پیام ریاضی

دورهٔ سوم ـ شمارهٔ :

۱۲

شمارهٔ مسلسل

۳۷

مردادماه ۱۳۴۶

در این شماره :

ریاضیات جدید و برنامه‌ها	عبدالحسین مصحفی	۱
بررسی کتاب مثلثات ششم ریاضی	غلامرضا عسجدی	۲
زاویه ، بنابر آخرین تعریف	ترجمه	۷
دترمینان	سید محمد کاظم نائینی	۱۱
مراحل مهم علم نجوم	ترجمه	۱۵
بی آنکه عصبانی شوید	«	۱۷
تجزیهٔ کسر به کسرهای ساده‌تر	جلیل‌الله قراگزلو	۱۸
چند نامساوی در هندسه	ترجمهٔ: جعفر آقایانی	۲۲
راهنمای حل مسائل شیمی	ترجمهٔ : بزرگ‌نیا	۲۵
سرگرمیهای ریاضی	—	۲۸
داستانهای تفننی ریاضی	ترجمه	۲۹
Problems & Solutions	—	۳۱
اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها	مهندس ارشاقی	۳۲
حل مسائل نمونه، مسئلهٔ مالفاتی	ترجمهٔ : کاراپتیان	۳۳
مسائل برای حل	—	۳۵
حل مسائل شمارهٔ ۳۵	—	۳۷
پرسش و پاسخ	—	۴۷
از میان نامه‌های رسیده	—	۴۸

بها : بیست ریال

پایان دورهٔ سوم انتشار یکان

بااین‌شماره دورهٔ سوم انتشار یکان پایان می‌یابد. درماه شهریور ، طبق معمول ، مجله منتشر نمی‌شود . اولین‌شماره از دورهٔ چهارم اوایل مهرماه تقدیم‌دوستداران خواهد شد.

بعضی تغییرات درجهت خواست خوانندگان پیش بینی شده‌که در دورهٔ چهارم معمول خواهد شد. اولین‌موضوع ازدیاد صفحات مجله است‌که اجازه خواهدداد هم‌مطالب‌متنوع بیشتری در مجله درج شود و هم تعداد مسائل برای حل افزون گردد. یك‌چهارم تعداد صفحات فعلی مجله به‌آن اضافه خواهد شد ودر مقابل به همین نسبت ، بهای تك‌شمارهٔ مجله هم زیاد می‌شود .

موضوع دوم ، ترتیب اشتراك مجله است . باترتیبی‌که فراهم آمده است از این به بعد هر دورهٔ مجلهٔ یکان شامل ده شمارهٔ عادی و یك شمارهٔ‌مخصوص (یکان‌سال)می‌باشد . ابتدای هر دوره ماه‌مهر خواهد بود ؛ سال‌مجله با سال تحصیلی مطابق می‌شود . اشتراك مجله هم برای یك دورهٔ کامل آن یعنی از ابتدای‌مهرماه هرسال‌عملی‌خواهدبود. وجه‌اشتراك‌برای هردوره ۲۰۰ ریال است که قبلادریافت می‌شود و درازای آن ده شماره ماهانه (تك‌شماره ۲۵ ریال) و یك‌شماره یکان سال برای هر مشترك ارسال‌خواهدشد. برای‌مشترکان‌فعلی یکان که‌دورهٔ‌اشتراك آنها تمام نشده‌است ، بقیهٔ مبلغی راکه باید بپردازند تا اشتراك آنها تاآخر دورهٔ‌چهارم مجله‌باشد محاسبه شده به‌اطلاع ایشان خواهد رسید .

موضوع‌ارسال‌حل مسائل به‌این‌ترتیب خواهدبودکه‌درهر شماره چند مسئله تعیین‌می‌شودکه فقط حل همین مسائل ارسال شود و نام‌کسانی‌که حل صحیح ارسال داشته باشند در دوشمارهٔ بعد اعلام می‌شود .

***

بعداز قطع چاپ ریاضیات جدید در مجله ، عدهٔ بسیاری ازخوانندگان به‌این امر اعتراض‌کردند وخواهان چاپ دنبالهٔ مطلب شدند . با کتابهای مختلف و متنوعی که در این زمینه فراهم‌آمده وانتخاب مناسبترین‌آنها ، ادامهٔ مطلب، توأم باطرح وحل مسائل ، از دورهٔ جدید مجله آغاز خواهد شد.

موضوع مصاحبهٔ با استادان و معاریف از ریاضیدانان با جدیت بیشتر دنبال شده علاوه برآن سعی‌خواهد شدکه در هر شمارهٔ مجله ، یك یا چند نفر از ریاضیدانان نامی معاصر به خوانندگان مجله معرفی شوند .

***

مطالب دیگری زیر عناوین تازه بـه مطالب مجله اضافه خواهد شد . اما بطور کلی نسبت به مطالبی‌که باید در مجله چاپ شود منتظر دریافت نظرات و پیشنهادهای خوانندگان هستیم .

آگهی نوبت اول

مجمع عمومی عادی

انجمن معلمان ریاضی ایران

هیئت مجریان انجمن معلمان ریاضی ایران بـر طبق اساسنامهٔ انجمن از عموم معلمان ریاضی دعوت می‌کند که در ساعت ۸ صبح روز جمعه ۱۰ شهریورماه برای شرکت‌درمجمع عمومی انجمن به دبیرستان شمارهٔ ۱ آذر (خیابان نادری ـ چهارراه قوام‌السلطنه ـ شمارهٔ ۳۳۳) تشریف بیاورند .

دستور جلسه :

۱) گزارش هیئت مجریان .

۲) انتخاب شورای مرکزی .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

سال‌چهارم- دورهٔ‌سوم- شمارهٔ‌دوازدهم (شمارهٔ مسلسل: ۳۷)

مرداد ۱۳۴۶

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، داود مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان هر ماه یك بار منتشر می‌گردد

نشانی اداره: تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك‌شاهرضا-شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای ۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume III , number 12 , July. 1967

subscription : $3

TEHERAN . P.O. B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

ریاضیات جدید و برنامه‌ها

اطلاعاتی که از منابع مختلف واز مطبوعات خارجی بدست می‌آید حاکی است که اجرای آزمایشی برنامهٔ «ریاضیات جدید» درکشور هایی که به این کاردست زده‌اند موفقیت‌آمیز بوده و نتایج حاصل ازآن رضایت بخش بوده است.

در این کشورها اکنون مرحلهٔ قطعی اجرای برنامه‌های جدیدآغاز می‌شود. اما درکشور ما هنوز در این‌باره‌گام قطعی و اساسی برداشته نشده است. فقط گاه‌به‌گاه زمزمه‌هایی به گوش می‌رسدکه برنامه‌های ریاضی که براساس نظام نوین آموزش و پرورش تنظیم خواهد شد ریاضیات جدید را دربر خواهد داشت.

ترجمهٔ عناوین برنامهٔ یك‌کشور پیشرفته واعلام آن به‌عنوان برنامهٔ جدید شاید کاری ساده باشد اما آنچه موفقیت یك برنامهٔ جدید را تضمین می‌کند اعتقاد مجریان برنامه، یعنی معلمان، به این برنامه و تسلط آنان در اجرای مواد آن می‌باشد.

درایران، یك‌بار برنامهٔ هندسهٔ‌دبیرستانها براساس‌پیشرفته‌ترین‌روشها تنظیم شداما اجرای‌آن با شکست مواجه شد به‌این علت‌که نسبت به‌آشنایی دبیران با این روش هیچ اقدامی انجام نگرفته بود.

اکنون هم، در اجرای برنامه‌های جدید، مخصوصاً دربارهٔ ریاضیات‌نوین، آنچه بایددر درجهٔ اول اهمیت قرارگیردآشناساختن دبیران شاغل، وتربیت‌دبیران آینده، براساس این برنامه‌ها می‌باشد.

عبدالحسین مصحفی

غلامرضا عسجدی

بررسی کتاب

مثلثات برای سال ششم ریاضی

-۲-

برای تبدیل حاصل‌ضرب سینوسها و یا کسینوسهای دو کمان به تفاضل یا مجموع ، یا تبدیل حاصل‌ضرب سینوس یك کمان در کسینوس کمان دیگر به مجموع ، از دستورهای زیر استفاده می کنند:

۶ / ۱۱/۶/۱

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

تقریباً در تمام کتابهای درسی اعم از خارجی و یا داخلی که تاکنون ملاحظه شده است بجز این کتاب مورد بحث، تبدیلات فوق را درچهار فرمول ضبط کرده‌اند . حذف فرمول چهارم به منظور رعایت اختصار جائز نیست زیرا که این عمل ارتباط و تداعی معانی ذهنی دانش‌آموزان را با عبارات نظیر :

$\cos p \pm \cos q$ و $\sin p \pm \sin q$

که به موجب چهارفرمول دیگر به‌حاصل ضرب تبدیل می‌شوند، واین فرمولها در شمارهٔ دهم فصل اول همین کتاب مورد بحث هم درج شده است ، بهم‌می‌زند . بنابراین بهتر است تبدیلات مذکور به تبعیت از سایر کتب درسی به ترتیب زیر نوشته شود :

برای تبدیل حاصل‌ضرب سینوسها یا کسینوسهای دو کمان یا حاصل‌ضرب سینوس یك کمان در کوسینوس کمان دیگر به تفاضل یا مجموع ، از دستورهای زیر استفاده می کنند :

$$\begin{cases} \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)] \end{cases}$$

بطوری که ملاحظه‌می‌شود اصلا فرمول چهارم از لحاظ سمت‌راست بافرمول سوم اختلاف دارد . اگر گفته شود با جابجا کردن a و b در فرمول سوم می‌توانیم آنرا به فرمول چهارم تبدیل نمائیم البته این حرف صحیح است درصورتی که از قضیهٔ

$\sin(-x) = -\sin x$

نیز استفاده شود . بنابراین معلوم می‌شود که اختلاف این دو فرمول در خارج از وضع خود آنها است پس نمی‌توان یکی از آنها را حذف کرد .

۷ / ۱۱/۲ / ازشمارهٔ ۱

به‌کمك جدولهای لگاریتم دو نوع مسئلهٔ زیر را می‌توان حل کرد :

مسئلهٔ اول ـ کمانی معلوم است لگاریتم خطوط مثلثاتی آن را تعیین کنید

مسئلهٔ دوم ـ لگاریتم یکی از خطوط مثلثاتی کمانی معلوم است اندازهٔ آن کمان را تعیین کنید

بیان فوق باید به ترتیب زیر تکمیل گردد :

به‌کمك جدولهای لگاریتم مثلثاتی سه نوع مسئلهٔ زیر را درمورد کمانهای بین صفر و نود درجه می‌توان حل کرد :

مسئلهٔ اول ـ کمانی معلوم است لگاریتم توابع مثلثاتی آنرا تعیین کنید

مسئلهٔ دوم ـ لگاریتم یکی از توابع مثلثاتی کمانی معلوم است اندازهٔ آن کمان را تعیین کنید

مسئلهٔ سوم ـ لگاریتم یکی از توابع مثلثاتی کمانی معلوم است لگاریتم یکی دیگر از توابع مثلثاتی آنرا بدون تعیین خود کمان بدست آورید .

توضیح ـ سفارش مؤکد نگارندهٔ این سطور توأم با درود فراوان به محضر همکاران محترم معلمان ریاضی اینست که اهتمام فرمایند تا محصلین آنها در محاسبات لگاریتم مخصوصاً به اجرای مسئلهٔ سوم عادت کنند . غالباً مشاهده شده است که مثلا اگر $\log \sin \alpha$ معلوم باشد و بخواهند به ازاء آن $\log \cos \alpha$ را از جدول استخراج نمایند قبلا خود α را تعیین سپس لگاریتم کسینوس

آنرا بدست می‌آورند . این عمل دور زدن موجب اتلاف وقت محاسبه در موقع امتحانات یامواقع عادی و اصولا نقطهٔ ضعف برای محاسب است . گاهی هم باعث عدم دقت می‌شود زیرا که در دو عمل نامبرده دو تقریب برمحاسبه تحمیل می‌شود . این تقریبها گاهی درخلاف جهت بوده همدیگر راخنثی می‌کنندو گاهی دریك جهت بوده باهم جمع می‌شوند. درصورتی که ازابتدامی‌توانیم بایك عمل ، در مقابل لگاریتم سینوس هر کمان مستقیماً لگاریتم کسینوس آنرا از جدول استخراج نمائیم . واگر این لگاریتمها عیناً درردیف اعداد مندرج درجدول موجود نباشند اختلافهارا که‌تقریباً متناسب فرض می‌شود بوسیلهٔ جدولهای میانه‌گیر

tables ، interpalation

از حاشیهٔ صفحات جدول لگاریتم جبران می‌کنیم

دانش آموزان همواره باید درمواقع لزوم از جدولهای میانه‌گیر مذکور ، عوض‌حل معمولی تناسبها ، استفاده نمایند. این‌کار موجب سرعت‌عمل و مرتب بودن ریزمحاسبات‌لگاریتمی خواهدبود . درکتاب‌مثلثات سال ششم ریاضی وهمچنین‌در کتاب مثلثات سال پنجم به این منظورها عطف توجه نشده است؛ در زیر عیناً یك‌مثال‌عددی از مثلثات ششم ریاضی برای‌مزیداطلاع دانش‌آموزان گرامی نقل می‌کنیم :

۸ / ۱۷/۲ مثال ، ازشمارهٔ۲	مثال ـ درصورتی‌که بدانیم $\log b = ۰/۳۴۹۴۸$ و $\log a = ۰/۴۷۷۱۲$ بدون محاسبهٔ a و b لگاریتم $(a+b)$ راحساب کنید .

برای حل این مثال چنین عمل شده است :

$$a+b=a(۱+\frac{b}{a})=a(۱+tg^{۲}\varphi)=\frac{a}{cos^{۲}\varphi}$$

که درآن $tg\varphi=\frac{b}{a}$ می‌باشد .

بطوری‌که درکتاب مشاهده می‌شود پس از محاسبهٔ :

$$\log tg\varphi=\log b+colog\,a=\bar{۱}/۹۳۶۱۸$$

خودکمان φ از جدول استخراج شده :

$$\varphi=۴۰\ \ ۴۸'\ \ ۱۸''$$

سپس به محاسبهٔ $\log cos\varphi$ یا $colog\,cos\varphi$ ۲ وبالاخره به‌محاسبهٔ $\log(a+b)$ اقدام شده است. درصورتی‌که ابداً به تعیین کمان φ احتیاج نبوده است . می‌توان $\log cos\varphi$ را از روی لگاریتم تانژانت آن ازصفحهٔ ۱۱۹ جدول J.Dupuis بدست‌آورد:

tg	D	cos	D'
$\bar{۱}/۹۳۶۱۸$		؟	
$\bar{۱}/۹۳۶۱۰$	۲۶	$\bar{۱}/۸۷۹۰۹$	−۱۱
$d=۸\begin{cases}+۴۳\\+۳۵\end{cases}$		$d'=-۳\begin{cases}-۱۸\\-۱۵\end{cases}$	
$\bar{۱}/۹۳۶۱۸$	پس	$\bar{۱}/۸۷۹۰۶$	

جدولهای حاشیه یا میانه‌گیری

D=۲۶		D'=−۱۱	
۱	۰/۴۳	۱	۰/۱۸
۲	۰/۸۷	۲	۰/۳۷
۳	۱/۳۰	۳	۰/۵۵
۴	۱/۷۳	۴	۰/۷۳
۵	۲/۱۷	۵	۰/۹۱
۶	۲/۶۰	۶	۱/۱۰
۷	۳/۰۳	۷	۱/۲۸
۸	۳/۴۷	۸	۱/۴۶
۹	۳/۹۰	۹	۱/۶۳

در نتیجه $colog\,cos\varphi=۰/۱۲۰۹۴$

جواب کتاب $۲colog\,cos\varphi=۰/۲۴۱۸۸$

باز مشاهده می‌شودکه در صفحهٔ ۱۲۱ کتاب مثلثات سال پنجم ریاضی یك مثال عددی حل شده وبه این نکته‌که معروض افتاد توجه نشده است . شاید خوانندگان محترم تصورفرمایند که این موضوع خیلی بی‌اهمیت است لیکن هرآموزنده و یا دانش‌آموز دقیق‌که با جدول لگاریتم و محاسبات لگاریتمی سروکار داشته است می‌داند وقتی‌که به‌ازاء $\log tg\varphi$ مثلا کمان φ را از جدول استخراج می‌کنیم . فوراً جدول را می‌بندیم ، اگر چند دقیقه پس از آن یا بلافاصله به ازاء کمان φ مثلا $\log cos\varphi$ را ازنوپیدابکنیم برای‌پیداکردن‌همان‌صفحهٔ قبلی‌باید صرف‌وقت‌کنیم. واگردرجریان‌یك سلسله‌محاسبات این‌عمل‌چند مرتبه تکرار شود اتلاف وقت‌قابل ملاحظه‌خواهد بود. درصورتی که برعکس ، اگر دراولین مرتبه‌که جدول را بازکرده‌ایم‌به ازاء لگاریتم تانژانت φ مستقیماً لگاریتم‌کسینوس آن‌رااستخراج کنیم به سرعت‌ودقت‌عمل افزوده خواهد شد . متأسفانه‌محاسبات لگاریتمی‌که از قسمتهای بسیار مهم وعملی ریاضیات بوده‌وتعلیم آن دربرنامهٔ تحصیلات دبیرستانها نیز قرار دارد درکلاسهای مربوط به خوبی تدریس نمی‌شود ، بلکه اصلا ....

علت‌آن گذشته‌ازکثرت عدهٔ دانش‌آموزان کلاسها وموانع دیگر بیشترازاین است‌که اکثر دبیرستانهای ماازنظرآموزشی موادلازم‌ومفیدضعیف بوده‌و ازنظرپرورش‌هم‌چندان تعریف‌ندارند:

شرح این هجران واین خون‌جگر
این زمان بگذار تا وقت دگر

۹ — ۶/۲۲/۲

تبدیل عبارت $a\sin x + b\cos x$ به عبارت قابل محاسبه بوسیلهٔ لگاریتم با بکاربردن زاویهٔ کمکی φ به فرض $tg\varphi = \frac{b}{a}$

به نظر اینجانب اختیار بی‌قیدوشرط ویابی‌بندوبار زاویهٔ کمکی صحیح نیست. درتمام موارد قبلا باید حدود این زاویه مشخص باشد . دراین مثال چون علامتهای a و b تعیین نشده پس باید $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ باشد.

توضیح ـ بطورکلی در تبدیلات لگاریتمی بوسیلهٔزاویهٔ کمکی، بایداین زاویه محصور و مشخص و منحصر به فرد باشد در غیر این‌صورت علاوه براینکه باعث زحمت محاسب می‌شود احیاناً ممکن است برای یك‌عبارت جوابهای مختلف بدست‌آید:

خلاصهٔ عمل کتاب در مورد تبدیل فوق‌چنین است :

$$a\sin x + b\cos x = a(\sin x + \frac{b}{a}\cos x)$$

به فرض $tg\varphi = \frac{b}{a}$ خواهیم داشت :

$$a\sin x + b\cos x = a(\sin x + tg\varphi\cos x)$$

حال اگر مقدار عبارت $a\sin x + b\cos x$ را برابربا A بنامیم پس از اختصار چنین خواهیم‌داشت :

$$A = \frac{a\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}$$

ولی چون به‌موجب متن کتاب درسی زاویهٔ φ بدون شرط اختیار شده پس :

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+tg^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

و یا :

$$\cos\varphi = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$A = \pm\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)$$

بطوری که ملاحظه می‌شود برای یك عبارت مفروض دو جواب مختلف پیداشده است ، کدام یك را انتخاب کنیم؟

برای رفع این تضاد ازاول بایددر نظربگیریم که‌زاویهٔ کمکی φ نمی‌تواندبی‌قیدوشرط باشد بلکه در هر مثال به‌تناسب موقعیت باید محصور ومقید باشد و چنانچه درآغاز بحث ذکر شد در این مثال باید $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ باشد .

در این کتاب هفت ویاهشت مرتبه برای لگاریتمی کردن عبارتها بوسیلهٔ اختیار زاویهٔ‌کمکی به همین ترتیب که‌ذکر شد اقدام‌شده ودرهیچیك ازآنها حدود زاویهٔ‌کمکی تعیین‌نگردیده است.این‌اشکال درکتاب مثلثات سال‌پنجم‌ریاضی نیزوجوددارد. برای احتراز ازتکرار مطلب از یادآوری تمام‌آنها صرف‌نظر می‌شود . فقط دقت خوانندگان صاحب نظر نکته‌سنج را به این اصل‌جلب می‌کنم که زاویهٔ‌کمکی باید محصور و مشخص‌ومنحصر به‌فردباشد. لیکن هرمحاسب درشروع محاسبه‌برای‌تعیین‌حدود مناسب زاویهٔ‌کمکی آزاداست. یعنی‌مثلا دراین مثال عوض :

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

می‌توانیم : $0 < \varphi < \pi$ هم اختیارکنیم .

۱۰ — ۷/۲۳/۲

حل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔ دوم :
$ax^2 + bx + c = 0$

حل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔ دوم که‌در این کتاب درج‌شده مطابق معمول سایر کتابهای درسی است .

لیکن نگارنده برای‌حل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔ دوم‌طریقهٔ دیگری پیشنهاد می‌کنم که شاید نسبت به طریقهٔ‌کتاب آسانتر باشد :

I ـ در حالتی‌که $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ باشد مجهول x را به این‌شکل انتخاب می‌کنیم :

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}\,tg\varphi$$

II ـ در حالتی‌که $\frac{c}{a} < 0$ باشد مجهول معادله یعنی x را به این شکل‌انتخاب می‌کنیم: $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}\,tg\varphi$

در اینجا کمان φ وظیفهٔ تغییر مجهول را بازی می‌کند و مانندطریقهٔ‌کتاب زاویهٔ‌کمکی برای‌لگاریتمی کردن‌عبارت‌نیست وچون ریشه‌های معادله ممکن است هردو مثبت و یا هردومنفی و یایکی‌مثبت ویکی دیگر منفی باشد پس‌کافی است‌کمان φ مثلا $0 < \varphi < \pi$ باشد .

مقدار x رادرمعادلهٔ درجهٔدوم:

قرار می‌دهیم‌خواهیم داشت: $ax^2 + bx + c = 0$

I ـ درحالت اول : $\Delta > 0$ چون $\sin 2\varphi = \dfrac{-2c}{b\sqrt{\dfrac{c}{a}}}$

فرض‌شده پس $|\sin 2\varphi| < 1$ خواهد بود.

II ـ در حالت دوم :

$$tg\, 2\varphi = \frac{-2c}{b\sqrt{-\dfrac{c}{a}}}$$

خواهد بود . از روی این دو رابطه قبلا φ سپس x رابوسیلهٔ جدول‌لگاریتم حساب‌خواهیم‌کرد. از آنجائی‌که درهردوحالت $0 < \varphi < \pi$ فرض شده پس $0 < 2\varphi < 2\pi$ خواهد بودو لذا برای 2φ دو جواب و برای φ دو جواب و بالاخره برای x دو جواب بدست خـواهدآمد: اگـردو جواب φ را φ_1 و φ_2 بنامیم ریشه‌های معادله درحالت اول :

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}}\, tg\varphi_1 \qquad x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}\, tg\varphi_2$$

و در حالت دوم :

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}\, tg\varphi_1 \quad و \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}\, tg\varphi_2$$

خواهند بود ملاحظه می‌شودکه روابط :

$$tg\varphi_1 tg\varphi_2 = 1 \quad و \quad tg\varphi_1 tg\varphi_2 = -1$$

در دوحالت وجود دارد . چنانچه قبلا هم‌ذکر شد این‌طـریقه بر طریقهٔ اول ترجیح دارد زیراکه‌بهتر به‌خاطر سپرده می‌شود و جنبهٔ حفظی وعملیات آن‌کمتر از طریقهٔ اول است .نگارنده این‌طریقه رابه‌دوستی که‌کتاب اختصاصی برای‌یکی‌ازدانشکده‌ها می‌نوشتند پیشنهادکرد . نامبرده آنرا پسندید ودرکتاب‌خـود واردکرد واگرچه درآن‌کتاب از اینجانب یادی نکرد معذالك مرا خوشحال گردانید . تا عقیدهٔ مؤلفین محترم‌دیگرچه باشد؟ امیدوارم دریکی‌از شماره‌های آیندهٔ مجلهٔ یکان یك مثال عددی در این قسمت به‌دانش‌آموزان عرضه‌بدارم .

تعیین‌کمانهای x که سینوس آنها برابر مقدار معلوم q $(-1 \leq q \leq +1)$ باشد .
همانطورکه در سال پنجم دیده‌ایم به‌کمك روابط مثلثاتی‌و جدولی‌که درآن خطوط‌مثلثاتی کمانها را نوشته‌اند یا جدول لگـاریتم می‌توان کمانی یافت‌که‌سینوس آن برابـر مقدار معلوم q باشد . اگر این‌کمان را α بنامیم چنین‌خواهیم داشت $\sin x = \sin\alpha$

۱۱
۱/۲۷/۳

این بیان درمورد تشخیص‌کمان α صراحت ندارد . بـه نظر اینجانب بهتر است به‌شکل زیر تغییر یابد :

تعیین کمانهای x که سینوس آنها برابر مقدار معلوم q $(-1 \leq q \leq +1)$ باشد ؛ همانطورکـه‌درسال پنجم دیده‌ایم مابین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ رادیـان فقط یك کمان وجود داردکه سینوس آن برابر q می‌باشد. این‌کمان‌را α می‌نامیم. کمان α راهم‌بوسیلهٔ‌تـرسیم هندسی وهم بوسیلهٔ محاسبه‌به‌کمك روابط مثلثاتی‌و جدولی‌که در آن توابع مثلثاتی‌کمانها را نوشته‌اند یا جدول لگاریتم می‌توان بدست‌آورد . بنابـرایـن چنین خواهیم داشت : $\sin x = \sin\alpha$

در مورد بندهای $\frac{12}{2/28/3}$ و $\frac{13}{3/29/3}$ و $\frac{14}{4/29/3}$ تعیین کمان x که‌کسینوس ، تانژانت یـا کتانژانت آن معلوم باشد برای اجتناب از طولانی شدن‌مطلب، از درج دستور متن کتاب و دستور پیشنهادی خودداری می‌شود . در این مواردهم باید تشخیص‌کمان α صراحت داشته باشد ؛ درمـوردکسینوس و کتانژانت،کمان α مابین صفر و π رادیان ودر موردتانژانت، کمان α ما بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ رادیان‌محدودومشخص‌شده‌باشد.

توضیح ـ برای مزید توجه‌دانش آموزان‌عزیز توضیح زیر را به‌این قسمت اضافه می‌کنیم :

در مقابل توابع مثلثاتی $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ و $tg\alpha$ و $cotg\alpha$ توابع مثلثاتی معکوس نیز وجود دارد ، به این معنی کـه‌اگر فرض‌کنیم $x = \sin\alpha$ باشد معکوس ایـن رابطـه چنین نوشته می‌شود : $\alpha = \arcsin x$. x یك تابع مثلثاتی ازکمـان α است وکمان α هم به‌نوبهٔ خودیك تابع مثلثاتی‌معکوس از مقدار x که محصور بین (-1) و $(+1)$ قرار دارد می‌بـاشد . بدیهی است به‌ازاء هرمقدار ازکمان α فقط یك مقداربرای x پیدا می‌شود .لیکن‌به‌ازاء هر مقدار قابل قبول x بینهایت‌جواب برای‌کمان α بـدست می‌آید : مابین تمام این مقادیر α فقط یکی را مشخص‌کرده به‌نام مقدار اصلی تـابع مثلثاتی معکوس به‌صورت $\mathrm{Arc}\sin x$ می‌نامند . دراکثرکتابهای درسی حدود مقادیر اصلی چهار تابع مثلثاتی معکوس به‌این ترتیب است :

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arc}\sin x < +\frac{\pi}{2} \quad : \quad -1 < x < 1$$

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arc}\,tg\, x < +\frac{\pi}{2}$$

$$0 < \mathrm{Arc}\cos x < \pi \quad : \quad -1 < x < 1$$

$$0 < \mathrm{Arc}\,cotg\, x < \pi$$

لیکن اگر بخواهیم در هر چهار مقدار اصلی توابع مثلثاتی معکوس کمان منفی دخالت ندهیم می‌توانیم درهر کدام‌از توابع مثلثاتی معکوس کوچکترین آنهارا که مابین صفر و ۳۶۰ درجه قرار دارد به‌نام مقدار اصلی انتخاب بکنیم . خیلی از دبیران ریاضیات به‌این روش عادت دارند . باید دانست که نتیجهٔ هردوروش درحل مسائل مربوط یکسان است .

۱۵
۶/۳۰/۳

مقصودازحل معادلهٔ مثلثاتی تعیین جوابهای آنست .

