برهان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ دوازدهم ، شمارهٔ : ۲ شمارهٔ مسلسل : ۱۱۱ آذر ـ دی ۱۳۵۴

در این شماره:

واقعیت علمی	عبدالحسین مصحفی	۴۵
نمره‌آوردن هم دلیل بر با استعدادی نیست	علی‌عاطفی	۴۶
بنیان‌گزاران ریاضی جدید؛ کانتور	-	۴۷
آنالیزهای نااستاندارد	ترجمهٔ جاودان‌پارسای‌قمی	۴۸
چند ضلعیهای‌جهت‌دار	ترجمهٔ: مهندس‌جواد فیض	۵۰
روش ترسیم نمودار تابعهای قسمت صحیح و قسمت کسری	ترجمهٔ مهندس‌فتح‌الله‌زرگری	۵۴
فکر کنید	-	۵۶
انتخاب واحد	دکتر علیرضا امیر معز	۵۷
در بارهٔ مثلث ارتفاعی	ترجمهٔ:مهندس‌فتح‌الله‌زرگری	۵۹
باز آموزی‌هندسه، خاصیتهایی‌ازمثلث	ترجمهٔ: عبدالحسین مصحفی	۶۰
حل مسائل یکان شمارهٔ ۱۱۰	-	۶۵
مسائل برای حل	-	۷۵
تستهای ریاضی	-	۷۸
نمونه‌هایی از مسائل امتحانهای داخلی دبیرستانها	-	۸۱
جدول اعداد	یوسف رضازاده	۸۸
Problems & Solutions Multiple choice questions	-	ماقبل‌آخر

بها : ۴۰ ریال

دلگرمی

پس از پخش یکان شمارهٔ گذشته، از اینکه اشاره رفته بود که احتمال قطع انتشار مجله در کار بوده است، بسیاری از دوستداران یکان حضوری و یا از راه نامه نگرانی خود را از این بابت اظهار داشته و درضمن صاحب مجله را دلگرمی داده اند که به کار انتشار مجله به‌هر ترتیب ادامه دهد.

باسپاسگزاری از محبتهای بی‌شائبهٔ این دوستداران، اطمینان می‌دهد که همانگونه قبلا نیز اعلام شده است انتشار مجلهٔ یکان تا آنجا که امکانات اجازه دهد ادامه می‌یابد.

از انتشارات یکان

چاپ پنجم

راهنمای ریاضیات متوسطه

تألیف : عبدالحسین مصحفی

(به قطع کتابهای درسی)

بها: ۳۰ ریال

چاپ دوم

تستهای هوش

ترجمهٔ : باقر مظفرزاده

بها: ۱۰۰ ریال

چند کتاب مفید برای

ششم ریاضی و کنکور

جزوهٔ ترسیمی رقومی تألیف: ارشاقی ـ امیر صدری ۱۵۰ ریال

مسائل ترسیمی رقومی بیست دورهٔ امتحانات نهائی با حل

تألیف: ارشاقی ۱۲۰ ریال

جزوهٔ حساب استدلالی ایرج هاشمی ۱۲۰ ریال

جزوهٔ شیمی آلی صمد سهیمی ۱۵۰ ریال

جزوهٔ آزمون دستور زبان فارسی قضاوتیان ۱۰۰ ریال

مرکز پخش: **کتابفروشی فخر رازی**

تهران ـ خیابان شاه‌آباد ـ تلفن: ۳۱۰۵۵۲

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ دوازدهم ـ شمارهٔ دوم ـ شمارهٔ مسلسل ۱۱۱

آذر ـ دی ۱۳۵۴

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیر مسؤول: بانو نصرت ملک یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زار نو ، نزدیک شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

وجه اشتراک برای دورهٔ دوازدهم : ۳۲۰ ریال

حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زار نو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume XII, number 2. Dec. 1975

subscription : 6$

TEHRAN - P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراک یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفتر مجله اطلاع دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به کتابهایی است که معمولا در پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی در مجله معرفی می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این کتابها از دفتر مجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات کتابهایی که به‌صورت آگهی در مجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین در مورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

واقعیت علمی

هر کس در هر زمینه‌ای وقتی می‌خواهد در بیان واقعیتی تأکید کند، ریاضیات را مثال می‌آورد. در این باره «دو دو تا چهارتا» ضرب‌المثلی است که همگان بکار می‌برند. آیا «دو دو تا چهارتا» یك واقعیت است؟ نه، جمله‌ای از یك زبان قراردادی است که در بیان واقعیتی بکار می‌رود که بشر به تصور خود آن را درك کرده است. اما تصورات بشر غالباً توأم با خطاست. علاوه بر آن، جمله‌های زبان‌قراردادی، یعنی ریاضیات، نیز هر کدام‌درچهارچوب معینی قابل اعمال است. در یك دستگاه ریاضی دو ضرب در دو برابر با چهار است ولی در دستگاه ریاضی‌دیگر دوضرب‌در دو غیراز چهاراست. مثلادر همنهشتی‌به‌میزان ۳ حاصل ۲×۲ برابر با یك است.

بشر واقعیتها را از راه حواس و به‌کمك وسایل و ابزار درك می‌کند و بعدآنها را در ذهن خود تجزیه و تحلیل و یا توجیه و تفسیر می‌کند و بالاخره قوانینی بیان می‌کند که به‌خیال خود بیانگر حقایقند. درصورتی‌که چه بسیار از این قوانین خود قلب حقایق و اشتباه محض می‌باشد! در این باره هیئت بطلمیوس مثالی بارز است.

سالها پیش از بطلمیوس، فیثاغوریها و برخی اندیشمندان دیگر دریافته بودند که زمین به‌دور خورشید می‌چرخد. اما بطلمیوس که ازگروه عقیده‌مندان به‌مرکزیت زمین‌بود، برمبنای مشاهداتی‌که با وسایل آن روزی انجام‌گرفته بود، قوانینی را چنان ماهرانه و استادانه بیان‌داشت‌که قرنها حتی‌کسی جرئت تردید در آنها را به‌فکر خود راه نمی‌داد.

بشر تصور می‌کردکه این قوانین بیانگر حقیقتند و به‌این تصور دهها قرن‌گمراه ماند. بالاخره هم قربانیهایی‌داد تا به‌گمراهی خود اعتراف‌کرد. اماآیا امروزه حقایق را دریافته‌است و دیگر گمراه نیست ؟!

نظریهٔ اینشتین اساس تصورات بشر را در درك حقایق واژگون ساخته است. اما آیا این نظریه با همهٔ ابهت و عظمتی‌که دارد، بشررا به حقیقت نزدیکتر می‌سازد یا برعکس، گمراهی بیشتر اورا موجب می‌شود؟! آنان‌که درکار مطالعات علمی‌اند می‌دانندکه این روزها امواج مخالفت با نظریهٔ اینشتین شدیدتر گشته است.

زودباوری بشراز یك‌سو ، دیر باوری او ازسوی دیگر، گواهی است بر سرگردانی اندیشهٔ وی در وادی نامتناهی حقایق.

عبدالحسین مصحفی

نمره آوردن هم، دلیل بر بااستعدادی نیست

علی عاطفی دبیر دبیرستانهای تهران

سرمقالهٔ شمارهٔ قبل گرامی مجلهٔ یکان تحت عنوان: «نمره نیاوردن ، دلیل بر بی‌استعدادی نیست» مرا که سالها به تدریس ریاضیات اشتغال داشته و دارم برآن داشت که ذیلا مطالبی را به عرض خوانندگان و دوستداران «یکان» برسانم.

در هر کس استعدادی نهفته است که خدادادی است ولی در حالتی که این استعداد به‌راهی صحیح صرف نشود باعث آن خواهدشد که دانش‌آموز مثلا در رشتهٔ ریاضی به‌جای تحصیل زجر بکشد. استعدادهای نهفتهٔ دانش‌آموز با نمرات امتحانی (چه‌بد وچه خوب) سنجیده نمی‌شود ولی‌درحال حاضر چاره‌ای جزاین نیست. به‌نظر این‌جانب، دانش‌آموزی هم که در دوسال چهارم و پنجم ریاضی (یاطبیعی) از دروس ریاضی نمرات خوب و قابل قبول گرفته است نمی‌توان اورا در ریاضیات با استعداد دانست.

موانع متعددی سبب می‌شود که دربارهٔ نوع استعداد دانش‌آموز، قضاوت را تنها به‌عهدهٔ نمرات امتحانی بگذاریم . ما دارای ضوابط کاملی‌جهت‌ورود به رشتهٔ ریاضی‌نیستیم. اگردارای ضوابط کامل جهت پذیرش دانش‌آموز به رشتهٔ ریاضی بودیم، ممکن نبود که دانش‌آموزی مثلا از دروس هندسه و جبرومثلثات تجدید یا مردود شود. درکلاسهای رشتهٔ ریاضی ، دانش‌آموزانی درکنار هم قرارگرفته‌اند که دارای استعدادهای مختلف و در زمینه‌های متعددند. یك‌سال‌درکلاس پنجم ریاضی عهده‌دار تدریس هندسه بودم، چه‌بسیار بودند دانش‌آموزانی که در امتحان‌نمرات عالی گرفتند (در سایردروس‌هم چنین بودند) ولی در مسابقات ورودی دانشگاههای معتبر، موفقیتی کسب‌نکردند. زیرا طریقهٔ حل مسائل ریاضی را حفظ کرده بودند. درکلاس ششم هم وضع تقریباً به همین گونه است. گذشته از امتحانات داخلی که جهت معرفی دانش‌آموز انجام می‌گیرد وکمتر دبیرستانی هم در این مورد سخت‌گیری می‌کند، دانش‌آموزی که به‌کلاس ششم ریاضی یا طبیعی راه می‌یابد، نهایت تلاش خود را برای موفقیت در امتحانات نهائی بکار می‌برد، اگرقبلافقط به‌کلاس روزانه قانع بود، در سال ششم در کلاسهای تقویتی‌هم‌ثبت‌نام می‌کند. به‌علاوه چون ادارهٔ امتحانات در طی چندین‌سال متوالی به‌ندرت تغییری در طراحان سؤالات ریاضی می‌دهند. از اینرو دانش‌آموز کلاس ششم تقریباً با نوع سؤالات امتحانی آشناست . مثلا می‌داند که امکان ندارد در سؤال مثلثات مسائلی در مورد چهار ضلعی محدب، لگاریتم خطوط مثلثاتی ، تعیین فاصله‌ها و ارتفاعات موجود باشد.

مشاهده شده است که با هرتغییر درکادر طراحان سؤال ریاضی ، تغییری هم در سطح نمرات ایجاد شده‌است. اما اینکه مرقوم رفته است : (هرکس برای فراگیری استعداد دارد) ، در این‌مورد هیچگونه شبهه‌ای نیست ولی‌هرکس برای فراگیری ریاضیات استعداد ندارد و ممکن است برای فراگیری سایر شاخه‌های علم وصنعت مستعد باشد.

متأسفانه درحال حاضر نمرات امتحانی تعیین‌کنندهٔ ارزش استعداد دانش‌آموز می‌باشد و معلم ریاضیات هم قادر نیست که دانش‌آموزی را ازکلاسهای‌دورهٔ دوم دبیرستان به‌سال سوم روانه کند. اگرمهره‌های رشتهٔ ریاضی‌به دقت انتخاب می‌شدند، اصولا رفوزگی معنائی نداشت و هیچکدام در برابردانشگاه «مات» نمی‌شدند. اینجاست که جامعهٔ آموزشی ما احتیاج شدیدی‌به معلم راهنما دارد. «راهنما» رابطی است میان دبیرستان و دانش‌آموز و خانوادهٔ دانش‌آموز، مورد اعتماد است وسخنانش حجت است، می‌تواند برخی‌ازدانش‌آموزان و اولیای آنها راقانع کند که همهٔ راهها به دانشگاه ختم نمی‌شود. استعدادهای نهفتهٔ دانش‌آموزان راکشف کند ودرآینده افرادی کارآمدومفیدوسازنده تحویل‌جامعهٔ ما بدهد

تا صاحب‌نظران چه گویند

بنیانگزاران ریاضی جدید؛

ژرژ کانتور

امروزه هرشاخه‌ای از ریاضی با نظـریهٔ مجموعه‌ها آغاز می‌شود. این نظریه، از یك سو شاخه‌های گوناگون ریاضی را باهم تلفیق کرده و زبان واحدی برای بیان آنها بوجودآورده است، از سوی دیگر کاربرد ریاضیات‌را در علمهای دیگر مطابق با پیشرفتهای شگفت انگیز آنها میسر ساخته است. از همه مهمتر آنکه برخی‌از تناقضها درمبانی ریاضیات خودنمائی می کرد که به‌وسیلهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها توانستند آنها را توجیه کنند.

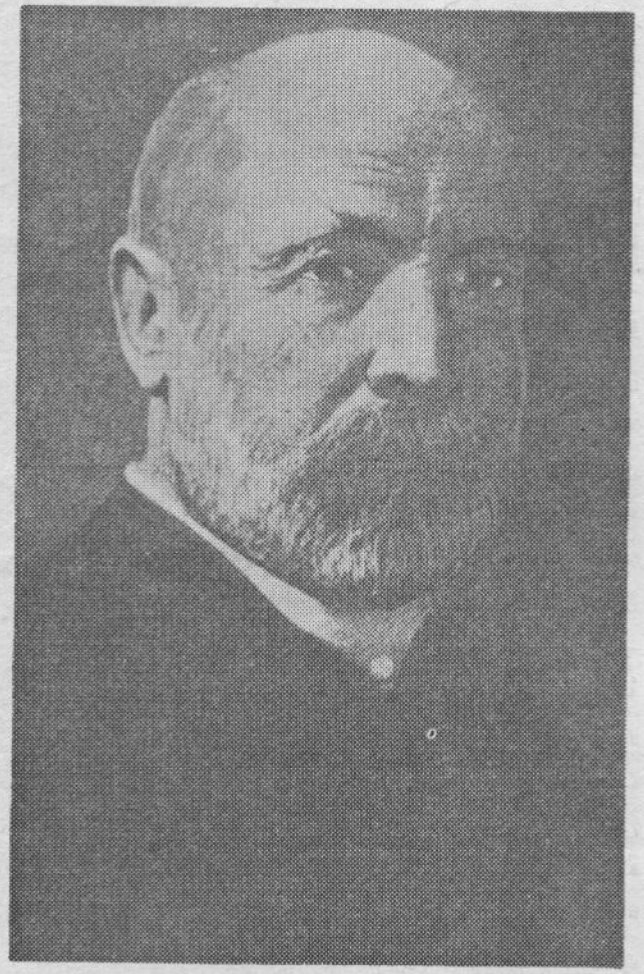
این نظریه با اینهمه اهمیت در سال ۱۸۷۴ تـوسط ریاضیدان بزرگ

Georg Ferdinand Ludwig Philipp CANTOR

بیان شد.

پدر **ژرژ کانتور** دانمارکی مقیم سن‌پترزبورك بـود. ژرژ به سال ۱۸۴۵ در همین‌شهر به دنیا آمد. در سال۱۸۵۶ خانوادهٔ کانتور از روسیه به آلمان کوچ کـرده و در شهر فرانکفورت اقامت‌گزیدند. از ایـن رو بخشی‌از تحصیلات مقدماتی کانتور در روسیه و بخشی دیگـر در آلمان انجام گرفت. اما درهرحال تحصیلات وی درخشان بود. کانتور تحصیلات عالی خود را در دانشگاههای زوریخ ، برلین ، و گوتینگن انجام داد و درسال ۱۸۶۷رسالهٔ دکترای خود را باموفقیت‌گذراند. ژرژ کانتور درسال ۱۸۶۹ به دانشیاری‌و در سال ۱۸۷۴ به مقام استادی ریاضیات در دانشگاه هال آلمان‌نایل‌آمد و تا سال ۱۸۸۴ این‌سمت‌رابرعهده داشت.

کـانتور چه در زمـان دانشیاری و چـه در دوران استادی خویش رساله‌های متعددی در زمینه‌های گوناگون



منتشر ساخت که مهمتریـن آنها حاوی نظریهٔ مجموعه‌ها بود .

بیان نظریهٔ مجموعه‌ها آنچنان انقلابی در ریاضیات بوجودآورد که هیاهوی زیادی را بین ریاضیدانان پـدیـد آورد. بسیاری از ریاضیدانان نامـدارآن روز، و بیش از همهٔ‌آنان **کرونکر**، به مخالفت جدی باکانتور برخاستند. کار این مخالفتها به‌آنجا انجامید که‌کانتور دیوانه شد و به تیمارستان گسیل گردید.

مرگ کانتور در ۱۹۱۸ و در تیمارستان پیش‌آمد.

آنالیزهای نا استاندارد

ترجمه و تنظیم از: جاودان پارسای‌قمی

دنباله از شمارهٔ پیش

درآنالیزهای نااستاندارد از نظریهٔ اعداد حقیقی گرفته تا باقی آنالیز آنچه راکه برای ریاضی‌دان استاندارد مشخص است «فضای استاندارد» می‌نامیم و با حرف M نشان می‌دهیم . زبان قرار دادی‌راکه بوسیلهٔ آن M راشرح‌می‌دهیم با L نشان‌می‌دهیم. هرجملهٔ L گزاره‌ای در مورد M است و البته بایددرست یاغلط باشد. بدین معنی که هرجمله در L یا خود درست است و یانفی آن. مجموعهٔ جملات‌درست را K می‌نامیم ومی گوئیم M «مدل» یا «قالبی» از K است و منظور این‌است که M نهادی ریاضی است که هر گزاره در K وقتی نسبت به M مطرح شود درست است. البته K را به‌طریق مؤثری نمی‌شناسیم. شناخت کامل آن شناخت کلیهٔ مسائل‌ممکن درآنالیزها را به دنبال می کشد. بااین وجود K را به‌عنوان چیزی که به‌خوبی روشن است می‌پنداریم- چیزی که می‌توانیم در اطرافش استدلال و نتیجه گیری کنیم. نکتهٔ مهم و اساسی این است که درکنار M (فضای استاندارد) مدلهاو قالبهای‌نااستانداردی‌هم برای K وجود دارند. که با *M نشان می‌دهیم و در مبنابا M تفاوت دارند. ازنقطه نظرطبیعی اجزائی در *M وجود دارند و روابطی بین این اجزاء برقرار است که اگرعلامات L دوباره به‌صورتی توجیه شوندکه با این اجزاء غلط یا روابط غلط وفق داشته باشند، هرگزاره‌ای از K درست باشد با وجود اینکه معنای دیگری دارد.

مثال‌ساده‌ای ممکن است کمک کند تا موضوع را بهتردرك کنیم. M را مجموعهٔ فارغ‌التحصیلان «دبیرستان‌مرکزی» می‌نامیم و فرض می کنیم که تمام شاگردان عکسی از خود در سالنامهٔ دبیرستان دارند و قطع عکسها هم مربعهای ۵ سانتیمتری هستند. پس M می‌تواندمجموعهٔ مربعهای۵ سانتی-متری مندرج درهرصفحهٔ سالنامه باشد. روشن‌است که با هربیان‌آشکاری هر گزارهٔ صحیح در موردهر کدام‌ازشاگردان دبیرستان مرکزی‌با گزارهٔ صحیحی در مورد مربع ۵ سانتیمتری مشخصی‌در سالنامه مطابقت می کند. با این وجود مربعهای ۵ سانتیمتری بسیاری وجود دارندکه با هیچ شاگردی مطابقت‌نمی کنند. *M وجود دارد وبسیاربزرگتر از M است. به‌عنوان مثال گزارهٔ «احمد لاغرتراز بابك است» وقتی که بوسیلهٔ *M بیان شودگزاره‌ای در مورد مربعهای ۵- سانتیمتری مشخصی‌است. رابطه اگربوسیلهٔ زبان متداول بیان‌شود صحت نخواهدداشت. پس «لاغرتراز» باید به‌صورت شبه رابطه‌ای بین شبه شاگردان (عکسهای شاگردان) بیان شود. می‌توانیم‌شبه رابطهٔ «لاغرتراز» را (با استفاده از علامت « < » باگفتن اینکه مربع ۵ سانتیمتری نظیراحمدنسبت به < وقتی«مقدم‌بر» مربع ۵ سانتیمتری‌نظیر بابك‌می‌باشدکه طبعاً احمد از بابك لاغرتر باشد به‌این ترتیب گزاره‌های صحیح در مورد شاگردان به صورت گزاره‌های صحیح درمورد مربعهای ۵ سانتیمتری بیان می‌شود.

البته در این مثال کل مبحث تاحدودی «من‌درآوردی» است. اگر M فضای استاندارد برای‌آنالیز است‌پس*M فضای نااستاندارد جالب و استثنائی است.

وجود مدلهای‌جالب نااستاندارد اولین‌باربوسیلهٔ منطق‌دان نروژی: توالف اسکولم کشف شد. اودریافت‌که اصول شمارش- اصولی‌که سلسلهٔ «اعداد طبیعی» را تشریح می کردند- مدلهایی نااستاندارد دارندکه شامل اجزاء عجیبی می‌باشندکه در حساب معمولی گنجانده‌نشده‌اند. رابینسون با موشکافی‌دریافت‌که چگونه این‌شاخهٔ عجیب منطق‌جدید نورمال می‌تواند مبنائی برای‌تجدید حیات روشهای «بی‌نهایت کوچك» در محاسبات مشتق گیری و انتگرال باشد. در این تجدید حیات رابینسون برفرضیه‌ای تکیه کردکه اولین‌بار توسط منطقدان روسی آنتولی‌مالکو اثبات شده و به‌دست‌لئون‌هنکین از دانشگاه برکلی کالیفرنیا عمومیت داده شده‌بود. این‌تئوری‌تراکم‌می‌باشدکه به‌تئوری«تراکم» کرت‌گودل مربوط می‌شود وبیانگر این‌است‌که یك دسته‌گزاره‌ها وقتی‌منطقاً مورد قبولند (درگزاره‌ها هیچ نکتهٔ متضادی وجود ندارد) اگر و فقط اگر گزاره دارای مدلی‌باشد، بدین معنی که فضائی‌موجود باشدکه گزاره‌ها درآن قابل قبول باشند.

تئوری تراکم چنین بیان می‌شود . فرض می‌کنیم که مجموعه‌ای از گزاره‌ها در زبان L داریم و فرض می‌کنیم که در فضای استاندارد هرزیرمجموعهٔ محدودی از این مجموعه درست است. پس‌فضای نااستانداردی‌هم وجود دارد که در آن‌تمامی‌مجموعه یکجا درست است.

تئوری‌تراکم‌به‌سادگی ازتئوری تکامل‌پیروی‌می‌کند: اگر تمام زیرمجموعه‌های محدودمجموعهٔ گزاره‌های L درست باشندپس کلیهٔ‌زیرمجموعه‌های‌محدودمنطقاً‌وجوددارند. بنابرهمین‌اصل‌تمامی مجموعه گزاره‌هانیزمنطقاً وجوددارند (ازآنجاکه هر نتیجه گیری تنها می‌تواندازتعداد محدودی گزاره سود ببرد). درکنارتئوری تکامل فضائی (نااستاندارد) وجود دارد که تمامی مجموعه درآن صحیح می‌باشد.

نتیجهٔ مستقیم از تئوری تراکم وجود بی‌نهایت کوچکها است. برای‌دریافتن‌اینکه چگونه این‌نتیجهٔ عجیب ازتئوری‌تراکم ناشی می‌شود، گزارهٔ زیررا در نظر می‌گیریم:

«c عددی بزرگتراز صفروکوچکتر از $\frac{1}{2}$ است»

«c عددی بزرگتراز صفروکوچکتراز $\frac{1}{3}$ است»

«c عددی بزرگتر از صفر وکوچکتر از $\frac{1}{4}$ است» .

و به‌همین ترتیب...

این مجموعهٔ نامحدودی ازگزاره‌هائی است‌که هریك از آنها را می‌توان با زبان قرار دادی L نوشت. نسبت به فضای استاندارد R (اعدادحقیقی) هر زیرمجموعهٔ محدودی از این‌فضا حقیقی‌است.زیرامقدارمحدودی گزاره‌به‌صورت «c عددی‌بزرگتر ازصفروکوچکتراز $\frac{1}{n}$ است» و یکی‌ازگزاره‌ها شامل‌کوچکترین کسر خواهد شد $\left[\frac{1}{n}\right]$ و $\frac{1}{2n}$در حقیقت از صفر بزرگتر ولی کوچکتراز تمامی کسرهائی‌است‌که شمادرسری محدود گزاره‌های خود داشتید و هنوز اگرتمامی مجموعهٔ نامحدود گزاره‌ها را در نظربگیرید، نسبت به‌اعداد حقیقی استانداردغلط و اشتباه است، زیرا یك‌عدد حقیقی مثبت‌هرمقداری راهرچندکوچك‌اختیارکند، $\frac{1}{n}$ از c کوچکترخواهدبود اگر n به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ باشد.

تئوری تراکم‌مالکووهنکین بیانگر این موضوع است‌که: فضای نااستاندارد R^* وجود داردکه شامل‌شبه واقعی‌هایی‌است‌که خود شامل عدد شبه حقیقی c است‌که از هرعددی به‌صورت $\frac{1}{n}$ کوچکتر می‌باشد. در اینجا c بی‌نهایت کوچك است. ازاین گذشته c تمام خصوصیات اعداد حقیقی استاندارد را به تعبیری کاملا قاطع داراست. هرگزارهٔ حقیقی در بارهٔ «واقعی‌های» استاندارد که می‌تواند به زبان قراردادی L بیان شود در مورد واقعی‌های نااستاندارد هم صدق می‌کندکه شامل بی‌نهایت‌کوچك c هم‌می‌گردد (البته بابیانی مشخص).(مربع ۵ سانتیمتری نظیر احمد واقعا از مربع ۵ سانتیمتری نظیربابك لاغرترنیست بلکه گزارهٔ«احمدلاغرترازبابك است» باتوجه‌به بازگوئی‌نااستاندارد ما در مورد «لاغرتراز» صحیح می‌باشد. ازطرف دیگرخواص مشترك اعدادحقیقی‌استاندارد ممکن است باشبه اعداد نااستاندارد وفق نکند. البته اگر این‌خواص به‌زبان‌قرادادی L قابل توجیه باشند.

خصوصیت ارشمیدسی (عدم وجودبی‌نهایت‌کوچکها) Rرا می‌توان بااستفاده از مجموعهٔ نامحدودی ازگزاره‌ها به زبان L چنین بیان‌کرد: برای‌هرعضومثبت (c) از R تمام و البته تعداد محدودی ازگزاره‌های زیرصحیحند.

$$c>1$$
$$c+c>1$$
$$c+c+c>1$$

و غیره

این‌موضوع به‌هرصورت برای شبه واقعی‌های R^* درست نیست: اگر c بی‌نهایت‌کوچك‌است (شبه واقعی)تمامی‌گزاره‌های بالا غلطند. به عبارت دیگرهیچ مقدار محدود cها نمی‌توانند از ۱ بزرگترباشد هرچقدر هم‌که تعدادآنها افزایش یابد. این حقیقت‌که خاصیت ارشمیدسی در دنیای استاندارد درست ولی در دنیای‌نااستاندارد غلط‌است‌ثابت می‌کندکه این خاصیت نمی‌تواند باگزاره‌ای به زبان L بیان شود: فرضیه‌ای که بکار برده‌ایم شامل تعدادی بیشمار ازگزاره‌ها می‌شود. همین تفاوت است که شبه واقعی‌ها رامفید می‌سازد. آنها ظاهراً‌مانند چیزهای‌استاندارد عمل‌می‌کنند ولی‌بازبوسیلهٔ خصوصیات مهمی‌که به‌زبان L فرموله نمی‌شود ازهم جدا می‌باشند.

