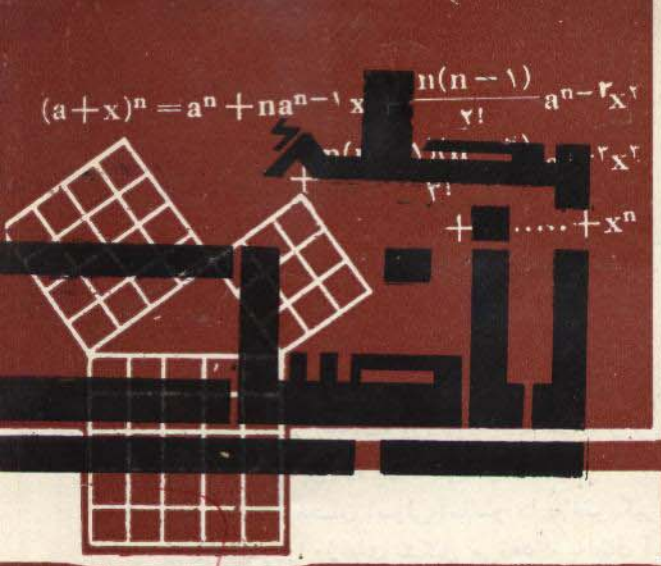


یکان ریاضی

دورهٔ سوم ـ شمارهٔ :

۱۱

شمارهٔ مسلسل

۳۶

تیرماه ۱۳۴۶

دراین شماره :

بها : بیست ریال

نامهٔ رسیده :

دربارهٔ مسئلهٔ مکانیك امتحان سال ششم ریاضی

ریاست محترم مجلهٔ وزین یکان

چون خبری درجراید یومیه درمورد غلط بودن مسألهٔ مکانیك سال ششم ریاضی خواندم درصدد برآمدم مسأله را بررسی کنم واینك نظرخودرا دراین باره ارائه می‌دهم :

اگرساختمان اصولی آسانسوررا درنظربگیریم اغلب صف وزن آسانسوررا وزنه‌ای تشکیل می‌دهدکه بااطاق آسانسوربه‌شکل ماشین آتوود سوارمی‌شودکه آنرا سیستم ضدسنگینی (Contre_poids_) می‌نامند. اگر این کیفیت ساختمانی منظور شود مسألهٔ داده‌شده کاملا باموازین فنی وعلمی تطبیق می‌شود وجای‌هیچگونه ایرادی نیست . حل این مسألـه ذیلا ارائه می‌شود . مستدعی‌است درصورت موافقت اقدام به درج آن فرمائید .

دکتر صمد فرخی

استادیار و متصدی آزمایشگاه مـکانیك فیزیك
دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

حل مسأله در پائین صفحهٔ ۱۴ ملاحظه شود

من علمنی حرفاً فقد صیرنی عبداً . علی علیه‌السلام

جناب آقای دکتر قینی استاد محترم دانشگاه تهران

شرح زحمات ومرارتی که درطول سال تحصیلی گذشته با مسافرتهای منظم‌وپیاپی خود برای تدریس مامتحمل شده‌اید نه دراین مختصر می‌گنجد ونه ما ازعهدهٔ قدرآن توانیم برآمد . ولی ضمن تقدیم سپاس‌فراوان، ازتذکار این نکته، ناگزیریم که طی این سال تحصیلی علاوه بر دروس کلاسیك ریـاضی درسی دیگر ـ وبه مراتب بزرگتر ـ ازآن جناب تعلیم گرفتیم و آن درس نظـم و انضباط ، وقت شناسی ، صمیمیت ، شیوهٔ خاص و عادلانهٔ امتحانی وبالاخره لطف وعنایت خاصی بودکه نسبت به حقوق و خواسته های یکایك دانشجویان مبذول می‌فرمودید که همواره در خاطرما محفوظ خواهد ماند .

امیدواریم در سالهای آینده نیزعلمـاً و عملاً از فیوضات حضرتعالی بهره‌مند شویم .

دانشجویان سال دوم وسوم رشته های
فیزیك وریاضی دانشکدهٔ علوم مشهد.

توجه

از دانش آموزان محترم و سایر خوانندگان گرامی‌که مطالبی برای‌مجله می‌فرستند (اعم ازمقاله . مسئله، پرسش و غیره) تقاضا می‌شودنام ونشان ومشخصات خودرا ذکرفرمایند. چنانچه مایل نیستند نام آنها ضمن مطلب مـربوط چاپ شود یادآوری نمایندکه البته مراعات خواهدشد . هرنوع مطلبی‌که بدون ذکر نام و نشانی نویسنده بـه دفتر مجله واصـل شود کان لم یکن تلقی خواهد شد.

یکان
مجلهٔ ریاضیات

سال چهارم - دورهٔ سوم-شمارهٔ یازدهم(شمارهٔ مسلسل: ۳۶)

تیر ۱۳۴۶

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی ، داود مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان هر ماه یك بار منتشر می‌گردد

نشانی اداره: تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا-شمارهٔ ۸

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳
تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای ۱۲ شماره ۲۰۰ ریال
(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)
حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume III , number 11 ,June. 1967

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

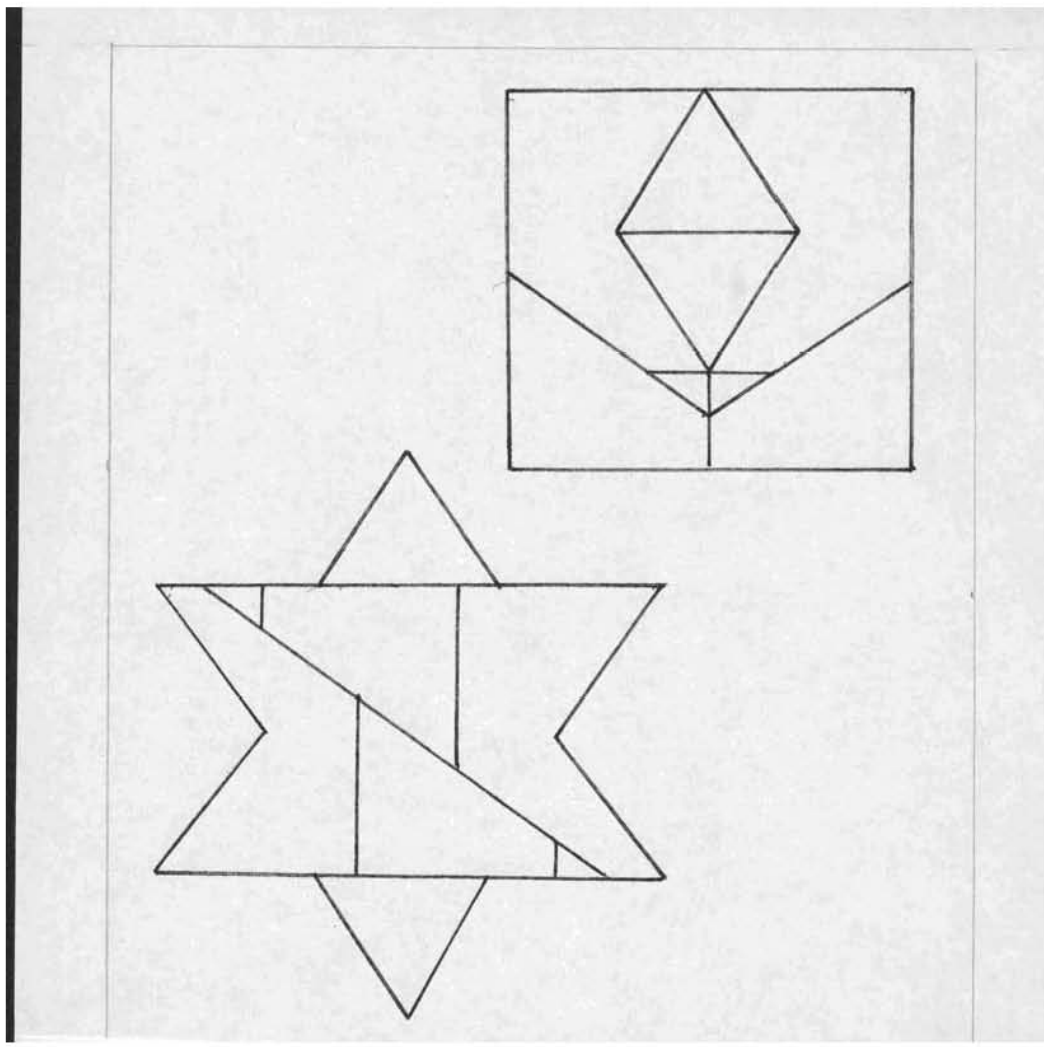
چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

ریاضیات و هنرکاشیکاری

زیبایی ساختمان های کاشیکاری شده ی ایران زبانزد جهانیان است .هنر شناسانی که از هر گوشه ی دنیا به دیدن آنها می آیند در برابر آن همه زیبایی ها و درخشندگی ها شگفت زده می مانند . هنر کاشیکاری گونه ای مینیاتورآفرینی است ؛ کاشی ها برش می یابند و به خرده هایی به شکل های معین تبدیل می شوند وآنگاه این خرده ها چنان با هم جفت می شوند که شکل مورد نظر را نمودار سازند .در این جاست که ریاضیدان نقش اساسی را به عهده می گیرد . بزرگ ریاضیدان ایرانی ابوالوفای بوزجانی (متولد ۳۱۸ هجری خورشیدی)استاد برجسته در همه ی زمینه های ریاضی آن دوره به ویژه در هندسه ،در تبدیل شکل های هندسی به یکدیگر و در طرح نقش و نگار های مورد نیاز کاشیکاران نیز کارایی بی چون وچرا را داشته است .

شکل های زیر (بر گرفته از کار گاه تاریخ ریاضیات نوشته ی پژوهشگر هلندی هوخنداک و ترجمه ی مهران اخباریفر)،طرحی از بوزجانی را برای تبدیل کاشی مربع به شش ضلعی منتظم نشان می دهد .

عبدالحسین مصحفی



کتابهای درسی ریاضی که هم اکنون به عنوان کتابهای رسمی در دبیرستانها معمول است سالها از تاریخ تألیف آنها می گذرد . در این مدت، صرف نظر از تغییر کلی روش ریاضیات، حتی در همان روش قدیم هم بسیاری از اصطلاحات ریاضی منسوخ شده وجای خودرا به اصطلاحات تازه‌ای داده است که مفاهیم وسیعتری را در بر می گیرد . هیچیك از این تغییرات در کتابهای درسی رسمی ما منعکس نشده است اما درمقابل، انواع مسائل ریاضی که درمسابقات والمپیاد های ریاضی کشورهای خارج مطرح می‌شود به دست دانش‌آموزان ما می‌رسد یا اینکه درامتحانات ومسابقات مطرح می‌شود درحالی که با تعاریف، اصطلاحات معمول درکتابهای ما مطابقت نمی‌کند و برای دانش‌آموزان نکته بین موجب ابهام می‌باشد. غیر از نقص مذکور، از جهات دیگر هم نارسائیهائی درکتابهای درسی وجوددارد . از این جهت ،از ابتدای انتشار یکان، به هر وسیله که میسر بوده از اشخاص ذیصلاحیت دعوت شده است که کتابهای درسی را، از جنبهٔ راهنمائی دانش‌آموزان، بررسی کرده نظریات خودرا برای درج درمجله مرقوم دارند . اخیراً هم طی نامه‌هایی که برای اینگونه اشخاص نوشته شد تقاضای مزبور تجدید گردید. خوشبختانه اولین پاسخ مثبتی که واصل شده نوید دهندهٔ آنست که از این به بعد ، بررسی کتابهای درسی ریاضی، آنگونه که مورد تقاضا بوده یعنی به منظور راهنمائی دانش‌آموز، درشماره های مجلهٔ یکان ادامه خواهد یافت .

نکته‌ای که لازم به یادآوری است این است که هریك از کتابهای درسی تاکنون چندین بار از طرف سازمان کتابهای درسی بررسی شده است بطوری که بعضی از مؤلفان مدعی هستند کتاب فعلی غیر از آنچه است که ایشان تألیف کرده‌اند ودرنتیجه مسئولیت مندرجات کتاب فعلی را به گردن نمی‌گیرند. اما بررسی که ازطرف سازمان کتابهای درسی انجام می‌گیرد احتمالا فقط از نظر تطابق با برنامهٔ مصوب مواد درسی است .

بدیهی است هر اظهار نظر و توضیحی که دربارهٔ مقالات مربوط به بررسی کتب درسی، وهمچنین نسبت به سایر مقالات یکان، واصل شود همانگونه که تاکنون هم عمل شده درمجله درج خواهد شد.

عبدالحسین مصحفی

متن نامهٔ مدیر مجله :

دانشمند محترم جناب آقای .....

در نظر تقریباً عموم معلمین ومحصلین ،کتاب درسی یك مرجع علمی معتبر بحساب می‌آید . بدیهی است که اگر کتاب درسی مشتمل بر اشتباههایی باشد لطمات جبران ناپذیری به پایهٔ علمی محصلین وارد خواهد آمد . چنانکه قبلا هم به استحضار رسیده است، ازابتدای انتشار یکان تصمیم براین بوده است که از هریك ازکتابهای ریاضی درسی انتقاد لازم بعمل آمده مخصوصاً اشتباههای موجود در آنها یادآوری شود . علیهذا از جناب عالی که علاوه بر آنکه برای نقد کتابهای ریاضی شایستگی لازم را دارید مورد احترام و اعتماد دبیران ریاضی هم هستید و ضمناً در انتشار یکان همواره علاقهٔ کامل خودرا ابرازداشته‌اید تقاضا می‌شود که هریك ازکتابهای ریاضی درسی را که خود انتخاب می‌فرمائید مورد بررسی قرار داده نظریهٔ خود را نسبت به آن برای درج در مجلهٔ یکان، به‌منظور راهنمائی دانش آموزان ، مرقوم فرمائید . مزید برامتنان است.

مدیر مجلهٔ یکان

اولین پاسخ :

اداره مجلهٔ یکان

نامهٔ شمارهٔ ۶۵۵۷ ـ ۴۶/۲/۲۰ زیارت شده است قبلا از حسن‌ظن آن مجلهٔ محترم نسبت به‌خودم سپاسگزارم .

بدون شك یکی از اقدامات اساسی وزارت آموزش و پرورش که به‌پیروی از منویات مبارك **اعلیحضرت شاهنشاه آریامهر** در سالهای اخیر انجام شده است یکنواخت ورسمی شدن کتابهای درسی بخصوص کتابهای درسی دبیرستانها است. این عمل که نظیر آن در بسیاری از کشورهای مترقی معمول است دارای محسنات زیاد و اثرات نیك آن در دورهٔ تحصیلات دانش آموزان غیرقابل انکار است لیکن اگر در تهیه و توزیع این کتابها دقت کافی و مداوم بکار نرود ممکن است موجب ضرر و زیان و احیاناً سقوط سطح معلومات جوانان گردد. موقعی که کتابهای درسی بوسیلهٔ مؤلفین مختلف تهیه و نشر می‌گردید رقابتهای موجود فیمابین مؤلفین خود سبب می‌شد که معایب کتابها چه از لحاظ چاپ و چه از لحاظ موضوع و مندرجات تدریجاً رفع و مطالب مورد احتیاج آموزش وپرورش روز در آنها درج شود. فراموش نشده است که چندسال پیش در کشور ماچه رقابتها بین مؤلفین وناشرین کتب درسی البته تا اندازه‌ای هم برای نفع شخصی، وجود داشته است.

مثلا از طرف عده‌ای از مؤلفین کتاب هندسه علیه عدهٔ دیگر از مؤلفین که کتاب مشابه نوشته و گویا خواسته بودند اصل معروف اقلیدس را اثبات نمایند در روزنامهٔ اطلاعات اعلامیه‌ای صادر شده ویا اینکه ازطرف عده‌ای علیه عدهٔ دیگر کتابچهٔ ردیه انتشار یافته بود.

اگر چه این اقدامات در آن زمان قدری زشت جلوه می‌کرد لیکن خود تا اندازه‌ای وسیلهٔ پیشرفت و بهتر شدن کتابهای درسی بود اکنون که این رقابتها از بین‌رفته و تهیهٔ کتابهای درسی روی اصول صحیحی قرارگرفته است جا دارد که‌خودمقامات مسئول وزارت آموزش وپرورش برای‌مرغوب‌بودن این کتابها از هر لحاظ سعی فراوان بکار برند و اگر بوسیلهٔ بخشنامه‌ها و دستورات مؤکد معلمین‌را وادار می‌کنند که در کلاسهای درسی فقط کتب مصوب را تدریس نمایند پس درمقابل باید این کتب دارای امتیاز بوده وعاری از عیب ونقص باشد ودر تدوین آنها از تفصیل و اختصار بی‌مورد پرهیز بعمل آمده حق و اندازهٔ هرمطلب به‌جای خود ادا شده باشد تاکسی با غرض ویا بی‌غرض نتواند و نخواهد وقت دانش آموزان را برای نوشتن جزوه‌های تکمیلی ویاخواندن پلی‌کپی‌های‌تلخیص شده تلف نماید. کتاب درسی‌علاوه براینکه سند و مدرك‌تحصیلی ومرجع مستقیم دانش‌آموزان بشمار می‌رودممکن‌است‌درکشورهای دیگر مورد مطالعه و مقایسه قرارگرفته نیك و بد آن با حیثیت فرهنگی‌کشورما ارتباط پیداکند. بالاخره کتاب درسی که موشح به تمثال شاهنشاه بوده و به امضاء وزیر آموزش و پرورش کشور می‌رسد دارای اهمیت است و هرکتاب عادی را که فلان مؤلف نوشته نمی‌توان باآن مقایسه نمود،مندرجات‌آن باید درمشی کار دبیر و دانش‌آموز دلیل و هادی سبیل باشد .

اگر مسئول ادارهٔ محترم مجلهٔ یکان را برای مطالعه و اظهار نظر درکتابهای درسی ریاضی تا آنجاکه ممکن است اجابت می‌کنم نه برای اینست‌که در خود فضلی سراغ داشته باشم و یا در صدد عیب جوئی از کار دیگران برآیم بلکه فکر می‌کنم خدمتی انجام بدهم واین راه‌را بارکنم تادیگران بهتردرمورد کتابهای درسی فرزندان ابراز علاقه فرمایند شاید مؤثر و مفیدباشد. چنانچه‌مرقوم فرموده‌اند کتابهای ریاضی‌دبیرستانها را از کلاس ششم شروع و مطالعه کرده در مواردی که لازم باشد نظر خود را معروض خواهم داشت تاچه قبول افتد و چه درنظر آید. قبلا از مؤلفین عالیقدر و محترم این کتابها که همه از فرهنگیان پیشقدم هستند با ارادتمندی خاص معذرت خواسته و امیدوارم این خدمت صادقانه و بی‌ریا موجب تحکیم دوستی‌ها باشد .

غلامرضا عسجدی

بررسی

کتاب مثلثات

برای سال ششم ریاضی

توسط : غلامرضا عسجدی

از میان کتابهای ریاضی کلاس ششم کتاب فوق به قرعه مقدم بردیگر کتابها انتخاب شدکه دربارهٔ آن نظرات خودرا به‌عرض خوانندگان محترم مجلهٔ یکان می‌رسانم . بدیهی است که لازم بود به‌برنامهٔ تحصیلات دورهٔ دوم متوسطه و همچنین‌به کتاب مثلثات سال پنجم ریاضی کـه ارتباط با این کار دارد قبلا مراجعه نمایم. فعلا از اظهارنظرکلی در تمام جوانب این کتاب معذرت می‌خواهم فقط بعضی از مندرجات آنرا با ذکر شمارهٔ فصل و شمارهٔ صفحه و شمارهٔ موضوع مورد بحث

(شمارهٔ نگارنده / شمارهٔ فصل/ شمارهٔ صفحه/ شمارهٔ موضوع) عیناً درداخل‌کادری قرار داده سپس تغییر ویا پیشنهاد اصلاحی خود راکه از نظر سلامت بیان و منطق ریاضی لازم بدانم به‌عرض خواهم‌رسانید . البته قضاوت قطعی به عهدهٔ خوانندگان گرامی مجله خواهد بود. چون نوشتن بعضی‌کلمات خارجی ویا اسم‌کتاب درپاورقی صفحات مجله ازنظر اینکه‌کجا قراربگیرد تولیداشکال‌می‌نمود لذا آنها را درصورت لزوم درمتن نوشته واردکرده‌ام.

***

۱/۱/۱/۲ روابط بین خطوط مثلثاتی یك کمان

پیشنهاد می‌کنم عوض اصطلاح **خطوط مثلثاتی** همه جـا اصطلاح **توابع مثلثاتی** معمول شود :

اصطلاح خطوط مثلثاتی‌که در این‌کتاب وسایرکتابهای درسی ما بـه کرات تکرار می‌شود ترجمه‌ای است از اصطلاح فرانسوی **Lignes Trigonometriques** که خود لغت فرانسوی آن به تصدیق اغلب کتابهای ریاضی چاپ همان زبان (مثلاکتاب‌مثلثات **A. Grévy** پاورقی صفحهٔ ۲۶) یك غلط مستعمل ویا تقریبی از واقعیت است‌که فقط عرف و عادت آنرا نگه داشته است زیرا که سینوس وکسینوس و نظائر آنرا که‌برای یك‌کمان یایك زاویهٔ درنظر می‌گیریم از جنس‌پاره‌خط نیستند بلکه از جنس عدد هستند. بکاربردن کلمهٔ خط یا خطوط دربارهٔ آنها از قرار داد دایرهٔ مثلثاتی پیدا شده است. اگرچه این نامگذاری بیان راقدری سهل می‌کند لیکن‌همواره ممکن است در اندیشهٔ دانش‌آموزان و مبتدیان تصور غیرصحیح را به‌ارث بگذارد و این تصور سالها در ذهن آنها باقی بماند که گفته‌اند :

خشت اول گر نهد معمارکج تـا قیامت می‌رود دیوارکج

بنابراین به عقیدهٔ نگارنده بهتر است مانیز در کتابهای خودمان شیوهٔ بعضی ازکتابهای نسبةً جدید را از جمله

Theory and problems of first year Colleg mathematics by FRANK AYRES , JR. rg 176

اقتباس کنیم. تعریف خطوط مثلثاتی از روی دایرهٔ مثلثاتی را که‌ضرورت هم نداردبرداشته واین مفاهیم را ازروی نسبت‌بطور کلی نه آنطوری که در هندسهٔ سال چهارم بطور مختصر وجود دارد مورد بحث قـراردهیم وعـوض خطوط مثلثاتـی اصطلاح توابع مثلثاتی را مانند همان‌کتاب‌کـه **Trigonometric Functions** نامیده است متداول نمائیم .

نه تنها درکتابهای ریاضی به‌زبان انگلیسی بلکه حتی‌در کتابهای ریاضی چاپ سالهای اخیر کشور فرانسه و بخصوص در برنامهٔ رسمی مواد ریاضی این‌کشورهم از استعمال اصطلاح خطوط مثلثاتی خودداری شده است.

اگر چنانچه بعضی از مؤلفین محترم به اصطلاح خطوط مثلثاتی بیشتر انس و عادت دارند لااقل درکتاب مثلثات پنجم ویاششم یك‌بار توضیح کافی در نارسابودن این اصطلاح به‌دانش آموزان عرضه فرمایند تا ذهن آنها دراین خصوص روشن شده وموجبات گمراهی ایشان نگردد .

شاید خوانندهٔ محترم تصور فرماید کـه اینجانب مطلب کهنه‌ای را پیش‌کشیده‌ام .

در صورتی کـه اگر بـه شمارهٔ فوق‌العادهٔ اسفندماه ۴۵ مجلهٔ یکان مراجعه شود ملاحظه خواهند فرمود کـه معادلهٔ

$$tg(cotg\,x) = cotg(tg\,x)$$

موضوع مسابقهٔ ورودی دانشکدهٔ علوم تهران مورد اشکال قرار گرفته و نسبت به ابهام آن بحث شده است.

حال ازخودمی‌پرسیم چرااین معادله یایك عبارت نظیر $sin\left(cos\frac{\pi}{3}\right)$ درنظر دانش‌آموزان تولید ابهام واشکال می‌کند وعلت چیست؟

به‌نظرمن علتش اینست که آنان‌ازابتدا به مفاهیم‌سینوس و کسینوس و نظائرآن به صورت پاره خط نگاه‌کرده و صریحاً درك نکرده‌اندکه آنها عدد هستند که موقتاً جامهٔ عاریتی خط را پوشیده اند اگر این مطلب را درنظر بگیرند و دقیقاً به آنها گفته شودکه واحد رادیان نیز که‌برای اندازه‌گیری کمانها بکار می‌رود خود از جنس عدد و خارج قسمت دوطول است و گاهی علامت آن برای سهولت تحریر حذف می‌شود مثلا عوض اینکه بنویسیم:

$$sin\frac{\pi}{2}\text{rad}=1$$

معمولامی‌نویسیم $sin\frac{\pi}{2}=1$ بنابراین خواهیم در نظر گرفت که درمقابل هرعدد، یك‌تابع مثلثاتی مثلا یك‌سینوس وجود دارد وبه ازاء هرسینوس یك عددیعنی رادیان پیدامی‌شود دراین صورت به سهولت معلوم می‌شودکه:

$$sin\left(cos\frac{\pi}{3}\right)=sin\left(\frac{1}{2}\right)=sin\left(\frac{1}{2}\text{rad}\right)$$
$$=sin(28^\circ 38' 52'')$$

باتقریب نقصانی.

* * *

روابط بین خطوط مثلثاتی بعضی‌ازکمانها

الف ـ دوکمان‌که انتهای‌آنها نسبت به محور سینوسها قرینهٔ یکدیگر باشند دارای سینوسهای برابر وکسینوسها و تانژانتها و کتانژانتهای قرینه‌اند.

۲
۴/۳/۱

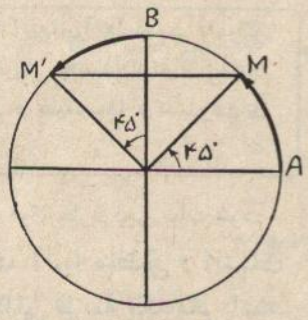
اگراینجانب‌مؤلف این کتاب‌می‌بودم‌مطلب فوق رابه‌شکل زیر بیان می‌کردم:

روابط‌بین‌توابع مثلثاتی‌بعضی ازکمانها که دارای یك مبدأ می‌باشند

الف ـ دوکمان‌که ابتدای‌آنها منطبق وانتهای آنها نسبت به محور سینوسها قرینهٔ یکدیگر باشند دارای سینوسهای برابر و کسینوسها و تانژانتها و کتانژانتهای قرینه‌اند.

توضیح ـ در مثلثات همواره لازم و ضروری نیست که دو کمان دارای یك مبدأ باشند، همین حالا زیر دست نگارنده یك‌کتاب خارجی وجود داردکه مسائل مختلف برای کمانهائی که دارای یك مبدأ نمی‌باشند طرح کرده است. پس اگر منظورما درتدریس و تحریر، کمانهائی باشدکه‌دارای یك مبدأ می‌باشند باید به صراحت و قاطعیت این موضوع را بیان کنیم بخصوص درموقعی‌که طرف خطاب، شاگرد مبتدی باشد.

