

مهر ماه ۱۳۴۵

دوره سوم شماره :

۲۹

شماره مسلسل:

۲۹

## درایین شماره :

- |    |                     |
|----|---------------------|
| ۱  | عبدالحسین مصطفی     |
| ۲  | دکتر محسن هشت رو دی |
| ۳  | غلامحسین باقرزاده   |
| ۹  | ترجمه               |
| ۱۰ | ترجمه: غلامرضا حلی  |
| ۱۱ | پرویز شهریاری       |
| ۱۴ | -                   |
| ۱۶ | ترجمه               |
| ۱۷ | قوام نحوی           |
| ۱۸ | ترجمه: ھ. شریفزاده  |
| ۱۹ | حسین جواهری         |
| ۲۱ | ترجمه               |
| ۲۲ | قوام نحوی           |
| ۲۵ | -                   |
| ۲۶ | ترجمه               |
| ۲۸ | -                   |
| ۲۹ | -                   |
| ۳۰ | -                   |
| ۳۴ | -                   |
| ۴۶ | مهندس ارشادی        |
| ۴۷ | -                   |
| ۴۸ | -                   |

- در انتظار رفع نقاچ
- در باره تبدیل هموژوژی
- تبدیل توافقی
- مسائل حل نشده ریاضی
- عمر خیام
- کسرهای مسلسل
- گفتگوی دور هیزگرد
- در حاشیه تاریخ
- تعیین اعداد متجابه
- چگونه مسأله‌ای را حل کنیم
- شیوه
- راهنمای حل مسائل هندسه
- حل مسائل نمونه

## Problems & Solutions

- بیان جدید ریاضیات مقدماتی
- داستانهای تفنهنی ریاضی
- سرگرمیهای ریاضی
- مسائل برای حل
- حل مسائل شماره ۲۷
- اصطلاحات فیزیکی و معادل انگلیسی آنها
- ازمیان نامه‌های رسیده
- در انجمن معلمان ریاضی

تألیف : عبدالحسین مصطفی

# راهنمای ریاضیات متوسطه

که فعلاً نایاب است قریباً تجدید چاپ خواهد شد

نمایندگان شهرستانها میزان درخواستی خود را اطلاع دهند

## یکان مجله ریاضیات

سال سوم - دوره سوم - شماره چهارم (شماره مسلسل : ۲۹)

مهر ماه ۱۳۶۵

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصطفی

مدیر داخلی ، دادوڈ مصطفی

زیر نظر شورای نویسندگان هر ماه یک بار منتشر می گردد

نشانی اداره: تهران، خیابان لاله‌زار نو، نزدیک شاهرضا-شماره ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۳۱۸۱

وجه اشتراک برای ۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به اضافه هزینه پست)

حساب بانکی: جاری ۳۰۹۵ شعبه لاله‌زار نوبانک صادرات

## YEKAN

Mathematical Magazine

volume III , number 4, Oct. 1966

subscription : \$3

TEHERAN . P.O. B. 2463

چاپ آذربایجان ۶۴۰۲۸

کلیات

اصول ریاضی نظریه نسبی

آلبرت

## اینستیتیون

تألیف :

غلامرضا عسجدی

نسخه‌هایی از این کتاب در

اداره مجله یکان موجود است

طالبین می‌توانند مراجعه و خریداری

فرمایند

بها : ۵۰ ریال

## در انتظار رفع نقايس

از شروع به اجرای برنامه فعلی آموزش رياضيات در مدارس متوسطه بيش از ده سال می گذرد . از همان ابتدا ، هر گاه که نقايس برنامه توسط مجریان آن يادآوری شده است به آنها نویدداده اند که قریباً تجدیدنظر های مطلوب در برنامه انجام خواهد گرفت و نقايس موجود مرتفع خواهد شد . اما هنوز معلمان با این مشکلات دست به گريبان اند و اکنون هم که اعتراضات خود را تجدیدمی کنند پاسخ می شوند که تجدیدنظر اساسی در برنامهها بعمل آمده است اما اجرای آن سال به سال انجام خواهد گرفت ؛ فقط محصلینی که امسال پا به دبستان می گذارند آمادگی دارند که نظام جدید آموزشی را پذيرند و اين نظام جدید و قوی در کلاس ششم متوسطه قابل اجر است که اين محصلین به کلاس مزبور رسيده باشند . مثل اينکه اصول انقلابی که نظام جدید آموزشی بر اساس آن طرح ريزی شده است محصلین فعلی مدارس را در برنامی گيرد .

برنامه ای با همه نقايسی که داشته ده سال است که اجرامي شود و هنوز يازده سال دیگر هم بايد مجری باشد . يعني مشکلاتی که هم اکنون در کار تدریس رياضيات ششم متوسطه وجود دارد دوازده سال دیگر مرتفع خواهد شد ، البته اگر مشکلات تازه ای جانشين آن نشود .

از جمله نقايس برنامه فعلی آموزش رياضيات کمبود ساعت هفتگی بعضی از مواد می باشد که برای معلمان بعضی از کلاسها (البته مدارس دولتی) مشکل بزرگی را بوجود آورده است : سالهای است که دبیران رياضي کلاس سوم متوسطه به هر عنوان که شده نسبت به يك ساعت در هفته برای جبراين کلاس اعتراض کرده اند ، برای جبر چهارم طبیعی يك وضع به همین قرار است و همچنین برای مواد دیگری از کلاس های دیگر . در کلاس پنجم طبیعی هفته يك ساعت برای جبر کافی نیست اما در همین کلاس هفته يك ساعت برای هندسه فضایي منظور شده است که برای محصلین هیچ مورد استفاده ای ندارد ( و عملاً در بسیاری از مدارس تدریس نمی شود ) . قسمتی از هندسه چهارم طبیعی تکرار مکرات است و قسمت دیگری از آن حتی برای محصلین رشته رياضي هم زائد بمنظور می رسد .

آیا امكان ندارد که با کم وزیاد کردن ساعت هفتگی بعضی مواد (حتی بدون آنکه در هم جموع ساعت هفتگی رياضيات يك کلاس تغییری حاصل شود و در نتیجه برای مقامات اداری اشکالاتی پدید آورد ) برخی از نقايس موجود در برنامه فعلی را مرتفع ساخت ؟ یا اينکه باز هم باید در انتظار آينده بود ؟ !

عبدالحسين مصحفي

آقای غلامحسین باقرزاده دانشجوی دانشکده علوم مشهد مقاله‌ای برای درج در مجلهٔ یکان ارسال داشته‌اند که در آن یک نوع تبدیل هندسی را که شخصاً تعریف نموده‌اند تشریح کرده و بعضی موارد استعمال آن را بیان داشته‌اند. این مقاله را استاد دکتر هشتگردی ملاحظه و شرحی بر آن مرقوم داشتند. در زیر ابتدا شرح استاد سپس اصل مقاله درج می‌شود.

## درباره تبدیل همولوژی

از: دکتر هحسن هشتگردی

و نقطه‌ای) گروه قابل است و به پرسپکتیو موسوم است (نقطه ثابت مبدأ مختصات می‌باشد) دو نقطه مبدل در این گروه بر روی خطی که بر قطب ثابت می‌گذرد قرار دارند زیرا مجموعه خطوط  $\mu y + \lambda x = 0$  که بر مبدأ (قطب) می‌گذرند تغییر فمی‌کنند.

۳) گروه تصویری که یک نقطه  $O$  و یک خط  $\Delta$  را ثابت نگاه می‌دارند که به گروه همولوژیک معروف است در این تبدیلات که ۵ پارامتر دارند دو نقطه مبدل با قطب در یک استقامت‌اند و نسبت ناموزون دو نقطه مبدل با قطب و نقطه تقاطع محور  $\Delta$  با خطی که نقاط مبدل را به هم وصل می‌کند ثابت باقی می‌ماند (گروه تبدیلات مقالهٔ حالت خاص این گروه است). اگر قطب همواژی بر محور همولوژی قرار گیرد در این صورت همولوژی را  $E_{\text{afin}}$  می‌نامند و یک پارامتر کسر می‌شود.

۴) گروه تصویری که یک مقطع مخروطی را ثابت نگاه می‌دارند. این گروه، گروه تبدیلات یا گروه حرکات هندسه کایلی Cayley را تشکیل می‌دهند و سه پارامتر بیشتر ندارند (مانند حرکات هندسه کلاسیک که سه پارامتر دارد یک زاویه دوران و دو عامل انتقال) از این نظر مقاله آقای باقرزاده مطلبی نو ندارد ولی برای استفاده دانشجویان متوسطه مقاله ایشان مفید بنظر می‌رسد و از نظر تشویق جوانان برای مطالعه چاپ آن در مجلهٔ بی‌فایده نخواهد بود. در کتاب تعریف‌های ریاضیات مقدماتی که از طرف یکان منتشر شده است در یکی از مسائل، این جاب همین تبدیل را برای قسمت دوم مکان هندسی مخصوصی بکار بسته‌ام.

۲۵ مرداد ۱۳۴۵

مقاله آقای باقرزاده مشاهده شد. البته مطلبی جدید در هندسه در مقاله عنوان نشده است. و تبدیل مورد نظر در مقاله حالت خاصی از تبدیلات همولوژیک صفحه است. (چهار نقطه یعنی قطب همولوژی و نقطه تقاطع خطی که بر این قطب و نقطه منظور و مبدل می‌گذرد تا نقطه مبدل را بدست دهد چهار نقطه اند که نسبت ناموزون آنها مقداری است ثابت. در مقاله حاضر در این نسبت به نسبت توافقی یا نسبت موزون فناء است شده است).

بطورکلی تبدیلات تصویری صفحه یعنی تبدیلات نقطه‌ای که به معادله:

$$x = \frac{\alpha X + \beta Y + \gamma}{aX + bY + c}, \quad y = \frac{\alpha' X + \beta' Y + \gamma'}{aX + bY + c}$$

می‌باشد و عموماً هشت پارامتر دارند یک گروه تشکیل می‌دهند و این گروه حافظ نسبت ناموزون است. ثابت می‌کنند که این گروه چهار زیر گروه ثابت دارد:

۱) گروه تصویری که خطی را ثابت نگاه می‌دارد. اگر این خط را با تبدیلی از گروه کلی به بینهایت دورمنقل سازند تبدیلات خطی یا آفین Affine بدست می‌آید که به معادلات  $x = \alpha X + \beta Y + \gamma$  و  $y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma'$  می‌باشد و شش پارامتر دارند.

۲) گروه تصویری که یک نقطه را ثابت نگاه می‌دارند که معادلات آنها را می‌توان به صورت:

$$x = \frac{\alpha X + \beta Y}{ax + by + c}, \quad y = \frac{\alpha' X + \beta' Y}{ax + by + c}$$

نوشت. این گروه نیز شش پارامتر دارد و در واقع تبدیل (خط

# تبديل توافقی

از: غلام‌حسین باقرزاده

پس از تدوین مقاله فوق و ارائه آن به اساتید محترم دانشگاه تهران که با حوصله خاصی آنرا دقیقاً مورد بررسی قرار داده و منتی بزرگ بر نگارنده نهادند و احیاناً وی را راهنمای و ارشاد نیز نمودند کاشف بعمل آمد که آنچه را وی تبدل توافقی نام نهاده حالت خاصی از یک تبدل کلی همولوژی است که قبلاً تعریف و بیان شده و فقط از جهت بررسی مسائل و قضایای جزیی آن می‌تواند تا حدی جالب باشد در صورتی که همچنان که قبلاً گفته شد وی در طرح و اثبات مسائل و قضایای مزبور هیچ مرجع و منبعی برای استفاده و تحقیق سراغ نداشته است.

نگارنده در دنباله مقاله مزبور که توافق نسبت به خط مورد بحث واقع شده حالات دیگری از آن مانند توافق نسبت به دایره \* - در صفحه - و توافق نسبت به صفحه و کره - در فضا - و این مورد بررسی قرارداد و یادداشت‌هایی فراهم نمود ولی به توصیه مقامات دانشگاهی از ادامه آن صرف نظر کرد. اصطلاحاتی که در این مقاله بکار رفته جنبه موقنی دارد و تا آنگاه که مورد تأیید صاحب نظران واقع نشود نمی‌تواند جز جنبه موقنی داشته باشد، و این خواهشی است از طرف نگارنده از کسانی که علاوه بر تبحر در علوم ریاضی دستی هم در ادب و لغت دارند که با تأیید یا اصلاح اصطلاحات مزبور منتی بروی گذارند. \*

شهریور ۱۴۴۵

مقدمه - نگارنده چندی قبل که برای حل یک مسئله ساده هندسی مکان نقطه‌ای را می‌جست وقتی که از راه حل هندسی آن عاجز ماند به روش تحلیلی پرداخت و دریافت که مکان مطلوب، یک هذلولی متساوی الساقین است. این امر گرچه در حل مسئله مزبور که تعیین فصل مشترک مکان مزبور با یک دایره از طریق ترسیم مورد نظر بود مفید واقع نشد ولی نگارنده را به خاصیت عجیبی متوجه ساخت و آن اینست که هر یک از نقاط مکان فوق متناظر نقطه‌ای از دایره معلوم بود بطوری که این دونقطه همواره با یک نقطه ثابت بر یک استقامت قرار داشتند و نشان می‌دادکه همیشه با تهیه رابطه وقارونی می‌توان یک هذلولی را بدایره وبالعکس تبدل کرده و در حل مسائل مورد استفاده قرارداد. این رابطه را بعداً به نام تبدل توافقی تعریف و اصطلاحات و اسمی خاصی برای اجزاء آن موقعتاً بیان کرد و به دنبال آن به بررسی این تبدل و بدست آوردن مبدل اشکال ساده در صفحه و قضایا و مسائل مربوط به آن پرداخت و از آنجاکه به هیچ مأخذ و سابقاً در این مورد دسترسی - و یا حتی اطلاع - نداشت مدت نسبتاً معتبر بهی وقت خود را برای آن مصروف و پس از حک و اصلاح و بررسی مسائل و قضایای متعدد به صورتی که ملاحظه می‌شود آنرا تدوین و ترتیب داد. دو خاصیت جالب که در این تبدل به نظر می‌رسد و در حل بسیاری مسائل مورد استفاده دارد یکی تبدل خطوط متوازی و متقابله به یکدیگر و دیگری تبدل مقاطع مخروطی به دایره و بالعکس می‌باشد که برخی از موارد استفاده آنها در مسائلی که بنظر نگارنده رسیده نیز بیان شده است.

\* - و بدین طریق راه حلی برای تعیین فصل مشترک یک دایره و مقطع مخروطی از راه ترسیم، وقتی که مرکز دایره بر کانون مخروطی منطبق باشد.

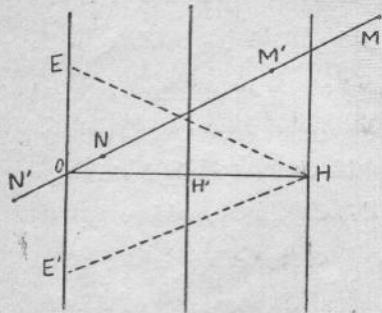
\*\* - چنانکه مشهور است وقتی که فاراده قوانین الکترولیز را کشف کرد برای نامگذاری دو قطب الکترولیز دو کلمه آن و کاتد را انتخاب و به آکادمی علوم پیشنهاد نمود و پس از اینکه مورد تصویب واقع شد رسمیت یافت. وجه خوب است این رسم در کشور ما و برای زبان فارسی نیز بخصوص در مورد ترجمه مقالات و اصطلاحات علمی از زبانهای بیکانه مورد توجه قرار گیرد و اصطلاحات بخصوصی که در برخی کتب درسی در برابر لغات خارجی قرار گرفته واکثرآ ناشی از سلیقه‌های شخصی مؤلفین- یا به عبارت صحیحتر مترجمین محترم می‌باشد نقد و اصلاح شود.

## توافق نسبت به خط

توافق بر خود آنها منطبق است.

متواافق نقاط واقع بر محور قطبی قرینه آن نسبت به قطب خواهد بود زیرا اگر  $E'$  را به یکی از نقاط  $(D)$  مثلاً  $H$  وصل کنیم اشعة حاصل توافقی بوده و چون  $EE'$  موازی  $(D)$  رسم شده است بواسیله سه شعاع  $HE$  و  $HE'$  و  $HO$  نصف می شود.

**قضیه ۱:** متواافق یک خط راست مانند  $\Delta$  خط دیگری



است مانند  $\Delta$  که یکدیگر را روی محور توافق قطع می کنند.  
اثبات. فصل مشترک  $D$  و  $S(D)$  را می نامیم از  $O$  قاطع غیر مشخصی

رسم می کنیم تا  $(D)$  را در  $K$  و  $\Delta$  را در  $M$  قطع کند.  $M'$  متواافق  $M$  را بدست آورده و آنرا به  $S$  وصل می کنیم خط  $'SM'$  متواافق در دستگاه  $(D)$  و  $(O)$  است. زیرا اگر  $O$  را نیز

به  $S$  وصل کنیم چهار خط مقابله  $'SOKMM'$  که خط غیر مشخص  $OM$  را به توافق تقسیم کرده تشکیل یک دستگاه اشعة توافقی می دهدند و هر قاطع دیگری که از  $O$  بگذرانیم بواسیله این اشعه به توافق تقسیم خواهد شد. پس مکان متواافق نقاط واقع بر  $SM$  نقاط واقع بر  $SM'$  بوده و حکم ثابت است.

**اوپرای خط  $\Delta$  بر حسب وضع خط  $\Delta$ .**

متواافق  $(D)$  بر خودش منطبق است.

متواافق خط ماربی قطب بر خودش منطبق است.

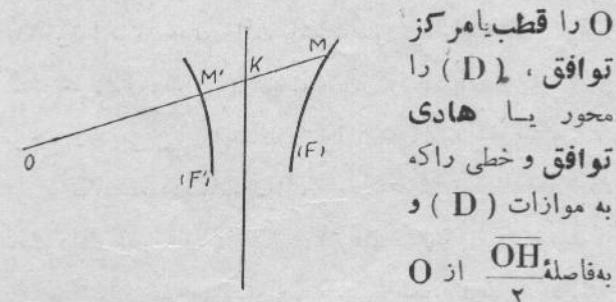
متواافق خطی موازی  $(D)$  خط دیگری موازی آن است که محل تقاطع آنها با  $OH$  متواافق یکدیگرند.

محور حد متواافق ندارد. (می توان گفت متواافق آن در بینهایت است و به استناد قضیه ای که بعد ثابت می کنیم امتداد آن نامشخص است).

**تعریف:** نقطه  $O$  و خط  $(D)$  و نقطه غیر مشخص  $M$  واقع در صفحه  $(O \text{ و } D)$  مفروضند. از  $O$  به  $M$  وصل می کنیم تا  $(D)$  را در  $K$  قطع کند.  $M'$  مزوج توافقی نقطه  $M$  را نسبت به نقاط  $O$  و  $K$  بدست آورده، آنرا متواافق  $M$  در دستگاه  $(D)$  و  $(O)$  می نامیم.

واضح است که در این صورت  $M$  نیز متواافق  $M'$  در همین دستگاه خواهد بود.

وقتی که  $M$  روی شکلی مانند  $F$  حرکت کند. از حرکت نقطه  $M'$  شکلی مانند  $F'$  ایجاد خواهد شد که آنرا متواافق شکل  $F$  در این دستگاه می نامیم.



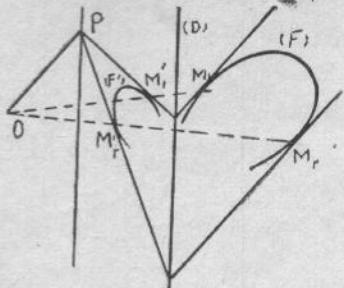
**(H) پای عمود واقع از  $O$  بر  $(D)$  می باشد** در طرف  $(D)$

رسم شود محور حد یا محور کانونی و خط ماربی  $O$  به موازات  $(D)$  را محور قطبی یا محور مرکزی اصطلاح می کنیم برای سهولت، محور حد را  $D'$  و پای عمود مرسوم از  $O$  بر آن را  $H'$  می نامیم.

**اوپرای نقطه  $M'$  بر حسب وضع نقطه  $M$**   
 واضح است در صورتی که  $M$  خارج  $K$  و  $O$  باشد  $M'$  بین  $K$  و  $O$  خواهد بود.

متواافق نقاطی که خارج  $(O \text{ و } D)$  و در طرف  $D$  می باشد بین  $(D)$  و  $(D')$  خواهد بود و متواافق نقاط طرف  $O$  بین  $(D')$  و  $O$  می باشد. (منتظر از نقاط بین یک نقطه و یک خط نقاطی است محصور به خط مفروض و خطی که از آن نقطه به موازات آن رسم شود). هرچه نقطه دورتر شود متواافق آن به محور حد نزدیک شده و متواافق نقاط واقع بر محور حد در بینهایت می باشد و بالعکس متواافق نقاط واقع بر قطب و محور

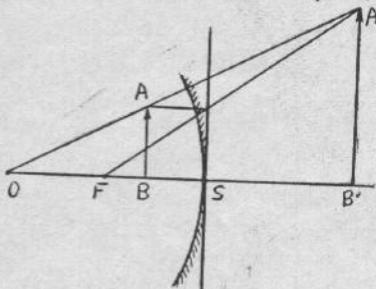
**نتیجه ۳** - برای رسم میساها یی به موازات امتداد معین



برای یک منحنی . کافی است از نقطه حد آن امتداد معنی بر منحنی متواافق آن منحنی رسم سپس متواافق خط (یا خطوط) مماس را بدست آوریم . (از این نتیجه

بعدها در مرور مقاطع مخروطی استفاده خواهد شد .

تبصره همچومن - به سادگی ثابت می شود که تصویر هر نقطه در آینه ها و عدسی های مقعر و محدب متواافق آن در دستگاهی است که مرکز عدسی (یا آینه) قطب و فصل مشترک دو صفحه یکی



مماس بر عدسی (یا آینه) صفحه مارب مرکزو رأس عدسی و نقطه مفروض، محور توافق باشد .

بنابراین می توان

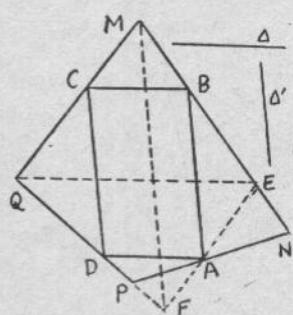
از قضایای مربوط به توافق در رسم تصاویر استفاده نمود و با تعمیم توافق در فضای توافق نسبت به صفحه) تصاویر اشکال غیر واقع در صفحه را نیز بدست آورد .

**طرح و حل یک مسئله نمونه**

مسئله - چهارضلعی مسطح و غیر مشخص  $MNPQ$  و  $ABCD$  نکات  $E$  و  $F$  واقع در صفحه آن مفروضند . چهارضلعی دیگری مانند  $ABCD$  چنان بر چهار ضلعی  $MNPQ$  متکی کنید که اضلاع مقابل آن دو به دو یکدیگر را در نقاط  $E$  و  $F$  قطع کنند .

برای حل این مسئله قبلاً به حل مسئله زیر می پردازیم : مسئله - بر اضلاع چهارضلعی مسطح  $MNPQ$  متوازی الاضلاعی چنان متکی کنید که اضلاعش دو به دو با امتدادهای مفروضی موازی باشند .

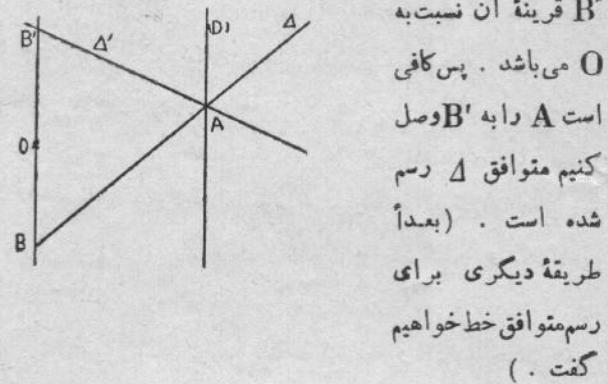
**حل :** چهارضلعی مسطح و غیر مشخص  $MNPQ$  و



امتدادهای  $\Delta$  و  $\Delta'$  مفروضند . از  $Q$  خطی موازی  $\Delta$  و از  $M$  خطی به موازات  $\Delta'$  رسم می کنیم تا به ترتیب اضلاع  $MN$  و  $PQ$  را در  $E$  و  $F$  قطع

**طریقه رسم در حالت کلی**

می دانیم برای رسم یک خط تعیین دو نقطه آن کافی است . بنابراین اگر  $\Delta$  محور توافق را در  $A$  و محور قطبی را در  $B$  قطع کند متواافق  $\Delta$  بر خودش منطبق بوده و متواافق  $B$  قرینه آن نسبت به



$O$  می باشد . پس کافی است  $A$  را به  $B$  وصل کنیم متواافق  $\Delta$  رسم شده است . (بعداً

طریقه دیگری برای رسم متواافق خط خواهیم گفت .)

**قضیه ۲** - شرط لازم و کافی برای توازی یک دسته خط آنست که متوافقهای آنها از نقطه ثابتی واقع بر محور حد بگذرند . این نقطه محل برخورد محور حد با خطی است که از قطب به موازات آن دسته خط رسم شود . نقطه مذبور را نقطه حد این امتداد می نامیم .

اثبات - اولاً شرط لازم است : دسته خط موازی امتداد  $\Delta$  را در نظر گرفته متواافق یکی از آنها مانند  $\Delta_1$  را

می نامیم . از  $O$  خطی موازی  $\Delta_1$  رسم می کنیم . چون این خط در دستگاه اشعه توافقی  $SOD\Delta_1\Delta'$  موازی شاعر  $\Delta_1$  رسم شده بوسیله سه شعاع دیگر

نصف خواهد شد یعنی  $\Delta'$  را در نقطه  $P$  واقع بر محور حد قطع می کند . این نقطه برای امتداد  $\Delta$  نقطه ثابتی است و متواافق هر خط دیگر موازی  $\Delta$  از این نقطه خواهد گذشت .

ثانیاً شرط کافی است . خطوط متقابله که از  $P$  واقع بر محور حد بگذرند متوافقهای آنها نیز از متواافق  $P$  خواهند گذشت ولی متواافق  $P$  در بینهایت است یعنی متوافقهای این خطوط در بینهایت یکدیگر را قطع می کنند پس باهم موازیند .

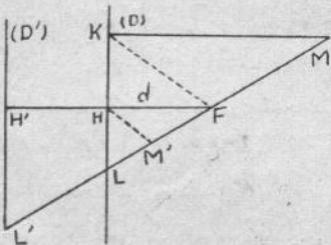
**نتیجه ۱** - همواره می توان بین وسیله خطوط متوازی را به خطوط متقابله و بالعکس تبدیل نموده و در حل مسائل مورده استفاده قرار داد . (یک مسئله نمونه بعداً حل می شود .)

**نتیجه ۳** - از قضیه فوق نیز می توان برای رسم متواافق یک خط استفاده نمود . بینهایت ترتیب که نقطه حد امتداد خط را به محل تقاطع خط بمحور توافق وصل کنیم .

## موارد استعمال تبدیل توافقی در مقاطع مخروطی

نقطه F و خط مستقیم (D) به فاصله d از یکدیگر مفر وضند. می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصل آنها از نقطه و خط مفروض برابر مقدار ثابت e باشد یک منحنی مقطع مخروطی است و بر حسب آنکه e کوچکتر یا مساوی و یا بزرگتر از واحد باشد مخروطی مزبور به ترتیب ، بیضی ، سهمی یا هذلولی خواهد بود . نقطه را کانون و خط را هادی مخروطی نامند . اکنون به اثبات قضیه زیر می‌پردازیم .

**قضیة ۳** - متوافق یا ک مقطع مخروطی (بر حسب جمیع  
مقادیر) در دستگاهی که کانون مخروطی قطب وهادی آن محور



حد توافق فرض شود  
دایره‌ای است به مرکز  
قطب و به شاعر ed  
انبات - مقطع  
مخروطی به کانون F  
وهادی (D) و خروج  
از مرکز e مفروض

است . خط  $(D')$  را به فاصله  $d$  از  $F$  در طرف  $(D)$  و موازی آن رسم نموده ، متوافق یک نقطه غیرمشخص از محروطی را هائند  $M$  در دستگاه  $(M'D'F)$  می نامیم .

بنابراین  $H'$  و  $L'$  محل تقاطع مودهای  $D$  و  $D'$  بر  $F$  هستند.

$$\frac{MF}{MK} = e, LF^y = LM \cdot LM' \Rightarrow \frac{LF}{LM} = \frac{LM'}{LF}$$

از طرفی در مثلهای LMK و LFH داریم:

$$\frac{LF}{LM} = \frac{LH}{LK} \quad \text{و در نتیجه} \quad \frac{LM'}{LF} = \frac{LH}{LK}$$

یعنی دو خط  $M'H$  و  $FK$  موازی یکدیگر بوده و دو مثلث  $MKF$  و  $FHM'$  متشابه یکدیگرند و متساویان نوشته:

$$\frac{FM'}{FH} = \frac{MF}{MK} = e \Rightarrow \frac{FM'}{d} = e \Rightarrow FF' = ed$$

چون نقطه F ثابت و طول 'FM نیز مقدار ثابتی است مکان M دایرہ ای به مرکز F و به شعاع ed بوده و حکم ثابت است .