به نظراینجانب باید در این قسمت شرح زیر اضافه‌شود:

هر معادلهٔ مثلثاتی دارای‌دونوع جواب است :

جواب کلی و جوابهای خصوصی :

جواب کلی- درصورتی که‌مجهول معادله مثلا x محدود به حدودی نباشد یعنی بتواند در فاصلهٔ $[-\infty$ و $+\infty]$ تغییر کند معادلهٔ مثلثاتی به تعداد بی‌شمار جواب خواهد داشت ، که همهٔ آنها در تحت یك‌فرمول کلی که به‌نام جواب کلی موسوم‌است نوشته می‌شوند . بدیهی‌است که دراین فرمول‌یك پارامتر متغیر عدد صحیح وجود خواهد داشت که تغییرات آن جوابگوی جوابهای بی‌شمار معادله باشد .

جوابهای خصوصی - درصورتی که مجهول معادله مثلا x محدود به‌حدودی یعنی مثلا به‌صورت $\alpha<x<\beta$ باشد معادلهٔ مثلثاتی یك‌عده جواب مخصوصی خواهد داشت که شمارهٔ آنها معلوم است‌وهمهٔ آنها از جواب‌کلی به‌ازاء بعضی ازمقادیر پارامتر بدست آمده‌اند .

مثلا در معادلهٔ $\cos x=\frac{1}{2}$ جواب کلی معادله عبارت است از : $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ و اگر $\frac{9\pi}{2}<x<8\pi$ باشد جوابهای خصوصی عبارتند از :

$$\begin{cases} x_1=\frac{17\pi}{3} : k=3 & \text{به ازاء} \\ x_2=\frac{19\pi}{3} : k=3 & \text{به ازاء} \\ x_3=\frac{23\pi}{3} : k=4 & \text{به ازاء} \end{cases}$$

توضیح - درکتاب مثلثات سال پنجم‌وکتاب مثلثات‌سال ششم ریاضی‌راجع‌به‌جواب‌کلی و خصوصی معادلهٔ مثلثاتی تعریف صریح داده‌نشده است درصورتی که ضمن مسائل مختلف حل شده و یا تمرینات حل نشده زیاد به این موضوع برخورد می‌کنیم .

مطالب گاهی طوری مخلوط می‌شودکه نه تنها برای یك دانش آموز مبتدی حتی برای یك معلم قدیمی جداکردن آنها خسته کننده است . مثلا شمارهٔ ۷ از صفحهٔ ۳۴ کتاب ششم را با مثال سوم که در صفحهٔ ۳۸ به‌این موضوع آورده شده مقایسه‌فرمائید. لذا اینجانب لازم دیدم این تصریح را در قسمت جوابهای‌معادلهٔ مثلثاتی اضافه‌کنم .

۱۶
۷/۳۴/۳

حل و بحث معادلات پارامتری‌مثلثاتی یك مجهولی :

برای حل معادلات مثلثاتی یك مجهولی‌به طریقی‌که‌در شمارهٔ(۶)گفته شد عمل‌می‌کنیم. برای بحث معادلات پارامتری مثلثاتی یك مجهولی‌باید مقادیر پارامتر را به‌طریقی تعیین کنیم‌که اولا مقادیر خطوط مثلثاتی‌کمان مجهول حقیقی باشند و ثانیا اگرازحل معادله سینوس یاکسینوس‌کمان مجهول‌محاسبه‌شده باشدمقدار سینوس‌یاکسینوس حاصل محصور بین (+۱) و (-۱) باشد .

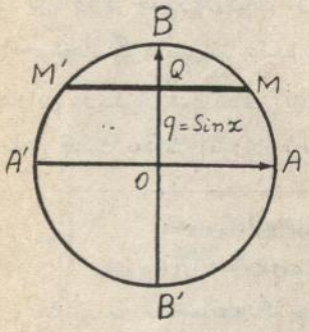
به نظر اینجانب در ذیل این بیان لااقل باید تبصرهٔ‌زیر اضافه شود تاتناقضی راکه بین مندرجات شمارهٔ ۷ ازصفحهٔ۳۴ و مثال صفحهٔ ۳۸ آن ازکتاب درسی وجود دارد برطرف‌سازد:

تبصره- این‌حل‌وبحث‌مربوط است‌به‌جواب‌کلی معادلات‌یك مجهولی پارامتری مثلثاتی و معمولادر مورد جوابهای خصوصی در حالتهای غیر مشخص صدق نمی‌کند . برای بحث در جوابهای خصوصی همواره بایداز نامساوی $\alpha<x<\beta$ که حدودتغییرات مجهول معادله را نشان می‌دهد استفاده‌شود .

۱۷
۲/۷۶/۵

حل نا معادلهٔ $\sin x-q>0$

این نا معادله را به‌صورت $\sin x>q$ می نویسیم. اگر q محصور بین(-۱) و (+۱) باشد نا معادله جواب دارد و برای تعیین جوابهای‌آن دایرهٔ مثلثاتی را رسم‌کرده روی محور سینوسها پاره خط OQ را به طریقی جدا می‌کنیم که $\overline{OQ}=q$ باشد(شکل‌مقابل) از نقطهٔ Q خطی موازی محور کسینوسها رسم می‌کنیم تادایرهٔ مثلثاتی را در نقاط M و M' قطع‌کند.کمانهائی که انتهای آنها روی کمان MBM' واقعندارای سینوسهای بزرگتر از q هستند. بنابراین‌جواب‌های نا معادلهٔ مزبور $\widehat{AM}<x<\widehat{AM'}$ می‌باشند.



تعاریف بنا بر ریاضیات جدید

ترجمهٔ فصلی ازکتاب «فرهنگ استدلالی ریاضیات»

Dictionnaire Raisonné de math. par : A . WARUSFEL

(زاویه)

[۱] در یك‌صفحه ، دو نیم‌خط بامبدأ مشترك، Ox وOy رادر نظرمی گیریم. مجموعهٔ نقطه‌های صفحه را کـه به این‌دو ضلع (دونیم خط) تعلق نداشته باشند به دو زیر مجموعهٔ A و B چنان بخش می کنیم که اگر M و N دو نقطهٔ دلخواه متعلق به یکی از این دو زیر مجموعه ، مثلا A ، باشد بتوان این‌دو نقطه را بایك‌خط راست (یا شکسته) به هم وصل کرد بقسمی کـه این خط نه Ox را قطع کند و نه Oy را .

[۲] اگر Ox و Oy دارای یك محمل نباشند در این صورت فقط یکی‌از دوزیر مجموعه ، مثلا A ، محدب می‌باشد؛ به این ترتیب که هرقطعه خط MN که‌دوسر آن بـه A متعلـق

به نظر اینجانب درحل این نامعادله یك اشتباه عمده و زننده وجود داردوآن اینست که نوشته شده برای اینکه نامعادله جواب داشته باشد باید q محصور بین (۱ −) و(۱ +)باشد.

این حرف صحیح نیست .

آیا وزارت آموزش به‌این کتاب درسی واینهمه دبیـران ریاضی که مجبورند آنرا تدریس کنند واقعاً اعتقاد داردکه مثلا نامعادلهٔ $\sin x + ۲ > ۰$ جواب ندارد ؟

اگر جواب دارد پس این کتاب‌چه می گوید؟ نکتهٔ قابل عرض اینست که در پایان مقدمهٔ این کتاب چنین نوشته شده‌است لطفاً این غلط چاپی را تصحیح فرمائید :

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۱۵۱	۲۰	رباطه	رابطه

یعنی این کتاب فقط یك غلط دارد !

حال‌جای تعجب است‌اگرجابجا شدن محل‌دوحرف‌دریك کلمه ازکلمات مورد توجه‌قرارگرفته پس چرا دربیان مطالب علمی دقت نشده است ؟

آیادریك‌کتاب درسی کلمهٔ رابطه رارباطه بنویسند بیشتر اهمیت دارد یااینکه‌اصل‌موضوع‌را وارونه نوشته‌ووارونه تدریس کنند ؟کدامیك ؟ خلاصه به‌نظر اینجانب مطلب‌فوق‌باید به‌ترتیب زیر بیان شود :

حل نامعادلهٔ $\sin x - q > ۰$

این نامعادله را به‌صورت $\sin x > q$ می‌نویسیم و برای تعیین جوابهای‌آن‌دایرهٔ مثلثاتی را رسم کرده‌روی‌محورسینوسها پاره خط OQ را به‌طریقی جدا می کنیم که $\overline{OQ} = q$ بـاشد (شکل‌قبل)ازنقطهٔ Q خطی موازی‌محورکسینوسها رسم می کنیم؛ حالتهای زیر اتفاق می‌افتد:

۱- $q > ۱$: در این حالت خط دایره راقطع نمی کند، نامعادله جواب ندارد .

۲- $q = ۱$: دراین حالت خط درنقطهٔ B بر دایـره مماس می‌شود ، باز نامعادله جواب ندارد .

۳- $-۱ < q < ۱$ دراین حالت‌خط دایره را درنقاط M و M′ قطع می کند .کمانهائی‌که ابتدای آنهـا نقطهٔ A و انتهای آنهاروی‌کمان MBM′واقعند دارای‌سینوسهای‌بزرگتر از q هستند بنابراین جوابهای نا معادلـهٔ مزبور :

$$\widehat{AM} < x < \widehat{AM'}$$

می‌باشد .

۴- $q = -۱$ دراین حالت خط درنقطهٔ B′ بردایره مماس می‌شود تمام‌کمانهای غیر مشخص x بجز کمانهای $\widehat{AB'}$ جواب‌نامعادله خواهندبود .

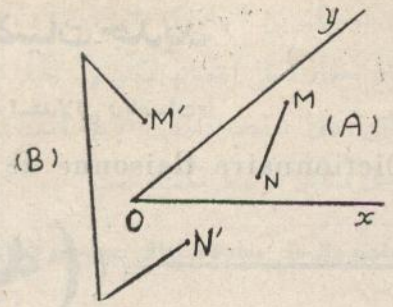
۵- $q < -۱$ در این‌حالت نیز خط دایـره را قطع نمی کند ولی‌تمام‌کمانهای غیر مشخص x بدون استثناء جـواب نامعادله خواهد بود . مثلا نامعادلهٔ :

$\sin x > -۲$ یا $\sin x + ۲ > ۰$

به ازاء جمیع مقادیر x جواب دارد .

بقیه دارد

باشدبه‌تمامی در A واقع خواهد شد. دراین‌صورت A **زاویهٔ**



کوژ و B **زاویهٔ‌کاو** و O رأس‌آنها می‌باشد .

اگر Ox و Oy متقابل باشند A و B هر دو محدب بوده هریك **نیم‌صفحه** یا **زاویهٔ تخت** می‌باشد . بالاخره اگر Ox و Oy منطبق باشند ، A تهی‌بوده و **زاویهٔ صفر** می‌باشد .

[۳] به هرزاویه یك عدد مثبت a مربوط می‌کنیم‌وآنرا **اندازهٔ هندسی** زاویهٔ A می‌نامیم بقسمی‌که اگر :

$$a = \text{ز}\, xOy$$

باشد :

الف ـ این اندازه در هر ایزومتری غیر متغیر باشد (گروه‌ایزومتری ضمن‌اصول‌هندسهٔ اقلیدسی در حالت‌کلی‌تعریف شده است) .

ب ـ اندازهٔ زاویهٔ تخت با عدد ثابتی مانند p برابر باشد .

ج ـ اگر xOy و yOz دو زاویهٔ‌کوژ مجاور باشندیعنی اینکه Oz داخل xOy باشد . در این صورت اندازهٔ زاویهٔ xOz برحسب a و b اندازه‌های زاویه‌های xOy و yOz از رابطهٔ زیر بدست آید :

$$c = a + b$$

د ـ دوزاویه که‌دارای‌یك اندازه باشند **برابر** گفته‌شوند.

ه ـ همهٔ اندازه‌ها بین ۰ و ۲p محصور باشند .

و ـ اگر عدد حقیقی a بین ۰ و ۲p محصوربـاشد، حداقل یك زاویه بااندازهٔ a وجود داشته باشد .

ز ـ هر زاویه‌ای کـه اندازه‌اش کمتر از $\frac{p}{۲}$ باشد **حاده** وهر زاویه‌ای که اندازه‌اش بین $\frac{p}{۲}$ و p محصور باشد **منفرجه** نامیده شود .

ح ـ اگردو زاویه دارای ضلعهای مشترك باشندواندازه‌های آنها a و b باشد چنانچه هردو زاویه ازیك نوع باشند داشته باشیم $a = b$ و در غیر آن داشته باشیم :

$$a + b = ۲p$$

ط ـ نظیرهرزاویهٔ کوژیا تخت دونیم‌خط متقابل Oz و Oz' و همچنین دو نیم خط متقابل Ot و Ot' بقسمی وجود داشته باشدکه‌اندازه‌های زاویه‌های xOz وxOz' برابر با $\frac{a}{۲}$ و $\frac{a}{۲} + p$ و اندازه‌های زاویه‌های xOt و xOt' برابرباشد با $\frac{a}{۲} + \frac{p}{۲}$ و $\frac{a}{۲} + \frac{۳p}{۲}$. خطوط zz' و tt' نیمسازهای داخلی و خارجی xOy نامیده می‌شوند .

ی ـ زاویه‌ای با اندازهٔ $\frac{p}{۲}$ به نام **زاویهٔ قائمه** وجود دارد :دراین صورت می‌گویندکه Ox بر Oy **عمود** یا **قائم** است و آن‌رابه‌صورت $Ox \perp Oy$ نمایش می‌دهند .نیمسازهای یك زاویه بر یکدیگر عموداند .

یا ـ دو زاویهٔ xOy وx'Oy' به‌قسمی‌که Ox با Ox' و Oy با Oy' متقابل باشد دو زاویهٔ **متقابل به رأس** نامیده شده و برابر هستند .

یب ـ دوزاویه‌بااندازه‌های a و b **متمم** نامیده‌می‌شوند اگر $a + b = \frac{p}{۲}$ باشد و **مکمل** نامیده می‌شوند اگر :

$$a + b = p$$

باشد .

[۴] ـ برحسب مقدار انتخابی برای p (یعنی زاویهٔ با اندازهٔ یك) واحد به‌شرح زیر می‌باشد :

الف ـ اگر $p = \frac{۱}{۲}$ باشد واحد عبارتست از **دور** ؛

ب ـ اگر $p = ۱$ باشد واحد عبارتست از زاویهٔ‌تخت؛

ج ـ اگر :

$$p = \pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵\ldots$$

باشد واحد **رادیان** می‌باشد (π در آنالیز تعریف می‌شود ، مثلاطبق دستور $\pi = ۴\int_{۰}^{۱} \frac{dt}{۱+t^{۲}}$) در دستگاه با این واحد ، فرمولهای مثلثاتی به‌ساده‌ترین صورت درمی‌آیند . از طرف دیگر اگر طول‌کمانی از دایرهٔ به شعاع یك معلوم شده باشد دراین‌صورت‌اندازهٔ‌یك زاویه برحسب رادیان برابرخواهد بود باطول‌کمانی از دایرهٔ به شعاع یك و به مرکز O (رأس زاویه) و محدود به‌دوضلع زاویه .

د ـ اگر $p=180$ باشد واحد **درجهٔ شصت‌شصتی** (Sexagésimal) است که درعین حال برابر است با ۶۰ **دقیقه** و ۳۶۰۰ **ثانیه** . برای مثال داریم :

$$1^{rad} = 57^\circ\ 17'\ 44''/806247\ldots = 1 \text{ رادیان}$$

$$1^\circ = 0/017453296 52\ldots^{rad} = \frac{\pi}{180}rad = 1 \text{ درجه}$$

ه ـ اگر $p=200$ باشد واحد **گراد** خواهدبود.

زاویه‌هایی که زیاد متداول هستند برحسب واحدهای مختلف عبارتند از :

دور	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	
رادیان	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	
درجه	۳۶۰	۱۸۰	۹۰	۶۰	۴۵	۳۰	
گراد	۴۰۰	۲۰۰	۱۰۰	۶۶/۶۶۷	۵۰	۳۳/۳۳	

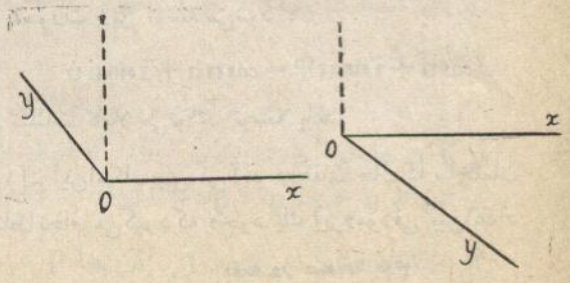
[۵]ـ گروه ایزومتری شامل یك زیر گروه بسیار مهم می‌باشد که عبارتست از تغییر مکان . در یك صفحهٔ مفروض ، زاویهٔ قائمه‌ای را صریحاً تعیین کرده یك ضلع آن را مبدأ می‌نامیم و (در حالت عمومی می‌توانیم صفحه را مانند صفحهٔ ساعت درنظر بگیریم در وضعی که ساعت ۳ را نشان دهد عقربهٔ کوچکتر به‌عنوان ضلع مبدأ باشد). دراین‌صورت می گوئیم که برای دوران جهت مثلثاتی انتخاب شده و گفته می‌شود که‌صفحه **جهت‌دار** شده است .

[۶]ـ زاویهٔ کوژ xOy با اندازهٔ a رادیان را درنظر می گیریم، به‌این زاویه دوزاویهٔ بین دونیم خط رانسبت‌می‌دهیم که‌آنها رابانشانه‌های $(Ox \text{ و } O)$ و $(Oy \text{ و } Ox)$ نمایش می‌دهیم . با یك تغییر مکان ، زاویهٔ قائمهٔ اصلی را چنان قرار می‌دهیم کـه رأس آن بر O و ضلع مبدأ آن بر Ox واقع شود . اگرضلع دوم این زاویهٔ قائمه در همان نیم صفحه‌ای به کنارهٔ Ox واقع شودکه Oy واقع است در این‌صورت [بایکی کردن $(Ox \text{ و } Oy)$ با اندازهٔ آن] خواهیم داشت.

$$(Ox \text{ و } Oy) = -(Oy \text{ و } Ox) = a = \text{ز}xOy$$

در غیر آن چنین خواهیم‌داشت :

$$(Ox \text{ و } Oy) = -(Oy \text{ و } Ox) = -a = -(\text{ز}xOy)$$



[۷]ـ در حالت قبل فرض می کنیم که :

$$-\pi < (Ox \text{ و } Oy) < +\pi$$

دراین صورت هرعددحقیقی b راکه از رابطهٔ زیربدست‌می‌آید نیز اندازهٔ این زاویه می‌نامیم .

$$b = a + 2k\pi$$

که درآن k عدد نسبی صحیح می‌باشد. رابطهٔ بالا را به‌صورت زیرهم می‌نویسند :

$$b \equiv a \pmod{2\pi}$$

که یك همنهشتی با مدول 2π نامیده می‌شود . این رابطه یك رابطهٔ هم ارزی بوده و با هردقتی انـدازهٔ a - $(Ox \text{ و } Oy)$ معرف کلاس همنهشتی a خواهد بود .

مثلا زاویهٔ قائمهٔ اصلی می‌تواند هریك از اندازه هـای زیر را قبول کند.

$$\ldots \text{ و } -\frac{7\pi}{2} \text{ و } -\frac{3\pi}{2} \text{ و } \ldots \text{ و } \frac{9\pi}{2} \text{ و } +\frac{5\pi}{2} \text{ و } +\frac{\pi}{2}$$

[۸]ـ دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را در نظر می گیریم ، زاویهٔ این دوبردار عبارتست از زاویهٔ دو نیم خط Ox و Oy که موازی و هم‌جهت با این بردارها رسم شده باشند، به‌عبارت دیگر ، Ox مبدل $\overrightarrow{AB}$ باشد درانتقال به بردار $\overrightarrow{AO}$ و Oy مبدل $\overrightarrow{CD}$ باشد در انتقال به بردار $\overrightarrow{CO}$. زاویهٔ دوبردار از هرنوع انتخاب نقطهٔ O ، از هرنوع انتقال یکی از حاملها ، از هرنوع ضرب یکی ازآنها دریك عدد مثبت مستقل می‌باشد. بالاخره این زاویه ، زاویهٔ بردارهای آزاد بوده و به صورت زیر نشان داده می‌شود .

$$(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{DC}) \equiv \pi + (\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{CD}) \pmod{2\pi}$$

[۹]ـ سه‌بردار V و V' و V'' داده‌شده‌است، **فرمول شال** به دوصورت زیر نوشته می‌شود :

$$(V \text{ و } V'') \equiv (V \text{ و } V') + (V \text{ و } V'') \pmod{2\pi}$$

$$(V \text{و} V') + (V' \text{و} V'') + (V'' \text{و} V) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

درحالت خاص می‌توان نوشت :

$$(\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA} \text{ و } \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{BA}) \equiv (\pi) \pmod{2\pi}$$

که‌رابطهٔ اخیرمعرف این‌است که: «مجموع(اندازه‌های هندسی) زاویه‌های یك مثلث برابر است بایك زاویهٔ تخت» .

[۱۰]ـ دوخط D و D' مفروض‌است، برای این‌دوخط هم زاویه‌ای تعریف می‌شودکه یك همنهشتی با مدول π خواهد

بود ؛ از یك نقطهٔ O دونیم خط Ox و Oy را با محملهای موازی با D و D' رسم می‌کنیم وچنین تعریف می‌کنیم .

$$(D \text{ و } D') \equiv (Ox \text{ و } Oy') \quad (\text{mod}\cdot \pi)$$

محقق می‌شود که این زاویه با هرجهتی که برای Ox و Oy انتخاب شودبامدول π ثابت است: بنابراین اگر Oy' متقابل Oy باشد داریم .

$$(Ox \text{ و } Oy') \equiv \pi + (Ox \text{ و } Oy) \quad (\text{mod}\cdot 2\pi)$$

واز آنجا :

$$(Ox \text{ و } Oy') \equiv (Ox \text{ و } Oy) \quad (\text{mod}\cdot \pi)$$

برای زاویه‌های بین خطوط هم فرمول شال صادق‌خواهد بود.

[۱۱]- درفضا هم می‌توان زاویهٔ بین خطوط ، بردارها وغیره را تعیین کرد . باهرنوع تغییرمکان شکلها ، اندازه‌های هندسی (مثبت) ثابت باقی می‌مانند اما اندازه‌های جبری چنین نخواهد بود. با یك تغییرمکان ساده می‌توان نیم خطها راچنان جابجا کرد که زاویهٔ (Ox و Oy) به (Ox و Oy) — بدل شود که نشان خواهد داد زاویهٔ xOy ثابت است .

[۱۲]- **زاویهٔ بین دوصفحه** بوسیلهٔ زاویهٔ دو خط عمود برآنهاتعریف می‌شود. این تعریف مبتنی براندازهٔهندسی بوده و نمی‌تواند علامت‌دار باشد . **زاویهٔ یك خط و یك صفحه** عبارتست از متمم زاویه‌ای که این خط با خط عمود بر صفحه می‌سازد .

[۱۳]- **زاویهٔ بین دو منحنی** (یا **بین دوسطح** یا **یك منحنی ویك سطح**) زاویه‌ای است ، اگر وجود داشته باشد ، که مماسها (یا صفحات مماس ، یایك خط ویك صفحهٔ مماس) در یك نقطهٔ تقاطع آنها با یکدیگر می‌سازند . اگر این زاویه برابر $\frac{\pi}{2}$ باشدمی گویند که آنها بریکدیگرعمودند.

مثلا برای اینکه دو دایرهٔ با شعاعهای R و R' و با خطالمرکزین d بریکدیگر عمود باشند لازم وکافی‌است که :

$$d^2 = R^2 + R'^2$$

[۱۴]- سطح مخروطی به‌رأس O را در نظرمی گیریم . از تقاطع این سطح باکرهٔ بمرکز O و به شعاع یك، سطحی بامساحت A پدید می‌آید . سطح مخروطی را **زاویهٔ مجسم** گفته و می گویند اندازهٔ آن A **استرادیان** می‌باشد . اگر سطح مخروطی مفروض تمام فضای حول یك نقطه باشد اندازهٔ آن 4π استرادیان خواهد بود .

[۱۵]- تصورات مختلف یك زاویه به‌سادگی به زاویهٔ بین‌دو برداردریك صفحه‌منجرمی‌شوند.

ممکن است که تعریف هندسی دشواری که به این‌صورت خلاصه شد، ومشکل است که به‌تمامی درهندسهٔ با **اصول‌بندی هیلبرت** صادق باشد ، با بعضی عملیات تحلیلی جانشین شود. مثلابدون استفاده ازشکل مثلثاتی اعداد مختلط اما ضمن‌بررسی رشته‌های با جمله‌های مختلط می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت‌کرد :

[۱۶] الف- اگر z عددی یك مدولی باشد.

$$z = a + ib \text{ ، با } a^2 + b^2 = 1$$

سعی می‌شود که عدد e^{iu} که با رابطهٔ

$$e^{iu} = 1 + \frac{iu}{1!} + \frac{i^2u^2}{2!} + \dots + \frac{i^nu^n}{n!} + \dots$$

تعریف می‌شود باعدد z همسان باشد.

ب- با تحقق توابعی که با رابطهٔ :

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u$$

یا روابط :

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \dots$$

تعریف می‌شوند با بسطهای محدود معین می‌شود که $\cos u$ با مقادیری که بطور مطلق $\frac{\pi}{2}$ نامیده می‌شوند صفر شده و توابع سینوس وکسینوس به‌ترتیب در فواصل $[-\frac{\pi}{2} \text{ و } +\frac{\pi}{2}]$ و $[0 \text{ و } 2\pi]$ تغییر می‌کنند. نتیجه‌می‌شود که باتقریب 2π عددی مانند u وجود دارد بقسمی که :

$$\cos u = a \text{ و } \sin u = b$$

ج- تناوب توابعی که فوقاً تعریف شدند مستقیماً از **فرمول اولر** واز **فرمول موآور** نتیجه می‌شود :

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i \quad (e^{i\pi} = -1 \text{ بنابه‌فرمول مشهور})$$

$$e^{i(u+u')} = e^{iu} \times e^{iu'}$$

که اغلب به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(\cos u + i \sin u)^n = \cos nu + i \sin nu$$

وبنابراین مثلثات کاملا می‌تواند توسعه یابد.

[۱۷]- این‌امکان‌پیش می‌آید درهمان حال که ساختمان اعداد مختلطانجام می‌گیرد که وجود یك ایزومورفی بین‌اعداد

بقیه در صفحهٔ ۴۶

دترمینان

تنظیم از : سید محمد کاظم نائینی

با استفاده از منابع خارجی

ترکیب (Combinaison)

هرگاه در گروههای ترتیب n حرف p به p از گروههائی که از حیث حروف مشترکند یکی را انتخاب کرده بقیه را حذف کنیم تعداد گروههای باقیمانده که از حیث حروف متفاوتند ترکیب n حرف p به p نامیده می‌شود به صورت C_n^p نمایش داده می‌شود.

فرض کنید ۵ مهره داریم در ۵ رنگ مختلف ، چنانکه دیدیم این ۵ مهره را می‌توان به ۶۰ گروه سه تائی تبدیل کرد (ترتیب ۵ حرف سه به سه)

$$A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=60$$

از این گروهها گروههائی هستند که از نظر رنگ مهره‌ها مشترکند مثلا abc و bca و cab و acb و ..... از این گروهها یکی را اختیار کرده مثلا abc بقیه را حذف می‌کنیم ، بدیهی است ما بقی که حذف می‌شوند از صورتهای تبدیل سه حرف است و تعداد این تبدیلات برابر !۳ است پس از ۶۰ گروه ترتیب ۵ مهره سه به سه تعداد C_5^3 گروه اختیار شده ما بقی حذف گردیده است لذا می‌توان نوشت

$$C_5^3=\frac{60}{3!} \quad \text{یا} \quad 60=3!C_5^3$$

واز آنجا تعداد گروههای ترکیب ۵ مهره سه به سه برابر ۱۰ حاصل می‌شود.

از اینجا راه عملی برای تعیین گروههای ترکیب n حرف p به p حاصل می‌شود بدین ترتیب که فرض می‌کنیم تعداد ترکیبهای n حرف p به p را تشکیل داده‌ایم و تعداد آنها برابر C_n^p گردیده است هریك از این گروهها P حرف دارد اگر تبدیل این P حرف را بنویسیم از هر گروه ترکیب !p گروه تبدیل بدست می‌آید .