دراکثر کتابهای فرانسوی که بنده دیده‌ام برای این قسم کمانها، هم درآغاز فصل وهم درهرجمله، مرتباً عبارت دارای یك مبدأ را تکرار می‌کنند تا خواننده ویا دانش آموز متوجه باشدکه مطلب مربوط به‌این قبیل کمانها است و اگر دوکمان دارای‌مبدأ مشترك نباشند هیچ‌حکم ثابتی بین‌آنها وجود ندارد مثلا اگر دوکمان $\widehat{BM'}=\widehat{AM}=+45^\circ$ روی‌دایره‌درنظر بگیریم بقسمی‌که دو مبدأآنها به اندازهٔ $+90^\circ$ فاصله داشته باشد انتهای آنها نسبت به محورسینوسها قرینهٔ یکدیگر می‌شوند وحکم کتاب مابین آنها مصداق ندارد (شکل مقابل)



کتاب‌کالج‌ماتماتیکس که‌ازآن‌یك‌بارهم اسم‌برده‌ایم اصولاکمانهائی راکه‌دارای‌یك مبدأ هستند وزاویهٔ مرکزی‌آنها را تحت یك نام مخصوص:

Arcs in standard position

درصفحهٔ ۱۷۶ طبقه بندی‌کرده‌که ازکمانهای‌قسم دیگر مجزی ومشخص گردند.

درکتاب مثلثات ششم ریاضی ما اصولا یك‌کلمه‌هم راجع به اینکه این قوسها دارای یك مبدأ می‌باشند، نه درسر فصل و در میان عبارتها ذکر نگردیده است.

وقتی‌که به صفحهٔ ۴۱ کتاب مثلثات سال پنجم ریاضی مراجعه‌شدمعلوم گردید درآنجاهم دراول فصل هفتم‌کتاب چنین نوشته شده است: «روابط‌بین خطوط مثلثاتی برخی ازکمانها» و نوشته نشده روابط بین خطوط مثلثاتی برخی ازکمانها که دارای یك مبدأ می‌باشند. همچنین اگر شمارهٔ ۳ همین فصل کتاب مثلثات پنجم ملاحظه شود درآنجا نیزبه صراحت و بیان فارسی این‌تذکر داده نشده است. فقط درشکل ۲۰ این‌کتاب چون از دوکمان AM و AM' اسم برده شده است خوانندهٔ کتاب باید خود به فراست دریابدکه این بیانات مربوط به کمانهائی است‌که دارای یك مبدأ مشترك می‌باشندو برای غیر

آنها صدق نمی‌کند حالا اگر کسی این شکل و این اشاره را برای دو کتاب و دوسال تحصیلی کافی بداند بحثی نیست و بنده از این تذکر معذرت می‌خواهم. لیکن خودم به تبعیت از کتابهای درسی کشورهای دیگر کافی نمی‌دانم.

ب- دو کمان که انتهای آنها نسبت به محور کسینوسها قرینهٔ یکدیگر باشند دارای کسینوسهای برابر و سینوسها و تانژانتها و کتانژانتهای قرینه‌اند.	۳ / ۴/۳/۱

اگر اینجانب مؤلف این کتاب می‌بودم مطلب فوق را بطرز زیر بیان می‌کردم:

ب- دو کمان که ابتدای آنها منطبق و انتهای آنها نسبت به محور کسینوسها قرینهٔ یکدیگر باشند دارای کسینوسهای برابر و سینوسها و تانژانتها و کتانژانتهای قرینه‌اند.

پ- دو کمان که انتهای آنها نسبت به مرکز دایرهٔ مثلثاتی قرینهٔ یکدیگر باشند دارای تانژانتها و کتانژانتهای برابر و سینوسها و کسینوسهای قرینه‌اند.	۴ / ۴/۳/۱

به نظر اینجانب باید مطلب فوق بطرز زیر بیان شود.

پ- دو کمان که ابتدای آنها منطبق و انتهای آنها نسبت به مرکز دایرهٔ مثلثاتی قرینهٔ یکدیگر باشند دارای تانژانتها و کتانژانتهای برابر و سینوسها و کسینوسهای قرینه‌اند.

ت- هرگاه مجموع دو کمان، $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد سینوس هریك از آنها برابر با کسینوس دیگری و تانژانت هریك از آنها برابر با کتانژانت دیگری است. حالت خاص - از حکم کلی (ت) در مورد دو کمان متمم α و $\frac{\pi}{2}-\alpha$ دستورهای زیر نتیجه می‌شود $\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha \\ tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=cotg\alpha \\ cotg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=tg\alpha \end{cases}$	۵ / ۴/۴/۱

توضیح - به نظر اینجانب در بیان بند (ت) از صفحهٔ چهار کتاب درسی دو اشتباه وجود دارد

۱- حالت کلی قضیه اصلا ذکر نشده است

۲- حالت خاص که از حکم به اصطلاح کلی ت نتیجه گرفته شده با خود آن فرق ندارد به عبارت دیگر کلی و جزئی درمیان نیست بلکه هردو یکی است زیرا که در مثلثات دو کمان را متمم همدیگر می‌نامیم درصورتی که مجموع آنها $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد (صفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۱۳ از کتاب مثلثات A.GREVY) اگر یکی از آنها را α بنامیم دیگری $\frac{\pi}{2}-\alpha$ رادیان خواهد بود پس موضوع فوق باید به طرز زیر بیان شود

ت- دو کمان که ابتدای آنها منطبق و انتهای آنها نسبت به نیمساز ربع اول و سوم دایرهٔ مثلثاتی قرینهٔ یکدیگر باشند سینوس هریك از آنها برابر با کسینوس دیگری و تانژانت هریك از آنها برابر با کتانژانت دیگری است

حالت خاص - از حکم کلی (ت) درمورد دو کمان متمم α و $\frac{\pi}{2}-\alpha$ دستورهای زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha \\ tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=cotg\alpha \\ cotg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=tg\alpha \end{cases}$$

ضمناً اضافه می‌شود که درحالت کلی مجموع دو کمان $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ و فقط درحالت خاص برابر $\frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

بقیه دارد

ترجمهٔ فصلی از کتاب : «L' Astronomie moderne» تألیف : TOCQUET

مراحل مهم علم نجوم

۳- دورهٔ نزدیك معاصر

لووریه

اوربن ژان ژزف لووریه (Urbain-Jean-Josef Le Verrier)

۱۸۱۱ - ۱۸۷۷

در سن‌لو متولد شد و در ۱۸۳۳ پس از آنکه از مدرسهٔ پلی‌تکنیك فارغ‌التحصیل شد در ادارهٔ دخانیات مشغول کار شد. وی در آنجا روی شوقی که داشت به تحقیقات درشیمی مشغول شد اما وضعی پیش آمد که به ناچار به علم نجوم روی آورد. موضوع از این قرار بود که محل‌استادیاری درس شیمی مدرسهٔ پلی‌تکنیك بلا متصدی مانده بود و در یك زمان، لووریه و **رینولت** فیزیکدان داوطلب تصدی شغل مزبور شده بودند، لووریه ناچار شد که به نفع رقیب خود از این پست صرف‌نظر کند و در عوض پست استادیاری نجوم مدرسهٔ مزبور را قبول کند.

از آن به‌بعد تمام کارهای لووریه دربارهٔ مکانیك سماوی انجام گرفت و یکی از مهمترین موفقیتهای وی محاسباتی است که به کشف سیارهٔ **نپتون** منجر شد.

در حرکات سیارهٔ اورانوس بی‌نظمیهایی‌مشاهده می‌شد که برخی از آنها به جاذبهٔ سیارات شناخته شده مربوط بود اما بعضی دیگر از آنها قابل توجیه نبود. مخصوصاً در جدولی که توسط **بووارد** عضو مؤسسهٔ طولهای جغرافیائی از حرکات اورانوس باارقام بسیار دقیق تهیه ودر ۱۸۲۱ منتشر شد وجوه اختلاف این سیاره با سیارات دیگر آشکارا به چشم می‌خورد. و این سؤال مطرح شد که چرا این اختلالات به نیروی جاذبهٔ سیارهٔ ناشناخته‌ای مربوط نباشد؟ وکمی دیرتراین سؤال با قاطعیت بیشتری مطرح شد. وی بعداز آنکه بی‌نظمیهای حاصل از جاذبهٔ مشتری وزحل‌را معین‌کرد باز هم بین‌حرکت حساب شدهٔ اورانوس و حرکت حقیقی آن اختلافاتی مشاهده نمود و در این‌باره **بسل** منجم رصدخانهٔ پاریس با وی همعقیده بود.

لووریه در اثر تشویقهای **آراگو** باقبول اینکه‌اختلالات حرکت اورانوس نتیجهٔ وجوه سیاره‌ای واقع در خارج مدار آن می‌باشد به مطالعهٔ مسئله پرداخت؛ وی جرم ومختصات این سیارهٔ فرضی را به عنوان مجهول انتخاب کرده بعداز آنکه متجاوز ازدوازده ماه محاسبات مفصل وپرزحمتی را انجام داد موفق شد که وضع سیاره را روی کرهٔ سماوی، جرم‌آن و حتی قطر ظاهری آن را معین کند. سه یادداشت تاریخی که به آکادمی علوم عرضه شده است شاخص‌کشف مهم لووریه می‌باشد.

در ۱۰ نوامبر ۱۸۴۵ لووریه ثابت کرد که اختلالات

حرکت اورانوس نمی تواند نتیجهٔ تأثیر مشتری یا زحل باشد.

در اول ژوئن ۱۸۴۶ لووریه اعلام کرد که سیاره‌ای که درایجاد واختلالات حرکت‌اورانوس مؤثر است خارج ازمدار اورانوس بوده و موقعیت آنرا برای اول ژانویهٔ ۱۸۴۷ معین کرد.

در ۳۱ اوت ۱۸۴۶ لووریه همهٔ مشخصات مربوط به‌مدار وجرم این سیاره راکه خودش هنوزناشناخته بود معلوم‌ساخت.

بالاخره‌در ۱۸سپتامبر۱۸۴۶ لووریه به‌**گال** (Galle) آسیستان **آنك** (Encke) در رصد خانهٔ برلن نوشت تا سیاره را جستجو کند در حالی‌که موقعیت سیاره را روی کرهٔ آسمانی دقیقاً معلوم کرده و حتی قطر ظاهری آن را احتمالا برابر "۳یادداشت کرده بود. گال در بیست وسوم نامه را دریافت داشت و چون هوا برای رصد مساعد بود همان شب دوربین را به سمت نقطه‌ای که لووریه تعیین کرده بود قراول رفت و دیری نپائید که در آنجا ستاره‌ای یافت که تاکنون در هیچ جدولی ثبت نشده بود. **گال** و **آنك** چند روز بعد قطر ظاهری آنرا اندازه گرفتند، اولی‌آن‌را "۲/۷ و دومی"۲/۹ اعلام داشت در حالی‌که لووریه "۳ اعلام داشته بود، این مطابقت قابل توجه است.

کشف سیارهٔ جدید ولولهٔ عجیبی به‌راه انداخت: مکانیك سماوی اهمیت تازه و افتخارآمیزی بدست آورده و اجازه‌داده بود در زمینه های علمی خالص اختراعات تازه‌ای فراهم آید. چنانچه آراگو در این باره گفته است: «لووریه بدون اینکه حتی یك‌نگاه به آسمان بیندازد و بدون اینکه احتیاجی به این کار داشته باشد یك ستارهٔ جدید را مشاهده کرد؛ او آن را ابتدا با نوك قلمش دید، از راه محاسبه محل وسایر مشخصات جسمی را تعیین کرد که حتی خارج از حدود شناخته شدهٔ دستگاه منظومهٔ شمسی قرار داشت.»

این موضوع هم باید یادآوری شود که در همان ایام‌که لووریه سرگرم محاسباتش بود یك منجم جوان انگلیسی به نام **آدامز** (Adams) نیز محاسبات مشابهی انجام داده و نتیجهٔ آنرا به مدیر خود گزارش داده بود اما این شخص برای آنها اهمیتی قائل نشده بود، فقط بعداز انتشار نتیجهٔ محاسبات لووریه، به فکر بررسی آنها افتاده ودریافته بود که نتیجه ها یکسان است. بنابراین حق خواهیم‌داشت‌که این منجم انگلیسی را درافتخارات منجم فرانسوی‌سهیم بدانیم. وبه همین مناسبت‌هم بودکه مؤسسهٔ نجومی‌لندن جایزهٔ‌سالانه‌اش را بین لووریه و آدامز تقسیم‌کرد.

حقیقتی‌که باید گفته شود این است که مدار نپتون که توسط لووریه و همچنین آدامز حساب شده بود غیر از مدار حقیقی آن بوده است اما در حدود نقطهٔ اوج سیاره انحراف مدارات حساب شده از مدار حقیقی خیلی کم بوده است و چون در فاصلهٔ بین سالهای ۱۸۴۰ و ۱۸۵۰ سیاره در ناحیهٔ اوج خود بوده است لذا نتیجهٔ محاسبات باارصاد سیاره،طابقت کرده است.

موفقیت لووریه موجب شد که درکارهای نجومیی‌که بر محور مکانیك سماوی دور می‌زنند تحولی تکان دهنده بوجود آید. در ضمن باید گفت که مکانیك سماوی هیچگاه همچون عصر دانشمندان فرانسوی: **وی‌یارسو**، **دلونی**، **تیسران** و **هانری پوانکاره** عرضه‌کنندگان ممتازی به‌خود ندیده است.

وی‌یارسو

ایون وی‌یارسو
(Yvon Villarceau)
۱۸۱۳-۱۸۸۳

که در تمام دورهٔ زندگی مردی‌کنجکاوبود در ۱۸۳۰ به‌پاریس آمد تا در زمینهٔ کنسرواتوار موسیقی که در آنجا مورد توجه بود مطالعات خودرا دنبال‌کند. در ۱۸۳۳ برای الحاق به‌یك گروه علمی به مصراعزام شد و در آنجا چنان تمایل شدیدی نسبت به‌علوم پیداکردکه در مراجعت خودرا به مدرسهٔ‌هرگزی هنرها و کارخانه‌ها معرفی‌کرد در حالی‌که قبلا تحصیل دراین مدرسه راکنار گذاشته بود.دراین جابه‌مطالعهٔ نظریات مکانیك سماوی پرداخت و تذکاریه‌ای منتشرکردکه توجه‌آراگو را به خود جلب نمود، آنگاه به عنوان یك منجم به رصدخانهٔ پاریس وارد شد.

وی‌یارسو مدارات مربوط به چند سیارهٔ کوچك و تعداد زیادی ستارگان دنباله دار را تعیین کرد، نظریه‌ای ابراز داشت که تعیین حداعلای سرعت انتقالی‌منظومهٔ شمسی را میسر می‌ساخت، دربارهٔ انکسارات جوی مطالعات قابل‌توجهی‌انجام داد و فن ساختمان بعضی ابزار های نجومی را تکمیل کرد

دلونی

شارل اوژن دلونی
(Charles-Eugène Delaunay)
۱۸۱۶-۱۸۷۲

در **لوزینگ** متولد شد، ابتدا در۱۸۳۶ از مدرسهٔ پلی‌تکنیك فارغ‌التحصیل شد، آنگاه استادی مکانیك رادر **سوربن** به‌عهده گرفت و بالاخره به مدیریت رصدخانهٔ پاریس برگزیده شد. شهرت وی به خاطر نظریه‌ای است که در بارهٔ ماه ابراز داشته

پائین صفحهٔ بعد

اطلاعاتی از کرهٔ خورشید

ترجمه از کتاب «Le Ciel» توسط : **قوام نحوی**

مقدمه : خورشید کره‌ای است که نورانی که نور و حرارت آن لاینقطع از فاصلهٔ یکصدوچهل ونه ملیون کیلومتری به ما می‌رسد که‌ادامهٔ حیات وزندگی ما وهمهٔ‌حیوانات‌ونباتات‌بستگی به‌آن دارد. به‌علاوه گردش زمین وسایرسیارات به دورخورشید بواسطهٔ نیروی جاذبهٔ آن بوده و اگر خورشید و نیروی جاذبهٔ آن نبود سرنوشت زمین نیز معلوم و هویدا بود . خورشید بواسطهٔ اشعهٔ نورانی و حرارتی خود دائماً زمین مارا روشن و گرم نموده و حیات هرذیحیاتی‌اززمین را تأمین می‌کند ـ از اشعهٔ بی‌پایان خورشید استفاده‌های پزشکی و بهداشتی نیز می‌توان کرد و بواسطهٔ همین منابع حیاتی خورشید است که دین مهر پرستی بین ملل گذشته رواج داشته و شاید هنوزهم‌وجود داشته باشند .

خورشید یامرکز منظومهٔ شمسی

مطابق **قوانین کپلر** و **قانون جاذبهٔ عمومی نیوتن** تمام سیارات به‌دور خورشید می‌گردند ومسیر حرکتشان بیضی‌است که خورشید در یکی از دوکانون‌آن قرار دارد،دستگاه‌منظومهٔ شمسی تشکیل‌شده ازخورشید و۸ سیارهٔ مشهور (عطارد ـ زهره ـ زمین ـ مریخ ـ مشتری ـ زحل ـ اورانوس ـ نپتون) که دو ـ سیارهٔ عطارد و زهره را که بین زمین و خورشیداند سیارات سفلی و بقیه را سیارات علوی نامند و ۱۸ قمر و ۱۰۸ سیارهٔ ریز دیگر بین مریخ و مشتری واقع‌اند و آنها را سیارات ریز نامند، البته سیارات ریز تعدادشان تاهزار تخمین زده شده‌ولی ۱۰۸ عدد آنها تاکنون دیده شده است، و رویهمرفته تعداد کرات مربوط به‌دستگاه شمسی ۱۳۵ خواهد بود وغیر ازاینها ستارگان دنباله دار نیز هستند که به دور خورشید می‌گردند. زمین ما مانند ذره‌ای است در مقابل دستگاه‌شمسی و دستگاه

بقیه از صفحهٔ قبل

و جدولی که دراین‌باره محاسبه وتنظیم کرده‌است. برای‌پی‌بردن به پشتکاری که این ریاضیدان برجسته در محاسبات خودداشته است آنهم در زمانی که نه‌تنها ماشین حساب الکترونی بلکه حتی ماشینهای سادهٔ حساب هم در کار نبوده است کافی است که نظری اجمالی به جلدهای بیست‌وهشتم و بیست‌ونهم گزارش‌های آکادمی علوم بیفکنیم، در آنجا مشاهده خواهیم کرد که‌فرمول مربوط به اختلالات ماه شامل ۴۶۱ جمله بوده‌و۱۳۷ صفحه‌را اشغال کرده است.

تیسران

فرانسوا فلیکس تیسران
(François-Félix Tisserand)
۱۸۴۵-۱۸۹۶

در نوئی‌سن‌ژرژ (ساحل‌طلائی) از خانواده‌ای فقیر به دنیاآمد. تقبل‌مخارج تحصیل وی‌برای خانواده‌اش فداکاری بزرگی‌بود. در ۱۸۶۶ بعدازآنکه از دانشسرای عالی فرانسه‌فارغ‌التحصیل شد به عنوان منجم پیوسته در رصدخانهٔ‌پاریس مشغول به کارشد تحقیقات وی دربارهٔ حرکات ماه است ودراین‌باره روش دلونی را پیروی کرده است. شایستگی که در میسیون کسوف کامل ۱۸۶۸ **مالاکا** و در میسیون مربوط به زهره از خود نشان‌داد موجب شد که به‌مدیریت رصدخانهٔ پاریس منصوب شود، وی در ۱۸۹۲ این‌مقام را ازدریاسالار **موشه** تحویل گرفت. تیسران قسمت عمدهٔ فعالیتهای خودرا به فراهم‌آوردن نکات اساسی‌نجوم ریاضی اختصاص داد . رسالهٔ وی دربارهٔ مکانیك سماوی حتی‌در زمان ما هم یکی از آثار اساسی می‌باشد. علاوه بر آن طی یادداشتهای بسیارارزنده‌ای که‌درسالنامهٔ‌دبیرخانهٔ‌طول‌جغرافیائی درج کرده است، بدون هیچ توسلی به ریاضیات مسائل بسیار پیچیده و مشکلی از مکانیك سماوی را در هر زمینه‌ای شرح و بسط داده‌است. **م. لاوی** چنین‌می‌نویسد: «تیسران به‌خاطر درخشندگی‌افکارش و به خاطر راههای سهل و ممتنعی که درحل مسائل بسیار دشوار بکار برده است در نظر ما یکی‌از عالیترین معرفین علوم و نوابغ فرانسه بشمار می‌آید.»

فعلاباید از شخصی نام ببریم که درتمام‌دوران، ریاضیدان بسیار بسیارساحری بحساب‌می‌آید: این‌شخص **هانری‌پوانکاره** است. که در نقطهٔ تلاقی دورهٔ نزدیك معاصر و دورهٔ کنونی جا گرفته است.

شمسی ما یکی ازمیلیونها دستگاههای شمسی است درفضای لایتناهی که فقط ما خورشید آنها رامی بینیم که همان ثوابت می باشند -

حرکات خورشید

بواسطهٔ تغییر وضع دادن لکه خورشید معلوم می‌شود که خورشید دارای حرکت وضعی به دور خود می‌باشد و مدت این حرکت وضعی بین ۲۵ و ۲۶ روز تغییر می کند به علاوه خورشید با تمام سیارات و اقمارش دارای حرکت انتقالی نیز هست و در جهت یکی از ثوابت به‌نام **نسرواقع** درصورت فلکی **شلیاق** در حرکت است سرعت این حرکت ۲۰ کیلومتر در ثانیه است بنا براین مسیر زمین، دور خورشید یك نوع حرکت مارپیچی است و دستگاه منظومهٔ شمسی در یك سال ۶۲۵ میلیون کیلومتر طی خواهند کرد .

فاصلهٔ خورشید تا زمین

فاصلهٔ متوسط خورشید تا زمین ۲۳۲۰۰ برابر شعاع زمین یا در حدود ۱۴۹ میلیون کیلومتر است اما این فاصله در ایام مختلفهٔ سال تغییر می کند - نزدیکترین وضع زمین به خورشید دردهم دیماه (اول ژانویه) است. در این موقع قطر ظاهری خورشید "۳۶ و ۳۲' می‌باشد که بیشترین مقدار را دارد. و دورترین وضع خورشید نسبت به زمین در دهم تیرماه (اول ژوئیه) بوده د در این موقع قطر ظاهری خورشید "۳۰ و ۳۱' می‌باشد .

به‌این ترتیب فاصلهٔ خورشید تازمین بین ۱۴۵،۵۰۰،۰۰۰ و ۱۴۹،۹۰۰،۰۰۰ کیلومتر درتغییر است. نور این فاصله را در مدت ۸ دقیقه و ۱۶ ثانیه طی می کند - قطاری فرضی باسرعت ۵۰ کیلومتر در ساعت پس از ۳۳۷ سال به‌خورشید می‌رسد. و گلوله ای با سرعت ثانیه‌ای ۵۰۰ متر پس از ۹ سال و $\frac{3}{4}$ سال به خورشید خواهد رسید - فاصلهٔ سیارهٔ نپتون تا خورشید ۳۰ برابر فاصلهٔ زمین است تا خورشید، یعنی ۵ میلیارد و ۵۰۰ میلیون کیلومتر ونور این فاصله را یك ساعت و ۹ دقیقه طی می کند .

ابعاد خورشید

شعاع خورشید ۶۹۰،۰۰۰ کیلومتر (۱۰۸ برابر شعاع زمین) و محیط یکی ازدوایر عظیمه‌اش ۴،۳۰۰،۰۰۰ کیلومتر و سطح آن ۱۲،۰۰۰ برابر سطح زمین یا ۶ میلیون کیلومتر مربع و حجم خورشید مساوی ۱،۲۷۳،۰۰۰ برابر حجم زمین یا ۱۳۷۴۳×۱۰^{۱۴} کیلومتر مکعب است - فاصلهٔ ماه تا زمین ۶۰ برابر شعاع زمین است. پس اگر مرکز زمین درمرکز خورشید باشد مدار ماه تماماً داخل خورشید واقع می‌شود .

سایر مشخصات خورشید

جرم خورشید تقریباً ۳۲۰،۰۰۰ برابر جرم زمین و وزن مخصوص آن $\frac{1}{4}$ وزن مخصوص زمین بوده و شتاب ثقل در روی خورشید ۲۷ برابر زمین است یعنی یك وزنهٔ یك کیلو گرمی درروی خورشید ۲۷ کیلو وزن دارد وزن خورشید مساوی ۱۸۷۹×۱۰^{۲۴} تن می باشد قدرت نورانیت خورشید به اندازهٔ ۷۰،۰۰۰ برابر نور یك شمع و ۶۰۰،۰۰۰ (ششصدهزار برابر) نورماه در شبهای بدر است - **هوگن** (Hygens) روشنائی خورشید را ۷۶۵ میلیون برابر روشنائی ستارهٔ **سیریوس** (Sirius) دانسته درصورتی که اگر این ستاره به محل خورشید ما بیاید روشنائی آن ۹۴ برابر خورشید ماست

حرارت خورشید

حرارت سطح خورشید در حدود ۷،۰۰۰ درجهٔ سانتی گراد است والبته این حرارت تغییر می کند و دورهٔ تناوب این تغییر ۱۱ سال است - **هرشل** (Hershel) مقدار حرارتی راکه در یك سال از خورشید به زمین می‌رسد معادل ۱۲۰۰×۱۰^{۱۵} کالری حساب کرده و این مقدار حرارتی است که به زمین می‌رسد و برای محاسبهٔ حرارت خورشید که به اطراف پخش می کند باید این عدد را در ۲۱۵×۱۰^{۷} ضرب کنیم - با این حرارت می‌توان در یك ساعت ۲۹۰۰ میلیارد کیلومتر مکعب آبرا ازحرارت یخ به جوش رساند - پس هریك هکتار از زمین ما دریك سال بیش از ۲۳ میلیون کالری حرارت از خورشید می‌رسد. بطورخلاصه درهردقیقه برهرسانتیمترمربع از آخرین حدجوزمین ازخورشید دوکالری گرما می‌رسدواین مقدار گرمارا (Constante Solaire) نامند - غیرازاشعهٔ نورانی و حرارتی خورشید اشعهٔ دیگری نیز از خورشید پخش می‌شود مانند اشعهٔ ماوراء بنفش و شاید اشعهٔ دیگری نیز باشدکه اصولا به زمین ما نمی‌رسد به علاوه خورشید از خود ذرات الکتریزهٔ پخش می کند که تولید فجر قطبی می‌نماید.

غبار های خورشید - فورانهای شدیدی که ازبرجستگیهای خورشید تشکیل می‌شود پس ازفشرده شدن تولید ذرات ریزی می کند که آنها را غبارهای خورشید نامند - قسمت عمل این غبارها ، از خورشید پرتاب می‌شوند وقسمتی دیگر تولید قوه‌ای به‌نام **فشار تشعشع** می کنند . این فشار اولین بار بتوسط **ماکسول** درسال ۱۸۷۳ میلادی کشف شده است.

آیا منبع انرژیهای حرارتی ونورانی خورشید

بی پایان است ؟ ـ می‌دانیم خورشید منبع انرژیهای نورانی وحرارتی است ، حال باید دیدآیا این دوانرژی دائماً پایدار است یا اینکه روزی فرا خواهد رسیدکه منبع این انرژیها پایان یافته و عمربشر یاهر ذیحیاتی روی زمین به اتمام می‌رسد ؟

برای جواب دادن به این سؤال فرضیه های گوناگونی راجع به‌کیفیت وکمیت انرژی خورشید تاکنون پیدا شده است که بطور اختصار به شرح آن می‌پردازیم ـ خورشید درهر دقیقه برهر سانتیمتر مربع ازآخرین حدجوزمین بطور متوسط دوکالری گرما می‌فرستد ـ مقدار کلی گرمائی که از خورشید حاصل می‌شود ازراه محاسبات انتگرالهای سطح بدست می‌آید که‌در یك ثانیه‌معادل است باگرمائی که ازسوختن ۱۱ کاترلیون و ۶۰۰ تریلیون تن‌زغال‌سنگ بدست‌می‌آیدواین گرماکافی است که در یك ساعت دوتریلیون و ۹۰۰ میلیارد کیلو متر مکعب آب صفر درجه را بجوشاند ـ حرارت سطح فتوسفر خورشید درحدود ۶۵۰۰ درجهٔ و حرارت مرکزی خورشید بیش از ۶ میلیون درجهٔ سانتیگراد است.

