یبان

مجله ریاضیات

دورهٔ دوازدهم ، شمارهٔ تکمیلی شمارهٔ مسلسل: ۱۱۷ بهمن ۲۵۳۶

دراین شماره:

بها : ۶۰ ریال

تا اطلاع بعدی
اشتراك برای مجله
پذیرفته نمی‌شود

برای توجه مشترکان دورهٔ دوازدهم

این شمارهٔ مجله که به‌عنوان تکمیلی دورهٔ‌دوازدهم منتشر شده است برای مشترکان دورهٔ مزبور فرستاده نمی‌شود.

این مشترکان درصورتی که مایل به تهیهٔ این شماره باشند، یا از نمایندگان فروش مجله تهیه فرمایند، یا اینکه مبلغ ۵۰ ریال به ادارهٔ مجله بفرستند تا برای ایشان فرستاده شود.

توجه

سازمان یامؤسسهٔ‌مکاتبه‌ای وهمچنین کلاس کنکوروابسته به مجلهٔ یکان وجود ندارد. هرنوع آگهی یا اعلامیه‌ای که‌زیرعنوان چنین سازمانی پخش‌شودبامجلهٔ یکان ارتباط ندارد و دراین‌باره هیچ نوع مسؤولیتی متوجه مسؤولان مجلهٔ یکان‌نمی‌باشد.

یادآوری

درمدتی که مجلهٔ یکان منتشر نمی‌شود قبول اشتراك برای آن‌بی‌مورد است. همچنین‌ازاین‌پس اشتراك برای دورهٔ دوازدهم یا دوره های دیگر آن نیزمورد ندارد. کسانی که خواستار تهیهٔ مجله‌های یکان دورهٔ دوازدهم، یا دوره‌های دیگر آن، می‌باشند می‌توانند به‌صورت تك شماره از ادارهٔ مجله خریداری کنند. ازشماره های مجله‌های یکان‌آنچه موجوداست درصفحهٔ پشت‌جلد این‌شماره مشخص شده است.

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۲۵۲۲ شاهنشاهی

دورهٔ‌دوازدهم ـ شمارهٔ تکمیلی ـ شمارهٔ مسلسل: ۱۱۷

بهمن ۲۵۳۶

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت‌ملك‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیك‌شاهرضا، شمارهٔ ۷۳

ساعات‌کار : ۵ تا ۸ بعدازظهر روزهای غیرتعطیل

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

حساب‌بانکی: حساب‌جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك‌صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume XII, number 9, Feb. 1978

subscription : 6$

TEHRAN – P.O.B. 2463

چاپ‌تصویر ـ تلفن: ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگربابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتماً مراتب را ضمن‌نامهٔ جداگانه باذکر نشانی کامل خود به‌دفتر مجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است‌که معمولادر پشت‌جلدمجلات یکان، و پشت‌جلد همین‌شماره، معرفی می‌شوند. کتابهایی‌که زیر عنوان «معرفی‌کتاب» یابه‌صورت آگهی‌درمجله معرفی می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند، از درخواست این‌کتابها ازدفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

پس از فترت یکساله

دریکان شمارهٔ ۱۱۶ وعده داده شده‌بود که انتشاردورهٔ سیزدهم مجله ازمهر ۲۵۳۶ آغاز می‌شود. اماانجام این‌وعده به‌تأخیرافتاد؛ پس‌ازچهارده سال تلاش پیگیروصرف هزینهٔ شخصی درانتشارمجله‌ای که برای خوانندگانش مقبولیت داشت، اینك یا بایستی مجله باهمان روش و هدف، و البته با مندرجاتی بهتر وعالیتر، منتشر شود؛ یا اینکه اگرامکانات مادی فراهم نباشد انتشار آن متوقف گردد. به‌منظور اینکه مجله بازهم با همان مقبولیت، وبه مراتب بهتر، منتشر شود اقداماتی انجام گرفت تایك شرکت انتشار کتابهای کمك‌آموزشی تأسیس‌شود ونشرمجله نیز درزمرهٔ فعالیتهای آن صورت گیرد. درجریان این‌اقدامات، مقام معاونت پژوهشی ونوسازی وزارت‌آموزش وپرورش، پس ازوقوف براینکه انتشارمجلهٔ یکان دوچارفترت گردیده‌است، با توجه وعلاقهٔ خاصی که به‌انتشارات علمی ومخصوصاً آموزشی‌دارند، خواستند تا انتشار مجلهٔ یکان نیزدرزمرهٔ انتشارات‌آموزشی‌وابسته به‌سازمان پژوهش و نوسازی‌آموزشی‌ادامه یابد. در اجرای این‌خواست، امیدآن می‌رود که ازآغازسال‌تحصیلی آینده، مجلهٔ یکان باوضعی به‌مراتب بهتراز گذشته منتشرشود ومرتباً وبدون وقفه دردسترس علاقمندان باشد.

حسن‌نیت مقام معاونت پژوهشی ونوسازی‌آموزشی، علاقهٔ‌شدید وفعالیت‌خستگی‌ناپذیر مدیریت کل انتشارات‌آموزشی درزمینهٔ امـور مورد تصدی، برخورداری سازمـان پژوهش و نوسازی‌آموزشی‌ازامکانات مادی و معنوی وبه ویژه دسترسی این سازمان به‌مطمئن‌ترین منابع ومآخذ علمی، همه نوید دهندهٔ آن است که انتشارآیندهٔ مجلهٔ یکان با جهشی چشمگیر به سوی بهبود مندرجات همراه خواهد بود.

عبدالحسین مصحفی

در بارهٔ شخصیت استاد فقید

دکترمحسن هشترودی

دکتر تومانیان، دانشگاه آذرابادگان

[مقالهٔ زیر متن سخنرانی است که در جلسهٔ یادبود پروفسور هشترودی در دانشگاه‌آذرابادگان ایراد شده است. متن مقاله پس از انتشار ویژه‌نامهٔ یکان به‌یاد استاد فقید، به‌ادارهٔ مجله رسید و از اینرو چاپ‌آن در شمارهٔ مزبور میسر نبوده است. نظر به اهمیت مقاله، متن‌آن در این شماره چاپ گردید.]

ـ آیا فکر می کنید یك کیهان نورد درناویز خود برای صرف غذای مایعی که همراه دارد، دوچار زحمت می گردد؟

ـ چگونه می‌توان تصور کرد که ممکن‌است جهان ما جزء بسیار کوچکـی از یك جهان با بعد بیشتر باشد، و یا چگونه می‌تـوان محاسن بعد اضافی را بطور تجربی درك نمود،و بالاخره مهمترین تحولی که در عصر حاضر در علوم ریاضی بعمل‌آمده است چیست؟

***

آنچه بیان شد نمونه‌هایی‌از موضوعاتی‌بود که شادروان پروفسور محسن هشترودی درکلاس مطرح کرده، با دید وسیع و ژرف‌بینی و احاطهٔ کاملی کـه به مطلب و جوانب مختلف آن

داشتند ، با سادگی خاصی که برای دانشجویان قابل فهم بود جواب می‌فرمودند.

به عنوان شاهد، جواب آخرین پرسش را بازگومی کنیم:

مهمترین تحول ریاضی، عنوان شدن این علم به صورت جدید است که در نتیجهٔ اندیشه‌های کانتور و کلاین پیش‌آمده است و اساس‌آن برروی نظریهٔ مجموعه‌ها پی‌ریزی شده است، مانندتوپولوژی ، جبرمجرد ، تئوری‌گراف و غیره . علی‌الاصول ریاضیات برای دیسیپلین دادن به فکر است ، توپولوژی و جبر مجرد دو دیسیپلین ریاضی‌اند که مستقیماً از نظریهٔ مجموعه‌ها مشتق می‌شوند ، بدین معنی که قواعد منضبط راجع به اعضاء یك مجموعه وکیفیت ترکیب و آمیزش آنها توپولوژی و جبر مجرد را بوجود می‌آورد.

به عبارت دیگر، با درنظر گرفتن مفهوم «فاصله» در هندسهٔ اقلیدس با کمال مهارت به تعریف متریك پرداخته و شرایط بسیار ساده‌ای برای فضای متریك درنظرگرفته شده است . این شرایط طوری برگزیده شده‌اندکه مفاهیم «اتصال» و «تقارب» و امثال آن به سادگی قابل عرضه بوده و قضایای مهم مربوط نیز به‌آسانی اثبات می‌شوند.

عمل تعمیم با معرفی فضای متریك متوقف نشد و مفاهیمی چون همسایگیها (مجموعه‌های باز) جانشین ایدهٔ متریك گردید و در نتیجه فضای توپولوژیکی‌معرفی شد،که فضای متریك حالت خاص آن است . استاد در پاسخ به علت پیدایش این تحول افزوده‌اند که ریاضیات هر عصر آینهٔ تمدن آن زمان است ؛ پیشرفتهای فنی و صنعتی و علمی هرقرنی را از دید جهان‌بینی ریاضی‌آن زمان‌می‌توان دریافت، ریاضیات قرن‌بیستم آینهٔ تحول افکار تجدید اندیشه است. نتیجهٔ حیرت‌بخش این تحول‌وتجدد که از هم‌اکنون قابل تصور است گشودن دروازه‌های آسمانهای ناشناخته است ، خواه آسمانهای جهان ماده و خواه آسمانهای جهان اندیشه .

استاد هشترودی برای ریاضیات تجربی اهمیت زیادی قائل بودند ، و اعتقاد داشتندکه لازم است دانشجویان حقایق و مفاد آنها را قبل از اثبات درك نمایند و معتقد بودندکه روش تدریس به‌صورت قضیه اثبات فقط محفوظات را ، آنهم برای مدتی کوتاه ، افزایش می‌دهد ، و چون ریاضیات را الگوئی‌از دنیای فیزیك می‌دانستند ، پی‌بردن به مفاهیم اصلی در آنالیز تابعی را برای فهم جهانِ فیزیك ضروری می‌یافتند.

با توجه به این واقعیت بودکه استاد در کنفرانسهای ریاضی‌کشور بارها تأکید نموده‌اند که دورهٔ لیسانس فیزیك و ریاضی‌درهم ادغام‌گردد زیرا به اعتقاد ایشان باید فهمیدکه ممر عمل ریاضیات چیست وچگونه از تجربه‌کردن می‌توان‌به نتایج کلیت بخشید . همانطوری‌که مباحث فیزیك ریاضی موجب پیدایش توابع خاص نظیر تابع دیراك گردیدکه اهمیت آن در نظریهٔ توزیع مشخص است ، و پیدایش توابع خاصی ریاضیدانان را به مسئلهٔ جوابها و مقادیر ممتاز رهبری‌کرد که در فیزیك‌کوانتیك و فیزیك استاتیستیك مورد استفاده قرار گرفت .

استاد هشترودی با تسلطی‌که در علوم مختلف داشتند با مهارت‌تمام ازپارچه‌های الوان‌علوم مختلف لباس‌فاخرمی‌دوختند، چنانکه در خاتمهٔ درس ریاضی برای دانشجویان بیولوژی ، کاربردآن‌مورد سؤال واقع نمی‌شد، چون استاد پیچ‌وخم سلول را تا حد یك بیولوژیست می‌شناختند و ریاضی را با زبان بیولوژی بیان می‌نمودند ، و این همان چیزی است‌که اغلب ما ازآن بی‌بهره‌ایم و بیشتر دانشجویان ما قادر به تنظیم روابط و درك مقاطع علوم مختلف نیستند.

همانطوری‌که در زندگینامهٔ استاد آمده است ، اشتهار ایشان از طریق شرکت در مجامع بزرگ علمی و نشر ماحصل تحقیقات درمجلات علمی دنیا به‌گوش جهانیان رسیده است.

رجودکتابهائی نظیر :

Les Connexions Normal ،

Les Espaces – Normaux

و : Sur Les espaces de Niemmann

درکتابخانه‌های بزرگ‌و دانشگاههای معروف دنیا هر ایرانی‌را قرین افتخار می‌سازد . زیرا با دیدن‌آنها در جوار کتابهای دانشمندانی چون الی‌کارتان ، شوالیه و چرن احساس می‌کند که در تکمیل‌آن‌گنجینهٔ علمی ، ایرانی هم سهمی داشته استو اثر فرزند دانشمند این آب وخاك مقدس و عالم پرور جای خود را در چنین گنجینهٔ علمی استحکام ابدی بخشیده است . گرچه جسم آن زنده‌یاد دربین ما نیست‌اما نام او در یادها باقی خواهد بود.

آنالیز بعدی

ابعاد و دستگاه واحدها

ترجمه و تنظیم از : مهندس مجید رنجی

در برخی از موارد که آنالیز ریاضی یك پدیدهٔفیزیکی آنقدر پیچیدگی پیدا کند کـه نتوان جـواب قابل استفاده‌ای بوسیلهٔ آن بـدست آورد مجبور خواهیم بودکه بـه تکنیکهای تجربی متوسل شویم. یك‌چنین‌روش تجربی را می‌توان بااستفاده از آنالیز بعدی به مقدار زیادی ساده کرد و آنرا بر اساس منطقی بنا نهاد.

تمام بورسیهای آنالیزی پدیده‌های فیزیکی بـر اساس مقادیـر کمی از قبیل طول، نیرو، جرم، شتاب زمان و غیره بنا شده‌اند. چون این مقادیر عبارتند از مقادیر فیزیکی، واحدهای استانداردی برای نشان دادن اندازهٔ این‌مقادیر وضع شده‌بوسیلهٔ مشخص نمودن واحدهای برخی از مقادیر می‌توان واحدهـای سایر مقادیررا مشخص کرد. به‌عبارت دیگر، بطور مثال، بامشخص نمودن واحدهای طول‌وزمان واحدهای سرعت به‌طور اتوماتیك تعیین می‌شوند ، زیرا سرعت به صورت شدت زمانی تغییر طول تعریف شده است. این مطلب به واحدهای استانداردی‌که برای اندازه‌گیری انتخاب شده‌اند بستگی نـدارد و مستقل از آنها صادق‌است. به عبارت دیگر، واحد طول چه فوت و چه‌سانتیمتر باشد و واحد زمان چه ثانیه و چه سال باشد، واحد سرعت یك واحدثانوی خواهد بود. بنابراین، می‌توانیم از اندازهٔ واحدها صرف‌نظر کنیم و فقط ابعاد فیزیکی را در نظر بگیریم. «ابعاد» یك‌مقدار فیزیکی معمولا برحسب مفاهیمی که به سادگی‌قـابل درك بـاشند، مانند طول، زمـان، نیرو، وغیره بیان می‌شونـد. بنابراین « واحدهای» یك مقدار فیزیکی عبارت خواهند بوداز اندازه‌های استانداردی‌کـه برای بیان اندازهٔ یك بعد انتخاب شده‌اند، مثل فوت، سانتیمتر و غیره برای بعد طـول. بنابراین، چنانچه بطور مستقل از دستگاه واحدهای بکار رفته علامت«L» را برای نشان دادن بعد طول وعلامت «T» را برای‌نشان دادن بعد زمان بکار ببریم، درآن صورت تعریف ابعاد سرعت عبارت خواهد بـوداز «$\frac{L}{T}$» و ابعاد شتاب عبارت خواهند بـود از «$\frac{L}{T^2}$»، و غیره.

معمولا تعدادی از ابعادرا به عنوان ابعاد مستقل انتخاب نموده سپس‌تمام مقادیرفیزیکی‌را برحسب این ابعاد مستقل‌بدست می‌آورند. برای‌مقادیر مکانیکی،ابعاد طول«L»،زمان«T»ونیرو «F» را می‌توان به‌عنوان ابعاد مستقل اولیه انتخاب‌کرد، سپس ابعاد تمام مقادیر فیزیکی را برحسب آنها بدست آورد. در این صورت ابعاد جرم، توسط قانون‌دوم نیوتون به‌صورت $\frac{FT^2}{L}$ بدست خواهد آمد. از طرف دیگر همچنین امکان دارد که ابعاد طول L ، زمان T و جرم M را به عنوان ابعاد اولیه انتخاب کرد وابعاد دیگر را برحسب اینان بدست‌آورد. در آن صورت‌نیرو دارای ابعاد $\frac{ML}{T^2}$ خواهد بود.

هیچ محدودیتی در مورد اینکه چه ابعادی را بـه عنوان ابعاد اولیه انتخاب نماییم وجود نـدارد. در واقـع، دستگـاه مهندسی انگلیسی ابعاد L ، T ، F و M را به صورت ابعاد اولیه انتخاب می‌نماید. در این دستگاه یك مقدار بعدی وجود دارد، g_c، که دارای ابعاد $\frac{ML}{FT^2}$ می‌باشد. بنابـراین اصطلاح « ابعاداولیه» از یك‌انتخاب کاملا دلخواه نتیجه شده‌است. (این موضوع را دردستگاه واحدها که بعداً به اختصار خواهیم گفت خواهید دید). این انتخاب بستگی به ساده شدن کـار دارد. در مورد مقادیر حرارتی مرسوم است‌که انرژی حرارتی به‌صورت یك‌بعد مستقل، H در نظرگرفته شود. گواینکه به‌عنوان یك‌فرم انرژی، حرارت می‌تواند دارای ابعاد FL یا $\frac{ML^2}{T^2}$ بـاشد.

انتخاب حرارت به عنوان یك بعد مجزا احتیاج بـه یك مقدار ثابت بعدی را بـوجود می‌آورد. این مقدار ثابت بعدی معادل مکانیکی ژول مـی‌باشد که با J نمایش داده می‌شود. درجـهٔ حرارت نیز به‌صورت یك بعد اولیه، θ ، انتخاب می گردد. گو اینکه می‌توان آنرا بـه صورت انـرژی سینتیك متوسط حرکت مولکولی تعریف کرد. در آن صورت درجهٔ حرارت فرمـی از انرژی‌بوده و می‌توان آنرا برحسب ابعاد انرژی (مانندحرارت) نشان داد. با اینکه چنین امری امکان دارد و اساسی‌تر ازروش معمول می‌باشد، ولـی تصویری راکه از مفهوم فیزیکی درجـهٔ حرارت داریم مخدوش خواهد نمود.

***

با اشارهٔ مختصری که در مورد ابعاد اولیه دیدیـم بحث خود را بادستگاه واحدها ادامه می‌دهیم.

طول وزمان ابعاد اولیه‌ای هستند که در هردستگاه واحدها وجود دارند، دربعضی از دستگاهها جرم (Mass) را به‌عنوان بعد اولیه ونیرو را به عنوان بعد فرعی بکار مـی برند. ممکن است در بعضی از دستگاهها نیرو را به عنوان بعد اولیه و جرم را بعد فـرعـی درنظر گرفت. به هـرحال دستگاههای متداول فیزیکی ومهندسی عبارتند از:

I- سیستم انگلیسی

ابعاد اولیه در این دستگاه عبارتند از: فـوت (foot) بـرای طول، پاند (Pound) بـرای جرم یا نیرو و ثـانیه (Second) برای زمان. در اینجا فوت طول یك پای طبیعی ، یك پاند جـرم پلاتینیم برای پاند استاندارد و ثـانیه $\frac{1}{84400}$ روز متوسط خورشیدی می‌باشد.

همانطورکه گفته شد در این دستگاه یك مقدار بعدی g_c وجود دارد. طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F \sim Ma \quad \text{ویا} \quad F=\frac{1}{g_c}Ma \qquad (1)$$

که در این معادله a شتاب‌و M جرم می‌باشد. مقدار g_c بستگی به بعد انتخابی برای جرم، نیرو و زمـان دارد. در این دستگاه مقدار g شتاب ثقل عبارتست از:

$$g=32/174\,ft/sec^2$$

سه دستگاه منشعب از دستگاه انگلیسی عبارتنداز:

۱- دستگاه مطلق انگلیسی

(British Absolute System)

ابعاد اولیه یـا اصلی در این دستگاه عبارتند از: جـرم (پاند جرم lbm)، طول (فوت) ، زمان (ثانیه). بعد نیرو در این دستگاه پاندال (Poundal) [نیروی لازم بـرای اینکه به یك lbm شتاب ft/sec^2 را بدهد] می‌باشد.