با وجود اینکه فضای نااستاندارد از نظرتئوری متفاوت‌با فضای استاندارد است، شاید بتوان آنرا عمومیت داده شدهٔ فضای استاندارد تلقی نمود. ازآنجاکه R^* مدلی برای L است. هرگزارهٔ درستی در مورد R ترجمه‌ای در R^* دارد. به‌ویژه اسامی اعداد موجود در R برگردانی به‌عنوان اسامی اعداد موجود در R^* دارند. به‌سادگی می‌توانیم عضو R^* راکه مثلا 2^* نامیده می‌شود با عددآشنای ۲ در R مشخص‌کنیم. پس R^* شامل اعداد حقیقی‌استانداردموجود در R به‌اضافهٔ مجموعهٔ وسیعی‌ازبی‌نهایتها

دنباله در صفحهٔ ۸۷

چند ضلعیهای جهت دار

ترجمهٔ: مهندس جواد فیض

دنباله از شمارهٔ پیش

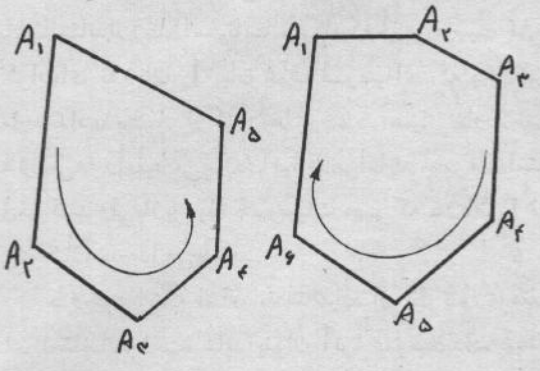
۴ـ چندضلعیهای جهت‌دار

تصور کلی یك مثلث جهت‌دار را در بارهٔ یك n ضلعی جهت‌دار که مجموعه‌ای است از نقاط $A_1, A_2, \ldots, A_n$ واقع در یك صفحه تعمیم می‌دهیم. چندضلعی را می‌توان مسیر پیموده شده توسط نقطه‌ای که در طول مسیر بستهٔ شامل پاره خطهای جهت‌دار که به صورت زیر به‌هم متصل می‌شوند، مشخص کرد:

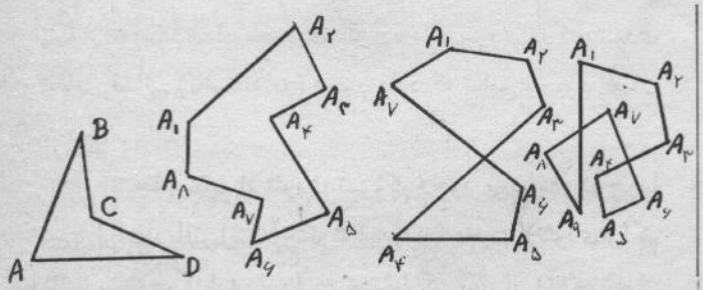
رأس A_1 به رأس A_2 رأس A_2 به‌رأس A_3 ـ .....

رأس A_{n-1} به رأس A_n ـ رأس A_n به‌رأس A_1

پاره خطهای جهت‌دار $\overrightarrow{A_1A_2}$ ، $\overrightarrow{A_2A_3}$ ، $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ ، $\overrightarrow{A_nA_1}$ ، ... ضلعهای چند ضلعی جهت دار $A_1A_2 \cdots A_n$ می‌باشند. چند ضلعی محدب را «جهت‌دار راست» گویند اگر حرکت در جهت مثلثاتی باشد و «جهت‌دار چپ» است در صورتی که حرکت در جهت غیر مثلثاتی باشد.



هر گاه چندضلعی جهت‌دار محدب نباشد (شکل زیر)، تصور این که چگونه می‌توان ترتیب معمولی و معقولانهٔ جملات «جهت‌دار راست» و «جهت‌دار چپ» را بکار برد، مشکل است. این مشکل مخصوصاً وقتی که چندضلعی جهت‌دار خود را قطع می‌کند آشکار است. بنابراین جملات «جهت‌دار راست و چپ» را در مورد چندضلعیهای محدب بکار می‌بریم.



۵ـ مساحت یك چند ضلعی جهت‌دار

بنابر قرارداد اگر چند ضلعی محدب «جهت‌دار راست» باشد مساحتش مثبت، و هرگاه «جهت‌دار چپ» باشد مساحتش عدد منفی است، قدر مطلق این عدد جبری برابر مساحت چند ضلعی غیر جهت‌دار محدب با همین رأسها است. اما مساحت هر نوع چند ضلعی غیر جهت‌دار را چگونه خواهیم دانست؟

در نظر اول جواب چنین سؤال جزئی ساده بنظر می‌رسد ولی کمی فکر، ما را با مشکلات ویژه‌ای مواجه خواهد ساخت.

چندضلعی شکل (بالا a) را ملاحظه کنید، مساحت این چند ضلعی (عدداً) برابر مجموع مساحت چند ضلعیهای جهت‌دار نشدهٔ ABC و ACD است یا نه؟ جواب مثبت است ولی اگر بخواهیم علامتی قائل شویم، چه علامتی به این مساحت نسبت دهیم؟ پیچیدگی مسئله وقتی بیشتر می‌شود که منظور تعیین مساحت چند ضلعی خود قطع کن باشد. درحالتی که مطابق شکل بالا (c و d) چند ضلعیها خود را قطع کنند نه تنها علامت معلوم نیست بلکه حتی قدر مطلق مساحت آنها هم مشخص نیست.

جواب یکی از مسائل مطرح شدهٔ فوق به‌صورت قضیهٔ مهم زیر پیشنهاد می‌گردد:

قضیهٔ ۵ـ اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$ به‌ترتیب، مجموعهٔ n نقطه واقع در یك صفحه باشند (این مجموعه همان n ضلعی جهت‌دار را مشخص می‌کند) نقطه‌ای مثلا O را انتخاب کرده مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$S=(OA_1A_2)+(OA_2A_3+\cdots+(OA_{n-1}A_n)+(OA_nA_1) \qquad (8)$$

یعنی مجموع فوق مساحت مثلثهای جهت‌داری است که رأس مشترك آنها O است که به دلخواه انتخاب شده ، و قاعدهٔ آنها به ترتیب‌پاره خطهای جهت‌داری است که اضلاع چندضلعی جهت‌دار هستند. پس مجموع S به موقعیت نقطهٔ O بستگی ندارد.

اثبات ـ O' نقطهٔ دلخواهی‌است باید ثابت کرد که:

$$(OA_1A_2)+(OA_2A_3)+\cdots+(OA_nA_1)=$$
$$=(O'A_1A_2)+(O'A_2A_3)+\cdots+$$
$$+(O'A_nA_1) \quad (9)$$

با استفاده از قضیهٔ مجموع حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} (OA_1A_2)=(O'A_1A_2)+(O'A_2O)+ \\ \qquad +(O'OA_1) \\ (OA_2A_3)=(O'A_2A_3)+(O'A_3O)+ \\ \qquad +(O'OA_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (OA_iA_{i+1})=(O'A_iA_{i+1})+ \\ \qquad +(O'A_{i+1}O)+(O'OA_i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (OA_{n-1}A_n)=(O'A_{n-1}A_n)+ \\ \qquad +(O'A_nO)+(O'OA_{n-1}) \\ (OA_nA_1)=(O'A_nA_1)+(O'AO_1)+ \\ \qquad +(O'OA_n) \end{cases}$$

از جمع طرفین و ساده کردن رابطه‌های فوق به رابطهٔ (۹) می‌رسیم.

این قضیهٔ ثابت شده راهی برای اندازه‌گیری مساحت هر چندضلعی جهت‌دار مثل $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ ارائه می‌دهد. به‌سادگی مشاهده می‌شود درحالتی که چندضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ محدب‌است عدد S با استفاده از تعریفی که قبلا داده شده (برای چندضلعی جهت‌دار محدب) بدست می‌آید. باتوجه به این نتیجه عدد S را به‌عنوان مساحت $A_1A_2\cdots A^n$ درحالت محدب نبودن چند ضلعی بکار می‌بریم . مساحت چند ضلعی جهت دار $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ را با نماد $(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)$ نشان می‌دهیم پس:

$$(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)=(OA_1A_2)+$$
$$(OA_2A_3)+\cdots+(OA_{n-1}A_n)+$$
$$+(OA_nA_1) \quad (10)$$

که O نقطهٔ دلخواهی‌در صفحه است.

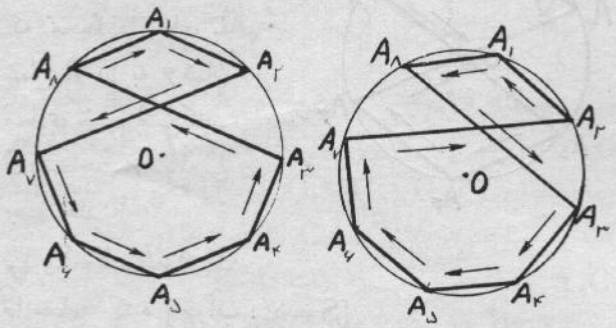
تبصره ـ قبلا ثابت کرده‌ایم که رابطهٔ (۱۰) در حالت $n=3$ برقراراست. به‌ازای $n>3$ رابطهٔ (۱۰) درمورد مساحت هرچندضلعی جهت‌دار اختیاری بکارمی‌آیدبه شرط آنکه نکته‌های زیر رعایت شود:

اولا ـ اگر $A_1A_2\cdots A_n$ چندضلعی‌جهت‌دار محدبی باشد، هرگاه از تعریف اول برای مساحت $A_1A_2\cdots A_n$، یا اینکه از معادلهٔ ۱۰ استفاده کنیم یك عدد را بدست‌می‌آوریم. از اینرو تعریف جدید به هیچ طریق با تعریفات قبلی تناقض ندارد.

ثانیاً ـ قضیهٔ ۵ نشان می‌دهدکه در مجموع S ، آنچه در سمت راست رابطهٔ (۱۰) ظاهرمی‌شود به چگونگی انتخاب‌نقطهٔ O بستگی ندارد، یعنی این مساحت، بنابه تعریف (۱۰)، بطور کامل تنها با خودکثیرالاضلاع تعیین می‌شود.

۶ـ مثالها و مسئله‌ها

مثال۱ـ A_1 ، A_2 ، A_3 ،.... ، A_7 ، A_8 به‌ترتیب نقاطی هستندکه محیط دایره‌ای‌به‌شعاع R را به هشت‌کمان‌مساوی تقسیم می‌نمایند . S مساحت هشت ضلعی جهت دار $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ را محاسبه‌کند. (شکل زیر)



حل ـ مساحت $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8)$ با فرمول (۱۰) محاسبه‌می‌شود. نقطهٔ O را در مرکزدایره اختیار می‌کنیم، مساحت مثلث جهت‌دار OA_1A_2 را با s و مساحت مثلث جهت‌دار OA_2O_2 را با s' نشان داده به آسانی تحقیق می‌کنیم که:

$$(OA_7A_6)=-s \qquad (OA_6A_5)=-s$$
$$(OA_5A_4)=-s \qquad (OA_4A_3)=-s$$
$$(OA_3A_8)=s' \qquad (OA_8A_1)=s$$

و در نتیجه :

$$S=(A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8)=-2s+2s'$$

بالاخره محاسبه می‌کنیم که:

$$|s|=|s'|=R^2\frac{\sqrt{2}}{4}$$

و حاصل می‌شود:

$$S=R^2\sqrt{2}$$

اگرچندضلعی $A_1A_2\cdots A_8$ «جهت‌دار چپ» باشدروابط فوق

برقرار است، و در صورتی که «جهت‌دار راست» بود پس:

$$S=-R^2\sqrt{2}$$

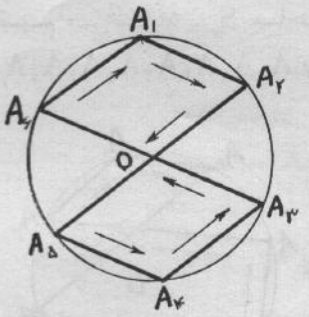
مسئلهٔ ۱ـ P نقطهٔ برخورد وترهای A_3A_8 و A_2A_7 می‌باشد ثابت کنید که:

$$(A_1A_2A_3A_4A_6A_7A_8)=(PA_8A_1A_2)+(PA_7A_6A_5A_4A_3)$$

مسئلهٔ ۲ـ ثابت کنید که اختلاف بین مساحتهای چند ضلعیهای غیر جهت‌دار $PA_3A_4A_5A_6A_7$ و $PA_8A_1A_2$ برابر $R^2\sqrt{2}$ است.

پیشنهاد می‌کنیم که خواننده مسئلهٔ ۲ را با استفاده از بحث «مساحت جهت‌دار» اثبات نماید. مشکلاتی که در انجام این امر رخ می‌دهد، کمك قطعی به خواننده در کاربرد بهتر «مساحت جهت‌دار» در چند ضلعی خواهد نمود.

مسئلهٔ ۳ـ A_1، A_2، A_3، A_4، A_5، A_6 نقاط متوالی هستند که محیط دایره‌ای به شعاع R را به ۶ کمان مساوی تقسیم می‌کند. S مساحت ۶ ضلعی جهت‌دار



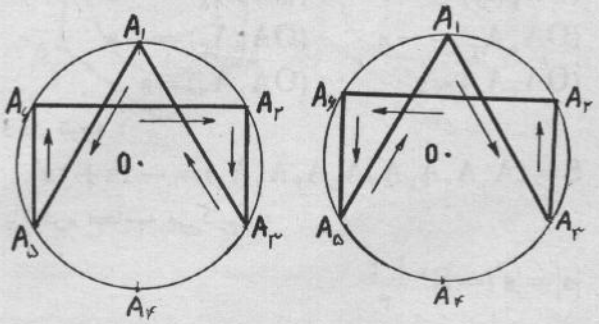
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$

را محاسبه کنید [جواب: $S=0$]

مسئلهٔ ۴ـ مساحت پنج ضلعی جهت‌دار $A_1A_5A_6A_2A_3$ (شکل زیر سمت چپ) را محاسبه کنید.

[جواب: $S=(OA_5A_6)=-R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$]

که نقطهٔ O در مرکز دایرهٔ مفروض و R شعاع آن می‌باشد.



مثال ۲ـ ثابت کنید که مساحت پنج ضلعی جهت‌دار $A_1A_2A_3A_6A_5$ (شکل بالا سمت راست) مساوی است با تفاضل بین دو برابر مساحت مثلث غیر جهت‌دار QA_2A_3 و مساحت مثلث غیر جهت‌دار A_1PQ. P و Q به ترتیب نقاط تقاطع وترهای A_1A_5 و A_1A_3 با وتر A_6A_2 می‌باشد.

اثبات ـ با استفاده از نقطهٔ Q و S مساحت متناظر با فرمول (۸) بدست می‌آوریم:

$$S=[(QA_1A_2)+(QA_3A_2)+(QA_2A_6)]+[(QA_6A_5)+(QA_5A_1)]$$

$$S=(QA_3A_2)+[(QA_6A_5)+(QA_5A_1)]$$

برای توضیح بیشتر، با توجه به قضیهٔ ۳ داریم:

$$(QA_6A_5)=(QPA_6)+(A_5PA_6)$$

$$(QA_5A_1)=(QA_5P)+(QPA_1)$$

بعداز ساده کردن، حاصل می‌شود:

$$S=(OA_3A_2)+(A_5PA_6)+(QPA_1) \quad (11)$$

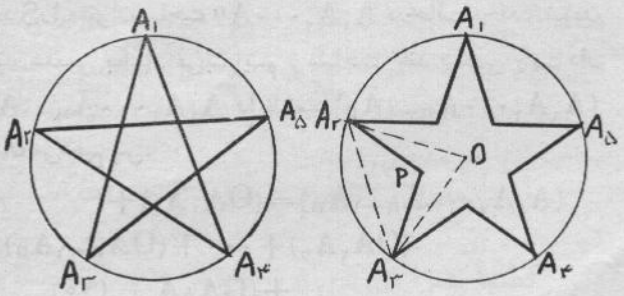
بالاخره، باتوجه به مثلثهای غیرجهت‌دار PA_6A_5 و QA_2A_3 که معادل هم هستند، و نتیجه‌گیری از مثلثهای جهت‌داری که در فرمول (۱۱) ظاهر شده‌اند، به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

مسئلهٔ ۵ـ ثابت کنید اگر چند ضلعی جهت‌داری فقط و فقط در یك نقطه خود را قطع کند مساحت آن برابر است با تفاضل مساحت‌های دو چند ضلعی غیر جهت‌داری که تجزیه شده‌اند، این تفاضل با قرار دادن علامت مناسب جلوی جملات آن بدست می‌آید.

مسئلهٔ ۵'ـ فرمول مشابهی برای مساحت چند ضلعی جهت‌داری که در بیش از یك نقطه خود را قطع می‌کند بدست آورید.

مسئلهٔ ۶ـ A_1، A_2، A_3، A_4 و A_5 نقطه‌های پیاپی می‌باشند که محیط دایره را به ۵ کمان مساوی تقسیم می‌کنند. مساحت پنج ضلعی جهت‌دار $A_1A_3A_5A_2A_4$ شکل زیر سمت چپ را محاسبه کنید.

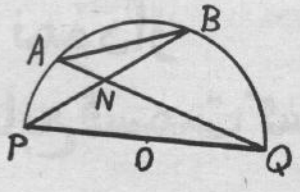
[جواب ـ $S=5(OA_1A_3)$ که O مرکز دایره است.]



مسئلهٔ ۷ـ مساحت ستارهٔ پنج پر را حساب کنید (شکل بالا سمت راست)

[جواب ـ $S=5(OA_2A_3)-5(PA_2A_3)$ که O مرکز دایره‌ای است که ستاره در آن محاط است.]

مسئلهٔ ۸ـ آیـا امکان دارد دو نقطهٔ A و B را روی قوس نیمدایرهٔ PABQ چنان انتخاب کنیم که مساحت مثلثهای غیرجهت‌دار ABN و PQN مساوی بـاشند و N نقطهٔ تقاطع وتر‌هـای PB و AQ باشد ؟



[پاسخ ـ نه]

اثبات ـ

$$(ABPQ)=(OAB)+(OBP)+(OQA)$$

قراردادهای $\alpha=\widehat{PA}$ و $\beta=\widehat{AB}$ را در نظر گرفته بدست می‌آوریم :

$$(ABPQ)=\frac{R^2}{2}[-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)+$$

$$+\sin(180^\circ-\alpha)]$$

$$=\frac{R^2}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta+\sin\alpha]$$

برای اینکه مساحت مثلثهای ABN و PQN مساوی باشند ، لازم و کافی است که:

$$(ABPQ)=(ABN)+(PQN)=0$$

این ممکن فقط و فقط وقتی رخ دهد که:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta=-\sin\alpha$$

یعنی:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\frac{\alpha}{2}=0$$

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0\right)\Longrightarrow\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=0$$

که نمی‌تواند برقرار شود، چون $\alpha-\beta<180^\circ$.

تبصره ـ با هندسهٔ مقدماتی نیز مـی‌توان جواب این مسئله را بدست آورد. درصورتی که خواننده بتوانـد چنین راه حلی را پیدا کند، پیشنهاد می‌کنیم که مسئلهٔ زیـر را که ادامـهٔ طبیعی مسئلهٔ فوق است حل نماید.

ـ آیا ممکن‌است دو نقطهٔ A و B را روی‌قوس نیمدایرهٔ PABQ چنان انتخـاب کـرد که مساحت مثلث غیرجهت‌دار PQN مساوی با مساحت چهار ضلعی غیر جهت‌دار NACB باشد، بطوری‌که نقطهٔ C وسط قوس AB گردد؟

آیا حل چنین‌مسئله‌ای فقط با استفاده از روشهای هندسهٔ مقدماتی به‌آسانی صورت می‌گیرد؟

مسئلهٔ ۹ـ دوازده‌ضلعی‌منتظم $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ محاط در یك دایره است. چند ضلعی $A_1A_6A_5A_{10}A_9A_2$ در سه نقطهٔ C_1 ، C_2 ، C_3 خود را قطع کـرده است. ثـابت‌کنید مساحت مثـلث $C_1C_2C_3$ سه برابـر مساحت مثلث $A_1A_2C_1$ می‌باشد (شکل پایین سمت چپ)

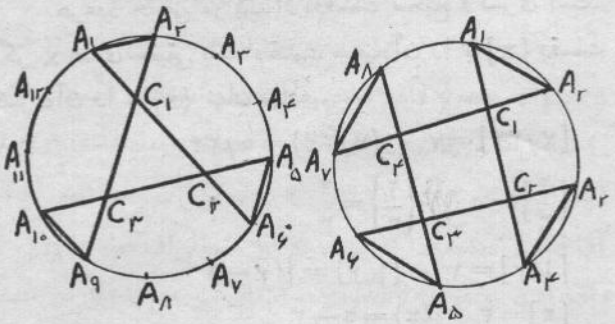
حل ـ

$$S=(A_1A_6A_5A_{10}A_9A_2)=3[(OA_1A_6)+$$

$$(OA_2A_1)]=3\frac{R^2}{2}(-\sin 150^\circ+\sin 30^\circ)=0$$

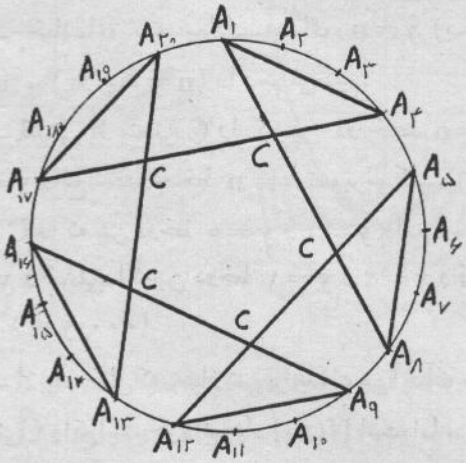
اکنون $S=(C_1C_2C_3)+3(C_1A_2A_1)$ را محاسبه کرده و نتیجه می‌گیریم که :

$$(C_1C_2C_3)=3(A_1A_2C_1)$$



مسئلهٔ ۱۰ـ هشت ضلعی منتظم $A_1A_2\ldots A_8$ محاط در یك دایره است. چند ضلعی $A_1A_4A_3A_6A_5A_8A_7A_2$ در چهار نقطهٔ C_1 ، C_2 ، C_3 ، C_4 خود را قطع می‌کند. ثابت کنید که مساحت مربع $C_1C_2C_3C_4$ چهار برابر مساحت مثلث $A_1A_2C_1$ است. (شکل بالا سمت راست)

مسئلهٔ ۱۱ـ بیست ضلعـی منتظم $A_1A_2\ldots A_{20}$ محاط دریك دایره‌است، چندضلعی$A_4A_{17}A_{20}A_{13}A_{16}A_9A_{12}A_5$ و A_1A_8 درپنج نقطهٔ C_1،C_2،C_3،C_4،C_5 خود را قطع‌می‌کند.



ثابت‌کنید که مساحت پنج ضلعی $C_1C_2C_3C_4C_5$ پنـج برابـر مساحت مثلث $A_1A_4C_1$ است.

ممکن است، ارتباط مضمونهای مسائل ۹، ۱۰، ۱۱، این

دنباله در صفحهٔ ۸۰

روش ترسیم نمودار
تابع قسمت صحیح و تابع قسمت کسری

(تابعهای پله‌ای)

ترجمهٔ: مهندس فتح‌لله زرگری

هرعدد حقیقی مرکب از دوقسمت صحیح وکسری است. اگر x عددی حقیقی باشد ، قسمت صحیح آن را با $[x]$ وقسمت کسری آن را با $\{x\}$ نشان می‌دهیم:

$$[۷/۳۴]=۷ \quad ، \quad \{۷/۳۴\}=۰/۳۴$$

$$\left[\frac{۲}{۳}\right]=۰ \quad ، \quad \left\{\frac{۲}{۳}\right\}=\frac{۲}{۳}$$

$$[\sqrt{۲}]=۱ \quad ، \quad \{\sqrt{۲}\}=\sqrt{۲}-۱$$

$$[\pi]=۳ \quad ، \quad \{\pi\}=\pi-۳$$

در مسئله‌های مختلف ریاضی، در نظریهٔ اعداد ، آنالیز، نظریهٔ توابع، منطق ریاضی و غیره با عبارتهایی شامل $[x]$ یا $\{x\}$ سروکار پیدا می‌کنیم. از این جهت‌در اینجا روش ترسیم نمودار این چنین تابعها را شرح می‌دهیم.

I- نمودار تابعهای به‌صورت $y=[f(x)]$

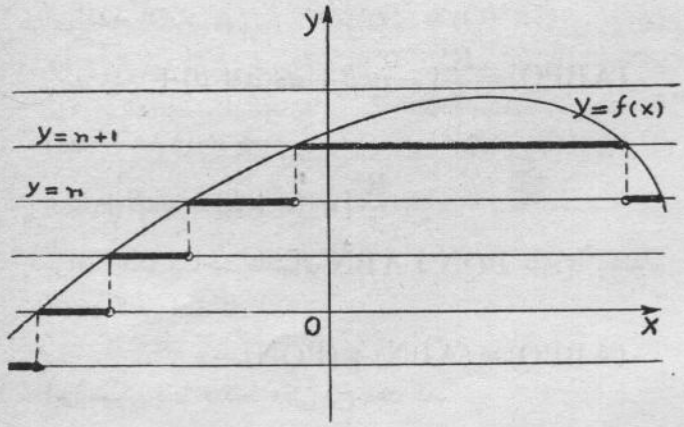
نخست منحنی C نمایش تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم (شکل زیر). آنگاه به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- خطهای به معادله‌های $y=n$ (به‌ازای $n=۰ ، \pm۱ ، \pm۲ ، \ldots$) را رسم می‌کنیم.

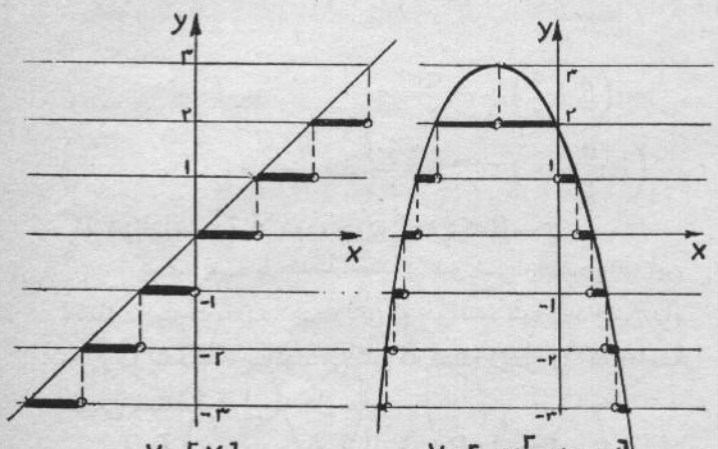
۲- قسمتی از منحنی C را که بین دو خط $y=n$ و $y=n+۱$ واقع‌است‌روی خط $y=n$ تصویرمی‌کنیم. (قسمتی از منحنی C راکه بین دوخط $y=۰$ و $y=۱$ واقع است‌روی خط $y=۰$ و قسمتی‌راکه‌بین دوخط $y=۱$ و $y=۲$ واقع‌است روی خط $y=۱$ ،...)

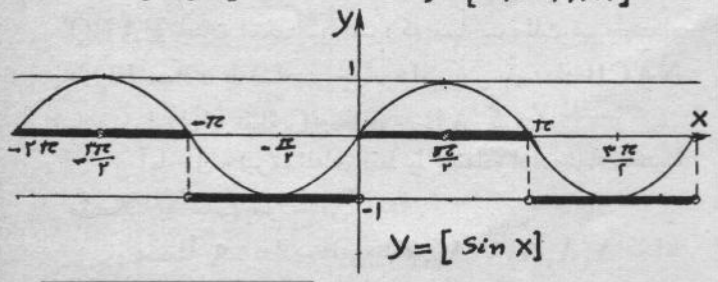
۳- از پاره‌خطی که بعداز تصویر بدست می‌آیدآن سر که روی منحنی C واقع‌است جزء نمودار $[f(x)]$ است،اما سردیگر که روی منحنی C نیست جزء نمودار نیست. از این نظرپاره خطهای تصویر قسمتهای مختلف منحنی C معمولا از یك سربسته و از سردیگر باز می‌باشند.

