

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \dots + x^n$$



آبان ماه ۱۳۴۵



دوره سوم - شماره :



شماره مسلسل : ۳۰

## در این شماره :

یک گام مشتب

مرأحل مهم علم نجوم

مسائل حل نشده ریاضی

بی آنکه عصباً فی شوید

بیست و یک راه حل اثبات یک قضیه

کسرهای مسلسل

یعنی در حساب

گفتوگوی دور میز گرد

چگونه مسئله‌ای را حل کنیم

معادلات درجه چهارم خاص

راهنمای حل مسائل شیمی

از هر جائی یادداشتی

راهنمای حل مسائل هندسه

حل مسائل نمونه (مسابقه بیست سوالی)

## Problems & Solutions

مسائل امتحانات داخلی دیپرستانها

داستانهای تئمنی ریاضی

سرگرمیهای ریاضی

مسائل برای حل

حل مسائل شماره ۲۸

پرسش و پاسخ

اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها

ازمیان نامه‌های رسیده

۱	عبدالحسین مصطفی
۲	ترجمه
۴	ترجمه
۵	-
۶	ترجمه گلستان زاده
۸	پرویز شهریاری
۱۰	محمود کاشانی
۱۲	-
۱۳	ترجمه : ه. شریفزاده
۱۵	ترجمه : پرآوی
۱۶	ترجمه بزرگ نیما
۱۸	-
۱۹	ترجمه
۲۱	-
۲۳	-
۲۴	-
۲۹	-
۳۱	-
۳۲	-
۳۶	-
۴۹	-
۵۰	مهندس ارشادی
۵۲	-

## چگونه یک مسئله شیمی را حل کنیم؟

بعضی از دانش آموزان مسائل ریاضی و فیزیک را خیلی خوب حل می کنند اما در حل مسائل شیمی خود را ضعیف احساس می کنند، چرا؟ آیا راهی وجود ندارد که این دسته از دانش آموزان و بطور کلی همه محصلین در چگونگی حل مسائل شیمی راهنمایی شوند؟ این راه را دو نفر از استادان شیمی فرانسه در کتابی که چاپ کردند ارائه دادند. چاپ ترجمه این کتاب ارزشی از این شماره در مجله یکان آغاز شده است و به تدریج، در هر شماره مجله ترجمه فصلی از آن چاپ خواهد شد.

\*\*\*

## یکان مجله ریاضیات

سال سوم - دوره سوم - شماره پنجم (شماره مسلسل: ۳۵)  
آبان ماه ۱۳۴۵

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: عبدالحسین مصطفی

مدیر داخلی: داود مصطفی

زیر نظر شورای نویسندهای کان هر ماه یک بار منتشر می گردد  
نشانی اداره: تهران، خیابان لالهزارنو، نزدیک شاهرضا-شماره ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۴۶۶۳

تلفن اداره: ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای ۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به اضافه هزینه پست)

حساب بانکی: جاری ۳۰۹۵ شعبه لالهزارنو بانک صادرات

# YEKAN

Mathematical Magazine

volume III , number 5 , Nov. 1966

subscription : \$3

TEHERAN . P.O.B. 2463

چاپ آذربایجان ۶۴۰۲۸

## ماتریسها

این مبحث جدید ریاضی در بعضی از دانشکده‌ها تدریس می شود. اما ممکن است که با زبان ساده چنان تشریح شود که برای دانش آموزان متوسطه فیزیقاب فهم باشد.

از شماره بعد مطالبی به زبان ساده درباره ماتریسها در مجله یکان چاپ خواهد شد.

## انجمن معلمان ریاضی کرمانشاه

از تاریخ ۲۸ مهرماه ۱۳۴۵ تشکیل شده و طی نامه‌ای وابستگی خود را به انجمن معلمان ریاضی ایران اعلام داشته است.

اعضای فعلی این انجمن عبارتند از:

آقایان: حسین روشن - سید محمدعلی صدری  
علی فلکی - فرهنگ پرتوی - محمود غفاری -  
شهریار یزدانی - ایرج شفا - اصغر مرتضائی.

# یک گام مثبت دیگر

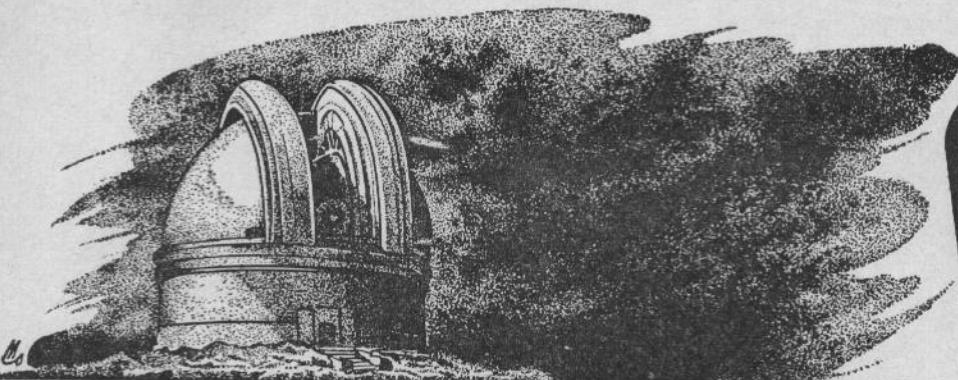
سال تحصیلی جاری، برنامه‌ای که بر اساس طرح: «نظام نوین در آموزش و پرورش» تنظیم شده در سال اول دبستان به مرحله اجرا درآمده است. یک دوره کتابهای مربوط به این کلاس که بر اساس برنامه جدید تهیه و چاپ شده شامل: یک جلد فارسی، یک جلد حساب و یک جلد علوم از طرف مقام وزارت آموزش و پرورش برای اداره مجله ارسال شده است. این کتابها برای همه آنها که می‌توانند در امر آموزش و پرورش صاحب نظر باشند فرستاده شده است و مهم اینجاست که همه این اشخاص صاحب نظر، بصیرت واقع‌بینانه مؤلفان کتابها را، که ضمناً تنظیم‌کننده برنامه نیز بوده‌اند، تأیید کرده زحمات آنان را ستوده‌اند و اظهار نظر کرده‌اند که اقدام وزارت آموزش و پرورش در تنظیم برنامه‌های جدید و تهیه کتابهای مربوط، یک گام مثبت در راه پیشرفت فرهنگ کشور و تطابق آن با شرایط زمانی و مکانی می‌باشد.

این چندین بار است که در هنر کتابهای درسی تجدید نظر می‌شود و هر بار که این تجدید نظر انجام گرفته در جهت مطلوب آن بوده است اما چرا از امر آموزش و پرورش نتیجه مطلوب عاید نمی‌شود؟

موضوع از این قرار است که روش تدریس معلمان ثابت باقی‌مانده و نسبت به تطبیق آن با کتابهای جدید اقدام اساسی انجام نگرفته است؛ علی‌رغم همه بخشانه‌هایی که معلمان را به استفاده انحصاری از کتابهای معین ملزم می‌کند، اکثر معلمان به کتابهای جدید اعتقاد ندارند و کتابهای به سبک قدیم را (همانها که خود در زمان تحصیل می‌خوانده‌اند) بر کتابهای فعلی ترجیح می‌دهند، زیرا روش تدریس کتابهای جدید عملاً به آنها آموخته نشده است.

هر چند ضمیمه هر کتاب درسی جدید کتاب معلم هم چاپ شده است اما این کافی نیست بسیار مناسب خواهد بود که موجبات تماس نزدیک مؤلفان کتابهای درسی جدید با معلمان مدارس فاهم آید تا در محیطی صمیمی به بحث و تبادل نظر پردازند و معلمان واقعاً معتقد شوند که استفاده از کتابهای جدید نتیجه‌ای بهتر خواهد داشت.

عبدالحسین مصححی



## ۹۰۰ کتاب نایاب

ترجمه فصلی از کتاب : «L'Astronomie moderne» تألیف :

# مراحل مهم علم نجوم

## ۲- دو ره‌جدید

کشیش پرستستان بود وی را راهنمایی کرد که به جامعه کشیشان پیوند اما وی در این باره رغبتی از خودنشان نداد و مطالعه در علوم الهی را به کنار گذاشت، در عوض با شوق کامل در محضر درس هواستلن استاد دانشگاه **تیو بنژن** حضوری بافت و دروس نجوم را فرامی گرفت. این استاد در ظاهر امر نجوم را بر اساس هیئت بطليوس تدریس می کرد امادر حقیقت یکی از طرفداران پروپا قرص کپرنیک بود. وی کپلر را با هیئت جدید آشنا ساخت و او را تشویق کرد که رصدهای مختلفی از آسمان بعمل آورد.

کپلر برای اینکه بتواند زندگی خود را اداره کند در ۱۵۹۳ جای وطن کرده دانشگاه **گارتن** به تدریس ریاضیات اشتغال ورزید و همانجا به سال ۱۵۹۷ ازدواج کرد. کپلر پریشان خاطر و آزرده فرار کرد و با خانواده اش به پراگ رفت و در آنجا دستیار **تیکو براهه** شد. تیکو براهه یک سال بعد در گذشت و یادداشت‌هایش به دست کپلر اقتاد.

**روولف دوم** به کپلر عنوان «ریاضیدان امپراتوری» داد لقبی که بدون شک شایسته کپلر بود، اما فقط جنبه افتخاری داشت. کپلر در **لئنر** کرسی استادی ریاضیات را اشغال کرده تا سال ۱۶۲۹ آن را حفظ کرد، بعد از آن منجم یا بهتر بگوئیم منجم باشی و **الفنتین** دوک **مکلانبورگ** گردید. متأسفانه استقرار وی در این مقام دیری نپائید و به سال ۱۶۳۰ مجبور شد که بیمار و

**جان کپلر** در نکستات واقع در سوآب از خانواده‌ای نجیب‌زاده اما فقیر به دنیا ۱۵۷۱-۱۶۳۰ آمد. خود کپلر هم تا آخر عمر باقر مادی دست به گریبان بود. چنانچه پل کودرگ در این باره گفته است: «بد بختیهای تأثیرگذاری زندگی، برای وی چنان سیمای محبوبی بوجود آورده است که مقدم بر بنوغش جلوه گری می‌کند.»

پدرش پسریکی از شهرداران شهر **ویل** بود و مادرش دختر یک مهمنخانه‌دار بود که تربیت حسابی نداشت و حتی خواندن و نوشتن را نمی‌دانست. کپلر که هفت ماهه به دنیا آمده بود نحیف بود و دید ضعیفی داشت. او ایل جوانیش نزد یکی از خاله‌هایش سپری شد (که به اتهام جادوگری زندگانه سوزانده شد) در شش سالگی به بیماری آبله مبتلا شد و هنوز از چنگ این بیماری کاملاً رها نشده بود که وی را به مدرسه **لئونبرگ** فرستادند، در این زمان پدرش در چنگ بود، همینکه از چنگ برگشت وی را از مدرسه بیرون آورده به خدمت در یک میخانه داشت که تا ۱۲ سالگی به این خدمت مشغول بود. در سیزده سالگی به بیماری سختی مبتلا شد بطوری که امیدی به ادامه زندگی وی نداشتند. دمارش خوبی نداشت و در تمام عمر ولاینقطع وی را آزار می‌داد، برادرانش هم دست کمی از مادر نداشتند. یکی از عموهایش

محسوب می شدند اما افراد آنها زیاد بود و صاحب ثروت و مکنتی هم نبودند :

گالیله از همان اوان طفو لیت استعداد عجیبی در ابتکارات صنعتی داشت و ماشینهای متعددی چهار راه تقلید و چه به فکر خود می ساخت . پدرش وی را به تحصیل طب گماشت اما وی که بیان علم علاقه ای نداشت و مجبوب ریاضیات بود یکی از معلمان ریاضی به نام **ریچی** را که با خانواده آنها رفت و آهد داشت بالتماس والحاج و ادراست تامخینی به درسها یعنی از هندسه را به وی بیاموزد . بالآخره علی رغم میل پدرش تحصیل طب را کنار گذاشت و آموزش ریاضیات را با جدیت بیشتر دنبال کرد .

گالیله در ۱۵۹۰ میلادی قانون اساسی پاندول را کشف کرد . نقل می کنند که وی از مشاهده حرکت نوسانی چهلچراغ کلیسا متوجه این قانون شده و بعداً با آزمایشها مکرر صحت آن تحقیق کرده است . اودریافت که می توان این پدیده را در اندازه گیری زمان مورد استفاده قرارداد اما این کار بوسیله هیگنس صورت تحقق پذیرفت . گالیله در ۲۵ سالگی به عنوان معلم ریاضی مؤسسه علمی پیزا انتخاب شد اما همزمان با تعلیم ریاضیات تجربیات خودش را در فیزیک دنبال می کرد و موفق شد قوانین پرتاب اجسام را بدست آورد . این قوانین با عقاید ارسطو مباینت داشت و دست آویزی شد که مخالفین گالیله عليه وی اقدام کنند وبالاخره در ۱۵۹۲ مجبور شد که شهر پیزا را ترک کند . به پادوارفت و با شهر تی که بهم رسانده بود در آنجا تا ۱۶۱۰ به تدریس ریاضیات اشتغال ورزید . در همینجا بود که وی ترمومتر ، ترازوی مخصوص مایعات و میکروسکوپ را اختراع کرد .

در ۱۶۰۹ که در ونیز بود اطلاع یافت که در هلمز دورینی ساخته‌اند که اشیاء دور را در نزدیک ظاهر می‌سازد. بعد از مختص مطالعاتی موفق شد که شخصاً یک چنین دورینی بسازد که برای مشاهدات آسمان قابل استفاده باشد و با کمک آن کشفهای مختلفی انجام داد : اولین کشفوی وجود کوهها و دهانه‌های آتشفشاری ماه بود و با طرق هندسی ارتفاع آنها را نیز تعیین کرد. بعد از آن معلوم ساخت که : که کشان مجموعه‌ای است از تعداد زیادی از ستارگان ، سطح خورشید از لکه‌های پوشانده شده است که با کمک آنها می‌توان حرکت وضعی خورشید و مدت زمان آن را معین کرد. در هفتم ژانویه ۱۶۱۰ سه‌ماه از ماههای مشری و در چهاردهم چهارمی از آنها را کشف کرد ، هلالهای زهره ، ساختمان خاص زحل و بالاخره اهتزازات قرص ماه از کشفیات دیگر وی می‌باشد رصدهایی کمازیارات بعمل آورد و را به قبول هیئت کپرنیک رهبری کرد و در ۱۶۳۲ کتابی منتشر ساخت که در آن یک طرفدار هیئت کپرنیک و یک مدافع هیئت بطیموس به بحث و جدل می‌پردازند و هر یک دلایلی بر صحت عقیده خود ابراز بقیه پائین صفحه ۲۰

درمانده به راتیسمین برگرد : در اینجا به خاطر تأخیر در پرداخت کرایه خانه، علیه وی به دادگاه شکایت شده بود و وی مجبور بود که از خوددفاع کند . این سالها برای وی مصیبت بارترین ایام عمرش بود . از ایک طرف مسافرتهای اجباری وی را فرسوده ساخته و از طرف دیگر مصیبتهای غیرمنتظره‌ای که هر زمان بهوی روی می‌آورد بر درماندگیش می‌افزود . چنانچه تنها در سال ۱۶۱۱ زنش، دیوانه شد و هم‌مان با آن سفر زندش گم شدند، کارزیاد هم مزید بر علت بود . در ۱۶۱۳ تـ بید فراش، کرد در حالی که برای اداره عائله زیادش جز درآمد مختصراً که از راه فروش سالنامه‌هایی که تنظیم کرد درآمد دیگری نداشت .

علی رغم یک چنین زندگی نکبت باری پیشرفت علمی کپلر قابل ملاحظه است. با محاسباتی سراسم آور و باشتکاری که به سرحد عناد رسیده بود موفق شد که سه قانون اساسی دستگاه منظومه شمسی را کشف کند و توضیح دهد که فعلاً به نام «قوانين کپلر» معروف می‌باشد. تنها قانون دوم که نسبت بین زمان و مسافت‌های پیموده شده توسط سیارات را بیان می‌دارد نتیجه‌هفده مساله‌های پیموده شده سیارات را مطالعات وی بود.

کپلر صاحب تأثیرگاتی در زمینه های مختلف می باشد؛ در باره نجوم، تنجیم، فور، هندسه، هو اشنازی وغیره آثاری دارد. اما مهمترین آثار وی عبارتست از: «نجوم جدید» که در ۱۶۰۹ منتشر شد و دو قانون اول وی را توضیح می دهد، «جهان هماهنگ» که در ۱۶۱۶ منتشر شد و قانون سوم وی را شرح می دهد، «زیج رو دلفی» که مجموعه زیج های نجومی وی بعد از طرح قوانینش می باشد و آن را به حامی خود رو دلف دوم هدیه کرده است.

سنگ نبشته قبر کپلر به عبارت زیر که از خود اوست خاتمه می‌باشد:

Mensus eram coelos, nuneterroe  
metior numeros.

Mens coelestis erat, corporis  
numbro jacet.

که می‌توان آن را چنین ترجمه کرد:  
من که آسمانها را اندازه گرفتم، اکنون سایه‌های  
زمین را اندازه می‌گیرم.

روح من در آسمان جاودانی است و اینجا ،  
ماوای سایه جسم‌من است .  
این اشعار که از عمق وجودی برخاسته است غروری آمیخته با  
مارت را بازگم کند .

\* \* \*

در همان عصر کیلر، گالیله، نابغه‌ای که روش علوم تجربی را ابداع کرد، در شهر بیزیا به دنیا آمد. خانواده‌اش از نجباء

د - گالیلہ

1094 - 1942

# مسائل حل نشده ریاضی

تألیف:

C. STANLEY OGILVY

ترجمه: ع. م.

-۵-

جمع امتیازهای هر سه قایق با یکدیگر برای است و هر یک مشابه یکدیگر بر دو باختداشتند. یک چنین امری کاملاً ممکن است که اتفاق افتد و در سالهای اخیر چندین مرتبه چنین وضعی پیش آمده است.

اگر  $c = n$  باشد در این صورت ممکن است که حداقل  $n$  قایق جمع امتیازهای مساوی بدست آورند؛ در دور اول لیستی از آنها به ترتیب اتفاقی در نظر گیریم، در دور دوم جای آنها را به ترتیب دوری عوض کنیم یعنی اینکه اولی با دومی، دومی با سومی، ... ماقبل آخر با آخر و آخری با اولی جانشین شود و همین عمل را برای دورهای دیگر انجام دهیم در این صورت هر یک از  $n$  قایق در پایان مسابقه شرایط کاملاً متساوی خواهد داشت (مثال سه قایق A و B و C در سه دور مسابقه که در بالا بیان شد).

اگر  $2c = n$  باشد در این صورت حتی ممکن است که  $m = n$  باشد یعنی همه m قایق شرکت کننده در پایان مسابقه شرایط یکسان بدست آورند؛ کافی است که ترتیب آنها را در دو دور باهم عوض کرد.

حالی را در نظر می‌گیریم که ۵ قایق در مسابقه‌ای شامل ۵ دور شرکت داشته باشند. ممکن است که سه قایق با شرایط برایر مسابقه را پایان دهند. A چهار دفعه از B می‌برد، B سه دفعه از C و C سه دفعه از A، در این صورت بنابر قانون A بر نده نخواهد بود زیرا مغلوب C شده است. جدول امتیازهای این قایقها را به ترتیب زیر در نظر می‌گیریم

	امتیازها	جمع
A	۳ ۳ ۲ ۲ ۱	۱۱
B	۲ ۲ ۱ ۱ ۵	۱۱
C	۱ ۱ ۳ ۳ ۲	۱۱

در موضوع کشیها مسئله دیگری مطرح است که بامسائل قبلی کاملاً تفاوت دارد. بنا به تصمیم «کمیته بین‌المللی مسابقات قایقها» قایقها باید که در یک مسابقه شرکت می‌کنند به شرح زیر امتیازهایی بدست می‌آورند و بعد جمع امتیازهای هر قایق حساب شده بر نده مسابقه معلوم می‌گردد. قانون بین‌المللی از این قرار است که در هر دور مسابقه هر قایق که به حد نهایی مسابقه برسد یک امتیاز و به تعداد قایقها باید که از آنها جلو افتاده است امتیازهای دیگری بدست خواهد آورد. اذیین دو قایق که به مرحله بردنها برسیده باشند بعد از جمع امتیازات آنکه به تعداد بیشتری دیگری را مغلوب کرده باشد بر نده خواهد بود. باقی بول اینکه در هر دور مسابقه نتیجه بردو باخت دو قایق نسبت به یکدیگر مشابه نخواهد بود چه شرایطی را باید تعیین کردا تا اینکه در  $c$  دور مسابقه که در آن  $m$  قایق شرکت‌دارند  $n$  قایق دارای مجموع امتیازهای برابر باشند؟

برای مثال در مسابقه ای که درسه دور انجام گرفته سه قایق A و B و C اوضاعی به ترتیب زیر داشته‌اند:

	دور اول	دور دوم	دور سوم
اول	A	C	B
دوم	B	A	C
سوم	C	B	A

A دو دفعه B را مغلوب کرده، B دو دفعه C را مغلوب کرده و C نیز دو دفعه A را مغلوب کرده است و امتیازهای هر قایق به ترتیب زیر است:

	امتیازها			جمع
	دور اول	دور دوم	دور سوم	
A	۳	۲	۱	۶
B	۲	۱	۳	۶
C	۱	۳	۲	۶

اولین مثالی را که ذکر شد یعنی شرکت سه قایق در سه دور را در نظر گرفت و آن را سه مرتبه تکرار کرد در این صورت ممکن است که سه قایق با شرایط مساوی به پایان مسابقه برسند.

عملاً مسابقاتی که انجام می‌شود در بیش از ۷ دور انجام نمی‌گیرد. حالت  $<7$  فقط از لحاظ تئوری در نظر گرفته می‌شود. اما در این باره هنوز یک قاعدة عمومی بدست نیامده است.

مسئله‌ای مشابه با مسئله فوق الذکر وقتی پیش می‌آید که در یک مسابقه یا بازی هر دسته باید با هر یک از دسته‌های دیگر بازی کنند و جمع امتیازها به حساب می‌آید. ممکن است با وضع یک شرط مخصوص مسئله را کاملاً پیچیده کرد: یک مسابقه بربع را در نظر بگیریم که در آن هر زوج بازیکنان از یک مرد و یک زن تشکیل یافته باشد. آیا ممکن است که دو دسته شامل هشت زوج بازیکن پشت هشت میز چنان بازی کنند که هر دفعه هر بازیکن با دور قیب جدید و یک شریک جدید هم بازی شود؟

برای اینکه **B** امتیازهایی برابر با **A** و **C** بددست آورد اینطور بنظر می‌رسد که حداقل شرکت ۵ قایق لازم است اما چنین حکمی قطعی نیست. ممکن است با شرکت چهار قایق امتیازها را به نحو مناسبی ترتیب داد تا جمیع آنها برابر بشود. برای ۴ قایق که در ۷ دور مسابقه شرکت داشته باشند می‌توانیم جدول زیر را ترتیب دهیم.

	امتیازها	جمع
<b>A</b>	۳ ۳ ۳ ۲ ۲ ۱ ۱	۱۵
<b>B</b>	۲ ۲ ۲ ۱ ۱ ۴ ۳	۱۵
<b>C</b>	۱ ۱ ۱ ۳ ۴ ۳ ۲	۱۵

اگر **C** عددی اول نباشد (مثلاً برابر با ۶ یا ۹ وغیره باشد) در این صورت می‌توان عاملهای اول را آنرا در نظر گرفت و شرایط مطلوب را تعیین کرد. مثلاً برای ۹ دور می‌توان

### ب) آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

در یک گروه ۸۷ نفری ۶۳ نفر دارای چشمان سیاه، ۵۸ نفر دارای موهای سیاه و ۴۹ نفر هم دارای موهای سیاه و هم دارای چشمان سیاه هستند. معلوم کنید تعداد نفراتی از این گروه را که نه موهایشان سیاه است و نه چشمهاشان.

### پ) سینخ مسئله تحت همین عنوان مندرج در یگان شماره گذشته

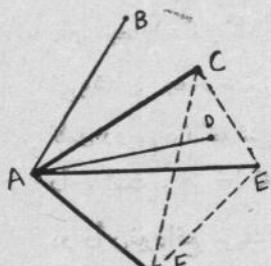
یکی از میخها را به دلخواه در نظر می‌گیریم (**A**). ۵ رشته نخ این میخ را به ۵ میخ دیگر وصل می‌کند. چون نخها فقط از دورنگ (قرمز و آبی) انتخاب شده‌اند بنابراین سه رشته نخ از این ۵ رشته نخ همنگ خواهند بود (فرض می‌کنیم رشته نخهای **AE** و **AF** و **AC** قرمز باشند).

مثلثی را در نظر می‌گیریم که رأسهای آن سه میخی باشد که سه رشته نخ قرمز مزبور به آنها وصل شده است ( مثلث **CEF** ) :

۱) اگر سه رشته نخ ضلعهای این مثلث همنگ باشند نتیجه خواهیم گرفت که شرط دلخواه مسئله ممکن نیست ( زیرا حداقل یک مثلث با سه ضلع همنگ وجود دارد ).

۲) اگر سه رشته نخ ضلعهای این مثلث همنگ نباشند لااقل یکی از آنها (**EC**) قرمز خواهد بود و در این صورت حداقل یک مثلث (**ACE**) با سه ضلع همنگ وجود دارد.

پس شرط دلخواه مسئله هیچگاه ممکن نیست.



## بیست و یک راه اثبات

# قضیه نیوتن = قضیه گوس

تنظیم از : KAILY TAN ، ترجمه حبیب‌الله گلستان زاده ، از مجله Math Magazine

رأسهای آن عبارتند از نقطه‌های A و B و C و D و E و F و  
وقطراشی عبارتند از AC و BD و EF و  
قراردادها :

MUN : خطی که از M و N می‌گذرد .

MUNUP : خطی که بر سه نقطه M و N و P می‌گذرد  
به عبارت دیگر ، سه نقطه مزبور بریک استقامت واقع‌اند .  
P : AB  $\cap$  CD = P نقطه تلاقی دو خط AB و CD است  
AB  $\cap$  CD  $\cap$  EF = P : سه خط AB و CD و EF در نقطه P متقاربند .

A  $\subset$  PQ : نقطه A روی خط PQ قرار دارد .

PQDA : خط PQ از نقطه A می‌گذرد .

س : متشابه است با ...

$\Delta$  ABC : مساحت مثلث (ABC)

\*\*\*

قضیه - در چهار ضلعی کامل اوساط سه قطر بر یک استقامت واقع‌اند

فرض می‌کنیم ABCDEF یک چهارضلعی کامل باشد و اوساط قطرهای BD و AC و EF را به ترتیب M و L و N می‌نامیم . می‌خواهیم ثابت کنیم که :

LUMUN

یعنی سه نقطه L و M و N بریک استقامت هستند . این خط غالباً «خط نیوتن» نامیده می‌شود و بعضی‌ها آن را «قطر

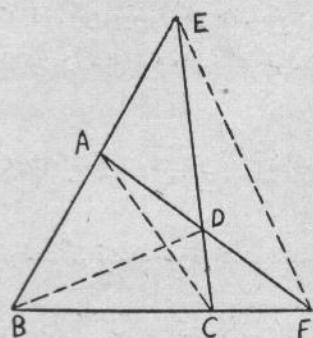
چهار ضلعی کامل» می‌نامند (از جمله گوس

برهان ۱ - متوازی‌الاضلاع EBFQ را می‌سازیم و CR || BE و (SCFQ)AS || BF

در این مقاله بیش از بیست راه اثبات قضیه چه از طریق هندسه مقدماتی و چه از طریق هندسه تحلیلی گردآوری شده است چندتایی از این راه حلها جدید است و بقیه آنها از کتابهای پرجسته یا از نشریات دیگر نقل شده‌اند . به تجربه ثابت شده است که دلایل مختلفی که برای برهان یک قضیه یا حل یک مسئله ارائه می‌شود برای آن دسته از دانش‌آموzan که اهل تحقیق و مذاقه هستند بسیار مفید فایده است و در ضمن ترغیب می‌شوند که راه حل‌های تازه‌ای را شخصاً جستجو کنند . برای معلمان هندسه هم بیش از دانش‌آموzan مورد استفاده است و تسلط بیشتر ایشان را بر هندسه موجب می‌شود .

قبل ارشح قضیه و اثبات آن بعضی تعاریف و قراردادها یاد آوری می‌شود .