از معادله (۱) بدست می‌آید:

$$[1\ \text{پاندال}] = \frac{1}{g_c}[1\ lbm]\,[1\,ft/sec^2]$$

بنابراین مقدار ثابت g_c برابر می‌شود با:

$$g_c = 1\frac{lbm-ft}{Poundal-sec^2}$$

۲- دستگاه ثقلی

British Gsravitional System

نیرو (پاند نیرو یا lbf) ، طول (فوت) وزمان (ثانیه) به عنوان ابعاد اولیه اختیار می گردند. واحد جرم (Slug) در این دستگاه خواهد شد:

$$[1\ Slug] = g_c\frac{[1\ lbf]}{[1\ ft/tec^2]}$$

بنابراین (Slug) به صورت جرمی کـه باشدت یك ft/sec^2 و بوسیلهٔ نیروی یك پاند نیرو شتاب بگیرند تعریف می‌شود. مقدار ثابت g_c در این دستگاه می‌شود:

$$g_c = 1\frac{Slug-ft}{lbf-sec}$$

۳- دستگاه مهندسی

Engineering Units

ابعاد اولیه در این دستگاه عبارتنداز: نیرو (lbf)، جرم (lbm)، طول (ft) وزمان (Second). مقدار g_c خواهد شد:

$$[1lbf] = \frac{1}{g_c}[1lbm][32/174ft/sec]$$

$$g_c = 32/174\frac{lbm-ft}{lbf-sec^2}$$

روابطی که بین نیرو وجرم دراین سه‌دستگاه وجود دارد عبارتست از:

$$1lbf = 32/174\,poundals$$

$$1slug = 32/174\,lbm$$

مثال: مطلوبست وزن‌جسمی(Standard Pound) درنقطه‌ای اززمین که درآنجا $g=30ft/sec^2$ می‌باشد.

$$F = \frac{1}{g_c} ma$$

$$W = \frac{1}{g_c} ma$$

با درنظر گرفتن $g_c = 32/174 \frac{lbm-ft}{lbf-sec^2}$ داریم:

$$W = \frac{1}{32/174 lbm-ft/lbf-sec^2} \times (1 lbm) \times (30 ft/sec^1)$$

$$W = 0/9324 lbf$$

II- دستگاه متری (Metric System)

دستگاه انگلیسی بیشتر در مهندسی بکار می‌رود. ولیکن دستگاه بین‌المللی دستگاه متریک می‌باشد. ابعاد اولیه در این دستگاه عبارتند ازمتر(طول)، کیلوگرم (جرم یا نیرو) و ثانیه (زمان) ویاسانتیمتر ($10^{-2}m$) برای‌طول، گرم ($10^{-3}kg$) برای جرم یانیرو وثانیه.

بعدکیلوگرم براساس یك کیلوگرم پلاتینیم ـ ایریدیم استانداردست. وقتی که نیروبه‌عنوان بعداولیه انتخاب‌می گردد، نیروی استاندارد وزن‌جرم پلاتینیم ـ ایریم در شتاب استاندارد ثقلی $9/81 m/sec^2$ می‌باشد.

دراین‌دستگاه‌مترعبارتست‌ازحاصل‌ضرب۱۶۵۰۷۶۳/۷۳ درطول موج نارنجی ـ قرمز کریپتون ۸۶. ثانیه دراین دستگاه همان تعریفی را داردکه دردستگاه انگلیسی گفته شد.

دستگاههای منشعب عبارتند از:

۱- C.G.S. مطلق.

دراین‌دستگاه ابعاداولیه، جرم (گرم)، طول (سانتیمتر) و و زمان (ثانیه) می‌باشد. نیرو برحسب دین (dyne) تعریف می‌شودکه ازقانون دوم حرکت نیوتون بدست می‌آید. دین مقدارنیرویی است که اگربرجرم یك‌گرم اثرکند شتابی معادل $1 cm/sec^2$ ایجادکند. پس:

$$[1 dyne] = \frac{1}{g_c}[1 gm][1 cm/sec^2]$$

$$g_c = 1 \frac{gm-cm}{dyne-sec^2}$$

۲- C.G.S. ثقلی.

ابعاداولیه دراین‌دستگاه عبارتندازنیرو (گرم نیرو)، طول (سانتیمتر) و زمان (ثانیه) . بعد جرم دراین دستگاه گرم می‌باشد.

$$[1 gm] = g_c[1 gm-force]/[981 cm/sec^2]$$

واضح است که یك‌گرم نیرووقتی برروی یك‌گرم جرم وارد آید شتابی برابر $981 cm/sec^2$ را بوجود می‌آورد. مقدار g_c خواهد شد:

$$g_c = 981 \frac{gm-cm}{(gm-force)-sec^2}$$

بامقایسهٔ g_c برای دو دستگاه مذکور:

$$1 gm-force = 981 dynes$$

۳- M.K.S. مطلق

ابعاد اولیه: جرم (کیلوگرم)، طول (متر)، زمان (ثانیه) می‌باشند. بعد فرعی‌نیرونیوتون می‌باشدکه برحسب‌تعریف وقتی به‌یك‌کیلوگرم جرم اثرکند شتابی معادل $1 m/sec^2$ را ایجاد می‌کند.

$$[1 newton] = \frac{1}{g_c}[1 kg][1 m/sec^2]$$

$$g_c = 1 \frac{kg-m}{newton-sec^2}$$

۴- M.K.S. ثقلی

ابعاداولیه: نیرو (کیلوگرم نیرو)، طول (متر) و زمان (ثانیه) می‌باشند. بعد فرعی جرم ازقانون دوم نیوتون بدست می‌آید :

$$[1 kg] = g_c \frac{[1 kg-force]}{[9/81 m/sec^2]}$$

$$g_c = 9/81 \frac{kg-m}{(kg-force)-sec^2}$$

بامقایسهٔ g_c دردودستگاه MKS:

$$1 kg-force = 9/81 newtons$$

قضیهٔ π باکینگهم- قضیه‌ای‌که مربوط به‌باکینگهم‌دانسته شده ودقیقاً توسط **لانگهار** اثبات‌گشته است: چنانچه یك رابطهٔ فیزیکی بین n مقداروجودداشته باشد، این‌رابطه را می‌توان به صورت یك‌معادلهٔ بین $(n-k)$ گروه بدون بعد ازاین مقادیر نشان داد. در اینجا k مساوی یاکوچکتراست از تعداد ابعاد مستقلی‌که در n مقدار وجوددارند. چنانچه Q مقادیر مختلف فیزیکی و π گروههای بدون‌بعد برخی ازQها رامشخص‌سازند بنابرقضیهٔ π یك‌رابطهٔ تابعی به‌شکل:

$$f(Q_1 \text{ و } Q_2 \text{ و } Q_3 \text{ و } \cdots Q_n) = 0$$

را می‌توان به‌صورت یك‌تابع ازگروههای بدون بعد نوشت.

$$\varphi(\pi_1 \text{ و } \pi_2 \text{ و } \cdots \text{ و } \pi_{n-k}) = 0 \quad , \quad k<m$$

دراینجا m عبارتست ازتعداد ابعاد مستقل. هریك ازπها به نوبه به‌صورت:

$$\pi = Q_1^a Q_2^b Q_3^c \cdots Q_n^z$$

می باشند. دراینجا توانهای a ، b ، c ... ، z طوری‌می باشند که π بدون بعد می باشد. برخی ازاین توانها نیزصفر خواهند بود.

ارائهٔ مقداردقیق k کار بسیارپیچیده‌ای می باشد. حداکثر مـوارد k برابربا m (تعدادابعاد مستقل N رابطه) می باشد. πها باید یك‌مجموعهٔ کامل‌را تشکیل‌دهند. معنی‌یك مجموعهٔ‌کامل این‌است که هیچیك ازعضوهای مجموعـه رانتوان با ضرب ویا تقسیم عضوهای دیگرآن بدست آورد، وهمچنین نتوان یك عضو جدید بدست‌آوردکه درداخل مجموعه وجودنداشته باشد. این موضوع تعداد عضوهای (πها) مجموعه راتعیین می کنند، گو اینکه روشی که دراینجا برای‌بدست‌آوردن πها بکارخواهدرفت براساس این‌فرض‌است که‌تعداد πها برابر با $n-m$ می باشد (به‌عبارت دیگر $k=m$).

امتیاز اساسی آنالیز بعدی این است که می‌توان بوسیلهٔ‌آن تعداد متغیرها رابه‌نسبت قابل توجهی کم کرد. این امتیاز درمورد برنامه‌های تجربی که مایلیم فرم یك رابطهٔ تـابعی را پیداکنیم ارزش زیادی دارد.

باتوجه به‌آنچه‌که گذشت وبطور خلاصه برای بررسی و بیان‌آنالیز بعدی فرضیات زیررا درنظرمی گیریم:

(i) می‌توان m بعد مستقل با اولیه را انتخاب کرد (در مکانیك $m=3$ یعنی‌طول، زمان جرم‌بانیرو).

(ii) دریك‌پدیدهٔ فیزیکی n مقداروجوددارد که می‌توان فرمول‌ابعادی‌آنرا برحسب m بعداولیه نشان داد.

(iii) مقدار بعدی Q_0 را می‌توان به‌مقادیربعدی مستقل Q_1 و Q_2 و ... و Q_{n-1} مربوط کرد:

(۱)

$$Q_0 = f(Q_1 \text{و} Q_2 \text{و} \cdots \text{و} Q_{n-1}) = kQ_1^a Q_2^b \cdots Q_{n-1}^z$$

k مقدار ثابت بدون بعدی می باشد. a وb وc توانهای صحیح هستند.

(iv) معادلهٔ (۱) مستقل از نوع واحدهای‌انتخابی بوده و بطور ابعادی همگن می باشد. یعنی مقادیـر دو طرف معادله باید دارای یك بعد باشند.

مثالـ مسئله سقوط‌آزاد یك جسم را در نزدیکی سطح زمین در نظر بگیرید. اگر x و w و g و t به‌ترتیب‌فاصلهٔ جسم تا سطح زمین، وزن جسم، شتاب ثقل (که ثابت فرض می‌شود) و زمان‌باشد، می‌خواهیم رابطه‌ای برای x برحسب توابع w و g و زمان پیداکنیم.

حلـ با بکاربردن واحدهای اصلی برای نیرو F،طول L و زمان T ، می‌بینیم کـه چهار مقدار فیزیکی $Q_0=x$ ، $Q_1=w$ و $Q_2=g$ و $Q_3=t$ شامل سه واحد اصلی می‌باشند. از آنجا از فرض i و ii، $m=3$ و $n=4$ خواهد بود. از فرض iii به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$x = F(w,g,t) = kw^a g^b t^c \qquad (A)$$

که k مقدار بدون بعد دلخواهی می‌باشد.

اگر علامت [ ] را برای نشان دادن بعد یك مقداربکار ببریم، با در نظرگرفتن فرض iv رابطهٔ زیر را داریم:

$$[x] = [w]^a [g]^b [t]^c$$

ویا

$$F^0 L^1 T^0 = (F)^a (LT^{-2})^b (T)^c = F^a L^b T^{-2b+c}$$

از رابطهٔ بالا بدست می آوریم:

$$F : 0 = a$$

$$L : 1 = b$$

$$T : 0 = -2b + c \quad \text{یا} \quad c = 2b = 2$$

بنابراین معادلهٔ (A) خواهد شد:

$$x = kw^0 g^1 t^2$$

$$x = kgt^2$$

همانطور که در مکانیك دیـده‌ایم $k=\frac{1}{2}$ می باشدکه آنرا نمی‌توان از آنالیز بعدی بدست‌آورد.

[مقالهٔ زیر برای درج در نشریه‌ای ویژهٔ دبیران که در شرف انتشار است تهیه شده است. اما از نظر مفید بودن آن برای دانش آموزان، به درج آن در این مجله اقدام شد.]

روش سادهٔ رسم نمودار

تابع قدر مطلق خطی

عبدالحسین مصحفی

یکی از عنوانهای برنامهٔ ریاضیات سال چهارم علوم تجربی رسم نمودار تابع قدر مطلق خطی است. روشی که در کتاب درسی برای رسم این نوع نمودار بیان شده در حد خود کامل و درست است. اما از این نظر که بنا به روش مزبور، اولا بایستی دو یا چند خط را رسم کرد و آنگاه قسمتهایی از هریك را حذف نمود، ثانیاً تعیین نقطه‌های شکست نمودار انجام نمی‌گیرد، در عمل برای دانش آموزان اشکالاتی بوجود می‌آید که گاه نمودار رسم شده توسط آنان دقیق و یا واضح نیست. روشی که در زیر، پس از بیان بررسی ویژگیهای تابع، پیشنهاد می‌شود اشکالات مزبور را ندارد و علاوه بر آن در عمل بسیار ساده است.

۱- بررسی ویژگیهای تابع قدر مطلق خطی

مقصود از تابع قدر مطلق خطی، تابعی است با ضابطهٔ به صورت کلی زیر:

$$y=mx+n\pm|a_1x+b_1|\pm|a_2x+b_2|\pm|a_3x+b_3|\pm\cdots$$

می‌دانیم که مقدار دوجمله‌ای به صورت $ax+b$ درازای $x=-\frac{b}{a}$ برابر باصفر، درازای مقادیر $x<-\frac{b}{a}$ دارای علامتی مخالف با علامت a و درازای مقادیر $x>-\frac{b}{a}$ دارای علامتی موافق با علامت a است.

همچنین می‌دانیم که:

$$ax+b=0 \iff |ax+b|=0$$
$$ax+b>0 \iff |ax+b|=ax+b$$
$$ax+b<0 \iff |ax+b|=-(ax+b)$$

بنابراین درازای هر مقدار از x، ضابطهٔ تابع عبارت است از مجموع جبری یك عده دوجمله‌ایهای درجهٔ اول که حاصل آن نیز یك دوجمله‌ای درجهٔ اول می‌باشد. از این جهت تابع مزبور خطی است ودرازای همهٔ مقادیر x معین و پیوسته است.

هرگاه $x\to\pm\infty$، حد تابع یا $\pm\infty$ یا عدد معین است. مثلا برای تابع

$$y=|2x+6|+|4-2x|$$

داریم:

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\ y=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}[-2x-6-4+2x]=-10$$

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ y=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}[2x+6+4-2x]=10$$

برای تابع $y=x-1+|x-4|$ داریم:

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\ y=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}[x-1-x+4]=3$$

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ y=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}[x-1+x-4]=+\infty$$

فرض می‌کنیم:

$$P(x)=mx+n\pm|a_2x+b_2|\pm|a_3+b_3|+\cdots$$

در این صورت ضابطهٔ تابع مفروض یا عبارت می‌شود از:

$$y=|a_1x+b_1|+P(x)$$

که $P(x)$ درازای هر مقدار از x به صورت $Ax+B$ است.

به فرض $x_1=-\frac{b_1}{a_1}$ درازای $x=x_1$ مقدار تابع برابر است با $y_1=P(x_1)$ و درازای $x<x_1$ داریم:

$$y=-a_1x-b_1+P(x)=A_1x+B_1$$

و درازای $x>x_1$ داریم:

$$y=a_1x+b_1+P(x)=A_2x+B_2$$

بنابراین نمودار تابع در نقطهٔ به طول $x=x_1$ تغییر امتدادمی‌دهد. به عبارت‌دیگر نقطهٔ $M_1(x_1$ و $y_1)$ نقطهٔشکست نمودار تابع است.

یا اینکه ضابطهٔ تابع می‌شود:

$$y=-|a_1x_1+b_1|+P(x)$$

که در این صورت نیز به‌همان ترتیب معلوم خواهد شد که نقطهٔ $M_1(x_1$ و $y_1)$ نقطهٔ شکست نمودار تابع است.

به‌همان ترتیب و بافرض $x_2=-\frac{b_2}{a_2}$ و $x_3=-\frac{b_3}{a_3}$

و ...نتیجه می‌شود که‌هریك ازنقطه‌های $(x_2$ و $y_2)$ و$(x_3$و$y_3)$ و ... نیزنقطه‌های شکست نمودار تابع می‌باشند.

[مشتق تابع درازای $x<x_1$ برابر با $y'=A_1$ و درازای $x>x_1$ برابر با $y'=A_2$ است. هرگاه مقادیر A_1 وA_2مخالف صفر و مختلف‌العلامت باشند، دراین صورت‌تابع در ازای $x=x_1$ ماکزیمم یا می‌نیمم است. همچنین برای مقادیر x_2 و x_3 و...]

۲ـ روش رسم نمودار تابع

با توجه به ویژگیهای تابع، نمودار آن خط شکسته‌ای است که از طرفین نامحدود است. هرخط شکستهٔ از دو طرف نامحدود با معلوم بودن رأسها و امتداد هریك از دونیم خط ابتدا و انتها مشخص می‌شود. بنابراین برای رسم نمودارتابع با ضابطهٔ به‌صورت کلی:

$$y=mx+n\pm|a_1x+b_1|\pm|a_2x+b_2|$$
$$\pm|a_3x+b_3|\pm\cdots$$

به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) هریك از دو جمله‌ایهای a_1x+b_1 و a_2x+b_2 و a_3x+b_3 و ... ، یعنی دو جمله‌ایهای داخل هریك از قدر مطلقها را، برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشهٔ آن را حساب می‌کنیم.

۲) جدولی با دوسطر رسم می‌کنیم. در سطر اول آن مقادیر بدست آمده برای x را به ترتیب صعودی یاد داشت می‌کنیم.

۳) به مقادیر x عددی دلخواه کوچکتر از کوچکترین آنها وعددی دلخواه بزرگتر از بزرگترین آنها اضافه‌می‌کنیم.

۴) در سطر دوم جدول مقادیر y نظیر مقادیر x واقع در سطر اول را که از روی ضابطهٔ تابع بدست آورده‌ایم یادداشت‌می‌کنیم.

۵) نقطه‌های نظیر مقادیر x و y واقع در جدول را به ترتیب در صفحهٔ محورهای مختصات تعیین می‌کنیم.

۶) نقطه‌ها را به‌ترتیب ازچپ به راست با پاره خطهای محدود به هم وصل می‌کنیم و پاره خط اولی را از طرف چپ وپاره خط‌آخری را از طرف راست متناسب با حدودمحورهای مختصات امتداد می‌دهیم.

مثال۱ـ رسم نمودار تابع با ضابطهٔ:

$$y=2x-5+|x-4|+|x+1|$$

به ترتیب گفته شده عمل می‌کنیم:

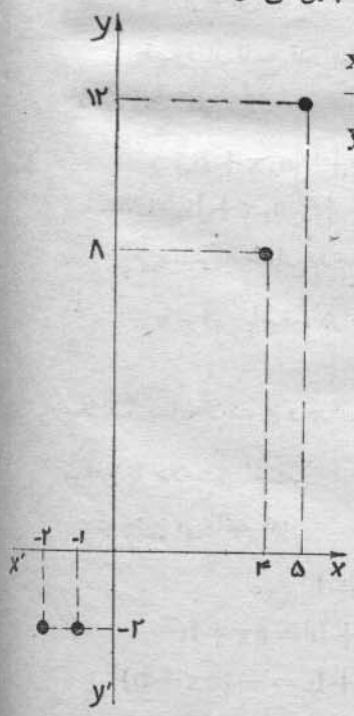
$$x-4=0 \Longrightarrow x=4$$
$$x=4 \Longrightarrow y=8-5+|4+1|=8$$
$$x+1=0 \Longrightarrow x=-1$$
$$x=-1 \Longrightarrow y=-2-5+|-1-4|=-2$$

برای xدو مقدار ۴ و ۱ـ بدست‌آمده است. کوچکتر از ۱ـ عدد ۲ـ و بزرگتر از ۴ عدد ۵را در نظرمی گیریم:

$$x=-2 \Longrightarrow$$
$$y=-4-5+|-2-4|+|-2+1|=-2$$
$$x=5 \Longrightarrow$$
$$y=10-5+|5-4|+|5+1|=12$$

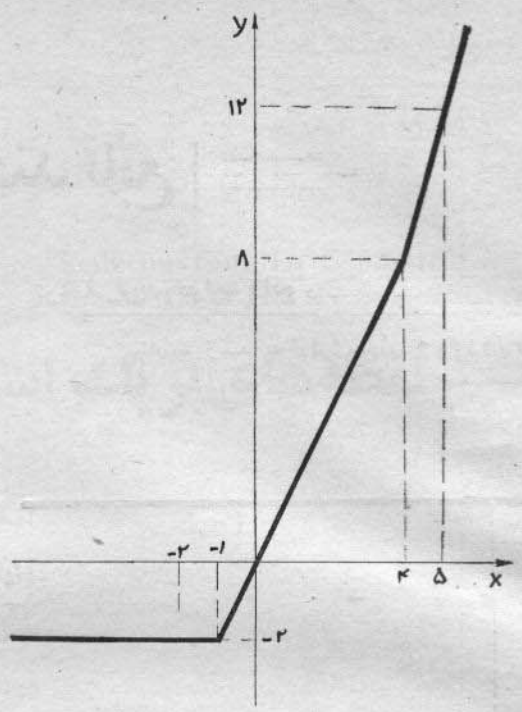
جدول مربوط به مقادیر بالا چنین می‌شود:

x	-۲	-۱	۴	۵
y	-۲	-۲	۸	۱۲



اکنون نقطه‌های نظیر رادرصفحهٔ محورهای‌مختصات تعیین می‌کنیم.

این نقطه‌ها را از چپ به راست به هم وصل می‌کنیم و خط M_1M_2 را از طرف چپ وخطM_3M_4را از طرف‌راست امتدادمی دهیم. خط شکستهٔ (با دونقطهٔ شکست M_2 و M_3) به شکل بعد بدست می‌آید که نمودار تابع داده شده است.



