یکان

مجله ریاضیات

دورهٔ دوازدهم ، شمارهٔ : ۴ شمارهٔ مسلسل : ۱۱۳ اسفند ۱۳۵۴

در این شماره:

بها : ۴۰ ریال

توجه

سازمان یا مؤسسهٔ مکاتبه‌ای وابسته به مجلهٔ یکان وجود ندارد. هرنوع آگهی یا اعلامیه‌ای که زیر عنوان چنین‌سازمانی پخش شود با مجلهٔ یکان ارتباط ندارد و در این باره هیچ گونه مسؤولیتی متوجه مسؤولان مجلهٔ یکان نمی‌باشد.

درخواست

از دوستداران‌مجلهٔ‌یکان که سؤالهای امتحانهای‌اختصاصی بعضی از دانشکده‌ها و یا مؤسسه‌ای آموزش عالی را در اختیار دارند، درخواست می‌شودکه آنها را برای چاپ در مجله‌های یکان ارسال دارند تا به‌نام خود ایشان در مجله‌های ماهانهٔ‌یکان چاپ شود.

ساعات کار دفتر مجلهٔ یکان

همه روزه غیر از روزهـای تعطیل صبحها از ساعت ۹ تا ساعت ۱۲ عصرها از ساعت ۱۷ تا ساعت ۱۹

از شماره‌های گذشتهٔ مجلهٔ یکان آنچه برای‌فروش موجود است:

۱) بیست ریالی:

۳۳-۳۶

۲) بیست‌وپنج ریالی:

۴۲-۴۴-۴۵-۴۶-۴۷-۴۸-۴۹-۵۱-۵۲-۵۴-۵۵-۵۶-
-۵۷-۶۱-۶۲-۶۵-۶۶-۶۷-۶۸-۶۹-۷۴-۷۵-۷۶-۷۷
-۷۹-۸۰-۸۱-۸۲-۸۳-۸۴-۸۵-۸۸-۸۹-۹۰-۹۱-۹۲
-۹۳۰

۳) سی‌ریالی:

۹۴-۹۵-۹۶-۹۷-۹۸-۹۹-۱۰۰

۴) چهل ریالی: از ۱۰۳ تاکنون

مجله‌های یکان‌سال ویژهٔ سالهای‌گذشته کلا مصرف گردیده است و فعلا ازآنها برای فروش‌موجود نیست.

خواهشمند است از در خواست آنها خـودداری شود.

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تـأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ‌دوازدهم ـ شمارهٔ‌چهارم ـ شمارهٔ مسلسل۱۱۳

اسفند ۱۳۵۴

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملک‌یزدی

نشانی‌اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی۲۴۶۳

تلفن اداره:۳۹۳۱۸۱

وجه اشتراك برای دورهٔ دوازدهم : ۳۲۰ ریال

حساب بانکی:حساب جاری۳۰۹۵شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume XII, number 4. March. 1976

subscription : 6$

TEHRAN _ P.O.B. 2463

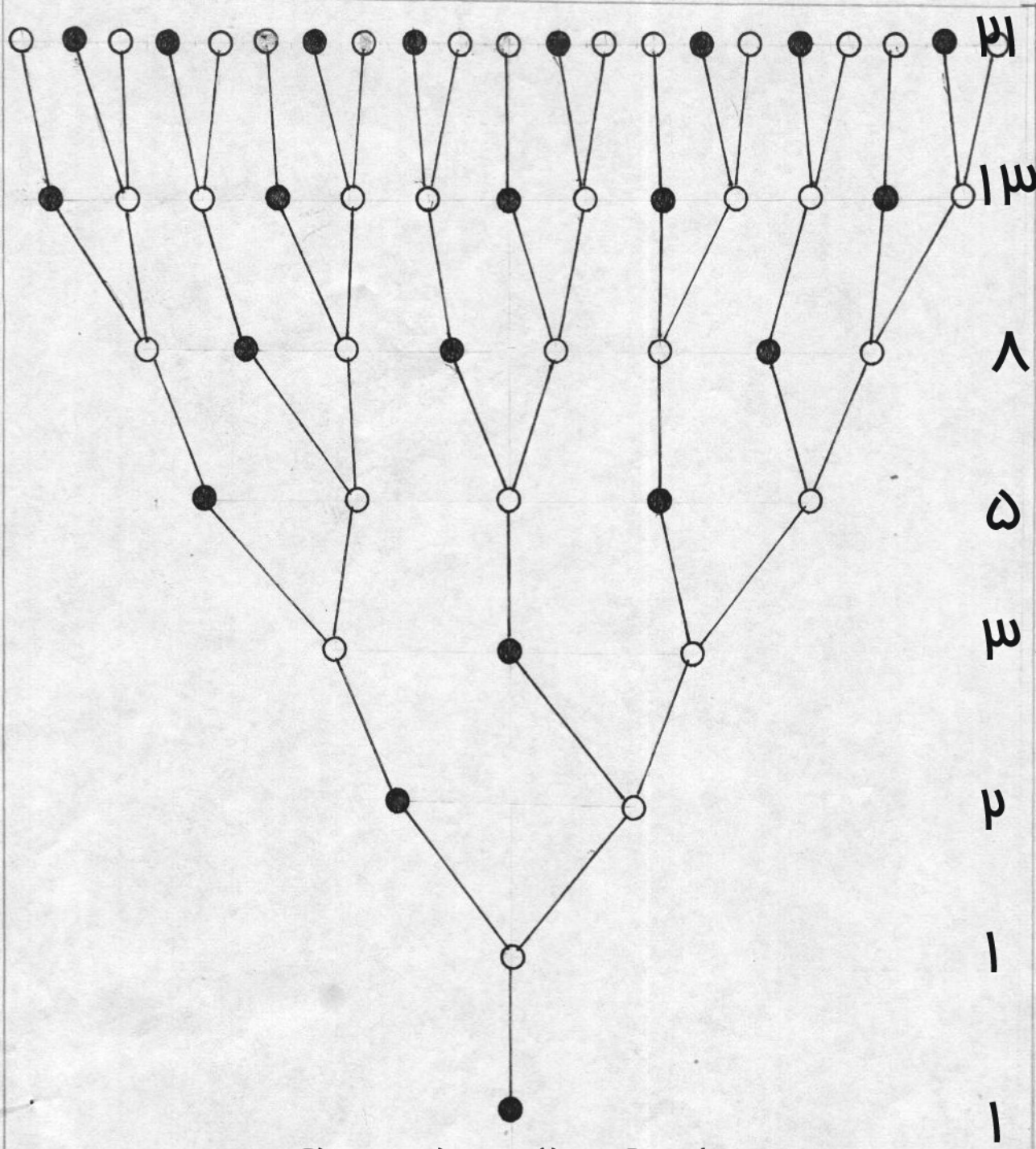
چاپ تصویر ـتلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی‌کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـانتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است‌که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفـی می‌شوند .کتابهایی‌که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت‌آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.



نمودار درختی دنباله عددهای فیبو ناتچی

در بامدادروز یکم یک گره سیاه وجوددارد.ازآن پس،در بامدادهر روز،از هر گره سیاه موجود یک گره سفید واز هر گره سفیدموجود دو گره یکی سفید ودیگری سیاه پدید می آید.شماره های گره های روزانه عددهای فیبوناتچی اندکه از۲به بعد،هر کدام برابر است با مجموع دو عددپیش از خود.

داوید هیلبرت (David Hilbert)

شاید نزد بسیاری از اشخاص، هندسهٔ اقلیدس محکمترین اثری باشد که با روش دقیق منطقی تنظیم گردیده است. مدتها بود که ریاضیدانان نیز براین عقیده بودند. آنان حتی به‌خود اجازه نمی‌دادند که مطالبی از هندسهٔ اقلیدس را جابجا کنند، زیرا گمان داشتند که با این کار نظم منطقی مطالب به‌هم می‌خورد.

برای نخستین بار، هیلبرت ریاضیدان آلمانی، با موشکافی و دقتی که خاصّ او بود، درمبانی هندسهٔ اقلیدس بعضی از نکات ضعف را دریافت و براین هندسه ایرادهایی را وارد ساخت.

هیلبرت سردستهٔ ریاضیدانانی است که به اصولیون مشهورند. اینان عقیده‌مندند که ریاضیات را باید منحصراً با تکیه براصول موضوع بنانهاد. درصورتی که اقلیدس مطالبی را به‌عنوان بدیهیات پذیرفته و آنها را بدون کمترین شك یا تردید بکار برده است. هیلبرت هندسهٔ اقلیدس را تجدید نظر کرد و باکنار گذاردن نکته‌های ضعف موجود درآن، از نو آن را متکی بر ۲۷ اصل موضوع بنانهاد. آنچه که امروز به‌نام هندسهٔ هیلبرت معروف است.

هیلبرت نه‌تنها در هندسه، بلکه در همهٔ شاخه‌های ریاضی دارای آثار ممتاز بوده است آنچنان که در همهٔ رشته‌های ریاضی استادی بی‌همتا بشمار می‌رفته است، تا آنجا که وی را بزرگترین ریاضیدان آغاز قرن بیستم می‌دانند.

داوید هیلبرت در سال ۱۸۶۲ درخانواده‌ای متوسط در

کونیگسبرگ به دنیا آمد. تحصیلات ابتدائی، متوسطه و قسمت اعظم تحصیلات دانشگاهی خود را در همین شهر به انجام رسانید وپس از اخذ درجهٔ دکترا در ریاضیات به‌سمت استاد رسمی دانشگاه آنجا مشغول به کارشد. سپس به استادی دانشگاه گوتینگن برگزیده شد درحالی که شهرت جهانی داشت و طالبان علم از سراسر جهان برای درك محضر درس وی بدانجا می‌رفتند. هیلبرت درسال ۱۹۴۳ در همین شهر، گوتینگن، زندگی را بدرود گفت.

فکر کنید

مسافری به هتل وارد شده واتاق گرفته است. وی متوجه می‌شود که کیف پولش گم گردیده است. اما زنجیری ازطلا که ۲۳ حلقه دارد به‌گردن دارد. با صاحب هتل قرار می‌گذارد که روزانه یك حلقه از زنجیر را بابت کرایهٔ اتاق به‌او بدهد. این مسافر زنجیر را حداقل به‌چند قطعه می‌تواند تقسیم کند وچه حلقه‌هایی را باید ببرد، تا بتواند عمل روزانهٔ تحویل یك حلقه زنجیر را انجام بدهد؟

پاسخ مسئلهٔ زیرعنوان «فکر کنید» مندرج در یکان شمارهٔ ۱۱۱ درصفحهٔ ۱۶۷

مقدمه‌ای بر توپولوژی

ترجمه و تنظیم از: **محمد حسین احمدی**
دستیار گروه ریاضی دانشگاه آزاد ایران

لغت توپولوژی از کلمهٔ یونانی T'oπos که به‌معنی مکان است گرفته شده‌است و اصولا در ابتدا توپولوژی را مکان‌شناسی و یا آنالیزسیتوس (Analysis Situs) می‌نامیدند.

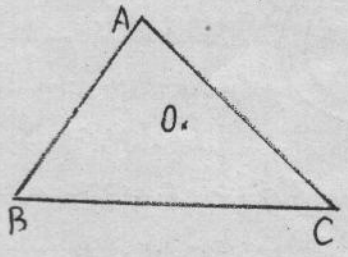
در ابتدای پیدایش توپولوژی این علم شاخه‌ای از هندسه بود و بیشتر از خواصی از اشکال بحث می‌شد که درهندسه صحبتی از آنها نمی‌رفت. ولی درحال حاضر علم توپولوژی چنان گسترش پیدا کرده است که در بسیاری از رشته‌های ریاضیات به‌عنوان یك حربهٔ برنده برای توضیح و حل مسائل بکار می‌رود.

درحال حاضر همهٔ دانشمندان ریاضی متفق‌العقیده‌اند که علم توپولوژی علمی‌است که از اتصال توابع صحبت می‌کند. (لیل موجه بودن این تعریف برای هر کسی که کمی توپولوژی بداند واضح است).

چون مفهوم اتصال یکی از مهمترین مفاهیم اساسی آنالیز است بنابراین توپولوژی تأثیرمهمی بر آنالیز دارد. درحقیقت آنالیز ریاضی بدون وجود توپولوژی هیچ است.

حال برای اینکه دقیقاً بدانیم که این علم چگونه بوجود آمده و تحولات تدریجی آن چه بوده است یکی از مثالهایی را که درهمان اوایل پیدایش توپولوژی مطرح بوده است درنظر می‌گیریم.

مثال: مثلث ABC را به‌صورتی که درشکل دیده می‌شود رسم و نقطهٔ O را در داخل آن در نظرمی‌گیریم.



برای این مثلث می‌توان گزاره‌های بیشمار نوشت مثلا:

۱ـ طول بزرگترین ضلع مثلث ABC، ۳۰ سانتی‌متر است.

۲ـ مثلث با گچ سفید رسم‌شده‌است.

۳ـ زاویهٔ A تقریباً ۹۰ درجه است.

۴ـ مثلث به لبهٔ چپ کاغذ نزدیکتر است تا به لبهٔ راست آن.

۵ـ زاویه‌ای که درحدود ۹۰ درجه‌است دربالای دو زاویهٔ دیگرواقع است.

۶ـ نقطهٔ O داخل مثلث ABC است.

۶ گزارهٔ فوق ۶ خاصیت را مشخص می‌کنند ولی آیا همهٔ این خواص خاصیت هندسی‌هستند. می‌دانیم که درهندسه از خواص معینی که به‌آنها خواص هندسی گفته می‌شود بحث می‌شود. پس باید دیدچه خاصیتی خاصیت هندسی است.

ما خاصیتی‌را خاصیت هندسی گوئیم که اگر شکلی این خاصیت را داشت همهٔ اشکال مساوی با آن نیز این خاصیت راداشته باشند و درهندسه دو شکل‌را با هم‌مساوی نامیم در صورتی که‌این دو شکل‌را بتوان برهم منطبق کرد.

حال با توجه به‌تعریف تساوی و تعریف خاصیت هندسی به بررسی گزارهٔ فوق می‌پردازیم؛ ازگزاره‌های فوق ۱و۳و۶ خواص هندسی‌هستند ولی‌دیگران نخواهند بود.

از اینجا معلوم می‌شود که هرخاصیت یك شکل هندسی‌یك خاصیت هندسی برای آن شکل نیست.

پس اگر برای شکلی خاصیتی درنظر گرفتیم و خواستیم ثابت کنیم این یك خاصیت هندسی است باید تحقیق کنیم و ببینیم که آیا همهٔ اشکال مساوی بااین‌شکل این خاصیت‌را دارند یاخیر.

باتوجه به مثال فوق‌معلوم می‌شود که اولا بسیاری ازخواص یك شکل‌درهندسه مورد بررسی‌قرارنمی‌گیرند (البته این‌خواص خواص مهمی‌نیستند). ثانیا میان خواص‌هندسی‌یك شکل‌تفاوتهائی هست. مثلا خاصیتی که باگزارهٔ ۱ بیان می‌شود باخاصیتی که‌با گزارهٔ ۶بیان‌می‌شود متفاوت‌است. گزارهٔ ۶ یك‌خاصیت‌ذاتی‌برای، مثلث مذکور در فوق‌است و اگرتغییری درصفحهٔ مثلث‌داده شود این خاصیت تغییر نخواهدکرد. حال‌آنکه خاصیت بیان شده با گزارهٔ ۱ یك خاصیت‌ذاتی‌مثلث نیست و با اندك تغییری‌درصفحهٔ

شکل تغییر خواهد کرد. چون پیدا کردن خواص ذاتی یك شکل مورد نظر است دانشمندان رشته‌ای ازهندسه را ابداع کردند ونام توپولوژی بر آن نهادند تا در ایـن رشته خواص ذاتی‌اشکال را بررسی کنند. در این‌علم قرار گذاشتند که اشکال‌درصفحهٔ‌لاستیکی کشیده شده باشند و اجازه داشته باشیم که این صفحه را بکشیم، خم کنیم. بپیچانیم. حتی ببریم به‌شرط آنکه بعد محل بریده شده را دومرتبه طوری‌به‌هم بچسبانیم که مثل‌اول شود.

خاصیتی راکه تحت تغییرات بالا ثابت مانـد یك خاصیت توپولوژیکی نامیدند.

در ابتدا به‌نظر می‌رسد که‌ممکن‌است‌هرخاصیتی‌توپولوژیکی نباشد. اما به‌سادگـی ملاحظه می‌شود که خاصیت ۶ یك خاصیت توپولوژی است . هرخاصیت توپولوژیکی یـك خاصیت هندسی هست اما عکس‌این مطلب‌درست نیست.مثلا خاصیت ۱و۳ هر کدام یك خاصیت هندسی هستند امـا هیچکدام خاصیت توپولوژیکی نیستند .

از اینجا ملاحظه می‌شود کـه توپولوژی در ابتدای امـر شاخه‌ای‌از هندسه‌بوده‌وخواصی‌ازاشکال‌رابررسی می‌کرده‌است که دریك شکل‌تحت‌تغییرات مجاز درتوپولوژی ثابت می‌مانند،چون در توپولوژی فرض این بود که اشکال‌برروی صفحات‌لاستیکی رسم می‌شوند گاهـی توپولـوژی را علم اجسام الاستیسیته نیز می‌نامیدند .

درهندسه اگرشکلی تحت تغییرات مجاز در هندسه (یعنی دوران ـ انتقال ـ تقارن نسبت به‌یك خط) قرارگیردشکل‌حاصل با اولی مساوی است. دانشمندان قرارگذاشتند که در توپولوژی نیزمانند هندسه اگر شکلی تحت تغییرات مجازتوپولوژی (یعنی خم‌کردن، کشیدن‌وغیره) قرارگرفت حاصل‌را با شکل‌اول‌مساوی بدانند .

اصولا به‌جای آنکه در توپولوژی این دو شکل‌را مساوی گویندمعمولا آنها را معادل توپولوژیکی‌یکدیگر گویند و این‌دو شکل همیومورفیك می‌باشند.

بعدها که توپولوژی صورت جدی‌تری یـافت دانشمندان تغییرات‌مجاز در توپولوژی را به‌صورت دقیق ریاضی‌تعریف کرده و دقیقاً دوشکل مساوی یا به‌زبان مرسوم‌تردوشکل همیومورفیك یا دوشکل راکه معادل‌توپولوژیکی یکدیگرندبه‌صورت دقیق‌زیر تعریف نمودند.

دوشکل‌را در توپولوژی‌باهم‌مساوی یا معادل توپولوژیکی یا همیومورفیك نامیم درصورتی‌که بتوان هریك از این دوشکل را با تبدیل متصل و یك‌به‌یکی به دیگـری تبدیل کرد. ملاحظه می‌شود که تغییرات مجازی که از ابتدا در توپولوژی وضع شده بودند همه در تعریف بالا گنجانیده شده است.

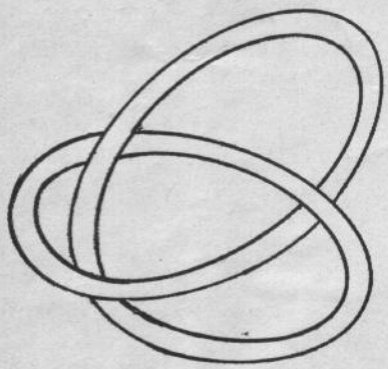
در تعریف تعادل توپولوژیکی‌به مفاهیم تبدیل‌متصل‌وتبدیل یك‌به‌یك نیاز داریم ولی‌در وضعی‌هستیم که این مفاهیم کاملا برای ما روشن است و تعریف دقیق‌آنها را می‌دانیم. باتوجه به‌تعریف همیومورفیك بودن دوشکل معلوم می‌شود که‌هرگاه یك قطعه سیم لاستیکی‌را بکشیم‌یاخم‌کنیم یاگره بزنیم‌یابه‌هرشکلی که بخواهیم درآوریم به‌شرط آنکه پاره نشود تمام اشکال حاصل شده باهم در توپولوژی مساوی(همیومورفیك) می‌باشند.

همچنین‌یك کرهٔ توخالی ـ یك‌چهار وجهی ـ یك‌بیضوی‌ـ یك‌مکعب ـ همه دوبه‌دو باهم همیومورفیك‌اندولی هیچکدام‌ازاین اشکال با حلقه همیومورفیك نیستند.

حلقه سطحی‌است مانندلاستیك ماشین یا انگشتر و هرگز نمی‌توان مثلایك‌کره را به‌یك حلقه با یك تبدیل متصل‌ویك‌به‌یك تبدیل کرد .

بنابراین در توپولوژی فرقی میان‌کره ـ چهار وجهی ـ بیضوی ـ مکعب نیست اما این اشکال با حلقه فرقدارند.

از اینجا نتیجه می‌شود که خـواص توپولوژیکی یك شکل خواص ذاتـی‌آن می‌باشند که تحت هرتغییری ثـابت می‌مانند.



بنابراین برای مطالعهٔ این خواص بـرای یك شکل مشخص بایـد آن شکل را از فضائـی که شکل در آن قرار دارد جدا نمود که محدودیت فضا باعث جلوگیری‌از تحقیق‌درخواص آن‌شکل نشود. مثلا ثابت شده است که‌گرهٔ به شکل بالا با یك دایره در فضای اقلیدسی‌چهار بعدی همیومورفیك است امادرفضای سه‌بعدی چنین نیست. یعنی‌این گره را درفضای اقلیدسی سه‌بعدی‌نمی‌توان به‌یك دایره با تبدیل متصل و یك‌به‌یکی، تبدیل کرد و حال‌اینکه این عمل در فضای چهاربعدی عملی‌است. این مطلب می‌رساند که

خواص یك شكل تحت تأثیرفضائی است كه آن‌شكل درآن واقع است .

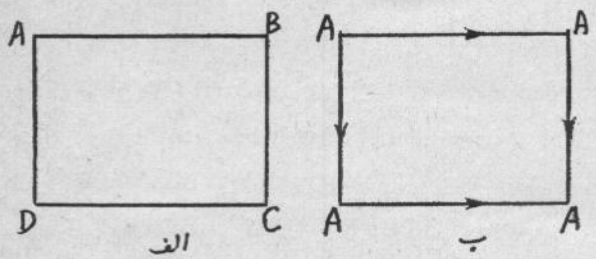
برای بررسی خواص ذاتی‌یك شكل نباید به‌فضائی كه آن شكل درآن است توجه‌كرد .

اكنون‌قدم‌به‌قدم‌آنچه را از ابتدا در توپولوژی موردبحث قرار گرفته است‌بررسی‌می‌كنیم. مطالبی كه‌در ابتدا در توپولوژی بحث می‌شد مشابه مطالبی‌بودكه در هندسه وجود داشت و بیشتر دانشمندان درپی‌یافتن خواص توپولوژیكی‌اجسام و اشكال‌هندسه بودند. یعنی خلاصه در هرمورد كه مطلبی در توپولوژی مطـرح بود این‌مطلب زائیدهٔ یك تصور هندسی‌بوده و پس از نتیجه‌گیری دانشمندان سعی‌داشتندنتیجهٔ بدست‌آمده را به‌صورت هندسی‌توجیه كنند. چون قسمت اعظم كارهای ابتدائی‌در توپولوژی مربـوط به یافتن خواص توپولوژیكی سطوح هندسی است، پس‌لازم‌است برای تفسیراین تحقیقات وترمیم‌آن‌ها توضیح‌دقیقتر سطوحی‌راكه در توپولوژی موردبحث قرار می‌گیرد مطالعه‌كنیم.