تعریف - چهارضلعی کامل شکلی است که از تقاطع دو به



دو چهار خط به وجود می‌آید . نقطه تلاقی هر دو خط از این خطوط رأس چهارضلعی کامل می‌باشد . چهارضلعی کامل رویهم دارای شش رأس است . هر خط که

دو رأس غیرواقع بریک ضلع را به هم وصل می‌کند قطعه چهارضلعی کامل تعریف می‌شود . چهارضلعی کامل دارای سه قطر می‌باشد . شکل بالا چهارضلعی کامل ABCDEF را نشان می‌دهد ،

$$\Delta LCE = \Delta LCD + \Delta LDE =$$

$$\frac{1}{2} \Delta ABCD + \frac{1}{2} \Delta BDE = \frac{1}{2} \Delta BCE$$

$$\Delta CLM = \frac{1}{2} \Delta CLA \quad \text{و} \quad \Delta CME = \frac{1}{2} \Delta CAE$$

که چون در رابطه (۱) منظور کنیم خواهیم داشت :

$$\Delta ELM = \frac{1}{2} \Delta BCE - \frac{1}{2} (\Delta CLA + \Delta CAE)$$

$$= \frac{1}{2} \Delta BCLA = \frac{1}{4} \Delta ABCD$$

به طریق مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که :

$$\Delta FLM = \frac{1}{4} \Delta ABCD \Rightarrow \Delta ELM = \Delta FLM$$

اگر خطهای EP و FQ را بر LM عمود کنیم که

و Q به ترتیب پای این دو عمود باشند خواهیم داشت :

LM  $\cap$  EF = N' EP = FQ باشد خواهیم داشت  
N' = N یعنی EN' = FN' پس  $\Delta EPN' = \Delta FQN'$   
LUMUN

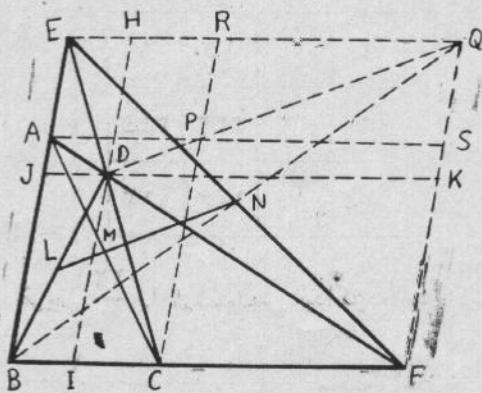
**برهان ۳** باز هم از قضیه‌های مربوط به مساحت

استفاده می‌کنیم :

متوازی الاضلاع BEQF را می‌سازیم و :

(R  $\subset$  EQ) CR  $\parallel$  BE و (S  $\subset$  FQ) AS  $\parallel$  BF

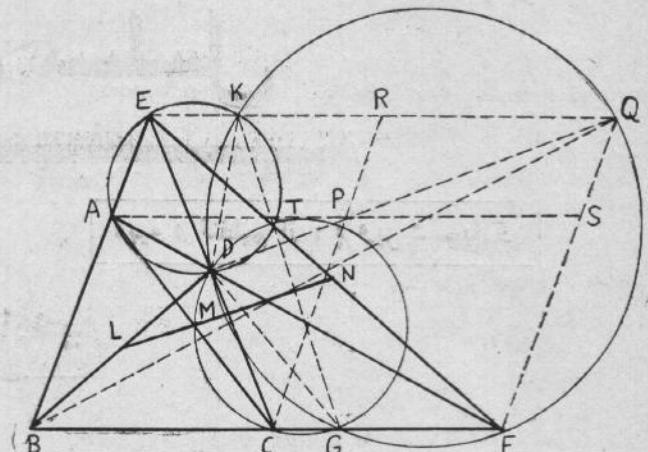
را رسم می‌کنیم که CR  $\cap$  AS = P . از نقطه D خطی موازی با BE رسم می‌کنیم که BC و ER را در I قطع می‌کند و خطی موازی با BF رسم می‌کنیم که BA و FQ را در J و K قطع می‌کند بنابر قضیه‌های مربوط به متوازی الاضلاع دو متوازی الاضلاع DS و BD و همچنین دو متوازی الاضلاع



BD و DR معادل هستند و نتیجه خواهیم گرفت که دو متوازی الاضلاع DS و DR معادل می‌باشند که چون مساحت متوازی الاضلاع DO را از هر کدام کم کنیم مساحت‌های باقیمانده یعنی

بقیه در صفحه ۵۱

می‌کنیم که AS  $\cap$  CR = P برسه نقطه F و Q دایره‌ای می‌گذاریم که خطوط EQ و BF را به ترتیب در نقاط K و G قطع کند و KD را رسم می‌کنیم ، داریم :  $\angle APK + \angle AEK = \angle FQK + \angle AEK = 180^\circ$



پس چهار نقطه E و A و D و K بر یک دایره واقع‌اند اگر این دایره AS را در T قطع کند بنابر توافقی AT  $\parallel$  EK و دو کمان EA و KT برابر بوده پس  $\angle EAT = \angle KTA$  و یا :

$$\angle EDT = \angle EAT = \angle KTA = \angle KGB$$

یعنی چهارضلعی DCGT محاطی است ، همچنین داریم :

$$\angle APC = \angle EAT = \angle EDT$$

و چهارضلعی DCPT نیز محاطی است بنابراین پنج نقطه T و P و G و C و D بر یک دایره واقع‌اند و نتیجه می‌شود :

$$\angle TPD = \angle TGD = \angle KGD = \angle KQD$$

و چون DQ  $\parallel$  DP و AP  $\parallel$  EQ و DQ  $\parallel$  DP و AP و از آنجا اوساط سه خط BP و BD و DUPUQ و BQ و از آنجا اوساط سه خط EF و AC و BD و BQ بر یک استقامت واقع‌اند .

**یادداشت** استدلال فوق با استفاده از خواص دایره (مقاله دوم هندسه) انجام گرفته و فهم آن بسیار ساده است .

**برهان ۴** با استفاده از قضایای مربوط به مساحت

قضیه را ثابت می‌کنیم :

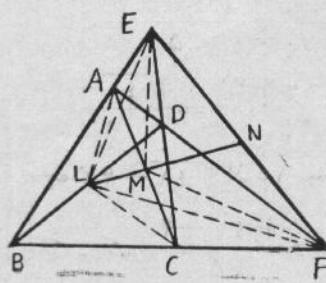
خطوط LC و EM و EL و FM و LF و LA را

رسم می‌کنیم .

خواهیم داشت :

$$\angle ELM = \angle LCE -$$

$$(\angle CLM + \angle CME)$$



# کسرهای مسلسل

تهیه و تنظیم از: پرویز شهریاری

## دنباله از شماره پیش

$$\text{با تقریب } \frac{1}{3740526} = \frac{1}{113 \times 33102} \text{ صحیح است}$$

یعنی تا یک میلیونیم تقریب.

مقادیر تقریبی ارشمیدس و تسوچونکچی چون در ردیف زوج کسرهای متقارب انداز  $\pi$  بزرگترند.

**۱۰- گرفتن جذر:** فرض کنید می خواهیم  $\sqrt{41}$  را با کمک کسرهای مسلسل محاسبه کنیم. به این ترتیب استدلال می کنیم: بزرگترین عدد صحیحی که در  $\sqrt{41}$  وجود دارد ۶ است، بنابراین می توان نوشت:

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{x}$$

و از آنجا:

$$(1) \quad \frac{1}{x} = \sqrt{41} - 6 = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5}$$

بزرگترین عدد صحیحی که در  $\frac{\sqrt{41} + 6}{5}$  وجود دارد

۲ می باشد، بنابراین فرض می کنیم:

$$x = \frac{\sqrt{41} + 6}{5} = 2 + \frac{1}{y}$$

از آنجا:

$$(2) \quad \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5} - 2 = \frac{\sqrt{41} - 4}{5}$$

$$y = \frac{5}{\sqrt{41} - 4} = \frac{5(\sqrt{41} + 4)}{25} = \frac{\sqrt{41} + 4}{5}$$

چون  $\sqrt{41} + 4$  از ۱۰ بیشتر است، بزرگترین عدد صحیحی که در کسر  $\frac{\sqrt{41} + 4}{5}$  وجود دارد برابر است با ۲ و بنابراین

۹- مقادیر تقریبی یک کسر - وقتی که صورت و مخرج کسر حسابی غیرممکن التحويل مفروضی با اعداد بزرگ بیان شده باشد، اغلب لازم است که مقدار تقریبی آنرا به صورت ممکن بنویسیم. برای این منظور کافی است که مفروض را به کسر مسلسل تبدیل کنیم و یکی از کسرهای متقارب آنرا (بسته به تقریبی که لازم داریم) انتخاب کنیم.

**مثال:** می دانیم عدد  $\pi$ ، نسبت محیط دائیره بر قطر آن بین دو کسر:  $\frac{3}{141592654}$  و  $\frac{3}{141592653}$  واقع است، مقدار تقریبی  $\pi$  را بدست آورید.

هر دو کسر را به کسر مسلسل تبدیل می کنیم و قسمتهای مشترک آنها را انتخاب می کنیم، بدست می آید:

$$\pi = 3 \dots 15915961597$$

کسرهای متقارب چنین اند:

		۱۵	۱
۳	۲۲	۳۳۳	۳۵۵
۱	۷	۱۰۶	۱۱۳

کسر تقریبی  $\frac{22}{7}$  را ارشمیدس پیدا کرده بود، این کسر با

تقریب  $\frac{1}{7 \times 106} = \frac{1}{742}$  صحیح است یعنی مسلم است

تقریب درست است. عدد  $\frac{355}{113}$  را «تسوچونکچی»

ریاضیدان قرن پنجم چین مقدار صحیح  $\pi$  می دانسته، این کسر

داریم :

$$(3) y = \frac{\sqrt{41} + 4}{5} = 2 + \frac{1}{z}$$

از آنجا :

$$\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{41} - 6}{5} ; z = \frac{5}{\sqrt{41} - 6} = \frac{5(\sqrt{41} + 6)}{5} = \sqrt{41} + 6$$

بزرگترین عدد صحیحی که در  $\sqrt{41} + 6$  وجود دارد ۱۲ می‌باشد، بنابراین می‌توان فرض کرد :

$$(4) z = \sqrt{41} + 6 = 12 + \frac{1}{v}$$

از آنجا :

$$\frac{1}{v} = \sqrt{41} - 6 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{41} - 6}$$

با مقایسه رابطه  $v$  با رابطه  $x$  بدست می‌آید :  $v = x$ . با استفاده از تساویهای (۱)، (۲)، (۳)، (۴) بدست می‌آید :

$$\begin{aligned} \sqrt{41} &= 6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{x}}}} \\ &= 6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \dots}}}}}} \end{aligned}$$

بنابراین  $\sqrt{41}$  کسر مسلسل متناوبی است که کسرهای متقابل آن مقادیر تقریبی  $\sqrt{41}$  خواهند بود :

		۲	۱۲	۲	۲	...
۶	۱۳	۳۲	۳۹۷	۸۲۶	۲۰۴۹	...
۱	۲	۵	۶۲	۱۲۹	۳۲۰	...

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\sqrt{13} = (3; 1; 1; 1; 6; 1; 19\dots) = (5; 2; 1; 1; 2; 10; \dots)$$

## ۱۱- جستجوی ریشه‌های معادله سیال . با کمک

کسرهای مسلسل می‌توان یکی از ریشه‌های معادله سیال :

$ax + by = c$  را پیدا کرد و ما این مطلب را ضمن یک مثال

روشن می‌کنیم . معادله سیال زیر را در نظر می‌گیریم :

$$43x + 15y = 8$$

کسر  $\frac{43}{15}$  را در نظر می‌گیریم و آنرا به کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{43}{15} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}}$$

حال کسر متقابل ماقبل آخر را در نظر می‌گیریم . این

کسر برابر  $\frac{20}{7}$  است . چون آخرین کسر متقابل برابر با

مقدار حقیقی کسر یعنی  $\frac{43}{15}$  است و  $\frac{20}{7}$  هم کسر متقابل ردیف

فرد است ، با توجه به قضیه شماره ۶ می‌توان نوشت :

$$\frac{43}{15} - \frac{20}{7} = \frac{1}{15 \times 7}$$

از آنجا :

$$43 \times 7 - 15 \times 20 = 1$$

که اگر طرفین این تساوی را ۸ برابر کنیم می‌شود :

$$43 \times 56 + 15 \times 160 = 8$$

با مقایسه این تساوی و معادله مفروض نتیجه می‌شود که می‌توان  $x$  را مساوی ۵۶ و  $y$  را ۱۶۰ - گرفت .

به این ترتیب همه جوابهای معادله سیال از روابط زیر بدست می‌آیند :

$$x = 56 - 15t ; y = -160 + 43t$$

این روابط را می‌توان ساده کرد ،  $t$  را به  $t+3$  تغییر

می‌دهیم :

$$x = 56 - 15(t+3) = 11 - 15t ;$$

$$y = -160 + 43(t+3) = -31 + 43t$$

حال مثلاً معادله  $5x - 19y = 5$  را در نظر می‌گیریم :

کسر  $\frac{7}{19}$  را به کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{9}{19} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}$$

کسر متقابل ماقبل آخر برابر است با  $\frac{3}{8}$  و چون کسر

متقابل ردیف زوج است داریم :

$$\frac{7}{9} - \frac{3}{8} = \frac{-1}{19 \times 8}$$

پائین صفحه بعد

## بحثی درباره معادله $x^4 + y^4 = z^4$

### با استفاده از منابع خارجی

### تهیه و تنظیم از محمود کاشانی

جوابهای صحیح معادله :

$$x^4 + y^4 = z^4 \quad (1)$$

نشان می‌دهد که  $x$  و  $y$  نسبت بهم اول هستند.  
**قضیه ۱** - ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه اعداد صحیح  $x > y > 0$  و  $z > 0$  باشند که  $x^4 + y^4 = z^4$  در رابطه (۱) صدق کنند آنست که یکی از دو عدد  $y$  و  $x$  به صورت  $2uv$  و دیگری به شکل  $u^2 - v^2$  بوده و  $z$  برابر  $u^2 + v^2$  باشد که در آن  $uv$  اعداد مثبت زوج و  $1 = u^2 - v^2$  می‌باشد.  
 شرط لازم است - یکی و فقط یکی از دو عدد  $y$  و  $x$  زوج خواهد بود زیرا در صورتی که هر دو زوج باشند  $z$  نیز زوج خواهد بود یعنی  $x$  و  $y$  نسبت به هم اول نیستند که خلاف فرض است و در صورت فرد بودن هر دو خواهیم داشت:  
 $y^4 = 4K_1 + 1$  و  $x^4 = 4K_2 + 1$   
 و درنتیجه با قرار دادن  $K_1 + K_2 = K$  می‌توان نوشت:

با جستجو روشن می‌شود که  $z_1$  بین ۳ و ۴ قرار گرفته است،  
 یعنی می‌توان فرض کرد:

$$z_1 = 3 + \frac{1}{z_2} ; \quad 2 = \left( \frac{5}{4} \right)^{\frac{1}{z_2}} = \left( \frac{5}{4} \right)^{\frac{1}{3+z_2}} = \frac{1}{\left( \frac{5}{4} \right)^{3+z_2}}$$

از آنجا:

$\left( \frac{5}{4} \right)^{\frac{1}{z_2}} = 2 : \quad \left( \frac{5}{4} \right)^2 = \frac{128}{125} \Rightarrow \left( \frac{128}{125} \right)^{z_2} = \frac{5}{4}$   
 دوباره با تجسس روشن می‌شود که  $z_2$  بین ۹ و ۱۰ قرار گرفته است و این روش را می‌توان به همین ترتیب ادامه داد. اگر مقدار تقریبی  $z_2$  را درنظر بگیریم می‌توان  $z_2 = 9$  گرفت،  
 بنابراین:

$$z_1 = 3 + \frac{1}{9} ; \quad z = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9}} ; \quad x = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9}}}$$

و اگر این کسر مسلسل را به کسر معمولی تبدیل کنیم می‌شود:

$$x = \frac{28}{93} = 0,30107$$

و این مقدار تا رقم چهارم بعد از میز صحیح است. مقدار دقیق‌تر  $x$  چنین است:

$$x = 0,3010300$$

پایان

که به اعداد فیناگورثی مشهوراند در شماره‌های سابق یکان مورد بحث بوده و به همین مناسبت نیز یادی از رابطه  $x^n + y^n = z^n$  برای آن به ازاء عدد صحیح شده است که بنا به ادعای فرمایه  $x^n + y^n = z^n$  برای آن به ازاء عدد صحیح  $n > 2$  جواب صحیح وجود ندارد. این ادعا و تلاش برای اثبات یارد آن نقطه شروع کوشش‌های فراوانی بوده که مطالعه در رابطه (۲)  $x^4 + y^4 = z^4$  قسمت کوچکی از آن است. هدف اصلی این مقاله نیز آنست که ثابت شود که برای رابطه (۲) جوابهای صحیح وجود ندارد ولی قبل از اثبات قضیه‌ای در مورد (۱) پردازیم. این نکته را یادآوری می‌کنیم که علامت  $=$  (۱) یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد  $x$  و  $y$  و  $z$  برای  $d$  است پس تساوی  $1 = xy$  نوشت:

$$\begin{aligned} & 7 \times 8 - 19 \times 3 = -1 \\ & 7 \times 40 - 19 \times 15 = -5 \Rightarrow 7(-40) - 19(-15) = 5 \\ & \text{یعنی می‌توان } x \text{ را مساوی } -40 \text{ و } y \text{ را مساوی } -15 \text{ گرفت. در این صورت:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x = -40 + 19t, \quad y = -15 + 7t \\ & \text{که با تبدیل } t \text{ به } t+2 \text{ این روابط ساده می‌شود:} \\ & x = -40 + 19(t+2) = -2 + 19t; \\ & y = -15 + 7(t+2) = -1 + 7t. \end{aligned}$$

**۱۳ - محاسبه لگاریتم** فرض کنید می‌خواهیم  $\log 2$  را محاسبه کنیم (در مبنای ۱۰)، به عبارت دیگر می‌خواهیم معادله  $10^x = 2$  را حل کنیم. ابتدا برای  $x$  نزدیکترین اعداد صحیح را پیدا می‌کنیم. چون  $1 = 10^0$  و  $10^1 = 10$  بنابراین  $x$  بین صفر و یک قرار گرفته است. در این صورت می‌توان

$$\text{فرض کرد: } \frac{1}{z} = x \text{ و نوشت:}$$

$$\frac{1}{10^z} = 2 \quad \text{یا} \quad 10^{-z} = 2 \quad \text{به سادگی دیده می‌شود که } z \text{ بین ۳ و ۴ قرار گرفته است،}$$

$$\text{بنابراین می‌توان فرض کرد: } z = 3 + \frac{1}{z_1} \text{ و نوشت:}$$

$$10 = 2^{3 + \frac{1}{z_1}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{z_1}} = 8 \times 2^{\frac{1}{z_1}}$$

$$\text{از آنجا: } z_1 = \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow 2 = \left( \frac{5}{4} \right)^{z_1}$$

$z, y, x$  که نسبت بهم اول نیستند قابل قبول است.  
تمرین - عدد چهار رقمی  $\overline{medu}$  را چنان پیدا کنید

که در دوشرط زیر صدق کند :

$$(1) \quad u^1 = d^1 + c^1 \quad (c \neq 0)$$

$$(2) \quad m = d - c$$

حل - بنا به قضیه فوق ونتایجش از  $c$  و  $d$  یکی مضرب

۳ است و چون این هر دو یک رقمی‌اند پس دیگری مضرب ۴ بوده و بهمین دلیل  $u$  مضرب ۵ می‌شود که جون یک رقمی است  
 $m = 16c = 3d = 4$  پس  $c < d < u$  و  $z = 5$   
 $\overline{medu} = 1345$

قضیه ۲ - ثابت کنید اعداد صحیح ومتبت  $x$  و  $y$  و  $z$  که  $1 = z - y$  و  $x$ ) فرض می‌شود هرچه باشند در معادله (۲) صدق نمی‌کنند.

حل - چون می‌توان فرض کرد  $z = Z$  پس می‌توان قضیه را در مورد  $x^4 + y^4 = Z^4$  اثبات کرد و یا چه بهتر که از آبتد رابطه  $x^4 + y^4 = z^4$  را درنظر بگیریم . اما اگر این معادله دسته جوابهای متعددی داشته باشد از میان آنها دسته جواب  $x$  و  $y$  و  $z$  را آنطور انتخاب می‌کنیم که در آن  $z$  کوچکترین مقدار را داشته باشد .

حال می‌دانیم که اعداد  $x$  و  $y$  و  $z$  در  $x^4 + y^4 = z^4$  صادق‌اند و نیز می‌دانیم با فرضی که کردیم عددی کوچکتر از  $z$  نمی‌تواند جزء دسته جوابی از معادله مزبور باشد اینکه با توجه به قضیه قبل به ترتیب خواهیم داشت :

$$(a) \quad x^1 = 2uv$$

$$(b) \quad y^1 = u^1 - v^1$$

$$(c) \quad z = u^1 + v^1$$

از (b) نتیجه می‌شود  $y^1 + v^1 = u^1$  که تظریه قضیه قبل چون فرد است پس  $v$  زوج بوده و بنا به (a) داریم  $v = 2w$  و  $y^1 = z^1 - u^1 = z^1 - 2w^1$  که باز به موجب (b) داریم  $y^1 = z^1 - 4w^1 + y^1 = 4w^1$  و باز  $z = u^1 + v^1$  بنا به قضیه (1) خواهیم داشت :

$$(a') \quad z^1 = u^1 + v^1 \quad (b') \quad 2w^1 = 2u^1v^1 \quad (c') \quad 4w^1 = 2u^1v^1$$

و مجدداً بنا بر (a') و (b') داریم  $u^1 = x^1$  و  $v^1 = y^1$  که چون در (c') منظور کنیم نتیجه می‌شود  $x^1 + y^1 = z^1$  این رابطه نظیر  $x^4 + y^4 = z^4$  است با این اختلاف که در آن  $x^1$  از  $z^1$  کوچکتر است و این خلاف فرض است .

$z^2 = 4k + 2$  که محال است زیرا اگر  $z$  فرد باشد مجذورش فرد خواهد بود و اگر زوج باشد مجذورش مضرب ۴ می‌شود در حالی که رابطه اخیر نشان می‌دهد که با قیماندۀ  $Z$  بر ۴ برابر ۲ است؛ پس باید یکی ازدو عدد  $x$  و  $y$  که ما آنرا  $x$  فرض می‌کنیم زوج باشد در نتیجه  $y$  و  $z$  هر دو فرد خواهند بود و چون نسبت به هم اول اند بزرگترین مقسوم علیه مشترک شان ۲ می‌شود در نتیجه خواهیم داشت :

$$(\frac{x}{2})^2 = \frac{z-y}{2} \times \frac{z+y}{2}$$

$$(\frac{z-y}{2} - \frac{z+y}{2}) = 1$$

و بنابراین باید هر یک از دو عدد  $\frac{z+y}{2}$  و  $\frac{z-y}{2}$  که نسبت بهم اول اند و حاصل ضربشان مجذور کامل است مجذور کامل باشند یعنی باید داشته باشیم :

$$\frac{z-y}{2} = v^2 \quad \text{و} \quad \frac{z+y}{2} = u^2$$

و از آنجا :

$$x = 2uv \quad \text{الف}$$

$$y = u^1 - v^1 \quad \text{ب}$$

$$z = u^1 + v^1 \quad \text{ج}$$

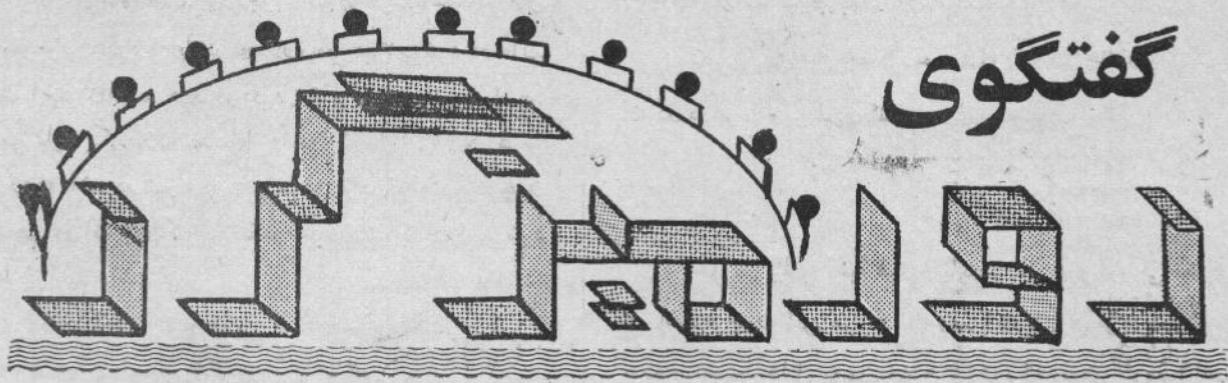
شرط کافی است - یعنی اگر  $x$  و  $y$  و  $z$  به صورتهای اخیر باشند در رابطه (۱) صدق می‌کنند و این بدیهی است .

نتیجه ۱ - به موجب (b)  $v > u$  و یکی از دو عدد  $u$  و  $v$  زوج بوده و در نتیجه  $x$  مضرب ۴ خواهد بود .  
تبصره - با وجودی که هدف از اثبات قضیه فوق بررسی وتحقیق در معادله (۲) بود معذلک تاییج دیگری نیز از (الف) و (ب) و (ج) گرفته می‌شود که در زیر یادآوری می‌شود :

نتیجه ۲ - اگر هیچیکی ازدو عدد  $u$  و  $v$  مضرب ۳ نباشند به موجب (b) عدد  $y$  مضرب ۳ خواهد بود و گرنه  $x$  چنین است پس بالاخره از دو عدد  $x$  و  $y$  یکی مضرب ۳ است .  
نتیجه ۳ - نظیر نتیجه ۲ می‌توان ثابت کرد که یکی از اعداد  $x$  و  $y$  و  $z$  مضرب ۵ است .

نتیجه ۴ - چنانچه اعداد  $x$  و  $y$  باشند می‌شود  $x = dy$  و  $y = dx$  در (۱) صدق کنند از  $x^1 + y^1 = z^1$  نتیجه  $x^1 + y^1 = z^1$  می‌گیریم  $x^1 + y^1 = z^1$  و بنابراین نتایج قبلی در مورد اعداد

# گفتگوی



حل المسائل فراهم می‌آید آن وقت به این ناشر و آن ناشر مراجعه می‌کنند و تأثیر خود را برای چاپ عرضه می‌کنند. حتی برای اینکه ناشر چاپ کتاب آنها را قبول کند فروش تعداد معینی از آن را شخصاً قبل می‌کنند و تعهد می‌سپارند.

✿ - باید مؤلفین کتابهای حل المسائل را اینگونه تخطیه کرد. آیا همه اینطور عمل می‌کنند؟

\* - مقصودم تخطیه آنها نبود، خواستم بگویم که ناشران هم در این میان مقص نیستند. البته بسیاری از مؤلفان کتابهای حل المسائل واقعاً شایستگی دارند و روی تهیه کتاب خود حتی چندین سال زحمت و مراحت می‌کشند. کتاب آنها هم کاملاً قابل استفاده است.

✿ - معمولاً ناشران به آنچه چاپ می‌کنند وارد نیستند و حتی در زمینه مطالب کتاب کوچکترین اطلاعی ندارند. بعضی از آنها که اشخاص خوش نیت هستند. در هر زمینه که بخواهند کتابی چاپ کنند با شخصیت‌های معروفی که سراغ دارند مشورت می‌کنند اما بعضی دیگر از آنها روش دیگری را در پیش می‌گیرند.

✿ - من از همکاران عزیزم یک تقاضا دارم: موافقت فرمائید در اصل موضوعی که مطرح است صحبت را دنبال کنیم فرع بر موضوع صحبت‌های پیش می‌آید که اصلاً از موضوع اصلی خارج می‌باشد. ما که نمی‌خواستیم راجع به صلاحیت یا عدم صلاحیت ناشران صحبت کنیم، تقاضا داشتم که معلوم کنیم آیا استفاده از حل المسائل تاچه‌اندازه برای محصل مفید فایده است؟

✿ - چند نوع حل المسائل داریم، یک حل المسائل، مسائل کتابهای درسی را حل کرده است. نوع دیگر شامل حل مسائل امتحانی و یا کنکور است، نوعی از آن هم شامل مسائل متفرقه است، کدام را در نظر بگیریم.

✿ - راجع به حل المسائل کتابهای درسی قبلاً صحبت کردیم و گفتیم که نه تنها برای محصل فایده‌ای ندارد بلکه مضر هم هست. درباره دیگر کتابهای حل المسائل هم من عقیده دارم بقیه در صفحه ۵۱

❶ - جلسه گذشته صحبت ما راجع به حل المسائل ناتمام ماند. همکاران موافق باشند در این جلسه موضوع را دنبال کنیم.

✿ - اگر چاپ کتاب را در نظر بگیریم بی‌شك دوره‌ فعلی از فرهنگ ایران دوره حل المسائل نامیده خواهد شد هر ناشری در سال دهم کتاب حل المسئله چاپ می‌کند و پشت و پرین کتاب‌فروشیها آنچه بیشتر به چشم می‌خورد کتابهای حل المسئله است، حتی در بعضی و پرینها غیر از کتابهای حل المسئله کتابهای دیگری وجود ندارد.

✿ - در بعضی کتاب‌فروشیها هم اعلانی نصب کرده روی آن نوشته است: «بورس حل المسائل» !!

✿ - عمدۀ فعالیت ناشران و بیشتر سرمایه ایشان صرف چاپ کتابهای حل المسئله می‌شود. مثل اینکه مؤسسه خود را فقط به خاطر چاپ حل المسائل تأسیس کرده‌اند.

\* - اینطور نیست. ناشرانی داریم که بهترین و سنگین ترین کتابها را چاپ می‌کنند و حتی یک کتاب حل المسئله هم چاپ نکرده‌اند.

✿ - بستگی دارد به سرمایه آنها. بعضیها با سرمایه مختصر شروع بکار می‌کنند و مجبور هستند کتابهایی را چاپ کنند که بعد از مدت کوتاهی باز سرمایه را در اختیار داشته باشند

✿ - چاپ کتابهای حل المسائل از چند نظر مقرر به صرفه است. یکی اینکه همانطور که همکار عزیز گفتند زودتر فروش می‌رود، دیگر اینکه اغلب مؤلفین آنها در گرفتن حق التأليف نه اصراری دارند و نه شتابی، تأثیر کتاب برای آنها زحمت چندانی نداشته است؛ مسائلی را از دفترچه تحصیلی خود به یادگار داشته‌اند، مسائل دیگری را از کتابهایی که سبقاً چاپ شده و در اختیار دارند به سلیقه خود انتخاب می‌کنند. اوراق پلی-کپی سوالات امتحانی و کنکور را جمع آوری می‌کنند، یک کتاب

# چگونه مسئله‌ای را حل کنیم؟

ترجمه: ه. شریفزاده

تألیف: G.POLYA

## مسئل حل کردنی<sup>(۱)</sup> - مسائل ثابت کردنی<sup>(۲)</sup>

در منزل بوده است. قاضی باید کشف کند که آیا این مطلب راست است یا دروغ؛ و این کشف باید بر اساسی مبتنی باشد که تا حدامکان استوار است. به این ترتیب قاضی با یک «مسئله ثابت کردنی» مواجه است. یک مسئله ثابت کردنی دیگر «اثبات قضیه فیثاغورس» است. ما نمی‌گوییم: «قضیه فیثاغورس را ثابت یا رد کنید». شاید بهتر باشد که صورت مسئله را چنان بیان کنیم که امکان رد کردن قضیه فیثاغورس نیز باشد. اما ما از این کار صرف نظر می‌کنیم، زیرا می‌دانیم که احتمال رد کردن این قضیه نسبتاً ضعیف است.

۳- اجزای اصلی «مسئله حل کردنی» عبارتند از مجھول معلومات، شرط.

اگر بخواهیم مثلثی را بسازیم که اضلاع آن  $a$  و  $b$  و  $c$  است. مجھول عبارت است از مثلث، معلومات عبارتند از سه طول  $a$  و  $b$  و  $c$  و شرط آن است که اضلاع مثلثی که می‌خواهیم بسازیم به ترتیب برابر این طولها باشد. اگر بخواهیم مثلثی را بسازیم که ارتفاعهای آن  $a$  و  $b$  و  $c$  است مجھول از نوع مجھول مسئله قبل است؛ معلومات این مسئله نیز مانند معلومات مسئله قبل است؛ اما شرط، که رابط بین معلومات و مجھول

این دونوع مسئله را با هم مقایسه می‌کنیم.

۱- هدف یک «مسئله حل کردنی» عبارت از کشف موضوعی است به نام مجھول مسئله.

