یکان

مجله ریاضیات

دورهٔ سوم شمارهٔ :

۳

شمارهٔ مسلسل :

۲۸

شهریور ماه ۱۳۴۵

در این شماره :

احتمالات	ترجمهٔ. مهدی مدغم	۱
مسائل حل نشدهٔ ریاضی	ترجمه	۶
نجوم	»	۸
کسرهای مسلسل	پرویز شهریاری	۱۰
گفتگوی دور میز گرد	—	۱۴
در حاشیهٔ تاریخ	—	۱۵
ازهرجائی یاد داشتی	—	۱۶
چگونه مسأله‌ای را حل کنیم	ترجمهٔ : ه . شریفزاده	۱۷
شیمی	حسین جواهری	۲۰
راهنمای حل مسائل هندسه	ترجمه	۲۲
حل مسائل نمونه	ترجمهٔ : گلستان زاده	۲۵
بیان جدید رضیات مقدماتی	ترجمه	۲۷
داستانهای تفننی ریاضی	»	۳۰
سرگرمیهای ریاضی	—	۳۱
مسائل برای حل	—	۳۲
بی‌آنکه عصبانی شوید ...	—	۳۵
حل مسائل شماره‌های گذشته	—	۳۶
پرسش و پاسخ	—	۴۷

بها : بیست ریال

از میان نامه‌های رسیده

* آقایان : **احمد کمیلی ، احمد میرنژاد** هریک در نامه‌های خود نوشته‌اندکه در شماره‌های گذشتهٔ یکان‌ودر بعضی از نشریات دیگر قید شده است که مثلث به نام «پاسکال» باید مثلث(خیام ـ پاسکال) نامیده شود چرا در مقالهٔ « احتمالات» مندرج در یکان شمارهٔ ۲۷ این موضوع رعایت نشده است .

ـ عنوان مثلث « خیام ـ پاسکال » پیشنهادی است‌که در یکی از کنگره‌های علمی بین‌المللی مطرح شده است و مورد قبول همهٔ مراجع علمی نمی‌باشد. مقالهٔ «احتمالات»که دریکان چاپ شده ترجمه از یک مقالهٔ انگلیسی است و در ترجمهٔ آن رعایت‌امانت، مقدم بر نظریات یا عقاید شخصی‌قرارگرفته‌است.

* آقای **محمد تقی یزدان‌شناس** در نامهٔ مفصل خود بعضی مطالب بیان فرموده‌اندکه ذیلاً بعضی توضیحات در بارهٔ آنها داده می‌شود .

ـ کشور ما ازلحاظ مجلات علمی بسیار فقیر است . یکان تنها مجله‌ای است‌که فعلاً در ایران مربوط به‌ریاضیات منتشر می‌شود از این‌جهت خوانندگان آن از طبقات مختلف می‌باشندو سطح اطلاعات و معلومات ایشان‌کاملاً متفاوت است در نتیجه مقالات‌مندرج‌دریکان‌هم متناسب‌باسلیقهٔ‌خوانندگان‌آن متفاوت‌است

ادارهٔ یکان بعضی مجلات ریاضی خارجی را مشترک است و از این مجله‌ها مسائلی برای درج در یکان انتخاب و ترجمه می‌شود . بعدها معلوم می‌شودکه این مسائل در بعضی کتابهای حل المسائل ایران چاپ شده است . همانطورکه نوشته‌اید در این باره تقصیری متوجه مترجم مسئله نیست .

از اینکه نوشته‌اید خواص عدد ۱۴۲۸۵۷ **طرح** آقای جمال زاده بوده و درکتاب «صندوقچهٔ اسرار» مضبوط است اولاً استعمال کلمهٔ«طرح» فقط در موردی بکار می‌رودکه موضوع تازه‌ای توسط شخص بوجود آمده باشد . در صورتی‌که خواص این عدد را قرنها پیش شناخته‌اند و در بسیاری ازکتابهای‌چاپ قدیم نیز مندرج می‌باشد .

ادارهٔ یکان در بارهٔ مطالب و مندرجات کتابهایی‌که در صفحات یکان‌به صورت‌آگهی‌معرفی می‌شوند هیچگونه مسئولیتی ندارد .

آقای یزدان شناس در پایان نامهٔ خود نوشته‌اند اینکه در شمارهٔ ۲۳ یکان نوشته شده است‌که در دبیرستان حکمت فسا نشریه‌ای ریاضی‌منتشر می‌شود اصلاً حقیقت نداشته است .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

سال سوم ـ دورهٔ‌سوم ـ شمارهٔ سوم(شمارهٔ مسلسل : ۲۸)

شهریور ماه ۱۳۴۵

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : داود مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان هر ماه یك بار منتشر می‌گردد

نشانی اداره:تهران،خیابان لاله‌زارنو،نزدیك‌شاهرضا‌ـشمارهٔ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume III , number 3, Sept. 1966

subscription : $3

TEHERAN . P.O.B. 2463

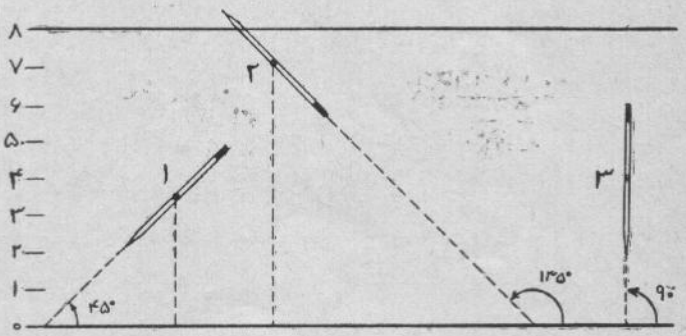
چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

احتمالات

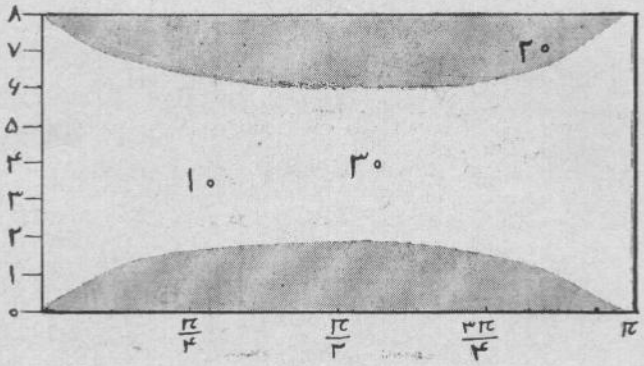
نوشتهٔ : مارك كارك
ترجمهٔ: مهدی مدغم
از : سینتیفیك آمریکن

دنباله از شمارهٔ پیش

بااین حال درسالهای ۱۹۳۰ تا ۱۹۴۰ موضوع احتمالات درمیان ریاضیدانان تجدیدحیات یافت. زیرا دراین زمان مفاهیم اساسی آن روشن شده و با **نظریهٔ اندازه Measure Theory** ارتباط داده شده بود . نظریهٔ اندازه که از زمان **اقلیدس** آغاز شده ودر اوایل این قرن بوسیلهٔ ریاضیدانانی چون **امیل بورل Émile Borel** و **هانری لبسك Henri Lebesgue** توسعه و تعمیم یافت . از نظر درك و شناسائی این توسعه ، مسألهٔ معروفی راکه در زمینهٔ احتمال هندی است و به نام **مسألهٔ سوزن بوفن Buffon** خوانده می‌شود در اینجا ذکر می کنیم. فرض می کنیم سوزنی راکه دارای طول معینی مثلاً ۱۰ سانتیمتر است بر کف اطاقی که از تخته پوشیده شده و پهنای هر تخته بیش از طول سوزن مثلاً ۲۰ سانتیمتر است بطور تصادف بیندازیم . احتمال اینکه سوزن طوری روی کف اطاق بیفتد که شکاف بین دو تخته را قطع نماید یا به عبارت دیگر یك سر آن روی یك تخته و سر دیگر آن روی تختهٔ دیگر بیفتد چقدر است ؟ برای پاسخ به این مسأله وضع سوزن را در هر بار افتادن با نقطه‌ای که وسط سوزن بر آن قرار می‌گیرد وزاویهٔ بین سوزن ویکی از شکافها مشخص می نمائیم .



حال اوضاع مختلفی راکه برای سوزن ممکن است اتفاق افتد بوسیلهٔ نموداری که به‌شکل مستطیل است نمایش می‌دهیم . در این نمودار فاصلهٔ مرکز هر سوزن تا شکاف تخته در امتداد محور قائم و زاویهٔ سوزن باشکاف در امتداد محور افقی جدا می‌شود بنابراین موقعیتهای سه سوزن شکل بالا بوسیلهٔ سه نقطهٔ شکل زیر نموده می‌شود .



تمام این مستطیل که سطح آن برابر πd است نمایندهٔ تمام وضعهای مختلفی است که ممکن است سوزن در آن قرار گیرد اصطلاحاً این نمودار را **فضای نمونه Sample Space** می‌نامند که برای مشخص نمودن تمام نتایج ممکن، درهر آزمایش مربوط به احتمالات بکار می‌رود . (در ۱۰ بازی شیر و خط فضای نمونه عبارت از مجموعهٔ ۱۰۲۴ حالت ممکن شیر یاخط است) در آزمایش سوزن بوفن به‌کمك مثلثات قسمتهایی از مستطیل راکه متناظر بااوضاعی از سوزن است که شکاف را قطع می‌نماید می‌توان مشخص نمود . چنانکه درشکل ملاحظه می‌شود دوقسمت متناظر با اوضاع مذکور وجود دارد که بوسیلهٔ دومنحنی محدود شده است مساحت این دوقسمت به‌کمك حساب جامعه و فاضله بدست می‌آید و مساوی است بادوبرابر l (l طول سوزن است).

حال به فرض اینکه تمام اوضاعی راکه برای سوزن ، ممکن در نظر گرفته‌ایم دارای احتمال برابر باشند احتمال افتادن سوزن روی شکاف برابر سطح قسمت سایه‌دار مستطیل به سطح تمام مستطیل یا $\frac{2l}{\pi d}$ می‌باشد . اینجاست که نظریهٔ احتمالات

بافرضهایی اختیاری به‌خطامی‌رود. حقیقةً هیچ دلیل قانع‌کننده‌ای وجود نداردکه‌تمام نقاط این‌مستطیل‌دارای احتمال برابرباشند اما به‌اندازه‌ای این فرض ، طبیعی است‌که‌به‌نظرمی‌رسد ازقبول آن ناگزیر باشیم . با این حال این فرض ، درست نیست . **برتراند Bertrand** دانشمند فرانسوی‌مسائل دیگری طرح نمود وبا فرضهایی‌که کاملاً متساوی الاحتمال به‌نظر می‌رسیدند نتیجه‌های کاملاً متفاوت بدست آورد .

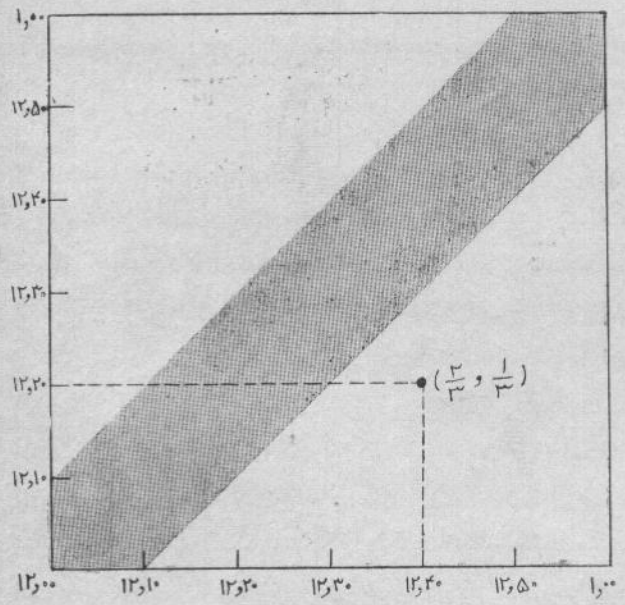
این مسائل به‌نام **پارادوکسهای برتراند** معروفند و می‌رسانندکه به‌صحت اینگونه فرضها نمی‌توان اطمینان داشت .

اتفاق ناگواری بود . وجود این تناقضها اعلام‌می‌کردکه باید رل این فرضها درحل مسائل احتمالات و ماهیت آنها عمیقتر درك شود .بامثال دیگری‌که در اینجا ذکرمی‌شودمطالب بالا را بهتر می‌توان بیان‌کرد :

فرض‌کنیم دودوست‌که درحومه‌های مختلف شهرنیویورك سکونت دارند بخواهند یکدیگر را در هوقع ظهر (بین ۱۲تا یك) مقابل کتابخانه عمومی خیابان چهل ودوم ملاقات‌کنند با برنامهٔقطارهایی‌که این دورا از حومه به‌خیابان چهل‌ودوم در وعده‌گاه می‌رساندکاری نداریم . فقط فرض‌می‌کنیم هریك‌ازاین دو دوست امکان دارد درهرلحظه بین ساعتهای ۱۲ظهرویك‌بعد از ظهر به‌این مکان برسند . برای اینکه‌وقت آنهازیادتلف‌نشود قرار می‌گذارند که‌هریك پس‌ازورود درست ۱۰دقیقه‌به انتظار نفر دیگر بماند و در صورتی‌که در ظرف این مدت نفر دوم نرسید آن مکان را ترك‌کند . احتمال ملاقات این دونفرچقدر است ؟

بدیهی است‌که این مسأله کاملاً ساختگی است و وجود خارجی پیدا نمی‌کند . اما نباید تصورکردکه دارای اهمیت نیست . اگر از این‌حالت بسیار ساده‌ای‌که بیان شد بگذریم و مسأله را برای عدهٔ زیادی از افراد طرح نمائیم شبیه به مسألهٔ فهم‌حل‌ناشده‌ای ازمکانیك آماری می‌شودکه حل‌آن نظریهٔتغییر حالت ماده (مثلاً از جامد به مایع) را بسیار روشن می‌سازد.

بافرض اینکه دو دوست ممکن است درهر لحظه بین۱۲ و یك بعد از ظهر وارد شوند می‌توان مانند مسألهٔ سوزن بوفن «فضای نمونه» ای ساخت . لحظه‌ای‌که امکان دارد یکی از دوستان وارد شود روی‌محور xها (افقی)ولحظه‌ای‌که‌امکان‌دارد دیگری وارد شود روی محور yها (قائم) مشخص می‌شود . می‌توان هرزوج لحظهٔورود دودوست را بوسیلهٔ نقطه‌ای‌درصفحهٔ محورهای مختصات‌معین‌کرد(شکل‌زیر) . هرنقطه‌که‌دراین‌مربع واقع بوده و زمانهای نظیر آن روی محور افقی‌و محور قائم بیش از ۱۰ دقیقه اختلاف نداشته باشد یك ملاقات را مشخص می‌کند . بقیهٔ نقاط متناظر باحالاتی هستندکه ملاقات روی نمی‌دهد . نسبت قسمتی‌ازمربع‌که مربوط به نقاط نظیر ملاقات است ودرشکل سایه‌دار رسم‌شده به‌تمام مربع ، احتمال مطلوب را می‌رساند . به آسانی می‌توان حساب‌کردکه احتمال ملاقات این دو $\frac{11}{36}$ یا تقریباً یك‌درسه می‌باشد .

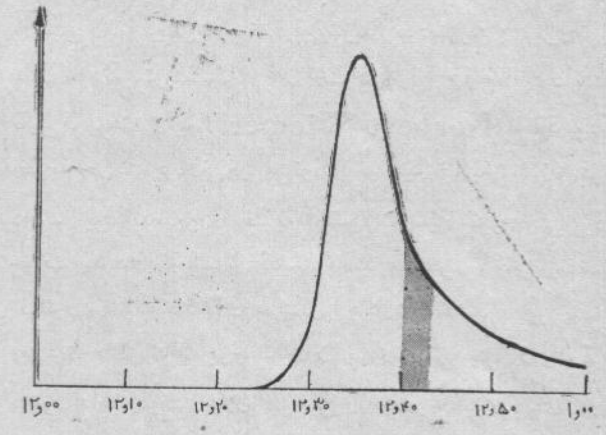


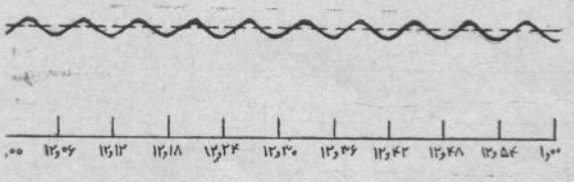
مسألهٔ فوق روشن می‌سازدکه ماازدوفرض مختلف درآن استفاده‌کردیم و اینك‌این‌دوفرض رادربحث‌کلی‌تری موردتجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم .

بطورکلی وبه‌عنوان یك‌شاخهٔ ریاضی ، نظریهٔ احتمالات بامسائلی‌سروکار داردکه باید احتمال واقعهٔ مرکب‌و پیچیده‌ای راکه‌از مجموعه‌ای‌ازوقایع‌ساده ترکیب‌شده‌است. حساب نماید‌با این‌شرط‌که‌احتمال هریك‌ازاین وقایع ساده‌یادانسته فرض‌می‌شود و یابه‌عنوان اصل‌مورد قبول قرارمی‌گیرد . مثلاً درانداختن دوتاس واقعهٔ مرکب آمدن ۱۰ ، شامل سه واقعهٔ ساده است : ۱ ـ تاس اول شمارهٔ ۴ وتاس دوم شمارهٔ ۶ را نشان دهد ۲ ـ هردوتاس شمارهٔ ۵ رانشان دهند ۳ـ تاس اول شمارهٔ ۶ و تاس دوم شمارهٔ ۴ را نشان دهد . ملاقات دودوست نیزواقعهٔ مرکبی است‌که می‌توان برای مثال یکی از وقایع سادهٔ آن را ورود یکی از دوستان در فاصلهٔ بین ۱۲ و بیست دقیقه و ۱۲ و ۲۵ دقیقه بدانیم .

در محاسبهٔ احتمال ملاقات دودوست ، فرض اول‌آن بود که هریك از این دونفر در هرلحظه بین ۱۲ و یك‌بعداز ظهر ممکن‌است وارد شوندوکلیهٔ لحظه‌هاازنظرورودهریك متساوی‌ـ الاحتمال است . در محاسبهٔ احتمال انداختن تاس فرض براین

است که احتمال آمدن هریک‌از۶طرف هرتاس مساوی‌است . اما مثلاً اگردرمورد ملاقات‌دودوست اگرهریك ازآنها مجبورباشند فقط از یک ترن که ظرف مدت مذکور به ایستگاه واردمی‌شود استفاده نمایند این فرض کاملاً بهم می‌خورد . چنانچه اگر برنامهٔ ورود ترن ساعت ۱۲ و بیست دقیقه یا دیرتر باشد آن دوست در اوایل ساعت نخواهد آمد . و یااگرقسمتهای‌مختلف تاس دارای وزنهای متفاوت باشند فرض‌قبل صحیح نخواهدبود. ازطرف دیگر اگرده ترن وجود داشته باشندکه برنامهٔ ورود آنها به ایستگاه از ساعت ۱۲ به‌بعد ۶ دقیقه به۶دقیقه باشد و این ترنها بطور اتفاقی وارد ایستگاه شوند با اینکه فرض‌مادر مورد متساوی‌الاحتمال بودن لحظات معقولتر بنظر می‌رسد اما ممکن است صحیح نباشد . دردو شکل زیر تغییر مقدار احتمال لحظات مختلف در دو مثال اخیر نشان داده شده‌است . مطابق شکل اول‌که مربوط به مثال اول است محتمل‌ترین موقع ملاقات ساعت ۱۲ و۳۵ دقیقه است . قسمت سایه‌دار ، نمودار احتمال ملاقات آنها در فاصلهٔ بین ساعت ۱۲ و ۴۰ دقیقه و ۱۲ و ۴۴دقیقه بعد ازظهراست . درشکل دوم منحنی‌دندانه‌دار نمودار تغییر مقدار احتمال لحظات مختلف در مثال دوم است و خط راست نمودار متساوی الاحتمال بودن تمام لحظات می‌باشد .





فرض دوم در محاسبهٔ احتمالات این بود که وقت ورود دو دوست کاملاً از یکدیگر مستقل است . این فرض نیز مانند فرض اول دارای اهمیت فراوان است به‌اصطلاح ریاضی‌این‌فرض در قاعدهٔ ضرب احتمالات منعکس شده است . این قاعده بیان می‌کندکه اگر n وقایع منفرد از یکدیگرمستقل‌باشند. احتمال واقعهٔ مرکبی‌که تمام آن وقایع ساده اتفاق‌بیفتد برابر حاصل ضرب احتمالهای یک به یک آنهاست . (عملاً از نقطهٔ نظر منطقی دقیق قاعدهٔ ضرب احتمالات جانشین تعریف استقلال وقایع می‌شود) .

استقلال در انداختن تاس فرض می‌شود (حدساًهم‌به هیچ طریق ارتباطی ندارند) به‌همین ترتیب است درحالت آمدن دو دوست به‌نیویورك (به شرط آنکه زمان ورود خود را با علم‌به انتخاب ترن بخصوصی جور نکرده باشند).

باید توجه داشت که اختلاف مهمی در مثال انداختن‌تاس و مثال ملاقات دو دوست وجود دارد . در حالت اول شمارهٔ واقعه‌های مختلفی که ممکن است اتفاق افتد محدود است (۳۶ واقعه)درحالی‌که درمثال‌دوم‌تعداد این واقعه‌ها نامحدودمی‌باشد زیرا ملاقات آنها ظرف‌آن‌یک ساعت در هرلحظه ممکن‌است. می‌توان گفت‌که فضای نمونه بوسیلهٔ بینهایت نقطه ، متصل می‌شود .

به منظور اینکه‌شخصی بتواند محاسبهٔ احتمالات راانجام دهد دوقاعدهٔ عمومی یا دواصل بیان می‌شود. قاعدهٔ اول‌مربوط به وقایعی‌است‌که متقابلاً از یکدیگرمجزا هستند یعنی وقایعی‌که وقوع یکی اتفاق واقعه‌های دیگر را مانع‌می‌شود . برای‌چنین وقایعی احتمال‌وقوع اقلاً یکی‌ازآنها برابر مجموع احتمالات یک به‌یک آنها می‌باشد . به‌عبارت دیگر احتمال وقوع اولی یادومی یا سومی برابر احتمال وقوع اولی بعلاوهٔ احتمال‌وقوع دومی بعلاوهٔ احتمال وقوع سومی است ، (اصل جمع پذیری)، قاعدهٔ‌دوم‌مربوط به‌احتمال زوج واقعه‌هایی است که‌یکی‌بردیگری دلالت می‌کند. دراین‌حالت احتمال اینکه یکی از وقایع بدون دیگری اتفاق بیفتد برابر تفاوت احتمال‌کوچکتر از احتمال بزرگتر می‌باشد .

***

ملاحظه‌می‌شودکه‌محاسبهٔ‌احتمالات وقایع مرکب‌بامحاسبهٔ مساحات‌واحجام درهندسه ، یکی‌است . می‌توان کلمهٔ«مجموعه» را برای«واقعه» و «مساحت» یا «حجم» را برای «احتمال»بکار برد. پس‌مسأله‌این‌می‌شودکه‌مساحات مناسبی را برای‌مجموعه‌ها بکار بریم واین خود قلمرو نظریهٔ اندازه است که‌این نام رابه این علت پیداکرده است که‌کلمهٔ «اندازه» در مورد مساحتهای مجموعه‌های بسیار مرکب بکار می‌رود .

به مسألهٔ ملاقات دو دوست باز می‌گردیم . ملاحظه

می‌کنیم که مجموعهٔ متناظر به ملاقات آنها بسیار ساده است . مساحت یا احتمال آن درچهارچوب‌هندسهٔ اقلیدسی‌بدست‌می‌آید ومحاسبهٔ‌آن برپایهٔ‌عدهٔ محدودی مستطیل متمایز قرارمی‌گیرد. در مسألهٔ سوزن بوفن که ناحیهٔ مورد نظر برای محاسبهٔ احتمال بوسیلهٔ منحنی محدود شده است ، محاسبهٔ مساحت به تعداد نا محدودی مستطیل منجر می‌شود و این محاسبه‌که نسبةً ساده است بوسیلهٔ حساب جامعه و فاصلهٔ مقدماتی انجام می‌گیرد .

آنچه نظریهٔ اندازه را مهیج و شگفت انگیز می‌سازد آنست‌که‌با قبول‌این اصل که‌باید‌اندازهٔ‌تعداد‌نامحدودمجموعه‌های مجزا برابر مجموع اندازه‌های یک به یک آنها باشد بکار بردن اندازه‌ها برای مجموعه‌های بسیار پیچیده امکان‌پذیر می‌شود . (این اصل نظیر اصلی از احتمالات است‌که بر طبق آن احتمال وقوع اقلا یکی از بینهایت واقعهٔ متقابلا مجزا از یکدیگر ، برابر مجموع احتمالات یک به یک آنهاست .)

بدین علت ، نظریهٔ اندازه ، راه را برای ارائه و حل مسائلی در احتمالات بازکرد که در زمان **لاپلاس** غیر قابل تصور بود . برای مثال در اینجا مسأله‌ای ذکر می‌شودکه در سالهای ۱۹۲۰ تا ۱۹۴۰ بسیار مورد توجه بود و باعث شدکه نظریهٔ احتمالات در جریان اصلی ریاضیات قرار گیرد .

سری بینهایت :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$$

را در نظر می‌گیریم‌که یك سری متباعد است بدین معنی‌که با جمع کردن جملات بیشتری از آن می‌توان عددی‌که ازهرعدد مفروضی بزرگتر باشد بدست آورد .

فرض کنیم بجای اینکه تمام علامتهای بین جمل این‌سری (+) باشد این علامتها را بطور تصادفی و بوسیلهٔ یك سکهٔ نجیب (+) و (−) انتخاب‌کنیم. احتمال اینکه سری حاصل متقارب شود چقدر است ؟ یعنی احتمال اینکه اگر در سری حاصل تعداد جمله‌ها را بسیار بسیارزیادکنیم مجموع به سمت عددی معین میل کند چیست ؟

برای جواب به این سؤال بایدتمام بینهایت رشتهٔ ممکن راکه بدین طریق حاصل می‌شود در یك فضای نمونه در نظر گرفت . یکی از رشته‌ها به این صورت شروع می‌شود :

HHTTTHTH . . . . . .

که H نمایندهٔ (+) و T نمایندهٔ (−) است بنابراین سری متناظر آن عبارت می‌شود از :

$$+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\ldots\ldots$$

برای هر سری مانند سری فوق می‌توان یك عدد حقیقی t را که بین صفر و یك واقع است متناظر قرار داد و هر عدد t را می‌توان با یك عدد در مبنای ۲ که رقم ۱ بجای H و رقم ۰ بجای T قرارگرفته نمایش داد . به این ترتیب رشتهٔ بالا به صورت : $t=0/11000101\ldots\ldots$ مشخص‌می‌شود. ارقام‌عددی‌که درمبنای ۲ نوشته شده مدلی ازاستقلال پرتابهای سکه را نشان می‌دهند. اکنون t هایی‌که سری متقارب بوجود می‌آورند مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند و احتمال اینکه t دراین مجموعه قرارگیرد «اندازهٔ» این مجموعه است . نتیجه می‌شود که t های‌فرضی‌که‌سری متقارب‌نمی‌سازندبه‌اندازه‌ای پراکنده‌اند که اندازهٔ آنها یا احتمال آنها صفر است . (اگر چه این مجموعه ، سازمان بسیار پیچیده دارد وبا مجموعهٔ خالی بسیار متفاوت است) .بنابراین جواب مسأله این است‌که وقتی به‌سری فوق علامتهای تصادفی داده شوداحتمال اینکه متقارب گردد ۱ می‌باشد .

***

مسألهٔ گذشته ، مثالی ، برای مسائلی در **«احتمالات شمارش ناپذیر»** بود . در بیست سال گذشته ، ریاضیدانان تحقیقات‌واکتشافات‌ثمربخشتری درزمینهٔ حوادث **ستوکاستیك** stochastic کرده‌اند یعنی تجزیه و تحلیل احتمالات پدیده‌هایی‌که بطور مداوم با زمان تغییر می‌نمایند . حوادث ستوکاستیك در فیزیك ، نجوم ، اقتصاد ، ژنتیك و اکولوجی و چندین رشتهٔ دیگرعلوم ظاهرمی‌شوند. ساده‌ترین و معروفترین مثال حادثهٔ ستوکاستیك ، **حرکت براونی ذره** است دانشمند فقید **نربرت واینر** Norbert Wiemer معتقد بودکه نظریهٔ حرکت براونی را می‌توان بر پایهٔ نظریهٔ اندازه قرار داد . این ایده برای نظریهٔ احتمالات بسیار ثمر بخش بود و حیات جدیدی به مسائل قدیمی مانند مشخص ساختن پتانسیل الکترو ستاتیك هادیهای با شکل اختیاری بخشید . این مسأله مغزهای دانشمندان برجسته‌ای را برای مدتی بیش از یك قرن مشغول داشته بود . علاوه بر این راههای جدیدی برای کاوش بازکرد و به ارتباطات جالبی بین‌نظریهٔ احتمالات وشاخه‌های دیگر ریاضیات ، راهنمائی‌کرد .

یك مقاله تنهافقط می‌تواند چند قسمت از تکامل اصلی و مسائل نمونه‌ای از نظریهٔ احتمالات را شامل شود، امروزه‌این موضوع شاخه‌های جدیدی از قبیل نظریهٔ اطلاعات ، نظریهٔ ردیفها ، نظریهٔ پراکندگی و آمار ریاضی را در بر می‌گیرد. می‌توان بطورکلی موقعیت و مقام احتمالات را با ملاحظهٔ این موضوع درك نمودکه این نظریه ابزاری است‌که مهندسین از

بکار بردن آن ناگزیرند و شاخه‌ای است که به اندازهٔ زیادی به تحجر میل نمود و باعث ترقی ریاضیات محض شده است .

***

اکنون مقاله را با بیان مختصری در بارهٔ جنبهٔ فلسفی نظریهٔ احتمالات خاتمه می‌دهیم (این خود موضوع وسیعی است که در بارهٔ آن چندین جلدکتاب نوشته شده است) . جنبهٔ فلسفی این نظریه با توضیح حالت مخصوصی بهتر بیان می‌شود و این حالت را بحث در بارهٔ جدال بین ترمودینامیك و نظرهای مکانیکی عمل ماده انتخاب کرده‌ایم .

