مجلهٔ ریاضیات

اردیبهشت ماه ۱۳۴۴

دورهٔ دوم ـ شمارهٔ

۱

شمارهٔ مسلسل:

۱۴

در این شماره:

بها : بیست ریال

آغاز دورهٔ دوم

با این شماره دومین دورهٔ انتشار یکان آغاز می‌شود. انتشار مرتب سیزده شمارهٔ ماهانهٔ گذشته ودوشمارهٔ ممتاز «یکان‌سال‌مجموعهٔ علمی» و«یکان‌سال مخصوص امتحانات نهایی» نمونهٔ کوشش ونشانهٔ تلاشی است که درتوسعه و پیشرفت مجلهٔ یکان به‌کار رفته و خواهد رفت. با استقبال گرم خوانندگان گرامی و باتوجهات خاص علاقمندان، این امکان فراهم آمده است که تهیهٔ مطالب و تنظیم مندرجات یکان بنا بر برنامهٔ معین و باطرح پیش بینی‌شده انجام گیرد.

از دوستداران یکان انتظار دارد که برای پیشرفت مجلهٔ محبوب خوداز هرنوع اظهارنظرصریح وبیان هرگونه انتقاد لازم کوتاهی نفرمایند.

عبدالحسین مصحفی

قابل توجه معلمان ریاضی

جلسهٔ عمومی **انجمن معلمان ریاضی** برای تصویب اساسنامه و انتخاب هیئت مدیرهٔ دائم اواخر این‌ماه تشکیل خواهد شد. از معلمان ریاضی که تاکنون اطلاعیهٔ انجمن را برای درخواست عضویت دریافت نداشته‌اند تقاضا می‌شود نشانی خود را اطلاع دهند. همگانی بودن انجمن باتعداد شرکتنندگان در آن تناسب مستقیم دارد. نشانی: توسط صندوق پستی ۲۴۶۳

ورود دکتر اکبر زاده

خوانندگان گرامی یکان به‌یاد دارندکه‌در مصاحبهٔ بااستاد دکتر هشترودی مذکور در شمارهٔ ۷ یکان، ایشان دکتر حسن اکبرزاده را از جمله ریاضیدانان معروف ایرانی مقیم خارج‌نام برده بودند. اخیراً به دعوت دانشگاه تهران آقای دکتر اکبر زاده برای تدریس ریاضیات نسوین به ایران مراجعت نموده و مشغول به‌کار شده‌اند. شورای نویسندگان یکان اقدام نموده است که برای آشنایی علاقمندان با ریاضیات نوین جلسات سخنرانی و بحث و تدریس توسط این شخصیت علمی تشکیل شودکه بعد از تهیهٔ برنامه و محل کلاسها مراتب‌به اطلاع همه خواهد رسید.

برای آشنایی بیشتر خوانندگان یکان باآقای دکتراکبر-زاده قسمتی از مقاله‌ای را که آقای دکتر هوشنگ منتصری در مجلهٔ مسائل ایران به چاپ رسانده‌اند در زیر درج می‌شود:

آقای دکتر **حسن اکبر زاده** در سال ۱۳۰۶ شمسی در شهرستان رشت به‌دنیا آمده، آموزش ابتدائی‌را درهمان شهر و تحصیلات متوسطه را در سال ۱۳۲۶ در دبیرستان البرز خاتمه داده سپس وارد دانشکدهٔ علوم تهران گردیده، درسال ۱۳۲۹

بقیه در صفحهٔ ماقبل آخر

یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ دوم ـ شمارهٔ یکم

شمارهٔ مسلسل: ۱۴

صاحب امتیاز و مدیر مسئول:

عبدالحسین مصحفی

مدیر داخلی: **داود مصحفی**

زیر نظر شورای نویسندگان

هر ماه یك بار منتشر می‌شود

نشانی اداره: تهران ـ خیابان لاله‌زارنو ـ شمارهٔ ۸۱

تلفن اداره: ۳۳۱۸۱

تلفن منزل مدیر: ۷۵۸۵۷۰

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

حساب بانکی: جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنوبانک صادرات

اشتراك ۱۲ شماره ۲۵۰ ریال

تك شماره ۲۰ ریال

مقاله‌های وارده مسترد نمی‌شود

چاپ آذر تلفن ۶۴۰۲۸

اصول موضوعهٔ جبر

●●●●●●●●●●

ترجمهٔ: مهدی مدغم

روزها همه‌جا صحبت از تجدید نظر در برنامهٔ ریاضیات دانشگاه است. درممالك مشرقی بعضی پیشنهاد می‌کنند مانند هندسه بر پایهٔ منطق و بر روی چند اصل موضوعه ده شود. بنابراین جالب به‌نظر می‌رسد که توسعهٔ اصول جبر را مورد بررسی قرار داده تاریخ آن را مطالعه کنیم. کسی که دست کم یك کتاب جبر خوانده باشد به قواعدی د زیر برخورده است.

$\begin{cases} a+b=b+a \\ ab=ba \end{cases}$ قانون استقلال از ترتیب عوامل و

$a(b+c)=ab+ac$ قانون توزیعی

ایدعم بعضی اوقات خوانندهٔ کتاب پیش خود فکر نموده ی ندارد با خواندن مطالبی ساده و بدیهی مانند برابری- نکر خود را آزرده و مغز خود را خسته نماید.

اینجا منظور آنست که نشان دهیم که این مطالب بدیهی ستم حساب و جبر که تازه رشد می‌کند و هندسه انتزاع پیدا ن بلکه این دستگاه به‌وجود آمده است تا احتیاجات مان ریاضی را که اکنون **حوزه** یا **هیئت** «Field» نامیده آورد.

نیت $a+b=b+a$ را در نظر می‌گیریم. از نظر اعداد مقیه این اصل حتی برای انسانهای اولیه بدیهی . انسان اولیه می‌دانسته است که اول سه خط قائم و بعد روی دیوار غار نقش نماید یا اینکه اول دو خط و سپس ید تفاوتی ندارد و این خود قانون $3+2=2+3$ می‌باشد ح پایین و مقدماتی به‌کار برده شده است.

صری‌ها نیز قبل از ۱۸۵۰ پیش از میلاد اطلاع داشته‌اند که در فرض $ab=ba$ وجود دارد. **کیس (Chace)** در اظهار خود دربارهٔ پاپیروس ریند (Rlind) متذکر می‌شود که ضرب کردن مصری‌ها تفاوتی بین مضروب و مضروب فیه وجود ت با این حال می‌دانسته‌اند که اگر جای مضروب و مضروب فیه د حاصل ضرب تغییر نمی‌نماید. مثالی که برای تغییر عوامل پاپیروس ریند یافته می‌شود مسئلهٔ شمارهٔ ۲۶ آن است که علاوه بر تغییر عوامل ضرب خود شامل نکتهٔ دیگری است و آن اینکه مصری‌ها برای حل مسائلی که ما امروز مسئلهٔ جبر می‌نامیم چه روشی به‌کار می‌برده‌اند. روش آنها در حل این گونه مسائل روش فرضی بوده است یعنی جواب مسئله را مقداری فرض می‌کرده‌اند. سپس از رابطهٔ بین مقدار فرضی و اصلی مجهول مسئله را پیدا می‌نموده‌اند.

بدنیست این مسئله را همان‌طور که در نسخهٔ اصلی نوشته شده و شامل صورت و حل و استدلال آن است در این جا ذکر کنیم.

صورت مسئله عددی را با $\frac{1}{4}$ همان عدد جمع کرده‌ایم نتیجه ۱۵ شده است آن عدد کدام است؟

حل فرض می‌کنیم آن عدد ٤ باشد در این صورت داریم:

٤	۱ برابر آن
۱	$\frac{1}{4}$ برابر آن
٥	مجموع یك برابر و یك چهارم آن عدد

برای به‌دست آوردن ۱۵ عدد ٥ را در هر عددی ضرب کنیم برای به‌دست آوردن مجهول نیز ٤ را باید در همان عدد ضرب نمائیم پس ٥ را در اعداد مختلف ضرب می‌کنیم تا ۱۵ حاصل شود.

٥	۱
۱۰	۲
۱۵ = حاصل جمع	۳

چون طبق جدول فوق ۱۵ حاصل ضرب ٥ در عدد ۳ می‌باشد پس مجهول نیز حاصل ضرب عدد ٤ در عدد ۳ خواهد بود بنابراین

۳	۱
٦	۲
۱۲	٤

پس عدد مجهول برابر ۱۲ می‌باشد که به‌ترتیب زیر امتحان می‌شود.

۱۲	۱
۳	$\frac{1}{4}$
۱۵	جمع

توجه نمایید که درمسئلهٔ فوق که مطابق با نوشتهٔ مصری‌ها است حل کنندهٔ مسئله نتیجه گرفته است که برای یافتن جواب باید ٤ در ٣ ضرب شود اما درعمل ٣ در ٤ ضرب شده است یعنی درعمل جای عوامل ضرب تغییر نموده است اما چرا جای عوامل ضرب را عوض نموده‌اند احتمالاً آن است که مصری‌ها تمام ضرب‌ها را به‌وسیلهٔ دوبرابر کردن انجام می‌داده‌اند نتیجهٔ ساده‌تر آن بوده است که ضرب را به‌وسیلهٔ قوای دو انجام دهند. عملا برای ضرب کردن ٤ در ٣ مجبور بوده‌اند که ٤ را دوبرابر کرده با خود آن جمع نمایند یعنی ضرب ٤ در ٣ را این‌طور انجام می‌داده‌اند.

٤	١
٨	٢
١٢	٣

هم‌چنین مصری‌ها قانون توزیعی $a(b+c)=ab+ac$ را به کار می‌برده‌اند بدون اینکه آن را مطلبی اساسی تشخیص داده باشند. چیزی که ادعای فوق‌را روشن می‌سازد مسئلهٔ شمارهٔ ٦٨ پاپیروس‌رینه می‌باشد در این مسئله برای دوبرابر نمودن $3\frac{21}{64}$ چنانچه درنسخهٔ اصلی نوشته شده است این عدد را به صورت $3+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ درآورده سپس هرجمله‌را در ٢ ضرب نموده این عبارت‌را به‌دست آورده‌اند. $6+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$ که البته مساوی $6\frac{21}{32}$ می‌باشد. دراینجا نیز به نکتهٔ دیگری برمی‌خوریم که آنها درعملیات خود کسرهایی به کار می‌برده‌اند که صورت آن کسرها برابر واحد بوده است.

بابلی‌ها درحدود ١٧٠٠ سال پیش ازمیلاد، قوانین توزیعی واستقلال ازترتیب عوامل را به کار می‌برده‌اند و این مطلب که ازاین‌جا نتیجه می‌شود که فورمولهایی مانند $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ را استعمـــــــال می‌کرده‌اند. واردن (waerden) مثال‌های خوبی ازجبر بابلی‌ها ارائه می‌نماید که مدعای فوق‌را می‌رساند. او می‌نویسد.

بابلی‌ها فرمولهای: $(1)(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(2)\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

را می‌دانسته‌اند زیرا دریکی ازنسخه‌های قدیمی که از بابل به‌دست آمده مسئلهٔ زیر وجود دارد « من دومربع دارم که مجموع مساحات آن‌دو ٢٥ و ٢٥ وضلع مربع دوم $\frac{2}{3}$ ضلع مربع اولی به‌علاوهٔ ٥ می‌باشد».

واین جمله مطابق با معادلات زیر است.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25\text{و}25 \\ y=\frac{2}{3}x+5 \end{cases}$$

(توضیح- بابلی‌ها برای نوشتن اعداد مبنای ٦٠ را به‌کار می‌بردند بنابراین ٢٥و٢٥ یعنی $25+60\times25$ و ٤٠و٢٦و١ یعنی $1+\frac{26}{60}+\frac{40}{60}$)

با استعمال علاماتی که فوقاً شرح داده شد عبارت $y=\frac{2}{3}x+5$ را به‌صورت $y=40x+5$ می‌توان نوشت پس:

$$y^2=(40x+5)^2=40^2x^2+2\times40x+5^2$$

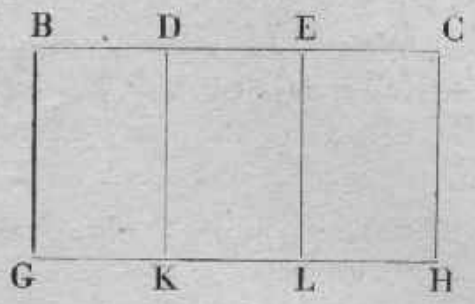
که چون این مقدار درمعادلهٔ اول قرار داده شود معادلهٔ درجهٔ دومی به‌صورت $ax^2+2bx=c$ به دست می‌آید که ضرایب آن چنین است:

$a=1+40^2=1\text{و}26\text{و}40$ و $b=5\times40=3$ و ٢٠

و ٠٠ و $c=25\text{و}25-5^2=25$ و ٢٥ طبق این نسخه اول ضرایب a و b و c محاسبه شده سپس جواب معادله از فرمول $x=a^{-1}(\sqrt{ac+b^2}-b)$ سپس $y=\frac{2}{3}x+5$ حساب شده است. مطالب فوق می‌رساند که روش حذفی و اتحاد شمارهٔ (١) را درآن موقع می‌دانسته‌اند.

وقتی ریاضیات یونانیان قدیم را ازمدنظر یکدرانیم متوجه می‌شویم که اقلیدس ازقانون توزیعی اطلاعات وسیعتری داشته‌است. وی در کتاب جبرهندسی خود قضیهٔ زیررا ارائه وثابت نموده‌است.

«اگر دوقطعه خط BG و GH داشته‌باشیم و GH را به قسمت GK و KL و.... تقسیم کنیم مستطیلی که از دو قطعه خط BG و GH ساخته می‌شود مساوی است «با مجموع مستطیل‌هایی که یك ضلع آنها بترتیب GK و KL و..... و ضلع دیگرشان BG باشد.



مطابق شکل فوق:

$$^{s}BGHC={}^{s}BGKD+{}^{s}DKLE+{}^{s}ELHC$$

$$a(b+c+d)=ab+ac+ab$$

هرچند اقلیدس درمورد خاصیت توزیعی همچنان که درمورد مساحات به کار برده است بسیار صریح بوده است اما در کتاب هفتم اقلیدس که وی با چنین اعداد وخواصی سروکار دارد خاصیت توزیعی را به‌کار نبرده است. چنین به‌نظر می‌رسد وی خاصیت توزیعی را جزء خواص طبیعی اعداد می‌دانسته و تصور می‌کرده است که تذکر به خصوصی دراین مورد لازم نیست. حال این سؤال پیش می‌آید که چنین خواصی را که قبلا مسلم فرض می‌شد از چه تاریخ به عنوان اصول موضوعه شناختند. ازمیان اصول موضوعهٔ حساب وجبر اصل زیر را مخصوصاً مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قانون شرکت‌پذیری $(a+b)+c=a+(b+c)$

و $(ab)c=a(bc)$

قانون استقلال ازترتیب عوامل $a+b=b+a$

$ab=ba$

قانون توزیعی $a(b+c)=ab+ac$

اصول فوق درزمینهٔ اول قرن نوزدهم چنین عنوان‌هایی‌رابه خودگرفتند. نامهای‌دواصل دوم وسوم‌را **سروئیس**(Servois) هنگام بحث‌دربارهٔ توابع انتخاب کرده‌است.

سروئیس بیان‌می‌کند که‌اگر $\Phi Z=F\Phi Z$ و Φ تابع و z متغیرمستقل باشد F و Φ را توابع مستقل ازترتیب می‌نامیم. وی همچنین اظهار می‌دارد که اگر

$F(x+y+\ldots\ldots)=Fx+Fy+\ldots\ldots$ تابع F را توزیعی نام می‌دهیم (وی‌دربارهٔ استعمال‌پرانتزها پیش‌ازما مضایقه می‌نموده‌است)

قانون شرکت‌پذیری‌درسال ۱۸۵۳ به‌وسیلهٔ **هامیلتون**(Hamilton) درسخنرانیهایی که‌راجع به‌اعدادچهارگانه‌می‌نمود ذکرمی‌نمود (Quadernions) ذکرشد. وی‌درمقدمهٔ‌سخنرانیها به‌خاصیت‌شرکت‌پذیری‌اهمیت زیادی می‌دهد. البته قانون شرکت پذیری مدتها پیش‌ازاینکه نام‌گذاری‌شود به‌کار برده می‌شد همچنین ازسال ۱۸۳۰ وقتی **لژاندر** (Legendre) درتئوری‌اعدادمتوجه‌این‌شد. این‌قانون به‌طورصریح به‌کار برده شده‌است. لژاندر می‌نویسدهرکس معمولا بدیهی‌می‌داند که‌ضرب عدد C درعدد N که خود حاصل‌ضرب دوعدد A و B می‌باشد اگر C در A ضرب وحاصل در B ضرب شود نتیجه‌با حاصل‌ضرب C در N یکی است. لژاندرمطلب فوق‌را با علامات‌ریاضی‌چنین‌می‌نویسد.

$$C\times\overline{AB}=\overline{CA}\times B$$

اکنون این سؤال‌را مطرح می‌کنیم که‌اصول موضوعهٔ‌دیگری که درگذشته به‌طورضمنی‌درجبروحساب‌استعمال می‌شده‌است چیست؟

برای جواب به‌این سؤال بهتراست ازنقطهٔ نظر تاریخی‌و ملاحظات منطقی دربارهٔ یک‌گروه صحبت کنیم.

تعریفـ گروه‌مجموعه‌ای‌است ازعناصر (مانند اعداد) ویک‌عمل (مانند جمع) با خواص زیر:

۱ـ بسته بودن (Closure)ـ مجموع دوعدد متعلق به‌مجموعه، عددی است متعلق به‌همان مجموعه.

۲ـ شرکت پذیری:

$(a+b)+c=a+(b+c)$

۳ـ وجود عنصر همانی ـ (Identity Element) ـ مانند عدد صفر درجمع تقسیمی که هرعدد مانند a ازمجموعه‌با عنصرهمانی یعنی‌صفر جمع شود خودآن عدد یعنی a به دست می‌آید.

۴ـ وجود عنصرمعکوس (YnverseElement) مانند a ـ درجمع تقسیمی که‌مجموع‌هرعنصرومعکوس آن مساوی عنصرهمانی گردد.

$a+(-a)=(-a)+a=0$

واگرخاصیت پنجمی به‌شرح زیر:

۵ـ استقلال ازترتیب‌عوامل (Commutativity) $a+b=b+a$ را به خواص‌فوق اضافه کنیم گروه‌حاصل، گروه مستقل‌ازترتیب عناصر نامیده می‌شود.

مثلا اعدادصحیح (مثبت،منفی یاصفر) درجمع‌معمولی‌یک گروه مستقل ازترتیب عوامل را تشکیل می‌دهند چه دارای ۵ خاصیت فوق می‌باشند اما اعدادصحیح فرد درجمع‌معمولی گروه‌تشکیل نمی‌دهند زیرا مجموع دوعدد فرد یک‌عدد فرد مثبت یا به‌عبارت دیگر مجموع دوعدد ازمجموعه متعلق به‌مجموعه نیست پس‌خاصیت‌اول را دارا نمی‌باشند. اصل سوم‌هم دربارهٔ گروه اخیرصدق نمی‌کندزیرا صفرجزو اعداد فردنیست وبنابراین متعلق به‌مجموعه نمی‌باشدپس این مجموعه دارای عنصر همانی نیست‌درنتیجه اصل چهارم هم‌در مورد این گروه صدق نمی‌نماید.

البته ۵ اصل موضوعهٔ فوق مدتها پیش‌ازتعریف گروه‌مستقل ازترتیب عوامل، شناخته‌شده بوده است.

اصل اولـ چیزی است که ریاضی‌دانان اولیه‌وقتی لزوم به‌کار بردن کسرهارا برای تعمیم تقسیم درک نمودند باآن روبروشدند. آنان بدون‌هیچ‌اشکال ۱۲ را به ۴ و ۱۵ را به ۵ تقسیم می‌نمودند اما برای تقسیم ۲ به ۳ به‌کسری مانند $\frac{2}{3}$ احتیاج داشتند.

اصل دومـ دراولین مرحله به‌نظرمی‌رسد که ازسایر اصول کمترجالب می‌باشد چه هرکس می‌گوید البته

$(3\times5)\times2=3\times(5\times2)$ و یا $2+(5+1)=(2+5)+1$ این اصل وقتی که‌دستگاه اعدادرا ازاعدادصحیح به‌اعدادگویا (اعدادصحیح و کسری) وازاعدادگویا به‌اعدادحقیقی (اعدادگویاواصم) توسعه می‌دهیم بازصدق می‌کند. درحقیقت این اصل درمورد اعداد متغیرمختلط مانند $3+4i$ با یک‌قسمت حقیقی ویک قسمت مختلط نیزصدق‌می‌نماید. همچنین این‌اصل درمورد اعدادچهارگانهٔ **هامیلتون** مانند

$3+2i+5j+4k$ با یک قسمت حقیقی و سه قسمت مختلف مجازی صدق می‌نماید. اما در ضرب اعداد **کی‌لی** (Cayly) که یک قسمت حقیقی و ۷ قسمت مجازی دارند بنای این اصل فرو می‌ریزد.

دربارهٔ اصل سوم یا وجود عنصر همانی وجود صفر را در جمع اعداد ذکر نموده‌ایم. داستان صفر هم داستان جالبی است. علامت و مفهوم صفر در موقعی تعیین شد که لازم بود به چند سؤال جواب داده شود. رل صفر را در موقعیت اعداد به خوبی هر کس می‌داند. رل دیگری که صفر بازی می‌کند حل معادلاتی مانند $5\times x=5$ می‌باشد و همین جاست که نیاز به عنصر واحد یعنی چیزی که با ۵ جمع شود و خود ۵ به دست آید احساس می‌شود.

اصل چهارمـ باوجود عنصر معکوس وقتی عمل جمع در نظر گرفته شود احتیاج به اعداد منفی دارد. گرچه چینی‌ها اعداد منفی را درک نموده و اعداد مثبت را با قرمز و اعداد منفی را با سیاه نشان می‌دادند اولین ذکری که از اعداد منفی به میان آمده است در کارهای **دیوفانت** در حدود سال ۲۷۵ به دست می‌آید. وی قواعدی برای عملیات مربوط به «موجودی ها» و «نیازمندی‌ها» در مواردی که نتیجهٔ نهایی «موجودی» می‌باشد عرضه می‌نماید. اما به طور مسلم مفهومی از عدد منفی مجرد نداشته و مثلا معادلهٔ $4x+20=4$ را به علت اینکه جواب $x=-4$ داشته است مهمل و بی‌معنی می‌پنداشته است. **نردان** (Cardan) در یکی از کتابهای خویش که به سال ۱۵۴۵ نوشته است جوابهای منفی معادلات را تشخیص داده و قواعدی برای اعداد منفی بیان نموده است. با این ترتیب معادله‌ای مثل $x+7=0$ که جواب آن $x=-7$ می‌باشد بیان آنست که عنصر معکوس $+7$ عدد -7 می‌باشد.

اصل پنجم (استقلال از ترتیب عوامل) به طور ضمنی دانسته شده و مدتهای متمادی به کار می‌رفت. اما چهرهٔ اصلی آن در قیافهٔ یک اصل موضوع موقعی عیان شد که هامیلتون دریافت که قانون استقلال از ترتیب عوامل برای ضرب اعداد چهارگانهٔ وی صادق نیست.

این کشف هامیلتون که اعداد چهارگانهٔ وی (که از حدود اعداد مختلط گذشته و گاهی اعداد فوق مختلط نامیده می‌شوند) از یکی از خواص منتظرهٔ اعداد سرپیچی می‌کند این سؤال را پیش آورد که چه اصول موضوعه‌ای برای تعریف دستگاههای مختلف اعداد مورد نیاز است.

جواب این سؤال در رشته دیگری از تحقیقات ظاهر گشت. هنگامی که حل معادلات جبری مطالعه می‌شد تئوری گروهها جلب نظر نمود. پیشروان این راه **لاگرانژ** (Lagrange) ۱۷۷۰ و **روفینی** (Ruffini) ۱۷۹۹، **کوشی** (Couchy) ۱۸۱۴، **آبل** (Abel) ۱۸۲۴ و به خصوص **گالوا** (Galois) ۱۸۳۱ بودند. اولین بحث تئوری گروهها از نقطهٔ نظر مجرد بودن به وسیلهٔ **کی‌لی** (Cayley) در ۱۸۵۴ به عمل آمد و بالاخره برای اولین بار مجموعه‌ای از اصول موضوعه به وسیلهٔ **دانکر** (Kranecker) در ۱۸۷۰ و **وبر** (H.weler) در ۱۸۸۲ به طور صریح عرضه شد.

فوقاً اشاره شد که اعداد صحیح تشکیل گروهی می‌دهند که شرط این که عمل گروه را عمل جمع در نظر بگیریم ولی اگر عمل ضرب عمل گروه شناخته شود اعداد صحیح تشکیل گروه نمی‌دهند زیرا عنصر معکوس ۷ که $\frac{1}{7}$ می‌باشد در زمرهٔ اعداد صحیح نیست یعنی اصل چهارم در این مورد صادق نیست زیرا غیرممکن است که عدد صحیح x را به قسمی تعیین نمود که $7\times x=x\times 7=1$ (عنصر همانی گروه در ضرب عدد یک می‌باشد زیرا $N\times 1=1\times N=N$)

اما اعداد گویا (اعداد صحیح و کسری) در تحت عمل ضرب گروهی مستقل از ترتیب عوامل تشکیل می‌دهند بدیهی است در این مورد نیز صفر را باید استثنا کرد چه عنصر معکوس ندارد. به آسانی ملاحظه می‌شود که به استثنای صفر وقتی مجموعهٔ کسرها را در نظر بگیریم و ۵ اصل موضوعهٔ گروهها را امتحان نماییم این مجموعه تشکیل گروه می‌دهند. اعداد گویا همراه با صفر گروهی مستقل از ترتیب عوامل تشکیل می‌دهند که به شرطی که گروه عمل جمع باشد. علاوه بر این، دو گروه فوق با قانون توزیعی $a(b+c)=ab+ac$ مربوط می‌شوند و ما اصطلاحاً می‌گوییم **ضرب نسبت به جمع توزیعی است.**

حال اگر کلیهٔ اصول موضوعه‌ای را که تا به حال به دست آورده‌ایم در نظر بگیریم یازده اصل زیر را خواهیم داشت.

گروه جمعی (گروهی که عمل جمع عمل گروه است).

۱ـ بسته بودن یعنی $a+b$ متعلق به مجموعه است.

۲ـ شرکت‌پذیری $(a+b)+c=a+(b+c)$

۳ـ عنصر همانی صفر (۰) به قسمی که $a+0=0+a=a$

۴ـ عنصر معکوس $(-a)$ به طوری که $a+(-a)=(-a)+a=0$ برای هر عنصر a متعلق به مجموعه

۵ـ استقلال از ترتیب عوامل $a+b=b+a$

گروه ضربی (گروهی که عمل ضرب عمل گروه است).

۶ـ بسته بودن $a\times b$ متعلق به مجموعه است.

۷ـ شرکت‌پذیری $(a.b).c=a.(b.c)$

۸ـ عنصر همانی (۱) به قسمی که $a\times 1=1\times a=a$

۹ـ عنصر معکوس a^{-1} به قسمی که $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ برای هر عنصر مخالف صفری مانند a متعلق به مجموعه.

۱۰ـ استعمال از ترتیب عوامل $a.b=b.a$

۱۱ـ قانون توزیعی $a(b+c)=ab+ac$

گوئیم که یازده اصل فوق یک **هیئت** (Field) را مشخص می‌نمایند. مثلا اعداد گویا تحت عمل جمع و ضرب معمولی تشکیل هیئت می‌دهند زیرا اصول یازده گانهٔ فوق دربارهٔ آنها صدق می‌کند.

بقیه در پائین صفحهٔ ۴۹

نامهٔ زیر از استاد گرامی جناب آقای دکتر افضلی پور واصل شده است که عیناً چاپ می‌شود. از توجه مخصوصی که ایشان نسبت به مندرجات یکان مبذول می‌فرمایند کمال سپاسگزاری را داریم. شورای نویسندگان یکان.

نکته‌ای چند دربارهٔ

مجموع جزئی رشتهٔ همساز

در بخش «پرسش و پاسخ» مجلهٔ یکان شمارهٔ ۱۳ سؤالی دربارهٔ مجموع جزئی رشتهٔ همساز که جملهٔ کلی آن $u_n = \frac{1}{n}$ است طرح شده بود. پاسخ دهنده باروش کلاسیك و اگرائی این رشته را اثبات کرده و در پایان نوشته بود که دستوری برای تعیین عبارت مجموع جزئی این رشته ندیده است.

من میخواهم آنچه را که دربارهٔ این مسئله میدانم در اختیار پرسش کننده وخوانندگان دیگر مجلهٔ یکان بگذارم. ۱۸ر۱ر۱۳۴۴

دکتر علی افضلی پور

استاد دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

رشتهٔ همساز $u_n = \frac{1}{n}$ حالت خاص رشته‌ای است به نام رشتهٔ p که عبارت جملهٔ کلی آن $u_n = \frac{1}{n^p}$ میباشد. دراین عبارت p عددی است غیر مشخص و n عددی است درست. بطرق گوناگون مثلا باآزمون انتگرال می‌توان ثابت کرد که رشتهٔ p برای $p > 1$ همگرا و برای $p \leq 1$ واگرا است. ضمناً باهمین آزمون معلوم می‌شود که اگر مجموع جزئی (مجموع n جملهٔ اول) رشته‌را برای $p = 1$ با

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

نمایش دهیم رتبهٔ بزرگی این مجموع جزئی مانند رتبهٔ بزرگی لگاریتم طبیعی عدد n یعنی $\log n$ است. اگر بنویسیم:

$$D_n = S_n - \log n$$

می‌توان ثابت کرد که وقتی $n \to \infty$ تفاضل D_n دارای حدی است. این حد را مقدار ثابت **الر - ماسکرنی** (Euler - Mascheroni) نامیده و آنرا با γ نمایش میدهند:

$$\lim_{n \to \infty} D_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - \log n) = \gamma$$

برای مقدار ثابت γ عبارتهای گوناگون موجود است مانند.

$$\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-x} \log x \, dx$$

$$\gamma = -\int_0^{1} \log\left(\log \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\gamma = \int_0^{1} \frac{1 - \cos x}{x} dx - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

تاآنجا که من اطلاع دارم ماهیت حسابی مقدار ثابت (الر- ماسکرنی) تاکنون معلوم نشده ولی **جی.سی. آدامس** (J.C.Adams) مقدارآنرا تا ۲۶۳ رقم اعشار حساب کرده که بیست رقم اول آن چنین است:

$\gamma = ۰٫۵۷۷۲۱\ ۵۶۶۴۹\ ۰۱۵۳۲\ ۸۶۰۶۱$

پس عبارت مجانبی مجموع جزئی S_n رشتهٔ همساز بدین صورت است:

$$S_n \# \log n + \gamma$$

همچنین میتوان برای S_n عبارتی برحسب انتگرال نوع دوم الریمنی تابع گاما یافت. چنانکه میدانیم عبارت این تابع چنین است:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dn$$

برای مقادیر درست ومثبت n با انتگراسیون جزء بجزء

رابطهٔ مهم :

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

میان تابع گاما و تابع فاکتریل بدست میاید . بدین سبب گاه تابع نوع دوم‌الرا تابع فاکتریل نیز مینامند .

چون از دو طرف عبارت تابع گاما بسرحسب n مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\Gamma'(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\log x\,dx$$

میتوان ثابت کرد که میان مجموع S_n رشتهٔ همساز و تابع گاما و مشتق آن و مقدار ثابت الر ـ ماسکرنی این رابطه برقرار است :

$$S_n=\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}+\gamma=[\log\Gamma(n+1)]'+\gamma$$

چون برای تابع گاما و مشتق آن جدولهای مفصل تنظیم شده در صورت لزوم میتوان با استفاده از آنها مجموع جزئی S_n رشتهٔ همساز را برای هر مقدار n با تقریب بسیار رضایت‌بخش بدست آورد .

ضمناً از عبارت مجانبی $\log n+\gamma$ مجموع جزئی S_n معلوم میشود که گرایش S_n به‌سوی ∞ بسیار کند است . مثلا مجموع یك میلیارد جملهٔ اول رشتهٔ همساز یعنی مقدار S_n وقتی $n=10^9$ است تقریباً چنین است :

$$9\times 2{,}3026+0{,}5772=21{,}3$$

بی آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

در یك ردیف خانه پنج زوج زندگی می‌کنند : آقا و خانم صبور . وفا . صبا . غیور و پایا . پنج فروشنده هستند که هیچکدام متأهل نیستند و به این خانه‌ها مراجعه می‌کنند . فرض کنیم که اینها بقال و نفت فروش و نانوا و قصاب و روزنامه فروش باشند . اسامی این فروشنده‌ها عبارتست از صبور . وفا صبا . غیور و پایا اما نه به ترتیب .

خواهر شوهردار قصاب در خانهٔ شمارهٔ ۱ زندگی می‌کند .
آقای غیور در همسایگی دیوار به دیوار شخصی که همنام نفت فروش است زندگی می‌کند .
شخصی که همنام روزنامه فروش است خویشاوندی ندارد .
شخصی که همنام قصاب است در خانهٔ شمارهٔ ۲ زندگی می‌کند .
آقای غیور با شوهر خواهر قصاب به‌کار می‌رود .
آقای وفا به‌شخصی که همنام نفت فروش است در باغچه‌اش کمك می‌کند .
آقای صبا در همسایگی دیوار به دیوار شخصی که همنام روزنامه‌فروش است زندگی می‌کند .
خانم صبور و خانم غیور خواهرند .
شخصی که همنام نانواست فقط یك شوهر خواهر دارد که در خانهٔ شمارهٔ ۳ زندگی می‌کند .
آقای پایا در همسایگی دیوار به‌دیوار شخصی که همنام نفت فروش است زندگی می‌کند .
آیا می‌توانید بگوئید که نام هریك از فروشنده‌ها چیست ؟ همچنین شماره‌های خانهٔ هریك از این زوجها چیست ؟

پاسخ مسئلهٔ شمارهٔ ۱۲ سال اول زیر همین عنوان

اگر d را مجموع طولهای دوترن و v را سرعت ترن باری ، t_1 را زمان سبقت گرفتن و t_2 را زمان ردشدن دو ترن از هم بگیریم خواهیم داشت .

$$t_1=\frac{d}{xv-v} \quad \text{و} \quad t_2=\frac{d}{xv+v} \quad \text{پس} \quad \frac{d}{v(x-1)}=\frac{xd}{v(x+1)}$$

$$x^2-2x-1=0 \quad \text{و} \quad x=1+\sqrt{2}$$

نظریهٔ معادلات

حل معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم کامل

سید محمد کاظم نائینی

جبر در آغاز پیدایش خود معنی و مفهوم بسیار ساده و محدودی داشت و به آن قسمت از جبر عمومی محدود می‌شد که امروزه نام نظریهٔ معادلات را بر آن اطلاق می‌کنند.

کلمهٔ جبر Algebre دارای ریشهٔ عربی است و به معنی شکسته‌بندی یا جبران کردن آمده است اما استعمال کلمهٔ جبر به مفهومی که امروز متداول است فقط به خاطر عنوان کتابی است که توسط **محمدابن‌موسی خوارزمی** (وفات بین ۸۳۵ تا ۸۴۵ میلادی) نگاشته شده است این کتاب **(الجبر والمقابله)** نام دارد و اولین اثری است که در زمینهٔ جبر به اروپای غربی رفته و به لاتین ترجمه شده است.

خوارزمی (۱) کلمهٔ **جبر** را به معنی و مفهوم جابجا کردن عبارات در یک معادله از یک طرف به طرف دیگر به کار برده است مانند تبدیل $7x-11=31$ به $7x=31+11$ **مقابله** حذف جمل متشابه است.

امروز آن شاخه از جبر که به نام معادلات نامیده می‌شود عظیمترین و مفیدترین و مفصلترین قسمتهای جبر را تشکیل می‌دهد و خود نیز شامل مباحث مهم و مختلفی است که هر یک ارزش و اعتباری جداگانه دارد مانند معادلات کثیرالجمله‌ای (عمومی درجهٔ n) کسری، اسم، مجهول القوا، لگاریتمی، مثلثاتی و معادلات متعالی، معادلات با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل و غیره. ما اینک معادلاتی را که به صورت کثیرالجمله هستند مورد بحث و بررسی قرار داده و چگونگی حل و تاریخچهٔ آنرا بیان می‌داریم و از آن میان به خصوص طرق مختلف حل معادلات درجهٔ چهارم و سوم را که عدهٔ زیادی از دانش‌آموزان بارها خواستار آن بوده‌اند بیان خواهیم داشت سپس هر کدام از شعب مختلف معادلات را در فرصتهای مناسب به تفصیل مورد بحث قرار خواهیم داد.

***

تعریف: هرگاه حروف و اعداد به وسیلهٔ علامتهای جبری چون + و − و × و ÷ و √ و خط کسری و غیره به هم مربوط شده و با ملاطی به نام علامت ترکیب و تلفیق شوند یک عبارت جبری به وجود می‌آید. سنجش و مقایسهٔ دو عبارت جبری به ویژه همانندی و برابری آنها با علامت = (مساوی) بیان می‌شود. خاصیت این علامت و خصوصیات عدد صفر نظریهٔ معادلات را در جبر به وجود آورده است.

برابری بین دو عبارت جبری که هر دو فقط شامل یک حرف (نمایندهٔ عدد) باشند معادلهٔ یک حرفی یا یک مجهولی نامیده می‌شود و بزرگترین قوهٔ مجهول آنرا درجهٔ معادله می‌گویند.

روشی که شامل جابجا کردن تمام جمل یک معادله به یک طرف و نوشتن آن به صورت $f(x)=0$ است بنام اصل هاریوت نامیده می‌شود که بهتر بود به نام اصل خوارزمی می‌نامیدیم چه این روش برای اولین بار به وسیلهٔ وی بکار رفته است.

این اصل امکان وسیعی در تبدیل معادلات به حاصل ضرب و فاکتورگیری پدید آورده است که این خود نیز منجر به بحثی گردیده با یک سری روابط که ریشه‌های یک معادله را به ضرایب آن مربوط می‌سازد.

دکارت دربارهٔ هندسهٔ تحلیلی خود و ایجاد نظریهٔ توابع از این اصل استفاده کرده است و همچنین در بسیاری از گسترشهای نظری مانند توابع متقارن و قضیهٔ اصلی جبر و توابع با متغیرهای

---

(۱) محمد خوارزمی یکی از ریاضی‌دانان بزرگ ایران در قرن نهم میلادی است و کلمه الگوریتم algorithm که مترادف عددنویسی وضعی است تعبیر صورتی از اسم الخوارزمی است. این کلمه امروز به معنی محاسبات مرتب است و در حقیقت نمایندهٔ هر روش ریاضی است که دارای مراحل مختلف بوده و در هر مرحله نتیجه‌ای که از مرحلهٔ قبل بدست آمده است مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مختلط این اصل به‌خوبی مشهود است .

مقادیر حقیقی و مختلط که برای آنها این اصل بکار میرود نه‌تنها ازقوانین جبر تبعیت می‌کنند بلکه تابع قانون عامل صفر نیز می‌باشند (حاصلضرب چندعامل نمی‌تواند برابر صفر گردد مگر آنکه لااقل یکی ازعوامل آن صفر باشد)

اغلب معادلات مربوط به پارامتر (جانگهدار عدد) می‌باشند ودرحالت کلی این پارامترها ثابت نیستند ومانه‌تنها بایك معادله بلکه بامجموعه‌ای از معادلات سروکار خواهیم داشت مثلامعادلهٔ عمومی درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ وقتی ضرایب a و b و c پارامتر بوده تمام مقادیر گویا چه‌مثبت وچه‌منفی وچه صفررا بپذیرند مجموعه‌ای از معادلات درجهٔ دوم کامل حاصل می‌شود این مجموعه شامل معادلاتی نظیر:

$0\times x^2+0\times x+0=0$ و

$0\times x^2+0\times x+c=0$ و

$0\times x^2+bx+c=0$

نیز می‌باشد. ازنظر جبر معادلهٔ اول یك معادلهٔ درجهٔ دوم نیست بلکه یك معادلهٔ درجهٔ یك است. معادلهٔ دوم یك نابرابری است $(c\neq 0)$ ومعادلهٔ سوم یك تکرار بیهوده است ولی به‌وجود آمدن این معادلات به‌واسطهٔ صفات ذاتی عدد صفراست و ما به‌موجب اصل هاربوت ناگزیر ازبرخورد بااین صورتهای خاص هستیم درصورتی که با اصول و تعاریف معادلات قابل توجیه نیستند و تعاریف جامعتری لازم دارند. وماا گر صفررا به‌عنوان عنصری ازقلمرو اعداد به‌شمار آوریم ازاین‌قبیل معادلات که با صورت کلی تطابق ندارند نمی‌توانیم اجتناب کنیم.