مجھول، که آن را «پرسش» همی‌گویند، موضوعی است که آن را جستجو می‌کنیم، یا به عبارت دیگر موضوعی است که آن را از ما خواسته‌اند. مسائل «حل کردنی» ممکن است که علمی<sup>۳</sup> یا عملی<sup>۴</sup>، انتزاعی<sup>۵</sup> یا واقعی<sup>۶</sup>، جدی<sup>۷</sup> یا معتمای محض<sup>۸</sup> باشد. مجھولاتی را که جستجو می‌کنیم ممکن است که همه‌جور باشد. هر موضوعی که بتوان آن را پیدا کرد، بدهست آورد، فراگرفت، رسم کرد، ساخت، به عنوان مجھول قابل تصور است! در یک داستان پلیسی جانی مجھول است. در بعضی از معماها یک کلمه مجھول است. در بعضی از مسائل مقدماتی جبر یک عدد مجھول است. در یک رسم هندسی یک شکل مجھول است.

۲- هدف یک «مسئله ثابت کردنی» این است که درستی یا نادرستی بیان مسئله را با ارائه دلیل قاطع ثابت کنیم.

یک نفر گواه ثابت می‌کند که در شب مورد نظر مدعی علیه

1- problème à résoudre (problem to find)

2- problème à démontrer (problem to prove)

3- Théorique (theoretical)

4- Pratique (practical)

5- Abstrait (abstract)

6- Concret (concrete)

7- Serieun (serious)

8- Simple énigme (mere puzzle)

را پیدا کرد ؟ آیا می توانید مجھول یا معلومات یا هر دو را اگر لازم باشد تغییر بدھید بطوری که معلومات جدید و مجھول جدید به ترتیب به معلومات قبلی و مجھول قبلی شایهت زیاد داشته باشد ؟ آیا تمام معلومات را به کار برده اید ؟ آیا شرط را به طور کامل به کار برده اید ؟

۶- اگر بخواهید یک «مسئله ثابت کردنی» را حل کنید باید اجزای اصلی آن «فرض و مستبین» را به درستی بشناسید. سوالات و تلقینات مفیدی یافت می شود که شامل این اجزاست :

فرض چیست ؟ مستبین چیست ؟

اجزای مختلف فرض را از هم جدا کنید.

رابطه بین فرض و مستبین را پیدا کنید.

به مستبین نگاه کنید ! سعی کنید که از میان قضاوای دسته بندی شده قضیه ای را تجسم کنید که دارای همین مستبین یا مستبین مشابه باشد.

فقط یک جزء از فرض را نگاه دارید ، جزء دیگر را کنار بگذارید ؛ آیا مستبین تغییر می کند ؟ آیا می توانید از فرض جزء مفیدی را کسب کنید ؟ آیا می توانید فرضی دیگر را تصور کنید که با آن بتوانید به سادگی مستبین را بیابید ؟ آیا می توانید فرض یا مستبین یا شرط را اگر لازم باشد تغییر بدھید بطوری که فرض جدید و مستبین جدید به ترتیب با فرض قبلی و مستبین قبلی شباخت زیاد داشته باشد ؟ آیا از فرض به تطور کامل استفاده کرده اید ؟

۷- مسائل حل کردنی در ریاضیات مقدماتی و مسائل ثابت کردنی در ریاضیات عالی دارای اهمیت است .

است ، در دو مسئله تفاوت می کند .  
۴- اگر یک «مسئله ثابت کردنی» یک مسئله ریاضی معمولی باشد ، اجزای اصلی آن عبارتند از **فرض و مستبین** قضیه ای که باید اثبات یا رد شود .

«اگر چهار ضلع یک چهارضلعی متساوی باشد ، پس اقطار آن باید برابر باشند» جزء دوم این جمله که با «پس» شروع شده است **مستبین** است و جزء اول که با «اگر» شروع شده است **فرض** است .

[در هر قضیه ریاضی نمی توان به سادگی فرض و مستبین را از یکدیگر تمیز داد . به این مثال توجه کنید : «ینهایت عدد اول وجود دارد» .]

۵- اگر بخواهید یک «مسئله حل کردنی» را حل کنید باید اجزای اصلی آن مجھول و معلومات و شرط را به درستی بشناسید . جدولی را که در ابتدای کتاب (اولین مقاله این سلسله مقالات در مجله یکان) ارائه دادیم شامل پرسشها و تلقیناتی است که شناسایی این اجزا را آسانتر می کند :

مجھول چیست ؟ معلومات کدامند ؟ شرط چیست ؟

قسمتهای مختلف شرط را از یکدیگر جدا کنید .

رابطه بین معلومات و مجھول را پیدا کنید .

خوب به مجھول نگاه کنید ! سعی کنید که از میان مسائل دسته بندی شده مسئله ای اتجسم کنید که دارای همین مجھول یا مجھول مشابه باشد .

یک جزء از شرط را نگاه دارید ، جزء دیگر را کنار بگذارید ؛ با این کار مجھول در چه حدودی تعیین می شود و در چه حدودی می تواند تغییر کند ؟

آیا می توانید از معلومات جزء مفیدی را کسب کنید ؟ آیا می توانید معلوماتی دیگر را تصور کنید که با آنها بتوان مجھول

## درباره کسر های مخصوص

فرمول کلی مربوط به کسر هایی که در شماره ۲۹ یکان درج شده بود به شرح زیر انتخاب شود ساده تر خواهد بود :

۱- برای اینکه مجموع و حاصل ضرب دو کسر  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  باهم مساوی باشند می توان شرط زیر را در نظر گرفت .

$$a=c=b+d$$

۲- برای اینکه تفاضل و حاصل ضرب دو کسر مزبور برابر باشند شرط عبارت می شود از :

$$a=c=d-b$$

۳- برای اینکه تفاضل و حاصل ضرب یک عدد صحیح و یک کسر برابر باشند اگر به صورت

$$n \times \frac{n}{n+1} = n - \frac{n}{n+1}$$

اختیار شوند مشاهده می شود که کسر کوچکتر از واحد خواهد بود .

قدرت الله شریفی سال ششم ریاضی

# داهنماي رياضيات

## متوسط

### « طریقه خاص برای حل یک معادله درجه چهارم »

نوشته: پاول روپر - ترجمه محمد حسین پرتوی

این معادله پس از انجام عملیات لازم چنین نوشته می شود  
 $(7) \quad y^4 - cy^3 + (bd - 4e)y^2 - b'e + 4ce - d = 0$   
 اگر  $y = r$  یکی از ریشه های معادله (7) باشد این مقدار را در رابطه (5) جانشین می کنیم بنا بر آنکه گفته شد طرف دوم رابطه پنجم مربع کامل یکتابع خطی به صورت  $px + q$  خواهد بود از آنجا رابطه (5) را می توان چنین نوشت:

$$(8) \quad (x^4 + \frac{bx}{4} + \frac{r}{4})^2 = (px + q)^2$$

در نتیجه:

$$x^4 + \frac{bx}{4} + \frac{r}{4} = \pm (px + q)$$

از معادله (9) دومعادله درجه دوم بدست می آید که قابل حل است و چهار مقدار برای  $x$  بدست می آید.  
 تبصره - اگر معادله (7) دارای سه ریشه باشد هر کدام از ریشه ها را بکار ببریم نتیجه عمل یکی خواهد بود.  
 مثال - معادله زیر را حل کنید:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 12x + 3 = 0$$

#### طریقه حل -

$$x^4 - 4x^3 = -4x^2 + 12x - 3$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 12x - 3$$

$$(x^2 - 2x)^2 + (x^2 - 2x)y + \frac{y^2}{4} =$$

$$(x^2 - 2x)y + \frac{y^2}{4} + 12x - 3$$

$$(x^2 - 2x + \frac{y}{2})^2 = yx^2 - 2(y - 6)x + \frac{y^2}{4} - 3$$

بقیه پائین صفحه بعد

هر معادله درجه چهارم در حالت کلی به صورت:

$$(1) \quad a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

و یا به صورت:

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

می باشد. واضح است که معادله (2) از معادله (1) نتیجه شده است.

برای حل معادله (2) آنرا چنین می نویسیم:

$$(3) \quad x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e$$

به طرفین رابطه (3)  $\frac{b^2 x^4}{4}$  را اضافه می کنیم تا طرف اول آن مربع کامل شود:

$$(4) \quad x^4 + bx^3 + \frac{b^2 x^4}{4} = (\frac{b^2}{4} - c)x^2 - dx - e$$

حال عددی مانند  $y$  که مقدار آن بعداً معین خواهد شد

انتخاب کرده و به طرفین رابطه (4) عبارت:

$$(x^2 + \frac{bx}{2})y + \frac{y^2}{4}$$

را اضافه می کنیم که به صورت زیر درهی آید:

$$(5) \quad (x^2 + \frac{bx}{2})^2 + (x^2 + \frac{bx}{2})y + \frac{y^2}{4}$$

$$= (\frac{b^2}{4} - c + y)x^2 + (\frac{by}{2} - d)x + \frac{y^2}{4} - e$$

طرف دوم رابطه (5) که سه جمله ای درجه دوم نسبت به  $x$  می باشد وقتی مربع کامل است که میین آن صفر باشد.

$$(6) \quad A = (\frac{by}{2} - d)^2 - 4(\frac{b^2}{4} - c + y)(\frac{y^2}{4} - e) = 0$$

# راهنمای حل مسائل شیمی

مترجم : عطاء الله بزرگ نیا

مؤلفان : Favre et Gautier

## پیش گفتار

حل مسائل شیمی برای شاگردان مبتدی مشکل بزرگی محسوب می شود به حدی که صورت حل معما به خود گرفته است . برای حل این مشکل لازم است که ابتدا شاگردان را به قوانین ساده این علم و روش کاربری آن آشنا کنیم .

در حقیقت حل مسائل شیمی چیزی جز استفاده از قوانین این علم نیست و این اصلی است که در نگارش این کتاب کوچک مورد نظر بوده است .

در هیچیک از علوم ، مسائل مانند شیمی یکنواخت نیست و در حقیقت می توان گفت که «همه یک چیز است» بنابراین شاگردان باید قطعاً از این یکنواختی که به تسهیل کار آنها کمک می کند آگاه بوده و استفاده کنند . متأسفانه اینطور نیست ، از این رو باید آنان را برانگیخت تا این حقیقت را خود دریابند . قانون ساده تناسب که مورد علاقه مفرط شاگردان است به تنها در حل مسائل شیمی حکومت می کند و همیشه سه جزء تناسب معلوم است .

لازم به تذکر نیست که در نگارش این کتاب ، فرض این است که خواننده گرامی از مقدمات شیمی اطلاع دارد و اگر در مقدمه بخش اول و دوم ، برخی از تعاریف و قوانین را یادآوری کرده ایم فقط به این منظور است که مراجعه به آنها آسانتر باشد و وانگهی این تذکر است به نحو اجمالی و بدون اثبات و شرح کافی داده شده است .

بر عکس آنجا که مربوط به هدف خاص این کتاب بوده است از تکرار و تأکید زیاد گریز نکرده ایم .

در آموزش غالباً این قول معروف که «آفچه بدون گفتن انجام می شود ، با گفتن بهتر انجام می شود» مصدق پیدا می کند . در تنظیم این کتاب نه فقط مراحل تحصیل شاگردان را در نظر گرفته ایم ، بلکه در این کار کسانی را نیز که پیش خود می آموزند از نظر دور نداشته ایم .  
(دنباله در صفحه بعد)

داریم :

$$(x^2 - 2x + 2) = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 2x + 1 = 4x^2 + 2x - 1$$

از آنجا :

$$x^2 - 2x + 2 = 2x + 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 - 2x + 2 = -(2x + 1) \Rightarrow x^2 = -3$$

$$\Rightarrow x = \pm i\sqrt{3}$$

بقیه راهنمای ریاضیات

مبین سه جمله‌ای درجه دوم طرف دوم رابطه بالا را مساوی

صرف قرار می دهیم :

$$4(y-6)^2 - 4y\left(-\frac{y^2}{4} - 3\right) = 0$$

$$y^2 - 4y^2 + 36y - 144 = 0$$

ریشه‌های معادله اخیر ۴ و  $\pm 6i$  می باشند به ازاء  $y = 4$

## بخش اول

### فصل اول - یادآوری چند تعریف

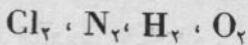
**۳- حجم ملکولی اجسام به حالت گاز- حجمی را که یک ملکول گرم گاز اشغال می کند تابع حرارت و فشار است این حجم که با حرف  $V$  معرفی می شود در شرایط یکسان از حرارت و فشار برای تمامی اجسام به حالت گازیکی است. در مسائل هر گاه این حجم ذکر نشده باشد و معلوماتی برای محاسبه آن نداده باشند  $V$  را برابر  $\frac{22}{4}$  لیتر در شرایط متعارفی (صفر درجه حرارت و فشار  $760$  میلیمتر جویه) منظور می کنیم. هر گاه درجه حرارت  $t$  و فشار  $H$  میلیمتر باشد حجم ملکولی برابر**

$$V_0 \times \frac{760}{H} (1 + \alpha t)$$

خواهد شد.

همیشه حجم ملکولی اجسام گازی شکل را در شرایط متعارفی  $22/4$  لیتر می گیریم مگر آنکه در مسئله، عدد دیگری بجای آن داده شده باشد.

**۴- فرمول و ملکول اجسام ساده به حالت گاز-** ملکول پاره‌ای از اجسام ساده به حالت گاز ازتر کیب دو یا چند اتم آنها تشکیل یافته است بنا بر این جرم ملکولی آنها برابر حاصل ضرب جرم اتمی در تعداد اتمهای موجود در ملکول است. فرمول ملکولی اکسیژن، ئیدرژن، ازتوکلر به ترتیب عبارتند از:



**۵- تبصره** - تا اینجا فرض این بود که جرم اتمی و جرم ملکولی بر حسب گرم و حجم ملکولی بر حسب لیتر بیان شده باشد با اینکه بیشتر اوقات، این دو واحد بکار می رود با این حال گاهی لازم می شود که واحدهای بزرگتر یا کوچکتر را مورد استفاده قرار دهیم. در این صورت نیز سیستم اعداد جرم اتمی بدون هیچگونه تغییری بکار می رود و کافی است که میلی اتم و میلی ملکول، بر حسب میلی گرم و حجم بر حسب سانتیمتر مکعب بیان شود چنانچه واحد کیلو گرم انتخاب شود اعداد فوق ملکول کیلو گرم و اتم کیلو گرم و حجم ملکولی بر حسب متر مکعب خواهد بود.

**۱- نشانه و اتم یک جسم ساده** - هر یک از اجسام ساده یا عناصر با نشانهای که از یک یادو حرف تشکیل شده است معرفی می شود: حرف اول همیشه بزرگ نوشته می شود. بر حسب قرارداد نشانه هر عنصر مقداری از آن عنصر را نشان می دهد. این کمیت را اتم و جرم آنرا جرم اتمی عنصر نامند مثلاً نشانه اکسیژن  $O$  و جرم اتمی آن  $16$  قراردادشده است که آنرا اینطور می نویسند  $O = 16$  جرم اتمی سایر عناصر اعدادی هستند که سنگینی اتم آنها را در مقایسه با سنگینی اتم اکسیژن  $O = 16$  نشان می دهد این اعداد با مقداری تقریب بدهست آمده است و بر حسب دقیقی که در جواب مسائل مورد نظر باشد اعداد دقیق یا تقریبی آنها بکار برد می شود. در حل مسائل این اعداد جزء معلومات مسئله داده می شود و در جداول جرم اتمی نیز می توان آنها را یافت.

**۲- فرمول و ملکول یک جسم هر کب** - هر جسم مرکب دارای فرمولی است که نشانه های اجسام ساده تشکیل دهنده جسم را شامل می باشد، به هر یک از این نشانهای با توجه به ترکیب جسم، عددی نسبت داده شده است این اعداد که درست راست و پائین نشانه عناصر گذاشته می شود، همیشه صحیح می باشند از فوشن عدد یک خودداری می شود.

مانند نشانه اجسام ساده، فرمول یک جسم مرکب مقداری از آنرا نشان می دهد. این کمیت ملکول و جرم آنرا جرم ملکولی جسم نامند. جرم ملکولی یک جسم مرکب از جمع حاصل ضرب جرم‌های اتمی عناصر تشکیل دهنده در ضریب مر بوط به دست می آید.

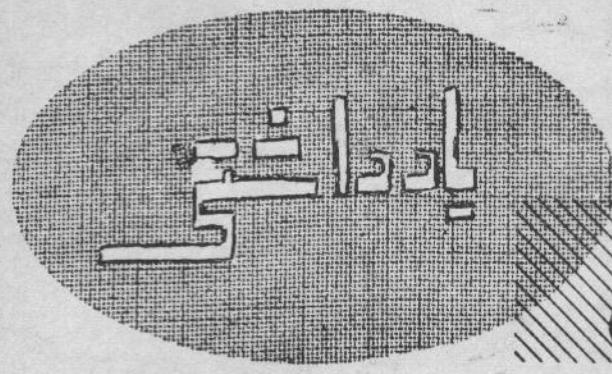
مثلافرمول اسید سولفوریک  $\text{SO}_4\text{H}_2$  است.

$$H = 1 \quad S = 32 \quad O = 16 \quad = 98$$

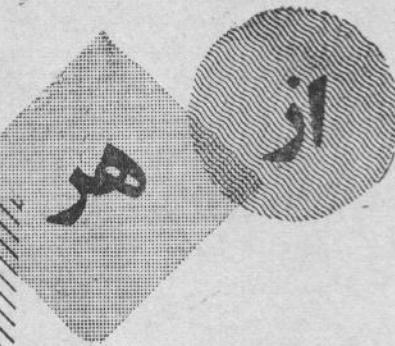
از آنجا:

$$\text{SO}_4\text{H}_2 = 32 + 16 \times 4 + 2 \times 1 = 98$$

فرمول اسید سولفوریک نشان می دهد که ۹۸ گرم آن از ۳۲ گرم گوگرد و  $16 \times 4 = 64$  گرم اکسیژن و ۲ گرم ئیدرژن تشکیل یافته است. به عبارت دیگر، گوگرد به نسبت  $\frac{32}{98}$ ، اکسیژن  $\frac{64}{98}$  و ئیدرژن  $\frac{2}{98}$  در این جسم وجود دارد.



# جاهی



فضایی خطراتی ایجاد نکنند پیش بینی می شود که یک مؤسسه مخصوص تنظیف فضا از این آشغالها دایر خواهد شد .  
از مجله سیانس پر گره

## هفت اقلیم

ین مکانهای مختلف زمین بعضی اختلافها وجود دارد که ناشی از حرکت وضعی زمین و انحراف محور آن نسبت به سطح مدار حرکت انتقالیش به دور خورشید می باشد . بعضی از این اختلافها به طول جغرافیائی مکان مربوط می شود مثل اختلاف ساعت دو نقطه و چنانچه می دانیم از این بابت زمین را به ۲۴ ساعتی تقسیم کرده اند که حدوداً این قاچها بوسیله نصف النهارات مشخص می شود .

بعضی از اختلافات بین دو مکان به عرض جغرافیائی مربوط می شود مثل اختلاف طول شب و روز (غیر از عرض جغرافیائی به میل خورشید نبین مربوط است) . ماه آبان را در نظرمی گیریم در این ماه در خط استوا طول روز ۱۲ ساعت و طول شب نیز ۱۲ ساعت است اما در نقاط دیگر زمین بین طول روز و طول شب اختلافی موجود است و هرچه به قطب نزدیکتر شویم این اختلاف بیشتر می شود بطوری که در نقطه قطب شمال تمام ۲۴ ساعت یا دور حرکت وضعی زمین، شب می باشد . در ماه معینی از سال ، اختلاف طول روز و شب برای نقاط هم عرض (عرض جغرافیائی) مساوی است .

قدماء از علماء جغرافی ، زمین را از لحاظ عوارضی که به عرض جغرافیائی مربوط است به هفت قسم تقسیم کرده و هر قسم را اقليم نام نهاده بودند . آنها فقط فقط قاره آسیا ، قاره اروپا و قسمتی از قاره افریقا را می شناختند بنا بر این هفت اقلیم شامل همین قسم شناخته شده زمین می شد . حدود اقلیمهای بوسیله مدارات زمین معین می شد . جنوبی ترین اقلیم مربوط بود به سرزمین بربراها (جنوب حبسه) و شمالی ترین اقلیم سرحد ظلمات بود .

## مشتری هنبع حرارت است

بنابر آخرین تحقیقاتی که منجم آمریکایی . فرانک . ج . لاو . در لابراتوار فضایی دانشگاه آریزونا واقع در تکسas عمل آورده است حرارت سطح سیاره مشتری  $130^{\circ}$  حرارت مطلق ( $-43^{\circ}C$ ) می باشد . اگر فرض کنیم که مشتری منحصر توسط خورشید گرم می شود و حرارت حاصل از آن را حساب کنیم درجه حرارت سطح مشتری کمتر از مقدار فوق الذکر خواهد شد . بنا بر این مشتری از خود حرارت صادر می کند و این به خاطر وجود حتمی اجسام رادیوآکتیو در آن سیاره می باشد .  
از مجله : سیانس پر گره

## نامهایی برای دوازده ماه

در گاهنامه ۱۳۰۹ تألیف سید جلال الدین تهرانی تاریخی به نام تاریخ هخامنشی پیشنهاد شده است که مبدأ آن جلوس کورش بزرگ می باشد و دوازده ماه آن از ابتدای بهار به ترتیب ذیر نامگذاری شده است :

چمن آرا - گل آور - جان پرورد - گرماخیز - آتش بیز - جهان بخش - دژ خوی - باران ریز - اندوهگین - سرماده - برف آور - مشکین فام .

## آشغالهای فضا

بنابر آنچه یکی از مؤسسه های علمی آمریکا اخیراً اعلام داشته است غیر از قمرهای مصنوعی و سایر اشیائی که توسط انسان در مدار زمین قرار داده شده است حدود ۶۰۰ شیء دیگر دور زمین در گردش می باشند اما بنا به عقیده یکی از منجمین یک لابراتوار فضایی مقدار این اشیاء ۱۰۷۶ می باشد . این اشیاء را مؤسسات علمی آمریکا «Junks» نامیده اند که معادل فارسی آن «آشغال» می باشد . برای اینکه این اشیاء برای سفرهای

# راهنمای حل

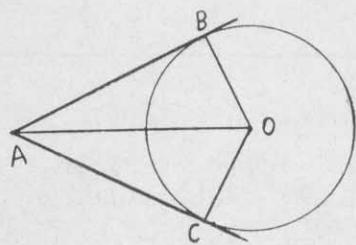
## مسائل مقدماتی هندسه

Résolution des Problèmes élémentaires de géométrie

تألیف: E. J. Honnet - ترجمه: ع. م. چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳.

۱۰

### فصل دوم- چگونگی اثبات تساوی دو زاویه روش سوم- استفاده از خواص نیمساز زاویه



است پس  $\angle AOB$  نیمساز  
این زاویه است یعنی دو  
 $\angle CAO = \angle BAO$   
باهم برابرند. نقطه  
نیز از دو ضلع زاویه  
 $\angle BOC$  به یک فاصله

است پس  $\angle AOB$  نیمساز این زاویه است یعنی دو زاویه  $\angle BOA$   
و  $\angle COA$  باهم برابرند.  
تمامینات

- ۷۰- از یک نقطه  $M$  دو مماس  $MA$  و  $MB$  بر یک دایره

رسم شده و  $OB$  به اندازه خودش تا نقطه  $C$  امتداد داده  
شده است. ثابت کنید که زاویه  $\angle AMC$  سه برابر زاویه  $\angle BMC$  است.

- ۷۱- دو ضلع زاویه  $xOy$  را با یک قاطع  $AB$  قطع کرده و  $AF$  نیمساز زاویه  $\angle A$  و همچنین  $BF$  نیمساز  
زاویه  $\angle B$  را رسم می کنیم که  $F$  نقطه مشترک آنها می باشد.  
ثابت کنید که دو زاویه  $\angle FOA$  و  $\angle FOB$  متساویند.

### روش چهارم- استفاده از زوایای متقابل یا متناظر یک قاطع از دو خط متوالی احداث می شود

$M$  انتخاب کرده عمود  $MH$  را بر  $Oy$  رسم می کنیم و نیمساز  
زاویه  $HMO$  را نیز رسم می کنیم که  $Oy$  را در  $D$  قطع می کند  
و در  $D$  عمودی بر  $Oy$  اخراج می کنیم که  $Ox$  را در  $N$  تلاقی  
می کند. ثابت کنید که مثلث  $MDN$  متساوی الساقین است.

این خاصیت مخصوصاً در موردی بکار می آید که خواسته  
باشیم تساوی دو زاویه مجاور را ثابت کنیم؛ کافی است که ثابت  
کنیم ضلع مشترک آنها نیمساز زاویه ای می باشد که از مجموع  
آنها تشکیل شده است.

مسئله ۱۹- از یک نقطه  $A$  دو مماس  $AC$  و  $AB$  بر  
دایره به مرکز  $O$  رسم شده است. ثابت کنید که دو زاویه  
 $\angle CAO$  و  $\angle BAO$  باهم و دو زاویه  $\angle AOC$  و  $\angle AOB$  نیز باهم  
برابرند.

فرض  $\angle BAO = \angle CAO$  و  $\angle AOB = \angle AOC$  یعنی  $\angle B = \angle C = 90^\circ$

حکم  $\angle BAO = \angle CAO$  و  $\angle AOB = \angle AOC$

اثبات- نقطه  $O$  از دو ضلع زاویه  $BAC$  به یک فاصله

اگر قاطعی دو خط متوالی را قطع کرده باشد هر دو زاویه  
متناظر داخلی، یا دو زاویه متقابل خارجی و یا دو زاویه متناظر  
داخل و خارج باهم برابرند.

مسئله ۲۰- بر ضلع  $Ox$  از زاویه  $xOy$  نقطه ای مانند

ذوزنقه برابرند.

- ۷۳- اگر  $O$  نقطه تلاقی دو قطر  $BD$  و  $AC$  از ذوزنقه  $OABCD$  باشد ثابت کنید که زاویه‌های دو مثلث  $OCD$  و  $OAB$  تطابق به قطیر با یکدیگر برابرند

-۷۴- در مثلث  $ABC$  ضلع  $AB$  را درجهت  $B$  به

به اندازه خودش تا  $M$  و ضلع  $AC$  را درجهت  $C$  به  $A$  به  
اندازه خودش تا  $N$  امتداد می‌دهیم و  $MN$  را رسم می‌کنیم.  
ثابت کنید که زاویه  $M$  با زاویه  $B$  و زاویه  $N$  با زاویه  $C$   
برابر است.

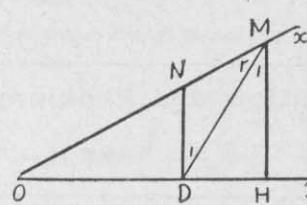
-۷۵- اضلاع زاویه  $Oy$  را با قاطع  $MN$  قطع کرده  
و نیمسازهای زاویه‌های  $xMN$  و  $yNM$  را رسم می‌کنیم که  
یکدیگر را در  $Q$  قطع می‌کنند و از  $Q$  موازی  $MN$  رسم  
می‌کنیم که ضلعهای زاویه را در  $P$  و  $R$  قطع می‌کند ( $P$  بر  $Ox$  و  $R$  بر  $Oy$  است) ثابت کنید که هریک از مثلثهای  $PQM$  و  
 $RQM$  متساوی الساقین هستند.

-۷۶- در یک دایره  $O$  از نقاط  $A$  و  $B$  طرفین قطر  $AB$   
دو وتر متساوی  $AC$  و  $BD$  را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که  
مثلثهای  $ACO$  و  $BDO$  متساوینند.

$$\left. \begin{array}{l} MH \perp Oy \\ DN \perp Oy \\ M_2 = D_1 \end{array} \right\}$$

فرض  
 $M_2 = D_1$   
حكم :  $D_1 = M_2$

اثبات - دو خط  $MH$  و  $ND$  متوازیند و قاطع  $MD$



آنها را قطع کرده است  
پس دو زاویه متبادل

داخل  $M$  و  $D$  برابرند  
و چون ذوزنقه  $M_2$  و  $M$  نیز برابرند بنابراین

دو زاویه  $M_2$  و  $D_1$  متساوی بوده مثلث  $MND$  متساوی الساقین می‌باشد.

### تمرینات

- ۷۳- از نقاط  $A$  و  $B$  طرفین قاعده بزرگ ذوزنقه  $ABCD$  خطوطی موازی با  $AD$  و  $BC$  رسم می‌کنیم که امتداد قاعده کوچک  $CD$  را به ترتیب در  $M$  و  $N$  قطع می‌کنند ثابت کنید که زوایای  $M$  و  $N$  به ترتیب با زوایای  $B$  و  $A$  از

## نجوم و کیمی‌افتشناسی (بقیه از صفحه ۳)

(۱۶۸۷-۱۶۱۱) به خاطر رصدهای دقیقی که انجام داده مشهور است؛ پیکار فرانسوی (۱۶۸۲-۱۶۲۰) طول یک درجه نصف‌النهار را دقیقاً اندازه گرفت که به خاطر آن شهرت دارد؛ هیگنس هلندی (۱۶۹۵-۱۶۲۹) ساعت پاندولی را ختراع کرد، حلقه زحل و یک ماه از آن را کشف کرد (بعدها تیمان نامیده شد) رومردانمارکی (۱۷۱۰-۱۶۴۴) با تحریه و تحلیلی که از خصوصیات اقمار مشتری بعمل آورد سرعت نور را اندازه گرفت که به خاطر این کشف بسیار مهم مشهور می‌باشد؛ کاسینی ایتالیائی (۱۷۱۲-۱۶۲۵) که در ۱۶۷۳ تابعیت فرانسه را قبول کرد کاشف قوانین حرکت وضعی ماه می‌باشد و کارهای دیگری انجام داده است که عبارتند از: ترتیب زیج‌هایی ازماه، تحقیقات مفصلی درباره ستارگان دنباله دار، مطالعه روی اقمار مشتری، کشف حرکت وضعی مشتری و همواری سطح این سیاره، کشف اینکه حلقه زحل بایک تقسیم از ستاره جدا شده و فعلاً به نام «تقسیم کاسینی» معروف است، کشف چهار قمر از اقمار زحل علاوه بر تیتان، کشف علت روشنائی قبل از فجر یا بعد از شفق، تعیین دقیق فاصله زمین تا خورشید، و بالاخره تعیین نصف‌النهار پاریس.

همه این سنگها در پایه‌های ساختمان مجلل نجوم بکار رفته و این ساختمان را برای همیشه پا بر جا و تزلزل پا زدیر نگاه داشته است. تنها آرژیتکت نابغه‌ای لازم بود تارو کارا دین بنارا زینت بخشید؛ این معمار نابغه اسحق نیوتن بود.

می‌دارند. زمانی از انتشار این کتاب نگذشته بود که گالیله در اثر فعالیتها مخالفان خود به دادگاه تفتیش عقاید احضار شد و در ۱۶۳۳ مجبور شد که عقاید خود را منکر شود درحالی که با پا به زمین اشاره کرده زیر لب چنین می‌گفت:

«pur si muove»

با وجود این تومی چرخی.