مثال۲ـ رسم نمودار تابع باضابطهٔ:

$$y=|3x-6|+|2+2x|-|3-x|$$

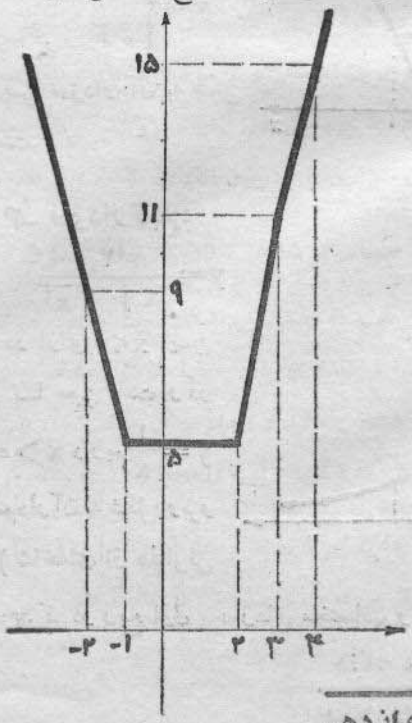
به ترتیب‌زیر عمل می کنیم:

$$3x-6=0 \Longrightarrow x=2$$
$$2+2x=0 \Longrightarrow x=-1$$
$$3-x=0 \Longrightarrow x=3$$

عددهای ۲ − و ۴ را نیز برای x در نظر می گیریم

x	−۲	−۱	۲	۳	۴
y	۹	۵	۵	۱۱	۱۵

بر طبق این جدول نمودار تابع به شکل زیر است:



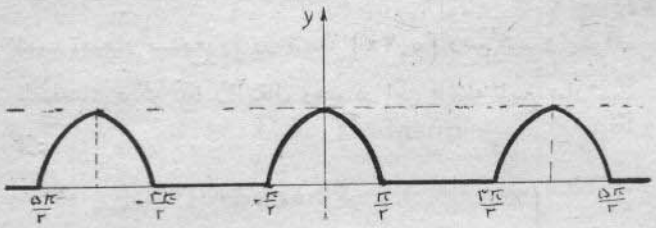
رسم نمودار... (دنباله از صفحهٔ ۳۱۴)

۵ـ نمودار تابع: $y=\cos x+|\cos x|$

این تابع به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y=\begin{cases} 2\cos x & \text{اگر } \cos x\geqslant 0 \\ 0 & \text{اگر } \cos x<0 \end{cases}$$

برای رسم نمودار تابع، می‌توانیم نخست نمودار تابع $y=\cos x$ را به عنوان کمکی رسم کنیم؛ آنگاه آن قسمت از آن راکه زیر محورxها واقع است حذف کرده تصویر آن بر محورxهارا در نظر بگیریم وعرض آن قسمت از نمودارمزبور راکه بالای محورxها است دوبرابر کنیم. نمودار تابع داده شده به شکل زیر می‌باشد:



۶ـ نمودار تابع: $y=|x+2|x$

برای این تابع داریم:

$$y=\begin{cases} x^2+2x & \text{اگر } x\geqslant -2 \\ -x^2-2x & \text{اگر } x<-2 \end{cases}$$

نمودارهای‌دوتابع $y=x^2+2x$ و $y=-x^2-2x$ را به عنوان کمکی رسم می کنیم . از اولی آن قسمت را که سمت‌چپ خط $x=-2$ است و از دومی آن قسمت را که سمت راست خط مزبور است حذف می کنیم. شکل باقیمانده نمودار تابع داده شده است.

۷ـ نمودار تابع: $y=2^x-2^{-x}$

دوتابع کمکی $y_1=2^x$ و $y_2=2^{-x}$ را رسم‌می کنیم. با توجه به ویژگیهای:

اولا داریم: $y_2<y<y_1$

ثانیاً هرگاه $x\to+\infty$ حد y بـا حد y_1 برابر است وهرگاه $y\to-\infty$ حد x همان حد y_2 است:

پس نمودار تابع مفروض از سمت راست با نمودار y_1 و از سمت چپ با نمودار y_2 مجانب است و عرض هر نقطه از آن مجموع نموداری عـرضهای هم طول از نمودارهـای y_1 و y_2 می‌باشد. این نمودار از مبدأ مختصات نیزمـی گذرد.

رسم نمودار چند تابع

ترجمهٔ: **فرید خواجه زاده** دانشگاه صنعتی آریامهر

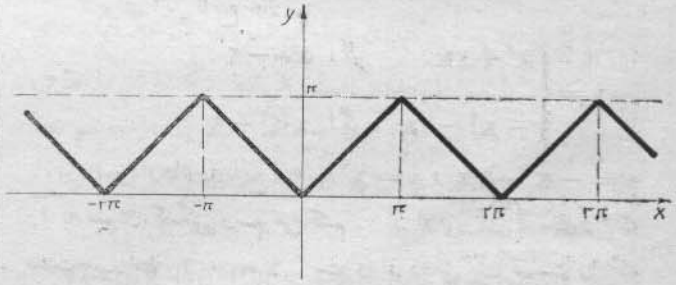
تاریخ رسید به ادارهٔ مجله: ۵۳/۱۱/۱۲

۱ـ رسم نمودار تابع $y=\arccos(\cos x)$

قلمرو تابع محور نا محدود xها است. برای هر مقدار از x رابطهٔ $|\cos x|\leq 1$ برقرار است، پس تابع معین است. همچنین تابع متناوب است و دورهٔ تناوب آن 2π است. پس کافی است نمودار تابع را در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنیم و برای فاصله‌های دیگر آن را انتقال دهیم. در این فاصله تابع عبارتست از:

$$y=\begin{cases} x & \text{اگر } 0\leq x\leq \pi \\ 2\pi-x & \text{اگر } \pi\leq x\leq 2\pi \end{cases}$$

بنابراین با توجه به تناوب تابع، نمودار آن به‌شکل زیر است:



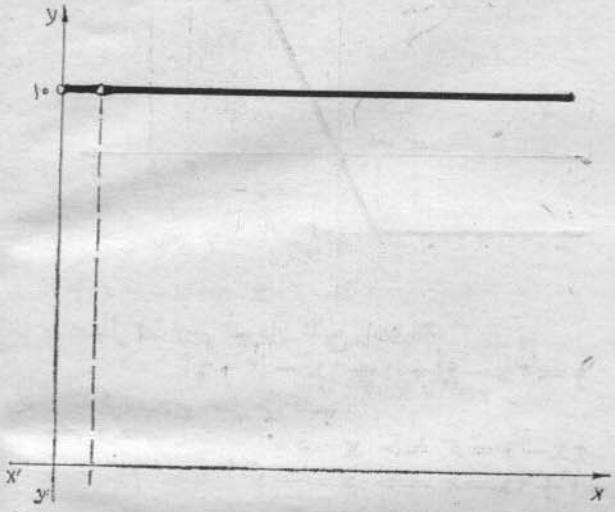
۲ـ نمودار تابع:

$$y=x^{\frac{1}{\log x}}$$

قلمرو تابع $1<x<\infty$ و $0<x<1$ است. از طرفی داریم:

$$y=x^{\frac{1}{\log x}}=x^{\log_x 10}=10$$

بنابراین نمودار تابع نیم‌خط $y=10$ است که در ربع اول محورها واقع است و نقطهٔ به طول $x=1$ از آن حذف گردیده است، مطابق با شکل زیر:

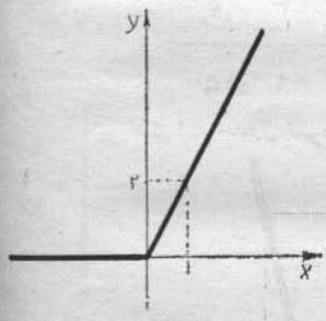


۳ـ نمودار تابع $y=x+\sqrt{x^2}$

این تابع به‌صورت زیر است:

$$y=\begin{cases} 2x & \text{اگر } x\geq 0 \\ 0 & \text{اگر } x<0 \end{cases}$$

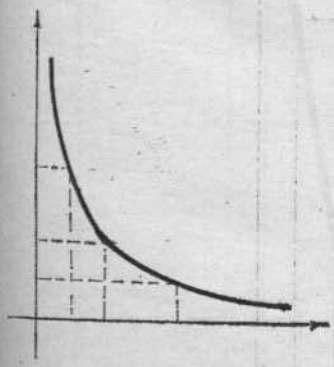
پس نمودار آن به شکل روبرو است.



۴ـ نمودار تابع:

$$y=\frac{2}{x+\sqrt{x^2}}$$

در ازای $x\leq 0$ این تابع نا معین است و در ازای $x>0$ داریم $y=\frac{1}{x}$ پس نمودار آن به شکل روبرو است (شاخه‌ای از هذلولی $y=\frac{1}{x}$ که در ربع اول محورهای مختصات واقع است).



دنباله در صفحهٔ ۳۱۳

Redécouvrons La Géomètrie
H.S.M. COXETER et S. L. GREITZER

برگردان به فارسی از: عبدالحسین مصحفی

نقطه‌های بر یك استقامت، خطهای متقارب

آنگاه پرگارها را به بزرگی تمام بگشود،
آنها را بکار انداخت و آسه‌ها و پهلوها را بکشید،
تا آنکه همهٔ مربعها و مستطیلها نموده شدند،
همچون شکلی پیچیده.

از کتاب دوم اقلیدس C.L. Dodgson

پس از بررسی خاصیتهای دیگری از مثلثها وچهار ضلعیها، دامنهٔ هندسهٔ تصویری را در روبرو خواهیم داشت، حتی از آن‌هم کمی فراتر خواهیم رفت. هرچند بیان منظم این موضوع جالب را در کتابی جداگانه باید انجام دهیم؛ اما یادآوری چهار قضیهٔ اساسی آن در اینجا به مورد می‌باشد، زیرا می‌توان آنها را با روشهای اقلیدسی ثابت کرد؛ در حقیقت، سه عدد از این قضیه‌ها آنقدر قدیمی هستند که در زمان کشف آنها روشی دیگر را نمی‌شناختند. در همهٔ این قضیه‌های مورد بحث، یا موضوع نقطه‌های واقع بر یك استقامت و یا موضوع خطهای متقارب به‌میان می‌آید. فکر هندسهٔ تصویری از آنجا ناشی شد که در بسیاری از حالتها خطهای متوازی را همچون خطهای متقارب در نظر گرفتند.

۳. ۱ـ چهارگوشه‌ها: قضیهٔ واریئیون

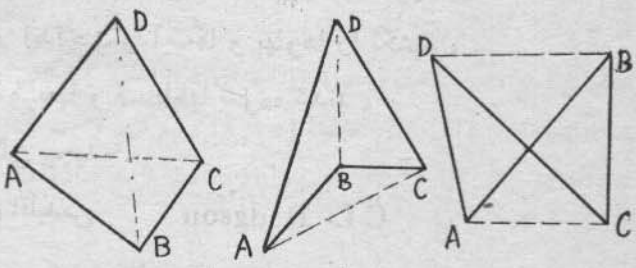
می‌توان گفت که چندضلعی شکلی است شامل تعدادی نقطه موسوم به رأسها و تعدادی پاره خطها موسوم به ضلعهای آن. نقطه‌ها به یك صفحه متعلقند و مجموعه‌ای مرتب تناوبی تشکیل می‌دهند. درحالی که ضلعها رأسهای مجاور را به یکدیگر وصل می‌کنند؛ بالاخره هرسه رأس مجاور نمی‌توانند بر یك استقامت باشند. به‌عبارت دیگر، چند ضلعی خط شکستهٔ بسته‌ای واقع در یك صفحه است. برای مثال، پنج‌ضلعی دارای پنج ضلع وپنج رأس و شش ضلعی از هرکدام شش عدد دارد و غیره. اما این نامگذاری که از یونانیان است (و نام چند ضلعی تعداد رأسها و ضلعهایش را بیان می‌کند) برای سه‌ضلعی معمول نیست؛ چنانچه آن را مثلث می‌نامیم. برای چهار ضلعی هم عنوان چهارگوشه (= چهار زاویه‌ای) بکار می‌رود[1] که در این کتاب نیز عنوان اخیر ترجیح داده می‌شود: در هندسهٔ تصویری که ضلعها دیگر پاره خطهای ساده نیستند بلکه خطهای نامعین می‌باشند لازم است که دو عنوان مزبور با دو معنی متفاوت بکار روند.

دوضلع چهارگوشه را مجاور یا مقابل می‌نامیم برحسب آنکه در یك رأس مشترك باشند یا نباشند. همچنین دو رأس را مجاور یا مقابل می‌نامیم برحسب آنکه روی یك ضلع واقع باشند یا نباشند. قطرهای چهارگوشه خطهایی هستند که هرجفت رأسهای مقابل را به یکدیگر وصل می‌کنند. بنابراین درچهارگوشهٔ

۱ـ بنا به تعریفی که توسط R. Deltheil و D. Caire بیان شده‌است: چهارگوشه شکلی است که ازچهار نقطهٔ واقع در صفحه تشکیل می‌شود، درصورتی از نامگذاری چهارضلعی برمی‌آید که شکل حاصل از چهار خط است، اما چهار خط واقع در صفحه شکل شامل شش رأس را بوجود می‌آورند که چهارضلعی کامل نام دارد.

ABCD ضلعها عبارتند از AB ، BC ، CD و DA که مثلا AB با BC و همچنین با DA مجاور و با CD مقابل است. قطرهای این چهارگوشه AC و BD می‌باشد.

درشکل زیر سه‌نوع چهارگوشهٔ با ظاهرهای کاملا متفاوت مشاهده می‌شود: اولی، از چپ، محدب است و دو قطر آن در داخل محیط آن قرار دارند؛ دومی مقعراست، یك قطرش در داخل و قطر دیگرش در خارج محیط آن واقع است؛ سومی پنجره‌ای است، هر دو قطرش در خارج پیرامون آن قرار دارند.



چنانکه مشاهد می‌شود، مساحت چهارگوشهٔ محدب برابر است با مجموع مساحتهای دو مثلث که به وسیلهٔ قطرچهارگوشه پدید می‌آید:

$$S(ABCD)=S(ABC)+S(CDA)=$$
$$=S(BCD)+S(DAB)$$

برای آنکه این دستور برای چهارضلعی مقعر نیز صادق باشد، مساحت مثلث را طبق تعریف زیر عدد جبری، مثبت یا منفی، می‌گیریم: مساحت مثلث ABC که به‌صورت S(ABC) نوشته می‌شود مثبت است هرگاه جهت گذاردن حرفهای A و B و C درجهت مستقیم، یعنی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، و S(ABC) منفی است هرگاه جهت گذاردن حرفهای A و B و C در جهت معکوس، یعنی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. بنابراین:

$$S(ABC)=S(BCA)=S(CAB)=$$
$$=-S(CBA)=-S(ACB)=-S(BAC)$$

با این تعریف برای چهارگوشهٔ مقعر واقع در وسط شکل بالا داریم:

$$S(ABCD)=S(BCD)+S(DAB)=$$
$$=S(CDA)-S(CBA)=S(CDA)+S(ABC)$$

با بکاربردن دستور بالا برای چهارگوشهٔ پنجره‌ای نتیجه خواهد شد که مساحت آن برابر است با تفاضل مساحتهای دو مثلثی که از برخورد ضلعها پدید می‌آید.

هرگاه قرارداد مربوط به جهت‌دار بودن مساحت را توأم با قرار داد مربوط به خط و پاره خطهای جهت‌دار درنظر بگیریم، می‌توانیم اثباتی را که در فصلهای قبل برای قضیهٔ سوا بیان کردیم، برای حالتی که نقطه‌های X و Y و Z در امتداد ضلعها واقعند نیز آن را تعمیم دهیم.

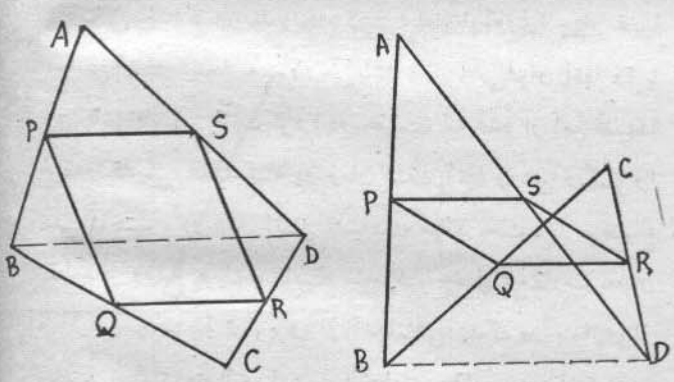
قضیهٔ زیر که منسوب به پیروارینیون:

(Pierre Varignon, 1654–1722)

است آنقدر ساده می‌باشد که تعجب‌آور است چرا انتشار آن تا ۱۷۳۱ به تأخیر افتاد.

قضیهٔ ۱.۱.۳ - هرگاه وسطهای ضلعهای یك چهارگوشه رامتوالیاً به‌هم وصل کنیم، یك متوازی‌الاضلاع بدست می‌آید که مساحت آن نصف مساحت چهارگوشه است.

برای اثبات این قضیه قبلا باید بدانیم پاره خطی که وسطهای دوضلع مثلث را به‌هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی است و طولش برابر با نصف طول آن ضلع است.



هرگاه P ، Q ، R و S به ترتیب وسطهای ضلعهای AB ، BC ، CD و DA از چهارگوشهٔ ABCD باشد، درمثلثهای ABD وCBD پاره‌خطهای PS و QR که وسطهای دوضلع را به‌هم وصل کرده‌اند با ضلع سوم یعنی قطر BD از چهارگوشه موازیند و با نصف آن برابرند. بنابراین دوپاره‌خط PS و QR باهم مساوی وهمچنین باهم موازیند پس PQRS متوازی‌الاضلاع است که به متوازی‌الاضلاع و ارینیون چهارگوشهٔ ABCD موسوم است.

در بارهٔ مساحت این متوازی الاضلاع، قبلا یادآوری

می‌شود که هرگاه P وسط AB و Q وسط BC از مثلث ABC باشد، چون PQ نصف AC و ارتفاع مثلث BPQ نصف ارتفاع مثلث BAC است، پس مساحت مثلث BPQ یک چهارم مساحت مثلث BAC می‌باشد. بنابراین:

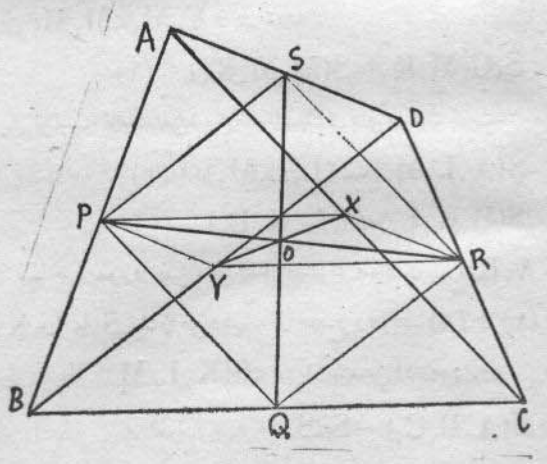
$$S(PQRS)=S(ABCD)-S(PBQ)-S(RDS)-S(QCR)-S(SAP)$$

$$=S(ABCB)-\frac{1}{4}[S(ABC)+S(CDA)+S(BCD)+S(DAB)]=S(ABCD)-$$

$$-\frac{1}{4}[S(ABCD)+S(ABCD)]=\frac{1}{2}S(ABCD)$$

عملیاتی که انجام گرفت برای چهار گوشهٔ مقعر (ساده یا پنجره‌ای) نیز صادق است.

در هر متوازی الاضلاع دو قطر منصف یکدیگرند که نقطهٔ تلاقی آنها مرکز متوازی‌الاضلاع است. هرگاه X وسط AC و Y وسط BD باشد، برای چهار گوشهٔ ABCD متوازی ـ الاضلاع PQRS را داریم که O مرکز آن وسط هریک از قطرهای PR و QS است، همچنین برای چهار گوشهٔ ACDB نیز متوازی‌الاضلاع PYRX را داریم که همان O مرکز آن خواهد بود که وسط XY نیز می‌باشد. بنابراین:

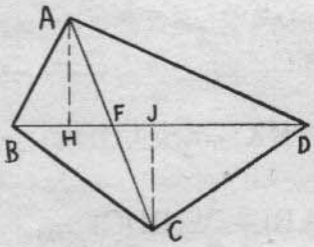


قضیهٔ ۲.۱.۳- در هر چهار گوشه خطهایی که وسطهای ضلعهای روبرو را به‌هم وصل می‌کنند باخطی که وسطهای دو قطر را به‌هم وصل می‌کند در یک نقطه متقارنند که وسط هر کدام از آنها می‌باشد.

