مجله ریاضیات

دورهٔ سوم ـ شمارهٔ : ۲

شمارهٔ مسلسل : ۲۷

تیر ماه ۱۳۴۵

در این شماره :

بها : بیست ریال

توجه

مقالات ارزندهٔ بسیاری به ادارهٔ مجله واصل شده است که فرستندگان آنها به نوشتن نام خود قناعت کرده از ذکر نشانی، شغل و مأخذ مقاله خودداری کرده‌اند و بدین جهت از درج این مقالات در مجله معذور بوده‌ایم. از علاقمندانی که مطالبی برای چاپ در مجله ارسال می‌دارند تقاضا دارد به نکات زیر توجه فرمایند:

۱ـ در نامهٔ ارسالی نام، نام خانوادگی، شغل و نشانی خودرا مرقوم دارند.

۲ـ اگر مطلب ترجمه است مشخصات کتاب یا نشریهٔ اصلی را به وضوح معلوم کنند

۳ـ مطالب خودرا با خط خوانا وفقط دریك روی صفحهٔ کاغذ بنویسند

۴ـ اگر مایلند که درزمینهٔ خاصی سلسله مقالاتی درمجله چاپ کنند قبلا با ادارهٔ مجله تماس بگیرند.

۵ـ مسائلی که برای درج درمجله می‌فرستند باید:

اولا معلوم شده باشد که طرح فرستنده است یا اینکه از جای دیگر اخذ یا ترجمه شده است.

ثانیاً اگر مسئله طرح فرستنده نیست مآخذ آن به وضوح معلوم شده باشد.

ثالثاً حل مسئله همراه آن باشد.

رابعاً مسئله قبلا درکتابها یا نشریات چاپ ایران چاپ نشده باشد.

۶ـ مقالات رسیده برای چاپ درمجله مطابق با رسم‌الخط معمول مجله اصلاح خواهند شد.

۷ـ مقالات رسیده به صاحبان آنها مسترد نخواهد شد.

یادآوری

عده‌ای از خوانندگان مجله یا بوسیلهٔ تلفن و یا بوسیلهٔ نامه در بارهٔ بعضی ازمجلات ریاضی کشورهای خارج توضیحاتی خواسته‌اند. برای کسب اطلاعاتی دربارهٔ اشتراك این مجله‌ها باید مستقیماً به نشانی ادارهٔ آنها مکاتبه شود. در یکان شمارهٔ ۲۵ بعضی ازاین مجلات با نشانی آنها معرفی شده است.

نامهٔ رسیده:

نامه‌ای ازطرف هشت نفر شرکت کنندگان درکنکوردانشکدهٔ صنعتی آریامهر واصل شده است که ضمن آن به حل مسئلهٔ حساب کنکور این دانشکده یك ایراد گرفته‌اند. استاد دکتر هشترودی نامهٔ این آقایان را ملاحظه و ضمن شرحی که مرقوم داشتند ایراد آنان را وارد دانستند. نامهٔ آقایان وشرح استاد در یکان سال ۴۵ چاپ خواهد شد.

یکان

مجلهٔ ریاضیات

سال سوم ـ دورهٔ سوم ـ شمارهٔ دوم (شمارهٔ مسلسل: ۲۷)

تیرماه ۱۳۴۵

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی: داود مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان هر ماه یك بار منتشر می‌گردد

نشانی اداره: تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك شاهرضا ـ شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای ۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی: جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume III, number 2, July. 1966

subscription: $3

TEHERAN. P.O.B. 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

مادهٔ واحده - مصوب هزار وصدودوازدهمین جلسهٔ

شورای عالی فرهنگ : ۲۴ر۱۱ر۴۴

اجازه داده می‌شود که کمیسیون خاصی در برنامهٔ آموزشی فعلی دبیرستانها تجدید نظر کلی بعمل آورد و برنامهٔ جامعی در سطحی که متناسب با ادامهٔ تحصیلات دانش آموزان فارغ‌التحصیل رشتهٔ ریاضی در دانشگاههای ایران و کشورهای خارج باشد تنظیم کند تا در دبیرستانهایی که آمادگی دارند بطور آزمایشی به موقع اجرا گذاشته شود پس از آزمایش نتیجه برای اتخاذ تصمیم قطعی وتعمیم آن در کلیهٔ دبیرستانهای کشور به شورای گزارش شود .

دبیرستانهای خاص

هدف از تحصیلات متوسطه تأمین حداقل معلومات لازم برای اشتغال به حرفهٔ مخصوص یا برای ادامهٔ تحصیل دررشتهٔ خاص می‌باشد. پیشرفت روزافزون علوم وصنایع ، ارتقاء مداوم سطح حد اقل یك چنین معلوماتی را ایجاب می‌کند. به ناچار تجدیدنظرهای متوالی در برنامهٔ تحصیلای دبیرستانی اجتناب ـ ناپذیر می‌باشد. دراین باره مناسبترین سیاست آموزشی شاید آن باشد که برنامهٔ تحصیلات هر دبیرستان به فراخور تجهیزات علمی آن و به تناسب احتیاجات علمی روز انعطاف‌پذیر باشد ودبیرستانهای خاصی با برنامه‌های مترقی وجود داشته باشد، باقید احتیاط برای چگونگی انتخاب محصلین این مدارس.

اکنون که در بیشتر کشورها در برنامهٔ ریاضیات تحصیلات متوسطه تحولات اساسی ایجاد شده و اجرای آزمایشی برنامه‌های جدید با موفقیت همراه بوده است ، تصویب مادهٔ واحده‌ای که دربالای صفحه درج است اقدامی کاملا بجا و نوید بخش می‌باشد . اما نکتهٔ مهمی که باید مورد توجه کامل واقع شود شرایط تحصیل دردبیرستان خاص است(دبیرستانی که آمادگی اجرای برنامه‌را دارد).

آیا این دبیرستان خاص ، خاص افراد خانواده‌های متمکن خواهد بود ؟ آیا همهٔ جوانان با استعدادی که استحقاق هرگونه آموزش پیشرفته‌ای را دارند بدان راه خواهند داشت ؟

عدم توجه دستگاه آموزشی در بهبود وضع دبیرستانهای دولتی و سهل‌انگاری یا عدم توانایی در تکمیل کادر آموزشی آنها بین معلومات محصلین این مدارس و محصلین مدارس ملی اختلاف سطحی پدید آورده است . اجرای برنامه‌های خاص دردبیرستانهای ملی این اختلاف سطح را بیشتر خواهد کرد و این خود نسبت به اکثریت محصلین که استطاعت مالی برای تحصیل در مدارس خاص را ندارند ظلم فاحش خواهد بود .

عبدالحسین مصحفی

خاطراتی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضیدانان

یادی از کنگرهٔ مسکو، ۱۹۳۵

دکتر محسن هشترودی

این کنگره آخرین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان قبل از جنگ جهانی دوم بود. شبی پس از پایان جلسهٔ رشتهٔ هندسهٔ دیفرانسیل و توپولوژی، **کارتان** فقید (**الی کارتان** بزرگ) و **اسخوتن** (Schowten) (که هم اکنون رئیس مرکز ریاضی **آمستردام** است) و **هرمان وایل** (Hermann Weyl) و دسته‌ای از محققین درحسابهای تانسوری و نظریهٔ التصاقها گفتگو می‌کردند. کوچه‌های مسکو در نزدیکی کرملین همگی تقریباً رو به کرملین ره می‌برند، گوئی متمرکزاند. **وایل** فقید این سؤال را عنوان کرد که: «**آیا هندسهٔ مقیاسی وجود دارد که ژئودزیکهای آن** (اقصر فاصله، این جا باید اشاره کرد که در تمام فضاهای مقیاسی ژئودزیکها و خطوط مستقیم برهم منطبق نیستند یعنی بین دو نقطه یك خط مستقیم و یك منحنی اقصر فاصله وجود دارد که ازهم متمایزاند) **همه متمرکز باشند.**» آن شب، پس‌ازجدا شدن این‌عده **اسخوتن** شبانه این التصاق را پیداکرد که هم اکنون به نام او در روسیهٔ شوروی به نام **التصاق اسخوتن** معروف است. عجیب است که درممالك غربی گاهی این التصاق را به نام **التصاق مسکو** (Connexion de Moscov) می‌نامند.

نویسندهٔ این سطور قریب ۱۵ سال پیش خواص محرم این التصاق‌را تعیین کرد ومقارن همان‌زمان **آندره لیشنروویچ** استاد **کلژ دوفرانس** نیز ثابت کرد که بین فضاهای نقطه‌ای (فضاهائی که با نقطه معرفی می‌شوند نه با نقطه و یك امتداد یا با نقطه ویك سطح) تنها فضائی که به سیستمهای غیرهلنوم مکانیك تحلیلی مرتبط است همین التصاق نیمه متقارن اسخوتن است. این التصاق را نیمه متقارن می‌نامند زیرا به پیچش فضا (این فضا بدیهی است که فضای عادی نیست یعنی دارای انحناء می‌باشد پیچش فضا انحناء مربوط به انتقال مبدأ مختصات است) ازروی یك حامل تنها به کمك تانسوراصلی معین می‌شود.

نظیر این امر دربسیاری ازکنگره‌ها اتفاق افتاده است که مسئله‌ای درجلسه‌ای از رشته‌های کنگره یا حتی خارج ازجلسه مطرح شده و یك شبه توسط یکی از ریاضیدانان مقتدر حل شده است.

احتمالات

نوشته : مارك كارك
ترجمهٔ : مهدی مدغم
از : سینتیفیك آمریکن

درجهان واقعی. ریاضیدان با پدیده‌هائی روبرو می‌شودکه به‌دقت قابل پیش بینی نیستند روشی که برای مطالعه و بررسی این پدیده‌ها بکار می‌رود شاخه‌ای ازریاضیات محض را بوجود آورده است .

خانمی ماشین نویس ده نامه و ده پاکت ماشین کرده و بدون توجه به نشانیهائی‌که روی پاکتها ماشین شده نامه ها راکاملا بطور تصادف در پاکتها می گذارد .

چقدر احتمال می‌رودکه هیچیك از این نامه‌ها درپاکت مخصوص به خود قرارنگیرد ؟ ممکن است ازاینکه این احتمال کمی بیش از $\frac{1}{3}$ و یا دقیقتر برابر $\frac{1}{2/71828...}$ است تعجب نمائید . (عدد معروف ۲/۷۱۸۲۸..... که با e نموده می‌شود و پایهٔ لگاریتم طبیعی است در نظریهٔ احتمالات اهمیت فراوان دارد و پی در پی درمسائل‌مختلف‌آن نمایان می‌شود.)

روشی‌که‌برای حل‌این مسأله ومسائل‌مشابه‌بکار می‌رود ـ **آنالیز ترکیبی** نام دارد . مثال قدیمی‌ترو مشهورتراحتمال آوردن **رنگ** در دست ۵ ورقی از یك دستهٔ ۵۲ ورقی در بازی پوکر است . بدین معنی‌که پنج ورق ازیك دستهٔ ۵۲ورقی بازی را به یك بازیکن می‌دهیم . چقدر احتمال می‌رودکه این ۵ ورق از یك خال باشد ؟ بدیهی است‌که آنالیز ترکیبی ، موارد استعمالی بسیار عملی‌تر و مهمتر از محاسبهٔ شانس یك قمار باز یا پاسخ به سؤالات تفریحی مانند نتیجهٔ کار خانمهای گیج دارد . آنالیز ترکیبی یك شاخهٔ بسیار مفید ریاضی است اما قواعد آن را از طریق مثالهای ساده بهتر می توان توضیح داد . پس بازی پوکر را به منظور نتایجی‌که ازنظر احتمالات دارد بیشتر ومشروحتر مورد مطالعه قرارمی‌دهیم .

پی‌یر سیمون دولاپلاس (simon de laplace Piere) (۱۷۴۹ – ۱۸۲۷) احتمال را با نسبت $p=\frac{n}{N}$ تعریف نمود و بنابر این تعریف نظریهٔ‌کامل آنالیز ترکیبی را بنا نهاد. این عبارت ، بیان می کندکه احتمال یك واقعه‌عبارت است ازنسبت شمارهٔ طرقی‌که آن حادثه می‌تواند پدید آید(n) به شمارهٔ جمیع حالات ممکن (N) به شرط‌آنکه احتمال‌وقوع کلیهٔ حالات ممکن ، یکسان باشد . بنابر این احتمال رنگ در بازی پوکر ، نسبت شمارهٔ رنگهای ممکن به شمارهٔ کلیهٔ دستهای ممکن می‌باشد . وظیفهٔ آنالیز ترکیبی آنست که هر دو شماره یا دو جزء این نسبت را محاسبه نماید .

برای سهولت ، حالتی ساده‌تر را انتخاب می کنیم‌که با اعدادی‌کوچکتر سروکارداشته باشیم . فرض می کنیم چهارشیئ A و B و C و D داریم می‌خواهیم بدانیم‌چند ترکیب دوتائی می‌توانیم از این چهار شیئ بسازیم . چون مثال ساده انتخاب شده است می‌توان مستقیماً این اشیاء را دو به دو پهلوی هم قرار داد و شمارهٔ ترکیبهای حاصل را شمرد . این ترکیبها عبارتند از AB و AC و AD و BC وBD و CD .شمارهٔ ترکیبهای دوتائی راکه از چهار شیئ می‌توان ساخت شمارهٔ ترکیبهای چهار شیئ دو به دو می‌نامیم وبا (۲ و ۴) می‌نمائیم به همین ترتیب شمارهٔ ترکیبهای، r تایی‌که از n شیئ می‌توان ساخت ،

شمارهٔ ترکیبهای n شیئ r به r نامیده وبا C(n و r) نشان می‌دهیم . بنا بر مطالب فوق شمارهٔ ترکیبهای ۴ شیئ ۲ به ۲ برابر است با ۶ و به عبارت دیگر: ۶ = (۲ و ۴) Cاما چنانکه‌تعد بیشتری‌ازاشیاءرا انتخاب کنیم‌محاسبهٔ‌شمارهٔ‌ترکیبهای آنها به طریق فوق ، دشوار می‌شود . پس باید دستوری پیدا کردکه به‌کمك آن شمارهٔ ترکیبها را آسانتر بدست آورد .

فرض‌کنیم شیئ پنجمی به چهار شیئ فوق بیفزائیم و شمارهٔ ترکیبهای ۵ شیئ ۲ به ۲ را محاسبه‌کنیم . بدیهی است که شمارهٔ ترکیبها به اندازهٔ ۴ واحد بیشتر می‌شود.

زیرا شیئ پنجم با هریك ازآن ۴ شیئ قبل ، ۴ترکیب می‌سازدکه در ۶ ترکیب قبلی وجودنداشت پس شمارهٔ ترکیبهای ۵ شیئ ۲ به ۲ برابر ۱۰ می‌شود .

برای اینکه علامات قردادی آنالیز ترکیبی را بکاربرده باشیم می‌توانیم بنویسیم :

$$C(۵و۲)=C(۴و۲)+C(۴و۱)=۶+۴=۱۰$$

بنا بر همین قاعده می‌توان شمارهٔ ترکیبهای ۱۰ شیئ ۴ به ۴ را به صورت زیر نوشت :

$$C(۱۰و۴)=C(۹و۴)+C(۹و۳)$$

در واقع می‌توان گفت که $C(۱۰و۴)$ یا ترکیبهای ۱۰ شیئ ۴ به ۴ را می‌توان به دودسته تقسیم کرد یکی ترکیبهائی که دارای شیئ A نیستند بنابراین شمارهٔ این دسته با شمارهٔ ترکیب‌های ۹ شیئ ۴ به ۴ برابر است ودیگری ترکیب‌هائی که شامل شیئ A هستند اگر از تمام ترکیب‌های این دسته حرف A را حذف نمائیم ترکیب‌هائی از ۹ شیئ ۳ به ۳ تشکیل می‌شود . با همین استدلال می‌توان گفت :

$$C(nور)=C(n-۱ور)+C(n-۱ور-۱)$$

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که برای محاسبهٔ شمارهٔ ترکیبهای چند شیئ می‌توان آن ترکیب را به مجموع ترکیبهائی باشمارهٔ کمتر تبدیل کرد و به همین طریق عمل را ادامه داد تا به ترکیبهائی برسیم که شمارش آنها آسان باشد . در حقیقت باید تمام ترکیبها را از پایه ، شماره‌کرده و در دسترس داشته‌باشیم

***

این محاسبات به طریق ساده‌ای در جدولی که به نام **مثلث پاسکال** معروف است خلاصه شده است . این مثلث به‌نام **بلز پاسکال** Blaise pascal (۱۶۲۳ - ۱۶۶۲) که‌یکی از بنیان‌گذاران نظریهٔ احتمالات است نامیده می‌شود . اعداد این مثلث را می‌توان‌ازضرایب بسط **دو جمله‌ای نیوتون** بدست آورد. اعداد هر سطر، ضرایب‌یکی ازتوانهای‌دوجمله‌ای است . مثلاً اعداد سطرهفتم ضرایب $(a+b)^۷$ می‌باشند.

۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱
. . . . . .

هر عدد در این جدول برابر است با مجموع دو عددی که در بالای آن عدد ، یکی در سمت راست و دیگری درسمت چپ ، واقع است . شمارهٔ ترکیبهای هر چند شیئ را می‌توان در سطر نظیر از چپ به راست پیدا کرد . مثلا سطر چهارم شمارهٔ ترکیبهای اشیائی را نشان می‌دهد که شمارهٔ جمیع آنها ۴ باشد . اولین عدد یعنی یك، شمارهٔ ترکیبهای ۴ شیئ صفر به صفر، دومین عدد یعنی ۴ ، شمارهٔ ترکیبهای ۴ شیئ ۱ به ۱ سومین عددیعنی ۶ شمارهٔ ترکیبهای ۴ شیئ ۲ به ۲ وچهارمی یا ۴ شمارهٔ ترکیبهای ۴ شیئ ۳ به ۳ و بالاخره پنجمی یا عدد ۱ ، شمارهٔ ترکیبهای ۴ شیئ ۴ به ۴ می‌باشد . برای پیداکردن شمارهٔ ترکیبهای ۱۰ شیئ ۴ به ۴ که مطلوب مابود برطبق‌این جدول باید در سطر دهم عدد پنجم را انتخاب کرد (عدد اول مربوط به شمارهٔ ترکیبهای صفر به صفر است) از روی مثلث - پاسکال ملاحظه خواهد شدکه شمارهٔ این ترکیبها ۲۱۰ است .

اما استفاده از مثلث پاسکال نیز برای اعدادبزرگ‌دشوار است . خوشبختانه پیشروان نظریهٔ احتمالات توانستند فرمول عمومی ساده‌ای پیداکنند . این فرمول که اکنون اغلب با آن آشنائی دارید عبارتست از :

$$C(nور)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

دراین دستور !n (n فاکتوریل) عبارتست‌ازحاصل‌ضرب عدد صحیح n و جمیع اعداد صحیح کوچکتر از n مثلاً :

$$۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱$$

در حالتی‌که بخواهیم شمارهٔ ترکیبهای ۱۰ شیئی ۴ به۴ را بدست آوریم بر طبق دستور فوق داریم :

$$C(۱۰و۴)=\frac{۱۰!}{۴!(۶)!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷}{۴\times۳\times۲\times۱}$$

(!۶ از صورت و مخرج حذف شده است)

با این مقدمات . آماده شده‌ایم تا احتمال آمدن رنگ را در بازی پوکر حساب کنیم . اگریك خال مثلاً خشت رادر نظر بگیریم تعداد دستهای مختلف ۵ تایی که ممکن است ازاین خال تهیه‌کرد عبارتست از شمارهٔ ترکیبهای ۱۳ شیئی ۵ به ۵ یا $C(۱۳و۵)$. بنابر این تعداد دستهای مختلفی‌که ممکن‌است در یك دستهٔ ۵۲ ورقی ازیك خال باشد چهار برابر این‌مقدار خواهد بود و تعداد دستهای مختلف ۵ تایی‌که به هر ترتیب از ۵۲ ورق می‌توان تهیه‌کرد عبارتست از $C(۵۲و۵)$. بنابراین احتمال آمدن رنگ در بازی پوکر عبارت می‌شود از :

$$p=\frac{n}{N}=\frac{۴C(۱۳و۵)}{C(۵۲و۵)}=\frac{۴\times\frac{۱۳\times۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹}{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}}{\frac{۵۲\times۵۱\times۵۰\times۴۹\times۴۸}{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}}$$

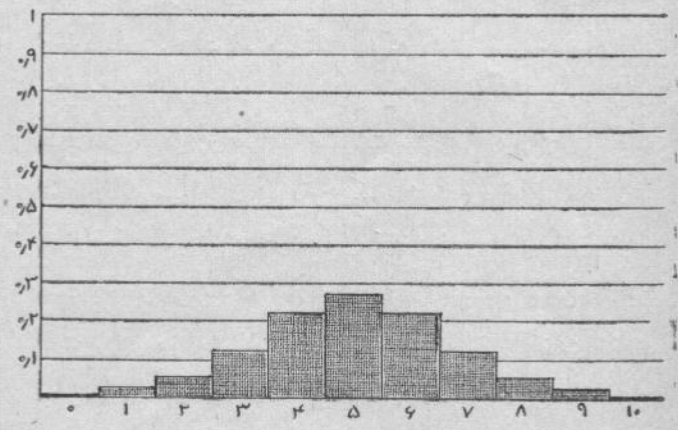
$$=\frac{۳۳}{۱۶۶۰۰}$$

نسبت فوق‌که تقریباً برابردوهزارم می‌باشد نشان می‌دهد

که در بازی پوکر در هر هزار دست احتمال دارد دو دست رنگ بیاید .

اکنون مطالعه در احتمالات را بوسیلهٔ بازی شیر و خط ادامه می‌دهیم. فرض کنیم یك‌سکه‌را ۱۰ بار بیندازیم می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه در این ۱۰ بار درست ۴ بار شیر بیاید چقدر است. ازمثلث پاسکال تعدادطرقی‌راکه از۱۰ بارانداختن سکه ۴ بار شیر می‌آید حساب می‌کنیم . این تعداد همان شمارهٔ ترکیبهای ۱۰ شیءِ ۴ به ۴ است‌که عدد پنجم از سطردهم‌مثلث یا ۲۱۰ می‌باشد . جمیع حالات ممکن در این مسأله عبارت است از مجموع شماره‌های‌ترکیبهای ۱۰ شیءِ یا مجموع‌اعداد سطر دهم مثلث پاسکال یا ۱۰۲۴ . پس اگر بازی شیر و خط بدون تقلب انجام شود احتمال ۴ شیردر ۱۰ بازی $\frac{۲۱۰}{۱۰۲۴}$ یا تقریباً بیست و یك در صد می‌باشد .

مجموع اعدادهرسطردرمثلث پاسکال‌یا مجموع ترکیبهای n شیءِ عبارت است از ۲^n ، (در مثال قبل $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$) . بنابر این احتمال آمدن k شیر در n بازی به شرح فوق‌عبارت می‌شود از $p = \frac{C(n,k)}{۲^n}$. فرض کنیم احتمالات مختلفی را که در ۱۰ بازی شیر و خط پیش می‌آید حساب کرده نمودار آن رارسم کنیم. این احتمال برای هیچ شیر در۱۰ بازی $\frac{۱}{۱۰۲۴}$ و برای یك شیر در ۱۰ بازی $\frac{۱۰}{۱۰۲۴}$ می‌شود به همین ترتیب



۹ احتمال دیگررا می‌توان حساب کرده درشکل بالا هراحتمال با یك مستطیل نمایش داده شده‌که ارتفاع هر مستطیل نمایندهٔ احتمال آن است .

چنانکه ملاحظه می‌کنید بالاترین قسمت این نمودار در مرکز قراردارد (احتمال آمدن ۵ شیر در ۱۰ بازی یا $\frac{۲۵۲}{۱۰۲۴}$) هر چقدر به طرفین نزدیك شویم نمودار پائین‌تر می‌آید تا به احتمال $\frac{۱}{۱۰۲۴}$ برای هیچ شیریاهیچ خط می‌رسیم اگرنموداری به همین ترتیب برای ۱۰۰۰۰ بازی‌رسم کنیم این نمودار بسیار وسیعتر وکوتاهتر می‌شود. بقسمی‌که احتمال آمدن ۵۰۰۰شیر از ۲۵ درصد (برای ۵ شیردر ۱۰ بازی) به $\frac{۱}{۱۰۰\pi}$ یا تقریباً ۰/۵۶ درصد می‌رسد . ممکن است برای خواننده عجیب باشد که بازیاد کردن تعداد بازیها احتمال ۵۰ درصد آمدن شیر اینقدرکم شود اما در حقیقت زیادکردن بازی شمارهٔ احتمالها و در نمودار ، شمارهٔ مستطیلها را زیادترکرده است .

از مطالبی‌که در بالا بیان شد نتیجه می‌شودکه نمودار احتمالات مختلف در بازی شیر و خط وقتی تعداد بازیها خیلی زیادباشدآنقدر صاف می‌شودکه به سختی ازیك خط راست قابل تشخیص است . اما می‌توان ارتفاعهای مستطیل ها را در عامل معین $\sqrt{\frac{n}{۲}}$ ضرب و قاعدهٔ آنها را بر $\sqrt{\frac{n}{۲}}$ تقسیم کرد و به این ترتیب مستطیلهادر امتداد ارتفاع منبسط و در امتداد قاعده منقبض می‌گردند و می‌توان مشاهده کردکه یك منحنی بدست می‌آیدکه دارای محور تقارن بوده و بالاترین نقطهٔ آن دروسط می‌باشد .

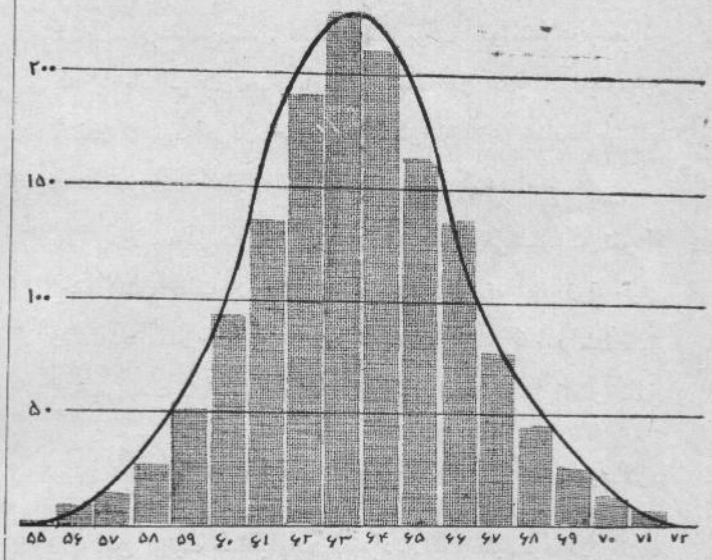
هر چقدر شمارهٔ بازیها بیشتر شود تودهٔ مستطیلها به یك منحنی صاف اتصالی نزدیکتر می‌شوند . معادلهٔ این منحنی عبارت است از :

$$y = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{\frac{-x^۲}{۲}}$$

e همان عدد معروف...۲/۷۱۸۲۸ پایهٔ لگاریتم طبیعی است (در یکان شمارهٔ ۲۶ راجع به این عدد مقاله‌ای درج شده است) .

نزدیك شدن نمودار احتمالات به یك منحنی اتصالی ،

هنگامی که تعداد بازیها زیاد باشد **قانون اعداد بزرگ** نام دارد . اگر سکهٔ سالمی را به طریقی که تفاوتی برای آمدن شیر و خط نداشته باشد صدها هزار یا میلیونها بار بیندازیم توزیع شیر در سریهای آزمایش وقتی که درست و دقیق بوسیلهٔ نمودار ، نموده شود تقریباً بطورکامل منحنی بدست می‌آید که فرمول آن را نوشتیم . این منحنی درعلوم، دارای امتیازخاصی است وبه‌نام منحنی **نرمال** یا **منحنی گوس** خوانده‌می‌شود. این منحنی برای شرح توزیع اندازهٔ قد مردان وزنان واندازه‌های غلات و وزن نوزادان وسرعت ذرات درگازها و خواص بیشمار دیگری ازجهان فیزیك وبیولوژی بکار می‌رود .

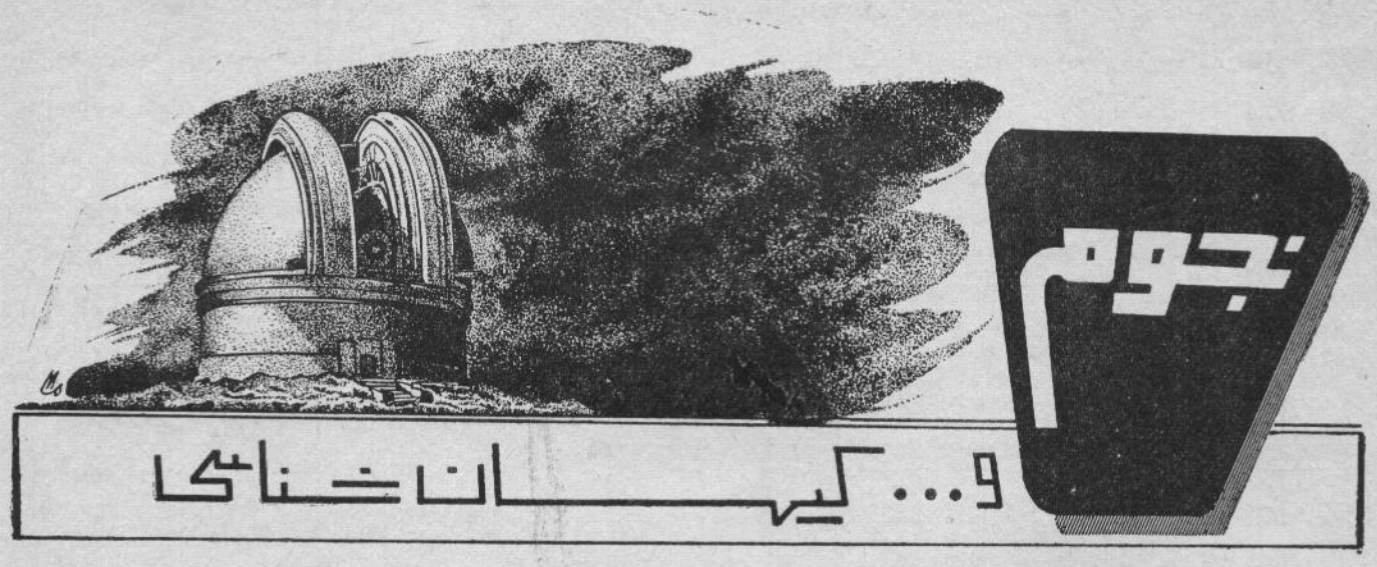


ارتباط جالب توجهی که بین بازی شیر وخط و منحنی نرمال وجود دارد قابل ملاحظه است . این ارتباط یکی از محرکین اصلی برای توسعهٔ بیشتر نظریهٔ احتمالات بوده است بستگی فوق اساس مدل «برخوردتصادفی» را برای مطالعهٔ مسیر ذرات بوجودآورد. و این خودرازحرکت براونی‌را فاش ساخت و بنابراین پایه‌های نظریهٔ جدید اتمی را بنیان گذارد .

