرا کمترین فاصلهٔ بین جسم تا تصویرش چقدر است.

حل ـ داریم:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{D-p}=\frac{1}{f}$$

D فاصلهٔ بین جسم تا تصویرش می‌باشد:

$$\frac{D}{p(D-p)}=\frac{1}{f}\Longrightarrow D=\frac{p^2}{p-f}$$

برای اینکه D حداقل شود باید مشتق آن نسبت به p صفر شود:

$$D'=\frac{2p(p-f)-p^2}{(p-f)^2}=\frac{p^2-2pf}{(p-f)^2}$$

$$D'=0\Longrightarrow p=0 \quad p=2f$$

$p=0$ یعنی جسم بر عدسی منطبق باشد که در این صورت

دنباله در صفحهٔ ۶۶

ریاضیات جدید

ترجمه و تنظیم از: عبدالحسین مصحفی
با استفاده از منابع خارجی

منابع :

مقدمه بر آنالیز نوین دکتر وازگن آوانیسیان :

Exposé moderne des mathématiques élémentaires
Lucienne – FELIX

Dictionnaire raisonné de mathématiques. André WARUSFEL

Mathématiques modernes Herbert Suter

ریاضیات مقدماتی برای کلاس نهایی رشتهٔ ریاضی دبیرستانهای فرانسه تألیف :

J . COMMEAU

ریاضیات برای کلاسهای دوم (classe 5e) دبیرستانهای فرانسه تألیف :

P . PLESSIER , M . MORLET

(به خوانندگان توصیه می‌شود که قبل از مطالعهٔ این بخش ، مطالبی را که قبلا زیرعنوان «بیان جدید ریاضیات مقدماتی» درمجله چاپ شده است مطالعه فرمایند .)

تقاضا

از صاحب نظرانی که مقالهٔ زیر را مطالعه‌می‌فرمایند تقاضا دارد اگر برای اصطلاحات فرانسوی که در مقاله بکار رفته معادل فارسی مناسبی‌درنظر دارند اطلاع دهند. قبلاتشکر می‌شود .

گسترش = Application

۱- تعریف

۱/۱- دومجموعهٔ E و F را در نظر می گیریم. قانونی مانند L که نظیر هرعنصر x متعلق به E ، یك و فقط یك عنصر y متعلق به F رابدست بدهد گسترش مجموعهٔ E در، یا روی مجموعهٔ F نامیده شده به‌صورت زیر نموده می‌شود :

$$\forall x \in E \; ; \; \exists^{*} y \in F : x \xrightarrow{L} y = L(x)$$

(نشانهٔ $\exists^{*}$ یعنی : یکی و فقط یکی وجود دارد ؛ $\exists^{*}y$ یعنی یك y و فقط یك y وجود دارد).

E **مجموعهٔ حرکت**(۱) یا **مجموعهٔ تعریف** (۲) و یا **آغاز** (۳) L ، F **مجموعهٔ مقصد** (۴) یا **مجموعهٔ مقادیر** (۵) و یا **انجام** (۶) L ، y **تصویر** (۷) x توسط L نامیده می‌شود .

مجموعهٔ yها ، یعنی تصویر های x ها ، **مجموعهٔ**

۱ -Depart ۲- Definition ۳- Source ۴- Arrivée . ۵ - Valeurs ۶-But . ۷-Image

تصویر E توسط L نامیده شده به‌صورت L(E) نموده‌می‌شود

$$\left\{y = L(x)\ ;\ \forall x \in E\right\} = L(E)$$

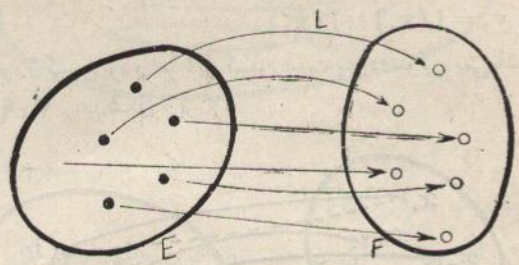
مجموعهٔ تصویریعنی L(E) زیر مجموعه‌ای است از F و ممکن است خود F باشد : $L(E) \subseteq F$، هرعنصر y متعلق به L(E) (یا به F) ممکن است فقط تصویـر یك عنصر ، و ممکن است تصویر چندین درعنصر از E باشد .