این قضیه اولین قضیه دربارهٔ خطهای متقارب است که در این فصل بیان شد، قبل از بیان قضیه‌های دیگر در این باره، قضیه‌ای که درحد خود مفید است بیان می‌شود:

قضیهٔ ۳.۱.۳- اگر یکی از قطرهای چهار گوشه آن را به دو مثلث با مساحتهای برابر تقسیم کند، این قطر منصف قطر دیگر است. برعکس، هرگاه قطری از یک چهار گوشه منصف قطر دیگر باشد، آن قطر چهار گوشه را به دو مثلث با مساحتهای برابر تقسیم می‌کند.

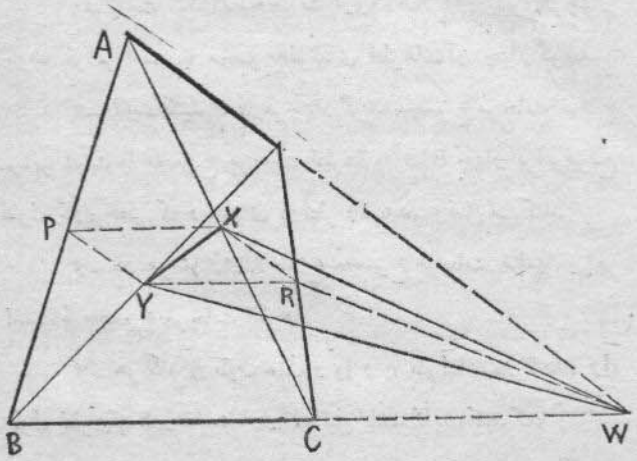
فرض می‌کنیم که در چهار گوشهٔ ABCD دو مثلث ABD و CBD معادل باشند (مساحتهای برابر داشته باشند)، چون این دو مثلث در قاعده مشترکند پس دارای ارتفاعهای برابرند: AH=CJ و از آنجا برمی‌آید که دو مثلث AHF و CFJ باهم برابرند که در نتیجه AF=FC یعنی F وسط AC است.



برعکس، از تساوی AF=FC تساوی دو مثلث AHF و CFJ و از آنجا تساوی AH=CJ نتیجه می‌شود که معلوم می‌دارد دو مثلث ABD و CBD مساحتهای برابر دارند.

اکنون قضیهٔ دوم مربوط به عنوان این فصل را بیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۴.۱.۳- هرگاه AD و BC دو ضلع روبرو از چهار گوشهٔ ABCD در W برخورد کنند و X و Y به‌ترتیب



وسطهای قطرهای AC و BD باشد ، مساحت مثلث WXY یك‌چهارم مساحت چهارگوشهٔ ABCD است.

P وسط AB و R وسط CD را درنظر می‌گیریم و خطهای PX و PY و RX و RY و RW را رسم می‌کنیم. درمثلث BCD خط RY موازی با BC است و DW قطردیگر چهارگوشهٔ DYWR را در وسط آن قطع می‌کند. بنا براین بنا برعکس قضیهٔ ۳.۱.۳ داریم :

$$S(RYW)=S(YRD)=\frac{1}{4}S(BCD)$$

همچنین خواهیم داشت:

$$S(RWX)=\frac{1}{4}S(CDA)$$

علاوه‌برآن باتوجه به قضیهٔ وارینیون‌برای چهارگوشهٔ ABDC خواهیم داشت:

$$S(RXY)=\frac{1}{2}S(PYRX)=\frac{1}{4}S(ABDC)$$

$$=\frac{1}{4}S(CAB)+\frac{1}{4}S(BDC)$$

$$=\frac{1}{4}S(ABC)-\frac{1}{4}S(BCD)$$

از جمع نظیر به نظیر طرفین سه رابطهٔ بالا بدست می‌آید:

$$S(WXY)=S(RXY)+S(RYW)+S(RWX)$$

$$=\frac{1}{4}[S(ABC)-S(BCD)+S(BCD)$$

$$+S(CDA)=\frac{1}{4}S(ABCD)$$

تمرین

۱ـ ثابت کنید که محیط متوازی‌الاضلاع وارینیون هرچهار گوشه برابر است با مجموع طولهای قطرهای آن چهارگوشه.

۲ـ ثابت کنید که درهرچهارگوشه مجموع مربعات اضلاع برابر است با مجموع مربعات قطرها به‌اضافهٔ چهار برابر مربع طول پاره خطی که وسطهای دوقطر را به‌هم وصل می‌کند.

۳ـ در هرمتوازی‌الاضلاع مجموع مربعات ضلعها برابر است با مجموع مربعات قطرها.

۴ـ هرگاه a طول ساق و b و c طولهای دو قاعده و d طول قطر یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین باشد ثابت کنید که:

$$d^2=a^2+bc$$

حل برخی‌از... (دنباله ازصفحهٔ ۳۲۱)

آنرا H می‌نامیم.

ثابت کنید که زاویهٔ DHQ قائمه است.

حل ـ فرض کنیم BH پاره‌خط AD را در نقطهٔ F قطع کند.چون دو مثلث FAB و PBC متشابهند پس:

$$AF=PB=BQ \text{ و } DF=CQ$$

یعنی DFQC یك مستطیل است . DQ و FC اقطار دایرهٔ محیطی این مستطیل می‌باشد ، وچون زاویهٔ FHC قائمه است پس نقطهٔ H روی این دایره قرار دارد و زاویهٔ DHQ قائمه است .

۱۵ـ مثلث ABC به مساحت‌واحد مفروض‌است. فرض کنیم A_1 ، B_1 و C_1 به‌ترتیب‌وسطهای اضلاع BC ، AC و AB باشند. مطلوبست تعیین مساحت مینیمم بخش مشترك مثلثهای $A_1B_1C_1$ و KLM که نقاط K و L و M به‌ترتیب روی پاره‌خطهای AB_1 و CA_1 و BC_1 قرار دارند.

حل ـ نقاط تقاطع A_1B_1 را با LK و LM به‌ترتیب با L_1 و L_2 و نقاط تقاطع B_1C_1 را با KM و KL به‌ترتیب با M_1 و M_2 نشان می‌دهیم.

چون :

$$\frac{C_1M_2}{M_2M_1}<\frac{AK}{KC}<\frac{AB_1}{B_1C_1}=1$$

بنا براین $C_1M_2<M_2M_1$ و درنتیجه :

$$S(C_1M_2K_1)<S(M_2M_1K_1) \quad (1)$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که نامساوی زیرصادق است.

$$S(A_1L_2M_1)<S(L_2L_1M_1) \quad (2)$$

$$S(B_1K_2L_1)<S(K_2K_1L_1) \quad (3)$$

مساحت مورد نظر یعنی‌فصل مشترك مثلثهای $A_1B_1C_1$ و KLM را با S نشان می‌دهیم. از جمع روابط (۱) و (۲) و (۳) با رابطهٔ $0<S(K_1L_1M_1)$ بدست می‌آوریم:

$$S(A_1B_1C_1)-S<S$$

از اینجا :

$$2S>S(A_1B_1C_1)=\frac{1}{4} \Longrightarrow S>\frac{1}{8}$$

تساوی $S=\frac{1}{8}$ درصورتی برقرار می‌گردد که یکی‌از پاره‌خطهای KL یا LM یا MK بر میانهٔ مثلث ABC منطبق گردد.

حل برخی از مسئله‌های سی‌وچهارمین المپیاد ریاضی مسکو

ترجمهٔ : مهندس فتح‌الله زرگری

۱ـ ثابت کنید ، که $N=1000000001$ ، که در آن به تعداد $2^{1000}+2^{1974}-1$ صفر موجود است غیر اول می‌باشد .

حل ـ عدد $10^{2^{2000}}$ را با a و عدد $2^{974}+1$ را با n نمایش می‌دهیم . در این‌صورت N به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$N=10^{2^{1974}+2^{1000}}+1=10^{2^{1000}(2^{974}+1)}+1=a^n+1$$

می‌دانیم که اگر n فرد باشد عدد a^n+b^n بر $a+b$ بخش پذیر است . بنابراین $N=a^n+1$ بر :

$$a+1=10^{2^{1000}}+1$$

بخش‌پذیر بوده و غیر اول می‌باشد.

۲ـ ثابت کنید ، که در دایرهٔ به‌شعاع واحد نمی‌توان دو مثلث بـه مساحتهای بیش از واحد بدون اینکه رویهـم بیفتند محاط کرد.

حل ـ ثابت می کنیم که هرگاه مساحت مثلثی بزرگتر از واحد باشد و در دایرهٔ به‌شعاع واحد قرار داشته باشد، مرکز دایره حتماً در داخل مثلث خواهد افتاد. درحقیقت، تمام ارتفاعهای مثلث بزرگتر از یك است. زیرا هرضلع مثلث از قطردایره یعنی از ۲ بزرگتر نیست و مساحت مثلث بزرگتر از یك می‌باشد . بنابراین مثلث داده شده از تقاطع سه‌نوار حاصل می گردد که که پهنای هریك بیش‌از یك می‌باشد وبه این جهت مرکزدایره را شامل می‌باشد. پس:

هرگاه در دایرهٔ به‌شعاع واحد دو مثلث که مساحت آنها بیش از واحد است قرار داشته باشند هردوی آنها مرکز دایره را در خود دارند و بنابراین همدیگر را قطع می کنند.

۳ـ دو چـرخ دندهٔ مشابه دارای n^2-n+2 دندانه می‌باشند. آنها را رویهم گذاشته و n جفت دندانه $(n=6)$ را اره می کنیم .

ثابت کنید که می‌توان یکی از چرخ دنده‌ها را نسبت به دیگری طوری چرخاند، که در محل دندانه‌های اره شدهٔ یکـی ازچرخ دنده‌ها دندانه‌های‌سالم چرخ دندهٔ دیگرظاهرشود.

حل ـ کلا n^2-n+1 دوران (چرخ دندهٔ پائینی نسبت به چرخ دندهٔ بالائـی) موجود است کـه در نتیجهٔ آنها کلیهٔ دندانه‌های هر دوچوخ دنده برهم منطبق می‌شوند . قسمتی از چرخ دنده راکه فاقددندانه می باشد «شکاف» می‌نامیم. «شکاف» چرخ دندهٔ پائینی را بررسی می کنیم .

درست در $n-1$ وضعیت (بجز وضع ابتدائی) چـرخ دندهٔ بالائی ، بالای این شکاف ، شکاف چرخ دندهٔ بالائـی ظاهر می گردد . لیکن شکاف روی جرخ دندهٔ پائینی n استو به این جهت از n^2-n+1 دوران چـرخ دندهٔ بالائی فقط $n(n-1)$ از آنها باعث انطباق «شکاف» هردوچـرخ دنده می گردند.

چون $(n^2-n+1)-n(n-1)=1$ است . چنان دورانی ازچرخ دندهٔ بالائی‌پیش می‌آید ، که انطباق «شکاف» وجود نخواهد داشت .

۴ـ از پاره‌خطهای‌به طولهای a ، b ، c می‌توان مثلثی ساخت . ثابت کنید، که از پاره‌خطهای به طولهای :

$$\frac{1}{a+b} \text{ و } \frac{1}{b+c} \text{ و } \frac{1}{a+c}$$

نیز می‌توان مثلثی ساخت.

حلـ اعداد a و b و c در نابرابریهای زیرصادقند:

$$a+b>c \text{ و } b+c>a \text{ و } c+a>b$$

اما داریم:

$$\frac{1}{a+c}>\frac{1}{(a+b)+(a+b)}$$

$$\frac{1}{b+c}>\frac{1}{(a+b)+(a+b)}$$

ازجمع این نامساوی‌ها بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+b}$$

به همین ترتیب نامساویهای زیر ثابت می‌گردند:

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}>\frac{1}{b+c} \text{ و } \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+c}$$

۵ـ مکعبی که رأسها ومرکزهای وجوهش علامت‌گذاری شده‌اند مفروض است. اقطار وجوه آنرا رسم می‌کنیم. آیا می‌توان از روی اقطار کلیهٔ نقاط علامت‌گذاری شده را طی کرد بدون اینکه دوبار از یك محل علامت‌گذاری شده عبور کرد؟

حلـ توجه می‌کنیم که با حرکت روی اقطار وجوه، هربار ازرأس به مرکز وجه می‌رسیم و به‌عکس. یعنی رأسهاو مرکزهای وجوه متناوباً جا عوض می‌کنند. هرگاه مسیرموردنظر روی مکعب وجود داشته باشد، در این‌صورت تعداد رأسها باید با تعداد وجوه بیش از یك تفاوت نداشته باشد، لیکن $۸-۶=۲>۱$ می‌باشد. بنابراین جواب این مسئله منفی می‌باشد.

۶ـ ثابت‌کنید که در $۲n$ ضلعی محدب دلخواه قطری یافت می‌گردد که با هیچ یك از اضلاع آن موازی نمی‌باشد.

حلـ تعداد قطرهای $۲n$ ضلعی محدب برابر است با: $n(۲n-۳)$. چندقطر وجود دارد که باضلع ثابت $۲n$ ضلعی موازی است؟ ضلع دو رأس متوالی چند ضلعی را به‌هم وصل می‌کند و از $(۲n-۲)$ رأس بقیه اقلاً یکی به یکی از اقطار متعلق نمی‌باشد. لیکن‌تعداد رأسهایی که در دو سرقطرها می‌باشند زوج می‌باشد. پس‌قطرها $(۲n-۴)$رأس‌را به‌هم وصل‌می‌کنند.

بنابراین قطرهای موازی یك‌ضلع حداکثر $\frac{۲n-۴}{۲}$ می‌باشد.

بطور کلی تعداد قطرهایی که هر یك موازی اقلاً یکی از اضلاع می‌باشد حداکثربرابر است با:

$$۲n\times\frac{۱}{۲}(۲n-۴)=n(۲n-۴)$$

بنابراین حداقل به تعداد $n(۲n-۳)-n(۲n-۴)=n$ قطریافت می‌گردد که با هیچیك از اضلاع موازی نیستند.

۷ـ AD و BE نیمسازهای‌مثلث ABC می‌باشند. اگر $AC>BC$ باشد ثابت‌کنید که:

$$AE>DE>BD$$

راهنمائیـ از قضیهٔ زیر درمورد نیمسازها استفاده‌کنید:

نیمساز هر زاویه ضلع روبروی به‌آن زاویه را به نسبت دو ضلع مجاور تقسیم می‌کند. وسطهای AC و BC را به‌هم وصل‌کنید ومثلثهای حاصل‌را بررسی‌کرده و از این خاصیت‌که در مثلث ضلع بزرگتر روبروی زاویهٔ بزرگتر می‌باشد، استفاده کنید.

۸ـ ثابت کنید که عددهای $۱۹۷۴^n+۲^n$ و ۱۹۷۴^n درمبنای ده دارای تعداد مساوی رقم می‌باشند.

حلـ تعداد ارقام عدد ۱۹۷۴^n درمبنای ده حداقل $۳n$ (که n عددی است‌طبیعی و $۱۹۷۴^n>۱۰^{۳n}$) می‌باشد. فرض کنیم عدد ۱۹۷۴^n در مبنای ده دارای k رقم باشد، در این صورت داریم.

$$۱۰^{k-۱}<۱۹۷۴^n\leqslant ۱۰^k$$

فرض می‌کنیم که ارقام عدد $۱۹۷۴^n+۲^n$ بیش از ارقام عدد ۱۹۷۴^n باشند. در این‌صورت $۱۹۷۴^n+۲^n\geqslant ۱۰^k$. به‌سادگی مشاهده می‌گردد که $۱۹۷۴^n=۹۸۷^n\times ۲^n$ یعنی:

$$۱۹۷۴^n+۲^n=۲^n(۹۸۷^n+۱)$$

و $k\geqslant ۳n>n$ و چون ۱۰^k بر ۲^n بخش پذیر است، داریم:

$$۹۸۷^n<۲^{k-n}\times ۵^k\leqslant ۹۸۷^n+۱$$

بنابراین:

$$۲^{k-n}\times ۵^k=۹۸۷^n+۱ \qquad (۱)$$

و: $k-n\geqslant ۲n$. هرگاه $n\geqslant ۲$ باشددراین‌صورت $۲^{k-n}\times ۵^k$ بر ۸ بخش پذیر است، لیکن $۹۸۷^n+۱$ بر ۸ بخش پذیر نمی‌باشد (باقیماندهٔ ۲ یا ۴ یا ۶ می‌دهد) به این جهت تساوی (۱) برقرار نیست. این‌تساوی به ازاء $n=۱$ نیزبرقرار نیست و حکم ثابت است.

۹ـ کره‌ای مفروض‌است و توسط ۳۷ سیارهٔ نقطه‌ای‌شکل احاطه شده است. ثابت‌کنید، که در لحظهٔ دلخواه، روی کره نقطه‌ای یافت می‌گردد. که ازآن نقطه یك ستاره‌شناس نمی‌تواند بیش از ۱۷ سیاره را مشاهده‌کند.

حلـ از مرکز کره ویك‌جفت سیارهٔدلخواه صفحهٔ P‌را عبور می‌دهیم (این صفحه را صفحهٔ استوای‌کره فرض می‌کنیم) محورکره را عمود برصفحهٔ استوا رسم می‌کنیم.

این محور سطح کره را در قطبهای N و S قطع می‌کند.

در نقاط N و S صفحاتی موازی صفحهٔ استوا و مماس بر کره عبور می‌دهیم. از نقطهٔ N فقط سیاره‌هایی که بالای صفحهٔ مماس بالایی قرار دارند و از نقطهٔ S فقط سیاره‌هایی که پایین صفحهٔ مماس قرار دارند مشاهده می‌گردند هرگاه از هر قطب بیش‌از ۱۷ سیارهٔ نقطه‌ای شکل مشاهده گردد. یعنی درحد ۱۸ سیاره و در این‌صورت تمام سیاره‌ها باید به تعداد حداقل :

$$۲\times ۱۸+۲=۳۸$$

باشند که مخالف فرض مسئله است.

۱۰ـ a) هریك از اضلاع شش ضلعی محدبی بلندتر از واحد می‌باشد . آیا همیشه در این شش ضلعی قطری بلندتر از دو یافت می‌شود؟

b) در شش ضلعی محدب ABCDEF طول اقطار AD ، BE و CF بزرگتر از دو می‌باشند.

آیا همیشه در چنین شش‌ضلعی ، ضلعی بلندتر از واحد پیدا می‌شود ؟

جواب ـ a) : همیشه اینطور نیست. روی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع ۲ مثلثهایی متساوی‌الساقین با قاعده‌های به‌طول ۲ و ارتفاعهای به‌طول ۰/۱ می‌سازیم، شش‌ضلعی حاصل مثالی است که درآن کلیهٔ اضلاع بزرگتر از واحدند اما اقطار بزرگتر از ۲ نمی‌باشند.

b) این مسئله همیشه ممکن است. می‌توان فرض کرد که زاویهٔ α بین AD و BE حداقل ۶۰° می‌باشد (در واقع هرگاه از یك نقطه خطوطی موازی AD ، BE و CF رسم کنیم در این‌صورت مقدار یکی از زوایای بین‌خطوط مجاورهم حداقل ۶۰° خواهد بود) .

مثلث BED را به‌متوازی‌الاضلاع BEDK بدل می‌کنیم. از آنجا که :

$$DK=BE=AD=۲$$

و $\angle ADK=\alpha>۶۰^\circ$ بنابر این $AK>۲$ از اینجا:

$$AB+ED=AB+BK>۲$$

یعنی $AB>۱$ یا $DE>۱$.

۱۱ـ مطلوبست تعیین کلیهٔ اعداد طبیعی n و k بطوری که n^n دارای k رقم و k^k دارای n رقم باشند.

جواب ـ n و k مساوی‌هستند وبرابرند با ۱ یا ۸ یا ۹ عدد N دارای m رقم خواهد بود هرگاه نامساوی $۱۰^{m-۱}\leqslant N<۱۰^m$ برقرار باشد . ثابت می‌کنیم که نه n^n و نه k^k نمی‌توانند دارای بیش از ۹ رقم باشند. هرگاه $n>k$ و $n>۱۰$ باشد در این صورت : $n^n>۱۰^n>۱۰^k$ بوده و n^n دارای بیش از k رقم می‌باشد. حال می‌ماند که روابط زیر را تحقیق کنیم: $۳^۳<۱۰^۲$ ، $۲^۲<۱۰^۱$

و $۷^۷<۱۰^۶$ ، $۶^۶<۱۰^۵$ ، $۵^۵<۱۰^۴$ ، $۴^۴<۱۰^۳$

، $۱۰^۸<۹^۹<۱۰^۹$ ، $۱۰^۷<۸^۸<۱۰^۸$

۱۲ـ روی اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه در مثلث متساوی‌الساقین و قائم الزاویهٔ ABC به‌ترتیب نقاط D و E را طوری انتخاب می‌کنیم که $CD=CE$ باشد. از D و C بر AE عمود کرده امتدا می‌دهیم تا وتر AB را به‌ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید ، که $KL=LB$.