امروز احتمالات، اساس ومنشأ تمام علوم است وهمزادش علم‌آمار در تمام فعالیتهای بشر نمودار می‌شود. وقتی به گذشته نظر می‌افکنیم چقدر بیان **لاپلاس** آسمانی وغیب گوئی به نظر می‌رسد که درنوشته‌های اولیهٔ خوددربارهٔ نظریهٔ احتمالات که در ۱۸۱۲ منتشر شدگفت « جالب توجه است که علمی که با مطالعهٔ بازیها و شانس آغاز می‌شود مهمترین موضوع اطلاعات بشر گردد ... مهمترین سؤالات ومسائل زندگی دربیشترین قسمتها فقط مسائل احتمالات هستند .»

به نظر می‌رسد که مشخصات «مهمترین موضوع اطلاعات بشر» این باشد که پس از مدتی بسیار طولانی مقام واقعی خود را احراز نماید . پس‌ازلاپلاس ، علاقه‌به نظریهٔ احتمالات کاهش یافت ودربقیهٔ قرن نوزدهم و بیست سال اول قرن بیستم از آن به عنوان شاخه‌ای‌از ریاضیات‌یاد نمی‌شد . تنها چند ریاضیدان مطالعهٔ در این رشته‌را ادامه‌می‌دادند که در زمرهٔ آنها دانشمندان مشهور وبرجستهٔ روسی **چبیشف** Chebyshev و شاگردش **مارکف** Morkov بودند (این خود باعث توسعهٔ زیادنظریهٔ احتمالات در اتحاد شوروی است) . بعداً نظریهٔ احتمالات موارد استعمال بسیاری در فیزیك پیداکرد . این نظریه نه تنها بوسیلهٔ **آلبرت اینشتین** و **مارتین سمولوچفسکی** - Martin Smolochowski در حل مسائل مربوط به - حرکت براونی بکار برده شد بلکه **جیمز کلرك ماکسوئل** James Clerk Maxwell و **لودویك بولتزمن** Ludwig Boltzmann و **جوزیا ویلارد جیبس** - Josiah Willard Gibbs این نظریه را در تئوری سینیتیك گازها بکاربردند . در این زمان **هانری پوانکاره** Henri poincarè و**دیوید هیلبرت** DavidHilbert دو تن از ریاضیدانان بزرگ عصر برای ایجاد علاقه در نظریهٔ احتمالات، کوشش فراوان کردنداما علی‌رغم این‌کوششها چندان نتیجهٔ مثبتی حاصل نشد.

برای این خونسردی و بیعلاقگی که ریاضیدانان حرفه‌ای نسبت به موضوع نظریهٔ احتمالات نشان‌می‌دادندچند دلیل‌مختلف وجود دارد . علت اساسی آن بودکه احساس می‌شد تمام این نظریه بر اساسی سست و پایه‌هایی لرزان بنا شده است . برای مثال تعریف لاپلاس برای احتمالات مبنی بر این فرض است که تمام وقایع مسأله از نظروقوع‌یکسان باشدو واقعه‌یی محتمل‌تر از واقعهٔ دیگر نباشد چون این فرض خود بیانی از احتمال است به نظر می‌رسد که این تعریف دوری است . بااین‌حال‌این بدترین‌ایرادبه‌احتمالات‌نیست درزمینهٔ‌احتمالات‌تناقضات‌آشکاری به چشم می‌خورد و اشکالاتی پیش می‌آید . وجوداین تناقضات و اشکالات درزمانی که تمام‌شاخه‌های‌ریاضیات به سوی تحجر میل می‌کردند باعث‌گردید که‌احتمالات موضوعی نامناسب برای رشد و پرورش به نظر برسد .



ترجمهٔ فصلی از کتاب «L'Aotronomie Moderne» تألیف : TOCQUET

مراحل مهم علم نجوم

۱ - دورهٔ قدیم

ب - زمان بطلمیوس و بعد از آن

پیشرفت نجوم دورهٔ قدیم به **بطلمیوس** ختم می‌شود . **کلود بطلمیوس** که حدود سال ۱۴۰ میلادی در **اسکندریه** متولد شد با دردست داشتن تعداد زیادی از رصدهای **هیپارك** و به‌کمك کارهای دیگر وی نه تنها نظریه های این منجم را تکمیل کرد بلکه از خود بعضی نظریات جدید و تهور آمیز بر آن اضافه‌کرد، آنچه‌که ترقیات نجوم دورهٔ جدید راآسان‌ساخت. بطلمیوس رصدهای دیگری‌را شخصاً انجام داد و راجع به هیئت عالم نظریه‌ای ابراز داشت‌که تحت عنوان **هیئت بطلمیوس** مشهور می‌باشد . وی نظریات خود و اطلاعاتی راکه از زیج هیپارك ، جدولها وآلات نجومی‌یونانیان داشت درکتابی تدوین کرد وآنراکه یك اثر بسیار بزرگ می‌باشد - «Megiste Syntaxis»-نام نهاد. بعدها علمای اسلامی بااضافه‌کردن ال تعریف‌این کتاب‌را«**المجسطی**»نامیدندوبعدازآن که‌علم‌مسلمین به اروپائیان منتقل شد نام «Almageste» بر این‌کتاب باقی ماند .

هیئت بطلمیوس براساس حرکت مستدیر ستارگان، روی افلاك ، وسکون ومرکزیت زمین بنا شده است . دراین هیئت ، سیارات به ترتیب دوری‌آنها اززمین عبارتند از: ماه، عطارد ، زهره، خورشید، مریخ ، مشتری وزحل . برای توجیه حرکات ظاهری این سیارات ، دستگاه افلاك خارج از مرکز و افلاکی که مراکز آنها خود مداری را طی می‌کنند به نحوی استادانه بیان شده است. فوق‌العاده بودن هیئت بطلمیوس سبب شدکه تا ده قرن بعد از آن این هیئت مورد قبول همه باشد و قوانین پیچیدهٔ آنرا طبیعی تلقی‌کنند . این‌گفته به **آلفونس دهم** پادشاه **کاستیل** (کاستی) منسوب است : «اگر من مأمور ساختمان منظومهٔ شمسی بودم آنرا خیلی ساده تر از این می‌ساختم»

بعدازبطلمیوس مطالعات مهم نجومی توسط علمای‌اسلامی انجام‌گرفته است . اما اینان‌کشفیات نجومی مختصری داشته‌اند، اهمیت‌کارآنها تشریح‌کارهای بطلمیوس ومنجمین پیش ازوی‌است وآثار ایشان واسطهٔ نقل علم نجوم به دورهٔ جدید می‌باشد . در سال ۸۲۷ میلادی خلیفهٔ وقت راداشت تا اثر مهم بطلمیوس را به‌عربی ترجمه‌کردند وچنانچه‌قبلا هم‌گفته شدآنرا**المجسطی** نامیدند .

مشهورترین منجمین اسلامی **البتانی** است‌که صاحب رصدخانه‌ای در **رقه**(Racca) بوده است. وی هیئت بطلمیوس را درچند مورد تصحیح‌کرد ونظریهٔ حرکات ماه و سیارات را کاملتر تشریح نمود .

رومیها نیز دراشاعهٔ علم نجوم و تشریح هیئت بطلمیوس سهم‌مؤثری داشته وغیرازآن، ازخود نیز نظریاتی ابرازداشته‌اند چنانچه **کاپلا** Capella که در قرن پنجم می‌زیسته در اثر خود «Satyrion» چنین نوشته است : «درست است که عطارد وزهره هرروزطلوع وغروب دارند اماآنها دورزمین نمی‌چرخند بلکه مدارات حرکت آنها دوایری‌است که مراکزآنهادرخورشید واقع می‌باشد .»

از جهت دیگر، اقدام مهم رومیها اصلاح تقویم است که به‌امر **«ژول سزار»** قیصرروم انجام گرفت و فعلا به‌نام **تقویم قیصری** معروف می اشد .

دراسپانیا، به دستور **آلفونس دهم** (۱۲۵۲-۱۲۸۴) درشهر **طلیطله** Tolède رصد خانه‌ای فراهم‌آمدکه درآنجا منجمین مسلمان ، مسیحی ویهودی بالاتفاق به ارصاد ستارگان مشغول شدند و فهرستی از ستارگان تهیه‌کردندکه به نام**«زیج آلفونسی»** معروف است . دراین فهرست اوضاع کواکب به‌مراتب دقیقتر از جدولهای قبلی ضبط شده است .

خلاصهٔ بررسی اجمالی‌که بعمل‌آوردیم چنین‌می‌شود: این دورهٔ نجومی ،که‌آنرا دورهٔ قدیم نامیدیم ترکیبی است از یك عده رصدهای دقیق و قابل‌توجه وبعضی تفسیروتأویلهای نادرست که ضمن نظریه‌هایی‌کاملا استادانه بیان شده‌اند. این نظریات استادانه پیش‌ازآنکه درمنقادکردن امور بکار روند در سازش با آنها وضع شده‌اند. معهذا دربین‌این تصورات بعضی افکارعالمانه وجود داشته است‌که همچون اشعهٔ درخشان سراسر این دوره را روشن نگاه می‌دارد ؛ فی‌المثل نظریهٔ **اریستارك** مبنی بر مرکزیت خورشیدکه بعدها توسط **کپرنیك** اعلام شد ونام وی را جاودان ساخت .

توضیح مترجم ـ راجع به هیئت بطلمیوس وکارهای منجمین اسلامی بیش‌ازآنکه درمتن کتاب بدان اشاره شد . لازم است که توضیحات بیشتر و کاملتری داده شود ، در این باره مقاله‌ای خارج ازترجمهٔ متن‌کتاب درمجله چاپ خواهد شد . و علاوه برآن مختصری ازتاریخ علم نجوم درچین وهند ذیلا به نظر خوانندگان می‌رسد .

علم نجوم در چین

چینیهاقبل ازهمهٔ‌ملل‌دیگر به‌مطالعات نجومی پرداخته‌اند به ادعای یکی ازمحققین ، چینیها در ۱۷۰۰۰ سال قبل‌ازمیلاد صورتهای فلکی را می‌شناخته ودر ۱۴۷۰۰ سال قبل از میلاد منطقةالبروج را مشخص‌کرده وآنرا به دوازده قسمت تقسیم کرده بودند. مدارکی ازچینیها مربوط به دوهزار سال قبل از میلاددردست است . بنا به این مدارك، چینیها از ساعت آفتابی استفاده‌کرده ورصدهای منظمی ازستارگان بعمل‌آورده بودند . عبور ۲۸ ستاره را از نصف‌النهار تعیین و طول سال شمسی را برابر با $۳۶۵\frac{۱}{۴}$ روز حساب‌کرده بودند . سال را به چهار فصل و هرفصل را به سه قسمت تقسیم‌کرده ونقاط اعتدالین و انقلابین‌را مشخص فصول قرارداده‌بودند . **چئوکنگ**شاهزادهٔ چینی در ۱۱۰۰ سال قبل از میلاد میل دایرةالبروج را نسبت به استوا برابر با "۲ ′۵۴ و °۲۳ حساب‌کرد. بعدازآن‌کثرت مراودهٔ چینیها با هندیها (قرن ششم میلادی) و کارهای علمای هندی در پیشرفت علم نجوم درچین تأثیرکلی داشته است .

علم نجوم در هند

هندیهاهمزمان باکلدانیان به‌مطالعات نجومی‌پرداخته‌اند مهمترین اثرنجومی‌که از هندیها باقی مانده است‌کتاب **پلیزا سید هانتا** (قرن چهارم یا پنجم میلادی) و کتاب **براهما سید هانتا** است‌که مؤلف‌آن ریاضیدان و منجم بزرگ هندی **براهماگوپتا** است و به‌کرویت زمین معتقد بوده است .

علم نجوم در ایران قدیم

اطلاعات نجومی ایرانیان‌مأخوذ از بابلیها و آشوریها است. درزمان **شاپو ذوالاکتاف** بعضی‌کتب نجومی یونانی و درزمان**انوشیروان** بعضی‌ازآثار علمای هندی به زبان پهلوی ترجمه شده است مهمترین کتاب نجومی‌که از دورهٔ ساسانیان باقی مانده است **زیگ‌شتریار** (زیج شهریار) می‌باشد .

بیشتر منجمین دورهٔ خلفای عباسی ایرانیان بوده‌اند که‌کتب علمی پهلوی را به زبان عربی ترجمه‌کرده‌اند ودرعین حال‌بسیاری از اصطلاحات‌نجومی‌را به زبان اصلی حفظ‌کرده‌اند مهمترین این منجمان **نوبخت** و پسران وی می‌باشند .

- ۱ -

معادلات سیال درجهٔ اول

تهیه و تنظیم از : پرویز شهریاری

دنباله از شمارهٔ قبل

۷- راه حل کلی معادلهٔ سیال :

بوسیلهٔ یك مثال راه حل کلی وعملی معادلهٔ سیال را بیان می‌کنیم ، فرض‌کنید معادلهٔ زیرمفروض باشد :

$$۲۳x+۵۳y=۱۰۹$$

مجهولی راکه ضریب کوچکتر دارد ، برحسب مجهول دیگر بدست می‌آوریم (ودراینجا x را) :

$$x=\frac{۱۰۹-۵۳y}{۲۳}$$

واگر قسمت صحیح آنرا خارج کنیم :

$$x=۴-۲y+\frac{۱۷-۷y}{۲۳}$$

شرط لازم و کافی برای اینکه x و y اعدادی صحیح باشند ، اینست که کسر $\frac{۱۷-۷y}{۲۳}$ عددی صحیح باشد . این کسر را مساوی t فرض می‌کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{۱۷-۷y}{۲۳}=t \Longrightarrow ۱۷-۷y=۲۳t \Longrightarrow$$

$$۲۳t+۷y=۱۷$$

اگر برای y و t اعداد صحیحی بدست‌آوریم که دررابطهٔ

$$\frac{۱۷-۷y}{۲۳}=t$$

ویا معادلهٔ :

$$۲۳t+۷y=۱۷$$

صدق کنند ، برای x هم مقدار صحیحی بدست خواهد آمد و مسئله حل شده است . به این‌ترتیب حل معادلهٔ سیال مفروض منجر به حل معادلهٔ سیال دیگری شدکه ضرایب آن کوچکتر و بنابراین حل آن ساده تر است .

اکنون درمعادلهٔ اخیرهم y را (که‌ضریب کوچکتری‌دارد) نسبت به t محاسبه می‌کنیم :

$$y=\frac{۱۷-۲۳t}{۷}=۲-۳t+\frac{۳-۲t}{۷}$$

برای اینکه y عددی صحیح باشد ، لازم وکافی است‌که کسر $\frac{۳-۲t}{۷}$ عددی صحیح باشد. این کسررا مساوی t فرض‌می‌کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{۳-۲t}{۷}=t_۱ \Longrightarrow ۷t_۱+۲t=۳$$

اعداد صحیحی از t و $t_۱$ که در این معادله صدق کنند ، متناظر با اعداد صحیحی از x و y معادلهٔ مفروض ما خواهند بود و به این ترتیب حل معادلهٔ ما منجر به حل معادلهٔ اخیر شدکه بازهم ضرایب کوچکتری دارد . دراین معادله هم مثل قبل‌عمل می‌کنیم :

$$t=\frac{۳-۷t_۱}{۲}=۱-۳t_۱+\frac{۱-t_۱}{۲}$$

کسر $\frac{۱-t_۱}{۲}$ را مساوی عدد صحیح $t_۲$ می‌گیریم، می‌شود:

$$\frac{۱-t_۱}{۲}=t_۲ \Longrightarrow ۲t_۲+t_۱=۱$$

معادلهٔ سیالی‌بدست‌آوردیم که‌ضریب یکی از مجهولهای آن‌مساوی واحد است وچنین معادله‌ای را هم قبلامورد بحث‌قرارداده‌ایم.

درحقیقت داریم :

$$t_1 = 1 - 2t_2$$

اگر دراین معادله بجای t_2 مقادیر صحیحی قرار دهیم، برای t_1 هم اعداد صحیحی بدست می‌آید ، این مقادیر t_1 و t_2 را درعبارت t قرار می‌دهیم :

$$t = 1 - 3t_1 + \frac{1 - t_1}{2} = 1 - 3t_1 + t_2$$

مقادیرصحیح متناظر t بدست می‌آید . سپس مقادیر بدست‌آمدهٔ t و t_1 را در عبارت y قرارمی‌دهیم :

$$y = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7} = 2 - 3t + t_1$$

مقادیر متناظر y بدست می‌آید و بالاخره با قراردادن مقادیر t و y درعبارت x :

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23} = 4 - 2y + t$$

مقادیر صحیح x بدست خواهدآمد .

می‌توان مقادیر x و y را مستقیماً برحسب t_2 بدست آورد ، برای این منظور در رابطهٔ t بجای t_1 مقدارش را بر حسب t_2 قرار می‌دهیم :

$$t = 1 - 3t_1 + t_2 = 1 - 3(1 - 2t_2) + t_2$$

ویا :

$$t = -2 + 7t_2$$

حالا درعبارت y بجای t و t_1 مقادیرشان را برحسب t_2 می‌گذاریم :

$$y = 2 - 3t + t_1 = 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2)$$

و یا :

$$y = 9 - 23t_2$$

و بالاخره اگر در رابطهٔ x بجای y و t مقادیر بدست آمده برحسب t_2 را قراردهیم :

$$x = 4 - 2y + t = 4 - 2(9 - 23t_2) + (-2 + 7t_2)$$

و یا :

$$x = -16 + 53t_2$$

و به این ترتیب برای x و y این روابط را خواهیم داشت :

$$x = -16 + 53t_2 \; ; \; y = 9 - 23t_2$$

اگر در این روابط بجای t_2 اعداد صحیح مثبت ، منفی یا صفر قراردهیم ، جوابهای معادلهٔ سیال مفروض(که تعداد آنها بینهایت است) بدست می‌آید . بعضی ازاین جوابها در زیر داده شده است :

t_2	۰	۱	۲	−۱	−۲
x	−۱۶	۳۷	۹۰	−۶۹	−۱۲۲
y	۹	−۱۴	−۳۷	۳۲	۵۵

اگر به اعمالی‌که روی ضرایب معادلهٔ مفروض انجام دادیم تا به معادلهٔ آخر رسیدیم توجه‌کنیم می‌بینیم :

۱) ازتقسیم ضریب بزرگتر معادلهٔ مفروض یعنی ۵۳ بر ضریب کوچکتر یعنی ۲۳ به باقیماندهٔ ۷ و خارج قسمت ۲ رسیدیم .

۲) وسپس ضریب کوچکتر یعنی ۲۳ رابرباقیماندهٔ تقسیم قبلی‌یعنی۷تقسیم‌کردیم‌وبه‌باقیماندهٔدوم۲وخارج‌قسمت ۳ رسیدیم.

۳) وبالاخره از تقسیم باقیماندهٔ اول یعنی ۷ برباقیماندهٔ دوم یعنی۲ به باقیماندهٔ واحد وخارج قسمت۳ رسیدیم به‌عبارت دیگر درست همان اعمالی را انجام دادیم‌که برای پیداکردن بزرگترین مقسوم علیه‌مشترك دوعدد انجام می‌دهیم .

می‌دانیم‌که بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عددی‌که نسبت به هم اولند مساوی واحداست‌وچون‌ضرایب‌مجهولها را در معادلهٔ سیال نسبت به هم اول فرض کردیم ، بنابراین رشتهٔ اعمال انجام شده همیشه مارا به معادله‌ای می‌رساند **که در آن ضریب یکی از مجهولات برابر واحد است** و بنابراین نتیجه می‌گیریم :

اگر ضرایب مجهولات معادلهٔ سیال نسبت به‌هم اول باشند ، معادله همیشه دارای جوابهای صحیح است .

۸ـ ساده کردن حل معادله :

گاهی برای حل معادلهٔ سیال می‌توان راههای ساده‌تری پیداکردکه با سرعت بیشتری به جواب برسیم .

۱ـ اگرضریب یکی ازمجهولات ومقدار معلوم مقسوم علیه مشترکی داشته باشند، می‌توان باانتخاب مجهول معاونی بجای مجهول دوم ، طرفین معادله را به مقسوم علیه مشترك مذکور ساده‌کرد.

مثال ۱ : این معادله را درنظر بگیرید :

$$6x - 5y = 21$$

ضریب ۶ ومقدار معلوم ۲۱ مقسوم علیه مشترکی مساوی ۳ دارند ، بنابراین جملهٔ $5y$ هم بایستی بر۳ قابل قسمت‌باشد وچون ۵ نسبت به ۳ اول است بایستی y مضربی از ۳ باشد ،

اگر $y=3t$ فرض کنیم (که در آن t عددی است صحیح) خواهیم داشت :

$$6x-15t=21$$

و اگر طرفین تساوی را به ۳ ساده کنیم می‌شود :

$$2x-5t=7$$

و حال معادلهٔ اخیر را حل می‌کنیم :

$$x=\frac{7+5t}{2}=3+2t+\frac{1+t}{2}=3+2t+t_1$$

$$\frac{1+t}{2}=t_1 \Longrightarrow 2t_1-t=1 \Longrightarrow t=-1+2t_1$$

و اگر این مقدار را در روابط x و y قرار دهیم :

$$x=3+2(-1+2t_1)+t_1=1+5t_1$$
$$y=3(-1+2t_1)=-3+6t_1$$

مثال ۲ : مطلوبست حل معادلهٔ :

$$9x+14y=105$$

$y=3t$ فرض می‌کنیم و طرفین معادله را به ۳ ساده می‌کنیم :

$$3x+14t=35$$

حال در این معادله $x=7t_1$ می‌گیریم و طرفین را به ۷ ساده می‌کنیم :

$$3t_1+2t_2=5$$

و معادلهٔ اخیر را حل می‌کنیم :

$$t=\frac{5-3t_1}{2}=2-t_1+\frac{1-t_1}{2}$$
$$=2-t_1+t_2\ ;$$

$$\frac{1-t_1}{2}=t_2 \Longrightarrow 1-t_1=2t_2 \Longrightarrow$$

$$t_1=1-2t_2$$

و بالاخره خواهیم داشت :

$$t=2-(1-2t_2)+t_2=1+3t_2;$$
$$x=7t_1=7(1-2t_2)=7-14t_2;$$
$$y=3t=3(1+3t_2)=3+9t_2;$$

۲ـ وقتی که ضمن محاسبهٔ یکی از مجهولات برحسب مجهول دیگر، بین جملات صورت کسری که بدست می‌آید (پس از خارج کردن مقدار صحیح آن) مقسوم علیه مشترکی وجود داشته باشد، می‌توان معادله را ساده‌تر حل کرد .

مثال ۳ : می‌خواهیم معادلهٔ :

$$12x+17y=41$$

را حل کنیم .

x را برحسب y بدست می‌آوریم :

$$x=\frac{41-17y}{12}=3-y+\frac{5-5y}{12}$$
$$=3-y+5\times\frac{1-y}{12}$$

برای اینکه $5\times\frac{1-y}{12}$ عددی صحیح باشد ، لازم و کافی است که $\frac{1-y}{12}$ عدد صحیح باشد . کسر اخیر را برابر t می‌گیریم:

$$\frac{1-y}{12}=t\ ;\ 1-y=12t\ ;\ y=1-12t$$

و ضمناً :

$$x=3-(1-12t)+5t=2+17t$$

۳ـ اگر ضمن تقسیم ، باقیمانده بزرگتر از نصف مقسوم‌علیه باشد، بهتر است از باقیماندهٔ منفی استفاده کنیم :

مثال ۴ : مطلوبست حل معادلهٔ :

$$11x-20y=49$$

معادله را نسبت به x حل می‌کنیم :

$$x=\frac{49+20y}{11}=4+2y+\frac{5-2y}{11}$$
$$=4+2y+t\ ;$$

$$\frac{5-2y}{11}=t;\ 5-2y=11t;\ 11t+2y=5\ ;$$

$$y=\frac{5-11t}{2}=2-5t+\frac{1-t}{2}=2-5t+t_1;$$

$$\frac{1-t}{2}=t_1\ ;\ 1-t=2t_1\ ;\ t=1-2t_1$$

و بالاخره :

$$y=2-5(1-2t_1)+t_1=-3+11t_1\ ;$$
$$x=4+2(-3+11t_1)+(1-2t_1)$$
$$=-1+20t_1$$

و اگر همین معادله را به طریق معمول (با باقیماندهٔ مثبت) حل می‌کردیم چنین داشتیم :

$$x=4+y+\frac{5+9y}{11}$$

و به عنوان معادلهٔ بعدی :

$$\frac{5+9y}{11}=t;\ 11t-9y=5$$

و روشن است که این معادله بغرنجتر از معادلهٔ :

$$۱۱t+۲y=۵$$

است که باکمك باقیماندهٔ منفی قبلا بدست آورده بودیم .

مثال ۵ : مطلوبست حل معادلهٔ :

$$۱۵x+۲۸y=۲۹$$

معادله را نسبت به x حل می‌کنیم (بااستفاده ازباقیماندهٔ منفی) :

$$x=\frac{۵۹-۲۸y}{۱۵}=۴-۲y+\frac{-۱+۲y}{۱۵}$$

$$=۴-۲y+t\ ;$$

$$\frac{-۱+۲y}{۱۵}=t\ ;\ -۱+۲y=۱۵t\ ;$$

$$۲y-۱۵t=۱\ ;$$

$$y=\frac{۱+۱۵t}{۲}=۷t+\frac{۱+t}{۲}=۷t+t_۱\ ;$$

$$\frac{۱+t}{۲}=t_۱\ ;\ ۱+t=۲t_۱\ ;\ t=-۱+۲t_۱$$

و بالاخره خواهیم داشت :

$$y=۷(-۱+۲t_۱)+t_۱=-۷+۱۵t_۱$$

$$x=۴-۲(-۷+۱۵t_۱)+(-۱+۲t_۱)$$

$$=۱۷-۲۸t_۱$$

اگر آزمایش کنیم ، می‌بینیم که برای حل معادله هایی که در مثالهای بالا ذکر کردیم، اگر ازراه معمولی وبدون استفاده از نکات مذکور عمل می‌کردیم ، اعمال مفصلتر و زیادتری لازم بود .

۹ـ جوابهای مثبت :

همانطورکه قبلا هم گفتیم ، اغلب پیش می‌آیدکه تنها جوابهای‌مثبت‌معادلهٔ‌سیال‌مورداحتیاج‌است ، یعنی بایستی مقادیر صحیح و مثبتی برای x و y پیدا کرد که در معادلهٔ سیال صدق کنند . می‌توان پس ازپیدا کردن جوابهای عمومی برای x و y مستقیماً جستجوکردکه به ازاء چه مقادیری ازپارامترجوابهای مثبت برای x و y بدست می‌آید .

روابط زیررا درنظر می‌گیریم :

$$x=\alpha+bt\ ;\ y=\beta-at$$

برای اینکه x و y مثبت باشند ، بایستی مقادیری از t را انتخاب کردکه به ازاءآنها داشته باشیم :

$$\alpha+bt>۰\ ;\ \beta-at>۰$$

a را مثبت فرض می‌کنیم (واین به‌کلیت بحث لطمه‌ای نمی‌زند زیرا قبلا دیدیم که اگر لازم باشد می‌توان قرینهٔ a را دررابطه واردکرد) . دراین صورت سه حالت خواهیم داشت :

۱ـ هردو نامساوی در یك جهت باشند . و این وقتی پیش می‌آید که b منفی باشد ، در حقیقت با استفاده از خواص نامساویها خواهیم داشت :

$$bt>-\alpha\ ;\ at<\beta\ ;$$

$$t<-\frac{\alpha}{b}\ ;\ t<\frac{\beta}{a}$$

دراین‌حالت‌معادله‌دارای‌بینهایت‌جواب مثبت خواهد بود.

مثلا فرض‌کنید بدست‌آوریم :

$$t<\frac{۷}{۲}\ ;\ t<-۱\frac{۳}{۵}$$

واضح است که تمام اعدادی که از $-۱\frac{۳}{۵}$ کوچکتر باشند ، از $\frac{۷}{۲}$ کوچکترند و بنابراین به ازاء تمام مقادیر t که از ۱ـ کوچکترند ، معادله جوابهای مثبت خواهد داشت.

و یا اگر مثلا بدست می‌آوردیم :

$$t>\frac{۷}{۱۵}\ ;\ t>۳\frac{۱}{۳}$$

واضح است‌که جواب $t>۳\frac{۱}{۳}$ در هردو نامساوی صدق می‌کند و هر مقدار بزرگتر از۳که به t بدهیم برای x و y جوابهای مثبت بدست می‌آید .

مثال ۱ : $۳x-۵y=۱۱$

به ترتیب داریم :

$$x=\frac{۱۱+۵y}{۳}=۴+۲y-\frac{۱+y}{۳}=۴+۲y-t\ ;$$

$$\frac{۱+y}{۳}=t\ ;\ ۱+y=۳t\ ;\ y=-۱+۳t\ ;$$

$$x=۴+۲(-۱+۳t)-t=۲+۵t$$

و برای اینکه ریشه های مثبت داشته باشیم ، بایستی :

$$-۱+۳t>۰\ ;\ ۲+۵t>۰$$

و یا :

$$t>\frac{۱}{۳}\ ;\ t>-\frac{۲}{۵}$$

یعنی‌اگرt را مقادیرصحیح بزرگتر از$\frac{۱}{۳}$ (ویا بزرگتر ازصفر) انتخاب کنیم ، بینهایت زوج جواب مثبت برای x و y بدست می‌آید .