منشأ این حرارت کجاست؟ بدون چون‌چرا خورشید بواسطهٔ تشعشعات خودگرمای خود رابه‌تدریج از دست می‌دهد هرگرم ازخورشید دریك سال دوکالری حرارت‌خود را ازدست می‌دهد . اگر ظرفیت حرارتی‌خورشید را مانند آب بگیریم درهرسال‌از درجهٔ‌حرارت خورشید ۲ درجه‌کم می‌شودو به‌این ترتیب می‌شود تصورکردکه روزی حرارت خورشید تمام می‌شود . در مقابل این از دست دادن حرارت بواسطهٔ انرژی سینتیك حاصل از اصابت سنگهای آسمانی که‌درفضا سرگردانند به خورشید تولید ۴۵ میلیون‌کالری حرارت می‌شود، زیرااین سنگها دارای سرعتی بیش از ۶۰۰کیلومتر درثانیه هستند و این حرارت تااندازه‌ای جبران حرارت از دست دادهٔ خورشید را می‌کند ـ نظریهٔ دیگرکه یکی از فیزیکدانهای آلمانی به نام **Helmholtz** پیداکرده است‌آنست‌که خورشید متدرجاً منقبض‌می‌شود و دراثر این انقباض تولید حرارت می‌کند . طبق محاسبه برای‌آنکه‌حرارتی که‌خورشید دریك‌سال از دست می‌دهد جبران شود باید درهرسال ۳۹ متراز قطرش کم شود . با این محاسبه‌تا ۶میلیون سال دیگر فقط حرارت خورشید پابرجاست.

نظریهٔ فیزیکدانهای جدید ـ فیزیکدانهای جدید می‌گویند انرژی حرارتی و نورانی خورشید بواسطهٔ فنومنهای رادیو اکتیویته می‌باشد . این نظریه بیشتر منسوب است به فیزیکدان‌فرانسوی **Henri Becquerel** . این دانشمند می‌گویدکه یك‌گرم رادیوم‌درهر ساعت صدودهٔ کالری حرارت منتشر می‌کندکه‌طی درسال تقریباً می‌شودیك میلیون‌کالری ، و اگرحداقل درهر کیلوگرم ازجرم خورشید دو میلیگرم رادیوم باشد می‌توان منبع انرژیهای خورشید را تامدت مدیدی پیش بینی‌کرد. زیرا دراثر متلاشی شدن خود به خودی اتمهای رادیوم تولید هلیوم می‌شود و مادهٔ اخیر در خورشید فراوان است . **نظریهٔ دیگر** منسوب به فیزیکدان سوئدی به نام **Arrihenius** است او می‌گوید انرژی خورشید در نتیجهٔ تجزیه وترکیب اجسام شیمیائی است این تجزیهٔ مواد شیمیائی که درمرکز خورشید انجام می‌گیرد موجب پدید آمدن لکه خورشیداست که برای‌ماتولیدحرارت‌می‌کندمطابق این‌نظریه‌جرم خورشیدبرای چهارمیلیاردسال‌دیگر کافی‌است که‌علاوه‌برحرارت تولید نور نیز می‌کند . این نورکه ازخورشید حاصل می‌شود مطابق عملیات فتومتریك برابر 1500×10^{24} ویول است **Violle** وبراز ۶۰۰۰۰۰ برابر نور ماه و۷ میلیارد برابر نور درخشنده ترین‌ستارگان‌آسمانی‌است واشعه نورانی‌خورشید قسمتی از تشعشعات خورشید می‌باشد .

عمر خورشید ـ (اگرنظریهٔ‌اتمی‌را قبول‌کنیم یعنی انرژیهای مختلفهٔ حاصل ازخورشیدرا بواسطهٔ انفجارهای اتمی بدانیم . طبق محاسبه‌اگریك ملکول‌گرم ماده‌ای‌رامتلاشی کنیم‌کاری‌که انجام می‌دهد معادل $1\frac{1}{3}$ تریلیون‌کیلوگرم کار است وچون جرم خورشید در حدود 1900×10^{27} کیلوگرم است واین مقدار جرم برای آنکه‌منفجر شده وتبدیل‌به‌انرژی شود مدت ۱۵ تریلیون سال طول می‌کشد . به هرصورت وهر فرضیه‌ای‌که قبول‌کنیم چون جرم خورشید نامحدود نیست پس انرژیهای‌حاصل ازآن نیز نامحدود نخواهدبود وبه این‌ترتیب روزی فراخواهد رسیدکه‌کرهٔ نورانی‌وگرم خورشید تبدیل به کره‌ای‌سردوخاموش‌گشته یااینکه اصلا ازبین برود و مسلم است درآن‌روزدرکرهٔ‌زمین‌نیزازحیات‌وزندگی‌اثری وجود نخواهد داشت وزمین‌نیز به سرنوشت ستارگانی‌که‌درآنهاموجوذیحیاتی نیست دچار می‌گردد یااینکه بکلی منهدم ونابود می‌شود.

درسی از حساب

بحث دربارهٔ کسرها در مبنای غیر از ده

تنظیم از: قوام نحوی

۱ـ تغییر مبنای عدد نویسی در کسرها ـ می‌دانیم اگر کسر ۰/۲۵ در دستگاه عددنویسی به مبنای ده نوشته‌شده باشد داریم:

$$(0/25)_{10}=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$$

اما اگر همین کسر در دستگاه مثلا به مبنای ۸ نوشته شده باشد داریم:

$$(0/25)_8=\frac{2}{8}+\frac{5}{64}=\frac{21}{64}$$

و یا ممکن است صورت و مخرج کسر $(\frac{25}{100})_8$ را جداگانه ازمبنای ۸ به‌مبنای ده ببریم که همان $(\frac{21}{64})_{10}$ حاصل می‌شود.

بطور کلی اگر کسر: $0/abcde.....l$ دارای n رقم بوده و به‌مبنای B باشد درمبنای ده به‌صورت‌زیر نوشته‌می‌شود:

$$(0/abcde.....l)_B=\frac{a}{B}+\frac{b}{B^2}+\frac{c}{B^3}+\frac{d}{B^4}+$$

$$+\frac{e}{B^5}+.....+\frac{l}{B^n}$$

برای تبدیل کسر $\frac{a}{b}$ از مبنای B به‌مبنایی مانند B′ کافی است ابتدا $\frac{a}{b}$ را از مبنای B به مبنای ده برده پس از مبنای ده به مبنای B′ ببریم. مثلا می‌خواهیم کسر ۰/۳۵ را که به مبنای ۷ است به مبنای ۸ ببریم:

$$(\frac{35}{100})_7=(\frac{26}{49})_{10}=(\frac{32}{61})_8$$

۲ـ قواعد کسرهای متناوب درمبنای غیر از ده

می‌دانیم اگر کسر ساده نشدنی $\frac{a}{b}$ به مبنای ده باشد برای آنکه تشخیص دهیم مولد چه نوع کسری است مخرج را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم، اگر در مخرج فقط عوامل ۵ یا ۲ یا ۵ و ۲ دخالت کرد این کسر قابل تبدیل به کسر اعشاری تحقیقی است.

یا به عبارت دیگر منتج است، اگر در مخرج کسر هیچیك از عوامل ۵ و ۲ دخالت نداشت این کسر مولد کسر اعشاری متناوب ساده است، و اگر در مخرج کسر هم عوامل ۵ و ۲ وهم عواملی غیر از آنها دخالت داشت کسر مولد کسر متناوب مرکب خواهد بود ـ اما اگر مبنای عددنویسی به جای ده مثلا ۶ باشد چون داریم:

$$6=2\times3$$

تمام مطالبی که برای ۵ و ۲ در مبنای ده گفتیم اینجا باید برای ۳ و ۲ بگوئیم.

برای روشن‌شدن مطلب مثالهای زیررا ذکرمی‌کنیم:

مثال ۱ـ کسر $(\frac{1}{3})_6$ کسری است منتج یعنی در تقسیم صورت بر مخرج در مبنای ۶ به باقیماندهٔ صفرخواهیم رسید.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \underline{10} & 0/2 \\ 0 & \end{array} \qquad (0/2)_6=(\frac{2}{10})_6=(\frac{1}{3})_6$$

مثال ۲ـ کسر $(\frac{3}{4})_6$ منتج است زیرا

$$4=2\times2$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \underline{24} & 0/43 \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array} \qquad (\frac{3}{4})_6=(0/43)_6$$

مثال ۳ـ کسر $(\frac{1}{5})_6$ قابل تبدیل به کسر متناوب ساده است زیرا در مخرج عوامل ۲ و ۳ دخالت ندارد:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \underline{10} & 0/111... \\ 10 & \\ 1 & \end{array}$$

برعکس برای تبدیل کسر ۰/۱۱۱۰۰۰۰ به کسر متعارفی این طور می‌نویسیم:

$$(0/1111\ldots)_6=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}+\ldots\right)_6$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\left(\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}\right)_{10}=\left(\frac{1}{5}\right)_{10}=\left(\frac{1}{5}\right)_6$$

ممکن است که مستقیماً در مبنای ۶ عمل کنیم:

$$(0/111\ldots)_6=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots\right)_6=\left(\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}\right)_6$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)_6$$

یعنی برای تبدیل کسر متناوب ساده به کسر متعارفی درمبنای ۶ یك دوره گردش را صورت و درمخرج به تعداد ا قام دورهٔ گردش ۵ می گذاریم $(6-1=5)$

مثال ۴ـ کسر $\left(\frac{5}{11}\right)_6$ مولـد کسر متناوب ساده است زیرا در عدد مخرج آن عوامل ۲ و ۳ دخالت ندارد.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 11 \\ \cline{2-2} 44 & 0/414141\ldots \\ \hline 20 & \\ 11 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

و برعکس داریم:

$$(0/414141\ldots)_6=\frac{25}{36}+\frac{25}{36^2}+\ldots=\left(\frac{\frac{25}{36}}{1-\frac{1}{36}}\right)$$

$$=\left(\frac{25}{35}\right)_{10}=\left(\frac{41}{55}\right)_6=\left(\frac{5}{11}\right)_6$$

ویا به صورت دیگر

$$(0/414141\ldots)_6=\left(\frac{41}{100}+\frac{41}{10000}+\ldots\right)_6$$

$$=\left(\frac{\frac{41}{100}}{1-\frac{1}{100}}\right)_6=\left(\frac{41}{55}\right)_6=\left(\frac{5}{11}\right)_6$$

مثال ۵ ـ کسر $\left(\frac{4}{23}\right)_6$ را در نظر می گیریم:

$23=5\times3$: (در مبنای ۶)

چون در مخرج کسر، هم‌عامل ۳ دخالت داردهم‌عاملی غیر از ۲ و ۳ یعنی ۵ پس این کسرمولد کسر متناوب مرکب است :

تقسیم درمبنای ۶

$$\begin{array}{r|l} 40 & 23 \\ \cline{2-2} 23 & 0/1333\ldots \\ \hline 130 & \\ 113 & \\ \hline 130 & \end{array}$$

و برعکس برای تبدیل کسرمتناوب مرکب به مبنای ۶به کسر متعارفی باید یك دورهٔ گردش و یك دورهٔ غیر گردش را نوشته یك دورهٔ غیرگردش را از آن کم کنیم و در مخرج بـه تعداد ارقام دورهٔ گردش ۵ و به تعداد ارقام دورهٔ غیر گردش صفر بگذاریم

$$\left(\frac{4}{23}\right)_6=\left(\frac{12}{50}\right)_6=\left(\frac{13-1}{50}\right)_6=(0/1333\ldots)_6$$

مثال ۶ـ کسر $\left(\frac{3}{14}\right)_6$ مولد کسر متناوب مرکب است زیرا :

$14=2\times5$ (در مبنای ۶)

$$\begin{array}{r|l} 30 & 14 \\ \cline{2-2} 14 & 0/1444\ldots \\ \hline 120 & \\ 104 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

$$\left(\frac{3}{14}\right)_6=\left(\frac{13}{50}\right)_6=\frac{14-1}{50}=(0/1444\ldots)_6$$

مثال ۷ ـ کسر متناوب سادهٔ $(0/4444\ldots)_7$ را به کسر متعارفی تبدیل کنید

$$(0/4444\ldots)_7=\left(\frac{4}{6}\right)_7=\left(\frac{2}{3}\right)_7\quad[7-1=6]$$

یك دورهٔ گردش درصورت وبه تعداد ارقام آن درمخرج ۶ می گذاریم :

مثال ۸ـ کسر $\left(\frac{3}{5}\right)_9$ مولد چه نوع کسری است ـ چون داریم : $9=3\times3$

و در مخرج کسر $\frac{3}{5}$ عامل ۳ دخالت ندارد پس این کسر

مولد کسر متناوب ساده خواهد بود . اگر امتحان کرده صورت را بر مخرج درمبنای ۹ تقسیم کنیم می‌شود

$$\begin{array}{r|l} ۳۰ & ۵ \\ \hline ۲۷ & ۰/۵۳۵۳۵۳... \\ \hline ۲۰ & \\ ۱۶ & \\ \hline ۳ & \end{array}$$

$$(\frac{۳}{۵})_۹ = (۰/۵۳۵۳۵۳...)_۹$$

وبرعکس اگر بخواهیم کسر $(۰/۵۳۵۳....)_۹$ را به کسر متعارفی تبدیل کنیم یك دورهٔ گردش را صورت و در مخرج به تعداد ارقام گردش ۸ می گذاریم $(۹ - ۱ = ۸)$

$$(۰/۵۳۵۳۵۳....)_۹ = (\frac{۵۳}{۸۸})_۹ = (\frac{۳}{۵})_۹$$

قاعدهٔ کلی ـ الف ـ کسر $(\frac{a}{b})_B$ را درنظر می گیریم و فرض می‌کنیم که این کسر در مبنای B ساده‌نشدنی باشد.

۱) اگر عوامل اولی که در تجزیهٔ b وجود دارند منحصرا عواملی باشند که در تجزیهٔ B نیز وجود دارند در این صورت کسر مزبور در مبنای B مولد کسر اعشاری (اگر بتوان گفت اعشار) تحقیقی خواهدبود،

۲) اگر هیچیك از عوامل اول B در b وجود نداشته باشند در این صورت کسر مزبور درمبنای B مولدکسراعشاری متناوب ساده است،

۳) اگر بعضی ازعوامل B وعلاوه ازآنها عوامل دیگری نیزدر تجزیهٔ b وجود داشته باشد در این صورت کسر مزبور در مبنای B مولد کسر اعشاری متناوب مرکب می‌باشد،

ب ـ در یك مبنای B برای تبدیل کسری متناوب (ساده یا مرکب) به کسر متعارفی همان قاعدهٔ معمولی مربوط به مبنای ۱۰ را عمل می کنیم فقط در مخرج کسر به‌جای رقم ۹ باید رقم $(B - ۱)$ را قرار دهیم

دنبالهٔ نامهٔ رسیده (بقیه از صفحهٔ ۲ جلد)

حل مسئلهٔ مکانیك

امتحان سال ششم ریاضی ـ خرداد ۱۳۴۶

معادلهٔ کلی حرکت $F - R = M\gamma$

$$۳۲۰۰ - ۱۲۰۰ = ۲۰۰۰\gamma_۱$$

$$\gamma_۱ = ۱ m/ss$$

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}\gamma_۱ t_۱^۲ = \frac{۱}{۲} t_۱^۲$$

$$v_۱ = \sqrt{۲\gamma_۱ x_۱} = \sqrt{۲ \times ۱ \times ۲۰۰} = ۲۰ m/s$$

حرکت یکنواخت: $\gamma_۲ = ۰$

$F - R = ۰$ ، $F = R = ۱۲۰۰$ نیوتن

$$\gamma_۳ = \frac{v_۱^۲}{۲x_۳} = \frac{۴۰۰}{۲۰۰} = ۲ m/ss$$

معادلهٔ حرکت :

$$x_۳ = v_۱ t_۳ - \frac{۱}{۲}\gamma_۳ t_۳^۲ = ۲۰ t_۳ - \frac{۱}{۲} \times ۲ \times t_۳^۲$$

برای قسمت سوم مسیر

$$F_۳ - R = -M\gamma_۳$$

$F_۳ = R - M\gamma_۳ = ۱۲۰۰ - ۴۰۰۰ = -۲۸۰۰$ نیوتن

در انتهای مسیر برای توقف آسانسور نیروی مؤثر در خلاف جهت اولیه تأثیر می‌کند.

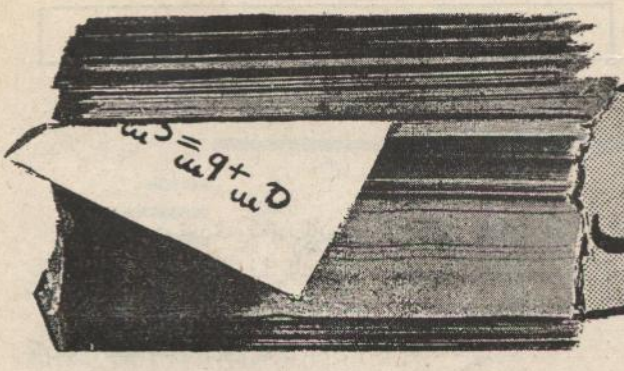
محاسبهٔ زمان کل:

$$t_۱ = \frac{v_۱}{\gamma_۱} = \frac{۲۰}{۱} = ۲۰^s$$

$$t_۲ = \frac{x_۲}{v_۱} = \frac{۲۰۰}{۲۰} = ۱۰^s$$

$$t_۳ = \frac{v_۱}{\gamma_۳} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰^s$$

$$t_{کل} = t_۱ + t_۲ + t_۳ = ۴۰^s$$



مسائل حل نشدهٔ ریاضی

تألیف:
C. STANLEY OGILVY
ترجمهٔ: ع. م.

بخش سوم ـ مسائل مربوط به بازیها

مسئله‌ای که در زیر عنوان می‌شود هرچند درظاهر ساده به‌نظر می‌رسد اما ممکن است که توجه راساعتها به‌خود مشغول دارد. با توجه به دستوراتی که روی سه‌کارت وجود دارد و بنابر آن باید رشته‌ای محدود از ارقام «۱» را تشکیل داد بزرگترین رشته‌ای که بوجود می‌آید کدام است؟ بازی به‌این‌ترتیب است که سه کارت در دست است، روی هرکدام از این کارتها سه دستور وجود دارد که معلوم می‌کند در هریك از سه حالت ممکن چه باید کرد و بعداز آن به کدام کارت باید مراجعه کرد. علاوه بر آن، برای اینکه خاصیت محدودبودن رشته امکان داشته باشد یکی از دستورها چنان پیش بینی شده است که در جائی«توقف»را اعلام می‌کند.

س	۱ـر ـ۲
۰	۱ـچ ـ۳
۱	س ـ ر ـ ۲

کارت۱

س	۱ـچ ـ۲
۰	۱ـ چ ـ۱
۱	۰ـر ـ۱

کارت۲

س	۱ـچ ـ۳
۰	۱ـچ ـ۳
۱	۱ـر ـایست

کارت۳

شکل بالا را در نظر می‌گیریم، در کارت اول دستور یکم معلوم می‌کند که اگر به محل‌خالی (سفید = س) برخورد کردیم باید در آنجا عدد «۱» را نوشته و بعد محل سمت‌راست آن را درنظر گرفته دستور مربوط را از کارت ۲ پیدا کنیم. سطر دوم از کارت اول معلوم می‌کند که اگر به‌محلی برخوردیم که در آن «۰» وجود داشت باید به جای آن «۱» گذاشته به محل سمت چپ آن مراجعه کنیم و دستور مربوط را از کارت ۳ دریافت داریم. سطر سوم این کارت معلوم می‌کند که اگر به جایی برخوردیم‌که «۱» وجود داشت باید آن را پاك کنیم (محل سفید یا خالی باقی بماند) و بعد به محل سمت راست مراجعه کرده دستور را از کارت ۲ پیدا کنیم. دستور های دیگری که روی کارتهای دیگر وجود دارد به‌همین ترتیب خواهد بود. در سطر سوم کارت سوم آخرین دستور «ایست» است که عمل را متوقف می‌سازد.

اکنون نواری را که همهٔ خانه های آن سفید است به ماشین می‌دهیم ودستور یکم از کارت اول‌را توسط ماشین اجرا می‌کنیم. آنچه ازماشین خارج می‌شود مطابق شکل (الف)است.

		۱							

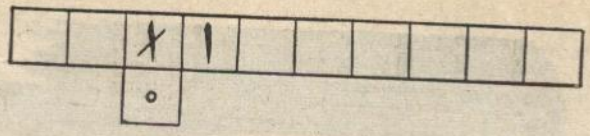
(الف)

بنا به دستور اول از کارت یکم باید خانهٔ سمت راست خانه‌ای را که در آن «۱» نوشته شده است در نظر بگیریم و از کارت ۲ دستور آن‌را پیدا کنیم؛ این خانه سفید است و در کارت ۲ در مقابل «س» داریم «۱ـچ ـ۲» یعنی در این خانه باید «۱» را نوشته به خانهٔ سمت چپ آن برگردیم و طبق دستور کارت ۲ عمل کنیم. فعلا شکل (ب) درست می‌شود.

		۱	۱						

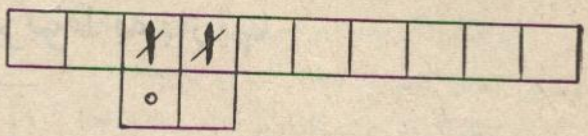
(ب)

در کارت ۲ در مقابل«۱» دستور عبارتست‌از «۰ـر ـ۱» پس باید «۱» اولی را پاك کرده جای آن «۰» بنویسیم وبعد به‌خانهٔ سمت‌راست مراجعه‌کرده دستور آنراازکارت یکم بیابیم از این جهت که می خواهیم اثر هر عملی را بعدا هم ملاحظه کنیم بنا بر این عوض آنکه «۱» را پاك کرده جای آن «۰» بنویسیم عدد «۱» را خط زده و «۰» را زیر آن می‌نویسیم، شکل (ج)



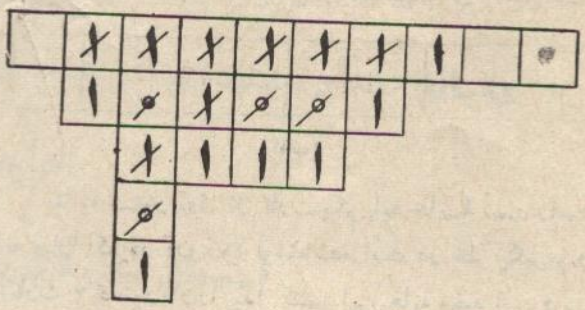
(ج)

بنا به دستوری که درکارت یکم مقابل به «۰» وجوددارد باید «۱» سمت راست را پاك کرده جای آن را سفید باقی گذاریم و بعد به خانهٔ راست مراجعه کرده دستور آن را از کارت۲ دریافت داریم. فعلا شکل (د) پدید می‌آید .



(د)

خواننده فعلا تا آن اندازه به طرز کار آشنا شده است که می‌تواند عمل را شخصاً ادامه دهد. بالاخره دستور سوم‌از کارت سوم پیش آمده و عمل متوقف خواهد شد. رشته‌ای که تشکیل خواهد شد عبارتست از «۱»هایی که درخانه‌های پائینی هرستون شکل (ه) وجود دارد.



(ه)

موضوع مسئله از این قرار است که طرحی پیشنهاد شود که‌طبق آن تعداد رقمهای «۱» که دررشتهٔ حاصل بوجود می‌آید بزرگترین‌عدد ممکن‌باشد. **تیبور رادو**(Tibor Rado) که این بازی را طرح کرده است قصد داشته طرحی بریزد که با سه‌کارت از نوع گفته شده تعداد «۱» های رشتهٔ حاصل بیش از ۷ باشد . راجع به نظریه هایی که احیاناً به این مسئلهٔ جالب وشگفت‌انگیز واحتمالا اساسی، مربوط می‌شود اطلاعات چندانی در دسترس نیست.

***

مسئله‌ای که از طرف بسیاری‌از ریاضیدانان موردبررسی دقیق‌واقع‌شده مسئلهٔ مربوط به‌گلوله‌ها است. n گلولهٔ به‌ظاهر یکسان اما باوزنهای مختلف در نظر می‌گیریم؛ اگر خواسته باشیم به کمك یك ترازو (بدون وزنه) از راه مقایسه کردن گلوله‌ها بایکدیگرآنها را به ترتیب سنگینی وزن مرتب کنیم حداقل چند دفعه استفادهٔ از ترازو لازم است؟ و برای فراهم آمدن این جواب حداقل، چه استراتژی (روشی) را باید پیش بگیریم؟ در بعضی حالات، ترکیبات مربوط ، ساده‌تر از حالات دیگر مرتب می‌شود. اما برای یك حالت غیرمشخص آیا می‌توان از همان استراتژی استفاده کرد و حداقل تعداد توزین لازم‌را به‌طورفرمولر بدست آورد؟

***

نظریهٔ بازیها روشی برای تجزیه و تحلیل پیکارها است؛ موقعیتی‌که دو دستهٔ با منافع متضاد را در برابر هم قرار می‌دهد پیکار تعریف می‌شود . می‌توان آنرا به صورت بازی بین دونفر در نظر گرفت که هرکدام منافع متعددی مد نظر داشته باشند، هر بازیکن نزد خود تعداد محدودی استراتژی را منظم می‌کند ؛ اختیار دارد که برای هر دور بازی یکی ازآنها را اختیار کند.مجموع وجوه‌آخر هردوربازی برابر باهمان‌وجوهی است که در ابتدای بازی عرضه شده است. وجوه عرضه شده در طول بازی دست به‌دست می‌شود اما هیچگاه نه‌چیزی ازآن کم می‌شود و نه چیزی به‌آن اضافه می‌گردد. هربازیکن‌مایل است وضعی را پیش گیرد که برد متوسط وی ماکزیمال‌باشد؛ ممکن است‌که این برد متوسط ماکزیمال حساب شده باشد و در این صورت‌آن راارزش بازی می‌نامند. در بازیهای ازنوع کامل، هربازیکن می‌تواند به برد ارزش بازی اطمینان داشته باشد ؛ برای این‌کار، وی باید استراتژی مناسبی اختیار کند و برای‌انتخاب‌یك چنین استراتژی نیز روشی وجود دارد.

استراتژی به آن نظامی می‌گوئیم که از پیش تعیین می‌شود و بازیکن آنرا برای مبارزهٔ علیه رقیبش قبول می‌کند. منش و شانس و هرچیز دیگری را که بتوان به بازیکن دیگر نسبت داده نیز جزء استراتژی است.

جان ون نیومن که وی‌را می‌توان واضع نظریهٔ‌بازیها دانست . بحث کاملی از نظریهٔ بازیها را عنوان کرده است‌که طبق آن ارزش بازی برای هردو بازیکن صفر است. همواره یك‌استراتژی واحد شایسته وجود ندارد. اما بنا براساس قضیهٔ نیومن دربازیهای سادهٔ دونفری بعضی استراتژیهای مختلط مناسب وجود دارد . (در استراتژی مختلط ، بازیکن گاهی با یك استراتژی وگاهی با استراتژی دیگربازی می‌کند، البته بنا به وضعی‌که قبلا پیش بینی‌کرده است).