مجموعهٔ پاره خطهای مزبور نمودار تابع $y=[f(x)]$ را تشکیل می‌دهد.



در شکل زیر نمودار سه‌نوع از تابعهای $y=[f(x)]$ رسم شده است. معادلهٔ نظیر هرنمودار در زیر آن نوشته شده است .





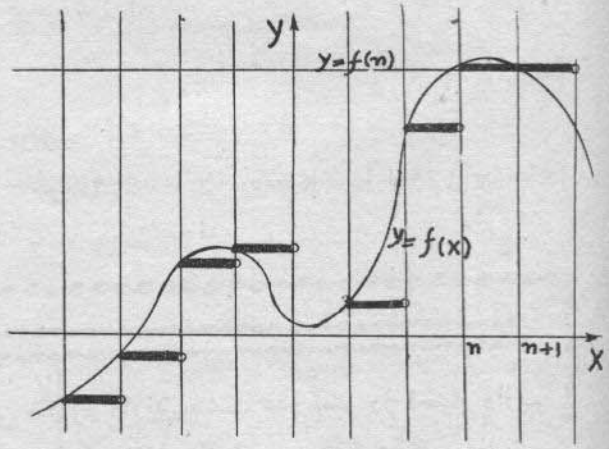
II- نمودار تابعهای به‌صورت $y=f([x])$

۱- منحنی C نمایش هندسی تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم (شکل زیر).

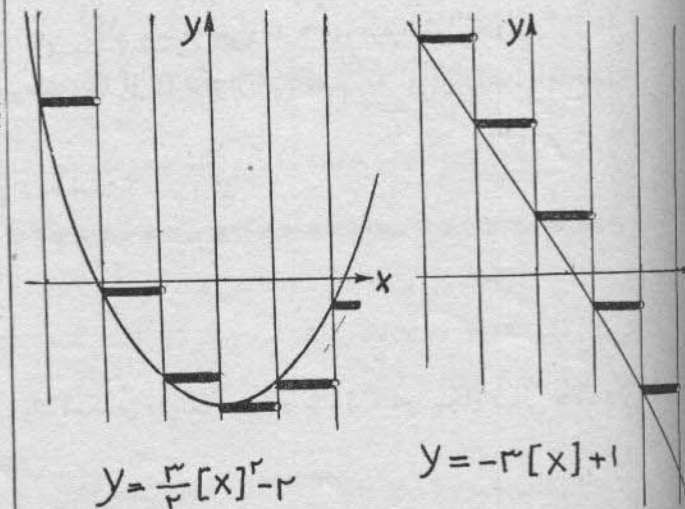
۲- خطهای به معادله‌های $x=n$ (به‌ازای $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) را نیز رسم می‌کنیم.

۳- آن قسمت از منحنی را که بین دوخط $x=n$ و $x=n+1$ واقع است روی خط $y=f(n)$ تصویر می‌کنیم. (مثلا قسمتی از منحنی‌را که بین دوخط $x=0$ و $x=1$ واقع است روی خط $y=f(0)$ تصویر می‌کنیم).

مجموعه پاره‌خطهای (از یك سر بسته و از یك سر باز) حاصل نمودار تابع $y=f([x])$ می‌باشد. (از پاره خطهای حاصل آن سر که روی منحنی C واقع نیست جزء نمودار نمی‌باشد).



در شکل زیر نمودار سه نوع تابع به‌صورت $y=([x])$ دیده می‌شود.



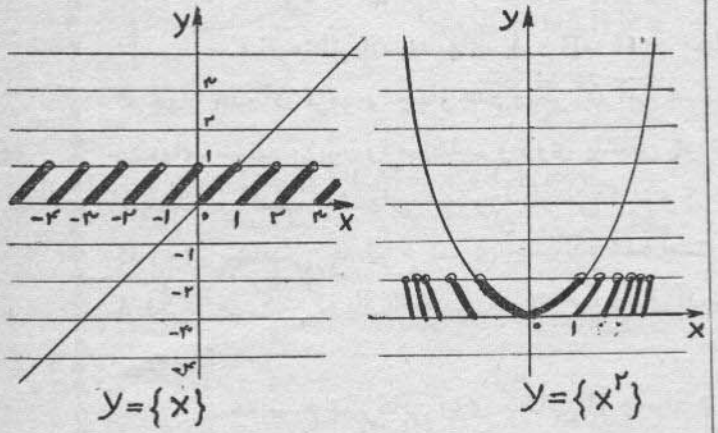
III- نمودار تابعهای به صورت $y=\{f(x)\}$

این نوع تابعها را می‌توان چنین نوشت:

$$y=\{f(x)\}=f(x)-[f(x)]$$

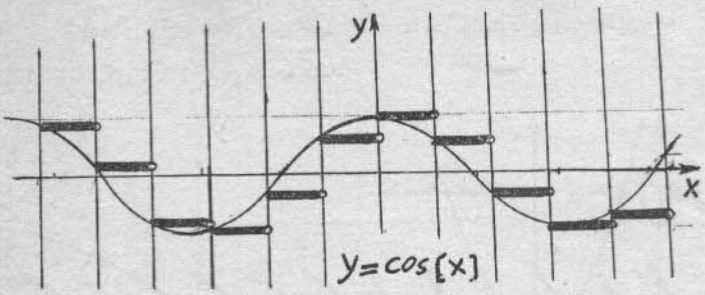
با توجه به‌اینکه $0 \le \{x\} < 1$ پس نمودار تابع بین دوخط $y=0$ و $y=1$ واقع است. برای رسم نمودار، نخست منحنی C نمایش‌هندسی‌تابع $y=f(x)$ و خطهای به‌معادله‌های $y=n$ (به‌ازای $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) را رسم می‌کنیم. آنگاه آن قسمت ازمنحنی‌راکه بین‌هردوخط متوالی‌از خطهای $y=n$ واقع است به موازات محورyها انتقال می‌دهیم تا بین دو خط $y=0$ و $y=1$ قرارگیرد. مجموعهٔ پاره‌منحنیهای بدست‌آمده، به‌استثنای آن‌سرازآنهاکه روی خط $y=1$ واقع است، نمودار تابع $y=\{f(x)\}$ است.

در شکل زیرمثالهایی از نمودار این نوع تابعها دیده می‌شود.

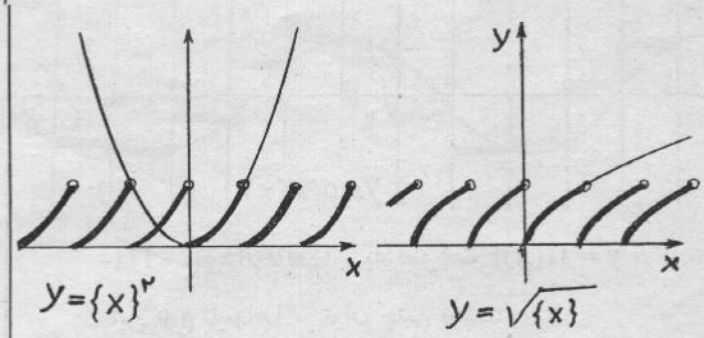


IV- نمودار تابعهای به‌صورت $y=f(\{x\})$

تابع $y=f(\{x\})$ متناوب‌است و دورهٔ‌تناوب‌آن $T=1$ می‌باشد. همچنین در فاصلهٔ $[1\ و\ 0]$ داریم $f(\{x\})=f(x)$. بنابراین برای رسم نمودار، نخست قسمتی‌از نمایش هندسی‌تابع $y=f(x)$ متعلق به‌فاصلهٔ $[1\ و\ 0]$ را رسم می‌کنیم، آنگاه آن را به موازات محورxها و متوالیاً به‌اندازهٔ یك انتقال می‌دهیم.



نقطه‌های روی خط روی خط $y=1$ جزء نمودار نمی‌باشند. به مثالهای شکل زیر توجه کنید.



تمرین

۱ـ نمودارهای تابعهای زیررا رسم کنید:

$y=[x^2]$ $\quad y=[x^2-5x+6]$

$y=[tgx]$ $\quad y=tg[x]$

$y=[x]^2$ $\quad y=[x]^2-5[x]+6$

$y=\frac{1}{[x]}$ $\quad y=\{tgx\}$

$y=\{x\}^2$ $\quad y=x+[x]$

$y=[x]+\sqrt{\{x\}}$ $\quad y=x+\{x\}$

$y=\{cos[x]\}$ $\quad y=[cos\{x\}]$

$y=\{2\{x\}^2\}$ $\quad y=\left[\frac{1}{[x]}\right]$

۲ـ با استفاده از نمودار درستی‌تساوی زیـرا را به‌ازای $x\neq k+\frac{1}{2}$ که $(k=0\ ,\ \pm1\ ,\ \pm2,000)$ ثابت کنید:

$$\left[\frac{1}{2}-x\right]+\left[\frac{1}{2}+x\right]=0$$

۳ـ بـا استفاده از نمودار تـوضیح دهید کـه تـابعهای $y=[x]$ و $y=\{x\}$ جوابهای‌معادلهٔ‌تابعی $f(f(x))=f(x)$ می‌باشند.

۴ـ درستی‌تساویهای زیررا از روی نمودار تحقیق کنید:

$[\{f(x)\}]=0$ $\quad \{[f(x)]\}=0$

۵ـ به‌کمك نمودار معادله‌های زیررا حل کنید:

۱) $[x]^2-[x]=2$

[جواب: $3>x>2$ و $0>x>-1$]

۲) $cos\{x\}=\frac{1}{4}$ [جواب ندارد]

۳) $2^{\{x\}}=1/5$

[جواب :

$x=log_2 1/5+k\ ,\ k=0\ ,\ \pm1\ ,\ \pm2,000$]

فکر کنید

سه نفرمنطق‌دان به‌نامهای A و B و C در مجلسی حضور دارند. هشت عدد تمبر در اختیار داریم که چهار عددآن قرمز و چهار عدد دیگرآن آبی است و A و B و C نیز از ایـن موضوع آگاهی دارند. چشمهای سه‌نفر مزبور را می‌بندیم و روی پیشانی هر کدام ازآنان دو عدد تمبر می‌چسبانیم و دو تمبرمانده را پنهان می‌کنیم. چشمهای سه‌نفررا باز می‌کنیم و ازهریك از ایشان، به‌ترتیب از A و B و C ، می‌پرسیم که روی پیشانیش چه نوع تمبری چسبانده شده است. هر کدام پاسخ می‌دهد «نه». پـرسش خود را از A تکرار می‌کنیم که باز پاسخ‌می‌دهد «نه». پس از آن‌پرسش را از B تکرار می‌کنیم که این بار نیز پاسخ می‌دهد «نه» .

چه نوع تمبرهایی روی پیشانی B چسبانده شده است؟

پاسخ «فکر کنید» مندرج در یکان شمارهٔ پیش:

فرامرز: یك اسکناس هزار ریالی، یك‌اسکناس پانصد ریالی، یك اسکناس دویست ریالی و یك اسکناس پنجاه ریالی = ۱۷۵۰ ریال

بابك: پنج اسکناس صد ریالی = ۵۰۰ ریال

سعید: یك اسکناس پانصد ریالی، یك اسکناس دویست ریالی، یك اسکناس پنجاه ریالی = ۷۵۰ ریال

انتخاب واحد

علیرضا امیرمعز

مسائل متعددی درساختن اشکال هندسی‌منجر به حل‌معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شود. گاهی دانش‌آموزان معادلـهٔ مسئله را بدست می‌آورند، ولی در انتخاب واحد دچار اشکال می‌شوند. دراین مختصراین مطلب را بررسی می‌کنیم.

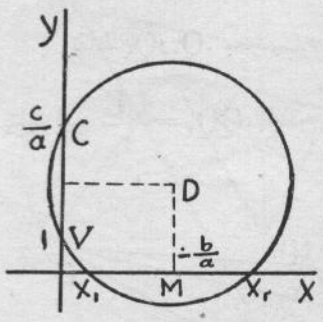
حل ـ معادلهٔ درجهٔ دوم: گرچه این موضوع بطور دقیق باجـزئیاتش درشماره‌های قبلی یکان مندرج است، بطـور مختصر آنرا مرور می‌کنیم. معادلهٔ درجهٔ دوم زیـر را در نظـر می‌گیریم.

$$ax^2+bx+c=0 \quad و \quad a\neq 0$$

واضح است که اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند.

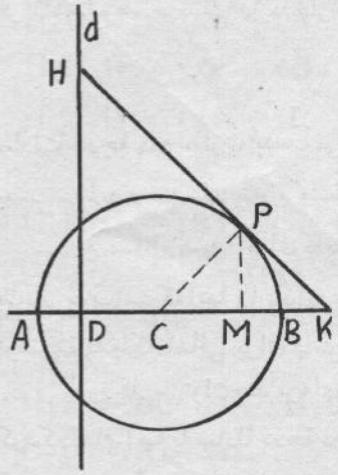
$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad و \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

از اینرو یك‌دستگاه مختصات قائـم درنظـر می‌گیریم: روی محور y نقـاط V و C را به‌ترتیب نظیربا واحد و $\frac{c}{a}$ می‌گیریم. روی‌محور x نقطهٔ M را نظیر به $\frac{-b}{2a}$ انتخاب می‌کنیم. عمود منصف VC و خط عمود برمحور x در نقطهٔ M یکدیگررا در D قطع‌می‌کنند. دایرهٔ به مرکز D و شعاع DC محور x را در نقطه‌هایـی قطع می‌کند کـه به‌ترتیب نظیر به x_1 و x_2 اند. البته این درصورتی است کـه $b^2-4ac>0$ باشد. حالات‌دیگررا به‌عهدهٔ خواننده‌می‌گذاریم که بررسی کند.



۲ـ انتخاب واحد: خواننده متوجه است که در بخش یك انتخاب واحد اهمیت خاصی نداشت. ولی در مسائل دیگـر این موضوع گاهی دشوار می‌شود از اینرو چند مثال می‌زنیم.

I. دایره‌ای به قطر AB داده شده است. خط d برخط AB عمود است نقطهٔ P را روی دایره چنان بگیرید که مماس بـردایـره در نقطهٔ P خطـوط AB و d در H و K قطـع کند و $PH=PK$ باشد.



حل: فرض کنیم که مسئله حل‌شده باشد. از نقطهٔ P عمود PM را برAB فرودمی‌آوریم. فرض کنیم که محل‌تلاقی d با AB را D نامیده باشیم. مقادیر زیـر را انتخاب می‌کنیم:

$$CP=r \quad و \quad CD=h \quad و \quad CM=x \quad و \quad CK=y$$

ملاحظه می‌شود که:

$$xy=r \quad و \quad 2(x+h)=y-x$$

از این دومعادله نتیجه می‌شود:

$$3x^2+2hx-r=0$$

در این‌معادله مقادیر h و r طول قطعه خط می‌باشند وبنابراین مثبتند. می‌توان هریك‌را مساوی‌واحد گرفت. ولی‌بایدآنرا درتمام عمل حل معادلـه ثابت نگاه داشت. البته بهتر است‌که $r=1$ بگیریم. ارانیرومعادلهٔ مسئله چنین می‌شود:

$$3x^2+2hx-1=0$$

بحث و ترسیم آنرا به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

II- مسئلهٔ I را تعمیم می‌دهیم به این معنی که رابطهٔ $PH=PK$ را با $\frac{PH}{PK}=k>0$ عوض می‌کنیم. نوشتن معادله و انتخاب واحدرا به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

III- خواننده می‌تواند مسئلهٔ مشهور الحسن را بررسی کند و حل آنرا با معادلهٔ درجهٔ دوم بدست آورد.

۳- چند مسئلهٔ مشهور: هرگاه شعاع دایره را واحد بگیریم طول ضلع پنج ضلعی منتظم چنین می‌شود:

$$s_5=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

فرض می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

این معادله را منطق کنید و رسم ضلع پنج برمنتظم‌را کامل کنید.

هرگاه ضلع ده برمنتظم را درنظر بگیریم:

$$s_{10}=x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$$

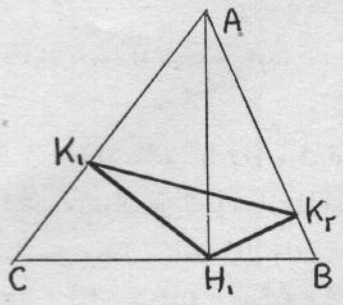
معادلهٔ درجهٔ دوم بهتری بدست می‌آید که‌هم ضلع ده برمنتظم بدست می‌آید و هم ضلع پنج برمنتظم.

این مسائل همیشه برای دانش‌آموز جالب است. هرچند یك‌بار خوب‌است که‌آنها را یادآوری کنیم. به‌عنوان تمرین برای نوشتن‌مقاله یاکاراضافی برای دانش‌آموزان‌بااستعداد بکاربریم.

بطورکلی‌می‌توان‌چند برهای‌منتظم را بررسی کرد ومعلوم کرد که‌کدام آنها با معادلهٔ درجهٔ دوم حل‌می‌شوند و رسم‌هندسی آنها را بدست‌آورد.

مثلث ارتفاعی (از صفحهٔ بعد)

بردوضلع مثلث ABC فرودآوریم پاره خطی که پای عمودهارا به‌هم وصل می‌کندبرابر نصف پیرامون مثلث ارتفاعی است.



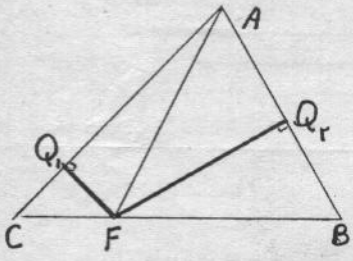
مطابق باشکل چهار ضلعی $AK_1H_1K_2$ محاطی است که AH_1 قطر دایرهٔ محیطی آن است، پس.

$$K_1K_2=AH_1\sin A=\frac{S}{R}\quad(2)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) برمی‌آید که:

$$K_1K_2=P_H$$

نتیجه - هرگاه ازنقطهٔ دلخواه یك ضلع مثلث ABC عمودهایی بر دوضلع دیگرش فرودآوریم فاصلهٔ بین پاهای این‌دو عمود از نصف پیرامون مثلث ارتفاعی کوچکتر نمی‌باشد.



مثلا روی ضلع BC نقطهٔ Fرا درنظر گرفته وعمودهای FQ_1وFQ_2 رابراضلاع AC وAB فرود می‌آوریم. در این صورت $Q_1Q_2=AF\sin A$ وچون $AF>AH_1$ بنابراین $Q_1Q_2>K_1K_2$ و در نتیجه:

$$Q_1Q_2>P_H\quad(3)$$

خاصیت مهم مثلث ارتفاعی:

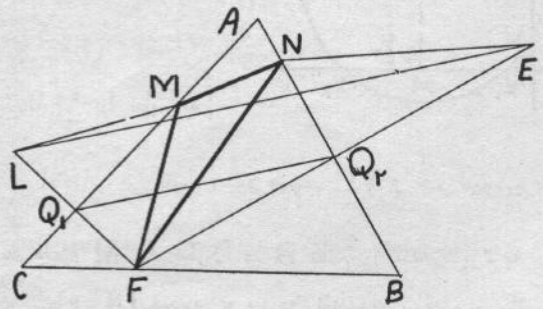
از کلیهٔ مثلثهای محاط در مثلث حادالزوایای ABC مثلث ارتفاعی کمترین پیرامون راداراست. این خاصیت را با استفاده از قضایای قبلی اثبات می‌کنیم.

فرض کنیم مثلث دلخواه MEN در مثلث حادالزوایای ABC محاط باشدقرینه‌های نقطهٔ F را نسبت به AC وAB تعیین می‌کنیم که نقاط L و E را بدست می‌آوریم.

طول خط شکستهٔ $LMNE$ برابر $2p$ پیرامون مثلث MFN می‌باشد.

نقاط Q_1وQ_2. به‌ترتیب دروسط FL و FEقرار دارند.

بنابر این $QQ_2=\frac{LE}{2}$. لیکن طول Q_1Q_2 بزرگتر از p



نصف پیرامن مثلث MFN نمی‌باشد یعنی: $|Q_1Q|<p\quad(4)$

از روابط (۳) و (۴) داریم:

$$p_H<Q_1Q_2<p$$

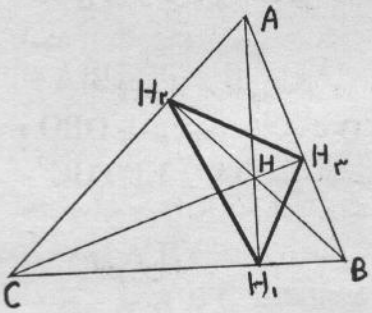
یا

$$p_H<p$$

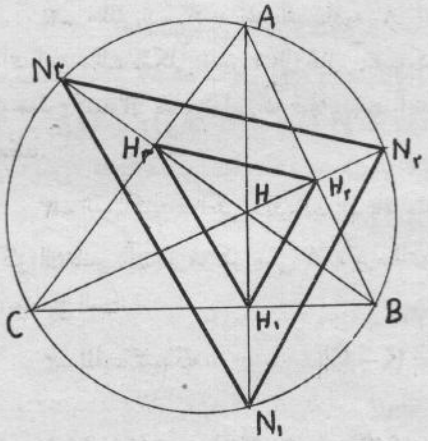
مثلث ارتفاعی و خواص آن

ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری

هر گاه پای ارتفاعهای مثلث ABC بهم وصل کنیم مثلث حاصل‌را مثلث ارتفاعی‌مثلث ABC می‌نامیم(مثلث $H_1H_2H_3$ در شکل روبرو).



بـرای پی بردن به بعضی ازخواص این‌نوع مثلث ارتفاعهای مثلث ABC رااستدادمی‌دهیم تا دایرهٔ محیطی‌آن را در نقاط N_1وN_2وN_3 قطـع کنند. حال مثلث $N_1N_2N_3$ را بررسی می‌کنیم.



چون H_1 وسط HN_1 و H_2 وسط HN_2 و H_3 وسط HN_3 است، پس دومثلث $H_1H_2H_3$ و $N_1N_2N_3$ متشابهند و نسبت تشابه‌آنها یك‌دوم است. بنابراین:

خاصیت‌اولـ هر گاه شعاع‌دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر R باشد، شعاع دایـرهٔ محیطی مثلث ارتفاعی‌آن ، برابر $\frac{R}{2}$خواهد بود.

خاصیت دوم ـ ارتفاعهـای مثلث ABC نیمسازهای مثلث ارتفاعی‌آن می‌باشند. زیرا $\angle N_2N_1A=\angle N_2BA$ و $\angle N_2BA=\angle ACN_3$ اما $\angle AN_1N_3=\angle ACN_3$ پس $\angle N_2N_1A=\angle AN_1N_3$

خاصیت سومـ انـدازه‌های زاویه‌های مثلث ارتقاء‌ـی برابرند با:

$$H_2H_1H_3=180^\circ-2A$$
$$H_1H_2H_3=180^\circ-2B$$
$$H_2H_3H_1=180^\circ-2C$$

زیرا:

$$H_2H_1H_3=2AN_1N_3=2ACN_3=$$
$$=2(90^\circ-A)=180^\circ-2A$$

خاصیت چهارم ـ طـولهای ضلعهای مثلث ارتفاعـی برابرند با:

$$H_2H_3=BC\cdot\cos A \quad \text{و} \quad H_1H_2=AC\cdot\cos B$$
$$H_1H_2=AB\cdot\cos C$$

زیراکه:

$$H_2H_3=\frac{N_2N_3}{2}=R\sin(180^\circ-2A)=$$
$$=BC\cdot\cos A$$

خاصیت پنجمـ نصف‌پیرامون مثلث‌ارتفاعی ($p_H=$) برابراست با $\frac{S}{R}$ کـه‌درآن S مساحت‌مثلث ABC می‌باشد.

$$P_H=\frac{1}{4}(N_1N_2+N_2N_3+N_3N_1)=$$
$$\frac{1}{2}R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=$$
$$=2R\sin A\sin B\sin C$$

و چون $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$ بنابراین: $p_H=\frac{S}{R}$ (۱)

خاصیت‌ششمـ هر گاه ازیك‌رأس‌مثلث ارتفاعی‌عمودهایی

بقیه درصفحهٔ قبل

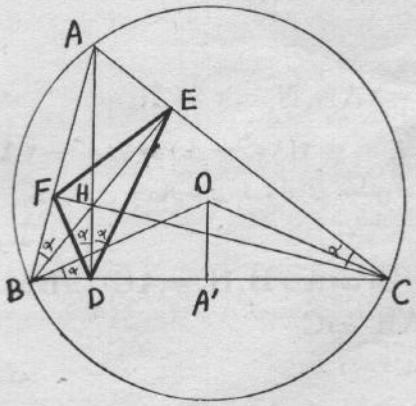
Redécouvrons la Géométrie

H. S. M COXETER et S. L. GREITZER

خاصیتهایی از مثلث، (۲)

۶.۱ـ مثلث ارتفاعی

در شکل زیر مثلث ABC با زاویه‌های حاده نمایانده شده است که در آن، O مرکز دایرهٔ محیطی، H مرکز ارتفاعی و DEF مثلث ارتفاعی است که رأسهایش پاهای ارتفاعها می‌باشند. برای بررسی این شکل، که بدون سود نخواهد بود، نخست معلوم می‌کنیم که کدام زاویه‌های شکل به اندازهٔ $\alpha=\frac{\pi}{2}-A$ می‌باشند. دو زاویهٔ $A'OC$ و A با هم برابرند زیرا اولی



مرکزی و دومی محاطی است و هر دو نظیر کمانهای برابر می‌باشند. پس هریك از دو زاویهٔ OBC و OCB به اندازهٔ α می‌باشند. همچنین از دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE و ACF برمی‌آید که هریك از دو زاویهٔ ABE و ACF به اندازهٔ α می‌باشد. چهارضلعی BCEF و همچنین چهارضلعیهای BDHF و CEHD محاطی‌اند پس :

$$\angle HDF=\angle HBF=\angle EBF=\angle ECF=$$
$$=\angle ECH=\angle EDH$$

و خط HD نیمساز زاویهٔ EDF است.

به‌همین روش ثابت می‌شود که HE نیمساز زاویهٔ DEF و HF نیمساز زاویهٔ EFD است.

نخستین نتیجه از بررسی شکل بدست می‌آید: ارتفاعهای هر مثلث با زاویه‌های حاده، نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعی آن می‌باشند. به‌عبارت دیگر :

قضیهٔ ۱.۶.۱ـ در هر مثلث با زاویه‌های حاده، مرکز ارتفاعی برمرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ارتفاعی منطبق است.

همچنین از بررسی شکل و برابریهای زاویه‌های HDF و DBO با هم نتیجه می‌شود که FD بر OB و همچنین DE بر OC و EF بر OA عمود است.

تمرین :

۱ـ در شکل قبل مثلثهای AEF و BDF و DEC و ABC با هم متشابهند.

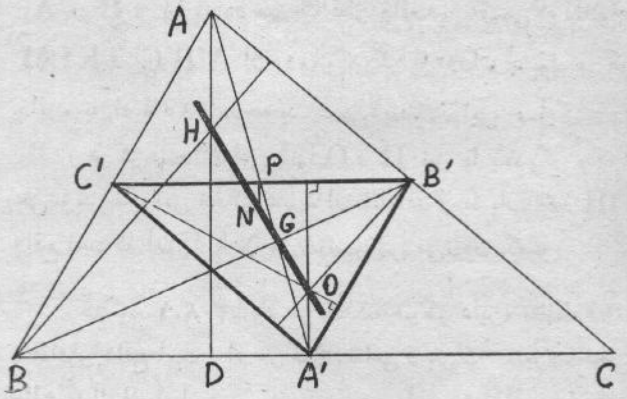
۲ـ مثلثی رسم کنید که یك زاویه از آن منفرجه باشد. برای این مثلث شکلی نظیر شکل قبل رسم کنید و با بررسی آن معلوم کنید از خاصیتهایی که قبلا بدست آمد کدامها بازهم صادقند.

