یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ دوازدهم ، شمارهٔ : ۱ شمارهٔ مسلسل : ۱۱۰ مهر ـ آبان ۱۳۵۴

دراین شماره:

نمره نیاوردن دلیل بر بی استعدادی نیست	عبدالحسین مصحفی	۱
دکترا درامریکا	دکتر علیرضا امیر معز	۲
بنیان‌گزاران ریاضی جدید، گالوا	-	۳
فکر کنید	-	۳
انعکاس گوژ	دکتر علیرضا امیر معز	۴
آنالیزهای ناانسانداردد	ترجمهٔ جاودان پارسای‌قمی	۶
موازیهای بیضوی	ترجمهٔ محمدحسین احمدی	۱۱
چند ضلعیهای جهت‌دار	ترجمهٔ: جواد فیض	۱۴
باز آموزی هندسه، خاصیتهایی از مثلث	ترجمهٔ: عبدالحسین مصحفی	۱۷
تشکیل مسائل متشابه	ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری	۲۳
نه مسئله	ترجمهٔ: مهندس داود بدریحان	۲۵
مسائل برای دبیرستانهای کشاورزی	« « «	۳۲
مسائلی برای حل	-	۳۷
تستهای ریاضی	-	۳۹
جدول اعداد	بهروز علمداری میلانی	۴۴
Problems & Solutions Multiple choice questions	-	ماقبل آخر

بها : ۴۰ ریال

به امید همکاریهای دوستداران مجلهٔ یکان

چنانکه با نامه‌ای سرگشاده به آگاهی دوستداران مجله رسید؛ قرار براین‌شده بود که‌از ادامهٔ انتشار یکان خودداری‌شود. زیرا چاپخانه‌ها برای چاپ‌وصحافی نرخهایی بالاتراز نرخهای گذشته‌اعلام داشته بودند و ازطرف‌دیگر به‌پیروی از «اصل‌مبارزهٔ باگرانی» افزودن بربهای مجله بی‌مورد می‌نمود. اما چشم‌پوشی از دوازده سال تلاشی که برای تهیه و پخش‌مجله بکار رفته است آسان نیامد تاآنجاکه پذیرفتن زیان ناشی از ادامهٔ انتشار مجله ساده‌تر از آن جلوه‌کرد. وانگهی امیدآن بود، و هست، که دوستداران یکان از راه تشویق اشخاص‌دیگر به خرید یا اشتراك مجله موجبات بالابردن‌تیراژآن را فراهم‌آورند و درنتیجه زیان مجله‌کم‌گردد. ازاینرو باز هم مجلهٔ یکان، اما با یك‌ماهٔ تأخیر، منتشر شد و در دسترس دوستداران‌آن قرارگرفت.

برای‌تهیه و انتشار مجلهٔ یکان‌ازطرف هیچ مؤسسهٔ دولتی یاغیرآن وهمچنین ازطرف هیچکس کمك نمی‌شود. برای‌این‌کار کمك مالی هم‌پذیرفته نمی‌شود. تاآنجا که امکانات مالی صاحب مجله اجازه دهد به‌چاپ و پخش‌آن ادامه می‌دهد. البته اشخاص نیکوکاری که مایل‌باشند می‌توانند مجله‌را برای‌هرتعداد از افراد که خواسته باشندمشترك شوند. فرستادن‌مقاله‌های متناسب برای درج درمجله نیز کمك دیگری است برای ادامهٔ انتشار یکان.

به امید همکاریهای دوستداران یکان.

معرفی کتاب

نقد و تحقیق دربارهٔ نسبیت همزمانی

مأخوذ از نظریهٔ نسبی آلبرت اینشین

تألیف: غلامرضا عجدی

۷۲ صفحه ـ بها: ۸۰ ریال

خواستاران می‌توانند توسط مجله یکان کتاب را بخواهند

تسلیت

جناب‌آقای **دکتر علیرضا امیرمعز** استاد دانشگاه تکزاس‌تك که خوانندگان‌مجله با مقاله‌های علمی‌وارزندهٔ ایشان آشنایی دارند، ماه گذشته مادر خود را از دست دادند. این مصیبت تلخ را به حضور ایشان و خانوادهٔ گرامی تسلیت عرض می‌کنم.

عبدالحسین مصحفی

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ‌دوازدهم ـ شمارهٔ یکم ـ شمارهٔ مسلسل ۱۱۰

مهر، آبان ۱۳۵۴

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

وجه اشتراك برای دورهٔ دوازدهم : ۳۲۰ ریال

حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : **MOS'HAFI Abdolhossein**

Volume XII, number 1. Nov. 1975

subscription : 6$

TEHRAN - P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت‌آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

نمره نیاوردن، دلیل بر بی استعدادی نیست.

دانش‌آموزی درچند پرسش یا امتحان پیاپی از یك درس نمره نمی‌آورد. آیا باید حکم کرد که این دانش‌آموز در این درس استعداد ندارد؟ آیا چنین حکمی را می‌توان قاطع دانست؟ به تجربه ثابت شده که‌چنین حکم‌کردنها اشتباه محض‌بوده است.

پیش‌آمده است که دانش‌آموزی‌در کلاسهای‌چهارم و پنجم‌رشتهٔ ریاضی‌ازهمهٔ درسهای ریاضی مرتباً‌نمره‌های‌بدگرفته است به‌قسمی که در هریك‌از این کلاسهایك‌سال رفوزه‌شده‌است. در اوایل سال‌ششم ریاضی نیزاز ریاضیات‌نمره‌های رضایت بخش نداشته است. اما در اواسط سال، همین دانش‌آموز ناگهان‌چنان در ریاضیات جلوه کرده که دبیران و همکلاسیهایش را به حیرت واداشته است.

آیا قبلاعاملهایی دانش‌آموز را از ریاضیات‌دلزده می‌داشته‌است‌و بعدآن‌عاملها برطرف گردیده است؟ یا اینکه عامل یا عاملهای تازه‌ای باعث درخشان شدن استعداد نهفتهٔ دانش‌آموز گردیده است؟ اما به هرجهت، این‌دانش‌آموز درفراگیری ریاضیات بی‌استعداد نبوده است.

اگردانش‌آموزی در فراگیری یك درس‌بی‌میلی‌نشان می‌دهد، قبل‌ازآنکه او را ازاین بابت سرزنش کنیم و بی‌استعدادش بخوانیم (تاآنجاکه امربرخودش‌هم مشتبه شود)، بهتراست که بکوشیم تا موقعیتی‌بوجودآوریم که استعداد بالقوهٔ وی را به فعل‌درآوریم. هرکس برای فراگیری استعداد دارد، اما ممکن‌است که مانعهایی از بروز این استعداد جلوگیری کند،یا اینکه برای نمایان شدن این استعداد انگیزه‌ای لازم باشد. بکوشیم تا این چنین مانعها و انگیزه‌ها را بشناسیم.

عبدالحسین مصحفی

دکترا در آمریکا

علیرضا امیرمعز؛ دانشگاه تگزاس تك

بارها دوستان از من پرسیده‌اند که دکترا چیست. دربارهٔ دکترا در اروپا اطلاع خاصی ندارم. شاید شخصی که در این‌باره وارد باشد معنی آن را برای دوستان شرح دهد.

کلمهٔ دکتر (doctor) یعنی آموزگار و مشتق از مصدر لاتینی (docēre) به معنی آموختن است. اسم مفعول آن (doctus) و کلمهٔ دکتر صفت فاعلی آن است. همانند کلمهٔ آموزگار که از آموختن مشتق شده است.

همه می‌دانند که گواهی‌نامهٔ پزشکی را دکترا می‌گویند. در امریکا وقتی می‌نویسند «.M.D» منظور دکتر پزشکی است (Doctor of Medicine). ولی «.D.O» هم پزشکی است که مقصود از آن (Doctor of Oséopathy) است. این دو امروزه فرق زیادی ندارند. از جنبهٔ اجتماعی فرق دارند که شرح آن از حوصلهٔ این مقالهٔ کوتاه خارج است. همچنین دسته‌ای دیگر که به معالجهٔ عملی می‌پردازند و آنان را (Chiroproctor) می‌نامند گاهی دکتر نامیده می‌شوند. متخصصین چشم را به انگلیسی (Ophtalmologist) می‌گویند، اما اینان ابتدا باید دکتر پزشکی شوند و بعد در قسمت چشم متخصص شوند. کسانی که عینك تجویز می‌کنند دو دسته‌اند؛ یك دسته را (Optometrist) می‌گویند که گواهی نامهٔ دکترا دارند که .O.D نامیده می‌شود (Doctor of Optometry) دستهٔ دیگر (Opticion) می‌نامند و آنان را دکتر صدا نمی‌کنند.

ورود به دانشکدهٔ حقوق معمولاً گواهی‌نامهٔ دانشگاه لازم دارد. مثلا شخصی مهندس راه و ساختمان شده است، سپس وارد دانشکدهٔ حقوق می‌شود که پس از دروس عمومی حقوق در رشتهٔ مربوط به حقوق مهندسی متخصص می‌شود. فارغ‌التحصیل دانشکدهٔ حقوق را (Doctor of Jurisprudence) می‌نامند ولی آنان را دکتر خطاب نمی‌کنند. البته گواهی‌نامهٔ آنان دکترا است.

اکنون به دکتراهای دانشگاهی می‌پردازیم. در بیشتر رشته‌های علوم و ادبیات درجهٔ دکترای فلسفی (Doctor of Phylosophy) می‌دهند که نشانهٔ اختصاری آن «.PhD» است. این درجه چندین امتحان و یك رسالهٔ تازه لازم دارد. معمولا یك امتحان بطور کلی در رشتهٔ مشخص است. سپس شخص دو زبان خارجه را به اندازهٔ خواندن و ترجمه باید بداند. بعد امتحان دیگری می‌دهند دربارهٔ بخش مخصوصی که در آن رساله می‌نویسند. آنگاه رساله باید به تصویب هیئت ممتحنه برسد.

در قسمت آموزش و پرورش «.EdD» می‌دهند به معنی (Doctor of Education). این دکترا معمولا امتحان زبان خارجه ندارد و رسالهٔ آن جمع آوری مطالب از کتابهای مختلف است.

در قسمت تجارت درجه‌ای به‌نام:

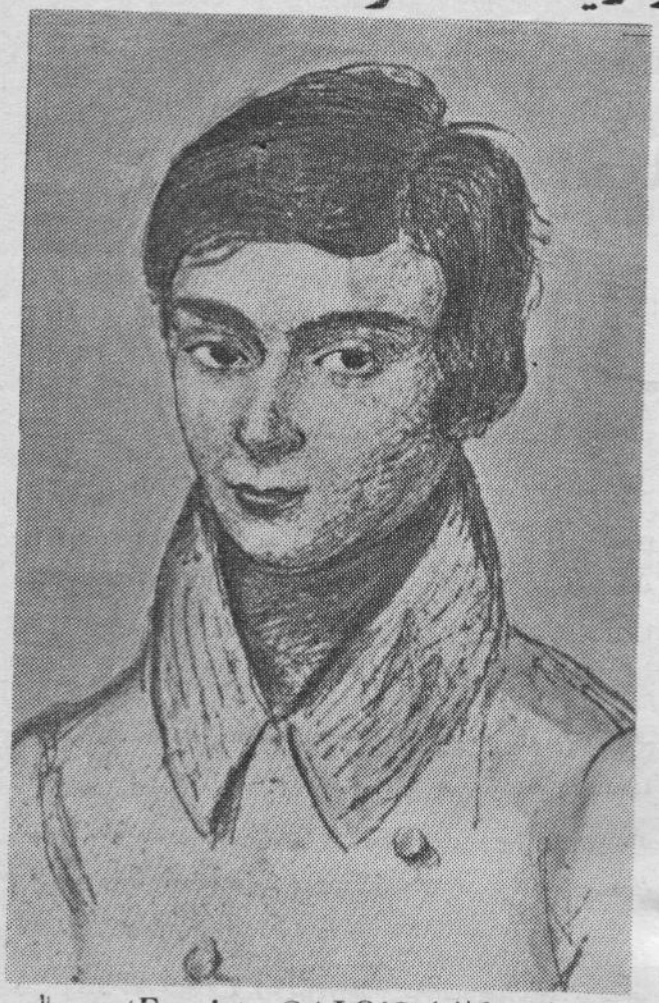
(Boctor of Business adminitration)

می‌دهند. انواع این درجه‌ها وجود دارد و همه تقریباً شرایطی شبیه به یکدیگر دارند. مثلا گاهی در مهندسی (Doctor of Science) می‌دهند.

عده‌ای از دانشگاهها درجهٔ فوق لیسانس (Master) را برای گرفتن دکترا واجب می‌گیرند. اما در بعضی از دانشگاهها، مانند دانشگاه کالیفرنیا، داشتن فوق لیسانس برای گرفتن دکترا اختیاری است. فقط انتظار می‌رود که دانشجو در رشتهٔ خودش و در زبانهای خارجی به قدر کافی معلومات داشته باشد و این موضوع از راه چند امتحان تعیین می‌گردد. بیشتر دانشگاهها به درجهٔ فوق لیسانس اهمیتی نمی‌گذارند. از این رو گاهی شخصی رسالهٔ تازه‌ای تهیه می‌کند و تقریباً به اندازهٔ دکترا معلومات دارد و گاهی هم سطح معلومات شخص به اندازهٔ همان درجهٔ لیسانس است. رسم است که آموزگاران و دبیران به کلاسهای تابستانی بروند

بقیه در صفحه ۴۳

بنیانگزاران ریاضی جدید: اواریست گالوا



اواریست گالوا (Evariste GALOIS) در سال ۱۸۱۱ در بورگ‌لارن به‌دنیا آمدودر سال ۱۸۳۲ درپاریس درگذشت.

در بین‌ریاضیدانان سراسر تاریخ، **گالوا** مقام ممتاز دارد. در طول تحصیلات ابتدایی و متوسطه، بـه ریاضیاتی که به وی می‌آموختند به‌نظر تحقیرو بی‌اعتنایی می‌نگریست و از این‌بابت مرتباً تنبیه می‌شد. درحالی که درهمان ایام، اوقات‌فراغت خودرا بـه مطالعهٔ آثار ریاضی ریاضیدانان بزرگ می گذراند. در جلسهٔ کنکورمدرسهٔ پلی‌تکنیک‌از اینکه ممتحنین‌حرفهای‌او رانتوانستند درك کنند و اورا مردود دانستند، چنان عصبانی‌شد که تخته‌پاککن را بر کلهٔ آنان کوبید. هربارکه اثر تازه‌ای در ریاضیات بوجود می‌آورد و به‌آکادمی علوم می‌فرستاد نوشته‌هایش گم می‌شد. روح عصیانگری‌به تدریج در او قوت گرفت وبه‌صفوف انقلابیون‌پیوست و در عین‌حال به میخانه‌ها و به دامان زنان هرجائی پناه بـرد. هنوز بیست‌سال‌تمام نداشت‌که در یك‌جنگ تن‌به‌تن به خاطرزنی روسپی زخمی شد و چراغ عمرش رو به افول گذاست در چند ساعت پایان عمر کوتاهش، در حالی‌که شمع وجودش سوسومی‌زد و پیکرتیرخورده‌اش برروی علفهای مرطوب‌آخرین رمق را از دست می‌داد، همهٔ‌تلاش‌خود را بکاربرد و در پرتونورماه اکتشافات خود را برصفحهٔ‌کاغذ یادداشت‌کرد. آخرین جمله‌ای‌که توانست بنویسد این بود: «افسوس‌که وقت ندارم...».

آخرین نوشته‌های **گالوا** از بین‌نرفت، اما سالها طـول کشید تا توانستند افکار او را دریابند. آنچه وی برآن صفحات نوشته بود یك‌نوع ریاضیات خارق‌العاده بود و بایستی نابغه‌هایی نظیرخودش‌آن را دریابند.

نظریهٔ گروهها که به این‌وسیله توسط **گالوا** عرضه شده‌بود، بعدهاکه درك گردید اساس‌ریاضیات را دگرگون ساخت. نظریهٔ گروهها یعنی آنچه که ریاضیات معاصر را سرشار از ارزش و اهمیت ساخته است.

فکر کنید

فرض می کنیم که اسکناسهای رایج عبارت باشد از:

۵ ریالی، ۱۰ ریالی، ۲۰ ریالی، ۵۰ ریالی، ۱۰۰ریالی، ۲۰۰ ریالی، ۵۰۰ریالی، ۱۰۰۰ ریالی، ۵۰۰۰ریالی.

فرامرز و بابك و سعید که باهم دوست می‌باشند، به اتفاق برای شرکت در امتحان ورودی یك آموزشگاه مراجعه می کنند. فرامرز که بیشتر از دوستان خود پول به همراه دارد دارای چهار اسکناس بـا ارزشهای متفاوت است . بابك پنج قطعه اسکناس بـا ارزش یکسان دارد. مـوجودی سعید از سه قطعه اسکناس بـا ارزشهای متفاوت تشکیل می‌شود.

برای شرکت در امتحان وروی هر کدام باید ۱۰۰۰ ریال بپردازند . بابك یك قطعه اسکناس از فرامرز می‌گیرد و وجه ورودی را می‌پردازد. سعید برای‌آنکه مبلغ ورودی را بپردازد یك اسکناس ۲۰۰ ریالی و یك اسکناس غیر ازآن از فرامرز وام می‌گیرد. فرامرز هم پول خود را می‌پردازد. در این موقع متوجه می‌شوندکه برای هیچکدام از ایشان پولـی باقی نمانده است. هرکدام ازآنان چند ریـال با خـود داشته است؟

انعکاس گوژ

دکتر علیرضا امیرمعز

معمولا انعکاس درصفحه را با قوت مثبت k^2 می‌گیرند که دایرهٔ بمرکز انعکاس و بشعاع k نقطه به‌نقطه ثابت بماند. **چیلدرس** [۳] دایرهٔ ثابت انعکاس را به مقطع مخروطی بدل می‌کند و انعکاس بیضوی و هذلولی را تعریف می‌کند که یك بیضی یا یك هذلولی را نقطه‌به‌نقطه ثابت نگاه می‌دارد . در این مقاله این مسئله را از راه جبر برداری بررسی می‌کنیم که بتوان آن‌را تعمیم داد.

۱ـ اصطلاحات و تعریفها: بردارها را با حروف یونانی و اعداد را با حروف‌لاتینی نمایش می‌دهیم. بردارها همه متعلق به یك‌فضای‌اقلیدسی‌اند. از اینروحاصل‌ضرب‌داخلی‌دوبردار ξ و η را با (ξ,η) نمایش‌می‌دهیم. قضایای جبر برداری را بدون اثبات بکار می‌بریم.

بنا به اصطلاح [۳] مقطع مخروطی مرکزی به مرکز مبدأ مختصات را به معادلهٔ:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+h\frac{y^2}{d^2}=1$$

که در آن $h=\pm 1$ است در نظر می‌گیریم. از اینرو دستگاه معادلات زیر را:

$$(2)\qquad \begin{cases} x'=\dfrac{a^2b^2x}{b^2x^2+ha^2y^2} \\[2ex] y'=\dfrac{a^2b^2y}{b^2x+ha^2y^2} \end{cases}$$

تبدیل‌انعکاس بیضوی یا هذلولی‌تعریف می‌کنیم. به‌آسانی‌می‌توان ثابت‌کرد که تبدیل (۲) مقطع مخروطی (۱) را ثابت نگاه می‌دارد .

۲ـ روش‌جبرخطی: اکنون معادلات (۲) را به‌طرز معادلات ماتریسی می‌نویسیم. شکل‌درجهٔ‌دوم $\frac{x^2}{a^2}+h\frac{y^2}{b^2}$ را به‌صورت ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$(3)\qquad (x\ \ y)\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

هرگاه بنویسیم $\xi=(x,y)$ و ماتریس را با A نمایش دهیم، عبارت (۳) به $(A\xi,\xi)$ بدل می‌شود. از اینرو دستگاه معادلات (۲) را چنین می‌توان نوشت:

$$(4)\qquad (x',y')=\left(\frac{x}{(A\xi,\xi)}\ \text{و}\ \frac{y}{(A\xi,\xi)}\right)\ \text{و}\ (A\xi,\xi)\neq 0$$

اگر فرض‌کنیم $\zeta=(x',y')$ ، معادلهٔ (۴) به معادله زیر بدل می‌شود.

$$(5)\qquad \zeta=\frac{\xi}{(A\xi,\xi)}\ ,\ (A\xi,\xi)\neq 0$$

ملاحظه می‌شود که این معادله پابند صفحه نیست و آنرا می‌توان در هرفضای اقلیدسی گرفت. به‌علاوه $(A\xi,\xi)$ به‌محور مختصات‌ربطی ندارد. حتی A رامی‌توان هرماتریسی که بخواهیم انتخاب‌کنیم. ولی‌هرفرم درجهٔ دوم را می‌توان به فرمی‌بدل‌کرد که‌ماتریس‌آن متقارن‌باشد. لذا A نمایش یك تبدیل خطی‌متقارن است .

تاکنون قوت انعکاس را واحد گرفته‌ایم. هرگاه قوت انعکاس را به p بدل‌کنیم، معادلهٔ انعکاس چنین می‌شود:

$$(6)\qquad \zeta=f(\xi)=\frac{p\xi}{(A\xi,\xi)}\ \text{و}\ (A\xi,\xi)\neq 0$$

این تبدیل را انعکاس‌گوژ (quasi invession) می‌نامیم. هرگاه A را ماتریس واحدبگیریم معادلهٔ (۶) به‌انعکاس‌کروی بدل می‌شود.

۳ـ بعضی از خواص انعکاس‌گوژ: انعکاس گوژ

صفحات $(n-1)$ بعدی فضای n بعدی را به سطوح درجهٔ دوم $(n-1)$ بعدی‌زیر بدل می‌کند:

$$a(A\xi,\xi)+d(\xi,\delta)=0$$

که ازقطب انعکاس‌می‌گذرد. ملاحظه شودکه A ماتریس‌انعکاس است.

برهان: فرض‌کنیم‌که δ بردارثابتی‌باشد. معادلهٔ یك‌صفحهٔ $(n-1)$ بعدی را چنین می‌توان نوشت:

$$(\xi,\delta)=q \text{ و } q\neq 0$$

هرگاه تبدیل (۶) را بکار ببریم، نتیجه می‌شودکه:

$$\frac{p}{(A\xi,\xi)}(\xi,\delta)-q=0$$

این معادله برابر معادلهٔ زیر است:

$$(۷)\quad q(A\xi,\xi)-p(\xi,\delta)=0$$

واضح است که هرگاه A را ماتریس واحد و $n=2$ بگیریم، معادلهٔ (۷) دایره‌ای می‌شودکه از قطب انعکاس می‌گذرد.

قضایای دیگر انعکاس را نیز می‌توان تعمیم داد:

(I) هرگاه $q=0$ باشد، صفحهٔ $(\xi,\delta)=q=0$ از قطب‌انعکاس‌می‌گذرد ومعادلهٔ (۷) به $(\xi,\delta)=0$ که همان صفحه است بدل می‌شود.

(II) انعکاس گوژسطح‌درجهٔ‌دوم $q(A\xi,\xi)-p(\xi,\delta)=0$ را به یك صفحهٔ $(n-1)$ بعدی تبدیل می‌کند.

(III) سطوح درجهٔ دوم $(n-1)$ بعدی به معادله:

$$a(A\xi,\xi)+b(\zeta,\alpha)+c=0$$

به سطوح درجهٔ دوم‌بدل می‌شوند

برهای این قضایا را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

۴ـ مبدل‌سطوح درجهٔ دوم: بطورکلی‌سطوح درجهٔ دومی‌که فرم‌کوادراتیك‌آنها $(A\xi,\xi)$ نیست به‌سطوح درجهٔ دوم بدل‌نمی‌شوند. جزئیات این‌بخش را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۵ـ زاویهٔ گوژ: در یك فضای اقلیدسی‌کوسینوس زاویهٔ بین دوبردار ξ و η عبارتست از:

$$\cos t=\frac{(\zeta,\eta)}{\|\xi\|\cdot\|\eta\|}$$

اکنون زاویهٔ گوژ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\text{Quasi}-\cos t=\frac{(\xi,\eta)}{\sqrt{|(A\xi,\xi)|}\sqrt{|(A\eta,\eta)|}}$$

به‌آسانی می‌توان ثابت‌کردکه مقدار این زاویهٔ گوژ تحت تبدیل (۶) ثابت می‌ماند. برهان‌را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۶ـ پیشنهاد: این مقاله را به عنوان تمرین می‌توان‌به دانشجویی واگذار کرد که بررسی‌کند و مطالب آنرا تکمیل کند.

معمولا $(A\xi,\xi)$ را یك فرم دوخطی می‌گویند. هرگاه این فرم را درفضای دوبعدی بنویسیم، چنین می‌شود.

$$ax^2+bxy+cy^2$$

که نسبت به متغیرخطی‌است. انعکاس‌گوژکه در این‌مقاله بررسی شدانعکاس‌گوژ درجهٔ دوم یادو خطی‌می‌توان نامید. لذا انعکاس را به انعکاس گوژفرم چند خطی‌می‌توان تعمیم داد. این‌مسئله‌را نیز به خواننده‌واگذار می‌کنیم.

مراجعات:

[۱] Ali R. AMIR-MOEZ, Vector space Techniques In Quadric inversion, Math. Magazine, Vol.41, no.2 (1968), 86-88.

[۲] Ali R. AMIR-MOÈZ, Quasi-inversion on a unitary space, Math. Vesnite, 3, 18 (1966), 204-207.

[۳] N.A. Childress, Inversion with vipect to the central Conics, Math. Magazine Vol. 38(1945), 147-149.

تقریظ

کتاب نوشتن کاری است بس دشوار و منتشرکردن آن دشوارتر. تاکسی‌مقاله یاکتابی ننوشته باشد این حقیقت را درك نمی‌کند. بهترین‌روش‌قدردانی‌اززحمات آقای **غلامرضاعسجدی** ابتیاع نسخه‌ای از:

«نقد و تحقیق دربارهٔ نسبیت همزمانی مأخوذ از نظریهٔ نسبیت‌آلبرت اینشتین» است. بنده شخصاً از آقای عسجدی صمیمانه تشکر می‌کنم؛ نه تنها برای اینکه یك نسخه از کتاب را به من مرحمت فرموده‌اند، بلکه برای زحمتی‌که در نوشتن و انتشارکتاب‌کشیده‌اند. امید است‌که هموطنان عزیز هم دراین تدردانی و تشویق شرکت‌کنند.

علیرضا امیرمعز

آنالیزهای نااستاندارد

ترجمه و تنظیم از: جاودان پارسای‌قمی

این تئوری ریاضی «بی‌نهایت کوچکها» را برپایه‌های محکمی استوار کرده است. هرچند آنها از زمانهای باستان بکار گرفته شده بودند ولی اغلب برای حل مسائلی چون پیدا کردن مساحت دایره با شك و تردید بسیار بکار برده می‌شدند.

آنالیزهای نااستاندارد، شاخهٔ جدیدی‌از ریاضی که ده‌سال پیش بوسیلهٔ منطق‌دان آبراهام رابینسون ابداع شد، مرحلهٔ جدیدی از تحول را در مورد بسیاری ازمسائل مشهور و قدیمی پایه‌ریزی می‌کند. رابینسون که اکنون در دانشگاه یال بسرمی‌برد نظریهٔ «بینهایت کوچك» را دوباره‌زنده کرده است ـ اعدادی که بینهایت کوچك می‌باشند ولی باز از صفر بزرگترند. ریشه‌های این عقیده به دوران باستان‌می‌رسد. نسبت به آنالیزهای عمومی‌واستاندارد این نظریه کاملا متضاد جلوه می‌کرد؛ با این وجود این روش حداقل از زمان **ارشمیدس** وسیلهٔ مهمی در مکانیك و هندسه بشمار می‌رفته است.