نظریهٔ بازیها قلمرو تازه ای است که خیلی کم بررسی شده اما موارد استعمال بسیار دارد. تقریباً همهٔ بررسیها باید انجام گیرد . بازیهای دونفری را به خوبی بررسی‌کرده‌اند اما دربارهٔ بازیهای با n بازیکن در حالات $n \geq 3$ هنوز عملا چیزی نمی‌دانند،

یك مسأله را چگونه حل کنیم؟

تألیف : G.POLYA

ترجمهٔ : ه . شریفزاده

مسائل عملی

Problemes pratiques – Pratical problems

مسائل عملی از جهات مختلف با مسائل ریاضیات محض تفاوت دارد. با این همه استدلال و روشهای اصلی که برای حل این دونوع مسئله بکارمی‌رود اساساً یکسان است . مسائل عملی‌مهندسی معمولا شامل قسمتی از ریاضیات می‌باشد. اکنون می‌خواهیم اختلافها، شباهتها، وروابط بین این دونوع مسئله را بررسی کنیم:

۱ـ یکی ازمسائل‌عملی ساختن «سد» در مقابل رودخانه است. احتیاجی نداریم که معلومات اختصاصی در بارهٔ این‌مسئله داشته باشیم، درزمانهای بسیار قدیم، قبل از عصر جدیدنظریات علمی، مردمان به علل مختلف سدهایی در مقابل جریان آب رودخانهٔ «نیل» ونیز درسایرنقاط ساختند. در اغلب این نقاط زراعت بستگی به آبیاری داشت.

فرض می‌کنیم که مسئله عبارت ازساختن یك سد بزرگ و جدید باشد،

مجهول چیست ؟ ـ یك مسئلهٔ عملی ازاین‌نوع شامل مجهولهای متعددی است : محل سد، شکل هندسی و ابعادآن، مصالح لازم برای ساختن آن، و...

شرط چیست ؟ ـ به این سؤال نیز نمی‌توانیم در یك جمله پاسخ‌بدهیم زیرا شرط نیز متعدد است. در یك طرح‌وسیع لازم است که با احتیاجات متعدد اقتصادی تطبیق کند و نیز کمترین ضرر ممکنه را به سایر احتیاجات برساند . سد را ممکن است به منظور تهیهٔ نیروی برق یا ذخیرهٔ آب برای آبیاری، یا به منظور جلوگیری از سیل وطغیان‌آب رودخانه ساخت از طرف دیگر ممکن است که از آن درکشتیرانی یا برای پرورش ماهی یا برای تشکیل مناظر زیبا استفاده کرد. البته مخارج سد بایستی به حداقل ممکن برسد و ساخته شدن سد هرچه سریعتر باشد بهتر است.

معلومات کدامند ؟ ـ معلوماتی که می‌توان داشت فوق‌العاده‌زیاد است. ما به‌معلوماتی دربارهٔمحل،شکل،وطغیانهای رودخانه احتیاج داریم ؛ معلوماتی راجع به زمینشناسی ، به منظور شناسایی استحکام پایه ها ، معلوماتی در بارهٔ مصالح ساختمانیی‌که در دسترس است. اطلاعاتی در بارهٔ آثار جوی و ارتفاع طغیانهای آب، اطلاعاتی اقتصادی در بارهٔ زمینی‌که در معرض سیل است ، ارزش مصالح و مزد کارگر باید بدست آوریم ....

این مثال نشان داد که در یك مسئلهٔ عملی ، معلومات، مجهول، شرط خیلی پیچیده‌اند و به همان وضوحی‌که در یك مسئلهٔ ریاضی می‌باشد نیستند .

۲ـ برای حل یك مسئلهٔ غیر مشخص باید مختصری معلومات قبلی داشت . مهندس جدید می‌تواند از معلومات کاملا اختصاصی و نیز از نظریات علمی دربارهٔ مقاومت مصالح، و ازتجربیات خودش دربارهٔ مسائل ساختمانی و کارهای صنعتی استفاده کند. ماچنین معلوماتی را دردسترس نداریم اماممکن است سعی کنیم که آنچه را در دسترس یك سازندهٔ سد در مصر قدیم بوده است در نظر مجسم کنیم.

او البته سدهای دیگر، شاید کوچکتر،را دیده بوده‌است: سد های طبیعی زمین که جلو آب را می‌گرفته است . او طغیان سیل را که حامل انواع خرده ریزه بوده و بر سدهای طبیعی فشار می‌آورده‌اند دیده بوده است. ممکن است که او برای تعمیر سد که در آن ترکهایی ایجاد شده یا بر اثر طغیان آب فرسایشی در آن ایجاد شده است کمك کرده باشد ممکن است سدی آجری را دیده باشد که تحت اثر سیل راه

پیدا کرده است. ممکن است حکایتهائی دربارهٔ سدهایی شنیده باشد که قرنها مقاومت کرده‌اند یا واقعهٔ مصیبتباری را شنیده باشد که بر اثر شکسته شدن سد پدید آمده است. در ذهنش ممکن است خطور کرده باشد که این به علت فشار آب رودخانه بر سطح سد بوده یا بر اثر مقاومت و فشارهای داخلی بوده است. با وجود این سدسازان قدیم مصر هیچ‌گونه اطلاع علمی دقیق، در بارهٔ فشار مایعات یا مقاومت و استحکام جامدات نداشته‌اند درحالی‌که داشتن این اطلاعات برای مهندس امروزی از قسمتهای اساسی است. با این‌همه هنوزهم بسیاری ازمعلومات مهندسین امروزی به‌پایهٔ علمی دقیق نرسیده‌است. مثلا فرسایش زمین بر اثر آب یا تغییراتی که درزمین براثر عوامل مختلف جوی پدید می‌آید. خاصیت کشسانی و نیز خواص دیگر بعضی از فلزات که هنوز بطور واضح معلوم نشده است، تمام اینها معلوماتی هستند نسبتاً تجربی.

مثال بالا نشان داد که معلومات مورد احتیاج ومفاهیمی که در یك مسئلهٔ عملی بکار می رود نسبت به یك مسئلهٔ علمی خیلی پیچیده‌تر است.

۳ـ مجهولات، معلومات، شرایط، اطلاعات مقدماتی لازم، همه پیچیده‌تر از یك مسئلهٔ علمی است و در عین حال دقت آن هم کمتر است. این اختلاف مهم، و شاید اساسی، است و محققاً اختلافهای بیشتری وجود دارد، با وجود این، استدلالها و روشهای اساسی که مارا به حل مسئله راهنمایی می‌کنند برای هر دو نوع‌مسئله یك جور بنظر می‌رسد.

عقیده‌ای که همه‌جا متداول است این است که مسائل‌عملی به تجربه بیشتر احتیاج دارد تا به مسائل ریاضی. ممکن است که این طور باشد. با وجود این احتمال هست که اختلاف در نوع معلومات لازم باشد نه در وضع ما نسبت به مسئله. برای حل مسئله‌ای ازنوع دیگر، مجبوریم که به تجربیات خود در بارهٔ مسائل مشابه اعتماد کنیم و اغلب چنین سؤال کنیم: **آیا تا کنون مسئله ای این چنین و با اختلافی جزئی دیده‌اید! آیا مسئله ای از این نوع می‌شناسید؟**

برای حل یك مسئلهٔ ریاضی، از مفاهیم بسیار روشنی که درحافظهٔ ما نقش‌بسته‌است شروع می‌کنیم. برای حل یك‌مسئله عملی اغلب مجبوریم که از افکار نسبتا مبهم شروع کنیم؛ سپس واضح‌کردن مفاهیم می‌تواند جزء مهمی از کار را تشکیل دهد. مثلا علم پزشکی امروز نسبت به عصر قبل از پاستور، یعنی هنگامی‌که مفهوم عفونت خود گنگ و مبهم بود، در معالجه‌و معاینهٔ بیماریهای عفونی در وضع بهتری قرار دارد. **آیا تمام مفاهیم اساسی را که در این مسئله وجود دارد به‌حساب آورده‌اید؟** این سؤال برای مسائلی از این نوع بسیار جالب است، ولی مورد استفاده‌اش با نوع مفاهیمی که‌در مسئله وجود دارد تفاوت می‌کند.

در یك مسئلهٔ ریاضی که خوب طرح شده باشد، تمام معلومات و تمام شرایط مخصوص، اساسی می‌باشند و باید آنها را به حساب آورد. درمسائل عملی، تعداد بسیار زیادی معلوم و شرط داریم؛ ما حتی‌المقدور هرچه بیشتر از آنها را به‌حساب می‌آوریم، اما بایستی از قسمتی از آنها نیز صرف نظر کنیم. اکنون برمی‌گردیم به‌مسئلهٔ ساختمان سد. باید به‌فوایداجتماعی و اقتصادی آن توجه کرد ولی مجبوریم که از بعضی ادعاهای صحیح و شکایتها صرف نظر کنیم. معلومات مسئله بطور وضوح تمام‌نشدنی است. مثلا بایستی اطلاعاتی دربارهٔ وضع زمینشناسی زیرزمینی محلی که بر آن ساختمان رابنا می‌کنند بدست‌آورد، اما عاقبت بایستی از جمع‌آوری چنین اطلاعاتی دست کشید هرچند که گوشه‌ای از بی اطمینانی باقی مانده باشد.

آیا تمام معلومات و تمام اجزای شرط را بکار برده‌اید؟ در مسائل‌ریاضی محض نمی‌توانیم از ارائهٔ این سؤالها خودداری کنیم. اما در مسائل عملی بایستی شکل‌ارائهٔ این سؤالها را عوض‌کنیم: آیا تمام معلوماتی راکه **می‌توانند بطور وضوح در حل مسئله شرکت‌کنند** بکاربرده‌اید؟ آیا تمام اجزای شرط را که می‌توانند **بطور وضوح در حل مسئله اثر کنند** بکار برده‌اید.

بعداز دسته‌بندی کردن اطلاعات مناسب، باید اگرلازم باشد، به جستجوی اطلاعاتی دیگر رفت، اما عاقبت بایستی پژوهشها را متوقف کرد، و ازمیان اطلاعات بدست آمده آنهایی را که به وضوح می‌توانند به ماکمك‌کنند انتخاب‌کرد. در حقیقت بسیاری از معلومات بدست‌آمده زاید می‌باشند و در حل‌مسئله تأثیر چندانی ندارند.

۴ـ سازندگان سد در مصر قدیم مجبور بودند که به تجربهٔ حافظه‌ای خود اعتماد کنند، زیرا نمی‌توانستند به چیز دیگری اتکا داشته باشند. مهندس جدید نمی تواند فقط به حافظهٔ خود اعتماد کند، بخصوص اگرطرح او یك طرح‌جدید باشد، او بایستی مقاومت سد طرح شده را حساب‌کند، فشار‌های داخلی را حساب کند. برای این منظور مجبور است‌که از نظریهٔ کشسانی (که درساختمانهای بتون آرمه همیشه حساب می‌شود) استفاده کند. برای استفاده از این نظریه بایستی

اطلاعات کافی از ریاضیات داشته باشد: مسئلهٔ مهندسی عملی، منجر می‌شود به مسئلهٔ ریاضی.

این مسئلهٔ ریاضی عملیتر از آن است که در اینجامطرح شود؛ فقط یك توجه کلی می دهیم. برای طرح و حل‌مسائل ریاضی که‌ازمسائل‌عملی‌مشتق می‌شوند،بایستی‌عموماً آنهارا باتقریب بررسی‌کرد. باید ازبسیاری ازمعلومات و شرایط مسئلهٔ عملی صرف‌نظر کرد. بنابر این حتی در محاسبات نیز می‌توانیم‌از تقریب استفاده کنیم.

۵- ممکن است در اینجا دربارهٔ تقریب گفتگو کنیم. اما اطلاعات ریاضی خوانندگان ما را محدود می‌کند به اینکه فقط مثالی آموزنده بزنیم که درك آن چیزی جزتوجه‌احتیاجی ندارد.

رسم نقشه های جغرافیائی یکی از مسائل عملی است. برای رسم یك نقشه عموماً فرض می‌کنیم که زمین کروی است این درحقیقت یك تقریب است وواقعیت کامل ندارد. سطح‌زمین را نمی‌توان مطابق تعاریف ریاضی تعیین کرد و می‌دانیم که زمین در قطبها فرورفتگی دارد. اغلب زمین را کروی فرض می‌کنیم و نقشهٔ قسمتی یاتمام آن‌را به صورت ساده رسم می‌کنیم با این فرض، بدون آنکه چیزی را تقریباً از دست بدهیم، محاسبات و حل مسئله را آسان می‌کنیم. مثلامی‌توان گلوله‌ای بزرگ تصور کرد که شکل آن شبیه شکل زمین و قطر آن در استوا ۳ متر است. فاصلهٔ بین قطبهای چنین گلوله‌ای کمتر از ۳ متر است، زیرا زمین در قطبها فرو رفته است، اما این کم بودن فاصله در حدود یك سانتیمتر است. مشاهده می‌شود که گلوله فوق را عملا می‌توان با تقریب بسیار خوب به کرهٔ زمین تشبیه کرد و آن را کرهٔ کامل تصورکرد.

بی آنکه عصبانی شوید این مسئله‌را حل کنید

دو دهقان، یکی پیر و دیگری جوان، با هم در یك زمان ده را به قصد شهر نزدیك ترك کردند. یکی از آنها با اسب طی طریق می‌کرد و دیگری سوار بر اتومبیل بود. بعداز گذشت مدت زمانی. دهقان پیر متوجه شد که اگر سه برابر فاصله‌ای را که پشت سر گذاشته پیموده بود بقیهٔ مسافتی را که باید بپیماید نصف می‌شد. در همین زمان دهقان جوان متوجه شد که اگر نصف مسافتی را که پیموده است پیموده بود بقیهٔ مسافتی را که باید بپیماید سه برابر می‌شد

کدامیك از این دو دهقان با اتومبیل مسافرت می‌کرده است؟

پاسخ مسئلهٔ زیر همین عنوان مندرج در یکان شمارهٔ قبل

اگر گوینده راست گفته باشد دو جملهٔ آخری او متناقض است؛ اگر فرامرز راست گفته باشد در این صورت جواد که راستگوئی فرامرز را تعریف کرده دروغ گفته است. اما اگر فرامرز دروغ گفته باشد در این صورت باید جملهٔ جواد را مبنی بر اینکه فرامرز راست می‌گوید باور کرد. در هر حال تناقض وجود دارد و این می‌رساند که اصولا جواد با گوینده در بارهٔ اینکه بشقاب پرنده دیده است صحبتی نکرده است.

راهنمای حل مسائل شیمی

مؤلفان : Favre et Gautier مترجم : عطاءالله بزرگ‌نیا

فصل ششم

مسائلی که در آنها چند واکنش مربوط به‌هم مورد استفاده قرار گرفته‌است و اجسامی که در بعضی از این واکنشها تولید می‌شود در برخی دیگر بکار می‌رود.

۲۸ ـ شاگردان مبتدی سعی دارند این قبیل مسائل را به تعداد واکنشهائی که در آنها دخالت دارند به‌مسائل کوچکتر تجزیه کنند. بدیهی است این روش ناشیانه است زیرا شامل محاسبات بی‌فایده بوده وازساده شدن روابط استفاده نشده‌است.

در حل این قبیل مسائل باید کلیهٔ واکنشهای شرکت‌کنندهٔ در عمل را به منزلهٔ یك واکنش دانست واز روشی که در مورد «مسائل یك واکنشی» گفته شده است استفاده نمود. به عبارت دیگر بدون آنکه مسئله را به مسائل کوچکتر تجزیه نمائیم باید کلا براساس مقادیر معلوم حل نمائیم. بنابراین مانند مسائل قبل تناسبها فقط بایدبراساس مقادیر معلوم ومطلوب در مسئله تنظیم شود.

مثال ـ چه مقدار روی را باید در اسید سولفوریك رقیق حل نمود تا گاز حاصل با اکسیژن تولید شده از تجزیهٔ کلرات پتاسیم بطورکامل ترکیب شود.

حل ـ در این مسئله تعیین مقادیر هیچ یك از دو گاز ئیدروژن واکسیژن لازم نیست و مورد خواست مسئله نمی‌باشد.

فرمول واکنشها به‌صورت زیر است :

$$KClO_3 \rightarrow KCl + \frac{3}{2}O_2 \qquad (1)$$

$$Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2\uparrow \qquad (2)$$

$$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O \qquad (3)$$

ابتدا فرض می‌کنیم که کلرات پتاسیم مورد تجزیه یك ملکول باشد در این صورت اکسیژن حاصل $\frac{3}{2}O_2$ ملکول است که در واکنش (۳) به مصرف رسیده است. وبطوری که‌مشاهده می‌شود فقط $\frac{1}{2}O_2$ بکار رفته است. بنابراین باید کلیهٔ ضرایب این واکنش را سه برابر نمود :

$$3(Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2\uparrow)$$

پس دراین‌صورت مقدار روی لازم $3Zn$ می‌باشد وچون به‌جای ClO_3K عدد ۱۲۲/۵ گرم (ملکول گرم) آنراقرار دهیم باید به‌جای $3Zn$، ۱۹۶/۲ = ۶۵/۴ × ۳ گرم راقرار داد. با در نظر گرفتن مقدار داده شدهٔ در مسئله چنین‌خواهیم داشت :

$$\frac{100}{122/5}(ClO_3K \qquad 3Zn)$$

$$122/4 \qquad 196/2$$

$$\frac{100 \times 196/2}{122/5} = 160/1$$

بنابراین مقدار روی لازم ۱۶۰/۱ گرم می‌باشد.

۲۹ ـ بااینکه در این قبیل مسائل چندین واکنش وجود دارد معذالك به‌آسانی می‌توان آنها را بـه صورت مسائل سادهٔ یك واکنشی درآورد. زیرا بین مقادیر اجسام دراین واکنشها روابط ساده‌ای برقرار است و جسمی که در یك واکنش تولید می‌شود در واکنش دیگر بطورکامل به مصرف می‌رسد. بنابراین کافی است که ضرایب اجسام مشترك در واکنشها را مساوی کرد و آنها را از بین فرمول واکنشها حذف نمود بدین ترتیب فرمول ساده‌ای بدست می‌آید که در حقیقت معرف واکنشی نیست وتنهااز روی آن می‌توان به رابطهٔ بین مقادیر اجسام شرکت‌کنندهٔ در فرمول پی‌برد.

بطوری‌که در بند ۱۸ تذکر داده شد درحل مسائل‌شیمی همیشه باید محاسبات را محدود به پیداکردن مقادیر اجسامی کردکه در مسئله خواسته شده است وحتی‌الامکان مقادیرمعلوم مسئله را به اتم گرم وملکول گرم تبدیل نمود.

راهنمای حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des Problèmes élémentaires de géométrie

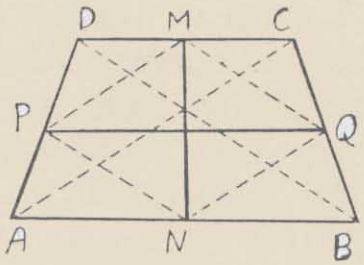
تألیف: **E. J. Honnet** چاپ هفتم . پاریس : ۹۶۳ — ترجمهٔ : ع . م.

فصل سوم- چگونه ثابت کنیم که دو خط بر یکدیگر عمودانند

روش ششم - استفاده از خواص لوزی یا مربع

دوقطر لوزی وهمچنین دوقطر مربع بر یکدیگر عمودانند . بنابراین اگر ثابت کنیم دوخط دوقطر لوزی یا دوقطر یك مربع هستند ثابت شده است که آن دوخط بر یکدیگر عمودانند .

مسئلهٔ ۳۴- دوخطی که اوساط دوقاعده واوساط دوساق یك ذوزنقه متساوی‌الساقین را متقابلا به هم وصل می‌کنند بر یکدیگر عمودانند .



فرض: ABCD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین
M وسط CD ، N وسط AB
P وسط AD ، Q وسط BC

حکم: $MN \perp PQ$

اثبات - چهارضلعی PMQN رارسم می‌کنیم PM که اوساط دوضلع مثلث DAC را به هم وصل کرده‌است با AC موازی و مساوی با نصف آن‌است. وهمچنین NQ موازی با AC ومساوی با نصف آن است بنابراین PM و NQ با یکدیگر مساوی و موازی هستند به طریق مشابه ثابت خواهد شد که MQ و PN بایکدیگر و با BD موازی وبا نصف BD مساوی هستند وچون درذوزنقهٔ متساوی‌الساقین دو قطر بایکدیگر برابراند بنابراین چهارضلعی PMQN لوزی بوده دوقطر آن یعنی دوخط MN و PQ بایکدیگر برابراند .

تمرینات

۱۴۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به مرکز A وبه شعاع AB کمان BC کوچکتر از نصف محیط دایره را رسم می‌کنیم وبراین کمان یك نقطهٔ D انتخاب کرده آن را به B و به C وصل می‌کنیم . ثابت کنید خطی که وسط AB را به‌وسط CD وصل می‌کند برخطی که‌وسط AC را به وسط BD وصل می‌کند عمود می‌باشد .

۱۴۹ - نیمسازهای زاویه‌های B و C ازیك مثلث ABC را رسم می‌کنیم که در I متقاطع می‌شوند واز I موازی با BC رسم می‌کنیم که AB و AC رادر M و N قطع می‌کند وهمچنین از I به موازات AB و AC رسم می‌کنیم که BC را در G و F قطع می‌کنند . ثابت کنید که FN بر IC و MG بر IB عمود است .

۱۵۰ - برخط AB یك نقطهٔ C انتخاب کرده از A و B دوخط موازی باهم رسم می‌کنیم وروی آنها ودریك طرف AB قطعات $AM = AC$ و $BN = BC$ را جدا می‌کنیم . اگر D وسط MN باشد ثابت کنید که‌مثلث ADB قائم‌الزاویه‌است

روش هفتم - استفاده از بعضی خواص مربوط به شعاع یا وتر دایره

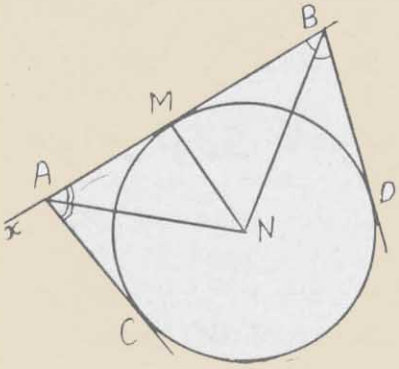
برای اینکه ثابت کنیم دو خط بر یکدیگر عمود اند می‌توانیم یکی از خواص زیر را مورد استفاده قرار دهیم :

۱ـ شعاعی از یك دایره که از وسط یك وتر بگذرد بر این وتر عمود است .

۲ـ خط مماس بر دایره بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است.

۳ـ خط المرکزین دو دایرهٔ متقاطع بر وتر مشترك آنها عمود است .

مسئلهٔ ۳۵ ـ خط xy در نقطهٔ M بر یك دایره مماس است . روی xy و طرفین M دو نقطهٔ A و B اختیار کرده مماسهای AC و BD را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر N نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زاویه‌های CAM و DBM باشد ثابت کنید که MN بر AB عمود است .



فرض { AB ، AC ، BD مماس بر دایره
زMAN = زCAN
زDBN = زMBN

حکم : MN ⊥ AB

اثبات ـ از نقطهٔ A دو مماس AC و AM بر دایره رسم شده است .

بنابراین نیمساز زاویهٔ CAM از مرکز دایره می‌گذرد. نیمساز زاویهٔ MBD نیز از مرکز دایره می‌گذرد پس N مرکز دایره بوده وشعاع NM بر مماس نقطهٔ M یعنی بر xy عمود است .

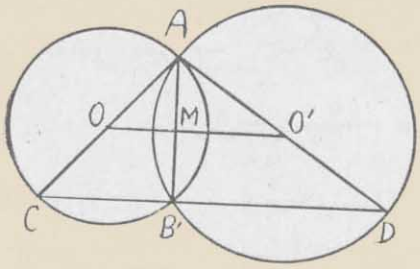
تمرینات

۱۵۱ـ مثلث ABC در دایرهٔ O محاط است ؛ از A خطی رسم می‌کنیم که زاویهٔ مجاوری که با AC تشکیل می‌دهد با زاویهٔ B برابر باشد . ثابت کنید که این خط بر قطری از دایره که بر A می‌گذرد عمود است .

۱۵۲ـ از نقطهٔ O وسط AB خط دلخواهی مانند xy رسم می‌کنیم ونقطهٔ B' قرینهٔ B را نسبت به xy تعیین کرده و از B' بر OB' عمود می‌کنیم تا xy را در N قطع کند ثابت کنید که NB بر دایرهٔ به قطر AB عمود است .

۱۵۳ ـ مثلث ABC محاط در دایرهٔ O مفروض است. نیمسازهای زاویه‌ها داخلی وخارجی A دایرهٔ O را در نقاط D و D' قطع می‌کنند . ثابت کنید که DD' بر BC عمود است .

مسئلهٔ ۳۶ ـ دو دایرهٔ O و O' در نقاط A و B متقاطع اند قطرهای AC و AD از دو دایره و CD را رسم می‌کنیم . ثابت کنید که خط CD از B گذشته و بر AB عمود است.



فرض { AC قطر دایرهٔ O
AD قطر دایرهٔ O'
AB وتر مشترك

حکم { AB ⊥ CD
CD بر B می‌گذرد

اثبات ـ در مثلث ACD خط OO' اوساط دو ضلع را برهم وصل کرده است پس با CD موازی است . وچون خط المرکزین OO' بر وتر مشترك AB از دو دایره عمود است بنابراین CD نیز بر AB عمود است اگر CD با AB در B' متقاطع باشد چون زاویه های AB'C و AB'D قائمه بوده وهریك مقابل به قطری از دایره های O و O' می‌باشند پس لازم می‌آید که رأس B' بر هریك از دو دایره یعنی بر B منطبق باشد یعنی CD از B می‌گذرد .

تمرینات

۱۵۴ـ دو دایرهٔ O و O' در A مماس هستند . قاطع دلخواه MAN را رسم کرده و MB را عمود بر MA و NC را عمود بر NA رسم می‌کنیم. ثابت کنید که BC بر مماس نقطهٔ A عمود است (هر دو حالت را که ممکن است در نظر بگیرید)

۱۵۵ ـ در دایرهٔ O یك وتر AB وروی آن یك نقطهٔ D

بقیه در پائین صفحهٔ ۲۵

راهنمای ریاضیات متوسطه

یادآوری چند نکته ـ لزوم توجه به حالات خاص

عبدالحسین مصحفی

دوست دانش‌آموزی که گاه به گاه به وسیلهٔ تلفن نکاتی مربوط به بعضی مباحث ریاضی را عنوان می‌کند و همیشه از نارسائی کتابهای درسی گله دارد ، یك دفعه مسئلهٔ زیر را مطرح ساخت .

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم .

$$cotg\,2x = cotg\,x$$

الف ـ بنا به دستور زیر که در همهٔ کتابهای درسی وجود دارد (واستفادهٔ از آن درهیچ حالتی منع نشده است):

$$cotg\,a = cotg\,b \Longrightarrow a - b = k\pi$$

جواب معادله عبارت خواهد شد از :

$$2x - x = k\pi \quad \text{یا} \quad x = k\pi$$

ب ـ معادله را به ترتیب زیر عمل می‌کنیم .

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$\frac{\cos 2x - 2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{2\cos^2 x - 1 - 2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{-1}{\sin 2x} \neq 0$$

برای معادله جوابی وجود ندارد .

اشتباه از چیست ؟ چرا از دوراه مختلف که عمل می‌کنیم دونتیجهٔ متضاد حاصل می‌شود ؟

نکته دراینجاست که نه تنها دستور بالا بلکه بطور کلی طریقهٔ حل معادلات درکتابهای درسی به صورت ناقص و نارسا بیان شده است ؛

درحل معادلات کسری جوابهایی قابل قبول هستند که درازاء آنها عبارت مخرج هیچیك ازکسرها برابر باصفر نباشد .قبل از حل معادله لازم است که این جوابها را پیش بینی کرده ازقبول آنها برحذر بود .

مخصوصاً در حل وبحث معادلات کسری باید به نکتهٔ بالا توجه کامل داشت ،

مثال ـ درحل معادلهٔ زیر

$$\frac{x^2}{x-1} + 4 = \frac{x}{x-1}$$

بعد از اختصار داریم:

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = 0$$

که این معادله بادستگاه زیر معادل است .

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow x = -4$$

درصورتی که اگر شرط $x - 1 \neq 0$ را در نظر نگیریم جواب $x = 1$ نیز بدست خواهدآمد .