مثال ۲ : $8x-3y=-1$

داریم :

$$y=\frac{13+8x}{3}=4+3x+\frac{1-x}{3}$$

$$=4+3x+t\ ;$$

$$\frac{1-x}{3}=t\ ;\ 1-x=3t\ ;\ x=1-3t\ ;$$

$$y=7-8t\ ;$$

و اگر بخواهیم ریشه‌ها مثبت باشند ، باید داشته باشیم :

$$1-3t>0\ ;\ 7-8t>0$$

و یا :

$$t<\frac{1}{3}\ ;\ t<\frac{7}{8}$$

یعنی به ازاء تمام مقادیری صحیح t که کوچکتر از $\frac{1}{3}$ باشند (یعنی ۰ ، ۱ — ، ۲ — ، ...) مقادیر صحیح و مثبتی برای x و y بدست می‌آید .

۲ـ دو نامساوی در خلاف جهت یکدیگر باشند وضمناً متناقض یکدیگر .

مثلا اگر به نامساویهای زیر برسیم :

$$t<\frac{7}{8}\ ;\ t>1\frac{1}{3}$$

واضح است که در این صورت نمی‌توان مقداری برای t پیدا کرد که درهردو نامساوی صدق کند . در این حالت معادله جوابهای مثبت و صحیح ندارد .

مثال ۲ : $4x+5y=-7$

پس از حل این معادله خواهیم داشت :

$$x=-3+5t\ ;\ y=1-4t$$

و ازآنجا بایستی داشته باشیم :

$$-3+5t>0\ ;\ 1-4t>0$$

و یا :

$$t>\frac{3}{5}\ ;\ t<\frac{1}{4}$$

نامساویها یکدیگر را نقض می‌کنند و بنابراین معادله دارای جواب مثبت برای x و y نیست .

توضیح : درمورد مثال مورد بحث از ابتدا هم روشن بود که اگر x و y مثبت باشند حاصل $4x+5y$ هم مثبت می‌شود در حالی که سمت راست تساوی ۷ — ومنفی است .

۳ـ دو نامساوی در خلاف جهت یکدیگر باشند ولی یکدیگر را نقض نکنند. مثلا فرض کنید به نامساویهای زیر برسیم :

$$t>4\frac{1}{7}\ ;\ t<7\frac{3}{4}$$

تمام مقادیر صحیحی از t که بین $4\frac{1}{7}$ و $7\frac{3}{4}$ واقع باشند یعنی ۵ و ۶ و ۷ برای x و y مقادیر مثبتی بدست می‌دهند بنابراین در این حالت :

تعداد ریشه‌های مثبت به اندازهٔ اعداد صحیحی است که بین دو حد بدست آمدهٔ t قرار گرفته‌اند.

متذکر می‌شویم که حتی در این حالت ممکن است معادله جواب مثبت نداشته باشد . زیرا ممکن است بین دو حد بدست آمدهٔ t حتی یك عدد صحیح هم موجود نباشد. مثلا اگر نامساویهای زیر را داشته باشیم :

$$t>1\frac{1}{4}\ ;\ t<1\frac{7}{8}$$

نامساویها متناقض نیستند ، ولی بین $1\frac{1}{4}$ و $1\frac{7}{8}$ یك عدد صحیح هم وجود ندارد و بنابراین معادله جواب مثبتی پیدا نمی‌کند .

مثال ۴ : $3x+7y=55$

معادله را حل می‌کنیم :

$$x=\frac{55-7y}{3}=18-2y+\frac{1-y}{3}$$

$$=18-2y+t\ ;$$

$$y=1-3t\ ;\ x=16+7t$$

و ازآنجا :

$$1-3t>0\ ;\ 16+7t>0$$

و یا :

$$t<\frac{1}{3}\ ;\ t>-2\frac{2}{7}$$

وواضح است که برای t تنها می‌توان مقادیر ۰ ، ۱ — و ۲ — را انتخاب کرد تا جوابهای x و y مثبت باشند :

t	۰	۱ —	۲ —
x	۱۶	۹	۲
y	۱	۴	۷

مثال ۵ : $5x+4y=3$

پس از حل خواهیم داشت :

$$x=-1+4t\ ;\ y=2-5t$$

و ازآنجا $t>\frac{1}{4}$; $t<\frac{2}{5}$

نامساویها متناقض یکدیگر نیستند ، ولی بین دو عدد $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{5}$ هم عددصحیحی وجود ندارد وبنابراین‌معادله دارای‌جواب مثبت نیست .

۱۰ـ چند تمرین :

جوابهای مثبت و صحیح معادلات زیررا پیداکنید :

۱) $3x+2y=10$

۲) $7x+5y=157$

۳) $5x-11y=17$

۴) $8x+11y=13$

۵) $7x+9y=35$

۶) $15x+28y=185$

۷) عدد ۱۰۰ را به دو عدد مثبت چنان تبدیل کنیدکه یکی ازآنها بر ۷ ودیگری بر ۱۱ قابل قسمت باشد .

۸) برای فرش سطحی‌که ۳ متر طول دارد از دو نوع تخته یکی به عرض ۱۱ سانتیمتر ودیگری به عرض ۱۳سانتیمتر استفاده‌کرده‌ایم . طول تخته‌ها با عرض سطح برابر است . از هرنوع تخته چند عدد لازم است .

۹) می‌خواهیم ۴۴۰کیلوگرم گندم را در دونوع‌کیسه جا بدهیم ، یك نوع ازکیسه‌ها ۸۰کیلوگرم و نوع دیگر ۶۰کیلو گرم‌گندم می‌گیرند . از هرکیسه چند عدد لازم است ؟

۱۰) صورت‌کلی اعدادی را پیداکنیدکه درتقسیم بر ۷ باقیماندهٔ ۳ و درتقسیم بر۱۱ باقیماندهٔ ۴ بدهند.

پایان

بی‌آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

جوانی سوار بر قایق سربالائی رودخانه‌ای را طی می‌کرد . در عبور از زیر یك پل ، بطری نیمه پر مشروبی که بر دماغهٔ قایق‌گذاشته بود در اثر تکان قایق و اصابت به پل به‌آب افتاد . جوان بیست دقیقه بعدازگذشتن ازپل ، متوجه مفقود شدن بطری خود شده دور زده در جهت جریان‌آب و بدون تغییر سرعت قایق به دنبال بطری راه افتاد ، از زیر پل عبورکرد و درست درفاصلهٔ یك‌کیلو متری ازپل بطری خودرا از آب گرفت . اگر زمان دور زدن قایق را نادیده بگیریم می‌توانید بگوئید سرعت جریان آب رودخانه چقدر بوده است ؟

پاسخ مسئلهٔ تحت همین عنوان مندرج در شمارهٔ قبل

هریك از دوچرخه سواران یك واحد قراردادی را به ترتیب درمدت $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{12}$ و $\frac{1}{15}$ ساعت و در نتیجه یك دور محیطدایرهٔمسیرخودرا به‌ترتیب‌درمدت $\frac{1}{18}$ و $\frac{1}{27}$ و $\frac{1}{36}$ و $\frac{1}{45}$ ساعت طی‌می‌کنند. دوچرخه سواران درمدت یك ساعت به ترتیب ۱۸ و ۲۷و ۳۶ و ۴۵ دورکامل و در ۲۰ دقیقه به‌ترتیب ۶ و ۹ و ۱۲ و ۱۵ دورکامل خواهند زد .

در این لحظه ایشان بالاتفاق درنقاط عزیمت واقعند وچون بزرگترین مقسوم علیه مشترك این چهار عدد ، عدد ۳ است بنابراین در مدت ۲۰ دقیقه ۳ دفعه بالاتفاق در نقاط عزیمت واقع خواهند شد .

مقـالهٔ زیر در پاسخ پرسش آقای احمـد کمیلی تهیه شده است

اعداد بزرگتر از میلیون را

چگونه بخوانیم ؟

هوشنگ شریف زاده

روش خواندن اعداد نزد اقوام مختلف متفاوت بوده و هست . دراین مقاله منظور این نیست که تاریخچه‌ای از اعداد و شمارش بیان کنیم . دراین خصوص مقالاتی متعدد وکتب بسیار نوشته شده‌است وتقریباً هر خوانندهٔ یکان آشناست که شمارش اعداد به مبنای ده نخستین باردرچه قومی پدیدآمد و سیر آن چگونه بوده است ، یا لااقل این امکان برای او هست که در این باره تحقیقی بکند . برای شمارش اعداد عموماً آن را به برشهایی چند تقسیم کرده‌اند وهر برش را یك **طبقه** نامیده‌اند . طبقاتی راکه باآن کاملاآشنا هستید به ترتیب عبارتند از : طبقهٔ یکان ، طبقهٔ هزار ، طبقهٔ میلیون ، طبقهٔ بیلیون ، ، طبقهٔ . . . . بطوری که ملاحظه می‌کنید این طبقـات برشهای سه رقمی را تشکیل می‌دهند . شمارش اعداد تا میلیون تقریباً نزد همهٔ اقوام یکسان است ولی برای شمارش اعداد بزرگتر از میلیون هنوز هم اختلافاتی وجود دارد . مثلا عدد 10^{15} یعنی کوچکترین عدد ۱۶ رقمی را در دانمارك و انگلستان و . . . **هزار بیلیون** ودر ایتالیا و اسپانیا ... **کتریلیون** و بعضی ازتجار بزرگ آن را **تریلیون** می‌خوانند . برای پایان دادن به این اختلافات در یازدهمین کنفرانس بین‌المللی اوزان و مقادیر ضمن بررسی روشهای مختلف شمارش ، تبصره‌ای به پایان **فرمان سوم مه ۱۹۶۱** افزودند تا ازآن پس روش شمارش اعداد نیز بین‌المللی شود .

تبصرهٔ ۳ـ شمارش اعداد بزرگ ـ برای بیان قوای ده که از 10^{12} بیشتر است قـاعده‌ای بکار برده می‌شود که طبق فرمول زیر است :

$$10^{6N} = (N)\text{illion}$$

مثال ـ 10^{12} = بیلیون ، 10^{18} = تریلیون ، 10^{24} = کتریلیون ، 10^{30} = کنتیلیون ، 10^{36} = سکستیلیون ،

معروفترین روشهای خواندن اعدادکه درکنفرانس مورد توجه‌بود به شرح زیر است :

قاعدهٔ A (یا قاعدهٔ آلمانی) ـ اگر عدد به‌صورت 10^{6N} نوشته شود به هنگام خوانـدن آن را N یلیون می‌خوانیم .

قاعدهٔ B (یا قاعدهٔ لاتین) ـ اگر عدد به صورت $10^{3(N+2)}$ نوشته شود به هنگام خواندن آن را N یلیون می‌خوانیم.

قاعدهٔ C (یا قاعدهٔ **تجار**) ـ اگر عدد به صورت $10^{3(N+2)}$ نوشته شـود به هنگام خـواندن آن را N یلیون می‌خوانیم ، به استثنای میلیون .

برای اینکه اختلاف این سه قاعده را بهتر درك کنید به جدول زیر توجه کنید . ضمناً در این جدول قاعـدهٔ D یا قاعدهٔ ایرانی را نیز اضافه می‌کنیم :

۱۰ به توان	قاعدهٔ A	قاعدهٔ B	قاعدهٔ C	قاعدهٔ D
۶	میلیون	میلیون	میلیون	هزاران
۹	—	بیلیون	—	هزاراج
۱۲	بیلیون	تریلیون	بیلیون	هزاراد
$۱۰^{۱۵}$	—	کتریلیون	تریلیون	هزاراه
$۱۰^{۱۸}$	تریلیون	کنتیلیون	کتریلیون	هزاراو
$۱۰^{۲۱}$	-	سکستیلیون	کنتیلیون	هزاراز
$۱۰^{۲۴}$	کتریلیون	ستیلیون	سکستیلیون	هزاراح

قاعدهٔ A در کشورهای انگلستان ، دانمارك و اغلب کشورهای آمریکای جنوبی بکار می‌رود .

قاعدهٔ B در فرانسه ، ایتالیا ، اسپانیاوایالات متحده بکار می‌رود.

قاعدهٔ C که فقط درمیان عده‌ای ازتجارمرسوم است عملا مورد استفاده‌ای ندارد .

قاعدهٔ D که **حاجی میرزا عبدالغفار خان (نجم‌الدوله)** درچاپ دوم کتاب **بدایة‌الحساب** پیشنهاد کرده‌است «ج» ،«د» ، «ه» و... که به‌آخر **«هزارا»** افزوده شده به حروف ابجد اعداد«۳»و«۴» و «۵»را مشخص‌می کنند . اگر این اعدادرا درسه ضرب کنیم توانهای ده راکه مربوط به کوچکترین عددآن طبقه است معین می کند.

پیشوندهای‌می بی،تری‌و... ازلاتین گرفته‌شده‌است.اگر بخواهیم عدد **آووگادرو** راکه شکل‌ریاضی آن‌تقریباً به‌صورت ۶×۱۰^{۲۳} است بخوانیم طبق قاعدهٔ A آن را ۶۰۰۰۰۰ تریلیون‌وطبق‌قاعدهٔ B آن را ۶۰۰ سکستیلیون وطبق قاعدهٔ C آن‌را ۶۰۰ کنتیلیون وطبق قاعدهٔ D آن را ۶۰۰ هزاراز می‌خوانیم .

درپایان این مقاله لازم است‌که یادآوری‌کنیم که :

باید با اعداد حساب‌کرد نه باکلمات !

« از خواص کسرهای متعارفی مولدکسر اعشاری متناوب ساده »

ترجمهٔ : قوام نحوی ، اهواز

می‌دانیم اگر مخرج کسر متعارفی ساده نشدنی شامل عوامل ۵ و ۲ نباشد این‌کسر مولدکسر اعشاری متناوب ساده خواهد بود . حال اگر شمارهٔ ارقام دورهٔ‌گردش‌کسر اعشاری متناوب ساده $۲n$ باشد مجموع دوعدد تشکیل شده از n رقم اول و n رقم‌آخرآن ازرقم ۹ تشکیل شده است .

دوم ـ مجموع صورت‌کسر مولد و باقیماندهٔ شمارهٔ nام مساوی مخرج‌کسر است .

سوم ـ مجموع باقیمانده‌های شمارهٔ p وشمارهٔ $p+n$ام نیز مساوی مخرج‌کسر خواهد بود .

مثال ۱ ـ کسر $\frac{۵}{۱۳}$ را درنظر می‌گیریم وآنرا تبدیل به‌کسراعشاری می‌کنیم .

```
۵۰   | ۱۳
۱۱۰    ۰/۳۸۴۶۱۵
 ۶۰
  ۸۰
   ۲۰
    ۷۰
     ۵
```

شمارهٔ ارقام دورهٔ گردش‌کسر اعشاری متناوب ساده ۶ رقم است و داریم :

$$\begin{cases} ۳۸۴+۶۱۵=۹۹۹ \\ ۵+۸=۱۳ \\ ۶+۷=۱۳ \end{cases}$$

مثال ۲ـ کسر $\frac{۱۶}{۱۰۱}$ را درنظر می‌گیریم

```
۱۶۰   | ۱۰۱
۵۹۰     ۰/۱۵۸۴
 ۸۵۰
  ۴۲۰
   ۱۶
```

$$\begin{cases} ۱۵+۸۴=۹۹ \\ ۱۶+۸۵=۱۰۱ \\ ۵۹+۴۲=۱۰۱ \end{cases}$$

مسئلهٔ حل نشده یعنی چه؟ (دنباله از شمارهٔ قبل)

شاید حالا دیگر قبول کنید که بعضی احکام که درظاهر امر مسلم بنظر می‌رسند درحقیقت مسائل مشکلی هستند . اصل اقلیدس مربوط به خطوط متوازی از جمله اینها است . هندسهٔ اقلیدسی مبتنی براصولی است که دوران درازی همچون حقایق مسلم بنظر می‌رسیدند. هرانسان واجد قوهٔ متفکره‌ای بر خود فرض می‌دانست که این اصول را به صورت حقایق مسلم قبول کند (یکی از این اصول این است که اقصر فاصلهٔ بین دو نقطه خط مستقیم است). اما اصل پنجم هندسهٔ اقلیدسی که مربوط به خطوط متوازی است به سادگی اصول دیگر قابل قبول نبود . بنابراین اصل قبول می‌شود که ازنقطهٔ خارج خط بیش ازیك خط به‌موازات آن نمی‌توان رسم کرد . برای محققین این فکر پیش آمد که اگر این اصل درست باشد باید بتوان آنرا از اصول دیگری **نتیجه گرفت** یعنی اینکه آنرا به صورت یك **قضیه** اثبات کرد. ریاضیدانها ، درطول چندین قرن کوشیدند تا این مسئلهٔ مهیج را حل کنند ، اما دراین‌باره توفیقی بدست نیاوردند؛ اصل پنجم درحقیقت یك اصل بود واز اصول دیگر قابل استخراج نبود . این استنباط که یك قرن قدمت دارد وقتی حاصل شد که متوجه شدند که باید **مسئله را به نحو دیگری مطرح کنند** ، اگر این یك **اصل** است باید بتوان آنرا با اصل دیگری جانشین کرد وهندسهٔ ازنوع دیگری با همان استحکام هندسهٔ اقلیدسی بنانهاد. این موضوع به حقیقت پیوست . آنچه در مدت دو هزار سال فعالیتهای مربوط به حل مسئله را تباه ساخته بود اباء ، یا به عبارت دیگر ناتوانی ، ازدرك هندسه های غیراقلیدسی بود . ناگهان سد برداشته شد و پیشروی سریع بعمل آمد .

اشکال عمدهٔ بعضی مسائل حل نشده که مدتهای مدیدی اذهان را به خود مشغول داشته چگونگی طرح مسئله بوده‌است؛ مسئله به نوعی مطرح شده که حل آنرا غیرممکن ساخته است .

اما نبوغ الهام بخشی که یك مسئلهٔ قدیمی مشهور را به صورت مطلقاً جدیدی مطرح کند به ندرت وجود دارد . اغلب ، تغییر طرح یك مسئله به‌چنان راه حل ساده‌ای منجرشده که این سؤال را پیش آورده است : چرا تا کنون این راه حل ساده به ذهن کسی خطور نکرده بود ؟ بررسی این سؤال نشان داده است که روش انتخابی قبلی مناسب نبوده حتی‌گاهی سعی‌داشته‌اند موضوع غلطی را اثبات کنند .

یکی ازمسائل تاریخی بسیار مشهور ، مسئلهٔ تثلیث زاویه به‌کمك خط‌کش و پرگار می‌باشد. طرق مختلفی برای تقسیم یك زاویه به قسمتهای متساوی وجود دارد اما مسئله مصراً می‌خواهد که فقط از دو وسیلهٔ معمولی هندسه یعنی خط‌کش و پرگار استفاده شود. مسئله غیرممکن جلوه می‌کرد اما تازمانی که استفاده ازروشهای مناسب استدلال صحیح را میسر ساخت در غیرممکن بودن مسئله شك داشتند .

* * *

بهترین روش حل یك‌مسئلهٔ سردرگم آنست که آنرا بامسئلهٔ کاملا شناخته شده‌ای مربوط سازیم و آنرا جامع کنیم . معمولا اگر یك مسئلهٔ حساب را به یك راه حل جبری بکشانیم حل آن ساده‌تر خواهد شد : مثلا در ضرب ۹۸ در ۱۰۲ به جای قاعدهٔ معمول می‌توانیم از روش جبری استفاده کنیم به این‌معنی که : $۹۸ = ۱۰۰ - ۲$ و $۱۰۲ = ۱۰۰ + ۲$

بنا بر اتحاد $(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$

خواهیم داشت :

$$۹۸ \times ۱۰۲ = (۱۰۰ - ۲)(۱۰۰ + ۲) = ۱۰۰۰۰ - ۴ = ۹۹۹۶$$

ضمن مطالعهٔ سریهای متقارب به یك مثال تاریخی وسیار جالبی برمی‌خوریم که چنین است : تقسیم زیررا درنظر بگیریم

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

نقاط سمت راست عبارت نشان می‌دهد که تعدادجملات خارج قسمت نامحدود است . با وجود نامحدود بودن تعداد جملات چنانچه عمل ضرب را انجام دهیم ملاحظه خواهیم کرد که عبارت دارای معنی است :

$$\begin{array}{l} 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \\ 1-x \\ \hline 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \\ \quad -x-x^2-x^3-x^4-\cdots \\ \hline 1+0+0+0+0+\cdots \end{array}$$

راه حل ظاهراً درست بنظر می‌رسد. اما با ملاحظهٔ عمیقتر متوجه می‌شویم که قبلا باید معلوم کنیم این سری به ازاء چه مقادیری از x همگرا یا واگرا است . این سری یك تصاعد هندسی است و همانطورکه در تحصیلات متوسطه خوانده‌ایم شرط لازم وکافی برای اینکه یك تصاعد هندسی باتعداد جملات نامحدود همگرا باشدآنست که نسبت دو جملهٔ متوالی یعنی قدر نسبت تصاعد از لحاظ قدر مطلق کوچکتر از یك باشد. دراینجا قدر نسبت برابر x است پس وقتی که $(|x|<1)$ باشد سری همگرا بوده و حد مجموع آن برابراست با $\frac{1}{1-x}$

وقتی که $x=1$ باشد تساوی دارای معنی نیست و این نتیجه را از دو جهت می‌توانیم بدست آوریم ؛ طرف راست تساوی عبارتست از مجموع :

$$1+1+1+1+\cdots$$

و به سادگی معلوم است که این سری واگرا است (مجموع آن به سمت بینهایت میل می‌کند) واگرطرف چپ تساوی‌را درنظر بگیریم ملاحظه می‌کنیم که یك کسر ممتنع $\frac{1}{0}$ است .

اما اگر $(|x|>1)$ باشد دراین‌صورت کسر $\frac{1}{1-x}$ معین است و دارای مقداری است اما عبارت طرف‌راست تساوی یك سری واگرا است و دارای حدی نیست . یك طرف تساوی برابر با مقداری محدود و طرف دیگرآن برابر با مقداری نامعین است . مثل اینکه باید نکته‌ای درکار باشد ! ؛ مخصوصاً اینکه در ازاء $x=1$ وضعی خاص پیش می‌آید .

اکنون گسترش زیرا را در نظر بگیریم

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

عبارت طرف راست تساوی یك تصاعد هندسی است که فقط درازاء $(|x|<1)$ دارای حد است اما عبارت طرف چپ تساوی درازاء همهٔ مقادیر x حتی $x=1$ مساوی مقدار محدود می‌باشد . برای $x=1$ سری طرف دوم واگرا است درصورتی که مقدار کسر طرف اول برابر $\frac{1}{2}$ است .

ریاضیدانان به‌یك‌موضوع توجه نداشتند تا اینکه‌دستگاه‌اعداد حقیقی‌را تعمیم‌داده‌هیأت‌اعدادمختلط راوضع کردند. مخرج کسر یعنی عبارت x^2+1 به‌ازاء $x^2=-1$ یا $x=\sqrt{-1}$ برابر باصفراست. وچون‌مدول عدد موهومی $\sqrt{-1}$ برابر با یك‌است بنابراین همانند مثال قبل مقداری برای x وجود داردکه عبارتست از $|x|=1$ ودرازاء این مقدار از x طرف چپ تساوی نامعین است ، وتوصیه می‌شودکه برای مقادیر مختلف x مخصوصاً $|x|\geqslant 1$ همهٔ جوانب امررا باید درنظر گرفت .

به مسئلهٔ تثلیث زاویه برگردیم . با یك نظر اجمالی معلوم کنیم که چه نوع اثباتی را بکار برده‌اند تا ثابت کرده‌اند که تثلیث زاویه با بعضی وسایل ممکن نیست . قبلا ثابت کردند که ترسیمات بوسیلهٔ خط‌کش وپرگار محدود می‌باشد : از بین مقادیر حقیقی که با رادیکال بیان می‌شوند فقط آنها که به‌صورت ریشهٔ دوم یا ترکیباتی ازآن باشند قابل ترسیم می‌باشند .

اگر θ زاویهٔ مفروضی‌باشدکه بایدآنرا تثلیث کنیم کافی است که اندازهٔ زاویهٔ $\frac{\theta}{3}$ را تعیین کنیم . با توجه به اتحاد مثلثاتی :

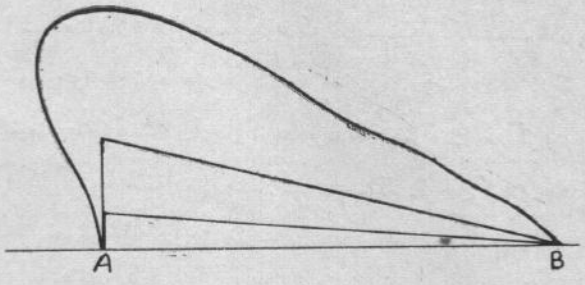
$$\cos\theta=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3}$$

وقتی که $\cos\theta$ مثلا برابر بامقدار معلوم k باشدتعیین $\cos\frac{\theta}{3}$ به‌حل معادلهٔ $4x^3-3x-k=0$ منجر می‌شود . این معادله درجهٔ سوم است ودرحالت کلی قابل حل نیست و جوابهای آن به صورت رادیکالهائی که به‌صورت ریشهٔ دوم اعداد یاترکیباتی ازآن باشند بیان نمی‌شوند بنابراین بوسیلهٔ خط‌کش و پرگار قابل ترسیم نیستند .

چنین استنباطی در هندسهٔ محض میسر نیست و بوسیلهٔ هندسهٔ تحلیلی بودکه توانستند غیرممکن بودن این مسئله را ثابت کنند . فعلا تکلیف مسئلهٔ قدیمی تثلیث زاویه معلوم شده و

غیرممکن بودن آن مسلم شده است : «غیرممکن بودن» جواب مسئله است .

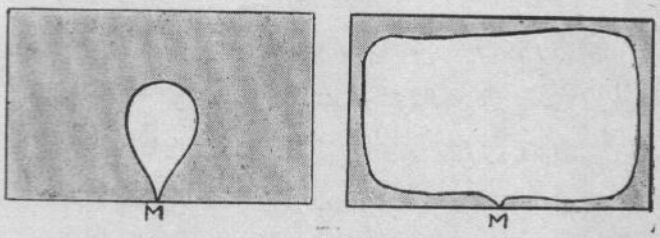
کلمهٔ غیرممکن برای بعضی مسائل ترسیمی معنی دیگری دارد . مثلا روی یك خط دو نقطهٔ A و B اختیار می‌کنیم . مسیرهایی را فرض می‌کنیم که از A و در امتداد عمود بر خط مفروض شروع شده و به B منتهی می‌شوند . از این مسیرها کدامیك از همه کوتاهتر است ؟ اقصر فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B همان قطعه‌خط AB است اما این مسیر متضمن شرط عمود بودن بر خط مفروض نیست ، وغیر از آن ، همچنانکه از روی شکل



هم پیدا است هرمسیری راکه رسم کنیم مسیری کوتاهتر از آن وجود خواهد داشت. دراین مثال «عدم وجودجواب» خودجواب مسئله است .

مثال دیگری از این نوع که به سادگی اولی نیست ازاین قرار است : مربع مستطیلی به مساحت A را درنظرمی‌گیریم. می‌خواهیم از نقطهٔ M وسط قاعده (ضلع بزرگتر) کوتاهترین منحنی مسدود را چنان رسم کنیم که مساحت A را به دو قسمت متساوی تقسیم کند ، این منحنی می‌تواند براضلاع مستطیل مماس باشد اما نباید از هیچیك از آنها بگذرد . عمود منصف قاعده جوابی ازمسئله نیست زیرا یك منحنی مسدود نمی‌باشد . غیراز آن ، ظاهراً اینطور به نظر می‌رسد که مسئله جوابی دارد :

یك منحنی مسدود دلخواه رسم می‌کنیم که از A گذشته و سطح مستطیل را به دو قسمت تقسیم کند یکی از این قسمتها را سفید باقی می‌گذاریم ودیگری را با سایه مشخص می‌کنیم . در



یکی ازشکلهایی که رسم کرده‌ایم مساحت سطح سفید از مساحت سطح سایه دار کوچکتر است و در شکل دیگر بزرگتر از آن می‌باشد . منحنیهای بسیاری می‌توانیم رسم کنیم که نظیر آنها دو مساحت باهم مساوی باشند .

از بین این منحنیها کدامیك دارای کوتاهترین طول می‌باشد ؟ ثابت می‌شود که این منحنی مطلوب دایره‌ای است به مساحت $\frac{A}{2}$ که در نقطهٔ M بر ضلع مستطیل مماس باشد . اما اگر نسبت بین طول مستطیل و مساحت سطح آن از $\frac{\pi}{2}$ بزرگتر باشد مسئله جواب نخواهد داشت زیرا در این‌حالت تمام دایره داخل مستطیل واقع نخواهد شد و لازم است تا منحنی دیگری را جستجوکرد ، اما یك چنین منحنی که محیطش مینیمم باشد وجود ندارد .

حدود سی سال می‌گذرد که **کارت گودل** باارائهٔ مسائل حل نشدهٔ از نوعی جدید جهان ریاضی را مبهوت ساخته است . قبلا چنین می‌دانستند(واین خوداستنباطی اشتباه بود) که‌می‌توانند صحیح بودن یا ناصحیح بودن یك قضیهٔ ریاضی را ثابت کنند . اماگودل نشان دادکه قضیه‌هایی واقعی از ریاضیات وجود دارد که ممکن است صحیح باشند یا غلط اما وسیله‌ای وجود نداردکه بتوان صحیح یا غلط بودن آنها راکشف کرد .

مسائلی از این نوع راکه داشتن یا نداشتن جواب برای آنها قطعی نیست **غیرقطعی** می‌نامند. ریاضیدانها عقیده دارند که بامسائل لاینحل از آن نوع که گودل عنوان کرده است به‌ندرت مواجه می‌شوند و طرح یك چنین مسائلی به سادگی انجام نمی‌پذیرد . محتمل است که هیچیك ازمسائلی که در این کتاب گردآوردی شده است از نوع مسائل غیرقطعی (از نوع گودل) نباشد .

***

تنظیم مطالب کتاب چندان اصولی نیست. ابتدا بعضی‌مسائل بیان می‌شود که برای طرح ودرك آنها حداقل اطلاعات ریاضی کفایت می‌کند ، بعد از آن مسائلی عنوان خواهد شد که برای شرح و توضیح آنها وقوف کامل بر ریاضیات واقعی لازم است تا آنجاکه‌میسر باشدسعی خواهدشد رؤوس اجمالی اطلاعاتی که برای درك چنین مسائلی لازم است قبلا یادآوری بشود .