در قرن نوزدهم «بینهایت کوچکها» یك‌بار و برای همیشه از ریاضی به‌خارج رانده شدند و یا حداقل اینطور بنظر رسید. برای جوابگوئی‌خواستهای منطق آنالیز **نیوتون** و **گوتفرید ویلهلم ون لیبنیز** بوسیلهٔ **کارل‌ویراشتراس** دو باره و بدون استفاده از بینهایت کوچکها شکل گرفت. اما امروز این منطق ریاضی‌است که بینهایت کوچکها را زنده کرده وآنرا دوبار قبول ساخته است. **رابینسون** به تعبیری ترك بی‌چون‌وچرای ریاضیات قرن هیجدهم راکه به علت نظام خشك ریاضی در قرن نوزدهم انجام گرفت بی‌پایه شمرد و از ریاضیات آن دوره دفاع کرد و فصل تازه‌ای برجنگ بی‌پایان محدودها و نامحدودها و ابدی و غیرابدی افزود.

در سلسله مباحثی راجع به بینهایت کوچکها که پیدایش آنالیز را به دنبال داشت هندسهٔ اقلیدسی استاندارد و مبنائی بود که تازه‌ها در مقابل آن مقایسه می‌شد و ارزیابی می‌گشت. در «مقدمات **اقلیدس**» می‌خوانیم که یك نقطه‌آن است که محل و موقعیت دارد ولی بعدی ندارد. این تعریف، بی‌معنی و غیر قابل اثبات نامیده شده اما شاید تنها بهانه‌ای برای عدم و استفاده از مبحث «بینهایت کوچکها» باشد. این انکار عقاید قبلی یونان‌بود. مبانی **ذیمقراطیس** به این دلیل ایجاد شده بود که تنها به ماده مربوط شوند بلکه همچنین به زمان و فضاهم بستگی داشته باشند اما بعد مباحث **زنون** بدون اثبات و استدلال زمان را لحظه‌های‌پشت سرهم و یا خط را«تقسیم ناپذیرهای» پشت سرهم می‌نامیده است. **ارسطو** بنیانگزار منطق‌اسلوب وار بینهایتهای بزرگ یاکوچك را هندسه ببیرون راند.

در اینجا یك مثال کلی‌درمورد استفاده ازبینهایت کوچکها در هندسه مطرح می‌شود.

«می‌خواهیم تا رابطه‌ای‌بین مساحت یك دایره و محیط‌آن بیابیم. برای سادگی شعاع دایره رایك درنظرمی گیریم. اکنون دایره را می‌توان تشکیل شده از بیشمارخطوط‌راست وفوق‌العاده کوتاه مساوی‌که یك چندضلعی‌محاطی‌را می‌سازند درنظر گرفت. دایره اکنون سطحی برابر بامجموع سطوح مثلثهای متعددبینهایت کوچکی داردکه همه ارتفاع یك دارند پس مساحت‌هر کدام‌نصف قاعدهٔ‌آنها است» اما مجموع مساحتهای مثلثها برابر با مساحت دایره است و مجموع قاعده‌های مثلثها برابر با محیط آن است بنابراین مساحت دایرهٔ به شعاع یك برابر نصف محیط آن است.

این بحث‌که احتمالا **اقلیدس** آنرا رد می‌کرده در قرن پانزدهم بوسیلهٔ **نیکولا** ازکوزا انتشار یافت. نتیجه گیری‌ها البته درست است اما ایرادگرفتن بر این مبحث کار مشکلی

نیست. موضوع یك مثلث با قاعده‌ای بینهایت کوچك تا حدودی ایراد پذیر است.

مطمئناً قاعدهٔ یك مثلث باید طولی چون صفر و یا بزرگتر از صفر داشته باشد، اگر صفر باشد مساحت هم صفر است هرقدر هم که ما از این مثلثها به‌هم اضافه کنیم چیزی جز صفر بدست نمی‌آوریم. از طرف دیگر اگر از صفر بزرگتر و هرقدر هم کوچك باشد پس از پهلوی هم گذاشتن مثلثها مقدار بینهایت بزرگی خواهیم داشت. به هرحال نمی‌توانیم دایره‌ای با محیط محدود را از مجموع بینهایت قطعه‌های مشخص بسازیم. نتیجه اینکه حتی اگر یك عدد خیلی کوچك غیرصفر را بینهایت به‌خود اضافه کنیم عدد بسیار بزرگی حاصل می‌شود. از آنجا که این نتیجه اولین بار بوسیلهٔ ارشمیدس قاطع گشت به مقادیر ارشمیدسی برای اعداد حقیقی موسوم است. یك بینهایت کوچك اگر وجود داشته باشد باید مطمئناً یك عدد غیرارشمیدسی باشد ـ عددی که از صفر بزرگتر است معهذا هرقدر بار (به‌تعداد محدود) به‌خودش اضافه کنیم باز از یك کمتر بماند. **ارشمیدس** که در مکتب **ارسطو** و **اقلیدس** کار می‌کرده ادعا کرد که هرعددی ارشمیدسی است و اعداد بینهایت کوچك وجود ندارد. **ارشمیدس** که فیلسوف ـ مهندس وفیزیکدان هم بود بینهایت کوچکها را با درك فیزیکی‌اش بکار برد تا مسائلی را در هندسهٔ سهمی‌ها حل کند. از آنجا که بینهایت کوچکها وجود ندارند او با استفاده از «روش استقراء اثبات «خشکی» از نتایجش بدست داد که متکی بر بحثی غیرمستقیم و ترکیبات مطلقاً محدود بود. کاربرد بینهایت کوچکها در نوشته‌ای تحت عنوان «بحث در روش» آمده است که به سال ۱۹۰۶ کشف شد.

روش تحلیلی ارشمیدس که از بینهایت کوچها اجتناب می‌کند در واقع به‌روش اوپسیلون ـ دلتا نزدیك بود که با آن **ویراشتراش** و دنبالروهایش روش بینهایت کوچکها را از آنالیزها بیرون راندند. اگر به‌مثال خود در مورد دایره به‌صورت بینهایت ضلعی تکیه کنیم توجیه مطلب بسیار ساده است.

می‌خواهیم یك اثبات منطق‌پسند برای رابطهٔ «مساحت دایرهٔ به شعاع یك برابر با نصف محیط آن است» بدست دهیم. چنین استدلال می‌کنیم:

رابطه تساوی دومقدار مربوط به دایرهٔ با شعاع یك عنوان می‌کند ـ مساحتش و نصف محیطش: اگر رابطه غلط است یکی از این مقادیر از دیگری بزرگتر است. فرض می‌کنیم A عدد مثبتی باشد که از برداشتن مقدار کوچکتر از مقدار بزرگتر بدست می‌آوریم. اکنون می‌توانیم چند ضلعی منتظمی با عدهٔ اضلاع دلخواه بر دایره محیط کنیم. از آنجا که چندضلعی از تعداد محدودی مثلث با سطح محدود و ارتفاع یك ایجاد شده است می‌توان گفت که سطحش برابر با نصف محیش می‌باشد. با افزایش کافی تعداد اضلاع می‌توانیم شرایطی ایجاد کنیم که اختلاف سطح چند ضلعی با دایره از نصف A کمتر باشد (مقدار دلخواه)؛ در همان زمان محیط چند ضلعی با محیط دایره اختلافی کمتر از A خواهد داشت. اما آن وقت اختلاف سطح و نصف محیط دایره باید کمتر از A باشد که این خلاف فرضی است که ما از آن شروع نمودیم. بنابراین فرض ما غیرممکن می‌باشد و A (همانطور که می‌خواستیم ثابت کنیم) باید صفر باشد.

این بحث از نظر منطق بی‌اشکال است. از همهٔ اینها گذشته اگر استفاده از بیهایت کوچکها جواب صحیح می‌دهد آیا بحث نباید تا حدودی درست باشد؟ حتی اگر ما نتوانیم نظریاتی را که در آن بکار برده می‌شود ثابت کنیم و توجیه نمائیم تا زمانی که صدق می‌کند چطور ممکن است واقعاً غلط باشد؟

دفاعی بدین گونه از «بینهایت کوچك‌ها» بوسیلهٔ **ارشمیدس** انجام نگرفت. درحقیقت در کتاب «بحث و روش» او با دقت تمام شرح می‌دهد که «اصلی که اینجا بیان می‌شود با بحثی که قبلا انجام شد قابل توضیح نیست» وهمچنین می‌گوید که اثبات قاطع دیگری بطور مجزا منتشر شده بوده است. از طرف دیگر **نیکلا** از کوزا که کار دنبال کلیسا بود و استدلال به کمك مقادیر نامحدود را می‌پسندید، چون که عقیده داشت که «بینهایت مبدأ ومنشأ و وسیله و در عین حال نکتهٔ دست نیافتنی همهٔ دانشهاست.» نیکولا درعقاید خود بوسیلهٔ **کپلر** دنبال شد. کپلر در اثری که امروزه کمتر از کشفیاتش درنجوم مشهور است. به‌سال ۱۶۱۲ از بینهایت کوچکها استفاده کرد تا بهترین شرایط را برای یك شبکهٔ شراب بیابد. هرچند او به روش الهام و پیش گوئی متکی بوده ومی‌نویسد: طبیعت هندسه را تنها .وسیلهٔ غریزه می‌آموزد حتی بدون استدلال منطقی» اما فرمولهایش برای حجمهای شبکه‌های شراب صحیحند.

مشهورترین پیش گوی ریاضی **بلز پاسکال** بود. درجواب آن دسته از همدوره‌هایش که بر استدلال به کمك مقادیر بینهایت کوچك اعتراض می‌کردند می‌گفت: قلب انسان برای روشن

شدن موضوع پادرمیانی می‌کند. پاسکال بر بینهایت کوچکهاو بینهایت بزرگها چون رازهای ناشناخته نگاه می‌کرد؛ چیزهائی که طبیعت برسر راه انسان‌قرار داده نه برای اینکه‌آنرا دریابد بلکه تنها آنرا ستایش کند.

ثمرهٔ کامل استدلال بینهایت کوچکها را نسلهای پس از پاسکال ظاهر ساختند: نیوتن و لیبنیز و برادران برنولی (جاکوب‌وجوهان)و لئوناردداولر. تئوری‌های‌اصلی‌آنالیز بوسیلهٔ نیوتن و لیبنیز دردههٔ ۱۶۶۰تا ۱۶۷۰ بدست‌آمد. اولین‌کتاب درسی درآنالیز به‌سال ۱۶۹۶ به‌دست **مارکوس‌هوپیتال** شاگرد لیبنیز و جوهان‌برنولی نوشته شد. در اینجا این مطلب به‌صورت‌نتیجه‌گیری ازیك‌اصل‌بیان‌می‌شود که دومقدار که‌تفاوتشان یك بینهایت‌کوچك است می‌توانند به‌صورتی مساوی فرض‌شوند. به‌عبارت‌دیگردومقدار در یك‌زمان هم مساوی هم فرض می‌شوندو هم مساوی نیستند! اصل‌دومی حاکی‌است‌که یك منحنی «مجموعهٔ پاره‌خطهایی‌به تعداد نامحدود است‌که هر کدام‌بینهایت‌کوچکند». آشکار است‌که این‌نقض روشهائی است‌که ارسطودر ۲۰۰۰ سال قبل بیان‌کرده بود.

هوپیتال‌می‌نویسد: آنالیزهای معمولی‌تنها با مقادیرمحدود سروکار دارند. اما این روش راه خود راتا خود بینهایت‌هم‌ادامه می‌دهد. این‌روش‌اختلافات‌بینهایت‌کوچك‌مقادیرمحدود رامی‌سنجد و روابط بین‌این‌اختلافها را در می‌یابد و به‌این‌طریق روابط‌بین مقادیرمحدود راکه در مقایسه با مقادیر بینهایت‌کوچك مقادیر بینهایت بزرگی هستندآشکار می‌کند. شاید بتوان گفت‌که این نوع‌آنالیزتاآن سوی بینهایت هم بسط می‌یابد چراکه کارخودرا به اختلافهای بینهایت‌کوچك خلاصه نمی‌کندبلکه روابط بین اختلافهای خود این اختلافهارا بدست می‌دهد.

نیوتن و لیبنیز درهیجان هوپیتال شریك‌نبودند. لیبنیز ادعا نکردکه بینهایت‌کوچکهاواقعاًوجود دارند. فقط گفت‌که: هر کس می‌تواند بدون واهمه بافرض وجودآنها استدلال‌کند. اگرچه لیبنیز نتوانست ادعای خود راکاملا ثابت‌کند اماکوشش دابینسون نشان‌می‌دهدکه وی تا حدودی حق‌داشته است. نیوتن سعی کردکه از بینهایت‌کوچکها اجتناب‌ورزد. درکتاب‌اصول ریاضیات‌نتایجی که‌در اصل‌بوسیلهٔ بینهایت‌کوچکهاپیدا شده‌بودند به‌روش‌صددرصد محدود اقلیدسی عنوان شده‌اند.

دینامیك‌هم‌چون‌هندسه درعرضهٔ‌سؤالهای تازه درآنالیزهای ریاضی مهم شده‌بود. مهمترین‌مسئله رابطهٔ‌بین‌فلوانت وفلوکسیون (Fluxion،Fluent) بودکه‌امروزه به‌عنوان‌موقعیت‌لحظه‌ای وسرعت‌لحظه‌ای یك‌متحرك‌نامیده‌می‌شوند. یك‌سنگ‌درحال‌سقوط‌را درنظر بگیریدحرکت‌آن به‌کمك تعیین‌موقعیت‌آن‌به‌صورت‌تابعی‌از زمان‌بیان‌می‌شود. درحال‌سقوط‌سرعت‌آن افزایش می‌یابدبه‌قسمی‌که سرعت هم در هرلحظه تابع تغییرپذیر زمان است. نیوتن تابع موقعیت را فلوانت و تابع سرعت را فلوکسیون نامید. اگرهر-کدام از این دو مفروض باشد دیگری قابل محاسبه است. این رابطه اساس آنالیز بینهایت‌کوچکهائی‌است‌که‌بوسیلهٔ نیوتن‌ولیبنیز عرضه شد.

در مورد سنگ در حال سقوط فلوانت بوسیلهٔ فرمول $s=16t^2$ داده شده که در آن s مسافت برحسب پا(فوت)های طی شده و t ثانیه‌های گذشته در زمان رهایی سنگ می‌باشد. در حالی‌که سنگ‌می‌افتد سرعتش به‌آرامی زیاد می‌شود. ماچگونه می‌توانیم سرعت سنگ‌درحال سقوط را در فاصلهٔ زمانی مشخص مثلا $t=1$ بسنجیم؟

ما می‌توانستیم سرعت متوسط را برای مدت زمان محدود بوسیلهٔ فرمول اولیهٔ: سرعت مساویست بامسافت‌تقسیم برزمان‌پیدا کنیم. آیا می‌توانیم با استفاده از این فرمول سرعت لحظه‌ای را بیابیم؟... با افزایش بینهایت‌کوچك زمان افزایش مسافت هم بینهایت‌کوچك خواهد بود. نسبت‌آنها یعنی سرعت متوسطشان‌در آن لحظه باید سرعت لحظه‌ای محدودی باشد که به دنبالش هستیم.

فرض می‌کنیم dt افزایش‌بینهایت‌کوچك زمان و نظیرآن ds افزایش بینهایت‌کوچك مسافت باشد. می‌خواهیم که نسبت $\frac{ds}{dt}$ راکه بایدمحدودباشد پیداکنیم. برای یافتن افزایش فاصله‌از $t=1$ تا $t=1+dt$ موقعیت سنگ را وقتی $t=1$ و $s=16\times 1^2=16$ و موقعیت آنرا وقتی $t=1+dt$ و $s=16\times(1+dt)^2$ است‌محاسبه می‌کنیم. با استفاده از جبر مقدماتی در می‌یابیم که ds افزایش مسافت $32dt+16dt^2$ می‌باشد. پس‌نسبت $\frac{ds}{dt}$ مقداری‌است‌که سعی‌دریافتنش داریم وبرابر با $32+16dt$ می‌باشد.

آیامسئله را حل‌کرده‌ایم؟ ازآنجاکه جواب باید مقداری

محدود باشد ترجیح می‌دهیم که از مقدار بینهایت کوچك صرف نظر کنیم وجواب ۳۲ فوت در ثانیه‌را برای سرعت لحظه‌ای را بدست آوریم. اما اسقف برکلی اجازهٔ این کار را نمی‌دهد!

نقد جالب و استثنائی برکلی بر روش بینهایت کوچکها در سال ۱۷۳۴ بیان شد. وی گفت که عقاید نیوتن درمورد سرعتهای متغیر آن حدپوچ و بی‌معنی است که قابل تصور نیست. برکلی ادعا کرد که عمل لیبنیز یعنی به سادگی «فرض کردن» $32+16dt$ همانند ۳۲ غیرمنطقی بوده و نوشت: این عمل غلط است حتی اگر ما ادعا کنیم که [مقدار صرف نظر شده] بسیار کوچك بوده است. اگر از چیزی صرف نظر بشود هرقدر کوچك باشد نمی‌توانیم ادعا کنیم که سرعت دقیق را بدست آورده‌ایم. بلکه فقط یك تقریب‌را یافته‌ایم.

نیوتن جدا از لیبنیز سعی کرد که در نوشته‌های بعدی خود با بکاربردن بیانی مبتکرانه به «خشکی» مطالب بینهایت کوچها انعطاف بیشتری بدهد؛ آخرین سرعت آن است که جسم با آن حرکت می‌کند یا حرکت داده می‌شود نه قبل از آنکه جسم به آخرین موقعیتش برسد (که در آنجا سرعت صفر می‌شود) و نه بعد از آن بلکه درست در لحظه‌ای که جسم فرا می‌رسد و به این ترتیب با آخرین نسبت دو مقدار بسیار کوچك باید درك کرد که نسبت دو مقدار نه قبل از بین رفتنشان است و نه بعد از آن و فقط سرعتی است که با آن ناپدید می‌شوند.

بحث نیوتن در این بود که اولا دریابد (همانطوری که عمل کردیم) $\frac{ds}{dt}=32+16dt$ در ثانی افزایش dt را مساوی صفر قرار داده و ۳۲ را به‌عنوان جواب دقیق رهانماید.

ولی برکلی نوشت: باید واضح باشد که این استدلال منطقی و مستحکم نیست» از اینها گذشته dt یا مساوی صفر است و یا مساوی صفر نیست. اگر dt صفر نیست پس حاصل $32+16dt$ هم ۳۲ نیست. اگر dt صفر است پس افزایش مسافت ds هم صفر است و نسبت $\frac{ds}{dt}$ برابر $32+16dt$ نیست بلکه عبارتی بی‌معنی است ($\frac{0}{0}$). زیرا وقتی گفته می‌شود فرض می‌کنیم که افزایش از بین برود؛ فرض می‌کنیم که افزایش هیچ باشد یا اصولا افزایشی نباشد در این صورت فرض قبلی که دایر بر وجود افزایش می‌بود از بین می‌رود و باوجود تمام فرضهای بالا نتیجه‌ای کاملا تخیلی بدست می‌آید، این روش غلطی برای استدلال است.» وی اضافه می‌کند «این سرعتهای تغییرپذیر و یا سایر متغیرها چیست؟ سرعتهایی با افزایشها لحظه‌ای واصلا خود این افزایشهای لحظه‌ای چه هستند؟ آنها نه مقادیر محدودند ـ نه بینهایت کوچکند و نه هیچند. آیا ما نمی‌توانیم آنها را اشباح مقادیر از دست رفته بنامیم ؟!»

منطق برکلی قابل جواب نبود، باوجود این ریاضیدانان یك قرن دیگر با موفقیت کامل به استفاده از بینهایت کوچکها ادامه دادند. درحقیقت فیزیکدانان و مهندسان هرگز از بکاربردن آنها دست برنداشته‌اند.

در قرن ۱۹ تحت رهبری ویراشتراس بازگشتی به روش خشك و خشن اقلیدس انجام گرفت. جالب است که بدانیم در سدهٔ ۱۸ دوران بزرگ بینهایت کوچکها هنگامی بود که هنوز هیچگونه حد فاصلی میان ریاضیات و فیزیك شناخته نشده بود. فیزیکدانان بزرگ همان ریاضیدانان بزرگ بودند. وقتی که دوباره ریاضی مطلق با نظام جداگانه‌ای ظهور کرد ریاضیدانان یك بار دیگر مطمئن شدند که اساس کار آنها با یکدیگر تناقض کلی نداشته است. آنالیزهای جدید اساس آنرا با روشی همانند روش یونانیان حراست کردند: طرد کامل بینهایت کوچکها.

برای پیدا کردن سرعت لحظه‌ای برطبق روش ویراشتراس هرگونه کوششی برای محاسبهٔ سرعت به‌صورت یك نسبت طرد می‌شود. به‌جای آن سرعت به‌صورت حدی بیان می‌شود که به‌علت وجود نسبت دو افزایش محدود مقداری تقریبی است. اگر Δt یك متغیر افزایش زمان ومطابق با آن Δs متغیر مسافت باشد. پس $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ متغیر مقدار $32+16\Delta t$ می‌باشد. با کوچك انگاشتن Δt به‌اندازهٔ کافه قادر خواهیم بود تا حاصل $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ را هرقدر که بخواهیم به ۳۲ نزدیك کنیم. به این ترتیب با این تعریف سرعت در $t=1$ درست ۳۲ است.

این پیشرفت در اجتناب از استفاده از اعدادی که محدود نیستند موفق است. همچنین این روش از هر کوششی برای مساوی قرار دادن مستقیم صفر به‌جای Δt در کسر $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ اجتناب می‌کند. پس از هر دو لغزشی که بوسیلهٔ اسقف برکلی برشمرده شده بود اجتناب کرده‌ایم. مقدار روشن و اندازه پذیر فیزیکی ـ سرعت لحظه‌ای ـ به نظریهٔ عجیب «حد» کشیده شد.

«سرعت v است هرگاه برای هر عدد مثبت ε مقدار

$v - \frac{\Delta s}{\Delta t}$ از نظر قدر مطلق کمتر از ε باشد مقدار Δt از نظر قدر مطلق کمتر از عدد مثبت دیگر δ باشد.

v را بوسیلهٔ بیان رابطهٔ دقیقی بین دومقدار تازهٔ ε و δ روشن کرده‌ایم که به تعبیری به خود v بستگی ندارند. حداقل چشم پوشی از ε و δ هرگز برنولی یا اولر را از پیداکردن یك سرعت باز نداشت. حقیقت این است که در عقل سلیم قبل از آنکه توضیحات بالارا بخوانیم معنی واقعی سرعت لحظه‌ای رامی‌دانستیم اما برای درنظر گرفتن جنبهٔ منطقی مطلب تعریفی‌را قبول‌می‌کنیم که درکش به مراتب از توضیح خود عقیدهٔ اصلی مشکلتراست. توضیح در بارهٔ شکل پذیری آنالیز برپایه‌های نظریهٔ حد وتوضیح (اپسیلن-دلتا) موجب گرایش آنالیز به حساب اعداد حقیقی‌شد. نتیجهٔ حاصله از این توضیحات اصولی طبعاً ضربه‌ای ناگهانی‌بر اصول منطقی‌دستگاه اعداد حقیقی بود. پس از قریب ۲/۵ هزار سال‌به مسئلهٔ اعداد حقیقی که یونانیان بعداز اقلیدس با ناامیدی رهایش کرده بودند بازگشت می‌شد.

یکی‌از وسائلی که در این کوششها سهیم بود تحول تازه‌ای بودکه در زمینهٔ منطق‌ریاضی و منطق‌علامتی‌پیدا شده بود: اخیراً دریافته‌اندکه منطق‌ریاضی اصولی‌متشکل‌را برای تئوری‌ماشینهای محاسبه و برنامه‌های کامپیوتر مطرح می‌کند.

فاصلهٔ بین منطق‌ومحاسبه تاحدودی یك‌نوع زبان‌مخصوص «قراردادی» است که‌تنهاماشینها درك‌می‌کنند. این‌نظریهٔ زبان‌قراردادی‌است که به‌رابینسون امکان دادتا ادعای لیبنیز رادایر براینکه هرکس‌می‌تواند بدون تردید استدلال‌خود را بافرض وجودبینهایت کوچکها عنوان کند تکمیل نماید.

لیبنیز بینهایت کوچکهارا اعداد مثبت یا منفی می‌دانست که با این‌وجودهنوز «همان‌خواص» اعدادمعمولی‌ریاضی‌را دارابودند اما این عقیده‌به تضاد می‌رسد. اگر بینهایت کوچکها همان‌خواص اعداد معمولی‌را دارند چگونه ممکن است این خاصیت را دارا باشندکه مثبت بوده ولی ازهرعدد مثبت معمولی کوچکتر باشند؟ با استفاده از یك زبان غیرمستقیم بودکه رابینسون نشان داد که چگونه می‌توان‌دستگاه اعدادی را تشکیل دادکه با دستگاه اعداد حقیقی مطابقت داشته و درعین حال‌شامل بینهایت کوچکها باشد. اما این‌موضوع‌با زبان‌متداول‌قابل‌بیان نیست. وضع‌ما برای‌هرکسی که با ماشینهای محاسبه‌کارکرده باشد قابل درك است. یك کامپیوتر تنها سؤالهائی‌را ازگروه مشخصی (که قبلا به‌آن داده شده) قبول‌می‌کند ودرعین‌حال سمبولهابایدرعایت قوانین‌مشخصی بکار برده شوند. زبان مرسوم‌که در محاورات بکار می‌رود به قوانینی احتیاج داردکه زبانـدانان هنوز از درك‌آنها بدورند. وقتی می‌خواهید باکامپیوترها رابطه برقرارکنید واضح است که آنهابرعکس‌انسان با زبانی قراردادی با فهرست لغات و قوانین معلوم‌کار می‌کند. پس‌آنها «کودن» بنظرمی‌رسند. انسان با زبانی طبیعی با قوانینی‌که هرگز شکل‌رسمی به‌خود نگرفته‌اند سروکار دارد.

البته ریاضی تلاش بشری است ومانند فلسفه و طرح‌ریزی خودکامپیوترو از این‌قبیل بوسیلهٔ بشری‌که از زبان طبیعی‌استفاده می‌کند شکل می‌گیرد. درعین حال ریاضی‌نقش مخصوصی‌هم‌دارد ازآنجاکه‌می‌تواندبه‌خوبی به زبان‌قراردادی بیان‌شودکه‌به‌عبارتی منعکس‌کنندهٔ مفهوم‌واقعی‌اش می‌باشد. شاید بتوان گفت‌که احتمال بیان یك‌کشف ریاضی به زبان قراردادی، آزمایشی است‌که نشان می‌دهدآیا واقعاً آن‌کشف را درك‌کرده‌ایم یا نه.

دنباله‌دارد

از انتشارات یکان

چاپ پنجم

راهنمای ریاضیات متوسطه

تألیف : عبدالحسین مصحفی

(به قطع کتابهای درسی)

بها: ۳۰ ریال

چاپ دوم

تستهای هوش

ترجمهٔ : باقر مظفرزاده

بها: ۱۰۰ ریال

موازیهای بیضوی

ترجمهٔ : محمد حسین احمدی

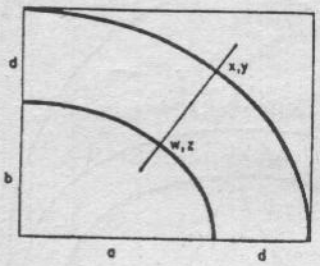
هرگاه مفهوم توازی رااز دیدگاه متداول بنگریم‌متوجه خطهای متوازی خواهیم شد، حال آنکه این مفهوم به‌سادگی در مورد منحنیها نیز قابل تعمیم است. برای این‌کار روشهای گوناگون را می‌توان بکار برد که روشهای هندسهٔ دیفرانسیل از آن‌جمله است. اما دراین مقاله فقط روشهای هندسهٔ مقدماتی را در نظر می‌گیرم و به‌خصوص بیضی را به‌عنوان منحنی نمونه انتخاب می‌کنیم. قبل از هرچیز ناچار از بیان تعریف توازی برای منحنیها می‌باشیم :

تعریف : هرگاه در صفحهٔ منحنی مسطح مفروض، در امتداد قائم برآن منحنی در هرنقطهٔ غیر مشخص P از آن، نقطهٔ P' را جدا کنیم که $\overline{PP'}=\pm d$ باشد، منحنی مکان P' موازی بامنحنی مفروض تعریف می‌شود.مقصود از $\pm d$ آن‌است که روی قائم در نقطهٔ P در دوجهت می‌توانیم طول $|d|$ را جدا کنیم و در نتیجه دو نقطهٔ P' خواهیم داشت. بنابراین نظیر هر هرمقدار d یك جفت منحنی موازی با منحنی مفروض وجود دارد. نظیر مقدار مثبت d منحنی خارجی و نظیر مقدار منفی d منحنی داخلی را در نظر می‌گیریم .