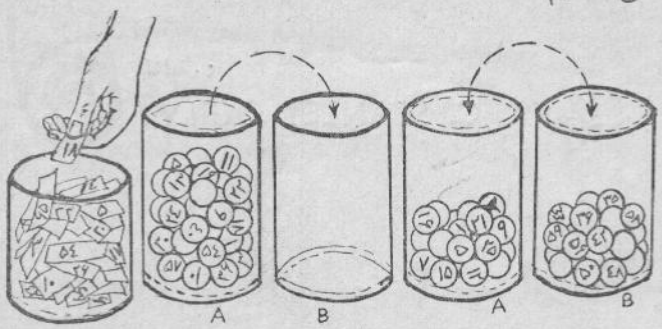
دو ظرف در نظر بگیرید یکی حاوی یکی ازگازها و دیگری کاملاً خالی . این دو ظرف بوسیلهٔ لوله‌ای که دارای شیری است به هم متصل شده‌اند . اگر شیررا ناگهان بازکنیم چه می‌شود ؟ برطبق قانون دوم ترمودینامیك گاز از ظرف A به ظرف B بطور تصاعدی هجوم می‌برد تا اینکه فشار گاز در دو ظرف برابر گردد . این بیانی است از **قانون ازدیاد ـ آنتروپی** که به شکل بدبینانهٔ آن پیش‌بینی می‌شود که سرانجام تمام ماده و انرژی در عالم یکسان می گردد تا بجائی می‌رسد که **رودلف کلاسیوس Rudolt Clausius** یکی از پدران قانون دوم «مرگ حرارت» می‌نامد .

اما نظریهٔ مکانیکی یا سینتیك ماده ، وضع را دگرگونه جلوه می‌دهد . بنابراین نظریه درست است که ملکولهای گازاز ناحیه‌ای، که دارای فشار بیشتر است .

به ناحیه‌ای که دارای فشارکمتر می‌باشد حرکت می‌کند اما حرکت صرفاً یك طرفه نیست . برخورد ذرات به جدار ظرف وبه‌یکدیگرموجب‌می‌شود که‌جهت حرکت ملکولها تصادفی گردد و ذراتی که به طرف ظرف B می‌روند به همان اندازه که احتمال می‌رود درظرف B بمانند احتمال دارد به ظرف A بازگردند . در حقیقت **پوانکاره** در یك نظریهٔ ریاضی نشان داد که دستگاه‌دینامیکی مانند دستگاه فوق‌الذکرسرانجام به‌حالت ابتدایی خود باز می گردد به‌نحوی که می‌توان گفت تمام ذرات گاز دوباره در ظرف A گرد می‌آیند .

***

در سال ۱۹۰۷ **پل Paul** و **تاتیانا ارنفست Tatiana Ehrenfest** نظر فوق را با مدلی زیبا وساده از احتمالات نشان دادند. دوظرف A و B را درنظربگیرید ظرف A محتوی تعداد بسیار زیادی توپ شماره دار و ظرف B خالی است . از ظرف دیگری که محتوی کارتهای شماره‌دار است بطور تصادف یك‌کارت بیرون می‌آوریم و به شمارهٔ کارت نگاه می‌کنیم . سپس توپی راکه شماره‌اش با شمارهٔ کارت یکی است از ظرف A بیرون آورده و در ظرف B می‌اندازیم . بازکارت را به‌جای خود انداخته واین عمل را به همین‌طریق تکرار می‌کنیم یعنی به‌همین ترتیب یك‌کارت بیرون کشیده توپ هم شمارهٔ آن را درهر ظرفی هست بیرون آورده درظرف‌دیگر می‌اندازیم .



بدیهی است مادامی که توپهای ظرف A بیشتراز توپهای ظرف B هستند احتمال کشیدن کارتی‌که شمارهٔ آن نظیر شمارهٔ توپهای ظرف A باشد بیشتر است . بنابراین‌جریان حرکت توپها ابتدا از ظرف A به ظرف B مطمئناً قویتر خواهد بود . وقتی عمل کشیدن کارت ادامه می‌یابد احتمال کشیدن‌کارتی که توپ هم شماره‌اش در A باشد به‌نحوی تغییر می‌کندکه تابع شماره‌های‌کارتهای قبلی است . این طرز تابع بودن راکه احتمال ، تابع وقایع‌گذشته است **سلسلهٔ مارکف** می‌نامند در بازی‌که مورد مطالعه است تمام حقایق مربوط را می‌توان بطور صریح ومحکم نتیجه‌گرفت . نتیجه می‌شودکه در حد متوسط همچنانکه نظریهٔ ترمودینامیك پیش بینی می‌کند شمارهٔ توپهای ظرف A بطور تصاعدی‌کم خواهد شد تاآنجاکه تقریباً نصف توپها در ظرف B جمع شود . اما مجاسبه نشان می‌دهدکه اگر بازی به اندازهٔ کافی ادامه پیداکند همان طور که **نظریهٔ‌پوانکاره** بیان می‌نماید تمام توپها سرانجام به ظرف A باز خواهندگشت!

چقدر طول خواهدکشید تا توپها به وضع اولیهٔ خودباز گردند ؟ فقط 2^N بارکشیدن‌کارت برای N توپ‌که ابتدا در ظرف A بوده است . پس اگر فرض‌کنیم ابتد فقط ۱۰۰ توپ در ظرف A بوده است‌به احتمال نزدیك‌به تعیین پس از 2^{100} بارکشیدن‌کارت تمام‌توپها به ظرف A بازخواهندگشت‌می‌بینیم که در طبیعت ، حوادث در یك طرف سیر می‌کند . چرا ؟ برای اینکه تمام تاریخ بشر در مقابل زمانی‌که لازم است تا جهت حوادث در طبیعت معکوس شود بسیار بسیارکوتاه است .

برای اینکه این فرض با تجربه تطبیق داده شود بازی ارنفست با یك ماشین‌الکترونیکی بسیارسریع انجام شده بازی

(دنباله درصفحهٔ ۱۳)

تألیف :
C. STANLEY OGILVY
ترجمهٔ : ع . م.

۲ ـ ریاضیات عملی

از مسائلی شروع می‌کنیم که می‌توان آنها را به ریاضیات عملی مربوط دانست . هرچند علم به اینکه این مسائل تاچه حد به این رشته از ریاضیات مربوط هستند بنا بر حدس و تخمین است ، اما در تمام حالات ، مستقیم یا غیر مستقیم به زندگی روز مرهٔ ما ارتباط دارند و ازاین جهت حق خواهیم داشت که آنها را در زمرهٔ مسائل ریاضیات عملی قلمداد کنیم .

سابق براین برای اینکه یك کشور از تعرض مهاجمین مصون باشد استراتژی دفاعی خود را برتقویت نیروهای دفاعی در طول مرزهای خویش استوار می‌ساخت . امروزکه یورش از سه جهت انجام می‌گیرد و باید حملات هوائی و پیاده شدن چتربازان دشمن رادرداخل خاك کشور پیش بینی کرد تقسیم قوا مسئلهٔ بغرنجی شده است .

وسایل دفاعی کشور را چگونه باید توزیع کرد ؟

برای اینکه مسئله را ساده‌تر مطرح کنیم فرض می‌کنیم که یك کشور وسیع اما کم جمعیت در معرض یك یورش هوائی است . هواپیماهای دشمن می‌توانند در همه‌جا فرود آیند و برای هیچ نقطه‌ای نمی‌توان بیش از نقاط دیگر اهمیت قائل شد . تعداد وسایل متحرکی که برای دفاع ازکشور باید بکار رود محدود می‌باشد . این وسایل را در چه جاهایی باید مستقر کرد ؟ اما دشمن محل این وسایل را کشف خواهد کرد ودرجاهایی دورتر از آن فرود خواهد آمد و مسئلهٔ دفاع از این قرار می‌شود : واحدهای دفاعی را چگونه باید مستقر کرد تا فاصلهٔ یك نقطهٔ دلخواه ازیك پایگاه مینیمم باشد ؟ این چنین مدلی را **توزیع شایسته** می‌نامیم .

بعید به‌نظر می‌رسد که مسئلهٔ توزیع شایسته کاملاً قابل حل باشد . حتی در حالت کاملاً سادهٔ زیر هم جواب مسئله مشخص نشده است : نسبت به n پایگاه وروی یك صفحهٔ مستدیر توزیع شایسته از چه قرار است ؟ به عبارت دقیقتر ، اگر حداکثر فاصلهٔ هر نقطهٔ صفحه از یك پایگاه دلخواه بیش از k نباشد ، نظیرهرمقدار n کوچکترین مقدار k چه خواهد بود ؟ به‌ازاء مقادیر $n \leq 5$ کوچکترین مقدار k تعیین شده است اما برای بسیاری از مقادیر $n > 5$ کوچکترین مقدار k معین نشده و تاکنون راه حل کلی مسئله ارائه نشده است .

* * *

مسئلهٔ جالبی که نسبت به کره مطرح می‌شوداز این قرار است : برای n نقطه واقع بر یك کره چه نوع تفرق یا چه ترتیبی را باید انتخاب کنیم تا اقصر فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ دلخواه ماکزیمم باشد ؟ در مسئلهٔ توزیع شایسته بهترین کنترل یك سطح مفروض با تعداد محدودپایگاهها تحقیق می‌شود .در مسئلهٔ اخیر، بهترین تفرقه‌ای که بین نقاط ممکن است بررسی می‌گردد (شاید همان مسئله باشد که تعادل بین اجزائی دو به دو متدافع را جستجو می‌کند)

به نظر می‌رسد که یك موضوع به دو صورت بیان شده است ، اما چنین نیست . می‌توان تصور کرد که برای نقاطی که روی یك کره به طرز شایسته واقع شده‌اند تفرقهٔ بین n نقطه بیش از $n+1$ نقطه است . اما این تصور هم درست نیست . ممکن نیست که پنج نقطه را روی یك کره به قسمی توزیع کرد که کمان فارق بین هردوتای دلخواه ازآنها بیش از ۹۰ درجه باشد . به عبارت دیگر ، ۹۰ درجه تفرقهٔ دو جانبی مطلوب می‌باشد. برای مجموعهٔ شش نقطه هم همین استنباط را خواهیم داشت .این موضوع تفاوت بین توزیع وتفرق‌رانمایان می‌سازد، زیرا برای کره ،که می‌توان آنرا ناحیه‌ای بدون مرز در نظر گرفت ، مسئلهٔ توزیع برای $n=5$ و برای $n=6$ مقادیر متفاوتی از k را بدست می‌دهد .

مسئلهٔ تفرق روی کره برای مقادیر n محصور بین

۲ و ۹ و برای مقادیر ۱۱ و ۱۲ و ۲۴ از n حل شده است. راه حل کلی مسئله بدست نیامده و برای مقادیر دیگر n نیز مسئله حل نشده است . جواب نظیر $n=11$ که به تازگی کشف شده نسبت به $n=12$ همان وضعی را دارد که درحالت $n=5$ و $n=6$ وجود داشت .

این مسائل که از لحاظ تئوری بررسی شدند به تازگی ارزشی عملی کسب کرده‌اند :

۱) بهترین تفرق ایستگاههای بازرسی فضائی (فعلاً با تجهیزات ، رادیو ـ تلسکوپ) برای یک کشوریا برای تمام کرهٔ زمین چیست ؟

۲) دستگاههای کنترل از راه دور با استفادهٔ از انتقال و انعکاس امواج هرتز قمرهای مصنوعی را روی مدارهایشان هدایت می‌کنند . اگراین قمرهای مصنوعی تصادفی پخش شده باشند ، در هر لحظه چه فاصلهٔ متوسطی را بین آنها می‌توان پیش بینی کرد ؟ آیا نظم دلخواهی برای مدارهای آنها وجود دارد ؟

۳) اگرروزی این قمرهای مصنوعی باایستگاههای فضائی جانشین شوندکه هریك در نقطهٔ ثابتی بالای سطح زمین مستقر باشند، مناسبترین شبکهٔ این ایستگاههای فضایی چه خواهدبود؟

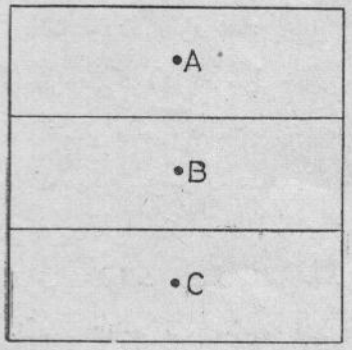
* * *

سه چوپان مأمور مراقبت از یك چراگاه مربع شکل شده‌اند ؛ هر یك از آنها درچه نقطهٔ از چراگاه باید مستقر شود ؟ این هم یکی از مواردعملی مسئلهٔ توزیع برای یک سطح مربع شکل وبه ازاء $n=3$ می‌باشد . **هوگواشتنهوس** با الحاق شرایط جالبی مسئله را تلطیف کرده است ؛ وی مقدمةً مربع را به سه مربع مستطیل متساوی تقسیم کرد و هر چوپان را درمرکزیکی ازاین مستطیلها فرض نمود(مطابق شکل a) ودر این حال چهار امتیاز بدست آورد :

۱)مساحتها متساویند

۲)مسافتهای ماکزیمال مقادیر متساویند (فاصلهٔ دورترین نقطهٔ هر بخش ازمحل چوپان را مسافت ماکزیمال آن بخش می‌نامیم)

۳)هر نقطهٔ ازچراگاه تحت مراقبت نزدیکترین چوپان است .

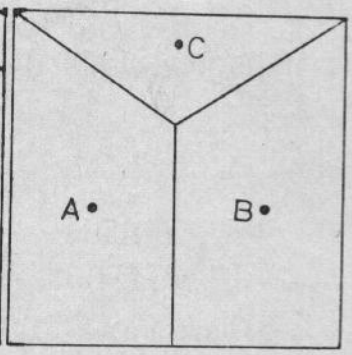


(شکل a)

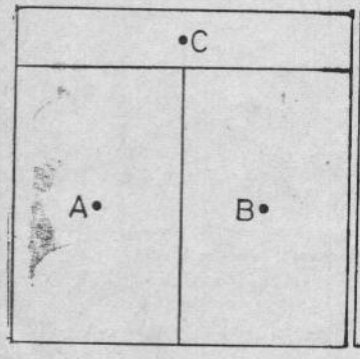
۴) هرچوپان در محلی مستقراست که مسافت ماکزیمال برای آن مینیمم می‌باشد. اشتنهوس پنج نوع دیگر تقسیم چراگاه را در نظر گرفت که نسبت به هر یک از آنها مسافت ماکزیمال نتیجه می‌شداما چهار امتیاز گفته شده را متضمن نبود. وی بالاخره سؤال زیر را مطرح ساخت : آیا ازبین تقسیم بندیهای مختلفی که برای چراگاه میسر است یکی وجود داردکه برای آن مسافت ماکزیمال کوتاهتر از مسافت ماکزیمال شکل a باشد ؟

به تازگی ثابت کرده‌اندکه جواب مسئلهٔ ابتدایی توزیع شایسته برای مربع واحد برابر است با : $k=\sqrt{\frac{65}{16}}$.

شکلهای b و c دو تقسیم بندی نظیر این مقدار از k را نشان می‌دهد .

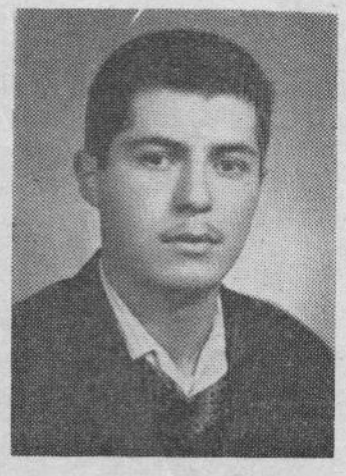


(شکل c)



(شکل b)

در شکل اول شرط (۳) و در هر دو شکل شرط (۱) صدق نمی‌کند. این موضوع این فکررا پیش می‌آوردکه جواب سؤال اشتنهوس مثبت است ، مسافت ماکزیمال نظیرهر تقسیم بندی مربوط به سؤال شاید بیشتر از $\sqrt{\frac{65}{16}}$ باشد .



دانش آموز رتبهٔ اول

همدان

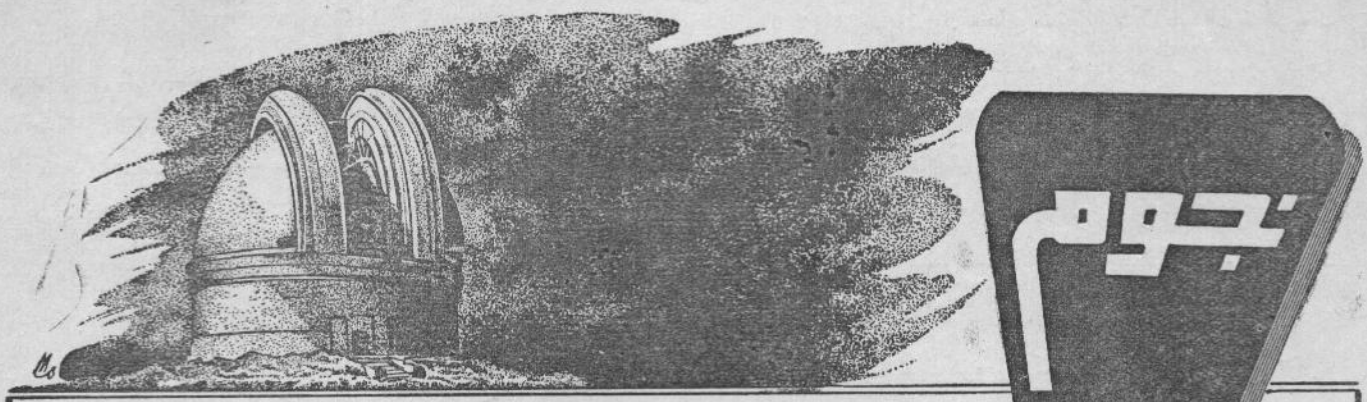
محمدرضا عزیزیان

ششم ریاضی

دبیرستان ابن سینا

معدل : ۱۹/۳۱

نمایندگی یکان ـ کتابفروشی بوعلی سینا



و ... کیهان شناسی

مراحل مهم علم نجوم

ترجمهٔ فصلی از کتاب «L'Astronomie Moderne» تألیف : TOCQUET

۲- دورهٔ جدید

الف - کپرنیک

نیکلاس کپرنیک
(۱۴۷۳-۱۵۴۳)

در شهر **تورن** (قدیم : Thorn ، فعلا : Torun) که در آن زمان زیر سلطهٔ پادشاهان **پلنی** (فعلا **لهستان**) بود متولد شد . اولین تعلیمات اساسی را نزد عموی خود اسقف **وارمی** فراگرفت . بعداز تحصیل آثار **ژان مولر** و پس از آن دروس نجوم **ماریا - دومنی کونوارا** ، مدت یك سال **در رم** به تدریس ریاضیات اشتغال ورزید . بالاخره به میهن خویش بازگشت و در ۱۵۰۲ شغل کشیشی را برگزید . در ۱۵۱۰ کشیش رسمی **فروئنبورگ** شد که درآنجا رصدخانه‌ای مجهز به ابزار مقدماتی بناکرد و تا زمان مرگ خود در همانجا باقی ماند .

کپرنیك هم همانند **آلفونس دهم** پادشاه **کاستی** ، دریافت که هیئت بطلمیوس بسیار پیچیده می‌باشد. پس آثار دیگر منجمین قدیمی امثال **فیثاغورس** ، **فیلولائوس** و **کاپلارا** مطالعه کرد ، رصدهای زیادی را انجام داد و مخصوصاً محقق کرد که مریخ ، مشتری و زحل به هنگام مقابله دارای بزرگترین قطرظاهری می‌باشند. کپرنیك بعداز تأمل دررصدها و محاسبه‌های نجومی خویش هیئت جدیدی عرضه کرد که قبل از وی ، مگر به صورت یك طرح اولیه ، مطرح نشده بود و صریحاً نشان داد که پدیده‌های آسمانی ، امثال : حرکت شبانه‌روزی ستارگان ، تغییرات قطرظاهری سیارات وحرکات مستقیم و قهقرائی آنها را می‌شود با هیئت جدید به سادگی توضیح داد . در این هئیت خورشید ثابت فرض می‌شود و سیارات ، که به ترتیب دوری از خورشید عبارتند از : عطارد ، زهره ، زمین ، مریخ ، مشتری وزحل ، دور خورشید در مسیرهای دایره‌ای حرکت می‌کنند ، ماه قمر زمین است و دورآن از جهت مغرب به مشرق می‌چرخد . کپرنیك حقیقت اشیاء را بر ملا ساخت و پدیده‌های آسمانی راکه قبلاً نام برده شده بود به نوع تازه‌ای مطرح کرد . بخصوص ، توقف و حرکت برگشتی یك سیارهٔ علوی را نتیجهٔ ترکیب سرعتهای زاویه‌ای آن سیاره وزمین دانست. هیئت بطلمیوس با مدارات خارج از مرکز و افلاك ممثل خود دفعةً از صحنهٔ نجوم محوشد .

هیئت کپرنیك ، همانند همهٔ عقاید تازه ، در ابتدا با مخالفت جدی روبرو شد ؛ زیرا از یك طرف هیئت بطلمیوس را طرد می‌کرد که در طول چهارده قرن همچون قانون حتمی خلل ناپذیر و جزء عقاید پابرجای عمومی درآمده بود ، و از طرف دیگر . زمین را در ردیف سایر سیارات قرار می‌داد و مرکزیت آنرا منکر می‌شد، برای زمین و درنتیجه برای انسان، اشرف مخلوقات ، تنزل مقامی محسوب می‌شد . موضوع مهمتر آنکه برای حرکت زمین به دور خورشید دلیل موجهی ارائه نشده بود و حرکت ماه به دور زمینی که خود دور خورشید می‌چرخد موضوع پیچیده‌ای به نظر می‌رسید .

افکار و عقاید کپرنیک توسط مریدان و شاگردانش اشاعه یافت و تنها اثر چاپی وی به نام :

De Revolutionibus Orbium Calestium

وقتی منتشر شد که وی در بسترمرگ بود ؛ این کتاب به همت یکی از مریدان کپرنیک به نام **رتیکوس** (Rheticus) به سال ۱۵۴۳ در **نورنبرگ** چاپ و منتشر شد و نمونهٔ چاپی آن وقتی به کپرنیک ارائه شد که بیش از چند ساعت از حیات وی باقی نمانده بود . کپرنیک در مقدمه‌ای کتاب خود را به **پاپ پل سوم** اهداء کرده است و در آنجا توضیح می‌دهد که کتاب خود را به تمنای دوستان منتشر می‌کند و آنچه دربارهٔ هیئت عالم اظهار داشته است فرضیه‌ای است که باید از طرف روشنفکران مورد بررسی واقع شود و امیدوار است که شخصیت پاپ وی را از تعرض مخالفان مصون بدارد . وی چنین می‌گوید : «این فرضیه را قبول کنیم، اگر خوب است چه بهتر ، وگرنه ، کافی است که رصدهایی به اندازهٔ کافی انجام دهیم . »

صرف نظر از ذکر نام بعض منجمان درجهٔ دوم ، مثل **گیوم چهارم** که به سال ۱۵۶۱ در **کاسل** رصدخانه‌ای بنا کرد ، به نام یکی از بزرگترین راصدان برخورد می‌کنیم ؛ **تیکو براهه** که شهرت جاودانی دارد رصدهایی انجام داد که هم از نظر کمی و هم از لحاظ کیفی شایان اهمیت است و بدین وسیله اولین موانعی را که در بیان قطعی حرکات آسمانی وجود داشت ازمیان برداشت.

***

ب . تیکوبراهه

(۱۵۴۶ - ۱۶۰۱)

از یك فامیل اصیل دانمارکی در **کندستروپ** (knudstrup)

نزدیك **هلسینگبرگ** Helsingborg **(سوئد)** به دنیا آمد . به زودی ذوق شدیدی برای مطالعات نجومی ازخود بروز داد که بامخالفت خانواده‌اش روبروشد ، آنها مطالعات نجومی را کاری سبك و دور از شأن خانوادگی می‌دانستند . تیکوبراهه مطالعهٔ در نجوم وارصاد ستارگان را پنهانی دنبال کرد و اولین رصد مهمی که انجام داد مربوط بود به یك ستارهٔ جدید یا اختر متناوب که به سال ۱۵۷۲ در صورت فلکی ذات الکرسی ظاهر شده بود ودرخشندگیی همانند زهره داشت ودر روزروشن قابل رؤیت بود ، اما بعد از ۱۸ ماه از انظار مخفی شد . تیکوبراهه قدر این ستاره ، رنگ آن ، تغییرات مربوط به درخشندگی آن و بالاخره وضع آن را در صفحهٔ آسمان مشخص کرد .

به سال ۱۵۷۶ **فردریك دوم** پادشاه دانمارك محلی از جزیرهٔ کوچك **هون** (Hven) را به تیکوبراهه بخشید که وی در آنجا رصدخانه‌ای بنا کرد وآنرا **او را نیبورگ** (Uranibourg) نامید . بعد ازمرگ این شاهزادهٔ بزرگوار و در زمان سلطنت **کریستین چهارم** . تیکوبراهه با چنان دسیسه‌ها وغبطه‌هایی مواجه شد که بالاخره به ستوه آمد و بالاجبار جزیرهٔ هون را ترك کرد و در **ویتنبرگ** (Wittemberg) نزدیك هامبورگ پناهنده شد و بالاخره به دعوت امپراطور **رودولف دوم** به **پراگ** رفت . تیکوبراهه در این شهر اقامت گزید و بدون وقفه به کارهای نجومی خود ادامه داد تا اینکه در ۱۳ اکتبر ۱۶۰۱ مرگ وی اتفاق افتاد . در سالهای آخر عمرش ، **کپلر** به عنوان دستیار با وی همکاری می‌کرد .

همچنانکه قبلاً بیان شد ، تیکوبراهه یکی از اعجوبه‌های راصدان فلکی است و شایستگی کارهای وی مخصوصاً از این نظر قابل اهمیت است که همهٔ رصدهای وی باچشم بدون سلاح انجام گرفته است ؛ درآن زمان هنوز دوربین‌های نجومی اختراع نشده بود . وی مهارت شگفتی داشت که آلات و ابزار مورداحتیاج خودکه پیش بینی کرده طبق طرح خودکه آنها را فراهم آورد . درطول سی سال رصدهای بسیاری از ستارگان ، ستارگان دنباله‌دار و سیارات انجام داد . فهرستی از ۱۰۰۵ ستاره ترتیب داد که درآن اوضاع این ستارگان به دقت تعیین شده بود ؛ در نتیجهٔ همین رصدها بودکه شاگرد وی کپلر بـه کشف قوانین هیئت منظومهٔ شمسی راهنمایی شد . گذشته ازاینها ، تیکوبراهه هیئت کپرنیك را قبول نداشت و به غیراز هیئتهای بطلمیوس و کپرنیك خود هیئت دیگری وضع کرد که به نام وی معروف است .

این هیئت ، هر چندکه مشاهدات آسمانی را تبیین می‌کند ، بر خلاف واقعیت است و مخصوصاً با رصدهایی که به فاصلهٔ خورشید تا زمین مربوط است تطبیق نمی‌کند .

-۳-

کسرهای مسلسل

تهیه و تنظیم از : پرویز شهریاری

۱ـ تعریف : کسر مسلسل به‌کسری گفته می‌شود که به صورت زیر باشد :

$$a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

که در آن عدد صحیح a باکسری جمع شده است که صورت آن واحد است و در مخرج عدد صحیح a_1 با کسری جمع شده است که درصورتش واحد و درمخرجش عددصحیح a_2 جمع شده است باکسر . . . . تاآخر (تمام اعداد صحیح ، مثبت فرض شده‌اند).

کسرهای $\frac{a}{1}$ ، $\frac{1}{a_1}$ ، $\frac{1}{a_2}$ ، $\frac{1}{a_3}$ وغیره را «کسرهای اصلی» می‌نامیم .

کسرمسلسل فوق را بطورخلاصه به صورت زیر نمایش می‌دهند :

$$(a \text{ و } a_1 \text{ و } a_2 \text{ و } a_3 \text{ و } \ldots)$$

مثلاکسرهای :

$$\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{17}}} \quad \text{و} \quad 3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

را بطورخلاصه به‌صورت(۳ و ۱ و۲ و۳) و (۱۷ و۱ و۲ و ۰) می‌نویسیم .

۲ـ تبدیل کسر مسلسل به‌کسر معمولی : هرکسر مسلسلی را می‌توان به‌کسر معمولی تبدیل‌کرد ، برای این منظورکافی است اعمالی راکه درکسر وجود دارد انجام دهیم.

مثلا فرض کنید کسر زیررا داشته باشیم :

$$(2 \text{ و } 3 \text{ و } 1 \text{ و } 4) = 2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

بایستی اعمال زیررا انجام دهیم :

$$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \; ; \; 1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5} \; ; \; 3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5} \; ; \; 1:\frac{19}{5}$$

$$=\frac{5}{19} \; ; \; 2+\frac{5}{19}=\frac{43}{19}$$

و این یك کسر معمولی است که مقدار آن دقیقاً برابر است با کسرمسلسل مورد نظر .

۳ـ تبدیل کسر معمولی به‌کسر مسلسل: هرکسر معمولی را می‌توان به‌کسر مسلسل تبدیل کرد . کسر $\frac{A}{B}$ را در نظرمی‌گیریم ، ابتدا مقدار صحیح کسررا خارج می‌کنیم (رفع) بدست می‌آید :

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}$$

که درآن a خارج قسمت صحیح A بر B و r باقیماندهٔ این تقسیم است (اگر A از B کوچکتر باشد $a=0$ و $r=A$ خواهد شد).

صورت و مخرج کسر $\frac{r}{B}$ را بر r تقسیم می‌کنیم ، می‌شود :

$$\frac{r}{B}=\frac{1}{B:r}=\frac{1}{a_1+\frac{r_1}{r}}$$

که درآن a_1 خارج قسمت صحیح و r_1 باقیماندهٔ تقسیم B بر r است .

حال دوباره صورت و مخرج کسر $\frac{r_1}{r}$ را بر r_1 تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{r_1}{r}=\frac{1}{r:r_1}=\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}$$

که درآن a_2 خارج قسمت صحیح و r_2 باقیماندهٔ تقسیم r بر r_1 است . با ادامهٔ این روش به ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{r_1:r_2}=\frac{1}{a_3+\frac{r_3}{r_2}}\ ;\ \frac{r_3}{r_2}=\frac{1}{r_2:r_3}$$

$$=\frac{1}{a_4+\frac{r_4}{r_3}}\ ;\ \ldots$$

و چون داریم :

$$B>r>r_1>r_2>r_3>\ \ldots$$

با ادامهٔ این‌روش به‌جایی خواهیم رسید که باقیمانده‌ای مساوی صفر داشته باشیم . فرض کنید $r_n=0$ یعنی :

$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=\frac{1}{a_n}$$

باشد در این‌صورت خواهیم داشت :

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}=a+\frac{1}{a_1+\frac{r_1}{r}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}}$$

$$=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\ddots+\frac{1}{a_n}}}$$

تبصره ـ ازآنچه گفتیم نتیجه می‌شود که a ، a_1 ، a_2 ، . . . و a_n خارج قسمتهای صحیحی هستند که به ترتیب از تقسیم A بر B ، سپس بر اولین باقیمانده و بعد اولین باقیمانده بردومین باقیمانده و غیره بدست می‌آیند ، به عبارت دیگر اینها خارج قسمتهایی است که ضمن جستجوی بزرگترین مقسوم علیه مشترك بین A و B (از راه تقسیمات متوالی) بدست می‌آید . به‌همین مناسبت ، اعداد a ، a_1 ، a_2 ، . . . و a_n را خارج قسمتهای کسر مسلسل گویند .