۳ـ ثابت کنید که اگر زاویه‌ای از یك مثلث منفرجه باشد، مرکز ارتفاعی آن برمرکز یکی از دایره‌های محاطی خارجی آن منطبق است.

۴ـ ثابت کنید که : $\angle HAO=|B-C|$

۷.۱ـ مثلث میانه‌ای و خطاولر

مثلثی را که رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث می‌باشند مثلث میانه‌ای این مثلث می‌نامیم. مطابق با شکل، A' وسط BC و B' وسط AC و C' وسط AB است پس مثلث $A'B'C'$ مثلث میانه‌ای مثلث ABC است. مرکز ثقل مثلث ABC یعنی نقطهٔ تلاقی میانه‌های AA' و BB' را با G و مرکز ارتفاعی آن یعنی نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای AD و BE را با H و مرکز ارتفاعی مثلث $A'B'C'$ را با O نشان می‌دهیم.



از بررسی شکل برمی‌آید که :

ضلعهای مثلث میانه‌ای به‌ترتیب با ضلعهای مثلث موازیند و طول هر ضلع از مثلث میانه‌ای نصف طول ضلع نظیر از مثلث است.

پاره خطهای $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$ مثلث ABC را به‌چهار مثلث معادل تقسیم می‌کنند.

چهار ضلعی $AC'A'B'$ متوازی‌الاضلاع است و دوقطر AA' و $B'C'$ از آن منصف یکدیگرند. از اینرو میانه‌های مثلث ABC در عین حال میانه‌های مثلث $A'B'C'$ بوده و G مرکز ثقل مثلث ABC مرکز ثقل مثلث $A'B'C'$ نیز می‌باشد.

ارتفاعهای مثلث $A'B'C'$ عمود منصفهای ضلعهای مثلث ABC می‌باشند واز اینرو O که مرکز ارتفاعی مثلث $A'B'C'$ است مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد.

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به‌نسبت ۲ متشابهند ونتیجه می‌شود که : $AH=2OA'$ و چون $AG=2GA'$ پس دو مثلث AHG و $GA'O$ به‌نسبت ۲ متشابهند ونتیجه می‌شود که: سه نقطهٔ O و G و H بر یك خط راست واقعند و:

$$HG=2GO$$

قضیهٔ ۱،۷،۱ـ درهرمثلث، مرکز ارتفاعی، مرکز ثقل و مرکز دایرهٔ محیطی بر یك خط راست واقعند و پاره خط بین مرکز ارتفاعی و مرکز دایرهٔ محیطی توسط مرکز ثقل به‌نسبت ۲ بر ۱ تقسیم می‌شود.

خطی که برمرکزهای ارتفاعی، ثقل و دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد خط اولر نام دارد.

از P وسط $B'C'$ عمودی بر این خط رسم می‌کنیم که HO را در N قطع می‌کند. سه خط AH و PN و $A'O$ که بر $B'C'$ عمودند متوازیند ونتیجه می‌شود که N وسط HO است. به‌روش مشابه ثابت می‌شود که عمودمنصفهای ضلعهای $C'A'$ و $A'B'$ نیز از N می‌گذرند. پس N مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ است.

خلاصه آنکه مرکز دایرهٔ محیطی مثلث میانه‌ای هر مثلث در وسط HO از خط اولر مثلث اصلی واقع است. همچنین هر مثلث با مثلث میانه‌ای خود به‌نسبت ۲ بر ۱ متشابه است و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث میانه‌ای نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث اصلی است.

اکنون که نام اولر پیش آمد بدنیست که کمی دربارهٔ وی صحبت شود، به‌ویژه آنکه در بیشتر موردها و در همهٔ شاخه‌های ریاضی نام او به‌میان می‌آید. لئونارداولر به‌سال ۱۷۰۷ در بال به‌دنیا آمد. درسال ۱۷۲۷ در آکادمی سن‌پترزبورك پذیرفته‌شد. در سال ۱۷۴۱ عازم برلین شد تا کرسی ریاضیات آکادمی پروس را به‌عهده گیرد. در سال ۱۷۶۶ به سن‌پترزبورك برگشت و تا سال مرگش ۱۷۸۳ در آنجا مقیم بود.

اولر به‌طورخستگی‌ناپذیر کار می‌کرد. درپرتو کوششهای او ریاضیات در همهٔ زمینه‌ها توسعه یافت. در هر شاخه‌ای از ریاضیات یا فرمولی به‌نام اولر یا قضیه‌ای به‌نام اولر و یا اینکه روشی به‌نام اولر وجود دارد. تعداد یادداشتهایی از وی که در زمان حیاتش چاپ شد ۴۷۳ بود و کمی بعد از مرگش ۲۰۰ یادداشت و بالاخره کمی دیرتر از آن ۶۱ یادداشت از وی چاپ شد. اما همهٔ کارهای او در شرایطی دشوار انجام می‌گرفتند، زیرا در سال ۱۷۳۵ بینایی یك چشمش را ازدست داد و درسال ۱۷۶۶ به‌طور کلی کور شد.

مهارت وی در محاسبه‌ها شگفت‌انگیز و درك شهودیش در ریاضیات معجزه‌آسا بود. بارهای دیگر دراین کتاب با نام اولر مواجه خواهیم شد.

تمرین :

۱ـ مثلثی با زاویهٔ منفرجه و مثلث میانه‌ای آن را رسم کنید و تحقیق کنید که قضیهٔ ۱،۷،۱ برای آن مثلث نیز صادق است.

۲ـ ثابت کنید که:

$$\overline{OH}^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$$

۳ـ با توجه به‌شکل قبل ثابت کنید که :

$$DA'=\frac{|b^2-c^2|}{2a}$$

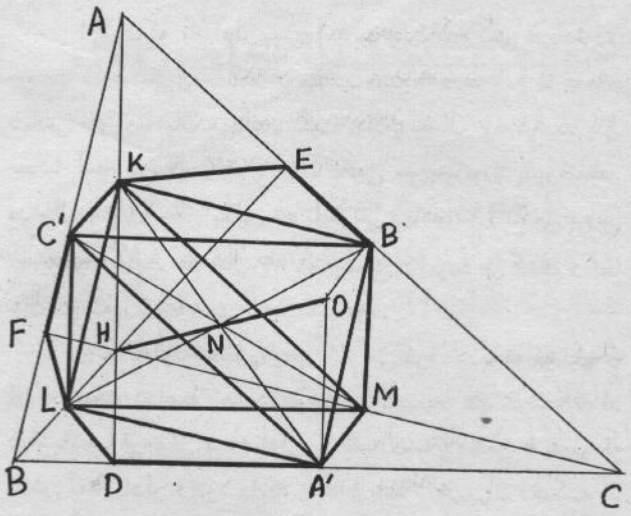
۴ـ ثابت کنید که اگر در مثلث ABC خط اولر با BC موازی باشد خواهیم داشت :

$$tgB\,tgC=3$$

۸،۱ـ دایرهٔ نه نقطه

در شکل بعد مثلث ABC و ارتفاعهای AD ، BE و

CF از آن رسم‌شده است. دراین‌شکل A' و B' و C' به‌ترتیب وسطهای BC و CA و AB همچنین K و L و M به‌ترتیب وسطهای AH و BH و CH و بالاخره O مرکز دایرهٔ محیطی و N وسط OH است.



مثلثهای ABC و HBC در ضلع BC مشترکند. از اینرو پاره خطهای $B'C'$ و LM با هم برابر وموازیند، زیرا هرکدام با BC موازی‌و با نصف BC برابراست. پاره‌خطهای LC' و MB' نیز با هم موازی و برابرند زیرا هرکدام با AH موازی وبا نصف‌آن برابراست. پس چهارضلعی $B'C'LM$ متوازی‌الاضلاع است وچون AH بر BC عمود است پس این چهارضلعی مستطیل است. همچنین چهار ضلعیهای $A'B'KL$ و $C'A'MK$ مستطیل می‌باشند. نتیجه می‌شودکه پاره خطهای $A'K$ و $B'L$ و $C'M$ قطرهایی از دایره‌ای می‌باشندکه بر رأسهای این مستطیلها می‌گذرد. اما زاویهٔ $A'DK$ قائمه است و دایرهٔ به‌قطر $A'K$ بر D می‌گذرد. همچنین دایرهٔ به‌قطر $B'L$ بر E و دایرهٔ به‌قطر $C'M$ بر F می‌گذرد. بنابراین :

قضیهٔ ۱،۸،۱ــ در هر مثلث، وسطهای سه ضلع، پاهای سه ارتفاع، وسطهای پاره خطهایی‌که رأسها را به‌مرکز ارتفاعی وصل می‌کنند، نه نقطهٔ واقع بریك دایره می‌باشند. شعاع این دایره، که همان دایرهٔ محیطی مثلث میانه‌ای است، نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است .

یونسله(*) این‌دایره رادایرهٔ نه نقطه‌نامیده‌است که‌اکنون نیز به‌همین‌نام معروف است، اما آن را دایرهٔ اولر نیز می‌نامند. در دایرهٔ نه نقطه سه نقطهٔ K ، و L و M به‌ترتیب با سه‌نقطهٔ A' ، B' و C' در دو سر یك قطر واقمند، به‌قسمی‌که مثلثهای KLM و $A'B'C'$ از روی یکدیگر با دوران حول مرکز دایره به‌زاویهٔ ۱۸۰ درجه بدست می‌آیند. در این جایگشت دو مثلث، مرکزهای ارتفاعی آنها O و H نیز با یکدیگر جابجا می‌شوند. بنابراین مرکز دایرهٔ نه نقطه در وسط پاره خط OH واقع است‌که آن را با N می‌نمائیم. پس می‌توان گفت :

قضیهٔ ۲،۸،۱ــ در هر مثلث، مرکز دایرهٔ نه‌نقطه روی خطاولر واقع است و از مرکز ارتفاعی و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث به‌یك فاصله است.

تاریخ دو قضیهٔ بالا روشن نیست. با توجه به‌مسئله‌ای‌که‌از طرف B.Bevan به‌سال ۱۸۰۴ درمجله‌ای انگلیسی چاپ‌شده است بنظرمی‌رسدکه‌این قضیه‌ها درآن عصر شناخته شده بوده‌اند. اینکه آنهارا به‌ناروا به اولر نسبت می‌دهند به‌این جهت است‌که برای نخستین‌بار وی در ۱۷۶۵ ثابت‌کرده است‌که دایرهٔ‌محیطی مثلث ارتفاعی‌بردایرهٔ‌محیطی مثلث میانه‌ای منطبق است. درحقیقت نویسندگان‌اروپائی هستندکه‌اصلب از «دایرهٔ اولر» نام می‌برند. ظاهراً اثبات‌کامل قضیه برای نخستین بار در سال ۱۸۲۱ توسط پونسله منتشر شده است . خیلی دیرتر از آن فوئرباخ (K.Feuerbach) همان استنباط جزئی اولر را از نو بدست آورد و علاوه برآن خاصیت مهم و جالب جدید را نیز دریافت. از اینرو بسیاری‌از نویسندگان دایرهٔ نه نقطه را «دایرهٔ فوئرباخ» می‌نامند. بنا به‌قضیهٔ فوئرباخ، که دربند ۶.۵ آن را بیان خواهیم‌کرد، دایرهٔ نه‌نقطه بر دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث مماس است.

تمرین :

۱ــ ثابت‌کنیدکه چهار ضلعی $AKA'O$ از شکل قبل متوازی‌الاضلاع است.

۲ــ ثابت کنید که روی دایرهٔ نه نقطه سه نقطهٔ K ، L و M به‌ترتیب در وسط کمانهای EF ، FD و DE واقمند .

۳ــ هرگاه I_a و I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC باشد، ثابت‌کنیدکه دایرهٔ محیطی مثلث ABC دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث $I_aI_bI_c$ است.

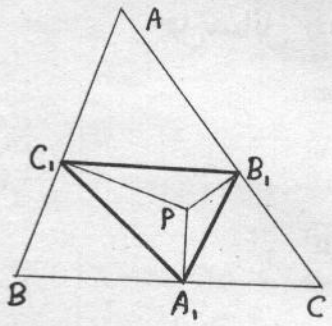
۴ــ سه دایرهٔ با هم برابر در نقطهٔ P مشترکند و دو به دو در سه نقطهٔ دیگر A و B و C باهم برخورد دارند. ثابت کنیدکه دایرهٔ محیطی مثلث ABC با این دایره‌ها برابر است و P مرکز ارتفاعی این مثلث است.

* Jean-Victor Poncelet ریاضیدان فرانسوی‌در۱۷۸۸ به‌دنیاآمد و در سال ۱۸۶۷ درگذشت. مهمترین‌کارهای وی در بارهٔ هندسهٔ تصویری و مکانیك عملی است.

۵ـ ثابت کنید کمانهایی از دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث که توسط ضلعهای مثلث جدا می‌شوند کمانهای درخور زاویه‌های $|B-C|$ و $|C-A|$ و $|A-B|$ می‌باشند.

۹.۱ ـ مثلثهای پودر (Podaire)

مثلث ارتفاعی و مثلث میانه‌ای دوحالت خاص از نوعی مثلثهای نظیر یک مثلث می‌باشند. در داخل مثلث ABC نقطهٔ P رادر نظر گرفته عمودهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 را بر ضلعهای مثلث رسم می‌کنیم. مثلث $A_1B_1C_1$ را مثلث پودر نظیر نقطهٔ P برای مثلث ABC می‌نامیم (*). می‌توان قید بودن P در اندرون مثلث را کنار گذاشت به‌



شرط آنکه P روی دایرهٔ محیطی مثلث واقع نباشد (دراین‌باره در بند ۵.۲ صحبت خواهد شد). اگر P برمرکز ارتفاعی یا بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث منطبق باشد، مثلثهای پودر نظیر به ترتیب مثلث ارتفاعی یا مثلث میانه‌ای خواهد بود.

اکنون به‌بررسی شکل بپردازیم. چهار ضلعی AB_1PC_1 در دایرهٔ به‌قطر AP محاط است، پس P بردایرهٔ محیطی مثلث AB_1C_1 واقع‌است. بنابه قانون‌سینوسها در این مثلث و درمثلث ABC خواهیم داشت.

$$\frac{B_1C_1}{\sin A}=AP \text{ و } \frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow B_1C_1=\frac{a\cdot AP}{2R}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$C_1A_1=\frac{b\cdot BP}{2R} \text{ ، } A_1B_1=\frac{c\cdot CP}{2R}$$

این نتیجه‌ها را می‌توانیم زیرعنوان قضیهٔ زیر بیان کنیم:

قضیهٔ ۱.۹.۱ـ هرگاه نقطهٔ P به فاصله‌های x ، y ، z از رأسهای مثلث ABC واقع باشد، اندازه‌های ضلعهای مثلث پودر نظیر نقطهٔ P برابرند با:

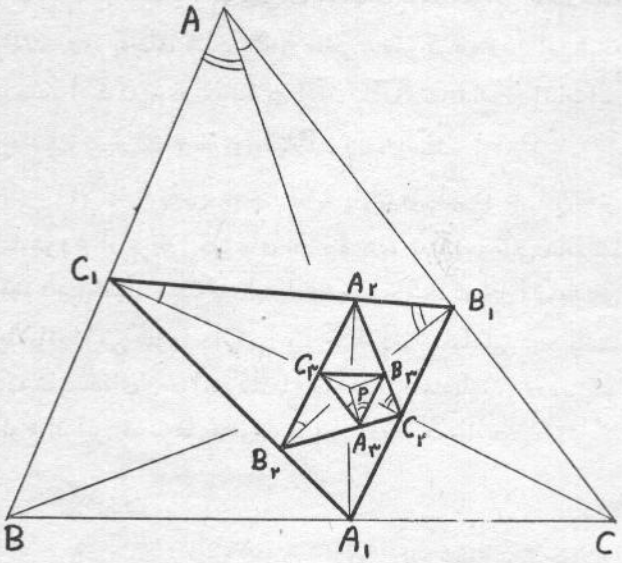
$$\frac{ax}{2R} \text{ ، } \frac{by}{2R} \text{ ، } \frac{cz}{2R}$$

حالت خاص $x=y=z=R$ را خوب می‌شناسیم.

در نظر گرفتن مثلثهای پودر متوالی نظیر یک نقطه برای یک مثلث، علاوه بر آنکه تمرینی جالب است مثالی دلفریب از تصور درهندسه می‌باشد. به‌نظرمی‌آیدکه این موضوع برای نخستین‌بار توسط J.Neuberg به عنوان ضمیمه‌ای برچاپ ششم کتاب.

A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid

مطرح شده است. در شکل زیر نسبت به مثلث ABC و نظیر نقطهٔ P ، مثلث $A_1B_1C_1$ پودراول، مثلث $A_2B_2C_2$ پودر دوم



و $A_3B_3C_3$ پودر سوم رسم شده است. خاصیت زیر توسط Neuberg بیان گردیده است:

قضیهٔ ۲.۹.۱ـ سومین پودر یعنی مثلث $A_3B_3C_3$ با مثلث ABC متشابه‌است.

اثبات این قضیه ازسادگی شگفت‌انگیزی برخوردار است. چون P بردایره‌های محیطی مثلثهای AB_1C_1 ، $A_2B_1C_2$ ، $A_2B_2C_1$ ، $A_3B_3C_2$ و $A_2B_2C_3$ واقع است پس :

$$\angle C_1AP=\angle C_1B_1P=\angle A_2B_1P=$$
$$=\angle A_2C_2P=\angle B_3C_2P=\angle B_3A_3P$$
$$\angle PAB_1=\angle PC_1B_1=\angle PC_1A_2=$$
$$=\angle PB_2A_2=\angle PB_2C_3=\angle PA_3C_3$$

نتیجه می‌شود دو جزئی که از زاویهٔ A پدیدآمده است به‌ترتیب با دوجزئی که روی زاویهٔ A_3 تشکیل شده برابرند. پس دو زاویهٔ A و A_3 باهم برابرند. همچنین ثابت‌می‌شودکه زاویه‌های دیگر

* مکان هندسی پاهای عمودهایی که از نقطهٔ ثابت O برمماسهای نقطه‌های مختلف یک منحنی رسم می‌شود، پودر نظیر نقطهٔ O نسبت به این منحنی نام دارد (مترجم).

دو مثلث ABC و $A_۳B_۳C_۳$ باهم برابرند و این دو مثلث متشابهند. اثبات‌تساوی دو زاویهٔ A و $A_۳$ از راه‌تساوی اجزاء A باجزاء هایی از $B_۱$ و $C_۱$ سپس با جزء هایی‌از $C_۲$ و $B_۲$ انجام‌گرفت. این جزء های متساوی در روی شکل باکمانکها مشخص‌شده‌اند. تعقیب این‌رشته برابریها در روی‌شکل‌وچگونگی رسیدن از A به $A_۳$ بسیارجالب است و همانند حرکت بالهٔ یك دستهٔ بهم پیوسته به‌نظرمی‌آید.

دکتر A·Oppenheim معاون دانشگاه مالزی در سنگاپور خاصیت بالا را برای مثلثهای پودر متوالی تعمیم داده است. وی به‌جای مثلث یك n ضلعی‌درنظر گرفته و به این‌نتیجه رسیده است‌که پودر مرتبهٔ n ام‌آن باآن متشابه است. اثبات‌این خاصیت درحالت $n=۴$ بسیارآموزنده است.

در اینجا بخش نخست‌کتاب پایان می‌پذیرد: در این‌بخش با شروع از برخی چیزهای شناخته شده به نتیجه‌هایی ساده اما مهم دست‌یافتیم. مسئله‌های بسیاری یافت‌می‌شودکه حل‌آنهاباروش بالا انجام می‌گیرد. وانگهی برخی‌ازآنها معماهایی می‌باشند که شایدعده‌ای‌ازخوانندگان‌باآنها آشنایی‌داشته‌باشند. درزیر پنج نوع از این مسئله‌ها به‌عنوان تمرین آورده شده است.

تمرین

۱ـ مثلث‌متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. خطی‌از A می‌گذرد وبا ضلع BC در Q و با دایرهٔ محیطی مثلث‌در P برخورد می‌کند. ثابت‌کنیدکه:

$$\frac{۱}{PB}+\frac{۱}{PC}=\frac{۱}{PQ}$$

۲ـ در داخل مربع $ABCD$ از A و B دوخط رسم می‌کنیم‌که با ضلع AB زاویهٔ ۱۵ درجه‌بسازند. این دوخط‌در P برخوردمی‌کنند. ثابت‌کنیدکه P و C و D سه‌رأس یك‌مثلث متساوی‌الاضلاعند.

۳ـ نقطهٔ Pدرخارج‌متوازی‌الاضلاع $ABCD$ واقع شده است به قسمی‌که دوزاویهٔ PBC و PDC باهم برابرند. ثابت کنیدکه دوزاویهٔ APD و BPC باهم برابرند.

۴ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC اندازهٔ هر یك از زاویه‌های B و C برابر ۸۰درجه است. از B خطی رسم می‌کنیم که‌با BC در D برخوردکندو زاویهٔ DBC به‌اندازهٔ ۶۰درجه باشد. همچنین‌از C خطی‌رسم می‌کنیم‌که با AB در E برخورد کندو زاویهٔ ECB به‌اندازهٔ ۵۰درجه‌باشد. اندازهٔ‌زاویهٔ DEC را بیابید.

۵ـ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. به‌قطر AC در بیرون مثلث نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم. از رأس B دوخط‌چنان‌رسم می‌کنیم‌که این‌نیمدایره‌را به سه‌کمان برابرباهم بخش‌کنند. ثابت کنیدکه این دوخط پاره خط AC را نیزبه سه پارهٔ برابر باهم بخش می‌کنند.

حل مسائل (دنباله ازصفحهٔ۷۴)

$$\begin{cases} \sin^{mn}\alpha\cos^{n^۲}\alpha=x^n \\ \sin^{mn}\alpha\cos^{m^۲}\alpha=y^m \end{cases}$$

$$\cos\alpha=\left(\frac{y^m}{x^n}\right)^{\frac{۱}{m^۲-n^۲}} \quad \text{و}$$

$$\sin\alpha=\left(\frac{x^m}{y^n}\right)^{\frac{۱}{m^۲-n^۲}}$$

$$\left(\frac{y^m}{x^n}\right)^{\frac{۲}{m^۲-n^۲}}+\left(\frac{x^m}{y^n}\right)^{\frac{۲}{m^۲-n^۲}}=۱$$

۱۱۰/۴۰ـ ثابت‌کنید که عدد $۲^{۲^۵}+۱$ بر ۶۴۱بخش‌پذیر است.

حل‌ـ داریم:

$$۶۴۱=۲^۴+۵^۴=۱۶+۵^۴=۵\times۲^۷+۱$$

$$۲^{۲^۵}=۲^{۳۲}=۱۶\times۲^{۲۸}=(۶۴۱-۵^۴)۲^{۲۸}=$$

$$=۶۴۱k-(۵\times۲^۷)^۴=۶۴۱k-(۶۴۱-۱)^۴=$$

$$=۶۴۱m-۱$$

پاسخ تستهای ریاضی

۴۱ـ ب	۴۲ـ د	۴۳ـ ج	۴۴ـ الف
۴۵ـ الف	۴۶ـ ج	۴۷ـ د	۴۸ـ الف
۴۹ـ ج	۵۰ـ ج	۵۱ـ ج	۵۲ـ ب
۵۳ـ د	۵۴ـ الف	۵۵ـ ب	۵۶ـ د
۵۷ـ الف	۵۸ـ ب	۵۹ـ ب	۶۰ـ د
۶۱ـ ج	۶۲ـ ج	۶۳ـ الف	۶۴ـ د
۶۵ـ ب	۶۶ـ د	۶۷ـ ج	۶۸ـ الف

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۱۱۰

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای اول دبیرستان

۱۱۰/۱ـ درهریك از حالتهای ششگانهٔ زیر معلوم کنید که کدام رابطهٔ $A=B$ یا $A\neq B$ درست است :

۱) $\begin{cases} A=\{x \mid \text{«ریاضیات» حرفی است ازکلمهٔ } x\} \\ B=\{x \mid \text{«رضایت» حرفی‌است ازکلمهٔ } x\} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} A=\text{مجموعهٔ حرفهای کلمهٔ «گناه»} \\ B=\text{مجموعهٔ حرفهای کلمهٔ «گناهان»} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} A=\text{مجموعهٔ رقمهای عدد «۱۲۴۱۳»} \\ B=\{x \mid x\in N \text{ و } x<۵\} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} A=\{x \mid \text{«تهران» حرفی است ازکلمهٔ } x\} \\ B=\text{مجموعهٔ حرفهای کلمهٔ «تهرانیان»} \end{cases}$

۵) $\begin{cases} A=\{x \mid x\in N \text{ و } ۱۰<x<۱۰۰\} \\ B=\{x \mid x \text{ عدد دو رقمی است}\} \end{cases}$

۶) $\begin{cases} A=\text{مجموعهٔ عددهای چهار رقمی که مجموع رقمهای هریك از آنها برابر ۴۰ است.} \\ B=\text{مجموعهٔ ماههای سال شمسی‌که ۴۰ روزه هستند.} \end{cases}$

حل ـ به‌ترتیب داریم :

۱) $A=B=\{$ت ، ض ، ا ، ی ، ر$\}$

۲) $A=B=\{$ه ، ا ، ن ، گ$\}$

۳) $A=B=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$

۴) $A\neq B$

کلمهٔ «تهرانیان» علاوه برحرفهای کلمهٔ «تهران» شامل حرف دیگر «ی» است.

۵) $A\neq B$

A شامل عدد ۱۰۰ می‌باشد اما B شامل ۱۰۰ نیست.

۶) $A=B=\varnothing$

۱۱۰/۲ـ دو عدد متمایز a و b چگونه باشند تا دو مجموعهٔ زیر با هم برابر باشند،

$$E=\{x \mid x\in R \text{ و } (x-a)(x-b)=۰\}$$

$$F=\{x \mid x\in R \text{ و } (ax-۱)(bx-۱)=۰\}$$

حل ـ به‌ترتیب داریم :

$$(x-a)(x-b)=۰ \Longrightarrow x=a \text{ یا } x=b$$

$$(ax-۱)(bx-۱)=۰ \Longrightarrow x=\frac{۱}{a} \text{ یا } x=\frac{۱}{b}$$

$$E=\{a ، b\} ، F=\left\{\frac{۱}{a} ، \frac{۱}{b}\right\}$$

دو مجموعهٔ E و F وقتی با هم برابرندکه یا داشته باشیم:

$$a=\frac{۱}{a} \text{ و } b=\frac{۱}{b} \Longrightarrow a=\pm ۱ , b=\pm ۱$$

یا اینکه داشته باشیم:

$$a=\frac{۱}{b} \text{ و } b=\frac{۱}{a} \Longrightarrow ab=۱$$

۱۱۰/۳ـ ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

از دو عدد زیر کدام بزرگتر است :

$$a=۱+۲+۳+\ldots+۱٬۰۰۰٬۰۰۰$$

$$b=۱\times ۲\times ۳\times \ldots\times ۱۹\times ۲۰$$

حل ـ داریم:

$$۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵\times ۶\times ۷\times ۸\times ۹>۲\times ۵$$

طرفین نامساوی را در حاصل ضرب عددهای از ۱۰ تا ۲۰ ضرب می‌کنیم، می‌شود:

$$۱\times ۲\times ۳\times \ldots\times ۲۰>۲\times ۵\times ۱۰\times ۱۱\times \ldots\times ۲۰$$

اما داریم :

$$۲\times ۵\times ۱۰\times ۱۱\times ۱۲\times \ldots\times ۲۰>۱۰\times ۱۰\times \ldots\times ۱۰=۱۰^{۱۲}$$

بنابراین $b>۱۰^{۱۲}$. از طرف دیگر :

$$۱+۲+۳+\ldots+۱۰۰۰۰۰۰<۱۰۰۰۰۰۰+\ldots+۱۰۰۰۰۰۰$$

$$a<۱۰۰۰۰۰۰\times ۱۰۰۰۰۰۰ \Longrightarrow a<۱۰^{۱۲}$$

بنابراین $a<b$

۱۱۰/۴ـ ترجمهٔ از فرانسه

هر گاه x عددی گنگ و a و b و c و d چهار عدد گویا باشند، این عددها چگونه باشند برای آنکه $r=\frac{ax+b}{cx+d}$ عدد گویا باشد.

