یکان ریاضیات

دورهٔ دوم ـ شمارهٔ :

۷

شمارهٔ مسلسل:

۲۰

آذرماه ۱۳۴۴

در این شماره :

به علت فنی از چاپ دو مطلب «اشتباه از چیست» و «اصطلاحات ریاضی ومعادل انگلیسی آنها» معذور شدیم ، با وجودی که هردومطلب حروفچینی شده وآمادهٔ چاپ بود .

بها : بیست ریال

انتشارات آیندهٔ یکان

در نظر است تا پایان اسفند ماه ۱۳۴۴ بجز مجلات ماهانه دو نشریهٔ دیگر تقدیم علاقمندان گردد ؛

۱ـ نشریهٔ مخصوص دانش آموزان سیکل اول شامل مطالب علمی متنوع و سودمند و مسائل ریاضی فکری و و معماها و مطالب دیگر .

۲ـ یکان سال مخصوص امتحانات نهایی سال ۴۴ شامل حل مسائل امتحانات نهایی و حل مسائل کنکور دانشکده‌های ایران و کشورهای دیگر .

از خوانندگان محترم تقاضا می‌شود دربارهٔ دو نشریهٔ مزبور نظرات خودرا مرقوم دارند .

مسائل کنکور دانشکده‌ها واصل شود به‌نام فرستنده درج می‌شود .

***

فعالیت علمی در دبیرستانها

آقای **حسین جعفری** دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان پهلوی گلپایگان اطلاع داده‌اندکه با همکاری آقایان **عباس ـ وکیلی ، اسماعیل جوادی ، غلامرضا امینی** دانش‌آموز پنجم ریاضی ، **محمد حسن کروبی ، علی سجادی ، محمد باقر فیاضی ، یدالله محمودی** محصلین چهارم ریاضی و آقای **محمد جعفری** محصل کلاس سوم دبیرستان فردوسی از ابتدای سال تحصیلی جاری به تهیهٔ **نشریهٔ علوم** همت گماشته‌اند که هر بیست روز یك دفعه منتشر می‌شودکه شامل مطالب و مسائل علوم مخصوصاً ریاضی است و به حل کنندگان مسائل جوایزی داده می‌شود .

آقای **آشتی** دبیر محترم ریاضی سرپرستی این گروه را به عهده دارند .

***

آقای **جمال آشفته** دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان تقوی اطلاع داده‌اندکه با همکاری آقای هوشنگ **فتوحیه** دانش‌آموز ششم ریاضی وتحت نظر آقای **فرید آذر** دبیرمحترم شیمی به انتشار مجله‌ای ریاضی دردبیرستان اقدام نموده‌اندکه مورد استقبال دانش‌آموزان واقع شده است .

***

رفع اشتباه

از خوانندگان محترم تقاضا می‌شود در صفحهٔ ۲۹ ستون چپ سطر نهم جملهٔ «a و b مثبت هستند» را حذف کنند

قابل توجه

دانش آموزان محترمی که پاسخ حل مسائل را می‌فرستند .

۱ـ روی ورقهٔ مربوط نام وکلاس خودرا ذکر نمایند .

۲ـ از حل مسائل مربوط به کلاسهای پائین‌تر از خود خودداری نمایند .

۳ـ سعی کنند منظم وخوانا بنویسند .

یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ دوم ـ شمارهٔ هفتم (شمارهٔ مسلسل : ۲۰)

آذر ۱۳۴۴

صاحب امتیاز و مدیر مسئول : عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی : داود مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان هر ماه یك بار منتشر می‌گردد

نشانی اداره: تهران، خیابان لاله‌زار نو، نزدیك شاهرضا ـ شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره : ۳۳۱۸۱

وجه اشتراك برای ۱۲ شماره ۲۰۰ ریال

(برای کشورهای خارج به‌اضافهٔ هزینهٔ پست)

حساب بانکی : جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زار نو بانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

volume II , number 7, Dec. 1965

subscription : $3

TEHERAN , P.O.B. : 2463

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

جبر در دنیای امروز

نوشتهٔ : سایر
ترجمهٔ : مهدی مدغم

تاریخ رشتهٔ جبر از ریاضیات را می‌توان به دو دورهٔ اصلی تقسیم کرد . اول دوره‌ای که از زمان تمدن **مصر** و **بابل** شروع وتا حدود هزارو هشتصد سال پس از میلاد مسیح ادامه داشته‌است و دوم دوره‌ای که از سال‌هزارو هشتصد میلادی تا زمان حاضر را در بر می‌گیرد . در دورهٔ اول در هررشته ازریاضیات منحصراً در بارهٔ مطالبی بحث‌می شد که‌به آن‌رشته مربوط‌می گشت : در هندسه از خواص اشکال ، در حساب ، عملیات مربوط به اعداد و در جبر روابط و خواص‌اعدادبطورکلی با بکار بردن علامات وحروف بجای اعداد مورد مطالعه قرار می‌گرفت . برای مثلثات و هندسهٔ تحلیلی در این تقسیم بندی جائی وجود نداشت چه اولی حساب و جبر را برای حل مسائل هندسی بکار می‌برد و دومی هندسه‌را شاخه‌ای از جبر قرار می‌داد . با این وصف نقش جبر در این دوره کم و بیش روشن بود و آن اینکه x همواره بجای یك عدد بکار می‌رفت

جبر قدیم وسیله‌ای برای حل بسیاری از مسائل عملی و علمی بود . آثار مکشوفهٔ بوسیلهٔ باستان شناسان دلالت دارد براینکه‌درمصرقدیم فرمولهای‌جبری‌برای یافتن حجم‌استوانه‌وکره به منظور محاسبهٔ مقدار مالیات غلات که رعایا به دولت مرکزی بدهکار بودند بکار می‌رفته است . پیش از آنکه حساب جامعه و فاصله و مکانیك سماوی در اواخر قرن هفدهم به وجود آید جبر و هندسه دورکن اساسی محاسبات نجومی بودند . عملیات اساسی جبر قدیم برای هر فردی که به دورهٔ دوم دبیرستان رسیده باشد شناخته شده است ، در حقیقت شخصی که در دبیرستان جبر مقدماتی وهندسه را خوانده باشد بدون زحمت زیاد می‌تواند بیشتر ریاضیاتی را که تا قبل از سال ۱۸۰۰ کشف شده فراگیردزیرا ریاضیات تاآن موقع‌بیشتر به دو موضوع عدد وشکل مربوط می شد. اوایل قرن نوزدهم نمای ریاضیات شروع به تغییر کرد . دو نظر جدید پیدا شد که دامنهٔ ریاضیات را وسعت بسیار بخشید . نخست‌اینکه الزامی ندارد ریاضیات منحصربه اعداد و اشکال باشد . ریاضیات می‌تواند همه چیز باشد ، اما این همه چیز اغلب به طریقی به اعداد و اشکال ارتباط داده می شدند .

دوم عمل تجرد را یك قدم پیشتر برده و ریاضیات را در موقعیتی قرار دادکه می توانست صرفاً یك عمل‌منطقی باشدکه به هیچ‌چیز بخصوصی بستگی نداشته باشد . دانشمندان علوم تجربی که از ریاضیدانان ، متمایزند نظراول را می پذیرند ؛ بر طبق این‌نظر مواردداستعمال ریاضیات. بیش از آن می‌باشدکه در دورهٔ اول‌تصور می‌رفت .نظر دوم در میان دانشمندان ریاضیات محض که‌ریاضیات را به سادگی به عنوان مطالعهٔ مدلهای زیبا در مد نظر قرار می‌دهند طرفدار دارد . اما باید دانست‌که بین این دو نظرنزاعی نیست . یك نمونهٔ‌ریاضی‌که مورد توجه‌یك دانشمند ریاضی‌قرار می‌گیرد ، ثابت می شودکه‌با برخی از جنبه های جهان فیزیکی مطابقت می‌نماید و برعکس بعضی از نمونه‌های ریاضی‌که بوسیلهٔ دانشمندان در طبیعت کشف شده به‌طور جالب توجهی زیبا بوده است .

* * *

بدیهی است‌که در یك مقاله نمی‌توان تمام یا بیشتر آثار ونتایج این دو نظر جدید را روی جبر مدرن مورد بررسی‌قرار داد . جبر خود طوری به‌شاخه های مختلف تقسیم شده است که هر شاخه کم وبیش باید به طور جدا مورد مطالعه قرارگیرد .از طرف دیگرمطالعهٔ یك‌قسمت مجزاخواننده را عموماً راضی‌نخواهد کردزیرا در این صورت وی ازکلیات و تقسیم‌بندی‌که این‌قسمت را مشخص می‌نماید بی‌اطلاع خواهد ماند . بنظر می‌رسد که تنها راه حل قانع‌کننده این باشدکه یك قسمت نسبتاً بزرگ از یك شاخهٔ جبر مدرن را انتخاب نموده و به‌طور شرح بیان‌کرد . در این صورت خواننده خواهد توانست از مطالعهٔ چگونگی توسعه‌یی که در این شاخهٔ بخصوص از سال ۱۸۰۰ به بعد انجام گرفته از طریقی‌که جبر به‌سوی‌آن سوق داده می شود مطلع‌گردد. برای‌این منظوربیشتراین‌مقاله‌به‌بحث مشروح **جبر بردارها**و**جبرماتریس‌ها** که به تازگی در برنامهٔ مدارس متوسطهٔ‌آمریکا راه‌پیدا کرده‌است پر داخته می شود . این دو موضوع هم اکنون‌کمك مؤثری به‌علوم و ریاضیات محض می‌نماید . در خاتمهٔ مقاله به چند قسمت دیگر

از جبر مدرن که در آنها کار های مهم و جالبی در حال انجام گرفتن است به طور خلاصه اشاره خواهد شد .

* * *

دو نظر جدیدی که در ابتدای قرن نوزدهم در بارهٔ جبر مدرن نمایان شد طبعاً آن را از جبر قدیم مجزا ساخت . یکی از موجبات پیدایش این نظرها مفهوم جذر (۱−) بود که با حرف «$i=\sqrt{-1}$» مشخص می شد و در حل یك سلسلهٔ بزرگ از مسائل، در قرنهای هفدهم و هیجدهم به‌کار می‌رفت ،اما هیچکس نمی توانست به نحو رضایت بخشی آن را به عنوان یك عدد بیان نماید . در اوایل قرن نوزدهم دو راه حل مختلف برای جواب این مشکل پیشنهاد شد . اولی روشی بود که به‌عنوان روش مجرد شناخته شد و آن اینکه i به عنوان یك سری عملیات مخصوص برروی زوج‌های اعداد تعبیر می‌شد ودومی به i تعبیری مقیدمی‌داد و آن را با عمل هندسی دورانی برابر ۹۰ درجه در یك صفحه مشخص می‌نمود .

هر دو تعبیر، اکتشافات بیشتری را پیشنهاد می کرد . از آن جایی که از دخالت دادن i در عملیات جبر مقدماتی نتایج بسیار سودمندی بدست آید این‌فکر پیدا شد که آیا دخالت دادن چند علامت‌بی معنای‌دیگر بهمین‌اندازه سودمندنخواهدبود؟ البته قواعدی که بر این علامات حکومت خواهد کرد طوری تعیین خواهد شد که جوابگوی احتیاجات موضوعی باشد که مورد مطالعه است . اگر i به دوران °۹۰ ای در صفحه تعبیر می شود چرا دوران دریك فضای‌سه‌بعدی مورد مطالعه قرارنگیرد.شاید در نظر گرفتن دوران در فضای سه بعدی نیز کمکی به جبر بنماید این طریق تحقیقات و تفحصات به کشف **اعداد چهار گانه** (Ouatemion) در ۱۸۴۳ بوسیلهٔ **ویلیام هامیلتون** (w . Hamilton) انجامید.در جبر اعداد چهارگانه دوعلامت جدید i و j معرفی شد که با قرار داد های $i^2=-1$ و $j^2=-1$ وقرار داد $ji=-ij$ مشخص می شدند .

بسیاری از دانشمندان برجستهٔ ریاضی انگلستان تصور می‌کردند باکشف اعداد چهارگانه که برای حل بسیاری ازمسائل جبر روش مطلوبی‌ارائه‌می نمودندبه‌آخرین مرحلهٔ ریاضیات دست یافته‌اند . امااعداد چهارگانه تقریباًیکی از اولین مراحل‌ریاضی بود . تازه از یك مانع عبور شده و جبری توسعه یافته بود که بسیاری ازقرارداد های جبرقدیم را به دور می افکند.دانشمندان ریاضی‌بزودی به فکر افتادندکه‌پا را از این حد نیز فرا ترنهاده و اعداد معمولی‌را با علامت جدیدی تکمیل کرده و آن چه راکه امروز **اعداد فوق مختلط** (Hypercomplex) نامیده می‌شود ضمیمهٔ اعداد نمایند . این وسعت طلبی ها این فکر را بوجود آورد که چرا تعمیم و تکمیل‌را از اعداد معمولی شروع نمائیم ؟

چرا دسته‌ای از علامات را به طور کلی در نظر نگرفته و قواعد بخصوصی‌برای ترکیب آنها وضع نکنیم ؟ پس کلمهٔ «جبر» بتدریج وسعت یافت تاجایی که شامل‌هر دستگاهی می‌شد که درآن علامات را با قواعدی‌که قبلا تجویز شده بود ترکیب می کرد . اکنون هر کس آزاد بود جبری مخصوص به خود اختراع نماید . اما این آزادی ، نا محدود نبود . مسأله این بود که دستگاه اختراع شده باید نتایج ثمر بخش و قابل توجهی داشته باشد و مؤثراً به سایر قسمتهای ریاضی وعلوم کمك نماید .

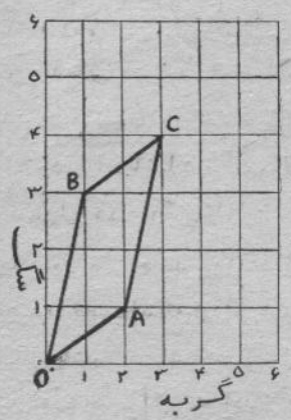
پس جبرچیزی نبودکه در بارهٔ موضوع بخصوصی باشد با این وجود امکان داشت که‌دستگاه‌بخصوصی‌ازجبردرموضوع‌بخصوصی به‌کار برده شود. در این صورت گفته می‌شدکه چنین موضوعی جنبهٔ جبری دارد .

* * *

در جبرمقدماتی، به جای اعدادعلامات بکار برده‌می شد و علامت «+» دلالت می کردکه اعداد باید جمع شوند . ممکن‌است خواننده تعجب نماید که چرا پس از اینکه جبر موقعیت قبلی خود راکه عملیات‌روی‌اعداد بود ترك کرد هنوز علامت «+» بکار می رود . چگونه چیزهایی را که عدد نیستند می‌توان جمع کرد ؟ اما حقیقت این است‌که در جبر جدید علامت + نمی رساند که جمعی به معنای حقیقی انجام می‌گیرد . علامت «+» صرفاًدلالت داردبر این‌که عملیاتی مطابق‌قواعدی انجام می‌گیردکه‌ریاضیدان را به یاد قواعد جبر در ریاضیات می‌اندازد . به عبارت دیگر شباهت در نمونه و ظاهر است نه در محتوی .

اکنون می‌خواهیم مثالی برای توضیح مطلب فوق یعنی معنای وسیع علامت «+» بیاوریم . ابتدا موقعیتی را در نظر می‌گیریم‌که به‌نحو آشکار به‌جمع مربوط می‌شودو از آن موقعیت دیگری‌را استخراج می کنیم‌که ارتباط‌آن‌با جمع‌کمتر آشکاراست .

«جمع» درحساب عموماً با تصور «روی هم گذاشتن» همراه است.مثلا در پختن‌غذامی‌گوئیم نمك به‌آش اضافه‌کرده‌ایم .بسیاری ازافراد در جمع‌هایی که در جملات وجود دارد آشنا هستند مثلا «دوگربه ویك‌سگ+یك‌گربه و سه‌سگ= سه‌گربه وچهارسگ» .



این‌افرادعلامت‌جمع را برای بکار بردن در این جمع ، قانونی غیر قابل‌اشکال می‌دانند.عمل جمع در بیان فوق را می‌توان بوسیلهٔ نموداری مطابق باشکل مقابل‌نشان داد ؛

در این شکل گربه‌ها به طور افقی و سگ‌ها به‌طورقائم نشان داده‌شده

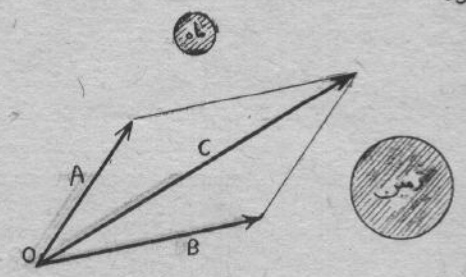
است. نقطهٔ A نمایندهٔ دو گربه و یك سگ می‌باشد یعنی دو واحد به‌سمت راست یك واحد به‌سمت بالای نقطهٔ مبدأ o، بهمین ترتیب نقطهٔ B با یك گربه و سه سگ مطابقت می‌نماید. از آنجایی که نقطهٔ C نمایندهٔ این دو زوج عدد می‌باشد (سه گربه و چهار سگ) می‌توان نوشت $C=A+B$

حال اگر این شکل را به‌شخصی که دربارهٔ سگها و گربه‌های فرضی ما چیزی نمی‌داند نشان داده و از او بخواهیم آنچه را که می‌بیند بیان نماید به‌احتمال زیاد خواهد گفت «این شکل نموداری است از چهار نقطهٔ O و A و B و C بقسمی که تشکیل یك متوازی‌الاضلاع می‌دهند. پس ممکن است راهی کاملا هندسی برای یافتن نقطهٔ C پیدا کرد یعنی نقطهٔ C را قسمی پیدا کنیم که با OA و OB تشکیل یك متوازی‌الاضلاع بدهند.

بدیهی است نموداری که از بیان «دو گربه و یك سگ + یك گربه و چهار سگ» بدست آمد از دو نقطهٔ نظر می‌تواند مورد توجه قرار گیرد. در زمینهٔ داستان سگ و گربه، آشکار است که موقعیت از ابتدا شامل جمع است و نمودار وسیله‌ای است که این عمل جمع را واضح می‌کند اما از نقطهٔ نظر هندسی، C نقطه‌ای است که متوازی‌الاضلاع OACB را کامل می‌نماید. در حالت اخیر کاملا غیرطبیعی بنظر می‌رسید که بنویسیم $C=A+B$ یا اینکه انتظار داشته باشیم که شکل ارتباطی با جمع داشته باشد. اما از آنجایی که از هر نقطه نظری که ملاحظه شود نمودار تغییری نمی‌کند واضح بنظر می‌رسد که هندسهٔ تکمیل متوازی‌الاضلاع باید یك جنبهٔ قوی جبری داشته و بطریقی با عمل جمع مربوط گردد.

***

کسانی که مکانیك یا الکتریسیته و مغناطیس خوانده باشند با این حقیقت آشنا شده‌اند که طبیعت برای جمع، اغلب متوازی‌اضلاع بکار می‌برد.



درشکل فوق، حرف O نمایش یك ناظر در یك نقطهٔ فضاست خط OB نمایش نیروی جاذبهٔ زمین بر ناظر O است یعنی نیرویی است که بر ناظر O وارد می‌شود اگر زمین تنها جرمی باشد که در نزدیکی وی قرار گرفته باشد. بهمین طریق خط OA نمایش نیروی جاذبهٔ ماه به‌تنهایی است پس زمین و ماه هردو باهم و همزمان نیرویی به‌ناظر O وارد می‌کنند. برای محاسبهٔ نیرویی که عملا بر ناظر وارد می‌شود باید تأثیراتی را که ماه و زمین به‌تنهایی براو وارد می‌کنند باهم ترکیب و یا به‌عبارت دیگر باهم جمع کنیم. نیروی حاصل باخط OC که قطر متوازی‌الاضلاع OACB می‌باشد نمایش دادهٔ می‌شود.

اگر بخواهیم نیروی وارد بوسیلهٔ خورشید را به حساب بیاوریم باید نیروی جاذبهٔ خورشید را به‌نیرویی که با OC نمایش داده‌شده «جمع» کنیم و باز روش متوازی‌الاضلاع را بکار بریم

در این‌جا یك وجه‌تشابه مهم جمع اعداد معمولی با موضوع مورد بحث آشکار می‌گردد و آن اینکه ترتیب اعداد دخالت ندارد. مثلا اگر شخصی وجه‌سه صورتحساب ۳۰ تومانی و ۵۰ تومانی و ۶۰ تومانی را بخواهد بپردازد نمی‌تواند ترتیب مشخصی پیدا کند که مطابق آن ترتیب قدری در مجموع پرداختی‌ها صرفه‌جویی کرده باشد بهر ترتیبی که وجه‌صورتحسابهارا بپردازد مجموعاً ۱۴۰ تومان پرداخته است. این خاصیت جمع را خاصیت استقلال از ترتیب عوامل می‌نامند. یکی از خواص دیگر جمع که با رابطهٔ $(a+b+c)=(a+b)+c$ نشان داده‌می‌شود و خاصیت شرکت پذیری نام دارد در جمع نیروها صادق است. دانشمندان ریاضی برای عملیاتی که ترتیب عوامل در نتیجهٔ نهایی مؤثر است بکاربردن علامت «+» را خطا می‌دانند.

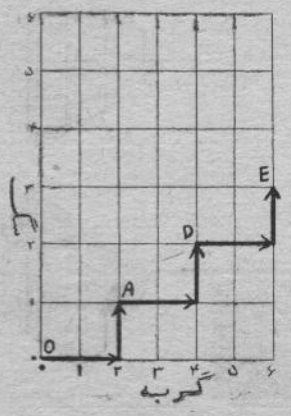
بدیهی است که ترتیب عملیات در مسألهٔ جاذبه‌ای که مطرح شد مؤثر نیست زیرا ناظر O در یك زمان تحت تأثیر جاذبهٔ زمین و خورشید و ماه واقع می‌شود. درمحاسبهٔ منتجهٔ نیروهای جاذبه می‌توان نیروهای جاذبهٔ زمین و ماه‌را حساب کرده و با آن نیروی جاذبهٔ خورشید را «جمع» کرد یا اینکه با ترکیب نیروهای خورشید و ماه نیروی جاذبه زمین را «جمع» نمود. اگر دو عمل فوق نتایج مختلف می‌داد روش هندسی مانع کننده نبود. مطابق قوانین فیزیك مکانیك استقلال از ترتیب عوامل و شرکت پذیری در این مورد صادق است. پس تا آنجا که عملیات ترکیب نیروها از این قواعد تبعیت می‌نماید ترکیب آنها با جمع اعداد معمولی شباهت دارد.

روش متوازی‌الاضلاع که در دو مثال گذشته شرح داده‌شد به‌عنوان «جمع بردارها» شناخته شده‌است. در هردو مثال خطهای OA و OB و OC بردار خوانده می‌شوند و به‌شکل سهم ⟶ نمایش داده‌می‌شوند.

نمودار سگ و گربه را می‌توان به حسب مسافت و تغییر مکان نیز تعبیر کرد. در این تعبیر مسافت از O تا A مطابق است با حرکت دو واحد به‌سمت شرق و یك واحد به‌سمت شمال. بهمین طریق مسافت از O تا B مطابق حرکت یك واحد به‌سمت شرق و سه واحد به‌سوی شمال است. اگر این دو حرکت ترکیب شود نتیجهٔ حرکت هاسه واحد به‌سمت شرق و چهار واحد به‌سمت شمال خواهد بود که همان مسافت از O تا C می‌باشد. داسعانها مختلف است اما درهرحال توانستیم C را تعبیر به حاصل جمع A و B بنمائیم.

اکنون که چند معنای مختلف به‌عبارت $A+B$ نسبت داده‌شد با چه راه‌هایی می‌توان $3\times A$ یا $3A$ را تعبیر کرد؟

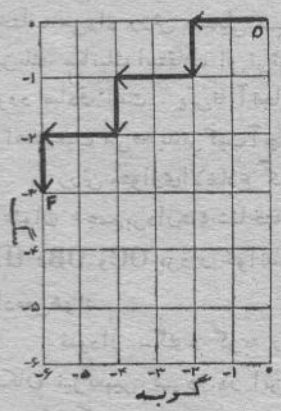
اگر حرف A دو گربه و یك سگ را مشخص نماید شك نیست که معنای $3A$ یعنی حاصل ضرب A در عدد سه، شش گربه و سه سگ خواهد شد. در شکل مقابل این حاصل ضرب با نقطهٔ E نمایش داده شده است. بدین ترتیب می‌توان تساوی $E=3A$ را نوشت.



از نقطه نظر هندسی نقطهٔ E درامتداد از O به A قرار دارد اما فاصله‌اش از O سه برابر شده است. علاوه بر این تعبیر هندسی صرف، تعبیری که از حرکت بدست می‌آمد در اینجا مفید فایده خواهد بود. در این طرز تعبیر حرکت از O به E می‌تواند به سه حرکت O به A و A به D و D به E که هر کدام از آنها همان مشخصات حرکت از O به A را دارند تقسیم شود. یعنی دو واحد به سمت شرق و یك واحد به سمت شمال.

حال حروف d و c را به‌جای کلمات گربه و سگ بکار می‌بریم پس عبارت ۶c+۳d می‌تواند به سه طریق مختلف تعبیر شود: ۱ـ به‌صورت معنای اصلی خود یعنی ۶ گربه و ۳ سگ ۲ـ به عنوان طریقی برای مشخص کردن نمایش نقطهٔ E مطابق با شکل فوق ۳ـ حرکت سه مرحله‌ای از O به E مطابق شکل

در مثالهای فوق قراردادن علامات، گرفتار، یك محدودیت بود. یعنی با ترتیب فوق اشکالی وجود ندارد که حرکت از O به E را با ۶c+۳d نمایش دهیم اما هنوز دربارهٔ حرکت از E به O که در جهت مخالف انجام می‌گیرد مطلبی ذکر نشده است. برای رفع این اشکال استعمال اعداد منفی لازم است که این مسافت به‌صورت ۶c−۳d یا ۶ واحد به سمت مغرب و ۳ واحد به سمت جنوب نشان داده شود. همین عبارت برای نقطهٔ F در شکل زیر بکار می‌رود و باز همین عبارت نمایش منهای شش گربه و منهای سه سگ خواهد بود که بیان قرضی است که ما را مجبور می‌سازد شش گربه و سه سگ تحویل دهیم.

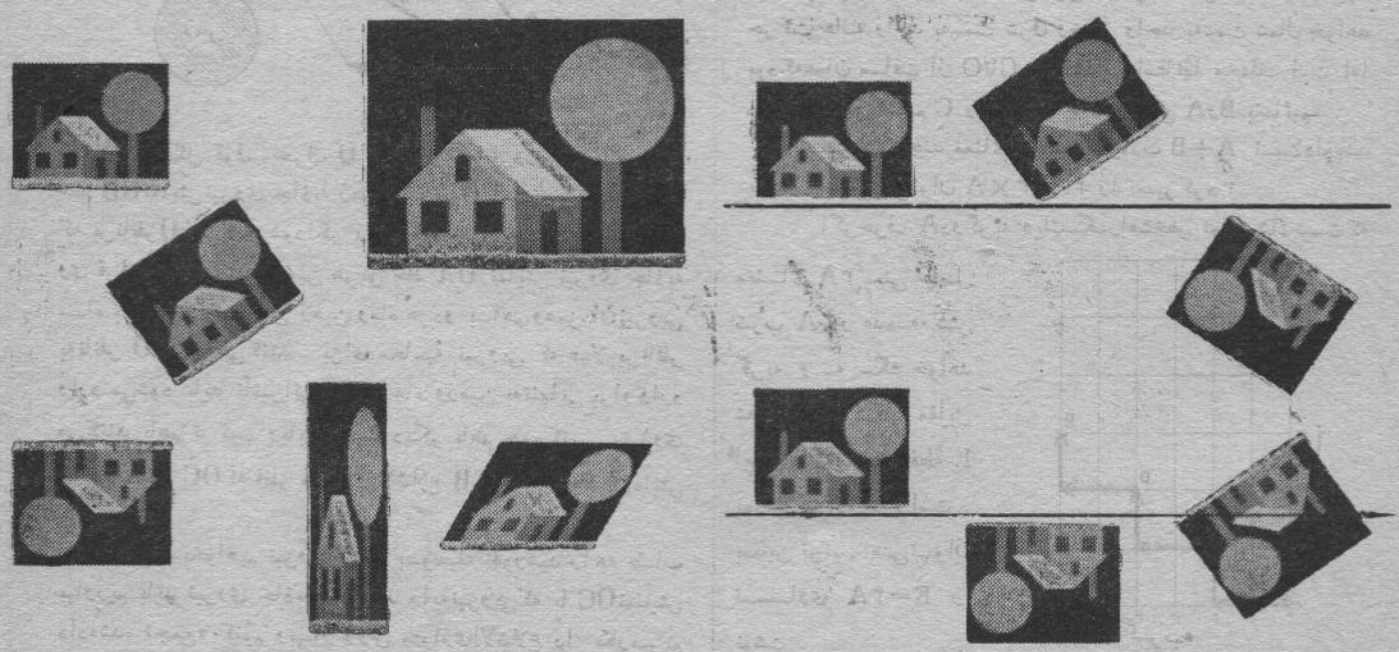


***

اکنون می‌توان وضع هر نقطهٔ واقع در یك صفحه را با یك زوج علامت جبری مانند ۶c+۳d مشخص نمود. علاوه بر این، تعدادی از ترسیمات هندسی را می‌توان به صورت عملیات جبری نمایش داد مثلا رسم متوازی‌الاضلاع مطابق است با عمل جمع. بسیاری از قضایای هندسی بدون مراجعه به ترسیمات هندسی و فقط به کمك محاسبات جبری مخصوص، ثابت می‌شود.

در شکل پائین چند تبدیل هندسی را که روی مستطیل شکل انجام شده ملاحظه می‌نمائید. شکل اصلی (A) در B کمی کج شده یا حول گوشهٔ چپ پائین آن در اختلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران نموده است، در C همان شکل بزرگ شده، در D شکل (A) مثل شکلی که جلو آئینه قرار گیرد منعکس گردیده، در E در امتداد قائم کشیده و در امتداد افقی منقبض شده و بالاخره در F به طرف راست خمیده شده است آیا این عملیات جنبهٔ جبری دارند؟ آیا می‌توان این عملیات را جمع و ضرب کرد؟ آیا می‌توان دوران و انعکاس به ترتیب فوق را جمع کرده و عمل B+D را توصیف کنیم؟ با اینکه چنین چیزی غیرمحتمل بنظر می‌رسد اما غیر ممکن نیست و چنین عملیاتی درحقیقت جنبهٔ جبری قابل ملاحظه‌ای دارند.

برای توضیح در بیان این مطلب، به داستان سگ و گربه باز می‌گردیم. اجتماعی را فرض می‌کنیم که سگ و گربه نمایندهٔ ثروت آنان باشد همچنانکه در پاره‌ای از اجتماعات بدوی گاو و گوسفند دارائی اشخاص را تشکیل می‌دهد. در این اجتماع فرضی ممکن است نرخ سود در یکی از بانك ها به این ترتیب باشد که هر کس یك گربه سرمایه بگذارد پس از یك سال دو گربه و یك سگ به حساب او گذاشته خواهد شد و هر کس یك سگ سرمایه گذاری کند پس از یکسال یك گربه و سه سگ در حساب خود خواهد داشت. از نظر علامت این نرخ را با دو رابطهٔ c→۲c+d و d→c+۳d می‌توان مشخص نمود (→ یعنی می‌دهد) بسیار آسان است که نتیجهٔ سرمایه گذاری هر تعداد سگ و گربه را حساب کرد مثلا نتیجهٔ سرمایه گذاری یك سگ و یك گربه پس از یك سال سه گربه و چهار سگ خواهد بود



$(c+d \to 3c+4d)$

بهمین ترتیب سرمایه گذاری دو گربه و یک سگ نتیجه‌اش پس از یک سال ۵ گربه و ۵ سگ می‌شود

$(2c+d \to 5c+5d)$

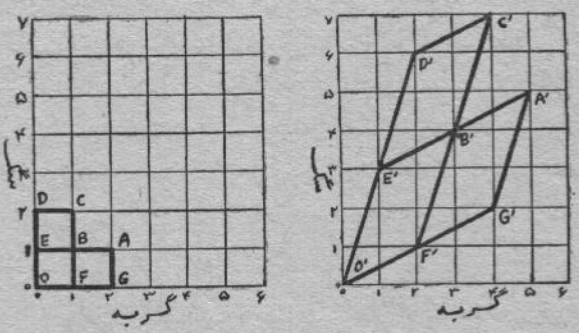
نتیجهٔ ترکیبات مختلف سرمایه گذاری سگ و گربه را درجدول مقابل ملاحظه می نمائید .

گربه

سگ	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۰	۰ / ۰	۲ / ۱	۴ / ۲	۶ / ۳	۸ / ۴	۱۰ / ۵	۱۲ / ۶
۱	۱ / ۳	۳ / ۴	۵ / ۵	۷ / ۶	۹ / ۷	۱۱ / ۸	۱۳ / ۹
۲	۲ / ۶	۴ / ۷	۶ / ۸	۸ / ۹	۱۰ / ۱۰	۱۲ / ۱۱	۱۴ / ۱۲
۳	۳ / ۹	۵ / ۱۰	۷ / ۱۱	۹ / ۱۲	۱۱ / ۱۳	۱۳ / ۱۴	۱۵ / ۱۵
۴	۴ / ۱۲	۶ / ۱۳	۸ / ۱۴	۱۰ / ۱۵	۱۲ / ۱۶	۱۴ / ۱۷	۱۶ / ۱۸
۵	۵ / ۱۵	۷ / ۱۶	۹ / ۱۷	۱۱ / ۱۸	۱۳ / ۱۹	۱۵ / ۲۰	۱۷ / ۲۱
۶	۶ / ۱۸	۸ / ۱۹	۱۰ / ۲۰	۱۲ / ۲۱	۱۴ / ۲۲	۱۶ / ۲۳	۱۸ / ۲۴

این نوع جداول را **ماتریس** وشاخه‌ای از ریاضیات که این جداول را بکار می‌برد **جبرماتریس‌ها** نامیده‌می‌شود ،

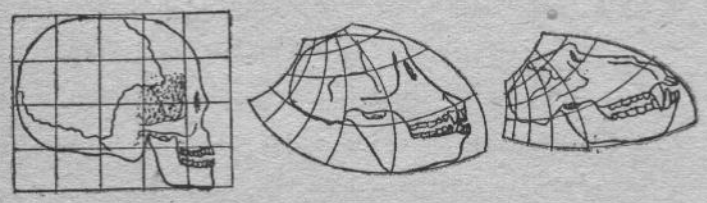
باز می‌خواهیم این علامات را به‌هندسه برگردانیم ، در نمودارهای زیر :



نمودارهای بالا نقطهٔ A نمایش سرمایه گذاری $2c+d$ و A' نمایش نتیجهٔ این سرمایه گذاری با $5c+5d$ می‌باشد. B نمایش سرمایه گذاری $c+d$ و B' مطابق است با نتیجهٔ آن یعنی $3c+4d$ و به‌همین ترتیب C' نتیجهٔ سرمایه گذاری C و D' نتیجهٔ سرمایه گذاری D می‌باشد وقس علیهذا. واضح‌است که نقاط درهردو نمودار به‌ترتیب منظمی قرار گرفته‌اند. نقاط اولیهٔ A وB وC وD وE وF وG از مربعها مطابقند با نقاط A' وB' وC' وD' وE' وF' وG' که تشکیل متوازی‌الاضلاع می‌دهند .

تغییرمربع به متوازی‌الاضلاع در نمودار فوق اتفاقی نیست . درحقیقت هرردیهٔ بانکی (قراری که بانک برای دادن و گرفتن سود می‌گذارد) از این نوع عمومی ، نمودارهایی ارائه می‌نماید که در آن مربعهای نمایش سرمایه گذاری به‌متوازی‌الاضلاعهای نمایش نتیجهٔ آن سرمایه گذاری ،تبدیل می‌شود برعکس هرتبدیل هندسی که مربع را به‌متوازی‌الاضلاعی مطابق این ترتیب ، تبدیل نماید می‌تواند بایک رویهٔ بانکی مطابقت نماید .تبدیلی که فوقاً باحرف F نمایش داده‌شد مثالی از تبدیل مربع به‌متوازی‌الاضلاع است . تمام تبدیلاتی که در شکل فوق ملاحظه می کنید مطابق بایک رویهٔ بانکی است . بنابراین رویهٔ $c \to 2c$ و $d \to 2d$ نتیجه‌اش تبدیل بزرگ کردن شکل است که تبدیل C را نمایش می‌دهد رویهٔ $c \to \frac{1}{2}c$ و $d \to 2d$ تبدیل E را نتیجه می‌دهد . رویهٔ بانکی مفصل‌تر باعبارات جبری پیچیده‌تر لازم‌است تا تبدیلات اشکال زیر را که درآن جمجمهٔ انسان به‌جمجمهٔ شمپانزه و میمون بابون به‌طریق هندسی مقایسه می‌شود بیان نماید .

دیاگرامهایی از این نوع برای مطالعهٔ یک سلسله وسیع مشخصات اندام شناسی استعمال می‌شوند که می‌توان گفت جنبهٔ جبری دارند.



