مجله ریاضیات

دورهٔ دوازدهم ، شمارهٔ : ۵ شمارهٔ مسلسل : ۱۱۴ فروردین، اردیبهشت، خرداد ۲۵۳۵

دراین شماره:

رسوائی دزدان نام	عبدالحسین مصحفی	۱۶۹
بنیانگزاران ریاضی جدید ، گروه بورباکی	—	۱۷۰
مجلس تجلیل از استاد ابوالقاسم قربانی	—	۱۷۱
زایش و پیشرفت مفهوم عدد	ترجمهٔ پرویز شهریاری	۱۷۲
فکر کنید	—	۱۷۷
روش هندسی ماکسیمم و می‌نیمم	دکتر علیرضا امیر معز	۱۷۸
مقدمه‌ای بر توپولوژی	محمد حسین احمدی	۱۸۰
حل معادلهٔ: $x^2+y^2=a$	حسین خیازیان	۱۸۳
پاسخ «فکر کنید» مندرج در یکان ۱۱۳	-	۱۸۵
تفاضل متقارن در مجموعه‌ها	عادل اسلامی ارشقی	۱۸۶
تبدیلات نمودارها	سعید درودیانی	۱۸۹
باز آموزی هندسه (۵)، خاصیتهایی از دایره	ترجمهٔ: عبدالحسین مصحفی	۱۹۰
حل مسائل یکان شمارهٔ ۱۱۳	-	۱۹۲
مسائل برای حل	-	۲۰۳
تستهای ریاضی	-	۲۰۵
جدول اعداد	محمدسعید رحمن	۲۰۸
Problems & Solutions	-	ماقبل آخر

بها : ۴۰ ریال

توجه

سازمان یا مؤسسهٔ مکاتبه‌ای وهمچنین کلاس کنکوروابسته به‌مجلهٔ یکان وجودندارد. هرنوع آگهی یا اعلامیه‌ای که زیر عنوان‌چنین‌سازمانی‌پخش شود با مجلهٔ یکان ارتباط نداردودراین باره هیچ گونه مسؤولیتی متوجه مسؤولان مجلهٔ یکان نمی‌باشد.

تسلیت

در فروردین ماه سال جاری آقای حاج حسن ذاکری نمایندهٔ فروش یکان در رضائیه درگذشت. این فقدان اسفناك رابه‌بازماندگان آن‌مرحوم تسلیت می‌گوییم.

توجه

ازمشترکان مجله که با پایان سال تحصیلی نشانی پستی آنهاتغییرمی کند، درخواست‌می‌شودبرای دریافت شماره‌های دیگریکان‌دورهٔ دوازدهم نشانی جدید خود را اطلاع دهند.

از شماره‌های گذشتهٔ مجلهٔ یکان آنچه برای‌فروش موجود است:

۱) بیست ریالی:

۳۶

۲) بیست‌وپنج ریالی:

۴۲-۴۴-۴۵-۴۶-۴۷-۴۸-۴۹-۵۱-۵۲-۵۴-۵۵-۵۶-
۵۷-۶۱-۶۲-۶۵-۶۶-۶۸-۶۹-۷۴-۷۵-۷۶-۷۷-۷۹
۸۰-۸۱-۸۲-۸۳-۸۴-۸۵-۸۸-۸۹-۹۰-۹۱-۹۲-۹۳

۳) سی‌ریالی:

۹۴-۹۵-۹۶-۹۷-۹۸-۹۹-۱۰۰

۴) چهل ریالی: از ۱۰۳ تاکنون

۵) یکان سال ۵۴ : ۱۲۰ ریال

مجله‌های یکان‌سال ویژهٔ سالهای‌گذشته کلا مصرف گردیده است و فعلا ازآنها برای فروش‌موجود نیست.

خواهشمند است از در خواست آنها خودداری شود.

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۲۵۲۲ شاهنشاهی
هرسال هشت شماره منتشر می‌شود
دورهٔ دوازدهم ـ شمارهٔ پنجم ـ شمارهٔ مسلسل ۱۱۴
فروردین، اردیبهشت، خرداد ۲۵۳۵

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره:
تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱
نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳
تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱
وجه اشتراك برای دورهٔ دوازدهم : ۳۲۰ ریال
حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك صادرات

YEKAN
Mathematical Magazine
Editor : MOS'HAFI Abdolhossein
Volume XII, number 5. Jun. 1976
subscription : 6$
TEHRAN - P.O.B. 2463
چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت‌آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

رسوائی دزدان نام

برای آنان که مجلهٔ یکان را می‌شناختند، یکان کلمه‌ای احترام‌آمیز بود. ازاین رو، هنگامی که آگهیهایی با نام یکان درروزنامه‌ها پخش‌شد، برای عده‌ای این‌گمان را پیش آورد که مجلهٔ یکان نیزبه راه تجاری کشانده شده‌است، و عـده‌ای دیگر، بااعتماد به‌حسن سابقهٔ مجلهٔ یکان، وعده‌های آگهی دهنده راباورداشتند ووجوهی را به حساب وی واریز کردند. این هر دو دسته ازراه فرستادن نامه یا به وسیلهٔ تلفن مدیرمجله را مورد اعتراض قراردادند. اعتراض دستهٔ اول این‌بود که چرا مجلهٔ یکان تغییررویه داده است، واعتراض دستهٔ دوم اینکه چرا در برابر وجوهی که ازایشان دریافت شده جزوه یاکتابی فرستاده نشده‌است. سرمقالهٔ یکان شمارهٔ ۱۱۲ واعلام صریح به اینکه آگهیهای‌مزبور بامجلهٔ یکان ارتباط ندارد، همهٔ خوانندگان و دوستداران مجلهٔ یکان را برچگونگی موضوع آگاه ساخت. ازآن موقع تاکنون مرتباً نامه‌هایی به‌ادارهٔ مجله واصل شده است که نویسندگان آنها ضمن نسبت دادن خلافکاریهایی به‌صاحب آگهیهای مندرج درروزنامه‌هاخواسته‌اندتا نامه‌های ایشان عیناًدر مجله درج گردد تااقلا ازوارد شدن خسارت به افرادی دیگر جلوگیری شده باشد. به خاطر پرهیز از آنکه صفحات مجلهٔ یکان جایگاه تسویه حسابهای شخصی نباشد، ازدرج این‌نامه‌ها درمجله‌خودداری می‌شود. آنکه‌در اوغش باشد بامحك‌تجربه‌سیه‌روی گردد. امادراین میان‌یك‌موضوع مایهٔ‌أسف است وآن اینکه بسیاری ازاشخاص که با مجلهٔ یکان‌آشنائی نداشته‌اند واکنون ازراه‌آگهیهای مورد بحث ومشاهدهٔ بعضی از اعمال‌خلاف، باکلمهٔ یکان آشناشده‌اند، این کلمه را مترادف باصفاتی تلقی خواهند کرد که شایستهٔ مجلهٔ‌یکان‌نمی‌باشد.

عبدالحسین مصحفی

گروه بورباکی (L'equipe de BOURBAKI)

نیکلا بورباکی نام مستعاری است که توسط گروهی از ریاضیدانان فرانسه به عنوان نویسندهٔ یك‌سری مقاله‌ها و مؤلف یك دوره کتابهای ریاضی بکاربرده شده‌است . این ریاضیدانان همه از فارغ التحصیلان برجستهٔ دانشسرای‌عالی فرانسه بودند . آنان درحدود سال ۱۹۳۳ میلادی بـرای گسترش ریاضیات با روش‌جدید گروهی تشکیل دادند که بعدها به گـروه بورباکی معروف‌شد . ازجمله شرطهای اساسی برای عضویت دراین گروه داشتن سن کمتر ازپنجاه سال بود، به‌قسمی که اگریکی‌ازعضوهای گروه به‌سن پنجاه سالگی می‌رسید خودبه خود ازعضویت گروه برکنار می‌شد.

بنیان گزاران نخستین گـروه بورباکی پنج‌نفر بودند به نامهای : **هانری کارتان ، کلود شوالی ، ژان دلسارت ، ژان دیودونه ، آندره‌ویل** . اماپس ازمدتی کوتاه عدهٔ عضوهای گروه به بیست نفررسیدکه بعضی ازآنها غیر فرانسوی بودند . اولین غیرفرانسوی که به عضویت گروه پذیرفته شد **ساموئل النبرگ** رئیس دپارتمان ریاضی دانشگاه کلمبیا بود که دراصل لهستانی امامقیم‌آمریکا بود .

ازجمله عضوهای گـروه بورباکی **آندره لیشنرویچ** بوده است که به‌خاطرفعالیتهایش درنوسازی برنامه‌های‌آموزشی‌ریاضی درفرانسه شهرت‌خاص دارد . وی هم‌اکنون ریاست‌کمیتهٔ قانونی تغییربرنامه‌های ریاضی درمدارس فرانسه رابه‌عهده دارد .

گسترش ریاضیات معاصروبه ویژه وارد شدن بسیاری از شاخه‌هـای جدید ریاضـی به برنامه‌های آموزشی دبیرستانهـا ودانشگاهها مرهون تلاشها و کوششهای گـروه بورباکی است. مهمترین اثرمنتشرشدهٔ این‌گروه مقدمات ریاضی نام‌داردکه از ۱۹۴۰ به بعد به طور متناوب در بیست وپنج جلد چاپ و نشر یافته‌است . هرچند مؤلف این‌کتاب عظیم نیکلابورباکی معرفی شده‌است اما، همان‌گونه‌که اشاره رفت، این‌یك نام مستعاراست وکتاب توسط یك نفر تألیف نگردیده بلکه‌گروهی از زبده‌ترین ریاضیدانان درتألیف آن همکاری داشته‌اند . امروزه نه تنها در فرانسه بلکه درهمهٔ جهان ، این‌کتاب به‌عنوان مرجعی مطمئن برای شاخه‌های گوناگون ریاضی مورد استفاده می‌باشد .

در صفحهٔ بعد بیوگرافی مختصر بعضی از عضوهای گروه بورباکی درج می‌شود.

کارتان

Henri CARTAN

دیودونه

Jean DIEUDONNÈ

لیشنرویچ

André LICHNEROWICZ

هانری کارتان

هانری کارتان استاددانشکدهٔ علوم پاریس فرزند **الی کارتان** است که هردو ازریاضیدانان بزرگ فرانسه‌اند. هانری در ۱۹۰۴ درشهر نانسی به دنیاآمد. از ۱۹۴۰ تا ۱۹۶۵ مقام ممتاز هدایت تحقیقات را دردانشسرای عالی فرانسه به عهده داشت. ازمؤسسین وفعالین گروه بورباکی‌است. دربارهٔ: تابعهای بایك متغیرحقیقی، تابعهای باچند متغیرمختلط، فضاهای تحلیلی آثار ارزنده دارد. وی باهمکاری **ساموئل ایلنبرگ** جبرهمولوژیك‌را بنیان گذاردند که تحقیقات آنها به تئوری کاتگوریهای آبلی منجر شد.

ژان دیودونه

متولد ۱۹۰۶ درشهر لیل، استاد ارشد دانشکدهٔ نیس و ازبنیان گزاران مکتب بورباکی‌است. دربارهٔ بسیاری‌ازشاخه‌های ریاضی‌آثار ارزنده دارد ازجمله: توپولژی عمومی، فضاهای برداری توپولژیك. گروههای کلاسیك، هندسهٔ فورمل، تاریخ ریاضیات.

دیودونه باهمکاری **۱. گروتاندیك** کتاب «مقدمات‌هندسهٔ جبری» را تألیف کرده‌است. دیودونه در زمینهٔ آموزش ریاضی نیزصاحب تألیفاتی است‌ازآن‌جمله: جبرخطی، هندسهٔ‌مقدماتی، حساب متعالی، مقدمات آنالیز (که عنوان جلد اول آن عبارتست از: مبانی آنالیزجدید).

ژان دیودونه در دومین کنفرانس ریاضی ایران که در فروردین ۱۳۵۰ دردانشگاه آریامهر تشکیل شد شرکت‌داشت.

آندره ویل (André WEIL)

متولد ۱۹۰۶ درپاریس وازمؤسسان مکتب‌بورباکی‌است. وی در شانزده سالگی درامتحان ورودی دانشسرای عالی فرانسه (که از دشوارترین امتحانها است) توفیق یافت و دراین مؤسسهٔ عالی علمی به تحصیل و تحقیق مشغول‌شد. ویل در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات معاصرصاحب آثار می‌باشد.

آندره لیش نروویچ

در ۱۹۱۵ در بودین لارشامبولت به دنیا آمد. ریاضیدان وفیزیکدان‌است. عضوآکادمی علوم فرانسه واستاد کلژدوفرانس است. دربارهٔ: فضاهای ریمانی، گروههای هولونومی، فضاهای با التصاق آفین، نسبیت عمومی آثار مهم دارد. ریاست کمیتهٔ قانونی نوسازی برنامه‌های ریاضی مدارس فرانسه را به عهده دارد وازاین راه موجبات تغییرات اساسی درروشها وبرنامه‌های ریاضی بسیاری ازکشورها را فراهم‌آورده‌است.

یادداشت ـ پروفسورمحسن هشترودی استاد ممتاز دانشگاه تهران ازهمدوره‌های **لیشنرویچ** است که دونفر ازسه‌نفر دانشجویان موفق **الی کارتان** بوده‌اند.

---

* مجلس تجلیل از استاد ابوالقاسم قربانی *

دکترکریم فاطمی رئیس دانشگاه فرح پهلوی از جمله افرادی است که درهریك از مقامهایی که تاکنون عهده‌دار بوده به تشویق اهل علم همت داشته‌است. وی ازهمان آغاز تأسیس و ادارهٔ مدرسهٔ عالی دختران ایران (فعلا دانشگاه فرح پهلوی) مرکز تحقیقات علمی را درآنجا دایر کرده و ادارهٔ آن را به محقق معروف **ابوالقاسم قربانی** سپرده‌است. این‌اقدام، بدون شك، درتوفیقهای علمی آقای قربانی اثر داشته است وبی‌جهت نیست که هرتوفیق علمی آقای قربانی برای‌آقای دکترفاطمی‌نیز مسرت‌بخش است وازآن تجلیل می‌کند.

آقای **ابوالقاسم قربانی** تاکنون دو بار به اخذ جایزهٔ سلطنتی بهترین کتاب سال درایران نایل‌آمده است. به مناسبت اعطای جایزهٔ سلطنتی‌بهترین کتاب سال ۲۵۳۴ (به‌خاطر نگارش کتاب بیرونی نامه) به‌آقای ابوالقاسم قربانی مجلس ضیافتی در روز ۵ اردیبهشت ماه گذشته در دانشگاه فرح پهلوی منعقد بود که درآن جمعی ازاستادان ومحققان شرکت داشتند. دراین‌مجلس آقایان **دکتر کریم فاطمی و دکتر حسن صفاری** خدمات علمی وخصایل عالی آقای قربانی را ستودند وآقای قربانی نیز ضمن سخنرانی کوتاهی یك قطعه ازاشعارنغزخود را قرائت کرد. آقای قربانی علاوه برآنکه در ریاضیات صاحب‌تحقیق است در ادبیات نیز تبحر دارد و شاعری‌توانا می‌باشد.

زایش و پیشرفت مفهوم عدد و دستگاههای عدد شماری

بوریس ولادیمیروویچ بولگارسکی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

آغاز ریاضیات را هم، مثل دیگردانشها، باید در ژرفای تاریخ‌زندگی‌انسانی، جستجو کرد، زمانی که‌هیچ نوشته‌ویادداشتی از آن، به مانرسیده است . مفهومهای بنیانی ریاضیات ، خیلی پیش از آن به وجودآمدکه بشر توانست‌برای یادداشت‌اندیشه‌های خود، نشانه‌هایی کشف‌کند. با وجود این، می‌توان با بررسی زندگی، زبان و افسانه‌های قومهایی‌که هنوزدرمرحله‌های پایین تمدن بشری زندگی می‌کنند (یا تا همین گذشتهٔ نزدیك زندگی‌می‌کردند)، همچنین‌باکاوش درزبان و داستانهای ملتهایی‌که به درجهٔ بالای تمدن رسیده‌اند، امکان داوری‌دربارهٔ پیشرفت تدریجی نیروهای تولیدی، روابط تولیدو همراه باآن، پیشرفت فعالیتهای ذهنی و روحی بشر را، پیدا کرد. همین روش جستجو و بررسی، روشن می‌کندکه بشر، درطول هزاران‌سال، چه دشواریهای سنگینی را، برای به وجودآوردن ودرك‌مفهومهای بنیانی ریاضیات، از سر گذرانده‌است. در برابر ما، راه پرفراز ونشیبی گشوده می‌شودکه‌بشر، برای‌رسیدن به تصورهای ریاضی، و به خصوص برای رسیدن به مفهوم عدد، به‌کندی و به تدریج، از آن گذشته است.

عدد، عبارتست از معیار رابطه‌های کمی، بین پدیده‌هایی که دنیای مارا فراگرفته است، چگونگی‌پیدایش و پیشرفت‌این مفهوم را، باید به‌عنوان سرآمد بررسیهای مربوط به مفهومهای ریاضی، به‌طورکلی، مطالعه‌کرد، زیرا تغییرات کمی، در بیشتر رابطه‌های ریاضی، اهمیت درجه اول دارد.

ولی، أبزارهای غیرمستقیم بررسی، نمی‌تواند پاسخ‌روشن و دقیقی به‌این پرسش بدهدکه: مفهوم عدد ،کی و چگونه به وجود آمد، زیرا ، ملتهای با فرهنگ، هنگامی پژوهش دربارهٔ ملتهای عقب مانده را آغاز کردند، که آنها در مرحلهٔ میانهٔ وحشیگری (بنابه تقسیم‌بندی جامعه‌شناسان) بودند، یعنی هنگامی که آنها با تهیه و کاربرد آتش آشنا بودند ، سلاحهای سنگی برای شکار می‌ساختند، تیر وکمان تهیه می‌کردند، هنگامی که ظرفها و دیگر وسیله‌های چوبی را درست می‌کردند و حتی از قایقهای ساده، به عنوان وسیلهٔ رفت وآمد، استفاده می‌کردند. و پژوهشگران، به هرجا که رفتند و با هر قبیله‌ای‌که آشناشدند، در بین آنها، آگاهیهایی از ریاضیات، پیداکردند. بررسی‌علمی زندگی فرهنگی ملتهای‌عقب‌مانده، نشانه‌های‌بسیارکمی‌ازپیشرفت ریاضیات را نشان می‌دهد، واین موضوع می‌تواند، تصویرروشنی از پیشرفت‌کند و وجب به وجب آگاهیهای نخستین ، در زمینهٔ رابطه‌های‌کمی، در برابر ما قرار دهد . بررسی یادداشتهای پژوهشگران ومشاهده‌های‌جهانگردان،می‌توانندما رادرکارخود، به نتیجه‌های‌کم و بیش دقیق برساند. با استفاده از نوشته‌ها و یادداشتهای این‌افراد،می‌توانیم، با اطمینان‌کافی، مسیردسترسی انسان را به‌آگاهیهای اولیهٔ ریاضیات، ترسیم‌کنیم.

دشوارترین مرحله‌ای که‌بشر، برای رسیدن به‌مفهوم‌عدد، گذرانیده است ، مرحلهٔ جدا کردن مفهوم «واحد» از مفهوم «بسیار» بوده است. به‌احتمال زیاد،این تشخیص، زمانی رخ‌داده است‌که آدمی، هنوز دوران‌وحشیگری خودرا می‌گذرانده‌است. به اعتقاد و. و. بوبینین (۱۸۴۹-۱۹۱۹) ریاضیدان روسی، این جدایی «واحد» از «بسیار» ، به‌این خاطر به وجود آمد که آدمی با دست خود، چیزی را برمی‌داشت و به این وسیله، واحد را از مجموعه، جدا می‌کرد . بوبینین ، این جدایی را ، آغاز محاسبه می‌داند و به منزلهٔ دستگاهی به حساب می‌آوردکه از دو مفهوم تشکیل شده است: واحد و مجموعهٔ نا معین.

مثلا، افرادقبیلهٔ باتاکود،که در برزیل زندگی می‌کردند، عددها را تنها بادو واژهٔ «یك» و«بسیار» بیان می‌کردند (تقریباً تمامی افراد این‌قبیله، در اثرتعقیب بیرحمانهٔ اروپائیها دردوران

استعمار بزریل، نابودشدند). همین دانشمند، اعتقاد دارد که‌عضو «دو»، هنگامی به مجموعهٔ عددها وارد شد که بشر توانست با هر دست خود، چیزی‌را بردارد. بشر، در مرحله‌های نخستین‌شمار، مفهوم «دو» را، با بلندکردن دو دست خود ـ که با هر کدام از آنها، چیزی را بـرداشته بودـ نشان می‌داد . برای بیان مفهوم «سه» ، دشواری بیشتری وجود داشت ، زیرا آدمی تنها دو دست دارد. این دشواری، هنگامی برطرف شد که بشر توانست درك کندکه چیز سوم را روی پاهای خود قرار دهد. به‌این ترتیب، «سه» با بلندکردن دو دست و نشان‌دادن پـاهـا، مشخص می‌شد. جداکردن و درك مفهوم «چهار»، به طور نسبی ، ساده‌تر انجام گرفت، زیرا از یکطرف، مقابلهٔ دو دست با دو پا، و از طرف دیگر، امکان‌قراردادن‌چیزی روی هرپا، به این مفهوم می‌رسید.

انسان، در نخستین مرحلهٔ پیشرفت‌شمار، هیچگونه نامی برای عددها، نداشت: یاچیزهایی راکه می‌خواست بشمارد روی دستها و پاها می‌گذاشت و یا با حرکت اندامهای بدن و ایماو اشاره، تعداد آنها را بیان می‌کرد.

پیشرفت بعدی شمار، به احتمال زیاد، مربوط به دوره‌ای است که بشر با بعضی شکلهای تولید ـمثل شکار و ماهیگیری ـ آشنا شده است. آدمی، برای رسیدن به این شکل تولید، ناچار بود برخی از ابزارهای ساده را تهیه‌کند. به جز این ، پیشروی انسان به‌طرف سرزمینهای سرد، او را وادارکرد که لباس تهیه کند و ابزارهایی برای آماده‌کردن پوست جانوران بسازد.

کم‌کم، جامعهٔ اشتراکی نخستین شکل می‌گرفت. دراین جامعه لازم بود، غذا ، لباس و ابزارهای کار، تقسیم شود، این اوضاع و احوال، بشر را وامی‌داشت تـا راهی برای نگهداشتن حساب دارایی عمومی پیدا کند، نیروی دشمنی راکه‌برای بدست آوردن سرزمینهای تازه، با آن‌روبروست، تخمین بزند وغیره. به این مناسبت، عدد شماری نمی‌تـوانست در «چهار» بایستد و می‌بایست بیشتر و بیشتر، جلو برود.

در این مرحلهٔ پیشرفت، دیگر لازم نبود کـه بشر برای شمردن چیزها، آنها را در دست بگیرد و یا روی پاهای خود قرار دهد. در ریاضیات، نخستین انتزاع به وجود می‌آیـد : به تعداد آنچه که باید شمرده شود ، چیزها و یا علامتهای دیگری در نظر گرفته می‌شود، یعنی به‌جای هرشیء، یك سنگریزه یایك شاخه یا یك شکاف وغیره، به حساب‌می‌آمد. این عمل، درواقع، همان تناظر یك‌به‌یك است؛ به‌هر چیزی کـه باید شمرده شود، یکی از وسیله‌های محاسبه (یعنی یك سنگریزه ، یك بریدگی، یك شاخه وغیر آن)، متناظر می‌شود. رد پای این نوع محاسبه، تا امروز هم در میان بسیاری از ملتها، باقی‌مانده است .

گاهی، این وسیله‌های نخستین‌محاسبه (سنگریزه‌ها، گوش ماهیها؛ استخوانها) را به‌بند یابه چوب می‌کشیدند تا ازگم‌شدن آنها، جلوگیری شود، و همین رسم، به‌تدریج (و البته درزمانی خیلی نزدیکتر به امروز)، منجر به‌ساختن چرتکه‌های گوناگون شدکه تقریباً همه‌جا، به عنوان یك وسیلهٔ محاسبه، به‌کارمی‌رفت و ظاهراً سرچشمهٔ آنرا باید سوان‌پان چینی دانست.

هنگامی‌که بشر، بـه طبیعی‌ترین وسیلهٔ محاسبه‌ای که در اختیار داشت، یعنی انگشتان خود، روی آورد، پیشرفت شمار، سرعت بی‌اندازه‌ای به‌خودگرفت. به احتمال زیاد، نخستین‌عملی که با انگشتها انجام شد، نشان‌دادن چیزی به‌کمك انگشت‌نشانه بود، در آنجا انگشت نقش‌واحد را به عهده‌داشت. به‌کارگرفتن انگشتهابرای شمار، به‌آدمی مجال داد تااز مرز «چهار»بگذرد، زیـرا اگر هر انگشت را بـه جای یك واحد می‌گرفت، تعداد انگشتهای یك دست، او را به عدد «پنج» می‌رساند.