۱/۲ ـ وارونهٔ یك گسترش ـ در یك گسترش L وقتی که هر عنصر y متعلق‌به F تصویرفقط یك عنصر x متعلق به E باشد گسترشی‌وجوددارد که آغاز آن L(E) و انتهای آن E بوده ازهرعنصر F عنصری از E رابدست می‌دهد. این گسترش را وارونهٔ گسترش L نامیده و بـه صورت L^{-1} نمایش‌می‌دهند:

$$L^{-1}[L(E)] = E$$

۱/۳ - چند مثال ساده

۱ - ۱/۳ ـ محصلینی که در یك حوزهٔ امتحانی شرکت می‌کنند ملزم هستند ورقه‌های امتحانی خود را به هیئت‌ممتحنه تسلیم کنند . مجموعهٔ محصلینی‌راکه در یك حـوزهٔ امتحانی در امتحان مربوط به مادهٔ جبر شرکت کرده‌اند به عنوان مجموعهٔ حرکت(آغاز) و مجموعهٔ اوراق امتحانی این ماده را به‌عنوان مجموعهٔ مقصد (انجام) و امتحان جبر رابه‌عنوان گسترش‌اختیار می‌کنیم . برای‌این گسترش می‌توانیم شکل‌زیر را رسم کنیم .



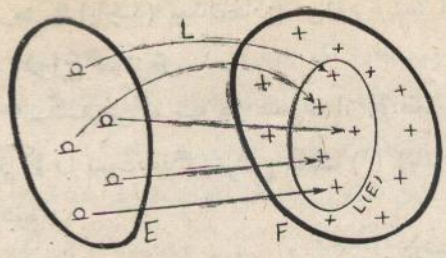
ملاحظه می‌کنیم که :

الف ـ L(E) با F برابر است .

ب ـ ازهرعنصرمتعلق به E فقط یك پیکان‌خارج می‌شود.

ج ـ به هر عنصر متعلق به F فقط‌یك پیکـان می‌رسد (هر عنصرمتعلق‌به F تصویر فقط‌یك عنصر متعلق به E می‌باشد).

۲ـ ۱/۳ـ فرض می‌کنیم که گسترش L عبارت باشد از داشتن حساب پس‌اندازدر بانك، مجموعهٔ‌صاحبان‌حساب‌پس‌انداز را آغاز و مجموعهٔ سپرده‌های بانکی(اعم از پس‌اندازوجاری‌و غیره)را انجام اختیار می‌کنیم. اگر هر نفربیش از یك‌حساب پس‌انداز نداشته‌باشد نمودار زیر را داریم و مشاهده‌می‌کنیم که :

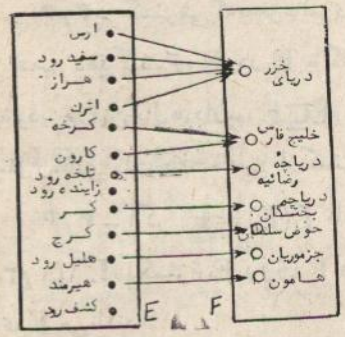


الف ـ ازهر عنصر E فقط یك‌پیکان خارج می‌شود.

ب ـ به هرعنصری‌متعلق به L(E) فقط یك‌پیکان‌می‌رسد.

ج ـ L(E) زیر مجموعه‌ای است از F : $L(E) \subset F$

۳ـ۱/۳ـ آغاز را مجموعهٔ رودخانه‌های مهم ایران و انجام را مجموعهٔ دریاچه‌ها و دریاهای داخلی یا مجاور بـه ایران اختیار می‌کنیم .



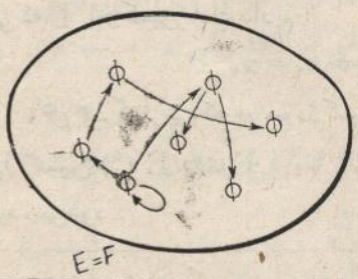
الف ـ ازهر عنصر متعلق به E فقط یك پیکان خارج‌می‌شود.

ب ـ درE عنصرهایی وجود داردکه از آنها پیکانی خارج نمی‌شود.

ج ـ به هر عنصر متعلق به F دست کم یك پیکان واصل می‌شود (هرعنصر متعلق به F تصویر یك یا چندین عنصر از E می‌باشد) .

د ـ $L(E) = F$

۴ـ ۱/۳ـ عده‌ای کودك دورهم به‌شکل حلقه می‌ایستند . از یکی‌ازآنها شروع کرده‌آنها را یك به یك تا عددی مانند n شماره می‌کنیم . آخرین نفر راکنار گذاشته از نفر بعد از آن عمل شمارش تا n را تکرار می‌کنیم . به‌این ترتیب تمام نفرات بیرون خواهند رفت . اگر E مجموعهٔ کودکانی باشدکه ابتدا حلقه تشکیل می‌دهند ، F مجموعهٔ کودکانی باشدکه کنار گذاشته می‌شوند $E = F$ خواهد بود . چنانچه‌عمل کنار گذاشتن هرفرد را گسترش L انتخاب کنیم ، L گسترش E درخودش خواهدبود. در شکل مقابل ، هر پیکان نشان می‌دهدکه عمل‌شمارش‌ازچه‌عنصری آغاز شده وبه‌کدام عنصر پایان یافته است . به‌همهٔ عنصرهاو به هرکدام فقط یك پیکان واصل‌شده است : $[L(E) = E]$ ، از



بعضی عنصرها یك(یاچند) پیکان خارج می‌شود .