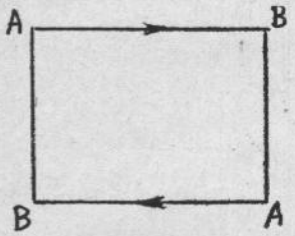
سطوحی‌كه در هندسه ازآن‌ها بحث می‌شود و ما بـا آنها آشنائی‌بیشتری‌داریم‌سطوحی‌هستندمانند كره‌استوانهٔ دوار، مخروط دوار، بیضوی، هیپر بولوئیدیك‌پارچه و دوپارچه، چون‌درتوپولوژی همهٔ كره‌ها باهم مساویند (یعنی‌همیومورفیك‌اند) به‌جای آنكه از یك كره صحبت‌كنیم‌تنها ازكره صحبت می‌كنیم. درحقیقت‌مجموعهٔ تمام‌سطوحی‌كه‌بایك كرهٔ دلخواه‌همیومورفیك‌اند درنظرمی‌گیریم و نام‌آن راكره می‌نامیم، و هرموقع بخواهیم در استدلال وارد شویم‌یا مطلبی‌را توضیح دهیم یك‌عضو از این‌مجموعه را انتخاب می‌كنیم و بكار می‌گماریم. به‌همین‌طریق می‌توان سطوح دیگر را در توپولوژی تعریف‌كرد.

سطوح دیگری‌كه در توپولوژی ازآنها بحث می‌شود ولی ماباآنهاآشنائی كمتری‌داریم‌عبارتنداز‌حلقهٔ‌ساده‌یاحلقهٔ‌یك‌حفره‌ای، حلقهٔ مضاعف یا دو حفره‌ای و یا بطوركلی‌حلقهٔ n حفره‌ای.

حلقهٔ ساده سطحی‌است در فضای اقلیدسی‌سه‌بعدی‌كه مانند حلقهٔ انگشتر است. یا مانند لاستیك اتومبیل‌كه یـك سوراخ در وسط دارد. حلقهٔ مضاعف دوسوراخ و حلقهٔ n حفره‌ای n سوراخ در وسط دارد. به‌كمك‌یك مستطیل می‌توان یك حلقهٔ یك‌حفره‌ای ساخت. برای این‌كار مستطیل ABCD را درنظر می‌گیریم.

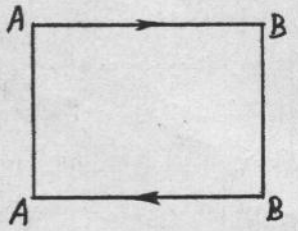


ضلع AB را برDC منطبق می‌كنیم‌تا دو رأس D وA وهمچنین B وC یكی‌شوند سپس‌دوضلع AD وBC رانیز برهم‌منطبق‌می‌كنیم، شكل‌حاصل‌یك‌حلقهٔ یك‌حفره‌ای‌است. حلقه‌را می‌توان‌باشكل(ب) نشان‌داد. زیراشكل (ب)و حلقه همیومورفیك‌اند. یكی از سطوح ناآشنای‌دیگر نوار موبیوس است. اگردر مستطیل ABCD ضلع AB رابپیچانیم و سپس‌برضلع DC منطبق كنیم‌سطح‌بدست‌آمده را یك نوار موبیوس می‌نامیم،



همانطور كـه حلقهٔ ساده را بایـك مستطیل به‌وضع (ب) نشان‌دادیم می‌توان نوارموبیوس‌را نیز با مستطیل روبـرو نشان داد.

واضح است‌كه اگر ضلع AB را بدون پیچش بـرضلع CD منطبق می‌كردیم استوانـهٔ دوار حاصـل می‌شد. می‌توان به‌سیاق فوق استوانهٔ دوار را به‌صورت روبـرو نشان داد .

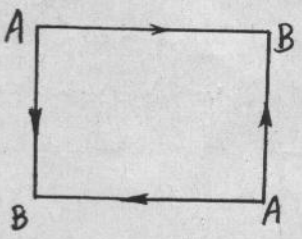


ازنظر توپولوژی‌نوار موبیوس و استوانهٔ دوار باهم‌مساوی نیستند (یعنی‌همیومورفیك نیستند). اگراستوانه را درطول AB از وسط AC ببریم به‌دو استوانه تبدیل‌می‌شود و اگرهمین‌عمل رادرموردنوارموبیوس‌انجام‌دهیم دوقسمت‌بریده‌شده‌ازیكدیگرجدا نمی‌شوندبلكه نوار به‌صورت سطحی‌در می‌آیدكه درآن دونیم‌پیچ دیده می‌شود. ثابت می‌شود كه شكل‌حاصل با استوانهٔ دوارمساوی است . سطح دیگری‌كه اكنون معرفی می‌كنیم به‌نام بطری‌كلین معروف است.

این سطح را چنین می‌سازیم. درمستطیل ABCD ضلع

AB را بطور مستقیم برضلع CD و ضلع AD را بعد ازیك پیچش برضلع BC منطبق می کنیم سطح حاصل‌شده رابطری کلین گویند. ساختن بطری کلین درفضای فیزیکی ممکن نیست واگر در این فضاها امکان ساختن این سطح باشدثابت شده است که‌این سطح خودش را قطع می کند و حال آنکه قطع کردن خودش یك خاصیت ذاتی این سطح نیست. بلکه اگراین سطح را در فضای چهاربعدی‌بشود ساخت ملاحظه می‌شودکه این‌سطح خودش راقطع نمی کند. سطح دیگری که ازبطری کلین ناآشناتراست به‌نام‌صفحهٔ تصویرحقیقی موسوم است:

این‌سطح را به‌این‌صورت‌می‌سازیم که درمستطیل ABCD ضلع AB را در جهت مخالف بر CD وضلع AD را درجهت‌مخالف برBC منطبق می کنیم.



این سطح را می‌توان به‌صورت روبرو نشان داد.

اکنون‌که این‌سطوح را شناختیم می‌پردازیم به چگونگی گسترش علم توپولوژی. ابتدادانشمندان خواصی در این سطوح درنظر گرفته‌و سپس این خواص رادر سطوح کلی تعمیم می‌دادند مطالعهٔ این سطوح منجر به پیدایش فضاهای توپولوژیکی شد.

برای‌آنکه دقیقاً نحوهٔ گسترش این علم را مشاهده کنیم به‌بررسی‌پاره‌ای ازکوششها جهت تعمیم خواص هندسی درسطوح توپولوژیکی می‌پردازیم.

این بررسی نشان می‌دهدکه نقش هندسه درگسترش علم توپولوژی بیش ازآن اندازه است‌که تصور می‌رود.

با بررسی‌سطوح درفضای اقلیدسی‌سه‌بعدی ملاحظه می کنیم که سطوح اصولادوطرفه یا یکطرفه می‌باشند.مثلاکره و استوانه و حلقه از جملهٔ سطوح دوطرفه می‌باشند. یك‌طرف داخل این سطوح و یك‌طرف خارج‌آن است. معنی فیزیکی این مطلب که سطحی دوطرفه است این است‌که اگر بخواهیم از یك‌طرف این سطح به‌طرف دیگربرویم یا بایدمرز این‌سطح را دور بزنیم یا اینکه یك‌نقطه ازسطح راسوراخ کنیم و ازآن عبورنمائیم.

می‌توان یك سطح دوطرفه را دقیقاً تعریف ریاضی کرد. در توپولوژی سطحی را دوطرفه نامیم‌که فضای محیط برخود را به دوقسمت چنان تقسیم کندکه نتوان دونقطه در این دوقسمت را با یك منحنی‌متصل‌که خود سطح را قطع‌نکند و از مرز این‌سطح نیزعبور ننماید به‌هم‌وصل‌نمود. مثلاکره و استوانه وحلقه ازجمله سطوح دوطرفه هستند، اما نوار موبیوس، بطری کلین و صفحهٔ تصویرحقیقی‌ازجمله‌سطوح یکطرفه می‌باشند.در این‌سطوح محلی به‌نام داخل سطح و محلی‌به‌نام خارج سطح وجود ندارد.

اگر کمی دقت‌کرده باشید هردونقطه از فضائی‌راکه سطح یکطرفه درآن واقع است می‌توان با یك منحنی‌متصل به‌هم وصل نمود بدون‌آنکه از سطح یا از مرزآن عبور نمائیم.

باز اگر بررسی‌را ادامه دهیم‌ملاحظه می کنیم که اگردریك سطح دوطرفه به‌ازای هر نقطه روی سطح که این نقطه مرزسطح نباشد دایره‌ای به‌مرکز این نقطه روی سطح درنظر بگیریم و برای‌همهٔ این‌چنین‌دایره‌هاجهتی‌انتخاب کنیم (یادرجهت‌عقربه‌های ساعت یا درخلاف‌آن) سطوح دوطرفه دارای این خاصیت هستند که برای یك‌عده نقاطی‌که به‌قدرکافی به‌هم نزدیك‌اند این جهت برای دوایرمربوط یکی‌است. اما درمورد سطوح یك‌طرفه چنین نیست. این مطلب را می‌توان باآزمایش درمورد نوار موبیوس و استوانهٔ دوارتحقیق کرد. این‌بررسی‌سادهٔ هندسی‌یکی‌از مهمترین مفاهیم توپولوژی را برای ما بوجود می‌آورد وآن‌مفهوم‌جهت‌پذیری‌است. با استفاده‌از این‌بررسی‌هندسی‌در توپولوژی‌به‌تعریف جهت‌پذیری می‌پردازیم و سطوح و بعد فضاهای جهت‌پذیر را به‌صورت‌فوق‌تعریف می کنیم.فضاهای جهت پذیراهمیت مخصوصی در توپولوژی دارند.

مسئلهٔ‌سادهٔ دیگری که منجر به‌ایجاد بخش‌مهمی‌دوتوپولوژی شد و راه را برای‌تحقیقات‌بعدی‌هموارساخت مسئلهٔ مرتبط بودن بعضی از سطوح هندسی درفضای اقلیدسی‌سه‌بعدی است. با یك ملاحظهٔ ساده متوجه می‌شویم‌که اکثر سطوح‌هندسی دارای‌این خاصیت هستندکه می‌توان‌هردونقطه از این‌سطوح را بایك‌منحنی متصل‌به‌هم‌وصل‌کرد. یك چنین‌سطوح را اصطلاحاً مرتبط قوسدار می‌نامیم.

مثلاکره ـ استوانه ـ چهاروجهی ـ بیضوی ـ همه مرتبط قوسدار هستند اما هیپربولوئید دو پارچه مرتبط قوسدار نیست. باز درمیان‌سطوح مرتبط تفاوت‌هست. مثلاحلقه‌وکره هردومرتبط قوسدارند. اماکره دارای خاصیتی است که حلقه این خاصیت را ندارد. این خاصیت این است‌که هرمنحنی بسته و متصلی‌که روی کره درنظر بگیریم می‌توانیم این منحنی‌را متصل‌وار بدون آنکه‌سطح کره‌راترك کنیم به‌یك نقطه تبدیل کنیم. حال اینکه حلقه دارای چنین خاصیتی نیست. یعنی‌اگر منحنی‌بسته‌ای روی‌حلقه درنظر بگیریم نمی‌توان‌آن را متصل وار به‌یك نقطه تبدیل کرد.

دنباله دارد

حل معادلهٔ: $x^2+y^2=a$

تنظیم از: حسین خبازیان اصفهانی، کرمانشاه

(منظور از عدد در این‌مقاله، عدد صحیح می‌باشد)

۱ـ تعریف: A) جفت اعداد (a,b) را جواب معادلهٔ (۱) $z^2+w^2=\alpha$ گوئیم هرگاه $a^2+b^2=\alpha$ باشد. بنابراین اگر (a,b) جواب معادلهٔ (۱) باشد، $(\pm a,\pm b)$ و $(\pm b,\pm a)$ نیزجواب معادلهٔ (۱)خواهد بود.

B) جفت اعداد (a,b) را جواب خاص معادلهٔ (۱) می‌نامیم اگرجواب معادله باشدو $a\geqslant b\geqslant 0$ بنابراین اگرمعادله‌ای دارای جواب باشد دارای جواب خاص نیزهست و برای اینکه دوجواب خاص (a,b) و (c,d) متفاوت باشند لازم‌وکافی‌است که $a\neq c$ یا $b\neq d$

C) هریك از جفتهای:

$(\delta(ap+\lambda bq)$ و $\mu(aq-\lambda pb))$

$(\mu(aq-\lambda bp)$ و $\delta(ap+\lambda bq))$

$\lambda=\pm 1$ و $\mu=\pm 1$ و $\delta=\pm 1$

را یك ترکیب از(a,b) و (p,q) می‌نامیم

D) هرگاه c بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك a وb باشد می‌نویسیم. $(a,b)=c$

E) جفت‌اعداد (a,b) راجواب محض‌معادلهٔ (۱) گوئیم هرگاه جواب معادله باشد و $a>b>0$

F)جواب(a,b) رامضربα گوئیم‌هرگاه aوbمقسوم‌علیه α داشته باشند.

۲ـ قضیه: هرگاه معادلهٔ (۱) $z^2+w^2=\alpha$ ومعادلهٔ (۲) $z^2+w^2=\beta$ دارای جواب باشد هر ترکیبی‌از هرجواب (۱) و هرجواب (۲) جواب معادلهٔ (۳) $z^2+w^2=\alpha\beta$ خواهد بود.

اثبات

$$x=\delta(ap+\lambda bq)$$
$$y=\mu(aq+\lambda bp)$$
$$;\ \lambda=\pm\ \text{و}\ \mu=\pm 1\ \text{و}\ \delta=\pm 1$$
$$x^2+y^2=(ap+\lambda bq)^2+(aq-\lambda bp)^2=$$
$$=(a^2+b^2)(p^2+q^2)=\alpha\beta$$

۳ـ نتیجه: هرگاه معادلات:

$z^2+w^2=\alpha_i$ و $i=1$و۲و...وn

دارای جواب باشند معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i$ دارای جواب خواهد بود.

۴ـ نتیجه: هرگاه‌معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha$ دارای‌جواب نباشد عامل اول γ از مقسوم‌علیه‌های α وجود دارد که معادلهٔ $z^2+w^2=\gamma$ دارای جواب نباشد دراین‌صورت $\gamma\geqslant 3$

۵ـ قضیه: هرگاه معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha$ و معادلهٔ $z^2+w^2=\beta$ دارای جواب محض باشند معادلهٔ:

$$z^2+w^2=\alpha\beta \quad (4)$$

دارای حداقل دوجواب خصوصی است.

اثبات: فرض کنیدجوابها به‌ترتیب (a,b) و (p,q) باشند بنابراین $a>b>0$ و $p>q>0$ بافرض $A=aq+bp$ و $B=aq-bp$ و $x_1=A$ و $y_1=B$ اگر $A\geqslant B$ در غیر این‌صورت $x_1=B$ و $y_1=A$ و داریم $x_1\geqslant y_1\geqslant 0$ و بافرض $x_2=ap+bq$ و $y_2=|aq-bp|$ داریم $x_2^2-y_2^2>0$ درنتیجه $x_2>y_2\geqslant 0$ و ازطرفی‌می‌دانیم (x_1,y_1) و (x_2,y_2) ترکیب (a,b) و (p,q) هستندبنابراین جوابهای خاص‌معادله هستند. واضح است که $x_1\neq x_2$ است.

نتیجه: بطورکلی‌درحالت $a\geqslant b\geqslant 0$و$p\geqslant q\geqslant 0$ جوابهای بالا تنها جوابهای خاص هستندکه از ترکیب (a,b) و (p,q)

حاصل می‌شوند. و درحالت $a=b$ تنها جواب خصوصی حاصل $(a(p-q))$ و $(a(p+q))$ و درحالت $b=0$ ، تنهـا جواب خصوصی $(ap\ ,\ aq)$ است.

۶ـ هرگاه معادلهٔ (۵) $z^2+w^2=\alpha$ دارای دوجواب (x,y) و (a,b) و $a\neq x$ باشد آنگاه $e\neq 0$ و $f\neq 0$ و k و h وجود دارد که:

$$2a=kh-ef \qquad 2x=ef+kh$$
$$(6) \qquad\qquad (7)$$
$$2b=hf+ke \qquad 2y=hf-ke$$

و هرگاه e و f و k و h وجود داشته باشد که رابطهٔ (۶) بر قرار باشد آنگاه به‌ازای x و y حاصل از رابطهٔ (۷)، (x,y) نیز جواب معادلهٔ (۵) است.

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=\alpha \\ x^2+y^2=\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2+y^2 \parallel a^2+b^2$$
$$\Longrightarrow (x-a)(x+a)=(b-y)(b+y)$$

بنابراین لازم است $e\neq 0$ و $f\neq 0$ وجود داشته باشد بطوری که $x-a=ef$ و $b-y$ بر e و $b+y$ بر f قابـل قسمت باشد. به‌عبارت دیگر لازم است k و h نیز وجود داشته بـاشند بطوری که

$$\begin{array}{l} x-a=ef \\ b-y=ke \Longrightarrow x+a=kh \\ b+y=hf \end{array}$$

از روابط بالا می‌توان روابط (۶) و (۷) را نتیجه گرفت.

اگر روابط (۶) برقرار باشد در آن صورت برای x و y حاصل از روابط (۷) داریم:

$$4(x^2+y^2)=(ef+kh)^2+(hf-ke)^2=$$
$$=(kh-ef)^2+(hf+ke)^2=4(a^2+b^2)=4\alpha$$
$$\Longrightarrow x^2+y^2=\alpha$$

و نیز نتیجه می‌شود

$$(e^2+h^2)(f^2+k^2)=4\alpha \quad (8)$$

۷ـ نتیجه :

برای اینکه (۹) $z^2+w^2=\theta$ دارای دو جواب خاص متفاوت باشد لازم است α و β وجود داشته باشند بطوری کـه $\theta=\alpha\beta$ و معادلات :

$$z^2+w^2=\alpha$$

و :

$$z^2+w^2=\beta$$

دارای جواب محض باشند.

اثبات ـ جوابهای خاص (۹) را (a,b) و (x,y) فرض می‌کنیم بنابراین $e\neq 0$ و $f\neq 0$ و k و h وجود دارند کـه روابط (۶) و (۷) برقرار باشند و نیز $a\geqslant b\geqslant 0$ و $x\geqslant y\geqslant 0$ بنابراین

$$(e^2+h^2)(f^2+k^2)=4\theta$$
$$kh-ef\geqslant hf+ke\geqslant 0$$
$$ef+kh\geqslant hf-ke\geqslant 0$$

از این روابط نتیجه مـی‌شود $h\neq 0$ و سپس $k\neq 0$ و نیـز $k\neq\pm f$ و $h\neq\pm e$. اگر p و k عامل‌مشترك ۲داشته‌باشند آن وقت:

$$k=2t$$
$$t\neq 0 \text{ و } r\neq 0 \text{ و } r\neq\pm t$$
$$f=2r$$
$$\theta=(t^2+r^2)(e^2+h^2)\ ;$$
$$0\neq|r|\neq|t|\neq 0\neq|e|\neq|h|\neq 0$$

و همین طور برای حالتی‌که e و h عامل مشترك r داشته‌باشند در غیر این صورت لازم است e و f و k و h فرد باشندکه در نتیجه $k\mp f$ و $h\pm e$ زوجند و مخالف صفر. فرض‌کنید

$$h+e=2A \qquad h-e=2B \qquad k-f=2C$$
$$k+f=2D$$
$$\theta=(A^2+B^2)(C^2+D^2)\ ;$$
$$0\neq|A|\neq|B|\neq 0\neq|C\neq|D|\neq 0$$

بنابراین α و β با شرایط بالا وجود دارند. واضح است که باید $\alpha\geqslant 5$ و $\beta\geqslant 5$ و بنابراین $\theta\geqslant 25$

۸ـ هرگاه α اول ومعادلهٔ (۱۰) $z^2+w^2=\alpha$ دارای جواب (a,b) و معادلهٔ (۱۱) $z^2+w^2=\alpha\beta$ دارای‌جواب باشد آن وقت معادلهٔ (۱۲) $z^2+w^2=\beta$ دارای جواب است و هر جواب (۱۱) ترکیبی از(a,b) و یکی از جوابهای(۱۲) است.

فرض‌کنید (x,y) جواب (۱۱) باشد چون α اول است معادلهٔ:

$$x=aX-bY$$

دارای جواب $X=X_0$ و $Y=Y_0$ است بنابراین:

$$x=aX_0-bY_0$$

با فرض : $B=X_0^2+Y_0^2$ و $A=bX_0+aY_0$

داریم :

$$x^2+A^2=(aX_0-bY_0)^2+(bX_0+aY_0)^2-$$
$$-(a^2+b^2)(X_0^2+Y_0^2)=\alpha B$$
$$x^2+y^2=\alpha\beta \Longrightarrow A^2-y^2=\alpha(B-\beta)$$

بنابراین $(-y-A)(-y+A)$ مضرب α است پس $-y-A$ یا $y-A$ مضرب α می‌باشد بنابراین λ و $\mu=+1$ یا $\mu=-1$ وجود دارد که $\mu y-A=\lambda\alpha$ که در نتیجه $\lambda(\mu y+A)=\beta-B$ با فرض $q=Y_0+a\lambda$ و $p=X_0+b\lambda$ داریم:

$$p^2+q^2=(X_0+b\alpha)^2+(Y_0+a\lambda)^2=$$
$$=(X_0^2+Y_0^2)+(a^2+b^2)\lambda^2+2(bX_0+\alpha Y_0)\lambda$$
$$=B^2+\alpha\lambda^2+2A\lambda=B+(\mu y-A)\alpha+2A\lambda$$
$$=B+\lambda(\mu y+A)=\beta$$

بنابراین معادلهٔ (۱۲) دارای جواب (p,q) است و ازطرفی

$$ap-bq=a(X_0+b\lambda)-b(Y_0+a\lambda)=x$$
$$aq+bp=b(X_0+b\lambda)+a(Y_0+a\lambda)=$$
$$=A+\alpha\lambda=\mu y$$
$$x=ap-bq \quad \text{و} \quad y=\mu(aq+bp)$$

۹ـ نتیجه: اگر برای $n\geq 1$ اعداد اول α_1 و α_2 و α_{n+1} که معادلات $z^2+w^2=\alpha_i$ و $i=1,2,\dots,n+1$ و معادلهٔ (۱۳) $z^2+w^2=\gamma\beta$ و $\gamma=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i$ دارای جواب است وهرجواب (۱۳) ترکیبی از جوابی از (۱۴) $z^2+w^2=\gamma$ و جوابی از (۱۵) $z^2+w^2=\beta$ باشد آن وقت هرجواب :

$$d=\prod_{i=1}^{n+1}\alpha_i=\gamma\alpha_{n+1}$$

و $z^2+w^2=\alpha\beta$ نیز ترکیبی از جوابی از (۱۷) $z^2+w^2=\alpha$ و جوابی از (۱۵) است.

اثبات: فرض کنید (x,y) جواب (۱۷) و (e,f) جواب $z^2+w^2=\alpha_{n+1}$ باشد طبق (۸) جواب (r,t) از (۱۳) وجود دارد که:

$$x=\delta'(er+\lambda' ft) \quad \text{و} \quad y=\mu'(et-\lambda' fr)$$

و طبق فرض جواب (c,d) از (۱۴) و (p,q) از (۱۵) وجود دارد که:

$$r=\delta''(cp+\lambda'' dq) \quad \text{و} \quad t=\mu''(cq-\lambda'' dp)$$

که در نتیجه:

$$x=\delta'(e\delta''(cp+\lambda'' dq)+\lambda' f\mu''(cq-\lambda'' dp))$$
$$y=\mu'(e\mu''(cq-\lambda'' dp)-\lambda' f\delta''(cp+\lambda'' dq))$$

و با فرض:

$$a=\delta''ec-\lambda'\mu''\lambda''fd \qquad A=\mu''ec-\lambda'\delta''\lambda''fd$$

و

$$b=-\delta''\lambda''ed-\lambda'\mu''fc \qquad B=\mu''\lambda''ed-\lambda'\delta''cf$$

داریم :

$$x=\delta'(ap-bq) \quad \text{و} \quad y=\mu'(Aq+Bp)$$

و با فرض $\frac{\mu''}{\delta''}=\nu$ و $\lambda'\nu\lambda''=\varepsilon$ داریم.

$$\frac{\delta''}{\mu''}=\nu \quad \text{و} \quad \delta''=\mu''\nu \quad \text{و} \quad \mu''=\delta''\nu$$

$$a=\delta''(ec-\varepsilon fd) \quad \text{و} \quad b=\delta''\lambda''(ed+\varepsilon fc)$$
$$A=\mu''(ec-\varepsilon fd) \qquad B=\mu''\lambda''(ed+\varepsilon fc)$$

در نتیجه اولا (a,b) جواب (۱۷) است و ثانیاً :

$$A=\nu a \quad \text{و} \quad B=\nu b \Longrightarrow x=\delta'(ap-bq) \quad \text{و}$$
$$y=\mu'\nu(aq+bp)$$

۱۰ـ نتیجه : طبق اصل استقراء ریاضی. هرگاه α_1 و α_2 و... و α_n اعداد اول و معادلات n و ... و ۲ و $i=1$ و $z^2+w^2=\alpha_i$ و معادلهٔ (۱۸) $\alpha=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i$ و $z^2+w^2=\alpha\beta$ دارای جواب باشند معادلهٔ (۱۹) $z^2+w^2=\beta$ نیز دارای جواب است وهرجواب (۱۸) ترکیبی ازجوابی از $z^2+w^2=\alpha$ و جوابی از (۱۹) است.