آیا ممکن است دوتا از این قبیل رویه‌های بانکی را باهم «جمع» کرد ؟. فرض کنید در اجتماع خیالی ماسه بانک x وy وz وجود داشته باشد که سه نرخ مختلف برای ربح داشته باشند . از مطالعهٔ $z+y=z$ چه می‌توان استنباط کرد؟ می‌توان معنی کرد که رویهٔ z بهمان اندازه نتیجه می‌دهد که نتایج رویه‌های x وy روی‌هم گذاشته شود . بوسیلهٔ محاسبه یا نتیجه رویهٔ x در مقابل سرمایه گذاری معلوم و نتیجهٔ رویهٔ y در مقابل همان سرمایه وجمع این دونتیجه می‌توان نتیجه‌ای راکه رویهٔ z برای همان سرمایه می‌دهد مشخص نمود . بطریقی مشابه تساوی $A=B$ معنی می‌دهد که رویهٔ بانکی A برابر است باسه برابر نتیجهٔ رویهٔ بانکی B برای یک سرمایه گذاری معین. باترکیب دونظر اخیر می‌توان عبارتی نظیر $4A+5B$ را تعبیر نمود .نتیجهٔ این رویهٔ بانکی ترکیب شده برای هرسرمایه مساوی خواهدبود باچهار برابر نتیجهٔ رویهٔ او ی A به‌اپنج برابر نتیجهٔ حاصل از رویهٔ B جمع شود .

ممکن است که دنبالهٔ بحث فوق را ادامه داده وحاصلضرب رویه های بانکی را معین نمود .عبارت A.B می‌رساند که یک نفر ابتدا باروبهٔ بانکی B سرمایه گذاری کرده سپس با رویهٔ A تجدید سرمایه گذاری نموده است ، اینکه عمل فوق را «ضرب» نام می‌گذاریم بدون دلیل نیست وعلت آن ازمثال ذیل معلوم می‌شود. فرض کنیم اثر رویهٔ B آن است که سرمایهٔ یک نفر دو برابر شود واثر رویهٔ A آنکه سرمایهٔ ۳ برابر گردد اگر کسی باروبهٔ B وپس ازآن باروبهٔ A سرمایه گذاری نماید سرمایه اش با این عمل شش برابر می‌شود . ازآنجایی که شش حاصلضرب ۳در۲ می‌باشد غیر منطقی نیست که تجدید سرمایه گذاری را باضرب همراه بدانیم .

تمام این مثالها چه مطلبی را ثابت می کند؟ اولا ـ داستانهای مختلف گربه وسگ نشان دادند که جبررا در پاره‌ای از موقعیت های هندسی که درنظر اول به هیچ طریق باجبرمربوط بنظر نمی‌رسند می‌توان بکار برد. ثانیاً ـ بیشتر عباراتی که بکار برده شد از قبیل $6c+3d$ عبارات ساده‌ای بودند که از جبر مقدماتی باآنها آشنایی داشتیم . ثانیاً ـ وسعت معنای کلمهٔ «جبر» شامل اشارات بسیار مهم می‌شود . همانطورکه ما دربارهٔ راههایی که نیروها اعمال می‌شود راهی که شکلها تحت فشار به‌شکلهای دیگر در می‌آیند ، طریقی که اشیاء وضع خود را تغییرمی‌دهند ـ تمام این مطالب در علم‌ومهندسی اهمیت آشکار دارند . موارد استعمال زیاد دیگری که

دارای اهمیت کمتر می‌باشند درعلم و ریاضیات عالی می‌توان‌یافت.

***

دربحث‌قبلی جبر بردارها وجبرماتریس‌ها بیشتر بامدلهایی سروکارداشتیم . عملیات و موقعیت‌های علمی معینی امتحان‌می‌شد- یعنی مجموعه‌ای‌ازحیوانات، حرکت‌ها، سرمایه‌گذاری‌ها، دوران‌ها وانعکاس‌ها . دراین موقعیت ها وعملیات عناصری‌دیدیم‌که جمع‌و ضرب اعداد معمولی را به‌خاطرما می‌آورد. بااین وصف عبارت «بخاطرآوردن» مبهم وغیرواضح‌است . یك عمل تاچه درجه جمع را به‌خاطرما بیاوردتاما آن‌را باعلامت«+» نمایش دهیم ؟ بدیهی است‌که به‌قواعد معین ومشخصی نیازمندیم تا ابهام‌زیادی درمورد بکاربردن‌علامت‌ها نداشته باشیم .

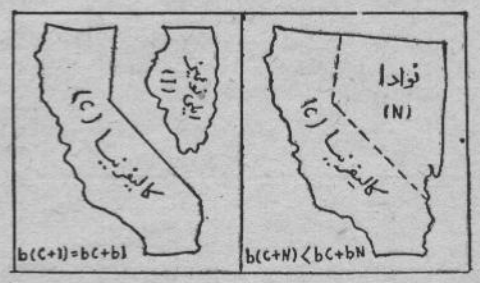
برای این‌که یك عمل را به‌عنوان تعمیم یافتهٔ عمل جمع بشناسیم چندشرط‌قبلا ذکرشده‌است . مثلا قانون **استقلال‌ازترتیب عوامل** می‌گوید که موضوع‌های a وb هرچه باشد و هرچقدر عمل ترکیب آنهاپیچیده باشدبایستی انتظار داشته باشیم a+b دارای همان معنیb+a باشد.درحساب معمولی ، ضرب نیزدارای خاصیت استقلال از ترتیب عوامل‌است : ۴×۳ همیشه دارای معنای۳×۴ می‌باشد، درحقیقت خواص جمع وضرب بساربه‌هم شباهت دارند . ازاین رو توانسته‌ایم جدولهای لگاریتم که عمل ضرب را به‌عمل جمع تبدیل‌می‌نماید ترتیب دهیم . ازآنجایی‌که بکاربردن دوعلامت دریك مورد بیهوده‌است ریاضیدانان قرارگذاشتندکه علامت «+» فقط درمورد دستگاههای مستقل ازترتیب عوامل‌بکاربرده شوداما علامت «×» احتیاج به‌چنین قیدی ندارد . بعضی ازشاخه‌های جبر a×b وb×a دارای یك معنی هستند در حالی‌که چنین‌اجباری را ندارند . وقتی a×b وb×a دارای‌معانی مختلف باشندچنین جبری را تابع‌ترتیب عوامل (Noncommutative) می‌خوانیم .

برای پیداکردن مثالی برای جبرتابع ترتیب عوامل‌به‌خود زیاد زحمت نمی‌دهیم . جبر ماتریسهاکه قبلا از آن بحث شد دارای مثالهای زیادی است . در شکلهای صفحهٔ ۴ عملیات دوران (B) وانعکاس (D) که روی شکل اصلی انجام شده‌اند در نظربگیرید . منعکس ساختن تصویر دوران یافته ودوران تصویر منعکس یك نتیجه نمی‌دهند ازنظر علامت D+BوB+D مساوی نیستند.همچنین ممکن است که رویهٔ های بانکی ارسرمایه‌گذاری حیوانات راتشکیل دهیم‌که سرمایه‌گذاری وتجدید سرمایه‌گذاری در نتیجهٔ‌نهایی مؤثرباشد . (البته‌این مطلب در حالت بانکداری معمولی‌که تجدید سرمایه‌گذاری همواره مستقل‌ازترتیب عوامل‌است صحیح نیست)

خاصیت مهم دیگر جبروضرب درحساب معمولی این‌است‌که این عملیات **شرکت پذیر**می‌باشند . به‌عبارت دیگر درمحاسبهٔ ۵+۴+۳ اشکالی ندارکه جواب را از۵+۷یا از ۹+۳بدست آوریم . درمورد ضرب ۵×۴×۳می‌توان حاصل را از۵×۱۲یا از۲۰×۳ پیداکرد. شاید ظرافتی دراین مفهوم نهفته‌باشد یعنی خواننده سؤال نمایدمگر این خاصیت ، همان خاصیت استقلال از ترتیب عوامل نیست . مگر این خاصیت همان‌نیست‌که در جمع و ضرب اعداد ، ترتیب عوامل دخالتی ندارد ؟ برای توضیح بیشتر دربارهٔ‌تفاوت‌این‌دوبایدگفت‌که‌عملیات‌همیشه‌عملیات‌حساب‌نیستندمثلا درعبارات«فروشنده، گاوی که‌لاغربود»و«فروشندهٔ‌گاوی که‌لاغربود» معانی‌متفاوت‌هستندمعنی‌عبارت‌اول‌آن‌است‌که‌گاولاغربوده‌درحالی‌که فروشنده‌ممکن‌است‌فربه‌بوده‌باشد.اما درعبارت دوم‌لاغربودن، صفت برای فروشنده است . ملاحظه می‌نمائید که ترتیب لغات عوض نشده اما برحسب‌آنکه یك‌کلمه رابه‌کدام‌کلمه بچسبانیم‌وباکدامیك فاصله بگذاریم معنی عوض می‌شود یعنی خاصیت شرکت پذیری به‌علامت‌گذاری بین‌کلمات بستگی داردنه به ترتیب آن‌ها . اینکه این دوخاصیت باهم به‌نحو بارزی تفاوت دارند با ملاحظهٔ اینکه جبرماتریس‌هامستقل‌ازترتیب عوامل بوده ولی شرکت پذیرنیستند واضحترمی‌شود.اکثردستگاههای جبری‌که‌تابه‌حال ثمربخش‌تشخیص داده‌شده‌اند شرکت پذیرمی‌باشند . بااین وجود نظریهٔ جبرشرکت ناپذیراخیراً توجه بعضی دانشمندان را به‌خود جلب نموده‌است .

خاصیت اساسی سوم حساب معمولی با قاعدهٔ **توزیعی** بیان می‌شودکه با رابطهٔ a(b+c)=ab+ac نمایش داده می‌شود .

مثلامرزقسمتهایی که‌به‌وسیلهٔ‌دوایالت**کالیفرنیا و ایلی‌نوئیز** پوشیده شده مساوی است با مرزکالیفرنیاکه باایلی‌نوئیز جمع‌شود اگر مرز رابا b ودو ایالت فوق را با Iوc نمایش‌دهیم می‌توانیم بنویسم b(b+I)=bc+bI جالب توجه است‌که قاعدهٔ توزیعی بودن در مورد مرزهای دو ایالتی‌که دارای مرز مشترك باشند بکار نمی‌رود .



مفهوم مرزها مربوط‌به**توپولوژی** ودربعضی قسمتهامربوط **به‌حساب‌جامعه‌و فاصله** می‌شود . در اینجا مهم است تشخیص داده شودکه جبر نقشی را داخل شاخه‌های دیگر ریاضی ایفاء می‌کند که این شاخه‌ها با عددارتباط دارد. در حقیقت شاخه‌های مختلف ریاضیات به اندازهٔ شگفت آوری در یکدیگر دخالت دارند.

***

در جبر لغت **هیأت** (Field) برای دستگاهی‌که شباهت

نزدیك با حساب داشته باشد به‌کار می‌رود جمع عملیات وتفریق وضرب وتقسیم در دستگاه هیأتها وجود دارد ومانند عملیات‌نظیر آن درحساب است مثلادرهرهیأت عنصری‌که با حرف «O»مشخص می‌شود وشباهت با صفر (که جمع آن‌بااعداد تفاوتی ایجاد نمی نماید) وعنصر I که شباهت با یك دارد(ضرب آن در اعدادتفاوتی ایجاد نمی‌کند) وجود دارد.هیأت‌های مختلف وجود دارد .جدول زیر یك‌هیأت‌راکه‌چهار عنصر دارد مشخص می‌نماید : O وI وA وB.

در این دستگاه، عملیات اساساً طبق همان قواعدی انجام می‌گیرد که درحساب‌وج برمقدماتی‌انجام می‌دادیم‌وخواص استقلال‌ازترتیب عوامل و شرکت پذیری وتوزیعی بودن هرسه‌صدق‌می‌نماید. امکان وجودیك‌هیأت‌باتعدادی‌محدودازعناصرابتدابوسیلهٔ **گالوا**(Galois) در ۱۸۳۰ کشف‌شد . این هیأت بخصوص‌که با چهار عنصر مشخص می‌شود **هیأت‌گالوا** خوانده میشود .

	O	I	A	B
O	O	I	A	B
I	I	O	B	A
A	A	B	O	I
B	B	A	I	O

هر فرمولی رااز جبردورهٔ دبیرستان‌درنظر بگیرید خواهید دیدکه‌در هیأت‌اعدادگالوا صدق می‌نماید. مثلا در جبر مقدماتی داریم حاصلضرب $A+B$ در $A-B$ برابر A^2-B^2 می‌باشد.

	O	I	A	B
O	O	O	O	O
I	O	I	A	B
A	O	A	B	I
B	O	B	I	A

این‌اتحادبرای هیأت اعدادگالوا نیز صادق است با بکار بردن دو جدول فوق خواهید یافت‌که هر دو طرف اتحاد برابر I می‌شود .

در اینجابه‌پایه‌ای‌کاملا نظری رسیده‌ایم. برای O وI وA وB هیچکدام معنی درنظرگرفته نشده است . صحبت در بارهٔ مجموعهٔ حیوانات وحرکت‌اجسام نیست.فقط‌نمونه‌ای پیداکرده‌ایم که‌شباهت جالب‌توجهی‌با نمونه‌های‌حساب‌معمولی دارد . یك‌دانشمندریاضیات محض خواهدگفت‌که این فقط موضوع و هدف ریاضیات است یعنی کشف نمونه‌های زیبا و جالب . یك دانشمند ریاضی عملی یا یك دانشمندعلوم یایك مهندس ، علاقمند است بداندکه آیا این‌نمونه چیزی است‌که در طبیعت اتفاق می‌افتد وبنابراین بدان می‌توان تعبیر ومورد استعمالی نسبت داد ؛ اگر چه هیأت اعداد گالوا به عنوان یك نمونهٔ مجرد ریاضی قبول شد اما اخیراً مورد استعمال غیر منتظره‌ای پیداکرده است .

* * *

در هیأت اعداد جمع وتفریق وضرب وتقسیم (به استثنای تقسیم بر O که ممنوع است) جایز است. تمام دستگاههای جبری دارای چنین لیست عملیات نیستند . در **حلقه** (Ring) می‌توان عملیات جمع وتفریق وضرب را انجام داد اما عمل تقسیم در همهٔ موارد مجاز نیست . یك مثال واضح از حلقه ، اعداد صحیح‌مثبت ومنفی می‌باشد . اگر شخصی فقط با اعدادی مانند

... و ۴ و۳و۲و۱و۰و۱ — و۲ — و۳ — و۴ — ...

آشنایی‌داشته باشد هر مسأله‌ای که شامل جمع‌وتفریق وضرب این اعداد باشد می‌تواند انجام دهد اما از عمل تقسیم ۳ بر ٤ عاجز خواهد بود .

مقیدتر از حلقه مفهوم‌**گروه** (Group) است . هنگامی دستگاهی راگروه می‌نامیم‌که انجام یك عمل شبیه به عمل ضرب تعمیم یافته امکان داشته باشد این عمل باید شرکت پذیر باشد و عبارتی‌نظیر xyz بایدمعنای‌مشخصی‌داشته‌باشد یعنی $x.yz=xy.z$. هرگروه باید عنصری مانند I که شباهت با عدد ۱ در حساب‌دارد داشته باشد علاوه براین تقسیم هم امکان داشته باشد .

برای اینکه‌یك دستگاه جبری به‌عنوان یك‌گروه شناخته شود آزمایشهای بسیارکمی لازم است . بهمین علت است‌که نظریهٔ گروهها در ریاضیات عالی وفیزیك توسعهٔ فراوان یافته است .

بسیاری از دستگاههای جبری در مسائل مخصوصی از شاخه‌های دیگر ریاضی داخل شده‌اند . در پایان قرن نوزدهم ریاضیدان‌نروژی‌**سوفوس‌لی** (Sophos Lie) طبقه‌بندی‌معادلات دیفرانسیل در جامعه و فاضله را انجام داد . نمونه های معینی در این دستگاه طبقه بندی ، استخراج شده وموضوع جدیدی به‌عنوان **گروههای «لی»** تشکیل داده است . بهمین ترتیب مسائل معینی از توپولوژی موضوع جدیدی‌از جبر را تشکیل داده‌که ثابت‌شده است موارد استعمال زیادی خارج از توپولوژی دارد .

در حدود سال ۱۸۵۰ ریاضیدان و منطق‌دان انگلیسی **جرج‌بول** (George Boole) دستگاه منطق علامتی‌که در آن احکام **منطق ارسطو** به صورت‌تساویهاومعادلاتی شبیه معادلات‌جبر مقدماتی در می آید توسعه داد . این دستگاه از بسیاری قواعد حساب معمولی‌که شامل‌قواعد استقلال از ترتیب عوامل ، شرکت‌پذیری وتوزیعی بودن نیز می‌شود متابعت می‌کرد. **جبر بول** اخیراً در طرح مدارات‌تلفن وماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی بکاربرده شده است .

جبر مانند هرشاخهٔ دیگر ریاضیات وعلوم به رشد وتوسعهٔ خود ادامه می‌دهد ومانند جنگلهای‌استوائی‌روز به روز بروسعتش افزوده می‌گردد . موقعیت مشکلی است. دانستن تمام چیزهاغیر ممکن است . با وجود این هرکس‌که در رشته‌ای تخصص داردبه شما می‌گویدکه باید قسمت بخصوصی ازجبر راکه اوجالب‌می‌یابد بدانید . دانشمندی‌که با ریاضیات سروکار دارد باید آگاه باشد که معلومات جدید ریاضی‌زیادی‌کشف می‌شودکه تقریباً تمام آنها به رشتهٔ تحقیق او نامربوط است بااینحال باید برای یافتن‌قطعات کوچکی از این معلومات ،که امکان دارد ارزش زیادی برای وی داشته باشد چشمانش را باز نگهدارد .

مدیر محترم مجلهٔ یکان

«آنالیز بعدی» یکی از مباحثی است‌که اثر شگرف ریاضیات را در علوم تجربی آشکار می‌سازد بدین مناسبت مقالهٔ زیر تهیه وجهت درج درآن مجلهٔ ارجمند تقدیم گردید.

مهندس احمد روحانی ، ۱۰-۸-۱۳۴۴

آنالیز بُعدی

Dimensional Analysis

اقتباس از منابع خارجی

آنالیز بعدی طریقهٔ سودمند و جالبی است که جهت بررسی روابط فیزیکی بکار می‌رود. هرگاه متغیرهایی را که در یك رابطهٔ فیزیکی وجود دارند بخوبی بشناسیم، می‌توانیم با استفاده از عملیات ریاضی شکل رابطهٔ ممکنه ما بین این متغیرها را پیش‌بینی نمائیم. آنالیز بعدی در موردی‌که شکل رابطهٔ فیزیکی مفصل باشدکومك شایانی نموده و اکثراً ما را ازتجارب و اندازه‌گیریهایی‌که برای استنتاج شکل رابطه لازم است بی‌نیاز می‌سازد. علاوه بر این اکثراً می‌توان به‌کومك آنالیز بعدی صحت و سقم روابط فیزیکی را بررسی نمود.

ما دراین‌مقاله اصول و قضایای‌مربوطه رااجمال متذکر گردیده و بعد از ذکر مثالهایی به تعدادکافی. سررشته را جهت بررسی بیشتر به دست علاقمندان می‌سپاریم

فرمولهای بعدی

می‌دانیم برای اندازه‌گیری‌کمیات نیازی به انتخاب واحد برای تمام آنها نیست. بلکه می‌توان‌کمیاتی را بعنوان کمیات اصلی برگزیده وواحد جهت‌آنها انتخاب نمود برای سایرکمیات واحد اندازه‌گیری ازرابطهٔ مابین آنها وکمیات اصلی نتیجه می‌شود. مثلا چنانچه طول، جرم و زمان را بعنوان‌کمیات اصلی انتخاب‌کرده و مقدار آنها را به ترتیب به L، M و T نشان دهیم، برای انتخاب واحد جهت سرعت شتاب و نیروکه به ترتیب به v، γ و F نموده می‌شوند می‌توان ازروابط زیر استفاده نمود:

$$v=\frac{L}{T} \quad و \quad \gamma=\frac{v}{T}=\frac{L}{T^{2}} \quad و \quad F=M\gamma=\frac{ML}{T^{2}}$$

از این‌روابط بآسانی نتیجه‌می‌شود: واحد سرعت و شتاب به‌ازاء $L=T=1$ و واحد نیرو به‌ازاء $M=L=T=1$ حاصل می‌گردد.

LT^{-1} و LT^{-2} و MLT^{-2} را به‌ترتیب فرمولهای بعدی سرعت و شتاب ونیرو می‌نامند. بطورکلی ساده ترین فرمولی‌که‌کمیت مفروضی را برحسب‌کمیات اصلی‌بیان می‌کند به فرمول بعدی‌کمیت مفروض موسوم است.

فرمول بعدی یك‌جمله شامل چندکمیت عبارتست ازفرمولی‌که بعدازجانشین‌کردن‌کمیات‌بوسیلهٔ فرمول‌بعدی‌آنها وساده‌کردن فرمول حاصله بدست می‌آید. مثلا فرمول بعدی $\frac{L\gamma}{F}$ عبارتست‌از:

$$\frac{L\cdot LT^{-2}}{MLT^{-2}}=LM^{-1}$$

از آنجاکه جمع و تفریق فقط برای مقادیر همجنس صحیح است، بنابراین در هرکثیرالجمله، فرمول بعدی تمام جمل یکسان است. فرمول بعدی یك‌کثیرالجمله فرمول بعدی هریك از جمل‌آن می‌باشد.

اعداد مطلق که حاصل سنجش دو مقدار از یك کمیت هستند بدون بعد می‌باشند .

اینك می‌پردازیم به ذکر قضایای آنالیز بعدی :

قضیهٔ (۱)

هررابطهٔ فیزیکی را می‌توان به صورت تابعی از مقادیر بدون بعد مساوی با مقدار ثابت نوشت .

اثبات : در هر رابطهٔ فیزیکی می‌توان کلیهٔ کمیات را به یکسومثلا به سمت چپ نقل نمود . چون سمت راست رابطه مقدارثابت می‌باشد پس هریك ازجمل سمت چپ رابطه بایستی همجنس مقدار ثابت یعنی مقدار بدون بعد باشد .

قضیهٔ (۲)

اگر تعدادکمیات دریك رابطه m و تعداد آحاد اصلی n باشد . معمولا تعداد جمل بدون بعد $m-n$ است. ولی این قاعده‌کلیت نداشته وبعضی اوقات تعداد جمل‌بدون بعد با $m-n$ متفاوت می‌باشد .

اثبات در بعضی حالات :

(۱) $m-n=1$ مثلا $m=3$ و $n=2$ ؛ کمیات را a و b و c وآحاداصلی اصلی را L و M فرض می‌کنیم. منظور تعیین رابطه به صورت $a=f(b$ و $c)$ می‌باشد. مقدار بدون بعد مجهول را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$ab^{\alpha}c^{\beta}$$

که درآن α و β مجهول می‌باشند . علت آنکه نمایندهٔ a را مساوی یك فرض کرده‌ایم اینست که همواره می‌توان هرجمله بدون بعد را به قوای مختلف رسانید بدون آنکه خاصیت بدون بعد بودن آن تغییر کند. درنتیجه می‌توان نمایندهٔ یکی‌ازعوامل را به یك تبدیل نمود . فرمول بعدی a و b و c را به ترتیب

$$L^{m''}M^{n''} \text{ و } L^{m'}M^{n'} \text{ و } L^{m}M^{n}$$

فرض می‌کنیم . فرمول بعدی این جمله عبارتست از:

$$L^{m}M^{n}(L^{m'}M^{n''})^{\alpha}(L^{m''}M^{n''})^{\beta}$$
$$=L^{m+\alpha m'+\beta m''}\times M^{n+\alpha n'+\beta n''}$$

چون این مقدار بدون بعد است پس لازم است :

$$\begin{cases} m+\alpha m'+\beta m''=0 \\ n+\alpha n'+\beta n''=0 \end{cases}$$

از این دو معادله می‌توان α و β را بدست‌آورد . نتیجه‌آنکه فقط یك فرمول بدون بعد شامل تمام‌کمیات موجود است .

(۲) $m-n=2$ ، مثلا $m=4$ و $n=2$ ؛ کمیات را a و b و c و d وآحاد اصلی را L و M فرض می‌کنیم .

فرمول بدون بعد را می‌توان یك بار به صورت $ab^{\alpha}c^{\beta}$ و بار دیگر به صورت $bc^{\alpha'}d^{\beta'}$ فرض‌کرده ومطابق حالت (۱) عمل نمود . بدین ترتیب بالاخره دو فرمول بدون بعد بدست می‌آید .

البته ممکن است فرمولهای بدون بعد دیگری مانند

$$ac^{\alpha'''}d^{\beta'''} \text{ و } ab^{\alpha''}d^{\beta''}$$

نیز بدست‌آورد . ولی چنانچه بخواهیم طبق قضیهٔ (۱) تابع دلخواهی از این مقادیر بدون بعد تشکیل دهیم جداکردن a برای‌آنکه به شکل

$$a=f(b \text{ و } c \text{ و } d)$$

درآید درحالت‌کلی ممکن نیست .

نتیجه‌آنکه یك فرمول بدون بعد از a ودوکمیت دیگر از سه‌کمیت بغیراز a بوجود می‌آید .

قاعدهٔ کلی

ازآنچه گذشت قاعدهٔ زیرجهت‌تعیین شکل‌روابط فیزیکی نتیجه می‌شود :

۱ـ تمام‌کمیات موجود دررابطه را تعیین‌نموده وفرمول بعدی آنها را می‌نویسیم . فرمول بعدی‌کمیات مهم در جدول زیر داده شده است .

۲ـ با استفاده از قضیهٔ (۲) تعداد فرمولهای بدون بعدرا بطور تقریب حدس می‌زنیم . این فرمولها را طبق طریقه‌ای که برای اثبات قضیهٔ (۲) بکاررفته است تعیین می‌نمائیم .

۳ـ با استفاده از قضیهٔ (۱) تابعی دلخواه ازاین‌مقادیر بدون بعد را مساوی مقدار ثابت قرار می‌دهیم .

کمیت	فرمول بعدی
تواتر (فرکانس)	T^{-1}
جرم مخصوص	ML^{-3}
حجم	L^{3}
درجهٔ حرارت	t
زاویه	بدون بعد
سرعت	LT^{-1}
سرعت زاویه‌ای	T^{-1}
سطح	L^{2}
شتاب	LT^{-2}
شتاب زاویه‌ای	T^{-2}
فشار	$ML^{-1}T^{-2}$
فشارپذیری	$M^{-1}LT^{2}$
قدرت	$ML^{2}T^{-3}$
کار	$ML^{3}T^{-2}$
لزجت	$ML^{-1}T^{-1}$
مدول ارتجاعی	$ML^{-1}T^{-2}$
ممان دینرسی	ML^{2}
نیرو	MLT^{-2}

مثال ۱ـ سقوط اجسام در خلاء

منظور تعیین رابطهٔ مابین S مسافت سقوط جسم ، m جرم جسم ، g شتاب ثقل و t زمان سقوط می‌باشد . اینك فرمول بعدی این کمیات :

کمیت	علامت	فرمول بعدی
مسافت	S	L
جرم	m	M
شتاب	g	LT^{-2}
زمان سقوط	t	T

تعداد کمیات چهار و تعداد آحاد سه است . پس مطابق قضیهٔ (۲) قاعدهٔ تعداد فرمولهای بدون بعد بایستی $4-3=1$ باشد این فرمول بدون بعد به شرح زیر بدست می‌آید :

$$Sm^{\alpha} g^{\beta} t^{\gamma} \text{ و } L.M^{\alpha}.L^{\beta}T^{-2\beta}.T^{\gamma}$$

$$=L^{1+\beta}M^{\alpha}T^{-2\beta+\gamma}$$

شرط بدون بعد بودن فرمول عبارتست از :

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=-1 \\ \gamma=-2 \end{cases} \quad \text{و از آنجا} \quad \begin{cases} 1+\beta=0 \\ \alpha=0 \\ -2\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

پس فرمول مطلوب عبارتست از :

$$Sg^{-1}t^{-2}$$

مطابق قضیهٔ (۱) بایستی تابعی از این مقدار مساوی مقدار ثابت باشد که ساده‌ترین آن به شکل زیراست :

$$Sg^{-1}t^{-2}=c\underline{t} \text{ و یا } \underline{\underline{S=c\underline{t}\times gt^{2}}}$$

مثال ۲ـ رابطهٔ مشخصهٔ گازهای کامل

کمیت	علامت	فرمول بعدی
فشار	p	$ML^{-1}T^{-2}$
جرم مولکولی	m	M
عدهٔ مولکولها در واحد حجم	N	L^{-3}
درجهٔ حرارت مطلق	t	t
مقدار ثابت گاز	k	$ML^{2}T^{-2}t^{-1}$

پنج مقدار و چهار واحد وجود دارد . پس قاعدهٔ یك فرمول بدون بعد بدست خواهد آمد .

$$pm^{\alpha}N^{\beta}t^{\gamma}k^{\delta}$$

$$ML^{-1}T^{-2}.M^{\alpha}.L^{-3\beta}.t^{\gamma}.M^{\delta}L^{2\delta}T^{-2\delta}t^{-\delta}$$

$$=M^{1+\alpha+\delta}L^{-1-3\beta+2\delta}T^{-2-2\delta}t^{\gamma-\delta}$$

شرط بدون بعد بودن فرمول :

$$\begin{cases} 1+\alpha+\delta=0 \\ -1-3\beta+2\delta=0 \\ -2-2\delta=0 \\ \gamma-\delta=0 \end{cases} \quad \text{وازآنجا} \quad \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=-1 \\ \gamma=-1 \\ \delta=-1 \end{cases}$$

و اینك فرمول :

$$pN^{-1}t^{-1}k^{-1}$$

ساده ترین شکل رابطهٔ فیزیکی :

$$pN^{-1}t^{-1}k^{-1}=c\underline{t}$$

و چون N با v معکوساً متناسب است پس :

$$pv=c\underline{t}\times kt$$

مثال ۳ـ زمان تناوب آونگ

کمیت	علامت	فرمول بعدی
زمان تناوب	t	T
جرم آونگ	m	M
طول آونگ	l	L
شتاب ثقل	g	LT^{-2}
زاویهٔ آونگ نسبت به حالت تعادل در شروع نوسان	ω	بدون بعد

تعداد مقادیر پنج و تعداد آحاد سه است پس قاعدهٔ دو فرمول بدون بعد وجود دارد . پیداست یکی از آنها ω است . برای تعیین دیگری به طریق زیر عمل می‌کنیم :

$$tm^{\alpha}l^{\beta}g^{\gamma} \quad \text{و} \quad T.M^{\alpha}.L^{\beta}.L^{\gamma}T^{-2\gamma}$$
$$=T^{1-2\gamma}M^{\alpha}L^{\gamma+\beta}$$

شرط بدون بعد بودن فرمول :

$$\begin{cases}1-2\gamma=0\\ \alpha=0\\ \gamma+\beta=0\end{cases} \quad \text{و از آنجا} \quad \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=-\frac{1}{2}\\ \gamma=\frac{1}{2}\end{cases}$$

پس فرمول عبارتست از :

$$tl^{-\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}$$

طبق قضیهٔ (۱) بایستی :

$$f_1[(tl^{-\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}) \quad \text{و} \quad \omega[=ct$$

و یا :

$$tl^{-\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}=f_2(\omega) \quad \text{و} \quad t=\sqrt{\frac{l}{g}}f_2(\omega)$$

دراین رابطه f_2 رابطهٔ دلخواهست . این رابطه نشان‌می‌دهد که t اصولاتابع ω است منتها به تجربه ثابت شده است در مورد انحرافات کوچك آونگ $f_2(\omega)$ ثابت وبرابر 2π می‌باشد.

مثال ۴ـ فرمول اساسی دینامیك

کمیت	علامت	فرمول بعدی
نیرو	F	MLT^{-2}
جرم	m	M
شتاب	γ	LT^{-2}

تعداد مقادیر سه وتعداد آحاد نهز سه است . پس قاعدهٔ نبایستی فرمول بدون بعد وجود داشته باشد. معذالك مطابق معمول عمل می‌کنیم :

$$Fm^{\alpha}\gamma^{\beta} \quad \text{و} \quad MLT^{-2}.M^{\alpha}.L^{\beta}T^{-2\beta}$$
$$=M^{1+\alpha}L^{1+\beta}T^{-2-2\beta}$$

لازم است :

$$\begin{cases}1+\alpha=0\\ 1+\beta=0\\ -2-2\beta=0\end{cases} \quad \text{و از آنجا} \quad \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=-1\end{cases}$$

اینك فرمول :

$$Fm^{-1}\gamma^{-1}$$

و اینك رابطهٔ :

$$Fm^{-1}\gamma^{-1}=ct \quad \text{و} \quad F=ct\times m\gamma$$

این مثال یکی از موارد استثنائی است که در قضیهٔ (۲) صدق نمی‌کند .

مثال ۵ـ مقاومت هوا

کمیت	علامت	فرمول بعدی
مقاومت هوا	R	MLT^{-2}
ضریب مقاومت	K	ML^{-3}
سطح	S	L^2
سرعت	V	LT^{-1}

تعداد مقادیر چهار و تعداد آحاد سه است. پس قاعدهٔ یك فرمول بدون بعد وجود دارد .

$$RK^{\alpha}S^{\beta}V^{\gamma} \quad \text{و}$$

$$MLT^{-2}.M^{\alpha}L^{-3\alpha}.L^{2\beta}.L^{\gamma}T^{-\gamma}$$
$$=M^{1+\alpha}L^{1-3\alpha+2\beta+\gamma}T^{-2-\gamma}$$

لازم است :

$$\begin{cases}1+\alpha=0\\ 1-3\alpha+2\beta+\gamma=0\\ -2-\gamma=0\end{cases} \quad \text{و از آنجا} \quad \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=-1\\ \gamma=-2\end{cases}$$

ساده‌ترین شکل رابطه :

$$RK^{-1}S^{-1}V^{-2}=ct \quad \text{و} \quad R=ct\times KSV^2$$

(دنباله در پائین صفحهٔ ۵۶)

مختصری از شرح حال و آثار دانشمند معروف عهد صفوی

شیخ بهائی

قوام نحوی دبیر دبیرستانهای اهواز

بهاءالدین محمدعاملی معروف به ، شیخ بهائی دانشمند معروف عهد صفوی در تمام علوم عصر خود استاد بوده است . درفقه و اصول وشعر وادبیات و ریاضی و هیئت ونجوم و حکمت و فلسفه تبحر کامل داشته است ـ وی نقشهٔ ابنیهٔ تاریخی راکه در زمان شاه عباس کبیر در اصفهان ساخته شده طرح کرده است که ازهمه معروفتر مسجدشاه اصفهان است ـ در نقشهٔ این مسجد بقدری مهارت بخرج داده است که کجی صحن مسجد نسبت به میدان شاه برای واردشوندهٔ به مسجد محسوس نیست ـ تقسیم آب زاینده رود اصفهان بین صاحبان اراضی بستر رود خانه بوسیلهٔ این دانشمند انجام شده که هنوز هم ازآن زمان تاکنون عملی می‌شود وآنرا **طومار شیخ بهائی** می‌نامند ـ شیخ بهائی علاوه برآنکه دانشمندی بنام بوده مطابق آنچه که بین مردم اصفهان شایع است دارای کراماتی نیز بوده است ازجمله حمامی در اصفهان منسوب به اوست به نام حمام شیخ که می گویند سالها آب آن گرم بوده بدون آنکه آنرا گرم کنند، ووقتی بعد از چند سال آنرا خراب می کنند تا علت آنرا بفهمند می‌بینند فقط شمعی زیر مخزن آب آن روشن است و در این موقع شمع خاموش می‌شود وآب حمام هم سرد می گردد!.

مهمترین کتاب شیخ بهائی درریاضیات کتاب **خلاصة ـ الحساب** است که به عربی نوشته شده و توسط **فرهاد میرزا** به‌فارسی ترجمه‌وتحشیه‌شده‌و **کنز الحساب** نامیده‌شده‌است ـ این کتاب باآنکه اسم حساب را دارد اما شامل بیشتر مباحث و ومطالب ریاضی، هندسه ـ جبر ـ مثلثات ـ حساب‌وهیئت می‌باشد. شیخ علاوه بر آن درکتاب کشکول خود نیز مطالب جالبی از جبر و حساب ذکر نموده است.شیخ بهائی درکتاب خلاصة ـ الحساب ازهندسه شروع کرده و خط و سطح را تعریف نموده و بعداً به تفصیل مساحتهای اشکال (مثلث ـ چهارضلعی ـ دایره) را ذکر نموده سپس به‌ذکراحجام مکعب ومکعب مستطیل‌ومخروط و استوانه ومخروط ناقص پرداخته است ـ پس از هندسه طریقهٔ اندازه گیری ارتفاعات وپهنای رودخانه‌ها و عمق چاه را ذکر کرده ویافتن ارتفاع خورشیدرا بوسیلهٔ شاخص بیان داشته است در قسمت جبرابتدا مجهول را **شیئی** نامیده (x) وحاصل‌ضرب آنرا در خودش **مال** (x^2) و حاصل‌ضرب مال را درشیئی **کعب** (x^3) و بهمین ترتیب **مال مال** (x^4) و .. بیان داشته است وی حروف جبری را مطلقاً بکار نبرده است . عکس شیئی را **جزء الشیئی** $(\frac{1}{x})$ و عکس مال را **جزءالمال** $(\frac{1}{x^2})$ نامیده است . درکتاب جدولی کشیده شده است که شامل ضرب ویا تقسیم عوامل x و x^2 و x^3 و $\frac{1}{x}$ ... و $\frac{1}{x^2}$ می‌باشد که بسیار جالب توجه است و درآخر این مقاله درج شده است.