یك روش‌ساده جهت تعیین منحنیهای موازی منحنی‌مفروض آن است که پوش خصوصی دسته دایره‌هایی را بدست آوریم‌که مرکزشان روی منحنی مفروض بوده و شعاعشان مقدار ثابت d است .

مرغانه منحنی‌مسطح، متصل ومسدودی است‌که لااقل دارای یك محور تقارن باشد . آشناترین مرغانه ها بیضی است . در شکل آینده یك دسته دایره‌های متوازی در وسط و دو دسته مرغانه‌های متوازی در دو سمت‌آن مشاهده می‌شودکه فاصلهٔ هر منحنی از این دسته‌ها مقدار ثابت است. هردسته از این منحنیها هم مرکزند. اما فقط دو عدد از مرغانه‌ها (ازهر دسته یك عدد)

بیضی می‌باشند در صورتی که مشاهدهٔ چنین تشخیص به سختی میسر است. شباهت ظاهری منحنیهای این سه مجموعه تفاوت فاحش و عمیق موجود بین آنها را از نظر محو می‌سازد. دایره های متوازی معادلهٔ پارامتری یکسان دارند. حال‌آنکه‌منحنیهای موازی با بیضیهادارای معادله‌هایی پیچیده می‌باشند: برای بدست آوردن معادلهٔ این‌منحنیها، مطابق باشکل زیر،ربع بیضی درنظر می‌گیریم‌که a نصف قطر بلندو b نصف قطر کوتاه‌آن‌باشد. درنقطهٔ (w و z) از این بیضی قائمی برآن رسم کرده و روی‌آن نقطهٔ (x,y) را به فاصلهٔ d از نقطهٔ نخست تعیین می‌کنیم . بنابر معادلهٔ بیضی داریم:



$$z=b\sqrt{1-\frac{w^2}{a^2}} \qquad (1)$$

با استفاده از مشتق معادلهٔ خط قائم می‌شود:

$$\frac{y-z}{x-w}=\frac{a\sqrt{a^2-w^2}}{bw} \qquad (2)$$

همچنین داریم :

$$d^2=(x-w)^2+(y-z)^2 \qquad (4)$$

پس از حذف پارامترهای z و w بین معادله‌های بالا معادله‌ای از درجهٔ هشتم با ۱۰۴ ضریب بدست می‌آیدکه می‌توان آن را

به‌صورت سادهٔ زیر نوشت :

$$(۴) \quad \sum_{i=۱}^{۱۰۴} N_i a^{۲p} b^{۲q} d^{۲r} x^{۲s} y^{۲t} = ۰$$

$$۰ \leqslant p \,،\, q \,،\, r \,،\, s+t \leqslant ۴$$

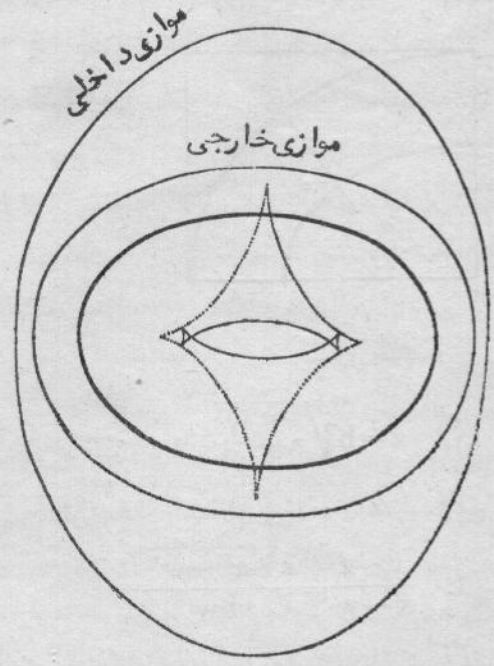
قبل از ادامهٔ بحث این نکته یادآوری می‌شود که از «موازی منحنی» منظور منحنی موازی با منحنی مفروض است مگر آنکه خلاف آن تصریح شود یا از سیاق عبارت استنباط گردد. به‌عنوان مثال از «موازی بیضوی» منظور «منحنی موازی با بیضی» است.

اکنون مشخصات منحنی با معادلهٔ (۴) را در حالتهای مختلف بررسی می‌کنیم. هرگاه $d=۰$ باشد معادله به‌صورت

$$(۵) \quad b^۲x^۲ + a^۲y^۲ - a^۲b^۲ = ۰$$

ساده می‌شود که همان بیضی اصلی را مشخص می‌کند. اگر $a=b$ و $d<a$ باشد معادلهٔ (۴) به دو معادله تجزیه می‌شود که دو دایرهٔ هم مرکز به شعاعهای $a+d$ و $a-d$ را می‌رساند.

منحنیهای موازی با یك مرغانه الزاماً مرغانه نمی‌باشند. برخی از منحنیهای موازی داخلی مرغانه‌ها تا خورده می‌باشند که ناشی از رابطهٔ توازی با دولپهٔ منحنی است (Developpée = Evolute = مکان هندسی مراکز انحنای منحنی). هرمنحنی



مفروض و همهٔ موازیهای آن دارای یك دو لوپه می‌باشند. به ویژه اگر یك موازی داخل دولوپه بیفتد تشکیل یك هیپوسیکلوئید با چهار نقطهٔ بازگشت را می‌دهد.

در شکل قبل منحنی که با خط سیاه رسم شده بیضی است که به‌عنوان منحنی اصلی انتخاب شده است. منحنی که با خط چین رسم شده دولوپهٔ بیضی می‌باشد. سه منحنی دیگر که باخط نازك رسم شده‌اند موازیهای بیضی می‌باشند که یکی از آنها موازی خارجی و دو دیگر موازی داخلی می‌باشند. یکی از موازیهای داخلی که درون دولوپه واقع شده دارای چهار نقطهٔ بازگشت است.

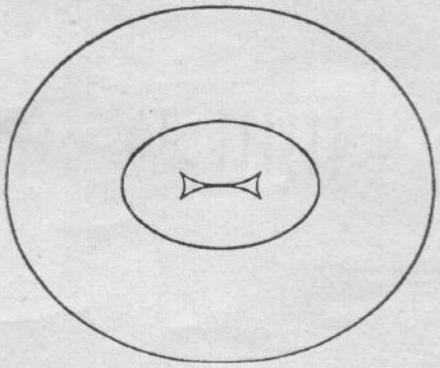
چون d عدد محدود نیست و بیضی منحنی بسته است پس بسیاری از موازیهای داخلی بیضی در خارج آن واقع می‌شوند. دراین حال این منحنیها مرغانه‌هایی می‌باشند که محورهای آنها با محورهای نظیر از بیضی زاویهٔ قائمه می‌سازند.

در جدول زیر نوع موازی بیضوی برحسب تغییرات d معرفی شده است:

نوع موازی بیضوی	تغییرات a
مرغانهٔ معمولی	$a<\frac{b^۲}{a}$
داخلی‌ترین مرغانهٔ معمولی	$d=\frac{b^۲}{a}$
مرغانهٔ تا شده با چهار نقطهٔ برگشت	$b<d<\frac{b^۲}{a}$
موازی مرکزی، یك مرغانهٔ تا شده که با محور x در نقطهٔ $(۰,۰)$ تشکیل مماس مشترك می‌دهد	$d=b$
مرغانهٔ معمولی که محور بلندش به‌محور کوتاه مرغانهٔ اصلی نزدیکتر است	$d>\frac{a^۲}{b}$
مرغانهٔ معمولی که کاملا خارج بیضی اصلی قرار می‌گیرد.	$d>۲a$

حالت خاص $d=b$ که موازی مرکزی را بدست می‌دهد دارای ارزش قابل توجه است. معادلهٔ این منحنی دارای ۳۸ جمله است که درازای $d=b$ و $a=۱$ از روی معادلهٔ (۴) بدست می‌آید. ذکر مثالی در این مورد مطلب را روشن می‌سازد، در شکل بعد

یك بیضی با دو موازی داخلی آن نشان داده شده است که یکی



از آنها موازی مرکزی است. فرض کنیم این بیضی دیوارهٔ خارجی و موازی آن دیوارهٔ صحنهٔ یك آمفی تآتر از نوع آمفی تآترهای رومی باشد. شخصی را درنظر بگیرید که در مرکز صحنه ایستاده است به‌قسمی که خط دیدش در امتداد محور بلند قرار دارد. این شخص یکی از بازوانش را مستقیماً در امتداد شانه‌اش قرار می‌دهد تا بدین وسیله بتواند امتداد محور کوتاه‌را نشان بدهد و در ضمن نوك انگشت میانه‌اش به‌دیوارهٔ خارجی تکیه دارد. این شخص داخل صحنه حرکت می‌کند به قسمی که همواره امتداد بازویش بردیوارهٔ خارجی عمود و نوك انگشت میانه‌اش بردیوارهٔ خارجی متکی باشد و تمام دیوارهٔ خارجی را بپیماید. دراین حال مسیر شخص همان موازی مرکزی خواهد بود.

هرگاه بیضی‌دارای‌خروج‌ازمرکز ماکسیمم باشد، موازی خارجی آن نیز درخور توجه است. اگر طول قطر بلند بیضی ثابت و درآن $b=0$ و $e=1$ باشد، بیضی به پاره خط تبدیل می‌شود. دراین حال هرموازی خارجی آن مرغانه‌ای به‌درازای $2(a+d)$ و به‌پهنای $2d$ خواهد بود.

تعیین محیط ومساحت موازیهای بیضوی بدون هیچ‌اشکال میسر است. اگر p محیط بیضی باشد محیط مرغانهٔ موازی به فاصلهٔ $\pm d$ از آن برابر با $p\pm 2\pi d$ و مساحت بین بیضی و موازیش برابر با $pd\pm\pi d^2$ خواهد بود.

یکی از خاصیتهای بیضی آن است که اگر یك بیضی در یك مستطیل محاط شود، نسبت قطر مستطیل به‌قسمتی از آن که داخل بیضی قرار دارد برابر $\sqrt{2}$ است. این‌نسبت را که برای بیضی مقدار ثابت $\sqrt{2}$ است برای‌یك مرغانهٔ موازی‌بیضوی‌با k نشان می‌دهیم. با توجه به دومین شکل از این مقاله داریم:

$$(6)\quad k=\frac{a+d}{a}=\frac{b+d}{y}$$

به فرض:

$$A=\sqrt{\frac{a^2}{w^2}-1}\quad \text{و}\quad B=\sqrt{a^4-w^2(a^2-b^2)}$$

وبا انجام عملیات به‌نسبت مفصل از معادله‌های (۱)و (۲) و (۳) و(۶) بدست خواهد آمد:

$$(7)\quad k=\frac{a+d}{w\left(\frac{db}{B}+1\right)}$$

که درآن w باید چنان باشد تا داشته باشیم:

$$(8)\quad \frac{A(a+d)}{b+d}=\frac{B+db}{Bd+a^2d}$$

برحسب مقادیر مختلف d مقدار k نیز تغییر می‌کند پس k تابعی است از d و دارای می‌نیممی است. برای پیدا کردن مقادیر می‌نیمم k و d برحسب a و b از طرفین معادلهٔ (۷) نسبت به w مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم که بدست خواهد آمد:

$$\frac{(1+d)(B^3+bd)}{w^2(B+bd)^2}=0$$

پس می‌نیمم k وقتی است که:

$$(9)\quad B^3=-bd$$

از طرف دیگر از معادلهٔ (۸) خواهیم داشت:

$$(10)\quad d^2(b-A)+d(b^2-ABb-A+B)+ +Bb(1-A)=0$$

از این معادله نتیجه می‌شود که d وقتی می‌نیمم است که:

$$(11)\quad b^2-ABb-A+B=0$$

$$(12)\quad d_{min}=\sqrt{\frac{Bb(1-A)}{b-A}}$$

معادله‌های (۹) و (۱۱) و (۱۲) باید سازگار باشند پس:

$$(13)\quad d_{min}=\sqrt{b}\Longrightarrow (14)\quad k_{min}=\frac{1+\sqrt{b}}{\sqrt{1+b}}$$

می‌توانیم قضیهٔ زیر را بیان کنیم:

قضیه ـ از بین موازیهای بیضی به‌قطرهای $2a$ و $2b$ آنکه به‌فاصلهٔ $d=\sqrt{\frac{b}{a}}$ باشد دارای کمترین‌مقدار k می‌باشد که این مقدار برابر است با:

$$k=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$$

||||| چند ضلعیهای جهت‌دار |||||

ترجمهٔ: مهندس جوادفیض

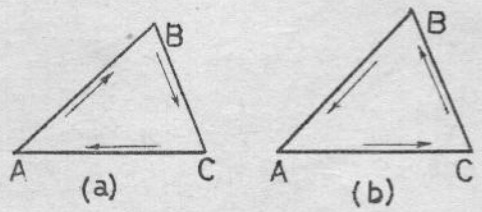
۱- مثلثهای جهت‌دار

در هندسهٔ مقدماتی، هرمثلث با سه رأس ، مثلا A،B وC کاملا مشخص و معین می گردد. معمولا می گوئیم مثلث ABC و می‌توان گفت مثلث BAC.

ممکن است که تصورخود را از یك مثلث بدین گونه تغییر دهیم: مثلث از حرکت یك نقطه روی مسیر بسته‌ای که شامل سه پاره خط (اضلاع مثلث) است پدید می آید. ازاین‌نظر به‌این‌نقطه که از رأسها و از چنین مسیری عبور می کند ، اهمیت خاصی قائلیم .

در این روش، علاوه برمشخص کردن رأسهای مثلث، اطلاعات بیشتری راجع به مسیرطی شده‌لازم است. در شکلهای هندسی، چنین اطلاعی‌را با استفاده ازبردارهایی که جهت‌حرکت روی مسیر را نشان می‌دهندبیان می کنیم.

برای این منظور کافی‌است، روی‌ضلعها جهت قائل‌شویم؛ پس حرکت را «جهت‌دار» کرده‌ایم. به مثلثهای جهت‌دار شدهٔ زیر توجه کنیم، از این دو مثلث‌می‌توان‌نتیجه گرفت، که رأسهای A،B وC ثابت هستند؛ ولی یکی از این مثلثها (شکل a) در



جهت عقربه‌های ساعت (چنین جهت دار شدن را «جهت‌دار شدن چپ» می‌نامند)، و دیگری (شکلb) در جهت مثلثاتی جهت دار شده است («جهت دار شدن راست») . مثلث اول را ABC (CABیاBCA)، ومثلث دوم را BAC (یاACBیاCBA) می‌نامیم .

کوتاه سخن آنکه، یك‌مثلث«جهت‌دار»، با سه رأس‌مشخص نمی‌شود. بلکه باید سه رأس‌با ترتیب معینی داده شده باشد،یعنی، نه تنها خود حروف، بلکه ترتیب‌پشت سرهم‌قرارگرفتن‌آنها نیز مشخص شود. اگرمثلث جهت‌دار به‌رأسهای A،B وC باشد این حرفها را برطبق جهت مطلوب روی مثلث پشت سرهم می‌نویسیم باتوجه به‌اینکه‌اول چه رأسی ذکرشود اهمیتی ندارد.

۲- «مساحت مثلث جهت دار».

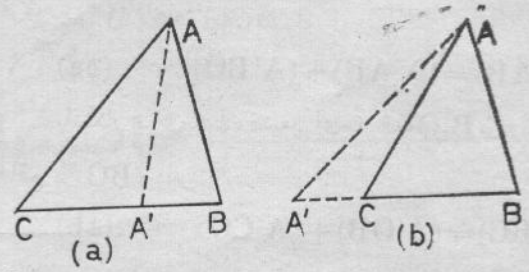
تعریف- مساحت مثلث‌جهت دار را عددی‌جبری می گیریم که قدر مطلق آن مساوی است با مساحت مثلث غیرجهت‌دار که رأسهایش همان رأسهای‌آن مثلث باشند و مثبت است اگر مثلث در جهت مثلثاتی جهت‌دار شده باشد و منفی است اگر در جهت عکس مثلثاتی جهت‌دار شده باشد. ممکن است چنین تعریفی‌باب‌طبع خواننده نبوده و برایش تعجب‌آور باشد ، چون ایدهٔ وی از مساحت همواره عدد مثبت (و فقط عدد مثبت) بوده است. اما این خواننده‌باید توجه داشته باشدکه بحث ما دربارهٔ یك مثلث معمولی نیست بلکه یك مثلث جهت‌دار است، و بکار بردن عدد جبری برای مساحت به‌همین‌علت می‌باشد، والبته این مطلب هیچ تناقضی باتعریف معمولی مساحت ندارد.

برای‌آنکه نشان دهیم‌چگونه می‌توان از این تصورکلی‌در بعضی از قضیه‌های هندسهٔ مقدماتی استفاده‌کرد ، توجه خود رابه دو قضیهٔ زیر معطوف می‌داریم:

قضیهٔ ۱- اگر رأس A از مثلث ABC به نقطهٔ A′ از پاره خط BC وصل شود، مساحت مثلث ABC معادل است با مجموع مساحتهای دو مثلث A′AB و A′CA.

قضیهٔ ۲- اگر رأسAاز مثلث ABC به نقطهٔ A′ که

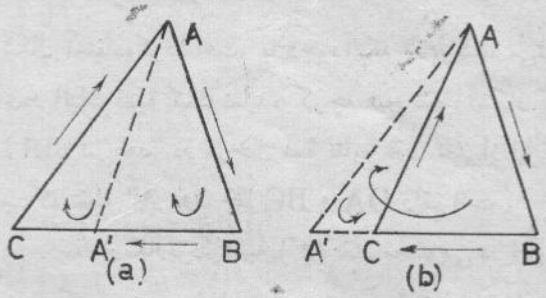
روی‌خط BC اما خارج پاره خط BC است وصل شود، مساحت مثلث ABC معادل است با تفاضل‌مساحتهای در مثلث $AA'B$ و $A'CA$،



از اثبات این دو قضیه به علت سادگی فوق‌العادهٔ آن صرف‌نظر می‌شود. با توجه به تصور کلی‌که از اندازهٔ جبری مساحت مثلث جهت‌دار داریم از ترکیب و ربط قضیه‌های فوق، قضیهٔ کلی‌تر زیر را نتیجه می‌گیریم:

قضیهٔ ۳ـ اگر رأس A از مثلث ABC را به نقطهٔ A' از خط BC، داخل یا خارج پاره خط BC، وصل کنیم، مساحت مثلث جهت‌دار ABC معادل است با مجموع مساحتهای مثلثهای جهت‌دار $A'AB$ و $A'CA$.

البته در اثبات‌این قضیه، دوحالت ممکن‌را بطور جداگانه باید در نظر گرفت. اول شکل (a) راکه درآن نقطهٔ A' داخل پاره خط BC است ملاحظه می‌کنیم. در این شکل، مثلثهای جهت‌دار ABC، $A'AB$ و $A'CA$ درجهتهای‌یکسانی‌جهت‌دار شده‌اند، و از اینرو، مساحتهای آنها هم علامت هستند. قضیه در این حالت بنابر قضیهٔ ۱ محقق است.



درحالت دوم، شکل (b)، نقطه A' روی امتداد خط BC وخارج پاره‌خط BC واقع‌است، پس مساحتهای مثلثهای جهت‌دار $A'AB$ و $A'CA$ مختلف العلامت می‌باشند. بنابرقضیهٔ ۲، قضیه مبرهن می‌شود.

تبصرهٔ ۱ـ ممکن است این فکر پیدا شودکه بیان قضیه‌های ۱ و ۲ لزومی در بیان قضیهٔ ۳ ایجاد نمی‌کند، اما ارزش قضیهٔ ۳ در این است، که صحت قضیه را برای دو موقعیت نقطهٔ A' تأکید می‌کند و با استفاده ازآن اثبات بسیاری از قضیه‌ها به سادگی انجام می‌گیرد.

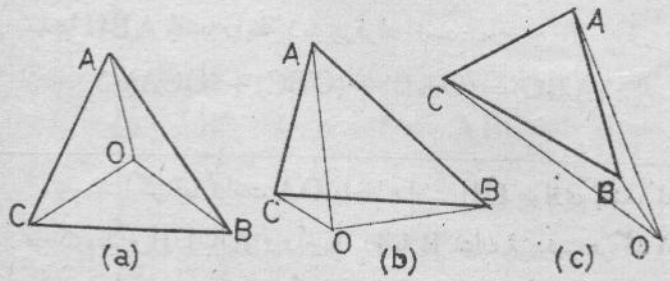
تبصرهٔ ۲ـ ما هنوز اثبات نکرده‌ایم که‌آیا صحت قضیه ۳ برای هرموقعیت نقطهٔ A' روی خط BC برقرار است یا نه؟ در حقیقت جملات قضیهٔ ۳ بیانگر این واقعیتندکه حالتی را که نقطهٔ A' در ابتدا وانتهای‌پاره خط BC باشدفراموش‌کرده‌ایم. آیا در این حالت قضیهٔ ۳ صحت ندارد، چون مثلث $A'AB$ (یا $A'CA$) مذکور در قضیه وجود ندارد؟ ولی آیا معمولا در هندسهٔ مقدماتی فقط سه نقطهٔ مجزا و نا واقع بریك خط راست بوجودآورندهٔ یك مثلث هستند؟

در قسمتهای بعد، مثلث را با سه نقطهٔ A، B، C که پاره‌خطهای AB، BC و CA ضلعهای آنندمعرفی‌می‌کنیم. بدیهی‌است در حالتی که رأسهای مثلث روی یك خط راست واقع باشند، مساحت مثلث صفر است، به‌ویژه مساحت مثلث وقتی دو رأس (یا هرسه رأس) برهم منطبق باشند نیز برابر صفر است. با این تصورکلی‌وگسترده صحت قضیهٔ ۳ درهرموقعیت نقطهٔ A' مبرهن است، و خواننده بدون هیچ اشکالی می‌تواندآنرا تحقیق‌کند. بدین ترتیب نتیجهٔ مفید زیر را بدست می‌آوریم:

قضیهٔ ۳'ـ اگر رأس A از مثلث ABC به نقطهٔ A' واقع‌برخط راست BC وصل‌شود، مساحت مثلث جهت‌دار ABC برابر است با مجموع مساحتهای مثلثهای جهت‌دار $A'AB$ و $A'CA$.

۳ـ قضیهٔ مجموع ـ

اگر O نقطه‌ای‌واقع در داخل‌مثلث ABC باشد (شکل a) به آسانی در می‌یابیم‌که مساحت مثلث ABC برابر است بامجموع‌مساحتهای سه‌مثلث OAB، OBC و OCA. آیاصحت



این‌موضوع هنگامی که نقطهٔ O در داخل‌مثلث نباشدبرقراراست؟ کافی است نظری به شکل (b) نمائیم‌تا خلاف این را مشاهده کنیم: در ایـن حالت مساحت مثلث ABC برابر بـا مجموع مساحتهای OAB،OBC و OCA نبوده، بلکه کمتر از آن است.

خواننده باید با توجه به شکلهای a،b،c ، و بـا تصور کلی مساحات جهت‌دار که مجدداً مرور می‌کند، وجستجوی‌ذهنی درمی‌یابد که قضیهٔ زیر معتبر است.

قضیهٔ ۴ (قضیهٔ مجموع)ـ اگـر نقطهٔ O در صفحهٔ مثلث ABC واقع‌باشد، مساحت مثلث جهت دار ABC برابر است با مجموع مساحتهای مثلثهای OAB ، OBC و OCA.

اثبات دقیقتر قضیهٔ مجموع

ممکن‌است که در اثبات‌قضیه با استفاده از مشاهدات‌بصری دوچار اشتباه شویم . برای رفع این مشکل نمادی برای اندازهٔ جبری مثلث جهت‌دار در نظر می‌گیریم: انـدازهٔ جبری مثلث جهت‌دار ABC رابا(ABC) نشان می‌دهیم. به‌این‌ترتیب بطور وضوح تساویهای زیر برقرار است.

$$(ABC)=(BCA)=(CAB) \qquad (۱)$$

$$(BAC)=(ACB)=(CBA) \qquad (۱')$$

$$(ABC)=-(BAC) \qquad (۲)$$

با توجه به رابطه‌های بالا قضیهٔ (۳′) به‌صورت زیر بیان می‌شود :

قضیهٔ ۴ـ برای‌سه نقطهٔ A،B،C و یك نقطهٔ A′ واقع بر روی خط راست BC تساوی زیر برقرار است:

$$(ABC)=(A'AB)+(A'CA) \qquad (۳)$$

و بالاخره قضیهٔ ۴ می‌تواند به‌صورت زیرفرموله شود:

قضیهٔ ۴′ـ اگرسه نقطهٔ A وB وC و نقطهٔ O واقع در صفحهٔ ABC باشد رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(ABC)=(OAB)+(OBC)+(OCA) \qquad (۴)$$

اثبات ـ به‌فرض A′، نقطه‌ای‌باشد که خط راست OA ، خط مستقیم BC را قطـع می‌کند (*)، با استفاده‌از قضیهٔ ۳′ (فرمول (۳)) داریم:

$$(OAB)=(A'AB)+(A'BO) \qquad (۵a)$$

با بکار بردن همان قضیه‌برای‌سه نقطهٔO،B،C ونقطه A′ (واقع بر BC) داریم:

$$(OBC)=(A'OB)+(A'CO) \qquad (۵b)$$

و بالاخره با بکاربردن همان قضیه در مورد سه نقطهٔ O،C،A و نقطهٔ A′ (واقع بر OA) داریم:

$$(OCA)=(A'OC)+(A'CA) \qquad (۵c)$$

از جمع طرفین رابطه‌های (۵a)،(۵b)،(۵c) و مرتب کردن جملات و خلاصه‌کردن‌آنها داریم:

$$(A'BO)+(A'OB)=0 ،$$

$$(A'CO)+(A'OC)=0$$

$$(OAB)+(OBC)+(OCA)=$$

$$(A'AB)+(A'CA) \qquad (۶)$$

و چون نقطهٔ A′ روی خط راست BC واقع است‌ازقضیهٔ (۳′) داریم:

$$(A'AB)+(A'CA)=(ABC) \qquad (۷)$$

از ترکیب (۶) و (۷) رابطهٔ (۴) حاصل می‌گردد،

تبصره ـ هرگاه خواننده‌در اثبات قضیهٔ فوق از ترسیم اشکال استفاده‌کرده است، با وجودآنکه لازم‌نیست، می‌تواندبه وی‌در اثبات قضیه کمك نماید، گرچه هیچ نتیجهٔ‌آشکار دیگری را ارائه نمی‌دهد در هرحال همهٔ نتایج فقط ناشی‌از این‌حقیقت است‌که نقطهٔ A′ روی خط BC و OA واقع است.

سه باربکاربردن قضیهٔ (۳′) نقش مخصوصی در این اثبات ایفا می‌کند،وصحت رابطه برای جمیع موقعیتهای نقطهٔ A′ واقع برروی خط راست BC یا OA برقرار است

دنباله‌دارد

* اگرخط راست OA باخط راست OB موازی باشد، اما OB با AC موازی نباشد ، رأسهای مثلث را مجدداً نامگذاری می‌کنیم،رأسBرا با A و رأسA را با B نشان می‌دهیم.هرگاهOA با BCوOB با ACموازی‌باشند، OC با AB موازی‌نخواهد بود، در ایـن‌صورت مجدداً چنین نامگذاری می‌کنیم: C را با A،A را بـا C نشان‌می‌دهیم. واضح‌است‌که هیچ تفاوتی در محتوی قضیه بروز نخواهدکرد .