۱۱ـ هرگاه α اول و مخالف ۲ و معادلهٔ (۲۰) $z^2+w^2=\alpha$ دارای جواب باشد برای هر $n\geq 1$ جوابی برای $z^2+w^2=\alpha^n\beta$ وجود دارد که مضرب α نباشد.

اثبات (از طریق استقراء ریاضی). فرض می‌کنیم برای $n=k$ صحیح باشد بنابراین جواب (p,q) برای معادلهٔ $z^2+w^2=\alpha^k\beta$ وجود دارد که p مضرب α نباشد واگر (a,b) جواب (۲۰) باشد α نیز مضرب α نیست. بنابراین $ap-bp$ یا $ap+bq$ مضرب α نخواهد بود زیرا در غیر این صورت $(ap+bq)+(ap-bq)=2ap$ و به‌عبارت دیگر a یا p مضرب α است که خلاف فرض است بنابراین:

$(aq-bp$ و $aq+bq)$ یا $(ap+bq$ و $aq+bp)$

جوابی غیر قابل قسمت بر α برای معادلهٔ

$$z^2+w^2=\alpha^{k+1}\beta$$

است.

دنباله دارد

تعمیم روش خواجه نصیر طوسی

علیرضا امیرمعز

مبنای دو وموردداستعمال آن درشعرسحرآمیز خواجه‌نصیر طوسی به‌عرض خوانندگان رسید (یکان شمارهٔ ۵۸). اینك‌تعمیم آنرا در مبنای ۳ بررسی می‌کنیم.

۱ـ مبنای ۳ : رباعی عمر خیام را کـه در مقالهٔ مذکور بررسی‌کردیم دوباره درنظر می‌گیریم و آنرا با مبنای سه‌مقایسه می‌کنیم.

آنانکه محیط فضل و آداب شدند
در جمع کمال شمع اصحاب شدند
ره زین شب تاریك نبردند برون
گفتند فسانه‌ای ودرخواب شدند.»

جدول زیر را در نظر می‌گیریم.

ك	ز	م	ج	ط	ع	ف	د
۱۳	۹	۴	۳	۱	۳ـ	۲۶ـ	۳۲ـ

ب	و	ت	ش	خ	ن	ر	ی
۴۰	۳۷	۳۶	۳۴	۲۷	۲۲	۲۱	۱۹

به دوستمان می‌گوئیم که حرفی‌از این‌جدول انتخاب‌کند و به‌سؤالهای زیر جواب دهد:

I ـ آیا این حرف در مصرع اول است؟

II ـ اگر جواب بلی است ، آیا شمارهٔ آن تاق است یا جفت ؟

همین سؤال را برای مصرعهای دیگر تکرار می‌کنیم . اگر در مصرع اول باشد و تاق باشد ۱+ را در نظر می‌گیریم و اگر جفت باشد ۱ـ را و اگر نباشد صفررا.

برای مصرع دوم به‌ترتیب صفر یا ۳+ یـا ۳ـ را در نظر می‌گیریم. چنانچه آن حرف دراین مصرع نباشد یـا تاق باشد یا جفت.

بـرای مصرع سوم صفر یا ۹+ یا ۹ـ را در نـظر می‌گیریم.

برای مصرع‌چهارم صفر یا ۲۷+ یا ۲۷ـ را انتخاب می‌کنیم. در همه حال بستگی به‌این داردکـه صفر برای حـالتی است‌که حرف در مصرع نباشد، + برای تاق و ـ برای‌جفت است. ملاحظه می‌شودکه

$$۱=۳^{۰} \text{ و } ۳=۳^{۱} \text{ و } ۹=۳^{۲} \text{ و } ۲۷=۳^{۳}$$

اعداد اصلی مبنای ۳ می‌باشند.

حال برای روشن شدن مطلب مثال می‌زنیم. فرض‌کنیم که حرف «ك» را انتخاب‌کرده‌ایم . مصرع اول یك ك دارد مصرع دوم هم یك ك دارد. همینطور مصرع سوم یك ك دارد . بنابراین برای حرف ك عدد

$$۱+۳+۹=۱۳$$

بدست می‌آید. اکنون مثال دیگری می‌زنیم کـه قـدری جالب باشد. فرض‌کنیم‌که «ش» را در نظر گرفته‌ایم. از اینرو عدد

$$۱-۳+۹+۲۷=۳۴$$

بدست می‌آید.

خواننده می‌تواند هر رباعی را به‌این ترتیب سحرآمیز کند. جزئیات را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

۲ـ روشی دیگر : به‌جای آنکه صفر و تاق و جفت را درنظر بگیریم. ممکن‌است‌که صفرو۱+ و ۱ـ را به‌نبودن حرف، یك‌بار بودن وچندبار بودن ارتباط دهیم. از اینروجدول دیگری بدست‌می‌آید. خواننده به‌عنوان‌تفریح می‌تواند این‌جدول راتهیه‌کند.

همچنین ممکن است که مبناهای دیـگر را بکار برد و جدولهای دیگری بدست آورد. البته مـوضوع جالب می‌شود و سؤالات بیشتری پیش می‌آیدکه به تمرکـز حواس انسان کمك می‌کند.

عدد اصم e

نوشتهٔ مارتین گاردنر

ترجمهٔ مهندس داویدریحان

ماهیت e برای می عجیب است و به‌غیراز غرابت آن ، بیش ازیك مبنای کوچك برایم با ارزش است.

جك لندن

جنبه‌های سرگرمی عدد پی (π) و عدد طلائی، دوثابت اساسی‌ریاضیات، قبلا در آثار پیشینم ومسائل و سرگرمی‌ریاضی مستخرج از مجلهٔ علمی آمریکا به رشتهٔ تحریردرآمده است، در اینجا به عدد e که سومین اصم کبیر است، می‌پردازیم. از نظر عوام این عدد کمتراز دوعدد دیگرشناخته شده است ولی برای دانشجویان ریاضیات عالی، این عدد دارای ارزش بسیار است و مفهوم عمیقی‌را حائز است.

برای روشن‌ساختن‌طبیعت اصلی e نمو یك کمیت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض کنیم که صد ریال را با بهرهٔ سادهٔ ۴ درصد دریك‌بانك پس‌انداز کنیم. بانك هرسال ۴ ریال‌به ۱۰۰ ریال ما می‌افزاید. ولی هرگاه بانك بهرهٔ مرکبی‌بپردازد، این صدریال‌باتوجه به‌اینکه بهرهٔ به‌حساب ریخته شده‌به منزلهٔ سرمایهٔ جدیدی‌برای‌سال‌آینده بشمار خواهد رفت، بسیار سریعترافزایش خواهد یافت. هرگاه بهره به‌صورت سالانه پرداخت شود پس‌از ۲۵ سال سرمایه بالغ‌بر $۱۰۰\left(۱+\frac{۱}{۲۵}\right)^{۲۵}$ یعنی حدود ۲۶۶ ریال‌خواهد شد، درصورتی‌که هرشش‌ماه، بهره به سرمایه تعلق گیرد، که این‌فرض‌درحکم این‌خواهدبودکه بهرهٔ اولیه دو ریال باشد(نصف‌بهرهٔ‌سالانهٔ ۴ ریالی)،سرمایه به $۱۰۰\left(۱+\frac{۱}{۵۰}\right)^{۵۰}$ یعنی ۴۶۹ ریال بالغ خواهد گردید.

معمولا بیشتر بانکهابرروی فاصلهٔ زمانی‌که بهره به‌سرمایه تعلق‌می‌گیرد ، بسیار توجه می‌کنند. این موضوع ممکن است بعضی‌ها را به این‌فکراندازدکه می‌توان باکم‌کردن مدت تعلق بهره ، صد ریال را در یك سال یك میلیون بار اضافه کرد. این‌گمان صحیح نیست. درطی ۲۵ سال سرمایهٔ صد ریال طبق فرمول $۱۰۰\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}$ افزایش می‌یابد . هرگاه n به‌سمت بینهایت میل کند، حد این‌مقدار به‌سمت عددی میل‌می‌کندکه‌تقریباً برابربا ۲۷۱/۸ است وهرگاه نرخ بهره به‌صورت‌ماهانه باشد، به زحمت سه‌ریال به‌مبلغ فوق‌افزوده خواهدشد. مفهدا بایدتوجه داشت‌که یك سرمایه حتی‌اگر با نرخ ناچیزی پس‌انداز شود، درصورتی‌که مدت‌پس‌انداز بسیار زیادباشد، می‌تواند مقداربسیار زیادی شود. صد ریال‌که با نرخ ۴ درصد درسال‌یکم به مرابحه گذاشته‌شده باشدپس از۱۹۶۰سال برابربا $۱۰۰\times ۱/۰۴^{۱۹۶۰}$ ریال خواهد شد که عدد معرف آن با سی وهفت رقم نوشته می‌شود .

این نوع نموها دارای خصوصیت کاملا بارزی است: در هرلحظه مقدار افزایش متناسب با مقدارکمیتی است که به‌آن افزوده می‌شود. به‌بیانی دیگر، افزایش مورد ملاحظه دریك‌لحظهٔ غیرمشخص و درمدت زمان مفروض همواره برابربا همان‌کسری ازمقدارکمیت اندازه‌گیری شده درآن‌لحظه می‌باشد. برای‌روشن شدن موضوع، می‌توانیدگلوله‌ای برفی را درنظربگیریم‌که از سراشیبی یك‌دره به‌طرف پایین بغلتد، این‌گلوله به هراندازه‌که بزرگترشود، برسرعتش نیزافزوده خواهد شد. غالباً این‌فزایند را به‌نام‌افزایش‌ارگانیك می‌نامند،زیرا این‌پدیده درمکانیسم‌های ارگانیك بیشماری رخ می‌نماید. ازدیاد جمعیت فعلی جهان‌نمونهٔ بارز و غم‌انگیزی از این‌پدیده بشمار می‌رود.هزاران پدیدهٔ‌طبیعی از قوانینی از این نوع تبعیت می‌کنند؛ این پدیده‌ها متعلق به حوزه‌های فیزیك ، شیمی‌بیولوژی و جامعه شناسی می‌باشند.

تمام این پدیده‌ها را می‌توان بوسیلهٔ فرمولهائی‌به‌صورت $y=e^{x}$ نمایش داد، اهمیت این تابع به‌قدری است‌که از سایر

توابع نمائی همچون $y=2^x$ کاملا ممتاز است. این تابع، تنها تابعی است که با مشتق خود برابر است و این خصوصیت به‌خودی‌خود برای حضور همه جانبهٔ e در محاسبات کافی است. لگاریتمهای طبیعی که تقریباً بجز در آنالیز ریاضی به‌جای لگاریتمهای اعشاری مهندسین بکار برده می‌شوند، دارای مبنای e می‌باشد.

وقتی دو سر زنجیر آویزانی را بگیریم و بگذاریم بطور آزاد آویخته شود، منحنی حاصله شکلی دارد که به‌نام منحنی زنجیری معروف است. معادلهٔ زنجیری درمختصات دکارتی برحسب e نوشته می‌شود. مقطع یك بادبان که درمعرض بادقرار گرفته باشد، یك زنجیر افقی خواهد بود، فشار افقی وارد ازطرف بادبر پارچه دارای همان اثر شتاب قائم ثقل برروی زنجیر است.

جزایر **ژیلبر، مارشال و کارولین** رأسهای بلند آتشفشانی می‌باشند که پایه‌های آن تودهٔ عظیمی از بازالت است که بر اعماق دریا قرار گرفته‌اند. پروفیل متوسط این پستی و بلندی‌ها نیز یك زنجیری است. هرچند که منحنی زنجیری دارای شکلی تقریباً نزدیك به سهمی است، معهذا یك مقطع مخروطی نیست اگر یك سهمی را روی کاغذ مقوائی رسم کنیم و آنرا حول یك خط راست بچرخانیم، کانون سهمی یك زنجیری رسم خواهد کرد.

هیچکس نتوانسته است در مورد فرمهای زنجیری طبیعی به ظرافتی برسد که حشره‌شناس فرانسوی به‌نام ژان‌هانری فابر در کارهایش بکار برده است. وی می‌نویسد که: «در اینجا، عدد عجیب e نیز در تارهای عنکبوت مجدداً خودنمائی کرد. درمه صبحگاهی این تارهای شب تنیده باآن حالت مرطوب تارهای چسبناکی که قطرات آب آنرا سنگین کرده است، و به‌صورت تعداد زیادی زنجیره و مقدار زیادی کلاهکهایی که در ترتیب جالبی قرار گرفته‌اند درآمده است، مانندیك منحنی سست و وارفته درمی‌آید هرگاه آفتاب درمه نفوذ کند، همهٔ آنها به‌صورت مشعلهایی روشن می‌شوند و به‌شکل خوشه‌های الماس باشکوهی در می‌آیند. وآنگاه e با تمام عظمت و ابهتش ظهور می‌کند.»

عدد e نیز مانند پی، عددی است اصم، یعنی نمی‌تواند ریشهٔ یك معادلهٔ جبری با ضرایب گویا باشد. همانگونه که به‌هیچ روشی نمی‌توان به‌کمك یك خط‌کش و پرگار قطعه خطی ساخت که دقیقاً برابر با پی باشد، هیچ دستاویزی درهمین شرایط اخیر نمی‌توان یافت که باآن بتوان قطعه‌خطی معادل با عدد e ساخت.

بازهم مانند پی، e را تنهامی‌توان بوسیلهٔ کسرهای اعشاری بادنبالهٔ بینهایت نمایش داد؛ به‌همین ترتیب، می‌توان آنرا به‌عنوان حد یك سری نامحدود درنظر گرفت وآنرا به‌صورت نسبتاً سادهٔ کسرمسلسل زیر نوشت:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{\ddots}}}}}$$

این کسر باسری نامحدود بوسیلهٔ لئونارداولیر ریاضیدان بزرگ سوئیس قرن هیجدهم کشف شد، وی اولین کسی بود که نماد e را بکاربرد و احتمالا اختیار این حرف بدین علت بوده، که اولین حرف صدادار پس‌از حرف a است و وی قبلاحرف a را برای عدد دیگری بکار برده بود. وی کشفیات زیادی برروی این‌عدد e انجام داد تا اینکه بعدها این‌عدد به‌صورت «عدد اولر» نامیده شد.

ازبسط فرمول $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ به صورت سری، یك‌سری نامحدود بسیار مشهور و متقارب e بدست خواهدآمد:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$$

علامت «!» بکاربرده‌شده درکسرهای فوق‌نماد فاکتوریل است. فاکتوریل ۳ برابراست با $1\times2\times3=6$، فاکتوریل ۴ برابراست با $1\times2\times3\times4=24$ و به‌همین‌ترتیب تاآخر این سری به سرعت متقارب می‌شود و همین امر باعث می‌شود که بتوان به راحتی عدد e رابا تعداد اعشارهای مطلوب محاسبه کرد. e را از راههای دیگر نیزمی‌توان محاسبه کرد و به‌همین دلیل بسیار راحت‌تر ازپی محاسبه می‌شود. درسال ۱۹۵۲، یك محاسبه‌گر الکترونیك از دانشگاه ایلینویز، عدد e را تا ۶۰،۰۰۰ رقم اعشاری محاسبه کرد. در سال ۱۹۶۱، در آی، بی، ام دتیاسنتر نیویورك، عدد e را تا ۱۰۰۲۶۵ رقم اعشار بدست‌آوردند! (علامت تعجب در اینجا به منزلهٔ علامت فاکتوریل نیست) مانند پی، این‌رشته نامحدود است‌وتا به‌امروز هیچ‌ترتیب دوری‌مرتبی نتوانسته‌اند در اعشارهای آن بیابند.

آیا رابطه‌ای بین‌دوعدد مشهور اصم e و π وجود دارد؟ بله فرمولهای بسیارساده و زیادی موجوداست که بین‌آنهارابطه ایجاد می‌کند. مشهورترین‌آنها متعلق به اولر است که وی‌آنرا از روی رابطه‌ای که قبلا بوسیلهٔ ابراهام‌دوموآور بدست آورده بود، کشف کرد:

$$e^{i\pi}+1=0$$

ادواردکاسنر و جه‌نرنیومن در اثـرشان به‌نام ریاضیات و تصور در بارهٔ این فرمول شرحی داده‌اندکه تنها می‌توانیم آنرا در اینجا تکرارکنیم بدون اینکه در بارهٔ مضامین آن فکر کرده‌و مطلب را قطع نمائیم. «این فورمول ظریف، موجز و پراز مفهوم است و درعین‌حال برای صوفیان و عالمان، فلاسفه و ریاضیدانان جالب توجه است». در این فرمول پنج کمیت اساسی به‌هم ربـط پیدامی‌کنند: ۱، π، e، i و ۰ (ریشهٔ‌دوم ۱ —): کاسنرونیومن‌دنبالهٔ مطلب را بانقل‌یك‌حکایت‌پیگیری‌می‌کنندکه چگونه این‌فرمول بنجامین‌پیرس یکی از ریاضیدان‌ها روارد راکه پدر چارلزپیرس فیلسوف بود، تحت تأثیر قـرار داد به‌نحوی‌که یکی از روزها پس از نوشتن این فرمول برتخته سیاه با هیجان و صدائی‌قوی اظهار داشت‌که: «آقایان، آنچه‌که نوشته‌ام مطمئناً درست است و ابداً پارا دوکسی نیست، ما نمی‌توانیم این فرمول را درك‌کنیم‌و مفهوم‌آنرا به درستی نمی‌دانیم ولی‌آنچه‌که مهم است این است‌که آنرا اثبات‌کرده‌ایم و بنابراین‌می‌دانیم‌که باید درست باشد.»

همانطورکه فاکتوریل یك عدد n معرف تعداد تبدیلاتی‌است‌که بـا n شیء می‌توان انجام داد، مایهٔ تعجب نیست‌که ببینیم عدد e در مسائل احتمالات به‌کمك تبدیلات می‌شتابد. به‌عنوان مثال‌می‌توان کلاههای‌درهم ریخته شده راشرح داد. ده‌نفرکه‌کلاههای هم‌شکل و هم‌رنگ‌برسردارند، آنها را در روی رخت‌کنی‌آویزان‌می‌کنند مسؤول رخت‌کن کـه چندان حـواسش سرجایش نیست، قبل از پس‌دادن‌آنها، پلاکها را قاطی‌می‌کند. درصورتی‌که صاحبان‌کلاه برای‌گرفتن‌کلاههایشان به‌مسؤول‌رخت‌کن مراجعه‌کنند، احتمال اینکه، حداقل یکی‌ازآنهاکلاه خـودش را بگیرد، چقدر است؟ (می‌توان این مسئله را به‌صورتهای‌گوناگون مطرح ساخت. یك سکرتر سربهوا تعدادی نامه در پاکتهایی‌که قبلا رویشان نشانی مربوط نوشته شده است قرار می‌دهد، احتمال اینکه حداقل یك نامه در پاکت مربوط به‌خودش قرار گیرد چقدر است؟ یااینکه مسئله را به‌صورت زیرعنوان می‌کنند: تمام ملوانان یك‌کشتی از آن خارج شده و مست‌لایعقل به‌کشتی‌بازمی‌گردند وبرحسب‌اتفاق هرکدامشان برروی‌یك تختخواب می‌خوابند احتمال اینکه‌یکی ازآنها در سرجایش خوابیده باشد، چقدر است؟)

بـرای حل مسئله باید دوموضوع را بدانیم: تعداد تبلات ممکن بین ۱۰ کلاه و تعداد تبدیلات لازم‌برای اینکه‌به هرشخص کلاهی تعلق‌گیردکه مال‌خودش نباشد. اولین عدد برابربا !۱۰ یا ۳،۶۲۸،۸۰۰ است. ولی چه‌کسی می‌تواند تمام این تبدیلات را تحقیق نمایدتا اینکه تبدیلاتی‌راکه ۱۰ کلاه به‌غلط عودت‌داده شده را بیابد؟ خوشبختانه روش نسبتاً جالبی برای بدست‌آوردن این عدد وجود دارد. تعداد تبدیلات «کاملا غلط» از n شیء، نزدیکترین‌عدد صحیحی‌است‌که نتیجهٔ تقسیم !n برعدد e است دراین‌حالت عدد ۱،۳۴۴،۹۶۱ بدست می‌آید بنابراین احتمال اینکه هیچکدام از این مردان‌کلاه خـودش را نگیرد بـرابـر $\frac{1,334,961}{3,628,700}$ می‌باشدکه بـرابر با ۰/۳۶۷۸۷۹..... است.

این نتیجه به عدد $\frac{10!}{10!e}$ بسیارنزدیك‌است. می‌توان‌صورت‌ومخرج این‌کسررابه!۱۰ ساده‌کردودر نتیجه‌احتمال‌به‌عدد $\frac{1}{e}$ بسیار نزدیك است. عدداخیرمعرف‌احتمالی‌است‌که‌درآن‌همهٔ‌افرادمربوط‌اشتباهاً کلاه دیگری را گرفته باشد. چون مسلم است‌که تمام‌کلاهها به این افراد سپرده‌شده است. برای اینکه حداقل یك‌نفرکلاه خود را دریافت‌کند، کافی‌است‌که عدد $\frac{1}{e}$ را از عدد ۱ (احتمال‌حتمی) کسر کنیم‌تاعدد ۰/۶۳۲۱۰۰ بدست‌آیدوعدد اخیرمعرف‌احتمالی است که حداقل یك نفرکلاه خود را بگیرد. ایـن نتیجه بـه $\frac{2}{3}$ نزدیك است

جالب اینکه، در این نوع مسائل باید توجه داشت‌که در مورد ۱۰ یا ۷ کلاه تغییرات‌عدهٔ‌کل‌کلاههای‌هیچگونهٔ تأثیرعملی برروی نتیجهٔ‌محاسبه ندارد. خواه تعداد افراد ۱۰ یا ده میلیون نفر باشد.