***

درحل معادلات مثلثاتی موضوعی که بیشتر موجب گمراهی می‌شود این است که اغلب توابع $tg\,x$ و $cotg\,x$ را صحیح تصور می‌کنند در صورتی که در حقیقت این دوتابع ، دوتابع کسری می‌باشند :

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} \;،\; cotg\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

واز این جهت معادلات مثلثاتی شامل $tg\,x$ یا $cotg\,x$ را بایدبه صورت شرطی حل وبحث کرد . به عبارت دیگر هریك ازمعادلات به‌صورت :

$$f(tg\,x) = 0 \quad \text{یا} \quad f(cotg\,x) = 0$$

به ترتیب به صورت شرطی زیر باید حل شود

$$\begin{cases} f(tg\,x) = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} f(cotg\,x) = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

ودستور حل معادلات به شکل

$tg a = tg b$ یا $cotg a = cotg b$

باید به صورت شرطی زیر بیان شود

$$tg a = tg b \Longrightarrow \begin{cases} a - b = k\pi \\ \text{شرط : } \cos a \neq 0 \text{ و } \cos b \neq 0 \end{cases}$$

$$cotg a = cotg b \Longrightarrow \begin{cases} a - b = k\pi \\ \text{شرط : } \sin a \neq 0 \text{ و } \sin b \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ای که در ابتدای مقاله‌عنوان شد باید به‌ترتیب زیر حل شود (حالت الف) :

$$cotg 2x = cotg x \Longrightarrow \begin{cases} 2x - x = k\pi \\ \sin 2x \neq 0 \text{ و } \sin x \neq 0 \end{cases}$$

از رابطهٔ $2x - x = k\pi$ نتیجه می‌شود $x = k\pi$ اما در ازاء این‌مقادیر از x داریم $\sin x = 0$ وهمچنین $\sin 2x = 0$ بنابراین جواب $x = k\pi$ قابل قبول نخواهد بود ومعادلهٔ مفروض جواب ندارد چنانکه طبق حالت ب هم این نتیجه بدست آمد ،

***

نکتهٔ دیگری که درحل معادلات کسری باید مورد توجه باشد و بازهم درکتابها به آن اشاره نشده نکتهٔ زیر است :

اگر داشته باشیم،

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

ووقتی $x \to \alpha$ دراین‌صورت $h(x) \to \infty$ امکان دارد که $x = \alpha$ ریشه‌ای از معادلهٔ $f(x) = 0$ باشد . زیرا مقدارحقیقی صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درحالتی برابر باصفر است .

بنابراین نمی‌توان معادله‌ای به شکل

$$\frac{a}{f(x)} = 0$$

را بدون‌تأمل بدون‌جواب‌دانست . امکان دارد که مقدارمحدودی مانند α وجود داشته‌باشد که وقتی $x \to \alpha$ حد $f(x)$ برابر با ∞ باشد ودرنتیجه داشته باشیم :

$$\frac{a}{f(\alpha)} = 0$$

دراین مورد هم معادلات شامل $tg x$ یا $cotg x$ بیشتر مشمول این نکته هستند

مثال ـ معادلهٔ زیر را درنظر می گیریم :

$$\frac{1}{1 + tg x} = 0$$

صورت کسر مقداری است ثابت و هیچوقت صفر نمی‌شود اما نمی‌توانیم حکم کنیم که معادلهٔ بالا جواب ندارد زیرا تابع $tg x$ منفصل بوده و وقتی $x \to k\pi + \frac{\pi}{2}$ حد تابع ∞ می‌باشد بنابراین درازاء $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ کسر مزبور برابر با صفر می‌شود .

می‌توانیم به ترتیب زیرعمل کنیم

$$\frac{1}{1 + tg x} = \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x + \sin x \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

تمرین ۱ـ جوابهای کلی هر یك از معادلات زیر را بدست آورید .

$$\frac{1 - tg x}{1 + tg^2 x} = 0 \quad , \quad \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} = 0 \quad , \quad \frac{1 - tg^3 x}{1 + tg^2 x} = 0$$

تمرین ۲ـ اگر معادلهٔ مثلثاتی

$$3 \sin x - \cos x = 1 \qquad (1)$$

را برحسب $tg \frac{x}{2}$ بنویسیم بعد از ساده کردن خواهیم داشت

$$\frac{-6 tg \frac{x}{2} + 2}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = 0 \qquad (2)$$

جوابهای کلی معادلهٔ (۱) را از روی معادلهٔ (۲) بدست آورید.

***

یك نکتهٔ دیگر ـ در کتابها حکم شده است که اگر حداقل یکی ازدوعامل a یا b برابر با صفر باشددراین‌صورت حاصل‌ضرب ab برابر باصفر خواهد بود. آیا این حکم‌هم‌در تمام حالات مجری است ؟

فرض کنیم وقتی $x \to \alpha$ داشته باشیم

$$\lim f(x) = 0 \text{ و } \lim g(x) = \infty$$

دراین صورت حدحاصل‌ضرب $f(x)g(x)$ به‌صورت‌مبهم $0 \times \infty$ درآمده فقط درحالتی برابر با صفر خواهدبود .

مثال ـ معادلهٔ زیررا درنظرمی گیریم

$$\sin x(1 - cotg x) = 0$$

اگر بدون تأمل حکم کنیم که

$$\sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi$$ یا

$$1 - \cot g\, x = 0 \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$ یا

وهر دوجواب را قابل قبول بدانیم اشتباه کرده‌ایم زیرا درازاء $x = k\pi$ معادله به صورت $0 \times \infty$ در می‌آید ولازم است قبلا ازآن رفع ابهام کنیم . معادله را به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\sin x\left(1 - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x(\sin x - \cos x)}{\sin x} = 0$$

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

تمرین ـ جوابهای کلی هریك از معادلات زیررا بدست آورید:

$$(\cos x + 1)(1 - 3\cot g^2 x) = 0$$

$$\cos^2 x(1 + tg\, x) = 0$$

$$\frac{\cos x - 1}{tg\, x} = 0 \quad , \quad \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0$$

***

نکتهٔ دیگر ـ آیا شرط اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

دارای ریشهٔ مضاعف باشد این است که داشته باشیم $\Delta = 0$؟ نه، توجه به یك نکته لازم است ؛ شرط اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم به شکل بالا ریشهٔ مضاعف داشته باشد این است که داشته باشیم:

$$\Delta = 0 \text{ و } a \neq 0$$

مثلا در معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$$

داریم :

$$\Delta' = (m-1)^2 - (m-1)(m+1) = -2(m-1)$$

در ازاء $m = 1$ داریم $\Delta = 0$ اما معادلهٔ مفروض هم به‌صورت ممتنع $(0 = 2)$ درمی‌آید .

تبصره ـ معادلهٔ بالا در ازاء مقادیر $m < 1$ دو ریشهٔ متمایز دارد ، وقتی $m \to 1$ دو ریشهٔ مزبور به سمت ∞ میل کرده ومی گویند معادله ریشهٔ مضاعف بینهایت دارد.

راهنمای حل مسائل هندسه (بقیه ازصفحهٔ ۲۲)

درنظر گرفته آن را به نقطهٔ دلخواه C از دایره وصل می‌کنیم. عمود منصفهای AD و CD یکدیگر را در M قطع می‌کنند . ثابت کنید که OM بر AC عمود است .

تمرینات مربوط به فصل سوم

۱۵۶ـ اضلاع متقابل یك چهار ضلعی محاطی راامتداد می‌دهیم تایکدیگر را قطع کنند. ثابت کنید نیمسازهای دوزاویه‌ای که تشکیل می‌شود بریکدیگر عمودند .

۱۵۷ـ نیمدایرهٔ به قطر AB و به مرکز O مفروض است . وترغیر مشخص BC را رسم کرده ودرنقطهٔ اختیاری H واقع برAB عمودی برآن اخراج می‌کنیم تا BC را درE و دایره را در F قطع کند. به قطر BE نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم که نیمدایرهٔ اول را در D قطع می‌کند . ثابت کنید که AE بر BD عمود است .

۱۵۸ـ روی ضلعهای AB و AC ازیك مثلث متساوی‌ـ الاضلاع ABC ودرخارج آن مربعهای ABDF وACGH را رسم می‌کنیم . ثابت کنید که ارتفاع AA' ازمثلث برFH و FC بر BH عمود است .

۱۵۹ ـ مثلث ABC دردایرهٔ O محاط است . از H نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث قطر MN را رسم می‌کنیم و نقاط M' وN' قرینه‌های M و N رانسبت به BC تعیین می‌کنیم . ثابت کنید که زاویهٔ $M'HN'$ قائمه است .

۱۶۰ـ روی ضلعهای AD و DC از یك مربع ABCD طولهای برابر AG و DF را جدا کرده و AF و BG را رسم می‌کنیم که در H متلاقی می‌شوند . ثابت کنید خطی که وسط BF را به وسط GF وصل می‌کند بر AF عمود است .

۱۶۱ـ مثلث ABC قائمه در زاویهٔ A مفروض است. ضلع CA را به طول AD برابر با AC امتداد داده وDH را عمود بر BC رسم می‌کنیم که AB را در G قطع می‌کند. ثابت کنید که CG بر BD عمود است .

۱۶۲ـ نقطهٔ C واقع درخارج دایرهٔ O مفروض است . به مرکز C وبه‌شعاع CO دایره‌ای رسم می‌کنیم. خط‌المرکزین دودایره دایرهٔ O را در A قطع می‌کند . اگر MM' مماس مشترك دودایره باشد (M' روی C است) ثابت کنید که $M'A$ برخط‌المرکزین عمود است .

نویسندگان : ژ. گامو
م. استرن

ترجمه : از فرانسه

گفتگوی پدر و پسر

۷- یا پوچ یا دوبرابر

روزی ، سامی رولت وپسر ریاضیدانش سرموضوعی باهم شرط‌بندی کردند بدون اینکه برای هریك ازآنها سودی قابل توجه در بر داشته باشد . پسر از اینکه مانند معمول چند دلار بردیا باخت داشته باشند اظهار بیمیلی کـرد و بازی زیر را پیشنهاد نمود:

ـ درصورتی‌که شرط را باخته باشی شیریاخط می‌کنیم، اگر توبردی که هیچ ، بازی تمام است. اما اگر تو باختی ۲ دلار به من خواهی داد وباز شیر یاخط می‌کنیم . این دفعه هم اگر تو بردی ، بازی تمام است و برد من از توفقط همان ۲ دلار خواهد بود. اما اگر تو باختی ۴ دلار به من‌خواهی داد واز نو شیر یاخط می‌کنیم و بـه همین ترتیب بازی را ادامـه می‌دهیم ؛ هردفعه که تو باختی مبلغی را به‌من می‌پردازی که دوبرابر مبلغ دفعهٔ پیش است و چنانچه بردی بازی در همانجا پایان‌می‌یابد. تازمانی‌که توباخت داشته باشی بازی‌ادامه می‌یابد اما اولین دفعه‌ای کـه برد داشتی بازی خاتمه خواهد یافت . موافقی ؟

سامی اظهار داشت‌که موافق است و توضیح داد‌که‌قریحه حکم می‌کند آنچه را ببازد باز خواهد یافت زیرا اگر ببازد ۵۰ درصد شانس داردکه غیر ازآن باختی نداشته باشد . اما اگر دفعهٔ اول بعداز آن ببازد مسلم است‌که مدت زیادی طول نخواهد کشید که بالاخره وی برد داشته باشد .

فردا ، سامی اعتراف‌کردکه شرط را باخته است ونوبت آن شد تا شیریاخط‌کنند تا معلوم شود وی چه مبلغی را باید بپردازد . اما پسرچنین گفت .

ـ چرا به جای آنکه بازی کنیم با استفاده از ریاضیات مبلغی راکه باید بپردازی حساب نکنیم ؟ چنانچه این موضوع برای تو خوشایند باشد من آنرا ترجیح می‌دهم . وانگهی تو مرافرستاده‌ای‌ریاضیات‌آموخته‌ام واکنون‌باید ازآنچه‌آموخته‌ام در عمل استفاده‌کنم .

سامی با اکراه پذیرفت ، زیرا وی بازی کردن را بـر محاسبهٔ ریاضی ترجیح می‌داد ، و از پسرش خواست تا به وی نشان دهد مبلغ بدهی وی را چگونه حساب می‌کند ، و اضافه کردکه اگر این راه محاسبه دقیق و برای وی قابل‌قبول‌باشد مبلغ مربوط را خواهد پرداخت .

پسرگفت که راه محاسبه‌خیلی ساده‌است وپدرش باوجود آنکه ریاضیات نمی‌داند آن را درك خواهدکرد و چنین توضیح داد :

ـ دفعهٔ اول که سکه را برای شیر یـا خط می‌اندازیم شانس من برای بردن ۲ دلار یا برای اینکه هیچ نبرم کاملا یکسان می‌باشد . از این جهت منصفانه است اگر از تویك‌دلار مطالبه‌کنم به‌شرط اینکه ازبازی صرف‌نظرکنم .

سامی قبول کرد و پسر به توضیحات خود چنین ادامه داد :

ـ دور دوم بازی را در نظر می‌گیریم: اگر من ببرم، ۴ دلار از تو می‌گیرم . امـا شانس اینکه این دوربازی شود یك‌بردو است برای اینکه اگر در دور اول توبرده باشی‌دیگر در دور دوم بازی نخواهیم داشت . و اگر در دور دوم بازی کنیم شانس اینکه ۴ دلار ببرم یك بردو است بنابراین ، در این حالت شانس من‌یك برچهار خواهد بود. درنتیجه منصفانه است کـه باز هم یك دلار بگیرم واز بازی دور دوم هم چشم بپوشم .

سامی‌که تا اندازه‌ای مجاب شده بودگفت :

ـ عجب! من باید یك دلار بپردازم که تو دور دوم را بازی نکنی ؟

آیا در دور سوم هم باز باید یك دلار بپردازم تا تو از بازی صرف‌نظر کنی ؟

پسر گفت :

ـ مسلماً ؛ وقتی دورسوم را بازی‌کنیم من اگر ببرم ۸ دلار خواهم گرفت . اما بازی دورسوم وقتی انجام می‌گیرد که دورهای اول ودوم را بازی کرده باشیم و هردو دفعه من برده باشم‌که شانس من برای این برد یك‌برچهار می‌باشد. وچنانچه این دور را بازی‌کنیم شانس من برای اینکه ببرم یك بر دو است. بنابراین شانس اینکه ۸ دلار را ببرم یك بر ۸ است . و می‌توانیم برای دور های بعدی هم همین استدلال را ادامه دهیم. من حق دارم برای هریك دور بازی یك‌دلار مطالبه کنم واگر تعداد دور های بازی را نامحدود بگیریم مبلغ مورد مطالبهٔ من‌سر به‌فلك خواهد زد و حتی در بانك هم چنین مبلغی وجود نخواهد داشت. من از این مبلغ چشم می‌پوشم و آن را به ۱۰۰۰۰ دلار مصالحه می‌کنم . این ۱۰۰۰۰ دلار را به من بده زیرا برای خرید یك اتومبیل کورسی به آن احتیاج دارم .

در اینجا سامی به شدت عصبانی شد به حدی که از جا در رفت و برسر فرزندش نعره‌کشید و گفت :

ـ این است نتیجهٔ همهٔ تحصیلات تو؟! تا فردا صبر کن، خرده ریگ لای استدلالت را بیرون خواهم‌کشید .

سامی تمام بعد از ظهر آن روز را به فکر کردن دربارهٔ استدلال پسرش گذرانید اما هرچه بیشتر فکر کرد کمتر چیزی دستگیرش شد و نتوانست چیز غیرعادی در این استدلال بیابد او برای هردور بازی می‌بایست یك‌دلار بپردازد و سرانجام‌از همهٔ‌دارائی خودصرف‌نظر کند . در این میان‌ناگهان به‌خاطرش رسید‌که بین‌کسانی‌که به باشگاه وی می‌آیند مردی‌کم جثه با موهای خاکستری هست‌که‌می‌گویند استاد باز نشستهٔ ریاضیات است .

سامی‌باخودش‌گفت: «بچهٔ من به‌تحقیق، یك فردغیرعادی است ، وی هنوز نارس است اما به‌سادگی می‌تواند بازیهایی طرح‌کندکه برد حتمی داشته باشد . در صورتی‌که این استاد پیر باوجود همهٔ اطلاعاتی‌که از ریاضیات‌دارد همواره درقمارها بازنده است !»

سامی به‌هرترتیب‌که بودتوانست نشانی منزل استاد باز ـ نشسته را بدست آورد و همان روز عصر در منزل وی مسئلهٔ خودش را مطرح‌کرد :

ـ مسئله‌ای دارم که باید باشما در میان نهم . چنانچه شما به حل این مسئله موفق شوید ، قول می‌دهم‌که تمام بدهی شما را به باشگاه بپردازم. سامی تمام‌آنچه را که گذشته بود بازگوکرد . استاد در پاسخ اظهار داشت :

ـ این موضوع واقعاً جالب است. پسرشما خدعه‌ای را بکار برده است که به نام **«پارادکس سن‌پترزبورك»** معروف است و اولین‌بار توسط ریاضیدان نامی **لئونارد اولر** عنوان شده است.

آیا می‌توانم بپرسم‌موجودی حساب بانکی‌شماچقدراست؟

ـ اما من قصدی ندارم که تمام ان را به کوچولو ! بپردازم .

ـ لازم نیست‌که‌آن را به وی بپردازید. امامن بایدبدانم موجودی‌شما تاچه‌اندازه درمحاسبه‌ای‌که پیش‌خواهدآمدکفایت دارد . این موضوع که شما برای هر دور بازی باید یك دلار بپردازید به‌جای خود کاملا صحیح است، اما باید معلوم ساخت که شما تا چند دور می‌توانید به بازی ادامه دهید بدون اینکه ورشکسته شوید .

چنانچه شما n دور بازی کنیدکه در تمام آن بازنده باشید کل مبلغی که باید به فرزند خود بپردازید برابر است با مجموع :

$$۲+۴+۸+۱۶+\dots+۲^n$$

یك تصاعد هندسی‌است‌که بنابه‌دستورهای ریاضی،مجموع آن برابر خواهد شد با :

$$۲\times\frac{۲^n-۱}{۲-۱})=۲^{n+۱}-۲$$

این مجموع با زیاد شدن تعداد دورهای بازی به سرعت بالا می‌رود . مثلا اگرشما ۱۰ دور بازی با باخت داشته‌باشید رویهم باید .

$$۲^{۱۱}-۲=۲۰۴۶$$

دلار بپردازید . آیا بیش از این مبلغ در بانك دارید ؟

سامی با صداقت پاسخ داد که حدود نیم میلیون دلار موجودی دارد .

استاد جواب داد :

ـ ۱۸ دور بازی کافی است‌که این مبلغ نیم‌میلیون دلار رابدست آورد؛ شما فقط می‌توانید تادورهیجدهم باخت خودتان را به‌ترتیب بپردازید . اما تکلیف دور نوزدهم چه می‌شود ؟ بنابراین فرزند شما فقط می‌تواند روی ۱۸ دور بازی حساب کندکه طلب وی مجموعاً می‌شود ۱۸ دلار ، همین فردا این مبلغ را به‌وی بپردازید .

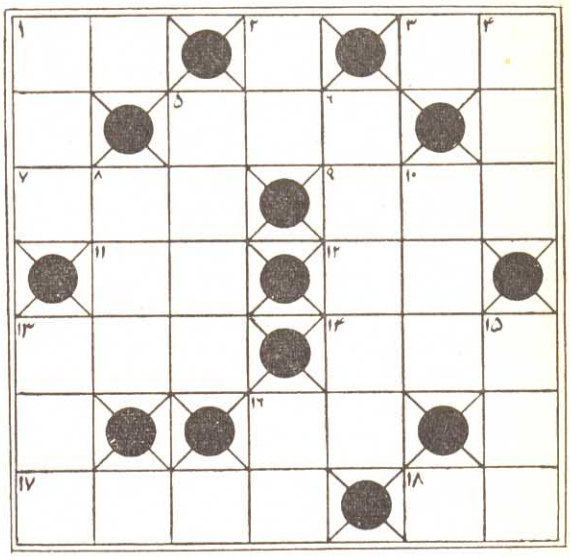
سامی با خوشحالی اظهار داشت :

ـ بی‌اندازه از محبت شما سپاسگزارم . فردا این مبلغ را به اضافهٔ ۱۸ ضربهٔ عصا به وی تحویل خواهم داد . باز هم ازلطف شما متشکرم ، آرزو دارم‌که بتوانم اعتبار وسیعی برای شما در باشگاه بازکنم . شب به‌خیر .

سرگرمیهای باغ

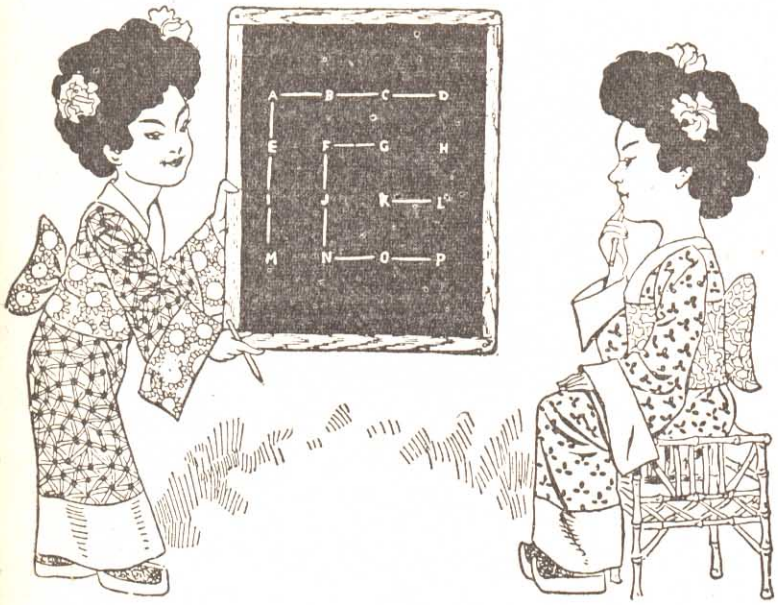
جدول اعداد

طرح از: سید جمال آشفته



افقی: ۱ـ مضرب ۱۲ است و ۱۲ مقسوم علیه دارد. ۳ـ خارج‌قسمت تقسیم عدد ۱ افقی بریك عدد مربع کامل. ۵ـ تعداد اعداد مضرب ۱۳ کوچکتر از ۱۸۰۰. ۷ـ چون سه‌واحداز آن کم شود هم‌مکعب کامل‌وهم متقارن‌شود. ۹ـ حذر عدد ۴ قائم. ۱۱ـ مربع رقم یکانش است وزوج می‌باشد. ۱۲ـ عددی‌است اول که مقلوبش مربع کامل‌است. ۱۳ـ مربع عدد ۱۶ افقی. ۱۴ـ باعدد۱۲ افقی برابراست. ۱۶ـ تکرار یك‌رقم. ۱۷ـ نه‌برابر مقلوبش می‌باشد. ۱۸ـ مقلوبش برابر ۲ است که درمبنای ۲ نوشته‌شود.

قائم: ۱ـ عددی است به‌شکل $\overline{(3a)aa}$. ۲ـ سه برابر عدد ۱۶ افقی. ۴ـ مربع‌عدد ۹ افقی و مقلوب‌آن نیزمربع مقلوب عدد ۹ افقی است. ۵ـ نسبت به‌ارقامش متقارن است. ۶ـ خودش به شکل $\overline{abcbd}$ و متمم حسابیش به شکل $\overline{a3aa}$ است. ۸ـ از سه رقم متوالی تشکیل شده است. ۱۰ـ نصف عدد ۸ قائم. ۱۳ـ مجموع ارقامش برابر ۱۲ است. ۱۵ـ همان عدد۱۳ افقی. ۱۶ـ همان عدد ۱۶ افقی.



بهترین استراتژی چیست؟

بازی است که شاید با آن آشنایی داشته باشید اما ابتدا در چین رواج داشته است؛ یکی ازدو بازیکن ۱۶ نقطه درچهارسطر وچهارستون روی کاغذ می‌نویسد که ما آنها راباحروف مشخص کرده‌ایم. ودو نقطهٔ‌متوالی مثلاA وBرا به‌هم‌وصل‌می‌کند. آنگاه بازیکن‌دوم‌مثلا AE رارسم‌می‌کند. اگر بازیکنی یك خط چنان‌رسم کرد که یك‌مربع تشکیل شدحق‌دارد که بازهم یك خط دیگررسم کند واین‌حق بازهم‌برای وی‌محفوظ است. بازی بین‌دودختر خانم چینی به‌ترتیبی که‌درشکل ملاحظه می‌شود ادامه یافته‌است.

برای بازیکنی که اکنون نوبت اوست بهترین‌استراتژی کدام است؟

تعیین ارقام

در رابطهٔ زیر هر حرف نمایندهٔ یك رقم در دستگاه عددنویسی دهدهی است. این ارقام را پیدا کنید.

۴ . NINE = ۹ . FOUR

اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از : مهندس ایرج ا. شاقی

SIMPLE MACHINES ٦ ـ ماشینهای ساده

Fulcrum	نقطهٔ اتکاء	Lever	اهرم
Effort Arm	بازوی کارگر	Second – Class Lever	اهرم مضاعف
Resistance Arm	بازوی مقاوم	Pulley	قرقره
Friction	اصطکاك	Movable Pulley	قرقرهٔ متحرك
Windlass	چرخ چاه	Fixed Pulley	قرقرهٔ ثابت
Wedge	گوه	Inclined Plane	سطح شیب دار

PRACTICE YOUR READING

A machine is a device used to transform or transfer energy. The efficiency of a simple machine equals :

$$\frac{\text{useful work occomplished}}{\text{total work expended}}$$

In all classes of levers $\frac{\text{Resistance}}{\text{effort}} = \frac{\text{effort arm}}{\text{Resistance arm}}$

پاسخ جدولها و مسئلهٔ صفحهٔ سرگرمیهای شمارهٔ گذشته

۱ ۲	۲ ۴		۳ ۱	۴ ۲	۵ ۸
۶ ۲	۳	۱		۷ ۵	۴
۸ ۴	۲		۹ ۲	۳	
	۱۰ ۱	۱۱ ۲	۱		۱۲ ۱
۱۳ ۸		۱۴ ۲	۵	۱۵ ۲	۰
۱۶ ۱	۱	۲		۱۷ ۸	۰

جدول اعداد

۴	+	۲	÷	۳	X	۴	=۸
—	●	X	●	+	●	X	●
۳	+	۲	X	۳	÷	۵	=۳
X	●	+	●	+	●	+	●
۵	+	۸	−	۴	÷	۱	=۹
+	●	−	●	−	●	+	●
۲	X	۹	+	٦	÷	۳	=۸
=۷	●	=۳	●	=۴	●	=۷	●

تکمیل جدول

پاسخ چرا چنین است :

چون حجم معینی از الکل در حجم معینی از آب حل شود، حجم محلول کمتر از مجموع حجمهای الکل و آب خواهد شد : و اگر نسبت امتزاج الکل و آب به نسبت ۵۸ و ۵۴ باشد این قلت حجم ماکزیمم خواهد بود.

PROBLEMS AND SOLUTIONS

(The Mathematics Student Journal . Vol . 14 ، No . 2)

Problem 9 – Examine the following numerical relationship :

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$

$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$

$46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$

Find and prove a rule for determining all pairs of two – digit numbers that are related in the same way . Find the remaining numerical examples which illustrate this relationship . (Omit examples such as $57 \cdot 75 = 75 \cdot 57$.)

Solution – The. relationship is not limited to two – digit numbers. Thus if .