برگردان به‌فارسی از : عبدالحسین مصحفی

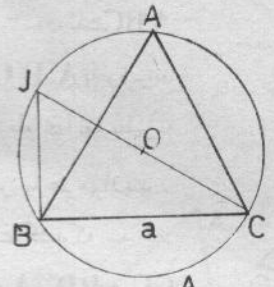
Redécouvrons la Géométrie

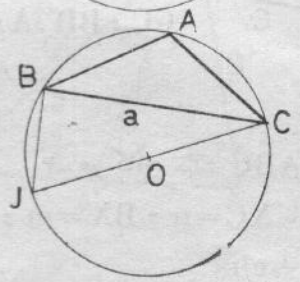
H. S. M. COXETER et S. L. GREITZER

خاصیتهایی از مثلث

۱.۱. قانون سینوسها

قانون سینوسها یکی از قضیه‌های مثلثات است ، امـا در هندسه با آن سروکار زیاد داریم. جای تأسف است که دربرخی ازکتابها این قضیه‌راآنگونه که‌شایسته است مهم جلوه نمی‌دهند. در اینجا قانون سینوسها را به‌گونه‌ای که خواهد آمـد شرح و بسط می‌دهیم :





مثلث ABC را درنظرمی‌گیریم که O مرکزدایرهٔمحیطی آن و R شعاع ایـن دایره است. قطر CJ از دایرهٔ محیطی سپس خـط BJ را رسـم می‌کنیم. زاویهٔA چه حاده و چه منفرجـه باشد، زاویهٔ CBJ قائمه است و در هردو حالت داریم :

$$\sin J = \frac{BC}{JC} = \frac{a}{2R}$$

مطابق با شکل، اگر زاویهٔ A حاده باشد دو زاویهٔ A و J با هم برابرند، و اگر زاویهٔ A منفرجه باشد دو زاویهٔ A و J مکمل یکدیگرند. درهردوحال داریم $\sin J = \sin A$ وبنابراین:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

روش بالا را برای دو زاویهٔ دیگر مثلث که بکار ببریم بـدست می‌آید :

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \ , \ \frac{c}{\sin C} = 2R$$

بنابراین می‌توانیم قانون سینوسها را چنین بیان کنیم :

قضیهٔ ۱.۱.۱ـ در هرمثلث ABC داریم :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

یادآوری ـ از ایـن پس مساحت مثلث ABC را بـا S(ABC) و همچنین مساحت یك چهار ضلعی PQRS را با S(PQRS) نشان می‌دهیم .

تمرین :

۱ـ ثابت‌کنید که در هرمثلث ABC اگر زاویه‌های B وC حاده باشند داریم :

$$a = b\cos C + c\cos B$$

با استفاده از این رابطه و قانون سینوسها دستور زیـر را بدست آورید :

$$\sin(B+C) = \sin B\cos C + \sin C\cos B$$

۲ـ ثابت‌کنید که در هرمثلث داریم :

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$$

۳ـ رابطهٔ زیر را برای هرمثلث ثابت‌کنید :

$$S(ABC) = \frac{abc}{4R}$$

۴ـ دو دایره به‌شعاعهای p و q برنقطهٔ A می‌گذرند و به‌ترتیب در B و C برخط BC مماسند. هرگاه R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد ثابت‌کنید که : $pq = R^2$

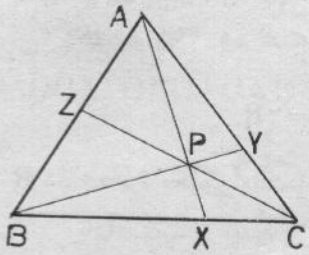
۲.۱ ـ قضیهٔ سوا

هرخط که یك رأس مثلث را به نقطه‌ای از ضلع روبروی به‌آن وصل کند خط سوائی نامیده می‌شود. اگر X نقطه‌ای از ضلع BC و Y نقطـه‌ای از ضلع CA و Z نقطـه‌ای از ضلع

AB باشد، هریك از خطهای AX، BY و CZ یك خط‌سوایی است . این نامگذاری از آنجا ناشی می‌شود که ژان‌دسوا (Jean de Céva) ریاضیدان ایتالیایی برای نخستین بار در سال ۱۶۷۸ قضیهٔ بسیار سودمند زیر را بیان داشته است:

قضیهٔ ۱،۲،۱ ـ اگر در مثلث ABC سه خط سوایی AX و BY و CZ متقارب باشند داریم:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$



سه خط رامتقارب می‌گوییم هرگاه هر سه از یك نقطهٔ P بگذرند. برای اثبات قضیهٔ سوا قبلا یادآوری می‌کنیم که اگر دو مثلث دارای ارتفاع برابر باشند، نسبت مساحتهای آنها بر نسبت قاعده‌های آنها است.

پس :

$$\frac{BX}{XC}=\frac{S(ABX)}{S(AXC)}=\frac{S(PBX)}{S(PXC)}=$$

$$=\frac{S(ABX)-S(PBX)}{S(AXC)-S(PXC)}=\frac{S(ABP)}{S(CAP)}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{CY}{YA}=\frac{S(BCP)}{S(ABP)} \quad و \quad \frac{AZ}{ZB}=\frac{S(CAP)}{S(BCP)}$$

از ضرب نظیر به‌نظیر طرفین رابطه‌های بالا بدست می‌آید:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=$$

$$\frac{S(ABP)}{S(CAP)}\cdot\frac{S(BCP)}{S(ABP)}\cdot\frac{S(CAP)}{S(BCP)}=1$$

عکس قضیهٔ سوا نیز صحیح است و چنین بیان می‌شود:

قضیهٔ ۲،۲،۱ ـ اگر برای سه خط سوائی AX و BY و CZ رابطهٔ

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

برقرار باشد، آن، سه خط متقاربند.

فرض می‌کنیم که P نقطهٔ برخورد AX و BY باشد و خطی که از C به P وصل‌می‌شود با AB در Z′ برخورد کند. در این صورت بنابه قضیهٔ سوا داریم:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=0$$

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ فرض بدست می‌آید:

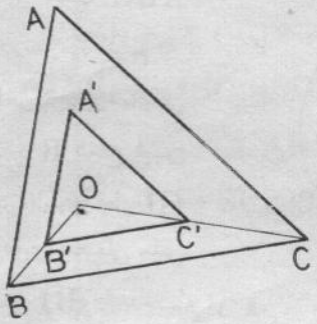
$$\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{AZ}{ZB}$$

دو نقطهٔ Z و Z′ برهم‌منطبقند. پس خط CZ نیزازP می‌گذرد یعنی سه خط متقاربند.

تمرین

۱ـ ثابت کنید که در هرمثلث سه میانه متقاربند

۲ـ ثابت‌کنید که‌سه ارتفاع هر مثلث متقاربند



۳ـدومثلث ABC و A′B′C′ نابرابرند و ضلعهای آنها نظیر به نظیر با هم موازیند . ثابت کنیدکه سه خط AA′ و BB′ و CC′ متقاربند .

۴ـ هرگاه‌در مثلث ABC طول‌خط سوایی AX برابر p و BX=m و XC=n باشد، ثابت‌کنیدکه:

$$a(p^2+mn)=b^2m+c^2n$$

راهنمایی‌ـ رابطه‌های مربوط به‌کسینوسهای دو زاویهٔ مجانب به رأس X را بنویسید و باهم جمع کنید . رابطهٔ مربوط به قضیهٔ‌استوارت (*) بدست می‌آیدکه در ۱۷۴۶ بیان شده است. اما این‌قضیه احتمالا نخستین بار توسط ارشمیدس درسال ۳۰۰ پیش از میلادکشف شده و نخستین بار توسط سمسن در ۱۷۵۱ اثبات شده است.

۳.۱ـ نقطه‌های مهم

برای مثلث تعداد زیادی نقطه و خط مهم یافت می‌شود.

---

* قضیهٔ استوارت : برای هر نقطهٔ M واقع برضلع BC از مثلث ABC رابطهٔ زیر برقرار است:

$$AB^2\cdot CM+AC^2\cdot BM=AM^2\cdot BC+CM\cdot BM\cdot BC$$ (مترجم)

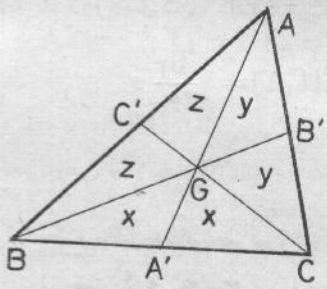
اما ناچاریم که به برخی از آنها اکتفا کنیم. یکی از نقطه‌های مهم مثلث مرکز دایرهٔ محیطی‌است. این نقطه جای تقارب عمود منصفهای مثلث است. یکی دیگر از نقطه‌های مهم مثلث مرکز ثقل است که جای تقارب سه میانهٔ مثلث است.

برای اثبات تقارب سه میانهٔ مثلث می‌توانیم از قضیهٔ سوا استفاده کنیم: اگر A' وسط BC و B' وسط CA و C' وسط AB باشد داریم:

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1\times1\times1=1$$

پس بنا به عکس قضیهٔ سوا سه خط AA'، BB' و CC'، یعنی سه میانهٔ مثلث متقاربند. اگر از مقوای با ضخامت یکنواخت مثلثی ببریم و G جای تقارب میانه‌های آن را پیدا کنیم، آنگاه آن را در این نقطه بر نوك سوزنی تکیه دهیم، درحال تعادل باقی می‌ماند. از اینرو نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث را مرکز ثقل آن می‌نامند.

قضیهٔ ۱،۳،۱ ـ سه میانهٔ مثلث آن‌را به شش مثلث معادل (دارای مساحتهای برابر) تقسیم می‌کنند.



مطابق با شکل، دو مثلث GBA' و $GA'C$ دارای قاعده‌های برابرند $(BA'=A'C)$ و در ارتفاع مشترکند. پس این دو مثلث مساحتهای برابر دارند. مقدار مساحت هریك از این دو مثلث‌را با x نشان می‌دهیم، همچنین داوریم:

$$S(GCB')=S(GB'A)=y$$
$$S(GAC')=S(GC'B)=z$$

اما دو مثلث CAC' و $CC'B$ نیز مساحتهای برابر دارند. پس:

$$2y+z=z+2x \Longrightarrow x=y$$

به روش مشابه بالاخره نتیجه خواهد شد که:

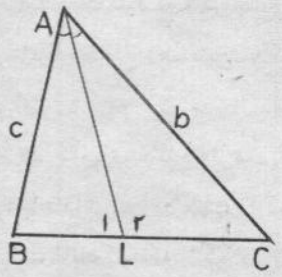
$$x=y=z$$

قضیهٔ ۲،۳،۱ـ هریك از میانه‌های مثلث توسط میانه‌های دیگر به نسبت ۲ بر ۱ تقسیم می‌شود. به عبارت دیگر نقطه تلاقی میانه‌های مثلث در دو سوم ابتدا از رأس هر کدام از آنها واقع شده است.

برای اثبات این قضیه همان شکل بالا را در نظر می‌گیریم بنابر آنچه که ثابت کردیم، مساحت مثلث GAB دو برابر مساحت مثلث GBA' است. اما این دو مثلث در ارتفاع نظیر رأس B مشترکند، پس نسبت قاعده‌های آنها بر نسبت مساحتهای آنها است یعنی: $AG=2GA'$. همچنین ثابت می‌شود که:

$$BG=2GB' \quad و \quad CG=2GC'$$

قضیهٔ ۳،۳،۱:



نیمساز داخلی هر زاویهٔ مثلث، ضلع روبرو را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند

مطابق با شکل و بنابه قانون سینوسها در دو مثلث ABL و ACL داریم:

$$\frac{BL}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{c}{\sin L_1} \quad و \quad \frac{CL}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{b}{\sin L_2}$$

$$\sin L_1=\sin L_2 \Longrightarrow \frac{BL}{LC}=\frac{c}{b}$$

در بارهٔ نیمسازهای زاویه‌های B و C نیز اثبات به همین روش انجام می‌گیرد.

با توجه به این خاصیت نیمسازهای داخلی مثلث و بنابه عکس قضیهٔ سوا نتیجه می‌شود که:

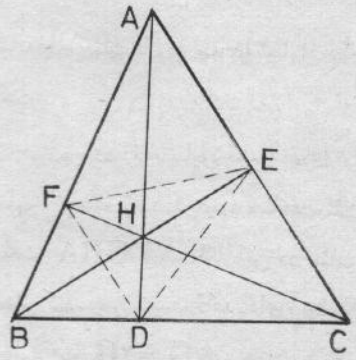
قضیهٔ ۳،۳،۱ـ سه نیمساز داخلی زاویه‌های مثلث متقاربند.

نیمساز هر زاویه مکان هندسی نقطه‌هایی است که از دو ضلع آن زاویه به یك فاصله‌اند. بنابراین نقطهٔ تقارب نیمسازهای داخلی مثلث از سه ضلع مثلث به یك فاصله‌است و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث است، یعنی دایره‌ای که بر سه ضلع مثلث مماس است.

یکی دیگر از نقطه‌های مهم مثلث مرکز ارتفاعی است که نقطهٔ تقارب سه ارتفاع مثلث است. سه ارتفاع AD و BE و CF از مثلث ABC در H متقاربند. H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.

هرگاه D و E و F پاهای ارتفاعها را به هم وصل کنیم،

مثلث پدید آمده را مثلث ارتفاعی وابسته به مثلث ABC می‌نامند.



تمرین

۱ـ ثابت کنید که اگر یك زاویه از مثلثی منفرجه باشد، مرکز دایرهٔ محیطی وهمچنین مرکز ارتفاعی این مثلث درخارج آن می‌افتد.

۲ـ ضلعهای مثلثی به‌ترتیب بامیانه‌های مثلث‌دیگر برابرند. نسبت مساحتهای این دو مثلث را بیابید

۳ـ ثابت کنید که اگر دو میانه از مثلثی برابر باشندآن مثلث متساوی الساقین است.

۴ـ ثابت کنید که اگردو ارتفاع از مثلثی برابر باشندآن مثلث متساوی‌الساقین است.

۵ـ روش سادهٔ اثبات تقارب سه نیمساز داخلی زاویه‌های مثلث را شرح دهید.

۶ـ طول میانهٔ مثلث ABC را برحسب a و b و c طولهای سه‌ضلع بدست آورید. می‌توانید از قضیهٔ استوارت بهره گیرید.

۷ـ ثابت کنید که طول نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث ABC برابر است با:

$$bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

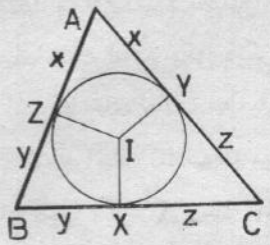
(می‌توانید قضیهٔ استوارت را بکار ببرید.)

۸ـ در مثلثی ضلعها به اندازه‌های ۳، ۴و۵ می‌باشند. این مثلث قائم‌الزاویه است. طول نیمساز داخلی زاویهٔ قائمهٔ آن را حساب کنید.

۹ـ ثابت کنید که حاصل ضرب دوضلع هرمثلث برابراست با حاصل ضرب قطردایرهٔ محیطی آن در طول‌ارتفاع وارد برضلع دیگر مثلث.

۴.۱ـ دایره‌های محاطی داخلی وخارجی مثلث

شکل بعد یك مثلث ABC و دایرهٔ محاطی داخلی آن را نشان می‌دهد که در نقطه‌های X و Y و Z برضلعهای BC و CA و AB مماس است. اگر از یك نقطه دو مماس بر دایره‌ای رسم شود، این دو مماس با هم برابرند. بنابراین:



$$AY=AZ \quad و \quad BZ=BX \quad و \quad CX=CY$$

با توجه به اندازه نویسی روی شکل خواهیم داشت:

$$y+z=a \ , \ z+x=b \ , \ x+y=c$$

از جمع نظیر به‌نظیر طرفین این رابطه‌ها و با قرار داد $a+b+c=2s$ بدست می‌آید:

قضیهٔ ۱ . ۴ ، ۱ـ

$$x+y+z=s$$

$$x=s-a \ , \ y=s-b \ , \ z=s-c$$

هرگاه از I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC به سه رأس‌وصل کنیم، داریم:

$$S(IBC)=\frac{ar}{2} \quad و \quad S(ICA)=\frac{br}{2} \quad و$$

$$S(IAB)=\frac{cr}{2}$$

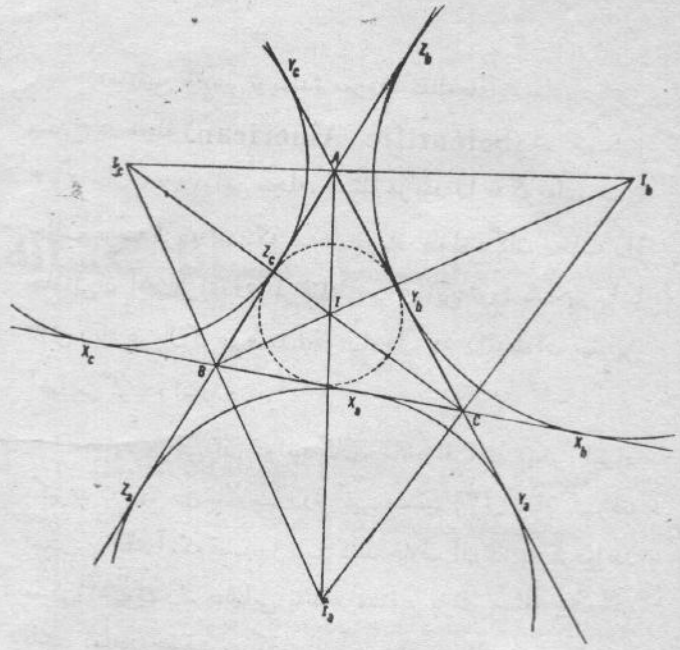
از جمع نظیر به‌نظیر طرفین این سه رابطه بدست می‌آید:

قضیهٔ ۱ . ۴ ، ۲ـ مساحت هرمثلث برابراست باحاصل ضرب نصف محیط در شعاع دایرهٔ محاطی داخلی‌آن.

$$S(ABC)=rs$$

قضیهٔ ۱ . ۴ ، ۳ ـ در هر مثلث، هر دونیمساز خارجی دوزاویه بانیمساز داخلی زاویهٔ دیگرمتقاربند.

نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C در I_a برخورد می‌کنند. این نقطه از دوضلع زاویهٔ C و همچنین از دو ضلع زاویهٔ B به یك فاصله است. نتیجه می‌شود I_a از دو ضلع‌زاویهٔ A نیز به یك فاصله است. پس نیمساز زاویهٔ A نیز از I_a می‌گذرد. I_a مرکزدایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC نظیر ضلع c است که شعاع آن به r_a نشان داده می‌شود. این دایره بر ضلع BC و برامتدادهای دو ضلع دیگر مماس است. هرمثلث سه دایرهٔ محاطی خارجی داردکه به ترتیب برضلعها a و b و c



مماسند و شعاعهای آنها با r_a و r_b و r_c نشان داده می‌شود.

با استفاده از اینکه دو مماس که از یك نقطه بر دایره‌ای رسم شوند باهم برابرند و با روش مشابه با آنچه که در بارهٔ قضیهٔ ۱. ۴، ۱ انجام گرفت نتیجه می‌شود که :

$$AY_a = AZ_a = BZ_b = BX_b = CX_c = CY_c = s$$

$$BX_c = BZ_a = CX_b = CY_b = s-a$$

$$CY_a = CX_a = AY_c = AZ_c = s-b$$

$$AZ_b = AY_b = BZ_a = BX_a = s-c$$

تمرین ـ ثابت کنید که :

۱ـ هرگاه به‌مرکزهای سه راس مثلث ABC سه دایره چنان رسم کنیم که دوبه‌دو برهم‌مماس‌باشند، شعاعهای این دایره‌ها برابرند با :

$$s-a\ ,\ s-b\ ,\ s-c$$

۲ـ در هر مثلث داریم : $abc = 4srR$

۳ـ سه خط که رأسهای مثلث را به نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلع روبرو وصل می‌کنند متقاربند. (نقطهٔ تقارب این خطها به‌نام نقطه ژرگون معروف است *).

۴ـ مثلث ABC مثلث ارتفاعی مثلث $I_aI_bI_c$ است.

۵ـ

$$S(ABC) = (s-a)r_a = (s-b)r_b = (s-c)r_c$$

۶ـ

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

۵۰۱ـ قضیهٔ اشتینر ـ لهموس

دشواری ویژه‌ای که در برخی ازمسئله‌های هندسه یافت می‌شود، خود موجب پدیدآمدن کششی از جانب اشخاص برای حل این مسئله‌ها است. در سده‌های گذشته، این‌چنین کششی از امتیازهای ویژهٔ هندسه به‌نظر می‌رسیده است. برای نمونه ازسه مسئلهٔ بسیار مشهور قدیمی می‌توان نام برد : تضعیف مکعب، تثلیث زاویه، تربیع دایره. کوششهایی که برای حل این مسئله‌ها انجام گرفته خود شاخه‌های تازه‌ای از ریاضی را پدید آورده است. حتی اکنون هم کسانی که به‌دنبال نام‌آوری در ریاضیات می‌باشند روشهای تازه‌ای در حل این مسئله‌ها ارائه می‌دهند و رقیبان را در پیدا کردن اشتباههای موجود در آنها به مبارزه می‌خوانند.

به‌ویژه قضیهٔ زیرهمواره‌انگیزه‌ای‌برای‌نام‌آوری‌بوده‌است:

قضیهٔ ۱،۵۰۱ـ اگر دو نیمساز داخلی از مثلثی با هم برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.

این مسئله در سال ۱۸۴۰ از طرف لموس (C. L. Lehmus) ، که اگر غیر از این بود نامش فراموش شده شده بود، برای ریاضیدان بزرگ سوئیسی اشتینر (Jacob Steiner) فرستاده شده و ازوی حل هندسی آن خواسته شده بود. اشتینر حلی بسیار پیچیده برای آن ارائه داد و این خود موجب شدکه بسیاری دیگر از ریاضیدانان در جستجوی حل سادهٔ مسئله برآیند. در سالهای ۱۸۴۲ ، ۱۸۴۴ ، ۱۸۴۸ و همچنین درهمهٔ سالهای از ۱۸۵۴ تا ۱۸۶۴ ، وبالاخره به‌طور تنظیم در صد سال اخیر، این مسئله زیر عنوان «قضیهٔ اشتینر ـ لموس» در مجله‌های مختلف ریاضی درج گردیده است.

یکی از روشهای سادهٔ حل آن برمبنای دو لم زیر بیان شده است.

لم ۱،۱،۵۰۱ـ اگر در یك دایره دو وتر روبرو به دو زاویهٔ حادهٔ‌محاطی نابرابرباشند، آن وتر که‌بزرگتراست‌روبروبه زاویهٔ بزرگتراست.

اثبات : از دو وتر نا برابر آنکه بزرگتراست به مرکز نزدیکتر است و در نتیجه زاویهٔ مرکزی روبرو به آن

* **قضیهٔ ژرگون** ـ اگر در مثلث ABC سه‌خط سوائی AD و BE و CF در P متقارب باشند، داریم :

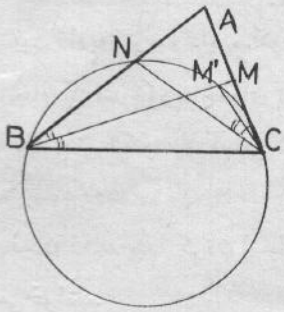
$$\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1$$

(مترجم)

بزرگتر است. هر زاویهٔ محاطی نیمهٔ زاویهٔ مرکزی است که روبرو به‌یك وتر واقعند. بنابراین زاویهٔ محاطی روبرو به وتر بزرگتراز زاویهٔ محاطی روبرو به‌وتر کوچکتر بزرگتر است.

لم ۲،۱،۵۰۱ـ اگر دو زاویه از مثلثی نابرابر باشند نیمساز زاویهٔ کوچکتر از نیمساز زاویهٔ دیگر بزرگتر است.

اثبات ـ در مثلث ABC زاویهٔ B از زاویهٔ C کوچکتر است و BM و CN نیمسازهای زاویه‌های B و C می‌باشند. بر BM نقطهٔ M′ را چنان می‌یابیم که زاویهٔ NCM′ با نیمهٔ زاویهٔ B برابر باشد. از



برابری دو زاویهٔ NBM′ و NCM′ برمی‌آید که چهار ضلعی BNM′C محاطی است. اما داریم:

$$B < \frac{B+C}{۲} < \frac{A+B+C}{۲}$$

$$\angle CBN < \angle M'CB < ۹۰^\circ$$

بنا به لم ۱،۱،۵۰۱ داریم $CN < BM'$ و نتیجه می‌شود:

$$BM > BM' > CN$$

اثبات قضیهـ روش برهان خلف را بکار می‌بریم: اگر $B \neq C$ باشد بنا به لم بالا نتیجه می‌شود که $BM \neq CN$ اما داریم $BM = CN$ بنابراین $B \neq C$ غلط است. پس $B = C$.

سرگذشت راه حل بالا نیز جالب است. این راه حل به‌نام‌دومهندس‌انگلیسی G.Gilbert وD.Mac Donnell در شمارهٔ ۷ سال ۱۹۶۳ مجلهٔ «ماهنامهٔ ریاضی آمریکا» چاپ شده و از طرف سردبیر مجله یاد داشت زیر به‌آن اضافه شده بود:

«مارتین گاردنر نویسندهٔ معروف مقاله‌های‌بازیهای ریاضی مندرج در مجلهٔ (Scientific American) در شمارهٔ ۲۰۴ سال ۱۹۶۱ این مجله، مسئلهٔ مزبور را به‌گونه‌ای چنان جالب عرضه‌کرده است که صدها نفر از خوانندگان مجله راه حلهایی‌از آن‌رابرای وی فرستاده‌اند. وی این توده پاسخها را با تلاش زیاد غربال‌کرده و درآخر راه‌حل بالا رابه‌عنوان بهترین آنها برگزیده است.»

شاید برخی از خوانندگان، مانند افرادی دیگر، ایراد بگیرند که راه حل بالا با روش غیر مستقیم (*) انجام گرفته است: به‌جای‌آنکه قضیه را ثابت‌کنند خلاف آن را ردکرده‌اند. ممکن است که راه حلهایی به‌ظاهرمستقیم برای مسئله بیان شده باشد، اما در حقیقت هرکدام از آنها روش برهان غیر مستقیم‌را در خود پنهان داشته است. باید دانست که تنها قضیه‌های بسیار ساده بطورکامل اثبات شده‌اند. سایر قضیه‌ها با استفاده از قضیه‌هایی ثابت شده‌اند که این قضیه‌ها قبلا به‌اثبات رسیده و رشته‌ای منطقی مبتنی براصلهای موضوع تشکیل داده‌اند. هرگاه یکی از قضیه‌های این رشته با روش‌برهان غیر مستقیم اثبات شده باشد، در اثبات قضیه‌های بعد ازآن این روش برهان غیر مستقیم دخالت داشته است. وانگهی برخی از قضیه‌های بسیار ساده و اساسی نیز با برهان غیر مستقیم ثابت شده‌اند. هرگاه خود را مقیدکنیم که به غیراز برهان مستقیم را نپذیریم در این صورت مجموعهٔ قضیه‌های ما فقط به‌چند قضیهٔ ساده محدود خواهد شد. شاید آگاهی براین موضوع برای ما ناخوشایند باشد، اما همانگونه‌که ریاضیدان بزرگ انگلیسی G. H. Hardy گفته است: «برهان خلف، این عزیز دردانهٔ اقلیدس، یکی ازبرنده ترین سلاحهای ریاضیدانان است. دریك بازی شطرنج، حرکتی که انجام‌گیرد دیری نمی‌پایدکه ارزش آن معین می‌گردد: یك بازیکن‌ممکن است که خطر ازدست دادن یك پیاده یا مهرهٔ دیگر

بقیه در صفحهٔ ۴۳

* اگر P فرض و Q حکم قضیه‌ای باشد، هرگاه مستقیماً ثابت شودکه استلزام $P \Longrightarrow Q$ محقق است، در این صورت برهان را مستقیم گویند. مثلا به‌صورت سلسله استلزامهای:

$$P \Longrightarrow P_۱ \text{ و } P_۱ \Longrightarrow P_۲ \text{ و } \dots \text{ و } P_n \Longrightarrow Q$$

اما هرگاه‌به‌جای استلزام $P \Longrightarrow Q$ استلزام یا ترکیبی معادل با آن (مثلا $\sim Q \Longrightarrow \sim P$) اثبات شود، دراین صورت برهان را غیر مستقیم گویند. برهان غیر مستقیم بر چند نوع است که یکی از نوعهای آن برهان خلف است. (مترجم)

تشکیل مسائل مشابه با مسائل دیگر

ترجمهٔ : مهندس فتح‌الله زرگری

در حل مسائل یا اثبات قضایا اغلب امکان تشکیل مسئله‌ای جدیدیا قضیه‌ای جدید متشابه با مسئله یا قضیهٔ داده شده بررسی می گردد.