احتمال اینکه حداقل یك‌نفرکلاه‌خـود را بیابد برابر با ۰/۶۳۲۱۰۰۰ است. در جدول زیـر نشان داده شده است که چگونه این احتمال به‌سرعت به‌مقدار حدی‌اش‌که برابر بـا $\frac{1}{e}$ یا ۰/۳۶۷۸۷۹۴۴۱۱۰۰۰ است می‌رسد. کسراعشاری‌آخرین ستون متناوباً کمی بزرگتروکمی‌کوچك‌تر از حد است. بـرای سرگرمی و اطمینان از این نتیجه می‌تـوانید در بازی یك‌نفرهٔ زیر شرکت‌کنید. یك‌دست ورق اختیارکنید و قبل‌از اینکه‌آنهارا

احتمال اینکه حداقل یك‌نفر کلاه خودش‌را بیابد	تعداد تبدیلات کاملا غلط	تعداد تبدیلال	تعداد کلاهها
۰	۰	۱	۱
۰/۵	۱	۲	۲
۰/۳۳۳۳۳۳	۲	۶	۳
۰/۳۷۵۰۰۰	۹	۲۴	۴
۰/۳۶۶۶۶۶	۴۴	۱۲۰	۵
۰/۳۶۸۰۵۵	۲۶۵	۷۲۰	۶
۰/۳۶۷۸۵۷	۱۸۵۴	۵۰۴۰	۷
۰/۳۶۷۸۸۱	۱۴۸۳۳	۴۰۳۲۰	۸
۰/۳۶۷۸۷۹	۱۳۳۴۹۶	۳۶۲۸۸۰	۹
۰/۳۶۷۸۷۹	۱۳۳۴۹۶۱	۳۶۲۸۸۰۰	۱۰
۰/۳۶۷۸۷۹	۱۴۶۸۴۵۷۰	۳۹۹۱۶۸۰۰	۱۱
۰/۳۶۷۸۷۹	۱۷۶۲۱۴۸۴۱	۴۷۹۰۰۱۶۰۰	۱۲

یکی‌یکی و درحالی که روی کارت به‌طرف بالاباشد، تقسیم کنید، آنرا خوب بر بزنید. درحین این عمل، ارزش ۵۲ کارت را قبل از اینکه آنرا بگیرید، می گوئید. بدین ترتیب که قبل از گرفتن کارت مکث کوتاهی می کنیم و نام کارت را می گوئیم، فی‌المثل ازآس به شاه‌پیك، سپس ازآس به شاه دل، بعد ازخشت وبالاخره نام گشنیز را می گوئیم. درصورتی که حداقل یك ورق راقبل از روشدن آن‌صحیح حدس بزنید، بازی‌را برده‌اید. شانس برد یا باخت چقدر است؟

به‌راحتی‌می‌توان دید که‌این‌مسئله‌نیزمانندمسئلهٔ کلاههاست. اشراقاً می‌توان‌حدس‌زد که‌شانس‌بردخیلی‌ضعیف‌است‌یااینکه‌حداکثر می‌تواند برابربا $\frac{1}{2}$ باشد. در واقع، همانطورکه دیدیم، احتمال برد برابر با $1-\frac{1}{e}$ یاتقریباً برابربا $\frac{2}{3}$ است . از موضوع اخیر می‌توان استنباط کرد که درموردمسابقاتی که تعداد دور بازیها زیاد باشد، در دوسوم موارد می‌توان درست حدس‌زد.

عدد e تا ۲۰ رقم اعشار به‌صورت:

۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵۲۳۵۳۶

نوشته می‌شود و برای بخاطر سپردن این عدد ، جملات حفظی بیشماری وجود دارد. در اینگونه جملات،ارزش‌مراتب اعشارهای متوالی، برابر با تعداد حروف بکار برده شده‌در جمله است.

یك‌کسر بسیار ساده و قابل توجه به‌صورت $\frac{355}{113}$ برای بیان عدد پی با شش رقم اعشار صحیح وجود دارد. برای بیانe با همین دقت، احتیاج به‌کسری داریم که صورت و مخرج آن چهار رقمی باشند،که به‌عنوان مثال می‌توان‌کسر $\frac{2721}{1001}$ را ذکر کرد . معهذا می‌توان‌کسرهائی را یافت‌که صورت و مخرج آن سه رقمی‌بوده و عدد e را تا چهار رقم اعشارصحیح بدهند. با وجود این ، یافتن چنین‌کسرهائی به این سادگی‌ها نیست و خواننده اگرمایل‌باشد می‌تواند این عدد را جستجوکرده و پیدا نماید، برای خوانندگان علاقمند به مسائل مربوط به ارقام، مسئلهٔ زیر را مطرح می‌کنیم : کسری به‌دست آورید که اعداد صورت و مخرجش سه‌رقمی بوده و بهترین تقریبeرا بدهد.

یادداشت

بسیاری از خوانندگان توجه مرا به مسائلی معطوف کرده‌اند که درآنها عدد e بطور قریب‌الوقوع به‌عنوان جواب‌یك مسئله ظاهرمی گردد. در اینجا فقط دوتا از این مسائل را ذکر می‌کنیم: مقدار n چقدر باشد تا ریشهٔ n ام عدد n ماکسیمم باشد؟ پاسخ e است.

هرگاه‌اعدادحقیقی‌مابین ۰ و ۱ را بطور اختیاری‌انتخاب کنیم‌و تنهاموقعی‌است‌از انتخاب‌دست‌بکشیم که‌مجموع اعدادحاصله بزرگتر از ۱ باشد، عدهٔ محتمل اعداد انتخابی چقدر است؟ در اینجا نیز e را باید به‌عنوان پاسخ معرفی کرد.

چندسال‌پیش که برای اولین بار به‌فرمول مشهور اولر که π را با e و عدد موهومی i پیوند می‌دهد، برخوردم از خود پرسیدم که‌آیا این‌معادلهٔ مشهور رامی‌توان به‌صورت‌ترسیمی‌نمایش داد. با این حال نتوانستم نمودار مناسبی برای این معادله‌بیابم در مقاله‌ای تحت عنوان «تقارب دیاگرام آرگاند» که انتشار

یافته بود، نشان داده شده است که می‌توان نمودار ساده و ظریفی برای آن ارائه داد. ابتدا فرمول $e^{i\pi} = -1$ را بـه صورت یك‌سری نامحدود از بردارها نوشت . عدد i که درهر کدام از جملات این سری خودنمائی می‌کند، هربردار را به اندازهٔ یك ربع دور نسبت‌به بردار قبلی‌دوران می‌دهد. بدین‌ترتیب یك‌مارپیچ از قطعه خطوط کوچك و کوچکتر تشکیل می‌شود که حول نقطهٔ ۱- می‌چرخند و آنرا احاطه می‌کنند.

مسئلهٔ کوچك نسبتاً مشهوری درمورد π و e وجود دارد که درآن خـواسته شده است که بدون استفاده از جدول و بدون محاسبات نوشتنی ، بزرگتر عدد از e^{π} و π^{e} را بیابیـم . راههای بیشماری برای پاسخگوئی به‌آن وجود دارد.

پاسخها

کدام کسر است که صورت و مخرجش سه‌رقمی بوده و بهترین تقریب را بـرای ثابت e بدهد؟ پاسخ کسر $\frac{۸۷۸}{۳۲۳}$ است. این‌کسر به‌صورت اعشاری ۲/۷۱۸۲۶... نـوشته می‌شود و تـا چهار رقم اعشار صحیح e را می‌دهد. (تبصره ـ برای کسانی که با منطق‌عدد سروکار دارند، صورت و مخرج این کسرقابل حفظ کردن است و ازکسر نمودن عدد کوچکتر از عدد بزرگتر حاصلی برابر با ۵۵۵ بدست می‌آید.) در صورتی که درصورت ومخرج فقط دو رقم را حفظ کنیم، کسر $\frac{۸۷}{۳۲}$ بدست می‌آید . با این‌کسر می‌توان e را تا دو رقم اعشار صحیح محاسبه کرد.

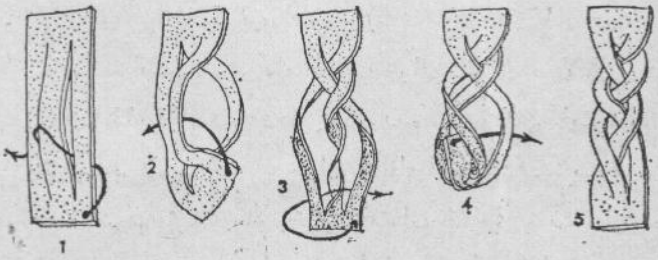
دنبالهٔ مطلب کلیسای چهار بعدی (مندرج در یکان‌شمارهٔ قبل)

یادداشت‌ـ باوجود اینکه درآغازمقاله از «گردش‌خیالی» در لندن صحبت‌کرده بـودم باوجود این عده‌ای از خوانندگان داستان را حقیقی انگاشته و حتی درخواست نشانی کامل کلیسای چهار بعدی را داشته‌اند. موضوع کلیسای مزبـور و سلادکشیش کاملا زائیدهٔ خیال است . ولی هانری سلادشعبده باز یکـی از شارلاتانهای بسیارمعروف و برجستهٔ تاریخ احضار ارواح‌آمریکا بوده است.

پاسخها

روش کشیش برای بافتن تسمه‌های چرمی‌نزد پیش‌آهنگان و تمام‌آنهایی که‌کارهای چرمی برایشان جالب است‌آشناست.

این بافتنی‌را به‌گونه‌های مختلفی می‌توان بدست‌آور. در شکل زیر یکی از روشها دیده می‌شود. با ادامه‌دادن ایـن روش



می‌توان تسمه‌های بزرگتری بدست‌آورد که در هردفعه شش بافته به‌آن افزوده شود. روش دیگر عبارتست از اینکه این‌روش‌شش تقاطعی‌را در مورد نیمهٔ فوقانی نوار و بافتن تسمه‌های‌آن بطور عادی، بکار ببریم، بدین‌ترتیب بطور همزمان در قسمت تحتانی نوار ، بافته‌ای به‌صورت تصویر آئینه‌ای در قسمت تحتانی نـوار بدست خواهدآمد. پس کافی‌است قسمت‌تحتانی‌را بایك دست‌بافت حال‌آنکه دست‌دیگر قسمت‌فوقانی‌را ببافد. این دوروش‌را می‌توان در مورد بافته‌هائـی که بیش‌از سه تسمه دارند بکار بست . وقتی می‌خواهید ازچرم بسیار سخت استفاده کنید. اول آنـرا در آب گرم بخوابانید و پس از نرم‌شدن‌آن، اقدام به بافتن کنید.

برای دومین کار کشیش که منتهی به نواری کائوچوئی‌تخت بسته وگره خورده می‌شد ، ابتدا باید نواری گره خورده فراهم کنیم. یك‌حلقهٔ کائوچوئی بـا مقطع دایـره‌ای تهیه می‌کنیم و همانطورکه درطرف چپ شکل زیـر دیده می‌شود، یك‌قسمت از محیط‌آنرا تخت می‌کنیم. این قسمت صاف شده را همانطوری‌که در قسمت مرکـزی شکل دیده می‌شود، سه نیم دور می‌پیچانیم و بالاخره باقیماندهٔ حلقه راتخت می‌کنیم تا روبانی با سه‌پیچش‌نیم دوری بدست‌آید (قسمت طرف راست شکل بعد)

دنباله در صفحهٔ ۱۵۶

برگردان به‌فارسی از : عبدالحسین مصحفی

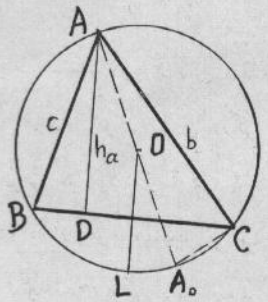
Redécouvrons la Géométrie

H. S. M. COXETER et S. L. GREITZER

خاصیتهایی از دایره

۴.۲ـ تتمه در بارهٔ ارتفاعها و مرکز ارتفاعی مثلث.

در بخشهای گذشته دربارهٔ دایرهٔ محیطی مثلث گفته‌هایی داشتیم، اما اهمیت این‌دایره به‌اندازه‌ای است که گفتگوی دوباره از آن ارزش خواهد داشت. مطابق با شکل زیر مثلث ABC را درنظر می‌گیریم که درآن O مرکز دایرهٔ محیطی، AA_0 قطری از این دایره، $OL=R$ شعاعی از این دایره که بر BC عمود است و $AD=h_a$ ارتفاع واردبر BC می‌باشد، دو زاویهٔ ABC و AA_0C باهم برابرند و در نتیجه دو مثلث ABD و AA_0C با هم‌متشابهند وداریم:



$$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AA_0}\Longrightarrow h_a=\frac{bc}{2R}$$

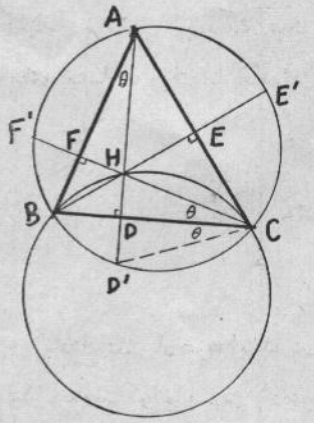
دو زاویهٔ BAD و A_0AC با هم برابرند و هرکدام متمم زاویهٔ B می‌باشند. بنابراین:

$$\angle DAO=A-2(90^\circ-B)=$$
$$A+2B-(A+B+C)=B-C$$

این‌رابطه را مطابق با شکل بالا بدست‌آوردیم که درآن $B>C$ است. هرگاه $B<C$ باشد دو زاویهٔ متساوی A_0AC و BAD جزء مشترك دارند ونتیجه خواهد شدکه زاویهٔ DAO برابر است با $C-B$. بنابراین درحالت کلی داریم:

$$\angle DAO=|B-C|$$

در شکل زیر سه ارتفاع AD، BE و CF از مثلث ABC را امتداد داده‌ایم تا با دایرهٔ محیطی مثلث به‌ترتیب در D'، E' و F' برخورد کرده‌اند و H مرکز ارتفاعی مثلث می‌باشد. دو زاویهٔ DAB و FCB برابرندزیرا هرکدام متمم‌زاویهٔB می‌باشند. زاویهٔ BCD' نیز با این زاویه‌ها برابر است زیرا متمم زاویهٔ D' است و زاویه D' بازاویهٔB برابراست.



دو مثلث قائم‌الزاویهٔ CDH و CDD' با هم برابرند و از آن نتیجه می‌شود که $HD=DD'$ و به‌روش مشابه نتیجه خواهد شدکه:

$$HE=EE' \quad \text{و} \quad HF=FF'$$

دایرهٔ به‌قطر AB بر D و E می‌گذرد و بنا به‌قضیهٔ (۱۰۱.۲) داریم:

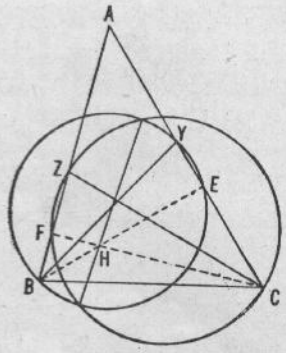
$$HA\times HD=HB\times HE$$

با در نظر گرفتن دایرهٔ به‌قطر AC (یا به‌قطر BC) و بدست آوردن رابطهٔ مشابه خواهیم داشت:

$$HA\times HD=HB\times HE=HC\times HF$$

اکنون نقطه‌های X، Y و Z را به‌ترتیب روی ضلعهای BC، CA وAB به‌دلخواه برمی‌گزینیم (روی شکل زیرفقط Y و Z نموده شده است)؛ هرگاه خطهای سوائی AX، BY و CZ را قطر قرار دهیم و دایره‌هایی رسم‌کنیم، این دایره‌ها به‌ترتیب بر D، E و F پاهای ارتفاعها می‌گذرند. پس سه حاصل ضرب متساوی بالا به‌ترتیب قوتهای نقطهٔ H نسبت به‌این دایره‌ها می‌باشند. چون این سه حاصل‌ضرب با هم برابرند پس

H نسبت به سه‌دایرهٔ مزبور یك قوت دارد وبنابراین مرکز اصلی این سه دایره است.



ازآنچه گفته شد دو قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود که‌قبلا به‌عنوان مسئله بیان می‌شده‌اند:

قضیهٔ ۵،۴.۲ـ هرگاه دوخط‌سوائی‌ازمثلثی راقطرقرار دهیم و دایره‌هایی رسم‌کنیم، محور اصلی دو دایرهٔ مرسوم بر H مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد.

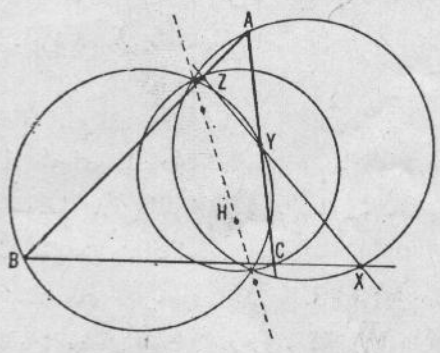
قضیهٔ ۶،۴.۲ـ هرگاه سه خط سوائی از مثلثی راقطر قرار داده و دایره‌هایی رسم‌کنیم که به‌یك دسته دایره‌ها متعلق نباشند، مرکز اصلی این دایره‌ها همان مرکز ارتفاعی مثلث است.

با بیان زیر نیزمی‌توانیم همان نتایج بالا را بدست‌آوریم؛ اگر AD ارتفاع وارد از رأس A در مثلث ABC باشد، هر دو دایره‌ای که قطرهایشان دوخط سوایی وارد از رأس A باشد بر A و D می‌گذرند، درحالت خاص دایره‌های به‌قطر AB و به‌قطر AC، پس این دایره‌ها دسته‌ای تشکیل می‌دهندکه AD محور اصلی مشترك آنها است. همچنین ارتفاع وارد از رأس B محور اصلی دسته دایره‌هایی است‌که قطرهای‌آنها خطهای‌سوایی وارد از رأس B می‌باشند. همچنین برای ارتفاع دیگر مثلث. بنابراین سه ارتفاع مثلث در یك نقطه متقاربندکه مرکز اصلی دایره‌های به‌قطرهای جطهای سوایی مثلث می‌باشد.

در بیان قضیهٔ ۶،۴.۲ به‌این‌نکته اشاره شدکه «سه دایره به‌یك دسته دایره‌ها متعلق نباشند». این موضوع ایجاب می‌کند خطهای سوائی قطرهای سه دایره هرسه از یك رأس رسم نشده باشند. اما همان‌گونه‌که درقضیهٔ آینده خواهیم دید این موضوع دنباله خواهد داشت.

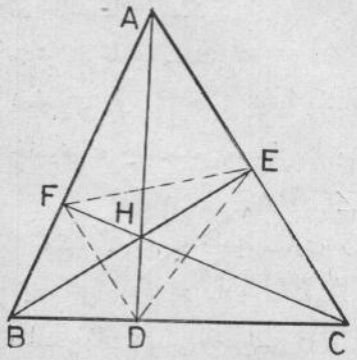
هرگاه قضیهٔ ۶،۴.۲ را در مورد سه خط سوائی AX، BY و CZ بکار برده و عاملهای دیگری را دخالت دهیم، مسئله‌های جالبی از آن نتیجه خواهیم گرفت. هرچندکه سه‌خط سوائی مزبور لازم نیست متقارب باشند، اما اگر متقارب باشند همه چیز عوض می‌شود. هرگاه دایره‌ها را به‌قطرهای میانه‌های مثلث، ارتفاعها یا نیمسازهای زاویه‌های آن در نظربگیریم، در این حال مثلا می‌توانیم ثابت‌کنیم‌که مرکز اصلی آنها مرکز ارتفاعی مثلث است.

حالت بسیار مهم وقتی است که سه خط سوایی AX، BY و CZ متقارب نباشند اما سه نقطهٔ X، Y و Z بر یك استقامت واقع باشند. در این حال حداقل یکی از سه نقطهٔ X



Y یا Z در امتداد ضلع مثلث‌قرار خواهد داشت. می‌توان مثلث AYZ را در نظرگرفت‌که برای آن سه نقطهٔ B، C و X بریك استقامتند، یا اینکه مثلث BZX را با سه نقطهٔ A، C و Y، یا اینکه‌مثلث CXY رابا سه نقطهٔ A، B و Z. به‌هر حال نتیجه می‌شودکه دایره‌های به‌قطرهای AX، BY و CZ چنانندکه محور اصلی‌دو به‌دو ازآنها بر H مرکز ارتفاعی‌مثلث ABC وهمچنین برمرکزهای ارتفاعی سه‌مثلث دیگرمی‌گذرد. چون این چهار مرکز ارتفاعی متمایزند، پس محورهای اصلی دو به‌دو دایره‌ها برهم منطبقند و بنابراین:

قضیهٔ ۷،۴.۲ـ هرگاه چهار خط یکدیگر را در شش نقطهٔ A، B، C، X، Y و Z چنان قطع کنند که مجموعه‌های نقطه‌ها به‌صورت سه‌تائیهای XBC، YCA، ZAB، XYZ بر یك استقامت باشند، دایره‌های به‌قطرهای AX، BY و CZ به‌یك دسته دایره‌ها تعلق دارند و چهار مرکز ارتفاعی مثلثهای AYZ، BZX، CXY و ABC بریك خط راست واقعند.



شکل روبرو نشان می‌دهد که H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. اما همان گونه که‌مشاهده‌می‌شود می‌توان گفت که A مرکز ارتفاعی مثلث

HBC یا اینکه B مرکز ارتفاعی مثلث HCA و یا اینکه C مرکز ارتفاعی مثلث HAB است. شکل ABCH چهارزاویه‌ای ارتفاعی نام دارد. در این شکل با درنظر گرفتن هر سه‌تائی از چهار نقطه چهار مثلث وجود دارد که دایره‌های محیطی آنها شعاعهای برابر دارند.

خاصیتهای دیگری نیز برای این شکل وجود دارد که از بیان آن‌صرف‌نظرمی‌شود. برای اثبات خاصیت گفته شده‌می‌توان از این قضیه استفاده کرد که قرینهٔ مرکز ارتفاعی‌مثلث نسبت به‌هر ضلع آن بردایرهٔ محیطی مثلث واقع است.

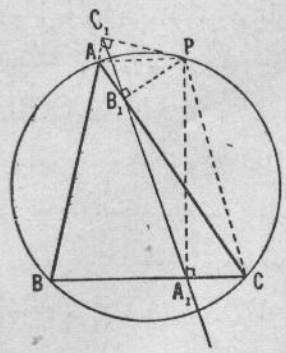
تمرین

۱ـ ارتفاعهای مثلث را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی‌را تلاقی کنند. سه‌نقطهٔ تلاقی‌مثلثی تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که‌این مثلث با مثلث مفروض متشابه است.

۲ـ نیمسازهای زاویه‌های‌داخلی مثلث ABC را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در L ، M و N تلاقی کنند. اندازه‌های زاویه‌های مثلث LMN را برحسب اندازه‌های‌زاویه های مثلث ABC بدست آورید.

۵.۲. خط سمسن

اگر از نقطهٔ دلخواه P واقع در صفحهٔ مثلث ABC عمودهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 را به‌ترتیب برضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC رسم کنیم، سه نقطهٔ A_1، B_1 و C_1 معمولا مثلثی‌تشکیل می‌دهند. قبلا در بند ۹.۱ گفتیم که‌این مثلث پودر نام دارد و خاصیتهای آن را بررسی کردیم. اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که P بردایرهٔ محیطی‌مثلث‌واقع باشد. برای وضوح شکل P را برکمان CA که شامل B نیست و نزدیکتر به A اختیار کرده‌ایم. در حالتهای دیگر می‌توانیم با جایگشت نقطه‌های A و B و C نتیجهٔ یکسان بدست آوریم. با توجه به خاصیتهای چهارضلعی محاطی داریم:



$$\angle APC = \pi - B = \angle C_1PA_1$$

اگر از این دو زاویهٔ مساوی زاویهٔ APA_1 را حذف کنیم نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ A_1PC و C_1PA با هم برابرند. اما درچهار ضلعی محاطی A_1CPB دو زاویهٔ A_1PC و A_1B_1C با هم برابرند، همچنین در چهار ضلعی محاطی AB_1PC_1 دو زاویهٔ C_1PA و C_1B_1A با هم برابرند بنابراین دو زاویهٔ A_1B_1C و C_1B_1A با هم برابرند. پس سه نقطهٔ A_1 ، B_1 و C_1 بریك خط راست واقعند، مثلث پودر نظیر نقطهٔ P به‌وضع خط راست درآمده است.

برعکس، اگر نقطهٔ P چنان باشد که مثلث پودر نظیر آن نسبت به‌مثلث ABC به‌وضع خط راست باشد، بدیهی است که دراین حال نقطهٔ P داخل یکی از زاویه‌های مثلث ABC و در آن طرف ضلع مقابل به‌آن قرار خواهد داشت. دراین صورت با استدلال در جهت عکس‌استدلال بالا نتیجه خواهد شد که P بر دایرهٔ محیطی مثلث واقع است. بنابراین می‌توان گفت:

قضیهٔ ۱،۵.۲ـ برای آنکه پاهای عمودهای وارد از یك نقطه برسه‌ضلع مثلث‌بریك خط راست واقع‌باشند لازم وکافی است که‌آن نقطه بردایرهٔ محیطی مثلث قرار داشته باشد.