حل ـ مثلث ABC را حول رأس C به اندازهٔ ۹۰° چنان می‌گردانیم که نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد . در این‌صورت نقطهٔ E به نقطه‌ای مانند F واقع بر AC می‌رسد بطوری که

$$FB \parallel CL \parallel DK \text{ و } FC=CD \Longrightarrow BL=LK$$

۱۳ـ مطلوبست تعیین کلیهٔ اعداد سه‌رقمی A به‌قسمی که: میانگین حسابی کلیهٔ اعداد که از جابجائی ارقام‌عدد A بدست می‌آید برابر A باشد.

حل ـ فرض می‌کنیم x و y و z ارقام عدد موردنظر یعنی $A=۱۰۰x+۱۰y+z$ باشد.فرض مسئله را به‌صورت معادله‌ای می‌نویسیم که پس از ساده کردن به صورت زیر در می‌آید:

$$۳۷(x+y+z)=۱۰۰x+۱۰y+z$$

$$\Longrightarrow ۷x=۳y+۴z$$

این رابطه را می‌توان به یك جفت عامل بدل کرد مثلاً با نوشتن معادله به‌صورت :

$$۷(x-y)=۴(z-y)$$

بدست می‌آوریم یا $x=y=z=۰$ یا $z-y=۷$ و $x-y=۴$ و یا $z-y=-۷$ و $x-y=-۴$. رویهم تعداد ۱۵ جواب داریم (۱۱۱ ، ۲۲۲ ، ۰۰۰ ، ۹۹۹ ، ۴۰۷ ، ۵۱۸ ، ۶۲۹ ، ۳۷۰ ، ۴۸۲ ، ۵۹۲).

۱۴ـ مربع ABCD مفروض است . نقاط P و Q به‌ترتیب روی اضلاع AB و BC قرار دارند بطوری که $BP=BQ$. از نقطهٔ B عمودی بر PC فرود آورده پای

دنباله در صفحهٔ ۳۱۸

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۱۱۶

حل مسائل ویژهٔ سال اول نظری

۱۱۶/۱ـ سه مجموعهٔ A و B و C جزءهایی از مجموعهٔ مرجع M می‌باشند. حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین‌صورت بدست آورید:

$$X=(A\cap B\cap C)\cup A\cap(B'\cup C')\cup A'$$

حل ـ به ترتیب داریم:

$$X=(A\cap B\cap C)\cup A\cap B'\cup A\cap C'\cup A'$$
$$=A\cap[(B\cap C)\cup B'\cup C']\cup A'$$

اما داریم:

$$(B\cap C)\cup B'\cup C'=(B\cap C)\cup(B\cap C)'=M$$
$$X=A\cap M\cup A'=A\cup A'=M$$

۱۱۶/۲ـ می‌دانیم که اگر مجموعهٔ E دارای n عضو باشد تعداد همهٔ زیر مجموعه‌های آن 2^n خواهد بود. مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های مجموعهٔ E را با P(E) نشان می‌دهیم. هرگاه n عدد اصلی مجموعهٔ E باشد، عدد اصلی مجموعهٔ $F=P(P(P(F)))$ را برحسب n حساب کنید. آیا مجموعهٔ E وجود دارد به قسمی که عدد اصلی مجموعهٔ F برابر با ۶۵۵۳۶ باشد؟ برای عدد ۴۰۹۶ چطور؟

حل ـ عدد اصلی P(E) برابر با 2^n است پس عدد اصلی $P(P(E))$ می‌شود $2^{(2^n)}$ و عدد اصلی مجموعهٔ $F=P(P(P(E)))$ می‌شود $2^{\left[2^{(2^n)}\right]}$. ازطرف دیگر داریم

$$65536=256^2=(16^2)^2=2^{16}$$

$$2^{\left[2^{(2^n)}\right]}=2^{16}\iff 2^{(2^n)}=16=2^4$$

$$2^n=4=2^2\iff n=2$$

مجموعهٔ با دوعضو جواب مسئله است.

برای عدد دیگر داریم:

$$2^{\left[2^{(2^n)}\right]}=4096=64^2=2^{12}$$

$$2^{(2^n)}=2^{12}\iff 2^n=12$$

اما به‌ازای عدد طبیعی n تساوی اخیر ممکن نیست. یعنی مجموعهٔ باشرط‌داده شده وجود ندارد.

۱۱۶/۳ـ حاصل ضرب چهار عدد فرد متوالی برابر است با $N=3317184009$. با استفاده از عدد نویسی به صورت علمی آن چهار عدد را بیابید.

حل ـ اولا چون رقم یکان حاصل ضرب ۹ است پس رقم یکان هیچ‌یك از عددها ۵ نیست. ثانیاً داریم:

$$N=33/13\times10^8\Longrightarrow\sqrt{N}=5/76\times10^4$$

$$\sqrt[4]{N}=2/40\times10^2$$

سر راست شدهٔ عددهای مطلوب ۲۴۰ است و چون‌این عددها فرد و رقم یکان آنها ۵ نیست، بنابراین عبارتند از: ۲۳۷ و ۲۳۹ و ۲۴۱ و ۲۴۳.

۱۱۶/۴ـ همهٔ جوابهای معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$$(x+y+1)^2=3(x+y+xy-a^2)$$

حل ـ معادله را به ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$x^2+y^2+1+2xy+2x+2y-3x-3y-3xy+3a^2=0$$
$$x^2+y^2+1-xy-x-y+3a^2=0$$
$$2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y+6a^2=0$$
$$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(x^2-2xy+y^2)+6a^2=0$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2+6a^2=0$$

مجموع چند مقدار نا منفی تنها وقتی می‌تواند صفر باشد که هریك از آنها صفر باشد.

$$x-1=0 \text{ و } y-1=0 \text{ و } x-y=0 \text{ و } a=0$$
$$x=x=1 \text{ و } a=0$$

۱۱۶/۵ـ چهار عدد فرد متوالی بیابید که حاصل ضربشان مجذور کامل باشد.

حل ـ اگر n کوچکترین این عددها باشد داریم:

$$n(n+2)(n+4)(n+6)=m^2$$
$$n^4+12n^3+44n^2+48n=m^2$$

به دو طرف ۱۶ اضافه می‌کنیم وطرف اول را چنین می‌نویسیم:

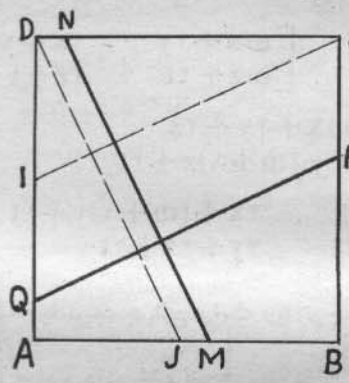
$$n^4+36n^2+16+12n^2+8n^2+48n=m^2+16$$

$$(n^2+6m+4)^2=m^2+16$$

m^2+16 باید مجذور کامل باشد و m عدد طبیعی فرد است پس $m^2=9$ و نتیجه می‌شود که $n=-3$ می‌باشد.

$$(-3)(-1)(1)(3)=9$$

۱۱۶/۶ـ از نقطهٔ I واقع در داخل مربع $ABCD$ دو خط عمود برهم رسم می‌کنیم که یکی از آنها ضلعهای مقابل AB و CD یا امتداد آنها را در M و N و دیگری ضلعهای مقابل BC و DA یا امتداد آنها را در P و Q تلاقی می‌کند. ثابت کنید $PQ=MN$



حل ـ از C موازی با PQ رسم می‌کنیم تا با DA در I برخورد کند. همچنین از D موازی با NM رسم می‌کنیم تا با AB در J تلاقی کند. دوخط CI و DJ نیز برهم عمودند پس دوزاویهٔ DCI و CDJ متمم یکدیگرند. دو زاویهٔ CDJ و JDA نیز متمم یکدیگرند. بنابراین دوزاویهٔ DCI و JDA باهم برابرند و درنتیجه دومثلث CDI و ADJ باهم برابر بوده تساوی $CI=DJ$ بدست می‌آید. هریك از چهارضلعیهای $CIQP$ و $DJMN$ متوازی‌الاضلاع است پس:

$$MN=DJ \text{ و } PQ=CI \text{ و } CI=DJ \Longrightarrow MN=PQ$$

۱۱۶/۷ـ دایره‌ای را به n قسمت برابر تقسیم می‌کنیم و ازهر نقطه به نقطهٔ دیگری که از آن به فاصلهٔ m قسمت واقع است وصل می‌کنیم. ثابت کنید که از هر نقطهٔ داخل دایره حداکثر بیش از دو خط از خطهای مرسوم نمی‌تواند بگذرد.

حل ـ وترهای حاصل همه با هم برابرند. پس ازمرکز دایره به یك فاصله‌اند، یعنی همهٔ آنها بردایره‌ای که با دایرهٔ اول هم مرکز است مماس می‌باشند. می‌دانیم که از یك نقطه حداکثر دوخط می‌توان بردایره‌ای مماس کرد. بنابراین از هر نقطه بیش‌از دو خط از وترهای مزبور نمی‌گذرد.

حل مسائل ویژهٔ سال دوم علوم تجربی

۱۱۶/۸ـ ضریبهای هریك از دو معادلهٔ زیر ریشه‌های معادلهٔ دیگر است. جوابهای این معادله‌ها را بدست آورید:

$$x^2+y_1x+y_2=0 \text{ و } y^2+x_1y+x_2=0$$

حل ـ بنابه روابط بین ریشه‌ها و ضریبهای معادلهٔ درجهٔ دوم و بنابه فرض داریم:

$$(1)\ x_1+x_2=-y_1 \text{ و } (2)x_1x_2=y_2$$

$$(3)y_1+y_2=-x_1 \text{ و } (4)y_1y_2=x_2$$

از رابطه‌های (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $x_2=y_2$

هرگاه $x_2=y_2=0$ باشد نتیجه می‌شود:

$x_1=-y_1=a$ دلخواه

در این‌صورت معادله‌ها عبارتند از:

$$x^2-ax=0 \text{ و } y^2+ay=0$$

هرگاه $x_2=y_2\neq 0$ باشد از رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$x_1=y_1=1 \text{ و } x_2=y_2=-2$$

در این صورت هریك از دو معادله می‌شود:

$$x^2+x-2=0$$

۱۱۶/۹ـ هرگاه مجذورهای کتانژانتهای زاویه‌هایی به تصاعد توافقی باشند، ثابت کنید که مجذورهای کسینوسهای آن زاویه‌ها نیز به تصاعد توافقی می‌باشند.

حل ـ چند عدد وقتی به تصاعد توافقی می‌باشند که معکوسهای آنها به تصاعد حسابی باشند. بنابراین معکوسهای مجذورات کتانژانتهای زاویه‌ها به تصاعد حسابی می‌باشند:

$$(1)\ \div,\ \frac{1}{cotg^2\alpha},\ \frac{1}{cotg^2\beta},\ \frac{1}{cotg^2\gamma},\ldots$$

اما اتحاد زیر را داریم:

$$\frac{1}{cotg^2x}=\frac{sin^2x}{cos^2x}=\frac{1-cos^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}-1$$

بنابراین از تصاعدحسابی (۱) تصاعدحسابی زیر نتیجه‌می‌شود.

$$(2)\ \div,\ \left(\frac{1}{cos^2\alpha}-1\right),\ \left(\frac{1}{cos^2\beta}-1\right),\ \left(\frac{1}{cos^2\gamma}-1\right),\ldots$$

ازاین تصاعد حسابی، تصاعدحسابی زیر بدست می‌آید:

$$(۳) \div ، \frac{۱}{\cos^۲\alpha} ، \frac{۱}{\cos^۲\beta} ، \frac{۱}{\cos^۲\gamma} ، \ldots$$

معکوسهای جمله‌های این تصاعد حسابی، یعنی مجذورات کسینوسهای زاویه‌ها به‌تصاعد توافقی می‌باشند.

۱۱۶/۱۰ـ دو مثلث غیرمتساوی متشابهند و دو ضلع از اولی بادوضلع از دومی به‌ترتیب برابرند. اگر k نسبت تشابه مثلث بزرگتر به مثلث کوچکتر باشد، حدود k را تعیین کنید.

حل ـ اگر اندازه‌های ضلعهای مثلث بزرگتر a و b و c وضلعهای نظیر ازمثلث کوچکتر b و c و d باشد داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$$

$$c=kd\ ,\ b=ck=k^۲d\ ,\ a=kb=k^۳d$$

$$a<b+c\ ,\ b<c+d$$

$$k^۲d<kd+d \Rightarrow k^۲-k-۱<۰$$

ازاین نامعادله نتیجه می‌شود:

$$۱<k<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

حل مسائل ویژهٔ سال دوم ریاضی فیزیك

۱۱۶/۱۱ـ دستگاه زیررا درمجموعهٔ ماتریسهای ۲×۲ حل کنید:

$$\begin{cases} X-۲Y=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ ۲X+Y=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix} \end{cases}$$

حل ـ یك‌بار Y وباردیگر X را بین دومعادله حذف می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$۷X=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۶ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$۷Y=-۳\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۶ & -۶ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$X=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۶ & ۶ \end{bmatrix}=\frac{۲}{۷}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$Y=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} -۶ & -۶ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}=\frac{۳}{۷}\begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۱۶/۱۲ـ در مجموعهٔ ماتریسهای مربع ۲×۲ ماتریس زیر داده شده است:

$$A=\begin{bmatrix} m & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} ، \quad m\in R$$

در مجموعهٔ مزبور معادلهٔ زیر را حل کنید که در آن I ماتریس واحد است:

$$AX+XA=۲I$$

حل ـ فرض می‌کنیم $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ در این‌صورت داریم:

$$AX=\begin{bmatrix} m & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} mx+۲z & my+۲t \\ ۲y+z & ۲y+t \end{bmatrix}$$

$$XA=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} mx+۲y & ۲x+y \\ mz+۲t & ۲z+t \end{bmatrix}$$

$$AX+XA=\begin{bmatrix} ۲mx+۲y+۲z & ۲x+(m+۱)y+۲t \\ ۲x+(m+۱)z+۲t & ۲y+۲z+۲t \end{bmatrix}$$

با توجه به این رابطه وبا توجه به اینکه $۲I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ از معادلهٔ داده شده نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} mx+y+z=۱ \\ y+z+t=۱ \\ ۲x+(m+۱)y+۲t=۰ \\ ۲x+(m+۱)z+۲t=۰ \end{cases}$$

اگر $m\neq-۱$ باشد از حل این دستگاه با فرض $m\neq۴$ خواهیم داشت:

$$x=\frac{۱}{m-۴} \quad y=z=\frac{-۲}{m-۴} \quad t=\frac{m}{m-۴}$$

$$X=\frac{۱}{m-۴}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & m \end{bmatrix}$$

هرگاه $m=-۱$ باشد خواهیم داشت:

$$X=\begin{bmatrix} x & y \\ ۱+x-y & -x \end{bmatrix}$$

۱۱۶/۱۳ـ ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه مثلث به‌ضلعهای a و b و c متساوی‌الاضلاع باشد آن‌است که:

$$a^۲+b^۲+c^۲=ab+bc+ca$$

حل ـ رابطهٔ داده شده را معادله‌ای نسبت به c گرفته آن را مرتب می کنیم.

$$c^2-(a+b)c+a^2+b^2-ab=0$$

$$\Delta=(a+b)^2-4(a^2+b^2-ab)=-3(a-b)^2$$

$$\Delta\geq 0 \Longrightarrow -3(a-b)^2\geq 0 \Longrightarrow a=b$$

با فرض $a=b$ از معادله بدست می آید که:

$$a=b=c$$

برعکس از تساوی $a=b=c$ به سادگی نتیجه‌می‌شود که رابطهٔ داده شده برقرار است.

۱۱۶/۱۴ـ عدد طبیعی n را پیدا کنید برای آنکه عدد n^2-71 برعدد $7n+55$ بخش پذیر باشد.

حل ـ هرگاه q خارج قسمت تقسیم مورد نظر باشد داریم:

$$\frac{n^2-71}{7n+55}=q \Longrightarrow n^2-7qn-(55q+71)=0$$

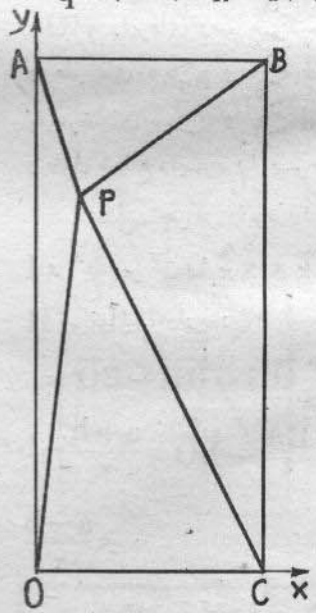
$$\Delta=49q^2+220q+284$$

$$(7q+16)^2<\Delta<(7q+17)^2$$

$$\Delta=(7q+16)^2=49q^2+224q+256$$

$$49q^2+220q+284=49q^2+224q+256$$

$$q=7 \Longrightarrow n=57 \text{ یا } -8$$



۱۱۶/۱۵ـ شخصی در داخل میدان مستطیل شکلی ایستاده است به قسمی که فاصلهٔ آن از سه گوشهٔ میدان به ترتیب ۵ و ۸ و ۱۴ متراست. فاصلهٔ این شخص از گوشهٔ دیگر میدان چقدر است؟

حل ـ میدان را با OABC نشان می‌دهیم. در دستگاه محورهای مختصات مطابق شکل وبه فرض اینکه $P(x,y)$ محل شخص باشد بافرض $A(0,\alpha)$ و $B(\beta,\alpha)$ و $C(\beta,0)$ داریم:

$$\begin{cases} x^2+(y-\alpha)^2=25 \\ (x-\beta)^2+(y-\alpha)^2=64 \\ (x-\beta)^2+y^2=196 \end{cases}$$

از معادله‌های دوم و سوم نتیجه می‌شود.

$$y^2-(y-\alpha)^2=132$$

از این معادله و معادلهٔ اول دستگاه بدست می آید:

$$x^2+y^2=157$$

پس فاصلهٔ P تا O برابر است با $\sqrt{157}$

۱۱۶/۱۶ـ سه عدد تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند. هرگاه به عدد کوچکتر ۹ واحد بیفزائیم آنگاه این سه عدد یك تصاعد حسابی می‌سازند. این عددها کدامند.

حل ـ هرگاه a و aq و aq^2 سه عدد مفروض باشند؛ اگر a یا aq^2 کوچکترین آنها باشد داریم.

$$a+9+aq^2=2aq$$

$$(q-1)^2=-\frac{9}{a} \Longrightarrow a=-1 \text{ یا } -9$$

$$q=4 \text{ یا } -2 \text{ یا } 2$$

عددها عبارتند از:

$$(-16 ، -4 ، 1) \text{ و } (-1 ، 2 ، 4) \text{ و } (-9 ، -18 ، -36)$$

اگر aq کوچکترین سه عدد باشد داریم

$$a+aq^2=2(aq+9)$$

$$(q-1)^2=\frac{18}{a} \Longrightarrow a=2 \text{ و } q=-2$$

$$(2 ، -4 ، 8)$$

۱۱۶/۱۷ـ ثابت کنید به شرط $\sin\theta\neq 0$ داریم.

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}<2^{n-1}$$

حل ـ اتحاد زیر را در نظر می گیریم.

$$\sin n\theta=2^{n-1}\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\times$$

$$\times\sin\left[\theta+\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

(مقالهٔ یك اتحاد مثلثاتی، صفحهٔ ۲۷۷ یکان شمارهٔ ۱۱۶)

با توجه به اینکه هریك از مقادیر $\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})$ و ... و $\sin[\theta+\frac{(n-1)\pi}{n}]$ از یك بزرگتر نیست از تقسیم دو طرف اتحاد بالابر $\sin\theta$ نامساوی مورد نظر بدست می‌آید.

۱۱۶/۱۸ـ دانش‌آموزی حاصل عبارت

$$\sin(x+y)\sin(x-y)$$

را به صورت

$$(\sin x+\sin y)\ (\sin x-\sin y)$$

نوشته‌است. به ازای‌چه مقدارهایی از x و y عمل دانش‌آموز درست است.

حل ـ حاصل عبارت داده شده می‌شود.

$$(\sin x\cos y+\cos x\sin y)(\sin x\cos y-\cos x\sin y)$$

$$= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y =$$

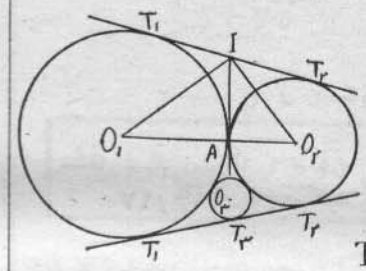
$$\sin^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\sin^2 x)\sin^2 y$$

$$= \sin^2 x - \sin^2 y = (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y)$$

بنابراین حاصل عمل دانش آموز بـه ازای همهٔ مقادیر x و y درست است.