مثال۱) کسر $\frac{40}{17}$ را به‌کسر مسلسل تبدیل کنید. داریم:

	۲	۲	۱	۵
۴۰	۱۷	۶	۵	۱
۶	۵	۱	۰	

وازآنجا :

$$\frac{40}{17}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$$

مثال۲) کسر $\frac{7}{120}$ را به‌کسر مسلسل تبدیل کنید .

داریم :

	۱۷	۷
۱۲۰	۷	۱
۱	۰	

$$\Longrightarrow\ \frac{7}{120}=\frac{1}{17+\frac{1}{7}}$$

۴ـ کسرهای متقارب : اگر در یك کسر مسلسل ، چند حلقهٔ اولی را انتخاب کنیم و از بقیه صرف نظر نمائیم ، خودکسر مسلسلی خواهد بود که اگرآنرا به‌کسرمعمولی تبدیل کنیم ،کسر متقارب نامیده می‌شود . اولین کسر متقارب وقتی بدست می‌آیدکه تنها حلقهٔ اول را انتخاب کنیم ، دومین کسر متقارب با انتخاب دو حلقهٔ اول و غیره بدست می‌آید. به‌این ترتیب مثلا درمورد کسر مسلسل زیر :

$$3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

اولین کسر متقارب برابراست با : $\frac{3}{1}$ ؛

دومین‌کسر متقارب برابر است با :

$$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

سومین کسر متقارب برابراست با :

$$3+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}=\frac{10}{3}$$

و دراین مثال چهارمین کسر متقارب همان مقدار واقعی‌کسر مسلسل یعنی $\frac{27}{8}$ است .

وقتی که دریك کسر مسلسل‌عدد صحیح وجود نداشته باشد اولین‌کسر متقارب مساوی صفر خواهد بود .

۵ـ قانون تشکیل کسرهای متقارب : برای کسر مسلسل (a_n و ... و a_2 و a_1 و a) سه‌کسر اولیهٔ متقارب را تشکیل می‌دهیم .

$$1)\ \frac{a}{1};\quad 2)\ a+\frac{1}{a_1}=\frac{aa_1+1}{a_1}\ ;$$

$$(۳)\quad a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=a+\cfrac{1}{\cfrac{a_1a_2+1}{a_2}}$$

$$=a+\frac{a_2}{a_1a_2+1}=\frac{aa_1a_2+a+a_2}{a_1a_2+1}$$

$$=\frac{(aa_1+1)a_2+a}{a_1a_2+1}$$

با مقایسهٔ کسر متقارب سوم با دوکسر متقارب اول نتیجه می‌گیریم که صورت کسر سوم را می‌توان به این ترتیب بدست آورد که صورت کسر متقارت دوم را در خارج قسمت مربوط (یعنی در a_2) ضرب و به حاصل‌ضرب صورت کسر اول رااضافه کنیم . درست به همین ترتیب هم می‌توان مخرج کسر سوم رابا کمك مخرجهای دوکسر اول بدست‌آورد .

ثابت می‌کنیم که این قانون را می‌توان برای محاسبهٔ همهٔ کسرهای متقارب بکار برد ، یعنی ثابت می‌کنیم که بطورکلی صورت $(n+1)$ امین کسر متقارب را می‌توان به این طریق بدست آورد که صورت کسر متقارب nام را در خارج قسمت مربوط (یعنی در a_n) ضرب و حاصل‌ضرب را با صورت کسر $(n-1)$ام جمع کنیم . و به همین ترتیب هم می‌توان مخرج کسر $(n+1)$ام را باکمك مخرجهای کسرهای nام و $(n-1)$ام بدست‌آورد . اثبات را با استقراء ریاضی انجام می‌دهیم ، یعنی ثابت می‌کنیم که اگر این قانون برای کسر nام صحیح باشد و برای کسر $(n+1)$ام هم صحیح خواهد بود .

کسرهای متقارب متوالی را به ترتیب زیر نشان می‌دهیم :

$$\frac{P_1}{Q_1}\ ;\ \frac{P_2}{Q_2}\ ;\ \frac{P_3}{Q_3}\ ;\ \ldots\ ;\ \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\ ;\ \frac{P_n}{Q_n}\ ;\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

خارج قسمتهای متناظر آنها به ترتیب چنین هستند

$$a\ ;\ a_1\ ;\ a_2\ ;\ \ldots\ ;\ a_{n-2}\ ;\ a_{n-1}\ ;\ a_n\ .$$

فرض می‌کنیم که تساویهای زیر صحیح باشند :

$$(۱)\quad P_n=P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2}\ ;\ Q_n=Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2}$$

و بنابراین :

$$(۲)\quad \frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2}}{Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2}}$$

بایستی ثابت‌کنیدکه در این صورت خواهیم داشت :

$$(۳)\quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_na_n+P_{n-1}}{Q_na_n+Q_{n-1}}$$

با مقایسهٔ کسرهای متقارب :

$$\frac{P_n}{Q_n}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}}}}$$

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

نتیجه می‌گیریم که برای محاسبهٔ کسر متقارب $(n+1)$ام بایستی درکسر متقارب nام ، عدد a_{n-1} را به مجموع $a_{n-1}+\frac{1}{a_n}$ تبدیل کرد .

بنابراین ازرابطهٔ (۲) بدست می‌آید :

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}(a_{n-1}+\frac{1}{a_n})+P_{n-2}}{Q_{n-1}(a_{n-1}+\frac{1}{a_n})+Q_{n-2}}$$

پرانتزهارا باز و صورت ومخرج کسررا در a_n ضرب می‌کنیم، می‌شود :

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}a_{n-1}a_n+P_{n-1}+P_{n-2}a_n}{Q_{n-1}a_{n-1}a_n+Q_{n-1}+Q_{n-2}a_n}$$

$$=\frac{(P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2})a_n+P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2})a_n+Q_{n-1}}$$

که اگر رابطهٔ (۱) را در نظربگیریم ، بالاخره بدست می‌آید :

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_na_n+P_{n-1}}{Q_na_n+Q_{n-1}}$$

و این همان رابطهٔ (۳) است که می‌خواستیم آنرا ثابت کنیم .

به این ترتیب اگر تساوی (۳) برای کسر متقارب nام صحیح باشد ، برای کسر متقارب $(n+1)$ام نیزصحیح خواهد بود. ولی بلافاصله دیده می‌شود که این تساوی برای کسرمتقارب سوم صحیح‌است ، بنابراین طبق‌استدلال بالا برای کسر متقارب چهارم و سپس کسر متقارب پنجم و غیره صحیح خواهد بود.

بااستفاده ازاین‌قانون همهٔ کسرهای متقارب را درمورد مثال

زیر معین می‌کنیم :

$$x = ۲ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۳ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۳ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۵}}}}}}$$

(۵ و ۱ و۳ و ۲ و ۳ و۱ و ۲) =

نتیجهٔ محاسبه را می‌توان درجدول زیر منظم کرد :

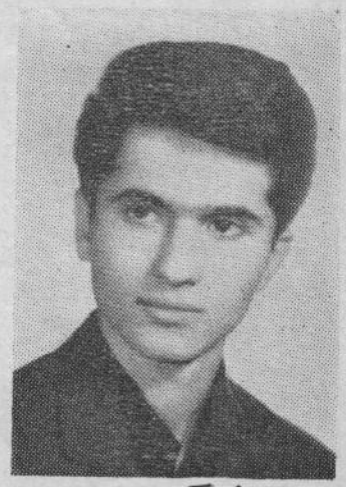
		۳	۲	۳	۱	۵
۲	۳	۱۱	۲۵	۸۶	۱۱۱	۶۴۱
۱	۱	۴	۹	۳۱	۴۰	۲۳۱

در سطر دوم صورت و در سطر سوم مخرج کسرهای متقارب به ترتیب نوشته شده است . دوکسر متقارب اول مستقیماً بدست می‌آید : $\frac{۲}{۱}$ و $\frac{۳}{۱}$. بقیهٔ کسرها هم با توجه با قانونی‌که اثبات کردیم ، محاسبه می‌شوند .

برای سهولت‌کار سطر اول مخرجهای صحیح از سوم تا آخر نوشته شده است .

دنباله دارد

دانش آموزان رتبهٔ اول



اراك

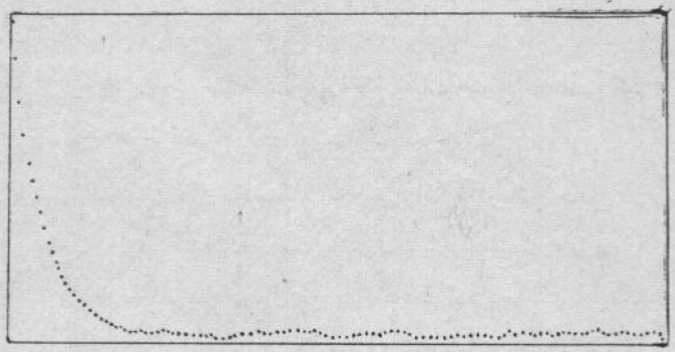
محمد خلیلی
ششم طبیعی
دبیرستان پهلوی
معدل: ۱۸/۷۵
نمایندگی یکان ـ بنائی

لنگرود

محمدعلی اسمعیل کاویانی
ششم ریاضی
دبیرستان خیام
معدل ۱۸/۹۷
نمایندگی یکان ـ پوریکتا

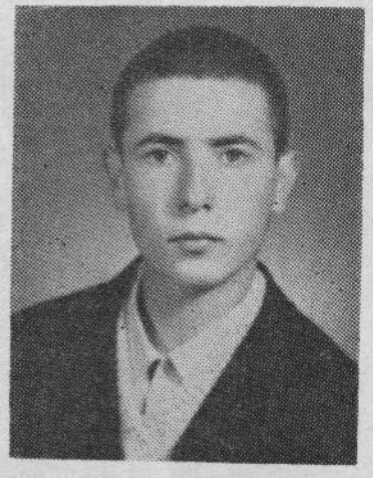
احتمالات (بقیه از صفحهٔ۵)

با ۱۶۳۸۴ توپ در ظرف A شروع گردید . هرحرکت شامل محاسبهٔ نتیجهٔ ۲۰۰،۰۰۰ بارکشیدن‌کارت بودکه در دو دقیقه انجام می‌گرفت . منحنی رسم شدکه شمارهٔ توپهای ظرف A را پس از هر ۱۰۰۰ بارکشیدن‌کارت نشان می‌داد . همانطور که انتظار می‌رفت. منحنی‌تنزل شمارهٔ توپهای ظرف A تقریباً بطورکامل تصاعدی بود . پس ازاینکه‌شمارهٔ‌توپهای A به‌شمارهٔ تعادل یعنی ۸۱۹۲ رسید منحنی درحدود این عدد بطورتصادف بالا و پائین می‌رفت . در این قسمت منحنی ، بالا وپائین‌رفتن آن زیادتر و بیشتر نشان داده شده است به هر حال نشان می‌دهدکه بالا و پائین رفتن تعداد توپهای ظرف A حتماً وجود ددار .



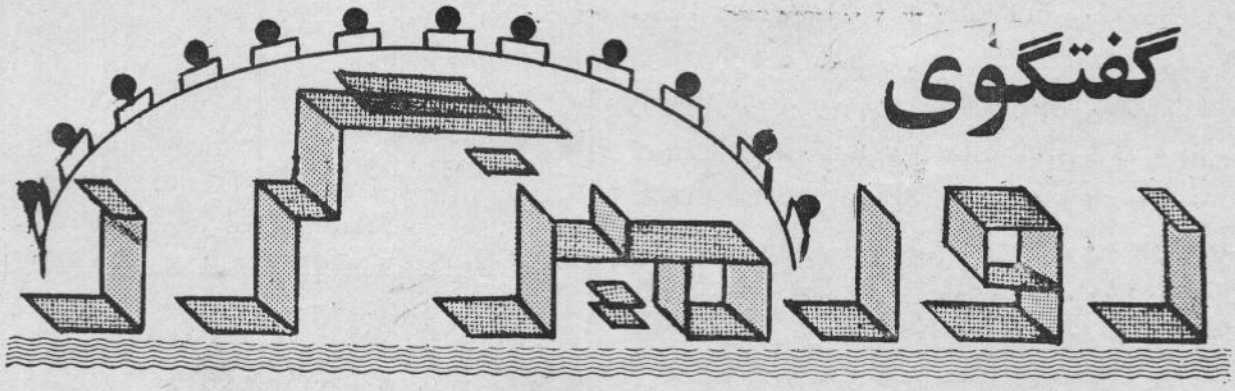
این بالا وپائین رفتنها ، مدلهایی ازتغییر پذیری‌طبیعت هستندوبین ما ومرگ‌حرارت‌که طبق قانون دوم ترمودینامیک بدان محکوم هستیم قرار دارد . نظریهٔ احتمالات در جدال بین ترمودینامیک ونظریهٔ سینتیک دربارهٔ طبیعت واسطه‌می‌شود و با ذکر اینکه اگر قانون دوم کمی با انعطاف تعبیر شودهیچ تناقض واقعی بین این دو وجود ندارد آنها را آشتی می‌دهد . درواقع‌تکامل‌نظریهٔ احتمالات‌درقرن‌بیستم وضع‌مارا به‌نحوی‌تغییر دادکه هیچ انتظار نداریم‌که قوانین طبیعت بطور قاطع و محکم تعبیر و تفسیر شود .

پایان



اردبیل

محسن چراغلو
ششم طبیعی
دبیرستان‌ابومسلم
معدل ۱۸/۵۹
نمایندگی یکان ـ
کتابفروشی‌یاوریان



● سومین جلسه است که راجع به یک موضوع بحث می‌کنیم و هنوز نتیجهٔ قطعی از آن بدست نیاورده‌ایم .

محصّلی در حل مسئلهٔ امتحانی از معلوماتی خارج از سطح کلاس استفاده کرده است ، تکلیف ممتحن چیست ؟

* مطالبی که محصل مورد استفاده قرارداده است یا اینکه مباحث تازه‌ای است و جدیداً مطرح شده اما در حدود برنامهٔ کلاس است ، مثلاً مبحث همنهشتی‌ها در مورد مسائل مربوط به اعداد ، در این صورت اگر محصل دربارهٔ مبحث مورد استفاده توضیحات مقدماتی کافی داده باشد و راه حل وی هم صحیح باشد حق دارد که نمرهٔ کامل مسئله را بگیرد. اما اگر مبحث مورد استفاده مربوط به برنامهٔ کلاس بالاتر باشد به عقیدهٔ من استحقاق دریافت نمره را نخواهد داشت .

* آیا داشتن معلومات بیشتر برای محصل گناه است ؟

* این محصل می‌تواند مسئله را از راهی که مطابق با برنامهٔ کلاس است حل کند و علاوه بر آن توضیح دهد که راه حل ساده‌تری برای مسئله موجود است و این راه حل را شرح دهد .

● ـ یکی از آشنایان که در بازرسی کار می‌کند تعریف می‌کرد که : در امتحان جبر پنجم ریاضی یکی از دبیرستانها یکی از سؤالاتی که معلم داده بود : « مختصات سه رأس مثلثی را داده وخواسته بود ثابت کنند در مثلث سه عمود منصف اضلاع متقارب هستند» . محصلی در پاسخ به این سؤال اثبات هندسی این قضیه را که در کلاسهای پائین‌تر می‌خوانند شرح داده بود اما معلم به این سؤال دانش آموز نمره نداده بود و شکایت دانش‌آموز به بازرسی رسیده بود .

* محصل مقصر نیست . معلم راه حل مخصوصی را انتظار داشته است ، لازم بود در سؤال خود آنرا قید می‌کرد اگر سؤال خود را صریح وقاطع ذکر می‌کرد ، مثلاً می‌گفت : معادلات عمود منصفهای اضلاع مثلث را بدست آورده از راه محاسبه ثابت کنید سه عمود منصف متقارب هستند ، اشکالی پیش نمی‌آمد.

● در مورد راه‌حلهایی که ممتحن نمی‌تواند نظر قاطع خود را ابراز دارد حق است که از مقامات مسؤول یا اشخاص ذیصلاحیت کسب تکلیف کند . اگر محصلی هم نسبت به نمرهٔ امتحانی خود اعتراض داشته باشد راه برای وی باز است و می‌تواند از مقامات مسؤول تقاضای رسیدگی کند .

● ـ همان دوستم که در بازرسی است حکایت می‌کرد که اغلب شکایاتی واصل می‌شود که سؤال امتحانی خارج از قوهٔ محصلین بوده یا اینکه اشتباه بوده است .

● موضوعهای دیگری که در بارهٔ آن بحث کنیم وضمناً شامل نکات آموزنده هم باشد زیاد است . چرا فقط در بارهٔ امتحانات به گفتگو بپردازیم و مطالبی را عنوان کنیم که عنوان کردن آنها به این صورت احتمالاً بر خلاف اصول تعلیم و تربیت باشد .

* پس اجازه فرمائید دنباله بحث به جلسهٔ دیگر موکول شود .

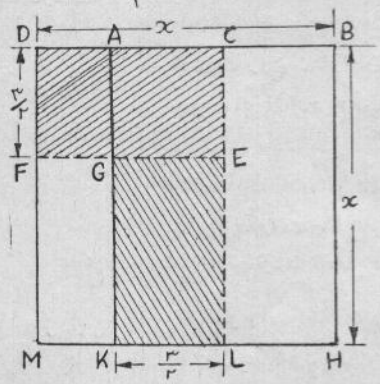
***

در حاشیه تاریخ

روش خوارزمی درحل مسائل درجهٔ دوم

اقتباس ازکتاب : Curiosités Géométriques par E . Fourry

مسئلهٔ سوم ـ عددی تعیین کنیدکه مربع آن برابر باشد باسه برابر این عدد به‌اضافهٔ چهار ، معادلهٔ مورد نظر عبارتست از: $x^2=3x+4$ و الزاماً $x>3$ می‌باشد . ترسیمات به‌همان ترتیب قبل است منتهی این دفعه ساده‌تر می‌باشد مربع DBHM را در نظر می گیریم و فرض می‌کنیم که طول ضلع ان برابر x باشد . درداخل آن مربع MLEF را به‌ضلع $x-\frac{3}{2}$ ومربع مستطیل KLCA را به ابعاد x و $\frac{3}{2}$ مطابق شکل رسم می کنیم



می‌توانیم چنین بنویسیم :

مربع FL = مستطیل FK + مستطیل GL

مستطیل AM + مربع AE = مستطیل DE + مستطیل FK =

به عبارت دیگر :

$$\text{مربع } FL=(\frac{3}{2})^2+4=\frac{25}{4}$$

نتیجه می‌شود : $ML=\frac{5}{2}$ و در نتیجه :

$$BD \text{ یا } x=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$$

در حالت کلی معادله به صورت $x^2=px+q$ فرض شده است . بنابر آنچه‌گفته شد چون عمل شود مساحت مربع FELM به‌صورت‌زیر حاصل‌می‌شود :

$$(x-\frac{p}{2})^2=\frac{p^2}{4}+q$$

تعیین مساحت مثلث برحسب اندازه‌های سه‌ارتفاع آن

اندازه‌های ضلعهای مثلث را با a و b و c و اندازه‌های ارتفاعهای نظیر را با h_a و h_b و h_c نمایش می‌دهیم . می‌دانیم که هر مثلث بامثلثی‌که ضلعهایش عکس ارتفاعهای مثلث مفروض باشد متشابه است یعنی :

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

از طرفی نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه برابر است بامجذور نسبت تشابه آنها پس اگر S مساحت مثلث مفروض و S' مساحت مثلثی باشدکه ضلعهایش عکس ارتفاعهای آن مثلث است داریم :

$$\frac{S}{S'}=\frac{a^2}{\frac{1}{h_a^2}}=a^2h_a^2 \Longrightarrow S=S'\cdot a^2h_a^2$$

چون در فرمول معروف :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

S را با S' و a و b و c را به‌ترتیب با $\frac{1}{h_a}$ و $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ جانشین‌ساخته‌حاصل‌رادر a^2h^2 ضرب کرده‌وساده کنیم‌خواهیم‌داشت:

$$S=\frac{h_a^2h_b^2h_c^2}{\sqrt{(h_ah_b+h_ch_a+h_bh_c)(h_ah_b+h_ch_a-h_bh_c)(h_ah_b+h_bh_c-h_ah_c)(h_ch_b+h_ch_a-h_ah_b)}}$$

حسین گوگی دانشجوی ریاضی‌دانشکدهٔ علوم

از هر جائی یادداشتی

«تقسیم بندی علوم از نظر ابن‌سینا»

شیخ ابوعلی‌سینا درکتاب مشهور **شفا** علوم زمان خود را به سه دسته تقسیم کرده است : اول علوم عالی و آنها علومی هستندکه با ماده سروکار ندارند و درك و فهم آنها فقط باتعقل صورت می‌گیرد وآنها را **علوم ماوراء الطبیعه** نامندمانند الهیات وفلسفه و منطق که **علوم اولی** نیز نامیده می‌شوند .

دوم ـ **علوم اوسط** یا وسطی هستندکه هم با ماده سر وکار دارند و هم برای یاد گرفتن علوم اولی دانستن آنها لازم است و آنها **علوم ریاضی** هستند چنانچه فلاسفهٔ قدیم برای درك مطالب علمی خود ابتدا ریاضیات را فرا می‌گرفتند .

سوم ـ **علوم ادنی** یا دانی هستندکه فقط با ماده سر وکار دارند و آنها را با مشاهده و تجربه می‌توان درك کرد و آنها **علوم طبیعی** هستندکه امروزه آنها را علوم تجربی گویند .

اماعلوم ریاضی در نظر شیخ ابوعلی سینا به چهار قسمت تقسیم می‌شد :

۱ ـ **علم اعداد** که‌عبارت ازآشنا شدن به انواع اعداد ودانستن خاصیت هرکدام و نسبت آنها با یکدیگر است ـ جمع و تفریق ارقام هندسی و جبر و مقابله نیز جزواین علم محسوب می‌شود . این علم را **علم الارثما طیقی** (علم‌الحساب) نیز می‌گویند .

۲ ـ **علم هندسه** ـ که عبارت ازآشنایی به احوال خطوط واشکال سطوح و مجسمات و مساحات اشکال و نسبت بین آنها و علوم جر اثقال و اوزان و موازین وآلات جریه و مناظر و موایا و نقل میاه باشد .

۳ ـ **علم هیأت** ـ که عبارت ازآشنایی به عالم و شکل و اوضاع ومقادیر وحرکات ستارگان است و از فروع این علم همان زیجات و تقاویم می‌باشد .

۴ ـ **علم موسیقی** ـ که عبارت از آشنا شدن به انواع نغمه‌ها و اتفاق واختلاف آنها و ابعاد و اجناس و جمع و انتقالات و ارتفاع آنها وکیفیت تألیف لحن‌هاست ، علم تهیهٔ آلات موسیقی نیز از متفرغات این علم است .

ابن‌سینا یکایك این علوم راکه از قدما به او رسیده می‌دانسته و اضافاتی نو نیز بر آنها نموده است بخصوص درکتاب **المجسطی** اضافاتی به آخر آن نموده است . نکتهٔ قابل توجه آنست‌که در نظر ابن سینا علم هیأت یکی از علوم اساسی ریاضی است و به‌آن توجه بخصوصی داشته است . بطورکلی دانشمندان قدیم به این علم اهمیت فوق العاده‌ای می‌داده‌اند. همچنین شیخ علم موسیقی را نیز جزو علوم ریاضی دانسته است .

«فرستنده قوام نحوی ازاصفهان»

چشمك زدن ستارگان

Scintillation

نورستارگان‌ثابت به‌نظر نمی‌رسد و یك نوع نوسانهای سریع در آن ملاحظه می‌شود . مخصوصاً وقتی‌که ستاره نزدیك به افق باشد . وقتی که چشمك زدن ستاره خیلی شدید باشد با تغییر رنگ همراه است . چشمك زدن ستارگان علتی‌جز تموج جو زمین ندارد. وقتی‌که ستاره‌ابعاد ظاهری محسوسی داشته باشد ، مثلا یك‌ستاره، چشمك‌زدن نقاط مختلفش که به صورت منابع نورانی متمایز به‌نظرمی‌رسد تحقق نمی‌پذیرد زیرا که تموجات اشعه در مجموع آنها ضعیف می‌شود. واین خودوسیله‌ای است‌که سیارات از سایر ستارگان مشخص می‌شوند ، سیارات چشمك نمی‌زنند . با وجود این ، سیاراتی که قطر ظاهری آنها خیلی‌کوچك است (عطارد یا مریخ در بعضی‌از مراحلش) درهنگامی‌که‌خیلی‌نزدیك به افق باشندچشمك زدن‌بسیارضعیفی خواهند داشت .

چشمك زدن ستارگان‌علل محلی هم می‌تواند داشته باشد : تموجی که زمستانها در هوای‌گرم مجاور سقف خانه‌ها ایجاد می‌شود، خروج هوای‌گرم از لوله‌های بخاری ، و غیره .

ترجمه از : فرهنگ نجومی لاروس

چگونه مسأله‌ای را حل کنیم؟

تألیف : G.POLYA

ترجمهٔ : ه . شریفزاده

استقراء و استقراء ریاضی

استقراء نوعی استدلال است که از مشاهدهٔ مثالهای خاص ورابطهٔ آنها شروع و به‌کشف قوانین کلی منجرمی‌شود ؛ ودرهمهٔ علوم حتی ریاضیات مورد استفاده واقع می‌شود . در حالی‌که استقراء ریاضی جزدر ریاضیات وآن هم‌برای اثبات نوعی‌قضیه بکار نمی‌رود . بین این دوروش رابطهٔ منطقی فوق‌العاده ضعیفی وجود دارد ؛ بطوری‌که می‌توان قبول‌کرد که این دو تقریباً باهم ارتباطی ندارند : باوجود این ارتباطی وجود دارد ،زیرا اغلب این دو روش‌را باهم بکار می‌برند . بایك مثال هردوروش را تشریح خواهیم‌کرد .

۱ـ ممکن است تصادفاً مشاهده‌کنیم که :

$$۱+۸+۲۷+۶۴=۱۰۰$$

و توجه پیداکنیم که همهٔ اعداد طرف اول،مکعب اعدادصحیحندو عدد طرف دیگر که مجموع طرف‌اول است **مربع** یك‌عددصحیح می‌باشد این مشاهده را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳=۱۰^۲$$

حالا ممکن است‌این سؤال را ازخودبکنیم که‌آیامجموع مکعبهای اعداد متوالی یك مربع‌کامل است یاخیر ؟

طرح این سؤال شبیه سؤال کلیی است که‌یك طبیعیدان ، بامشاهدهٔ یك‌گیاه یایك تحول زمینی ، مطرح می‌کند . سؤال کلی ماعبارت ازمجموع مکعبهای اعداد متوالی است :

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\dots\dots+n^۳$$

ابتدا«**مثال‌خاصی**» ازآن ، یعنی‌حالت $n=۴$ ، را بررسی می‌کنیم .

برای پاسخ به‌این سؤال‌چکار باید بکنیم ؟ کاری‌که یك طبیعیدان می‌کند، یعنی حالات خاص دیگری را جستجوکنیم . حالت $n=۲$ یا $n=۳$ بسیار ساده است . حالت $n=۵$ کلیتر از حالت خاص مورد جستجواست . به منظورآنکه‌کار را کاملتر انجام دهیم حالت $n=۱$ را نیز اضافه‌می‌کنیم . یك زمینشناس وقتی‌که نمونه هایی از سنگهای معدنی بدست آورد آنها راکنار هم می‌چیند و مرتب می‌کند ، مانیز چنین می‌کنیم و جدول زیر را ترتیب می‌دهیم :

۱	$=۱=۱^۲$
۱+۸	$=۹=۳^۲$
۱+۸+۲۷	$=۳۶=۶^۲$
۱+۸+۲۷+۶۴	$=۱۰۰=۱۰^۲$
۱+۸+۲۷+۶۴+۱۲۵	$=۲۲۵=۱۵^۲$

در تمام حالات‌فوق مجموع مکعبهای اعداد متوالی برابر مربع یك عدد شده است . قبول اینکه این حالات تصادفی‌بیش نبوده است مشکل است . در حالت مشابه ، طبیعدان با مشاهدهٔ حالات خاص قانون کلی‌راکه ازآن استنباط‌می‌کند بیان‌کرده و برصحت آن‌شکی‌ندارد. این قانون کلی است و به‌وسیلهٔ استقراء تقریباً ثابت شده است . چنعن قانونی را ریاضیدان با احتیاط بیان می‌کند و معمولاً خودرا باگفتن اینکه استقراء قضیهٔ زیر را در او القاکرده است محدود می‌کند مجموع مکعبهای اعداد متوالی ازیك تا n یك مربع‌کامل است.»

۲ـ هم‌اکنون به وجود قانونی جالب وکمی مرموز پی بردیم .برای‌چه‌مجموع‌مکعبهای‌اعداد متوالی نیز یك مربعند؟ زیرا بهتر است مربع باشند !