کنند  $EF$  را وصل می‌کنیم تا  $NP$  را در  $A$  قطع کند. از  $A$  موازی  $\Delta$  رسم می‌کنیم تا  $MN$  را در  $B$  و از  $B$  موازی  $\Delta$  تا  $MQ$  را در  $C$  و از  $C$  موازی  $\Delta$  رسم تا  $PQ$  را در  $D$  قطع کند.  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع مطلوبست زیرا در مثلث‌های  $MQF$  و  $MQE$  به ترتیب داریم :

$$\frac{AB}{MF} = \frac{EB}{ME} \quad (1), \quad \frac{BC}{QE} = \frac{MB}{ME} \quad (2)$$

$$\frac{BC}{QE} = \frac{MC}{MO} \quad (3), \quad \frac{CD}{MF} = \frac{CQ}{MO} \quad (4)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) نظیر به نظیر داریم:

$$\frac{AB}{MF} + \frac{BC}{OE} = \frac{EB+MB}{ME} = 1$$

همچنین از جمیع (۳) و (۴) :

$$\frac{BC}{OE} + \frac{CD}{MF} = \frac{MC+CQ}{MO} = 1$$

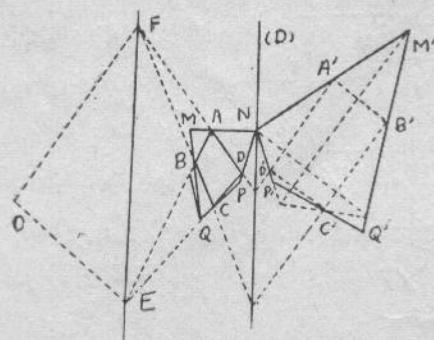
و در نتیجه داریم :

$$\frac{AB}{MF} + \frac{BC}{QG} = \frac{BC}{QG} + \frac{CD}{MF} \implies AB = CD$$

وچون  $AB$  مساوی و موازی  $CD$  است پس شکل حاصل متوازی الاضلاع بوده و مسئله حل شده است.

حال به حل مسئله اصلی می پردازیم.

چهارضلعی  $MNPQ$  و نقاط  $E$  و  $F$  واقع در صفحه آن مفر وضند.  $EF$  را وصل می‌کنیم. محور توافق را خطی موازی  $EF$  و ماربر یکی از رأسهای چهارضلعی مثلث  $N$  گرفته و قطب توافق را نقطه‌ای قرینه محور توافق نسبت به  $EF$  فرض می‌کنیم و متوافق سه رأس دیگر چهارضلعی را نسبت به این دستگاه به ترتیب  $M$  و  $P$  و  $Q$  می‌نامیم. اکنون بر چهارضلعی  $M'N'P'Q'$  متوازی الاضلاع  $A'B'C'D'$  را چنان منتکی می‌کنیم که اضلاع آن دو به دو با امتدادهای  $OF$  و  $OE$  موازی باشند. متوافقهای  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  و  $D'$  را که روی اضلاع  $MNPQ$  واقع خواهد شد  $ABCD$  می‌نامیم. از وصل پشت سرهم این نقاط چهارضلعی مطلوب رسم شده است. زیرا متوافقهای دو ضلع متقابل  $A'B'$  و  $C'D'$  مثلا که موازی رسم شده اند از نقطه حد این امتداد یعنی  $E$  گذشته و  $OE$  به همین دلیل متوافقهای  $B'C'$  و  $A'D'$  نیز از  $E$  خواهند گذشت.

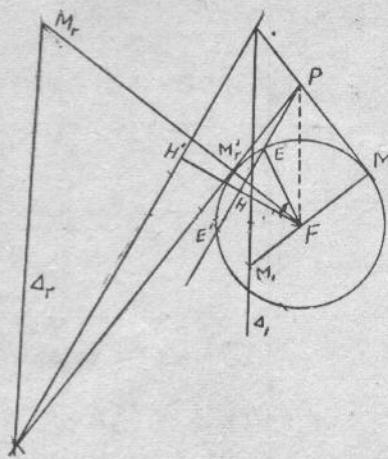


## نتایج قضیه فوق و قضایای قبلی

### ۱- اوضاع نسبی خط و مخروطی

#### الف: تعیین فصل مشترک خط و مخروطی

برای تعیین فصل مشترک یک مخروطی با یک خط کافی است دایره متوافق مخروطی را در دستگاه متناسب با آن بدد آورده و متوافق خط را که خط دیگری است نیز رسم کنیم. از وصل قطب توافق به فصل مشترک این خط با دایره (اگر دارای نقطه مشترک باشند) و ادامه آن تا خط اولیه را قطع کند فصل مشترک مخروطی و خط مفروض بددت خواهد آمد. واضح است که تعداد این نقاط صفر و یا یک و یا حداقل ۲ خواهد بود.



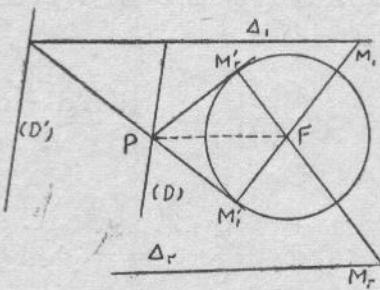
مماس یا ماسهایی (درصورت امکان) بر دایره متوافق، رسم و متوافق آنها را که با امتداد منبور موازیند بددت آورد. با وصل قطب به نقطه یا نقاط تماس دایره و امتداد آن می‌توان نقاط تماس را نیز مشخص کرد.

**بحث:** بحث در تعداد جوابهای مسئله فوق نسبت به نوع مخروطی را در ضمن نتیجه ۲ بیان خواهیم داشت.

#### ۲- بحث در نوع مقطع مخروطی

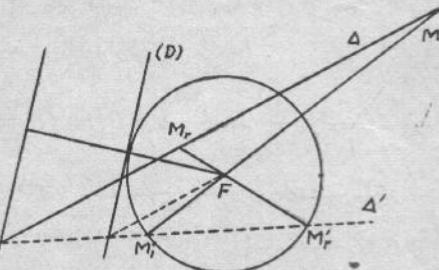
##### بر حسب مقادیر مختلف

**الف**  $e < d$  (مخروطی، بیضی است). در این صورت داریم  $e < d$  و دایره متوافق محور حد راقط نبی کند پس منحنی نقطه بینهایت نداشته و مخروطی مذبور یک منحنی بسته است.



ضمناً چون همواره از هر نقطه واقع بر محور حد می‌توان دو ماس بر دایره مذبور رسم کرد نتیجه می‌گیریم که همواره می‌توان دو ماس موازی با امتداد دلخواه بر بیضی متنکی نمود.

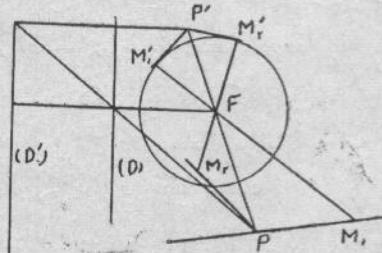
**ب:**  $e = d$  (مخروطی، سهمی است) در این صورت داریم  $e = d$ . یعنی دایره متوافق سهمی بر محور حد ماس است چون دایره تماماً بین قطب و محور حد واقع و در یک نقطه با آن مشترک است مخروطی مذبور یک تیکه بوده و دارای نقطه بینهایت می‌باشد و چون هر دو نیم دایره به سمت نقطه حدی واقع بر محور سهمی میل می‌کنند دوشاخه منحنی نیز در امتداد محور سهمی به سمت بینهایت میل خواهد کرد.



**ب:** رسم ماس بر مقطع مخروطی از یک نقطه معین مانند P

متوافق نقطه P را  $P'$  نامیده از آن ماس یا ماسهایی (در صورت امکان) بر دایره متوافق مقطع مخروطی رسم می‌کنیم. مقواطی این خط یا خطوط جواب مسئله است و با وصل قطب به نقطه یا نقاط تماس با دایره و امتداد آن می‌توان نقطه یا نقاط تماس را مشخص کرد.

**بحث:** به سادگی ثابت می‌شود نقطه P نسبت به مخروطی



با  $P'$  نسبت به دایره متناظر است یعنی اگر  $P'$  داخل یا خارج یا روی دایره باشد  $P$  نیز به ترتیب داخل یا خارج و یا روی مخروطی خواهد بود (چرا؟). بنابراین، بحث منجر به بحث درباره وضع  $P'$  نسبت به دایره می‌شود یعنی:

اگر  $P$  خارج مقطع مخروطی باشد مسئله دارای دو جواب و «د روی د د د د یک د و د داخل د د د د بل جواب خواهد بود

ج: رسم ماس بر مخروطی به موازات امتداد معین  $L$  برای حل این مسئله کافی است از نقطه حد امتداد مفروض

از  $\frac{b}{a}$  باشد و یکی است اگر قدر مطلق ضریب زاویه امتداد مفروض برابر  $\frac{b}{a}$  باشد و هیچ است اگر قدر مطلق ضریب زاویه امتداد مفروض کوچکتر از  $\frac{b}{a}$  باشد.

**تبصره ۱** - دانستیم که دایره متوافق هر مقطع مخروطی به شعاع  $ed$  و به مرکز کانون، و محور توازن به فاصله  $2d$  از کانون در طرفی که رأس مربوط به آن کانون در آن طرف است واقع و عمود بر محور مخروطی خواهد بود. پس در بینی و هذلولی خواهیم داشت: (a) و b و c فواصل رأسها و کانون از مرکز بینی یا هذلولی می باشند).

$$R = ed = \frac{c}{a} \times \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{a}, \quad h = 2d = \frac{2b^2}{c}$$

$R$  شعاع دایره و  $h$  فاصله قطب تا محور توازن است و چنانکه می دانیم بسته آوردن این اندازه ها از طریق ترسیم به آسانی عملی است و در مورد سهمی که داریم  $P(d = P)$   $e = 1$  و  $R = P$  هذلولی می باشد. پارامتر سهمی برابر است با دو برابر فاصله کانون تا رأس سهمی) خواهیم داشت

$$R = P \quad h = 2P$$

**تبصره ۲** - بالعکس ثابت می شود متوافق هر دایره در دستگاهی که مرکز دایره قطب فرض شود یک مقطع مخروطی است.

### ۳- اثبات یک قضیه در مورد مقاطع مخروطی

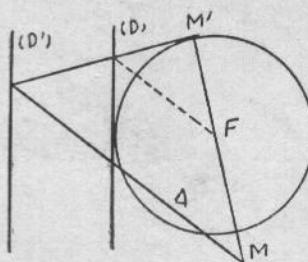
**قضیه:** مقطع مخروطی و دو خط  $A_1$  و  $A_2$  که در نقاط  $M_1$  و  $M_2$  بر آن مماسند مفروضند.

اولا شرط لازم و کافی برای آنکه  $M_1, M_2$  از کانون F بگذرد آنست که  $A_1$  و  $A_2$  روی هادی مربوط به این کانون در نقطه ای مانند P یکدیگر را قطع کنند.

ثانیاً - خط واصل از F به P بر  $M_1, M_2$  عمود است.

**اثبات** - اولا: الف - شرط لازم است. فرض می کنیم  $F$  از  $M_1, M_2$  بگذرد. متوافق مخروطی را که دایره ای است

به مرکز F و به شعاع  $ed$  ( $= \frac{b^2}{a}$ ) رسم می کنیم. متوافق  $M_1, M_2$  نیز از F (قطب توازن و مرکز دایره) گذشته و بر آن منطبق و قطري از دایره بشمار خواهد رفت پس نقاط با یکدیگر موازیند و در نتیجه متوافقهای آنها یعنی  $A_1, A_2$  بقیه در پائین صفحه ۴۶



ضمناً چون یکی از دوماس مرسوم از هر نقطه واقع بر محور حد، بر خود محور منطبق بوده و متوافق ندارد نتیجه می گیریم

که حداکثر یک ماس می توان به موازات امتداد دلخواه بر سهمی متکی کرد و در صورتی که این امتداد موازی محور سهمی باشد مسئله هیچ جواب ندارد.

**ج: e > d (مخروطی - هذلولی است)** . در این صورت داریم  $ed > d$  یعنی دایره متوافق، محور حد را در دو نقطه قرینه نسبت به محور قاطع هذلولی مانند E و E' قطع می کند. (شکل قسمت ج از ۱)

اولا - چون از دایره مزبور قسمتی بین قطب و محور حد و قسمتی دیگر بین محور حد و هادی توازن واقع شده نتیجه می گیریم که هذلولی دوبارچه بوده و در طرفین محور حد (هادی مخروطی) واقع است و به استدلالی که در فرض قبل گفته شد هردو پارچه دارای شاخه های بینهایت می باشند.

ثانیاً - چون هر دو قسمت دایره در نقاط E و E' محور حد را قطع می کنند شاخه های هذلولی دو به دو در امتداد یکی از خطوط FE و FE' به سمت بینهایت میل خواهند کرد و مجانبهای هذلولی موازی این دو خط خواهند بود. ولی ضریب زاویه این دو خط عبارتست از :

$$m = \tan \alpha = \pm \frac{EH}{FH} = \pm \frac{\sqrt{e^2 d^2 - d^2}}{d} = \pm \sqrt{e^2 - 1}$$

و با توجه به اینکه  $d = \frac{b^2}{2a}$  و  $e = \frac{c}{a}$  به ترتیب

طول محورهای قاطع و غیر قاطع و  $c$  فاصله کانون تا رأس هذلولی است) خواهیم داشت :

$$m = \pm \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \pm \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \pm \frac{b}{a}$$

ثالثاً : چون رسم ماس بر دایره، بستگی به وضع نقطه P (نقطه حد امتداد دلخواه) روی E'E دارد و می دانیم اگر نقطه P خارج یا روی E'E باشد به ترتیب دو و یا یک ماس بر دایره می توان رسم کرد و چنانچه P داخل E'E باشد هیچ ماسی نمی توان از آن نقطه بر دایره مرور داد نتیجه می گیریم که تعداد ماسهای مرسوم بر هذلولی به موازات امتداد مفروض: دو تا است اگر قدر مطلق ضریب زاویه امتداد مفروض بزرگتر

# مسائل حل فشده ریاضی

تألیف:

C. STANLEY OGILVY

ترجمه: ع. م.

-۴۰-

انحناء بسطح کره زمین را نمی شود نادیده گرفت.

\* \* \*

در هوای مه آسود ، از کشته که در یک رودخانه وسیع در حرکت است مردی بسطح آب می افتد . دو کنار رودخانه متوازی هستند . مرد اندازه پهنای رودخانه را می داند اما ساحل را نمی بیند و نمی داند در چه فاصله ای از ساحل واقع است . اگر قبول کنیم : که احتمال آن بسیار ضعیف است ، که مرد قادرت اداره خود را در آب دارد ، برای رسیدن هر چه زودتر به ساحل چه مسیری را باید انتخاب کند ؟

مسئله دیگر از این نوع بدین قرار است که یک ناود در راه خود را گم می کند ، فاصله آن از ساحل معلوم است به فرض اینکه ساحل به صورت خط مستقیم فرض شود این ناو چه مسیری را باید اختیار کند تا به ساحل برسد ؟ یک چنین موضوعی کاملاً ممکن است که اتفاق بیفتد : ما هیگری را در نظر بگیرید که باقایق خود در فاصله معینی از ساحل لنگراند اخته و به کار صید ماهی مشغول شده است . وی چنان به کار خود سرگرم می شود که وقوع مهرا احساس نمی کند . فقط وققی متوجه می شود که مهتمام جارافرا گرفته ووی نه تنها جائی را نمی بیند بلکه می فهمد که به تعیین جهت هم قادر نیست . البته وی قطب نما با خود ندارد امامی تواند قایق خود را رهبری کند . چه مسیری را باید انتخاب کند ؟

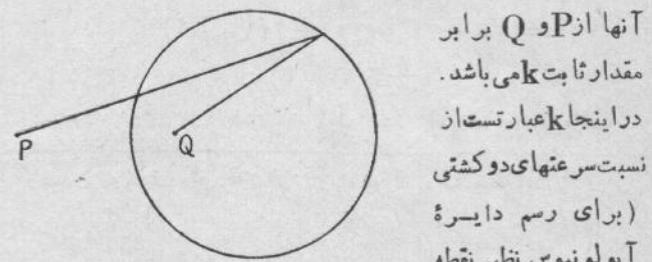
مسئله سوم : برای ناو مسئله بالا وضع نامساعد تری را در نظر

می گیریم بدین معنی که ذخیره سوخت کشته محدود است ، اگر کشته مسیری را انتخاب کند که به حدود نزدیکترین نقطه ساحلی بر سر ذخیره سوخت وی کافی می باشد اما اگر مسیر دیگری را انتخاب کند قبل از رسیدن به ساحل ذخیره سوخت وی تمام شده ناچار از توقف می باشد . در این صورت چه روشی را باید اختیار کند تا احتمال رسیدن قبل از توقف اجباری به ساحل برای وی ماکزیمال باشد .

اگر ما هیگر مسئله سبق الذکر نستجیده راه بیفتد در ریای پائین صفحه بعد

یک کشته در تعقیب کشته دیگر است . اگر سرعت هر یک از دو کشته مقدار ثابت بوده ولی سرعت اولی (کشته تعقیب کشته) بیشتر از دومی (کشته فراری) باشد و بخلافه مسیر هر یک از آنها خط مستقیم بالامتداد ثابت باشد ؟ کشته اول چه امتدادی را باید انتخاب کند تا به هر حال کشته دوم را گیر بیاورد ؟

مسئله با این مفروضات حل شده است و جواب آن مشخص می باشد : اگر  $P$  و  $Q$  به ترتیب وضع کشته اول و دوم در هنگامی می باشد که عمل تعاقب شروع می شود ، و امتداد ثابت کشته دوم معین باشد ، کشته اول باید امتداد مسیر خود را اچنان اختیار کند که کشته دوم را در رود آپولونیوس نظر نفاط  $PQ$  تلاقی کند . این دایره ممکن هندسی نفاطی است که نسبت فواصل



آنها از  $P$  و  $Q$  برابر مقدار ثابت  $k$  می باشد . در اینجا  $k$  عبارت است از نسبت سرعتهای دو کشته (برای رسم دایره آپولونیوس نقطه قطعه خط  $PQ$  را به نسبت  $k$  تقسیم کنند ،  $MN$  قطر این دایره خواهد بود . مترجم)

راه حل بالا وقتی عملی است که سطح اقیانوس را مستوی فرض کنیم یا الاقل ، فواصل را به اندازه کافی کوتاه اختیار کرده باشیم . نسبت به سطح کروی راه حل گفته شده در بسیاری از حالات مورد نخواهد داشت ، زیرا تعیین مکان هندسی نفاطی از سطح کروی که از تلاقی دو کمان دایره عظیمه مرسوم از دونقطه ثابت بدست می آیند و نسبت طولهای این دو کمان مقدار ثابت باشد مسئله ای است که هنوز حل نشده است . در صورتی که همین مسئله در مردمی که هوای پماهای با سرعت ماقوک صوت می خواهد کشته های به مسافت های دور را دنبال کنند بکار می آید و در این حالت

در باره خیام و کارهایی که در ریاضیات کرده است در کتابی که توسط انشمند مختارم دکتر غلامحسین مصاحب تألیف شده آنطور که شاید و باید حق مطلب اداشده است . مقاله زیر از شماره هر بوط به فوریه ۱۹۶۶ مجله «علم ریاضیات» چاپ آمریکا بدین جهت ترجمه و چاپ شده میزان اطلاع دیگران را از کارهای این دانشمند ناگفته به نظر خواهد گذاشت .

# ===== عمر خیام =====

ترجمه : غلامرضا حلی دانشجوی دانشکده علوم

نوشته : Evelyn Kennedy

می باشد . این کتاب در ۱۸۵۱ به نام «جبر خیام» به زبان فرانسه ترجمه شد . خیام معادلات را بحسب درجه آنها تقسیم بنده کرده است .

معادلات درجه دوم را از راهی حل کرده است که با راه متداول امزای مشابه دارد ، اما وی از قبول جواب منفی این معادلات خودداری کرده است . برای تعیین ریشه مثبت معادلات درجه سوم موقوفیتها بی بست آورده است . معادلات درجه سومی که وی حل کرده به صور تهای

$$x^3 + bx^2 = c^3$$

می باشد . وی این معادلات را با روش هندسی از راه تعیین نقطه تلاقی دو منحنی (دو سهمی ، یک سهمی و یک دایره) حل کرده است .

خیام اظهار کرده است که قانونی کشیده که بنابر آن می تواند قوای اعداد را حساب کنداشون قانون به نام «مثلث خیام» معروف می باشد و بوسیله آن می توان ضرایب بسط دو جمله ای را تعیین کرد . به عنوان مثال مکعب عدد ۱۲ به طریق زیر حساب می شود :

$$(10+2)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 2 + 3 \cdot 10 \cdot 2^2 + 2^3 = 144$$

$$+ 3 \cdot 10 \cdot 2^2 + 3 \cdot 10^2 \cdot 2 + 10^3 = 1728$$

که اعداد ۱۰ و ۳ و ۹ همان ضرایب بسط  $(a+b)^3$  می باشند .

رسیدن به هدف دارد و نواری را تعیین کرده که همه این فقط را در بر می گیرد .

«باید قبول کرد که مسئله ساده ای نیست : از حساب تغییراتی استفاده می شود که فقط جزئی معلوماتی را در برداشت ، و باشد را بسط مربوط به حدود خاص را در نظر گرفت . یکی از نکات اساسی مسئله پیوسته بودن نوار جستجو (نواری که قبل از آن نام برده شد) می باشد (در مردمه اپیما ، مسیری را که می بیوسته می باشد) . جستجو برای کشف کشته با حداقل فعالیت یاد را نظر گرفتن بهترین شانس برای کشف آن با ساعات محدودی پرواز و مسئله هستند که درست نمی دانند آیا همیشه دارای یک جواب هستند یا نه . در حالتی که احتمال مربوط به موقعیت هدف با منحنی نموده می شود که دارای تعداد محدودی ماکزیمم است ، این ماکزیممها نواحی را تعیین می کنند که در آنجا شانس یافتن هدف بیشتر است و نمی توان مطمئن بود که جواب مسئله منحصر به فرد است . و هنگامی که تغییر مکانهای احتمالی هدف در مسئله دخالت داده شوند ، راه محاسبه ای برای تعیین جوابها ، عمل و جود ندارد .

عمر بن ابراهیم خیام در اواسط قرن یازدهم (میلادی) در فیشاپور متولد شد . ابتدا نزد پدرش به شغل جاده دوزی پرداخت و بعد تمام هم خود را صرف تحصیل علوم کرد . هنوز مدت زیادی از تحصیل وی نگذشته بود که توسط سلطان به دربار دعوت شد . در آنجا برای خیام فرصتی پیش آمد تا معلومات خویش را تکمیل کند و به اتفاق دوجوان خوش قریحة دیگر نزدیکی از استادان معروف زمان ، فلسفه و ریاضیات را فرا گیرد . خیام به زودی در نجوم و ریاضیات بمند آوازه شد . وی عقاید فلسفی خود را در قالب اشعاری به صورت رباعی بیان داشته است .

اولین بار در اوپرای فیلم «جرالد انگلیسی ریاضیات خیام» را ترجمه کرد (۱۸۵۲) که ترجمة وی تاکنون بارها در کشورهای انگلیسی زبان چاپ شده است و به خاطر آن خیام شهرت جهانی دارد .

عمر خیام علاوه بر آنکه شاعر بوده در زمان خود دانشمند بی نظیر بوده است و بعضیها به حق وی را سلطان خردمند در ۱۵۷۴ به امر سلطان ملکشاه خیام به اتفاق هفت دانشمند دیگر تحقیقات وسیعی در زیجهای نجومی بعمل آورده و تقویم فارسی را تصحیح کرده است .

خیام کتابی در جبر نوشته است که از آثار قبل از زمی ممتاز

بیکران سرگردان خواهد شد و فقط باشد امیدوار باشد تا مهربان خیزد و کسی به جستجوی وی اقدام کند .

فیلیپ م . مورس مدیر مرکز محاسبه الکترونیک مؤسسه تکنولوژی ماساچوست (M.I.T.) اشکالاتی را که برای کشف یک کشته گمشده در سطح اقیانوس در اتفاق خیابان یک «روش اصولی» وجود دارد به وجه خوبی شرح داده است :

«می توان بعضی شرایط موقعیت آن و تغییر مکانهایش را در نظر گرفته آنها را مثلاً به صورت یک پراکندگی احتمال نمایش داد (شانس این یکی بیشتر از آن یکی است) .

اگر ممکن باشد که خطوط سیر هوا پیماهای گشته را طوری تنظیم کرد که زمان لازم برای پرواز آن حداقل باشد پس می توان فعالیتهای مطلوب گشته گمشده را نیز به قسمی توزیع کرد که به نزدیکترین نقطه ساحل رهبری شود ، یا اینکه با تعدادی داده ها که هر بوط به فعالیتهای وی می شود شانس رهبری آنرا به سی ساحل بالا برد . از لحاظ هندسی باید در سطح دریا ناقاطی را در قطر گرفت که نسبت به آنها گشته گمشده شانس بیشتری برای

چند نفر از خوانندگان یکان راجع به مقاله های هر بوط به معادلات سیال تذکراتی داده‌اند بدین مناسبت شرح ذیل به نظر خوانندگان می‌رسد:

ناکنون بحث مدونی درباره انواع مختلف معادلات سیال انجام نگرفته و یا لااقل من ندیده‌ام. تنها درباره معادلات سیال دومجهولی درجه اول در کتابهای جبر و یا حساب استدلالی صحبت شده است. سه مقاله را هم که در مجله یکان دراین زمینه دیده‌اید از یک کتاب جبر تألیف «آندره پترویچ کیلیف» تهیه شده است. ولی برای ادامه این بحث احتیاج به نظر و راهنمائی خوانندگان داریم که نه تنها اگر درباره مطالب نظری و راهنمائی دارند از ذکر آن درین نفرها بیند بلکه اگر منابعی در این زمینه‌ها و یا سایر زمینه‌های هر بوط به معادلات سیال در اختیارشان می‌باشد، ما را از وجود آنها مطلع نمایند.

پ - ش

در جستجوی راه حل برای معادلات سیال

-۴-

## کسرهای مسلسل

تهریه و تنظیم از: پروین شهریاری

دنیاله از شماره پیش

اگر در طرف راست این تساوی، به جای  $a_n$  مقدار  $a_s$  و ... و  $a_{n+1}$  و  $(a_n - y)$  قرار دهیم، مقدار دقیق کسر مسلسل، یعنی  $A$  بدست می‌آید:

$$A = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}}$$

و از آنجا:

$$\begin{aligned} A Q_n y + A Q_{n-1} &= P_n y + P_{n-1} \\ \Rightarrow A Q_n y - P_n y &= P_{n-1} - A Q_{n-1} \end{aligned}$$

یعنی:

$$y Q_n (A - \frac{P_n}{Q_n}) = Q_{n-1} (\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A)$$

از تساوی اخیر می‌توان دو نتیجه زیر را بدست آورد:  
- چون اعداد  $y$  و  $Q_n$  و  $Q_{n-1}$  مثبت هستند، در این

۶- قضیه ۱: مقدار دقیق کسر مسلسل بین دو کسر متقارب متواالی قرار دارد و ضمناً به مقدار کسر بعدی نزدیکتر است تا مقدار کسر قبلی.

اثبات: کسر مسلسل زیر را در نظر می‌گیریم:  
 $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_s) = A$

که مقدار دقیق آنرا به  $A$  نشان داده‌ایم. سه کسر متقارب متواالی را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

طبق آنچه که قبلاً اثبات کردیم داریم:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}$$

اثبات: چون داریم:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}$$

واضح است که مخرج این تفاضل همانست که می خواهیم. بنابراین کافی است ثابت کنیم که صورت آن مساوی  $\pm 1$  است.  
وچون داریم:

$$P_{n+1} = P_{n\text{an}} + P_{n-1} \quad Q_{n+1} = Q_{n\text{an}} + Q_{n-1}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} &= (P_{n\text{an}} + P_{n-1})Q_n \\ &\quad - P_n(Q_{n\text{an}} + Q_{n-1}) \\ &= P_nQ_{n\text{an}} + P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n\text{an}} - P_nQ_{n-1} \\ &= -(P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n) \end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز عبارت است از صورت کسری که از تفاضل کسر  $\frac{P_n}{Q_n}$  بدست می آید. به این ترتیب ثابت کردیم که قدر

$$\frac{P_n}{Q_n} \text{ از } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

مطلق مقدار صورت کسری که از تفاضل کسر  $\frac{P_n}{Q_n}$  از  $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$  بدست می آید برابر است با قدر مطلق صورت کسری که از تفاضل

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \text{ از } \frac{P_n}{Q_n}$$

صورت کسری که از تفاضل دو کسر متقابل متواالی بدست می آید برای همه کسرهای متقابل مقداری است ثابت ولی تفاضل بین کسرهای متقابل اول و دوم را می توانیم حساب کنیم:

$$(a + \frac{1}{a_1}) - a = \frac{1}{a_1}$$

بنابراین صورت هر کسری که از تفاضل دو کسر متقابل متواالی بدست می آید، از لحاظ قدر مطلق برابر با واحد است.