۱۱۶/۱۹ـ دو دایرهٔ O_1 و O_2 به شعاعهای R_1 و R_2 در نقطهٔ A مماس خارج می‌باشند و T_1T_2 یکی از مماسهای مشترك خارجی آنها است. طول T_1T_2 را برحسب R_1 و R_2 حساب کنید. دایرهٔ O_3 به شعاع R_3 را چنان رسم می کنیم کـه برخط T_1T_3 وهمچنین برهریك از دایره‌های O_1 و O_2 مماس خارج باشد. مقدار R_3 را برحسب R_1 و R_2 بـدست آورید. باز دایرهٔ O_4 به شعاع R_4 را رسم می کنیم که بر مماس مشترك خارجی دایره‌های O_1 و O_3 و برخود این‌دایره‌ها مماس‌خارج باشد. مقدار R_4 را نیز برحسب R_1 و R_2 بدست آورید.

حل ـ مطابـق شکل، مثلث O_1IO_2 در زاویـهٔ I قائمه و IA ارتفاع آن‌است.



پس:

$$IA^2 = O_1A \cdot O_2A = R_1R_2$$

$$T_1T_2 = 2IA = 2\sqrt{R_1R_2}$$

بنابراین رابطه برای مماسهای مشترك خارجی دایره‌های O_1 با O_3 و O_2 با O_3 داریم:

$$T_1T_3 = 2\sqrt{R_1R_3} \quad \text{و} \quad T_2T_3 = 2\sqrt{R_2R_3}$$

$$T_1T_3 + T_3T_2 = T_1T_2$$

$$2\sqrt{R_1R_3} + 2\sqrt{R_2R_3} = 2\sqrt{R_1R_2}$$

از تقسیم دو طرف بر $2\sqrt{R_1R_2R_3}$ نتیجه می‌شود:

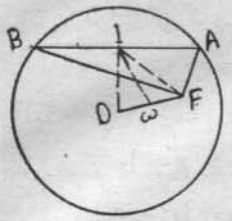
$$\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} = \frac{1}{\sqrt{R_3}}$$

برای R_4 داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_4}} \Longrightarrow \frac{2}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{R_4}}$$

۱۱۶/۲۰ـ دایـرهٔ به مرکز O و بـه شعاع R ونقطهٔ F در داخل آن داده شده است. نقطهٔ متغیر A را بر دایره در نظرمی گیریم. از A به F وصل کرده و در F عمودی برFA اخراج می کنیم تا با دایره در B برخورد کند و وسط ABرا I می‌نامیم. ثابت کنید که $IO^2 + IF^2 = R^2$ وهرگاه A بر دایره تغییر مکان دهد مکان هندسی نقطهٔ I را تعیین کنید.

حل ـ در مثلث قائم ـ الزاویهٔ AFB میانهٔ وتریعنی IF با نصف وتـر یعنی IB برابر است. در مثلث قائـم ـ الزاویهٔ BIO داریم:



$$IB^2 + IO^2 = OB^2 \Longrightarrow IF^2 + IO^2 = R^2$$

هرگاه ω وسط OF و $OF = k$ باشد در مثلث OIF داریم:

$$OI^2 + FI^2 = 2\omega I^2 + \frac{OF^2}{2}$$

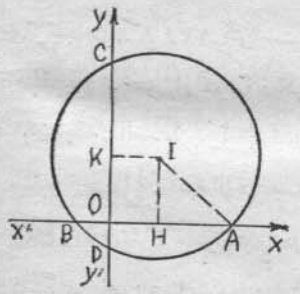
$$2\omega I^2 = R^2 - \frac{k^2}{2} \Longrightarrow \omega I = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - k^2}$$

مکان I دایره‌ای است به مرکز ω

حل مسائل ویژهٔ سال سوم علوم تجربی

۱۱۶/۲۱ـ در صفحهٔ محـورهـای‌مختصات x'Ox و y'Oy دایره‌ای رسم می کنیم که x'xرا در نقطه‌های A و B به طولهای $a>0$ و $b<0$ و y'y را در نقطه‌های C و D به عرضهای $c>0$ و $d<0$ قطع کند. مختصات مرکز دایره و طول شعاع دایـره را بـرحسب a و b و c و d حساب کنید

حل ـ مرکز دایره را I و تصویر آن را برx'x به H می‌نمائیم، داریم:



$$\overline{OH} = \overline{BH} - \overline{BO} = \frac{\overline{BA}}{2} - \overline{BO} = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$$

به همین ترتیب اگر K تصویر I بر y'y بـاشد نتیجه می‌شود.

$$\overline{OK} = \frac{c-d}{2}$$

که $\overline{OH}$ و $\overline{OK}$ مختصات‌مرکز دایره‌اند. مختصات A و I معلوم است پس، R طول IA می‌شود:

$$R^2 = \left(\frac{a-b}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2$$

$$R^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab+c^2+d^2-2cd)$$

چون دو وتر AB و CD در O متقاطعند پس:

$$OA\cdot OB=OC\cdot OD \Longrightarrow ab=cd$$

بنابراین:

$$R^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

۱۱۶/۲۲ـ حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بدست آورید.

$$P=\cos\alpha+\cos(120^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)$$

حل ـ داریم:

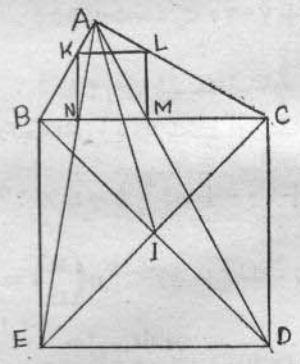
$$\cos(120^\circ+\alpha)=-\cos(180^\circ-120^\circ-\alpha)=-\cos(60^\circ-\alpha)$$

$$P=\cos\alpha-\cos(60-\alpha)-\cos(60+\alpha)$$

$$P=\cos\alpha-2\cos 60\cos\alpha=0$$

۱۱۶/۲۳ـ مثلث ABC قائمه در زاویهٔ A مفروض است. روی وتر BC ودر خارج مثلث، مربع BCDE رارسم می‌کنیم. در تجانس به مرکز A مربع KLMN را مجانس با مربع BCDE چنان رسم می‌کنیم که K بر AB و L بر AC و M و N بر BC واقع باشد. ثابت کنید مرکزهای دو مربع برنیمساز زاویهٔ A واقعند.

حل ـ از A به I مرکز مربع BCDE وصل می‌کنیم.



چهار ضلعی ABIC محاطی است، زیرا هریك اززاویه‌های A و I قائمه‌اند. پس زاویهٔ BAI بازاویهٔ CBI برابراست و برابر 45° می‌باشد. بنابراین AI نیمساز زاویهٔ قائمهٔ A است. دومربع به‌مرکز A مجانس یکدیگرند، پس J مرکز مربع کوچکتر نیز برخط AI واقع است.

حل مسائل ویژهٔ کلاس سوم ریاضی فیزیك

۱۱۶/۲۴ـ هرگاه $M_{2\times 2}$ مجموعهٔ ماتریسهای مربع رتبه ۲ باشد وداشته باشیم.

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\ ،\ J=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

و A عضوی از $M_{2\times 2}$ باشد به‌قسمی که:

$$A=\alpha I+\beta J\ ،\ (\alpha,\beta)\in R^2$$

اولا ثابت کنید که مجموعهٔ M' متشکل از عضوهای A زیرفضایی برداری از $M_{2\times 2}$ است ویك پایهٔ آن را تعیین کنید.

ثانیاً ـ J^n و A^n راحساب کنید.

حل ـ به‌فرض آنکه

$$M'_1=\alpha_1 I+\beta_1 J \quad و \quad M'_2=\alpha_2 I+\beta_2 J$$

دوعضودلخواه از M' و λ_1 و λ_2 دوعدد حقیقی دلخواه باشند.

داریم:

$$\lambda_1 M'_1+\lambda_2 M'_2=(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)I+(\lambda_1\beta_1+\lambda_2\alpha_2)J$$

$$(\lambda_1 M'_1+\lambda_2 M'_2)\in M'$$

پس M' زیر فضایی برداری از $M_{2\times 2}$ است.

مجموعهٔ $\{I,J\}$ یك‌پایه از M' است زیرا

$$\alpha I+\beta J=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

ونتیجه می‌شود. $\alpha=\beta=0$

ثانیاً داریم:

$$J^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

پس: $\forall n\geq 2\ :\ J^n=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$$A^n=(\alpha I+\beta J)^n=\alpha^n I+\binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta I^{n-1}J+\left[\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2 n^{n-2}J^2+\cdots+\beta J^n\right]$$

$$=\alpha^n I+n\alpha^{n-1}\beta J+\left[\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2 J^2+\cdots+\beta J^n\right]$$

مجموع داخل کروشه برابراست با ماتریس صفر زیرا J^n به‌ازای $n\geq 2$ برابر باماتریس صفراست. بنابراین:

$$A^n=\alpha^n I+\alpha n^{n-1}\beta J=\alpha^{n-1}(\alpha I+\beta J)$$

$$A^n=\begin{bmatrix}\alpha^n&0\\0&\alpha^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&n\alpha^{n-1}\beta\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^n&n\alpha^{n-1}\beta\\0&\alpha^n\end{bmatrix}$$

۱۱۶/۲۵ـ از n^n و $(n!)^2$ کدام بزرگتراست؟

حل ـ داریم:

$$\frac{(n!)^2}{n^n}=\frac{(1\times 2\times 3\times\cdots\times n)(n\times\cdots\times 3\times 2\times 1)}{n\cdot n\cdots n}$$

$$=\left(\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\frac{3}{n}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n}\right)$$
$$\times(n\times\cdots\times3\times2\times1)$$
$$=\frac{n}{n}\times\frac{2(n-1)}{n}\times\cdots\times\frac{2(n-1)}{n}\times\frac{n}{n}$$

هریك ازکسرهای حاصل‌ضرب اخیرمگر $\frac{n}{n}$ از یك بزرگترند، پس‌حاصل‌ضرب آنهاازیك بزرگتر است و درنتیجه:

$$\frac{(n!)^2}{n^n}>1 \Longrightarrow (n!)^2>n^n$$

۱۱۶/۲۶ـ چندعدد طبیعی کوچکتراز 10^n وجود دارد که مجموع‌رقمهای هرکدام ۳ باشد؟

حل ـ عدد مورد نظر را می‌توانیم درهرحال n رقمی بگیریم که یایك رقم مرتبهٔ دلخواه آن ۳ وبقیهٔ رقمهایش صفر است، یااینکه یك‌رقم مرتبهٔ دلخواهش یك، یك‌رقم دیگر مرتبهٔ دلخواهش ۲ وسایررقمهایش صفرباشد ـ وبالاخره ممکن است سه‌رقم عدد یك وبقیهٔ رقمهایش صفرباشد.

درحالت اول تعداد عددها برابراست با:

$$\binom{n}{1}=n$$

درحالت دوم‌کافی است معلوم‌کنیم از n محل شامل‌صفر به چند ترتیب می‌توانیم دومحل‌آن را اشغال‌کنیم. پس تعداد عددها می‌شود:

$$2\binom{n}{2}$$

تعداد عددهای ازنوع حالت سوم برابراست با: $\binom{n}{3}$

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر می‌شود:

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=$$
$$=\binom{n+2}{3}$$

۱۱۶/۲۷ـ یك‌قرعه‌کشی بخت‌آزمائی روی ۱۰۰ بلیط انجام می‌گیرد به‌قسمی‌که ۲ بلیط ازآنها برنده می‌شود.

۱) هرگاه کسی ۱۲ بلیط را خریده باشد، احتمال برد وی چقدراست؟

۲) برای‌آنکه احتمال برد شخصی بیش‌از $\frac{4}{5}$ باشد چند عدد بلیط را باید بخرد؟

حل ـ ۱) قبلا احتمال p_0 راحساب می‌کنیم که هیچ‌بلیط شخص برنده نباشد. درآن‌صورت‌احتمال‌مطلوب $p=1-p_0$ خواهد بود. تعداد انتخاب ممکن ۱۲ بلیط از ۱۰۰ بلیط برابر $\binom{100}{12}$ است وچون از۲۰۰ بلیط دو بلیط برنده است پس تعدادانتخاب ممکن ۱۲ بلیط که هیچکدام برنده نباشد $\binom{98}{12}$ است وداریم:

$$p_0=\binom{98}{12}:\binom{100}{12}=\frac{98!}{12!\times76!}:\frac{100!}{12!\times88!}$$
$$p_0=\frac{87\times88}{99\times100}=\frac{232}{300}$$
$$p=1-\frac{232}{300}=\frac{68}{300}\approx0/227$$

۲) فرض می‌کنیم تعداد بلیطهای خریداری‌شده n باشد، مانند بالا احتمال‌آن را حساب می‌کنیم.

$$p_0=\binom{98}{n}:\binom{100}{n}=\frac{98!}{n!(98-n)!}:\frac{100!}{n!(100+n)!}$$
$$=\frac{(100-n)!}{(98-n)!}\times\frac{98!}{100!}=\frac{(99-n)(100-n)}{99\times100}$$
$$p_0=\frac{n^2-199n+99\times100}{99\times100}$$
$$p=1-p_0=\frac{-n^2+199n}{9900}$$
$$p>\frac{4}{5}\Longrightarrow n^2-199n+7920<0\Longrightarrow n\geqslant55$$

۱۱۶/۲۸ـ بـااستفاده ازبسط $(1+x)^n$ و مشتق آن، رابطه‌های زیررا بدست‌آورید.

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n\times2^{n-1}$$
$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0$$

حل ـ داریم:

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

چون عضو به‌عضو مشتق بگیریم:

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

در این دو رابطه به ترتیب $x=1$ و $x=-1$ اختیار می‌کنیم، درنتیجه رابطه‌های مطلوب بدست می‌آید.

۱۱۶/۲۹ـ تابع f درفاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته است و α و β دوعدد حقیقی مثبت می‌باشند. ثابت‌کنید حداقل یك عدد

حقیقی c متعلق به‌فاصلهٔ $[a,b]$ وجوددارد به‌قسمی که:

$$\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)f(c)$$

حل- فرض می‌کنیم m و M به‌ترتیب حدپایین و حد بالای مقادیری باشد که‌تابع f می‌تواند درفاصلهٔ $[a,b]$ اختیار کند. بنابراین:

$$m\leqslant f(a)\leqslant M \quad \text{و} \quad m\leqslant f(b)\leqslant M$$

چون α و β عددهای مثبت می‌باشند پس:

$$\alpha m\leqslant \alpha f(a)\leqslant \alpha M \quad \text{و} \quad \beta m\leqslant \beta f(b)\leqslant \beta M$$

$$(\alpha+\beta)m\leqslant \alpha f(a)+\beta f(b)\leqslant (\alpha+\beta)M$$

$$m\leqslant \frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta}\leqslant M$$

بنابراین حداقل یك‌مقدار c متعلق به $[a,b]$ وجود دارد به قسمی که:

$$\frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta}=f(c)$$

$$\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)f(c)$$

۱۱۶/۳۰- بزرگترین عددصحیح نابزرگتر از x را با $[x]$ نشان می‌دهیم. در صفحهٔ محورهای مختصات عمود برهم (Ox و Oy) دومجموعهٔ A و B از نقطه‌ها رابه‌شرح زیر در نظرمی‌گیریم:

$$M(x,y)\in A \iff \begin{cases}[x]+[y]+[x][y]=۷\\ (x,y)\in R^+\times R^+\end{cases}$$

$$P(x,y)\in B \iff \begin{cases}[x+y]=۴\\ (x,y)\in R^+\times R^+\end{cases}$$

۱) مجموعه‌های A و B ونمودارهر کدام ازآنها را در صفحهٔ محورهای مختصات با هاشورمشخص کنید.

۲) مجموعه جواب دستگاه زیر را درحوزهٔ مقادیر حقیقی مثبت بدست‌آورید.

$$\begin{cases}[x]+[y]+[x][y]=۷\\ [x+y]=۴\end{cases}$$

حل- ۱) هرگاه n عددطبیعی باشد به‌فرض:

$$n\leqslant x<n+۱$$

داریم $[x]=n$ ودراین‌صورت ازمعادلهٔ داده شده داریم:

$$n+[y]+n[y]=۷$$

$$[y]=\frac{۷-n}{n+۱}=\frac{۸}{n+۱}+۱$$

لازم است که $n+۱$ مقسوم‌علیهی از ۸ باشد پس:

$n=۰$ یا ۱ یا ۳ یا ۷

پس مجموعهٔ A فقط در فاصله‌های زیر معین است:

$[۰و۱[$ ، $[۱و۲[$ ، $[۳و۴[$ ، $[۷و۸[$

وبه ترتیب داریم:

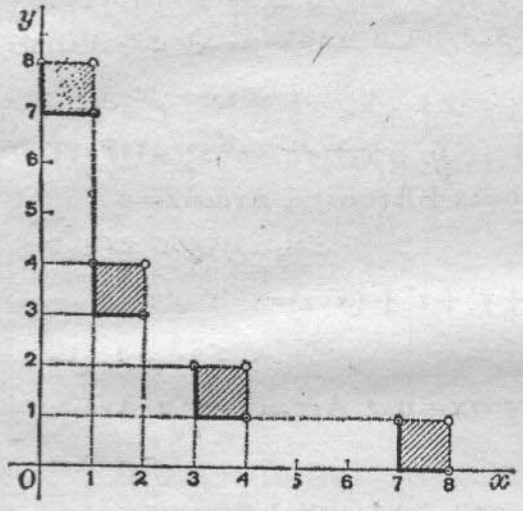
$$x\in[۰و۱[\Longrightarrow [y]=۷ \Longrightarrow y\in[۷و۸[$$

$$x\in[۱و۲[\Longrightarrow [y]=۳ \Longrightarrow y\in[۳و۴[$$

$$x\in[۳و۳[\Longrightarrow [y]=۱ \Longrightarrow y\in[۱و۲[$$

$$x\in[۷و۸[\Longrightarrow [y]=۰ \Longrightarrow y\in[۰و۱[$$

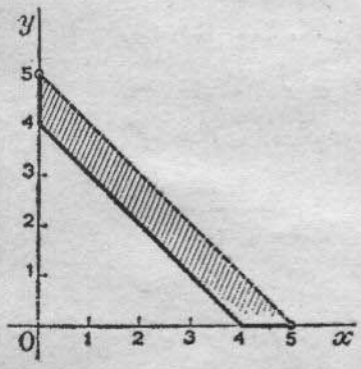
بنابراین مجموعهٔ A تشکیل شده از چهار مربع که در دوضلع بسته و در دوضلع دیگر باز می‌باشند. نمودار مجموعهٔ A به شکل زیراست که در آن ضلعهای خطچین و رأسهایی که با دایرهٔ توخالی نموده شده‌اند به مجموعه تعلق ندارند.

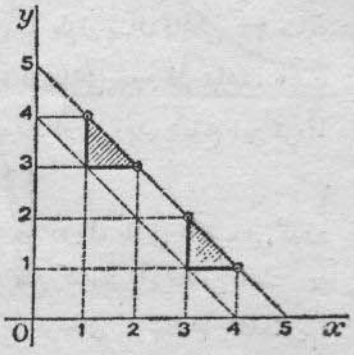


برای مجموعهٔ B داریم:

$$[x+y]=۴ \iff ۴\leqslant x+y<۵$$

پس مجموعهٔ B، مطابق باشکل زیر (سمت چپ)،قسمتی از صفحه است که در ربع اول محورها واقع است و به دوخط $x+y=۴$ و $x+y=۵$ محدود می‌باشد. کنارهٔ راست این نوار که در شکل با خطچین رسم شده به مجموعه تعلق ندارد.





۲)مجموعهٔ جواب‌دستگاه داده شده عبارتست از $A\cap B$ که‌نمودار آن در شکل بالا (سمت راست) مشخص شده‌است. خط‌چینیها ونقطه‌هایی که بـا دایرهٔ توخالی نموده شده‌اند بـه مجموعهٔ جواب تعلق ندارند.

۱۱۶/۳۱ـ آیامثلثی‌وجوددارد که تانژانتهای زاویه‌هایش مقادیر x و $1+x$ و $1-x$ باشد؟

حل‌ـ برای زاویه‌های مثلث داریم:

$$tgA+tgB+tgC=tgA\,tgB\,tgC$$

هـرگاه تانژانتهای زاویه‌ها با مقادیر داده شده برابـر باشند داریم:

$$x+1+x+1-x=x(1+x)(1-x)$$

از این معادله نتیجه خواهد شد $x^2=-2$ که درنتیجه x وهمچنین $1+x$ مقدار منفی می‌باشد. کـه در این صورت دو زاویـه از مثلث باید منفرجه باشند. امـا این ممکن نیست. بنابراین چنین مثلثی وجود ندارد.