پیشرفت بعدی شمار، با بهتر به کار گرفتن همین وسیلهٔ محاسبه، شکل‌گرفت. بشر، ابتدا،از انگشتهای دست‌دوم استفاده کرد و سپس به‌سراغ انگشتهای پا رفت: برای قبیله‌هایی که‌مردم آن، کفشی به پا نداشتند ، فکر استفاده از انگشتهای پـا، کاملا طبیعی است. و روشن است که این گسترش معیار محاسبه، در اثر تناظریك به‌یك بین انگشتهای دست و پا باآنچه که می‌خواستند بشمارند ، به وجود آمد کـه نشانه‌های آن در میان بعضی ملتها دیده می‌شود.

مثلا: بومیان‌امریکای‌جنوبی، برای عدد «بیست» ،انگشتان دستهای خود را روی انگشتان پاهای خود، قرار می‌دهند.

محاسبه‌ای که دراین‌دوره، برای‌زندگی معیشتی‌روزانهٔ‌مردم لازم بود، محدود به این می‌شدکه غذا و لباسی را که در اثرزد و خوردها و جنگها، بدست‌آورده بودند، بین خود تقسیم کنند و نیازی نداشتند به مفهوم عددهایی کـه ضمن این محاسبه، پیدا می‌شد،توجه‌کنند. به‌همین مناسبت، لزومی‌نداشت‌که برای‌عددها، نامی درنظربگیرند و حداکثر آنها را با مقابله و ایما و اشاره، بیان می‌کردند.

مثلا، ساکنین بومی جزیره‌های اندامان (واقع در خلیج بنگال اقیانوس هند)، که به وسیلهٔ استعمارگران به کلی نـابود

شدند، برای بیان عددها، واژه‌ای نداشتند و منظور خود را با اشاره می‌فهماندند. به‌این‌ترتیب، اشاره‌هایی که به‌وسیلهٔ دست وپا و یا دیگر اندامهای‌بدن‌می‌شد، برای مدتی دراز و برای‌بسیاری از ملتها، به‌جای نامگذاری عددها، به‌کار می‌رفت.

حساب شفاهی، تنها وقتی می‌توانست پیشرفت کند که‌تولید کشاورزی به‌وجود آمد. همراه با اقتصادکشاورزی، به‌تدریج مالکیت خصوصی برمزرعه، جالیز و گله هم پیدا شد. دارندهٔ مزرعه وجانوران خانگی: نه‌تنها لازم بودکه حساب اموال‌خود را داشته باشد، بلکه‌می‌بایست تعدادآنها را هم به‌یاد خودبسپارد. همین نیاز، آدمی را وادشت تا گام در راه نامگذاری عددها بگذارد. ابتدا،از روشهای ناجور، گوناگون وکم وبیش دشوار و از راه نشانه‌های بیرونی هر چیز، وجود آنرا به‌یاد خود می‌سپردند. مثلاکسی‌که چندگاو داشت، به‌یاد داشت که یکی از آنها خاکستری است، دیگری سیاه است و غیره و روشن است که وقتی تعدادآنها زیاد می‌شد، دیگر به‌یاد داشتن آنها، با این روش، کار ساده‌ای نبود.

گام بعدی در نامگذاری عددها، به‌این ترتیب برداشته شدکه‌با یك توضیح عبارتی،مجموعهٔ واحدها را بیان می‌کردند. مثلا، برای اینکه بگویند «دو»، می‌گفتند: «به‌همان اندازه که من دست دارم»، وبرای «چهار» : «به‌اندازهٔ پاهای یك گاو». به‌این ترتیب، برای نام بردن یك عدد، از تعداد اندامهای‌انسان یا حیوان استفاده می‌کردند.

بعدها، بسیاری از ملتها، این توضیح عبارتی را ساده‌تر کردند و به‌جای نام عدد به‌کار بردند؛ مثلا، عدد «دو» را با واژه‌هایی مثل «گوشها»، «دستها» ، «بالها» و عدد «چهار» را با واژهٔ «پاهای چارپا» و غیره، بیان می‌کردند.

ولی، پیشرفت بعدی نامگذاری عددها، بیشتر به‌محاسبهٔ با انگشتان بستگی دارد.

مثلا، مردم زولو ، عدد «شش» را «تاتیستویا» می‌گویند که به‌معنای«انگشت بزرگ دست» است.ساکنین جزیرهٔ مارولاك (درتنگهٔ تورس ، بین استرالیا و گینه جدید) ، به‌عدد «پنج» می‌گویند «نابی‌گت» ، که درآن «گت» به‌معنی «دست» است [شبیه ارتباط «پنج» و «پنجه» در زبان فارسی] مردم گروئنلند و استرالیا هم برای «شش»، از واژه‌ای استفاده می‌کنند که به‌معنای «یك انگشت از دست دیگر» است؛ آنها «ده» را با واژه‌ای به‌معنای «دو دست» و «یازده» را با واژه‌ای به‌معنای «دو دست و یك انگشت»، بیان می‌کنند؛ عدد «بیست» را با واژهٔ «آدم» بیان می‌کنند،زیرا، آدم دارای۲۰ انگشت است. بومیان کناررودخانهٔ اورینوك (از قبیلهٔ تاماناك)، برای عدد «بیست ویك» می‌گویند «یکی از دست آدم دیگر». نامگذاری اخیر، وقتی برای ما روشن می‌شودکه با روش شمردن مردم قبیله آشنا باشیم . وقتی که به‌محاسبه‌ای نیازباشد،چندنفراز مردم قبیله شرکت می‌کنند: نفر اول، شمارش را به‌کمك انگشتان دست وپای خود ، آغاز می‌کند و می‌تواند به ۲۰ برسد؛ اگر لازم باشد بیش از ۲۰را بشمارند، شمارش‌بعدازآنرا،نفر دوم انجام می‌دهد. اسکیموهای امریکای شمالی،واژهٔ «آدم» را برای ۲۰ و «پنج آدم» رابرای ۱۰۰ به‌کار می‌برند.

از آنچه‌که گفتیم، معلوم می‌شود که چگونه بشر توانست به‌تدریج و در نتیجهٔ شمارش چیزها، به‌مفهوم عدد برسد. و این همان عددی است‌که ما امروز **عدد طبیعی** می‌نامیم.

از محاسبهٔ با انگشتان، به‌تدریج ، **دستگاه عددشماری** شکل می‌گرفت، آنهم به‌طور طبیعی و تحت تأثیر شرایطی که آدمی را در برگرفته بود.

حتی برای ملتهایی‌که زبان پیشرفته‌ای دارند، برای هر عدد نام بخصوصی وجود ندارد و نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا رشتهٔ عددها، رشته‌ای بی‌پایان است. معمولا در بدنهٔ شمار، چند نام وجود داردکه‌ازهمانها، برای نام بردن عددهای‌بزرگتر هم، استفاده می‌کنند. برای ملتهایی که‌فرهنگ‌پیشرفته‌ای ندارند، این وضع کاملا ضروری است. عقب ماندگی جدی پیشرفت زبان از پیشرفت‌شمار، ایجاب می‌کندکه برای نامیدن عددهای‌جدید، عددهای بزرگتری‌که ضمن‌شمار بدست می‌آید، ازهمان نامهایی که برای عددهای‌کوچکتر به‌کار رفته است، استفاده شود. ولی گاهی این روش به‌دشواری‌برخورد می‌کند. ترکیب نامهای‌اولیهٔ عددها، بی‌اندازه بزرگ می‌شود، وبه‌همین مناسبت، کارنامگذاری شفاهی عددها را متوقف می‌کند.

مثلا، بومیان رودخانهٔ **آمازون** ، نمی‌توانندتا بیش ازعدد سه را نام ببرند، زیرا ساده‌ترین روش بیان عدد سه، در زبان آنها، اینطور تلفظ می‌شود: «پوئه تاراورین‌کوآروآك». این شکل بیان عدد، در این قبیله،پیش از تکامل محاسبهٔ با انگشتها به‌وجود آمده است.

محاسبهٔ با انگشتها، به‌تدریج منجر به‌شمارش منظم شدو آدمی به‌خودی‌خود به‌بیان شفاهی ساده‌تری، برای عددها رسید.

مثلا، بیانی که برای عدد ۱۱ لازم بود: «ده انگشت در دو دست و یك انگشت روی یك پا»، به‌شکل «انگشتی روی‌پا» ساده شد؛ برای بیان عدد ۲۳، به‌جای عبارت «ده‌انگشت در دو دست، ده انگشت در دوپا، و سه انگشت در دستهای دیگری» به‌طور ساده گفته می‌شد: «سه انگشت دیگری».

همین‌ساده‌کردن نامگذاری، راه‌را برای جداکردن‌واحد مرتبهٔ بالاتر، هموارکرد. در واقع، نامگذاریهایی مثل «دست» برای پنج، «دودست» برای ده، «پا» برای پانزده، «آدم»برای بیست و غیره، همان دست‌یافتن به‌مرتبهٔ بالاتر، نسبت به‌انگشتان است. انگشتان دراینجا نقش واحد پایین‌تر را به عهده دارند. وقتی‌که برای عدد «شش» گفته می‌شود : «یکی از دست دوم» ، مثل این‌است که گفته‌شود: «یکی‌از پنج‌تای دوم» یا «پنج و یك»، که درآن «یك»، واحد مرتبهٔ پایین‌تر و «پنج»، یعنی «دست» ، واحد مرتبهٔ بالاتر است. به‌همین ترتیب، وقتی‌که گفته می‌شود «دوتا از پا» ـ که به‌معنی «دوازده» است ـ نشان می‌دهد که دو واحد از ده تای دوم انتخاب شده است ؛ این بیان را می‌توان اینطور گفت: «دو دست و دو انگشت» ، که درآن «دوانگشت» نقش واحد بالاتر را ، نسبت به انگشت، به عهده دارد. و به‌این ترتیب، پایه‌های دستگاه عددشماری، گذاشته می‌شود.

قدیمی‌ترین‌دستگاه عددشماری، دستگاه **دودویی** است. این دستگاه مربوط به‌زمانی است که بشر هنوز شمارش با انگشتان را، آغاز نکرده بود: واحد مرتبهٔ پایین برای او یك دست بود و وقتی هر دو دست را با هم در نظر می‌گرفت، واحد مرتبهٔ بزرگتر درست می‌شد. ردپای این دستگاه‌را حتی امروز دوربین ملتهای‌پیشرفته هم‌می‌توان پیداکرد: نمونه‌ای از این ردپا ، در کششی‌است که‌مردم برای‌نصف‌کردن و دو برابر کردن ویاشمردن جفتها دارند. در دستگاه پولی روسیهٔ قدیم، به‌تقسیم واحد پول به ۲ و ۴ برخورد می‌کنیم ($\frac{1}{2}$ کوپك ، $\frac{1}{4}$ کوپك) ، که درواقع پیروی‌ازهمان دستگاه‌دودویی‌است. [دردستگاه‌مقیاس وزن‌درجنوب ایران، وقتی‌که هنوز دستگاه متری رایج نشده بود، از همین دستگاه دودویی پیروی می‌کردند: من، نیم‌من، یکچارك ($\frac{1}{4}$ من) ، سی‌سنگ ($\frac{1}{8}$ من)، پانزده سنگ ($\frac{1}{16}$ من) ، هفت درم ($\frac{1}{32}$ من) ، نصف هفت درم ($\frac{1}{64}$ من) و غیره]. دربین‌بعضی از مردم استرالیا و پولینزی، تا امروز هم، دستگاه دو دویی باقی مانده است.

مثلا، در زبان بعضی از قبیله‌های جزیره‌های توریس تنها واحد ـ «اوراپون» ـ و دو ـ «اوکوزا» ـ وجود دارد وبه‌کمك همین دوعدد، شمار ادامه پیدا می‌کند. در زبان آنها، سه را «اوکوزا اوراپون»، چهاررا «اوکوزا اوکوزا»، پنج‌را «اوکوزا اوکوزا اوراپون»، شش را «اوکوزا اوکوزا اوکوزا» و غیره، بیان می‌کنند.

وقتی‌که‌بشر،محاسبهٔ با انگشتها را آغازکرد،دستگاههای عددشماری گوناگونی به‌وجود آمد.

قدیمی‌ترین‌دستگاه عددشماری انگشتی،«دستگاه پنج‌پنجی» است. گمان می‌رود که‌این دستگاه درامریکا به‌وجودآمدو گسترش زیادی پیداکرد . پیدایش این دستگاه، به‌زمانی بستگی داردکه بشر، شمردن را روی‌انگشتان یکی‌از دستهای خود انجام می‌داد روشن است که دراین‌روش شمارش، هربار که شمارش انگشتان یکدست تمام می‌شد، یك علامت برای آن درجایی می‌گذاشتند. بسیاری از قبیله‌ها ، تا همین اواخر ، دستگاه پنج پنجی خود را به طور کامل حفظ کرده بودند (مثل مردم پولینزی و ملانزی)

پیشرفت بعدی دستگاه عددشماری، در دو مسیرمتفاوت انجام‌گرفت. قبیله‌هایی که به‌شمردن انگشتان روی یك دست نایستادند، شمردن‌را روی انگشتان دست دوم،سپس روی‌انگشتان پاها، ادامه دادند. بعضی، به‌انگشتان دو دست اکتفاکردند واین بنیانی برای عددشماری در دستگاه دهدهی شد ، بعضی دیگر ، و به‌احتمالی بیشتر آنها، انگشتان پا را هم به‌حساب آوردند ودر نتیجه، دستگاه عددشماری به‌مبنای ۲۰، پایه‌گذاری شد. قسمت عمده‌ای از بومیان امریکای شمالی، مرکزی و جنوبی‌وهمچنین در قسمت شمالی سیبری وافریقا، از همین دستگاه. بیست‌بیستی، در عددشماری استفاده می‌کردند.

امروز، دستگاه دهدهی، دربین همهٔ ملتها ، برتری کامل پیداکرده است. ولی، این‌به‌معنای آن نیست که این ملتها،همیشه وبه‌طور منحصر، از این دستگاه استفاده می‌کرده‌اند: بسیاری از ملتها، درهمین اواخر، دستگاه دهدهی را قبول کرده‌اند و پیش از آن، دستگاههای دیگری به‌کار می‌برده‌اند.

طبیعی‌ترین واحد مرتبهٔ بالاتر، برای به‌وجود آمدن دستگاه بیست‌بیستی، «آدم» است، زیرا آدمی دارای ۲۰ انگشت است. در این دستگاه ، ۴۰ به‌صورت «دوآدم»، ۶۰ به‌صورت «سه آدم» و غیره، بیان می‌شود. دستگاه بیست‌بیستی، این عیب

بزرگ‌را دارد که برای بیان‌شفاهی عددها، باید ۲۰ نام مختلف، برای عددهای مختلف، دردست داشت. به‌همین مناسبت، وقتی که بعضی از قبیله‌ها، دستگاه دهدهی را به‌کار بردند، بسیاری قبیله‌های دیگر، که‌با دستگاه بیست‌بیستی سروکار داشتند، به‌تدریج، به‌طرف دستگاه دهدهی، گرایش پیدا کردند. شاید، این موضوع هم به انتقال از دستگاه بیست‌بیستی، به دستگاه دهدهی، کمك کرده باشد که مردم دیگر کفش به پا می‌کردند و امکان شمارش مستقیم بیست واحد را، به خاطر پوشیده بودن انگشتان پا، از دست دادند. در زمان ما، نمی‌توانیم نمونهٔ کامل دستگاه بیست بیستی را پیدا کنیم و معمولا این دستگاه، با دستگاه دهدهی یا پنج پنجی، درهم‌آمیخته است. مثلا، فرانسویها، ۸۰ را به‌صورت quatre-vingts (چهار بیست تا) و ۹۰ را به‌صورت quatre vingt-dix (چهار بیست‌تا و ده)، بیان می‌کنند.

بعضی از قبیله‌ها، از بندهای انگشت، به‌عنوان وسیله‌ای برای عدد شماری، استفاده می‌کردند. در اینگونه عدد شماریها، گاهی دستگاههایی بسیارزیبا و پربار، به‌وجود آمد. روندشمارش دراین مورد، اینطور بود: انگشت‌بزرگ‌هردست (شست)، حساب نگهداردیگر بند انگشتهای همان دست بود؛ چون در هر کدام از چهارانگشت دیگر، ۳ بند وجود دارد، واحدشمار برای‌مرتبهٔ بالاتر، برابر ۱۲ می‌شد، و همین وضع، آغازی برای پیدایش دستگاه داوزده دوازدهی شمار بود.

این روند شمار، اغلب به ۱۲ پایان نمی‌پذیرفت و ادامه پیدا می‌کرد: هرانگشت دست دیگر، به عنوان واحدی از مرتبهٔ بالاتر، یعنی به‌اندازهٔ ۱۲ واحد، به حساب می‌آمد. وقتی که‌همهٔ انگشتهای دست دوم تمام می‌شد، واحد مرتبهٔ بالاتر، که برابر ۱۲×۵، یعنی ۶۰ بود، به‌وجود می‌آمد. ممکن است که این روش‌شمار، به شکل گرفتن دستگاه شصت شصتی کمك کرده باشد، که در بابل قدیم، و پس از آن در خیلی جاهای دیگر، بسیاربه کار می‌رفته است. با وجود این، عقیده‌های دیگری هم برای پیدایش عددشماری به مبنای ۶۰ وجود دارد که احتمالا پایه محکمتری داشته باشد و ما فعلا در اینجا به‌آن نمی‌پردازیم.

ردپای دستگاههای‌دوازده‌دوازدهی و شصت شصتی، تاامروز هم پیدا می‌شود. کافی است تقسیم‌بندی‌صفحهٔ ساعت را به ۱۲قسمت و یا واحدهای دوجین (۱۲ واحد)، گروس (۱۲ دوجین)، و همچنین، تقسیم محیط دایره را به درجه، دقیقه، ثانیه و غیر آن را به‌خاطر بیاوریم.

به این ترتیب، بشر ناآگاهانه و به‌تدریج، زیر تاثیر نیازهای زندگی اقتصادی خود، روش‌شمردن را پیدا کرد، و سپس آگاهانه، این روش را ساده و ساده‌تر کرد، تا به‌جایی رسید که در ریاضیات امروز هم، از آن استفاده می‌شود.

کارخلاقهٔ انسان، رشد نیروهای تولیدی و وسایل تولید، بشر را واداشت تا نوع سادهٔ محاسبهٔ نخستین را، با نیازهای روزافزون خود و با رشد فرهنگی خود، سازگار کند. تمامی دانش‌عظیم ریاضیات امروزی، که جنبهٔ کمی پدیده‌های دوروبر ما را توضیح می‌دهد- وهمراه باآن، پیشرفت فرهنگ صنعتی‌بشر- بر پایهٔ همین محاسبهٔ ابتدایی، رشد کرد و به مرز کنونی خود رسید.

***

همانطور که پیشرفت روندکار و پیدایش مالکیت، بشر را وادار به‌کشف عدد و نامگذاری آن کرد، همانطور هم، رشد بعدی نیازهای زندگی اقتصادی، آدمی را به راه عمیق‌تر کردن وگسترش هرچه بیشتر مفهوم عدد، هدایت‌کرد. به خصوص، وقتی‌که دولت پدیدار شد و به همراه خود، دستگاههای حکومتی کم وبیش پیچیده را که می‌بایست حساب اموال دولتی را نگاه دارد و دستگاه‌منظم مالیاتی را سازمان دهد، به‌ارمغان‌آورد؛ وقتی که تجارت رونق‌گرفت و دستگاه پولی منظمی پیدا شد، تکامل مفهوم عدد، سرعت بیشتری به خود گرفت. این وضع، از طرفی موجب شدکه راهی‌برای عدد نویسی پیدا شود و از طرف‌دیگر، عملهای محاسبه‌ای، یعنی عمل‌روی عددها، آغاز به پیشرفت‌کرد.

نوشتن عددها هم، از همان زمانهای دور زندگی آدمی، که پیش از اینهم دربارهٔ آن‌گفتگو کرده‌ایم، آغاز شد: خطهایی که بر تخته‌سنگها رسم می‌کردند، گوش ماهیها و ریگهایی که‌به نخ یا چوب می‌کشیدند، چیزی جزتولدعدد نوشتنی نبود ولی، این روشهای فیزیکی، نمی‌توانست عددهای بزرگی را، که به خاطر گسترش‌دادوستد، مورد نیاز بود، بیان‌کند. ضمناً، تجارت و دادوستد، به محاسبه‌های پیچیده‌تری هم نیاز داشت: لازم بود عددها را با هم جمع کنند، از هم کم کنند، عملهای ضرب و تقسیم را انجام دهند، و روشن است که روشهای ابتدایی قبلی، نمی‌توانست جوابگوی اینها باشد. دراین زمان بودکه‌آدمی‌به تدریج به سمت عدد نویسی، روآورد.

باید این را هم به‌خاطر داشت‌که به موازات رشد نیازهای زندگی آدمی و همراه باآن پیشرفت جامعهٔ انسانی، علاوه بر

شمار، شاخهٔ دیگری هم از فعالیتهای عملی پیشرفت می‌کرد . که به نوبهٔ‌خود، کار پیشرفت ریاضی را در مرحله‌های بعدی، ساده‌تر کرد. این شاخه عبارت بود از کشف‌اندازه‌های مختلف وروشهای مختلف اندازه‌گیری. اگرمفهوم عدد، انسان را به یکی‌ازرشته‌های اساسی ریاضیات، یعنی آنالیز رسانید ، مشاهدهٔ آنچه که دوروبر او بود، بررسی شکل آنها و پیشرفت روشهای گوناگون اندازه‌گیری، رشتهٔ دیگری‌از ریاضیات، یعنی هندسه را به‌وجود آورد.

ما، پیدایش مفهوم عدد را، که بنیانی ترین مفهوم برای آنالیزاست، خیلی کوتاه، بررسی کردیم. درمورد پیدایش‌مفهومی که ویژگی هندسی دارد، باید توجه داشت که‌آشنایی آدم باشکل چیزهایی که دوروبراوقرار گرفته بود، در درجهٔ نخست اهمیت، قرار دارد.

ولی، آنگاه که خواستند از این شکلها ، برای ساختن وسیلهٔ‌کار روزانه در منزل و یا وسیلهٔ تولید و غیر آن استفاده کنند، به اندازه‌گیری قسمتهای مختلف این شکلها، نیاز پیدا کردند؛ و بشر، نخستین اندازه‌های مربوط به‌طول، وزن‌وحجم را بدست‌آورد.

طبیعی است که نخستین اندازه‌های طول، همان اندازهٔ اندامهای گوناگون بدن آدمی بود . مثلا، قدم یك مرد بالغ، یکی از عادی‌ترین وسیله‌ها، برای اندازه‌گیری فاصلهٔ دو نقطه ، بوده است. حتی امروز هم، ما برای اندازه‌گیری فاصله‌ها، اغلب از قدمهای‌خود استفاده می‌کنیم.

اگر با طولهای‌کوچکتر سروکار داشت، مثل موردعدد، آدمی به سراغ دستها و پاهای خود می‌رفت و از کلفتی انگشت، طول بند انگشت بزرگ، عرض‌کف دست، فاصلهٔ بین دو انتهای انگشت بزرگ و انگشت‌نشانه یا میانه (وقتی‌که به‌اندازهٔ ممکن، از هم دورباشند)، طول دست از آرنج تانوك انگشتان، طول‌کف پا و غیره کمك گرفت.

پیشرفت عدد نویسی و دستگاههای اندازه‌گیری، همیشه با پیشرفت‌کلی سطح فرهنگ‌ملتها، همراه بوده است، و به همین مناسبت، درجامعه‌هایی‌که زودتر به‌سمت تکامل رفته‌اند، سریع‌تر بوده است.

فکر کنید

A و B و C سه شخص می‌باشند که دو نفر آنها اهل‌آتن ونفر دیگر اهل کرت می‌باشد. آتنی‌ها همیشه راست می‌گویند و کرتی‌ها همواره دروغ می‌گویند .

A درگوشی با B صحبتی می‌کند . C از B می‌پرسد که A به اوچه‌گفته است . B به C پاسخ می‌دهد که A چنین‌گفته است : «من اهل‌آتن می‌باشم» . کدام یك ازاین سه نفر اهل‌کرت می‌باشد ؟

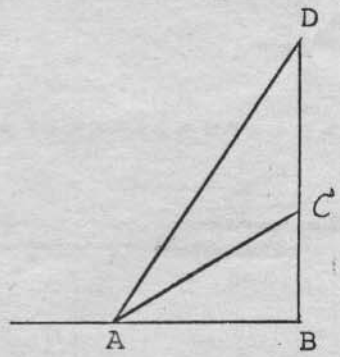
روش هندسی ماکسیمم و مینیمم

علیرضا امیرمعز ، دانشگاه نگزاس تک

مسائل بیشماری دربارهٔ ماکسیمم و می‌نیمم را می‌توان به روش هندسی حل کرد. گاهی این مسائل حلی باروش مشتق گیری ندارند. دراین مختصر چندین مثال را بررسی می کنیم سپس مسائلی برای خواننده طرح می کنیم.