خطی که این سه پای عمود برآن واقعند خط سمسن نقطهٔ مزبور نسبت به‌آن مثلث نام دارد. روبرت‌سمسن (۱۷۶۸ـ ۱۶۸۷) نه‌تنها درهندسه بلکه‌درحساب کارهای گوناگون انجام داده است؛ به‌عنوان نمونه ثابت کرده است که اگر f_n جملهٔ nام رشتهٔ فیبوناچی باشد،

$$-۱،۱،۲،۳،۵،۸،۱۳،۲۱،۳۴،۵۵،\ldots$$

خواهیم داشت:

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

خط سمسن ازاین جهت به‌او منسوب است که با ادراکات هندسی او جور می‌آید، و جستجوی آن درآثار وی کار بیهوده‌ای‌است. در حقیقت کشف این خاصیت در ۱۷۹۷ توسط ویلیام‌والاس انجام گرفته است.

تمرین

۱ـ اگر مثلث دریك زاویه منفرجه باشد، آیا اثباتی که برای قضیهٔ ۱،۵.۲ بکار رفت دربارهٔ آن نیزصادق است؟

۲ـ کدام نقطه از دایرهٔ محیطی مثلث انتخاب شود تاخط سمسن نظیرآن بر CA واقع باشد؟

۳ـ آیا ممکن است که نقطه‌ای برخط سمسن نظیرخود واقع باشد؟ دراین صورت این خط کدام است؟

۴ـ ازنقطهٔ A مماسهای AB و AC بر دایره‌ای رسم شده است واز نقطهٔ P واقع بردایره عمودهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 برضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC رسم گردیده است. ثابت کنید که.

$$\overline{PA_1}^2 = PB_1 \cdot PC_1$$

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۱۱۲

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای اول دبیرستان

۱۱۲/۱ـ فرستنده : **جمشید خالقی**

رابطهٔ زیر را برای چهار مجموعهٔ دلخواه A ، B ، C و D ثابت کنید:

$$([(A-B)-C]-D)=A-(B\cup C\cup D)$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$([(A-B)-C]-D)=[(A\cap B')-C]-D=$$
$$=[(A\cap B')\cap C')-D=A\cap B'\cap C'\cap D'$$
$$=A\cap(B'\cap C'\cap D')=A\cap(B\cup C\cup D)'$$
$$=A-(B\cup C\cup D)$$

۱۱۲/۲ـ ترجمه از فرانسه

هرگاه A و B دو زیر مجموعهٔ معین وناتهی ازمجموعهٔ E و X زیر مجموعه‌ای مجهول از مجموعهٔ E باشد، معادلهٔ مجموعه‌ای زیر را حل و بحث کنید:

$$A\cup X=B$$

حل ـ از رابطهٔ داده‌شده معلوم است که $A\subset B$ و $X\subset B$ بنابراین معادلهٔ داده‌شده فقط وقتی جواب دارد که $A\subset B$ باشد به‌علاوه حوزهٔ مجهول مجموعهٔ زیر مجموعه‌های B است . با قبول این شرایط وباتوجه به اینکه :

$$A\subset B \Longrightarrow B=A\cup(B-A)$$

داریم :

$$A\cup X=B \Longleftrightarrow A\cup X=A\cup(B-A)$$

بنابراین :

$$X=(B-A)\cup Y \quad \text{و} \quad Y\subset A$$

بحث ـ اگر $A\not\subset B$ معادله جواب ندارد.

به‌فرض $A\subset B$ معادله جواب دارد که عبارتست‌ازاجتماع $(B-A)$ با مجموعهٔ Y به‌قسمی‌که Y زیرمجموعهٔ دلخواهی از A است. درحالت خاص $Y=\varnothing$ داریم $X=B-A$ و در حالت خاص $Y=A$ داریم $X=B$

۱۱۲/۳ـ ترجمهٔ از فرانسه

حاصل عبارت زیررا به‌ازای $x=2+\sqrt{3}$ و همچنین به‌ازای $x=2-\sqrt{3}$ حساب کنید:

$$y=\frac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

حل ـ به‌فرض $x=2+\sqrt{3}$ داریم :

$$x^2-x+1=4+3+4\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+1$$
$$=6+3\sqrt{3}=3(2+\sqrt{3})$$

$$y=\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3(2+\sqrt{3})}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$$

درازای $x=2-\sqrt{3}$ با محاسبات مشابه نتیجه خواهد شد:

$$y=-\sqrt{2}$$

۱۱۲/۴ـ فرستنده : **مهندس جواد فیض**

حاصل عبارت زیررا در حالتهای مختلف که لازم است بدست آورید .

$$y=\sqrt{a+2m\sqrt{a-m^2}}+$$
$$+\sqrt{a-2m\sqrt{a-m^2}}$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$a+2m\sqrt{a-m^2}=(a-m^2)+m^2+$$
$$+2m\sqrt{a-m^2}=(m+\sqrt{a-m^2})^2$$
$$a-2m\sqrt{a-m^2}=(m-\sqrt{a-m^2})^2$$
$$y=|m+\sqrt{a-m^2}|+|m-\sqrt{a-m^2}|$$

هرگاه $a<m^2$ باشد مقدار y نامعین است.

به‌فرض $a\geqslant m^2$ حالتهای زیر را در نظرمی گیریم:

الف $\begin{cases} m\geqslant\sqrt{a-m^2}\Longrightarrow m^2\geqslant a-m^2\Longrightarrow a\leqslant 2m^2 \\ m\geqslant 0\end{cases}$

بنابراین $m \geqslant 0$ و $m^2 < a \leqslant 2m^2$ و در این حالت داریم:

$$y = m + \sqrt{a - m^2} + m - \sqrt{a - m^2} = 2m$$

ب) $$\begin{cases} m < \sqrt{a - m^2} \\ m \geqslant -\sqrt{a - m^2} \end{cases} \Longrightarrow m^2 < a - m^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a \geqslant 2m^2$$

در این حالت داریم:

$$y = m + \sqrt{a - m^2} - m + \sqrt{a - m^2} =$$

$$= 2\sqrt{a - m^2}$$

ج) $$\begin{cases} m \leqslant -\sqrt{a - m^2} \\ m \leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m^2 < a \leqslant 2m^2 \\ m \leqslant 0 \end{cases}$$

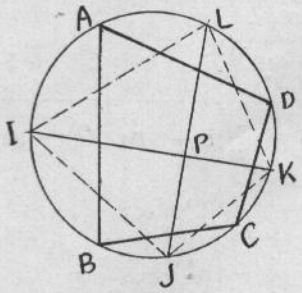
در این‌حالت خواهیم داشت؛

$$y = -m - \sqrt{a - m^2} - m + \sqrt{a - m^2} =$$

$$= -2m$$

۱۱۲/۵ـ ترجمهٔ از فرانسه

چهار ضلعی محدب ABCD در دایره‌ای محاط است. روی این دایره نقطه‌های I ، J ، K و L به‌ترتیب وسطهای کمانهای AB ، BC ، CD و DA می‌باشند. اولا ثابت کنید که درخط IK و JL برهم عمودند. ثانیاً چهارضلعی ABCD چگونه باشد تا چهار ـ ضلعی IJKL مربع باشد ؟



حل ـ اگر P نقطهٔ برخورد دوخط IK و JL باشد، اندازهٔ زاویهٔ داخلی P=IPL برابراست با:

$$\angle P = \frac{1}{2}(\widehat{IL} + \widehat{JK}) = \frac{1}{2}(\widehat{IA} + \widehat{AL} + \widehat{JC} + \widehat{CK})$$

$$\angle P = \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2}\right)$$

$$\angle P = \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$$

بنابراین دوخط IK و JL برهم عمودند.

ثانیاً برای آنکه چهارضلعی IJKL مربع باشد باتوجه به‌اینکه دوقطرش برهم عمودند لازم و کافی‌است که دوقطرش‌منصف و باهم برابر باشند. دو قطرعمود برهم از یك دایـره فقط وقتی منصف یکدیگرند که هرکدام قطری از دایـره باشند زیرا عمود منصف هر قطردایره از مرکز دایره می‌گذرد.

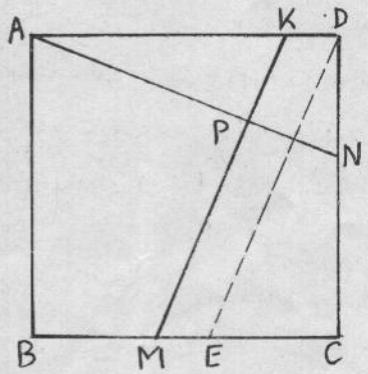
بنابراین برای‌آنکه چهارضلعی IJKL مربع باشد لازم وکافی است‌که P مرکزدایره باشد. اماهرگاه P مرکزدایره باشد قطر LJ که‌کمانهای AD و BC را نصف‌کرده است‌عمود منصف‌وترهای AD و BC است.

بنابراین AD یـا BC موازی است. همچنین AB با CD موازی است. پس چهارضلعی ABCD مستطیل‌است.

برای‌آنکه چهار ضلعی IJLK مربع باشد لازم وکافی است‌که چهارضلعی ABCD مستطیل باشد.

۱۱۲/۶ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

رأس A و دو نقطهٔ M و N از ضلعهای BC و CD از مربع ABCD داده شده است. این مربع را رسم‌کنید.



حل ـ هـرگاه ABCD مربع‌مطلوب وM نقطه‌ای‌از BC وN نقطه‌ای از CD باشد، چون از M خطی‌عمود بر AN رسم‌کنیم تا با AD در K برخورد کند، ثابت می‌کنیم که:

$$AN = MK$$

بـرای اثبات‌از D موازی بـا KM رسم می‌کنیم تا با BC در E برخوردکند. دو زاویهٔ حادهٔ DAN وCDE باهم برابرند زیـرا ضلعهای‌آنها بـرهم عمودند . بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADN و CDE درحالت یك‌ضلع و یك زاویه‌باهم برابرند و در نتیجه AN = DE

ترسیم ـ ازآنچه‌گفته شد راه ترسیم مربع چنین می‌شود: با معلوم‌بودن سه‌نقطهٔ A و M و N خط AN را رسم می‌کنیم و از M خطی می‌گذرانیم‌که برAN در P عمود باشد. روی این خط ابتدا از M و درهمان طرف P طولـی به‌اندازهٔ طول ANجدامی‌کنیم‌تا K بدست‌می‌آید. خط AK را رسم‌می‌کنیم

و از N عمودی بر AK فرود می‌آوریم که از برخورد آنها D رأس مربع معین‌می‌شود و مربع را رسم می‌کنیم.

حل مسائل ویژهٔ سال‌دوم علوم تجربی

۱۱۲/۷ـ فرستنده : **مهندس جواد فیض**

تصاعد حسابی را مشخص کنید که در آن داریم:

$$t_3=10 \ ، \ t_n=8 \ ، \ t_{2n}=4/5$$

حل ـ اگر t_1 جملهٔ اول و r قدر نسبت تصاعد باشد داریم:

$$\begin{cases} t_3=t_1+2r=10 \\ t_n=t_1+(n-1)r=8 \\ t_{2n}=t_1+(2n-1)r=4/5 \end{cases}$$

طرفین معادله‌ها را دوبه‌دو هم از هم کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} 3r-nr=2 \\ nr=-3/5 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{matrix} r=-0/5 \\ n=7 \end{matrix} \right. \Longrightarrow t_1=11$$

۱۱۲/۸ـ هرگاه اندازهٔ کمان x بین ۱۷۰۰ گراد و ۱۸۰۰ گراد محصور باشد و داشته باشیم $25tg^2x=144$ مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید:

$$S=12cotgx+5sinx-cosx$$

حل ـ چون ۱۷۰۰ گراد برابر است با چهار دور و ربع دایره و ۱۸۰۰ گراد برابر است با چهار دور و نیم دایره پس انتهای کمان x در بخش دوم دایرهٔ مثلثاتی واقع است بنابراین:

$$25tg^2x=144 \Longrightarrow tgx=-\frac{12}{5}$$

$$\text{و} \quad cotgx=-\frac{5}{12}$$

$$cosx=\frac{-1}{\sqrt{1+tg^2x}}=-\frac{5}{13}$$

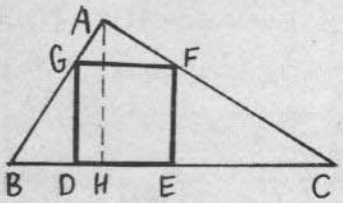
$$sinx=tgx\cdot cosx=\frac{12}{13}$$

$$S=12(-\frac{5}{12})+5\times\frac{12}{13}+\frac{5}{13}=0$$

۱۱۲/۹ـ مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. دراین مثلث مربع DEFG راچنان محاطی کنیم که DE بر BC و F و G به‌ترتیب بر CA و AB واقع باشند. ثابت کنید که:

$$\overline{DE}^2=BD\cdot EC$$

حل ـ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در دو مثلث BAH و CAH داریم:



$$\frac{DG}{AH}=\frac{BD}{BH} \quad \text{و} \quad \frac{EF}{AH}=\frac{CE}{CH}$$

طرفین این دو رابطه را نظیر به نظیر درهم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{DG\cdot EF}{AH^2}=\frac{BD\cdot CE}{BH\cdot CH}$$

اما داریم:

$$DG\cdot EF=DE^2$$

و می‌دانیم که :

$$AH^2=BH\cdot CH$$

بنابراین :

$$DE^2=BD\cdot CE$$

حل مسائل ویژهٔ سال دوم ریاضی، فیزیک

۱۱۲/۱۰ـ فرستنده : **امیرقلی سلیمانی** دبیر ریاضی آبادان

ثابت کنید که اگر $A=B\cap C$ آنگاه:

۱) $A\times A=(B\times B)\cap(C\times C)$

۲) $A\times A=(B\times C)\cap(C\times B)$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$A=B\cap C \Longrightarrow A\subset B \text{ و } A\subset C$$

$$A\times A\subset B\times B \text{ و } A\times A\subset C\times C$$

$$A\times A\subset(B\times B)\cap(C\times C) \quad (I)$$

برعکس؛ هرگاه داشته باشیم:

$$(x,y)\in(B\times B)\cap(C\times C)$$

به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (x,y)\in(B\times B) \\ (x,y)\in(C\times C) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\in B \text{ و } y\in B \\ x\subset C \text{ و } y\in C \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x\in B\cap C \Longrightarrow x\in A \\ y\in B\cap C \Longrightarrow y\in A \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (x,y)\in A\times A$$

$$(B\times B)\cap(C\times C)\subset A\times A \quad (II)$$

از (I) و (II) صحت رابطهٔ (۱) محقق می‌شود.

ثانیاً ـ به‌ترتیب داریم:

$$A=B\cap C \Longrightarrow A\subset B \text{ و } A\subset C$$

$$A\times A\subset B\times C \text{ و } A\times A\subset C\times B$$

$$A\times A\subset(B\times C)\cap(C\times B) \quad (i)$$

برعکس هرگاه داشته باشیم:

$$(x,y)\in(B\times C)\cap(C\times B)$$

به‌ترتیب خواهیم داشت :

$$\begin{cases}(x,y)\in(B\times C)\\(x,y)\in(C\times B)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\in B \text{ و } y\in C\\x\in C \text{ و } y\in B\end{cases}$$

$$x\in B \text{ و } x\in C \Longrightarrow x\in B\cap C \Longrightarrow x\in A$$

$$y\in B \text{ و } y\in C \Longrightarrow y\in B\cap C \Longrightarrow y\in A$$

$$\Longrightarrow(x,y)\in A\times A$$

$$(B\times C)\cap(C+B)\subset A \quad (ii)$$

از (i) و (ii) صحت رابطهٔ (۲) محقق‌است.

۱۱۲/۱۱ـ ترجمه از فرانسه

مجموعهٔ زیر داده شده است:

$$E=\{-۵،-۴،-۳،-۲،-۱،۰،۱،۲،۳،۴،۵\}$$

تابع f را از E برروی E طبق قانون زیر تعریف می‌کنیم:

$$x\longmapsto f(x)=\frac{۹}{۲x-۱}$$

۱) حوزه و دامنهٔ تابع f را معین کنید.

۲) نمودار پیکانی ونمودار دکارتی تابع f را رسم کنید.

۳) تابع معکوس تابع f و مقدار آن را مشخص کنید.

حل ـ ۱) چون $f(x)$ عضوE است پس‌عدد صحیح است بنابراین $۲x-۱$ مقسوم‌علیه ۹ است و:

$$۲x-۱=\pm۱ \text{ یا } \pm۳ \text{ یا } \pm۹$$

$$x=۰ \text{ یا } ۱ ، -۱ ، ۲ ، -۴ ، ۵$$

ازبین این عددها فقط در ازای ۴ـ، ۱ـ، ۲، ۵ مقدار $f(x)$ به E تعلق دارد .

$$x=-۴ \text{ و } f(-۴)=-۱ ،$$

$$x=-۱ \text{ و } f(-۱)=-۳$$

$$x=۲ \text{ و } f(۲)=۳ \text{ و } x=۵ \text{ و } f(۵)=۱$$

پس E' حوزه و V دامنهٔ تابع f عبارتند از:

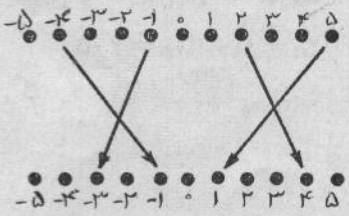
$$E'=\{-۴،-۱،۲،۵\}$$

$$V=\{-۳،-۱،۱،۳\}$$

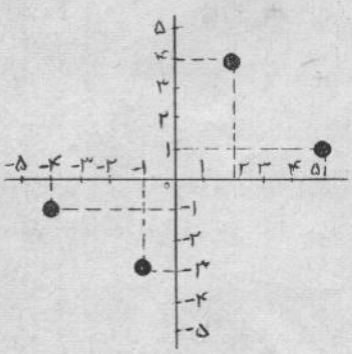
۲) تابع f به‌صورت زیرمشخص می‌شود:

$$f=\{(-۴،-۱)،(-۱،-۳)،(۲،۳)،(۵،۱)\}$$

نمودار پیکانی‌آن را می‌توانیم چنین رسم کنیم



نمودار دکارتی‌تابع به‌شکل زیر است



۳) بـــرای تعیین مقدار تابع معکوس f فرض‌می‌کنیم $y=f(x)$

پس :

$$y=\frac{۹}{۲x-۱}$$

$$y(۲x-۱)=۹$$

$$x=\frac{۹+y}{۲y}$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{۹+f(x)}{۲f(x)}$$

با توجه به جفتهای مرتب f خواهیم داشت:

$$f^{-۱}=\{(-۳-۱) ، (-۱،-۴) ، (۱،۵) ، ۳،۲)\}$$

۱۱۲/۱۲ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید:

$$\begin{cases}\sqrt{۱-۱۶y^۲}-\sqrt{۱-۱۶x^۲}=۲(x+y)\\x^۲+y^۲+۴xy=\frac{۱}{۵}\end{cases}$$

حل ـ دوطرف معادلـهٔ اول را به‌تـوان دو می‌رسانیم ، می‌شود :

$$۲-۱۶(x^۲+y^۲)-$$

$$-۲\sqrt{۱-۱۶(x^۲+y^۲)+۲۵۶x^۲y^۲}=$$

$$=۴(x^۲+y^۲+۲xy)$$

بافرض $x^2+y^2=p$ و $xy=q$ از این معادله پس‌از ساده کردن و از معادلهٔ دوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 1-10p-4q=\sqrt{1-16p+256q^2} \\ 5p+20q=1 \end{cases}$$

مقدار p را ازمعادلهٔ دوم بدست‌آورده درمعادلهٔ اول‌قرار می‌دهیم بعد از اختصار خواهیم داشت:

$$650q^2-85q+2=0 \Longrightarrow q=\frac{1}{10} \text{ یا } \frac{2}{65}$$

$$q=\frac{1}{10} \Longrightarrow p=-\frac{1}{5} \quad , \quad q=\frac{2}{65} \Longrightarrow p=\frac{1}{13}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=-\frac{1}{5} \\ xy=\frac{1}{10} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=-\frac{1}{5} \\ xy=\frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=0/1 \end{cases}$$ ریشهٔ حقیقی‌ندارد

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{13} \\ xy=\frac{2}{65} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=\pm\frac{3\sqrt{65}}{65} \\ xy=\frac{2}{65} \end{cases}$$

$$65Z^2\pm3\sqrt{65}Z+2=0$$

$$Z=\pm\frac{2\sqrt{65}}{65} \text{ یا } \pm\frac{\sqrt{65}}{65}$$

$$(x=\pm\frac{2\sqrt{65}}{65} \text{ و } y=\mp\frac{\sqrt{65}}{65}$$

$$(x=\pm\frac{\sqrt{65}}{65} \text{ و } y=\pm\frac{2\sqrt{65}}{65})$$

۱۱۲/۱۳ـ فرستنده : **قوام نحوی**

در یك تصاعد حسابی قدر نسبت عددی است صحیح، جملهٔ اول ۵ است و عددهای ۵۷ و ۱۱۳ از جمله‌های آن می‌باشند. این تصاعد را مشخص کنید.

حل‌ـ اگر r قدر نسبت تصاعد باشد داریم:

$$\begin{cases} 57=5+nr \\ 113=5+kr \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} nr=52 \\ kr=108 \end{cases}$$

r مقسوم‌علیه مشترك عددهای ۵۲ و ۱۰۸ است. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك این دوعدد ۴ است پس r برابراست با یکی از عددهای ۱،۲،۴ و تصاعد مورد نظر به‌یکی از صورتهای زیر است .

۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ...

۵ ، ۷ ، ۹ ، ۱۱ ، ...

۵ ، ۹ ، ۱۳ ، ۱۷ ، ...

۱۱۲/۱۴ـ فرستنده : **مهندس جواد فیض**

معلوم‌کنید به‌ازای چه‌مقدار از tgx عبارت زیر کمترین مقدار را دارا است

$$S=\frac{a^2}{\cos^2 x}+\frac{b^2}{\sin^2 x} \quad , \quad ab>0$$

حل‌ـ عبارت را برحسب tgx و $cotgx$ می‌نویسیم:

$$S=a^2tg^2x+b^2cotg^2x+a^2+b^2$$

$$S=(atgx-bcotgx)^2+2ab+a^2+b^2$$

$$S=(atgx-bcotgx)^2+(a+b)^2$$

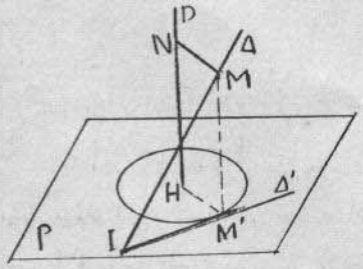
a و b هم‌علامتند پس $(a+b)^2$ مثبت است و S وقتی کمترین مقدار را دارد که:

$$atgx-bcotgx=0 \Longrightarrow tg^2x=\frac{b}{a} \text{ و}$$

$$tgx=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

۱۱۲/۱۵ـ خط ثابت D و نقطهٔ ثابت P در خارج‌آن داده شده‌است. خط متغیر Δ از P می‌گذرد و طول عمودمشترك دو خط D و Δ برابر با طول ثابت l است. مکان هندسی خط Δ را پیداکنید.

حل‌ـ صفحهٔ P را عمودبرD می‌گذرانیم: اگرMN عمودمشترك دوخط D وΔ ، I نقطهٔ برخورد Δ با صفحهٔ P و H نقطهٔ برخورد D با P باشد، چونMN



برD عمود است‌پس با صفحهٔ P موازی است و درنتیجه باتصویر خودش برصفحهٔ P برابر است:

$$HM'=NM=l$$

زاویهٔ IMN قائمه است و یك ضلعش با صفحهٔ P موازی است. پس‌تصویر این‌زاویه یعنی‌زاویهٔ IM'H نیزقائمه‌است‌وΔ' بردایرهٔ به‌مرکز H و به‌شعاع l واقع درصفحهٔ P مماس است.

مکان خط Δ صفحه‌ای است که برصفحهٔ P عمود است و فصل‌مشترك آن باصفحهٔ P خطی است که از I می‌گذرد و بردایرهٔ (H) مماس است. چون I خارج دایره است و از آن دو مماس بردایره می‌توان رسم کردبرای Δ دو صفحهٔ مکان وجود دارد.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۱۲/۱۶ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

کمترین فاصلهٔ سهمی $y=x^2$ از خط $x-y=1$ را بدست آورید.