واز تبدیل تمام گروههای ترکیب تعداد $p!C_n^p$ گروه حاصل می‌شود این تعداد درست برابر ترتیب n حرف p به p می‌باشد ، A_n^p بنابراین خواهیم داشت

$$C_n^p=\frac{A_n^p}{p!} \quad \text{یا} \quad A_n^p=p!C_n^p$$

ویا :

$$C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

مثال ۱ـ ترکیب ۵۲ ورق ۴ به ۴ برابراست با :

$$C_{52}^4=\frac{52!}{(52-4)!\times 4!}$$

مثال ۲ـ گروههای ترکیب ۷ مهره سه به سه برابراست با

$$C_7^3=\frac{7!}{3!(7-3)!}$$

مثال ۳ـ گروههای ترکیب n مهرهٔ n به n :

$$C_n^n=\frac{n!}{n!(n-n)!}=1$$

مثال ۴ـ گروههای ترکیب n مهرهٔ n−p به n−p برابر است با

$$C_n^{n-p}=\frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!}=$$

$$=\frac{n!}{(n-p)!p!}=C_n^p$$

به سهولت ثابت می‌شود که :

$$C_n^{p-1}+C_n^p=C_{n+1}^p$$

زیرا

$$C_n^{p-1}=\frac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!}$$

و

$$C_n^{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^{p-1}+C_n^{p}=$$

$$=\frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\left[\frac{1}{n-p+1}+\frac{1}{p}\right]$$

$$=\frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\times\frac{n+1}{p(n-p+1)}$$

$$=\frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!}=C_{n+1}^{p}$$

به موجب دستورهای فوق می‌توان روابط زیر را نوشت

$$C_0^0=\frac{0!}{0!(0-0)!}=1 \qquad C_n^0=\frac{n!}{0!(n-0)!}=1$$

به فرض $n=1$ و $p=1$ خواهیم داشت

$$C_1^0+C_1^1=C_2^1 \qquad 1+1=2$$

$$C_2^1+C_2^2=C_3^2 \qquad 2+1=3$$

$$C_3^2+C_3^3=C_4^3 \qquad 3+1=4$$

. . . . . .

یکی از موارد استعمال دستور اخیر تعیین اجزاء مثلث حسابی پاسکال است

$$\begin{array}{lllllll}
C_0^0 \\
C_1^0 & C_1^1 \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & C_n^4 & \cdots & C_n^n
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllllll}
1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\
1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & 1
\end{array}$$

این مثلث را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 \quad 1
\end{array}$$

***

دترمینان ـ تعریف: اگر n^2 عدد جبری را در n سطر و n ستون به شکل یک مربع بنویسیم آنرا دترمینان رستهٔ n نامند:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

چنانکه قبلا متذکر شدیم جملهٔ a_{32} یعنی جملهٔ متعلق به سطر سوم وستون دوم.

درزیر چند نوع دترمینان ازرسته‌های ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را معرفی می‌کنیم.

$$\Delta_{4\times4}=\begin{vmatrix}
1 & 5 & 7 & 3 \\
4 & -2 & 6 & 9 \\
11 & 23 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 5
\end{vmatrix}
\qquad
\Delta_{5\times5}=\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
4 & 0 & 5 & 1 & 2 \\
3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\
6 & 2 & 0 & 1 & 3
\end{vmatrix}$$

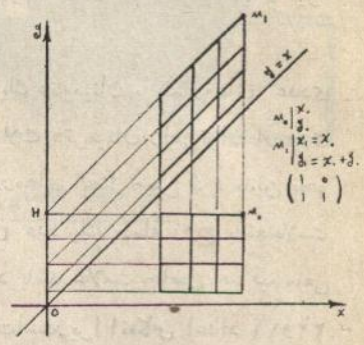
$$\begin{vmatrix}
2 & 3 \\
5 & 6
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
2 & 1 & 9 \\
-5 & 3 & -2 \\
1 & 4 & 7
\end{vmatrix}$$

اینك ضمن مثالهائی چند ماهیت و چگونگی و موارد استعمال دترمینان را بیان می‌کنیم.

۱ـ ضمن تعریف ماتریس آنجا که راجع به خواص ماتریس

عمومی $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بحث کردیم ملاحظه شد که تأثیر ماتریس چگونه بود وچطور می‌توانستیم مثلا بموجب قانون ماتریسی مربعی را به متوازی‌الاضلاع تبدیل کنیم (صفحهٔ ۴ یکان شمارهٔ ۳۳)

به موجب قانون تبدیل $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ می‌توان یك شبکهٔ متشکل از چندین مربع را به شبکه‌ای متشکل از چندین متوازی‌الاضلاع تبدیل کرد .



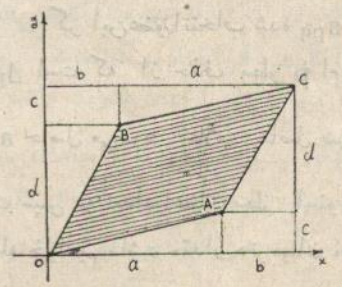
اگر مساحت مربعی S باشد واین مربع را طبق قانون ماتریسی تبدیل کنیم و به متوازی‌الاضلاع بدل شود مساحت متوازی‌الاضلاع را اگر B فرض کنیم $B = K \cdot S$ خواهد بود . و K ضریب تغییر مساحت برابر همان دترمینان ماتریس است .

اگر ماتریس تبدیل $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ باشد

$$K = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

خواهد بود .

برای تحقیق این مطلب ماتریس عمومی $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ رادر نظر گرفته اجزاء هرستون را مختصات دونقطه مانند A و B فرض می‌کنیم $A(a \text{ و } c)$ و $B(b \text{ و } d)$ اگر $O(0 \text{ و } 0)$ مبدأ مختصات باشد مختصات نقطهٔ C رأس چهارم متوازی‌الاضلاع AOBC چنین خواهد بود $C(a+b \text{ و } c+d)$ حال این متوازی الاضلاع را در داخل یك مستطیل محاط می‌کنیم بطوری که در قطر بزرگ مشترك باشند (مطابق شکل) مساحت متوازی‌الاضلاع AOBC را به ترتیب زیر حساب می‌کنیم .



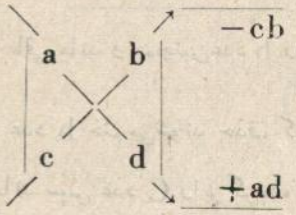
مساحت مستطیل برابر است با :

$$(a+b)(c+d)$$

ازاین مساحت سطح دو مستطیل کوچك (cb و bc) وچهار مثلث قائم‌الزاویه جانبی ($2 \times \frac{ac}{2}$ و $2 \times \frac{bd}{2}$) راکم می‌کنیم

$$(a+b)(c+d) - 2bc - bd - ac = ad - bc$$

مقدار حاصل برابر سطح متوازی‌الاضلاع است این مقدار $(ad - bc)$ را به صورت قراردادی $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ نمایش داده و آنرا دترمینان وابسته به ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ می‌نامند وچنانکه ملاحظه شد مقدار این دترمینان عددی است برابر مساحت متوازی‌الاضلاع که طبق شرایط مذکور تعیین می‌گردد واین عدد برابر تفاضل حاصل‌ضرب اعدادی است که روی دوقطر مربع قرار دارند وعلامت آنها به شکل زیر تعیین می‌گردد



دترمینان مربوط به ماتریس $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ عبارتست از $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ ومقدار آن برابر است

با $4 \times 5 - 1 \times 3 = 17$

دترمینان مربوط به ماتریس $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ عبارتست از $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ ومقدار آن برابر است

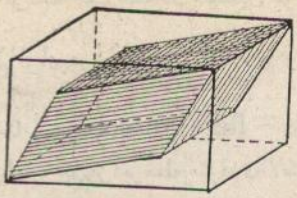
با $0 \times 2 - (5)(-1) = 5$

دترمینان مربوط به ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ عبارتست از $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ ومقدار آن برابر است

با $1 \times 1 - 0 \times 1 = 1$

پس دترمینان مربوط به یك ماتریس همان مساحت متوازی‌الاضلاع وضریب تغییر مساحت به موجب قانون تبدیل است

البته این مطلب تنها در مورد ماتریس مربع 2×2 نیست ودرمورد ماتریس مرتبهٔ سوم 3×3 نیز به سهولت می‌توان ثابت کرد که اندازهٔ دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ برابر حجم متوازی‌السطوحی است که از تبدیل یك مکعب به موجب قانون ماتریسی $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ حاصل می‌شود



وبطور کلی به هرماتریس مربع شکل می‌توان یك دترمینان وابسته نمود. اندازهٔ دترمینان وابسته به‌ماتریس ۳ × ۳ یعنی حجم متوازی‌السطوح برابر مجموع جبری حاصل‌ضربهای زیر است

$$aei - afh + bdi - bgf + cdh - cge$$

این حاصل ضربها را اینطور بدست‌آوردیم که ابتدا سطر اول دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ را درنظر گرفتیم، عدد a را اختیار کرده سطر وستونی که به a ختم می‌شود حذف کردیم دترمینان $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ باقی ماند و همچنین‌عدد b را اختیار کرده سطروستونی که به عدد b ختم می‌شوند حذف کردیم دترمینان $\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ باقی ماند سپس عدد C را برگزیده سطر وستون مختوم به‌آنرا حذف کردیم دترمینان $\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ باقی ماند وبعد حاصل ضربهای زیر را تشکیل دادیم

$$a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - hf) + b(di - gf) + c(dh - eg)$$

$$= aei - ahf + bdi - bgf + cdh - ceg$$

اصطلاحاً گویند که‌این دترمینان نسبت به سطراول بسط داده‌شده است والبته می‌توانستیم آنرا نسبت به سطر دوم یاسوم یانسبت به ستونها بسط دهیم طریقهٔ عمل‌نظیر فوق صورت گرفته‌ونتیجه یکی است مثلا دترمینان زیر را اگر به روش فوق بسط دهیم خواهیم داشت

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۷ & -۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۵ \end{vmatrix} = ۱ \times \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} - ۲ \times \begin{vmatrix} ۷ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix} + ۳\begin{vmatrix} ۷ & -۱ \\ ۴ & ۳ \end{vmatrix}$$

علامت یك در میان مثبت ومنفی است

$$= ۱(-۱ \times ۵ - ۳ \times ۲) - ۲(۷ \times ۵ - ۴ \times ۲) +$$

$$+ ۳(۷ \times ۳ - (۴)(-۱) = -۱۱ - ۵۴ + ۷۵ = ۱۰$$

طبق روش‌فوق می‌توان دترمینانهای‌رستهٔ ۴ × ۴ و۵ × ۵ و... و n × n را بسط داد وعمل در حالت‌کلی بدین نحو صورت می‌گیرد که از هرسطر و ستون فقط یك جمله برگزیده شده و حاصل ضرب آنها راتشکیل می‌دهیم وعلامت آنها را طبق‌قاعده تبدیل به دترمینانهای‌رستهٔ کوچکتر تعیین کرده همه راباهم‌جمع می‌کنیم .

هریك از حاصل ضربها را جمله و هرعدد را عضو و n را رستهٔ دترمینان گویند وهرجملهٔ دترمینان دارای n عضو باید باشد و تعداد حاصل ضربهای (جملات) برابر تبدیل n حرف یعنی !n (n فاکتوریل) است مثلا دترمینان ۲ × ۲ دارای‌دو جمله (!۲) و دترمینان رستهٔ ۳ دارای ۶ جمله (!۳) و غیره می‌باشند

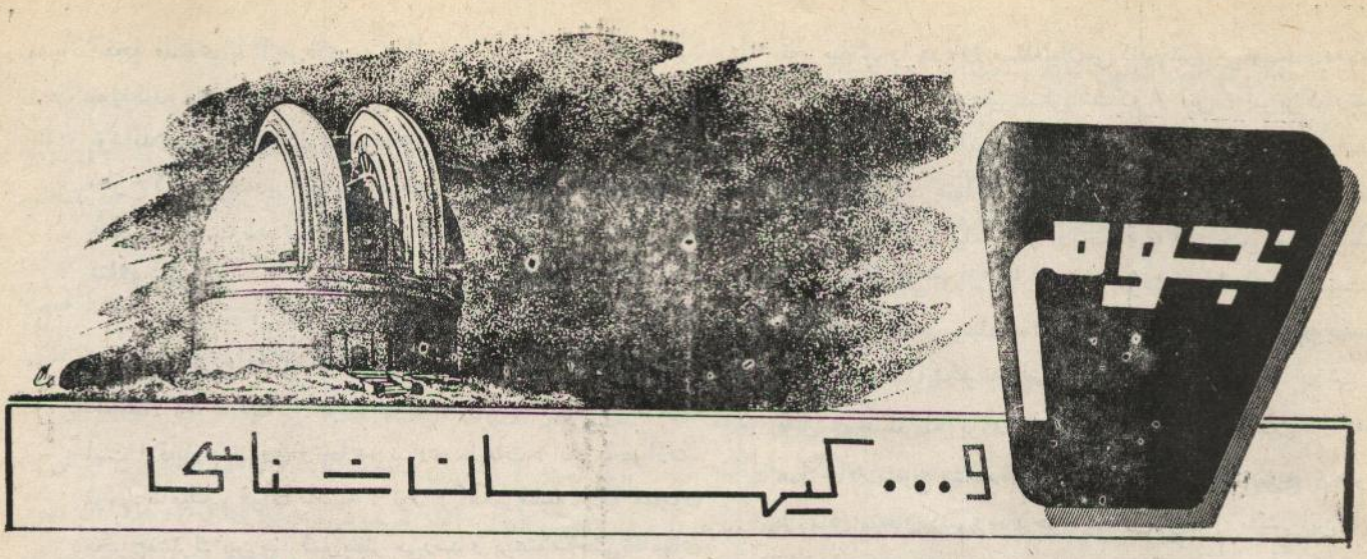
اگر جملات و اعضای یك دترمینان با شماره‌های عددی مشخص شده باشند علامت جملات دترمینان رامی‌توان از روی تعداد انعکاس نماینده‌ها و شماره‌های اعضا تعیین کرد بدین نحو که هرگاه تعداد انعکاس در n عدد یك جملهٔ زوج باشدعلامت حاصل ضرب مثبت واگر فرد باشد علامت حاصل ضرب منفی است مثلا علامت $a_{۱۱}a_{۲۲}$ مثبت‌است‌زیرا انعکاس اعداد ۱۱و۲۲ صفر است (صفر را زوج اختیار می‌کنند) وعلامت جملهٔ $a_{۱۲}a_{۲۱}$ منفی است زیرا مجموع انعکاسهای‌اعداد ۱۲ و۲۱ برابراست‌با (۱ = ۱ + ۰) یك و فرد است

علامت $a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱}$ مثبت‌است زیراتعداد انعکاسهای‌اعداد ۱۲ و ۲۳ و ۳۱ برابر است با(۲ = ۱ + ۱ + ۰) وزوج‌است. علامت جملهٔ $a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱}$ منفی‌است زیراتعدادانعکاس‌نماینده‌های ۱۳ و ۲۲ و ۳۱ برابر است‌با (۱ = ۱ + ۰ + ۰) که فرداست. جمله‌ای که‌عواملش اعضائی از دترمینان باشند که روی‌قطرمربع قرار دارند جملهٔ اصلی دترمینان نامیده می‌شود : $a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳}$ و $a_{۳۱}a_{۲۲}a_{۱۳}$ چنانکه دیده‌می‌شود علامت‌جملهٔ‌اول مثبت وعلامت جملهٔ دوم منفی است

بسط دترمینان : برای بسط دترمینان یك سطر یایك ستون ازآنرا به دلخواه اختیار می‌کنیم از این سطر یاستون عضوی را برگزیده ضریب آنرا تعیین می‌نمائیم

اگر این‌عضو انتخاب شده a_{pq} باشد ضریب‌آن‌دترمینان Δ_{pq} است که از حذف سطر p ام و ستون ، q ام مختوم به a حاصل می‌شود . علامت حاصل ضرب برابر $(-۱)^{p+q}$ است سپس به تعداد اعضای سطر یاستونی انتخابی بدین ترتیب جمله خواهیم داشت مقدار دترمینان مجموع جبری این‌جملات خواهد بود

مثلا ـ دترمینان رستهٔ ۳ را درنظر می‌گیریم مثلا سطر او را اختیار می‌کنیم خواهیم داشت .



ترجمهٔ فصلی از کتاب : «L' Astronomie moderne» تألیف : TOCQUET

مراحل مهم علم نجوم

۳- دورهٔ نزدیک معاصر

هانری پوانکاره ژول هانری پوانکاره

(Jules—Henri Poincaré) ۱۸۵۴-۱۹۱۳

در ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ در **نانسی** متولد شد . پسرعمویش **ریموندپوانکاره** از ۱۹۱۳ تا ۱۹۲۰ رئیس جمهورفرانسه بود . اولین بار در ۱۸۷۳ وارد مدرسهٔ پلی‌تکنیك شد ، دورهٔ این مدرسه را با چنان درخشندگی گذراند که به افسانه بیشتر شباهت دارد ، در ۱۸۷۸ بعد از خروج از مدرسهٔ معادن در **دانشکدهٔ کان** باسمت‌دانشیاری شروع به آموزش آنالیزریاضی نمود . در ۱۸۸۱ به **سوربن** فراخوانده شد تا تصدی کرسی مکانیك فیزیك و تجربی را به عهده گیرد ، بعداً استادکرسی فیزیك ریاضی شد ؛ بعد از درگذشت **تیسران** کرسی مکانیك سماوی به‌عهدهٔ وی گذاشته‌شد. در ۱۸۸۷ به عضویت **آکادمی علوم** ودر ۱۹۰۹ به عضویت **آکادمی فرانسه** برگزیده‌شد . غیراز آن ، دربسیاری ازآکادمیهای علمی جهان عضویت داشت.

آثار هانری پوانکاره بسیار است وهمهٔ شاخه‌های ریاضی وفیزیك‌را در برمی‌گیرد :آنالیزعالی، هندسه‌های غیراقلیدسی حساب، توپولژی، مکانیك، نجوم‌وفیزیك‌ریاضی. **لوئی‌دوبرگلی** می‌نویسد : «در ۵۸ سالگی‌مرددرحالی‌که آثاری از خودباقی گذاشت‌که از نظروسعت شگفت‌انگیز است ؛ تقریباً غیر ممکن بنظر می‌رسد که درطول عمرچنین کوتاهی اینهمه کارهای‌مختلف وپرارزش انجام گرفته باشد .»

درتاریخ ریاضیات ، تعدادکمی ازریاضیدانها مثل‌هانری پوانکاره توانسته‌اند در نظام اساسی ریاضیات تااین حد ، حد اعلای امکان ، تحول پدید آورند . درریاضیات محض ، قوهٔ ابداع او اعجاب‌آور است، در فراهم آوردن بهترین راههای ابتکاری برای حل همهٔ مسائلی‌که با آنها مواجه می‌شده‌چنان استادی وشایستگی از خود بروزداده است‌که همه رامتحیرمی‌سازد . قابلیت فوق‌العاده‌ای‌که درخلق همه نوع راههای‌تحلیلی برای بررسی مسائل داشته است مشخص نبوغ وی می‌باشد، به علاوه ، استعداد شگرفی داشته‌که همهٔ موضوعها را ، در همان نظر اول ، درحالت‌کلی وعمومی‌درنظر می‌گرفته است .کارهای گذشتگان را به ندرت بررسی‌کرده است ، مگر اینکه حداکثر برچندتائی از آنها نظری سطحی افکنده باشد ؛ برای درك کلیهٔ قسمتهای نظریه‌ای ، مختصر اطلاعی از آن برای وی کفایت داشته است .

مثال خوبی از اساسی بودن مشاهدات وی موضوع کشف **توابع فوشین** می‌باشد که تقریباً مربوط به اوایل زندگی علمی وی است‌ونام او را بلند آوازه ساخت . وقتی‌که‌پوانکاره مطالعات خود را دراین‌باره شروع‌کرد و حالت‌کلی‌موضوع را درنظر گرفت، بعضی حالات خاص‌آن توسط**ژاکوبی**، **هرمت** ودیگر ریاضیدانهاتحت‌بررسی بود ، اماپوانکاره ازاین‌موضوع اطلاعی نداشت . مرحلهٔ شروع مسئله عبارت بود از پوشاندن

صفحهٔ مستوی با آجرهای به شکل متوازی الاضلاعهای برابر، پوانکاره به مطالعهٔ حالت کلی پرداخت ومسئله را به صورت پوشاندن نیم‌صفحه‌ای با مجموعه‌ای از چندضلعیهای منحنی‌الخط مطرح کرد. آنچه‌ویرادرنیل به‌هدف‌رهبری کرد ویك‌نتیجه‌گیری عالی را موجب شد تصویر سریهای کاملا تازه‌ای بود (**توابع تتافوشین**).

در قسمت فیزیك، بیست موضوع که به‌هنگام‌تصدی کرسی فیزیك ریاضی دانشگاه سوربن عرضه‌کرده‌است همه را به‌حیرت افکنده است. دربارهٔ موضوعهای مختلف ومتغیری بحث‌کرده است ازقبیل: نیروی‌ارتجاع، نیروی مایعات، نظریهٔ‌حرارت. ترمودینامیك، قوای شعریه، نور و الکتریسیته. وی همچون مخرج‌مشترك بین‌چندکسر بنظر می‌رسد و برهنه ساختن‌نظامهای اساسی که با عنوانهای مختلف در فیزیك ریاضی عرض وجود می‌کنند برای او همچون یك بازی بوده است،

دربارهٔ نجوم، تقریباً همهٔ‌کارهایی‌که کرده به مکانیك سماوی مربوط می‌شود، اما هرچه‌کرده‌کاملاتازگی داشته‌وهنوز هم مانند منبعی می‌ماندکه استفادهٔ‌ازآن، درهمان ممری‌که‌وی احداث‌کرده، میسرمی‌باشد

اولین تذکاریهٔ وی‌دربارهٔ مکانیك سماوی مربوط‌به‌بررسی معادلات علم‌القوی است و درآن دربارهٔ مسئلهٔ مشهور«سه‌جسم» به بحث پرداخته است: بعد از آن، آثاری دربارهٔ نظریهٔ جزر ومد ودربارهٔ‌روشهای‌جدید در مکانیك سماوی منتشر کرده است آخرین‌کتابش که‌به فرضیات آفرینش جهان اختصاص‌دارد وچند سال قبل از مرگش انتشاریافت واقعاً یك شاهکار علمی می‌باشد. دراین اثر، کلیهٔ فرضیات مربوط به تشکیل منظومهٔ شمسی‌که بعد از **کانت** و **لاپلاس**عنوان شده مجدداً موردبحث واقع شده است، اما روش بررسی آنهاکاملا تازه واساسی است وانگهی به منظومهٔ شمسی محدود نمی‌شود؛ او نظریهٔ خود را تاستارگان و سحابیها گسترش داده است. نظریهٔ **آرنیوس** (Arrhenius) را دربارهٔ امکان اینکه جهان به مرگ حرارتی‌می‌افتد با یك نظر انتقادی‌مؤثر و دلنشین بررسی‌کرده است ومی‌توان **اصل کارنو** (Carnot) را به وی نسبت‌داد. این اثر از جهات‌دیگرهم مملوازنظریات‌عالی است‌وازکتابهایی است‌که باید از دیدگاهی عالی‌موردقضاوت واقع شوند،می‌توان آنرا چکامه‌ای درعلوم دانست.

نکتهٔ مهمی‌که از این اثر مستفاد می‌شود آنست‌که برای اولین دفعه‌وقبل از**اینشتین**، نظریهٔ نسبیت توسط هانری‌پوانکاره مطرح شده است و بایستی افتخار این‌کشف بزرگ نصیب‌علوم فرانسه باشد.

وی در **دانش‌وروش** (صفحهٔ ۲۴۰) آنجاکه‌نتایج‌همهٔ تجربیاتش را دربارهٔ مسئله‌بیان‌می‌کندچنین می‌نویسد: «ممکن است‌که این باشد، غیرممکن‌است‌که از این تأثیر برکناربود، اساس نسبیت یك قانون عمومی طبیعت است، هیچگاه وبا هیچ وسیلهٔ خیالی سرعتها را نمی‌توان مسلم وقطعی دانست، همه‌نسبی هستند. وباآن وسیله‌سرعتها را نسبت به اتر حس نمی‌کنیم‌بلکه آنچه بدست می‌آوریم عبارتست از سرعتهایی‌که اجسام نسبت به یکدیگر دارند. بسیاری از آزمایشهای مختلف نتایج یکسان داده‌اند برای اینکه نخواسته‌اند برای نسبیت همان ارزشی را قائل شوندکه مثلا برای قانون تعادل قائل اند. لازم‌است‌که‌در همهٔ حالات نوع مشاهده‌ای راکه ما را به اخذ نتایج رهبری می‌کند امتحان‌کنیم و بالاخره بعدازکنترل آزمایش این‌نتایج را قبول داشته باشیم.»

نتیجه آنکه، در ۱۹۰۴ زمانی‌که اینشتین تازه‌کارهای قطعی خود را آغاز می‌کرده پوانکاره برکلیهٔ جزئیات نظریهٔ نسبیت احاطه داشته است. وی تمام اشکالات الکترودینامیك اجسام درحال حرکت را مطرح‌کرده وتمام ریزه‌کاریهای آنرا آشکارا مشخص ساخته‌است؛ عناوینی‌که‌وی بررسی‌کرده‌عبارتند از: زمان محلی **لورنتز**، انقباض **فیتزجرالد**، طرح ثابتهای معادلات الکترومغناطیس ونتایج آزمایش **مایکلسن**.

لوئی بروگلی چنین می‌نویسد: «در این‌باره، پوانکاره گام قطعی را بر نداشته و افتخار مشاهدهٔ همهٔ نتایج نظریهٔ نسبیت را به اینشتین واگذار کرده است، بخصوص تحقیق دقیق اندازه‌های طول و زمان و درك حقیقت فیزیکی مشخص ارتباطی‌که اساس نسبیت بین فضا و زمان مستقر می‌سازد. چرا پوانکاره بعد از اولین قدم، قدمی فراتر ننهاده است؟ وی مانند یك ریاضیدان محض فکر می‌کرده وبعلاوه دارای اندیشهٔ انتقادی مفرطی بوده است، در مواجههٔ با نظریه‌های فیزیکی رفتاری شکاك داشته است. عموماً تصورات نامحدود مختلفی وجود داردکه ازلحاظ منطقی هم‌ارز هستند، دانشمندان ازبین آنها، آنهایی را انتخاب می‌کنند که دلایل آسانتری را لازم داشته باشد. بنظر می‌رسدکه یك‌چنین وضعی موجب شده تاوی به نظریاتی‌که به‌حقیقت فیزیکی بسیارنزدیك بوده‌وفیزیکدانها در مشاهدات خود در هرحال آنها را می‌پذیرند توجه نداشته باشد. از این‌جهت است‌که اینشتین، جوانی‌که تازه ۲۵ سال داشت و اطلاعات ریاضی او در برابر معلومات عمیق وداهیانهٔ دانشمند فرانسوی‌کاملا مقدماتی بوده، موفق شده است همهٔ تجربیات جزئی سلف خودرا بکاربرد و به مرحله‌ای برسد که کلیهٔ اشکالات‌کار را با قاطعیت استخراج‌کند. اندیشه‌ای قوی، کار ماهرانه‌ای‌راکه بوسیلهٔ مشاهدهٔ‌عمیق حقایق فیزیکی‌رهبری می‌شده به ثمررسانده است.» اما به هرحال خیره‌کنندگی و

شایستگی موفقیت اینشتین نباید موجب آن شود که این موضوع را فراموش کنیم که مسئلهٔ نسبیت قبل ازوی توسط اندیشهٔ درخشان پوانکاره عمیقاً تجزیه وتحلیل شده است.

قبل ازآنکه صحبت از پوانکاره را قطع کنیم مناسب است که راجع به فلسفهٔ وی هم چندکلمه‌ای صحبت کنیم ؛ رویهمرفته وی متفکری مستقل ونسبت به هرمکتبی بیگانه بوده و هیچگاه هم ، مانند **رنوویه** ، **برگسون** یا **ویلیام جمز** در صدد تأسیس مکتب خاصی برنیامده است . پای‌بند هیچ آئینی نبوده و ازخود هم هیچ‌نوع آئینی اظهارنکرده است . اگر خواسته باشیم که نوع تفکر وی را دریك کلمه خلاصه کنیم شایدمناسبترین کلمه «طرفداری سهولت عمل» باشد . وانگهی ، در نوشته‌هایش کلمهٔ «سهل» مرتباً تکرار می‌شود و توضیحاتش هم همیشه با این کلمه پایان می‌یابد .

شاید بتوان پوانکاره را جانبدار فلسفه پراگماتیسم دانست اما کلمهٔ «سهولت» نزد او معنی ذهنی‌تری دارد و غیر از دکترین ویلیام جمز می‌باشد ، درست است که معنی آسان را می‌رساند اما درعین حال با بعضی داده‌های تجربی هم متناظر می‌باشد .