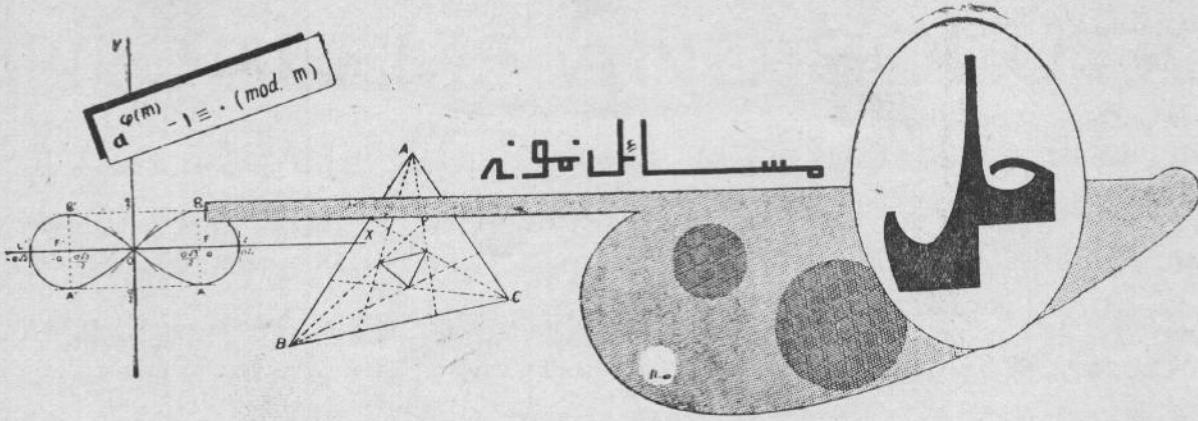
دادگاه وی را به اقامت اجباری درسین، سپس در ویلای آرسکری محکوم کرد.

هر چند که کشفیات نجومی گالیله حائز اهمیت کامل هستند اما اثری که وی در علم فیزیک نوشته اهمیت برتری دارد از در علم فیزیک روشی را ابداع کرده است که بعداً هاس مرش دیگران شد. خلاصه کلام آنکه، گالیله آفریننده «روش علوم تجربی» می‌باشد.

\* \* \*

در همان‌هنگام که کپلر و گالیله توجه‌جهان داشتند را به کشفیات خود چلب کرده بودند منجمین دیگری سنگهای بنای نجوم جدید را فراهم ساخته بر ارتفاع این بنادر تیامی افزودند:

گاساندی فرانسوی (۱۶۵۵-۱۶۹۲) که استاد فلسفه و نجوم سکلز دوفرانس بود عقاید گالیله را دلیل آن‌نهایان می‌داشت و از آن جانبداری می‌کرد یچیو لی ایتالیائی (۱۶۷۱-۱۶۹۸) پیشنهاد کرده استاد زمین دقیقاً اندازه کیمی شود و در تیجه در فوائل نجومی اصلاحات لازم بعمل آید؛ زان‌هول آلمانی



## حل مسئله مربوط به ریاضیات جدید منتدرج در یکان شماره ۲۹

### مورد استعمال در مسابقات بیست و سویالی

حل : ۱- محاسبه  $n$  - فرض می کنیم که  $n$  کوچکترین توانی از ۲ باشد که حاصل این توان مساوی یا بزرگتر از  $P$  باشد یعنی داشته باشیم .

$$2^{n-1} < P \leq 2^n$$

تعداد عناصر هر یک از زیر مجموعه های  $A_1$  و  $A_2$  و ... و  $A_n$  را که نگاه داشته ایم به ترتیب  $P_1$  و  $P_2$  و ... و  $P_n$  می نامیم .

اگر  $P$  زوج باشد خواهیم داشت

$$P_1 = \frac{P}{2}$$

و اگر  $P$  فرد باشد چه داشته باشیم  $P_1 = \frac{P-1}{2}$  و چه

$$P_1 = \frac{P+1}{2}$$

و اگر  $P$  فرد باشد چنانچه داشته باشیم  $P_1 = \frac{P-1}{2}$  داریم

$$\frac{2^{n-1}-1}{2} < P_1 < \frac{2^n-1}{2}$$

$$\Rightarrow 2^{n-2} < P_1 < 2^{n-1}$$

و چنانچه داشته باشیم  $P_1 = \frac{P+1}{2}$  خواهیم داشت .

$$\frac{2^{n-1}+1}{2} < P_1 < \frac{2^n+1}{2}$$

$$\Rightarrow 2^{n-2} < P_1 < 2^{n-1}$$

در تمام حالت های توانیم بنویسیم :

۳۸۸۴- فرض می کنیم  $A$  مجموعه ای باشد شامل عنصر، با یک اولین عمل ،  $A$  را به دو زیر مجموعه  $A_1$  و  $A'_1$  تقسیم می کنیم که اگر  $P$  زوج باشد هر کدام از این دو زیر مجموعه

شامل  $\frac{P-1}{2}$  عنصر و اگر  $P$  فرد باشد یکی از آنها شامل

$\frac{P+1}{2}$  عنصر و دیگری شامل  $\frac{P-1}{2}$  عنصر باشد و فقط یکی از دو زیر

مجموعه حاصل مثلا  $A_1$  را نگاه می داریم . در دومین عمل همان

رویده ای را که در برآرد  $A_1$  بکار بردیم در برآرد  $A_1$  اعمال می کنیم و زیر

مجموعه ای دیگر ما نند  $A_2$  بدست می آید و عمل را به همین ترتیب ادامه

می دهیم و هر دفعه فقط یکی از دو زیر مجموعه حاصل را نگاه می داریم .

۱) حداقل مقدار  $n$  چه باشد تابع از  $n$  دفعه که عمل را

تکرار کنیم به زیر مجموعه ای مانند  $P_n$  برسیم که فقط شامل یک

عنصر باشد .

۲) مورد استعمال : در یک بازی، شخصی با یاد از یک

مجموعه شامل  $P$  عنصر که تهیه لیستی از آنها ممکن است (مثلا

مجموعه اعداد محصور بین دو حد معین . مجموعه کلمات یک

کتاب) یک عنصر را باید . برای این کار شخص مزبور تعدادی

سؤال مطرح می کند که بهر یک از آنها جواب «آری» یا «نه»

داده می شود . ثابت کنید که حداقل  $n$  سؤال ، تعیین عنصر

مطلوب امکان پذیر است و مقدار  $n$  را تعیین کنید .

۳) مثال - از شخصی می خواهند که تاریخ معینی (سال و

ماه و روز) واقع یین یکم فروردین ۱۳۹۵ تا آخر اسفند ۱۳۹۶ را معلوم کند . ثابت کنید که با طرح حداقل ۱۶ سؤال می تواند

این تاریخ را معین کند .

سؤال چنین است : تاریخ مطلوب بین اول فروردین ۱۳۰۰ تا آخر اسفند ۱۳۴۹ واقع است ؟ اگر جواب «آری» باشد که  $A'$  را کنار گذاشته و  $A$  را به دو زیر مجموعه زیر تقسیم می کنیم .

$$A_1 = \{1300, 1301, \dots, 1324\}$$

$$A'_1 = \{1349, 1350, \dots, 1325\}$$

دومین سؤال معلوم خواهد کرد که تاریخ مطلوب به  $A_2$  تعلق دارد یا به  $A'_2$

اما اگر جواب «نه» بود آن وقت  $A$  را کنار گذاشته و  $A'$  را به دو زیر مجموعه زیر تقسیم می کنیم

$$A_2 = \{1374\}$$

$$A'_2 = \{1375\}$$

و دومین سؤال معلوم خواهد کرد که تاریخ مطلوب به  $A_3$  تعلق دارد یا به  $A'_3$

و همین عمل را ادامه می دهیم و چون  $2^7 < 100 < 2^6$  پس حداکثر با طرح ۷ سؤال (حداقل با ۶ سؤال) سال مطلوب معین خواهد شد .

برای تعیین اینکه کدام یک از ۱۲ ماه سال مورد نظر است چون  $2^4 < 12 < 2^3$  است حداکثر ۳ سؤال لازم می باشد . بالاخره برای اینکه معلوم شود چه روزی از ۳۱ روز ماه در نظر بوده است با توجه به اینکه  $2^5 < 31 < 2^4$  است طرح حداکثر ۵ سؤال لازم می باشد .

نتیجه آنکه برای تعیین تاریخ مطلوب رویهم حداکثر طرح  $16 = 4 + 5 + 7$  سؤال لازم می باشد .

تمورین - ثابت کنید که حداکثر با طرح ۱۰ سؤال می توان عددی واقع بین ۱ تا ۱۰۰۵ را تعیین کرد . (به یکی از دوستان خود بگوئید عددی بین ۱ تا ۱۰۰۵ را در نظر بگیرد ، آنگاه با طرح حداکثر ۱۰ سؤال این عدد را پیدا کنید)

$$2^n-1 < P_1 < 2^n$$

و به همین ترتیب نتیجه خواهیم گرفت که

$$2^n-2 < P_2 < 2^n$$

$$2 < P_{n-2} < 2^n$$

$$1 < P_{n-1} < 2$$

چنانچه  $1 = P_{n-1}$  باشد پس از  $(1-n)$  دفعه تکرار عمل ، مطلوب حاصل می شود و چنانچه  $2 = P_{n-1}$  باشد یک دفعه دیگر که عمل تکرار شود نتیجه خواهد شد که  $1 = P_n$  پس بطور کلی حداقل  $n$  دفعه وحدائقل با  $(1-n)$  دفعه تکرار عمل به زیر مجموعه‌ای شامل یک عنصر خواهیم رسید .

بنصراحت - اگر  $P = 2^n$  باشد دقیقاً  $n$  دفعه تکرار عمل لازم است .

**۲- مورد استعمال** - شخص ابتدا مجموعه مفروض را به ترتیبی که گفته شد به دو زیر مجموعه  $A$  و  $A'$  تقسیم می کند و اولین سؤال خود را به این ترتیب مطرح می کند : عنصر مطلوب به مجموعه  $A$  تعلق دارد ؟ اگر جواب آری شنید که همین زیر مجموعه را نگاه داشته عمل تقسیم را نسبت به آن تکرار می کند تا اینکه به زیر مجموعه نهایی برسد . اما اگر جواب «نه» شنید زیر مجموعه  $A'$  را در نظر گرفته نسبت به آن عمل تقسیم را انجام می دهد و آنرا تکرار می کند تا به عنصر مطلوب برسد .

**۳- مثال** - از ابتدای سال ۱۳۰۰ تا انتهای سال ۱۳۹۹ رویهم صد سال می باشد و اولین دو زیر مجموعه را به این ترتیب انتخاب می کنیم

$$A_1 = \{1300, 1301, \dots, 1349\}$$

$$A'_1 = \{1350, \dots, 1399\}$$

هر یک از این زیر مجموعه ها شامل ۵۰ عنصر می باشد (ممکن است که بجای تقسیم فوق . یک زیر مجموعه را شامل سالهای زوج و دیگری را شامل سالهای فرد انتخاب کرد). اولین



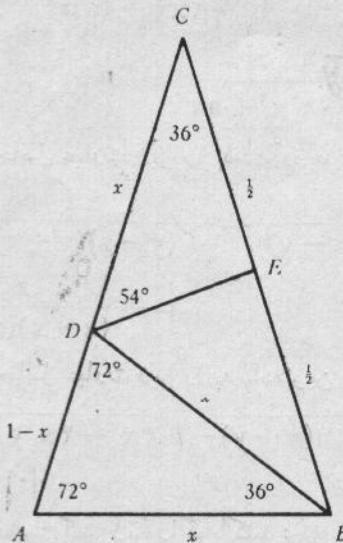
# PROBLEMS AND SOLUTIONS

مسائلی فعلاً نقل می‌شود که ترجمه آنها قبلاً در مجله‌های شماره‌های گذشته بکان چاپ شده است  
زیرا برای آنها که تازه می‌خواهند مطالعه مسائل به زبان انگلیسی را شروع کنند مراجعه به ترجمه آنها راهنمای ایشان خواهد بود. بعداً مسائلی نقل خواهد شد که ترجمه آنها به زبان فارسی چاپ نشده باشد.

**Problem 3 : Prove without the use of tables :**

$$(\sin 12^\circ)(\sin 48^\circ)(\sin 54^\circ) = \frac{1}{8}$$

**solution :** Construct isosceles  $\triangle ABC$  with  $m\angle C=36^\circ$  and  $AC=CB=1$ , and other lines drawn as in the figure.



Since  $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ ,  $AB/AC = AD/AB$ .

Thus  $x/1 = (1-x)/x$ , from which it follows that  $x = (-1 + \sqrt{5})/2$ . Therefore

$$\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})/4.$$

From

$$(\sin A)(\sin B)$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)],$$

we obtain

$$(\sin 12^\circ)(\sin 48^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 36^\circ - \cos 60^\circ).$$

Hence

$$(\sin 12^\circ)(\sin 48^\circ)(\sin 54^\circ) \\ = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{5})/4 - \frac{1}{2}] \cdot [(1+\sqrt{5})/4] = \frac{1}{8}.$$

**Problem 4 : Proposed by Walter Penney .**

You may have been taught that the graphs of two quadratic equations can intersect in at most 4 points. How then is it possible for the coordinates of the five points :  $(-1, 6)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 4)$ , and  $(2, 0)$  to satisfy both of these quadratic equations ?

- 1)  $2x^2 - y^2 - xy - 4x + 4y = 0$ ;
- 2)  $6x^2 - y^2 + xy - 16x + 2y + 8 = 0$  .

**Solution :** The left members of the equations factor as follows :

- 1)  $(2x+y-4)(x-y)=0$ ;
- 2)  $(2x+y-4)(3x-y-2)=0$ .

Thus, each graph consists of two intersecting lines. The four points  $(-1, 6)$ ,  $(3, -2)$ ,  $(0, 4)$ , and  $(2, 0)$ , lying on the straight line  $2x+y-4=0$ , satisfy both equations, and  $(1, 1)$ , being the intersection of  $x-y=0$  and  $3x-y-2=0$ , also satisfies both equations. Furthermore, any point on  $2x+y-4=0$  will satisfy equations (1) and (2). Thus, the original statement is valid only for quadratics that have no common factor .

# مسائل امتحانات ثلث اول دبیرستانها

## سال تحصیلی ۴۵-۴۶

۳- اولاً ثابت کنید که به ازاء جمیع مقادیر  $a$  و  $b$  عبارت  $f(x) = x^2 + x - 2 + x^3$  قابل قسمت است.

$$f(x) \equiv x^4 + (a+1)x^3 + (a-b-2)x^2 - (2a+b)x + 2b$$

ثانیاً  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که اعداد  $-2$  و  $1$  ریشه های معادله  $= 0$  باشد.  $f(x) = 0$

۴- مخرج کسر زیر را گویا کنید:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$$

۵- صحت تساوی زیر را ثابت کنید:

$$(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} - a + a^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} + 1) = a^4 - 1$$

۶- کسر زیر را با استفاده از تجزیه ساده کنید:

$$\frac{x^3 + ax^2 + a^2x + a^3}{27x^3 + 1} \times \frac{9x^2 - 3x + 1}{x^4 - a^4} = \frac{3x^2 + 4x + 1}{9x^2 + 6x + 1}$$

۷- صحت تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{-1}{(4)(6)} + \frac{1}{(2)} + \frac{1}{(4)} + 50(150) \frac{-1}{(2)} - \frac{2}{(294)} \frac{1}{(2)} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

متهم حساب چهار ریاضی دبیرستان امیرکبیر آبادان  
دبیر: مرزبان، فرستنده: خ- حاجی ابراهیمی

$$9- \text{لگاریتم } \frac{(330 \times 7)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[7]{22 \times 70}} \text{ را ثابت کنید:}$$

۱۰- صحت تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{7}{3} \log 5 + \frac{5}{2} \log 2 - 2 = \log \sqrt[6]{200}$$

۱۱- معادلات زیر را حل کنید:

$$(1) \quad \sqrt[x]{8x+1} = \sqrt[x-1]{2x+5}$$

جبر چهارم ریاضی دبیرستان رازی شاهی

دبیر: سخاوت - فرستنده: شعبانعلی رضائی

۱- به ازاء چه مقادیر  $m$  عبارت

$$x^3 - mx^2 + ma^2x - a^3$$

بر عبارت  $x^3 - 2ax^2 + a^3$  بخش پذیر است.

۲- عبارتهاي زير را به حاصل ضرب عوامل تجزيه کنيد

$$3a^2x^2y + 6a^2x^2y^2 + 3a^2xy^3 - 3a^2xyz^2$$

$$x^3 - a^3 + y^3 - b^3 - 2xy + 2ab$$

$$a^5 - a^4x - ax^4 + x^5$$

$$a^4 - a^2x - a^2x^2 + ax^2$$

۳- حاصل عبارت زير را بدست آوريد:

$$\frac{yz}{(x-z)(x-y)} + \frac{xz}{(y-z)(y-x)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)}$$

۴- حاصل عبارت زير را به ساده ترین صورت بنویسید

$$\sqrt{(x^2 - y^2)(x+y)} - \sqrt{4x^3 - 4x^2y} + \sqrt{(x-y)^2}$$

۵- مخرج کسر زير را گویا کنيد:

$$\frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$$

۶- حاصل عبارت زير را بآيد:

$$\frac{5a^2 + (5b)^2}{3(a+b)^2}$$

جبر چهارم ریاضی دبیرستان علمیه

دبیر: عباس ذوالقدر - فرستنده: حجت الله بابائی

۹- معادله زير را حل کنيد:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = 4\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

۱۰- حاصل عبارت زير را بدست آوريد:

$$6\sqrt[3]{272} \times 27\sqrt[3]{2} : 12\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$$

۴- جمله هشتم یک تصاعد حسابی دو برابر جمله سیزدهم آن است ثابت کنید جمله دوم نیز دو برابر جمله دهم است .  
۵- سه عدد تشکیل تصاعد حسابی داده اند بطوری که مجموع آنها ۱۶ و حاصل ضرب آنها نیز ۱۶ است سه عدد را پیدا کنید .

$$6- \text{ثابت کنید } \frac{86}{85} = \frac{1000}{1000} \text{ از صد هزار بزرگتر است .}$$

**مسائل هندسه چهارم ریاضی دبیرستان علمیه**  
دبیر : اسماعیلیان طوسی ، فرستنده : حجت الله با بائی  
۱- ثابت کنید در هر چهارضلعی خطوطی که اواسط اضلاع مقابله را به هم وصل می کند و خطی که از وسط دو قطر آن می گذرد هر سه در یک نقطه متقابلند .  
۲- سه میانه هرمثلاً در یک نقطه متقابلند .

**مسائل شیمی چهارم ریاضی دبیرستان علمیه**  
دبیر : سید جلال ذعفرانی - فرستنده : حجت الله با بائی  
۱- ۲۱۸ گرم آهن را در گاز کلر وبار دیگر همان مقدار آهن را در اسید کلریدریک حل می کنیم فرمول فعل و انفعالات را نوشته اختلاف اجسام حاصل چیست ؟ و مقدارشان چقدر است ؟

۲- ۳/۱۶ گرم پرمنگنات پتاسیم را با جوهر نمک ترکیب نموده گاز حاصل را وارد محلول گاز سولفوره  $(SO_2)$  می نماییم و به مقدار کافی کلرور باریم اضافه می کنیم وزن رسوب حاصل چقدر است ؟

۳- ۵/۴ گرم آلومینیوم با محلول سود چند لیتر هیدرژن تشكیل می دهد همین مقدار آلومینیم با چند گرم اسید کلریدریک ترکیب شده و چه حجم هیدرژن ایجاد می کند ؟

جبر پنجم ریاضی دبیرستان گلشن از شبستر  
دبیر : جوانی ، فرستنده : سعید فرشاد

۱- دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} 2y^2 - 4xy + x = 1 \\ 8x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

۲- در وجود علامت ریشه های معادله زیر بر حسب K بحث کنید .

$$2Kx^2 + (K-2)x - K - 4 = 0$$

۳-  $m$  را چنان معین کنید که روابط معین مفروض ما بین ریشه های معادلات زیر برقرار باشد :

$$mx^2 + (m-4)x - 2m + 1 = 0$$

$$\frac{x'' + x'''}{x' x''} = \frac{5x' x''}{4}$$

$$(2) \quad 4x+2 + 4x+1 - 4x = 76$$

$$(3) \quad \log(x+1) + \frac{1}{2} \operatorname{colog}(x-1) = \log 3$$

۴- مطلوب است حل دستگاه زیر :

$$\begin{cases} 5^{2x-y} = 3125 \\ 11^{6x-7y} = 14641 \end{cases}$$

۵- فرض می کنیم  $a^2 + b^2 = 7ab$  باشد ثابت کنید :

$$\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\log a + \log b)$$

۶- از رابطه زیر  $a$  را بدست آورید :  
 $\log \log \log a = 0$

مهم حساب چهارم ریاضی دبیرستان علمیه

دبیر : محمد فیروزگان - فرستنده : حجت الله با بائی

۱- اگر  $\log 5 = 0,69897$  باشد حساب کنید لگاریتم

عبارت A

$$A = \frac{\sqrt[3]{245} \times \sqrt[7]{1715}}{490}$$

۲- این معادله را حل کنید :

$$\frac{1}{2} \log(x^2 - 4) + \operatorname{colog} 2 = \frac{1}{2} \log(x+2)$$

۳- مقدار x را از این معادله بدست آورید :

$$\log \sqrt[4]{128} + \log \sqrt[8]{81} - \log \sqrt[4]{64} = 2 \log x^2$$

۴- مقدار x و y را از این دستگاه حساب کنید :

$$\begin{cases} 5^x - 25^y = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

مهم حساب چهار ریاضی «الف» دبیرستان  
فرخی آبادان

دبیر : مزیمی - فرستنده : ع. حاجی ابراهیمی

۱- معادلات زیر را حل نمائید :

$$(1) \quad \log(x+2) + \log(x-3) - \log x = 3 \log 2$$

$$(2) \quad \log(x+5) + \operatorname{colog}(2x-3) = 3 \log 2 + \operatorname{colog} 3$$

۳- دستگاه زیر را حل نمائید :

$$\begin{cases} \log(2x+y) - \log(3x-2y) = 1 \\ \log(3x-y) + \log(x-y) = 1 \end{cases}$$

۴- مولکس اعشاری متناوب ساده .... ۰/۲۴۲۴۲۴ را با استدلال محاسبه کنید .

۴ دو مسئله است

مثلثات پنجم ریاضی دبیرستان گلشن را زیر شناسو  
دبیر: با همت — فرستنده: سعید فرشاد

۱- درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\left( \sqrt{\frac{a - tg x}{a \cot g x - 1}} + \sqrt{\frac{a - \cot g x}{a \tg x - 1}} \right)^2 = 2 + \frac{1}{\sin x \cos x}$$

۲- اگر A و B و C و D زوایای یک چهارضلعی  
محبد باشند اولاً ثابت کنید:

$$\sin \frac{A+B}{4} = \cos \frac{C+D}{4}$$

ثانیاً - اگر A و C دو زاویه مقابله از چهارضلعی باشند  
و داشته باشیم:

$$\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{C}{2}$$

ثابت کنید چهارضلعی قابل محاط در یک دایره است.

۳- اگر A و C و B و D زوایای یک مثلث باشند از  
دستگاه زیر زوایای مثلث را بر حسب رادیان حساب کنید.

$$\begin{cases} \sqrt{r} \sin A + \sqrt{r} \sin B = \frac{5}{2} \\ \sqrt{r} \cos A - \sqrt{r} \cos B = 0 \end{cases}$$

۴- با استفاده از رابطه زیر  
 $\frac{a}{\sin \varphi} = \frac{b}{\cos \varphi}$   
را بدست آورید.

$$(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}) a \sin \varphi + b \cos \varphi = \sqrt{a^2 + b^2}$$

۵- ثابت کنید عبارت زیر به x بستگی ندارد.

$$\frac{\cos^4 x + \sin^4 x - 1}{\cos^6 x + \sin^6 x - 1}$$

۶- معادله زیر را حل کنید و جوابهای بین  $-\pi/2$  و  $\pi/2$   
آنرا بدست آورید.

$$\cos(\frac{3\pi}{2} - 5x) + \sin(\frac{5\pi}{2} - 5x) + \tan(\frac{7\pi}{2} - 5x) = 1$$

۷- در معادله زیر پارامتر m را طوری بیاید که یکی کی

از ریشهای معادله برابر  $\frac{5\pi}{18}$  شود سپس به ازاء

۸- معادله را حل و جوابهای کلی آنرا بدست آورید  
 $(m-1) \sin^3 x + \cos^3 x - m \sin^3 x = 1$

۹- K را چنان معین کنید که معادلات زیر دارای ریشه حقیقی باشند:

$$(K+1)x^2 + 2Kx + K - 1 = 0$$

$$2Kx^2 + 2(K-1)x + K - 1 = 0$$

۱۰- مختصات سه رأس مثلثی عبارتند از (۲ و ۱) و (۱ و ۰) و (-۴ و -۲) مطلوب است = رسم مثلث  
= معادلات اضلاع مثلث = معادله میانهای مثلث  
= اندازه طول اضلاع مثلث.

مثلثات کلاس‌های پنجم ریاضی دبیرستان‌های خوارزمی  
فرستنده: فرهاد نصیری

۱- در صورتی که:

$$\cot g x = -\frac{5}{12} \quad 90^\circ < x < 180^\circ$$

باشد سایر نسبتهاي مثلثاتی x را معلوم کنید.

۲- اولاً حاصل عبارت:

$$A = \frac{\tan(x - \frac{3\pi}{2})}{\cos(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\cot(x + \frac{3\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} - x)}$$

را فقط بر حسب  $\sin x$  و  $\cos x$  معلوم کنید.

ثانیاً معادله:

$$\frac{\sin^r x - \cos^r x}{\sin^r x \cos^r x} = 4 (\sin^r x - \cos^r x)$$

را حل کنید.

۳- در صورتی که:

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

باشد حساب کنید  $\cos 54^\circ$  را.

۴-  $\frac{x}{\tg x}$  را با  $\cos x$  و  $\sin x$  رسم دایره

مثلثاتی نشان داده و از روی شکل ثابت کنید:

$$\tg \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

و با استفاده از این اتحاد نسبتهاي مثلثاتی  $\frac{\pi}{8}$  را معلوم کنید

تذکر - در مسئله ۴ با استفاده از اتحاد

$$\tg \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

می توانید مستقیماً نسبتهاي مثلثاتی  $\frac{\pi}{8}$  را معلوم کنید (یعنی مسئله

## مسائل هندسه فضائی پنجم ریاضی دبیرستان

### خوارزمی شماره ۳

فرستنده، فرهاد نصیری

۱- چهارضلعی چپ ABCD مفروض است.

اولاً - ثابت کنید که هفت صفحه می‌توان یافت که رئوس چهارضلعی از آن صفحات به یک فاصله باشند.

ثانیاً - ثابت کنید که خطوطی که اوساط اضلاع مقابل را به یکدیگر وصل می‌کنند با خطی که اوساط دو قطر را به یکدیگر می‌پيوندد متقابله‌اند.

۳- دونقطه A و B و خط D مفروضند (AB) و (AD) در یک صفحه نیستند) نقطه‌ای مانند M روی D انتخاب کنید. بطوری که MA + MB مینیم باشد.

مسائل هندسه پنجم ریاضی دبیرستان گاشنز از شبستر  
دبیر: با همت، فرستنده، سعید فرشاد

۱- سه خط متقابله D و D' و D'' مفروضند خطی چنان رسم کنید که D و D' را قطع و با D موازی باشد.

۲- خط D و صفحه P و نقطه A درضا مفروضند خطی چنان رسم کنید که صفحه P و خط D را قطع کند و نقطه A خط محصور بین صفحه P و خط D را به نسبت  $\frac{2}{3}$  قطع کند.

۳- صفحه P و خط D موازی با آن مفروضند از نقطه مفروض A خطی چنان رسم کنید که صفحه P و خط D را قطع کرده و طولش برابر ۱ باشد (بحث)

۴- دو صفحه متوازی P و Q مفروضند یک نقطه مانند A در صفحه P و یک نقطه مانند B در صفحه Q در نظر می‌گیریم مطلوب است مکان هندسی نقاط M بطوری که  $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$  باشد.

### مسائل هندسه فضائی دبیرستان هدایت شیراز

دبیر: رضا بهفروز، فرستنده: محمد مهدی مسعودی

۱- مطلوب است تعیین مکان هندسی پاهای عمود هایی که از نقطه معلوم A بر صفحاتی که از خط مفروض D می‌گذرد فرود آیند.

۲- از نقطه M صفحه‌ای رسم کنید که تصویر یک چهارضلعی معوج بر آن یک متوازی‌الاضلاع باشد درجه صورت تصویر لوزی است و درجه صورت مربع مستطیل و درجه صورت مربع است.

۳- مثلث ABC که با صفحه P موازی نیست مفروض است اولاً ثابت کنید تصویر میانه AM میانه مثلث تصویر است ثانیاً ثابت کنید که فاصله مرکز ثقل مثلث از صفحه P مساوی

ثلث مجموع فواصل رؤس مثلث از صفحه P می‌باشد.

۴- فرجه (P و Q) و قطعه خط AB که بیک سرش روی صفحه P و سردیگر شد وی صفحه Q بطوری قرار دارد که AB بر یال فرجه عمود است بر یال فرجه نقطه‌ای مانند M تعیین کنید که قطعه خط AB به زاویه  $\alpha$  رؤیت شود

مسائل شیوه‌ی کلاس‌های پنجم طبیعی و ریاضی دبیرستانهای خوارزمی

فرستنده: فرهاد نصیری

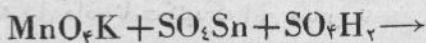
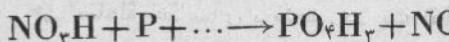
۱- ۵۰cc محلول سولفات فرو بوسیله ۱۰۰cc محلول

دنسی نرمال بی کرمات پتاسیم سولفوریک کاملاً اکسید می‌شود اولاً غلط و فاکتور سولفات فرو را حساب کنید ثانیاً فرمول فعل و انفعال را بنویسید ثالثاً نمک فریک حاصل از آزمایش فوق را با سود سوز آور ترکیب می‌کنیم وزن رسوب حاصل را بدست آورید.

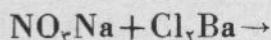
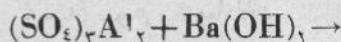
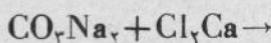
۲- بر مخلوطی از کربنات سدیم و سود سوز آور اسید

کلریدریک  $\frac{N}{10}$  می‌افزاییم گازی حاصل می‌شود که در شرایط متعارفی  $224cc$  حجم دارد و در این آزمایش  $400cc$  اسید مصرف می‌شود وزن هر یک از اجسام را در مخلوط اولیه بدست آورید.