۱ـ موضوعهای اصلی : قضایای اصلی هندسه وجبر را می‌پذیریم ؛ مثلا ، **نامساوی مثلث** ، بدون اینکه وقت صرف اثبات این قضایا کنیم ، آنها را بکار می‌بریم.

۲ـ مسئلهٔ اصلی : فرض کنیم که a ، b و x طولهای سه پاره خط باشند چنانکه $a>b>x$. مقدار x را متغیر می گیریم . تابع $\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2-x^2}$ وقتی می‌نیمم می‌شود که x صفر شود.



برهان : مثلث قائم ـ الزاویه‌ای می‌سازیم که در آن B رأس زاویهٔ قائمه باشد $AB=x$ ، $AC=b$. نقطهٔ D را روی BC چنان می گیریم که $AD=a$ و C بین B و D باشد. ملاحظه می‌شود که درمثلث ACD ،

$$DC>a-b$$

$$DC=\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2-x^2}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2-x^2}>a-b$$

ممکن است که خواننده برهان جبری آنرا بررسی کند.

۳ـ مسائل : اینك چند مسئله پیشنهاد می‌شود

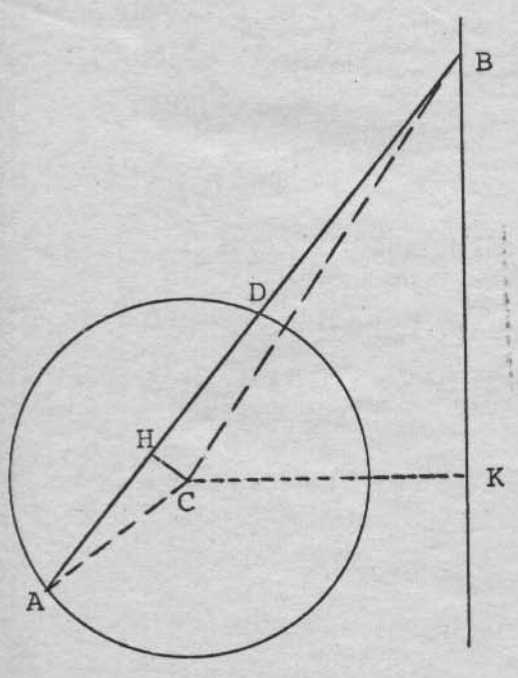
الف ـ دایرهٔ (C) بمرکز C و شعاع r ونقطهٔ P درون (C) داده شده‌اند. هرخط ماربر P دایره‌را در A و B قطع می کند ماکسیمم و می‌نیمم AB را بدست آورید.

ب ـ فرض مسئلهٔ (الف) را درنظرمی گیریم. خط AB را چنان بدست آورید که $(PA)^2+(PB)^2$ ماکسیمم یا می‌نیمم باشد .

ج ـ دوباره فرض مسئلهٔ (الف) را درنظرمی گیریم. ماکسیمم و می‌نیمم PA را بدست آورید .

د ـ نقطهٔ P را بیرون (C) بگیرید و مسائل (الف) ، (ب) و (ج) را حل کنید. خواننده می‌تواند روش مشتقات رابکار برده نتیجه را مقایسه کند.

۳ـ ماکزی‌مین : ماکزی‌مین (maximin) یعنی ماکسیمم می‌نیممها . دایرهٔ (C) بمرکز C و شعاع r و خط d مفروضند. پاره‌خط AB را چنان می گیریم که A روی (C) و B روی d باشد. ماکسیمم می‌نیممهای AB را بدست آورید به قسمی که نقطهٔ B روی d حرکت کند و خط AB به دور C بچرخد .



حل: خط CK را بر d عمود می‌کنیم . خط CH را بر AB عمود می‌کنیم. فرض کنیم که $CH=x$ و $KB=y$ باشد. از اینرو معنی مسئله چنین می‌شود :

$$\max_{x}\left[\min_{y}(AB)\right]$$

را بدست آورید :

فرض کنیم خط AB دایره را در D چنان قطع کند که D بین A و B باشد . سپس:

$$AH=\sqrt{r^2-x^2}\ ,\ HB=\sqrt{(CB)^2-x^2}$$ و

$$(CB)^2=a^2+y^2$$

ازاینرو $AB=\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{a^2+y^2-x^2}$

از آنجاکه $\sqrt{a^2+y^2-x^2}\geqslant\sqrt{a^2-x^2}$

نتیجه می‌شود که

$$\min_{y}(AB)=\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{a^2-x^2}$$

بالنتیجه

$$\max_{x}\left[\min_{y}(AB)\right]=r+a$$

۵ـ مسائل: اکنون بررسی حالات مختلف بخش ۳ رابه عنوان مسئله پیشنهاد می‌کنیم.

الف‌ـ می‌نیمم AB را بدست آورید

ب‌ـ ثابت کنید که AB ماکسیمم ندارد.

ج‌ـ $\min_{y}\left[\max_{x}(AB)\right]$ را بررسی کنید.

د ـ حالتی که خط d دایره را قطع می‌کند بررسی کنید.

۶ـ مسئلهٔ ابن هیثم: فرض کنیم که d خط نهر باشد و A نقطه‌ای که‌دهقان باقاطرش ایستاده‌اند و B خانهٔ دهقان. به کجای نهر دهقان برود ، قاطرش را از آب‌بگذراند وسپس‌خانه برودکه راهش کوتاه‌ترین‌باشد. البته این مسئله درکتابها موجود است [۱، ص ۲۶].

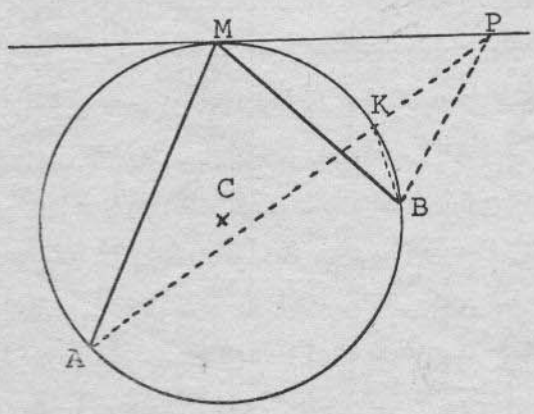
۷ـ تعمیم: فرض کنیم که p لبهٔ چمن باشد ، d خط نهر ، A جای دهقان و B خانهٔ او ، چه راهی دهقان باید بگیردکه قاطرش‌را بچراند، آب دهد وخانه‌برود که‌کوتاهترین را پیموده باشد.

تعمیمهای دیگر را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم .

۸ـ زاویهٔ ماکسیمم : خط d و دو نقطهٔ A و B را دریك سمت d درنظر می‌گیریم . فرض کنیم که نقطهٔ P روی d تغییر کند . محل P راچنان بگیرید که زاویهٔ APB ماکسیمم شود .

حل: تنها زوایائی راکه‌رئوس آنها یك‌طرف خط AB است درنظرمی‌گیریم. فرض‌کنیم‌که (C) دایره‌ای باشدکه ازدو نقطهٔ A و B می‌گذرد و بر d در نقطهٔ M مماس است . از اینرو M جواب مسئله است به‌این معنی‌که :

$$\angle AMB=\max_{P}\angle(APB)$$



برای اثبات نقطهٔ $P\neq M$ را در نظر می‌گیریم . خط AP دایره را در K قطع می‌کند به آسانی ملاحظه می‌شودکه:

$$\angle AMB=\angle AKB>\angle APB$$

۹ـ مسائل: این سؤالها در حقیقت بحث بخش ۷ و تغییراتی درآن است.

الف‌ـ معمولا دو دایره از A و B می‌گذرند که بر d مماسند. دایرهٔ دیگر را بررسی کنید . (برای رسم دایرهٔ (C) مراجعه‌شود به [۱ ، ص ۳۹].

ب‌ـ دربخش ۷ به‌جای خط دایره‌ای درنظربگیرید.

ج‌ـ تمام حالات (الف) و (ب) را بررسی کنید.

مسائل بیشماری می‌توان طرح کرد که روش هندسی آنها از روش حساب فاضله جالبتر و کوتاهتراست.

مراجعه

[۱] Ali R. Amir - moe'z , Lecturs notes on Geometric Transformation on the plane , Edwards Brothers Inc. , ann arbor mich (1969).

مقدمه‌ای بر توپولوژی

ترجمه و تنظیم از : محمدحسین احمدی
دستیار گروه ریاضی دانشگاه آزاد ایران

دنباله ازشمارهٔ قبل

سطوح مرتبطی مانند کره که در آنها بتوان هرمنحنی بسته را متصل وار به یك‌نقطه تبدیل کرد مرتبط ساده می‌نامیم. پس کره مرتبط ساده است ولی حلقه مرتبط ساده نیست . سطوح مرتبط ساده‌دارای‌این‌خاصیت‌هستندکه هردو منحنی‌بسته وساده‌رامی‌توان متصل وار به‌هم تبدیل کرد حال اینکه سطوحی که مرتبط ساده نباشند دارای این خاصیت نیستند اگریك منحنی بسته را بتوان متصل وار به‌یك منحنی بستهٔ دیگر تبدیل کرد ، گوئیم این دو منحنی بایکدیگرهموتوپیك هستند .

ایدهٔ هموتوپی ازمفاهیم اساسی درتوپولوژی است وقسمت مهمی ازکوشش‌دانشمندان توپولوژی صرف پیداکردن‌منحنیهای هموتوپ گردیده‌است .

می‌توان‌نوعی دیگرسطوح مرتبط ساده راازسطوح‌مرتبطی که ساده نیستند تمیز داد. ما در توپولوژی هـرمنحنی راکه با دایـره همیومورفیك باشد یـك منحنی ژوردان مـی‌نامیم. قضیهٔ ژوردان می‌گویدکه در روی سطوح مرتبط ساده هرمنحنی ساده این سطح را به دوبخش تقسیم می‌کندکه این دوبخش نقطهٔمشترك نداشته واین منحنی ژوردان مرز این دوبخش‌است. امادر مورد سطوح مرتبطی‌که ساده نیستند چنین‌نیست .

این مطلب را می‌توان باآزمایش درروی سطوح و حلقه به وضوح دید .

با وجودآنکه قضیهٔ ژوردان ساده به نظر مـی‌رسد ولـی اثبات چندان ساده‌ای ندارد .

اکنون وقت‌آن رسیده است‌که ازحاصل بررسیهائی‌که در روی سطوح مختلف هندسی کردیم نتیجه بگیریـم.ملاحظه شد وقتی خواص ذاتی اشکال هندسی را بررسی مـی‌کنیم می‌توان این‌خواص را.تعمیم داد و درهرمرحله اگر به مفهومی برخورد نمودیم، این مفهوم را عمومیت دهیم. این عمل اساس گسترش توپولوژی بوده است. یعنی دانشمندان‌باملاحظات ابتدائی روی خواص ذاتی اشکال هندسی ایده‌های کلی بدست می‌آورند وبعد درحالت کلی مسئله را برای اشکالی که لزومـاً شکل هندسی آشنائی نداشتند گسترش می‌دادند. کمااینکه ملاحظه شد با یکی دوبررسی ساده بـه مفاهیمی مانند جهت پذیری ـ مرتبط بودن مرتبط ساده وهموتوپی رسیدیم .

حال‌لازم است توضیح دهیم‌که روش تحقیق در توپولوژی به‌چه صورتی است .

درتوپولوژی ابتدا همهٔ فضای توپولوژیکی را دسته بندی می‌کنیم‌که هردسته مجموعهٔ فضاهائی‌باشندکه‌باهم‌همیومورفیك‌اند این فضاها درتوپولژی باهم فرق ندارند. پس اگریکی از این فضاها دارای خاصیت توپولوژی بود همهٔ فضاهای همیومورفیك همان خاصیت را دارند . استفادهٔ این دسته‌بندی‌کردن این است که انرژی فکری عظیمی برای ما ذخیره می‌شود. به علاوه در وقت نیزصرفه جوئی شده‌است. این دسته‌بندی چندان‌کارآسانی نیست. مسئلهٔ دسته‌بندی‌فضاها ازهمان اوایل عصرتوپولوژی‌مورد نظر بوده‌است ویك‌باربوسیلهٔ هانری پوانکاره ریاضیدان‌فرانسوی جداً مورد مطالعه قرارگرفت. درحال‌حاضر این مسئله تنها در حالت خاص حل شده است . یعنی درمورد فضاهـای خاص مانند سطوح بسته‌ومحدودی مانندکره ـ حلقه ـ بطری کلین وصفحهٔ تصویرحقیقی‌که هرنقطه برروی این‌سطوح حومه‌ای دارد که با یك قرص همیومورفیك است . این نوع سطوح و نظایرشان را مانیفولدهای فشردهٔ دوبعدی نامند .

یعنی درحقیقت این مسئله درمورد مانیفولدهای دوبعدی فشرده‌کاملا حل‌شده است. به‌عنوان مثال می‌توان گفت‌که ثابت کرده‌اندکه هرمانیفولد دوبعدی فشرده‌که جهت پذیر باشدبایك

کره یا بایك حلقهٔ m حفره‌ای به ازای یك m همیومورفیك است .

برای سطوح پیچیده‌تر هنوز این دسته‌بندی انجام نشده است. مسئلهٔ دیگری که اساس کار در توپولوژی است و مورد مطالعهٔ جدی‌است آن است که‌حداقل خواص‌توپولوژیکی‌را بیابند که درفضایی که این خواص را دارند با هم همیومورفیك باشند. این مسئله نیزهنوز کاملا حل‌نشده است .

بنابراین باآنچه درفوق گفته شد معلوم می‌شود که اساس تحقیقات‌آتی درتوپولوژی دوقسمت است . دریك قسمت کوشش دانشمندان صرف آن می‌شود که فضاهای توپولوژیکی را دسته بندی کنند . درقسمت دیگرسعی می‌شود که حداقل و نوع‌خواص توپولوژیکی را بیابند که دوفضایی که دارای این‌خواص می‌باشند باهم همیومورفیك باشند .

حال که اساس وروش کاردرتوپولوژی معین‌شد بدنیست به عنوان حسن ختام از چند خاصیت توپولوژی معروف ذکـری بشود .

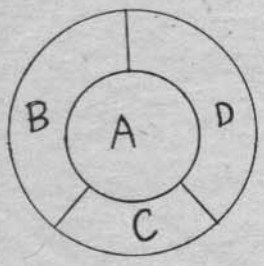
خاصیت اول ـ تحت قضیهٔ اولر آمده است :

می‌دانیم که در هندسهٔ فضائی اگر F تعداد رویه‌ها ، E تعداد یالها و V تعداد رأسهای یك چند وجهی باشد دراین صورت: $F-E+V=۲$ که به‌نام قضیهٔ اولرموسوم است. این قضیه را می‌توان درهر سطح توپولوژیکی بیان کرد. به‌این صورت که اگرهرسطح بسته‌ای را به‌وسیلهٔ E قوس به F ناحیه تقسیم کنیم که V رأس پدید آورد باز هم $F-E+V=۲$ است . اثبات این قضیه دراکثر کتابهای توپولوژی موجوداست چون سطح بسته اختیاری است پس معلوم می‌شود که این خاصیت درمورد هرسطحی که بااین سطح بسته همیومورفیك باشد نیزبرقراراست . پس‌خاصیت فوق یك‌خاصیت توپولوژیکی‌است. ازهمین مسئله درمی‌یابیم که نقش هندسه وقضایای آن درگسترش توپولوژی تاچه حد بوده است.

مسئلهٔ دیگر که یك‌خاصیت توپولوژیکی رانشان می‌دهد. مسئلهٔ رنگ کردن یك نقشه است که البته هنوز کاملا حل نشده است .

فرض کنیم نقشهٔ ایران رابخواهیم رنگ کنیم به قسمی که هر دو استانی که مرز مشترك دارند یك رنگ نباشند . مسئلهٔ معروفی که مدتهاست مطرح است وبه‌نظرصحیح می‌رسد این است که برای، هرنقشه‌ای که شماطرح کنید ۴ رنگ کافی‌است.

باذکریك مثال می‌توان نشان‌داد که سه رنگ کافی نیست (به شکل زیرتوجه کنید) .



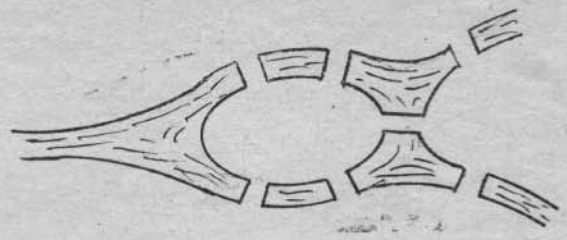
ضمناً ثابت شده‌است که بـا ۵ رنگ هـر نقشه‌ای را می‌توان به صورت فوق رنگ کرد . اما هنوز نتوانسته‌اند ثابت‌کنند که چهار رنگ کافی است . با وجودآنکه مدتها از وقت طرح این مسئله گذشته است .تنهامطلبی که ثابت شده آن‌است که ثابت کرده‌اند نقشه‌هایی که برای‌آنها ۴ رنگ کافی نیست اگر وجود داشته باشند باید شکل پیچیده‌ای داشته باشند . البته اگر مسئلهٔ فوق حل شود برای تمام سطوح همیومورفیك با صفحه نیزمسئلهٔ فوق حل شده است .

مسئلهٔ رنگ کردن نقشه برای‌سطوح دیگر نیزمطرح شده است ونشان داده شده‌است که درمورد سطوح مرتبط ساده مسئله به‌صورت حالتی است که درصفحه دیدیم . اما درمورد سطوحـی که مرتبط ساده نیستند مسئله بکلی متفاوت است .

مثلا درمـوردحلقه‌با وجودآنکه شکل سادهٔ مسئلهٔ رنگ کردن یك‌نقشه‌حل نشده‌است، اماشکلهای پیچیده‌ترحل‌شده‌است. مثلا ثابت کرده‌اند که هفت‌رنگ برای‌رنگ کردن هر نقشه درروی حلقه کافی است و۶ رنگ کافی‌نیست.

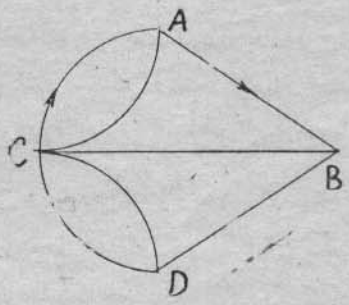
مسئلهٔرنگ کردن نقشه یك مسئلهٔ توپولوژیکی‌است واگر مثلا درموردصفحه این‌مسئله حل‌شود برای‌همهٔ سطوحی که‌باصفحه همیومورفیك می‌باشند نیزمسئله حل شده‌است حداقل مقداررنگی که برای رنگ کـردن یك نقشه لازم است عـدد کـرماتیك (Cromatic) آن نقشه می‌نامیم پس عددکرماتیك یك ثابت توپولوژیکی است.

مسئلهٔ توپولوژیکی دیگری کـه مدتهاست مطرح می‌باشد مسئله‌ای است درمورد شهر کونیگسبرگ در روسیهٔ غربی (این شهردرحال حاضربه‌نام کالنینگراد موسوم است) . دراین شهردو شاخهٔ قدیم و جدید رودبه هم متصل‌می‌شوند ورود معروف پر گل را تشکیل می‌دهند . در قرن هیجدهم برروی این رود هفت پل بود به صورت زیـر (اکنون دوپل جدیـد دیگری رود این رود ساخته‌اند که ازروی یکی ازآنها ترن می گذرد) .



دانشمند سوئیسی لئونارد اولر مسئله‌ای مطرح کرد و آن این بود که آیا می‌شود که شهر را گردش کرد به‌شرط آنکه ازهرپل فقط یك‌بار گذشته باشیم .

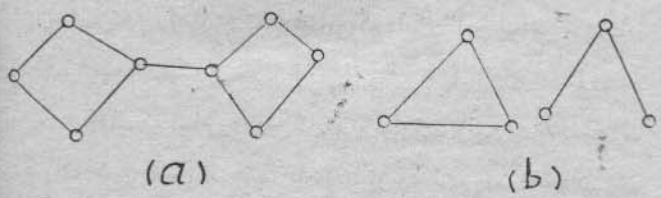
مسئلهٔ فوق یك مسئلهٔ توپولوژیکی است و برای حل آن لازم نیست شکل فوق درنظر گرفته شود بلکه دریك شکل همیومورفیك باشکل‌فوق که صورت‌ساده‌تری داشته‌باشد می‌توانیم مسئله را بررسی کنیم . مثلا شکل فوق با شکل سادهٔ زیر همیومورفیك است .



نقطهٔ A نمایش تمام‌قسمتی‌ازشهراست که درشمال‌رودخانه‌ها قراردارد ، ونقطهٔ D نمایش تمام قسمتی ازشهر که در جنوب رودخانه واقع‌است. نقطهٔ B نمایش قسمتی است که بین دوشاخهٔ جدید وقدیم واقع‌است ونقطهٔ C قسمت جزیره‌ای شهراست. این مسئله سهم بزرگی در پیشرفت توپولوژی داشته است . بامطالعهٔ این‌مسئله مفاهیم زیادی در توپولوژی مطرح شده‌اند که بعدها پایه‌های مباحث مهم قرار گرفته‌اند.

درمطالعهٔ مسئلهٔ فوق ابتدا مفهوم قوس مطرح شد . قوس عبارتست ازمنحنی متصلی که‌خودرا قطع نکند . مانندقوس AC . بعد به‌کمك مفهوم قوس، شبکه را تعریف کردند. شبکه عبارتست ازشکلی درصفحه یا درفضا که ازتعدادی قوس تشکیل شده‌باشد. مانند شکل مسئلهٔ شهر کونیگسبرگ. سپس به کمك شبکه راه را دریك‌شبکه تعریف کردند . هرراه دریك‌شبکه عبارتست ازیك رشته از قوسهای متفاوت که بتوان آنها راپیمود بدون آنکه از یکی ازقوسها که رفته‌ایم دوباره برگردیم مانند راهی که درشکل مسئلهٔ شهر کونیگسبرك بافاش نشان داده‌شده است. یك راه را بسته گوییم درصورتی که نقطهٔ ابتدائی وانتهائی آن برهم منطبق باشند . سپس مفهوم رأس مطرح شد . رأس دریك شبکه محل برخورد دوقوس می‌باشد . مرتبهٔ هر رأس عبارتست از تعداد قوسهایی که به‌آن رأس وصل می‌شود. اگر مرتبهٔ یك رأس زوج باشدآن رأس را زوج واگرفردباشدآن رأس رافرد می‌نامند . بعد ازاین‌مفهوم شبکه‌های مرتبط مطرح شد .

شبکه‌ای را مرتبط نامیم درصورتی که هردورأس متفاوت دراین‌شبکه دورأس یك‌راه‌باشند . مثلا دردوشکل زیرشبکهٔ (a) مرتبط وشبکهٔ (b) نامرتبط است.



بعد مفهوم پیمایش یك‌شبکه مطرح‌شد . می گوییم یك‌راه شبکه‌ای را می‌پیماید درصورتی که هرقوس این شبکه دراین راه باشد . گوییم دسته‌ای ازراههایك‌شبکه رامی‌پیماید درصورتی که هرقوس ازاین شبکه فقط وفقط دریکی ازاین راهها باشد .

اکنون باآنچه‌درفوق گفتیم‌می‌توان‌مسئلهٔ‌شهر کونیگسبرگ را به‌صورت زیرمطرح کرد .

آیا راهی وجود دارد که شبکهٔ مربوط به مسئلهٔ شهر کونیگسبرگ راپیماید .

بعد ازمطرح کردن این مسئله به صورت فوق بطور کلی ثابت شد که دریك شبکهٔ‌مرتبط که بیش ازدو رأس فردداشته‌باشد نمی‌توان بایك راه این شبکه راپیمود . چون شبکهٔ مربوط به مسئلهٔ شهر کونیگسبرگ بیش ازدورأس فرددارد، پس نمی‌توان این شبکه رابایك راه پیمود .

ملاحظه می‌شود که طرح یك‌مسئلهٔ ساده چگونه‌سبب ایجاد بخش مهمی درتوپولوژی شد. مبحث شبکه‌ها نه‌تنها به‌سؤالهایی نظیر سؤال فوق جواب داد بلکه مسائل جالبتری را طرح وحل نمود. این مبحث ازجالبترین مباحث توپولوژی است با توجه به مثالهای فوق در خاتمه نتیجه می گیریم که‌کار توپولوژی در ابتدای پیدایش این‌علم انتخاب مفاهیم هندسی و تعمیم آنها در فضاهای ناآشنا بود .