درمسائل یا قضایای مشابه، دو مسئله یا دوقضیه را بررسی می‌کنیم که از لحاظ مفهوم تعریف مشابهند و لیکن رویهمرفته شامل مندرجات متفاوتی می‌باشند.

تشابه بین مسائل و قضیه‌های هندسهٔ مسطحه و هندسهٔ فضایی بطورکلی یکسان انجام نمی‌گیرد. برای یك مثلث واقع درصفحه گاهی چهار وجهی وگاهی مثلثی مشابه‌آن‌واقع در فضا درنظر گرفته‌می‌شود. مشابه خط راست درصفحه‌می‌تواند یك خط یا یك صفحه باشد.

به‌این ترتیب مشابه‌های مختلفی می‌توان برای یك قضیهٔ مسطحه در فضا پیدا کرد.

مثال ـ ثابت‌کنیدکه در هر چهار وجهی :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$$

که در آن R شعاع کرهٔ محاط در چهار وجهی و h_1 و h_2 و h_3 و h_4 طول ارتفاعهای نظیر هر رأس چهار وجهی است که بر وجه مقابلش فرود آمده است.

به‌سادگی می‌توان دید که فرمول داده شده در مسئلهٔ فضائی مشابه با فرمول زیر برای مثلث مسطحه می‌باشد :

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$$

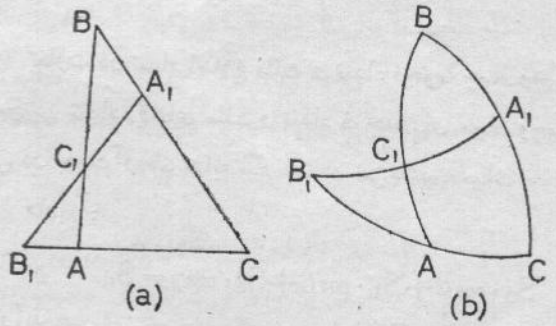
که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی و h_1 و h_2 و h_3 ارتفاعهای مثلث می‌باشند.

تشابه دو قضیه یا دو مسئله به صورت‌های مختلف ظاهر می‌گردد. این موضوع مخصوصاً در قضایای هندسهٔ کروی کاملا آشکاراست. همیشه فرمولهای بیان‌کنندهٔ رابطهٔ بین عناصرمثلث کروی از لحاظ ظاهری مشابه با فرمولهای نظیرشان در مورد مثلث مسطح نمی‌باشند. برای روشن شدن مطلب کافی است قضیهٔ سینوسها برای مثلثهای مسطحه و کروی را با هم مقایسه‌کنیم.

برای حل بعضی مسائل فضائی (مخصوصاً در تقاطع) بهتر است از قضیهٔ منلائوس استفاده شود. اکثر دبیران این مسائل را با معلومات عمومی و یا با معلوماتی در سطح ریاضیات پیشرفته حل می‌کنند. می‌توان قضیهٔ «چیو» را نیز به دانش‌آموزان داد، اگرچه در اثبات آن لازم است از قضیهٔ منلائوس استفاده شود.

بطور اختیاری. بامعلومات هندسهٔ‌کروی می‌توان قضایای منلائوس و چیو را برای مثلث‌کروی اثبات کرد.

قضیهٔ منلائوس : برای مثلثهای مسطح و کروی (شکل زیر) : فرض‌کنیم A_1 نقطه‌ای روی BC و C_1 نقطه‌ای



روی AB و B_1 نقطه‌ای روی AC باشند. برای آنکه A_1، B_1 و C_1 روی یك خط باشند لازم وکافی است. که رابطه‌های زیر برقرار باشد :

برای مثلث مسطحه : $\frac{CA_1}{A_1B} : \frac{AC_1}{C_1B}=CB_1 : B_1A$

برای مثلث کروی :

$$\frac{\sin CA_1}{\sin A_1B} : \frac{\sin AC_1}{\sin C_1B}=\sin CB_1 : \sin B_1A$$

تشابه ظاهری بین این قضایا می‌تواند برای دانش‌آموزان جالب باشد.

نشان دادن تشابه بین قضایا یا فرمولها به‌دانش‌آموزان نه تنها مفید است بلکه پیشنهاد در ساختن تشابه برای قضایا و فرمولها نیز برای ایشان مفید می‌باشد.

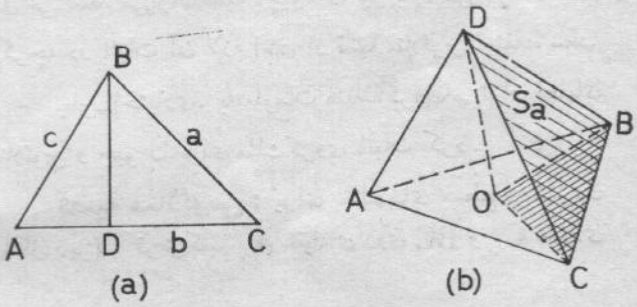
مثالهائی را بررسی می‌کنیم :

۱ـ چهار وجهی **ABCD** را مشابه مثلث مسطح **ABC** فرض می‌کنیم .

برای مثلث مسطح رابطهٔ زیر را ثابت می‌کنیم :

$$a \cdot \cos B + b \cdot \cos A = c$$

برای بدست آوردن مشابه فضائی این رابطه بهتر است طول اضلاع **a** و **b** و **c** مثلث را به‌مساحت وجوه S_a ، S_b ، S_c، S_d چهار وجهی و زاویه‌های **A** و **B** و **C** مثلث را به‌فرجه‌های نظیر یالهای چهار وجهی بدل کنیم .



تفاوت در تعداد اضلاع مثلث و تعداد وجوه چهار وجهی و همچنین تعداد زوایای مثلث و تعداد فرجه‌های چهار وجهی مانعی در بدست‌آوردن تشابه بین آن دو نمی‌باشد . برای چهار وجهی داریم :

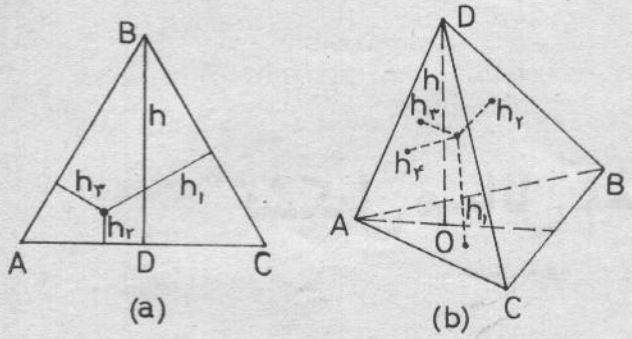
$$S_a \cdot \cos\alpha + S_b \cdot \cos\beta + S_c \cdot \cos\gamma = S_d$$

که درآن α ، β ، γ فرجه‌های به‌یالهای **BC** و **AC** و **AB** می‌باشند .

فرض کنیم h_1 ، h_2 ، h_3 فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از اضلاع مثلث و **h** ارتفاع مثلث باشد. h_1 و h_2 و h_3 و h_4 نیز فاصله‌های نقطهٔ دلخواه در داخل چهار وجهی منتظم از وجوه و **h** ارتفاع آن چهار وجهی باشد. برای مثلث و چهار وجهی به‌ترتیب داریم :

$$h_1 + h_2 + h_3 = h$$

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$$



۳ـ چهارضلعی با اقطارش را می‌توان یك شش ضلعی نامید بطوری که اقطار آن مانند دو ضلع مقابل هم ازشش ضلعی فرض می‌شوند. چهار وجهی را می‌توان یك شش ضلعی فضائی پنداشت. در بعضی موارد چهار وجهی را می‌توان مشابه شش ضلعی مسطح انگاشت.

قضیهٔ زیر ازهندسهٔ مسطحه رافرموله‌می کنیم: برای آنکه اقطار چهار ضلعی برهم عمود باشند، لازم وکافی است، که مجموع مربعات اضلاع متقابل با هم برابر باشند.

برای شش ضلعی مسطح قضیه را می‌توان به‌صورت زیر فرموله کرد :

برآنکه دو ضلع متقابل برهم عمود باشند ، لازم و کافی است، که مجموع مربعات هرجفت ضلع مقابل با هم برابر باشند.

پس از اثبات این قضیه می‌توان به‌دانش‌آموزان پیشنهاد کرد که قضیهٔ فضائی نظیر (مشابه) را فرموله کنند: برای آنکه دو یال مقابل چهار وجهی برهم عمود باشند لازم وکافی است، که مجموع مربعات هر جفت یال مقابل با هم برابر باشند.

۴ـ مسئله‌ای مطرح می‌کنیم :

مطلوبست تعیین قضیه‌ای مشابه قضیهٔ سینوسها (در هندسهٔ مسطحه در مورد مثلث) برای چهار وجهی.

در مثال اول ما گفتیم که بهتر است طول اضلاع را به‌مساحت وجوه چهار وجهی و زوایای مثلث را به فرجه‌های نظیر یالهایش بدل کنیم . قضیهٔ زیر برقرار خواهد بود :

فرض کنیم $A_1A_2A_3A_4$ چهار وجهی باشد که در آن :

$$S_{A_2A_3A_4} = S_1 \quad \text{و} \quad S_{A_1A_3A_4} = S_2 \quad \text{و}$$

$$S_{A_1A_2A_4} = S_3 \quad \text{و} \quad S_{A_1A_2A_3} = S_4$$

در این صورت :

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\alpha - 2S_4S_2\cos\beta - 2S_3S_4\cos\gamma$$

که درآن α ، β ، γ فرجه‌های به‌یالهای A_1A_4 و A_1A_3 و A_1A_2 می‌باشند.

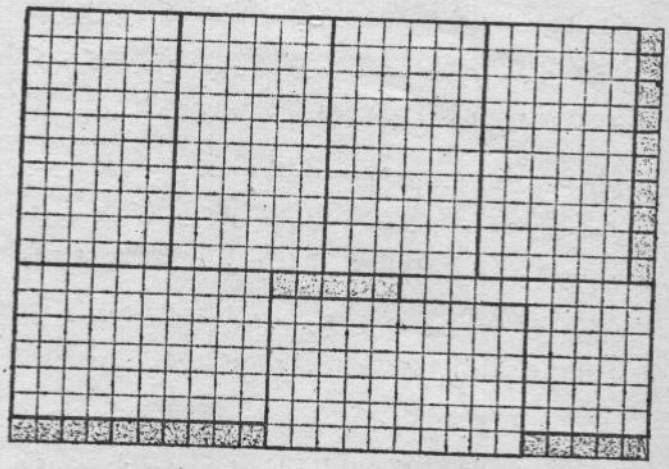
نه مسئله

نوشتهٔ مارتین گاردنر

ترجمهٔ: مهندس داوید ریحان

۱ـ هفت برگ کاغذ

یك برگ کاغذ به عرض ۱۷ سانتیمتر و به طول ۲۵ سانتیمتر دارای مساحتی برابر با ۴۲۵ سانتیمتر مربع خواهد بود. هفت برگ کاغذ به‌عرض ۶ سانتیمتر و به‌طول ۱۰ سانتیمتر جمعاً دارای مساحتی برابر با ۴۲۰ سانتیمتر مربع می‌باشند. واضح است که تمام سطح برگ کاغذ بزرگ را نمی‌توان با هفت برگ اخیر کاملا پوشانید، پس اگر چنین امکان وجود ندارد، بیشترین سطحی از آن راکه می‌توان پوشانیدچقدراست؟ برگها را باید مسطح‌وار وبدون اینکه تاخورده باشد و یااینکه آنها راببریم، روی‌کاغذ بزرگ قرار دهیم. این برگها می‌توانند درگوشه‌های‌یشان رویهم قرارگیرند واضلاعشان حتماً لازم‌نیست موازی با برگ کاغذ بزرگ باشند. شکل زیر، چگونگی پوشانیدن برگ‌کاغذ را به نحوی که مساحتش ۳۹۵ سانتیمتر مربع شود، نشان می‌دهد. ولی این طریقه، بیشترین سطح‌پوشش را نشان نمی‌دهد.



در خانواده، همه، پیر و جوان می‌توانند به این مسئله بپردازند. کافی است یك قطعه مقوا به عرض ۱۷ و طول ۲۵ سانتیمتر وهفت مربع مستطیل ۶ در ۱۰ سانتیمتر تهیه کنید. بهتر است قطعهٔ مقوا را بوسیلهٔ مربعهای به ضلع یك سانتیمتر، به صورت چهارخانه در آورید؛ تابدین وسیله بتوانید سطح‌پوشانیده شده را محاسبه کنید.

این مسئله‌برای‌اولین بار بوسیلهٔ جك‌هالیبورتون در مجلهٔ تفریحات ریاضی، دسامبر ۱۹۶۱ مطرح شده است.

۲ـ نمودار بدون رنگ آبی

شش هنرپیشهٔ زن‌مشهور هالیوود تشکیل یك گروه اجتماعی با خصوصیتی‌کاملا بارز می‌دهند. وقتی آنها را دو به دو درنظر بگیریم یا همدیگر را دوست دارند ویااز یکدیگرمتنفرند ودر ضمن هیچ مجموعهٔ سه عضوی از آنها را نمی‌توان یافت که همدیگر را دوست داشته باشند. ثابت کنید که حداقل یك مجموعهٔ سه عضوی می‌توان یافت که از یکدیگر متنفر باشند. این مسئله منتهی به یکی از زمینه‌های بسیار جالب از نظریهٔ نمودارها (گرافها) می‌شودکه به نام «نمودارهای رنگین بدون آبی» نامیده می‌شود که پس از یافتن جواب مسئله دربارهٔ آن توضیح خواهیم داد.

۳ـ دو بازی در مقابل هم

یك ریاضیدان، همسر وپسرش‌که حداقل بیست‌ساله‌است، بازی شطرنج را کاملا صحیح بازی می‌کنند. روزی، پسر از پدرش مبلغی پول برای یك شب‌نشینی‌که در شنبهٔ آینده در پیش بود، تقاضا کرد؛ پدر پس‌از اینکه لحظه‌ای به‌پیپ خود پك زد، به وی چنین پاسخ داد:

ـ «امروز چهارشنبه است. امشب یك دست شطرنج بازی می‌کنیم، فردا عصر وجمعه هم دو دست دیگر بازی می‌کنیم. تو متناوباً با مادرت و من مسابقه خواهی داد. اگر دو دفعه پشت سر هم بردی، هرچه خواستی به تو خواهم داد.»

ـ «چه‌کسی اول بازی خواهد کرد، تو یا مادرم؟»

ـ «در این‌باره خودت می‌توانی تصمیم بگیری».

پسر می‌داند که پدرش خیلی بهتر از مادرش بازی می‌کند. برای اینکه وی بتواند بیشترین شانس را در بردبازی داشته‌باشد درکدامیك از ترتیبهای زیر باید شرکت کند؛ «پدر ـ مادر ـ پدر» یا «مادر ـ پدر ـ مادر»؟

این مسئلهٔ سرگرم کننده که بر نظریهٔ احتمالات مقدماتی استوار است. بوسیلهٔ لئومودز ازدانشگاه آلبرتا طرح شده‌است، برای جوابی که می‌دهید، باید اثباتی داشته باشید.

۴ـ دو مسئلهٔ حرفی

دربسیاری از این مسائل، برای حل مسائل حسابی‌ساده، به جای حروف مختلف، از رقمهای مختلفی استفاده می‌شود.

دو مسئلهٔ حرفی شکل زیر دارای حالت غیر مترقبه‌ای هستند چرا که از این قانون تبعیت نمی‌کنند ؛ معهذا با یك استدلال منطقی می‌توان آنها را پاسخ گفت و برای مسائل تنها یك جواب وجود دارد.

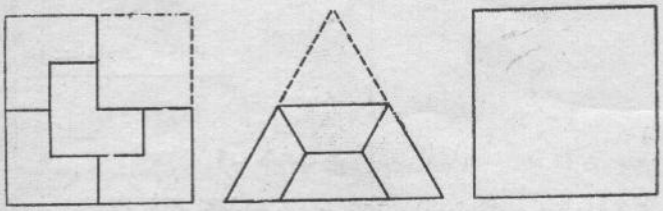
```
      E E O×          P P P×
        O O             P P
    ---------       ---------
    E O E O         P P P P
    E O O         P P P P
    ---------     ---------
    O O O O O     P P P P P
```

در مسئلهٔ ضرب شکل چپ ، هر E معرف یك رقم زوج و هر O معرف یك رقم فرد است. این موضوع که به جای هر رقم زوج حرف E را قرار داده‌ایم بدین معنی نیست که این ارقام همگی یکسانند. یك E می‌تواند معرف رقم ۲ باشد و E دیگر می‌تواند برابر با ۴ باشد. رقم صفر به عنوان یك رقم زوج تلقی می‌شود. درضرب سمت راست هر P معرف یك رقم اول است. بااین توضیحات ،مقادیر حقیقی این اعدادرا بدست آورید.

۵ـ برش مربع

اگر از یك مربع کامل ، یك چهارمش را حذف کنیم، آیا می‌توان سطح باقیمانده را به‌چهار قطعهٔ هم نهشت (= قابل انطباق) تقسیم کرد؟ بله، همانطورکه در شکل زیر (سمت چپ) دیده می‌شود، می‌توان چنین کرد. به همین ترتیب، هرگاه از قسمت فوقانی یك مثلث متساوی‌الاضلاع، یك‌چهارمش را ببریم، قطعهٔ باقیمانده را می‌توان به چهار قطعهٔ هم نهشت بخش کرد.

چگونگی عمل در وسط شکل زیر نمایانده شده‌است. این مثالها نمونه‌هایی از یك نوع مسائل هندسی بشمار می‌آیند. در این گونه مسائل ، منظور آن است که یك شکل داده شده را چنان ببریم که بخشهای پدید آمده با یکدیگر هم نهشت بوده و پس‌از اینکه آنهارا پهلوی یکدیگر قراردهیم، تمامی‌شکل راپوشانند.



آیا می‌توان مربع سمت راست شکل بالا را به پنج بخش هم‌نهشت تقسیم کرد ؟ بلی وجواب منحصر به‌فرد است. جوابها را می‌توان به هر شکل پیچیده‌ای انتخاب کرد، تنها بایدتوجه داشت که شکلهای پدید آمده همه باید هم نهشت باشند. یك‌شکل نامتقارن را می‌توان پشت و روکرد، بدین ترتیب می‌توان آنرا مانند تصویر آیینه‌ای‌اش در نظر گرفت، این مسئله پیش‌ازآنکه پاسخ خیره کننده‌اش در مقابل چشمان شما قرار گیرد، بنظر می‌رسد که غیر قابل حل است!

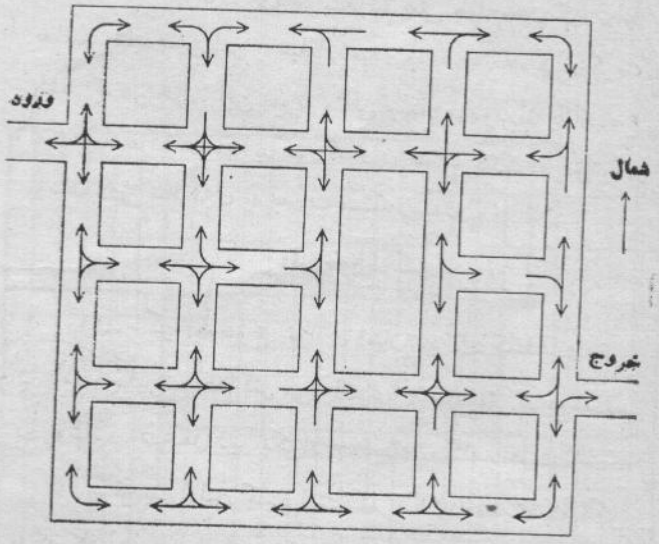
۶ـ گردش در شهر فلویدناب

رابرت ابوت در یکی از تألیفهای خود ضمن چاپ نقشهٔ شهر فلویدناب چنین شرح می‌دهد:

«چون شهر فلویدناب در ایندیانا فقط دارای سی و هفت اتومبیل بود که منظماً به ثبت رسیده بود، شهردار اینطورفکر کرد که اوضاع عبور ومرور را به پسر عمویش هانری استابل که مردی خوشگذران بود بسپارد، اوضاع در امن‌وامان خواهد بود. ولی خیلی زود به اشتباه خود پی برد . یك روز صبح، متوجه شد که در کنار خیابانها و چهار راهها علائم راهنمائی را قرار داده‌اند که در نتیجهٔ آن خیابانهای زیادی یکطرفه شده بود و دورزدنهای مجاز و ممنوع نیز در بین آنها دیده می‌شد.

شهرنشینان همگی عقیده داشتند که این تابلوها را باید از جای کند، تا اینکه رئیس پلیس که یکی دیگر از پسرعموهای شهردار بود، کشف خارق‌العاده‌ای کرد. اتومبیل سوارهای خارجی که از شهر عبور می‌کردند، با توجه به ممانعتهایی که وجود دارد، در جایی که حق عبور یا دور زدن ندارند، خلاف می‌کنند، رئیس پلیس ملاحظه کرد که بدین وسیله می‌تواند بیش

از مقرراتی که مربوط به سرعت مجاز می‌شد و در راههای کم اهمیت اطراف مورد اجرا بود، پولی در آورد.



همهٔ اهالی شهر شاد شدند، به‌ویژه برای اینکه روزجمعه بود و هر شنبه موزمك آدام، ثروتمندترین مزرعه‌دار اطراف مجبور بود که از شهر عبور کند تا به منطقهٔ ارباب‌نشین برسد. اهالی شهر امیدوار بودند که غرامت سنگینی از موز که حتی یك بار هم خلاف نکرده بود، دریافت کنند. اما موز قبلا علائم راهنمائی را مورد مطالعه قرار داده و به رازشان پی برده بود. وقتی شنبه صبح فرا رسید. وی بدون اینکه هیچگونه خلافی مرتکب شود، از مزرعه تا منطقهٔ ارباب‌نشین رفت و با این کار خود همهٔ اهالی شهررا انگشت به دهان باقی گذاشت.

آیا می‌توانید مسیر موز را کشف کنید؟ در هر چهار راه باید در امتداد یکی از پیکانها رفت. یعنی، فقط باید از جهتی که یك علامت گردش در این جهت وجود دارد، رفت و اگر علامت عبور مستقیم وجود دارد، به‌راه راست ادامه داد. دورزدن با دندهٔ عقب نیز مجاز نیست. در ضمن، در روی شوسه نمی‌توان نیم دور زد. از هر چهار راه فقط باید از جهت علامت حرکت کرد. بدین ترتیب که در اولین چهار راهی که از مزرعه می‌رسیم، فقط دو راه وجود دارد: یا به طرف شمال برویم و یا اینکه مستقیماً به طرف جلو حرکت کنیم. اگر مستقیماً حرکت کنیم، پس از رسیدن به چهارراه بعدی یا باید مستقیماً به راه ادامه داد و یا اینکه به طرف جنوب دور زد. درست است که یك خط منحنی به طرف شمال وجود دارد ولی به‌یك پیکان‌ختم نمی‌شود و بدین سبب در این چهار راه دور زدن به طرف‌شمال ممنوع است.»

۷ـ یادداشتهای لیتوود

گهگاه پشت جلدهایی از مجلات را دیده‌اید که رویشان عکس خود مجله چاپ شده است ودر روی عکس نیز عکس‌مجله چاپ شده و باز عکس‌خود مجله‌به‌صورت کوچکتر چاپ شده‌است و به‌همین نحو شاید تا بینهایت مرتبه این عمل انجام شده باشد. این تنزل بینهایت مرتبه که به‌عنوان مثال ذکر کردیم یکی‌از سرچشمه‌های بسیار مشهور از اشتباههای منطقی و معانی بیان می‌باشد. گاهی اوقات می‌توان به چنین سلسله مراتب بدون انتهائی رسید ولی این عمل همیشه امکان ندارد.

ریاضیدان بریتانیایی لیتوود با توجه این موضوع سه یادداشت راکه در پائین یك برگ از یکی از یادداشتهایش‌چاپ شده بود، یادآوری کرده است. وی این موضوع را در یك روزنامهٔ فرانسه زبان چاپ‌کرده وسه‌یادداشتش که به‌زبان‌فرانسه چاپ شده بود، چنین بود:

«۱ـ من از پروفسور ریز (Riesz) که در ترجمهٔ‌این مقاله مرا یاری کرده است، سپاسگزارم.»

«۲ـ من از پروفسور ریز که یادداشت پیشین را ترجمه کرده است، متشکرم».

«۳ـ من از پروفسور ریز که یاداشت پیش را ترجمه کرده است، سپاسگزارم.»

با توجه به اینکه لیتوودحتی یك‌کلمه فرانسه نمی‌دانست به چه دلیلی پس از سومین یادداشت، دست از سر رشته‌های‌نامحدود از یادداشت‌های یکسان برداشته است؟

۸ ـ از ۹ تا ۱ مساوی با ۱۰۰

یك مسئلهٔ قدیمی عددی‌که امروز درگزیده‌های مخصوص به عنوان یك کشف به ثبت نرسیده وبچاپ می‌رسد چنین‌است:

علامتهای چهار عمل اصلی را بطور دلخواه بین رقمهای ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ طوری قرار دهیم که حاصل عبارت برابر با ۱۰۰ شود. رقمها همواره باید در همین ترتیب باشند. صدها پاسخ برای این مسئله وجود دارد و ساده‌ترینشانرا که می‌توان به سادگی یافت عبارت است‌از:

$$1+2+3+4+5+6+7+(8\times 9)=100$$

اگر مقید به‌استفاده از علامتهای جمع وتفریق تنها باشیم، مسئله کمی دشوارتر می‌شود. معهذا پاسخهای زیادی چون مثالهای‌زیر

وجود دارد:

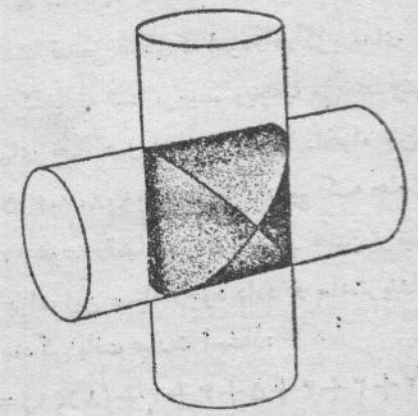
$$1+2+34-5+67-8+9=100$$
$$12+3-4+5+67+8+9=100$$
$$123-4-5-6-7+8-9=100$$
$$123+4-5+67-89=100$$
$$123+45-67+8-9=100$$
$$123-45-67+89=100$$

هانری ارنست دودنی در جوابی که برای این مسئله عنوان کرده است می‌نویسد که «آخرین جواب کاملا ساده است و فکر نمی‌کنم جوابی ساده‌تر از این برای مسئله بتوان یافت».

با توجه به خواص این مسئله، شاید تعجب کنید ازاینکه باید مختصر کوشش برای مسئلهٔ درحالت عکس بخرج دهید، یعنی در حالتی که رقمها در ترتیب نزولی از ۹ تا ۱ قرار گیرند حاصلی برابر با ۱۰۰ بدهند ودر ضمن حداقل تعداد علامتهای جمع و تفریق در آنها بکار رود.