بطورکلی ، پوانکاره یك ایده‌آلیست بوده است و همین طرز تفکر ایده‌آلی در تنظیم آثاری که همچون یك شعر قابل تحسین در ادبیات فرانسه جاودانی خواهد بود الهام‌بخش وی بوده است . آخرین صفحهٔ کتاب وی دربارهٔ ارزش دانش با این چنین کلماتی آغاز می‌شود : «چیزی که دربارهٔ آن نشود فکر کرد وجود ندارد» ، یا جای دیگر درقسمتی ازکتابش که قیافهٔ کاملا جدی داشته اندیشه را چنین توصیف می‌کند : «آذرخشی درنیمه‌شبی طولانی» .

بی آنکه عصبانی شوید این مسئله‌را حل کنید

من چهار نوع ساعت در خانه دارم : یك ساعت دیواری ، یك ساعت پاندول دار ، یك ساعت شماطه‌دار و یك ساعت مچی . اما این چهار ساعت هیچگاه در نشان دادن وقت باهم توافق ندارند. روزی آنها را نزد ساعتساز بردم ؛ معلوم شدکه ساعت دیواری نسبت به‌ساعت ساعتساز ۲ دقیقه در ساعت تأخیر دارد ، ساعت پاندول‌دار نسبت به‌ساعت دیواری ۲ دقیقه در ساعت جلو است ، ساعت شماطه‌دار نسبت به ساعت پاندول‌دار ۲ دقیقه در ساعت عقب است . بالاخره ساعت مچی نسبت به‌ساعت شماطه‌دار ۲ دقیقه در ساعت جلو است .

با اطلاع براینکه به‌هنگام ظهر، هرچهار ساعت با ساعت ساعتساز میزان شده باشند، وقتی که ساعت پاندول‌دار ساعت ۱۹ را نشان دهد ساعت مچی چه وقتی را معین می‌کند ؟

پاسخ مسئلهٔ زیر همین عنوان مندرج در یکان شمارهٔ قبل

اگر فاصلهٔ ده تا شهر x کیلومتر فرض شود وقتی که دهقان پیر y کیلومتر آن را پیموده باشد بقیهٔ مسافت $(x-y)$ کیلومتر خواهد بود و اگر $۳y$ کیلومتر پیموده باشد مسافت مانده $(x-۳y)$ کیلومتر می‌شود .

پس بنا به فرض داریم

$$x-y=۲(x-۳y) \Longrightarrow y=\frac{۱}{۵}x$$

و اگر دهقان جوان z کیلومتر از فاصلهٔ بین ده تا شهر را پیموده باشد خواهیم داشت :

$$۳(x-z)=x-\frac{z}{۲} \Longrightarrow z=\frac{۴}{۵}x$$

از نامساوی $\frac{۴}{۵}x>\frac{۱}{۵}x$ نتیجه می‌شود $z>y$ که می‌رساند دهقان جوان با اتومبیل مسافرت می‌کرده است .

راهنمای ریاضیات متوسطه

تبدیل یك کسر به کسرهای ساده‌تر

Partial Fractions

تهیه‌کننده : جلیل‌الله قراگزلو

در فصول پیشرفتهٔ ریاضی به‌ویژه در مبحث انتگراسیون به‌عملی که‌عکس جمع کسرهاست برمی‌خوریم‌واین عمل‌را «تبدیل کسر به‌کسرهای ساده‌تر» می‌نامیم (بسیار بجا خواهد بود که این قسمت در متوسطه تدریس شود) .

مثال‌ـ اگر کسرهای :

$$\frac{۲}{x-۱} \text{ و } \frac{-۳}{۲x-۱} \text{ و } \frac{۴}{x+۲}$$

را باهم جمع کنیم به‌آسانی خواهیم داشت :

$$\frac{۴}{x+۲}-\frac{۳}{۲x-۱}+\frac{۲}{x-۱}=\frac{۹x^۲-۹x+۶}{۲x^۳+x^۲-۵x+۲}$$

ولی تبدیل کسر $\frac{۹x^۲-۹x+۶}{۲x^۳+x^۲-۵x+۲}$ به کسور ساده:

$$\frac{۲}{x-۱} \text{ و } \frac{-۳}{۲x-۱} \text{ و } \frac{۴}{x+۲}$$

عملی است که در این مختصر مورد بحث ماست ـ قبل از بیان‌و شرح چگونگی این تبدیل نخست یادآور می‌شویم که :

لم ـ هرکثیرالجمله از هردرجه که باشد قابل تجزیه به حاصل‌ضرب دوجمله‌ایهای درجهٔ اول و سه جمله‌ایهای درجهٔ دوم خواهد بود (از اثبات صرف نظر می‌شود) . سپس متذکر می‌گردیم که‌کسرها به‌دودسته تقسیم می‌شوند:

الف‌ـ کسرهائی که درجهٔ صورتشان ازدرجهٔ مخرجشان کمتر است (Proper Fractions) .

ب‌ـ کسرهائی که‌درجهٔ صورتشان یا بیشتر ازدرجهٔ‌مخرج ویا برابر درجهٔ مخرج است (Inproper Fractions) کسرهای اخیر را می‌توان به یك کثیرالجمله و یك کسر از نوع الف تبدیل کرد. مثلا: کسر $\frac{x^۳-۴x^۲+۶x-۷}{x^۲-۵x+۶}$ را می‌توان به‌دوجمله‌ای $x+۱$ وکسر $\frac{۵x-۱۳}{x^۲-۵x+۶}$ تبدیل کرد زیرا ازتقسیم زیرعبارت $x^۳-۴x^۲+۶x-۷$ برعبارت $x^۲-۵x+۶$ عبارت خارج قسمت به‌صورت $x+۱$ وعبارت باقیمانده و به‌صورت $۵x-۱۳$ نتیجه می‌شود، پس:

$$\frac{x^۳-۴x^۲+۶x-۷}{x^۲-۵x+۶}=x+۱+\frac{۵x-۱۳}{x^۲-۵x+۶}$$

قضیهٔ زیر روش تبدیل را دربارهٔ کسر های نوع الف روشن می کند .

قضیه‌ـ هرگاه در کسر $\frac{N(x)}{D(x)}$ درجهٔ صورت کمتر از درجهٔ مخرج باشد می‌توان آنرا با درنظر گرفتن مراحل‌زیر به‌کسرهای جزئی تبدیل کرد .

الف‌ـ درازاء هرعامل درجهٔ اول $ax+b$ که در $D(x)$ دیده شودیك کسر به‌صورت $\frac{A}{ax+b}$ که درآن A مقداریست ثابت درکسرهای جزئی وجود خواهد داشت .

ب- اگر عامل $(ax+b)$ n بار در $D(x)$ تکرارشده باشد یا به گفتهٔ دیگر عامل $(ax+b)^n$ در $D(x)$ وجود داشته باشد در ازاء آن عامل n کسر به‌صورت :

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

که در آن A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n مقادیر ثابتند در تبدیل وجود خواهد داشت .

ج- در ازاء هرعامل درجهٔ دوم تحویل ناپذیر : ax^2+bx+c که در $D(x)$ دیده شود یك کسر به‌صورت $\frac{Ex+F}{ax^2+bx+c}$ که درآن E و F مقادیر ثابتند درتبدیل وجود خواهد داشت .

د- اگر در $D(x)$ عامل $(ax^2+bx+c)^n$ وجود داشته باشد درازاء آن n کسر به‌شکل :

$$\frac{E_1x+F_1}{ax^2+bx+c}+\frac{E_2x+F_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{E_nx+F_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

که‌درآن E_1 و E_2 و. .و E_n و F_1 و F_2 و...و F_n مقادیر ثابتند در تبدیل وجود خواهد داشت :

از اثبات قضیهٔ بالا صرف نظر می‌شود وفقط طریقهٔ یافتن مقادیر ثابت را با ذکر مثال شرح می‌دهیم :

مثال ۱- (در موردکسرهائی که مخرج آنها به عوامل درجهٔ اول تجزیه شده باشد) - مطلوبست تبدیل کسر $\frac{9x^2-9x+6}{(x-1)(2x-1)(x+2)}$ به کسرهای ساده‌تر

حل- طبق قضیهٔ بالا داریم :

$$\frac{9x^2-9x+6}{(x-1)(2x-1)(x+2)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}\quad(1)$$

رابطهٔ بالا اتحاد است یعنی به ازاء جمیع مقادیر x طرفین برابرند (مگر به‌ازاء -2 و $\frac{1}{2}$ و $x=1$ که مخرج را صفرمی‌کنند). پس اگر طرفین رادرکوچکترین‌مضرب مشترك مخارج یعنی در $(x-1)(2x-1)(x+2)$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$9x^2-9x+6\equiv A(2x-1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(2x-1)\quad(2)$$

به دو طریق می‌توان مقادیر A و B و C را یافت

طریق اول - رابطهٔ بالا را ساده کرده و برحسب قوای نزولی x مرتب می‌کنیم، بدست می‌آید .

$$9x^2-9x+6\equiv(2A+B+2C)x^2+(3A+B-3C)x+(-2A-2B+C)$$

طبق خاصیت اتحادها ضرایب جمل متشابه درطرفین برابرند یعنی

$$\begin{cases}2A+B+2C=9\\3A+B-3C=-9\\-2A-2B+C=6\end{cases}$$

از حل این دستگاه بدست می‌آید : $A=2$ و $B=-3$ و $C=4$ پس :

$$\frac{9x^2-9x+6}{(x-1)(2x-1)(x+2)}=\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2x-1}+\frac{4}{x+2}\quad(3)$$

طریق دوم - در رابطهٔ (۲) به‌ازاء x عدد ۱ رابکار می‌بریم حاصل می‌شود $3A=6$ و یا $A=2$ همچنین با بکار بردن $x=\frac{1}{2}$ و $x=-2$ بدست می‌آید : $\frac{15}{4}=-\frac{5B}{4}$ و $15C=60$ و از آنجا $B=-3$ و $C=4$ خواهد شد و تجزیهٔ (۳) نتیجه می‌شود .

تمرینات نوع الف

کسرهای زیرین رابه‌کسرهای ساده تر تبدیل کنید :

۱) $\frac{x+12}{(2x-1)(x+2)}$ ۲) $\frac{10x+2}{(3x+2)(x-4)}$

۳) $\frac{-x-12}{2x^2-x-6}$ ۴) $\frac{9x-7}{6x^2+14x+4}$

۵) $\frac{2x^2+10x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

۶) $\frac{7x^2-22}{(2x-3)(x-2)(x+1)}$

۷) $\frac{x^4+5x^3+7x^2+7x+13}{x^2+5x+6}$

۸) $\frac{x^4+3x^3-5x^2-4x-2}{x^2+2x-8}$

۹) $\frac{5x^3+36x^2+77x+48}{(x+1)(x^2+5x+6)}$

$$10)\quad \frac{2x^4-3x^3-19x^2+9x+2}{(x^2+x-2)(x-4)}$$

***

مثال دوم ـ (در مورد کسرهائی که در مخرج آنها توان ۱ام دوجمله‌ای درجهٔ اول وجود دارد) ـ

کسر $\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2(x-2)}$ را به کسرهای ساده‌تر تبدیل کنید.

حل ـ طبق بند ب از قضیه داریم:

$$\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2(x-2)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}\qquad(6)$$

طرفین را در (کمم) ضرب می‌کنیم چنین می‌شود:

$$x^2-3x+1\equiv A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2\qquad(7)$$

و یا:

$$(8)\quad x^2-3x+1\equiv(A+C)x^2+(-3A+B-2C)x+(2A-2B+C)$$

طریق اول ـ از خاصیت تساوی جمل متشابه در اتحاد داریم:

$$\begin{cases}A+C=1\\-3A+B-2C=-3\\2A-2B+C=1\end{cases}$$

که از حل آن بدست می‌آید: $A=2$ و $B=1$ و $C=-1$

و از آنجا:

$$\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-2}$$

طریق دوم ـ در رابطهٔ (۷) مقدار $x=1$ را درطرفین بکار می‌بریم حاصل می‌شود $B=1$ همچنین از بکار بردن $x=2$ بدست می‌آید $C=-1$ و پس‌از قرار دادن مقادیر B و C در (۷) کافی است x را برابر عدد دلخواهی مانند $x=3$ قرار دهیم بدست می‌آید: $A=2$

تمرینات نوع دوم

هریك از کسرهای زیررا به چندین کسر تبدیل کنید:

$$11)\quad \frac{3x+5}{(x+1)^2}\qquad 12)\quad \frac{2x-5}{x^2-6x+9}$$

$$13)\quad \frac{2x^2-9x+11}{x^3-6x^2+12x-8}\qquad 14)\quad \frac{2x^2+7x+9}{(x+1)^3}$$

$$15)\quad \frac{5x^2+18x+14}{(2x+1)(x^2+6x+9)}$$

$$16)\quad \frac{5x^2-25x+8}{(3x+2)(x-3)^2}$$

$$17)\quad \frac{5x^3-6x^2-3x-1}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

$$18)\quad \frac{8x^3-37x^2+39x-18}{x^4-6x^3+9x^2}$$

$$19)\quad \frac{6x^3-29x^2-51x+278}{(2x+4)(x-4)^2}$$

$$20)\quad \frac{8x^3-8x^2+9x-9}{2x^4-3x^3}$$

***

مثال نوع سوم ـ (هنگامی که مخرج شامل عاملهای درجهٔ دوم تکرار نشده باشد) ـ کسر زیررا به کسرهای ساده‌تر تبدیل کنید:

$$\frac{4x^2+x+1}{(x^2+1)(x-1)}$$

حل ـ طبق بند ج ازقضیه داریم:

$$\frac{4x^2+x+1}{(x^2+1)(x-1)}\equiv\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}$$

پس:

$$4x^2+x+1\equiv(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)\qquad(12)$$

و یا:

$$4x^2+x+1\equiv(A+C)x^2+(-A+B)x+(-B+C)\qquad(13)$$

طریق اول ـ از تساوی ضرایب جمل متشابه در اتحاد استفاده می‌کنیم:

$A+C=4$ و $-A+B=1$ و $-B+C=1$

و از آنجا: $A=1$ و $B=2$ و $C=3$ بنابراین:

$$\frac{4x^2+x+1}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{x+2}{x^2+1}+\frac{3}{x-3}$$

طریق دوم- در (۱۲) در ازاء $x=1$ حاصل می‌شود $C=3$ به ازاء دو مقدار دلخواه مثلا $x=0$ و $x=2$ در (۱۲) حاصل می‌شود: $B=2$ و $A=1$

تمرینات نوع سوم (ج)

کسرهای زیر را به کسرهای ساده تر تبدیل کنید:

۲۱) $\dfrac{x^2-6x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

۲۲) $\dfrac{8x^2-5x+6}{(3x-2)(x^2+x+2)}$

۲۳) $\dfrac{5x^2+1}{x^3+1}$ ۲۴) $\dfrac{5x^2-6x}{x^3-27}$

۲۵) $\dfrac{5x^2+2x+9}{x^3+x^2+3x}$ ۲۶) $\dfrac{x^2+14x-15}{2x^3+6x}$

۲۷) $\dfrac{3x^2-2x+5}{(x^2+1)(2x^2-x+3)}$

۲۸) $\dfrac{-2x^3+4x+15}{(x^2+3x+4)(x^2+x+1)}$

۲۹) $\dfrac{x^5+x^4+4x^3+7x^2-2x+19}{(x^2+3)(x^2-x+2)}$

۳۰) $\dfrac{x^5+7x^3+6x-2}{x^4+2x^2}$

۳۱) $\dfrac{4x^4+7x^3+5x^2+x-6}{x^4+x^3+2x^2}$

۳۲) $\dfrac{3x^4-5x^3-16x^2-28x+4}{(x-1)^2(x^2+4)}$

***

مثال نمونهٔ ۴ - (هنگامی که در مخرج کسر سه جمله‌ای درجهٔ دوم تحویل ناپذیر مکرر وجود داشته باشد).

کسر: $\dfrac{4x^4+3x^3+6x^2+5x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

را به کسرهای ساده‌تر تبدیل کنید.

حل - طبق بندهای (الف) و (د) قضیه داریم:

$$\frac{4x^4+3x^3+6x^2+5x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

$$4x^4+3x^3+6x^2+5x\equiv A(x^2+x+1)^2+(Bx+C)(x^2+x+1)(x-1)+(Dx+E)(x-1) \quad (17)$$

و یا:

$$4x^4+3x^3+6x^2+5x\equiv(A+B)x^4+(2A+C)x^3+(3A+D)x^2+(2A-B-D+E)x+(A-C-E)$$

طریق اول - از تساوی ضرایب جمل متشابه نتیجه می‌شود:

$A+B=4$ و $2A+C=3$ و $3A+D=6$

و $2A-B-D+E=5$ و $A-C-E=0$

که از حل آنها خواهیم داشت $A=2$ و $B=2$ و $C=-1$ و $D=0$ و $E=3$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{4x^4+3x^3+6x^2+5x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{2}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}+\frac{3}{(x^2+x+1)^2}$$

طریق دوم - اگر $x=1$ را در ۱۷ بکار بریم بدست می‌آید $9A=18$ و یا $A=2$ حال اگر مقادیر دلخواه $x=0$ و $x=-1$ و $x=2$ و $x=-2$ را در (۱۷) بکار بریم سایر مقادیر ثابت بدست می‌آیند.

تمرینات نوع «د»

کسرهای زیر را به مجموع کسرهای جزئی تبدیل کنید.

۳۳) $\dfrac{x^2+2x-2}{(x^2+1)^2}$ ۳۴) $\dfrac{2x^3-x^2+3x+1}{(x^2-x+2)^2}$

۳۵) $\dfrac{3(x^2+x+3)}{x(x^2+3)^2}$ ۳۶) $\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+3x}{(x-2)(x^2+1)^2}$

۳۷) $\dfrac{3x^5+2x^4+6x^3+6x^2+3x+5}{(x^2+1)^2(x^2+2)^2}$

۳۸) $\dfrac{2x^4+14x^2+25}{(x^2+3)^2(x^2+4)^2}$

۳۹) $\dfrac{3x^4-2x^3+4x^2-3x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}$

۴۰) $\dfrac{2x^4-x^3+15x^2-2x+28}{(x+1)(x^2+3)^2}$

«درباره چند نامساوی هندسی»

از مجلهٔ : The Mathematics Teacher

ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان دکتر نصیری

اگر a_1 و a_2 و ... و a_n مقادیری مثبت باشند نامساوی

$$(1)\quad \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

که به «نامساوی واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی» معروف است برقرار می‌باشد . تساوی وقتی برقرار است که :

$a_1=a_2=\cdots=a_n$ باشد.

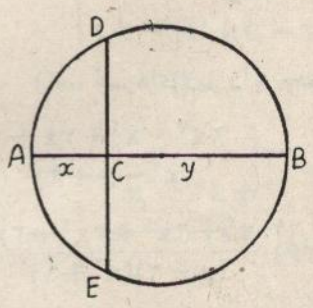
در حالتهای خاص $n=2$ و $n=3$ نامساوی (۱) به صورتهای زیر درمی‌آید :

$$(2)\quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$(3)\quad \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

یك راه سادهٔ اثبات جبری نامساوی (۱) بسط نامساوی‌مسلم‌زیر می‌باشد .

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$$



ویك راه‌سادهٔ اثبات هندسی این نامساوی‌ازاین‌قراراست‌که دایرهٔ به‌قطر $AB=x+y$ را در نظر گرفته درنقطهٔ C از AB که $AC=x$ و $BC=y$ باشد وتر DE را عمودبرAB اخراج‌می‌کنیم.

بااستفاده از رابطهٔ

$$DC\cdot CE=AC\cdot CB \Longrightarrow DC=CE=\sqrt{xy}$$

وبا توجه به اینکه در هردایره قطر بزرگترین وتر است‌نتیجه می‌شود

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

برای اثبات نامساوی (۳) اتحاد زیر را درنظرمی‌گیریم :

$$p^3+q^3+r^3-3pqr=$$

$$=\frac{p+q+r}{2}[(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2]$$

وقتی‌که p و q و r مقادیری مثبت باشند طرف راست اتحاد بالا همواره بزرگتراز‌صفرویالااقل برابر باصفر است(درحالت $p=q=r$) بنابراین

$$p^3+q^3+r^3 \geq 3pqr$$

از این نامساوی بافرض

$x=p^3$ و $y=q^3$ و $z=r^3$

نامساوی (۳) بدست می‌آید .

***

اگر x و y و z سه عدد مثبت باشند با توجه به‌نامساوی (۲) خواهیم داشت

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$ و $y+z \geq 2\sqrt{yz}$ و $z+x \geq 2\sqrt{zx}$

از ضرب نظیر به نظیر طرفین سه نامساوی بالا در یکدیگر خواهیم داشت

$$(4)\quad (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

تساوی وقتی برقراراست‌که :

$x=y=z$

فرض‌کنیم‌که

$$(5)\quad \begin{aligned} x&=a+b-c\\ y&=b+c-a\\ z&=c+a-b \end{aligned}$$

و a و b و c را اندازه‌های ضلعهای یك مثلث اختیار می‌کنیم باتوجه به نامساویهای بین اضلاع (یعنی $a+b>c$ وغیره) مقادیر x و y و z مثبت خواهد بود . چون مقادیر(۵) را در نامساوی (۴) منظورکنیم نامساوی زیر بین اندازه‌های ضلعهای هرمثلث بدست‌می‌آید

$$(6)\quad abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

تساوی وقتی برقرار است‌که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد

اگر R شعاع دایرهٔ محیطی، r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی p نصف محیط و S مساحت مثلث باشد می‌دانیم که:

$$(۷)\quad ۲p=a+b+c$$

$$(۸)\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$(۹)\quad S=pr$$

$$(۱۰)\quad ۴RS=abc$$

$$(۱۱)\quad r=۴R\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$$

رابطه‌های (۵) به صورت زیر درمی‌آیند

$$(۱۲)\quad x=۲(p-c)\ \text{و}\ y=۲(p-a)\ \text{و}\ z=۲(p-b)$$

ونامساوی (۶) چنین می‌شود

$$(۱۳)\quad abc\geqslant ۸(p-a)\ p-b)(p-c)$$

از ضرب طرفین در p می‌شود

$$(۱۴)\quad pabc\geqslant ۸S^۲$$

باتوجه به رابطهٔ (۹) وپس ازاختصار می‌شود

$$(۱۵)\quad abc\geqslant ۸pr^۲$$

این نامساوی را می‌توان چنین نوشت

$$۴RS\geqslant ۸Sr \implies (۱۶)R\geqslant ۲r$$

$$(۱۷)\quad Rp\geqslant ۲S\ \text{و}\ (۱۸)\ ۲R^۲p\geqslant abc$$

از رابطهٔ (۱۱) ونامساوی (۱۶) نتیجه می‌شود :

$$(۱۹)\quad ۱\geqslant ۸\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$$

نامساوی (۱۷) را از راه دیگر هم می‌توان بدست‌آورد : بنابر قضیهٔ اولر داریم

$$d^۲=R^۲-۲Rr$$

که d فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث تا مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن است.

$$d^۲\geqslant ۰ \implies R^۲-۲Rr\geqslant ۰\ \text{یا}\ R\geqslant ۲r$$

اگر l فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی ارتفاعها تا مرکز دایرهٔ محیطی‌مثلث باشد می‌دانیم

$$l=۲r^۲-۴R^۲\cos A\cos B\cos C$$

$l\geqslant ۰$ است وباتوجه به (۱۶) نتیجه می‌شود

$$(۲۰)\quad ۱\geqslant ۸\cos A\cos B\cos C$$

***

اگر $r_۱$ و $r_۲$ و $r_۳$ شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث و $I_۱$ و $I_۲$ و $I_۳$ مرکزهای این دایره‌ها باشندداریم

$$(۲۱)\quad r_۱+r_۲+r_۳=۴R+r$$

ومساحت مثلث $I_۱I_۲I_۳$ برابر است با :

$$(۲۲)\quad S_{I_۱I_۲I_۳}=\frac{abc}{۲r}$$

ازاین دورابطه‌باتوجه به نامساویهای(۱۷) و (۱۸) نامساویهای زیر حاصل می‌شود :

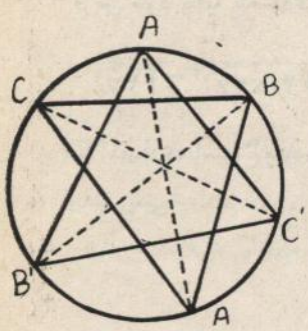
$$(۲۳)\quad \frac{۹R}{۲}\geqslant r_۱+r_۲+r_۳\geqslant ۹r$$

$$(۲۴)\quad \frac{R^۲}{r^۲}S\geqslant S_{I_۱I_۲I_۳}\geqslant ۴S$$

باتوجه به **قضیهٔ پونسله** * (بینهایت مثلث وجود دارد که دارای یك‌دایرهٔ محیطی ویك‌دایرهٔ محاطی داخلی‌مشترك‌هستند) واز نامساویهای (۲۳ و (۲۴) مسئلهٔ زیر مطرح می‌شود :

از بین‌مثلثهایی که‌همه‌دردایرهٔ ثابت محیط بوده‌وبردایرهٔ ثابت محاط باشند نسبت به کدامیك $r_۱+r_۲+r_۳$ ماکزیمم است وهمچنین نسبت به‌کدامیك مساحت مثلث $I_۱I_۲I_۳$ماکزیمم خواهد بود ؟

***



مثلث ABC ودایرهٔ محیطی آن‌رادرنظرمی گیریم. نیمسازهای‌زاویه‌های A وB وC دایرهٔ‌محیطی‌مثلث‌را به‌ترتیب درنقاط A' و B' و C' قطع می‌کنندمساحت‌مثلث A'B'C' برابراست با $\frac{pR}{۲}$ وبا ملاحظهٔ رابطهٔ (۹) ونامساوی (۱۶) نتیجه می‌شود :

$$(۲۵)\quad S_{A'B'C'}\geqslant S_{ABC}$$

این نامساوی را می‌توان به شرح زیر تعمیم داد

چندضلعی‌محدب‌محاطی $v_۱v_۲\cdots v_n$ رادرنظرمی گیریم. چند ضلعی دیگری که رأسهایش به ترتیب وسطهای کمانهای $v_۱v_۲$ و $v_۲v_۳$ و ... و $v_nv_۱$ باشد دارای مساحتی‌است که‌مقدار آن بزرگتر یالااقل مساوی‌مساحت چند ضلعی مفروض‌می‌باشد. ازاین تعمیم نامساوی مثلثاتی زیر نتیجه می‌شود .

اگر زاویه‌های $A_i\geqslant ۰$ بوده و

$$A_۱+A_۲+\cdots+A_n=\pi$$

باشد داریم

$$\sin ۲A_۱+\sin ۲A_۲+\cdots+\sin ۲A_n\geqslant$$
$$\sin(A_۱+A_۲)+\sin(A_۲+A_۳)+\cdots+\sin(A_n+A_۱)$$

درضمن ازآنچه که گفته شد معلوم‌می‌شود که بین‌تمام n ضلعیهای محدب محاط دریك دایره آنکه منتظم است دارای مساحت و همچنین محیط ماکزیمم می‌باشد .

***

اگر ابعادمکعب مستطیل را با x و y و z ، حجم‌آنرا

با V، سطح کل آنرا با S ومجموع طولهای تمام یالهای آنرا با E بنمائیم داریم

$$V = xyz$$
$$S = 2(xy + yz + zx)$$
$$E = 4(x + y + z)$$

واز نامساوی (۲۱) نتیجهٔ زیر بدست می‌آید، بین تمام مکعب‌مستطیلهای با حجم ثابت آنکه سطح کلش می‌نیمم است مکعب می‌باشد. همچنین مابین تمام مکعب‌مستطیلهای باسطح کل ثابت آنکه حجمش ماکزیمم است مکعب می‌باشد.

مسئله ـ فرض کنیم که بخواهیم از ورقهٔ حلبی جعبهٔ درـ بازی به شکل مکعب مستطیل با حجم معلوم بسازیم. ابعادجعبه را چگونه انتخاب کنیم تا مقدار حلبی بکار رفته می‌نیمم باشد. اگر x و y و z ابعاداین جعبه و S و V سطح کل وحجم آن فرض شود بنابه نامساوی (۳) داریم

$$\frac{S}{3} = \frac{2xy + yz + 2zx}{3} \geq \sqrt[3]{4(xyz)^2} = \sqrt[3]{4v^2}$$

V مقداری است ثابت‌پس S وقتی‌می‌نیمم است که تساوی‌برقرار باشد یعنی

$$S_{min} = 3\sqrt[3]{V^2}$$
$$2xy = yz = 2zx = \sqrt[3]{4V^2}$$
$$2x = y = z = \sqrt[3]{2V}$$

مسئلهٔ عکس ـ می‌خواهیم از مقدار معینی ورقهٔ‌حلبی جعبه‌ای‌دربازبه شکل مکعب‌مستطیل بسازیم که حجم آن‌ماکزیمم باشد. دراین حالت نتیجه خواهیم گرفت.

$$2x = y = z = \frac{\sqrt{S}}{3}$$

مسئلهٔ دیگر ـ می‌خواهیم از ورقهٔ فلزی یك قوطی به شکل استوانهٔ قائم وبه گنجایش یك لیترچنان بسازیم که مقدار ورقهٔ فلزی‌که بکار می‌رود می‌نیمم باشد.