۲- انواع گسترش

۲/۱ - گسترشی که بـه هر عنصری از E فقط یك عنصر ثابت y_0 از F را نسبت دهد **گسترش ثابت** (۱) (یاتابع ثابت) نامیده می‌شود ؛

$$\forall x\in E : x \underset{L}{\nearrow} y_0$$

۲/۲ - گسترشی که به‌هرعنصر از E همان عنصر را بدست دهد گسترش **کانونیك** نامیده می‌شود . در این گسترش هرعنصر تصویر خودش می‌باشد :

$$E\subset F \text{ ، } \forall x\in E : x \underset{L}{\nearrow} x = L(x)$$

مثال - تبدیل هندسی دوران به‌زاویهٔ $2k\pi$ رادیان .

۲/۳ - گسترشی که به‌هرعنصری از E عنصر دیگری از E را بدست دهد گسترش E در E یا گسترش E درخودش نامیده می‌شود . دراین‌حال‌هم‌داریم $E\subseteq F$ مانند مثال(۴-۱/۳) گسترش **کانونیك** حالت‌خاصی از گسترش E درخودش‌می‌باشد.

۲/۴ - اگر $L(E)=F$ باشد (مثال ۱-۱/۳ ومثال ۳-۱/۳)، L راگسترش E **روی** F و یا **سورژکسیون**(۳) E روی F می‌نامند :

$$\forall x\in E : \exists^* y\in F : x \underset{L}{\nearrow} y = L(x)$$

و

$$\forall y\in F : \exists x\in E : y = L(x)$$

۲/۵ - گسترشی که به‌هرعنصر متعلق به E فقط یك عنصر متعلق به F رابدست‌دهد (مثال ۱-۱/۳ و مثال ۲-۱/۳) گسترش E **در** F یا **انژکسیون** (۴) E در F نامیده می‌شود ؛دراین گسترش هرعنصر متعلق به F تصویر فقط یك‌عنصر متعلق به E می‌باشد .

در این صورت گسترش L دارای وارونهٔ L^{-1} می‌باشد؛

$$\forall x\in E : \exists^* y\in F : x \underset{L}{\nearrow} y$$

$$\forall y\in L(E)\subseteq F \text{ ، } \exists^* x\in E :$$

$$x \underset{L}{\nearrow} y = L(x) \text{ و } y \underset{L^{-1}}{\nearrow} x = L^{-1}(y)$$

وقتی که L انژکسیون است داریم :

$$L(x_1)=L(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

۲/۶ - گسترشی که هم سورژکسیون و هم انژکسیون باشد **بی‌ژکسیون** (۵) E روی F و یـا **گسترش دوسوئی** (۶) نامیده می‌شود .

$$\forall x\in E : \exists^* y\in F : x \underset{L}{\nearrow} y$$

و

$$\forall y\in F \text{ ، } \exists^* x\in E : y \underset{L^{-1}}{\nearrow} x$$

در این‌حال داریم :

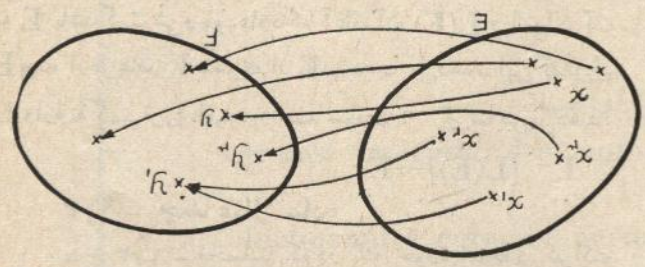
$$L(x_1)=L(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$$L(E)=F \text{ و } L^{-1}(F)=E$$

وقتی که L انژکسیون E در F باشد بی‌ژکسیون E روی $L(E)\subseteq F$ خواهد بود .

***

۲/۸ - درشکل زیر :



L گسترش به‌آغاز E و به‌انجام F می‌باشد ؛ ازهرعنصر E یك پیکان و فقط یك‌پیکان خارج‌شده است .