همچنین در معادلهٔ $ax+b=0$ که خطی وساده‌ترین نوع معادلات است اگر قبول کنیم پارامترهای a و b جمیع مقادیر ممکن را می‌پذیرند حتی صفر، در این‌صورت هیچ‌عدد گویائی در رابطهٔ $0\times x+b=0$ صدق نمی‌کند و معادلهٔ $0\times x+0=0$ برای تمام‌مقادیر گویای x صادق‌است‌واین امربا خاصیت اصلی معادلهٔ درجهٔ یك $ax+b=0$ که فقط یك‌عدد گویابرای x می‌توان یافت که در آن صدق کند مطابقت ندارد و در دومعادلهٔ استثنائی فوق کلمهٔ یك به‌کلمات هیچ و هر تبدیل شده است .

ریشهٔ معادلهٔ $0\times x+b=0$ (هیچ) ریشهٔ معادلهٔ $0\times x+0=0$ (هر) وریشهٔ معادلهٔ $ax+b=0$ یك‌عدد است (ریشه عددی است که x برای برقراری تعادل و تساوی معادله می‌پذیرد)

بنابراین یك‌معادله باضرایب متغیر می‌تواند . گاهی یك نابرابری و یا یك اتحاد باشد حالت $0\times x=0$ به‌صورت ابهام بیان می‌شود وهمین ابهام خودنیز گاهی می‌تواند وسیلهٔ مؤثری برای اثبات اتحادها باشد .

هرگاه رابطه‌ای از x بادرجهٔ n به ازاء مقادیر متمایز به‌تعداد بیش‌از n (لااقل یکی‌بیشتر) صحیح‌باشد در این‌صورت آن رابطه اتحاد است مثلا رابطهٔ درجهٔ اول

$$(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\equiv 0$$

یك اتحاد است زیرا به‌ازاء $x=a$ و $x=b$ (دومقداریکی بیشتر از درجهٔ x) درنتیجه به‌ازاء جمیع مقادیر x منحد با صفر است.

$$(a-b)(c-a)+(a-c)(a-b)=0$$

$$(b-a)(b-c)+(b-c)(a-b)=0$$

رابطهٔ درجهٔ دوم :

$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)(c-a)^2+(x-c)^2(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

یك اتحاد است زیرا به‌ازاء سه مقدار از x (مثلا $x=a$ و $x=b$ و $x=c$) برابری هردوطرف محقق می‌شود.

این اتحاد به‌نام اتحاد اولر نامیده می‌شود.

رابطهٔ درجهٔ سوم:

$$(x-a)^3(c-b)+(x-a)[x-c)^3-(x-b)^3]+(x-b)(x-c)\times[(x-b)^2-(x-c)^2]\equiv(b-c)(c-a)(a-b)[3x-(a+b+c)]$$

نیز اتحاد است و به‌ازاء ٤مقدار x تساوی برقرار است و بالاخره در اتحادزیر به‌ازاء چهار مقدار x ($x=a$ و b و c و d) برابری طرف اول با ۱ محرز می‌شود.

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-a)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}=1$$

بعدها خواهیم دیدکه ازهمین اتحادها و مشابه آنهابرای حل معادلات خصوصاً معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم استفاده می‌توان کرد .

یك‌معادله بادرجهٔ n به‌صورت کثیرالجمله‌رادرحالت کلی وبه‌طور عمومی به‌صورت زیر نمایش می‌دهند .

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots+px+q=0$$

اگر کلیهٔ ضرایب (که‌عموماً پارامترند) صفرباشند رابطه یك اتحاد است واگرکلیهٔ آنها جزq صفرباشند یك نابرابری است درصورت $n=1$ وصفر بودن ضرایب از b به‌بعد معادلهٔ درجهٔ اول $ax+b=0$ را خواهیم داشت این معادله خطی

نامیده می‌شود زیرا ریشهٔ آن باخط‌کش قابل رسم است (ریشهٔ آن $x=-\frac{b}{a}$ است) اگر a صفر باشد معادله ممتنع و اگر b و a باهم صفر باشند معادله مبهم است درغیر این‌صورت به‌ازاء جمیع مقادیر مختلفهٔ b و a فقط یک‌عدد وجود خواهد داشت که درمعادلهٔ مذکور صدق کند.

درمعادلهٔ عمومی n عددی است صحیح اگر تعداد جمل متمایز یکی‌بیشتر ازدرجهٔ n باشد معادله کامل‌است درغیراین‌صورت ناقص نامیده می‌شود

حالت خاص معادلهٔ درجهٔ n ناقص دوجمله‌ای به‌صورت $ax^n+b=0$ است ریشهٔاین معادله بارادیکال بیان‌می‌شود

$$x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

آیا می‌توان عرمعادلهٔ جبری را بمعادلهٔ دوجمله‌ای به صورت فوق تبدیل کرد وبه‌عبارت دیگر آیاجواب معادلهٔعمومی رامی‌توان‌بارادیکالها بیان کرد؟

این مسئله‌است که سابقهٔ تاریخی داشته‌وزمانهای‌بسیاری مورد بحث وبررسی دانشمندان ومتفکرین‌بوده است.

درمورد معادلات درجهٔ دوم به‌صورت کلی $ax^2+bx+c=0$ مسئله‌به‌وسیلهٔ هندیها مورد بررسی‌قرار گرفت‌ودرنتیجهٔ کوشش‌برای حل‌آن قواعدی مفید برای‌اعداد گنگ به‌وجود آمدکه‌تقریباً‌به‌همان شکلی‌است که امروزمعمول است. آخرین‌قسمت مسئله بوسیلهٔ ریاضیدان بزرگ عالم‌اسلام **حکیم‌عمرخیام نیشابوری** حل‌شد ومعلوم گردیدکه جواب کلی معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $A+\sqrt{B}$ است یعنی ریشهٔ آنرا همواره می‌توان به‌صورت‌مجموع دوعدد یکی گویاودیگری گنگ درجهٔ دوم بیان کرد.

نخست باتبدیل x به $X-\frac{b}{2a}$ معادلهٔدرجه‌دوم‌را به‌صورت $X^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ تبدیل می‌کنیم پس از استخراج ریشهٔدوم از طرفین $X=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ وبادر نظر گرفتن رابطهٔ $x=X-\frac{b}{2a}$ نتیجه می‌شود $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

که‌آنرا می‌توان به‌صورت $x=A\pm\sqrt{B}$ بیان کرد.

خیام ریشهٔ منفی را حساب نمی‌کرد وبرای‌آن معنی و مفهومی قائل نبود.

اگر b^2-4ac منفی باشد معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دوریشهٔ موهوم است واگر b^2-4ac مساوی صفرباشد معادله‌دارای دوریشهٔ متساوی است واگر b^2-4ac مثبت باشد معادله دارای‌دوریشهٔمتمایز است‌به‌هرحال‌این مقدار که‌وضع‌وچگونگی ریشه‌ها را بیان می‌کند مبین معادله نامیده می‌شود و وقتی که ضرایب‌معادله پارامتری باشد بحث دروجود وعدم وجودریشه‌ها به وسیله همین مبین که به علامت Δ نموده می‌شود صورت می‌گیرد.

خیام‌پس‌از حل معادلهٔ درجهٔ دوم به‌حل معادلهٔدرجه‌سوم پرداخت ولی موفقیت حاصل‌نکرده‌وی بااستادی راه‌حل هندسی برای معادلهٔ درجهٔ سوم به وجود آورد لکن دراثر کوشش فوق‌العاده زیادی‌که برای حل‌جبری معادلهٔ درجهٔ سوم مبذول داشت ناچار پذیرفت که‌حل معادلهٔ درجه‌سوم به‌وسیله رادیکالها غیرممکن است.

بالاخره‌ریاضیدانان‌بزرگ دورهٔ رنسانس درقرن‌شانزدهم موفق شدند به‌طور کامل مسئله را حل‌کرده وثابت کردند که جواب عمومی معادلهٔدرجهٔ سوم به‌وسیله ریشه‌های دوم وچهارم بیان می‌شود.

دانشمندانی‌که دراین باره کوششهای استادانه کرده و روشهای ارزنده‌ای را عرضه داشته‌اند آنهایی‌که معروفیت‌بیشتر داشته و شهرت جهانی دارند عبارتند از **لاگرانژ ، اولر آبل ، گالوا ، کاردان ، فراری**

طریقهٔ حل معادلهٔ درجهٔ سوم کامل به صورت عمومی $ax^3+bx^2+cx+d=0$ به روش کاردان باعلامت و عبارتهای کلاسیک بدین‌قرار است

ابتدا باتبدیل x به $X-\frac{b}{3a}$ معادله رابه‌صورت معادلهٔ ناقص $X^3+pX+q=0$ درمی‌آوریم:

اصولا در هر معادله به صورت کثیرالجمله از درجهٔ n می‌توان‌باتبدیل x به $X-\frac{b}{na}$ جمله‌ای‌راکه‌شامل درجهٔ $n-1$ ام است از معادله حذف کرد (a ضریب جملهٔ اول و b ضریب‌جملهٔ دوم است)فرض می‌کنیم $X=u+v$ دراین‌صورت

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$

$$u^3+v^3=3u^2v+3uv^2+pu+pv+q=0$$

$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0$$

حال u را طوری انتخاب می‌کنیم که $3uv+p=0$ باشد

یعنی $u=\frac{-p}{3v}$ دراین صورت

$$uv=-\frac{p}{3} \quad \text{و} \quad u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$$

وخواهیم داشت

$$u^3+v^3=-q$$

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$$

و u^3 و v^3 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

$$Z^2+qZ-\frac{p^3}{27}=0$$

است اگر $p>0$ باشد در عبارت

$$\Delta=b^2-4ac=q^2+\frac{4p^3}{27}$$

$4p^3+27q^2>0$ است خواهیم داشت :

$$X=u+v=\sqrt[3]{z'}+\sqrt[3]{z''}$$

و یا

$$X=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{4\times 27}}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{4\times 27}}}$$

این دستور به **دستور کاردان** معروف است ودرحالتی که $4p^3+27q^2>0$ باشد برای تعیین یك ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم از آن با موفقیت می‌توان استفاده کرد.

وقتی که $p<0$ است یا $4p^3+27q^2>0$ است یا $4p^3+27q^2=0$ است ویا $4p^3+27q^2<0$ است در حالت اول یك ریشهٔ معادله طبق فرمول کاردان حساب می‌شود درحالت دوم دوریشهٔ معادله مساوی است (اصطلاحاً ریشهٔ مضاعف دارد) و دستور کاردان برای تعیین ریشه معادله به‌صورت

$x=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ درمی‌آید درحالتی که $4p^3+27q^2$ منفی است ظاهراً از دستور کاردان نمی‌توان استفاده کرد چه عبارت x در این صورت شکلی موهومی خواهد داشت. معادلهٔ درجهٔ سوم دراین حالت سه ریشهٔ متمایز دارد که معمولا اندازهٔ تقریبی آنها را به ترتیب زیر بدست می‌آورند: در معادلهٔ $X^3+pX+q=0$ فرض می‌کنیم $x=ty$ در این صورت

$$t^3y^3+pty+q=0$$

یا

$$y^3+\frac{p}{t^2}y+\frac{q}{t^3}=0 \qquad (p<0)$$

حال t را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{p}{t}=-\frac{3}{4}$ و در نتیجه $t=\sqrt{\frac{-3p}{3}}$ باشد لذا داریم

$$y^3-\frac{3}{4}y+\sqrt{\frac{-27q^2}{64p^3}}=0$$

یا

$$4y^3-3y=-\sqrt{\frac{-27q^2}{4p^3}}$$

چون $4p^3+27q^2<0$ است $4p^3<-27q^2$

واز آنجا

$$\frac{27q^2}{-4p^3}<1$$

یا

$$0<\frac{27q^2}{-4p^3}<1$$

چون هرعدد کوچکتر از ۱ وبزرگتر از ۱ — رامی‌توان کسینوس زاویه‌ای مانند α فرض کرد لذا زاویه‌ای وجود دارد به طوری که $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{27q^2}{-4p^3}}$ باشد دراین‌صورت

$$4y^3-3y=\cos\alpha$$

اگر $y=\cos\varphi$ فرض شود

$$4\cos^3\varphi-3\cos\varphi=\cos\alpha$$

یا

$$\cos 3\varphi=\cos\alpha$$

بنابراین

$$3\varphi\pm\alpha=2k\pi$$

ویا

$$\varphi=2k\frac{\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}$$

به ازاء $k=0$ و ۱ و ۲ خواهیم داشت

$$\varphi_0=\pm\frac{\alpha}{3} \quad \text{و} \quad \varphi_1=\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3} \quad \text{و} \quad \varphi_2=\frac{4\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}$$

و ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم تعیین می شود

$$y_0=\cos\varphi_0=\cos\frac{\alpha}{3}$$

و $y_1=\cos\varphi=\cos(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3})$ و

$$y_2=\cos\varphi_2=\cos(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3})$$

واز آنجا

$$x_1=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$$

تعیین می‌شود

اما درحالتی که $4p^3+27q^2<0$ است صرف‌نظر از مطالب فوق پس از کشف اعداد موهومی وخواص آنها و توجیه چگونگی و ماهیت اعداد مختلط و گسترش حوزهٔ مفروضات، حل معادلهٔ درجهٔ سوم به‌کمك دستورکاردان میسر گردید و طریقهٔ حل آن کامل شده و استحکام کاربرد فرمول محقق شد

افتخار کشف مقادیر موهومی مربوط به‌ایتالیائیهای دورهٔ رنسانس است وکاردان در ۱۵۴۵ ضمن حل معادلات درجهٔ سوم اولین کسی است که عبارت بی معنی وموهوم ریشهٔ معادلهٔ $x^2=-1$ را بوسیله علامتی نشان داد وضمن بحث خود دربارهٔ غیر ممکن بودن تجزیهٔ عدد ۱۰ به دوقسمت به‌طوری که حاصل ضرب آنها ۴۰ باشد ثابت کرد که حل رسمی این مسئله به‌عبارت غیر ممکن $5+\sqrt{-15}$ و $5-\sqrt{-15}$ منجر می‌شود

(ریشه‌های معادلهٔ $x^2-10x+40=0$)

البته دراینجا نوشتن کلمهٔ غیرممکن خودامکاناتی به‌وجود آورد چه‌هر کلمهٔ بی‌معنی وقتی که هم نوشته شود خود معانی و مفاهیم دیگری نیز همراه خواهدداشت .

البته باید توجه داشت که‌همین‌معادلات درجهٔ سوم بودند که‌لزوم کاربرداعداد موهوم را ایجاب نکردند نه معادلات‌درجه دوم زیر در معادلات درجهٔ دوم به محض رسیدن به‌عدد موهوم عمل تعیین ریشه خاتمه می‌پذیرد وجملهٔ غیرممکن عمل رااتمام کرده ونتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شودولی‌درمورد معادلات درجهٔ سوم پس از رسیدن به اعداد موهومی هنوز اعمال دیگری نیز ضرورت داردکه بایستی به‌اتکاء اعداد موهوم صورت گیرد

هر معادلهٔ درجه‌سوم به‌صورت $x^3+px+q=0$ لااقل دارای یك جواب حقیقی است این جواب حقیقی را **سکیپودل فر** Scipiodel Ferro و **تارتاگلیا** Tartaglia و **کاردان** طی‌روش ودستوری که بطور کلی به‌نام کاردان است به‌دست‌آوردند وچنانکه‌دیدیم این فرمول‌درحالتی که معادله دارای‌سه جواب حقیقی است صدق نمی‌کند زیرا رادیکالهای موجود در فرمول نمایندهٔ اعداد موهوم خواهندبود ولی **بومبلی** ثابت کرد که همین مجموع دوعدد موهوم‌می‌تواند برابر مقداری حقیقی باشد

معادلهٔ تاریخی $x^3-15x-4=0$ که‌به‌وسیله **بومبلی** در کتاب جبری که درسال ۱۵۷۲ منتشرشده مورد بررسی قرار گرفته است دارای سه ریشهٔ حقیقی ۴ و $-2+\sqrt{3}$ و $-2-\sqrt{3}$ است اماکار برد فرمول کاردان به‌نتیجهٔ غیرواقعی زیر منجرمی‌شود

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

بومبلی باخود اندیشید آیا ممکن است مجموع این دو مقدار بی‌معنی و موهوم عددی حقیقی باشدکه‌اگر چنین باشد قطعاً معجزه‌ای به وقوع خواهد پیوست که شگفتی بیحد ایجاد می‌کند پس ازکوششهای فراوان معجزه اتفاق افتاد و بومبلی توانست ثابت کندکه‌مجموع دوجملهٔ موهومی‌فوق به مجموع دو جملهٔ $2-\sqrt{-1}$ و $2+\sqrt{-1}$ منجر می‌شودکه برابر ۴ است

$$2+\sqrt{-121}=2+11\sqrt{-1}=8-6+12\sqrt{-1}$$
$$-\sqrt{-1}=2^3+3\times2^2\sqrt{-1}+3(\sqrt{-1})^2\times2+(\sqrt{-1})^3$$

یا

$$2+\sqrt{-121}=(2+\sqrt{-1})^3$$
$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$$
$$2-\sqrt{-121}=2-11\sqrt{-1}=8-6-12\sqrt{-1}$$
$$+\sqrt{-1}=2^3-3\times2^2\sqrt{-1}+3(\sqrt{-1})^2\times2-(\sqrt{-1})^3$$

یا

$$2-\sqrt{-121}=(2-\sqrt{-1})^3$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$$

ازاین تاریخ این موجودات بی معنی و موهوم به‌صورت ابزار ووسیلهٔ مؤثری‌برای حل مسائل حقیقی بکار رفتند ووارد قلمرو ریاضیات گردیدند . جبرئی که ریاضیدانان چون‌بومبلی و کاردان از خودنشان داده ومقدم این‌موجودات بی معنی را به‌صحنهٔ ریاضیات گرامی داشتندقابل تقدیراست‌چه این‌متفکرین بزرگ به‌کلیات بی‌معنی معنی بخشیده و غیرممکن را ممکن ساختند واین کارآنان بی‌شباهت به‌کره گرفتن‌ازآب دریانیست

بدین ترتیب افتخارحل معادلات درجهٔ سوم اثبات‌وبیان ریشه‌های‌آن با رادیکالها نصیب کاردان‌شد ودستوراو زینت‌بخش یکی از فصول تاریخ علم گردید .

همزمان باکوشش کاردان برای‌حل معادلات درجهٔ سوم و وتوفیق کاملا او **فراری** Ferrari ازایتالیا حل‌معادلهٔ‌درجهٔ چهارم را به‌حل معادلات فرعی وکمکی‌درجهٔ دوم ودرجهٔ سوم تبدیل کردوبدین‌ترتیب ثابت‌نمودکه‌ریشه‌های رسمی‌معادلهٔ‌درجهٔ چهارم رادیکالهایی‌است‌که نمای‌آنهااز چهار تجاوز نمی‌کند

شرح روش او به عبارت کلاسیك بدین گونه‌است

معادلهٔ درجهٔ چهارم‌کامل

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

را درنظرمی گیریم ابتدا x را به $X-\frac{b}{4a}$ تبدیل می کنیم

$$a(X-\frac{b}{4a})^4+b(X-\frac{b}{4a})^3+c(X-\frac{b}{4a})^2$$
$$+c(X-\frac{b}{4a})+e=0$$

پس از بسط واختصار وتقسیم طرفین معادله به a معادله‌ای بصورت زیر خواهیم داشت

$$X^4+AX^2+BX+C=0$$

حال این معادله را باحاصلضرب دو معادلهٔ درجهٔ دوم متحد می کنیم

$$X^4+AX^2+BX+C=(X^2+\alpha++\beta)(X^2+\alpha'X+\beta')=X^4+(\alpha+\alpha')X^3+(\beta+\alpha\alpha'+\beta')X^2+(\alpha\beta'+\beta\alpha')X+\beta\beta'$$

به موجب اصل تساوی ضرایب درانحاد ها خواهیم داشت

$$\begin{cases}\alpha+\alpha'=0\\ \beta+\alpha\alpha'+\beta'=A\\ \alpha\beta'+\beta\alpha'=B\\ \beta\beta'=C\end{cases}$$

از رابطهٔ اول $\alpha=-\alpha'$ واز رابطهٔ دوم

$$\beta+\beta'=A+\alpha^2$$

از رابطهٔ سوم $\beta-\beta'=-\frac{B}{\alpha}$ نتیجهٔ می‌شود . چنان چنین می‌نویسیم

$$(\beta+\beta')^2-(\beta-\beta')^2=4\beta\beta'$$

یا

$$(A+\alpha^2)^2-\frac{B^2}{\alpha^2}=4C$$

و یا

$$\alpha^6+2A\alpha^4+(A^2-4C)\alpha^2-B^2=0$$

اگر فرض کنیم $\alpha^2=y$ دراین‌صورت معادلهٔ درجه سوم زیر را خواهیم داشت

$$y^3+2Ay^2+(A^2-4C)\alpha^2-B^2=0$$

این معادله را ابتدا باتبدیل y به $y-\frac{2A}{3}$ به صورت معادلهٔ $y^3+py+q=0$ درآورده سپس طبق دستور کاردان حل می کنیم

پس ازحل معادلهٔ درجهٔ چهارم و بیان ریشه‌ها به وسیلهٔ رادیکالها اعتقاد اغلب‌ریاضیدانان قرن هیجدهم براین شد که معادلهٔ درجهٔ n ام هم بایدطریقهٔ حلی به‌وسیلهٔ رادیکالها داشته باشدو احتمالا نمای این رادیکالها نباید از n تجاوز کند ولی **لاگرانژ** یکی از ریاضیدانان با این عقیده مخالف بود وتا نیمهٔ اول قرن‌نوزدهم کوششهای هیچکدام به‌نتیجه نرسید و مسئله لاینحل باقی‌ماند وهمانطوری که‌اغلب در ریاضیات اتفاق می‌افتد این اشکال بیش ازاندازه درحل مسائل‌وتوجیه موضوعات لزوم شیوه‌های جدیدی را ایجاب می‌کرد وگاهی‌این‌شیوه‌های جدید بیش ازخود موضوع واصل مسئله‌دارای‌اعتبار و اهمیت می‌شوند بالاخره در اواسط قرن نوزدهم سه نفر بنام **روفینی Ruffini** و **آبل Abel** و**گالوا Calois** نه تنها این مسئله را حل کردند بلکه ریاضیات را با مفهوم تازه و اساسی **گروه**غنی‌ترساختندوحل مسئله به‌تأیید نظریهٔ لاگرانژانجامید

بسیار قابل توجه است که دونفر مانند آبل وگالوابا خصوصیات وطرزتفکرهای کاملامتفاوت نسبت به یک‌مسئله‌علاقمند شوند وهردوشیوه‌های مشابهی را درآن بکار برند ، هردو با اعتقاد به‌اینکه حل معادلهٔ درجهٔ پنجم به‌وسیلهٔ رادیکالها ممکن هست این‌معادله‌را مورد بررسی قرار دادند. این بررسی‌راآبل در۱۸ سالگی وگالوا در۱۶سالگی شروع کرد ودرواقع هردوی آنها مدت کوتاهی گمان کردند که‌چنین جوابی راکشف کرده‌اند ولی هردو به‌زودی به‌اشتباه خودپی برده و مسئله‌را باشیوه‌های جدید بررسی کردند

آبل که پسر خواندهٔ لاگرانژ بود واستعداد عجیبی در ریاضیات داشت درسن ۱۹سالگی ثابت کرد که هرمعادلهٔ‌ازدرجهٔ چهارم به بالااگر قابل تبدیل به‌معادلهٔ درجهٔ چهار باشندقابل حل‌اند ودستورهایی نیزپیشنهاد کرد که به‌موجب آنها قابل‌حل بودن بعضی ازمعادلات را تشخیص داد ودرسال ۱۸۲۵ به‌شکل قاطع ثابت کرد که معادلهٔ عمومی درجهٔ پنجم

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

نمی‌تواند فقط به وسیلهٔ رادیکالها حل‌شود و همچنین حدس زد که‌این امر برای معادلات بادرجهٔ بالاتر ازه نیزصادق‌است

آبل‌درسن ۲۳ سالگی پس ازگذراندن سختیها و شدائد بسیار ازگرسنگی معدوم شدچه درانقلاب کبیر فرانسه و ورود لاگرانژ به جریانهای سیاسی مجال رسیدگی به‌آبل رابه وی نمی‌داد. مسئله‌به‌شکل کامل‌توسط گالوا اثبات گردید . اوبه این سؤال که‌ماهیت معادله‌ای که جواب آن بارادیکال مشخص شود چیست ؟ دروصیت نامه وخاطرات خود به‌طور قاطع پاسخ داده است وهمین مسئلهٔ خاص بودکه گالوا را درارائهٔ نظریهٔ جدید دربارهٔ معادلات که‌معمولا به نام نظریهٔ گروههای گالوا مشهور است وادارکرد و به‌کمک آنها ثابت شدکه اعدادگنگ مرکب توانائی حل معادلهٔ عمومی بادرجهٔ بیش ازچهار را ندارند .

همزمان باکوشش گالوا برای حل مسئله ومبارزه‌با فقرو

تنگدستی مادموازل سوپی ژرمن ثابت کرد که معادله‌های از درجهٔ ۵ به‌بالا مطلقاً قابل حل نیستند و بدین ترتیب حدس لاگرانژ دربارهٔ اینکه ریشه‌های معادلات با درجهٔ بالاتر الاچهار نمی‌توانند به وسیلهٔ رادیکالها بیان شوند به وسیلهٔ آبل و گالوا و مادموازل سوپی ژرمن تأیید شد

اولر که در حل مسائل مشکل و لاینحل اقدامات مؤثری از خود بروز داده و شهرتی جهانی یافته است در مورد معادلات درجهٔ سوم روشی به‌شرح زیر به‌کار برده‌است: اگر در اتحاد:

$$x^3+a^3+b^3-3abx=$$
$$(x+a+b)[x^2+a^2+b^2-(ax+bx+ab)]$$

a و b را معلوم و x را مجهول انتخاب کنیم می‌توانیم اتحاد را به این وسیله توضیح دهیم که معادلهٔ درجهٔ سوم ناقص $x^3+a^3+b^3-3abx=0$ مقدار $x=-(a+b)$ را به عنوان یك ریشه می‌پذیرد بنابراین برای حل معادلهٔ $x^3+px+q=0$ آنرا متحد با عبارت فوق می‌گیریم به موجب اصل تساوی ضرایب در اتحادها a و b را برحسب p و q حساب می‌کنیم

$$x^3+px+q=x^3+a^3+b^3-3abx$$
$$=(x+a+b)[x^2+a^2+b^2-(ax+bx+ab)]$$

وازآنجا معلوم می‌شود

$$a^3b^3=-\frac{p^3}{27} \text{ یا } -3ab=p \text{ و } a^3+b^3=q$$

وآن بدین معنی است که a^3 و b^3 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $y^2-qy-\frac{p^3}{27}=0$ هستند و اگر ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم حلال α و β باشد $x=-(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})$ یك ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم است که با انجام جزئیات محاسبات ذکرشده به فرمول کاردان می‌رسد

روش لاگرانژ برای حل معادلات درجهٔ چهارم ناقص به‌صورت کلی

$$(1)\quad x^4+Ax^2+Bx+C=0$$

به‌شرح زیر است: اتحاد (۲)

$$(a+b+c+x)(a-b-c+x)(-a+b-c-x)(-a-b+c+x)$$
$$\equiv(a^4+b^4+c^4+x^4)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2)+8abcx$$

نشان می‌دهد که $x=a+b-c$ و $x=a-b+c$ و $x=-a+b+c$ و $x=-a-b-c$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ چهارم ناقص طرف دوم است. حال a و b و c را طوری تعیین می‌کنیم که دو معادلهٔ (۱) و (۲) همانند گردند

$$-2(a^2+b^2+c^2)=A \text{ و } 8abc=B$$
$$-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2)+a^4+b^4+c^4=C$$

وازآنجا خواهیم داشت

$$\begin{cases} abc=\frac{B}{8} \\ a^2+b^2+c^2=-\frac{A}{2} \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2=\frac{A^2-4C}{16} \end{cases}$$

حل دستگاه فوق بر حسب a^2 و b^2 و c^2 به معادلهٔ درجهٔ سوم

$$y^3+\frac{A}{2}y+\frac{A^2-4C}{16}y-\frac{B}{8}=0$$

می‌انجامد (از روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم باید استفاده کرد) که a^2 و b^2 و c^2 ریشه‌های آن است اگر این ریشه‌ها را α و β و γ بنامیم مقادیر:

$$x=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}$$
$$x=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$$
$$x=-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$$
$$x=-\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}$$

ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ چهارم مورد نظر است. مقادیر زیر رادیکال یعنی α و β و γ معمولا شامل اعداد گنگ درجهٔ سوم‌اند

این طرز کار جالب مسئلهٔ زیر را مطرح می‌سازد: که چرا نتوان روشی را که با این کامیابی در مورد معادلات درجهٔ سوم و چهارم بکار رفته است برای معادلات درجهٔ پنجم و بالاتر مورد استفاده قرار داد؟

بهمین ترتیب می‌توان یك اتحاد متقارن از درجهٔ n با n پارامتر را مشابه با آنچه که اولر و لاگرانژ بکار برده‌اند طرح نمود با در نظر گرفتن یکی از پارامترها به‌عنوان مجهول می‌توان اتحاد را به‌مثابهٔ یك معادله توجیه کرد. با متحد کردن این معادله با معادلهٔ عمومی درجهٔ n روابطی بین پارامترها و ضرایب به وجود می‌آید و ممکن است به‌کمك این روابط به معادله‌های حلالی نظیر معادله‌های حلال اولر و لاگرانژ رسید.

درواقع کوششهایی نیز دراین جهت به عمل آمده است که قابل توجه‌ترین آنها کارهای **مالفاتی جیووانی** است (Malfatti قرن هیجدهم) ولی معادلهٔ حلال مالفاتی برای حل معادلهٔ عمومی درجهٔ پنجم از درجهٔ ششم درآمد و اوضمن

تلاش خود حدس زد که به طور کلی درجهٔ m ام معادلهٔ حلال برای یك معادلهٔ درجهٔ nام از رابطهٔ

$$m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

بدست می‌آید در نتیجه برای هر مقدار n بزرگتر از چهار، درجهٔ معادلهٔ حلال بزرگتر از درجهٔ معادلهٔ اصلی خواهد بود

درجهٔ معادلهٔ حلال معادلات درجهٔ چهارم

$m=\frac{1}{2}(4-1)(4-2)=3$ است

و درجهٔ معادلهٔ حلال معادلات درجهٔ پنجم

$m=\frac{1}{2}(5-1)(5-2)=6$ است

عمر خیام یك راه حل نموداری برای معادلات کلی درجهٔ سوم و چهارم برپایهٔ اصل تقاطع یك سهمی و یك دایرهٔ متحرك پیشنهاد کرده است

معادلهٔ درجهٔ چهارم $x^4+Ax^2+Bx+C=0$ را درنظر بگیرید

سهمی $y=x^2$ را فرض می‌کنیم در این صورت سهمی زیر را نیز خواهیم داشت

$$\begin{cases} y^2+Ay+Bx+C=0 \\ x^2=y \end{cases}$$

این دو سهمی را باهم تلاقی می‌دهیم

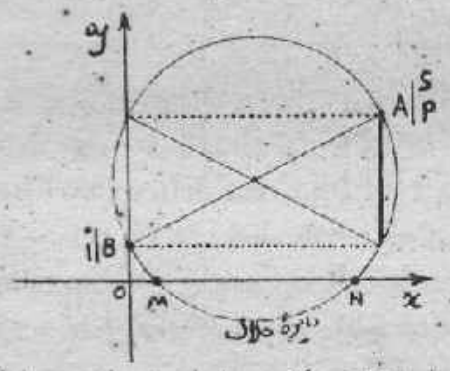
محورهای تقارن دو سهمی برهم عمودند و اگر دو معادلهٔ آنها را باهم جمع کنیم معادلهٔ دایرهٔ حلال برحسب ضرایب معادلهٔ درجهٔ چهارم مفروض به طور کامل تعیین می‌گردد برای حل معادلهٔ درجهٔ چهارم، دایرهٔ حلال را درصفحهٔ منحنی سهمی $y=x^2$ رسم می‌کنیم طولهای نقاط برخورد ریشه های معادله خواهند بود.

اگر معادلهٔ مفروض درجهٔ سوم باشد

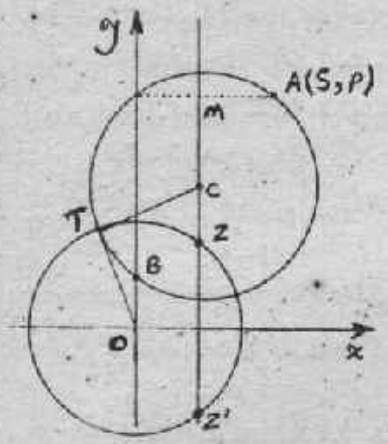
$$x^3+px+q=0$$

طرفین را در x ضرب کرده ضرایب دایرهٔ حلال را بر حسب ضرایب معادلهٔ درجهٔ چهارم حاصل تعیین می‌کنیم در این صورت معادلهٔ دایرهٔ حلال به صورت

$x^2+y^2+(p-1)y+qx=0$ است یعنی از مبدأ مختصات می‌گذرد. برای حل نموداری معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-sx+p=0$ که در آن s و p اعداد حقیقی ودلخواهند درمعادلهٔ دایرهٔ حلال $x^2-sx+p+y^2+my=0$ را m طوری تعیین می‌کنیم که دایره از نقطهٔ $A(s,p)$ بگذرد. به سهولت $m=-(1+p)$ به‌دست می‌آید و معادلهٔ دایرهٔ حلال به صورت $x^2+y^2-sx-(1+p)y+p=0$ درمی‌آید. نقطهٔ B به عرض واحد روی محور yها بر دایرهٔ حلال قرار دارد و این دایره به قطر AB رسم می‌شود. مرکز دایره $C(\frac{s}{2}, \frac{1+p}{2})$ است نقاط M و N که در آنها دایرهٔ حلال



محور xها را قطع می‌کند جوابهای نموداری معادلهٔ درجهٔ دوم‌اند اگر دایرهٔ حلال برمحور x ها مماس باشد هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم مساویست در این صورت اصطلاحاً معادله ریشهٔ مضاعف دارد. اگر دایرهٔ حلال محور xها را قطع نکند و یا بر آن مماس نباشد در این صورت ریشه‌ها موهومی‌اند و با این حال در این مورد نیز ریشه ها را به شکل نموداری در صفحهٔ متغیر مختلط



$x+iy$ می‌توان نمایش داد. ازمبدأ مختصات خط OT را بر دایرهٔ حلال مماس می‌کنیم دایره‌ای به مرکز O وبه‌شعاع OT رسم می‌کنیم این دایره بر دایرهٔ حلال عمود است واین دایره خط CM عمود برمحور xها را درنقاط z و z' قطع می‌کند که محل ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم درصفحهٔ آرگومان است.

اگر نقطهٔ B متناظر با عدد b روی محور x ها باشد نقطه B' متناظر با عدد موهوم $ib=\sqrt{-1}\,b$ روی محور yها است (B' از دوران $\overrightarrow{OB}$ درجهت مثبت مثلثاتی به اندازهٔ ۹۰ درجه به دست می‌آید) ترکیب دو بردار OA به اندازهٔ عدد حقیقی a و بردار OB به اندازهٔ عدد موهومی ib عدد $z=a+ib$ را درصفحهٔ متغیر مختلط بیان می‌کند ریشه های موهوم معادلهٔ درجهٔ دوم $z'=\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}-p}$ و $z''=\frac{S}{2}\sqrt{\frac{S^2}{4}-p}$ است

عدد حقیقی ریشه ها $\frac{8}{2}$ است پس نقاط متناظر با عدد حقیقی ریشه‌هاروی‌خط CM به معادلهٔ $x-\frac{8}{2}$ قرار دارد. عرضهای متناظر نقاط Z و Z' اولا نسبت به محور xها متقارن ومقادیر آنها $\pm i\sqrt{p-\frac{8^2}{4}}$ است، درشکل فوق ساختمان هندسی آنها نموده می‌شود.

در خاتمهٔ این بحث توجه خوانندگان را به نکات ذیل جلب می‌کنیم.

۱ـ یکی‌ازمسائلی که مبنای تحقیقات جالبی‌درحل‌معادلهٔ درجهٔ سوم خاصه دردورهٔ اسلامی بوده است **مسألهٔ ارشمیدس** است. صورت این مسأله درکتاب کره واستوانهٔ ارشمیدس درج است ولی حل‌آن درکتاب نوشته نشده است.

کرهٔ مفروضی را به وسیلهٔ صفحه‌ای چنان قطع کنید که نسبت احجام دوقطعهٔ کروی حاصل مساوی مقدار مفروضی‌باشد.

اتوسیوس Eutocios که در نزد علمای اسلامی به **اطوقیس** معروف است شارح‌آثار ارشمیدس است وی بیان داشته است که ارشمیدس این مسأله را به وسیلهٔ فصل مشترک سهمی $x^2=\frac{b^2}{c}y$ ومنحنی‌لولی $(c-x)y=ac$ حل کرده‌است

خود ارشمیدس‌مسأله را به مسألهٔ زیر بازگردانیده‌است:

قطعه خط DZ ونقاط B وT براین خط مفروض است و B بین D و T جا دارد نقطه‌ای مانند X برDZ چنان تعیین کنید که $xZ:ZT=BD^2:Dx^2$ اگر فرض کنیم $BD=a$ و $ZT=b$ و $ZD=c$ و $DX=x$ باشد حل مسأله به حل معادلهٔ $(c-x):b=\frac{a^2}{b^2}$ یا $x^3+a^2b=cx^2$ برمی‌گردد. مسألهٔ ارشمیدس مورد توجه خاص‌دانشمندان دورهٔ اسلامی واقع شده وظاهراً اول بار **ماهانی** (ابوعبدالله محمد ابن عیسی ماهانی نیمهٔ قرن سوم هجری) آنرا به صورت معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+a=cx^2$ بازگردانیده است، این معادله درنزد ریاضیون اسلامی به معادلهٔ ماهانی معروف است.

معادلهٔ ماهانی راابوجعفرخازن خراسانی یکی‌از ریاضیدانان اسلام (۳۵۰ هجری) به وسیلهٔ قطوع مخروطی حل کرد.

۲ـ معادلات درجهٔ چهارم که به صورت زیر باشند.

$$\alpha(ax^2+bx+c)^2+\beta(ax^2+b'x+c)=\gamma x^2$$

به‌آسانی قابل حل‌اند. برای حل طرفین معادله را به x^2 تقسیم کرده چنین می‌نویسیم.

$$\alpha(ax+b+\frac{c}{x})^2+\beta(ax+b'+\frac{c}{x})=\gamma$$

با انتخاب‌مجهول کمکی $y=ax+\frac{c}{x}$ معادله به یك معادلهٔ درجهٔ دوم ساده به صورت

$$\alpha(y+b)^2+\beta(y+b')^2=\gamma$$

درمی‌آیدکه به‌آسانی قابل حل است.

۳ـ به‌کمك مشتق تابع $y=X^3+pX+q$ دروجود وعدم وجود و تعداد ریشه‌های معادلهٔ $X^3+pX+q=0$ می‌توان بحث‌کرد (*) مشتق تابع $y'=3X^2+p$ است و طولهای‌نقاط ماکزیمم یامی‌نیمم(ریشه‌های مشتق) $X^2=\frac{-p}{3}$ یا $X=\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$ است اگر $p>0$ باشد مشتق جواب ندارد یعنی تابع ماکزیمم یا می‌نیمم ندارد وهمواره صعودی ویا همواره نزولی است ومنحنی نمایش تابع محور x هارا فقط در یك نقطه قطع می‌کند یعنی معادلهٔ درجهٔ سوم یك ریشهٔ حقیقی دارد که به‌کمك دستور کاردان تعیین می‌گردد.

اگر $p<0$ باشد مشتق دوریشه دارد یعنی منحنی‌نمایش تابع‌یك‌ماکزیمم‌ویك‌می‌نیمم‌دارد که‌عرضهای آنهاعبارت‌می‌شوداز

$$y=\pm\sqrt{\frac{-p^3}{27}}\pm p\sqrt{\frac{-p}{3}}+q$$

و از آنجا حاصل ضرب عرضهای نظیر ماکزیمم و می‌نیمم $y_1y_2=\frac{4p^3+27q^2}{27}$ حاصل‌می‌شود اگر $4p^3+27q^2>0$ باشد عرضهای نظیر ماکزیمم یا می‌نیمم هردومثبت یا هردومنفی هستند یعنی‌این نقاط یا هردو بالای محور xها یا پائین‌محور xها قراردارند ودر هردوحال منحنی نمایش تابع محور x ها را فقط در یك نقطه قطع می‌کند یعنی معادلهٔ درجه ۳ فقط یك ریشهٔ ساده داردکه طبق دستور کاردان تعیین می‌شود. اگر $4p^3+27q^2=0$ باشدکه مسلماً $p<0$ است یکی‌ازعرضهای نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم صفراست و یکی ازآنها برمحورxها قراردارد منحنی نمایش تابع برمحور xها مماس است ومعادلهٔ درجهٔ سوم یك ریشهٔ ساده ودو ریشهٔ مساوی دارد ریشهٔ ساده‌آن طبق دستور کاردان تعیین می‌شود و ریشهٔ مضاعف‌آن همان طول نقطهٔ ماکزیمم یا می‌نیمم است.

---

* این روش درکتابهای جبرسال ششم ریاضی ذکر شده است اما برای اینکه‌بحث ما ناقص نباشد در اینجا نیز بیان می‌شود.