یك نفر طبیعیدان درچنین موقعیتی چه‌کار می‌کند ؟ او به‌بررسی نظریه‌اش ادامه می‌دهد . آزمایشهای تجربی دیگر انجام می‌دهدو نتیجهٔ تحقیقات خودرا جمع‌آوری‌می‌کند . اگر ماهم‌بخواهیم چنان‌کنیم باید حالاتی را بررسی‌کنیم‌که در آن $n=۶$ یا $n=۷$ یا .... است طبیعیدان . در عین حال ، ضمن بررسی مجدد ، نمونه‌های دسته بندی می‌کند وآنها را بایکدیگر مقایسه می‌کند .کوشش می‌کندکه بین این نمونه‌ها ارتباطی بدست آورد . ماهم‌چنین می‌کنیم :

به‌حالات n مساوی ۱،۲،۳،۴،۵که در جدول نوشته‌ایم دقت می‌کنیم . به‌چه جهت‌مجموع آنها یك مربع است ؟ به‌این مربعها چه می‌توانیم بگوئیم ؟ ریشه‌هایشان ۱،۳،۶،۱۰ و ۱۵ است . به‌این ریشه‌هاچه می‌توان گفت ؟ آیا بین‌ریشه‌هاارتباطی وجود دارد ؟چیزی‌که مسلم است این است که‌این ریشه‌ها به‌طور

منظم افزایش پیدانکرده‌اند . پس افزایش آنها چگونه است ؟ مقدار افزایش هرجمله ازجملهٔ قبلی چنین است :

$$۳-۱=۲ \quad و \quad ۶-۳=۳$$

و

$$۱۰-۶=۴ \quad و \quad ۱۵-۱۰=۵$$

پس بین این اختلافها نظم جالبی‌مشاهده شد . حالاسعی‌می‌کنیم که بین ریشه‌های این مربعها ارتباطی‌بدست‌آوریم مشاهدهٔ‌اخیر خود را به‌این صورت تنظیم‌می‌کنیم :

$$۱=۱$$
$$۳=۱+۲$$
$$۶=۱+۲+۳$$
$$۱۰=۱+۲+۳+۴$$
$$۱۵=۱+۲+۳+۴+۵$$

اگر این نظم‌کلی باشد(و دلیلی هم‌نداریم‌که نباشد)قضیه‌ای را که در بالاذکر کردیم می‌توان‌به‌شکل دقیقتری‌نوشت :

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\dots+n^۳ = (۱+۲+۳+\dots+n)^۲$$

۳ـ به‌کمك استقراء قانونی بدست‌آوردیم‌که توانستیم‌آن را نسبتاً به‌صورت فورمول نشان‌دهیم . این روش‌گرچه صحیح است، کاملاً محدود وناقص است . استقراء همیشه بعدازمشاهدهٔ نظم‌وترتیب‌کشف می‌شود ؛ آنچه به‌کشف استقراءکمك می‌کند عبارت است از : **تعمیم ، تجرید ، تمثیل** . مبادرت‌به‌تعمیم از هنگامی‌شروع می‌شودکه سعی می‌کنیم آنچه را قابل مشاهده است بفهمیم . تحقیق حالات مخصوص معمولاً مبتنی بر تمثیل (تماثل) است .

در بارهٔ این موضوع ، فلاسفه، گسترشهای‌جدیدی‌راموردبحث قرارداده‌اندکه ما نمی‌پذیریم . ولی باید اضافه‌کنیم‌که نتایج متعدد ریاضیات ابتدابه‌کمك استقراء بدست آمده و فقط بعداً تحقیق شده است . قسمتی از ریاضیات‌که‌کاملاً شناخته‌شده است‌علمی‌است اصولی‌و استنتاجی ولی‌قسمتی دیگرازریاضیات‌که هنوزکاملاً شناخته نشده وآبستن نتایجی دیگر است علمی‌است تجربی ـ استقرایی .

۴ـ درریاضیات‌نیز مانند فیزیك می‌توان‌مشاهده‌واستقراء رابرای‌کشف قوانین‌کلی‌بکاربرد ، ولی‌بین این‌دوروش‌اختلافی وجود دارد . در حقیقت در علوم‌فیزیك مافوق مشاهده‌واستقراء چیزی نیست ، در حالی‌که در ریاضیات بعد از مشاهده و استقراء باید دلیل قاطعی پیداکرد . بعد ازآنکه مدتی‌را به‌کار تجربی اختصاص دادیم ، ممکن است پی‌ببریم‌که تغییر دادن نظریه مفید است . قبول داریم‌که نتیجه‌ای راکه کشف‌کردیم خیلی جالب است ، ولی استدلالی‌که ما را به‌این‌کشف‌راهنمایی کردگر چه پذیرفتنی است تجربی و موقتی است . حالاکوشش می‌کنیم‌که به‌روشی قطعی و صریح و بابیانی دقیق ؛ نتایج‌بدست آمده را تصدیق‌کنیم .

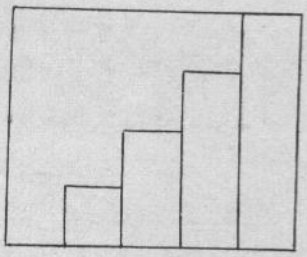
ما با یك **«مسألهٔ ثابت‌کردنی»** مواجه شده‌ایم باید صحت نتیجه‌ای راکه در بالا (شمارهٔ ۲) بدست‌آمد تحقیق‌کنیم. امکان ساده‌کردن آن وجود دارد . درحقیقت می‌دانیم‌که :

$$۱+۲+۳+\dots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

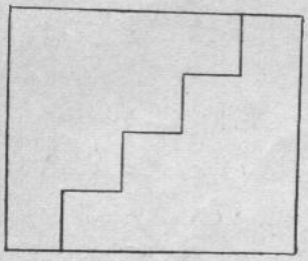
تحقیق این عبارت . درهر حالت ، بسیار ساده است . مستطیلی در نظر می‌گیریم‌که طول اضلاع آن n و $n+۱$ است و آن را بایك خط شکسته به‌دو قسمت‌می‌کنیم . شکل(۱) حالت $n=۴$ را نشان می‌دهد . سطح هریك از دو نیمهٔ ،که به‌شکل«نردبام» است؛ برابر است با $۱+۲+۳+\dots+n$ این سطح برای $n=۴$ برابر است با $۱+۲+۳+۴$ (به شکل ۲ نگاه‌کنید) . چون سطح‌کل مستطیل برابر است‌با : $n(n+۱)$ و سطح هریك از دو نیمه ،که به‌شکل نردبام‌است، نصف آن است ، صحت فورمول بالا تأییدمی‌شود .

این نتیجه را ،که به‌کمك استقراء بدست آمده است ، به‌شکل زیر می‌نویسیم :

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\dots+n^۳ = \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$$



(۱)



(۲)

۵ـ اگر هیچ طرحی برای اثبات این نتیجه نداشته باشیم لااقل سعی‌می‌کنیم‌که آن را **تحقیق**‌کنیم . ابتدا حالتی‌را در نظر می‌گیریم‌که‌تاکنون بررسی نکرده‌ایم ، یعنی‌حالت $n=۶$ برای این حالت فورمول چنین می‌دهد .

$$۱+۸+۲۷+۶۴+۱۲۵+۲۱۶ = \left(\frac{۶\times۷}{۲}\right)^۲$$

مقدار هریك از دو طرف برابر ۴۴۱ است یعنی فورمول‌برای این حالت صحیح است .

تحقیق را می‌توان ادامه داد . فورمول ، احتمالاً ، کلی است ، یعنی برای تمام‌مقادیر از یك تا n صحیح است . آیا این فورمول وقتی‌که برای‌مقدار n صحیح باشد

برای مقدار $n+1$ نیز صحیح است ؟ فورمولی راکه در بالا بدست آوردیم اینجا نیز بکارمی‌بریم . چنین بدست‌می‌آید :

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

تحقیق درستی آن خیلی ساده است . کافی است این جمله را از جملهٔ قبلی کم کنیم . خواهیم داشت :

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

که تحقیق آن ساده است . می‌توان طرف دوم آن را به صورت زیر نوشت :

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2[(n+2)^2-n^2] =$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2(n^2+4n+4-n^2) = \frac{(n+1)^2}{4}(4n+4)$$

$$=(n+1)^2(n+1)=(n+1)^3$$

به این ترتیب فورمولی راکه به تجربه بدست‌آوردیم با موفقیت منجر به اثبات قابل توجهی شد .

پس به طور مسلم رابطهٔ :

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

درست است ؛ ولی ما هنوز نمی‌دانیم که آیا حقیقت دارد که چنین است :

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

و اگر صحت این رابطه برما محقق باشد صحت رابطه‌ای که برای $n+1$ نوشته می‌شود محقق خواهد بود ، زیرا به جای عدد n عدد $n+1$ می‌گذاریم وخواهیم داشت :

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

ازطرفی می‌دانیم که این نظریه برای n مساوی یک تا ۶ درست است ، پس برای $n=7$ نیز درست است . چون برای $n=7$ درست است برای $n=8$ نیز درست است و ... یعنی برای تمام مقادیر n درست است . این طریقه‌ای است کلی .

چنین استدلالی می‌تواند نمونه‌ای باشد برای حالات متشابه متعدد . نکات اصلی کدامند ؟

آنچه باید ثابت شود لازم است که قبلا به صورت دقیقی معلوم باشد .

باید به عدد صحیح n ارتباط داشته باشد .

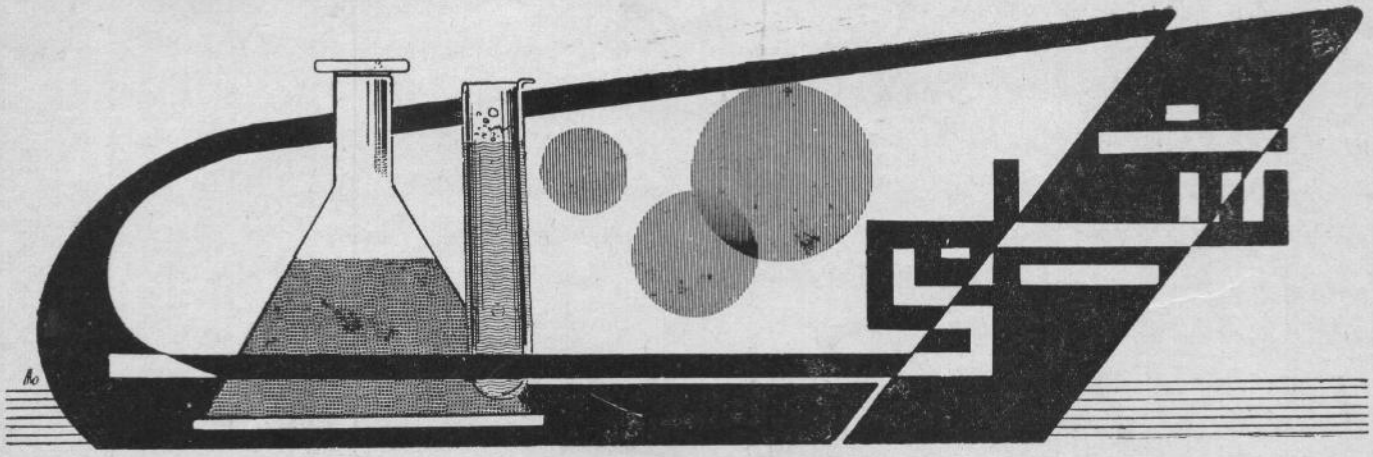
باید کاملا «صریح» باشد ، بطوری که اگر توانستیم برای عدد n آن را تحقیق کنیم بتوانیم برای عدد متوالی n یعنی $n+1$ نیز آن‌را تحقیق کنیم. زیرا قبلا به طریقی مطمئن تحقیق کردیم که اگر برای n درست باشد برای $n+1$ قطعاً درست است . دراین‌صورت کافی است که بدانیم این اصل برای $n=1$ درست است وازآن نتیجه بگیریم که برای $n=2$ درست است؛ پس برای $n=3$ و نیز اعداد بزرگتر صحیح است؛ یعنی اگر برای یك عدد صحیح غیرمشخص درست است برای عدد صحیح بعدی آن درست است و ما صحت چنین استدلالی را به روش کلی ثابت کردیم .

این روش ، که اغلب به‌کار می‌رود، شایسته است که نامی داشته باشد . مثلا می‌توان آن را **« برهان n به $n+1$»** یا به طورساده تر **« عبور به عدد صحیح بعدی »** نامید. بدبختانه برای آن یك اصطلاح فنی داریم که عبارت است از **«استقراء ریاضی»** . این‌اصطلاح ناشی از یك تصادف است. روش استدلال ما مبنای نامشخصی دارد که از نظر منطق تا اندازه‌ای مهم است . بنابراین مبنای چنین استدلالی را ، در حالات متعدد، استقراء تشکیل داده است زیرا آن را جزءجزء بیان کردیم ؛ درحالی که اثبات آن را بطور تجربی پیدا کردیم و آن را می‌توان یك متمم ریاضی استقراء نامید . در فرانسه چنین روشی را **برهان معکوس** گویند .

۷ـ درتوضیحات‌قبلی، به کمك‌مشاهده واستقراءدوگونه روش استدلال بدست‌آوردیم؛ یکی‌درجملهٔ(۱) ودیگری در جملهٔ (۲) که روش استدلال دوم دقیقتر از روش استدلال اول است . با تعقیب روش دوم روشی برای تحقیق استدلالهای n به $n+1$ بدست آوردیم وتوانستیم به‌کمك «استقراء ریاضی» دلیل قانع‌کننده‌ای فراهم‌کنیم . بدون شك از تعقیب روش اول نمی‌توانستیم به‌کشف چنین دلیلی موفق شویم .

در حقیقت روش دوم دقیقتر ، روشنتر ، و قابل لمستر از روش اول است و برای تحقیق و تجربه‌آسانتر است . مرور از اولی به دومی ، یعنی از بیان‌کم دقت به‌بیان دقیقتر ، مستلزم بیان غائی است . درحقیقت مبنای استدلال دوم ، که قویتراست ، استدلال اول است .

در حالی‌که استدلال اول خود در ابتدا تقریباً مبهم است و فقط به مجرد پیشبینی استدلال دوم واضح می‌شود . به‌عبارت دیگر قبول قضیهٔ «قویتر» مستلزم قبول قضیهٔ «ضعیفتر »است . این یك تناقض است که بعداً ازآن گفتگو می‌کنیم .



ترجمهٔ : حسین جواهری دبیر شیمی دبیرستانهای کازرون

راههای پیدا کردن وزن اتمی عناصر

طریقهٔ اول ـ از قانون دولن وپتی ـ
(Dulang and petit's Rule)

درسال ۱۸۱۹، **دولن وپتی**، ازروی مطالعهٔ حرارت مخصوص عناصر جامد دریافتند که حاصل ضرب وزن اتمی تقریبی و حرارت مخصوص عنصر همیشه مقداری است ثابت ودرحدود ۶/۴ بطوری که :

۶/۴ = حرارت مخصوص × وزن اتمی تقریبی

حاصل ضرب وزن اتمی در حرارت مخصوص را **« گرمای اتمی»** (Atomic Heat) عنصر گویند .

برای پیدا کردن وزن اتمی حقیقی یك عنصر باید اعمال زیر را انجام داد :

۱ـ پیدا کردن حرارت مخصوص فلز

۲ـ پیدا کردن وزن اتمی تقریبی از رابطهٔ زیر :

$$\text{وزن اتمی تقریبی} = \frac{۶/۴}{\text{حرارت مخصوص}}$$

۳ـ پیدا کردن ظرفیت (والانس) فلز از رابطهٔ زیر :

$$\text{ظرفیت} = \frac{\text{وزن اتمی تقریبی}}{\text{وزن معادل}}\ *$$

۴ـ عدد ظرفیت × وزن معادل = وزن اتمی حقیقی

مثال ـ ۰/۲۷ گرم از یك فلز با ۰/۲۴ گرم اکسیژن ترکیب شده است . در صورتی که حرارت مخصوص این فلز ۰/۲۴ باشد پیدا کنید وزن اتمی حقیقی فلز را .

$$\text{وزن معادل فلز} = \frac{۸ \times ۰/۲۷}{۰/۲۴} = ۹$$

$$\text{وزن اتمی تقریبی فلز} = \frac{۶/۴}{۰/۲۴} = ۲۶/۲۷$$

$$\text{ظرفیت فلز} = \frac{\text{وزن اتمی تقریبی}}{\text{وزن معادل}} = \frac{۲۶/۲۷}{۹} = ۲/۹ \# ۳$$

ظرفیت فلز × وزن معادل = وزن اتمی حقیقی فلز

وزن اتمی حقیقی فلز ۲۷ = ۳ × ۹

طریقهٔ دوم ـ از راه دانسیتهٔ بخار کلرورها :

این روش را در مورد اجسامی بکار می‌برند که کلرورشان فرار باشد . در این مورد اعمال زیر را انجام می‌دهند :

۱ـ وزن ملکولی کلرور را از رابطهٔ زیر بدست می‌آورند :

* دانسیتهٔ بخار × ۲ = وزن ملکولی

۲ـ ظرفیت(x) عنصر را از رابطهٔ زیر که در آن E وزن

---

* «وزن معادل» یك فلز مقداری است از فلز که با ۸ گرم اکسیژن ترکیب شود یا هنگام ترکیب با اسید تولید ۱ گرم یا ۱۱٫۲ لیتر هیدروژن نماید **(مترجم)**

* منظور دانسیتهٔ بخار جسم نسبت به هیدروژن است . به همین لحاظ در رابطهٔ فوق ، جرم ملکولی هیدروژن (۲) بکار برده شده است **(مترجم)**

معادل است بدست می‌آورند :

$$x = \frac{\text{وزن ملکولی کلرور}}{E + ۳۵/۵}$$

۳ـ وزن اتمی را به‌کمك رابطهٔ زیر بدست می‌آورند .

ظرفیت × وزن معادل = وزن اتمی

مثال ـ وزن اکی والان یك عنصر ۴ است . این جسم کلروری تولید می‌کندکه دانسیتهٔ بخارش ۵۹/۲۵ است . پیدا کنید ظرفیت و وزن اتمی عنصر را .

۱۱۸/۵ = ۲ × ۵۹/۲۵ = دانسیتهٔ بخار × ۲ = وزن‌ملکولی کلرور

$$\text{ظرفیت عنصر } (x) = \frac{\text{وزن ملکولی کلرور}}{\text{وزن معادل} + ۳۵/۵} = \frac{۱۱۸/۵}{۴ + ۳۵/۵} = ۳$$

۱۲ = ۴ × ۳ = ظرفیت × وزن معادل = وزن اتمی عنصر

طریقهٔ سوم ـ از راه قانون همشکلی ـ (Isomarphism) :

میچرلیخ در سال ۱۸۱۹ متوجه شدکه بلور بعضی اجسام بایکدیگر همشکل بوده وآنیون یاکاتیون یکی‌می‌تواندبجای آنیون یا کاتیون دیگری در بلور (crystal) بنشیند . این اجسام را **« هم شکل »** یا **« ایزومرف »** و پدیدهٔ آنها را **«همشکلی»** یا **« ایزومرفیسم »** گویند. وی قانون خودرا بدین‌صورت بیان داشت‌که **«اجسام‌همشکل‌دارای‌ساختمان شیمیائی همانندند»** این قبیل‌ملکولها شامل اتمهای مساوی با ترکیب یکجور هستند . از این قانون می‌توان برای تعیین اوزان اتمی عناصر به دو طریق استفاده‌کرد .

الف ـ طریقهٔ تعیین ظرفیت :

ظرفیت دوعنصر که می‌توانند نمکهـای همشکل به وجود آورند یکی است . از این‌رو اگر ظرفیت یکی از عناصرمعین باشد ، ظـرفیت دیگری نیز بدست می‌آید . وزن اتمی را می‌توان ازرابطهٔ زیر بدست‌آورد .

ظرفیت × وزن معادل = وزن اتمی

ب ـ طریقهٔ مستقیم (Direct Method) :

این طریقه درموردی بکار می‌رودکه در صد (Percentage) دوعنصر (A و B) در ترکیبات همشکل (AX و BX) و نیز وزن اتمی یکی از آنها مشخص باشد . این موضوع براین اساس است‌که :

«نسبت اوزان دوعنصر هنگام ترکیب بامقدار معینی از یك عنصر ، مثـل نسبت اوزان اتمی دو عنصر است» .

یا :

$$\frac{\text{وزن جسم A هنگام ترکیب با مقدار معینی از جسم X}}{\text{وزن جسم B هنگام ترکیب با همان مقدار از جسم X}} = \frac{\text{وزن اتمی A}}{\text{وزن اتمی B}}$$

مثال ـ عنصر A کلروری تشکیل می‌دهدکه شامل ۲۹/۳۴ درصد کلر است . ازطرفی این عنصر باکلرور پتاسیم همشکل می‌باشد . پیداکنید وزن اتمی A را .

کلرور این فلز با Clk همشکل است، از این‌روظرفیت این عنصر مساوی ظرفیت پتاسیم یعنی یک می‌باشد .

وزن فلز در ۱۰۰ گرم کلرور = ۱۰۰ − ۲۹/۳۴ = ۷۰/۶۶ گرم

وزن معادل (اکی والان) فلز

$$= \frac{۷۰/۶۶}{۲۹/۳۴} \times ۳۵/۵ = ۸۵/۵$$

وزن اتمی فلز = وزن معادل × ظرفیت

= ۸۵/۵ × ۱ = ۸۵/۵ *

مثال دیگر : سولفات‌روی وسولفات منیزیم با یکدیگر ایزومرفند . از طرفی ترکیب درصد روی و منیزیم در این نمکها به ترتیب ۴۰/۵ و ۱۹/۶ است . درصورتی‌که وزن اتمی روی ۶۵ باشد وزن اتمی منیزیم را پیداکنید .

ترکیب در صد منیزیم ۱۹/۶ و از آنجا ترکیب درصد سولفات ۸۰/۴ خواهد بود . ازطرفی ترکیب درصدسولفات در سولفات روی نیز۵۹/۵ خواهد شد .

مقدار منیزیمی‌که‌می‌بایست با ۵۹/۵ گرم‌سولفات‌ترکیب شود چنین بدست می‌آید :

$$\frac{۱۹/۶}{۸۰/۴} \times ۵۹/۵ = ۱۴/۵ \text{ گرم}$$

$$\frac{\text{وزن‌اتمی منیزیم}}{\text{وزن اتمی روی}} = \frac{۱۴/۵}{۴۰/۵}$$

$$\text{وزن اتمی منیزیم} = \frac{۱۴/۵}{۴۰/۵} \times ۶۵ = ۲۳/۲$$

***

* ۸۵٫۵ وزن اتمی روبیدیم (Rb) است .

راهنمائی حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des Problèmes élémentaires de géométrie

تألیف: **E. J. Honnet** چاپ هفتم . پاریس: ۱۹۶۳ — ترجمهٔ: ع . م.

۸

فصل یکم - چگونگی اثبات تساوی دو پاره خط

روش هشتم - استفادهٔ از روابطی که هردو پاره خط را در بردارد

الف- مجموع و تفاضل دوقطعه خط قطعه خطهایی هستند که نظیر به‌نظیر بایکدیگر برابرند.

مسئلهٔ ۱۳ - اگر خطی دو دایرهٔ هم مرکز را قطع کند قطعه خطهای محصور بین دو دایره متساویند.

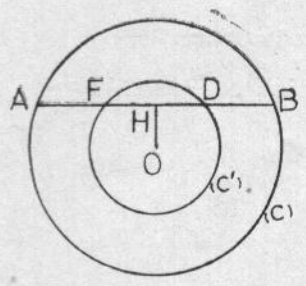
فرض { (C) و (C') هم‌مرکزاند . AB قاطع است .

حکم : $AF = DB$

اثبات - OH را عمود بر AB رسم می‌کنیم . بنابر آنچه قبلاً یادآوری کرده‌ایم

$FH = DH$

و $AH = HB$



طرفین این روابط را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم :

$AF = DB$ یا $AH - FH = HB - HD$

تمرینات

۴۰- در یك دایرهٔ O دو شعاع OA و OB و وتر MN را عمود برنیمساز زاویهٔ AOB رسم‌می‌کنیم که OA را درF و OB را در G قطع می‌کند . ثابت‌کنیدکه :

$MF = NG$ و $FA = GB$

۴۱- مثلث ABC مفروض است . روی BA ودرجهت از B به A طول MF را ابتدا از M وسط BA به اندازهٔ نصف BC جدامی‌کنیم و همچنین روی BC در جهت از B به C طول NG را ابتدا از N وسط BC به اندازهٔ نصف BA جدامی‌کنیم . ثابت‌کنیدکه : $BF = BG$ و $AF = GC$

۴۲- دو دایرهٔ O و O' در A متقاطعند ، از A به M وسط OO' وصل‌کرده و در A عمودی بر AM اخراج می‌کنیم‌که دایرهٔ O رادر B و دایرهٔ O' رادر C قطع می‌کند ثابت‌کنیدکه $AB = AC$

۴۳- دو دایرهٔ متساوی O و O' مفروض است خطی موازی با OO' رسم‌می‌کنیم‌که دایرهٔ O را در A و B ودایرهٔ O' رادر C و D قطع می‌کند . ثابت‌کنیدکه $AC = BD$

۴۴- در یك دایرهٔ O قطر AB و وتر دلخواه CD را رسم‌می‌کنیم ، از A وتر AE راعمود بر امتداد CD و از B وتر BF را عمود بر CD رسم‌می‌کنیم AE و BF را امتداد می‌دهیم تا CD یا امتداد آن‌را در G و H تلاقی‌کنند . ثابت کنیدکه $EG = BH$ و $HC = DG$

۴۵- از نقطهٔ اختیاری M واقع برقاعدهٔ BC ازمثلث

متساوی‌الساقین ABC خط MF را عمود بر AB و خط MG را عمود بر AC رسم می‌کنیم . ثابت کنید که مجموع :

$MF+MG$

با ارتفاع نظیر رأس B برابر است .

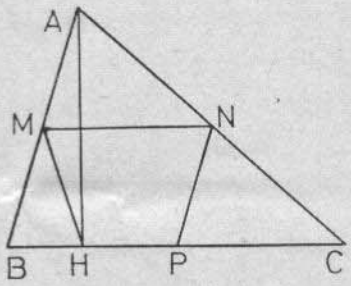
***

ب ـ اگر دوپاره خط یك کسر ازدو پاره خط متساوی باشند خود متساویند .

مسئلهٔ ۱۴ـ اگر M و N و P به ترتیب اوساط اضلاع AB و AC و BC از مثلث ABC و H پای ارتفاع نظیر رأس A باشد ثابت کنید که چهار ضلعی MNPH ذوزنقهٔ متساوی الساقین است .

فرض: M وسط AB و N وسط AC ، P وسط BC و $AH \perp BC$

حکم: $MN \parallel BC$ ، $MH=PN$



اثبات ـ اوّلاً خط MN که اوساط دوضلع مثلث را به‌یکدیگر وصل کرده است باضلع BC موازی است .

ثانیاً ـ NP که اوساط AC و BC را به هم‌وصل کرده بانصف AB برابر است و MH که میانهٔ وتر ازمثلث قائم‌الزاویهٔ ABH است بانصف وتر یعنی نصف AB برابر است بنابراین PN و MH که‌هردو نصف AB هستند متساویند .

تمرینات

۴۶ـ اگر اوساط اضلاع یك چهارضلعی را متوالیاً به‌هم وصل‌کنیم چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است . درچه‌حالتی این چهار ضلعی لوزی ، مربع مستطیل یامربع خواهد بود؟

۴۷ـ در یك متوازی الاضلاع ABCD از D به M وسط AB و از B به N وسط CD وصل می‌کنیم که قطر AC را در F و G قطع‌می‌کنند. ثابت‌کنیدکه $AF=FG=GC$

۴۸ـ در مربع ABCD از رأس C به اوساط اضلاع AB و AD وصل می‌کنیم که قطر BD را در F و G قطع می‌کنند . ثابت‌کنیدکه $BF=FG=GD$

۴۹ـ ثابت کنید که‌درهر ذوزنقه قطعه خطی که اوساط‌دو قطر رابه‌هم وصل‌می‌کند برابر است بانصف تفاضل‌دوقاعده .

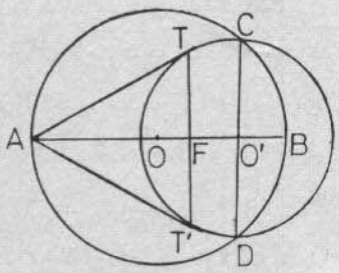
***

ج ـ اگردو پاره خط در رابطه‌ای شامل اجزاء متساوی صدق کنند متساویند .

مسئلهٔ ۱۵ـ در دایرهٔ O وتر CD را رسم‌کرده وبه قطر CD دایرهٔ دیگر O' رارسم می‌کنیم .خط‌المرکزین OO' دایرهٔ O رادر A و B قطع‌می‌کند ، از A مماسهای AT و AT' را بردایرهٔ O' رسم می‌کنیم . خط TT' خط OO' را در F قطع می‌کندثابت کنیدکه O' وسط BF واقع است .

فرض: $CD \perp OO'$ ، CD قطر دایرهٔ O' ، AT مماس بر O'

حکم : $O'F=O'B$



اثبات ـ مثلث ABC قائم الزاویه است و در آن داریم :

$\overline{O'C}^2=O'B\cdot O'A$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AO'T نیزداریم :

$\overline{O'T}^2=O'A\cdot O'F$

O'T و O'C که دو شعاع از دایرهٔ O' هستند متساویند و در نتیجه خواهیم داشت :

$O'B\cdot O'A=O'F\cdot O'A \Longrightarrow O'B=O'F$

تمرینات

۵۰ـ در ذوزنقه خطی که از نقطهٔ تلاقی دو قطر موازی بادو قاعده رسم شود در این نقطه وتوسط دو ساق نصف‌می‌شود.

۵۱ ـ روی اضلاع AB و AC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه‌در A مربعهای ABEF و ACDG رامی‌سازیم و EC را رسم می‌کنیم که AB را در H قطع می‌کند و BD را رسم‌می‌کنیم که AC را در K تلاقی می‌کند . ثابت کنید که :

$AH=AK$

تمرینهای فصل یکم

۵۲ـ از نقطهٔ تلاقی میانه‌های یك مثلث ABC خط دلخواه xy را رسم‌می‌کنیم و عمودهای AF و BG و CH را بر xy رسم می‌کنیم‌ثابت کنید که مجموع دوعمودی‌که دریك طرف xy واقعند باسومی مساوی است .

۵۳ـ دردایرهٔ بمرکز O و به‌شعاع R وطرفین مرکز دو وتر متوازی رسم می‌کنیم یکی AB که با ضلع شش ضلعی منتظم محاطی مساوی است و دیگری CD که با ضلع

سه‌ضلعی منتظم محاطی برابر است . ثابت‌کنید خطی که اوساط اضلاع غیر موازی از ذوزنقهٔ ABCD را به هم‌وصل می‌کند با ارتفاع‌این ذوزنقه برابراست .

۵۴ـ براضلاع AB و BC و CD و DA از متوازی‌الاضلاع ABCD نقاط M و N و P و Q را چنان انتخاب می‌کنیم که :

$$AM=\frac{AB}{۴} \text{ و } BN=\frac{BC}{۴} \text{ و } CP=\frac{CD}{۴} \text{ و } DQ=\frac{DA}{۴}$$

ثابت‌کنیدکه خطوط MP و NQ توسط‌قطرهای متوازی‌الاضلاع به قسمتهای متساوی تقسیم می‌شوند و چهار ضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع بوده‌نقطهٔ‌تلاقی قطرهای‌آن بر نقطهٔ تلاقی‌قطرهای متوازی‌الاضلاع مفروض منطبق است .

۵۵ـ ثابت‌کنید مثلثی که دارای دو میانهٔ متساوی باشد متساوی‌الساقین است .