L یك‌سورژکسیون است زیرا به هرعنصر F اقلایك‌پیکان رسیده است و $L(E)=F$

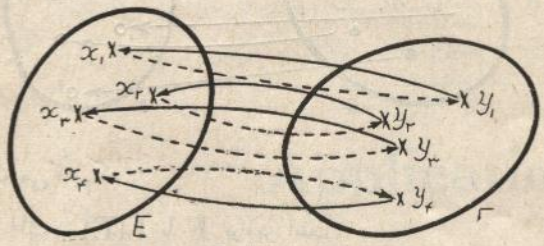
$$y_1=L(x_1)=L(x_2) \text{ ، } y_3=L(x_3) \text{ و } \ldots$$

L انژکسیون‌نیست زیرادست‌کم یك‌عنصراز مجموعهٔ انجام وجوددارد که به آن دو پیکان رسیده است :

$$y_1=L(x_1)=L(x_2)$$

L که سورژکسیون‌بوده اما انژکسیون‌نیست پس‌دوسوئی نمی‌باشد.

۲/۹ - درشکل زیر :



L سورژکسیون E روی F بوده و انژکسیون هم می‌باشد. L گسترش دو سوئی استو دارای وارونه نیز می‌باشد .

$$L(x_i)=y_i \text{ ؛ } \forall i\in\{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4\}$$

$$x_i=L^{-1}(y_i)$$

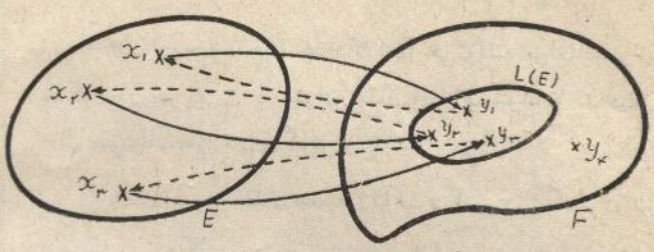
$$L(E)=F \text{ ، } L^{-1}(F)=E$$

---

۱ - Application constante ۲ - Canonique ۳ - Surjection ۴ - Injection

۵ - Bijection ۶ - Biunivoque .

۲/۱۰ـ در شکل زیر



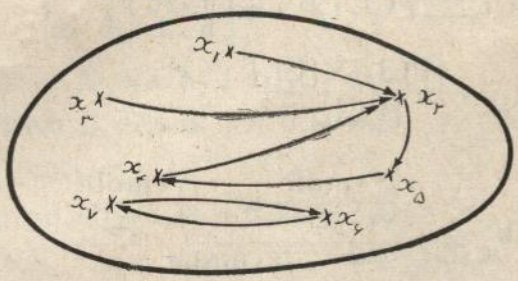
L انژکسین E در F بوده سورژکسین نمی‌باشد؛ به $y_4 \in F$ هیچ پیکانی نرسیده است. $L(E) \subset F$

L انژکسین E روی F است زیرا به‌هرعنصر $y_i \in F$ که پیکانی رسیده باشد بیش از یك پیکان نرسیده است و $L(E) \subset F$

L که سورژکسین نیست دوسوئی نیز نمی‌باشد.

به آغاز L(E) و به انجام E گسترش وارونهٔ L^{-1} وجود دارد که بی‌ژکسین L(E) روی E می‌باشد.

۲/۱۱ـ شکل زیر را در نظر می‌گیریم



L گسترش E در خودش می‌باشد. هـر عنصر E توسط L فقط یك تصویر دارد.

L سورژکسین نیست؛ عنصرهایی وجود دارد که به‌آنها پیکانی نرسیده‌است.

L انژکسین نیست؛ x_3 تصویر چندین عنصر می‌باشد.

$$x_2 = L(x_1) = L(x_3) = L(x_4)$$

تبصره ـ گسترش E درخودش اغلب معرف یك رابطه‌در E می‌باشد؛

$$x_1 R x_2 \text{ ، } x_3 R x_2 \ldots \text{ ، } x_7 R x_6$$

۲/۱۲ـ چند مثال:

۱) گسترش‌را سه برابر کردن و آغاز آن را Z مجموعهٔ اعداد صحیح نسبی انتخاب می‌کنیم.

مجموعهٔ تصویر، مجموعهٔ اعداد صحیح نسبی مضرب ۳ می‌باشد.

$$\forall x \in Z : x \searrow L \nearrow 3x : L(Z) \subset Z$$

L گسترش Z درZ است. به‌آغاز L(Z) گسترش‌وارونهٔ L^{-1} وجود دارد که ثلث‌کردن می‌باشد. برای اینکه Z انجام L^{-1} باشد آغاز آن به ناچار باید L(Z) باشد.

L انژکسین Z در خودش می‌باشد.