اگر $4p^3+27q^2<0$ باشد عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم مختلف‌العلامه‌اند و این نقاط در طرفین محور x ها قرار دارند و منحنی نمایش تابع محور xهارا در سه نقطه قطع می‌کند یعنی معادلهٔ درجهٔ سوم سه ریشهٔ حقیقی دارد.

۴- معادلهٔ $x^n+1=0$ را به طریق زیر حل می‌کنیم

فرض می‌کنیم ریشهٔ این معادله $x=\alpha+i\beta$ باشد بدیهی است $x=\alpha-i\beta$ نیز ریشهٔ معادله خواهد بود بنابراین $(\alpha+i\beta)^n=-1$ و $(\alpha-i\beta)^n=-1$ و از آنجا $(\alpha-i\beta)^n(\alpha+i\beta)^n=1$ یا $(\alpha^2+\beta^2)^n=1$ یا $\alpha^2+\beta^2=1$ پس می‌توان فرض کرد $\alpha=\cos\theta$ و $\beta=\sin\theta$ بنابراین

$$x=\cos\theta+i\sin\theta$$

این ریشه درمعادله صدق می‌کند

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n+1=0$$

اما به موجب فرمول **موآور**

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

پس

$$\cos n\theta+i\sin n\theta+1=0$$

چنین می‌نویسیم

$$\cos n\theta+i\sin\theta=-1+i\times 0$$

وازآنجا

$$\cos n\theta=-1 \quad \text{و} \quad \sin n\theta=0$$

به دست می‌آید وبالاخره ازروابط اخیر نتیجه می‌شود

$$n\theta=(2k+1)\pi$$

یا

$$\theta=\frac{2k+1}{n}$$

k عددی است صحیح مثبت یا منفی. ریشه های معادله در ازاء مقادیر ازصفر تا $n-1$ که به k نسبت دهیم به دست می‌آیند این جوابهارا می‌توان درصفحهٔ موهوم آرگان نمایش داد به ازاء $k=0$ داریم $\theta_1=\frac{\pi}{n}$ این زاویه مرکزی کثیر الاضلاع $2n$ ضلعی است وقتی به k عدد $n-1$ را نسبت دهیم $\theta=2\pi-\frac{\pi}{n}$ به‌دست می‌آید که قرینهٔ زاویهٔ θ است نسبت به محور کسینوسها. در دایرهٔ مثلثاتی مرسوم درصفحهٔ ارگان برای هرمقدار زاویهٔ θ قرینه‌ای نیز موجود است بنابراین برای تعیین جوابها کافی است به k نصف مقادیر ازصفر تا $n-1$ را نسبت دهیم.

اگر n در معادله عدد اول باشد قابل نمایش در صفحهٔ آرگان نیست زیرا برای یکی ازجوابها قرینه‌ای موجود نخواهد بود بنابراین رسم چندضلعی های محاطی که عدهٔ اضلاع آنها عدد اول است ممکن نیست مگرجز درمورد ۳ ضلعی و ۵ ضلعی. گوس ثابت کرده است که کثیرالاضلاع ۱۷ ضلعی نیز قابل محاط شدن در دایره است یعنی معادلهٔ $x^{17}+1=0$ را می‌توان حل کرد وی معادله را طوری تحلیل کرده که ریشه‌های مزدوج دو بدو باهم ترکیب شدند.

بنابراین معادلهٔ $x^n+1=0$ وقتی که n عدد اول است جز در سه مورد $n=2$ و $n=5$ و $n=17$ قابل حل نیست مثلا معادلهٔ $x^7+1=0$ را نمی‌توان حل کرد زیرا هفت‌ضلعی محاطی را نمی‌توانیم رسم کنیم ترسیم آن به مسألهٔ تثلیث زاویه منجرمی‌شود که امکان ندارد.

پایان

آیا شما هم می‌توانید؟

به این قالبها نگاه کنید:

$$0+5+5+10=1+2+8+9$$
$$0^2+5^2+5^2+10^2=1^2+2^2+8^2+9^2$$
$$0^3+5^3+5^3+10^3=1^3+2^3+8^3+9^3$$

$$1+4+12+13+20=2+3+15+16+19$$
$$1^2+4^2+12^2+13^2+20^2=2^2+3^2+15^2+16^2+19^2$$
$$1^3+4^3+12^3+13^3+20^3=2^3+3^3+15^3+16^3+19^3$$

شاید اعداد دیگری نیز باشند که به این قالبها بخورند. آیا شما هم می‌توانید با آنها چنین قالبهایی بسازید؟

آیا از کسرهای زیر تعجب نمی‌کنید؟

$$\frac{24}{40}\times\frac{63}{36}\times\frac{26}{62}\times\frac{93}{39}=1$$

$$\frac{2244}{4422}\times\frac{6623}{3366}\times\frac{4466}{6644}\times\frac{9966}{6699}=1$$

$$\frac{422}{224}\times\frac{336}{633}\times\frac{622}{226}\times\frac{339}{933}=1$$

$$\frac{222666}{666222}\times\frac{999333}{333999}=1$$

اصغر بنالی - شعم ریاضی دبیرستان صنعتی اراک

دربارهٔ کتابهای درسی

به‌دنبال بحث و انتقاد آقای شریف‌زاده راجع به کتابهای درسی (مخصوصاً فیزیک کلاس سوم) بدنیست بنده نیز چند کلمه‌ای دربارهٔ کتابهای درسی بنویسم. آخر هر هم مسئولیتی بر دوشم احساس می‌کنم.

در اینکه کتب دبیرستانی ما حداقل پنجاه سال پیش در ممالک مترقی به‌صورت کتابهای با کاغذ اعلاء و اشکال گویا توأم با تجربه و آزمایش تدریس می‌شده است جای شك و شبهه نیست و این خود نهایت مایهٔ تأسف است ولی تأسف آدم وقتی افزون می‌شود که همین مطالب عهد بوقیرا نتوانسته‌ایم (یا نمی‌توانیم) آنطوری که لازم و شایسته است به‌صورت کتاب درآورده و به‌طور تئوری (چون صدی نود و پنج مدارس شهرستانها وسایل آزمایش ندارند) به دانش‌آموزان بدهیم.

میخواهم در حدود اطلاعاتم نکاتی چند که در فیزیك ششم طبیعی به‌چشم میخورد عرض کنم. قبل از هر چیز باید بگویم که برنامهٔ فیزیك کلاس ششم طبیعی با درنظر گرفتن اطلاعات و دانسته‌های یك دانش‌آموز ششم طبیعی فوق‌العاده انباشته و زیاد است زیرا همین کتاب با ۶۰ صفحه اختلاف در ششم ریاضی به‌صورت دو درس و هفته‌ای شش ساعت تدریس می‌شود در صورتی که در ششم طبیعی یك ماده بوده و برنامه‌اش هفته‌ای فقط چهار ساعت است. بگذریم از اینکه یك دانش‌آموز ریاضی بهتر و زودتر می‌تواند درس فیزیك را (که اکثراً به‌ریاضیات برمیخورد) درك کند. ولی می‌توان گفت که همین برنامهٔ شاق نیز از نقطهٔ نظر اصول کتاب‌نویسی و حتی بعضی مطالبش از لحاظ اصول علمی (جسارت می‌کنم) صحیح نیست زیرا:

در صفحهٔ اول کتاب فیزیك ششم طبیعی در تعریف سینماتیك نوشته شده است «در مکانیك مبحثی را که در آن.....» در صورتی که خود کلمهٔ «مکانیك» برای دانش‌آموز گنگ و بی‌معنی است و تا آخر کتاب نیز این گره گشوده نمی‌شود.

در همان صفحه در تعریف معادلهٔ حرکت چنین آمده است «رابطهٔ بین وضعیت جسم متحرك و زمان را معادلهٔ حرکت نامند». جملهٔ ناقص «وضعیت جسم متحرك» نیز نامفهوم است و اگر مثلا بگوئیم «رابطهٔ بین مسافت پیموده شده توسط جسم متحرك و زمان را معادلهٔ حرکت گویند» فکر می‌کنم موضوع بهتر و علمیتر بیان شده باشد.

در صفحهٔ «۵» نوشته شده «هر قدر شتاب بزرگتر باشد تغییرات سرعت شدیدتر است» که به‌جای کلمهٔ شدیدتر کلمات «بیشتر» یا «بزرگتر» مناسب بنظر میرسد. در صفحهٔ «۱۱» نوشته شده «وزن یا سنگینی اجسام همان نیروی جاذبهٔ زمین است» در صورتی که باید گفت «وزن اجسام نتیجهٔ وجود نیروی جاذبهٔ زمین است».

در صفحهٔ «۴۴» نوشته شده «مقاومت هوا باسطح بزرگترین مقطع عمود برحرکت جسم» در صورتی که باید گفت «مقاومت هوا با سطح بزرگترین مقطع عمود برجهت حرکت جسم». در صفحهٔ «۹۹» نوشته شده «هرگاه چیزی بتواند کاری انجام دهد گوئیم آن چیز دارای انرژی است» کلمهٔ چیز چه چیز است معلوم نیست و مطلب نارسا است. در صفحهٔ ۱۵۶ نوشته شده «نقاطی که فاصلهٔ آنها از مانع سخت مضرب زوجی از $\frac{\lambda}{4}$ است شکم می‌باشد» در صورتی که می‌دانیم این نقاط گره هستند نه شکم بالاخره نفهمیدیم «اثر» وجود دارد یا نه؟ تا آنجائی که بنده اطلاع دارم آزمایشهای فوق‌العاده دقیق مایکلسن و مورلی و تئوری نسبیت اینشتین وجود «اثر» را از نقطه نظر علوم نفی کرده است و موضوع «اثر» یا «اثیر» فعلا فعلا دستاویزی شده است برای فلاسفهٔ ایده‌آلیست و بس. ولی مؤلفین کتاب به‌شرح و بسط «اثر» پرداخته و وجود آنرا مسلم و محقق فرض نموده‌اند.

یك موضوع کلی و مهم دیگر این است که وقتی یك کتاب درسی را تغییر می‌دهند باید سعی شود مطالب با جملاتی رساتر و حتی‌الامکان گیراتر از کتاب قبل بیان شود. متأسفانه مؤلفین کتاب پایه و اساس کار خود و حتی اکثراً جمله‌بندیهای کتاب را نیز سعی شده است مثل کتاب سابق باشد. برای اجتناب از اطناب کلام این مقایسه را به‌عهدهٔ صاحب‌نظران ارجمند میگذارم و تنها میگویم که مطلب «ساختمان دینامو» را از لحاظ تشابه و همانندی جمله‌ها و اشکال در هر دو کتاب (جدید و قدیم) مقایسه نمایند.

البته آنچه گفته شد نظر فوق‌العاده اجمالی بود که به کتاب فیزیك ششم انداخته بودم. البته گفتنی زیاد است. باید متذکر شوم که تمام مطالب فوق ممکن است بی‌اساس و حتی غلط باشد و ایرادهای بنده وارد نباشد. ولی از آنجا که به انتقاد خیلی عقیده دارم مبادرت به این عمل کردم والاعلم و فضل مؤلفین کتاب نه حدیثی است که پنهان ماند.

م. افشار تبریزی - لیسانسیهٔ فیزیك

مباحث جدید در ریاضیات متوسطه

همنهشتها(*) و موارد استعمال آن در حساب

ترجمهٔ : محمد خطیبی

نوشتهٔ : آی . ا . بارنه

دربارهٔ همنشتها و موارد استعمال آن در جبر ، درشماره‌های ۸ و ۹ دورهٔ اول یکان توسط آقای پرویز شهریاری مفصلا بحث شد . درمقالهٔ زیر موارد استعمال همنشتهادر حساب بیان می‌شود و برای اینکه برای خوانندگان اشکالی پیش نیاید در مقدمه ، تعریفها وخواص آنها بیان‌می‌شود ، هرچندکه در مقاله‌های فوق‌الذکر به‌آنها اشاره شده است .

اغلب اتفاق می‌افتدکه به‌علت کمبود وسائل لازم برای ثبت و ضبط نتایج اخذ شدهٔ در موردی ، پیشرفت درآن کند می شود . این امر در ریاضیات و موسیقی صادق است . اگر یونانیان قدیم به‌روش کنونی مادرنوشتن‌اعداد پی برده بودند ، احتمال داشت‌که به پیشرفت ریاضیات کمك بیشتری کنند

حتی غولهای عظیم جهان ریاضی نظیر **فرما و اولر** درنتیجهٔ عدم استفاده ازدستگاه مناسب عددنویسی به‌اشکالهایی دربیان واستدلال برخورده‌اند.

برای اولین بار **گوس** دریافت‌که با توسعهٔ مفهوم‌تساوی می‌توان به‌سادگی موفق به‌بیان حقایقی‌آشکار درتئوری‌اعداد گردید و با استفاده از روشهای تازه ، نتایج تازهٔ بیشتری کشف‌کرد :

مفهوم همنهشت .

نظریهٔ همنشتها راگوس مطرح کرده وبه صورت زیر نمایش داد .

$$a \equiv b \pmod{m}$$

که خوانده می‌شود ، «a در مدول m با b همنهشت است » و مفهوم‌آن این است‌که $(a-b)$ برعدد m قابل قسمت است.

باید توجه داشت‌که a و b اعداد مثبت یامنفی صحیحند و صفر نیز می‌توانند باشنددرحالی‌که m عددی ازسلسلهٔ اعداد طبیعی است .

اگر $a=b$ باشد $(a-b)$ برابر با صفر بوده و در نتیجه این تفاضل بر هرعدد قابل قسمت خواهد بود پس می‌توان نوشت :

$$a \equiv a \pmod{m}$$

چنانکه $m=1$ باشد درازاء هرعدد صحیحی که برای a و b درنظر گرفته شود داریم : $a \equiv b \pmod{1}$ زیرا $(a-b)$ همیشه بر ۱ بخش پذیر است .

مثالهای مربوط عبارتند از : $7 \equiv 3 \pmod{2}$ زیرا $(7-3)$ بر ۲ قابل قسمت بوده وهمچنین $7 \equiv 3 \pmod{4}$ چون $(7-3)$ بر۴ بخش پذیر می‌باشد ، در حالی‌که ۷ با ۳ درازاء مدول۳همنهشت نیست زیرا $(7-3)$ بر ۳قابل قسمت نمی باشد .

تعریف مناسب‌دیگرهمنهشت که کاملا معادل باتعریف‌قبلی است ، این است که بگوئیم ، مفهوم $a \equiv b \pmod{m}$ عبارتست از اینکه وقتی a را بر m تقسیم‌کنیم باقیمانده ای بدست می‌آید که با باقیماندهٔ تقسیم b بر m مساوی است . بنابراین $93 \equiv 18 \pmod{5}$ زیراباقیماندهٔتقسیم۹۳ بر ۵ و باقیماندهٔ تقسیم ۱۸ بر ۵ هر دو برابر با ۳ است . همچنین $93 \equiv 18 \pmod{25}$ زیرا باقیماندهٔ تقسیم هر یك از اعداد ۹۳ و ۱۸ بر ۲۵ مساوی با۱۸ است .

عملیات بر روی همنهشتها

از همنهشتها می‌توان در مسائل تقویم ، حیله‌های بازی ورق و مربعهای وفقی وبازیهای دیگر استفاده‌کرد .دراین‌جا ما فقط به موارد استعمال آن در جبر و حساب می پردازیم .

* Congruences

نیست قبل از بررسی موارد استعمال مذکورد بـه اهمیت بعضی عملیات برروی همنهشتها توجه کنیم . استدلال آنها بـه همان آسانی درمورد تساویهاست . در یك‌مدول ، دوعدد همنهشت با عدد سوم همنهشت‌یکدیگرند. اگر دو همنهشت را بامدول ثابت ازهم‌تفریق یا باهم جمع و یادرهم‌ضرب کنیم ، همنهشت‌دیگری باهمان مدول بدست‌می‌آید. بنابراین اگر $a \equiv b \pmod m$ و $c \equiv d \pmod m$ باشد داریم

$$a+c \equiv b+d \pmod m$$

$$a-c \equiv b-d \pmod m$$

$$ac \equiv bd \pmod m$$

و درحالت خاص $a^2 \equiv b^2 \pmod m$ و $a^8 \equiv b^8 \pmod m$.درتقسیم باید کمی دقت کرد .باوجود اینکه $76 \equiv 28 \pmod 8$ نمی‌توان طرفین را بـر عدد ٤ تقسیم کرد ، زیرا نتیجه می‌شود $19 \equiv 7 \pmod 8$ و ایـن درست نیست . دلیل آن واضح است ، باوجوداینکه $(76-28)$ بر ۸ بخش پذیراست $\left(\frac{76}{4}-\frac{28}{4}\right)$ بـر ۸ قابـل‌قسمت نیست .

مع‌ذالك می‌توان عوامل یك همنهشت را برعددی تقسیم کـرد درصورتی که عدد مذکور بامدول عامل مشترك نداشته بـاشد .

برای مثال ، از $50 \equiv 5 \pmod 9$ نتیجه می‌شود $10 \equiv 1 \pmod 9$ اما $76 \equiv 28 \pmod 8$ هرگز همنهشت بودن ۷ و ۱۹ را در مـدول ۸ نمی‌رسانـد ، زیرا ۷۶ و ۲۸ را بر ٤ تقسیم کرده‌ایم و ٤ با ۸ عامل مشترك‌دارند

اینك به یك‌مورد اختلاف دیگربین همنهشتها وتساویهای جبری می‌پردازیم .

درجبر وقتی حاصلضرب دوعدد مساوی بـا صفر می‌شود که اقلا یکی ازآن دو باصفر برابر باشد .

اما در $(2)(4) \equiv 0 \pmod 8$ هیچ یـك ازدو عامل ۲ یا ٤ بر ۸ قابل بخش‌نیست مع‌ذالك اگرمدول ، عددی اول مانند p باشد در این‌صورت از همنشت $a \cdot b \equiv 0 \pmod p$ می‌توان نتیجه گرفت که یکی از دو همنهشت زیر برقراراست :

$$a \equiv 0 \pmod P \quad \text{یا} \quad b \equiv 0 \pmod p$$

می‌توان ضمن تحقیق برقراری همنهشت

$$2^{2^5}+1 \equiv 0 \pmod{641}$$

به اهمیت استفاده ازهمنهشتها در ساده کردن عملیات نیز توجه کرد .

اول مشاهده می‌کنیم که

$$2^{16}=65{,}536 \ ، \ 2^8=256 \ ، \ 2^4=16 \ \text{و} \ 2^2=4$$

درحالی کـه $65536 \equiv 154 \pmod{641}$ زیـرا می‌توان تحقیق کرد که ۱۵٤ باقیماندهٔ تقسیم ٦٥٥٣٦ بر ٦٤١ است . و چون از ضرب طرفین دوهمنهشت بامدولهای‌متساوی همنشت دیگری باهمان‌مدول بدست می‌آید داریم :

$$(2^{16})^2 = 2^{32} \equiv (154)^2 \pmod{641}$$

اما $(154)^2 = 23716 \equiv 640 \equiv -1 \pmod{641}$

بنابراین $2^{32}+1$ بر ٦٤١ قابل قسمت است که آنرا می‌توان به صورت‌دیگری یعنی

$$2^{2^5}+1 \equiv 0 \pmod{641}$$ بیان کرد .

مطالبی کهنه و نو دربارهٔ همنهشتها

باروش همنهشتها ، قضیهٔ سادهٔ فرمـا راکـه می‌گوید : عبارت $(a^{p-1}-1)$ برعدداول p بخش پذیراست می‌توان بـه صورت زیر نوشت :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

باتوجه به‌اینکه a عامل p ندارد .

اگر ازشرط‌آخر صرف نظر کنیم می‌توان نتیجه‌رابـه صورت $a^p \equiv a \pmod p$ نوشت. چنانکه‌اگر a عامل p داشته باشد a^p-a به‌طور قطع برعدداول p قابـل قسمت خواهدبود .

با توجه به خاصیت جدید همنهشتها علاوه‌برآنچه که قبلا ذکر شد به اثبات قضیهٔ فرما راهنمائی می‌شویم . با مفروضات مربوط به قضیه داریم : p عددی است اول و a مضربی از p نیست . دراین‌صورت هرعامل ازرشتهٔ زیر

$$a \ \text{و} \ 2a \ \text{و} \ 3a \ \ldots (p-1)a$$

فقط بایك‌عضو ازدسته‌اعدادصحیح‌زیردرمدول p همنهشت‌است

$$1 \ \text{و} \ 2 \ \text{و} \ 3 \ \ldots \ \text{و} \ (p-1)$$

با این شرط که رعایت‌ترتیب فوق ضروری نیست .این نتیجهٔ مقدماتی را ثابت نخواهیم کـرد ولی بـرای روشن شدن مطلب به‌ذکرمثالی‌اکتفا می‌کنیم‌فرض‌می‌کنیم $p=7$ و $a=4$ باشد اعداد صحیح ۲٤و۲۰و۱٦و۱۲و۸و٤ به ترتیب بـا اعداد ۳و٦و۲و٥و۱و٤ بامدول ۷ همنهشت هستند . و این اعداد در واقع اعداد ٦و٥و٤و۳و۲و۱ می‌باشند .چون دو همنهشت بـا مدولهای متساوی می‌توانند درهم ضرب شوند ، و با توجه به مطالب قبلی داریم :

$$(a)(2a)(3a)\cdots(p-1)a \equiv (1)(2)(3)\cdots(p-1) \pmod p$$

واین همنهشت را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت .

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod p.$$

می‌توان طرفین را بر $(p-1)!$ تقسیم کرد زیرا

$(p-1)!$ با p عامل مشترك ندارد ودراین صورت داریم :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

اولر قضیهٔ فرمارا بهصورت زیر تعمیم داده است

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$$

بااین شرط که a و m عامل مشترکی نداشته باشند

قضیهٔویلسن را می توان بهصورت زیر بیان کرد .

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

مجموع توانها مختلف اعداد صحیح متوالی یك عده همنهشتهای جالب تشکیل میدهند ، به فرض اینکه p عددی اول باشد داریم :

$$1+2+3\ldots+(p-1) \equiv 0 \pmod p$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(p-1)^2 \equiv 0 \pmod p$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(p-1)^3 \equiv 0 \pmod p$$

.....

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+(p-1)^k \equiv 0 \pmod p$$

بااین شرط که k مضربی از $(p-1)$ نیست .درصورتی که k مضرب $(p-1)$ باشد داریم :

$$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\ldots+(p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod p$$

$$1^{2(p-1)}+2^{2(p-1)}+3^{2(p-1)}+\ldots+(p-1)^{2(p-1)} \equiv -1 \pmod p$$

.....

فقط ساده ترین همنهشت از دستهٔ اول را ثابت خواهیم کرده یعنی ،

$$1+2+3+\ldots+(p-1) \equiv 0 \pmod p$$

طبق دستور مربوط داریم :

$$1+2+3+\ldots+(p-1) = \frac{(p-1)p}{2}$$

چون p اول است بنابراین عدد صحیح $\frac{p(p-1)}{2}$ مضربی از p بوده ودرستی همنهشت محقق میشود .

داریم :

$$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\ldots \equiv 1 \pmod p$$

چون p عددی اول است اعداد $(p-1)$ و ..،۳،۲،۱ عامل مشترکی با p ندارند .

طبق دستور فرما داریم :

$$1^{p-1} \equiv 1 \pmod p \quad 2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

$$3^{p-1} \equiv (\bmod p) \ldots (p-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

از جمع $(p-1)$ همنهشت با مدول فوق همنهشت زیر بدست می آید :

$$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\ldots+(p-1)^{p-1}$$

$$\equiv \underbrace{1+1+\ldots+1}_{(p-1)\text{ بار}} \pmod p$$

$$\equiv (p-1) \pmod p$$

$$\equiv -1 \pmod p.$$

برقراری همنهشتهای دیگراین گروه بههمین ترتیب ثابت میشود .

***

بعضی مطالب حساب ، جبر و مثلثات را نیز میتوان بهصورت همنهشت نوشت .

مثلا اصل و عکس این قضیه را در نظر بگیرید: اختلاف دوعددکه از سمت راست بهرقمهای متساوی ختم شدهاند مضربی از ۱۰ است چنانچه اختلاف ۱۲ و۱۰۲ برابر با۹۰ ، ۱۰۲ و۱۰۰۲ برابر با ۹۰۰ ، ۲۷ و ۴۹۷ برابربا۴۶۰ است .

این همبستگیها را می توان به طریق زیر بیان کرد :

اگر $M \equiv N \pmod{10}$ باشد رقم سمت راست عدد M با رقم سمت راست عدد N برابر خواهد بود. و بالعکس.

میدانیم که علامت توانی از (-1) بهصورت $(-1)^n$ بستگی به اینداردکه n زوج یا فرد باشد بااستفاده از قواعد همنهشتهامیتوان گفت :

اگر $m \equiv n \pmod 2$ باشد داریم

$(-1)^m = (-1)^n$ و برعکس. در مثلثاتزاویههایی که اختلاف اندازهعایشان مضربی از (360°) است دارای نسبتهای مثلثاتی متساوی هستند .

بنابراین اگر $A \equiv B \pmod{360^\circ}$ باشد ،داریم $\sin A = \sin B$ و $\cos A = \cos B$ و غیره .

***

بخش پذیری بر ۹ و ۳ و ۱۱

اکنون ماآمادگی داریم که به موارد استعمال همنهشتها بپردازیم . دستگاه عدد نویسیمعمولی ما برمبنایاعشاری است،

به‌طوریکه مثلا ۲۵۷ مفهومش $۲\times۱۰^{۲}+۵\times۱۰^{۱}+۷\times۱۰^{۰}$ بوده و عدد ۵۰۱٫۲۳ مفهوم

$$۵\times۱۰^{۲}+۰\times۱۰^{۱}+۱\times۱۰^{۰}+۲\times۱۰^{-۱}+۳\times۱۰^{-۲}$$

را می‌رساند . به‌طور کلی اگر u و t و h و ... رقمهای یکان و دهگان و صدگان و ... عددی مانند N فرض شوند ، داریم

$$N=u+۱۰t+۱۰۰h+\dots$$

از $۱۰\equiv۱ \pmod{۹}$ داریم، $۱۰t\equiv t \pmod{۹}$ زیرا طرفین همنهشت قبلی را در عدد t ضرب کرده‌ایم . همچنین از $۱۰۰\equiv۱ \pmod{۹}$ داریم $۱۰۰h\equiv h \pmod{۹}$ بدین ترتیب می‌توان نوشت :

$$N\equiv u+t+h+\cdots \pmod{۹}$$

با توجه به تعریف همنهشت مفهوم رابطهٔ بالا این است که اختلاف هرعدد با مجموع ارقامش مضربی از ۹ است .

مثلا :

$$۷۲۳۸۱-(۷+۲+۳+۸+۱)=۷۲۳۸۱-۲۱=۷۲۳۶۰=۹\times۸۰۴۰$$

و چنین نتیجه می‌گیریم که عددی بر ۹ بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر ۹ قابل قسمت باشد . مسلم است که امتحان بخش‌پذیری مجموع ارقام یك عدد بر ۹ از خود عدد آسانتر است .

مثلا اگر عدد مورد نظر عدد ۳۰۱۰۰۰۰۲ باشد مجموع ارقامش مساوی است با (۲+۱+۳) که برابر با ۶ بوده و بر ۹ بخش پذیر نیست ، و در نتیجه خود عدد بر ۹ بخش پذیر نمی‌باشد .

بر عکس عدد ۵۱۱۱۱۰۰۰۰۰۹ بر ۹ بخش پذیر است زیرا مجموع ارقام آن یعنی

$$۱۸=(۹+۱+۱+۱+۱+۵)$$ مضربی از ۹ است .

قاعده‌ای شبیه به قاعدهٔ بخش پذیری بر ۹ ، شامل قابلیت تقسیم بر ۳ میشود ، یعنی : عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ قابل قسمت باشد .

مثلا عدد ۳۰۱۰۰۰۰۲ که مجموع ارقامش ۶ است بر ۳ قابل بخش است .

قاعدهٔ بخش پذیری بر ۱۱ به‌این اساس است که :

$$۱۰\equiv-۱ \pmod{۱۱} \text{ و } ۱۰^{۲}\equiv۱ \pmod{۱۱} \text{ و } ۱۰^{۳}\equiv۱ \pmod{۱۱} \text{ و } \dots$$

بنابراین تساوی $N=u+۱۰t+۱۰۰h+\dots$ قابل تبدیل به همنهشت زیر است

$$N\equiv u-t+h\dots \pmod{۱۱}$$

در قالب کلمات معنی همنهشت اخیر را بدین صورت می‌توان بیان کرد: عددی بر ۱۱ قابل قسمت است که رقم یکان آن منهای رقم دهگان به علاوهٔ رقم صدگان الی آخر (از آن عدد) بر ۱۱ بخش پذیر باشد . عکس این نیز درست است مثلا :

چون $۹۵۸۱\equiv۱-۸+۵-۹\equiv-۱۱ \pmod{۱۱}$

پس ۹۵۸۱ بر ۱۱ بخش پذیر است

اما $۹۲۳۴\equiv۴-۳+۲-۹\equiv-۶ \pmod{۱۱}$

بنابراین ۹۲۳۴ بر ۱۱ قابل قسمت نیست .

***

نه نه طرح کردن به صورت یك مقابلهٔ عددی

اگر این قاعده را بپذیریم که باقیماندهٔ تقسیم هرعدد بر ۹ مساوی باقیماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن بر ۹ است . طریقهٔ سادهٔ مقابلهٔ عملیات جمع و تفریق و ضرب و تقسیم را بدست خواهیم آورد .

در اینجا یك نمونهٔ مقابله فقط برای ضرب ذکر می‌کنیم. توضیحی دربارهٔ اینکه چگونه عملیات بر روی همنهشتها قابل اجرا هستند نخواهیم داد و اینرا به عهدهٔ علاقمندان واگذار می‌کنیم . به‌حاصل ضرب ۳۶۰۲ در ۹۷۸ توجه کنید :

۳۶۰۲×	⟶ ۱۱	⟶ ۲×
۹۷۸	⟶ ۲۴	⟶ ۶
۲۸۸۱۶		۱۲ ⟶ ۳
۲۵۲۱۴		
۳۲۴۱۸		
۳۵۲۲۷۵۶	⟶ ۳۰	⟶ ۳

پیکانهایی که درسمت راست ۳۶۰۲ رسم شده‌اند دال براین هستند که باجمع ارقام ، این عدد را نه‌نه طرح کرده واول ۱۱ سپس ۲ بدست آورده‌ایم : برای ۹۷۸ اول ۲۴ و بعد ۶ بدست می‌آوریم . بعد ۲ را در ۶ ضرب کرده ۱۲ و در نتیجه ۳ حاصل می‌شود. اکنون مجموع ارقام حاصلضرب یعنی ۳۵۲۲۷۵۶ را تعیین می‌کنیم ، می‌شود ۳۰ و از آنجا حاصل می‌شود ۳ . این همان مقداری است که قبلا بدست آمده بود. این بود مقابلهٔ مورد نظر .

در اینجا ما از این قاعده استفاده کرده‌ایم که حاصلضرب باقیمانده‌ها ، باقیماندهٔ حاصلضرب است .

باید متذکر شویم که این آزمایش همواره درست نیست ، زیرا اگر جای دو رقم را عوض کنیم باز مقابله صحیح خواهد بود.

حل چند مسئلهٔ نمونه

(نقل از کتاب .E.P.M)

۲۳۴۷ـ باتوجه به‌اینکه $۱۰^۳-۱=۲۷\times۳۷$ است ثابت کنید که اگر عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ بر ۲۷ (یا بر ۳۷) قابل قسمت باشد، هریك از عددهای $\overline{bca}$ و $\overline{cab}$ نیز بر آن قابل قسمت می‌باشند

حل ـ وقتی که $\overline{abc}$ بر ۲۷ (یا ۳۷) قابل‌قسمت باشد داریم

$$\overline{abc}\equiv ۰ \pmod{۲۷ \text{ یا } ۳۷}$$

$$۱۰۰a+\overline{bc}\equiv ۰ \pmod{۲۷ \text{ یا } ۳۷}$$

طرفین این همنهشت را در ۱۰ ضرب می‌کنیم

$$۱۰۰۰a+۱۰\overline{bc}\equiv ۰ \pmod{۲۷ \text{ یا } ۳۷}$$

و می‌توانیم چنین بنویسیم

$$(۱۰\overline{bc}+a)+۹۹۹a\equiv ۰ \pmod{۲۷ \text{ یا } ۳۷}$$

چون $۹۹۹=۲۷\times۳۷$ بنابراین

$$۱۰\overline{bc}+a\equiv ۰ \pmod{۲۷ \text{ یا } ۳۷}$$

و به عبارت دیگر

$$\overline{bca}\equiv ۰ \pmod{۲۷ \text{ یا } ۳۷}$$

می‌توان گفت که اگر رقم سمت‌چپ عدد سه‌رقمی قابل‌قسمت بر ۲۷ یا ۳۷ را سمت‌راست آن ببریم عدد حاصل نیز بر ۲۷ یا ۳۷ قابل‌قسمت است. وقتی که $\overline{bca}$ بر ۲۷ یا ۳۷ بخش‌پذیر باشد $\overline{cab}$ نیز بر آنها قابل‌قسمت خواهد بود.

***

۲۳۴۸ـ با توجه به‌تساویهای

$$۱۰۰۰=۷۷\times۱۳-۱ \quad \text{و} \quad ۱۰۰۰=۲۷\times۳۷+۱$$

باقیماندهٔ تقسیم عدد $N=۷۴۲۳۷۱۱۴۹$ را بر ۳۷ و بر ۱۳ تعیین کنید

حل ـ از تساویهای ذکرشده به‌دست می‌آید:

$$۱۰^۶\equiv ۱ \quad \text{و} \quad ۱۰^۳\equiv ۱ \pmod{۳۷}$$

$$۱۰^۶\equiv ۱ \quad \text{و} \quad ۱۰^۳\equiv -۱ \pmod{۱۳}$$

ازطرف دیگر می‌توانیم چنین بنویسیم

$$N=۷۴۲\times۱۰^۶+۳۷۱\times۱۰^۳+۱۴۹$$

ونتیجه می‌شود

$$N=۷۴۲+۳۷۱+۱۴۹ \pmod{۳۷}$$

$$N=۲+۱+۱۴۹=۱۵۲ \pmod{۳۷}$$

$$N\equiv ٤ \pmod{۳۷}$$

یعنی باقیماندهٔ تقسیم N بر ۳۷ برابر است با ٤. دربارهٔ ۱۳ می‌توانیم بنویسیم

$$N=۷٤۲-۳۷۱+۱٤۹ \pmod{۱۳}$$

$$N=٥۲۰ \pmod{۱۳}$$

$$N\equiv ۰ \pmod{۱۳}$$

یعنی N بر ۱۳ بخش‌پذیر است

***

۲۳۴۹ـ باقیماندهٔ تقسیم عدد $۷۰۷۷^{۳۷۷}$ را بر ۱۱ پیدا کنید

حل ـ داریم $۷۰۷۷=۱۱\times٦٤۳+٤$ ودرمدول ۱۱ به‌ترتیب چنین می‌نویسیم

$$۷۰۷۷=٤$$

$$۷۰۷۷^۲\equiv ۱٦\equiv ٥$$

$$۷۰۷۷^۳\equiv ٤\times٥=۲۰\equiv ۹$$

$$۷۰۷۷^٤\equiv ٤\times۹=۳٦\equiv ۳$$

$$۷۰۷۷^٥\equiv ٤\times۳=۱۲\equiv ۱$$

از این به‌بعد باقیمانده‌های تقسیم توانهای متوالی عدد ۷۰۷۷ متناوباً تکرارشده ودرمدول ۱۱ داریم

$$۷۰۷۷^{٥k}\equiv ۱ \quad \text{و} \quad ۷۰۷۷^{٥k+۱}\equiv ٤ \quad \text{و} \quad ۷۰۷۷^{٥k+۲}\equiv ٥$$

$$۷۰۷۷^{٥k+۳}\equiv ۹ \quad \text{و} \quad ۷۰۷۷^{٥k+٤}\equiv ۳$$

وباتوجه‌به‌اینکه $۳۷۷=٥\times۷٥+۲$ نتیجه‌می‌شود

$$۷۰۷۷^{۳۷۷}=۷۰۷۷^{٥\times۷٥}\times۷۰۷۷^۲$$

$$۷۰۷۷^{۳۷۷}\equiv ۷۰۷۷^۲\equiv ٥$$

یعنی باقیماندهٔ تقسیم عدد داده شده بر ۱۱ برابر ٥ است.

***

۲۳۵۰ـ N عدد صحیح (مثبت) دلخواه S مجموع ارقام آن و u رقم یکان آن می‌باشد ثابت کنید که عدد $T=N+۲S+۳u$ بر ٦ قابل‌قسمت است. وعدد N را تعیین کنید بنابر آنکه بر ٥ قابل‌قسمت بوده و $T=٦۰۰$ باشد.

حل ـ اولا داریم

$$N\equiv u \pmod{۲}$$

$$N+۲S+۳u=۲S+٤u\equiv ۰ \pmod{۲}$$

$$T\equiv ۰ \pmod{۲}$$

از طرف دیگر

$$N\equiv S \pmod{۳}$$

$$N+۲S+۳u=۳S+۳u\equiv ۰ \pmod{۳}$$

$$T\equiv ۰ \pmod{۲}$$

وچون ۲ و ۳ نسبت به‌هم اول هستند نتیجه می‌شود

$$T\equiv ۰ \pmod{٦}$$

ثانیاً چون $N<T=600$ است بنابراین N حداکثر سه رقمی است و فرض می‌کنیم

$N=\overline{cdu}=100c+10d+u$ و داریم

$T=100c+10d+u+2(c+d+u)+3n$

$T=102c+12d+6u=6(17c+2d+u)=600$ و

$17c+2d+u=100 \qquad (1)$

چون N بر ۵ بخش‌پذیر است بنابراین یا $u=0$ ویا $u=5$ ، اگر $u=0$ باشد $17c+2d=100$ بوده و نشان می‌دهد که اولاً c باید زوج باشد و درثانی از $0\leqslant 2d\leqslant 18$ نتیجه می‌شود $82\leqslant 17c\leqslant 100$ یا $100-18\leqslant 17c\leqslant 100$

وتنهامقداری‌از c که در این نامساوی‌مضاعف‌صدق‌می‌کند $c=5$ است که قابل قبول نیست بنابراین $u\neq 0$ بوده و فرض می‌کنیم $u=5$ در این‌صورت از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید $17c+2d=95$ که نشان می‌دهد c باید فردباشد وهمچنین

$77\leqslant 17c\leqslant 95$ یا $95-18\leqslant 17c\leqslant 95$

برای c جواب قابل قبول $c=5$ حاصل شده از آنجا $d=5$ و عدد مطلوب ۵۵۵ می‌باشد .

***

۲۳۵۱ ـ ثابت کنید که اگر n مضرب ۳ نباشد عدد $A=3^{2n}+3^n+1$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است . در حالتی که n مضرب ۳ باشد باقیماندهٔ تقسیم A را بر ۱۳ پیدا کنید .

حلـ داریم $3^3=1 \pmod{13}$

و نتیجه می‌شود $3^{3p}=1 \pmod{13}$

حالت‌کلی فرض می‌کنیم

$n=3p+h \qquad (h=0$ یا ۱ یا ۲$)$

$A=3^{6p+2h}+3^{3p+h}+1=$

$3^{6p}+3^{2h}+3^{3p}\times 3^h+1$

و نتیجه می‌شود

$A\equiv 3^{2h}+3^h+1 \pmod{13}$

اگر $h=1$ باشد داریم

$A\equiv 3^2+3+1=13$ یا $A\equiv 0 \pmod{13}$

اگر $h=2$ باشد داریم

$A=3^4+3^2+1=91\times 13$ یا $A\equiv 0 \pmod{13}$

و اگر $h=0$ باشد داریم

$A\equiv 1+1+1=3$ یا $A\equiv 3 \pmod{13}$

***

۲۳۵۲ـ باتوجه به تساویهای $10^3-1=9\times 111$ و $10^3+1=7\times 11\times 13$

۱) ثابت کنید که عدد $A=10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ (n عدد صحیح مثبت) در ازاء جمیع مقادیر n بر ۱۱۱ بخش پذیر است و چنانچه n فرد باشد عدد A بر ۷ و ۱۳ نیزقابل قسمت است.

۲) ثابت کنید عدد $B=10^{9n}+10^{6n}+10^{3n}+1$ در حالتی‌که n فرد باشد بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است و در حالات دیگر باقیماندهٔ تقسیم‌این عدد را بر ۷ و ۱۱و۱۳ و ۱۱۱ پیداکنید .

حلـ نخست ملاحظه می‌کنیم که از تساویهای

$10^3-1=9\times 111$ و $10^3+1=7\times 11\times 13$

نتیجه می‌شود که

$10^3\equiv 1 \pmod{111}$ و $10^{3n}\equiv 1 \pmod{111}$

و $10^3\equiv -1 \pmod{7و11و13}$

$10^{3n}\equiv (-1)^n \pmod{7و11و13}$

۱) داریم

$A=10^{6n}\times 10^2+10^{3n}\times 10+10=$

$(10^{3n})^2\times 10^2+10^{3n}\times 10+1$

و نتیجه می‌شود

$A\equiv 10^2+10+1=111\equiv 0 \pmod{111}$

یعنی A بر ۱۱۱ بخش‌پذیر است. نسبت به ۷و۱۳داریم

$A\equiv (-1)^{2n}\times 10^2+(-1)^n\times 10+1$

(mod ۷ و ۱۳)

اگر n فرد باشد داریم

$A\equiv 10^2-10+1=9=7\times 13\equiv 0$

(mod ۷ و ۱۳)

یعنی در حالت n فرد عدد A بر ۷ و ۱۳ و در نتیجه بر ۹۱ بخش‌پذیر است .