حل ـ نقطهٔ $M(\alpha,\alpha^2)$ از سهمی را در نظر می‌گیریم فاصلهٔ این نقطه از خط $x-y-1=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|\alpha-\alpha^2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|\alpha^2-\alpha+1|}{\sqrt{2}}$$

d وقتی می‌نیمم است که تابع $\beta=\alpha^2-\alpha+1$ می‌نیمم باشد؛

$$\beta'=2\alpha-1 \ ,\ \beta'=0 \implies \alpha=\frac{1}{2}$$

$$d=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right|=\frac{3}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

یادآوری ۱ـ می‌توانیم مقدار d را چنین بنویسیم:

$$d=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1\right|$$

$$d=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|$$

d وقتی‌می‌نیمم است که $\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2=0$ و در نتیجه $d=\frac{3\sqrt{2}}{8}$

یادآوری ۲ـ اگر خطی موازی با خط $x-y=1$ بر سهمی مماس کنیم، فاصلهٔ بین خط مماس و خط داده شده برابر است با کمترین فاصلهٔ سهمی از آن خط

۱۱۲/۱۷ـ فرستنده : مهندس جواد فیض

ثابت کنید که در هرچهار ضلعی محدب $ABCD$ داریم:

$$\cos A\cos B-\cos C\cos D=\sin A\sin B-\sin C\sin D$$

حل ـ داریم:

$$A+B=2\pi-(C+D)$$

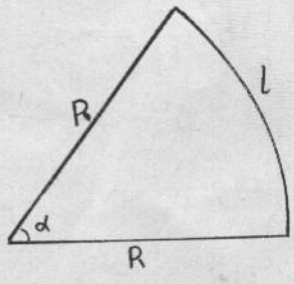
$$\cos(A+B)=\cos(C+D)$$

از بسط این رابطه، رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید.

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۱۲/۱۸ـ فرستنده : سعید درودیان

سیمی به‌طول ۲۰ متررا به‌شکل پیرامون قطاعی ازدایره در می‌آوریم. شعاع این دایره چقدر باشد تا مساحت قطاع ماکسیمم باشد؟



حل ـ زاویهٔ قطاع را α و شعاع آن را R می‌گیریم. در این صورت طول کمان آن می‌شود $l=R\alpha$ و مساحت آن می‌شود $S=\frac{R^2\alpha}{2}$. امابنابه فرض:

$$2R+l=20 \ ,\ 2R+R\alpha=20$$

$$\alpha=\frac{20-2R}{R} \implies S=10R-R^2$$

$$S'=10-2R=0 \implies R=5$$

مساحت قطاع در ازای $R=5$ ماکسیمم است.

۱۱۲/۱۹ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

برمنحنی نمایش تابع $y=x^2$ نقطهٔ C به‌طول α داده شده است. خطی دراین نقطه برمنحنی مماس می‌کنیم. خط Δ موازی این مماس رسم شده و منحنی را در دو نقطهٔ A و Bقطع کرده است. میانهٔ AM از مثلث ABC منحنی را غیر از A در N تلاقی‌می‌کند. طول AN را برحسب طول MN حساب کنید.

حل ـ ضریب‌زاویه‌ای مماس‌برمنحنی درنقطهٔ $C(\alpha,\alpha^2)$ از آن می‌شود $m=2\alpha$. با فرض $A(\beta,\beta^2)$ معادلهٔ خط Δ می‌شود:

$$y=2\alpha(x-\beta)+\beta^2$$

از حل‌این معادله با معادلهٔ سهمی خواهیم داشت:

$$x^2-2\alpha(x-\beta)+\beta^2=0$$

$$(x-\beta)(x+\beta-2\alpha)=0$$

$$B(2\alpha-\beta \ \text{و}\ (2\alpha-\beta)^2)$$

چون M وسط BC است پس:

$$M\left(\frac{3\alpha-\beta}{2}\ ,\ \frac{(2\alpha-\beta)^2+\alpha^2}{2}\right)$$

معادلهٔ خط AM بامعلوم بودن مختصات نقطه‌های A و B بدست می‌آید:

$$y=\frac{1}{3}(5\alpha+\beta)(x-\alpha)+\alpha^2$$

از حل این معادله با معادلهٔ سهمی خواهیم داشت:

$$N\left(\frac{5\alpha-2\beta}{3}\ ,\ \frac{5\alpha-2\beta}{9}\right)$$

نسبت طولهای AN و MN همان نسبت تصویرهای آنها روی $x'x$ است پس:

$$\frac{AN}{MN}=\frac{x_N-x_A}{x_N-x_M}=\frac{\frac{5}{3}(\alpha-\beta)}{\frac{1}{6}(\alpha-\beta)}=10$$

بنابراین: $AN=10MN$

۱۱۲/۲۰ـ ترجمه

ثابت کنید که:

$$\cos^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^4\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)+$$
$$+\cos^4\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

حل ـ داریم:

$$\cos\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

$$\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x+\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$S=\cos^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4 x+$$
$$+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos^4 x+\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$1-\frac{1}{2}\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\cos^2 2x$$

$$S=2-\frac{1}{2}(\sin^2 2x+\cos^2 2x)=\frac{3}{2}$$

۱۱۲/۲۱ـ فرستنده: **مهندس جواد فیض**

هرگاه داشته باشیم:

$$tg\alpha=\frac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta}\quad و\quad tg\beta=\frac{x-\sin\theta}{\cos\theta}$$

ثابت کنید که داریم:

$$\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\alpha)=\sin\alpha\cos\beta$$

حل ـ از رابطه‌های داده شده داریم:

$$x=tg\beta\cos\theta+\sin\theta$$

$$x=\frac{tg\alpha}{tg\alpha\sin\theta+\cos\theta}$$

از حذف x خواهیم داشت:

$$tg\alpha-tg\alpha\sin\theta(tg\beta\cos\theta+\sin\theta)=$$
$$=\cos\theta(tg\beta\cos\theta+\sin\theta)$$

دوطرف‌را در $\cos\alpha\cos\beta$ ضرب می‌کنیم، بعداز اختصارخواهیم داشت:

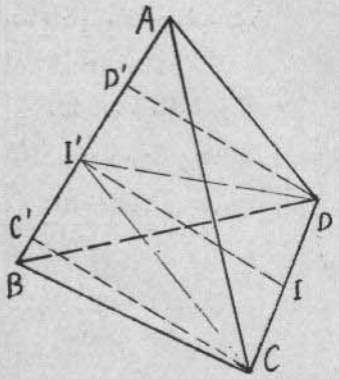
$$\sin\alpha\cos\beta=\sin\theta\cos\beta(\cos\theta\cos\alpha+\sin\alpha\sin\theta)+$$
$$\cos\theta\sin\beta(\sin\alpha\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)(\sin\theta\cos\beta+$$
$$+\cos\theta\sin\beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\alpha)$$

۱۱۲/۲۲ـ ترجمه از فرانسه

در چهار وجهی ABCD دو وجه به‌یال AB با هم معادلند. ثابت کنید که J وسط CD پای عمود مشترك دو یال AB و CD است.



حل ـ هرگاه C' ، J' و D' به‌ترتیب تصویرهای C ، J و D روی AB باشد بنا به فرض داریم:

$$AB\cdot CC'=AB\cdot DD'$$

$$CC'=DD'$$

سه خط CC' ، JJ' و DD' که بر AB عمودند با یك صفحه

موازیند، پس بنا به‌قضیهٔ تالس در فضا داریم:

$$\frac{C'J'}{J'D'}=\frac{CJ}{JD}\Longrightarrow C'J'=J'D'$$

نقطهٔ J' وسط $C'D'$ است. دو مثلث $CC'J'$ و $DD'J'$ باهم برابرند و نتیجه می‌شود که $CJ'=J'D$ در نتیجه JJ' عمود منصف CD است . به عبارت دیگر JJ' عمود مشترك دو خط AB و CD است.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم‌دبیرستان

۱۱۲/۲۳ـ فرستنده : **سعید درودیان**

نقطهٔ M روی محور سهمی $y^2=2px$ و به‌فاصلهٔ a از رأس سهمی داده شده است. نزدیکترین نقطهٔ سهمی به‌نقطهٔ M را معین کنید.

حل ـ داریم $M(a,0)$ و فرض می‌کنیم β عرض نقطهٔ غیر مشخص N از سهمی باشد پس $N\left(\frac{\beta^2}{2p}\text{ و }\beta\right)$ در این صورت :

$$d=\overline{MN}^2=\left(a-\frac{\beta^2}{2p}\right)^2+\beta^2$$

$$d=\frac{1}{4p^2}[\beta^4-4p(a-p)\beta^2+4a^2p^2]$$

$$d=\frac{1}{4p^2}[\beta^2-2p(a-p)]^2+(a-p^2)$$

d وقتی می‌نیمم است که:

$$\beta^2-2p(a-p)=0\Longrightarrow\beta=\pm\sqrt{2p(a-p)}$$

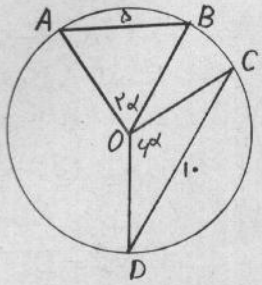
$$N[x=a-p \text{ و } y=\pm\sqrt{2p(a-p)}$$

جواب وقتی قبول است که $a\geqslant p$ باشد.

۱۱۲/۲۴ـ فرستنده : **مهندس جواد فیض**

در یك دایره دو وتر به‌طولهای ۵ و ۱۰ رسم شده است به‌قسمی که زاویه‌های مرکزی روبروی آنها 2α و 6α می‌باشند. شعاع دایره را حساب کنید.

حل ـ



در مثلثهای ABO و CDO داریم:

$$\angle A=\frac{\pi-2\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

$$\angle C=\frac{\pi}{2}-3\alpha$$

$$\frac{5}{\sin 2\alpha}=\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{R}{\cos\alpha}$$

$$R=\frac{5\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{5}{2\sin\alpha}$$

$$\frac{10}{\sin 6\alpha}=\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)}=\frac{R}{\cos 3\alpha}$$

$$R=\frac{10\cos 3\alpha}{2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}=\frac{5}{\sin 3\alpha}$$

$$\frac{5}{2\sin\alpha}=\frac{5}{\sin 3\alpha}=\frac{5}{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}$$

$$2\sin\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\sin\alpha>0\Longrightarrow 4\sin^2\alpha=1\Longrightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

$$R=\frac{5}{2}\times 2=5$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم‌ریاضی

۱۱۲/۲۵ـ ترجمهٔ از فرانسه

برمنحنی نمایش تابع $y=\sqrt[3]{x^2}$ نقطهٔ $A(a\ ,\ b)$ را چنان پیدا کنید که اگر سطح محصور بین منحنی و محور $x'x$ و خط $x=a$ را حول $x'x$ دوران دهیم و سطح محصور بین منحنی و محور $y'y$ و خط $y=b$ را حول $y'y$ دوران دهیم، دو حجم حادث معادل باشند.

حل ـ برای محاسبهٔ V_1 با توجه به‌اینکه منحنی از مبدأ می‌گذرد داریم :

$$g(x)=y^2=x^{\frac{4}{3}}$$

$$G(x)=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$$

$$V_1=\frac{3\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=\frac{3\pi a^2\sqrt[3]{a}}{7}$$

برای محاسبهٔ V_2 فرض می‌کنیم x تابع y باشد:

$$h(x)=x^2=y^3$$

$$H(x)=\frac{1}{4}y^4+C \ ، \ V_2=\frac{\pi b^4}{4}=\frac{\pi a^2\sqrt[3]{a^2}}{4}$$

$$V_1=V_2 \Longrightarrow 12\pi a^2\sqrt[3]{a}=7\pi a^2\sqrt[3]{a^2}$$

$$a=\left(\frac{12}{7}\right)^3 \Longrightarrow A\left(x=\frac{1728}{343} \text{ و } y=\frac{144}{49}\right)$$

۱۱۲/۲۶ـ نمایش هندسی تابع زیر را در فاصلهٔ $-\pi$ تا $+\pi$ رسم کنید

$$x=\frac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x}$$

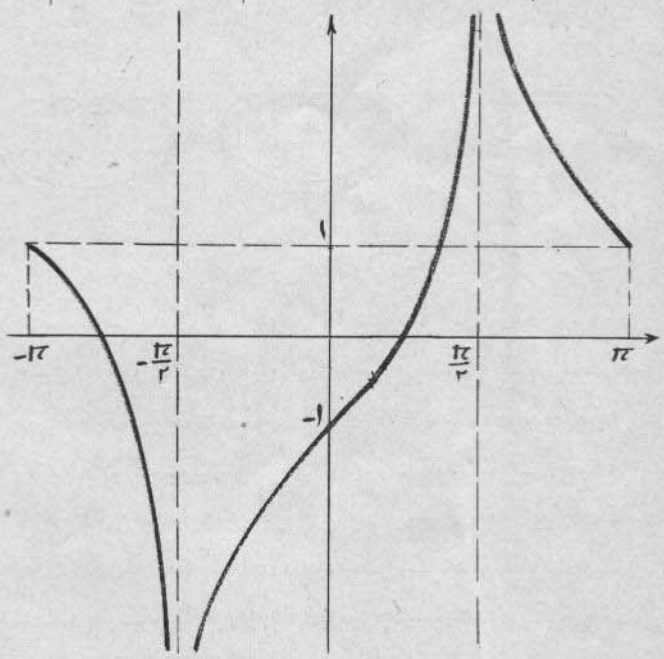
حل ـ در فاصلهٔ مورد نظر تابع به‌ازای همهٔ مقادیر x مگر $x=\pm\frac{\pi}{2}$ معین‌است و داریم:

$$y'=\frac{2\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x}{\cos^3 x}$$

$$=\frac{2tg^2 x-tg x+1}{\cos x}$$

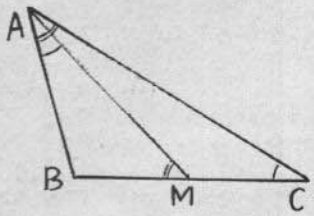
صورت کسر اخیر همواره مثبت است، پس علامت مشتق همان علامت $\cos x$ است

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
y'			$-$				$+$					$-$	
y	1	↘	0 ↘	$-\infty$	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	$+\infty$ $+\infty$	↘	1



۱۱۲/۲۷ـ درمثلث ABC میانهٔ AM رارسم‌می‌کنیم، هرگاه دو مثلث ABM و ABC متشابه باشند و اندازهٔ زاویهٔ C برابر ۳۰ درجه باشد، اندازه‌های زاویه‌های دیگر مثلث را حساب کنید.

حل ـ



از تشابه دو مثلث نتیجه می‌شود.

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BM}{AB} \Longrightarrow$$

$$AB^2=\frac{BC^2}{2} \Longrightarrow BC=AB\sqrt{2}$$

اگر اندازهٔ زاویهٔ BAC به x نشان‌داده شود در مثلث ABC داریم.

$$\frac{AB}{\sin 30}=\frac{BC}{\sin x} \Longrightarrow \frac{2AB}{1}=\frac{AB\sqrt{2}}{\sin x}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x=45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

$$C=30^\circ \text{ و } A=45^\circ \Longrightarrow B=105^\circ$$

$$C=3^\circ \text{ و } A=135^\circ \Longrightarrow B=15^\circ$$

۱۱۲/۲۸ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

مطلوبست ترسیم مثلث ABC درصورتی‌که اندازه‌های ضلع a وزاویهٔ A از آن معلوم استو رابطهٔ زیر درآن برقرار است‌که k عدد حقیقی معلومی است:

$$\cos\frac{C}{2}=k\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

حل ـ در هرمثلث رابطهٔ زیر برقرار است:

$$c=r\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}\right)=\frac{r\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

بنابراین رابطهٔ داده شده به‌صورت $\frac{c}{r}=k$ در می‌آید. ازمثلث ABC ضلع a، زاویهٔ A ونسبت ضلع c برشعاع دایرهٔ محاطی داخلی معلوم است. برای رسم مثلث، زاویهٔ xA_1y را برابربا A رسم می‌کنیم و دایرهٔ دلخواهی داخل آن مماس بر دو ضلع رسم می‌کنیم.روی A_1x طول A_1B_1 را به‌اندازهٔ k برابرشعاع دایره جداکرده از B_1 مماس بردایره رسم می‌کنیم تا Ay را در C تلاقی کند. اکنون روی CB_1 طول CB را به‌اندازهٔ a جداکرده از B موازی با A_1B_1 رسم می‌کنیم تا ضلع CA_1 را در A تلاقی کند.

۱۱۲/۲۹ـ هرگاه رقم یکان مجموع دوعددصفر باشد،

ثابت کنید که مجذورهای این دو عدد در رقم یکان برابرند.

حل ـ دوعددرا a و b می‌گیریم. به‌فرض $a+b$ مضرب ۱۰ است و چون:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

پس a^2-b^2 نیزمضرب ۱۰است. عدد a^2-b^2 از راست‌به‌رقم صفر ختم می‌شود پس دو عدد a^2 و b^2 در رقم یکان برابرند.

۱۱۲/۳۰ـ دوعدد‌طبیعی a و b داده شده است به‌قسمی که نسبت به هم اول می‌باشند. عددهای طبیعی p و q را بدست آورید که داشته باشیم:

$$\frac{p^{q+1}-1}{p^q-1}=\frac{a}{b}$$

حل ـ عددهای $A=p^{q+1}-1$ و $B=p^q-1$ هر دو بر $p-1$ بخش پذیرند. دو عدد A و B غیراز $p-1$ مقسوم‌علیه مشترك ندارند زیرا اگر α مقسوم‌علیه مشترك دیگر آنهاباشد، α باید $A-B=p^q(p-1)$ رابشمردپس α مقسوم علیهی از p^q است. اما هیچ مقسوم‌علیه p^q نمی‌تواند A و B را بشمرد. بنابراین داریم:

$$a=\frac{p^{q+1}-1}{p-1} \quad و \quad b=\frac{p^q-1}{p-1}$$

$$p^{q+1}-1=a(p-1) \qquad (1)$$

$$p^q-1=b(p-1) \qquad (2)$$

از حذف $p-1$ بین این دو معادله نتیجه خواهد شد

$$p^q=a-b \qquad (3)$$

مقدار (۳) را در (۲) منظور می‌کنیم نتیجه می‌شود

$$a-b-1=b(p-1) \implies p=\frac{a-1}{a}$$

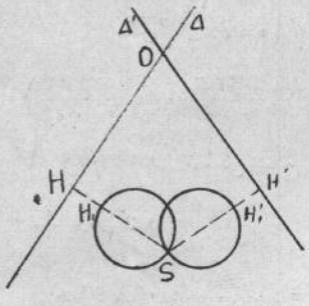
و از رابطهٔ (۳) مقدار q بدست می‌آید.

برای امکان مسئلهٔ لازم است که b مقسوم‌علیه $a-1$ و همچنین $a-b$ توان q ام کامل باشد.

۱۱۲/۳۱ـ دو خط متقاطع Δ و Δ' داده شده است. مکان هندسی نقطه‌های S را پیدا کنید به قسمی که در انعکاس به قطب S دو خط Δ و Δ' به دو دایرهٔ متساوی تبدیل شوند.

حل ـ مطابق با شکل در انعکاس به قطب S و به قوت p خطهای Δ و Δ' به‌دایره‌های به‌قطرهای SH_1 و SH_1' تبدیل می‌شوند و داریم:

$$\overline{SH}\cdot\overline{SH_1}=\overline{SH'}\cdot\overline{SH_1'}=p$$



هرگاه دایرها برابر باشند $SH_1=SH_1'$ و نتیجه می‌شود که $SH=SH'$. پس مکان‌هندسی S نیمساز زاویهٔ دو خط Δ و Δ' است.

پاسخ تستهای ریاضی

۳۲ـ ب ۳۳ـ د ۳۴ـ الف ۳۵ـ ب ۳۶ـ ب

۳۷ـ ج ۳۸ـ ج ۳۹ـ الف ۴۰ـ ج ۴۱ـ الف

۴۲ـ ب ۴۳ـ ج ۴۴ـ د ۴۵ـ د ۴۶ ـ ب

۴۷ـ الف ۴۸ـ ج ۴۹ـ ب ۵۰ـ الف ۵۱ـ ب

۵۲ـ د ۵۳ـ د ۵۴ـ د

کلیسای چهار بعدی (دنباله از صفحهٔ ۱۴۳)

درضمن نواری به‌همین طول‌ولی‌بدون داشتن گره می‌توان درست کرد. روبان گره خورده را در جعبهٔ کبریتی گذارده و در ضمن‌دو انتهای آنرا بوسیلهٔ نوار چسپ می‌بندیم: باقی‌می‌ماند که این‌جعبه را با جعبه‌ای که دارای روبان گره نخورده است‌تعویض کنیم. فکر کنم که کشیش این تعویض را به‌هنگامی که جعبه را برای اولین بار زیرمیز برد و قبل‌از اینکه «به‌خاطر بیاورد» که علامتی‌روی‌آن نگذاشته‌ام، انجام داده‌باشد. جعبهٔ پیشاپیش‌آماده شده می‌بایدبوسیلهٔ موم‌نرم به زیرمیز چسبیده‌باشد. پس کافی‌است در یك‌لحظه جعبهٔ‌آماده نشده را روی‌یك قسمت دیگرموم تکیه داد و جعبهٔ تقلبی‌را خارج کرد. بنابراین قبل از اینکه علامتی روی جعبه گذارده باشم! تعویض صورت گرفته بوده است. وقتی

دنباله در صفحهٔ ۱۶۸

مسائل برای حل

برای دانش‌آموزان سال اول دبیرستان

ترجمه از فرانسه

۱۱۳/۱ـ سه مجموعهٔ A ، B و C از مجموعهٔ مرجع M داده شده است.

۱) ثابت کنید که :

$$A-(B\cup C)=(A-B)-C$$

۲) تساوی زیر چه موقع برقرار است

$$A-(B-C)=(A-B)\cup C$$

۱۱۳/۲ـ مجموعهٔ مرجع عبارتست از مجموعهٔ زیر مجموعه‌های مجموعهٔ عددهای طبیعی. نسبت به‌این مجموعهٔ مرجع ، معادلهٔ مجموعه‌ای زیررا حل و بحث کنید:

$$\{۱،۲،\dots،p\}\cup X=\{۱،۲،۳،\dots،n\}$$

۱۱۳/۳ـ فرض می‌کنیم که:

$$x=a+b+c+d \qquad y=a+b-c-d$$
$$z=a-b+c-d \qquad t=a-b-c+d$$

هرگاه داشته باشیم:

$$ab(a^۲+b^۲)=cd(c^۲+d^۲)$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$xy(x^۲+y^۲)=zt(z^۲+t^۲)$$

۱۱۳/۴ـ معادلهٔ زیر را حل و بحث کنید

$$(a^۲-b^۲)(x^۲+۱)=۲(a^۲+b^۲)x$$

۱۱۳/۵ـ دایرهٔ ثابت به‌مرکز O و نقطهٔ ثابت B واقع بر آن داده شده است. براین دایره نقطهٔ دلخواه C را در نظر می‌گیریم و در B و C مماسهایی بردایره رسم می‌کنیم که در A برخورد می‌کنند. هرگاه C بردایره تغییر کند؛ مطلوبست تعیین:

۱) مکان هندسی ω مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC

۲) مکان هندسی I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC.

۱۱۳/۶ـ زاویهٔ قائمهٔ xOy و نقطهٔ A داخل آن داده شده است. بر A دو خط عمود برهم D و Δ را چنان رسم کنید که D با Ox در M و Δ با Oy در N برخورد کند به‌قسمی که طول پاره خط MN مقدار معلوم a باشد.

برای دانش‌آموزان سال دوم علوم تجربی

۲۱۳/۷ـ فرستنده : **قوام نحوی**

جمله‌های دوم، پنجم و چهاردهم یك تصاعد حسابی به‌تصاعد هندسی می‌باشند. قدرنسبت این تصاعد هندسی پیدا کنید.