گفتگوی دوازده خرداد

● ـ خوشوقتم که بازگرد هم جمع شده‌ایم و می‌توانیم راجع به مسائلی که مبتلی‌به معلم ومحصل است به‌گفتگو بپردازیم در جلسهٔ قبل ، صحبت ازاین بود که اگر محصلی درپاسخ‌دادن به یك سؤال امتحانی از معلومات مربوط به‌کلاسهای بالاتر یا بطورکلی ازمعلومات خارج ازبرنامهٔ مصوب استفاده‌کرده باشد تکلیف مصحح ورقهٔ وی چیست ؟

✱ ـ من عقیده دارم‌که سؤال امتحانی باید صریح و قاطع باشد به نحوی‌که محصل در انتخاب راه حل یك نوع محدودیت داشته باشند .

● ـ سؤالهای ریاضی‌که درامتحان مطرح می‌شود معمولا به صورت مسئله است . بعضی ازمسائل راه حلهای مختلف دارد چگونه می‌توان محصل را محدودکردکه فقط یکی ازاین راه‌حلهارا انتخاب‌کند ؟ !

✱ ـ از بین راه حلهای مختلفی‌که برای یك مسئله وجوددارد یکی ازهمه سهل‌الوصولتر و به اصطلاح زیباتراست . محصل خوش فکر وخوش سلیقه این راه حل را انتخاب خواهد کرد. مصحح یاکسی‌که بارم نمرات را معلوم می‌کند باید برای این محصل امتیازی را درنظر بگیرد .

✱ در امتحانهای‌کنکور این عمل جایز است ، مقصود انتخاب بهترین محصلین است . اما در امتحانهای داخلی دبیرستانها ، مخصوصاً در امتحانهای نهایی ، این عمل به هیچ وجه جایز نیست.موضوع مهمتر آنست‌که نسبت به بعضی ازمسائل انتخاب زیباترین راه حل منوط به‌آنست‌که محصل اطلاعاتی خارج ازکلاس داشته باشد .

● ـ مثل‌اینکه در امتحانات‌کنکور این موضوع رعایت می‌شود . یکی ازآشنایان‌که ازتصحیح اوراق امتحان‌کنکوریك دانشکده اطلاع داشت می‌گفت‌که در مسئله‌ای‌که ماکزیمم یك متغیر خواسته شده بود هرکس با استفاده ازقضایای ماکزیمم و مینیمم مطلق مسئله را حل‌کرده بود تمام نمره را می‌گرفت اما آن‌کس‌که با استفاده ازمشتق‌گیری مسئله را حل‌کرده بودفقط نصف نمرهٔ مسئله را می‌گرفت .

● ـ قضایای مربوط به ماکزیمم و مینیمم مطلق جزء برنامهٔ تحصیلات متوسطه نیست ودردبیرستانها تدریس نمی‌شود.

✱ ـ در بعضی از دبیرستانها و در بسیاری از کلاسهای کنکور تدریس می‌شود .

● ـ ساعات هفتگی‌که طبق برنامهٔ مصوب برای بعضی ازمواد ریاضی‌دبیرستانهاپیش‌بینی‌شده‌برای اتمام متن برنامه‌کافی نیست. چگونه بعضی ازدبیران می‌توانند مواد اضافی‌هم تدریس کنند ؟

✱ ـ درمدارس ملی ساعات هفتگی بیشتری به بعضی از مواد اختصاص داده می‌شود .

✱ ـ بعضی از دبیران مدارس دولتی هم باهمان‌ساعات هفتگی مصوب ، مواد اضافی به محصلین درس می‌دهند.

● ـ اغلب در اردیبهشت ماه به همکارانی برمی‌خورم که از اینکه هنوز برنامه را تمام نکرده‌اند نگران هستند آن وقت بعضی از دبیران با همان ساعات هفتگی مواد اضافی هم تدریس می‌کنند ؟!

O ـ یکی دونفر ازدبیران تخصص دارندکه سه ماههٔاول سال تحصیلی برنامه را تمام‌کنند و بقیهٔ سال را به حل مسائل امتحانی‌یامسائل ترکیبی دیگر بپردازند. این رویه را محصلین پسندیده‌اند و این‌آقایان هم به خاطر آن معروفیت یافته‌اند

✱ ـ دربیشتر مدارس تدریس ریاضیات به صورت فرمول

و بدون توجه به درك مفاهیم انجام می‌گیرد . قالبهای معینی به شاگردان ارائه می‌شود تا درموارد مختلف از آنها استفاده کنند. محصل را آماده می‌کنند که سؤال امتحانی را با این قالبها تطبیق دهد .

● ـ محصلین را به صورت ماشینهای حل مسئله بار می‌آوریم .

★ وقتی محصل مسائل متعدد و متنوع را حل کرد مسلم است که به مفاهیم نیز توجه داشته است .

● معمولا مسائل بسیار زیادی دراختیارمحصلین گذاشته می‌شود . محصلین هم برای حل مسائل بیشتر از خود علاقه نشان می‌دهند . اما تمام این مسائل از همان راه تطبیق با قالبهای ارائه شده حل می‌شوند .مسائل امتحانی هم از همین نوع است .

* ـ موضوع مهمتر اشتباهات و بد آموزیهایی است که درطرح سؤالهای امتحانی مرتکب می‌شویم . توجه به مفاهیم آنقدر ناچیز شده است که حتی در سؤالهای امتحانات نهایی هم اشتباهات علمی فاحشی به چشم می‌خورد و این موضوع برای معلمانی که تدریس خود را برمبنای تفهیم صحیح مفاهیم انجام می‌دهند ایجاد ناراحتی می‌کند .

● ـ دلسرد می‌شوند و یا کار خودرا عوض می‌کنند و یا تغییر رویه می‌دهند .

ـ ازاینکه موضوعهای مختلفی را قاطی هم به میان آوریم و هر یك در زمینه‌ای اظهار نظر کنیم نتیجه‌ای نخواهیم گرفت . اجازه فرمائید فقط یك موضوع مطرح باشد و همه دربارهٔ آن اظهار نظر کنیم.

★ ـ صحبت در این بود که یك مسئله در امتحان داده شده که راه حلهای مختلفی دارد . بدیهی است که محصلی که کوتاهترین راه حل را انتخاب کند بردیگران امتیازدارد .

از لحاظ نمره هم که امتیازی برای وی قائل نشویم از لحاظ صرفه جوئی در وقت و فرصت بیشتری که برای حل مسائل دیگردارد خود برای خود امتیازی کسب کرده است .

* محصلی برای راه‌حل یك مسئله از موضوعی استفاده کرده که شخصاً ودرخارج ازدرس ومدرسه دربارهٔ آن اطلاعاتی بدست آورده است وفرض می‌کنیم که احیاناً مصحح ازاین‌موضوع اطلاعی ندارد درتصحیح ورقهٔ این محصل چه باید بکند ؟

ـ تکلیف معلوم است، مصحح که می‌تواند صحت راه حل و منطقی بودن آنرا تشخیص دهد و نمرهٔ محصل را معلوم خواهدکرد .

* ـ گاهی مصحح ازنظر اینکه موضوع خارج از برنامهٔ مصوب یا مربوط به کلاسهای بالاتراست در قبول راه‌حل دوچار تردید می‌شود .

O ـ من شخصاً شاهد بوده‌ام که ممتحنی یك راه حل مسئله‌ای را قبول نکرده درصورتی که این راه حل به‌تحصیلات کلاسی محصل هم مربوط بوده و خارج از برنامه هم نبوده است .

★ ـ به چه علت؟

O ـ برخلاف‌راه حلی بوده که طراح سؤال‌ضمن بارم ـ بندی ارائه داده است .

* ـ در تصحیح اوراق امتحانات نهایی از این نوع بی‌عدالتیها زیادسراغ دارم.

● ـ یك مورد که موضوع بغرنج هم شد مربوط بود به محصل یکی ازدبیرستانهای خاص ؛ مصحح راه حل این محصل رادرمورد یك مسئله قبول نکرده بودوچون این‌محصل کاندیدای اول شدن‌بود تجدید نظر در تصحیح ورقهٔ وی جداً تعقیب شد وبالاخره کار به آنجا کشید که یکی از از استادان دربارهٔ موضوع قضاوت کرد .

ـ آقایان موافقت فرمایند که بحث از صورت کلیات خارج نشود . مسائل خصوصی وبعضی موارد خاص را در بحث خود دخالت ندهیم . موضوعی کلی را مطرح کنیم و دربارهٔ آن منصفانه قضاوت‌کنیم . خود ما دبیرهستیم، خودما سؤال‌امتحانی طرح می‌کنیم وخودما هستیم که اوراق امتحانی‌را تصحیح می‌کنیم مقصود این است درمواردی‌که شك وتردید داریم تکلیف قطعی خودرا روشن سازیم .

محصل هم باید تکلیف خودرا بداند ؛ آیا مجاز است که برای حل یك مسئلهٔ امتحانی از معلومات‌خارج ازکلاس‌استفاده کند یا نه ؟

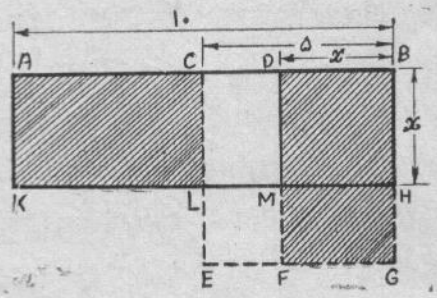
O ـ اگر دنبالهٔ بحث به جلسه‌ای دیگر موکول شود فرصت بیشتری برای بحث خواهیم داشت .

روش خوارزمی درحل معادلات درجهٔ دوم

اقتباس‌ازکتاب: Curiosités Géométriques par E. FOURRY

مسئلهٔ دوم ـ عددی تعیین کنید که چون ۲۱ واحد به مجذورش بیفزائیم ده برابر آن عدد حاصل شود . مقصود از مسئله حل معادلهٔ $x^2+21=10x$ می‌باشد . روشی راکه **اقلیدس** درکتاب **مقدمات** برای حل این معادله بکار برده و **خوارزمی** با توضیحات بیشتری آنرا بیان کرده است به قرار زیر است :

فرض می‌کنیم ABHK مربع مستطیلی باشد به‌بعدهای



۱۰ و x و BDMH مربعی باشد به ضلع x، مربع مستطیل ADMK به مساحت۲۱ خواهد بود . اگرC نقطهٔ وسطAB باشد مربعCBGE را به ضلعBC می‌سازیم. مربعLMFE به ضلع $LM=5-x$ بدست می‌آید وداریم :

مربع LF = مستطیل CG − مستطیل CM − مستطیل DG

مربع = CG − مستطیل AM

زیرا دو مستطیل AL و DG معادل هستند وخواهیم داشت

مربع $LF=5^2-21=4$

نتیجه می‌شود که : $LM=2$ و

$x=5-2=3$ یا BD

در ترسیم فوق $x<5$ اختیار شده و خوارزمی حالت $x>5$ را درنظر نگرفته است درصورتی‌که اگر $x>5$ اختیارشودطبق ترسیمات فوق جواب دیگری برای مسئله بدست خواهد آمد

بدین ترتیب که مربع LMFE به‌ضلع $ML=x-5$ بدست آمده و داریم

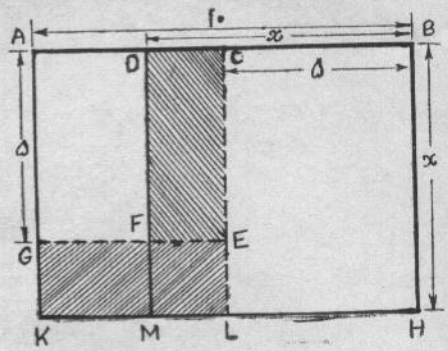
مربع FL = مستطیل GL − مستطیل GM =

مستطیل DE − مربع GM − مستطیل AE − مستطیل AM

ونتیجه خواهد شد :

مربع $FL=5^2-21=4$

$x=5+2=7$ یا BD و $ML=2$



حالت‌کلی مسئله عبارتست ازحل معادلهٔ به شکل :

$$x^2+q=px$$

وچنانچه درترسیمات فوق‌الذکر طول AB را برابر با p انتخاب کنیم مساحت مربع LMFE در حالت اول برابر خواهد شد با

$$\left(\frac{p}{2}-x\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$$

ودرحالت دوم :

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$$

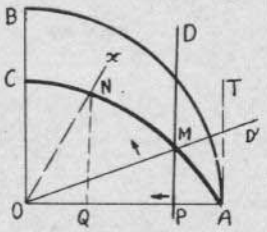
و با شرط $\frac{p^2}{4}>q$ مقدار x حساب خواهد شد :

$$x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

از هر جائی یادداشتی

مکانیك و تثلیث زاویه

ربع دایرهٔ AOB ومماس AT مرسوم بر آن را در نظرمی گیریم . اگر D خطی موازی باAT باشد که فاصلهٔ از A تا O را به طور یکنواخت بپیماید و D' خطی باشد که به طور یکنواخت حول نقطهٔO دوران کرده زاویهٔ AOB را در همان زمانی طی کندکه D فاصلهٔ از A تا O را می‌پیماید در این صورت نقطهٔ M محل تلاقی D و D' یك منحنی رسم خواهدکردکه به نام منحنی تثلیث زاویه موسوم است .



زاویهٔ AOx را درنظرمی گیریم . نقطهٔ تلاقی ضلع Ox را بامنحنی تثلیث معلوم‌کرده N می‌نامیم عمود NQ را بر OA رسم می‌کنیم و AP را به‌اندازهٔ ثلث AQ جداکرده درنقطهٔP عمودی بر OA اخراج می‌کنیم خط OM زاویهٔ AOx را ثلث می‌کند ؛ زاویهٔ AOM ثلث زاویهٔ AOx است .

(ازکتاب : اعداد واسرار آنها)

زیج چیست ؟

دراصطلاح علماء هیئت ونجوم عبارت از جدولی است که کمیت حرکات سیارات در آنها ضبط شده بنابر آنکه سیارات به‌گرد شمس مدارات مستدیرهٔ‌نامه بپیمایند چه بدین فرض‌مقدار حرکت هرسیاره را درهرلحظه می‌توان تعیین نمود وبرای آنکه مواقع محسوبهٔ سیارات مطابق با مرصود شود اصلاحات در جداول قائل شده‌اند و برای آن اصلاحات جداولی نیز وضع نمودند موسوم به تعدیلات (اصلاح حرکت مابین مدار دایره و بیضی‌است). خلاصه زیج کتابی است که حاوی جداول راجع به حرکات سیارات وتعدیلات باشدکه بتوان در هر وقت مـوقع حقیقی سیاره‌ای را ازروی آن جداول تعیین نمود .

(ازگاهنامه ۱۳۰۹ سید جلال‌الدین طهرانی)

واضعین علامتهای ریاضی

تهیه از : هراج کاراپتیان

$\sqrt{}$ کریستف رودلف	۱۵۲۶
+ میشل استیفل	۱۵۴۴
− » »	»
( ) تارتاگلیا	۱۵۵۶
= ربرت‌رکرد	۱۶۵۷
ممیز جان نپیر	۱۶۱۷
(ممیز در فارسی به صورت / و در لاتین با نقطه مشخص می‌شود)	
< و > توماس هاریوت	۱۶۳۱
a.b » »	»
a × b ویلیام اوگترد	۱۶۳۱
ab رنه دکارت	۱۶۳۷
استعمال حروف آخر الفباء برای مقادیرمجهول‌وحروف‌اول‌الفباءبرای مقادیرمعلوم‌توسط رنه‌دکارت	۱۶۳۷
a^n » »	»
(n عدد صحیح)	
a^n جان والیس	۱۶۵۹
(n منفی ویاکسری)	
÷ جان رال (زوریخ)	۱۶۵۹
÷ جان پل (لندن)	۱۶۶۸
a^n اسحق نیوتون	۱۶۷۶
(n عدد حقیقی)	
π ویلیام جونز	۱۷۰۶
≥ و ≤ پیربوگر	۱۷۳۴
≠ لئونارد اولر	۱۷۴۰

راهنمائی حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des Problèmes élémentaires de géométrie

تألیف: **E. J. Honnet** چاپ هفتم . پاریس: ۱۹۶۳ ــ ترجمهٔ : ع . م .

ــ۷ــ

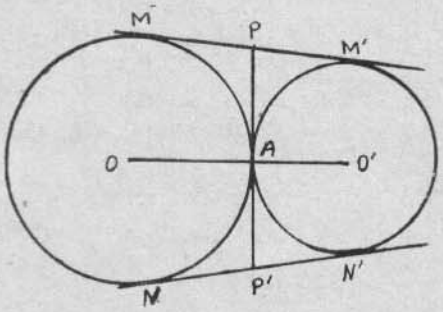
فصل یکم ـ چگونگی اثبات تساوی دو پارهٔ خط

روش ششم ـ استفادهٔ از خواص مماس بر دایره

خاصیت مورد استفادهــ دوقطعه مماس مرسوم‌از یك نقطه بر یك دایره متساویند .

مسئلهٔ ۱۱ــ دو دایرهٔ O و 'O که در نقطهٔ A مماس خارج هستند مفروض‌است ؛ مماسهای مشترك خارجی‌آنها 'MM و 'NN را رسم می‌کنیم ومماس مشترك داخلی آنها را نیزرسم می‌کنیم که 'MM و 'NN را به ترتیب در P و 'P قطع می‌کند . ثابت‌کنید که :

$$MM'=NN'=PP'$$



فرض: { O و 'O در A مماسند
'MM و 'NN و 'PP بر
O و 'O مماس هستند }

حکم : $MM'=NN'=PP'$

اثبات ـ قبلاً ملاحظه می‌کنیم‌که 'OO محور تقارن شکل است و از آنجا نتیجه خواهیم گرفت‌که :

$$MM'=NN' \text{ و } PA=P'A$$

دوقطعه مماس PA و PM که ازنقطهٔ P بر دایرهٔ O رسم شده‌اند متساویند وهمچنین خواهیم داشت

$$PA=PM \text{ و } PA=PM' \Longrightarrow PM=PM'=PA$$

ونتیجه خواهیم گرفت

$$2PA=2PM=PM+PM'=MM'$$

$$PP'=MM'-NN'$$

تمرینات

۳۴ــ درمسئلهٔ فوق‌الذکر نتیجه بگیریدکه دایرهٔ به‌قطر 'MM بر A گذشته وزاویهٔ 'MAM قائمه است .

۳۵ــ ثابت‌کنید شرط لازم وکافی برای اینکه یك چهار ضلعی بر یك دایره محیط باشدآنست‌که مجموع دو ضلع مقابل آن برابرباشد بامجموع دو ضلع مقابل دیگر.

۳۶ــ ثابت‌کنیدکه در مثلث قائم‌الزاویه ،مجموع دوضلع

زاویهٔ قائمه برابر است با مجموع قطرهای دایره های محیطی ومحاطی داخلی مثلث

راهنمائی ـ در مثلث قائم‌الزاویه شعاع دایرهٔ محاطی برابر است باطول قطعه مماسی که از رأس زاویهٔ قائمه بر این دایره رسم می‌شود .

۳۷ ـ طول قطعاتی از اضلاع مثلث راکه بین هر رأس ونقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی یا خارجی محصور است بر حسب طولهای سه ضلع مثلث حساب کنید .

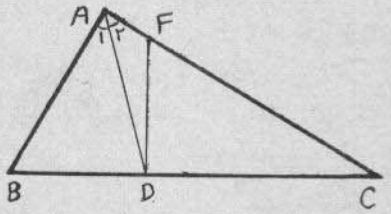
روش هفتم ـ استفادهٔ از قطعه خطهای متناسب

اگر چهار قطعه خط تناسب تشکیل داده باشند ودوجزء اول از این تناسب باهم برابرباشند ، دوجزء دیگر نیز باهم برابرند . اگر دریك تناسب مخرجها متساوی باشند صورتها نیزمتساوی خواهند بود .

مسئلهٔ ۱۲ـ مثلث ABC قائمه در زاویهٔ A مفروض است. نیمساززاویهٔ A را رسم می‌کنیم که وتر را در D قطع می‌کند ودر D عمودی بر وتر اخراج می‌کنیم که AC رادرF تلاقی می‌کند. ثابت کنید که BD = DF

فرض: $\begin{cases} زA = زD = ۹۰^\circ \\ زA_۱ = زA_۲ \end{cases}$

حکم : BD = DF



اثبات ـ نیمساز زاویهٔ داخلی هرمثلث ضلع مقابل را به نسبت دوضلع دیگر تقسیم می‌کند یعنی :

$$(۱) \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

ازطرف دیگر دومثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و DFC که درزاویهٔ C مشترکند متشابهند و داریم

$$(۲) \quad \frac{DF}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

تناسبهای (۱) و (۲) دریك نسبت مشترکند و نتیجه خواهد شدکه :

$$\frac{BD}{DC} = \frac{DF}{DC}$$

از تساوی این دو کسر که دارای مخرجهای متساویند نتیجه می‌شودکه: BD = DF

تمرینات

۳۸ ـ در یك مثلث متساوی‌الساقین ABC میانه های BM و CN نظیر دو ساق راکه با یکدیگر برابرند رسم می‌کنیم . از یك نقطهٔ D واقع بر AB به موازات قاعدهٔ BC رسم می‌کنیم‌که BM و CN و CA را به ترتیب در G و H و F قطع می‌کند ثابت کنیدکه DG = HF .

۳۹ـ درمثلث ABC نیمساز AK را رسم می‌کنیم واز نقطهٔ D وسط ضلع BC به موازات AK رسم می‌کنیم‌که AB را در E و AC را درF قطع می‌کند . ثابت کنیدکه

BE = CF

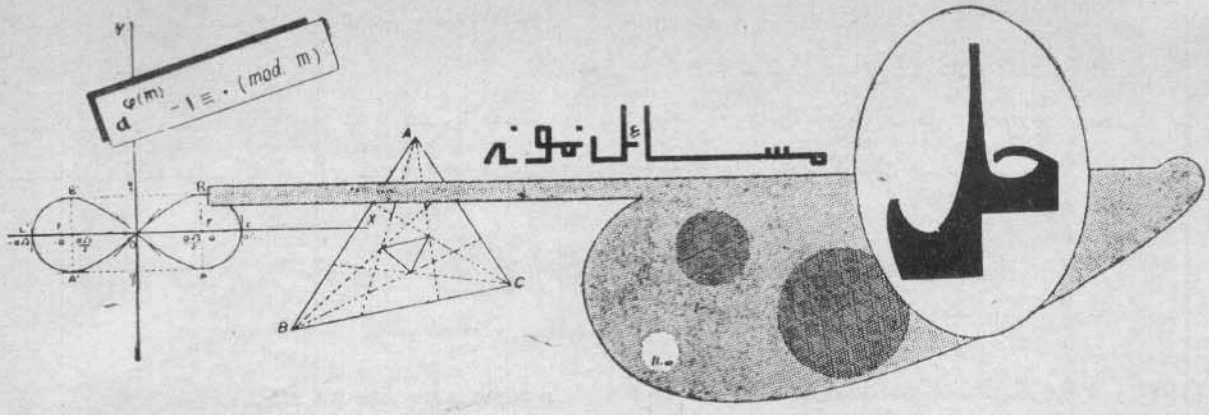
راهنمائی ـ مثلثهای BAK وBED وهمچنین CFD و CAK متشابهند وعلاوه برآن از خاصیت نیمساززاویهٔ مثلث استفاده کنید .

آیا شما هم می‌توانید ؟

۱۳۵۲ = ۱۳×۵۲+۵۲×۱۳ = ۲×۱۳×۵۲

۳۶ = ۳×۶+۶×۳ = ۲×۳×۶

شهرام انصاری



یك مسئلهٔ حساب ـ ترجمهٔ : قوام نحوی از اهواز

۳۷۸۳ـ کسر $\frac{n-3}{n+17}$ مفروض است که در آن n عددی است صحیح مقدار n را طوری پیدا کنید تا این کسر مربع کسر دیگری شود .

اثبات ـ اگر λ بزرگترین عاد مشترك صورت ومخرج کسر باشد λ عدد ۲۰ یعنی تفاضل صورت و مخرج را می‌شمرد و می‌توان نوشت $\mu\lambda=20$ و :

$$\begin{cases} n-3=\lambda k \\ n+17=\lambda k+20=\lambda(k+\mu) \end{cases}$$

k و $k+\mu$ نسبت به هم اول هستند و کسری ساده نشدنی مانند $\frac{p}{q}$ وجود دارد بقسمی که داشته باشیم:

$$\frac{k}{k+\mu}=\frac{p^2}{q^2}$$

وچون دو کسر ساده نشدنی باهم مساوی‌اند پس صورتها باهم و مخرجهاهم بایکدیگر مساوی‌اند .

$$\begin{cases} k=p^2 \\ k+\mu=q^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} k=-p^2 \\ k+\mu=-q^2 \end{cases}$$

ودرحالت اول داریم :

$$\mu=q^2-p^2=(q-p)(q+p)$$

اگر فرض کنیم $a=q-p$ پس :

$$\mu=a(a+2p)$$

μ باید ۲۰ را بشمرد پس اگر

$a=1 \quad a(a+2p)=3و5و7و9و11\ldots$

$a=2 \quad a(a+2p)=8و12و16و20و\ldots$

$a=4 \quad a(a+2p)=24و\ldots$

اگر $a=2$ و $\mu=20$ و $p=4$ و $q=6$ چون p و q نسبت به هم اول نیستند . قابل قبول نیست .

اگر : $a=1$ و $\mu=5$ و $p=2$ و $q=3$

قابل قبول است و $k=p^2=4$ و

$$n=3+\lambda k=3+\frac{20}{5}\times 4=19$$

و داریم :

$$\frac{16}{36}=(\frac{4}{6})^2=(\frac{2}{3})^2$$

درحالت دوم داریم:

$$\mu=p^2-q^2$$

$$\mu=5 \quad p=3 \quad q=2 \quad k=-p^2=-9$$

$$\lambda=\frac{20}{\mu}=4$$

$$n=3+\lambda k=-33$$

$$\frac{-36}{-16}=(\frac{3}{2})^2$$

پس مسئله دوجواب $n=19$ و $n=-33$ دارد .

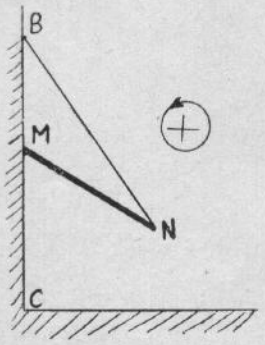
حل مسئلهٔ فیزیك شمارهٔ ۳۷۲۱ مندرج در یکان شمارهٔ ۲۴

شرایط عمومی تعادل

میلهٔ همگن MN به وزن $P = ۱۰kgf$، بدون اصطکاك روی دیوار BC می‌لغزد. طول میله $l = ۱m$ است.

فرض می‌کنیم:

$BN = a = ۱/۵m$ و $(\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BN}) = \varphi$ و $BM = x$



میله در N توسط نخی، که از جرم آن صرف نظر می‌کنیم، به نقطهٔ B بسته شده است.

۱ـ تعیین کنید نیروهای مؤثر برمیله را.

۲ـ معادلات عمومی تعادل را برای میلهٔ MN به ازای مقادیرعددی داده شده بنویسید.

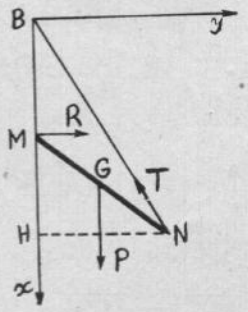
۳ـ کشش نخ وهمچنین عکس‌العمل دیوار را در نقطهٔ M حساب کنید.

۴ـ نیروهای مؤثر ودستگاه را تشریح کنید.

مقیاس: ۱۰cm معرف ۱m، ۱cm معرف ۱kgf.

چگونه می‌توانید ازاین رسم، برای تحقیق نتایج بدست آمده، استفاده کنید.

۵ ـ شکل را برای هنگام تعادل به طریقهٔ هندسی رسم کنید.



حل: ۱ـ

نیروهای مؤثر ـ

میلهٔ MN تحت اثر نیروهای زیراست:

۱ـ $\vec{P}$ نیروی وزن خود؛

۲ـ $\vec{T}$ نیروی کشش نخ؛

۳ـ $\vec{R}$ نیروی عکس‌العمل دیوار.

چون دیوار بدون اصطکاك است $\vec{R}$ بردیوار عموداست.

۲ـ تعادل میله ـ الف) ـ مجموع هندسی نیروهای مؤثر برابر صفر است:

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=۰$$

ازتصویراین نیروها برمحورهای B_x و B_y نتیجه می‌شود.

$P_x = P$ و $P_y = ۰$ و $R_x = ۰$ و $R_y = R$

$T_x = -T\cos\varphi$ و $T_y = -T\sin\varphi$

پس:

$$\begin{cases} P - T\cos\varphi = ۰ & (۱) \\ R - T\sin\varphi = ۰ & (۲) \end{cases}$$

ب) گشتاور نیروهای مؤثر در نقطهٔ B صفر است (B را طوری انتخاب می‌کنیم که گشتاور $\vec{T}$ صفرشود):

$$\overline{M_B}(\vec{P}) = -\frac{HN}{۲} \times P = -\frac{aP}{۲}\sin\varphi$$

$$\overline{M_B}(\vec{R}) = +xR$$

نتیجه می‌شود:

$$(۳) \quad xR - \frac{aP}{۲}\sin\varphi = ۰$$

φ و x طبق رابطهٔ زیر به هم مربوطند:

$$MN^۲ = BM^۲ + BN^۲ - ۲BM \cdot BN\cos\varphi$$

$$(۴) \quad l^۲ = x^۲ + a^۲ - ۲ax\cos\varphi$$

روابط فوق را به ازای مقادیرعددی می‌نویسیم:

$$(۱) \quad T\cos\varphi = ۱۰$$

$$(۲) \quad T\sin\varphi = R$$

$$(۳) \quad xR = \frac{۱۵}{۲}\sin\varphi$$

$$(۴) \quad ۱ = x^۲ + ۲/۲۵ - ۳x\cos\varphi$$

با حذف T ازروابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sin\varphi = \frac{R}{۱۰}\cos\varphi$$

این مقدار $\sin\varphi$ را دررابطهٔ (۳) بکار می‌بریم :

$$\cos\varphi=\frac{۴}{۳}x \quad \text{یا} \quad xR=\frac{۱۵R}{۲۰}\cos\varphi$$

این مقدار $\cos\varphi$ را دررابطهٔ (۴) می‌بریم :

$$۱=x^۲+۲/۲۵-۴x^۲$$

یا

$$۳x^۲=۱/۲۵$$

و از آنجا :

$$x=\pm ۰/۶۴۵$$

فقط مقدار مثبت x قابل قبول است ؛ زیرا M نمی‌تواند بالای B باشد .