۲) داریم

$B=(10^{3n})^3+(10^{3n})^2+10^{3n}+1$

$B\equiv (-1)^{3n}+(-1)^{2n}+(-1)^n+1$

(mod ۷ و ۱۱ ۱۳)

اگر n فرد باشد ، می‌شود

$B\equiv -1+1-1+1\equiv 0 \pmod{7و11و13}$

و اگر n زوج باشد

$B\equiv 1+1+1+1\equiv 4 \pmod{7 و 11 و 13}$

و همچنین داریم

$B\equiv 1+1+1+1\equiv 4 \pmod{111}$

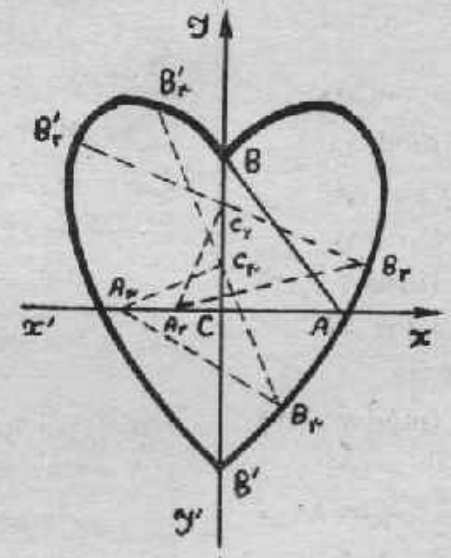
(دنباله دارد)

* معادلهٔ عشق *

ترجمه وتلخیص از: عباس نعمتیان

«کسی عشق را به فرمول درآورده است!» و مردم فریاد برخواهند آورد که «می‌بایستی چنین اتفاقی رخ دهد».

محورهای متعامد $x'ox$ و $y'oy$ و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $C=90^\circ$ ، $AC=b$ و $BC=a$ و a و b مقادیر ثابت هستند مفروض است و فرض می‌کنیم نقطهٔ A بر محور $x'x$ و نقطهٔ C بر نیم محور oy حرکت نماید و قرینهٔ B را نسبت به نقطهٔ C با B' می‌نمائیم.



مکان نقطهٔ A قطعه خطی است از محور $x'x$ که با دو نقطهٔ $A_1(b \text{ و } 0)$ و $A'_1(-b \text{ و } 0)$ مشخص می‌شود. مکان نقطهٔ C قطعه خطی است که به دو نقطهٔ $B(0 \text{ و } 0)$ و $B_1(0 \text{ و } b)$ محدود می‌شود. و اما مکان نقطهٔ B و نقطهٔ B' یك منحنی است که شکل قلب را نمایش می‌دهد.

مقصود تشکیل معادلهٔ این منحنی یا به عبارت دیگر پیدا کردن «معادلهٔ عشق» می‌باشد.

در مقدمه ملاحظه می‌کنیم که شکل قلب حاصل به نسبت $\frac{b}{a}$ بستگی دارد و می‌توانیم a را ثابت فرض نموده و b را پارامتر اختیار نمائیم. فرض می‌کنیم $A(x \text{ و } 0)$ و $B(X \text{ و } Y)$ بنا بر رابطهٔ فیثاغورث خواهیم داشت $C(0 \text{ و } \sqrt{b^2-x^2})$ و از آنجا نتیجه می‌شود $B'(-X \text{ و } 2\sqrt{b^2-x^2}-Y)$ ضریب زاویه‌های خطوط AC و BC را به ترتیب m و m' می‌نامیم، داریم:

$$m=\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{-x} \quad \text{و} \quad m'=\frac{Y-\sqrt{b^2-x^2}}{X}$$

وچون $mm'=-1$ است پس:

$$\frac{(Y-\sqrt{b^2-x^2})\sqrt{b^2-x^2}}{-xX}=-1$$

$$(Y-\sqrt{b^2-x^2})\sqrt{b^2-x^2}=xX \qquad (1)$$

$$(Y-\sqrt{b^2-x^2})^2=\frac{x^2X^2}{b^2-x^2}$$

ازطرف دیگر داریم:

$$BC^2=B'C^2=a^2 \quad \text{یا}$$

$$X^2+(Y-\sqrt{b^2-x^2})^2=a^2 \quad \text{و} \qquad (2)$$

$$(Y-\sqrt{b^2-x^2})^2=a^2-X^2$$

ازمقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

$$\frac{x^2X^2}{b^2-x^2}=a^2-X^2$$

واز این رابطه به دست می‌آید:

$$x^2=\frac{b^2(a^2-X^2)}{a^2} \quad \text{یا} \quad x=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$b^2-x^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}(a^2-X^2)=\frac{b^2X^2}{a^2}$$

$$\sqrt{b^2-x^2}=\sqrt{\frac{b^2X^2}{a^2}}=\frac{bX}{a}=\frac{b}{a}|X|$$

با توجه به رابطهٔ اخیر، رابطهٔ (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(Y-\frac{b}{a}|X|\right)^2=a^2-X^2$$

و بالاخره

$$Y=\frac{b}{a}X\pm\sqrt{a^2-X^2}$$

اگر $a=1$ اختیار شود معادلهٔ حاصل که «یك قلب معمولی» را بیان می‌کند عبارت می‌شود از :

$$y=b|x|\pm\sqrt{b-x^2}$$

و می‌توانیم با توجه به مقادیر مختلفی که b اختیار می‌کند درشکل قلب مطالعه نمائیم؛ مقادیر بزرك b قلبی بی‌قواره و نا موزون و مقادیر کوچکتر b قلبی موزون را به دست میدهد. شاید به ازاء $b=\frac{3}{4}$ (که در این حالت اضلاع مثلث ABC با اعداد ۳ و ۴ و ۵ متناسب می‌باشند) موزونترین شکل قلب رسم شود .

تبصره ـ معادلهٔ $y=bx\pm\sqrt{1-x^2}$ معادلهٔ یك بیضی است که مبدأ مختصات مرکز آن و $\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}(-\frac{2}{b})$ شیب محور کانونی آن نسبت به محور $x'x$ می‌باشد .

دربارهٔ اعداد فیثاغورثی

دربارهٔ مقالهٔ «ساده‌ترین راه تعیین اعداد فیثاغورثی» مندرج درشمارهٔ سیزدهم یکان نامه‌هایی مفصل ومشروح از آقایان : هوشنگ شریف زاده دبیر دبیرستانهای نی‌ریز ، مگردیچ توماتیان دانشجوی سال اول ریاضی دانشکدهٔ علوم ، مرتضی صدیقین دانش‌آموز کلاس چهارم ریاضی دبیرستان صارمیه اصفهان واصل شده است که قسمتی از نامهٔ آقای شریف زاده در زیر چاپ می‌شود . بسیاری دیگر از خوانندگان هم حضوری یا وسیلهٔ تلفن در این باره توضیحاتی داده‌اند .

.... درشمارهٔ ۱۳ مجلهٔ یکان مقاله‌ای تحت عنوان « ساده‌ترین راه تعیین اعداد فیثاغورثی » به قلم آقای خلیل صدیق ارشادی ملاحظه‌شد . ایشان پس از مطالعه درمورداعداد فیثاغورثی بیمار و در بیمارستان بستری شدندودرهمان موقع موفق به‌کشف دو فرمول شدندکه **برای اظهار نظر به چند نفر ازاستادان خارجی طی نامه خصوصی** ارسال داشته‌اند . این‌فرمولها که به قول خودشان کاملا بی‌سابقه بوده است عبارت بود از : $x^2+[(\frac{x}{2})^2-1]^2=[(\frac{x}{2})^2+1]^2$ که در آن x عددی است زوج و $y^2+(\frac{y^2-1}{2})^2=[(\frac{y^2-1}{2})^2+1]^2$ که درآن y عددی است فرد. جدولی هم برای اعداد ازیك تا بیست وشش تنظیم فرموده‌بودند . ایشان مرقوم داشته‌اند « ازطریق حل این فرمولها ، بادردست داشتن یکی از اعداد می‌توان دوعدد دیگر را پیدا کرد به عبارت دیگر اگریکی ازاضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌معلوم‌باشد، ضلع دیگر ووترآن‌نیز به‌آسانی تعیین می گردد» . بنده‌ازآقای مکتشف‌عزیز سؤال می‌کنم که‌اگریکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ۲۴ باشد ضلع دیگر چقدر خواهد شد ۷ یا ۱۰ یا ۱۴۳ (!!) . خواهشمند است قبلا به جدول مراجعه و بعدپاسخ دهند .

فرمولی‌که آقای صدیق ارشادی‌کشف فرموده‌اند ! قبل ازایشان به وسیلهٔ **فیثاغورث ، افلاطون و براهماگوپتا** در قرون قبل از میلاد بیان شده است و این موضوع در غالب کتب ریاضی مذکور می‌باشد از جمله در کتاب **جبر ومقابلهٔ خیام** نگارش آقای **غلامحسین مصاحب:**

۱ـ فرمولی‌راکه فیثاغورث بدست‌آورده $(2n^2+2n+1)^2=(2n^2+2n)^2+(2n+1)^2$ و یا اگر n فرد باشد

$$n^2+(\frac{n^2-1}{2})^2=(\frac{n^2+1}{2})^2$$

۲ـ فرمولی که افلاطون‌بدست داده $(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$

۳ـ دستوری که براهماگوپتا پیدا کرده به صورتهای زیر است :

$$(2mn^2)+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2) \quad \text{و} \quad (\sqrt{m})^2+[\frac{1}{2}(\frac{m}{n}-n)]^2=[\frac{1}{2}(\frac{m}{n}+n)]^2$$

* * *

آقای **مرتضی صدیقین** تذکرداده‌اند که فرمولهای مذکوردر مقالهٔ‌مزبور درکتاب **هندسهٔ‌مسطحهٔ تألیف میرزارضاخان** مهندس‌الملك در صفحهٔ ۱۹۸ مذکور می‌باشد. ایشان همچنین‌تذکرداده‌اندکه‌استعمال این‌فرمولها خالی ازاشکال نبوده و برای‌دانش‌آموزان ایجاد اشکال می‌نماید .

راهنمای ریاضیات متوسطه

ساده کردن محاسبه های عددی در فیزیك

هوشنگ شریف زاده

یکی از با ارزشترین دستورهای ریاضی فرمولی است که به نام دوجمله‌ای (بینم) نیوتن (قرن هفدهم میلادی) معروف می‌باشد (هرچندکه فعلا معلوم شده است این فرمول توسط حکیم عمر خیام (قرن دهم میلادی) بیان‌شده است .)

دستور دوجمله ای نیوتون به شرح زیراست .

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^{n-4}x^4 + \dots\dots + x^n$$

درفرمول فوق علامت (!) علامت فاکتوریل می‌باشدومعنی آن اینست که آن عدد در تمام اعداد مثبت و صحیح و متوالی قبل از خودش ضرب شود . مثلا ۴! یعنی $4\times3\times2\times1$ باید در نظر داشت دربعضی ازکتب به جای ! علامت $\lfloor$ بکار برده‌اند ومثلا ! ۴ (چهار فاکتوریل) را به صورت $\lfloor 4$ نوشته‌اند .

اگر در فرمول فوق $a=1$ و $x=\varepsilon$ (ε مقداریست کوچك) میتوان نوشت .

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \dots\dots$$

که به علت کوچکی ε می‌توان ازجملات شامل ε^2 و ε^3 و ..... صرف نظر کرد وبه طور تقریب نوشت :

$$(1+\varepsilon)^n \not\approx 1 + n\varepsilon$$

حالات خاص :

$$(1\pm\varepsilon)^2 \not\approx 1 \pm 2\varepsilon$$

$$\sqrt{1\pm\varepsilon} = (1\pm\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \not\approx 1 \pm \not\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{1\pm\varepsilon} = (1\pm\varepsilon)^{-1} \not\approx 1 \mp \varepsilon$$

$$\frac{1}{(1\pm\varepsilon)^2} = (1\pm\varepsilon)^{-2} \not\approx 1 \mp 2\varepsilon$$

مثال ۱ ـ مطلوبست توان دوم عدد ۳۴٫۹۹

حل : می‌توان به ترتیب چنین نوشت .

$$34{,}99^2 = (35 - 0{,}01)^2 = 35^2\left(1 - \frac{0{,}01}{35}\right)^2$$

$$34{,}99^2 \not\approx 1225\left(1 - \frac{2}{3500}\right) \not\approx 1224{,}3$$

البته درصورتی کهمستقیماً وبه روش معمولی عدد فوق را به توان دو میرساندیم جواب حاصل ۱۲۲۴٫۳۵۰۱ میشد .

مثال ۲ ـ وزن مخصوص جیوهٔ صفردرجه ۱۳٫۶ گرم بر سانتیمتر مکعب می‌باشد . مطلوبست وزن مخصوص جیوهٔ ۸۰ درجه. ضریب انبساط‌حجمی مطلق جیوه 18×10^{-5} است

حل: طبق فرمولی که درمبحث وزن‌مخصوص بیان شده است می‌توان نوشت :

$$D = \frac{D_0}{1+At}$$

$$D=\frac{۱۳٫۶}{۱+۱۸\times ۱۰^{-۵}\times ۸۵}$$

$$\#۱۳٫۶(۱-۱۸\times ۱۰^{-۵}\times ۸۵)\#۱۳٫۴g/cm^{۳}$$

مثال ۳ - شیئی نورانی به فاصلهٔ یك متر درجلو عدسی محدب نازکی به فاصلهٔکانونی ۰٫۵ متر قرار گرفته ، فاصلهٔ تصویررا ازعدسی پیدا کنید .

اگرشیئی یك میلیمتر به عدسی نزدیك شود ، تصویر چه اندازه ودر کدام جهت نسبت به عدسی تغییر مکان پیدا می کند ؟

حل : طبق فرمولی کلی عدسیها : $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{p'}=\frac{۱}{f}$

می‌توان نوشت : $p'=\frac{pf}{p-f}$

با به‌کاربردن مقادیر عددی

$$p'=\frac{۰٫۵\times ۱}{۱-۰٫۵}=۱\,m$$

فرمول فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$p'=\frac{f}{۱-\frac{f}{p}}=\frac{۰٫۵}{۱-\frac{۰٫۵}{p}}=\frac{۱}{۲-\frac{۱}{p}}$$

اگر جسم یك میلیمتر به عدسی نزدیکتر شود با فرض $p=۱m$ و $۱mm=\varepsilon$ می‌توان نوشت .

$$p'=\frac{۱}{۲-\frac{۱}{۱-\varepsilon}}\#\frac{۱}{۲-(۱+\varepsilon)}\#\frac{۱}{۱-\varepsilon}$$

$$=۱+\varepsilon$$

یعنی تصویر به اندازهٔ $\varepsilon=۱mm$ از عدسی دورمیشود

مثال ۴ : آونگ یك ساعت دیواری که از مس ساخته شده، در اطاقی که دمای آن $۱۰^{\circ}C$ است‌درست ثانیه‌را میزند . تعیین کنید اگر دمای اطاق به $۳۰^{\circ}C$ برسد، این‌ساعت درمدت ده روز چقدر جلو یا عقب خواهد رفت ، ضریب انبساط طولی مس ۰٫۰۰۰۰۱۸۸ می‌باشد .

حل : به طور تقریب می‌توان آونگ ساعت را یك آونگ ساده دانست ودربارهٔ آن نوشت: $\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{l'}{l}}$ (یعنی در نوسانات کم دامنه زمان تناوب آونگ ساده با جذر طول آونگ متناسب است) . اگر T زمان تناوب آونگ در $۱۰^{\circ}C$ و T' زمان آن در $۳۰^{\circ}C$ باشد و l_0 طول آونگ درصفر درجهٔ حرارت باشد و λ ضریب انبساط خطی مس باشد طبق فرمول انبساط خطی : $l=l_0(۱+\lambda t)$ میتوان نوشت :

$$\frac{T'}{T}=\frac{\sqrt{l_0(۱+۳۰\lambda)}}{\sqrt{l_0(۱+۱۰\lambda)}}=\sqrt{\frac{۱+۳۰\lambda}{۱+۱۰\lambda}}$$

$$\frac{T'}{T}\#\sqrt{(۱+۳۰\lambda)(۱-۱۰\lambda)}$$

$$\#\sqrt{۱+۲۰\lambda-۳۰۰\lambda^{۲}}\#\sqrt{۱+۲۰\lambda}$$

$$\frac{T'}{T}\#۱+۱۰\lambda$$

$$T'\#T(۱+۱۰\lambda)$$

بنابراین چون زمان تناوب ساعت دردمای ۳۰° بیشتراز زمان تناوب آن‌دردمای ۱۰° است بنابراین کندکار خواهدکرد. یعنی در۲ ثانیه $T'-T$ ثانیه وبنابراین درده روز

$\frac{۸۶۴۰۰}{۲}\times ۱۰(T'-T)$ ثانیه کندکارخواهدکرد

با به‌کاربردن مقادیر عددی

$$\frac{۸۶۴۰۰}{۲}\times ۱۰(۲+۲۰\lambda-۲)=۱۶۲٫۵$$

یعنی در مدت ده روز کمی کمتر از سه دقیقهٔ ساعت عقب خواهد رفت .

مثال۵- میدانیم که کرهٔ زمین برتمام اجسام مجاورخود نیرویی واردکرده وآنهارا به طرف خود میکشد فرض میکنیم که تمام جرم زمین در مرکزش مجتمع شده است . اگر g_0 شتاب جاذبه درکناردریا باشد ، تعیین کنید شتاب جاذبه را در نقطه‌ای به ارتفاع z ازسطح دریا ؟

حل : میدانیم که نیروی جاذبه بین دو جرم مادی که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرارگرفته‌اند ، متناسب با عکس مربع فاصلهٔ آنها است : $F=\frac{K}{d^{۲}}$ ، یکی‌ازاین‌دونقطه ثابت میباشد (مرکززمین) بنابراین نقطهٔ دیگر به علت اثرنیرو دارای شتابی معادل γ خواهد شدکه $m\gamma=\frac{K}{d^{۲}}$ واگر این شتاب درسطح افق محاسبه شود $d=R$ (شعاع زمین) و $\gamma=g_0$ خواهد بود بنابراین :

$$(۱)\qquad mg_0=\frac{K}{R^{۲}}$$

و در فاصلهٔ $d=R+z$ ازمرکز زمین دارای شتاب معادل g خواهد شد به طوری که

$$(۲)\qquad mg=\frac{K}{(R+z)^{۲}}$$

با تقسیم این دو رابطه به یکدیگر

$$\frac{g}{g_0}=\frac{R^2}{(R+Z)^2}=\frac{1}{(1+\frac{Z}{R})^2}$$

وچون Z درمقابل R کوچك است ، با فرض $\frac{Z}{R}=\varepsilon$ می‌توان

نوشت :

$$(1+\frac{Z}{R})^2=(1+\varepsilon)^2\neq 1+2\varepsilon$$

بنابراین

$$\frac{g}{g_0}\neq\frac{1}{1+2\varepsilon}\neq 1-2\varepsilon$$

ویا

$$g\neq g_0(1-2\varepsilon)\neq g_0(1-\frac{2Z}{R})$$

مثال ۶ - سرعت صوت درهوای خشك ۳۳۱٫۵ متر بر ثانیه و سرعت صوت در گاز خشك دیگری و در همان درجه حرارت ۳۳۸٫۳ متر برثانیه می‌باشد در صورتی که بدانیم این گاز نیز مانند هوا دو اتمی می‌باشد ، مطلوبست جرم ملکولی این گاز . اگر از سوزاندن این گاز دراکسیژن گاز دیگری که شامل بخار آب نبوده وقابل جذب پطاس میباشد بدست آید مطلوب است فرمول ونام گاز فوق .

حل: به طوری که میدانیم سرعت صوت دردو گازمختلف که دارای اتمیسیته مساوی میباشند با عکس تکاثف نسبی آنها نسبت به هوا متناسب است اگرسرعت صوت درهوا V ودر گاز موردمطالعه V' و چگالی آن گاز نسبت به هوا d باشدمیتوان نوشت

$$\frac{V}{V'}=\sqrt{d}$$

و بنابراین چگالی گاز نسبت به هوا

$$d=(\frac{V}{V'})^2$$

وجرم ملکولی گاز $M=29d$ ویا :

$$M=29(\frac{V}{V'})^2=29(\frac{331.4}{338.3})^2\neq 29(1-\frac{7}{338})^2$$

$$M\neq 29(1-\frac{14}{338})=27.8$$

گازحاصل از سوزاندن گاز مورد مطالعه لزوماً باید یك انیدرید اسید باشد و چون قابل‌جذب پطاس میباشد گاز کربنیك است بنابراین گازی که بررسی‌شده گازاکسید دوکربن به‌فرمول ملکولی CO و به‌جرم ملکولی ۲۸ میباشد .

خاصیت جادویی عدد ۱۴۲۸۵۷

اگر رقم ۱ را ازسمت چپ به سمت راست منتقل کنیم عدد حاصل یك سوم عدد قبل می‌شود

$$142857\times 3=428571$$

اگرعدد ۱۴ را ازسمت چپ درسمت راست قراردهیم عدد حاصل یك دوم عدد قبل می‌شود

$$142857\times 2=285714$$

حال اگر درعدد اخیر ۲۸ را بعداز ۱۴ قراردهیم عدد حاصل ۴ برابر عدد اول می‌شود

$$142857\times 4=571428$$

واگر ۵ را ازسمت چپ به سمت راست منتقل کنیم عدد حاصل ۵ برابر عدد اول می‌شود

$$142857\times 5=714285$$

وبالاخره اگر۸۵ را ازسمت راست به‌سمت چپ جلوی ۷۱۴۲ قراردهیم عددحاصل۶برابرعدداول میشود

$$142857\times 6=857142$$

وازآن عجیبتر:

$$142857\times 7=999999$$

$$285714\times 7=1999998$$

$$428571\times 7=2999997$$

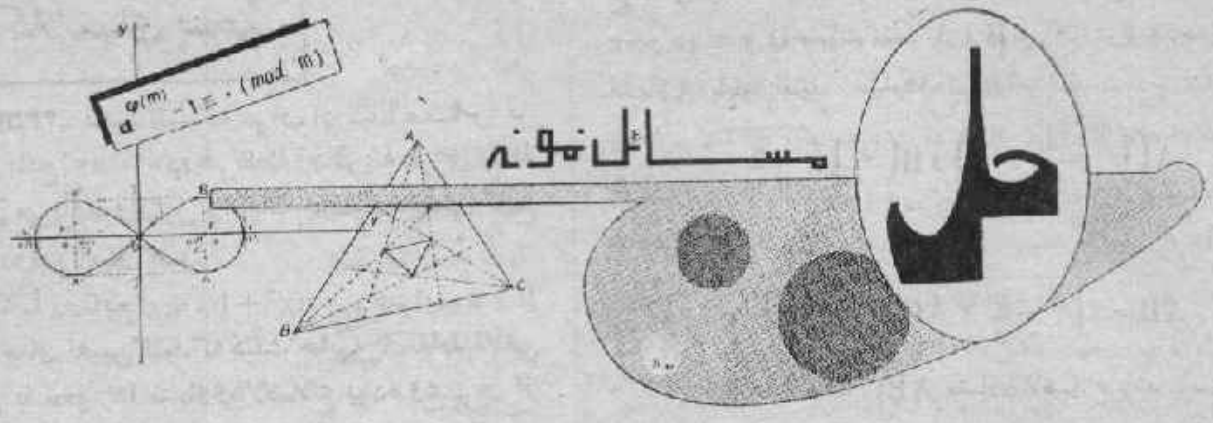
$$571428\times 7=3999996$$

$$857142\times 7=5999994$$

$$714285\times 7=4999995$$

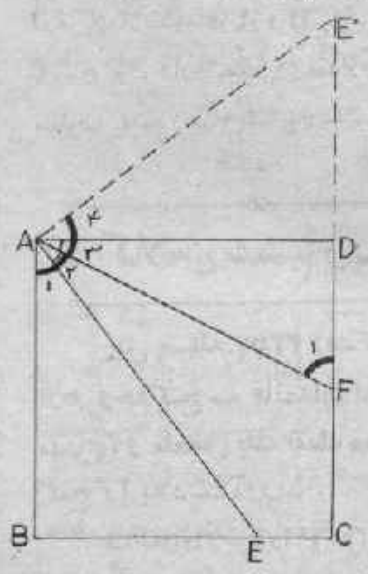
$$999999\times 7=6999993$$

سید محمد کاظم نائینی



کلاسهای چهارم

۲۳۵۳ـ درمربع ABCD نقطهٔ E را به دلخواه برضلع BC انتخاب کرده و نیمساز زاویهٔ DAE را رسم می‌کنیم که ضلع CD را در F قطع می‌کند. ثابت کنید که $AE=DF+EB$



حل- ضلع CD را از D به اندازهٔ $DE'=BE$ امتداد می‌دهیم. دو مثلث ADE' و ABE در حالت تساوی دوضلع و وزاویهٔ بین متساویند ($BE=DE'$ و $AB=AD$ و $\hat{B}=\hat{D}=90^\circ$) ونتیجه‌می‌شود $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

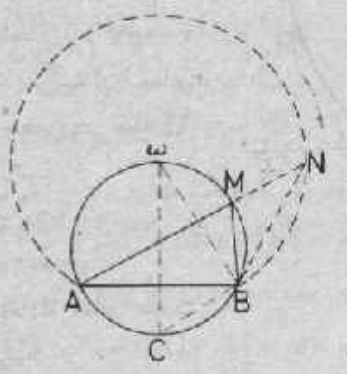
نسبت به دوخط متوازی AB وCD وقاطع AF داریم $\hat{F}_1=\hat{A}_1+\hat{A}_2$ و چون $\hat{A}_2=\hat{A}_3$ و $\hat{A}_1=\hat{A}_4$ پس $\hat{F}_1=\hat{FAE'}$ و مثلث AFE' متساوی‌الساقین بوده و در نتیجه:

$$AE'=FE' \text{ یا } AF=FD+BE$$

***

حل مسئلهٔ ۲۳۷۱ (مذکوردریکان‌شمارهٔ ۱۲) ـ روی دایرهٔ (O) نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که مجموع فواصل آن از دونقطهٔ ثابت A وB واقع بر دایره ماکزیمم باشد.

وتر AB دایره را به دوکمان غیر متساوی (عموماً) تقسیم می‌کند. واضح است که باید M را بر کمان بزرگتر انتخاب کرد. اگر M نقطهٔ دلخواهی از کمان بزرگتر AB باشد AM را از طرف M به‌اندازهٔ $MN=MB$ امتداد می‌دهیم داریم



$$\hat{M}=\frac{1}{2}\hat{N}$$

و $AN=AM+BM$

اندازهٔ زاویهٔ M ثابت وبرابر بانصف اندازهٔ کمان AB است پس اندازهٔ زاویهٔ N نیز ثابت بوده‌و مکان N کمان‌درخورزاویهٔ برابر بانصف‌زاویهٔ M است که بر A وB می‌گذرد، ω مرکز این کمان درخور چنین به‌دست‌می‌آید: از B به C وسط کمان کوچك AB وصل می‌کنیم. زاویهٔ ABC نصف زاویهٔ M می‌باشد. در B عمودی بر BC اخراج می‌کنیم که عمود منصف AB را در ω قطع می‌کند وچون زاویهٔ قائمه CBω محاط دردایرهٔ (O) است بنابرین ω بردایرهٔ (O) واقع می‌شود.

دردایرهٔ (ω) وتر AN وقتی‌ماکزیمم است که از ω مرکز دایره بگذرد یعنی M بر نقطهٔ ω وسط کمان بزرگتر AB واقع باشد.

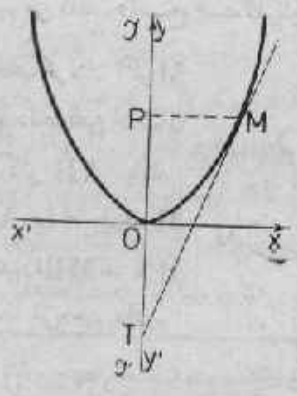
نتیجه ـ در مثلثی که اندازهٔ یك ضلع و اندازهٔ زاویهٔ مقابل‌آن ثابت باشد، مجموع دوضلع دیگر وقتی ماکزیمم است که مثلث متساوی‌الساقین باشد.

(حل مسئله از: جمشید امیغیان)

کلاسهای پنجم

۲۳۵۴ـ ثابت کنید که عرض از مبدأ مماس بر منحنی تابع $y=ax^2$ درهر نقطهٔ آن قرینهٔ عرض نقطهٔ تماس می‌باشد وازاین راه یك خاصیت منحنی تابع درجهٔ دوم را بیان کنید

ثانیاً درتابع $y=ax^2+bx+c$ ضرایب a و b و c را چنان تعیین کنید که مثلث حاصل ازنقاط تلاقی منحنی با محورها متساوی‌الاضلاع بوده وعرض از مبدأ مماس برمنحنی درنقطهٔ تلاقی آن بامحورطولها برابر ۲ باشد .



حل- اولا اگر $M(\alpha , a\alpha^2)$ نقطه‌ای ازمنحنی‌تابع $y=ax^2$ باشد ضریب‌زاویهٔ مماس برمنحنی در نقطهٔ M عبارتست از

$y'=2ax$ و

$m=2a\alpha$

و معادلهٔ مماس عبارت می‌شود از

$y-y_1=m(x-x_1)$ یا $y-a\alpha^2=2a\alpha(x-\alpha)$

که پس ازساده‌کردن می‌شود $y=2a\alpha x-a\alpha^2$ و از آنجا عرض ازمبدأ مماس برابر با $-a\alpha^2$ قرینهٔ عرض نقطهٔ M می‌باشد .

نتیجه ـ اگررأس منحنی تابع $y=ax^2+bx+c$ را مبدأ مختصات اختیار نموده محورهارا انتقال دهیم معادلهٔ منحنی نسبت به دستگاه جدید به صورت $Y=aX^2$ درمی‌آید که دراینحال محور عرضها همان محور تقارن منحنی می‌باشد بنابراین چنین نتیجه می‌گیریم :

اگرM نقطه‌ای ازمنحنی تابع $y=ax^2+bx+c$ وP تصویرM برمحورتقارن منحنی وT نقطهٔ تلاقی مماس‌نقطهٔ M با محورتقارن باشد رأس منحنی دروسط PT واقع است .

ثانیاً ـ فرض‌می‌کنیم منحنی‌تابع $y=ax^2+bx+c$ محورطولها را دردونقطهٔ A وB ومحورعرضهارا درنقطهٔ C تلاقی نماید. اگرمثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد دو نقطهٔ A وB نسبت به O مبدأ مختصات قرینه خواهندبود زیرا CO ارتفاع نظیرقاعدهٔ AB ازمثلث ABC می‌باشد وچون طولهای نقاط A وB ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ می‌باشند نتیجه می‌شود که $b=0$ خواهدبود. دراین‌صورت تابع به‌صورت $y=ax^2+c$ ومختصات نقاط A و B و C به ترتیب زیر است (A باطول مثبت اختیارشده است)

$$A\left(\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ و } 0\right) \text{ و } B\left(-\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ و } 0\right)$$

و $C(0 \text{ و } c)$

$$AB=2\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ و } AC=BC=\sqrt{c^2-\frac{c}{a}}$$

برای اینکه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد باید داشته باشیم .

$$AB=AC=BC \text{ یا } 2\sqrt{-\frac{c}{a}}=\sqrt{c^2-\frac{c}{a}}$$

پس از ساده‌کردن به دست می‌آید $ac=-3$ (۱) که قابل قبول می‌باشد .

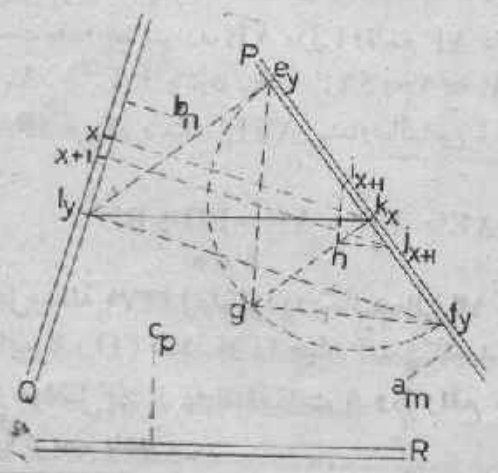
رأس منحنی‌تابع $y=ax^2+c$ بر محور عرضها منطبق است. بنابرآنچه دراولا بیان شد عرض ازمبدأ مماس برمنحنی درهریك ازنقطه‌های A و B برابراست با $2c$ پس $2c=2$ یا $c=1$ بوده وازرابطهٔ (۱) مقدار $a=-3$ به دست‌آمده تابع مطلوب به صورت $y=-3x^2+1$ می‌باشد .

(طرح وحل از: حسین نعمتی)

کلاس ششم ریاضی

حل مسئلهٔ ۲۳۵۷ (مذکور دریکان شمارهٔ۱۲) : ازهر وجه‌کنج سه قائمه‌ای امتداد مقیاس شیب (غیر مدرج) و ملخص یك نقطه معلوم است . ملخص‌رأس کنج را به دست‌آورید .

صفحه‌های وجوه را P وQ وR می‌نامیم وفرض می‌کنیم



Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 به ترتیب امتداد مقیاس شیب a_m و b_n و c_p به ترتیب سه نقطهٔ معلوم از صفحه‌های فوق باشند . هریك از صفحه های P و Q و R دو به دو برهم عمود هستند پس فصل مشترك هردوتای از آنها برسومی عمود می‌باشد مثلا فصل‌مشترك P و Q بر R عمود است یعنی تصویر فصل‌مشترك P و Q با امتداد مقیاس‌شیب R موازی، فرازهای آنهاعکس یکدیگروترقی رقومشان درجهت عکس یکدیگراست. خطی موازی با R رسم می‌کنیم ونقاط تلاقیش را با P و Q به ترتیب با k و l می‌نامیم k_x و l_y را به ترتیب دونقطه از P و Q فرض می‌کنیم چنانچه kl فصل مشترك P و Q باشد لازم است k نقطهٔ تلاقی‌افقیه‌های رقوم x و l نقطهٔ تلاقی افقیه‌های رقوم y دو صفحه باشد ، این افقیه‌هارا رسم می‌کنیم افقیهٔ رقوم y از Q مقیاس شیب P را در f قطع می‌کند خط $k_x f_y$ خطی است از صفحهٔ Q ، صفحهٔ Q برصفحهٔ P عمود است وتصویر k باتصویرمقیاس‌شیب P موازی و ترقی رقوم نقاط این خط در جهت عکس ترقی رقوم نقاط صفحهٔ P است بنابراین برای اینکه kf بر P عمود باشد لازم وکافی‌است که اساس آنها عکس یکدیگر باشد یعنی

$$\frac{kf}{y-x}\times\frac{ke}{y-x}=1 \quad \text{یا} \quad kf\cdot ke=(x-y)^2$$

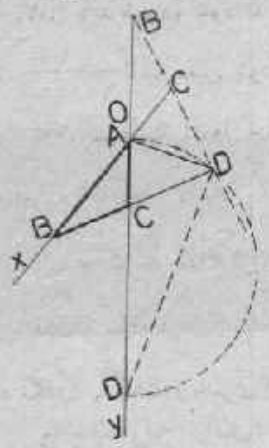
به قطر ef دایره‌ای رسم می‌کنیم که افقیهٔ رقوم x صفحهٔ P را در g قطع می‌کند. طول $gk=x-y$ است بر kg نقطهٔ h را چنان انتخاب می‌کنیم که $kh=1$ باشد واز h موازی‌با ge و gf رسم می‌کنیم تاتصویر P را به ترتیب در i و j قطع کنند ki برابر با اساس صفحهٔ P است و چون از j بر Q عمود کنیم اساس صفحهٔ Q نیز مشخص می‌شود و با معلوم بودن ملخص یك نقطه مقیاس شیب هرصفحه مدرج شده وملخص نقطهٔ مشترك آنها معلوم می‌شود .

(طرح وحل از: فرشید سیروس)

یك مسئلهٔ ترسیمی

۲۳۵۵ـ مطلوب است رسم مثلثی که از آن زاویهٔ A وطول نیمساز خارجی $AD'=d$ وتفاضل‌دوضلع زاویهٔ A یعنی $|AB-AC|=2l$ معلوم باشد .

حلـ چنانچه روی امتداد اضلاع AB و AC نقاط B' و C' را مطابق شکل‌چنان انتخاب کنیم که $AC'=AC$ و $AB'=AB$ باشد واضح است که $B'C'$ از D' می‌گذرد و AD' نیمساز زاویهٔ $BD'B'$ است. اگر D نقطهٔ تلاقی نیمساز زاویهٔ خارجی نظیر رأس D' باشد تقسیم ($ADCB'$) توافقی است وبافرض $OC=OB'$ داریم



$$OA=\frac{1}{2}\left|AB'-AC\right|=l$$

$$\overline{OB'}^2=\overline{OC}^2=OA\cdot OD$$

وطول قطعه مماسی که از O برنیمدایرهٔ به قطر AD رسم شود با $OC=OB'$ برابراست وراه حل زیرنتیجه می‌شود :

زاویهٔ yAx را بسرایر با اندازهٔ معلوم زاویهٔ A رسم نموده برامتداد yA طول $OA=l$ را جدا می‌کنیم $AD'=d$ نیمسازخارجی زاویهٔ A را رسم وعمود $D'D$ را برآن اخراج می‌کنیم (D بر Ay) دایره‌ای به قطر AD ومماس OT را برآن رسم‌کرده بر Oy طول $OC=OT$ را جدا می‌کنیم $D'C$ ضلع Ax را در B قطع می‌کند . مثلث ABC مثلث مطلوب است .

(محمدعلی شیخان)

مکانیك

سؤال امتحان‌کنور داکار ـ ۱۹۶۳

۲۳۵۶ ـ واگونی به جرم ۱۵۰۰۰kg روی خط آهن متوقف است . به سقف این واگون سیمی به وزن ناچیز به یك نقطه مانند A بسته شده وبه سردیگرسیم کرهٔ فلزی به مرکز C آویخته شده است به طوری که $AC=a=1^m$ وپاندولی را تشکیل میدهد .

اولا اگر پاندول ، ساده فرض شود زمان نوسانات کم دامنهٔ آنرا حساب کنید $g=9.8m/s^2$

ثانیاً برای تعیین T (زمان نوسال پاندول) t زمان r نوسان‌کامل پاندول را اندازه میگیرند.

زمان t با دقت $\frac{2}{10}$ ثانیه اندازه‌گیری میشود . چند نوسان کامل باید شمرده شود تا T (زمان نوسان پاندول) با دقت $\frac{1}{10,000}$ ثانیه معین شود .

ماکزیمم دامنهٔ پاندول چه اندازه می‌تواند باشد تا افزایش زمان نوسان پاندول از $\frac{1}{10,000}$ ثانیه کمتر باشد .

۴ ـ ماکزیمم شعاع کرهٔ فلزی چه اندازه باید باشد تا اگر پاندول را ساده فرض کنیم خطای زمان نوسان از $\frac{1}{10,000}$ ثانیه نگذرد . گشتاور جبری کره نسبت به یکی از اقطارش $\frac{2}{5}mr^2$ است .

۵ ـ واگون تحت اثر نیروی کششی معادل F شروع به حرکت میکند . دراین حالت پاندول چه می‌شود پدیده را شرح دهید .

اگر امتداد سیم پاندول دراین حالت با امتداد قائم زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد نیروی F را حساب کنید .

حل : ۱)

$$T=2a\sqrt{\frac{a}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{9.8}}=2.0068$$

$$t=nT$$

۲)

$$dt=ndT\longrightarrow n=\frac{dt}{dT}=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{1}{10000}}=2000$$ نوسان

۳) به ازاء $\alpha<20$ داریم

$$T_1=T\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)$$

$$\frac{dt}{T}=\frac{\alpha^2}{16}\leqslant\frac{1}{10000\times 2.006}\longrightarrow\alpha^2\leqslant\frac{8}{10000}$$

$\alpha<\frac{2\sqrt{2}}{100}$ Rad یا $\alpha<1^\circ$ و $37'$

وانحراف گلوله از وضع تعادل :

$$d=a\alpha=100\frac{\times 2\sqrt{2}}{100}\ cm$$

۴)

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_A}{Mga}}=2\pi\sqrt{\frac{ma^2+\frac{2}{5}mr^2}{Mga}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(a+\frac{2}{5}\frac{r^2}{a}\right)}$$

طول پاندول ساده همزمان این پاندول

$$l=a+\frac{2}{5}\frac{r^2}{a}=a\left(1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{a^2}\right)$$

اگر l و a را برابر بگیریم خطای نسبی روی l برابر $\frac{2r^2}{5a^2}$ است و این خطا روی پریود خطای نسبی وارد میکند بطوری که :

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l}=\frac{1}{5}\frac{r^2}{a^2}$$

چون $\Delta T\leqslant\frac{1}{10000}$ و $T=2.006$ داریم :

$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}=\frac{\Delta T}{T}\leqslant\frac{1}{20000}\longrightarrow r^2\leqslant\frac{a^2}{4000}$$

به ازاء $a=1000^{mm}$

$r\leqslant 15.82^{mm}$ و $r^2\leqslant 250$

$$tg\theta=\frac{m\gamma}{mg}=\frac{\gamma}{g}=\frac{F}{Mg}=\theta$$

تحت اثر نیروی ثابت F

$$\theta=\frac{\pi\times 6}{180}=\frac{\pi}{30}$$

$$F=Mg\theta=Mg\frac{\pi}{30}=\frac{15000\times 9.8\times 3.14}{30}$$

$$=1538.6\ N$$

ترجمه و تلخیص از : دکتر قلم‌سیاه

مسائل برای حل

مهلت قبول پاسخ تا آخر اردیبهشت ۱۳۴۴ . دانش آموزان هر کلاس از ارسال حل مسائل کلاسهای ما قبل خودداری نمایند

کلاس چهارم طبیعی

۲۳۵۷ـ درصورتی که داشته باشیم

$$x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$ و

$$y=\frac{\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}}$$

اولاـ مقادیر x^2 و y^2 را حساب کنید .