۱۱۳/۸ـ حاصل‌عبارت زیررا به‌ساده‌ترین صورت‌بدست آورید

$$A=\cos^۲(x+y)+\cos^۲(x-y)-\cos ۲x\cos ۲y$$

۱۱۳/۹ـ روی یك خط Δ سه‌نقطهٔ A و B و C را انتخاب می‌کنیم که B بین A و C واقع باشد و به‌قطرهای AB و AC دو نیمدایره در دو طرف خط Δ رسم می‌کنیم. خط دلخواه D عمود بر Δ نیمدایره‌ها را در M و N و Δ را در H تلاقی می‌کند. به‌فرض $AB=۲a$ و $AC=۳a$ نسبت $\frac{AM}{AN}$ را بدست آورید.

برای دانش‌آموزان سال دوم ریاضی، فیزیك

۱۱۳/۱۰ـ ترجمه از فرانسه

همهٔ ماتریسهای مربع X از مرتبهٔ ۲ را تعیین کنید به‌قسمی که :

$$X^۲=۰$$

۱۱۳/۱۱ـ ترجمه از فرانسه

m و n را تعیین کنید برای آنکه سه ماتریس زیر بستگی خطی داشته باشند ـ این بستگی را نیز معین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} ، \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} ۷ & m \\ ۴ & n \end{bmatrix}$$

۱۱۳/۱۲ـ درصفحهٔ محورهای مختصات دو نقطهٔ A و B داده شده است. به‌قسمی که $OA=a$ و $OB=b$. هرگاه c فاصلهٔ نقطهٔ دیگر C از O مبدأ مختصات باشد و داشته باشیم:

$$c(4c-3a-3b)=(a+b)^2$$

مقدار c را برحسب a و b بدست‌آورید. در حالتی که $A(1,2)$ و $B(-2,4)$ و C برعمود منصف AB واقع باشد، مختصات C را بدست آورید.

۱۱۳/۱۳ـ حاصل عبارت‌زیر که به‌صورت چند جمله‌ای نوشته شود دارای چند جمله است؟

$$S=(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)^2$$

۱۱۳/۱۴ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

هرگاه داشته باشیم:

$$2\cos\alpha=\log_{\frac{5}{8}}\alpha \quad \text{و} \quad 2\sin\beta=\log_{\frac{5}{8}}\beta$$

ثابت کنید که:

$$\alpha>\frac{\pi}{6}>\beta$$

۱۱۳/۱۵ـ ترجمه

در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع a نقطهٔ P را بر AC و نقطهٔ Q را بر BC می‌گیریم به‌قسمی که:

$$CQ=AP=x$$

باشد.

۱) طول PQ را برحسب a و x حساب کنید.

۲) اگر O وسط PQ و M قرینهٔ C نسبت به O باشد ثابت کنید که M بر AB واقع است.

۳) اگر S نقطهٔ برخورد PQ با امتداد AB باشدثابت کنید که:

$$SM^2=SA\cdot SB$$

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۱۳/۱۶ـ منحنی C نمایش هندسی تابع:

$$y=4-(x+2)^2$$

را رسم‌کنید. هرگاه S رأس این منحنی و A و B نقطه‌های برخورد آن با $x'x$ باشد، مماسهایی که در S و A و B بر منحنی رسم شوند با AB ذوزنقه‌ای می‌سازند. مساحت این ذوزنقه را حساب کنید.

۱۱۳/۱۷ـ تابع:

$$y=2\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\omega t$$

را می‌توان به‌صورت تابع:

$$y=A\cos(2\omega t+\varphi)+B$$

تبدیل کرد. مقادیر A و B و φ را پیدا کنید.

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۱۱۳/۱۸ـ برمنحنی C نمایش هندسی تابع $y=\frac{1}{x}$ نقطهٔ M را درنظر می‌گیریم. در M خطی قائم برمنحنی C رسم می‌کنیم که‌نیمساز بخشهای اول و سوم محورها را در I و نیمساز بخشهای دوم و چهارم محورها را در J تلاقی می‌کند. ثابت کنید که M وسط IJ است و نتیجه بگیرید که طول OM نصف طول IJ است.

۱۱۳/۱۹ـ منحنیهای نمایش تابعهای زیررا دریك‌شکل رسم کنید و مختصات نقطه‌های برخورد آنها را حساب کنید.

$$y=-|x^2-8x+15|$$

$$y=\frac{-x+3}{x-1}$$

۱۱۳/۲۰ـ α و β دو کمان حاده و متمایزند. ثابت کنید که:

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{tg\alpha+tg\beta}{2}$$

۱۱۳/۲۱ـ عبارت زیررا برحسب $\cos 2x$ بنویسید.

$$y=\cos^2x-\cos^2 2x+\cos x\cos 3x$$

۱۱۳/۲۲ـ ترجمه از فرانسه

کرهٔ (S) به‌مرکز O و به‌شعاع R و وتر AB از آن داده شده است. بر سطح این کره دو دایرهٔ α و β را به‌ترتیب به‌قطبهای A و B رسم می‌کنیم. اگر M نقطهٔ مشترك این دو دایره باشد به‌فرض آنکه مجموع مساحتهای دو عرقچین کروی به رأسهای A و B و به قاعده‌های α و β برابر با πm^2 باشد، مکان M را تعیین و بحث کنید.

برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۱۱۳/۲۳ـ از سهمی P خط هادی به‌معادلهٔ $x=1$ و

یك نقطهٔ $M(3,1)$ معلوم است و می‌دانیم که کانون بـرخطی واقع است که از M موازی با خط هادی رسم می‌شود. معادلـهٔ این سهمی را بنویسید.

۱۱۳/۲۴ـ عدد $a>1$ را پیدا کنید به‌قسمی کـه مساحت سطح محصور بین منحنی تابع

$$y=a\sin x+\sin x\cos x$$

و محور $x'x$ در فاصلهٔ صفر تـا π بـرابـر با ۴ واحد سطح باشد.

برای دانش‌آموزان کلاس ششم ریاضی

۱۱۳/۲۵ـ مساحت سطح محصور بین سهمیهای به‌معادله های $y^2=2px$ و $x^2=2qy$ را بدست آورید.

۱۱۳/۲۶ـ اولا منحنی نمایش تابع زیررا در فاصلهٔ صفر و π رسم کنید

$$y=\frac{tg^2x+1}{(3tgx-4)^2}$$

ثانیاً سطح محصور بین منحنی و محور $x'x$ و دو خط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{4}$ را حساب کنید.

۱۱۳/۲۷ـ در مثلث ABC طول میانهٔ AM با ضلع AB برابر است‌وتفاضل دو زاویهٔ B و C برابر با 30° است. اندازه‌های زاویه‌های مثلث را حساب کنید.

۱۱۳/۲۸ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

در مثلث ABC زاویهٔ C منفرجه است و نیمساز داخلی زاویهٔ B ضلع AC را به‌دو قطعهٔ $AE=3$ و $CE=2$ تقسیم کرده است و M مرکز دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ B می‌باشد. مرکز دایره‌ای که برسه نقطهٔ C و E و M می گذرد روی امتداد BC واقع است. مقدار $\sin A$ را حساب کنید.

۱۱۳/۲۹ـ ترجمه

عدد طبیعی N را تعیین کنیـد به‌قسمی کـه مقدار تقریبی نقصانی جذرکسر $\frac{N}{13}$ با تقریب $\frac{1}{3}$ برابر با $\frac{4}{3}$ و با تقریب $\frac{1}{4}$ برابر بـا $\frac{5}{4}$ باشد.

۱۱۳/۳۰ـ ترجمه

کسـر $\frac{a}{b}$ را پیدا کنید که مجذورکسر دیگر باشدوعلاوه برآن مولد کسر اعشاری متناوب سادهٔ با دورهٔ گردش یك رقمی باشد.

۱۱۳/۳۱ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

در مثلث ABC که G نقطهٔ برخورد میانه‌ها است، از رأس C خطی‌می گذرانیم که‌میانه‌های AA' و BB' را در A_1 و B_1 قطع کند. ثابت کنید:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GA_1}}+\frac{\overline{BG}}{\overline{GB_1}}=1$$

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ سال اول دبیرستان

۱۱۳/۳۲ـ فرض‌می کنیم که α عدداصلی‌مجموعهٔ عددهای طبیعی، β عدد اصلی‌مجموعهٔ عددهای طبیعی فرد و γ عدد اصلی مجموعهٔ عددهای طبیعی‌زوج باشد کدام‌یك ازگزاره‌های زیرغلط است.

الف‌ـ $\alpha=\beta=\gamma$ ب‌ـ $\alpha=\beta+\gamma$

ج‌ـ $\alpha>\beta$ و $\alpha>\gamma$ د‌ـ $\beta=\gamma$

۱۱۳/۳۳ـ به‌فرض $A=\{x,y,z,t\}$ و $B=\{x,t\}$ حاصل $B-A$ چیست؟

الف‌ـ $\{y,z\}$ ب‌ـ $\{x,t\}$

ج‌ـ A د‌ـ $\varnothing$

۱۱۳/۳۴ـ رابطهٔ $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[6]{a^2}$ چه موقع درست است.

الف ـ هیچگاه　　ب ـ همواره

ب ـ وقتی که $a \geq 0$　　د ـ وقتی که $a < 0$

۱۱۳/۳۵ـ حاصل $\sqrt{\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}}}$ کدام است

الف ـ $2+\sqrt{3}$　　ب ـ $2-\sqrt{3}$

ج ـ $7-4\sqrt{3}$　　د ـ $7+4\sqrt{3}$

۱۱۳/۳۶ـ درمثلث ABC دو رأس B و C ثابتند اما رأس A تغییرمی کندبه‌قسمی که اندازهٔ زاویهٔ A مقدار ثابت‌باقی می‌ماند. برای O مرکز دایرهٔ محیطی‌مثلث کدام حکم‌زیر صحیح است؟

الف ـ O تغییرمی کند ومکان‌آن یك خط است

ب ـ O تغییرمی کند ومکان‌آن‌یك دایره است

ج ـ O تغییرمی کند ومکان آن‌کمانی از یك دایره است

د ـ O ثابت می‌ماند

درحدود برنامهٔ سال دوم ریاضی، فیزیك

۱۱۳/۳۷ـ دومثلث‌زیر نسبت به چه خط قرینه‌اند.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الف ـ نسبت به محور x　　ب ـ نسبت به‌خط $y=x$

ج ـ نسبت به‌خط $y=-x$　　د ـ نسبت به محور y

۱۱۳/۳۸ـ هرگاه M وسط AB باشد به‌فرض:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

بردار $\overrightarrow{OM}$ کدام است

الف ـ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$　　ب ـ $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

ج ـ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$　　د ـ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

۱۱۳/۳۹ـ خطی‌از $A(4,0)$ می گذردوبردایرهٔ به‌مرکز O (مبدأ مختصات) و بـه‌شعاع $\frac{12}{5}$ مماس‌است. عرض‌نقطهٔ تلاقی این خط با محورyها کدام‌است؟

الف ـ ± 3　　ب ـ ± 4

ج ـ ± 12　　د ـ ± 5

۱۱۳/۴۰ـ در تصاعد هندسی کـه قدر نسبت آن q است نسبت جملهٔ $2n$ ام به جملهٔ n ام‌کدام است؟

الف ـ q^{n-1}　　ب ـ $\dfrac{2n-1}{q\,n-1}$

ج ـ q^n　　د ـ $q^{\frac{2n-1}{n-1}}$

۱۱۳/۴۱ـ درمثلث ABC داریم $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$ و $\cos B = \frac{\sqrt{10}}{10}$. اندازهٔ زاویهٔ C کدام‌یك ازمقادیر زیرمی‌تواند باشد؟

الف ـ 45°　　ب ـ 135°

ج ـ 60°　　د ـ 120°

۱۱۳/۴۲ـ برای‌آنکه تصویریك لوزی برصفحهٔ P یك مربع‌باشد، چه شرطی‌لازم است؟

الف ـ صفحهٔ P با ضلع‌لوزی موازی باشد

ب ـ صفحهٔ P برقطرلوزی عمود باشد

ج ـ صفحهٔ P با قطربزرگ لوزی موازی باشد

د ـ صفحهٔ P با قطرکوتاه لوزی موازی باشد

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم‌ریاضی

۱۱۳/۴۳ـ منحنی C نمایش تابع $y=-x^2+ax$ منحنی C' نمایش تابع $y=\frac{x}{x-1}$ رابه‌زاویهٔ قائمه‌قطع‌می کند فاصلهٔ رأس C تا مرکزتقارن C' چقدراست؟

الف ـ $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　ب ـ $\frac{\sqrt{13}}{4}$

ج ـ $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　د ـ $\frac{\sqrt{10}}{4}$

۱۱۳/۴۴ـ برای‌کدام‌یك از تابعهای داده شده داریم:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{2x}}(1+tg^2\sqrt{2x})\,tg\sqrt{2x}$$

الف ـ $y=2tg^2\sqrt{2x}$ ب ـ $y=tg^2 2\sqrt{2x}$

ج ـ $y=tg^2\sqrt{2x}$ د ـ $y=tg^2 4\sqrt{2x}$

۱۱۳/۴۵ـ هرگاه داشته باشیم:

$x+y=90^\circ$ و $tgx+tgy=a$

مقدار $\cos x\cos y$ چقدر است.

الف ـ $\frac{1}{a}$ ب ـ a ج ـ $1-a$ د ـ $1+a$

۱۱۳/۴۶ـ در مثلث ABC داریم:

$tgB+tgC+tgBtgC=1$

اندازهٔ زاویهٔ A کدام است؟

الف ـ 45° ب ـ 90°

ج ـ 120° د ـ 135°

۱۱۳/۴۷ـ درکره‌ای مخروط دواری به‌حجم ماکسیمم محاط کرده‌ایم. نسبت حجم کره به حجم‌مخروط چقدر است؟

الف ـ $\frac{8}{27}$ ب ـ $\frac{27}{8}$ ج ـ $\frac{81}{32}$ د ـ $\frac{27}{16}$

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۱۳/۴۸ـ برای منحنی C نمایش هندسی تابع

$$y=x\sqrt{1-\frac{1}{|x|}}$$

کدام حکم زیرصحیح است.

الف ـ منحنی C دومجانب متقاطع دارد

ب ـ منحنی C فقط یك مجانب دارد

ج ـ منحنی C دومجانب موازی باهم دارد

د ـ منحنی C مجانب ندارد

۱۱۳/۴۹ـ حد مشتق تابع زیر وقتی $x\to 0$ کدام است.

$$y=\frac{\sin^3\pi|x|}{x^2}$$

الف ـ صفر ب ـ ∞ ج ـ ± 1 د ـ $\pm\pi^3$

۱۱۳/۵۰ـ دستگاه زیرچند دسته جوابهای حاده دارد.

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x\cos y=1\\ tg^2 y=\cos 2x\end{cases}$$

الف ـ یك‌دسته ب ـ دو دسته

ج ـ به‌تعداد بینهایت د ـ هیچ

۱۱۳/۵۱ـ در مثلثی بین اندازه‌های ضلعها رابطهٔ $a^2=b(b+c)$ برقرار است. در این مثلث کدام رابطهٔ زیر برقرار است:

الف ـ $A=2B$ ب ـ $B=2A$

ج ـ $A=B$ د ـ $B=90^\circ$

۱۱۳/۵۲ـ کوچکترین مضرب مشترك عددهای

$1,2,3,\dots,(n-1),n,(n+1),\dots,2n$

را با M وکوچکترین مضرب مشترك عددهای:

$(n+1),(n+2),\dots,2n$

را با N نشان می‌دهیم. دوعدد M و N نسبت‌به‌هم چگونه‌اند؟

الف ـ $M=N$ ب ـ $M>N$

ج ـ $N<M$ د ـ M ازN بزرگترومضرب آن‌است

۱۱۳/۵۳ـ چند عدد سه رقمی‌وجود داردکه تفاضل آن‌و مقلوبش مجذور کامل است؟

الف ـ فقط یك عدد ب ـ دو عدد

ج ـ بیش‌از دو عدد د ـ هیچ عدد

۱۱۳/۵۴ـ نسبت‌به‌مثلث مفروض چندنقطه‌وجود داردکه اگرآنها راقطب انعکاس‌قرار دهیم بتوانیم سه‌ضلع مثلث را به‌سه دایرهٔ متساوی تبدیل کنیم؟

الف ـ فقط یك‌نقطه ب ـ دو نقطه

ج ـ چهار نقطه د ـ چنین نقطه‌ای وجود ندارد

۱۳۳/۵۵ـ خط Δ از مرکز تقارن هذلولی:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

می‌گذرد و ضریب زاویه‌ای آن $m>\frac{b}{a}$ است. وضع این خط با هذلولی چگونه است؟

الف ـ باآن متقاطع است

ب ـ برآن مماس است

ج ـ مجانب آن است

د ـ باآن نقطهٔ مشترك ندارد

نمونه‌ای از پرسشهای امتحانهای داخلی دبیرستانها

سال اول دبیرستان

ریاضیات عمومی

دبیرستان شهریار قلهك

ـ طرف‌دوم هریك از تساویهای زیر را به‌ساده‌ترین‌صورت بنویسید.

الف : $(A\cap B)\cup(A\cap B')=$

ب : $(A'\cup B')\cap(A'\cup B)=$

ج : $(A-B)\cup(A\cap B)=$

ـ درستی تساویهای زیر را ثابت کنید:

الف : $(A-B)'=B\cup A'$

ب: $A-(A\cap B)=A-B$

ـ ۱۰۰ نفر ازدانش‌آموزان‌دبیرستانی‌درسه‌انجمن‌سخنرانی و روزنامه‌نگاری و شیروخورشید مدرسه شرکت دارند به‌طوری که ۴۰ نفر در انجمن سخنرانی و ۳۵ نفر در انجمن روزنامه نگاری و ۷۰ نفر درانجمن شیروخورشید سرخ و اعضای‌مشترك انجمن‌های سخنرانی و شیروخـورشید ۱۹ نفر و اعضای مشترك انجمن سخنرانی و روزنامه‌نگاری ۱۷ نفر و اعضای مشترك‌هر سه انجمن ۱۴ نفر است.

الف ـ مطلوبست تعیین اعضای مشترك انجمنهای روزنامه نگاری و شیرو خورشید.

پ ـ مطلوبست تعیین اعضائی‌که فقط در انجمن‌سخنرانی هستند.

دبیرستان گروه فرهنگی شیخ‌بهائی

دبیر : جمشید خالقی

ـ تساوی زیر را ثابت کنید:

$$(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$$

ـ حاصل عبارت زیررا با نماد ریاضی بنویسید

$$\{x|x\in N \text{ و } x^2-4=0\}\cup\{x|x\in N \text{ و } x^2-2x=0\}$$

ـ تعدادزیرمجموعه‌های یك‌مجموعهٔ $k+2$ عضوی ازتعداد زیرمجموعه‌های یك‌مجموعهٔ $k+1$ عضوی ۱۶ عدد بیشتراست. عدد k را تعیین کنید.

ـ مجموعهٔ زیر را ساده کنید:

$$[(A'\cup B'\cup C')\cup(A\cap B\cap C)]\cup(A-B)$$

سال دوم ریاضی فیزیك

ریاضیات عمومی

دبیرستان آذر شمارهٔ ۳

دبیر : نوایی، فرستنده : سیما اعظم‌محمد

ـ ثابت کنید که :

$$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$$

ـ هرگاه داشته باشیم :

$$R'=R-\{1\}$$

$$x*b=x+b+xb$$

عضو خنثی و عضو معکوس ($*$ و R') را بدست آورید.

ـ چه رابطه بین x ، y و z برقرار است اگر:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}=0$$

ـ ثابت کنید ($+$ و S) تولید گروه آبلی می‌کند.

$$S=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d\in Z\right\}$$

دبیرستان ابوریحان بیرونی

دبیر : جمشید خالقی

ـ در مجموعهٔ عددهای حقیقی R رابطهٔ φ توسط $x\varphi y \Longleftrightarrow x^2-y^2=x-y$ تعریف گردیده است. آیا می‌توان $4\varphi 4$ و $5\varphi 2$ را نوشت . ویژگیهای این رابطه را بررسی کنید و کلاسهای هم ارزی y را برحسب x حساب کنید.

ـ در مجموعهٔ $\{x ، y ، 1\}$ رابطه‌های زیر را تعریف می‌کنیم.

$$R_1=\{(x,x) ، (y,y) ، (1,1) ، (x,1)\}$$
$$R_2=\{x,y) ، (x,1)\}$$
$$R_3=\{(y,1) ، (x,x)\}$$

نشان دهید که:

$$R_1 \cap R_2=R_2-R_3$$

ـ ماتریس زیر مفروض است:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که A در رابطهٔ $A^2-5A+14I=(0)$ صدق می‌کند. شبکهٔ ماتریس A را رسم و A^{-1} را محاسبه کنید.

ـ مثلث ABC با ماتریس $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ مفروض است. قرینهٔ مثلث را نسبت به محور y و نسبت به‌خط $y=-x$ بدست آورید. ثانیاً مثلث ABC را به‌اندازهٔ 45° دوران می‌دهیم مطلوبست‌رسم مثلث دوران یافته و تعیین مساحت آن.

کلاس پنجم ریاضی

ـ جبر ـ

دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر : جعفری،

فرستندگان : ابوالفضل جنت، علی‌رضا سهرابی، حسین‌غفاری، یوسف نخعی

ـ نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید.

$$y=|2x^2-3|x|+1|$$

ـ ثابت کنید که منحنی (C) نمایش تابع $y=\frac{x+a}{ax+1}$ به‌ازای جمیع مقادیر a از دو نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

ـ نقاطی از منحنی (C) را پیدا کنید که مماس برمنحنی در آن نقاط برخط $x+3y=1$ عمود باشد.

دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۱

دبیر : قاسملو، فرستند : سید علی‌اکبر ریاضی

ـ مشتق تابع زیررا بدست آورید.

$$y=tg^2\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

ـ در تابع زیر مقادیر a و b را تعیین کنید که هرگاه $x \longrightarrow \frac{1}{2}$ مقدار y به‌سمت $-\infty$ میل کند

$$y=\frac{x^2-1}{ax^2-(b+3)x+b}$$

ـ ثابت کنید که به‌ازای جمیع مقادیر m منحنیهای نمایش تابع

$$y=\frac{mx+2m-1}{x+m}$$

در نقطهٔ ثابت برخط ثابت مماسند.

ـ در تابع $y=ax^2+bx+c$ ضرایب را پیدا کنید که منحنی نمایش آن روی محورعرضها برمنحنی $y=\frac{x+3}{-x+1}$ مماس بوده و عرض ماکسیمم آن ۵ باشد.

دبیرستان رازی شیراز

دبیر : جوادپور، فرستنده : غلامرضا سراجی

ـ مکان هندسی وسط پاره خطی که نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y=\frac{2x^2+2m}{x-m+1}$ را به‌هم وصل می‌کند بدست آورید.

ـ نمایش‌هندسی تابع $y=\frac{x+1-|x-1|}{|x|+1}$ را رسم کنید.

ـ از تابع زیر مشتق بگیرید:

$$y=Arctg\sqrt{x^2}+x^x+\sin\cos\sqrt{x}$$

ـ مطلوبست رسم نمایش هندسی تابع :

$$y=x+|x|-2x|x|$$

ـ نقاطی از صفحهٔ محورهای مختصات را پیدا کنید که مختصات آنها در نامعادلهٔ زیر صدق نماید

$$\begin{cases} y^2-2x^2-xy-4y-4x>0 \\ 3y+x+3>0 \end{cases}$$

ـ حد عبارت‌زیر را وقتی $n \longrightarrow \pm\infty$ بدست آورید.

$$A=\left(\frac{5}{9}\times\frac{14}{20}\times\frac{27}{35}\times\dots\times\frac{2n^2-n-1}{2n^2+n-1}\right)$$

ـ معادلهٔقرینه‌منحنی $y=\frac{2x-1}{x+1}$ را نسبت به نقطهٔ $O'(-1 \text{ و } 2)$ تعیین کنید.