۹ـ استوانه‌های متقاطع

از میان کشفهای بزرگ ارشمیدس، می‌توان یکی راکه ملهم ازایده‌های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌شود، ذکر کرد. مسئله‌ای که در شکل زیر تصویر شده یکی ازمثالهای کلاسیکی است که به‌نظر بیشتر ریاضیدانان معاصر، بدون‌محاسبه نمی‌توان به جواب پی برد. حال آنکه بوسیلهٔ روش ماهرانهٔ ارشمیدس به سادگی جواب مطلوب بدست می‌آید. دو استوانهٔ با مقطع دایره یکدیگر را تحت زاویهٔ قائمه قطع کرده‌اند. در صورتی که شعاع هر کدام از دایره‌ها برابر با واحد باشد، حجم جسم مشترك دو استوانه چقدر است؟

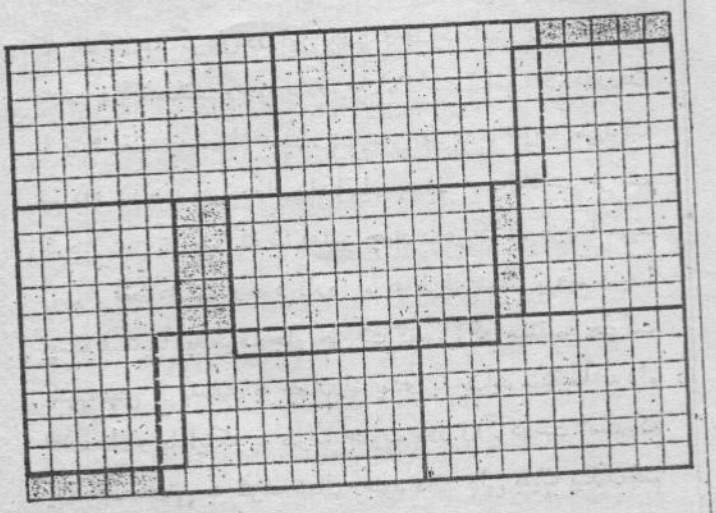


هیچ نسخه‌ای که دقیقاً روش ارشمیدس را در مورد حل مسئله بدهد در دست نیست. امروزه روش نسبتاً ساده‌ای برای‌حل مسئله وجود دارد؛ برای این منظور باید کمی بیش از فرمولی که مساحت دایره را می‌دهد بدانیم یعنی باید حجم کره را بدانیم. شایدهمین امر بوسیلهٔارشمیدس‌مورد استفاده قرارگرفته باشد. به هر حال. این نمونه مثالی بسیار مشهور از یك نوع استدلال‌است‌که در آن با کنارگذاردن حساب انتگرال می‌توان بوسیلهٔ روش ساده‌تری به جواب مسئله رسید.

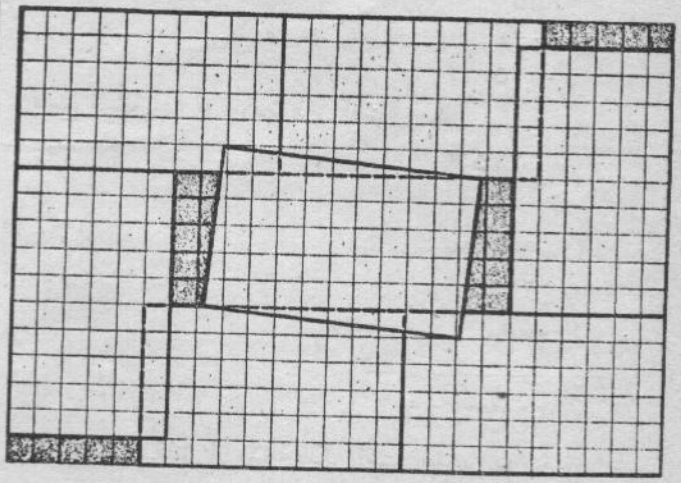
پاسخها

۱ـ اگر موضوع توازی اضلاع برگ کاغذها و مقوا را نادیده بگیریم، حداکثر می‌توان ۴۰۰ سانتیمتر مربع سطح را پوشانید. درشکل زیر یکی‌از جوابهای مسئله داده شده‌است.

استفن‌باد اولین کسی است که تذکر داده است که اگر برگ کاغذ وسطی را مانند شکل بعدی کج کنیم، می‌توان تقریباً ۴۰۰/۲۶۳۳۲ سانتیمتر مربع از سطح را پوشانید. دونالد واندرپول یاد آوری کرده است که اگر برگ کاغذ وسطی را که همواره مرکزش با مرکز مقوا منطبق است، کمی بیشتر بچرخانیم می‌توانیم سطح بیشتری را بپوشانیم. با محاسبه می‌توان زاویهٔ مربوط به پوشش حداکثر را بدست آورد. جیمز بلوك کشف اکرده است که این‌زاویه بین (۶°,۱۲′)و(۶,۱۳′) واقع است وبدون تغییر سطح پوشیده شده تا پنج رقم اعشارمی‌توان به ۴۰۰/۲۶۳۳۲ سانتیمتر مربع رسید. تاریخچهٔ این مسئله بوسیلهٔ جوزف ماداچی در ۱۹۶۶ در نیویورك چاپ

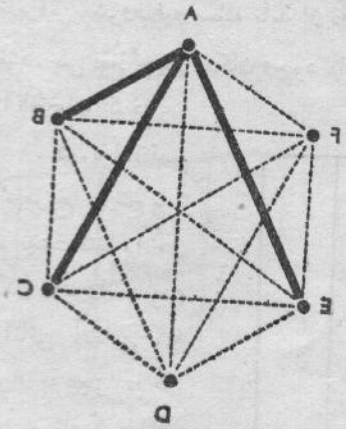


شده است. در این مقاله محاسبه‌ای که توسط رابینسون دو مربوط به زاویهٔ چرخش "۳۷/۸۹۷۳,۱۲',۶° وسطح ۴۰۰/۲۶۳۳۳۷۹۹۲ ذکر شده است.



۲ـ با اختیار دوشخص غیرمشخص از مجموعهٔ شش‌نفری، که دو به دو همدیگر را دوست داشته و یا از یکدیگر متنفر باشند و در ضمن هیچ گروه سه نفری نتوان یافت که همدیگر را دوست داشته باشند، مسئله بدین صورت عنوان خواهد شد که ثابت کنیم یك گروه سه نفری وجود دارد که از یکدیگر متنفرند.

این مسئله رابوسیلهٔ نمودار به‌راحتی می‌توان پاسخ گفت. شش نقطه معرف شش شخصیت می‌باشد. (شکل‌زیر) تمام‌جفتهای ممکن بوسیلهٔ خط‌چینی که معرف‌دوستی یا تنفر است به‌هم‌ربط پیدا می‌کنند. فرض می‌شود که دوستی با خطوط آبی و تنفربا خطوط‌قرمزرسم‌شوند.



شخص A رادر نظرمی‌گیریم. از پنج قطعه خطی که از آن منشعب می‌شوند، حداقل سه تای آنها باید از یك رنگ باشند. این استدلال در مورد هررنگ ویا هرکدام ازاین خطوط پا برجاست؛ بنابراین فرض می‌کنیم سه قطعه خط قرمز باشند (در شکل با خط پر نشان داده شده است). در صورتی که قطعات تشکیل دهندهٔ مثلث BCE آبی باشند، مجموعه‌ای سه شخصی داریم که همدیگر را دوست می‌دارند. ولی بنا به فرض این چنین مجموعه‌ای وجود خارجی ندارد. بنابراین حداقل یکی از اضلاع مثلث، بایدقرمز باشد. یقین داریم هر ضلعی که به‌عنوان قرمز درنظر می‌گیریم می‌توانیم یك‌مثلث کاملا قرمز تشکیل دهیم یعنی یك سه‌ضلعی که بوسیلهٔ خطوط تنفر به هم مربوط شده باشند، تشکیل دهیم. اگر فرض می‌کردیم که سه‌خط به‌جای اینکه قرمز باشند، آبی‌بودند، باز هم به همین نتیجه می‌رسیدیم. در این حالت، اضلاع مثلث BEC همگی قرمز بودند چرا که با یك ضلع آبی تولید یك مثلث کاملا آبی می‌شد. بطور خلاصه، حداقل باید یك مثلث‌کاملا قرمز یاکاملا آبی داشته باشیم. بنا به‌فرض امکان وجود یك‌مثلث کاملا آبی موجود نیست پس یك مثلث کاملا قرمز باقی می‌ماند.

می‌توان پا را از اینهم فراتر گذاشت. در صورتی که هیچ مثلث کاملا آبی وجود نداشته باشد، می‌توان (با استدلالی پیچیده‌تر) ثابت‌کرد که حداقل دو مثلث‌کاملا قرمز وجوددارد در تئوری‌گرافها، هر گراف رنگین از این نوع راکه دارای هیچ مثلث آبی نباشد به نام گراف رنگین بدون آبی نامیده می‌شود. اگر تعداد گره‌ها برابر با شش باشد، همانطور که در این مثال دیدیم، حداقل تعداد مثلثهای قرمز دو است.

وقتی عدهٔ گره‌های یك گراف بدون آبی از شش کمتر باشد، به راحتی می‌توان بدون مثلث قرمز آنرا رسم کرد. اگر عدهٔ گره‌ها هفت باشد. حداقل چهار مثلث قرمز وجود دارد. برای یك گراف بدون آبی هشت گره‌ای، عدهٔ می‌نیمم مثلثهای قرمز برابر باهشت است؛ در صورتی که گره‌ها به‌هشت عدد برسد، مثلثهای قرمز به سیزده عدد بالغ می‌گردد.

۳ـ ارزش بازی A (پدر) بیش‌از ارزش بازی B (مادر) است. در صورتی که‌منظور برد در دوبازی متوالی باشد، بهترین استراتژی چیست؟ ابتدا با A مقابله کند: بعد با B وبالاخره با A و یا اینکه با B، بعد A و در آخر با B؟

فرض می‌کنیم که احتمال برداز A برابر با P_1 واحتمال برداز B برابر با P_2 باشد. احتمال نبردن در مقابل A برابر با $1-P_1$ و احتمال نبردن از B برابر با $1-P_2$ است.

با رو در رو قرار گرفتن متوالی A،B،A می‌توان به دو طریق مختلف در بازی برنده شد:

۱ـ می‌توان در سه بازی برنده شد. احتمال این پدیده برابر است با:

$$P_1 \times P_2 \times P_1 = P_1^2 P_2$$

۲ـ می‌توان در دو بازی اولیه برنده شد . احتمال چنین ترکیبی برابر است با:

$$P_1 \times P_2 \times (1-P_1) = P_1P_2 - P_1^2P_2$$

۳ـ می‌توان در دوبازی آخری برنده شد. احتمال‌چنین ترکیبی برابر است با:

$$(1-P_1) \times P_2 \times P_1 = P_1P_2 - P_1^2P_2$$

با جمع‌این سه احتمال حاصل $P_1P_2(2-P_1)$ بدست می‌آید. در صورتی‌که حریفان به صورت **ABA** قرارگیرند، احتمال برد به صورت اخیر خواهد بود.

اگر مسابقات‌رابه‌صورت**BAB** درنظربگیریم محاسبه‌ای به‌همین نوع ثابت‌می‌کندکه احتمال‌برد سه‌بازی‌برابربا $P_1P_2^2$ است. احتمال‌برددر دومسابقهٔ‌اول $P_1P_2 - P_1P_2^2$ودرآخری $P_1P_2 - P_1P_2^2$خواهدبود . مجموع این سه‌احتمال برابر با $P_1P_2(2-P_2)$ است . حاصل اخیر احتمال بـرد دو مسابقهٔ متوالی را در صورتی‌که حریفان درترتیب **BAB** قرارگرفته باشند، نشان می‌دهد.

می‌دانیم که P_2 یعنی احتمال بردن از **B**، بیشتراز P_1 احتمال بردار**A** است؛ بنابراین‌واضح‌است‌که $P_1P_2(2-P_1)$ بزرگتر از$P_1P_2(2-P_2)$است. به بیانی دیگر، در صورتی که حریفان در ترتیب **ABA** قرار گرفته باشند، احتمال برد بیشتر است؛ اول با حریف قویتر، بعد با ضعیف و بالاخره بـا قوی مبارزه کند.

فردگالون ، دونالدمك ایور ، اکیواسکیدل، ارنست استیکس و جرج یوست اولین اشخاصی بـودند که روش منطقی زیر را که‌کمی غیر متنظره وعجیب بنظر می‌رسد، برای پاسخگوئی به‌پرسش اخیر فرستاده‌اند. برای اینکه پسر در دو بازی متوالی ببرد، لازم است که در دومین مسابقه برنده شود؛ بنابراین لازم است با حریف ضعیفتر مقابله کند . به علاوه، باید حداقل یك بار از حریف قویتر ببرد ؛ پس بهتر است دو مرتبه با این حریف رو در رو قرار گیرد تا این شانس را فزونی بخشد . نتیجه می‌شود که وی باید ترتیب **ABA** را برگزیند . **گالون** ثابت کرده است که مسئله را می‌توان بدون استفاده از احتمالات بدست آورد وجواب مسئله را می‌توان از روی حالات‌خاص غیرمشخص معلوم ساخت. یقیناً باید دو مسابقه را پشت سرهم ببرد و باید پدرش را برای یك مرتبه شکست دهدبنابراین واضح است‌که با دوبار حریف شدن باپدرش این شانس برد را زیاد می‌کند.

۴ـ مسئلهٔ اول فقط دارای یك جواب است:

۲۸۵ ×
۳۹

۲۵۶۵
۸۵۵

۱۱۱۱۵

پاسخ مسئلهٔ دوم به صورت زیر است:

۷۷۵ ×
۳۳

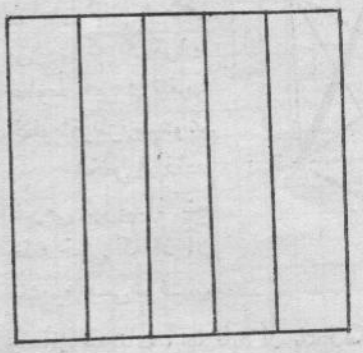
۲۳۲۵
۲۳۲۵

۲۵۵۷۵

این مسئله مشکلتر از مسئلهٔ دیگر است. بهترین روش‌برای حل این مسئله، بدون شك این است که تمام اعداد مرکب سه رقمی با ارقام اول را که پس از ضرب در یك عدد اول به یك عـدد چهار رقمی تبدیل می‌شوند، جستجو کنیم. فقط چهار تا از این اعداد وجود دارند:

۷۷۵ × ۳ = ۲۳۲۵
۵۵۵ × ۵ = ۲۷۷۵
۷۵۵ × ۵ = ۳۷۷۵
۳۲۵ × ۷ = ۲۲۷۵

هیچکدام از این اعداد سه رقمی بیش از یك مضروب‌فیه ندارد، بنابراین مضروب‌فیه مسئله باید از دو رقـم یکسان تشکیل شده باشد. پس فقط چهار امکان وجود دارد که یکی یکی باید آنها را امتحان کرد.



۵ـ برای‌تقسیم یك مربع به پنج پارهٔ هم نهشت تنها راه‌حل شکل روبرواست. عدم توانائی آنهایی کـه اقرار به عجز درحل این مسئله کرده‌اند، ناشی از ضعف‌آنهادر دید مسئله است.

۶ـ برای‌اینکه بتوان بدون ارتکاب به خلاف وپرداخت جریمه از فلویدناب عبور کرد ، می‌باید هر چهار راه را در

امتداهای زیر بپیماید (حرفهایی که بکار رفته یعنی آنکه : N جهت شمال، S جهت جنوب، E جهت مشرق و W جهت مغرب):

E-E-S-S-E-N-N-N-E-S-
W-S-E-S-S-W--W-W-W-N-N-
E-S-W-S-E-E-E-E-N-E.

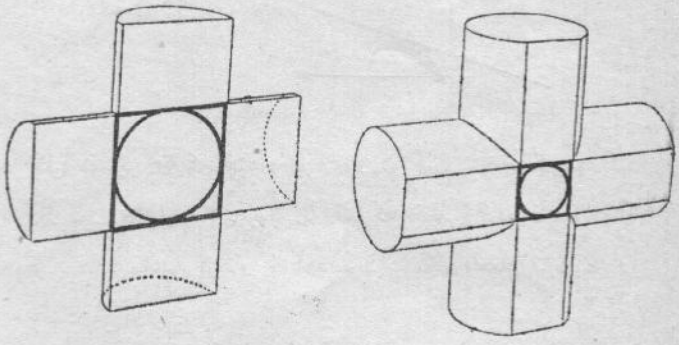
۷ـ لیتوود برای ابراز دلیل در مورداینکه چرا یك سری نامحدود از یادداشتهایی را که بوسیلهٔ دوستش ترجمه شده است، ننوشته چنین گفته است که: «می‌توانم یك جملهٔ نوشته شده به زبان فرانسه را رونویسی کنم!

۸ـ برای تشکیل عبارتی مساوی با ۱۰۰ لازم است چهار علامت جمع و تفریق را بین ارقامی که در ترتیب نزولی قرار گرفته‌اند، به ترتیب زیر قرار داد:

$$۹۸-۷۶+۵۴+۳+۲۱=۱۰۰$$

راه حلهای دیگری که در آنها از چهار علامت استفاده نشود، وجود ندارد.

۹ـ یك کره را در نظر می‌گیریم که شعاعش برابر با واحد بوده وداخل حجم مشترك دواستوانه قرار گیرد ومرکزش برنقطهٔ تلاقی محورهای استوانه‌ها منطبق باشد. به کمك صفحه‌ای که از محورهای استوانه‌ها ومرکز کره می‌گذرد تمام شکل را به‌دو قسمت می‌کنیم (طرف چپ شکل زیر). مقطع حجم مشترك بین دو استوانه یك مربع و مقطع کره دایره‌ای محاط در این مربع خواهد بود.



حال، استوانه‌ها وکره را بوسیلهٔ صفحه‌ای موازی باصفحهٔ اولیه که به کنارهٔ اجسام صلب اخیر نزدیکتر باشد قطع می‌کنیم (طرف راست شکل). مقاطع مسطح هر استوانه باز هم یك مربع مستطیل خواهد بود که اضلاع موازیشان پس از قطع یکدیگر تولید مربعی خواهند نمود که مقطع مسطح حجم مشترك خواهد بود مقطع مسطح کره همواره مربعی محاط در این دایره خواهد بود. باکمی تخیل و چندطرح مدادی به‌سادگی می‌توان دید که تمام مقاطع مسطح موازی بامحورهای استوانه‌ها به همین شکل است: مقطع مسطح حجم مشترك همواره به صورت مربعی محیط بر مقطع مسطح دایره‌ای کره است:

می‌توان فرض کرد که تمام این مقاطع چون صفحات یك کتاب بر روی یکدیگر قرار گیرند. واضح است که حجم کره برابر با مجموع تمام مقاطع دایره‌ای و حجم جسم مشترك دو استوانه برابر با مجموع تمام مربعها است، از این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که نسبت بین حجم مشترك استوانه‌ها به حجم کره برابر با نسبت سطح دایره به سطح مربع محیطی است. بامحاسبه‌ای سریع می‌توان نسبت $\frac{\pi}{۴}$ را بدست آورد. در صورتی که x حجم مطلوب باشد، معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}:x=\frac{\pi}{۴} \Longrightarrow x=\frac{۱۶r^{۳}}{۳}$$

در حالت خاص که شعاع برابر باواحد است، حجم مشترك دو استوانه برابر با $\frac{۱۶}{۳}$ خواهد بود. همانطور که خود ارشمیدس هم بر این موضوع واقف بوده است ، این مقدار دقیقاً دو سوم حجم مکعب محیط بر کره است که یالش برابر با قطر هراستوانه است.

برخی از خوانندگان این مقاله طی نامه‌هایی اطلاع داده‌اند که این راه حل مبتنی بر « تئوری کاوالیری» است که توسط بوناونتورا کاوالیری یکی از ریاضیدنـاان ایتالیائی قرن هفدهم وضع گردیده است . به زعم فرمون «ایرمن » « این قضیه به همین صورت ساده و بی‌پیرایه‌اش ثابت می‌کند کـه دو جسم وقتی که ارتفاعشان با هم برابر بوده و مقاطع مسطحشان که در یك طرف قاعده واقعند ، با هـم مساوی باشند. حجمشان با هم برابر خواهد بود . ولی برای اثبات این موضوع ، کاوالیری می‌باید برای تحقق اشکالش بـه کمك تیغه‌هائی که رویهم سوار می‌شده وتا حدادامه می‌یافته است، ازحساب دیفرانسیل‌وانتگرال استمداد می‌جسته است، » ارشمیدس بیش از این، از این اصل اطلاع داشته است. در اثری مفقود شده که در سال ۱۹۰۶ پیدا

بقیه در صفحهٔ ۴۴

مسئله‌هایی برای دبیرستانهای کشاورزی

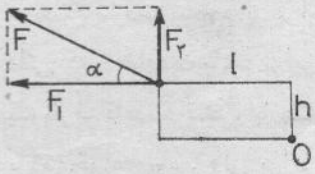
ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری

۱ـ ماشین بذرافشانی دارای مخزنی به حجم ۲۵۰ کیلو گرم گندم است، پهنای دریچهٔ بذرافشان‌چقدر باشد تا به ازای سرعت ۳/۲ کیلـومتر در ساعت و واحدکشت (مقدار بذر نظیر واحد سطح‌کشت) حداقل ۱۲۵ کیلوگرم در هر هکتار، محتوی مخزن بذر افشان برای حد اکثر دو ساعت و به‌ازای سرعت ۴ کیلومتر در ساعت و همان واحدکشت حداقل ۱/۲۵ ساعت کار ماشین کفایت کند؟

راهنمائی: به‌ازای‌واحدکشت برابر۱۲۵ کیلوگرم بر هکتار محتوی مخزن بذرافشان درست‌برای دوهکتار سطح‌کشت کفایت می‌کند. بنابراین مسئله به حل‌دستگاه نامعادله‌های زیـر منجر می‌گردد. که درآنها x پهنای‌دهانهٔ‌دریچهٔ بذرافشان برحسب متر است.

$$\begin{cases} ۲\times\frac{۳۲۰۰x}{۱۰۰۰۰}\geqslant ۲ \\ ۱/۲۵\times\frac{۴۰۰۰x}{۱۰۰۰۰}\leqslant ۲ \end{cases}$$

۲ـ تراکتوری‌مشغول کشیدن گاوآهن درسطح افقی‌است. درازا و بلندی‌گاوآهن روی سطح کشتزار به ترتیب برابر بـا l و h می‌باشد. به‌ازای چه‌مقدار از زاویهٔ α بین‌امتدادنیروی کشش‌تراکتور و امتدادافق، گاوآهن در موقـع حرکت متعادل خواهد ماند. یعنی‌لبهٔ جلوئی‌آن بالا نخواهد آمد. از وزن‌گاوآهن صرف‌نظر می‌شود.



راهنمائی: نیروی‌کشش‌تراکتور و زاویهٔ بین این‌نیرو و امتداد افق‌را به ترتیب با F و α نمایش می‌دهیم. داریم:

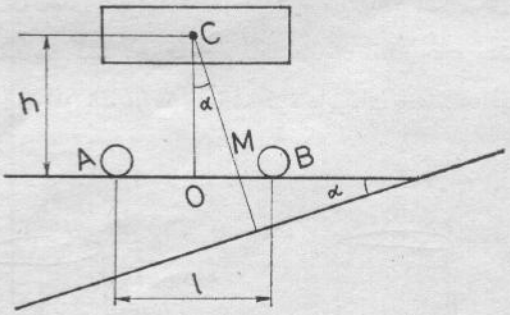
$$F_۲=F\sin\alpha \quad , \quad F_۱=F\cos\alpha$$

که $\alpha\geqslant ۰$ ولبهٔ جلوئی گاوآهن‌بالانخواهدآمداگرممان چرخشی $F_۱$ نسبت به نقطهٔ O کوچکتر از ممان‌نیروی $F_۲$ نسبت به‌همین نقطه نباشد. دستگاه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \alpha\geqslant ۰ \\ hF\cos\alpha\geqslant lF\sin\alpha \end{cases}$$

۳ـ مطلوبست حدود قابل قبول برای زاویهٔ شیب عرضی جاده‌برای ماشینی که ارتفاع مرکز ثقلش(در ظرفیت‌کامل) برابر h و فاصلهٔ بین دوچرخ هم محورآن برابر l باشد.

حل: فرض‌کنیم C مرکز ثقل ماشین، $OC=h$ ارتفاع مرکز ثقل، $AB=l$ فاصلهٔ بین دو چرخ هم محور و α زاویهٔ شیب عرضی جاده باشد کـه $\angle OCM=\alpha\geqslant ۰$. ماشین به‌ازای



کلیهٔ مقادیر α که امتداد نیروی وزن P از تکیه‌گاه عبورکند واژگون نخواهد شد. یعنی تا وقتی‌که نقطهٔ M در فاصلهٔ OB قرار دارد ماشین پایدار خواهد بود. دستگاه نامعادلات زیـر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} OM\geqslant ۰ \\ OM<OB \end{cases}$$

لیکن $OB=\frac{AB}{۲}=\frac{l}{۲}$ و $OM=CO\cdot tg\alpha=h\cdot tg\alpha$

پس:

$$\begin{cases} h\,tg\alpha > 0 \\ h\,tg\alpha < 0 \quad \frac{l}{2} \end{cases} \Longrightarrow \quad 0 < \alpha < Arctg\frac{l}{2h}$$

۴ـ در یك کارگاه تراکتورسازی چند الکترو موتور با توانهای N کیلو وات و ولتاژ تغذیهٔ V ولت موجودند . فاصلهٔ بین در خروجی کارگاه تـا جادهٔ اصلـی l کیلومتر ومقاومت مخصوص هادیهای کشیده شده از مدخل کارگاه تـا جادهٔ اصلی ρ می‌باشد .

مطلوبست تعیین مقطع این هادیها در صورتی که ولتاژ در جادهٔ اصلی V_1 ولت و افت ولتاژ در خطوط نباید بیش از V_2 ولت شود. (از مقاومت داخلی موتورها صرف نظر می‌شود.)

حل: فرض کنیم مقطع‌هادیهای مورد نظر S میلیمترمربع و R_1 مقاومت آنها و R_2 مقاومت نظیرعکس‌العمل‌موتورها باشد. باقرار دادن‌مجموع‌طول‌هادیهای‌رفت‌وبرگشت‌به‌جای l، درفرمول $R=\frac{\rho.l}{s}$ رابطهٔ زیر نتیجه می گردد.

$$R_1=\frac{2\rho.l}{s} \qquad (1)$$

هرگاه شدت جریان در هاری را I بگیریم، طبق قانون اهم :

$$I=\frac{V_1}{R_1+R_1} \qquad (2)$$

طبق‌فرض $IR_1 < V_2$ (۳) وچون‌ولتاژ روی موتور V_1-V_2 است‌با درنظر گرفتن $N=\frac{(V_1-V_2)^2}{R_2}$ خواهیم داشت:

$$R_2=\frac{(V_1-V_2)^2}{N} \qquad (4)$$

از رابطه‌های (۱) تا (۴) بدست می‌آوریم:

$$\frac{2V_1.\rho.l}{S.\left(\frac{2\rho.l}{S}+\frac{(V_1-V_2)^2}{N}\right)} < V_2$$

$$S > \frac{2\rho.l.N}{V_2(V_1-V_2)}$$

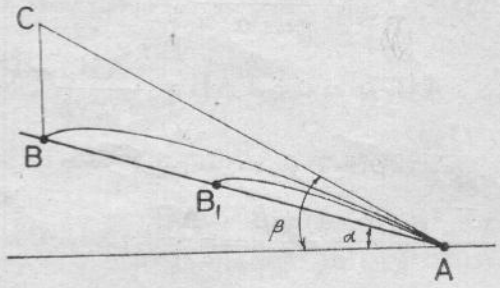
۵ـ کشتزاری‌درسطح شیبداری‌که با افق‌زاویهٔ α می‌سازد قرارگرفته و توسط دستگاه باران مصنوعی‌که در دامنهٔ کشتزار در نقطهٔ A نصب شده آبیاری می‌شود.

این‌دستگاه باران‌مصنوعی را تحت‌زاویهٔ β (نسبت به‌سطح افق) برروی کشتزار می‌پاشاند و باران‌تانقطهٔ B_1 از سطح‌شیبدار را می‌پوشاند. تعیین کنید با چه فشاری باران مصنوعی باید پاشیده شود تا فاصلهٔ AB_1 حداقل l متر گردد.