درقسمت حساب تعریف عدد را اینطور می گوید : عدد اطلاق‌می‌شودبرواحدوآنچه ازاو تألیف شود و همهٔ اعداد مرکب ازواحدند وگوید هرعدد مساوی نصف مجموع دو طرف خودش است. دراین کتاب عدد رابه‌اقسام‌مختلفه‌تقسیم‌نموده‌است ،اعداد صحیح ، کسری ،گویا ،گنگ (اصم) ، اعداد تام ، ناقص ، زائد.عدد تام راگوید عددی است که مساوی اجزاء خودش‌باشد مانند۶که ۱ + ۲ + ۳ = ۶ وعدد ناقص آنست که اجزاءآن از خودش کمتر باشد ـ مقصودآنست که مجموع مقسوم علیه‌های آن ازخودش کمترباشدمانند۱۶؛ ۱ + ۲ + ۴ + ۸ = ۱۵ (خود۱۶ راجزءآن حساب نکرده است)

وعدد زائدآنست که مجموع اجزاءآن‌ازخودش‌بیشتراست مانند ۱۲ ؛ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۶ = ۱۶

ازخواص اعداد تام‌آنست که درهرمرتبه یکی‌موجوداست

شیخ بهائی دربارهٔ عدم تام جلد سوم کشکول گوید :

اشرف‌الاعدادالعددالتام‌وهوماکانت‌اجزاؤه‌مساویه‌له قالوا ولهذاکان عددالایام‌التی خلقت فیهاالسموات والارض و هو-

السته کما نطق به الذکر الحکیم و اما العدد الزاید والناقص فما زادت علیه اجزاؤه او نقصت کالاثنی عشر فانه زائد والسبعه فانها ناقصه قال فی الانموزج و قد نظمت قاعده فی تحصیل العدد التام فقلت:

چو باشد فرد اول ضعف زوج الزوج کم واحد
بود مضروب ایشان تام ورنه ناقص و زائـد

او می‌گوید عدد تام اشرف اعداد است مثل ۶ که روزهایی است که خداوند آسمانها وزمین را خلق کرده است ـ بـرای یافتن عـدد تام ازروی شعر بالا می‌توان آنرا بدست آورد ـ به این طریق که عدد یك را با قوای عدد ۲ جمع می‌کنیم اگر حاصل عدد اول شد آنرا درعدد آخری (قوهٔ ۲) ضرب می‌کنیم . حاصل عددی‌است تام . مثلا :

عدداول ۷ = ۴ + ۲ + ۱ ، عدد اول ۳ = ۲ + ۱
عدد تام ۲۸ = ۴ × ۷ ، عدد تام ۶ = ۲ × ۳

اول نیست ۱۵ = ۸ + ۴ + ۲ + ۱

عدد اول ۳۱ = ۱۶ + ۸ + ۴ + ۲ + ۱
عدد تام ۴۹۶ = ۱۶ × ۳۱

اول ۱۳۷ = ۶۴ + ۶۳
تام ۸۱۲۸ = ۶۴ × ۱۲۷ ، اول نیست ۶۳ = ۳۲ + ۳۱

ملاحظه می‌شود درهر مرتبه‌ای یك عدد تام موجود است : ۶ و ۲۸ و ۴۹۶ و ۸۱۲۸ و....

« برای یافتن عدد تام که مجموع مقسوم علیه های آن غیراز خودش باآن مساوی است می‌توان از فرمول :

$$N=(2^{n+1}-1)2^n$$

استفاده کرد به شرط آنکه n زوج یا مساوی یك باشد»

درقسمت حساب خلاصة الحساب مسائلی در قواعد جمع اعداد طبیعی یا فردطبیعی یازوج طبیعی ذکر کرده است وهمچنین قاعده‌ای برای یافتن مجموع مربعات اعداد طبیعی گفته است ـ مثلا می‌خواهیم مجموع مربعات :

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$$

را حساب کنیم عدد آخر را دو برابر کرده با یك جمع می‌کنیم

$$6\times2+1=13 \qquad 13:3=4\frac{1}{3}$$

وثلث آنرا درمجموع اعداد ضرب می‌کنیم

$$1+2+3+4+5+6=21 \qquad 21\times4\frac{1}{3}=91$$

قاعده برای یافتن مجموع مکعبات اعداد طبیعی ـ می‌گوید مجموع اعدادرا یافته مربع می‌کنیم

$$S=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$$

$$1+2+3+4+5+6=21 \text{ و } 21^2=441$$

$$S=441$$

در کتاب مزبور اثبات این دو قاعده نیز ذکر شده است که بواسطهٔ مفصل بودن از ذکر آنها خودداری می‌شود و طالبین می‌توانند به اصل کتاب مراجعه کنند .

در قسمت آخر بعضی چاپهای کتاب خلاصة الحساب مباحثی از هیئت و نجوم نیز ذکر شده است ـ جدول مربوط به ضـرب و تقسیم شیئی ومال ومال مال وکعب وجزء الشی و...

المضروب

	المال	الشیئی	الواحد	جزءالشیئی	جزءالمال	
المال	مال‌المال	الکعب	المال	الشیئی	الواحد	المال
الشیئی	الکعب	المال	الشیئی	الواحد	جزءالشیئی	الشیئی
الواحد	المال	الشیئی	الواحد	جزءالشیئی	جزءالمال	الواحد
جزءالشیئی	الشیئی	الواحد	جزءالشیئی	جزءالمال	جزءالکعب	جزءالشیئی
جزءالمال	الواحد	جزءالشیئی	جزءالمال	جزءالکعب	جزءالمال	جزءالمال
	جزالمال	جزءالشیئی	الواحد	الشیئی	المال	

المضروب فیه

المقسوم

المقسوم علیه

مثلا: جزءالشئی × شیئی = الواحد (از ستون سمت‌راست و سطر بالا، مضروب و مضروب فیه)

یا شیئی : مال = شیئی (مال تقسیم بـر شیئی مساوی شیئی است، از ستون سمت چپ و سطر پائین مربوط به مقسوم و مقسوم علیه است)

در خاتمه جادارد که وزارت فرهنگ یامؤسسات فرهنگی کتاب با ارزش خلاصة الحساب را به فارسی ترجمه کرده و در دسترس دانش‌آموزان قرار دهند تا مورد استفاده قرارگرفته و نامی هم از دانشمندان باارج ایرانی برده شود .

***

آیا خطوط مثلثاتی، مقادیر جبری هستند؟

ترجمهٔ : وارتان وارتانیان

هر عددی که بتواند ریشهٔ معادله‌ای به‌صورت زیر باشد.

$$ax^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$$

(که در آن ضرایب a و a_1 و ... و a_n اعداد منطق هستند) **عدد جبری** نامیده‌می‌شود مثل -5 و $\frac{1}{3}$ و $\sqrt{7}$.

اعدادی که این خاصیت را نداشته باشند یعنی‌ممکن‌نیست که ریشهٔ یك معادلهٔ چند جمله‌ای صحیح باضرایب منطق باشند **اعداد غیر جبری** (Transendant) نامیده می‌شوند مانند عدد π یا عدد $\log 2$. مقادیر خطوط مثلثاتی‌در جدولهای مربوط تاچندین رقم اعشاری ثبت شده‌اند . بعضی‌ازاین مقادیر را می‌شناسیم ومی‌دانیم عدد جبری هستند . مثلا برای کسینوس کمان ۳۰درجه در جدول عدد ۰/۸۶۶۰ . یادداشت شده است و می‌دانیم که‌مقدار واقعی‌این‌عدد برابر است‌با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ که ریشهٔ معادلهٔ $4x^3-3=0$ می‌باشد . حال می‌خواهیم معلوم کنید که آیا همهٔ مقادیر خطوط مثلثاتی کمانها اعداد جبری هستند. یا نه ؟

دراین مقاله بعضی معادلات معرفی می‌شوندکه ریشه‌های آنها مقادیر خطوط مثلثاتی برخی ازکمانهاهستندومثالهائی که مطرح می‌گردد محدود به مقادیر کسینوس و یاسینوس می‌باشند نخست معادلاتی را در نظر می‌گیریم که ریشه‌های آنها مقادیر $\cos 0^\circ$(یا $\sin 90^\circ$) ، $\cos 1^\circ$($\sin 89^\circ$) ، $\cos 2^\circ$و ...و$\cos 98^\circ$ باشد.خواهیم دیدکه هر یك از ۹۰ مقدار فوق ریشهٔ معادله‌ای با درجهٔ به‌ترتیب ۱ و ۲ و۳ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۲ و ۱۶ و ۲۴ و ۴۸ می‌باشند و تقلیل درجهٔ این معادلات غیر ممکن است .

تنها دو مقدار منطق بین ۹۰ مقدار فوق عبارتند از ۱ و $\frac{1}{2}$ که از معادلات زیر نتیجه می‌شوند .

(۱) $x-1=0 \qquad x=1 \ : \ \cos 0^\circ$

(۲) $2x-1=0 \qquad x=\frac{1}{2} \ : \ \cos 60^\circ$

دو معادلهٔ درجهٔ دوم زیرنیز به‌سادگی شناخته می‌شوند

(۳) $4x^2-3=0 \qquad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \ : \ \pm\cos 30^\circ$

(۴) $2x^2-1=0 \qquad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \ : \ \pm\cos 45^\circ$

تنها معادلهٔ‌درجهٔ دوم دیگر باضرایب منطق که‌ریشه‌هایش مقادیر مثلثاتی هستند عبارتست از :

(۵) $4x^2-2x-1=0 \qquad x=\frac{1\mp\sqrt{5}}{4} \ : \ \cos 36^\circ$ و $-\cos 72^\circ$

برای تعیین این معادله ، اتحاد زیر را در نظرمی‌گیریم

$$\cos 5t=16\cos^5 t-20\cos^3 t+5\cos t$$

بـا انتخاب $x=\cos t$ و در ازاء $t=36^\circ$ یا $t=108^\circ$ خواهیم داشت .

$$16x^5-20x^3+5x+1=0$$

که پس ازحذف ریشهٔ $x_1=-1$ از آن ، معادلـه به‌صورت زیردرمی‌آید .

$$(4x^2-2x-1)^2=0 \quad \text{یا} \quad 4x^2-2x-1=0$$

روش دیگر به‌ترتیب زیر است .

$$4\cos^3 36^\circ-3\cos 36^\circ=\cos 3\times 36^\circ=\cos 108^\circ$$
$$=-\cos 72^\circ=-(2\cos^2 36^\circ-1)$$

با انتخاب $x=\cos 36^\circ$ خواهیم داشت :

$$4x^3-3x=-2x^2+1 \qquad \text{یا}$$
$$4x^3+2x^2-3x-1=0$$

که به‌صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$(x+1)(4x^2-2x-1)=0$$

از معادلات درجهٔ سوم فقط یك نوع آن را می‌شناسیم .

(۶) $8x^3-6x-1=0$

$x=\cos 20^\circ$ و $-\cos 40^\circ$ و $-\cos 80^\circ$

این معادله از اتحاد $\cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t$ با انتخاب $x=\cos t$ و در ازاء مقادیر 20° و 100° و 140° برای t به‌دست می‌آید .

روش دیگر این است که ازروی جدول خطوط مثلثاتی مقادیر تقریبی $\cos 20^\circ$ و $-\cos 40^\circ$ و $-\cos 80^\circ$ را پیدا کنیم وآنگاه با روش تقریبات متوالی، مقادیر تقریبی ریشه‌های معادلهٔ (۶) را نیز تعیین کنیم، ملاحظه خواهیم نمود که‌دودسته اعداد حاصل متناظراً برابرمی‌باشند .

از معادلات‌درجهٔ چهارم سه معادله را می‌شناسیم که‌دوتای آنها به‌معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل پذیر می‌باشند .

(۷) $16x^4-16x^2+1=0 \quad x=\pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{2}$

$x=\pm\cos 15^\circ$ و $\pm\cos 75^\circ$

(۸) $16x^4-20x^2+5=0$

$x=\pm\frac{\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}}}{4}$

$x=\pm\cos 18^\circ$ و $\pm\cos 54^\circ$

که معادلهٔ اول از اتحاد

$\cos 4t=8\cos^4 t-8\cos^2 t+1$

در ازاء مقادیر 165° و 105° و 75° و $t=15^\circ$

و دومی از اتحاد

$\cos 5t=16\cos^5 t-20\cos^3 t+5\cos t$

در ازاء 162° و 126° و 90° و 54° و $t=18^\circ$

به‌دست می‌آید .

(۹) $16x^4+8x^3-16x^2-8x+1=0$

$x=\cos 12^\circ$ و $-\cos 24^\circ$ و $-\cos 48^\circ$ و $\cos 84^\circ$

که از همان اتحاد $\cos 5t$ نتیجه می‌شود .

در مورد معادلات درجهٔ ۵ ویا ۷ باید گفت که معادله‌ای از این درجات باضرایب منطق که ریشهٔ آن کسینوس یا سینوس کمانی که اندازهٔ آن برحسب‌درجه عددصحیح باشد وجود ندارد.

در بارهٔ معادلات درجهٔ‌ششم فقط معادلهٔ زیر دردست‌است .

(۱۰) $64x^6-96x^4+36x^2-3=0$

$x=\pm\cos 10^\circ$ و $\pm\cos 50^\circ$ و $\pm\cos 70^\circ$

این معادله از اتحاد زیر نتیجه می‌شود

$\cos 6t=32\cos^6 t-48\cos^4 t+18\cos^2 t-1$

مقادیر تقریبی ریشه‌های معادلهٔ (۱۰) را می‌توان با تبدیل $x^2=X$ و باروش تقریبات متوالی تعیین کرده بامقادیر خطوط مثلثاتی کمانهای فوق که ازجدول تعیین می‌شود مطابقه کرد .

از درجهٔ ۸ دومعادلهٔ زیرشناخته شده است

(۱۱) $256x^8-448x^6+224x^4-32x^2+1=0$

$x=\pm\cos 6^\circ$ و $\pm\cos 42^\circ$ و

$\pm\cos 66^\circ$ و $\pm\cos 78^\circ$

(۱۲) $256x^8-512x^6+304x^4-48x^2+1=0$

$x=\pm\cos 9^\circ$ و $\pm\cos 27^\circ$ و $\pm\cos 63^\circ$ و

$\pm\cos 81^\circ$

این معادلات از فرمول بسط $\cos 10t$ و حذف عامل $4x^3-3$ یاعامل $2x^2-1$ از معادلهٔ حاصل، نتیجه می‌شوند معادلهٔ از درجهٔ ۱۲ موجود است که جالبتر از دوازده معادلهٔ فوق الذکر می‌باشد به‌این ترتیب که تنها معادلای بادرجهٔ‌بیشتر از ٤ است که ریشه‌های مثبت و منفی آن دوکسینوس قرینه را مشخص نمی‌کنند .

(۱۳) $4096x^{12}-12288x^{10}+512x^9$
$+13824x^8-115x^7-7168x^6+864x^5$
$1680x^4-248x^3-144x^2+24x+1=0$

ریشه‌های معادله عبارتند ازکسینوسهای قوسهای 4° و 28° و 44° و 52° و 68° و 76° و قرینهٔ‌کسینوسهای قوسهای 8° و 16° و 32° و 56° و 64° و 88°

این معادله ازفرمول بسط $\cos 15t$ وبه ازاءمقادیری از t که‌از $\cos 15t=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آیند نتیجه می‌شود.حتی تعیین یك‌ریشهٔ این‌معادله باتقریب کافی‌بدون استفادهٔ ازماشین حساب بسیار مشکل است . اگر منحنی نمایش تغییرات تابع $y=(14)$ رسم شود ملاحظه می‌شود که مقدار تابع در ازاء $x=\pm 1$ و $\pm\frac{1}{2}$ و $x=0$ برابر بایك بوده وبه ازاء $x=\pm 2$ مقداری بیشتر از ۷۰۰۰۰۰۰ خواهد داشت ، شیب منحنی در نقطهٔ(۱و۱) برابر با۴۳۲ ودر نقطهٔ(۱و۱ −) برابربا۱٤٤ − بوده در وهلهٔ اول به‌نظر می‌رسد که جمیع ریشه‌های‌حقیقی‌معادله در فاصلهٔ (۱و۱ −)قراردادند .

اتحاد مربوط به‌بسط $\cos 12t$ معادله‌ای از درجهٔ ۱۲ به‌دست می‌دهد که اهمیت آن‌از معادلهٔ(۱۳) کمتراست‌وریشه‌های آن مقادیر کسینوسها و قرینهٔ‌کسینوسهای قوسهای زیرمی‌باشند

85° و 65° و 55° و 35° و 25° و 5°

معادله‌ای از درجهٔ ۱۶ موجود است که ریشه‌هایش مقادیر کسینوسها و قرینه کسینوسهای قوسهای 3° و 21° و 33° و 39° و 51° و 57° و 69° و 87° می‌باشند.

معادله‌ای ازدرجهٔ ۲۴ هست که ریشه‌هایش کسینوسها و قرینه کسینوسهای قوسهای 2° و 14° و 22° و 26° و 34° و 38° و 46° و 58° و 62° و 74° و 82° و 86° است.

بالاخره معادله‌ای از درجهٔ ۴۸ برای کسینوسها و قرینهٔ آنها ازکمانهای زیروجود دارد.

و ۳۱ و ۲۹ و ۲۳ و ۱۹ و ۱۷ و ۱۳ و ۱۱ و 7° و 1° و ۶۱ و 59° و ۵۳ و 49° و 47° و ۴۳ و ۴۱ و 37° 89° و ۸۳ و 79° و ۷۷ و ۷۳ و ۷۱ و ۶۷

ثابت می‌شود که هریك از مقادیر $\cos 0^\circ$ و $\cos 1^\circ$ و ... و $\cos 89^\circ$ فقط وفقط یك‌بار ریشهٔ یکی‌از ۱۷ معادلهٔ ذکر شده واقع می‌گردند.

***

تاکنون بـه‌معرفی معادلاتی پرداختیم که ریشه‌های آنها کسینوس قوسهایی‌بوده که‌اندازهٔ آنها برحسب درجه عدد صحیح بود. اگر قوسهایی بااندازهٔ $\frac{m}{n}$ درجه درنظر بگیریم (m و n نسبت بهم اول هستند) به‌نظر می‌رسد که معادلات بسیار باضرایب منطق داشته باشیم که‌ریشه‌های آنها کسینوس این قوسها باشند در صورتی که معادلهٔ درجهٔ دوم ازاین‌نوع وجود نداشته‌و فقط یك معادلهٔ درجهٔ‌سوم وجود دارد.

$$(18)\quad 8x^3+4x^2-4x-1=0$$

$$x=\cos\frac{180^\circ}{4} \text{ و } -\cos\frac{360^\circ}{7} \text{ و } \cos\frac{540}{77}$$

و فقط یك معادلهٔ ازدرجهٔ چهار موجود است

$$(19)\quad 8x^4-8x^2+1=0$$

$$x=\pm\cos 22/5^\circ \text{ و } \pm\cos 67/5^\circ$$

یك معادلهٔ ازدرجهٔ پنجم شناخته شده‌است:

$$(20)\quad 32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1=0$$

$$x=\cos\frac{360}{11} \text{ و } \cos\frac{720}{11} \text{ و } -\cos\frac{900}{11}$$

$$\text{و } -\cos\frac{540}{11} \text{ و } -\cos\frac{180}{11}$$

سه معادلهٔ از درجهٔ ششم یافته‌اند.

$$(21)\quad 64x^6+32x^5-96x^4-48x^3+32x^2+16x+1=0$$

$$x=\cos\frac{60}{7} \text{ و } -\cos\frac{240}{7} \text{ و } \cos\frac{300}{7}$$

$$\text{و } -\cos\frac{480}{7} \text{ و } -\cos\frac{600}{7}$$

$$(22)\quad 64x^6-112x^4+56x^2-7=0$$

$$x=\pm\cos\frac{90}{7} \text{ و } \pm\cos\frac{270}{7} \text{ و } \pm\cos\frac{450}{7}$$

$$(23)\quad 64x^6+32x^5-80x^4-33x^3+24x^2+6x-1=0$$

$$x=\cos\frac{360}{13} \text{ و } \cos\frac{720}{13} \text{ و } \cos\frac{1080}{13}$$

$$\text{و } -\cos\frac{900}{13} \text{ و } =\cos\frac{540}{13} \text{ و } =\cos\frac{180}{13}$$

از درجهٔ ۷ تاکنون معادله‌ای به‌دست نیامده‌است.

***

نباید ازنظر دورداشت که بسیاری ازمقادیر خطوط مثلثاتی غیـر جبری هستند. در سال ۱۸۹۷ وسیلهٔ **فلیکس کلین** (F. Klein) ثابت شده‌است که‌هرخط مثلثاتی کمانی که‌اندازهٔ آن برحسب رادیان عدد منطق‌باشد (مثلا ۳رادیان) عددی‌است غیر جبری.

***

با استفادهٔ از روابط بین‌ریشه‌ها وضریبهای ۲۳ معادلهٔ مذکور در فوق‌می‌توان بعضی ازروابط‌بین خطوط مثلثاتی‌برخی ازکمانها رابه‌دست آورد، مثلا:

ازمعادلهٔ (۶) نتیجه می‌شود:

$$\cos 20^\circ=\cos 40^\circ+\cos 80^\circ$$

ار معادلهٔ(۱۳) خواهیم‌داشت:

$$\cos 4^\circ+\cos 28^\circ+\cos 44^\circ+\cos 52^\circ+\cos 68^\circ+\cos 76^\circ=\cos 8^\circ+\cos 16^\circ+\cos 32^\circ+\cos 56^\circ+\cos 64^\circ+\cos 88^\circ$$

چگونه مسأله‌ای را حل کنیم؟

تألیف : G. POLYA

ترجمهٔ : ه . شریف زاده

(۲)

مسأله‌ای در کلاس حل می‌شود و شاگرد نمی‌تواند آن را مجدداً حل کند. چرا؟

معلم رنج بسیار می‌برد تا حل مسأله‌ای را به شاگردانش تفهیم کند و شاگردان از حل مسألهٔ مشابه عاجزند. چرا؟

دانش‌آموزی حل مسأله را در کلاس خوب یاد می‌گیرد و حتی می‌تواند آنرا توضیح هم بدهد، ولی فردا آنرا فراموش می‌کند. چرا؟

دانش‌آموز از بحث دربارهٔ مسألهٔ حل‌شده متنفراست. چرا؟

دانش‌آموز مسألهٔ ریاضی را مانند درس تاریخ و جغرافی حفظ می‌کند و حتی حروفی را که در شکل کتاب است در ذهن می‌سپرد. چرا؟

دانش‌آموزی می‌تواند یك مسألهٔ مشکل ریاضی را حل کند اما درحل مسائل عملی درمی‌ماند. چرا؟

دانش‌آموزان از معلمان خود می‌خواهند که در امتحان، یکی‌ازمسائلی‌را بدهدکه تاکنون برای‌آنها حل کرده‌است. چرا؟

دانش‌آموزان از کتابی که درآن حل مسائل کتب درسی نوشته شده است استقبال می‌کنند. چرا؟

مشکلات اساسی تدریس علوم و به‌خصوص ریاضیات همین «چراها» ست. شاید پاسخ به‌این «چراها؟» بتواند تعلیم ریاضیات و علوم تجربی و مجرد راآسان کند. این «چراها» انگیزهٔ من درترجمهٔ کتاب فوق‌الذکر شده‌است. این کتاب نه‌تنها برای معلمان نوشته‌شده بلکه می‌تواند دانش‌آموان‌را به مقیاس وسیعی‌مفید واقع شود. درشمارهٔ قبل مجلهٔ یکان خلاصه‌ای از پرسش‌هایی را نوشتیم که در حل یك مسأله با آنها مواجه می‌شویم. اجرای مراحلی را که درآن‌شماره ذکر کردیم اینك با ذکرمثالی روشنتر می‌سازیم:

۱- مثال- با مثالی‌که خواهیم زد، بعضی از مطالبی را که قبلاً بیان کردیم، بهتر خواهید فهمید. مسألهٔ ساده‌ای را درنظر می‌گیریم:

طول قطرمکعب مستطیلی را،که در ازا، پهنا، وبلندی آنرا می‌دانیم پیداکنید.

برای‌اینکه بحث وگفتگودربارهٔ این‌مسأله به‌نتیجه برسد، دانش‌آموزان باید به قضیهٔ فیثاغورث و بعضی از موارد استعمال آن در هندسهٔ مسطحه آشنا باشند. البته اگر از هندسهٔ فضائی، اطلاعات جامعی نداشته باشند، مانعی نخواهدداشت. معلم نیزباید آموزش خودرا برمبنای معلومات مختصر دانش‌آموزان از روابط فضایی شروع کند.

معلم، می‌تواند مسألهٔ جالبی راکه جنبهٔ محسوسات دارد، پیشنهادکند. عملاً، اتاق درس یك مکعب مستطیل‌است که می‌توان آنرا اندازه‌گیری و ابعادش را ارزیابی نمود. دانش‌آموزان باید قطر اتاق را «به روش غیرمستقیم» اندازه‌گیری کنند. معلم باید درازا، پهنا و بلندی ونیز قطر اتاق را به‌خصوص باحرکت دست نشان بدهد، و بااین روش به‌شکلی‌که روی تابلو می‌کشد، درحالی‌که چندین‌بار به‌اتاق درس اشاره می‌کند، روح بدهد.

ممکن‌است چنین‌گفتگویی بین‌معلم وشاگردان انجام‌گیرد:

مجهول چیست؟

- طول قطر مکعب مستطیل

معلومات‌کدامند؟

- درازا، پهنا و بلندی مکعب مستطیل

علامتی مناسب درنظر بگیرید. مجهول را با چه حرفی نشان می‌دهید؟

- x

چه حروفی را برای درازا، پهنا، و بلندی انتخاب می‌کنید؟

- a، b، c.

بین a و b و c و x چه نسبتی وجود دارد؟

- x قطر مکعب مستطیل می‌باشد و a و b و c درازا و

پهنا و بلندی آن است .

آیا مسألهٔ مناسبی است ؟ به عبارت بهتر ، **آیا شرط برای تعیین مجهول کافیست ؟**

ـ بلی ، اگر a و b و c معلوم باشند ، مکعب مستطیل شناخته شده‌است . دراین صورت قطرش هم معلوم است»

***

۲ـ طرح یك نقشه ـ وقتی که کم و بیش مسأله رافهمیدیم، برای تعیین مجهول باید نقشه‌ای بکشیم ، چه حسابهایی باید کرد، چه روابطی باید بکار برد ، چه ترکیباتی باید انجام داد . بین لحظه‌ای که مسأله را می‌فهمیم ولحظه‌ای که برای آن نقشه‌ای طرح می‌کنیم ، راهی‌است طولانی وغیرمستقیم . درحقیقت، پایه و اساس حل یك مسأله طرح واندیشهٔ یك نقشه است. این اندیشه می‌تواند کم کم شکل بگیرد. به عبارت دیگر، پس‌ازکوششهایی‌ظاهراً بیهوده و مدت زمانی درنگ، می‌توان بطور ناگهانی وبا وضوح تمام یك « طرح درخشان » بدست‌آورد. بزرگترین کمکی که معلم می‌تواند به شاگرد بکند ، این‌است که او را برای بدست‌آوردن این طرح درخشان راهنمایی کند . پرسشها وتلقیناتی که قبلاً ازآن گفتگو کردیم برای این‌است که ذهن را برای ایجاد طرحی در این‌زمینه آماده سازد .

برای اینکه بتوان حالت شاگرد را درك کرد ، معلم باید به تجربهٔ خاص و مشکلات و پیشرفتهای او دربارهٔ مسائلی که می‌تواند حل کند بیندیشد .

بدیهی‌است که اگر ازموضوع جزاطلاعات مختصری نداشته باشیم ، تهیهٔ یك طرح خوب مشکل است و قطعاً اگر از موضوع هیچ ندانیم ، داشتن چنین طرحی غیر ممکن جلوه می‌کند . « طرح های خوب » مبتنی برتجربهٔ گذشته و معلومات کسب شدهٔ پیشین است . کوشش مختصر حافظه برای ایجاد یك طرح خوب کافی نیست . ولی اگر چنین کوششی هم نباشد ،رسیدن به‌مقصود غیرممکن است . گرچه مصالح ساختمانی برای ساختن خانه کافی نیست ولی اگر نباشد، ساختن خانه غیرممکن است. مواد ومصالح لازم برای حل‌یك مسألهٔ ریاضی، معمولاً جزئیات خاصی‌ازمعلومات کسب شدهٔ قبلی است ، از قبیل مسائل حل شده و قضایای اثبات شده . اگر معلمی کار خود را با پرسشی بدین شکل آغاز کند بسیار مفیداست ، **آیا مسأله‌ای می‌شناسید که به‌آن مربوط باشد ؟**

بدبختانه ، اگر بخواهیم مسأله ای را انتخاب کنیم که از بعضی جهات با مسألهٔ ما مربوط باشد ، عموماً تعداد بسیار زیاد و نا محدودی ازآن می‌توان درنظر گرفت . چگونه از میان آنها یکی یابعضی را انتخاب کنیم که واقعاً مفید باشد ؟ با یك جمله می‌توان دانش‌آموزان را بـه فکر کردن دراین مورد واداشت : **کاملاً به مجهول دقت نمائید وسعی کنید کـه از میان مسائل دسته بنـدی شده ، مسأله‌ای را تجسم نمائید که دارای همین مجهول یا مجهولی مشابه باشد .**

اگر درذهن‌خود مسأله‌ای را پیداکنیم که قبلاً حل شده و کاملاً به مسألهٔ کنونی مربوط است ، می‌توانیم خود را خوشبخت بدانیم . ولی اگرچنین تصادفی رخ داد باید بطور صحیح از آن بهره برداری کرد . **این مسأله‌ای است که به مسألهٔ شما بستگی دارد و شما می‌توانید آنرا حل‌کنید ، آیا می‌توانید آنرا در حل مسألهٔ داده شده بکار برید ؟**

پرسشهـای قبلی ، اگر واقعاً فهمیده شده باشند ، اغلب اوقات به ایجاد طرحهایی که مناسب است کمك می‌کند. ولی‌همیشه یك حالت نیست واین‌فرمولها نیز جادو نمی‌کنند. باید مسأله را از جنبهٔ دیگر بررسی و حالات مختلف آن را بیان کرد . **آیـا می‌توانید مسأله‌ای راکه باآن مختلف است بیان‌کنید؟** اغلب‌این پرسشها بطورمتوسط به خصوصیات گوناگون مسأله اشاره می‌کنند، مانند تعمیم ، تشخیص ، استفاده از شباهت ، فراموش نکردن‌یك قسمت از شرط، .... گرچه همهٔ این جزئیات مهم هستند ولی ما نمی‌توانیم در یك لحظه آنها را بررسی‌کنیم . یك تغییر درمسأله می‌تواند به چند مسألهٔ کمکی‌متناسب با وضع ، منتهی شود : **اگر نمی‌توانید مسأله‌ای راکه برای شما طرح کرده‌اند حل کنند ، سعی‌کنید ابتدا مسأله‌ای راکه به‌آن مربوط باشد حل کنید.**

اگر سعی کنیم مسائل یا قضایای مختلف را که می‌شناسیم بکار بریم ، یا تغییرات وتبدیلات مختلف و ممکن را بررسی‌کنیم یا مسائل کمکی مختلف بیان‌کنیم ، ممکن است دچار اشتباه شده و از مسألهٔ اولیه دور و از مرحله برت شویم . از همین نظراست که یك سؤال مفید می‌تواند مارا از لغزش نجات بدهد و دوباره به موضوع اصلی برگرداند : **آیا تمام معلومات را بکار بردید؟ آیا از شرط بطورکامل استفاده‌کردید ؟**

۳ـ مثال ـ برمی‌گردیم به مثالی که در قسمت ۱ بیان‌شد . ماآنرا درحالی‌ترك کردیم که دانش‌آموزان تازه می‌خواستند مسأله را بفهمند و دراین موردمختصری هم نتیجه‌گرفتیم. دانش‌آموزان می‌توانند موفق به ایجـاد طرحهای ابتکاری شوند . ولی اگرمعلم باتوجه کامل به‌روحیهٔ کلاس، اثری از ابتکار درآنها نبیند ، باید گفتگوی‌خودرا باآنها تعقیب کند. اگرشاگردان‌نتوانند به‌سؤالاتش پاسخ دهند و دو مقابل سکوت کنند ، معلم باید با تغییر کمی در جمله و نحوهٔ سؤال ، مجدداً آنها را تکرارکند (سکوت دانش‌آموزان را با نقاط تعلیق نشان می‌دهیم).

آیا مسأله‌ای‌که به مسألهٔ شما ارتباط دارد می‌شناسید؟

ـ . . . .

به مجهول توجه کنید. آیا مسأله‌ای که دارای همین مجهول باشد می‌شناسید ؟

— . . . .

خوب ، **مجهول چیست ؟**

— قطر یك مکعب مستطیل

آیا مسأله‌ای که دارای همین مجهول باشد می‌شناسید ؟

— نه ، ما هرگز مسأله‌ای که در آن قطر مکعب مستطیل مجهول باشد، نداشته‌ایم .

آیا مسأله‌ای می‌شناسید که مجهولی مشابه داشته باشد ؟

— . . . .

توجه کنید، قطر، یك قطعه‌خط است . آیا تاکنون مسأله‌ای که درآن طول یك پاره خط مجهول باشد ، نداشته‌اید ،

چرا ، البته ، ماتاکنون مسأله‌ای از این نوع حل کرده‌ایم. مثلاً وقتی که می‌خواستیم ضلع یك مثلث قائم‌الزاویه‌را بدست آوریم.

خیلی خوب ، **این مسأله‌ای است که به مسألهٔ شما بستگی دارد و شما قبلاً آنرا حل کرده‌اید . آیـا می‌توانید آنرا بکاربرید ؟**

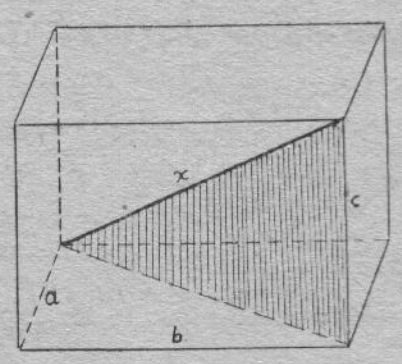
— . . . .

شما این‌شانس‌را داشتید که بتوانید مسأله‌ای مشابه بامسألهٔ داده شده بیان کنید وقبلاً هم آنرا حل کرده‌اید .

آیا دوست دارید که آن را بکار برید ؛ **آیا می‌توانید از یك چیزغیر مشخص دیگر کمك بگیرید ؟**

— . . . .

دقت کنید، مسأله‌ای که هم‌اکنون بیان کردید راجع به‌مثلث بود ، آیا درشکلی که رسم شده یك مثلث مشاهده می‌کنید؟



(شکل ۱)

اطمینان داریم که تذکر اخیر برای ایجاد طرح حل تقریباً مفید است ، طرح حل عبارت از این است که دانش‌آموزان مثلث قائم‌الزاویه‌ای را بنظرآورند که قطر مورد جستجو وتر آن است (معلم باید به شکل ۱ اشاره کند) . ولی اگراین تذکر نتوانست دانش‌آموزان را روشن سازد ، معلم باید یك رشته سؤالاتی توأم با تذکرات بسیار بسیار صریح بکند :

«آیا می‌توانید دراین شکل مثلثی را تجسم کنید ؟

— چه نوع مثلث تجسم کنیم ؟

هنوز نتوانستید قطررا پیدا کنید. مگرخودتان نگفتید که می‌توانید یك ضلع مثلث را تعیین کنید. خوب چه‌کار باید کرد ؟

اگر قطر عبارت از ضلع یك مثلث باشد می‌توانید آنرا پیدا کنید ؟ »

بالاخره وقتی دانش‌آموزان موفق به‌تجسم یك عنصر کمکی شدند (در حالی که به مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل۱ اشاره می‌شود)، معلم باید باتشویق و دلگرمی دادن به‌آنها ، دانش‌آموزان را در محاسبات واقعی وارد کند . دراین‌صورت نتیجهٔ درخشانی بدست خواهدآورد.

« فکر می‌کنم که اگر مثلثی رسم کنید خوب باشد . حالا شما یك مثلث دارید، ولی‌آیا مجهول هم دارید ؟

— وتر مثلث مجهول است ، وما می‌توانیم آن را به‌کمك قضیهٔ فیثاغورث پیدا کنیم .

بلی، اما اگر طول دوضلع دیگر را بدانید . آیا طول دو دوضلع دیگر را می‌دانید؟

— یکی از دو طولها معلوم است : c. اما دیگری ، فکر نمی‌کنم پیدا کردنش مشکل باشد . البته ! ضلع دیگر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگراست .

کاملاً صحیح است. حالا شما نقشه را بدست‌آوردید و من به شما تبریك می‌گویم »

***

۴- اجرای طرح — نقشه را درمقابل‌خود بگیرید وبرای حل‌آن طرحی بریزید ، این‌کار هرگز ساده نیست . برای این‌که موفق شوید باید تمام حالات اتفاقی را انجام دهید . اجرای طرح هنگامی ساده است که معلوماتی باشد و فکر دارای عادات خوبی بوده و بتواند به‌یك موضوع تمرکز نماید. شانس زیادی هست که با بردباری فراوان موفق شد .