ولی درحال حاضر کاراین علم دسته بندی فضاها و یافتن خواص توپولوژیکی اشکال است.

حل معادلهٔ: $x^2+y^2=a$

تنظیم از: حسین خبازیان اصفهانی، کرمانشاه

(دنباله از شمارهٔ پیش)

۱۲ـ جوابهای معادلهٔ $z^2+w^2=2^{k+i}\beta$ که $i=0$ یا $i=1$ است بر 2^k قابل قسمت است و اگر β فرد باشد بر 2^{k+1} قابل‌قسمت نیست. (اثبات ازطریق استقراء ریاضی)

فرض کنید برای $k=n$ صحیح باشد. می‌دانیم لازم‌است جوابهای‌معادلهٔ $z^2+w^2=2^{2h+2+i}\beta$ زوج‌باشند یعنی‌اگر a و b) جواب‌معادلهٔ‌مذکورباشد لازم‌است $a=2p$ و $b=2q$ زیرا درغیراین‌صورت باید a و b فرد باشند درنتیجه باقیماندهٔ مربع آنهابر ۴ یك است یعنی باقیماندهٔ a^2+b^2 بر ۴ برابر ۲ است. درصورتی که‌باید بر۴ قابل قسمت‌باشد. بنابراین داریم $a^2+b^2=4(p^2+q^2)$ ودرنتیجه $p^2+q^2=2^{2k+i}\beta$ و طبق فرض‌لازم‌است $p=2^kx$ و $q=2^ky$ درنتیجه $a=2^{k+1}x$ و $b=2^{k+1}y$. برای حالت $k=1$ واضح است.

قضیه: (بدون‌اثبات) اگر معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha\beta$ دارای جواب $(p,q)=1$ باشد معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha$ دارای جواب $(a,b)=1$ خواهدبود.

۱۳ـ نتیجه: اگر α اول و معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha$ جواب نداشته باشد جوابهای $z^2+w^2=\alpha\beta$ درصورت وجود مضرب α خواهندبود،

اثبات: فرض کنید معادله دارای جواب (x و y) باشد و $(x \text{ و } y)=e$ بنابر این $x=ep$ و $y=eq$ و در نتیجه $e^2(p^2+q^2)=\alpha\beta$. اگر e بر α بخش پذیر نباشد باید $\beta=\gamma e^2$ وسپس $p^2+q^2=\alpha\gamma$ وچون‌معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha\gamma$ دارای جواب $(p \text{ و } q)=1$ است لازم است $z^2+w^2=\alpha$ دارای جواب باشد واین خلاف فرض است.

۱۴ـ اگر α اول ومعادلهٔ $z^2+w^2=\alpha$ دارای‌جواب نباشد جوابهای $z^2+w^2=\alpha^{2n}\beta$ بر α^8 قابل قسمت است و معادلهٔ $z^2+w^2=\beta$ دارای جواب است.

اثبات: از طریق استقراء ریاضی: برای $n=k$ قبول می‌کنیم: اگر (x و y) جواب $z^2+w^2=\alpha^{2k+2}\beta$ باشد طبق (۱۳) $x=\alpha p$ و $y=\alpha q$ در نتیجه $p^2+q^2=\alpha^{2k}\beta$ وبنابرفرض‌باید $p=\alpha^k a$ و $q=\alpha^k b$ بنابراین $x=\alpha^{k+1}a$ و $y=\alpha^{k+1}b$.

نتیجه: اگرمعادلهٔ $z^2+w^2=\alpha^{2k+1}\beta$ (۲۱) دارای جواب باشد ومعادلهٔ $z^2+w^2=\alpha$ دارای جواب نباشد و α اول آنگاه جوابهای (۲۱) بر α^{k+1} بخش‌پذیرند درنتیجه‌لازم است β بر α قابل قسمت باشد. به عبارت دیگر اگر p اول و مقسوم علیه β باشد و معادلهٔ $z^2+w^2=\beta$ دارای جواب باشد ولی معادلهٔ $z^2+w^2=p$ دارای جواب نباشدبزرگترین‌توان عامل p از β زوج است.

۱۵ـ اگر معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha\beta$ (۲۲) و معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha$ (۲۳) دارای جواب باشد معادلهٔ $z^2+w^2=\beta$ (۲۴) نیز دارای‌جواب است وهرجواب (۲۲) ترکیبی‌ازجوابی از (۲۳) و جوابی از (۲۴)است.

اثبات: فرض کنید اعداداول p_1 و p_2 و ... و p_n مقسوم‌علیه هایی از β باشند که معادلات $z^2+iw^2=p_i$ و $i=1$ و ۲ و ... و n دارای جوابند و $\beta=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}\gamma$ و $f=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}$ بنابراین معادلهٔ $z^2+w^2=f$ (۲۵) دارای جواب است وازطرفی‌لازم است معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha\gamma$ (۲۶) دارای‌جواب باشد. طبق (۱۳) حال اگر $(\gamma \text{ و } \alpha)=q_1^{h_1}q_2^{h_2}\dots q_n^{h_n}$ باشد. هیچ‌یك از معادلات $z^2+w^2=n_i$ و $i=1$ و ۲ و ... و m دارای جواب نیستند و چون $\alpha=q_1^{h_1}q_2^{h_2}\dots q_m^{h_n}\lambda$ ومعادلهٔ (۲۳) دارای جواب است بنابراین h_1 و h_2 و ... h_n زوجند وبا فرض $\theta=q_1^{h_1}q_2^{h_2}\dots q_n^{h_n}$ داریم:

$\gamma=\theta l_1^{r_1} l_2^{r_2}\dots l_s^{r_s}$ و هیچ یک از معادلات

$z^2+w^2=l_i$ و $i=1$ و ۲ و ... و s دارای جواب نیستند و داریم:

$\alpha\gamma=\theta^2\lambda l_1^{r_1}\dots l_s^{r_s}$

و چون معادلهٔ (۲۶) دارای جواب است لازم است l_i ها زوج باشند بنابراین $\gamma=d_1^{2t_1}\cdots d_k^{2t_k}=V^2$ و معادلات $z^2+w^2=d_i$ و $i=1$ و ۲ و ... و k دارای جواب نیستند و نیز $\beta=fv^2$ ، چون $z^2+w^2=f$ و $z^2+w^2=v^2$ دارای جواب است معادلهٔ (۲۴) نیز دارای جواب است وبنابر این جوابهای (۲۴) ونیزجوابهای(۲۲) بر V قابل‌قسمت‌است. اگر (x و y) جوابی از (۲۲) باشد.

$x=VA$ و $y=VB$ و $A^2+B^2=\alpha f$

و از طرفی (A و B) ترکیبی از جوابی از (۲۵) و (۲۲) است (طبق ۱۵) یعنی:

$A=\delta(ap'+\lambda bq')$ و $B=\mu(aq'-\lambda bp')$

که (q′ و q′) جواب (۲۵) و (b و a) جواب (۲۳) است: حال با فرض $p=Vp'$ و $q=Vq'$ ، (p و q)جواب (۲۴) است و از طرفی :

$x=\delta(ap+\lambda bq)$ و $y=\mu(aq-\lambda bp)$

۱۶ـ باداشتن کلیهٔ جوابهای خاص معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha$ می‌توان کلیهٔ جوابهای آن‌رابدست آورد.زیرا فرض کنیدجوابهای خاص معادلهٔ n و ... و ۲ و ۱ = i و $(a_i$ و $b_i)$ و (a و b) جوابی از معادله باشد دراین‌صورت $(|b|$ و $|a|)$ یا $(|a|$ و $|b|)$ جواب خاص معادله خواهدبود. بنابراین اگر $(|b|$ و $|a|)$ جواب خاص‌معادله باشد داریم $|b|=b_k$ و $|a|=a_k$ ودرنتیجه $a=\delta a_k$ و $b=\mu b_k$ که $\delta=+1$ یا $\delta=-1$ و $\mu=+1$ یا $\mu=-1$. بنابراین برای محاسبهٔ کلیهٔ جوابها کافی‌است‌فقط جوابهای خاص معادله را بدست‌آوریم.

۱۷ـ با ترکیب جوابهای خاص (۱) $z^2+w^2=\alpha$ و $z^2+w^2=\beta$(۲) می‌توان کلیهٔ جوابهای(۳) $z^2+w^2=\alpha\beta$ را بدست آورد.زیرا فرض کنید (x و y) جوابی برای (۳) باشدبنابراین جواب (a وb)از(۱)و (p وq) از (۲) وجوددارد که $y=\mu(aq-\lambda bp)$ و $x=\delta(ap+\lambda bq)$.طبق آنچه قبلا آمد جوابهای خاص $(\bar{a}$ و $\bar{b})$ از (۱) و جواب خاص $(\bar{p}$ و $\bar{q})$ از(۲) وجوددارد بطوری که $a=\delta'\bar{a}$ و $b=\mu'\bar{a}$ یا $(a=\delta'\bar{b}$ و $b=\mu'\bar{b})$ و $q=\mu''\bar{q}$ و $p=\delta''\bar{p}$ یا $q=\mu''\bar{p}$ و $p=\delta''\bar{q}$ و با جایگزین کردن مقادیر خواهیم داشت .

$x=\delta_1(\overline{ap}+\lambda_1\overline{bq})$ و $y=\mu_1(\overline{aq}-\lambda_1\overline{bp})$

یا

$x=\delta_2(\overline{aq}-\lambda_2\overline{bp})$ و $y=\mu_2(\overline{ap}+\lambda_2\overline{bq})$

موارد استعمال

۱ـ طبق آنچه گذشت برای محاسبهٔ جوابهای خاص‌معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha$ (۲۶) کافی است α را به α_1 و α_2 و ... α_n طوری تجزیه‌کنیم که معادلات (i) و $z^2+w^2=\alpha_i$ دارای جواب و محاسبهٔ جوابها یاجوابهای خاص آنها میسر باشد.سپس با ترکیب جوابهای خاص (۱) با (۲) جوابهای معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha_1\alpha_2$(۲۷) وازترکیب‌جوابهای خاص(۳) با(۲۷) جوابهای معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ (۲۸) وبه‌همین ترتیب‌با ترکیب جوابهای‌خاص $z^2+w^2=\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}$ باجوابهای خاص $z^2+w^2=\alpha_n$ جوابهای (۲۶) نتیجه می‌شوند.

۲ـ برای حل (۲۸) $z^2+w^2=\alpha$ کافی است α را به عوامل اول تجزیه‌کنیم . فرض کنید p_1 و p_2 و .... p_n کلیهٔ عواملاول از α باشندکه معادلات $z^2+w^2=p_i$ دارای جواب نیستند و $\alpha=p_1^{k_1}\dots p_n^{k_n}q_1^{r_1}\dots q_n^{r_s}$ بنا براین لازم است. k_i ها زوج باشند یعنی $k_i=2t_i$ وهرجواب (۲۸) بر $\gamma=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\dots p_n^{t_n}$ قابل‌قسمت‌است. به‌عبارت دیگر کافی است‌جوابهای (۲۹)

$z^2+w^2=q_1^{r_1}q_2^{r_2}\dots q_s^{r_s}$

را محاسبه‌کرده آنها را در γ ضرب‌کنیم.

برای حل معادلهٔ (۲۹) کافی است تمام معادلات $z^2+w^2=q_i$ و $i=1$ و ... s راحل‌کنیم

می‌دانیم آنها همگی دارای جوابند و q_i ها اول هستند بنابراین تنها یك‌جواب خاص دارند. سپس با ترکیب جوابها ، جوابهای خاص معادلات $z^2+w^2=q_i^{t_i}$ وسرانجام جوابهای خاص معادله (۲۹) را بدست آوریم

برای تعیین جوابهای معادلهٔ (۳۰) $z^2+w^2=q_i^{r_i}$ ازروی جوابهای (۳۱) $z^2+w^2=q_i$ می‌توانیم به‌ترتیب زیر نیز عمل کنیم،

اگر (b و a) جوابی برای (۳۱) باشد چون (۳۱)

تنها یك جواب خاص دارد پس برای محاسبهٔ جوابهای خاص $z^2+w^2=q_i^2$ کافی است (a و b) را با خودش ترکیب کنیم که (a و b) (a^2+b^2) و (2ab و a^2-b^2) حاصل‌می‌شود و سپس برای محاسبهٔ جوابهای $z^2+w^2=q_i^3$ کافی است (a و b) را با دوجواب بالاترکیب کنیم. به‌هرحال به سادگی نتیجه می‌شود که جوابها یك چند جمله‌ای از (a و b) هستند. به عبارت دیگر جوابها به صورت‌زیر هستندو

$$(a\text{و}b)=(x\text{و}y)\text{و}\,k=r_i$$

$$\bar{x}=a\cdot y^k+a_1y^{k-1}x+\dots+a_{k-1}yx^{k-1}+a_kx^k$$

$$\bar{y}=b\cdot y^k+b_1y^{k-1}x+\dots+b_{k-1}yx^{k-1}+b_kx^k$$

حال با متحد قراردادن

$$(a\cdot y^k+a_1y^{k-1}x+\dots+a_kx^k)^2+(b\cdot y^k+b_1y^{k-1}x+\dots b_kx^k)^2\equiv(x^2+y^2)^k$$

ضرایب را می‌توانیم بدست آوریم. دراین اتحاد می‌توانیم y را برابریك انتخاب کنیم. پس‌ازحل جوابها عبارتند از:

$$\bar{x}=a_0b^{r_i}+a_1b^{r_i-1}a+\dots+a_{r_i}\cdot a^{r_i}$$

$$\bar{y}=b_0b^{r_i}+b_1b^{r_i-1}a+\dots b_{r_i}\cdot a^{r_i}$$

مثال ۱- برای حل $z^2+w^2=148392$. ابتدا ۱۴۸۳۹۲ را تجزیه می کنیم.

$148392=3^4\times2^3\times229$ طبق آنچه قبلا گفته‌شد جوابها بر $3^2\times2$ قابل قسمت هستند و کافی است جوابهای $z^2+w^2=2\times229$ را بدست آوریم . تنها جواب خاص $z^2+w^2=229$ عبارتست از (۲ و ۱۵) ودرنتیجه‌تنها جواب خاص $z^2+w^2=2\times229$ عبارت‌است از:

$$(13\text{ و }17)=(2\text{ و }15)\times(2\text{ و }15)$$

و در نتیجه جواب خاص $z^2+w^2=148392$ عبارتست از (۲۳۴ و ۳۰۶).

مثال ۲- $z^2+w^2=13\times25$

$$z^2+w^2=5\Longrightarrow(z\text{ و }w)=(2\text{ و }1)$$

جوابهای $z^2+w^2=25$ عبارتنداز.

$$(2\times2\pm1\times1\text{ و }2\times1\mp1\times2)=(5\text{ و }5)\text{ و }(3\text{و}4)$$

وتنها جواب‌خاص $z^2+w^2=13$ عبارتست‌از (۲و۳)بنابراین جوابهای خاص معادلهٔ مطلوب طبق (۵) عبارتست‌از:

$$(3\times5+2\times0,2\times5-3\times0)=(15,10)$$

$$(3\times3\pm2\times4,3\times4\mp2\times3)=(17,6),(1,18)$$

بنابراین کلیهٔ جوابهای خاص عبارتند از:

(۱۵,۱۰) و (۱,۱۸) و (۱۷,۶)

توجه داشته باشید همانطورکه آمده اگر (aوb) جوابی برای $z^2+w^2=\alpha$ و (p و q) جوابی برای $z^2+w^2=\beta$ باشد فقط دوجواب خاص ازترکیب آنها می‌توان بدست‌آورد:

$$(|ap\pm bq|\ ,\ |aq\mp bp|)$$

۳- مورد استفاده در بعضی ازمسائل:

مثال: اعداد چهاررقمی $A=\overline{mcdu}$ و $B=\overline{udcm}$ و $(m>u)$ مفروض است. ثابت‌کنید هجموع این دوعددمضرب یازده و تفاضل آنها مضرب ۹ می‌باشد. درصورتی که A و B مجذور کامل باشند آنها را محاسبه کنید.

با توجه به‌قسمت اول مسئله‌داریم $A=x^2$ و $B=y^2$ و $x^2+y^2=11\alpha$ وچون معادلهٔ $z^2+w^2=11$ دارای‌جواب نیست لازم است x و y بر ۱۱ قابل قسمت باشند و چون $x^2-y^2=9\beta$ لازم می‌شود x و y مضرب۳ باشند (چون‌اگر مضرب۳ نباشد x^2-y^2 بر ۹ قابل‌قسمت نخواهدبود) بنابراین xوyمضرب۳هستندودرنتیجه $A=1089a^2$ و $B=1089b^2$ واضح‌است‌که $1\leqslant a\leqslant3$ و $1\leqslant b\leqslant3$ و تنهاجواب $a=3$ و $b=1$ خواهدبود یعنی $A=9801$ و $B=1089$.

پاسخ مسئلهٔ‌زیرعنوان «فکر کنید»

(مندرج درصفحهٔ ۱۳۰ یکان شماره۱۱۳)

مسافر حداقل دوحلقه اززنجیر را باید ببرد که‌در نتیجه دوحلقه و سه‌پاره زنجیر خواهدداشت. از این پاره های زنجیر یکی باید سه‌حلقه، دیگری شش‌حلقه وسومی دوازده حلقه داشته باشد . بنابراین چهارمین حلقه و یازدهمین حلقهٔ زنجیر باید بریده شود. نتیجهٔ این‌عمل‌چنین می‌شود:

۲ حلقهٔ‌تك

۱ پارهٔ سه‌حلقه‌ای

۱ پارهٔ‌شش‌حلقه‌ای

۱ پارهٔ دوازده‌حلقه‌ای

بااین پاره‌ها مسافر می‌تواند روزانه بدهی خودرا بپردازد:

$$1,1+1,3,6--(1+1),\dots$$

« تفاضل متقارن در تئوری مجموعه‌ها »

ترجمهٔ: عادل اسلامی ارشقی بخش علوم مدرسهٔ‌عالی پارس

مجموعهٔ همهٔ اعضای غیرمشترك دومجموعهٔ A و B تفاضل متقارن آنها نامیده می‌شود و به‌صورت $A\Delta B$ نموده‌می‌شود.

$$A\Delta B=\{x|x\in A \text{ یا } x\in B\ ,\ x\notin A\cap B\}$$

باتوجه به‌تعریف تفاضل دومجموعه خواهیم داشت:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

قضیهٔ ۱: (خاصیت‌تعویض‌پذیری): تفاضل‌متقارن دومجموعهٔ دلخواه A و B تعویض‌پذیراست یعنی:

$$(1)\quad A\Delta B=B\Delta A$$

اثبات:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$
$$B\Delta A=(B-A)\cup(A-B)$$
$$\Longrightarrow A\Delta B=B\Delta A$$

قضیهٔ ۲: (خاصیت شرکت‌پذیری).

$$(2)\quad A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$$

اثبات: برای اثبات خاصیت شرکت‌پذیری قوانین اثبات شدهٔ زیرراکه به‌قوانین دمورگان معروف‌اند بکار می‌بریم:

$$\begin{cases} A-(B\cap B)=(A-B)\cup(A-C)\\ A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)\\ (A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)\\ A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)\\ A-(B\cup C)=(A-B)-C \end{cases}$$

$$A\Delta(B\Delta C)=A\Delta[(B-C)\cup(C-B)]=$$
$$\{A-[(B-C)\cup(C-B)]\}\cup\{[(B-C)\cup(C-B)]-A\}$$

برطبق روابط پنجگانه فوق ابدیلات زیر را برای ادامهٔ اثبات انجام می‌دهیم.

$$A\Delta(B\Delta C)=\{[(A-(B-C)]\cap[A-(C-B)]\}\cup[(B-C)-A]\cup[(C-B)-A]=$$
$$\{[(A-B)\cup(A\cap C)]\cap[(A-C)\cup(A\cap B)]\}\cup$$
$$[B-(C\cup A)]\cup[C-(B\cup A)]=$$
$$[(A-B)\cap(A-C)]\cup[(A-B)\cap B]\cup[(A-C)\cap C]\cup(A\cap B\cap C)\cup$$
$$[B-(C\cup A)]\cup[C-(B\cup A)]=$$
$$[A-(B\cup C)]\cup[B-(C\cup A)]\cup[C-(B\cup A)]\cup(A\cap B\cap C)\qquad(3)$$

بنابراین مجموعهٔ $A\Delta(B\Delta C)$ شامل عضوهایی است که بـه اشتراك سه مجموعه و نیز به خود آنها تعلق دارند ولی به اشتراك دوبه‌دوی آنهاتعلق ندارند. وبرای تبدیل طرف‌دوم‌دیگر احتیاجی نیست که‌تبدیلات را تکرار کنیم بلکه باتوجه به‌رابطهٔ (۱) می‌نویسیم:

$$(A\Delta B)\Delta C=C\Delta(A\Delta B)$$

بـا تبـدیل حروف A و B و C به C و A و B در تبدیلات مجموعهٔ $A\Delta(B\Delta C)$, مجموعهٔ $C\Delta(A\Delta B)$ برطبق رابطهٔ (۳) به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$(A\Delta B)\Delta C=C\Delta(A\Delta B)=[C-(A\cup B)]\cup[A-[B\cup C)]\cup[B-(C\cup A)]\cup(C\cap A\cap)$$

وچون اشتراك واجتماع‌چند مجموعه شرکت‌پذیر است‌بنابراین:

$$(A\Delta B)\Delta C=C\Delta(A\Delta B)=[A-(B\cup C)]\cup[B-(C\cup A)]\cup[C-(A\cup B)]\cup(A\cap B\cap C)$$

بدین‌ترتیب عمل شرکت‌پذیری بر روی تفاضل متقارن به ثبوت رسید و ممکن است به استناد دو قضیهٔ فوق در انجام عمل تفاضل متقارن برروی تعداد محدودی مجموعه پرانتز های مابین را حذف‌کنیم

قضیهٔ ۳: (خاصیت توزیعی):

$$(4)\quad A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

اثبات : به‌موجب روابط

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-C \quad \text{و}$$
$$A-B=A-(A\cap B)$$

طرف چپ رابطه چنین‌می‌شود:

$$A\cap(B\Delta C)=A\cap[(B-C)\cup(C-B)]=$$
$$[(A\cap B)-C]\cup[(A\cap C)-B]=$$
$$[B\cap(A-C)]\cup[C\cap(A-B)]=$$
$$\{B\cap[A-(A\cap C)]\}\cup\{C\cap[A-(A\cap B)]\}=$$
$$[(A\cap B)-(A\cap C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B)]=$$
$$(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

قضیهٔ ۴: $(5)\ A\Delta\emptyset=A$

اثبات: $A\Delta\emptyset=(A-\emptyset)\cup(\emptyset-A)=A\cup\emptyset=A$

قضایایی که تا اینجا ثابت کردیم نشان نمی‌دهند که اختلاف مهمی بین عمل «Δ» و «$\cup$» وجود دارد ولی درقضایایی که ذیلا می‌آوریم دوگانگی هایی مشهود است:

قضیهٔ ۵: $(6)\quad A\Delta A=\emptyset$

اثبات: $A\Delta A=(A-A)\cup(A-A)=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$

درصورتی که $A\cup A=A$ است.

عمل «اجتماع چندمجموعه» مانند چهارعمل اصلی درحساب عمل معکوسی ندارد. به‌ویژه دیده‌ایم که تفاضل دومجموعه عمل عکسی برای اجتماع آن دو به‌شمار نمی‌رود. ولی عمل معکوسی برای عمل «Δ» وجوددارد یعنی اگر $A\Delta B=C$ باشد آنگاه $B=A\Delta C$.

قضیهٔ ۶: (خاصیت عکس‌پذیری):

$(7)\quad A\Delta(A\Delta C)=C$

اثبات: درحقیقت مدلول روابط (۲) و (۵) و (۶) رابطهٔ فوق به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$A\Delta(A\Delta C)=(A\Delta A)\Delta C=\emptyset\Delta C=C\Delta\emptyset=C$$

قضیهٔ ۷: ثابت کنید اگر $A\Delta B=C$ باشد آنگاه $B=A\Delta C$.

اثبات: اگر $A\Delta B=C$ باشد آنگاه نتیجه می‌شود

$$A\Delta(A\Delta B)=A\Delta C$$

و با توجه به رابطهٔ (۷) چون $A\Delta(A\Delta B)=B$ است پس:

$$A\Delta C=B$$

وبدین طریق قضیه‌های ۶ و ۷ نشان می‌دهند که عمل «Δ» برروی خودنیز عمل‌عکس دارد

روابط بین‌اعمال «اجتماع» و «تفاضل» و «تفاضل‌متقارن» برروی دومجموعهٔ A و B درضمن قضایای زیر مطرح‌است.