ثانیاـ مقدار عددی حاصل عبارت زیررا پیدا کنید .

$$S=(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3+\cdots+(x+y)^n$$

(بهرام داها)

۲۳۵۸ـ دایرهٔ بمرکز O وبشعاع R مفروض است. قطر AB ازآن رارسم کرده نقطهٔ I را برآن چنان انتخاب می‌کنیم که $AI=\frac{2R}{3}$ باشد ودرنقطهٔ I وتر CD را عمود بر AB رسم می‌کنیم .

۱) طولهای AC و BC رابرحسب R حساب کنید.

۲) نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ ACI را تعیین کنید.

۳) از A خطی رسم می‌کنیم که CD را در M ودایره را در N قطع کند. ثابت کنید دو مثلث ACM و ACN متشابهند .

(قسمتی از سؤال تغییررشتهٔ لیون)

کلاس چهارم ریاضی

۲۳۵۹ـ معادلهٔ زیررا حل کنید.

$$\frac{x}{x+\sqrt{x}}+a^2\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=2a$$

(حافظی دبیردبیرستان بنیس)

۲۳۶۰ـ معادلهٔ زیر نسبت بمجهول x مفروض است .

$$x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x+m^4-1=0$$

۱) عبارت معادله را نسبت بـه m مرتب نموده و آنرا بحاصل‌ضرب سه‌عامل تجزیه کنید.

۲) معادله راحل کرده جوابهای x را بدست آورید .

(E.P.M.)

۲۳۶۱ـ در دایرهٔ بشعاع R یکشش ضلعی منتظم‌محاط می‌کنیم. وسطهای اضلاع را متوالیاً بهم وصل می‌کنیم تاشش ضلعی‌دیگری حاصل شود. در شش‌ضلعی جدید نیزوسطهای‌اضلاع رامتوالیاً بهم‌وصل می‌کنیم واین عمل را مرتباً تکرار می‌نمائیم حدمجموع محیطها و مساحتهای این شش ضلعیهارا پیدا کنید.

(علی‌اکبر ایزدفر-دبیردبیرستانهای قزوین)

۲۳۶۲ـ مجموع زیررا حساب کنید .

$$S=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\cdots+\frac{n}{x^n}$$

(ایزدفر)

۲۳۶۳ـ مثلث ABC کـه اندازه‌های اضلاع AB و BC و CA از آن بترتیب برابر c و a و b است مفروض

است. از I نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در E قطع کند.

چنانچه D نقطهٔ تلاقی BI باضلع AC باشد از A به موازی BD و BE دوخط رسم می‌کنیم تا امتداد BC را به ترتیب در F و P قطع کنند و از P به موازات AF رسم می‌کنیم که امتداد AC را در M تلاقی می‌نماید.

۱) ثابت کنید $PB=b+c$

۲) طول AM را برحسب a و b و c حساب کنید

۳) مثلث A'B'C' را رسم می‌کنیم که اندازه‌های اضلاع آن به‌ترتیب با اندازه‌های CD و DA و AM مساوی می‌باشد.

الف- ثابت کنید که مثلث A'B'C' با مثلث ABC متشابه است.

ب- با فرض اینکه a و b و c سه جملهٔ متوالی از یک تصاعد حسابی باشند نسبت مساحت مثلث A'B'C' را بر مساحت مثلث ABC به‌دست آورید.

ج- اگر لگاریتمهای طولهای اضلاع مثلث A'B'C' تصاعد حسابی تشکیل دهند ثابت کنید که اضلاع مثلث ABC تصاعد هندسی می‌سازند.

(ابراهیم صادقی - دبیر دبیرستانهای آباده)

کلاس پنجم طبیعی

۲۳۶۴- اولا- در تابع $y=x^2+px+q$ مقادیر p و q را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش تابع با محور طولها متقاطع و دارای محور تقارن به معادلهٔ $x=-3$ بوده و فاصلهٔ رأس منحنی از مبدأ مختصات برابر ۵ باشد

ثانیاً منحنی (C) نمایش تابع $y=x^2+6x+5$ و خط (D) بمعادله $y=2x+1$ را در یک شکل رسم کرده وتحقیق کنید که بر یکدیگر مماسند و مختصات نقطهٔ تماس را حساب کنید.

ثالثاً- نقطه‌ای از منحنی (C) را پیدا کنید که مماس بر منحنی در آن نقطه برخط (D) عمود باشد.

۲۳۶۵- با فرض اینکه داشته باشیم $tg\alpha=2$ و α کمان حاده باشد مقدار کلی کمان x را از معادلهٔ زیر حساب کنید.

$$2tg\alpha\sin^2x-4\cos x+3tg2\alpha=0$$

کلاس پنجم ریاضی

۲۳۶۶- در یک نقطهٔ دلخواه M از منحنی تابع هموگرافیک مماسی بر منحنی رسم می‌کنیم تا مجانبهای آنرا در A و B قطع کند. ثابت کنید M وسط AB واقع است.

۲۳۶۷- اولا- تغییرات تابع $y=\frac{2x}{x-3}$ را بررسی نموده منحنی (C) نمایش آنرا رسم کنید.

ثانیاً- فرض می‌کنیم A و B دو نقطه از منحنی باشند به طوری که زاویهٔ AOB قائمه باشد. مختصات نقاط A و B را برحسب m ضریب زاویهٔ خط OA به‌دست آورده معادلهٔ AB را بنویسید. ثابت کنید که هرگاه زاویهٔ قائمهٔ AOB حول مبدأ مختصات بچرخد خط AB بموازات خود تغییر مکان می‌دهد.

(از سؤالهای امتحانی تولوز- فرستنده: هوشنگ شریف‌زاده)

۲۳۶۸- از رابطهٔ $tg(a+b)=tg2x$ نتیجه بگیرید که $tg(a-b)=tg2(a-x)$

(احمد جعفری‌فرد - پنجم ریاضی دبیرستان کمال)

۲۳۶۹- به‌فرض اینکه $tg\frac{x}{2}=t$ باشد در ازاء مقادیر مختلف t حاصل عبارت

$$y=\frac{\sqrt{1+\sin2x}-\sqrt{1-\sin2x}}{2}$$

را حساب کنید.

۲۳۷۰- معادلهٔ زیر را حل و بحث کنید.

$$tgx+atg3x=(a+1)tg2x$$

۲۳۷۱- مثلث غیرمشخص ABC مفروض است. بر ضلع BC صفحهٔ P را چنان مرور دهید که تصویر مثلث بر این صفحه مثلث قائم‌الزاویه باشد.

(حسین نعمتی)

۲۳۷۲- در کرهٔ مفروض به شعاع R مخروطی با حجم ماکزیمم محاط کنید.

(ارسالی یعقوب سلامت ابراهیمی دانشجوی علوم)

۲۳۷۳- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و در خارج آن نقطهٔ S متساوی‌الفاصله از A و B و C مفروض است. اندازهٔ زاویهٔ BSC را برحسب رادیان برابر 2x فرض می‌کنیم.

۱) حدود تغییرات x را تعیین کنید.

۲) اگر فاصلهٔ S تا هریک از نقاط A و B و C برابر a فرض شود حجم متوازی‌السطوحی را که SA و SB و SC

سه‌یال آن هستند برحسب a و x به‌دست آورید.

(ترجمهٔ بهزاد سوفر ـ پنجم ریاضی دبیرستان هدایت سنندج)

کلاس ششم طبیعی

۲۳۷۴ـ دایرهٔ به‌معادلهٔ $x^2+y^2=25$ مفروض است اگر A نقطهٔ تلاقی این دایره با نیم‌محور $BoOy$ نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌محور Ox' باشد. معادلهٔ سهمی را بنویسید که رأسش بر دایره واقع بود از نقطهٔ A گذشته معادلهٔ محورش $y=3$ بوده محور طولها را درجهت منفی قطع کند وتحقیق کنید که این سهمی از B می‌گذرد. دایرهٔ به معادلهٔ فوق و سهمی به معادلهٔ $y^2-6y+x+5=0$ را در یك شکل رسم کنید.

۲۳۷۵ـ تابع

$$y=\sin\alpha\sin^2 x+\cos\alpha\sin x+2\sin\alpha-1$$

نسبت به متغیر x مفروض است. مقدار α را چنان تعیین کنید که ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی در نقطه‌ای از آن به‌طول $\frac{\pi}{6}$ برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد. منحنی نمایش تابع

$$y=\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

را رسم کرده سطح محصور بین منحنی ومحور طولها وعرضهای نقاط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{6}$ را تعیین کنید.

کلاس ششم ریاضی

۲۳۷۶ـ معادلهٔ زیر مفروض است.

$$x^4-(2m-1)x^2+m^2-1=0$$

یك‌دفعه مستقیماً ویك دفعه بانمودار دروجود وعلامت ریشه‌های معادله بحث کرده نتایج به‌دست آمده‌را با یکدیگر تطبیق کنید.

(سیدجعفر وقابخش)

۲۳۷۷ـ اولاً محقق کنید که در ازاء جمیع مقادیر λ معادلهٔ زیر دارای یك‌ریشهٔ مضاعف و یك ریشهٔ ساده می‌باشد و علامت هریك ازاین ریشه‌ها را تعیین کنید.

$$\frac{4x^3}{\lambda^2}-3x+\lambda=0$$

ثانیاً ثابت کنید که منحنیهای (C_λ) نمایش هندسی توابع $y=\frac{4x^3}{\lambda^2}-3x+\lambda$ مجانس منحنی ثابتی که آنرا تعیین خواهید کرد می‌باشند و مشخصات این تجانس را تعیین کنید.

۲۳۷۸ـ اگر R و r به‌ترتیب شعاع دایرهٔ محیطی وشعاع دایرهٔ محاطی داخلی یك مثلث و d فاصلهٔ مرکزهای این دایره‌ها باشد ثابت کنید $d^2=R^2-2Rr$ **(قضیهٔ اولر)**. چنانچه به‌جای دایرهٔ محاطی داخلی یکی ازدایره‌های محاطی خارجی انتخاب شود، رابطه به‌چه صورت درمی‌آید.

۲۳۷۹ـ ثابت کنید که اگر در مثلثی دایرهٔ محاطی داخلی از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث بگذرد رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\cos A+\cos B+\cos C=\sqrt{2}$$

چنانچه به‌جای دایرهٔ محاطی داخلی، دایرهٔ محاطی خارجی انتخاب شودچه تغییری در رابطهٔ بالا داده‌خواهدشد.

(فرستنده: محمد خاقی)

۲۳۸۰ـ می‌خواهیم بساکاشیهای به‌شکل چندضلعی منتظم کف‌اطاقی را مفروش کنیم به طوریکه تنها ازیك نوع چندضلعی منتظم استفاده شده وتمام کف‌پوشانده شود. نوع چند ضلعیهایی راکه می‌توان انتخاب کرد معلوم کنید.

۲۳۸۱ ـ ثابت کنید که هیچگاه ممکن نیست کسر $\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$ مولد یك کسر اعشار تحقیقی باشد.

(E.P.M.)

۲۳۸۲ـ دودایرهٔ متغیر عمود بر هم (ω) و (ω') بر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ ثابت (O) گذشته و براین دایره مماس می‌باشند. اگر C نقطهٔ تلاقی این دو دایره (غیرازO) باشد مکان‌هندسی منعکس‌نقطهٔ C رادرانعکاس (OR^2) به‌دست آورید.

(G.P.B.)

۲۳۸۳ـ دوخط ثابت ومتوازی D و D' مفروض‌است. دایرهٔ بامرکزثابت O و به شعاع متغیر R خط D را در M' و M وخط D' را در N' و N قطع می‌کند ثابت کنید که خطوط MN و MN' و M'N و M'N' بر سهمی ثابتی که تعیین خواهید کرد مماس می‌باشند.

(G.P.B.)

۲۳۸۴ـ دونقطهٔ a. و b. به فاصلهٔ $ba=4$ در صفحهٔ مقایسه واقع بوده وتصویر نقطهٔ C_4 برنقطهٔ b منطبق است در صفحهٔ مقایسه نقطهٔ d راچنان تعیین کنید که $da=db$ بوده و زاویهٔ dcA با زاویهٔ cdb مساوی باشد. در صفحه‌ای که بر bcd می‌گذرد نقطهٔ e_4 را چنان تعیین کنید که چهار ضلعی bcde محاطی باشد قطعه خط e_4f_4 را عمود بر صفحهٔ bcd رسم کنید. ملخص جسم کند abcdef را کامل نموده مرئی را ازمخفی تمیزدهید.

۲۳۸۵ـ صفحهٔ قائم $P\alpha Q'$ وصفحهٔ مواجه RS' مفروض است. اگر $mnm'n'$ فصل مشترك این دو صفحه باشد بر خط‌الارض نقطهٔ β را چنان تعیین کنید که از دونقطهٔ mm' و nn' به یك فاصله واقع باشد. عمود مشترك خط $mnm'n'$ و خط‌الارض را رسم کنید وطول حقیقی آنرا نمایش دهید.

مسائل متفرقه

۲۳۸۶ـ اگر $f(x)=\log_a(\frac{1-x}{1+x})^2$ باشد ثابت کنید

$$f(x)-f(y)=f(\frac{x-y}{1-xy})$$

(یدالله ارضی - هشتم ریاضی دبیرستان پهلوی اراک)

۲۳۸۷ـ مربع مستطیل ABCD مفروض است. اگر H تصویر رأس A بر قطر BD و E و F تصویرهای H بر اضلاع CD و CB باشد ثابت کنید

$$\overline{HE}^{\frac{2}{3}}+\overline{HF}^{\frac{2}{3}}=\overline{AC}^{\frac{2}{3}}$$

(مجله ریاضیات مقدماتی)

۲۳۸۸ـ مثلث ABC مفروض است خطی رسم کنید که AC را در M و AB را در N و امتداد ضلع BC را در P قطع کند و داشته باشیم

$$MC=NB=PB$$

(احمد کبیر بالیان)

۲۳۸۹ـ پوش خطوطی را تعیین کنید که مثلث مفروض را به دو مثلث معادل تقسیم می کنند

(E.P.M.)

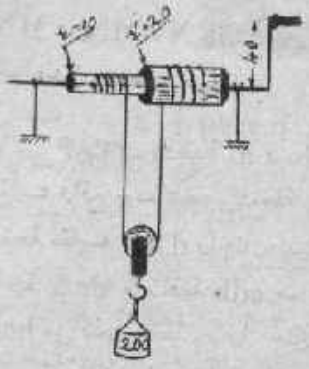
۲۳۹۰ـ اندازهٔ قطعه خطهایی که یك رأس مستطیل را به وسط دوضلع مقابل که از آن رأس نمی گذرند وصل می کنند معلوم است . این مستطیل را حل ورسم کنید :

(ارسالی : هوشنگ شریف زاده)

مکانیك ـ فیزیك و شیمی

برای دانش آموزان دورهٔ دوم دبیرستان و داوطلبان کنکور

۲۳۹۱ ـ محور چرخ چاهی از دوقسمت استوانه شکل با قطرهای $r=10$ و $r'=20$ سانتیمتر درست شده است .



دو سر طنابی که از زیر قرقرهٔ متحرکی می گذرد دور دو قسمت محور در جهت مخالف طوری پیچیده شده که راستای دو رشتهٔ طناب بر زمین عمود است . اگر وزنه‌ای که به قرقره آویخته شده است ۲۰۰ کیلوگرم وشعاع دستهٔ چرخ چاه ۲۰ سانتیمتر باشد. مطلوبست اولا نیرویی که برای تعادل دستگاه باید به دسته وارد شود ثانیاً هرگاه دسته یك دور بچرخد وزنه چقدر تغییر مکان میدهد (از عوامل دیگر صرف نظر می‌شود).

(ترجمه وارسال : رنه حکیمیان چهارم ریاضی هدف ۱)

۲۳۹۲ـ به چه فاصله ازپرده لامپی را قراردهیم تا اگر لامپ دیگری که شدت نورآن n برابر است a سانتیمتر جلوتر قرار گیرد همان مقدار روشنایی روی پرده ایجاد شود. بحث کنید.

(هوشنگ شریف زاده دبیر دبیرستانهای تبریز)

۲۳۹۳ـ معین کنید شیئی را به چه فاصله از یك عدسی محدب به فاصلهٔ کانونی f قرار دهیم تا فاصلهٔ تصویر از شیئی مینیمم باشد (مسئله را برای تصویر حقیقی و تصویر مجازی حل کنید)

(جمشید امیغیان دانشجوی علوم اصفهان)

۲۳۹۴ ـ فاصلهٔ کانونی یك عدسی که به شکل هلال همگرا است مساوی یك متر است . شعاعهای انحناء طرفین آن ۵۰ و ۲۵ سانتیمتراست .

اولا ضریب انکسار عدسی را پیدا کنید .

ثانیاً قسمت مقعر عدسی را ازمایعی پر کرده وآنرا به وسیلهٔ یك تیغهٔ متوازی السطوح می‌بندیم فاصلهٔ کانونی دستگاه ۴۳ سانتیمتر می‌شود . ضریب انکسارمایع را حساب کنید

(م. ع. س.)

۲۳۹۵ ـ ۱٫۰۶ گرم ازکربنات یك فلز یك ظرفیتی را با جوهر نمك ترکیب کرده وگاز حاصل ازعمل را وارد محلولی ازآب باریت نیم نرمال می‌نمائیم . ۴۰cc ازآنرا خنثی می کند. جنس فلز مجهول را تشخیص دهید .

(ح. جواهری دبیر دبیرستانهای کازرون)

۲۳۹۶ـ مخلوطی از دوئیدرور کربور سیرشده و آستیلن به حجم $45cm^3$ را با $160cm^3$ اکسیژن در آبسنجی محترق نموده‌ایم. حجم گاز حاصل بعد از سرد شدن $115cm^3$ است که $10cm^3$ آن قابل جذب به‌وسیلهٔ فسفر و بقیه قابل جذب به وسیلهٔ پتاس می‌باشد . نسبت دوئیدرور کربور را در مخلوط حساب کنید تمام جوابهای مسئله را از روی رابطهٔ کلی که به دست می‌آورید استدلال نمائید .

(محمد صدیق کاکیان ـ دبیر دبیرستان محمدرضاشاه کرمانشاه)

۲۳۹۷ـ از احتراق مقداری گوگرد در یك ظرف پر از هوا ، مخلوط گازی که دانسیته‌اش نسبت به هیدرژن ۱۵٫۰۴ می‌باشد بدست آمده است . مطلوبست :

۱) تعیین ترکیب حجمی این مخلوط

۲) تعیین وزن گوگرد سوخته شده درظرف، درصورتی که می‌دانیم ظرفیت ظرف ۹ لیتراست .

۳) تعیین وزن گوگردی که میبایست درهمین ظرف آتش زد برای اینکه دانسیتهٔ مخلوط گازی نسبت به H ارزش داده شده را داشته باشد .

(ح. جواهری)

مسائل ممتازی که حل آنها در مجموعهٔ یکان سال ارائه شده است

۲۳۹۸ـ مستطیلی چنان رسم کنید که چهار رأس آن بر چهار خط مفروض واقع درصفحه قرار گیرد (درحل این مسئله از یك روش بیسابقه استفاده شده است)

۲۳۹۹ـ مثلثی که دارای دو نیمساز داخلی متساوی باشد متساوی‌الساقین است (قدیمترین وجدیدترین راه حل این مسئلهٔ معروف بیان شده است)

۲۴۰۰ ـ مسئلهٔ پاپوس (یك راه حل جبری و یك راه حل هندسی)

۲۴۰۱ ـ تعیین مرکز دایرهٔ معلوم فقط با استفادهٔ از پرگار .

۲۴۰۲ـ هرگاه در مثلثی هر یك از زاویه ها را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم از برخورد خطوط حاصل یك مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود .

۲۴۰۳ـ درمثلث ABC از رأسهای B و C به یك نقطهٔ ارتفاع AH وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا اضلاع مقابل را در M و N قطع کنند . ثابت کنید AH نیمساز زاویهٔ MHN است .

۲۴۰۴ـ روی یکی از اقطار دایرهٔ مفروض (O) دوطول OM = ON را جدا می‌کنیم از یك نقطهٔ دایره مانند C به N و O و M وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در B و T و A قطع کنند و AB امتداد NM را در G قطع می‌کند . ثابت کنید GT بردایره مماس است .

۲۴۰۵ـ از نقطهٔ وسط یك وترمفروض دردایره دو وتر متغیر رسم می‌کنیم . ثابت کنید خطوط واصل بین انتهای این دو وتر دو قطعه خط متساوی از وترمفروض جدا می‌کنند .

۲۴۰۶ـ رسم مثلثی که از آن مجموع دو ضلع ، اندازهٔ زاویهٔ بین آنها وطول نیمساز این زاویه معلوم باشد .

۲۴۰۷ـ در دایرهٔ مفروض مثلثی محاط کنید که دو ضلع آن بردو نقطهٔ معلوم گذشته وضلع سوم آن درامتداد معین باشد.

مسائل امتحانی ثلث دوم دبیرستانها

مسائلی که به ادارهٔ مجله رسیده است به ترتیب کلاس و موضوع امتحان و به ترتیب حروفی الفباء نام دبیرستان درج می‌شود. حل این مسائل درشماره‌های بعدی یکان درج نخواهدشد و ازدانش آموزان گرامی تقاضا می‌شود از ارسال حل این مسائل خودداری فرمایند.

کلاس چهارم ریاضی

I ـ جبر

دبیرستان ایرانشهر یزد

دبیر: نواب زاده ـ فرستنده: عبدالحسین قانع

۲۴۰۸ ـ رادیکالهای زیر را ساده کنید

$$x=\sqrt{2+\sqrt{5+\sqrt{3-\sqrt{27+8\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}}}$$

$$x=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$$

۲۴۰۹ ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)$ و $(x-3)$ به ترتیب برابر ۴ و ۵ باشد باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ را بر $(x-1)(x+2)$ بدست آورید

۲۴۱۰ ـ دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x^2+xy=15 \\ y^2+xy=10 \end{cases}$$

۲۴۱۱ ـ دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} xyz=50 \\ yzt=200 \\ ztx=80 \\ txy=100 \end{cases}$$

دبیرستان پهلوی ساری

دبیر: احسان جواد زاده ـ فرستنده: سعید غفرانی

۲۴۱۲ ـ سه معادلهٔ سه‌مجهولی زیر را حل کنید

$$\frac{3}{x+y}=\frac{5}{y+z}=\frac{4}{x+z}=\frac{6}{xyz}$$

۲۴۱۳ ـ دو متحرک به‌ترتیب باسرعتهای ۵ کیلومتر و ۲ کیلومتر درساعت ازشهر A به‌شهر B حرکت کرده و به‌شهر B می‌روند. اولی پس از رسیدن به شهر B دوازده دقیقه توقف کرده بسمت شهر A حرکت می‌کند. حساب کنید دو متحرک درچه فاصله‌ای از A به هم می‌رسند. فاصلهٔ دوشهر ۱۰ کیلومتر است.

۲۴۱۴ ـ نامعادلات زیر را حل کنید

$$-5<\frac{2x+1}{1-x}<5$$

۲۴۱۵ ـ نا معادلهٔ زیر را در دوحالت $a>0$ و $a<0$ حل کنید.

$$\frac{x}{a-x}-\frac{ax}{2}>\frac{a(x^2+a^2-4)}{2(a-x)}$$

۲۴۱۶ ـ معادلهٔ $mx^2-4(m+1)x+m-1=0$ مفروض است. اولا رابطه‌ای مستقل از m بین ریشه‌های معادلهٔ بالا بیابید. ثانیاً معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادلهٔ بالاباشد. ثالثاً اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ فوق باشد عبارت $x'^3x''+x'x''^3$ را برحسب m محاسبه کنید. رابعاً آیا به ازاء مقداری از m این‌معادله دارای ریشه‌های صفر خواهد شد؟ درصورت‌عدم داشتن دوریشهٔ صفر تحقیق کنید چه شرایطی باید بین ضرایب معادلهٔ درجهٔ دوم برقرار باشد تادو ریشهٔ صفر وصفرداشته باشیم خاصاً برحسب مقادیر مختلفهٔ m درو جود وعلامت ریشه‌ها بحث کنید.

دبیرستان شاهپور ـ کرمانشاه

دبیر غفاری ـ فرستنده: بهادری نمایندهٔ یکان

۲۴۱۷ ـ دستگاه دو مجهولی پارامتری زیررا حل کنید

و بحث کنید

$$\begin{cases} 2mx+y=2m^2+m-1 \\ x-my=2m-m^2 \end{cases}$$

۲۴۱۸ـ در معادلهٔ زیر به ازاء پارامتر m در وجود وعلامت ریشه‌ها بحث کنید

$$(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0$$

۲۴۱۹ـ رابطهٔ مستقلی از m بین ریشه‌های معادلهٔ زیر بدست آورید

$$(m+1)x^2-(2m+1)x-2m=0$$

۲۴۲۰ـ مجموع سودسالیانهٔ دو سرمایه ۱۱۵۰ ریال اگر اولی ۵۰۰ ریال بیشتر از دومی وبانرخ ۵٪ ودومی بانرخ ٤٪ به مرابحه دهیم هریك از سرمایه‌ها چقدر است

دبیرستان دخترانه مرجان (گروه فرهنگی خوارزمی)
دبیر : شهریاری

۲۴۲۱ـ معادلهٔ زیر راحل کنید :

$$2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$$

۲۴۲۲ـ معادلهٔ درجهٔ دوم زیر مفروض است

$$(2m-1)x^2-(2m+1)x+m+1=0$$

m را چنان پیدا کنید که :

اولا $x'=2x''$ باشد

ثانیاً $2x'+3x''=7$ شود

۲۴۲۳ـ معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن m^2 و $\frac{m+1}{m-1}$ باشد

۲۴۲۴ـ معادلهٔ زیر را حل کنید ،

$$(m-1)x^2-(m^3-m^2+m+1)x+m^2+m^2=0$$

و سپس علامت ریشه‌های آنرا بازاء مقادیر مختلف m بدست آورید

۲۴۲۵ـ دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+xz=11 \\ (x+y)(y+z)(x+z)=60 \end{cases}$$

***

II ـ هندسه

دبیرستان ایرانشهر ـ یزد
دبیر : نواب زاده ـ فرستنده : قانع

۲۴۲۶ـ در مربع ABCD از رأس A خط اختیاری رسم میکنیم تا قطعه خط DC را در M قطع کند . نیمساز زاویهٔ BAM خط BC را در K قطع میکند ثابت کنید :

$$AM=BK+DM$$.

۲۴۲۷ـ ثابت کنید که اگر درمثلثی دو نیمساز باهم برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است .

۲۴۲۸ـ در مثلث ABC ضلع BC ونقطهٔ H پای ارتفاع AH ثابت است مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ M وسط AB .

دبیرستان پهلوی ـ ساری
دبیر محمود مهران ـ فرستنده : سعید غفرانی

۲۴۲۹ـ دوزنقه‌ای رسم کنید که طولهای هریك ازدوقاعده و ارتفاع آن معلوم بوده واقطار برهم عمود باشند

۲۴۳۰ـ دریك دایره مثلثی محاط کنید به طوری که دو ضلع آن ازدونقطهٔ معلوم بگذرد و زاویهٔ بین آن دوضلع α باشد

۲۴۳۱ـ مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن l وارتفاع دارد بر وتر $h=\frac{2l+1}{2l}$ باشد مفروض است

اولا اضلاع این مثلث را برحسب l حساب کنید (بحث نمائید) .

ثالثاً درحالتی که مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد مقدار l را به‌دست آورید

دبیرستان قطب‌زفول
دبیر : فخرعطار ـ فرستنده: محمد حسن نادران

۲۴۳۲ـ در مثلث ABC تفاضل دو ضلع $b-c=1$ و a وزاویهٔ C معلوم است مثلث را رسم وبحث کنید .

۲۴۳۳ـ در مثلث ABC زاویهٔ $B=105^\circ$ و زاویهٔ $C'=30^\circ$ درجه است و $b=12$ تعیین کنید طول دو ضلع و زاویهٔ دیگر مثلث را .

III ـ متمم حساب

دبیرستان ایرانشهر ـ یزد
دبیر : نواب زاده ـ فرستنده : قانع

۲۴۳۴ـ m را چنان معین کنید که ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^4-\frac{5}{2}x^2+m=0$$

تصاعد حسابی تشکیل دهند .

۲۴۳۵ـ ثابت کنید که هرگاه اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه جمل متوالی یك تصاعد حسابی باشند قدرنسبت مساوی شعاع دایرهٔ محاطی است .

۲۴۳۶ـ چهارعددتشکیل تصاعد هندسی داده‌اند بطوری که مجموع دوعدد اولی ۲۷ ومجموع دوعدد آخری ۱۷۵ است این اعداد را حساب کنید

۲۴۳۷ـ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$$

دبیرستان شاهپور ـ کرمانشاه

دبیر : شفا ـ فرستنده : بهادری

۲۴۳۸ـ دریك تصاعد عددی جمله اول ۵ و جملهٔ ششم ۲۰ مطلوبست جملهٔ دوازدهم و مجمع بیست جملهٔ آن

۲۴۳۹ـ بچه دلیل $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}:1::$ تشکیل تصاعد هندسی می‌دهد سپس جملهٔ هفتم وحد مجموع آن راحساب کنید

۲۴۴۰ـ مجموع n عددمتوالی که از ۱ شروع می‌شود چنداست؟

۲۴۴۱ـ بین ۲ و ۱۶۲ سه واسطهٔ هندسی پیدا کنید

۲۴۴۲ـ در مربعی به ضلع a اوساط اضلاع بهم وصل کرده تامربعی بدست آید درمربع بدست آمده مجدداً اوساط اضلاع را بهم وصل کرده‌واین عمل‌را بینهایت‌بار تکرار میکنیم مطلوبست تعیین حد مجموع مساحتها و حد مجموع محیطهای این مربعات بدست آمده

۲۴۴۳ـ اگر زوایای یك مثلث‌تشکیل تصاعد عددی‌دهند ثابت کنید یکی‌از زوایای‌آن ۶۰ درجه است

۲۴۴۴ـ مولد کسرهای متناوب ساده‌ومرکب زیرا تعیین کنید .

۱) ۰٫۱۷۲۱۷۲۱۷۲.....

۲) ۱٫۳۰۵۰۵۰۵.....

۳) ۰٫۲۱۲۳۴۲۳۴۲۳۴۲.....

دبیرستان دکتر فاطمه سیاح

دبیر : ناصری ـ فرستنده : طلعت مشکین

۲۴۴۵ـ اولا در عبارتهای زیر a و b راطوری‌تعیین کنید که این عبارتها تشکیل یك تصاعدعددی بدهندثانیاً بین دوجمله سوم وچهارم چهارجمله درج کنید

$3a-b$ و $a-2b+1$ و $2a+b+1$ و $a+b-3$

۲۴۴۶ـ یك تصاعد هندسی صعودی تشکیل دهید که‌تفاضل جمله‌های سوم واول آن ۹ ومجموع دو جملهٔ سوم وچهارم آن ۳۶ باشد سپس مجموع ۸ جملهٔ آنرا محاسبه کنید

۲۴۴۷ـ معادلهٔ زیر را حل کنید

$$\sqrt[x]{8^{x+1}}=\sqrt[x+1]{4^{2x+1}}$$

۲۴۴۸ـ مقدار x را از عبارت زیر بدست آورید

$$\log x=\log 3+\log a+\log b+\frac{1}{3}\operatorname{colog} a-\frac{2}{3}\log b$$

دبیرستان قطب دزفول

دبیر : فخر عطار ـ فرستنده عبدالعظیم گلچین

۲۴۴۹ـ دریك تصاعدعددی که دارای ۹ جمله‌است جملهٔ اول ۵ وجملهٔ آخر ۲۱ است قدر نسبت‌ومجموع جمل‌این‌تصاعد را حساب کنید

۲۴۵۰ـ سه‌عدد متوالی x و y و z جمل متوالی یك تصاعد هندسی است اگر مجموع این سه جمله ۶۵ و حاصل ضربشان ۳۳۷۵ باشد تعیین کنید مقادیر عددی x و y و z را

۲۴۵۱ـ معادلهٔ زیررا حل کنید

$$2^{4x-3}+4^{2x-1}=96$$

۲۴۵۲ـ اگر $\log 2=0.301$ باشد $\sqrt[5]{2500}$ را بدون استفاده ازجدول حساب کنید

کلاس چهارم طبیعی

جبر

دبیرستان سخن پیران

دبیر: سید محمدکاظم نائینی

۲۴۵۳ـ کسرزیر را ساده کنید

$$\frac{\sqrt{75}+\sqrt{147}-\sqrt{27}}{\sqrt{48}-\sqrt{3}}$$

۲۴۵۴ـ معادلهٔ زیر را حل کنید

$$\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}=\frac{12}{x^2-4}$$

۲۴۵۵ـ دستگاه سه معادلهٔ‌سه‌مجهولی زیررا حل کنید

$$\begin{cases}2x+y-z=6\\2y+z-x=6\\2z+x-y=6\end{cases}$$

۲۴۵۶ـ دوعدد تعیین کنید که‌مجموع آنها $\frac{10}{3}$ وعکس‌هم باشند

۲۴۵۷ـ معادلهٔ

$$(m-1)x^2+(m-3)x+m-3=0$$

مفروض است m راطوری تعیین کنید که معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد (دوریشه مساوی باشند)

۲۴۵۸ـ نامعادلهٔ زیر را حل کنید

$$(-3x^2+10x-3)(x+3)<0$$

۲۴۵۹ـ کسر زیر را ساده کنید

$$\frac{5x^2-16x+3}{5x^2+14x-3}$$

IV ـ شیمی

کلاس چهارم طبیعی دبیرستان پهلوی کازرون (دبیر: حسین جواهری)

۲۴۶۰ـ تجربهٔ ۱ـ مخلوطی از: سولفات سدیم، سولفیت سدیم؛ کلرور سدیم و نشادر را در آب حل کرده و بر حاصل نیترات باریم کافی میریزیم. رسوبی بدست میآید که پس از خشک شدن ۴٫۵ گرم وزن دارد. چون رسوب را تحت تأثیر جوهر نمك قرار دهیم کاهش وزن آن ۲٫۱۷ گرم میگردد.

تجربهٔ ۲ـ زیر صافی را باسود زیاد، حرارت داده و گازهای قلیائی حاصل را وارد ۳۰cc محلول جوهر نمکی میکنیم که چند قطره فنل‌فتالئین به‌عنوان شناساگر بدان اضافه شده ـ برای تولید رنگ ارغوانی باید ۲۰cc سود سوزآور $\frac{N}{2}$ مصرف کرد. از طرفی ۴cc جوهر نمك مزبور با ۲cc پتاس ۲ mol درلیتر خنثی میشود.

تجربهٔ ۳ـ محلول حاصل از تجربهٔ ۲ را با نیترات نقره دسی‌نرمال ترکیب میکنیم برای ظهور رسوب قرمز آجری میبایست ۴۰۰cc نیترات نقره مزبور را مصرف کرد (گرمات پتاسیم به‌عنوان معرف بکار رفته) پیدا کنید: ۱ـ فرمول ملکولی مخلوط ۲ـ چگالی (تکاثف نسبی) گاز حاصل از تجربه ۱ را نسبت به هیدروژن.

کلاس پنجم طبیعی

جبر پنجم طبیعی دبیرستان کورش

دبیر: خوش‌آهنگ

۲۴۶۱ـ نقطهٔ $A(m+1 \text{ و } m-3)$ مفروض است، پارامتر m را چنان تعیین کنید تا فاصلهٔ نقطهٔ A از خط به معادلهٔ $5x-12y=15$ مساوی ۳ باشد.

۲۴۶۲ـ خط D به معادلهٔ $2x-5=-y$ و تابع $y=-x^2+4x-3$ را روی یکدستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

۲۴۶۳ـ مختصات نقطهٔ تلاقی خط D به معادلهٔ $2x+y=5$ و منحنی نمایش تابع $y=-x^2+4x-3$ را پیدا کنید.

۲۴۶۴ـ در تابع $y=ax^2+bx+c$ مقادیر a و b و c را به قسمی تعیین کنید تا مختصات نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم آن نقطهٔ $M(1 \text{ و } 2)$ باشد و در نقطه‌ای به‌طول ۴ خط D به‌معادلهٔ $y=2x+5$ را قطع کند.

۲۴۶۵ـ از نقطهٔ P به طول ۵ واقع بر منحنی نمایش تابع $y=-x^2+4x-3$ خطی بر آن مماس میکنیم، معادلهٔ خط مماس و همچنین معادلهٔ خط عمود بر خط مماس در نقطهٔ تماس با منحنی را بنویسید.

۲۴۶۶ـ برحسب مقادیر مختلف پارامتر m در نقاط تلاقی خط D به معادلهٔ $y=(m-4)x-3m+16$ و منحنی نمایش تابع $y=-x^2+4x+3$ بحث کنید.

۲۴۶۷ـ معادلات تانژانت زاویهٔ بین دو خط D و D′ را را پیدا کنید بنابر آنکه خط D از نقاط $A(2 \text{ و } -\frac{1}{2})$ و $B(-\frac{2}{3} \text{ و } 1)$ گذشته و خط D′ از نقطهٔ C وسط پارهٔ خط AB مرور نموده و محور xها را در جهت مثبت بازاویهٔ $\alpha=45^\circ$ قطع کرده باشد.

کلاس پنجم ریاضی

I ـ جبر

دبیرستان افدایه

دبیر: پرویز شهریاری

۲۴۶۸ـ در تابع $y=(a+3)x^2-2x-(a-2)$ مقدار a را چنان پیدا کنید که عرض می‌نیمم یا ماکزیمم آن ۳ برابر طولش باشد.

ثانیاً منحنی نمایش تغییرات دو تابع $y=x^2-2x+4$ و $y=4x^2-2x+1$ را روی یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

ثالثاً اگر $A(1 \text{ و } 3)$ و $B(-1 \text{ و } 7)$ و C نقطهٔ می‌نیمم تابع $y=4x^2-2x+1$ باشد مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

رابعاً از نقطهٔ تلاقی دو منحنی واقع در ربع دوم مماسهائی بر هر دو منحنی رسم کرده‌ایم. معادلات مماسها و تانژانت زاویهٔ بین دو مماس را بدست آورید.

۲۴۶۹ـ اولا برحسب مقادیر مختلف a در نقاط تلاقی $y=\frac{a(x-1)}{x+1}$ و $y=\frac{x}{x-1}$ بحث کنید.

ثانیاً به‌ازاء $a=-\frac{1}{8}$ هر دو منحنی را رسم کنید.

ثالثاً درحالتی که منحنی $y=\frac{x}{x-1}$ خط $y=mx+1$ را در دو نقطه قطع می‌کند. مکان وسط نقاط تقاطع را پیدا کنید وحدود مکان را کاملا مشخص کنید.

۲۴۷۰ - اگر $y=\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$ باشد ثابت کنید $y+y''=3y^5$

دبیرستان شاهپور - کرمانشاه

دبیر: نقاری - فرستنده: بهادری خبرنگار یکان

۲۴۷۱ - تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است

۱) پارامترهای a و b را تعیین کنید که تابع در نقطه‌ای به طول $\frac{7}{6}$ می‌نیمم و مقدار می‌نیمم $-\frac{25}{11}$ باشد. سپس منحنی تابع $y=(3x-1)(x-2)$ را رسم کنید.

۲) خط $y=mx-1$ مفروض است تعیین کنید که این خط به‌ازاء چه مقادیر m برمنحنی فوق مماس می‌شود

۳) مختصات نقاط تماس را به دست آورید. این خط را به‌ازاء $m=-1$ رسم کنید

۲۴۷۲ - مشتق تابع زیر را حساب کنید

۲۴۷۳ - تحقیق کنید که به ازاء مقادیر مختلف m خطوط $3y-3mx+9m-2=0$ از نقطهٔ ثابتی که آنرا پیدا خواهید کرد می‌گذرند.