طرح ما منجر به یك خط معمولی شد. باید اطمینان پیدا کرد که تمام جزئیات با این خط تطبیق می‌کند . پس باید تمام جزئیات را یکی پس‌از دیگری بررسی کرد. حتی آن قسمتهایی‌را که کاملاً روشن و بدیهی بنظر می‌رسد. تنها بااین کار است که هیچ نقطهٔ ابهامی باقی نمی‌ماند و هیچ اشتباهی رخ نخواهد داد .

اگر دانش‌آموزان، حقیقتاً نقشه را بدست آورده باشند، معلم می‌تواند یك لحظه ازآرامش نسبی بهره‌مند شود . اگر این نقشه به‌کمك معلم طرح شده باشد، خطر فراموش‌کردن آن وجود دارد. اما اگر دانش‌آموزخودش روی نقشه‌کارکرده باشد ودراین

راه کمك مختصری گرفته باشد وطرح نهایی‌را خود باخشنودی کامل بدست بیاورید، به‌این سادگی آنرا فراموش نخواهد کرد این‌است که معلم باید پافشاری کند تا شاگرد **هرجزء از طـرح را خود بررسی نماید.**

می‌تـوان برصحت هر جزء از استدلالهـای خود ، خواه « ازنظرعقلی » و خواه به‌کمك « استدلال‌منطقی » اطمینان حاصل کرد. جزئیاتی‌راکه مبهم بنظرمی‌رسد و تاآن لحظه تقریباً روشن نشده‌است می‌توان مشخص‌کرد وبا تمرکز فکربرآن هرگونه شکی را برطرف‌کرد. همچنین با استنتاج و تطبیق آن با قواعد منطقی از هرجهت براطمینان خویش می‌افزائیم .

شاگرد باید به درستی هرجزء اطمینان پیداکند. در اغلب حالات معلم باتغییر دادن لحن صدای خود اختلاف بین «ببینید» و « ثابت‌کنید » را توضیح می‌دهد : **اگر این جزء درست باشد، آیا می‌توانیدآنرا به وضوح ببینید ؟ و اگر این جزء درست است آیا می‌توانیدآنرا ثابت‌کنید ؟.**

۵- مثال— کارخود را مجدداً از جایی شروع می‌کنیم که در انتهای قسمت ۳ آنرا ترك‌کردیم. دانش‌آموز طرح حل‌مسأله را بدست آورد و مثلث قائم‌الزاویه‌ای را مشاهده کرد که در آن وتر x مجهول و یکی از اضلاع آن بلندی معلوم c بود ، ضلع دیگرآن مثلث قطروجه دیگربود. اگرشاگرد بخواهد یادداشتهای مناسب بردارد، ممکن است ضلع دیگرمثلث را به y نمایش دهد، y قطر وجهی‌است‌که a و b اضلاع آن هستند . می‌توان همچنین طرح روشنی را ریخت که مبتنی براین است که یك مسألهٔ کمکی بنظر آوریم که مجهول آن y است . بالاخره با تعقیب مثلثهای قائم‌الزاویه یکی پس‌از دیگری (به‌شکل ۱ نگاه‌کنید) می‌توان نوشت .

$$x = y^2 + c^2$$

$$y^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 \qquad \text{باحذف مجهول کمکی } y$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

درصورتی‌که دانش‌آموز بتواند این‌اجزاء را تشخیص دهد، معلم حق ندارد حرف او را ببرد ، مگر درحالت اقتضا وآن‌هم برای اینکه اورا به **تحقیق هرقسمت از استدلال** خود راهنمایی کند. معلم می‌تواند چنین سؤال‌کند :

« کاملاً دقت کنید ! آیا مثلثی به اضلاع x ، y ، c یك مثلث قائم‌الزاویه است ؟ »

ممکن‌است دانش‌آموز با اطمینان‌کامل به سؤال بالا جواب « بلی » بدهد، ولی اگرمعلم به‌این اعتقاد شاگرراضی نشود ممکن است او را به شدت مشوش و دگرگون سازد :

« ولی آیا می‌توانید ثابت‌کنیدکه این مثلث ، قطعاً مثلثی قائم‌الزاویه است ؟ »

چون‌کلاس چنین معلوماتی از هندسهٔ فضائی ندارند، بهتر است معلم ازطرح این سؤال خودداری‌کند، بعلاوه این‌خطر وجود دارد که جواب دادن به‌یك سؤال فرعی ممکن است اشکالات‌اساسی برای دانش‌آموزان ایجادکند.

***

۶- مراجعه به حل — شاگردان زرنگ ، از موقعی کـه جواب را بدست آوردند و درستی استدلال برای آنهـا روشن شد مایلند دفترچه های خود را بسته و به‌کار دیگری مشغول شوند . آنها یك مورد مهم و بسیار آموزندهٔ‌کار، یعنی مراجعهٔ به حل، را فراموش‌کرده‌اند. امتحان جوابها و بررسی راههایی‌که منجربه‌حل شده‌اند نه‌تنها موجب افزایش معلومات می‌شوند بلکه استعداد حل مسائل‌گوناگون راگسترش می‌دهد . معلم خوب کسی است‌که خود درك‌کند و به‌شاگردانش‌بفهماندکه هیچ مسأله‌ای هرگز بطورکامل حل نمی‌شود. همیشه‌کاری برای انجام می ماند. با متمرکزکردن فکر و عملی مناسب می‌توان روشهای بی‌اهمیت راکنار گذاشت و راههای بهتری را انتخاب نمود . بعلاوه با این ترتیب به مفهوم مسأله بهتر می‌توان پی‌برد.

حالا شاگرد طرح را بدست آورده، حل‌را انجام داده، هر جزء از استدلال را تحقیق‌کرده‌است . بنابراین حق داردکه فکر کندکه جواب او درست‌است . البته امکان اشتباه هست ، بخصوص اگر استدلالها طولانی باشند . بنابراین باید درستی جواب را نیز تحقیق‌کرد. مخصوصاً اگرروشهای آموزنده‌ای‌باشدکه بتوان‌باسرعت درستی جواب را تحقیق و بردرستی‌استدلال اطمینان یافت ، نباید ازآن‌چشم‌پوشی‌کرد . **آیامی‌توانیدنتیجه را از نظر درستی‌بررسی کنید ؟ آیا می‌توانیددرستی استدلالهای خودرا تحقیق کنید ؟**

برای اینکه به وجود یا مقدارچیزی یقین پیداکنیم یاباید آن را ببینیم یاآن را حس کنیم یا آن را از هر دو جهت درك کنیم. البته بهتر است که با دو دلیل مختلف به درستی کار خود ایمان پیدا کنیم : **آیا می‌توانید نتیجهٔ مغایر بدست آورید ؟** طبیعتاً مااستدلال‌کوتاه وساده را براستدلال‌طولانی و درهم ترجیح می‌دهیم : **آیا می‌توانید این نتیجهٔ مغایر را دریك چشم بهمزدن درك‌کنید ؟**

یکی‌ازاولین‌ومهمترین وظایف‌معلم‌این‌است‌که به‌شاگردانش بگوید مسائل ریاضی بایکدیگر ارتباط دارند واگردانش‌آموزی باکوشش وجدیت موفق به حل مسأله‌ای شد و دلایلی‌را ارائه داد می‌توانندآنهارا درکارها و مسائل دیگر بکاربرد و اگر دانش‌آموز احساس کندکه موفقیت او فقط درمورد همین‌مسأله است بیعلاقگی نسبت به‌کار پیدا می‌کند. **آیامی‌توانیدنتیجه‌یا روش‌آن را برای چند مسألهٔ دیگر بکار برید؟**

۷- مثال — در قسمت ۵ دانش‌آموزان توانستند جواب‌را پیدا کنند ؛ اگر دریك‌مکعب مستطیل‌اندازه‌های سه‌یالی که ازیك رأس می‌گذرند برابر a و b و c باشد طول قطر برابر است با

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

آیا می‌توانید این نتیجه را تحقیق کنید ؟ معلم نباید انتظار داشته باشد که دانش‌آموزانی که هنوز تجربهٔ کافی‌ندارند به‌این سؤال جوابی قانع‌کننده بدهند. دراین جا معلم باید مزیت مسائل « حرفی » را بر مسائل « عددی » تذکر دهد مسأله‌ای که برحسب « حروف » مطرح شده باشد ، نتیجه‌اش می‌تواند مبتنی برتحقیقات متعددی باشد کـه در مسائل عددی غیرممکن است . هرچند مثال ما ساده بود ولی می‌توان آن را اثبات کرد . معلم می‌تواند ، روی نتیجهٔ بدست آمده ، سؤالات متعددی مطرح کند که شاگردان به‌سادگی به‌آنها جواب مثبت بدهند ولی یك پاسخ منفی از طرف دانش‌آموزان نشان می‌دهد کـه هنوز شکاف عمیقی وجود دارد و نتیجهٔ مطلوب بدست نیامده است ؛

« **آیا تمام معلومات را بکار بردید؟** آیا در فرمول قطر تمام معلومات a و b و c نشان داده شده‌اند.

« درازا ، پهنا ، بلندی در سؤالی که مطرح شد یك رل را بازی می‌کنند. یعنی مسألهٔ ما نسبت به a و b و c متقارن است . آیا در فرمولی که برای قطر پیدا کردید چنین موضوعی وجود دارد ؟

« مسألهٔ ما یك مسأله ازهندسهٔ فضایی‌است: موضوع عبارت ازاین بودکه قطر مکعب مستطیل به ابعاد a و b و c را تعیین کنیم. این مسأله با یك مسأله ازهندسهٔ مسطحه مشابه است: تعیین قطر مستطیلی به ابعاد a و b . آیا نتیجهٔ مسألهٔ هندسهٔ فضایی با مسأله‌ای که در هندسهٔ مسطحه بیان کردیم مشابه است ؟

« اگر بلندی c متدرجاً کم شود تابالاخره‌هیچ‌شود ،مکعب مستطیل به‌یك‌مستطیل مبدل‌می‌شود.اگردرفرمول‌بالا $c=0$ فرض شود، آیا فرمول‌درست تعیین قطر مستطیل‌بدست می‌آید ؟

« اگر بلندی c زیاد شود ، قطر مکعب مستطیل بزرگ می‌شود . آیا این مطلب در فرمول ظاهر است ؟

« اگر سه بعد a و b و c مکعب مستطیل بـه یك اندازه زیاد شوند قطر هم به همین اندازه زیاد می‌شود . اگر در فرمول به‌جای a و b و c بترتیب ۱۰۰a و ۱۰۰b و ۱۰۰c قراردهیم، عبارت قطرهم درعدد۱۰۰ ضرب می‌شود.آیا واقعاً همینطوراست؟

« اگر a و b و c برحسب متر بیان شوند ، اندازهٔ قطر هم طبق فرمول برحسب متر بیان می‌شود ، ولی اگر اندازه هـا برحسب سانتیمتر باشند ، بازهم باید فرمول صحیح باشد . آیـا واقعاً همینطوراست .

این‌گونه سؤالات نتایج بسیار عالی دارد . شاگرد زرنگ به سرعت متوجه می‌شود که این فرمول می‌تواند کمکهای شایانی به پیشرفتهای او بکند . گرچه ایمان دارد که فرمول او صحیح است ولی هنوز می‌توان در ایمان او رخنه وارد کرد . هنگامی ایمان اوکامل می‌شود که درستی آن را به « طورتجربی » احساس کند. سؤالاتی که در فوق به‌آنها اشاره شد ، اثر جدیدی روی او می‌گذارد . رابطه ای بین معلومات مختلف او برقرارشود. احتمال زیادی هست که این فرمول در حافظه‌اش جایگزین شود و موجب استحکام معلومات اوگردد. بالاخره به سادگی می‌توان این‌سؤالات را تغییرداد و برای مسائل مشابه از آنها استفاده کرد . شاگرد زرنگ پس‌از آنکه تجربهٔ کافی دربارهٔ مسائلی از این نوع بدست آورد ، طرحهای عمومی زیررا درك خواهد کرد: استفاده از همهٔ معلوماتی که در مسأله داده شده است ؛ تغییر معلومات ؛ تقارن . تشابه . اگرخود را عادت دهدکه طرحهایش‌را ازجنبه‌های مختلف بررسی‌کند بسیار مفیداست . این‌کار معلومات او را درحل مسائل بسط و توسعه خواهد داد.

آیا می‌توانید درستی استدلالهای خودرا تحقیق‌کنید؟

در حالاتی که مسأله مشکل یا مهم است باید استدلالها را قدم به قدم‌وجزءبه‌جزء تحقیق کرد. تحقیق‌درستی‌استدلالهای«روشن»لزومی ندارد. دراین هنگام معلم می‌تواندسؤالی‌را مطرح‌کندکه قبلاً از دانش‌آموزان به عمل آورد (انتهـای قسمت ۵) وگفتیم طرح چنین سؤالی درآن موقع جالب نیست . آیا می‌توانید **ثابت کنید** که مثلثی‌که اضلاع آن x و y و c هست مثلثی است قائم‌الزاویه.

آیا می‌توانید نتیجه و یا روشی راکه‌بکار بردید برای مسائل دیگر بکار ببرید؟ اگر یکی دو مثال برای آنها طرح کنیم، دانش‌آموزان خود بسادگی می‌توانند مورد استعمال‌آن را پیدا کنند و برای مفاهیم مجرد مسأله **تعبیرمادی** بنمایند. تعبیرمادی که برای مسألهٔ مکعب مستطیل توسط معلم ایراد شد همان کلاس درس‌است . یك شاگرد زرنگ‌که چنین فکری درمغزش جایگزین شده ممکن است از عنوان فوق چنین استنباط‌کندکه منظور تعیین قطر ناهارخوری مدرسه است . بنابراین معلم باید یکی دو مثال خودش مطرح‌کند تا مفهوم سؤال بالا به‌خوبی درك شود. مسأله‌ای راکه مطرح می‌کند باید با مسألهٔ قبلی‌کمی اختلاف داشته باشد ؛ « درازا ، پهنا و بلندی یك مکعب مستطیل را می‌دانیم ؛ فاصلهٔ بین مرکز و یکی از رؤس آن‌را پیداکنید . »

شاگردان اجاز دارندکه نتیجهٔ مسأله‌ای راکه حل‌کردند بکار ببرند . البته به‌این موضوع توجه دارند که فاصلهٔ مطلوب ، برابر نصف قطری‌است که حساب‌کردند، بهتراست‌که به‌جای‌اینکه نتیجه را بکار برند **روش** آن را بکار برند یعنی در تصویری که

می‌کشند مثلثهای قائم‌الزاویهٔ مناسبی را بنظر آورند.

پس‌ازاینکه مورداستفادهٔ بالا را دانش‌آموزان درك کردند، معلم باید درشکل خارجی چهار قطر مکعب مستطیل بحث کند. دانش‌آموزان بایدشش هرم جسم نمایندکه هر یك‌از وجوه مکعب مستطیل قاعدهٔ یکی از هرمهاست و رأس این هرمها با مرکز مکعب مستطیل مشترك است و نصف قطرها بالهای جانبی این هرمها را تشکیل می‌دهند. پس‌از آنکه دانش‌آموزان به خوبی توانستند تصوراجسام فوق را بنمایند معلم باید چنین سؤالی‌بکند:

آیا می‌توانید نتیجه و یا روش آن را برای یك مسألهٔ دیگر بکار برید؟ اکنون شانس زیادی هست‌که دانش‌آموزان‌تعبیرمادی چالبی از مسأله داشته باشند. مثلاً تعبیرآنهاممکن‌است به‌صورت زیرباشد:

« بام خانه‌ای به شکل مستطیل‌است‌که درازای‌آن ۲۱ متر و پهنای آن ۱۶ متراست. می‌خواهیم دکلی به بلندی۸ متر روی آن‌برافرازیم. چهار رشته طناب‌که درازای‌آنها بایکدیگرمساوی است‌لازم‌است. هرچهار رشته‌طناب‌رابه‌نقطه‌ای ازدکل که۲ مترپائینتر از رأس آن می‌باشد می‌بندیم و طرف دیگرآنها را به‌چهار گوشهٔ بام متصل می‌کنیم. طول هریك از این طنابها چقدر است؟ »

دانش‌آموزان ممکن است **روش** مسألهٔ قبلی را بکار برند. دراین‌صورت لازم‌است‌که مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای در سطح قائم و در سطح افقی تجسم‌کنند. دراین مورد بهتراست **نتیجهٔ** مسألهٔ قبل را بکار برند یعنی مکعب مستطیلی را تصور نمایند که قطرآن x درازای یکی از چهار طناب است و بالهای آن عبارتند از:

$a=۱۰/۵ \qquad b=۸ \qquad c=۶$

اگرفرمول را مستقیماً بکار ببریم $x=۱۴/۵$ بدست می‌آید.

۸- روشهای دیگر — برمی‌گردیم به مسأله ای که در قسمتهای گذشته بیان‌کردیم. کاراصلی ما بدست‌آوردن وطرح ریزی یك نقشه بودکه آنرا درقسمت مربوط پیداکردیم. بدیهی است‌که معلم می‌توانست راهی دیگر را دنبال کند و اولین سؤال خود را به صورتی دیگر بیان‌کند:

« آیا می‌توانید مسأله‌ای‌راکه به‌آن ارتباط نزدیك دارد تصور نمائید؟

« آیا مسأله‌ای مشابه می‌شناسید؟

« می‌دانید مسأله‌ای‌که برای شما طرح شده، مسأله‌ای است از هندسهٔ فضایی. آیا مسأله‌ای مشابه ولی‌خیلی ساده‌تر درهندسهٔ مسطحه دیده‌اید؟

« مسأله ای که برای شما طرح شده و دربارهٔ قطر یك مکعب مستطیل‌است، دارای شکلی فضایی‌است. چگونه ممکن‌است مسأله‌ای مشابه برای شکلی در صفحه وجود داشته باشد؟ قبلاً در مورد قطر مستطیل مذاکره شده است »

البته ممکن‌است دانش‌آموزان نتوانند مفهوم جملهٔ آخررا درك‌کنند. دراین‌صورت معلم‌بایدآنهارا وادارسازدکه قطرمستطیل را اندازه‌گیری کنند. بعلاوه معلم نمی‌تواند قبل‌ازآنکه دربارهٔ مستطیل توضیحاتی بدهد، مسأله‌ای دربارهٔ مکعب مستطیل مطرح کند بنابراین باید چنین ادامه دهد:

« این مسأله‌ای است‌که به‌مسألهٔ شما بستگی دارد و شما می‌توانیدآنرا حل‌کنید آیا می‌توانیدآنرا بکار ببرید؟

« آیا برای‌آنکه بتوانید آنرا بکار برید باید از یك چیزغیر مشخص دیگرکمك بگیرید؟

اغلب معلم موفق می‌شود تا طرحهای جالبی را در ذهن شاگردانش‌ایجادکند. مثلاً شاگردان درك می‌کنندکه قطرمکعب‌مستطیل‌که در مسأله داده شده، قطر مستطیلی است‌که می‌توانند تصور آن را بنمایند (مقطع مکعب مستطیل با صفحه‌ای که از دو بال مقابل می‌گذرد). اصل طرح تفاوتی ندارد ولی نحوهٔ بحث و به‌نتیجه رسیدن یك مسأله مختلف است. درقسمتهای قبل با استفاده از مجهول وبا اطلاعات قبلی دانش‌آموزان تماس‌حاصل شد و آنها توانستند مسأله‌ای راکه قبلا حل کرده بودند تکرار کنند البته این مسأله مجهولی مشابه با مجهول مسألهٔ فعلی آنها داشت. ولی دراین قسمت برای ایجاد طرح از طریقهٔ قیاس و تشابه استفاده شد.

***

مسأله‌ای راکه در شمارهٔ بعدی مجلهٔ یکان بررسی خواهیم کرد بشرح زیراست:

می‌خواهیم در یك مثلث معلوم، مربعی را محاط کنیم بطوری که دو رأس مربع منطبق برقاعدهٔ مثلث و دو رأس دیگر آن بر دوضلع دیگر مثلث قرارگیرد.

اگر مطالبی‌راکه‌گفتیم به دقت مطالعه کرده‌اید می‌توانید دربارهٔ مسألهٔ بالا هم تفکر نمائید و مراحل فوق‌الذکر را درآن ببینید. ضمناً برای اینکه متوجه شوید تا چه اندازه در مطالعهٔ مطالب این شماره دقت کرده‌اید چند مسأله از امتحانات نهایی عرضه می‌شود. امیدواریم‌که شما هم موفق به‌حل‌آنها بشوید:

۱- شعاع قاعدهٔ مخروطی ۱۵ سانتیمتر و ارتفاع آن ۷۵ سانتیمتر ومولدش ۹۵ سانتیمر می‌باشد. سطح جانبی و حجم‌آن‌را حساب‌کنید.

سؤال امتحان نهایی هندسه پسران خرداد ۱۳۳۵
نقل از صفحهٔ ۸۳ یکی ازکتابهای هندسهٔ پنجم وششم دبستان

۲- محیط مثلث متساوی‌الاضلاعی ۲۷ متر و ارتفاعش۱۲

(دنباله درصفحه ۲۷)

راهنمائی حل

مسائل مقدماتی هندسه

Rèsolution des problèmes élémentaires de géométrie

تألیف : **E. J. Honnet** چاپ هفتم . پاریس : ۱۹۶۳ - ترجمهٔ : ع. م.

مسائل ریاضی به دو دسته تقسیم می‌شوند : مسائلی که حل آنها به استفادهٔ از رابطه یا روابطی جبری رجوع می‌شود که اغلب مسائل جبری از این نوع هستند ، کلید حل این نوع مسائل تشخیص رابطهٔ مربوط است ومهارت در حل آنها ازراه تمرین حاصل می‌شود .

حل مسائل نوع دیگر که اغلب با عنوان « مسائل فکری » یاد می‌شوند علاوه بر آنکه محتاج به دانستنیهای قبلی است مستلزم درك نکته‌ای خاص می‌باشد و برای حل هرمسئله ، ابتکار مخصوص لازم است. چنین بنظر می‌رسد که مهارت در حل این نوع مسائل استعداد خاص لازم دارد و تمرین ، چنین استعدادی را به وجود نمی‌آورد . آیا حقیقتاً چنین است ؟

مسائل هندسی از نوع دوم می‌باشند . عقیدهٔ به اینکه همه‌کس نمی‌تواند مسائل هندسه را حل کند بسیاری از دانش‌آموزان را نسبت به این رشته دلسرد ساخته و حتی باعث می‌شود که بعضی از دانش‌آموزان سال چهارم رشتهٔ ریاضی تغییر رشته دهند . کتاب با عنوان بالا مسائل هندسی را دسته بندی نموده و برای هر دسته حل چند مسئله را به عنوان نمونه ارائه داده و مسائلی مشابه را برای حل پیشنهاد نموده است و چنان است که محصلی که می‌خواهد در حل مسائل هندسه ورزیدگی بدست آورد از مطالعهٔ این کتاب و حل تمرینات آن به مقصود می‌رسد . در این شمارهٔ یکان ترجمهٔ مقدمهٔ کتاب به نظرخوانندگان می‌رسد و ترجمهٔ بقیهٔ کتاب در شماره‌های بعدی مجله به تدریج درج خواهد شد .

یك مسئلهٔ هندسه که به صورت کاملا مختلط باشد از یك رشته مسائل ساده تشکیل شده است که این مسائل را می‌توان به چهار دسته تقسیم کرد :

مسائل مترتب برخواص توصیفی اشکال

مسائل مترتب برخواص متری ومسائل محاسبه‌ای

مسائل مکانهای هندسی

مسائل ترسیمی (ساختن اشکال)

۱- خواص توصیفی اشکال

این خواص اوضاع نسبی بین اجزای شکلهای هندسی و نوع آنها را بیان می‌کنند .

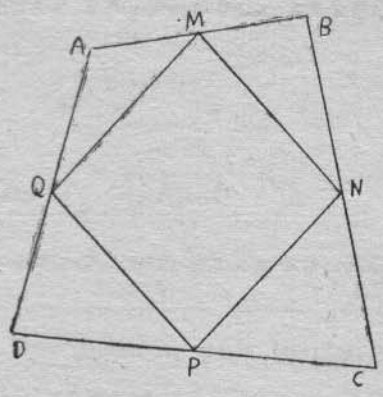
مثال ۱ - خواص زیر را ضمن درس هندسه ثابت می‌کنند :

درهرلوزی ، قطرها بر یکدیگر عمودند : وضع نسبی قطرها معین شده است .

مماس بردایره برشعاع نقطهٔ تماس عمود است: نسبت وضعی

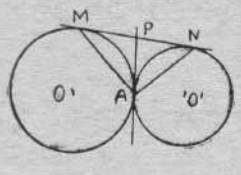
در چهار ضلعی محاطی ، زاویه‌های روبرو مکمل یکدیگرند: رابطهٔ مربوط به شکل .

مثال۲ـ چهار-ضلعی که چهار رأسش اوساط اضلاع یك چهار-ضلعی باشد . متوازی-الاضلاع است (شکل۱) رابطه‌ای که نوع شکل MNPQ را نشان می‌دهد : اضلاع روبرویش متوازیند .



(ش ۱)

مثال ۳ ـ اگر دو دایرهٔ O و 'O در نقطهٔ A بر یکدیگر مماس خارج باشند ، MN مماس مشترك خارجی آنها و خطوط MA و NA یك مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند (شکل ۲) : رابطهٔ مربوط به شکل، اگر مماس داخلی آنها را رسم کنیم از نقطهٔ P وسط MN می‌گذرد : نسبت وضعی



(ش ۲)

این خواص مستقل از اندازه های اجزای شکل ثابت می‌شوند ؛ مگر اینکه اندازه‌های اجزاء مورد مقایسه واقع شوند مثلا برای اثبات اینکه آیا دو جزء با یکدیگر مساویند یا متساوی نیستند .

۲ـ خواص متری اشکال

این خواص ، یك رابطه ، معمولا یك تساوی ، را بین اندازه‌های اجزای یك شکل بیان می‌دارند .

مثال۱ـ در هرمثلث قائم‌الزاویه ، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورات دو ضلع دیگر .

بطوردقیقتر باید چنین گفته شود: درهرمثلث قائم‌الزاویه مجذور اندازهٔ وتر برابر است با مجموع مجذورات اندازه‌های دو ضلع دیگر ، اندازه های هر سه ضلع بر حسب یك واحد معین شده‌اند .

مثال ۲ـ در هرمثلث، حاصل ضرب دوضلع برابراست با حاصل‌ضرب ارتفاع ضلع‌سوم در قطر دایرهٔ محیطی مثلث. که مقصود از حاصل ضرب دوضلع ، حاصل ضرب اندازه های آنها می‌باشد و همچنین برای حاصل ضرب قطر دایرهٔ محیطی و ارتفاع .

این دو خاصیت از لحاظ جبری چنین بیان می‌شوند :

اگر a اندازهٔ وتر یك مثلث قائم‌الزاویه و b و c به ترتیب اندازه‌های دو ضلع دیگر این مثلث برحسب یك واحد باشد خواهیم داشت :

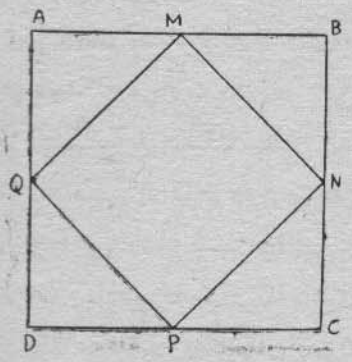
$$a^2=b^2+c^2$$

اگر a و b اندازه‌های دو ضلع یك مثلث و h_c اندازهٔ ارتفاع نظیر ضلع سوم و R اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث بوده و a و b و h و R برحسب یك واحد بیان شده باشند داریم :

$$a\times b=2R\times h_c$$

بنابراین، در یك خاصیت متری مربوط به یك شکل، رابطه‌ای جبری بین اندازه‌های اجزای این شکل بیان می‌شود .

مسئلهٔ محاسبه‌ای ـ از خواص توصیفی وخواص متری اشکال استفاده نموده اندازه‌های اجزاء ، سطح ویا حجم اشکال را حساب می‌کنیم .



(ش ۳)

مثال ـ در یك مربع ABCD که طول ضلع آن AB=a می‌باشد نقاط M و N و P و Q اوساط ضلعهای مجاوررا متوالیاً به هم وصل می‌کنیم ؛ اندازهٔ ضلع و مساحت چهارضلعی MNPQ را حساب کنید . (شکل ۳)

بنابرخاصیت توصیفی اشکال ثابت می‌شودکه چهارضلعی MNPQ مربع است ؛ بعد با استفاده ازخواص متری (رابطهٔ فیثاغورس) وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ BMN واز روی آن مساحت چهارضلعی حساب می‌شود .

۳ـ مسائل مربوط به‌تعیین مکانهای هندسی

این نوع مسائل ، معمولا مشکل‌تر از مسائل فوق‌الذکر به نظر می‌رسند؛ دراین کتاب به ذکر اجمالی مطالبی درمورد آنها قناعت خواهد شد .

مکان هندسی را چنین تعریف می‌کنند : شکلی که همهٔ

نقاط آن دارای یك خاصیت باشند و این خاصیت منحصر به نقاط این شکل باشد . مثلا ، عمود منصف یك قطعه خط یك مکان هندسی است ، زیرا همهٔ نقاط آن این خاصیت را دارند که ازدو سر قطعه خط به یك فاصله‌اند و این خاصیت منحصر به‌نقاط عمود منصف می‌باشد یعنی هر نقطه‌ای که از دوسر قطعه خط به یك فاصله باشد برعمود منصف آن واقع است .

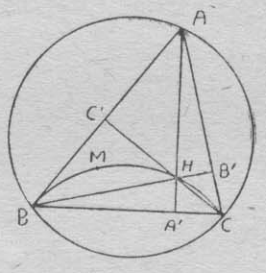
تعیین مکان هندسی به پیدا کردن شکلی منجر می‌شود که نقاطش خاصیت مفروض را داشته باشند چنانچه این خاصیت منحصر به نقاط این شکل باشد وازاین رو تعیین مکان هندسی حل دو مسئله را ایجاب می کند:

۱) اثبات اینکه هر نقطه از شکل تعیین شده خاصیت مفروض را دارد .

۲) اثبات اینکه هر نقطه که خاصیت مفروض را داشته باشد براین شکل واقع است .

مثال ۱ـ مثلث حادالزوایای ABC محاط در دایرهٔ ثابتی مفروض است ؛ BC از مثلث ثابت بوده ورأس A ازآن روی دایره تغییر مکان می‌دهد . اگر H نقطهٔ تلاقی ارتفاعات این مثلث باشد ، مکان هندسی نقطهٔ H را تعیین کنید .

معلوم کرده‌ایم که مکان H کمانی ازدایره است که قرینهٔ کمان BC از دایرهٔ ثابت نسبت به ضلع BC می‌باشد، برای اثبات اینکه این کمان مکان هندسی نقطهٔ H است .



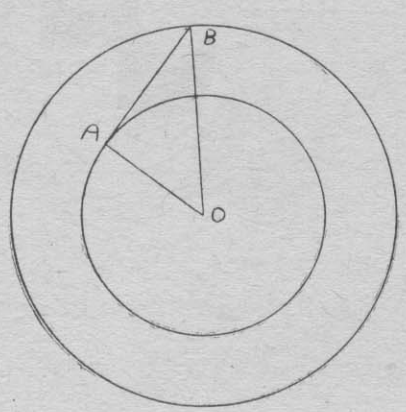
(ش ۴)

اولا باید ثابت کنیم هر نقطه‌ای که از تلاقی ارتفاعات مثلثی که یك ضلعش BC بوده و رأس مقابلش بر کمان BC واقع است پدید می‌آید براین کمان (مکان) واقع است . ثانیاً باید ثابت کنیم هر نقطه از این کمان BMC نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلثی از نوع مزبور می‌باشد . (شکل ۴)

مثال ۲ـ دایرهٔ ثابت (C) و نقطهٔ A واقع بر آن مفروض است ؛ بردایرهٔ (C) ودرنقطهٔ A مماس BA را برابر با طول ثابت رسم می کنیم . مکان هندسی نقطهٔ B را تعیین کنید وقتی که A محیط دایرهٔ (C) را بپیماید .

اگر مکان مطلوب دایره‌ای متحدالمرکز با دایرهٔ (C) مثل دایرهٔ (C') باشد. برای اثبات این موضوع باید اولا ثابت کرد که هر نقطه‌ای که از آن قطعه مماسی برابر با AB بر دایرهٔ (C) رسم شود بردایرهٔ (C') واقع است .

ثانیاً باید ثابت کرد که از هر نقطهٔ دایرهٔ (C) مماسی بر



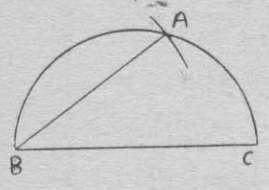
(ش ۵)

دایرهٔ (C) رسم شود طول قطعه مماس حاصل برابر با AB می‌باشد . (شکل ۵)

٤ ـ مسائل ترسیمی

حل مسائل از این نوع تعیین شکلی است که اجزاء آن اوضاع نسبی معین یا اندازه‌های مفروضی را داشته باشند . با دانستن به اندازهٔ کافی بعضی روابط ، می‌توان شکلی را رسم کرد که بعضی از اجزای آن معلوم باشد: مقصود ازمسائل ترسیمی همین است .

مثال ۱ـ رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ازآن طول وتر BC و طول BA یکی از اضلاع زاویه قائمه معلوم است .



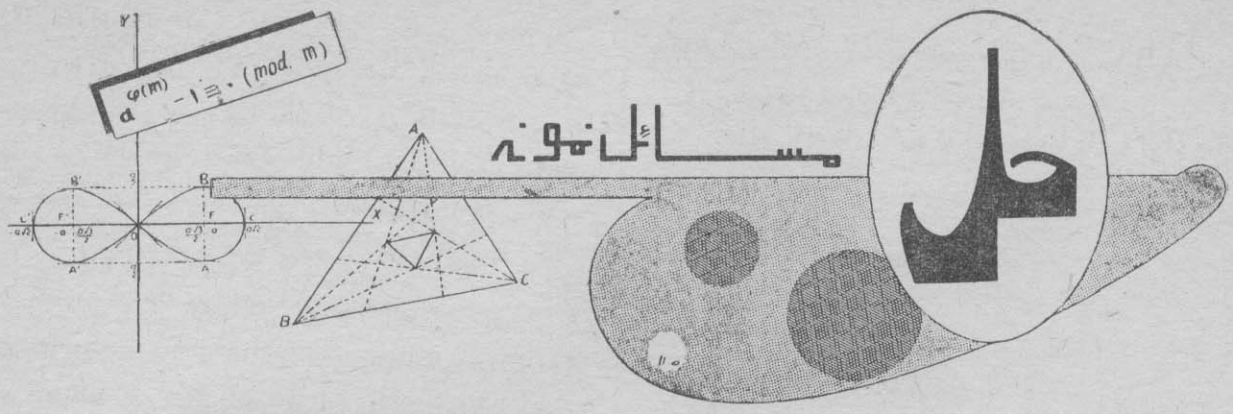
(ش ۶)

چون مثلث درزاویهٔ A قائمه است دایرهٔ به قطر BC از رأس A می گذرد . ازطرف دیگر فاصلهٔ A از B معلوم است (که همان طول AB می‌باشد) . با این اطلاعات رسم مثلث انجام پذیر خواهد بود . (شکل ۶)

مثال ۲ـ مربع ABCD مفروض است ؛ در خارج مربع و روی هرضلع آن مثلث متساوی‌الاضلاعی می‌سازیم . نوع ترسیم را شرح دهید .

اگر ABE و BCF و CDG و DAH مثلثهای مطلوب باشند. چون این مثلثها متساوی‌الاضلاع هستند اضلاع آنها دارای

(دنباله در صفحهٔ ۲۷)



آقای حسین غیور به خاطر مهارت و استادی که در حل مسائل ریاضی بخصوص مسائل هندسی دارند دارای معروفیت کامل می‌باشند و شاید به حق بتوان گفت که از نظر ابتکارات جالبی که در حل مسائل هندسی ابراز می‌دارند در ایران منحصر به فرد می‌باشند.

نامه‌ای که از ایشان واصل شده است عیناً چاپ می‌شود و امید است که بازهم آثاری از ایشان در یکان به چاپ برسد.

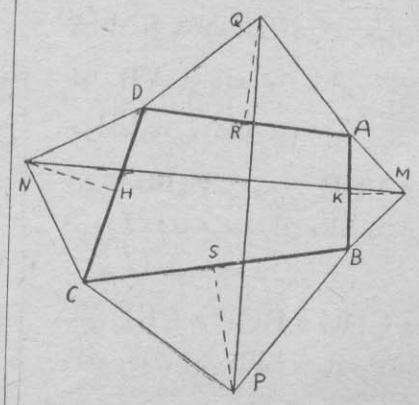
مدیر محترم مجلهٔ یکان

در دورهٔ دوم شمارهٔ ۶ برای حل مسئلهٔ شمارهٔ ۳۴۹۶ راه حل مناسب تر و ساده‌تری بنظر رسیدکه ذیلا تقدیم می‌دارم. چون حل مسئله به این طریقه ممکن است سرمشق برای بسیاری ازاین‌قبیل مسائل باشد، برای دانش‌آموزان مفید است. اگر صلاح بدانید در شمارهٔ بعد چاپ شود.

حسین غیور دبیر ریاضی دانشسرایعالی

مسئله روی اضلاع چهارضلعی محدب ABCD مثلثهای قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین MAB و PBC و NCD و QDA را رسم کرده و نقاط M و P را به ترتیب به N و Q وصل می‌کنیم ثابت کنید اولا MN و PQ باهم مساوی وثانیاً برهم عمودند.