حل ـ از رابطهٔ داده شده بدست می‌آید:

$$ax+b=r(cx+d)$$

$$x(a-rc)=rd-b$$

طرف دوم این رابطه عدد گویا است، پس طرف اول آن نیز باید گویا باشد. اما چون x عدد گنگ است، پس باید داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} a-rc=0 \Longrightarrow \frac{a}{c}=r \\ rd-b=0 \Longrightarrow \frac{b}{d}=r \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

۱۱۰/۵ـ چهار نقطهٔ A و B و C و D بر یك خط چنان واقعند که :

$$B\in[CD] \quad \text{و} \quad C\in[AB]$$

حاصل $[AB]\cap[CD]$ و $[AB]\cup[CD]$ را معلوم کنید.

حل ـ داریم :

$$[AB]\cap[CD]=[BC]$$

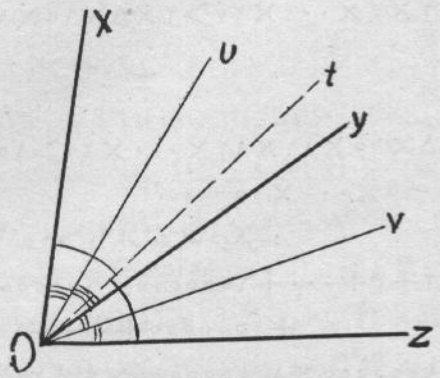
$$[AB]\cup[CD]=[AD]$$

۱۱۰/۶ـ دو زاویهٔ مجاور و نابرابر xOy و yOz داده شده است. هر گاه Ot نیمساز زاویهٔ xOz و Ou نیمساز زاویهٔ xOy و Ov نیمساز زاویهٔ yOz باشد ثابت کنید که :

$$\angle uOv=\angle xOt \quad \text{و} \quad \angle uOt=\angle vOz \quad \text{و}$$

$$\angle tOv=\angle xOu$$

حل ـ فرض می‌کنیم $\alpha=\angle xOy$ و $\beta=\angle yOz$ خواهیم داشت:



$$\angle uOv=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\angle xOt=\frac{\angle xOz}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\angle uOt=\angle xOt-\angle xOu=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}=$$

$$=\angle vOz$$

$$\angle tOv=\angle tOz-\angle vOz=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\angle xOu$$

حل مسائل ویژهٔ سال دوم علوم تجربی

۱۱۰/۷ـ فرستنده : **مهندس جواد فیض**

هر گاه داشته باشیم :

$$x^2-2x\sqrt{2}+\sqrt{3}=0$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$x^8-16x^6+8x^4-48x^2+9=0$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$x^2+\sqrt{3}=2x\sqrt{2} \Longrightarrow (x^2+\sqrt{3})^2=(2x\sqrt{2})^2$$

$$x^4+2x^2\sqrt{3}+3=8x^2$$

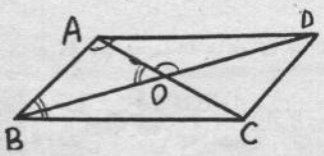
$$(8x^2-x^4-3)^2=(2x^2\sqrt{3})^2$$

از بسط طرفین این رابطه ومرتب کردن آن، رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید.

۱۱۰/۸ـ ترجمهٔ از فرانسه

در متوازی الاضلاعی زاویه‌های بین دو قطر با زاویه‌های متوازی الاضلاع برابرند. ثابت کنید که قطرها با ضلعها متناسبند و نسبت آنها $\sqrt{2}$ است.

حل ـ دو مثلث ABO و ABC متشابهند، زیرا در زاویهٔ BAC مشترکند و بنا به‌فرض دو زاویهٔ AOB و ABC باهم برابرند.



بنابراین ضلعهای روبرو به‌زاویه‌های متساوی متناسبند یعنی:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AO}{AB} \Longrightarrow AB^2=AC\cdot AO$$

$$AB^2=AC\cdot\frac{AC}{2}=\frac{AC^2}{2}$$

$$\frac{AC^2}{AB^2}=2 \Longrightarrow \frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$$

دو مثلث AOD و ABD نیز متشابهند و بدست می‌آید:

$$\frac{BD}{AD}=\sqrt{2}$$

حل مسائل ویژهٔ سال دوم ریاضی، فیزیك

۱۱۰/۹ـ اولا معلوم کنید دو مجموعهٔ A و B چگونه باشند برای آنکه $A\times B$ با $B\times A$ برابر باشد:

ثانیاً هرگاه $A\times B=B\times A$ و داشته باشیم :

$$A=\{x+y\ ,\ 1\}\quad ,\quad B=\{x-y\ ,\ 3\}$$

مقادیر x و y را بدست آورید.

حل ـ عمل حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ها جابجائی نیست. بنابراین $A\times B$ وقتی با $B\times A$ برابر است که $A=B$.

ثانیاً باید داشته باشیم $A=B$ و چون $3\neq 1$ پس:

$$\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

۱۱۰/۱۰ـ برای سه مجموعهٔ A و B و C ثابت کنید که :

$$[A\times B=A\times C\ \text{و}\ A\neq\varnothing]\Longrightarrow B=C$$

حل ـ فرض می‌کنیم a عضوی دلخواه اما معین از A و x عضو غیر مشخص B و y عضوغیر مشخص C باشد. از رابطهٔ $A\times B=A\times C$ اولا نتیجه می‌شود که $(a,x)\in A\times C$ پس $x\in C$ است و چون $x\in B$ می‌باشد پس $B\subset C$.

ثانیاً نتیجه می‌شود که $(a,y)\in A\times B$ پس $y\in B$ و چون $y\in C$ بنابراین $C\subset B$. از دو رابطهٔ $B\subset C$ و $C\subset B$ نتیجه می‌شود که $B=C$.

۱۱۰/۱۱ـ هرگاه داشته باشیم :

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(2)=7m+2\ \text{و}\ f(1)=3m\ \text{و}\ f(0)=m$$

ضریبهای a و b و c را برحسب m بدست آورید.

حل ـ داریم:

$$f(0)=a\times 0+b\times 0+c=c$$

$$f(1)=a\times 1+b\times 1+c=a+b+c$$

$$f(2)=a\times 4+b\times 2+c=4a+2b+c$$

$$\begin{cases}c=m\\a+b+c=3m\\4a+2b+c=7m+2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=m+1\\b=m-1\\c=m\end{cases}$$

$$(m+1)x^2+(m-1)x+m=0$$

۱۱۰/۱۲ـ هرگاه $x+\frac{1}{x}=A$ باشد، عبارت زیر را برحسب A بنویسید و مرتب کنید:

$$P=x^4-3x^2+1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}$$

حل ـ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$P=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=A^2-1$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=(A^2-2)^2-2=$$

$$=A^4-4A^2+2$$

$$P=A^4-4A^2+2-3(A^2-2)+1=$$

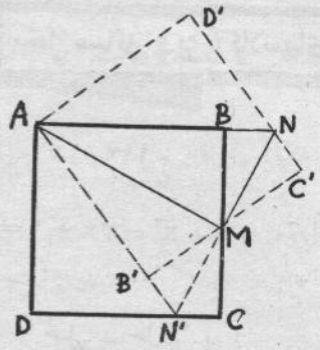
$$=A^4-7A^2+9$$

۱۱۰/۱۳ـ ترجمهٔ : **مهندس فتح‌الله زرگری :**

۱) در مربع ABCD از M وسط BC خطی عمودبر AM رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در N قطع کند. ثابت کنید که MN نصف AM است.

۲) ازمربعی یك رأس و وسط یك ضلع مقابل به‌آن رأس معلوم است. این مربع را رسم کنید.

حل ـ ۱)دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM و AMN که در یك زاویهٔ حاده مشترکند متشابهند و داریم:



$$\frac{MN}{BM}=\frac{AM}{AB}\Longrightarrow$$

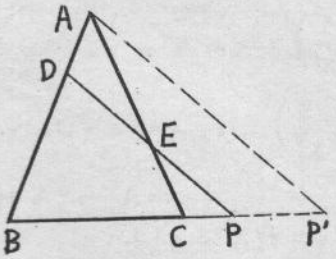
$$\frac{MN}{AM}=\frac{BM}{AM}=\frac{1}{2}$$

۲) هرگاه رأس A ونقطهٔ M وسط ضلع BC ازمربع ABCD داده شده باشد، برای‌رسم مربع، بنابرآنچه گذشت، در M عمودی بر AM اخراج می‌کنیم و روی آن نقطهٔ N را چنان پیدا می‌کنیم که MN نیمهٔ AM باشد (دو نقطهٔ N و N′ بدست می‌آید). آنگاه‌از M عمودی بر AN (وبر AN′) فرود می‌آوریم که B (همچنین B′) پای عمود یك رأس دیگراز مربع می‌باشد. سپس مربع راکامل‌می‌کنیم. مسئله دارای دوجواب ABCD و A′B′C′D′ است.

۱۱۰/۱۴ـ ترجمهٔ از فرانسه

درمثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB=AC=m$ و $BC=n$ است برامتداد BC و در همان طرف C نقطهٔ P را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم و ازآن خط Δ را رسم می‌کنیم که AB را در D و AC را در E قطع کند. مقدار $\frac{BP}{BD}-\frac{CP}{CE}$ را برحسب m و n بدست آورید.

راهنمایی ـ از A موازی با Δ رسم کنید.



حل ـ خطی که از A موازی با Δ رسم شود با خط BC در P' برخورد می‌کند. مثلثهای BDP و BAP' متشابهند و:

$$\frac{BP}{BD}=\frac{BP'}{BA}$$

همچنین مثلثهای CPE و $CP'A$ متشابهند و :

$$\frac{CP}{CE}=\frac{CP'}{CA}$$

از دو رابطهٔ بالا وبا توجه به‌اینکه $AB=AC$ بدست‌می‌آید:

$$\frac{BP}{BD}-\frac{CP}{CE}=\frac{BP'-CP'}{BA}=\frac{BC}{AB}=\frac{n}{m}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۱۰/۱۵ـ به‌فرض آنکه x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشد، مقدار $S=\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}$ را بدست آورید.

حل ـ حل داریم :

$$x_1+x_2=3 \quad و \quad x_1x_2=1$$

$$(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=5$$

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{5}$$

$$(\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2})^2=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+2\sqrt[4]{x_1x_2}=$$
$$=\sqrt{5}+2$$

$$\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}=\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

۱۱۰/۱۶ـ در دایرهٔ جهت‌دار، اندازهٔ کمان به مبدأ A و منتهای M برابر با ۹۵۰ گراد و اندازهٔ کمان به‌مبدأ A و منتهای N برابر با $-\frac{5\pi}{6}$ رادیان است، کوچکترین مقدار مثبت اندازهٔ کمان به‌مبدأ M و منتهای N چند درجه است ؟

حل ـ چون ۹۵۰ گراد برابر است با 855° و برابر است با $135^\circ+2\times360^\circ$ پس کوچکترین مقدار مثبت کمان AM برابر 135° است. همچنین $-\frac{5\pi}{6}$ رادیان برابر -150° و برابر $210^\circ=360^\circ-150^\circ$ است. بنابراین کوچکترین مقدار مثبت اندازهٔ کمان به مبدأ M و منتهای N می‌شود:

$$210^\circ-135^\circ=75^\circ$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۱۰/۱۷ـ ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$x=a-b(a-bx^2)^2$$

حل ـ با فرض $a-bx^2=y$ دستگاه زیر را داریم.

$$\begin{cases} y=a-bx^2 \\ x=a-by^2 \end{cases}$$

$$x-y=b(x^2-y^2)\Rightarrow(x-y)(1-bx-by)=0$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x=a-by^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} 1-bx-by=0 \\ x=a-by^2 \end{cases}$$

در هر یك از دستگاهها ازمعادلهٔ نخست y را برحسب x بدست آورده در معادلهٔ دیگر قرار می‌دهیم که به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$bx^2+x-a=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4ab}}{2b}$$

$$bx^2-x+\frac{1}{b}-a=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{4ab-3}}{2b}$$

معادله حداکثر دارای چهار جواب است.

۱۱۰/۱۸ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} 2(x-y)=7(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \end{cases}$$

حل ـ با فرض $\sqrt[3]{x}=A$ و $\sqrt[3]{y}=B$ داریم :

$$\begin{cases}2(A^3-B^3)=7(A^2B-AB^2)\\A-B=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}2(A-B)(A^2+AB+B^2)=7AB(A-B)\\A-B=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}2(A^2+B^2)-5AB=0\\A^2+B^2-2AB=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A^2+B^2=45\\AB=18\end{cases}$$

$$\begin{cases}(A+B)^2-2AB=45\\AB=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=9\\AB=18\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=6\\B=3\end{cases}\text{ یا }\begin{cases}A=3\\B=6\end{cases}\quad\text{یا}\quad\begin{cases}A=-6\\B=-3\end{cases}\text{ یا }\begin{cases}A=-3\\B=-6\end{cases}$$

۱۱۰/۱۹ـ در چهار ضلعی محاطی ABCD اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ A و B پدید می‌آید برابر با $83\frac{1}{3}$ گراد و تفاضل اندازهٔ زاویهٔ A بر اندازهٔ زاویهٔ B برابر با $\frac{\pi}{18}$ رادیان است. اندازه‌های زاویه‌های چهار ضلعی را برحسب درجه حساب کنید.

حل ـ با توجه به‌اینکه $83\frac{1}{3}$ گراد برابر 75° و $\frac{\pi}{18}$ رادیان برابر 10° است، داریم :

$$180^\circ-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=75^\circ\Rightarrow A+B=210^\circ$$

$$\begin{cases}A+B=210^\circ\\A-B=10^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}A=110^\circ\\B=100^\circ\end{matrix}\quad\begin{matrix}C=70^\circ\\D=80^\circ\end{matrix}$$

۱۱۰/۲۰ـ بردایرهٔ جهت دار به‌مبدأ A دو نقطهٔ M و N داده شده است. از P وسط کمان MN خطی موازی با وتر AN رسم می‌کنیم که دایره را در Q تلاقی می‌کند. هرگاه اندازهٔ کمان AP برابر با ۱۶۵ درجه و اندازهٔ کمان AQ برابر با ۵۰ گراد باشد، فرمول کلی اندازه‌های دو کمان AM و AN را برحسب رادیان بدست آورید.

حل ـ داریم:

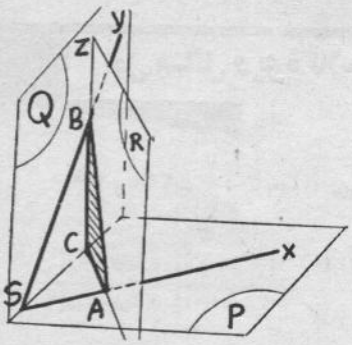
$$\widehat{AP}=\frac{\widehat{AM}+\widehat{AN}}{2}=165^\circ=\frac{11\pi}{12}$$

$$\widehat{AQ}=\widehat{PN}=\frac{\widehat{AN}-\widehat{AM}}{2}=50^{gr}=\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases}\widehat{AM}+\widehat{AN}=11\pi\\\widehat{AN}-\widehat{AM}=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\widehat{AM}=\frac{21\pi}{4}\\\widehat{AN}=\frac{23\pi}{4}\end{cases}$$

$$\widehat{AM}=2k\pi+\frac{5\pi}{4}\quad\text{و}\quad\widehat{AN}=2k\pi+\frac{7\pi}{4}$$

۱۱۰/۲۱ـ دو صفحهٔ P و Q بریکدیگر عمودند و Δ فصل مشترک آنهاست. از نقطهٔ S واقع بر Δ خط Sx را در صفحهٔ P و خط Sy را در صفحهٔ Q رسم می‌کنیم. صفحهٔ R که در نقطهٔ A عمود برخط Sx رسم شود با Sy در B و با Δ در C برخورد می‌کند. ثابت کنید که مثلث ABC قائم‌الزاویه است.



حل ـ صفحهٔ R که برخط Sx از صفحهٔ P عموداست بر این صفحه می‌باشد. صفحهٔ Q نیز برصفحهٔ P عمود است. بنابراین Cz فصل مشترک این دو صفحه برصفحهٔ P عموداست. خط Cz که همان خط CB است بر همهٔ خطهای صفحهٔ P از جمله بر CA عمود می‌باشد.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم دبیرستان

۱۱۰/۲۲ـ در رابطهٔ زیر y تابع x است. y' را برحسب x و y بدست آورید :

$$y^2\cos x=x^3\sin y+x^2\,tg\,x$$

حل ـ از طرفین تساوی برحسب x مشتق می‌گیریم:

$$2y'y\cos x-y^2\sin x=3x^2\sin y+y'x^3\cos y+$$
$$+2x\,tg\,x+x^2(1+tg^2x)$$

$$y'=\frac{y^2\sin y+3x^2\sin y+2x\,tg\,x+x^2(1+tg^2x)}{2y\cos x-x^3\cos y}$$

۱۱۰/۲۳ـ فرستنده : **مهندس جواد فیض**

از معادلهٔ زیر مقدار $t=tg\frac{x}{2}$ را برحسب a بدست آورید و به‌ازای $a=\sqrt{2}$ دستور کلی مقادیر جوابهای معادله را بنویسید :

$$(a+2)\sin x+(2a-1)\cos x=2a+1$$

حل ـ داریم :

$$(a+2)\times\frac{2t}{1+t^2}+(2a-1)\times\frac{1-t^2}{1+t^2}=2a+1$$

$$2at^2-(a+2)t+1=0 \Longrightarrow t=\frac{1}{2}\ \text{یا}\ \frac{1}{a}$$

$$tgx=\frac{2t}{1-t^2}\Longrightarrow tgx=\frac{4}{3}\ \text{یا}\ \frac{2a}{a^2-1}$$

$$tgx=\frac{4}{3}\Longrightarrow x=k\pi+Arctg\frac{4}{3}$$

$$a=\sqrt{2}\Longrightarrow tgx=2\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow x=k\pi+Arctg2\sqrt{2}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۱۰/۲۴ـ حد تابعهای زیر را حساب کنید :

۱) $y=\frac{1}{cosx}-tgx\ ,\ x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

۲) $y=\frac{sin3x}{1-2cosx}\ ,\ x\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

حل ـ با استفاده از دستور هوپیتال بدست خواهد آمد که برای اولی حد y برابر صفر و برای دومی حد y برابر $-\sqrt{3}$ است.

بدون استفاده از دستور هوپیتال چنین عمل می‌کنیم :

۱) $y=\frac{1-sinx}{cosx}=\frac{\left(sin\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right)^2}{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}=$

$$=\frac{cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}}$$

$$x\longrightarrow\frac{\pi}{2}\Longrightarrow y\longrightarrow 0$$

۲) $y=\frac{3sinx-4sin^3x}{1-2cosx}=\frac{sinx(3-4sin^2x)}{1-2cosx}=$

$$=\frac{-sinx(1-4cos^2x)}{1-2cosx}=-sinx(1+2cosx)$$

$$x\longrightarrow\frac{\pi}{3}\Longrightarrow y\longrightarrow-\sqrt{3}$$

۱۱۰/۲۵ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

دو سهمی به‌معادله‌های :

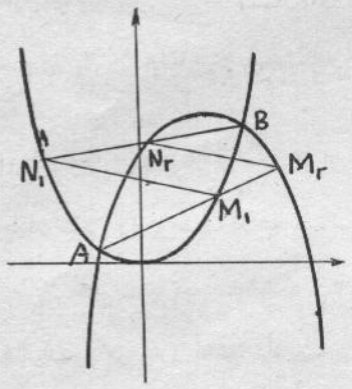
$$y=x^2\ \text{و}\ y=ax^2+bx+c$$

در دو نقطهٔ A و B متقاطعند. از A خطی رسم می‌کنیم که سهمی اول را در M_1 و سهمی دوم را در M_2 قطع می‌کند. از B خطی رسم می‌کنیم که سهمی اول را در N_1 و سهمی دوم را در N_2 تلاقی می‌کند. ثابت کنید که دوخط M_1N_1 و M_2N_2 با هم موازیند.

حل ـ به‌فرض $A(x_1\ و\ y_1)$ و $B(x_2\ و\ x_2)$ از حل معادله‌های سهمیها بدست می‌آید:

$$(a-1)x^2+bx+c=0$$

$$x_1+x_2=\frac{b}{1-a}\ \text{و}\ x_1x_2=\frac{c}{a-1}$$



ضریب زاویه‌ای خط AM_1 را با m_1 و ضریب زاویه‌ای خط BN_1 را با m_2 می‌نمائیم. پس معادله های این خطها به ترتیب می‌شود:

$$y=m_1(x-x_1)+y_1$$

$$y=m_2(x-x_2)+y_2$$

از حل معادلهٔ اول با معادله‌های سهمیها خواهیم داشت:

$$x^2-m_1x+m_1x_1-y_1=0$$

$$ax^2+(b-m_1)x+c+m_1x_2-y_1=0$$

با فرض $M_1(\alpha_1\ و\ \beta_1)$ و $M_2(\alpha_2\ و\ \beta_2)$ از این معادله‌ها داریم .

$$x_1+\alpha_1=m_1\ \text{و}\ x_1+\alpha_2=\frac{m_1-b}{a}$$

$$\alpha_1=m_1-x_1\ \text{و}\ \beta_1=(\alpha_1)^2$$

$$\alpha_2=\frac{m_1-b}{a}-x_1\ \text{و}\ \beta_2=a(\alpha_2)^2+b\alpha_2+c$$

همچنین با فرض $N_1(\gamma_1\ و\ \delta_1)$ و $N_2\ (\gamma_2 و \delta_2)$ خواهیم داشت:

$$\gamma_1=m_2-x_2\ \text{و}\ \delta_1=(\gamma_1)^2$$

$$\gamma_2=\frac{m_2-b}{a}-x_2\ \text{و}\ \delta_2=a(\gamma_2)^2+b\gamma_2+c$$

اکنون ضریب‌زاویه‌ایهای خطهای M_1N_1 و M_2N_2 را حساب می‌کنیم:

$$m_{M_1N_1}=\frac{\beta_1-\delta_1}{\alpha_2-\gamma_1}=\frac{(\alpha_1)^2-(\gamma_1)^2}{\alpha_2-\gamma_1}$$

$$m_{M_1N_1}=\alpha_1+\gamma_1=m_1+m_2-$$

$$-(x_1+x_2)=m_1+m_2-\frac{b}{1-a}$$

$$m_{M_2N_2}=\frac{\beta_2-\delta_2}{\alpha_2-\gamma_2}=a(\alpha_2+\gamma_2)+b$$

$$m_{M_2N_2}=a\left[\frac{m_1-b}{a}+\frac{m_2-b}{a}-\right.$$

$$\left.-(x_1+x_2)\right]+b$$

$$m_{M_2N_2}=m_1+m_2-\frac{b}{1-a}$$

دو خط ضریب زاویه‌های برابر دارند پس باهم موازیند.

۱۱۰/۲۶ـ فرستنده : **مهندس جواد فیض**

ثابت کنید که مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع

$$y=\frac{\sin mx}{\sin x}$$

از معادلهٔ $tg\,mx=m\,tg\,x$ بدست می‌آیند و نتیجه بگیرید که :

$$\sin^2 mx<m^2\sin^2 x$$

حل‌ـ داریم:

$$y'=\frac{m\cos mx\sin x-\sin x\sin mx}{\sin^2 x}$$

$$y'=0\Longrightarrow tg\,mx=m\,tg\,x$$

$$tg^2 mx=m^2 tg^2 x$$

$$\frac{\sin^2 mx}{\cos^2 x}=\frac{m^2\cos^2 mx}{\cos^2 x}=\frac{m^2(1+tg^2 x)}{1+tg^2 mx}$$

$$tg\,mx=m\,tg\,x$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x}=\frac{m^2(1+tg^2 x)}{1+m^2 tg^2 x}$$

$$m\in z\Longrightarrow 1+tg^2 x<1+m^2 tg^2 x$$

$$\frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x}<m^2\Longrightarrow \sin^2 mx<m^2\sin^2 x$$

۱۱۰/۲۷ـ فرستنده : **کاظم حافظ قرآن**

هرگاه داشته باشیم :

$$x\cos 2c+\cos 2(a-b)$$

$$=x\cos 2a+\cos 2(b-c)$$

$$=x\cos 2b+\cos 2(c-a)$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$\frac{tg\,a}{tg(b+c-a)}=\frac{tg\,b}{tg(c+a-b)}=\frac{tg\,c}{tg(a+b-c)}$$

حل‌ـ از رابطه‌های داده‌شده داریم:

$$x=\frac{\cos 2(c-b)-\cos 2(b-a)}{\cos 2c-\cos 2a}=$$

$$=\frac{\cos 2(a-c)-\cos 2(c-b)}{\cos 2a-\cos 2b}=$$

$$=\frac{\cos 2(b-a)-\cos 2(a-c)}{\cos 2b-\cos 2c}$$

$$\frac{\sin(2b-c-a)}{\cos(c+a)}=\frac{\sin(2c-a-b)}{\sin(a+b)}=$$

$$=\frac{\sin(2a-b-c)}{\cos(b+c)}$$

$$\frac{tg\,b-tg(a+c-b)}{tg\,b+tg(a+c-b)}=\frac{tg\,c-tg(c-a-b)}{tg\,c+tg(a+b-c)}=$$

$$=\frac{tg\,a-tg(a-b-c)}{tg\,a+tg(b+c-a)}$$

طرفین‌برابریها را ترکیب درصورت وتفضیل در مخرج می‌کنیم، رابطهٔ مورد نظر بدست می‌آید.

۱۱۰/۲۸ـ ترجمهٔ : **مهندس زرگری**

آیا عدد پنج رقمی یافت می‌شود که در رابطهٔ زیر صدق کند :

$$\overline{abcde}=a^5+b^4+c^3+d^2+e$$

حل‌ـ باتوجه به اینکه a ، b ،...، e رقم می‌باشند و به‌علاوه $a>0$ خواهم داشت:

$$a^5<10^4 a \text{ و } b^4<10^3 b \text{ و } c^2<10^2 c \text{ و } d^2<10d$$

$$a^5+b^4+c^3+d^2+e<10^4 a+10^3 b+$$

$$+10^2 c+10d+e$$

$$a^5+b^4+c^3+d^2+e<\overline{abcde}$$

بنابراین معادلهٔ داده شده ممکن نیست. یعنی عدد پنج رقمی‌باآن خاصیت وجود ندارد.

۱۱۰/۲۹ـ ترجمهٔ : **مهندس زرگری**

مجموع رقمهای عدد x برابر y و مجموع رقمهای عدد

y برابر z است. هرگاه $x+y+z=60$ باشد عدد x را بیابید.