۱۱۶/۳۲ـ هرگاه داشته باشیم:

$$\mathrm{Arc}\cos x+\mathrm{Arc}\cos y+\mathrm{Arc}\cos z=\pi$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

حل‌ـ فرض می کنیم:

$$\mathrm{Arc}\cos x=u \quad و \quad \mathrm{Arc}\cos y=v \quad و \quad \mathrm{Arc}\sin z=w$$

پس‌داریم:

$$x=\cos u \quad و \quad y=\cos v \quad و \quad z=\cos w$$

$$u+v+w=\pi$$

$$z=\cos[\pi-(u+v)]=-\cos(u+v)$$

$$=-(\cos u\cos v-\sin u\sin v)=-xy+\sin u\sin v$$

$$(z+xy)^2=\sin^2 u\sin^2 v=(1-x^2)(1-y^2)$$

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

۱۱۶/۳۳ـ شخصی می‌خواهدکرهٔ به قطره ۳۰سانتیمتر را داخل جعبهٔ مکعب شکل بـه طول یـال داخلی ۳۲ سانتیمتر بسته‌بندی کند. برای آنکه‌کره در داخل جعبه لق نباشد، هشت کرهٔ متساوی‌را درگوشه‌های جعبه قرار می‌دهد. شعاع این کره‌ها چقدر است؟

حل‌ـ صفحه‌ای را که بر دویال مقابل مکعب می گذرد صفحهٔ شکل اختیار می کنیم. مقطع کره‌ها دایره‌هایی است به شکل‌روبرو. به فرض آنکه شعاع کره‌های کوچك r باشدداریم:

$$OA=16\sqrt{3}$$

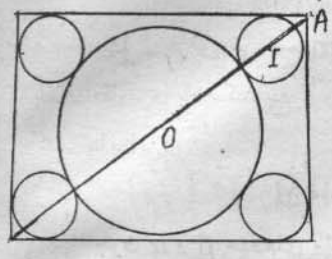
$$OI=15+r$$

$$IA=r\sqrt{3}$$

$$15+r+r\sqrt{3}=16\sqrt{3}$$

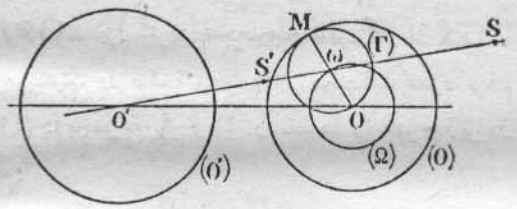
$$r=\frac{16\sqrt{3}-15}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{63-31\sqrt{3}}{2}$$



۱۱۶/۳۴ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و O' وبه‌شعاعهای R و R' و نقطهٔ متغیر M بردایرهٔ O مفروض است. دایرهٔ به قطر OM را Γ و مرکزهای تجانسهای مستقیم و معکوس دودایرهٔ O' و Γ را S و S' می‌نامیم. هرگاه M بردایرهٔ O تغییر کند، مکان هندسی نقطه‌های S و S' را پیدا کنید.

حل‌ـ شعاع دایرهٔ Γ برابـر $\frac{R}{2}$ است.هرگاه ω مرکز این دایره باشد، به فرض $R\neq 2R'$ داریم:



$$\frac{\overline{SO'}}{S\omega}=\frac{2R'}{R} \quad و \quad \frac{\overline{S'O'}}{S'\omega}=-\frac{2R'}{R}$$

ازاین تناسبها داریم:

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO'}-\overline{S\omega}}=\frac{2R'}{2R'-R} \quad و$$

$$\frac{\overline{S'O'}}{\overline{S'O'}-\overline{S'\omega}}=\frac{2R'+R}{2R'}$$

$$\frac{\overline{O'S}}{\overline{O'\omega}}=\frac{2R'}{2R'-R} \quad و \quad \frac{\overline{O'S'}}{\overline{O'\omega}}=\frac{2R'}{2R'+R}$$

از این رابطه‌ها معلوم می‌شود که S مجانس ω است در تجانس به‌مرکز O' و به نسبت $\frac{2R'}{2R'-R}$ و S'مجانس ω است در تجانس به مرکز O' و به نسبت $\frac{2R'}{2R'+R}$.مکان ω دایرهٔ Ω است بـه مرکز O و بـه شعاع $\frac{R}{2}$ ، پس مکـان

نقطه‌های S و S′ که مجانس مکان ω می‌باشند نیز دایره‌هایی می‌باشند.

هرگاه $R=2R'$ باشد، S در بینهایت واقع است و S′ وسط $O'\omega$ قرار دارد و مکان آن دایرهٔ به مرکز I، وسط OO′ و به شعاع $\frac{R}{4}$ می‌باشد.

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۱۶/۳۵ـ دوتابع زیر داده شده است:

$$y=\frac{(x+1)^3}{ax^2} \text{ و } y=\frac{(x+1)^2}{bx^3}$$

منحنیهای نمایش هندسی این دو تابع در یك نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ معین و همچنین درنقطهٔ بینهایت بریکدیگر مماسند؛

۱) چه رابطه بین a و b برقرار باشد تا علاوه برآن، دو منحنی در دو نقطهٔ دیگر A و B نیز متقاطع باشند. در این حالت معادلهٔ مکان هندسی P وسط AB را پیدا کنید.

۲) هرگاه بین x' و x'' طولهای نقاط A و B رابطهٔ $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{1}{3}$ برقرار باشد، مقدار a را برحسب b بدست آورید.

۳) به‌ازای $a=3$ و $b=1$ جدول تغییرات دو تابع‌را تنظیم‌ومنحنیها را دریك شکل رسم کنید و مساحت ناحیهٔ محصور بین دومنحنی را حساب کنید.

حل ـ ۱) از حذف y بین معادله‌های دو منحنی خواهیم داشت:

$$x^2(x+1)^2(bx^2+bx-a)=0$$

این‌معادله همواره‌دارای‌ریشه‌های مضاعف $x=0$ و $x=-1$ می‌باشد. برای‌آنکه دو جواب دیگر نیز داشته باشد باید که معادلهٔ bx^2+bx-a دو جواب مخالف صفر و مخالف (-1) داشته باشد. چون $a\neq 0$ است پس صفر جواب این معادله نیست و همچنین -1 نیز جواب این معادله نیست زیرا شرط آن $a=0$ است. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\Delta=b^2+4ab>0$$

به فرض آنکه x' و x'' جوابهای معادلهٔ مزبور، یعنی طولهای‌نقطه‌های A و B، باشد، طول نقطهٔ P برابراست با:

$$x=\frac{x'+x''}{2}=\frac{-b}{2b}=-\frac{1}{2}$$

مکان P خطی است موازی با محورyها.

۲) داریم:

$$\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{1}{3} \Longrightarrow 3(x'+x'')=x'x''$$

$$-\frac{3}{2}=\frac{-a}{b} \Longrightarrow a=\frac{3}{2}b$$

۳) به‌ترتیب داریم:

$$y=\frac{(x+1)^3}{3x^2} \text{ و } y'=\frac{(x+1)^2(x-2)}{3x^3}$$

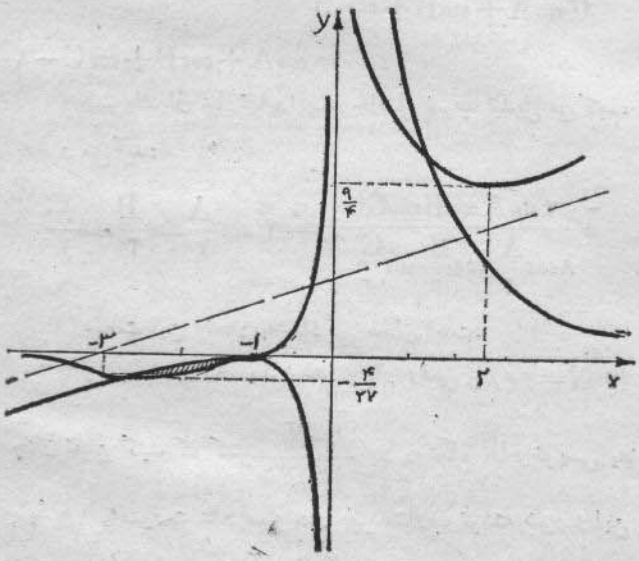
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y′		+	0	+	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

خطهای $x=0$ و $y=\frac{x}{3}+1$ مجانبهای منحنی‌تابع می‌باشند

$$y=\frac{(x+1)^2}{x^3} \text{ و } y'=\frac{-(x+1)(x+3)}{x^4}$$

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
y′	+		0	+	0	−	‖	−	
y	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↖	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

محورهای مختصات مجانبهای منحنی تابع می‌باشند.



از حل معادله‌های دو منحنی باهم داریم:

$$x^2(x+1)^2(x^2+x-3)=0$$

$$x=0 \quad \text{یا} \quad x=-1 \quad \text{یا} \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

فرض می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x+1)^3}{3x^2}-\frac{(x+1)^2}{x^3}=\frac{x}{3}+1-\frac{5}{3x^2}-\frac{1}{x^3}$$

خواهیم داشت:

$$F(x)=\frac{x^2}{6}+x+\frac{5}{3x}+\frac{1}{2x^2}+C$$

$$S=\left|F\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)-F(-1)\right|$$

۱۱۶/۳۶ـ مثلثی که رأسهایش پاهای ارتفاعهای مثلث است مثلث پدال آن مثلث نام دارد. هرگاه a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلث و α و β و γ اندازه‌های ضلعهای پدال آن باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{a+b+c}=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}-1$$

حل ـ داریم:

$$\alpha=a\cos A \quad \text{و} \quad \beta=b\cos B \quad \text{و} \quad \gamma=c\cos C$$

باید ثابت کنیم:

$$\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{c+b+c}=\cos A+\cos B+\cos C-1$$

ضلعها را برحسب R شعاع دایرهٔ محیطی می‌نویسیم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}=$$

$$=\cos A+\cos B+\cos C-1$$

هریك از عبارتها را به حاصل ضرب تبدیل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\frac{4\sin A\sin B\sin C}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

صحت این اتحاد به سادگی محقق است.

۱۱۶/۳۷ـ رقم یکان عدد چهار رقمی $N=\overline{448u}$ را چنان تعیین کنید که کسر $\frac{N}{14175}$ در دستگاه عدد نویسی به پایهٔ ۱۵ به‌صورت عدد ممیز دار غیر متناوب نوشته شود و این عدد ممیزدار را بدست آورید.

حل ـ داریم $15=5\times3$ پس مخرج کسر باید فقط شامل عاملهای ۳ یا ۵ باشد. اما داریم.

$$14175=3^4\times5^2\times7$$

بنابراین عدد N باید مضرب ۷ باشد و چون ۴۴۸۰ مضرب ۷ است پس u باید مضرب ۷ باشد.

بنابراین $u=0$ یا $u=7$. به ازای $u=0$ داریم:

$$F=\frac{4480}{14175}=\frac{2^7\times5\times7}{3^3\times5^2\times7}=\frac{2^7\times5^3}{15^4}=\frac{16000}{15^4}$$

$$F=\frac{4\times15^4+11\times15^2+1\times15+10}{15^4}$$

$$F=\frac{4}{15}+\frac{11}{15^2}+\frac{1}{15^3}+\frac{10}{15^4}$$

به فرض $\alpha=10$ و $\beta=11$ خواهیم داشت:

$$F=[0/4\beta1\alpha]_{15}$$

در ازای $u=7$ داریم:

$$F=\frac{4487}{14175}=\frac{641\times7}{3^4\times5^2\times7}=\frac{641\times5^2}{15^4}$$

$$F=\frac{16025}{15^4}=\frac{4\times15^3+11\times15^2+3\times15+5}{15^4}$$

$$F=\frac{4}{15}+\frac{11}{15^2}+\frac{3}{15^3}+\frac{5}{15^4}$$

$$F=[0/4\beta35]_{15}$$

۱۱۶/۳۸ـ دو کسر $\frac{A}{45}$ و $\frac{B}{52}$ داده شده است؛ عددهای A و B را چگونه باید انتخاب کرد تا مجموع دو کسر مزبور مولد یك عدد اعشاری تحقیقی باشد؟ هرگاه این عدد اعشاری کوچکتر از یك باشد مقادیر A و B را بدست آورید.

حل ـ داریم:

$$\frac{A}{45}+\frac{B}{52}=\frac{A}{9\times5}+\frac{B}{4\times13}=$$

$$\frac{4\times13\times A+9\times5\times B}{2^2\times5\times9\times13}$$

این کسر وقتی مولد اعشاری تحقیقی است که مجموع $4\times13\times A+9\times5\times B$ بر ۹ و بر ۱۳ بخش پذیر باشد یعنی A مضربی از ۹ و B مضربی از ۱۳ باشد.

به فرض $A=9A'$ و $B=13B'$ داریم:

$$\frac{A}{45}+\frac{B}{52}=\frac{A'}{5}+\frac{B'}{4}=\frac{4A'+5B'}{20}=\frac{5(4A'+B')}{100}$$

چون مجموع دو کسر از یك کوچکتر است پس:

$4A'+5B'<20$ و جوابهای زیر را خواهیم داشت:

$A'=۱\ ,\ B'=۱ \Longrightarrow A=۹\ ,\ B=۱۳$

$A'=۱\ ,\ B'=۲ \qquad A=۹\ ,\ B=۲۶$

$A'=۱\ ,\ B'=۳ \qquad A=۹\ ,\ B=۳۹$

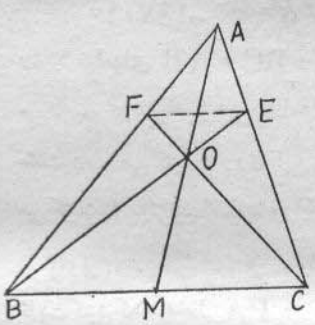
$A'=۲\ ,\ B'=۱ \qquad A=۱۸\ ,\ B=۱۳$

$A'=۲\ ,\ B'=۲ \qquad A=۱۸\ ,\ B=۲۶$

$A'=۳\ ,\ B'=۱ \qquad A=۲۷\ ,\ B=۱۳$

۱۱۶/۳۹ـ در مثلث ABC که $AB>AC$ است بر میانهٔ AM نقطهٔ دلخواه O را انتخاب می کنیم و BO و CO را رسم می کنیم که با AC و AB به ترتیب در E و F برخورد می کنند. ثابت کنید $BE>CF$

حل ـ بنا به قضیهٔ سوا داریم:



$$\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=-۱$$

وچون $\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}=-۱$

نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=۱$$

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

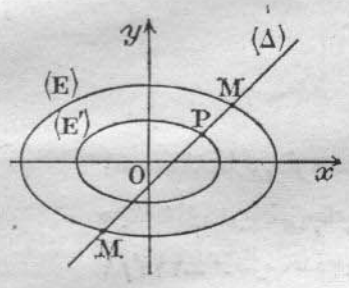
پس خط EF باضلع BC موازی‌است ودومثلث OBC و OEF متشابهند وازآنجا:

$$\frac{BE}{OB}=\frac{CF}{OC} \qquad (۱)$$

ازاینکه $AB>AC$ است برمی‌آید که زاویهٔ AMB اززاویهٔ AMC بزرگتراست. دو مثلث OBM و OCM در ضلع OM مشترکند و $BM=MC$ امازاویهٔ OMB از زاویهٔ OMC بزرگتراست، پس $OB>OC$. ازاین نامساوی وازتساوی (۱) نتیجه می‌شود:

$$OB\cdot\frac{BE}{OB}>OC\cdot\frac{CF}{OC}\Longrightarrow BE>CF$$

۱۱۶/۴۰ـ درصفحهٔ محورهای مختصات عمود برهم (Ox,Oy) بیضی به‌مرکز O را درنظرمی گیریم که محورکانونی آن بر $x'x$ واقع است و قطر بزرگترش به طول $۲a$ وقطر کوچکترش به‌طول $۲b$ می باشد. ازنقطهٔ P واقع درصفحهٔ محورها خطی موازی با نیمسازربع اول وسوم محورها رسم می کنیم که بیضی را در M و M' قطع می کند. هرگاه داشته باشیم: $\overline{PM}\cdot\overline{PM'}=-b^۲$ مکان هندسی نقطهٔ P را مشخص کنید.



حل ـ هرگاه $\vec{w}$ بردار واحد نیمسازربع اول محورها باشد داریم:

$$\overrightarrow{PM}=\lambda\cdot\vec{w}$$

که چون بر هر یك از محورها تصویر کنیم و فرض کنیم:

$M(x,y)$ و $P(\alpha,\beta)$

● خواهیم داشت:

$$x=\alpha+\frac{\lambda}{\sqrt{۲}}\ \text{و}\ y=\beta+\frac{\lambda}{\sqrt{۲}}$$

چون M نقطه‌ای ازبیضی‌است پس داریم:

$$b^۲\left(\alpha+\frac{\lambda}{\sqrt{۲}}\right)^۲+a^۲\left(\beta+\frac{\lambda}{\sqrt{۲}}\right)^۲-a^۲b^۲=۰$$

$$(a^۲+b^۲)\lambda^۲+۲\sqrt{۲}(b^۲\alpha+a^۲\beta)\lambda+۲(b^۲\alpha^۲+a^۲\beta^۲-a^۲b^۲)=۰$$

هرگاه λ و λ' ریشه‌های این‌معادله باشند داریم:

$$\overline{PM}\cdot\overline{PM'}=\lambda\lambda'=\frac{۲(b^۲\alpha^۲+a^۲\beta^۲-a^۲b^۲)}{a^۲+b^۲}$$

باتوجه به‌فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{۲(b^۲\alpha^۲+a^۲\beta^۲-a^۲b^۲)}{a^۲+b^۲}=-b^۲$$

$$b^۲\alpha^۲+a^۲\beta^۲=\frac{a^۲b^۲-b^۴}{۲}=\frac{b^۲c^۲}{۲}$$

$$\frac{\alpha^۲}{\frac{c^۲}{۲}}+\frac{\beta^۲}{\frac{b^۲c^۲}{۲a^۲}}=۱$$

این معادله نشان می‌دهد که مکان هندسی P یك بیضی است به‌مرکز O باطول قطر بزرگ $c\sqrt{۲}$ و باطول قطر کوچك $\frac{bc\sqrt{۲}}{a}$.

مسائل برای حل

مسائل گوناگون

۱ـ مسئله‌هایی ترجمه از مجله‌های ریاضی چاپ آمریکا

۱۱۷/۱ـ ازضرب عدد ۶۹۳ درچه عددی، عدد پنج رقمی ۷x۵y۷ بدست می‌آید؟

۱۱۷/۲ـ ثابت کنید کـه عدد $N=۵۳^{۱۰۳}+۱۰۳^{۵۳}$ بر ۷۸ بخش پذیر است.

۱۱۷/۳ـ ثابت کنید که اگر عددی مضرب مقلوب خود باشد، این مضرب مجذورکامل است.

۱۱۷/۴ـ عددی چهار رقمی در مبنای ۱۰ بیابید که اگر رقم هزارگان آن را به‌سمت راست عدد ببریـم، عدد حاصل معادل عدد مفروض باشد که درمبنای ۷ نوشته شده باشد.

۱۱۷/۵ـ بزرگترین عدد صحیح نابزرگتر از $\frac{n}{۲}$ را با $\left[\frac{n}{۲}\right]$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید که عدد:

$$N=\left[\frac{n}{۲}\right]-۳n+(-۱)^n-۱$$

به‌ازای هرعدد طبیعی n بر ۵ بخش‌پذیر است.

۱۱۷/۶ـ چندضلعی منتظمی را حول مرکـز خود بـه زاویهٔ $۲۷/۵^\circ$ دوران می‌دهیم کـه در نتیجه برخودش منطبـق می‌شود. حداقل تعداد ضلعهای این چندضلعی چقدر است؟

۱۱۷/۷ـ از بین نیمدایره‌های محاط در مربع به ضلع a کدام است که مساحت بیشتر را دارد؟

(دوسرقطر نیمدایره بردوضلع مربع واقع است ونیمدایره بردوضلع دیگر مربع مماس است).

۱۱۷/۸ـ در چه نوع مثلثی، ارتفاع، نیمساز و میانهٔ نظیریك رأس، زاویهٔ آن رأس را به چهار قسمت متساوی تقسیم می‌کنند؟

۱۱۷/۹ـ ازچهار ضلعیهای محدب به ضلعهای a و b و c و d کدام مساحت ماکزیمم دارد؟

مثال عددی: چهارضلعی که اندازه‌های ضلعهایش ۳ و ۷ و ۹ و ۱۱ می‌باشد.

۱۱۷/۱۰ـ نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را با ضلعهای AB و BC و CA بـه ترتیب X و Y و Z می‌نامیم. درهریك از این نقطه‌ها عمودی برضلع نظیر و درخارج مثلث رسم می‌کنیم و روی این عمودها طولهای برابر باهم جدا می‌کنیم تا به‌ترتیب نقطه‌های P و Q و R بدست آید یعنی:

$$PX=QY=RZ$$

ثابت کنید که سه‌خط PA و QB و RC متقاربند.