قضیهٔ ۸: $A\cup B=A\Delta B\Delta(A\cap B)$

اثبات:

$$A\Delta B\Delta(A\cap B)=[(A-B)\cup(B-A)]\Delta(A\cap B)=$$
$$[(A-B)\cup(B-A)-(A\cap B)]\cup$$
$$[(A\cap B)-(A-B)\cup(B-A)]=$$
$$[\{x|x\in A \text{ یا } x\in B, x\notin A\cap B\}-(A\cap B)]\}\cup$$
$$[(A\cap B)-\{x|x\in A \text{ یا } x\in B, x\notin A\cap B\}]=$$
$$\{x|x\in A \text{ یا } x\in B, x\notin A\cap B\}\cup$$
$$\{x|x\in A\cap B, x\notin A, x\notin B\}=$$
$$\{x|x\in A \text{ یا } x\in B, x\in A\cap B\}=A\cup B$$

قضیهٔ ۹: $A-B=A\Delta(A\cap B)$

اثبات:

$$A\Delta(A\cap B)=(A-A\cap B)\cup(A\cap B-A)=$$
$$\{x|x\in A, x\notin A\cap B\}\cup\{x|x\in A\cap B, x\notin A\}=$$
$$\{x|x\in A, x\notin A\cap B\}\cup\emptyset=$$
$$\{x|x\in A, x\notin A\cap B\}=A-B$$

قضیهٔ ۱۰: اگر A و B دو مجموعهٔ مجزا باشند آنگاه ثابت کنید که: $A\cup B=A\Delta B$

اثبات: طبق‌تعریف مجموعه‌های مجزا می‌دانیم که اشتراك دو مجموعهٔ مجزای A و B مجموعهٔ تهی است بنابراین در این قضیه داریم $A\cap B=\emptyset$ و:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=$$
$$\{x|x\in A \text{ یا } x\in A, x\notin A\cap B\}$$

وچون $A\cap B=\emptyset$ است پس:

$$A\Delta B=\{x|x\in A \text{ یا } x\in B\}=A\cup B$$

۱ ۱	۲ ۲	۳ ۲	۴ ۱	۵ ۲	۶ ۲	●	۷ ۱	۰	●	۸ ۲
۹ ۱	۱	۱	۱	۱	۱	●	۷	●	۱۰ ۲	۵
●	۱	●	۵	●	۰	●	●	۱۱ ۶	۲	۵
●	۱۲ ۲	۱	۶	●	۰	●	●	●	۵	●
●	●	●	●	●	۰	●	●	●	●	●
۱۳ ۳	۱۴ ۴	۱۵ ۵	۱۶ ۶	۱۷ ۷	۰	۱۸ ۷	۱۹ ۶	۵	۴	۲۰ ۳
۲۱ ۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	●	●	۳

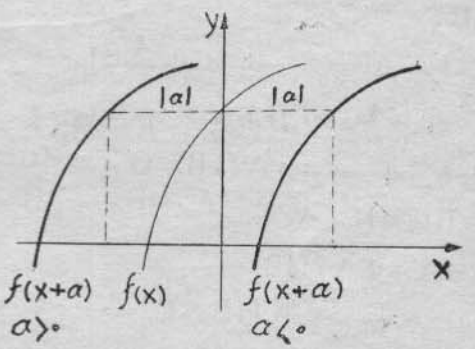
حل جدول اعداد مندرج دریکان شمارهٔ قبل

تبدیلات نمودارها

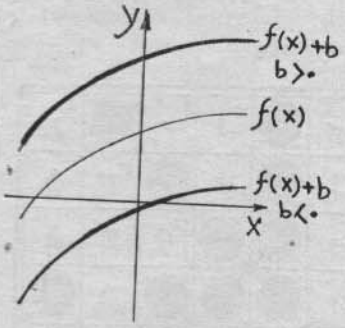
برگردان به‌فارسی از سعیدرودیانی دانشجوی پلی‌تکنیک تهران

مسئله : نمودار تابع $y=f(x)$ دریك صفحهٔ محورهای مختصات قائم در دست است . می‌خواهیم نمودار تابعهایی نظیر $y=f(x+a)$ ، $y=f(x)+b$ ، $y=f(k\cdot x)$ ، $y=k\cdot f(x)$ ، $y=f(-x)$ ، $y=-f(x)$ ، $y=f(|x|)$ و $y=|f(x)|$ و ترکیباتی از آنها را از راه تبدیل نمودار تابع $y=f(x)$ رسم کنیم.

I- نمودارتابع $y=f(x+a)$ از انتقال نمودار تابع $y=f(x)$ در طول محور $x'x$ به اندازهٔ $|a|$ واحد و در جهتی خلاف علامت a بدست می‌آید.



II- نمودار تابع $y=f(x)+b$ از انتقال نمودار تابع $y=f(x)$ در طول محور $y'y$ به اندازهٔ $|b|$ و درجهتی موافق علامت b بدست می‌آید .



III- نمودار تابع $y=f(kx)$ $(k>0)$ با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$ در دوحالت رسم می‌شود:

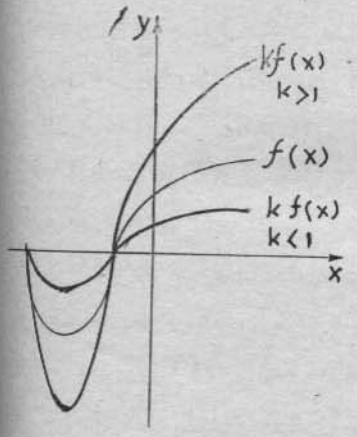
i)- $k>1$. در این حالت نمودار $y=f(kx)$ از «فشرده‌شدن» نمودار $y=f(x)$ به‌اندازه k بار و درجهت افقی حاصل می‌گردد.

ii)- $k<1$. در این حالت نمودار $y=f(kx)$ از «کش‌آمدن» نمودار $y=f(x)$ درجهت افقی و به‌اندازهٔ $\frac{1}{k}$ دفعه بدست می‌آید.

IV- نمودار تابع $y=kf(x)$ $(k>0)$ با توجه به نمودار $y=f(x)$ دوحالت دارد:

i) $k>1$. در این حالت نمودار $y=kf(x)$ از «کشیده‌شدن» نمودار $y=f(x)$ درجهت‌افقی وبه‌مقدار k دفعه حاصل می‌شود.

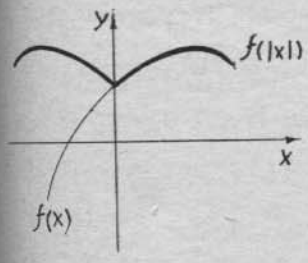
ii) $k<1$. در این حالت‌نمودار $y=k\cdot f(x)$ از «فشرده‌شدن نمودار تابع $y=f(x)$ در خلاف جهت محور $x'x$ (عمودی) به‌اندازهٔ $\frac{1}{k}$ بار بدست‌می‌آید.



V- نمودارتابع $y=f(-x)$ قرینهٔ‌نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور $y'y$ می‌باشد . همچنین نمودار $y=-f(x)$ قرینهٔ‌نمودار $y=f(x)$ نسبت به‌محور $x'x$ است.

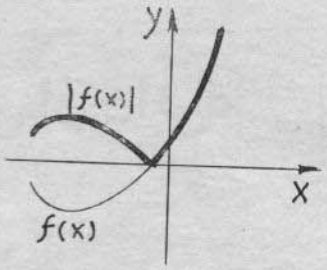
VI- نمودار تابع $y=f(|x|)$ را با توجه به نمودار $y=f(x)$ به‌ترتیب زیررسم می‌کنیم:

برای $x\geq 0$ نمودار $y=f(x)$ و $y=f(|x|)$ برهم‌منطبق‌است. یعنی‌نمودار به همان صورت سابق باقی می‌ماند. برای $x<0$ نمودار $y=f(|x|)$ قرینهٔ قسمت قبلی منحنی $(x\geq 0)$ نسبت



به محور $y'y$ است. درواقع نمودار توابع به‌صورت $y=f(|x|)$ شکلی متقارن نسبت به‌محور $y'y$ است.

VII ـ نمودارتابع $y=|(x)|$ ازروی‌نمودار $y=f(x)$ به‌ترتیب‌زیر رسم می‌شود:



قسمتی از نمودار تابع $y=f(x)$ که بالای محور $x'x$ قرار دارد بدون هیچ‌گونه تغییری باقی‌می‌ماند و بخشی از نمودار $y=f(x)$ که‌زیرمحور $x'x$ واقع‌است بطور قرینه نسبت‌به‌محور $x'x$ تبدیل‌می‌گردد.

VIII ـ تمودار تابع $y=\lambda f(kx+a)+b$ ازروی نمودارتابع $y=f(x)$ باتوجه به تبدیلات I تا V رسم می‌شود

مثال۱ـ نمودار تابع $y=3\sqrt{-2(x+2/5)-0/8}$ را از راه تبدیل نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

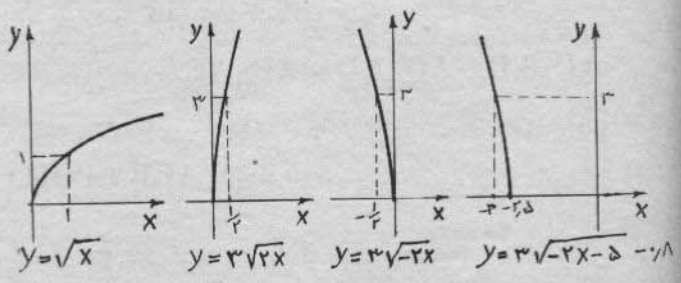
حل: ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ (شکل a) راکه‌قسمت بالایی سهمی $y^2=x$ می‌باشد رسم نموده سپس تبدیلات زیر را روی آن انجام می‌دهیم:

i ـ باکشیده‌شدن عرض نقاط نمودار $y=\sqrt{x}$ به اندازهٔ $3\sqrt{2}$ بار نمودار $y=3\sqrt{2x}$ بدست می‌آید.

واضح است‌که طول نقاط $y=\sqrt{x}$ بدون تغییر باقی می‌ماند. یعنی کشیدگی نمودار $y=\sqrt{x}$ در جهت محور $y'y$ انجام می‌گیرد (شکل b).

ii ـ قرینهٔ $y=3\sqrt{2x}$ نسبت به محور $y'y$ نمودار $y=3\sqrt{-2x}$ خواهدبود. (شکل c).

iii ـ نمودار بدست آمده $(y=3\sqrt{-2x})$ را ابتدابه اندازهٔ ۲/۵ واحد به‌طرف چپ وسپس به اندازهٔ ۰/۸ واحد به طرف پائین انتقال می‌دهیم. (شکل d)



مثال ۲: نمودار تابع $y=3\cos x-\sqrt{3}\sin x$ را با استفاده از تبدیل منحنی $y=\cos x$ رسم کنید.

حل: تابع فوق را به ترتیب زیر بـه‌یك تابع کسینوس تبدیل می کنیم:

$$y=\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=$$

$$2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=2\sqrt{3}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

برای رسم نمودار تـابع فوق نمودار تابع $y=\cos x$ را ابتدا به‌اندازهٔ $2\sqrt{3}$ دفعه ودرجهت افقی کشیده و سپس نمودار بدست‌آمده رابه‌مقدار $\frac{\pi}{6}$ به‌طرف‌چپ‌انتقال می‌دهیم. نمودارحاصل نمودارتابع $y=2\sqrt{3}\cos(x+\frac{\pi}{6})$ ویا $y=3\cos x=\sqrt{3}\sin x$ خواهد بود.

چون دورهٔ تناوب تابع فوق 2π است بنابراین کافی‌است نمودار را در فاصلهٔ $[-\pi$ و $\pi]$ رسم‌نمائیم.

نمودار هر تابع به صورت $y=a\sin x+b\cos x$ که a و b مقادیر ثابتند ازروی نمودارتابع $y=\sin x$ یا $y=\cos x$ به‌ترتیب مثال بالا عمل می‌شود.

تمرین ۱ـ نمودار توابع زیررا رسم‌کنید:

الف) $x=\frac{x+3}{x+1}$ ب) $y=\frac{1}{x^2-9}$

ج) $y=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{اگر } -1\leq x<0 \\ \sin^2 x & \text{اگر } 0\leq x\leq\pi \\ \frac{x-1}{x+1} & \text{اگر } \pi<x\leq 5 \end{cases}$

د) $y=\frac{x+1}{x}$ هـ) $y=x^2-x^3$

و) $y=x+\sin x$ ز) $y=\frac{1}{\cos x}$

ح) $y=3\sin(2x-4)$

ط) $y=2\sqrt{-3(x+1/5)}-1/2$

ی) $y=|x^2-2x-1|$ یا) $y=||x|-1|$

یب) $y=\cos(\sin x)$ ید) $y=|\sin x|+\sin x$

$(0\leq x\leq 3\pi)$

یج) $y=\begin{cases} x^2 & \text{اگر } x>0 \\ 0 & \text{اگر } x=0 \\ -x^2 & \text{اگر } x<0 \end{cases}$

تمرین ۲ـ نمودار تـابع $y=f(x)$ مفروض است. مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y=f(x+1)$ ب) $y=f(\frac{x}{2})$

ج) $y=|f(x)|$ د) $y=\frac{|f(x)|\pm f(x)}{2}$

هـ) $y=\frac{|f(x)|}{f(x)}$

برگردان به‌فارسی از : عبدالحسین مصحفی

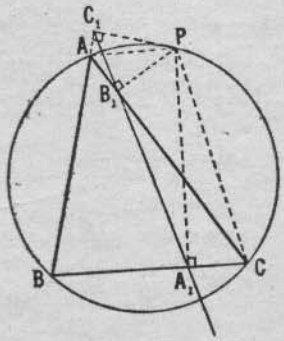
Redécouvrons la Géométrie

H. S. M COXETER et S. L. GREITZER

خاصیتهایی از دایره

۶.۲ـ قضیهٔ بطلمیوس و تعمیم آن

با استفاده از خواص خط سمسن می‌توان قضیه‌ای بسیار مهم به‌شرح زیر نتیجه گرفت. در این باره همان شکل قبلی را مجددا درنظرمی گیریم. می‌توانیم $A_1B_1C_1$ را تبدیل یافتهٔ مثلث پودر نظیر نقطهٔ P نسبت به‌مثلث ABC تصور کنیم. دراین صورت بنابه‌قضیهٔ ۱،۹.۱ داریم:



$$B_1C_1=\frac{a\cdot AP}{2R}\ ،\ A_1C_1=\frac{b\cdot BP}{2R}\ ،$$

$$A_1B_1=\frac{c\cdot CP}{2R}$$

و چون $A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1$ پس:

$$c\cdot CP+a\cdot AP=b\cdot BP$$

به‌عبارت دیگر

$$AB\cdot CP+BC\cdot AP=AC\cdot BP$$

چهارضلعی ABCP محاطی است. بنابراین قضیهٔ زیر بیان شده است.

قضیهٔ ۱،۶.۲ـ درهرچهار ضلعی‌محاطی مجموع حاصل ضربهای ضلعهای روبرو برابراست با حاصل‌ضرب دو قطر.

این قضیه که به‌قضیهٔ بطلمیوس مشهور است دارای عکسی است که در بیان آن باید به‌نکتهٔ زیر توجه داشت: هرگاه نقطهٔ B_1 روی پاره خط A_1C_1 واقع نباشد برای هر وضع آن باید تساوی $A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1$ را توسط نامساوی $A_1B_1+B_1C_1>A_1C_1$ جانشین ساخت. در این صورت خواهیم داشت:

$$AB\cdot CP+BC\cdot AP>AC\cdot BP$$

بنابراین:

قضیهٔ ۲،۶.۲ـ هرگاه P نقطه‌ای غیر واقع بر کمان CA از دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد داریم:

$$AB\cdot CP+BC\cdot AP>AC\cdot BP$$

تمرین

۱ـ اگر P نقطهٔ‌دلخواهی واقع درصفحهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، برحسب‌آنکه P برکمان CA ازدایرهٔ محیطی مثلث واقع باشدیا نباشد دا یم:

$$PC+PA=PB \text{ یا } PC+PA>PB$$

۲ـ هرگاه P روی‌کمان CD از دایرهٔ محیطی مربع ABCD واقع باشد، داریم؛

$$PA(PA+PC)=PB(PB+PD)$$

۳ـ دایره‌ای با دو ضلع AD و AB و قطر AC از متوازی‌الاضلاع ABCD به‌ترتیب در نقطه‌های P، Q و R برخورد می‌کند. ثابت کنید که:

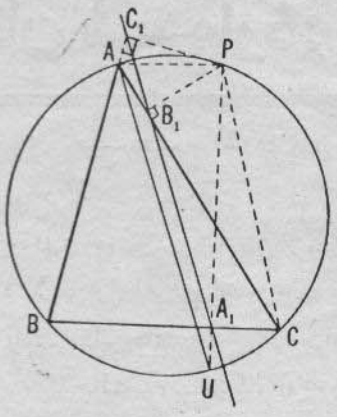
$$AP\cdot AB+AQ\cdot AD=AR\cdot AC$$

راهنمایی ـ علاوه برقضیهٔ بطلمیوس از تشابه مثلثهای PQR و ACB استفاده کنید.

۷.۲ـ تتمه در بارهٔ خط سمسن

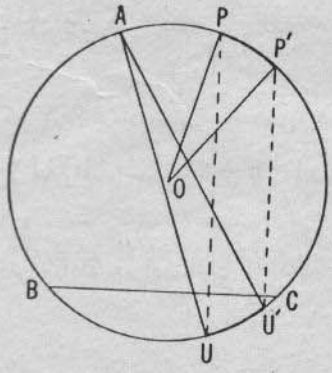
خط سمسن خاصیتهای جالب بسیار داردکه برخی ازآنها شایستهٔ بررسی‌می‌باشند. مطابق‌باشکل بعدعمود PA_1 را امتداد می‌دهیم تا بادایره درU برخوردکند و AU را رسم‌می‌کنیم. در چهار ضلعیهای محاطی PAUC و PB_1A_1C داریم:

$$\angle PUA = \angle PCA = \angle PCB_1 = PA_1B_1$$



نتیجه‌می‌شود که‌خط AU با خط سمسن A_1B_1 موازی است.

اکنون علاوه بر نقطهٔ P نقطهٔ دیگر P' از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را درنظر می‌گیریم و خطهای سمسن نظیر آنها را با هم مقایسه می‌کنیم. با توجه به اینکه این‌خطهای سمسن‌به‌ترتیب با AU و AU' موازیند، زاویهٔ بین آنها با زاویهٔ UAU' برابر است. وترهای PU و PU' نیز با هم‌موازیند پس کمانهای PP' و UU' با هم برابرند و بنابراین:



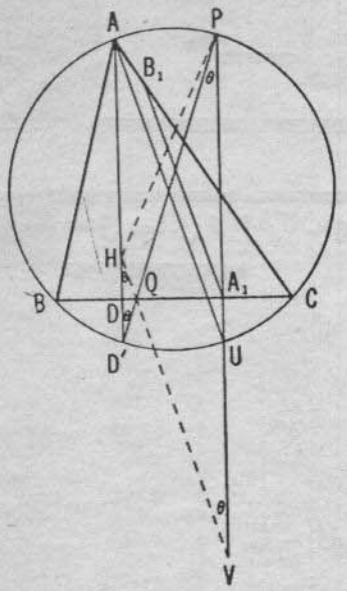
$$\angle UAU' = \frac{1}{2}\angle UOU' = \frac{1}{2}\angle POP'$$

پس قضیهٔ زیر بیان می‌شود:

قضیهٔ ۱،۷.۲ـ خطهای سمسن نظیر دونقطهٔ P و P' نسبت به‌مثلث ABC با یکدیگر زاویه‌ای می‌سازند که اندازهٔ آن نصف اندازهٔ کمان PP' است.

فرض می‌کنیم که P با سرعتی ثابت دایرهٔ محیطی مثلث‌را بپیماید. دراین‌صورت‌خط AU حول نقطهٔ A باسرعت‌زاویه‌ای ثابت می‌چرخد به قسمی که P دایره را درجهت عکس حرکت P می‌پیماید. هرگاه U یك دورکامل محیط را بپیماید AU به‌وضع اول خود در می‌آید. در این ضمن خط سمسن نیز حول مرکزی متغیر دوران می‌کند که پوش آن منحنی متقارنی است که دلتوئیدیا هیپوسیکلوئید اشتینر نام دارد. به‌سادگی و به‌گونهٔ نقاشیهای متحرك که به‌فیلم تبدیل می‌شوند می‌توان این تغییر مکانها را دنبال کرد.

اکنون شکلی را که قبلا داشتیم به‌وضع کاملتر در نظر می‌گیریم. از P به H مرکز ارتفاعی وصل می‌کنیم وهمچنین PD' را رسم می‌کنیم که با BC در Q برخورد می‌کند و HQ را رسم می‌کنیم تا امتداد PU را در V تلاقی کند. خطهای PV و HD' بر BC عمودند وچون D' قرینهٔ H نسبت به BC است پس مثلثهای QHD' و QPV



متساوی‌الساقین می‌باشند. به‌عبارت دیگر HV قرینهٔ $D'P$ نسبت به BC است و چون:

$$\angle D'HV = \angle PVH = \angle D'PU = \angle D'AU$$

پس HV با AU موازی است و در نتیجه با خط سمس نظیر نقطهٔ P نیز موازی است. خط A_1B_1 با ضلع HV از مثلث PVH موازی‌است وضلع PV از این مثلث را نصف می‌کند، بنابراین ضلع سوم مثلث یعنی PH را نیز نصف می‌کند پس:

قضیهٔ ۲،۷.۲ـ خط سمسن نظیر هرنقطهٔ دایرهٔ محیطی مثلث، منصف پاره خطی است که این نقطه را به‌مرکز ارتفاعی مثلث وصل می‌کند.

آنچه گفته شدبیان یك‌خاصیت‌از خاصیتهای‌بسیارخط‌سمسن بود. به‌خاطر پرهیزازدرازی‌مطلب‌ناچاریم که‌برای آگاهی‌برسایر خاصیتهای خط سمسن خواننده را به‌کتابهای دیگر حواله‌کنیم.

تمرین

۱ـ روی دایرهٔ محیطی مثلث دو نقطه واقع بر دوسر یك قطر را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که خطهای سمسن نظیر این دونقطه برهم عمودند و یکدیگر را روی دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث تلاقی می‌کنند.

۲ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در دایرهٔ به‌مرکز O محاط است و P نقطه‌ای از این دایره است. ثابت کنید که خط سمسن نظیر P از وسط شعاع OP می‌گذرد.

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۱۱۳

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای اول دبیرستان

ترجمه از فرانسه

۱۱۳/۱ـ سه مجموعهٔ A ، B و C از مجموعهٔ مرجع M داده شده است.

۱) ثابت کنید که :

$$A-(B\cup C)=(A-B)-C$$

۲) تساوی زیر چه موقع برقرار است

$$A-(B-C)=(A-B)\cup C$$

حل ـ ۱) به‌ترتیب داریم:

$$A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)'=A\cap B'\cap C'$$

$$(A-B)-C=A\cap B'-C=A\cap B'\cap C'$$

بنابراین رابطهٔ داده‌شده برقراراست.

۲) داریم:

$$A-(B-C)=A-(B\cap C')=A\cap(B\cap C')'$$
$$=A\cap(B'\cup C)=A\cap B'\cup A\cap C$$

$$(A-B)\cup C=A\cap B'\cup C$$

تساوی موردنظر وقتی برقرار است که:

$$A\cap B'\cup A\cap C=A\cap B'\cup C\Rightarrow C\subset A$$

۱۱۳/۲ـ مجموعهٔ مرجع عبارتست از مجموعهٔ زیر مجموعه‌های مجموعهٔ عددهای طبیعی. نسبت به‌این مجموعهٔ مرجع ، معادلهٔ مجموعه‌ای زیررا حل و بحث کنید:

$$\{۱،۲،\dots،p\}\cup X=\{۱،۲،۳،\dots،n\}$$

حل ـ عددهای p و n نسبت به هم سه حالت می‌توانند داشته باشند:

حالت اول ـ هرگاه $p>n$ باشد معادله‌غیرممکن‌است، زیرا X هر زیرمجموعه‌ای‌ازمجموعهٔ‌مرجع باشدمجموعهٔ $\{۱،۲،\dots،p\}\cup X$ شامل عدد های p ، ... ، (n+۲) ، (n+۱) می‌باشد در صورتی که این عددها به‌مجموعهٔ { n ، ... ، ۳ ، ۲ ، ۱} تعلق ندارند .

حالت دوم ـ هرگاه $p=n$ باشد . معادلهٔ داده شده چنین می‌شود :

$$\{۱،۲،۳،\dots،n\}\cup X=\{۱،۲،۳،\dots،n\}$$

و X می‌تواند هرزیر مجموعه‌ای از { n ، ... ، ۳ ، ۲ ، ۱} باشد. دراین‌حالت ۲^n جواب برای معادله وجود دارد.