در این گسترش جدول اعداد متناظر به قرار زیراست:

Z	L(Z)
⋮	⋮
−۴	−۱۲
−۳	−۹
−۲	−۶
−۱	−۳
۰	۰
۱	۳
⋮	⋮
x	y=۳x

۲) فرض می‌کنیم L تقارن مرکزی و P مجموعهٔ نقاط یك صفحه آغاز گسترش باشد. در این صورت خود P انجام گسترش می‌باشد یعنی L گسترش P در P است.

L دوسوئی است زیرا هر نقطهٔ M' از P قرینهٔ نقطهٔ دیگری مانند M از P می‌باشد. و برعکس، در همین گسترش M تصویر M' خواهد بود $(L^{-1} = L)$

تمرینات:

۱ـ Z مجموعهٔ اعداد نسبی صحیح را به عنوان آغاز و گسترش Lرا که «به توان سوم رساندن» باشد اختیار کنید.

الف ـ فرمول مربوط را بنویسید.

ب ـ خواص گسترش L را شرح دهید.

ج ـ آیا گسترش وارونهٔ L^{-1} وجود دارد؟ آغاز وانجام آن‌چیست؟

۲ـ مجموعهٔ زیررا آغاز گسترش

$$E = \{۰ \text{ و } ۴ \text{ و } ۹ \text{ و } ۱۶ \text{ و } ۲۵\}$$

و فرض می‌کنیم $y = \sqrt{x}$ عبارت تابعی L باشد؛ آغاز و انجام گسترش و خواص آنرا معین کنید

۳ـ تمرین قبل وقتی‌که آغاز یکی از مجموعه های زیر باشد.

$$E_1 = \{۰ \text{ و } \frac{1}{4} \text{ و } \frac{1}{9} \text{ و } ۱۶ \text{ و } ۲۵\}$$

$$E_2 = \{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۴ \text{ و } ۹\}$$

$$E_3 = \{-۴ \text{ و } -۱ \text{ و } ۰ \text{ و } ۴ \text{ و } ۹\}$$

۴ـ تمرین مشابه با تمرین ۱ وقتی L عبارت باشد از «به توان دوم رساندن»

۵ـ اگر N مجموعهٔ اعداد طبیعی آغاز گسترش L باشد که با عبارت تابعی $y=\frac{1}{2x}$ تعریف شده باشد، مجموعهٔ انجام، مجموعهٔ تصویر L(N) و خواص L را معین کنید.

۶ـ تمرین مشابه با تمرین ۵ وقتی آغاز گسترش عبارت باشد از:

$$NU\{0\}=\{0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } \ldots\}$$

۷ـ ازمجموعه‌های اعداد کدامها می‌توانند برای گسترش مذکور در تمرین ۵ به عنوان آغاز انتخاب شوند تا در عین حال خودشان هم انجام گسترش باشند.

۸ـ مجموعهٔ نقاط صفحه راآغاز گسترش وگسترش را انتقال به بردار $\vec{v}$ انتخاب کنید. انجام گسترش و خواص و نوع آنرا معین کنید.

تصویری تشکیل نمی‌شود.

به ازاء $p=2f$ داریم:

$$D=4f$$

یعنی کمترین فاصلهٔ جسم تا تصویرش 4f است.

۴۱۱۳ـ ۱۵ گرم ارگن در °۹۰ سانتیگراد و فشار ۷۳۵ میلیمتر جیوه چه حجمی را اشغال خواهدکرد.

حل ـ

$$V=\frac{gRT}{MP}=\frac{15\times 0/0821\times 363}{39/9\times\frac{735}{760}}=11/6 \text{ لیتر}$$

طریقهٔ دیگر:

$$V_{S.T.P}=\frac{15}{39/9}\times 22/41 = 8/4 \text{ لیتر}$$

$$V_2=V_1\times\frac{T_2}{T_1}\times\frac{P_1}{P_2}$$

$$=8/4\times\frac{363\times 760}{273\times 735}=11/6 \text{ لیتر}$$

۴۱۱۴ـ مقداری PCl_5 دریك ظرف ۱۲ لیتری تا ۲۵۰ درجه‌سانتیگراد حرارت داده شد. درحالت تعادل ظرف‌محتوی ۰/۲۱ مول از PCl_5 و ۰/۳۲ مول از PCl_3 و نیز ۰/۳۲ مول از Cl_2 می‌باشد. پیداکنید ثابت تعادل را برای PCl_5 در °۲۵۰ سانتیگرادزمانی که غلظت برحسب مل درلیتر داده شده است.