درحل‌مسئله این نکته را درنظرمی گیریم که در اثرمقاومت هواکه در مقابل پاشیدن باران مصنوعی وجود دارد مقدار واقعی بـرد باران مصنوعی عملا فقـط ۰/۳۷۵ مقدار محاسبه شده می‌باشد .

حل‌ـ فرض کنیم V_0 سرعت اولیهٔ ذرات باران مصنوعی باشدکه توسط دستگاه‌آبیاری به این ذرات‌داده می‌شود و t زمانی باشدکه این‌ذرت‌لازم دارند تا از نقطهٔA به‌نقطهٔ B برسند(بدون درنظر گرفتن مقاومت هوا)

تغییر مکان AB را می‌تـوان (طبق اصل مستقل بـودن هؤلفه‌های یك حرکت مرکب) مانند جمع هندسی دو تغییرمکان



$\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CB}$ بررسی‌کردکه اولی مسیر پیموده شده بـا سرعت ثابت V_0 در مدت زمان t و دومی مسیر پیموده شده به صورت سقوط‌آزاد در همین‌مدت t می‌باشد. (اولی‌از نقطهٔ A تا نقطهٔC و دومی از نقطهٔ C تـا نقطهٔ B) . از مثلث ACB بـدست می‌آوریم :

$$AB=\frac{AC\sin ACB}{\sin ABC}$$

$$\angle ABC=180^\circ-(90^\circ-\alpha)=90^\circ+\alpha$$

$$\angle BAC=\beta-\alpha$$

$$\sin ACB=\sin(ABC-BAC)=$$

$$=\sin(90^\circ+\beta)=\cos\beta$$

$$AB=\frac{AC.\cos\beta}{\cos\alpha} \qquad (1)$$

$$AC=V_0.t \qquad (2)$$

$$CB=\frac{g.t^2}{2} \qquad (3)$$

بنابر قضیهٔ سینوسها:

$$AC=\frac{CB\sin ABC}{\sin BAC}$$

$$AC=\frac{CB\cdot\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad (۴)$$

از رابطه‌های (۲)و(۳)و(۴) بدست می‌آوریم:

$$t=\frac{۲V_{\circ}\sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha} \qquad (۵)$$

از رابطه‌های (۲)و(۵) بدست می‌آید:

$$AC=\frac{۲V_{\circ}^{۲}\sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha} \qquad (۶)$$

از رابطه‌های (۱)و(۶) بدست می‌آید:

$$AB=\frac{۲V_{\circ}^{۲}\sin(\beta-\alpha)\cdot\cos\beta}{g\cos^{۲}\alpha} \qquad (۷)$$

لیکن $AB=\frac{AB_{۱}}{۰/۳۷۵}$ است که در آن $AB_{۱}$ بردمؤثر (برد واقعی با درنظر گرفتن مقاومت هوا) باران مصنوعی است.

$$\frac{۲V_{\circ}^{۲}\sin(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^{۲}\alpha}=\frac{AB_{۱}}{۰/۳۷۵} \qquad (۸)$$

طبق فرض $AB_{۱}>l$ پس:

$$\frac{۲V_{\circ}\sin(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^{۲}\alpha}>\frac{l}{۰/۳۷۵}$$

$$V_{\circ}^{۲}>\frac{g\cdot l\cos^{۲}\alpha}{۰/۷۵\sin(\beta-\alpha)\cos\beta} \qquad (۹)$$

فرض کنیم باران‌مصنوعی با فشار P نیوتن بر مترمربع و سرعت $V_{\circ}$ متر در ثانیه و چگالی ρ کیلوگرم برمتر مکعب پاشیده‌شود. چون $V_{\circ}=\sqrt{۲gh}$ و $P=\rho\cdot gh$ می‌باشدبنابراین $V_{\circ}^{۲}=\frac{۲P}{\rho}$ و نامساوی (۹)چنین می‌شود.

$$\frac{۲P}{\rho}>\frac{g\cdot l\cos^{۲}\alpha}{۰/۷۵\sin(\beta-\alpha)\cos\beta} \qquad (۱۰)$$

$$P>\frac{\rho\cdot l\cos^{۲}\alpha}{۱/۵\sin(\beta-\alpha)\cos\beta} \qquad (۱۱)$$

۶ـ گندم‌پاك نشده دارای k% سبوس (خاشاك) است. پس از هر باد دادن مقدار سبوس به اندازهٔ q% کاهش می‌یابد لیکن مقدار گندم ثابت باقی‌می‌ماند. چند بار این گندم را باید باد داد تا درصد سبوس آن به f% برسد؟

حل ـ Q کیلوگرم گندم پاك نشده دارای $\frac{Qk}{۱۰۰}$ کیلوگرم سبوس و $\frac{Q(۱۰۰-k)}{۱۰۰}$ کیلوگرم گندم خالص است. در طی باد دادن گندم مقدار گندم خالص ثابت مانده و مقدار سبوس آن کاهش می‌یابد.

در نتیجهٔ اولین بـاد دادن مقدار سبوس بـه انـدازهٔ : $\frac{Q\cdot k}{۱۰۰}\times\frac{q}{۱۰۰}$ کیلوگرم کاهش یافته وبه:

$\left(\frac{Q\cdot k}{۱۰۰}-\frac{Q\cdot k}{۱۰۰}\times\frac{q}{۱۰۰}\right)$ کیلوگرم یعنی $\frac{Q\cdot k}{۱۰۰}\times\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}$ کیلوگرم می‌رسد.

دومین باد دادن مقدار سبوس را تا $\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}$ مقداری کـه پس از باد دادن اولـی بدست آمد مـی‌رساند و در نتیجه $\frac{Q\cdot k}{۱۰۰}\left(\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}\right)^{۲}$ کیلوگرم می‌شود.

پس از n بـار بـاد دادن گندم، مقدار سبوس درآن بـه $\frac{Q\cdot k}{۱۰۰}\left(\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}\right)^{n}$ کیلوگرم و وزن گندم برحسب کیلوگرم برابر می‌شود با:

$$\left[\frac{Q\cdot k}{۱۰۰}\left(\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}\right)^{n}+\frac{Q\cdot(۱۰۰-k)}{۱۰۰}\right]$$

طبق فرض مسئله نامساوی زیر را بدست می‌آوریم

$$\frac{\frac{Q\cdot k}{۱۰۰}\left(\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}\right)^{n}}{\frac{Q\cdot k}{۱۰۰}\left(\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}\right)^{n}+\frac{Q(۱۰۰-k)}{۱۰۰}}\leqslant\frac{f}{۱۰۰} \qquad (۱)$$

$$\left(\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}\right)^{n}\leqslant\frac{f(۱۰۰-k)}{k(۱۰۰-f)} \qquad (۲)$$

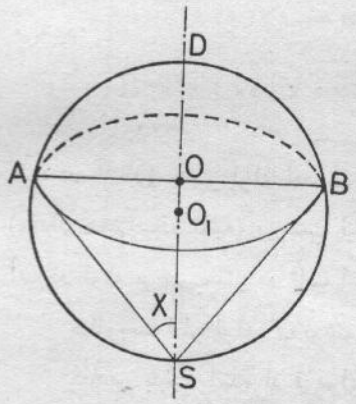
$$n\log\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}\leqslant\log\frac{f(۱۰۰-k)}{k(۱۰۰-f)} \qquad (۳)$$

با درنظر گرفتن اینکه $\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}<۱$ است بـدست می‌آوریم : $\log\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}<۰$ وازتقسیم‌طرفین‌نامساوی (۳)بر $\log\frac{۱۰۰-q}{۱۰۰}$ بدست‌می‌آید:

$$n > \frac{\log \frac{f(100-k)}{k(100-f)}}{\log \frac{100-q}{100}}$$

۷ـ دو دستگاه در یك ایستگاه باران مصنوعی موجوداست. در اولی آب از میان سوراخهایی که روی سطح قطاعی از کره تعبیه شده‌اند، پاشیده‌می‌شود. و در دومی آب از میان سوراخهایی روی قاعده و سطح جانبی مخروطی که دارای قاعده و ارتفاعی به ترتیب برابر با قاعده و ارتفاع همین قطاع کروی می‌باشند، پاشیده می‌شود. شعاع سوراخها و چگالی توزیع آبها روی این دو سطح و همچنین فشار آب در هر دو دستگاه آبی یکسان است.

تعیین کنید به‌ازای چه کمانی برای قطاع کروی (کمان ASB در شکل) بازدهٔ آبیاری دستگاه اولی بیش‌از بازدهٔ آبیاری دستگاه دوم می‌شود.



حل‌ـ به ازای شعاعهای مساوی و چگالی توزیع یکسان سوراخهای روی این دو سطح و همچنین فشارهای یکسان در زمانهای مساوی مقدار آب (باران مصنوعی) خارج شده از این دو دستگاه متناسب با مساحت سطح این دو دستگاه می‌باشد.

نامساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$2\pi \cdot O_1S \cdot OS > \pi \cdot AO \cdot AS + \pi AO^2$$

فرض کنیم $\angle ASO = x$ پس

$$OS = AS\cos x \quad \text{و} \quad O_1S = \frac{AS}{2\cos x}$$

و

$$AO = AS \cdot \sin x$$

خواهیم داشت:

$$\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$$

با حل این نامعادله به‌ازای $0 < x < 90^\circ$ نتیجه می‌گیریم که

$$0 < x < 38^\circ, 12'$$

به این ترتیب

$$\widehat{ASB} = 360^\circ - 4x$$

$$360^\circ - 38^\circ, 12' \times 4 < \widehat{ASB} < 360^\circ$$

$$208^\circ, 12' < \widehat{ASB} < 360^\circ$$

۸ـ فرمول رابطهٔ بین مسافتی که کامباین (دستگاه درو گندم) می‌پیماید تامخزن آن پرشود ومحصول گندم را بدست آورید. در فرمول بدست آمده بحث کرده و منحنی تغییرات آنرا رسم کنید.

حل‌ـ فرض کنیم $l(M)$ طول راهی باشد که طی آن مخزن دستگاه کامباین از گندم پر می‌گردد. هرگاه عرض وسیلهٔ درو کامباین $B[m]$ باشد مخزن کامباین پس از درو مساحتی برابر $l \cdot B$ مترمربع پرخواهد شد.

هرگاه حجم مخزن V تن گندم و محصول گندم y تن در هرهکتار باشد برای پرشدن مخزن لازم است سطح کشت معادل $\frac{V}{y}$ [هکتار] $= \frac{10^4 V}{y}$ [مترمربع] درو گردد. پس $\frac{10^4 V}{y} = l \cdot B$ و $l = \frac{10^4 V}{y \cdot B}$. چون برای هرماشین کامباین V و B مقادیر ثابتی هستند پس $k =$ ثابت $= \frac{10^4 V}{B}$ واز اینجا $l = \frac{k}{y}$ که معادلهٔ یك هذلولی متساوی‌الساقین است.

۹ـ شیر بادرجهٔ حرارت ابتدائی $t_N = 3^\circ$ پس از $z = 3/4$ ساعت درتبادل حرارتی با محیط خودبه درجهٔ حرارت $t_0 = 25^\circ$ می‌رسد. مطلوبست درجهٔ حرارت نهایی شیر t_K، در صورتی که، هرگاه شیر انتقال پیدا کند:

a) به حلبی پیچیده شدهٔ با برزنت، لیکن در تماس آزاد با هوا، که سطح آن $F = 0/66$ متر مربع و حجم آن ۵۰ لیتر.

b) به مخزنی که در معرض وزش باد قرار دارد (درهوای ابری) به‌طول $l = 3$ متر و قطر قاعدهٔ یك متر.

راهنمائی: t_K را می‌توان ازمعادلهٔ زیر بدست آورد:

$$\log \frac{t_0 - t_N}{t_0 - t_K} = \frac{0/4343 \cdot K \cdot Z}{M \cdot C}$$

که درآن F سطح ظرف به متر مربع

N جرم شیر به کیلوگرم

C گرمای ویژهٔ شیر برابر $0/94$ کالری بر کیلوگرم بر درجهٔ حرارت

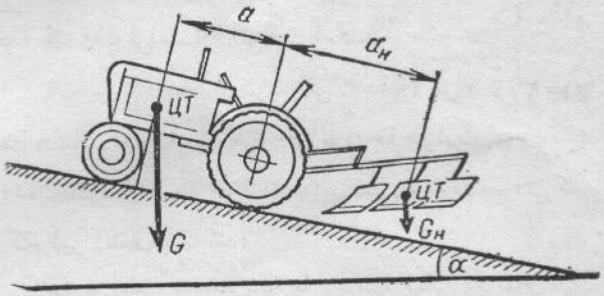
K ضریب هدایت حرارتی است که درحالت داده شده برابر ۱۰ است.

وزن مخصوص شیر ۱/۰۳۲ کیلوگرم بر دسیمتر مربع می‌باشد.

۱۰ـ در صورتی که (۱) $tg\alpha < \frac{a}{h}$ باشد تراکتور حول محورعقبیش واژگون خواهدشد. در رابطهٔ اخیر α زاویه‌ای است که به‌ازای آن تراکتور درامتداد محور طولیش شروع به واژگون شدن می‌کند، a فاصلهٔ افقی مرکز ثقل تراکتور تا محور عقبی آن برحسب متریامیلیمتر و h ارتفاع مرکز ثقل تراکتور بر حسب متریا میلیمتر است. بااستفاده از فرمول (۱)، مطلوبست تعیین زاویه‌ای که تراکتور تحت آن شروع به واژگون شدن می‌کند.

ارتفاع مرکز ثقل شاسی تراکتور $h=۸۰۰$ میلیمتر و فاصلهٔ مرکز ثقل تامحورچرخهای عقب $a=۵۲۳$ میلیمترمی‌باشد. (جواب $\alpha \approx ۳۳^\circ$)

۱۱ـ زاویهٔ بحرانی بالارفتن که تحت آن تراکتوردرحالی که گاوآهن به همراه دارد (در حالت آزاد) می‌تواند بطور متعادل حرکت کند و شروع به واژگون‌شدن بکند از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:



$$tg\alpha_{cr} = \frac{tg\alpha_{lim}(1-X_H)}{1+\delta_H} - f$$

که در آن X_H ضریب پایداری تراکتور است که از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$X_H = \frac{G_H \cdot a_H}{G \cdot a} = \delta_H \cdot \frac{ax}{a}$$

و G_H وزن گاوآهن برحسب کیلوگرم است

a_H فاصلهٔ افقی از مرکز ثقل گاوآهن تا محور عقبی تراکتور به متریا میلیمتراست.

مطلوبست محاسبهٔ زاویهٔ بحرانی بالا رفتن α_{rc}، که تحت آن تراکتوری که گاوآهن سه تیغه‌ای رابه‌همراه‌دارد بطورمتعادل در حالی‌که در حد واژگون شدن هست به حرکت خود ادامه دهد. وزن گاوآهن $G_H=۴۰۰$ کیلوگرم، فاصلهٔ افقی مرکز ثقلش از محور عقبی تراکتور $a_H=۱۸۵۰$ میلیمتر، وزن تراکتور $G=۳۲۰۰$ کیلو گرم، و ضریب تلفات حرکت $f=۰/۰۸$، و $a=۸۵۰$ میلیمتروو $h=۸۷۰$ میلیمتر است.

حل-

$$tg\alpha_{lim} = \frac{۸۵۰}{۸۷۰} \approx ۰/۹۸$$

$$X_H = \frac{G_H \cdot a_H}{G \cdot a} = \frac{۴۰۰ \times ۱۶۵۰}{۳۲۰۰ \times ۸۵۰} = ۰/۲۴۳$$

$$\delta_H = \frac{G_H}{G} = \frac{۴۰۰}{۳۲۰۰} = ۰/۱۲۵$$

$$tg\alpha_{cr} \frac{۰/۹۸(۱-۰/۲۴۳)}{۱+۰/۱۲۵} - ۰/۰۸ = ۰/۰۵$$

۱۲ـ مقدار قطر لوله‌های آب از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$D = \sqrt{\frac{۴Q}{۱۰۰۰\pi v}}$$

که در آن D قطر لولهٔ آب بر حسب متر، R دبی آب (مقدار حجم آب‌در ثانیه) برحسب لیتردرثانیه و v سرعت‌حرکت آب در لوله برحسب متر در ثانیه است.

مطلوبست قطر لوله‌های نوشته شده در جدول زیر:

مقادیر بدست آمده از فرمول فوق مسلماً قطرهای نرم نبوده و لوله‌ای راکه دارای قطرنزدیکتری به مقدار محاسبه‌شده داشته باشد انتخاب می‌کنیم. قطرهای استاندارد برای لوله‌ها بر حسب میلیمتر عبارتنداز:

D=۱۵,۲۰,۲۵,۳۲,۴۰,۵۰,۷۰,۸۰,۱۰۰
,۱۲۵,۱۷۵,۲۰۰,۲۲۵,۲۷۵,۳۰۰

N	Q	v	D
۱	۲	۱/۲	
۲	۲	۱/۵	
۳	۳	۱/۳	
۴	۶	۱/۶	
۵	۱۰/۳	۲/۰	
۵	۲۱	۱/۸	

مسائل برای حل

برای دانش‌آموزان سال اول دبیرستان

۱۱۰/۱ـ درهریك از حالتهای ششگانهٔ زیر معلوم کنید که کدام رابطهٔ $A=B$ یا $A\neq B$ درست است :

۱) $A=\{x \mid$ «ریاضیات» حرفی است از کلمهٔ $x\}$

$B=\{x \mid$ «رضایت» حرفی است از کلمهٔ $x\}$

۲) $A=$ «گناه» مجموعهٔ حرفهای کلمهٔ

$B=$ «گناهان» مجموعهٔ حرفهای کلمهٔ

۳) $A=$ «۱۲۴۱۳» مجموعهٔ رقمهای عدد

$B=\{x \mid x\in N$ و $x<5\}$

۴) $A=\{x \mid$ «تهران» حرفی است از کلمهٔ $x\}$

$B=$ «تهرانیان» مجموعهٔ حرفهای کلمهٔ

۵) $A=\{x \mid x\in N$ و $10\leqslant x\leqslant 100\}$

$B=\{x \mid$ عدد دو رقمی است $x\}$

۶) $A=$ مجموعهٔ عددهای چهار رقمی که مجموع رقمهای هریك از آنها برابر ۴۰ است.

$B=$ مجموعهٔ ماههای سال شمسی که ۴۰ روزه هستند.

۱۱۰/۲ـ دو عدد متمایز a و b چگونه باشند تا دو مجموعهٔ زیر با هم برابر باشند،

$$E=\{x \mid x\in R \text{ و } (x-a)(x-b)=0\}$$

$$F=\{x \mid x\in R \text{ و } (ax-1)(bx-1)=0\}$$

۱۱۰/۳ـ ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

از دو عدد زیر کدام بزرگتر است :

$$a=1+2+3+\dots+1'000'000$$

$$b=1\times 2\times 3\times\dots\times 19\times 20$$

۱۱۰/۴ـ ترجمهٔ از فرانسه

هرگاه x عددی گنگ و a و b و c و d چهار عدد گویا باشند، این عددها چگونه باشند برای آنکه $r=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ عدد گویا باشد.

۱۱۰/۵ـ چهار نقطهٔ A و B و C و D بر یك خط چنان واقعند که :

$$B\in[CD] \text{ و } C\in[AB]$$

حاصل $[AB]\cap[CD]$ و $[AB]\cup[CD]$ را معلوم کنید.

۱۱۰/۶ـ دو زاویهٔ مجاور و نابرابر xOy و yOz داده شده است. هرگاه Ot نیمساز زاویهٔ xOz و Ou نیمساز زاویهٔ xOy و Ov نیمساز زاویهٔ yOz باشد ثابت کنید که :

$$\angle uOt=\angle vOz \text{ و } \angle uOv=\angle xOt$$

و

$$\angle tOv=\angle xOu$$

برای دانش‌آموزان سال دوم علوم تجربی

۱۱۰/۷ـ فرستنده : **مهندس جواد فیض**

هرگاه داشته باشیم :

$$x^2-2x\sqrt{2}+\sqrt{3}=0$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$x^8-16x^6+8x^4-48x^2+9=0$$

۱۱۰/۸ـ ترجمهٔ از فرانسه

در متوازی الاضلاعی زاویه‌های بین دو قطر با زاویه‌های متوازی الاضلاع برابرند. ثابت کنید که قطرها با ضلعها متناسبند و نسبت آنها $\sqrt{2}$ است.

درحدود برنامهٔ سال دوم ریاضی، فیزیك

۱۱۰/۹ـ اولا معلوم کنید دو مجموعهٔ A و B چگونه باشند برای آنکه $A\times B$ با $B\times A$ برابر باشد.

ثانیاً هرگاه $A\times B=B\times A$ و داشته باشیم :

$A=\{x+y\ ،\ ۱\}$ ، $B=\{x-y\ ،\ ۳\}$

مقادیر x و y را بدست آورید.

۱۱۰/۱۰ـ برای سه مجموعهٔ A و B و C ثابت کنید که :

$$[A\times B=A\times C \text{ و } A\neq\varnothing]\Longrightarrow B=C$$

۱۱۰/۱۱ـ هرگاه داشته باشیم :

$$f(x)=ax^۲+bx+c$$

$$f(۰)=m \text{ و } f(۱)=۳m \text{ و } f(۲)=۷m+۲$$

ضریبهای a و b و c را برحسب m بدست آورید.

۱۱۰/۱۲ـ هرگاه $x+\frac{۱}{x}=A$ باشد، عبارت زیر را برحسب A بنویسید و مرتب کنید:

$$P=x^۴-۳x^۲+۱-\frac{۳}{x^۲}+\frac{۱}{x^۴}$$

۱۱۰/۱۳ـ ترجمهٔ : **مهندس فتح‌الله زرگری :**

۱) در مربع ABCD از M وسط BC خطی عمود بر AM رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در N قطع کند. ثابت کنید که MN نصف AM است.

۲) ازمربعی یك رأس و وسط یك ضلع مقابل به‌آن رأس معلوم است. این مربع را رسم کنید.

۱۱۰/۱۴ـ ترجمهٔ از فرانسه

درمثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB=AC=m$ و $BC=n$ است برامتداد BC و در همان طرف C نقطهٔ P را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم و ازآن خط Δ را رسم می‌کنیم که AB را در D و AC را در E قطع کند. مقدار $\frac{BP}{BD}-\frac{CP}{CE}$ را برحسب m و n بدست آورید.

راهنمایی ـ از A موازی با Δ رسم کنید.

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۱۰/۱۵ـ به‌فرض آنکه $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ باشد، مقدار $S=\sqrt[۴]{x_۱}+\sqrt[۴]{x_۲}$ را بدست آورید.

۱۱۰/۱۶ـ در دایرهٔ جهت‌دار، اندازهٔ کمان به مبدأ A و منتهای M برابر با ۹۵۰ گراد و اندازهٔ کمان به‌مبدأ A و منتهای N برابر با $-\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان است، کوچکترین مقدار مثبت اندازهٔ کمان به‌مبدأ M و منتهای N چند درجه است ؟

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۱۱۰/۱۷ـ ترجمهٔ **مهندس فتح‌الله زرگری**

معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$x=a-b(a-bx^۲)^۲$$

۱۱۰/۱۸ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} ۲(x-y)=۷(\sqrt[۳]{x^۲y}-\sqrt[۳]{xy^۲}) \\ \sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}=۳ \end{cases}$$

۱۱۰/۱۹ـ در چهار ضلعی محاطی ABCD اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ A و B پدید می‌آید برابر با $۸۳\frac{۱}{۳}$ گراد و تفاضل اندازهٔ زاویهٔ A بر اندازهٔ زاویهٔ B برابر با $\frac{\pi}{۱۸}$ رادیان است. اندازه‌های زاویه‌های چهار ضلعی را برحسب درجه حساب کنید.

۱۱۰/۲۰ـ بردایرهٔ جهت دار به‌مبدأ A دو نقطهٔ M و N داده شده است. از P وسط کمان MN خطی موازی با وتر AN رسم می‌کنیم که دایره را در Q تلاقی می‌کند. هرگاه اندازهٔ کمان AP برابر با ۱۶۵ درجه و اندازهٔ کمان AQ برابر با ۵۰ گراد باشد، فرمول کلی اندازه‌های دو کمان AM و AN را برحسب رادیان بدست آورید.

۱۱۰/۲۱ـ دو صفحهٔ P و Q بریکدیگر عمودند و Δ فصل مشترك آنهاست. از نقطهٔ S واقع بر Δ خط Sx را در صفحهٔ P و خط Sy را در صفحهٔ Q رسم می‌کنیم. صفحهٔ R که در نقطهٔ A عمود برخط Sx رسم شود با Sy در B و با Δ در C برخورد می‌کند. ثابت کنید که‌مثلث ABC قائم‌الزاویه است .

برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۱۱۰/۲۲ـ در رابطهٔ زیر y تابع x است. y' را بر

حسب x و y بدست آورید :

$$y^2 \cos x = x^3 \sin y + x^2 tg x$$

۱۱۰/۲۳ـ فرستنده : **مهندس جواد فیض**

از معادلهٔ زیر مقدار $t = tg\frac{x}{2}$ را برحسب a بدست آورید و به‌ازای $a = \sqrt{2}$ دستور کلی مقادیر جوابهای معادله را بنویسید :

$$(a+2)\sin x + (2a-1)\cos x = 2a+1$$

برای دانش‌آموزان کلاس ششم ریاضی

۱۱۰/۲۴ـ حد تابعهای زیر را حساب کنید :

۱) $y = \frac{1}{\cos x} - tg x \ , \ x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

۲) $y = \frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} \ , \ x \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

۱۱۰/۲۵ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

دو سهمی به‌معادله‌های :

$$y = x^2 \quad و \quad y = ax^2 + bx + c$$

در دو نقطهٔ A و B متقاطعند. از A خطی رسم می‌کنیم که سهمی اول را در M_1 و سهمی دوم را در M_2 قطع می‌کند. از B خطی رسم می‌کنیم که سهمی اول را در N_1 و سهمی دوم را در N_2 تلاقی می‌کند. ثابت کنید که دوخط M_1N_1 و M_2N_2 با هم موازیند.

۱۱۰/۲۶ـ فرستنده : **مهندس جواد فیض**

ثابت کنید که مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع

$$y = \frac{\sin mx}{\sin x}$$

از معادلهٔ $tg mx = m tg x$ بدست می‌آیند و نتیجه بگیرید که :

$$\sin^2 mx < m^2 \sin^2 x$$

۱۱۰/۲۷ـ فرستنده : **کاظم حافظ قرآن**

هرگاه داشته باشیم :

$$x\cos 2c + \cos 2(a-c)$$
$$= x\cos 2a + \cos 2(b-a)$$
$$= x\cos 2b + \cos 2(c-a)$$

ثابت کنید که خواهیم داشت :

$$\frac{tg a}{tg(b+c-a)} = \frac{tg b}{tg(c+a-b)} = \frac{tg c}{tg(a+b-c)}$$

۱۱۰/۲۸ـ ترجمهٔ : **مهندس زرگری**

آیا عدد پنج رقمی یافت می‌شود که در رابطهٔ زیر صدق کند :

$$\overline{abcbe} = a^5 + b^4 + c^3 + d^2 + e$$

۱۱۰/۲۹ـ ترجمهٔ : **مهندس زرگری**

مجموع رقمهای عدد x برابر y و مجموع رقمهای عدد y برابر z است. هرگاه $x+y+z=60$ باشد عدد x را بیابید.

۱۱۰/۳۰ـ ترجمهٔ : **مهندس زرگری**

دو دایره از مرکزهای یکدیگر می‌گذرند . از K نقطهٔ برخورد آنها خطی می‌گذرانیم که دایره‌ها را در M و N قطع کند. در این نقطه‌ها مماسهایی بر دایره‌های نظیر رسم می‌کنیم. زاویهٔ بین مماسها چقدر است؟

مسائل گوناگون

الف ـ مسئله‌های ترجمهٔ مهندس زرگری

۱۱۰/۳۱ـ پس از آنکه قیمتها کاهش یافت، مغازه‌داری از عروسکهایی که قبلا هریك را به ۵۰ ریال می‌فروخت آنچه که برایش باقیمانده بود همه را رویهم به ۳۱۹۳ ریال فروخت. درصد کاهش قیمتها چقدر بوده است؟

۱۱۰/۳۲ـ در جشن نوروز هریك از دانش‌آموزان یك کلاس توسط کارت پستی به یك یا چند نفر از همکلاسیهایش تبریك می‌گوید. هرگاه هر دانش‌آموز کارت تبریك از همکلاس خود دریافت کرده باشد. ثابت کنید که اقلا دو نفر از دانش‌آموزان به تعداد برابر کارت تبریك از همکلاسیهای خود دریافت کرده‌اند.