حل ـ برای حل مسئله قبلا متذکر می‌شویم که اگر چند بردار واقع در یك صفحه را در حول محورهای مختلف به اندازهٔ زاویهٔ معینی دوران دهیم مجموع هندسی آنها نیز به‌همان اندازه دوران می‌کند



اگر $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ و $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ و $\overrightarrow{DA}=\vec{d}$ فرض شود.

$$(1)\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$$

چون چهار بردار رابطهٔ فوق را در $\frac{1}{2}$ ضرب کرده وبه‌اندازهٔ (90°) دوران دهیم نتیجه می‌شود:

$$(1)\quad \overrightarrow{KM}+\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{HN}+\overrightarrow{RQ}=0$$

از طرف دیگر داریم:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HN}$$

یا

$$(3)\quad \overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{KM}+\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\overrightarrow{HN}$$

اگر هریك از بردارهای طرف راست رابطهٔ فوق را به اندازهٔ (-90°) دوران‌دهیم $\overrightarrow{MN}$ مجموع هندسی آنها نیز (-90°) دوران می‌کند، $\overrightarrow{M'N'}$ نتیجهٔ دوران $\overrightarrow{MN}$ به اندازهٔ (-90°) فرض شده است.

$$(۴)\ MN \angle ۹۰^\circ = \overrightarrow{M'N'} = -\frac{۱}{۲}\vec{a} - \overrightarrow{KM} - ۲\overrightarrow{SP} - \overrightarrow{HN} + \frac{۱}{۲}\vec{c}$$

از طرف دیگر داریم :

$$(۵)\quad \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{RQ} + \frac{۱}{۲}\vec{d} + \vec{a} + \frac{۱}{۲}\vec{b} + \overrightarrow{SP}$$

از جمع طرفین دو رابطهٔ (۴) و (۵) نتیجه می‌شود .

$$(۶)\quad \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{QP} = \frac{۱}{۲}\vec{a} + \frac{۱}{۲}\vec{b} + \frac{۱}{۲}\vec{c} + \frac{۱}{۲}\vec{d} - (\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{HN} + \overrightarrow{RQ})$$

طرف دوم رابطهٔ فوق به موجب دورابطهٔ (۱) و (۲) مساوی صفر است پس :

$$\overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{QP} = ۰$$

یا $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{PQ}$

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که اولا :

$$|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{PQ}|$$

ثانیاً چون MN بر M'N' عمود است برمتوازی آن یعنی PQ نیز عمود است .

***

چگونه مسأله‌ای را حل کنیم (بقیه از صفحهٔ ۲۲)

متر است. مساحت آن را حساب کنید

سؤال امتحان نهایی هندسهٔ پسران شهریور ۱۳۳۵

نقل از کتاب فوق‌الذکر

۳ـ زمینی است به شکل مثلث ABC به فرض آنکه گوشهٔ $B = ۲۵^\circ$ وضلع روبروی آن ۱۲ متر وگوشه $C = ۶۵^\circ$ وضلع روبروی آن ۱۶ متر باشد ، مثلث را رسم ومساحت و محیط آن‌را حساب کنید

سؤال ریاضیات مسابقهٔ ورودی کلاس چهارم دبیرستان کشاورزی مهرماه ۴۳ یکی از استانها

اعداد غیرجبری یکی عدد π و دیگری عدد e می‌باشد .

توجه ـ در ریاضیات معمولی که در تحصیلات متوسطه مطالعه می‌شود مقصود از اعداد جبری مجموعهٔ اعداد مثبت و منفی (صحیح وغیرصحیح) می‌باشد . صفر نیز جزء اعدادجبری منظور می‌شود .

یادداشت: π و e دوعدد غیرجبری‌می‌باشند و i عددی است موهومی ، بین آنها رابطهٔ زیر که حاصل آن عدد حقیقی یك می‌باشد برقرار است .

$$e^{۲\pi i} = ۱$$

***

قدر مطلق ـ قدر مطلق یك عدد جبری (عدد نسبی) مقدارآن عدد است وقتی که ازعلامت (+) یا (−) عددجبری صرف نظر شود. قدرمطلق یك عدد جبری مانند a را به‌صورت |a| نمایش می‌دهند . برای مثال :

$$|+۵| = ۵ \qquad \left|-\frac{۲}{۳}\right| = \frac{۲}{۳}$$

قدر مطلق عدد جبری a را به عبارت دقیقتر چنین تعریف می‌کنیم :

قدر مطلق عدد جبری a عبارتست از |a| به قسمی که

عمل غلط ، اما جواب صحیح

عبارت زیررا درنظر می‌گیریم :

$$A = (tg\frac{\pi}{۳} \times tg\frac{\pi}{۴} \times tg\frac{\pi}{۶})^۲$$

آنرا به صورت زیر می‌نویسیم که عملی است غلط

$$A = [tg(\frac{\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۶})]^۲$$

$$A = [tg\frac{۴\pi + ۳\pi + ۲\pi}{۱۲}]^۲$$

$$A = [tg(\frac{۳\pi}{۴})]^۲ = (-۱)^۲ = ۱$$

وچنانچه صحیح عمل می‌کردیم :

$$A = (\sqrt{۳} \times ۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ = ۱^۲ = ۱$$

مصطفی گودرزی طائمه

راهنمای ریاضیات متوسطه

یادآوری بعضی از تعاریف ـ دربارهٔ $|X|$ و $\sqrt{X^2}$

برای دانش‌آموزان سال چهارم

اعداد طبیعی ـ رشتهٔ اعداد :

۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... و n و n+۱ و ...

راکه از عدد ۱ شروع شده وهرعدد از افزودن یك واحد به عدد قبلی بدست می‌آید اعداد طبیعی می‌نامیم. کوچکترین عدد طبیعی «۱» است، در رشتهٔ اعداد طبیعی بزرگترین عدد وجود ندارد ، زیرا هرعدد طبیعی بزرگی را فرض کنیم ازافزودن یك واحد به‌آن ، عددی بزرگتر ازآن بدست می‌آید ؛ رشتهٔ اعداد طبیعی از طرف بالا نامحدود است .

درنوشتن اعداد طبیعی ازعلائم محدودی موسوم به ارقام استفاده می‌کنیم . از جملهٔ رقمهایی که در عدد نویسی معمول امروز به‌کار می‌رود رقم صفر (۰) است که مورد استعمال آن نگاهداری جای خالی مرتبه‌ای در یك عدد می‌باشد . رقم صفر جزء اعداد طبیعی به حساب نمی‌آید .

مفهوم بینهایت ـ اگر N یك عدد طبیعی دلخواه باشد و به ازاء جمیع مقادیر دلخواه و بزرگ N داشته باشیم $A>N$ ، می‌گوئیم که A یك بینهایت بزرگ است وآنرا با نشانهٔ «∞» نمایش می‌دهیم . توجه داشته باشیم که ∞ نمایش یك عدد ، حتی یك عدد بسیاربسیار بزرگ ، نیست . مفهوم بینهایت یك کیفیت را بیان می‌کند .

اعداد کسری ـ خارج قسمت دو عدد طبیعی a و b را به صورت $\frac{a}{b}$ نمایش داده وآنرا یك کسر می‌نامیم. درحالت کلی فرض می‌کنیم که a بر b بخش پذیر نباشد . چنانچه $a<b$ باشد کسر $\frac{a}{b}$ عددی کوچکتر ازواحد یا به‌عبارت دیگر «جزئی ازواحد» رامشخص می‌کند. عددی راکه شامل چندواحدصحیح وجزئی ازواحد باشدعدد کسری می‌نامیم مانند $7\frac{4}{9}$. چون هرعددصحیح را می‌توانیم به صورت کسری با مخرج یك فرض کنیم پس : مجموعهٔ اعدادکسری شامل اعداد طبیعی نیز هست .

در مجموعهٔ اعدادکسری نه کوچکترین عدد وجود دارد و نه بزرگترین عدد، زیرا اگر N عددی به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد عدد N+۱ ازآن بزرگتر بوده وکسر $\frac{1}{N+1}$ ازکسر $\frac{1}{N}$ کوچکتر می‌باشد .

بینهایت کوچك ـ رشتهٔ اعداد

۱ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و ... و $\frac{1}{N}$

را در نظر می‌گیریم اگر N عددی باشدکه هر قدر خواسته باشیم بزرگ باشد در این صورت می‌توانیم کسر $\frac{1}{N}$ را هرقدر که خواسته باشیم کوچك فرض کنیم . چنانچه به ازاء جمیع مقادیر دلخواه و بزرگ N داشته باشیم $\varepsilon<\frac{1}{N}$ ، می‌گوئیم که ε یك بینهایت کوچك می‌باشد .

اعداد نسبی ـ اعداد طبیعی راکه شامل علامت قراردادی (+) باشند اعداد مثبت و اعداد طبیعی راکه شامل علامت قراردادی (−) باشند اعداد منفی می‌نامیم (این تعریف را برای اعداد غیرصحیح نیز تعمیم می‌دهیم) . مجموعهٔ اعداد

مثبت ، اعداد منفی و صفر را اعداد نسبی می‌گوئیم .

اعداد گنگ (اصم)ـ عددی را که نه صحیح باشد و نه کسری ، عدد گنگ می‌نامیم ، مانند اندازهٔ قطر مربعی که طول هرضلعش یك واحد باشد که به صورت $\sqrt{2}$ نوشته می‌شود ، یا اندازهٔ محیط دایره‌ای که طول قطرش یك واحد باشد که با علامت π نشان داده می‌شود .

اعداد مختلطـ ریشهٔ زوج عددی منفی را عددموهومی می‌نامیم مثل $\sqrt{-1}$ ، فرض می‌کنیم $\sqrt{-1}=i$ در این صورت اعداد موهومی مثل $\sqrt{-5}$ و $\sqrt{-4}$ به ترتیب به‌صورت $i\sqrt{5}$ و $2i$ نوشته خواهند شد . در مقابل اعداد موهومی ، بقیهٔ اعداد را اعداد حقیقی می‌نامیم . اعداد مختلط اعدادی هستند که شامل یك جزء حقیقی و یك جزء موهومی باشند ، مثلا عدد $5+3i$ یك عدد مختلط است . اگر a و b دو عدد حقیقی باشند اعداد $a+ib$ و $a-ib$ اعداد مختلط مزدوج نامیده می‌شوند . حاصل ضرب دو عدد مختلط مزدوج مزبور عدد حقیقی a^2+b^2 می‌باشد .

اعداد جبری ـ هرعددی را که بتواند ریشهٔ یك معادلهٔ چند جمله‌ای صحیح با ضرایب منطق باشد عدد جبری واعدادی غیرازآن را اعداد غیرجبری (ترانساندانت) می‌نامند. ازجمله اعداد غیرجبری یکی عدد π و دیگری عدد e می‌باشد .

توجه ـ در ریاضیات معمولی که در تحصیلات متوسطه مطالعه می‌شود مقصود از اعداد جبری مجموعهٔ اعداد مثبت و منفی (صحیح وغیرصحیح) می‌باشد . صفرنیز جزء اعدادجبری منظور می‌شود .

یادداشت: π و e دوعدد غیرجبری‌می‌باشند و i عددی است موهومی ، بین آنها رابطهٔ زیر که حاصل آن عدد حقیقی یك می‌باشد برقرار است .

$$e^{2\pi i}=1$$

***

قدر مطلقـ قدر مطلق یك عدد جبری (عدد نسبی) مقدارآن عدد است وقتی که ازعلامت (+) یا (−) عددجبری صرف نظر شود. قدرمطلق یك عدد جبری مانند a را به‌صورت $|a|$ نمایش می‌دهند . برای مثال :

$$|+5|=5 \qquad \left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$$

قدر مطلق عدد جبری a را به عبارت دقیقتر چنین تعریف می‌کنیم :

قدر مطلق عدد جبری a عبارتست از $|a|$ به قسمی که

اگر $a=0$ باشد، $|a|=0$ خواهد بود

اگر $a>0$ باشد، $|a|=a$ خواهد بود

اگر $a<0$ باشد، $|a|=-a$ خواهد بود

مثال ۱ـ فرض کنیم مقصود تعیین $|a-b|$ است ، سه حالت در نظر می‌گیریم :

۱) $a=b \Longrightarrow |a-b|=0$

۲) $a>b \Longrightarrow |a-b|=a-b$

۳) $a<b \Longrightarrow |a-b|=b-a$

مثال۲ـ تعیین $|a^2-b^2|$ (a و b مثبت‌هستند) ؛ اگر $a<-b$ یا $a>b$ باشد در این صورت $a^2>b^2$ بوده و a^2-b^2 مثبت‌است واگر $-b<a<b$ باشد در این‌صورت $a^2<b^2$ بوده و a^2-b^2 منفی‌است بنابراین سه‌حالت‌زیررا خواهیم داشت :

۱) $a=\pm b \Longrightarrow |a^2-b^2|=0$

۲) $a>b$ یا $a<-b \Longrightarrow |a^2-b^2|=a^2-b^2$

۴) $-b<a<b \Longrightarrow |a^2-b^2|=b^2-a^2$

نتیجهـ برای تعیین $|f(x)|$ باید قبلا معلوم کنیم که در ازاء چه مقدار هایی از x حاصل $f(x)$ مثبت ، منفی یا صفر است .

در ازاء مقادیری از x که $f(x)=0$ باشد داریم :

$|f(x)|=0$

درازاء مقادیری از x که $f(x)$ مثبت باشد داریم :

$|f(x)|=f(x)$

در ازاء مقادیری از x که $f(x)$ منفی باشد داریم :

$|f(x)|=-f(x)$

***

دربارهٔ $\sqrt{x^2}$ ـ اگرداشته باشیم $a^{2p}=N$ ، عدد a را ریشهٔ زوجی از N می‌نامیم ، در حالت $a^2=N$ ، عدد a را ریشهٔ دوم‌یا جذر عدد N می‌گوئیم. عدد a خواه مثبت باشد و خواه منفی عدد $N=a^{2p}$ مثبت خواهد بود، بنابراین هرعدد مثبت N دارای دو ریشهٔ زوج می‌باشد که قرینهٔ یکدیگرند ؛ جذر عدد ۹ یا ۳+ ویا ۳− است ، عدد ۱۶ دوریشهٔ چهارم ۲+ و ۲− را دارد .

قرارداد ـ ریشهٔ $2p$ام ومثبت‌عدد مثبت Nرا به‌صورت $\sqrt[2p]{N}$ نمایش می‌دهیم .

حالت خاص ـ جذر مثبت عدد مثبت N را به صورت $\sqrt{N}$ می‌نویسیم .

بنابراین $\sqrt[2p]{N}$ و درحالت خاص $\sqrt{N}$ نمایش یك عدد

مثبت می‌باشد (عدد مثبت N دارای دو جذر $\sqrt{N}$ و $-\sqrt{N}$ می‌باشد)

بنابر قرارداد فوق :

رابطهٔ $\sqrt{4}=\pm 2$ غلط است .

رابطهٔ $\sqrt{x^2}=x$ نیز در حالت کلی صحیح نیست زیرا اگر x منفی باشد طرف دوم رابطه که منفی است نمی‌تواند با طرف اول رابطه که مثبت است برابر باشد ورابطه غلط خواهد بود (مثلا اگر $x=-5$ باشد رابطهٔ مزبور به صورت : $\sqrt{(-5)^2}=-5$ بوده وغلط است)

بنابراین باید چنین بنویسیم :

$$\boxed{\sqrt{x^2}=|x|}$$

و بنابر آنچه قبلا درمورد $|x|$ گفته شد داریم :

۱) $x=0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=0$

۲) $x>0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=x$

۳) $x<0 \Rightarrow \sqrt{x^2}=-x$

چند مثال عددی ـ

$\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$ و $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$

$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$

$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$

$=|\sqrt{3}-\sqrt{2}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

مثال ۲ـ تعیین مقدار $\sqrt{(a-1)^2}$؛ سه حالت درنظر می‌گیریم .

۱) $a=1 \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=0$

۲) $a>1 \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=a-1$

۳) $a<1 \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=1-a$

مثال ۳ـ حاصل عبارت

$$P=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$$

را برحسب مقادیر مختلف x حساب کنید .

عبارت P به صورت زیر نوشته می‌شود .

$$P=|x+1|+|x-1|$$

وحالتهای زیررا درنظرمی‌گیریم

۱) $x=1 \Rightarrow P=|2|=2$

۲) $x=-1 \Rightarrow P=|-2|=2$

۳) $x<-1 \Rightarrow x+1<0$ و $x-1<0$

$\Rightarrow P=-(x+1)-(x-1)$

$=-2x$

۴) $-1<x<1 \Rightarrow x+1>0$ و $x-1<0$

$\Rightarrow P=(x+1)-(x-1)=2$

۵) $x>1 \Rightarrow x+1>0$ و $x-1>0$

$\Rightarrow P=(x+1)+(x-1)=2x$

(دو مثال زیر خارج از برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی است)

مثال ۴ـ تعیین مقدار $\sqrt{\sin^2 x}$ وقتی که کمان x مقادیر مختلف را قبول می‌کند .

$\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$

۱) $x=k\pi \Rightarrow \sqrt{\sin^2 x}=0$

۲) $2k\pi<x<2k\pi+\pi \Rightarrow \sqrt{\sin^2 x}=\sin x$

۳) $2k\pi-\pi<x<2k\pi \Rightarrow \sqrt{\sin^2 x}=-\sin x$

مثال ۵ ـ x کمانی است واقع درفاصلهٔ $[0 \text{ و } \pi]$:

$S=\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}$

$S=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=|\sin x+\cos x|$

۱) $x=\frac{3\pi}{4}$ یا $\frac{7\pi}{4} \Rightarrow S=0$

۲) $0<x<\frac{3\pi}{4} \Rightarrow S=\sin x+\cos x$

۳) $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4} \Rightarrow S=-(\sin x+\cos x)$

۴) $\frac{7\pi}{4}<x<2\pi \Rightarrow S=\sin x+\cos x$

***

تمرینات

۱ـ مقدار $\sqrt{4x^2}$ را به‌ازاء مقادیرزیر از x حساب کنید.

$\frac{5}{2}$ و ۱ و $\frac{3}{4}$ و ۱ ـ و $-\frac{3}{2}$ و ۳ ـ

۲ـ حاصل هریك از عبارتهای زیر را در ازاء مقادیر مختلف x تعیین کنید .

$A=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$ و $\sqrt{(x+y)^2}$

$B=\sqrt{(2x-1)^2}-\sqrt{x^2}$

***

دنباله دارد (بقیه در شمارهٔ بعد)

مسائل برای حل

کلاس چهارم طبیعی

۳۵۳۸ـ صحت تساوی زیررا محقق کنید :

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$$

(فرستنده : اسمعیل علی‌پور دانشجوی دانشسرا یعالی)

۳۵۳۹ـ دو دایرهٔ (O) و (O') در نقطهٔ A مماس خارج می‌باشند . خطی چنان رسم می‌کنیم که در نقطهٔ M بر دایرهٔ (O) مماس و در نقاط B و C با دایرهٔ (O') قاطع باشد و قطر MN از دایرهٔ (O) را نیز رسم می‌کنیم . ثابت کنید خطوط AM و AN نیمسازهای زاویهٔ BAC می‌باشند .

(ترجمه از تربیت ریاضی)

کلاس چهارم ریاضی

۳۵۴۰ـ با توجه به‌مبحث «راهنمای ریاضیات‌متوسطه» مندرج در همین شماره حاصل عبارتهای زیررا برحسب مقادیر مختلف a و b حساب کنید .

$$A=\sqrt{(a+2b)^2} \quad \text{و} \quad B=\sqrt{(a-2b)^2}$$

$$C=A+B \quad \text{و} \quad D=A-B \quad \text{و} \quad E=\frac{C}{D}$$

۳۵۴۱ـ اگر p و q و r در روابط زیر صدق کنند .

$$\begin{cases} p+q+r=1 & (1) \\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=0 & (2) \end{cases}$$

صحت رابطهٔ زیررا محقق کنید .

$$(pa+qb+rc)^2+(qa+rb+pc)^2+(ra+pb+qc)^2=a^2+b^2+c^2$$

(ترجمهٔ : قوام نحوی)

۳۵۴۲ـ مطلوبست حل و بحث معادلهٔ زیر :

$$\frac{(x-2)^2}{1-mx}=x+4$$

۳۵۴۳ـ عبارت زیررا ساده کنید

$$\log(a^2-1)+\log(b^2-1)-\log[(ab+1)^2-(a+b)^2]$$

۳۵۴۴ـ معادلهٔ زیر را حل کنید و مقدار تقریبی x را بدست آورید .

$$3^{(2^x)}=2^{(3^x)}$$

۳۵۴۵ـ زاویهٔ xoy و نقطهٔ A واقع در صفحهٔ آن مفروض‌است از نقطهٔ A خطی‌چنان‌رسم کنید که دوضلع‌زاویه‌را قطع کند و محیط مثلث حاصل برابر با مقدار معلوم 2p باشد.

(فرستنده علی وفاجو)

۳۵۴۶ـ متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است . از رأس C دوخط دلخواه چنان رسم می‌کنیم که ضلع AD را در نقاط K و L و امتداد ضلع BA را در S و T قطع کنند . ثابت کنید که :

$$\frac{BS}{BT}=\frac{KD}{LD}$$

(هدایت یاسائی ،آمریکا)

کلاس پنجم طبیعی

۳۵۴۷ـ دستگاه محور های مختصات متعامد x'Ox و

$y'Oy$ را درنظر گرفته وفرض می‌کنیم Ox و Oy همچون دوآینهٔ تخت نوررا منعکس کنند بطوری که سطح صیقلی هر کدام ازآنها به طرف ربع اول محور ها باشد . یك شعاع نورانی منطبق بر خط به معادلهٔ $y=x+1$ در نقطهٔ T بر Oy تابیده پس از انعکاس ، درنقطهٔ S بر Ox می‌تابد ومجدداً در امتداد SU منعکس می‌شود . معادلات خطوط ST و SU را بدست آورید .

(م. ی. آملی)

۳۵۴۸ـ صحت اتحاد زیررا ثابت کنید

$$(a+1)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+(a-1)^2\cos(\pi+x)$$

$$+4a\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$$

کلاس پنجم ریاضی

۳۵۴۹ـ دوآینهٔ تخت با یکدیگر فرجه‌ای تشکیل می‌دهند که شیب هر وجه آن نسبت به وجه دیگر برابر با ۳ بوده و سطحهای صیقلی دوآینه روبروی یکدیگر واقع شده‌اند. صفحهٔ P برنقطهٔ نورانی S گذشته و برفصل مشترك دوآینه درنقطهٔ O عمود می‌باشد. درصفحهٔ P محورهای مختصات متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ راچنان انتخاب می‌کنیم که فصل مشترك P باآینهٔ اول بر Ox منطبق بوده و فصل مشترك P باآینهٔ دوم ، خط Ou در ربع اول واقع باشد یك شعاع نورانی از S خارج شده منطبق برصفحهٔ P درنقطهٔ A به‌آینهٔ دوم تابیده پس ازبازتاب در نقطهٔ B به‌آینهٔ اول می‌تابد و پس از انعکاس مجدد به نقطهٔ نورانی S برمی‌گردد . درصورتی که معادلهٔ SA به صورت $y=x+1$ باشد مختصات نقطهٔ S را پیدا کنید .

۳۵۵۰ـ به فرض اینکه داشته باشیم :

$$tg(a+b)=\frac{1}{17} \quad \text{و} \quad tg(a-b)=\frac{11}{13}$$

مقادیر $tg\,a$ و $tg\,b$ را حساب کنید. دو دستهٔ جواب $(a_1$ و $b_1)$ $(a_2$ و $b_2)$ بدست می‌آید . معلوم کنید که انتهای هریك ازچهار کمان مزبور درکدام بخش از دایرهٔ مثلثاتی واقع است . بین دوکمان a_1 و a_2 و همچنین دوکمان b_1 و b_2 چه رابطه برقرار است ؟

۳۵۵۱ـ صفحهٔ P و دو نقطهٔ A و B غیرواقع برآن مفروض است . مکان هندسی نقاط M ازصفحهٔ P را تعیین کنید بنا بر آنکه یکی از نیمسازهای زاویهٔ AMB بر صفحهٔ P منطبق باشد .

(ترجمه از فرانسه)

کلاس ششم طبیعی

۳۵۵۲ـ معادلهٔ زیر مفروض است

$$x^2+y^2-2mx-4(m+1)y+3m+14=0$$

۱) معلوم کنید به ازاء چه مقادیر m معادلهٔ بالا معادلهٔ یك دایره می‌باشد . مکان هندسی مراکز این دایره ها را تعیین کرده وآنرا رسم کنید .

۲) به ازاء دو مقدار $m=2$ و $m=-3$ دو دایرهٔ نظیر را در همان شکل قسمت ۱) رسم کنید .

۳۵۵۳ـ تابع زیر مفروض است .

$$y=\sin^2 x\cos\alpha+\sqrt{3}\cos^2 x\sin\alpha+\cos x\sin x-\frac{3}{2}$$

۱) مقدار کمان α را چنان تعیین کنید که تابع درازاء $x=\frac{\pi}{8}$ دارای ماکزیمم یا مینیمم باشد .

۲) به ازاء $\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ معادلهٔ $y=0$ راحل کرده جوابهای کلی کمان x را تعیین کنید .

کلاس ششم ریاضی

۳۵۵۴ـ اولا تابع $y=f(x)$ را چنان تعیین کنید که فضل عرض هر نقطه از منحنی برعرض نقطهٔ هم طول آن از تنها مجانب مایلش برابر با عکس طول آن نقطه باشد و بعلاوه نقطهٔ $\omega(1$ و $0)$ مرکز تقارن منحنی بوده تفاضل طولهای نقاط نظیر ماکزیمم و مینیمم تابع ازلحاظ قدر مطلق برابر با ۲ باشد .

ثانیاً منحنی نمایش تابع :

$$y=\frac{x^2+x+1}{x}$$

را رسم کنید .

۳۵۵۵ـ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر مفروض است :

$$f(x)=4x^2+(2-m)x-2m^2+2m=0$$

اولا درتعداد ریشه‌های این‌معادله برحسب مقادیرمختلف

m بحث کرده و وضع ریشه ها را نسبت به اعداد ۱ و ۱ − بسنجید .

ثانیاً از روی بحث و سنجش بالا در نامعادلهٔ زیر بحث کنید .

$$4\cos^2 u+(2-m)\cos u-2m^2+2m<0$$

درصورتی که u کمانی بین صفر و π باشد .

ثالثاً نامعادلهٔ اخیررا به ازاء $m=\frac{5}{4}$ حل کنید .

(ترجمهٔ : قوام نحوی)

۳۵۵۶ـ مربع ABCD مفروض است . از رأس A و در داخل مربع خطی چنان رسم می‌کنیم که با AB زاویهٔ α ساخته و ضلع BC را در M قطع کند . زاویهٔ α را چنان تعیین کنید که طول AM ، m برابر فاصلهٔ آن از مرکز مربع باشد .

۳۵۵۷ـ مطلوبست تعیین پنج عدد صحیح متوالی مشروط براینکه عدد وسطی به‌صورت $\overline{aa}$ ومجموع آنها به صورت $\overline{bac}$ باشد .

(احمد روحانی)

۳۵۵۸ـ رقم یکان توانهای مختلف ۲ وتوانهای مختلف ۷ را تعیین کنید و با استفادهٔ ازآن رقم یکان حاصل ضرب:

$$P=3548^9\times 2537^{31}$$

را معلوم کنید .

۳۵۵۹ـ دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R و یك نقطهٔ A واقع درداخل آن مفروض است. M نقطه‌ای است ازدایرهٔ (O) و نیمسازهای زاویهٔ AOM خط AM را در P و Q قطع می‌کنند .

۱) ثابت کنید وقتی که M دایرهٔ (O) را بپیماید نقاط P و Q دایره‌هایی رسم می‌کنند ، مرکزهای این دایره ها را O_1 و O_2 و شعاعهای آنها را R_1 و R_2 می‌نامیم ثابت کنید که بین R_1 و R_2 رابطه‌ای مستقل از R وجود دارد .

(ترجمه از فرانسه)

۳۵۶۰ـ به فرض اینکه F یك کانون، A و B دونقطه از دایرهٔ هادی کانون F' وE نقطه‌ای ازدایرهٔ اصلی یك بیضی معلوم باشند این بیضی را مشخص کنید .

(سید جلال آشفته)

۳۵۶۱ـ دو نقطهٔ a_1 و b_1 را با فرض $ab=3^{cm}$ اختیار کرده ملخص نقطهٔ c_5 را معلوم کنید بنابرآنکه CA=CB بوده واندازهٔ زاویهٔ ACB برابر با ۳۰° باشد . اگر P صفحه‌ای باشد که بر AB گذشته و تصویر مثلث ABC برآن مثلث متساوی الاضلاع ABD باشد یك مقیاس شیب صفحهٔ P را رسم کنید .

(محمدکریم روشن)

مسائل متفرقه

برای فارغ‌التحصیلان ششم ریاضی

۳۵۶۲ـ اگر داشته باشیم :

$$x^2-yz=a \quad و \quad y^2-xz=b \quad و \quad z^2-xy=c$$

۱) ثابت کنید که :

$$\frac{x-y}{a-b}=\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}=\frac{1}{x+y+z}$$

۲ـ رابطهٔ زیررا نتیجه بگیرید

$$\frac{x}{a^2-bc}=\frac{y}{b^2-ca}=\frac{z}{c^2-ca}$$

$$=\frac{\pm 1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$$

(ارسالی : فریدون فتوحیه پور)

۳۵۶۳ـ معادلهٔ زیررا حل کنید .

$$\cos^3 x(\cos 3x-\cos 2x)+\cos^3 2x(\cos x-\cos 3x)$$
$$+\cos^3 3x(\cos 2x-\cos x)=0$$

(حسین رزاقی‌زاده ششم ریاضی دبیرستان مروی)

۳۶۶۴ـ مطلوبست محاسبهٔ S از رابطهٔ زیر :

$$S=\frac{1}{\sin a\sin 3a}+\frac{1}{\sin 3a\sin 5a}+\cdots$$
$$+\frac{1}{\sin(2n-1)a\sin(2n+1)a}$$

(ارسالی: اسمعیل علی‌پور دانشجوی دانشسرای‌عالی)

۳۵۶۵ـ اگر S مجموع n عدد مثبت و غیر متساوی a و b و c و . . . باشد ثابت کنید :

$$\frac{S}{S-a}+\frac{S}{S-b}+\frac{S}{S-c}+\cdots>\frac{n^2}{n-1}$$

(ترجمه : حبیب گلستان‌زاده دبیر دبیرستانهای کازرون)

۳۵۶۶ـ مجموع زیر را حساب کنید :

$$S_n=\frac{1}{(1+x)(1+2x)}+\frac{1}{(1+2x)(1+3x)}+\dots+\frac{1}{(1+nx)[1+(n+1)x]}$$

(ترجمهٔ گلستان زاده)

۳۵۶۷ـ اولا ثابت کنید که

$$m^{\log_a n}=n^{\log_a m}$$

ثانیاً معادلهٔ زیر را حل کنید .

$$5^{\log_2 x}=4^{\log_2 5}$$

(ترجمهٔ : گلستان‌زاده)

۳۵۶۸ـ دستگاه دو معادلهٔ زیر را حل کنید

$$\begin{cases}\sqrt[x]{x+y}=2\\(x+y)3^x=279936\end{cases}$$

(فرستنده : مسعود درخشان نو ۵ ریاضی دبیرستان رهنما)

۳۵۶۹ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر

$$\mathrm{Arctg}(1+\log_a x\log_a ax)+\mathrm{Arctg}(1+\log_a ax+\log_a a^2x)+\mathrm{Arctg}(1+\log_a a^2x+\log_a a^3x)=\mathrm{Arctg}\frac{1}{3}$$

(حسن تاهباز صالحی ، ٦ ریاضی دبیرستان هدف۱)

۳۵۷۰ـ اگر داشته باشیم :

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x}) \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$$

ثابت کنید که

۱) $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)+f(x)f(y)$

۲) $f(x+y)=\varphi(x)f(y)+\varphi(y)f(x)$

(ترجمهٔ : پرویز خواجه خلیلی ٦ ریاضی دبیرستان فرخی‌آبادان)

۳۵۷ـ مطلوبست محاسبهٔ توابع اولیهٔ توابع زیر

۱) $y=x(x-2)(x-1)^n$

۲) $y=x(x^2+3x+3)(x+1)^n$

(احمد رئیسی دانشجوی دانشکده علوم)

۳۵۷۱ـ n عددی است صحیح و مثبت و داریم:

$$u_n=x^{2n}+x^n+1$$

عبارت $u_{n+3}-x^6u_n$ را محاسبه کنید و ثابت کنید که اگر x^2+x+1 فاکتور u_n باشدفاکتور u_{n+3} نیز خواهد بود

(ترجمهٔ : اسمعیل علی‌پور)

۳۵۷۳ـ چهار ضلعی ABCD محاط در دایرهٔ (I) به شعاع r و محیط بردایرهٔ (O) به شعاع R مفروض است . اگر اندازه‌های کمانهای AB و BC و CD و DA به‌ترتیب برابر با α و β و γ و δ و فاصلهٔ O تا I برابر با t باشد ثابت کنید :

$$\frac{R^2-t^2}{2Rr}=\frac{\cos\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)}{\cos\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)}$$

(ترجمهٔ : محمدرضا قسیمی ٦ ریاضی دبیرستان خوارزمی۲)

۳۵۷۴ـ هرم منتظم ABCD که قاعدهٔ آن مربع به‌ضلع q و زاویهٔ هروجه جانبی‌آن با صفحهٔ قاعده برابر با φ است مفروض است . بر AB صفحه‌ای مرور می‌دهیم که با صفحهٔ قاعده زاویهٔ θ بسازد و یالهای SC و SD را به ترتیب در C' و D' قطع کند . مطلوبست محاسبهٔ مساحت ABC'D' بر حسب q و φ و θ

(ترجمهٔ : بهزاد سوفر ٦ ریاضی دبیرستان هدایت سنندج)

۳۵۷۵ـ حاملهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و مجموع هندسی آنها $\overrightarrow{OC}$ مفروضند . دایرهٔ متغیری که بر O می‌گذرد خطوط OA و OB و OC را به ترتیب در A' و B' و C' قطع می‌کند ثابت کنید .

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}+\overline{OB}\cdot\overline{OB'}=\overline{OC}\cdot\overline{OC'}$$

مورد استعمال ـ دو محور عمود برهم x'Ox و y'Oy را در نظر می‌گیریم . مکان هندسی مراکز دوایری را معلوم کنید که بر O گذشته و x'x را در A و y'y را در B قطع کنند و داشته باشیم :

$OA+OB=l$ ، l عددی است جبری ومخالف صفر .

(ترجمه از فرانسه)

***

برای کلاس چهارم

۳۵۷۶ـ ۰/۳ گرم ازیك فلزی هنگام ترکیب باجوهر نمك در شرایط متعارفی تولید ۲۸۰cc هیدرژن می‌کند این فلز اکسیدی به فرمول MO تولید می‌کند . وزن اتمی فلز مجهول را پیدا کنید درصورتی‌که M نمایندهٔ فلز باشد .

(ترجمهٔ : حسین جواهری دبیر دبیرستانهای کازرون)

برای کلاس پنجم

۳۵۷۷ـ یك لیتر آب دریا راکه محتوی کلرور سدیم و کلرو پتاسیم است پس ازتبخیر و خشك‌کردن به‌صورت املاح مذاب درآورده وآنگاه تجزیهٔ الکتریکی می‌کنیم . چنانچه برای تجزیهٔ الکتریکی دو نمك فوق‌الذکر ۲۸۹۵ کولمب الکتریسیته مصرف شده باشد وزن دو نمك را دریك لیتر آب دریا پیدا کنید .

$D = ۱/۰۰۲۷۵ g/cm^۳$ برای آب دریا

$D' = ۱ g/cm$ ؛ $F = ۹۶۵۰۰$ کولمب برای آب

(حسین جواهری)

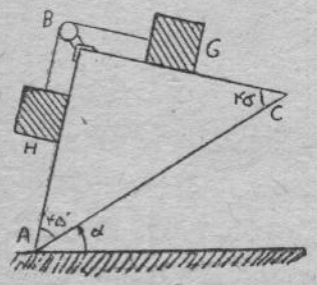
برای کلاس ششم

۳۵۷۸ـ مخلوطی از اتانل و متانل را توسط محلول سولفوکرمیك کاملا به اسید های مربوطه تبدیل می‌کنیم سپس اسیدهارا با سود خنثی می‌کنیم . نمکهای حاصل را با سود جامد تکلیس می‌کنیم . گازهای تولید شده را درآب سنجی با اکسیژن مخلوط کرده و جرقه می‌زنیم . مشاهده می‌شود ضمن اینکه ۵۶۰cc اکسیژن در این عمل مصرف می‌گردد افزایش ظروف پتاس نیز ۰/۴۴ گرم می‌شود نسبت دوالکل را در مخلوط پیدا کنید .

(حسین جواهری)

برای کلاس ششم و کنکور

۳۵۷۹ـ دو جسم متشابه G و H که وزن هردو مساوی P می‌باشد روی سطحهای AB و BC منشور ABC قرار دارند (مطابق شکل) نخی که از روی قرقرهٔ ثابت B می‌گذرد این دو جسم را به هم مربوط می‌سازد. ضریب اصطکاك سطح برابر f می‌باشد (بین جسم و سطح) و زاویه‌های BCA و BAC برابر با ۴۵° بوده از مقاومت واصطکاك قرقره صرف نظر می‌شود. مطلوبست تعیین اندازهٔ زاویهٔ α برای آنکه دستگاه درحال تعادل باشد .