۵۶ـ برقطعه خط $AB=۳a$ نقطهٔ M رابین A وB چنان انتخاب می‌کنیم کـه $AM=۲a$ باشد و مثلثهـای متساوی‌الاضلاع AMC و MBD رامی‌سازیم . CD را رسم کرده و عمود CH را بر AB رسم می‌کنیم . ثابت‌کنیدکه :

$CH=CD$

۵۷ـ در یك دایرهٔ O دو وتر متساوی AB و CD را رسم‌می‌کنیم که‌یکدیگررا در E تلاقی‌می‌کنند. ثابت‌کنیدکه :

$EA=EC$ و $EB=ED$

۵۸ـ درمربع ABCD هریك ازاضلاع مقابل‌رادرجهت متقابل به‌اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم :

$BM=AB$ و $DN=CD$ و

$CP=BC$ و $AQ=DA$

و MN و PQ را رسم می‌کنیم . ثابت‌کنیدکه $MN=PQ$

۵۹ـ در دایرهٔ O دو وتر AB و CD را عمود برهم و قطر CE را نیز رسم می‌کنیم ثابت‌کنیدکه $BD=AE$

۶۰ـ در نقاط A وB طرفین‌قطر نیمدایرهٔ‌مفروض‌مماسهای Ax و By و از نقطهٔ اختیاری M واقع‌بر نیمدایره مماس دیگری بر آن‌رسم می‌کنیم که مماسهای اول را در C و D قطع می‌کنند . ثابت‌کنیدکه $CD=AC+BD$ اگر MH عمود مرسوم از M بر AB و I نقطهٔ تلاقی MH با AD باشدثابت کنیدکه $MI=IH$

مسائلی از ریاضیدانان مشهور

(گردآورنده : حسن پوررضائی ، تبریز)

مسئلهٔ هوزل ـ در هر مثلث محل تـلاقی نیمسازهای زوایه‌های داخلی، مرکـز ثقل‌مثلث ومحل برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلثی کـه رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث مفروض می‌باشند بـریك استقامت واقعند و فاصلهٔ دونقطهٔ اول و دوم دو برابرفاصلهٔ دونقطهٔ دوم وسوم می‌باشد.

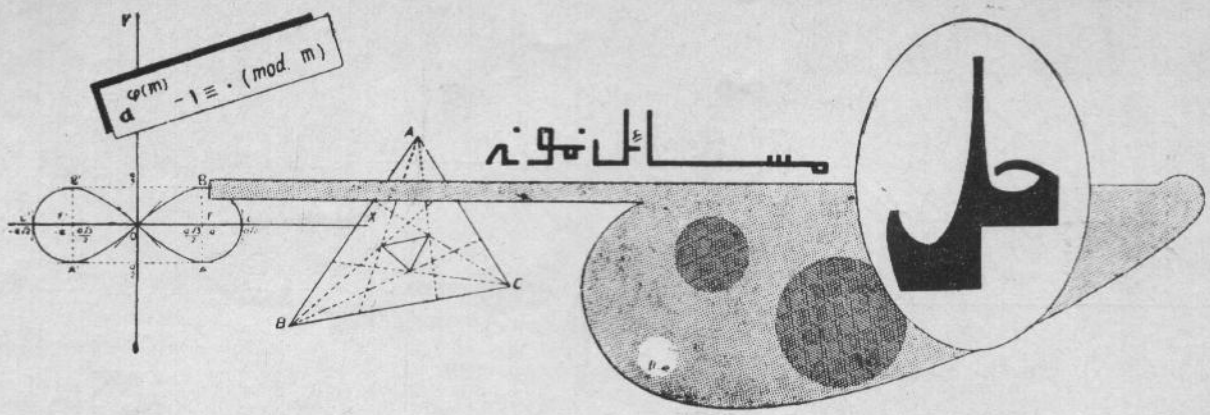
مسئلهٔ بولدون ـ دایرهٔ O ودو نقطهٔ A و B درصفحهٔ آن واقعند . روی این‌دایره نقطه‌ای چنان انتخاب‌کنیدکه‌اگر آن را به A و B وصل‌کنیم‌تادایره را در E و F قطع‌کند EF موازی AB باشد . مسئله راوقتی‌که EF موازی‌امتداد معلوم باشد نیزحل‌کنید .

مسئلهٔ اشتنیر ـ مطلوب‌است مکان هندسی نقاطی‌که از آنها دو قطعه خط AB و CD به‌یك زاویه دیده شوند (A و B و C و D بریك‌استقامت واقعند).

مسئلهٔ لوندشان ـ روی قطعه خط ثابت AB مثلث متغیر و قائم‌الـزاویهٔ ABC را می‌سازیم . اگـر B′ و C′ نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی مثلث باضلعهای AB و AC باشد ثابت‌کنیدکه B′C′ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد .

مسئلهٔ فرانکور ـ مثلثی را بـا معلومات $b+c$ و h_a و A رسم‌کنید .

مسئلهٔ ژرگون ـ مثلث A′B′C′ در داخل‌مثلث ABC قرار داشته و باآن متجانس می‌باشد مثلث $\alpha\beta\gamma$ را در مثلث ABC چنان محاط می‌کنیم که ضلعهای آن از نقطه‌های A′ و B′ و C′ می‌گذرند .اگر مساحت‌مثلثهای ABC و A′B′C′ و $\alpha\beta\gamma$ به‌ترتیب s و s′ و σ فرض شود ثابت‌کنیدکه : $\sigma^۲=ss'$



ترجمهٔ : حبیب‌الله گلستان‌زاده

از شمارهٔ ۴ دورهٔ ۳۸ مجلهٔ :

Mathematics Magazine

بعضی از راه حلهای مسئلهٔ زیر درکتابهای درسی‌یا حل‌المسائل چاپ ایران ارائه شده است . اما در مقالهٔ زیر مجموعه‌ای از راه حلهای مختلف مسئله گردآوری شده است‌که درخور اهمیت می‌باشد .

۳۸۱۱ ـ مطلوبست رسم مثلثی کـه اندازه‌های سه ارتفاع آن معلوم است .

راه حل ـ اگر S مساحت و a و b و c بـه ترتیب اندازه‌های‌ضلعها و h_a و h_b و h_c به‌ترتیب‌اندازه‌های ارتفاعهای مثلث ABC باشد رابطهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$(1)\quad ah_a=bh_b=ch_c=2S$$

از این رابطه نتیجه می‌شود :

$$(2)\quad a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$$

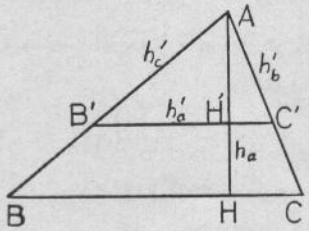
اگر h'_a و h'_b و h'_c ارتفاعهای مثلثی باشندکه اندازه‌های ضلعهای آنها عبارت باشد از h_a و h_b و h_c نتیجه خواهیم گرفت :

$$a:b:c=h'_a:h'_b:h'_c$$

و ترسیم زیر را نتیجه می‌گیریم :

۱) مثلثی مانند PQR می‌سازیم که اندازه‌های‌ضلعهای‌آن به ترتیب h_a و h_b و h_c باشد .

۲) اندازه‌های h'_a و h'_b و h'_c ارتفاعهای‌مثلث PQR را معلوم‌می‌کنیم .



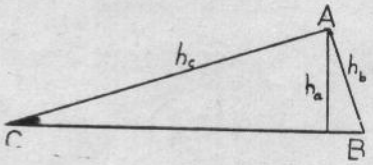
۳) مثلث $AB'C'$ راکه‌اندازه‌های‌ضلعهای آن به تـرتیب h'_a و h'_b و h'_c بـاشد می‌سازیم

۴) ارتفاع نظیر رأس A از مثلث $AB'C'$ را رسم‌کرده برآن ابتدا از A طول $AH=h_a$ را جدا می‌کنیم و از H به موازات $B'C'$ رسم می‌کنیم تا امتدادهای AB' و AC' را به‌ترتیب در B و C قطع‌کند . مثلث ABC مثلث مطلوبست .

بحث ـ شرط امکان حل مسئله در این راه حل عبارت می‌شود از شرط امکان ترسیم مثلث PQR و عبارت می‌شود از:

$$(3)\quad h_a+h_b>h_c$$

در حالی‌که لازم نیست‌که مجموع دو ارتفاع یك مثلث بزرگتر از سومین ارتفاع آن باشد . چنانچه اگر مثلث ABC مثلثی باشدکه در آن اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۹۰ درجه واندازهٔ زاویهٔ C کمتر از ۲۷° و ۵۸′ باشدبا توجه به‌روابط :



$$h_a=h_c\sin C \quad \text{و} \quad h_b=h_c\,tg\,C$$

$$h_a+h_b=h_c(\sin C+tg\,C)$$

و به‌شرط $0<C<27°58'$ با استفادهٔ از جدول خطوط مثلثاتی خواهیم داشت :

$$\sin C+tg\,C<1 \Longrightarrow h_a+h_b<h_c$$

مثلث وجود دارد درحالی‌که شرط (۳) برقرار نیست .

بنابراین راه حل‌گفته شده برای حالتهای $h_a+h_b<h_c$ عمومیت‌ندارد .

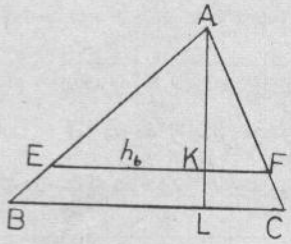
راه حل۲ـ رابطهٔ(۱)رادر نظرمی‌گیریم وطرفین‌آنرا بر h_ah_b تقسیم می‌کنیم می‌شود :

$$(4)\quad \frac{a}{h_a}=\frac{b}{h_b}=\frac{c}{m} \quad , \quad \left(m=\frac{h_ah_b}{h_c}\right)$$

و ترسیم زیر را نتیجه می‌گیریم .

۱) با ترسیم چهارمین جزء تناسب $\frac{m}{h_a}=\frac{h_b}{h_c}$ طول m را تعیین‌می‌کنیم .

۲) مثلث AEF را می‌سازیم‌که در آن $AE=m$ و $AF=h_a$ و $EF=h_b$ باشد .



۳) ارتفاع AK از مثلث AEF را رسم‌کرده بر آن طول $AL=b_a$ را جدا می‌کنیم .

۴) از L موازی با EF رسم می‌کنیم تا امتدادهای AE و AF را به ترتیب در B و C قطع‌کند . مثلث ABC مثلث مطلوب است .

بحث ـ برای امکان ترسیم مثلث از این راه‌حل شرط‌زیر نتیجه میشود :

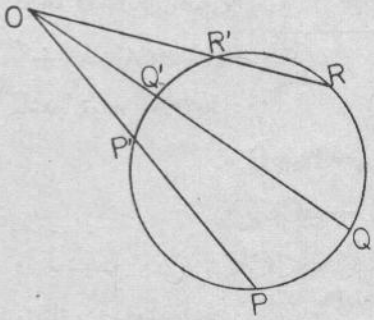
$$|h_a-h_b|<m<h_a+h_b$$

چنانچه مقدار m را بجای آن منظورکرده و نامساوی را ساده‌کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}>\frac{1}{h_c}>\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_a} \qquad (۵)$$

راه حل عمومیت داشته و کامل و منطقی نیز می‌باشد.

راه حل ۳ ـ در این راه حل از قوت نقطه نسبت به دایره استفاده می‌شود. دایرهٔ Ω و نقطهٔ O را در خارج آن چنان‌انتخاب می‌کنیم که‌بتوانیم‌سه‌قاطع $OP=h_a$ و $OQ=h_b$ و $OR=h_c$ را نسبت به‌آن رسم‌کنیم . این سه قاطع دایره را به ترتیب در نقاط P′ و Q′ و R′ قطع‌می‌کنند واگرفرض کنیم $OR'=c'$ و $OQ'=b'$ و $OP'=a'$ خواهیم داشت :

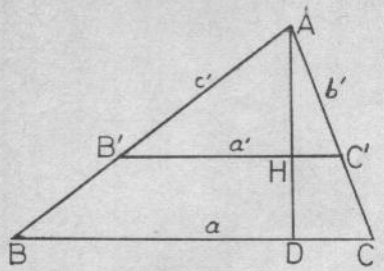


$$a'h_a=b'h_b=c'h_c \qquad (۶)$$

که ازاین‌رابطه باتوجه به‌رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c} \qquad (۷)$$

مثلث AB′C′ را با اضلاع $AB'=c'$ و $AC'=b'$ و $B'C'=a'$ می‌سازیم ارتفاع AH آنرا رسم‌کرده بر آن : $AD=h_a$ راجدامی‌کنیم . از D به موازات B′C′ رسم می‌کنیم مثلث ABC مطلوب بدست می‌آید .



بحث ـ رابطهٔ (۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}=\frac{a+b}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}}=\frac{a-b}{\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}}$$

و با توجه به‌نامساوی مضاعف :

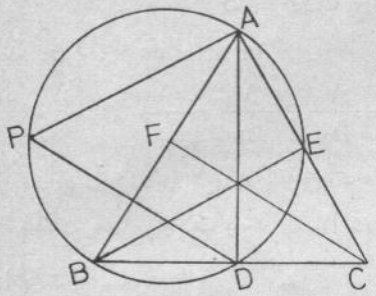
$$a-b<c<a+b$$

که بین ضلعهای مثلث برقرار است خواهیم‌داشت :

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}>\frac{1}{h_c}>\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}$$

که همان شرط (۵) می‌باشد .

راه حل ۴ ـ مثلث ABC را باارتفاعهای $AD=h_a$ و $BE=h_b$ و $CF=h_c$ در نظر می‌گیریم . دایرهٔ به‌قطر AB بر E و D می‌گذرد . دراین دایره وتر AP را چنان رسم‌می‌کنیم‌که دو زاویهٔ DAP و CAB مساوی باشند در نتیجه :



$$DP=BE=h_a$$

خواهد شد . از تشابه دو مثلث ABE و ACF و دو مثلث ABC و APD خواهیم داشت :

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CF}{BE} \quad و \quad \frac{AD}{AP}=\frac{AC}{AB}$$

از مقایسهٔ این دو تناسب نتیجه می‌گیریم : $\frac{AD}{AP}=\frac{CF}{BE}$

در این تناسب سه‌جزء معلوم‌است . ازراه ترسیم چهارمین‌جزء آن یعنی AP بدست‌می‌آید .

مثلث ADP را بامعلوم‌بودن سه ضلع ساخته‌دایرهٔ‌محیطی آنرا رسم‌می‌کنیم .وتر BD را بر AD عمودکرده ووتر BE را برابر با DP رسم‌می‌کنیم(E و D هر دو در یك‌طرف AB قرارگیرند) . AE و BD را رسم می‌کنیم یکدیگر را در C تلاقی‌می‌کنند و مثلث ABC بدست می‌آید .

تالیف : Lucienne FELIX
ترجمهٔ : ع . م

بیان جدید

ریاضیات مقدماتی

بخش دوم

II- فضاهای برداری

می‌دانیم که یك بردار ، در یك صفحه بوسیلهٔ تصاویرش بر دو محور و در فضا بوسیلهٔ تصاویرش بر سه محور غیرواقع بر یك صفحه معین می‌شود .

این موضوع را در نظر گرفته برای تعیین یك فضای مجرد برداری ، با تعداد دلخواه ابعاد ، اصول لازم را وضع می‌کنیم :

الف ـ اصول فضای برداری، n بعدی ـ دستگاهی شامل n بردار $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ و ... و $\vec{v_n}$ وجود دارد به قسمی که هیچ‌مجموعهٔ‌شامل n عددحقیقی r_1 و r_2 و ... و r_n نمی‌تواند تساوی برداری زیر را برقرار نماید

$$r_1\vec{v_1}+r_2\vec{v_2}+\dots+r_n\vec{v_n}\equiv\vec{0}$$

این دستگاه بردارها **پایهٔ** فضای‌برداری را تشکیل داده و می‌توانیم آنرا با اصول زیر بیان‌کنیم :

[β_1] اصل مربوط به پایه :

$$\exists(\vec{v_1} \text{ و } \vec{v_2} \text{ و } \dots \text{ و } \vec{v_n}) : \forall (r_1 \text{ و } r_2 \text{ و } \dots \text{ و } r_n)$$

$$r_1\vec{v_1}+r_2\vec{v_2}+\dots+r_n\vec{v_n}\equiv\vec{0}$$

[β_2] اصل مربوط به مؤلفه‌ها ـ با فرض معین بودن پایه ، نظیر هر بردار $\vec{v}$ حداقل یك مجموعه شامل n عدد حقیقی x_1 و x_2 و ... و x_n وجوددارد به قسمی‌که‌تساوی برداری زیر بر قرار می‌باشد

$$x_1\vec{v_1}+x_2\vec{v_2}+\dots+x_n\vec{v_n}\equiv\vec{v}$$

به عبارت دیگر :

$$\forall\vec{v}\in V ,\ \exists(x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } \dots \text{ و } x_n) :$$

$$x_1\vec{v_1}+x_2\vec{v_2}+\dots+x_n\vec{v_n}\equiv\vec{v}$$

قضیهٔ یگانگی ـ اگر داشته باشیم :

$$x_1\vec{v_1}+x_2\vec{v_2}+\dots+x_n\vec{v_n}\equiv$$
$$x'_1\vec{v_1}+x'_2\vec{v_2}+\dots+x'_n\vec{v_n}$$

که هم ارز است با :

$$(x'_1-x_1)\vec{v_1}+(x'_2-x_2)\vec{v_2}+\dots+$$
$$+(x'_n-x_n)\vec{v_n}\equiv\vec{0}$$

بنابر [β_1] خواهیم داشت :

$$x'_1=x_1 \text{ و } x'_2=x_2 \text{ و } \dots \text{ و } x'_n=x_n$$

تعریف ـ هر بردار $x_i\vec{v_i}$ (i عدد صحیح $\leqslant n$) **مؤلفهٔ** $\vec{v}$ روی $\vec{v_i}$ نامیده می‌شود و x_i **اندازهٔ این مؤلفه** می‌باشد

بنابراین نسبت به هرپایهٔ انتخابی برای فضای برداری، هر بردار یك دستگاه مؤلفه‌هایی خواهد داشت‌که نسبت به پایه معین هستند .

تذکر ـ بعضی اشکالات فنی‌که درکار چاپ وجوددارد موجب می‌شودکه در بعضی از آثار چاپی برای نمایش بردار بجای‌آنکه علامت «→» را بالای حروف بکاربرند ازحروف سیاه استفاده‌کنند . ما هم همین رویه را بکار برده و از این به بعد V رابه‌جای $\vec{v}$ و AB رابه‌جای $\overrightarrow{AB}$ بکار خواهیم‌برد.

ب) مسئلهٔ تغییر پایه ـ همچنانکه خواهیم دید این مسئله به‌حل وبحث دستگاه معادلات درجهٔ اول منجرمی‌شود . حالات‌کاملاً سادهٔ این دستگاهها در جبر مطالعه شده و ما فعلاً آنها را دانسته فرض می‌کنیم ودرمورد فضاهای یك‌بعدی و دو بعدی مورد استفاده قرار می‌دهیم . بر عکس ، با مطالعهٔ

مستقیم فضاهای برداری n بعدی امکان آنرا خواهیم داشت که به حل و بحث دستگاههای خطی در حالت کلی بپردازیم . این موضوع به **جبر خطی** مربوط است که شامل دترمینانها و ماتریسها بوده و فعلاً از پرداختن به آن صرف نظر می‌کنیم.

یك پایهٔ فضای برداری داده شده است . مقصود تعیین شرطی است که یك دستگاه شامل n بردار پایهٔ دیگری را تشکیل بدهند ، و بتوان مؤلفه‌های هر بردار را نسبت به پایهٔ جدید از روی مؤلفه‌های مربوط به دستگاه قدیم بدست آورد .

۱) فضا یك بعدی است ؛ $n=1$

پایه توسط یك بردار منحصر V_1 مشخص می‌شود. نسبت به این پایه هر بردار V بوسیلهٔ $V \equiv x_1 V_1$ معین می‌شود . و هر بردار، مگر بردار ۰ ، مبنایی تشکیل خواهد داد اگر :

$$W_1 \equiv a_1 V_1$$

نتیجه خواهد شد که :

$$V = x'_1 W_1 = a_1 x'_1 V_1$$

و بنابر قضیهٔ یگانگی خواهیم داشت $x_1 = a_1 x'_1$ و در نتیجه $x'_1 = \frac{x_1}{a_1}$ که به شرط اینکه a_1 صفر نباشد قابل قبول است .

۲) فضا دو بعدی است ، $n=2$ ـ هر پایه بوسیلهٔ یك زوج بردارهای (V_1 و V_2) مشخص می‌شود .

الف ـ شرط اینکه یك زوج (W_1 و W_2) پایهٔ دیگری تشکیل دهند .

$$\begin{cases} W_1 \equiv aV_1 + bV_2 \\ W_2 \equiv a'V_1 + b'V_2 \end{cases}$$

باید ثابت کنیم که معادلهٔ برداری زیر جواب ندارد

$$r_1 W_1 + r_2 W_2 \equiv 0$$

که با توجه به اصول می‌توانیم چنین بنویسیم

$$(ar_1 + a'r_2)V_1 + (br_1 + b'r_2)V_2 \equiv 0$$

بنابراصل [β_1] رابطهٔ اخیر با دستگاه معادلات زیر هم ارز است

$$\begin{cases} ar_1 + a'r_2 = 0 \\ br_1 + b'r_2 = 0 \end{cases}$$

می‌دانیم برای اینکه این دستگاه دارای جواب منحصر $r_1 = r_2 = 0$ باشد این است که :

$$\delta = ab' - a'b \neq 0$$

و همین شرط باید برقرار باشد برای اینکه بردارهای (W_1 و W_2) پایه‌ای تشکیل دهند .

اگر داشته باشیم :

$$\delta = ab' - a'b = 0$$

دستگاه مبهم بوده و به تعداد بینهایت جوابهای مخالف صفر دارد به شکل :

$$\begin{cases} r_1 = Ka' \\ r_2 = -Ka \end{cases} \quad \text{که} \quad : \; 'Wa_1 \equiv Wa_2$$

در این صورت W_1 و W_2 زیر مجموعه‌ای با یك بعد را شرکت خواهند داد.

این دو بردار را هم امتداد یا به عبارت دیگر متوازی می‌گویند . شرط اینکه دریك فضای دوبعدی دوبردار پایه‌ای را را تشکیل ندهند آنست که هم امتداد یعنی متوازی باشند .

ب ـ محاسبهٔ مؤلفه‌های جدید یك بردار

پایهٔ جدید (W_1 و W_2) را که نسبت به پایهٔ قدیم با

$$\begin{cases} W_1 \equiv aV_1 + bV_2 \\ W_2 \equiv a'V_1 + b'V_2 \end{cases} \qquad ab' - ba' \neq 0$$

مشخص شده است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$$V \equiv xV_1 + yV_2 \equiv XW_1 + YW_2$$

با حذف W_1 و W_2 خواهیم داشت

$$xV_1 + yV_2 \equiv (aX + a'Y)V_1 + (bX + b'Y)V_2$$

قضیهٔ یگانگی ایجاب می‌کند که :

$$\begin{cases} x = aX + a'Y \\ y = bX + b'Y \end{cases}$$

با برقراری شرط $ab' - ba' \neq 0$ خواهیم داشت

$$X = \frac{b'x - a'y}{ab' - ba'} \quad \text{و} \quad Y = \frac{-bx + ay}{ab' - ba'}$$

۳) **در فضای سه بعدی** محاسبه با محاسبات قبلی مشابه است اما طولانی خواهد بود و از آن صرف نظر می‌کنیم و نتیجهٔ آنرا به شرح زیر قبول می‌کنیم : شرط اینکه سه بردار W_1 و W_2 و W_3 پایه‌ای را تشکیل دهند آنست که هیچیك از عبارتهای Δ مربوط به ۹ مقدار مؤلفه‌های این بردارها صفر نباشد. در حالت خاص $\Delta = 0$ ، این بردارها پایه‌ای تشکیل نداده و بردارهای هم‌صفحه (coplanaire) نامیده می‌شوند.

با توجه به نظریهٔ دترمینانها می‌توان راه حل را برای هرفضای با تعداد دلخواه ابعاد تعمیم داد. امکان تعیین فرمولهای

تغییر پایه خاصیت زیر را محقق می‌سازد : **خاصیت هم ـ ارزی دو بردار مستقل از انتخاب پایه است** . تعداد بردارهای هر پایه برای هرفضای برداری معین می‌باشد که عبارتست از ابعاد آن .

ج) فضای برداری جهت دار

۱) فضا یك بعدی است ـ $V=kV_1$ با بردار V_1 **هم جهت** نامیده می‌شود هرگاه k مثبت باشد . این رابطه دارای خاصیت انتقالی است زیرا اگر V هم جهت با V_1 و V_1 هم جهت با W_1 باشد بنابر قاعدهٔ ضرب اعدادحقیقی نتیجه خواهد شدکه V و W_1 هم جهت هستند.

هر بردار پایه‌که داده شود خط را جهت دار می‌کند و هر برداری‌که با آن هم جهت باشد مثبت نامیده می‌شود .

۲) فضا دو بعدی است ـ پایهٔ $(V_1$ و $V_2)$ انتخاب شده است ، دیدیم‌که زوج

$$\begin{cases} W_1 \equiv aV_1 + bV_2 \\ W_2 \equiv a'V_1 + b'V_2 \end{cases}$$

به شرط $\delta = ab' - ba' \neq 0$ پایه‌ای را تشکیل خواهندداد.

اگر اعداد a و b و a' و b' متغیرهای پیوسته باشند و فرض‌کنیم با محفوظ ماندن علامت $\delta = ab' - ba'$ تشکیل پایه‌ای توسط زوج $(W_1$ و $W_2)$ قطع نشود می‌گوئیم‌که این علامت جهت داشتن پایه را مشخص می‌کند :

پایهٔ ابتدایی

$$V_1 \equiv 1V_1 + 0V_2$$
$$V_2 \equiv 0V_1 + 1V_2$$

نظیر $ab' - ba' = +1$ می‌باشد

اگر $ab' - ba'$ مثبت باشد در این صورت هر زوج بردار را هم جهت با زوج $(V_1$ و $V_2)$ می‌نامیم .

تحقیق خاصیت انتقالی برای این رابطه ـ فرض می‌کنیم که $(U_1$ و $U_2)$ هم جهت با $(W_1$ و $W_2)$ و این زوج اخیر هم هم جهت با $(V_1$ و $V_2)$ باشد ، یعنی داشته باشیم

$$\begin{cases} W_1 \equiv aV_1 + bV_2 \\ W_2 \equiv a'V_1 + b'V_2 \\ ab' - ba' > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1 \equiv AW_1 + BW_2 \\ U_2 \equiv A'W_1 + B'W_2 \\ AB' - BA' > 0 \end{cases}$$

قبلاً دیدیم‌که از فرمولهای تغییر پایه نتیجه می‌شود :

$$U_1 \equiv \alpha V_1 + \beta V_2 \equiv (aA + a'B)V_1 + (bA + b'B)V_2$$
$$U_2 \equiv \alpha' V_1 + \beta' V_2 \equiv (aA' + a'B')V_1 + (bA' + b'B')V_2$$

که در آن

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = (ab' - ba')(AB' - BA')$$

نیز مثبت می‌باشد

بنابراین درهرفضای دوبعدی‌که توسط یك‌پایه معین‌می‌شود دو جهت متقابل وجود دارد . هر پایهٔ هم جهت با پایهٔ مشخص فضا مثبت نامیده می‌شود .

طبیعتاً ، جابجا شدن بردارهای یك پایه جهت فضا را تغییر خواهد داد . همچنین هرگاه یکی از آن دو با متقابل خود جانشین شود .

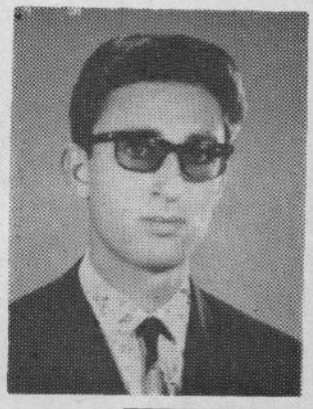
۳) فضا سه بعدی است ـ در اینجا نظیر :

$$\delta = ab' - a'b$$

که برای فضای دو بعدی داشتیم یك چند جمله‌ای مانند Δ از ۹ مقدار مربوط به مؤلفه‌ها خواهیم داشت . اگر با تغییر پایه علامت این عبارت محفوظ بماند ، همین علامت جهت فضا را مشخص خواهدکرد. با محاسبات مشابه (منتهی طولانی) نتیجه خواهد شدکه نسبت‌به فضای سه بعدی هم رابطهٔ انتقالی می‌باشد و بنابرآن :

در فضای سه بعدی هم هر پایه‌ای‌که با پایهٔ مشخص فضا هم جهت باشد مثبت نامیده می‌شود . اگر دو بردار از سه بردار پایه جابجا شوند یا اینکه یکی از بردارهای پایه با متقابل خود جانشین شود جهت فضا تغییرخواهدکرد .

دانش آموزان رتبهٔ اول



اصفهان

آرمن درکیورقیان

ششم ریاضی

دبیرستان حکیم سنائی

معدل کتبی : ۱۹/۴۵

نمایندگی یکان‌ـ کتابفروشی امید.

رشت

داریوش طالبی‌دارستانی

ششم ریاضی

دبیرستان محمدرضاشاه پهلوی

معدل : ۱۸/۱۰

نمایندگی یکان‌ـ کتابفروشی طاعتی

نوشتهٔ : ژرژگامو

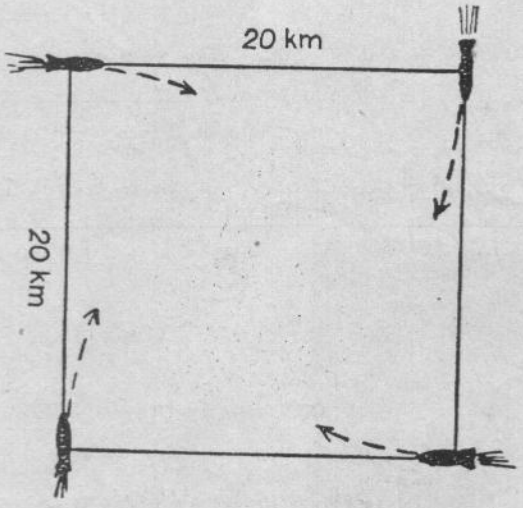
ترجمهٔ از فرانسه

درباشگاه هوانوردان

۲. موشکهای هدف یاب

یکی دیگر از افرادی‌که در باشگاه جمع شده بودند چنین اظهار داشت : حال‌که معماهای ریاضی مطرح شده است منهم مسئله‌ای از این نوع می‌دانم و مطمئنم‌که برای شما جالب خواهد بود ؛ یکی از دوستانم‌که در ریاضیات مطالعه می‌کند ، تازگیها این مسئله را برای من شرح داده است .