تعادل هنگامی بر قرار است که $BM=۰/۶۴۵m$ است .

۳ـ محاسبهٔ T و R . چون :

$$\cos\varphi=\frac{۴}{۳}x=۰/۸۶۰$$

ازرابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

$$T=\frac{۱۰}{۰/۸۶۰}=۱۱/۶kgf$$

با حذف T از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شودکه :

$$R=۱۰\,tg\varphi$$

وقتی که :

$$\cos\varphi=\ /۸۶۰$$

باشد $\varphi=۳۰°۴۰'$ و :

$$tg\varphi=۰/۵۹۳$$

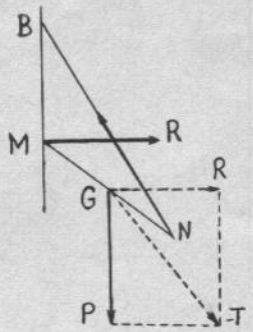
و از آنجا .

$$R=۵/۹۳kgf$$

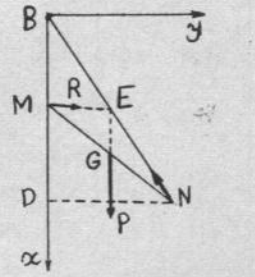
۴ـ تشریح هندسی دستگاه ـ اگر نتایج قبلی کاملا درست باشند ، سه نیروی مؤثر برمیله باید متقارب باشند و برآیند $\vec{R}$ و $\vec{P}$ باید برداری همسنگ با بردار $\vec{T}$ ـ باشد (برآیند دو نیروی $\vec{P}$ و $\vec{R}$ را به صورت نقطه چین در شکل نمایش داده‌ایم) .

۵ـ حل هندسی ـ میله تحت اثر سه نیرو است : $\vec{R}$ عکس‌العمل BC ، $\vec{T}$ کشش نخ، $\vec{P}$ وزن میله .

$\vec{P}$ با BC متوازی است وازG وسط MN می‌گذرد. امتداد $\vec{P}$ خط BN را درنقطهٔ E ، وسط BN قطع می‌کند .



ME عمود است بر BC ، اگر D تصویر N روی BC باشد ، خطوط ME و DN متوازیند و چون E وسط BN است M وسط BD است .



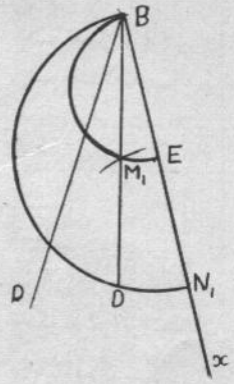
مثلث BND که دررأس D قائمه است درنیمدایره‌ای به قطر BN محاط است .

چون :

$$BM=\frac{BD}{۲}$$

است، نقطهٔ M روی‌دایره‌ای‌است به‌قطر BE که‌بادایرهٔ (BN وE) متجانس (homothetique) است . از طرف دیگر $MN=l$ ؛ یعنی M روی دایره‌ای است به مرکز N به‌شعاع l

ترسیم شکل درحالت تعادل ـ روی خط غیرمشخص Bx نیم دایره‌ای به قطر



$$BN_۱=a$$

ونیم دایرهٔ دیگری به‌قطر

$$BE=\frac{a}{۲}$$

می‌زنیم. نیم دایرهٔ اخیر را را با قوسی به مرکز N و شعاع l قطع می‌کنیم . با دوران (BC و $BM_۱$) $BM_۱$ را روی BC نقل می‌کنیم .

بحث ـ برای اینکه دایرهٔ ($N_۱$ و l) دایرهٔ BE را قطع کند ، باید $\frac{a}{۲}<l<a$

درمثلثهای قائم‌الزاویهٔ BDN و MDN داریم

$$\overline{DN}^۲=\overline{BN}^۲-\overline{BD}^۲=\overline{MN}^۲-\overline{MD}^۲$$

یا

$$\overline{DN}^۲=a^۲-۴x^۲=l^۲-x^۲$$

وازآنجا :

$$x=\sqrt{\frac{a^۲-l^۲}{۳}}$$

مسائل برای حل

مسائل متفرقه

۳۷۸۴ـ از : **بختیار علیمدد سلطانی**

تحقیق کنید که آیا معادلهٔ زیر جواب حقیقی قابل قبول دارد یا نه ؟

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2+3x\sqrt{x}+3x+\sqrt{x}}+\frac{1}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{4\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=4$$

۳۷۸۵ـ ترجمه ازروسی توسط **فرهاد مجیدی آهی**

عبارت زیر را به صورت ضرب دوچند جمله‌ای تجزیه کنید .

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)^1-x^n$$

۳۷۸۶ـ از **خسرو جهانیار**

عبارت :

$$6a(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

را به مجموع شش مکعب کامل تبدیل کنید.

۳۷۸۷ـ ترجمهٔ **پرویز خواجه خلیلی** ازانگلیسی

اگرعبارت $x^5-5qx+4r$ بر $(x-c)^2$ بخش‌پذیر باشد ثابت کنید که : $q^5=r^4$.

۳۷۸۸ـ ترجمهٔ **پرویز خواجه خلیلی** .

اگردرمعادلهٔ $x^2+px+q=0$ یك ریشه برابرمجذور ریشهٔ دیگر باشد ثابت کنید که :

$$p^3-q(3p-1)+q^2=0$$

۳۷۸۹ـ ترجمهٔ : **محمود تویسرکانی** .

اگر $f(x)=\log_a x$ و $F(z)=a^z$ باشد ثابت کنید :

$$F[f(x)]=f[F(x)]$$

۳۷۹۰ـ از **فرهادمجیدی آهی**

مطلوبست تعیین مقدار x ازرابطهٔ زیر

$$1^{\log x}+(1+2)^{\log x}+(1+2+3)^{\log x}+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)^{\log x}=n$$

۳۷۹۱ـ ترجمهٔ **هراج کاراپتیان** .

مقدار x را ازرابطهٔ زیر را بدست آورید .

$$x=10\times 100^{\frac{1}{2}\log 9-\log 2}$$

۳۷۹۲ـ ترجمهٔ : **حبیب‌الله گلستان‌زاده** .

حاصل هریك ازرادیکالهای زیررا حساب کنید .

$$(1)\qquad \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}(\underbrace{111\cdots11}_{2n}-\underbrace{33\cdots33}_{n}\underbrace{000\cdots00}_{n})\right)}$$

$$(2)\qquad \sqrt{\underbrace{111\cdots11}_{2n}-\underbrace{222\cdots22}_{n}}$$

۳۷۹۳ـ از **سیروس نخعی آشتیانی**

به فرض آنکه داشته باشیم :

$$\begin{cases} a\log_n^3 x + b\log_n x + c = 0 \\ a\log_n^3 y + b\log_n y + c = 0 \\ a\log_n^3 z + b\log_n z + c = 0 \end{cases}$$

ثابت کنید که : $xyz = 1$

۳۷۹۴ـ ترجمهٔ : **احمد میرنژاد .**

اگر α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

باشند مطلوبست محاسبهٔ عبارت :

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

برحسب p و q و r

۳۷۹۵ـ ترجمهٔ **احمد میرنژاد**

به فرض اینکه α و β و γ و δ ریشه‌های معادلهٔ :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

باشند مطلوبست محاسبهٔ عبارت : $\Sigma(\alpha-\beta)^2$

برحسب ضرایب معادله

۳۷۹۶ـ از **قوام نحوی**

در معادلهٔ $x^2 + px + q = 0$ ضرایب p و q راچنان تعیین کنیدکه اگر یك واحد به هر یك از ریشه‌های این معادله اضافه‌کنیم اعداد حاصل ریشه‌های معادلهٔ زیر گردند :

$$x^2 - p^2x + pq = 0$$

۳۷۹۷ـ از **سیروس نخعی آشتیانی .**

دو تابع زیر برحسب متغیر x مفروض است :

$$y = \frac{\sin x + a\cos x}{tg\,x - a^2 cotg\,x}$$

$$u = a\sec x - a^2 \operatorname{cosec} x$$

ثابت‌کنیدکه بین توابع و مشتقات آ ها رابطهٔ زیر برقراراست

$$\frac{y'}{y} + \frac{u'}{u} = 0$$

۳۷۹۸ـ از **خسرو جهانیار .**

پاره خط AB و نقطهٔ M واقع برآن مفروض است . روی AB نقطهٔ دیگری مانندN چنان تعیین کنید که‌داشته باشیم :

$$MN^2 = 2MA \cdot NB$$

۳۷۹۹ـ ترجمهٔ **هراج کاراپتیان**

در مثلث ABC به‌اضلاع a و b و c سه لوزی می‌توانیم محاط کنیم‌که یك رأس‌آن بریك رأس مثلث و سه رأس دیگرش برسه ضلع مثلث واقع باشد . ازبین این لوزیها کدامیك دارای مساحت بیشتر می‌باشد $(a<b<c)$

۳۸۰۰ـ از **سید جعفر وفابخش**

نقطهٔ تلاقی ارتفاعات AD و BE و CF از مثلث حادالزوایای ABC را H ونقاط تلاقی این ارتفاعات را با دایرهٔ محیطی مثلث به‌ترتیب P و Q و R می‌نامیم صحت رابطهٔ زیررا ثابت‌کنید ،

$$2\left(\frac{a}{AH} + \frac{b}{BH} + \frac{c}{CH}\right) = \frac{a}{DP} + \frac{b}{EQ} + \frac{c}{FR}$$

۳۸۰۱ـ ترجمه از فرانسه

عددی را تعیین‌کنیدکه پنج برابر توانی‌از۱۰ ودوبرابر توانی از۲۰ باشد .

۳۸۰۲ـ **ازفیروز بایرامی**

رشتهٔ اعداد زیررا درنظر می‌گیریم .

$$a_1 > 0 \text{ و } a_2 = a_1 + 8k^2 \text{ و } a_3 = a_2 + 2\times 8k^2 \text{ و ..}$$

$$\text{و } a_n = a_{n-1} + 8(n-1)k^2$$

مقدار a_1 را چنان تعیین کنیدکه هریك از جمله‌های این رشته مجذورکامل باشد وآنگاه مجموع این جملات را تعیین کنید.

۳۸۰۳ـ ترجمهٔ **حبیب‌الله گلستان‌زاده**

با روش‌استقراء ریاضی ثابت‌کنیدکه قوای صحیح عدد

$$(a\geqslant 2)\quad n = \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$$

را می‌توان به صورت :

$$(A\geqslant 2)\quad N = \sqrt{A} - \sqrt{A-1}$$

نوشت . a و A عددهای صحیح هستند .

۳۸۰۴ـ ترجمهٔ **حبیب‌الله گلستان‌زاده**

حبابی است‌که از یك طرف به قسمتی از یك سطح‌کروی به شعاع R وازطرف دیگر به یك صفحه محدود است . مرکز سطح‌کروی داخل حباب واقع شده و فاصلهٔ صفحه تا مرکزکره برابر با $k<R$ می‌باشد. دراین حباب سه‌کرهٔ متساوی به‌شعاع r چنان واقع شده است‌که هریك ازآنها برصفحهٔ پایهٔ حباب و برسطح‌کروی جدار حباب و برهریك از دوکرهٔ دیگر مماس می‌باشد . مطلوبست محاسبهٔ r برحسب R و k .

حالت خاص : $R = 13$ و $k = 7$.

* * *

مسائل فیزیك (زیر نظر : هوشنگ شریفزاده)

۳۸۰۵ـ ترجمه از حل‌المسائل A.MAILLARD

در ظرفی مسی به شکل نیمکره که حجم داخلی آن در صفر درجه ۳ لیتر است ۳ لیتر آب $30^\circ C$ می‌ریزیم . دمای تعادل برابر $27^\circ C$ می‌شود ضخامت ظرف در صفر درجه چقدر است؟ از تبادل گرما با خارج صرف نظر می‌شود . گرمای ویژهٔ مس ۰/۰۹۵ ، جرم مخصوص مس $8/8 g/cm^3$ جرم مخصوص آب 30° برابر $0/9957 g/cm^3$ است .

۳۸۰۶ـ ترجمه از فیزیك عمومی تألیف :

D.H.FENDER

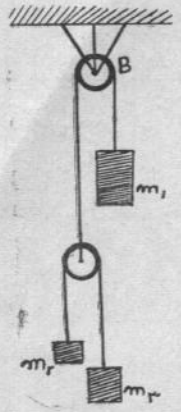
مدار ماه را به دور زمین می‌توان تقریباً دایره‌ای تصور کرد که شعاع آن درحدود $384 \times 10^3 km$ است. ماه این مدار را درهرسال بطورتقریب ۱۳ بار طی می‌کند . اگرشتاب جاذبه برسطح زمین $981 cm/s^2$ باشد ، شعاع زمین را حساب کنید.

۳۸۰۷ـ ترجمه ازکتاب «تمرین فیزیك»

بین دو نقطهٔ M و N مقاومت R، بوبین بدون مقاومت به‌ضریب سلف L و خازن C را به طور انشعاب بسته‌ایم. فرض می‌کنیم که کشش مؤثر (اختلاف پتانسیل- Tensionefficace) بین دو نقطهٔ M و N برابر U و تپش - (Pulsation) جریان برابر ω باشد . تعیین کنید شدت جریان را در هر یك از انشعابها و مقاومت ظاهری معادل مدار را

توجه .- $\omega = 2\pi N$ را در حرکات نوسانی و دورانی متشابه سرعت زاویه‌ای می‌نامند ولی در جریانهای متناوب آن را بهتراست تپش جریان (یا هرواژه‌ای که معادل آن وضع شود) نامید .

۳۸۰۸ـ ترجمه از کتاب مجموعهٔ مسائل مکانیك .



یك دستگاه قرقره‌های مرکب مطابق شکل داریم . از وزن نخ و قرقره ونیز ازاصطکاکها صرف نظر می‌کنیم . داریم :

$$m_1 > m_2 + m_3$$

و m_2 بزرگتر یا کوچکتر از m_3 است. چه رابطه‌ای باید بین m_1 و m_2 و m_3 وجود داشته باشد تا m_1 به طرف پایین حرکت کند ؟

یادآوری ـ در سطر چهارم حل مسألهٔ ۳۷۱۹ مندرج در شمارهٔ ۲۶ به جای نیروی اصطکاك نوشته شود « واکنش صفحه » .

مسائل شیمی (از عطاء الله بزرگ‌نیا)

۳۸۰۹ـ ازتجزیهٔ کامل یك اسید اشباع شدهٔ آلی به‌کمك حرارت مخلوطی ازدوگاز تولید می‌شود که در مجاورت پتاس حجم آن به نصف تقلیل می‌یابد و اگر به این مخلوط اکسیژن کافی افزوده وبه‌کمك جرقهٔ الکتریك محترق نمائیم این بار نقصان حجم درمقابل پتاس برابر حجم اولیهٔ دوگاز می‌شود . فرمول اسید را پیداکنید .

۳۸۱۰ـ ۴گرم اسید اگزالیك بی‌آب و اگزالات سدیم را درآب حل کرده وحجم محلول را به ۵۰۰cc می‌رسانیم ۲۰cc محلول ۶ گرم درلیتر سود برای خنثی کردن ۲۲/۵cc محلول فوق لازم است . نسبت درصد اسید اگزالیك را در مخلوط فوق حساب کنید.

ثانیاً ـ تعیین کنید که ۲۵cc ازاین محلول در مجاورت اسید سولفوریك چه حجمی ازپرمنگنات پتاسیم به‌غلظت ۲۳/۷ گرم درلیتررا بیرنگ می‌سازد .

تالیف : Lucienne FELIX
ترجمهٔ : ع . م

بیان جدید

ریاضیات مقدماتی

بخش دوم ـ فضاهای برداری

هیأت اعداد حقیقی را همچون مجموعهٔ عامل در نظرگرفته و قسمتی از جبر را بنا می‌کنیم‌که نمونه‌ای از آن هندسه‌ای است موسوم به هندسهٔ آفین : آنچه‌که اشکال را به‌کمك نظریهٔ توازی خطوط و نسبت بین قطعه خطهای متوازی یعنی بوسیلهٔ انتقال و تجانس معین می‌کند ـ به عبارت دیگر آن قسمت از هندسه‌که مربوط به متوازی‌الاضلاع و قضیهٔ تالس است .

اصولی‌که برای گسترش یك چنین سازمانی انتخاب می‌کنیم قضیه‌ای مجرد اما چند ارزشی را بدست خواهد داد . اصطلاحات هندسهٔ معمول بخصوص کلمات «بردار» و «توازی» را همچون پایه‌ای برای ساختمان مورد نظر نگاه می‌داریم .

I ـ بردار . عملیات برداری

مجموعهٔ R اعداد حقیقی و مجموعهٔ دیگر V را درنظر می‌گیریم‌که عنصرهایش v و v' و w و ... بوده و **بردار** نامیده می‌شوند . برای احتراز از اشتباه ، حروفی راکه‌برای عنصرهای این مجموعه بکار می‌بریم با نوشتن علامت «→» در بالای آنها مشخص می‌کنیم .

(ازنظرهندسی این بردارهای مجرد چنان تصورمی‌شوند که به آنها **بردارهای آزاد** می ویند .اما ازنظرهای‌دیگر به نحو دیگری در نظرگرفته خواهند شد : مثلا ممکن است‌که V مجموعهٔ چند جمله‌ایها یا مجموعهٔ توابع خطی باشد . مثال اساسی در این باره آنست‌که V مجموعهٔ مقادیر فیزیکی ، طولها ، مساحتها ، جرمها و غیره باشد . در این بخش فقط تصور هندسی این عنصرها را در نظر خواهیم‌گرفت .)

الف ـ رابطـه‌ای هم ارزی با نشانهٔ ≡ وجود دارد (بعدها‌که اشتباهی‌پیش نیایدنشانهٔ = را بکارخواهیم‌برد)

رابطهٔ $\vec{v} \equiv \vec{w}$ چنین خوانده‌می‌شود: «بردارv هم‌ارز بردار w است» که بعداً خواهیم‌گفت «بردار v با بردار w برابراست»

(از نظر هندسی این هم ارزی را همسنگی می‌نامند)

ب ـ جمع برداری ـ مجموعهٔ V متضمن عملی داخلی موسوم به جمع است‌که با اصول [A]که در زیر نوشته خواهد شد معین می‌شود :

$$[A]\begin{cases} [A_1]\ [\vec{v} \equiv \vec{v'} \text{ و } \vec{w} \equiv \vec{w'}] \Longrightarrow [\vec{v}+\vec{w} \equiv \vec{v'}+\vec{w'}] \\ [A_2]\ \begin{cases} [\vec{v}+\vec{w} \equiv \vec{v}+\vec{w'}] \Longrightarrow [\vec{w} = \vec{w'}] \\ [\vec{v}+\vec{w} \equiv \vec{v'}+\vec{w}] \Longrightarrow [\vec{v} = \vec{v'}] \end{cases} \\ [A_3]\ \vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3} \equiv \vec{v_1}+(\vec{v_2}+\vec{v_3}) \\ [A_4]\ \vec{v}+\vec{w} \equiv \vec{w}+\vec{v} \end{cases}$$

(ازنظر هندسی ، مجموع هندسی دوبرابر AB و AC که دارای یك مبدأ باشند قطر متوازی‌الاضلاعی است‌که روی AB و AC ساخته می‌شود . در این صورت $[A_1]$ می‌رساند که مجموع هندسی دو برداربا تغییر نقطهٔ A همسنگ باخودش باقی می‌ماند و از آنجا $[A_2]$ و $[A_3]$ و همچنین $[A_4]$ قوت خود باقی خواهندبود)

نتایج ـ به همان ترتیب که‌دربخش اول بیان شدشرکت پذیری واستقلال از ترتیب عوامل در حالت‌کلی نتیجه خواهد شد (ممکن است اثبات را روی یك شکل دنبال‌کرد)

اصول قرینه سازی

$[S_1]$ برای عمل جمع یك عنصر بی‌اثر با نشانهٔ $\vec{0}$ وجود دارد:

$$\forall \vec{v} \text{ و } \vec{v}+\vec{0}\equiv\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$$

(از نظر هندسی ، برداری است مانند AB که نقاط A و B بر هم‌منطبق باشند)

$[S_2]$ نظیر عنصر $\vec{v}$ غیر از $\vec{0}$ عنصر دیگری با نشانهٔ $-\vec{v}$ وجود دارد به قسمی که

$$\vec{v}+(-\vec{v})\equiv\vec{0}$$

دو برداری که نسبت به عمل جمع قرینه هستند متقابل نامیده می‌شوند :

$$-(+\vec{v})\equiv\vec{v}\ ،\ \forall\vec{v}\in V$$

نتایج ـ تفاضل برداری ـ معادلهٔ برداری

$$\vec{v}+\vec{x}\equiv\vec{w}$$

دارای‌جوابی است‌که عبارتست از $\vec{x}\equiv\vec{w}+(-\vec{v})$ که به صورت $\vec{x}\equiv\vec{w}-\vec{v}$ نوشته می‌شود .

(از نظر هندسی اگر AB تصویر $\vec{v}$ باشد BA تصور $-\vec{v}$ خواهد بود .)

بنابراین،مجموعهٔ V توسط عمل‌جمع‌یك‌سازمان گروه آبلی است) .

ج ـ ضرب یك برداردر یك عدد حقیقی ـ این عمل نسبت به مجموعهٔ V یك عمل خارجی است‌که نظیر هر زوج عدد حقیقی r و بردار $\vec{v}$ یك بردار $\vec{w}$ را بدست می‌دهد این عمل رابه‌صورت زیر نمایش‌می‌دهیم

$$\vec{w}=r\vec{v}$$

نسبت به این عمل اصول زیر را صادق می‌دانیم

$$[m]\begin{cases}
[m_1]\ [r=r' \text{ و } \vec{v}\equiv\vec{v'}]\Longrightarrow[r\vec{v}\equiv r'\vec{v'}] \\
[m_2]\begin{cases}[m'_2]\ r\neq 0 \text{ و } [r\vec{v}\equiv r\vec{v'}]\Longrightarrow[\vec{v}\equiv\vec{v'}] \\ [m''_2]\ \vec{v}\neq\vec{0} \text{ و } [r\vec{v}\equiv r'\vec{v}]\Longrightarrow[r=r']\end{cases} \\
[m_3]\quad (rr')\vec{v}\equiv r(r'\vec{v}) \\
[m_4]\begin{cases}[m'_4]\ (r+r')\vec{v}\equiv r\vec{v}+r'\vec{v} \\ [m''_4]\ r(\vec{v}+\vec{v'})\equiv r\vec{v}+r\vec{v'}\end{cases} \\
[m_5]\begin{cases}[m'_5]\ \forall\vec{v}\in V:\ 1\vec{v}\equiv\vec{v} \\ [m''_5]\ \forall\vec{v}\in V:\ 0\vec{v}=\vec{0} \\ [m'''_5]\ \forall r\in R:\ r\vec{0}\equiv\vec{0}\end{cases}
\end{cases}$$

تفسیر ازنظرهندسهٔ متداول ـ اگر AB معرف $\vec{v}$ باشد، AC که در تجانس به مرکز A و به نسبت r از آن بدست می‌آید معرف $\vec{w}=r\vec{v}$ خواهد بود ؛ و خواص نظیر اصول بالا به سادگی محقق خواهد شد . $[m_4]$ تصور قضیهٔ تالس خواهد بود .

نتایج ـ شرکت‌پذیری برای تعداددلخواهی ازعنصرهای r و r' و r'' و غیره از مجموعهٔ اعداد حقیقی، از $[m_3]$ و استقلال از ترتیب عوامل برای تعداد دلخواهی از اعداد حقیقی یا تعداددلخواهی از بردارها ،از $[m_4]$ نتیجه می‌شود .

تبصره ـ در مجموعهٔ V رابطه‌ای ترتیبی را دخالت نمی‌دهیم اما بعدها رابطهٔ هم‌ارزی دیگری را روی این مجموعه وبین طبقات هم ارزی آن (طولهای‌بردارها) یك رابطهٔ‌ترتیبی را تعریف خواهیم کرد .

چرا چنین است ؟

$۷۳+۹۶=۱۳^۲$	؛	$۷۳۹۶=۹۶^۲$
$۷۵+۶۹=۱۲^۲$	؛	$۷۵۶۹=۸۷^۲$
$۷۷+۴۴=۱۱^۲$	؛	$۷۷۴۴=۸۸^۲$
$۷۹+۲۱=۱۰^۲$	؛	$۷۹۲۱=۸۹^۲$
$۸۱+۰۰=۹^۲$	؛	$۸۱۰۰=۹۰^۲$

تهیه از : قوام نحوی ، اهواز

نوشتهٔ: ژرژ گامو
ترجمهٔ از فرانسه

درباشگاه هوانوردان

۱ـ باد اتر

دسته‌ای از افراد نیروی هوایی دور میزی در باشگاه هوانوردان نشسته مشغول صحبت کردن وورق زدن مجلات مصور بودند. یکی ازآنها خطاب به دیگری اظهارداشت :

ـ جاك ، مثل اینکه قرار است امروز تا پایگاه N پرواز کرده وقبل ازغروب مراجعت کنی ؟!

ـ امروز از این کار منصرف شدم پایگاه N درست در سمت مشرق ما واقع است و بادی قوی که از سمت مشرق می‌وزد پرواز هواپیمای مرا کند خواهد کرد . بهتر است که تا فردا صبر کنم . هواشناسی برای فردا روز آرامی را پیش بینی کرده است .

ـ اما اگر همین امروز عصر قصد مراجعت داشته باشی درزمان پروازت تغییری حاصل نمی‌شود ؛ باد به همان اندازه که دررفتن به پایگاه N هواپیمایت به عقب می‌راند درمراجعت ازآنجا آنرا به جلورانده سرعتش را زیاد می‌کند ، زمانی را که دروقت رفتن ازدست داده باشی به هنگام برگشتن جبران می‌کنی .

ـ تو اینطور فکرمی‌کنی !؟

ـ مسلماً که چنین است .

چنین برمی‌آیدکه در این باره بی تجربه هستی و از **نظریهٔ نسبیت** اطلاعی نداری .

ـ نظریهٔ نسبیت چه ربطی به موضوع ما دارد؟

ـ درحقیقت این موضوع اساس آزمایشی است که **مایکلسون** دربارهٔ حرکت یك موج در «جریان اتر» انجام داد ، جریانی که بایستی در اثرحرکت زمین درمادهٔ «اتر» پدیدآمده باشد .

جاك به گفتهٔ خود خطاب به همکارش چنین ادامه داد :

مسئله پرواز خودم را تا پایگاه N به زبان معمولی طوری تشریح می‌کنم که اگر ریاضیات را هم فراموش کرده باشی به اشکالی برنخوری. به هنگام رفتن تا پایگاه N که باد درخلاف جهت حرکت می‌وزد سرعت هواپیما کم می‌شود و در نتیجه زمان بیشتری برای رسیدن به پایگاه لازم‌است ؛ برعکس به هنگام مراجعت بادکه درجهت حرکت هواپیمامی‌وزد سرعت هواپیمارا زیادکرده ودرنتیجه زمان کمتری صرف خواهد شد. مقاومت باد ودرنتیجه کندی سرعت هواپیما در زمانی طولانی‌تر انجام می‌گیرد و ازدیاد سرعت آن در زمانی کمتر و رویهمرفته زمانی که ازدست می‌رود بیش‌از زمانی است که صرفه جوئی می‌شود باخت بیش ازبرد است .

ممکن است که از این استدلال ساده قانع نشده باشی اما اگر ریاضیات و حل معادلات را به خاطرداشته باشی توضیح قانع‌کننده‌تری به تو خواهم داد . فرض‌کنیم v سرعت هواپیمای من (سرعت آن نسبت به هوا) و v' سرعت باد باشد اگر فاصلهٔ پایگاه N تا اینجا فرض شود زمان لازم برای رفتن از اینجا تا N برابر خواهد شد با $\frac{l}{v-v'}$ و زمان برگشت از آنجا برابر خواهد بود با $\frac{l}{v+v'}$ ودرنتیجه زمان رفت وبرگشت رویهم چنین خواهد شد .

$$T=\frac{l}{v-v'}+\frac{l}{v+v'}=\frac{2lv}{v^2-v'^2}$$

$$=\frac{2l}{v}\cdot\frac{1}{1-\frac{v'^2}{v^2}}$$

اگر هوا کاملا آرام باشد $v'=0$ بوده و T برابر $\frac{2l}{v}$ می‌باشد اما اگر v' وجود داشته باشد دراین‌صورت مقدار T بیش

خواهد بود .

فرض کنیم که سرعت باد برابر با نصف سرعت هواپیما یعنی $\frac{v'}{v}=\frac{1}{2}$ باشد در این صورت زمان T چنین خواهدشد

$$T=\frac{2l}{v}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2l}{v}\times\frac{4}{3}$$

ملاحظه می‌شود که زمان رفت وبرگشت $\frac{4}{3}$ برابر شده است. اگر سرعت‌باد باسرعت‌هواپیما برابرباشد در این صورت زمان لازم زمانی نامحدود خواهد بود .

ازاینها گذشته و صرف‌نظر از مسئلهٔ مقاومت باد ، من ازاین جهت امروز به پایگاه N پرواز نمی‌کنم‌که وسیلهٔ تلفن چنین دستوری را به من داده‌اند. انجام مأموریت من به‌فردا موکول شده است .

همکار جاك از وی خواست حال که آنجا می‌ماند و وقت دارد راجع به‌نظریهٔ نسبیت وآزمایش مایکلسون توضیحات بیشتری بدهد و جاك چنین توضیح داد :

این یك اصل است . بعضی از فیزیکدانان برای اینکه چگونگی انتشار نور را درفضا توجیه‌کنند فرض‌کردندکه تمام فضا را یك‌نوع مادهٔ سبك به‌نام «اتر» فراگرفته است. مایکلسن فکرکردکه اگر چنین ماده‌ای وجود داشته باشد باید درنتیجهٔ حرکت زمین درآن یك نوع «جریان اتر» یا «باداتر» بوجود آید . زمین با سرعت حدود ۳۰ کیلومتر درثانیه دور خورشید می‌گردد و ماکه برزمین مستقر هستیم باید وجود چنین وزشی‌را حس بکنیم ، همچنانکه وقتی درهواپیمای روباز حرکت‌کنیم و وزش باد را در اطراف خود حس می‌کنیم .