مثلثاً اگر کسری را که در شماره ۵ ذکر کردیم، در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{1} &= \frac{1}{1}; \quad \frac{11}{4} - \frac{3}{1} = -\frac{1}{4}; \quad \frac{25}{9} - \frac{11}{4} = -\frac{36}{4}; \\ \frac{86}{31} - \frac{25}{9} &= -\frac{1}{279}; \dots \end{aligned}$$

نتایج ۱: همه کسرهای متقابل غیرممکن التحويل اند.

زیرا اگر  $\frac{P_n}{Q_n}$  بتواند به مقسوم عليه  $m > 1$  کوچک شود، در این صورت تفاضل:

$$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n$$

هم باید بر  $m$  قابل قسمت باشد که غیرممکن است، زیرا این تفاضل برابر است با  $\pm$ .

صورت تفاضلهایی که در داخل پرانتزها قرار دارند، باستی باهم مثبت یا باهم منفی باشند، یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر } A - \frac{P_n}{Q_n} > 0 \text{ باشد،} \\ \text{در این صورت } A > \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \text{ خواهد بود} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر } A - \frac{P_n}{Q_n} < 0 \text{ باشد،} \\ \text{در این صورت } A < \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \text{ خواهد بود} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر } A > \frac{P_n}{Q_n} \text{ باشد،} \\ \text{در این صورت } A > \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \text{ خواهد بود} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر } A < \frac{P_n}{Q_n} \text{ باشد،} \\ \text{در این صورت } A < \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \text{ خواهد بود} \end{array} \right\}$$

بنابراین، مقدار  $A$  بین هر دو کسر متقابل متواالی قرار خواهد گرفت.

(۲) چون  $1 < y < Q_{n-1}$  و ضمناً عدد های  $Q_n > Q_{n-1}$  مثبت هستند، از همان تساوی نتیجه می شود که

قدر مطلق مقدار  $(A - \frac{P_n}{Q_n})$  کوچکتر است از قدر مطلق مقدار

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A \text{ و از آنجا نتیجه می شود که } A \text{ بـ } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

$$\text{است تا بـ } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

تبصره - چون واضح است که  $A > a$  یعنی  $A > \frac{P_n}{Q_n}$  می باشد خواهیم داشت:

$$A < \frac{P_2}{Q_2}; \quad A > \frac{P_2}{Q_2}; \quad A < \frac{P_4}{Q_4}; \quad \dots$$

مقدار دقیق کسر مسلسل از همه کسرهای متقابل ردیف فرد بزرگتر و از همه کسرهای متقابل ردیف زوج کوچکتر است:

۷- قضیه ۳. تفاضل بین دو کسر متقابل متواالی برابر است با  $\pm$  تقسیم بر حاصل ضرب مخرجهای این دو کسر متقابل.

مقدار کسر مسلسل را با تقریب  $\frac{1}{425} = \frac{1}{17(17+8)}$  بیان می‌کند. و بالاخره اگر بدانیم که مخرج کسر متقارب بعدی مثلاً مساوی ۳۷ است؛ می‌گوئیم که  $\frac{45}{17}$  با مقدار واقعی کر کمتر از  $\frac{1}{629} = \frac{1}{17 \times 37}$  اختلاف دارد.

**۸. قضیه ۳.** کسر متقارب از هر کسر دیگری که مخرجش کوچکتر است به مقدار حقیقی کسر مسلسل نزدیکتر است.

**اثبات.** فرض می‌کنیم کسری مثل  $\frac{a}{b}$  وجود داشته باشد که به مقدار حقیقی کسر مسلسل یعنی  $A$  نزدیکتر باشد تا کسر متقارب  $\frac{P_n}{Q_n}$  و فرض می‌کنیم  $P_n < Q_n$  باشد. ثابت می‌کنیم که

این فرض ما را به تناقض می‌کشاند. وقتی که  $\frac{P_n}{Q_n}$  نسبت به  $A$  به  $\frac{P_n-1}{Q_n-1}$  نزدیکتر است و  $\frac{a}{b}$  نسبت به  $\frac{P_n-1}{Q_n-1}$

نزدیکتر است، بنابراین کسر  $\frac{a}{b}$  نسبت به  $A$  نزدیکتر خواهد بود از طرف دیگر می‌دانیم که  $A$  بین دو کسر متولی

واقع است، دراین صورت قدر مطلق تفاضل  $\frac{P_n}{Q_n}$  و  $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$  باشد.

باید بزرگتر از قدر مطلق تفاضل  $\frac{a}{b} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$  باشد، یعنی (باتوجه به مقادیر قدر مطلق) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > \left| \frac{a Q_{n-1} - b P_{n-1}}{b Q_{n-1}} \right|$$

$$Q_n Q_{n-1} > b Q_{n-1}$$

با ضرب این دو نامساوی در یکدیگر، بدست می‌آید:

$$1 > |a Q_{n-1} - b P_{n-1}|$$

اعداد  $a Q_{n-1}$  و  $b P_{n-1}$  اعدادی صحیح هستند و بنابراین نامساوی فوق وقتی امکان دارد که داشته باشیم:

$$a Q_{n-1} - b P_{n-1} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

واین تساوی هم غیرممکن است، زیرا طبق فرض  $\frac{a}{b}$  به  $A$

نزدیکتر است تا  $\frac{P_n}{Q_n}$ ، از طرف دیگر، طبق آنچه قبلاً ثابت

کردہ ایم،  $\frac{P_n}{Q_n}$  نسبت به  $A$  نزدیکتر است. بدین

ترتیب قضیه ۳ هم اثبات شد.

بدینه دارد

-۱- اگر بجای مقدار حقیقی کسر مسلسل، کسر متقارب

$\frac{P_n}{Q_n}$  را انتخاب کنیم، اشتباهی کوچکتر از هر ۱۰۰ عدد زیر کردہ ایم:

$$\frac{1}{Q_n \cdot Q_{n+1}}, \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})}, \frac{1}{Q_n^n}$$

زیرا، اگر  $A$  مقدار دقیق کسر مسلسل باشد،  $A - \frac{P_n}{Q_n}$  از لحاظ مقدار عددی از تفاضل  $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}$  کوچکتر است و تفاضل اخیر از لحاظ قدر مطلق، طبق آنچه ثابت کردیم، برابر است با  $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$  از طرف دیگر چون داریم:

$$Q_{n+1} = +Q_n a n + Q_{n-1}$$

(که در آن  $a > 1$  است) خواهیم داشت:

$$Q_n Q_{n+1} > Q_n(Q_n + Q_{n-1}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})}$$

و بنابراین قدر مطلق تفاضل:

$$\frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})} - A \text{ از } \frac{P_n}{Q_n} \text{ کوچکتر است.}$$

$Q_{n+1} Q_n > Q_n^2 > Q_{n+1}^2$  است،

خواهد بود و از آنجا:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}$$

بنابراین قدر مطلق تفاضل  $\frac{1}{Q_n^2} - A - \frac{P_n}{Q_n}$  از  $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$  کوچکتر است.

است. از سه مقدار مذکور  $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$  از همه کوچکتر است.

وقتی که کسر متقارب  $\frac{P_n}{Q_n}$  را به عنوان مقدار تقریبی کسر مسلسل انتخاب می‌کنیم، در حالتی که مخرج کسر متقارب بعدی معلوم باشد خطای مساوی  $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$  می‌گیریم، اگر مخرج کسر

متقارب قبلی معلوم باشد  $\frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})}$  را و در حالتی که فقط کسر متقارب  $\frac{P_n}{Q_n}$  معلوم باشد،  $\frac{1}{Q_n^2}$  را به عنوان خطای در

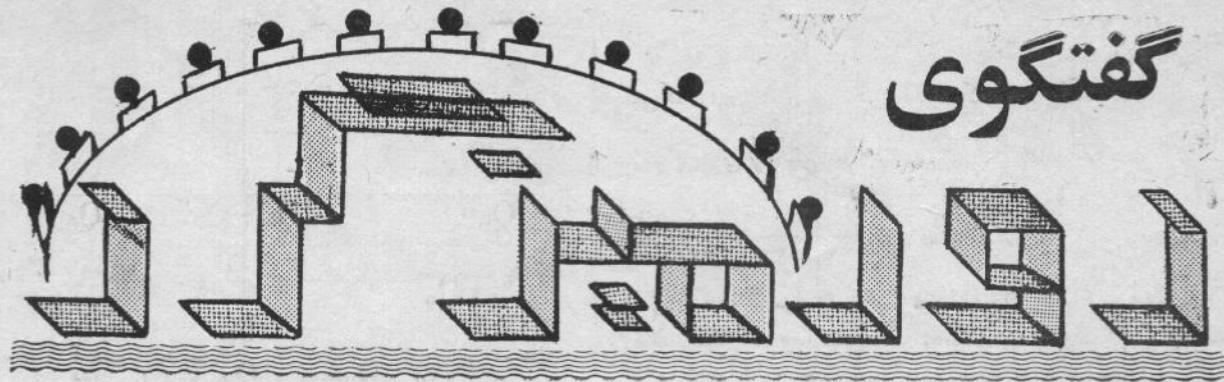
می‌گیریم.

مثالاً اگر بدانیم که یکی از کسرهای متقارب یک کسر مسلسل برای  $\frac{45}{17}$  است، می‌توانیم بگوییم که  $\frac{1}{17^2} = \frac{1}{289}$  مقدار کسر مسلسل را تا

تقریب معین می‌کند. اگر علاوه بر این، بدانیم که مثلاً مخرج

کسر متقارب قبلی برای  $\frac{45}{17}$  است، می‌توانیم بگوییم که

# گفتگوی



وابتكار وی پروردش یابد اصولاً باید استفاده از حل المسائل برای محصل قدغن باشد والا خود مؤلف می‌توانست عما نظرور که قضیه‌ای را در متن کتاب شرح می‌دهد و اثباتات می‌کند مسائل را هم حل و بحث کند.

● بعضی از مؤلفین کتابهای درسی این کار را می‌کنند منتهی در دو کتاب جدا کانه! در کتاب درسی مسائلی را به عنوان تمرین ردیف می‌کنند و در کتاب دیگر حل آنها را نکته به نکته عرضه می‌کنند.

\* - کتاب دوم برای معلمان است.

● - پس چرا آنرا ابتدای زیاد چاپ می‌کنند و در اختیار محصلین قرار می‌دهند؟

● - مؤلفین هم که خود برای کتاب‌های شان حل المسائل نمی‌نویسند دیگران این کار را انجام می‌دهند و فعلاً برای هر یک از کتاب‌های درسی چندین حل المسائل وجود دارد.

● - در طرح مسئله‌ای مؤلف غرض خاصی داشته است. اما نویسنده حل المسئله نه تنها به این غرض پی ببرد بلکه راهی را برای حل مسئله انتخاب کرده است که حتی محصل را منحرف هم می‌سازد.

● - در بعضی کشورها مرسم است، قاعدة هم باید چنین باشد، که هر مؤلف کتاب درسی دو کتاب می‌نویسد یکی برای محصلین و دیگری مخصوص معلمین. در کتاب معلم راه حل مسائل و غرض از طرح و تنظیم آنها بیان می‌شود. این کتاب معلم در همه کتاب‌هایها یافت نمی‌شود و از طرف مسئولین امور تربیتی اتخاذ می‌شود که بجز معلم به دست کس دیگر نیافتد.

● - من شخصاً عقیده دارم که تشویق محصل به تهیه حل المسائل کتاب درسی خیلی نسبت به وی می‌باشد و آنها که به هر نحوی بدین کار دست می‌زنند اشخاص خوش نیتی نیستند.

● - این عقیده را اکثریت معلمان تأیید می‌کنند.

\* - مسائلی هست که راه حل خاص دارند و فقط منفکران نایمه می‌توانند این راه حلها را شخصاً کشف کنند بنا بر این لازم است

● - امروز در دیرستان... درس داشتم، زنگ پایان کلاس خورده بود و مادر اطاق معلمین جمع شده بودیم یکی از همکاران که معلوم بود در کلاس درس به خاطر موضوعی عصبانی شده است هنوز به جمیع مانیپوسته حملات و انتقادات خود را متوجه ماساخت و مارابه عناوین خائنین به نسل جوان و خراب کنندگان آتبیه علمی کشیده و مقتدر ساخته خلاصه هزاران لعن و نفرین شارمان کرد. آرامش کردیم و حال و احوال را جویا شدیم، معلوم شدیکی از محصلین کلاس که همواره مشکلترین تمرینها را حل می‌کرد و بهترین دفترچه پاکنوسی حل مسائل را داشته و خلاصه معلم روی وی خیلی حساب می‌کرده است امروز مشتش باز شده و حتی از حل ساده ترین مسائل هم عاجز مانده است.

\* - اینکه طول و تفصیلی ندارد، اما چرا شما باید لعن و نفرین شوید؟

● - همکار ما کنجهکاو شده و کشف کرده است که جناب محصل حل المسائل مربوط به تمرینهای کتاب‌ها را بایع فرموده و تنها زحمتی که می‌کشیده رونویسی از روی آن بوده است.

\* - اجازه دهید من هم خاطره‌ای را که از یکی از همکاران دارم شرح دهم: من آقای... یک درس را در دوشنبه یک کلاس دیرستان... به عهد داریم. امروز این همکار محترم کتاب حل المسائل را که تازه چاپ کرده بودیم از هدیه کرد و گفت که وی به محصلین کلاس خودش گفته است که مسائل امتحانی را از بین مسائل این کتاب انتخاب می‌کند و از من هم خواست که به محصلین خودم همین موضوع را باید آورد کنم.

● - صرف نظر از بعضی رویه‌های غیر معقول که در چاپ یامعرفی کتاب‌های حل المسائل اعمال می‌شود پیشنهاد می‌کنم که معلوم کنیم استفاده از حل المسائل تا چه اندازه برای محصلین مفید می‌باشد.

\* - هدف و مقصود از حل مسئله چیست؟ اگر مقصود آنست که محصل در استفاده از روا بطور مفاهیم و رزیده شود و قوی استنباط

اندازه برای محصلین مجازمی باشد؟

\* - بطور کلی استفاده از حل المسائل باهدفی که از حل  
مسائل منظور نظر است مباینت دارد.

\* - در کار خارج از کلاس استفاده از حل المسئله بهترین  
مشغله برای محصلین می‌باشد. استفاده از حل المسئله محصل را به  
حل مسائل دیگری راغب می‌کند، راه را برای وی بازمی‌کند.

۵- یکی از دوستان، حل المسائل را به غذای جویده شده  
تشیه می‌کرد. محصلی که عادت کرد حل مسائل را از کتاب  
حل المسائل در بیاورده هیچ وقت مسئله حل کن نمی‌شود، در حقیقت  
خودش و دیگران را گول زده است.

● - در کلاس ششم محصلی داشتم که همواره چندین  
حل المسئله زیر پنلش بوداما به همان نشانی که در آن کلاس ساله  
شد و بالاخره هم قبول نشد.

\* - بعضی از کتابهای حل المسائل گمراه کننده هستند. مؤلفین  
آنها صلاحیت این کار را ندارند. مثل اینکه برای هر معلمی لازم شده  
است که حتماً نویسنده حل المسائل باشد. خود به خود محصلین  
هم به این کار دست زده‌اند. نتیجه آن شده که کار چاپ و انتشار  
حل المسائل به ابتدا بیفتند.

\* - چاپ حل المسائل منحصر به اشخاص معینی نیست.  
کسی نمی‌تواند مدعی شود که غیر از خودش دیگران صلاحیت تنظیم  
حل المسائل را ندارند.

کدام حل المسئله را سراغ دارید که تصنیف نویسنده آن  
است؟ همه مسائلی را از کتابهای دیگر انتخاب کرده به دنبال هم ردیف  
کرده‌اند. فوقش یک حل المسائل خارجی را ترجمه کرده‌اند.  
دیگران هم حق دارند همین کار را انجام دهند.

۶- بین بعضی دسته‌هار قابنی برای چاپ حل المسائل ایجاد  
شده است. هر یک می‌خواهد مسائل تازه‌تری را عنوان کند. مسائلی  
را ترجمه می‌کنند و چاپ می‌کنند که بعضی از آنها اصولاً جزو  
برنامه متوسطه مانیست. برای داشجويان خیلی ساده و پیش‌پا  
افتاده است و برای دانش‌آموزان غیرقابل استفاده. اگر بالفرض  
چاپ حل المسائل را مفید بدانیم باید قبول کنیم که از مسیر خودش  
منحرف شده است.

۷- اجازه بفرمایید یک موضوع را مطرح کنیم و درباره  
آن تبادل نظر کنیم درجه صورت استفاده از حل المسائل مفید  
فاایده است؟

● - دنباله بحث به جلسه بعد می‌افتد. چون فعلاً وقت  
نداریم.

که راه حل آنها برای طالبین عرضه شود.

● - یک چنین مسائل خاصی هیچ وقت جزو تمرينهای  
کتاب درسی ذکر نمی‌شود. مگر اینکه مؤلف کچ سلیقه اش دیگر نمی‌کند  
خواسته باشد به این وسیله کتابش را ممتاز جلوه دهد. از اینها  
گذشته، باز هم فقط معلم است که با برداشتن حل این مسائل را به  
نحوی که صلاح می‌داند برای محصلین بیان کند و خودش اگر  
اشکال داشته باشد از کتاب مخصوص معلم استفاده کند.

۸- در اینکه استفاده از حل المسائل تمرينهای کتاب درسی  
برای محصلین مفید نیست بلکه مضر هم هست شکی نیست و تقریباً  
همه معلمان این عقیده را دارند.

\* - من هم همین عقیده را دارم اما همه معلمان چنین  
اعتقادی ندارند، مسلماً مؤلفین کتاب درسی که همراه کتاب خود  
حل المسائل اثر واهم چاپ می‌کنند عقیده دیگری ندارند.

۹- اگر از آنها هم پرسید می‌بینید که باشما هم عقیده هستند  
منتهی غرضهای دیگری در کار است.

● در چند سال اخیر برای بعضی کتابهای درسی حل المسائل‌هایی  
چاپ شده است که مؤلفین آنها محصلین همان کلاس  
می‌باشند.

۱۰- محصل یک کلاس برای همان کلاس حل المسائل  
می‌نویسد؟!

● - بله، مسائلی را در مدت سال تحصیلی در کلاس حل  
کرده و مرتبآ پاکنویس کرده است آن وقت آخر سال عین دفترچه  
پاکنویس را به چاپخانه می‌سپارد. بابت این کار هم از ناشر  
حق‌الزحمه‌ای نمی‌خواهد، برای وی همین کافی است که نامش در  
پشت جلد یک کتاب ثبت شده باشد. برای ناشران هم غنیمتی است.  
۱۱- اوایل ناشران از قبول چاپ اینکونه حل المسائلها  
اگر از داشتند منتهی یکی از معلمان را حاضر می‌ساختند که  
نامش جزو مؤلفین کتاب ذکر شود. اما فعلاً به این کار هم احتیاجی  
نمی‌بینند.

● دو سال پیش، در یکی از شهرستانها در امتحان ثلث  
دوم محصلی برای حل یک مسئله عین راه حلی را که در حل المسائل  
دیده بوده نقل می‌کند اما بعد معلوم می‌شود که این راه حل غلط  
است. محصل به مقامات قضائی مراجعه کرده بود تا نویسنده  
حل المسائل را مورد تعقیب قرار دهد و نامه‌ای هم برای بعضی از  
مجلات و روزنامه‌ها نوشته بود.

۱۲- صرف نظر از حل المسائل مربوط به تمرينهای  
کتاب درسی، آیا استفاده از کتابهای دیگر حل المسائل تاچه

# دانش تاریخ

## روش ثاؤن در محاسبه مقدار تقریبی جذر اعداد

ترجمه از کتاب : CURIOSITÉS GÉOMÉTRIQUES PAR FOURREY

یعنی  $134^{\circ} \times 2 = 67^{\circ} \times 67^{\circ}$  بطور تقریب بدست خواهد آمد ، خارج قسمت این تقسیم برابر با  $4^{\circ}$  می شود . از شکل علم قبلی شکل علم بارتفاع  $4^{\circ}$  را کم می کنیم که اندازه آن عبارت خواهد شد از اندازه های مستطیلهای  $EI$  و  $GK$  به اضافه اندازه مربع  $FJ$  که رویهم :

$$(4^{\circ} \times 4^{\circ} + 4^{\circ} \times 2 = 536')$$

می شود . اندازه بقیه مربع  $AC$  برابر خواهد شد با :

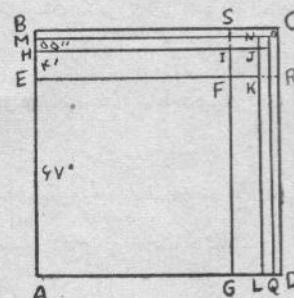
$$66^{\circ} - 536' = 7424'$$

این مقدار اخیر نیز معرف شکل عامی خواهد بود که اندازه ارتفاع آن بطور تقریب از تقسیم "  $7424'$  بر دو برابر اندازه  $AH$  یعنی  $8^{\circ} 134^{\circ}$  بدست می آید . چون این تقسیم را عمل کنیم خارج قسمت برابر "  $55$  خواهد شد شکل علم  $HMOQLJ$  را به ارتفاع "  $55$  می سازیم که مساحت آن برابر با  $(4^{\circ} + 3025') \times 20'$  و "  $7377$  محاسبه خواهد شد و اگر مساحت مربع  $AO$  را از مساحت مربع  $AC$  کم کنیم مساحت باقیمانده معادل  $(4^{\circ} \times 35) + 49' + 55'$  خواهد شد اندازه های هر یک از ضلعهای  $AE$  و  $AH$  و  $AM$  و  $AO$  مقادیر تقریبی جذر  $4500$  می باشد که به ترتیب به مقدار واقعی آن نزدیکتر شده است و البته ممکن است که عمل را به همین ترتیب ادامه داد و جذر  $4500$  را با تقریب کمتری بدست آورد . اما اگر عمل را تا همین اندازه کافی بدانیم جذر تقریبی  $4500$  تا یک ثانیه تقریب برابر شده است با .

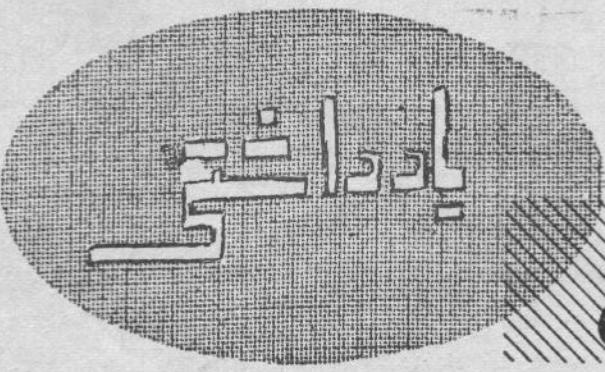
$$AM = \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2} = 67 + \frac{55}{60^2}$$

ثاؤن اسکندرانی که در قرن چهارم میلادی می زیسته در حاشیه ای که بر کتاب «المجسطی» نوشته است روش زیر را برای محاسبه مقدار تقریبی جذر عدد  $4500$  بکار برده است . ثاؤن آحاد عدد  $4500$  را متعلق به دستگاه ستینی ( دستگاه به مبنای شصت ) فرض نموده است به این معنی که هر واحد را مانند یک درجه به  $60$  واحد دیگر یا دقیقه و هر یک از این واحدها یعنی دقیقه را به  $60$  واحد دیگر یا ثانیه تقسیم کرده و عملیاتی به شرح زیر انجام داده است :

بزرگترین مربع کامل کوچکتر از  $4500$  عبارتست از  $ABCD$  که جذر آن  $67$  می باشد . فرض می کنیم مربع  $AEFG$  معرف  $4500$  و مربع  $AEFG$  معرف  $4489$  باشد . اگر مربع دوم را ازاولی برداریم اندازه شکل باقیمانده  $11$  واحد  $665'$  خواهد بود این شکل را که یونانیان (Gnomon) می نامیدند ( نزد ریاضیدانهای اسلامی علم نامیده شده است )



از دو مربع مستطیل متساوی  $GR$  و  $FC$  و یک مربع  $FC$  تشکیل شده است . ارتفاع مشترک مستطیلهای  $($  که در ضمن ارتفاع علم و ضلع مربع است) از تقسیم  $665'$  بر دو برابر قاعدة  $AE$



جایی

از

## نتیجه‌ای از شباهه روز نجومی

مدت زمان یکشبانه روز نجومی ۲۴ ساعت نجومی و معادل با ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه ساعت خورشیدی می‌باشد . پس مدت زمان بین دو عبور متواالی یک‌ستاره ثابت از نصف‌النهار یک‌مکان به اندازه ۴ دقیقه از شبانه‌روز خورشیدی کوتاه‌تر است . یعنی هر شب ، یک‌ستاره‌ثابت ۴ دقیقه‌زودتر از شب قبل از نصف‌النهار مکان می‌گذرد ، که برای هر ماه می‌شود ۲ ساعت .

اگر فرض کنیم که مثلاً صورت فلکی ثور در ساعت ۹ شب سوم آبان از نصف‌النهار تهران بگذرد ، همین صورت در شب ۱۴ آبان در ساعت ۵۶:۰۸ دقیقه و در شب سوم دی در ساعت ۵ بعد از ظهر از نصف‌النهار تهران خواهد گذشت .

$$24 - 1 = 24$$

فرد اول

$$23 \times 2 + 1 = 47$$

فرد ثانی

$$23 \times 47 = 1081$$

فرد سوم

$$1081 \times 16 = 17296$$

متّحابه اول

$$42 + 23 = 70 \quad 70 \times 16 = 1120$$

متّحابه دوم

$$17296 + 1120 = 18416$$

اگر هر کدام از دو عدد متّحابه را تجزیه کنیم می‌شود .

$$17296 = 2^4 \times 23 \times 47$$

$$18416 = 2^4 \times 1151$$

از روی فرمول اگر مجموع مقسوم‌علیه‌های هر یک را حساب کنیم می‌شود .

$$S_1 = 21 \times 24 \times 48 = 35712$$

$$S_2 = 21 \times 1151 = 35712$$

وچون خود عدد استثناست پس

$$\left\{ \begin{array}{l} 35712 - 17296 = 18416 \\ 35712 - 18416 = 17296 \end{array} \right.$$

«اقتباس از کتاب کنز الحساب : فرستنده قوام نحوی از اصفهان»

## «یک طریقه یافتن اعداد متّحابه»

دو عدد را متّحابه یا دوستدار گوئیم وقتی مجموع مقسوم‌علیه‌های هر کدام مساوی دیگری باشد البته خود عدد را درینجا جزو مقسوم‌علیه‌ها یش بحساب نمی‌آوریم . برای یافتن دو عدد متّحابه ابتدا یکی از قوای عدد ۲ را در نظر می‌گیریم (بغیر از خود ۲) مثلاً ۴ ، آنرا در  $\frac{1}{5}$  ضرب کردیم یک واحد از آن کم می‌کنیم می‌شود ۵ ، عدد ۵ را فرد اول می‌نامیم . سپس این عدد را دوبار ابرکردیم با یک جمع می‌کنیم می‌شود ۱۱ و ۱۱ را فرد ثانی می‌نامیم حاصل ضرب :  $5 \times 11 = 55$  را فرد سوم نام می‌گذاریم . بعداً فرد سوم را در عدد ۴ که ابتدا در نظر گرفته بودیم ضرب می‌کنیم می‌شود ۲۲۰ که متّحابه اول است .

سپس فرد اول و فرد دوم را جمع می‌کنیم  $5 + 11 = 16$  و آنرا در ۴ ضرب می‌کنیم  $16 \times 4 = 64$  می‌شود ، آنرا با ۲۲۰ (متّحابه اول) جمع می‌کنیم  $220 + 64 = 284$  می‌شود ۲۲۰ و ۲۸۴ دو عدد متّحابه خواهد بود . طریقه عمل به صورت زیر است .

$$4 \times 1/5 = 6 \quad 6 - 1 = 5$$

$$5 \times 2 + 1 = 11$$

$$5 \times 11 = 55$$

$$55 \times 4 = 210$$

$$5 + 11 = 16$$

$$16 \times 4 = 64 \quad 220 + 64 = 284$$

اگر مجموع مقسوم‌علیه‌های هر یک از دو عدد مزبور را حساب کنیم می‌شود ۵۰۴ که چون خود عدد را جزو مقسوم‌علیه‌های آن نگرفته‌ایم پس

$$504 - 220 = 284$$

$$504 - 284 = 220$$

حالاً گریکی دیگر از قوای ۲ مانند ۱۶ را در نظر بگیریم و مانند بالا عمل کنیم می‌شود :

$$16 \times 1/5 = 24$$

# چگونه مسئله‌ای را حل کنیم؟

ترجمه: ه. شریفزاده

تألیف: G.POLYA

## بررسی ابعاد

در مقالات قبلی، ضمن پرسش «آیا می‌توانید نتیجه را تحقیق کنید»، مثال دیگری دراین مورد آورده‌ایم.