۱۱۰/۳۳ـ پنج عدد بخش‌ناپذیر بر ۵ را در نظر می‌گیریم. هریك از آنها را با تقریب نقصانی سر راست می‌کنیم تا بر ۵ بخش‌پذیر گردد. خطای حاصل در مجموع عددها چقدر است ؟

۱۱۰/۳۴ـ رابطهٔ زیر را بین شعاع دایرهٔ محیطی و میانه‌های هر مثلث ثابت کنید:

$$\frac{9R}{m_a + m_b + m_c} \geqslant 2$$

۱۱۰/۳۵ـ مقادیر A و ω و φ چگونه باشند تا تابع $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ به‌ازای همهٔ مقادیر x دررابطهٔ زیر صدق کند:

$$\mathrm{Min}(\sin x\ ,\ \cos x) < f(x) < \mathrm{Max}(\sin x\ ,\ \cos x)$$

ب ـ دو مسئله ، فرستنده : قوام نحوی

۱۱۰/۳۶ـ ثابت‌کنید که هر عدد به‌صورت $n=2^t$ را که t عدد صحیح ومثبت است‌نمی‌توان به‌مجموع چند عدد صحیح متوالی تبدیل کرد.

۱۱۰/۳۷ـ صحت رابطه‌های زیر را ثابت‌کنید :

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cdots}}}$$

$$\sqrt{a^2-b}=a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\cdots}}}$$

یك مسئله ، فرستنده : کاظم حافظ قرآن

۱۱۰/۳۸ـ مجموع n جمله‌از رشتهٔ زیر راپیداکنید

$$1+26+276+2776+27776+\cdots$$

دو مسئله، فرستنده : عباس جزء امیرسیافی

۱۱۰/۳۹ـ از رابطه‌های زیر رابطه‌ای مستقل از a بین x و y بدست آورید :

$$\begin{cases} x=\sin^m\alpha\cos^n\alpha \\ y=\sin^n\alpha\cos^m\alpha \end{cases}$$

۱۱۰/۴۰ـ ثابت‌کنید که عدد $2^{2^5}+1$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ سال اول دبیرستان

۱۱۰/۴۱ـ از گروههای اشیائی‌که زیر نام برده شده است‌کدامها مجموعه می‌باشند.

۱) سه روز از هفته ۲) شاعرهای ریاضیدان

۳) عددهای اول زوج

۴) عددهای اول‌که توان دوم می‌باشند.

الف ـ (۱) و (۲) و (۳) و (۴)

ب ـ (۲) و (۳) و (۴)

ج ـ فقط (۲) د ـ (۲) و (۳)

۱۱۰/۷۲ـ از مجموعه‌های پرسش پیش کدامها تهی می‌باشند؟

الف ـ هیچکدام ب ـ (۳) و (۴)

ج ـ فقط (۳) د ـ فقط (۴)

۱۱۰/۴۳ـ برای مجموعهٔ :

$$E=\{x\mid x\in N \text{ و } 1<x^2<25\}$$

از گزاره‌های زیر کدامها درست می‌باشد :

۱) $3\in E$ ۲) $-4\notin E$ ۳) $7\notin E$

۴) $-3\in E$

الف ـ فقط (۱) ب ـ (۱) و (۴)

ج ـ (۱) و (۲) و (۳) د ـ (۴)

۱۱۰/۴۴ـ مجموعهٔ عددهای طبیعی نسبت به‌کدام عملهایی‌که در زیر نام برده می‌شود بسته است ؟

۱) جمع ۲) تفریق ۳) ضرب

۴) توان (با نمای طبیعی) ۵) تقسیم

الف ـ (۱) و (۳) و (۴) ب ـ فقط (۱) و (۳)

ج ـ فقط (۱) د ـ (۱) و (۲) و (۳)

۱۱۰/۴۵ـ برای مجموعهٔ $A=\{0\ ,\ 1\ ,\ -1\}$ کدام یك از گزاره‌های زیر نادرست است :

الف ـ مجموعهٔ A نسبت به‌عمل جمع بسته است.

ب ـ مجموعهٔ A نسبت به عمل ضرب بسته است.

ج ـ مجموعهٔ A نسبت به‌عمل تفریق بسته نیست.

د ـ مجموعهٔ A نسبت به‌عمل تقسیم بسته نیست.

۱۱۰/۴۶ـ فرض می‌کنیم که S فضای هندسی، یعنی مجموعهٔ همه نقطه‌ها، و π یک صفحه و d خطی از صفحهٔ π باشد. در این صورت از گزاره‌های زیر کدامها درست می‌باشد.

۱) $\pi \subset S$ ۲) $d \in \pi$ ۳) $d \in S$

۴) $d \subset \pi$ ۵) $d \subset S$

الف ـ (۲) و (۳) ب ـ فقط (۱) و (۴)

ج ـ (۱) و (۴) و (۵) د ـ (۱) و (۲) و (۳)

۱۱۰/۴۷ـ هرگاه $M \in [AB]$ و $N \in [AB]$ در این صورت:

الف ـ $[MN] \in [AB]$

ب ـ $[MN] < [AB]$

ج ـ $[MN] \leqslant [AB]$

د ـ $[MN] \subset [AB]$

برای دانش‌آموزان سال دوم ریاضی، فیزیک

۱۱۰/۴۸ـ از جفتهای اشیائی که در زیر نام برده شده است کدامها جفتهای مرتب می‌باشند؟

۱) جفتهایی از خطها که یکی از آنها با دیگری موازی است.

۲) جفتها از پاره خطها که طول یکی کوچکتر از طول دیگری است.

۳) جفتهایی از عددهای طبیعی که یکی از آنها بر دیگری بخش‌پذیر است.

۴) جفتهایی از عددهای طبیعی که نسبت به‌هم اولند

الف ـ (۲) و (۳) ب ـ فقط (۲)

ج ـ فقط (۳) د ـ (۱) و (۴)

۱۱۰/۴۹ـ دو مجموعهٔ A و B داده شده است. هرگاه $a \in A$ و $b \in B$ باشد، جفت مرتب (a , b) به‌کدام یک از مجموعه‌های زیر تعلق دارد؟

الف ـ $A \cup B$ ب ـ $A \cap B$

ج ـ $A \times B$ د ـ $B \times A$

۱۱۰/۵۰ـ به‌ازای کدام مقدارهای a و b دو معادلهٔ $2x^2+ax+b=0$ و $(x-1)(x-2)=0$ هم‌ارز یکدیگرند؟

الف ـ $a=6$ و $b=-8$

ب ـ $a=6$ و $b=4$

ج ـ $a=-6$ و $b=4$

د ـ $a=-6$ و $b=-8$

۱۱۰/۵۱ـ هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=c \\ \dfrac{a'}{x}+\dfrac{b'}{y}=c' \end{cases} \quad \text{و} \quad \frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$$

الف ـ $x=0$ ب ـ مقدار x نامعین است

ج ـ مقدار y نامعین است. د ـ $y=0$

۱۱۰/۵۲ـ هرگاه حوزهٔ مجهول معادلهٔ:

$$(x+a)^2+a=0$$

مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد، درچه صورت مجموعهٔ جواب معادله تهی است؟

الف ـ هرچه باشد a ب ـ $a>0$

ج ـ a توان دوم نباشد د ـ $a<0$

۱۱۰/۵۳ـ دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند و بین اندازه‌های زاویه‌های آنها رابطه‌های زیر برقرار است:

$$A=2A' \text{ و } B'=2B \text{ و } A+B=C'$$

اندازهٔ زاویهٔ A چقدر است؟

الف ـ 30° ب ـ 90° ج ـ 80° د ـ 60°

۱۱۰/۵۴ـ دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند و نسبت تشابه آنها «۲» است. هرگاه طول میانهٔ AM از مثلث ABC برابر با ۶ واحد باشد، درمثلث $A'B'C'$ فاصلهٔ نقطهٔ G' نقطهٔ برخورد سه میانه از وسط ضلع $B'C'$ چقدر است؟

الف ـ ۱ یا ۴ ب ـ ۲ یا ۸

ج ـ ۳ یا ۱۲ د ـ ۳ یا ۴

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۱۰/۵۵ـ هرگاه $a+b+c=0$ باشد یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2-bx+c=0$ برابر است با:

الف ـ $\frac{c}{a}$ ب ـ $-\frac{c}{a}$ ج ـ $\frac{b}{a}$ د ـ $-\frac{b}{a}$

۱۱۰/۵۶ـ هرگاه $-۴<m<-۲$ باشد، معادلهٔ :

$$(m+۱)x^۲-۸x+m+۱=۰$$

الف ـ ریشه ندارد

ب ـ دو ریشهٔ مختلف العلامت دارد

ج ـ دو ریشهٔ مثبت دارد د ـ دو ریشهٔ منفی دارد

۱۱۰/۵۷ـ هرگاه $m<-۱$ باشد، سه جمله‌ای

$$mx^۲+(m-۱)x+m-۱$$

الف ـ به‌ازای هرمقدار از x منفی است.

ب ـ به‌ازای مرمقدار از x منبت است:

ج ـ دو ریشهٔ همعلامت دارد

د ـ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد.

۱۱۰/۵۸ـ کوچکترین زاویه‌ای که اندازهٔ آن برحسب درجه و همچنین برحسب گراد، عدد طبیعی (صحیح مثبت) باشد چند درجه است؟

الف ـ ۱۰° ب ـ ۹°

ج ـ ۴۵° د ـ ۹۰°

۱۱۰/۵۹ـ اگر اندازهٔ کمانی ۱۵۰ گراد باشد، کمان مکمل آن کدام است ؟

الف ـ ۴۵ گراد ب ـ $\frac{\pi}{۴}$

ج ـ ۱۳۵° د ـ ۳۰ گراد

۱۱۰/۶۰ـ چهار نقطه مفروض است به‌قسمی که سه عدد از آنها در یك طرف صفحهٔ P و چهارمی در طرف دیگر این صفحه واقع است. پاره خطهایی که چهار نقطهٔ مزبور را دوبه‌دو به‌هم وصل می‌کنند با صفحهٔ P چند نقطهٔ مشترك دارند ؟

الف ـ هیچ ب ـ شش ج ـ چهار د ـ سه

۱۱۰/۶۱ـ دو خط D و Δ متوازیند و صفحهٔ P شامل خط D است. کدام یك از گزاره‌های زیر صحیح نیست:

الف ـ صفحهٔ P ممکن است که با Δ موازی باشد.

ب ـ صفحهٔ P ممکن است که بر Δ بگذرد.

ج ـ صفحهٔ P ممکن است که با Δ فقط یك نقطه مشترك داشته باشد.

د ـ صفحهٔ P ممکن‌است که با Δ بیش ازیك نقطهٔ مشترك داشته باشد.

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۱۰/۶۲ـ نسبت به‌دستگاه محورهای مختصات xOy معادلهٔ منحنی C به‌صورت $y=f(x)$ است . محورها را انتقال می‌دهیم‌تا $O'(۱,۰)$ مبدأ جدید دستگاه $XO'Y$ باشد. نسبت به‌دستگاه جدید معادلهٔ منحنی C' به‌صورت $X=f(Y)$ است. دو منحنی C و C' نسبت به‌کدام خط یا نقطه قرینه‌اند؟

الف ـ $O'(۱,۰)$ ب ـ $O(۰,۰)$

ج ـ $y=x-۱$ د ـ $y=x$

۱۱۰/۶۳ـ تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a\,,\,b]$ معین و صعودی است. تابع $y=x+f(x)$ در فاصلهٔ $[a\,,\,b]$ چگونه است ؟

الف ـ صعودی است ب ـ ماکسیم دارد

ج ـ می‌نیمم دارد د ـ نزولی است.

۱۱۰/۶۴ـ برای‌آنکه رابطهٔ زیربین زاویه‌های مثلثی برقرار باشد لازم و کافی است که آن مثلث چه نوع باشد.

$$\frac{tgB+tgC}{\sin ۲A}=\frac{tgC+tgA}{\sin ۲B}=\frac{tgA+tgB}{\sin ۲C}$$

الف ـ قائم‌الزاویه ب ـ متساوی‌الساقین

ج ـ متساوی‌الاضلاع د ـ هرنوع مثلثی

۱۱۰/۶۵ـ حاصل عبارت زیر کدام است

$$۴\sin ۸^\circ \sin ۵۲^\circ \sin ۶۸^\circ$$

الف ـ $\sin ۶۶^\circ$ ب ـ $\cos ۶۶^\circ$

ج ـ $tg ۶۶^\circ$ د ـ $cotg ۶۶^\circ$

۱۱۰/۶۶ـ درگذشت شخصی پیش از سال ۱۰۰۰ وپس از سال ۱۰۰ روی‌داده است.هرگاه‌سال تولدوسال‌مرگ وی دو عدد مقلوب یکدیگر باشند. وی چند سال عمر کرده است ؟

الف ـ قابل محاسبه نیست ب ـ ۹۰ سال

ج ـ ۸۹ سال د ـ ۹۹

۱۱۰/۶۷ـ در تفریق دو عدد چهار رقمی از یکدیگر قاعدهٔ ده بریك را بکار نبرده‌ایم بلکه تفاضل هردو رقم نظیررا به صورت عددی جبری نوشته‌ایم ، در نتیجه عدد $\overline{(-۱)(+۷)(-۸)(+۲)}$ بدست آمده است. عدد طبیعی این تفاضل کدام است ؟

الف ـ ۲۲۷۹ ب ـ ۱۲۷۹ ج ـ ۱۲۶۹ د ـ ۲۸۷۱

۱۱۰/۶۸ـ زاویهٔ xOy به‌اندازهٔ α و نقطهٔ I درصفحهٔ آن داده شده است. ضلع Ox را به‌مرکز I و به زاویهٔ $\beta<\pi$ دوران می‌دهیم تا با Oy موازی گردد. کدام یك از رابطه‌های زیر لازم و کافی است ؟

الف ـ $\beta+\alpha=\pi$ ب ـ $\beta=\alpha$

ج ـ $\beta=\alpha$ یا $\beta=\pi-\alpha$ د ـ $\beta=\pm\alpha$

۱۱۰/۶۹ـ هرگاه خروج از مرکز یك بیضی به‌سمت صفر میل کند، حد این بیضی چیست ؟

الف ـ دایره ب ـ پاره خط

ج ـ خط نامحدود د ـ نقطه

خاصیتهائی از مثلث

(دنباله از صفحهٔ ۲۲)

را بپذیرد. اما آنچه برای ریاضیدان مطرح می‌باشد کل بازی است».

تمرین

۱ـ درمثلث ABC زاویهٔ B به‌اندازهٔ ۱۲° و زاویهٔ C به‌اندازهٔ ۱۳۲° است. طولهای BM و CN نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C را بدون استفادهٔ از رابطه‌های مثلثاتی با هم بسنجید (O. Bottema)*

۲ـ اگر خواسته باشیم قضیهٔ «۱،۵،۱» را روی مثلث بوتما (مسئلهٔ قبل) ثابت کنیم، برهانی که ارائه شده است از چه مرحله‌ای اشتباه می‌شود.

۳ـ با استفاده از از فرمولی که در تمرین ۷ ازبند ۳،۱ نشان داده شده است، برهانی مستقیم برای قضیهٔ اشتینر ـ لموس بدست آورید.

دکترا در آمریکا

(دنباله‌ازصفحه ۲)

وکم‌کم خود را برای درجهٔ فوق لیسانس آماده کنند.

برای تحصیل‌در قسمت فوق‌لیانس واخذ گواهی‌نامهٔ دکترا بهتر است که دانشجویان غیرامریکایی درجهٔ لیسانس یا معادل آن را در کشور خودشان‌بدست‌آورند. زیرا در امریکا دوسال یا یك سال‌ونیم ابتدای دورهٔ لیسانس صرف درسهایی می‌شود که در دورهٔ متوسطه در امریکا خوانده نمی‌شود ولی در کشورهای دیگر خوانده‌شده‌است. گاهی‌هم‌درسهایی‌است که به درد غیرامریکائیها، مثلا ایرانیها، نمی‌خورد. ازقبیل تاریخ امریکا، موسیقی برای شناختن آن، تاریخ هنر و غیره که برای دانشجویان امریکایی جنبهٔ سرگرمی دارد و برای دانشجویان دیگر اتلاف وقت است. اگردانشجوی غیر امریکایی یك سال را صرف تعادل برنامه و تقویت زبان بکند سودمندتر است. گاهی دانشجو از یك‌دانشگاه گواهی‌نامه می‌گیرد و برای‌فوق‌لیسانس به دانشکدهٔ دیگرمی‌رود ومجبور است که چند درس دیگر برای‌رسیدن به سطح آن دانشگاه بخواند. این را معمولا تعادل برنامه می‌گویند. دانشجویانی که می‌خواهند در ریاضی یا قسمتهای علمی دکترا بگیرند بهتر است که غیر از انگلیسی دو زبان دیگرمثل آلمانی و فرانسه را هم یاد بگیرند تا وقتی در دانشگاهی به‌کار شروع کردند برای زبان تازه وقتشان به هدر نرود.

در قسمت علوم دینی هم گاهی دکترا می‌دهند که آن را (Doctor of Divinity) می‌گویند. بیشتراشخاصی که کلیساها را می‌گردانند دکتر خوانده می‌شوند. همچنان در موسیقی هم دکترای خاصی‌وجود دارد.

گاهی دانشگاهها به اشخاصی که به‌اجتماع ودنیا خدمتهای‌شایان کرده‌اند درجهٔ دکترای افتخاری می‌دهند.

در امریکا برای گرفتن‌شغل در دانشگاه دکترا لازم‌نیست. مثلا دانشگاههای هاروارد (Harvard) و (Cal.Tech.) استادانی بدون دکترا دارند. این اشخاص در رشتهٔ خود ابداع یا اختراعی کرده‌اند که معروف می‌باشند واسمشان گواهی‌نامه‌شان است.

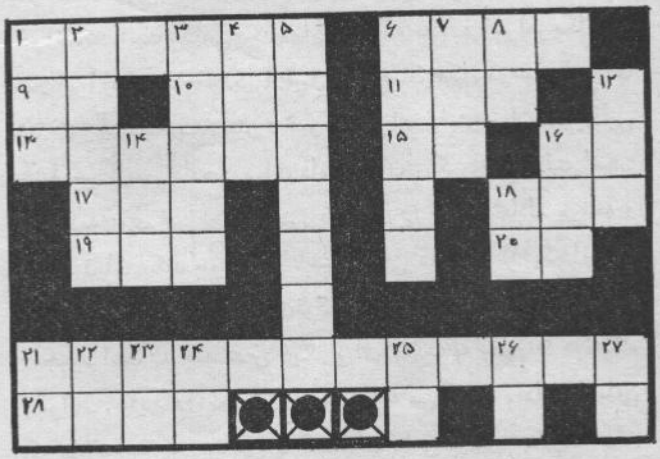
در اجتماع اشخاصی هستند که گواهی‌نامهٔ ششم ابتدایی ندارند ولی فهم و شعورشان و کارهایی که برای دنیا کرده‌اند قدر وقیمتشان را بالا برده است. درجهٔ دکترا وقتی قابل ستایش است که برای دارندهٔ آن شروع خدمت باشد. به گفتهٔ سعدی:

«تمام‌آنکه شودکه به حقیقت پسندیده‌آید.»

* به‌دنبال کوششهایی که برای حل مسئلهٔ «اشتینر ـ لموس» انجام می‌گرفت، عده‌ای مسئله را برای نیمسازهای خارجی تعمیم داده و به‌حل مسئلهٔ زیر روی آوردند : «اگر دو نیمساز خارجی مثلثی با هم برابر باشند آیا آن مثلث متساوی‌الساقین است؟» اما مثلث بوتما متساوی‌الساقین نیست در حالی دو نیمساز خارجی آن با هم برابرند. (مترجم)

جدول اعداد

طرح از: بهروز علمداری میلانی (تاریخ وصول به دفتر مجله: ۱۳۵۰/۱۲/۲۵)



افقی: ۱ـ عددی که برابر است با حاصل ضرب ۲۵ در عدد $N=\overline{a0a0a}$ و مقلوبش برابر است با حاصل ضرب ۵۲ در همان عدد N. ۶ـ عددی چهار رقمی که رقمهایش در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند: $(\overline{abab})_{\overline{ab}}=2030$. ۹ـ عدد دورقمی که حاصل‌ضرب آن‌درمقلوبش‌برابر۷۶۵است. ۱۰ـ کوچکترین عدد سه‌رقمی که از مجموع مربعات رقمهایش ۵۲ واحد بیشتر است. ۱۱ـ عدد به صورت $\overline{abc}$ که مضرب ۱۱ است ومجموع رقمهایش برابر $\overline{ac}$ است. ۱۳ـ مقلوبش کوچکترین عدد شش رقمی است که رقمهایش به تصاعد حسابی می‌باشند. ۱۵ـ عدد دو رقمی دارای خاصیتهای زیر: اول است، از مقلوبش کوچکتر است، حاصل جمع آن با مقلوبش برتوان سوم عددی بزرگتر از یك بخش پذیر است. ۱۶ـ شمارهٔ دهگان عدد ردیف ۱۱ افقی. ۱۷ـ ماندهٔ تقسیم عدد ردیف ۱ افقی برهزار. ۱۸ـ عدد سه رقمی برابربا $\overline{ab}\times n$ به قسمی که عدد $\overline{ab}\times(n-1)$ دورقمی است. ۱۹ـ یك واحد بیشتر از عدد ردیف ۱۷ افقی. ۲۰ـ عدددورقمی که‌در رابطهٔ‌زیرصدق‌می‌کند: $(\overline{ab})_{\overline{ab}}=\overline{ab}$.

۲۱ـ نه برابر مجذور عدد ردیف ۱ افقی. ۲۸ـ هشت برابر عدد ردیف۱ قائم.

قائم: ۱ـ توان سوم است و ۱۶ مقسوم‌علیه دارد. ۲ـ تکرار یك رقم. ۳ـ عددی که در دستگاه به پایهٔ ۱۲ به صورت ۲۵۸۷۸ نوشته می‌شود. ۴ـ در رابطهٔ زیرصدق می‌کند:

$$\overline{aba}=2b^3+2$$

۵ـ صدهزار واحد کمتراز مجذور عدد چهار رقمی که در رابطهٔ زیرصدق می‌کند: $\overline{abca}=50(2a^2+b^2+c^2)+2$

۶ـ تکرار یك رقم. ۷ـ از مجذور مجموع رقمهایش ۲۷ واحد کمتر است. ۸ـ مقلوب عدد ردیف ۲۵ قائم ۱۲ـ همان عدد ردیف ۱۱ افقی. ۱۴ـ عددبه‌صورت $\overline{abb}$ که مجموع‌رقمهایش توان سوم است. ۱۶ـ توان دوم عدد ردیف ۲۰ افقی. ۱۸ـ کوچکترین مقسوم‌علیه دورقمی عدد ردیف ۱۱ افقی. ۲۱ـ همان عدد ردیف ۱۸ قائم. ۲۲ـ همان عدد ردیف ۱۵ افقی. ۲۳ـ عددی غیر اول که متمم حسابیش توان سوم رقم‌یکان آن است. ۲۴ـ دو برابر عدد ردیف ۱۶ افقی. ۲۵ـ مجذور مجموع رقمهایش است. ۲۶ـ هفت برابر مجموع رقمهایش‌است و مقلوبش توان دوم است. ۲۷ـ دو برابرمقلوب عدد ردیف ۲۳ قائم.

نه مسئله (بقیه ازصفحهٔ ۳۱)

شد و به نام «روش» بود، ارشمیدس این کشف را به ذیمقراطیس منسوب می‌کند که از آن برای بدست آوردن فرمولی که از روی آن بتوان‌حجم هرم‌وحجم مخروط را محاسبه‌کرد، استفاده کرده است.

بسیاری ازخوانندگان این مسئله را با استفاده ازتئوری کاوالیری ولی به‌طریقه‌ای کمی متفاوت از آن، حل‌کرده‌اند. گراویل پرکنیر برای حل این مسئله یك مکعب را بر جسم مشترك دو استوانه محیط کرده است. هرگاه وجوه موازی با محورهای دو استوانه را درنظر بگیریم، دو هرم بدست می‌آید که رأس آن مرکز مکعب است. بنابراین با برش این هرمها به قاچهای موازی با قاعده‌شان می‌توان مسئله را حل کرد.

برخی از خوانندگان ممکن است علاقمند به‌محاسبهٔ حجم مشترك سه استوانهٔ عمود بر هم باشند؛ اگر شعاع دوایر مولد برابر با واحد باشد، باید جواب $8(2-\sqrt{2})$ بدست‌آید.

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 148– What is the leost positive integer by which 180 should be multiplied so that the product is:

a) a perfect spuare ?

b) a perfect cube ?

Solution: The unique facforization theorem for the realm of integers assures that 180 can be expressed uniquely as the product of powers of primes.

a) A perfect square must contain each prime factor an even number of times.

b) A perfect cube must contain each prime factor a multiple of three number of times.

$180 = 2^2.3^2.5$. By (a) another 5 is needed to make the product a perfect square. By (b) $2.3.5^2$ is needed to make the product a perfect cube.

Problem 149– Solve for x:

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=3$$

First Solution: Clear fractions.

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=3\sqrt{x+1}-3\sqrt{x-1}$$

Therefore.

$$4\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+1} \quad \text{or} \quad 2\sqrt{x-1}=\sqrt{x+1}$$

Squaring both sides;

$$4(x-1)=x+1 \quad \text{and} \quad x=\frac{5}{3}$$

Second Solution: Apply the theorem:

«If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ then $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$»

Let $a=\sqrt{x+1}$, $b=\sqrt{x-1}$, $c=3$, $d=1$ then:

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}}=\frac{3+1}{3-1} \quad \text{or} \quad \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{2}{1}$$

Square both sides and apply the same theorem to obtain the answer.

Third Solution: Rationalize the denominator of the left member and solve the resulting radical equation.

Mutliple Choice Questions

150– The locus of a point that moves in a given plane, remaining always a constan distance from a given point is:

A) a circle B) a sphere C) a point

D) the bisector of an internal angle of a triangle.

151– The sum of the interior angles of an octagon is:

A) 15 right angles B) 10 right angles

C) 12 right angles D) 16 right angles

152– A triangle has sides of 16 cm, 30 cm and 34 cm, respectively. What is the area?

A) 240 cm^2 B) 250 cm^2

C) 264 cm^2 D) 275 cm^2

153– If A is the set of kites, and B is the set of parallelograms. what set is represented by $A \cap B$?

A) rectangles B) quadrilaterals

C) rhombuses D) null set.

154- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ demonstrates the:

A) Associative Law

B) Commutative Law

C) Distibutive Law

D) none of these

Answers: 150–A . 151–C , 152–A . 153–C , 154–C.

انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها
تألیف:علی اصغرهومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هشترودی

روش سادهٔ حل مسائل شیمی ترجمهٔ: عطاءالله بزرگ‌نیا

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

راهنمای ریاضیات‌متوسطه
تألیف: عبدالحسین محصفی
بها: ۳۰ ریال

تستهای هوش
ترجمه: باقر مظفرزاده
بها : ۱۰۰ ریال

تستهای چندجوابی شیمی
ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا
بها : ۴۰ریال

معماهای ریاضی
ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار
بها : با جلد شمیز ۷۵ ریال
با جلدزرکوب : ۱۰۰ریال

مسائلی ازحساب استدلالی
تألیف: محمودکاشانی

جلد اول	جلددوم	جلدسوم
۱۲ریال	۱۵ریال	۱۵ریال

مبادی
منطق وریاضی جدید

تألیف: غلامرضا عسجدی
بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.