می‌دانیم‌که موشکهای زمین به هوا و همچنین موشکهای هوا به هوا مجهز به دستگاه خودکار هدف یاب می‌باشند . چهار عدد از این نوع موشکهای هدف یاب در چهار رأس یك مربع درنظر می‌گیریم. هریك از موشکها به سمت موشك مجاور خود (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت) هدف گیری شده‌است . طول ضلع مربع را ۲۰ کیلومتر و سرعت هریك از موشکها را یك کیلومتر درثانیه فرض می‌کنیم . این شکل (گوینده شکل زیر را روی یك صفحهٔ کاغذ رسم کرد) نموداری ازوضع موشکها می‌باشد .



چهار موشك باهم آتش می‌شوند وهریك در مسیری‌که هر لحظه متوجه هدف‌وی می‌باشد شروع به حرکت می‌کند .

بالاخره ،چهار موشك‌در مرکز مربع‌به یکدیگر برخورد خواهندکرد .

مسئله عبارتست از تعیین مدت زمانی‌که از لحظهٔ شروع به حرکت موشکها تا لحظهٔ بر خوردآنها طول می‌کشد .

جاك‌که گفتهٔ رفیق خود را به دقت گوش داده و مسئله را به خوبی متوجه شده بود چنین گفت :

برای حل این مسئله باید از دستگاه مختصات قطبی‌استفاده کردکه درآن مرکزمربع‌رامبدأ مختصات اختیارکرد. چنانچه به‌من‌فرصت بدهیدمعادلات دیفرانسیل مربوط را خواهیم نوشت.

ـ این به جای‌خود درست‌است ؛ هرکس‌که از ریاضیات عالی اطلاع داشته باشد می‌تواند این مسئله را حل‌کند .اماجالب اینجاست‌که این مسئله یك راه حل بسیار ساده دارد .

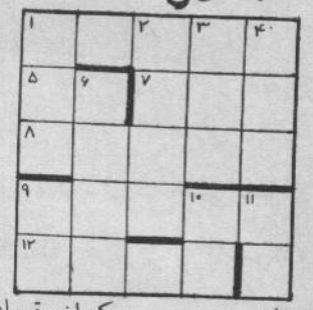
ـ گمان نمی‌کنم. موشکها مسیری را می‌پیمایندکه احتمالا یك منحنی پیچیده می‌باشد .

ـ درست است، اما به بررسی‌وشناسایی این‌منحنیها احتیاجی نیست . می‌توان حالت سادهٔ زیر را درنظر گرفت : چهار موشك در هر لحظه در چهار رأس مربعی واقع هستندکه این مربع متدرجاً کوچکتر می‌شود و در عین حال حول مرکز خود (که ثابت است) در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند . مبادا که باز منحرف شوی و خواسته باشی به موضوع دوران بپردازی . هر یك از موشکها همواره در امتداد ضلع مربع (که متدرجاً کوچك می‌شود) قرار دارد و باید طول ضلع این مربع را بپیماید . بنابراین سرعت‌کوتاه شدن ضلع مربع برابر است با سرعت موشك ، یعنی یك‌کیلومتر درثانیه . و چون در ابتدا ، فاصلهٔ هر دو موشك برابر با ۲۰ کیلومتر است پس ۲۰ ثانیه طول خواهدکشید تا موشکها بایکدیگر برخوردکنند .

ـ بسیار جالب بود . اگر روزی باشکاریهای خود چنین مانوری را انجام دهیم و نتیجه را آزمایش‌کنیم مشغول‌کننده خواهد بود .

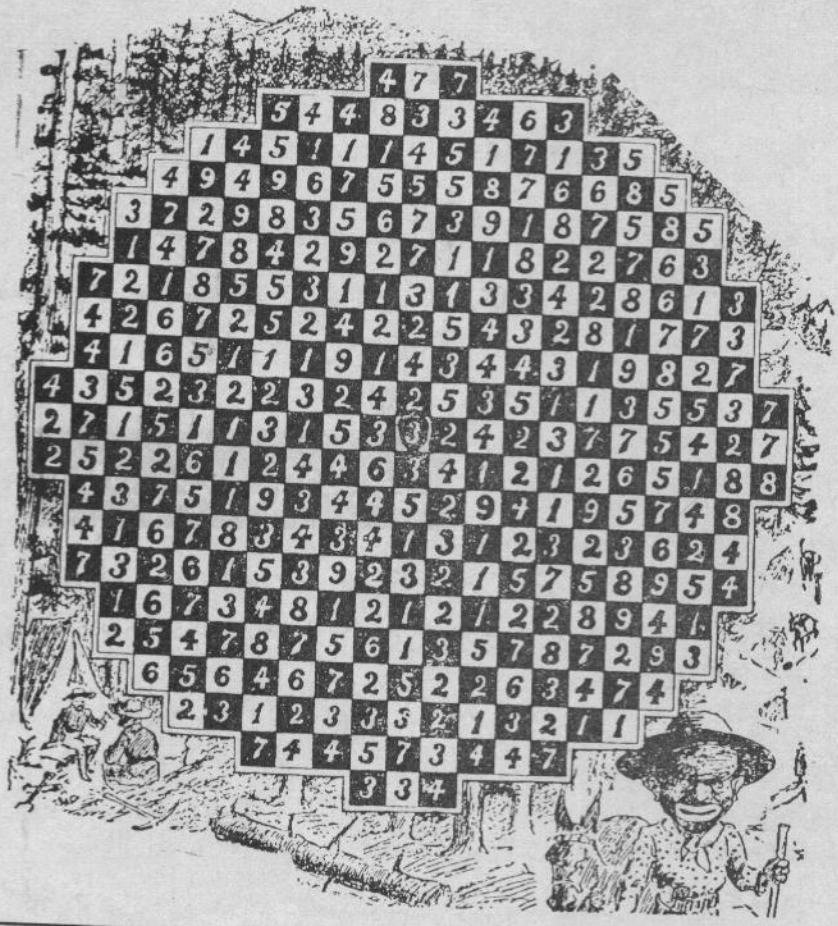
سرگرمیهای باغ

جدول اعداد



افقی : ۱ـ عددی که از رقمهای متفاوت تشکیل شده و هیچیك از رقمهایش در عدد ۸ افقی وجود ندارد. ۵ـ بزرگترین عامل عدد ۳ قائم . ۷ـ .قلوب عدد ۳ قائم . ۸ـ با رقمهای متفاوت غیراز رقمهای عدد ۱ افقی ساخته شده‌است. ۹ ـ یك نهم مجموع اعداد یك وهشت افقی . ۱۲ـ حاصل‌ضرب سه عدد اول دو رقمی ، دو عدد ازاین سه عدد عاملهایی ازمقلوب عدد ۶ قائم هستند .

قائم: ۱ـ اولین‌رقم آن بامجموع دورقم دیگرش برابراست. ۲ـ سالی از دومین نیمهٔ قرن هیجدهم . ۳ـ تفاوت عددهای یك وهشت افقی. ۴ـ آخرین رقمش برابر حاصل‌ضرب دورقم دیگر است . ۶ـ مقلوب آن مضربی از عدد ۳ قائم بوده و سه عامل اول دو رقمی دارد. ۹ـ یکی از عاملهای مقلوب عدد ۶ قائم . ۱۰ ـ همان عـدد ۵ افقی است . ۱۱ـ کوچکترین عامل‌عدد۳ قائم .



خروج از جنگل

از مرکز شروع کنید . در جهتی‌که خواسته باشید ، افقی ، قائم یا مورب ، بـه سومین خانه بپرید . عددی‌که در این‌خانه نوشته شده تعداد خانه‌هایی راکه بعداً باید از روی‌آنها بپرید معین می‌کند . این روش را ادامه بدهید تا اینکه در خانه‌ای واقع شوید‌که جهش بعد ازآن شما را به یکی از خانه‌های‌کناره رهبری‌کند . در این حال راه خروج از جنگل را یافته و بازی را برده‌اید .

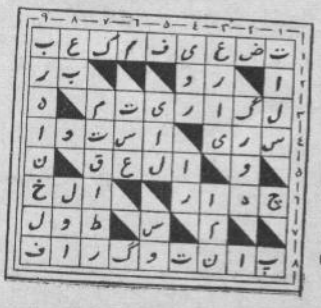
سام لوید (اقتباس از مسائل اولر)

پاسخ اختلاط چای

یك مکعب به یال ۱۷/۲۹۹ و یك مکعب به یال ۲۵/۴۶۹ سانتیمتر رویهم حجمی برابر با ۲۱۶۹۷/۷۹۴۴۱۸۶۰۸ سانتیمتر مکعب خواهند داشت‌که دقیقاً برابر است با مجموع حجمهای۲۲ معکب‌بایال۹/۹۵۴ سانتیمتر .

بنابر این نسبت اختلاط چای سیاه و چای سبز برابر است با ۱۷/۲۹۹ به ۲۵/۴۶۹.

حل جدول شمارهٔ گذشته



مسائل برای حل

پاسخهای خود را چنان بفرستید که تا قبل از پایان مهرماه به ادارهٔ مجله برسد . روی هر یك از ورقه‌هایی که حل مسائل رامی‌نویسید نام وکلاس خودرا ذکر کنید . ازارسال حل مسائل مربوط به‌کلاسهای پائین‌تر از خود خود داری کنید .

کلاس چهارم طبیعی

۳۸۱۲ ـ از : **حافظی** دبیر دبیرستان بنیس شبستر

اولا عبارت زیر را به صورت مجموع شش مربع تبدیل کنید .

$$S=3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

ثانیاً محقق کنید وقتی‌که $S=0$ باشد داریم :

$$a=b=c=d$$

۳۸۱۳ ـ از : **بهروز نوبهار** دبیرستان جوینی‌قوچان

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه درزاویهٔ A برضلع AC نقطهٔ K راچنان تعیین کنیدکه تفاضل دوزاویهٔ BKC و BCK برابر با ۹۰ درجه باشد .

کلاس چهارم ریاضی

۳۸۱۴ ـ از : **فرهاد مجیدی آهی :**

اگر داشته باشیم :

$$ax^n=by^n=cz^n=x^n+y^n+z^n$$

ثابت کنیدکه خواهیم داشت .

$$ab+bc+ca=abc$$

۳۸۱۵ ـ از : **احمد میر نژاد** دبیرستان هدف ۴

به فرض $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ عبارت .

$$\frac{f(x^2)-fff(x)}{f(\frac{1}{x^2})-f(\frac{1}{x})}$$

را به ساده ترین صورت ممکن درآورید .

۳۸۱۶ ـ ترجمهٔ **محمود تویسرکانی**

مطلوبست تعیین $f(x)$ در صورتی‌که داشته باشیم :

$$f(x+1)=x^2+px+q$$

۳۸۱۷ ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $BA=BC$ واندازهٔ زاویهٔ B برابر ۳۰ درجه است مفروض است . در نقطهٔ A عمودی بر AC اخراج می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در D قطع کند . ثابت‌کنیدکه طول CD چهار برابر فاصلهٔ نقطهٔ C از ضلع AB می‌باشد .

کلاس پنجم طبیعی

۳۸۱۸ ـ ترجمهٔ : **محمود تویسرکانی**

ازراه محاسبهٔ‌طول قطعه خط‌ثابت کنید که سه‌نقطهٔ A(۳ و ۵) و B(۶ و ۲−) و C(۰ و ۱۲) بر یك استقامت واقعند .

۳۸۱۹ ـ از : **سید جمال آشفته**

اگر داشته باشیم :

$$tg^2x+cotg^2x=b^2 \text{ و } \frac{1}{\sin x\cos x}=a$$

ثابت کنید که داریم : $a^2-b^2=2$

کلاس پنجم ریاضی

۳۸۲۰- ترجمهٔ : پرویز خواجه خلیلی- اسمعیل علی‌پور.

دستگاه زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} x^2-yz=a^2 \\ y^2-xz=b^2 \\ z^2-yx=c^2 \end{cases}$$

۳۸۲۱ - از : سید جمال آشفته

به فرض اینکه داشته باشیم :

$tgx+cotgx=a$ و $tg^3x+cotg^3x=b$

رابطه‌ای مستقل از x بین a و b بدست آورید

۳۸۲۲ - از : چنگیز منطقی

صحت تساوی زیر را تحقیق کنید .

$$\frac{Arc\sin\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{Arc\cos\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-2}{2}}}=tg\frac{\pi}{4}$$

کلاس ششم طبیعی

۳۸۲۳ - ثابت کنید که منحنیهای نمایش تابع زیر در مبدأ مختصات بر محور طولها مماس می‌باشند .

$y=a\sin^2x+b\cos^2x-b$

۳۸۲۴ - ترجمهٔ: هراج کاراپتیان

معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کرده جوابهای کلی آنرا بدست آورید :

$tgx+\sin x(1-tgx)+\cos^2x=1$

کلاس ششم ریاضی

۳۸۲۵ - ترجمهٔ : هراج کاراپتیان

ثابت کنید که مماس بر منحنی به معادلهٔ :

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

در نقطهٔ $M(x_1$ و $y_1)$ واقع بر آن به معادلهٔ زیر می‌باشد:

$$Axx_1+B(\frac{x_1y+x_1y}{2})+Cyy_1+D(\frac{x+x_1}{2})+E(\frac{y+y_1}{2})+F=0$$

۳۸۲۶ - از : بهروز پرهامی دانشجوی دانشکدهٔ فنی تهران

دودایره به‌شعاعهای R و R' به‌مرکزهای O و O' $(OO'=a)$ مفروضند . مکان هندسی نقاطی مانند M را پیدا کنید که اگر از آن نقاط مماسهای MT و MT' را بر دو دایرهٔ فوق رسم کنیم داشته باشیم :

$$\frac{MT}{MT'}=k$$

۳۸۲۷ - ترجمهٔ : هراج کاراپتیان

معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید :

$tg(x+\alpha)+tg(x-\alpha)=2cotgx$

۳۸۲۸ - از : سیروس نخعی آشتیانی دبیرستان هدف ۱

معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید :

$(m^2+1)\cos 2x+(m^2-1)\cos x=2m\sin x$

۳۸۲۹ - از : سید جمال آشفته

مطلوبست تعیین عددی به صورت $\overline{xxyy}$ که برابر باشد با حاصل‌ضرب عدد $\overline{yy}$ در مجذور یك عدد یك رقمی

۳۸۳۰ - از : سید جمال آشفته

بین رقمهای x و y چه رابطه برقرار باشد برای اینکه داشته باشیم :

$(\overline{xy})_{x+y}=x^2+y^2$

۳۸۳۱ - ترجمه از فرانسه

خط Δ و نقطهٔ ثابت O روی آن مفروض است - صفحهٔ P از O گذشته بر Δ عمود است . نظیر هر نقطهٔ دلخواه A از فضا نقطهٔ A' را چنان در نظر می‌گیریم که I وسط AA' بر Δ واقع بوده و داشته باشیم $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}=-a^2$ (a طول معلومی است) .

اگر M نقطه‌ای از صفحهٔ P باشد با استفاده از حاصل‌ضرب اسکالر $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}$ مکان نقاط M را چنان تعیین کنید که زاویهٔ AMA' قائمه باشد

مسائل متفرقه

برای فارغ التحصیلان ششم ریاضی، داوطلبان کنکور دانشگاه

۳۸۳۲ـ از : **بختیار علیمدد سلطانی**

دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^3+y^3=2x^2y \\ x+y=2xy \end{cases}$$

۳۸۳۳ـ از : **علی نصر دبیرستان البرز**

اگر داشته باشیم :

$$f(x)=px+q \quad \text{و} \quad f_n(x)=\underbrace{ff\cdots f}_{n\text{مرتبه}}(x)$$

مطلوبست محاسبهٔ مجموع زیر :

$$S_n=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$$

۳۸۳۴ـ از: **بختیار علیمدد سلطانی**

چه رابطه بین a و b و c و d برقرار باشد تادومعادلهٔ زیر دارای یك ریشهٔ مشترك باشند .

$$x^m+ax^n+b=0 \quad \text{و} \quad x^m+cx^n+d=0$$

۳۸۳۵ـ از: **سیروس نخعی آشتیانی**

به‌فرض آنکه داشته باشیم :

$$tg3a=tg3b=tg3c<0$$

حاصل عبارتهای زیررا تعیین کنید :

$$A=tgatgb+tgbtgc+tgctga$$

$$B=cotgacotgb+cotgbcotgc+cotgccotga$$

۳۸۳۶ـ از **سیروس نخعی آشتیانی**

مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$4(\sin^2 3x+\sin^2 5x)(\cos^2 3x+\cos^2 x)=(\sin 4x+2\sin 6x)^2$$

۳۸۳۷ـ از **علی بیات مختاری** دبیرستان خیام نیشابور .

دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \log_y x+\log_2 x=\frac{15}{2} \\ \log_x y+\log_2 y=\frac{12}{5} \end{cases}$$

۳۸۳۸ـ ترجمهٔ : **مهرداد بزرگزاد**

در مثلث ABC ارتفاعهای AD و BE و CF درنقطهٔ H متقاربند . امتداد EF ضلع BC رادر Q تلاقی می‌کند . اگر A′ وسط BC باشد ثابت کنید H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث AA′Q نیز می‌باشد .

۳۸۳۹ـ ترجمهٔ : **هراج کاراپتیان**

اگر $a<b<c$ اندازه‌های اضلاع و m_a و m_b و m_c اندازه‌های میانه‌ها و v_a و v_b و v_c اندازه‌های نیمسازهای متناظر از مثلث ABC باشد ثابت کنید که :

$$m_a>m_b>m_c \quad \text{و} \quad v_a>v_b>v_c$$

۳۸۴۰ـ ترجمهٔ : **حبیب‌الله تراشچین‌پور** دانشجوی ریاضی دانشکدهٔ علوم

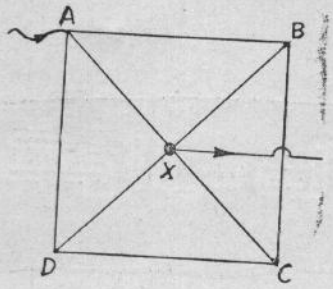
مثلث ABC به‌اضلاع a و b و c رادرنظر می گیریم هریك ازضلعها رابه‌سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم نقاط‌حاصل را ابتدا ازضلع BC ودر جهت B به C و C به A و A به B به‌ترتیب D و E و F و H و I و K می‌نامیم . سه‌مثلث‌متساوی الاضلاع A′DE و B′FH و C′IK را می‌سازیم (هر سه مثلث یادرجهت داخل مثلث ویادرجهت خارج مثلث). ثابت کنید که مثلث A′B′C′ متساوی‌الاضلاع است .

مسائل فیزیك (زیر نظر : هوشنگ شریف زاده)

۳۸۴۱ـ ارسالی فریبرزامیری دانشجوی فیزیك‌دانشگاه‌تهران

در مرکز مکعبی ازشیشه به‌ضریب شکست $\frac{5}{3}$ که طول هر یك از یالهای آن $10cm$ است یك نقطهٔ نورانی قرار دارد . ثابت کنیدکه اگر به‌هریك از رخهای مکعب یك قطعه‌کاغذ سیاه به‌اندازهٔ مناسب بچسبانند می‌توانند مانع آن‌شوند که نقطهٔ نورانی از خارج مکعب دیده شود . اندازهٔ کاغذ و محل نصب آن را تعیین کنید .

۳۸۴۲ـ ترجمه از الکتریسیته و مغناطیس تألیف : C . G . wilson



سیم یکنواختی را به‌شکل ABCD ، که طول هرضلع آن a است درمی‌آوریم . اقطاراین مربع‌را از همان سیم انتخاب‌ووصل می‌کنیم. جریانی از A وارد و از X محل تلاقی اقطار این مربع خارج می‌شود . مقاومت معادل‌مدارراحساب‌کنید. مقاومت واحدطول سیم‌برابر است با r

۳۸۴۳ ـ ترجمه از فیزیك‌عمومی تألیف : Fender

اتوموبیلی‌به‌جرم m به سرپیچی می‌رسد که شعاع‌انحنای آن برابر است با r . عرض جاده باافق زاویه‌ای برابر θ می‌سازد . ضریب اصطکاك جاده، هنگامی‌که اتوموبیل بیحرکت است برابر است با f . حداکثر و حداقل سرعتی را پیدا کنید که اتوموبیل‌می‌تواند داشته باشد تاواژگون نشود .

۳۸۴۴ـ ترجمه از الکتریسیته و مغناطیس

دوازده سیم همطول متشابه داریم که مقاومت هریك‌برابر است با r . آنها رابه‌شکل شبکه چنان‌به‌هم متصل‌می‌کنیم‌که یك مکعب را مجسم نمایدکه این سیمها یالهای‌آن مکعبند . جریانی ازیك رأس وارد واز رأس متقاطر آن خارج می‌شود . مقاومت معادل مجموعه را دراین حالت حساب‌کنید .

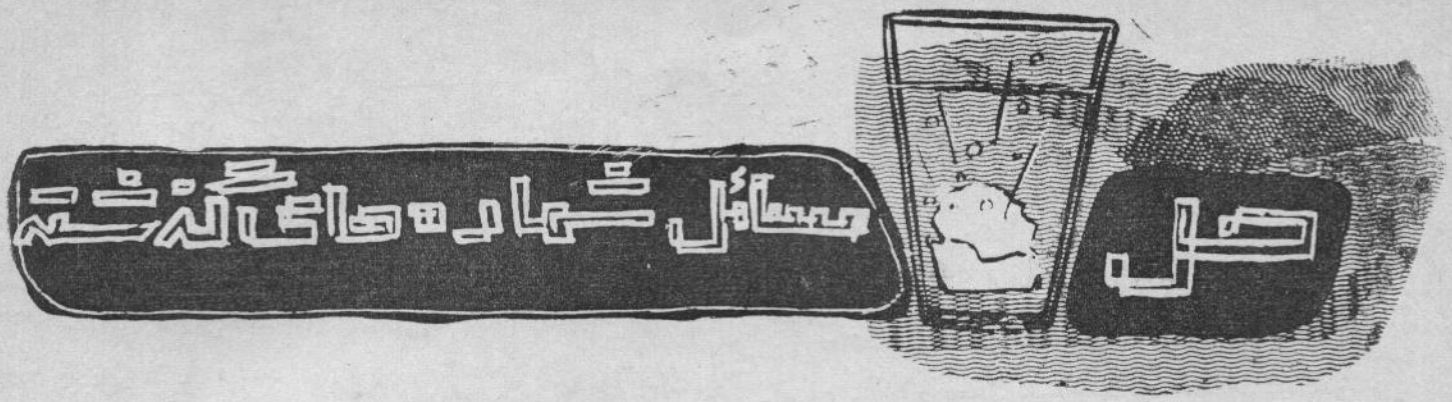
بی‌آنکه عصبانی شوید این‌مسئله‌راحل کنید

قایقی در سطح آب دریاچهٔ یك‌سد شناور است . درون‌قایق تیرآهن نسبتاً سنگینی‌گذاشته‌شده است . اشخاص سوار برقایق ، به‌جهاتی،تیرآهن‌را از قایق برداشته به‌داخل آب دریاچه می‌اندازند . آیادر سطح آب دریاچه تغییری حاصل می‌شود یا نه ؟ یعنی اینکه سطح آب پائین‌تر می‌رود یابالاتر و یا اینکه تغییر نمی‌کند ؟

پاسخ مسئلهٔ تحت همین عنوان مندرج در شمارهٔ پیش

چون سرعت قایق نسبت به‌آب تغییر نمی‌کند می‌توانیم آب را ساکن فرض‌کنیم (در مقابل خشکی مثلاً پل‌را نسبت‌به‌آن متحرك فرض‌می‌کنیم) . اگر قایق برسطح آب ساکن یك‌دریاچه حرکت می‌کرد و بطری‌که برلبهٔ قایق قرار داشت به‌آب می‌افتاد در این صورت بطری در همان محل سقوط ثابت باقی می‌ماند و اگر قایق سوار ۲۰ دقیقه بعد از سقوط بطری متوجه آن می‌شد زمان لازم برای برگشت او تامحل بطری نیز برابر ۲۰ دقیقه می‌شد . بنابراین بطری ۴۰ دقیقه در سطح آب باقی مانده است و در این مدت ، پل به‌اندازهٔ یك‌کیلو متر نسبت به‌آب جابجا شده است بنابراین سرعت پل نسبت به‌آب(یعنی سرعت آب رودخانه نسبت به‌پل) برابر است بایك‌کیلومتر در ۴۰ دقیقه‌که برابر می‌شود با ۱/۵ کیلو متر درساعت .

اگر می‌خواستید برای حل‌مسئله از معادلات استفاده‌کنید یك‌معادله داشتید بادو مجهول ، اما باتوجه به نسبیت ، مسئله به‌سادگی حل شد .



اگر حل مسئله‌ای را فرستاده‌اید اما نام شما ذیل حل آن در این شماره درج نشده است به یکی از علل زیر می‌باشد :
راه حل انتخابی شما درست نبوده یا ناقص بوده است . روی ورقه‌ای‌که حل مسئله را نوشته‌اید نام وکلاس خود را یادداشت نکرده‌اید ، مسئله مربوط به‌کلاس پائین‌تر ازکلاس خود را حل‌کرده‌اید . نامهٔ شما دیرتر از مهلت مقرر به دست ما رسیده است .

حل مسائل یکان شمارهٔ ۲۶

۳۷۵۷ ـ پنج عدد a و b و c و d و e مفروضند . می‌دانیم که عدد b واسطهٔ‌عددی است‌بین a و c ، عدد c واسطهٔ هندسی است بین b و d ، عدد d واسطهٔ توافقی است بین c و e ، ثابت کنید که عدد c واسطهٔ هندسی است بین a و e

حل ـ داریم :

$$1)\ 2b=a+c \quad 2)\ c^2=bd \quad 3)\ \frac{2}{d}=\frac{1}{c}+\frac{1}{e}$$

چون d را بین روابط (۲) و (۳) و بعد از آن بین رابطهٔ حاصل ورابطهٔ (۱) b را حذف کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{c(c+e)}{e}=a+c \Longrightarrow c^2=ae$$

پاسخهای درست رسیده: مریم شاملی لاهیجان ـ هایدهٔ آتشرو مهران جزایری مقدس ـ عباس کشاورز ـ احمد حاج عظیم محمدرضا آدرنگی ـ احمد حسین‌زاده داداش ـ علی‌اصغر شاملی نادر پهلوان ـ محسن هاشمی‌نژاد ـ محمدمقدسی ـ مهدی راسخ رضا آلانی ـ رمضان اصغرپور بهشهر ـ علی کولائیان ابوالفضل آتشرو سید حمید طباطبائی ـ سعید عمرانی ازسنندج ـ غلامعلی محمد علی زاده ازآبادان ـ غلامحسین اسدالهی ـ غلامرضا اصلانی قربانعلی میرزا زاده ـ عبدالله غیرتمند ـ احمد پیوندی محمدرضا یزدان ـ محمود نمازی ـ جمشید احمدیان اصفهان وحید طباطبا وکیلی ـ احمد میر نژاد ـ فرهاد جوانمردیان اسدالله تراشچین‌پور از بهبهان ـ کامبیز علوی ـ حسن حسین‌زاده ازشاهی ـ اصغر شیبانی ـ پشوتن بهین‌آئین ـ حسین تاجگردون از نیشابور ـ شاهین فرازدل ـ منوچهر سناجیان ـ عیسی خندانی از بهبهان ـ محمود محمد شفیعی ـ نصرت نصرت آبادی فریدون امین‌زاده ازرضائیه ـ حسین اسکندری ـ مسعود اکرامی از لاهیجان ـ احمد جلیلی تنها ـ مقصود صلاحی ـ محمدمهدی عابدی نژاد ـ حسن آذر ـ جمال آشفته ـ

۳۷۵۸ ـ با فرض $|x|>1$ مجموع زیررا حساب کنید:

$$S_n=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\dots+\frac{2^n}{x^{2^n}+1}$$

حل ـ داریم :

$$S=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\dots$$

$$\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{-2}{x^2-1}$$

$$\frac{-2}{x^2-1}+\frac{2}{x^2+1}=\frac{-4}{x^4-1}$$

. . . . . .

$$-\frac{2^n}{x^{2^n}-1}+\frac{2^n}{x^{2^n}+1}=\frac{-2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}$$

پس :

$$S=\frac{1}{x-1}-\frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}$$

توضیح ـ مسئلهٔ فوق از مجلهٔ :

Mathematics Magazine

شمارهٔ نوامبر ۱۹۶۵ انتخاب و ترجمه شده است . راه حلی که در مجلهٔ مزبور برای مسئله داده شده به قرار زیر است :

با فرض $x=\frac{1}{y}$ داریم :

$$S_n=\frac{y}{y+1}+\frac{2y^2}{y^2+1}+\frac{4y^4}{y^4+1}+\cdots+\frac{2^n y^{2^n}}{y^{2^n}+1}$$

$$S_n=y\left(\frac{1}{y+1}+\frac{2y}{y^2+1}+\frac{4y^3}{y^4+1}+\cdots+\frac{2^n y^{2^n-1}}{y^{2^n}+1}\right)$$

مقدار داخل پرانتز را مساوی S'_n فرض می‌کنیم و از آن نسبت به y تابع اولیه می‌گیریم :

$$Y=L(y+1)(y^2+1)(y^4+1)\cdots(y^{2^n}+1)+C$$

$$Y=L\frac{y^{2^{n+1}}-1}{y-1}+C$$

از طرفین رابطهٔ اخیر نسبت به y مشتق می‌گیریم :

$$S'_n=\frac{2^{n+1}y^{2^{n+1}-1}(y-1)-y^{2^{n+1}}+1}{(y-1)(y^{2^{n+1}}-1)}$$

مقدار اخیر را در y ضرب‌کرده وعبارت حاصل را برحسب x می‌نویسیم می‌شود :

$$S_n=\frac{1}{x-1}-\frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}$$

و اگر $n\to\infty$ حد S_n برابر خواهد شد با : $\frac{1}{x-1}$

پاسخهای درست رسیده : وحید طباطبا وکیلی احمد حسین‌زاده داداش ـ عباس‌کشاورز ـ حسن جعفری ـ حسن نوریان ـ هدایت‌طوماریان ـ احمد میر نژاد ـ فرهادمجیدی‌آهی حسن ثناجوازرضائیه ـ اصغرشیبانی ـ محمد رضا کمالی ازرضائیه احمد درفش دار ـ جمال آشفته ـ محمدتقی هاشمیان ـ حسین علوی ـ علی‌کولائیان ـ محمد رضا یزدان

۳۷۵۹ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\log_2 x\times\log_3 7x=\log_3 x\times\log_{0/5\log x}7x$$

حل ـ داریم :

$$\log_3 x=\log_2 x\times\log_3 2$$

$$\log_{0/5\log x}7x=\log_3 7x\times\log_{0/5\log x}3$$

معادله به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\log_3 2\times\log_{0/5\log x}3=1$$

و یا $\log_{0/5\log x}3=\log_2 3 \Longrightarrow 0/5\log x=2$

$$\Longrightarrow x=10^4=10000$$

پاسخهای درست رسیده : مریم شاملی، هایدهٔ آتشرو آفری تاج الدینی ، جمال آشفته ، علی‌اکبر صنعتی از رشت منصور نهاوندی پور ، داریوش آزادی ، شاهین فرازدل ، صمد حیاتی ، ابوالفضل صادق زاده، صمد فرهنج ، احمد درفش‌دار محمد رضا کمالی ، لطف‌الله سیدی از بهبهان ، یدالله شجاعی مقصود صلاحی ، محسن فروغی ، احمد درفش دار ، علیرضا میر محمد صادق ، جانسان بدل، محمد ابکاء ، محمدتقی طیب رحیم جارچی ، محمود فضل از بروجرد ، نصرالله صائبی چنگیز ارومیه از رضائیه ، کامبیز علوی ، حسام‌الدین ناجی جلال اشجعی ، فرهاد جوانمردیان ، جواد جمشیدی ، وحید طباطبا وکیلی ، محسن هاشمی نژاد ، جمشیداحمدیان ، احمد پیوندی، قربانعلی‌میرزازاده، مسعودلاویان،شاهرخ‌زنجانی‌زاده غلامرضا نخعی زاده ازمشهد ، فرهاد غفاری ،احمد میرنژاد حجت عادل، اکبرمظاهری ازاصفهان ، علی‌کولائیان ، خاکی مصطفی اخگر ژند ، شهرام ذکاوتی ، حسن نوریان ، احمد حسین زاده داداش ، محمد رضا یزدان ، محمود مرتضوی علی‌اکبر مبلغ‌الاسلام از بابل ، سعید عمرانی ، حسین علوی حسن جعفری ، حسن آذر ، محمدمهدی عابدی نژاد ، مسعود اکرامی، حسین‌اسکندری، عیسی‌خندانی، اسدالله تراشچین‌پور ابوالفضل آتشرو ، رمضان اصغر پور ، رضا آلانی مهدی راسخ ، محمد مقدسی ، نادر پهلوان ، صفرعلی لشکر بلوکی ، ناصر نهاوندی پور ، شهریار دیانت از تبریز ،سالار حیدر محمودی ، احمد جلیلی تنها ، میر سعید لاجوردی ، مهرداد معتمدگرجی ، علی اصغر شاملی ، احمد حاج عظیم .