۲۴۷۴ - مطلوبست تعیین ناحیه‌ای از صفحهٔ محورهای مختصات که مختصات نقاط آنها درهرسه نا مساوی زیر صدق کند

$3x+3y-6>0$ و $x-4<0$ و $y<3$

دبیرستان قطب دزفول

دبیر: فخر عطار - فرستنده: رحیم خداگودرزی

۲۴۷۵ - حد تابع زیر را به‌ازاء $x=-8$ حساب کنید.

$$y=\frac{\sqrt[3]{x}+2}{x^2-64}$$

۲- مشتق تابع زیر را مستقیماً ازروی تعریف حساب کنید.

$y=x^2-2x+5$

۲۴۷۶ - نقاط $A(2m+1, m)$ و $B(-1, n)$ و $C(1, 0)$ مفروضند

۱)- مقادیر m و n را به قسمی تعیین کنید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد

۲)- ثابت کنید خط AC به‌ازاء جمیع مقادیر m از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

مختصات این نقطه را بدست آورید؟

۳)- به‌ازاء $m=4\sqrt{3}-8$ و $n=10\sqrt{3}-16$ زاویهٔ بین دوخط AC و AB را بدست آورید. (این زاویه حاده است) همچنین معادلهٔ نیمساز بین این دوخط را بنویسید. (داخلی وخارجی) مساحت مثلث را حساب کنید.

دبیرستان نظام وفا - اهواز

دبیر: قوام نحوی - فرستنده: نورالهدی‌بروجنی

۲۴۷۷ - دو تابع زیر مفروض است

$y=mx^2-3x+2$ و $y=-x^2+mx$

اولا m را طوری بگیرید که طول نقطهٔ می‌نیمم تابع اول مساوی طول نقطهٔ ماکزیمم تابع دوم شود

ثانیاً - m را طوری بگیرید که دومنحنی برهم مماس شوند.

ثالثاً مطلوب است رسم منحنی تابعهای زیر روی یک شکل و تحقیق کنید که دومنحنی در نقطهٔ A برهم مماسند مختصات نقطهٔ تماس و معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی را در نقطهٔ A پیدا کنید.

۱) $y=x^2-3x+2$ و ۲) $y=-x^2+x$

رابعاً - فاصلهٔ مبدأ مختصات را از مماس مشترک مزبور بدست آورید.

۲۴۷۸ - دوخط زیر مفروضند معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(1, 2)$ گذشته و بر نیمساز داخلی این دوخط عمود باشد.

$x-y+2=0$ و $y-x+2=0$

ثانیاً ناحیه‌ای ازصفحهٔ محورهای مختصات را تعیین کنید که به‌ازاء مختصات نقاط آنها نامساویهای زیر برقرار باشند.

$y<0$ و $x>0$ و $x-y+2<0$ و $y-x+2>0$

۲۴۷۹ - از توابع زیر مشتق بگیرید

$$y=(x^4-5x^2+6)^{10}\times\sqrt[4]{\frac{2x+1}{2x-1}}$$ و

$$y=\left(tg^2x+\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\sin x}}\right)^{10}$$

II - مثلثات

دبیرستان امیرکبیر قوچان

دبیر: محمد جعفر اصفهانی - فرستنده حبیب‌الله‌سلیم زاده

۲۴۸۰ - صحت اتحادهای زیر را تحقیق کنید

$$\sin^2a\cos^2a\left(\frac{1}{\frac{1}{\cos^2a}-\cos^2a}+\frac{1}{\frac{1}{\sin^2a}-\sin^2a}\right)=\frac{1-\sin^2a\cos^2a}{2+\sin^2a\cos^2a}$$

$$\mathrm{Arctg}\frac{2}{3}+\mathrm{Arccos}\frac{4}{5}-\mathrm{Arccotg}\frac{23}{11}=\frac{\pi}{4}$$

۲۴۸۱ـ رابطهٔ زیر را برحسب $tg\frac{x}{2}$ بنویسید.

$$a\cos x+b\sin x+c$$

۲۴۸۲ـ معادلهٔ زیر را حل کرده جوابهای بین‌صفر و 2π را معین کنید

$$\sin x+\sin 2x-\sin 3x=0$$

۲۴۸۳ـ اگر مجموع دو کمان x و y برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد و مجموع تانژانت آن دو کمان $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ باشد اولا $tg(x+y)$ را حساب کنید و از روی آن $tgx\,tgy$ را بدست آورید

ثانیاً کمانهای x و y را نیز حساب کنید

دبیرستان خرد

دبیر: صدیق‌آراء فرستنده: رمضانعلی صفائی

۲۴۸۴ـ درتابع $y=ax^2+bx+3$ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که منحنی نمودار آن به‌ازاء $x=1$ دارای ماکزیممی برابر ۴ باشد

۲۴۸۵ـ جدول و منحنی نمودار تابع: $y=x^2+2x+3$ را رسم کنید

۲۴۸۶ـ برمحورعرضها نقطه‌ای تعیین کنید که اگر از آن دو مماس برمنحنی y رسم کنیم خطوط حاصل عمود بریکدیگر باشند

۲۴۸۷ـ هرخط بضریب زاویهٔ ۲ منحنی y نمودار آن را از دو نقطهٔ P و Q قطع میکند مختصات نقطهٔ M وسط پاره خط PQ را محاسبه کرده و مکان هندسی آن را رسم کنید وجزئی از مکان را که قابل قبول میباشد مشخص نمائید

۲۴۸۸ـ درحالت خاص اگر یکی ازدو نقطهٔ تقاطع خط اخیر را بامنحنی $A(3,5)$ و نقطهٔ نظیر آن را B بنامیم اگر c نقطهٔ تماس منحنی باخط مماس موازی AB باشد مساحت مثلث ABC را تعیین کنید

۲۴۸۹ـ مقدارحقیقی تابع:

$$y=\frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{1-x}}$$

رابه‌ازاء $x=-2$ تعیین کنید

۲۴۹۰ـ اولامشتق تابع $y=\frac{2\sin\sqrt{x}+x}{2\cos\sqrt{x}-x}$ را تعیین کرده و ساده نمائید.

ثانیاً معادلهٔ مماس برمنحنی نمودار تابع $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ را درنقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی بنویسید

دبیرستان رهنما ـ تهران

دبیر: حسن مولائی ـ فرستنده: پرویز محمدی

۲۴۹۱ـ از رابطهٔ $\sin(6x+7y)=13\sin 7y$ رابطهٔ $6tg(3x+7y)\quad 7tg3x$ را نتیجه بگیرید

۲۴۹۲ـ اولا خطوط مثلثاتی $\frac{\pi}{8}$ را حساب کنید. ثانیاً طرف دوم تساوی ذیل را بنویسید

$$\cos\left[\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)+2\mathrm{Arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]=?$$

۲۴۹۳ـ یکی از دو معادلهٔ ذیل را حل کنید

الف: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$

ب: $\cos 3x-\cos 5x=\sin 6x+\sin 2x$

۲۴۹۴ـ ثابت کنید که از رابطهٔ

$$y=\mathrm{Arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

میتوان رابطهٔ $x^2=\sin 2y$ را بدست آورد

۲۴۹۵ـ تساوی ذیل را ثابت کنید.

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$$

دبیرستان سخن

دبیر: سید محمد کاظم نائینی

۲۴۹۶ـ تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است و a و b و c را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش تابع محور x ها را در نقطه‌ای به‌طول ۱ قطع کرده و در نقطه‌ای به‌طول ۲ مینیممی برابر ۱ ـ داشته باشد.

۲۴۹۷ـ دو نقطهٔ $A(2,1)$ و $B(-3,-1)$ مفروضند روی خط d به معادلهٔ $3y-4x-2=0$ نقطه‌ای مانند C طوری تعیین کنید که مثلث ABC بهرأس A متساوی ـ الساقین باشد.

ثانیاً ـ معادلهٔ نیمسازهای زاویهٔ A را بنویسید

۲۴۹۸ـ خط $2y=x-1$ منحنی نمایش تابع $y=x^2-4x+3$ را دردو نقطهٔ A و B قطع میکند مختصات این دو نقطه را بدست آوردید و درهر کدام ازاین نقاط خطی بر منحنی نمایش تابع فوق مماس کرده معادلهٔ مماسها را بنویسید وزاویهٔ بین دومماس را حساب کنید

۲۴۹۹ـ از مبدأ مختصات چند خط میتوان برمنحنی نمایش تابع $y=x^2-4x+3$ مماس رسم کرد معادلات مماسها را بنویسید

۲۵۰۰ـ تابع $y=\frac{(2m-1)x+2m}{(3m-2)x+m+1}$ مفروض است .

به ازاء چه مقادیری از m تابع فوق سعودی و به ازاء چه مقادیری نزولی و به ازاء چه مقادیری ثابت است و تحقیق کنید به ازاء جمیع مقادیر m منحنی تمام توابع فوق از دو نقطهٔ ثابتی که مختصات آنهارا تعیین خواهید کرد میگذرند

۲۵۰۱ـ مشتق تابع زیر را در نقطهٔ A به طول ۱ حساب کنند

$$y=\frac{2\sqrt{x\sqrt{x}}-x}{x-2}$$

دبیرستان شاهپور ـ شیراز

دبیر بهمت

۲۵۰۲ـ ثابت کنید که عبارت زیر به مقدار a و b بستگی ندارد .

$$\frac{\sin b\cos a(tg a+tg b)}{1-\cos(a+b)}-\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\cos b\sin\frac{a+b}{2}}$$

۲۵۰۳ـ صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید .

$$\frac{tg(\frac{\pi}{2}-a)\cos a}{cotg a-\sin(\frac{3\pi}{2}-a)}=\frac{cotg a-\cos a}{cotg a\cos a}$$

دبیرستان شاهپور ـ کرمانشاه

دبیر : غفاری ـ فرستنده بهادری

۲۵۰۴ـ صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید .

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{6}+x)-\cos(\frac{\pi}{3}+x)}{\sin(\frac{\pi}{6}+x)+\cos(\frac{\pi}{3}+x)}=\sqrt{3}tg x$$

۲۵۰۵ـ مقدار عبارت زیر را حساب کنید

$$\sin 15^\circ+tg 30^\circ\cos 15^\circ$$

۲۵۰۶ـ درصورتی که $\sin x=\frac{3}{5}$ و $\sin y=\frac{7}{25}$ و $\cos z=-\frac{5}{13}$ و زاویه‌های x و y حاده و انتهای کمان z در ربع دوم باشد مقدار عبارت $\sin(x+y-z)$ را حساب کنید

۲۵۰۷ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کرده جوابهای بین صفر و 2π آنرا حساب کنید

$$3\sin^2 x+3\cos x=0$$

۲۵۰۸ـ ثابت کنید که عبارت زیر مقداری است ثابت و به x بستگی ندارد .

$$\cos^2(x+\frac{\pi}{4})+\cos^2(x+\frac{\pi}{2})+\cos^2 x+\sin x\cos x+\frac{1}{2}$$

دبیرستان صائب ـ اصفهان

دبیر : باقرگوهری ـ فرستنده : مجید شریف واقفی

۲۵۰۹ـ مطلوبست محاسبهٔ $\sin 75^\circ$

۲۵۱۰ـ درستی اتحاد زیر ثابت کنید

$$\sin 6a=2\sin a(16\cos^5 a-16\cos^3 a+3\cos a)$$

۲۵۱۱ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند ثابت کنید .

$$\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C+4\sin 2A\sin 2B\sin 2C=0$$

۲۵۱۲ـ

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

۲۵۱۳ـ معادلهٔ زیر را حل کنند .

$$\cos 3x-\cos 5x+\cos 7x=0$$

۲۵۱۴ـ عبارت زیر را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید .

$$\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2(a+b)$$

۲۵۱۵ـ اگر $\sin x=\frac{a-b}{a+b}$ باشد مطلوبست محاسبهٔ

$$cotg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$$

مسئلهٔ امتحانی هندسهٔ

دبیرستان قلب دزفول : دبیر عبدالمجید فخر مطار

فرستنده محمد حسین طحان زاده

۲۵۱۶ـ روی گنجسه قائمهٔ $S.xyz$ نقاط A و B و C را روی یالها قسمی اختیار کنید که $SA=SB=SC=a$ باشد . اولا : ثابت کنید یال Sy بر AB عمود است .

ثانیاً سطح جانبی و حجم هرم S.ABC را برحسب a بدست آورید .

ثالثاً ارتفاع SH را برحسب a بدست آورید . (بدون استفاده ازدستور حجم هرم)

توضیح : نقاط A و B و C را به ترتیب روی یالها Sx و Sz و Sy بگیرید

شیمی

دبیرستان بواسحق کازرون

دبیر : حسین جواهری .

۲۵۱۷ـ تجربهٔ ۱ ـ محلولی ازسولفات مس متبلور ، سولفات فرومتبلور و سولفات فریك ایندر را آنچنان حرارت میدهیم تا تمام آب تبلور خود را ازدست دهد ـ بخارات حاصل را ازظروف اسید سولفوریك غلیظ عبورمیدهیم . افزایش وزن ظروف اسید ۲٫۱۶ گرم میشود .

تجربهٔ ۲ـ گردی آب باقیمانده راتایك لیتر رقیق نموده آنگاه 10^{cc} آن را با پرمنگنات عشرنرمال باضریب تصحیح ۰٫۱ دوزاژ میکنیم .

دراین عمل 10^{cc} پرمنگنات مصرف میشود. 10^{cc} دیگر را بایك سولفور قلیائی عمل میکنیم . رسوبی تولید میشود که پس ازشستن باسولفورکربن و بعد با یك اسید معدنی به‌ترتیب ۰٫۰۳۶۰ و ۰٫۰۰۹۶ گرم وزن دارد . از اینجا تعداد اتم گرمهای آهن ومس ونیز تعدادملکولهای به ب کریستالیزاسیون (آب تبلور) سولفات مس را حساب کنید . درصورتیکه نسبت تعداد ملکولهای آب سولفات فرو به سولفات مس $\frac{7}{5}$ باشد .

کلاس ششم طبیعی

جبر و مثلثات

دبیرستان اندیمه ـ دبیر : پرویزشهریاری

۲۵۱۸ـ معادلهٔ درجه دوم

$x^2-y^2+ax-by-6=0$ مفروض است .

اولا a و b را چنان پیداکنیدکه منحنی آن از نقاط $M(1,-1)$ و $M'(-5,-1)$ بگذرد

ثانیاً به‌ازاء $a=4$ و $b=2$ منحنی‌رامشخص ورسم کنید (مختصات‌مرکز ورئوس وکانونهای آنرا بدست‌آورید و تحقیق کنیدکه مجانبهای‌آن برهم عمودند)

ثالثاً m را طوری پیدا کنیدکه خط $y=mx-1$ بر منحنی فوق مماس شود . مختصات نقاط تماس را پیدا کنید .)

رابعاً مختصات نقاط تلاقی منحنی فوق‌رابادایرهٔ بمرکز $C(-2,1)$ و بشعاع $3\sqrt{3}$ پیداکنید

۲۵۱۹ـ نقطهٔ $F(0,1)$ وخط $x-y=1$ مفروض‌است معادلهٔ مکان نقاطی را پیداکنیدکه ازنقطهٔ F وخط فوق به یك فاصله باشند .

مکان فوق یك سهمی است‌که بایستی مختصات رأس آنرا پیدا کنید .

ثانیاً ثابت‌کنیدکه اگر از نقطهٔ $A(0,1)$ دو مماس بر منحنی فوق رسم‌کنیم . دومماس برهم عمودند .

۲۵۲۰ـ منحنی نمایش تغییرات تابع

$y=2\sin^2x-\sin x+1$ را در فاصلهٔ صفر تا 2π رسم کنید

شیمی

دبیرستان بهبهانی ـ کازرون

دبیر : حسین جواهری

۲۵۲۱ـ گازی درصفر درجه حرارت ، صوت‌اصلی‌خود (do_4) را درلولهٔ بسته‌ای به طول 23^{cm} میتوازد . از طرفی ۰٫۵۸ گرم ازاین‌جسم (که تنها از $C-H-O$ تشکیل‌یافته) با ۱٫۲۸ گرم اکسیژن سوخته و $\frac{1}{60}$ کربن ملکولی‌آن پس‌از تبدیل به CO^2 قادراست فاکتور 400^{cc} آب آهك را ۰٫۲۵ نرمال تغییر دهد . پیداکنید فرمول خام این جسم را

$d'=1$ و برای هوا $V'=340m/s$ و $la_4=435$

دبیرستان بحسن هنربخش

دبیر: بهمن‌کلانتری ـ فرستنده : اسماعیل برین‌خو

۲۵۲۲ـ ۰٫۵۹ گرم جسم‌آلی ازتدار را تجزیه‌می‌کنیم اضافه وزن لوله‌های اسید ۰٫۸۱ واضافه وزن لوله‌های پتاس ۱٫۳۲ گرم است .هرگاه ۱٫۱۸ گرم همین‌جسم را باآهك سده تکلیس‌کنیم و گاز حاصل را در ۲۰ سانتی متر مکعب اسید اگزالیك دونرمال وارد کنیم بقیهٔ اسید با ۲۵ سانتی متر مکعب پتاس ۰٫۸ نرمال خنثی خواهدشددرصورتیکه هرملکول این جسم بایك مولکول اسیدکلریدریك خنثی میشود و ۱٫۱۸ گرم این جسم با ۲۰ سانتی متر مکعب اسیدکلریدریك نرمال خنثی میشود حساب‌کنید فرمول گستردهٔ جسم را

کلاس‌ششم ریاضی

I ـ جبر

دبیرستان اندیمه ـ دبیر پرویز شهریاری

۲۵۲۳ـ a را چنان پیداکنیدکه منحنی $y=\frac{(x+a)^3}{x^2-1}$

مجانب خود را در نقطهٔ به طول ۱ − قطع کند.

ثانیاً منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{(x-1)^3}{x^2+1}$ را رسم کنید و مختصات محل تلاقی آنرا با مجانبش پیدا کنید.

ثالثاً معادلهٔ مماس برمنحنی را در نقطهٔ تلاقی آن با محور عرضها بنویسید.

رابعاً ببینید آیا این منحنی مرکز تقارن دارد یا نه؟

۲۵۲۴ـ اولا منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ را رسم کنید.

ثانیاً سطح محصور بین منحنی و محور xx' را در فاصلهٔ $x=2$ و $x=3$ بدست آورید.

ثالثاً حجمی که از دوران همین سطح دور محور xx' بدست میآید محاسبه کنید.

۲۵۲۵ـ اولا علامت عبارت $y=\sqrt{(x+1)^2}-2\sqrt{x^2}$ را وقتی که x تمام مقادیر ممکنه را اختیار کند بدست آورید. ثانیاً نمایش تغییرات تابع $y=\sqrt{(x+)^2}-2\sqrt{x^2}$ را رسم کنید.

دبیرستان کوروش

دبیر: هادی جاوشیان

۲۵۲۶ـ تابع $y=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+b'x+c'}$ مفروض است:

الف ـ ضرایب b و c و b' و c' را چنان معلوم کنید که منحنی تابع برابر ۱ روی محورها $2y$ بوده وخط $x=1$ یکی از مجانبهای منحنی تابع باشد و منحنی مجانب موازی محور طولها را در نقطه‌ای بطول $\frac{3}{4}$ قطع کند.

ب منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{2x^2-4x+3}{x^2-4x+3}$ را رسم کنید.

ج ـ برحسب m در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ

$$(m-2)x^2+4(1-m)x+3m-3=0$$

به کمک رسم منحنی فرض (ب) بحث کنید وریشه‌های معادله را با اعداد ۱ − و ۲ مقایسه کنید

۲۵۲۷ـ الف ـ ثابت کنید منحنی نمایش تابع $y=(m-1)x^3+(5-4m)x-2$ بازاء جمیع مقادیر m از سه نقطهٔ ثابت میگذرد مختصات این سه نقطه را محاسبه کنید

ب ـ برحسب m در وجود و تعداد نقاط تقاطع $y=x^3+6x^2+9x+m$ با محور xها برحسب m بحث کنید ودرحالیکه منحنی تابع برمحور طولها مماس میشود مختصات نقاط تماس وتقاطع با محور طولها را بدست آورید.

۲۵۲۸ـ منحنی تابع $(x-1)y^2=2x^3$ را رسم کنید.

II ـ حساب استدلالی

دبیرستان شاه عباس دولتی اصفهان

دبیر: محمود نگینی

۲۵۲۹ـ مطلوبست تعیین یك عدد چهار رقمی به قسمی که چهار برابر مقلوب خودش باشد: $\overline{abcd}=4\overline{dcba}$

۲۵۳۰ـ عدد سه رقمی $\overline{abc}$ را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $\overline{abc}=\overline{aa}+\overline{bb}+\overline{cc}$

۲۵۳۱ـ عدد چهار رقمی $\overline{abcd}$ را چنان تعیین کنید که دو رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$\begin{cases}\overline{ac}=2\overline{bd}\\ \overline{da}=3(\overline{cb}-1)\end{cases}$$

۲۵۳۲ـ مطلوبست تعیین دوعدد دو رقمی که تفاضل حاصلضرب و مجموع آنها ۲۲۰ باشد.

$$xy-(x+y)=220$$

۲۵۳۳ـ ثابت کنید که به‌ازاء جمیع مقادیر n عدد $4^{2n}-2^{2n+1}+1$ بر ۹ قابل قسمت است.

۲۵۳۴ـ ثابت کنید درتمام مبناها عدد $\overline{aaaa}$ برعدد $\overline{aa}$ قابل قسمت است وخارج قسمت به فرم ثابتی است

۲۵۳۵ـ مطلوبست تعیین اعداد سه رقمی که باقیماندهٔ آنها بر ۵ و ۸ و ۹ و ۱۲ بترتیب ۲ و ۳ و ۵ و ۱۱ باشد.

دبیرستان عثم بهمن ـ خوی

دبیر: ملاحسنی

۲۵۳۶ـ حاصلضرب دو عدد ۸۱۰ و مجموع آنها ۶۳ می‌باشد مطلوبست محاسبهٔ آندوعدد

۲۵۳۷ـ کوچکترین مضرب مشترك دوعدد ۱۲۰ ویکی از آنها ۱۲ می‌باشد آندوعدد را تعیین کنید

۲۵۳۸ـ مطلوبست تعیین دوعدد که مجموع آنها ۱۸۷ و کوچکترین مضرب مشترکشان ۳۵ برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان باشد

۲۵۳۹ـ کوچکترین مضرب مشترك دوعدد b و a برابر است با ۱۰۵۰ وبه‌فرض آنکه مجموع آنها ۲۸۵ باشد آندو عدد را تعیین کنید

III- مثلثات

دبیرستان ششم بهمن خوی
دبیر آقای عالی نژاد

۲۵۴۰- عبارت زیر را قابل محاسبه بالگاریتم نمائید

$$P = 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x$$

۲۵۴۱- معادلهٔ زیررا حل وبحث کنید درصورتیکه $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد

$$\sin^2 x - 2m \sin x \cos x - m + 1 = 0$$

۲۵۴۲- دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = 0 \end{cases}$$

۲۵۴۳- منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{\sin^2 x + \cos x}{\sin 2x}$ را بین صفر و 2π رسم کنید

IV- هندسهٔ رقومی و ترسیمی

دبیرستان خوارزمی ۱
دبیر : مهندس محمود خولی

۲۵۴۴- محور اقصر کاغذ را افقی ومحور اطول راقائم اختیارنموده محل تلاقی دومحوررامرکز کاغذ درنظر گرفته واحد سانتیمترومقیاس ۱:۱ انتخاب گردد .

۱- نقطهٔ a_1 برمرکز کاغذ منطبق است از این نقطه صفحهٔ P را قسمی مروردهیدکه باصفحهٔ افق تصویر زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد وافقیه‌های آن موازی محور اقصر بوده وجهت ترقی رقوم مقیاس شیب آن از بالا به پائین بوده باشد یك مقیاس شیب صفحه را بفاصلهٔ یك ازکنار چپ کاغذ رسم نمائید

۲- ازنقطهٔ a_1 درصفحهٔ P خطی رسم کنید که با اثر افقی صفحهٔ P زاویهٔ حقیقی ۴۰ درجه بسازد و اثرش سمت راست a قرارگیرد و برروی این خط نقطهٔ b_1 را انتخاب نموده وقطعه خط AB را قاعدهٔ مثلثی فرض کنید که درصفحهٔ P واقع وارتفاع رأس C وارد بر ضلع AB مثلث برابر ۵٫۸۵ و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $R = 4$ بوده باشد c سمت راست ab و رقومش بیش از a در نظر گرفته شود مثلث را رسم کنید

۳ - روی مثلث ABC (که نقطهٔ c_0 به فاصلهٔ ۲ سمت راست محورقائم واقع است) متوازی‌الاضلاعی بناکنید که AC قطرآن باشد این متوازی‌الاضلاع را قاعدهٔ هرمی فرض کنید که تصویر خط‌الرأس $a_1 s_1$ بر محور قائم کاغذ منطبق وزاویهٔ SAB درفضا قائمه باشدتصویر هرم SABCD را رسم نمائید.

۴- صفحه‌ای به موازات صفحهٔ P وبه‌فاصلهٔ ۱۰ درسمت بالای آن رسم و مقطع هرم را باصفحه مشخص نموده قسمتی از جسم راکه بین صفحهٔ قاطع و قاعده قرارگرفته است مرئی و مخفی نمائید .

۵ - مقطع جسم حاصل را باصفحهٔ قائمی که به‌فاصلهٔ ۲٫۵ از قائم ماربر A می‌باشد و اثرش از وسط خط cd می‌گذرد و محوراقصر کاغذ را سمت‌راست a قطع می‌کند تعیین‌نموده وسعت حقیقی مقطع را درسمت راست کاغذ مشخص نمائید

۲۵۴۵- آثار صفحه‌ای راکه برخط نیمرخ aba'b' و خط جبههٔ ff' که‌متقاطعند می‌گذرد بدست‌آورید

۲۵۴۶- از نقطهٔ aa' واقع درصفحهٔ‌نیمساز دوم صفحه‌ای موازی صفحهٔ عمود برصفحهٔ نیمساز دوم مفروض رسم نمائید

۲۵۴۷- فصل مشترك صفحهٔ مواجه مفروض PQ' را با صفحهٔ موازی نیمساز دوم تعیین کنید

۲۵۴۸- فصل‌مشترك خط dd' راکه‌موازی صفحهٔ نیمساز اول است باصفحهٔ مواجه‌مفروض pQ' تعیین کنید

۲۵۴۹- عمودمشترك خط‌غیرمشخص dd' را با خط‌الارض تعیین نمائید .

۲۵۵۰- قطعه‌خط مفروض bcb'c' قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است که a تصویر رأس‌آن نیز داده شد a' را مشخص نمائید .

دبیرستان دخترانهٔ مرجان (گروه خوارزمی)
دبیر : مهندس خولی

۲۵۵۱- واحد سانتیمتر - مقیاس ۱:۱ محور اقصر کاغذ افقی ومحور اطول را قائم انتخاب کرده و محل تلاقی آن‌ها را مرکز کاغذ اختیار کنید

۱- نقطهٔ a_0 به فاصلهٔ ۴ سمت چپ مرکز کاغذ بر روی محور اقصر مفروض است از این نقطه صفحهٔ P را قسمی مرور دهید که باصفحهٔ افق تصویر زاویهٔ $\alpha = 45^\circ$ درجه بسازد و مقیاس شیب آنرا که تصویرش موازی محور قائم کاغذ میباشد در کنارهٔ چپ کاغذ رسم نموده جهت ترقی رقوم آنرا از پائین به‌بالا اختیار نمائید .

۲- ازنقطهٔ a_0 درصفحهٔ P خطی به‌اساس $i = \frac{3}{2}$ به قسمی رسم کنید که ترتی رقوم آن از راست به‌چپ و ازپائین ببالا باشد وبرروی آن نقطهٔ b_1 را اختیار کنید

۳ـ از نقطهٔ b_2 در صفحهٔ P خطی رسم نمائید که با افقیهای صفحهٔ P زاویهٔ $\omega = 45^\circ$ بسازد و اثرش سمت چپ محورقائم کاغذ قرار گیرد ونقطهٔ C_2 راروی آن انتخاب نمائید

۴ـ برسه نقطهٔ a_0 و b_2 و c_2 متوازی‌الاضلاعی درصفحهٔ P رسم نمائید که AC قطرش بوده و بـرروی متوازی‌الاضلاع مزبور متوازی‌السطوحی بنا کنید که یالهای جانبی افقیه بوده و تصویرشان با محورقائم کاغذ موازی وطول حقیقی آنهـا برابر هشت باشد و قاعدهٔ EFGH درسمت پائین کاغذ تصویر شود متوازی‌السطوح را رسم و مرئی ومخفی نمائید

۵ـ مقطع متوازی‌السطوح را باصفحهٔ P' کـه در افقیهٔ رقوم ۴ باصفحهٔ P مشترك بوده وشیب آن ۲ = p و جهت ترقی رقوم آن خلاف ترقی مرقوم مقیاس شیب صفحهٔ P است یافته مرئی و مخفی نمائید .

۲۵۵۲ـ فاصله نقطهٔ aa' از خط‌الارض ۶ وبعدش دوبرابر ارتفاع میباشد بطریق ترسیمی ملخص نقطه را بیابید

۲۵۵۳ـ بردوخط متقاطع D و d که اولی غیر مشخص و دومی مواجه است صفحه‌ای مرور داده آثارش را مشخص کنید

۲۵۵۴ـ فصل‌مشترك صفحهٔ PαQ' را باصفحه‌ای که بر خط‌الارض می‌گذرد وبعد نقاطش دوبرابر ارتفاع آنهاست بیابید

۲۵۵۵ـ فصل مشترك خط نیمرخ aba'b' را باصفحهٔ PQ' که بانیمساز دوم موازی است تعیین نمائید

۲۵۵۶ـ عمود مشترك خط نیمرخ aba'b' را باخط مواجه مفروض dd' تعیین نمائید

۲۵۵۷ـ d تصویر افقی خط D و a' تصویر قائم یك نقطهٔ آن مفروض است تصویر قائم خط را به قسمی رسم نمائید که خط D نسبت به خط مفروض dd' متعامد باشد .

V ـ فیزیك

دبیرستان مجیدی اراك
دبیر : آقاهی ـ فرستنده : یدالله ارضی

۲۵۵۸ـ سیم مرتعشی به‌طول ۵۱٫۱۵ سانتیمتر راکه جرم هرمتر آن ۱٫۲۵ گرم است بانیروی ۵ کیلوگرم میکشیم درطول سیم ۵ گره وجود دارد . معین کنید :

اولا ـ نام نت حاصل از تارو سه‌هارمونیك متوالی آنرا

$la_2 = 435$ و $g = 10 m/s^2$.

ثانیاً لولهٔ صوتی بسته‌ای وقتی محتوی هوای صفر درجه است نت اصلیش ut_2 بوده ، آنرا از هوا خـالی مینمائیم و گازی راکه چگالیش نسبت به‌هوا $\frac{1}{1.44}$ است وارد میکـنیم معین کنید ، نت حاصل‌ازآنرا ، سرعت‌سیر صوت در این گـاز چه‌اندازه است .

(سرعت‌سیرصوت درهوای‌صفردرجه ۳۴۰ متر مجذورثانیه فرض شود) .

۲۵۵۹ـ تواتر نوریکرنگی 5×10^{14} میباشدمعین کنید طول‌موج نوریکرنگ رادرصورتیکه سرعت سیرنور 3×10^5 کیلومتردرثانیه باشد .

ثانیاً ـ از این نوریکرنگ درآزمایش یانگ استفاده میشود فاصلهٔ پرده‌ای که نوارهاروی آن تشکیل میشوند تاسطح شکافها ۱٫۵ متر و فاصلهٔ دوشکاف یك میلیمتر است معین کنید فاصلهٔ دونوار روشن متوالی را .

۲۵۶۰ـ سیمی به مقاومت ۴۰ اهم را درکالریمتری که دارای ۵۳۰ گرم آب ۱۰ درجه است قرارمیدهیم وآنرا به‌جریان متناوبی به‌تواتر ۶۰ وصل میکنیم‌پس از ۱٫۵ دقیقه درجهٔ حرارت آب به ۵۰ درجه میرسد اردش‌آبی کالریمتر ۱۰ گـرم است معین کنید معادلهٔ شدت جریان برق را نسبت به زمان واختلاف پتانسیل مؤثر و ماکزیمم‌را بین دو سر مقاومت .

۲۵۶۱ـ تار مرتعشی با نیروی ۷٫۵۶۹ کیلوگرم کشیده شده است وسرعت انتشار ارتعاشات عرضی درتـار ۴۳٫۵m/s است معین کنید :

اولا جرم یك‌سانتی متر تار را برحسب کیلوگرم .

ثانیاً ـ درصورتیکه درطول تار ۳ شکم وجود داشته‌باشد باشد و طول آن ۷۵ سانتیمتر باشدنت حاصل از تارو ۵ هارمونیك متوالی‌آنرا بدست‌آورید

ثالثاً ـ لولهٔ صوتی بسته‌ای‌راکه نت اصلیش‌درصفردرجه حرارت ut_2 است تا چه‌اندازه گرم کنیم تانت‌آن دو برابرنت اصلیش در صفر درجه گردد .

$la_2 = 435$ و $g = 10 m/s^2$

VI ـ مکـانیك

دبیرستان پهلوی اراك
دبیر : آقاهی ـ فرستنده : یدالله ارضی

۲۵۶۲ـ نیروی $f = -40\pi^2 x$ برآونگی به‌جرم ۴۰ گرم که‌فاصلهٔ نقطهٔ آویزش تاسطح زمین ۲٫۱ متر است اثرمیکند:

معین کنید :

اولا ـ پریود آونگ وطول آنرا

ثانیاً ـ این آونگ را از نقطه‌ای که با وضعیت تعادلش زاویهٔ ۶۰ درجه میسازد بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم و به‌محض رسیدن به وضع تعادل نخ آونگ را میسوزانیم درنتیجه آونگ درفضا حرکت پرتابی انجام میدهد ، درجه فاصله‌ای ازقائم نقطهٔ پرتاب به زمین میخورد ، انرژی جنبشی ومقدارحرارتی که در اثر برخورد بازمین ایجادمیشود چه اندازه‌است ، فرض میشود تمام انرژی آونگ بحرارت تبدیل شده و مقدار g با ارتفاع تغییر نمی‌نماید) .

$\pi^2 = 10$ و $g = 10\ m/s^2$

۲۵۶۳ـ اتومبیلی بجرم ۱۲۰۰ کیلوگرم از نقطهٔ A بدون سرعت اولیه شروع به حرکت میکند و پس از ۷۵ ثانیه درنقطهٔ B متوقف میشود (دراثر خاموش شدن موتور) . فاصلهٔ $AB = 1125$ متر و ضریب اصطکاک جاده ۰٫۲ است نیروی موتور موقعی که روشن است ۳۰۰ کیلوگرم نیرو میباشد معین کنید مسافتی که اتومبیل باحرکت تند شونده و مسافتی راکه با حرکت کند شونده پیموده است .

ثانیاً ـ زمان هرکدام از دوحرکت را .

ثالثاً ـ به فرض آنکه موتور اتومبیل خاموش نمیگردید وضمناً اصطکاک جاده به همان حال باقی بماند ودرمقابل حرکت اتومبیل مقاومتی ازطرف هوا به‌رابطهٔ $R = 0.36v^2$ درخلاف حرکت وارد آید سرعت حد اتومبیل چه اندازه خواهد بود.

$g = 10\ m/s^2$

۲۵۶۴ـ هواپیمای بمب‌افکنی برای اینکه بتواند موضع دشمن را درسطح زمین بمب‌باران نماید به فاصلهٔ ۵ کیلومتری قائم آن نقطه بمب را رها میکند ، درصورتیکه سرعت هواپیما ۹۰۰ کیلومتر درساعت باشد و از مقاومت هوا صرفنظر گردد معین کنید !

اولاـ هرا پیما درچه ارتفاعی پرواز میکند و اگر بمب به موضع اصابت نماید سرعت بمب را در لحظهٔ برخورد به ـ دست آورید .

ثانیاً ـ اگر بخواهیم ازسطح زمین (از موضع) هواپیما را تحت زاویهٔ ۴۵ درجه بطریقی هدف قراردهیم که به محض اینکه بخواهد بمب را رها نماید واژگون گردد ، سرعت اولیه‌ای که درسطح زمین لازمست به توپ داده‌شود حساب کنید .

$g = 10\ m/s^2$

۲۵۶۵ـ اتومبیلی بجرم ۱۶۰۰۰ کیلوگرم برروی سطح شیب‌داری به شیب ۵٪ با سرعت ۳۶ کیلومتر در ساعت بطرف پائین درحال حرکت است ، دریك لحظهٔ معین راننده موتور را روشن می‌کند و پس از طی مسافتی سرعتش به ۲۵ متر بر ثانیه میرسد نیروی اصطکاك این سطح ۴۰ کیلوگرم است معین کنید ؛

اولا ـ کار برآیند نیروهارا

ثانیاً ـ اگر پس از ۱۵ ثانیه سرعت اتومبیل به ۲۵ متر برثانیه رسیده باشد توان اتومبیل را دراین مدت برحسب وات واسب بخار حساب کنید .

ثالثاً ـ دراین مدت نیروی وارد ازموتور بر اتومبیل چه‌اندازه بوده است .

۲۵۶۶ـ برای ذوب کردن ۳ گرم یخ صفردرجه چه وزنه‌ای وازچه‌ارتفاعی باید بدون سرعت اولیه رها نمود تا سرعتش در سطح‌یخ به ۲۰ متر برثانیه برسد .

$j = 4.18$ و $f = 80\ cal$ و $g = 10$

اصول موضوعهٔ جبر (بقیه ازصفحهٔ ۱)

اعداد حقیقی ونیزاعداد مختلط تشکیل هیئت می‌دهند.

تئوری هیئت‌ها بوسیلهٔ **ددی‌کیند** (Dedykind) در سال ۱۸۷۱ بصورت مفید درآمد وهمین تئوری‌ازنقطه نظرمجردبودن بوسیله وبر(Weber) ومور(Moore) درسال ۱۸۹۳ مستقلا عرضه گردید.

همان‌طورکه فوقاً ملاحظه گردید خواص طبیعی ومنتظرهٔ اعداد گویا (یازده‌اصل هیئت) هنگامی که دستگاه اعدادراوسعت می‌دهیم تا شامل اعداد اصم نیزبشوند صادق است. وهمین طوراگر این دستگاه بزرگتررا اختیار نموده و به‌آن اعداد موهومی را اضافه نماییم(دستگاه اعداد مختلط) ساز تشکیل هیئت می‌دهند (هیئت اعداد مختلط)

آیا این عمل‌را می‌توان بهمین ترتیب ادامه داد؟ آیا هیئتی بزرگتر از هیئت اعداد مختلط وجود دارد ؟ باید گفت نه‌امکان ندارد که هیئت اعداد مختلطرا به هیئتی وسیعتر توسعه دهیم. اعداد فوق مختلط هامیلتون وکی‌لی همان‌طوری که فوقاً اشاره شده است نمی‌توانند تشکیل هیئت دهند زیرا اصول یازده‌گانهٔ بالا دربارهٔ آن هیئت‌ها صدق نمی‌نماید .

مسائل از :

✲ ✲ ✲ ✲ ✲ استاد دکتر محسن هشترودی ✲ ✲ ✲ ✲ ✲

برای دانش آموزان

۲۵۶۷ـ ثابت کنید که اعداد N_k که باعبارت زیر

$$N_k = 5^{2k+3} + 3^{k+2} \times 2^k$$

تعریف می‌شوند همواره بر ۱۹ بخش پذیراند و جزء N_k حملگی به‌رقم ۷ ختم می‌شوند. آیا این اعداد به ازاء چه‌مقادیری از k بر ۲۳ بخش پذیراند؟ همچنین قابلیت تقسیم بر ۷ این اعداد را تحقیق کنید که به ازاء چه مقادیری از k این اعداد بر ۷ بخش پذیراند

۲۵۶۸ـ ثابت کنید که اعداد

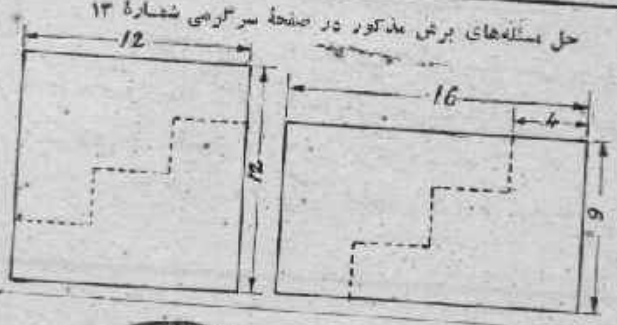
$$5^{2m} + 3^{6n+1} \times 2^{3p+1} + 2\left(m - 2\left[\frac{m}{2}\right]\right)$$

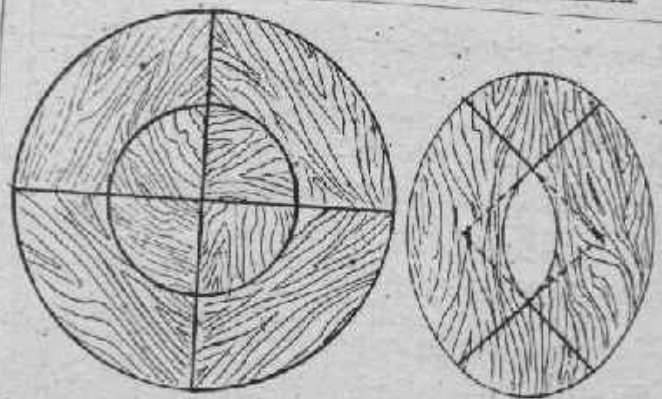
همواره بر ۷ بخش پذیراند. علامت $[N]$ نمایش بزرگترین عدد مثبت صحیحی است که از N کوچکتر است. مثلا

$$\left[\frac{137}{71}\right] = 10 \quad \text{و} \quad [\sqrt{27}] = 5$$

۲۵۶۹ ـ عدد اول p (به صورت $4k+1$) داده شده است. عدد x را چنان تعیین کنید که x^2+1 بر p بخش پذیر باشد (اعداد اول به صورت $4k+1$ همواره مجموع دو مربع تام هستند) برای $p=13$ و $p=17$ و $p=29$ کوچکترین مقدار x را بدست آورید. کلیهٔ مقادیری که به x می‌توان نسبت داد چگونه تعیین می‌شوند؟

حل مسئله‌های برش مذکور در صفحهٔ سرگرمی شمارهٔ ۱۳





برای دانشجویان فوق لیسانس

۲۵۷۰ـ معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{a_0 y^{2n} + a_1 y^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} y + a_{2n}}{a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} x + a_{2n}}$$

دارای جواب عمومی $y = f(x \text{ و } \lambda)$ می‌باشد.