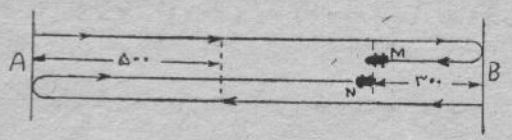
(ترجمهٔ جمشید عمیقیان دانشجوی علوم اصفهان)

بی آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

هواپیمای مخصوص پست زودتر ازوقت مقرر به فرودگاه رسید. بستهٔ پستی به یك موتور-سیکلت سوار سپرده شد ووی بلافاصله به سمت ادارهٔ پست حرکت‌کرد . بعد ازنیمساعت ،مأمورمخصوص پست را در راه ملاقات کرد و بسته راتحویل وی داد. مأموربسته‌راگرفته ووقتی‌که‌آن را تحویل ادارهٔ پست داد ۲۰ دقیقه زودتر از وقت معمول‌بود . درصورتی‌که‌مأمور در ساعت معمول همیشگی‌از ادارهٔ پست حرکت‌کرده باشد ، معلوم‌کنیدکه هواپیما چند دقیقه‌زودتر ازوقت مقرر به فرودگاه رسیده‌است .

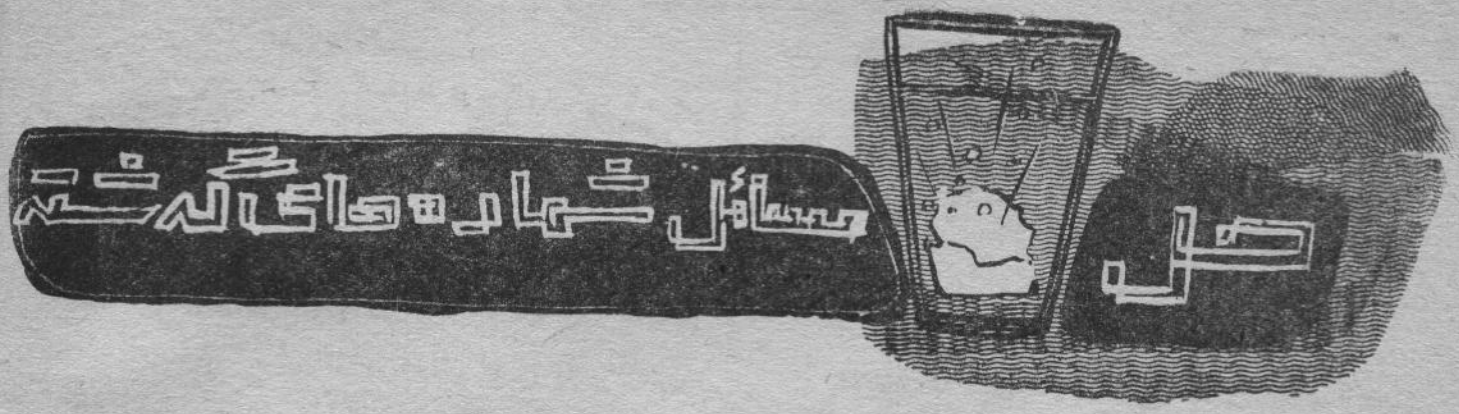
پاسخ مسئلهٔ تحت همین عنوان مندرج در شمارهٔ قبل

اتومبیلهای M و N در اولین‌ملاقات ، رویهم مسافتی برابر با یك برابر طول خیابان ودردومین‌ملاقات رویهم مسافتی برابر سه برابر طول خیابان پیموده‌اند . بنابراین مدت زمان محصور بین لحظهٔ عزیمت و لحظهٔ دومین ملاقات سه برابر مدت زمان محصور بین لحظهٔ عزیمت ولحظهٔ اولین ملاقات می‌باشد . اتومبیل M در اولین ملاقات مسافت ۵۰۰ متررا پیموده است پس در دومین ملاقات مسافتی برابر با ۱۵۰۰ = ۵۰۰ × ۳ متررا پیموده است و این مسافت برابر است باطول خیابان به اضافهٔ ۳۰۰ متر بنابراین طول خیابان یعنی فاصلهٔ میدانهای A و B برابر ۱۲۰۰ است . نسبت بین سرعتهای M و N برابر است با نسبت بین مسافتهای پیموده شدهٔ توسط آنان وبرابر است با:



$$\frac{V_M}{V_N} = \frac{۵۰۰}{۷۰۰} = \frac{۵}{۷}$$

(دورترین نقاط دو میدان از یکدیگر طرفین خیابان منظور شده است)



حل مسائل یکان شمارهٔ ۱۸

اگر حل مسئله‌ای را فرستاده‌اید اما نام شما ذیل حل آن در این مجله ذکر نشده است به یکی از علل زیر می‌باشد : یااینکه راه حل انتخابی شما صحیح نبوده یااینکه ناقص بوده است، یا اینکه روی ورقه‌ای که حل مسئله را نوشته‌اید نام و مشخصات خود را ذکر نکرده‌اید ، و ممکن است که نامهٔ شما دیرتر از مهلت مقرر به دست ما رسیده باشد و بالاخره اینکه مسئلهٔ مربوط به کلاس پائین‌تر ازخودرا حل کرده اید .

کلاس چهارم طبیعی

۳۴۳۱ ـ به‌فرض آنکه داشته باشیم

$$A=(3x-7)(x+2)$$

$$B=(2x+5)(3x^2-14)-2x^2-5x$$

$$C=\frac{Ax}{B} \text{ و } D=\frac{7C-1}{2C-1}$$

۱) عبارت A را ساده و مرتب کنید .

۲) عبارت B را به‌ضرب سه‌عامل تجزیه کنید

۳) کسر C را ساده کنید .

۴) به‌فرض $x=(a+1)^2$ حاصل عبارت D را بدست آورید

$$A=3x^2-x-14$$

$$B=(2x+5)(3x^2-14)-x(2x+5)$$

$$B=(2x+5)(3x^2-x-14)$$

$$=(2x+5)(3x-7)(x+2)$$

$$C=\frac{x(3x-7)(x+2)}{(2x+5)(3x-7)(x+2)}=\frac{x}{2x+5}$$

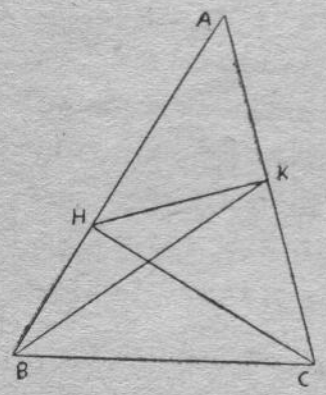
$$D=\left[\frac{7x}{2x+5}-1\right]:\left[\frac{2x}{2x+5}-1\right]$$

$$=\frac{5x-5}{-5}=1-x$$

$$D=1-(a+1)^2=-a^2-2a$$

پاسخ‌های درست رسیده : ناهید شجاعی دبیرستان آذرمیدخت ـ ابوالفضل صادق زاده دبیرستان هدف ۳ ـ حسن حسین زاده دبیرستان رازی شاهی ـ احمد وکیل زاده دبیرستان فردوسی رضائیه ـ محمد مقدسی دبیرستان پهلوی ساری ـ شهرام طاهری دبیرستان ۱۵ بهمن ـ سیدعلی خلیلی دبیرستان وحید ـ عارف حکیمی دبیرستان وحید ـ جمشید احمدیان دبیرستان صائب اصفهان ـ سیدابراهیم مدنی دبیرستان نمازی شیراز ـ مجیدهاشمی نژاد ازرضائیه .

۳۴۳۲ ـ در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۴۵ درجه و اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۶۰ درجه است . ارتفاع CH را رسم کرده از نقطهٔ H عمود HK را بر ضلع AC رسم می‌کنیم . نوع خط BK را در مثلث ABC معلوم کنید. اندازهٔ زاویهٔ C



برابراست با 75° و نتیجه خواهد شد که اندازهٔ زاویهٔ ACH برابر با 45° درجه بوده ومثلث ACH متساوی‌الساقین‌است و HK که ارتفاع آن‌است میانهٔ ضلع AC نیز باشد پس BK میانهٔ مثلث ABC می باشد .

پاسخهای درست‌رسیده : پروین جاوید کلاس‌سوم‌دبیرستان شاهدخت‌همدان- عباس صادقزاده‌هدف۳ - احمدسیاحیان‌دبیرستان فردوسی تبریز-داودرستگار دبیرستان‌وحید - علی‌وفاجودبیرستان دارالفنون - شکرالله خلیلی دبیرستان‌کورش - خسرو جمشیدی کلاس دوم دبیرستان فیروز بهرام -جمشید احمدیان-محسن‌هاشمی نژاد- عارف‌حکیمی- سیدعلی‌خلیلی - شهرام‌طاهری-محمدمقدسی حمیدوکیل‌زاده - حاتم‌عرب دبیرستان امیرکبیرتویسرکان- حسن حسین‌زاده .

کلاس چهارم ریاضی

۳۴۳۳ - کسر $\frac{x^2+1}{2x^2-5x+2}$ با تبدیل $x=X+h$ به‌صورت $A+\frac{BX+C}{X^2+D}$ در می‌آید . مقادیر h و A وB و C و D را معلوم کنید .

چون دوکسرمفروض x را با $X+h$ جانشین‌ساخته حاصل راساده کنیم می‌شود .

$$(1)\quad \frac{x^2+1}{2x^2-5x+2}=\frac{X^2+2hX+h^2+1}{2X^2+(4h-5)X+2h^2-5h+2}$$

$$(2)\quad A+\frac{BX+C}{X^2+D}=\frac{AX^2+BX+AD+C}{X^2+D}$$

دوکسر (۱) و (۲) را متحد قرار می‌دهیم ؛ باید داشته باشیم .

$$2A=1 \text{ و } B=h \text{ و } 2(AD+C)=h^2+1$$

$$4h-5=0 \text{ و } 2h^2-5h+2=2D$$

نتیجه خواهد شد .

$$A=\frac{1}{2} \text{ و } B=h=\frac{5}{4} \text{ و } C=\frac{25}{16} \text{ و } D=-\frac{9}{16}$$

پاسخ‌درست رسیده از . داریوش ترکی دبیرستان‌فیروز- بهرام .

۳۴۳۴ - به‌فرض اینکه داشته باشیم :

$$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{a+c-b}=\frac{z}{a+b-c}$$

ثابت کنید که :

$$\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{z+x}+\frac{z+x}{x+y}=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

بنابرخواص تناسب خواهیم داشت :

$$\frac{x+y}{b+c-a+a+c-b=2c}$$

$$=\frac{y+z}{2a}=\frac{z+x}{2b}$$

$$\frac{x+y}{y+z}=\frac{c}{a} \text{ و } \frac{y+z}{z+x}=\frac{a}{b} \text{ و } \frac{z+x}{x+y}=\frac{b}{c}$$

از جمع نظیر به‌نظر این روابط رابطهٔ مطلوب محقق می‌شود .

پاسخهای درست رسیده از : حسن‌حسین زاده - احمد سیاحیان - جلال اشجعی دبیرستان دین و دانش قم- حسین علوی دبیرستان پهلوی‌ساری - صادق آقامحمدی‌دبیرستان وحید-جمشید احمدیان - حمید وکیل زاده - محمد مقدسی - عباس صادقزاده قدیرنجات دبیرستان البرز .

۳۴۳۵ - در صورتی‌که داشته باشیم .

$$\frac{1}{a}\left[\frac{m}{(a-b)^2}+\frac{n}{(a+c)^2}\right]=\frac{1}{b}\left[\frac{n}{(b+c)^2}-\frac{l}{(a-b)^2}\right]=\frac{1}{a}\left[\frac{l}{(a+c)^2}+\frac{m}{(b+c)^2}\right]$$

و $al+bm=cn$ و $a\neq b$ ثابت کنید .

$$\frac{a}{(b+c)^2}=\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}$$

از رابطهٔ اول نتیجه می‌شود

$$\frac{m}{a(a-b)^2}+\frac{n}{a(a+c)^2}=\frac{n}{b(b+c)^2}-\frac{l}{b(a-b)^2}$$

$$(1)\quad \frac{a}{(a+c)^2}=\frac{ab}{n}\left(\frac{m}{ac}+\frac{b}{bc}\right)\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}$$

$$\frac{ab}{n}\left(\frac{m}{ac}+\frac{l}{bc}\right)=\frac{ab}{n}\left(\frac{bm+al}{abc}\right)=\frac{ab}{n}\times\frac{cn}{abc}=1$$

و درنتیجه رابطهٔ (۱) به صورت رابطهٔ مطلوب درآمی‌آید .

پاسخ درست رسیده از : ابوالفضل صادقزاده

۳۴۳۶ـ اولا ثابت کنید که :

$$\log_b a \times \log_a b = 1$$

ومعادلهٔ زیررا حل کنید .

$$(1) \quad \log_x 81 = 8\log_9 x$$

ثانیاً ثابت کنید که :

$$\log_{a^n} N^n = \log_a N$$

و معادلهٔ زیررا حل کنید .

$$(2) \quad \log_5 y^2 \times \log_{25} y^4 = 8\log_y \sqrt{5}$$

فرض می‌کنیم :

$$\log_a b = s \quad \text{و} \quad \log_b a = r$$

بنا به تعریف لگاریتم خواهیم داشت .

$$b^r = a \quad \text{و} \quad a^s = b \Longrightarrow (a^s)^r = a \quad \text{یا}$$

$$a^{sr} = a \quad \text{و} \quad rs = 1$$

معادلهٔ (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود .

$$2\log_x 9 \times \log_x 9 = 8 \quad \text{یا} \quad (\log_x 9)^2 = 4$$

$$\log_x 9 = \pm 2 \Longrightarrow x = 3 \quad \text{و} \quad \frac{1}{3}$$

اگر فرض کنیم $\log_a N = p$ خواهیم داشت $a^p = N$ و چون طرفین را به توان n برسانیم می‌شود :

$$(a^n)^p = N^n \quad \text{ویا} \quad (a^p)^n = N^n$$

$$p = \log_{a^n} N^n \quad \text{یعنی}$$

با استفاده از این خاصیت معادلهٔ (۲) چنین می‌شود .

$$\log_5 y^2 \times \log_5 y^2 \times \log_5 y^2 = 8 \quad \text{یا} \quad (\log_5 y^2)^3 = 8$$

$$\log_5 y^2 = 2 \quad \text{و} \quad y^2 = 25 \quad \text{و} \quad y = 5$$

(y منفی نمی‌تواند باشد)

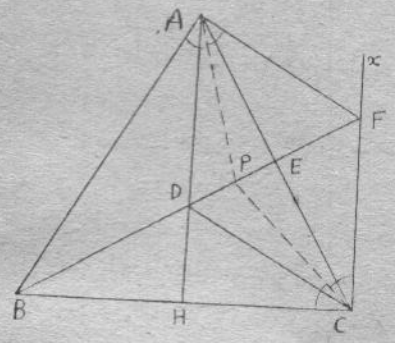
پاسخهای درست رسیده: محسن هاشمی نژاد- عباس طلائی دزفول- صادق آقا محمدی - جهانگیر چراغچی دبیرستان ابن سینا شهرری - محمد مقدسی - عباس صادقزاده - حسین علوی .

۳۴۳۷ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است . برارتفاع AH نقطهٔ D را چنان انتخاب می‌کنیم که $AD = D2H$ باشد و BD را رسم می‌کنیم که ضلع AC را در E و Cx راکه درنقطهٔ C عمود بر BC اخراج شده است در F قطع کند .

۱) BE و CD به ترتیب چه خطوطی از مثلثهای ABC و BCF می‌باشند .

۲) اندازه‌های زاویه‌های مثلث ACF را حساب کنید

۳) نقطهٔ P راچنان تعیین کنید که ازهر چهارضلع چهارضلعی ABCF به یك فاصله باشد .



۴) ثابت کنید که نقطهٔ D از چهار نقطهٔ A و B و C و F به یك فاصله است.

حل - چون در هر مثلث نقطهٔ تلاقی میانه ها هر میانه را به نسبت ۱ و۲ تقسیم می‌کند و در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع و میانه منطبق هستند پس D نقطهٔ تلاقی میانه های مثلث ABC بوده و BE نیز میانهٔ این مثلث می‌باشد .

HD ضلع BC از مثلث BCF را نصف کرده با ضلع CF از آن موازی است پس ضلع BF را نیز نصف کرده و CD میانهٔ این مثلث است .

۲) مثلث ACF متساوی‌الساقین است ودرآن داریم

$$\text{ز}C = \text{ز}A = 30^\circ \quad \text{و} \quad \text{ز}F = 120^\circ$$

۳) خط BF محور تقارن این چهارضلعی است ونیمساز زوایای B و F می‌باشد اگر نیمساززاویهٔ BAF یا ازBCF را رسم کنیم BF را در P قطع می‌کند که از هر چهار ضلع چهارضلعی به یك فاصله است .

۴) بنابرآنچه قبلاگفته شد داریم

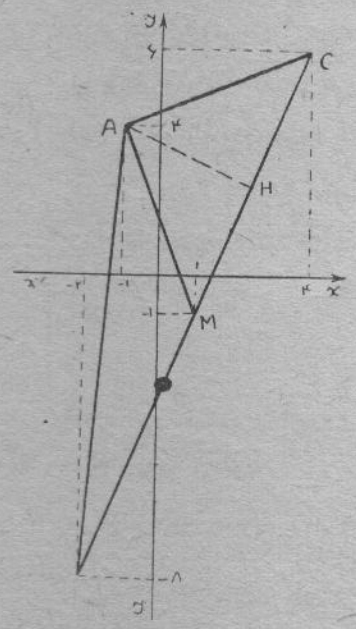
$$DA = DB = DC = DF$$

پاسخهای درست رسیده از : ناهید شجاعی- حسین علوی - محمد مقدسی - عباس طلائی - سید مرتضی خرمی دبیرستان دکتر داورپناه - احمد سیاحیان - علی طاهری دبیرستان وحید - صدرالدین میرطلائی دبیرستان خلدبرین اصفهان - قدیر نجات- صادق آقا محمدی - منوچهرحاج آقازاده دبیرستان بابکان - حسن حسین‌زاده - ابوالفضل صادقزاده حاتم عرب- عارف حکیمی- سیدعلی خلیلی- شکرالله خلیلی- عبدالرحیم حاجی طالب - محسن هاشمی‌نژاد .

کلاس پنجم طبیعی

۳۴۳۸ـ سه نقطهٔ $A(-1 \text{ و } 4)$ و $B(-2 \text{ و } -8)$

و (۶ و ۴)C مفروضند . مثلث ABC را در صفحهٔ محور ها رسم کرده مختصات M وسط BC را تعیین کنید و ثابت کنید که مثلث CAM قائم الزاویهٔ متساوی الساقین بوده و مساحت مثلث ABC و اندازهٔ زاویهٔ C را حساب کنید .



بنابر دستور مربوط خواهیم داشت :

$M(1 \text{ و } -1)$

و از روی دستور طول قطعه خط خواهیم داشت :

$AM=\sqrt{29}$

$AC=\sqrt{29}$

$MC=\sqrt{58}$

مثلث متساوی الساقین است و چون

$AM^2+AC^2=MC^2$

پس مثلث قائم الزاویه می‌باشد و نتیجه خواهد شد که اندازهٔ زاویهٔ C برابر 45° است. میانهٔ مثلث ، مثلث را به دو مثلث معادل تقسیم می‌کند پس مساحت مثلث ABC دو برابر مساحت مثلث AMC است و داریم :

$$S=2\times\frac{\sqrt{29}\times\sqrt{29}}{2}=29 \text{ واحد سطح}$$

(میانهٔ AH از مثلث AMC ارتفاع مثلث ABC است واز این راه هم می‌توان مساحت را حساب کرد)

پاسخهای درست رسیده از : آفری تاج‌الدینی دبیرستان آزرم ـ یوسف زینلی دبیرستان خرد ـ محمود امجدی دبیرستان سخن ـ اسمعیل بهبودی دبیرستان ذوقی ـ حسین ناصری دبیرستان شاهپور کرمان ـ سید ابراهیم مدنی ـ مسعود درخشان نو دبیرستان رهنما ـ حسن آذرپور دبیرستان پهلوی مرند ـ منوچهر مسگر دبیرستان فردوسی رضائیه ـ محمد حاج سلیمانی ـ مسعود نجفی دبیرستان مهرگان لاهیجان ـ محمدحسن سامانی‌پور دبیرستان هدف ۱ ـ صمد فرهنج دبیرستان رهنما ـ داود حسینی ـ گیورك ملکم کمرزریان دبیرستان حکیم سنائی اصفهان ـ محسن تاج‌الدینی دبیرستان قنادبابل ـ اسماعیل گلجاریان ازبابل ـ علی معصومی دبیرستان پهلوی اراك ـ علی نوری دبیرستان محمدرضاشاه ـ ابوالفضل صادقزاده ـ نصرالله حقیقت دبیرستان قناد بابل .

۳۴۳۹ـ به فرض اینکه داشته باشیم

$$\cos\alpha=\frac{x}{x+2} \text{ و } tg\alpha=\frac{x+1}{x}$$

مقدار x را حساب کرده و معلوم کنید که انتهای کمان α درچه ناحیه ازدایرهٔ مثلثاتی واقع است.

از رابطهٔ بین $\cos\alpha$ و $tg\alpha$ استفاده می کنیم

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha \quad \text{یا} \quad \frac{(x+2)^2}{x^2}=1+\frac{(x+1)^2}{x^2}$$

پس از اختصار می‌شود

$$x^2-2x-3=0 \text{ و } x=3 \text{ یا } -1$$

$$x=3\Longrightarrow tg\alpha=\frac{4}{3}>0 \text{ و } \cos\alpha=\frac{3}{5}>0$$

انتهای α در ربع اول است

$$x=-1\Longrightarrow tg\alpha=0 \quad \text{و} \quad \cos\alpha=-1$$

$$\alpha=2k\pi+\pi$$

پاسخهای درست رسیده : طلعت مشکین دبیرستان خوارزمی ـ آفری تاج‌الدینی ـ ناصر نهاوندی پور دبیرستان مروی ـ شکرالله خلیلی ـ منصور نهاوی‌پور دبیرستان مروی ـ محمدرضا یزدان دبیرستان قریب ـ رحمت‌الله صالحی دبیرستان امیرکبیر ـ محمود امجدی ـ علی ثناجو دبیرستان فردوسی رضائیه ـ مجید حقگو دبیرستان ابن سینا رضائیه ـ بهمن خشنودفر دبیرستان علمیه ـ مسعود نجفی ـ عبدالرحیم حاجی‌طالب ـ محمود عبادی دبیرستان فردوسی رضائیه ـ فریدون امین‌زاده دبیرستان فردوسی رضائیه ـ حسین مظفریان دبیرستان ابن سینا رضائیه ـ حسین امیرحسینی دبیرستان دارالفنون ـ سعید رستگار دبیرستان قطب دزفول ـ ابوالفضل صادقزاده ـ علی معصومی ـ گیورك ملکم کمرزریان ـ صمد فرهنج ـ محمدحسن سامانی‌پور ـ احمد مشرفی دبیرستان هدایت سنندج ـ حمید وکیل‌زاده ـ محمد حاج سلیمانی ـ بختیار علیمدد سلطانی دبیرستان سعیدالعلماء مسعود درخشان نو ـ اسفندیار کریمی دبیرستان جلوه ـ هوشنك شهریاری دبیرستان شاهپور کرمان ـ حسین ناصری ـ حسین توسلی یدالله شجاعی دبیرستان سعدی ـ عیسی فخرذاکری دبیرستان صفوی اردبیل ـ نصرالله حقیقت ـ سید جعفر قبادپور دبیرستان پاینده خرمشهر .

کلاس پنجم ریاضی

۳۴۴۰ـ مقدار m را چنان معلوم کنید که :

$$\forall x: \sin x=\frac{(m+2)x^2-mx-12}{5x^2+8x+13}$$

α کمانی است غیر مشخص از دایرهٔ مثلثاتی . مسئله را برای دوحالت $\sin\alpha > 0$ و $\sin\alpha < 0$ بررسی کنید .

شرط لازم وکافی برای اینکه کسر بالا برابر باسینوس یك کمان باشد آنست که :

$$-1 \leq \frac{(m+2)x^2 - mx - 12}{5x^2 + 8x + 13} \leq 1$$

این نامساوی مضاعف پس ازاختصار وحذف مخرج (که ریشه نداشته و همیشه مثبت است) با دو نامساوی زیر متعادل خواهد بود .

$$\begin{cases} (m-3)x^2 - (m+8)x - 25 \leq 0 \\ (m+7)x^2 - (m-8)x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

نا مساوی اول وقتی به ازاء جمیع مقادیر m بر قرار است که

$$\begin{cases} m - 3 < 0 & (1) \\ \Delta = m^2 + 116m - 236 \leq 0 \end{cases}$$

ونامساوی دوم وقتی برقرار است که

$$\begin{cases} m + 7 > 0 & (2) \\ \Delta = m^2 - 20m + 36 \leq 0 \end{cases}$$

جواب دستگاه (۱) عبارت می‌شود از $-118 \leq m \leq 2$

واز دستگاه (۲) عبارت می‌شود از $2 \leq m \leq 18$

و در نتیجه جواب مشترك دو دستگاه عبارت خواهد شد از $m = 2$

در حالت $\sin\alpha > 0$ باید داشته باشیم .

$$\begin{cases} (m-3)x^2 - (m+8)x - 25 \leq 0 \\ (m+2)x^2 - mx - 12 \geq 0 \end{cases}$$

نا مساوی دوم وقتی برقرار خواهد بود که

$$\begin{cases} m > -2 \\ -24 - 4\sqrt{30} \leq m \leq -24 + 4\sqrt{30} \end{cases}$$

ودستگاه اخیر دادای جواب نیست پس $\sin\alpha > 0$ نمی‌تواند باشد .

در حالت $\sin\alpha < 0$ نتیجه خواهیم گرفت .

$$-24 - 4\sqrt{30} \leq m < -2$$

پاسخهای درست رسیده، حسین توسلی ـ احمدمشرفی ـ مسعود درخشان نو ـ عبدالرحیم حاجی‌طالب ـ

۳۴۴۱ـ مطلوبست حل دستگاه زیر .

$$\begin{cases} \dfrac{1+xy}{x+y} = \dfrac{7}{5} \\ \dfrac{1+x^3y^3}{(x+y)^3} = \dfrac{217}{125} \end{cases}$$

اولا شرط قابل قبول بودن جواب عبارتست از $x+y \neq 0$

ثانیاً طرفین معادلهٔ اول را به توان ۳ رسانده واز تقسیم معادلهٔ حاصل بر معادلهٔ دوم پس از اختصار خواهیم داشت .

$$6x^3y^3 - 31x^2y^2 - 31xy + 6 = 0$$

این معادله نسبت به $P = xy$ معکوسهٔ درجهٔ سوم است وپس از حل خواهیم داشت .

$$xy = -1 \text{ و } 6 \text{ و } \frac{1}{6}$$

درازاء این مقادیر ، از روی معادلهٔ اول دستگاه مقدار $S = x+y$ حساب می‌شود .

(در ازاء $xy = -1$ برای $x+y$ جواب قابل قبول نخواهیم داشت) .

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x+y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \quad 3 \\ \quad \text{یا} \\ y = 3 \quad 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{6} \\ x+y = \frac{5}{6} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \\ \quad \text{یا} \\ y = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \end{cases}$$

پاسخهای درست رسیده: آفری تاج‌الدینی ـ محمد رضا جمشیدی ـ بهزاد مهذبی دبیرستان رهنما ـ سبز علی ففیه دبیرستان رازی‌شاهی ـ عیسی فیروز دهقان ـ مسعود درخشان‌نو ـ داود حسینی ـ سید مهدی حمیدی ـ سیدجعفر قبادپور ـ یدالله شجاعی ـ بختیار علیمدد سلطانی ـ محمد حاج سلیمانی ـ محمد حسن سامانی‌پور ـ فریدون امین زاده ـ مجید حقگو ـ علی ثناجو ـ محمود امجدی ـ محمدرضا یزدان ـ صمد فرهنج ـ اکبر باستانی‌پور دبیرستان امیرخیزی تبریز ـ داریوش چلبیانی امیر خیزی تبریز ـ حسین مظفریان ـ اسمعیل گلجاریان ـ صادق آقا محمدی ـ اصغر قراقوشی دبیرستان وحید ـ غلامرضا خوشخو ـ سیدحسن غنی ـ نجات الله پیکر دبیرستان اتحاد عیسی فخر ذاکری ـ صمد حیاتی ـ نصرالله حقیقت ـ محسن هاشمی‌نژاد ـ علی معصومی ـ

پاسخهایی که در آنها شرط $x+y\neq$ منظور نشده یا اینکه بعضی جوابها بدست نیامده است: حسین توسلی ـ صمد فرهنج عباس طلائی ـ سید مرتضی باقری دبیرستان رضا پهلوی ـ منصور عابدی محمد کریم روشن ـ ابوالفضل صادقزاده ـ صفرعلی لشکربلوکی دبیرستان دارالفنون ـ حسین بکی صفار ـ عبدالحمید چیت سازان دبیرستان فرهنگ اهواز ـ علیرضا اقبالی دبیرستان علوی نیا ـ ناصر نهاوندی پور ـ رحمت‌الله صالحی ـ محمود عبادی ـ حسین ناصری ـ هوشنگ شهریاری ـ مهدی نستری پور دبیرستان سخن ـ منصور نهاوندی پور .

۳۴۴۲ـ مطلوبست حل دستگاه زیر .

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{17}{4} \end{cases}$$

شرط قابل قبول بودن جوابها آنست که $x>0$ و $y>0$

به فرض $\dfrac{x}{y}=A>0$ از معادلهٔ دوم خواهیم داشت .

$$A+\frac{1}{A}=\frac{17}{4} \quad \text{یا} \quad 4A^2-17A+4=0$$

$$A=4 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{4} \Longrightarrow y=4x \quad \text{یا} \quad x=4y$$

که چون در معادلهٔ اول منظور کرده و معادلهٔ حاصل را حل کنیم جوابهای زیر بدست خواهد آمد .

$$(x=4 \text{ و } y=1) \quad \text{یا} \quad (x=1 \text{ و } y=4)$$

پاسخهای درست رسیده : آفری تاج‌الدینی ـ منصور نهاوندی پور ـ حسین ناصری ـ ناصر نهاوندی پور ـ رحمت‌الله صالحی ـ علیرضا اقبالی ـ عبدالحمید چیت سازان ـ صفرعلی لشکر بلوکی ـ ابوالفضل صادقزاده ـ عباس طلائی ـ صمد فرهنج حسین توسلی ـ علی معصومی ـ نجات الله پیکر ـ صمد حیاتی صمد فرهنج ـ منوچهر مسگر ـ محمد رضا یزدان ـ علی ثناجو ـ مجید حقگو ـ محمود عبادی ـ فریدون امین‌زاده ـ محمدحسن سامانی پور ـ محمد حاج سلیمانی ـ بختیار علیمدد سلطانی ـ یدالله شجاعی ـ سیدجعفر قبادپور ـ مسعود درخشان نو ـ عیسی فیروز دهقان ـ مسعود صبری ـ سبز علی فقیه ـ بهزاد مهذبی ـ فرهاد غفاری دبیرستان قریب ـ محمدرضا جمشیدی دبیرستان علمیه ـ مقصود صلاحی دبیرستان دکتر نصیری ـ پرندسر آمد دبیرستان محمد قزوینی ـ ابوالفضل دامن دریا دبیرستان سعید العلماء ـ ایوب پورهاشم چرندابی دبیرستان امیرخیزی تبریز ـ محمود امجدی ـ سیدحسن صدرالغروی دبیرستان مجد محلات ـ بهمن خشنود فرد دبیرستان علمیه ـ جعفر توکل بخداد دبیرستان پهلوی اهر ـ اکبر باستانی پور دبیرستان امیر خیزی تبریز ـ حسن غنی ـ غلامرضا خوشخو ـ حسین امیرحسینی ـ داریوش چلبیانی ـ هوشنگ شهریاری ـ محسن تاج‌الدینی دبیرستان قناد بابل ـ چنگیز آزادی دبیرستان رضاشاه همدان ـ مسعود نجفی ـ محمد کریم روشن دبیرستان قناد بابل ـ ارسلان حمیدی دبیرستان بواسحق کازرون ـ حسین مظفریان ـ اسماعیل گلجاریان ـ حسین بکی صفار ـ صادق آقا محمدی ـ سعیدجبوری ـ حسن توکلی دبیرستان رازی شاهی ـ عیسی فخر ذاکری ـ منصور عابدی ـ نصرالله حقیقت ـ محسن هاشمی نژاد ـ محمدتقی یزدان شناس ـ ایرج فلاحی ـ احمد مشرفی ـ

۳۴۴۳ـ مطلوبست تعیین مقدار m برای آنکه .

$$\forall x: \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{(m+1)x^2-1}{mx^2+2x} \\ tg\alpha = \dfrac{(m+1)x^2-1}{x^2+m+1} \end{cases}$$

بین $\sin\alpha$ و $tg\alpha$ اتحاد زیر برقرار است .

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\frac{1}{tg^2\alpha} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{tg^2\alpha}=1$$

که چون مقادیر $\sin\alpha$ و $tg\alpha$ را در این اتحاد منظور داشته وحاصل را ساده کنیم می‌شود .

$$(2m^2+2m)x^4+4mx^3-4mx^2-m^2-2m=0$$

رابطهٔ اخیر نسبت به x وقتی اتحاد است که داشته باشید.

$$\begin{cases} 2m^2+2m=0 \\ 4m=0 \\ -4m=0 \\ -m^2-2m=0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{m=0}$$

۳۴۴۴ـ دو خط غیر موازی α و β در صفحهٔ P واقع بوده نقطهٔ تلاقی آنها در دسترس نیست و خط γ با صفحهٔ P متقاطع می‌باشد . خطی رسم کنید که با خطوط α و β متقارب و با خط γ موازی باشد .