چنانچه r شعاع قاعده، h ارتفاع، S سطح کل و V حجم قوطی باشد داریم

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$V = \pi r^2 h$$

با ملاحظهٔ نامساوی (۲) خواهیم داشت

$$\frac{S}{2} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi rh}{2} > \sqrt{4\pi^2 r^3 h}$$

چون طرف راست این، نامساوی مقدار ثابتی نیست بنابراین برای تعیین می‌نیمم سطح از نامساوی (۳) استفاده می‌کنیم

$$\frac{S}{3} = \frac{2\pi r^2 + \pi rh + \pi rh}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi^3 r^4 h^2} = \sqrt[3]{2\pi v^2}$$

طرف راست مقداری است ثابت پس طرف چپ هنگامی می‌نیمم می‌شودکه تساوی برقرار باشد یعنی:

$$S_{min} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$
$$2\pi r^2 = \pi rh = \pi rh = \sqrt[3]{2\pi V^2}$$
$$h = 2r = \frac{\sqrt[3]{2V}}{\pi}$$

تمرینات

۱ـ حجم بزرگترین استوانهٔ محاط درکرهٔ معلوم‌رابدست آورید.

۲ـ ازبین مستطیلهای محاط در بیضی معلوم کدام‌دارای مساحت ماکزیمم است؟

۳ـ اگر x و y و z مقادیر مثبت و $x^a + y^b + z^c = k$ (ثابت) و a و b و c و m و n و p اعدادی منطق باشند ماکزیمم حاصل ضرب $x^m y^n z^p$ چه موقع است؟

۴ـ اگر P و Q و R نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باضلعها باشد ثابت کنید که

$$S_{PQR} < \frac{1}{4} S_{ABC}$$

۵ـ اگر A و B و C زاویه‌های مثلثی باشند ثابت کنید

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} \geq tg\frac{A}{2}\, tg\frac{B}{2}\, tg\frac{C}{2}$$

یادداشت ـ پونسله‌ریاضیدان فرانسوی قضیهٔ خودرا درحالت کلی زیر بیان کرده‌است: بینهایت n ضلعی وجوددارد که بر منحنی مقطع مخروطی‌معلومی محیط بوده درمنحنی‌مقطع مخروطی دیگری محاط باشد.

راهنمای حل مسائل شیمی

مؤلفان : Favre et Gautier مترجم : عطاءالله بزرگ‌نیا

فصل VII ـ مسائلی که با استفاده از چند واکنش یا یك ردیف واکنش شیمیائی تنظیم شده است

۳۰ـ در برخی از این مسائل هریك از معلومات مسئله مربوط به مجهولی است . در این صورت مسئله را می توان مستقیماً به‌چند مسئلهٔ کوچك تجزیه کرد .

۳۱ـ در برخی موارد دیگر که بعضی از معلومات مسئله مربوط به‌نتیجهٔ کلی چند واکنش است و با تنظیم چند معادلهٔ چند مجهولی ، مسئله به شکل مسئلهٔ جبری درمی‌آید .

۳۲ـ حل دستگاه معادلات چند مجهولی گاهی بسیارساده است . مثلا وقتی دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی به شکل زیر باشد :

$$(1)\quad ax+by=c$$

$$(2)\quad dy=e$$

از رابطهٔ (۲) می توان مقدار y را بدست آورد و در رابطهٔ (۱) قرار داد وآنرا به معادلهٔ یك مجهولی تبدیل کرد. (یاد آوری حل معادلات چند مجهولی ضروری است).

حالت اول

مسائلی که به چند مسئلهٔ ساده قابل تجزیه می‌باشند

۳۳ـ مثال ـ ازتجزیهٔ عنصری ۰/۴۱۳ گرم ازیك‌مادهٔ آلی ازت‌دار ۰/۶۱۶ گرم گازکربنیك و ۰/۳۱۵ گرم آب حاصل شده است .ازت حاصل از تجزیهٔ ۰/۳۵۴ گرم ازهمین ماده تحت شرایط متعارفی $67/2\,cm^3$ حجم دارد . ترکیب درصد عناصر رادر این مادهٔ آلی پیدا کنید .

حل ـ از روی معلومات مسئله می‌توان نسبت درصد هر یك از عناصر کربن ، ئیدرژن و ازت را مستقلا محاسبه کرد . نسبت در صد اکسیژن ازکاستن مجموع نسبتهای سایر عناصر از عدد ۱۰۰ بدست‌می‌آید . بنابراین مسئلهٔ فوق به‌سه مسئلهٔ بسیار ساده تجزیه می‌شود .

الف) ـ درصدکربن ـ تمامی کربن مادهٔ آلی به‌گاز کربنیك تبدیل شده‌است . چون ۱۲ گرم کربن در اثرسوختن ۴۴ گرم CO_2 تولید می‌کند پس تشکیل ۰/۶۱۶ گرم گاز کربنیك وجود $0/616\times\frac{12}{44}$ گرم کربن رادر جسم نشان می‌دهد . این مقدارکربن در ۰/۴۱۳ گرم از مادهٔ آلی‌وجود دارد مقدار درصدکربن برابر است با :

$$\frac{12\times0/616\times100}{44\times0/413}=40/68 \text{ گرم}$$

ب) درصد ئیدرژن ـ تمامی ئیدرژن مادهٔ آلی به‌آب تبدیل شده است . چون ۲ گرم ئیدرژن تولید ۱۸ گرم آب می‌نماید . پس تشکیل ۰/۳۱۵ گرم آب وجود $0/315\times\frac{2}{18}$ گرم ئیدرژن را در ۰/۴۱۳ گرم جسم ثابت می‌کند و مقدار آن در ۱۰۰ گرم می‌شود :

$$\frac{2\times0/315\times100}{18\times0/413}=8/47 \text{ گرم}$$

ج) در صد ازت ـ حجم ازت $67/2\,cm^3$ و جرم آن $\frac{67/2}{22400}\,N_2$ یا $\frac{67/2\times28}{22400}$ گرم در ۰/۳۵۴ گرم‌جسم

است . بنابراین مقدار درصدآن برابرخواهد بود با :

$$\frac{۶۷/۲ \times ۲۸ \times ۱۰۰}{۲۲۴۰۰ \times ۰/۳۵۴} = ۲۳/۷۳ \text{ گرم}$$

باقیماندهٔ از ۱۰۰ گرم :

$$۱۰۰ - (۴۰/۶۸ + ۸/۴۷ + ۲۳/۷۳) = ۲۷/۱۲$$

معرف نسبت اکسیژن است .

تبصره ـ تعیین نسبت در صد در مخلوط وجسم مرکب خالص به یك طریق انجام می‌شود و نسبتهای ساده‌ای که بین اتمهای عناصر درجسم مرکب خالص برقرار است فقط در تعیین فرمول جسم دخالت دارد .

مسائلی که در بند ۵۳ و ذیلا بررسی خواهد شد این مطلب را نشان می‌دهد .

حالت دوم

حالت کلی از مسائل بند ۳۱

۳۴ ـ مثال ۱ـ ۷/۷۵ گرم آلیاژ مس‌ونقره را تحت اثر مقدار زیادی اسید سولفوریك غلیظ و گرم قرار می‌دهیم . تمامی گاز حاصل‌رادر مقدار زیادی آب کلر وارد می کنیم. سپس محلول حاصل را بامقدارزیادی کلرور باریوم می‌آمیزیم .رسوب حاصل‌پس‌از شستشو و خشك‌کردن ۱۱/۶۵ گرم‌جرم‌دارد. نسبت درصد دو فلز رادر آلیاژ پیداکنید .

$Ag = ۱۰۸$ و $Cu = ۶۳/۵$

حل ـ اگر تعداد اتمهای نقره‌و مس رادر ۷/۷۵ گرم آلیاژ با x و y نشان دهیم . برای یافتن x و y دو معادله لازم است .

الف) طبق فرض‌مسئله جرم‌آلیاژ برابر است با :

$$۱۰۸x + ۶۳/۵y = ۷/۷۵$$

ب) جرم رسوب سولفات باریوم حاصل را نیز می‌توان برحسب x و y این طور بیان نمود :

در فرمول واکنش اسید سولفوریك بر فلز نقره طبق معادلهٔ زیر :

$$۲SO_۴H_۲ + ۲Ag \longrightarrow SO_۴Ag_۲ + SO_۲ + ۲H_۲O$$

۲ اتم‌نقره دخالت دارد. وچون تعداد اتمهای‌نقرهٔ‌شرکت کننده درواکنش را x در نظر گرفتیم بنابراین باید ضریب فرمول را $\frac{x}{۲}$ قرار داد .

$$\frac{x}{۲}(۲SO_۴H_۲ + ۲Ag \rightarrow SO_۴Ag_۲ + SO_۲ + ۲H_۲O) \quad (۱)$$

با استدلال مشابهی درمورد مس‌چنین می‌شود :

$$y(۲SO_۴H_۲ + Cu \longrightarrow SO_۴Cu + SO_۲ + ۲H_۲O \quad (۲)$$

$SO_۲$ حاصل از واکنش (۱) برابر $\frac{x}{۲}$ وازواکنش (۲) برابر y ملکول می‌باشد . بنابراین مجموعاً تعداد ملکولهای $SO_۲$ مساوی $(\frac{x}{۲} + y)$ خواهد شدکه از واردکردن آن‌در آب کلر $(\frac{x}{۲} + y)$ ملکول اسید سولفوریك و در نتیجه $(\frac{x}{۲} + y)$ ملکول سولفات‌باریوم تولید می‌شود وچون ملکول گرم سولفات‌باریوم ۲۳۳ گرم است خواهیم داشت :

$$(\frac{x}{۲} + y)۲۳۳ = ۱۱/۶۵$$

یا

$$\frac{x}{۲} + y = \frac{۵}{۱۰۰}$$

از حل دو معادلهٔ (الف) و (ب) :

$$x = \frac{۶}{۱۰۰} \text{ و } y = \frac{۲}{۱۰۰}$$

بدست می‌آید .

بنابراین جرم نقره و مس در آلیاژ به ترتیب ۶/۴۸ و ۱/۲۷ گرم است .

۳۵ـ مثال II (مخلوط چندگاز) $۱۰^{cm^۳}$ مخلوط ئیدرژن ، متان واتیلن را با $۲۰^{cm^۳}$ اکسیژن در آبسنجی واردکرده درآن جرقهٔ‌الکتریك برقرار می کنیم . پس‌ازجرقه و انفجار و سرد شدن $۱۲^{cm^۳}$ گاز باقی می‌ماندکه $۹^{c.c}$ آن قابل جذب پتاس و بقیه جذب فسفر می‌شود ، نسبت درصد حجمی گازها را در مخلوط پیداکنید .

هرگاه حجم ئیدرژن ، متان واتیلن را در $۱۰^{c.c}$ مخلوط به‌ترتیب x و y و z سانتیمتر مکعب فرض کنیم‌چون‌طبق بند ۱۹ به‌ازاء هر ملکول گاز می‌توان یك‌حجم از آنراقرار داد . فرمول واکنشهای سوختن گازها بادر نظر گرفتن‌ضرایب ملکولی چنین خواهد شد :

$$x(H_۲ + \frac{۱}{۲}O_۲ \longrightarrow H_۲O) \quad (\text{الف})$$

$$y(CH_۴ + ۲O_۲ \longrightarrow CO_۲ + ۲H_۲O) \quad (\text{ب})$$

$$z(C_۲H_۴ + ۳O_۲ \longrightarrow ۲CO_۲ + ۲H_۲O) \quad (\text{ج})$$

برای حل این مسئله سه معادله لازم است که باتوجه به معلومات آن می‌توان نوشت :

۱ـ حجم‌مجموع گازها : $x+y+z=10$

۲ـ حجم گاز کربنیك حاصل ازاحتراق (9^{cm^3}) برابر مجموع گاز کربنیك تولید شده ازمعادلات (ب) و (ج) می‌باشد.

$y+2z=9$

۳ ـ حجم اکسیژن مصرف‌شده 17^{cm^3} می‌باشدزیرا از 20^{cm^3} اکسیژن اولیه 3^{cm^3} آن باقیمانده است وطبق معادلات واکنشهای فوق خواهیم داشت :

$\frac{x}{2}+2y+3z=17$

از حل دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی نتیجه‌می‌شود که :

$x=4$ و $y=3$ و $z=3$

است . از اینجا نسبت درصدحجمی گاز خواهد شد ئیدرژن ۴۰٪ ، متان ۳۰٪ ، اتیلن ۳۰٪

تبصره ـ می‌توان برای نقصان حجم یعنی :

$30-12=18$

که تابع مجهولات مسئله است نیز معادله‌ای تنظیم‌کرد .

نقصان حجم برای واکنش (الف) $x+\frac{x}{2}=\frac{3x}{2}$ ، برای واکنش (ب) $y+2y-y=2y$ و برای واکنش (ج) : $z+3z-2z=2z$ سانتیمتر مکعب است بنابراین معادلهٔ چهارم به‌صورت زیر در می‌آید :

$\frac{3}{2}x+2y+2z=18$

از این معادله‌برای تعیین درستی جوابها می‌توان‌استفاده کرد .

حالتی که مسئله قابل تجزیه به چند مسئله ساده‌تر است (بند ۳۲)

۳۶ـمثال۱ـ از احتراق‌کامل مخلوطی ازاکسیدکربن و متان ۰/۲۲ گرم انیدریدکربنیك و ۰/۱۰۸ گرم آب‌حاصل شده است نسبت حجمی مخلوط را پیداکنید .

حل ـ محصول احتراق اکسیدکربن ، گاز CO_2 (واکنش۱) و محصول احتراق CH_4 آب و گاز کربنیك است (واکنش۲) نظر به‌اینکه آب منحصراً از احتراق متان حاصل می‌شود از روی مقدار آن مستقیماً می‌توان مقدار متان را محاسبه‌کرد .

۱۰۸ میلی‌گرم آب یعنی $\frac{108}{18}=6$ میلی ملکول آن از احتراق۳ میلی ملکول متان حاصل‌می‌شود علاوه براین ۳ میلی ملکول گاز کربنیك نیز تولید می‌کنند .

۲۲۰ میلی‌گرم گاز کربنیك معرف $\frac{220}{44}=5$ میلی ملکول ازآنست . از این تعداد ملکول ۳ میلی ملکول مربوط به متان و ۲ میلی ملکول دیگر محصول احتراق همین تعداد ملکول ازاکسیدکربن می‌باشد . بنابراین حجم ۳ میلی‌ملکول متان $67/2^{cm^3}$ و حجم ۲ میلی ملکول اکسید کربن $44/8^{cm^3}$ در مخلوط می‌باشد .

۳۷ ـ مثال II ـ گاز آمونیاك حاصل از یك واکنش شیمیائی را در 500^{cm^3} محلول نرمال اسید سولفوریك وارد می‌سازیم . آزمایش‌نمونه‌ای از محصول حاصل نشان می‌دهدکه 20^{cm^3} آن بوسیلهٔ 80^{cm^3} از محلول دسی نرمال سود خنثی می‌شود . جرم آمونیاك را محاسبه‌کنید .

حل ـ 80^{cm^3} محلول دسی‌نرمال سود 8^{cm^3} محلول نرمال اسید راخنثی می‌سازد بنابراین $\frac{12}{20}$ اسید موجوددرمحلول یعنی‌از 20^{cm^3} اسید 12^{cm^3} آن بوسیلهٔ آمونیاك خنثی‌شده است و حجم اسید خنثی شده بوسیلهٔ آمونیاك :

$\frac{12}{20}\times 500=300^{cm^3}$

نرمال‌خواهدشدکه شامل $\frac{300}{1000}$ اتم ئیدرژن اسیدی است .

از اینجا مقدار آمونیاك $\frac{300}{1000}$ ملکول یعنی :

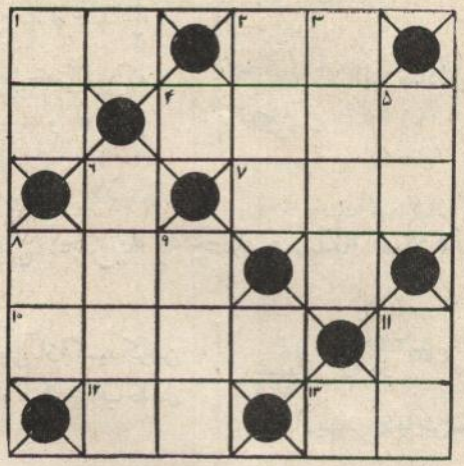
$\frac{3}{10}\times 17=5/1$

گرم خواهد شد .

سرگرمیهای ریاضی

جدول اعداد

طرح از : **چنگیز ارومیه** دانش آموز دبیرستان فردوسی رضائیه



افقی : ۱ ـ جذرش از متمم حسابیش ده واحد کم دارد . ۲ـ مساحت مثلثی که مختصات سه رأس آن عبارتست از :

(۷ـ۰و) و (۴و۰) و (۸و۵)

۴ ـ مقدار S از رابطهٔ زیر :

$$S=(1+\sqrt{2})^{10}+(1-\sqrt{2})^{10}$$

۷ـ تعداد نیمسازهای زاویه‌هایی که از ۲۲ خط متقارب پدید می‌آید.

۸ـ توان هشتم یك عدد .

۱۰ ـ تفاضل زیر در مبنای ۷:

$$(5412)_7-(465)_7$$

۱۲ ـ مقلوبش مربع کامل است .

۱۳ ـ باقیماندهٔ تقسیم آن بر عددهای ۱۰ و ۹ به ترتیب برابر با ۱ و ۱ـ است.

قائم : ۱ـ یکی از رقمهایش ریشهٔ سوم رقم دیگری است .

۲ ـ عددی است متقارن

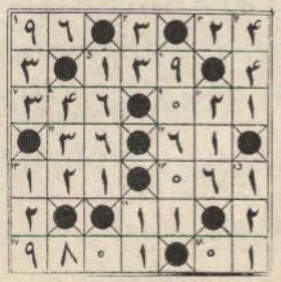
۳ ـ حاصل جمع آن با مجموع رقمهایش برابر است با ۴۲۸۰

۵ ـ دو برابر یك عدد اول .۶ ـ تکرار یك عدد دو رقمی .

۸ـ اندازهٔ مساحت مثلثی که شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی آن برابرند با ۱۲ و ۶ و ۴ .

۹ـ حجم هرم مربع‌القاعده‌ای که ارتفاع آن ۵۱ و ضلع قاعده‌اش ۶ واحد باشد.

۱۱ ـ نصف مقلوب عدد ۸ قائم .



حل جدول شمارهٔ گذشته

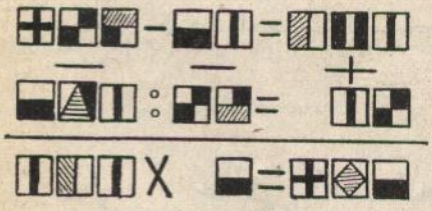
پاسخ «تعیین ارقام»

$$4\times4743=9\times2108$$
$$4\times6165=9\times2740$$
$$4\times6867=9\times3052$$
$$4\times5859=9\times2604$$

سرگرمی فکری

طرح از : **غلامرضا فرزین**

دانشجوی دانشکدهٔ افسری



هر مربع نمایندهٔ یك رقم و مربعهای متفاوت نمایندهٔ رقمهای متفاوت می‌باشند . با توجه به علامتهای بین اعداد ، ارقام را مشخص کنید

پاسخ «بهترین استراتژی»

بازیکن اول می‌تواند GH را رسم کند . دومی اگر مثلا JK را رسم کرد در این صورت اولی بارسم KO و LP دو مربع ساخته بعد LH را رسم می‌کند . دومی با رسم GK دومربع بدست می‌آورد و بعد مجبور است که دو نقطه را به‌هم وصل کند که در هرصورت به اولی اجازه خواهد داد پنج مربع باقیمانده را بدست آورد . برداولی رویهم هفت مربع خواهد شد.

اما اگر بعد از آنکه اولی GH را رسم کرد دومی CG ، BF یا مثلا EF را رسم کرد دراین‌صورت پنج‌مربع را به‌رقیب داده امامطمئن است که چهار مربع بقیه را بدست خواهد آورد .

نویسندگان : ژ. گامو
م. استرن

ترجمه : از فرانسه

نیکلای جوان

۱ـ معمای دومینوها

نیکلا که تازه قدم به‌دورهٔ جوانی گذاشته بود. بسیارمایل بود به عضویت «باشگاه مردان شطرنج باز» پذیرفته شود. اما اعضای قدیمی باشگاه بادرخواست وی مخالفت می‌کردند؛ آنان فقط یك دلیل می‌آوردند و آن اینکه نیکلا هنوز بسیار جوان است وبا این سن کم برای درك روشهای منطقی آمادگی نداشته و نمی‌تواند فکری استدلالی داشته باشد، دلیل خود را منطقی می‌دانستند وغیر ازآن هم حاضر نبودند حرف دیگری‌را گوش کنند.

باوجود آنکه نیکلا در بازی شطرنج بسیار ماهر بود اما آقایان اعضای باشگاه در عقیدهٔ خود پابرجا بودند و هیچ گذشت هم نداشتند. نیکلا معمولا به باشگاه می‌رفت اما در آنجا فقط می‌توانست بازی دیگران را تماشا کند. یك‌روزعصر، طبق معمول به تماشای بازی دیگران مشغول بود، محجوبانه تقاضاکرد که باوی هم یك دست بازی کنند، اما بزرگترها با ریشخند به‌وی نصیحت کردندکه برود خودش را بادومینوها سرگرم کند ودر این بازی مهارت پیداکندکه با سن وی‌بیشتر جور می‌آید.

نیکلا اظهار داشت:

ـ اگر عقیدهٔ شما این است که من هنوز برای بازی شطرنج آمادگی ندارم، با بازی بادومینوها هم که چنین آمادگی بدست نخواهم آورد!؟

پاسخی‌که به وی دادند چنین بود:

ـ برو جانم، برو، بادومینوها بازی کن. این بازی خیلی خوب می‌تواند تورا سرگرم سازد.

نیکلا به‌گوشه‌ای رفت وخودش را با دومینوها مشغول ساخت. بعد از مدتی خطاب به بزرگترها اظهار داشت که یك معمای جالب طرح‌کرده است‌که هم به دومینوها مربوط است‌و هم به‌شطرنج، اگر مایل باشند این معما را مطرح کند.

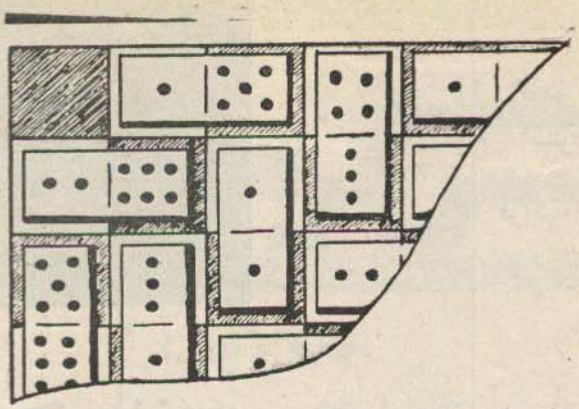
اعضای قدیمی باشگاه باحالتی‌که‌نشان می‌دادکه ملاحظهٔ حال وی را دارند نشان دادندکه معمایش را گوش می‌کنند و نیکلاچنین توضیح داد:

ـ می‌دانیم‌که صفحهٔ شطرنج به‌شکل مربع ۸×۸ بوده رویهم شامل ۶۴ خانهٔ مربع شکل می‌باشد. دومینو به شکل مستطیل ۱×۲ است و شامل ۲ خانه می‌باشد. فرض می‌کنیم که هرخانهٔ صفحهٔ شطرنج معادل باشد با یك خانهٔ دومینو یعنی هردومینو درست دوخانهٔ متوالی شطرنج را بپوشاند. چنانچه فقط ۳۱ دومینو در اختیار داشته باشیم به‌هرترتیب‌که آنها را روی صفحهٔ شطرنج قرار دهیم، ۶۲ خانهٔ شطرنج پوشانیده شده و۲ خانهٔ آن خالی خواهد ماند.

مسئله از این قرار است که این ۳۱ دومینو را چنان قرار دهیدکه دوخانه‌ای‌که خالی می‌ماندوخانهٔ دوگوش‌مقابل (انتهای یك قطر) از صفحهٔ شطرنج باشد. گمان می‌کنم‌که این مسئله یکی ازمسائل شهودی عینی است، البته آقایان بیشتر از من دراین باره اطلاعات دارند.

بزرگترها ابتداکمی یکدیگر را نگاه‌کردند، بعدکم‌کم متوجه شدندکه ممکن است مسئلهٔ جالبی باشد و شروع کردند که عملاآزمایش کنند. آنان، خانهٔ گوشهٔ‌بالای‌صفحهٔ شطرنج را خالی نگاه می‌داشتند و بعد دومینوها را به ترتیبهای مختلف روی بقیهٔ خانه‌ها قرار می‌دادند. آن شب وچند روز بعد را به تمرین و آزمایش گذراندند. بعد از چند روز به‌نیکلا اطلاع دادندکه به حل مسئله موفق شده‌اند: مسئله به ترتیب گفته‌شده غیرممکن است.

نیکلا خواست تا دربارهٔ غیر ممکن بودن مسئله توضیح



بیشتری بدهند . بزرگترها فقط اظهار داشتند چونکه عملا نتوانسته‌اند به نتیجه برسند. نیکلا گفت که اگر ممکن است دلیل قانع کننده‌ای ارائه دهند و بزرگترها گفتند که غیر از این چیزی نمی‌دانند. اگر دلیلی هست خود نیکلا آن راشرح دهد. نیکلا چنین توضیح داد:

ـ مسئله را باید مستدلا بررسی کرد . خانه های صفحهٔ شطرنج یك در میان سیاه و سفید است . هیچ دوخانهٔ متوالی‌از آن‌هم‌رنگ نیستند. هردومینو فقط دوخانهٔ شطرنج رامی‌پوشاند که این دوخانه، یکی سیاه ودیگری سفید خواهدبود. بنابراین دوخانه‌ای که خالی می‌ماند بارنگهای مختلف هستند. تمام‌خانه های واقع برهرقطر صفحهٔ شطرنج ازیك رنگ هستندودوخانهٔ واقع در دوگوش مقابل هم همرنگ می‌باشند . پس غیر ممکن خواهد بود که ۳۱ دومینو را روی صفحهٔ شطرنج چنان قرار دادکه دوخانه واقع در دوگوش مقابل خالی بماند. این‌مسئله نمونه‌ای از مسائلی است‌که در آنها نکته‌ای نهفته است و در صورت مسئله ظاهر نمی‌شود اما توجه به‌همین نکته تعیین‌جواب را به سادگی ممکن می‌سازد . در عمل می‌توان روی صفحه‌ای کاغذ یك مربع به ضلع ۸ رسم‌کرده‌آنرا به۶۴ خانه تقسیم‌کرد واین۶۴خانه را به دوگروه تقسیم‌کرد ، که می‌توانیم آنها را گروه مربعهای سفید وگروه مربعهای سیاه نامگذاری‌کنیم، در این صورت حل‌مسئله‌به سادگی و آشکارا میسر خواهد بود.

Adding , we obtain : $\pm 2 \pm 9 \pm 4 \pm x = 0$.

If we now choose signs so that **x** is positive , we find : $x \in \{3,7,11,15\}$.

Part b . we have , as in part a:

$$\pm a' = 1 - b$$

$$\pm b' = b - c$$

$$\pm c' = c - d$$

$$\pm d' = d - 1$$

Adding we obtain the required conditions :

$$\pm a' \pm b' \pm c' \pm d' = 0$$

And by definition a' , b' , c' , d' are positive

←

x for which the corresponding A exsits

b) If $A' = \{a', b', c', d'\}$, what condition must a' , b' , c' , d' satisfy for an A to exsit ?

Solution: Part a. From the given data we have

$2 = |1 - b|$; $9 = |b - c|$;

$4 = |c - d|$; $x = |d - 1|$

Therefore :

$\pm 2 = 1 - b$

$\pm 9 = b - c$

$\pm 4 = c - d$

$\pm x = d - 1$

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(The Mathematics Student Journal . Vol . 14 ، No . 3)

Problem 11 : if the measures of the sides of a triangle are consecutive numbers,and the measure of the greatest angle is twice that of the smallest angle, find the measures of the sides of the triangle .