دبیرستان رودابه اصفهان

دبیر : قوام نحوی

ـ دو تابع زیر مفروضند:

$$u=\frac{a}{\cos x}-\frac{a^2}{\sin x} \quad \text{و} \quad y=\frac{\sin x+a\cos x}{tg\,x-a^2 \cot g\,x}$$

اولا صحت رابطهٔ زیر را تحقیق کنید: $y\cdot u=a$

ثانیاً ثابت کنید که داریم:

$$\frac{y'}{y}+\frac{u'}{u}=0$$

ـ تابع $y=\frac{1}{\cos x}$ مفروض‌است. ثابت کنید که داریم

$$yy''-y'^2-y^4=0$$

ـ تابع $y=\frac{\sin 4x}{x}$ مفروض است. حد این تابع را به ازای $x=0$ حساب کنید.

ـ معادلهٔ گنگ زیر را حل کنید

$$\frac{x+\sqrt{12a-x}}{x-\sqrt{12a-x}}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$$

ـ مطلوب است رسم نمودار تابع

$$y=x^2+|x^2-4x|$$

ـ تابع (۱) $y=\frac{m^2x-2}{x+m-1}$ مفروض‌است. اولامختصات پارامتری مرکز تقارن منحنی این تابع را یافته و معادلهٔ مکان هندسی آنرا پیدا کرده رسم کنید. ثانیا به‌ازای چه مقدار m مرکز تقارن منحنی این تابع روی نقطهٔ می‌نیمم مکان هندسی واقع‌می‌شود. ثالثا m را طوری بگیرید که خط مماس برمنحنی تابع (۱) در نقطه‌ای به‌طول صفر بر خط $2y+x=0$ عمود شود.

دبیرستان سعدی و ادب اصفهان

دبیر : موحدی ، فرستنده : مرتضی آریا

ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش‌تابع $y=|x^2-2|$ را رسم کنید.

ـ تحقیق کنید کلیهٔ منحنی‌های نمایش تابع $y=\frac{-mx-2}{x+m+1}$ به‌ازای کلیهٔ مقادیر m از دونقطهٔ ثابت‌که مختصات آنها را تعیین خواهید کرد می‌گذرد.

ـ در تابع $y=\frac{-mx-2}{x+m+1}$ مقدارmرا به‌قسمی‌انتخاب کنید که مرکز تقارن آن روی محور y ها باشد.

ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y=\left|\frac{x-2}{x}\right|$ را روی همان دستگاهی رسم کنید که سهمی را رسم کرده‌اید.

ـ درعدهٔ نقاط تلاقی خط به‌معادلهٔ $y=mx-m-1$ با هریك از منحنی‌های نمایش تابع $y=x^2-2$ و $y=\frac{x-2}{x}$ بطورمجزا برحسب مقادیر مختلف m بحث کرده از آنجانتیجه بگیرید این دو منحنی در مرکز دسته خط به معادلهٔ $y=mx-m-1$ بریکدیگر مماس بوده و معادلهٔ مماس مشترك دو منحنی را بنویسید.

ـ مقدار حقیقی تابع زیررا به‌ازای $x=3$ بدست آورید

$$y=\frac{\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{2x+2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}$$

ـ در صورتی که مشتق تابع $f(x)$ برابر $\frac{1}{x^2}$ باشد ، مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع $y=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

دبیرستان گروه فرهنگی شیخ بهائی

دبیر : هدانیا ، فرستنده : لطف‌الله معینی

ـتابع $y=\frac{ax+2}{x+b}$ را درنظر می‌گیریم پارامترهای a و b

راچنان تعیین کنید که طول مرکز تقارن دو برابر عرض آن باشد و

مرکز تقارن برخط $y=x-1$ قرار داشته باشد

ـمطلوبست رسم جدول و نمایش هندسی تابع $y=\frac{x+2}{x-2}$

ـمکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که بنوان از آن نقاط

دو خط مماس عمود بر هم بر منحنی نمایش هندسی تابع

$y=x^2+x+1$ رسم کنید.

ـحد تابع $y=\frac{x\sin x}{\cos x(1-\cos x)}$ وقتی x به‌سمت صفر

میل کند بدست آورید.

ـخط Δ به معادلهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ مفروض است. اگر نقاط

A و B به‌ترتیب محل تلاقی خط Δ با محور xها و با محور yها

باشند،

الف: نقطه‌ای مانند C واقع به‌پاره‌خط AB طوری انتخاب

کنید که $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-4$ باشد.

ب: اگر $a+b=4$ باشد مکان هندسی نقطهٔ C را بدست

آورید.

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر: قمیصی، فرستنده: ناصر ماجدی

ـسهمی (P) به‌معادله:

$$y=m^2x^2+(m\sqrt{a}+1)x+b$$

و منحنی هموگرافیك (H) به معادلهٔ $y=\frac{ax+1}{bx+m}$ مفروضند

اولا بافرض اینکه a و b و m پارامترهای متغیری هستند

مکان $M(a,b)$ را درصفحهٔ دستگاه محورهای مختصات چنان

مشخص کنید که به‌ازای جمیع مقادیر m خط $y=x+1$ بر

(P) مماس بوده و (H) را در دونقطهٔ متمایز قطع کند.

ثانیاً: اگر a و b مقادیر ثابتی فرض شوند و S رأس (P)

و ω مرکز تقارن (H) بوده و نقطهٔ K روی خط به معادلهٔ

$y=\frac{1+(b+1)m^3}{4m^2}$ حرکت کند مطلوبست محاسبهٔ a و b

بطوری که مرکز ثقل مثلث ωSK به‌ازای جمیع مقادیر m روی

خط ثابتی به‌موازات محور xها حرکت کند.

ثالثاً مطلوبست تعیین جدول و رسم منحنی‌های نمایش

تغییرات توابع $y=\frac{4}{9}x^2+x-1$ و $y=\frac{1}{-x+\frac{2}{3}}$ در

یك دستگاه مختصات.

ـخطوط متعامد (Δ) و (Δ') در صفحهٔ دستگاه مختصات

چنان تغییر می‌کنند که طول از مبدأ اولی عدد ثابت α و عرض از

مبدأ دومی عدد ثابت β است.

اولا: معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ تلاقی این دو خط را بدست

آورید.

ثانیاً: اگر A و B نقاط برخورد خط $y=m(x-a)$

به‌ترتیب بامحور xها و yها و نقاط D و C محل تلاقی خط

$y=\frac{-x}{m}+b$ به‌ترتیب با محور xها و yها باشند ثابت کنید

همواره اوساط قطعه خطهای AC و BD و OE بریك استقامتند

(E نقطهٔ برخورد دوخط مزبور و O مبدأ مختصات و a و b ثابت

و m پارامتر متغیر است).

ـ مشتق تابع زیر را بدون ساده کردن بدست آورید.

$$y=\sqrt[3]{\frac{\sin(\pi\cos^2 x)}{tg(\pi\sin\sqrt{2x}}}$$

مثلثات

دبیرستان ادب، سعدی اصفهان

دبیر: همدانی، فرستنده: مرتضی آریا

ـاگر $\sin(2x+y)=7\sin y$ باشد ثابت کنید:

$$3tg(x+y)=4tg x$$

ـمعادلهٔ زیر را حل کرده و جوابهای بین صفر و π آنرا

بدست آورید.

$$\sin 2x\cos(x+\frac{\pi}{4})=\sin(x-\frac{\pi}{4})-\cos 2x$$

ـدرستی اتحاد زیرا تحقیق کنید.

$$\frac{\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)}{\cos(a+b+c)+\cos a+\cos b+\cos c}=$$

$$=tg\frac{a+b}{2}\,tg\frac{b+c}{2}\,tg\frac{c+a}{2}$$

ـ اگر α و β دو ریشهٔ اصلی ومتمایز از معادلهٔ:

$$\cos(x+\lambda)=m\cos 2\lambda$$

باشد ثابت کنید.

$$m=\pm\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{Sec}(\alpha+\beta)$$

ـ اگر:

$$\sqrt{2}\sin x=\sin y-\sin^3 y \text{ و } \sqrt{2}\cos x=\cos^2 y+\cos y$$

باشد ثابت کنید.

$$\pm\sin(x-y)=\cos 2y=\frac{1}{3}$$

ـ اگر تانژانت زوایای A و B و C درمثلث ABC بترتیب تشکیل تصاعد حسابی دهند ثابت کنید.

$$\cos(B+C-A)=\frac{4+5\cos 2C}{5+4\cos 2C}$$

ـ مجموع زیر را حساب کنید:

$$S=\operatorname{Arctg}\frac{3}{5}+\operatorname{Arctg}\frac{3}{29}+\operatorname{Arctg}\frac{3}{71}+\cdots+$$
$$+\operatorname{Arctg}\frac{3}{9m^2-3m-1}$$

ـ اگر A و B و C زوایای حاده و $A+B+C=60^\circ$ باشد ثابت کنید.

$$\operatorname{Sec}A\operatorname{Sec}B\operatorname{Sec}C+$$
$$+2(\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A)=2$$

دبیرستان رازی شیراز

دبیر: جوادپور ، فرستنده : غلامرضا سراجی

ـ ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم زیر را قابل‌محاسبه بالگاریتم کنید.

$$x^2+2x\sqrt{2}-\sqrt{3}=0$$

ـ به‌فرض این که $0<x<\frac{\pi}{3}$ باشد معادلهٔ زیر را حل و بحث کنید.

$$(m-1)\cos 2x+1+m=0$$

ـ مقدار m را چنان تعیین کنید تا تفاضل دو جواب معادلهٔ زیر برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد

$$(m+1)\sin x+2m\cos x=2$$

ـ معادلهٔ $\sin^3 x+\cos^3 x+3\sin\cos x=1$ را حل کنید.

ـ ثابت کنید درهر مثلث نامساوی زیر برقرار است.

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$$

ـ مجموع زیر را حساب کنید

$$S=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\cdots+$$
$$+2^{n-1}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n-1}}$$

ـ صحت تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\cos\operatorname{Arctg}\sin(\operatorname{Arccotg}x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$$

دبیرستان گروه فرهنگی شیخ بهائی

دبیر کمگرلو، فرستنده : لطف‌الله معینی

ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$$

ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$8(\sin^4 x+\cos^4 x)-6=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$$

ـ از رابطهٔ:

$$\operatorname{tg}a=\frac{\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c}{1+\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c}$$

رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$\sin 2a=\frac{\sin 2b+\sin 2c}{1+\sin 2b\sin 2c}$$

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر : قمیصی ، فرستنده : حمیدی

ـ صحت تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{12}=14$$

ـ معادلهٔ زیر را حل کرده جوابهای کلی آنرا بدست آورید.

$$\cos 3x\cdot\cos 4x+\sin 2x\sin 5x=\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{2}$$

ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که بین توابع مثلثاتی زوایای آن رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\frac{\cos(C-B)}{\sin A+\sin(C-B)}=\operatorname{tg}B$$

ـ اگر $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=tg\gamma$ باشد ثابت کنید که.

$$cotg\frac{\alpha+\beta}{2}tg\frac{\alpha-\beta}{2}=tg(\gamma-\frac{\pi}{4})$$

ـ اولا عبارت $1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ را قابل محاسبه لگاریتمی کنید.

ثانیاً نتیجهٔ قسمت اولا را به‌صورت مربع مجموع دو کسینوس نوشته و مقادیری از x را که در ازای آن مقادیر عبارت فوق ماکسیمم یا می‌نیمم می‌شود بدست آورید ($0<x<\pi$ و ماکسیمم و می‌نیمم را باید بدون استفاده از مشتق بدست آورید)

اگر $-\pi<\alpha<\pi$ بوده و داشته باشیم.

$$P=\sqrt{2+2\cos x}\times\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}\times$$
$$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}\times\cdots\times$$
$$\times\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}_{n}}$$

اولا حاصل‌ضرب فوق‌را به ساده‌ترین‌صورت خود درآورید (n تعداد رادیکالها است)

ثانیاً $\frac{P}{2^n}$ را وقتی که n به‌سمت بینهایت میل‌می‌کند بدست آورید.

معرفی کتاب

خوانندگان مجلهٔ یکان اطلاع دارند که در تابستان سال ۱۳۵۴ کتاب به عنوان زیر از طرف دانشمند گرامی آقای غلامرضا عجدی چاپ و منتشر گردید.

نقد و تحقیق دربارهٔ نسبیت همزمانی

مأخوذ از نظریهٔ نسبی آلبرت اینشتین

تألیف: غلامرضا عجدی

۷۲ صفحه ـ بها: ۸۰ ریال

اخیراً جزوهٔ دیگری نیزدر همین زمینه ازطرف معظم‌له چاپ و منتشر شده است با مشخصات:

ناسازگاری یك ناظر برای دو دستگاه

در پاسخ یان مك‌کوشلند ازکانادا

دربارهٔ نظریهٔ نسبی خاص اینشتین

نوشتهٔ: غلامرضا عجدی

در ۵۶ صفحه ـ بها: ۵۰ ریال

مطالب جزوهٔ اخیر مکمل جزوهٔ قبلی‌است و برای آنان که جزوهٔ اول را خوانده‌اند جزوهٔ دوم نیزقابل‌استفاده خواهد بود. این کتاب را می‌توانید از ادارهٔ مجلهٔ یکان بخواهید

پاسخ مسئلهٔ زیر عنوان «فکر کنید»

مندرج در یکان شمارهٔ ۱۱۱

برای تمبرهای روی پیشانی B سه‌حالت می‌توانیم درنظر بگیریم: (۱) قرمز، قرمز، (۲) آبی، آبی (۳) قرمز، آبی.

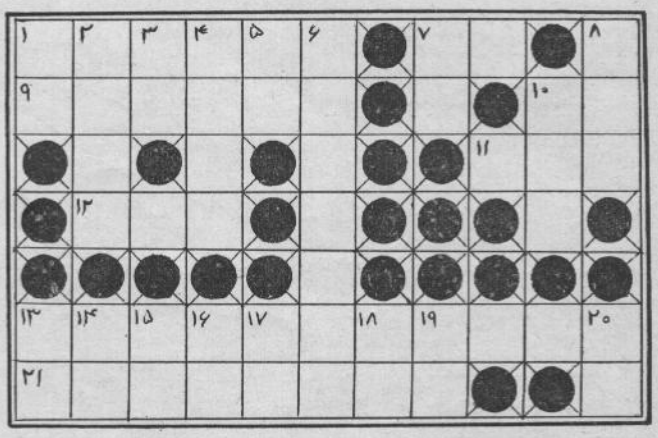
حالت اول را درنظر می‌گیریم. بعد از نخستین پاسخ از جانب سه‌شخص، شخص A می‌تواند چنین استدلال کند:

«تمبرهای من قرمز ـ قرمز نمی‌توانند باشند (زیرا اگر چنین بودآن‌وقت C که می‌دید هرچهار تمبرقرمز به پیشانیهای من و B چسبانیده شده است می‌دانست که تمبرهای پیشانی او آبی ـ آبی است. دراین‌صورت B نیزاستنباط می‌کرد که تمبرهای پیشانیش قرمز ـ قرمز است). پس تمبرهای پیشانی من باید قرمز، آبی باشد».

اما پس از تجدید پرسش، A از رنگ تمبرهای پیشانی خود اظهار بی‌اطلاعی کرده است. ازاین موضوع B استنباط می‌کند که تمبرهای پیشانی او آبی ـ آبی نیست. بنابراین‌جواب مورد نظر «قرمز ـ آبی» است.

جدول اعداد

طرح از: علی ایزدشناس (تاریخ وصول به دفتر مجله: ۱۳۵۱/۵/۸)



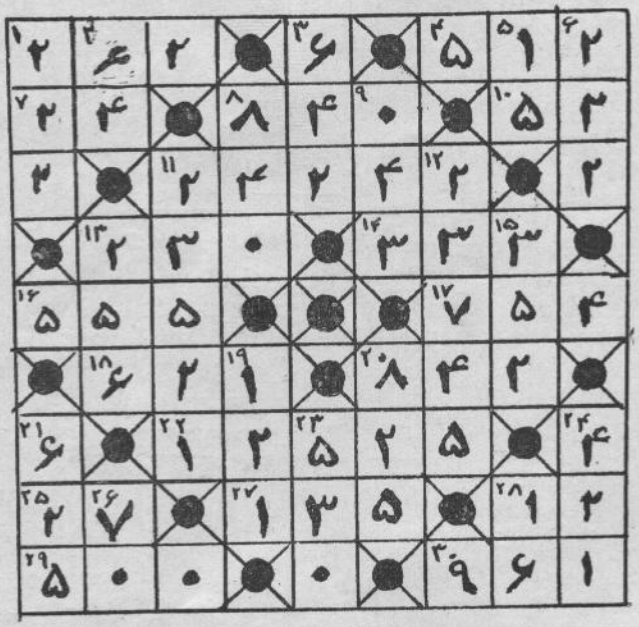
افقی: ۱ـ کوچکترین عدد به‌صورت $\overline{zyxzyx}$ که رقمهایش در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{\overline{xx}}+\frac{1}{\overline{yy}}=\frac{1}{\overline{zz}}$$

۷ـ $\overline{ab}$ که در مبنای $\overline{ab}$ به‌صورت $\overline{ab}$ نوشته می‌شود. ۹ـ بزرگترین عدد شش رقمی در مبنای ۲. ۱۰ـ عدد $\overline{yz}$ که جذرعدد به‌صورت $\overline{xyz}$ است. ۱۱ـ مجذورعدد ردیف ۱۰ افقی. ۱۲ـ عدد سه‌رقمی زوج که توان سوم رقم یکان خود می‌باشد. ۱۳ـ عدد به‌صورت $\overline{abcdefedcba}$ به‌قسمی که a، b، c، d و e تصاعد حسابی باقدر نسبت یك و به‌مجموع ۲۵ می‌سازند و مجموع تمام رقمهای عدد ۵۰ است. ۲۱ـ برابراست با 10^n که n عدد صحیح است و بزرگترین مقدار ممکن را دارا است.

قائم: ۱ـ عدد دورقمی با رقمهای یکسان. ۲ـ به‌صورت $\overline{abba}$ که $\overline{ab}$ همان عدد ردیف ۳ قائم است. ۳ـ بزرگترین عدد دو رقمی که‌مجموع رقمهایش کوچکترین‌مقسوم‌علیه آن‌است. ۴ـ عدد چهاررقمی که‌مجذور کامل‌عدد $\overline{ab}$ است‌واگر به‌هریك از رقمهایش ۳واحدبیفزائیم‌عدد حاصل مجذور کامل عدد ۱ـ $2\overline{ab}$ است. ۵ـ همان‌عدد ردیف ۳قائم. ۶ـ حاصل‌ضرب‌عدد ردیف۳ قائم در 7.10^n ـ دومین‌عدداول‌ازعددهای‌فرما. ۸ـ اگر به‌مبنای۲ نوشته شود بزرگترین عدد هشت رقمی‌در این‌مبنامی‌باشد. ۱۰ـ ترتیب دیگری‌از رقمهای عدد ردیف ۸ قائم و این‌عدد مجذور کامل‌است. ۱۳ـ کوچکترین عدد $\overline{ab}$ که درمبنای ۲۸ به‌صورت $\overline{ba}$ نوشته می‌شود. ۱۴ـ ثلث فاکتوریل عدد ۵. ۱۵ـ ده برابر جذر عدد ردیف ۱۰ افقی. ۱۶ـ از متمم‌حسابی‌خود ۲۰ واحد بیشتراست.

۱۷ـ یك واحدکمتر از مقلوب عدد ردیف ۷ قائم. ۱۸ـ همان عددردیف۱۷قائم. ۱۹ـ همان‌عدد‌ردیف ۱۶ قائم. ۲۰ـ سه‌برابر عدد ردیف ۱ قائم.

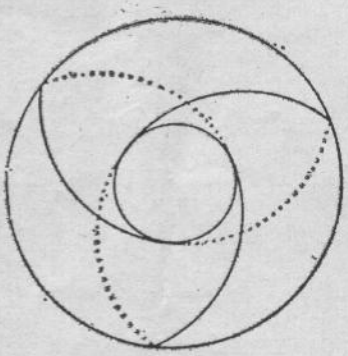


حل جدول شمارهٔ قبل

کلیسای... (دنباله از صفحهٔ ۱۵۶)

کشیش دستش‌را درکنار دست من و برروی جعبهٔ زیرمیز گذارد، ارتعاشاتی‌حس کردم که احتمالامربوط به مالیدن‌یکی‌ازانگشتانش برروی جعبه بوده است.

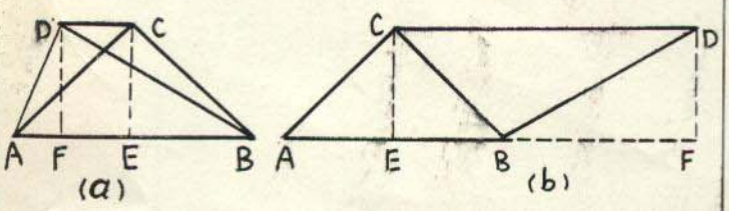
فیچ‌چنی یکی از شعبده‌بازان و ریاضیدانان روش ساده‌ای برای بدست‌آوردن‌نوار-کشی گره خورده ذکر کرده است. برای این منظور کافی است یك حلقهٔ کائوچوئی توخالی همانند حلقه‌هائی که برای پستانك بچه‌ها بکار برده می‌شود، تهیه کرده و آنرادر امتداد خط چین‌مطابق شکل‌ببریم. بدین‌ترتیب‌نواری بستهٔ عریض بدست می‌آید که گره ساده خورده باشد. واضح است که برای وسعت‌بخشیدن به‌آن می‌توان‌آنرا برروی لبه برید.



PROBLEMS & SOLUTIONS

Problems 169- Triangle ABC is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. CD is drawn parallel to AB so that BD=BA. Find the number of degrees in m∠DBC for each of the the two possible positions of D.

Solutions- Draw altitudes CE and DF as in Fig.



In both figures $DF=CE=\frac{AB}{2}=\frac{BD}{2}$. Therefore $m\angle DBA=30°$ in Fig.a and $m\angle DBF=30°$ in Fig. b. Since in both figures $m\angle CBA=45°$, we find $m\angle DBC=15°$ in Fig. a and 105° in Fig. b.

Problom170- A motorist is driving in the state of Euphoria when be comes to a fork in the road. He knows that one of these roads leads to Avon but he does not know which. Standing at the fork of the road is a man who may or may not be a Euphorian. The motorist has been informed that Euphorians always lie, that non-Euphorians always tell the truth, and that this individual knows which road leads to Avon. The motortst is allowed to ask only one question. What question can he ask which wifl enable him to determine which road leads to Avon ?

Solution- The motorist knows that the man standing at the fork of the road always tell the truth or always lies depending on whether he is a Euphorian or a non-Euphorian. Knowing this the motorits is allowed to ask one question for the purpose of determining which of the two roads leads to Avon. The qucstion can take many forms. One form could be «If I were to ask you Does the right-hand road lead to Avon, would you say yes?»

This question will elicit the correct answer whether the respondent is a Fuphorian or not.

Problem 171- A man's salary is reduced by P percent. By what percent would his salary then have to be raised to bring it back to the original amount?

Solution- If S is the man's salary and x is the required percent ;

$$S(1-\frac{P}{100})(1+\frac{x}{100})=S$$

Hence $x=\frac{100P}{100-P}$

انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها
تألیف:علی اصغرهومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هشترودی

روش سادهٔ حل مسائل شیمی
ترجمهٔ: عطاءالله بزرگ‌نیا

تستهای چند جوابی شیمی
ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

راهنمای ریاضیات متوسطه
تألیف: عبدالحسین محصفی
بها: ۳۰ ریال

تستهای هوش
ترجمهٔ: باقر مظفرزاده
بها : ۱۰۰ ریال

معماهای ریاضی
ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار
بها : ۷۵ریال

مسائلی ازحساب استدلالی
تألیف: محمودکاشانی

جلد اول	جلددوم	جلدسوم
۱۲ریال	۱۵ریال	۱۵ریال

مبادی منطق وریاضی جدید
تألیف: غلامرضا عسجدی
بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.