باری، مایکلسون درآزمایش خود از یك منبع نور یك شعاع نورانی را درجهت جریان فرضی اتر و یك شعاع نورانی را در جهت عمود برآن به خارج فرستاد وبا استفاده ازانعکاس این دو شعاع را به منبع بازگرداند و زمان وصول آنها را به منبع باهم مقایسه‌کرد. قاعدةً باید شعاعی‌که در جهت جریان اترفرستاده باشد دیرتر از شعاع دیگرواصل‌شده باشد، همانطور که برای رفت و برگشت هواپیمای خود در جهت حرکت باد توضیح دادم وحساب‌کردم . مایکلسون امیدواربودکه بامقایسهٔ زمان برگشت دو شعاع نورانی تغییرمکان زمین را نسبت به‌اتر تعیین‌کند .

اما برخلاف تصور ، هردو شعاع در یك لحظه به منبع واصل شدند بدون‌آنکه یکی نسبت به دیگری تأخیر داشته‌باشد نتیجهٔ این آزمایش تا مدتها فیزیکدانان را متحیر ساخته بود تا اینکه **اینشتین** با ارائهٔ نظریهٔ مشهور خود راجع به نسبیت تصورات گذشتگان را دربارهٔ فضا وزمان دگرگون ساخت وعلت نتیجهٔ غیرمنتظرهٔ آزمایش مایکلسن را بیان داشت .

من تصور نمی‌کردم‌که موضوع پرواز من تا پایگاه N به نظریهٔ نسبیت اینشتین منتهی شود . شاید بگوئیدکه طرح مسئلهٔ پرواز تا پایگاه N درمقابل نظریهٔ نسبیت‌ابلهانه است اما موضوع‌آنست‌که اغلب تصور می‌کنند اثر باد در حرکت هواپیما درجهت وزش باد دررفت و برگشت‌آن خنثی می‌شود .

★

مربوط به : «**آیا شما هم می‌توانید ؟**» مندرج در یکان شمارهٔ ۲۳

✲ ـ هرگاه ارقام a و b و c و d در رابطهٔ : $a+d=b+c$ صدق‌کنند رابطهٔ زیر برقرار خواهد بود :

$$\overline{ac}+\overline{db}=\overline{ca}+\overline{bd}$$

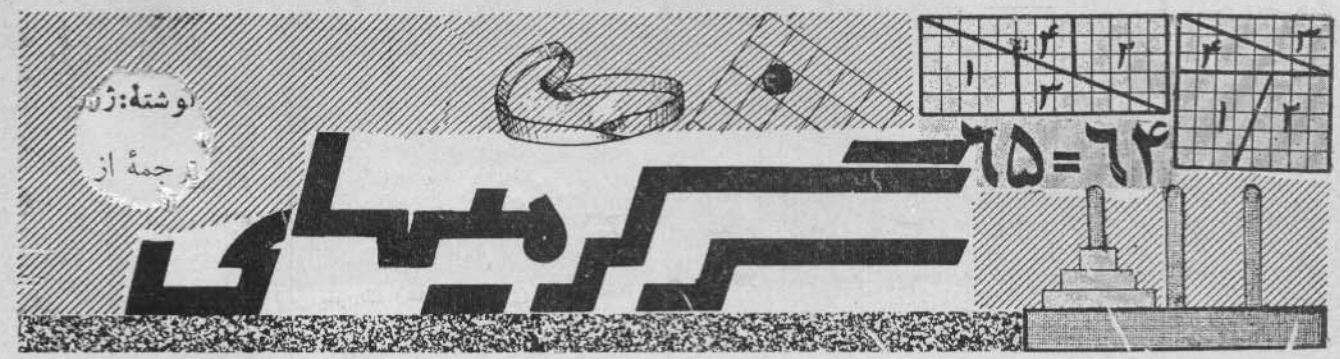
و از نوع چهار قالبی‌که در یکان شمارهٔ ۲۳ صفحهٔ ۵۰ درج شده است بیش از ۵۰ قالب بدست می‌آید .

✲ ـ هرگاه‌ارقام a و b و c و l و m و n دررابطهٔ $a+l=c+n$ صدق‌کنند دراین صورت خواهیم داشت :

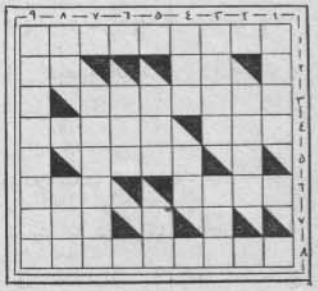
$$\overline{abc}+\overline{lmn}=\overline{cba}+\overline{nml}$$

وتعداد زیادی قالبهای ازاین نوع را خواهیم‌داشت .

مصطفی گودرزی طائمه



جدول کلمات متقاطع



طرح ازمصطفی گودرزی طائمه

افقی : ۱ـ یکی از مسائل سه گانهٔ لاینحل . ۲ـ دوثلث ازروز ـ پهلو. ۳ـ مرتبهٔ عملیات حسابی‌را یك درجه پائین می‌آورد. ۴ـ رشته ـ دایرهٔ اصلی درمختصات جغرافیائی ۵ـ به حساب ابجد اولش یکصدم آخرش است و مجموع دو حرف وسطش صد می‌باشد ۶ ـ جذرش با نصفش برابراست ـ نشانهٔ تا پایان ۷ـ در ازا . ۸ـ مشابه نگار

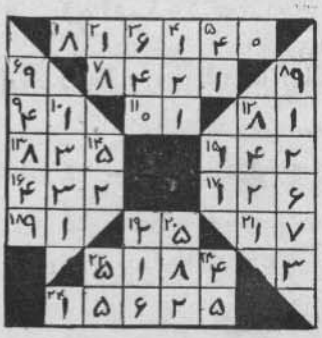
قائم: ۱ـ ریاضیدان یونانی صاحب قضیهٔ معروفی ازهندسه. ۲ـ مجموعه‌ای که دارای عمل‌داخلی شرکت‌پذیرو عنصر بی‌اثر باشد ۳ـ اگر درهم نریخته بود نسبت‌درصد آلیاژرا تعیین‌می‌کرد ـ معکوسش درحالت‌صحیح به وسیلهٔ دکارت‌ودرحالت‌منفی‌ویاکسری بوسیلهٔ والیس ودرحالت‌کلی بوسیلهٔ نیوتون وضع‌شد. ۴ـ وارونهٔ وجه ـ واحد سطح. ۵ـ خط‌الرأس ـ وجه تمایز حامل و قطعه خط . ۶ ـ یك نهم . ۷ـ وضع دونقطهٔ طرفین یك قطر. ۸ـ نیمهٔ آخر مکعب . یکم وارونه. ۹ـ یك نوع استدلال .

اختلاط چای

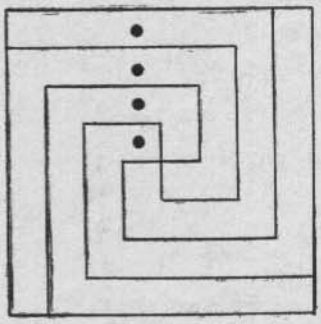
این تاجر چینی که در تصویر بالا ملاحظه می‌کنید دو صندوق مکعب شکل با ابعاد مختلف چای را که صندوق اولی محتوی چای‌سبز و صندوق دوم محتوی چای سیاه بود خریداری کرده وبعد ازآنکه چایهای‌آنها را مخلوط‌کرد توانست بیست و دو بستهٔ مکعب شکل ازنوع چای مخلوط فراهم‌آورد. نسبت اختلاط دونوع چای را تعیین‌کنید .

(سام لوید)

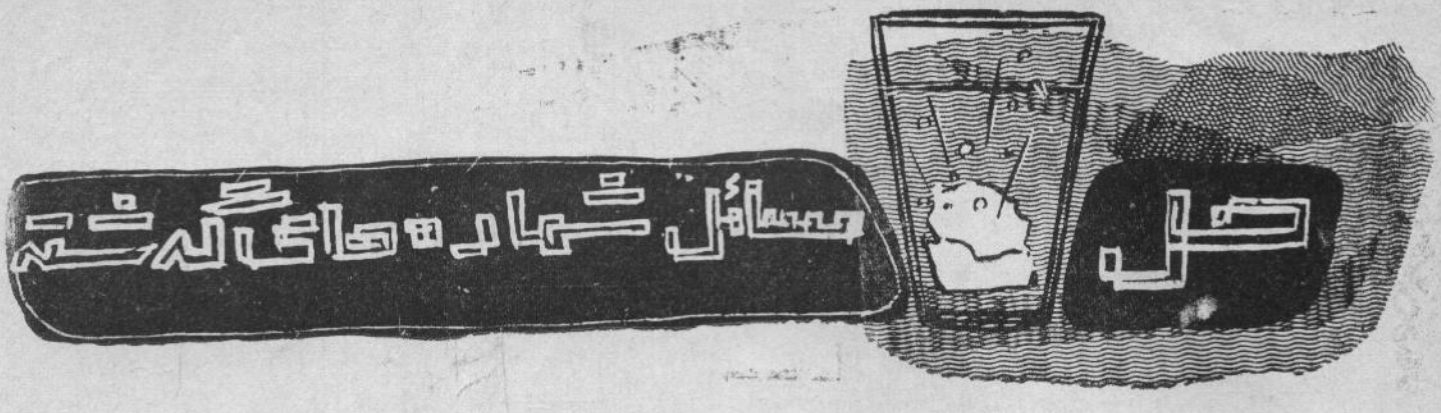
پاسخ سرگرمیهای شمارهٔ گذشته



حل جدول اعداد



پاسخ تقسیم مزرعه



اگر حل مسئله‌ای را فرستاده‌اید اما نام شما ذیل آن در این شماره درج نشده است به‌یکی ازعلل زیرمی‌باشد : راه حل انتخابی شما درست نبوده یا ناقص بوده است ، روی ورقه‌ای‌که حل مسئله‌را نوشته‌اید نام‌وکلاس‌خود را یاد داشت نکرده‌اید ، مسئلهٔ مربوط به‌کلاس‌پائین‌تر ازکلاس خود راحل‌کرده‌اید ، نامهٔ شما دیرتر ازمهلت مقرر به‌دست‌ما رسیده است .

حل مسائل یکان شمارهٔ ۲۵

۳۷۲۶ـ به‌فرض $q>1$ حاصل‌عبارت زیر راحساب‌کنید :

$$S=1+(1+q)+(1+q+q^2)+\cdots+(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$$

حل ـ هریك ازپرانتزها یك‌تصاعد هندسی‌است ومجموع S به‌صورت زیر نوشته‌می‌شود :

$$S=\frac{q-1}{q-1}+\frac{q^2-1}{q-1}+\frac{q^3-1}{q-1}+\cdots+\frac{q^n-1}{q-1}$$

یا

$$S=\frac{q\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)-n}{q-1}=\frac{q^{n+1}-q(n+1)+n}{(q-1)^2}$$

پاسخهای درست رسیده : هایدهٔ آتشرو دبیرستان‌سخن دختران ـ محسن‌ملك احمدی چهارم‌ریاضی‌دبیرستان‌حکیم‌سنائی اصفهان ـ علی اصغر شاملی ـ احمدپیوندی ـ حسن جعفری ـ محمدمقدسی ـ شاهرخ زنجانی زاده ششم‌ریاضی دبیرستان‌نادر ـ شاه مشهد ـ اکبرمظاهری چهارم‌ریاضی دبیرستان ادب اصفهان هدایت طوماریان دبیرستان هدایت سنندج ـ علیرضامیرمحمد صادق ـ جواد واقفی دبیرستان سعدی اصفهان ـ نادر پهلوان دبیرستان‌شرف ـ مهدی‌راسخ‌دبیرستان شرف ـ رضاآلانی‌دبیرستان شرف ـ عبدالله سعیدی‌دیپلمهٔ‌ریاضی ـ حسین توسلی ـ ابوالفضل آتشرو کلاس سوم دبیرستان‌دکتر محمودشیمی ـ جلال اشجعی ـ علی‌اکبر دوستدار ـ فریبرز جمشیدی ـ هرمز رضوی دبیرستان هدف شمارهٔ‌یك ـ محمد مهدی عابدی نژاد ـ داریوش آزادی دبیرستان نمازی شیراز ـ بیژن آرام دبیرستان البرز ـ جمال آشفته دبیرستان تقوی ـ حسین‌علوی ـ احمد درفش‌دار ـ محمد صادق نهاوندی چهارم‌ریاضی دبیرستان امیرکبیر زنجان ـ پرویز مرادی حقگودبیرستان هدف۱ ـ جواد جمشیدی دبیرستان‌محمد علی‌فروغی ـ نصرت نصرت‌آبادی‌دبیرستان فیروز بهرام ـ محمد رضاجمشیدی‌پنجم‌ریاضی دبیرستان علمیه ـ علی‌کولائیان ـ محمد رضاآدرنگی ـ صمد حیاتی دبیرستان‌خوارزمی۲ ـ هرتصل‌اخوان دبیرستان هدایت سنندج ـ وحیدطباطباوکیلی ـ عبدالکریم‌لیثی اصل ـ محمد رضادبیری‌فرد دبیرستان‌خوارزمی ـ عباس کشاورز ـ م. ر. آملی ـ احمدحسین زاده داداش دبیرستان شاهرضامشهد ـ فریدون کمال‌آبادی دبیرستان حافظ ـ محمدگرامه‌ای ـ محمد متولیان ـ مصطفی اخگرژند ـ محمد رضا یزدان ـ

۳۷۲۷ـ معادلهٔ زیرراحل‌کنید :

$$\log(4^{-1}\times 2^{\sqrt{x}}-1)-1=$$
$$=\log\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2\right)-2\log 2$$

حل ـ معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\log\frac{2^{\sqrt{n}-2}-1}{10}=\log\frac{\sqrt{2^{\sqrt{n}-2}}+2}{4}$$

$$\frac{2^{\sqrt{n}-2}-1}{5}=\frac{\sqrt{2^{\sqrt{n}-2}}+2}{2}$$

با فرض:

$$\sqrt{2^{\sqrt{n}-2}}=y$$

معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$2y^2-5y-12=0\Longrightarrow y=4 \text{ و } \frac{-3}{2}$$

جواب $y=\frac{-3}{2}$ غیر قابل قبول است و از $y=4$ به سادگی نتیجه می‌شود $x=36$

پاسخهای درست رسیده : هایدهٔ آتشرو ـ حجت عادلی ـ غلامرضا اصلانی دبیرستان هدف ۱ـ محمد حسن تقی‌زاده دبیرستان حکیم سنائی اصفهان ـ رضا آلانی ـ نادر پهلوان ـ امین رعایائی دبیرستان مهران زاهدان ـ غلامرضا کریمپور دبیرستان پهلوی ساری ـ فرهاد رنیا دبیرستان محمدقزوینی ـ حسن جعفری محمد مقدسی ـ جوادواقفی ـ مهدی راسخ ـ علی اکبر دوستدار ـ هرمز رضوی دبیرستان هدف ۱ـ بیژن آرام ـ حسین اسکندری ـ محمد علی طاهریون اصفهانی ـ هرتصل اخوان ـ مقصود صلاحی دبیرستان دکتر نصیری ـ علی اصغر اسکندربیاتی صمدفرهنج ـ چنگیز آزادی فریبرز جمشیدی ـ بهروز نوبهار دبیرستان جوینی قوچان ـ محمد مهدی عابدی نژاد ـ محمدحسن جباری جهرمی ـ شاهرخ فاطمی علی اصغر منتظرحقیقی ـ علی طاهری دبیرستان وحید م ر. آملی احمد حسین زاده داداش ـ فریدون کمال آبادی ـ مصطفی اخگرژند .

۳۷۲۸ـ به فرض اینکه a و b و c مقادیر مثبت باشند صحت نامساوی زیر را تحقیق کنید :

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}>\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\geqslant 3$$

حل ـ با در نظر گرفتن نامساوی :

$$\frac{a+b+c+\cdots+k}{n}\geqslant (abc\cdots k)^{\frac{1}{n}}$$

داریم :

$$\frac{\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}}{3}\geqslant\left(\frac{a}{c}\times\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

یا

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\geqslant 3$$

همچنین داریم :

$$\frac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}}{2}\geqslant\left(\frac{a^2}{b^2}\times\frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{a}{c}$$

$$\frac{\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}}{2}\geqslant\left(\frac{b^2}{c^2}\times\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{b}{a}$$

$$\frac{\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}}{2}\geqslant\left(\frac{c^2}{a^2}\times\frac{a^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{c}{b}$$

نتیجه می گیریم :

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}>\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\geqslant 3$$

پاسخهای درست رسیده : حسین علوی، فرهاد مجیدی آهی ، وحید طباطبا و کیلی ،عباس کشاورز، م .ر. آملی ،محمد گرمه‌ای .

۳۷۲۹ـ جملهٔ مستقل از x عبارت زیر را تعیین کنید :

$$\left(3x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$$

حل ـ از فرمول بینم نیوتون استفاده کرده می‌نویسیم:

$$(a-b)^m=a^m-\frac{ma^{m-1}b}{1!}+\frac{m(m-1)a^{m-2}b^2}{2!}-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}a^{m-3}b^3+\cdots(m=2k+1)$$

باید دو عدد مانند l و k طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$(3x^2)^l\times\left(\frac{1}{2x}\right)^k=k$$

یا $l+k=9$ پس $l=3$ و $k=6$ است باتوجه به فرمول بینم جملهٔ مستقل از x برابراست با :

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{6!}$$

$$\times\left(\frac{1}{2x}\right)^6(3x^2)^3=\frac{567}{16}$$

پاسخهای درست رسیده : فریدون امین‌زاده، محمد رضا یزدان ، عبدالله‌سعیدی ، چنگیز آزادی، محمد مهدی‌عابدی نژاد ، شاهرخ فاطمی ، جواد صادق اسدی دبیرستان فردوسی رضائیه ، احمدحسین‌زاده داداش .

۳۷۳۰ـ اگر معادلات :

$$x^3+ax+b=0 \quad و \quad x^3+cx+d=0$$

یك ریشهٔ مشترك داشته باشند ثابت کنید :

$$(b-d)^3=(ad-bc)(a-c)^2$$

حل ـ بافرض $x^3=y$ دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} y+ax+b=0 \\ y+cx+d=0 \end{cases} \Longrightarrow x=\frac{d-b}{a-c}$$

$$و \; y=\frac{bc-ad}{a-c}$$

داریم $y=x^3$ پس :

$$\frac{bc-ad}{a-c}=\left(\frac{d-b}{a-c}\right)^3$$

از تساوی اخیر نتیجه‌می‌شود :

$$(b-d)^3=(ad-bc)(a-c)^2$$

پاسخهای درست رسیده : هایدهٔ آتشرو ، فریدون کمال آبادی ، عبدالکریم‌لیثی‌اصل، رحیم‌جارچی‌دبیرستان‌اتحاد وحیدطباطباوکیلی ، نصرت‌نصرت‌آبادی ، احمد جلیلی‌تنها ، محمدمهدی‌عابدی‌نژاد ، تقی‌هاشمیان دبیرستان‌هدف ۱ ، محمد-علی‌طاهریون‌اصفهانی ، بیژن‌آرام، علی‌اکبردوستدار ، مهدی راسخ، جوادواقفی ، محمدمقدسی ،حسن‌جعفری،غلامرضاکریم پور ، نادر پهلوان ، رضا آلانی ، ابوالفضل آتشرو ، شاهرخ زنجانی زاده ، علیرضا میرمحمد صادق ، حجت‌الله بابائی از نوشهر، حسین توسلی ، جلال‌اشجعی، محمد صادق آقا محمدی دبیرستان و حید، مسعود نجفی ، محمد رضافرومند ازسنندج ، جمال‌آشفته، احمددرفش‌دار ،محمدرضاآدرنگی، عباس‌کشاورز فریدون امین‌زاده ، صمدحیاتی ، میرسعید لاجوردی دبیرستان البرز ، شاهرخ فاطمی، جواد صادق اسدی،احمدصفائی،م ر-آملی ، احمدحسین‌زاده‌داداش ، محمدرضایزدان ، مصطفی-اخگرژند .

۳۷۳۱ـ ثابت کنید که دومعادلهٔ :

$$\begin{cases} x^4+px^2+qx+t=0 \\ x^4+rx^2+sx+t=0 \end{cases} \quad (t\neq 0)$$

وقتی ریشهٔ مضاعف‌مشترك‌دارند که : $p=r$ و $q=s$

حل ـ ریشهٔ مضاعف مشترك دومعادله باید در معادلهٔ زیر (تفاضل‌دو معادلهٔ مفروض) صدق کند .

$$(p-r)x^2+(q-s)x=0$$

برای‌اینکه این معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد لازم و کافی است که داشته باشیم :

$$\Delta=(q-s)^2=0 \quad یا \quad q=s$$

اما دراین‌صورت معادله ریشهٔ مضاعف‌برابر باصفرخواهد داشت که در معادلات مفروض صدق‌نمی‌کند $(t\neq 0)$ بنابراین باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} \Delta=(q-s)^2=0 \\ p-r=0 \end{cases} \quad یا \quad \begin{cases} q=s \\ p=r \end{cases}$$

پاسخهای درست رسیده : هایدهٔ آتشرو، ابوالفضل آتشرو ، وحیدطباطباوکیلی ، احمد پیوندی، شاهرخ‌فاطمی ، محمدمهدی‌عابدی‌نژاد ، محمدمقدسی ، مسعود نجفی دبیرستان مهرگان‌لاهیجان،فریدون‌امین زاده ، صمدحیاتی،عباس‌کشاورز رودگری آملی.

۳۷۳۲ـ باتحقیق تساویهای :

$$1^3+2^3=9 \quad و \quad 1^3+2^3+3^3=36$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=100$$

وبااستفاده ازروش استقراء ریاضی‌حاصل زیر را حساب کنید :

$$S_n=1^3+2^3+2^3+\dots+n^3$$

حل ـ داریم:

$$1^3+2^3=3^2=(1+2)^2$$

$$1^3+2^3+3^3=6^2=(1+2+3)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2=(1+2+\dots+n)^2$$

باادامهٔ این عمل خواهیم‌داشت :

$$(1)S_n=1^3+2^3+\dots+n^3$$

$$=(1+2+\dots+n)^2$$

اکنون روش استقراء ریاضی‌را بکارمی‌بریم وثابت‌می‌کنیم که‌رابطهٔ (۱) وقتی‌که n به $n+1$ تبدیل شود بازهم برقرار است یعنی باید ثابت کنیم :

$$S_{n+1}=1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3$$

$$=[1+2+\dots+n+(n+1)]^2$$

می‌دانیم که :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

و خواهیم داشت :

$$S_{n+1}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

$$=(n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+n+1\right]$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

با توجه به :

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

رابطهٔ S_{n+1} محقق بوده و در نتیجه رابطهٔ (۱) به‌ازاء جمیع مقادیر n صحیح می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده : شاهرخ فاطمی ـ غلامرضا اصلانی ـ چنگیز آزادی ـ حجت‌عادلی ـ علی‌اکبر دوستدار ـ جمال آشفته ـ حسین‌اسکندری دبیرستان دکتر نصیری ـ جانسان بدل ـ محمدرضا آدرنگی ـ فریبرز جمشیدی ـ جواد جمشیدی ـ محسن ملك‌احمدی دبیرستان حکیم‌سنائی اصفهان ـ محمد حسن‌تقی‌زاده دبیرستان حکیم‌سنائی اصفهان ـ وحیدطباطبا وکیلی ـ علی‌اکبر مبلغ‌الاسلام دبیرستان قناد بابل ـ رضا آهنگری ـ حسین‌علوی ـ جلال اشجعی ـ محمد مهدی‌عابدی نژاد ـ شاهرخ‌زنجانی‌زاده ـ ابوالفضل آتشرو ـ نصرت‌نصرت آبادی ـ محمد مقدسی ـ احمد پیوندی ـ عبدالله‌سعیدی ـ عباس کشاورز ـ علی‌طاهری ـ م.ر. آملی.

۳۷۳۳ـ سه‌چند جمله‌ای زیرفرض می‌شود :

$$f_n(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

$$g_n(x)=1\times2+2\times3x+3\times4x^2+\cdots+n(n+1)x^{n-1}$$

$$h_n(x)=1+1^2x+2^2x^2+\cdots+n^2x^n$$

۱) تابع $F(x)$ تابع اولیهٔ $f_n(x)$ راچنان تعیین‌کنیدکه در ازاء $x=0$ برابر یك شود و از روی آن مقدار $f_n(x)$ را نتیجه بگیرید .

۲) روابط زیر را محقق کنید :

$$(1)\ g_n(x)=f'_{n+1}(x)$$

$$(2)\ h_n(x)=1+xf_n(x)+x^2f'_n(x)$$

و ازآنجا مقادیر $g_n(x)$ و $h_n(x)$ رابدست آورید.

حل ـ ۱) داریم :

$$F(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$$

$$F(x)=\frac{x(x^n-1)}{x-1}+C \qquad C=F(0)=1$$

و

$$F(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$f_n(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

$$(2)\quad f'_{(n+1)}x=2+2\times3x+3\times4x^2+\cdots+n(n+1)x^{n-1}$$

پس :

$$(1)\quad f'_{(n+1)}x=g_n(x)$$

$$(2)\quad 1+xf_n(x)+x^2f'_n(x)=1+(x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n)+[2x^2+2\times3x^3+3\times4x^4+\cdots+n(n-1)x^n]=h_n(x)$$

درنتیجه خواهیم داشت :

$$g_n(x)=\frac{n(n+1)x^{n+2}-2n(n+2)x^{n+1}+(n+1)(n+2)x^n-2}{(n-1)^3}$$

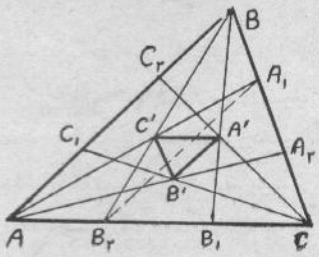
$$h_n(x)=\frac{n^2x^{n+3}-(2n^2+2n-1)x^{n+2}+(n+1)^2x^{n+1}+x^3-4x^2+2x-1}{(x-1)^3}$$

پاسخهای درست رسیده : محمد مقدسی، شاهرخ‌فاطمی احمدجلیلی‌تنها ، فرهادمجیدی‌آهی، رضا آهنگری، وحیدطباطبا ـ وکیلی ، علی‌اصغرشاملی ، م.ر آملی، محمد متولیان، مصطفی ـ اخگرژند .

۳۷۳۴ـ نقاط A_1 و A_2 روی ضلع BC ازمثلث ABC قرار دارند به‌قسمی‌که :

$$BA_1=A_1A_2=A_2C$$

وبه‌نحومشابه نقاط B_1 و B_2 برضلع CA ونقاط C_1 و C_2 بر ضلع AB قراردارند خطوط BB_1 و CC_2 یکدیگررادر A'، خطوط CC_1 و AA_2 یکدیگر را در B' خطوط AA_1 و BB_2 یکدیگررا در C' قطع می‌کنند ثابت‌کنیددو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند .



حل ـ بنابرعکس قضیهٔ تالس خط A_1B_2 با ضلع BA' از مثلث موازی می‌باشددر نتیجه دو مثلث A_1B_2C' و ABC' متشابه بوده داریم :

$$\frac{C'A_1}{C'A}=\frac{C'B_2}{C'B}=\frac{A_1B_2}{AB}=\frac{2}{3}$$

و به‌همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{B'A_2}{B'A}=\frac{B'C_1}{B'C}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{B'A_2}{B'A}=\frac{C'A_1}{C'\ \ }=\frac{2}{3}\Longrightarrow\frac{B'C'}{A_1A_2}=\frac{3}{5}$$

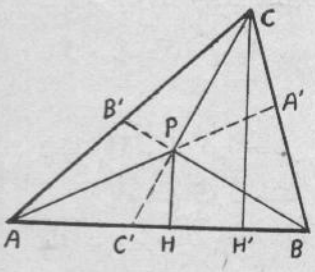
وبه‌ترتیب فوق‌بالاخره خواهیم‌داشت :

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{5}$$

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به‌نسبت پنج بریك متشابه می‌باشند (درضمن‌اضلاع این دومثلث نظیر به‌نظیر متوازیند)

پاسخهای درست رسیده: صمدحیاتی، حسین‌توسلی، احمدتوسلی جلال‌اشجعی ، م.ر. آملی ، پرویزمرادی‌حقگو دبیرستان هدف۱ جوادواقفی، محمدمقدسی، احمدجلیلی‌تنها ، فریدون‌کمال‌آبادی

۳۷۳۵ ـ در داخل مثلث ABC نقطهٔ دلخواه p را اختیارمی‌کنیم امتداد خطوط AP و BP و CP اضلاع BC و CA و AB را به‌ترتیب در A' و B' و C' قطع می‌کنند ثابت‌کنیدکه مجموع $PA'+PB'+PC'$ ازطول بزرگترین ضلع مثلث کوچکتر است .



حل ـ AB را بزرگترین ضلع مثلث فرض‌می‌کنیم‌پس $c>a$ و $c>b$ می‌شود. PH و CH' ارتفاعات مثلثهای APB و ABC می‌باشند واز تشابه دومثلث $PC'H$ و $CC'H$ داریم.

$$\frac{PC'}{CC'}=\frac{PH}{CH'}$$

مثلثهای PAB و CAB دارای قاعدهٔ مشترك‌می‌باشند پس‌نسبت ارتفاعاتشان مثل نسبت‌مساحتهااست :

$$\frac{PH}{CH'}=\frac{PC'}{CC'}=\frac{S_{PAB}}{S_{ABC}}$$

و چون $CC'<c$ پس :

$$\frac{PC'}{c}<\frac{S_{PAB}}{S_{ABC}}$$

به‌طریق متشابه داریم :

$$\frac{PA'}{c}<\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}\ \text{و}\ \frac{PB'}{c}<\frac{S_{PAC}}{S_{ABC}}$$

در نتیجه :

$$PA'+PB'+PC'<\frac{c[S_{PAB}+S_{PBC}+S_{PCA}]}{S_{ABC}}$$

یا : $PA'+PB'+PC'<c$

پاسخهای درست رسیده: م . ر . آملی ـ

۳۷۳۶ـ نیمدایره‌ای به‌قطر $AB=2R$ مفروض است نقطهٔ M رابرمحیط این نیمدایره طوری تعیین‌کنیدکه اگر P تصویر M بر AB باشد داشته‌باشیم : $AP+PM=l$ (lطول معلومی‌است). بحث

مسئله راازدوطریق محاسبه وترسیم‌حل‌کنید .