۳۷۶۰ـ مطلوبست حل دستگاه دو معادلهٔ زیر :

$$\begin{cases}\log_a x+\log_{a^2}(x+y)=1\\ \log_b y+\log_{b^2}(x+y)=1\end{cases}$$

حل ـ a و b و x و y را مثبت فرض می‌کنیم، داریم :

$$\log_a x=\log_{a^2}x^2$$

$$\log_b y=\log_{b^2}y^2$$

پس دستگاه به صورت زیررا نوشته می‌شود :

$$\begin{cases}\log_{a^2}x^2(x+y)=1\\ \log_{b^2}y^2(x+y)=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x^2(x+y)=a^2\\ y^2(x+y)=b^2\end{cases}$$

از حل این دستگاه خواهیم داشت :

$$x=\frac{a}{\sqrt[7]{a+b}} \quad و \quad y=\frac{b}{\sqrt[7]{a+b}}$$

پاسخهای درست رسیده : هایدهٔ آتشرو ـ آفری تاج‌الدینی ـ عباس کشاورز ـ احمد حاج عظیم ـ ابوالفضل آتشرو حمید طباطبائی ـ کامبیز علوی ـ حسین تاجگردون ـ محمود محمدشفیعی ـ نصرت نصرت‌آبادی ـ فریدون امین‌زاده ـ مسعود اکرامی ـ محمد مهدی عابدی‌نژاد ـ حسن جعفری ـ عبدالله سعیدی ـ پرویز مرادی حقگو ـ محمدتقی هاشمیان ـ عبدالله غیرتمند ـ وحید طباطبا وکیلی ـ نادر فامیلی ـ علی‌اکبر مبلغ‌الاسلام ـ محمود مرتضوی ـ حسن نوائیان ـ مصطفی اخگرژند ـ محمد میرزاده ازبابل ـ مسعود لاویان ـ قربانعلی میرزازاده ـ بیژن آرام ـ همایون مهاجری ـ محسن‌هاشمی‌نژاد فرهاد جوانمردیان ـ نصرالله صائبی ـ محمد ابکاء ـ علیرضا میرمحمدصادق ـ یدالله شجاعی ـ لطف‌الله سیدی ـ صمد فرهنج ابوالفضل صادق‌زاده ـ علی‌آقابابا ـ منصور نهاوندی پور ـ احمد جلیلی‌تنها ـ سالار حیدر محمودی از رشت ـ ناصر نهاوندی‌پور احمد حسین‌زاده داداش ـ محمد تقی طیب ـ علی طاهر دبیرستان وحید ـ صمدحیاتی ـ حجت عادلی ـ غلامرضا اصلانی احمد پیوندی ـ ژوزف صالح ـ اسدالله تراشچین‌پور ـ مسعود جزایری‌مقدس ـ علی طباطبائی ـ محود فضل ـ احمد درفش‌دار شهریار دیانت ـ مقصود صلاحی ـ کریم نجاریان .

۳۷۶۱ـ دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^{\log x}+y^{\log y}=10001 \\ x^{\log y}+y^{\log x}=2 \end{cases}$$

حل ـ دستگاه به دستگاه زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{cases} 10^{(\log x)^2}+10^{(\log y)^2}=10001 \\ 10^{\log x \log y}=1 \end{cases} \Longrightarrow \log x \log y=0$$

اگر $\log x=0$ باشد داریم : $x=1$ و از معادلهٔ اول دستگاه نتیجه می‌شود :

$\log y=\pm 2$ و یا $y=100$ و $0/01$ و اگر $\log y=0$ باشد $y=1$ و $0/01$ و $x=100$ خواهد بود .

پاسخهای درست رسیده : هایدهٔ آتشرو ـ میرسعید لاجوردی ـ احمد درفش‌دار ـ یدالله شجاعی ـ کامبیز علوی محسن هاشمی‌نژاد ـ غلامرضا اصلانی ـ محمد مقدسی ـ اسدالله تراشچین پور ـ صفرعلی لشکربلوکی ـ منصور نهاوندی پور علی‌آقابابا ـ ابولفضل صادقزاده ـ محمدرضا واحدی ـ محمدابکاء رحیم جارچی ـ شاهرخ زنجانی‌زاده ـ وحید طباطبا وکیلی ـ حسین علوی ـ عباس کشاورز ـ فریدون امین‌زاده ـ محمود محمدشفیعی عیسی خندانی ـ فرهاد جوانمردیان ـ حمید طباطبائی ـ ابولفضل آتشرو ـ رمضان اصغرپور .

۳۷۶۲ـ دستگاه دو معادلهٔ زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} (ax)^{\log x}=(by)^{\log b} \\ b^{\log x}=a^{\log y} \end{cases}$$

حل ـ داریم :

$$\begin{cases} \log a(\log a+\log x)=\log b(\log b+\log y) \\ \log b \log x=\log a \log y \end{cases}$$

از رابطهٔ دوم مقدار $\log y$ را برحسب $\log x$ حساب می‌کنیم و دررابطهٔ اول قرار می‌دهیم خواهیم داشت :

$$\log a=\pm \log b \Longrightarrow a=b \quad یا \quad \frac{1}{b}$$

به ازاء $a=b$ داریم $x=y$ ودستگاه مبهم است .

به ازای $a=\frac{1}{b}$ نتیجه می‌شود :

$$x=\frac{1}{a} \quad و \quad y=a=\frac{1}{b}$$

پاسخهای درست رسیده : مریم شاملی ـ هایدهٔ آتشرو آفری تاج‌الدینی ـ عبدالحمید چیت‌سازان ازاهواز ـ یدالله شجاعی کامبیز علوی ـ سعید قوجا ـ عباس کشاورز ـ احمد حاج‌عظیم علی‌اصغرشاملی ـ نادرپهلوان ـ محمدمقدسی ـ مهدی راسخ ـ رضا آلانی رمضان‌اصغرپور ـ ابوالفضل آتشرو ـ حمیدطباطبائی ـ غلامحسین اسدالهی ـ محمود نمازی ـ حسن حسین‌زاده ـ حسین تاجگردون عیسی خندانی ـ محمود محمدشفیعی ـ پرویز مرادی حقگو محمدتقی هاشمیان ـ حسین ـ علوی ـ عبدالله غیرتمند ـ وحید طباطباوکیلی ـ محمدرضا یزدان ـ حسن نوریان ، فریبرز جمشیدی ـ اکبر مظاهری ـ محمد میرزاده ـ غلامرضا نخعی‌زاده شاهرخ زنجانی‌زاده ـ قربانعلی‌میرزازاده ـ بیژن آرام ـ محسن هاشمی نژاد ـ جواد جمشیدی ـ رحیم جارچی ـ محمد ابکاء علیرضا میرمحمدصادق ـ نصرت نصرت‌آبادی ـ صمدفرهنج ابوالفضل صادقزاده ـ داریوش آزادی ـ علی‌آقابابا ـ منصور نهاوندی‌پور ـ علی‌اکبر صنعتی ـ میرسعید لاجوردی ـ سالار حیدرمحمودی ـ صفرعلی لشکربلوکی ـ دارا معظمی ـ علیرضا علی‌اکبری ـ علی مولائی ـ چنگیز آزادای ـ شهریار دیانت جمال آشفته ـ علی‌اصغر اسکندربیاتی ـ احمد درفش‌دار

عبدالرحیم سعادت ـ محمدتقی معیر ـ مقصود صلاحی ـ فریدون امین‌زاده ـ احمد جلیلی‌تنها ـ شاهین فرازدل ـ منوچهر سناجیان ـ جانسان بدل ـ محسن فروغی‌از زنجان ـ محمدرضا کمالی ـ اکبر باستانی‌پور ـ پشوتن بهین‌آئین ـ بهروزنوبهار از قوچان ـعلی طباطبائی ـ چنگیز ارومیه ـ علی‌اکبر مبلغ‌الاسلام نصرالله صائبی ـ اصغر شیبانی ـ علی‌کولائیان ـ اسدالله تراشچین‌پور ـ جلال اشجعی ـ محمدتقی طیب ـ شهرام ذکاوتی صمد حیاتی ـ حجت‌عادلی ـ احمدپیوندی ـ احمد حسین‌زاده‌دادش بیژن بینش ـ فرهاد غفاری ـ غلامرضا اصلانی ـ احمد میرنژاد محمد رضا سعیدیوسفی .

۳۷۶۳ـ اگر داشته باشیم :

$$\begin{cases} \cos x+\cos y=a+b \\ \cos 2x+\cos 2y=a^2+b^2 \\ \cos 3x+\cos 3y=a^3+b^3 \end{cases}$$

ثابت کنید رابطهٔ $ab=1$ برقرار است .

حل ـ بااستفاده ازفرمولهای $\cos 2a$ و $\cos 3a$ برحسب $\cos a$ و پس از اختصار خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \cos x+\cos y=a+b \\ \cos^2 x+\cos^2 y=\dfrac{a^2+b^2+2}{2} \\ 4(\cos^3 x+\cos^3 y)=a^3+b^3+3(a+b) \end{cases}$$

از اتحاد :

$$(\cos x+\cos y)^2=\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y$$

خواهیم داشت :

$$\cos x+\cos y=\frac{a^2+b^2}{4}+ab-\frac{1}{2}$$

و با توجه به‌اتحاد :

$$(\cos x+\cos y)^3=$$

$$\cos^3 x+\cos^3 y+3\cos x\cos y(\cos x+\cos y)$$

پس از اختصار خواهیم داشت :

$$ab(a+b)-(a+b)=0\Longrightarrow ab=1$$

پاسخهای درست رسیده : اعظم صمدنوری ـمحمود مرتضوی ، محمدرضا آدرنگی ، محمدرضا فدائی ، نادرپهلوان رضاآلانی ، صادقزاده ، علی‌کولائیان ، پشوتن بهین‌آئین ، مصطفی‌سرگلزائی ، احمدمیرنژاد ، فرهاد غفاری ، محمد رضا سعید یوسفی ، احمد پیوندی ، جمشید احمدیان ، محمد محمدی سقائی از بهبهان ، حسن ثناجو ، عیسی فخرذاکری ، اصغر شیبانی ، جانسان‌بدل محمدرضا کمالی ، قربانعلی‌شاهی داریوش آزادی ، حسین اسکندری ، بهنود پژوهش ، مقصود صلاحی ، احمد درفش دار ، جمال آشفته ، منوچهر سناجیان احمدجلیلی تنها ، فریدون امین‌زاده ، داود حسینی ، مرتضی حسینی خرمی ، علی‌مولائی ، صمدحیاتی ، احمدحاج‌عظیم ، علی اصغر شاملی ، محمد مقدسی ، مهدی راسخ ، حمید طباطبائی غلامعلی محمدعلی‌زاده ، غلامحسین‌اسدالهی ، حسین‌تاجگردون محمود محمد شفیعی ، مسعود اکرامی ، محمدمهدی‌عابدی‌نژاد حسن نوریان ، عبدالله غیرتمند ، وحید طباطباوکیلی ، محمد رضا یزدان ، شاهرخ‌زنجانی‌زاده قربانعلی میرزا زاده ، همایون مهاجری ، صمد فرهنج ، منصور نهاوندی‌پور ، علی‌اکبرصنعتی ناصرنهاوندی‌پور ، علیرضاعلی‌اکبری ، محمد میرزاده ، سعید عمرانی ، محمدحسین صیاد .

۳۷۶۴ـ معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل‌کنید :

$$\sec x+1=\sin(\pi-x)-\cos x\,tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$$

حل ـ معادله رابرحسب $tg\frac{x}{2}=y$ می‌نویسیم ، بعد از اختصار خواهیم داشت :

$$\frac{y^2+2y-1}{y(1-y^2)}=0\Longrightarrow y=-1\pm\sqrt{2} \quad \text{یا} \quad y=\pm\infty$$

از آنجا :

$$tg x=\frac{2(-1\pm\sqrt{2})}{1-(-1\pm\sqrt{2})^2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{-2\pm2\sqrt{2}}=1$$

و یا $tg\frac{x}{2}=\infty$

پس $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ و یا $x=2k\pi+\pi$

پاسخهای درست‌رسیده ـ شاهرخ‌زنجانی‌زاده ، محمد رضا یزدان ، نصرت‌نصرت آبادی ، محمد رضا فدائی از رشت علی‌مولائی ، اکبر باستانی‌پور ، محمدرضاآدرنگی ، عیسی‌فخر ذاکری ، صابرخاوشی ، علی‌کولائیان ، محمدحسین صیاد.

۳۷۶۵ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر راحل‌کنید :

$$tg^3x+tg^3 2x-tg^3 3x+tg^3x\,tg^3 2x\,tg^3 3x=0$$

حل ـ به‌سادگی ثابت خواهدشدکه :

$$tg x\,tg 2x\,tg 3x=tg 3x-tg 2x-tg x$$

و معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$tg^3x+tg^3 2x-tg^3 3x+(tg 3x-tg 2x-tg x)^3=0$$

از اتحاد :

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$$

استفاده‌کرده و معادله را بسط می‌دهیم وپس از اختصار وفاکتور گیری معادله به‌صورت زیر تجزیه می‌شود :

$$(tg 3x-tg 2x)(tg 3x-tg x)(tg 2x+tg x)=0$$

و جوابهای $x=k\pi$ و $x=\frac{k\pi}{3}$ و $x=\frac{k\pi}{2}$ بدست می‌آیند.

پاسخهای درست رسیده ـ ابوالفضل صادق زاده علیرضاعلی‌اکبری ، فریدون امین‌زاده ، صمد حیاتی ، بهنود پژوهش ، حسن‌ثناجو ، کامبیز علوی ، علی‌اصغر شاملی.

۳۷۶۶ـ از معادلهٔ زیر مقادیر کلی کمانهای φ و θ را بدست آورید :

$$(tg^4 3\varphi+1)(\cos^3 4\theta-1)+2tg^2 3\varphi(\cos^3 4\theta-5)=0$$

حل ـ معادلهٔ فوق را چنین می‌نویسیم :

$$(\cos^3 4\theta-1)(1+tg^2 3\varphi)^2=8tg^2 3\varphi$$

و یا :

$$\cos^3 4\theta=\frac{8tg^2 3\varphi}{(1+tg^2 3\varphi)^2}+1$$

این تساوی فقط برقرار است که داشته باشیم :

$$\frac{8tg^2 3\varphi}{(1+tg^2 3\varphi)^2}=0 \Longrightarrow tg 3\varphi=0 \text{ یا } \pm\infty \text{ و } \varphi=\frac{k\pi}{6}$$

$$\cos^3 4\theta=1 \Longrightarrow \theta=\frac{k\pi}{2}$$

پاسخهای درست رسیده : در اکثر پاسخهای رسیده فقط $tg 3\varphi=0$ را در نظر گرفته وجواب $\varphi=\frac{k\pi}{3}$ را بدست آورده‌اند.

۳۷۶۷ـ اگر درمثلثی رابطهٔ :

$$cotg A+cotg B+cotg C=2$$

برقرار باشد ثابت کنید که بین طولهای اضلاع و مساحت رابطهٔ زیر برقرار است :

$$a^2+b^2+c^2=8S$$

حل ـ ازبسط $\cos(A+B+C)=-1$ به سهولت می‌توان تساوی زیررا برای زاویه‌های مثلث اثبات کرد :

$$(1)\quad \sin A\sin B\cos C+\sin A\sin C\cos B+\sin B\sin C\cos A=1+\cos A\cos B\cos C$$

از تساوی $cotg A+cotg B+cotg C=2$ نیز به‌رابطهٔ زیر می‌رسیم :

$$(2)\quad \cos A\sin B\sin C+\sin A\sin C\cos B+\sin A\sin B\cos C=2\sin A\sin B\sin C$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه‌می‌شود :

$$1+\cos A\cos B\cos C=2\sin A\sin B\sin C$$

طرف اول این تساوی به $\frac{1}{2}(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$ تبدیل می‌شود سپس‌می‌نویسیم :

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=4\sin A\sin B\sin C$$

پس ازضرب طرفین در $4R^2$ چنین‌می‌شود :

$$(2R\sin A)^2+(2R\sin B)^2+(2R\sin C)^2=4(2R\sin B)(2R\sin C)\sin A$$

$$a^2+b^2+c^2=4bc\sin A=8S$$

پاسخهای درست رسیده : شاهرخ زنجانی زاده ـ مهدی‌راسخ ، حسن‌نوریان ـ علی‌مولائی ـ نادرپهلوان ـ رضا آلانی ـ حسین‌اسکندری ـ عبدالله سعیدی ـ حسین علوی‌ـعلی اصغرشاملی ـ فریدون امین‌زاده ـغلامحسین اسدالهی‌ـعبدالله غیرتمند ـ جمال آشفته ـ اصغرشیبانی‌ـ پیوندی‌ـپشوتن‌بهین‌آئین وحیدطباطباوکیلی ـ محمدرضاآدرنگر ـاحمدجلیلی‌تنها ـحسن آذر ـ جانسان بدل .

۳۷۶۸ـ اولاً ـ باقیماندهٔ تقسیم a^3 رابر :

$$a^2+a+1$$

بدست آورید .

ثانیاً ـ ثابت کنید که عبارت :

$$S=a^{3p+2}+a^{3q+1}+a^{3r}$$

بر a^2+a+1 بخش پذیر است . (p و q و r اعدادصحیح و مثبت هستند) .

حل ـ اولاً داریم :

$$a^3=(a-1)(a^2+a+1)+1$$

پس باقیماندهٔ تقسیم مساوی بایك است .

ثانیاً ـ باقیماندهٔ تقسیم $(a^3)^p$ بر a^2+a+1 برابر یك بوده در نتیجه باقیماندهٔ تقسیمهای a^{3p+2} و a^{3q+1} و a^{3r} بر a^2+a+1 به‌ترتیب برابربا a^2 و a و 1 شده و باقیماندهٔ تقسیم مجموع آنها برهمین مقسوم‌علیه برابر :

$$a^2+a+1$$

می‌شود پس عبارت مفروض بر a^2+a+1 بخش پذیراست.

پاسخهای درست‌رسیده : هایده آتشرو ـ اسدالله تراشچین‌پور شاهرخ‌زنجانی‌زاده‌ـمرتضی‌کاوسی‌ـ مهدی‌راسخ‌ـنادر پهلوان‌ـ رضا الانی ـ نصرت‌نصرت‌آبادی ـ قربانعلی میرزا زاده‌ـ احمدحاج عظیم‌ـ وحید طباطبا وکیلی ـ جانسان‌بدل ـ پشوتن‌بهین آئین فرهـاد مجیدی آهی‌ـ اصغر شیبانی ـ حسن ثناجو ـ مصطفی سرگلزائی‌ـ حسن نوریان‌ـ ابوالفضل آتش‌رو ـرمضان‌اصغرپور احمد درفش‌دار ـ محمد رضـا آدرنگی ـ علی‌اصغر شـاملی محمدمهدی عابدی‌نژاد.

۳۷۶۹ـ عدد سه رقمی $\overline{abc}$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\overline{abc}=a^2+b^2+c^2+36$$

حل ـ طرف دوم تساوی نمی‌تواند از :

$$3\times 81+36=279$$

بیشتر باشد پس یا $a=1$ یا $a=2$.

به ازاء $a=1$ داریم :

$$100+10b+c=1+b^2+c^2+36$$

$$63+b(10-b)=c(c-1)$$

این رابطه فقط به ازاء $c=9$ قابل‌قبول است (زیرا طرف‌اول از ۶۳ بیشتر بوده و به‌ازاء $c=8$ طرف دوم مساوی ۵۶ می‌شود) .

به ازاء $c=9$ مقادیر $b=9$ و $b=1$ نتیجه‌می‌شوند پس جوابهای مسئله عبارتند از: ۱۹۹ و ۱۱۹ .

به ازاء $a=2$ جواب قابل قبول بدست نمی‌آید .

پاسخهای درست رسیده : حسن آذر ، احمد حاج عظیم ؛ مصطفی‌اخگرژند ، پشوتن بهین‌آئین ، ابوالفضل‌آتشرو سیدجمال آشفته ، حسین‌اسکندری .

۳۷۷۰ـ عدد پنج رقمی $\overline{abcde}$ را که ارقام‌آن‌دوبه‌دو متفاوت هستند باشرط زیر تعیین‌کنید :

$$\overline{abcde}=(\overline{aab})^2-(\overline{ad})^2-c$$

حل ـ از رابطهٔ فوق نتیجه می‌گیریم که فقط $a=1$ می‌تواند باشد . زیرا اگر $a=2$ فرض شود طرف اول‌بین ۲۰۰۰۰ و ۳۰۰۰ محصور بوده اما کمترین مقدار طرف دوم برابر می‌شود با :

$$220^2-29^2-9=47550$$

و تساوی برقرار نیست وبه‌همین ترتیب برای مقادیر بزرگتر از ۲ ، پس رابطه به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\overline{1bcde}=(\overline{11b})^2-(\overline{1d})^2-c$$

و یا :

$$(1)\quad 1000(b-2)=$$

$$220b+b^2-d^2-30d-101c-e$$

اولاً ـ $b\neq 0$ است زیرا به ازاء $b=0$ طرف چپ تساوی مساوی ۲۰۰۰ـ و طرف راست همواره بزرگتر از (۲۰۰۰ـ) خواهدبود وچون هیچیک‌از ارقام عدد باهم‌مساوی نیستند پس $b\geqslant 2$ از طرفی به ازاء $b>2$ همواره طرف‌چپ تساوی (۱) بزرگتر ازطرف راست‌آن است‌پس $b=2$ بوده و رابطه به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(2)\quad 444=d^2+30d+e+101c$$

این رابطه چنین نوشته می‌شود :

$$d(d+30)=444-e-101c$$

چون ارقام متفاوت هستند پس $d\geqslant 3$ است و از طرفی $c\neq 0$ زیرا به‌ازاء $c=0$ داریم :

$$d(d+30)=444-e$$

مقدار طرف اول حداکثر برابر $9(30+3)=351$ ومقدار طرف دوم حداقل برابر $444-9=435$ بوده و تساوی غیر ممکن می‌شود .

رابطهٔ (۲) رابه‌صورت :

$$(3)\quad 11(40-9c)=d^2+30d+e+2c-4$$

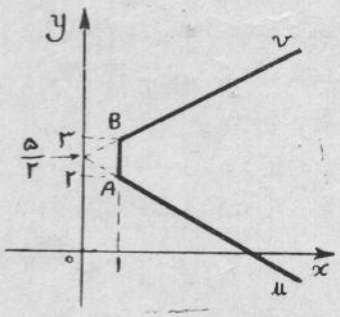
نوشته نتیجه می‌گیریم $2<c\leqslant 4$ و $c=4$ در رابطه صدق نمی‌کند پس $c=3$ و رابطهٔ (۳) به‌صورت زیردر می‌آید :

$$141-e=d^2+30d$$

از این رابطه به‌سادگی جواب $d=4$ و $e=5$ بدست‌می‌آید پس : $\overline{abcde}=12345$

پاسخهای درست رسیده : مصطفی اخگرژند،ابوالفضل آتشرو ، پشوتن‌بهین آئین وحیدطباطباوکیلی .

۳۷۷۱ـ معادلهٔ‌خط شکستهٔ uABv راکه درشکل مقابل‌رسم شده است بدست‌آورید .



حل ـ معادلهٔ نیم خط Au عبارتست‌از:

$$x=2y-5\ (y\leqslant 2)$$

معادلهٔ قطعه خط AB عبارتست از :

$$x=1\quad (2\leqslant y\leqslant 3)$$

و معادلهٔ نیم‌خط Bv عبارتست از :

$$x=5-2y\quad (y\geqslant 3)$$

اگر توجه‌کنیم‌که :

$$2y-5=(y-2)+(y-3)$$

$$1=(y-2)-(y-3)$$

$$5-2y=-(y-2)-(y-3)$$

و می‌دانیم‌که $|a-b|$ در حالت $a\geqslant b$ برابر است با $a-b$ و درحالت $a<b$ برابر است با $-(a-b)$ نتیجه خواهیم گرفت‌که معادلهٔ خط شکستهٔ مزبور عبارت می‌شود از :

$$x=|y-2|+|y-3|$$

پاسخ درست رسیده از : وحید طباطباوکیلی .

۳۷۷۲ ـ (در ترجمهٔ مسئله اشتباهی انجام‌گرفته است که به‌صورت زیرتصحیح می‌شود). اگر a و b و c اعداد صحیح ومخالف صفرباشند آیا معادلهٔ زیر جواب دارد یا نه ؟

$$(c-a-b)^3=24abc$$

حل ـ اتحاد زیر را می‌نویسیم :

$$۲۴abc=(a+b+c)^۳-(a-b+c)^۳-$$
$$(-a+b+c)^۳+(-a-b+c)^۳$$

وچون می‌خواهیم رابطهٔ : $۲۴abc=(c-a-b)^۳$ بر قرار باشد پس باید داشته باشیم :

$$(a+b+c)^۳=(a-b+c)^۳+(-a+b+c)^۳$$

تساوی اخیر با تساوی $x^۳=y^۳+z^۳$ قابل مقایسه است که دارای جواب عدد صحیح نمی‌باشد مگر اینکه داشته باشیم :

$$x=y=z=۰$$

با توجه به اینکه دستگاه :

$$\begin{cases} a+b+c=۰ \\ a-b+c=۰ \\ -a+b+c=۰ \end{cases}$$

بجز جواب $a=b=c=۰$ جواب دیگری ندارد نتیجه می‌شود که معادلهٔ مفروض دارای جواب نمی‌باشد .

پاسخ درست رسیده : جمشید احمدیان .

۳۷۷۳ ـ ثابت کنید که منحنیهای به معادلات :

$$۲x^۲+۳y^۲=a^۲ \quad و \quad ky^۲=x^۳$$

به ازاء جمیع مقادیر a و k ($a\neq۰$ و $k\neq۰$) یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند .

حل ـ داریم :

$$\begin{cases} y_۱^۲=\dfrac{x_۱^۳}{k} \\ y_۲^۲=\dfrac{a^۲-۲x_۲^۲}{۳} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲y_۱y'_۱=\dfrac{۳x_۱^۲}{k} \\ ۲y_۲y'_۲=\dfrac{-۴x_۲}{۳} \end{cases}$$

پس :

$$y'_۱y'_۲=\frac{-x_۲x_۱^۲}{ky_۱y_۲}$$

در نقطهٔ تقاطع داریم : $y_۱=y_۲$ و $x_۱=x_۲$ پس :

$$y_۱'y_۲'=\frac{-x_۱^۳}{ky_۱^۲}$$

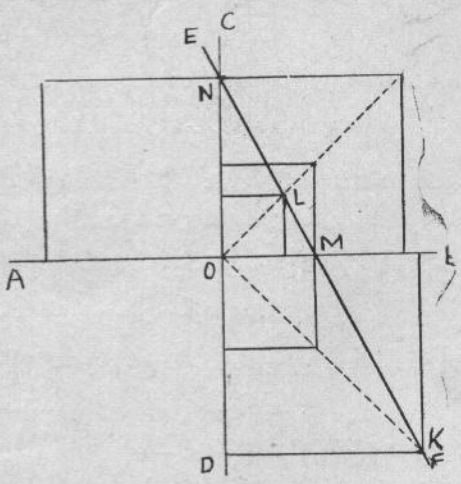
و چون $\dfrac{x_۱^۳}{y_۱^۳}=k$ پس $y'_۱y'_۲=\dfrac{-k}{k}=-۱$

یعنی حاصل‌ضرب مشتقات دوتابع در نقطهٔ تقاطع مساوی (۱ ـ) است یعنی دو منحنی یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند.

پاسخهای درست رسیده : شاهین فرازدل ، وحید طباطبا وکیلی ، صفرعلی لشکر بلوکی ، ابوالفضل صادقزاده

۳۷۷۴ ـ دو خط AB و CD در نقطهٔ O بریکدیگر عمودند خط ثابت EF با خط AB زاویهٔ $\alpha<۴۵^\circ$ ساخته OB را در M و OD را در N قطع می‌کند مطلوبست رسم تمام مربعهای ممکن که یك رأس آنها بر EF واقع بوده و یك زاویهٔ آنها بریکی از زاویه‌های قائمه حول نقطهٔ O منطبق باشد .