حالت‌سوم ـ هرگاه $p<n$ باشد هرجوابی از X باید شامل عددهای:

$$(p+۱)،(p+۲)،\dots n$$

باشد، پس X چنین خواهدبود:

$$X=\{(p+۱)،(p+۲)،\dots،n\}\cup Y$$

که Y از معادلهٔ زیر بدست‌می‌آید:

$$\{۱،۲،\dots،p\}\cup\{(p+۱)،(p+۲)،\dots،n\}\cup Y$$
$$=\{۱،۲،\dots،n\}$$

این معادله هم ارز است با معادلهٔ:

$$\{۱،۲،\dots،n\}\cup Y=\{۱،۲،\dots،n\}$$

که برای Y تعداد ۲^p جواب وجود داردکه هرجواب آن‌یکی اززیرمجموعه‌های {p، ... ، ۲ ، ۱} می‌باشد ودر نتیجه تعداد جوابهای X نیز برابربا ۲^p می‌باشد.

از بین جوابهای X آنکه تعداد عضوهایش از همه کمتر است در ازای $Y=\emptyset$ حاصل‌می‌شود وعبارت خواهد بود از:

$$X=\{(p+۱)،(p+۲)،\dots،n\}$$

و آن جواب که تعداد عضوهایش از همه بیشتر است در ازای $Y=\{۱،۲،\dots،p\}$ بدست می‌آید و عبارتست‌از:

$$X=\{۱،۲،۳،\dots،n\}$$

۱۱۳/۳ـ فرض می کنیم که:

$$x=a+b+c+d \qquad y=a+b-c-d$$
$$z=a-b+c-d \qquad t=a-b-c+d$$

هرگاه داشته باشیم:

$$ab(a^۲+b^۲)=cd(c^۲+d^۲)$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$xy(x^۲+y^۲)=zt(z^۲+t^۲)$$

حل ـ داریم:

$$xy=[(a+b)+(c+d)][(a+b)-(c+d)]=(a+b)^2-(c+d)^2$$

$$x^2+y^2=[(a+b)+(c+d)]^2+[(a+b)-(c+d)]^2=2[(a+b)^2+(c+d)^2]$$

$$xy(x^2+y^2)=2[(a+b)^2+(c-d)^2][(a+b)^2-(c-d)^2]=2[(a+b)^4-(c-d)^4]$$

باتوجه به اینکه z ازروی x و t ازروی y باتبدیل b به $-b$ و d به $-d$ بدست‌می‌آید پس خواهیم داشت:

$$zt(z^2+t^2)=2[(a-b)^4-(c-d)^4]$$

فرض‌می‌کنیم که :

$$H=xy(x^2+y^2)-zt(z^2+t^2)$$

$$H=2[(a+b)^4-(c+d)^4-(a-b)^4+(c-d)^4]$$

$$H=2[(a+b)^2+(a-b)^2][(a+b)^2-(a-b)^2]-2[(c+d)^2+(c-d)^2][(c+d)^2-(c-d)^2]$$

$$H=16ab(a^2+b^2)-16cd(c^2+d^2)$$

اما بنا به‌فرض داریم:

$$ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$$

بنابراین $H=0$ و رابطهٔ مطلوب برقرار است.

۱۱۳/۴ـ معادلهٔ زیر را حل و بحث کنید

$$(a^2-b^2)(x^2+1)=2(a^2+b^2)x$$

حل ـ هرگاه $a^2+b^2\neq 0$ باشد معادله به $2(a^2+b^2)x=0$ تبدیل می‌شود و جواب $x=0$ دارد.

هرگاه $a^2+b^2=0$ باشد معادله به‌صورت مبهم $0=0$ درمی‌آید.

فرض‌می‌کنیم $a^2\neq b^2$ دراین‌صورت معادله‌چنین‌می‌شود:

$$a^2(x^2+1)-2a^2x-b^2(x^2+1)-2b^2x=0$$

$$a^2(x-1)^2-b^2(x+1)^2=0$$

$$[a(x-1)+b(x+1)][a(x-1)x-b(x+1)]=0$$

$$[(a+b)x-(a-b)][(a-b)x-(a+b)]=0$$

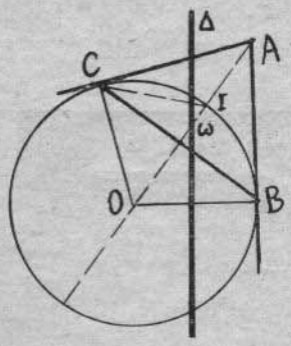
عبارت داخل هریك ازکروشه‌ها را مساوی با صفر قرار می‌دهیم و با توجه به اینکه داشتیم $a^2\neq b^2$ یعنی $a+b\neq 0$ و $a-b\neq 0$ خواهیم داشت:

$$x=\frac{a-b}{a+b} \text{ یا } x=\frac{a+b}{a-b}$$

۱۱۳/۵ـ دایرهٔ ثابت به‌مرکز O و نقطهٔ ثابت B واقع بر آن داده شده است. براین دایره نقطهٔ دلخواه C را در نظر می‌گیریم و در B و C مماسهایی بردایره رسم می‌کنیم که در A برخورد می‌کنند. هرگاه C بردایره تغییر کند؛ مطلوبست‌تعیین:

۱) مکان هندسی ω مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC

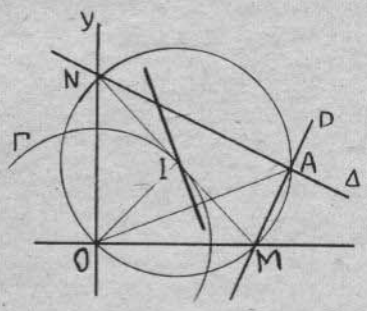
۲) مکان هندسی I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC.



حل ـ ۱) چون هریك‌از زاویه‌های ABO و ACO قائمه است پس دایرهٔ به قطر AO بر B و C می‌گذرد. بنابراین ω مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC در وسط AO واقع است و داریم $\omega B=\omega A=\omega C$. نقطهٔ ω بر عمود منصف OB واقع‌است وچون O و B نقطه های‌ثابت می‌باشند پس مکان ω عبارتست از خط Δ عمودمنصف OB.

۲) چون AO عمودمنصف BC است پس I نقطهٔ برخورد آن با دایره دروسط کمان BC واقع است. ازتساوی کمانهای BI و CI برمی‌آید که زاویهٔ ظلی ACI با زاویهٔ محاطی ICB برابر است. پس IC نیمساززاویهٔ ACB است وهمچنین AI یعنی AO نیز نیمساز زاویهٔ A است. بنابراین I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است. وقتی C دایره را بپیماید مکان I همان دایره می‌باشد.

۱۱۳/۶ـ زاویهٔ قائمهٔ xOy و نقطهٔ A داخل آن داده شده است. بر A دو خط عمود برهم D و Δ را چنان رسم کنید که D با Ox در M و Δ با Oy در N برخورد کندبه‌قسمی که طول پاره خط MN مقدار معلوم a باشد.



حل ـ از اینکه‌زاویه‌های O و A قائمه‌اند برمی‌آید که چهار ضلعی AMON محاطی است که I وسط MN مرکزدایرهٔ محیطی آن‌می‌باشد هرگاه MN برابر با a باشد OI که‌با IM برابر است برابر با $\frac{a}{2}$ خواهد بود.

پس I بر دایرهٔ Γ بمرکز O و بشعاع $\frac{a}{2}$ واقع است . همچنین I برعمود منصف OA قراردارد.

بنابراین نخست دایرهٔ Γ و عمود منصف OA را رسم می‌کنیم. هرگاه این خط و دایره نقطهٔ مشترك داشته‌باشندهمان I می‌باشد. بمرکز I دایرهٔ Γ را رسم می‌کنیم که از برخورد آن با Ox و Oy نقطه‌های M و N بدست‌آمده و ازروی آنها خطهای D و Δ مشخص‌می‌شوند.

مسئله حداکثر دوجواب می‌تواند داشته باشد.

حل مسائل ویژهٔ سال‌دوم علوم تجربی

۲۱۳/۷ـ فرستنده : **قوام نحوی**

جمله‌های دوم، پنجم‌و چهاردهم یك تصاعد حسابی به‌تصاعد هندسی می‌باشند. قدرنسبت این تصاعد هندسی پیدا کنید.

حل ـ جملهٔاول تصاعدحسابی را a و قدر نسبت آن را r می‌گیریم پس:

$$t_1=a, t_2=a+r$$

$$t_5=a+4r, t_{14}=a+13r$$

چون t_2 , t_5 , t_{14} به‌تصاعد هندسی هستند پس:

$$(a+4r)^2=(a+r)(a+13r)$$

$$a^2+8ar+16r^2=a^2+14ar+13r^2$$

$$3r^2-6ar=0 \Longrightarrow r=2a$$

q قدرنسبت تصاعدهندسی برابراست با:

$$q=\frac{a+4r}{a+r}$$

$$r=2a \Rightarrow q=3$$

۱۱۳/۸ـ حاصل‌عبارت زیررا به‌ساده‌ترین صورت‌بدست آورید

$$A=\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-\cos 2x\cos 2y$$

حل ـ داریم:

$$A=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)^2+(\cos x\cos y+\sin x\sin y)^2$$
$$-(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 y-\sin^2 y)$$

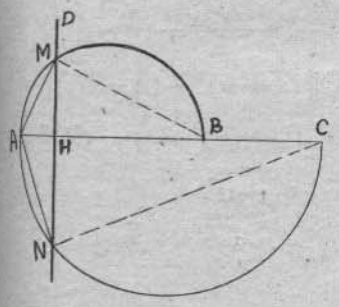
$$A=2(\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2 x\sin^2 y)$$
$$-(\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2 x\sin^2 y-\sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y)$$

$$A=\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2 x\cos^2 y+$$
$$+\cos^2 x\sin^2 y$$

$$A=\cos^2 x(\cos^2 y+\sin^2 y)+\sin^2 x(\cos^2 y+\sin^2 y)$$

$$A=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

۱۱۳/۹ـ روی یك خط Δ سه‌نقطهٔ A و B و C را انتخاب می‌کنیم که B بین A و C واقع باشد و به‌قطرهای AB و AC دو نیمدایره در دو طرف خط Δ رسم می‌کنیم. خط دلخواه D عمود بر Δ نیمدایره‌ها را در M و N و Δ را در H تلاقی می‌کند. به‌فرض $AB=2a$ و $AC=3a$ نسبت $\frac{AM}{AN}$ را بدست آورید.



حل ـ هریك از مثلثهای AMB و ANC قائم‌الزاویه است و H پای ارتفاع آن می‌باشد پس‌داریم:

$$AM^2=AB\cdot AH,$$

$$AN^2=AC\cdot AH$$

$$\frac{AM^2}{AN^2}=\frac{AB}{AC}=\frac{2a}{3a}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{AM}{AN}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

حل مسائل ویژهٔ سال دوم ریاضی، فیزیك

۱۱۳/۱۰ـ ترجمه از فرانسه

همهٔ ماتریسهای مربع X از مرتبهٔ۲را تعیین کنید به‌قسمی که :

$$X^2=0$$

حل ـ بافرض $x=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ داریم:

$$X^2=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

$$X^2=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ a^2+bc=0 \\ (2)\ d^2+bc=0 \\ (3)\ b(a+d)=0 \\ (4)\ c(a+d)=0 \end{cases}$$

به‌فرض $a+d\neq 0$ از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $b=c=0$ آنگاه از(۱)و(۲) نتیجه‌می‌شود که $a=d=0$ پس $a+d=0$

که متناقض با فرض $a+d\neq 0$ است . بنابراین $a+d=0$ و دراین‌صورت دستگاه بالا به‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود (زیرا $a=-d$):

$$a^2+bc=0 \Longrightarrow ad-bc=0$$

بنابراین ماتریسهای مطلوب عبارتند از ماتریسهای $X=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ باشرط $a+d=0$ و $ad-bc=0$

۱۱۳/۱۱ـ ترجمه از فرانسه

m و n را تعیین کنید برای آنکه سه ماتریس زیر بستگی خطی داشته باشند . این بستگی را نیز معین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 7 & m \\ 4 & n \end{bmatrix}$$

حل ـ باید سه عدد حقیقی α و β و γ را بدست آوریم که

$$\alpha A+\beta B+\gamma C=0$$

$$\alpha A=\begin{bmatrix} 2\alpha & \alpha \\ -\alpha & 3\alpha \end{bmatrix} \qquad \beta B=\begin{bmatrix} \beta & -2\beta \\ 2\beta & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\gamma C=\begin{bmatrix} 7\gamma & m\gamma \\ 4\gamma & n\gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha A+\beta B+\gamma C=$$

$$\begin{bmatrix} 2\alpha+\beta-7\gamma & \alpha-2\beta+m\gamma \\ -\alpha+2\beta-4\gamma & 3\alpha-\beta+n\gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\gamma+\beta-7\gamma=0 \\ \alpha-2\beta+m\gamma=0 \\ -\alpha+2\beta-4\gamma=0 \\ 3\alpha-\beta+n\gamma=0 \end{cases}$$

از معادله های اول و سوم $\alpha=-2\gamma$ و $\beta=-3\gamma$ بدست می‌آید که چون در دو معادلهٔ دیگر منظور کنیم خواهیم داشت

$$\begin{cases} \gamma(m+4)=0 \\ \gamma(n-3)=0 \end{cases}$$

چون α و β و γ هرسه باهم نمی‌توانند صفر باشند پس $\gamma\neq 0$ ودرنتیجه $m=-4$ و $n=3$ و خواهیم داشت:

$$-2\gamma A-3\gamma B+\gamma C=0 \Longrightarrow 2A+3B-C=0$$

۱۱۳/۱۲ـ درصفحهٔ محورهای مختصات دو نقطهٔ A و B داده شده است. به‌قسمی که $OA=a$ و $OB=b$. هرگاه c فاصلهٔ نقطهٔ دیگر C از O مبدأ مختصات باشد و داشته باشیم:

$$c(4c-3a-3b)=(a+b)^2$$

مقدار c را برحسب a و b بدست آورید. در حالتی که $A(1,2)$ و $B(-2,4)$ و C برعمود منصف AB واقع باشد، مختصات C را بدست آورید.

حل ـ نخست رابطهٔ داده شده را نسبت به c مرتب و حل می‌کنیم :

$$4c^2-3(a+b)c-(a+b)^2=0$$

$$\Delta=9(a+b)^2+16(a+b)^2=25(a+b)^2$$

$$c=a+b$$

(جواب منفی برای c قابل‌قبول نیست)

$$a^2=OA^2=1+4=5, b^2=4+16=20$$

$$c^2=OC^2=(a+b)^2=25+20=45$$

بافرض $C(\alpha,\beta)$ وباتوجه به‌اینکه C برعمودمنصف AB واقع است داریم :

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=45 \\ (\alpha-1)^2+(\beta-2)^2=(\alpha+2)^2+(\beta-4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=45 \\ 6\alpha-4\beta+15=0 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم α را برحسب β بدست آورده درمعادلهٔ اول منظور می‌کنیم ، پس از اختصار خواهیم داشت:

$$22\beta^2-120\beta-45=0$$

$$\beta=\frac{60\pm 3\sqrt{510}}{22} \quad \text{و} \quad \alpha=\frac{-45\pm 6\sqrt{510}}{11}$$

۱۱۳/۱۳ـ حاصل عبارت‌زیر که به‌صورت چند جمله‌ای نوشته شود دارای چند جمله است؟

$$S=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2$$

حل ـ حاصل عبارت به صورت $A+B$ است که A عبارتست از مجموع مربعات جمله‌ها و تعداد آنها n است. اما B برابر است با دو برابر حاصل‌ضربهای هر جمله درجمله‌های بعد از خودش . با توجه بااینکه a_1 در $n-1$ جمله، a_2 در $n-2$ جمله، a_3 در $n-3$ جمله، ....، بالاخره جملهٔ a_{n-1} در یك جمله‌ضرب می‌شود، پس تعداد تمام این جمله‌ها برابراست با :

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1$$

با استفاده از دستور تعیین مجموع جمله‌های تصاعد حسابی این مجموع برابر با $\frac{n(n-1)}{2}$ بدست می‌آید. بنابراین تعداد تمام جمله‌های حاصل عبارت داده شده برابر است با :

$$n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

۱۱۳/۱۴ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

هرگاه داشته باشیم:

$$2\cos\alpha=\log_{\frac{5}{8}}\alpha \quad و \quad 2\sin\beta=\log_{\frac{5}{8}}\beta$$

ثابت کنید که:

$$\alpha>\frac{\pi}{6}>\beta$$

حلـ باید ثابت کنیم که:

$$\log_{\frac{5}{8}}\alpha>\log_{\frac{5}{8}}\frac{\pi}{6}>\log_{\frac{5}{8}}\beta$$

برای اثبات این نامساویها کافی است ثابت کنیم.

$$2\cos\frac{\pi}{6}>\log_{\frac{5}{8}}\frac{\pi}{6}>2\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3}>\log_{\frac{5}{8}}\frac{\pi}{6}>1$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}<\frac{\pi}{6}<\frac{5}{8}$$

نامساوی $\frac{\pi}{6}<\frac{5}{8}$ به نامساوی $4\pi<15$ بدل می‌شود و محقق است. از طرف دیگر داریم:

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{125}{512}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{125\times36}{512}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(\frac{125\times9}{128}\right)^{\frac{1}{2}}<\pi$$

بنابراین نامساوی بالا محقق است.

۱۱۳/۱۵ـ ترجمه

در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع a نقطهٔ P را بر AC و نقطهٔ Q را بر BC می‌گیریم به‌قسمی که :

$$CQ=AP=x$$

باشد.

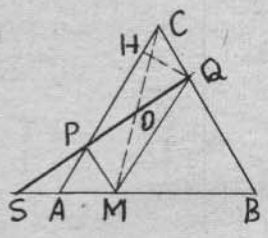
۱) طول PQ را برحسب a و x حساب کنید.

۲) اگر O وسط PQ و M قرینهٔ C نسبت به O باشد ثابت کنید که M بر AB واقع است.

۳) اگر S نقطهٔ برخورد PQ با امتداد AB باشد ثابت کنید که :

$$SM^2=SA\cdot SB$$

حل ۱ـ عمود QH را بر AC رسم می‌کنیم. در مثلث CHQ که زاویهٔ C برابر 60° و زاویهٔ H برابر 90° است داریم:



$$CH=\frac{CQ}{2}=\frac{x}{2} \quad و \quad QH=\frac{CQ\sqrt{3}}{2}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ PHQ داریم:

$$\overline{PQ}^2=PH^2+QH^2=\left(a-x-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$PQ^2=a^2+\frac{9x^2}{4}-3ax+\frac{3x^2}{4}=a^2-3ax+3x^2$$

۲) دوقطر چهارضلعی CPMQ منصف یکدیگرند پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و PM با CQ مساوی و موازی است. نتیجه می‌شود که $PA=PM$ و همچنین زاویهٔ APM با زاویهٔ C برابر و به‌اندازهٔ 60° است. مثلث APM متساوی‌الاضلاع است پس اندازهٔ زاویهٔ PAM برابر 60° است و چون اندازهٔ زاویهٔ PAB نیز برابر 60° است پس M بر AB واقع است.

۳) از تشابه مثلثهای SPM و SBQ و مثلثهای SAP و SMQ داریم:

$$\frac{SM}{SB}=\frac{SP}{SQ} \quad و \quad \frac{SA}{SM}=\frac{SP}{SQ}$$

$$\frac{SM}{SB}=\frac{SA}{SM}\Longrightarrow SM^2=SA\cdot SB$$

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۱۳/۱۶- منحنی C نمایش هندسی تابع :

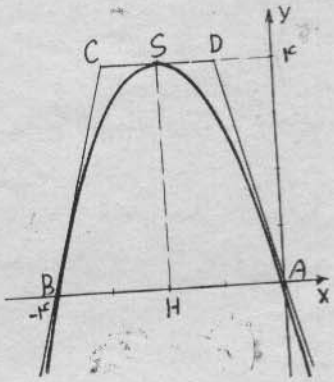
$$y=۴-(x+۲)^۲$$

را رسم کنید. هرگاه S رأس این منحنی و A و B نقطه‌های برخورد آن با $x'x$ باشد، مماسهایی که در S و A و B بر منحنی رسم شوند با AB ذوزنقه‌ای می‌سازند. مساحت این ذوزنقه را حساب کنید.

حل ـ داریم:

$$y=-x^۲-۴x \text{ و } y'=-۲x-۴$$

x	$-\infty$		-۴		-۲		۰		$+\infty$
y′			+		۰		−		
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۴	↘	۰	↘	$-\infty$



$S(-۲,۴)$ و $A(۰,۰)$ و $B(-۴,۰)$

$m_{AD}=[-۲x-۴]_۰=-۴$

$m_{BC}=[-۲x-۴]_{-۴}=۴$

$(AD): y=-۴x$

$(BC): y=۴x+۱۶$

$(CD): y=۴$

$C(-۳,۴)$ و $D(-۱,۴)$

$$S=\frac{۱}{۲}(AB+CD)\,SH=\frac{(۴+۲)\times ۳}{۲}=۱۲$$

۱۱۳/۱۷- تابع:

$$y=۲\cos^۲\left(\omega t+\frac{\pi}{۳}\right)+\sin^۲\omega t$$

را می‌توان به‌صورت تابع :

$$y=A\cos(۲\omega t+\varphi)+B$$

تبدیل کرد. مقادیر A و B و φ را پیدا کنید.

حل ـ داریم :

$$y=۱+\cos\left(۲\omega t+\frac{۲\pi}{۳}\right)+\frac{۱-\cos ۲\omega t}{۲}$$

$$y=۱+\cos ۲\omega t\cos\frac{۲\pi}{۳}-\sin ۲\omega t\sin\frac{۲\pi}{۳}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۲\omega t$$

$$y=\frac{۳}{۲}-\left(\cos ۲\omega t+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲\omega t\right)$$

$$tg\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Longrightarrow \cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱+tg^۲\beta}}=\frac{۲}{\sqrt{۷}}$$

$$\cos ۲\omega t+tg\alpha\sin ۲\omega t=\frac{\cos\alpha\cos ۲\omega t+\sin ۲\omega t\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$y=\frac{۳}{۲}-\frac{\sqrt{۷}}{۲}\cos(۲\omega t-\alpha)$$

$$y=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\cos(۲\omega t+\pi-\alpha)+\frac{۳}{۲}$$

$$A=\frac{\sqrt{۷}}{۲} \text{ و } B=\frac{۳}{۲} \text{ و } \varphi=\pi-\alpha=\pi-\mathrm{Arctg}\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۱۳/۱۸- برمنحنی C نمایش هندسی تابع $y=\frac{۱}{x}$ نقطهٔ M را درنظر می‌گیریم. در M خطی قائم برمنحنی C رسم می‌کنیم که نیمساز بخشهای اول و سوم محورها را در I و نیمساز بخشهای دوم و چهارم محورها را در J تلاقی می‌کند. ثابت کنید که M وسط IJ است و نتیجه بگیرید که طول OM نصف طول IJ است.

حل ـ طول نقطهٔ M را α فرض می‌کنیم پس $M\left(\alpha \text{ و } \frac{۱}{\alpha}\right)$ و چون $y'=\frac{-۱}{x^۲}$ پس ضریب زاویه‌ای قائم بر C در M می‌شود $\alpha^۲$ و معادلهٔ این قائم می‌شود:

$$y-\frac{۱}{\alpha}=\alpha^۲(x-\alpha) \quad , \quad y=\alpha^۲x-\alpha^۳+\frac{۱}{\alpha}$$

از حل این معادله با معادله‌های $y=x$ و $y=-x$ خواهیم داشت:

$$I\left(\frac{1+\alpha^2}{\alpha}, \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\right) \text{ و } J\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha}, \frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right)$$

$$\frac{1}{2}(x_I+x_J)=\alpha=x_M$$

$$\frac{1}{2}(y_I+y_J)=\frac{1}{\alpha}=y_M$$

مثلث IOJ در زاویهٔ O قائمه است و OM میانهٔ نظیر وتر از این مثلث است پس OM نصف IJ است.