حل ـ

$$PCl_5 \rightleftharpoons PCl_3 \text{ (گاز)} + Cl_2 \text{ (گاز)}$$

$$k_c=\frac{[PCl_3]\times[Cl_2]}{[PCl_5]}$$

$$k_c=\frac{\frac{0/32\,mole}{12 \text{ لیتر}}\times\frac{0/32\,mole}{12 \text{ لیتر}}}{\frac{0/21\,mole}{12 \text{ لیتر}}}$$

$$=\frac{0/32\times 0/32}{0/21\times 12}=0/041$$

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۶

نادر بزرگی ـ ساسان‌رحمتیان ـ قربانعلی‌شاهی ـ پرویز بربری ـ جواد جمشیدی ـ علی‌اصغر اسکندر بیاتی ـ مسعود حبیب‌الله‌زاده ـ عبدالعلی علیزاده ـ شهردخت محبزاده ـ بهمن کمالی ـ محمد واحدی ـ ابراهیم ذوالقدری ـ پرویز برادران میرزاکوچك ـ حسن چاکری ـ کورش مدرسی ـ سید جلیل پور رضائی ـ مهدی عطریان ـ ناصرساعی ـ یوسف عباس پور محمودفضل ـ احمدتوسلی ـ عبدالمجیدجمالی ـ زهراذوالفقاری سیدجمال آشفته ـ حسین خبازیان ـ سعید سیدمنصوری ـ یوسف عیارپور ـ سیدحسین نبوی ـ محمدعلی عبائیان ـ ماشاالله سعید علی‌اصغر فقیهی ـ محسن هاشم‌زاد ـ منصور خلیلی ـ فرامرز صارمی ـ علیرضا میرمحمد صادق ـ محمود مرتضوی مقدم ـ محمدتقی‌مقدادیان ـ سلیمان نصرت‌آبادی ـ عنایت‌الله‌قره‌خانلو غلامرضا میرزاخانی ـ اردشیر گشتاسبی ـ حجت‌الله بابائی ـ عمران تقی‌خانی ـ محمدتقی اولیائی ـ محمدرضا نادری ـ محمودنیك‌پنجه ـ عیسی‌خنانی ـ حسن گل‌محمدی ـ حسین‌شیشه‌گر

دترمینان (دنباله از صفحهٔ ۱۲)

تمرین ۱: مقادیر دترمینانهای زیر راحساب کنید.

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&4&3\\2&1&0\\-1&-2&-3\end{vmatrix}\quad D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}\quad d=\begin{vmatrix}0&1&0\\2&0&4\\5&1&0\end{vmatrix}$$

تمرین ۲: مقادیر دترمینانهای رستهٔ چهار زیر را ضمن تبدیل آنها به دترمینانهای رستهٔ ۳ و ۲ تعیین کنید:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}\quad D=\begin{vmatrix}1&4&0&1\\2&-3&1&0\\0&5&2&2\\4&3&0&1\end{vmatrix}$$

دترمینان وابسته Adjoint اگر دترمینان مثلا رستهٔ چهارم‌را نسبت به اعضای ستون اول بسط دهیم و ضرایب را A_1 و A_2 و A_3 و A_4 بنامیم‌و سپس نسبت به اعضای‌ستون دوم و سوم و چهارم نیز بسط داده ضـرائب را B و C و D بنامیم خواهیم داشت:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{vmatrix}$$

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4$$
$$\Delta=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+b_4B_4$$
$$\Delta=c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3+c_4C_4$$
$$\Delta=d_1D_1+d_2D_2+d_3D_3+d_4D_4$$

دترمینانی که‌اعضای آن A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و B_1 و ... B_4 و C_1و... C_4 و D_1و ... D_4 باشد.

$$\Delta'=\begin{vmatrix}A_1&A_2&A_3&A_4\\B_1&B_2&B_3&B_4\\C_1&C_2&C_3&C_4\\D_1&D_2&D_3&D_4\end{vmatrix}$$

قضایای مربوط به دترمینان ـ گاهی با استفاده‌از قضایای زیر که‌ناشی از خواص دترمینان است می‌توان محاسبات دترمینان را ساده‌تر و زودتر انجام داد.

قضیهٔ ۱ـ اگردریك دترمینان‌اعضای سطرهاوستونها را تعویض کنیم مقداردترمینان‌فرق نمی‌کند زیرا در نوشتن‌جملات از هرسطر و ستون یك‌عضو اختیار شده و در این تعویض اعضا فرق نکرده‌اند.

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\\alpha&\beta&\gamma\\x&y&z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&\alpha&x\\b&\beta&y\\c&\gamma&z\end{vmatrix}$$

قضیهٔ ۲ـ اگر اعضای دوستون یا دو سطر را باهم‌جمع کنیم یا ازهم کم کنیم در مقدار دترمینان تغییری حاصل‌نمی‌شود و این خاصیت از بسط دترمینان نتیجه می‌شود.