حل- عدد x دورقمی است و آن را $\overline{ab}$ فرض کنیم پس:

$$x=10a+b \text{ و } y=a+b$$

۱) $y<9 \Rightarrow z=a+b$

$$x+y+z=12a+3b=60$$

$$4a+b=20 \Leftrightarrow (a=4 \text{ و } b=4)$$

یا $(a=5 \text{ و } b=0)$

۲) $y>9 \Rightarrow z=a+b-9$

$$x+y+z=12a+3b-9=60$$

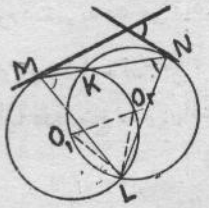
$$4a+b=23 \Rightarrow (a=4 \text{ و } b=7)$$

$x=44$ یا ۴۷ یا ۵۰

۱۱۰/۳۰- ترجمهٔ : مهندس زرگری

دو دایره از مرکزهای یکدیگر می گذرند . از K نقطهٔ برخورد آنها خطی می گذرانیم که دایره‌ها را در M و N قطع کند. در این نقطه‌ها مماسهایی بر دایره‌های نظیر رسم می کنیم. زاویهٔ بین مماسها چقدر است؟

حل- چون دو دایره از مرکز یکدیگر می گذرند پس باهم برابرند. مثلث LO_1O_2 متساوی الاضلاع است و اندازهٔ زاویهٔ O_1LO_2 برابر 60° است. هرگاه دایرهٔ O_2 را حول L به زاویهٔ 60° دوران دهیم بر دایرهٔ O_1 منطبق می‌شود. هریک از زاویه‌های LMN و LNM نیز 60° و مثلث LMN متساوی‌الاضلاع است. پس در دوران مذکور نقطهٔ N نیز بر نقطهٔ M واقع می‌شود و مماس دایرهٔ O_2 در N بر مماس بر دایرهٔ O_1 در M منطبق می گردد. بنابراین زاویهٔ بین مماسها برابر 60° است.



حل مسائل گوناگون

الف - مسئله‌های ترجمهٔ مهندس زرگری

۱۱۰/۳۱- پس از آنکه قیمتها کاهش یافت، مغازه‌داری از عروسکهایی که قبلا هریک را به ۵۰ ریال می‌فروخت آنچه که برایش باقیمانده بود همه را رویهم به ۳۱۹۳ ریال فروخت. درصد کاهش قیمتها چقدر بوده است؟

حل- چون $3193=31\times103$ و ۳۱ و ۱۰۳ عددهای اولند و به علاوه بهای هر عروسک کمتر از ۵۰ ریال است، پس هر عروسک یا به ۳۱ ریال فروخته شده یا به یک ریال. در حالت اول هر عروسک ۱۹ ریال ارزانتر شده و کاهش قیمتها ۳۸٪ بوده است. در حالت دوم هر عروسک ۴۹ ریال ارزانترشده و کاهش قیمتها ۹۸٪ بوده است.

۱۱۰/۳۲- در جشن نوروز هریک از دانش‌آموزان یک کلاس توسط کارت پستی به یک یا چند نفر از همکلاسیهایش تبریک می گوید. هرگاه هردانش‌آموز کارت تبریک از همکلاس خود دریافت کرده باشد. ثابت کنید که اقلا دو نفر از دانش‌آموزان به تعداد برابر کارت تبریک از همکلاسیهای خود دریافت کرده‌اند.

حل- اگر عدهٔ دانش‌آموزان کلاس n باشد، هریک از آنها می‌تواند از یک تا $n-1$ کارت دریافت کند. چون $n>n-1$ بنابراین تعداد کارتهای دریافتی همهٔ n نفر دانش‌آموز عددهای متفاوت نمی‌باشند و بین آنها حداقل دو نفر یافت می‌شود که به تعداد برابر کارت دریافت داشته‌اند.

۱۱۰/۳۳- پنج عدد بخش‌ناپذیر بر ۵ را در نظر می گیریم. هریک از آنها را با تقریب نقصانی سر راست می کنیم تا بر ۵ بخش‌پذیر گردد. خطای حاصل در مجموع عددها چقدر است ؟

حل- در سرراست کردن عددها تا آنکه بر ۵ بخش‌پذیر گردند، باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۵ کنار گذاشته می‌شود. پس خطای حاصل برابر است با مجموع باقیمانده‌های تقسیم این عددها بر ۵ پس از سرراست کردن عددها، مجموع آنها و در نتیجه مجموع باقیمانده‌های آنها بر ۵ بخش‌پذیر است مجموع باقیمانده‌ها نمی‌تواند صفر باشد، زیرا عددهای مفروض بر ۵ بخش پذیر نمی‌باشند. مجموع باقیمانده‌ها اگر ۵ باشد هریک از آنها برابر یک است و در نتیجه از هرعدد یک واحد کم کرده‌ایم. این موقعی است که عددها به رشتهٔ حسابی با قدر نسبت ۵ باشند. همچنین است وقتی که مجموع باقیمانده‌ها ۲۰ باشد. در حالت کلی که عددها به وضع دلخواه باشند مجموع باقیمانده‌ها ، یعنی خطای حاصل ، ۱۰ یا ۱۵ می‌باشد.

۱۱۰/۳۴ـ رابطهٔ زیر را بین شعاع دایـرهٔ محیطی و میانه‌های هر مثلث ثابت کنید:

$$\frac{۹R}{m_a+m_b+m_c} \geqslant ۲$$

حل ـ با توجه به دستور اندازهٔ میانه برحسب اندازه‌های ضلعها داریم :

$$m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۴}(a^۲+b^۲+c^۲)$$

$$a^۲+b^۲+c^۲ \leqslant ۹R^۲$$

$$\Longrightarrow m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲ \leqslant \frac{۲۷R^۲}{۴}$$

بنابراین باتوجه به نامساوی بین مجموع مربعات و مربع مجموع چند عدد خواهیم داشت:

$$(m_a+m_b+m_c)^۲ \leqslant ۳(m_a^۲+m_b^۲+$$

$$+m_c^۲) \leqslant \frac{۸۱R^۲}{۴}$$

$$m_a+m_b+m_c \leqslant \frac{۹R}{۲} \Longrightarrow \frac{۹R}{m_a+m_b+m_c} \geqslant ۲$$

۱۱۰/۳۵ـ مقادیر A و ω و φ چگونه باشند تا تابع $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ به‌ازای همهٔ مقادیر x دررابطهٔ زیر صدق کند:

$$\mathrm{Min}(\sin x , \cos x) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{Max}(\sin x , \cos x)$$

حل ـ فرض کنیم تابع $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ درشرط مسئله صادق باشد. حالت $\omega>۰$ رابررسی می‌کنیم. از نامساوی داده شده نتیجه می‌شود، که در ازای همهٔ مقادیر $\alpha_k=\frac{\pi}{۴}+۲k\pi$ تابع $f(x)$ مقداری برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ دارد.

$$\cos(\omega\alpha_k+\varphi)=\frac{\sqrt{۲}}{۲A}$$

به سادگی می‌توان دید که اعداد $\beta_k=\omega\alpha_k+\varphi$ تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت $۲\pi\omega$ را می‌دهند.

و باز به سادگی می‌توان ثابت کرد که هرگاه $\sin x$ یکی از مقادیر غیرصفر تصاعد را به‌خود بگیرد قدر نسبت این تصاعد. مضرب صحیحی است از ۲π .

به این ترتیب $۲\pi\omega=۲k\pi$ که در آن k عددصحیح است.

بنابر ایـن ω عدد طبیعی است. حال نقاط $\gamma_n=\frac{n\pi-\varphi}{\omega}$ را بررسی می‌کنیم که درآنها $f(x)$ به‌سوی صفرمیل می‌کند و نشان می‌دهیم که به‌ازای $\omega>۲$ یکی ازآنها در فاصلهٔ :

$$\left(۲m\pi \text{ و } ۲m\pi+\frac{\pi}{۲}\right)$$

قرارمی‌گیرد که درآن m عدد صحیح است. درحقیقت نامساوی:

$$۲m\pi<\gamma_n<۲m\pi+\frac{\pi}{۲}$$

پس از تبدیلات لازم به‌صورت زیردر می‌آید:

$$۲m\omega+\frac{\varphi}{\pi}<n<۲m\omega+\frac{\omega}{۲}+\frac{\varphi}{\pi} \quad (۱)$$

تفاضل بین اجزاء سمت چپ و راست ایـن نامساوی بـرابـر $\frac{\omega}{۲}+۱$ است که به ازای $\omega>۲$ بـزرگتر از واحد است. بنابراین نامساوی (۱) به‌ازای $\omega>۲$ دارای جواب صحیح $h_۰$ می‌باشد و نقطهٔ نظیر آن $\gamma_{n_۰}$ در فاصلهٔ $\left(۲m\pi \text{ و } ۲m\pi+\frac{\pi}{۲}\right)$ قـرار دارد. لیکن در این فاصله $\sin x>۰$ و $\cos x>۰$ و بـه‌همین ترتیب $f(x)>۰$ است، که با $\sin\gamma_{n_۰}=۰$ مغایرت دارد.

حالت $\omega=۲$ را بررسی می‌کنیم. در این‌صورت نامساوی (۱) دارای جوابهای صحیح نیست مگر در حالتی که هـردو جزء آن اعداد صحیح باشند یعنی $\frac{\varphi}{\pi}$ عدد صحیح باشد . بـه‌ازای مقدار $۰\leqslant\varphi<۲\pi$ نتیجه می‌گیریم که φ برابرصفر یا π است. هـرگـاه $\varphi=۰$ بـاشد $f(x)=A\sin ۲x$ و از تسـاوی: $f\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ بدست می‌آوریم $A=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و دراین‌صورت به ازای $\alpha=\frac{۵\pi}{۴}$ داریم $f(\alpha)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ودرضمن $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ منفی هستند.

به‌همین ترتیب در حالت $\varphi=\pi$ به تناقض برمی‌خوریم.

از بحثهای بالا نتیجه می‌گیریم، که $\omega=۱$ ، سپس تابع $f(x)=A\sin(x+\varphi)$ را بررسی می‌کنیم.

به‌ازای $\omega=\frac{\pi}{۴}$ داریم $f(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ یعنی:

$$A\sin\varphi+A\cos\varphi=۱ \quad (۲)$$

درمجموعهٔ مقادیر x که به‌ازای آنها $\sin x<\cos x$ است نامساوی داده شده به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\sin x \leqslant A\sin\varphi\cos x+A\cos\varphi\sin x \leqslant \cos x$$

و طبق رابطهٔ (۲) می‌توان نوشت.

$$A\sin\varphi(\cos x-\sin x)\geqslant ۰$$

$$A\cos\varphi(\sin x-\cos x)<0 \quad (3)$$

برعکس، هـر گاه شرطهای (۲) و (۳) برقرار باشند، به سادگی می‌توان دید که نامساویهای داده شده نیز صادقند.

به‌این ترتیب تابع $A\sin(x+\varphi)$ در نامساوی داده شده وقتی و فقط وقتی صادق است که شرطهای (۲) و (۳) صادق باشند همین موضوع برای $\omega>0$ درست است.

از خواننده می‌خواهیم که حالت $\omega<0$ را بررسی کند.

ب ـ دو مسئله ، فرستنده : قوام نحوی

۱۱۰/۳۶ـ ثابت کنید که هر عدد به‌صورت $n=2^t$ را که t عدد صحیح ومثبت است نمی‌توان به‌مجموع چند عدد صحیح متوالی تبدیل کرد.

حل ـ مسئله را از راه برهان خلف ثابت می‌کنیم. اگر عدد n را بتوانیم به مجموع چند عدد صحیح متوالی تبدیل کنیم و m و k عددهای صحیح باشد داریم:

$$n=2^t=m+(m+1)+(m+2)+$$
$$+\cdots+(m+k)=(k+1)m+(1+2+3+$$
$$+\cdots+k)=(k+1)m+\frac{k(k+1)}{2}$$

طرفین رابطه را در (۲) ضرب می‌کنیم:

$$2^{t+1}=2(k+1)m+k(k+1)=$$
$$=(k+1)(2m+k)$$

$$2^{t+1}=(k+1)(2m+k)$$

طرف اول رابطهٔ اخیر قوه‌ای کامل از ۲ می‌باشد.

اگر عدد k فرد باشد عدد $(2m+k)$ نیز فرد می‌باشد و طرف دوم نمی‌تواند قوهٔ کامل ۲ باشد و تساوی بالا صحیح نیست. اگر k زوج باشد $(k+1)$ فرد می‌باشد وبازهم طرف دوم رابطه نمی‌تواند قوهٔ کامل از ۲ باشد و بازهم رابطهٔ بالا صحیح نخواهد بود. به‌این ترتیب ثابت می‌شود که عدد n را نمی‌توان به‌مجموع چند عدد صحیح متوالی تبدیل کرد.

۱۱۰/۳۷ـ صحت رابطه‌های زیر را ثابت کنید :

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cdots}}}$$

$$\sqrt{a^2-b}=a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\cdots}}}$$

حل ـ اگر $\sqrt{a^2+b}$ را حساب کنیم جذر می‌شود a و ماندهٔ جذر را r می‌گیریم پس:

$$\sqrt{a^2+b}=a+r$$

$$a^2+b=a^2+r^2+2ar \text{ و } r^2+2ar=b$$

$$r=\frac{b}{2a+r} \quad \sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a+r}$$

و اگر بهمین ترتیب عمل را متوالیاً انجام دهیم رابطهٔ بالا محقق می‌شود. برای رابطهٔ دیگر روش عمل مشابه است:

$$\sqrt{a^2-b}=a-r \ ، \ a^2-b=a^2+r^2-2ar$$

$$r=\frac{b}{2a-r}$$

$$\sqrt{a^2-b}=a-\frac{b}{2a-r}$$

یك مسئله ، فرستنده : کاظم حافظ قرآن

۱۱۰/۳۸ـ مجموع n جمله‌از رشتهٔ زیر راپیدا کنید

$$1+26+276+2776+27776+\cdots$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$1=\frac{5\times10^1-32}{18}$$

$$26=\frac{5\times10^2-32}{18}$$

$$276=\frac{5\times10^3-32}{18}$$

.....

$$27700076=\frac{5\times10^n-32}{18}$$

$$S=\frac{5}{18}(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-\frac{16n}{9}$$

$$S=\frac{5\times10^{n+1}-288n-50}{162}$$

دو مسئله، فرستنده : عباس جزء امیرسیافی

۱۱۰/۳۹ـ از رابطه‌های زیر رابطه‌ای مستقل از a بین x و y بدست آورید :

$$\begin{cases} x=\sin^m\alpha\cos^n\alpha \\ y=\sin^n\alpha\cos^m\alpha \end{cases}$$

حل ـ از رابطه‌های بالا داریم:

دنباله در صفحهٔ ۶۴

مسائل برای حل

برای دانش آموزان سال اول دبیرستان

ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

۱۱۱/۱ ـ A و B و C مجموعه‌هایی غیرتهی می‌باشند. هرگاه A زیرمجموعهٔ $B \cup C$ و B زیرمجموعهٔ $A \cup C$ و C زیر مجموعهٔ $A \cup B$ باشد. آیالازم می‌آید که $A=B=C$ ؟

۱۱۱/۲ ـ سه مجموعهٔ A_1 و A_2 و A_3 داده شده است. مجموعهٔ A_n به‌ازای $n \geq 4$ را با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_n = A_{n-1} \cap (A_{n-2} \cup A_{n-3})$$

A_{10} را برحسب A_1 و A_2 و A_3 بدست‌آورید.

۱۱۱/۳ ـ مجموع دوعدد بزرگتراز حاصل‌ضرب آنها لیکن کوچکتراز تفاضل آنها است. آیا این عددها مثبت می‌باشند یا منفی.

۱۱۱/۴ ـ اگر عدد زیر را بر ۹ تقسیم کنیم باقیمانده چه خواهد بود؟

۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۰۰۰۹۹۱۰۰۱۰۱۰۰۰

۴۹۹۵۰۰

۱۱۱/۵ ـ دوخط موازی a و b و نقطهٔ ثابت O به‌یك فاصله ازآنهاداده شده است. زاویهٔ قائمه‌ای‌درصفحه جابجامی‌شود به‌قسمی‌که رأس قائمهٔ‌آن بر O واقع است. یك ضلع این زاویه خط a را در M وضلع دیگرش خط b را در N قطع می‌کند. ثابت‌کنیدکه‌فاصلهٔ O ازخط MN مقدار ثابت‌است.

۱۱۱/۶ ـ درمثلث ABC که $AB=AC$ برضلع AB نقطهٔ دلخواه M را اختیار می‌کنیم. برضلع AC نقطهٔ N را چنان انتخاب می‌کنیم که $AM=CN$ باشد.

خط MN را رسم می‌کنیم و از I وسط MN موازی با ضلع BC رسم می‌کنیم‌تا با AC درK برخوردکند. ثابت‌کنید که K وسط BC است.

برای دانش آموزان سال دوم علوم تجربی

۱۱۱/۷ ـ دو معادلهٔ درجهٔ دوم زیرداده شده است:

(۱) $x^2-7x+2m=0$

(۲) $x^2-5x+m=0$

مقدار m را معلوم‌کنید برای‌آن‌که یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۱) دو برابر یکی‌از ریشه‌های معادلهٔ (۲) باشد.

۱۱۱/۸ ـ هرگاه داشته باشیم:

$$tgx=\frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}\ ,\quad -1\leq y\leq 1 \text{ و } y\neq 0$$

مقدار y را برحسب $\sin x$ و $\cos x$ بدست‌آورید،

۱۱۱/۹ ـ در مثلث دلخواه ABC ارتفاعها یکدیگر را در H قطع می‌کنند. هرگاه A' وسط BC و B' وسط CA باشد، ثابت‌کنیدکه:

۱) دو مثلث ABH و $B'A'O$ متشابهند و $AH=2A'O$

۲) نقطهٔ برخورد AA' با HO همان نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث است.

برای دانش آموزان سال دوم ریاضی، فیزیك

۱۱۱/۱۰ ـ ترجمه از فرانسه

برای‌سه مجموعهٔ A و B و C ثابت‌کنیدکه:

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

۱۱۱/۱۱ ـ ترجمه از فرانسه

مجموعهٔ زیرداده شده است:

$$E=\{x \mid x\in N \text{ و } 0<x<5\}$$

رابطه‌ای از E در E به شرح زیرتعریف می‌کنیم:

$x<2 \longmapsto f(x)=3$

$x=2 \longmapsto f(x)=1$

$x>2 \longmapsto f(x)=5$

۱) عضوهای رابطه مشخص کنید.

۲) آیا این رابطه یك تابع است. حوزه و دامنهٔ آن را مشخص کنید.

۳) نمودار دکارتی آن را رسم کنید.

۱۱۱/۱۲ـ ترجمه

هر گاه داشته باشیم:

$$a^۲+b^۲+c^۲=abc+۴$$

$$a=x+\frac{۱}{x} \text{ و } b=y+\frac{۱}{y}$$

مقدار c را برحسب x و y بدست آورید.

۱۱۱/۱۳ـ فرستنده: **مهندس جواد فیض**

در دو معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$x^۲-px+q=۰ \text{ و } y^۲-sy+r=۰$$

چه رابطه بین ضریبها برقرار باشد تا ریشه‌های دومعادله نظیر به نظیر متناسب باشند.

۱۱۱/۱۴ـ ترجمه از فرانسه

هر گاه داشته باشیم:

$$\frac{۱+۲\sqrt{x(۱-x)}}{۲x-۱}=\sqrt{۳}-۲$$

به فرض $x=cos^۲a$ و $\pi>a>\frac{\pi}{۲}$ مقدار tga و از روی آن مقدارهای سایر نسبتهای مثلثاتی a را پیدا کنید.

۱۱۱/۱۵ـ هر گاه داشته باشیم:

$$tgx=\sqrt[۴]{a-۲} \text{ و } cosx=\sqrt{a-۱-۲\sqrt{a-۲}}$$

مقدار a را پیدا کنید.

۱۱۱/۱۶ـ ترجمه از فرانسه

مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. ارتفاع AH از آن را رسم می‌کنیم. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABH را با $I_۱$ و از مثلث ACH را با $I_۲$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید که دو مثلث ABC و $HI_۱I_۲$ متشابهند.

۱۱۱/۱۷ـ ترجمه از فرانسه

در یك صفحه دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع R و یك نقطهٔ A داده شده است به قسمی که $OA=a$ و $a\neq R$ و $a\neq ۰$. نقطهٔ دلخواه M را بر دایرهٔ C و دایرهٔ محیطی مثلث AMO را در نظر می‌گیریم. در O مماس براین دایره رسم می‌کنیم که با خط AM در P برخورد می‌کند. ثابت کنید که $\frac{PA}{PM}$ دارای مقدار ثابت است و این مقدار ثابت را معین کنید.

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۱۱/۱۸ـ فرستنده: **مهندس جواد فیض**

معادله‌های ضلعهای مثلثی عبارتند از:

$$(AB): y=۰$$

$$(BC): x+۲y=۵$$

$$(CA): x+y=۴$$

خط Δ به‌معادلهٔ $y=۲x$ ضلعهای BC و CA و AB را به‌ترتیب در A' و B' و C' قطع می‌کند. مختصات M و N و P وسطهای AA' و BB' و CC' را بدست آورید و تحقیق کنید که این سه نقطه روی یك خط راست واقعند

۱۱۱/۱۹ـ از معادلهٔ زیر مقدار x را برحسب a و b بدست آورید:

$$sin^۲x+۲\,sin\,a\,sin\,b\,cos\,x-sin^۲a-sin^۲b=۰$$

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۱۱۱/۲۰ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

چهار رأس مربعی بر محورهای مختصات واقعند. مربع دیگری محیط براین مربع چنان رسم می‌کنیم که ضلعهایش با محورهای مختصات موازی باشند. بر دایرهٔ محیطی مربع اول نقطهٔ دلخواه M را درنظر می‌گیریم. ثابت کنید که حاصلضرب فاصله‌های M از چهار ضلع مربع اول برابراست با حاصلضرب فاصله‌های آن از چهارضلع مربع دوم.

۱۱۱/۲۱ـ به کمك نمودار در تعداد جوابهای معادلهٔ زیر بحث کنید:

$$|x+۲|+|x-۲|=mx+۵$$

۱۱۱/۲۲ـ ترجمه از فرانسه

به فرض $tgx=\frac{۲b}{a-c}$ از رابطه‌های زیر مقادیر z و y را برحسب a و b و c حساب کنید:

$$y = a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2 x$$

$$z = a\sin^2 x - 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x$$

۱۱۱/۲۳ـ ثابت کنید که هر گاه داشته باشیم.

$$\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x+y) = (\sin x + \sin y)^2$$

یکی از دو کمان x یا y مضربی از π است.

۱۱۱/۲۴ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

درچهاروجهی ABCD ازدورأس آن عمودهایی بروجه‌های مقابلشان فرود می‌آوریم تا با یکدیگر در O برخورد کنند. از O عمودهایی بردو وجه دیگرفرود می‌آوریم. ثابت کنید پاهای این عمودها مرکزهای ارتفاعی این وجه‌هامی‌باشند.

برای دانش آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۱۱۱/۲۵ـ معادله‌های مماسهای بردایرهٔ به‌معادلهٔ

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

راکه با خط به معادلهٔ $2x - y + 2 = 0$ موازیند بدست آورید.

۱۱۱/۲۶ـ معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$1 + \sin 3x = \cos 2x + \sin x$$

برای دانش آموزان کلاس ششم ریاضی

۱۱۱/۲۷ـ ترجمه از فرانسه

۱) منحنی نمایش تابع زیررا رسم کنید:

$$y = \frac{8}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

۲) در تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ زیربحث کنید:

$$7x^2 - 16x + 8 = mx^2(x-1)^2$$

۱۱۱/۲۸ـ ترجمه از فرانسه

۱) در صفحهٔ محورهای مختصات متعامد منحنی C مکان نقاط $M(x,y)$ را رسم کنید که مختصات M در رابطهٔ زیرصدق کند:

$$y^2 = x^3$$

۲) نقطهٔ دلخواه M را روی C درنظرمی گیریم وآن‌را در A روی $y'y$ تصویرمی کنیم. همچنین در M مماسی برC رسم می کنیم که با $y'y$ در B برخورد می کند. ثابت کنید که:

$$OA = 2OB$$

۱۱۱/۲۹ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

ماکسیمم یا می‌نیمم تابع زیررا پیدا کنید.

$$y = \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)$$

۱۱۱/۳۰ـ ترجمه از فرانسه

معادلهٔ زیر داده شده است

$$x^2 + px + p\sqrt{3} + 1 = 0$$

۱) به‌ازای مقادیرمختلف پارامتر p در وجود وعلامت ریشه‌های معادله بحث کنید.

۲) در حالتی که معادله دو ریشهٔ حقیقی x' و x'' داشته باشد $(x' < x'')$، فرض می‌کنیم $x' = tg\alpha$ و $x'' = tg\beta$ که α و β کمانهای محصور بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ می‌باشند. مجموع $\alpha+\beta$ را حساب کنید.

هرگاه M' و M'' به‌ترتیب انتهای کمانهای α و β روی دایرهٔ مثلثاتی و O مرکزاین‌دایره باشد، ثابت کنیدکه با تغییر پارامتر p نیمساز زاویهٔ $M'OM''$ ثابت می‌ماند.

۱۱۱/۳۱ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

رشته عددهای زیر را درنظر می گیریم:

۸ ، ۱۴ ، ۲۰ ، ۲۶ ، ۳۲،۰۰۰

آیا در این رشته، عددهایی‌یافت‌می‌شودکه توان دوم کامل یا توان سوم کامل باشند.

۱۱۱/۳۲ـ فرستنده: **عباس جزء امیر سیافی** دانشجوی دانشگاه ملی ایران.

همهٔ عددهایی راکه در رابطهٔ زیر صدق می کنند بدست آورید :

$$(\overline{aa})^2 + (\overline{aa} + \overline{ba})^2 = (\overline{aa} + \overline{ab})^2$$

۱۱۱/۳۳ـ ترجمه

۱) دو دسته شعاعهای توافقی زیرداده شده است:

$(Ox ، Oy ، Oz ، Ot)$ و

$(O'x' ، O'y' ، O'z' ، O't')$

ثابت کنیدکه اگرسه‌شعاع از دستهٔ نخست با سه‌شعاع از دستهٔ دوم نظیربه‌نظیر باهم موازی (یا برهم عمود) باشند، شعاعهای‌چهارم دو دسته نیزباهم موازی (یا برهم عمود) می‌باشند.

۲) در مثلث دلخـواه ABC پاهای ارتفاعهای وارد از رأسهای A وB وC را به‌ترتیب با A' ، B' ، C' ومرکزارتفاعی

را با H و وسط BC را با M و بالاخره نقطهٔ برخورد BC را با $B'C'$ با α نشان می‌دهیم. ثابت کنید که αH بر AM عمود است و اگر K نقطهٔ برخورد این دو خط باشد و مثلث ABC چنان تغییر کند که B و C و A' ثابت بمانند، مکان هندسی K را پیدا کنید.

۱۱۱/۳۴ـ ترجمه

دایرهٔ به قطر ثابت AB را در نظر می‌گیریم. در نقطه‌های A و B مماسهای $x'x$ و $y'y$ را بر دایره رسم می‌کنیم. خط متغیر Δ بر دایره مماس است و $x'x$ و $y'y$ را به ترتیب در M و N تلاقی می‌کند. اگر P نقطهٔ برخورد MB با NA باشد، مکان هندسی P چیست؟

تستهای ریاضی

در حدود برنامهٔ سال اول دبیرستان

۱۱۱/۳۵ـ به فرض $x \in A \cup B$ نتیجه خواهد شد:

الف ـ $x \in A$ ب ـ $x \in B$ یا $x \in A$

ج ـ $x \in B$ د ـ $x \in A$ و $x \in B$

۱۱۱/۳۶ـ اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه و M مجموعهٔ مرجع باشد، حاصل $A \cap (A \cup B)$ کدام است:

الف ـ A ب ـ B ج ـ M د ـ $\varnothing$

۱۱۱/۳۷ـ تعداد طبقه‌های هم باقیماندهٔ مجموعهٔ N نسبت به میزان n چه موقع برابر n است؟

الف ـ هیچگاه ب ـ وقتی که n اول باشد.

ج ـ هرچه باشد عدد طبیعی n

د ـ وقتی که n اول نباشد.

۱۱۱/۳۸ـ اگر p عدد اول باشد، عدد p^p چند مقسوم‌علیه دارد؟

الف ـ دو ب ـ یك ج ـ $p+1$ د ـ p

۱۱۱/۳۹ـ در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ A ضلع BC را در D قطع می‌کند. برای آنکه $AB > BD$ و $AC > CD$ باشد چه شرطی برای مثلث ABC لازم و کافی است:

الف ـ هیچ شرط

ب ـ متساوی الساقین باشد

ج ـ در زاویهٔ A قائمه باشد

د ـ در زاویهٔ B قائمه باشد.