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots \frac{x_n}{y_n}$$

then

1) $(10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2 + \dots + x_n) \cdot (10^{n-1}y_n + 10^{n-2}y_{n-1} + \dots + y_1) = (10^{n-1}x_n + 10^{n-2}x_{n-1} + \dots + x_1) \cdot (10^{n-1}y_1 + 10^{n-2}y_2 + \dots + y_n)$

l

$= \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = t$

en $x_1 = ty_1 ; x_2 = ty_2 \dots ; x_n = t_n$

ostitute in I

t $)^{n-1}y_1 + 10^{n-2}y_2 + \dots + y_n) \cdot (10^{n-1}y_n + \dots + y_1) = t(10^{n-1}y_n + \dots + y_1) \cdot (10^{n-1}y_1 + \dots + y_n)$

identity

The steps are reversible ; therefore theorem I is true .

For two-digit numbers ، there are eleven pairs in addition to those given in the illustrations viz : 12 . 63 12 . 84 ; 13 . 62 ; 13 . 93 ; 14 . 82 ; 23 . 64 ; 23 . 96 ; 24 . 84 ; 26 . 93 ; 34 . 86 ; 36 . 84 .

Problem 10 : if

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + ac + c^2 = k$$

and $b \neq c$ ، prove that :

$$b^2 + bc + c^2 = k$$

First solution

We have

(1) $(a-b)k = (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

(2) $(a-c)k = (a-c)(a^2+ac+c^2) = a^3 - c^3$

Subtract(2)from(1)

$(c-b)k = c^3 - b^3 = (c-b)(c^2+bc+b^2)$

We may divide by $c-b$ because $b \neq c$.

Hence $k = b^2 + bc + c^2$

Second Solution .

Since $a^2+ab+b^2 = a^2+ac+c^2$ ،

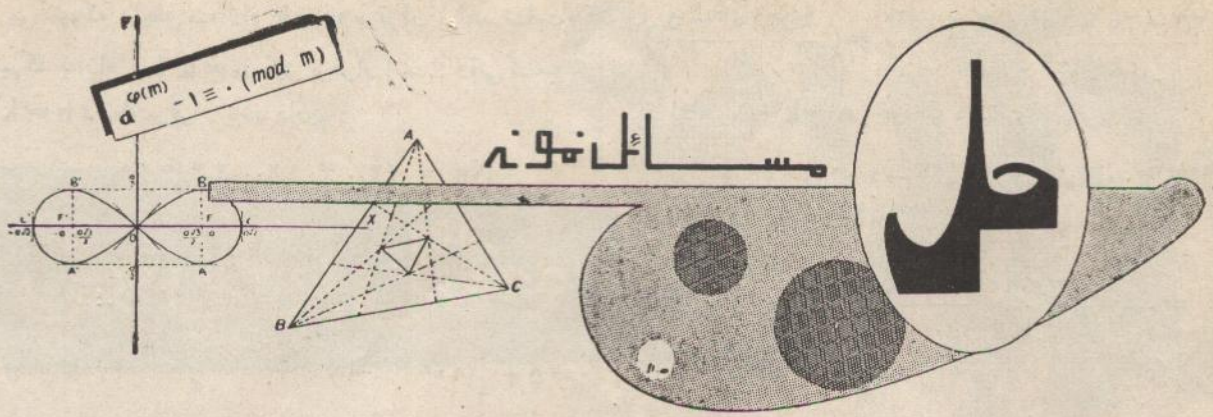
or $b^2 - c^2 + ab - ac = 0$

$(b+c)(b-c) + a(b-c) = (b-c)(a+b+c) = 0$

As in the first solution ، we may divide by $b-c$. Therefore $a+b+c=0$.

Now $b(-a) = a(-b)$; thus $b(b+c) = a(a+c)$

Finally $b(b+c) + c^2 = a(a+c) + c^2 = k$ ؛



یك مسئله از حساب و نوعی تعمیم آن

صورت و حل این مسئله توسط آقایان : **یدالله ارضی** دانشجوی دانشکدهٔ فنی (۱۳۴۵/۵/۱۶) و **سیدجلال آشفته** دانشجوی دانشگاه آریامهر ارسال شده است .

۴۰۹۰ـ عددی به شکل $N=\overline{abba}$ چنان تعیین کنید که اگر یك واحد به آن بیفزائیم حاصل مربع کامل گردد.

حل ـ باید داشته باشیم :

$\overline{abba}+1=k^2$ ، (k عدد صحیح)

بعد از بسط طرف اول خواهیم داشت ؛

$$11(91a+10b)=(k+1)(k-1)$$

طرف اول رابطه مضرب ۱۱ است بنابراین طرف دوم هم مضرب ۱۱ است و دو حالت می‌توانیم در نظر بگیریم :

الف ـ اگر $(k+1)$ مضرب ۱۱ باشد یعنی داشته باشیم $k+1=11M$ در این صورت خواهیم داشت :

$$91a+10b=11M^2-2M$$

$$90a+10b-10M^2=M^2-2M-a$$

$$(M-1)^2=10P+(a+1) \quad (1)$$

باتوجه به اینکه $1001<k^2<9889$ نتیجه خواهیم گرفت که

$$3<M<9 \Longrightarrow 1<P<6$$

در ازاء مقادیر $P=1$ و $P=4$ و $P=5$ و $P=6$ برای a و b جوابهای قابل قبول بدست نمی‌آید .

در ازاء $P=2$ خواهیم داشت :

$$(M-1)^2=21+a \Longrightarrow a=4$$

و از آنجا $b=2$ بدست آمده عدد مطلوب عبارت می‌شود از : ۴۲۲۴

$$4224+1=65^2$$

در ازاء $P=3$ داریم :

$$(M-1)^2=31+a \Longrightarrow a=5 \Longrightarrow b=7$$

و عدد مطلوب برابر است با : ۵۷۷۵

$$5775+1=76^2$$

ب ـ اگر $(k-1)$ مضرب ۱۱ بوده آن را برابر $11N$ فرض کنیم بعد از عملیات لازم خواهیم داشت :

$$(N+1)^2=10Q+(a+1)$$

برای این معادله جوابهای قابل قبول بدست نمی‌آید .

***

نوعی تعمیم ـ صحت رابطهٔ زیر را محقق کنید :

$$\underbrace{44\ldots4}_{n-1\text{ مرتبه}}\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ مرتبه}}4+1=\underbrace{66\ldots6}_{n-1\text{ مرتبه}}5^2$$

اثبات از طریق استقراء ریاضی **توسط : یدالله ارضی)ـ** در ازاء مقادیر ... و ۲ و ۱ = m داریم :

$$24+1=5^2$$

$$4224+1=65^2$$

$$442224+1=665^2$$

$$44422224+1=6665^2$$

فرض می‌کنیم که رابطه به‌ازاء $n=k$ برقرار باشد ثابت می‌کنیم که به‌ازاء $n=k+1$ نیز برقرار است ؛ وقتی که به ازاء $n=k$ رابطه برقرار باشد داریم :

$$N_K = \underbrace{44\ldots4}_{k-1}\underbrace{22\ldots2}_{k}4+1 =$$

$$=1+4+2(10+10^2+\ldots+10^k)+4(10^{k+1}+10^{k+2}+\ldots+10^{2k-1})$$

$$=5+\frac{2}{9}(10^{k+1}-10)+\frac{4\times10^{k+1}}{9}(10^{k-1}+1)$$

$$=\frac{25-20\times10^k+4\times10^{2k}}{9}=\left(\frac{2\times10^k-5}{3}\right)^2$$

در ازاء $n=k+1$ خواهیم داشت :

$$N_{k+1}=N_k+4\times10^{2K}-2\times10^{k+1}+4\times10^{2k+1}$$

$$=\ldots=\left(\frac{2\times10^{k+1}-5}{3}\right)^2$$

و رابطه محقق است .

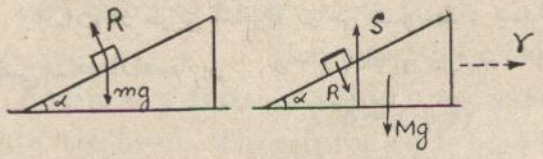
یك مسئلهٔ مکانیك

قابل استفاده برای داوطلبان امتحانات ورودی دانشکده‌ها

ترجمه : هوشنگ شریفزاده

۴۰۹۱ ـ منشوری به‌جرم M که قاعدهٔ آن مثلث قائم‌الزاویه است برسطح افقی صافی طوری قرار گرفته است که یکی از وجوه آن قائم باشد . بروجه دیگر منشور که با افق زاویهٔ α می‌سازد وزنه‌ای به‌جرم m بدون اصطکاك می‌لغزد و در نتیجه منشور هم در سطح افقی حرکت می‌کند . نشان دهید که شتاب حرکت منشور بر سطح افقی $\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ است ، ونیز عکس‌العمل منشور را در مقابل وزنه بدست آورید .

حل ـ درشکل الف نیروهایی‌راکه برجرم m اثرمی‌کنند معرفی کرده‌ایم : mg نیروی وزن و R نیروی عکس‌العمل که عمود بروجه منشور است. درشکل ب نیروهایی‌راکه بر منشور اثر می‌کنند معرفی کرده‌ایم : نیروی R مساوی و غیر همسو با نیرویی که بر وزنهٔ m وارد می‌شود ؛ نیروی وزن منشور یعنی Mg ؛ و نیروی‌عکس العمل‌سطح افقی در مقابل منشور یعنی S



شکل الف　　شکل ب

منشور بطور افقی باشتاب γ حرکت خواهد کرد. وزنهٔ m باشتاب γ' نسبت به منشور بروجه‌منشور به‌طرف پائین‌حرکت می‌کند . بنابراین شتاب m نسبت به‌سطح افقی برآیند تصویر γ' نسبت به‌سطح افقی و γ است . یعنی شتاب نسبی حرکت m نسبت به سطح افقی به‌طرف چپ برابراست با $\gamma'\cos\alpha-\gamma$.

معادلات حرکتی عبارتند از :

برای m : $m\gamma'\sin\alpha=mg-R\cos\alpha$ (۱)

و $m(\gamma'\cos\alpha-\gamma)=R\sin\alpha$ (۲)

برای M : $M\gamma=R\sin\alpha$ (۳)

و $0=S-R\cos\alpha-Mg$

از معادلات (۲) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$m(\gamma'\cos\alpha-\gamma)=M\gamma$$

یا

$$m\gamma'\cos\alpha=(M+m)\gamma$$

و از معادلات (۱) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$\frac{(M+m)\gamma\sin\alpha}{\cos\alpha}=mg-\frac{M\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

یا :

$$(M+m\sin^2\alpha)\gamma=mg\sin\alpha\cos\alpha$$

و همچنین از معادلهٔ (۳) :

$$R=\frac{M\gamma}{\sin\alpha}=\frac{Mmg\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$$

مسائل برای حل

مسائل متفرقه

۴۰۹۲ـ فرستنده : **محسن هاشمی نژاد** ، دبیرستان ابن‌سینا رضائیه .

اگر $a+b>c$ و $c>b>a>0$ باشد ثابت کنید :

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}>\frac{c}{c+1}$$

۴۰۹۳ـ از: **بختیار علیمدد سلطانی**

مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$\frac{x^4+2ax^3+(a^2+1)x^2+2bx+b^2}{x^4+2ax^3+(a^2-1)x^2-2bx-b^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$$

۴۰۹۴ـ ترجمه از: **مجلهٔ تربیت ریاضی**

روی خط Δ سه نقطهٔ A و B و C (B بین A و C) چنان انتخاب شده است که $AB=2BC=2a$ می‌باشد .

۱) اگر R طول معلومی باشد دو دایره به شعاع R و به مراکز O و O' چنان رسم کنید که اولی بر A و B و دومی بر B و C بگذرد و O و O' هر دو در یك طرف Δ واقع باشند: برحسب مقادیر مختلف R بحث کنید. مکان هندسی نقاط O و O' را وقتی که R تغییر می‌کند معلوم کنید .

۲) دو دایرهٔ O و O' غیر از B در یك نقطهٔ دیگر D متلاقی می‌شوند . مکان هندسی نقطهٔ D را وقتی که R تغییر می‌کند تعیین کنید .

۳) اگر J و I به ترتیب نقاط تلاقی OO' با AC و BD باشد طول BJ برحسب a و BD حساب کرده وقتی R تغییر می‌کند مکان I را معلوم کنید .

۴۰۹۵ـ ترجمهٔ : **پرویز خواجه خلیلی**

بین روابط زیر x و y و z را حذف کنید .

$$\begin{cases} y^2+z^2=ayz \\ z^2+x^2=bxz \\ x^2+y^2=cxy \end{cases}$$

۴۰۹۶ ـ از سیروس نخعی آشتیانی

اگر داشته باشیم .

$$f(x)=\frac{a^{\log x}-a^{\log\frac{1}{x}}}{a^{\log x}+a^{\log\frac{1}{x}}}$$

ثابت کنید که :

$$f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} \quad \text{و} \quad f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)-f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

۴۰۹۷ ـ ترجمهٔ: **سیروس مریوانی** دبیرستان آذر ۱

اگر n عدد صحیح مثبتی باشد ثابت کنید که :

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

۴۰۹۸ ـ از **محمدرضا یزدان** دبیرستان ادیب

مجموع زیر را برحسب n بدست آورید .

$$S_n=(11)_2+(22)_3+(33)_4+\dots+(\overline{nn})_{n+1}$$

۴۰۹۹ ـ از **کاظم حافظی**

مجموع زیررا برحسب n حساب کنید .

$$S_n=1\times3^2+3\times5^2+5\times7^2+\dots+$$
$$+(2n-1)(2n+1)^2$$

۴۱۰۰ـ از **محمدجواد غفوری** دانشجوی دانشکدهٔ پلی تکنیك

درکره‌ای به شعاع R منشور منتظم به قاعدهٔ n ضلعی‌را چنان محاط کنید که حجم آن ماکزیمم باشد .

ثانیاً ـ چه نوع منشور منتظمی محاط کنیم (قاعدهٔ آن‌چند ضلعی باشد ؟) تا ماکزیمم حجم آن برابر با $2R^3$ باشد؟

۴۱۰۱ـ از **بختیار علیمدد سلطانی**

اگر $f(x)$ کثیرالجمله‌ای باشد شامل قوای مثبت‌وصحیح x و $f'(x)$ مشتق آن باشد تابع $y_1=f(x)$ را چنان مشخص کنید که اگر $y_2=f[f'(x)]$ و $z=\frac{y_2}{y_1}$ باشد داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} z=1 \quad \text{و} \quad \lim_{z\to\pm\infty} x=\pm 1$$

۴۱۰۲ـ ترجمهٔ **سالار محمودی** دبیرستان محمدرضا شاه پهلوی رشت

صفحهٔ P ودو نقطهٔ A و B واقع در خارج آن‌مفروض است. مکان هندسی نقاطی ازصفحهٔ P را بیابید که نسبت‌فواصل آنها از A و B برابر با مقدار معلوم k باشد .

۴۱۰۳ـ ترجمه از **مجلهٔ ریاضیات آمریکا**

در مثلث ABC نقاط D و E و F را بـه ترتیب بر اضلاع AB و BC و CA انتخاب می‌کنیم. اگـر G نقطهٔ تلاقی AE و DF باشد ثابت کنید که :

$$\frac{DG}{GF}=\frac{AD\cdot BE\cdot AC}{AF\cdot CE\cdot AB}$$

۴۱۰۴ـ ترجمه از **مجلهٔ ریاضیات آمریکا**

اگر I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و r طول شعاع این دایره باشد ثابت کنید که :

$$AI+BI+CI>6r$$

۴۱۰۵ـ ترجمه از **مجلهٔ ریاضیات آمریکا**

مثلث ABC در دایرهٔ O محاط است بقسمی که مرکز دایره داخل مثلث واقع است. ثابت کنید که‌حداقل مقدار محیط مثلث می‌تواند دوبرابر قطر دایره باشد .

۴۱۰۶ـ از : **صفر علی لشکر بلوکی** دبیرستان دارالفنون .

عددی چهاررقمی چنان تعیین کنید که شرط زیر در آن صدق کند .

$$\overline{mcdu}=m+c^2+d^3+u^4$$

۴۱۰۷ـ ترجمه از انگلیسی

به ازاء چه مقادیر n مجموع زیر مربع کامل است.

$$\sum_{k=1}^{n} k^5$$

۴۱۰۸ـ ترجمه از فرانسه .

یك‌محور وروی آن یك مبدأ O ودو نقطهٔ A و B با طولهای مثبت a و b $(a<b)$ داده شده است . براین محور دونقطهٔ I و J تعیین می‌کنیم بقسمی که $\overline{OI}^2=\overline{OJ}^2=ab$ باشد (I بین A و B) و زوجهای نقاط

$(A_1$ و $B_1)$ و $(A_2$ و $B_2)$ و ... و $(A_n$ و $B_n)$ و ...

باطولهایی به‌ترتیب برابربا :

$(a_1$ و $b_1)$ و $(a_2$ و $b_2)$ ... و $(a_n$ و $b_n)$ ... و

انتخاب شده‌اند که طولهای آنها در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$a_1=\frac{a+b}{2} \quad \text{و} \quad a_2=\frac{a_1+b_1}{2} \quad \text{و} \quad \dots$$

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{1} \quad \text{و} \quad \dots$$

$$b_1=\frac{2ab}{a+b} \quad \text{و} \quad b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1} \quad \text{و} \quad \dots$$

$$b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} \quad \text{و} \quad \dots$$

۱) نقاط A_1 و B_1 چگونه روی محور واقع شده‌اند ؟ آنها را از راه تـرسیم تعیین کنید و بعد از آن از راه تعمیم نوع شکل حاصل ازپنج نقطهٔ O و A_{n-1} و B_{n-1} و A_n و B_n را تعیین کنید . واز آن اوضاع نسبی نقاط A ، B ، A_1 ، B_1 ، ... ، A_n و B_n و ... را معلوم کنید .

۲) ثابت کنید که :

$$ab=a_1b_1=a_2b_2=\dots=a_nb_n=\dots$$

واز روی آن اوضاع نسبی زوجهای نقاط

$(A_1$ و $B_1)$ و $(A_2$ و $B_2)$ و ... و $(A_n$ و $B_n)$ و ...

را نسبت به زوج (I و J) تعیین کنید و نوع تغییر مکان این نقاط را وقتی که عدد صحیح n ترقی می‌کند معلوم نمائید.

۳) نامساویهای زیررا ثابت کنید .

$$a<b_1<b_2<\dots<b_n<\dots<\sqrt{ab}<\dots$$
$$<a_n<\dots<a_2<a_1<b$$

و ... و $A_2B_2 < \frac{1}{2}A_1B_1$ و $A_1B_1 < \frac{1}{2}AB$

$$A_nB_n < \frac{1}{2}A_{n-1}B_{n-1}$$

و نتیجه بگیرید که :

$$A_nB_n < \frac{1}{2^n}AB$$

وقتی که n به‌سمت بینهایت میل کند حدتفاضل $a_n - b_n$ را تعیین کرده و در این حال وضع نقاط A_n و B_n را معلوم کنید .

۴) دوعدد از نوع (a_n و b_n) نسبت به $\sqrt{ab}$ چه‌وضعی خواهند داشت ؟ و با استفاده از آن مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ را حساب کنید .

یك مسئله مربوط به ریاضیات جدید

ترجمه از فرانسه

۴۱۰۹- یك مجموعهٔ R در نظر می‌گیریم . اگر A زیر مجموعه‌ای از R باشد ، زیر مجموعهٔ متمم A را با $\bar{A}$ و چنانچه A محدود باشد تعداد عناصر آن را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم .

۱) مجموعهٔ R را به‌صورت یك‌مستطیل و دوزیرمجموعهٔ A و B از آن را با دو دایرهٔ متقاطع (A) و (B) نمایش دهید . هر یك از چهار ناحیه‌ای را که داخل مستطیل تشکیل می‌شود با استفاده از علامتهای $\cup$ و $\cap$ بین A و B نشان دهید و ثابت کنید که :

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ و } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

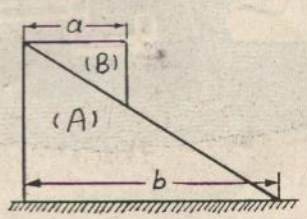
$$(1) \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

۲) سه زیر مجموعهٔ A و B و C از R را در نظر می‌گیریم و آنها را به‌صورت سه دایرهٔ دو به دو متقاطع (A) و (B) و (C) داخل مستطیل (R) نمایش می‌دهیم که ناحیهٔ داخلی مستطیل را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنند . هریك از این هشت ناحیه را با استفاده از نشانه‌های اشتراك و اجتماع بین A و B و C نشان دهید و رابطه‌ای نظیر رابطهٔ (۱) برای $n(A \cup B \cup C)$ بدست آورید .

چند مسئلهٔ فیزیك

۴۱۱۰- ترجمهٔ محمدصادق اریشه‌میان

منشور همگن B روی منشور همگن A که آنهم روی سطح افقی است قرار گرفته‌است (مقطع دو منشور مطابق شکل مقابل است) . وزن منشور A سه برابر وزن منشور B است.



به‌فرض اینکه درتماس منشورها و سطح افقی هیچگونه‌اصطکاکی وجود نداشته باشد طول l مقدار تغییرمکان منشور A را روی سطح افقی تعیین کنید وقتی که B لیز می‌خورد و به پائین می‌رسد .

۴۱۱۱- از هوشنگ شریفزاده

قمر مصنوعی معمولا به‌صورت یك شیء نورانی درآسمان دیده می‌شود . حداقل ارتفاع قمر مصنوعی که بالای‌خط‌استوای زمین حرکت می‌کند از زمین چقدر باشد تا درست دو ساعت بعداز غروب آفتاب درسمت الرأس قابل رؤیت باشد. طول‌شعاع زمین برابر است با: $6/37 \times 10^6 m$.

۴۱۱۲- ازهوشنگ شریفزاده

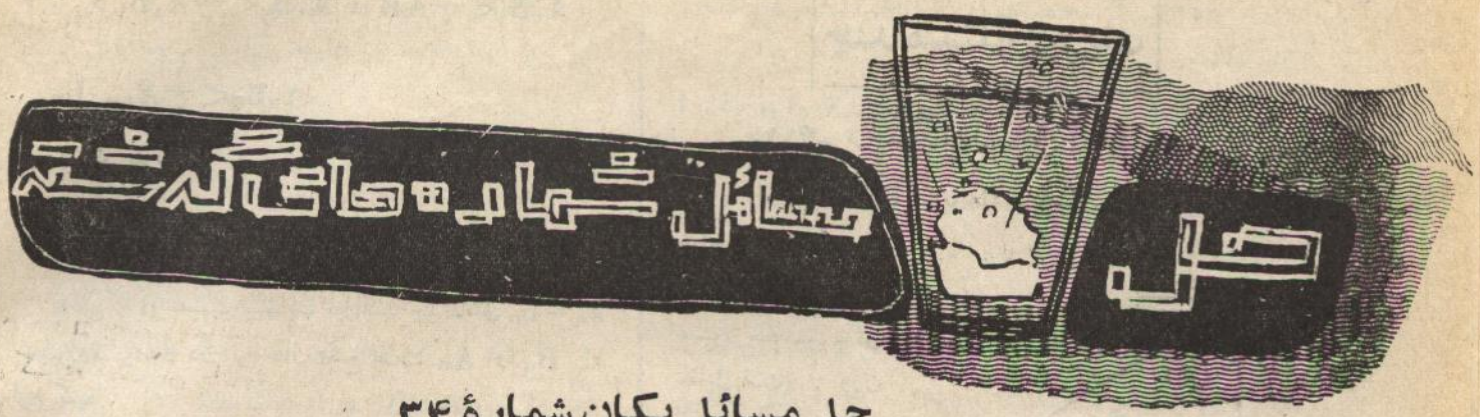
در یك عدسی همگرا کمترین فاصلهٔ بین جسم‌تاتصویرش چقدر است ؟

دو مسئلهٔ شیمی

ترجمهٔ : حسین جواهری

۴۱۱۳- ۱۵ گرم ارگن در 90° سانتیگراد و فشار ۷۳۵ میلیمتر جیوه چه حجمی را اشغال خواهد کرد ؟

۴۱۱۴- مقداری PCl_5 در یك ظرف ۱۲ لیتری تا ۲۵۰ درجهٔ سانتیگراد حرارت داده شد . در حالت تعادل ، ظرف محتوی ۰/۲۱ مول از PCl_5 و ۰/۳۲ مول‌از PCl_3 ونیز ۰/۳۲ مول از Cl_2 می‌باشد . پیدا کنید ثابت تعادل را برای PCl_5 در 250° سانتیگراد زمانی‌که غلظت‌ها برحسب مل در لیتر داده می‌شود .



حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۴

۴۰۴۱ ـ اگر a و b و c اعداد مثبتی باشند از رابطهٔ: $a^2+b^2=c^2$ نتیجه بگیرید که : $c<a+b<c\sqrt{2}$

حل ـ اگر رابطهٔ مفروض به‌صورت :

$$(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$$

نوشته شود نتیجه می‌شود که کمانی حاده مانند α وجود دارد که

$$\sin\alpha=\frac{a}{c} \quad و \quad \cos\alpha=\frac{b}{c}$$

باشد . از اتحاد :

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$$

با توجه به‌اینکه α حاده است نتیجه می‌شود که :

$$1<\sin\alpha+\cos\alpha<\sqrt{2}\Longrightarrow 1<\frac{a}{c}+\frac{b}{c}<\sqrt{2}$$

۴۰۴۲ـ معادله‌ای باکمترین درجه و با ضرایب منطق صحیح تشکیل دهید که یك ریشهٔ آن عبارت باشد از :

$$x_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

حل ـ چون $x_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ یك ریشهٔ معادله است اگر طرفین این رابطه را به‌قوهٔ ۲ برسانیم باز $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ یکی از ریشه‌های معادله می‌باشد چون به‌همین ترتیب ادامه‌دهیم خواهیم داشت :

$$x_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}\Longrightarrow x^2-5=-2\sqrt{6}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x^4-10x^2+1=0$$

۴۰۴۳ ـ اگر $f(x)=a+bx$ باشد تحقیق کنید که :

$$\underbrace{fff\cdots f}_{n\ مرتبه}(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^nx$$

حل ـ داریم ؛

$$f(x)=a+bx$$
$$ff(x)=a+ab+b^2x$$
$$fff(x)=a+ab+ab^2+b^3x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$fff\cdots f(x)=a+ab+ab^2+\cdots+ab^{n-1}+b^nx$$

و یا

$$fff\cdots f(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^nx$$

۴۰۴۴ ـ اگر عدد صحیح $r\neq 1$ ریشهٔ معادلهٔ : $f(x)=0$ باشد ثابت کنید که $f(1)$ بر $(r-1)$ بخش پذیر است .

حل ـ صورت کلی معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

$f(r)$ و $f(1)$ را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} f(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0 \\ f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n \end{cases}$$

از تفاضل این دو رابطه نتیجه می‌شود .

$$-f(1)=a_0(r^n-1)+a_1(r^{n-1}-1)+\cdots$$
$$+a_{n-1}(r-1)$$

چنانچه‌ملاحظه می‌شود هر پرانتز طرف دوم بر $r-1$ بخش پذیر است بنابراین می‌توان نوشت :

$$-f(1)=(r-1)\cdot q\Longrightarrow f(1)=(r-1)\cdot(-q)$$

۴۰۴۵ ـ اگر $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ باشد با استفاده از رابطهٔ :

$$\log f(x)-\log f(y)=\log f(R)$$

تابع R را برحسب x و y بدست آورید .