دو خط a و b را موازی با γ و به ترتیب متکی بر α و β رسم می‌کنیم . دو صفحهٔ (α و a) و (β و b) یکدیگر را در خط Δ قطع می‌کنند که خط مطلوب می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده : سید مرتضی باقری ـ سعید رستگار ـ اسفندیار کریمی ـ صادق آقا محمدی ـ داود حسینی ـ ایوب پور هاشم چرندابی ـ محمد حاج سلیمانی ـ علیرضا

صداقت دبیرستان پهلوی همدان ـ محمد کریم روشن ـ صمد فرهنج ـ مسعود درخشان نو ـ علی ثناجو ـ حسین توسلی ـ ابوالفضل صادقزاده ـ

کلاس ششم طبیعی

۳۴۴۵ـ تابع به‌شکل

$$y = a\sin 2x + b\cos x + cx$$

را مشخص کنید بنابر آنکه مشتق دوم تابع به صورت

$$y'' = 4\sin 2x + 4\cos x$$

بوده ضریب زاویهٔ مماس برسخنی نمایش تابع در نقطه‌ای از آن به‌طول $x = \frac{5\pi}{6}$ برابر ۳ باشد .

$$y' = 2a\cos 2x - b\sin x + c$$

$$y'' = -4a\sin 2x - b\cos x$$

از مقایسهٔ رابطهٔ اخیر با رابطهٔ مذکور در مسئله نتیجه می‌شود $a = -1$ و $b = -4$ وداریم .

$$3 = 2(1)\cos\frac{5\pi}{3} + 4\sin\frac{5\pi}{6} + c \Rightarrow c = 2$$

پاسخهای درست رسیده : سیمین سمندری دبیرستان شاهدخت بابل ـ عشرت خیر خواه دبیرستان شاهدخت بابل ـ بهزاد سوفر دبیرستان هدایت سنندج ـ سیدعلیرضا فاضلی دبیرستان خوارزمی ۱ ـ محمدرضا فوشریان ـ رمضانعلی صفائی دبیرستان خرد ـ محمدکاظم جمشیدی دبیرستان امیرکبیر تویسرکان ـ سید احمدطاهری دبیرستان مروی ـ حبیب‌الله سلیم زاده ـ محمد کریم روشن ـ محمد حسین حقی دبیرستان فیوضات مشهد ـ منصور عابدی ـ جواد هاشمی نژاد ـ

۳۴۴۶ ـ مطلوبست تعیین کمان x برای آنکه :

$$\begin{cases} tg\alpha = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \\ cotg\alpha = -\frac{2}{3}\cos\left(x + \frac{11\pi}{12}\right) \end{cases}$$

از رابطهٔ $tg\alpha\, cotg\alpha = 1$ استفاده می‌کنیم .

$$-\frac{4}{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{11\pi}{12}\right) = 1$$

طرف اول را تبدیل به‌حاصل جمع نموده پس ازاختصار خواهیم داشت .

$$2\sin(2x + \pi) = -2 \quad \text{یا} \quad \sin 2x = 1$$

$$x = K\pi + \frac{\pi}{4}$$

پاسخهای درست رسیده : زهرا معینی ـ عشرت خیر خواه ـ سیمین سمندری ـ رمضانعلی صفائی ـ محمدکریم روشن ـ حسین حاجی رحیم دبیرستان جلوه ـ سیدعلی صفر بیگلو دبیرستان فردوسی رضائیه ـ اسدالله حسین زادگان از شیراز ـ جواد هاشمی نژاد ـ محمدحسین حقی ـ حبیب الله سلیم‌زاده ـ محمد کاظم جمشیدی ـ سیدعلی فاضلی ـ

کلاس ششم ریاضی

۳۴۴۷ ـ در تابع $y = ax\sin bx$ ضرایب a و b را چنان معلوم کنید که بین تابع ومشتق دوم آن "y رابطهٔ $y'' + y = 2\cos x$ برقرار باشد .

$$y' = a\sin bx + abx\cos bx$$

$$y'' = ab\cos bx + ab\cos bx - ab^2x\sin bx$$

$$y'' = 2ab\cos bx - ab^2x\sin bx$$

که‌چون در رابطهٔ مفروض قراردهیم خواهیم داشت .

$$2ab\cos x - ab^2x\sin bx + ax\sin bx - 2\cos x = 0$$

$$a(1 - b^2)x\sin bx + 2ab\cos bx - 2x\cos x = 0$$

این رابطه باید نسبت به x اتحاد باشد . اگر $b^2 - 1 \neq 0$ باشد وقتی که x مقادیر دلخواه بزرگ را انتخاب کنه، مقدار جملهٔ اول بزرگ شده اما مقادیر دوجملهٔ دیگر محدود باقی می‌مانند و تساوی غیر ممکن خواهد بود . بنابراین لازم است که $b^2 - 1 = 0$ باشد و در این صورت خواهیم داشت .

$$b = \pm 1 \text{ و}$$

$$\pm 2a\cos x - 2\cos x \equiv 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

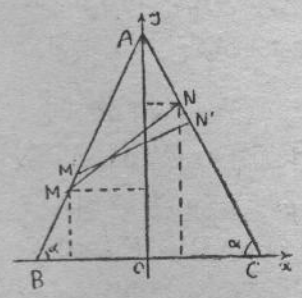
و تابع مفروض عبارت خواهد بود از :

$$y = x\sin x \quad \text{یا} \quad y = -x\sin(-x) = x\sin x$$

پاسخهای درست رسیده : سیمین سمندری ـ عشرت خیرخواه ـ حسین حاجی رحیم ـ شکرالـه مسیبی ـ بهروز ساسانی دبیرستان رهنمـا ـ علی‌نقی مشایخی دبیرستان ادیب ـ داریوش رهبر دبیرستان خوارزمی ۱ ـ محمدحسین بنای خوئی دبیرستان ۶ بهمن خوی ـ سیاوش ناظرعدل دبیرستان ادیب ـ جواد محمدزاده دبیرستان مروی ـ حسین رزاقی‌زاده دبیرستان مروی

فرخ کیان‌ارثی دبیرستان مروی ـ محمدجواد اشجعی دبیرستان دین و دانش قم ـ ناصر باقری ـ حسین شاهمیری دبیرستان خرد احمد جلیلی دبیرستان دکتر نصیری ـ حبیب‌اله رحمتیان ـ علی تقی‌پور دبیرستان دارلفنون ـ پرویز خواجه خلیلی دبیرستان فرخی آبادان ـ محمدکریم روشن ـ هوشنگ رستمیان دبیرستان خوارزمی ۱ ـ احمد حاج عظیم دبیرستان هدف ۱ ـ منصور عابدی ـ جواد هاشمی‌نژاد ـ بهزاد سوفر ـ سیدعلی‌رضا فاضلی محمدکاظم جمشیدی ـ حبیب‌اله سلیم‌زاده ـ

۳۴۴۸ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ مفروض است. دو متحرك M و N با سرعتهای متساوی و با حرکت یکنواخت در یك لحظه ازنقاط B و A به ترتیب به سمتهای A و C حرکت می‌کنند. مطلوبست تعیین معادلهٔ منحنی حاصل‌از نقاط تقاطع خطوط متوالی کـه در هرلحظه نقاط M و N را به یکدیگر وصل می‌کنند



طول قاعدهٔ BC از مثلث را $2a$ و اندازهٔ هریك از زاویه‌های مجاور به‌قاعده را α، محور $x'x$ رامنطبق بر BC و محور $y'y$ را منطبق بر عمود منصف BC فرض می‌کنیم. دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$A(0 \text{ و } a\,tg\alpha) \text{ و } B(-a \text{ و } 0) \text{ و } C(a \text{ و } 0)$$

اگر سرعت هریك ازمتحرکها را v فرض کنیم پس از زمان t طولهـای AM و BN که بـا s نمایش می‌دهیـم عبارت خواهدشد از:

$$s=AM=BN=vt$$

و مختصات نقاط N و M چنین می‌شود

$$M\left|\begin{matrix}-a+s\cos\alpha\\ s\sin\alpha\end{matrix}\right. \qquad N\left|\begin{matrix}s\cos\alpha\\ a\,tg\alpha-s\sin\alpha\end{matrix}\right.$$

بعداز زمان $t+\Delta t$ مسافت پیموده شدهٔ توسط M و N برابر خواهدبودبا.

$$AM'=BN'=vt+v.\Delta t=s+s'$$

(مقدار $v.\Delta t$ را s' فرض نموده‌ایم. اگر $\Delta t\longrightarrow 0$ دراین‌صورت $s'\longrightarrow 0$)

مختصات نقاط M' و N' چنین می‌شود

$$M'\left|\begin{matrix}-a+(s+s')\cos\alpha\\ (s+s')\sin\alpha\end{matrix}\right. \qquad N'\left|\begin{matrix}(s+s')\cos\alpha\\ a\,tg\alpha-(s+s')\sin\alpha\end{matrix}\right.$$

معادلات خطوط MN و $M'N'$ را نوشته مختصات نقطهٔ تلاقی آنها را حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$x=-a+2s\cos\alpha+s'\cos\alpha$$

$$y=\frac{1}{a}\left[-2s^2\sin\alpha\cos\alpha+2as\sin\alpha+as'\sin\alpha-2ss'\sin\alpha\cos\alpha\right]$$

چنانچه $\Delta t\longrightarrow 0$ یعنی $s'\longrightarrow 0$ مختصات یك نقطه از مکان مطلوب به صورت زیر بدست خواهدآمد

$$P\left|\begin{matrix}x=-a+2s\cos\alpha\\ y=\frac{1}{a}(2s^2\sin\alpha\cos\alpha+2as\sin\alpha)\end{matrix}\right.$$

با حذف s بین x و y معادلهٔ مکان p عبارت خواهدشد از

$$y=-\frac{tg\alpha}{2a}x^2+\frac{a}{2}tg\,a \quad (-a<x<a)$$

معادلهٔ مکان شاخه‌ای از یك سهمی‌است که در نقاط B و C به ترتیب بر AB و AC مماس می‌باشد.

۳۴۴۹ـ ثابت کنید که اگر داشته باشیم

$$(1)\qquad \cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{c}{2}=\frac{1}{2}$$

خواهیم داشت

$$(2)\qquad \frac{\cos b-\cos a}{\cos^2 a+\cos^2 b-\cos^2 c}+\frac{\cos b-\cos c}{\cos^2 b+\cos^2 c-\cos^2 a}+\frac{\cos c-\cos a}{\cos^2 a+\cos^2 c-\cos^2 b}$$

باستفاده از رابطهٔ $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$ رابطهٔ (۱) پس‌از اختصار چنین‌خواهد شد

$$(3)\qquad \cos a+\cos b=\cos c$$

چون در رابطهٔ (۲) به‌جای $\cos c$ مقدار آن را از رابطهٔ (۳) قرار داده حاصل را ساده‌کنیم برابر باصفر خواهدشد.

پاسخهای درست رسیده: زهرا معینی ـ بهزاد سوفر شهرام انصاری ـ بهروز ساسانی ـ مرتضی بنـائی ـ علیرضا حاج شفیعی ـ محمدحسین حقی ـ حسن تمدن ـ غلامرضافرزین ایرج فلاحی ـ محمد رضا فوشریان ـ رستم نیموری از خوی حسین شاهمیری ـ رمضانعلی صفائی ـ محمدکریم روشن ـ محمد حسین احمدی ـ هوشنگ رستمیان ـ وحید طبـاطبـا وکیلی دبیرستان فردوسی تبریز ـ اسداله حسین‌زادگان ـ منصورعابدی غلامحسین طاهری افشار دبیرستان فیروزبهرام ـ صادق منتظمی کاظم نیکروان دبیرستان رازی آبـادان ـ حبیب‌اله سلیم زاده محمدکاظم جمشیدی ـ جوادهاشمی‌نژاد ـ پرویز خواجه‌خلیلی

علی‌تقی‌پور ـ احمد جلیلی ـ ناصر باقری ـ فرخ کیان ارثی حسین رزاقی زاده ـ جواد محمدزاده ـ سیاوش ناظر عدل داریوش رهبر ـ علی‌نقی مشایخی ـ حسین حاجی‌رحیم ـ

۳۴۵۰ـ مطلوبست حل معادلهٔ زیر

$$\sin^2 7x\,(\sin 17x-\sin 27x)+\sin^2 17x\,(\sin 27x-\sin 7x)+\sin^2 27x\,(\sin 7x-\sin 17x)=0$$

از اتحاد زیر استفاده کرده و خواهیم داشت

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\equiv-(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(\sin 7x-\sin 17x)\,(\sin 17x-\sin 27x)\,(\sin 27x-\sin 7x)=0$$

که چون هر پرانتز را مساوی صفر قرار داد. از روابط بین کمانهای با سینوسهای مساوی استفاده کنیم جوابهای معادله بدست خواهدآمد

پاسخهای درست رسیده : پرویز خواجه خلیلی هوشنگ رستمیان ـ علامحسین طاهری افشار ـ جوادمحمدزاده حسین‌رزاقی‌زاده ـ فرخ کیان‌ارثی ـ ناصرباقری ـ رستم‌تیموری حسین حاجی‌رحیم ـ حسین شاهمیری ـ محمدحسین بنای‌خوئی سیاوش ناظرعدل

۳۴۵۱ـ عددی سه رقمی ومقلوب آن‌هریك را درمبنایی که از رقم یکان مربوط یك واحد بیشتر است نوشته‌ایم . درچه صورت دو مقدارحاصل برابرند

$$(\overline{abc})_{c+1}=(\overline{cba})_{a+1}$$

پس‌از بسط واختصار خواهیم داشت

$$c(ac+b)=a(ac+b)\Longrightarrow a=c$$

پاسخهای درست رسیده : زهرا معینی ـ حسین حاجی‌رحیم ـ رستم تیموری ـ ناصر باقری ـ فرح کیان‌ارثی حسین رزاقی‌زاده ـ پرویز خواجه خلیلی ـ علیرضا حاج‌شفیعی وحید طباطبا وکیلی ـ صادق منتظمی ـ کاظم نیکروان ـ حبیب‌اله سلیم‌زاده ـ محمدکاظم جمشیدی ـ علی تقی‌پور ـ سیاوش‌ناظرعدل داریوش رهبر ـ مرتضی‌بنائی ـ جواد محمدزاده ـ بهروزساسانی محمدحسین بنای خوئی ـ سید علیرضا فاضلی ـ حسین شاهمیری جواد هاشمی‌نژاد ـ محمدکریم روشن ـ مسعود مبصری‌دبیرستان خرد ـ هوشنگ رستمیان ـ احمد حاج عطیم ـ غلامحسین‌طاهری افشار ـ منصور عابدی ـ

۳۴۵۲ـ کوچکترین دو عدد چهار رقمی را پیدا کنید که در دو مبنای متوالی‌متساوی باشند

$$(\overline{abcd})_x=(\overline{efgh})_{x+1}$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=ex^3+(3e+f)x^2+(3e+2f+g)x+e+f+g+h$$

$$\begin{cases} a=e\\ b=3e+f\\ c=3e+2f+g\\ d=e+f+g+h\end{cases}$$

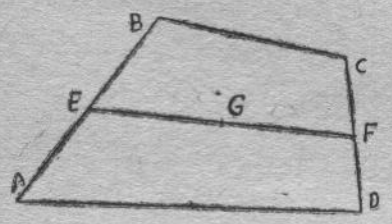
ونتیجه خواهدشد

$$a=e=1 \text{ و } b=c=3 \text{ و } d=1 \text{ و } f=g=h=0$$

$$(1331)_x=(1000)_{x+1}$$

پاسخهای درست رسیده: حسین شاهمیری ـ غلامرضا فرزین ـ منصورعابدی ـ محمدحسین بنای‌خوئی ـ داریوش رهبر علی تقی‌پور ـ سیاوش ناظر عدل ـ علیرضا حاج شفیع ـ حسین رزاقی‌زاده ـ فرخ کیان ارثی ـ

۳۴۵۳ـ چهار نقطهٔ A و B و C و D واقع در یك صفحه مفروضند. E وسط AB و F وسط CD و G وسط EF می‌باشد. روابط زیرا ثابت کنید



۱) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF}$

۲) $4\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

۳) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=0$

حل ۱) داریم

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD})+)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$$

$$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD})+(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC})$$

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}=0 \text{ و } \overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FC}=0$$

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF}$$

۲) $2\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$ و $2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$$4\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$$

$$۳)\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=۲\overrightarrow{GE}\ \text{و}\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=۲\overrightarrow{GF}$$

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=۲(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF})=۰$$

پاسخهای درست رسیده : بهزاد سوفر ـ محمدرضا فوشریان ـ محمدکریم روشن ـ نجات‌اله پیکر ـ بهروزساسانی وحید طباطبا وکیلی ـ غلامرضا فرزین ـ

مسائل متفرقه

۳۴۵۴ـ معادلهٔ زیر را با تبدیل $y=x^۲+x$ حل کنید

$$x^۶+۳x^۵+۴x^۴+۳x^۳-x^۲-۲x=۰$$

$$y=x^۲+x\ \text{و}\ y^۲=x^۴+۲x^۲+x^۲$$

$$y^۳=x^۶+۳x^۵+۳x^۴+x^۳$$

و طرف اول معادله چنین می‌شود

$$y^۳+y^۲-۲y=۰\ \text{یا}\ y(y-۱)(y+۲)=۰$$

$$y=۰\ \text{یا}\ ۱\ \text{یا}\ -۲\Longrightarrow x=۰\ \text{و}\ -۱\ \text{یا}\ \frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

پاسخهای درست رسیده : فاطمه حاج سید جوادی دبیرستان هدف۲ ـ صادق آقا محمدی ـ مقصود صلاحی ـ ناصر باقری ـ احمد اخوی‌دانشجوی‌دانشکدهٔ حقوق ـ بهنام محسنی از رضائیه ـ محمدرضا خمسه‌پور دبیرستان امیرکبیر زنجان ـ محمدرضا فوشریان ـ محمود امجدی ـ حسین رزاقی زاده ـ مسعود درخشان‌نو ـ حسین‌شاهمیری ـ رمضانعلی صفائی ـ ایرج فلاحی ـ محمدحسین‌احمدی ـ شیاوش‌ناظرعدل ـ فرح کیان‌ارثی ـ احمد جلیلی ـ علی تقی مشایخی ـ داریوش رهبر ـ حسن تمدن ـ جوادمجدزاده ـ مسعودمبصری ـ بختیارعلیمددسلطانی ـ غلامرضا ـ فرزین ـ نجات‌الله پیکر ـ حسین توسلی ـ علی‌ثناجو ـ فریدون امین‌زاده ـ بهروزساسانی ـ محمدکریم‌روشن ـ حسین‌مظفریان ـ هوشنگ رسیمیان ـ سیدعلی‌صفر بیگلو ـ حسین حاجی‌رحیم ـ سیدجعفر قبادیور ـ محمدحسین عابدی ـ ابوالفضل صادقزاده ـ سیدحسین‌ناصریان ـ نصرالله‌حقیقت ـ وحید طباطباوکیلی ـ بهزادسوفر

۳۵۵۵ ـ اگر a و e و c طولهای اضلاع و p نصف‌محیط مثلث باشد ثابت کنید $p^۳>۳adc$

بنابرنامساوی بین اضلاع مثلث داریم :

$$(a+b-c)^۳+(a-b+c)^۳+(-a+b+c)^۳>۰$$

بعداز اختصار خواهیم داشت :

$$(a\alpha b+c)^۳-۲۴abc>۰\ \Longrightarrow\ p^۳>۳abc$$

پاسخهای درست‌رسیده : پرویز خواجه خلیلی ـ محمدکریم روشن ـ جواد هاشمی‌نژاد ـ علی ثناجو ـ حسین توسلی ـ بختیارعلیمدد سلطانی ـ حسن تمدن ـ حسین رزاقی‌زاده ـ ناصرباقری ـ سیدحسین ناصریان ـ

۳۴۵۶ ـ صحت نامساوی زیررا محقق کنید.

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۲^۲}+\frac{۱}{۳\times۲^۳}+\cdots+\frac{۱}{n\times۲^n}+\cdots<۱$$

$$\frac{۱}{۱\times۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲\times۲^۲}<\frac{۱}{۲^۲}$$

$$\frac{۱}{۳\times۲^۳}<\frac{۱}{۲^۳}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{۱}{n\times۲^n}<\frac{۱}{۲^n}$$

ازجمع عضوبه عضوطرفین روابط فوق وباتوجه‌به اینکه

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}\right)=۱$$

صحت نامساوی مفروض محقق خواهدشد.

پاسخهای درست رسیده : سیاوش ناظر عدل ـ ایرج فلاحی ـ احمداخوی ـ جوادهاشمی نژاد ـ غلامحسین باقرزاده ـ سیدحسین ناصریان ـ ناصرباقری ـ حسین رزاقی زاده ـ

۳۴۵۷ـ معادلهٔ زیرراحل کنید.

$$\frac{\cos۲x}{\cos^۲x}+\frac{\cos۴x}{\cos^۴x}+\frac{\cos۶x}{\cos^۶x}=-۴$$

با توجه به‌اتحادهای

$$\frac{\cos۲x}{\cos^۲x}=۱-tg^۳x\ \text{و}\ \frac{\cos۴x}{\cos^۴x}=۱-۶tg^۲x+tg^۴x$$

$$\frac{\cos۶x}{\cos^۶x}=۱-۱۵tg^۲x+۱۵tg^۴x-tg^۶x$$

معادلهٔ مفروض چنین خواهد شد :

$$tg^۶x-۱۶tg^۴x+۲۲tg^۲x-۷=۰$$

$$tg^۲x=y\ \text{و}\ y^۳-۱۶y^۲+۲۲y-۷=۰$$

مجموع ضرایب معادله صفر است بنابراین یك جواب $y=۱$ است وجوابهای دیگر حساب شده از روی‌آن مقادیر x بدست می‌آید.

$$x=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\ \text{و}\ x=k\pi\pm Arctg\frac{\sqrt{۳۰\pm۲\sqrt{۱۹۷}}}{۲}$$

پاسخهای درست رسیده : احمد حاج عظیم ـ محمد حسین‌بنای‌خوئی ـ سیدعلی رضافاضلی ـ فرخ کیان ارثی ـ حسین شاهمیری ـ پرویزخواجه خلیلی ـ صفر بیگلو ـ علی‌تقی‌مشایخی ـ جواد محمدزاده ـ بهزاد سوفر ـ محمدحسین احمدی ـ

۳۴۵۸ـ مطلوبست تعیین مقدار x برای آنکه

$$\left(\frac{۲\alpha}{۱+\alpha^۲}\right)^{\sqrt{x}}+\left(\frac{۱-\alpha^۲}{۱+\alpha^۲}\right)^{\sqrt{x}}=۱\ \cdot\ <\forall\alpha<۱$$

فرض می‌کنیم $\alpha=tg\varphi$ نتیجه خواهد شد

$$(\sin۲\varphi)^{\sqrt{x}}+(\cos۲\varphi)^{\sqrt{x}}=۱\quad(۰<۲\varphi<۹۰)$$

$$\Longrightarrow\sqrt{x}=۲\ \text{و}\ x=۴$$

پاسخهای درست رسیده : مرتضی بنائی - هوشنگ رستمیان. بهروز ساسانی - صفر بیگلو. احمد حاج عظیم - داریوش رهبر - محمدکریم روشن - حسین رزاقی‌زاده - ناصر باقری - ایرج فلاحی - سیاوش ناظرعدل - محمدحسین احمدی - علی‌نقی مشایخی - پرویزخواجه خلیلی .

۳۴۵۹ - a و b و c سه‌عدد متمایز هستند. روابط ایجابی زیر رامحقق کنید.

$$\begin{cases} a^3+pa+q=0 \\ b^3+pb+q=0 \\ c^3+pc+q=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=p \\ abc=-q \end{cases}$$

بنابر روابط طرف چپ ، اعداد a و b و c در معادلهٔ $x^3+px+q=0$ صدق‌می‌کنند و بنابر روابط بین ریشه‌ها وضرایب این معادله . روابط طرف راست محقق خواهند بود.

پاسخهای درست رسیده: مرتضی‌بنائی - محمدرضافوشریان - جمشید احمدیان - بهروز ساسانی - حسن آقا بابامحبی - رمضانعلی‌صفائی - فریدون‌امین‌زاده - حسین مظفریان - هوشنك رستمیان. صفر بیگلو - جواد هاشمی‌نژاد - محمد رضا خمسه پور - فرخ کیان‌ارثی - داریوش رهبر - مسعود مبصری - نجات‌الله پیکر - وحید طباطبا وکیلی - پرویز خواجه خلیلی - حسین توسلی - علی‌ثناجو - ایرج فلاحی - حسین رزاقی زاده .

۳۴۶۰ - اگر n عدد a و b و c و.. و l بزرگتر از یك باشند ثابت کنید:

$$abc\cdots kl > a+b+c+\cdots+l-(n-1)$$
$$a(b-1) > b-1$$
$$ab(c-1) > c-1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$abc\cdots k(l-1) > l-1$$

از جمع عضو به عضو نامساویهای بالا و پس از اختصار نامساوی مطلوب بدست می‌آید.

پاسخهای درست‌رسیده : جوادهاشمی‌نژاد-غلامحسین باقرزاده .

۳۴۶۱ - عدد $\overline{abcde}=N^2$ را پیداکنید که با فرض اینکه α و β و γ و δ اعدادصحیح باشند داشته باشیم.

$$\overline{bcdea}=\alpha N \text{ و } \overline{cdeab}=\beta N$$
$$\overline{deabc}=\gamma N \text{ و } \overline{eabcd}=\delta N$$

می‌دانیم که

$$10^4<N^2<10^5 \Longrightarrow 10^2<N<316$$
$$\overline{abcde0}-\overline{bcdea}=a\times 10^5-a$$

و

$$10N^2-\alpha N=(10^5-1)a$$
$$10\alpha N-\beta N=(10^5-1)b$$
$$10\beta N-\gamma N=(10^5-1)c$$
$$10\gamma N-\delta N=(10^5-1)d$$
$$10\delta N-N^2=(10^5-1)c$$

از روابط بالا معلوم می شودکه N عامل اولی غیر از عوامل اول اعداد 10^5-1 و a و b و c و d و e ندارد وچون $10^5-1=9\times 41\times 271$ هر مقسوم علیه اولی از N که عدد 10^5-1 را نشمرد بایدپنج رقم a و b و c و d و e رابشمرد پس اگر N بر ۵ یا ۷ بخش پذیر باشد باید داشته باشیم.

$a=b=c=d=e=5$ یا ۷

واین جرابها قابل‌قبول نیستند وبه همین ترتیب N دارای عاملهای ۶ یا ۸ نیز نخواهد بود.

بنابراین عدد N به یکی از سه صورت زیرمی‌باشد.

$N=27$ یا $N=4\times 41=164$ یا $N=3\times 41=123$

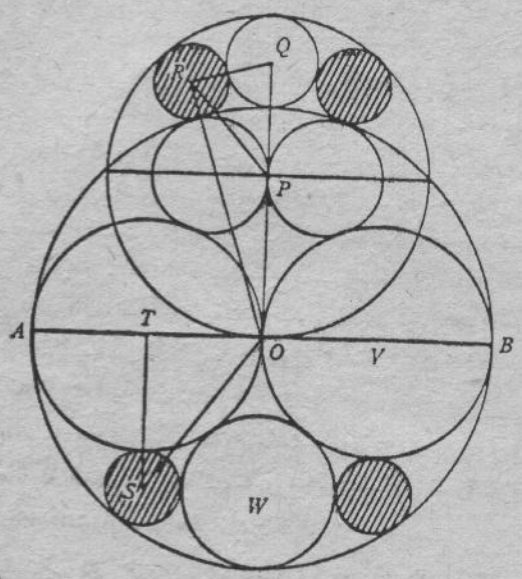
درازا $N=123$ عدد مطلوب می‌شود ۱۵۱۲۹

ودرازا $N=271$ عدد مطلوب می شود ۷۳۴۴۱

و مقدار $N=164$ قابل قبول نیست زیرا در شرایط مذکور صدق نمی کید .

پاسخهای رسیده : زهرا معینی - محمدکریم روشن.

۳۴۶۲ - درشکل زیر ، شعاع دایرهٔ O برابر بایك و شعاع دایرهٔ P برابر با $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ است محقق کنید که دوایر هاشور خورده بایکدیگر برابرند.



با توجه‌به‌شکل، شعاع دایرهٔQ برابر با$(\frac{1}{2}\sqrt{2}-1)$ است . در مثلث OQR بنابرقضیهٔ استوارت خواهیم داشت

$$(OR)^2(PQ)+(RQ)^2(PO)=(RP)^2(OQ)+(PO)(PQ)OQ)$$

که اگر r شعاع دایرهٔ هاشور خوردهٔ R باشد:

$$(1+r)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left[\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)+r\right]^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-r\right)^2(\sqrt{2}+1)\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\times(\sqrt{2}+1)\frac{1}{2}$$

وپس از اختصار خواهیم داشت

$$r=\frac{1}{6}$$

اگر شعاع دایرهٔ هاشور خوردهٔ S را s فرض کنیم داریم

$$OT=\frac{1}{2} \text{ و } OS=1-s \text{ و } TS=\frac{1}{2}+s$$

$$OS^2=OT^2+TS^2 \Longrightarrow s=\frac{1}{6}$$

۳۴۶۳ـ مکعب مستطیلی از a.b.c مکعب کدر که رویهم قرار گرفته‌اند ساخته شده است مطلوبست محاسبهٔ تعداد مکعبهایی که حداقل یك وجه آنها قابل رؤیت است .

تعداد مکعبهایی که فقط یك وجه آنها قابل رؤیت است برابر است با

$$(1)\quad 2(a-2)(b-2)+2(b-2)(c-2)+2(c-2)(a-2)$$

تعداد مکعبهایی که دو وجه آنها دیده می شود برابر است با

$$(2)\quad 4(a-2)+4(b-2)+4(c-2)$$

و ۸ مکعب درچهار گوشهٔ مکعب مستطیل واقعه‌اند که سه وجه آنها دیده می‌شود بنابراین تعداد مکعبهایی که حداقل یك وجه آنها قابل رؤیت است برابر است بامجموع (۱)و(۲) و۸ که پس از اختصار برابر خواهد شد با

$$2[ab+bc+ca-2(a+b+c)+4]$$

پاسخ درست رسیده: ازشهرام انصاری

۳۴۶۴ ـ حل این مسئله در مجموعهٔ یکان سال مخصوص امتحانات نهایی سال ۱۳۴۴ درج خواهد شد . این مجموعه که شامل حل مسائل امتحانات کلاسهای ششم و کنکور ایران و کشور های دیگر است در اسفند ماه آینده منتشر خواهد شد.

۳۴۶۵ـ محورهای مختصات بریکدیگر عمودند . واحدطول ۲ سانتیمتر است .

۱) منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{x|x-1|}$ را به طورهندسی مشخص کنید.

۲) به فرض اینکه m عدد مثبت معلوم باشد برحسب مقادیر m در تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ

$$\sqrt{x|x-1|}-m=0$$

بحث کنید ودر ازاء $m=\frac{1}{2}$ معادله را حل کنید .

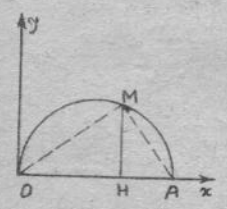
اولا ملاحظه می کنیم که تابع فقط وقتی معین است که $x\geqslant 0$ باشد ودوحالت درنظر می گیریم حالت اول اگر $0\leqslant x\leqslant 1$ باشد در این صورت داریم $|x-1|=1-x$ و

$$(1)\quad y=\sqrt{x(1-x)}$$

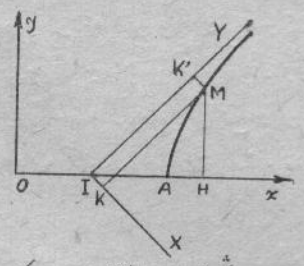
واگر M نقطه‌ای ازاین منحنی وH تصویرآن بر $x'x$ وA نقطهٔ به طول ۱ از $x'x$ باشد تساوی (۱) چنین نوشته می‌شود .

$$\overline{HM}=\sqrt{\overline{OH}\cdot\overline{HA}} \quad \text{یا} \quad \overline{HM}^2=-\overline{HO}\cdot\overline{HA}$$

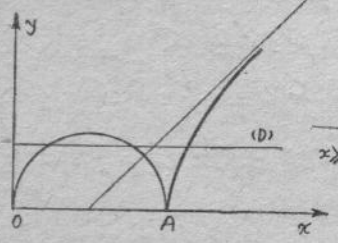
این رابطه می‌رساند که مثلث OMA در زاویهٔ M قائمه است ومکان M نیمدایرهٔ به قطر OA می‌باشد (شکل۱)



شکل ۱ : $0\leqslant x\leqslant 1$



شکل ۲ : $x\geqslant 1$



شکل ۳ : $x\geqslant 0$

حالت دوم ـ اگر $x\geqslant 1$ باشد داریم

$$(2)\quad y=\sqrt{x(x-1)}$$

فرض می کنیم M نقطه‌ای ازمنحنی و A(۱و۰) باشد.از I وسط OA نیم محور های IX و IY را رسم می کنیم که با Ox زاویه های 45° بسازند (شکل ۳)

رابطهٔ (۲) چنین نوشته می‌شود.

$$\overline{HM}^2=\overline{HO}\cdot\overline{HA} \quad : \quad \overline{OH}\geqslant 1 \text{ و } \overline{HM}\geqslant 0$$

چنانچه K و K' تصویرهای M بر IX و IY باشندبعد ازمحاسبات لازم نتیجه خواهد شد .

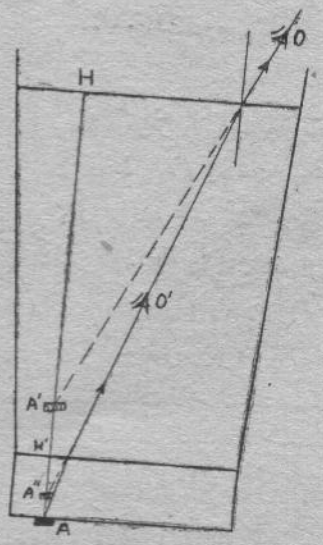
$$IK\cdot IK'=\frac{1}{2}\overline{IA}^2$$

دنباله درصفحه ۵۶

پرسشـ درصفحهٔ ۷۰ کتاب فیزیك سال پنجم طبیعی و ریاضی مسئله‌ای چاپ شده‌است (مسئلهٔ شمارهٔ ۱۰) که جواب آن درکتابهای چاپ چهار سال پیش «۳» و در کتابهای چاپ سه سال پیش ۲/۸۳ سانتیمتر نوشته شده‌بوده ولی درکتابهای چاپ سال قبل و امسال از چاپ جواب مسئله خودداری شده است. خواهشمنداست حل‌این مسئله را کاملا واضح و روشن و با ترسیم شکل در مجله چاپ کنید. صورت مسئله به شرح زیراست :

مسئله ـ کلفتی ته‌یك لیوان $1/5^{cm}$ است. درلیوان تا ارتفاع 10^{cm} آب ریخته وآنرا روی سکه‌ای می‌گذاریم تعیین کنید اگر از بالای لیوان نگاه کنیم سکه چقدر بالاتر دیده می‌شود (ضریب شکست آب $\frac{4}{3}$ وضریب شکسته شیشه $\frac{3}{2}$ است)

(محمدعلی رادی)



پاسخـ حل‌مسئلهٔ بالا توسط آقای **علی ظاعنی** دبیر با سابقه ومعروف فیزیك انجام گردید که ذیلا درج می‌شود. شکل‌مسئله بامقیاس $\frac{1}{2}$ چاپ شده است

حلـ طریقهٔ اول :

اثر شیشهٔ ته لیوان و اثرآب درون لیوان را جداگانه حساب‌نموده‌باهم‌جمع‌می‌کنیم

$$d_1 = e_1(1-\frac{1}{n_1})$$

$$d_1 = 1/5(1-\frac{2}{3}) = 0/5^{cm}$$

$$d_2 = e_2(1-\frac{1}{n_2})$$

$$d_2 = 10(1-\frac{3}{4}) = 2/5^{cm}$$

جواب : $d_1 + d_2 = 0/5 + 2/5 = 3^{cm}$

طریقهٔ دوم : اگرناظر'o از درون آب لیوان نگاه‌کند سکهٔ A را در "A خواهددید بطریقی‌که

$$AA'' = AH'(1-\frac{1}{n})$$

در این فرمول n ضریب شکست شیشه است نسبت به آب یعنی $n = \frac{n_1}{n_2}$ که مقدار آن $n = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$ خواهدبود.

بنابراین

$$AA'' = 1/5(1-\frac{8}{9}) = \frac{1}{6}^{cm}$$

$$A''H' = 1/5 - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}^{mc}$$

حال اگر ناظر از نقطهٔ O نگاه کند "A را در 'A خواهد دید بطریقی‌که $A''A' = A''H(1-\frac{1}{n_2})$

باتوجه به‌شکل معلوم می‌شودکه :

$$A''H = A''H' + H'H$$

یعنی $A''H=\frac{۴}{۳}+۱۰=\frac{۳۴}{۳}$

ومقدار $A''A'$ به سهولت محاسبه می گردد

$$A''A'=\frac{۳۴}{۳}(۱-\frac{۳}{۴})=\frac{۱۷}{۶}$$

از روی شکل به خوبی آشکاراست که فاصلهٔ سکهٔ A تا تصویرش A' عبارتست از:

$$AA'=AA''+A''A'$$

$$AA'=\frac{۱}{۶}+\frac{۱۷}{۶}=\frac{۱۸}{۶}=۳^{cm}$$

اما در مورد کتابهای درسی سه سال قبل که جواب این مسأله را $۲/۸^{cm}$ ثبت نموده متأسفانه باید اظهار دارم که این جواب غلط است زیرا حل کنندهٔ مسأله فقط فاصلهٔ $A''A'$ را منظور داشته است :

$A''A'=\frac{۱۷}{۶}=۲/۸۳$ در صورتی که فاصلهٔ سکهٔ A از تصویرش ، AA' می باشد .

***

پرسش- ۱) چگونه ثابت می‌شود که هر گاه یك رابطهٔ جبری درجهٔ n ام به‌ازاء $n+۱$ مقدار صحیح باشد یا به‌عبارت دیگر دارای $n+۱$ ریشه باشد ، این رابطه یك اتحاد است و آیا این موضوع دربارهٔ دستگاهها نیز صادق است ؟ یعنی هر گاه یك دستگاه n معادلهٔ n مجهولی درجهٔ n ام به‌ازاء $۲n+۱$ مقدار صحیح باشد یعنی دارای $۲n+۱$ ریشه باشد همهٔ معادلات دستگاه اتحادند ؟

۲) مقصود از جوابهای همسان درحل دستگاهها چیست؟

۳) عمل ضرب ویا تقسیم و عددکه درمبنایی غیراز ۱۰ نوشته شده‌اند چگونه انجام می گیرد ؟

(حسن یزدانی نژاد پنجم ریاضی دبیرستان وحید)

پاسخ -۱) اگر $x_۱$ یك ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ باشد عبارت $f(x)$ بر $x-x_۱$ بخش پذیر بوده وخواهیم داشت(۱)

$$f(x)=(x-x_۱)g(x)$$

وچنانچه $x_۱$ و $x_۲$ دو ریشه‌از معادلهٔ فوق باشند خواهیم داشت .

$$(۲)\quad f(x)=(x-x_۱)(x-x_۲)h(x)$$

اگر $f(x)$ نسبت به x چند جملهٔ صحیح درجهٔ n باشد ازرابطهٔ (۱) معلوم می‌شود که $g(x)$ نسبت به x ازدرجهٔ $n-۱$ است و از (۲) معلوم می‌شود که $h(x)$ از درجهٔ $n-۲$ است .

وقتی که معادلهٔ $f(x)=۰$ دارای n ریشه باشد داریم

$$f(x)=(x-x_۱)(x-x_۲)\cdots(x-x_n)k(x)$$

و چنانچه چند جمله‌ای $f(x)$ نسبت به x از درجهٔ n باشد عبارت $k(x)$ بناچار نسبت به x از درجهٔ صفر بوده یعنی مقدارثابت می‌باشد ومعادلهٔ $f(x)=۰$ غیراز n ریشهٔ مزبور، ریشهٔ دیگری نخواهد داشت . پس اگر درتساوی $f(x)=۰$ بیش از n مقدار از x صدق کند این تساوی نسبت به x اتحاد می‌باشد .

یك دستگاه n معادلهٔ n مجهولی درجهٔ n حداکثر می‌تواند دارای $n^۲$ دسته جواب باشد وچنانچه بیش ازاین تعداد جواب داشته باشد دستگاه مبهم است و بعضی معادلات دستگاه ازیکدیگر نتیجه شده و مستقل از یکدیگر نمی‌باشند ، در این صورت هریك ازمعادلات دستگاه ، اتحاد نخواهد بود .

۲- دستگاه معادلاتی از درجهٔ زوج که دارای جوابهایی باشد که شامل $\pm\sqrt{\ }$ باشند ، جوابهایی راکه باانتخاب یکی ازعلامات $\pm$ بدست می‌آیند (مثلاهمهٔ جوابهای شامل $+\sqrt{\ }$) جوابهای همسان دستگاه نامیده می‌شوند .