حل ـ ۱)فرض‌می‌کنیم $AP=x$ باشددراین صورت:

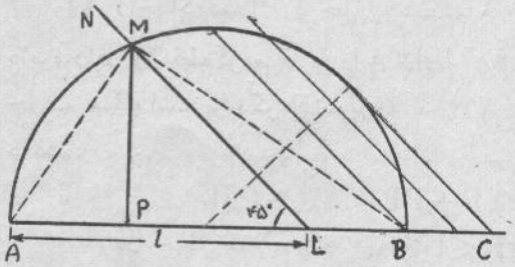
$$MP^2=x(2R-x)$$

یا : $MP=\sqrt{x(2R-x)}$

ازآنجا : $x+\sqrt{x(2R-x)}=l$

$$\sqrt{x(2R-x)}=l-x \qquad (x\leqslant l)$$

$$x(2R-x)=(l-x)^2$$



از این معادله x بدست‌می‌آید و M تعیین می‌شود :

$$(1)\quad 2x^2-2(l+R)x+l^2=0$$

بحث : Δ' معادلهٔ‌فوق‌راتشکیل می‌دهیم :

$$\Delta'=(l+R)^2-2l^2=$$
$$(l+R-l\sqrt{2})(l+R+l\sqrt{2})$$

عامل $(l+R+l\sqrt{2})$ همواره مثبت است وعلامت Δ' همان‌علامت عبارت $(l+R-l\sqrt{2})$ می‌باشد :

$$\frac{c}{a}=\frac{l^2}{2}>0\ \text{و}\ -\frac{b}{a}=l+R>0$$

جدول زیررا می‌توان تشکیل داد :

l	$-\infty$		0		$2R$		$R(1+\sqrt{2})$		$+\infty$
Δ'				$+$		$+$			
		جواب ندارد		یك جواب		دوجواب		جواب دارد	
			یك جواب		یك جواب		یك جواب		

از معادلهٔ (۱) وازجدول فوق نتیجه‌می گیریم :

به‌ازاء $l=0$ خواهیم‌داشت $x'=0$ یعنی P روی‌نقطهٔ A قراردارد .

به‌ازاء $0<l<2R$ یك‌جواب وجود داردکه از طریق ترسیم آنرا بدست می‌آوریم .

به ازاء $l=2R$ خواهیم داشت

$$\left.\begin{array}{l} x'=R \text{ یعنی P روی نقطهٔ O واقع‌است} \\ x''=2R \text{ یعنی P روی‌نقطهٔ B واقع‌است} \end{array}\right\}$$

به‌ازاء $2R<l<R(1+\sqrt{2})$ دو جواب وجود دارد

به‌ازاء $l=R(1+\sqrt{2})$ خواهیم‌داشت :

$$x'=x''=\frac{l+R}{2}=R+\frac{R\sqrt{2}}{2}$$

به‌ازاء $l>R(1+\sqrt{2})$ مسئله جواب‌ندارد

طریقهٔ ترسیم : ۱) در حالتی‌که $l<2R$ است برای پیداکردن M به این طریق عمل می‌کنیم : روی AB طول $AL=l$ راجداکرده واز L خطی چنان‌رسم می‌کنیم‌که نیم‌دایره رادر M قطع‌کرده و با AB زاویهٔ $45°$ بسازد . M جواب مسئله است‌زیرااگر P تصویر M بر AB باشدخواهیم داشت :

$$AL=AP+PL=AP+PM=l$$

۲) در حالتی‌که $2R<l<R(1+\sqrt{2})$ است از O خطی چنان‌رسم‌می‌کنیم‌که با AB زاویهٔ $45°$ ساخته ونیمدایره رادر T قطع‌نماید مماس TC رابر نیمدایره‌رسم می‌کنیم‌خواهیم داشت : $OC=R\sqrt{2}$. دراین‌حالت‌به‌ازاء هر مقدار l نقاط تقاطع خطی که‌به‌موازات TC رسم‌شده‌و قطعه خط BC راقطع می‌کند بانیم‌دایره جوابهای‌مسئله‌اند .

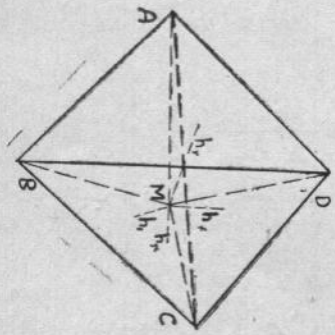
۳) در حالتی‌که $l=R(1+\sqrt{2})$ است نقطهٔ P وسط OC واقع می‌شود و $AP=R+\frac{R\sqrt{2}}{2}$ خواهدبود

تبصره : درمسئلهٔ فوق‌وقتی‌می گوئیم‌که مسئله یك‌جواب دارد این‌یك‌جواب مربوط به‌x یعنی‌فاصلهٔ P تا A است اما در حقیقت‌به‌ازاء هرجوابی‌که‌برای x بدست‌می‌آیددوجواب‌خواهیم داشت . جواب‌دیگر قرینهٔ M نسبت‌به‌عمودمنصف AB است .

پاسخهای‌درست‌رسیده : حمید حیاتی ـ محمدمتولیان محمدصادق‌آقامحمدی ـ چنگیز آزادی ـ جمال آشفته ـ محسن ملك‌احمدی ـ محمد رضایزدان ـ جسین توسلی ـ حسین‌علوی محمدحسن تقی‌زادگان ـ علیرضا میرمحمدصادق ـ داریوش آزادی محمد مقدسی ـ جوادصادق اسدی ـ احمدصفائی ـ رودگری آملی

۳۷۳۷ـ نقطهٔ M رادر فضای داخل چهار وجهی منتظم ABCD چنان تعیین‌کنید که‌حاصل‌ضرب فواصل آن‌ازچهاروجه ماکزیمم باشد .

حل ـ نقطهٔ M رادرفضای داخل چهار وجهی در نظرگرفته فواصل آنرا از وجوه ABC و ABD و BCD و ACD به ترتیب h_1 و h_2 و h_3 و h_4 ومساحت هروجه



چهاروجهی‌را s می‌نامیم. اگر h ارتفاع چهاروجهی باشدباتوجه‌به اینکه‌حجم چهاروجهی‌مفروض برابراست‌بامجموع‌حجمهای‌چهار هرم M.ABC و M.ABD و M.BCD و M.ACD خواهیم داشت :

$$sh=sh_1+sh_2+sh_3+sh_4$$

یعنی اینکه $h_1+h_2+h_3+h_4=h$ برابر مقدار ثابت‌است . بنابه‌قضایای مربوط به‌ماکزیمم ومینیمم مطلق حاصل ضرب چهارمقدارمتغیرمثبت‌که مجموع آنهامقدارثابت باشد وقتی ماکزیمم‌است‌که‌این‌چهار مقدار باهم‌برابر باشندیعنی‌داشته باشیم :

$$h_1=h_2=h_3=h_4$$

ونقطهٔ M مرکز کرهٔ‌محاطی (یامحیطی) چهاروجهی‌خواهدبود .

پاسخهای درست رسیده : صمد حیاتی ـ حسین‌محمد داودی دبیرستان هدف ۱ ـ جانسان بدل ـ نصرت نصرت‌آبادی چنگیز آزادی ـ جمال آشفته ـ احمد پیوندی ـ نادرپهلوان ـ رضا آلابی ـ مهدی راسخ ـ وحیدطباطباوکیلی ـ عبدالکریم‌لیثی‌اصل فریدون‌امین‌زاده ـ محمدرضا مشیدی ـ احمدجلیلی‌تنها ـ جواد صادق‌اسدی ـ م.ر. آملی ـ

۳۷۳۸ـ اگر a و b و c طولهای‌اضلاع و p نصف‌محیط و r و R به ترتیب شعاعهای دوایر محاطی داخلی و محیطی یك مثلث باشندبه‌فرض $R>2r$ صحت‌نامساوی زیر را تحقیق کنید:

$$abc>(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

حل ـ داریم :

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

به فرض $R>2r$ خواهیم داشت :

$$\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}>\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

که پس از اختصار به صورت نامساوی داده شده درمی‌آید

پاسخهای درست رسیده : هایدهٔ آتشرو ـ حسین اسکندری ـ مهدی راسخ ـ احمد پیوندی ـ مقصود صلاحی حسین توسلی ـ محمدحسن فرزین چهارم ریاضی دبیرستان ادیب ـ علی‌اصغر اسکندر بیاتی ـ محمد حسن جباری جهرمی جمال آشفته ـ فریدون امین‌زاده ـ جانسان بدل ـ صمد حیاتی حسن جعفری ـ ابوالفضل آتشرو ـ احمد جلیلی تنها ـ محمد مهدی عابدی‌نژاد ـ محمد مقدسی ـ محسن ملك احمدی ـ شاهرخ فاطمی ـ هرمز رضوی ـ پرویز بابائی دبیرستان البرز ـ حجت عادلی ـ مهرداد معتمد گرجی دبیرستان البرز ـ داریوش آزادی نادرمروزی یزدان پناه دبیرستان البرز ـ حسین علوی ـ محمد حسن تقی‌زاده ـ عباس کشاورز ـ جواد صادق اسدی ـ علی‌طاهری علی‌اصغر شاملی ـ نادرپهلوان ـ رضا آلانی ـ نصرت نصرت‌آبادی وحید طباطبا وکیلی ـ م.ر. آملی ـ فریدون کمال‌آبادی ـ محمد گرمه‌ای ـ احمد حسین‌زاده داداش ـ محمد متولیان ـ سید رضا برکچیان ـ محمدرضا یزدان دبیرستان قریب ـ مصطفی اخگرژند

۳۷۳۹ـ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیررا حل کنید

$$\begin{cases}\operatorname{Arcsin}x\cdot\operatorname{Arcsin}y=\dfrac{\pi^2}{12}\\[2mm]\operatorname{Arccos}x\cdot\operatorname{Arccos}y=\dfrac{\pi^2}{24}\end{cases}$$

حل :

$$\begin{cases}\operatorname{Arcsin}x=\alpha\\ \operatorname{Arcsin}y=\beta\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\operatorname{Arccos}x=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\\[2mm]\operatorname{Arccos}y=\dfrac{\pi}{2}-\beta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha\beta=\dfrac{\pi^2}{12}\\[2mm](\dfrac{\pi}{2}-\alpha)(\dfrac{\pi}{2}-\beta)=\dfrac{\pi^2}{24}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\alpha\beta=\dfrac{\pi^2}{12}\\[2mm]\alpha+\beta=\dfrac{7\pi}{12}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\pi}{3}\\[2mm]\beta=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2mm]y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

چون معادلات نسبت به x و y متقارنند پس جواب :

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{و}\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

را نیز خواهیم داشت :

پاسخهای درست رسیده ـ آفری تاج‌الدینی ـ احمد پیوندی ـ صمد حیاتی ـ مقصود صلاحی ـ نادر پهلوان ـ رضا آلانی ـ جمال آشفته ـ رضا آهنگری ـ داود شیبانی ـ فرهاد مجیدی آهی ـ علی‌اصغر منتظر حقیقی ـ جواد صادق اسدی احمد صفائی ـ علی کولائیان ـ احمد درفش دار ـ غلامرضا رحیمی درآبادی ـ عبدالکریم لیثی اصل ـ مهدی راسخ ـ شاهرخ فاطمی ـ داریوش آزادی ـ نصرت نصرت‌آبادی ـ وحید طباطبا وکیلی م.ر. آملی ـ فریدون کمال‌آبادی نصرالله سودمندی ـ مصطفی اخگرژند

۳۷۴۰ـ درصورتی که داشته باشیم :

$$\begin{cases}A+B+C=\dfrac{\pi}{2}\\ \sin A=\sin\alpha\cos\beta\\ \sin B=\sin B\cos\gamma\\ \sin C=\sin\gamma\cos\alpha\end{cases}$$

ثابت کنید که :

$$\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma=1$$

حل ـ داریم :

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C+2\sin A\sin B\sin C=1$$

پس :

$$\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\cos^2\alpha=1-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

طرفین تساوی اخیر را بر :

$$\sin^2\gamma \sin^2\alpha \sin^2\beta$$

تقسیم کرده وسینو-هارا بر حسب کتانژانت می‌نویسیم پس از اختصار خواهیم داشت :

$$(\cot g\alpha \cot g\beta \cot g\gamma - 1)^2 = 0$$

در نتیجه :

$$\cot g\alpha \cot g\beta \cot g\gamma = 1$$

پاسخهای درست رسیده : شاهرخ فاطمی- محمدرضا جمشیدی - فرهاد حیدرنیا دبیرستان محمد قزوینی- جمال آشفته احمد درفش‌دار - داریوش آزادی - عیسی فخرذاکری دبیرستان صفوی اردبیل - وحید طباطبا وکیلی - غلامحسین اسداللهی صمد فرهنج - علی‌اصغرشاملی - نادر پهلوان- رضاآلانی- مهدی راسخ - م.ر. آملی .

۳۷۴۱- ثابت کنید که در هر مثلث رابطهٔ زیر بر قرار است .

$$\sin 2A(\cos^2 B + \cos^2 C) + \sin 2B(\cos^2 C + \cos^2 A) + \sin 2C(\cos^2 A + \cos^2 B) = 2\sin A \sin B \sin C$$

حل داریم :

$$\sin 2A\left(\frac{\cos 2B + 1 + \cos 2C + 1}{2}\right) + \sin 2B\left(\frac{\cos 2C + 1 + \cos 2A + 1}{2}\right) + \sin 2C\left(\frac{\cos 2A + 1 + \cos 2B + 1}{2}\right) = \frac{1}{2}[\sin(2A+2B) + \sin(2A+2C) + \sin(2B+2C)] + 4\sin A \sin B \sin C = 4\sin A \sin B \sin C - 2\sin A \sin B \sin C = 2\sin A \sin B \sin C$$

پاسخهای درست رسیده: رضاآلانی - نادر پهلوان محمدرضاجمشیدی - نصرت نصرت‌آبادی - جانسان بدل- احمد درفش دار - جمال‌آشفته - فرهاد حیدرنیا - شهرام ذکاوتی دبیرستان هدف ۳- حسین توسلی- سعیدفرشاد- عیسی فخرذاکری چنگیز آزادی - علی اصغرمنتظرحقیقی - داودحسینی - وحید طباطبا وکیلی - داریوش آزادی - غلامحسین اسداللهی - صمد فرهنج - علی اصغر شاملی - مهدی راسخ- م.ر.آملی - فریدون کمال‌آبادی - محمد متولیان - مصطفی اخگرژند.

۳۷۴۲- عدد چهاررقمی چنان تعیین کنید که اگر ۳۶۹ واحد برآن بیفزائیم دو برابر مقلوب‌آن بدست‌آید .

حل داریم:

$$\overline{abcd} + 369 = 2(\overline{dcba})$$

$$1000a + 100b + 10c + d + 369 = 2000d + 200c + 20b + 2a$$

بطوری‌که از تساوی بالا معلوم است باید d فرد باشد ازطرفی حداکثر مقداری‌که طرف اول تساوی فوق می‌تواند داشته باشد مساوی است با :

$$9000 + 900 + 90 + 9 + 369 = 10368$$

پس $d<5$ پس ۵ و ۳ و ۱ $= d$ می‌تواند باشد .

به ازای $d=1$ نتیجه می‌شود $a=5$ وداریم :

$$300 + 8b + 36 = 19c$$

تساوی اخیر غیرممکن است .

به ازای $d=3$ نتیجه می‌شود ۶ و ۱ $= a$ و اگر $a=1$ قرار دهیم داریم :

$$467 + 19c = 8b$$

که غیرممکن است واگر $a=6$ قراردهیم نتیجه می‌شود:

$$8b + 36 = 19c$$

از رابطهٔ اخیر جواب $c=4$ و $b=5$ بدست می‌آید پس

$$\overline{abcd} = 6543$$

به ازای $d=5$ داریم : ۷ و ۲ $= a$ و اگر $a=2$ قرار دهیم می‌شود :

$$8b + 37 = 800 + 19c$$

که غیرممکن است .

اگر $a=7$ قرار دهیم می‌شود :

$$8b = 264 + 19c$$

که غیر ممکن است .

پس تنها جواب مسئله همان : $N=6543$ می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده : جمال آشفته ، احمد پیوندی ، جانسان بدل ، شاهرخ فاطمی ، ابوالفضل آتشرو فریبرز جمشیدی ، نصرت نصرت‌آبادی ، وحید طباطبا وکیلی م.ر آملی ، اسحق عبدالله پور سپاهی دانش ، مصطفی اخگرژند

۳۷۴۳- مطلوبست تعیین عدد $\overline{xyyx}$ که داشته باشیم:

$$\overline{xyyx} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$$

حل داریم :

$$1001x + 110y = 121(x^2 + y^2)$$

$$91x + 10y = 11(x^2 + y^2)$$

باید $(3x - y)$ مضرب ۱۱ باشد پس :

$$y = 3x \text{ و } y = 3x - 11 \text{ و } y = 3x - 22$$

به ازای $y=3x$ داریم :

$11x=10x^2$ که جواب ندارد

به ازای $y=3x-11$ داریم :

$10x^2+131+77x=0$ جواب ندارد

به ازای $y=3x-22$ داریم :

$10x^2+504=143x$

باید x زوج باشد و چون x زوج است پس طرف اول بر ۸ بخش پذیر است یعنی $x=8$ و $y=2$ پس :

$N=8228$

پاسخهای درست رسیده : جمال آشفته ، محمدعلی‌ـ طاهریون‌اصفهانی،محمد مقدسی ، محمد حسن جباری جهرمی شاهرخ‌فاطمی، وحید طبا طبا وکیلی ، ابوالفضل آتشرو.

۳۷۴۴ـ n عددی است‌که‌با عدد۵۱ اول است.

اولا ـ ثابت‌کنید برای آنکه عبارت $n(n+51)$ مربع کامل باشد باید اعداد n و $n+51$ مربع‌کامل باشند

ثانیاً مقدار n چنان تعیین‌کنیدکه $n(n+51)$ مربع کامل باشد .

حل‌ـ اولا n و $(n+51)$ نسبت به هم اولند زیرااگر مقسوم علیه مشترکی داشته باشند باید این مقسوم علیه مشترك تفاضل آنها یعنی ۵۱ را بشمارد و چون n را نیز می‌شمارد و n با ۵۱ اول است پس این مقسوم علیه مشترك باید مساوی ۱ باشد .

درنتیجه برای‌آنکه $n(n+51)$ مربع کامل باشد باید $n=x^2$ و $n+51=y^2$ هردو مربع‌کامل باشند .

ثانیاً داریم :

$$y^2-x^2=51=1\times 51=3\times 17$$

$$\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=51 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y-x=3 \\ y+x=17 \end{cases}$$

از دستگاههای بالا جوابهای $n=49$ و $n=625$ بدست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده : جمال آشفته ، وحید ـ طباطبا وکیلی ، مصطفی اخگرژند.

۳۷۴۵ـ اگر m عدد اول باشد ثابت‌کنید عبارت زیر بر m بخش‌پذیر است.

(m با a و b اول است)

$$S=a^{m-2}+a^{m-3}b+a^{m-4}b^2+\dots+b^{m-2}$$

حل ـ داریم :

$$S=\frac{a^{m-1}-b^{m-1}}{a-b}$$

اما طبق قضیهٔ فرما داریم :

$$a^{m-1}-1=mp \quad \text{و} \quad b^{m-1}-1=mp'$$

(m عدد اول است)

پس :

$$S=m\,\frac{p-p'}{a-b}$$

چون S عددی است صحیح و m عدد اول است و نمی‌تواند بر $(a-b)$ بخش‌پذیر باشد (درحالتی‌که $a-b>1$ است) پس $\frac{p-p'}{a-b}$ مساوی عدد صحیح بود درنتیجه S بر m بخش‌پذیر است .

پاسخهای درست رسیده : هایدهٔ آتشرو ، جمال آشفته ، ابوالفضل آتشرو.

۳۷۴۶ـ تلمبهٔ تخلیه و تراکمی است‌که حجم مخزن استوانهٔ‌آن برابر است با C. سوپاپ S این تلمبه را به محفظهٔ A و سوپاپ S′ آن را به محفظهٔ B متصل می‌کنیم . حجم هر یك از این دو محفظه برابر است با R . در ابتدای آزمایش پیستون تلمبه در انتهای مسیر خود می‌باشد (حجم هوای داخل مخزن استوانه صفر است) وهریك ازدو محفظهٔ محتوی هوا با فشار H می‌باشد. پیستون را به‌آرامی وبه طورکامل بالامی‌کشیم سپس به‌آهستگی‌آنرا پایین می‌آوریم . به این ترتیب مقداری هوا ازمحفظهٔ A خارج ودرمحفظهٔ B وارد می‌شود. عمل بالا و پائین کشیدن پیستون را n مرتبه تکرار می‌کنیم. دراین هنگام فشار هوای محفظهٔ A و فشار هوای محفظهٔ B چقدر است ؟ اگر n به سمت ∞ میل‌کند فشار هوای هر یك از دو محفظه چقد خواهد شد ؟

حل‌ـ وقتی‌که پیستون را به‌آرامی بالامی‌کشیم مقداری هوا از محفظهٔ A وارد مخزن استوانه می‌شود.چون پیستون را پائین‌ببریم‌هوایی‌که در آن وارد شده بود به محفظهٔ B هدایت می‌شود .

محفظهٔ A‌ـ حجم هوا در مخزن A در ابتدا برابر R وفشار هوا برابر H_0 است . وقتی‌که پیستون را بالا می‌بریم حجم هوا برابر $R+C$ و فشارش برابر H_1 است . طبق قانون ماریوت :

$$H_1=\frac{H_0R}{R+C}$$

اگر n بار پیستون را بالا ببریم فشار هوا در داخل محفظهٔ A :

$$H_n=H\left(\frac{R}{R+C}\right)^n$$

محفظهٔ B ـ درnامین ضربه حجم هوای مخزن استوانه برابراست باC و فشارهوای آن برابراست با :

$$H_\circ(\frac{R}{R+C})^n$$

(زیرا فشار هوای آن بافشار هوای محفظهٔ A برابر است؟) . وقتی که پیستون‌را پائین ببریم هوای آن واردمحفظه B می‌شود وفشارآن طبق‌قانون فشارهای جزیی به‌فشار هوای محفظهٔ B افزوده‌می‌شود. اما فشارهوای مخزن‌استوانه پس‌ازورودبه‌محفظهٔ B برابرخواهد شد با H_n وحجم‌آن‌برابر R خواهدشد.طبق قانون ماریوت :

$$H_n=\frac{C}{R}H_\circ(\frac{R}{R+C})^n$$

بنابراین فشار هوای محفظهٔ B برابراست با :

$$H'_n=H_n+H'_{n-1}$$

که H'_{n-1}فشارهوای‌محفظهٔ B است‌قبل‌ازآنکه‌هوای‌مخزن برای nامین بار واردآن‌شود . می‌توان فشارهوای محفظهٔ B را متدرجاً بدست آورد .

$$H'_1=\frac{CH_\circ}{R}(\frac{R}{R+C})+H_\circ$$

$$H'_2=\frac{CH_\circ}{R}(\frac{R}{R+C})^2+H'_1$$

$$H'_3=\frac{CH_\circ}{R}(\frac{R}{R+C})^3+H'_2$$

.....

$$H'_{n-2}=\frac{CH_\circ}{R}(\frac{R}{R+C})^{n-2}+H'_{n-3}$$

$$H'_{n-1}=\frac{CH_\circ}{R}(\frac{R}{R+C})^{n-1}+H'_{n-2}$$

$$H'_n=\frac{CH_\circ}{R}(\frac{R}{R+C})^n+H'_{n-1}$$

اگر این تساویها را جزءبه‌جزء باهم جمع کنیم‌خواهیم داشت :

$$H'_n=\frac{CH_\circ}{R}\times\frac{R}{R+C}[1+\frac{R}{R+C}+(\frac{R}{R+C})^2+\dots+(\frac{R}{R+C})^{n-1}]+H_\circ$$

جمله‌های داخل کروشه یك‌تصاعد هندسی تشکیل‌می‌دهند که مجموع آن برابراست با :

$$\frac{R+C}{C}[1-(\frac{R}{R+C})^n]$$

بنابراین :

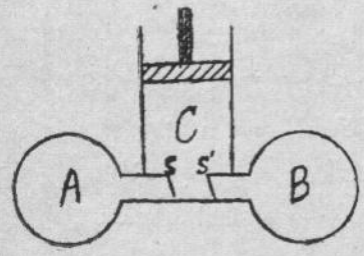
$$H'_n=2H_\circ-H_\circ[1-(\frac{R}{R+C})^n]+H_\circ$$

یا

$$H'_n=2H_\circ-H_\circ(\frac{R}{R+C})^n$$

وقتی‌که n به‌سمت بینهایت میل کند H'_n به سمت $2H_\circ$ میل می‌کند دراین هنگام تمام هوای محفظهٔ A وارد محفظهٔ B شده است .

عملاً این حالت امکان‌پذیر نیست زیرا اولاً وقتی که‌فشارهوای محفظهٔ A کم‌می شود، فشارهوای‌خارج موجب می‌شود که مقداری هوا از مجاور پیستون در مخزن استوانه‌وازآنجا



به محفظهٔ A (ازجدار S) واردشود ؛ ثانیاً درهرمرتبه‌وقتی‌که پیستون‌را پایین می‌بریم همهٔ‌هوای داخل‌مخزن وارد محفظهٔ B نمی‌شود و مقداری‌ازآن درفضای‌کوچکی‌که دریچه درآن قرار گرفته متراکم می‌شود . به‌این ترتیب وقتی‌که فشارهوای‌محفظهٔ A به۳ یا۲ سانتیمتر جیوه‌رسید عمل‌تخلیه متوقف می‌شود .

پاسخ درست رسیده : مصطفی‌اخگرژند

۳۷۴۷ـ مداری است مطابق‌شکل زیر که‌درآن مقاومتها عبارتند از :

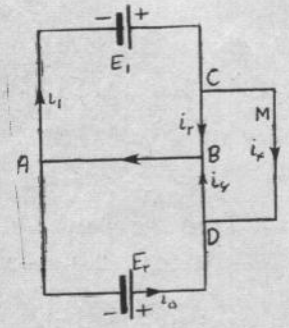
$$CMD=AB=BC=BD=1\Omega$$

$$AE_1C=AE_2D=2\Omega$$

و نیروی محرکهٔ پیلها به ترتیب عبارتند از :

$$E_2=1v \text{ و } E_1=2v$$

شدت جریان وجهت آنرا درهریك ازشاخه‌ها پیدا کنید .



حلـ فرض می‌کنیم که جهت‌جریان‌در هریك‌از شاخه‌ها مطابق شکل باشد : قانون کیرشوف را در بارهٔ مدارهای AE_1CBA و $ABDE_2A$ و DBCMD می‌نویسیم .

$$(1)\quad 2i_1-2+i_2+i_3=0$$

$$(۲)\quad -i_۳-i_۶-۲i_۵+۱=۰$$
$$(۳)\quad i_۶-i_۲+i_۴=۰$$

در نقاط C ، B ، D نیز داریم :

$$(۴)\quad i_۱=i_۲+i_۴$$
$$(۵)\quad i_۲+i_۶=i_۳$$
$$(۶)\quad i_۵+i_۴=i_۶$$

از حل این معادلات نتیجه‌می‌شود :

$$i_۱=\frac{۱۸}{۳۵}\ \text{و}\ i_۲=\frac{۱۳}{۳۵}\ \text{و}\ i_۳=\frac{۲۱}{۳۵}$$

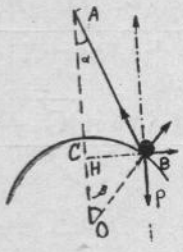
$$\text{و}\ i_۴=\frac{۵}{۳۵}\ \text{و}\ i_۵=\frac{۳}{۳۵}\ \text{و}\ i_۶=\frac{۸}{۳۵}$$

پاسخ درست رسیده : رودگری آملی-

۳۷۴۸- توپ کوچك P از نقطهٔ A بوسیلهٔ ریسمان AB آویزان شده است . این توپ برسطح کروی مانندی به‌شعاع r تکیه‌دارد. هرگاه فاصلهٔ نقطهٔ آویز A تاروبهٔ کره $AC=d$ وطول ریسمان $AB=l$ باشد معیین کنید .

۱) نیرویی که برریسمان واردمی‌شود.

۲) نیرویی که سطح کروی برتوپ کوچك واردمی کنداز شعاع توپ‌صرف‌نظر می‌شود .



حل- نیروهای وارد برگلوله عبارتند از :

نیروی وزن گلوله ؛ نیروی کشش ریسمان ؛ نیروی عکس‌العمل سطح .

جهت این‌سه‌نیرو درشکل نشان داده شده است .

می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} T\sin\alpha-N\sin\beta=۰ \\ T\cos\alpha+N\cos\beta-P=۰ \end{cases}$$

یا :

$$\begin{cases} T\dfrac{BH}{AB}-N\dfrac{BH}{OB}=۰ \Longrightarrow \dfrac{T}{l}=\dfrac{N}{r} \\ T\dfrac{AH}{AB}+N\dfrac{OH}{OB}=P \end{cases}$$

رابطهٔ دوم به‌صورت زیر نوشته می‌شود

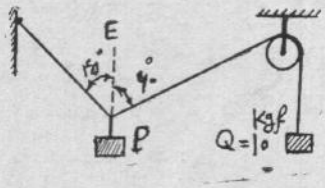
$$\frac{T}{l}AH+\frac{N}{r}OH=P \Longrightarrow$$

$$\frac{T}{l}(AH+OH)=P$$

$$T=P\frac{l}{r+d}\ \text{و}\ N=P\frac{r}{r+d}$$

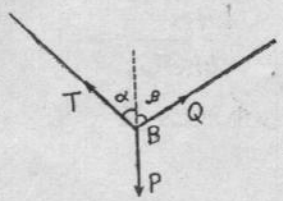
پاسخهای درست رسیده: مصطفی اخگر ژند. رودگری آملی

۳۷۴۹- ریسمانی که یك‌سرش درنقطهٔ A به‌دیوار وصل شده وبه‌سردیگرش وزنهٔ $Q=۱۰kgf$ بسته شده‌است برقرقرهٔ ثابتی متکی است اگر بین‌قرقره ودیوار وزنهٔ P کیلوگرمی به ریسمان آویزان کنیم به‌طوری که تعادل دو وزنه در طرفین قرقره



برقرار شود دو زاویه‌ای که بین ریسمان و امتداد قائم BE (امتداد نیروی P) تشکیل می‌شود به‌ترتیب °۴۵ و °۶۰ می‌باشد . معین‌کنید اندازهٔ نیروی P را . ازوزن‌نخ‌واصطکاك قرقره صرف نظرمی‌کنیم .