۲ - مامی توایم نتیجهٔ نهایی یا نتایج ضمیم یک مسئله را، که معمولاً ضمن حل آن مسئله با آن موافق می‌شوند، به کمک بعد تحقیق کنیم. تحقیق را بخصوص می‌توان در فرمولهایی به کار برد که می‌خواهیم آنها را به خاطر بیاوریم یا می‌خواهیم آنها را استخراج کنیم مثلاً اگر  $\frac{4\pi r^3}{3}$  فرمولهای  $4\pi r^2$  و  $4\pi r^3$  را که متعلق به سطح و حجم کره‌است به خاطر بیاوریم، ولی کاملاً ندانیم که کدام مربوط به سطح و کدام مربوط به حجم است؛ کافی است که به منظور رفع اشتباه به محاسبه بعد پردازیم.

۳ - چنین تحقیقی به همان اندازه که در هندسه اهمیت دارد در فیزیک نیز مهم است.

آنگه ساده‌ای را در نظر می‌گیریم. آونگ ساده تشكیل شده است از یک جسم کوچک بسیار سنگینی که به نخی آویزان است. طول نخ تغییر ناپذیر و جرم آن ناچیز است، فرض می‌کنیم  $l$  طول نخ و  $g$  شتاب جاذبه و  $T$  زمان تناوب آونگ باشد. باملاحظات مکانیک نشان می‌دهند که  $T = cl^m g^n$

که در آن  $c$ ،  $m$ ،  $n$  مقادیر ثابت عددی هستند. به عبارت دیگر می‌توان گفت که  $T$  متناسب است با قوای  $l^m$  و  $g^n$ . اندازه‌ها را بررسی می‌کنیم: چون  $T$  زمان است باتانیه، واحدی که به  $ds$  نمایش می‌دهیم، اندازه‌گیری می‌شود. واحد طول [سانیمتر «cm»] و واحد شتاب [« $cm \cdot s^{-2}$ ] عبارت است از  $cm \cdot s^{-2}$ . واحد مقدار ثابت برابر است با  $1$ .

معادله ابعادی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$s = 1 \times (cm)^m \cdot (cm \cdot s^{-2})^n$$

$$s = (cm)^{m+n} \cdot s^{-n}$$

بائین صفحه بعد

روشی است مؤثر وسیع برای تحقیق فرمولهای هندسه یا فیزیک که اهمیت آن توسط فوریهٔ خاطر نشان شده است:

۱ - برای آنکه از کار خود نتیجهٔ بهتری بگیریم مثالی را دنبال می‌کنیم. مخروط ناقص دواری را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که در آن  $R$  شاعع قاعدهٔ پائینی؛  $r$  شاعع قاعدهٔ بالایی؛  $h$  بلندی و  $S$  مساحت سطح جانبی آن باشد. واضح است که اگر  $R$  و  $r$  و  $h$  را بدانیم  $S$  معین می‌شود. عبارت زیر را پیدا می‌کنیم:

$$S = \pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2 + h^2}$$

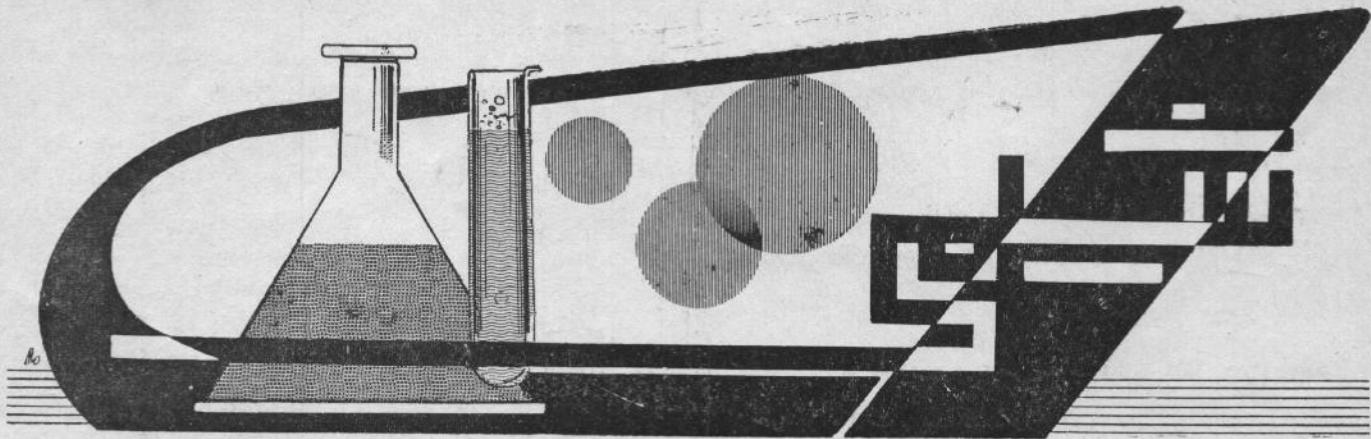
ومی‌خواهیم به کمک «بعد» صحبت آن را تحقیق کنیم. تعیین بعد یک مقدار هندسی ساده است. مثلاً  $R$ ،  $r$ ،  $h$ ،  $S$  شخص‌کنندهٔ درازی هستند و با آنها  $cm$  است. سطح با اندازه‌گیری می‌شوند: پس واحد آنها  $cm^2$  است. سطح با سانیمتر مربع اندازه‌گیری می‌شود: بنا بر این واحد آن  $cm^2$  است. اما  $\pi = 3.14159$  یک عدد است؛ از طرفی برای اندازه‌گیری مقدار خالص عددی باستی آن را بر حسب  $cm^2$  بیان کنیم.

همه جملات یک مجموع همان بعدی را دارند که مجموعشان دارد: مثلاً  $R+r$  با واحد  $cm$ ،  $cm$  اندازه‌گیری می‌شوند؛ جملات  $(R-r)$  و  $h$  هر یک بر حسب  $cm$  سنجیده می‌شوند.

ابعاد یک حاصل ضرب برابر است با حاصل ضرب ابعاد هر یک از عواملش، قاعدهٔ آن مشابه قاعدهٔ قوای اعداد است. اگر به جای کمیات اندازه‌های آن را قراردهیم، فرمولی را بدست می‌آوریم که باید تحقیق کنیم. این فرمول چنین است:

$$cm^2 = 1 \times cm \cdot \sqrt{cm^2}$$

این فرمول درست است. بنا بر این ممکن است که فرمولی را که برای تعیین سطح جانبی نوشته‌ایم درست باشد؛ در هر صورت استدلال به کمک بعد منجر به موفقیت شد.



ترجمه: حسین جواهری دبیر شیمی دبیرستانهای کازرون

## راههای پیداکردن جرم اتمی عنصر (دباله از شماره پیش)

ترکیب	وزن ملکولی	موضوع است:
	وزن کربن در وزن ملکولی	
CS <sub>2</sub>	76	۱۲
CO	28	۱۲
CO <sub>2</sub>	44	۱۲
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26	۲۴
CH <sub>4</sub>	16	۱۲

بنابراین وزن اتمی کربن ۱۲ خواهد بود . ممکن است این سؤال پیش آید که امکان دارد ترکیبی یافت شود که در ملکول آن بیش از یک اتم کربن باشد . در این حالت عددی که به عنوان وزن اتمی بدست می آید مضرب یک ، دو و یا سه از وزن اتمی است .

**طریقه پنجم:** حرارت مخصوص یک گاز به دو نوع

در حالاتی مشابه این حالت تحقیقی که به کمک ابعاد می کنیم معمولا همه آنچه را که مادر جستجویش هستیم جواب نمی دهد ولی قسمت اعظم آن را بیان می کند . مثلاً تحقیق بالا مشخص نمی کند که عدد ثابت (که در حقیقت برابر است با  $2\pi$ ) چقدر است ؟ و مشخص نمی کند که این فرمول تا چه حدودی قابل قبول است ؛ زیرا در حقیقت این فرمول در نوسانات کمداهنده و آن هم بطور تقریب قابل قبول است (حتی درست نیست که بگوئیم فرمول در «نوسانات کمداهنده» صحیح است) . با وجود این همیشه می توان قسمت اساسی نتیجه ای را که در یک مسئله بدست آمده است به کمک ابعاد سریعاً بررسی و تحقیق کرد .

طریقه چهارم - از راه اوزان ملکولی ترکیبات فرار (Volatile CompOund) طریقه کانیزارو (CaniZaro's methOd):

این روش براین اصل استوار است که اگر ترکیبات مختلفی از یک عنصر را مورد مطالعه قرار دهیم ، ملاحظه می کنیم که بعضی از آنها محتمل فقط دارای یک اتم از آن عنصر است . از این و کمترین وزن یک عنصر موجود در وزن ملکولی هر یک از ترکیباتش به عنوان وزن اتمی تلقی خواهد شد . برای پیدا کردن وزن اتمی یک عنصر به طریق مذکور باید اعمال زیر را انجام داد :

الف - وزن ملکولی تمام ترکیبات موجود و مر بوط به آن عنصر را بدست آورد .  
ب - وزن عنصر موجود در وزن ملکولی هر یک از ترکیبات را از طریق تجزیه پیدا کرد .  
ج - کمترین رقمی که بدست می آید نشان دهنده وزن اتمی عنصر است .  
مفروضات زیر درمورد ترکیبات کربن بیان کننده این

طبقه از صفحه «قبل چون باید قوای واحدهای اصلی «cm» و «g» در طرفین تساوی مساوی باشد چنین خواهیم داشت :

$$o = m + n \quad 1 = -2n$$

$$n = -\frac{1}{2} \quad ; \quad m = \frac{1}{2}$$

بنابراین فرمولی که زمان تناوب را بیان کند به شکل

زیر است :

$$T = c!^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} = c \sqrt{\frac{1}{g}}$$

۶- فلز  $M$  تشکیل سولفات می‌دهد که با  $O_2H_2$  و  $MgSO_4$  همشکل است. پیداکنید وزن اتمی فلز  $M$  را در صورتی که  $6538/0$  گرم فلز  $M$   $2/16$  گرم نقره زا از نیترات نقره آزاد می‌سازد. جواب :  $65/38$

۷- کلرور فلزی در اثر تجزیه  $77/79\%$  کلررا از خود نشان داده است. از طرفی حرارت مخصوص این فلز  $0/237$  است پیداکنید وزن معادل وزن این فلز را.

جواب :  $27/2$

۸- کلرور یک عنصر سه ظرفیتی شامل  $40/5$  درصد کلر بوده است. پیداکنید وزن اتمی عنصر را.

جواب :  $156/45$

۹- اکسید عنصری شامل  $33/33\%$  از آن عنصر است همین عنصر، کلروزی می‌سازد که دانسیته بخارش  $59/25$  است پیداکنید وزن معادل، وزن اتمی و ظرفیت عنصر را.

جواب :  $412/3$

۱۰-  $0/216$  گرم از فلزی هنگام ترکیب با اسید سولفوریک رقیق در  $25$  درجه سانتیگراد و  $770$  میلیمتر جیوه، تولید  $80/400$  هیدرژن نموده است. در صورتی که حرارت مخصوص فلز  $0/955$  باشد مطلوبست ظرفیت و وزن اتمی دقیق فلز. (فشار بخار آب در حرارت  $25$  درجه مساوی  $17/4$  میلیمتر است)

جواب :  $2/65$

۱۱- فلز  $M$  کلرور فراری می‌سازد که شامل  $85\%$  کلر است. از طرفی دانسیته کلر در آن  $66/25$  است. پیدا کنید وزن اتمی دقیق فلز  $M$  را جواب :  $26/62$

۱۲-  $1$  گرم از کلرور فلزی هنگام ترکیب با نیترات نقره کافی، تولید  $965/0$  گرم کلرور نقره می‌کند. پیدا کنید وزن اتمی فلز را در حالی که می‌دانیم خواص آن شبیه باریم است. جواب :  $226/4$

۱۳- کلرور فلز  $M$  شامل  $20/2$  درصد فلز است. حرارت مخصوص آن هم  $224/0$  می‌باشد. پیدا کنید وزن اتمی دقیق فلز را. اگر دانسیته بخار کلرور  $66/2$  باشد فرمول ملکولی آن را پیدا کنید  $Cl=35/5$

جواب :  $26/96$

است: حرارت مخصوص در فشار ثابت ( $C_p$ ) و حرارت مخصوص در حجم ثابت ( $C_v$ ). نسبت این دو مربوط به اتمیسیته (Atomicity) گذاشت. برای هلیوم، آرگون و سایر گازهای «یک اتمی»،  $C_p/C_v$  برابر  $1/66$  است. در حالی که نسبت این دو حرارت مخصوص برای گازهای دیگر مانند اکسیژن، ازت و کلر برابر  $1/4$  می‌باشد. ازینرو با دانستن وزن ملکولی گاز (مبنا) و نسبت دو حرارت مخصوص می‌توان ورن اتمی را بدست آورد.

طريقه ششم - با استفاده از جدول تناوبی جدول تناوبی نیز در تعیین و تصحیح اوزان اتمی ورد استفاده قرار می‌گیرد.

## تمرینات

۱-  $1/769$  گرم از مس را در اسید نیتریک حل کرده و محلول حاصل را خشک حرارت داده ایم آنچه را که باقی مانده است تجزیه کرده ایم. وزن  $CuO$  حاصل  $2/214$  گرم شده است. پیدا کنید وزن اتمی مس را.

جواب :  $63/6$

۲-  $1/52$  گرم از فلزی تولید  $1/31$  گرم اکسید نموده است. در صورتی که حرارت مخصوص فلز  $0/056$  باشد وزن اتمی فلز را بدست آورید جواب :  $112/5$

۳-  $1/112$  گرم آلومینیوم تولید  $2/109$  گرم اکسید کرده است. سولفات‌این فلز با سولفات پتاسیم تولید نمک مضاعفی (Double Salt) می‌کند که با زاج کرم  $O_2H_2$  و  $K_2SO_4$  و  $Cr_2(SO_4)_3$  همشکل است. چنانچه ظرفیت کرم باشد وزن اتمی آلومینیوم را پیدا کنید.

جواب :  $26/76$

۴- سولفات‌پتاسیم و سلنات پتاسیم با یکدیگر «ایزومرفند» مقدار درصد گوگرد در سولفات  $18/39$  است. از طرفی  $45/42$  گرم سلنیوم در همین مقدار سلنات وجود دارد. چنانچه وزن اتمی گوگرد  $32$  باشد وزن اتمی سلنیوم را پیدا کنید. جواب :  $118/2$

۵- حرارت مخصوص فلز  $A$  در حدود  $50/3$  است. از طرفی  $15$  گرم از فلز هنگام ترکیب با جوهر شوده تولید  $18/9$  گرم نیترات خشک و خالص نموده است پیدا کنید وزن معادل فلز را.

جواب :  $208/99$

راهنمای حل

## مسائل مقدماتی هندسه

## Résolution des Problèmes élémentaires de géométrie

تألیف: E. J. Honnet چاپ هفتم. پاریس: ۱۹۶۳ - ترجمه: ع. م.

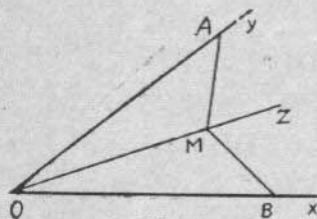
9

### فصل دوم- چگونگی اثبات تساوی دو زاویه

منتظم است، چند نقطه برویک استقامت واقع آند یا اینکه روی یک دایره قرار دارند، همچنین برای تحقیق تساوی یا تشابه دو مثلث و توازی خطوط و موارد دیگر از این مسئله استفاده می شود.

این مسئله مقدماتی در این بات احکام و مسائل مختلف  
بکار می‌رود از قبیل اینکه یک مثلث یا یک ذوزنقه متساوی الساقین  
است، یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع است، یک چند ضلعی

## روش پکیج - استفاده از انطباق



ایثات - نیمساز افقی محور تقارن زاویه  $Ox$  است. اگر نیمة اول زاویه  $xOy$  را حول محور  $Oz$  بر نیمه دوم آن منطبق کنیم،  $Oy$  بر نقطه  $B$  منطبق می‌شود واقع بر  $MA$  بکدیگر منطبق شده‌است.

کنیم،  $OA = OB$  و به علت تساوی  $Ox$  بر  $Oy$  منطبق می‌شود اما نقطه  $M$  ثابت باقی می‌ماند بنابراین  $MB$  بر  $MA$  واقع شده دو زاویه  $MAO$  و  $MBO$  که بر یکدیگر منطبق شده‌اند متساوی می‌باشند.

تمرينات

۶۱- دویک دایره O قطر AB و شعاع OC را عمود بر آن رسم کرده و قطر AB را از هر طرف و در خارج دایره به اندازه  $AE = BD$  امتداد می‌دهیم و خطوط CE و CD را رسم می‌کنیم که دایره را در F و G قطع می‌کنند. ثابت کنید که دوزاویه OFC و OGC باهم برابرند.

در متن درس هندسه این روش در مورد زیر بکار رفته است:  
در مثلث متساوی الساقین زوایه های مقابل به ضلعهای متساوی با  
یکدیگر برابرند.

در حل مسائل از این روش خیلی کم استفاده می‌شود و همانطور که در مورد تساوی دوباره خط هم گفته شد جز در مرور آنکه در مسائل نمایندگان از این روش استفاده نمی‌کنند، این مسئله بحث نمایندگان را در مورد این روش می‌گذارد.

**مسئله ۱۶** - بر دو پل زاویه  $Oy$  دو نقطه  $A$  و  $B$  را به یک فاصله از رأس  $O$  انتخاب می کنیم و آنها را به یک نقطه  $M$  واقع بر نیمساز زاویه وصل می کنیم . ثابت کنید که خطوط  $MA$  و  $MB$  نسبت به ضلعهای زاویه  $Oy$  میلهای متساوی دارند .

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ \angle AOM = \angle MOB \\ \angle AOM = \angle OBM \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{فرض :} \\ \text{حكم :} \end{array}$$

ثابت کنید که دو زاویه  $AHN$  و  $BHN$  برابرند.

۶۳ - دو نقطه  $A$  و  $A'$  نسبت به خط مفروض  $xy$  متقابن هستند، نقطه  $B$  را در همان طرفی از  $A$  واقع است انتخاب

می کنیم و  $A'A$  را به دو نقطه  $B$  و  $C$  از  $xy$  وصل می کنیم. ثابت کنید که دو زاویه  $BAC$  و  $BA'C$  باهم برابرند.

## روش دوم - استفاده از خواص مثلث متساوی الساقین

که زاویه  $FOB$  سه برابر زاویه  $FCB$  است.

۶۴ - در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  قائم در زاویه  $A$ ،

من کز  $A$  و به شعاعی مساوی با نصف وتر کمانی رسم می کنیم که  $BC$  یا امتداد آن را در  $D$  قطع می کند. از  $D$  خط  $Dx$  را موازی  $AB$  وهم جهت با آن رسم می کنیم. به فرض اینکه  $AB$  بزرگتر از  $AC$  باشد ثابت کنید که زاویه  $ADx$  برابر زاویه  $ABC$  است.

۶۵ - در مثلث متساوی الساقین  $ABC$  که  $AB=AC$

دومینه نظیر دوساق یکدیگر را در  $G$  تلاقی می کنند. ثابت کنید که دو زاویه  $GBC$  و  $GCB$  باهم برابرند.

ب - در مثلث متساوی الساقین، میانه یا ارتفاع نظیر قاعده در عین حال نیمساز زاویه رأس می باشد و بر عکس

مسئله ۱۸ - از نقطه  $A$  واقع بر پل زاویه  $O$  خط

عمود بر نیمساز زاویه  $O$  رسم می کنیم. ثابت کنید که این خط با دو پل زاویه  $O$  زاویه های متساوی می سازد.

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض: } \\ AB \perp Oz \\ O \text{ نیمساز } Oz \end{array} \right\}$$

$$\text{حکم: } \angle OAB = \angle OBA$$

اثبات - مثلث

$OAB$  که در آن خط

$OH$  هم نیمساز زاویه

وهم ارتفاع پل معکوب

است متساوی الساقین

بوده و نتیجه می شود

که دو زاویه  $OAB$  و  $OBA$  باهم برابر باشند.

تمرینات

۶۷ - در مثلث متساوی الساقین  $ABC$  خطی موازی

با قاعده  $BC$  رسم می کنیم که دوساق را در  $M$  و  $N$  قطع می کند

و نقاط  $M$  و  $N$  را به  $H$  پای ارتفاع نظیر قاعده وصل می کنیم

ثابت کنید که دو زاویه  $NMH$  و  $MNH$  باهم و دو زاویه  $MHA$  و  $NHA$  نیز باهم برابرند.

۶۸ - ثابت کنید در مثلث قائم الزاویه ای که یک زاویه

حداهاش  $30^\circ$  درجه باشد میانه و ارتفاع نظیر وتر زاویه قائم

به سه قسم متساوی تقسیم می کنند.

۶۹ - ثابت کنید که قطرهای لوزی زاویه های آن را شناختند.

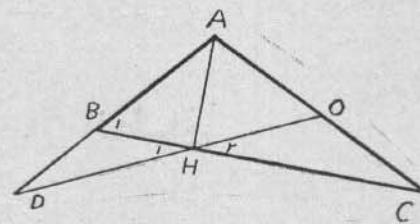
۶۴ - دو نقطه  $A$  و  $A'$  نسبت به خط مفروض  $xy$  متقابن هستند، نقطه  $B$  را در همان طرفی از  $A$  واقع است انتخاب می کنیم و  $BA$  را رسم می کنیم که  $xy$  را در  $H$  قطع می کند. اگر  $NH$  عمودی باشد که در نقطه  $H$  بر  $xy$  اخراج شده است

الف - در مثلث متساوی الساقین زاویه های رو برو و به دو ساق متساویند.

مسئله ۱۷ - در يك مثلث  $BAC$  زاویه  $B$  دو برابر زاویه  $C$  است. ارتفاع  $AH$  را رسم کرده و  $AB$  را از جهت  $B$  به اندازه  $BD=BH$  امتداد داده  $DH$  را رسم می کنیم که پل  $AC$  را در  $O$  قطع می کند. ثابت کنید که دو زاویه  $AHO$  و  $OCH$  باهم و همچنین دو زاویه  $OHC$  و  $OAH$  باهم برابرند.

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض: } \\ AH \perp BC \\ BD=BH \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{حکم: } \\ \angle OHC = \angle OCH \\ \angle OAH = \angle OAH \end{array} \right\}$$

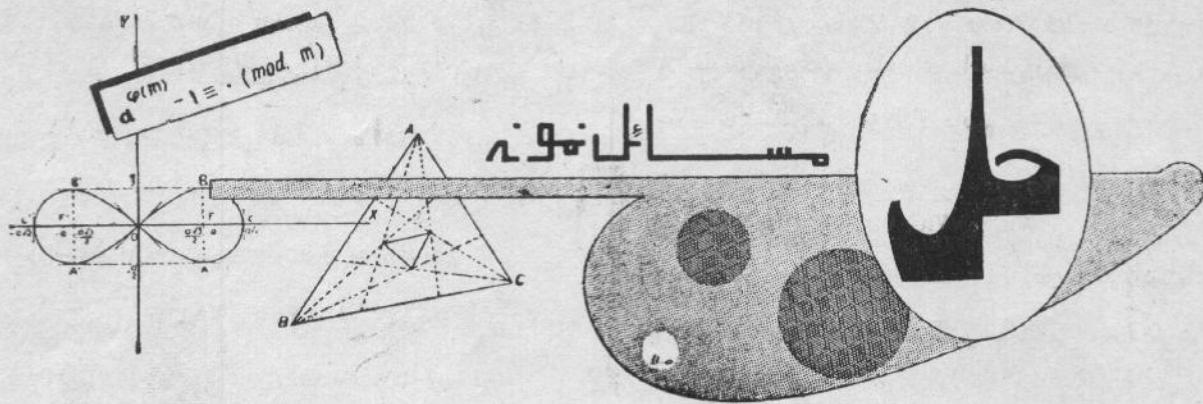


اثبات - مثلث  $BDH$  بنابراین از فرض متساوی الساقین است پس دو زاویه  $D$  و  $H_1$  باهم برابرند و زاویه  $B_1$  که زاویه خارجی مثلث  $BDH$  است دوباره برابر زاویه  $D$  بوده و با توجه به فرض، که زاویه  $B$  دو برابر  $C$  است نتیجه می شود که دو زاویه  $C$  و  $D$  متساوی باشند.

وچون دو زاویه  $H_1$  و  $H_2$  متقابله به رأس بوده و متساوی هستند پس دو زاویه  $C$  و  $H_2$  باهم برابرند. تاکنون از اینکه  $AH$  ارتفاع مثلث است استفاده نکرده ایم مثل اینکه تساوی دو زاویه  $C$  و  $H_2$  به وضع  $H$  روی  $BC$  بستگی ندارد. اما از اینکه مثلث  $AHC$  در زاویه  $H$  قائم است استفاده کرده نتیجه می کیریم که دو زاویه  $OAH$  و  $OHA$  باهم برابرند، چون اولی با زاویه  $C$  و دومی با زاویه  $H_2$  متمم است.

تمرینات

۶۴ - قطر  $AB$  از يك دایره  $O$  را به اندازه  $AC$  کوچکتر از شعاع دایره امتداد داده واز  $C$  قاطع  $CDF$  را چنان رسم کنید که  $CD$  به اندازه شعاع دایره باشد. ثابت کنید



## حل یک مسئله حساب به روش استقراء ریاضی

ترجمه: قوام نحوی دبیر دبیرستانهای اصفهان

$$(4) \quad r_{n-1} = \frac{1 - r_n}{r_n}$$

حل - ۱) به ازاء  $n=1$  داریم :

$$u_1 = a \times 0 + b = b$$

و رابطه صحیح است . به ازاء  $n=2$  داریم :

$$u_2 = a \times 1 + b \times 1 = a + b$$

با زهم رابطه صحیح است . به همین ترتیب ، رابطه به ازاء مقادیر دیگر  $n$  تا  $n=p-1$  و  $n=p$  صحیح می باشد . باید ثابت کنیم که رابطه مذبور به ازاء  $n=p+1$  نیز صحیح می باشد .

چون رابطه به ازاء  $n=p$  و  $n=p+1$  صحیح فرض

شده است بنابراین داریم :

$$\begin{cases} u_{p-1} = av_{p-2} + bv_{p-1} \\ u_p = av_{p-1} + bv_p \end{cases}$$

با ملاحظه این روابط و رابطه مفروض :

$$u_{p+1} = u_{p-1} + u_p$$

خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} u_{p+1} &= (av_{p-2} + bv_{p-1}) + (av_{p-1} + bv_p) \\ &= a(v_{p-2} + v_{p-1}) + b(v_{p-1} + v_p) \\ &= av_p + bv_{p+1} \end{aligned}$$

و رابطه محقق می شود .

۳۸۴۵ - دو رشته نامحدود اعداد حسابی زیر را در نظر

می گیریم بقسمی که از جمله سوم به بعد هر جمله مساوی مجموع دو جمله ماقبل باشد به شکل زیر :

$$v_0 = 3 \quad v_1 = 1 \quad v_2 = 0 \quad v_3 = 2 \quad v_4 = 1 \quad v_5 = 0 \quad \dots$$

$$v_6 = 5 \quad v_7 = v_6 + v_5 \quad \dots$$

$$u_0 = a, \quad u_1 = b, \quad u_2 = a+b, \quad u_3 = a+2b$$

$$u_4 = u_0 + u_3, \quad u_5 = u_1 + u_4, \quad \dots$$

۱) صحت رابطه زیر را تحقیق کنید .

$$(1) \quad u_n = av_{n-1} + bv_n$$

۲) اگر  $s_n$  مجموع  $n$  جمله اول رشته  $v_n$  که از

شروع و به  $v_n$  ختم می شود باشد یعنی :

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = 3, \quad s_4 = 7, \quad \dots$$

ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است

$$(2) \quad s_n = v_n + (-1)^n$$

$$(3) \quad (3) \quad r_n = \frac{v_n}{v_{n+1}} \quad \text{باشد رشته } r_n \text{ را تا ده جمله}$$

نوشته مقدار تقریبی هر جمله را تا  $1/1000$  تقریب حساب کنید . درباره جمله های اندیس فرد و اندیس زوج چه استنباط می کنید - سپس رابطه زیر را ثابت کنید .

$$(3) \quad r_{n-1} - r_n = \frac{(-1)^n}{v_n \times v_{n+1}}$$

۴) صحت رابطه زیر را تحقیق کنید .



# Problems and Solutions

معادل انگلیسی اصطلاحات ریاضی در شماره های گذشته یکان چاپ شده است . ازین به بعد در هر شماره مجله‌یک یا دو مسئله با حل یا یک مقاله به زبان انگلیسی چاپ خواهد شد . علامت  $\angle$  برای زاویه و  $m\angle A$  یعنی اندازه زاویه، مثلًا مقصود از  $m\angle A$  یعنی اندازه راویه A

**Problem 1 :** The pages of a book are numbered consecutively from 1 to n. Two bookmarks are placed so that the number of digits used to number the pages in each of the three sets of pages is the same. The three smallest values of n for which this is possible are 3, 6, and 9. What is the next smallest value of n, and where are the bookmarks placed? How did you obtain your answer?