۱۱۷/۱۱ـ مثلث ABC در زاویـهٔ C قائمـه است. روی وترمستطیل ABED را می‌سازیم و CD و CE را رسم می‌کنیم کـه به‌ترتیب با AB در F و G برخورد می‌کنند. هرگاه $DE=AD\sqrt{۲}$ باشد ثابت کنید که:

$$\overline{AG}^۲+\overline{BF}^۲=\overline{AB}^۲$$

۱۱۷/۱۲ـ در مثلث حاد الزوایای ABC روی ارتفاع AH نقطهٔ P را انتخاب می‌کنیم که AP با قطر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث برابر باشد. هرگاه D و E به‌ترتیب تصویرهای P روی AB و AC باشد، ثابت کنید که محیط مثلث ADE با محیط مثلث ارتفاعی برابر است.

۱۱۷/۱۳ـ ثابت کنید که در هرمثلث داریم:

$$(۱+۸\cos^۲A)(۱+۸\cos^۲B)(۱+۸\cos^۲C)\geqslant ۶۴\sin^۲A\sin^۲B\sin^۲C$$

۱۱۷/۱۴ـ دو خط غیر موازی D و Δ و نقطهٔ A بر D و نقطهٔ B بر Δ داده شده است. دو دایرهٔ متساوی رسم کنید که بر یکدیگر مماس باشند و نیز اولی در A بـر D و دومی در B بر Δ مماس باشد.

۲ـ مسئله‌های چهارمین المپیاد ریاضی آمریکا (۱۹۷۵)

ترجمهٔ : مناف شریف‌زاده

۱۱۷/۱۵ـ اولا به فرض $x,y\geq 0$ واینکه $[u]$ نمایندهٔ بزرگترین مقدار صحیح موجود در u است ثابت کنید که:

$$[5x]+[5y]\geq[3x+y]+[3y+x]$$

ثانیاً ثابت کنید که عدد:

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m!)}$$

برای تمام عددهای صحیح و مثبت m و n یك عدد صحیح است.

۱۱۷/۱۶ـ اگر A ، B ، C و D چهار نقطه درفضا باشد ، ثابت کنید که:

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2\geq AB^2+CD^2$$

۱۱۷/۱۷ـ $P(x)$ چند جمله‌ای از درجهٔ n است به قسمی که :

$$P(k)=\frac{k}{k+1}\ ,\ k=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ n$$

مقدار $P(n+1)$ را معین کنید.

۱۱۷/۱۸ـ دو دایرهٔ معلوم یکدیگررا در دو نقطهٔ P و Q قطع کرده‌اند. پاره‌خط AB محدود به دو دایره از P می گذرد. AB چگونه باشد تا $PA\cdot PB$ ماکزیمم باشد.

۱۱۷/۱۹ـ یك دسته شامل N کارت بازی شامل ۳ آس را بطور اتفاقی برمی‌زنیم. (توزیع تمام امکانات یکسان وشبیه بهم است). کارتها را یکی‌یکی برمی گردانیم تا اینکه دومین آس ظاهر شود. ثابت کنید که میانگین تعداد کارتهای برگردانده شده برابر $\frac{N+1}{2}$ است.

۳ـ مسائل امتحان سالانهٔ ۱۹۷۵ پاتنام آمریکا

برگزار شدهٔ ازطرف انجمن ریاضی آمریکا

۱۱۷/۲۰ـ فرض می کنیم عدد طبیعی n مجموع دوعدد مثلثی باشد، یعنی:

$$n=\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}$$

عدد $4n+1$ را به‌صورت مجموع دو مربع بنویسید:

$$4n+1=x^2+y^2$$

و ثابت کنید که x و y هریك می‌تواند برحسب a و b باشد. برعکس. ثابت کنید که هرگاه $4n+1$ مجموع دو مربع باشد، عدد n مجموع دو عدد مثلثی خواهد بود.

۱۱۷/۲۱ـ برای کدام زوجهای مرتب b و c هردو ریشهٔ معادلهٔ $Z^2+bZ+c=0$ در صفحهٔ عددهای مختلط داخل قرص $\{|Z|<1\}$ قرار دارند؟

درصفحهٔ عددهای حقیقی b و c ناحیه‌ای را مشخص کنید که در ازای آن شرط بالابرقرار است. منحنی محدودکنندهٔ این ناحیه را به دقت تعیین کنید.

۱۱۷/۲۲ـ سه مقدار ثابت a و b و c با شرط $0<a<b<c$ داده شده‌است. به‌ازای چه نقطه‌ای ازمجموعهٔ:

$$\{x^b+y^b+z^b=1,x\geq 0,y\geq,z\geq 0\}$$

در فضای سه‌بعدی R^3 ، تابع:

$$f(x,y,z)=x^a+y^b+z^c$$

ماکزیمم یا می‌نیمم می باشد؟

۱۱۷/۲۳ـ فرض می کنیم $n=2m$ که m عدد طبیعی فرد بزرگتر از یك می باشد و همچنین فرض می کنیم $\theta=e^{\frac{2\pi i}{n}}$. مطلوبست بسط $(1-\theta)^{-1}$ به‌صورت چندجمله‌ای برحسب θ که در آن ضریبهای جمله‌ها عددهای صحیح باشند.

۱۱۷/۲۴ـ در فاصلهٔ I از خط حقیقی، فرض می کنیم که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ خطی مستقل و جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل:

$$y''=f(x)y$$

باشند که $f(x)$ تابعی حقیقی و پیوسته است. به فرض آنکه در I داشته باشیم $y_1(x)>0$ و $y_2(x)>0$، ثابت کنید که مقدارمثبت و ثابت c در I وجود دارد به‌قسمی که تابع:

$$Z(x)=c\sqrt{y_1(x)y_2(x)}$$

در معادلهٔ زیر صادق می‌باشد:

$$Z''+\frac{1}{Z^3}=f(x)Z$$

حالتی را مشخص کنید که c به $y_1(x)$ و $y_2(x)$ بستگی داشته باشد.

۱۱۷/۲۵ـ هرگاه P_1 و P_2 و P_3 رأسهای یك مثلث با زاویه‌های حاده واقع در فضای سه بعدی باشد ، ثابت کنید

همواره می‌توان دو نقطهٔ P_4 و P_5 را چنان تعیین کرد که هیچ سه نقطه بریك استقامت نباشند و خط و اصل بین هردو نقطه برصفحهٔ شامل سه نقطهٔ دیگر عمود باشد. مکان نقطه‌های P_4 و P_5 را دقیقاً معلوم کنید.

۴ـ از مسئله‌های المپیاد ریاضی شوروی

ترجمهٔ : مهندس فتح‌الله زرگری

۱۱۷/۲۶ـ پنج‌ضلعی که زاویه‌های آن منفرجه‌اند مفروض است. ثابت کنید دو قطر چنان یافت می‌شوند که دایره‌های ساخته شدهٔ روی آنها تمام پنج ضلعی را می‌پوشانند.

۱۱۷/۲۷ـ مجموع صد عدد طبیعی که هر کدامشان بزرگتر از صد نمی‌باشد برابر ۲۰۰ است. ثابت کنید که ازین این اعداد می‌توان چند عدد را به‌گونه‌ای انتخاب کرد که مجموع آنها ۱۰۰ باشد.

۱۱۷/۲۸ـ درصفحه‌ای n نقطه مفروض است. مطلوبست تعیین می‌نیمم تعداد اوساط پاره خطهایی که دو به‌دو این نقطه‌ها را به‌هم وصل می‌کنند.

۱۱۷/۲۹ـ مطلوبست تعیین تعداد ممکن ضلعهای چند ضلعی که در آن قطرها باهم برابرند.

۱۱۷/۳۰ـ مستطیل به‌بعدهای A و B را با رسم خطهای موازی با ضلعهایش به‌خانه‌های مربع‌شکل به‌ضلع واحد تقسیم کرده‌ایم ثابت کنید که اقلاً یکی ازعددهای A یا B صحیح می‌باشد.

۱۱۷/۳۱ـ دو دایرهٔ مماس خارجی به شعاعهای R و r مفروضند. ذوزنقه‌هایی را می‌توان بر این دایره‌ها محیط کرد به قسمی که هریك از دایره‌ها بر دوساق و بر یکی از قاعده‌های مماس باشد. مطلوبست مقدار می‌نیمم محیط این ذوزنقه‌ها.

۱۱۷/۳۲ـ مطلوبست کوچکترین عدد به‌صورت $|36^k - 5^l|$ که k و l عددهای طبیعی‌اند.

۱۱۷/۳۳ـ تابع f در فاصلهٔ $0<x<1$ داده شده است و می‌دانیم که مقدار این تابع منفی نیست و $f(1)=1$. به‌علاوه برای دو عدد دلخواه $x_1 \geqslant 0$ و $x_2 \geqslant 0$ به‌شرط $x_1+x_2<1$ نامساوی زیر برقرار است:

$$f(x_1+x_2) \geqslant f(x_1)+f(x_2)$$

۱) ثابت کنید برای همهٔ مقادیر x داریم: $f(x)<2x$

۲) آیا نامساوی $f(x)<1/9x$ برای همهٔ مقادیر x راست است؟

۱۱۷/۳۴ـ چند ضلعی محدبی که در آن هیچ مثلث به مساحت واحد جا نمی‌گیرد مفروض است. ثابت کنید که این چندضلعی را می‌توان درمثلثی به‌مساحت ۴ جای داد.

۵ـ از جمله مسئله‌های امتحانهای نهایی دبیرستانهای فرانسه (۱۹۷۷)

۱۱۷/۳۵ـ ۱) دوتابع :

$$f_1(x)=1-x^2 \quad \text{و} \quad f_2(x)=\mathrm{Log}\,x$$

درحوزهٔ مقادیرمثبت x تعریف شده‌اند.

a) نمودار این دوتابع را در صفحهٔ محورهای مختصات عمود برهم رسم کنید.

b) علامت $f_1(x)-f_2(x)$ را به‌ازای مقادیر مثبت x تعیین کنید.

۲) فرض می‌کنیم تابع زیردرحوزهٔ مقادیرمنفی x تعریف شده باشد.

$$g(x)=x^2+1-\mathrm{Log}(-x)$$

ثابت کنید که g به‌ازای یك‌مقدار x_0 از x می‌نیمم است. مقدار $g(x_0)$ وازروی آن علامت $g(x)$ را پیدا کنید.

۳) فرض می‌کنیم تابع زیر برای هر مقدار حقیقی x مخالف با صفر، تعریف شده باشد.

$$f(x)=-|x|+\frac{\mathrm{Log}|x|}{x}$$

a) جهت تغییرات و حدود حوزهٔ تعریف این تابع را معین کنید. منحنی نمایش این تابع دومجانب دارد. معادلات این مجانبها را بدست‌آورده ومنحنی را رسم کنید.

b) معادلهٔ مماس برمنحنی‌را درنقطهٔ به‌طول ۱ ـ بدست آورید.

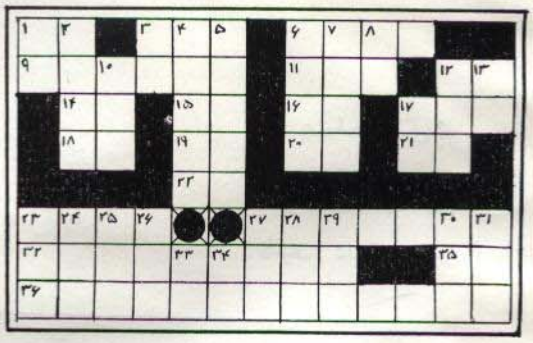
c) به‌فرض $\mathrm{Log}2=0/7$ مقادیر تقریبی $f(x)$ را به‌ازای مقادیر زیر حساب کنید:

$$-4 \text{ ، } -2 \text{ ، } -\frac{1}{2} \text{ ، } \frac{1}{2} \text{ ، } 2 \text{ ، } 4$$

d) یك تابع اولیهٔ $h(x)=\frac{\mathrm{Log}\,x}{x}$ را بدست آورده مساحت ناحیه‌ای از صفحه را پیدا کنید که برای آن $a<x<e$ و $-x<y<f(x)$ می‌باشد.

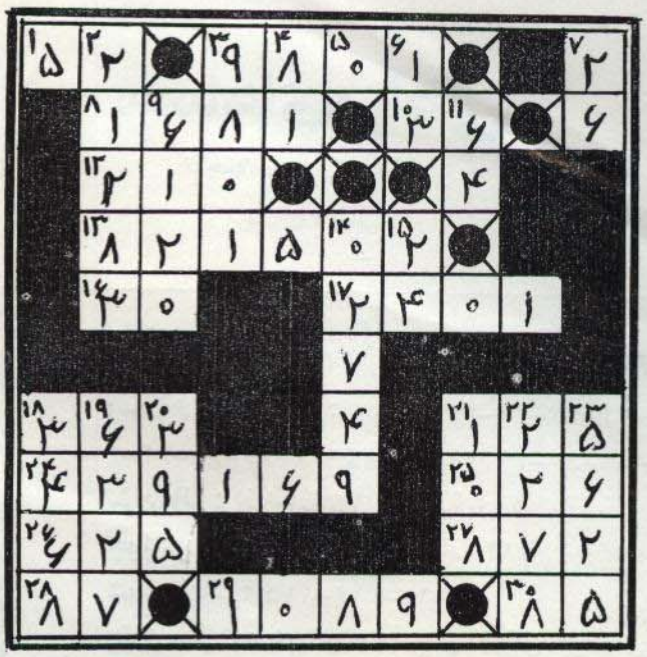
جدول اعداد

طرح از : سید جواد رحیمی (تاریخ وصول به ادارهٔ مجله: ۱۳۵۱/۱۱/۱۸)



افقی: ۱ـ توان‌چهارم ومضربی است ازیکی مقسوم‌علیه های مقلوب خود. ۳ـ عدد به‌صورت $\overline{aaa}$ که درمبنای۴ نوشته شده‌است وهمین عدددرمبنای ۲۰ به‌صورت $\overline{aa}$ نوشته می‌شود. ۶ـ مربع‌عدد به‌صورت $\overline{(a+7)(a-2)}$. ۹ـ کوچکترین‌عدد شش‌رقمی که رقمهایش به‌تصاعد حسابی‌اند. ۱۱ـ هشت برابر ثلث عددردیف ۳ افقی. ۱۲ـ این‌عدد وحاصل‌ضرب آن درهر یك ازعددهای یك‌رقمی، عددهایی‌هستند بادورقم‌یکسان. ۱۴ـ توان‌چهارم‌است ومقلوبش عدداول‌است. ۱۵ـ کوچکترین عدد دورقمی که چهار برابرمجموع رقمهایش‌است. ۱۶ـ عدددورقمی که متمم‌حسابی رقم‌دهگان خودمی‌باشد. ۱۷ـ حاصل‌ضرب‌عدد ردیف ۱۲ افقی در عدد ردیف ۲۲ افقی. ۱۸ـ سه برابر عدد ردیف ۱۲ افقی. ۱۹ـ همان‌عـدد ردیف ۱۲ افقی. ۲۰ـ عدد دورقمی که نصفش مجذورکامل ومقلوبش عدد اول است. ۲۱ـ مجذوررقم یکان‌خود ومضربی ازمجموع رقمهای خود می‌باشد. ۲۲ـ مقلوب عددردیف ۱ افقی. ۲۳ـ مجموع‌عددهای موجود درجدول‌ضرب ۱۰ × ۱۰ ۲۷ـ کوچکترین عدد هفت‌رقمی که سه رقم سمت‌چپ‌آن به‌تصاعد هندسی وسه‌رقم سمت راست‌آن به‌تصاعد حسابی‌می باشند ۳۲ـ مجموع‌رقمهای همهٔ‌اعداد طبیعی ازیك‌تا بزرگترین عددهفت رقمی. ۳۵ـ مقلوب عدد ردیف ۴ افقی. ۳۶ـ کوچکترین‌عدد سیزده رقمی که عدد دورقمی واقع درسمت‌چپ‌آن توان سوم‌رقم‌یکان خود می‌باشد وعددچهاررقمی واقع درسمت‌راست‌آن توان‌سوم‌است وسایررقمهایش به‌تصاعد حسابی می‌باشند.

قائم: ۱ـ همان عددردیف۱ افقی ۲ـ به‌صورت $\overline{abac}$ که $\overline{ab}$ همان عـدد ردیف ۱۵ افقی و $c=b+1$ می‌باشد. ۳ـ دو واحد بیشتر ازتوان پنجم. ۴ـ به‌صورت $\overline{abccc}$ که $a=3c$ و $b=5c$ است. ۵ـ بـه‌صورت $\overline{abcde}$ که $\overline{ab}$ همان‌عدد ردیف ۲۱ افقی و $\overline{de}$ همان‌عدد ردیف ۲۲ افقی و c خارج‌قسمت تقسیم $\overline{ab}$ بر $\overline{de}$ است. ۶ـ به‌صورت $\overline{aabb}$ که $\overline{ab}$ بزرگترین عدد دورقمی‌است که رقم‌یکان‌آن توان‌دوم و رقم دهگان‌آن توان‌سوم است. ۷ـ تکرارعدد ردیف ۲۲ افقی. ۸ـ رقم یکان‌آن توان‌سوم ورقم دهگان‌آن عضو بی‌اثرعمل‌جمع‌است ۱۰ـ سه برابرمجذورعدد ردیف ۱۲ افقی. ۱۲ـ دوبرابرعدد ردیف ۲۰ افقی. ۱۳ـ همان‌عـدد ردیف ۲۲ افقی. ۱۷ـ یك واحد کمترازجذرعدد ردیف ۱۲ قائم. ۲۳ـ اگربه‌رقم سدگان آن ۲ اضافه‌شود، عددحاصل مجذوردوبرابرعدد ردیف ۱۵افقی می‌باشد. ۲۴ـ متمم‌حسابی عددردیف ۱۴ افقی. ۲۵ـ ده‌برابر مقلوب عددردیف ۳۳ قائم. ۲۶ـ به‌صورت $\overline{abc}$ که $\overline{bc}$ همان عددردیف ۱ افقی و a عددی‌است که دررقم‌یکان حاصل‌ضربش دردرعدد فرد نیز ظاهرمی‌شود. ۲۷ـ ۲ واحد بیشتر از دوبرابر عددردیف ۱۶ افقی. ۲۸ـ ۵ واحد بیشترازعددردیف ۲۵قائم ۲۹ـ همان‌عدد ردیف ۱۲ قائم که رقم‌سدگانش‌چهار برابرشده باشد. ۳۰ـ ده‌برابرعدد ردیف ۱۴ افقی. ۳۱ـ سه‌چهارم عدد ردیف ۲۵ قائم. ۳۳ـ یك‌واحد بیشتر ازعـدد ردیف ۱ افقی. ۳۴ـ یك واحد بیشترازعدد ردیف ۳۳ قائم.



حل جدول شمارهٔ قبل

انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك و شیمی
حل مسائل ممتاز ریاضی و مطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ: پرویز شهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری مجموعه‌ها
تألیف: علی‌اصغر هومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: دکتر محسن هشترودی

مبادی منطق و ریاضی جدید
تألیف: غلامرضا عسجدی

تستهای چند جوابی شیمی
ترجمهٔ: عطاءالله بزرگ‌نیا

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

راهنمای ریاضیات متوسطه
تألیف: عبدالحسین مصحفی
بها: ۳۰ ریال

تستهای هوش
ترجمهٔ: باقر مظفرزاده
بها: ۱۰۰ ریال

معماهای ریاضی
ترجمهٔ: محمد رکنی قاجار
بها: ۷۵ ریال

مسائلی از حساب استدلالی
تألیف: محمود کاشانی

جلد اول	جلد دوم	جلد سوم
۱۲ ریال	۱۵ ریال	۱۵ ریال

از شماره‌های گذشتهٔ مجلهٔ یکان آنچه برای فروش موجود است:

بیست و پنج ریالی: ۸-۳۲-۳۳-۳۶-۳۷-۴۲-۴۴-۴۵-۴۶-۴۷-۴۸-۴۹-۵۱-۵۲-۵۴-۵۵-۵۶-۵۷-۶۱-۶۲-۶۳-۶۴-۶۵-۶۶-۷۴-۷۵-۷۶-۷۷-۷۹-۸۰-۸۱-۸۲-۸۳-۸۴-۸۵-۸۸-۸۹-۹۰-۹۱-۹۲-۹۳.

سی ریالی: از شمارهٔ ۹۴ تا شمارهٔ ۱۰۰

چهل ریالی: ازشمارهٔ ۱۰۳ تاشمارهٔ ۱۱۴

شصت ریالی: ۱۱۵-۱۱۶-۱۱۷

یکان سال ۵۴ به‌بهای ۱۲۰ ریال (شامل حل‌مسائل امتحانهای نهایی و کنکورعمومی سال ۱۳۵۴)

یکان سال ۴۸ به بهای ۷۵ ریال (شامل حل‌مسائل امتحانهای نهایی و کنکورهای سال ۱۳۴۸)