۱۱۱۱/۴۰ـ در مثلث ABC میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش تا N امتداد می‌دهیم. هرگاه $AN < BC$ باشد زاویهٔ B از مثلث چه نوع است؟

الف ـ مشخص نیست ب ـ حاده است

ج ـ قائمه است د ـ منفرجه است

در حدود برنامهٔ سال دوم ریاضی، فیزیك

۱۱۱/۴۱ـ رابطه «x بر y بخش پذیر است» در مجموعهٔ عددهای طبیعی کدام خاصیت زیر را ندارد:

الف ـ هم ارزی ب ـ تعدی

ج ـ انعکاسی د ـ تقارنی

۱۱۱/۴۲ـ a عدد طبیعی است. برای آنکه رابطهٔ:

$\{(5,0), (4,1), (3,2), (2,2), (1,1), (a,0)\}$

یك تابع باشد کافی است که:

الف ـ $a \neq 0$ ج ـ $a < 5$

ج ـ $a \leq 5$ د ـ $a > 5$

۱۱۱/۴۳ـ به ازای چه مقدار m تفاضل ریشه‌های معادلهٔ زیر برابر $\frac{2}{3}$ است.

$$(m-1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$$

الف ـ $m = -2$ ب ـ $m = -\frac{7}{4}$ یا $m = 2$

ج ـ $m = -2$ یا $m = \frac{7}{4}$ د ـ $m = \frac{7}{4}$

۱۱۱/۴۴ـ در معادلهٔ درجهٔ دوم مسئلهٔ قبل اگر S مجموع ریشه‌ها و P حاصل ضرب ریشه‌ها باشد، چه رابطه‌ای

مستقل از m بین S و P وجود دارد؟

الف ـ $3S+2P=4$ ب ـ $2P-3S=4$

ج ـ $3S-2P=4$ د ـ $2S-3P=4$

۱۱۱/۴۵ـ در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A دو برابر اندازهٔ زاویهٔ C است. کدام یك از گزاره‌های زیر غلط است:

الف ـ مثلث ABD با مثلث ABC متشابه است.

ب ـ $AC^2=BC\cdot CD$

ج ـ $AB^2=BC\cdot BD$

د ـ $AD\cdot AB=AC\cdot BD$

۱۱۱/۴۶ـ در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه و ضلع AB نصف ضلع AC است. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر مساحت مثلث ABH برابر S باشد. مساحت مثلث ABC کدام است؟

الف ـ $5S$ ب ـ $4S$ ج ـ $3S$ د ـ $2S$

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۱۱/۴۷ـ به‌ازای چه‌مقدار a تابع زیر همواره نزولی است.

$$y=\sqrt{-ax}$$

الف ـ هیچ مقدار ب ـ $a>0$

ج ـ $a<0$ د ـ هرچه باشد a

۱۱۱۱/۴۸ـ در فاصلهٔ $(+\pi$ و $-\pi)$ در نقطهٔ به چه طول از منحنی تابع $y=x+\sin x$ مماس بر منحنی برخط $y+2x=0$ عمود است.

الف ـ $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ب ـ $x=\pm\frac{2\pi}{3}$

ج ـ $x=\pm\frac{\pi}{6}$ د ـ $x=\pm\frac{5\pi}{6}$

۱۱۱/۴۹ـ هرگاه $a=\sin 12^\circ$ باشد، حاصل عبارت زیر کدام است.

$$\frac{\sin 192^\circ+\sin 102^\circ}{\sin 348^\circ-\sin 78^\circ}$$

الف ـ $1-2a\sqrt{1-a^2}$

ب ـ $2a^2-2a\sqrt{1-a^2}$

ج ـ $\frac{1-2a\sqrt{1-a^2}}{2a^2-1}$

د ـ $\frac{1-2a\sqrt{1-a^2}}{2a^2}$

۱۱۱/۵۰ـ هرگاه $\alpha+\beta=135^\circ$ و $tg\alpha=3$ باشد مقدار $tg\beta$ کدام است؟

الف ـ ۲ ب ـ $\frac{1}{2}$ ج ـ $-\frac{1}{2}$ د ـ -2

۱۱۱/۵۱ـ در چهار وجهی ABCD خط Δ از وسطهای AD و BC گذشته و صفحهٔ P برخط Δ عمود است. هرگاه تصویر چهار وجهی بر صفحهٔ P به شکل لوزی باشد، AD و BC نسبت به‌هم چه وضعی دارند؟

الف ـ برهم عمودند ب ـ با هم برابرند

ج ـ هر وضعی می‌توانند داشته باشند

د ـ به هر وضعی که باشند مسئله ممکن نیست.

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۱۱/۵۲ـ تابع زیر داده شده است.

$$y=\frac{x+a}{(x-1)^2}$$

خط به معادلهٔ $y=m$ با منحنی تابع در دو نقطه به‌طول های x' و x'' برخورد می‌کند. هرگاه $m\longrightarrow+\infty$ در چه صورت $|x'-x''|\longrightarrow 0$:

الف ـ $a=-1$ ب ـ $a\neq-1$

ج ـ $a>-1$ د ـ $a<-1$

۱۱۱/۵۳ـ مماس برمنحنی تابع $y=\sqrt{x^3-x^2}$ در مبدأ مختصات :

الف ـ نامعین است ب ـ وجود ندارد

ج ـ با محور x ها موازی است

د ـ با محور y ها موازی است

۱۱۱/۵۴ـ معادلهٔ مثلثاتی

$$\sin x+\cos x=m(1+\sin x\cos x)$$

چه موقع یك جواب محصور بین صفر و π دارد؟

الف ـ $-1<m<\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ب ـ $m<-1$ یا $m>\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ج ـ $-\frac{2\sqrt{2}}{3}<m<1$

د ـ $m<-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ یا $m>1$

۱۱۱/۵۵ـ به‌شرط $0<x<\pi$ جواب نامساوی زیر کدام است.

$$1+\sqrt{2}\sin 3x>\cos 2x$$

الف ـ هرچه باشد $0<x<\pi$

ب ـ جواب ندارد

ج ـ $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ د ـ $x<\frac{\pi}{4}$ یا $x>\frac{3\pi}{4}$

۱۱۱/۵۶ـ رقم یکان عدد زیر کدام است:

$$N=4^{4k+2}+17^{8k+3}$$

الف ـ ۷ ب ـ ۶ ج ـ ۹ د ـ ۳

۱۱۱/۵۷ـ چندعدد سه رقمی به‌صورت $2^{\alpha}\times 5^{\beta}$ وجود دارد که دارای ۶ مقسوم علیه است؟

الف ـ هیچ ب ـ یك عدد

ج ـ دو عدد د ـ بیش از دو عدد

۱۱۱/۵۸ـ محورهای اصلی دو به دوی سه دایره با هم موازیند. چند دایره می‌توان عمود بر هر سه دایره رسم کرد؟

الف ـ هیچ ب ـ یکی ج ـ دوتا د ـ بیش‌از دوتا

چند ضلعیهای جهت‌دار (دنباله از صفحهٔ ۵۳)

فکر را در خواننده ایجاد کند، که مسئله را می‌توان در مورد چندضلعیهایی که‌خودرا در شش، هفت، و... نقطه قطع می‌کنند، تعمیم داد. اما چنین نیست، وبرای آشکار شدن این‌مطلب، مسئلهٔ زیر را حل می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱۲ـ محیط یك دایره را به n قوس مساوی به صورت زیر تقسیم می‌کنیم :

$\overset{\frown}{A_nA_1}$ و $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ و ... و $\overset{\frown}{A_3A_4}$ و $\overset{\frown}{A_2A_3}$ و $\overset{\frown}{A_1A_2}$

روی هر کدام از این قوسها، نقاط B_1 ، B_2 ، ... ، B_n را چنان انتخاب می‌کنیم که قوسهای :

$\overset{\frown}{A_1B_1}$ و ... و $\overset{\frown}{A_2B_2}$ و $\overset{\frown}{A_nB_n}$

مساوی باشند. سپس وترهای A_nB_1 و $A_{n-1}B_n$ و ... و A_2B_3 و A_1B_2 و نیز وترهای A_nB_n و ... و A_2B_2 و A_1B_1 را رسم نموده، $2n$ ضلعی بدست می‌آوریم که در n نقطهٔ C_1 ، C_2 ، ... ، C_n خود را قطع کرده است.

(وتر A_1B_2 وتر B_1A_n را در نقطهٔ C_1 قطع کرده، وتر A_2B_3 وتر B_2A_1 را در C_2 قطع کرده و الی‌آخر).

مقادیر n را چنان تعیین کنید که مساحت چند ضلعی $C_1C_2\cdots C_n$ ، n برابر مساحت مثلث $A_1B_1C_1$ باشد.

[جواب $n=3,4,5$]

حل ـ

$$S=(A_1B_2A_2B_2\cdots A_nB_1)=(C_1\cdots C_n)+n(C_1B_1A_1)$$

و به‌این‌ترتیب‌مساحت $n(C_1\cdots C_n)$ برابرمساحت $(C_1A_1B_1)$ خواهد شد، اگر و فقط اگر $S=0$ گردد.

اکنون $S=n[(OA_1B_2)+(OB_2A_2)]$

را محاسبه می‌کنیم(O مرکز چند ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ است).

$$\sin\left(\frac{360^\circ}{n}+\alpha\right)-\sin\alpha=0 \quad (\alpha=\overset{\frown}{A_1B_2})$$

و بنابراین : $\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\left(\frac{180^\circ}{n}+\alpha\right)=0$

و از این طریق مشاهده می‌کنیم که فقط سه جواب زیر ممکن است:

n	۳	۴	۵
$\overset{\frown}{A_1A_2}=\frac{360^\circ}{n}$	120°	90°	72°
$\overset{\frown}{A_1B_1}=\alpha$	30°	45°	54°

مسئلهٔ ۱۳ـ هرگاه پاره خطهای A_1B_1 ، A_2B_2 ، ... ، A_nB_n وسطهای مشترکی داشته باشند پس:

$$(A_1A_2\cdots A_n)=(B_1B_2\cdots B_n)$$

یادآوری ـ مساحت‌چند ضلعیهای جهت‌دار $A_1A_2\cdots A_n$ و $B_1B_2\cdots B_n$ را به‌وسیلهٔ فرمول (۸) و با در نظر گرفتن نقطهٔ O وسط پاره خطوط A_iB_i ($i=1$ و ۲ و ۳ و ... و n) به‌عنوان نقطهٔ مشترك محاسبه کنید.

مسئلهٔ ۱۴ـ اگر چند جهت‌دار $B_1B_2\cdots B_n$ از انتقال چند ضلعی جهت‌دار $A_1A_2\cdots A_n$ بدست آید (یعنی در صورتی که پاره خطهای جهت دار $\overrightarrow{A_1B_1}$ ، $\overrightarrow{A_2B_2}$ ، ... ، $\overrightarrow{A_nB_n}$ مساوی و موازی باشند) پس :

$$(A_1\cdots A_n)=(B_1\cdots B_n)$$

به‌خواننده توصیه می‌کنیم که برای خود تمرینات مشابهی که بتواند با استفاده از مساحت «چند ضلعی جهت‌دار» حل شود تنظیم نماید، مخصوصاً تمرینات جالبی که با هندسهٔ مقدماتی‌حل شوند ولی بکاربردن راه جدید، آنهارا آسانتر وجالب‌ترسازد.

پایان

نمونه‌هایی از پرسشهای امتحانهای داخلی دبیرستانها

نوبت اول ـ آذر ماه ۵۳

سال اول ریاضی فیزیك ـ علوم اجتماعی

ـ ریاضیات عمومی

دبیرستان بهشت آئین اصفهان

دبیر : قوام نحوی

۱ـ اگرمجموعهٔ مرجع به‌فرم $M=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ بوده و دو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۴\}$ و $B=\{۴,۵\}$ را داشته باشیم از روی دو مجموعهٔ A و B درستی رابطهٔ زیر را تحقیق کنید،

$$(A\cap B')\cup(A'\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cap B)'$$

۲ـ سه مجموعهٔ A و B و C را در نظر می‌گیریم بطوری‌که ($A\subset B$ و $A\cap C\neq\varnothing$) معین کنید کدامیك از روابط زیر صحیح است:

$A\cap B=B$ و $B-A=\varnothing$ و $A\cap C\subset B\cap C$ و $B\cap C=\varnothing$

۳ـ صحت رابطهٔ زیر را به‌کمك شکل و همچنین مستقیماً اثبات کنید:

$$(A-C)\cap(B-C)=(A\cap B)-C$$

۴ـ اگر مجموعهٔ مرجع M مجموعهٔ اشکال هندسی و A مجموعهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین و B مجموعهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع و C مجموعهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه و F مجموعهٔ متوازی‌الاضلاعها و R مجموعهٔ مستطیلها و S مجموعهٔ مربعها باشند، این مجموعه‌ها را از روی شکل نشان داده و مجموعهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین را هاشور بزنید.

۵ـ اگر A و B دو مجموعهٔ مجزا بوده و M مجموعهٔ مرجع باشد، عبارت زیر را ساده کنید:

$$[(A\cap B)\cup(A\cup\varnothing)]\cap[B\cap M)\cup(A\cap\varnothing)]$$

۶ـ عبارات زیر را به‌کمك جبر مجموعه‌ها ساده کنید:

$[(A'\cup B')\cap(A\cap B)]$ و $[(A'\cap B')\cup(A\cup B)]$

$[(A\cup B)\cap(A\cup B')]$

۷ـ دو مجموعهٔ A و B را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم مجموع تعداد زیر مجموعه‌های A و B مساوی ۸۰ و تفاضل تعداد زیر مجموعه‌های A و B مساوی ۴۸ می‌باشد معین کنید هر کدام از دو مجموعه چند عضو دارد.

۸ـ اگر A و B دو مجموعهٔ مجزا باشند به‌کمك شکل درستی رابطهٔ زیر را تحقیق کنید.

$$(A\cap B')\cup(B\cap A')\cup(A\cap B)=A\cup B$$

دبیرستان رودابه اصفهان

دبیر قوام نحوی

۱ـ سه مجموعهٔ زیر مفروض است: $A=\{۲,۳,۴,۹\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۸\}$ و $C=\{۴,۵,۶,۹\}$. به‌کمك این سه‌مجموعه درستی روابط زیر را ثابت کرده و از روی آنها چه نتایجی می‌گیرید :

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cup C)$$
$$A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)$$

۲ـ اگر $A\subset B$ باشد کدامیك از گزاره‌های زیر صحیح است (باکشیدن شکل)

$A-B=A$ و $A-B=\varnothing$ ، $B-A=B$ ، $A\cup B=A$

۳ـ اگر $A\cup B=\varnothing$ باشد کدامیك از گزاره‌های زیر صحیح است (با دلیل)

$(A=\varnothing\ ,\ B\neq\varnothing)$ و $(A\neq\varnothing\ ,\ B=\varnothing)$ و $(A=\varnothing\ ,\ B=\varnothing)$

۴ـ اگر $A\subset C$ و $C\subset B$ باشد، حاصل عبارت زیر را به‌کمك شکل پیدا کنید:

$$(A\cup B)\cap(B\cup C)$$

۵ـ حاصل عبارت زیررا پیداکنید:

$(A \cup A') \cap (B \cap B')$

۶ـ درستی رابطهٔ زیر رااز روی شکل و همچنین مستقیماً اثبات کنید:

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

۷ـ اگر مجموعهٔ مرجع اعداد زوج طبیعی کوچکتر از ۲۰ باشند این‌مجموعه را نوشته و دو مجموعهٔ A و B راطوری پیداکنیدکه اولا $A \cap B = \varnothing$ ثانیاً $A' \cap B' = \varnothing$ باشد.

۸ـ اگر مجموعهٔ A دارای ۶۴ زیر مجموعه باشد معین کنید A چند عضو دارد.

۹ـ اگر A و B و C سه مجموعهٔ دو بەدو مجزا باشند جواب مجموعه‌های زیررا پیداکنید:

$(A \cap B) \cap (C \cup \varnothing)$ و $(A \cap B) \cup (C \cap M)$

(M مجموعهٔ مرجع است)

هندسه

دبیرستان بهشت‌آئین اصفهان

دبیر : فتاحی

۱ـ برسه خط متمایز متقارب (سه خط متمایزکه در یك نقطه یکدیگرراقطع می‌کنند) چند صفحه می‌گذرد؟

الف: صفر ب: یك ج: یا صفر یا بینهایت د: یا صفر یا یك.

۲ـ اگر A(a) و B(۲a) بر روی محوری مفروض باشند، هرچه باشد $a \neq 0$ کدامیك از گزاره‌های زیر غلط است؟

الف: A بین B و O است ب: B بین A و O است

ج: O بین A وB نیست د: ممکن‌است A طرف راست B باشد.

۳ـ خط راست d و نقطهٔ A مفروض‌اند. چند صفحه می‌توان از d و A گذراند؟

الف: یك ب: دو ج: یا یك یا دو د: یا یك یا بینهایت.

۴ـ اگر A(m+۲) و B(۲m−۷) بر محوری مفروض و $AB = 5$ باشد مقدار m برابر است با :

الف: ۴ یا ۱۴ ب: ۴ یا ۱۴− ج: ۴ یا ۱۰

د: ۴− یا ۱۰

۵ـ اگر $d \subset P$ و $d' \subset P$ باشند دو خط d و d' .

الف: موازیند ب: متقاطعند ج: یاموازیند یا متقاطع

د: یا موازی یا متنافر .

۶ـ خط d و نقطهٔ $A \notin d$ مفروض است . رابطهٔ $\bar{A} = \ldots$ و $d \cup [d , A]$ بەصورت‌زیر کامل می‌شود:

الف: d ب: ∅ ج: صفحهٔ P د: A و d]

۷ـ اندازهٔ زاویهٔ ۳۷ گراد برحسب درجه برابر است با

الف: ۳۴° ب: ۳۳°۱۸′ ج: ۳۴°۱۲′ د: ۳۳/۳

۸ـ متمم ۶۸ گراد برابر است با :

الف: ۶۱° ب: ۶۲°۱۲′ ج: ۳۲ گراد د: ۲۲ گراد

۹ـ مکمل زاویهٔ ۹۹°,۵۴′ برابر است با:

الف: ۸۰°,۱۶′ ب: ۸۱°,۶′ ج: ۸۹ گراد

د: ۸۸/۵ گراد.

۱۰ـ تعداد اقطار ۱۹ ضلعی محدب برابر است با :

الف: ۱۵۲ ب: ۱۶۲ ج: ۱۴۲ د: ۱۳۲

۱۱ـ درکدام چند ضلعی محدب تعداد قطرها ۱۱ برابر تعداد اضلاع است؟

الف: ۱۴ ب: ۲۲ ج: ۲۵ د: ۱۹

۱۲ـ اگر $P \cap Q = \{A, B, C, \ldots\}$ ، دو صفحهٔ P و Q :

الف: متقاطعند ب: منطبقند ج: یا موازی یا منطبق

د: یا متقاطع یا منطبق.

۱۳ـ بر دو خط متمایز چند صفحه می‌گذرد؟

الف: صفر ب: یك ج: یا صفر یا یك د: یا یك یا بینهایت.

۱۴ـ صفحهٔ P و نقطهٔ $O \in P$ مفروضند. نیم خط OA] نسبت بەصفحهٔ P.

الف: موازی است ب: متقاطع است ج: یا موازیست یا متقاطع د: یا متقاطع است یا منطبق

۱۵ـ اگر زاویه‌ای حاده باشد .

الف: محدب هم هست ب: مقعر هم هست

ج: نیم صفحه هم هست د: هیچکدام.

۱۶ـ کدامیك از گزاره‌های زیر غلط است؟

الف: نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب برهم عمودند

ب: اگردو زاویه مساوی باشند متممهای‌آنها نیزمساویند

ج: اگر متممهای دوزاویه مساوی باشند خود آن دوزاویه مساویند

د: نیمسازهای دو زاویه مساوی بریك استقامتند.

۱۷ـ اگر A(−۲) و B(+۷) باشد طول پاره خط AB برابر است با:

الف: ۵ ب: ۵− ج: ۹ د: ۹−

۱۸ـ اگر گراد $xOy=۵۴$ و $zOy=۳۲^\circ,۲۴'$ و دو زاویهٔ مزبور مجاور باشند اندازهٔ xOy برابر است با:

الف: $۸۰^\circ ۵۲'$ ب: $۸۰/۴^\circ$ ج: ۹۰ گراد

د: هیچکدام.

دبیرستان همت استهبان

دبیر: احمد سجادی

صفحهٔ π و نقطهٔ $A\notin\pi$ در نظر گرفته عبارات زیر را چنان کامل کنید که گزاره‌های درست حاصل شود.

$[\pi$ و $A\cap\cdots=\varnothing$ و $[\pi$ و $A\cup]\pi$ و $A=\cdots$ و

$[\pi$ و $A\cap[\pi$ و $\overline{A}=\cdots$

ـ عبارتهای زیر را کامل کنید که گزارهٔ درست حاصل شود.

الف ـ

گراد $\angle AHB=\cdots$ و $H\in BC$ و ΔABC

AH ارتفاع نظیر رأس A از مثلث $\Longrightarrow$

ب ـ

$\angle MAB=\angle MAC$ و $M\in BC$ و ΔABC

$AM\cdots$ است $\Longrightarrow$

ج ـ در مثلث ABC هر ... یك عمود منصف دارد.

د ـ متمم زاویهٔ $۳۶''$ و $\alpha=۴۵^\circ$ برابر است با $\beta=^\circ\cdots$ و $'\cdots$ و $''\cdots$

مسئلهٔ ۱ ـ اندازهٔ زاویهٔ A از مثلثی برابراست با x گراد و اندازهٔ زاویهٔ B ازهمان مثلث از $\frac{۲}{۵}$ زاویهٔ A برحسب‌درجه به‌اندازهٔ ۹ واحد بیشتراست و اندازهٔ زاویهٔ C ، ۴ برابرزاویهٔ B می‌باشد. اندازه هریك از زوایای A و B و C را برحسب درجه تعیین کنید. درصورتی که‌مجموع زوایای هرمثلث ۱۸۰° درجه می‌باشد.

مسئلهٔ ۲ ـ در یك k ضلعی محدب تعداد قطرها برابر با $\frac{۱}{۲}k$ می‌باشد. k راحساب کنید.

مسئلهٔ ۳ ـ نقاط $A(۳m+۴)$ و $B(۲m-۱)$ برمحوری مفروضند. اولا m را چنان تعیین کنید که $AB=۲$ باشد. ثانیاً m را حساب کنید که خفت A دوبرابرخفت B باشد ثالثا m چقدر باشد تا A قرینهٔ B نسبت به مبدأ باشد.

مسئلهٔ ۴ ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC در دو نقطهٔ B و C دوخط بردو ساق عمود می‌کنیم تا یکدیگررا درنقطهٔ D قطع کنند. ثابت کنید $DC=DB$

مسئلهٔ ۵ ـ اگر گراد $xOz=۴۸$ و $۳۰'$ و $zOy=۳۶^\circ$ و دو زاویهٔ مزبور مجاور باشند اندازهٔ زاویهٔ xOz را برحسب درجه تعیین کنید و اندازهٔ متمم زاویهٔ xOz را برحسب درجه و مکمل زاویهٔ zOy را برحسب گرادبدست‌آورید.

کلاس پنجم ریاضی

جبر

دبیرستان بیست و پنج شهریور کرج

دبیر: قویمی ـ فرستنده: محبوبه مصباح

ـ مطلوبست تعیین معادلهٔ خط راستی که از نقطهٔ $A\left(۱ و \frac{۸}{۳}\right)$ گذشته و مجموع طولهای پاره خطهایی که بین خط ومبدأ مختصات روی دو محور جدا می‌شود ۷ باشد.

ـ نقطه‌های $A(۳\alpha-۲$ و $۳\alpha+۸)$ و $B(\alpha$ و $\alpha+۲)$ مفروضند. ثابت کنیدخط AB همواره ازنقطهٔ ثابتی که مختصات آن را تعیین می‌کنید می‌گذرد.

ـ به فرض $K(۳,۴)$ مختصات F واقع برنیمساز ناحیهٔ اول را طوری تعیین کنید که مساحت مثلث OKF برابر ۲/۵ باشد.

ـ مطلوبست‌تعیین‌مختصات‌سه رأس مثلث ABC درصورتی که معادلهٔ میانهٔ AM به‌صورت $۲y=x+۱$ و G نقطهٔ برخوردمیانه‌های مثلث به‌طول‌یك باشد و نیز ضلع BC به‌معادلهٔ $۴y+۵x=۲$ بوده‌و C درناحیهٔ دوم‌به فاصلهٔ ۲ از محور yها قرار دارد،

دبیرستان خواجه نصیرجهرم

دبیر: باقری‌نژاد ـ فرستنده: اسماعیل یوسف‌زادگان

ـ نقطه‌های $A(۱,۱)$ و $B(-۲,۵)$ و $C(۰,-۴)$ مختصات سه رأس مثلث ABC می‌باشند. معادلهٔ ضلع AB ، ارتفاع AH میانهٔ AM وعمود منصف AB را بنویسید. از A و B دو خط عمود برهم‌عبور دهید تا BC و AC را در F و E قطع کنند. مکان هندسی P وسط EF را بدست‌آورید.

ـ نمودار نامعادلهٔ زیر را رسم کنیم:

$$|x+y-۲|+|x-۲y-۱|<۳$$

دبیرستان دکتر هشترودی

دبیر: صدری

ـ نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y=x-۲+\sqrt{x^۲+۴x+۴}$$

ـ تابع زیردرچه فاصله معین است:

$$y=\frac{\sqrt[۴]{۴-x^۲}}{x-۱}-\log(۳x-x^۲)$$

ـ مختصات P' قرینهٔ $P(۴,۳)$ را نسبت به خط $x+۲y=۴$ پیدا کنید.

ـ معادله‌های ضلعهای مثلث ABC عبارتند از:

$$AB: x+۲y+۲=۰$$
$$BC: ۲x-۳y+۶=۰$$
$$CA: x+۲y-۴=۰$$

معادلهٔ ارتفاع AH را بدون محاسبهٔ مختصات رأس A پیدا کنید.

ـ خطی چنان تغییرمی کندکه مجموع معکوسات طول و عرض از مبدأ آن مقدار ثابت است. ثابت کنید این خط ازنقطهٔ ثابت می گذرد. مختصات این نقطه را پیداکنید.

ـ در دستگاه مختصات قائم xOy خط D به معادلهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$ همواره از $P(۱,۱)$ می گذرد. از مبدأ مختصات خط D' را بر D عمود می کنیم. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ تلاقی D و D' را پیداکنید.

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر: قمیصی ـ فرستنده: ناصر ماجدی

ـ ثابت کنیدکه نقاط A و B و C و D بهرترتیب روی یك محور قرارگیرند رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\frac{\overline{DA}^۲}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{\overline{DB}^۲}{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}+\frac{\overline{DC}^۲}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=۱$$

ـ با فرض $x<۳$ نمایش هندسی معادلهٔ زیر را در یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید:

$$x=\sqrt{x-۱+۲\sqrt{x-۲}}+\sqrt{x-۱-۲\sqrt{x-۲}}$$

ـ نقاطی از صفحهٔ دستگاه محورهای مختصات را معین کنید که مختصات آنها در سیستم زیر صدق کنند:

$$\begin{cases}|x-۱|\leq ۳\\ |y+۱|\geq ۳\\ x+y=۱\end{cases}$$

ـ مختصات رئوس مثلث متساوی‌الساقین $ABC\,(B=C)$ را با مفروضات زیر بدست‌آورید:

خط $y=-x+۶$ در نقطهٔ B بر دایره‌ای که معادلهٔ دسته‌ای از اقطارآن به‌صورت زیراست:

$$(m^۲+m)y+(-m^۲+m+۲)x=$$
$$۲m^۲+۴m+۲$$ (m پارامتر متغیراست)

مماس بوده وطول‌ضلع BC مساوی‌طول قطردایرهٔ مزبور استو رأس C روی محورyها و رأس A روی محورxها بوده و $y_C>y_B$ است.