۳) دراین باره درحساب استدلالی کلاس ششم ریاضی به تفصیل بحث شده است ؛ چهار عمل اصلی دربارهٔ اعدادی که در مبنای غیر از ده نوشته شده‌اند همانند دستگاه دهدهی انجام می گیرد با این تفاوت که هرجا حاصل مرتبه‌ای از مبنا تجاوز کرد رقم یکان آنرا نوشته و رقم دهگان آنرا برای مرتبهٔ بعد منظور می‌داریم .

***

پرسش - چرا حاصل‌ضرب منفی درمنفی می‌شود مثبت؟

حسین مکاریان ششم ریاضی دبیرستان قناد بابل

محمد مقدسی چهارم ریاضی دبیرستان پهلوی ساری

پاسخ - هر رشته از ریاضیات مبتنی بر تعاریف، اصول و قراردادهایی است که‌بدون اثبات قبول‌می‌شوند. بنابرقرارداد قبول می کنیم که حاصل ضرب دو عدد منفی عددی است مثبت . می‌توان با ذکر مثالهایی که بعضی ازآنها درکتابهای درسی‌نیز مذکور است صحت این موضوع را تحقیق نمود (فراموش نشود که تحقیق غیرازاثبات است). درریاضیات جدید همهٔ حکمهایی که به عنوان اصل موضوع پذیرفته می‌شوند کاملا مشخص شده‌اند .

***

پرسش- می‌دانیم که درحل معادلهٔ درجهٔ سوم به صورت

$$x^۳+px+q=۰$$

وقتی که یك ریشهٔ حقیقی دارد دستور کاردان و وقتی سه ریشهٔ

حقیقی دارد دستوری که منجر به تعیین کسینوس یك کمان می‌شود مورد استفاده می‌باشد .

اولا معادله‌ای تشکیل می‌دهیم که یك ریشهٔ حقیقی داشته باشد مثلا معادلهٔ $x^3-3x-18=0$

حال اگر خواسته باشیم از دستور کاردان استفاده کنیم رادیکال مرکبی با فرجهٔ ۳ بدست می‌آید ، این نوع رادیکالهارا چگونه باید ساده نمود ؟

ثانیاً ـ معادلهٔ درجهٔ سومی با سه جواب حقیقی تشکیل می‌دهیم مثلا

$$(x-2)(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})=0$$

یا : $4x^2-13x-6=0$

اما با استفاده ازدستور مثلثاتی برای این معادله مقادیر تقریبی بدست می‌آید. چرا چنین است ؟

ثالثاً روش اولر که درحل معادلات درجهٔ سوم بکاررفته است (دریکان شمارهٔ ۱۴ مذکور است) برای همهٔ معادلات صادق نیست آیا این روش قابل قبول نیست ؟

(محمود لطیفی ـ دیپلمهٔ ریاضی)

پاسخ ـ اولا تحویل رادیکال مرکب با فرجهٔ ۳ به ـ رادیکالهای ساده ، اغلب منجر به حل یك معادلهٔ درجهٔ سوم می‌شود و ازاین‌جهت برای حل‌همهٔ معادلات درجهٔ سوم که یك ریشهٔ حقیقی دارند دستورکاردان عملا مورد استفاده نمی‌تواند باشد .

برای حل معادلات درجهٔ سوم و درجات بالاتر عملا از قاعدهٔ تقریبات متوالی استفاده می‌شود و دراین‌باره مقاله‌ای در یکان شمارهٔ ۱۸ چاپ شده است .

پرسش ـ درکتاب جبر ششم ریاضی چنین نوشته شده است : «هرگاه $f'(a)=0$ و $f''(a)=0$ به ازاء $x=a$ جهت تابع تغییر نمی‌کند » آیا این مطلب صحیح است ؟

محمدکاظم جمشیدی

پاسخ ـ سطری ازیك مطلب کتاب را ذکر کرده‌اید بدون اینکه به مقدمهٔ مطلب و اینکه برای $f(x)$ چه شرایطی منظور شده است اشاره نموده باشید .

فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[x_1$ و $x_2]$ معین باشد و $x=a$ مقداری باشد متعلق به این فاصله . در این صورت اگر :

۱) $f'(a)=0$ و $f''(a)>0$ باشد تابع به‌ازاء $x=a$ مینیمم است .

۲) $f'(a)=0$ و $f''(a)<0$ باشد تابع به‌ازاء $x=a$ ماکزیمم است .

۳) $f'(a)=0$ و $f''(a)=0$ بد شرط $f'''(a)\neq 0$ تابع به‌ازاء $x=a$ نه ماکزیمم است و نه مینیمم نقطهٔ به طول $x=a$ نقطهٔ عطف منحنی‌نمایش تابع بوده ومماس‌در این نقطه برمنحنی با محور طولها موازی است .

برای مثال تابع $y=x^n$ را در نظر بگیرید و در ازاء مقادیر۲ و ۳ و ۴ و.... برای n معلوم کنید که مبدأ مختصات چه نقطه‌ای از منحنی نمایش تابع می‌باشد .

***

پرسش ـ در یکی ازبرنامه‌های رادیوئی مربوط به‌درس مثلثات ، در اثبات صحت یك اتحاد مثلثاتی ابتدا طرفین و وسطین انجام گردید وبعد ثابت شد که حاصل ضرب طرفین با حاصل ضرب و سطین مساویست . اما در دبیرستان بهما تأکید می‌شود که در اثبات اتحادهای مثلثاتی باید فقط یك طرف را عمل کرد وطرف دیگر را بدست آورد . کدام صحیح است .

جمال آشفته پنجم ریاضی

پاسخ ـ اگر تساوی بین دوکسر اتحاد باشد مسلم‌است که حاصل‌ضرب طرفین‌باحاصل‌ضرب وسطین متحد خواهدبود. اما در مسائل وتمرینهایی که چه درکلاس‌درس وچه‌درامتحانات داده می‌شود اثبات‌صحت یك اتحاد را وقتی‌از شما قبول‌می‌کنند که یك طرف را عمل‌کرده وطرف دیگر رابدست آورده‌باشید.

***

پرسش ـ اولا بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ به‌خیام منسوب است یا به نیوتن .

ثانیاً درچه صورت طرف اول معادلهٔ به صورت $ax^2+bx+c=0$ مجذورکامل است

(حسین جعفری پنجم ریاضی دبیرستان پهلوی گلپایگان)

پاسخ ـ اولا بسط این دوجمله‌ای به‌نام دو جمله‌ای نیوتن معروف است . ضرایب این بسط جدولی تشکیل می‌دهند که به آن مثلث حسابی پاسکال می‌گفتند این مثلث است که بعضها آنرا مثلث خیام می‌نامند .

ثانیاً سه جمله‌ای درجهٔ دوم وقتی که ریشهٔ مضاعف داشته باشد ($\Delta=0$) مجذورکامل خواهد بود

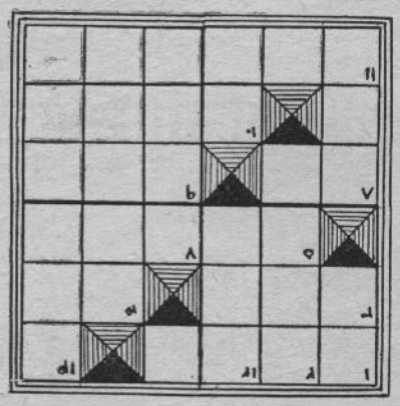
***

آقای عزیزصفائی ، دربارهٔ عقیده‌ای که نسبت به‌علت جاذبهٔ زمین وسایرکرات ابرازداشته‌اید و سؤال مربوط به‌آن با یکی از استادان یا دبیران فیزیك ملاقات نموده و حضوری داکره فرمائید

سرگرمی

جدول اعداد

طرح از : شهرام انصاری دبیرستان خوارزمی ۱



افقی ـ ۱ـ کوچکترین عددی که آنرا می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت ۳ـ عددی است متقارن که همهٔ رقمهایش زوج هستند . ۴ـ مجموع عددهایش (بجز خود عدد) مربع کامل است ۵ ـ دو عددی که از دو رقم سمت چپ و سمت راست آن تشکیل می‌شوند هرکدام اول بوده رقم یکانش با رقم سدگانش مساوی و مجموع ارقامش ۲۲ است . ۸ـ عدد اولی که برابر است با مجموع سه مربع کامل ۹ـ عدد اولی که اریك مکعب کامل دوواحد بیشتر است . ۱۰ـ مجذور حاصل ضرب دو عدد اول . ۱۱ـ عدد جادویی معروف که در یکان معرفی شده است .

قائم : ۱ـ مجذور کامل و جذریکی ازدومجذور کامل ۱ افقی. ۸ـ اگر یك واحداز رقم یکانش کم شود عدد مربع کامل بدست می‌آید . ۲ـ عددی است متقارن و هریك از ارقامش مجذورکامل است ۱۲ـ مجذور یك عدد اول . ۱۰ـ خارج قسمت ارقامش با تفاضل آنها برابر است . ۷ـ مجموع ارقامش ۱۸ است . ۴ـ همان خاصیت ۱۰ افقی را دارد. ۱۴ـ عدد متقارنی که از دورقم متوالی تشکیل شده است .

حل مسئلهٔ حجم بطری

مساحت سطح قاعدهٔ بطری را اندازه می‌گیریم فرض می‌کنیم برابر با s باشد . بطری را به حالت قائم نگاه داشته ارتفاع h مایع را اندازه می‌گیریم . بطری را وارونه کرده در حالت قائم نگاه داشته ارتفاع h' قسمت خالی آنرا معلوم می‌کنیم حجم بطری برابر خواهد شد با :

$$v = s(h + h')$$

حل مسئلهٔ دو ترن

درلحظه‌ای که واگنهای مقدم دو قطارمقابل یکدیگر واقع شوند فاصلهٔ واگنهای انتهایی دو قطار از یکدیگر برابر $۲ \times ۲۵۰ = ۵۰۰^m$ است . واگنهای انتهایی دو قطاربا سرعت

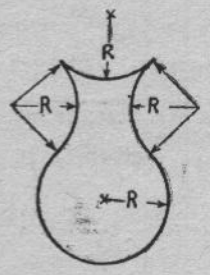
$۴۵ + ۴۵ = ۹۰$

کیلومتر در ساعت یا ۲۵ متر در ثانیه به‌یکدیگر نزدیك می‌شوند پس مدت زمان لازم برای طی این مسافت برابر است با ۵۰۰:۲۵ یعنی برابر است با ۲۰ ثانیه .

۵	۳	۲	۹		۱
۱	۱		۷	۲	۹
	۷	۳		۴	
۶	۹	۸	۸	۹	۶
۳	۹		۳	۶	۵
۸		۱	۶	۰	۰

حل جدول شمارهٔ قبل

مسئلهٔ برش



قطعه‌ای ازمقوا یاکاغذ مطابق با شکل بالا تهیه کنید . این شکل را درامتداد دوخط مستقیم چنان ببرید و قطعات حاصل را چنان پهلوی یکدیگر بگذارید که یك مربع کامل بدست آید .

اعداد و کلمات

چهارده کلمه یا جملهٔ از دوحرفی تا پانزده حرفی زیررا در نظر بگیرید

حل
های
درست
مسئله
سرگرمی
لازم است
مجلهٔ یکان
پرسش و پاسخ
مسائل نمونه
ریاضیات جدید
آموزنده هستند
همه کوشش می‌کنیم
برای دانش‌آموزان
به خاطر خوانندگان

اگر a و b و c و d نمایندهٔ تعداد حروف چهار تا از چهارده جملهٔ بالا باشد وداشته باشیم

$ad = b^۲c$ و $a^۲ = bd$

عبارت dcba را مشخص کنید .

بیان جدید

ریاضیات مقدماتی

ترجمهٔ : ع . م

تألیف : Lucienne FÉLIX

-۳-

§۲ـ اعداد نسبی[1] ـ قرینه سازی[2]

اعـداد طبیعی را مشخص نموده‌ایم . می‌دانیم که با یك نوع اقسام به دو قسم[3] که عبارت از قرینه سازی باشد به اعداد مثبت و منفی متوجه خواهیم شد. اعداد مثبت و منفی به‌انضمام صفر **مجموعهٔ اعداد نسبی** را تشکیل‌می‌دهند .در برابراین اعداد ، اعداد طبیعی را **اعداد مطلق**[4] می‌نامیم .

مجموعـــــهٔ اعداد نسبی را بـــــا Z می‌نمائیم.

کلیتاً ، می‌توان این قرینه سازی را دربارهٔ مجموعه‌هایی کاملا عمومی ازعناصری موسوم به مقادیر مطلق معمول داشت، به شرط آنکه اصل موضوع ترتیب نیکو ازآنها طرد شده باشد، به قسمی که این بررسی در هرحال مثلا حتی بعد از دخـالت دادن اعداد حقیقی بتواند معمول باشد .

تعریف مجموعهٔ اعداد مثبت همان تعریف مجموعهٔ اعداد مطلق نیست ، امااز این جهت که سازمانهای آنها **ایزومورف**[5] هستنداغلب به خاطر تلفظ با یکدیگر اشتباه می‌شوند (بجای ۴+ می گویند۴). طبیعی است که این موضوع در آغاز بررسی نظری واقعی ممنوع می‌باشد .

I- دربارهٔ ایزومورف بودن دوسازمـان

دو مجموعهٔ E با عناصر . . . . و c و b و a و E' با عناصر . . . . و c' و b' و a' را در نظر می گیریم ؛ فـرض می کنیم که بین عناصراین دو مجموعه یك تناظر دوسویی‌تعریف شده باشد: می گوئیم a' تصویر[6] (نظیر) a است، b' نظیر b وغیره چنانچه یك عمل o روی مجموعهٔ E تعریف‌شده‌باشد، می‌توانیم روی مجموعهٔ E' عملی مانند o' که نظیر o باشد نسبت دهیم به شرط آنکه حاصل عمل o' نسبت به زوج دلخواه (m' و q') نظیر حاصل عمل o نسبت به زوج (m و p) باشـد ، همهٔ خواص o از قبیل شرکت پذیری ، استقلال از ترتیب عوامل به عمل o' منتقل شوند . در نتیجه مجموعه هـای E و E' توسط این اعمال سازمانهای مشابه خواهند داشت: هریك نظیر دیگری بوده و به غیر ازعلامتگذاری اختلاف دیگری نخواهند داشت . درحالی که اختلالی به‌وجود نیاید می‌توان اعمال o و o' را با یك نشانه نمایش‌داد ودراین صورت محاسبات مربوط به E و E' به طور مسلم همانند خواهند بود. می گویند که دو عمل روی E و E' سازمانهای ایزومورف نتیجه می‌دهند و یا اینکه E و E' برای عملیات o و o' ایزومورف هستند .

به همین ترتیب ، اگریك سازمان ترتیبی در E و یکی

1- Nombres reletifs.

2- Symétrisation

3- Dédoublement.

4- Absolus.

5- Isomorphe.

6- Image.

دیگر در E' تعریف شده باشد به قسمی که :

«m' مقدم بر p'» $\Longleftrightarrow$ «m مقدم بر p»

دو مجموعه نسبت به این روابط ترتیبی ایزومورف خواهند بود .

II ـ گسترش(۱) به وسیلهٔ قرینه سازی

مقصود تعیین یك مجموعهٔ Z به اندازهٔ کافی غنی می‌باشد برای آنکه یکی اززیر مجموعه‌هایش با مجموعهٔ N اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع و رابطهٔ ترتیبی و همچنین عمل ضرب ایزومورف باشد ، و چنان باشدکه عمل تفریق همواره ممکن باشد . و از این رو آنرا یك گسترش N به وسیلهٔ قرینه سازی می‌نامند .

اصول موضوع مورد استفاده را به شرح زیر مشخص می‌کنیم :

اصول موضوع معرف مجموعهٔ Z

الف ـ اصل موضوع مربوط به اولین عمل موسوم به جمع (با علامت +)

۱ـ اصول موضوع [A] ودرنتیجه ، نتایج [C]

۲ـ اصول موضوع مشخص عناصر جدید :

$[S_1]$ نسبت به عمل جمع یك عنصر بی‌اثر به نام **صفر** وبانشانهٔ ۰ وجود دارد :

$$0\in Z\ ;\ a+0=0+a=a\ ,\ \forall a\in Z.$$

$[S_2]$ نظیرهرعنصر a از Z عنصر دیگری مانند a' وجود دارد به قسمی که :

$$a+a'=0$$

درنظر داشته باشیم که نظیر عنصر ۰ خود ۰ است و همچنین

$$(a')'=a \quad \text{یعنی} \quad [a'=b]\Longleftrightarrow[b'=a]$$

می‌گویندکه a و a' نسبت به عمل جمع **قرینه** و یا به عبارت دیگر **متقابل** هستند .

(نسبت به عملی مانند $\circ$ و با وجود عنصر بی‌اثری مانند ۷ ، دوعنصر a و a' با شرط

$$a\circ a'=a'\circ a=7$$

قرینه نامیده می‌شوند. کلمهٔ متقابل به‌خصوص درمورد عمل‌جمع به‌کار برده می‌شود).

نتیجه (توجیه‌کنندهٔ انتخاب این اصول)

نظیر هرزوج (a و b) از Z عددی مانند x وجوددارد به قسمی‌که $a=b+x$. بنابر [A] و $[S_2]$ نتیجه خواهد شدکه $x=a+b'$

علاوه برآن این پاسخ یکتایی است زیرا :

$$[b+x=a \text{ و } b+y=a]\Longrightarrow[b+x=b+y]$$
$$\Longrightarrow[x=y]$$

می‌توانیم بنویسیم $x=a-b$، این‌عمل **تفریق** و x **تفاضل** a بر b نامیده می‌شود .

قضیه :

$$[x=b-a]\Longrightarrow[a-b=x']$$

زیرا :

$$[b=a+x \text{ و } a=b+y]\Longrightarrow[x+y=0]$$

بنابراین ، در Z یك عمل شرکت پذیر وجود داردکه دارای عنصر بی‌اثر بوده و نیز برای هرعنصرش یك عنصر قرینه یافت می‌شود: یك چنین مجموعه‌ای را دارای **سازمانی ازگروه**[2] می‌نامند. وچون علاوه برآن، عمل مستقل از ترتیب است گروه هم مستقل از ترتیب است ، و نیز این گروه **گروه آبلی**[3] نامیده می‌شودکه از نام ریاضیدان مشهور نروژی **آبل**[4] (۱۸۲۹-۱۸۵۲) اقتباس شده است . و از این جهت که عمل موسوم به جمع است (با علامت +) گروه را **گروه جمعی**[5] نیزمی‌نامند (این عنوان درهمه جای این کتاب برای این گروه به‌کار خواهد رفت) .

1- Extension
2- Structure de groupe
3- Abélien
4- Abel
5- Groupe additif.

ب ـ اصول موضوع مشخص دومین عمل موسوم به ضرب

۱ـ اصول موضوعی که اعداد طبیعی را مشخص می‌نمودند باکمی تغییر یادآوری می‌کنیم :

اصول موضوع [A] حفظ می‌شوند فقط $[A_2]$ که با خاصیت توزیعی سازگار نیست به وسیلهٔ اصل زیر جانشین می‌شود .

$$[A_2''] \quad a\neq 0 : [ab=ab'] \Longrightarrow [b=b']$$
$$[ba=ba') \Longrightarrow [b=b']$$

که عبارتست از اختصار به وسیلهٔ یك عنصر غیر از صفر .

اصول موضوع [M]

$[M_1]$ حفظ می‌شود : خاصیت توزیعی نسبت به جمع

$[M_2]$ به وسیلهٔ $[M'_2]$ جانشین می‌شود : نسبت به‌عمل ضرب یك عنصر بی اثر وجود دارد که آنرا با μ می‌نمائیم .

بنابراین :

$$\forall a\in Z ، \exists \mu\in Z : a\mu=\mu a=a$$

۲ـ قضایای مربوط به ضرب

قضیهٔ ۱ـ حاصل ضرب هرعنصری در صفر برابر با صفر است .

بنا بر تعریف داریم $a+0=a$ و از $[A_1]$ نتیجه می‌شود

$$a(a+0)=aa$$

بنا بر $[M_1]$ داریم :

$$aa+a0=aa$$

و یا اینکه

$$aa+a0=ab+0$$

و ازآنجا بعد از اختصار نتیجه خواهد شد :

$$a0=0a=0$$

قضیهٔ ۲ ـ اگر حاصل ضرب دو عامل برابر با صفر باشد لااقل یکی ازآن دو عامل برابر با صفر است زیرا :

$$[ab=0 \text{ و } a\neq 0]\Longrightarrow[ab=a0 \text{ و } a\neq 0]$$
$$\Longrightarrow[b=0]([A''_2] \text{بنابر})$$

قضیهٔ ۳ـ وجه تشابه بین ab و ab' و a'b و a'b'

$$[b+b'=0]\Longrightarrow[a(b+b')=a0=0]$$

یعنی $ab+ab'=0$

همچنین $(ab)'=ab'$ و به همین ترتیب

$$(ab)'=a'b \text{ و } (ab')'=a'b'=ab$$

بالاخره حاصل ضربها دوبه‌دومتساوی ، دوبدو متقابل هستند

$$ab=a'b' \text{ و } a'b=ab'=(ab)'$$

قضیهٔ ۴ـ خاصیت توزیعی ضرب نسبت به عمل تفریق

$$c(a-b)=c(a+b')=ca+cb'=ca+(cb)'$$
$$=ca-cb$$

نتیجه ـ خاصیت توزیعی ضرب نسبت به هرتوالی از جمع و تفریق .

فعلا مجموعهٔ Z دارای سازمانی است از گروه نسبت به جمع و عمل دیگری که نسبت به اولی توزیعی می‌باشد :

این موضوع چنین عنوان می‌شود که Z دارای یك **سازمان حلقه**[1] است . و چون عمل ضرب مستقل از ترتیب است ، می‌گویند که این یك حلقهٔ مستقل از ترتیب است. (در ریاضیات حلقه‌های عمومی‌تری بررسی می‌شوند ، برای مثال با صرف نظر کردن اصل اختصار $[A'_2]$ یااستقلال از ترتیب‌عمل ضرب . ما بعداً حلقهٔ دیگری را مطالعه خواهیم کرد ؛ حلقهٔ چند جمله‌ایها).

در نظرداشته باشیم که عمل ضرب درمجموعهٔ Z سازمانی ازگروه به وجود نمی‌آورد زیرا هر عنصر غیرمفروض نسبت به ضرب یك قرینه دارد (که می‌گوئیم یك معکوس دارد)

ج ـ اصل موضوع تثلیث (سه دستگی)

مجموعهٔ Z هنوز مشخص نشده است ؛ باید اصل موضوع زیررا اضافه کنیم :

۱) طبقه‌ای که به جز صفر شامل عنصر دیگر نیست .

۲) طبقه‌ای که نسبت به عمل جمع و نسبت به عمل ضرب بسته‌است . اگر P این زیر مجموعه باشد، تعریف آن عبارت خواهد بود از .

$$\forall a \text{ و } \forall b : [a\in P \text{ و } b\in P[\Longrightarrow[(a+b)\in P$$
$$\text{و } ab\in P]$$

۳) طبقه‌ای که شامل همهٔ عناصر متقابل عناصر P باشد که این زیر مجموعه را با 'P می‌نمائیم .

عناصر P را **اعداد مثبت** ، عناصر 'P را **اعداد منفی** و عنصر صفر را **خنثی** می‌نامیم . اصل موضوع چنین

1- Structure d'anneau.

بیان می‌شود :

[P] هرعنصر متعلق به Z یا صفراست یامثبت ویا منفی، این‌حالات‌یکدیگررا نفی می‌کنند . از دو عنصر متقابل غیراز صفر یکی مثبت و دیگری منفی خواهد بود . مجموع وحاصل‌ضرب دو عنصر مثبت ، مثبت می‌باشد .

نتایج ـ (اگر برای تشخیص اعداد مثبت یك علامت و برای تشخیص اعداد منفی علامت دیگر وضع شود ، این نتایج **قانون علامات**[1] نامیده می‌شوند . بعداً این علامات را تعیین خواهیم کرد) :

بنا برقضیهٔ ۳ از ضرب ، حاصل ضرب دو عدد منفی ، مثبت است . به عبارت عمومی‌تر : اگر تعداد عاملهای منفی یك حاصل ضرب زوج بوده و هیچیك از عاملهای ضرب صفر نباشد ، حاصل ضرب مثبت خواهد بود ، و اگرتعداد عاملهای منفی فرد باشد حاصل ضرب منفی خواهد بود .

حالت خاص : هرچه باشد a مخالف‌صفر، aa مثبت‌است عنصر بی‌اثر μ دررابطهٔ $\mu\mu=\mu$ صدق می‌کند بنابراین مثبت است .

۲ـ قضیهٔ ترتیب[2]ـ رابطهٔ با علامت $<$ راکه به‌وسیلهٔ

$a<b \Longleftrightarrow [b-a$ مثبت‌است$]$

تعریف می‌شود درنظر می‌گیریم .

آیا این یك رابطهٔ ترتیبی است ؟

این رابطه انعکاسی نیست . تقارنی هم نیست زیرا :

$b=a+d \Longleftrightarrow a=b+d'$

اگر d مثبت باشد d' منفی خواهد بود .

اکنون خاصیت انتقالی را محقق می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}[a<a]\Longleftrightarrow[\exists d \text{ مثبت} : b=a+d]\\ [b<c]\Longleftrightarrow[\exists d' \text{مثبت}: c=b+d']\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow [c=a+(d+d')]$$

وچون $d+d'$ مثبت است پس :

$[a<b \text{ و } b<c]\Longrightarrow[a<c]$

نسبت به یك چنین رابطه‌ای، مجموعهٔ E تماماً مرتب می‌باشد.

نتـایج :

مثبت a $\Longleftrightarrow$ $0<a$ و $a-0=a$ چون

منفی a $\Longleftrightarrow$ $a<0$ و $0-a=a'$ چون

ودرنتیجه (بنا برخاصیت‌انتقالی) ، **هرعددمنفی از هرعدد مثبت کوچکتر است .**

۳ـ تعریف قدر مطلق ـ قدر مطلق یك عـدد a که به صورت $|a|$ نوشته می‌شود چنین تعریف می‌شود .

$|a|=0 \Longleftrightarrow a=0$

$|a|=a \Longleftrightarrow a$ مثبت

$|a|=a' \Longleftrightarrow a$ منفی

یعنی ، $|a|$ یا صفر است و یا مثبت

قضیهٔ ۱ـ $|ab|=|a|\cdot|b|$

قضیهٔ ۲ـ

$(|a|+|b|)'<a+b<|a|+|b|$

(نتیجه‌ای‌است از $|a|'<a<|a|$ و $|b|'<b<|b|$)

د ـ برای مشخص نمودن Z به صورت مجموعه هایی از اعداد صحیح مثبت ، منفی یا صفر . باید اصل موضوع ترتیب نیکو را در زیر مجموعهٔ P اعداد مثبت دخالت دهیم .

[BO]' : هرزیرمجموعه‌ای از P که تهی نباشد شامل عنصری است‌که از همهٔ عناصر دیگـرش کوچکتر می‌باشد .

و در حالت خاص :

$[BO_1]'$ خودزیرمجموعهٔ P نیز یك کوچکترین عنصر دارد .

قضیه ـ کوچکترین عنصر P عبارتست از μ که عنصر بی‌اثر عمل ضرب می‌باشد .

اگر به فرض p کوچکترین عنصر P باشد ؛ بین عنصرهای مثبت p و μ رابطهٔ ترتیبی $p<\mu$ وجود دارد . بنابراین

$p-pp=p\mu-pp=p(\mu-p)\geqslant 0$

نامساوی غیرممکن است زیرا باید عددمثبت pp از p کوچکتر باشدکه خلاف فرض است ؛ بنابراین تساوی برقرار بـوده و نتیجه می‌شود $p=\mu$. و اعداد مثبت عبارت خواهند شد از

μ و $\mu+\mu$ و $\mu+\mu+\mu$ و ...

نتیجهٔ نهایی ـ یك مجموعهٔ Z که این شرایط درآن صادق باشند چنان است‌که زیر مجموعه‌اش P با مجموعهٔ N اعداد طبیعی نسبت به جمع و ضرب و اصول ترتیبی یعنی‌نسبت به همهٔ خواصی‌که N را مشخص می‌کنند ایزومورف می‌باشد . بنابراین تمام مجموعه های Z باآنکه ذیلا بنـا خواهیم کرد ایزومورف خواهند بود :

P را مجموعهٔ اعداد طبیعی اختیار می‌کنیم . به هرعدد

1- Règle des signes.

2- Théorème d'ordre.

طبیعی a ، عنصری که با نشانهٔ جدید a' تعیین می‌شود نسبت می‌دهیم [مثلا به عدد ۴ علامت $'(۴)$ را نسبت می‌دهیم] ؛ علاوه بر آن ، نشانهٔ ۰ را دخالت‌داده و به این نشانه‌ها اصول موضوع فوق‌الذکر را اضافه‌می‌کنم. عنصر بی‌اثر عمل‌ضرب کوچکترین عدد طبیعی است که همان ۱ باشد . مقادیر مطلق ، اعداد طبیعی هستند .

برای نشان دادن a' نظیر عدد طبیعی a ، نشانهٔ $-a$ پذیرفته می‌شود که به وسیلهٔ علامت تفریق نوشته می‌شود ، این امر هیچ نوع اختلالی ایجاد نخواهد کرد زیرا هر چه باشد عنصر m ، داریم :

$$m+a'=m-a$$

بنا براین قرارداد چنین خواهیم داشت :

$$m+(-a)=m-a$$

بنا براین قرارداد اگر a منفی باشد آن وقت $a'=-a$ مثبت خواهد بود .

برای یك مجموعه‌ای که با آن که فوقاً بنا کردیم ایزومورف باشد اعداد مثبت در تناظر دوسویی با اعداد طبیعی، با علامت + مشخص می‌شوند با این قرارداد که

$$m+(+a)=m+a$$

مجموعهٔ Z اعداد صحیح نسبی عبارت خواهد شد از:

$$+۲ \text{ و } +۱ \text{ و } ۰ \text{ و } -۱ \text{ و } -۲ \text{ و } -۳ \text{ و } -۴ \text{ و } \ldots$$
$$+۳ \text{ و } +۴ \text{ و } \ldots$$

تبصرهٔ مهم - گسترش به وسیلهٔ قرینهٔ سازی که فوقاً انجام گرفت ، همچنین قرارداد نسبی مربوط به علامات + و - بازهم برقرار خواهد بود وقتی که آنرا نسبت به مجموعه‌هایی غنی‌تر از مجموعهٔ اعداد طبیعی اعمال می‌کنیم (توابع ، اعداد اصم) اما اصل موضوع ترتیب نیکو و نتایج حاصله را کنار خواهیم گذاشت .

***

آنالیز بعدی (بقیه از صفحهٔ ۱۱)

مثال ۶- سرعت سیر صوت در گازها

کمیت	علامت	فرمول بعدی
سرعت	V	LT^{-1}
فشار	P	$ML^{-1}T^{-2}$
جرم مخصوص	μ	ML^{-3}

و $VP^{\alpha}\mu^{\beta}$

$$LT^{-1}.M^{\alpha}L^{-\alpha}T^{-2\alpha}.M^{\beta}L^{-3\beta}$$
$$L^{-1-\alpha-3\beta}T^{-1-2\alpha}M^{\alpha+\beta}$$

$$\begin{cases} 1-\alpha-3\beta=0 \\ -1-2\alpha=0 \\ a+\beta=0 \end{cases} \quad \text{و از آنجا} \quad \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{2} \\ \beta=\frac{1}{2} \end{cases}$$

و $VP^{-\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}=ct$

فرمول لاپلاس $V=\sqrt{ct\frac{P}{\mu}}$

قضیهٔ (۲) در این مثال صدق نمی‌کند .

***

حل مسائل شمارهٔ گذشته

(دنبالهٔ صفحهٔ ۴۷)

این رابطه می‌رساند که M برهذلولی متساوی‌القطرینی واقع است که A یك رأس آن و IX و IY مجانبهای آن می‌باشند .

بنابراین منحنی نمایش تابع مفروض، عبارتست از یك نیمدایره وشاخه‌ای از یك هذلولی (شکل ۳)

۲) معادلهٔ مفروض را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{cases} y=\sqrt{x|x-1|} \\ y=m \end{cases}$$

خط (D) به معادلهٔ $y=m$ را در شکل منحنی رسم می‌کنیم ونتایج زیر را ملاحظه می‌کنیم.

اولا اگر $0<m<\frac{1}{2}$ باشد معادله سه‌ریشه داره که دوریشهٔ آن از معادلهٔ $x^2-x+m^2=0$ بدست‌می‌آیند وریشهٔ سوم آن عبارتست از ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$x^2-x-m^2=0$$

ثانیاً اگر $m>\frac{1}{2}$ باشد معادله فقط یك ریشه دارد که ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^2-x-m^2=0$ است.

در حالت $m=\frac{1}{2}$ یك ریشهٔ مضاعف $x=\frac{1}{2}$ و یك ریشهٔ دیگر $x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ خواهیم داشت

از میان نامه های رسیده

● آقای **یحیوی** تذکر داده‌اند که درمقالهٔ ایشان مندرج در یکان شمارهٔ ۱۸ ، صفحهٔ ۱۳ ستون دوم سطرهای ۱۵ و ۱۱ بجای $f''(\alpha)$ باید $f''(\beta)$ چاپ شده باشد .

● آقای **غلامحسین باقرزاده** دانشجوی سال اول دانشکدهٔ علوم مشهد در نامهٔ خود متذکرشده‌اند که نظر آقای ادیبی درمورد اینکه در تاریخ سال صفر وجود ندارد (مندرج در صفحهٔ ۱۱ یکان شمارهٔ ۱۷ ، مقالهٔ تحت عنوان صفر) صحیح نیست و در این باره توضیحات کامل داده‌اند . عین نامهٔ ایشان درشمارهٔ بعد یکان چاپ خواهد شد .

● آقای **هوشنگ شریف زاده** دربارهٔ انتقاداتی که برکتاب تألیف ایشان در شمارهٔ گذشته چاپ شد نامهٔ زیر را ارسال داشته‌اند :

«مدیرمحترم مجلهٔ یکان از لطفی که آقای ارضی نسبت به بنده داشته و با مطالعه و انتقاد ازکتاب حل‌المسائل فیزیك راهنمای کنکور برمن منت نهاده‌اند تشکر می‌نمایم . ضمناً به عرض می‌رساند که اشکالاتی راکه ایشان متذکر شده‌اند باضافهٔ بعضی اشکالات دیگر درهمان ابتدای انتشارکتاب دریك صفحهٔ جداگانه چاپ و ضمیمهٔ کتاب نموده است که قطعاً به نظرایشان نرسیده است . از دریافت نظریات مفید ایشان و سایر دوستان دانشمند خوشوقت خواهم شد . **شریف زاده**»

● آقای **قوام نحوی** نامهٔ زیر را ارسال داشته‌اند :

« ادارهٔ محترم مجلهٔ ریاضیات یکان . اینجانب ضمن مطالعهٔ مقالهٔ «مقسوم علیه‌های یك عدد» که در صفحهٔ ۱۶ شمارهٔ ۱۹ درج شده یادآوری نکات زیررا لازم می‌دانم :

۱- دربارهٔ مجموع مقسوم علیه‌های یك‌عدد می‌توان فرمول بهتری را پیدا کرد که حفظ نمودن آن برای دانش آموزان آسان‌تر است :

$$\begin{cases} N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdots l^{\lambda} \\ S = \dfrac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \dfrac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \dfrac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \\ \qquad \times \cdots \times \dfrac{l^{\lambda+1}-1}{l-1} \end{cases}$$

۲- درمورد **اعداد کامل** که در صفحهٔ ۱۸ مندرج است این اعداد را در تمام کتابهای قدیمی ریاضی منجمله کتاب خلاصة‌الحساب تألیف شیخ بهائی **اعداد تام** نامیده‌اند وبرای یافتن این اعداد ازشعر زیرکه در کتاب کشکول شیخ بهائی است می‌توان استفاده کرد :

چو باشد فرد اول ، ضعف زوج‌الزوج‌کم واحد
بود مضروب ایشان تام ، ورنه ناقص و زائد

منظور از زوج‌الزوج عدد زوجی است که مقسوم علیهی غیر از ۲ نداشته باشد و می‌گوید اگر دو برابر چنین عددی منهای یك ، عدد اول باشد حاصل ضرب آن درعدد زوج‌الزوج عددی است تام . والبته منظور از عدد ناقص آنست که مجموع مقسوم علیه های آن غیر از خودش کمتر از خود عددباشد مانند ۷ وعددزائدعددی است که‌مجموع مقسوم علیه‌های آن ازخودش بیشتر باشد مانند ۱۲. مطلب دیگر راجع به نامهٔ مربوط به آقای محمد قدس درصفحهٔ ماقبل‌آخر است که کلمهٔ قاعدهٔ **طرد** نه‌نه نوشته شده که غلط است و **طرح نه به نه** صحیح می‌باشد .

از اهواز ـ قوام نحوی دبیردبیرستانها»

قابل توجه نمایندگان یکان

از جزوهٔ «راهنمای ریاضیات متوسطه» آنچه‌که چاپ شده بود مصرف شده است خواهشمند است از درخواست این جزوه خودداری فرمایند.

نمایندگانی که از این جزوه بیش‌ازمیزان مصرفی خود در اختیار دارند مازاد را به ادارهٔ مجله عودت دهند .