ثابت کنید که تبدیل $y = f(x \text{ و } \lambda)$ معادلهٔ

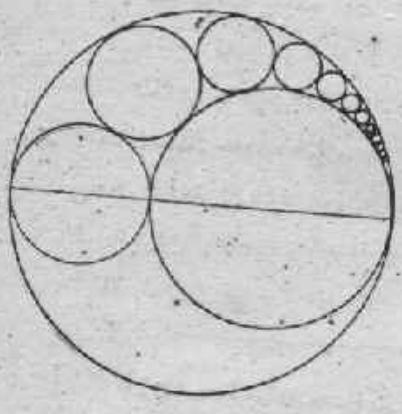
$$a_0 y^{2n} + a_1 y^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} y + a_{2n}$$

را به معادلهٔ

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0$$

تبدیل می‌کند. بنابراین ثابت کنید که معادلات درجهٔ اول و دوم و سوم و چهارم جبری با روابط جبری در هیئت اعداد مختلط (Complexe) قابل حل‌اند

۲۵۷۱ـ دو دایره به‌شعاعهای $a+b$ و b باهم مماس داخل‌اند. در هلال محصور بین این دو دایره دوایری که با این دو دایره و هر یك با دو این مجاور خود مماس‌اند محاط می‌کنیم



وشعاع دایرهٔ رتبهٔ nام را به R_n می‌نمائیم (به‌قسمی که $R_0 = a$)

۱) مقدار عبارت R_n را از روی a و b بدست آورید

۲) مجموع محیطهای این دوایر رشته‌ای تشکیل می‌دهد که متقارب است کنارهٔ فوقانی حد این رشتهٔ متقارب را تعیین کنید.

۳) مجموع سطوح این دوایر نیز رشته‌ای متقارب است و از شکل دیده می‌شود که کنارهٔ فوقانی این رشته از سطح هلال محصور بین دو دایرهٔ مذکور در مسئله کمتر است. مقداری کمتر از این کناره برای رشتهٔ متقارب تعیین کنید

۴) حد مجموع رشتهٔ متقارب اول (مجموع محیطهای دوایر محاطی مذکور در مسئله) را توسط بسط تابع $Ch x$ از روی رشتهٔ فوریه (Fourier) به‌دست آورید. این حد به این صورت است.

$$2\pi^2 \sqrt{ab+b^2}\, \coth h\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{ab+b^2}\right)$$

۵) آیا با بسط چه تابعی از روی سری فوریه می‌توان حد رشتهٔ متقارب مجموع سطوح دوایر مذکور در مسئله را تعیین کرد؟

اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها

۷- دایره Circle

تنظیم از : ایرج ارشاقی

Area	مساحت	Central angle	زاویهٔ مرکزی
Circumference	محیط دایره	Inscribed angle	زاویهٔ محاطی
Diameter	قطر دایره	Circumcircle	دایرهٔ محیطی
Radius	شعاع	Inscribeb circle	دایرهٔ محاطی
(Radii)	شعاعها	Line of centers	خط‌المرکزین
Center	مرکز	Common tangent	مماس مشترک
Arc	قوس - کمان	Common internal tangent	مماس مشترک داخلی
Chord	وتر	Common external tangent	مماس مشترک خارجی
Secant	قاطع	Concentric circles	دوایر متحدالمرکز
Tangent	مماس		

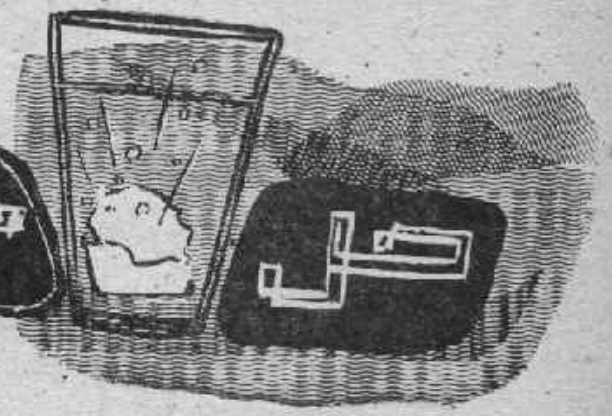
The angle formed by a tangent and a chord drawn the point of contact.

برای زاویهٔ ظلی میگویند :

Which of the following statements is correct :

1 - Of a tangent and a secant arc drawn to a circle from the same point, the tangent is the mean proportional between the secant and its external segment.

2 - The circumference of two circles have the same ratio as their radii.



حل مسائل شماره‌های گذشته

بنا به خواست خوانندگان صورت مسائل به اختصار بیان می‌شود

کلاس چهارم طبیعی

۲۳۱۰ـ با فرض $2y = x - z$ اثبات تساوی زیر

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{z+y}} = \frac{2}{\sqrt{z+y}+\sqrt{x+y}}$$

حل ـ صورت ومخرج هر کسر را در مزدوج مخرج ضرب نموده در عبارتهای مخرج از رابطهٔ فرض استفاده می‌کنیم طرفین بایکدیگر مساوی خواهند شد.

پاسخهای درست رسیده از : طلعت مشکین دبیرستان دکتر فاطمه سیاح ـ حسین امین‌الهی کلاس سوم دبیرستان البرز م. اسدپور دبیرستان طبری آمل ـ محمدصدیق دبیرستان شاهپور رشت ـ حسن یزدانی نژاد دبیرستان رستاخیز ـ رحمت‌الله صالحی دبیرستان امیرکبیر ـ فریدون امین زاده دبیرستان فردوسی رضائیه ـ هوشنگ شهریاری دبیرستان پهلوی کرمان ـ فرهنگ نادری علیزادهٔ ـ علیرضا حق شناس دبیرستان شاهپور رشت ـ عبدالرضا حبیبی مقدم دبیرستان عبدالرزاق لاهیجان ـ حسین امیرحسینی دبیرستان دارالفنون ـ مسعود دستیار دبیرستان صمصامی اراک ـ عبدالرحمن چگنی زاده دبیرستان قطب دزفول ـ عباسعلی کوچکی دبیرستان ایرانشهر یزد ـ هوشنگ آزرم دبیرستان قطب دزفول ـ حسین نجفی ثانی دبیرستان البرز.

۲۳۱۱ـ حل دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{cases}$$

چون بین معادله‌های اول ودوم x را حذف کرده و بعد بین معادلهٔ حاصل با معادلهٔ سوم y را حذف کنیم جوابهای معادله به صورت زیر بدست می‌آید

$$x = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} \quad و \quad y = \frac{ac}{(b-a)(b-c)} \quad و$$

$$z = \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

پاسخهای درست رسیده از : فریدون امین زاده ـ محمدصدیق ـ اسدپور ـ علی کهنموئی تربیت معلم حرفه‌ای ـ شهریار مهاجر دبیرستان البرز ـ منصور نظامی نراقی ـ منصور حسنی دبیرستان پهلوی کرمان ـ علی سلطانی کلاس دوم دبیرستان رضا پهلوی تجریش ـ حسین امین‌الهی ـ حسین نجفی ثانی ـ

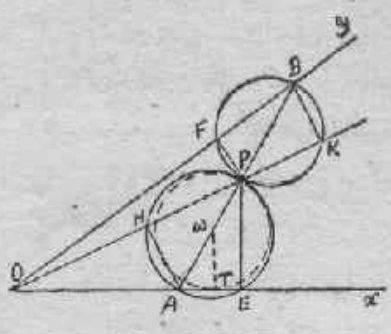
۲۳۱۲ـ زاویهٔ xOy ونقطهٔ P واقع درداخل آن مفروض است . از P قاطعی رسم می‌کنیم تا Ox رادر A وOy را در B قطع کند وعمودهای AH و BK را بر OP رسم می‌کنیم

۱) اثبات اینکه دایره‌های محیطی دو مثلث AHP و BKP بر یکدیگر مماس بوده وهریك برنقطهٔ ثابتی (E و F) می‌گذرند .

AP قطردایرهٔ محیطی مثلث APH و PB قطردایرهٔ محیطی مثلث PBK است . بنابراین دودایره درنقطهٔ P بر یکدیگر مماسند .

دایرهٔ بقطر AP خط Ox را در E قطع می‌کند . زاویهٔ AEP قائمه بوده در نتیجه E پای عمودی است که از

P بر Ox رسم شود ونقطهٔ ثابت می‌باشد. دایرهٔ به‌قطر PB خط Oy را در F قطع می‌کند و F پای عمود مرسوم بر P از Oy خواهد بود



۲) اثبات اینکه دایره‌ای که بر سه نقطهٔ E و O و F می‌گذرد بر P نیز خواهد گذشت. چهار ضلعی EOFP که دوزاویهٔ روبروی آن قائمه و مکمل یکدیگرند محاطی می‌باشد

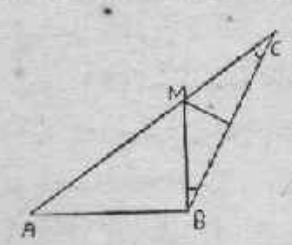
۳) دایرهٔ (C) را رسم می‌کنیم که مرکزش بر AB واقع بوده از P گذشته و بر Ox مماس باشد چنانچه $PE=a$ و $BAO=120^\circ$ باشد مطلوبست محاسبهٔ شعاع دایرهٔ (C) مرکز این دایره را ω ونقطهٔ تماس آنرا با Ox به T می‌نمائیم. اندازهٔ زاویهٔ PAE برابر با 60° واز زاویهٔ APE برابر با 30° بوده در نتیجه $PA=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ حساب می‌شود. از تشابه دو مثلث AωT و APE نتیجه می‌شود

$$\frac{\omega T}{PE}=\frac{A\omega}{PA} \quad \text{و} \quad \omega T=P\omega=R$$

$$A\omega=\frac{2a\sqrt{3}}{3}-R$$

$$\frac{R}{a}=\frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}-R}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} \longrightarrow R=a(4-2\sqrt{3})$$

۲۲۱۳ـ در مثلث ABC تفاضل دوزاویهٔ B و C برابر 90° است $(B>C)$ عمود منصف ضلع BC ضلع AC را در M قطع می‌کند. اثبات اینکه $\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2AC\cdot AM$



(درچاپ صورت مسئله اشتباه شده و به جای تفاضل B و C که صحیح است تفاضل B و A چاپ شده است)

مثلث BMC متساوی الساقین است و $B'=C$ پس

$$\text{ز}B-\text{ز}C=\text{ز}B-\text{ز}B_1=\text{ز}ABM=90^\circ$$

می‌توانیم چنین بنویسیم.

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=(AM+MC)^2+\overline{AB}^2$$

$$=\overline{AM}^2+MC^2+2AM\cdot MC+\overline{AB}^2$$

$$=\overline{AM}^2+\overline{MB}^2+2AM\cdot MC+\overline{AB}^2$$

$$\overline{MB}^2+\overline{AB}^2=\overline{AM}^2 \text{ و } \overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AM}^2$$

$$+2AM\cdot MC=2AM(AM+MC)=2AM\cdot AC$$

کلاس چهارم ریاضی

۲۲۱۴ـ به‌ازاء چه مقادیر a و b عبارت ax^4+bx^3+1 بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است.

تقسیم را انجام داده مانده را متحدباصفر قرار می‌دهیم:

$$R=(4a+3b)x-3a-2b+1=0$$

$$\begin{cases}4a+3b=0\\-3a-2b+1=0\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{matrix}a=3\\b=-4\end{matrix}$$

پاسخهای درست رسیده از: بهنام زرقانی دبیرستان دکتر داورپناه ـ محمد صدیق ـ اسماعیل ختائی دبیرستان خوارزمی ـ حسن مهدیزاده ـ احمد داروئی دبیرستان قریب محمد ناصر رشیدیان دزفول ـ حسن شهنازی دبیرستان قریب ـ فرهاد غفاری دبیرستان قریب ـ عباسعلی کوچکی ـ منصور نهاوندی‌پور دبیرستان مروی ـ ناصر نهاوندی پور دبیرستان قریب ـ حسین تحقی ثانی.

۲۲۱۵ـ عبارت x^3+x^2-x+11 رابرحسب قوای نزولی $2x-1$ منظم کنید. فرض می‌کنیم $2x-1=y$ درنتیجه $x=\frac{y+1}{2}$ و عبارت مفروض را برحسب y نوشته ومرتب می‌کنیم می‌شود

$$\frac{1}{8}y^3+\frac{5}{8}y^2+\frac{3}{8}y+\frac{87}{8} \quad \text{یا}$$

$$\frac{1}{8}[(2x-1)^3+5(2x-1)^2+3(2x-1)+87]$$

پاسخهای درست رسیده از: احمد داروئی ـ حسن مهدیزاده ـ داوود حسینی دبیرستان داور پناه

۲۲۱۶ـ حل معادلهٔ زیر

$$\sqrt{x+3a}+\sqrt{x-a}=2\sqrt{a}$$

باید $a\geq$ و $x\geq a$ و $x\geq -3a$ باشد که نتیجه‌می‌شود $x\geq a\geq$ و طرفین معادله را به‌توان ۲ رسانیده ساده‌می‌کنیم $x=a$ به‌دست می‌آید

پاسخهای درست رسیده از: طلعت مشکین ـ حسن مهدیزاده ـ محمد صدیق ـ ناصر نهاوندی‌پور ـ منصور نهاوندی‌پور

فرهاد غفاری ـ بهنام زرقانی ـ اسماعیل ختائی ـ هوشنگ آزرم ـ شهریار مهاجر ـ حسین امین‌الهی ـ فریدون امین‌زاده عباسعلی کوچکی ـ عبدالرحمن چگنی‌زاده ـ علیرضا حق‌شناس فرهاد مهینی ـ حسین نجفی ثانی ـ فرهنگ نادری علیزاده ـ رحمت‌الله‌صالحی ـ حسن شهنازی ـ منصور نظامی نراقی ـ احمد داروئی ـ سیداحمد نصراللهی دبیرستان رضاشاه کبیر تبریز ـ حسین مظفریان‌ازرضائیه ـ هوشنگ شهریاری ـ محمود امجدی دبیرستان سفائی سمنان ـ داود حسینی ـ علی سلطانی ـ عبدالرضا حبیبی مقدم ـ مرتضی صدیقین دبیرستان صارمیه اصفهان ـ عبدالحمید چیت‌سازان دبیرستان فرهنگ اهواز ـ خسروزمانی علی‌اکبر قولیج ـ محمدرضا رستم تباح ـ محسن اسفندیاری دبیرستان دکتر نصیری ـ حسین امیرحسینی ـ حسن یزدانی نژاد ـ منصور حسنی ـ محسن تاج الدین دبیرستان قنادبابل ـ علی کهنموئی

۲۲۱۷ـ اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ باشد ثابت کنید

$$fff(x)=f(x)$$

$$ff(x)=\frac{f(x)+1}{f(x)-1}=\dots=x\rightarrow fff(x)=f(x)$$

پاسخهای درست رسیده از : احمد داروئی ـ منصور نظامی نراقی ـ علی‌اکبرقولیج ـ اسماعیل ختائی ـ محمد صدیق حسن مهدیزاده ـ عباسعلی کوچکی .

۲۲۱۸ـ حل دستگاه زیر

$$\sqrt{2(2+\sqrt{3})^{x-2}}=1-\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2(5-2\sqrt{6})^{x^2-2y+2}}=2+\sqrt{6}$$

طرفین هر معادله را به‌توان ۲ رسانده با توجه به

$$(1-\sqrt{3})^2=4-2\sqrt{3}=2(2-\sqrt{3})$$
$$=2(2+\sqrt{3})^{-1}$$
$$(2+\sqrt{6})^2=10+4\sqrt{6}=2(5+2\sqrt{6})$$
$$=2(5-2\sqrt{6})^{-1}$$

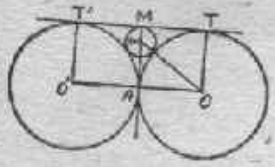
و با توجه به اینکه اگر $a^x=1$ باشد $x=0$ خواهد بود خواهیم داشت

$$\begin{cases}x-y+1=0\\x^2-2y+3=0\end{cases}$$

وازحل این‌دستگاه $x=1$ و $y=2$ به‌دست خواهدآمد.

پاسخهای درست رسیده از: علی کهنموئی ـ هوشنگ آزرم ـ محمد رضا رستم تباح ـ فرهاد غفاری ـ بهنام زرقانی فریدون امین‌زاده ـ عباسعلی کوچکی ـ فرهاد مهینی ـ احمد داروئی ـ حسین مظفریان ـ علی سلطانی ـ حسن شهنازی ـ محمد ناصر رشیدیان ـ مهدی علوفه دبیرستان صارمیه اصفهان

۲۲۱۹ـ دایره‌ای رسم می‌کنیم که بردودایرهٔ متساوی با شعاعهای R وبرمماس مشترک خارجی آنها مماس باشد . محاسبهٔ شعاع این دایره :



ω مرکز دایرهٔ رسم شده بر مماس مشترک داخلی دو دایره واقع است .

و داریم

$$A\omega=AM-\omega M=R-r \quad \text{و} \quad O\omega=R+r$$

وبا استفادهٔ از رابطهٔ فیثاغورث درمثلث $A\omega O$ نتیجه خواهد شد $r=\frac{R}{3}$

پاسخهای درست رسیده‌از : بهنام زرقانی ـ احمد داروئی ـ ناصر نهاوندی‌پور ـ منصور نهاوندی‌پور ـ حسن‌شهنازی

۲۲۲۰ـ مثلث ABC با ارتفاع AH مفروض است . تعیین دونقطهٔ M و N برضلع BC که‌داشته باشیم

$$\frac{CN\cdot HM}{HN\cdot BM}=\frac{AC}{AB}$$

رابطهٔ بالا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{CN}{HN}\times\frac{HM}{BM}=\frac{AC}{AB}\times\frac{AH}{AH}$$

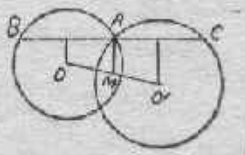
و نتیجه می‌شود

$$\frac{CN}{HN}=\frac{AC}{AH} \quad \text{و} \quad \frac{HM}{BM}=\frac{AH}{AB}$$

یعنی خطوط AM و AN به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های HAB و HAC می‌باشند

پاسخهای درست رسیده از : محمد ناصر رشیدیان اسماعیل ختائی .

۲۲۲۱ـ از نقطهٔ تقاطع دو دایره وتری چنان رسم کنید که نسبت وترهای حادث برابر K باشد. اگر BAC قاطع مطلوب و H وسط AC و K وسط AB و M نقطه‌ای از OO' باشدکه AM بر BC عمود باشد خواهیم داشت

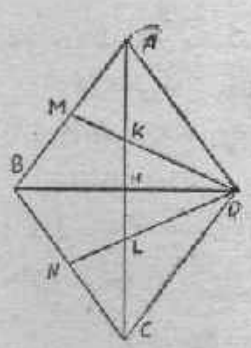


$$\frac{MO}{MO'}=\frac{AK}{AH}=K$$

ونتیجه می‌شود که باید ابتدا نقطهٔ M را تعیین کرد که خط‌المرکزین را به نسبت K تقسیم کند و ازروی آن قاطع را رسم نمود . برای هر نقطهٔ تقاطع دو دایره ، مسئله دارای دوجواب است .

پاسخهای درست رسیده از: اسماعیل ختائی ـ حسن مهدیزاده ـ بهنام‌زرقانی ـ محمد صدیق ـ داود حسینی ـ فرهنگ نادری علیزاده ـ فریدون امین زاده ـ احمد داروئی .

۲۲۲۲ـ خطوطی که یك رأس لوزی را به وسطهای ضلعهای روبرو وصل می‌کنند قطر لوزی را به سه‌قسمت متساوی تقسیم می‌کنند .



درهر یك ازمثلثهای ABD و BCD نقطه‌های K و L نقطهٔ تلاقی میانه‌ها بوده وچون H وسط KL است نتیجه خواهدشدکه

$$AK = KL = LC$$

پاسخهای درست رسیده از: احمد داروئی ـ علی اکبر نولیچ ـ فریدون امین‌زاده ـ فرهنگ‌نادری علیزاده ـ داودحسینی ـ محمدصدیق حسن مهدیزاده ـ ناصر نهاوندی‌پور ـ مسعود دستیاردبیرستان سمامی اراك ـ حسین امیرحسینی ـ بهنام زرقانی ـ علیرضا حق شناس ـ حسن یزادنی‌نژاد ـ محمود امجدی ـ هوشنگ شهریاری ـ خسروزمانی

۲۲۲۳ـ تعیین دو عدد مثبت a و b که جمله‌های b و $a+2b$ و $2a+b$ تصاعد حسابی و جمله‌های $(b+1)^2$ و $ab+5$ و $(a+1)^2$ تصاعد هندسی تشکیل دهند . تعیین تعداد جمله‌های هریك از این تصاعدها اگر آخرین جملهٔ آن از ۱۰۰۰۰ کمتر باشد .

ازحل دستگاه

$$\begin{cases} 2(a+2b)=a+(2a+b) \\ (ab+5)^2=(a+1)^2(b+1)^2 \end{cases}$$

بعد از تجزیه و اختصار خواهیم داشت .

$$\begin{cases} a=3b \\ a+b-4=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} a=3b \\ 2ab+a+b+6=0 \end{cases}$$

و جوابهای $a=3$ و $b=1$ به دست خواهد آمد

ثانیاً جملهٔ nام از تصاعد حسابی برابر می‌شود با $2n+1$ ودرنتیجه $2n+1=9999$ و $n=4999$ به دست می‌آید .

در تصاعد هندسی جملهٔ nام برابر می‌شود با 2^{n+1} و داریم .

$$2^{n+1}<10^4 \quad \text{یا} \quad (n+1)\log 2<4 \quad \text{و}$$

$$n+1<\frac{4}{\log 2}\approx 13.2 \quad \text{و} \quad n=12$$

پاسخهای درست‌رسیده از : حسن شهنازی ـ محمد ناصر رشیدیان ـ احمد داروئی .

پاسخهای رسیده از : مرتضی‌صدیقین ـ محمود امجد محمد صدیق ـ فریدون امین زاده ـ اسماعیل ختائی ـ طلعت مشکین

۲۲۲۴ـ اگر $y=5x+8$ باشد مطلوبست محاسبهٔ مجموع مقادیر y وقتی‌که x کلیهٔ مقادیر صحیح از ۱ تا ۳۰ را بگیرد .

مقادیر y یك تصاعد حسابی باجملهٔ اول ۱۳ وقدرنسبت ۵ و جملهٔ‌آخر ۱۵۸ باتعداد جمل ۳۰ تشکیل می‌دهندومجموع آنها برابر با ۲۵۶۵ حساب می‌شود

پاسخهای درست رسیده‌از ـ طلعت‌مشکین فریدون امین زاده ـ اسماعیل ختائی ـ محمد صدیق ـ محمد ناصر رشیدیان ـ احمد داروئی ـ عباسعلی کوچکی ـ هوشنگ آزرم عبدالرحمن چگنی‌زاده ـ داودحسینی ـ فرهاد غفاری ـ محمد رضارستم تباح ـ مرتضی صدیقین ـ محسن اسفندیاری دبیرستان دکتر نصیری ـ علی کهنموئی ـ منصور حسنی ـ حسن مهدیزاده فرهنگ نادری علیزاده ـ محمود امجدی ـ حسن یزدانی نژاد هوشنگ شهریاری ـ حسن شهنازی ـ خسرو زمانی ـ محسن تاج‌الدین ـ بهنام‌زرقانی .

۲۲۲۵ـ مانتیس لگاریتم ۴۲ برابر است با ۱۷۶۵۰ر۰ مطلوبست تعیین تعداد ارقام 42^{42}

$$\log 42^{42}=42\log 42=42\times 1.17650$$
$$=49.41300$$

و تعداد رقمهای عدد برابر ۵۰ می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده‌از: طلعت مشکین ـ رحمت‌الله صالحی ـ حسین امیرحسینی ـ عباسعلی کوچکی ـ محسن نادری‌علیزاده حسن مهدیزاده ـ فرهاد غفاری ـ عبدالرحمن چگنی زاده ـ محمد ناصر رشیدیان ـ محمد صدیق ـ اسماعیل ختائی .

۲۲۲۶ـ ترنی با سرعت ساعتی ۶ کیلومتر از تهران حرکت می‌کند وهرساعت ۴ کیلومتر برسرعت آن اضافه می‌شود . بعد از چند ساعت سرعت آن از سرعت مجاز ۷۰ کیلومتر در ساعت تجاوز خواهدکرد .

$$l=a+(n-1)d \quad \text{یا} \quad 70=6+(n-1)4 \quad \text{و}$$
$$n=17$$

پاسخهای درست رسیده از: طلعت مشکین - اسماعیل ختائی - عبدالرحمن چگنی‌زاده - محسن اسفندیاری - فرهنگ نادری علیزاده - بهنام زرقانی - عباسعلی کوچکی - هوشنگ آزرم - مرتضی صدیقین - منصور حسنی - محمد صدیق - منصور نظامی نراقی - احمد داروئی - مسعود دستیار - حسین نجفی ثانی - حسین مظفریان - محمود امجدی - حسن شهنازی - علیرضا درویش زاده دبیرستان قطب دزفول .

۲۲۲۷ - a و b و c و h اندازه‌های اضلاع ووتر و ارتفاع یك مثلث قائم‌الزاویه است

صحت رابطهٔ زیر را ثابت کنید

$$\log(a-2h)-2\log(b+c)a^{-1}$$
$$=2\log(b-c)-\log(a+2h)$$

از رابطهٔ فوق رابطهٔ

$$a^2(a^2-4h^2)=(b^2-c^2)^2$$

به دست آمده و بعد از اختصار نتیجه می‌شود $ah=bc$ و رابطه محقق می‌شود

پاسخهای درست رسیده از : اسماعیل ختائی - فریدون امین‌زاده - محمدرضا رستم تباح - محمدناصر رشیدیان م . اسدپور - علی سلطانی - داود حسینی - احمد داروئی - محمود امجد - حسن شهنازی

۲۲۲۸ـ آونگی راکه طول ریسمان آن ۲ متر است به طرف راست می‌بریم که زاویهٔ ریسمان باحالت شاغولی °۳۰ باشد وگلوله را رها می‌کنیم . مسافتی راکه گلوله درهر طرف خط شاغولی می‌پیماید ۱ر۰ کمتر از مسافتی است که بلافاصله درطرف دیگر پیموده است . وقتی که گلوله به حال سکون درآید چه مسافتی را پیموده است .

طول کمان °۳۰ از دایرهٔ به‌شعاع ۲ برابر می‌شود با

$$\frac{2\times2\times3{,}14\times30^\circ}{360^\circ}\#1{,}046$$

مسافت پیموده شده توسط پاندول برابر می‌شود با حد مجموع تصاعد هندسی باجملهٔ اول ۱ر۰۴۶ متر وقدرنسبت ۹ر۰ وبرابر می‌شود با

$$\frac{1{,}046}{1-0{,}9}=10{,}46 \quad \text{متر}$$

پاسخهای درست رسیده از: احمد داروئی .

کلاس پنجم طبیعی

۲۲۲۹ـ دوتابع $y_1=f(x)$ و $y_2=f(x)+x$ مفروض است . دونقطهٔ M_1 و M_2 باطول مشترك a را برمنحنی نمایش دوتابع اختیار می‌کنیم

۱) اثبات اینکه مماسهای بردومنحنی در نقاط M_1 و M_2 یکدیگر را روی محور $y'y$ قطع می‌کنند . مشتق تابع اول $y'_1=f'(x)$ و از تابع دوم $y'_2=f'(x)+1$ است وداریم

$$m_1=f'(a) \quad \text{و} \quad m_2=f'(a)+1$$

$$\begin{cases} y-f(a)=f'(a)(x-a) \\ y-[f(a)+a)=[f'(a)+1](x-a) \end{cases}$$

ازحل دستگاه بالا به دست خواهدآمد

$$[x=0 \text{ و } y=f(a)-af'(a)]$$

یعنی دوخط مماس یکدیگر را روی محور $y'y$ قطع می‌کنند

۲) خطی که از M_1 موازی با $x'x$ رسم شود محور $y'y$ را در N قطع می‌کند . زاویهٔ NM_2 را با محور $x'x$ تعیین کنید.

معادلهٔ خط مرسوم عبارتست از $y=f(a)$ و در نتیجه $N[x=0 \text{ و } y=f(a)]$ بوده و ضریب زاویهٔ خط NM_2 عبارت می‌شود از

$$m=\frac{f(a)-f(a)-a}{0-a}=1 \text{ و } \alpha=45^\circ$$

پاسخهای درست رسیده از: سیمین سمندری دبیرستان شاهدخت بابل - م . اسدپور - رمضانعلی صفائی دبیرستان خرد محمد رضا فوشریان دبیرستان خرد - تیمور معینی دبیرستان جم قلهك

۲۲۳۰ـ به فرض

$$tg\left(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-3 \text{ و } \cos\left(a+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{5}{13}$$

و a و b کمانهای حاده باشند

۱) تعیین خطوط مثلثاتی a و b

$$\cos\left(a+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin a=\frac{5}{13} \text{ و } \cos a=\frac{12}{13}$$

$$tg\,a=\frac{5}{12} \text{ و } cotg\,a=\frac{12}{5}$$

$$tg\left(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-cotg\frac{b}{2}=-3 \text{ و } cotg\frac{b}{2}=3$$

$$tg\frac{b}{2}=\frac{1}{3} \text{ و } tg\,b=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$$

$$\sin b=\frac{3}{5} \text{ و } \cos b=\frac{4}{5}$$

۲) محاسبهٔ مقدار عبارت زیر

$$S=\cos 2a+tg(a-b)-\cos(a+b)$$

بااستفاده از فرمولهای مربوطه خواهیم داشت .

$$\cos 2a=\frac{119}{169} \quad و \quad tg(a-b)=-\frac{16}{63}$$

$$\cos(a+b)=\frac{33}{65} \quad و \quad S=-\frac{3062}{53235}$$

پاسخهای درست رسیده از : محمد حسین طحان ـ زاده دبیرستان قطب‌دزفول ـ علی‌اکبر قولیج ـ حجت‌الله‌افقهی محمد رضا فوشریان ـ رمضانعلی صفائی دبیرستان خرد ـ محمد کاظم جمشیدی دبیرستان امیرکبیر توسیرکان .

کلاس پنجم ریاضی

۲۲۳۱ـ تابع $y=\sqrt{x^2-mx+4}$ مفروض است

۱) برای اینکه تابع همواره معین باشد لازم و کافی است که

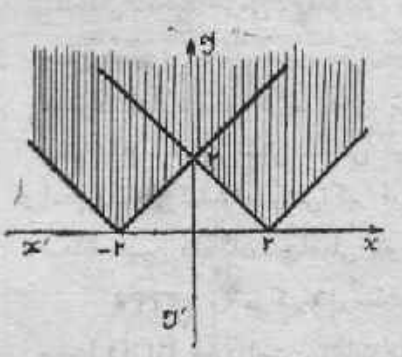
$\Delta=m^2-16\geqslant 0$ و $m\geqslant 4$ یا $m\leqslant -4$

۲) برای اینکه نمایش تابع از خط مستقیم تشکیل شود باید $\Delta=0$ یا $m=\pm 4$ باشد

۳) در ازاء $m=\pm 4$ داریم

$$y=\sqrt{(x\pm 2)^2}=|x\pm 2|$$

و نمایش هندسی تابع مطابق شکل خواهد بود

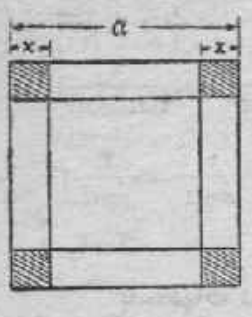


۴) ناحیه‌ها شور نخورده درروی شکل ناحیه‌ای است که مختصات نقاط آنها در نامساوی $y<\sqrt{x^2\pm 4x+4}$ صدق می‌کند

پاسخهای رسیده وهمه نادرست : سوسن صفاری ـ حمدالله فتح‌الله نژاد اصل دبیرستان تربیت تبریز ـ نصرت‌الله آقاجانی دبیرستان جلوه ـ عیسی حیدری دبیرستان خرد ـ رمضانعلی صفائی ـ محمد رضافوشریان ـ حجت‌الله افقهی ـ پرویز بربری دبیرستان وحید ـ حسین نعمتی .

۲۲۳۲ـ مقوایی به‌شکل مربع به ضلع a دردست است . ازچهارگوشهٔ آن چهار مربع مساوی جدا کرده و با باقیمانده یك جعبه‌می‌سازیم . ضلع مربعهای جداشده چگونه انتخاب‌شود تا گنجایش جعبهٔ حاصل ماکزیمم باشد

حجم جعبهٔ حاصل برابراست با



$$V=(a-2x)^2x$$
$$=4x^3-4ax^2+a^2x$$
$$V'=12x^2-8ax+a^2$$

باتعیین علامت مشتق معلوم خواهد شدکه تابع V درازاء $x=\frac{a}{6}$ ماکزیمم می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده از: حسین‌نعمتی ـ رمضانعلی صفائی ـ منصور حسنی ـ محمد رضا فوشریان

۲۲۳۳ـ سیمی به‌طول l را به دوقسمت تقسیم می‌کنیم . قسمت اول را به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع و قسمت دوم را به شکل دایره در می‌آوریم . طول هر قسمت چه مقدار انتخاب شود تا مجموع مساحتهای مثلث ودایره مینیمم باشد . محیط مثلث متساوی‌الاضلاع را x فرض می‌کنیم محیط دایره می‌شود $l-x$ وازآنجا مجموع مساحتهای آنها چنین حساب‌خواهدشد

$$S=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\frac{(l-x)^2}{4\pi} \quad و \quad S'=\frac{x\sqrt{3}}{18}-\frac{l-x}{2\pi}$$

که درازاء $x=\frac{9l}{\pi\sqrt{3}+9}$ مقدار S ماکزیمم می‌باشد

پاسخهای درست رسیده از : حسین نعمتی ـ منصور حسنی ـ محمود ارجمند ـ نصرت‌الله آقاجانی ـ رمضانعلی‌صفائی محمد کریم روش .

۲۲۳۴ـ تابع $y=(\cos x-\sin x)(2\sin 2x+1)$ مفروض است . اثبات روابط زیر

$$1)\ y+3^{-2}y''+3^{-4}y^{(4)}+\dots+3^{(-2n)}y^{(2n)}=0$$

$$2)\ \frac{y}{y'}=\frac{y''}{y^{(3)}}=\dots=\frac{y^{(n-1)}}{y^{(n)}}$$

اولا تابع را ساده می‌کنیم که برابر خواهد شد با

$$y=\sin 3x+\cos 3x$$
$$y'=3(\cos 3x-\sin 3x)$$
$$y''=-9(\sin 3x+\cos 3x)=-3^2y$$
$$y^{(3)}=\dots=-3^2y' \quad و \quad y^{(4)}=\dots=-3^2y''$$

باتوجه به‌این روابط‌رابطه‌های‌داده شده محقق خواهد شد

پاسخهای درست رسیده از : نصرت‌الله آقاجانی ـ داود تراکمه.

۲۲۳۵ـ اثبات رابطهٔ زیر

$$(1-tg\,a)^2+(1-cotg\,\alpha)^2=(\operatorname{cosec}\alpha-\sec\alpha)^2$$

چنانچه طرف اول را برحسب $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ نوشته ساده

کنیم به‌صورت

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}$$ یعنی به صورت

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2$$ و برابر با عبارت طرف دوم به‌دست خواهد آمد

پاسخهای درست رسیده از : سیاوش ناظر عدل دبیرستان جلوه - حسین نعمتی - محمد علی حبیب‌الله دبیرستان ادیب - محمود ارجمند - سیامک مفتاح دبیرستان اندیشه - محمد حسین طحان‌زاده - محمد رضا براتی - محمد کاظم جمشیدی - محمود صابر همیشگی دبیرستان مهرگان لاهیجان - اسدالله حسین زادگان دبیرستان شاهپور شیراز - غلامحسین طاهری افشار دبیرستان فیروز بهرام - علی اصغر ترابی دبیرستان ادیب - مجید خرمی دبیرستان محمد قزوینی - صدرالدین رضوانی شهسوار علی صحرا نورد دبیرستان محمد قزوینی - عباسعلی کوچکی - محمد حسین حقی دبیرستان عمیدالملک کندری کاشمر - حسن محضری دبیرستان دارالفنون - م . اسدپور - علی کهنموئی - نصرت‌الله آقاجانی .

۲۲۳۶ـ حل معادلهٔ زیر

$$\sin^3 x-\cos^3 x=\sin x$$

معادله به صورت $\sin x(1-\sin^2 x)+\cos^3 x=0$

و از آنجا به‌صورت $\cos^2 x(\sin x+\cos x)=0$ نوشته شده

جوابهای $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ و $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ برای آن به دست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده از : سوسن صفاری - سیمین سمندری - م . اسدپور - نصرت‌الله آقاجانی - عباسعلی کوچکی علی صحرا نورد - صدرالدین رضوانی - مجید خرمی - اسدالله حسین زادگان - محمود صابر همیشگی - محمدکاظم جمشیدی - محمد رضا براتی - حسین نعمتی - سیاوش ناظر عدل - علی اکبر قولیج - علی کهنموئی - علی اصغر ترابی - غلامحسین طاهری افشار - حسین عظیمی مطلق دبیرستان اقبال آشتیانی - حجت‌الله افقهی - محمد حسین طحان زاده - محمدکریم روشن - محمد علی حبیب‌الله .

۲۲۳۷ـ اثبات اینکه از هر رابطهٔ زیر رابطهٔ دیگری نتیجه می‌شود

$$1)\quad \cos\theta=\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha}$$

$$2)\quad tg\frac{\theta}{2}=\pm tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}$$

در رابطهٔ (۱) طرفین‌را تفضیل و ترکیب نسبت نموده و صورت ومخرج کسر طرف دوم را تجزیه می کنیم خواهد شد

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)}$$

و ازروی آن رابطهٔ (۲) حاصل می‌شود . به‌ترتیب عکس عمل نموده از رابطهٔ (۲) رابطهٔ (۱) به دست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده از : سوسن صفاری مجید خرمی - حسین نعمتی - محمدکاظم جمشیدی - نصرت‌الله آقاجانی حجت‌الله افقهی - غلامحسین طاهری افشار - حسین عظیمی مطلق داود تراکه .

۲۲۳۸ـ اثبات تساوی زیر

$$tg30^\circ tg27^\circ+tg27^\circ tg33^\circ+tg33^\circ tg30^\circ=1$$

از طرفین رابطهٔ $27^\circ+30^\circ+33^\circ=90^\circ$ تانژانت گرفته و بسط می‌دهیم با توجه به اینکه یك کسر وقتی برابر ∞ است که مخرج آن برابر صفر باشد رابطهٔ بالا محقق خواهد شد .

پاسخهای درست رسیده از : سوسن صفاری - نصرت‌الله آقاجانی - مجید خرمی - رمضانعلی صفائی - علی اصغر ترابی حسن محضری - محمد حسین حقی - محمود ارجمند - غلامحسین طاهری افشار - محمدکریم روشن - پرویز بربری - محمد رضا رستم تباج - حسین نعمتی - عیسی حیدری - حجت‌الله افقهی - اسدپور - علی کهنموئی - علی‌اکبر قولیج - محمد رضا براتی - اسدالله حسین زادگان - عباسعلی کوچکی .