حل ـ با استفاده از رابطهٔ فوق داریم :

$$\log\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}-\log\sqrt{\frac{y-2}{y+2}}=\log f(R)$$

$$\frac{1}{2}[\log(x-2)-\log(x+2)-\log(y-2)+\log(y+2)]=\log f(R)$$

$$\frac{1}{2}[\log\frac{(x-2)(y+2)}{(x+2)(y-2)}]=\log f(R)$$

$$f(R)=\sqrt{\frac{xy-2y-4+2x}{xy-2x-4+2y}}\Longrightarrow R=\frac{xy-4}{y-x}$$

۴۰۴۶ـ اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^2-px+q=0$$

بوده و $S_n=a^n+b^n$ باشد بااستفاده از دستگاه زیر مقادیر p و q را بدست آورید :

$$\begin{cases}S_3+S_2=4\\ S_{2-1}=2\end{cases}$$

حل ـ هریك از مقادیر S_3 و S_2 و S_{2-1} را برحسب p و q محاسبه می‌کنیم :

$$S_3=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=p^3-3pq$$

$$S_2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=p^2-2q$$

$$S_{2-1}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\Longrightarrow(S_{2-1})^2=a+b+2\sqrt{ab}$$

$$=p+2\sqrt{q}\Longrightarrow S_{2-1}=\sqrt{p+2\sqrt{q}}$$

مقادیر S_3 و S_2 و S_{2-1} را در دستگاه فوق قرار می‌دهیم .

$$\begin{cases}p^3-3pq+p^2-2q=4\\ p+2\sqrt{q}=4\end{cases}$$

p را از معادلهٔ دوم حساب کرده ودر معادلهٔ اول قرار دهیم معادلهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$q\sqrt{q}-19q+56\sqrt{q}-38=0$$

این معادله یك ریشهٔ $q=1$ داردو بااستفاده ازهمین ریشه‌می‌توانیم ریشه‌های دیگر آن را بدست‌آوریم پس ازحل نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases}q=1 \text{ و } p=2\\ q=124\pm18\sqrt{43}\quad p=-14\pm2\sqrt{43}\end{cases}$$

۴۰۴۷ـ هرگاه ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ درجهٔ سوم :

$$ax^3-bx^2+bx-c=0$$

اعداد صحیح و مثبت باشند حداقل مقداری‌که هریك از ریشه‌ها و ضرایب می‌توانند قبول کنند تعیین کنید .

حل ـ روابط بین ضرایب وریشه ها رامی‌نویسیم :

$$x_1+x_2+x_3=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{b}{a}$$

باضرب کردن طرفین این رابطه در ۲ و نقل یك طرف به‌طرف دیگر نتیجه می‌شود :

$$(x_1+x_2-2x_1x_2)+(x_2+x_3-2x_2x_3)+(x_1+x_3-2x_1x_3)=0$$

هر یك از جمل‌داخل پرانتز کوچکتر یامساوی صفر است(زیرا اگر a و b دوعدد صحیح مثبت باشند ، از آنجاکه‌عکس هر عدد صحیح کوچکتر یامساوی واحد است نتیجه می‌شود :

$$(a+b-2ab\leqslant0 \quad \text{و یا} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant2$$

و وقتی مجموع چند جمله کوچکتر یا مساوی صفر برابر صفر باشند لازم‌می‌آید که هریك از آن مقادیر برابر صفر باشندیعنی:

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_1x_2=0\\ x_2+x_3-2x_2x_3=0\\ x_1+x_3-2x_1x_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2\\ \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=2\\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}=2\end{cases}$$

مجموع معکوسات دوعدد صحیح و مثبت برابر ۲ شده است‌این رابطه نمی‌تواند درست باشد مگر اینکه :

$$x_1=x_2=x_3=1$$

برای تعیین ضرایب a و b و c داریم :

$$ax^3-bx^2+bx-c\equiv a(x-1)^3$$

$$\text{ویا}\quad x^3-\frac{b}{a}x^2+\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}\equiv x^3-3x^2+3x-1$$

از اتحاد فوق نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=3\\ \frac{c}{a}=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=1\end{cases}$$

۴۰۴۸ـ مطلوبست‌تعیین مقادیر x و y از دستگاه‌زیر:

$$\begin{cases}2\log_x2=2x\log_xy+5y\\ 5\log_y2=2y\log_yx+5x\end{cases}$$

حل ـ دستگاه فوق را چنین می‌نویسیم :

$$\begin{cases}2\log_x2=2x\log_xy+5y\log_xx\\ 5\log_y2=2y\log_yx+5x\log_yy\end{cases}$$

ویا :

$$\begin{cases} \log_x 2^2 = \log_x y^{2x} \times x^{5y} \\ \log_y 2^5 = \log_y x^{2y} \times y^{5x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2^2 = y^{2x} \times x^{5y} \\ 2^5 = x^{2y} \times y^{5x} \end{cases}$$

با انتخاب مجهول معاون $y^x = A$ و $x^y = B$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2^2 = A^2 \times B^5 \\ 2^5 = B^2 \times A^5 \end{cases}$$

از تقسیم این دورابطه برهم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{8} = \frac{B^3}{A^3} \Longrightarrow A = 2B$$

اگر در معادلهٔ اول به جای A مقدارش را برحسب B قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$2^2 = 2^2 \times B^7 \Longrightarrow B = 1 \text{ و } A = 2$$

بنابراین :

$$\begin{cases} y^x = 2 \\ x^y = 1 \end{cases}$$

از رابطهٔ $x^y = 1$ نتیجه می‌شود که یا $x = 1$ ویا $y = 0$ است ولی در رابطه $y^x = 2$ داریم $y \neq 0$ بنابراین $x = 1$ قابل قبول بوده و از آنجا $y = 2$ بدست می‌آید:

۴۰۴۹ـ مطلوبست تعیین x از معادلهٔ زیر

$$\log_a x \cdot \log_b c(1 + \log_c a) = \log_b x \log_c x \log_a c$$

حل ـ می‌دانیم که $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ بنابراین :

$$\log_a x \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b}\left(1 + \frac{1}{\log_a c}\right)$$

$$= \frac{\log_a x}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a c} \cdot \log_a c$$

و یا :

$$\log_a x(\log_a c + 1) = (\log_a x)^2$$

$$\log_a x(\log_a c + 1 - \log_a x) = 0$$

۱) $\log_a x = 0 \Longrightarrow x_1 = 1$

۲) $\log_a c + 1 - \log_a x = 0$

$$\Longrightarrow \log_a x = \log_a a + \log_a c \Longrightarrow x_2 = ac$$

۴۰۵۰ـ معادلهٔ زیر را حل و بحث کنید:

$$\cos(a+1)x + \cos(b-1)x - \cos(a+b)x = 1$$

حل ـ داریم:

$$\cos(a+\ )x - \cos(a+b)x = 1 - \cos(b-1)x$$

ویا:

$$2\sin\frac{b-1}{2}x \sin\frac{2a+b+1}{2}x =$$

$$= 2\sin^2\frac{b-1}{2}x$$

$$\sin\frac{b-1}{2}x$$

$$\left[\sin\frac{2a+b+1}{2}x - \sin\frac{b-1}{2}x\right] = 0$$

۱) $\sin\dfrac{b-1}{2}x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2k\pi}{b-1}$

۲) $\sin\dfrac{2a+b+1}{2}x = \sin\dfrac{b-1}{2}x$

$$\Longrightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{a+b} \text{ و } x = \frac{2k\pi}{a+1}$$

جوابهای فوق در صورتی وجود دارند که

$a \neq -1$ و $b \neq 1$ و $a \neq -b$

۴۰۵۱ـ نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید.

$$|y + x - 2| + |y - 2x + 1| = 6$$

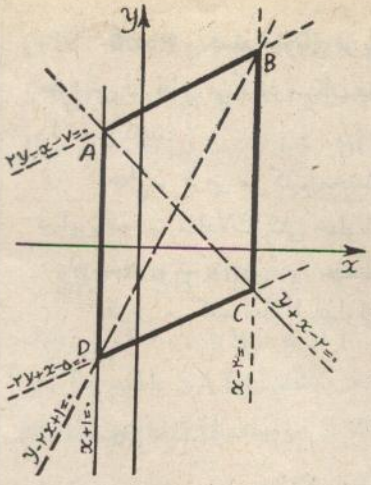
حل ـ اگر $a \geq 0$ باشد داریم $|a| = a$ ودرحالت $a < 0$ داریم $|a| = -a$ بنابراین تساوی بالابا دستگاههای زیرمعادل می باشد :

$$\begin{cases} y + x - 2 + y - 2x + 1 = 6 \\ y + x - 2 \geq 0 \\ y - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

یا

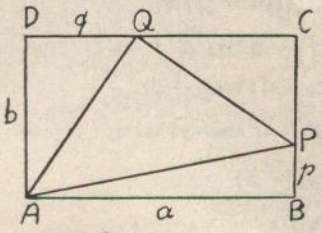
$$(1) \begin{cases} 2y - x - 7 = 0 \\ y + x - 2 \geq 0 \\ y - 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} -3x - 3 = 0 \\ y + x - 2 < 0 \\ y - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x - 9 = 0 \\ y + x - 2 \geq 0 \\ y - 2x + 1 < 0 \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} -2y + x - 5 = 0 \\ y + x - 2 < 0 \\ y - 2x + 1 < 0 \end{cases}$$



نمایش هندسی هریك از چهاردستگاه بالا رادریك شکل رسم می‌کنیم AB نمودار دستگاه (۱) AD نمودار دستگاه (۲) BC نمودار دستگاه (۳) و CD نمودار دستگاه (۴) بوده متوازی‌الاضلاع ABCD نمایش هندسی تابع مفروض می‌باشد.

۴۰۵۲ـ مربع مستطیل ABCD به ابعاد $AB=a$ و $BC=b$ مفروض است بر ضلعهای BC و CD نقطه های P و Q را به ترتیب به فاصله های $BP=p$ و $DQ=q$ اختیار می‌کنیم اگر $p+q=m$ و m مقدار ثابت باشد مساحت مثلث APQ را بر حسب a و b و p و q حساب کرده و کمترین مقدار آنرا معلوم کنید.



حل ـ طبق شکل می‌توان نوشت:

$$S_{APQ}=S_{ABCD}-(S_{APB}+S_{PCQ}+S_{QDA})$$

$$S_{ABCD}=ab \quad و \quad S_{ABP}=\frac{ap}{2} \quad و$$

$$S_{PCQ}=\frac{(b-p)(a-q)}{2} \quad و \quad S_{QDA}=\frac{bq}{2}$$

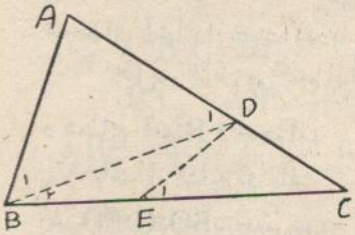
$$S_{APQ}=ab-(\frac{ap}{2}+\frac{ab-ap-bq+pq}{2}+\frac{bq}{2})$$

$$S_{APQ}=ab-\frac{ab+pq}{2}=\frac{1}{2}(ab-pq)$$

برای آنکه مساحت کمترین مقدار خود را اختیار کند باید pq بزرگترین مقدار را داشته باشد و چون $p+q=m$ مقدار ثابتی است حاصل ضرب pq وقتی ماکزیمم می‌شود که $p=q=\frac{m}{2}$ باشد و در این حال مقدار مساحت APQ برابر خواهد بود با:

$$S_{Max}=\frac{1}{2}(ab-\frac{m^2}{4})$$

۴۰۵۳ـ مثلثی رسم کنید که در آن زاویهٔ B دوبرابر زاویهٔ C بوده طول ضلع $BC=a$ وتفاضل یا مجموع دوضلع دیگر ($AC+AB=l$ یا $AC-AB=l$) معلوم باشد.



حل حالت اول ـ به اندازهٔ AB روی AC جدا کنیم $DC=l$ خواهد بود و $B_1=D_1$ اما $D_1=C+B_2$ می‌باشد پس $B_1=C+B_2$ و بالاخره نتیجه می‌شود:

$$C=2B_2$$

به مرکز D و به شعاع DC کمانی رسم می‌کنیم تا BC را در E قطع کند از D به E وصل می‌کنیم چون $DE=DC$ است پس $C=E_1=2B_2$ می‌باشد اما در مثلث EBD داریم

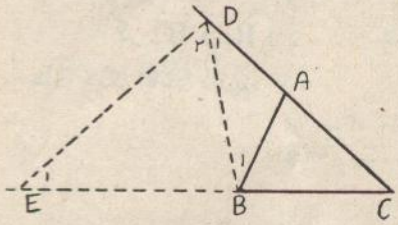
$$E_1=B_2+D_2 \Longrightarrow B_2=D_2$$

یعنی مثلث EBD متساوی الساقین است بنابراین:

$$EC=BC-BE \quad و \quad DC=DE=EB$$

معلوم‌اند.

طرز رسم ـ مثلث متساوی‌الساقین DEC با داشتن سه ضلع قابل رسم است سپس ازنقطهٔ C خط CE را مساوی CB امتداد می‌دهیم و عمودمنصف DB را رسم می‌کنیم تا امتداد DC را در نقطهٔ A قطع کند مثلث ABC جواب مسئله است.



حالت دوم ـ درامتداد AC پاره‌خط AD را مساوی AB جدا می‌کنیم و از D به B وصل می‌کنیم به مرکز D و به شعاع DC کمانی رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در E قطع کند به طریق مشابه با حالت اول ثابت می‌شود که مثلث EDB متساوی‌الساقین است و

$$ED=EB=DC=1$$

معلوم است و

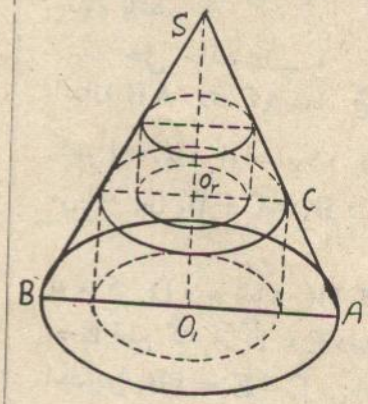
$$EC=BC+EB \Longrightarrow EC=1+a$$

طرز رسم مثلث متساوی‌الساقین DEC را با داشتن سه ضلع رسم می‌کنیم سپس روی CE ضلع CB را جدا می‌کنیم و عمودمنصف DB را رسم می‌کنیم تا DC را در A قطع کند مثلث ABC جواب مسئله است.

۴۰۵۴ـ در مخروط دواری به‌شعاع قاعدهٔ R و به‌ارتفاع 2R استوانه‌ای به حجم ماکزیمم محاط می‌کنیم، سپس در مخروطی که بین رأس مخروط اولی و قاعدهٔ استوانه پدیدمی‌آید بازاستوانه‌ای

به حجم ماکزیمم محاط می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم. اگر تعداد استوانه‌های محاطی نامحدود شود حد مجموع حجمهای آنها را بدست آورید

حل- فرض می‌کنیم ارتفاع استوانه اول $O_1O_2 = x$ و شعاع آن R_1 و حجم آن V_1 باشد از تشابه دو مثلث SO_1A و SO_2C نتیجه می‌شود



$$\frac{R}{R_1} = \frac{SO_1}{SO_2} = \frac{2R}{2R - x}$$

$$\Longrightarrow R_1 = R - \frac{x}{2}$$

$$v_1 = \pi x (R - \frac{x}{2})^2$$

$$V_1' = \pi (R - \frac{x}{2})^2 - \pi x (R - \frac{x}{2})$$

از معادلهٔ $v_1' = 0$ دوجواب بدست می‌آید. یکی $x = 2R$ که به ازاء آن حجم استوانه می‌نیمم می‌شود ودیگری $x = \frac{2R}{3}$ که به ازاء آن حجم استوانه ماکزیمم می گردد که برابر خواهد بود با

$$V_1 = \frac{8}{27}\pi R^3$$

اگر R_2 و R_3 و . . . شعاعهای قاعده‌های استوانه‌های دیگر باشد داریم:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_3} = \dots\dots = a$$

$$\frac{R}{R_1} = \frac{R}{R - \frac{x}{2}} = a \Longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

اگر حجم استوانه‌ها را به‌ترتیب V_1 و V_2 و V_3 و.... بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_2}{V_3} = \frac{V_3}{V_4} = \dots = a^3$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots\dots$$

$$V = V_1 + \frac{8}{27}V_1 + \frac{8}{27} \times \frac{8}{27}V_1 + \dots$$

$$V = V_1[1 + \frac{8}{27} + (\frac{8}{27})^2 + \dots] = \frac{27}{19}V_1$$

$$V = \frac{8}{19}\pi R^3$$

۴۰۵۵ - دسته‌خطوطی بریك نقطهٔ معین گذشته وهذلولی مفروضی را قطع می‌کنند مکان هندسی اوساط وتر های حاصل را تعیین کنید:

حل- فرض می‌کنیم مختصات نقطهٔ ثابت α و β باشد دراین صورت معادلات کلی خطوطی که از این‌نقطه می گذرند

$$y - \beta = m(x - \alpha) \Longrightarrow y = mx - m\alpha + \beta$$

فرض می‌کنیم معادلهٔ هذلولی مفروض عبارت باشد از

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

بنابراین:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx - m\alpha + \beta)^2}{b^2} = 1$$

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 + 2a^2m(m\alpha - \beta) +$$
$$+ 2a^2m\alpha\beta - a^2\beta^2 - a^2m^2\alpha^2 - a^2b^2 = 0$$

اگر در این معادله $\Delta' > 0$ باشد در این صورت خط هذلولی را در دو نقطه به طولهای x' و x'' قطع کرده وداریم

$$x' + x'' = -\frac{2a^2m(m\alpha - \beta)}{b^2 - a^2m^2}$$

چون نقاط تقاطع روی خط واقع‌اند بنابراین

$$\begin{cases} y' - \beta = m(x' - \alpha) \\ y'' - \beta^2 = m(x'' - \alpha) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y' + y'' = m(x' + x'') - 2m\alpha + 2\beta$$

ویا

$$y' + y'' = -\frac{2a^2m^2(m\alpha - \beta)}{b^2 - a^2m^2} - 2m\alpha + 2\beta$$

اگرمختصات وسط وتر های مفروض را X و Y فرض کنیم، در این صورت :

$$\begin{cases} X = \dfrac{ma^2(m\alpha - \beta)}{a^2m^2 - b^2} \\ Y = \dfrac{b^2(m\alpha - \beta)}{a^2m^2 - b^2} \end{cases}$$

از حذف m بین این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{(X - \frac{\alpha}{2})^2}{a^2} - \frac{(Y - \frac{\beta}{2})^2}{b^2} = \frac{\alpha^2}{4a^2} + \frac{32}{4b^2}$$

معادلهٔ یك هذلولی بدست می‌آید. ممکن است تمام یا قسمتی از این هذلولی مکان مطلوب باشد برحسب اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم بالا به ازاء چه مقادیری از m دارای جواب باشد

۴۰۵۶ـ هرم منتظم SABC مفروض است از نقطهٔ O' واقع بر ارتفاع SO یاامتداد آن صفحه‌ای طوری رسم می‌کنیم تا یالهای SA و SB و SC را به ترتیب در نقاط A' و B' و C' قطع کند ثابت کنید که:

$$\frac{1}{SA'}+\frac{1}{SB'}+\frac{1}{SC'}=\text{مقدار ثابت}$$

حل (از کارونه) ـ اگر a و h و v به ترتیب طول یال جانبی، ارتفاع وحجم هرم‌منتظم SABC باشند به‌آسانی معلوم می‌شود که حجم هریك از هرمهای SOAB وSOBC وSOAC برابر $\frac{v}{3}$ خواهد بود. حال بافرض آنکه $SO'=l$ باشد داریم:

$$\frac{\text{حجم } SO'A'B'}{\text{حجم } SOAB}=\frac{SO'\cdot SA'\cdot SB'}{SO\cdot SA\cdot SB}=\frac{l\cdot SA'\cdot SB'}{h\cdot a^2}$$

$$\frac{\text{حجم } SO'B'C'}{\frac{v}{3}}=\frac{l\cdot SB'\cdot SC'}{h\cdot a^2}$$

و

$$\frac{\text{حجم } SO'C'A'}{\frac{v}{3}}=\frac{l\cdot SC'\cdot SA'}{h\cdot a^2}$$

از جمع طرفین سه تساوی فوق عضو به عضو داریم:

$$\frac{3\,\text{حجم } SA'B'C'}{v}=\frac{l}{h\cdot a^2}(SA'\cdot SB'+SB'\cdot SC'+SC'\cdot SA')$$

و اما

$$\frac{\text{حجم } SA'B'C'}{v}=\frac{SA'\cdot SB'\cdot SC'}{a^3}$$

بنابراین:

$$3SA'\cdot SB'\cdot SC'=\frac{al}{h}(SA'\cdot SB'+SB'\cdot SC'+SC'\cdot SA')$$

که چون طرفین تساوی را بر:

$$\frac{al}{h}SA'\cdot SB'\cdot SC'$$

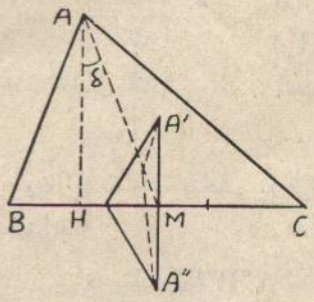
تقسیم کنیم پس از اختصارات داریم؛

$$\frac{1}{SA'}+\frac{1}{SB'}+\frac{1}{SC'}=\frac{3h}{al}$$

۴۰۵۷ـ هریك از ضلعهای مثلث ABC را به سه‌قسمت برابر تقسیم کرده روی‌قسمتهای وسط‌مثلثهای متساوی‌الاضلاع (در داخل و درخارج مثلث) می‌سازیم رأسهای‌مثلثهای‌حاصل وغیرمتکی بر ضلعهای مثلث مفروض را در داخل به A' و B' و C' و در خارج به A" و B" و C" می‌نمائیم.

اولاـ ثابت کنید که مساحت مثلث A"B"C" برابر است با مجموع مساحتهای دومثلث ABC و A'B'C'

ثانیاـ ثابت کنید که مرکز ثقل سه مثلث ABC و A'B'C' و A"B"C" بر یکدیگر منطبق است.



حل ـ اولاـ وسط ضلع BC را M و ارتفاع AH را برابر h و مراکز ثقل‌مثلث‌های A'B'C' و A"B"C" را به‌ترتیب g' و g" می‌نامیم در شمارهٔ ۳۰ یکان ثابت کردیم که مثلثهای A'B'C' و A"B"C" متساوی‌الاضلاع هستند

$$A'B'^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}-\frac{2S}{\sqrt{3}}$$

و

$$A''B''^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{2S}{\sqrt{3}}$$

$$S_{ABC}=S \text{ و } S_{A'B'C'}=S' \text{ و } S_{A''B''C''}=S''$$

$$S'=(A'B')^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6}-\frac{2S}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S''=(A''B'')^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{2S}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}$$

از تفاضل دو رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود

$$S''-S'=\frac{4S\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=S \Rightarrow S''=S+S'$$

ثانیاـ چون $A'M \perp BC$ بنا براین $AH \parallel A'M$ و $A'MA=\delta$ فرض می‌کنیم

$$(A'g)^2=(gM)^2+(MA')^2-2gM\cdot MA'\cos\delta$$

$$gM=\frac{AM}{3} \text{ و } gM^2=\frac{AM^2}{9}$$

$$=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{36} \text{ و } MA'=\frac{a\sqrt{3}}{2\times 3}$$

و

$$(MA')^2=\frac{a^2}{12}$$

$$(A'g)^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{36}+$$

$$+\frac{a^2}{12}-\frac{2a}{2\sqrt{3}}\times\frac{1}{3}AM\cos\delta$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{18}-\frac{ah}{3\sqrt{3}}=\frac{a^2+b^2+c^2}{18}-\frac{2S}{3\sqrt{3}}$$

حاصل عبارتی متقارن است و خواهیم داشت

$$A'g'=C'g'=B'g'$$

و چون g' نقطه‌ای منحصر به فرد است پس g و g' بر هم منطبق‌اند.

برای مثلث $A''B''C''$ محاسبات کاملا مشابه و استدلال یکی است

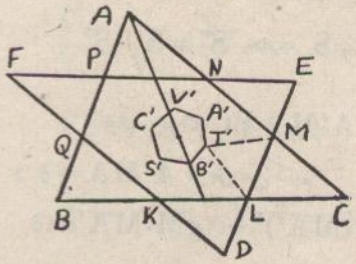
$$(gM)^2+(MA'')^2+2MA''\cdot gM\cos\delta=A''g^2$$

$$A''g^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{18}+\frac{2S}{3\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow A''g=B''g=C''g$$

بازهم گوئیم چون مرکز ثقل مثلث $A''B''C''$ منحصر به فرد و $A''g''=B''g''=C''g''$ است پس لازم است g بر g'' منطبق شود. بنابراین مرکز ثقل سه‌مثلث همان g خواهد بود.

۴۰۵۸ـ در مسئلهٔ بالا هرگاه نقاط K، L، M، N، P، Q، نقاطی باشند که به ترتیب ضلعهای BC و CA و AB را به‌سه‌قسمت برابر تقسیم کرده‌اند و به ضلعهای KQ و LM و NP مثلثهائی متساوی‌الاضلاعی (در داخل مثلث) بسازیم و رأسهای دیگر این مثلثها را V' و T' و S' بنامیم ثابت کنید که شش ضلعی $A'T'B'S'C'V'$ منتظم است.



حل- خطوط QK و LM و NP همدیگر را در نقاط E و F و D قطع می‌کنند به‌علت متناسب‌بودن خطوط داریم

$$(FE \parallel BC \text{ و } ED \parallel AB \text{ و } FD \parallel CD)$$

بنابراین دومثلث ABC و DEF متشابه‌می‌شوند و مثلث $V'T'S'$ برای DEF یک مثلث ناپلئونی و مثلث متساوی‌الاضلاع است مرکز ثقل مثلثهای فوق‌الذکر همان G مرکز ثقل مثلث ABC است و مثلث DEF از دوران مثلث ABC حول G به اندازهٔ $180°$ بدست می‌آید پس نقاط داخلی آن هم مثل V'، S'، T' دوران‌یافتهٔ نقاط نظیر A' و B' و C' حول G به اندازهٔ $180°$ است بنابراین نقاط T'، V' و S' با یك دوران $180°$ به ترتیب بر C' و B' و A' منطبق می‌شوند و چون زاویهٔ دوران را ثلث کنیم معلوم می‌شود که از دوران A' به اندازهٔ زوایای $60°$ و $120°$ و $180°$ و $240°$ و $300°$ به ترتیب نقاط V' و C' و S' و B' و T' پیدا می‌شوند بنابراین شش ضلعی $A'T'B'S'C'V'$ منتظم است

۴۰۵۹ـ ۱) a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلث ABC را از روابط زیر بدست آورید (p نصف محیط است)

$$\begin{cases} 2bc=a(b+c) & (1)\\ 2p=37 \\ a^2+b^2+c^2=469 \end{cases}$$

۲) مثلث غیر مشخص ABC را در نظر می‌گیریم. نیمساز داخلی AD را رسم کرده از D خطی دلخواه مرور می‌دهیم تا AB و AC را به ترتیب در P و Q قطع کند. صحت رابطهٔ $\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ را تحقیق کرده و ثابت کنید برای اینکه رابطهٔ (۱) در این مثلث برقرار باشد باید عمودی در D بر AD رسم می‌شود روی هر یك ازضلع‌های زاویهٔ A طولی برابر با a جدا کند.

۳) روی ضلعهای AB و AC دو طول برابر

$$AE=AF=a$$

راجداکرده ازE به‌F وصل‌می‌کنیم‌تاBCرادرδ قطع مقدار کند. مقدار نسبت $\frac{\delta B}{\delta C}$ و فاصلهٔ $\delta A'$ را برحسب‌طول‌اضلاع‌حساب‌کنید (A' وسط BC است $b>a>c$ فرض شود):

۴) اگر δ' محل تلاقی ضلع BC یا امتداد آن با IG باشد (I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و G نقطهٔ‌تلاقی میانه‌ها) مقادیر نسبتهای $\frac{\delta'A}{\delta'D}$ و $\frac{\delta'B}{\delta'C}$ و طول $\delta'A'$ را برحسب طول اضلاع حساب کرده و صحت رابطهٔ

$$\delta'A\cdot\delta'A'=\frac{a^2}{4}$$

را تحقیق کنید و معلوم کنید چه رابطهٔ هندسی بین δ و δ' وجود دارد.