**Solution :** The book is divided into three sections, each of which contains the same number of digits. The number of pages in the first section exceeds 9, and (if it does not also extend into the hundreds) they contain an odd number of digits. Thus, the second section is located partially in the tens and partially in the hundreds. Let x equal the number of pages in the first section beyond 9. Let y equal the number of pages in the second section beyond 99. Then  $9+2x=2(90-x)+3y$ ; or  $x=(171+3y)/4$ . The least integral value of y which will make x integral is 3. Hence  $(x,y)=(45,3)$ . Thus there are  $9+45=54$  pages and  $9+2(45)=99$  digits in the first section, and  $(90-45)+3=48$  pages, and, as required,  $2(45)+3(3)=99$  digits in the second section. We are now in the hundreds. The next 33 -

pages will contain 99 digits, as required. Thus the book contains a total of  $54+48+33=135$  pages.

**Problem 2:** In Fig 1 quadrilateral ABCD is inscribed in a circle :  $AE = AD$ ;  $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ ;  $CF = CD$ ;  $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$ . prove that  $\overline{DF}$  is perpendicular to  $\overline{DE}$ .

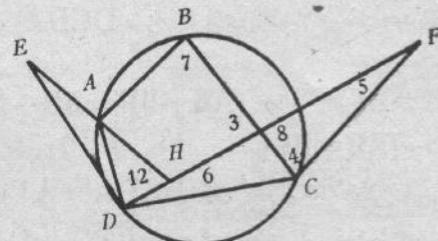


FIG 1

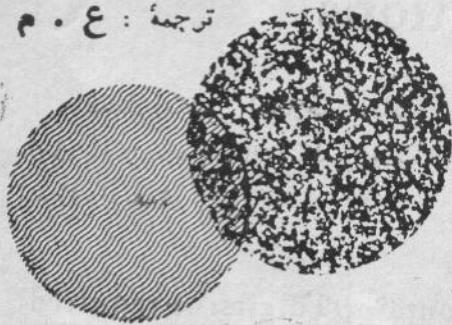
**Solution** Extend  $\overline{EA}$  to meet  $\overline{DF}$  at H. This is possible  $\overline{EA} \parallel \overline{BC}$  which intersects  $\overline{DF}$ . Therefore  $m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 8$ ; and

$$180^\circ = m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 8 \\ = m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 2.$$

Now  $m\angle 7 + m\angle 1 + m\angle 6 = 180^\circ$  (opposite angles of an inscribed quadrilateral).

$$\text{Therefore } m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 2 \\ = m\angle 7 + m\angle 1 + m\angle 6.$$

But  $m\angle 7 = m\angle 4$  (parallel lines), and  $m\angle 5 = m\angle 6$  ( $CF = CD$ ). Hence  $m\angle 1 = m\angle 2$ ; from which it follows that  $AD = AH$ . But since  $AD = AE$ , median  $AD$  of  $\triangle DAH$  equals one-half of  $EH$ . Therefore  $\triangle EDH$  is a right triangle, with  $\overline{DA}$  perpendicular to  $\overline{DH}$ .



## ریاضیات مقدماتی

### III - فضای نقطه‌ای تصویر فضای برداری

ب - مجموعه برداری ؟ متوازی الاضلاع  
مجموعه چهار نقطه  $A, B, C, D$  متوازی الاضلاع نامیده  
می شود هرگاه  $(AB \equiv DC)$  باشد بنابراین خاصیت تقارنی رابطه  
هم ارزی،  $DC \equiv BA$  نیز متوازی الاضلاع خواهد بود. از  
طرف دیگر داریم

$$[AB \equiv DC] \iff [AB + BD \equiv BD + DC] \\ \iff [AD \equiv BC]$$

يعني  $BCDA$  و  $ADCB$  نیز متوازی الاضلاع می باشد  
جانشینی (۱) با (۲) که یک نوع انعکاس فی ما بین است خاصیت  
اساسی متوازی الاضلاع می باشد. این خاصیت را تعویض نقاط  
واسط در هم ارزی می نامیم.

یادداشت - درباره تعویض واسطه ها در مبحثهای مختلف  
روابطی را ملاحظه می کنیم مثلا در مجموعه اعداد داریم .  
 $a - b = c - d \iff a - c = b - d$

در مجموعه کسرها یا نسبتها داریم

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

در مجموعه بردارها :

$$AB \equiv CD \iff AC \equiv BD$$

در مجموعه زاویه ها خواهیم داشت

$$(a \wedge b) = (c \wedge d) \pmod{2\pi}$$

$$\iff (a \wedge c) = (b \wedge d) \pmod{2\pi}$$

ج - ضرب در یک عدد - خطوط . قضیه تالس

۱) نقاط بریک استقامت - سه نقطه  $A, B, M$  بریک  
استقامت خواهند بود هرگاه عددی مانند  $K$  وجود داشته باشد  
بنسبتی که  $AM \equiv KAB$  باشد. اگر  $K$  مجموعه  $R$  اعداد حقیقی  
را پیماید، مجموعه نقاط  $M$  یک خط را معین خواهد کرد.  
به این معنی که اگر  $A$  و  $B$  مفروض باشند بین نقاط خطوط  
و مجموعه  $R$  تناظر دوسویی برقرار است. تعیین  $A$  داریم

توضیح - همانطور که در شماره پیش بیان شد  $v$  به صورت  
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$  به صورت  $OA$  چاپ می شود .

الف) مقصود تعریف یک مجموعه  $E$  می باشد که  
عنصرهای نقاط نامیده شده و تعیین فضای برداری ساخت  
 $v$  باشد .

این فضای برداری را  $n$  بعدی فرض می کنیم . عنصری  
در نظر می گیریم به نام نقطه مبدأ کامعمولا با حرف  $O$  نشان  
داده می شود و  $n$  نقطه  $A_1, A_2, \dots, A_n$  و ... که هر کدام  
با یکی از بردارهای پایه فضای برداری مفروض تعیین باشد و  
چنین می نویسیم .

$OA_1 = v_1, OA_2 = v_2, \dots, OA_n = v_n$   
هر نقطه دیگر  $M$  ، عنصر  $E$  ، با برداری مانند  $v$  از  
تعیین بوده و چنین نوشته می شود .  
حال اگر  $M$  و  $P$  یک زوج نقطه متعلق به  $E$  باشند  
و داشته باشند  $OP = V'$  و  $OM = V$  بنابراین قرارداد قبول می کنیم  
که  $MP = OP - OM$  به عبارت دیگر  $MP = V' - V$  (رابطه شال)

در فضای نقطه‌ای  $E$  نشانه  $MP$  را باز هم بردار  
می نامیم به مناسب وجه تشابهی که با تعیین خود در مجموعه  
دارد . (همانگونه که بین اعداد طبیعی و اعداد صحیح مثبت وجه  
تشابهی برقرار است) .

بردار  $MP$  مشخص وضع  $P$  نسبت به  $M$  می باشد .  
بنابراین فضای برداری  $V$  ، هم ارزی (یا همسنگی)  
دو بردار از  $E$  یک رابطه ذاتی خواهد بود یعنی مستقل از مبدأ  
 $O$  می باشد :

$$MP = OP - OM = (OO' + O'P) - (OO' + O'M) = O'P - O'M$$

$$k = 0 \text{ و تغییر } B \text{ داریم}$$

اگر  $(D)$  خطی باشد که با  $(A)$  و  $(B)$  مشخص شده است  
و  $M_1$  و  $M_2$  دونقطه از این خط باشند داریم .

$$AM_0 = k_0 AB, AM_1 = k_1 AB$$

نتیجه خواهیم گرفت

$$AM \in (D), M_0 M_1 = h M_0 M_1$$

که در آن :

$$h = \frac{k_1 - k_0}{M_1 - M_0}$$

بنابراین هر دونقطه دلخواه از یک خط این رابطه را معین خواهند کرد .

هر بردار  $V = \lambda AB$  موازی یا هم امتداد با  $AB$  و همچنان  $M_1 M_2$  نامیده می شود ، البته  $M_1$  و  $M_2$  دونقطه از خط  $(V)$  هستند . این بردار  $\lambda$  دیرکتور (Vecteur directeur)  $AB$  نامیده می شود . همه خطوطی که دارای یک بردار دیرکتور باشند خطوط متوازی گفته شده و نقطه مشترکی ندارند .

مخصوصاً ،  $n$  خط که بر مبدأ  $O$  گذشت و بردار دیرکتورهای آنها به ترتیب  $n$  بردار پایه فضای برداری باشند مجموعه مختصات نامیده می شوند .

۲) خاصیت توزیعی عمل ضرب نسبت به جمع برداری رابطه

$$kAB = kAC + kCB$$

## یک مسئله هم بوط به ریاضیات جدید

عمل را تکرار کنیم به زیر مجموعه‌ای مانند  $p_n$  بر سیم که فقط شامل یک عنصر باشد .

۳) مورد استعمال : در یک بازی ، شخصی باید از یک مجموعه شامل  $p$  عنصر که تهیه نیستی از آنها ممکن است یک عنصر را بیابد (مثلًا : مجموعه اعداد محصور بین دو عدد معین ، مجموعه کلمات یک کتاب ، وغیره) . برای این کار ، شخص مزبور تعدادی سؤال مطرح می کند که بهر یک آنها جواب آری یا نهاده خواهد شد . ثابت کنید که حداکثر با  $n$  سؤال ، تعیین عنصر مطلوب امکان پذیر است . و مقدار  $n$  را تعیین کنید

مثال - از شخصی می خواهند که تاریخ معینی (سال و ماه و روز) واقع بین یکم فروردین ۱۳۵۰ تا آخر اسفند ۱۳۹۹ را معلوم کند . ثابت کنید که با طرح حداکثر ۱۶ سؤال می تواند این تاریخ را بیابد .

فرض می کنیم  $A$  مجموعه‌ای باشد شامل  $p$  عنصر . بایک اولین عمل ،  $A$  به دو زیرمجموعه  $A_1$  و  $A'_1$  تقسیم می شود

که اگر  $p$  زوج باشد هر کدام شامل  $\frac{p}{2}$  عنصر و اگر  $p$  فرد باشد

یکی از آنها شامل  $\frac{p-1}{2}$  عنصر و دیگری شامل  $\frac{p+1}{2}$  عنصر می باشد

و فقط یکی از دو زیرمجموعه ، مثل  $A_1$  رانگاه می داریم . در دومین عمل همان رویه ای را که در باره  $A_1$  بکار بر دیم در باره  $A_2$  اعمال می کنیم و زیرمجموعه دومی از  $A_2$  بدست می آید مانند  $A_2$  و عمل را به همین ترتیب ادامه می دهیم و هر دفعه فقط یکی از دو زیرمجموعه حاصل را نگاه می داریم .

۹) حداکثر مقدار  $n$  چه خواهد بود تا بعد از  $n$  دفعه که

نوشته ژرژ گامو

ترجمه از فرانسه



## داستانهای تفتنی ریاضی

# در باشگاه هو انوردان

### ۳. سوختگیری در حال پرواز

محتوی ۴۰۰۰۰ لیتر بنزین باشد هنگامی که محتوی بنزین هریک از آنها به ۳۶۰۰۰ لیتر برسد درست در این لحظه اگر محتوی بنزین یکی از ده هواپیما را بین ۹ هواپیمای دیگر تقسیم کنیم سهم هریک از آنها ۴۰۰۰ لیتر بنزین شده و در نتیجه مخزن همه آنها باز پر می شود . ازاین به بعد ، فقط ۹ هواپیما در حال پرواز هستند و هنگامی که یک نهم ذخیره بنزین خودرا مصرف کرند یکی از آنها موجودی بنزین خودرا بین ۸ هواپیمای دیگر تقسیم می کنند که در نتیجه مخزن هر یک از این ۸ هواپیما باز پر خواهد شد و هواپیمای خالی متوقف می شود . عمل بنزین گیری حین پرواز به همین ترتیب ادامه پیدا می کند و هواپیماها یکی پس از دیگری محتوی بنزین خود را بین بقیه هواپیماها تقسیم می کنند تا وقتی که آخرین هواپیما که حامل بمب است ، بنزین کافی داشته باشد که خودرا به مقصد پرساند و بمب را بر هدف بیندازد ، البته در این لحظه آخرین قطره بنزین خودرا مصرف کرده است .

حال اگر  $R$  ساعت عمل هواپیما ،  $n$  تعداد هواپیماها و  $D$  مسافت مورد نظر باشد رابطه زیر را خواهیم داشت :

$$D = \frac{R}{n} + \frac{R}{n-1} + \frac{R}{n-2} + \dots + \frac{R}{3} + \frac{R}{2} + R$$

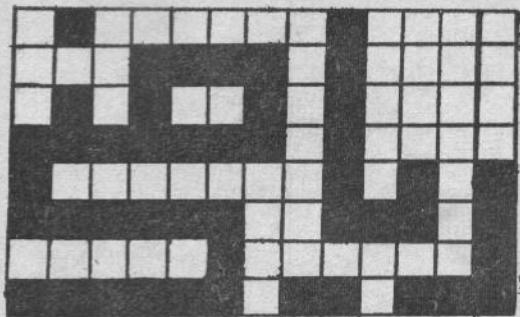
$$D = R[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}]$$

اگر  $n = 10$  فرض شود مجموع کسرهای داخل کروشه برابر خواهد شد با  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9}$  و می رساند که با این روش بنزین گیری می توان هدفی را که فاصله آن تقریباً سه برابر ساعت عمل هواپیما است بوسیله یک هواپیما بمباران کرد .

یکی از خلبانها یعنی که در باشگاه حضور داشت رو به دیگران کرده اظهار داشت مسئله ای را می داند که مسلمًا برای دیگران جالب خواهد بود و چنین توضیح داد :  
شما باید با هواپیمای خود نقطه ای از زمین را بمباران کنید . اما مسافتی را که باید پیمایید به مراتب بیش از ساعت عمل هواپیما می باشد . به ناچار ، چند هواپیمای دیگر ، همانند هواپیمای شما ، شمارا همراهی می کنند که در بین راه ، هریک به نوبت با قیمانده بنزین خودرا بین هواپیما های دیگر تقسیم کرده و خود از پرواز دست می کشند تا اینکه هواپیمای شما که حامل بمب است به نقطه هدف برسد . حال شما باید جواب بدینید که برای این کار چند هواپیما لازم است تا شما را همراهی کنند و علاوه بر آن ، بر زانه سوختگیری در بین راه را چگونه تنظیم می کنید ؟ برای سادگی فرض کنید که میزان مصرف بنزین هر هواپیما با لیتر در کیلو متر معین می شود و علاوه ، مقدار محمولة هر هواپیما در میزان مصرف بنزین آن تأثیری نداشته باشد .

یکی از خلبانان حاضر در باشگاه پیشنهاد کرد که چون همه خسته هستند و حوصله فکر کردن نداورند لذا آنکه مسئله را مطرح ساخته خودش جواب آنرا نیز بیان کند و خلبان اول پاسخ مسئله را به شرح زیر توضیح داد :

فرض می کنیم که  $n$  هواپیمای همانند از فرودگاه حرکت کنند و مخزن همه آنها پر از بنزین باشد . یکی ازاین هواپیماها حامل بمب است . در جریان پرواز هواپیماها ، لحظه ای می رسد که اگر مقدار بنزین باقیمانده در هریک از  $n$  هواپیما را بین  $(n-1)$  هواپیمای دیگر تقسیم کنیم مخزن هریک از این  $n-1$  هواپیما کاملاً پر خواهد شد . مثلاً اگر ابتدا ده هواپیمای همانند از فرودگاه حرکت کرده باشند و مخزن هر کدام از آنها



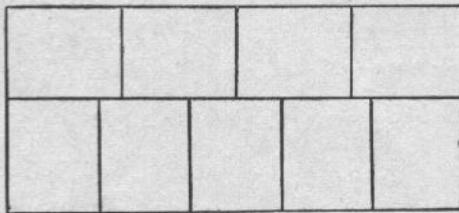
# سیر میانی

## سرگرمی فکری

$$\begin{array}{c} \blacksquare \blacktriangle + \blacksquare \blacklozenge = \blacksquare \blacktriangledown \blacklozenge \\ - : - \\ \blacksquare \times \blacklozenge = \blacksquare \blacktriangle \blacksquare \\ \hline \blacksquare \blacklozenge - \blacksquare = \blacksquare \blacksquare \end{array}$$

هر مرربع نمایش یک رقم است و مربعهای مختلف نمایش رقمهای متفاوت می‌باشند. با توجه به عالمتهای بین اعداد هر یک از رقمهای راتعین کنید  
احمد سیاحیان، تبریز

## محاسبه از روی شکل

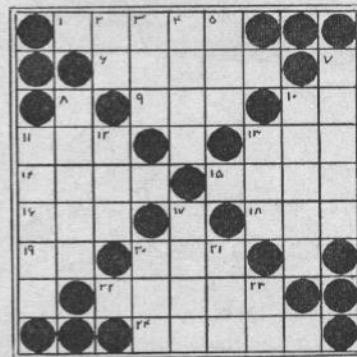


مساحت مستطیل شکل بالا که از ۹ مستطیل مساوی تشکیل شده برابر ۴۵ واحد سطح است. محیط آنرا حساب کنید.

مصطفی گودرزی طائمه

۱	۵	۰	۲	۱	۳	۲	۴	۳
۱	۹	۷	۷	۳	۲			
۴	۹	۸	۷	۶				
۱	۱	۱	۱	۱				
۷	۴	۲	۹	۱				

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹



## جدول اعداد

طرح از: سید جمال آشفته

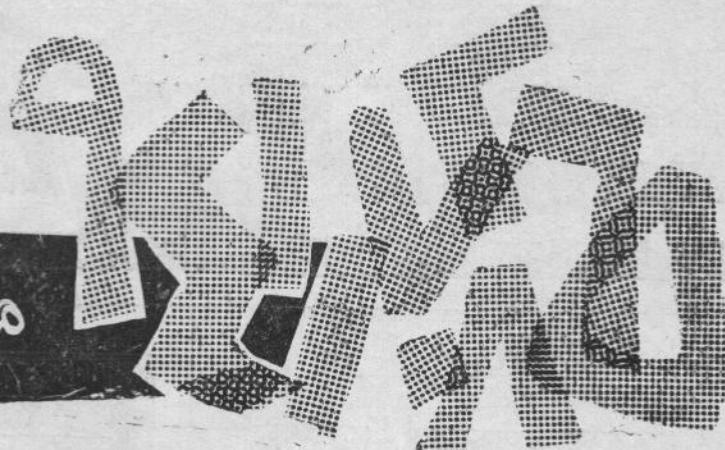
- افقی: ۱- منجم حسابی آن از تکرار ۵۱ بdest می‌آید. ۶- حاصل ضرب توان هشتم یک عدد در ده برابر ۳۹. ۹- عددی به صورت abc که هر یک از اعداد b و ca و cab مربع کامل هستند.  
 ۱۰- عددی اول که یک رقش سه برابر دیگری است. ۱۱- مرربع کامل است و برابر است با حاصل ضرب مجموع ارقامش در حاصل ضرب آنها. ۱۳- هفت برابر یک چهارم عدد ۱۶ افقی. ۱۴- جذر تقریبی اضافی آن تا ۵۰/۱۶ تقریب برابر ۴۲/۹۲ است. ۱۵- پنج برابر تفاضل اعداد ۱۳ و ۱۶ افقی ۱۶- تکرار یک رقم. ۱۸- خارج قسمت تقسیم آن بر عدد ۱۵ افقی برابر ۵ است و نصف آن عددی است اول. ۱۹- تعداد صدهای عدد ۹ افقی. ۲۰- مقلوب عدد ۹ افقی. ۲۲- تکرار یک رقم. ۲۴- از ۲۵ برابر عدد ۱۵ افقی بداندازه یک هفتم عدد ۱۳ افقی زیادتر است.

- قامی: ۲- هفت برابر مجموع ارقامش است. ۳- تا به حال آنرا پیدا کرده‌اید. ۴- عددی است مقارن. ۵- ترتیب دیگری از ارقام اعداد ۹ و ۲۰ افقی. ۷- مجموع ارقامش ۲۹ است. ۸- عدد ۱ افقی. ۱۰- برابر ۱۱- بخش پذیر است و مجموع ارقامش ۲۴ است. ۱۱- حاصل ضرب یک عدد اول در ۱۲۶. ۱۲- عدد ۱۶ افقی. ۱۳- عددی که بر هیچیک از اعداد ۲ تا ۹ بخش پذیر نیست. ۱۷- ضرب یکی از ارقام عدد ۱۳ افقی. ۲۰- چهار برابر عدد ۱۵ افقی. ۲۱- مقلوب هم مکعب است و هم مجذور. ۲۳- عددی است اول.

## حل مسئله «خر و ج از چنگل»

مناسیبت‌رین راه حل آنست که حرکات رفت و برگشت در طول یک قطر انجام گیرد. مثلاً به شرح زیر: امتداد جنوب غربی تا شماره ۴ بعد جنوب غربی تا ۶، شمال شرقی تا ۶، شمال شرقی تا ۲، شمال شرقی تا ۵: جنوب غربی تا ۴ جنوب غربی تا ۴، جنوب غربی تا ۴ و بعد از آن در امتداد شمال غربی که آخرین حرکت به خارج می‌افتد.

# مسائل پرایی حل



پاسخهای خود را چنان بفرستید که تا قبل از پایان مهرماه به اداره مجله برسد . روی هر یک از ورقهایی که حل مسائل را می نویسید نام و کلاس خود را ذکر کنید . از ارسال حل مسائل هر یو ط به کلاسهای پائینتر از کلاس خود خودداری کنید.

مقدار  $f(nx)$  را بر حسب  $f(x)$  بدست آورید

**۳۸۵۰** - از بهمن از گمی دیر ریاضی همدان  
به فرض

$$\log ax^3 - \log bx^2 - \log cx + \log d = 0$$

رابطه‌ای بین  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  بدست آورید

**۳۸۵۱** - ترجمه از مجله ریاضیات دانش آموز

در مثلث  $ABC$  زاویه‌ای که میانه  $AD$  با ضلع  $AB$  می‌سازد . دو برابر زاویه‌ای است که این میانه با ضلع  $AC$  می‌سازد . دوران  $C$  عمودی بر  $CA$  اخراج شده که امتداد میانه  $AE=2AB$  را در  $E$  قطع کرده است . ثابت کنید که  $AD$

## کلاس پنجم طبیعی

**۳۸۵۲** - سه نقطه  $(2, 3)$  و  $(-1, -2)$  و  $(-2, 0)$  مفروض است . مختصات نقطه  $D$  وسط  $BC$  و نقطه  $E$  وسط  $AC$  را تعیین کرده ثابت کنید دو مثلث  $ADE$  و  $ABC$  متشابه می‌باشند .

$$\sin \alpha = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{کمانی است حاده که } \quad \text{۳۸۵۳}$$

می‌باشد . مقادیر  $\cos \alpha$  و  $\tan \alpha$  را بر حسب  $x$  حساب کنید و اگر  $\cot \alpha = 2\sqrt{2}$  باشد مقدار قابل قبول  $x$  را تعیین کنید .

## کلاس پنجم ریاضی

**۳۸۵۴** - ترجمه بهزاد سوfer  
چهار نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  بر یک خط راست واقع اند در صورتی که

## کلاس چهارم طبیعی

**۳۸۴۶** - ترجمه : بهزاد سوfer دانشجوی دانشگاه آریامهر  
حاصل عبارت زیر را به ازاء مقدار داده شده از  $x$  بدست آورید

$$y = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + bx + c}, \quad x = -\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a - b}}$$

**۳۸۴۷** - لوزی  $ABCD$  به قطر اطول  $AC$  مفروض است بر مرکز لوزی خطی مانند  $\Delta$  چنان مروز دهدید که اگر  $A'B'C'D'$  قرینه لوزی مفروض نسبت به  $\Delta$  باشد هر یک از چهارضلعی‌های  $BB'DD'$  و  $AA'CC'$  مربع باشد .

## کلاس چهارم ریاضی

**۳۸۴۸** - از علی نصر دانش آموز دیرستان البرز  
به فرض  
 $a = x^5 - 2x^4 - x^3 + 8$  و  $b = x^3 + x^2 - x - m$   
مقدار  $m$  را چنان تعیین کنید که داشته باشیم  
 $a \equiv b \pmod{(x-2)}$   
(یعنی باقیماندهای تقسیمهای  $a$  و  $b$  بر  $x-2$  برابر باشند)

**۳۸۴۹** - ترجمه از مجله ریاضیات دانش آموز

اگر داشته باشیم

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

پس از برخورد با بیضی منعکس می شود . معادله خط محمل شاعع منعکس را تعیین کنید .

**۳۸۶۱ - ترجمه : هراج کاراپتیان**  
ثابت کنید که دو بیضی به معادله های

$$m^2x^2 + n^2y^2 - m^2n^2 = 0$$

$$n^2x^2 + m^2y^2 - m^2n^2 = 0$$

و  $m \neq n$ ) یگدیگر را در چهار نقطه واقع بریک دایره قطع می کنند . مرکز و اندازه شاعع این دایره را مشخص کنید .

**۳۸۶۲ - از فرهاد مجیدی آهی دانشجو**  
مطلوب است حل معادله مثلثاتی زیر

$$\frac{1 + \sqrt{1 - \sin 2x}}{1 + \sqrt{1 + \sin 2x}} = \tan x$$

**۳۸۶۳ - ترجمه از فرانسه**

در ضرب دو عدد صحیح به عامل اول یک واحد و به عامل دوم دو واحد اضافه می کنیم ، در این صورت حاصل ضرب دو برابر می شود . هریک از دو عامل را تعیین کنید .

**۳۸۶۴ - ترجمه از فرانسه**  
باقیمانده تقسیم عدد  $7077^{377}$  را برابر ۱۱ بدست آورید

**۳۸۶۵ - ترجمه از فرانسه**  
نقطه  $M$  دایره ثابت به مرکز  $A$  و به شاعع  $R$  را می پیماید  $O$  نقطه ثابتی از صفحه دایره می باشد . نظریه هر نقطه  $M$  نقطه  $N$  باشراحت

$$OM = ON \quad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

تعیین می کنیم مکان نقطه  $N$  را تعیین کنید  
مسئله را نیز در حالتی حل کنید که  $M$  به جای دایره هیک خط مستقیم ثابت را می پیماید .

## مسائل متغیر قه

برای فارغ التحصیلان ششم ریاضی ،  
دانشگاه او طبله ان کنکور

**۳۸۶۶ - از جواد جمشیدی**

مجموع زیر را حساب کنید

$$S_n = 6 + 26 + 326 + \dots + \underbrace{33\dots 3}_n - 1$$

**۳۸۶۷ - باشد حاصل هر یک از عبارتهاي زير را بر حسب  $K$  تعیین کنيد .**

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} : \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}$$

**۳۸۶۸ - دونقطه (۱ و ۲) و (۳ و ۴) مفروض**

است از راه محاسبه طول قطعات مختصات نقطه تلاقی خط  $AB$  را با نیمساز زاویه  $Oy$  حساب کنید .

**۳۸۶۹ - از ههرداد لاله زاری دانشآموز دبیرستان خوارزمی**

**a** و **b** دو عدد مثبت هستند که جذر کامل ندارند . بدفترض

$$\sin x = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b} - 1)}{4} \quad \text{و} \quad \cot x = 2 + \sqrt{b}$$

مقادیر **a** و **b** و نسبتهاي مثلثاتی کمان  $x$  را معلوم کنید

**۳۸۷۰ - مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین ABC** که در

آن طول وتر  $BC = 2a$  واقع در صفحه  $P$  مفروض است  $y$  نیمساز زاویه خارجی  $A$  را رسم کرده صفحه  $Q$  را در نظر می گیریم که بر  $yx$  گذشته و بر صفحه  $P$  عمود باشد . در صفحه  $Q$  به مرکز  $A$  و به شاعع  $a$  دایره ای رسم می کنیم . ثابت کنید فواصل هر نقطه  $M$  این دایره از سه ضلع مثلث مفروض با اندازه های این اضلاع نظیر به نظریه متناسب می باشند .

## کلاس ششم طبیعی

**۳۸۷۱ - ثابت کنید که خط واصل بین نقاط  $M$  که زیر  $y = x^2 - 2x + q$  دارای امتداد ثابتی است .**  
به ازاء چه مقدار از  $q$  ، این خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم را در نقطه به طول ۱ -- قطع خواهد کرد .