۳- فعل و انفعالات زیر را بطریقه اکسیداسیون و احیا و ازانه نمایید:



۴- طرف دوم فعل و انفعالات زیر را نوشته مواد مانند و نشان دمید آیا اتحام می‌گیرد یا نه و بدجه دلیل؟



جبر کلاس‌های ششم ریاضی دبیرستان دارالفنون

دبیر: محمدعلی شیخان، فرستنده: پرویز بربری

مسئله اول - تابع  $y = \frac{x^2 + b}{x^2 + ax}$  مفروض است:

۱- چنانچه پارامترهای a و b طوری تغییر کنند تا منحنی‌های تابع فوق دارای ماگزینم و مینیم باشند ثابت کنید مجموع و حاصل ضرب این مقادیر ماگزینم و مینیم برابر یکدیگرند.

### مسائل حساب استدلالی دبیرستان دارالفنون

دبیر : تقی پاچناری ، فرستنده : پرویز بربی

۱- کوچکترین عددی چنان پیدا کنید که مضرب

بوده و باقیمانده تقسیم آن بر ۱۱ برابر ۵ و بر ۵ برابر ۲ باشد .

۲- پیدا کنید تعداد تاکسی های تهران را در صورتی که شماره های آنها اعداد چهار رقمی بوده و در این اعداد رقم صفر بکار نرفته باشد .

۳- دو عدد چنان پیدا کنید که حاصل ضربشان ۱۲ برابر مجموع آنها باشد .

۴- ثابت کنید به ازاء جمیع مقادیر  $N$  عبارت زیر مضرب ۶۴ است .

$$34n+1 + 10 \times 32^n - 13 = m64$$

۵- عدد چهار رقمی  $\overline{mcdu}$  را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\overline{mcdu} = (\overline{mc} + \overline{du})^2$$

### مسائل شیمی ششم ریاضی دبیرستان دارالفنون

دبیر : فریدون کوشایی ، فرستنده : پرویز بربی

۱- با چه نسبت ملکولی باید کربور آلومینیم و کربور کلسیم را با هم آمیخت تا چگالی گاز حاصل (از واکنش اسید کلرئیدریک) نسبت به گاز تیدرژن ۱۱ باشد .

۲- چند متر مکعب هسا برای سوختن یک متر مکعب محلوت گازی شکلی که  $25\%$  آنرا تیدرژن -  $25\%$  متان -  $25\%$  اتیلن -  $12/5\%$  اکسید دوکربن -  $12/5\%$  گاز کربنیک تشکیل می دهد لازم است ؟

۳- چون  $0/3$  گرم مشتق استخلافی منوکلره از کربور اشاع شده ای را در  $100\text{gr}$  اسید استیک حل کنیم نزول نقطه انجماد حلال  $15^\circ$  خواهد بود - در صورتی که بدانیم که از انحلال  $0/3$  گرم از ترکیبی به جرم ملکولی  $6$  در همان مقدار اسید استیک نزول نقطه انجماد  $0/20$  می باشد مشتق منوکلره را مشخص کنید - ایزومر های آنرا بنویسید و نام ببرید .

رسم فنی در صفحه ۳۰

۴- چه رابطه ای بین دو پارامتر  $a$  و  $b$  باید برقرار باشد تا آنکه منحنی تابع فوق مجانب افقی خود را در نقطه ای به طول  $1$  - قطع کند - اگر حاصل ضرب طولهای نقاط ماقزیم و مینیم منحنی تابع در این حالت  $(1 -)$  باشد مقدار  $a$  و  $b$  چقدر است ؟

۵- جدول تغییرات و منحنی  $(c)$  نمایش تابع :

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x}$$

۶- منحنی  $(c)$  را با خط  $K = y$  قطع نموده ایم اگر نقاط  $M_1$  و  $M_2$  تلاقی باشند  $K$  را طوری تعیین کنید تا حاصل ضرب ضریب زاویه های دو خط  $OM_1$  و  $OM_2$  برابر  $(4 -)$  باشد  $(O)$  مبدأ دستگاه است - معادله درجه سومی که در این حالت بدست می آورید از راه تجزیه حل کنید . پس از تعیین مقدار  $K$  مختصات نقاط  $M_1$  و  $M_2$  را تعیین کنید .

۷- معادله قائم بر منحنی  $(c)$  را در نقطه به طول  $\sqrt{2} + 1$  واقع بر منحنی بنویسید .

**مسئله دوم - تابع**  $y = (1 - \lambda)x^3 + \lambda x$  مفروض است :

۸- ثابت کنید منحنی های نمایش تابع فوق در ازاء مقادیر مختلف پارامتر  $\lambda$  همواره بر سه نقطه ثابت که بر خط ثابتی قرار دارند می گذرند . مختصات این نقاط و معادله این خط راست را بدست آورید .

۹- معادله خط مماس بر منحنی در يك نقطه غیر مشخص را تشکیل داده ثابت کنید که این مماس منحنی را در يك نقطه دیگر قطع می کند که طولش از حیث قدر مطلق دو برابر طول نقطه تماس است .

۱۰- به ازاء  $\frac{3}{2} = \lambda$  جدول تغییرات و منحنی تابع حاصل را رسم کنید .

**مسئله سوم -** معادلات خطوط مجانب منحنی های تابع

$$y = x \pm \sqrt{x^3 - 3x + 1}$$

را رسم کنید .

**مسئله چهارم -** مقدار حقیقی کسر زیر را به ازاء  $x = 0$  حساب کنید .

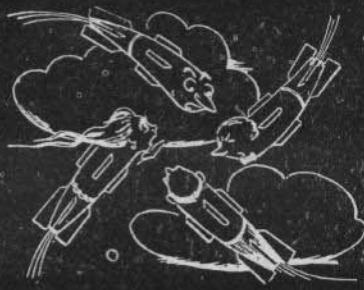
$$\frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$$





?

## استانهای تفنهای ریاضی



نویسندها: ژ. گامو  
م. استرن

ترجمه از فرانسه

### گفتگوی پدر و پسر

#### ۱- کارتهای درون کلاه

مورد استعمال فراوان دارد. سامی مدعی شد که بسیاری از قوانین حساب احتمالات را از راه تجربه و سوابقی که در بازیها دارد بدست آورده است و مسائلی مربوط به آن را به درستی جواب خواهد داد. اما پسر سامی اظهارداشت که پدرش اشتباه می‌کند و در نظریه احتمالات نکاتی وجود دارد که سامی از آن بی اطلاع است زیرا یک چنین اطلاعی مستلزم دانستن ریاضیات محض می‌باشد و مدعی شد که پدرش حتی از محاسبه احتمالات بسیار ساده هم درمی‌ماند و حاضر شد که وی را آزمایش کند. پدرهم قبول کرد.

آنگاه پسر مسئله‌ای به شرح زیر مطرح کرد:

- گوش کن پدر، این یک مسئله کاملاً ساده است: من سه عدد کارت در یک کلاه می‌گذارم؛ هردو روی یکی از این کارت‌ها قرمز است، هردو روی یک کارت دیگر سفید است اما یک روی کارت سوم قرمز و روی دیگر سفید می‌باشد. من یکی از این کارت‌ها را تصادفی بیرون می‌کشم. وجهی از آن را که می‌بینیم قرمز است و نمی‌دانم که وجه دیگر آن قرمز است یا سفید.

- لابد من باید معلوم کنم که این روی کارت چه رنگی دارد!

- بله، باید به من بگوئی احتمال اینکه وجه دوم این کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟ کارتی که من بیرون کشیده‌ام و روی مرئی آن قرمز است قرمز-قرمز است و یاقرمز-سفید، فقط همین دو حالت وجود دارد، درست است؟

- همینطور است.

- احتمال اینکه این کارت قرمز - قرمز باشد چقدر است؟ سامی که مسئله را بسیار ساده ملاحظه کرد بسیار ناراحت شد به تندی پاسخ داد که:

- خیلی واضح است و تردیدی وجود ندارد که احتمال

سامی رولت یکی از بازیکنان حرفلای بود. همه ازیهای شانسی را که فکر باختراع کرده به خوبی می‌شناخت در همه آنها استاد مسلم بود. در هر بازی شانسی که شرکت می‌کرد بربا او بود و زندگیش از همین راه تأمین می‌شد. آنچه را در پیش یافته تایپ بازیها هدایت می‌کرد تجربه‌ها و خاطراتی بود که قبل از آورده بود و گرنه از آنالیز ریاضی بیشترهای نداشت.

سامی خیلی خوشحال بود. وقتی که همسروی پیشنهاد کرد که پسرشان را فردی تحصیل کرده بار یاورند بلا فاصله باقت خود را اعلام داشت. او تصور می‌کرد که پسرش ذاتاً شناد ریاضی دارد و چه بهتر که یک ریاضیدان بار آید که ارزوه آنهمه احترام و آبرو دارد.

سامی پسرش را به دانشگاه فرستاد. و برای وی پیش‌بینی کرد که هیچگاه مانند پدرش کادیلاک سوار نخواهد شد بلکه ببور خواهد بود برای رفت و آمد سر کارش همواره از اتوبوس لشکده کند، احتمالاً کتابخانه‌ای شامل انواع کتابها برای خودش تکلیخ خواهد داد و هیچگاه به این فکر نخواهد افتاد که لبستی از دختران خوشکلی که در کاباره ها کار می‌کنند فراموش آورد. در عوض فردی تحصیل کرده و محترم شناخته خواهد

سامی رولت به خاطر مهارتی که در حرفة خود داشت ببلی به خود می‌باید و ادعا داشت که بسیاری از تصادفات را می‌تواند پیش یافته باشد و در این پاره همواره با پسرش جر و به داشت. وقتی که پسرش سال سوم دانشکده را می‌گذراند پیراپدرس توضیح داد که فعلاحساب احتمالات اهمیت فوق العاده بست آورده و در بسیاری از رشته‌ها مخصوصاً در فیزیک مدرن

- بنابراین قبول داری که سه حالت وجود دارد تا این کارتی را که بیرون می‌کشیم یک وجه آن قرمز باشد ، دریکی از این سه حالت ممکن است که روی دیگر کارت سفید باشد و آن حالتی است که کارت قرمز - سفید را بیرون کشیده باشیم و در دو حالت دیگر ، روی دیگر کارت قرمز خواهد بود ، این دو حالت وقتی است که کارت قرمز - قرمز را بیرون کشیده باشیم بنابراین احتمال اینکه روی دیگر کارت قرمز باشد برابر با نسبت ۲ بر ۳ است .

- خیلی خوب صحبت می‌کنی اما باید اعتراف کنم که من هنوز قانع نشده‌ام و گمان می‌کنم که سفسطه می‌کنی .

- پس اجازه بده توضیحات خودم را به نحو دیگر شرح دهم :

موقعی را در نظر بگیریم که من دست خودم را درون کار برده‌ام تا کارتی را بیرون بکشم که احتمالاً یک روی مرئی آن قرمز باشد ، البته ممکن است روی مرئی کارتی که کشیده می‌شود سفید باشد .

- در اصل موضوع فرقی نخواهد داشت .

- اگر کارتی را بیرون کشیدیم که روی مرئی آن قرمز است باید معلوم کنیم چقدر احتمال هست تا این کارت قرمز - قرمز باشد ، و اگر کارتی را بیرون کشیدیم که روی مرئی آن سفید است باید معلوم کنیم چقدر احتمال هست تا این کارت سفید - سفید باشد . بنابراین صورت صحیح مسئله از این قرار می‌شود : چه احتمالی وجود دارد تا اینکه ازین سه کارت درون کلاه یکی را بیرون بکشیم که هر دو روی آن یک رنگ باشد ؟ جواب محققًا ۲ بر ۳ است ، زیرا دو کارت از سه کارت دارای دو روی همنگ می‌باشند .

انتخاب یک کارت از دو کارت به نسبت یک بر دو خواهد بود .  
- مطمئن بودم که این جواب را خواهی داد . اما باید بگویم که این جواب غلط است .

سامی بیش از پیش عصبانی شد و سرفزندش داد کشید که :  
- به اصرار مادرت به دانشگاه فرستادمت اما نمی‌دانستم که دیگر پدرت را دست می‌اندازی . لازم نیست که پدرت را ریاضیات بیاموزی . این خیال خام را هم از سرت بیرون کن که خواسته باشی مرا با حساب احتمالات آشنا کنی . برای تعیین یک شانس به ریاضیات احتیاجی نیست . فقط باید عقل سلیم داشت .

پسر پدر را به شکیبائی دعوت کرد و ازوی خواست اول به توضیحات وی گوش دهد بعداً گرفتگش مشاهده کرد اعتراف کند . و چنین توضیح داد :

- اولاً باید معنی دقیق احتمال روشن شود .  
- ثانیاً در پاسخ دادن به سؤال بدون آنکه توجه داشته باشی بعضی شرایط را نادیده گرفتادی . من اینطور گفتم که ازین سه کارت یکی را بیرون کشیده‌ام که وجه مرئی آن قرمز است و احتمال اینکه این کارت قرمز - قرمز باشد چقدر است ؟ برای تعیین این احتمال قبلاً باید معلوم کرد که به چند قسم می‌توانیم کارتی را بیرون بکشیم تا یک روی آن قرمز باشد .

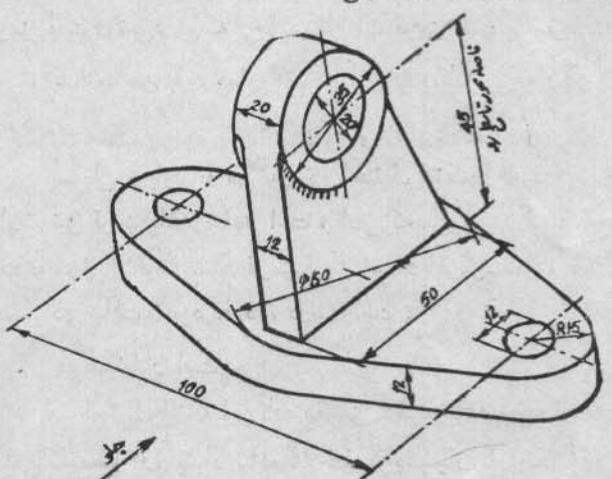
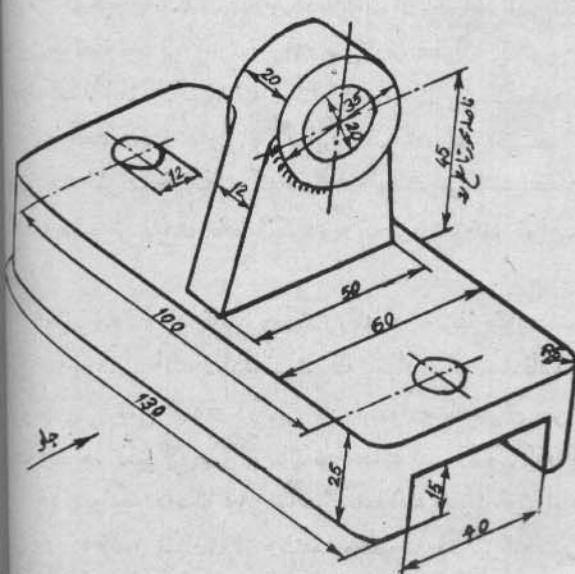
- این درست است ، اما چرا جواب مسئله را تغییر می‌دهد ؟  
- گوش کن ، در مجموعه کارت‌هایی که درون کلاه گذاشته شده رویهم سه وجه قرمز وجود دارد : دو وجه مربوط به کارت قرمز - قرمز و یک وجه مربوط به کارت قرمز - سفید . تا اینجا که اشکالی نداری ؟

- نه ، درست است .

### رسم فنی امتحان ثلث اول سال تحصیلی ۴۵-۴۶ ششم ریاضی دبیرستان البرز

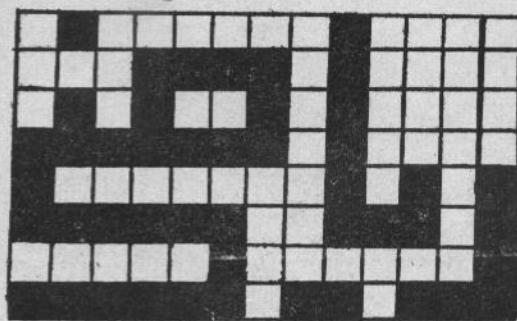
دبیر : مهندس فیاض ، فرستنده : ؟

دسته اول - یاطاقان سطحی

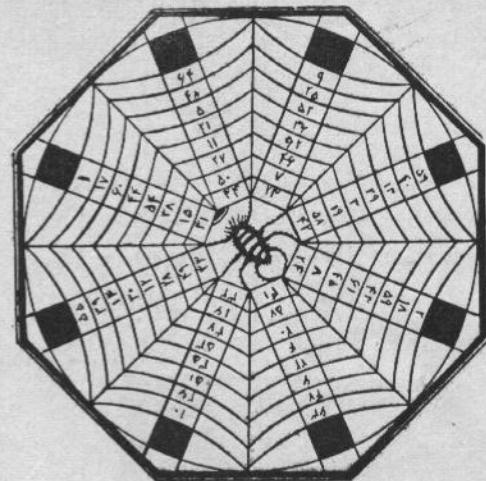


جنس: چدن ، مقیاس : ۱:۱

۱- برش تصویر از جلو - ۲- تصویر از چپ - ۳- تصویر از بالا



# سپاهی



## جادوی تار عنکبوت

فرستنده: ابراهیم طاهری آشیانی  
مجموع عدد واقع در هر سیم و مجموع عدد  
متساوی الفاصله از مرکز را حساب کنید در هر حال  
عدد ثابتی بدست می آید. آیا می توانید خاصیت های  
دیگری برای این تار عنکبوت پیدا کنید؟

## جدول را کامل کنید

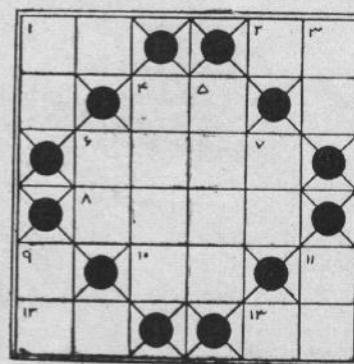
طرح از: اسماعیل غوثی ششم ریاضی دبیرستان خرد

9	X		÷	=	7
-	●	X	●	+	●
÷		+		=	8
X	●	-	●	X	●
	X		X		=
=	7	●	=	1	●
					= 8

باتوجه به اعداد و علامتهای مندرج در جدول  
بقيه اعداد جدول را که همه يك رقمي هستند بذست آوريد

## جدول اعداد

طرح از: فریدون امین زاده ششم ریاضی دبیرستان فردوسی رضائیه



افقی: ۱- کوچکترین عددی که  
چون مقلوب شود واحد بزرگتر شود.  
۲- مقلوب عدد ۱ افقی. ۴- خود و  
مجموع رقمهای شرکه دوم چندور کاملند.  
۶- سالی از قرن چهاردهم هجری و  
 مضرب ۷۹. ۸- عددی است به صورت  
abcc که چون يك واحد از آن کم  
شود به صورت aadd در آید و در  
ضمن بر کوچکترین مقسم علیه عدد

۷ افقی قابل قسمت است. ۱۵- با عدد ۱۳ افقی مساوی نیست اما آن را می شمرد.  
۱۲- تکرار بکرقم ۰ ۱۳- برابر عدد ۱۱ افقی.

قائم: ۱- مقلوب عدد ۵ افقی. ۳- در تمام سالهای قرن چهاردهم  
وجود دارد. ۴- رقم سمت چپ آن برابر مجموع بقیه رقمهایش می باشد.  
۵- اولین سال از یک قرن. ۷- رقم دهگانش با مجموع ارقامش مساوی است.  
۹- مقلوبش عدد ۶ افقی را می شمرد. ۱۱- چون مقلوب شود ۹ واحد کم  
شود.

## پاسخ سرگرمیهای شماره پیش

### سرگرمی فکری

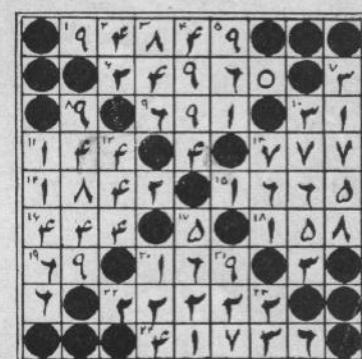
$$\begin{array}{r} 579 + 312 = 891 \\ - : - \\ 28 \times 13 = 364 \\ \hline 551 - 24 = 527 \end{array}$$

محاسبه از روی شکل

ابعاد هر مستطیل کوچک را  $a$  و  $b$   
فرض می کنیم از روی شکل داریم

$$\begin{cases} 4a(a+b) = 45 \\ 5b(a+b) = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2/5 \\ b = 2 \end{cases}$$

و محیط مستطیل برابر ۲۹ واحد حساب  
می شود.



حل جدول اعداد

# مسائل پرایی حل

پاسخهای خود را چنان بفرستید که تا قبل از پایان آذرماه به اداره مجله برسد . روی هر یک ازورقه‌هایی گه حل مسائل را می‌نویسید نام و کلاس خود را ذکر کنید . از ارسال حل مسائل مربوط به کلاسهای پائینتر از کلاس خود خودداری کنید .

ثانیاً محقق کنید که معادله  $E = \sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{2 - \sqrt{5}}$  فقط یک ریشه حقیقی دارد .

ثالثاً به فرض :

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \quad y = \sqrt{2 - \sqrt{5}}$$

مقدار  $y + x$  و از روی آن مقدار  $y - x$  را حساب کرده مقادیر  $x$  و  $y$  را به ساده‌ترین صورت بدست آورید .

- ۳۸۸۸ - از : مسعود درخشان نو

ثابت کنید که  $\frac{\log a}{\log b} = \frac{\log a}{\log b}$  و از روی آن صحت تساوی زیر را تحقیق کنید :

$$\log_{10^4} 1024 = 10 \log_{10^2} 2 + 3 \log_{10^4} 1024 - 10 \log_{10^2} 2$$

- ۳۸۸۹ - بترجمه از مجله تریت ریاضی .

مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  میخواهد در دایره  $(O)$  به شاعع مفروض است . اگر  $I$  وسط کمان کوچکتر  $BC$  و  $K$  نقطه دلخواهی از خط  $BC$  باشد عمودی که در  $K$  بر  $IK$  اخراج شود اضلاع یا امتداد اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب در  $M$  و  $N$  قطع می‌کند .

۱) ثابت کنید که  $K$  وسط  $MN$  می‌باشد

۲) ثابت کنید که  $BM = CN$

۳) اگر  $O$  مرکز دایرة محیطی مثلث  $IMN$  باشد مکان  $O$  را وقتی که  $K$  بر  $BC$  حرکت می‌کند بدست آورید .

۴) نقطه  $K$  را چنان تعیین کنید که خط  $MN$  بر نقطه  $P$  بگذرد ، بحث کنید .

## کلاس چهارم طبیعی

- ۳۸۸۵ - به فرض :

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad y = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

مقادیر هر یک از عبارتهای  $xy$  و  $(x+y)^2$  و  $y(x+y)$  را تعیین کرده با استفاده از اتحاد :

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

مقدار  $(y-x)$  را نیز حساب کرده از آن جماعت  $x$  و  $y$  را بدست آورید .

- ۳۸۸۶ - مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  قائم‌هه در زاویه  $A$  مفروض است . به مرکزهای  $B$  و  $C$  دو دایره رسم می‌کنیم که هردو بر  $A$  بگذرند خطی دلخواه از  $A$  چنان رسم می‌کنیم که دایره  $B$  را در  $M$  و دایره  $C$  را در  $N$  قطع کند . معas بر  $B$  در نقطه  $M$  و مماس بر  $C$  در نقطه  $N$  را در  $ABC$  می‌کنیم . این دومماس در نقطه‌ای مانند  $P$  متلاقی می‌شوند . اندازه زاویه  $P$  را بدست آورید .

## کلاس چهارم ریاضی

- ۳۸۸۷ - از : بختیار علی‌محمد سلطانی ششم ریاضی دیارستان خرد

اولاً عبارت  $z^4 + 4z^2 - 4$  را به ضرب عوامل تجزیه کنید .

## کلاس ششم طبیعی

-۳۸۹۶ - اولا در تابع :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ضرایب را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تابع در نقطه بطول ۱ بر محور  $x$  مماس بوده و در نقطه بعرض ۸ - محور  $y'$  را قطع کند و مماس بر منحنی در این نقطه محور طولها را به طول  $\frac{8}{3}$  تلاقی کند.

ثانیاً منحنی نمایش تابع ۸ -  $(x+1)^3 = y$  را رسم کنید.

-۳۸۹۷ - ترجمه : هر اج کاراپتیان

مطلوب است حل معادله مثلثاتی زیر:

$$\sec^2 x + 2 \sec x \csc x + \csc^2 x = 4$$

## کلاس ششم ریاضی

-۳۸۹۸ - ترجمه از فرانسه :

در صفحه محورهای مختصات متعامد  $x$  و  $y$  به مرکز  $O$  مبدأ مختصات و به شاع  $R$  دایره‌ای رسم می‌کنیم که محور  $x$  را در  $A$  و  $A'$  و  $y$  را در  $B$  و  $B'$  قطع می‌کند یعنی  $OA = OB = R$ ,  $OA' = OB' = -R$

یک نقطه  $D$  بر  $x$  انتخاب می‌کنیم و از  $D$  به  $B$  وصل می‌کنیم که دایره را در  $C$  قطع می‌کند.  $B'C$  را رسم می‌کنیم که عمود مرسوم بر  $x$  در  $D$  را در  $M$  تلاقی می‌کند اگر باشد مختصات نقطه  $M$  را بر حسب  $\lambda$  و  $R$  و معادله  $OD = \lambda$  مکان آن را وقتی که  $\lambda$  تغییر کند بدست آوردید و آن را رسم کنید به طریق هندسی نیز معادله مکان  $M$  را تعیین کنید.

-۳۸۹۸ - از: محمد هادی بکتاشی دیبر دیرستانهای آرش معادله مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$\sin^2 x - 3\sqrt{2} \sin^2 x \cos x + 9 \cos^2 x \sin x - 3\sqrt{3} \cos^2 x = \lambda \sin^2 \lambda x$$

-۳۸۹۹ - ترجمه : قوام نحوی دیبر دیرستان اصفهان

در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  قائمه در زاویه  $A$  مقدار زاویه  $B$  را چنان تعیین کنید که بین ارتفاع  $AH$  و دو ضلع مثلث رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{1}{AB} + \frac{2}{AC} = \frac{m}{AH} : (m > 0)$$

-۳۸۹۰ - خط  $(D)$  به معادله  $x + 4y = 12$  و خط

$y = x - 1$  مفروض است. این دو خط را در یک دستگاه محورها رسم کرده مختصات  $A$  نقطه تلاقی آنها را حساب کنید. اگر  $D$  و  $E$  محور  $y$  را به ترتیب در  $B$  و  $C$  قطع کنند مختصات دونقطه  $B$  و  $C$  و مساحت مثلث  $ABC$  را حساب کرده از روی آن طول ارتفاع  $BK$  از مثلث و مختصات نقطه  $K$  را حساب کنید.

-۳۸۹۱ - از روی روابط زیر مقدار  $x$  را حساب کنید:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(2\pi - \alpha) + \\ + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 2x - 4 \\ \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x + 2 \end{aligned}$$

## کلاس پنجم ریاضی

-۳۸۹۲ -  $(A(50) + B(162))$  دو رأس از مثلث

است که رأس  $C$  از آن بر نیم محور  $Ox'$  واقع است اگر طول شاع دایره محيطی مثلث  $2\sqrt{5}$  باشد مختصات  $\omega$  مرکز دایره محيطی مثلث و طول نقطه  $C$  را حساب کنید.

-۳۸۹۳ - از: رجیلی لعل خمسه مختصات سه رأس مثلثی را تعیین کنید بنا بر آنکه  $A(163)$  یک رأس آن و معادله های دومیانه از آن عبارت باشد از:

$$y - 1 = 0 \quad x - 2y + 1 = 0$$

-۳۸۹۴ -  $\alpha$  کمانی است حاده و داریم:

$$\begin{cases} \operatorname{cotg}(K\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha) - 4x = \operatorname{tg}(K'\pi + \frac{\pi}{4}) \\ \sin(3K_1\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha) + \sqrt{x + \cos\frac{\pi}{3}} = 0 \end{cases}$$

مقدار  $x$  را تعیین کنید.

-۳۸۹۵ - از: همراه داد بزرگزار دو صفحه  $P$  و  $Q$  در خط  $L$  مشترک بوده و با یکدیگر زاویه  $\alpha$  می‌سازند. خط  $D$  در صفحه  $P$  واقع است. اگر زاویه‌ای که خط  $D$  با خط  $L$  و با صفحه  $Q$  می‌سازد به ترتیب برابر با  $\beta$  و  $\gamma$  باشد صحت رابطه زیر را تحقیق کنید:

$$\cos^2 \gamma = 1 - \sin^2 \beta \sin^2 \alpha$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}$$

-۳۹۰۵ ترجمه: پرویز خواجه خلیلی

اگر ریشه‌های معادله  $x^n - 1 = 0$  عبارت باشد از  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$  ثابت کنید که:

$$(1-\alpha)(1-\beta)\dots(1-\lambda) = n$$

-۳۹۰۶ ترجمه: پرویز خواجه خلیلی

$x$  و  $y$  را بین روابط زیر حذف کنید.

$$p = x^3 + 3xy^2 \quad q = 3x^2y + y^3$$

-۳۹۰۷ از: همداد لالهزاری ششم ریاضی

دیستان خوارزمی ۲

صورت کلی ریشه معادله زیر را تعیین کنید:

$$2tg^n ax = \cos 2b - 1$$

-۳۹۰۸ ترجمه: حسن هاشمی نژاد ۵ ریاضی دیستان

ابن سينا رضائیه.

اگر داشته باشیم:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

به ازاء  $n > 2$  نامساوی زیر را محقق کنید:

$$\frac{n}{n+1} < S_{n+1} < \frac{1}{n} + (n+1)^{-\frac{1}{n}}$$

-۳۹۰۹ فرستنده: جمشید عمیقیان دانشجوی

دانشکده علوم اصفهان

دو عدد لامپ روشن به فاصله  $a$  از یکدیگر از سقف اطاقدیان شده‌اند بطوری که فاصله هر یک از آنها از کف اطاق برابر ۱ است. شخصی که طول قدمی  $b$  است در نقطه‌ای از کف اطاق ایستاده است. توسط هر یک از لامپها سایه‌ای از این شخص بر کف اطاق ایجاد می‌شود. ثابت کنید که پاره خط واصل بین دو سایه‌ها طول ثابتی دارد.