حل- نیروهای وارد بر نقطهٔB (نقطه‌ای از ریسمان است که‌وزنهٔ P به‌آن‌متصل‌شده‌است) عبارتند از : نیروی $\vec{P}$ ؛



نیروی $\vec{Q}$ ونیروی $\vec{T}$ نقطهٔ B به‌حال‌تعادل‌است‌می‌توان‌نوشت:

$$(۱)\quad T\cos\alpha+Q\cos\beta=P$$
$$(۲)\quad T\sin\alpha=Q\sin\beta$$

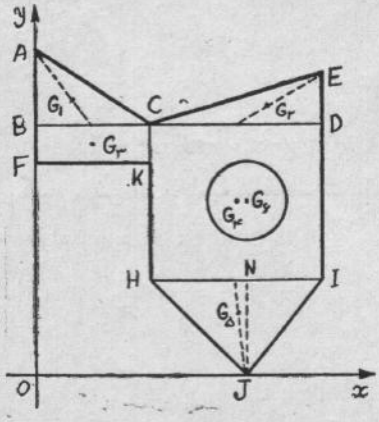
باحذف T از دو معادله‌وپس‌ازساده کردن‌خواهیم‌داشت:

$$P=Q\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$

داریم $\alpha=۴۵^\circ$ و $\beta=۶۰^\circ$. $Q=۱۰Kgf$

بنابراین $P=۱۳/۷kgf$

حل ۳۷۵۰- صفحه را به‌اجزای ساده‌ای‌تقسیم می‌کنیم که مراکز ثقل آنها به آسانی بدست می‌آید : مرکز ثقل مثلث ABC نقطهٔ $G_۱$ است . مرکزثقل مثلث CDE نقطهٔ $G_۲$است. مرکز ثقل مستطیل BCKF نقطهٔ $G_۳$ است.مرکزثقل مستطیل CDIH نقطهٔ $G_۴$ است . مرکز ثقل



مثلث HIJ نقطهٔ G_5 است . مرکز دایرهٔ توخالی نقطهٔ G_6 است .

فرض می‌کنیم‌که تراکم سطحی‌این جسم یك باشدبنابراین وزن هر جزء آن با مساحتش برابر است .

جدول مقابل را ترتیب می‌دهیم :

جزء	مساحت (ووزن)	مختصات مرکز ثقل
مثلث ABC	$\frac{1}{2}\times 40\times 60 = 1200$	$G_1 : x_1 = 20$ و $y_1 = \frac{430}{3}$
مثلث CED	$\frac{1}{2}\times 90\times 28 = 1260$	$G_2 : x_2 = 120$ و $y_2 = \frac{418}{3}$
مستطیل BCKF	$20\times 60 = 1200$	$G_3 : x_3 = 30$ و $y_3 = 120$
مستطیل توپر CDIH	$80\times 90 = 7200$	$G_4 : x_4 = 105$ و $y_4 = 90$
مثلث HIJ	$\frac{1}{2}\times 90\times 50 = 2250$	$G_5 : x_5 = \frac{320}{3}$ و $y_5 = \frac{100}{3}$
دایرهٔ توپر	$\pi\times 400 \neq 1256$	$G_6 : x_6 = 110$ و $y_6 = 90$

مرکز ثقل جزء CDIH منهای دایره‌ای که در آن است ـ فرض می‌کنیم‌که نقطهٔ g باشد . این نقطه ازرابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$(\text{جرم CDIH توخالی})\times\overrightarrow{OG_4} = (\text{جرم CDIH پر})\times\overrightarrow{Og} + (\text{جرم دایره})=\overrightarrow{Og_6}$$

یا

$$7200\overrightarrow{OG_4} = (7200-1256)\overrightarrow{og} + 1256\overrightarrow{OG_6}$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$5944\overrightarrow{Og} = 7200\overrightarrow{OG_4} - 1256\overrightarrow{OG_6}$$

مرکز ثقل دستگاه از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1200\overrightarrow{OG_1}+1260\overrightarrow{OG_2}+1200\overrightarrow{OG_3}+2250\overrightarrow{OG_5}+5944\overrightarrow{Og}}{1200+1260+1200+2250+5944}$$

$$= \frac{200\overrightarrow{OG_1}+1260\overrightarrow{OG_2}+1200\overrightarrow{OG_3}+2250\overrightarrow{OG_5}+7200\overrightarrow{OG_4}-1256\overrightarrow{OG_6}}{11854}$$

اگر مختصات تصاویر نقطهٔ G را روی‌محورهای x و y به‌ترتیب‌به X و Y نمایش دهیم خواهیم داشت :

$$X = \frac{1200x_1+1260x_2+1200x_3+2250x_5+7200x_4-1256x_6}{11854}$$

و نظیر همین معادله را در بارهٔ Y داریم . با بکاربردن مقادیر عددی مختصات نقطه G بدست می‌آید :

$X = 90/18$ mm

$Y = 92/92$ m·m

۲ ـ مرکز ثقل جسم جامد را نیز به طریق فوق حساب کنید . پس از محاسبه ، مختصات نقطهٔ G مرکزثقل آن‌عبارت خواهد بود از :

$X = 32/0$ mm

$Y = 44/9$ mm

$Z = 39/8$ mm

۳۷۵۱ ـ مترونومی تشکیل شده است از تیغهٔ AB به جرم ناچیز که حول محورافقی O می‌تواند نوسان‌کند جرم M به نقطهٔ A انتهای تیغه ثابت است و می‌توان آنرا دراین نقطه متمرکز دانست . جرم m که ابعاد آن‌کوچك است می‌تواند روی تیغه بلغزد و به فاصلهٔ x از نقطهٔ O قرارگیرد . زمان تناوب دستگاه را بر حسب M ، m ، x ، d و g بدست‌آورید اگر $x=d$ فرض شودزمان تناوب چقدر خواهد شد؟ به ازاء چه مقداری از x زمان تناوب بینهایت می‌شود .

حل ـ این یك آونگ مرکب است‌که زمان تناوب آن از رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mag}}$ (۱) بدست می‌آید .

I ممان‌اینرسی (گشتاورماند) دستگاه است نسبت به‌نقطهٔ O وبرابراست‌با؛

$$I = \Sigma mr^2 = Md^2 + mx^2$$

a فاصلهٔ نقطهٔ O است از مرکز ثقل G و می‌توان آن را چنین حساب کرد :

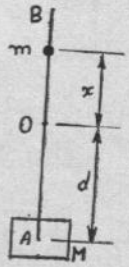
$$m\cdot g\cdot(x+a)=M\cdot g(d-a)\Longrightarrow$$

$$a=\frac{|Md-mx|}{m+M}$$

و M جرم کل دستگاه است که در این مسأله برابر است با M+m . با بکار بردن این مقادیر در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\times\frac{Md^2+mx^2}{|Md-mx|}}$$

اگر x=d شود :

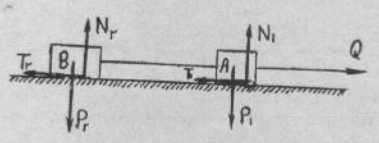


$$T=2\pi\sqrt{\frac{d}{g}\cdot\frac{M+m}{M-m}}$$

و برای اینکه زمان تناوب بینهایت شود باید $Md-mx=0$ یا $x=\frac{M}{m}d$ باشد .

پاسخ درست رسیده از رودگری آملی

۳۷۵۲ ـ دووزنه p_1 و p_2 توسط ریسمانی به یکدیگر متصلند . دستگاه ، در امتداد سطحی افقی ، تحت‌اثرو درجهت نیروی ثابت Q که در امتداد جاده به وزنهٔ جلویی واردمی‌شود حرکت می‌کند .ضریب اصطکاك وزنه‌ها روی سطح برابر است با k . شتاب حرکت دستگاه وکشش نخ را بدست آورید .



حل ـ نیروهای مؤثر بر دستگاه عبارتند از :

$\vec{Q}$ در امتداد سطح ؛ $\vec{p_1}$ و $\vec{p_2}$ عمود بر سطح ؛

$\vec{N_1}$ و $\vec{N_2}$ مؤلفه‌های قائم واکنش‌صفحه درمقابل حرکت دو وزنه ؛

$\vec{T_1}$ و $\vec{T_2}$ مؤلفه‌های افقی واکنش صفحه در در مقابل حرکت دو وزنه (نیروهای اصطکاك دو وزنه) ؛

شتاب حرکت دستگاه γ است . طبق اصل اساسی‌دینامیك می‌توان نوشت (از تصویر نیروها در امتداد افقی) :

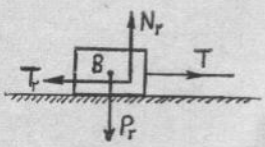
$$Q-f(p_1+p_2)=(\frac{p_1}{g}+\frac{p_2}{g})\gamma$$

زیرا $T_1=fp_1$ و $T_2=fp_2$. از رابطهٔ فوق داریم :

$$\gamma=(\frac{Q}{p_1+p_2}-f)g$$

هنگامی وزنه‌ها حرکت می‌کنند که $f<\frac{Q}{p_1-p_2}$ باشد .

کشش نخ برابر است با T .



طبق اصول اساسی دیناميك می‌توان نوشت :

$$T-fp_2=\frac{p_2}{g}\gamma$$

یا

$$T=\frac{Qq_2}{p_1+p_2}$$

کشش نخ را می‌توانیم از توجه به وزنهٔ A نیز بدست آوریم :

$$Q-T-fp_1=\frac{p_1}{g}\gamma$$

از این رابطه نیز حاصل می‌شود :

$$T=\frac{Q\,p_2}{p_1+p_2}$$

چیزی که جالب است‌این است‌که کشش نخ بستگی‌به‌ضریب اصطکاك ندارد ؛ و اگر وزن دستگاه مقدار معینی باشد هر چه وزن عقبی سنگینتر باشد نیروی کشش بیشتر است . به همین‌علت است که درقطارهاهمیشه واگون سنگینتررانزدیکتر به‌لوکوموتیو می‌بندند

پاسخهای درست رسیده : رودگری آملی ـ مصطفی اخگرژند.

۳۷۵۳ ـ ۰/۵۸ گرم از یك جسم آلی مرکب ازکربن و هیدروژن و اکسیژن را با اکسید سیاه مس می‌سوزانیم اضافه وزن ظروف پتاس ۱/۳۲ گرم می‌شود واکسید مس ۱/۲۸ گرم نقصان‌وزن پیدا می‌کندتعیین کنید فرمول‌جسم آلی را درصورتی که چگالی به حالت بخار جسم آلی نسبت به ۲ است :

حل ـ وزن مولکولی جسم

$$M=29d=29\times2=58$$

تعداد کربن

$$\frac{M}{m}=\frac{44x}{m\cos2}\qquad\frac{58}{0/58}=\frac{44x}{1/32}\qquad x=3$$

$$C_3H_y O_z + \frac{(6+\frac{y}{2}-Z)O_2}{2} \rightarrow 3CO_2 + \frac{y}{2}H_2O$$

$$3\times 12 + y + 16Z = 58 \qquad (1)$$

جسم آلی

۵۸	$16(6+\frac{y}{2}-Z)$
۰/۵۸	۱/۲۸

$$16(6+\frac{y}{2}-z) = 128 \quad (2)$$

از حل دو معادلهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $y=6$ و $Z=1$ و فومول جسم C_3H_6O می‌شود .

پاسخهای رسیده : مصطفی‌اخگرژند ـ علی‌اصغرمنتظر حقیقی ـ رودگری آملی :

۳۷۵۴ ـ اکی والان‌گرم فلزی ۶۹/۶۶۷ و حرارت ویژهٔ آن۰/۰۳۰۵ (کالری‌گرم بر درجهٔ سانتیگراد) می‌باشد پیداکنید ظرفیت و وزن اتمی دقیق فلز و بالاخره جنس فلزرا

حل ـ قانون دولن و پتی : حرارت‌ویژه × وزن‌اتمی = تقریباً ۶/۴ از اینرو وزن اتمی تقریبی این فلز

$\frac{6/4}{0/0305} = 210$ می‌باشد .

قانون دولن وپتی تنها جرم اتمی تقریبی را در اختیار می‌گذارد . وزن معادل‌گرم نیز بوسیلهٔ تجزیهٔ شیمیائی معین می‌شود .

جرم‌اتمی‌دقیق‌ازحاصل‌ضرب‌والانس‌گرم‌جرم‌دریك عددی می‌باشد ، واین عددکه نشان دهندهٔ تعداد اکی والانهای‌موجود در وزن اتمی جسم است همان ظرفیت عنصر می‌باشد . ازاینرو مضرب والانس‌گرم این عنصر باید عدد۳ باشد :

$(69/667 \times 3 = 21$ تقریباً$)$

وزن معادل گرم × ظرفیت = وزن اتمی دقیق

بیسموت $Bi = 209/00 = 69/667 \times 3$

پاسخهای‌درست رسیده : رودگری‌آملی ـ علی‌اکبر صنعتی ـ مصطفی‌اخگرژند

۳۷۵۵ ـ اکی والان‌گرم نقره ۱۰۷/۸۸ می‌باشد . پیداکنید وزن اکی والان‌منیزیم را در صورتی‌که هر ۰/۳۶۲ گرم آن می‌تواند ۳/۲۲۵ گرم نقره را از نمکش آزادکند

حل و توضیح : هر «یك» اکی‌والان‌گرم از هر عنصری می‌تواند با اکی والان‌گرم از عنصر دیگر واکنش کند ویاآن را استخلاف‌کند . برای پیداکردن وزن معادل‌گرم منیزیم‌باید دید چه مقدارمنیزیم می‌تواند با ۱۰۷/۸۸گرم معادل‌گرم‌نقره جابجا شود . از اینرو ۳/۲۲۵ گرم نقره معادل با ۰/۳۶۲ گرم mg است ـ پس ۱ گرم نقره معادل $\frac{0/362}{3/225}$ گرم منیزیم خواهد بود .

و ۱۰۷٫۸۸ گرم نقره نیز مطابق $107/88 \times \frac{0/362}{3/225}$ گرم یعنی ۱۲/۱ گرم منیزیم‌خواهد بود . پس والانس‌گرم منیزیم ۱۲٫۱خواهد بود .

طریقه دیگر .

$\frac{0/362}{3/225} : 107/88 = 12/1$

پاسخهای درست رسیده: اکبرصنعتی ـ رودگری‌آملی

فعالیتهای علمی در دبیرستانها

یك نسخه نشریهٔ شمارهٔ ۲ انجمن علمی دبیرستان امیر کبیر شاهپور آذربایجان به ادارهٔ مجله واصل شده‌است. این نشریه «امیر کبیر» نام دارد وزیرنظر آقایان کمال حاجی‌آقازاده و حسین تنهائی دبیران فیزیك و شیمی تهیه شده است . نشریه در ۲۰ صفحه به قطع نیم ورقی تهیه شده و شامل مطالب علمی متنوع و دانستنیهای سودمند می‌باشد . فعالیتهای‌گروه روزنامه نگاری انجمن علمی دبیرستان شایان تقدیر وتحسین است .

پرسش و پاسخ

توضیح ـ بعضی از دانش‌آموزان گرامی ضمن پرسشهایی که از ادارهٔ مجله بعمل می‌آورند :

۱ ـ تقاضا دارند که بعضی از قضایائی راکه درکتابهای درسی فعلی نیست برای آنها شرح داده و اثبات کنیم . اثبات اینگونه قضایا در بعضی از شماره‌های گذشتهٔ یکان چاپ شده است و از پاسخ دادن به این نوع سؤالات در صفحهٔ پرسش و پاسخ معذور خواهیم بود .

۲ـ یك یا چند مسئله ازکتاب درسی‌خود یا از مسائلی را که‌دبیر به‌آنها تکلیف داده است برای ما می‌نویسند و حل آنهارا تقاضا دارند ، ازپاسخ به این سؤالات نیز معذوریم .

۳ـ مسائل یا سؤالهایی را مطرح می‌کنندکه مربوط به‌کلاس بالاتر از کلاس ایشان است . پاسخ این سؤالات برای‌آنها مفهوم نخواهد بود و برای دیگران هم استفاده‌ای نخواهد داشت .

۴ـ دربارهٔ راه حل بعضی از مسائل‌که درکتابهای حل‌المسائل خارجی مشاهده‌کرده‌اند توضیحاتی می‌خواهند . برنامهٔ تحصیلات متوسطهٔ اغلب کشورهای خارج با برنامه‌های دبیرستانی ما تفاوت دارد . در آنجاها توابع لگاریتمی و مشتقات‌آنها ،توابع معکوسه، اعداد مختلط و بعضی مطالب دیگر را در متوسطه می‌آموزند.توضیحات درخواستی پرسش‌کننده مربوط به این چنین مطالبی است و پاسخ‌آن فصلی از یك مبحث است بدین جهت از طرح این سؤالات هم دراین صفحه معذور خواهیم بود .

۵ ـ پرسش آنها مربوط به مسائلی است‌که قبلا در مجلات یکان راجع به‌آن بحث شده یا پاسخ‌آن داده شده و تکرارآن بی‌مورد است .

پرسش ـ آیا کره حد چند وجهیهای محاطی یا محیطی آنست و از این راه می‌توان دستور محاسبهٔ حجم آنـرا بدست آورد ؟

کورش ستار

پاسخ ـ کره را نمی‌توان حد چند وجهیهای محاطی یا محیطی‌آن دانست. به عبارت دیگرکره را نمی‌توان یك چند وجهی منتظم تصورکردکه تعداد وجوه‌آن به سمت بینهایت میل کرده باشد .

* * *

پرسش ـ به چه شرطی دو سطح بر یکدیگر عمودند وآیا ممکن است یك سطح‌کروی بر یك سطح مخروطی یا بر یك سطح استوانی عمود باشد ؟

پاسخ ـ ثابت می‌شودکه در هر نقطهٔ عادی ازیك سطح عموماً یك صفحهٔ مماس بر آن وجود دارد . اگـر دو سطح در یك نقطه مشترك باشند و صفحات مماس بر این دوسطح درنقطهٔ اشتراك آنها بر هم عمود باشند می‌گویندکـه این دو سطح در آن نقطه بر هم عمودند . دو سطح‌کروی ممکن است در تمام نقاط تقاطعشان بر هم عمود باشند ؛ دو دایرهٔ عمودبرهم درنظر بگیرید و صفحهٔ آنها را حول خط‌المرکزینشان دوران دهید. اگر رأس یك سطح مخروطی بر مرکـز یك سطح‌کروی واقع

باشد این دو سطح در تمام نقاط تقاطعشان بر هم عمودند . ممکن نیست که یك سطح استوانی و یك سطح کروی در تمام نقاط تقاطعشان برهم عمود باشند .

***

پرسش ـ آیا برای محاسبهٔ حاصل ضرب اعداد ازیك تا n فرمولی وجود دارد ؟

مهدی راست روان

پاسخ ـ این مقدار به صورت !n نوشته می‌شود وفرمول استیرلینگ (صفحهٔ ۱۶ یکان شمارهٔ ۲۶) یك راه محاسبهٔ مقدار تقریبی آن می‌باشد .

***

پرسشـ بعضیها دو خط متوازی‌را چنین تعریف می‌کنند: دو خط که نقطهٔ تقاطع نداشته باشند . بعضی دیگر می گویند دو خط متوازی در نقطهٔ بینهایت متقاطعند . آیا این دو تعریف متناقض نیستند ؟

علی طاهری

پاسخ ـ عین این پرسش و پاسخ را در صفحهٔ ۵۹ یکان شمارهٔ ۹ ملاحظه فرمائید .

***

پرسش ـ قضیهٔ فوئرباخ چیست ؟

عباس کشاورز

پاسخ ـ صفحهٔ ۲۰ یکان شمارهٔ ۱۰ را مطالعه فرمائید .

***

پرسشـ آیا کلمهٔ فارسی «هم مکان» معادل با «ایزوتوپ» می‌باشد؟ دلیل آن چیست ؟

هادی کارگشا

پاسخـ (از: عطاءالله بزرگ‌نیا). ایزوتوپ(Isotope) کلمه‌ای است یونانی مرکب از دو کلمهٔ Isos به معنی «یکسان» یا «هم» و Topos به معنی « جا و مکان » بنابراین ایزوتوپ به معنی «هم مکان» یا «هم خانه» است .

***

پرسش ـ آیا برای ترسیم $\sqrt[n]{x}$ راه حل کلی موجود هست ؟

غلامحسین اشرفی

پاسخـ رسم $\sqrt[n]{x}$ بوسیلهٔ خط‌کش و پرگار در حالتی که n برابر با ۲ یا ترکیباتی از ۲ باشد (2^k) امکان پذیراست ودرحالات دیگر ممکن نیست .

***

پرسش ـ در یکی از کتابهای حل‌المسائل در تمام تمرینهای مربوط به تعیین مجانبهای مایل منحنیهای اسم‌منحنی را با خط $y = ay + b$ قطع داده و بعد ازمنطق کردن عبارت ضرایب دوجملهٔ بزرگترین درجه را مساوی صفر قرار داده و مقادیر a و b را حساب‌کرده است . اما یکی از دبیران که از تلویزیون درس جبر تدریس می‌کرد توصیه‌کردکه از این راه عمل نکنیم زیرا بعضی مواقع جوابهای خارجی بدست می‌دهد . سؤال من این است‌که چرا در حل‌المسائل مرتب از این راه استفاده شده است ؟

احمد جلیلی تنها

پاسخ ـ به سادگی می‌توان توابع اصمی‌را درنظر گرفت که چون از راه فوق مجانبهای آنها تعیین شود جواب خارجی بدست بیاید .ضمن‌تمرینهای کتاب جبر ششم هم از این نوع توابع وجود دارد (اگر درتمرینهای کتاب در چاپهای اخیرآن تغییراتی ایجاد نشده باشد) بنابراین راه حل مزبور همواره قابل اطمینان نیست .

***

پرسش ـ در یك کتاب حل‌المسئله برای تعیین مقدار :

$$y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

بعدازآنکه طرفین را به توان ۲ رسانده و جملهٔ منطق ۲ طرف دوم را به طرف اول‌آورده است طرف دوم را برابربا ۲ فرض کرده ومعادلهٔ $y^2 - 2 = 2$ را تشکیل دادهٔ است .

درصورتی‌که باید طرف دوم برابر y فرض شده معادلهٔ $y^2 - 2 = y$ حل شودکه برای‌آن جوابهای ۲ و ۱ـ بدست می‌آید. کدام راه حل صحیح است ؟

علی‌اکبر دوستدار

پاسخ ـ راه حل اول به‌آن ترتیبی‌که نوشته‌اید اشتباه است . درراه حل دوم هم جواب ۱ـ قابل قبول نیست. زیرا عبارت y مثبت است .

از میان نامه‌های رسیده :

آقای **حسین زاده** نوشته‌اندکه چرا در یکان سال ۴۴ مسائل کنکور دانشکده‌های شیراز، آبادان و تبریز درج نشده است و خواسته‌اندکه از این به بعد در یکان شمارهٔ مخصوص مسائل کنکور همهٔ دانشکده‌ها چاپ بشود .

ـ امتحان مسابقات ورودی دانشگاه پهلوی شیراز و دانشکدهٔ نفت آبادان به صورت تست انجام می‌گیرد و با وجود فعالیتهایی که شد بدست آوردن این سؤالات تستی میسر نشد .

آقای **رجبعلی لعل خمسه** نوشته‌اندکه راهنمائیهائی دربارهٔ رسم فنی در مجله بعمل آید زیرا با وجود اینکه این درس در کنکور بعضی دانشکده‌ها اهمیت دارد . دردبیرستانها برای آن اهمیتی قائل نمی‌شوند . و حتی در بعضی مدارس اصلاً تدریس نمی‌شود .

ـ شاید از مهر ماه به بعد سلسله مقالاتی در راهنمائی رسم فنی در مجله درج شود .

آقای **غلامرضا قابل** ضمن نامهٔ خود اشتباه فاحش مؤلفین یك کتاب حل‌المسائل را درحل دومسئله‌ازکتاب مذکور یادآوری نموده‌اند .

ـ دربسیاری ازکتابهای حل‌المسائل بعضی‌اشتباهها به‌چشم می‌خورد . لازم است کتابهای حل‌المسائل به ترتیب و باکمال بی‌غرضی مورد بررسی واقع شده اشتباههای آنها گوشزد شود. زیرا بسیاری ازاین اشتباهها موجبات گمراهی استفاده‌کنندگان از آنها را فراهم می‌آورد .

آقای **پرویز بربری** نوشته‌اند که در سؤال جبر ششم ریاضی خرداد ماه گذشته یك مسئله مربوط بود به روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ درجهٔ سوم درصورتی‌که درکتاب رسمی جبر ششم و جبرهای چهارم و پنجم به این قسمت اشاره‌ای نشده است .

آقای بربری خواسته‌اندکه‌طرح کنندگان‌سؤالات‌امتحانی به متن‌کتابهای درسی رسمی توجه کنند و جزوه های خود یا حل‌المسائل خاصی را مورد توجه قرار ندهند .

آقای **یوسف آقاپور** درنامهٔ خودبه‌حل مسئله ۱۶۰۸ مندرج در یکان شمارهٔ ۹ و شمارهٔ ۱۱ ایرادگرفته‌اندکه ایراد ایشان وارد است . وقتی می‌خواهیم صحت تساوی :

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=K$$

را تحقیق‌کنیم ، طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم می‌شود

$$x+y+3\sqrt{xy}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})=k^3$$

حال اگر مقدار داخل پرانتز را برابربا K فرض‌کنیم ایراد دارد چون این تساوی را باید ثابت‌کنیم و یك تساوی محقق شده نیست .

انجمن معلمان ریاضی اهواز

نامهٔ زیر حدود دوماه قبل به ادارهٔ مجله واصل شده است‌که عیناً درج می‌شود :

ادارهٔ محترم مجلهٔ‌گرامی یکان ـ بطوری‌که قبلا نیز جهت‌آن مجله اعلام شده بود در سال تحصیلی جاری دبیران ریاضیات اهواز همه ماهه جلساتی دردبیرستان فرهنگ باحضور آقای **حبیب‌نژاد** معاون تعلیماتی ادارهٔ‌کل آموزش و پرورش تشکیل می‌دادند. دراین جلسات ضمن بحث ومشاوره کوششهائی جهت رفع مشکلات موجود می‌نمودند ـ یکی از این مشکلات یکنواخت نبودن سطح معلومات دانش‌آموزانی بودکه ازکلاسهای سوم دبیرستانها به‌کلاسهای چهارم ریاضی یا طبیعی می‌آمدند و بواسطهٔ همین امر دبیران ریاضی با محظوراتی مواجه می‌شدند وتدریس به چنین دانش‌آموزانی تا اندازه‌ای مشکل بود . از این جهت دبیران فوق‌الذکر در سومین جلسهٔ خودکه درتاریخ ۷ر۱۰ر۴۴ تشکیل شده بود متفقاً تصمیم گرفتندکه امتحانات ریاضی (جبر ـ حساب ـ هندسه) کلیهٔ کلاسهای سوم دبیرستانهای اهوازکه بالغ بربیست کلاس است یکنواخت باشد. به این‌ترتیب که امتحانات مزبور همه دریك روز ویك ساعت معین باسؤالات یکسان انجام گرفته و همهٔ اوراق هم یکجا جمع آوری شده و بطور یکنواخت تصحیح‌گردد . این تصمیم مورد تأیید و تصویب ادارهٔ‌کل آموزش و پرورش نیز قرارگرفت و قرار شد در سال جاری به مورد عمل‌گذاشته‌شود .ضمناً در ششمین جلسهٔ شورای دبیران مزبورکه در تاریخ ۶ر۲ر۴۵ باحضورآقای حبیب نژاد معاون ادارهٔ آموزش و پرورش و خانم **صالحی** و آقایان **طاهریان ـ براتی ـ مدرس ـ گیتی‌زاده ـ فلاح ـ نحوی ـ هادی نجفی ـ جلال نجفی ـ کریمی ـ محمودیان ـ غایتی ـ فرهنگی ـ کرباسیان ـ شریف‌نیا دلکو ـ روحانی ـ اولیانی ـ دانیاری ـ حسینی بهزاد ـ کاوند.** دردفتردبیرستان فرهنگ تشکیل‌شد مذاکرات مفصلی دربارهٔ نحوهٔ انجام‌امتحانات مزبوربعمل‌آمد وتصمیمات زیر اتخاذگردید .

۱ـ درهردبیرستان یکی‌ازدبیران ریاضی درامرامتحانات ریاضی سال سوم با رئیس دبیرستان همکاری نماید .

۲ـ درهردبستان موقع امتحانات‌کلاسهای ششم ابتدایی یکی ازدبیران درامر امتحانات نظارت نماید .

۳ـ پیشنهاد شودکه هفته‌ای یك ساعت به تعداد ساعات کلاس سوم اضافه‌گردد .

۴ـ پیشنهاد شودکه مسائل متنوعی به مسائل‌کتاب جبر کلاس سوم افزوده‌گردد.

در خاتمه پیشنهاد شدکه پس ازانجام امتحانات نیزجلسهٔ دیگری تشکیل‌گردد تا ازنتیجهٔ‌آن همگی اطلاع حاصل‌نمایند.

ازطرف دبیران‌ریاضی اهواز ـ قوام نحوی ۱۴ر۲ر۴۵

تمرینهای ریاضیات مقدماتی

تألیف

استاد دکتر محسن هشترودی

شامل حل مسائلی که ازاستاد در مجلات یکان چاپ شده ومسائل دیگر

زیرچاپ است و در سلسلهٔ

انتشارات یکان

درشهریورماه تقدیم دوستداران خواهد شد

انتشارات یکان

آنچه تاکنون منتشر شده است :

مجموعهٔ علمی یکان سال

۶۰ ریال

راهنمای ریاضیات متوسطه

۱۵ ریال (نایاب)

مسائلی از :

حساب استدلالی

۱۵ ریال

یکان سال مخصوص

امتحانات نهایی ۱۳۴۳

۴۰ ریال

معماهای ریاضی

۴۰ ریال

یکان سال ۱۳۴۴

۵۰ ریال (نایاب)