Solution : In Fig . let $m\angle C=\theta$, and $m\angle A=2\theta$. Also let $AB=x$, $AC=x+1$ $BC=x+2$, and $BD=y$. If AD is the bisector of $\angle A$, then $m\angle BAD=m\angle DAC=\theta$ and $m\angle BDA=2\theta$. From these we deduce

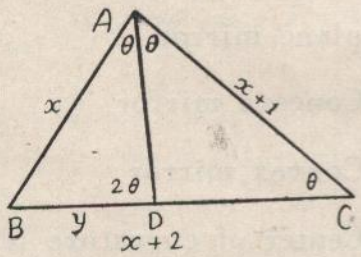
First : , AD divides BC into segments with lengths proportional to AB andAC Thus $AB/BD=AC/DC$,or

1) $x/y=(x+1)/(x+2-y)$

Second: $\Delta ABD \sim \Delta ABC$, so that

(2) $x/y=(x+2)/x$

From(1) and (2) , we obtain $(x+2)/x=(x+1)/(x+2-y)$ If we replace y by $x^2/(x+2)$



(from(2)) , the result reduces to :

$$x^2-3x-4=0$$

of the two roots , 4 and -1 , only $x=4$ is acceptable . Thus $x=4$, $x+1=5$, $x+2=6$ are the required length measures.

Problem 12: A circle whose center is $P(a,b)$, $(a\neq O , b\neq O)$, passes through the origin O . Without the use of slopes or calculus find the coordinates of the intersection Q of the tangents to the circle at the x− intercepts O and A

Solution : (Editor – in this solution P is assumed to be in the first quadrant; sea fig) . Since Δ OPA and Δ OQA are isosceles,PQ is the perpendicular bisector of OA . Hence the abscissa of Q= $=OX=a$.

ΔPOQ is a right triangle with hypotenuse QP . Therefore

$XP/OX=OX/QX$

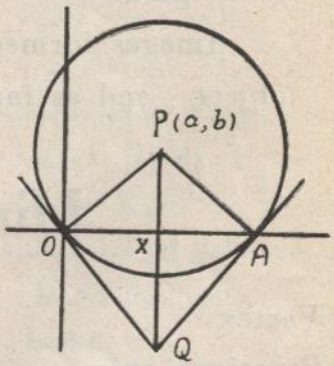
or

$b/a=a/(-XQ)$

Thus

$XQ=-a^2/b$

and the coordinates of Q are $(a,-a^2/b)$



Problem 13 : If b , c , d are integers and $A=\{1 , b , c , d\}$,we define A′ to be equal to $\{a' , b' , c' , d'\}$ in which $a'=|1-b|$, $b'=|b-c|$, $c'=|c-d|$, and $d'=|d-1|$. For example if $A=\{1,5,-2,0\}$, then $A'=\{4,7,2,1\}$.

a) If $A'=\{2, 9, 4 , x\}$, find all values of

→

اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از : مهندس ایرج ارشاقی

۷ ـ نور : Light

Image	تصویر	Reflection	انعکاس
Virtual	مجازی	Diffusion	انتشار
Erect	مستقیم	Normal	خط‌عمود بر یک‌سطح
Inverted	معکوس	Angle of incidence	زاویهٔ تابش
		Angle of reflection	زاویهٔ انعکاس

Practice Your Reading

The angles of incidence and reflection are equal , and , they lie in the same plane .

Images formed by plane mirrors are erect , virtual, the same size as the object , and as far behind the mirror as the object is in front .

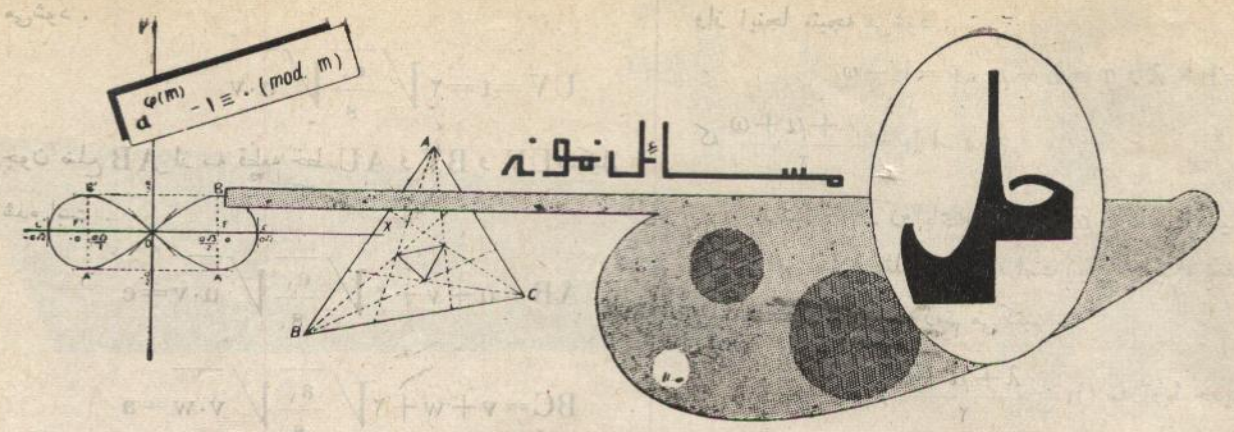
۸ ـ آینه‌ها : Mirrors

Vertex	رأس	plane mirror	آینهٔ مسطح
Principal axix	محوراصلی	Concave mirror	آینهٔ مقعر
Diverging rays	اشعهٔ‌متباعد	Convex mirror	آینهٔ محدب
Converging rays	اشعهٔ متقارب	Center of curvature	مرکز انحناء
Focus	کانون		

Problems

In order to produce an image two - thirds the size of an object which is placed 10 cm . from a concave mirror , what focal length mirror is needed?

An object is placed 30 cm . from a concave mirror whose focal length is 6 cm . where will the image be located ?



مسألهٔ مالفاتی

ترجمهٔ : هراج کاراپتیان

۴۱۱۵ـ در مثلث مفروض سه دایره چنان رسم کنید که هر کدام بردو دایرهٔ دیگر وبردوضلع مثلث مماس باشند .

این مسئله به وسیلهٔ ریاضیدان ایتالیائی ، **مالفاتی** (Malfatti ۱۸۰۷ – ۱۷۳۱) درسال ۱۸۰۳ طرح شده و جزو مسائل مشهور ریاضیات متوسطه است .

حل ـ مثلث ABC به‌اضلاع a و b و c ، به محیط $2S$ وزوایای α و β و γ مفروض‌است. دوایرمالفاتی را (که‌براضلاع زوایای α و β و γ مماس هستند) به ترتیب به z و z′ و z″ و مراکز این دوایر را به P و Q و R و شعاعهای آنها را به p و q و r وطول‌مماسهای‌مرسوم‌ازرأسهای A و B و C بردوایر P و Q و R را به u و v و w نمایش می‌دهیم .

اگر K دایرهٔ‌محاطی مثلث ABC باشدومرکزآن J و شعاعش d و طول مماسهای مرسوم از رأسهای A و B و C براین دایره a_1 و b_1 و c_1 باشد از سه معادلهٔ

$$a_1+b_1=c \text{ و } c_1+a_1=b \text{ و } b_1+c_1=a$$

مقادیر زیر نتیجه می‌شود :

$$c_1=s-c \text{ و } b_1=s-b \text{ و } a_1=s-a$$

چون P و J روی نیمساز زاویهٔ α قرار دارند ، بنابراین

$$\frac{p}{d}=\frac{u}{a_1} \text{ یا } \Longrightarrow p=\frac{d}{a_1}u$$

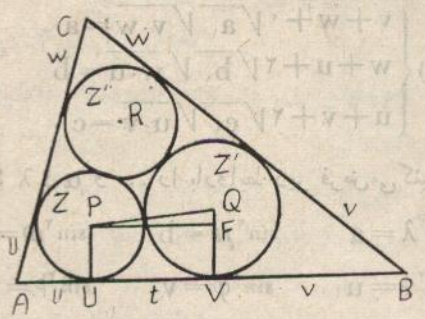
وبه همین ترتیب

$$q=\frac{d}{b_1}u$$

نقاط تماس AB را با دوایر z و z′ را به U و V نمایش می‌دهیم ومقدار $UV=t$ را محاسبه می‌کنیم .

چون PF ، عمود وارد بر QV از P برابر t است،

از مثلث قائم‌الزاویهٔ PQF داریم که :



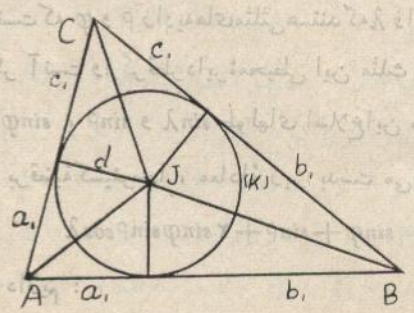
$$PQ^2=PF^2+FQ^2 \Longrightarrow (p+q)^2=t^2+(p-q)^2$$

وبنابراین :

$$UV=t=2\sqrt{pq}$$

حال اگر مقادیرپیداشدهٔ بالا رابرای p و q در فرمول‌اخیر قرار دهیم نتیجه می‌شود :

$$t=2\sqrt{u\cdot v}\sqrt{\frac{d^2}{a_1b_1}}$$



اما می‌دانیم که $d^2=\frac{a_1b_1c_1}{s}$ از اینجا مقدار t چنین

می‌شود .

$$UV = t = 2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{u\cdot v}$$

چون ضلع AB از سه قطعه خط AU و BV و UV تشکیل شده است .

$$AB = u + v + 2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{u\cdot v} = c$$

$$BC = v + w + 2\sqrt{\frac{a_1}{s}}\sqrt{v\cdot w} = a$$

$$CA = u + w + 2\sqrt{\frac{b_1}{s}}\sqrt{wu} = b$$

اگر نصف محیط را واحد فرض کنیم ، معادلات بالا چنین می‌شود :

$$(I)\begin{cases} v + w + 2\sqrt{a_1}\sqrt{v\cdot w} = a \\ w + u + 2\sqrt{b_1}\sqrt{w\cdot u} = b \\ u + v + 2\sqrt{c_1}\sqrt{u\cdot v} = c \end{cases}$$

زوایای حادهٔ λ و μ و ... را باروابط زیر فرض می‌کنیم :

$$\sin^2\lambda = a \qquad \sin^2\mu = b \qquad \sin^2\omega = c$$

$$\sin^2\psi = u \qquad \sin^2\varphi = v \qquad \sin^2\rho = w$$

ونیز (چون $a + a_1 = s = 1$ و $b + b_1 = 1$ و $c + c_1 = 1$).

$$\cos^2\lambda = a_1 \qquad \cos^2\mu = b_1 \qquad \cos^2\omega = c_1$$

وبنا براین معادلات (I) چنین می‌شود :

$$(II)\begin{cases} \sin^2\varphi + \sin^2\rho + 2\sin\varphi\sin\rho\cos\lambda = \sin^2\lambda \\ \sin^2\rho + \sin^2\psi + 2\sin\rho\sin\psi\cos\mu = \sin^2\mu \\ \sin^2\psi + \sin^2\varphi + 2\sin\psi\sin\varphi\cos\omega = \sin^2\omega \end{cases}$$

برای مثال ، معادلهٔ اول‌رادر نظرمی گیریم ، رابطهٔ $\varphi + \rho = \lambda$ معرف آنست که φ و ρ زاویه‌های مثلثی هستند که λ زاویهٔ خارجی رأس دیگر آنست وا گرقطردایرهٔ محیطی این مثلث واحداختیار شده باشد $\sin\varphi$ ، $\sin\rho$ و $\sin\lambda$ طولهای اضلاع این مثلث خواهند بود وبنا برقضیهٔ کسینوسها ، معادلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\sin^2\lambda = \sin\varphi + \sin\rho + 2\sin\varphi\sin\rho\cos\lambda$$

از (II) داریم :

$$\psi + \varphi = \omega \text{ و } \rho + \psi = \mu \text{ ، } \varphi + \rho = \lambda$$

واز اینجا نتیجه می‌شود .

$$\psi = h - \lambda \text{ و } \varphi = h - \mu \text{ ، } \rho = h - \omega$$

که $h = \frac{\lambda + \mu + \omega}{2}$ است .

ترسیم : ۱ـ زوایای λ و μ و ω راکه مربع‌سینوسهای آنها برابر اضلاع مثلث داده‌شده است (به‌فرض‌اینکه نصف‌محیط مثلث واحد فرض شود) رسم می کنیم .

۲ ـ مقدار $(h = \frac{\lambda + \mu + \omega}{2})$ سه‌زاویهٔ جدید :

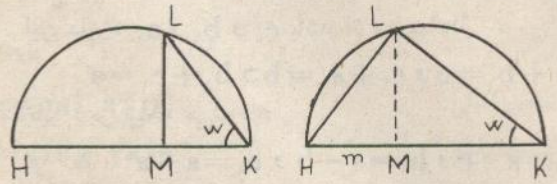
$\psi = h - \lambda$ و $\varphi = h - \mu$ و $\rho = h - \omega$ رارسم‌می کنیم،

۳ـ مربع سینوسهای‌سه زاویهٔ ψ و φ و ρ رامی کشیم.این خطوط‌مماسهای‌مرسوم از سه رأس مثلث بردوایر مالفاتی‌هستند.

توجه ! اگر بخواهیم مربع سینوس $m = \sin^2 w$ را برای زاویهٔ معلوم w رسم کنیم ، یا برای کشیدن زاویهٔ w (که مربع سینوس آن برابر m است) به‌ازاء قطعه خط معلوم m، بدین طریق عمل می کنیم ،

نیمدایره‌ای به قطر $HK = 1$ رسم می کنیم .زاویهٔ معلوم w را از K جدا می کنیم واز محل‌برخورد امتداد این خط‌با دایره ، یعنی L عمودی بر HK فرود می‌آوریم ، در نتیجه $HM = m = \sin^2 w$ (M پای عمود است).

برعکس اگر m داده شده باشد وبخواهیم w راپیدا کنیم $HM = m$ را روی HK جدا می کنیم ودر نقطهٔ M عمودی بر HK اخراج می کنیم‌و امتداد می‌دهیم تا دایره رادرL قطع کند . LK را وصل می کنیم . درنتیجه $HKL = w$ می‌شود.



زیرا از مثلث قائم‌الزاویهٔ HML داریم :

$$m = HM = HL\cdot\sin HLM = HL\cdot\sin w$$

واز مثلث قائم‌الزاویهٔ HKL :

$$HL = HK\cdot\sin w = \sin w$$

در نتیجه : $m = \sin^2 w$.

مسائل برای حل

مسائل متفرقه

چند مسئله از مسائل امتحانات اتحاد جماهیر شوروی

فرستنده: **مهدادتقوی** دبیرستان خوارزمی

۴۱۱۶ـ رشتهٔ ریاضیات ۱۹۶۶ ، ۱۹۶۱

معادلهٔ زیر راحل کنید :

$$(۳-x)^۴+(۲-x)^۴=(۵-۲x)^۴$$

۴۱۱۷ ـ رشتهٔ ریاضیات ۱۹۶۶

معادلهٔ زیر (معادلهٔ دکارت) را حل کنید :

$$x^۴-۴x^۳-۱۹x^۲+۱۰۶x-۱۲۰=۰$$

۴۱۱۸ـ کنکور دانشکدهٔ مهندسی فیزیك مسکو ۱۹۵۶

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\log_{\sin x} ۲ \times \log_{\sin ۲x} ۳ = ۱$$

۴۱۱۹ ـ رشتهٔ ریاضیات ۱۹۶۱

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^۳ x+\sin^۳ ۲x+\sin^۳ ۳x=(\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x)^۳$$

۴۱۲۰ ـ المپیاد ریاضی ۱۹۵۸

مقدار عددی عبارت زیررا بدست آورید :

$$P=\sin^۴\frac{\pi}{۱۶}+\sin^۴\frac{۳\pi}{۱۶}+\sin^۴\frac{۵\pi}{۱۶}+\sin^۴\frac{۷\pi}{۱۶}$$

۴۱۲۱ ـ رشتهٔ ریاضیات ۱۹۶۰

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sin^{۱۰} x+\cos^{۱۰} x=\frac{۲۹}{۱۶}\cos^۴ ۲x$$

۴۱۲۲ ـفرستنده : **پرویز خواجه‌خلیلی** دانشجوی دانشگاه آریامهر

مطلوبست محاسبهٔ a و b بطوری که چندجمله‌ایهای $x^۳+bx^۲+۱۴x+۸$ و $x^۳+ax^۲+۱۱x+۶$ دارای عامل مشترکی به‌صورت $x^۲+px+q$ باشند،

۴۱۲۳ ـ ترجمه از «مجلهٔ ریاضیات» آمریکا

ثابت کنید که عدد زیر اصم است :

$$\sqrt{۱۹۶۵^{۱۹۶۶}+۱۹۶۸^{۱۹۶۷}}$$

۴۱۲۴ ـ فرستنده : **اسمعیل بابلیان** دانشجوی دانشسرای عالی .

سهمی به‌معادلهٔ $y^۲=۲px$ مفروض است . ثابت کنید محور اصلی‌هردو دایره‌ای‌که قطر آنها یك‌وتر کانونی سهمی‌باشد (وتری که‌ازکانون می گذرد) از رأس سهمی‌می گذرد .

۴۱۲۵ـ از**محمدصادق نهاوندی**،دبیرستان‌امیر کبیر زنجان .

مثلث متساوی‌الساقین ABC به‌رأس A مفروض است . اگر D نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باضلع BC ، M نقطه‌ای‌از این دایره ، r شعاع آن‌و H تصویر M برBC باشد ثابت کنید که :

$$MD^۲=۲r\cdot MH$$

و درحالتی‌که r و MH اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ به وتر MD باشند مقدار r' شعاع دایرهٔ‌محاطی داخلی این مثلث را برحسب r حساب کنید .

۴۱۲۶ ـ از **سید حسن نبوی** دبیرستان‌هدف۱

مثلث ABC که درآن اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۶۰درجه است مفروض است . برضلعهای AB و BC و CA در جهت از A به B و از B به C واز C به A نقطه‌های $C_۱$ و $C_۲$ و $A_۱$ و $A_۲$ و $B_۱$ و $B_۲$ چنان انتخاب می کنیم که‌هرضلع‌مثلث به سه‌قسمت متساوی تقسیم‌شود . در داخل مثلث مثلثهای‌متساوی‌الاضلاع $C_۱C_۲C_۳$ و $B_۱B_۲B_۳$ را می‌سازیم . ثابت کنید که

هر یك از زاویه‌های BC_2A_2 و CB_2A_1 قائمه‌می‌باشند .

۴۱۲۷ ـ ترجمه از فرانسه .

اگر α و β دو زاویهٔ حاده و متمایز باشند ثابت کنید:

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{tg\alpha + tg\beta}{2}$$

۴۱۲۸ ـ ترجمه از فرانسه

فرض‌می‌کنیم که‌معادلهٔ $f(x)=0$ از درجهٔ n کامل‌بوده و دارای n ریشهٔ متمایز و مخالف صفر x_1 و x_2 و ... و x_n باشد .

۱) هریك از عبارتهای زیر را حساب کنید :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ و } \frac{f''(x)}{f(x)} - \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2$$

۲) بااستفاده از قسمت (۱) حاصل هریك از سه‌مجموع زیر را حساب کنید :

$$S_{-1}=\Sigma\frac{1}{x_i} \text{ و } S_{-2}=\Sigma\frac{1}{x_i^2} \text{ و } S=\Sigma\frac{1}{x_ix_j}$$

۴۱۲۹ ـ ترجمه از فرانسه

فرض می‌کنیم که $A(x)$ و $B(x)$ و $C(x)$ سه سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم باضرایب حقیقی باشند و A و B ریشهٔ مشترك نداشته و بالاخره اتحاد زیر بر قرار باشد :

$$A^2+B^2=C^2$$

۱) ثابت کنید که C ریشهٔ حقیقی نداشته اما A و B دارای ریشه‌های حقیقی می‌باشند .

۲) ثابت کنید که :

$$C+A \text{ ، } C-A \text{ ، } C+B \text{ ، } C-B$$

ریشه‌های مضاعف حقیقی دارند .

۳) فرض می‌کنیم که :

$$A=(x-a)(x-b) \text{ ، } a\neq b$$

شکل کلی چند جمله‌ایهای B و C را بدست آورید . اگر a' و b' ریشه‌های $B=0$ باشند رابطه‌ای بین a و b و a' و b' بدست آورید .

۴۱۳۰ ـ مطلوبست حل‌وبحث معادلهٔ زیر :

$$x-|x-1|=(m-1)x+1$$

۴۱۳۱ ـ ترجمه از «ماهنامه ریاضی آمریکا»

ثابت کنید که یك چهار ضلعی‌وجوددارد که‌در آن‌طولهای ضلعها و دو قطر عددهای منطق بوده اما هریك از فاصله‌های نقطهٔ تلاقی دوقطر تا رأسهای چهار ضلعی عددی اصم باشد .

مسائلی از ریاضیات جدید

۴۱۳۲ ـ دو مجموعهٔ A و B داده شده است . کلیهٔ مجموعه‌های X را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$A\cap X=B$$

۴۱۳۳ ـ A و B دو زیرمجموعه‌ازیك‌مجموعهٔ E می‌باشند. مجموعه‌های متمم A و B را نسبت به E به ترتیب با $\overline{A}$ و $\overline{B}$ نمایش می‌دهیم . روابط هم‌ارزی زیر را ثابت کنید :

۱) $A\subset B \Longleftrightarrow A\cap\overline{B}=\emptyset$

۲) $A\subset B \Longleftrightarrow \overline{A}\cup\overline{B}=E$

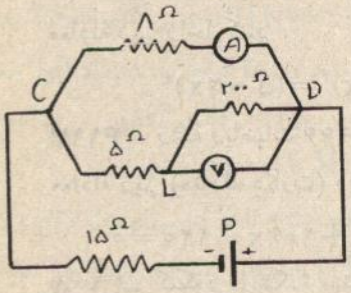
۴۱۳۴ ـ A و B دو زیر مجموعه از یك مجموعهٔ R می‌باشند . متممهای A و B را نسبت به R به ترتیب با $\overline{A}$ و $\overline{B}$ مجموعهٔ عنصرهایی از A راکه به B تعلق نداشته باشند با $A-B$ ومجموعهٔ عنصرهای B راکه به A تعلق نداشته‌باشند به $B-A$ نمایش می‌دهیم . ثابت کنید که :

$$(A\cup A)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=(A-B)\cup(B-A)$$

مسائلی از فیزیك

۴۱۳۵ ـ ترجمهٔ : **مهندس جمشید دانشور**

پیل P به‌نیروی‌محرکهٔ ۲۴ ولت و مقاومت داخلی‌ناچیز مطابق شکل به یك مدار الکتریکی جریان می‌فرستد . مقدار جریانی که‌دستگاه آمپر-متر نشان می‌دهد برابر یك‌آمپر و ولتمتری که در مدار قرار گرفته ۸ ولت را نشان می‌دهد . مطلوبست‌محاسبهٔ‌مقاومت داخلی‌هریك از وسایل اندازه‌گیر که‌در مدار قرارگرفته‌اند.



مسائل ازهوشنك شریفزاده :

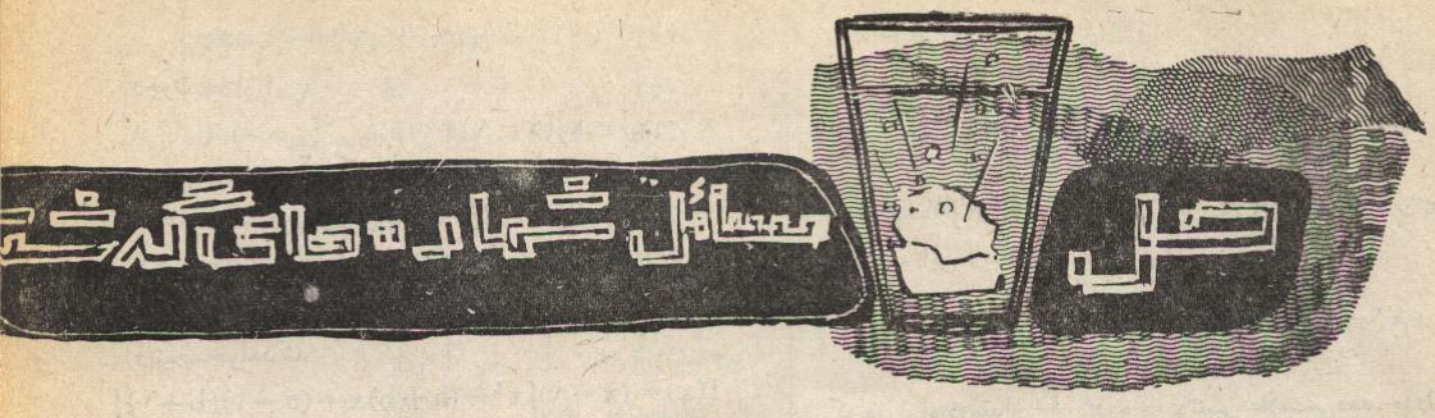
۴۱۳۶ ـ برآیند نیروهای متقارب P و Q برابر P است .ثابت کنید که اگر P دوبرابر شود برآیند جدید عمود بر Q است .

۴۱۳۷ ـ دو وزنه که وزن هر یك $10kgf$ است به دو انتهای نخ سبکی متصل است. این نخ‌ازروی سه میخ صیقلی‌که به دیوار کوبیده‌شده‌می گذرد. میخها طوری به‌دیوار کوبیده‌شده‌اند که شکل‌یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع باقاعدهٔ افقی‌رامجسم‌می کنند . تعیین کنید که‌بر میخها چه‌نیروی فشار می‌آورد ؟

۴۱۳۸ ـ یك‌قطار باری به‌طول ۶۳۰ متر ویك‌قطارمسافر-بری به‌طول ۱۲۰ متر بردو مسیر مستقیم متوازی‌به‌ترتیب با سرعتهای ثابت $48\,km/h$ و $102\,km/h$ حرکت می کنند چه مدت‌طول‌می کشدتادو قطار ازیکدیگرردبشوندرصورتی که:

الف ـ دو قطار در یك جهت حرکت‌می کنند .

ب ـ دوقطار در دو جهت متقابل حرکت می کنند.



حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۵

۴۰۶۷- به فرض اینکه سه عدد متمایز و مخالف صفر x و y و z در دو رابطهٔ زیر صدق کنند

$$(1)\quad xy-ax+a^2=0$$

$$a\neq 0,$$

$$(2)\quad yz-ay+a^2=0$$

صحت روابط زیر را محقق کنید

$$(3)\quad zx-az+a^2=0$$

$$(4)\quad xyz+a^3=0$$

$$(5)\quad \frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{1}{a}$$

حل- طرفین رابطهٔ (۱) را در $a-z$ وطرفین رابطهٔ (۲) را در x ضرب کرده طرفین روابط حاصل را عضو به عضو با هم جمع می‌کنیم بعد از اختصار و تقسیم طرفین بر a رابطهٔ (۳) بدست می‌آید.

از ضرب طرفین رابطهٔ (۱) در z حاصل می‌شود:

$$xyz-axz+a^2z=0$$

$$xyz-a(xz-az)=0$$

وبنابر رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود

$$xyz-a(-a^2)=0 \quad \text{یا} \quad xyz+a^3=0$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) رانظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم

$$(1')\quad y(x-z)-a(x-y)=0$$

$$\frac{1}{x-y}=\frac{a}{y(x-z)}$$

ازتفریق طرفین رابطه‌های (۱) و (۳) به‌طریق بالاخواهیم داشت:

$$\frac{1}{y-z}=\frac{x}{a(x-z)}$$

وخواهیم داشت:

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}=\frac{1}{x-z}\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{y}\right)=$$

$$=\frac{a^2+xy}{ay(x-z)}$$

با توجه به رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}=\frac{ax}{ay(x-z)}=\frac{x}{y(x-z)}$$

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{x}{y(x-z)}-$$

$$-\frac{1}{x-z}=\frac{x-y}{y(x-z)}$$

بنابر رابطهٔ (۱') داریم

$$\frac{x-y}{y(x-z)}=\frac{1}{a}$$

ورابطهٔ (۵) بدست می‌آید

۴۰۶۸- چند جمله‌ای زیررا درنظر می‌گیریم

$$f(x)=x^3-(a+b+1)x^2+(ab+2a-1)x$$
$$-(a-1)(b+1)$$

ثابت کنید که عبارت بالا در ازاء $x=1$ صفر می‌شود وعبارت را ابتدا به شکل

$$f(x)=x^2(x-1)-f_1(x)$$

وبعد به شکل

$$f(x)=(x-1)\varphi(x)$$

تبدیل کرده معادلهٔ $\varphi(x)=0$ را حل کنید

حل- داریم

$$f(1)=1-(a+b+1)+(ab+2a-1)-$$
$$-(a-1)(b+1)=\ldots=0$$

می‌توانیم چنین بنویسیم

$$f(x)=x^3-x^2\quad[(a+b)x^2-(ab+2a-1)x$$
$$+(a-1)(b+1)]$$

چون $f(1)=0$ است بنابراین $f(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیراست

وچون

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

بر $x-1$ بخش پذیر است بنابراین عبارت داخل کروشه نیز درازاء $x=1$ صفر خواهد شد وخواهیم داشت

$$(a+b)x^2-(ab+2a-1)x+(a-1)(b+1)$$
$$=(x-1)[(a+b)x-(a-1)(b+1)]$$

ونتیجه خواهد شد

$$f(x)=(x-1)[x^2-(a+b)x+(a-1)(b+1)]$$
$$=(x-1)\varphi(x)$$

که درآن:

$$\varphi(x)=x^2-(a+b)x+(a-1(b+1)$$

نسبت به معادلهٔ $\varphi(x)=0$ بعد از اختصار خواهیم داشت

$$\Delta=(a-b-2)^2$$

وریشه‌های معادله بعد از اختصار عبارت خواهد شد از

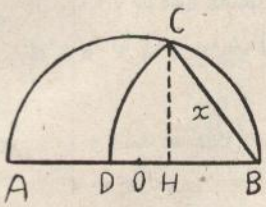
$$x'=b+1 \text{ و } x''=a-1$$

۴۰۶۹- نیمدایرهٔ به قطر $AB=2R$ مفروض است. نقطهٔ C را روی نیمدایره انتخاب می‌کنیم که $BC=x$ باشد ودرداخل نیمدایره کمان CD را به مرکز B وبه شعاع BC رسم می‌کنیم (D بر AB واقع است).