ـ مختصات رئوس‌مربعی (a,a)و$(a,-a)$ و $(-a,a)$ و $(-a,-a)$ هستند $(a>۰)$ نقاطی‌ازصفحهٔ دستگاه محورهای مختصات را معین کنیدکه مجموع فواصل هریك از آن نقاط از اضلاع‌مربع $۶a$ باشد. ودرحالتی‌که مجموع‌فواصل $\lambda a\,(\lambda>۰)$ باشد برحسب λ بحث کنید.

ـ نقاط $A(۳m+۲,m-۱)$و$B(m-۶,۲m+۳)$ مفروضند $(m\neq -۴)$

اولاثابت کنید که با تغییر پارامتر m خط AB بموازات خود حرکت می کند.

ثانیانقطهٔ ثابت C را چنان معین‌کنیدکه با تغییرپارامتر m اندازهٔ زوایای مثلث ABC ثابت بمانند (مثلثهای ABC متشابه باهم باقی بمانند).

ـ مکان‌نقطهٔ $M(|۱-\alpha|$ و $۱+\alpha)$ را باتغییرپارامتر α در یك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

ـ خطوط (D) و (D')و(D'') به معادلات زیرمفروضند

$$۹y^۳-۴x^۳+۱۸xy^۲-۲x^۲y=۰$$

مطلوبست تعیین مختصات رئوس مثلث ABC با شرایط زیر: روی‌هریك ازخطوط (D) و (D') و (D'') فقط یك رأس‌مثلث قرار دارد.

$$\begin{cases}\text{رأس } A \text{ در ربع اول است}\\ |y_B|>x_B=۳\\ G\left(۱\text{ و }-۲\frac{\sqrt{۲}}{۹}\right) \text{ مرکز ثقل مثلث است}\end{cases}$$

II- نقاط $A(1,2)$ و$B(-2,4)$ وخط (D) بمعادلهٔ $y=3x$ مفروض‌است. نقطهٔ M را روی خط درنظرمی‌گیریم. خط AM محورxها را در E وخط BM محور yها را در F قطع می‌کند. ثابت‌کنید با حرکت M روی خط (D) خط EF از نقطهٔ ثابتی‌که مختصات‌آن را تعیین خواهیدکرد می‌گذرد.

مثلثات

دبیرستان امیرکبیر استبهان

دبیر: احمد سجادی

- بین روابط زیرزاویهٔ α را حذف‌کنید.

$$\begin{cases} x\sin\alpha - y\cos\alpha = \sqrt{x^2+y^2} \\ \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} = \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{cases}$$

- هرگاه α و β کمانهای حاده باشند ثابت‌کنید:

$$2+tg\alpha+tg\beta \leqslant \frac{2}{\cos\alpha}+\frac{2}{\cos\beta}$$

- انتهای‌کمان α در چه ناحیه‌ای از دایرهٔ مثلثاتی واقع باشدتا اتحاد مثلثاتی زیررا داشته باشیم:

$$tg\alpha+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} \equiv \frac{1}{\cos\alpha}$$

-هرگاه داشته باشیم:

$$\sin^2 x+\sin^4 x+\cdots+\sin^{2n} x+$$

$$+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^4 x}+\cdots+\frac{1}{\sin^{2n} x}=2n$$

نتیجه بگیرید:

$$\sin x=\pm 1$$

دبیرستان ۲۵شهریورکرج

دبیر: وقری‌مقدم - فرستنده : محبوبه و مجید مصباح

a وb وc را چنان تعیین‌کنیدکه رابطهٔ زیربه‌ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد:

$$a\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+b\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+c=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin x\cos x}{\sin x+\cos x+1}$$

- صحت اتحاد زیر را تحقیق‌کنید (x حاده است):

$$\left(\sqrt{\frac{a-tgx}{a\,cotgx-1}}+\sqrt{\frac{a-cotgx}{a\,tgx-1}}\right)^2=2+\frac{1}{\sin x\cos x}$$

مطلوبست حل معادلات زیر:

(الف) $3tgx+cotgx\,cotg\frac{3\pi}{4}=0$

(ب) $4\sin\left(x+\frac{2\pi}{7}\right)-8\cos\left(\frac{3\pi}{14}-x\right)+3=0$

(ج) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=0$

دبیرستان دکتر هشترودی

دبیر : علی‌امینیان

- اولا عبارت $tgx(1-tgx)$ را به‌صورت $\alpha^2-\beta^2$ بنویسید. ثانیاً به‌ازای چه‌مقدار tgx عبارت فوق‌ماکزیمم است.

و اگر $\frac{\pi}{4}$ باشد عبارت $\frac{\cos x\cos ec^2 x}{\cos x-\sin x}$ را به‌صورت:

$$\frac{1-tgx}{tgx}+\frac{2}{tgx(1-tgx)}$$

درآورید و ثابت‌کنید $\frac{\cos x\cos ec^2 x}{\cos x-\sin x}>8$ است

معادلهٔ $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)\times\sin(5\pi+x)=-\cos\frac{14\pi}{3}$ را حل‌کنید.

-a وb وc را چنان تعیین‌کنیدکه عبارت زیربه ازاء جمیع مقادیر x برقرار باشد.

$$a\,cotgx+b\,tgx+\frac{c}{tgx+cotgx}=\frac{2+3tg^4 x}{tgx\sec^2 x}$$

کلاس ششم طبیعی

جبر و مثلثات

دبیرستان امیرکبیر استهبان

دبیر احمد سجادی

- اولا مقدار a را طوری تعیین‌کنیدکه شعاع دایرهٔ به معادلهٔ زیر $R=4$ باشد:

$$x^2+y^2-4x-6y+a=0$$

ثانیا مختصات نقطهٔ C مرکزدایره وR شعاع دایرهٔ (O) به‌معادلهٔ $x^2+y^2-4x-6y=3$ را تعیین نموده دایره را رسم‌کنید.

ثالثاً - معادلهٔ دایره‌ای‌راکه مرکزش نقطهٔ C′ به‌مختصات

$x=۵$ و $y=۷x$ بوده و بردایرهٔ (O) مماس‌خارج می‌باشد تعیین کرده و آنرا رسم کنید.

- معادلهٔ $a\sin ۲x+\cos ۲x=۲$ مفروض است. a را حساب کنید که $x=\frac{\pi}{۶}$ یکی‌از جوابهای معادله باشد و نیز معادلهٔ $\cos ۲x+\sqrt{۳}\sin ۲x=۲$ را حل کنید:

دبیرستان همت استهبان

دبیر: احمد سجادی

- تابع $y=ax^۳+bx^۲+cx$ مفروض است.

اولا a و b و c راتعین کنید که طول نقطهٔ عطف منحنی برابر $x=۰$ بوده و خط $y+۷x=۲$ در نقطه‌ای از منحنی به‌طول $x=۱$ بر آن مماس گردد.

ثانیاً پس ازتعیین a و b و c جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید.

- معادلهٔ زیررا حل کرده و جوابهای کلی و جوابهای بین ۰ و ۲π آنرا بدست آورید.

$$۳\sin^۲x-\cos^۲x-\sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

- معادلهٔ $\sin ۲x+m\cos ۲x=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ مفروض است. اولا m را حساب کنید که $x=\frac{\pi}{۶}$ یکی‌از جوابهای معادله باشد ثانیاً به‌ازای $m=۱$ معادله را حل کرده و جوابهای بین ۰ و ۳۶۰ درجه را بدست آورید.

کلاس ششم ریاضی

جبر

دبیرستان بهشت آئین اصفهان

دبیر: قوام نحوی

- کسرهای زیر را حساب کنید:

$$\frac{\sqrt[۳]{x^۲+x}}{x+۲} \qquad x\to\pm\infty$$

$$\frac{\sqrt[۳]{۱+\sin^۲x}-\sqrt[۳]{۱-\sin^۲x}}{\sin^۴x} \qquad x\to ۰$$

- معادلهٔ یك دایره و یك سهمی به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-۶x=۲۷ \\ y^۲=۱۲x \end{cases}$$

این دایره و سهمی در نقاط A و C متقاطعند. ثابت کنید مماسهای برسهمی در نقاط A و B روی دایره متقاطعند.

- مطلوب است رسم منحنی تغییرات تابع:

$$y=\pm\sqrt{-۲x^۲-۴x+۶}$$

حساب استدلالی

دبیرستان ششم بهمن شمیران

دبیر: قمیصی

- عددی را در مبنای ۱۲ بر $\overline{(۳\alpha/\beta)}_{۱۲}$ تقسیم کرده‌ایم خارج قسمت $\overline{(۵/\alpha)}_{۱۲}$ و باقیمانده $\overline{(۰/۳\alpha)}_{۱۲}$ است مطلوبست محاسبهٔ آن عدد در مبنای ۱۲ (کلیهٔ عملیات باید در مبنای ۱۲ انجام گیرد).

$$(\alpha)_{۱۲}=۱۰ \quad و \quad (\beta)_{۱۲}=۱۱$$

- در یك تقسیم خارج قسمت را به‌هریك از جملات مقسوم و مقسوم‌علیه اضافه کرده و دو باره عمل تقسیم را انجام‌می‌دهیم. اگرخارج قسمت تغییر نکرده ولی از باقیمانده ۳۰۶ واحد کم شود مطلوبست تعیین خارج قسمت.

- در یك عدد سه رقمی اگرجای یکان و دهگان را باهم عوض کنیم ۶۳ واحد برآن عدد افزوده می‌شود و اگرجای ارقام دهگان و سدگان همان عدد را باهم عوض کنیم ازآن عدد ۴۵۰ واحد کم می‌شود تعیین کنید که اگرجای ارقام یکان و سدگان‌را باهم عوض کنیم چه‌تغییری درآن عدد حاصل می‌شود.

- عدد پنج رقمی $x=\overline{ababa}$ را چنان‌تعیین کنید که اگر مجموع ارقام آن را α بنامیم مجموع ارقام α مساوی ۲ باشد

- اگرعدد $[\overline{۴(۱۶)}]_x$ مربع کامل باشد ثابت کنید می‌توان x را به صورت زیر نوشت (β عدد صحیح غیر منفی است).

$$x=(\beta+۳)(\beta+۷)$$

- از جمع زیرمقادیر هریك از ارقام را با شرایط زیر بدست آورید:

$$\begin{array}{r} \overline{IRADJE} \\ \overline{SHAMES} \\ \hline \overline{BAKTASH} \end{array}$$

$\overline{IRADJE}$ مقلوب مضرب ۱۸ است

$\overline{BAKTASH}$ مضرب ۴ است

SHAMES کوچکترین عدد شش رقمی است که درجمع مزبور صدق می‌کند.

آنالیز نا استاندارد (از صفحهٔ ۴۹)

و بی‌نهایت کوچکها است که مثلا $*2$ درکنار آنها منظور شده است.

هرعضو $*R$ (عدد شبه واقعی) نامحدودنامیده می‌شود اگر شبه بزرگتر از هرعدد حقیقی‌استاندارد باشد، در غیراین‌صورت محدود نامیده می گردد.

- یك عدد شبه حقیقی مثبت وقتی بی‌نهایت کوچك نامیده می‌شودکه شبه کوچکتراز هرعدد حقیقی مثبت استاندارد باشد. اگر شبه اختلاف دوشبه حقیقی محدود است مامی گوئیم که به‌یك کهکشان تعلق‌دارند. محور شبه حقیقی شامل تعدادی بی‌شمار از کهکشانهاست. اگرشبه‌اختلاف‌دوشبه‌حقیقی‌جزء بی‌نهایت کوچکها باشد می گوئیم که‌آنهابه یك «ذره» تعلق‌دارند. اگریك‌شبه حقیقی $(*r)$ بی‌نهایت به یك عدد حقیقی استاندارد (r) نزدیك باشد می گوئیم r حوزهٔ استاندارد $*r$ است. البته تمامی حقیقی‌های استاندارد در یك‌کهکشان جای دارند که کهکشان اصلی نامیده می‌شود. در این‌کهکشان هرذره شامل یك وفقط یك عدد حقیقی استاندارد است. این ذره در همسایگی بی‌نهایت‌کوچك r است: مجموعهٔ اعداد حقیقی نااستانداردکه بی‌نهایت به r نزدیك هستند. موارد استفاده از تئوری‌تراکم نه فقط در اعداد حقیقی بلکه درفضاهای عمومی‌متریك و توپولوژی هم می‌باشد. بنابراین آنالیزهای‌نااستاندارد نه تنهابه (آنالیز) مقدماتی‌بلکه به تمامی دامنه‌های‌آنالیزهای پیچیدهٔ جدید بستگی دارد.

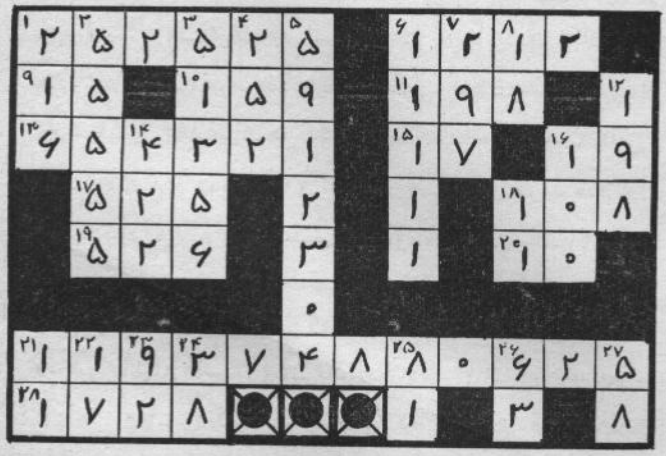
وقتی‌می گوئیم بی‌نهایت‌کوچکها وجود دارند مقصود اصلا صورتی از موضوع که ممکن است بوسیلهٔ اقلیدس یا برکلی درك شده‌باشد نیست. تا صد سال پیش عموماً تمام فلاسفه عقیده داشتند که: دنیائی در ریاضی‌همانند فیزیك غیراز دنیای حقیقی‌هاوجود ندارد. مسئلهٔ‌وجود یاعدم وجود بی‌نهایت کوچکها همانند مسئلهٔ وجود یاعدم وجوداتم‌بود. امروزه اکثریت‌قریب‌به‌اتفاق‌دانشمندان و ریاضی‌دانان‌آنچنان به‌وجود موضوعاتی که روی‌آنها کارمی‌کنند پافشاری نمی‌کنند. آنچه‌که ریاضی‌دانان از بی‌نهایت کوچکها می‌خواهند وجودشان‌نیست بلکه فقط می‌خواهنداین حق را بدست بیاورندکه ازآنها در مسائل استفاده‌کنند. ارزش اثباتی برپایهٔ بی‌نهایت‌کوچکها به هیچ وجه از انواع اثباتهای دیگر کمتر نیست.

مثالها و مطالبی که درموردآنها صحبت کرده‌ایم در اصل مقدمه‌ای‌بیش‌نیست. تلاشهائی برمبنای دینامیك بی‌نهایت‌کوچکها و احتمالات بی‌نهایت کوچکها انجام یافته است. رابینسون و شاگردش آلن‌برنستین از بی‌نهایت‌کوچکها درحل مسئله‌ای‌که قبلا حل نشده بود استفاده‌کردند.

مع‌هذا باید گفته شودکه هنوربسیاری‌ازآنالیست‌هادرمورد روش رابینسون شك دارند. این کاملا صحیح است‌که هرآنچه بوسیله و باکمك بی‌نهایت‌کوچکها انجام می‌شود بدون‌کمك‌آنها هم قابل انجام است. شاید همچون سایرایده‌های نو استفادهٔ‌کامل از نظریه‌های نوبوسیلهٔ نسل جدیدی از ریاضی‌دانان انجام شود که زیاد دربند روشهای استاندارد نباشند و از قدرت وآزادی‌عمل بی‌نهایت‌کوچکها بهره‌مند شوند.

جدول اعداد (دنباله ازصفحهٔ ۸۸)

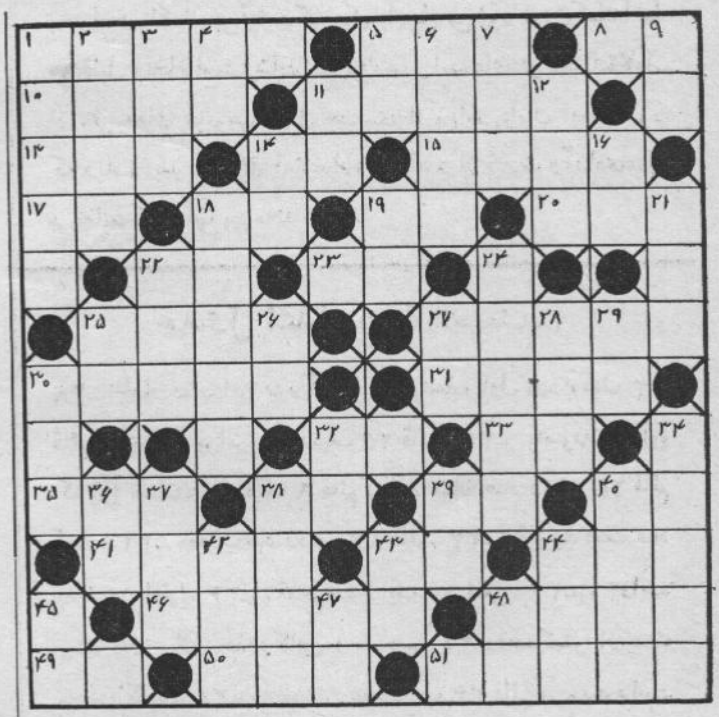
۲۸ـ چهار ده برابر بزرگترین مقسوم‌علیه اول عدد ردیف ۱۲ قائم ۳۹ـ دو برابر عدد ردیف ۲۵ قائم. ۳۰ـ به‌صورت $\overline{abc}$ که $\overline{bc}$ همان عدد ردیف ۹ قائم و $\overline{ab}$ همان عدد ردیف ۲۵ قائم است. ۳۲ـ مقلوب‌عدد ردیف ۱۴ قائم. ۳۴ـ مقلوب نصف عدد ردیف ۱ افقی. ۳۶ـ یکدهم‌عدد ردیف ۵۰ افقی. ۳۷ـ ۴۱واحد بیشتر از یك مجذورکامل و همچنین ۲۰ واحدکمتر از یك مجذورکامل. ۳۸ـ از نوشتن عدد ردیف ۳۶ قائم در سمت راست عدد ردیف ۸ افقی بدست می‌آید. ۳۹ـ دو برابر عدد ردیف ۳۸ افقی. ۴۰ـ حاصل‌ضرب عدد ردیف ۴ قائم در مقلوب عدد ردیف ۲۵ قائم. ۴۲ـ تفاضل عددهای ردیف ۳۵ افقی و ۲۳ افقی. ۴۳ـ مقلوش جذرعدد ردیف ۹ قائم است. ۴۴ـ تکرار رقم‌عدد ردیف ۳۲ افقی. ۴۵ـ همان عدد ردیف ۲۵ قائم. ۴۷ـ دوبرابر عدد ردیف ۳۹ افقی. ۴۸ـ مقلوب عدد ردیف ۱۴ افقی.



حل جدول شمارهٔ قبل

جدول اعداد

طرح از: یوسف رضازاده (تاریخ وصول به دفتر مجله: ۱۳۵۱/۱/۲۲)



افقی: ۱ـ بزرگترین عدد پنج رقمی که مجذور کامل است. ۵ـ کوچکترین عدد سه‌رقمی به شکل $\overline{abb}$ که مجموع رقمهایش ۲۰ است. ۸ـ بزرگترین مقسوم علیه اول عدد ردیف ۵ افقی. ۱۰ـ توان دوازدهم است. ۱۱ـ توان سوم دو برابر عدد ردیف ۴۵ قائم. ۱۳ـ توان دوم عدد ردیف ۱۴ افقی. ۱۴ـ عدد به شکل $n \times 2^n$ که مجذور کامل نیست. ۱۵ـ به‌شکل $\overline{abcd}$ است که $\overline{ab}$ کعب عدد ردیف ۱۱ افقی و $\overline{cd}$ سه‌برابر $\overline{ab}$ است. ۱۷ـ توان‌پنجم است. ۱۸ـ سه‌برابر رقم یکان خود می‌باشد. ۱۹ـ مقلوب‌عدد ردیف ۱۷ افقی. ۲۰ـ به‌شکل $\overline{abb}$ و مجذور کامل عدد غیراز ده است. ۲۲ـ همان عدد ردیف ۸ افقی. ۲۳ـ جذر عدد ردیف ۲۰ افقی. ۲۵ـ حاصل ضرب عدد اول $\overline{ab}$ درعدد ردیف ۳۸ افقی به‌قسمی که $\overline{ba}$ توان‌چهارم است. ۲۷ـ توان سوم جذر عدد ردیف ۱۳ افقی. ۳۰ـ ده برابر عدد ردیف ۲۵ افقی. ۳۱ـ کوچکترین عدد که رقمهایش به تصاعد حسابی می‌باشند ومجموع آنها ۱۸ است. ۳۲ـ تکرار یک رقم. ۳۳ـ همان‌عدد ردیف ۱۴ افقی. ۳۵ـ بزرگترین عدد سه‌رقمی که از مجموع رقمهایش ۶۵۷ واحد بیشتر است. ۳۸ـ دو برابر خمس عدد ردیف ۳۲ افقی. ۳۹ـ ده برابر عددی که توان‌دوم نصف‌خود می‌باشد. ۴۰ـ همان‌عدد ردیف ۲۳ افقی. ۴۱ـ از نوشتن عدد ردیف ۹ قائم در سمت راست عدد ردیف ۱۴ افقی بدست می‌آید. ۴۳ـ توان ششم است. ۴۴ـ مقلوبش بزرگترین عدد سه رقمی است که رقمهایش تصاعد حسابی با قدر نسبت ۲ می‌سازند. ۴۶ـ ده‌برابر عدد ردیف ۱۵ افقی. ۴۸ـ سه برابر عددی که از نوشتن عدد ردیف ۴۵ قائم در سمت راست عدد ردیف ۱۸ افقی بدست می‌آید. ۴۹ـ سه برابر نصف عدد ردیف ۳۸ افقی. ۵۰ـ فاکتوریل عدد ۶. ۵۱ـ از نوشتن عدد y درسمت راست عدد x بدست می‌آید به قسمی که:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \\ x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=180 \end{cases}$$

قائم: ۱ـ از نوشتن رقم یکان عدد ردیف ۴۸ افقی در سمت چپ همین عدد بدست می‌آید. ۲ـ برابر است با 7×6^2 و ۵۰ مقسوم‌علیه دارد. ۳ـ حاصل‌ضرب ۷ درتوان هفتم یک عدد. ۴ـ حاصل‌ضرب دو عدد متوالی و مقسوم علیهی از عدد ردیف ۳ قائم. ۵ـ به‌شکل $\overline{ab}$ که توان‌دوم آن به‌شکل $\overline{abc}$ است. ۶ـ عدد x که در رابطه‌های زیر صادق است:

$$x-114=a^2 \text{ و } x+81=(a+1)^2$$

۷ـ مجموع ۳۲ جمله از تصاعد حسابی که جملهٔ اولش ۱۵ و قدرنسبتش یک است. ۹ـ مجذور رقم یکان خود می‌باشد. ۱۱ـ یک چهارم عدد ردیف ۴ قائم. ۱۲ـ به‌صورت $\overline{abc}$ که $\overline{ac}$ عدد اول و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک این عدد با عدد ردیف ۷ قائم است. ۱۴ـ این عدد نیز مجذور رقم یکان خود می‌باشد اما متفاوت از عدد ردیف ۹ قائم است. ۱۶ـ دو برابر مقلوب عدد ردیف ۱۴ قائم. ۱۸ـ همان‌عدد ردیف ۳۰ افقی. ۱۹ـ همان عدد ردیف ۳۸ افقی. ۲۱ـ به‌صورت $\overline{aba}$ که مجموع رقمهایش برابر $5b$ است. ۲۲ـ رقمهایش به تصاعد حسابی‌اند. ۲۴ـ همان عدد ردیف ۱۸ قائم. ۲۵ـ نصف کعب عدد ردیف ۱۱ افقی. ۲۶ـ نصف‌عدد ردیف ۳۹ افقی. ۲۷ـ همان عدد ردیف ۲۵ قائم.

بقیه در صفحهٔ قبل

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 155- A spuare piece of tin is made into an open box by cutting from each corner a square of side s inches and then turning up the sides. If the box is to contain c cubic inches, find the dimensions of the original piece of tin.

Solution: If each side of the base of the box is x, with a height of s, the volume is $x^2s=c$. Therefore $x=\sqrt{\frac{c}{s}}$, and the side of the original spuare is $x+2s$, or $\sqrt{\frac{c}{s}}+2s$

Problem 156- If a and b are the roots of the equation $x^2-px+q=0$, find the equation whose roots are $a+\frac{1}{b}$ and $b+\frac{1}{b}$

Solution: If a and b are the two roots of the given equation $x^2-px+q=o$, then $a+b=p$ and $ab=q$. If $a+\frac{1}{a}$ and $b+\frac{1}{b}$ are the roots of the desired equation, then the sum of its roots is $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, and the product of the roots is $ab+\frac{1}{ab}+2$. Hence the required equation is:

$$x^2-(p+\frac{p}{q})x+(q+\frac{1}{q}+2)=0$$

Problem 157- A man and his grandson have the same birthday. For six consecutive birthday the man is an integral number of times as old as his grandson. How old is each at the sixth of these birthdays?

Solution: Let the consecutive ages of the man be x, $x+1$, ..., $x+5$, and the corresponding ages of his grandson y, $y+1$, ..., $y+5$. Since $x+a$ is a multiple of $y+a$ for $a=1,2,...,5$, then $(x+a)-(y+a)$ or $x-y$ is also a multiple of $y+a$.

If $y=2$, $x-2$ is the lowest common multiple of 2,3,4,5,6, and 7, whitch is 420. Thxrefore $x-2=420$, and $x=422$, an impossible age.

But if $y=1$, $x-1$ is the lowest common multiple of 1,2,3,4,5,6, or 60. Therefore, $x=61$, and man and grandson are respectively 66 and 6.

Mutliple Choice Questions

158- If P is the set of integers, Q the set of real numbers, and R the set of rational numbers, which of the following relations is true?

A) $P \subset Q \subset R$ B) $R \subset Q \subset P$

C) $Q \subset R \subset P$ D) $P \subset R \subset Q$

159- What are the elements of the set $\{x|x^2+6=5x\}$

A) 2,–3 B) –2,3 C) –2,–3 D)2,3

160- The difference, written in the denary, scale, between the octal numbers 76 and 34 is:

A) 28 B(34 C) 38 D) 42

161- The binary number 100110 written as a denary numbers is:

A) 21 B) 22 C) 37 D) 38

162- Using modulo 6 arithmetic $3\times5=$

A) 0 B) 3 C) 9 D) 15

Answers: 158–D. 159–D. 160–B. 161–D 162–B.

انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها
تألیف:علی اصغرهومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هشترودی

روش سادهٔ‌حل مسائل شیمی
ترجمهٔ: عطاءالله بزرگ‌نیا

تستهای چند جوابی شیمی
ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

راهنمای ریاضیات متوسطه
تألیف: عبدالحسین محصفی
بها: ۳۵ ریال

تستهای هوش
ترجمهٔ: باقر مظفرزاده
بها : ۱۰۰ ریال

معماهای ریاضی
ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار
بها : با جلد شمیز ۷۵ ریال
با جلدزرکوب : ۱۰۰ریال

مسائلی ازحساب استدلالی
تألیف: محمودکاشانی

جلد اول	جلددوم	جلد سوم
۱۲ریال	۱۵ریال	۱۵ریال

مبادی منطق وریاضی جدید
تألیف: غلامرضا عسجدی
بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان‌که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان‌که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان‌که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.