۲۲۳۹ـ G مرکز ثقل مثلث BCD بوده و AG بر صفحهٔ BCD عمود است . اثبات رابطهٔ زیر

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\frac{1}{3}(\overline{DB}^2-\overline{DC}^2)$$

اگر E و F اوساط DC و DB باشند با استفاده از رابطهٔ میانه‌ها در مثلث BCD به دست خواهیم آورد

$$\overline{DB}^2+\overline{BC}^2=\frac{1}{2}\overline{DC}^2+\frac{9}{2}\overline{BG}^2$$

$$\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=\frac{1}{2}\overline{DB}^2+\frac{9}{2}\overline{GC}^2$$

طرفین دو رابطهٔ بالا را از هم می کنیم . با توجه به رابطه‌های

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AG}$ و $\overline{CG}^2=\overline{AC}^2-\overline{AG}^2$

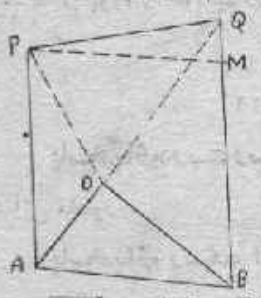
رابطهٔ مطلوب به دست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده از : سوسن صفاری - علی اصغر

ترابی ـ . اسدپور ـ محمد رضا رستم تباج ـ نصرت‌الله آقاجانی حبیب‌الله سلیم‌زاده‌ـ حجت‌الله افقهی ـ مصطفی فاطمی زاده‌ـ دبیرستان پهلوی اراك .

۲۲۴۰ ـ زاویهٔ AOB قائمه است و خطوط AP و BQ بر صفحهٔ AOB عمودند . ثابت کنید

$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2AP.BQ$$



از P بموازات AB رسم می‌کنیم تا BQ رادر M قطع کند روابط زیر را داریم .

$$\overline{PQ}^2=\overline{QM}^2+\overline{PM}^2$$

$$\overline{PM}^2=\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2$$

$$\overline{QM}^2=(AP-BQ)^2=\overline{AP}^2+\overline{BQ}^2-2AP.BQ$$

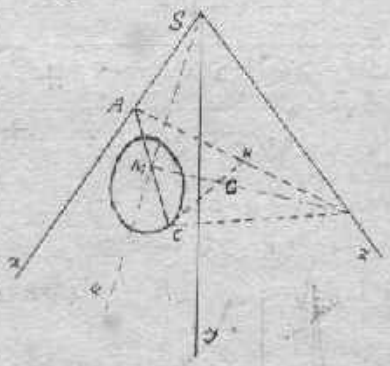
$$\overline{AP}^2+\overline{OA}^2=\overline{OP}^2 \quad \text{و} \quad \overline{BQ}^2+\overline{OB}^2=\overline{OQ}^2$$

از جمع طرفین به تغییر طرفین رابطه های بالا رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده از : سوسن صفاری ـ حبیب‌الله سلیم‌زاده‌ـ نصرت‌الله آقاجانی ـ محمدرضا رستم تباج ـ علی اصغر ترابی ـ حجت‌الله افقهی .

۲۲۴۱ـ کنج سه وجهی Sxyz و دایرهٔ (O) واقع در وجه Sxy و نقطهٔ G واقع در فضای محصور کنج مفروضند

۱) مثلث ABC را طوری بسازید که راسهای A و B بترتیب بر یالهای Sx و Sz و رأس C بر دایرهٔ (O) واقع بوده



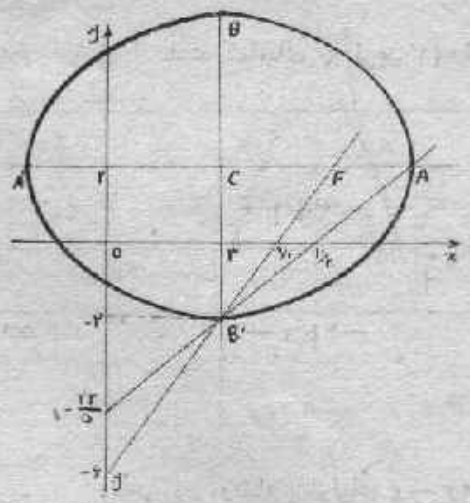
G مرکز ثقل مثلث ABC باشد . صفحه‌ای که بر Sz و G می‌گذرد وجه Sxy در Su قطع می‌کند در صفحهٔ uSz از G خطی چنان رسم می‌کنیم که Sz را در B و Su را در M قطع کند و GB دوبرابر GM باشد (GH را عمود بر Sz رسم کرده نقطهٔ K رابر آن چنان انتخاب می‌کنیم که GK نصف GH باشد و از K موازی با Sz رسم‌می‌کنیم که Su رادر M قطع می‌کند) ودر صفحهٔ Sxy از M خطی چنان رسم می‌کنیم که Sx را در A ودایرهٔ (O) را در C قطع کند و M وسط AC باشد و بدین ترتیب مثلث ABC مشخص می‌شود

۲) درصورتی که AB ثابت فرض شود و C دایرهٔ (O) را بپیماید مکان هندسی G را معلوم کنید. مکان خط NC (N وسط AB) سطح مخروطی است باراس N و دایرهٔ هادی (O) وچون نسبت NG برNC برابر با یك دوم است پس مکان G دایره‌ای خواهد بود که صفحهٔ آن با صفحهٔ Sxy موازی بوده وشعاعش ثلث شعاع دایرهٔ (O) می‌باشد .

کلاس ششم طبیعی

۲۲۴۳ـ قطر اطول AA' از یك بیضی با x'x موازی است . جهت از A' به A درجهت از x' به x و جهت B' به B جهت y' به y است . درصورتی که معادلهٔ B'A بصورت $5y-4x+22=0$ و معادلهٔ B'F بصورت $3y-4x+18=0$ وطول FA=2 باشد مشخصات بیضی و معادلهٔ آنرا تعیین کرده وآن را رسم کنید .

ازحل معادلات B'A و B'F مختصات B'(x=3 و y=−2) بدست می‌آید ودر نتیجه طول نصف قطر بیضی $a=3$ است .



خط $y=\beta$ خط B'A را در نقطهٔ بطول $x=\frac{5\beta+22}{4}$ و خط B'F را در نقطهٔ به طول $x=\frac{3\beta+18}{4}$ قطع می‌کند باید داشته باشیم .

$$\frac{5\beta+22}{4}-\frac{3\beta+18}{4}=\frac{2\beta+4}{4}=2$$

و $\beta=2$ به دست آمده و از آنجا $C(\alpha=3$ و $\beta=2)$ و A (۸ و ۲) و F(۶ و ۲) و $b=CB'=4$ و $a=CA=5$ معلوم شده

معادلهٔ بیضی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

پاسخهای درست‌رسیده از: مرتضی شفائی ـ فرامرز پورقلی زاده ـ محمدهمدانی ـ صدرالدین رضوانی ازشهسوار.

۲۲۴۴ـ x کمانی است‌واقع بین صفر و 2π و α و β دو کمان حاده می‌باشند

۱) از معادلهٔ زیر مقدار x را برحسب α و β به دست آورید.

$$\cos\alpha\cos\beta\sin^2 x-\sin(\alpha+\beta)\sin x\cos x+\sin\alpha\sin\beta\cos^2 x=0$$

از تقسیم طرفین معادله بر $\cos\alpha\cos\beta\cos^2 x$ ، به دست می‌آید:

$$tg^2 x-(tg\alpha+tg\beta)tg x+tg\alpha\, tg\beta=0$$

و نتیجه می‌شود

$tg x=tg\alpha$ و $x=\alpha$ یا $\alpha+\pi$ و $tg x=tg\beta$

$x=\beta$ یا $\beta+\pi$

۲) اگر α و 2β جوابهای معادلهٔ

$tg A-cotg A=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ باشند کمانهای x فرض ۱) را مشخص کنید.

از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود $tg A=\sqrt{3}$ یا

$tg A=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ و در نتیجه $\alpha=\frac{\pi}{3}$ و $2\beta=\frac{5\pi}{6}$ یا

$\beta=\frac{5\pi}{12}$ بوده و خواهیم داشت

$$x=\frac{x}{3} \text{ و } \frac{4\pi}{3} \text{ و } \frac{5\pi}{12} \text{ و } \frac{17\pi}{12}$$

پاسخهای درست رسیده از: محمد همدانی ـ لهراسب شفائی منصور.

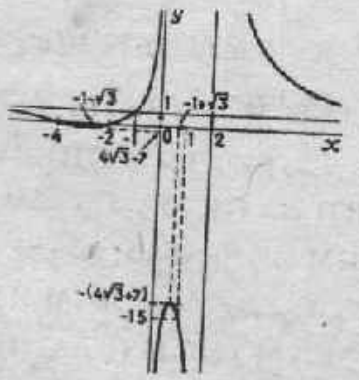
پاسخهای رسیده از: صدرالدین رضوانی ـ مرتضی شفائی ـ فرامرز پور قلی زاده ـ حبیب‌الله سلیم زاده ـ نصرت‌الله آقاجانی.

کلاس ششم ریاضی

۲۲۴۵ـ جدول تغییرات و منحنی تابع بشرح زیراست

$$y=\frac{x^2+6x+8}{x(x-2)} \text{ و } y'=\frac{-8(x^2+2x-2)}{x^2(x-2)^2}$$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	1	$\searrow$	$4\sqrt{3}-7$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$	$-4\sqrt{3}-7$	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	1



منحنی در دونقطه باطولهای ۴ـ و ۲ـ محورxها را قطع می‌کند

۲) با استفاده از جدول تغییرات تابع فوق‌رسم جدول تغییرات و منحنی‌نمایش تابع.

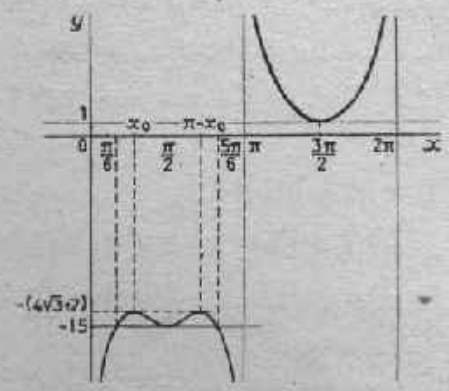
$$y=\frac{\sin^2 x+6\sin x+8}{\sin x(\sin x-2)}$$

اگر فرض کنیم $\sin x=u$ داریم

$y=\frac{u^2+6u+8}{u(u-2)}$ وهمان تابع فرض ۱) به دست می‌آید.

جدول تغییرات این تابع برای $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ بشرح زیر است

x	0		x_0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi - x_0$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	$-1+\sqrt{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-1+\sqrt{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-4\sqrt{3}-7$	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$-4\sqrt{3}-7$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



در جدول بالا

$x_0 = \mathrm{Arcsin}(-1+\sqrt{3}) \approx 0{,}82\,\mathrm{rd}$

$\pi - x_0 \approx 2{,}32\ \mathrm{rd}$

۳) تعیین حدود x برای اینکه

$$-15 \leqslant \frac{\sin^2 x + 6\sin x + 8}{\sin x(\sin x - 2)} \leqslant 1$$

خط به معادلهٔ $y = -15$ منحنی تابع اخیررا در دو نقطه به طولهای $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ قطع می‌کند وخط به معادلهٔ $y = 1$ در نقطهٔ به طول $x = \frac{3\pi}{2}$ برمنحنی مماس است. از روی منحنی فوق ملاحظه می‌شود که نامساوی مضاعف مفروض وقتی برقرار است که داشته باشیم

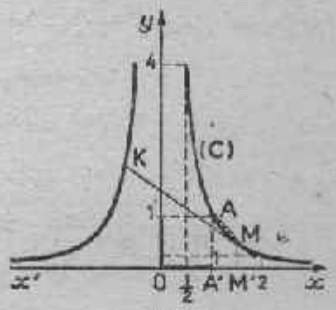
$$\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} \quad \text{یا} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

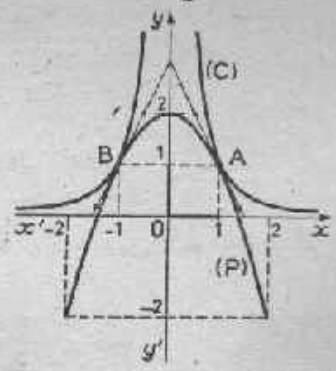
پاسخهای رسیده از: لهراسب قشقائی منصور - رحیم خیردوست - مرتضی شفائی - اسفندیار رخشانی دبیرستان البرز

۲۲۴۶ - ۱) رسم منحنی نمایش تابع $y = \frac{1}{x^2}$ و تعیین معادلهٔ مماس بر منحنی در نقطهٔ M ازآن به طول معلوم a تعیین مختصات K نقطهٔ تلاقی دیگر این مماس با منحنی

$$y = \frac{1}{x^2} \quad \text{و} \quad y' = \frac{-2}{x^3}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	|	$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0





داریم $M(a, \frac{1}{a^2})$

وضریب زاویهٔ مماس

$m = \frac{-2}{a^3}$ و معادلهٔ مماس

به صورت

$$2x + a^2 y - 3a = 0$$

بدست می‌آید. از حل این معادله با معادلهٔ تابع مفروض مختصات K بدست می‌آید:

$$K\left(-\frac{a}{2} \text{ و } \frac{4}{a^2}\right)$$

۲) به فرض $a > 1$ و A نقطه‌ای به طول ۱ روی منحنی باشد. تعیین S مساحت سطح محصور بین وتر وکمان AM برحسب a.

اگر A' و M' تصویرهای A و M بر $x'x$ باشند سطح مطلوب برابر است باتفاضل سطح ذوزنقهٔ $A'AM'M$ و سطح محصور بین منحنی و $x'x$ از ۱ تا a یعنی

$$S = \frac{1}{2}(a-1)\left(1+\frac{1}{a^2}\right) - \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \frac{(a-1)^3}{2a^2}$$

ملاحظه می‌شود که مقدار این مساحت برابر است با حاصل ضرب نصف عرض نقطهٔ M در $(a-1)^3$

۳) اثبات اینکه درازاء همهٔ مقادیر a و λ منحنی (P) نمایش تابع $y = \frac{3}{a^2} - \frac{2x}{a^3} + \lambda(x-a)^2$ بر منحنی (C) در نقطهٔ M مماس است. تشکیل معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه هایش طولهای نقاط M' و M'' نقاط تلاقی دیگر دو منحنی باشد. رسم منحنی

(P) درازاء $a=1$ و $\lambda=-1$

ازحل معادله‌های دومنحنی خواهیم داشت

$$(x-a)^2(\lambda a^3x^2-2x-a)=0$$

این معادله همواره دارای ریشهٔ مضاعف $x=a$ است و دوریشهٔ دیگر آن از معادلهٔ درجهٔدوم $\lambda a^3x^2-2x-a=0$ به دست می‌آیند

درازاء $a=1$ و $\lambda=-1$ داریم $y=-x^2+2$ که منحنی نمایش آن یك سهمی است که در نقطهٔ $A(1,1)$ و $B(-1,1)$ بر منحنی C مماس می‌باشد (شکل صفحهٔ قبل)

پاسخهای درست‌رسیده از: رحیم‌خیردوست ـ محمود عجمی ـ مرتضی شفائی ـ حسین نوریان ـ محمد همدانی ـ نصرت‌الله بابائی دبیرستان رهنما ـ احمد معصومی دبیرستان پهلوی اراك ـ کیوان پورقاسمی مقدم

پاسخ رسیده‌از: اسفندیاردرخشانی

۲۲۴۷ـ حل معادلهٔ زیر

$$(1-n)\sin(x+\frac{\pi}{6})+2\sqrt{n}(\sin(\frac{\pi}{3}-x)$$

$$+(1+n)\sin(9x-\frac{\pi}{3})=0$$

ازتقسیم‌طرفین معادله بر $1+n$ وبه فرض $n=tg^2\frac{\lambda}{2}$ بعد از اختصار خواهیم داشت

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos\lambda+\cos(x+\frac{\pi}{6})\sin\lambda$$

$$=\sin(\frac{\pi}{3}-9x)$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{6}+\lambda)=\sin(\frac{\pi}{3}-9x)$$

و ریشه‌های x معادله حساب می‌شود

پاسخهای درست رسیده از: نصرت‌الله بابائی ـ محمد همدانی.

۲۲۴۸ـ حل دستگاه زیر با فرض‌آنکه A و B و C زاویه‌های یك مثلث باشند

$$\begin{cases}\sin A+\cos B+\sin C=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\\ \cos A+\cos B+\cos C=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

طرفین هر معادله را مجذورکرده حاصل دوم را از حاصل اولی کم‌کرده با تبدیل به حاصل ضرب و بعد از اختصار خواهیم داشت:

$$4\cos A\cos B\cos C=0$$

یعنی یکی از زاویه‌های مثلث برابر ۹۰ درجه است و بعداز روی دستگاه مفروض اندازهٔ زاویه های دیگر برابر با ۳۰ درجه و ۶۰ درجه به‌دست خواهدآمد.

پاسخهای درست‌رسیده از: فرامرز پورقلی‌زاده ـ بیژن غیور دبیرستان فردوسی تبریز ـ محمد جواد غفوری دبیرستان ناصرخسرو ـ قاسم انتصاری ـ محمد همدانی.

۲۲۴۹ـ درهر مثلث اگر یکی از دورابطهٔ زیر برقرار باشد دیگری نیز برقرار است

$$A=2B \text{ و } a^2=b(b+C)$$

از روابط سینوسها خواهیم داشت

$$\frac{a}{2\sin B\cos B}=\frac{b}{\sin B} \text{ و } \cos B=\frac{a}{2b}$$

و از رابطهٔ کسینوسها داریم

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\frac{a}{2b}=a^2+c^2-\frac{a^2c}{b}$$

$$a^2(b-c)=b(b^2-c^2) \text{ و } a^2=b(b+c)$$

برعکس از رابطهٔ اخیر به سادگی نتیجه خواهد شد که

$$A=2B$$

پاسخهای درست رسیده از: قاسم انتصاری ـ رحیم خیردوست ـ محمود عجمی ـ فرامرز پورقلی زاده ـ مرتضی شفائی ـ نصرت‌الله بابائی ـ سید رضا امامی دبیرستان امیرکبیر تویسرکان ـ احمد معصومی ـ حسین نوریان ـ لهراسب قشقائی منصور ـ بیژن غیور ـ حشمت‌الله امینی دبیرستان امیرکبیر تویسرکان ـ هوشنگ کرمی دبیرستان امیرکبیر تویسرکان ـ رحیم محمدی ـ محمد جواد غفوری ـ کیوان پورقاسمی.

۲۲۵۰ـ تعیین عددی شش رقمی که اگرسه‌رقم‌سمت چپ آنرا درسمت راست قرار دهیم وعددبه‌دست‌آمده را برعددی که از سه رقم سمت راست عدد مفروض تشکیل شده است بیفزاییم حاصل ـ به‌اندازهٔ ۱۱۹۸۸ از عدد مفروض بزرگتر باشد.

داریم:

$$\overline{abcdef}=\overline{defabc}+\overline{def}-11988$$

بعداز بسط و اختصار نتیجه می‌شود

$$999(\overline{abc}+12)=1000\overline{def}$$

$$\overline{def}=999 \text{ و } \overline{abc}+12=1000$$

و عدد مطلوب به‌صورت ۹۸۸۹۹۹ می‌باشد

پاسخهای درست رسیده از: بیژن غیور ـ حسین

نوریان - احمد معصومی - سید رضا امامی - نصرت‌الله بابائی - فرامرز پورقلی زاده - محمد جواد غفوری - حسین نعمتی - رحیم محمدی - حشمت الله امینی - مرتضی شفائی - رحیم خیر دوست - محمد همدانی - فضل‌الله توکلی دبیرستان دریانی خوانسار.

۲۲۵۱ـ تعیین عددی به فرم $N=\overline{abc}$ که $(a+b)^{3}=c+b$ بوده و باقیماندهٔ تقسیم N بر ۳ و ۵ و ۷ به ترتیب برابر با ۱ و ۳ و ۵ باشد.

داریم:

$$N=3K+1=5K'+3=7K''+5$$

و نتیجه می‌شود که $N+2$ باید مضربی از ۱۰۵ باشد. از طرفی $b+c$ مکعب کامل بوده و $18\geq b+c\geq 1$ است و داریم.

$$\begin{cases} b+c=1 \\ a+b=1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} b+c=8 \\ a+b=2 \end{cases}$$

بالاخره جواب قابل قبول برابر با ۲۰۸ به‌دست خواهد آمد.

پاسخهای درست رسیده از : رحیم خیردوست - محمود عجمی - محمد همدانی - محمد تقی روغنی دبیرستان بحرالعلوم بروجرد - مرتضی شفائی - منصور عابدی دبیرستان پهلوی ملایر - هوشنگ کرمی - کیوان پورقاسمی مقدم - لهراسب قشقائی منصور - محمدرضا مرعشی‌پور دبیرستان البرز - حشمت‌الله امینی - نصرت‌الله بابائی - سید رضا امامی - احمد معصومی - بیژن غیور.

۲۲۵۲ـ تعیین عددی چهار رقمی به شکل $\overline{mcdu}$ به طوری که:

$$\overline{md}+5(10m+1)=\overline{(2u)(u-3)}+3u$$

از نامساویهای $0<u-3<9$ و $0<2c<9$ نتیجه‌می‌شود $c<4$ و $u\geq 3$ و از بسط رابطهٔ مفروض نتیجه می‌شود $d+8-4u=20(c-3m)$ و d باید مضرب ۴ باشد و باتوجه به نامساویهای قبلی دوجواب ($d=8$ و $u=4$) و ($d=4$ و $u=3$) را خواهیم داشت واز روی‌آن مقادیر m و c حساب شده دوجواب قابل قبول ۱۳۴۳ و ۱۳۸۴ به‌دست می آید.

پاسخهای درست رسیده از : احمد معصومی - نصرت‌الله بابائی - منصور عابدی - محمود عجمی - محمدجواد غفوری -

۲۲۵۳ـ عدد $N=2^{n}\times p$ که درآن n عدد صحیح و مثبت و p عدد اول است مفروض است

۱) تشکیل مقسوم علیه‌های N و تعیین مجموع آنها

مقسوم علیه‌های N عبارتند از.

p و $2p$ و $2^{2}p$ و ... و $2^{n}p$ و p و 2 و 2^{2} و ... و 2^{n} و ۱

و مجموع آنها عبارت می‌شود از

$$S=(1+p)(1+2+2^{2}+\dots+2^{n})$$

$$S=(1+p)(2^{n+1}-1)=(1+p)(\frac{2N}{p}-1)$$

۲) چه‌رابطه بین n و p برقرار باشدتا N برابرباشد با مجموع مقسوم علیه‌های خود به استثنای خود N و تعیین کوچکترین دوجواب.

$$N=S-N \quad \text{یا} \quad S=2N$$

$$(1+p)(\frac{2N}{p}-1)=2N$$

$$2N=p(p+1) \quad \text{یا} \quad 2^{n+1}=p+1$$

$$p=2^{n+1}-1$$

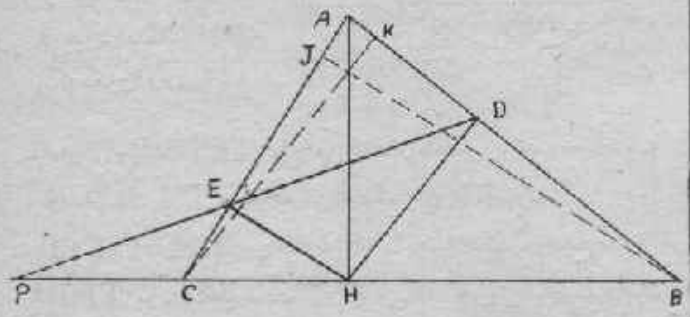
در ازاء $n=1$ و $n=2$ برای p مقادیر ۳ و ۷ و برای N مقادیر ۶ و ۲۸ نتیجه می‌شود

پاسخهای درست رسیده از : محمد جواد غفوری - محمود عجمی - لهراسب قشقائی منصور - حسین نعمتی.

۲۲۵۴ـ در مثلث ABC ، H پای ارتفاع وارد برضلع BC ، D و E به‌ترتیب تصویرهای H برضلعهای AB و AC و P نقطهٔ تلاقی DE با BC می‌باشد اولا ثابت کنید

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{HB}^{2}}{\overline{HC}^{2}} \qquad (1)$$

در مثلث ABC نسبت به مورب BED و بنابه قضیهٔ منلائوس داریم



$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=1 \qquad (2)$$

در مثلثهای قائم الزاویهٔ ACH و ABH داریم:

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}=-\frac{\overline{HA}^{2}}{\overline{HC}^{2}} \text{ و } \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}=-\frac{\overline{HB}^{2}}{\overline{HA}^{2}} \qquad (3)$$

طرفین روابط (۲) و (۳) را نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب می کنیم رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

ثانیاً نسبت به‌دو ارتفاع BJ و CK به‌ترتیب فوق عمل

می‌شود نقطهٔ Q بر AC و نقطهٔ R بر AB به‌دست می‌آید. ثابت کنید که سه‌نقطهٔ P و Q و R بر یك استقامتند.

بنابر آنچه قبلا ثابت‌شد داریم

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{JC}^{2}}{\overline{JA}^{2}} \quad (۴) \quad \text{و} \quad \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}=\frac{\overline{KA}^{2}}{\overline{KB}^{2}} \quad (۵)$$

از رابطه‌های (۱) و (۴) و (۵) به‌دست می‌آید:

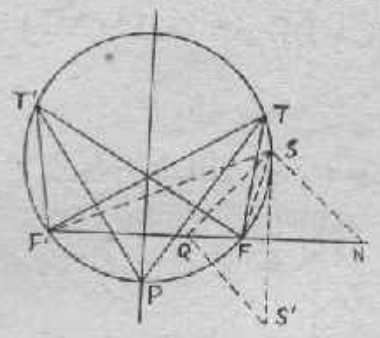
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\cdot\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}=1$$

و طبق عکس قضیهٔ منلائوس سه نقطهٔ P و Q و R بر یك استقامتند.

پاسخهای درست رسیده از: رحیم خیر دوست - محمود عجمی.

۲۲۵۵ - هذلولی (H) با کانونهای F و F' مفروض است. از یك نقطهٔ دلخواه P واقع بر محور غیرقاطع دو مماس PT و PT' و از یك نقطهٔ دلخواه Q واقع بر محور قاطع و در خارج هذلولی دو مماس QS و QS' را بر هذلولی رسم می‌کنیم.

۱) ثابت کنید دوایر TPT' به‌یك دسته دوایر که مشخص می‌کنید تعلق دارند. خطوط PT و PT' به‌ترتیب نیمسازهای زاویه‌های FTF' و FT'F' بوده و درضمن نسبت به محور غیر قاطع هذلولی قرینه‌می‌باشند. نیمساز زاویهٔ FTF' و عمود منصف FF' یکدیگر را روی دایرهٔ



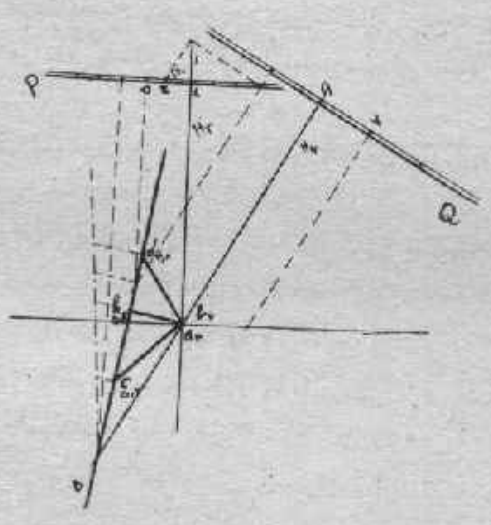
محیطی مثلث TFT' قطع می‌کنند و به‌همین ترتیب نسبت به نیمساز زاویهٔ T' و نتیجه می‌شود که پنج نقطهٔ T و F و P و F' و T' بر محیط یك دایره واقعند. جمیع دوایر TPT' بر دو نقطهٔ ثابت F و F' می‌گذرند یعنی به‌دستهٔ دایرهٔ بامحور اصلی مشترك FF' تعلق دارند.

۲) ثابت کنید دوایر SQS' به‌یك دسته دوایر عمود بر دسته دوایر ۱) تعلق دارند.

مماس BS نیمساز زاویهٔ داخلی و قائم NS نظیر نقطهٔ S نیمساز زاویهٔ خارجی FSF' بوده تقسیم F'QFN توافقی است و دایرهٔ به قطر QN (که همان دایرهٔ SQS' است) بر دایره‌ای که بر F و F' می‌گذرد عمود می‌باشد.

۲۲۵۶ - تصویرهای دو نقطهٔ A و B بر یکدیگر و بر مرکز کاغذ منطبق است، بر نقطهٔ A افقیهٔ رقوم ۳ و بر نقطهٔ B افقیهٔ رقوم ۶ گذشته است. امتدادهای H_3 و H_6 بامحور اقصر کاغذ در جهت مثلثاتی به ترتیب زاویه‌های °۷۰ و °۴۰ می‌سازند. صفحهٔ P حاوی H_3 با AB زاویهٔ °۳۰ می‌سازد و ترقی رقوم نقاط آن نسبت به H_3 از پائین به بالا است و صفحهٔ Q حاوی H_6 بر صفحهٔ P عمود است. یك مقیاس شیب از هر یك از دو صفحهٔ P و Q رسم کنید. Δ فصل‌مشترك دو صفحهٔ P و Q را تعیین کنید. عمود مشترك دو خط AB و Δ را رسم کنید. اگر H نقطهٔ تلاقی عمود مشترك مزبور با Δ باشد قطعه خط CD را برابر با AB واقع بر Δ چنان تعیین کنید که H وسط CD باشد و چهار وجهی ABCD را مرئی و مخفی کنید.

صفحهٔ P که با خط قائم AB زاویهٔ °۳۰ می‌سازد با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ °۶۰ خواهد ساخت یعنی اساس آن $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است. از A خطی بر صفحهٔ P عمود کرده و صفحهٔ Q با این خط و افقیهٔ H_6 مشخص می‌شود. عمود مشترك AB و Δ افقیه بوده و درنتیجه تصویر آن بر تصویر Δ عمود می‌باشد. طول AB برابر با اختلاف رقوم نقاط A و B است و CD با تسطیح معمور آن مشخص می‌شود. اپور به‌شکل زیر است:



پاسخهای درست رسیده از: نصرت‌الله بابائی - احمد معصومی - محمدهمدانی.

۲۲۵۷ - حل این مسئله در بخش «حل‌مسائل نمونه» همین شماره ذکر شده است.

***

چاپ حل مسائل متفرقهٔ شماره ۱۲ دراین‌شماره میسر نشد، درشمارهٔ بعدی انجام خواهد گرفت.

اشتباه از چیست!

مسئله‌های زیادی مربوط به «اشتباه از چیست» توسط خوانندگان گرامی یکان واصل شده است و اغلب یک مسئله توسط چند نفر ارسال شده است. مسائلی که در این صفحه چاپ می‌شود از کتابهای چاپ خارج اقتباس می‌گردد و از این جهت از ذکر نام ارسال‌کنندگان این مسائل خودداری می‌شود مگر اینکه مسئله طرح شخص فرستنده باشد. بعضی از این مسائل هم که قبلاً در کتابها یا مجله‌های فارسی چاپ شده است ماخوذ از همان کتابهایی است که فعلاً مورد استفادهٔ تنظیم‌کنندهٔ این صفحه می‌باشد.

اتحادهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

$$\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$$

$$\frac{x^4-1}{x-1}=x^3+x^2+x+1$$

$$\ldots=\ldots$$

$$\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+\ldots+x^2+x+1$$

در ازاء $x-1$ مقادیر طرف اول همهٔ اتحادهای بالا برابر شده و در نتیجه مقادیر طرف دوم آنها نیز باید برابر باشند یعنی بایدداشته باشیم:

$$1=2=3=4=\ldots=n$$

آیا همهٔ اعداد بایکدیگر برابرند؟ با اینکه اشتباهی رخ داده است. اشتباه در چیست؟

***

فرض می‌کنیم a و b دو عدد نامساوی بوده و c واسطهٔ حسابی آنها باشد یعنی:

$$a+b=2c$$

طرفین رابطه را در $a-b$ ضرب می‌کنیم. می‌شود:

$$a^2-b^2=2ac-2bc$$

برطرفین $b^2-2ac+c^2$ اضافه می‌کنیم

$$a^2-2ac+c^2=b^2-2bc+c^2$$

هر کدام از عبارتهای طرفین مربع کامل است.

$$(a-c)^2=(b-c)^2$$

از طرفین جذر می‌گیریم

$$a-c=b-c$$

و نتیجه می‌شود که $a=b$ درصورتی که فرض کرده بودیم $a\neq b$

آیا اشتباه شده و این اشتباه از چیست؟

اشتباه از این است. (مربوط به مسائل شمارهٔ ۱۳)

۱ـ اشتباه از آنجاست که طرفین نامساوی را که برمقدار منفی $b-a$ تقسیم نموده‌ایم جهت نامساوی را تغییر نداده‌ایم

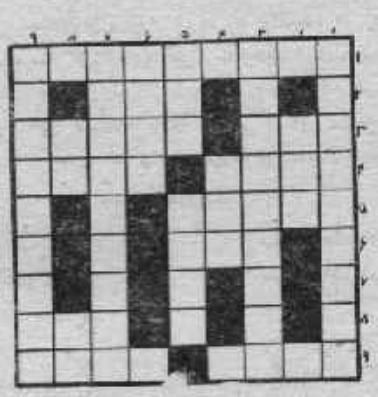
۲ـ با اضافه نمودن ۱۰ برطرف اول معادله درحقیقت معادله‌ای با ریشهٔ $x=-7$ تشکیل داده‌ایم و در آنجا که طرفین را بر $x+7$ که مقداری است برابر صفر تقسیم کرده‌ایم مرتکب اشتباه شده‌ایم

۳ـ چون نقطهٔ B داخل دایره است پس نقطهٔ D خارج دایره بوده و $AD>AB$ است و از رابطهٔ $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$ نتیجه می‌شود که $DC>BC$ و نقطهٔ وسط BD در خارج دایره واقع شده عمود منصف BD دایره را قطع نمی‌کند

سرگرمی

جدول کلمات متقاطع

طرح از: منوچهر فنائی شنم طبیعی دبیرستان دارالفنون

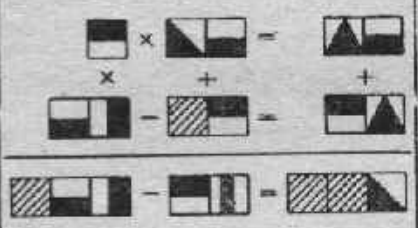


افقی: ۱ـ به تابع کسری گفته می‌شود که صورت و مخرج آن حداکثر از درجهٔ اول باشد. ۲ـ می‌گویند سیارهٔ زمین به جز این یکی دیگر هم داشته است. ۳ـ الفباء ذ اعدادی که فقط با خط و نقطه نمایش داده می‌شود. قطعه خط جهت دار. ۴ـ نه اولی و نه آخری ـ ریاضیدان بزرگ که مخصوصاً در تئوری اعداد معروفیت دارد. ۵ـ اعداد مختلط را به این نام هم می‌نامند. ۶ـ مختصی از مختصات. ۸ـ هم‌جزئی است از مثلث قائم‌الزاویه وهم در دایره رسم می‌شود. ۹ـ طول دارد ـ صحیح نیست.

قائم: ۱ـ دو جسم از اجسام فضایی که دارای رأس و قاعده بوده یکی حد دیگری است. ۲ـ بدون حرف اول جهت را می‌نماید. ۳ـ بین چند عدد برابر است با خارج قسمت تقسیم مجموع آنها بر تعدادشان. ۴ـ از آن طرف سطح فارسی. ۵ـ آخوش تعبیر کند برای نوشتن اعداد به کار می‌رود ـ حاصل ضرب یك عدد در یکی از عددهای درست. ۶ـ از آن طرف همان ریاضیدان نابغه‌ای که نام آن در ردیف افقی آمد. ۷ـ ریاضیدان و منجم آلمانی. ۸ـ در تلفظ به آخر مخرج کسر اضافه می‌شود ـ دو سوم انتهایی از وتر. ۹ـ مخترع آن جمشید کاشانی است.

سرگرمی فکری

در شکل زیر هر مربع نمایش یك رقم می‌باشد و مربعهای متشابه نمایش رقمهای متساویند. با توجه به علامتهای بین اعداد، رقمها و این اعداد را پیدا کنید.



پاسخ سرگرمی فکری شمارهٔ ۱۳

۳۲۳ ، ۱۷ = ۱۹

\- + +

۳۳ × ۹ = ۲۹۷

۲۹۰ + ۲۶ = ۳۱۶

سرگرمی نوشتن اعداد

۱ـ با دو رقم کوچکترین عدد صحیح را بنویسید.

۲ـ عدد ۳۷ را با بکار بردن پنج دفعه رقم ۳ بنویسید.

۳ـ عدد ۱۰۰ را به کمك چهار رقم ۹ بنویسید.

۴ـ عدد ۵۵ را با بکار بردن ۵ دفعه رقم ۴

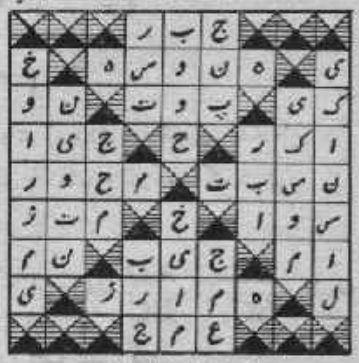
۵ـ عدد ۲۰ با استعمال چهار دفعه رقم ۹

۶ـ عدد ۲۰ را فقط با کمك رقمهای ۱ و ۳ و ۵ و ۷ که هر کدام ۳ دفعه تکرار شود بنویسید.

مسئله

دو عدد پیدا کنید که حاصل ضرب آنها با تفاضلشان برابر باشد. شکل کلی این دو عدد را بنویسید.

پاسخ مسئله‌های برش در صفحهٔ ۵۰



حل جدول شمارهٔ ۱۳

ورود دکتر اکبرزاده (بقیه از صفحهٔ دوم جلد)

لیسانس در رشتهٔ علوم ریاضی را با احراز رتبهٔ اول و اخذ مدال علمی به پایان رسانید

پس از پایان تحصیلات دانشگاهی در ایران بلافاصله برای ادامهٔ تحصیلات عالیهٔ خود به فرانسه مسافرت کرده و در دانشگاه پاریس «سوربون» در مدت دو سال بعد از گذراندن چهار شهادت نامه (ریاضیات عمومی ـ مکانیك استدلالی حساب جامعه و فاضله و هندسهٔ عالی) مجدداً به اخذ درجهٔ لیسانس علوم ریاضی نائل گردید، یك سال بعد با دریافت شهادت نامهٔ آنالیز عالی کار رسالهٔ دکترای خود را آغاز نمود.

موضوع رسالهٔ آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ «**فضاهای فینسلر**»

Les espaces de FINSLER et Certaines de leurs généralisations

میباشد. «فینسلر» ریاضی‌دان سویسی در اوائل قرن بیستم بوده است در دنبالهٔ مطالعات خود به یك نوع از فضاهایی که بعدها به نام خود او معروف گردید برخورد نمود، این فضاها نوع عمومی‌تر و دقیق‌تری از فضاهای «ریمان **Riemann**» میباشد که در رشته‌های «فیزیك ریاضی» موارد استعمال دارد.

ارتباط فضاهای فینسلر با مسائل مطروحه در «نسبیت عمومی» **Relativité générale** و آخرین نظریهٔ اینشتین «نظریهٔ وحدانی **Théorie Unitaire**» و همچنین در توضیح و تفسیر تئوریهای مکانیك آنالتیك و مکانیك کوانتیك از دیرباز مورد توجه دانشمندان قرار داشته است به طوری که در سالهای اخیر بسیاری از مکتب‌های ریاضی شالودهٔ تئوریهای مزبور را براساس فضاهای فینسلر طرح کرده‌اند.

مطالعات و تحقیقات آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ پی ریزی جدید و عمومیت فضاهای فینسلر آنقدر جالب و پرارزش بود که بعد از تهیه و تنظیم دو یادداشت به آکادمی علوم پاریس در همان حال که کار رسالهٔ دکترای خود را تعقیب مینمود به عنوان وابستهٔ تحقیقاتی در «مرکز دولتی تحقیقات علمی»

(C.N R.C.S) Centre nafional de la recherche scientifique

استخدام گردید و پس از آن چهار یادداشت دیگر به آکادمی علوم پاریس تقدیم نمود که همهٔ این شش یادداشت به صورت جزواتی چاپ گردیده و به کلیهٔ مراکز تحقیقاتی و دانشگاهی کشورهای جهان فرستاده شده است.

بالاخره در ۱۳ ژوئن ۱۹۶۱ بعد از یازده سال تحصیل و تحقیق در پاریس رسالهٔ دکترای دولتی خود را با درجهٔ «شایان افتخار» **Très Honorable** که بالاترین درجات تصویب یك رساله از طرف هیئت قضات میباشد گذراند.

پس از پایان تحصیلات آقای دکتر اکبرزاده به سمت «مأمور تحقیقاتی» **Chargé de recherche** در مؤسسهٔ معروف «کلژدوفرانس» **Collège de France** انتخاب گردید.

متن رسالهٔ آقای دکتر اکبر زاده به علت اهمیت علمی آن در سالنامهٔ دانشسرای عالی در پاریس (۱۹۶۳ ـ ۱۹۶۲)

Annal de l' Ecole normale superieure چاپ گردیده و در کلژدوفرانس و همچنین در پاره‌ای از دانشکده‌های خارج از فرانسه نیز تحقیقات این جوان ایرانی با ذکر نام خود او تدریس میشود.

کار آقای دکتر اکبر زاده در کلژدوفرانس صرف‌نظر از ادامهٔ تحقیقات، دادن یك سلسله کنفرانسها وهدایت پروفسور آگرژه‌هایی است که مشغول تهیهٔ رسالهٔ تحقیقاتی میباشند.