مثال:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&3\\7&6\end{vmatrix}=5\times6-7\times3=30-21=9$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}5+7&3+6\\7&6\end{vmatrix}=12\times6-9\times7=72-63=9$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}5+3&3\\7+6&6\end{vmatrix}=8\times6-13\times3=48-39=9$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}5-3&3\\7-6&6\end{vmatrix}=2\times6-1\times3=12-3=9$$

چنانکه ملاحظه می‌شود ضمن بحث جملاتی که اضافه یا کسر گردیده است به‌علت قرینه بودن حذف می‌گردند.

قضیهٔ ۳ـ اگر دریك دترمینان اعضای‌یك‌ستون را در عددی ضرب و با اعضای ستون دیگر جمع یا ازآن کم کنیم ویا اینکه همین عمل را در مورد یك سطر انجام دهیم در مقدار دترمینان‌تغییری حاصل نمی‌شود و این قضیه نیز نتیجه‌ایست از خاصیت بسط دترمینان:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&3\\7&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3\times5+3\\7&3\times7+8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3\\2\times5+7&2\times3+8\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}6\times5-3&5\\6\times7-8&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3\\10\times5+7&10\times3+8\end{vmatrix}=19$$

قضیهٔ ۴ـ اگردریك دترمینان تمام اعضای دو ستون‌یا دو سطر راعوض کنیم‌علامت دترمینان فرق می‌کند ولی‌قدرمطلق آن تغییری نمی‌نماید.

$$\begin{vmatrix}2&2&3\\0&1&2\\1&-2&-1\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}0&1&2\\2&2&3\\1&-2&-1\end{vmatrix}=-7$$

زیرا تعداد و مقادیرجمله‌ها فرق نکرده ولی‌علامت‌هریك از جملات تغییر می‌نماید.

نتیجه: اگر دو سطر یا دو ستون از یك دتـرمینان مساوی بودمقدار دترمینان صفر است زیرا در این صورت‌ضمن

تعویض دوسطر یا دوستون مساوی نتیجه می‌شود :

$$2\Delta = 0 \quad \text{یا} \quad \Delta = -\Delta$$

قضیهٔ ۵ ـ اگر اعضای یك‌سطر یایك‌ستون رادرعددی ضرب کنیم مقداردترمینان نیز در آن عدد ضرب می‌شود زیرا هریك ازجملات دترمینان دربسط درآن عددضرب‌می‌شود .

قضیهٔ۶ ـ اگر اعضای دو سطر یادو ستون از دترمینان متناسب باشند مقدار دترمینان صفر است زیرا اگر داشته‌باشیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k\alpha & k\beta & k\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = k \times 0 = 0$$

قضیهٔ ۷ـ اگر اعضای یك‌ستون یا یك سطر ازدترمینان از مجموع p عضو تشکیل شود دترمینان برابراست با مجموع p دترمینان ازهمان رسته(از بسط دترمینان نتیجه می‌شود) .

تمرین : تمام‌اعضای دترمینان Δ را در اعضای‌دترمینان Δ' وابسته به دترمینان Δضرب کنید و دترمینان‌حاصل‌راحساب کنید :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} \qquad \Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix}$$

جواب

ضمن محاسبه با استفاده از قضایای مربوط به دترمینان ثابت کنید که مقدار دترمینان وابسته برابر است با $\Delta' = \Delta^3$ (یعنی دترمینان‌به قوهٔ عددی که‌یك‌واحد ازرستهٔ دترمینان کمتر است.)

قضیهٔ ۸ ـ اگر اعدادی که ارقامشان اجزاء سطرهای دترمینان باشد برعددی قابل قسمت باشند خود دترمینان نیز برآن عدد بخش پذیر است .

مثلادترمینان‌مقابل‌بر۱۳ بخش‌پذیراست زیرا اعداد ۵۴۶ و ۲۷۳ و ۱۶۹ هر سه بر عدد۱۳ بخش پذیراند .

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

از میان نامه‌های رسیده

✿ آقای **ی سامانی** ضمن نامهٔ مفصل خود خواسته‌اند که از چاپ مسائل‌امتحانات داخلی دبیرستانها که تعدادزیادی از صفحات‌بعضی از شماره‌های یکان را می‌گیرد خودداری‌شده و به‌جای آن مطالب مفیدتری چاپ شود . ایشان همچنین خواسته‌اند راجع به ریاضیات جدید و مخصوصاً مباحثی‌از ریاضیات که تازگی داشته و درکتابهای درسی چاپ نشده است مطالب بیشتری در مجله چاپ شود .