-۳۹۱۰ ترجمه: مهرداد بزرگزاد

بر روی هر ضلع مثلث  $ABC$  و در خارج آن سه مثلث متشابه  $BCX$  و  $ABz$  و  $CAy$  را می‌سازیم. ثابت کنید که مرکز ثقل دو مثلث  $BAC$  و  $xyz$  برهم واقع‌اند.

و بر حسب مقادیر مختلف  $m$  بحث کنید.

-۳۹۰۰ از: غلامرضا قابل ششم ریاضی دیستان

شاهپور شیراز

عدد  $ab$  در مبنای  $x$  به صورت  $aa^0$  نوشته می‌شود. این عدد و مبنای  $x$  را تعیین کنید.

-۳۹۰۱ از: سید جلال آشفته دانشجوی دانشگاه آربامهر

عددی چهار رقمی چنان تعیین کنید که ۹ برابر مجنوز مجموع ارقامش باشد.

-۳۹۰۲ فرستنده: پرویز خواجه خلیلی

نقطه‌ای است از بینی کانوهای  $F$  و  $F'$  و به مرکز  $O$

اگر اندازه زاویه  $FMF'$  برابر  $\theta$  باشد ثابت کنید:

$$\overline{OM}' = a^0 - b^0 tg^2 \frac{\theta}{2}$$

-۳۹۰۳ خط افقی  $H$  را موازی با محور افقی کاغذ و واحد بالای آن رسم کنید. از نقطه تلاقی این افقیه با محور قائم کاغذ که آن را  $g_2$  می‌نامیم خط  $L$  فراز ۲ را رسم کنید که با افقیه مزبور زاویه  $120^\circ$  ساخته‌رقوم نقاط آن از راست به چپ و از بالا به پائین ترقی کند.

۱- یک مقیاس شب صفحه دو خط  $H$  و  $L$  را رسم کنید

۲- در صفحه  $(D)$  و  $(L)$  نقطه  $a$  را چنان تعیین کنید که

سمت چپ  $g$  واقع بوده طول  $AG$  برابر با ۶ واحد باشد.

۳- ملخص مثلث  $ABC$  را رسم کنید که  $A$  یک رأس

$G$  نقطه تلاقی میانهای آن و خطوط  $H$  و  $L$  محملهای دومیانه آن باشد.

## مسائل متغیرقه

-۳۹۰۴ ترجمه: پرویز خواجه خلیلی

اگر  $a^0 > b^0$  ثابت کنید که:

### مسائل فیزیک (ترجمه و انتخاب از: هوشمنگ شریفزاده)

۱۲۰mm افزوده می‌شود. میله محکم و سبکی را، که وزن آن ناچیز است، به نقاط  $A_1$  و  $A_2$ ، دو انتهای دونیروسنج، وصل می‌کنیم. به نقطه  $D$  از میله وزن‌های بوزن  $P$  می‌آویزیم.

۱- محل نقطه  $D$  (یعنی نسبت  $\frac{DA_1}{DA_2}$ ) را پیدا کنید برای

آنکه افزایش طول دونیروسنج ریکسان باشد و میله  $A_1A_2$  بازهم افقی بماند.

-۳۹۱۱ برای کلاس رای چهارم

دونیروسنج همطول  $R_2$  و  $R_1$  را که وزن آنها ناچیز است، به ترتیب از دونقطه  $C_1$  و  $C_2$ ، که دریک سطح افقی واقعند، آویزان می‌کنیم. نیروسنج  $R_1$  به ازای  $1/10$  نیوتون بر طولش  $1cm$  و نیرو سنگ  $R_2$  به ازای یک نیوتون بر طولش

ارتفاعی می تواند دوران کند تا همیشه بر خط قائم مکان یک نقطه معین از خط استوای زمین باشد ؟ یکی از راههایی که به کمک آن می توان به این مسئله پاسخ داده تایه این قمر است با ماه ، فاصله ماه از مرکز زمین  $59/5$  برابر شعاع زمین و مدت زمان یک دور گردش ماه بدور زمین  $27$  شبانه روز است .

ب- در این ارتفاع شتاب قمر مصنوعی به طرف زمین  
چقدر است ؟

ج- با بکار بردن قانون معکوس مربuat و  $g$  بر سطح زمین ، شتاب جاذبه را در این ارتفاع بدست آورید و آن را با جوابی که در قسمت «ب» بدست آوردید مقایسه کنید .

**۳۹۱۵** - فاصله مرکز ماه از مرکز زمین  $59/5$  برابر شعاع زمین است . ماه در هر  $27$  شبانه روز یک بار به گرد زمین می چرخد . جرم مخصوص زمین را حساب کنید . ضریب جاذبه جهانی  $K = 6/62 \times 10^{-11} m^3/kg \cdot s^2$

-۲ - اگر یک نیوتون به وزن  $P$  اضافه کنیم میله  $A_1 A_2$  چقدر پائین تر می رود ؟

**۳۹۱۳** - برای کلاسهاي پنجم ثابت کنید نوری که از  $A$  خارج شده با انعکاس روی آئینه  $M$  به نقطه  $B$  می رسد کو تا هرین راه را می پیماید .

**۳۹۱۳** - برای کلاسهاي ششم فشار سنج جیوه‌ای را در آسانسوری نصب کرده‌ایم . وقتی که آسانسور حرکت نمی کند ، فشار سنج فشار  $76 \text{ cm Hg}$  را نشان می دهد . آسانسور ابتدا با حرکت متشابه التغیر قند شونده و با شتاب  $1m/s^2 = \gamma$  بطرف بالا می رود سپس با حرکتی یکنواخت به راه خود ادامه می دهد و بالاخره به منظور توقف حرکتی متشابه التغیر کند شونده با شتاب  $2m/s^2 = \gamma$  کسب می کند . فشار سنج در هر یک از سه حالت فوق چه مقادیری را نشان می دهد ؟

**۳۹۱۴** - برای داوطلبان گنکور الف- در صفحه استوای زمین ، قمری مصنوعی در چه

### مسائل شیمی (ترجمه و انتخاب از: عطاء الله بزرگ نیا)

۲- چه حجمی از محلول D برای اکسید کردن کامل  $2000\text{cc}$  از محلول C لازم است .

۳- فرمول واکنشهای انجام یافته را بنویسید .

**۳۹۱۸** - چه مقدار از گلوکز به فرمول  $C_{12}H_{22}O_{11}$  و چه مقدار ساکارز به فرمول  $C_{12}H_{22}O_{11}$  را باید جدا گانه در یک لیتر آب حل کرد تا هر دو محلول در  $37/5$  - درجه که نقطه انجاماد محلول  $0/2$  مل در لیتر اوره  $CO(NH_2)_2$  است شروع به انجاماد کند . ثابت نزول نقطه انجاماد آبرانیز پیدا کنید

**۳۹۱۹** - چون  $37/0$  گرم از یک مایع بیرنگ آلی را بوزانیم  $0/88$  گرم گاز کربنیک و  $0/45$  گرم آب بدست می آید و چون  $0/185$  گرم آن در دستگاه ویکتور میر به شکل بخار درآید در  $15$  درجه حرارت و فشار  $755$  میلیمتر جیوه  $59/300$  هوا را جانشین می شود . فرمول ملکولی این جسم را پیدا کنید .

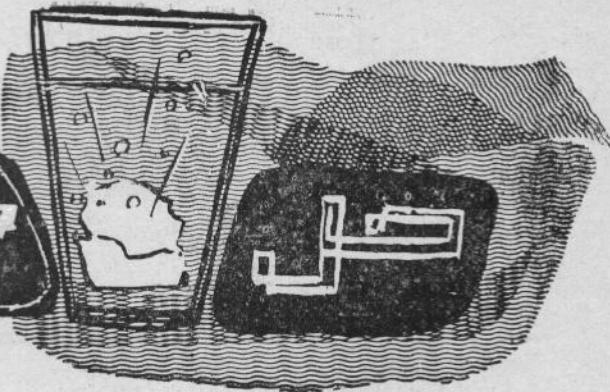
**۳۹۱۶** - به  $100\text{cc}$  اسید سولفوریک  $5/0$  نرمال V م محلول پتاس نرمال می افزاییم  $100\text{cc}$  از این محلول توسط  $2/300$  محلول سود  $1/5$  نرمال خنثی می شود . حجم V را حساب کنید .

**۳۹۱۷** - محلول A شامل  $8/4$  گرم اسید آگزالیک متبلور ( $C_2O_4H_2$  ،  $2H_2O$ ) در لیتر است  $37/500$  از این محلول  $2000\text{cc}$  از محلول پرمنگنات پتاسیم (محلول B) را در مجاورت اسید سولفوریک بیرنگ می سازد . از طرف دیگر  $100\text{cc}$  از محلول سولفات فرو (محلول C) اسیدی شده با  $SO_4H_2$  مقدار  $100\text{cc}$  از محلول B را بیرنگ می سازد . بالاخره هر گاه مقدار زیادی از محلول A را بر  $50\text{cc}$  از یک محلول کلرور اوریک (محلول D) وارد سازیم رسوی تشکیل می شود که پس از شستشو و خشک کردن  $0/394$  گرم جرم دارد . پیدا کنید .

۱- نرمالیته و غلظت محلولهای A و B و C و D را



# بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ



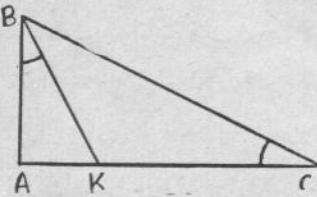
اگر حل مسئله‌ای را فرستاده‌اید اما نام شما ذیل حل آن در این شماره درج نشده است به یکی از علل زیر می‌باشد:  
راه حل انتخابی شما درست نبوده یا ناقص بوده است ، روی ورقه‌ای که حل مسئله را نوشته‌اید نام و کلاس خود را  
یادداشت نکرده‌اید ، مسئله مربوط به کلاس پائین‌تر از کلاس خود را حل کرده‌اید . نام شما دیرتر از مهلت مقرر به دست مرا  
رسیده است .

## حل مسائل یکان شماره ۲۸

حسینی - محمد تقی هاشمیان ، هدف ۱ - ع. ر. آملی - علیرضا  
زرین قلم - فرامرز صارمی - مصباح جاوید دیبرستان آزمون -  
پ. مجذوب ، هدف ۱ - مسعود حبیب‌الهزاده ، دیبرستان جلوه -  
حمید صیاد دیبرستان دارالفنون - ایرج ذکوتوی دیبرستان بامداد -  
قاسم صدر بزار دیبرستان ابن‌بیمن - سید محمد رضا مرعشی -  
حسین اسدی پور دیبرستان دارالفنون - عبدالعظیم نجف‌آبادی  
دیبرستان کمال‌الملک نیشاپور - محمدقلی قلیان - جوادپورنادری  
سید رضا میرزندۀ دل -

**۳۸۱۳** - در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  قائمه در زاویه  $A$   
برضلع  $AC$  نقطه  $K$  را چنان تعیین کنید که تفاضل دو زاویه  
 $BCK$  و  $BKC$  برابر با  $90^\circ$  درجه باشد .

$$\angle BKC = 90^\circ + \angle KBA$$



پس باید داشته باشیم :  
 $\angle KBA = \angle ACB$

یعنی ضلع  $BK$  را  
طوری رسم کنیم که با

زاویه‌ای مساوی زاویه  $ACB$  بسازد .

پاسخهای درست رسیده : شهردخت محبزاده اکرم  
حبیبی - مریم شاملی - نصرالله صائبی - محمد تقی هاشمیان -  
ع. ر. آملی - علیرضا زاریان قلم دیبرستان هدف ۱ - مصباح جاوید -  
پ. مجذوب - مسعود حبیب‌الله زاده حمید صیاد - محمد تقی معیر  
دیبرستان ادب - قاسم صدر بزار - محمد رضا مرعشی - حسین

## کلاس چهارم طبیعی

- ۳۸۱۲ - اولا عبارت زیر را به صورت مجموع شش  
مربع تبدیل کنید :

$$S = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

ثانیاً محقق کنید و قطی که  $S = 0$  باشد داریم :

$$a = b = c = d$$

حل - اولا عبارت بالا به صورت زیر در می‌آید .

$$S = a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2ad + b^2 + c^2 - 2bc + b^2 + d^2 - 2bd + c^2 + d^2 - 2cd$$

و یا :

$$S = (a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2$$

ثانیاً چون  $S$  مجموع چند مقدار مثبت است در صورتی که  $S = 0$   
می‌شود که هر یک از پرانتزهای عبارت اخیر صفر شوند و از آنجا :  
 $a = b = c = d = 0$

پاسخهای درست رسیده : شهردخت محبزاده دیبرستان  
هدف شماره ۲ - اکرم حبیبی دیبرستان نواب‌گان ضرایی - مریم  
 شاملی ، دیبرستان شهناز پهلوی لاهیجان - نصرالله صائبی - داود

$$f(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = x$$

$$f(f(x)) = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f(x^2) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1+x}{1-x}$$

با قرار دادن این مقادیر در عبارت داده شده و خلاصه کردن آن مقدار عددی عبارت برابر  $(1 -)$  بددست می‌آید.

**پاسخهای درست رسیده:** اگر  $m$  حبیبی - اعظم آشنه مریم شاملی - محمد علی بحرینی دیبرستان آذر - حسین اسدی پور - محمد تقی هاشمیان - محمد تقی معیر - فرامرز صارمی - ع. ر. آملی - فرهاد جوانمردیان - حسین صابر - علیرضا زرین قلم - نصرالله صائبی - مسعود حبیب‌الله زاده - پروین شایگان فاطمی - عباس طلائی‌زاده - حمید انصاری - جواد پور نادری - مهدی تراکمه دیبرستان دکتر نصیری - عبدالعلی دهدشتی - احمد توسلی

- ۳۸۱۶ مطلوب است تعیین  $f(x)$  در صورتی که داشته باشیم:

$$f(x+1) = x^2 + px + q$$

حل - داریم :

$$f(x+1) = (x+1)^2 + (p-2)(x+1) + q + 1 - p$$

$$f(x) = x^2 + (p-2)x + q + 1 - p$$

پس

**پاسخهای درست رسیده:** اگر  $m$  حبیبی - مریم شاملی آناید هو اکیمیان - نصرالله صائبی - فرزاد مجیدی آهی - ع. ر. آملی - فرهاد جوانمردیان - علیرضا زرین قلم - فرامرز صارمی - پ. مجذوب - مسعود حبیب‌الله زاده - حمید صیاد - پروین شایگان فاطمی - قاسم صدر بزار - حسین اسدی پور - ابوالقاسم - عبد‌الظیم نجف‌آبادی - عباس طلائی‌زاده - محمد قلیان دیبرستان شریعت - جواد پور نادری دیبرستان نشاط اصفهان - مهدی تراکمه رضا میرزندہ دل - فریبرز سجادی - احمد توسلی - غلامرضا بهرامی دیبرستان هاتف اصفهان - محمد قلی قلیان دیبرستان پانزده بهمن روسر - ایرج ذکاوتی -

- ۳۸۱۷ مثلث متساوی الساقین  $ABC$  که در آن

$BA = BC$  و اندازه زاویه  $B$  برابر  $30^\circ$  درجه است مفروض است. در نقطه  $A$  عمودی بر  $AC$  اخراج می‌کنیم تا امتداد ضلع  $BC$  را در  $D$  قطع کند. ثابت کنید که طول  $CD$  چهار برابر فاصله نقطه  $C$  از ضلع  $AB$  می‌باشد.

اسدی پور - احمد میرزا محمدی دیبرستان ادیب - عبدالحسین مفتح - داود اکبریان دیبرستان رازی شاهی - عبد‌الظیم نجف‌آبادی - جواد پور نادری رضا میرزندہ دل - ماشاء‌الله سعید.

## کلاس چهارم ریاضی

- ۳۸۱۴ اگر داشته باشیم :

$$ax^n = by^n = cz^n = x^n + y^n + z^n$$

ثابت کنید خواهیم داشت :

$$ab + bc + ca = abc$$

حل - با توجه به خواص تناسب داریم :

$$\frac{x^n}{a} = \frac{y^n}{b} = \frac{z^n}{c} = \frac{x^n + y^n + z^n}{a+b+c}$$

و چون با رابطه مفروض مقایسه شود نتیجه خواهد شد :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow ab + bc + ca = abc$$

**پاسخهای درست رسیده:** شهر دخت محب زاده - اکرم حبیبی - اعظم آشنه - مریم شاملی - نصرالله صائبی - فرزاد مجیدی آهی - محمد علی بحرینی - فرامرز صارمی دیبرستان مریوی - حسین امینی دیبرستان مرآت - محمد تقی معیر - ع. ر. آملی - فرهاد جوانمردیان - حسین صابر - علیرضا زرین قلم - مصباح جاوید - پ. مجذوب - مسعود حبیب‌الله زاده - حمید صیاد - قاسم صدر بزار - حسین اسدی پور - احمد میرزا محمدی - ابوالقاسم - عبد‌الظیم نجف‌آبادی - عباس طلائی‌زاده دیبرستان قطب دزفول - حمید انصاری - عباس عراقی هدف ۳ - ایرج شریعت - جواد پور نادری دیبرستان نشاط اصفهان - مهدی تراکمه رضا میرزندہ دل - فریبرز سجادی - احمد توسلی - غلامرضا بهرامی دیبرستان هاتف اصفهان - محمد قلی قلیان دیبرستان پانزده بهمن روسر - ایرج ذکاوتی -

- ۳۸۱۵ به فرض :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f(x^2) - fff(x)$$

$$f\left(\frac{1}{x^2}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right)$$

عبارت

را به ساده‌ترین صورت ممکن درآورید :

حل - داریم :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$AC = \sqrt{58}$$

$$BC = \sqrt{232} = 2\sqrt{58}$$

پس  $BC = AB + BC$  یعنی A و B و C بر یک استقامتند.

**پاسخهای درست رسیده:** هایده آتشرو دیزستان رضا شاه کبیر - مریم شاملی - آرمن یوسفی دیزستان کوشش. ع. ر. آملی کاظم ملکزاده - شهاب ذکاوتی هدف ۳ - حسین صابر - محمد رضا یزدان دیزستان ادب - محمد حسین صیاد دیزستان دارالفنون - پروین مرادی حقگو - ناصر حاجی عسگری - حسن صدرالبروی قاسم صدر بزار - سالار محمودی دیزستان محمد رضا شاه پهلوی حسین اسدی پور - احمد رضا نادری دیزستان دکتر حسابی اهواز - مهدی عبقری دیزستان داش بزرگ نیا مشهد - یونس رحمن پناه خلخالی دیزستان پهلوی اردبیل - سیروس مریوانی دیزستان آذر - لطف الله سیدی - جمشید ضیائی - ایرج ذکاوتی - ابوالفضل صادقزاده - محسن هاشمی نژاد - رحیم جارچی دیزستان اتحاد - هادی جرجگار - ارجمند - محمد قلی قلیان - محمد گرمهای

۳۸۱۹ - اگر داشته باشیم :

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = a^2 + \tan^2 x + \cot^2 x = b^2$$

ثابت کنید که داریم :

$$a^2 - b^2 = 2$$

$$a^2 = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

**حل - داریم :**

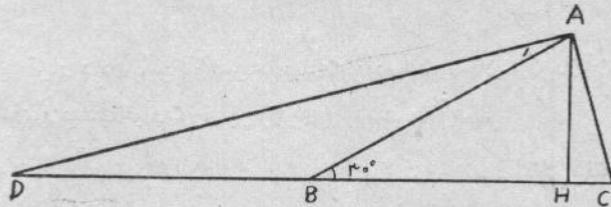
پس :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1 - \cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \frac{1 - [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x]}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \dots = 2 \end{aligned}$$

**پاسخهای درست رسیده:** اعظم صمد نوری - مریم شاملی - آرمن یوسفی - سدیک هوکیمیان دیزستان انوشیروان دادگر - مرتضی حسینی خرمی - داود حسینی - جعفر صادقی - علی اصغر اسکندریانی دیزستان بهمن قلهک - فرزاد مجیدی آهی - حسین اسدی پور - محمد تقی هاشمیان - احمد طاهری نخست دیزستان ارشاد ع. ر. آملی - کاظم ملکزاده - شهاب ذکاوتی - حسین صابر - علیرضا ذرین قلم - محمد رضا یزدان - مسعود

**حل - از A عمود AH را بر BC رسم می کنیم در مثلث قائم الزاویه AHB ضلع HA که روی رو به زاویه  $30^\circ$  درجه است برابر با نصف AB است در مثلث ABC اندازه هر یک از زاویه های A و C برابر با  $75^\circ$  درجه حساب می شود پس اندازه زاویه A برابر  $15^\circ$  درجه است و چون زاویه B خارجی مثلث DAB است پس اندازه زاویه D نیز  $15^\circ$  درجه بوده و مثلث ABD متساوی الساقین بوده داریم  $BD = AB = BC$  و چون  $AH$  نصف AB بود پس یک چهارم CD خواهد بود.**



**پاسخهای درست رسیده:** شهردخت محبزاده - آذر دیوشنی دیزستان شاهدخت - اعظم آشفته - اکرم حبیبی - مریم شاملی - آنایید هوکیمیان - نصرالله صائبی - داود حسینی علی اکبر صادقی - فرشاد اسکندریانی - فرزاد مجیدی آهی - حسین اسدی پور - محمد تقی هاشمیان - محمد تقی معیر - ع. ر. آملی - فرهاد جوانمردانی - حسین صابر - علیرضا ذرین قلم - مصباح جاوید - پ. مجدوب - مسعود حبیب الله زاده - حمید صیاد - حجت الله بایانی - خسرو جمشیدی کلاتری - حسن قندچی مازندرانی ایرج ذکاوتی - پروین شایگان فاطمی - احمد میرزا محمدی - قاسم صدر بزار - محمد رضا مرعشی - احمد میرزا میرزا - داود اکبریان - ماشاء الله سعید - فرخ قوامی - ابوالقاسم م. ع. علی اصغر نوروزی - عبدالعظیم نجف آبادی - حسین قاضی زاده - سعید قوجا - عباس طلائی زاده - حمید انصاری - عباس عراقی - ایرج شریعت - جواد پور نادری - کریم معلمی - جلیل روحانی فرد - مهدی تراکمہ - عبدالعلی دهدشتی - رضا میرزندہ دل - احمد توسلی - غلامرضا بهرامی .

## کلاس پنجم طبیعی

۳۸۲۰ - از راه محاسبه طول قطعه خط ثابت کنید که سه نقطه : A(۳۵) و B(۶۶) و C(۱۲) بربیک استقامت واقعند.

**حل -** شرط لازم و کافی برای اینکه سه نقطه A و B و C بر یک استقامت باشند آنست که داشته باشیم  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$  داریم :

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{58}$$

ویا :

$$\frac{(a^r - b^r)^2 + (b^r - c^r)^2 + (c^r - a^r)^2}{S^r} = 2(a^r + b^r + c^r)$$

وازآنجا :

$$S = x + y + z =$$

$$\pm \sqrt{\frac{(a^r - b^r)^2 + (b^r - c^r)^2 + (c^r - a^r)^2}{2(a^r + b^r + c^r)}}$$

وازدروی مقادیر  $x$  و  $y$  و  $z$  برابر با مقادیر زیر حساب خواهد شد .

$$\frac{x}{a^r - b^r c^r} = \frac{y}{b^r - a^r c^r} = \frac{z}{c^r - a^r b^r} = \pm \sqrt{\frac{1}{a^r + b^r + c^r - 3a^r b^r c^r}}$$

پاسخهای درست رسیده : حسین امین الهی دیبرستان باکان - علی اصغر اسکندریاتی - فرزاد مجیدی آهی - میر سعید لاجوردی دیبرستان البرز - مسعود حبیب‌الله‌زاده - حسن قندچی مازندرانی دیبرستان البرز - محمد مهدی عابدی نژاد دیبرستان ۱۵ بهمن بهشهر - عیسی خندانی - محمد مقدسی - تقی‌هاشمیان دیبرستان هدف ۱ - اکبر دوستدار صنایع - چنگیز ارومیه - عباس طلائی‌زاده - عبدالرحمان‌محمدی سقائی دیبرستان پهلوی بهبهان - محمد علی عباییان - ذکریا میر برگ کار - محمد گرمایی دیبرستان کوروش دامغان - فضل‌الله شفیعی - اسد‌الله تراشجین پور

۳۸۲۱ - به فرض اینکه داشته باشیم :

$$tgx + cotgx = \alpha \quad tg^r x + cotg^r x = b$$

رابطه‌ای مستقل از  $x$  بین  $a$  و  $b$  بدست آورید .

حل :

$$b = (tgx + cotgx)^r - 3tgx \cotg x (tgx + cotgx)$$

$$b = a^r - 3(tgx + cotgx) = a^r - 3a$$

پاسخهای درست رسیده : اعظم صمد نوری - مریم شاملی - غلامرضا اصلانی - منوچهر رسولی - محمد محمدی سقائی - رحیم جارچی - ابراهیم بازارده - هدایت طوماریان حجت عادلی - داود حسینی - جعفر صادقی - حسین امین‌الله - تورج شفیق نوبری، هدف ۱ - سدیک‌هوکیمیان - فرزاد مجیدی آهی - حسین اسدی پور دیبرستان دارالفنون - علی اصغر اسکندریاتی - سعید شهرروا - آدمن یوسفی - محمد تقی‌هاشمیان کاظم ملکزاده - کامران نیم - ع. د. آملی - علیرضا زرین قلم حسن قزل‌ایاغ هدف ۳ - شهاب ذکاوی - حسین صابر - محمدرضا یزدان - مسعود حبیب‌الله‌زاده - محمد حسین صیاد - میر ابوطالب

حبیب‌الله‌زاده - محمد حسین صیاد - میر ابوطالب موسوی نسب دیبرستان خیام لنگرود - پروین مرادی حقگو - ناصر حاجی عسگری - سعید هدایتی دیبرستان خوارزمی ۱ - شاهرخ ذکاوی - محمد تقی معیر - حسن صدرالثروی - سالار محمودی - احمد میرزا محمدی - محمد مهدی عابدی نژاد - حسین علوی - احمد رضا نادری - مهدی عقری - نعمت‌الله‌رحمیم ییکی دیبرستان پناه خلخالی - سیروس مریوانی - عیسی خندانی - محمد مقدسی حجت‌الله‌بابائی دیبرستان علمیه - اکبر دوستدار صنایع - خسرو پرویز افشاری آزاد دیبرستان دهقان تبریز - حسین قاضی‌زاده علی اصغر بخت‌آذما دیبرستان سعدی بهشهر - چنگیز ارومیه جبرائیل رسولی دیبرستان مهرگان - عباس طلائی‌زاده - محمد مدقی قلیان - علی طاهر - حمید انصاری - رضا میر زنده دل - محمد گرمایی - سعید‌الله‌قوچا - غلامحسین علی نژاد - لطف‌الله‌سیدی جمشید ضیائی - ابوالفضل صادق‌زاده - جواد پورنادری - ژان الکسوپلوس - محسن‌هاشمی نژاد - عبدالمحیم باور - رحیم جارچی هدایت طوماریان - هادی جرجار جمند - سیروس باقالائی .

## کلاس پنجم ریاضی

- ۳۸۲۰ - دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{aligned} x^r - yz &= a^r \\ y^r - xz &= b^r \\ z^r - xy &= c^r \end{aligned}$$

حل - معادله دوم را از معادله اول کم می‌کنیم .

$$x^r - y^r - yz - zx = a^r - b^r$$

پس :

$$(x - x)(x + y + z) = a^r - b^r \Rightarrow$$

$$x - y = \frac{a^r - b^r}{x + y + z}$$

برای سهولت  $x + y + z = S$  فرض کرده به نحو مشابه خواهیم داشت :

$$x - y = \frac{a^r - b^r}{S} \quad y - z = \frac{b^r - c^r}{S}$$

$$z - x = \frac{c^r - a^r}{S}$$

ضمناً اگر هریک از معادلات دستگاه را در ۲ ضرب کرده و طرفین را جمع کنیم به صورت زیر درمی‌آید :

$$(x - y)^r + (y - z)^r + (z - x)^r = 2(a^r + b^r + c^r)$$

عقربی - محمدصادق نهادنی - عیسی خندانی - محمدمقدمی  
تقی هاشمیان - سعید معصومی - اکبر دوستدار صنایع - حسن  
ثناجو - لطفالله‌سیدی - قدرت نجات - محسن هاشمی نژاد - حسین  
خبازیان - غلامرضا اصلانی - منوچهر رسولی دیرستان ابن‌سینا  
رضائیه - محمدمحمدی سقائی - محمد علی عبایان - علی‌اصغر  
حمزه‌گودرزی - رحیم‌جارچی - هدایت طوماریان - جلال‌اشجعی  
محمدگرمدای - فضل‌الله شفیعی - اسدالله تراشچن پور - حجت  
عادلی .

## سکلاس ششم طبیعی

۳۸۲۳ - ثابت کنید که منحنیهای نمایش تابع زیر در مبدأ مختصات بر محور طولها مماس می‌باشد .

$$y = a \sin^2 x + b \cos^2 x - b$$

حل : داریم :

$$y' = 2a \sin x \cos x - 2b \sin x \cos x$$

$a$  و  $b$  برابر هر مقدار که باشد مشتق به ازاء  $x = 0$  مساوی صفر بوده و بعلاوه مختصات مبدأ در معادله صدق می‌کند پس همه منحنیهایی که درازاء مقادیر مختلف  $a$  و  $b$  رسم می‌شوند در مبدأ مختصات بر محور طولها مماس می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده : هایده آتشرو - اعظم معصومی دیرستان فروزش - حسین امین‌الهی - ع. د. آملی - جمال‌آشفته ناصر هادی‌پور - محمدحسین صیاد - مهدی عقربی - حسن دوامی روح‌الله صادقلو دیرستان کسری - فریدون امین‌زاده دیرستان فردوسی رضائیه - مهدی خواجهی - محمد رضا ستایشی - مسعود درخشان‌نو - احمد کرمانی دیرستان هدف - محمدحسین رفیعی امام دیرستان رضا شاه کبیر رشت - عبدالکریم لیشی‌اصل .