۱۱۳/۱۹ـ منحنیهای نمایش تابعهای زیررا دریك‌شکل رسم کنید و مختصات نقطه‌های برخورد آنها را حساب کنید.

$$y=-|x^2-8x+15|$$

$$y=\frac{-x+3}{x-1}$$

حل ـ سه‌جمله‌ای $x^2-8x+15$ درازای $x=3$ یا $x=5$ برابر با صفر، در ازای $x>5$ یا $x<3$ مثبت و درازای $3<x<5$ منفی است. بنابراین:

۱) $x\geq 5$ یا $x\leq 3$

$$y=-|x^2-8x+15|=-x^2+8x-15$$

$$y'=-2x+8$$

x	$-\infty$		0		3	4	5		$+\infty$
y′			+						−
y	$-\infty$	↗	-15	↗	0			0	↘ $-\infty$

۲) $3\leq x\leq 5$

$$y=-|x^2-8x+15|=x^2-8x+15$$

$$y'=2x-8$$

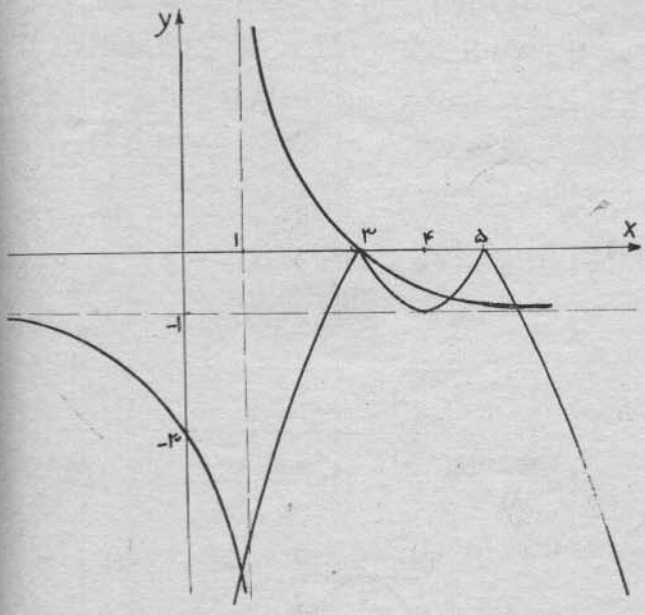
x	$-\infty$	3		4		5	$+\infty$
y′			−	0	+		
y		0	↘	-1	↗	0	

برای تابع دیگر داریم:

$$y=\frac{-x+3}{x-1} \text{ و } y'=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y′			−				−		
y	-1	↘	-3	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘ 0	↘	-1

با توجه به جدولهای بالا شکل زیررا خواهیم داشت:



برای تعیین نقطه‌های برخورد منحنیها باید جوابهای دستگاههای زیررا بدست آوریم:

$$\begin{cases} x\leq 3 \text{ یا } x\geq 5 \\ y=-x^2+8x-15 \\ y=\dfrac{-x+3}{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\leq x\leq 5 \\ y=x^2-8x+15 \\ y=\dfrac{-x+3}{x-1} \end{cases}$$

در دستگاه اول ازحذف y بین معادله‌های دوم و سوم بدست می‌آید:

$$x^3-9x^2+22x-12=0$$

$$x^3-9x^2+18x+4x-12=0$$

$$x(x-3)(x-6)+4(x-3)=0$$

$$(x-3)(x^2-6x+4)=0$$

$$x=3 \text{ یا } x=3\pm\sqrt{5}$$

هرسه مقدار بدست آمده در نامساویهای مورد نظر صدق می‌کنند. پس از دستگاه اول سه نقطهٔ برخورد برای منحنیها

وجوددارد.

از دستگاه دوم خواهیم داشت:

$$x^3-9x^2+24x-18=0$$
$$x^3-9x^2+18x+6x-18=0$$
$$x(x-3)(x-6)+6(x-3)=0$$
$$(x-3)(x^2-6x+6)=0$$
$$x=3 \quad \text{یا} \quad x=3\pm\sqrt{3}$$

جواب $x=3-\sqrt{3}$ درنامساوی $3<x<5$ صدق‌نمی‌کند و قابل قبول نیست. پس از دستگاه دوم دونقطهٔ برخورد برای منحنیها بدست می‌آیدکه یك نقطهٔ آن از دستگاه اول نیز بدست آمده است. بنابراین منحنیهای نمایش دو تابع رویهم چهارنقطهٔ برخورد دارند:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3+\sqrt{3} \\ y=\dfrac{-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3\pm\sqrt{5} \\ y=\dfrac{\mp\sqrt{5}}{2\pm\sqrt{5}} \end{cases}$$

۱۱۳/۲۰ـ α و β دوکمان حاده و متمایزند. ثابت کنیدکه:

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{tg\alpha+tg\beta}{2}$$

حل ـ فرض می‌کنیم $tg\frac{\alpha}{2}=u$ و $tg\frac{\beta}{2}=v$ که $0<u$ و $v<1$ دراین صورت:

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{u+v}{1-uv}$$

$$\frac{tg\alpha+tg\beta}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2u}{1-u^2}+\frac{2v}{1-v^2}\right)$$
$$=\frac{(u+v)(1-uv)}{(1-u^2)(1-v^2)}$$

نامساوی داده شده چنین می‌شود:

$$\frac{u+v}{1-uv}<\frac{(u+v)(1-uv)}{(1-u^2)(1-v^2)}$$

با توجه به‌اینکه $v<1$ و $0<u$ است خواهیم داشت:

$$(1-u^2)(1-v^2)<(1-uv)^2$$
$$-u^2-v^2<-2uv \Longleftrightarrow (u-v)^2>0$$

بنابراین نامساوی داده شده محقق است.

۱۱۳/۲۱ـ عبارت زیررا برحسب $cos2x$ بنویسید.

$$y=cos^2x-cos^22x+cosx\,cos3x$$

حل ـ داریم:

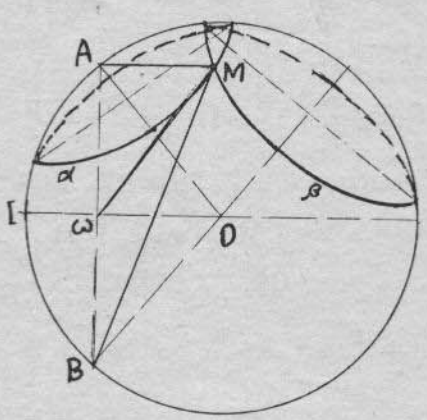
$$y=\frac{1+cos2x}{2}-cos^22x+\frac{1}{2}[cos4x+cos2x]$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos2x-cos^22x+\frac{1}{2}(2cos^2x-1)+$$
$$+\frac{1}{2}cos2x$$

$$y=cos2x$$

۱۱۳/۲۲ـ ترجمه از فرانسه

کرهٔ (S) به‌مرکز O و به‌شعاع R و وتر AB از آن داده شده است. بر سطح این کره دو دایرهٔ α و β را به‌ترتیب به‌قطبهای A و B رسم می‌کنیم. اگر M نقطهٔ مشترك این دو دایره باشد به‌فرض آنکه مجموع مساحتهای دو عرقچین کروی به رأسهای A و B وبه قاعده‌های α و β برابر با πm^2باشد، مکان M را تعیین و بحث کنید.



حل ـ بنابه‌فرض داریم:

$$\pi MA^2+\pi MB^2=\pi m^2$$
$$MA^2+MB^2=m^2$$

هرگاه ω وسط AB باشد درمثلث AMB داریم:

$$MA^2+MB^2=2\omega M^2+2\omega A^2$$

بنابراین داریم:

$$\omega M^2=\frac{m^2}{2}-\frac{AB^2}{4}$$

چون m و AB مقادیرثابت می‌باشند پس مکان M درصورت وجود کرهٔ Σ است به‌مرکز ω

برای امکان مسئله اول بایستی کرهٔ Σ وجود داشته باشد یعنی باید:

$$\frac{m^2}{2}-\frac{AB^2}{4}\geqslant 0 \Longrightarrow m^2\geqslant\frac{AB^2}{2}$$

ثانیا بایستی کره‌های S و Σ نقطهٔ مشترك داشته باشند، یعنی:

$$\omega I\leqslant\omega M\leqslant\omega J \Longrightarrow \omega I^2\leqslant\frac{m^2}{2}-\frac{AB^2}{4}\leqslant\omega J^2$$

نتیجه خواهد شد که باید داشته باشیم:

$$2IA^2\leqslant m^2\leqslant 2JA^2 \Longrightarrow IA\sqrt{2}\leqslant m\leqslant JA\sqrt{2}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم دبیرستان

۱۱۳/۲۳ـ از سهمی P خط هادی به‌معادلهٔ $x=1$ و یك نقطهٔ $M(3,1)$ معلوم است و می‌دانیم که کانون بر خطی واقع است که از M موازی با خط هادی رسم می‌شود. معادلهٔ این سهمی را بنویسید.

حل ـ سهمی درطرف راست خط هادی واقع است پس اگر $S(\alpha,\beta)$ رأس و p پارامتر آن باشد معادلهٔ آن می‌شود:

$$(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)$$

$$F(\alpha+\frac{p}{2}\ \text{و}\ \beta)\ \text{و}\ (D):x=\alpha-\frac{p}{2}$$

چون خط FM با خط هادی سهمی یعنی با $y'y$ موازی است پس پارامتر سهمی برابر است با فاصلهٔ M تا خط هادی یعنی $p=3-1=2$ و همچنین:

$$\alpha+\frac{p}{2}=3 \Longrightarrow \alpha=2$$

مختصات M در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند پس:

$$(1-\beta)^2=4(3-2) \Longrightarrow \beta=3\ \text{یا}\ -1$$

معادلهٔ سهمی به‌یکی ازدوصورت زیر است:

$$(y-3)^2=4(x-2)$$
$$(y+1)^2=4(x-2)$$

۱۱۳/۲۴ـ عدد $a>1$ را پیدا کنید به‌قسمی که مساحت سطح محصور بین منحنی تابع

$$y=a\sin x+\sin x\cos x$$

و محور $x'x$ در فاصلهٔ صفر تا π برابر با ۴ واحد سطح باشد.

حل ـ داریم

$$f(x)=a\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$F(x)=-a\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$$

چون $a\geqslant 1$ پس منحنی درفاصلهٔ بین صفر تا π با $x'x$ برخورد ندارد و:

$$S=|F(\pi)-F(0)|=2a$$
$$2a=4 \Longrightarrow a=2$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۱۳/۲۵ـ مساحت سطح محصور بین سهمیهای به‌معادله های $y^2=2px$ و $x^2=2qy$ را بدست آورید.

حل ـ دو سهمی در دو نقطهٔ $O(0,0)$ و $P(\alpha,\beta)$ متقاطعند. برای محاسبهٔ S سطح محصور بین دو سهمی چنین عمل می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2q}$$

$$F(x)=\frac{2\sqrt{2p}}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{6q}+C$$

$$S=|F(\alpha)-F(0)|=\frac{2\sqrt{2p}}{3}\alpha\sqrt{\alpha}-\frac{\alpha^3}{6q}$$

اکنون α را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{2p\alpha}=\frac{\alpha^2}{2q} \Longrightarrow \alpha^3=8pq^2$$

$$S=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\sqrt{\alpha^3}-\frac{\alpha^3}{6q}$$

$$S=\frac{2}{3}\sqrt{16p^2q^2}-\frac{4pq}{3}=\frac{4}{3}pq$$

۱۱۳/۲۶ـ اولا منحنی نمایش تابع زیررا در فاصلهٔ صفر و π رسم کنید

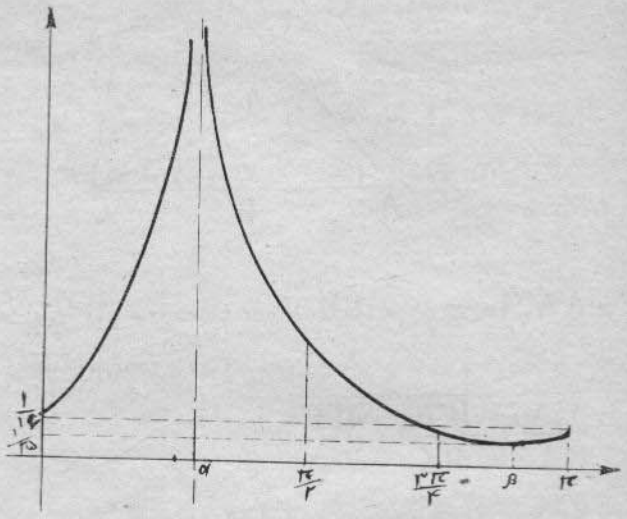
$$y=\frac{tg^2x+1}{(3tgx-4)^2}$$

ثانیاً سطح محصور بین منحنی و محور $x'x$ و دو خط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{4}$ را حساب کنید.

حل ـ اولا داریم:

$$y'=\frac{2(tg^2x+1)(-4tgx-3)}{(3tgx-4)^3}$$

x	۰		α		$\frac{\pi}{۲}$		β		π
y′		+			−		۰	+	
y	$\frac{۱}{۱۶}$	↗	$+\infty$	↘	$\frac{۱}{۹}$	↘	$\frac{۱}{۲۵}$	↗	$\frac{۱}{۱۶}$



ثانیاً با فرض $u=۳tgx-۴$ داریم $u'=۳(۱+tg^۲x)$ و:

$$f(u)=\frac{u'}{۳u^۲}$$

$$F(u)=\frac{-۱}{۳u}$$

$$F(x)=\frac{۱}{۳(۴-۳tgx)}+C$$

$$S=\left|F\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)-F\left(\frac{\pi}{۲}\right)\right|=\frac{۱}{۲۱}$$

۱۱۳/۲۷- در مثلث ABC طول میانهٔ AM با ضلع AB برابر است‌وتفاضل دو زاویهٔ B و C برابر با ۳۰° است. اندازه‌های زاویه‌های مثلث را حساب کنید.

حل - داریم:

$$AM^۲=\frac{۳(b^۲+c^۲)-a^۲}{۴}=c^۲$$

$$۲(b^۲+c^۲)-a^۲=۴c^۲ \Longrightarrow a^۲=۲(b^۲-c^۲)$$

$$sin^۲A=۲(sin^۲B-sin^۲C)$$

$$=۱-cos۲B-۱+cos۲C=cos۲C-cos۲B$$

$$sin^۲A=-۲sin(B+C)sin(C-B)$$

$$sin^۲A=۲sinA\,sin(B-C) \Longrightarrow$$

$$sinA=sin(B-C)$$

$$B-C=۳۰^\circ \Longrightarrow sinA=\frac{۱}{۲} \text{ و } A=۳۰^\circ \text{ یا } ۱۵۰^\circ$$

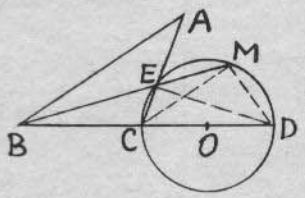
$$\begin{cases} B-C=۳۰ \\ B+C=۱۵۰ \end{cases} \Longrightarrow B=۹۰^\circ \text{ و } C=۶۰^\circ$$

$$\begin{cases} B-C=۳۰^\circ \\ B+C=۳۰^\circ \end{cases}$$ غیر قابل قبول

۱۱۳/۲۸- ترجمهٔ مهندس زرگری

در مثلث ABC زاویهٔ C منفرجه است و نیمساز داخلی زاویهٔ B ضلع AC را به‌دو قطعهٔ $AE=۳$ و $CE=۲$ تقسیم کرده است و M مرکز دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ B می‌باشد. مرکز دایره‌ای که برسه نقطهٔ C و E و M می‌گذرد روی امتداد BC واقع است. مقدار $sinA$ را حساب کنید.

حل - هرگاه D نقطهٔ دیگر تلاقی دایره با خط BC باشد، CD قطر دایره است و داریم:



$$\angle MCD=\angle MBC+\angle CMB$$

$$\angle MCD=۹۰^\circ-\frac{۱}{۲}\angle ACB$$

$$\frac{۱}{۲}\angle ABC+\frac{۱}{۲}\angle ACB=۹۰^\circ-\angle CMB$$

$$\angle CMB=\frac{۱}{۲}\angle A=\angle EDC$$

$$\angle ECD+\angle EDC=۹۰^\circ$$

$$۱۸۰^\circ-\angle C+\frac{۱}{۲}\angle A=۹۰^\circ \Longrightarrow$$

$$\angle C=۹۰^\circ+\frac{۱}{۲}\angle A$$

$$\frac{a}{sinA}=\frac{c}{sinC} \Longrightarrow \frac{a}{c}=\frac{۲}{۳}=\frac{sinA}{sinC}$$

$$3\sin A = 2\cos\frac{A}{2} \Longrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\sin A = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

۱۱۳/۲۹ـ ترجمه

عدد طبیعی N را تعیین کنید به‌قسمی که مقدار تقریبی نقصانی جذر کسر $\frac{N}{13}$ با تقریب $\frac{1}{3}$ برابر با $\frac{4}{3}$ و با تقریب $\frac{1}{4}$ برابر با $\frac{5}{4}$ باشد.

حل ـ داریم:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{N}{3} < \left(\frac{5}{3}\right)^2 \text{ و } \left(\frac{5}{4}\right)^2 < \frac{N}{13} < \left(\frac{6}{4}\right)^2$$

از این رابطه‌ها خواهیم داشت:

$$\left(\frac{16}{12}\right)^2 < \frac{N}{13} < \left(\frac{20}{12}\right)^2 \text{ و } \left(\frac{15}{12}\right)^2 \leq \frac{N}{13} < \left(\frac{18}{12}\right)^2$$

$$\left(\frac{16}{12}\right)^2 \leq \frac{N}{13} < \left(\frac{18}{12}\right)^2$$

$$\frac{16\times 13}{9} \leq N < \frac{9\times 13}{4} \Longrightarrow 24 \leq N \leq 29$$

$N = 24$ یا ۲۵ یا ۲۶ یا ۲۷ یا ۲۸ یا ۲۹

۱۱۳/۳۰ـ ترجمه

کسر $\frac{a}{b}$ را پیدا کنید که مجذور کسر دیگر باشد و علاوه بر آن مولد کسر اعشاری متناوب سادهٔ با دورهٔ گردش یك رقمی باشد.

حل ـ هرگاه p رقم دورهٔ گردش کسر باشد داریم:

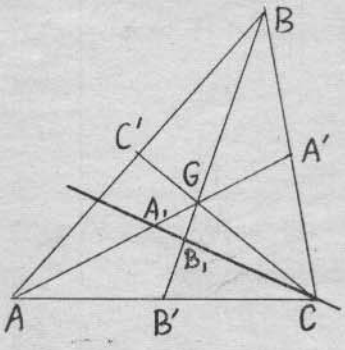
$$\frac{a}{b} = \frac{p}{9}$$

چون کسر مجذور کسر دیگر است و همچنین کسر کوچکتر از واحد است (زیرا مولد اعشاری متناوب ساده می‌باشد) پس $p = 1$ یا $p = 4$ و کسر مطلوب $\frac{1}{9}$ یا $\frac{4}{9}$ است.

۱۱۳/۳۱ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

در مثلث ABC که G نقطهٔ برخورد میانه‌ها است، از رأس C خطی می‌گذرانیم که میانه‌های AA' و BB' را در A_1 و B_1 قطع کند. ثابت کنید:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GA_1}} + \frac{\overline{BG}}{\overline{GB_1}} = 1$$



حل ـ نسبت به مورب BB_1 برای مثلث AA_1C بنا برقضیهٔ منلائوس داریم:

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GA_1}} \cdot \frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1$$

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GA_1}} \cdot \frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1C}} = -1 \Longrightarrow \frac{\overline{GA}}{\overline{GA_1}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A_1}}$$

همچنین نسبت به‌مورب AA_1 برای مثلث BB_1C خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{GB}}{\overline{GB_1}} \cdot \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C}} = -1 \Longrightarrow \frac{\overline{GB}}{\overline{GB_1}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B_1}}$$

از رابطه‌های بالا بدست می‌آید:

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GA_1}} + \frac{\overline{GB}}{\overline{GB_1}} = \frac{\overline{B_1C} + \overline{A_1C}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{-\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1B_1}} = -1$$

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GA_1}} + \frac{\overline{BG}}{\overline{GB_1}} = 1$$

پاسخ تستهای ریاضی

۳۲ـج	۳۳ـد	۳۴ـج	۳۵ـالف	۳۶ـد
۳۷ـج	۳۸ـالف	۳۹ـ الف	۴۰ـ ج	۴۱ـب
۴۲ـ د	۴۳ـ ب	۴۴ـ ج	۴۵ـ الف	۴۶ـ د
۴۷ـب	۴۸ـج	۴۹ـ د	۵۰ـ ج	۵۱ـالف
۵۲ـ الف	۵۳ـ د	۵۴ـ ج		

مسائل برای حل

برای دانش‌آموزان سال اول دبیرستان

۱۱۴/۱ـ هرگاه A و B دو زیر مجموعهٔ نا تهی از مجموعهٔ مرجع E باشد، زیر مجموعهٔ X از E را پیدا کنید که داشته باشیم:

$$A \cap X = B$$

۱۱۴/۲ـ دریك شهرك تازه‌ساز رویهم ۱۲ خیابان هم‌طول شمالی جنوبی و ۱۵ کوچهٔ همطول شرقی غربی ساخته‌شده است. روشنائی این شهر به این ترتیب تأمین شده است که در خیابانها به‌فاصله‌های ۵۰ متری ودرکوچه‌ها به فاصله های ۶۰ متری لامپهایی نصب‌شده است. درتقاطع هر خیابان باهرکوچه یك لامپ قرار دارد . فاصلهٔ بین دو لامپ انتهایی در هر کوچه ۳۳۰۰ متر و فاصلهٔ بین دولامپ انتهائی درهر خیابان ۲۸۰۰ متر است. تعداد تمام لامپهایی که درشهرك نصب شده چقدراست؟

۱۱۴/۳ـ فرستنده : **محمدرضامعصومی**

دردستگاه عددنویسی به‌مبنای B :

۱) تعداد همهٔ اعداد n رقمی را کـه فاقد یك رقم معین غیرصفر می‌باشند حساب کنید.

۲) تعداد همهٔ اعداد n رقمی را که فاقد p رقم غیرصفر می‌باشند بدست آورید.

۱۱۴/۴ـ معادلهٔ زیررا حل وبحث کنید.

$$|2x - |2x - 1|| = -m^2 x$$

۱۱۴/۵ـ ترجمه از فرانسه

دردایرهٔ به مرکز O سه کمان متساوی AB و CD و EF را دریـك جهت وبه‌اندازهٔ 60° جـدا می‌کنیم. هرگاه I وسط‌وتر BC و J وسط وتر DE و K وسط وتر FA و A′ وسط OA و D′ وسط OD باشد ثابت کنید که:

۱) مثلث ID′A′ متساوی‌الاضلاع است‌وخطهای JD′ و KA′ روی دایرهٔ محیطی این‌مثلث متقاطعند.

۲) مثلثهای IKA′ و IJD′ را مقایسه کنید ونتیجه بگیرید که مثلث IJK متساوی‌الاضلاع است.

برای دانش‌آموزان سال‌دوم علوم تجربی

۱۱۴/۶ـ ترجمه

مقدار m را پیدا کنید برای آنکه دومعادلهٔ زیر یك ریشهٔ حقیقی مشترك داشته باشند.

$$x^2 + mx + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + x + m = 0$$

۱۱۴/۷ـ فرستنده **مهندس‌جوادفیض**

هرگاه‌داشته باشیم

$$x = \log(1 + \frac{1}{8}) \quad \text{و} \quad y = \log(1 + \frac{1}{15})$$

و

$$z = \log(1 - \frac{1}{25})$$

مقادیر $\log 2$ و $\log 3$ و $\log 5$ را بر حسب x و y و z بدست آورید.

۱۱۴/۸ـ ترجمه

کمانهای a و b چگونه باشند تا داشته باشیم:

$$\sin(a - b) = \sin a - \sin b$$

۱۱۴/۹ـ ترجمه

وتر AB از دایرهٔ بـه مرکز O را در نظر می‌گیریم . متوازی‌الاضلاعهای ABOC و ABDO به‌ضلع‌مشترك AB را رسم می‌کنیم. دایرهٔ به‌مرکز C که بر B می‌گذرد با دایرهٔ به‌مرکز D که‌بر A می‌گذرد در E بایکدیگر برخوردمی‌کنند و O را به E وصل می‌کنیم . ثابت کنید که CABD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و دایره‌های به‌مرکزهای C و D و به‌شعاع برابر با OE دروسط کمان AB بایکدیگر برخوردمی‌کنند

برای دانش‌آموزان سال دوم ریاضی، فیزیك

مسائل ترجمه ازفرانسه

۱۱۴/۱۰ـ همهٔ مـاتریسهای حقیقی $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ را تعیین کنید به‌قسمی که داشته‌باشیم: $A \times A = A$

۱۱۴/۱۱ـ درصفحهٔ محورهای مختصات سه‌بردار زیررا درنظرمی گیریم:

$$\vec{u}_1(+3,-2) \qquad \vec{u}_2(2\alpha-\beta,\alpha+2\beta-4)$$

$$\vec{u}_3(\alpha-3\beta+2,-3\alpha+3\beta-2)$$

۱) مقادیر (X,Y) مختصات بردار زیر را حساب کنید:

$$\vec{S}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$$

۲) چه رابطه بین α,β برقرار باشد برای آنکه $\vec{S}$ با بردار $\vec{v}(-3,+4)$ دریك امتداد باشند.

۳) مقادیر α , β را تعیین کنید برای آنکه $\vec{S}=\vec{0}$ باشد.

۱۱۴/۱۲ـ مثلث ABC را درنظر می‌گیریم که‌اندازه های ضلعهای آن عبارت باشد از :

$$a=x(y^2+z^2)\ ,\ b=y(z^2+x^2)$$

$$c=(x+y)(xy-z^2)$$

۱) اگر مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد a , b , c را بر حسب z بدست‌آورید.