✿ آقای **غلامحسین بهفروز** تذکر داده‌اندکه مطلب‌زیر عنوان «بی‌آنکه عصبانی شوید» مندرج در یکان شمارهٔ ۳۴ را ایشان ارسال داشته‌اند اما به نام آقای مصطفی گودرزی‌طائمه چاپ شده است .

ـ اشتباهی‌که در این مورد روی داده متوجه مسئولان یکان است و به این وسیله از آقای بهفروز معذرت خواهی می‌شود .

✱ آقایان **محمد جوادعطاری ، پرویز بربری‌و** چند نفر دیگر از دانش آموزان و علاقمندان خواسته‌اند تا مطالبی در بارهٔ رسم فنی در مجله چاپ شود و در یکان سال هم پاسخ صحیح سؤالهای رسم فنی درج گردد .

ـ همانطورکه قبلا هم وعده شده بود به زودی چاپ‌سلسله مقالاتی در بارهٔ رسم فنی‌در مجله آغاز خواهد شد .

✿ آقای **اصغر حمیدی** خواسته‌اندتا اصطلاحات‌ریاضی ومعادل **فرانسه** آنها نیزدر مجله‌چاپ شود .

● آقای **حسین خبازیان** خواسته‌اندکه در هرشماره مسائلی علامت‌گذارده شود تافقط حل‌همان مسائل ارسال شود.

ـ از این‌شماره به‌بعد به خواست آقای خبازیان توجه شده است .

✿ آقای **عنایت الله قره خانلو** فرمول تعیین مساحت مثلث را از روی طولهای سه میانهٔ آن بدست آورده و ارسال داشته‌اند .

✱ آقای **محمدواحد تهرانی** نوشته‌اندکه بهتراست راجع به هندسه و فیزیك و ریاضیات عملی مطالبی در مجله چاپ شود .

✿ آقای **محمد مهدی عابدی‌نژاد** خواسته‌اندکه کتابهای حل‌المسائل بررسی و انتقاد شده و اشتباههای موجود آنها در مجله گوشزد شود . برای دانش آموزان دورهٔ اول هم مطالبی چاپ‌شودومسابقاتی بین دانش‌آموزان صورت گیرد .

● آقایان **سعید فرشاد و محدمهدی نظیری**تذکر داده‌اندکه مسئلهٔ ۴۰۴۹ مندرج‌در یکان شمارهٔ ۳۴ دریکی از کتابهای حل‌المسائل چاپ ایران مندرج است .

نمایندگان فروش مجله و نشریات یکان

در شهرستانها

آبادان	کتابفروشی ترابی
آبادان	» عبدالله‌زاده
آباده	» گرانمایه
آمل	» امینی
اراك	» حافظ
اصفهان	» امید
اهر	نمایندگی کیهان
اهواز	کتابفروشی نوین
بابل	» تابان
بروجرد	» خیام
بجنورد	» طبری
بندرگناده	» حقیقت
بندر عباس	» نادری
بوشهر	آقای ذوالقدر لیلی
تبریز	نمایندگی کیهان
تویسرکان	آقای خدا دادی
جهرم	مطبوعاتی صرافپور
خرمشهر	کتابفروشی دهخدا
خوی	آقای حاجی حسینلو
دامغان	نمایندگی کیهان
درگز	کتابفروشی ربیع
رضائیه	» ذاکری
رشت	» طاعتی
رفسنجان	» ادب
رودسر	» کاوه
زاهدان	» شبرخ
زنجان	» زعفری
سراب	» صابرخوش خلق
ساری	» قربان پور
سقز	نمایندگی کیهان
سمنان	آقای ایزد پناه
سنندج	نمایندگی اطلاعات
سیرجان	کتابفروشی زرین
شاهرود	» داودی
شاهی	» روحانی
شبستر	نمایندگی کیهان
شمیران	کتابفروشی محمدی
شیراز	» شمشاد
شیراز	» هاشمی
قزوین	» فردوسی
قم	نمایندگی کیهان
کازرون	نمایندگی کیهان
کاشان	کتابفروشی سینا
کرج	» غلام بهزادی
کرمانشاه	آقای بهادری
گلپایگان	کتابفروشی تابان
گومیشان	نمایندگی کیهان
لاهیجان	کتابفروشی دهخدا
لشت نشاد	» توکل
لنگرود	آقای پور یکتا
مراغه	کتابفروشی بیژن
مسجد سلیمان	» مولوی
ملایر	» سپهر
میاندوآب	نمایندگی اطلاعات
نهاوند	کتابفروشی پیروز
نیشابور	» توسلی
مشهد	» برومند
همدان	» بوعلی سینا
یزد	مطبوعاتی جهان

از سایر شهرستانها که نماینده نداریم نمایندهٔ فعال و معتبر پذیرفته می‌شود .