۳۸۲۴ - معادله مثلثاتی زیر را حل کرده جوابهای کلی آنرا بدست آورید :

$$\operatorname{tg} x + \sin x (1 - \operatorname{tg} x) + \cos^2 x = 1$$

حل - معادله را بصورت زیر می‌نویسیم :

$$\operatorname{tg} x - 1 + \sin x (1 - \operatorname{tg} x) + \cos^2 x = 0$$

$$(\operatorname{tg} x - 1)(1 - \sin x) + (1 - \sin x)(1 + \sin x) = 0$$

$$(\operatorname{tg} x + \sin x)(1 - \sin x) = 0$$

$$1 - \sin x = 0 \implies \sin x = 1 \text{ و } x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \sin x = 0 \implies \sin x \left( \frac{1 + \cos x}{\cos x} \right) = 0$$

موسی نسب - پرویز مرادی حقگو - غلامرضا انصاری دیرستان ۱۵ بهمن - فاضل حاجی عسگری - سعید هداوتی - شاهرخ ذکاوی - ایرج افشاری - احمد میرزا محمدی - محمد مهدی - عابدی نژاد - سالار محمدی - حسین علوی - احمد رضا نادری مهدی عقربی - سلیمان نصرت‌آبادی - یونس رحمان پناه خلخالی محمد صادق نهادنی دیرستان امیرکبیر زنجان - سیروس مربیانی - عیسی خندانی - بهروز نوبهار - محمد مقدمی حجت‌الله با باشی دیرستان علمیه - اکبر دوستدار صنایع - علی‌اصغر فقیهی - سعید معصومی دیرستان دکتر نصیری - خسرو پرویز افشاری آزاد حسن ثناجو - محمدابراهیمی - رمضان اصغرپور - سعید القوچا علی‌اصغر بخت‌آزمـا - چنگیز ارومیه - عباس طلائی‌زاده - حمید انصاری - مهدی نظیر دیرستان رضا شاه کبیر تبریز - جلال اشجعی - محمدگرمه ای - سیروس باقلائی - مصطفی ملالی لطف‌الله‌سیدی - جمشید ضیائی - قدرت نجات - اکبر مهر آذر ژان لکس بلوس دیرستان ۱۵ بهمن بهشـر - محمود آل محمد منصور ذوقی - حسین رئیس‌زاده - محسن هاشمی نژاد - حسین خازیان .

۳۸۲۴ - صحت تساوی زیر را تحقیق کنید :

$$\frac{\operatorname{Arcsin} \sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{Arccos} \sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

حل : داریم

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = (\sqrt{2})^2$$

پس کسر مزبور به صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{\operatorname{Arcsin} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{Arccos} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{Arcsin} 1}{\operatorname{Arccos}(0)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

پاسخهای درست رسیده : سعید شهر و احمد رضا مفخم

کامران نعیم - ع. د. آملی - شهاب ذکاوی - محمد رضا یزدان علی‌اصغر اسکندریاتی - محمدحسین صیاد - پرویز مرادی حقگو محمد مهدی عابدی نژاد - سالار محمدی - حسین علوی - مهدی

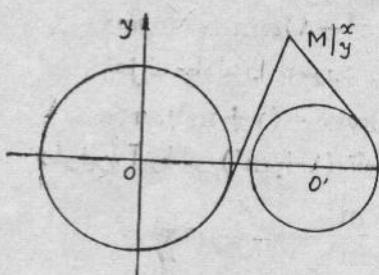
معادله خطی رامی نویسیم که از نقطه  $(x_1, y_1)$  و  $M(x, y)$  گذشته و ضریب زاویه اش برابر مقدار معلوم  $y'$  باشد این معادله را مختصراً کرده به معادله صورت مسئله می‌رسمیم.

**پاسخهای درست رسیده:** ع. د. آملی - صمد فرنجی  
محمد حسین صیاد - همایون مهاجری - سعید فرشاد دیبرستان  
گلشن راز شuster - صمد حیاتی دیبرستان خوارزمی ۲ - محمد  
مقدسی - فریدون امینزاده - مهدی حمیدی - محمد رضا صاستیشی  
مسعود درخشان نو - احمد رفیع دار دیبرستان بحرالعلوم بر جرد  
بهمن شاملی.

-۳۸۲۶- دو دایره به شعاعهای  $R$  و  $R'$  به مرکزهای  $O$  و  $O'$  ( $O = O'$ ) مفروضند. مکان هندسی نقاطی مانند  $MT$  و  $MT'$  را بروز داریم

دایره فوق رسم کنیم داشته باشیم:

$$\frac{MT}{MT'} = k$$



**حل:** -  
'- $OO'$  رامحور  
 $x$  ها و عمود بر ' $OO'$   
در نقطه  $O$  رامحور  $y$  ها  
فرض می‌کنیم در این  
صورت اگر  $M(x, y)$  باشد داریم

$$MT' = \sqrt{MO'^2 - OT'^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - R'^2}$$

$$MT = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 - R^2}$$

این مقادیر را در رابطه مفروض قرار می‌دهیم پس از اختصار خواهیم داشت

$$x^2 + y^2 - 2\frac{ak^2}{k^2 - 1}x + \frac{a^2k^2 + R^2 - k^2R'^2}{k^2 - 1} = 0$$

این معادله نشان می‌دهد که مکان مطلوب دایره‌ای است به مرکز و به شاع:

$$\omega(x = \frac{ak^2}{k^2 - 1}, y = 0)$$

$$R = \sqrt{\frac{V(k^2 - 1)(R^2 - k^2R'^2) - a^2k^2}{k^2 - 1}}$$

پاسخ درست رسیده - از: فریدون امینزاده

-۳۸۲۷- معادله مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$\operatorname{tg}(x+\alpha) + \operatorname{tg}(x-\alpha) = 2\operatorname{cotg}x$$

**حل:** طرف اول معادله را به حاصل ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\sin 2x}{\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)} = 2\operatorname{cotg}x$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$1 + \cos = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

**پاسخهای درست رسیده:** اعظم صمد نوری - ناهید

پورفاسمی مقدم دیبرستان شاهدخت - اعظم معصومی - داود حسینی سدیک هواکیمیان - داود سینائی - فرزاد مجیدی آهی سرتضی حسینی خرمی - محمد رضا صفحخ - محمد تقی هاشمیان - جمال آشفته ناصر هادی پور - حسن دوامی - جلال فخر ذاکری - شهاب ذکارتی - محمد رضا یزدان - عباس طلائی زاده - صمد فرنج محمد حسین صیاد - میرابوطالب موسوی نسب - غلامرضا قابل دیبرستان شاهپور شیراز - یوسف زینعلی دیبرستان خرد ناصر حاجی عسگری - فریبز جمشیدی کلانتری - شاهرخ ذکارتی - حسن صدرالغروی - حسین اسدی پور - مهدی خواجهی دیبرستان دارالفنون - مقصود صلاحی - محمد مهدی عابدی نژاد - مسعود درخشان نو - سعید رستگار - حمید و کیل زاده - احمد کرمانی قدیر نجات - ابوالفضل صادق اد - محمد حسین رفیعی امام بهمن شاملی - رحیم جارچی - مهدی عبقری - فریدون امینزاده علی اکبر صنتی - محمد صادق نهادنی - ضرغام محمودی - حسین خدا بخشی دیبرستان دریانی خوانسار - حسین جعفری دیبرستان دریانی خوانسار - عیسی خندانی - بهروز نوبهار - محمد مقدسی اکبر توکلی - محمد رضا ستایشی - علی اصغر فقیهی دیبرستان پهلوی همدان - اکبر دوستدار صنایع - حسن ثناجو - محمد ابراهیمی - نصر الله حقیقت دیبرستان قناد بابل - رمضان اصغر پور روح الله صادقلو - چنگیز ارومیه - محمد گرمدای - منوچهر رسولی محسن هاشمی نژاد - حسین توسلی - غلامحسین اسداللهی - هدایت طوماریان - عبدالکریم لیثی اصل - حجت عادلی

## کلاس ششم ریاضی

-۳۸۲۵- ثابت کنید که مماس بر منحنی به معادله:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

در نقطه  $(x_1, y_1)$  واقع بر آن به معادله زیر می‌باشد:

$$Axx_1 + B\left(\frac{x_1y_1 + xy_1}{2}\right) + Cyy_1 + D\left(\frac{x_1 + x}{2}\right)$$

$$+ E\left(\frac{y_1 + y}{2}\right) + F = 0$$

حل - از معادله منحنی مشتق می‌گیریم:

$$2Ax + By + Bxy' + 2Cyy' + D + Ey' = 0$$

$$y'_{M} = -\frac{2Ax + By + D}{Bx_1 + E + 2Cy_1}$$

$$5x = 4y \quad \text{يا} \quad 100x = 80y$$

جواب ۴۴۵۵ نتیجه می شود .

**پاسخهای درست رسیده :** حسین امین الهی - دادو  
سینائی - فرهاد مجیدی آهی - ع. ر. آملی - حسن دوانی - محمد  
حسین صیاد فریز جمشیدی کلانتری - همایون مهاجری عدف ۳  
مقصود صلاحی - محمد مهدی عابدی نژاد - چنگیز -  
آزادی - علی اکبر صنعتی - محمد مقدسی - اکبر توکلی  
دیبرستان حکیم سنائی اصفهان - نصرالله حقیقت - مسعود معصومی  
رمضان اصغر پور - ابراهیم شیرازی دیبرستان ۱۵ بهمن به شهر  
علی اصغر بخت آزمای - فریدون امین زاده - قاسم سیادتی - پروین  
کوششی - مهدی حمیدی - مهدی خواجهی - حمید و کیل زاده  
احمد کرمانی - علیرضا اقبالی - احمد درخشان دار - محسن هاشمی  
نژاد - مسعود درخشان نو - غلامحسین اسداللهی - قربانی  
میرزا زاده - عبدالکریم لیثی اصل ،

۳۸۲۵ - بین رقمهای  $x$  و  $y$  چه رابطه ای برقرار باشد  
برای اینکه داشته باشیم :

$$\frac{(xy)}{x+y} = x^1 + y^1$$

**حل - داریم :**

$x(x+y) + y = x^1 + y^1 \Rightarrow y(x+1-y) = 0$   
اگر  $y = 0$  باشد  $x$  می تواند مساوی هر رقمی باشد و اگر  $y \neq 0$   
باشد در این صورت  $y = x+1$  یعنی  $x$  و  $y$  دو رقم متولی  
خواهند بود .

**پاسخهای درست رسیده :** آفری تاج الدینی - دادو  
سینائی - فرهاد مجیدی آهی - جلال فخر ذاکری - محمد حسین  
صیاد - پروین برباری دیبرستان دار الفنون - فریز جمشیدی  
کلانتری - همایون مهاجری - رضا قابل - مقصود صلاحی - محمد  
مهدی عابدی نژاد - صمد حیاتی - محمد مقدسی - اکبر توکلی  
مسعود معصومی - رمضان اصغر پور - ابراهیم شیرازی - علی اصغر  
بخت آزمای - فریدون امین زاده - قاسم سیادتی - پروین کوششی  
مهدی حمیدی - مهدی خواجهی - احمد درخشان دار - مسعود صادق زاده  
ابوالفضل صادق زاده - بهمن شاملی - هادی کریمی - جواد جمشیدی  
دیبرستان مروی - مسعود درخشان نو - غلامحسین اسداللهی  
قربانی میرزا زاده - عبدالکریم لیثی اصل - محمد ابراهیم مهجدور  
کازرونی .

۳۸۲۶ - خط  $\Delta$  و نقطه ثابت  $O$  روی آن مفروض است .  
صفحه  $P$  از  $O$  گذشته بر  $\Delta$  عمود است تغییر هر نقطه دلخواه  $A$   
از فضای نقطه  $A'$  را چنان در نظر می کیریم که  $I$  وسط  $AA'$  بر  
 $\Delta$  واقع بوده و داشته باشیم .  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}' = -a^2$  (a) طول  
معلومی است .

$$\frac{4 \sin x \cos x}{\cos 2x + \cos 2\alpha} = \frac{2 \cos x}{\sin x}$$

$$\cos x(2 \sin^2 x - \cos 2x - \cos 2\alpha) = 0$$

پس از ساده کردن :

$$\cos x(\cos 2x - \sin^2 \alpha) = 0 \implies x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = k\pi + \frac{1}{2} \operatorname{Arcos}(\sin^2 \alpha)$$

**پاسخهای درست رسیده :** فرهاد مجیدی آهی - دادو  
سینائی - محمد رضا مفخم - جمال آشفته - ناصر هادی پور  
دیبرستان نظام - جلال فخر ذاکری - صمد حیاتی - حسن دوانی  
مسعود معصومی دیبرستان شماره ۱ خوارزمی، عباس طلائی زاده  
مهدی حمیدی - مهدی خواجهی - حمید و کیل زاده - احمد  
کرمانی - محسن هاشمی نژاد - هادی کریمی دیبرستان فارابی .  
۳۸۲۸ - معادله مثلثاتی زیر را حل کنید .

$$(m^1 + 1)\cos 2x + (m^1 - 1)\cos x = 2m \sin x$$

حل - معادله را به صورت زیر می نویسیم :

$$2m \sin x + (1 - m^1)\cos x = (1 + m^1)\cos 2x$$

وطرفین آنرا بر  $(1 + m^1)$  تقسیم می کنیم :

$$\frac{2m}{1+m^1} \sin x + \frac{1-m^1}{1+m^1} \cos x = \cos 2x$$

به سادگی ثابت می شود که همواره  $\frac{2m}{m^1 + 1}$  می تواند سینوس  
یک زاویه باشد . فرض می کنیم مساوی  $\sin \alpha$  باشد و خواهیم  
داشت .

$$\sin x \sin \alpha + \cos x \cos \alpha = \cos 2x$$

و یا

$$\cos(x - \alpha) = \cos 2x \implies x = 2k\pi - \alpha$$

$$x = \frac{2}{3}k\pi + \frac{\alpha}{3}$$

**پاسخهای درست رسیده :** حسین امین الهی - فریدون  
امین زاده - مهدی حمیدی دیبرستان هدف - مهدی خواجهی

۳۸۲۹ - مطلوب است تعیین عددی به صورت  $\overline{xyyy}$  که  
برابر باشد با حاصل ضرب عدد  $\overline{yy}$  در محدوده یک عدد دیگر رقمی .

حل - ۲ را رقم مزبور فرض کرده می نویسیم :

$$\overline{xyyy} = \overline{a^1 y y} \implies 100x + y = a^1 y$$

و یا

$$100x = y(a^1 - 1)$$

چون  $y \neq 0$  پس عامل  $(a^1 - 1)$  مضرب ۱۰ بوده و چون  $a$  یک  
رقمی است خواهیم داشت  $a = 9$  و آنجا با توجه به تساوی

$$(A - 1)(A' - A - 1) = 0$$

$$A = 1 \Rightarrow x = y = 1$$

$$A = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad x = \frac{2 + \sqrt{5}}{4} \quad y = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

پاسخهای درست رسیده: هایده آتشرو - منوچهر

سناجیان دیپلمه ریاضی از دیبرستان آذر - فریبرز جمشیدی کلانتری - فرامز صارمی - محمد رضا مفخم - ناصرهادی پور قربانعلی شاهی - علیرضا ذرین قلم - محمدرضا یزدان - محمد فرهنگ - سعیدشیرعتمداری دیبرستان البرز - پرویز مرادی حقگو هوشگ پورکریمی - بهنود پژوهش - نعمت الله رحیم بیگی محمدرضا فادائی دیبرستان اقبال آشتیانی - علی اکبر صنعتی ضرغام محمودی عیسی خندانی - بهروز نوبهار - محمد مقدسی - تقی هاشمیان - حجت الله با باقی - رمضان اصغر پور - فریدون امینزاده مهدی حمیدی - حمید انصاری. مهرداد معتمد گرجی - جواد پور نادری - حسین رئیس زاده - محسن هاشمی نژاد - حسین توسلی دیبرستان ابن سينا رضائیه - محمد مهدی سقائی - رحیم جارچی احمد توسلی - هدایت طوماریان - قربانعلی میرزا زاده دیبرستان ادب - هادی جرجه ارجمند - محمد گرمادی.

۳۸۳۴ - اگر داشته باشیم:

$$f(x) = px + q \quad f_n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ مرتبه}}(x)$$

مطلوب است محاسبه مجموع زیر:

$$S_n = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

حل - داریم:

$$f_1(x) = px + q$$

$$f_2(x) = p^2x + pq + q$$

$$f_r(x) = p^r x + p^{r-1}q + pq + q$$

$$f_n(x) = p^n x + p^{n-1}q + \dots + pq + q = \\ = p^n x + q \times \frac{1 - p^n}{1 - p}$$

اکنون همه روابط فوق را باهم جمع می کنیم:

$$S_n = px(1 + p + \dots + p^{n-1}) + \\ + q(\frac{1 - p}{1 - p} + \frac{1 - p^2}{1 - p} + \dots + \frac{1 - p^n}{1 - p})$$

$$S_n = px \times \frac{1 - p^n}{1 - p} + \\ + q \times \frac{n - p(1 + p + \dots + p^{n-1})}{1 - p}$$

اگر  $M$  نقطه‌ای از صفحه  $P$  باشد با استفاده از حاصل ضرب اسکال  $\vec{MA} \cdot \vec{MA}$  مکان نقاط  $M$  را چنان تعیین کنید که زاویه  $AMA'$  قائم باشد.

حل - به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$\vec{MA} \cdot \vec{MA}' = (\vec{MO} + \vec{OA})(\vec{MO} + \vec{OA}')$$

که به صورت زیر در می آید :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MA}' = (\vec{MO})' + \vec{MO}(\vec{OA} + \vec{OA}')$$

$$+ \vec{OA} \cdot \vec{OA}'$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OA}' = -a^2 \quad \vec{OA} + \vec{OA}' = 2\vec{OI}$$

است پس :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MA}' = (\vec{MO})' + 2\vec{MO} \cdot \vec{OI} - a^2$$

اگر زاویه  $AMA'$  قائم باشد  $\vec{MA} \cdot \vec{MA}' = 0$

و چون  $\vec{OI}$  نیز بر  $\vec{OM}$  عمود است پس  $\vec{MO} \cdot \vec{OI} = 0$

و خواهیم داشت  $(\vec{MO})' = a^2$

$$\Rightarrow MO = a$$

پس مکان  $M$  دایره‌ای است در صفحه  $P$  به مرکز  $O$  و به شاعر

پاسخهای درست رسیده: ع.ر.آملی - محمد رضا

ستایشی.

## مسائل متغیرقه

۳۸۳۲ - دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2x'y \\ x + y = 2xy \end{cases}$$

حل - اولاً  $x = 0$  و  $y = 0$  یک دسته جواب دستگاه است.

ثانیاً معادله اول دستگاه را مرتبأ به صورتها زیر می نویسیم:

$$\frac{x^3 + y^3}{x'y} = 2 \quad \text{یا} \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$$

$$\text{با فرض } \frac{y}{x} = A \quad \text{داریم:} \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{A} \quad \text{و معادله پس از ساده}$$

کردن به صورت زیر در می آید:

$$A^3 - 2A^2 + 1 - A^2 - (A^2 - 1) = 0$$

به سه رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^3 a - 3m \operatorname{tg}^2 a - 2 \operatorname{tg} a + m = 0 \\ \operatorname{tg}^3 b - 3m \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{tg} b + m = 0 \\ \operatorname{tg}^3 c - 3m \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} c + m = 0 \end{cases}$$

از سه رابطه فوق معلوم می‌شود که  $\operatorname{tg} a$ ,  $\operatorname{tg} b$  و  $\operatorname{tg} c$  ریشه‌های

معادله درجه سوم:

$$x^3 - 3mx^2 - 2x + m = 0 \quad (E)$$

هستند. با توجه به روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه سوم (E) داریم:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = 3m & (I) \\ \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = -3 & (II) \\ \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = -m & (III) \end{cases}$$

از تقسیم رابطه (I) بر (III) نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{cot} g a \operatorname{cot} g b + \operatorname{cot} g b \operatorname{cot} g c + \operatorname{cot} g c \operatorname{cot} g a = -3$$

توضیح: به آسانی می‌توان ثابت کرد که معادله (E) در حالتی که  $m < 0$  باشد سه ریشه حقیقی دارد.

پاسخهای درست رسیده: ع.د.آملی-جمال آشفته

محمدحسین صیاد - علیرضا اقبالی دیبرستان خوارزمی.  
مطلوب است حل معادله زیر:

$$4(\sin^3 3x + \sin^3 5x)(\cos^3 3x + \cos^3 x) = (\sin^4 x + 2 \sin^6 x)^3$$

حل: معادله را مرتبأً به صورتهای زیر می‌نویسیم:

$$4(\sin^3 3x + \sin^3 5x)(\cos^3 3x + \cos^3 x) = (\sin^4 x + \sin^6 x + \sin^6 x)^3$$

$$4(\sin^3 3x + \sin^3 5x)(\cos^3 3x + \cos^3 x) = (2 \sin^5 x \cos x + 2 \sin^3 x \cos^3 x)^3$$

$$( \sin^3 3x + \sin^3 5x ) ( \cos^3 3x + \cos^3 x ) = ( \sin^3 x \cos^3 x + \sin^5 x \cos x )^3 = 0$$

با استفاده از اتحاد لگرانژ:

$$(a' + b')(a'' + b'') - (aa' + bb')^2 = (ab' - a'b)^2$$

می‌توان معادله را چنین نوشت:

$$(\sin^3 x \cos x - \sin^5 x \cos x)^2 = 0 \quad \text{یا:}$$

که به صورت زیر در می‌آید:

$$\sin^4 x + \sin^2 x = \sin^4 x + \sin^2 x$$

$$\sin^4 x = \sin^2 x \Rightarrow$$

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{12}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$S_n = px \times \frac{-p^n}{1-p} + q \times \frac{n(1-p) - p(1-p^n)}{(1-p)^2}$$

پاسخهای درست رسیده: محمد رضا یزدان - نصرالله

صادی - سعید شریعت‌مداری - محمد مهدی عابدی نژاد - صمد حیاتی

محمد صادق نهادنی - پرویز دباغی - بهروز نوبهار دیبرستان

جوینی قوچان - محمد صادق ابریشمیان - فریدون امین‌زاده

حیدر انصاری - رحیم جارچی - جلال اشجعی - حسن روشنی مقدم

محمد گرمادی - احمد حسین‌زاده داداش.

- ۳۸۳۴ - چه رابطه بین  $a$ ,  $b$ ,  $c$  و  $d$  برقرار باشد

$$x^m + ax^n + b = 0 \quad x^m + cx^n + d = 0$$

حل: فرض می‌کنیم  $\alpha$  ریشه مشترک دو معادله باشد پس:

$$\begin{cases} \alpha^m + a\alpha^n + b = 0 \\ \alpha^m + c\alpha^n + d = 0 \end{cases}$$

از حل این دستگاه نسبت به مجهولهای  $\alpha^n$  و  $\alpha^m$  خواهیم داشت:

$$\alpha^n = \frac{b-d}{c-a} \quad \text{و} \quad \alpha^m = \frac{ad-bc}{c-a}$$

از حذف  $\alpha$  بین این دو رابطه نتیجه خواهد شد.

$$\left( \frac{b-d}{c-a} \right)^m = \left( \frac{ad-bc}{c-a} \right)^n$$

پاسخهای درست رسیده: قاسم صدری زاده - محمد مهدی

عادی نژاد - جواد جمشیدی - محمد گرمادی - حجت‌الله بایانی

فریدون امین‌زاده - محمد علی‌عبایان - رحیم جارچی - غلام‌حسین

اسداللهی - قربانعلی میرزا زاده - محمد حسین‌صیاد - مقصود صلاحی

مسعود حبیب‌الله‌زاده - علی‌اکبر صنعتی - چنگیز آزادی - اکبر

دوستدار صنایع - محمد صادق ابریشمیان - پسر غام محمودی - احمد

درخش دار - حسین رئیس‌زاده - بهمن شاملی - محسن هاشمی نژاد

علی‌اصغر اسکندریاتی - احمد حسین‌زاده داداش.

- ۳۸۳۵ - به فرض آنکه داشته باشیم:

$$\operatorname{tg}^3 a = \operatorname{tg}^3 b = \operatorname{tg}^3 c < 0$$

حاصل عبارتهای زیر را تبیین کنید:

$$A = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a$$

$$B = \operatorname{cot} g a \operatorname{cot} g b + \operatorname{cot} g b \operatorname{cot} g c + \operatorname{cot} g c \operatorname{cot} g a$$

حل: فرض می‌کنیم  $\alpha$  ریشه:

$\operatorname{tg}^3 a = \operatorname{tg}^3 b = \operatorname{tg}^3 c = m < 0$

باشد. دراین حال از بسط روابط:

$$\operatorname{tg}^3 a = m \quad \operatorname{tg}^3 b = m \quad \operatorname{tg}^3 c = m$$

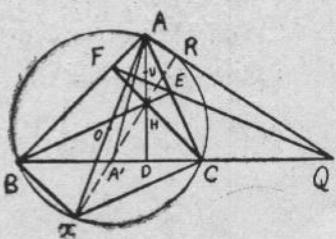
مهرداد معتمد گرجی - احمد درخشانی - عباس عراقی - جواد نادری - حسین رئیس زاده - مسعود درخشانی - حسین توسلی جواد جمشیدی - محمد محمدی سقائی - محمد علی عباییان سعید ذکریا میربرگ کار - علی اصغر حمزه گودرزی - غلامحسین اسداللهی - احمد توسلی - هدایت طوماریان - قربانعلی میرزازاده علیرضا اقبالی .

**۳۸۳۸** - در مثلث  $ABC$  ارتفاعهای  $AD$  و  $CF$  و  $BE$

در نقطه  $H$  متقابلند . امتداد  $EF$  ضلع  $BC$  را در  $Q$  تلاقی می کند . اگر  $A'$  وسط  $BC$  باشد ثابت کنید  $H$  محل تلاقی ارتفاعهای مثلث  $AA'Q$  نیز می باشد .

**حل** - ابتدا دایره

محیطی مثلث  $ABC$  و قطر  $AX$  از آن را در می کنیم برای حل مسئله کافی است ثابت کنیم  $AQ$  برا  $A'H$  عمود است از  $x$  به  $C$  و  $B$  و  $C$  و  $B$  و  $x$  وصل می کنیم داریم :



$$\angle A'Bx = \angle ACx = 90^\circ$$

$$Bx \parallel CF \quad Cx \parallel BE$$

بنابراین

پس چهارضلعی  $BHCx$  متوازی الاضلاع بوده و اگر از  $x$  به  $H$  وصل کنیم از وسط  $BC$  یعنی از  $A'$  می گذرد و نقاط  $x$  و  $A'$  و  $H$  و  $E$  و  $F$  و  $C$  و  $B$  و  $A$  محاطی بر یک استقامتند . چهارضلعهای  $BFEC$  و  $AEHF$  و  $ABC$  هستند و اگر دو ایرمی  $ABC$  آنها را در می کنیم با دایره محیطی مثلث  $ABC$  سه دایره دو به دو متقاطع می باشند که وترهای مشترک آنها،  $AR$  و  $EF$  و  $BC$  هستند و این سه در یک نقطه متقابلند (خاصیت مرکز اصلی سه دایره) . از این استدلال معلوم می شود که محل برخورد دایره محیطی چهارضلعی  $AFHE$  با دایره محیطی  $ABC$  است حال باید ثابت کنیم که خط  $A'H$  از نقطه  $R$  می گذرد .

برای اثبات وسط  $Ax$  را  $O$  و وسط  $AH$  را  $u$  می نامیم

نقطه  $u$  بر روی عمود منصف  $AR$  قرار دارد بنابراین  $O$  و  $u$  وسط  $AR$  بر یک استقامتند در نتیجه  $R$  و  $H$  و  $x$  بر روی یک خط راست قرار دارند و چون زاویه  $ARx$  روبرو به قطر است پس مساوی  $90^\circ$  درجه بوده و  $A'R$  یک ارتفاع مثلث  $AA'Q$  است پس  $H$  محل تلاقی ارتفاعات مثلث  $AA'Q$  نیز می باشد .

پاسخ درست رسیده : ع.د. آملی .

**۳۸۳۹** - اگر  $a < b < c$  اندازه های میانه ها و  $V_a$  و  $V_b$  و  $V_c$  و  $m_a$  و  $m_b$  و  $m_c$  اندازه های میانه ها

پاسخهای درست رسیده : حسین امین الهی - ع.د. آملی - سعید شریعتمداری - بهنود پژوهش - محمد رضا فدائی سیروس میریانی - محمد قمی - فریدون امین زاده - مهدی حمیدی احمد درخشانی .

**۳۸۳۷** - دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{15}{2} \\ \log_x y + \log_y x = \frac{12}{5} \end{cases}$$

**حل** - فرض می کنیم :

$$\log_x y = \frac{1}{\alpha} \text{ پس } \log_y x = \alpha$$

$$x = y\alpha \implies \log_y x = \alpha \log_y y \implies$$

$$\log_y y = \frac{1}{\alpha} \log_y x$$

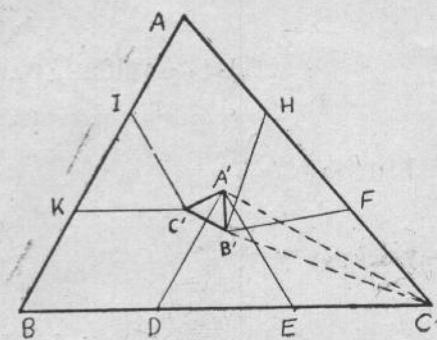
بنابراین :

$$\begin{cases} \alpha + \log_y x = \frac{15}{2} \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \log_y x = \frac{12}{5} \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{2} \\ \log_y x = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 32 \\ y = 4 \end{cases}$$

پاسخهای درست رسیده : آفری تاج الدینی - حسن روشنی مقدم - محمد گرمادی - محمد ابراهیم مهجور کازرونی فضل الله شفیعی - اسدالله تراشچین پور - حجت عادلی - احمد حسین زاده داداش - منوچهر سنا جیان - حسین امین الهی - یزدان اسدی پور - محمد رضا مفخم - ع.د. آملی - قربانعلی شاهی فرهاد جوانمردانی - حسین صابر - علیرضا زرین قلم - محمد رضا پرویز مرادی حقگو - ناصر حاجی عسگری - شاهرخ ذکارتی مقصود صلاحی - سعید فرشاد - قاسم صدر بزار - هوشنگ پور کریمی محمد مهدی عابدی نژاد - حسین علوی - مسعود لاویان - علی اکبر صنعتی - محمد صادق نهاوندی - سیروس میریانی - پر غام محمودی پرویز دیاغی - عیسی خندانی - بهروز نوبهار - احمد گبیلی محمد مقدسی - اکبر توکلی - محمد صادق ابریشمیان - محمد قمی اکبر دوستدار صنایع - رمضان اصغر پور - حسن ثناجو عباس طلائی زاده - فریدون امین زاده - علی طاهر - مهدی حمیدی حمید انصاری - لطف الله سیدی - احمد کرمانی - قادر نجات

حل : ۱- مثلثها را دو داخل  $ABC$  می‌سازیم . در مثلث متساوی الساقین  $CB'F$  داریم :  $\angle CFB' = 120^\circ$



: پس :

$$B'C' = CF' + FB' - 2CF \cdot FB' \cos 120^\circ$$

$$\text{و } CF = FB' = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$(B'C')^2 = \frac{b^2}{9} + \frac{b^2}{9} + 2 \times \frac{b}{\sqrt{2}} \times \frac{b}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{b^2}{3} \Rightarrow B'C = \frac{b}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\text{به همین ترتیب: } CA' = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\text{ز } A'CE = \angle B'CF = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\text{ز } A'CB' = -\angle ACB + 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ - \angle C$$

در مثلث  $A'B'C'$  می‌نویسیم :

$$A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2$$

$$- 2A'C \times B'C \times \cos(60^\circ - C)$$

$$A'B'^2 = \frac{b^2 + a^2 - 2ab \cos C \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} ba \sin C$$

اگر مساحت مثلث  $ABC$  را  $S$  بنامیم داریم :

$$S = \frac{1}{2} ba \sin C$$

: پس :

$$A'B'^2 = \frac{a^2 + b^2 + \frac{1}{2}(c^2 - b^2 - a^2)}{\frac{3}{2}} - \frac{2S}{\sqrt{2}}$$

$$A'B'^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} - \frac{2S}{\sqrt{2}}$$

عبارت اخیر نشان می‌دهد که مثلث  $A'B'C'$  متساوی الاضلاع

اندازهای نیمسازهای متناظر از مثلث  $ABC$  باشد ثابت کنید که:

$$m_a > m_b > m_c \text{ و } V_a > V_b > V_c$$

حل - اولاً در مثلث غیر مشخص  $ABC$  می‌توان نوشت:

$$m_a^2 = (\frac{a}{2})^2 + b^2 - ab \cos C$$

$$m_b^2 = (\frac{b}{2})^2 + a^2 - ab \cos C$$

بنابراین

$$m_a > m_b \text{ و } m_a^2 > m_b^2 \text{ است پس } b > a$$

وبطور مشابه ثابت می‌کنیم

ثانیاً در هر مثلث داریم :

$$V_a = \frac{\sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

$$V_b = \frac{\sqrt{ac} \cos \frac{B}{2}}{a+c}$$

$$V_a - V_b = \frac{2c[b(c+a)\cos \frac{A}{2} - a(b+c)\sin \frac{B}{2}]}{(b+c)(a+c)}$$

علامت  $V_a - V_b$  بستگی به علامت داخل کروشه صورت کسر

فوق دارد چون  $A < B$  پس  $a < b$  و در نتیجه

$$\cos \frac{A}{2} > \cos \frac{B}{2} \text{ همچنین :}$$

$$b(a+c) > a(b+c)$$

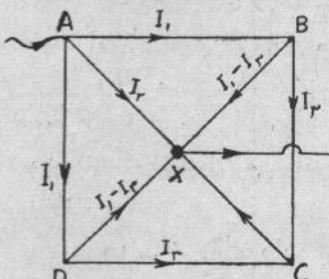
است و چون  $bc > ac$  می‌باشد بنابراین  $V_a > V_b$  و بطور مشابه  $V_b > V_c$  می‌باشد.