۱) S مجموع مساحتهای سطوح حادث ازدوران کمانهای AC و CD راحول AB برحسب R و x حساب کنید

۲) نمایش هندسی تابع $y=\frac{S}{\pi}$ را درازاء مقادیر قابل قبول x رسم کنید.

حل - اگر H تصویر C روی AB باشد داریم



$$AH=\frac{AC^2}{AB}=\frac{4R^2-x^2}{2R}$$

$$DH=x-BH=x-\frac{x^2}{2R}=\frac{x(2R-x)}{2R}$$

S_1 مساحت سطح حاصل از دوران کمان AC حول AB برابر است با

$$S_1=2\pi R.AH=\pi(4R^2-x^2)$$

S_2 مساحت سطح حادث از دوران کمان CD حول AB برابر است با

$$S_2=2\pi x.DH=\frac{\pi x^2(2R-x)}{R}$$

$$S=S_1+S_2=\dots=\frac{\pi}{R}(-x^3+Rx^2+4R^3)$$

۲) خواهیم داشت

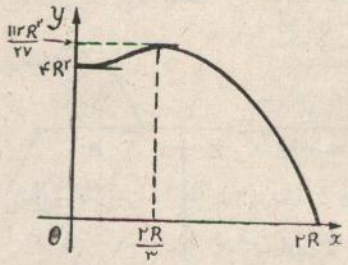
$$y=\frac{1}{R}(-x^3+Rx^2+4R^3)$$

x در فاصلهٔ [۲R و ۰] تغییر می‌کند، در ازاء همهٔ مقادیر x متعلق به این فاصله تابع y معین واتصالی است

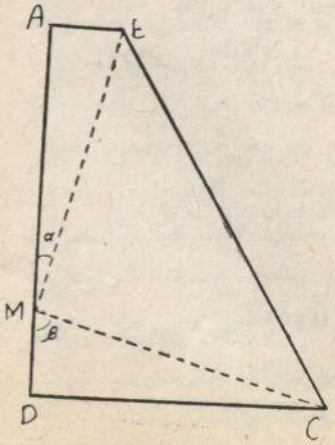
$$y'=\frac{1}{R}x(-3x+2R)$$

که در ازاء دومقدار $\frac{2R}{3}$ و $x=0$ تغییر علامت‌می‌دهد. جدول تغییرات وشکل منحنی به قرار زیر است.

x	۰		$\frac{2R}{3}$		2R
y'	۰	+	۰	−	
y	$4R^2$	↗	$\frac{112R^2}{27}$	↘	۰



۴۰۷۰- ذوزنقهٔ قائم ABCD که درآن زاویه‌های A و D قائمه بوده و $AB=a$ و $CD=4a$ و $AD=5a$ مفروض است. برساق AD نقطهٔ M را تعیین می‌کنیم که $AM=x$ باشد مقدار x را چنان تعیین کنید که اولازاویهٔ BMC قائمه باشد ثانیاً اندازهٔ زاویهٔ DMC دوبرابر اندازهٔ زاویهٔ AMB باشد.



حل - اولا وقتی که زاویهٔ BMC قائمه باشد دو مثلث ABM وDMC متشابه بوده‌و داریم

$$\frac{AM}{DC}=\frac{AB}{MD}$$

$$\frac{x}{4a}=\frac{a}{5a-x}$$

$$\Longrightarrow x^2-5ax+4a^2=0$$

$$\Longrightarrow x=a \text{ یا } 4a$$

ثانیاً اگر :

$$\alpha = AMB \quad و \quad \beta = DMC$$

باشد :

$$tg\alpha = \frac{a}{x} \quad و \quad tg\beta = \frac{4a}{5a - x}$$

$$tg\beta = tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\frac{4a}{5a - x} = \frac{\frac{2a}{x}}{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{2ax}{x^2 - a^2}$$

بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$3x^2 - 5ax - 2a^2 = 0$$

فقط ریشهٔ مثبت معادله قابل قبول است که عبارتست از $x = 2a$

۴۰۷۱ ـ جوابهای کلی معادلهٔ زیر را پیدا کنید :

$$\cos^2(n+1)x + \sin^2(n-1)x = \cos^2 2x$$

حل ـ معادلهٔ فوق به‌صورت زیر در می‌آید :

$$\sin^2(n+1)x - \sin^2(n-1)x = \sin^2 2x$$

$$[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x][\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] = \sin^2 2x$$

و یا :

$$4\cos x \sin x \cos nx \sin nx = \sin^2 2x \Longrightarrow \sin 2x \sin 2nx = \sin^2 2x$$

یا داریم :

$$\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

و یا :

$$\sin 2nx = \sin 2x$$

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \quad یا \quad x = \frac{k\pi}{n-1}$$

۴۰۷۲ ـ اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ سه مقدار متمایز بوده و داشته باشیم $tg3\alpha = tg3\beta = tg3\gamma$ ثابت کنید که :

$$(tg\alpha + tg\beta + tg\gamma)(cotg\alpha + cotg\beta + cotg\gamma) = 9$$

حل ـ می‌دانیم $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ ریشه‌های معادلهٔ :

$$tg3x = k$$

می‌باشند پس

$$tg3x = \frac{3tgx - tg^3x}{1 - 3tg^2x} = k$$

و یا :

$$tg^3x - 3k\,tg^2x - 3tgx + k = 0$$

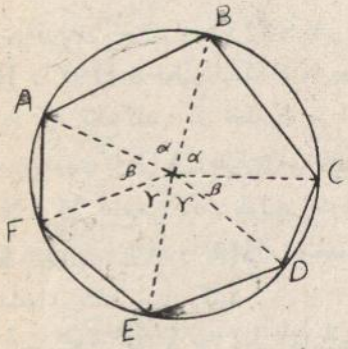
بنابراین روابط زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = 3k & (1) \\ tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\gamma + tg\alpha tg\gamma = -3 & (2) \\ tg\alpha tg\beta tg\gamma = -k & (3) \end{cases}$$

رابطهٔ (۲) را به رابطهٔ (۳) تقسیم کرده حاصل را در رابطهٔ (۱) ضرب می‌کنیم رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید :

۴۰۷۳ ـ شش ضلعی ABCDEF در دایرهٔ O به شعاع R محاط است و می‌دانیم که :

$$AB = BC = 2x \quad و \quad CD = FA = 2y \quad و \quad DE = EF = 2z$$



معادله‌ای تشکیل دهید که در آن مقدار R برحسب x و y و z بدست آید .

حل ـ داریم :

$$\cos\alpha = \frac{2r^2 - 4x^2}{2r^2} = \frac{r^2 - 2x^2}{r^2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{r^2 - 2x^2}{r^2}\right] = \frac{x^2}{r^2}$$

و به‌همین ترتیب برای β و γ داریم :

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{y^2}{r^2} \quad و \quad \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{z^2}{r^2}$$

از طرفی داریم :

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ \Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180$$

از رابطهٔ اخیر رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود :

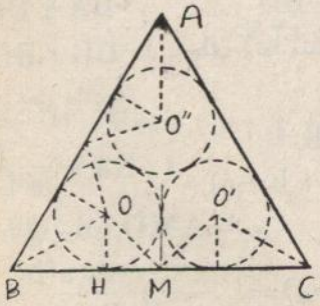
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1$$

و یا

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} - 2\frac{xyz}{r^3} = 1$$

$$r^3 - (x^2 + y^2 + z^2)r - 2xyz = 0$$

۴۰۷۴ ـ سه دایرهٔ متساوی‌ودو به دوممـاس را در یك مثلث‌متساوی الاضلاع محاط کرده‌ایم اگر طول شعاع هر یك از این دایره‌ها r باشد طول ضلع مثلث را بر حسب r حساب کنید.



حل ـ مماس مشترك

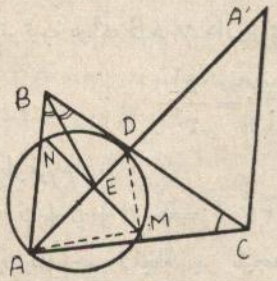
داخلی هردو دایره از سه‌دایرهٔ فوق عمود منصف ضلعی از مثلث است که‌بر این دودایره مماس می‌باشدونتیجه خواهد شد خطی که وسط یك ضلع را به مرکز دایرهٔ مماس براین ضلع وصل می‌کند بااین ضلع زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد . در مثلث‌قائم‌الزاویهٔ BOH و OHM به‌ترتیب داریم :

$$BH = OH \cdot cotg 30^\circ = r\sqrt{3} \quad \text{و} \quad MH = OH \times tg 45^\circ = r$$

$$BC = 2BM = 2(r\sqrt{3} + r) = 2r(1+\sqrt{3})$$

۴۰۷۵ ـ مثلث ABC که‌درآن زاویهٔ A دو برابر زاویهٔ C است مفروض است . نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم که ضلع BC را در D و خطی راکه از C موازی با AB رسم می‌شود در A′ قطع کند . از نقطهٔ E مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ، عمودی بر AD اخراج می‌کنیم که دایرهٔ به‌قطر AD رادر N و M قطع‌می‌کند . طول‌هریك از قطعه خطهای BD ، DC ، ED ، AE و MN رابرحسب a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلث حساب کنید .

حل ـ در مثلث ABC بنا به خاصیت نیمساز زاویه داریم .



$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD+DC=BC}{AB+AC}$$

$$\frac{BD}{C} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}$$

$$BD = \frac{ac}{b+c} \quad \text{و} \quad DC = \frac{ab}{b+c}$$

در مثلث ABD نقطهٔ E پای‌نیمساز زاویهٔ B است و بنابر روابط بالا داریم :

$$DE = \frac{DC \cdot BD}{BA+BD} \quad \text{و} \quad EA = \frac{DC \cdot BA}{BA+BD}$$

مقادیر BD و DC را به‌جای آنها منظورکرده بعد از ساده کردن خواهیم داشت :

$$DE = \frac{a^2 b}{(b+c)(a+b+c)} \quad \text{و} \quad EA = \frac{ab}{a+b+c}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMD داریم :

$$ME^2 = AE \cdot ED = \ldots = \frac{a^2 b^2}{(b+c)(a+b+c)^2}$$

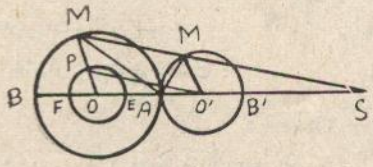
$$MN = 2ME = \frac{2ab}{a+b+c}\sqrt{\frac{a}{b+c}}$$

۴۰۷۶ ـ دو دایرهٔ O و O′ به شعاعهای R و R′ در A مماس خارج هستند . وتر AM را در دایرهٔ O و وتر AM′ را در دایرهٔ O′ عمود بر AM رسم‌می‌کنیم .

۱ ـ ثابت کنید که اگر M دایرهٔ O را بپیماید خط MM′ بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد .

۲ ـ نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که طول MM′ برابر باطول معلوم l باشد . بحث کنید .

حل ـ شعاعهای OM و O′M′ رارسم می‌کنیم . اگر B و B′ نقاط تلاقی دو دایره با خط‌المرکزین و α درجه اندازهٔ زاویهٔ OAM



باشد اندازهٔ زاویهٔ AOM برابر خواهد شد با $180^\circ - 2\alpha$ مثلث M′AM قائم‌الزاویه‌است و زاویه‌های OAM و O′AM′ متمم بوده اندازهٔ زاویهٔ O′AM′ برابر با $90^\circ - \alpha$ می‌باشد. مثلث AO′M′ به رأس O′ متساوی‌الساقین است و از آنجا نتیجه‌خواهدشد که‌اندازهٔ زاویهٔ B′O′M′ برابر با $180^\circ - 2\alpha$ می‌باشد . بنابراین دوزاویهٔ AOM و B′O′M′ برابر بوده نتیجه می‌شود که دوشعاع OM و O′M′ متوازی‌باشند .

اگر S نقطهٔ تلاقی MM′ با OO′ باشد خواهیم‌داشت:

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{R'}{R}$$

یعنی‌نقطهٔ S قطعه خط OO′ را به‌نسبت ثابتی قطع‌می‌کند. بنابراین نقطهٔ S ثابت می‌باشد.

ثانیاً از O′ موازی با MM′ رسم می‌کنیم که OM را در P قطع‌می‌کند . داریم :

$$PM = O'M' = R' \quad \text{و} \quad OP = R - R'$$

وقتی M دایرهٔ O را بپیماید نقطهٔ P دایرهٔ (γ) به مرکز O و به‌شعاع R − R′ راخواهد پیمود . برای‌اینکه طول MM′ برابر مقدار l باشدکافی است بر دایرهٔ (γ) نقطهٔ P را چنان تعیین‌کنیم که O′P = l باشد . برای این کار به‌مرکز O′ وبه‌شعاع l دایره‌ای رسم می‌کنیم ، نقطهٔ‌تلاقی آن با (γ) نقطهٔ P را بدست خواهد داد . مسئله وقتی جواب داردکه دو دایرهٔ (γ) و (l و O′) متقاطع یامماس باشند .

اگر E و F نقطه‌های تلاقی (γ) با OO′ باشد داریم :

$$O'E = OO' - OE = (R+R') - (R-R') = 2R'$$

$$O'F = \ldots = 2R$$

بنابراین اگر $l < 2R'$ یا $l > 2R$ باشد مسئله‌جواب ندارد .

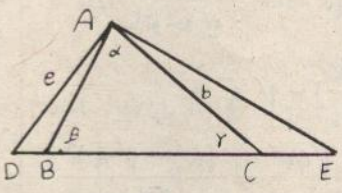
اگر $l=2R'$ یا $l=2R$ باشد مسئله یك جواب دارد که نقطهٔ E یا نقطهٔ F خواهد بود.

اگر $2R'<l<2R$ باشد مسئله دارای دوجواب می‌باشد.

۴۰۷۷ ـ مثلث ABC مفروض است. در A عمودهائی بر AB و AC رسم می‌کنیم که BC یا امتداد آن را به ترتیب در E و D قطع می‌کنند ثابت کنید که:

$$DE = BC\,tg B\,tg C$$

حل ـ اندازه‌های زاویه‌های A، B و C از مثلث ABC را به ترتیب با α و β و γ وطولهای AC و AD را به ترتیب با b و e نمایش می‌دهیم. اندازهٔ زاویه‌های D و E به ترتیب برابر خواهد شد با $90-\gamma$ و $90-\beta$ و بنا بر روابط سینوسها در مثلث ABC داریم:



$$BC=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{b\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}$$

و در مثلث ADE داریم:

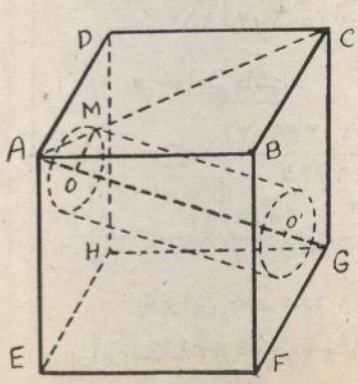
$$DE=\frac{e\sin A}{\sin E}=\frac{e\sin[180-(90-\beta)-(90-\gamma)]}{\sin(90-\beta)}$$

$$=\frac{e\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta}$$

$$\frac{e\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta}=\frac{b\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}\times\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\times\frac{e}{b}$$

$$DE=BC\,tg\beta\,tg\alpha$$

۴۰۷۸ ـ در مکعبی به طول یال a استوانه‌ای دوار چنان محاط کنید که محورش بریك قطر مکعب منطبق بوده و حجمش ماکزیمم باشد و حجم آن را بر حسب a حساب کنید.



حل ـ قطر AG از مکعب رامنطبق برمحور استوانه اختیار می‌کنیم چنانچه $O'O=x$ ارتفاع و $OM=R$ شعاع قاعدهٔ استوانه باشد داریم:

$$AO=\frac{AG-x}{2}=\frac{a\sqrt{3}-x}{2}$$

دایرهٔ قاعدهٔ استوانه در یك نقطهٔ M واقع برقطر AC از وجه ABCD با این وجه نقطهٔ مشترك دارد. از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AOM (قائمه در زاویهٔ O) و ACG (قائمه درزاویهٔ C) داریم:

$$\frac{AO}{OM}=\frac{AC}{CG}\quad\frac{a\sqrt{3}-x}{2R}=\frac{a\sqrt{2}}{a}$$

$$\Longrightarrow R=\frac{a\sqrt{6}-x\sqrt{2}}{3}$$

$$V=\pi x\left(\frac{a\sqrt{6}-x\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{\pi}{8}(x^3-2ax^2\sqrt{3}+3a^2x)$$

$$V'=\frac{\pi}{8}(3x^2-4ax\sqrt{3}+3a^2)$$

مشتق در ازاء دو مقدار $x=a\sqrt{3}$ و $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ صفر شده درازاء $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ از مثبت به‌منفی ودرازاء $x=a\sqrt{3}$ از منفی به‌مثبت تغییر علامت می‌دهد. بنا براین V درازاء $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ماکزیمم بوده و مقدار این ماکزیمم می‌شود:

$$V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$$

۴۰۷۹ ـ یك تابع اولیهٔ هریك از دو تابع زیر را بدست آورید.

$$y=\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\quad\text{و}\quad y=\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$$

حل ـ به ترتیب چنین عمل می‌کنیم:

$$y=\frac{\frac{x+3}{\sqrt{2x+3}}}{x^2}=\frac{\frac{2x+3}{\sqrt{2x+3}}-\frac{x}{\sqrt{2x+3}}}{x^2}$$

$$=-\frac{\frac{x}{\sqrt{2x+3}}-\sqrt{2x+3}}{x^2}\quad(1)$$

فرض می‌کنیم $u=\sqrt{2x+3}$ و $V=x$ و در نتیجه داریم:

$$u'=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\quad\text{و}\quad V'=1\quad\text{و}\quad y=\frac{-u'v+v'u}{v^2}$$

$$Y=\frac{-u}{v}+C\Longrightarrow Y=-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+C$$

تابع دوم را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم :

$$y=\frac{\frac{x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}$$

فرض می‌کنیم :

$$u=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \quad \text{و} \quad u'=\frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}$$

پس $y=-\frac{1}{2}u'$ بوده و :

$$Y=-\frac{1}{2}u+C \Longrightarrow Y=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}+C$$

۴۰۸۰ـ دوعددمثبت a و x به‌فرض $a<x$ مفروض‌اند.

اولا نامساویهای زیر را محقق کنید :

$$(1) \quad \frac{a^2}{x}<a<\frac{1}{2}(x+\frac{a^2}{x})$$

ثانیاً بااستفاده‌از نامساویهای (۱) ثابت‌کنیدکه اگر A عددی مثبت بوده و مجذور کامل نباشد چنانچه x_0 یك مقدار تقریبی اضافی $\sqrt{A}$ باشد مقدار x_1 که از رابطهٔ :

$$(2) \quad x_1=\frac{1}{2}(x_0+\frac{A}{x_0})$$

بدست می‌آید با تقریب اضافی کمتری به‌مقدار حقیقی $\sqrt{A}$ نزدیك است یعنی اینکه $\sqrt{A}<x_1<x_0$ و حد اکثر خطای مربوط به انتخاب x_1 را تعیین کنید .

مثال عددی ـ جذر تقریبی اضافی $A=2/1011$ را با تقریب ۰/۰۰۰۱ حساب کنید .

حل ـ چون a و x دو عدد مثبت‌هستند بنابراین :

$$a<x \Longrightarrow a^2<ax \Longrightarrow \frac{a^2}{x}<a$$

$$(a-x)^2>0 \Longrightarrow 2ax<x^2+a^2$$

$$\Longrightarrow a<\frac{1}{2}(\frac{x^2+a^2}{x})=\frac{1}{2}(x+\frac{a^2}{x})$$

بنابراین نا مساویهای (۱) محقق می‌شود .

ثانیاً روابط استلزامی زیررا داریم :

$$\sqrt{A}<x_0 \Longrightarrow A<x_0^2 \Longrightarrow \frac{A}{x_0}<x_0$$

$$\Longrightarrow x_0+\frac{A}{x_0}<2x_0 \Longrightarrow \frac{1}{2}(x_0+\frac{A}{x_0})<x_0$$

پس بافرض (۲) خواهیم داشت $x_1<x_0$

چنانچه در نامساوی مضاعف (۱) a را با $\sqrt{A}$ و x را با x_0 جانشین کنیم می‌شود .

$$\frac{A}{x_0}<\sqrt{A}<\frac{1}{2}(x_0+\frac{A}{x_0})$$

$$(3) \quad \frac{A}{x_0}<\sqrt{A}<x_1<x_0$$

یعنی عدد x_1 مقدار تقریبی $\sqrt{A}$ بوده برای انتخاب‌مناسبتر از x_0 می‌باشد .

باتوجه به :

$$x_1-\sqrt{A}=\frac{1}{2}(x_0+\frac{A}{x_0})-\sqrt{A}=$$

$$=\frac{x_0^2+A-2x_0\sqrt{A}}{2x_0}=\frac{(x_0-\sqrt{A})^2}{2x_0}$$

و با توجه به نامساویهای (۳) داریم :

$$x_0-\sqrt{A}<x_0-\frac{A}{x_0}$$

بنابراین داریم :

$$x_1-\sqrt{A}<\frac{(x_0-\frac{A}{x_0})^2}{2x_0}$$

یعنی حد اعلای مقدار $x_1-\sqrt{A}$ عدد :

$$\frac{(x_0-\frac{A}{x_0})^2}{2x_0}$$

می‌باشد .

مثال عددی ـ اگر $A=2/1011$ انتخاب شودبنابر-آنچه گذشت اگر $x_0=1/45$ یك مقدار تقریبی $\sqrt{A}$ باشد داریم :

$$1/44903<\frac{A}{x_0}<1/44904$$

$$x_1=\frac{1}{2}(1/45+1/44904)=1/44952$$

و خواهیم داشت :

$$x_1-\sqrt{A}<\frac{(1/45-1/44903)^2}{2\times 1/45}<$$

$$<\frac{(0/00197)^2}{2}<\frac{(0/002)^2}{2}<\frac{1}{10^5}$$

بنابراین جذر عدد ۲/۱۰۱۱ باتقریب اضافی 10^{-5} برابراست با ۱/۴۴۹۵۲ و با تقریب اضافی 10^{-4} برابراست با ۱/۴۴۹۶ .

۴۰۸۱ـ عددی چهار رقمی به‌شکل $\overline{abcd}$ پیدا کنید که داشته باشیم :

$$\overline{dcba}-\overline{abcd}=\overline{mm(m-1)(m-1)}$$

حل ـ از بسط اعداد بالا نتیجه می‌شود :

$$999(d-a)+90(c-b)=1111m-11=$$
$$=11(101m-1)$$

طرف اول مضرب ۹ می‌باشد پس طرف دوم هم مضرب ۹ بوده و چون ۱۱ نسبت به۹ اول است پس داریم :

$$101m-1=9k$$

$$m=\frac{9k+1}{101}\Longrightarrow 9k+1=101$$ یا ۲۰۲ یا ۳۰۳ یا ۴۰۴ یا ۵۰۵ و ....

که فقط $9k+1=505$ و یا $9k=504$ قابل قبول است.

$$k=56\Longrightarrow m=5$$
$$999(d-a)+90(c-b)=5544=9\times 616$$
$$111(d-a)+10(c-b)=666=50$$
$$37\times 3(d-a-6)=2\times 5(b-c-5)$$

عدد ۳۷ طرف اول را می‌شمرد پس طرف دوم را هم می‌شمرد بنابراین ۳۷ باید $b-c-5$ را بشمرد اما :

$$b-c-5<5$$

است پس‌باید داشته باشیم $b-c-5=0$ و در نتیجه :

$$d-a-6=0$$

یعنی داریم :

$$\begin{cases} b-c=5 \\ d-a=6 \end{cases}$$

جوابهائی که برای b و c و d و a حاصل می‌شود به صورت‌زیر می‌باشند :

(c=۲ و b=۷) و (c=۱ و b=۶) و (c=۰ و b=۵)
و (c=۴ و b=۹) و (c=۳ و b=۸) و (b=۷ و
a=۳ و d=۹) و (a=۲ و d=۸) و (a=۱ و d=۷)

۴۰۸۲ـ عددی چهار رقمی به شکل $\overline{abcd}$ چنان‌تعیین کنید که مجذورش به‌شکل زیر باشد :

$$M=\overline{....abcd}$$

حل ـ می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} N=\overline{abcd} \\ N^2=10^4A+\overline{abcd}=10^4A+N \end{cases}$$

و داریم :

$$N(N-1)=2^4\times 5^4A$$

چون اعداد N و N−۱ نسبت به‌هم اولند پس بایستی یکی مضرب 2^4 و دیگری مضرب 5^4 باشد از این رو

الف ـ

$$\begin{cases} N=16p \\ N-1=625p' \end{cases}\Longrightarrow 625p'+1=16p$$

$$p=\frac{625p'+1}{16}=39p'+\frac{p'+1}{16}\Longrightarrow$$

$$p'+1=16k$$

و یا :

$$p=625k-39\Longrightarrow N=10200k-624$$

که تنها جواب به ازاء $k=1$ است

$$N=9376$$
$$M=87909376$$

ب ـ حالا فرض می‌کنیم :

$$\begin{cases} N=625p \\ N-1=16p' \end{cases}\Longrightarrow p'=39p+\frac{p-1}{16}$$

بایستی $p-1=16k$ و از آن رو :

$$p'=625k+39\Longrightarrow N=10200k+625$$

که این معادله جواب ندارد .

۴۰۸۳ـ مجموع زیر را برحسب n حساب کنید .

$$S=\sum_{N=2}^{N=n}\frac{6}{N^2-N}$$

حل ـ کسر $\frac{6}{N^2-N}$ به‌صورت‌زیر تجزیه‌می‌شود.

$$\frac{6}{N^2-N}=\frac{3}{N-1}-\frac{6}{N}+\frac{3}{N+1}$$

به ازاء مقادیر از ۲ تا n برای N چنین خواهیم داشت :

$$\frac{6}{2\times 1\times 3}=\frac{3}{1}-\frac{6}{2}+\frac{3}{3}$$
$$\frac{6}{3\times 2\times 4}=\frac{3}{2}-\frac{6}{3}+\frac{3}{4}$$
$$\frac{6}{4\times 3\times 5}=\frac{3}{3}-\frac{6}{4}+\frac{3}{5}$$

.....

$$\frac{6}{n(n-1)(n+1)}=\frac{3}{n-1}-\frac{6}{n}+\frac{3}{n+1}$$

از جمع طرفین تساویها می‌شود :

$$S=3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n-1})-6(\frac{1}{2}+$$
$$+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})+3(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n+1})$$

$$S=3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n})$$

$$-6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-1)+3(1+\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-1-\frac{1}{2})$$

فرض می‌کنیم $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}=a$ بنابراین

$$S=3(a-\frac{1}{n})-6(a-1)+3(a-1-\frac{1}{2})\Longrightarrow$$

$$S=\frac{3n-6}{2n}$$

۴۰۸۴ ـ مجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم .

$$E=\{a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d\}$$

کلیهٔ زیر مجموعه‌های E را تشکیل دهید .

۲) اگر تعدادعنصرهای یك‌مجموعهٔ E برابر با n باشد تعداد زیر مجموعه‌های E رادرحالتهای

$n=1$ و $n=2$ و $n=3$ و $n=4$

حساب کنید (خود مجموعهٔ E و نیز مجموعهٔ تهی ، بـه حساب خواهد آمد .)