**۳۸۷۲ - از احمد میر نژاد**  
بدون استفاده از مشتق مقادیر ماکریم و مینیم تابع زیر را تعیین کنید و بعد با استفاده از مشتق تابع  $y = \sqrt{3 \sin x \cos x - \cos^2 x + a^2}$

## کلاس ششم ریاضی

**۳۸۷۳ - ترجمه : هراج کاراپتیان**  
از کانون 'F' (با طول منفی) بیضی به معادله :

$$y^2 + 45y^2 + 20x^2 = 900$$

زاویه برابر با  $\arctg(2 - 2)$  می سازد . این شاعع نورانی

$$\begin{aligned} & \text{درستی تساوی زیر را محقق کنید} \\ & x^n(1+m-x^n)(2+m-x^n) \times \dots \times (k+m-x^n) \\ & = m(m+x)(m+2x) \dots [m+(k-1)x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{۳۸۷۲ - ترجمه: قوام نحوی} \\ & \text{مقدار } x \text{ را چنان انتخاب کنید که مجموع زیر مینیم باشد} \\ & \text{و مقدار این مینیم را حساب کنید} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 \times x^1 + 2(x-a)^2 + 3(x-2a)^3 \\ & \quad + \dots + n[x-(n-1)a]^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{۳۸۷۳ - از علی نصر، دیبرستان البرز} \\ & \text{معادله زیر را حل کنید} \end{aligned}$$

$$\sum_{a=0}^{a=n} x+a = \sum_{a=0}^{a=n} x-a$$

**۳۸۷۴ - از: حافظی**

مجموع زیر را حساب کنید

$$\begin{aligned} S_n = & 11^2 \times 10^n - 1 + 101^2 \times 10^n - 2 \\ & + 1001^2 \times 10^n - 3 + \dots + (1000 \dots 01)^2 \end{aligned}$$

مرتبه  $n-1$

$$\begin{aligned} & \text{۳۸۷۵ - ترجمه: حبیب الله گلستانزاده} \\ & \text{هر گاه } p+1 \text{ و } 2p+1 \text{ دو عدد اول بوده و باعده فرد} \\ & \text{متباين باشند ثابت کنید که عدد } 1-n^{2p} \text{ بر عدد:} \end{aligned}$$

$$(p+1)(2p+1) \text{ بخش پذير است.}$$

**۳۸۷۶ - ترجمه: بهزاد سوفر**

$$\begin{aligned} & \text{خط } xy \text{ و نقاط A و B واقع در يك طرف آن مفترضند.} \\ & \text{بر نقطه M را چنان تعیین کنید که مساحت مثلث} \\ & \text{MAB برابر مقدار معلوم K شود (بحث)}$$

$$\begin{aligned} & \text{۳۸۷۷ - طرح از: م - ح . رزاقی خمسی} \\ & \text{در مثلث قائم الزاویه ABC که در A قائمه است از نقطه O} \\ & \text{مرکز دایرة محاطی داخلی به سه رأس مثلث وصل می کنیم . به} \\ & \text{كمک تشابه مثلثات روابط زیر را ثابت کنید}$$

$$\overline{OA}^t = (BC - AC)(BC - AB)$$

$$\overline{OB}^t = BC(BC - AC)$$

$$\overline{OC}^t = BC(BC - AB)$$

**۳۸۶۷ - از علی بیات مختاری دیبرستان خیام**  
نیشاپور

اگر داشته باشیم

$$\begin{aligned} a^r + b^r + c^r &= ab + bc + ca \\ a \neq b \neq c \text{ تساوی زیر را ثابت کنید} \end{aligned}$$

$$(a-c)^r + (b-c)^r + (c-a)^r =$$

$$\frac{1}{r} [(a-b)^r + (b-c)^r + (c-a)^r]^r$$

**۳۸۶۸ - ترجمه: حبیب الله گلستانزاده**

اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  اعداد صحیح مثبت باشند ثابت کنید که دستگاه زیر جواب ندارد.

$$\begin{cases} a^r + b^r = c^r + d^r \\ a+b = c+d \end{cases}$$

**۳۸۶۹ - ترجمه: پرویز خواجه خلیلی**

اگر اختلاف هر دو کمان  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  برابر  $\pi$  نباشد و داشته باشیم

$$\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin^r \alpha} = \frac{\cos(\beta+\theta)}{\sin^r \beta} = \frac{\cos(\gamma+\theta)}{\sin^r \gamma}$$

ثابت کنید که اولاً  $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$  و ثانیاً

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma$$

**۳۸۷۰ - از حسن پور رضائی**

اگر داشته باشیم

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\log_x a_1} &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\log_x a_r} \\ &= \dots = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{\log_x a_n} \end{aligned}$$

ثابت کنید که خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a_1^{a_n - a_2} \times a_2^{a_1 - a_3} \times a_3^{a_2 - a_4} \times & \dots \times a_{n-1}^{a_n - a_1} = 1 \\ & \text{۳۸۷۱ - از: حافظی} \end{aligned}$$

اگر داشته باشیم

$$x + x^r + x^r + \dots + x^n = m$$

### مسائل فیزیک (ترجمه: هوشنگ شریفزاده)

را تعیین کنید . نشان دهد که با این آزمایشها ، بدون دانست وزن و زنهایا ، می توان افزایش طول فنر را هنگامی که سوزنه باهم آویزان شوند حساب کرد .

**۳۸۷۹ - برای کلاس های پنجم**

فرض می کنیم که مرکز خودشید ، ماه ، و زمین بر يك خط

**۳۸۷۸ - برای کلاس های چهارم**

افزایش طول يك فنر به ازای وزنهای به وزن  $10\text{gf}$  بر ابراست با  $1\text{cm}$  سوزن را ، که وزن آنها به ترتیب  $x$  ،  $y$  ،  $z$  است ، دو به دو به فنر می آویزیم . افزایش طول فنر برای حالات ممکنه بر ابر ۱۲ ، ۱۶ ، ۲۰ ، ۲۵ سانتیمتر می شود . مقدار  $x$  ،  $y$  ،  $z$

مستقیم قرار گیرند . داریم :

$$D = 12800 \text{ km} = 109 \text{ km}$$

قطر ماه  $D = 2700$  = 1 فاصله زمین - خورشید

قطر ظاهری ماه که از زمین دیده می شود ۳۳' . مطلوب است :

۱- قطر ظاهری خورشید که از زمین دیده می شود (بر حسب دقیقه) :

۲- فاصله زمین تمامه :

۳- ارتفاع محروم سایه ماه به هنگام کسوف کامل :

۴- قطر ناحیه ای از زمین که در آنجا می توان کسوف را مشاهده کرد .

### ۳۸۸۰- برای کلاسهای ششم

از نقطه A واقع بر خط قائم مکان AB گلوله ای را بدون

سرعت اولیه رهامی کنیم تا گلوله به نقطه B برسد

$$AB = 200 \text{ cm}$$

مدت زمان سقوط گلوله را اندازه می کیریم  $t = 0.708 \text{ s}$  . آیا

از این آزمایش مقدار قابل قبولی برای شتاب ثقل بدست می آید ؟ بحث کنید .

### مسائل شیمی

بخار می رود .

۳۸۸۳- برای خنثی کردن  $10 \text{ cc}$  از یک محلول منواسید  $12/5 \text{ cc}$  سود  $10/88$  نرمال لازم است . نرمالیته اسید را پیدا کنید . محلول حاصل را تبخیر می کنیم با قیمانده عمل  $0/902$  کرم جرم دارد ، جرم ملکولی اسید را محاسبه کنید .

۳۸۸۳- در ظرفی  $25 \text{ cc}$  اسید سولفوریک نرمال و  $100 \text{ cc}$

اسید کلرید ریک دسی نرمال و  $20 \text{ cc}$  پتاں  $\frac{1}{2}$  نرمال وارد می کنیم اولاً فاکتور اسیدی محلول را بدست آورید ثانیاً تعیین کنید برای خنثی کردن کامل محلول چه حجمی از سود نرمال لازم است ثالثاً هر گاه تقریب حجم  $0/2$  باشد حجم سود با چه تقریبی

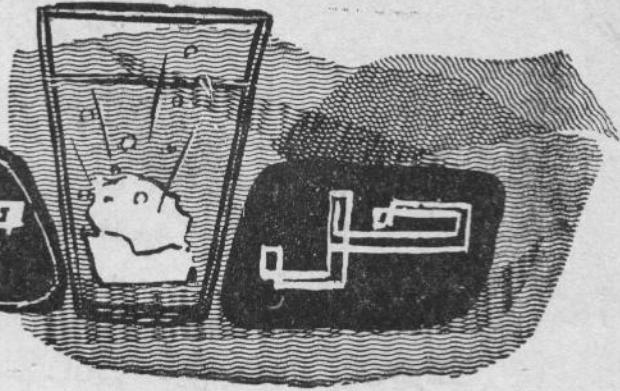
### بی آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

به هریک از شش وجه اطاقی (چهاردیوار ، سقف و گف اطاق) یک میخ می کوییم و این شش میخ را دو به دو با نخ به هم وصل می کنیم . به این ترتیب یک عدد مثلثهای تشکیل می شود که ضلعهای آنها نخهای واصل بین میخهای باشد . اگر نخهایی که بکاره می بریم فقط از دورنگ باشد (مثلث قرمز و آبی) . آیا ممکن است که تعداد نخهای هر رنگ را چنان انتخاب کرده که سه ضلع هیچیک از مثلثهای تشکیل شده یک رنگ نباشند .

### پاسخ مسئله تحت همین عنوان در شماره پیش

طبق قانون ارشمیدس هر جسمی که در سطح آب شناور باشد مقدار حجم آبی را که جای جامی کند معادل با وزن آن جسم می باشد آهن به مراتب سنگین تر از آب است . درحالی که تیر آهن سنگین داخل قایق گذاشته شده است مقدار حجم آبی که توسط قایق اشغال می شود چندین برابر حجم تیر آهن خواهد بود . اما وقتی که تیر آهن به داخل آب رها شود . مقدار حجم آب جای جامی که فقط مساوی با حجم تیر آهن می باشد . بنابراین وقتی که تیر آهن را از داخل قایق برداشته به داخل آب بیندازیم ، سطح آب تغییر کرده و بالاتر قر می رود .

# مسائل شماره کاخ الله



اگر حل مسئله‌ای را فرستاده‌اید اما نام شما ذیل حل آن در این شماره درج نشده است به یکی از علل زیر می‌باشد:  
راه حل انتخابی شما درست نبوده یا ناقص بوده است، روی ورقه‌ای که حل مسئله را نوشته‌اید نام و کلاس خود را  
یادداشت نکرده‌اید، مسئله‌ای مربوط به کلاس پائین‌تر از کلاس خود را حل کرده‌اید، نامه شما دیرتر از مهلت مقرر به دست مسا  
رسیده است.

## حل مسائل یکان شماره ۲۷

و بهمین ترتیب از معادله III خواهیم داشت  $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$  - که  
این رابطه هم غیرممکن است.

پاسخهای درست رسیده: ژاله قهرمانی - عذرنا  
صادق زاده شهرداد محبزاده - آفری تاج الدینی - بهنام محسنی  
محمد گرمادی - محمد قندی - محمد رضا یزدان - محمود  
نمایزی - احمد بهبهان - سید حسین مرتضوی - حسن جعفری -  
احمد حسین زاده داداش - حمید وکیل زاده - منصور توفیقی -  
محمد رضا بلورانی - احمد جلیلی تنها - مجید حقگو - جلال  
اشجاعی - محمد مقدسی - علی نصر - احمد کرمانی - مهدی  
خواجهی - عباس کشاورز - حسین رئیس زاده - علی احمدی -  
رمضان اصغر پور - اکبر مظاہری - علیرضا میرمحمد صادق -  
قربانعلی میرزا زاده - حسین امین الهی - محسن تقی - محمد  
ابکاء - احمد میر فراز - عبدالله سعیدی - عبدالمحمود وصله چی  
عبدالله غیر تمند - فریدون امین زاده - داریوش آزادی - غلامرضا  
اصلانی - پرویز مرادی حقگو - محمد رضا عباس زاده نامی -  
غلامحسین اسدالهی - بهروز نوبهار - شهرام ذکاوی - احمد  
کمیلی - هدایت طوماریان - هرتصنی احسانی - حسین علوی -  
حسین توسلی - اسدالله آسرایی - حسین خبازیان - حسن جعفری  
ابراهیم شیرازی - رحیم جارچی - کامران نعیم - حسن نواییان  
بیژن آرام - سعید فرشاد - بهبود پژوهش - مهران بقایی -  
عباس طلائی - احمد درفش دار - مقصود صلاحی - داود تراکم -  
تقی هاشمیان - حسن مکارمی - محمود مرتضوی - ناصر نهاوندی پور  
منصور نهاوندی پور - محمد مهدی رازقیان جهرمی - فریبرز

۳۷۸۴ - تحقیق کنید که آیا معادله زیر جواب حقیقی  
قابل قبول دارد یا نه

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3x\sqrt{x} + 3x + \sqrt{x}} + \frac{1}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{4\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = 4$$

حل - صورت و مخرج جمله‌های اول و سوم را بر  $\sqrt{x}$  تقسیم  
می‌کنیم. بعد از اختصار خواهیم داشت

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)^1 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) = 4$$

$$\text{بافرض } A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \text{ خواهیم داشت}$$

$$A^2 + A^1 - 4A - 4 = A^2(A+1) - 4(A+1) = 0$$

$$(A+1)(A^1 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$A_1 = -1 \quad A_2 = 2 \quad \text{یا} \quad A_3 = -2$$

در نتیجه:

$$\text{I) } \frac{1}{\sqrt{x}+1} = -1 \quad \text{یا} \quad \text{II) } \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 2$$

$$\text{III) } \frac{1}{\sqrt{x}+1} = -2$$

از معادله I نتیجه می‌گیریم  $\sqrt{x} = 2$  - که بک تساوی غیرممکن  
است.

از معادله II خواهیم داشت  $\sqrt{x} = 1$  که این رابطه هم  
بیچگاه برقرار نیست.

شش مکعب کامل تبدیل کنید.

حل - داریم

$$6a(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) =$$

$$2a^3 + 6b^3a + 2a^3 + 6c^3a + 2a^3 + 6d^3$$

از جمع قطعی به نظری طرفین اتحادهای زیر

$$2a^3 + 6b^3a = (a+b)^3 + (a-b)^3$$

$$2a^3 + 6c^3a = (a+c)^3 + (a-c)^3$$

$$2a^3 + 6d^3a = (a+d)^3 + (a-d)^3$$

خواهیم داشت:

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 + (a-c)^3 + (a+d)^3$$

$$+ (a+c)^3 + (a-d)^3 = 6a(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$$

پاسخهای درست رسیده: علی اصغر اسکندر بیاتی -

اسدالله تراشچین پور - محسن نیک احمدی - محمد گرمدای -

نادر پهلوان - مهدی راسخ - رضا آلانی - حسن جعفری - حمید

وکیلزاده آملی - اکبر مظاہری - محسن تقی - عبدالغیر تمدن -

فریدون امین زاده - حسین جعفری - رحیم جارچی - مهران بقایی

حسن مکاری - عیسی خندانی - محمد صادق نهادنی -

محسن هاشمی نژاد - حسین اسکندری - کریم معلمی - بهروز

نویهار - لطف الله سیدی - حسین توسلی - مسعود اکرامی -

مقصود صلاحی - داود تراکم - حسن روشنی مقدم .

$$x^5 - 5qrx + 4r \quad 3787$$

بخش پذیر باشد ثابت کنید که:  $q^5 = r^3$

حل - می توان نوشت که

$$x^5 - 5qrx + 4r = (x^3 - 2cx + c^2) \times$$

$$\times (x^3 + ax^2 + bx + \frac{4r}{c^2})$$

$$x^5 - 5qrx + 4r = x^5 + (a - 2c)x^4 + (c^2 + b - 2ac)x^3$$

$$+ (ac^2 - 2bc + \frac{4r}{c^2})x^2 + (bc^2 - \frac{8r}{c})x + 4r$$

برای اینکه این اتحاد برقرار باشد باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} a - 2c = 0 \\ c^2 - 2ac + b = 0 \\ ac^2 - 2bc + \frac{4r}{c^2} = 0 \\ bc^2 - \frac{8r}{c} = -5q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = c^5 \\ q = c^4 \end{cases}$$

که با حذف  $c$  بین دو رابطه فوق نتیجه می شود:  $q^5 = r^3$

پاسخهای درست رسیده: مریم شاملی - آفری تاج الدینی

بهنام محسنی - اسدالله تراشچین پور - محسن نیک احمدی -

عباسعلی شکری - علیرضا کریمی - رحیم جارچی - محمد گرمدای

محمد قندی - م.ص.ا. محمدی - محمود نمازی - حسن روشنی

مقدم - نادر پهلوان - مهدی راسخ - رضا آلانی - احمد حسین

جمشیدی کلانتری - علی اصغر اسکندر بیاتی - صمد فرهنگ - جمشید

احمدیان - محمد متولیان - فرهاد مجیدی آهی

۳۷۸۵ - عبارت زیر را به صورت ضرب دوچندجمله ای

تجزیه کنید .

$$(1+x+x^2+\dots+x^n)-x^n.$$

حل - عبارت داخل پرانتز یک تصاعد هندسی است و می توان نوشت

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2 - x^n =$$

و با

$$\frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)^2} = \frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)(1-x)}$$

$$= \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) \left(\frac{1-x^{n+2}}{1-x}\right) =$$

$$= (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) \times (1+x+x^2+\dots+x^{n+1})$$

پاسخهای درست رسیده: مریم شاملی - فخری مولانا -

بهنام محسنی - محسن نیک احمدی - عباسعلی شکری - محمد

گرمدای - محمد قندی - سیدحسین مرتضوی - حسن جعفری -

احمدحسین زاده داداش - منصور توفیقی ملایر - محمد رضا بلورانی

احمد جلیلی تنها - جلال اشچی - محمد مقدسی - علی اصغر شاملی

احمد کرمانی - مهدی خواجهی - عباس کشاورز - حسین

رئیس زاده آملی - علی احمدی - رمضان اصغر پور - اکبر مظاہری

حسین امین الهی - عبدالله سعیدی - عبدالله غیر تمدن - غلامرضا

اصلانی - پرویز مرادی حقگو - غلامحسین اسدالله - حسین علوی

حسین خبازیان - ابراهیم شیرازی - رحیم جارچی - کامران نعیم .

مهران بقایی - عباس طلائی - ناصر نهاوندی پور - منصور نهاوندی پور

صمد فرهنگ - جمشید احمدیان - علیرضا میرمحمد صادق -

محسن صابری حق دلیل - جواده هاشمی نژاد - محسن هاشمی نژاد

حسین اسکندری - احمد میر نژاد - محمد رضا سعیدی و سفی -

عیسی هندی نژاد - علی اکبر دوستدار صنایع - عیسی خندانی -

اسحق عبدالله پور امام - محمد صادق نهاوندی - حسن عبدالله یان

مسعود لاویان - مقصود صلاحی - شعبانعلی رضائی - چنگیز آزادی

فریبوز جمشیدی کلانتری - محمد مهدی عابدی نژاد - علی اکبر

صنعتی - داود تراکم - بیژن آرام - بهبود پژوهش - سیدمهدی

جعفری - محمد صادق ابریشمیان - علی اصغر اسکندر بیاتی -

محمد رضا مفخم - محمدحسین صیاد - نصرالله صائبی - مصطفی

اسحاقیان - محمد متولیان - سعید فرشاد .

۳۷۸۶ - عبارت  $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$  را به مجموع

آفری تاجالدینی ، بهنام محسنی اسدالله تراشچیان پور ، محسن نیک احمدی ، بهروز شاهرخی ، علیرضا کریمی ، غلامرضا حبیمی در آبادی ، محمد گرمایی ، چنگیز ارومیه محمد قندی ، محمد رضا یزدان ، علی طباطبائی ، محمود نمازی ، روح‌الله صادقلو نادر پهلوان ، احمد بهبهان ، مهدی راسخ ، رضا آلانی ، حسن جعفری - احمد حسین زاده داداش - حمید و کیل زاده - منصور توفیقی ملایر - احمد جلیلی تنها - مجید حقگو - جلال اشجعی - محمد مقدسی - سینا مرشدی - احمد کرمانی - شهریار دیانت - مهدی خواجهی درفش دار - جمشید موری - عباس کشاورز - حسین رئیس - زاده آملی - رمضان اصغر پور - اکبر مظاہری - قربانعلی میرزا زاده - حسین امین الهی - محسن تقوی - منصور توفیقی ملایر - احمد جلیلی تنها - مجید حقگو - جلال اشجعی محمد مقدسی - علی طاهری - اصغر شاملی - سینا مرشدی احمد کرمانی - شهریار دیانت - مهدی خواجهی - جمشید موری ابراهیم شیرازی - کامران نعیم - عباس طلائی - تقدی هاشمیان - عباس کشاورز - حسین رئیس زاده آملی - رمضان اصغر پور قربانعلی میرزا زاده - حسین امین الهی - محسن تقوی - محمد ابکاء - عبدالله سعیدی - عبدالله محمد وصله‌چی - عبدالله غیر تمدن داریوش آزادی - پریز مرادی حقگو - غلامحسین اسدالهی مرتضی احسانی - حسین علوی - اسدالله آسایی - ابراهیم شیرازی رحیم جارچی - کامران نعیم - عباس طلائی - حسن مکارمی محمود مرتضوی - ناصر نهادنی پور - منصور نهادنی پور محمد مهدی رازقیان جهرمی - صمد فرهنگ - حسن روشنی مقدم محسن صابری حق دلیل ، عیسی خندانی ، حسن عبداللهان شعبانعلی رضائی ، محمد مهدی عابدی نژاد ، محمدرضا مفخم محمد حسین صیاد ، نصرالله صائبی ، مسعود اکرامی ، علی احمدی اکبر مظاہری ، علی منصور خاکی ، علی اصغر امیر خانلو ، عنايت الله قره خانلو ، علی رضا اعلی اکبری احمدیان ، محمود محمد شبیعی ، حسین جعفری ، حسین اسکندری ، مهران بقایی ، عزت الله مصطفوی - جمشید احمدیان ، محمد حاج سلیمانی صمد حیاتی ، داود حسینی ، جواد هاشمی نژاد ، محسن هاشمی نژاد احمد میر نژاد ، محمد رضا یوسفی ، مهرداد معتمد گرجی ، عیسی هندی نژاد ، علی اکبر دوستدار صنایع - اسحق عبدالله پور امام ، غلامرضا اصلانی ، مسعود لاویان ، قاسم بهنام ، جواد حسas بهروز نوبهار ، احمد کمیلی ، کریم مردمی ، شهرام ذکارتی محمود دفضل ، هدايت طوماریان ، علی اصغر اسکندری بیاتی ، اکبر باستانی پور ، لطف الله سیدی ، احمد توسلی ، محمد تقی طیب سعید رستگار ، حسین توسلی ، سید مرتضی حسینی خرمی ، محمد رضا استایشی ، محمدرضا وانی ، چنگیز آزادی ، حسن نوائیان اسماعیل برین خو ، فرهاد غفاری ، بیژن آرام ، محمد تقی معیر بهنود پژوهش ، قربانعلی شاهی ، آرمن یوسفی ، حجت الله باانی احمد درفش دار ، ناصر حاجی عسکری ، مقصود صلاحی ، فریبرز جمشیدی کلانتری ، داود تراکمه ، محمد متولیان ، سعید فرشاد سلیمان نصرت آبادی

$$F(z) = \log_a x \quad \text{اگر } x^a = z \quad \text{باشد}$$

ثابت کنید.

زاده داداش - حمیدو کیل زاده - منصور توفیقی ملایر - احمد جلیلی تنها - مجید حقگو - جلال اشجعی - محمد مقدسی - علی اصغر شاملی سینا مرشدی - احمد کرمانی - شهریار دیانت - مهدی خواجهی احمد درفش دار - جمشید موری - عباس کشاورز - حسین رئیس - زاده آملی - رمضان اصغر پور - اکبر مظاہری - قربانعلی میرزا زاده - حسین امین الهی - محسن تقوی - عبدالله سعیدی - عبدالله محمد وصله‌چی - عبدالله غیر تمدن - فریدون امین زاده هدايت طوماریان - مرتضی احسانی - حسین علوی - اسدالله آسایی ابراهیم شیرازی - کامران نعیم - عباس طلائی - تقدی هاشمیان - حسن مکارمی - ناصر نهادنی پور - منصور نهادنی پور محمد مهدی رازقیان جهرمی - صمد فرهنگ - عیسی خندانی محمد صادق نهادنی - محمد مهدی عابدی نژاد - بیژن آرام محمد حسین صیاد - نصرالله صائبی - محمد متولیان - لطف الله سیدی علی احمدی - اکبر مظاہری - علی منصور خاکی - جواد هاشمی نژاد احمد میر نژاد - علی اصغر امیر خانلو - اسحق عبدالله پور امام - عنایت الله قره خانلو - غلامرضا اصلانی - علی رضا علی اکبری - احمد میرزا محمدی - حسن عبداللهان - علی آقا بابا - محمود فضل - محمود محمد شفیعی - مسعود لاویان - احمد توسلی حسین توسلی - حسین جعفری - محمدرضا ستایشی - ناصر حاجی عسکری حسین اسکندری - مهران بقایی - فرهاد مجیدی آهي ، عزت الله مصطفوی - مقصود صلاحی ، داود تراکمه ، ژوزف صالح ، علی دبیری فرد ، روبن هارو طونیان ، محمد رضا مفخم ، جمشید احمدیان ، محمد حاج سلیمانی ، سعید فرشاد

$$x^3 - q(3p - 1) + q^2 = 0$$

برابر مجدد ریشه دیگر باشد ثابت کنید که

$$p^3 - q(3p - 1) + q^2 = 0$$

حل - با توجه به روابط بین دوریشه معادله فوق داریم

$$\begin{cases} x' + x'' = -p \\ x' x'' = q \\ x' = x'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \sqrt[q]{q} \\ x'' = \sqrt[q]{q} \end{cases}$$

مقدار  $x$  را در معادله مفروض قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود

$$\sqrt[q]{q} + p\sqrt[q]{q} + q = 0$$

و یا :

$$(1) \sqrt[q]{q} + \sqrt[q]{q} = -p \Rightarrow \sqrt[q]{q}(\sqrt[q]{q} + 1) = -p$$

طرفین این رابطه را به توان ۳ می‌رسانیم و با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌شود.

$$p^3 - q(3p - 1) + q^2 = 0$$

پاسخهای درست رسیده : - عذرًا صادق زاده ، ژاله قهرمانی ، مریم شاملی ، شهردخت محبزاده ، اعظم صمد نوری

جمشیدی کلاتری ، داود تراکم ، سعید فرشاد  
۳۷۹۱ - مقدار  $x$  را از رابطه زیر بدست آورید

$$x = 10 \times 100^{\frac{1}{\log 9 - \log 2}}$$

حل - داریم

$$x = 10 \times 10^{\frac{\log 9 - \log 4}{\log \frac{9}{4}}} = 10 \times 10^{\frac{9}{4}}$$

از طرفی داریم .

$$\frac{\log \frac{9}{4}}{10} = \frac{9}{4}$$

$$x = 22/5$$

**پاسخهای درست رسیده :** شهردخته حبزاده ، مریم طباطبائی ، عذر اصادق زاده ، آفری تاج الدینی ، اعظم صمد نوری مریم شاملی ، فخری مولانا ، بهنام محسنی ، اسدالله تراشچیان پور محسن نیک احمدی ، بهروز شاهرخی ، رحیم جارچی ، جواد پور نادری ، محمد گرمادی رئیس زاده آملی ، رمضان اصغر پور ، قربانعلی میرزا زاده ، حسین امین الهی ، محمد ابکاء ، عبدالله سعیدی ، عبدالله غیر تمدن ، ناصر نهادنده پور ، منصور نهادنده پور ، صمد فرهنگ ، علی اکبر دوستدار صنایع ، محمد صادق نهادنده ، محمد مهدی عابدی نژاد محمد رضامختم ، اکبر مظاہری ، مهران بقایی ، فرهاد مجیدی آهي علی دیری فرد ، صمد حیاتی ، محمد متولیان ، جواد هاشمی نژاد احمد نیر نژاد ، عیسی خندانی ، فریدون امین زاده ، داریوش آزادی مقصود صلاحی ، حسین اسکندری ، محمد صادق ابریشمیان ، احمد درخشان ، عزت الله مصطفوی ، محمد حسین صیاد ، داود تراکم محمد مهدی راز قیان جهرمی ، جمشید احمدیان ، محمد حاج سلیمانی حسین علوی ، حسن روشنی مقدم ، سعید فرشاد

$$F[f(x)] = f[F(x)]$$

حل - داریم

$$F[f(x)] = a^{\log_a x} = x$$

$$f[F(x)] = \log_a a^x = x$$

$$F[f(x)] = f[F(x)]$$

**پاسخهای درست رسیده :** ژاله قهرمانی ، مریم شاملی

فخری مولانا ، فاروق دولتشاهی ، بهنام محسنی ، اسدالله تراشچیان پور عباسعلی شکری ، رحیم جارچی ، جواد پور نادری ، محمد گرمادی علی طباطبائی ، م.ص.ا. محمدی ، محمود نمازی ، نادر پهلوان مهدی راسخ ، رضا آلانی ، حسن جعفری ، احمد حسین زاده داداش محمد رضا بلورانی ، احمد جلیلی تنها ، جلال اشجاعی ، سینا مرشدی ، حجت عادلی ، مهدی خواجهی ، عباس کشاورز ، حسین رئیس زاده آملی ، رمضان اصغر پور ، قربانعلی میرزا زاده ، حسین امین الهی ، محمد ابکاء ، عبدالله سعیدی ، عبدالله غیر تمدن ، ناصر نهادنده پور ، منصور نهادنده پور ، صمد فرهنگ ، علی اکبر دوستدار صنایع ، محمد صادق نهادنده ، محمد مهدی عابدی نژاد محمد رضامختم ، اکبر مظاہری ، مهران بقایی ، فرهاد مجیدی آهي علی دیری فرد ، صمد حیاتی ، محمد متولیان ، جواد هاشمی نژاد احمد نیر نژاد ، عیسی خندانی ، فریدون امین زاده ، داریوش آزادی مقصود صلاحی ، حسین اسکندری ، محمد صادق ابریشمیان ، احمد درخشان ، عزت الله مصطفوی ، محمد حسین صیاد ، داود تراکم محمد مهدی راز قیان جهرمی ، جمشید احمدیان ، محمد حاج سلیمانی حسین علوی ، حسن روشنی مقدم ، سعید فرشاد

۳۷۹۰ - مطلوب است تعیین مقدار  $x$  از رابطه زیر

$$1^{\log x} + (1+2)^{\log x} + (1+2+3)^{\log x} + \dots +$$

$$+ (1+2+3+\dots+n)^{\log x} = n$$

حل - اگر  $\log x \neq 0$  فرض شود حاصل هر یک از عاملهای جمع طرف اول (بجز اولین جمله) از یک بزرگتر بوده و در نتیجه حاصل طرف اول بزرگتر از  $n$  بوده بر این نسبت فقط به ازاء  $\log x = 0$  یعنی  $x = 1$  طرف اول بر این مجموع  $n$  جمله برابر ۱ بوده و تساوی برقرار خواهد بود .