۵) ثابت کنید مثلث خاصی که در آن رابطهٔ (۱) برقرار باشد وقتی وجود خواهد داشت که $A\delta$ و $A\delta'$ به‌ترتیب نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A باشند

در حالتی که چنین مثلثی وجود داشته باشد.

الف ـ چه رابطه‌ای بین ارتفاعات مثلث ، چه رابطه‌ای بین سینوس زاویه های مثلث وجود دارد صحت رابطهٔ زیر را تحقیق کنید

$$cotg^{۲}\frac{B}{۲}+cotg^{۲}\frac{C}{۲}=۲cotg^{۲}\frac{A}{۲}$$

و از روی آن رابطه‌ای بین مجذورات سینوسهای نصف زاویه های مثلث بدست آورید.

ب ـ چه رابطه‌ای بین طولهای AI و BI و CI وجود دارد؟

ج ـ رابطه‌ای بین طولهای شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی بدست‌آورید،

د ـ رابطهٔ بین طولهای AI و A'I و a را معلوم کنید.

حل ـ ۱ـ بااستفاده از معادلات داریم

$$b+c=۳۷-a \Longrightarrow ۲bc=a(۳۷-a)$$

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=a^{۲}+(b+c)^{۲}-۲bc=۴۶۹$$

$$a^{۲}+(۳۷-a)^{۲}-a(۳۷-a)=۴۶۹$$

$$a^{۲}-۳۷a+۳۰۰=۰ \Longrightarrow a=۲۵ \text{ یا } a=۱۲$$

اگر $a=۱۲$ فرض شود دراین‌صورت

$$\begin{cases} bc=۱۵۰ \\ b+c=۲۵ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c=۱۰ \\ b=۱۵ \end{cases}$$

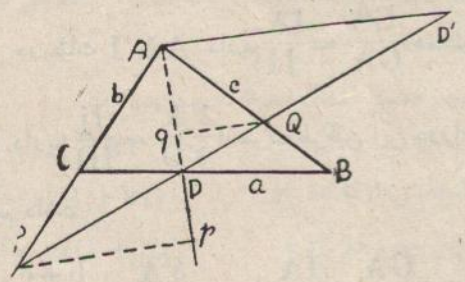
و اگر $a=۲۵$ فرض شود خواهیم داشت

$$bc=۱۵۰ \text{ و } b+c=۱۲$$

و برای b و c مقادیری بدست نمی‌آید.

بنابراین $a=۱۲$ و $b=۱۵$ و $c=۱۰$ طول اضلاع مثلث هستند.

۲ـ از A عمودی بر AD اخراج می‌کنیم تاخط‌مرسوم



را در D' قطع کند تصاویر نقاط تلاقی را بر روی AD بدست‌می‌آوریم pqDA یك دستگاه‌توافقی‌می‌باشد بنابراین‌داریم

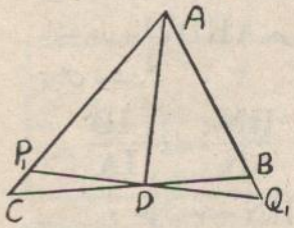
$$\frac{۱}{Ap}+\frac{۱}{Aq}=\frac{۲}{AD} \qquad (۱)$$

دومثلث ApP و AqQ متشابه‌اند زیرا زاویهٔ

$A_۱=A_۲$ و $q=p=۹۰^\circ$

از تشابه آنها داریم

$$\frac{Ap}{AP}=\frac{Aq}{AQ}=K=cos\frac{A}{۲}$$



پس

$$Ap=AP.K$$

و

$$Aq=AQ.K$$

و چون به‌جای آن‌دررابطهٔ (۱)قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{K.AP}+\frac{۱}{K.AQ}=\frac{۲}{AD}$$

$$\frac{۱}{AP}+\frac{۱}{AQ}=\frac{b+c}{bc}$$

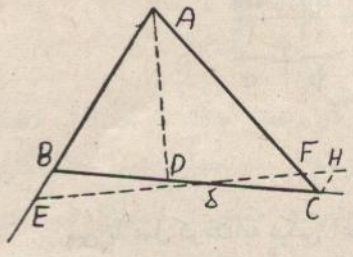
$$\Longrightarrow \frac{۱}{AP}+\frac{۱}{AQ}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$$

درحالتی که $a=Ap_۱=Aq_۱$ باشد

$$\frac{۱}{AP}+\frac{۱}{AQ}=\frac{۲}{AP_۱}$$

خواهد بود و یا

$$\frac{۲}{a}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c} \Longrightarrow ۲bc=a(b+c)$$



۳ـ از C خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا EF رادر H قطع کنددو مثلث EAF و HCF متساوی‌الساقین اند و همچنین دومثلث BδE و CδH متشابهند نسبت تشابه این دو مثلث‌را می‌نویسیم

$$\frac{\delta B}{\delta C}=\frac{BE}{CH}=\frac{a-c}{b-a}$$

با توجه به رابطهٔ فوق می‌توانیم بنویسیم.

$$\frac{\delta B}{\delta B+\delta C}=\frac{\delta B}{a}=\frac{a-c}{b-c} \Longrightarrow \delta B=a\frac{a-c}{b-c}$$

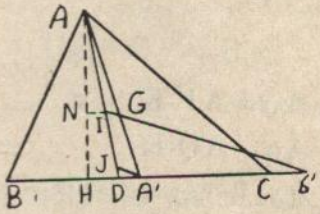
از طرفی داریم.

$$\delta A' = \delta B - A'B = \delta B - \frac{a}{2}$$

بنابراین

$$SA' = a\frac{a-c}{b-c} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\frac{2a-b-c}{b-c}\right)$$

۴ـ نقطهٔ I AD را به نسبت $\frac{ID}{IA} = \frac{a}{b+c}$ تقسیم می‌کند زیرا اگر $AH = h$ باشد در مثلث AHD می‌توان نوشت



$$\frac{HN}{AN} = \frac{ID}{IA}$$

و چون $HN = r$ و $AN = b - r$ بنابراین

$$\frac{ID}{IA} = \frac{r}{h-r}$$

۵) برای آنکه $A\delta$ و $A\delta'$ نیمسازهای زاویهٔ A از مثلث باشند باید داشته باشیم

$$\frac{\delta'B}{\delta'C} = \frac{\delta B}{\delta C} \Longrightarrow \frac{a-c}{b-a} = \frac{c}{b}$$

$$2bc = a(b+c) \Longrightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

هرگاه در این مثلث این رابطه برقرار باشد

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

$$\frac{2h_a}{\frac{2}{a}} = \frac{h_b}{\frac{1}{b}} = \frac{h_c}{\frac{1}{c}} = \frac{h_b + h_c}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

پس با عمل کردن به عکس اعمال فوق نتیجه می‌شود که رابطهٔ $2h_a = h_b + h_c$ در این مثلث برقرار است.

رابطه‌ای که بین سینوس زوایای این مثلث برقرار است عبارت است از

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$$

$$\Longrightarrow \cot g^2\frac{B}{2} + \cot g^2\frac{C}{2} - 2\cot g^2\frac{A}{2} = 0$$

ویا :

$$2\cot g^2\frac{A}{2} = \cot g^2\frac{B}{2} + \cot g^2\frac{C}{2} \qquad (2)$$

با استفاده از رابطهٔ $\cot g\frac{A}{2} = -\frac{p-a}{r}$ رابطهٔ (۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{r^2}[(p-b)^2 + (p-c)^2 - 2(p-a)^2]$$

$$= \frac{1}{r^2}[a(b+c) - 2bc]$$

رابطهٔ (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$1 + \cot g^2\frac{B}{2} + 1 + \cot g^2\frac{C}{2} = 2\left(1 + \cot g^2\frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{2}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

و یا

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \text{ و } BI = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} \text{ و } CI = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$BI^2 + CI^2 = 2AI^2$$

از طرفی داریم

$$\frac{r}{h} = \frac{\dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{\dfrac{2p\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} \Longrightarrow \frac{r}{h} = \frac{a}{2p} = \frac{a}{a+b+c}$$

$$\frac{r}{h-r} = \frac{a}{b+c} \Longrightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{a}{b+c}$$

از نقطهٔ A' خط $A'J$ را به موازات IG رسم می‌کنیم.

در مثلث $AA'J$ داریم $\frac{GA}{GA'} = \frac{IA}{IJ}$ وهمچنین درمثلث $DI\delta'$ داریم $\frac{\delta'A'}{\delta'D} = \frac{Ij}{ID}$ ازضرب طرفین این دورابطه درهم خواهیم داشت

$$\frac{\delta'A'}{\delta'D} \times \frac{GA}{GA'} = \frac{IA}{ID} \Longrightarrow \frac{\delta'A'}{\delta'D} = \frac{b+c}{2a}$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت

$$\frac{\delta' A'}{\delta' D-\delta' A'}=\frac{\delta' A'}{DA'}=\frac{b+c}{2a-(b+c)}$$

برای محاسبهٔ DA' داریم

$$DA'=\frac{DC-DB}{2}$$

$$\frac{DC}{DB}=\frac{b}{c} \Longrightarrow \frac{DC-DB}{DC+DB}=\frac{b-c}{b+c}$$

$$DA'=\frac{DC-DB}{2}=\frac{a(b-c)}{b+c}$$

$$\delta' A'=\frac{a(b-c)}{2[2a-(b+c)]}$$

$$\delta A'\cdot\delta' A'=\frac{a^2}{4}\left(\frac{2a-b-c}{b-c}\right)\left(\frac{b-c}{2a-b-c}\right)=\frac{a^2}{4}$$

δ و δ' ضلع BC را به نسبت توافقی تقسیم می‌کند.

$$\frac{\delta' B}{\delta' C}=\frac{\delta B}{\delta C}=\frac{a-c}{b-a}$$

ج) $$cotg\frac{A}{2}=\frac{p}{r_a} \text{ و } cotg\frac{B}{2}=\frac{p}{r_b} \text{ و } cotg\frac{C}{2}=\frac{p}{r_c}$$

$$\frac{1}{r^2_b}+\frac{1}{r^2_c}=\frac{2}{r^2_a}$$

د) درمثلث BIC داریم ،

$$BI^2+CI^2=2A'I^2+\frac{BC^2}{2}$$

و یا

$$AI^2-A'I^2=\frac{a^2}{4}$$

۴۰۶۰ ـ یك لولهٔ شیشه‌ای‌که یك طرف آن بسته است دارای طولی برابر l سانتیمتر است. تاچه ارتفاعی جیوهٔ صفر درجه دراین لوله‌بریزیم تادرهر دمایی حجم اشغال نشدهٔ لوله ثابت باشد. ضریب انبساط شیشه برابر k ؛ ضریب انبساط جیوه برابر μ است .

حل ـ s سطح مقطع است لوله است . گنجایش لوله در صفر درجه

$$V_0=sl$$

حجم قسمت اشغال نشده در صفر درجه:

$$v_0=s(l-x)$$

گنجایش لوله در t° : $V=sl(1+kt)$

حجم جیوه در t° : $V'=sx(1+\mu t)$

باید داشته باشیم:

$$V-V'=v_0$$

$$sl(1+kt)-sx(1+\mu t)=s(l-x)$$

وازآنجا

$$x=\frac{lk}{\mu}$$

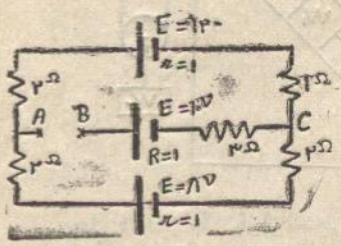
تبصره ـ برای‌آنکه حجم قسمت اشغال نشده ثابت باشد باید افزایش حجم لوله شیشه‌ای برابر باشد با افزایش حجم جیوه بنابراین می‌توان نوشت:

$$slkt=sx\mu t$$

با

$$x=\frac{lk}{\mu}$$

۴۰۶۱ ـ مداری مطابق شکل بسته شده است اختلاف پتانسیل درنقطهٔ A و B را بدست آورید



حل ـ ابتدا شدت جریان رادرمدار بسته‌حساب می‌کنیم

$$-12+I+2I+2I+8+I+2I+I=0$$

$$9\times I=4$$

یا

$$I=\frac{4}{9} \text{ آمپر}$$

و اختلاف پتانسیل بین دونقطهٔ A و B برابراست با

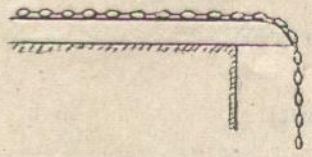
$$v_A-v_B=2I+8+I+2I-10$$

$$v_A-v_B=5I-2$$

ولت

$$v_A-v_B=\frac{2}{9}$$

۴۰۶۲ ـ زنجیری است به‌طول l به‌وزن Pl که روی میزی قراردارد و a سانتیمتر از آن آویزان شده است اگر زنجیر بدون سرعت اولیه رها شود سرعت آن را هنگامی که از میز جدا می‌شود حساب کنید



حل ـ چون مجموع‌انرژی جنبشی و پتانسیل زنجیر در هر لحظه مقداری است‌ثابت پس اگر سطح میز را مبدأ در نظر بگیریم می‌توان نوشت:

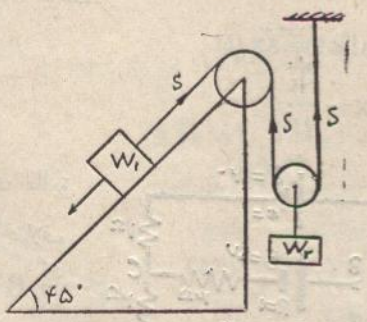
$$\frac{-Pa^2}{2}=\frac{Plv^2}{2g}-\frac{Pl^2}{2}$$

$$v=\sqrt{\frac{g}{l}(l^2-a^2)}$$

۴۰۶۳ ـ نیروی کشش Sرا درنخ هنگام حرکت‌دستگاه مطابق شکل تعیین کنید درصورتی‌که

$W_2 = 100kg$ و $W_1 = 200kg$

باشدواصطکاك بین‌وزنهٔ روی‌سطح شیب‌داروسطح برابر $\mu = 0/2$ است وفرض می‌کنیم که قرقره‌ها جرم نداشته باشندشتاب‌حرکت قرقرهٔ ، متحرك رانیزحساب‌کنید $g = 10m/s^2$ و $\alpha = 45^\circ$



حل : ۱ـ اگر قرقرهٔمتحرك به طرف بالا حرکت‌کند وشتاب آن برابر $\frac{\gamma}{2}$ باشد می‌توان نوشت :

$$W_1 g \sin\alpha - W_1 g \mu \cos\alpha - S = W_1 \gamma$$

$$2S - W_2 g = W_2 \frac{\gamma}{2}$$

زیرا شتاب وزنهٔ W_1 از نظرمقدار دوبرابر شتاب وزنهٔ W_1 است .

از حل این دو معادله نتیجه می‌شود :

$$\gamma = \frac{4W_1 \sin\alpha - 4W_1 \mu \cos\alpha - 2W_2}{4W_1 + W_2}$$

حرکت W_2 هنگامی به طرف بالاست‌که $\gamma \geqslant 0$ باشد یعنی

$$4W_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \geqslant 2W_2$$

یا

$$\frac{W_2}{W_1} < 2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

۲ـ اگر قرقرهٔ متحرك به طرف پائین حرکت کند می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} S - W_1 g \sin\alpha - W_1 g \mu \cos\alpha = W_1 \gamma \\ W_2 g - 2S = W_2 \frac{\gamma}{2} \end{cases}$$

ازحل این دو معادله نتیجه می‌شود که

$$\gamma = \frac{2W_2 g - 4W_1 g \sin\alpha - 4W_1 g \mu \cos\alpha}{4W_1 + W_2}$$

حرکت W_2 به طرف پائین هنگامی ممکن است‌که

$$\frac{W_2}{W_1} \geqslant 2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

باشد .

بنا براین دستگاه هنگامی بیحرکت است‌که:

$$2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) > \frac{W_2}{W_1} > 2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

باشد . در مسئله داریم .

$$2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \frac{8\sqrt{2}}{10} \quad \text{و} \quad \frac{W_2}{W_1} = \frac{100}{200} = 0/5$$

و $2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = \frac{12\sqrt{2}}{10}$ و می‌دانیم‌که

$$0/5 < \frac{8\sqrt{2}}{10}$$

پس وزنهٔ W_2 به طرف بالاحرکت می‌کند وشتاب آن

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{4 \times 200 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \times 200 \times 0/2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times 100}{4 \times 200 + 100} \times 10$$

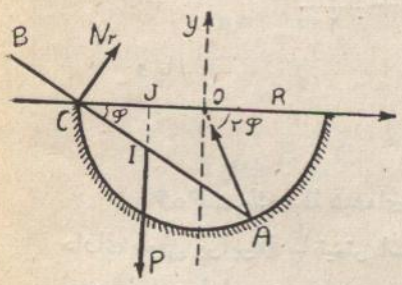
یا

$$\frac{\gamma}{2} = 2/75 m/s^2$$

و

$$S = \frac{1}{2} W_2 (g + \frac{\gamma}{2}) = 837/5 N$$

۴۰۶۴ـ داخل جام کروی به شعاع R میلهٔ متجانس وزینی به طول 2a طوری قرار گرفته‌که انتهای‌آن در نقطهٔ A از جام قرار داشته ودر نقطه‌ای مانند C به لبهٔ جام تکیه‌دارد مطلوبست بحث در وضع تعادل



حل ـ اولا نیروهای مؤثر دراین وضع به قرار زیراند .

الف ـ نیروی P وزن میله‌که‌به مرکز ثقل I وسط AB وارد می‌گردد قائم است .

ب ـ نیروی عکس‌العملی N_1 جام‌که برجام قائم‌بوده‌و لذاشعاعی خواهد بودکه از A بگذرد وجهت‌آن از A به O است .

ج ـ نیروی عکس‌العمل درنقطهٔ C که بوسیلهٔ AB عمود بوده ودرجهت مثبت محور yها است

از اینرو چون این سه‌نیرووضع تعادل را معلوم‌می‌دارند. دریك صفحه واقع بوده‌که به نام صفحهٔ قائم خوانده می‌شود .

از طرفی هنگامی تعادل بر قرار است‌که اولا

$$\vec{P} + \vec{N_1} + \vec{N_2} = 0$$

وثانیاً مجموع ممان سه بردار در O مساوی صفرگردد

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\Sigma F_x = 0\\ \Sigma F_y = 0\\ \Sigma M_O = 0\end{cases}$$

با درنظر گرفتن جهت هریك داریم

$$\begin{cases}N_2 \sin\varphi - N_1 \cos 2\varphi = 0\\ N_2 \cos\varphi + N_1 \sin 2\varphi - P = 0\\ Oj \times P - N_2 \times OC \times \cos\varphi = 0\end{cases}$$

اما مقدار Oj برابر خواهد بود با

$$Cj = CI \cos\varphi$$

$$\frac{AC}{\sin 2\varphi} = \frac{R}{\sin\varphi} \Longrightarrow AC = 2R\cos\varphi$$

بنابراین :

$$Oj = R - (2R\cos\varphi - a)\cos\varphi$$

پس داریم :

$$\begin{cases}N_2 \sin\varphi = N_1 \cos 2\varphi & 1)\\ N_2 \cos\varphi + N_1 \sin 2\varphi = P & 2)\\ [R - (2R\cos\varphi - a)\cos\varphi]P = aN_2 \cos\varphi & 3)\end{cases}$$

از معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$N_2 \cos\varphi = P\cos 2\varphi$$

واز قراردادن در معادلهٔ (۳) وساده کردن داریم :

$$f(\cos\varphi) = 4R\cos^2\varphi - a\cos\varphi - 2R = 0$$

$$\varphi = \mathrm{Arc}\cos \frac{a + \sqrt{a^2 + 32R^2}}{8R}$$

بحث ـ اولا چون $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ است پس $0 < \cos\varphi < 1$ بوده و از اینرو بایستی جوابهای معادلهٔ فوق بین صفر و یك تغییر نماید ازطرفی چون $\frac{c}{a} < 0$ است پس تنها یك جواب مثبت دردست بوده که آنهم در صورتی قابل‌قبول خواهدبود که داشته باشیم .

$$f(0)f(1) < 0 \Longrightarrow -2R(2R - a) < 0$$

$$\Longrightarrow a < 2R$$

ثانیاً ـ شرط آنکه C بتواند در لبهٔ جام قرار گیرد آنست که :

$$2R\cos\varphi < 2a \Longrightarrow 0 < \cos\varphi < \frac{a}{R} \text{ و یا } AC < 2a$$

پس شرط دیگر آنکه

$$f(0)f\left(\frac{a}{R}\right) < 0 \Longrightarrow -2R\left(4R \times \frac{a^2}{R^2} - a \times \frac{a}{R} - 2R\right) < 0 \Longrightarrow a > R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

و یا

$$R\sqrt{\frac{2}{3}} < a < 2R$$

به ازاء $a = 2R$ داریم $\varphi = 0$ و $N_2 = P$ (مؤلفه قائم‌واکنش صفحه مساوی وزن‌جسم) و $N_1 = 0$ ازاینرو میله به وضع افقی درآمده ودرست وسط آن بر C منطبق خواهد بود

۴۰۶۵ ـ ۰/۷۸۵ گرم ازیك جسم آلی که شامل کربن ئیدرژن ویك عنصر هالوژن می‌باشد تجزیه کرده‌ایم ۰/۲۲۵۰ گرم آب و ۱/۳۲۰ گرم گاز کربنیك بدست آمده است .

از طرف دیگر ۱۹/۶۲۵ گرم‌ازاین‌جسم را بایدوراتیل در مجاورت سدیم ترکیب‌می‌کنیم‌راندمان عمل ۸۴ °/۰ می‌باشد از این عمل ۱۱/۱۳۰ گرم از یك ئیدروکربور بدست می‌آید که ترکیب درصد آن ازاین قرار است :

کربن ٪۹۰/۵۶ ئیدرژن ٪۹/۴۴

تعیین کنید

۱ـ فرمول جسم مورد تجزیه و ئیدروکربور حاصل از آنرا

۲ـ طریقه‌های دیگری که می‌توان ئیدروکربور مزبور را از جسم مورد تجزیه بدست آورد .

حل ـ ساده‌ترین‌فرمول‌ئیدروکربور از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\frac{90/56}{12} = 7/54 \text{ و } \frac{9/44}{1} = 9/44$$

ساده‌ترین نسبتی که بین اعداد فوق برقرار است ۴ و ۵ می‌باشد بنا براین فرمول خام ئیدروکربور $(C_4H_5)_n$ است .

در جسم اول مقدارکربن وئیدرژن برابر با :

$$m_C = 1/32 \times \frac{3}{11} = 0/36 \text{ گرم}$$

$$m_H = 0/225 \times \frac{1}{9} = 0/025 \text{ گرم}$$

مقدار هالوژن :

$$m_{HCl} = 0/785 - (0/36 + 0/025) = 0/4 \text{ گرم}$$

مقدار این عناصر در ۱۹/۶۲۵ گرم جسم برابر

$$m_C = \frac{۱۹/۶۲۵}{۰/۷۸۵} \times ۰/۳۶ = ۹ \text{ گرم}$$

$$m_H = \frac{۱۹/۶۲۵}{۰/۷۸۵} \times ۰/۰۲۵ = ۰/۶۲۵ \text{ گرم}$$

$$m_{HCl} = \frac{۱۹/۶۲۵}{۰/۷۸۵} \times ۰/۴ = ۱۰ \text{ گرم}$$

مقدار ئیدروکربور حاصل باراندمان ۱۰۰٪ برابر

$$۱۱/۱۳ \times \frac{۱۰۰}{۸۴} = ۱۳/۲۵$$

گرم می‌باشد

بدیهی است که این مقدار از ئیدروکربور علاوه بر ۹ گرم کربن و ۰/۶۲۵ گرم ئیدرژن جسم اول شامل مقداری از بنیان اتیل‌می‌باشد که می‌توان مقدار آنرا از رابطهٔ زیر بدست آورد .

$$۱۳/۲۵ - (۹ + ۰/۶۲۵) = ۳/۶۲۵$$

وچون هر بنیان‌اتیل($-C_۲H_۵$) دارای‌جرم ۲۹ است‌بنابراین جرم ملکولی ئیدروکربور برابر :

$$\frac{۱۳/۲۵ \times ۲۹}{۳/۶۲۵} = ۱۰۶$$

$$(C_۴H_۵)_n = ۱۰۶ \qquad n = ۲$$

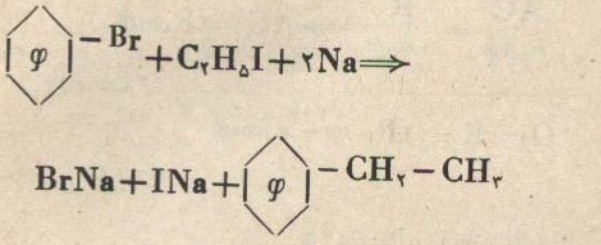
پس فرمول ئیدروکربور $C_۸H_{۱۰}$ می‌باشد . که اگر از آن‌یك مجموعهٔ $-C_۲H_۵$ برداریم مجموعهٔ $-C_۶H_۵$ باقی می‌ماند در ساختمان جسم آلی مورد آزمایش‌یك مجموعهٔ $C_۶H_۵$وجود داردکه جرم آن معادل ۷۷ است وبا استفاده ازجرم‌کربن و ئیدرژن درنمونهٔ مورد تجزیه(۰/۳۸۵ = ۰/۰۲۵ + ۰/۳۶) جرم ملکولی آن از روی رابطهٔ زیر بدست می‌آید

$$\frac{۰/۷۸۵}{۰/۳۸۵} \times ۷۷ = ۱۵۷$$

جرم هالوژن موجود در یك ملکول‌گرم آن برابر:

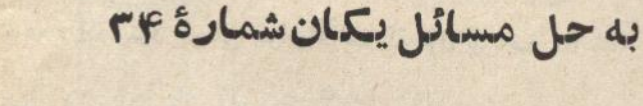
۱۵۷ − ۷۷ = ۸۰ می‌شود

چون جرم اتمی برم برابر۸۰ است پس نتیجه‌می‌گیریم که فرمول جسم مورد آزمایش $C_۶H_۵Br$ (برمورفنیل‌یامونو-برومو بنزن) می‌باشد . ومعادلهٔ واکنش آن بایدوراتیل ازاین قراراست :



(فیتیگ ـ وورتز)

این واکنش به واکنش Fittig - Wurtz معروف است . روش دیگری که در این مورد بکار برده می شود روش Friedel - crafts (فریدل ـ کرافتز) است :



بدیهی است دراین طریقه به جای برمورفنیل از مادهٔ اولیهٔ‌آن یعنی بنزن استفاده شده است .

پاسخهای درست رسیده مربوط به حل مسائل یکان شمارهٔ ۳۴

آذر حسینی نیا ـ آزاده فریدونی ـ عباس طلائی زاده جوادجمشیدی ـ محسن‌هاشمی‌نژاد ـ رضا نامور ـ نادربزرگی علی اصغراسکندر بیاتی ـعزیزالله صادقیان ـ محمد رضا نادری مسعود حبیب‌الله‌زاده ـ پرویز شکوهی ـ جعفر آقایانی چاوشی قربانعلی شاهی ـ سید جعفر لاریمی ـ سعید منصوری ـ پرویز مرادی حقگو ـ مجتبی‌اخگرژند ـ محمد تقی اولیائی ـخسرو مدیری ـ محمدتقی‌مقدادیان ـ حسن‌شیخیان ـ سیروس‌مریوانی محمد رضا یزدان ـ پرویز شکوهی- حسین علمداری ـ پرویز بربری ـ حسن چاکری ـ سعید قوجا ـ سلیمان نصرت‌آبادی علی شادکامی ـ رحیم جوان آزاددل ـ مسعود معصومی-یعقوب پریچهر ـ اردشیر گشتاسبی ـ محمدرضا نیکوئی ـ سید رضا میرزنده‌دل ـ بهمن شریعت پناهی