۳) اگر p تعداد زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ E با n عنصر باشد و E' مجموعه‌ای باشد با $(n+1)$ عنصر آیامی‌توان p' تعداد زیر مجموعه‌های E' رااز روی آن‌نتیجه گرفت ؟

حل ـ کلیهٔ زیر مجموعه‌های E عبارتند از :

$\{\emptyset\}$ و $\{a\}$ و $\{c\}$ و $\{d\}$

و $\{a \text{ و } b\}$ و $\{a \text{ و } c\}$ و $\{a \text{ و } d\}$ و $\{b \text{ و } c\}$

$\{b \text{ و } d\}$ و $\{c \text{ و } d\}$

و $\{a \text{ و } b \text{ و } c\}$ و $\{a \text{ و } b \text{ و } d\}$ و $\{a \text{ و } c \text{ و } d\}$

$\{b \text{ و } c \text{ و } d\}$

$\{a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d\}$

۲) درازاء $m=1$ داریم $E=\{a\}$ که دارای دو زیر مجموعه می‌باشد: $\{\emptyset\}$ و $\{a\}$

در ازاء $m=2$ داریم $E=\{a \text{ و } b\}$ و تعداد زیـر مجموعه‌های آن برابر با ۴ خواهدشد .

در ازاء $m=3$ تعداد زیر مجموعه‌ها می‌شود ۸ و در ازاء $m=4$ تعداد زیر مجموعه‌ها برابر ۱۶ خواهد بود زیر مجموعه‌های E' هم می‌باشد ثانیاً شامل زیر مجموعه‌ـ‌ای E' متمایز از زیر مجموعه‌های E می‌باشدکه تعداد آنها نیز p است بنابراین : $p'=2p$

۴۰۸۵ـ فرض می‌کنیم E مجموعه‌ای باشدکه روی آن دو قانون ترکیب داخلی‌اولی بانشانهٔ $\circ$ و با عنصر بی‌اثر e و دومی بانشانهٔ $*$ و باعنصر بی‌اثر f تعریف شده است . به علاوه فرض می‌کنیم‌که x و y و u و v عنصرهای E ، هرچه‌باشند داشته باشیم :

$$(1)\quad (x*y)\circ(u*v)=(x\circ u)*(y\circ v)$$

۱) ثابت‌کنیدکه $e=f$

۲) ثابت‌کنیدکه $x*y=x\circ y$

۳) ثابت کنیدکـه عمل $\circ$ (یـا $*$) مستقل از تـرتیب عوامل و شرکت پذیر است .

حل ـ با فرض :

$$x=v=f \text{ و } y=u=e$$

بنا بررابطهٔ فرض خواهیم داشت

$$(f*e)\circ(e*f)=(f\circ e)*(e\circ f)$$

اما e نسبت به‌عمل $\circ$ و f نسبت‌به عمل $*$ عنصر بی اثر است پس داریم :

$$f\circ e=e\circ f=f \text{ و } f*e=e*f=e$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$e\circ e=f*f$$

یعنی $e=f$

۲) بافرض $y=u=e$ رابطهٔ (۱) چنین می‌شود.

$$\forall(x \text{ و } v)\in E^2 ;\ (x*e)\circ(e*v)=(x\circ e)*(e\circ v)$$

و چون e برای هردو عمل $\circ$ و $*$ عنصر بی‌اثر است بنابراین :

$$\forall(x \text{ و } v)\in E^2 : x\circ v=x*v$$

با قرار دادن y به‌جای v (که دلخواه است) :

$$\forall(x \text{ و } y)\in E^2 : x\circ y=x*y$$

دو عمل $\circ$ و $*$ متحد هستند .

۳) با انتخاب $x=v=e$ در رابطهٔ (۱) و قرار دادن $\circ$ به جای $*$ خواهیم داشت :

$$\forall(y \text{ و } u)\in E^2 : (e\circ y)\circ(u\circ e)=(e\circ u)\circ(y\circ e)$$

$$\forall(y \text{ و } u)\in E^2 : y\circ u=u\circ y$$

یعنی عمل ∘ (یا ⊛) مستقل از ترتیب عوامل است .

در رابطهٔ (۱) فرض می‌کنیم $u=e$ و ∘ را به‌جای ⊛ قرار می‌دهیم:

$$\forall(x \text{ و } y \text{ و } v)\in E^3 : (x\circ y)\circ(e\circ v)=(x\circ e)\circ(y\circ v)$$

$$\forall(x \text{ و } y \text{ و } v)\in E^3 : (x\circ y)\circ v=x\circ(y\circ v)$$

یعنی عمل ∘ (یا ⊛) شرکت پذیر است .

۴۰۸۶ ـ اگر OAB مثلثی دلخواه و C نقطه‌ای از AB باشد که داشته باشیم $m\cdot AC=n\cdot CB$ ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=(m+n)\overrightarrow{OC}$$

حل ـ اگر C نقطه‌ای از AB باشد می‌توان نوشت:

$$m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})+n(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})=$$
$$=(m+n)\overrightarrow{OC}+m\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CB}$$

اما $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ غیر همسویند ، پس $m\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CB}$ صفر خواهد شد زیرا $m\cdot\overrightarrow{AC}=n\cdot\overrightarrow{CB}$

توجه ـ اگر $m=n$ باشد خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OC}$$

که C نقطهٔ وسط AB است .

۴۰۸۷ ـ در مثلث ABC نقاط M و N و O به‌ترتیب وسط ضلعهای AB و BC و CA می‌باشند . اگر D نقطهٔ دلخواهی باشد صحت رابطهٔ زیر را محقق کنید :

$$\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DM}=0$$

حل ـ می‌توان نوشت :

$$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

اما :

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$$

پس :

$$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$$

یا :

$$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB})$$

(این رابطه را در مسئلهٔ یك نیز بدست آوردیم)

به همین ترتیب :

$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})$$

ونیز

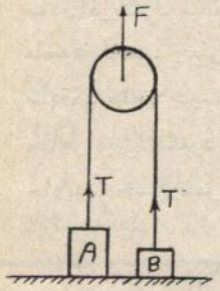
$$\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})$$

پس :

$$\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DM}=$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DA}+$$
$$\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DB})$$

مجموع جملات داخل پرانتز برابر صفر است یعنی رابطهٔ فوق درست است .

۴۰۸۸ ـ وزنه‌های A و B که وزن آنها به‌ترتیب $40kg$ و $24kg$ است بوسیلهٔ ریسمانی که از روی قرقره گذشته است به‌هم‌وصل شده‌اند قرقره را با نیروی $F=120kg$ به طرف بالا می‌کشیم شتاب وزنه‌های A و B را پیدا کنید(از وزن ریسمان و قرقره صرف نظر شود.)



حل ـ اگر کشش ریسمان را T فرض کنیم داریم :

$$T=60kg \text{ یا } 2T=120$$

رابطهٔ دینامیك را برای هر یك از وزنه‌های A و B می‌نویسیم .

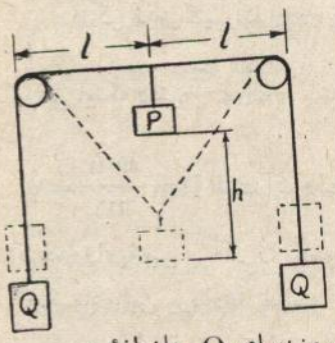
$$T-P=\frac{P}{g}\gamma_A \Longrightarrow 60-40=\frac{40}{g}\gamma_A$$

$$\Longrightarrow \gamma_A=\frac{g}{2}$$

$$T-P'=\frac{P'}{g}\gamma_B \Longrightarrow 60-24=\frac{24}{g}\gamma_B$$

$$\Longrightarrow \gamma_B=\frac{3}{2}g$$

۴۰۸۹ ـ در شکل مقابل دستگاه را از حالت تعادل بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم ماکزیمم ارتفاعی که وزنهٔ P پائین می‌رود چقدر است .



حل ـ وقتی که وزنهٔ P به‌اندازهٔ h سقوط می‌کند وزنه‌های Q به‌اندازهٔ :

$$\sqrt{l^2+h^2}-l$$

بالا می‌روند و و چون انرژی پتانسیل وزنهٔ P مساوی انرژی پتانسیل وزنه‌های Q است داریم :

$$Ph=2Q(\sqrt{l^2+h^2}-l)$$

یا

$$4PQlh+4Q^2l^2+P^2h^2=4Q^2(l^2+h^2)$$

$$h=\frac{4PQl}{4Q^2-P^2}$$

پاسخهای رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۵

مقصود صلاحی ـ نصیرزادی مقدم ـ مرتضی ارشدی ـ ابراهیم‌ذوالقدری. بهمن کمالی. حجت‌الله بابائی. صمدسبحانیان. رحیم جوان آزاد ـ موسی صنوبری ـ چنگیز آزادی ـ سیدمحمد رضا مرعشی. شاهرخ میرمیرانی. پرویز عزتیار ـ نادربزرگی هوشمند پزشگی ـ حسن چاکری ـ کامبیز رفیعی ـ علی اصغر اسکندربیاتی ـ سیدمهدی نظیری ـ شمس‌الدین شاه‌علی ـ محمد صادق‌ابریشمی. سیدمحمودتقوی. فتح‌الله کلیاتی. زهراذوالفقاری مقصودصلاحی. جعفرصادقی ـ سیدجعفرموسوی. علیرضامیرمحمد صادق ـ مسعودحبیب‌الله‌زاده ـ علی‌اصغر شاملی. قربانعلی شاهی. مظاهرامینی. مسعود نداف‌زاده ـ جعفرآقایانی چاوشی ـ مصباح جاوید ـ حسن‌جعفری ـ سیدجمال آشفته ـ سعید سیدمنصوری ـ بختیار علیمدد سلطانی ـ ژوزف صالح ـ منوچهر گوهرریزی ـ عباس طلائی زاده ـ ناصر حسینی‌پناه ـ محسن تقوی ـ پرویز مرادی حقگو ـ ابوالفضل فتح‌الله زاده ـ اردشیر گشتاسی ـ نادر ملائیان ـ محمدرضا نادری ـ ماشاالله سعید ـ علی‌طاهر ـ بهروز قاسمی ـ محسن هاشمی‌نژاد ـ عادل پاشاپور ـ فرید سیدمنصوری سعید هدایتی ـ حسین خبازیان ـ علی تقیان ـ منصور خلیلی ـ رضا مرعشی ـ یعقوب پریچهر ـ رمضان اصغرپور ـ محمد علی موحدیان. ناصر عصاره ـ محمدرضا براتی ـ یوسف عباس‌پور. غلامرضا میرزاخانی ـ عزیزالله صادقیان ـ حسین شیشه‌گر ـ محمدتقی مقدادیان ـ محمد رضا نیکوئی ـ مصطفی کریمی ـ علی‌شادکامی .

زاویه (بقیه از صفحهٔ ۱۰)

با مدول ۱ و اعداد حقیقی با تقریب 2π را ایجاب می‌کند ، درهمان حال عدد π با اثبات وجود یك‌چنین ایزومورفی یعنی در سری اعداد مختلط تعریف شود .

این تناظر مثلا به‌صورت زیرنشان داده می‌شود .

$$z=E(u) \text{ و } u\equiv \mathrm{Arg}\ z \pmod{2\pi}$$

که از خاصیت اساسی زیر منتج می‌شود .

$$\mathrm{Arg}(zz')\equiv \mathrm{Arg}\ z+\mathrm{Arg}\ z' \pmod{2\pi}$$

اگر فرض کنیم که $E(u)=\cos u+i\sin u$ وبا قبول موقتی اینکه وقتی $0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$ باشد $\cos u$ و $\sin u$ مثبت بوده‌و $\lim\frac{\sin u}{u}=1$ است آن وقت می‌توان مثلثات را کاملابیان کرده وزاویهٔ بین بردار را به‌صورت آرگومان نسبت (مختلط) آفیکسهای این بردارها تعریف کرد و می‌توان فرمول شال ، تعریف هندسهٔ مقدماتی توابع دوری به کمك دایرهٔ مثلثاتی و غیره را نتیجه گرفت .

[۱۸]ـ درهندسهٔ تحلیلی زاویهٔ بین دو بردار بامختصات $(x \text{ و } y \text{ و } z)$ و $(x' \text{ و } y' \text{ و } z')$ در مبنای قائمه به‌سادگی از فرمول زیر بدست می‌آید .

$$\cos u=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

درصفحه‌ای که $z=z'=0$ است می‌توانیم زاویهٔ بین‌دونیم‌خط را با تصریح علامت از فرمول زیر حساب کنیم .

$$\sin u=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{x'^2+y'^2}}$$

در فضای R^3 این فرمولها تعمیم می‌یابند . درحالتی که مبنا قائمه‌نباشد در $\cos u$ یك‌فرم درجهٔ دوم ویك فرم دوخطی پدید می‌آید. در C^n باید فرمهای هرمیتیك پدید آید اما باز هم‌فرمولی که $\cos u$ را بدست‌می‌دهد ارزش‌خود را حفظ می‌کند.

[۱۹]ـ در R^3 زاویهٔ دوصفحهٔ با معادلات :

$$ux+vy+wz=h \text{ و } u'x+v'y+w'z=h'$$

همان زاویهٔ دو بردار $(u \text{ و } v \text{ و } w)$ و $(u' \text{ و } v' \text{ و } w')$ خواهد بود. اگر $w=w'=0$ باشد زاویهٔ بین‌دوخط در R^2 بدست می‌آید .

[۲۰]ـ **مسئلهٔ تثلیث زاویه** از این قرار است که به کمك‌خط‌کش وپرگار زاویه‌ای تعیین کنیم که ثلث زاویهٔ مفروض باشد، این مسئله درحالت‌کلی غیرممکن است، مثلا برای زاویهٔ $\frac{2\pi}{3}$ ترسیم نه ضلعی منتظم پیش می‌آید ، اما مسئله برای $\frac{\pi}{2}$ ممکن می‌باشد .

پرسش و پاسخ

● در تعقیب مذاکرات تلفنی راجع به نکته‌ای که در فصل راهنمای ریاضیات متوسطه یکان شمارهٔ ۳۶ بیان شده مبنی براینکه‌اگروقتی‌که $x \to \alpha$ دراین‌صورت $h(x) \to \infty$ امکان داردکه $x = \alpha$ ریشه‌ای از معادلهٔ $y = \frac{g(x)}{h(x)} = 0$ باشدلازم به‌یادآوری است که این موضوع باید به‌قسم دیگر تعبیر شود. زیرا وقتی‌می‌گوئیم $x = \alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $y = f(x) = 0$ است که مقدار $f(\alpha)$ صراحتاً برابر با صفر باشد بنابراین وقتی داشته باشیم.

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0$$

آیا می‌توان حکم کرد که $x = \alpha$ ریشهٔ معادله است؟

حسن کلاهمال، ششم ریاضی دبیرستان دارالفنون

پاسخ ـ اگر $x \to \alpha$ مقادیر $f(\alpha)$ به ترتیب کوچك شده و بطور پیوسته به‌سمت صفر میل کند دراین‌صورت بنا به‌یك **اصل** قبول‌می‌کنند که $x = \alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ می‌باشد.

خلاصه‌ای‌راجع به‌اصل مزبوردرصفحهٔ ۳۴۰ کتاب‌مثلثات (مستقیم‌الخطوکروی) ترجمهٔ پرویز شهریاری بیان شده‌است. مفصلتر آن به صورت یك مقاله در شماره‌های آیندهٔ یکان بیان خواهد شد.

بقیهٔ تذکرات شما زیرعنوان «از میان نامه‌های رسیده» چاپ شده است.

● **پرسش:** خواهشمند است راه‌حل صحیح مسئلهٔ شیمی زیر راتوضیح دهید زیرا دبیرما ازراهی‌که حل‌کرد برای‌آن جواب ۲ بدست‌آورد، دریك‌کتاب حل‌المسئله برای آن‌جواب $\frac{9}{8}$ و در حل‌المسئلهٔ دیگر جواب $\frac{1}{2}$ بدست آمده است.

موسی صنوبری

مسئله ـ مخلوطی از کربورکلسیم وکربور آلومینیم را با آب ترکیب کرده‌ایم. چگالی مخلوط بخارات تولید شده نسبت به هیدرژن ۱۰ است. نسبت دو جرم دو کربور را در مخلوط تعیین کنید.

پاسخ (ازعطاءالله بزرگ‌نیا) ـ هرگاه فرض کنیم که در این مخلوط x ملکول C_2Ca و y ملکول C_3Al_4 باشد. از روی چگالی مخلوط گازها باید نسبت $x:y$ را پیدا کرد. واکنش ترکیب کربورهای فوق باآب ازاین قراراست:

$$C_2Ca + 2H_2O \to C_2H_2 + Ca(OH)_2$$

$$C_3Al_4 + 12H_2O \to 3CH_4 + 4Al(OH)_3$$

بطوری‌که از فرمول برمی‌آید به‌ازاء یك ملکول C_2Ca یك ملکول C_2H_2 وبه‌ازاء یك ملکول C_3Al_4 سه‌ملکول CH_4 تولید می‌شود. وبا توجه به‌اینکه تعداد ملکولهای C_2Ca را برابر x وازآن C_3Al_4 را برابرy گرفته‌ایم‌تعدادملکولهای استیلن x و تعداد ملکولهای متان $3y$ و جرم مخلوط دوگاز

$$xC_2H_2 + 3yCH_4 = 26x + 48y$$

وحجم‌مخلوط باتوجه به‌قانون آووگادرو برابر $x + 3y$ است وچون چگالی آن ۱۰ است رابطهٔ زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{26x + 48y}{(x + 3y)2} = 10$$

یا

$$26x + 48y = 20x + 60y$$

$$6x = 12y \implies x : y = 2$$

مفهوم این نتیجه آنست که هرگاه بخواهیم مخلوطی‌ازاستیلن ومتان‌به‌چگالی۱۰ تهیه‌نمائیم‌باید کربورکلسیم‌وکربورآلومینیوم رابه‌نسبت ملکولی ۲و۱ اختیار نمائیم بدیهی است برای‌تعیین نسبت جرم دو کربور بایستی این اعداد را در جرم ملکولی کربورهای مربوطه ضرب کرد در نتیجه نسبت جرمی برابر می‌شود با: $\frac{64 \times 2}{144} = \frac{8}{9}$

بطوری‌که ملاحظه می‌فرمائید راه‌حل مسئله بسیار ساده است و اشتباهی‌که برای شما پیداشده ناشی از این‌جاست‌که اگرنسبت ملکولی‌کربورکلسیم را به‌کربورآلومینیوم بدست آوریدبرابر۲ وهرگاه برعکس نسبت ملکولی کربور آلومینیوم رابه‌کربور-کلسیم بدست آورید ($x : y$ دراین مسئله) برابر $\frac{1}{2}$ خواهد شد ونسبت جرمی $\frac{8}{9}$ و یا $\frac{9}{8}$ خواهد شد.

اما برای آنکه درستی حل مسئله را آزمایش‌کنید. کافی است چگالی مخلوط را محاسبه‌کنید:

$$\frac{2 \times 26 + 3 \times 16}{2 \times 5} = \frac{100}{10} = 10$$

دترمینان (بقیه از صفحهٔ ۱۴)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\Delta_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\Delta_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}\Delta_{13} = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{23}$$

بنابراین برای محاسبهٔ دترمینان بهتر است که دترمینان را مرتباً به ترمینانهای رستهٔ پائینتر تبدیل کرد سپس مقادیر عددی آنرا بدست آورد .

مثال ـ مقدار دترمینان زیر را حساب کنید.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$-2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

چنانکه ملاحظه می‌شود علامت هر جمله برابر (-1) به قوهٔ مجموع شمارهٔ سطر وستون حذف شده است علامت جمله‌ای که شامل دترمینان حاصل از حذف سطر اول و ستون چهارم می‌باشد عبارتست از $(-1)^{1+4}$ حال هریك از دترمینانهای رستهٔ ۳ فوق را به دترمینانهای رستهٔ ۲ تبدیل می کنیم

$$\Delta = 5[3 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}]$$

$$-2[4 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}]$$

$$+3[4 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}]$$

$$-1[4 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}]$$

$$= 5[3(2\times3 - 0\times1) - 2(0\times3 - 2\times1) + 7(0\times0 - 2\times4)]$$

$$-2[4(4\times3 - 0\times1) - 2(2\times3 - 5\times1) + 7(2\times0 - 5\times4)]$$

$$+3[4(0\times3 - 0\times1) - 3(2\times3 - 5\times1) + 7(2\times0 - 5\times0)]$$

$$-1[4(0\times0 - 2\times4) - 3(2\times0 - 5\times4) + 2(2\times2 - 5\times0)]$$

$$= 5\times24 + 2\times94 - 9 - 36 = 263$$

بطور کلی در هر دترمینان رستهٔ n به تعداد اجزاء یك سطر دترمینان رستهٔ $n-1$ وجود دارد مثلا دترمینان رستهٔ ۴ به ۴ دترمینان رستهٔ ۳ وهر دترمینان رستهٔ سه به سه دترمینان رستهٔ ۲ وهر دترمینان رستهٔ ۲ به دو جمله تبدیل می‌شود پس تعداد جملات یك دترمینان رستهٔ چهار برابر $4\times3\times2\times1 = 24$ است و بطور کلی تعداد جملاتی که از بسط دترمینان رستهٔ n حاصل می‌شود برابر $1\times2\times3\times4\times\dots\dots\times n = n!$ خواهد بود و اندازهٔ یك دترمینان رستهٔ n به صورت قراردادی زیر نمایش داده می‌شود .

$$\Delta_{nn} = \sum_{K=1}^{K=n} (-1)^{i+K} a_{ik}\Delta_{ik}$$

Δ_{ik} یعنی دترمینان حاصل از حذف سطر i ام وستون K ام وعلامت $\sum_{K=1}^{K=n}$ مجموع جملات که به‌ازاء k مساوی ۱و۲ و...n حاصل می‌شوند .

دانش‌آموز رتبهٔ اول

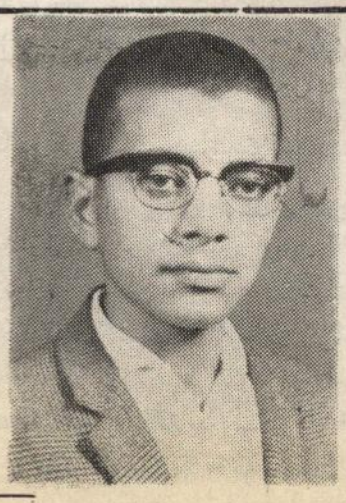
کلاسهای ششم ریاضی یزد

سید مهدی کمال‌الدینی

دبیرستان آرین

معدل ۱۹/۱۲

فرستندهٔ خبر، مطبوعاتی جهان نمایندگی فروش یکان دریزد



از میان نامه‌های رسیده

● آقای **غلامرضا فرزین** دانشجوی دانشکدهٔ افسری دربارهٔ اینکه «پشت یك میز گرد ۳ نفر به‌چند وضع می‌توانند بنشینند» توضیح داده‌اند که برخلاف آنچه که درفصل «دترمینان» درصفحهٔ ۵ یکان شمارهٔ ۳۵ ذکر شده است ۳ نفر در پشت یك میز گرد فقط به ۲ وضع می‌توانند بنشینند . این مثال حالت خاصی از تبدیل مدور بوده ودر حالت کلی برای n نقطهٔ روی یك دایره رویهم !(n − ۱) تبدیل وجود دارد .

● آقای **حسن کلاهمال** دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان دارالفنون به دنبال مطلبی که در صفحهٔ پرسش وپاسخ چاپ شد تذکر داده‌اند که استفاده از فرمولهای

$$(۱)\quad \sin x = \frac{۲tg\frac{x}{۲}}{۱+tg^{۲}\frac{x}{۲}} \quad و \quad \cos x = \frac{۱-tg^{۲}\frac{x}{۲}}{۱+tg^{۲}\frac{x}{۲}}$$

به‌شرطی جایز است که $x \neq ۲k\pi + \pi$ باشد زیرا این‌فرمولها از تقسیم طرفین اتحادهای :

$$\sin x = ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} \quad و \quad \cos x = \cos^{۲}\frac{x}{۲} - \sin^{۲}\frac{x}{۲}$$

بر $\sin^{۲}\frac{x}{۲} + \cos^{۲}\frac{x}{۲}$ و آنگاه از تقسیم عبارات صورت و مخرج کسرهای حاصل بر $\cos^{۲}\frac{x}{۲}$ بدست می‌آیند . اگر $\cos\frac{x}{۲} = ۰$ باشد عمل اخیر جایز نمی‌باشد. بنابراین درحل معادلهٔ $۳\sin x - \cos x = ۱$ استفاده از فرمولهای (۱) جایز نیست .

● آقایان **کامبیز علوی، جواد جمشیدی، غریبیان** وچند نفر دیگر از خوانندگان تذکر داده‌اند که در محاسبهٔ حجم مربوط به مسئلهٔ جبر کنکور دانشکدهٔ پلی‌تکنیك مندرج در یکان سال ۱۳۴۵ یك اشتباه فاحش روی داده است به‌این ترتیب که به جای آنکه تابع اولیهٔ تابع $\pi y^{۲}$ حساب شود از تابع πy حساب شده است ودر نتیجه جواب اشتباه بدست‌آمده است .

● آقای **کامبیز علوی** راجع به حل مسئلهٔ مکانیك همین دانشکده نیز توضیحاتی داده‌اند . چون بنا به تذکر یکی از خوانندگان راجع به حل این مسئله از مقامات دانشکدهٔ مزبور توضیحاتی خواسته شده است تذکرات آقای علوی هم‌بعد از وصول این توضیحات به‌نظر خوانندگان خواهد رسید .

● آقای **رمضان اصغرپور** دانش آموز دبیرستان پانزده بهمن تذکرداده‌اند که در محاسبهٔ تابع اولیهٔ تابع:

$$y = \frac{x^{۳}}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$$

موضوع مسئلهٔ دانشکدهٔ فنی‌تبریز مندرج در یکان سال ۱۳۴۵ اشتباه شده است به‌این معنی‌که تابع به صورت زیر نوشته شده است .

$$y = x^{۳}(x^{۲}+۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

در صورتی‌که صحیح آن چنین است .

$$y = x^{۳}(x^{۲}+۱)^{-\frac{۱}{۲}}$$

واز این‌جهت جواب بدست‌آمده نادرست می‌باشد .

معرفی کتاب

سه جزوه به‌عنوان

تمرینات ریاضی

و راهنمای حل

برای داوطلبان کنکور دانشگاه

تنظیم : م. هندی نژاد

به ادارهٔ مجله واصل شده است . مطالب این جزوه‌ها به‌شرح زیراست که دربارهٔ هرمطلب‌غیر از یادآوری تعاریف و تذکر نکات مسائل متعدد ومتنوعی هم‌چاپ شده است.

جزوهٔ اول: بخش‌پذیری ـ تصاعدها ـ بینم نیوتن-طریقهٔ محاسبهٔ بعضی‌ازمجموعه‌ها- تمرینات

جزوهٔ دوم : دربارهٔ اتحادها ـ معادلات ـ روابط بین‌ضرایب وریشه‌ها- ریشه‌های مکرر-ریشهٔ مشترك‌دومعادله- اندازهٔ تقریبی ریشه‌ها- تمرینات

جزوهٔ سوم : تمرین معادلات ـ تعیین ریشهٔ منطق‌معادلات- بسط خطوط مثلثاتی mx برحسب x − لگاریتم ـ مشتق ـ تمرینات

تقاضا

از خوانندگان و علاقمندان مجله که در امتحانات ورودی دانشکده‌های مختلف شرکت می‌کنند تقاضا دارد نسخه‌ای از سؤالات مربوط را به‌ادارهٔ مجله ارسال دارند .

نشریهٔ جدید یکان :

سرگرمیهای جبر

نوشتهٔ : پرلمان

ترجمهٔ : پرویز شهریاری

باقطع جیبی وجلد شمیز بها ۶۰ ریال ـ باقطع بزرگ وکاغذ اعلا وجلد زرکوب بها ۱۰۰ ریال

انتشارات یکان :

مجموعهٔ علمی یکان سال
۶۰ ریال

یکان سال (امتحانات ۱۳۴۳)
۴۰ ریال (نایاب)

راهنمای ریاضیات متوسطه
چاپ دوم : ۱۵ ریال

معماهای ریاضی
۴۰ ریال (نایاب)

مسائلی از حساب استدلالی
جلد اول (نایاب)
جلد دوم: ۲۰ ریال

یکان سال ۱۳۴۴
۵۰ ریال (نایاب)

یکان سال ۱۳۴۵
۶۵ ریال (نایاب)

تمرینهای ریاضیات مقدماتی

تألیف: دکتر محسن هشترودی

نشریهٔ ممتاز یکان { ۱۲۰ ریال
۱۵۰ ریال