۲) اگر مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه باشد a , b , c را برحسب x , y حساب کنید.

۳) اندازهٔ ارتفاع h_c از مثلث را برحسب x , y , z به ساده ترین صورت بدست‌آورید.

۱۱۴/۱۳ـ هرگاه a , b عددهای مثبت باشند دستگاه زیر را حل کنید .

$$\begin{cases}(ax)^{\log a}=(by)^{\log b}\\ b^{\log x}=a^{\log y}\end{cases}$$

۱۱۴/۱۴ـ ثابت کنید که هریك از رابطه های زیر از دیگری بدست می‌آید .

(۱) $\sin(2x+y)=5\sin y$

(۲) $2tg(x+y)=3tgx$

۱۱۴/۱۵ـ در مثلث ABC میانهٔ AM با ضلع BC زاویهٔ 45° می‌سازد.

اگر $AM=a$ و $BC=b$ باشد $AB\cdot AC$ رابرحسب a و b به ساده‌ترین صورت حساب کنید.

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۱۱۴/۱۶ـ درصفحهٔ محورهای مختصات‌عمودبرهم‌منحنی (C) بـه معـادلـهٔ $y=-x^2+4x$ و خط Δ بـه معـادلهٔ $16y+13x=0$ را در نظر می گیریم . منحنی (C) غیر از مبدأ مختصات‌درنقطهٔ A با محور $x'x$ برخورد دارد . درنقطهٔ A خط D را برمنحنی (C) مماس می‌کنیم. دوخط D و Δ با یکدیگر زاویهٔ حادهٔ α می‌سازند . بر خط Δ نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که‌اگر از M خطی بر (C) مماس کنیم زاویهٔ‌حادهٔ این‌خط با خط Δ برابر با $\frac{\alpha}{2}$ باشد .

۱۱۴/۱۷ـ منحنی‌نمایش‌هندسی‌تابع $y=\frac{px+q}{x+r}$ رابا (C) و قرینهٔ (C) رانسبت‌به‌نیمساز ناحیه‌های اول‌ودوم محورها با (C′) نشان‌می‌دهیم. هرگاه ازحذف y بین معادله‌های‌منحنیهای (C) و (C′) معادلهٔ $x^2+x-2=0$ حاصل شود مقادیر p و q و r و تابع نظیر (C′) را مشخص‌کنید. آنگاه منحنیهای (C) و (C′) را دریك شکل رسم کرده زاویهٔ بین آنها را در نقطه‌های تلاقی بدست‌آورید.

۱۱۴/۱۸ـ مقادیر حقیقی A و B و C را پیـدا کنید برای آنکه رابطهٔ زیر یك اتحاد باشد.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 2x\sin(x+45^\circ)}=\frac{A}{\sin x}+\frac{B}{\cos x}+\frac{C}{\sin x+\cos x}$$

۱۱۴/۱۹ـ هرگاه برای زاویه هـای حادهٔ α و β و γ داشته باشیم:

$$\cos 2\alpha=\frac{a^2+(a+b+c)(a-b-c)}{(b+c)^2}$$

$$\cos 2\beta=\frac{b^2+(b+c+a)(b-c-a)}{(c+a)^2}$$

$$\cos\gamma=\frac{c^2+(c+a+b)(c-a-b)}{(a+b)^2}$$

مقدار S از رابطهٔ زیر را به‌ساده‌ترین صورت حساب کنید:

$$S=tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}$$

۱۱۴/۲۰ـ ترجمه از فرانسه

دوکرهٔ ثابت S و S′ به مرکزهای O و O′ وبه‌شعاعهای

R و R′ در خارج یکدیگر واقعند. کرهٔ Σ با شعاع متغیر بر O و O′ می‌گذرد. مساحت سطحی از کرهٔ Σ راکه بین کره های S و S′ واقع است حساب کنید.

برای دانش‌آموزان کلاس ششم ریاضی

۱۱۴/۲۱ـ منحنی نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید:

$$y=\frac{3x-3x^3}{\sqrt{4-(3x-x^3)^2}}$$

۱۱۴/۲۲ـ منحنی نمایش‌هندسی تابع زیر را در فاصلهٔ (π و ۰) رسم کرده سطح محصور بین منحنی و محور x′x را با ۰/۰۱ تقریب حساب کنید:

$$y=\sin x-\frac{2x}{\pi}$$

۱۱۴/۲۳ـ فرستنده: **مهندس جواد فیض**

درمثلثی بین زاویهٔ A و ضلعهای b و c رابطه های زیر داده شده است:

$$(b+c)\sin\frac{A}{2}=h$$

$$(b-c)\cos\frac{A}{2}=k$$

به‌فرض $tg\alpha=\frac{h}{k}$ زاویه‌های B و C و ضلع a را برحسب A و α و k بدست‌آورید.

۱۱۴/۲۴ـ ترجمهٔ **مهندس فتح‌الله زرگری**

ثابت کنید برای آنکه مثلثی متساوی الاضلاع باشد لازم و کافی است بین‌میانه‌ها باشعاع دایرهٔ محیطی و مساحت آن‌رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)}+\frac{1}{(m_c+m_a-m_b)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}=\frac{9R^2}{4S^2}$$

۱۱۴/۲۵ـ ترجمهٔ از فرانسه

کسر $\frac{a}{b}$ را پیدا کنید که مقدار تقریبی نقصانی آن با ۰/۱ تقریب ۴/۳ و b یك‌رقمی باشد.

۱۱۴/۲۶ـ ترجمه از فرانسه

از دوعدد A و B کدام بزرگتر است.

$$A=4+\frac{5}{8}+\frac{6}{8^2}+\frac{3}{8^3}+\frac{7}{8^4}$$

$$B=4+\frac{5}{8}+\frac{5}{8^2}+\frac{7}{8^3}+\frac{6}{8^4}$$

۱۱۴/۲۷ـ ترجمه

دریك‌ذوزنقه قاعدهٔ بزرگتر AB=a ثابت است و قاعدهٔ کوچکتر CD به‌طول ثابت b است. ساقهای AD و BC در S برخورد می‌کنند و زاویهٔ حادهٔ ASB به اندازهٔ ثابت θ است. مکان هندسی رأسهای C و D و همچنین ω مرکز دایرهٔ محیطی مثلث SCD و H مرکز ارتفاعی مثلث SAB را معین کنید.

۱۱۴/۲۸ـ ترجمه

زاویهٔ قائمهٔ xOy داده شده است. مثلث متساوی‌الساقین OAB به‌محیط ثابت ۲p را در نظر می‌گیریم که B بر Ox تغییرمی‌کند و A داخل زاویه‌واقع است. تصویرهای قائم رأس A رابر نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ AOB به‌ترتیب M و M′ می‌نامیم. مکان‌هندسی نقطه‌های M و M′ را مشخص کنید.

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ سال اول دبیرستان

۱۱۴/۲۹ـ ۱۰۰ نفر از کارگران یك کارخانه صاحب فرزند پسر یا دختر می‌باشند. ازاین کارگران ۶۵ نفر دارای فرزند پسرو ۵۰ نفر دارای فرزنددخترمی‌باشند. چندنفر ازاین کارگران فرزند پسردارند اما فرزند دختر ندارند.

الف- ۶۵ ب- ۱۵ ج- ۵۰ د- ۳۵

۱۱۴/۳۰ـ نقیض گزارهٔ «x<a» کدام است.

الف- $x>a$ ب- $x\geq a$ ج- $x=a$ د- $x\neq a$

۱۱۴/۳۱- کوچکترین عددی را که باید در صورت و مخرج کسر $\frac{3}{\sqrt[5]{8}}$ ضرب کنیم تا مخرج آن گویا باشد کدام است

الف- $\sqrt[5]{8}$ ب- $\sqrt[5]{8^4}$

ج- $\sqrt[5]{2}$ د- $\sqrt[5]{4}$

۱۱۴/۳۲- به ازای چه مقدار از m معادلهٔ زیر غیر - ممکن است.

$$m^2(x-1)=4(x+m+1)$$

الف- $m=2$ ب- $m=\pm 2$

ج- $m=-2$ د- $m\neq\pm 2$

۱۱۴/۳۳- در نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ به‌شعاع R مماسی به‌طول $2R\sqrt{2}$ بر دایره رسم می‌کنیم تا نقطهٔ P بدست آید. از P قاطعی متغیر می‌گذرانیم تا در M و N با دایره برخورد کند. مکان هندسی نقطهٔ وسط MN کدام است.

الف- دایرهٔ به‌قطر $3R$ ب- دایرهٔ به‌قطر $R\sqrt{2}$

ج- دایرهٔ به‌قطر $2R$ د- دایرهٔ به‌قطر $2R\sqrt{2}$

۱۱۴/۳۴- در مثلث ABC زاویهٔ A به اندازهٔ 60° و زاویهٔ B دو برابر زاویهٔ C است. بر ضلع AC نقطهٔ D را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و بر سه نقطهٔ B و C و D دایره‌ای می‌گذرانیم که با ضلع AB در E برخورد می‌کند. اندازهٔ زاویهٔ DEA چقدر است؟

الف- 60° ب- 100° ج- 140° د- 40°

در حدود برنامهٔ سال دوم ریاضی، فیزیک

۱۱۴/۳۵- مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم که رأس A از آن بر محور xها و مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع است. ماتریس دوران حول مبدأ که A را به B بدل می‌کند کدام است:

الف- $\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$ ب- $\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$

ج- $\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$ د- $\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$

۱۱۴/۳۶- در مجموعهٔ کسرها عمل * را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

الف- این عمل عضو بی‌اثر ندارد

ب- صفر عضو بی‌اثر این عمل است

ج- یک عضو بی‌اثر این عمل است

د- $\frac{0}{0}$ عضو بی‌اثر عمل است.

۱۱۴/۳۷- در صفحهٔ محورهای مختصات خط به‌معادلهٔ

$$x\sin\alpha+y\cos\alpha=5+\sin\alpha$$

درازای هر مقداری از α بر دایرهٔ ثابتی مماس است. مرکز و شعاع این دایره چقدر است؟

الف- $O(0,0)$ و $R=5$ ب- $\omega(1,0)$ و $R=5$

ج- $\omega(1,0)$ و $R=\sqrt{5}$ د- $O(0,0)$ و $R=\sqrt{5}$

۱۱۴/۳۸- هرگاه $\log 2=a$ و $\log 3=b$ باشد، $\log 360$ کدام است؟

الف- $2(a+b)$ ب- $2(a+b)-1$

ج- $2(a+b)+1$ د- $2(a-b)$

۱۱۴/۳۹- در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه و زاویهٔ C به‌اندازهٔ 15° است. هرگاه مساحت این مثلث ۲ واحد سطح باشد اندازهٔ ضلع AC چقدر است؟

الف- $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ب- $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

ج- $2-\sqrt{3}$ د- $2+\sqrt{3}$

۱۱۴/۴۰- در دایرهٔ به‌شعاع ۵ وتر AB به‌طول $\sqrt{10}$ را رسم می‌کنیم. هرگاه C وسط کمان کوچکتر AB باشد طول وتر AC چقدر است؟

الف- $\sqrt{5+\sqrt{5}}$ ب- $\sqrt{5+\sqrt{10}}$

ج- $\frac{1}{2}\sqrt{5(10+3\sqrt{10})}$ د- $\frac{1}{2}\sqrt{5(10+5\sqrt{18})}$

در حدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۱۴/۴۱- از نقطهٔ (۲ — و ۵) خط Δ با ضریب زاویه‌ای

m را می‌گذرانیم که با منحنی نمایش تابع $y=\frac{x}{2x+1}$ در دونقطهٔ A و B برخورد می‌کند. به فرض $AB=\sqrt{5}$ کدام مقدار زیر برای m صحیح است؟

الف- $m=1$ ب- $m=-1$

ج- $m=2$ د- $m=-2$

۱۱۴/۴۲- نزدیکترین نقطه ازسهمی $y=x^2-2$ به مبدأ مختصات به‌عرض چیست؟

الف- ۵ ب- ۵- ج- $\frac{5}{2}$ د- $-\frac{5}{2}$

۱۱۴/۴۳- درمثلث ABC داریم

$$\sin(A+B)=\cos\frac{A-B}{2}$$

اندازهٔ زاویهٔ C ازاین مثلث چقدر است؟

الف- 60° ب- 30° ج- 120° د- 150°

۱۱۴/۴۴- حاصل کسر زیر کدام است؟

$$\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}$$

الف- $\cot g\frac{5x}{2}$ ب- $tg\frac{5x}{2}$

ج- $\cot g 5x$ د- $tg 5x$

۱۱۴/۴۵- در نیمکرهٔ به شعاع R استوانه‌ای محاط می‌کنیم که‌قاعده‌اش برقاعدهٔ‌نیمکره‌واقع‌است. ارتفاع این‌استوانه چقدر انتخاب شود تا حجم آن ماکسیمم باشد؟

الف- $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ ب- $\frac{R\sqrt{2}}{6}$

ج- $\frac{R\sqrt{6}}{3}$ د- $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۱۴/۴۶- به‌ازای چه‌مقدار از a خط به‌معادلهٔ $y=3x$ مجانب‌شاخهٔ نظیر $-\infty$ ازمنحنی‌به‌معادلهٔ $y=x-a\sqrt{x^2-1}$ می‌باشد؟

الف- $a=1$ ب- $a=-1$

ج- $a=-2$ د- $a=2$

۱۱۴/۴۷- سطح محصوربین منحنی به‌معادلهٔ $y^2=2x$ و محور y ها و خط به معادلهٔ $y=2$ را حول محور y ها دوران می‌دهیم. مقدار حجم حادث چقدر است؟

الف- $\frac{8\pi}{3}$ ب- $\frac{8\pi}{5}$ ج- 4π د- 8π

۱۱۴/۴۸- در مثلث متساوی الساقین ABC که $AB=AC$ نسبت $\frac{r}{a}$ برابر با $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ است.

اندازهٔ زاویهٔ A از این مثلث چقدر است؟

الف- 60° ب- 150° ج- 120° د- 105°

۱۱۴/۴۹- درمثلث ABC زاویهٔ C به اندازهٔ 60° و $a=2b$ است. اندازهٔ زاویهٔ B ازاین مثلث چقدر است؟

الف- 30° ب- 60° ج- 15° د- 75°

۱۱۴/۵۰- هرگاه A عدد صحیح و کسر $\frac{A}{88}$ مولد کسر اعشاری متناوب ساده با دورهٔ گردش $\overline{ab}$ و $\overline{ab}$ مضرب ۵ باشد کوچکترین مقدار A چه می‌تواند باشد؟

الف- ۵ ب- ۴۵ ج- ۴۰ د- ۲۰

۱۱۴/۵۱- هرگاه $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ برابر با کسر اعشاری متناوب سادهٔ با دورهٔ گردش ۱۲ باشد، عدد های طبیعی a و b کدامند؟

الف- $a=b=33$ ب- $a=33$ و $b=11$

ج- $a=22$ و $b=66$ د- $a=33$ و $b=99$

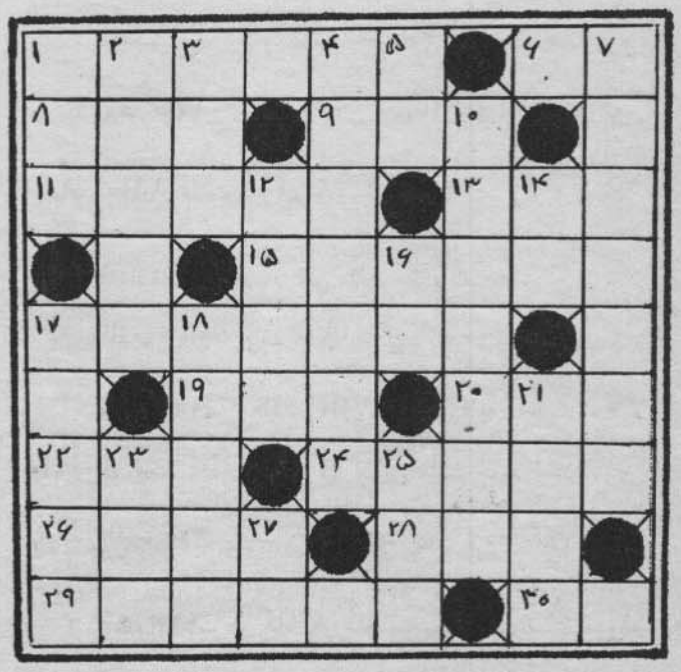
۱۱۴/۵۲- در مثلث متساوی الساقین ABC که $AB=AC$ است رأس B، امتداد قاعدهٔ BC و اندازهٔ‌محیط مثلث ثابت است. مکان رأس A چیست؟

الف- خط مستقیم ب- بیضی

ج- هذلولی د- سهمی

جدول اعداد

طرح از : محمدسعید رحمن (تاریخ وصول به دفتر مجله : ۲۵۳۱/۶/۲۵)



افقی : ۱ـ عددی شش رقمی که اگر آن را درهریك از عددهای از ۱ تا ۶ ضرب کنیم عددی شش رقمی باهمان رقمها و بزرگتر از عدد مفروض بدست آید . ۶ـ ربع آن مجذور کامل است. ۸ـ به صورت $\overline{a0a}$ به‌قسمی که a ریشهٔ چهارم عدد ردیف ۶ افقی است. ۹ـ رقم دهگان آن ۴ است وبااین شرط مقلوبش کوچکترین عدد سه‌رقمی است که رقمهایش تصاعدحسابی تشکیل می‌دهند . ۱۱ـ عدد به صورت :

$$\overline{(a-۲)(a+۳)aa(a-۲)}$$

به قسمی که مجموع ضریبهای بسط $(ax+۳)^{۹۹}$ برابر با $۲^{۲۹۷}$ است. ۱۳ـ تعداد جمله های بسط $(a+b)^{۴۷۸}$. ۱۵ـ حاصل‌ضرب ۷ درعدد ردیف ۱ افقی . ۱۷ـ به صورت : $\overline{abcdcba}$ به قسمی که عدد $\overline{cba}$ از مجموع رقمهایش ۳۳۳ واحد بیشتراست و داریم :

$$\overline{abcd}=d(۲\overline{abc}+۱)$$

۱۹ـ برابراست با $a^{۹}+۵a^{۴}$ که a عدد طبیعی است . ۲۰ـ توان سوم رقم یکان خود می‌باشد ومجموع رقمهایش نیز توان سوم است. ۲۲ـ مقلوبش توان سوم نصف مجموع رقمهای خود می‌باشد . ۲۴ـ عدد به صورت $\overline{abcde}$ به قسمی که $\overline{cde}$ توان دوم $\overline{ab}$ واین عدد توان چهارم‌است. ۲۶ جذر تقریبی‌نقصانی این‌عدد تا ۰/۰۱ تقریب برابر ۷۵/۴۵ است واگر۲ واحد از آن کم کنیم عدد ۷۵/۴۴ جذرتقریبی اضافی‌آن با همان تقریب خواهد بود. ۲۸ـ کوچکترین عدد سه رقمی بارقمهای‌متفاوت. ۲۹ـ عددی‌است زوج و مقلوبش کوچکترین عددی است که رقمهایش به تصاعد می‌باشند . ۳۰ـ پنج برابر ربع عدد ردیف ۲۷ قائم .

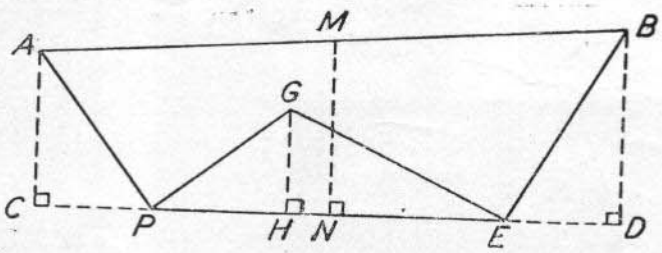
قائم : ۱ـ کوچکترین عدد سه رقمی که مجموع رقمهایش باحاصل ضرب آنها برابراست . ۲ـ مجذورعدد ردیف ۸ افقی . ۳ـ کوچکترین عدد سه رقمی به صورت $\overline{aab}$ که خودش و مجموع رقمهایش مجذور کامل است . ۴ـ به صورت $a\overline{bcdefg}$ است که $\overline{cba}$ سه برابر عدد ردیف ۲۰ افقی و $\overline{gfe}$ همان عدد ردیف ۱ قائم و مجموع رقمهایش ۳۰ است . ۵ـ ده واحد کمتر از متمم حسابی عدد ردیف ۶ افقی. ۷ـ به صورت $\overline{abcccba}$ است که اگر ۴ واحد به b و ۳ واحد به a اضافه شود آنگاه مجموع رقمهایش ماکسیمم باشد . ۱۰ـ یکدهم آن از عدد ردیف ۱ افقی ۶۸۵۵ واحد بیشتر است . ۱۲ـ به صورت $\overline{abab}$ که $\overline{ab}$ ازعدد ردیف ۳۰ افقی ۴ واحد بیشتراست. ۱۴ـ عدد دو رقمی که متمم حسابی سه برابر رقم دهگان خود می‌باشد. ۱۶ـ هریك از رقمها وهمچنین مقلوبش مجذورکامل است. ۱۷ به صورت $\overline{abcba}$ که $a=b+۲$ ومجموع رقمهایش از وضع ماکسیمم ۱۲ واحد کسر دارد . ۱۸ـ به صورت $\overline{abcdb}$ به‌قسمی که d مجذور a و d،c،b،a به تصاعد می‌باشند. ۲۱ـ به‌صورت $\overline{abab}$ که $\overline{ab}$ مجذور b است. ۲۳ـ ده واحد کمتر از مجذور عدد ردیف ۶ افقی. ۲۵ـ مقلوبش عددی است سه رقمی که توان سوم رقم‌یکان خودمی‌باشد ومجموع رقمهایش مجذور کامل است. ۲۷ـ تکرار یك رقم .

(حل جدول شمارهٔ قبل درصفحهٔ ۱۸۷)

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problom172- A man seeks to conceal treasure using as landmarks an elm tree E, a pine tree P which is a little further west, and a gallows G in the vicinity of and north of the two trees. He locates two points A and B as follows: To locate A, proceed from G to P, turn right 90°, and continue to A so that GP=PA. To locate B, proceed from G to E, turn left 90° and continue to B so that GE=EB. He then buries his treasure at M, the midpoint of AB. When he returns some months later to recover his hoard, he is shocked to discover that the gallows has been removed so that no trace remains. Show that it is still possible for him to locate his treasure.

Solutions— Draw AC, GH, MN, BD, each perpendicular to PE, as in Fig.



Since $\Delta APC = \Delta GPH$, AC=PH ($\angle APC$ corresponds to $\angle PGH$). Similarly, BD=HE. Therefore AC+BD=PH+HE=PE. Now MN is a line joining the midpoints of the legs of trapezoid ACDB, because the three parallel lines AC, MN, and BD cut off equal segments on AB, and therefore cut off equal segments on CD. Therefore

$$MN=\frac{1}{2}(AC+BD)=\frac{1}{2}PE.$$

And since CP=GH=ED, N is the midpoint of PE. Thus M can be located by constructing the perpendicular bisector of PE (on the side of the missing gallows) and laying off $NM=\frac{1}{2}PE$. This construction is independent of the position of G.

Note:

If G were (a) south of the line PE, (b) on segment PE, (c) on PE prolonged, the problem would still be valid.

A second solution, requiring a knowledge of the properties and graphing of complex numbers will be found in the book: One, Two, Three... Infnity, by George Gamow.

Problem 173- Find the value of:

(a) b^{Loga}

(b) $b^{-\text{Loga}}$

The base of the logarithm in each case is b.

Solution- (a): If $x=b^{\text{Loga}}$, take the logarithm of both sides to the base b. Thus

$$\log_b x=(\log_b a)(\log_b a)=\log_b a \Longrightarrow x=a$$

A direct application of the definition of a logarithm to a given base yields the same answer at once.

(b): Since $b^{-\text{Loga}}$ is the reciprocal of b^{Loga}, the answer is $\frac{1}{a}$.

انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها
تألیف:علی اصغرهومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هشترودی

روش سادهٔ حل مسائل شیمی
ترجمهٔ: عطاءالله بزرگ‌نیا

تستهای چند جوابی شیمی
ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

راهنمای ریاضیات متوسطه
تألیف: عبدالحسین مصحفی
بها: ۳۰ ریال

تستهای هوش
ترجمهٔ: باقر مظفرزاده
بها : ۱۰۰ ریال

معماهای ریاضی
ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار
بها : ۷۵ریال

مسائلی ازحساب استدلالی
تألیف: محمودکاشانی

جلد اول	جلددوم	جلدسوم
۱۲ریال	۱۵ریال	۱۵ریال

مبادی
منطق وریاضی جدید

تألیف: غلامرضا عسجدی
بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.