حل ـ چون یك زاویهٔ مربع بر یك زاویهٔ دو خط AB و CD منطبق است بنابراین رأس مقابل به زاویهٔ مزبور از مربع بر نیمساز زاویهٔ AB و CD واقع می‌باشد .

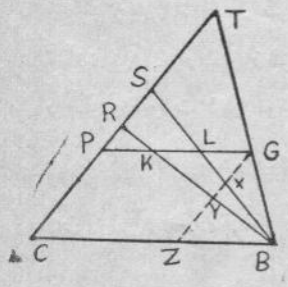


محل تقاطع نیمسازهای زوایای قائمهٔ O را با EF نقاط L و K می‌نامیم مربعهای به قطرهای OL و OK و همچنین دو مربع به ضلع ON و دو مربع به ضلع OM با شرایط مطلوب می‌توان رسم کرد که جمعاً ۶ مربع می‌شود .

پاسخهای درست رسیده : نصرت نصرت آبادی محمود نمازی ـ اسدالله تراشچین‌پور ـ صمد حیاتی ـ داریوش آزادی ـ جلال اشجعی (قم) ـ وحید طباطبا وکیلی

۳۷۷۵ ـ مثلث BDT مفروض است . از رأس B دو خط مرور می‌دهیم که ضلع DT را در R و S قطع کنند . خطی موازی با BD رسم می‌کنیم که BT را در G و DT را در P قطع کند. اگر PG خطوط BS و BR را به‌ترتیب در L و K قطع کند ثابت کنید که :

$$LG\cdot TD+KL\cdot RD : KG\cdot TD=RD : SD$$



حل ـ از نقطهٔ G خط GXYZ را موازی TD رسم می‌کنیم . با در نظر گرفتن تشابه دو مثلث LXG و XZB ، همچنین تشابه دو مثلث GBX و BST وتشابه دو مثلث BXZ و BSD داریم :

$$LG : BZ=GX : XZ=$$
$$=TS : SD$$

تساویهای زیر را به سادگی می‌توان نتیجه گرفت :

$$KG : BZ = GY : YZ = TR : RD$$

بنابراین :

$$RD : SD = LG.TR : KG.TS =$$
$$= LG.TR + RD.KG : KG.TS + KG.SD$$
$$= LG.TD + KL.RD : KG.TD$$

۳۷۷۶ ـ در یک ذوزنقهٔ ABCD قاعدهٔ بزرگتر $AB = a$ از لحاظ اندازه و از لحاظ وضعیت ثابت می‌باشد . قاعدهٔ کوچکتر $CD = b$ و ساق $AD = m$ از لحاظ اندازه ثابت بوده اما ازنظر وضعیت متغیر می‌باشند .

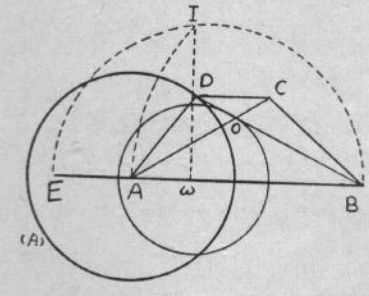
۱) مکان هندسی نقطهٔ O نقطهٔ تلاقی دو قطر ذوزنقه را تعیین کنید .

۲) با فرض آنکه دو قطر بر هم عمود باشند ذوزنقه‌را رسم‌کرده و به ازاء مقادیر مختلف m بحث کنید .

حل ـ ۱) نقطهٔ D بر دایرهٔ (A) به مرکز A و به شعاع m حرکت می‌کند . ازتشابه دومثلث AOB و DOC نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{BD}} = \frac{a}{a+b}$$

یعنی در تجانس به مرکز B و به نسبت $\frac{a}{a+b}$ نقطهٔ O مجانس نقطهٔ D می‌باشد بنابراین مکان نقطهٔ O مجانس دایرهٔ (A) در تجانس مزبور می‌باشد ودایره‌ای است به‌مرکز ω که از رابطهٔ



$$\frac{\overline{B\omega}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BE}}$$

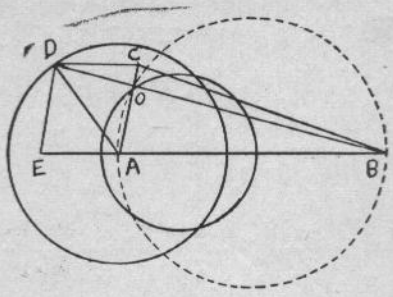
یا $\overline{BA}^2 = \overline{B\omega} \cdot \overline{BE}$

بدست می‌آید (AE مساوی و موازی CD رسم شده است) . اگر I نقطهٔ تلاقی دایرهٔ به مرکز B و به شعاع BA بادایرهٔ به قطر BA باشد ω تصویر I بر AB خواهد بود .

تبصره ـ مکان C دایره‌ای است‌که ازانتقال دایرهٔ(ω) به حامل $\overrightarrow{EA}$ حاصل می‌شود.

۲) وقتی‌که دو قطر بر هم عمود باشندنقطهٔ O بردایرهٔ به قطر AB واقع است . از تلاقی این دایره و دایرهٔ (ω) نقطهٔ O و در نتیجه ذوزنقه مشخص خواهد شد (شکل ۲)

بحث ـ ترسیم ذوزنقه‌وقتی‌ممکن است‌که دودایرهٔ (ω)



و به قطر AB نقطهٔ مشترک داشته باشند نقطهٔ ω بین A و B و نزدیکتر به A واقع است (زیرا $\frac{1}{2} < \frac{B\omega}{BA} < 1$) و شرط امکان جواب عبارت می‌شود از :

$$\frac{ab}{a+b} < \frac{am}{a+b} < \frac{a^2}{a+b}$$

و یا :

$$b < m < a$$

۳۷۷۷ ـ فرض می‌کنیم‌که در مثلث ABC خط اول یعنی OGH با ضلع BC موازی باشد . حاصل $tgB\,tgC$ را بدست آورده و از روی آن وقتی‌که B و C ثابت باشند مکان A را تعیین کنید .

حل : داریم :

$$tgB = \frac{\overline{A'A}}{\overline{BA'}} \quad و \quad tgC = \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'C}}$$

و

$$tgB\,tgC = \frac{\overline{A'A}^2}{\overline{BA'} \cdot \overline{A'C}}$$

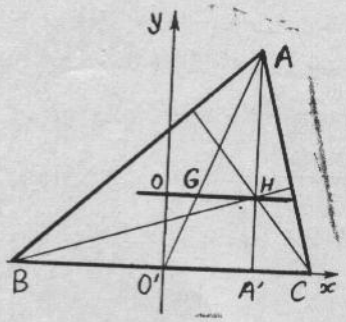
و چون

$$\overline{BA'} \cdot \overline{A'C} = \overline{A'H} \cdot \overline{A'A}$$

پس

$$tgB\,tgC = \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'H}} = \frac{FA}{FG} = 3$$

برای تعیین مکان A ضلع BC را منطبق‌بر محور x'x و عمود ـ منصف‌آنرا محور y'y می‌گیریم مختصات A را (x و y) و طول BC را مساوی با 2a فرض می‌کنیم داریم :



$$tgB = \frac{y}{a+x} \quad و \quad tgC = \frac{y}{a-x}$$

پس

$$tgB\,tgC = \frac{y^2}{a^2 - x^2} = 3$$

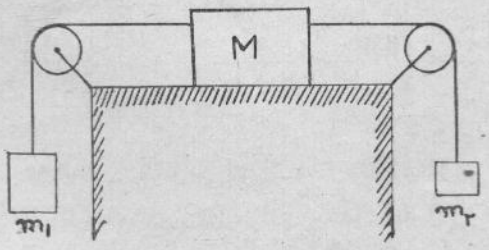
و یا $y^2+3x^2=3a^2 \Longrightarrow \frac{y^2}{3a^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$

پس مکان A یک بیضی است که قطر اقصر آن BC بوده و نصف قطر اطول آن برابر است با $a\sqrt{3}$

۳۷۷۸ ـ جسم M به جرم ۲۰ کیلوگرم روی سطحی افقی که ضریب اصطکاک آن $K=0/25$ است قرار گرفته‌است این جسم بوسیلهٔ ریسمانی که از شیار دو قرقره عبور کرده به جرمهای $m_1=15kg$ و $m_2=5kg$ بسته شده است (طبق شکل)

اولاً ، شتاب حرکت دستگاه را پیدا کنید .

ثانیاً ، کشش طناب را در نقاط A و B تعیین کنید .



$g=9/8m/s^2$

حل : ۱ـ محاسبهٔ شتاب برطبق اصل اساسی دینامیك :

$$m_1g-kMg-m_2g=(m_1+M+m_2)\gamma$$

$$(1)\quad \gamma=g\frac{m_1-m_2-kM}{m_1+m_2+M}$$

اگر نیروی محرك دستگاه ، یعنی $g(m_1-m_2)$ ، کمتر از نیروی اصطکاك ، یعنی kMg ، باشدجسم M ودر نتیجه‌دستگاه حرکت نمی‌کند . در حد جسم M می‌تواند جرمی برابر M داشته باشد بطوری‌که $kM_0g=g(m_1-m_2)$ یا :

$$M_0=\frac{m_1-m_2}{k}$$

که بر طبق معلومات مسأله $M_0=40kg$ می‌باشد . چون در این مسأله $M<M_0$ است دستگاه با شتابی برابر γ حرکت می‌کند . مقدار عددی شتاب :

$$\gamma=\frac{15-5-20\times 0/25}{15+5+20}g=\frac{g}{8}=1/225m/s^2$$

۲ ـ کشش طناب در نقطهٔ A :

$$m_1g-T_A=m_1\gamma$$

$$T_A=m_1(g-\gamma)$$

$$(2)\quad T_A=128/6N$$

کشش طناب در نقطهٔ B : $T_B-m_2g=m_2\gamma$

$$(3)\quad T_B=m_2(g+\gamma)$$

$$T_B=55/1N$$

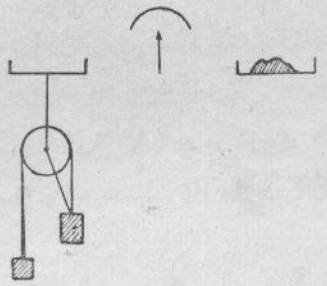
تذکر ـ شتاب دستگاه را می‌توان با توجه به کشش طناب درنقاط A و B نیزحساب کرد. دراین خصوص می‌توان نوشت:

$$(T_A-T_B)-KMg=M\gamma$$

با بکار بردن T_A و T_B ازروابط (۲) و (۳) می‌توان شتاب را بدست آورد که همان مقداری است که در رابطهٔ (۱) بدست آوردیم .

پاسخ درست رسیده ـ مصطفی اخگر ژند

۳۷۷۹ ـ قرقرهٔ شیار دار سبکی را توسط نخ بی وزنی به زیر کفهٔ ترازویی آویزان می‌کنیم . ازشیاراین قرقره نخی عبور می‌دهیم (از جرم نخ صرف نظر می‌شود) وبه طرفین آن وزنه‌هایی به جرم m_1 و m_2 می‌آویزیم .وزنه m_1 راتوسط نخ‌دیگری به‌محور قرقره می‌بندیم تادستگاه‌قرقره‌ووزنه‌ها بی‌حرکت باشد . در کفهٔ دیگر ترازو به



اندازهٔ‌کافی وزنه می‌گذاریم تا تعادل ترازو بر قرار شود نخی که وزنهٔ m_1 را به محور قرقره بسته است بسرعت می‌سوزانیم تا وزنه‌ها شروع به حرکت‌کنند ثابت‌کنیدکه تعادل ترازو به هم می‌خورد جرمی راکه باید به یکی ازدوکفه افزود تا تعادل مجدداً بر قرار شود بدست آورید .

$m_2=0/2kg$ $m_1=0/3kg$

حل ـ نیرویی‌که محور قرقره تحمل می‌کند از نظر مقدار برابر است با مجموع‌کشش طرفین نخ . اگر دستگاه جرمها حرکت‌کنند ، یعنی هنگامی‌که نخ را می‌سوزانیم ،این نیرو برابر است با :

$$T_1+T_2=(m_1+m_2)g-(m_1-m_2)\gamma$$

پس در این هنگام بنظر می‌رسدکه این دستگاه سبك شده است وبایددرکفهٔ بالای آن وزنه‌ای برابر $(m_1-m_2)\gamma$ قرارداد داریم :

$$\gamma=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2}$$

جرم وزنه‌ای راکه بایددرکفه قراردهیم‌به m نمایش می‌دهیم:

$$mg=(m_1-m_2)\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$$

با بکار بردن مقادیر عددی $m=0/02kg$

پاسخ درست رسیده ـ حسن نوریان .

۳۷۸۰ـ ماه مدار خود را به دور زمین تقریباً در ۶۵۶ ساعت طی می‌کند مدت زمان یك دور گردش قمرمصنوعی

را پیدا کنید که در ۱۶۰۰ کیلو متری سطح زمین است فاصلهٔ زمین تا ماه $60R$ و $R=6400km$ و R شعاع زمین است .

مدار ماه و قمر مصنوعی را به‌دور زمین دایره فرض می‌کنیم و از نیروهای جاذبه سایر کرات آسمانی صرف نظر می‌کنیم

جسمی به‌جرم m را در نظر می‌گیریم که به فاصلهٔ r از مرکز زمین بوده و به‌دور زمین مداری دایره شکل طی می‌کند تساوی نیروی جاذبهٔ عمومی و نیروی گریز از مرکز منجر به تشکیل رابطهٔ زیر می‌شود :

$$m\frac{v^2}{r}=k\frac{M\cdot m}{r^2}$$

که چون $g_0=\frac{kM}{R^2}$ پس :

$$v=R\sqrt{\frac{g_0}{r}} \quad \text{یا} \quad m\frac{v^2}{r}=mg_0\frac{R^2}{r^2}$$

و زمان یك دور گردش $T=\frac{2\pi r}{v}$ بنابراین :

$$T=\frac{2\pi r}{R}\sqrt{\frac{r}{g_0}}$$

یا $\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{g_0R^2}=$ ثابت (قانون کپلر)

اگر فاصلهٔ ماه تا مرکز زمین d وزمان یك دور گردش ماه به‌دور زمین T و از آن قمر مصنوعی به ترتیب d' و T' باشد داریم:

$$\frac{T^2}{d^3}=\frac{T'^2}{d'^3}$$

$$T'=T\sqrt{\frac{d'^3}{d^3}}$$

چون $d'=R+1600=1/25R$ است :

$$T'=656\sqrt{\frac{(1/25R)^3}{(60R)^3}}$$

$T'=1$ ساعت ۲۵ دقیقه

پاسخهای درست رسیده : متأسفانه پاسخهای رسیده غلط بوده است .

۳۷۸۱ـ ئیدروکربور A به فرمول C_nH_{2n-2} بدون اتصال سه‌گانه مفروض است مقدار آبی که از احتراق m گرم این ئیدروکربور حاصل می‌شود برابر با مقدار کربنی است که در همین مقدار از آن وجود دارد .

از گرم کردن این ئیدروکربور در مجاورت سدیم ایزومر دیگری از آن بدست می‌آید که یك کربور استیلی (B) است .

از پولیمریزاسیون سه ملکول ئیدروکربور (B) ، ئیدروکربور C حاصل می‌شود .

تعیین کنید اولاً وزن جسم C را درصورتی که بدانیم ئیدرولیز جسم B تولید ۰/۹۱۴ گرم ستون می‌کند .

ثانیاً ـ چه جرمی از بنزن لازم است تا این مقدار ئیدروکربور C را تولید نماید .

حل ـ فرمول احتراق ئیدروکربور ازاین‌قرار است :

$$C_nH_{2n-2}+\frac{3n-1}{2}O_2\rightarrow nCO_2+(n-1)H_2O$$

$$C_n=(n-1)H_2O$$

$$12n=(n-1)18$$

$$12n=18n-18$$

$$6n=18$$

$$n=3$$

بنابراین فرمول ئیدروکربور C_3H_4 و چون بدون پیوند سه گانه است ناگزیر باید دارای دوپیوند دوگانه باشد و فرمول آن ازاین‌قرار است : $CH_2=C=CH_2$

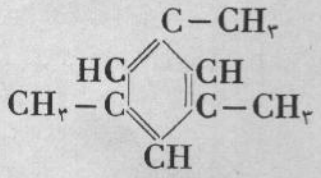
از اثر کاتالیزر سدیم برروی آن ایزومر استیلی آن بفرمول :

$$CH_3-C\equiv CH$$

تولید می‌شود .

از پولیمریزاسیون سه ملکول آن ئیدروکربور حلقوی بنام تری‌متیل بنزن تولید می‌شود که فرمول آن ازاین‌قرار است:

$$3CH_3-C\equiv CH\rightarrow$$



تری متیل بنزن

از اثر آب بر بروپین استون تولید می‌شود :

$$CH_3-C\equiv CH+H_2O\rightarrow CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3$$

gr	gr
۴۰	۵۸
x	۰/۹۱۴

$$x=\frac{40\times 0/914}{58}=0/63$$

$$C_6H_6+3CH_3Cl\xrightarrow{Cl_3Al}3ClH+C_6H_3(CH_3)_3$$

مقدار تری متیل بنزن

gr	gr
۳×۴۰	۱۲۰
۰/۶۳	x=۰/۶۳

gr بنزن	تری متیل بنزن
۷۸	۱۲۰
x	۰/۶۳

$$x=\frac{0/63\times 78}{120}=0/409 \text{ gr بنزن}$$

پاسخهای درست رسیده : متأسفانه جوابهای رسیده ناقص بوده است .

۳۷۸۲- ۰/۷۸۵ گرم از یك ماده آلی مشتمل بر کربن ئیدرژن و یك عنصر هالوژن را تجزیه می‌نمائیم . ۰/۲۲۵ گرم آب و ۱/۳۲ گرم گاز کربنیك بدست می‌آید .

عنصر هالوژن به‌نسبت یك اتم در ملکول جسم آلی است از طرف دیگر ۱۹/۶۲۵ گرم از این جسم بایدور اتیل در مجاورت سدیم باراندمان ۸۴ درصد ۱۱/۳۰ گرم ازیك ئیدرو کربور تولید می‌نماید که ترکیب درصد آن از این قرار است .

$C = ۹۰/۵۶\%$ $\quad H = ۹/۴۴\%$

تعیین کنید :

۱- جنس جسم مورد تجزیه و ئیدرو کربور حاصل را.

۲- طریقهٔ دیگری که ئیدرو کربور نامبرده از جسم مورد تجزیه بدست می‌آید .

حل- بااستفاده از نسبت در صد عناصر در ئیدرو کربور چنین نتیجه می‌شود :

$$\frac{۹۰/۵۶}{۱۲} = ۷/۵۴ \qquad \frac{۹/۴۴}{۱} = ۹/۴۴$$

بین اعداد حاصل نسبت ۴ و ۵ برقرار است بنابراین ئیدرو- کربور B دارای فرمول‌خام $(C_۴H_۵)_n$ خواهد بود .

در نمونهٔ جسم A مقادیر کربن ئیدرژن وهالوژن ازاین قرار است :

کربن $\quad \frac{۱۲ \times ۱/۳۲۰}{۴۴} = ۰/۳۶^{gr}$

ئیدرژن $\quad \frac{۲ \times ۰/۲۲۵}{۱۸} = ۰/۰۲۵^{gr}$

هالوژن $\quad ۰/۷۸۵ - (۰/۳۶ + ۰/۰۲۵) = ۰/۴۰۰$

بنابراین جرم کربن وئیدرژن درجسم A رویهم برابر :

$$۰/۳۶ + ۰/۰۲۵ = ۰/۳۸۵^{gr}$$

و در ۱۹/۶۲۵ گرم آن

$$\frac{۱۹/۶۲۵ \times ۰/۳۸۵}{۰/۷۸۵} = ۹/۶۲۵^{gr}$$

کربن و ئیدرژن یافته می‌شود .

جرم اتمی عنصر هالوژن ازرابطهٔ زیر بدست‌می‌آید :

هالوژن	gr کربن وئیدرژن
۰/۴	۰/۳۸۵
x = ۸۰	۷۷

بنابراین هالوژن برم است وفرمول جسم A خواهد شد :

$C_۶H_۵Br$

روش‌دیگر تهیهٔ جسم B اثر یدور اتیل برروی بنزن در مجاورت کاتالیزر $Cl_۳Al$ می‌باشد فرمول واکنش از این قرار است

$$C_۶H_۶ + C_۲H_۵I \rightarrow C_۶H_۵ - C_۲H_۵ + IH$$

از ترکیب هالوژنهٔ مزبور بایدور اتیل در مجاورت سدیم هالوژنورسدیم واز پیوستن دوبنیان به‌یکدیگر یك ئیدروکربور به‌وجود می‌آید . بدیهی است چون مقدار کربن‌و ئیدرژن را بکاهیم باقیمانده مقدار $C_۲H_۵$ را نشان خواهد داد . بنابراین مقدار ئیدروکربور رابه ازاء راندمان ۱۰۰٪ خواهد شد.

$$\frac{۱۱/۱۳۰ \times ۱۰۰}{۸۴} = ۱۳/۲۵$$

$$۱۳/۲۵ - ۹/۶۲۵ = ۳/۶۲۵$$

برای پیداکردن جرم ملکولی :

بنیان اتیل	ئیدور کربور
۳/۶۲۵	۱۳/۲۵
۲۹	x

$x = ۱۰۶$

فرمول جسم خواهد شد :

$(C_۴H_۵)_n = ۱۰۶$

$۵۳n = ۱۰۶$

$n = ۲$

$C_۸H_{۱۰}$

و فرمول جسم B خواهد شد : $C_۶H_۵ - C_۲H_۵$

پاسخ درست رسیده : پشوتن بهین آئین

پرسش و پاسخ

پرسش : خاصیت عنصر صدوسوم طبیعت یعنی لاورنسیوم را از نظر فیزیکی و شیمیائی توضیح دهید .

فریبرز جمشیدی کلانتری

پاسخ (از عطاءالله بزرگ نیا) : لاورنسیوم (Lw) با عدد اتمی ۱۰۳ و جرم اتمی ۲۵۷ نیمه زندگی ۸ ثانیه ، به عنصر مندلویوم تجزیه می‌شود . توسط Ghiorso و Sihkeland و Larsh و Latimar در لابراتوار تشعشع لاورنس در دانشگاه کالیفرنیا از بمباران عنصر کالیفرنیوم با هستهٔ اتم بور (B) تهیه شده و به افتخار فیزیکدان معروف Ernesto . Lawrence نامگذاری شده است . خواص فیزیکی و شیمیائی این عنصر نا پایدار مانند سایر عناصر ناپایدار رادیو آکتیو مورد توجه نیست .

***

پرسش : خواهشمندم معانی کلمات زیر راکه مربوط به شیمی قدیم است بفرمائید :

مرقشیشا ـ کبریت سرخ ، کبریت سفید ، کبریت سبز ـ مغنسیا ـ دهن ـ اقلیمیا ـ لاجورد .

بیژن اعظمی

پاسخ (از حسین جواهری) ـ

اقلیمیا : ماده‌ای است که از گداختن فلزات : نقره ، مس وطلا بدست می‌آید درحقیقت اقلیمیا یعنی **«خبث فلزات»** توضیح اینکه چون فلزات مذکور را بگدازند مخلوطی بدست می‌آید که شامل دو قشر است ؛ قشر روئی به صورت کف است و قشر پائینی به صورت درد است . اولی براق ودومی ناخالص است . چون عمل گداختن را ادامه دهند این دوقشر به یکدیگر می‌پیوندند. مشهورترین اقلیمیا همان اقلیمیای طلاست که به‌عنوان تقویت کنندهٔ نوروپلک چشم ونیز برای برطرف کردن سفیدی چشم بکار می‌رود .

مرقشیشا : این کلمه « یونانی » است و به آن **«سنگ نور»** یا **«سنگ روشنائی»** هم می‌گویند . زیرا برای روشنائی چشم بسیار مفید است . سنگی است غیر براق و دارای انواع مختلف است : طلائی ، نقره‌ای، مسی و آهنی ، گوشتی که در معادن فلزات فوق یافت می‌شود . قویترین همهٔ آنها مسی است .

این جسم را به عنوان جلا دهنده و تقویت‌کنندهٔ چشم بکار می‌برند . استعمال داخلی آن ممنوع است زیرا سمی‌است.

مغنسیا : سنگی است شبیه به مرقشیشا که به فارسی : **«رنگ کاسه»** یا **«صابون شیشه‌گری»** گویند . فرمول این جسم MnO_2 است (درقرون وسطی به MnO_2 یا مگنزیا نیگرا و به MgO منگنز یا آلبا گفته‌اند) . این جسم به پنج نوع دیده می‌شود (مخزن الادویه) . جسمی است جلا دهنده مقوی‌معده ، درضمن برای جلوگیری‌ازدیر بولی مصرف‌می‌شود.

کبریت : لغتی است عربی معرب ازنبطی ، به یونانی قاریون و به سریانی‌کبریتا وبه‌فارسی گوگرد گویند . این جسم ماده‌ای است معدنی به رنگهای : سرخ ، زرد مایل به سبز ، سفید وکبود . نوع سرخ آن شفاف و براق است و در معدن خود در شب می‌درخشد . نوع سفید را «گوگردفارسی» گویند

لاجورد : از سنگهای معدنی به رنگ آسمانی یا آبی که ساییده شده‌اش در نقاشی بکار می‌رود . در طب قدیم نیز استعمال می‌شده .

دهن : یعنی روغن .

***

پرسش ـ یکی از دانش‌آموزان ششم طبیعی دبیرستان ادیب که مایل به ذکر نامشان نیستند مسأله‌ای ارسال داشته‌اند که درامتحانات داخلی‌آن دبیرستان مطرح شده است . صورت مسأله به شرح زیر است :

اتومبیلی به جرم ۶۰۰کیلوگرم در جاده شیبداری به شیب ۰/۰۴ با موتورخاموش‌شروع به‌حرکت می‌کند. درصورتی که از اصطکاک صرف نظر شود و مقاومت هوا از رابطهٔ : $R=0/06v^2$ بدست آیداولاسرعت‌حد اتومبیل رامحاسبه کنید؛ ثانیاً حساب کنید پس‌ازچه‌مدت‌به‌این‌سرعت خواهدرسید: $g=10m/s^2$ در دستگاه M.K.S قدیم حل کنید) ۴ نمره

ایشان نوشته‌اندکه فرض اول این مسأله به آسانی قابل حل است ولی در فرض دوم مدت زمانی‌که باید طول بکشد تا جسم به سرعت حد برسد بینهایت است ؛ زیرا ازکلمهٔ «حد» نیز می‌توان این موضوع را فهمیدکه اتوموبیل مطلقاً به این سرعت نمی‌رسدبلکه به طرف‌آن میل می‌کند . این دانش‌آموز

خواسته است که اگر راه حلی دیگر برای این مسأله باشد در مجله نوشته شود .

پاسخ (از هوشنگ شریفزاده) ـ همانطوری که خود متوجه شده‌اید مدت زمان لازم برای اینکه متحرك به سرعت حد برسد بینهایت است ، و در حدود معلومات ششم طبیعی (یا ششم ریاضی) این جواب کافی بنظرمی‌رسد. اما حل این مسأله منجر به محاسباتی می‌شود که خارج از برنامهٔ ریاضیات دبیرستان است و بطور خلاصه به شرح زیر است :

نیروهای وارد بر جسم عبارتند از : $P\sin\alpha$ در جهت حرکت ، $0/06v^2$ در خلاف جهت حرکت . زیرا فرض آن است که موتور خاموش است ؛ بنابراین حرکت در امتداد سطح شیبدار به طرف پائین است .

طبق اصل اساسی دینامیك .

$$P\sin\alpha - 0/06v^2 = m\gamma$$

یا

$$mg\sin\alpha - 0/06v^2 = m\gamma$$

یا

$$g\sin\alpha\left(1 - \frac{0/06}{mg\sin\alpha}v^2\right) = \gamma$$

با فرض $\frac{mg\sin\alpha}{0/06} = a^2$ می‌توان نوشت .

$$(1) \qquad g\sin\alpha\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = \gamma$$

از طرفی داریم : $v^2 = 2\gamma x$ که در آن γ شتاب حرکت است . از x نسبت به v مشتق می‌گیریم :

$$2\gamma\frac{dx}{dv} = 2v \Longrightarrow \gamma = \frac{vdv}{dx}$$

و فرمول (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$g\sin\alpha\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = \frac{vdv}{dx}$$

یا

$$\frac{g\sin\alpha}{a^2}dx = \frac{vdv}{a^2 - v^2} \Longrightarrow -\frac{2g\sin\alpha}{a^2}dx = -\frac{2vdv}{a^2 - v^2}$$

$-2vdv$ دیفرانسیل $a^2 - v^2$ است و در ریاضیات ثابت می‌کنند که تابع اولیهٔ $\frac{-2vdv}{a^2 - v^2}$ برابر است با : $L(a^2 - v^2) + C_1$ که L علامت لگاریتم نپری است . تابع اولیهٔ طرف دیگر $-\frac{2g\sin\alpha}{a^2}x + C_2$ است بنابراین اگر از طرفین رابطهٔ دیفرانسیلی بالا تابع اولیه بگیریم :

$$L(a^2 - v^2) + C = -\frac{2g\sin\alpha}{a^2}x$$

هنگامی که $x = 0$ است $V = 0$ است و

$$c = -La^2 \quad \text{یا} \quad La^2 + c = 0$$

پس

$$L\left(\frac{a^2 - v^2}{a^2}\right) = -\frac{2g\sin\alpha}{a^2}x$$

طبق تعریف لگاریتم:

$$\frac{a^2 - v^2}{a^2} = e^{-2\frac{g\sin\alpha}{a^2}x}$$

در این رابطه e پایهٔ لگارتیم نپری است که در شماره‌های قبلی یکان در بارهٔ آن گفتگو شده است .

بالاخره

$$v = a\sqrt{1 - e^{\frac{-2g\sin\alpha}{a^2}x}}$$

درحد $\gamma = 0$ و $mg\sin\alpha = 0/06v^2$

یا :

$$v = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{0/06}} = a$$

است . برای اینکه جسم به‌سرعت حدبرسد باید مسافتی برابر x طی کندکه از رابطهٔ زیر بدست‌می‌آید :

$$a = a\sqrt{1 - e^{\frac{-2g\sin\alpha}{a^2}x}} \Longrightarrow x = \infty \Longleftrightarrow t = \infty$$

***

پرسش : استقراء ریاضی یعنی چه ؟

محمد رضا بلورانی

پاسخ ـ در بارهٔ استقراء ریاضی و استفادهٔ آن در حل مسائل‌ریاضی مقاله‌ای در یکان شمارهٔ ۹ مندرج است . درهمین شماره هم مقاله‌ای مربوط به‌آن ملاحظه می‌فرمائید .