**پاسخهای درست رسیده :** ژاله قهرمانی ، بهنام محسنی رحیم جارچی ، محمد گرمادی ، چنگیز ارومیه ، محمد رضامختم سید حسین مرتضوی ، محمد مقدسی ، احمد گرمادی ، عباس کشاورز حسین رئیس زاده آملی ، حسین امین الهی ، محمد ابکاء ، صمد فرهنگ محمد صادق نهادنده ، مهران بقایی ، مسعود لاویان ، داریوش آزادی ، حسین اسکندری ، محمد حاج سلیمانی ، حسین علوی قاسم صدر بیزاز ، فرهاد مجیدی آهي ، احمد درخشان دار ، فریدون امین زاده ، داود تراکم

۳۷۹۳ - به فرض آنکه داشته باشیم .

$$\begin{cases} a \log_n x + b \log_n y + c = 0 \\ a \log_n y + b \log_n z + c = 0 \\ a \log_n z + b \log_n x + c = 0 \end{cases}$$

ثابت کنید که  $xyz = 1$  :

حل - معادله درجه سوم  $at^2 + bt + c = 0$  را در نظر می گیریم .

بنابر روایت فرض مسئله  $\log_n x$  و  $\log_n y$  و  $\log_n z$  و روابط بین ضرایب و ریشه های معادله درجه سوم می توان نوشت

$$\begin{aligned} \log_n x + \log_n y + \log_n z &= 0 \\ \log_n xyz &= 0 \\ xyz &= 1 \end{aligned}$$

پاسخهای درست رسیده : جواد پور نادری ، چنگیز ارومیه ، سید رضا میر زنده دل ، محمد رضا یزدان ، م.ص.ا. محمدی محمود نمازی ، حسن جعفری ، پرویز مرادی حق گو ، محمد مقدسی علی نصر ، احمد کرمانی ، عباس کشاورز ، علی احمدی ، رمضان اصغر پور ، حسین امین الهی ، بهروز نوبهار ، عباس طلاقی ، محمود هر تقوی ، علی منصور خاکی ، علی دبیری فرد ، هدایت طوماریان عیسی خندانی ، فریدون امین زاده ، قاسم صدر بزار ، جمشید احمدیان ، غلامرضا اصلانی ، محمد مهدی عابدی نژاد ، حسین اسکندری ، مهران بقایی ، غلامحسین اسدالهی ، محمد متولیان اکبر مظاہری ، جواد هاشمی نژاد ، محمد اباء ، عبد الله غیر تمدن احمد میر نژاد ، محمود دفضل ، ضرغام محمودی ، فرهاد مجیدی آهی محمد صادق ابریشمیان ، احمد درفشن دار ، عزت الله مصطفوی مقسود صلاحی ، رحیم جارچی .

۳۷۹۴ - اگر  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و ریشه های معادله

$$x^r + Px^r + qx + r = 0$$

باشد مطلوب است محاسبه عبارت :  $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$

بر حسب  $p$  و  $q$  و  $r$

حل - با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه های معادله

مقدار معرف داریم :

$$(1) \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -P \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q \\ \alpha\beta\gamma = -r \end{cases}$$

با استفاده از این روابط نتیجه خواهیم گرفت .

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = r - pq$$

پاسخهای درست رسیده : جمیله ساعی ، بهنام محسنی اسدالله تراجیان پور ، رحیم جارچی ، غلامرضا رحیمی در آبادی محمد قندی ، صمد حیاتی ، محمد رضا یزدان ، م.ص.ا. محمدی

زاده ، گریم معلمی ، فرهنگ امیری ، علی اکبر مبلغ الاسلام عبدالله غیر تمدن ، غلامرضا اصلانی ، رحیم بخشی ، محمد رضا عباس ادنه نامی ، غلامحسین اسدالهی ، شهرام ذکاوی ، کریم مردمی احمد توسلی ، اکبر باستانی پور ، حسین توسلی ، چنگیز آزادی محمد مهدی عابدی نژاد ، فرهاد غفاری ، بیژن آرام ، حسین اسکندری ، مهران بقایی ، حسین اسدی پور ، حجت الله باهائی احمد درفش دار ، حبیب الله مجاهدی ، فریبرز جمشیدی کلانتری حسن نوایان ، مقصد صلاحی جمشید شهروا ، داود تراکمه و بن هاروطونیان ، سعید فرشاد ، سلیمان نصرت آبادی .

۳۷۹۵ - حاصل هر یک از رادیکالهای زیر را حساب کنید

$$(1) \sqrt{\frac{1}{3}(111\dots11 - 33\dots33000\dots00)}$$

$$(2) \sqrt{\underbrace{111\dots11}_{2n} - \underbrace{222\dots22}_n}$$

حل - داریم

$$111\dots11 = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2n-1} = \frac{10^{2n}-1}{9}$$

$$33\dots33 = 3(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) = \frac{10^n-1}{3}$$

پس :

$$\sqrt{\frac{1}{3}(\frac{10^{2n}-1}{9} - \frac{10^n-1}{3})} = \frac{10^n-1}{3}$$

$$\sqrt{\underbrace{111\dots11}_{2n} - \underbrace{222\dots22}_n} =$$

$$\sqrt{\frac{10^{2n}-1}{9} - \frac{2(10^n-1)}{9}} = \frac{10^n-1}{3}$$

پاسخهای درست رسیده : م.ص.ا. محمدی ، محمود نمازی

احمد حسین زاده داداش ، رمضان اصغر پور ، سید حسین مرتضوی حسن جعفری ، جلال اشجاعی ، محمد مقدسی ، مهدی خواجهی محمد گرمهای ، عباس کشاورز ، حسین رئیس زاده آملی ، محمد اباء ، عبد الله سعیدی ، مرتضی احسانی ، عیسی هندی نژاد ، مسعود اکرامی ، علی احمدی ، علی دبیری فرد ، علی اکبر دوستدار صنایع سعید فرشاد ، محمد صادق ابریشمیان ، محمد متولیان ، عبدالله غیر تمدن ، محمد مهدی عابدی نژاد ، مهران بقایی ، صمد حیاتی محسن هاشمی نژاد ، غلامحسین اسدالهی ، احمد میر نژاد ، حسین اسکندری ، محمد صادق نهادنی ، محمود فضل ، فرهاد محمد رضای ، رحیم جارچی ، فرهاد غفاری ، مقصد صلاحی ، فرهاد مجیدی آهی ، فریبرز جمشیدی کلانتری ، داود تراکمه ، احمد درفش دار

بلورانی ، محمد مقدسی ، احمد کرمانی ، حسین جعفری ، فریدون امین زاده ، محمد مهدی عابدی نژاد ، مهران بقایی محمد مهدی رازقیان جهرمی ، حسین امین الهی ، علی نصر محمد متولیان ، جواد هاشمی نژاد ، ناصر حاجی عسگری ، حسین توسلی ، داود تراکمه ، محمود نمازی ،

$$x^2 - px + q = 0 \quad \text{در معادله } x^2 + px + q = 0$$

q را چنان تعیین کنید که اگر يك واحد به هر یك از ریشه های این معادله اضافه کنیم اعداد حاصل ریشه های معادله زیر گردند:

$$x^2 - p'x + pq = 0$$

حل - داریم :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = pq \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = p' \\ x_1 x_2 = pq \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x' + 1 \\ x_2 = x'' + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p' = -p + 2 \\ pq = q - p + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p' + p - 2 = 0 \\ (p - 1)(q + 1) = 0 \end{cases}$$

یک جواب عبارتست از  $(p = 1)$  و جواب دیگر عبارت خواهد شد از  $(p = -2 \text{ و } q = 1)$

پاسخهای درست رسیده : عذرنا صادق زاده - آفری تاج الدینی - اعظم صمد نوری - زاله قهرمانی - اسدالله تراشچیان پور محسن نیک احمدی - عباسعلی شکری - بهروز شاهرخی - علیرضا کریمی - امین رعایایی - غلامرضا رحیمی درآبادی - جواد پور نادری - محمد گرمادی - سعید معصومی - چنگیز ارسنیه محمد رضا یزدان - علی طباطبائی - م. ص. ا. محمدی - محمود نمازی - روح الله صادقلو - نادر پهلوان - احمد حسین زاده داداش رمضان اصغر پور - مهدی راسخ - رضا آلانی - سید حسین هر قضوی حسن جعفری - حمید وکیلی زاده - محمد رضا بلورانی احمد جلیلی تنها - مجید حقگو - جلال اشجاعی - محمد مقدسی علی طاهری - علی اصغر شاملی - احمد کرمانی - شهریار دیانت حجت عادلی - مهدی خواجهی - جمشید نوری - عباس کشاورز حسین رئیس زاده آملی - علی احمدی - محسن تقیوی - پروین مرادی حقگو - هرتضی احسانی - اسدالله سرابی - حسین خبازیان - کامران نعیم - عباس طلایی - حسن مکاری - محسن صابری حق دلیل - شباعانلی رضائی - علی اکبر صنعتی - محمد - حسین صیاد - مصطفی اسحاقیان - علی اصغر امیر خانلو - علی رضا علی اکبری - احمد میرزا محمدی - سعید فرشاد - حسن عبدالله بیان علی آقا بابا - محمود محمد شفیعی - حسین جعفری - محمد رضا مفخم - محمد رضا سعید یوسفی - علی اکبر دوستدار صنایع - بهروز

محمود نمازی ، روح الله صادقلو ، نادر پهلوان ، رمضان اصغر پور مهدی راسخ ، رضا آلانی ، حسن جعفری ، محمد رضا بلورانی احمد جلیلی تنها ، جلال اشجاعی - محمد مقدسی - علی اصغر شاملی احمد کرمانی - مهدی خواجهی - عباس کشاورز - حسین رئیس زاده آملی - علی احمدی - قربانعلی میرزا زاده - عبد الله سعیدی - حسین خبازیان - ناصر نهادنی پور - منصور نهادنی پور - محمد صادق ابریشمیان - محمد رضا مفخم - مسعود اکرامی - حسین جعفری - محمد رضا ستایشی - حسن نواییان ناصر حاجی عسگری - فریدون امین زاده - عبد الله غیر تمدن - غلامحسین اسداللهی - مهران بقایی - محمد مهدی رازقیان جهرمی - صمد فرهنگ - محمد متولیان - اکبر مظاہری - جمشید احمدیان - چنگیز آزادی - علی اکبر دوستدار صنایع جواد هاشمی نژاد - محسن هاشمی نژاد - حسین امین الهی - اسحق عبدالله پور افام - عیسی خندانی - محمد رضا عباسزاده نامی شهرام ذکارتی - حسین توسلی - داود تراکمه - حسین اسکندری فرهاده جمیدی آهنی - احمد درخش دارم سعید دعاونی - مقصود صلاحی علی اصغر اسکندری بیاتی - علی نصر - فریدر ز جمشیدی کلانتری - ناصر حاجی عسگری - حسن روشنی مقدم - فاروق دولتشاهی معادله ۳۶۹۵ - به فرض اینکه  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  ریشه های

معادله :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

با شدن مطلوب است محاسبه عبارت  $\Sigma(\alpha - \beta)^2$  بر حسب ضرایب معادله

حل - با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه های

معادله مفروض داریم .

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{-4b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\delta = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \alpha\gamma\delta = \frac{-4d}{a} \\ \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a} \end{cases}$$

$$\Sigma(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \delta)^2 + (\delta - \alpha)^2 + (\beta - \delta)^2 + (\alpha - \gamma)^2$$

با استفاده از روابط (1) نتیجه می شود :

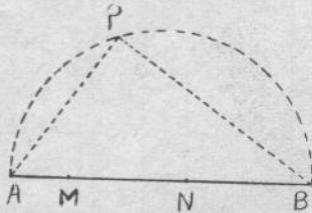
$$\Sigma(\alpha - \beta)^2 = \frac{48(b^2 - ac)}{a^2}$$

پاسخهای درست رسیده : محمد رضا یزدان ، محمد رضا

متولیان ، محسن صابری حق دلیل ، اسحق عبدالله پور افام ، احمد میر نژاد ، فریدون امین زاده ، حسین توسلی ، بهبود پژوهش مقصود صلاحی ، داود تراکم ، تقی هاشمیان ، حسن روشنی مقدم .

۳۷۹۸ - پاره خط  $AB$  و نقطه  $M$  واقع بر آن مفروض است روی  $AB$  نقطه دیگری مانند  $N$  چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$MN^2 = 2MA \cdot NB$$



حل - دایره‌ای به قطر  $AB$  رسم می‌کنیم  $PB$  و از نقطه  $B$  وتر  $BM$  رسم می‌کنیم در مثلث  $QAM$ - الزاویه  $APB$  به آسانی حاصل می‌شود :

$$AP + PB > AM + MB \Rightarrow$$

$$AP + MB > AM + MB$$

$$AP > AM \quad \text{ویا}$$

حال روی  $AB$  پاره خط  $AN$  را مساوی  $AP$  جدا می‌کنیم نقطه  $N$  جواب مسئله است زیرا :

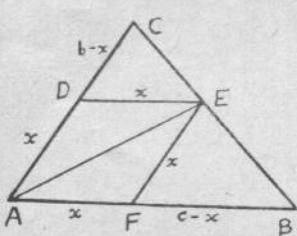
$$AP^2 + PB^2 = AB^2 \Rightarrow (AN)^2 + (MB)^2 = AB^2 \\ (AM + MN)^2 + (MN + NB)^2 = (AM + MN + NB)^2$$

که پس از اختصار نتیجه می‌شود :

$$MN^2 = 2AM \cdot NB$$

پاسخهای درست رسیده : عذر اصادق زاده ، محسن نیک احمدی ، چنگیز ارومیه ، سید رضا میرزنه دل ، محمود نمازی ، حسن جعفری ، محمد رضا بلورانی ، محمد مقدسی ، احمد کرمانی ، حسین رئیس زاده آملی ، مرتضی احسانی ، اسدالله آسرایی ، غلامحسین اسدالله ، محمد ابکاء ، فرهاد مجیدی آهی محمد متولیان ، فریدون امین زاده ، مقصود صلاحی ، حسن مکارمی .

۳۷۹۹ - در مثلث  $ABC$  به اضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$  سه لوزی می‌توانیم محاط کنیم که یک رأس آن بر یک راس مثلث و سه رأس



دیگر شرسنخ پلی می‌شود  
واقع باشد . ازین این  
لوزیها کدامیک دارای  
مساحت بیشتر می‌باشد

$$a < b < c$$

حل - مساحت مثلث

نویهار . هدایت طومانیان . لطف الله سیدی - سعید وستکار - حسن نوائیان . بیژن آرام - قربانعلی شاهی - ناصر حاجی عسگری فریدون امین زاده - حسین علوی . قاسم صدر بزار - عبدالله غیر تمدن - چنگیز آزادی . محمد مهدی عابدی نژاد مهران بقائی علی دیبری فرد - صمد فرهنگ . غلامحسین اسدالله - محمد صادق نهادنی . رحیم جارچی - فرهاد مجیدی آهی . اکبر مظاہری ابکاء - محمد صادق ابریشمیان . حسین امین الله - عیسی خندانی حسین اسکندری - مسعود معاونی - فریبرز جمشیدی کلانتری محمد متولیان - جمشید احمدیان . صمد حیاتی - داود حسینی محمد حاج سلیمانی - جواد هاشمی نژاد - قربانعلی میرزا زاده حسن هاشمی نژاد - اسحق عبدالله پور افام - مسعود لاویان . شهرام عبدالمحمد وصاله چی - فرهنگ امیری - محمد تقی طیب ذکاوی - اکبر باستانی پور - احمد توسلی - سید مرتضی حسینی حسین توسلی - حسن خدا بخش - محمد رضوانی - اسماعیل خرمی - محمد رضا ستایشی - منصور نهادنی پور حسن روشنی مقدم .

۳۷۹۷ - دو تابع زیر بر حسب متغیر  $x$  مفروض است :

$$y = \frac{\sin x + a \cos x}{\tan x - a \cot x} \quad u = a \sec x - a' \cosec x$$

ثابت کنید که بین توابع و مشتقان آنها رابطه زیر برقرار

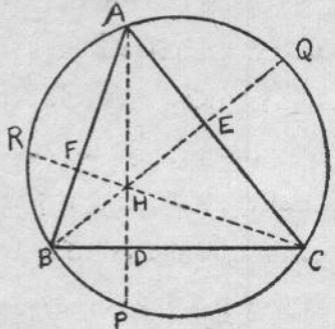
$$\frac{y'}{y} + \frac{u'}{u} = 0 \quad \text{است :}$$

$$y'u + u'y = 0 \quad \text{پس} \quad yu = a$$

و نتیجه خواهیم گرفت :

$$\frac{y'}{y} + \frac{u'}{u} = 0$$

پاسخهای درست رسیده : آفری تاج الدینی ، محمد رضا یزدان ، نادر پهلوان ، مهدی راسخ ، رضا آلانی ، جمشید وکیل زاده ، احمد جلیلی تنها ، جلال اشجعی ، محمد مقدسی ، احمد کرمانی ، مهدی خواجهی ، احمد درخشانی ، مرتضی احسانی ، اسدالله آسرایی ، حسین جعفری ، علیرضا میرمحمد صادق ، محمد رضا مفخم ، چنگیز آزادی ، فرهاد مجیدی آهی ، غلامحسین اسدالله ، صمد فرهنگ ، رحیم جارچی : عبدالله غیر تمدن ، حسین امین الله ، محمد رضا ستایشی ، ناصر نهادنی پور ، محمد مهدی رازقیان جهرمی ، منصور نهادنی پور ، محمد



حل - هر یک از  
نسبتها فوچ را بدست  
می آوریم . در مثلث  
ABC داریم :  
 $AH = AD - HD$   
از طرفی داریم :  
 $HD = BD \cot BHD$   
یا  
 $HD = BD \cot C$

در مثلث ABD داریم :

$$BD = C \cos B \Rightarrow HD = C \cos B \cot C$$

$$HD = 2R \cos B \cos C \quad \text{و یا}$$

بنابراین :

$$AH = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A} - 2R \cos B \cos C$$

که بعد از اختصار به صورت زیر درمی آید :

$$AH = 2R \cos A \Rightarrow \frac{a}{AH} = \tan A$$

و به طریق مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{b}{BH} = \tan B \quad , \quad \frac{c}{CH} = \tan C$$

حال برای محاسبه  $\frac{a}{DP}$  می توان نوشت :

$$(1) DP \cdot DA = DB \cdot DC \Rightarrow DP = \frac{DB \cdot DC}{h_a}$$

$$\tan C = \frac{h_a}{DC} \Rightarrow DC = \frac{h_a}{\tan C}$$

$$\tan B = \frac{h_a}{DB} \Rightarrow DB = \frac{h_a}{\tan B}$$

بنابراین با استفاده از رابطه (1) می توان نوشت :

$$DP = \frac{\frac{h_a}{\tan B} \times \frac{h_a}{\tan C}}{h_a} = \frac{a \cos B \cos C}{\sin A}$$

از اینجا می توان نسبت زیر را بدست آورد :

$$\frac{a}{DP} = \frac{\sin A}{\cos B \cos C} = \tan B + \tan C$$

و به طریق مشابه :

$$\frac{b}{EQ} = \tan A + \tan C$$

$$\frac{c}{FR} = \tan A + \tan B$$

را به  $S_{ABC}$  مساحت لوگی ABC را به  $S_{ADEF}$  مساحت لوگی ADEF را به  $x$  نمایش می دهیم در این صورت :

$$S_a = S - [S(CDE) + S(BEF)]$$

و چون نسبت مساحتها متشابه CDE و BEF مثل نسبت مربعین دو ضلع متقابل است داریم :

$$S_a = S \left[ 1 - x^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right]$$

از طرفی چون :

$$\frac{b}{c} = \frac{b-x}{x} \Rightarrow x = \frac{bc}{b+c}$$

بنابراین :

$$S_a = S \frac{\sqrt{bc}}{(b+c)^2}, \quad S_b = S \frac{\sqrt{ac}}{(a+c)^2}$$

$$, \quad S_c = S \frac{\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$$

و همچنین داریم :

$$S_a - S_b = \frac{\sqrt{c}S}{(a+c)^2(b+c)^2}(a-b)(ab-c^2)$$

$$S_b - S_c = \frac{\sqrt{a}S}{(b+a)^2(c+a)^2}(b-c)(bc-a^2)$$

$$S_c - S_a = \frac{\sqrt{b}S}{(c+b)^2(a+b)^2}(c-a)(ca-b^2)$$

اگر  $a < b < c$  باشد داریم  $ab < c^2$  بنابراین  $S_a > S_b$  همچنین

$S_b > S_c$  پس ترتیب بزرگترین مساحت  $S_a > S_b > S_c$  است یا  $S_a$  یا  $S_c$

به موجب آنکه  $ac < b^2$  ،  $ac = b^2$  ،  $ac > b^2$  باشد  $S_c$  بزرگتر ، مساوی و یا کوچکتر از  $S_a$  خواهد بود .

پاسخهای درست رسیده : علی اکبر دوستدار صنایع فریدون امینزاده ، حسن مکارمی ، غلامحسین اسدالهی ، محمود نمازی .

۳۸۵۰ - نقطه تلاقی ارتفاعات AD و BE و CF از مثلث حادالزوایای ABC را H و نقطه تلاقی این ارتفاعات را با دایره محیطی مثلث به ترتیب P و Q و R می نامیم صحت رابطه زیر را ثابت کنید :

$$2 \left( \frac{a}{AH} + \frac{b}{BH} + \frac{c}{CH} \right) = \frac{a}{DP} + \frac{b}{EQ} + \frac{c}{FR}$$

و در نتیجه حکم ثابت است :

$$2(tg A + tg B + tg C) = 2(tg A + tg B + tg C)$$

پاسخهای درست رسیده از : شهردخت محبزاده ، محمدگرمهای ، چنگیز ارومیه ، محمود نمازی ، حسن جعفری محمد رضا بلورانی ، حسین رئیس راده آملی ، علیرضامیرمحمد صادق ، مرتضی احسانی ، اسدالله آسرایی ، محمد رضا صیاد ، علی اکبر دوستدار صنایع ، حسن مکارمی ، جمشید احمدیان ، محسن هاشمی نژاد ، سید جعفر وفا بخش .

۳۸۵۱ - عددی را تعیین کنید که پنج برابر توانی از ۱۵ و دو برابر توانی از ۲۰ باشد .

حل - اگر آن عدد را  $A$  فرض کنیم به صورت زیر نوشته می شود :

$$A = 5 \times 10^x$$

$$A = 2 \times 20^y$$

$$5 \times 5^x \times 2^x = 2 \times 2^y \times 5^y \Rightarrow 5^{x-y+1} = 2^{2y-x+1}$$

چون  $2$  و  $5$  نسبت به هم اول هستند پس تساوی وقتی برقرار خواهد بود که :

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

پاسخهای درست رسیده : علی طباطبائی ، محمود نمازی ، علی اصغر شاملی ، علی نصر ، رمضان اصغر پور ، حسن مکارمی ، حسین اسکندری ، فریبرز جمشیدی کلانتری ، قاسم صدر بزار ، محمد صادق نهاوندی ، محمد رضا صیاد ، عبدالله غیر تمدن ، حسین امین الهی ، فریدون امین زاده ، محمد حیاتی .

۳۸۰۴ - رشته اعداد زیر را در نظر می گیریم :

$$a_1 > 0 \quad a_2 = a_1 + 2 \times 8K^1 \quad a_3 = a_2 + 2 \times 8K^2 \quad \dots \quad a_n = a_{n-1} + 8(n-1)K^1$$

مقدار  $a_1$  را چنان تعیین کنید که هر یک از جمله های این رشته محدود کامل باشد و آنگاه مجموع این جملات را تعیین کنید .

حل - داریم :

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 8K^1 \\ a_3 &= a_1 + 8K^1 + 2 \times 8K^2 = a_1 + (1+2)8K^1 \\ a_4 &= a_1 + (1+2)8K^1 + 3 \times 8K^2 = a_1 + (1+2+3)8K^1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

و به همین ترتیب :

$$a_n = a_1 + [1+2+3+\dots+(n-1)]8K^1$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + 4K^1 n^2 - 4Kn = a_1 [(2Kn - K)^2 - K^2] \\ a_n &= (a_1 - K^2) + (2Kn - K)^2 \end{aligned}$$

برای اینکه به ازاء جمیع مقادیر  $n$  عدد  $a_n$  محدود کامل باشد باید :

$$a_1 - K^2 = 0 \Rightarrow a_1 = K^2$$

۳۸۰۳ - با روش استقراء ریاضی ثابت کنید که قوای صحیح عدد :

$$n = \sqrt{a} - \sqrt{a-1} \quad (a > 2)$$

را می توان به صورت :

$$N = \sqrt{A} - \sqrt{A-1} \quad (A > 2)$$

نوشت  $a$  و  $A$  عدد های صحیح هستند .

حل - ابتدا قوای زوج عدد  $n$  را در نظر می گیریم

$$n^{2k} = (\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^{2k}$$

اگر  $1$  اختیار شود . داریم :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^2 = 2a - 1 - 2\sqrt{a^2 - a} \\ = \sqrt{4a^2 - 4a + 1} - \sqrt{4a^2 - 4a}$$

با فرض  $A = 4a^2 - 4a + 1$  مطلوب حاصل است .

فرض می کنیم که :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^{2k} = S - R\sqrt{a(a-1)} \\ = \sqrt{S^2} - \sqrt{R^2 a(a-1)}$$

قضیه را برای  $2K$  صحیح فرض می کنیم پس داریم :

$$S' - R'a(a-1) = 1$$

باید ثابت کنیم که قضیه برای  $2(k+1)$  نیز صحیح است .

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^{2k+2} &= (\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^{2k} \times \\ (\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^2 &= [S(2a-1) + 2Ra(a-1)] \\ &\quad - \sqrt{a(a+1)}[(2a-1)(R+2S)] \end{aligned}$$

به فرض آنکه :

$$S' = S(2a-1) + 2Ra(a-1)$$

$$R' = (2a-1)R + 2S$$

$$S'' - a(a-1)R'' = S' - a(a-1)R \quad \text{داریم} \quad \text{و چون داشتیم} :$$

$$S' - a(a-1)R' = 1$$

$$S'' - a(a-1)R'' = 1 \quad \text{پس}$$

و قضیه برای عدد های زوج اثبات می شود :

اگر مقادیر فرد را در نظر بگیریم و فرض کنیم که قضیه برای  $1 - n = 2K$  صحیح باشد به طریق متشابه ثابت می شود که بران  $n = 2K+1$  نیز صادق است .

پاسخ درست رسیده : حسین امین الهی .

$$r = \sqrt{\frac{6}{2\pi}} = 1/122 \text{ dm}$$

$$v = \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3) \quad \text{حجم مس در صفر درجه}$$

$$m = \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3) \times 8/8 \quad \text{و جرم مس}$$

مقدار حرارتی که این مقدار مس بدست می آورد :

$$Q_1 = \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3) \times 8/8 \times 0/095 \times 27$$

مقدار حرارتی که آب از دست می دهد برابر است با :

$$Q_2 = 3 \times 0/0952 \times 3$$

از تعادل این دو مقدار حرارت :

$$\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3) \times 8/8 \times 0/095 \times 27 = 3 \times 0/095 \times 3$$

$$R^3 - r^3 = 0/188 \quad \text{با}$$

$$R^3 = r^3 + 0/188$$

$$R^3 = 1/431 + 0/188 = 1/619$$

$$R = \sqrt[3]{1/619} = 1/174 \text{ dm}$$

$$R - r = 1/174 - 1/122 \quad \text{پس}$$

$$e = 4/7 \text{ mm} \quad \text{یعنی ضخامت ظرف :}$$

**پاسخهای درست رسیده :** حسن نوائیان ، محمد متولیان ، محمود نمازی ، جلال اشجعی ، مهرداد معتمد گرجی فریدون امین زاده .

**- ۳۸۰۶** - مدار ماه را به دور زمین می توان تقریباً

دایره‌ای تصور کرد که شعاع آن در حدود  $384 \times 10^3 \text{ Km}$  است ماه این مدار را در هر سال بطور تقریب ۱۳ بار طی می کند اگر شتاب جاذبه بر سطح زمین  $981 \text{ cm/s}^2$  باشد شعاع زمین را حساب کنید .