پاسخهای درست رسیده : داود حسینی دبیرستان مروی - صدقفرهنگ - مقصودصلاحی - محمد مقدسی - محمد قمی چنگیز ارومیه - فریدون امینزاده - بهمن شاملی - محمد محمدی سقائی .

- ۳۸۴۰ - مثلث  $ABC$  به اضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$  را در نظر

می‌گیریم هر یک از ضلعها را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم نقاط حاصل را ابتدا از ضلع  $BC$  و درجهت  $B$  به  $C$  و  $C$  به  $B$  به  $A$  و  $A$  به  $B$  به ترتیب  $D$  و  $E$  و  $F$  و  $I$  و  $H$  و  $G$  و  $K$  نامیم سه مثلث متساوی الاضلاع  $A'DE$  و  $B'FH$  و  $C'IK$  را می‌سازیم (هر سه مثلث یاد رججهت داخل و یاد رججهت خارج مثلث) ثابت کنید که مثلث  $A'B'C'$  متساوی الاضلاع است .

تلاقي اقطار اين مربع خارج می شود مقاومت معادل مدار را حساب کنيد . مقاومت واحد طول سيم برابر است با  $r$   
**حل** - مدار مطابق شكل است . به واسطه تقارن شدت



جريان در  $AB$  و  $AD$  متساوي است و آن را به  $I_1$  نمایش دهیم .  
 شدت جريان در  $CD$  و  $BC$  نيز به -

واسطه تقارن متساوي است و آن را به  $I_3$  نمایش دهیم . بر طبق قانون اول کيرشوف شدت جريان در  $DX$  و  $BX$  برابر است با  $I_1 - I_3$  و در  $CX$  برابر است با  $2I_3$  . فرض می کنیم که شدت جريان در  $AX$  برابر  $I_4$  باشد .

$$AX = BX = CX = DX = a \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{داريم :}$$

بنابراین مقاومت هر يك از آنها  $\frac{\sqrt{2}}{2} ar$  است و مقاومت  $AB$  ،

$DA$  ،  $CD$  ،  $BC$  هر يك برابر است با  $ar$  . با بكار بردن

:  $\dot{A}B\dot{X}A$

$$arI_1 + ar\frac{\sqrt{2}}{2}I_1 - ar\frac{\sqrt{2}}{2}I_3 - ar\frac{\sqrt{2}}{2}I_4 = 0$$

$$(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})I_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}I_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}I_4 = 0$$

$$(1 + \sqrt{2})(I_1 - \sqrt{2}I_3 - \sqrt{2}I_4) = 0 \quad (1)$$

:  $BCXB$

$$arI_3 + 2ar\frac{\sqrt{2}}{2}I_3 - ar\frac{\sqrt{2}}{2}(I_1 - I_4) = 0$$

$$(2 + 2\sqrt{2})I_3 = \sqrt{2}I_1 \Rightarrow I_1 = (\sqrt{2} + 3)I_3$$

در رابطه (1)  $I_1$  را حذف می کنیم :

$$(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 3)I_3 - \sqrt{2}I_2 - \sqrt{2}I_4 = 0$$

$$I_3 = (4 + 4\sqrt{2})I_4 \quad \text{پس}$$

جريان كل که از نقطه  $A$  وارد مدار می شود عبارت است از

$$I = 2I_1 + I_4 = 2(\sqrt{2} + 3)I_3 + (4 + 4\sqrt{2})I_4$$

$$I = (6\sqrt{2} + 10)I_4 \quad \text{يا}$$

اختلاف پتانسیل بین  $A$  و  $X$  برابر است با :

$$V = R_{AX} \cdot I_4$$

$$V = ar\frac{\sqrt{2}}{2}(4 + 4\sqrt{2})I_4 = ar(2\sqrt{2} + 4)I_4$$

بر طبق تعريف مقاومت معادل بین  $A$  و  $X$  عبارت است از :

$$R = \frac{V}{I} = \frac{ar(2\sqrt{2} + 4)I_4}{(6\sqrt{2} + 10)I_4} = ar \frac{2 + \sqrt{2}}{5 + 3\sqrt{2}}$$

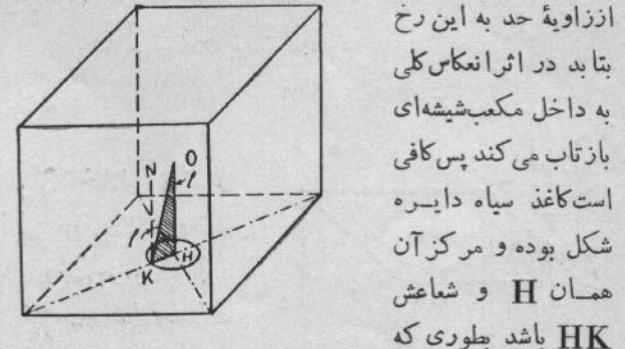
است چون اندازه  $A'B'$  عبارتی متقابن نسبت به  $a$  و  $b$  و  $c$  است یعنی اگر محاسبه را براي دوضلع ديگر انجام دهيم مقدار فوق بدست خواهد آمد .

حالت دوم - (مثلثها را در خارج مثلث  $ABC$  می سازیم)  
 در این حالت با محاسباتي تظیر حالت اول به تساوي  $A'B'C'$  می رسم که باز از آن تیجه می شود مثلث  $A'B'C'$  متساوي -  
 الا ضلاع است .

پاسخ درست رسیده : ع.ر.آملی

۳۸۴۹ - در مرکز مکعبی از شيشه به ضریب شکست  $\frac{5}{3}$  که طول هر يك از يالهای آن ۱۵ سانتیمتر است يك نقطه نوراني قرار دارد ثابت کنيد که اگر به هر يك از رخهای مکعب يك قطعه کاغذ سیاه به اندازه مناسب بچسبانند می توانند مانع آن شوند که نقطه نورانی از خارج مکعب دیده شود . اندازه کاغذ و محل نصب آن را تعیین کنید .

**حل** - مطابق شکل دیده می شود که شاع  $OH$  عمود بر رخ زیرین می تابد و در امتداد خود خارج می شود شاع  $OK$  که با زاویه حد  $NKO$  برهمن رخ می تابد آخرین شاعی است که بطور مماس بر رخ خارج می شود و از اين پس اگر شاع دیگری با زاویه بیش از زاویه حد به اين رخ بتابد در اثر انعکاس کلی به داخل مکعب شيشه ای بازتاب می کند پس کافي است کاغذ سیاه دایره ه شکل بوده و مرکز آن همان  $H$  و شاع  $HK$  باشد بطوری که



اگر به هر رخ چنین کاغذی چسبانده شود دیگر نوری به خارج بازتاب نمی کند و اما برای محاسبه  $HK$  چنین می نویسیم :

$$\sin l = \frac{1}{n} \quad HK = OH \operatorname{tg} l = OH \times \frac{\sin l}{\sqrt{1 - \sin^2 l}} = 3.75 \text{ cm}$$

پاسخهای درست رسیده : محمدصادق ابریشمیان  
 حسین توسلی .

۳۸۴۳ - سیم یکنواختی را به شکل  $ABCD$  که طول هر ضلع آن  $a$  است در می آوریم اقطار این مربع را از همان سیم انتخاب و وصل می کنیم جريانی از  $A$  وارد و از  $X$  محل

نیروی اصطکاک برخلاف جهتی است که در شکل نمایش داده ایم  
(در خلاف جهت حرکت).

با توجه به این موضوع رابطه (۱) را بر امتدادهای قائم و افقی تصویر می کنیم . پس از حذف  $R$  سرعت مینیمم را بدست می آوریم :

$$v_{\min} = \sqrt{gr} \sqrt{\frac{\tan \theta - f}{1 + f \tan \theta}}$$

**توجه ۱۴۶** - نیروی اصطکاک به همه چرخها وارد می شود و بر آیند آن برابر است با  $\vec{F}$ . به منظور آنکه شکل زیاد پیچیده نشود فقط آن را در کنار یکی از چرخها نوشته ایم .

**توجه ۱۴۷** - اگر جاده بدون اصطکاک باشد ( $f = 0$ ) در این صورت :

$$v_{\max} = v_{\min} = \sqrt{gr \cdot \tan \theta} = v$$

$$\tan \theta = \frac{v}{gr}$$

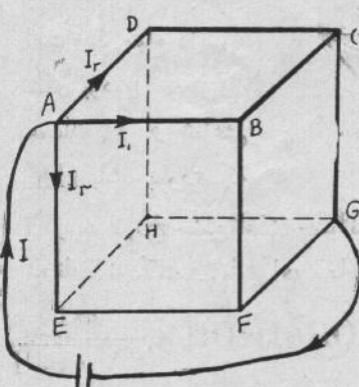
این همان فرمولی است که در فیزیک دیبرستان آن را بدست می آورند .

**۳۸۴۴** - دوازده سیم همطول متشابه داریم که مقاومت هر

یک برابر است با  $r$ ، آنها را به شکل شبه چنان به هم متصل می کنیم که یک مکعب را مجسم نماید که این سیمهای یالهای آن مکعب است . جریانی از یک رأس وارد و از رأس متقاطر آن خارج می شود . مقاومت معادل مجموعه را در این حالت حساب کنید .

**حل** - متقارن بودن مجموعه نشان می دهد که :

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{I}{3}$$



اگر اختلاف پتانسیل بین نقطه ورودی و نقطه خروجی برابر  $V$  باشد مقاومت معادل دستگاه است بطوری که :

$$R = \frac{V}{I}$$

از طرفی در مدار (یا یکی دیگر ADCG) می توان نوشت

$$\frac{I}{3}r + \frac{I}{6}r + \frac{I}{3}r = V$$

$$\frac{V}{I} = \frac{5}{6}r$$

$$R = \frac{5}{6}r$$

پاسخ درست رسیده : بیش از پور

$$R = ar \frac{4 - \sqrt{2}}{4} = 0.369ar$$

**۳۸۴۵** - اتومبیلی به جرم  $m$  به سریعی می رسد که شعاع انحنای آن برابر است با  $r$  ، عرض جاده بالاقد زاویه ای برابر  $Q$  می سازد . ضرب اصطکاک جاده، هنگامی که اتومبیل بیحرکت است برابر است با  $f$  ، حداکثر و حداقل سرعتی را پیدا کنید که اتومبیل می تواند داشته باشد تا اینکه واژگون شود .

**حل** - نیروهای وارد بر اتومبیل عبارتند از :

$$\rightarrow mg$$

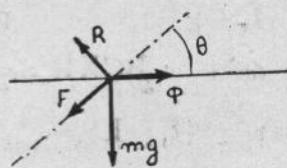
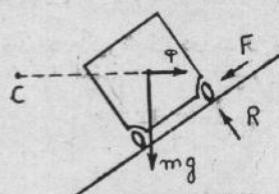
$$\vec{F} = f \cdot \vec{R}$$

$$\vec{R}$$
 نیروی واکنش سطح جاده :

$$\vec{\Phi} = m \frac{\vec{v}}{r}$$

در حالت تعادل :

$$(1) \quad \vec{\Phi} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{mg} = 0$$



**الف** - وقتی که اتومبیل حداکثر سرعت را دارد، اتومبیل مایل است که در شبیه جاده به طرف بالا بلند و بنابراین جهت مقاومت مطابق آن است که در شکل نمایش داده ایم (در خلاف جهت حرکت).

رابطه (۱) را بر امتدادهای قائم و افقی تصویر می کنیم :

$$R \sin \theta + F \cos \theta - mg = 0$$

$$(2) \quad R \sin \theta + f \cdot R \cos \theta = m \frac{v_{\max}^2}{r}$$

$$R \cos \theta - F \sin \theta - mg = 0$$

$$(3) \quad R(\cos \theta - f \sin \theta) = mg$$

ین روابط (۲) و (۳)  $R$  را حذف می کنیم :

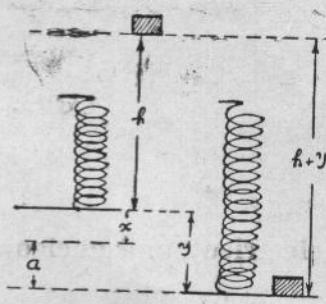
$$m \frac{v_{\max}^2}{r} = mg \left[ \frac{\sin \theta + f \cos \theta}{\cos \theta - f \sin \theta} \right]$$

$$v_{\max} = \sqrt{gr} \cdot \sqrt{\frac{f + \tan \theta}{1 - f \tan \theta}}$$

**ب** - وقتی که اتومبیل حداقل سرعت را دارد مایل است که در شبیه جاده به طرف پایین بلند و بنابراین جهت

# پرسش و پاسخ

۳- جسمی از ارتفاع  $h$  سقوط می‌کند و در آنچهای مسیر خود بروی یک فنر نیروسنجه می‌افتد. تغییر طول نیروسنجه چقدر است



الف- تغییر انرژی

پتانسیل جسم :

$$W_p = mg(h+y)$$

ب- تغییر انرژی

جنبشی فنر :

$$W_c = \frac{1}{2}ky^2$$

چون انرژی مکانیکی ثابت باقی می‌ماند باید :

$$\frac{1}{2}ky^2 = mg(h+y)$$

از حل این معادله :

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{2mg}{k} \pm \sqrt{\left( \frac{2mg}{k} \right)^2 + \left( \frac{2mgh}{k} \right)} \right)$$

مقدار داخل رادیکال از  $\frac{2mg}{k}$  بزرگتر است و چون در ابتدا

$y > 0$  است جواب ذیر قابل قبول است:

$$y = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left( \frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{2mg}{k}h}$$

اگر وزنه سقوط نمی‌کرد و روی فنر قرار می‌گرفت

افزایش طول فنر برابر بود با :

$$x = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k}$$

بنابراین وقتی که وزنه از ارتفاع  $h$  سقوط کند آنچهای فنر از محل تعادل خود به اندازه  $x - y = a$  دور می‌شود بطوری که :

$$a = \sqrt{\left( \frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{2mg}{k}h}$$

پرسش- اگر جسمی از ارتفاع  $h$  سقوط کند و در آنچهای مسیر خود بروی یک فنر نیروسنجه بیفتد، نیروسنجه چه نیرویی را نشان خواهد داد؟

جلال اشجعی قم

پاسخ (از هوشنگ شریفزاده)

فنر نیروسنجه حرکتی نوسانی پیدا می‌کند و نمی‌توان با آن نیروی وزنه را مانند نیروسنجه معمولی سنجید. در لحظات متفاوت زمان نیرویی که نیرو سنجه نشان می‌دهد متفاوت است. برای اینکه پاسخ جامعتر باشد اطلاعاتی درباره فنر (فنر نیرو سنجه) بدست می‌آوریم.

۱- تغییر طول فنر متناسب است با تغییر مقدار نیرو در فیزیک چهارم دیبرستان این مطلب را خوانده‌اید. پس

$$F = k \times 1$$

۱ افزایش (یا کاهش) طول فنر.

$F$  نیرویی است که بر فنر وارد شده.

$k$  ضریب افزایش طول فنر است و برای فنرهای مختلف متفاوت است.

۲- انرژی که در فنر ذخیره می‌شود

این انرژی برابر است با کاری که ضمن تغییر طول انجام می‌دهد. در تغییر طولهای جزئی ( $\Delta x$ ) کار انجام شده  $\Delta W$  است بطوری که :

$$\Delta W = F \times \Delta x = kx \Delta x$$

وقتی که تغییر طول زیاد باشد کار انجام شده :

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$

(مشتق این جمله با جمله بالا برابر است)

اگر تغییر طول برابر با ۱ باشد کار انجام شده یعنی

انرژی ذخیره شده در فنر برابر است با :

$$W = \frac{1}{2}k l^2$$

# اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از: مهندس ایرج ارشاقی

## Heat - ۲ - گرما

Temperature	درجة حرارت	نقطة جوش
Thermometer	میزان الحرارة	نقاط ثابت
Clinical	میزان الحرارة طبی	مقیاس سانتیگراد
Graduate a Thermometer	مدرج کردن میزان الحرارة	منبع
Freezing Point	نقطة انجماد	هسته‌ای

### Practice your Reading

The sun, the interior of the earth, chemical action, mechanical, electrical, and nuclear energy, are the chief sources of heat.

Heat is the sum of the kinetic energies of all the molecules of a body. the temperature of a body is the average kinetic energy of its molecules.

To change centigrade reading to Fahrenheit multiply the reading by 108 and add 32; to change Fahrenheit reading to centigrade, subtract 32 from the Fahrenheit reading and divide by 108

طرف بالا بکشند . حد متوسط این دونبر و برابر است با

\*\*\*

پرسش - با استفاده از بسط  $\cos \alpha$  چگونه می‌توان ثابت کرد که :

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

محمد رضا یزدان

پاسخ - به مقاله « خطوط مثلثاتی و مقادیر جبری » مندرج در یکان شماره ۲۵ رجوع فرمائید

\*\*\*

پرسش - راه حل مسئله زیر چیست : مطلوب است رسم مثلثی که از آن یک ضلع و زاویه مقابل و نیمساز این زاویه، دردست است.

حسین علوی ساری

پاسخ - این مسئله بیان دیگری از مسئله پاپوس است که حل آن در مجموعه علمی یکان سال مندرج است .

فتر حرکتی نوسانی می‌کند که دامنه آن برابر است با  $\alpha$  و معادله حرکت :

$$a = a_0 \sin(\omega t + \Phi)$$

بعد حرکت نوسانی  $x$  است بطوری که در این حرکت زمان تناوب :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{A}}$$

(این رابطه را در فیزیک ششم دبیرستان ثابت می‌کنند) . بنابراین زمان تناوب حرکت نوسانی فتر مذکور می‌شود :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

نیرویی که فتر نشان می‌دهد جداکثر :

$$F_x = ky$$

$$F_x = mg + V(mg)^2 + 2kmgh$$

و حداقل :

$$F_x = k(y - 2\alpha_0) = mg - V(mg)^2 + 2kmgh$$

که مقداری است منفی یعنی مثل این است که فتر را به

۹- مهم این است که هر فردی بر نوع استعداد خودش واقع شود، مهمترین وظیفه معلم کشف استعدادهای هر محصل و شناخت این استعدادها به خود محصل می‌باشد. اگر محصلی فهمید که استعداد حل مسائل را دارد و دانست که چگونه این استعداد را بکاراندازد آن وقت اگر کتاب حل المسائل را هم بدست یاورد آن را از نظر انتقادی بررسی می‌کند و به مقایسه راه حلهای مختلفی که برای حل یک مسئله بکار رفته است می‌پردازد.

۱۰- البته اگر حل المسائل بدین ترتیب تنظیم شده باشد. یعنی برای حل هر مسئله راه حلهای مختلفی ارائه شده باشد. \*

- غیر از عوامل ارثی و اثرات محیط یک عامل دیگر هم در کار هست که نمی‌دانم آن را چه بگذارم. شاید بشود گفت: الهام، شما فعلاً مسائل را به خوبی حل می‌کنید اما اگر به خاطرات خود مراجعه کنید، در زندگی خود یک مرحله می‌یابید که از آن به بعد توانسته‌اید مسائل را حل کنید. برای هر هنرمند هم یک چنین مرحله‌ای وجود دارد.

۱۱- این درست همان مرحله‌ای است که به استعداد مخصوص خود واقع شده‌اید.

۱۲- من دو سال تمام در هر فرصت که پیش‌می‌آمد راجع به حل یک مسئله فکر می‌کرم و نتیجه‌ای نمی‌گرفتم، درست یادم هست که یک روز در صفحه ایستاده به انتظار اتوبوس بودم. نمی‌دانم چه شد یک دفعه راه حل مسئله به فکر من خود کرد، مثل اینکه به من الهام شد، راه حل آنقدر ساده بود که تعجب کردم چرا در این دو سال به فکر من نرسیده است.

● - هر چند که حیف است این بحث جالب ناتمام بماند اما چاره نیست وقت ماتمام شده است.

### بقیه گفتگوی دور میز گورد

برخلاف هدفی است که محصل به خاطر آن مسئله را حل می‌کند. اصولاً چرا به دنبال یک مبحث از محصل می‌خواهیم که مسائلی مربوط به آن را حل کند؟ اگر محصل در حل مسئله‌ای فکر خودش را بکارانداخت نه تنها مبحث‌مر بوطراً عمیقی بادمی‌گیرد بلکه گاهی راه حلهایی را انتخاب می‌کند که مطالب تازه اید را هم شخصاً کشف می‌کند.

\* آیا همه محصلین این استعداد را دارند؟

\* - همه محصلین می‌توانند این استعداد را داشته باشند، منتهی بعضی کمکهای ناجای والدین آنها یا روش‌های نامناسبی که معلمان اولیه آنها بکار می‌برند آنها را از پیروزی این استعداد باز داشته‌اند؛ محصلی درس را درست نفهمیده است در نتیجه از حل مسئله مربوط به آن عاجز مانده است، معلم هم بدون آنکه علت عجز محصلین را در نظر بگیرد وی را شاگردی ضعیف معرفی می‌کند، والدین محصل هم از همان معلم یا شخص دیگر می‌خواهند که به اصطلاح وی را درس خصوصی بدهد.

این معلم خصوصی چه می‌کند؟ یک حل المسائل جاندار است، حل مسائل و تمرینهای محصل را به وی دیگر می‌کند و از این است، حل مسئله است که فکر کردن در حل مسائل را از دست می‌دهد و تا آخرین مرحله درست مثل شخصی می‌ماند که همواره منتظر می‌ماند تا کسی پیدا شود گذا را برایش لقمه گرفته دهانش بگذارد.

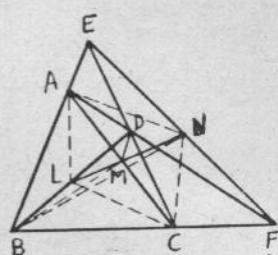
\* شما عقیده دارید که همه افراد بشر از هر نظر دارای یک استعداد هستند؟!

\* - قادر چه محیطی بزرگ شده و چگونه پیروزی یافته باشند.

● - عوامل موروثی را باید در نظر گرفت.

همچنین خواهیم داشت:

$$\Delta MAB + \Delta MCD = \frac{1}{2} \Delta ABCD$$



و چون N وسط EF  
است داریم :

$$\begin{aligned}\Delta NAB &= \frac{1}{2} \\ \Delta FAB &\text{ و } \Delta NCD = \\ \Delta FCD &\end{aligned}$$

$$\Delta NAB - \Delta NCD = \frac{1}{2} \Delta ABCD$$

نتیجه خواهیم گرفت که :

$$\begin{aligned}\Delta LAB + \Delta LCD &= \Delta MAB + \Delta MCD = \\ \Delta NAB - \Delta NCD &\end{aligned}$$

LUMUN

: پس

بقیه بیست و یک راه حل

مساحت‌های دو متوازی‌الاضلاع PH و KP برای خواهند بود و نتیجه خواهد شد که : DU PUQ یعنی اوساط سه خط BQ و BP و BD بر یک استقامت هستند و از آنجا نتیجه می‌شود که اوساط سه خط BD و AC و EF نیز بر یک استقامت واقع‌اند.

**برهان ۴** - در این راه از مکان‌هندسی مربوط به مساحت استفاده شده است.

لهم اگر AB و CD دو قطعه خط ثابت و P نقطه‌ای متغیر باشد بطوری که مجموع یا تفاضل مساحت‌های دو مثلث PCD و PAB برابر مقدار ثابت باقی بماند در این صورت مکان P خطی است مستقیم (ایثبات لم بمعهده خوانندگان) خطوط AL و BN و NC و AN و BM و DM را داشت:

$$\begin{aligned}\Delta LAB + \Delta LCD &= \frac{1}{2} \Delta ABD + \frac{1}{2} \Delta BCD = \\ &\quad \frac{1}{2} \Delta ABCD\end{aligned}$$

# از میان نامه‌های رسیده

چون  $A - 1$  دو عدد متولی و نسبت به هم اول هستند پس  $A - 1$  باید ۹۹ را بشمرد.

$$99 = 99 \times 1 = 33 \times 3 = 11 \times 9$$

$A$  عددی است دو رقمی پس یا

$$A - 1 = 11 \Rightarrow A = 12 \text{ و } B = 96$$

$$A - 1 = 33 \Rightarrow A = 34 \text{ و } B = 68 \quad \text{ویا}$$

اگر  $A - 1$  برابر باشد تبیجه خواهد شد،  $B = 100$  که قابل قبول نیست چون  $B$  عدد دو رقمی است. پس مسئله فقط دارای دو جواب  $1296$  و  $3468$  می‌باشد.



آقای محمد هادی بکتاشی دبیر دیبرستان شماره ۱ گروه فرهنگی آرش برای مسئله حساب استدلالی که حل آن در یکان سال ۴۴ چاپ شده است راه حل دیگری به شرح ذیر ارائه داده‌اند:

مسئله: عدد  $\overline{\text{medu}}$  را طوری تعیین کنید که در رابطه ذیر صدق کند.

$$\overline{\text{medu}} = \overline{\text{mc}}(\overline{\text{mc}} + \overline{\text{du}})$$

حل - فرض می‌کنیم  $\overline{\text{mc}} = A$  و  $\overline{\text{du}} = B$  رابطه مفروض چنین می‌شود

$$100A + B = A(A + B)$$

$$99A + A + B = A(A + B)$$

$$99A = (A - 1)(A + B)$$

عدد زیادی از خوانندگان مجله اظهار نظر کرده‌اند که بجای آنکه هر شماره چندین صفحه از صفحات محدود مجله به درج نام محصلینی که حل مسائل را ارسال داشته‌اند اختصاص یابد مسائل دیگری از ریاضیات درج و حل شود یا لاقل مطالب تازه‌ای از ریاضیات عنوان گردد، به هر حال درج نام یک عده از دانش آموزان نه برای خود آنها فایده‌ای دارد و نه برای دیگران، با توجه به اینکه تعداد این نامها شماره به شماره رو به ترازید می‌باشد.

یکان - از شماره آینده از درج نام‌کسانی که حل مسائل را ارسال می‌دارند ذیل مسائل مربوط خودداری شده مانند سایر مجلات ریاضی نام این اشخاص در آخرین صفحه حل مسائل درج خواهد شد



عدد زیادی از خوانندگان مقیم شهرستان‌ها گله کرده‌اند که چرا مجله‌های شهرستان‌ها دیر ارسال می‌شود و از این بابت بین خوانندگان مقیم تهران و سایر خوانندگان فرقی قائل می‌شویم.

به اطلاع همه خوانندگان می‌رسد که توزیع مجله به ترتیبی انجام می‌شود که بین تاریخ انتشار آن در تهران و شهرستان یش از یکی دو روز فاصله نباشد. اما اگر هر ماه مجله مربوط به ماه قبل به شهرستان‌ها می‌رسد بدان علت است که مجله مربوط به هر ماه اوخر آن ماه از چاپ خارج می‌شود و به ناچار توزیع آن در اوایل ماه بعد انجام می‌گیرد.

کلیات

اصول ریاضی نظریه نسبی

آلبرت

## اینستیتیون

تألیف:

غلامرضا عسجدی

نسخه‌هایی از این کتاب در

اداره مجله یکان موجود است

طالبین می‌توانند مراجعه و خریداری

فرمایند

بها: ۶۰ ریال

### ازشارات یکان:

یکان سال مخصوص

مجموعه علمی یکان سال

امتحانات فرمایی ۱۳۴۳

۶۰ ریال

۴۵ ریال

راهنمای ریاضیات متوسطه

۱۵ ریال

معماهای ریاضی

۴۰ ریال

مسائلی از حساب استدلالی

جلد اول: ۱۵ ریال

جلد دوم: ۲۰ ریال

یکان سال ۱۳۴۴

۵۰ ریال (نایاب)

تمرينهای ریاضیات مقدماتی

۱۴۰، ۱۵۰ ریال

جلد اول

نشریه ممتاز یکان :

# تیرنامی یا ضایا مقدمات

## هنر دوای

تألیف

دکتر محسن هشتروودی

تهران دراداره مجله یکان و درگاه بفروشیها

شهرستانها نزد نمایندگان فروش یکان

برای فروش موجود است

بها : باجلد زرگوب ۱۵۰ ریال - باجلد معمولی : ۱۳۰ ریال

از انتشارات یکان :

## جلد دوم

مسائلی نمونه از حساب استدلالی

شامل مسائل مربوط به ضرب

تألیف : محمود کاشانی

منتشر شد .

بها : ۴۰ ریال