**حل -** نیروی جاذبه‌ای که بر ماه اثر می کند  $\frac{KM}{a^2}$

است که در آن  $K$  ثابت جاذبه عمومی،  $m$  جرم ماه،  $M$  جرم زمین و  $a$  شعاع مداری است که ماه به دور زمین طی می کند . این نیرو با نیروی جانب مرکز گردش ماه به دور زمین برابر است . نیروی اخیر برابر است با  $m \frac{v^2}{a}$  که در آن  $v$

سرعت حرکت ماه است در مدارش .

$$v^2 = \frac{KM}{a} \quad \text{با} \quad \frac{KmM}{a^2} = \frac{mv^2}{a} \quad \text{پس}$$

**- ۳۸۰۴** - جبابی است که از یک طرف به قسمتی از یک سطح کروی به شعاع  $R$  و از طرف دیگر به یک صفحه محدود است . مرکز سطح کروی داخل جباب واقع شده و فاصله صفحه با مرکز کره برابر با  $K < R$  می باشد .

در این جباب سه کره متساوی به شعاع  $r$  چنان واقع شده است که هر یک از آنها بر صفحه پایه جباب و بر سطح کروی جدار جباب و بر هر یک از دو کره دیگر مماس می باشد مطلوب است محاسبه  $r$  بر حسب  $R$  و  $K$

$$K = 7 \quad R = 13$$

**حل -** اگر فاصله صفحه پایه جباب تا نقطه تماس سه کره کوچک  $x$  فرض کنیم همانطوری که مشهود است :

$$\frac{R}{K-x} = \frac{r}{r-x} \Rightarrow x = \frac{r(R-K)}{R-r}$$

حال چون فاصله نقطه تماس هر کره کوچک با صفحه پایه

تا قطر کره بزرگ (جباب) که بر صفحه عمود است برابر  $\frac{2r}{\sqrt[3]{2}}$  می باشد داریم :

$$\sqrt{r^2 - (r-x)^2} + \frac{2r}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt{R^2 - (K-x)^2}$$

اگر مقدار  $x$  را بجاگش قرار داده و آنرا ساده کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{2r}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt{(R-K)(R+K-2r)}$$

که بعد از اختصار مقدار  $r$  به صورت زیر بدست می آید :

$$r = \frac{-3(R-K) + \sqrt{2(R-K)(7R+K)}}{4}$$

$$\text{به فرض } K = 7 \text{ و } R = 13 \text{ مقدار } r = 6 \text{ بدست می آید}$$

**پاسخهای درست رسیده :** صمد حیاتی .

**- ۳۷۰۵** - در ظرفی مسی به شکل نیمکره که حجم داخلی آن در صفر درجه ۳ لیتر است ۳ لیتر آب  $20^\circ C$  می دیزیم دمای تعادل برابر  $27^\circ C$  می شود ضخامت ظرف در صفر درجه چقدر است . از تبادل گرما با خارج ظرف نظر می شود . گرمای وینه مس  $95\%$  ، جرم مخصوص مس  $8/8 \text{ g/cm}^3$  ، جرم مخصوص آب  $30^\circ$  برابر  $0/9952$  است .

**حل -** ضخامت ظرف (e) برابر است با تفاوت شعاع خارجی (R) و شعاع داخلی (r) ظرف .

$$\text{شعاع داخلی بر حسب دسیمتر از فرمول: } \frac{2}{3}\pi r^3 = 3$$

بدست می آید

$$tg\varphi = - \frac{RC}{L} (L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

و مقادیر شدت جریانهای انشعابات  $Z$  را می‌توان حساب کرد:

$$Z = \frac{RL}{V_L + R'C'(\frac{1}{C\omega} - L\omega)}$$

بسادگی می‌توان تحقیق کرد که توان معرف شده درمدادار:  $P = U_i \cos \varphi$  به طور کامل به شکل حرارت در مقاومت  $R$  ظاهر

$$P = P_R = R_i^2$$

می‌شود یعنی  $P = P_R = R_i^2$  باسخنای دارست رسیده: محمد متولیان - عبدالله سعیدی

مرتضی احسانی

۳۸۰۸ - یک دستگاه قرقه‌های مرکب مطابق شکل دارد.

از وزن نخ و قرقه و نیز از اصطلاح کها صرف نظر می‌کنیم داریم  $m_1 > m_2 + m_3$  بزرگتر یا کوچکتر از  $m_2$  است چه رابطه‌ای باید بین  $m_1$  و  $m_2$  و  $m_3$  وجود داشته باشد تا  $m_1$  به طرف پائین حرکت کند.

حل - جهت مثبت شتاب را به طرف پائین انتخاب می‌کنیم . طبق شکل داریم:

$$x_2 - x - x_3 - x = cte$$

شتتاب وزنه  $m_2$  را به طرف پائین  $\gamma_2$  و از آن  $m_3$  را  $\gamma_3$  و از آن قرقه را  $\gamma$  فرض می‌کنیم وازرا بطله بالا دوبار مشتق می‌گیریم خواهیم داشت.

$$\gamma_2 + \gamma_3 - 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma_2 + \gamma_3 = 2\gamma$$

و نیز می‌توان نوشت  $x + x_1 = Cte$  یا

$$\gamma = -\gamma_1$$

$\gamma_1$  شتاب وزنه  $m_1$  است به طرف پائین.

برطبق اصل دینامیک درباره دستگاه فوق روابط زیر

را داریم :

$$m_2 g - T_1 = m_2 \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 = g - \frac{T_1}{m_2}$$

$$m_3 g - T_2 = m_3 \gamma_3 \Rightarrow \gamma_3 = g - \frac{T_2}{m_3}$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = g - \frac{T_1}{m_1}$$

$$v = \frac{2\pi a}{T} \text{ که در آن } T \text{ مدت زمانی است که ماه مدارش را}$$

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = KM \quad \text{پس}$$

اگر  $R$  شعاع زمین و  $g$  شتاب جاذبه بر سطح زمین باشد .

$$gR^2 = KM \quad \text{یا} \quad g = \frac{KM}{R^2}$$

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = gR^2 \quad \text{پس}$$

$$R = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{a}{g}} \quad \text{با}$$

یک سال را برابر  $25/365$  روز می‌گیریم .

خواهیم داشت :

$$T = \frac{25/365 \times 24 \times 60 \times 60}{13} \quad \text{با}$$

$$T = 2/43 \times 10^6 \text{ s} \quad \text{با}$$

$$R = \frac{2\pi \times 384 \times 10^8}{2/43 \times 10^6} \sqrt{\frac{384 \times 10^8}{981}} \quad \text{پس}$$

$$R = 6/22 \times 10^8 \text{ cm} = 6/22 \times 10^2 \text{ km} \quad \text{با}$$

باسخ درست رسیده : احمد بهبهان .

۳۸۰۷ - بین دو نقطه  $M$  و  $N$  مقاومت  $R$  ، بین

بدون مقاومت به ضریب سلف  $L$  و خازن  $C$  را به طور انشعاب بسته‌ایم . فرض می‌کنیم که کشنش مؤثر (اختلاف پتانسیل

Tensione efficace) بین دو نقطه  $M$  و  $N$  برابر  $U$  و

پش - (Pubstation) جریان برابر باشد تعیین کنید شدت جریان را دو هریک از انشعابها و مقاومت ظاهری معادل مدار را

حل - مدار جریان به صورت شکل

(الف) است . بر طبق رسم هندسی

فرنل (شکل) داریم :

$$i_2 = i_1 + (i_1 - i_2)$$

$i$  شدت جریان در مدار اصلی

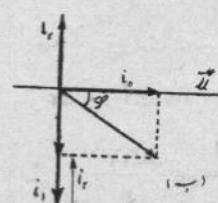
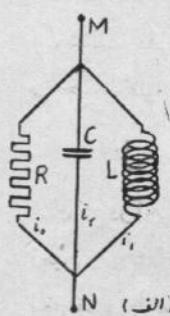
است . اختلاف فاز  $\varphi$  از رابطه زیر

بدست می‌آید :

$$tg\varphi = \frac{i_2 - i_1}{i_1}$$

$$i_1 = \frac{U}{\omega L}, \quad i_2 = \frac{U}{R}, \quad \text{پس}$$

$$i_2 = U\omega C, \quad \text{پس}$$



محلول فوق حساب کنید.

ثانیاً - تعیین کنید که  $25\text{cc}$  از این محلول در مجاورت اسید سولفوریک چه حجمی از پرمنگنات پتابسیم به غلظت  $23/7$  گرم در لیتر را بینگ می‌سازد.

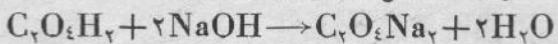
$500\text{cc}$  محلوط  $4\text{gr}$  حل -

محلوط اسید آگزالیک و اگزالات سدیم  $x = 8\text{ gr}$

$$F = \frac{C}{E} = \frac{6}{40} = 0.15$$

نرمالیته سود

فرمول واکنش از این قرار است :



بنابراین فاکتور اسید از رابطه زیر نتیجه می‌شود :

$$FV = F'V'$$

$$F \times 22/5 = 20 \times 0.15$$

$$F_1 = \frac{10}{75} = \frac{2}{15}$$

و غلظت آن برابر است با :

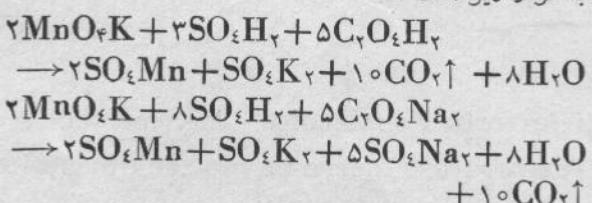
$$C = F \times E = \frac{2}{15} \times 45 = 6$$

گرم در لیتر

نسبت درصد اسید از این قرار است :

$$\frac{8\text{ gr}}{100} = \frac{6\text{ gr}}{x} \quad x = 75\%$$

واکنش ترکیب اسید و نمک آن با پرمنگنات در محیط سولفوریک به قرار زیر است :



چون هر دو جسم احیا کننده هستند فاکتور آنها با یکدیگر جمع می‌شود، فاکتور نمک برابر :

$$F_2 = \frac{2}{67} \# 0.03$$

و فاکتور محلول :

$$F = F_1 + F_2 = \frac{3}{100} = \frac{10}{75} \# \frac{1}{6}$$

فاکبور پرمنگنات برابر است با :

$$F = \frac{23/7}{31/6} = 0.75$$

$$FV = F'V' \quad 25 \times \frac{1}{6} = 0.75 \times V'$$

$$\Rightarrow V' \# 5/5 \text{cc}$$

پاسخهای درست رسیده : محسن نیک احمدی ، محمد متولیان ، احمد بهبهان ، محمد رضا بلورانی ، پرویز مرادی حقگو ، احمدک مانی ، مرتضی احسانی ، علی اکبر صفتی ، صمد فرهنگ ، غلامحسین اسداللهی ، جواد هاشمی نژاد

$$T_1 = T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{m_1}{2}(g - \gamma_1) \quad \text{و نیز داریم :}$$

درباره شتابها در فوق بدست آوردیم که

$$\gamma_2 + \gamma_3 = 2\gamma = -2\gamma_1 \quad \text{یا :}$$

$$(g - \frac{T_1}{m_1}) + (g - \frac{T_2}{m_2}) = -2[\frac{m_1}{2}(g - \gamma_1)]$$

$$g - \frac{m_1}{2m_1}(g - \gamma_1) + g - \frac{m_2}{2m_2}(g - \gamma_1) \quad \text{یا :} \\ = -m_1(g - \gamma_1)$$

$$\gamma_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + m_2m_3} g \quad \text{یا :}$$

$$m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3 > 0 \quad \text{برای اینکه } \gamma_1 > 0 \text{ باشد باید .}$$

$$m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3 > 0 \quad \text{یا :}$$

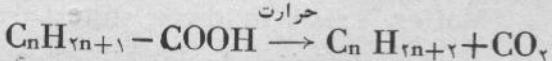
پاسخهای درست رسیده : حسن نوائیان - عبدالله

سعیدی - مقصود صلاحی

۳۸۰۹ - از تجزیه کامل ایک اسید اشباع شده آلی به کمک

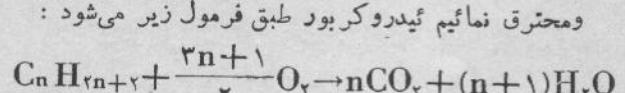
حرارت محلولی از دو گاز تولید می‌شود که در مجاورت پتانس حجم آن به نصف تقلیل می‌باید و اگر به این محلول اکسیژن کافی افزوده و به کمک جرقه الکتریک محترق نمایم این بار نقصان حجم در مقابل پتانس برابر حجم اولیه دو گاز می‌شود فرمول اسید را پیدا کنید ؟

حل - فرمول تجزیه کامل اسید اشباع شده آلی در اثر حرارت از این قرار است :



و چون در مجاورت پتانس حجم به  $\frac{1}{2}$  تقلیل می‌باید معلوم

می‌شود که حجم  $\text{CO}_2$  (قابل جذب بوسیله پتانس) برابر حجم ئیدروکربور حاصل است و اگر به محلول اکسیژن کافی افزوده و محترق نمایم ئیدروکربور طبق فرمول زیر می‌شود :



چون حجم گاز کربنیک (نقصان حجم در مقابل پتانس) دو برابر شده است معلوم می‌شود که حجم  $\text{CO}_2$  حاصل از احتراق ئیدروکربور برابر حجم ئیدروکربور است و در نتیجه ئیدروکربور باشد .  $\text{CH}_3\text{COOH}$  باشد .

پاسخ درست رسیده : جواد هاشمی نژاد .

۳۸۱۰ - ۴ گرم اسید اگزالیک بی آب و اگزالات سدیم

را در آب حل کرده و حجم محلول را به  $500\text{cc}$  می‌رسانیم  $20\text{cc}$  محلول ۶ گرم در لیتر سود برای خشی کردن  $22/5\text{cc}$  محلول فوق لازم است . نسبت درصد اسید اگزالیک را در

# اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از: مهندس ایرج ارشاقی

## ۱- ماده و خواص آن

## MATTER AND ITS PROPERTIES

Brittleness	شکنندگی	Mass	جرم
Solid	جامد	Particle	جزء
Liquid	مایع	Density	جرم واحد حجم
Gas	گاز	Weight	وزن
	اصل بقاء ماده	Hardness	سختی
The Law of the Conservation of matter		Tension	کشش
Definite	معین - ثابت	Ductility	متغول شوندگی
State	حالت	Malleability	چکش خواری

### Reading

Matter is made up of very small particles called molecules. The molecules of matter are always in motion. An increase in Temperature increases molecular motion.

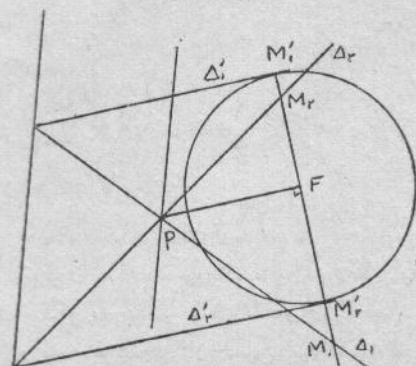
Matter exists in three states : solids, Liquids, and gases. Solids have a definite volume and a definite shape; Liquids have a definite volume, but they take the shape of their container; gases have neither a definite volume nor a definite shape.

### تبديل توافقی (بقيه از صفحه ۸)

ب- شرط کافی است . فرض می کنیم  $\Delta_1$  و  $\Delta_2$  روی هادی مخروطی یکدیگر را قطع کنند متوافقهای آنها  $M'_1$  و  $M'_2$  با یکدیگر موازی و بن دایره متوافق مماس و نقاط تماس روی قطری از دایره واقعند پس  $M'_1$  و  $M'_2$  از  $F$  و در نتیجه نیز از  $F$  می گذرد و حکم ثابت است .

ثانياً : چون متوافق  $FP$  بر خودش منطبق و این خط موازی  $\Delta'_1$  و  $\Delta'_2$  و بر قطر  $M'_1$  و  $M'_2$  عمود است فرض دوم نیز ثابت هی شود .

از نقطه حد امتداد  $\Delta'_1$  و  $\Delta'_2$  واقع بر هادی مخروطی می گذرد و حکم ثابت است .



# از میان نامه‌های رسیده

نام روزی را که تاریخ میلادی آن معلوم است معین کرد .  
\* آقای محسن عابدی نوشه‌اند در امتحان حل مسئله‌ای را با استفاده از فرمولی که شخصاً بدست آورده‌اند حل کرده‌اما معلم از ایشان قبول نکرده است .

— در حل مسائل فرمولهایی می‌توانند مورد استفاده واقع شود که در متن درس ثابت شده باشند . اگر محصل فرمولی را شخصاً بدست آورده باشد (مسئله را در حالت کلی حل کرده باشد) لازم است که در روزه‌امتحان ابتدا این فرمول را اثبات کند بعد آن را مورد استفاده قرار دهد .

\* آقای علی بیات مختاری از نیشابور راهی برای تعیین  $\Sigma n^2$  ارائه داده‌اند که در حقیقت از روش استقراء ریاضی استفاده کرده‌اند . قدماء از ریاضیدانها هم همین روش را منتهی با استفاده از اشکال هندسی بکار برده‌اند .

\* آقای هر تضی نائی تذکر داده‌اند که بهتر بود حل مسئله اول کنکور علوم مندرج در یکان مهر ۴۴ با استفاده از قضایای مربوط به ماکریم و مینیم مطلق حل می‌شد .

\* آقای مصطفی رضا یزدی دستوری برای تعیین اعداد فیثاغورثی ارائه داده‌اند که قبل از ایشان هم توسط دیگران بیان شده است .

\* همه ماهه چندین نامه از خوانندگان واصل می‌شود که راههای تازه‌ای برای ضرب یا مجذور کردن اعداد دو رقمی ارائه داده‌اند چون این راهها تازگی ندارد از درج آنها معذور هستیم .

\* عده‌ای از دانش‌آموزان مقیم شهرستانها خواسته‌اند که بعضی کتابهای حل المسائل را معرفی کنیم تا آنها تهیه کرده‌مورد استفاده قرار دهند . هم اکنون برای هر یک از مواد دیبرستانی دهها کتاب حل المسئله چاپ شده است اما بعلت اینکه نمی‌توانیم مسئولیت مندرجات آنها را قبول کنیم از معرفی آنها در مجله معذور خواهیم بود مگر اینکه معرفی کتاب به صورت درج آگهی انجام گیرد .

\* — عده‌ای از دانش‌آموزان دیبرستانهای مختلف بعضی از دیبران خود را معرفی کرده و خواسته‌اند که ایشان را به عنوان دیبران نمونه در مجله معرفی کنیم . این کار دور از شان مقام این دیبران بوده و بخلافه با رویهٔ مجله مبنا بنت دارد و از این جهت انجام این تفاصیلاً معذور هستیم .

\* آقای جمشید احمدیان ، سید حسن حسینی ، شهریار دیانت ، احمد هیر نژاد ، مسعود درخشان نو ، حجت عادلی ، گریم نجاریان ، اصغر شیبانی ، کورش مدرسی ، محمد تقی معیر در نامه‌های خود اطلاع داده‌اند که مسائل شماره‌های ۳۰۴۶ ، ۳۵۶۸ ، ۳۵۶۵ ، ۳۵۳۸ ، ۳۷۸۵ ، ۳۷۶۷ ، ۳۷۶۲ ، ۳۷۵۸ ، ۳۷۲۷ ، ۳۶۸۲ ، ۳۷۹۶ و ۳۷۹۱ ممندرج در مجله‌های شماره‌های قبل یکان را قبل از بعضی کتابهای حل المسائل چاپ ایران مشاهده کرده‌اند .

— بسیاری از مسائلی که شماره‌های آنها در بالا ذکر شده مستقیماً از مجالات ریاضی خارجی ترجمه شده است و حتی در بعضی موارد این ترجمه بدرخواست اداره کنندگان مجله انجام گرفته است . معلوم می‌شود که این مجلات نیز مسئله را از کتاب یا مجله دیگر نقل کرده‌اند .

\* آقای سیروس نخعی آشتیانی در نامه خود به حل مسئله ۳۶۴۸ ایراد گرفته و تذکر داده‌اند که چون  $n$  جمله و همچنین  $p$  جمله تصادع بنا به فرض مسئله بالا فاصله بعاد  $m$  جمله از آن واقع نیست بنابراین برای محاسبه  $m+n$  جمله و یا  $m+p$  جمله نمی‌توان از فرمول مربوط به محاسبه استفاده کرد و روابطه فرض مسئله غلط بنظر می‌رسد .

\* آقای محمد تقی یزدان‌شناس از فساد در نامه خود راه حل دیگری برای تعیین مساحت مثلث بر حسب سه ارتفاع آن ارائه داده‌اند ؛ بدین ترتیب که ابتدا روابطی بین اندازه‌های یک اشعاعهای دایره‌های محاطی داخل و خارج و اندازه‌های سه ارتفاع بدست آورده و بعد مساحت مثلث را بر حسب اندازه‌های شعاعهای دایره‌های محاطی حساب کرده از روی آن رابطه مطلوب را نتیجه گرفته‌اند .

\* آقای غلام‌رضا پیرزاده از درگز رابطه‌ای ارائه داده‌اند که بر حسب آن اندازه زاویه بین عقربه‌های ساعت در هر لحظه حساب می‌شود و این رابطه را رابطه پیر نامگذاری کرده‌اند \*

\* آقای احمد هیر نژاد در نامه خود متذکر شده‌اند آنچه که در صفحه ۶۸ یکان شماره ۲۵ منسوب به آقای بختیار علیمدد سلطانی درج شده است در صفحه ۱۱۶ هفت‌صد مسئله چاپ شده است .

\* آقای محمد علی دباغ با استفاده از جدول مندرج در یکان شماره ۱۶ جدولی ترتیب داده‌اند که از روی آن می‌توان

# در انجمن معلمان ریاضی ایران

- مبذول شود
- ۶) تأسیس آزمایشگاه ریاضی در دیبرستانها مورد توجه قرار گیرد
- ۷) کتابهای حل المسائل دقیقاً کنترل و بر نشر آنها نظارت شود
- ۸) پاره‌ای مطالب خارج از برنامه ولی لازم به صورت پاورپوینت در کتابهای درسی درج گردد.
- ۹) مجله‌ای مخصوص دیبران ریاضی منتشر شود
- ۱۰) یک کتابخانه سیار ایجاد شود.
- در پایان جلسه از طرف مدیر مجله یکان به هر یک از همکاران شهرستانی که حضورداشته باشد یک دوره مجله یکان هدیه شود
- \* \* \*
- ۲- به پیشنهاد بعضی از گروههای فرهنگی از طرف انجمن معلمان ریاضی سمیناری از دیبران هندسه دوره اول به مدت شش روز از ۲۶ تا ۳۱ شهریور در محل دبستان پیوند تشکیل شد و درباره بعضی مشکلاتی که در تدریس هندسه وجود دارد بحث و گفتگو شد و قرارداد جلسات این سمینار ادامه داشته باشد که قرار است هرماه یک دفعه عصر یکشنبه دایر باشد و در جلسات این سمینار برای همه معلمان ریاضی آزاد است و کسانی که مایل باشند برای اطلاع بر برنامه جلسات می‌توانند با اعضای هیأت مجریان انجمن تماس بگیرند.
- \* \* \*
- ۳- تهیه نشریه مرتبی برای معلمان ریاضی مورد توجه انجمن بوده است و چون با همه تلاشها که تاکنون بعمل آمده برای تأمین اعتبار مخارج این نشریه از طرف مؤسسات دولتی موافقی نشده است فعلاً قرار است مخارج شماره اول آن از طرف چند گروه فرهنگی تأمین گردد و امید می‌رود اولین شماره این نشریه قبل از پایان فصل پائیز به دست علاقمندان برسد.

۱- از طرف اداره کل تعلیمات متوسطه با همکاری انجمن معلمان ریاضی ایران دو کلاس کارآموزی برای دیبران ریاضی جدید ااستخدام شهرستانها تشکیل شد که جلسات آن از روزهشتم تاروز بیست و هفتم مردادماه در محل دیبرستان دکترونی الله نصر مرتبأ هر روز صبح دایر بود . برنامه مواد مورد بحث توسط انجمن تنظیم شده بود .

به مناسب تشکیل این کلاس و به منظور آشنایی معلمان ریاضی تهران و شهرستانها از طرف انجمن جلسه معارفه‌ای در تالار دیبرستان دکتر نصر در عصر روز ۲۵ مرداد برگزار شد. در این جلسه شرکت کنندگان در کلاسهای کارآموزی و جمعی از معلمان ریاضی تهران حضور داشتند . استاد دکتر هشتم روی که دعوت انجمن را برای حضور در جلسه قبول کرده بودند در باره مبانی ریاضیات سخنرانی کردند و ابراز عقیده کردند که محصل سیکل اول و حتی سیکل دوم متوسطه توانایی در ک ریاضیات کاملاً اصولی را نخواهد داشت و مناسبتر آنست که ریاضیات این دوره تا اندازه‌ای مبتنی بر کشف و شهود باشد . پس از استاد چند نفر دیگر از طرف انجمن و از طرف شرکت کنندگان در کلاس سخنرانی کردند و قطعنامه‌ای که از طرف شرکت کنندگان در کلاس تهیه شده بود قرائت گردید . در این قطعنامه که نسخه‌هایی از آن برای مقامات مسئول آموزشی ارسال شده است در مورد برنامه و مواد درسی پیشنهادهایی شده است که بعضی از آنها به قرار زیر است :

- ۱) تعداد ساعت هفتگی ریاضیات کلاس سوم ۶ ساعت گردد
- ۲) در کلاس چهارم ریاضی ۴ ساعت برای مitem حساب و در چهارم طبیعی ۲ ساعت برای جبر ممنظور شود
- ۳) به ساعت هفتگی ریاضیات پنجم و ششم طبیعی افزوده شود .
- ۴) در کلاس ششم ریاضی حساب استدلالی هفتگاهی ۲ ساعت تدریس گردد
- ۵) کوششی همه جانبه جهت اصلاح برنامه تحصیلات متوسطه



# مجلهٔ فضا

اویین شمارهٔ مجلهٔ «فضا» که به مدیریت آقای ابوالحسن کمالی تقوی در مهر ماه جاری منتشر شده است به دفتر مجلهٔ یکان و اصل شد. تهیه و انتشار یک مجلهٔ علمی به مراتب بیش از نشریات دیگر مخارج دارد و درکشور ما تیراز اینگونه مجلات هم بالا نیست از این جهت اقدام به نشر یک چنین مجله‌ای جز شوق و علاقهٔ علمی، هدف دیگری نمی‌تواند داشته باشد.

انتشار مجلهٔ فضا را به مؤسس آن تبریک می‌گوئیم و توفیق ایشان را در ادامهٔ این کار علمی آرزومندیم.

# آمادهٔ تدریس

لیسانسیهای که دورهٔ کارآموزی دبیری را در رشتهٔ تاریخ و جغرافیا در دانشسرای عالی به پایان رسانیده است برای بعد از ظهرها در دبستان یاسیکل اول دبیرستان آمادهٔ تدریس می‌باشد.

با صندوق پستی ۱۲۱۷/۱۱ تهران

مکاتبه شود.

## انتشارات یکان:

### یکان سال مخصوص

امتحانات نهایی ۱۳۴۳

۴۰ ریال

### مجموعهٔ علمی یکان سال

۶۰ ریال

### راهنمای ریاضیات متوسطه

۱۵ ریال

### معماهای ریاضی

۴۰ ریال

### مسائلی از حساب استدلالی

جلد اول: ۱۵ ریال

جلد دوم: ۳۰ ریال

### یکان سال ۱۳۴۴

۵۰ ریال (نایاب)

### تمرينهای ریاضیات مقدماتی

۱۳۰ ، ۱۵۰ ریال

نشر یه ممتاز یکان :

# میرنماي یاضيامقدمات

## هنر دوسي

تأليف

دكتور حسن هشترودي

تهران دراداره مجله یکان و درروزنامه فروشی ها

شهرستانها نزد نمایندگان فروش یکان

برای فروش موجود است

بهای : باجلد زرگوب ۱۵۰ ریال - باجلد معمولی : ۱۲۰ ریال

از انتشارات یکان :

## جلد دوم

مسائلی نمونه از حساب استدلالي

شامل مسائل مربوط به ضرب

تأليف : محمود کاشانی

منقش شد .

بهای : ۴۰ ریال