برهان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ یازدهم ، شمارهٔ : ۸ شمارهٔ مسلسل : ۱۰۹ مرداد ۱۳۵۴

دراین شماره:

فارسی بنویسیم	عبدالحسین مصحفی	۳۴۱
کاوشهایی در نجوم اسلامی، ابوالوفای بوزجانی (۲)	جعفر آقایانی چاوشی	۳۴۲
دربارهٔ تمایز بین ریاضیات محض و ریاضیات کار بسته	ترجمهٔ داود قرجه داغی پور، بهزاد بلورچی	۳۴۷
فیثاغورس، آپولونیوس،...	دکتر علیرضا امیرمعز	۳۴۹
مسائلی دربارهٔ شطرنج	ترجمهٔ: مهندس داوید یدریحان	۳۵۱
دربارهٔ اعداد اول چه می‌دانید(۷)	ترجمهٔ: جواد فیض	۳۵۵
مسائل انتخابی از مسائل المپیادهای ریاضی	ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری	۳۶۵
حل مسائل یکان شمارهٔ ۱۰۸	-	۳۷۷
تستهای ریاضی	-	۳۸۰
جدول اعداد	محمد قاسم سلیمانی	۳۸۵
Problems & Solutions	-	۳۸۶
فهرست مندرجات مجله‌های یکان دورهٔ یازدهم	-	۳۸۷

بها : ۴۰ ریال

وجه اشتراك دورهٔ دوازدهم

دورهٔ دوازدهم انتشار مجلهٔ یکان ازمهر ۱۳۵۴ آغازمی‌شود.
شرایط اشتراك این دوره همانند دورهٔ یازدهم و وجه اشتراك همان ۳۲۰ ریال است.

از انتشارات یکان

چاپ پنجم

راهنمای ریاضیات متوسطه

تألیف : عبدالحسین مصحفی
(به قطع کتابهای درسی)
بها: ۳۰ ریال

چاپ دوم

تستهای هوش

ترجمهٔ : باقر مظفرزاده
بها: ۱۰۰ ریال

معرفی کتاب

نقد و تحقیق دربارهٔ نسبیت‌همزمانی مأخوذ از نظریهٔ نسبی آلبرت اینشتین

تألیف : غلامرضا عسجدی
۷۲ صفحه ـ بها: ۸۰ ریال
خواستاران‌می‌توانند توسط مجلهٔ یکان‌کتاب را بخواهند

توجه

از مشترکان مجله که با پایان سال‌تحصیلی نشانی پستی آنهاتغییرمی کند،درخواست می‌شودبرای دریافت شماره‌های ۷ و ۸ یکان دورهٔ یازدهم نشانی جدید خودرا اطلاع دهند.

ریاضیات

مجلهٔ یکان

تـأسیس : بهمن ۱۳۴۲
هرسال هشت شماره منتشر می‌شود
دورهٔ یازدهم ـ شمارهٔ هشتم ـ شمارهٔ مسلسل ۱۰۹
مرداد ۱۳۵۴

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره:
تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳
تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

وجه اشتراك برای دورهٔ یازدهم : ۳۲۰ ریال
حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانك صادرات

YEKAN
Mathematical Magazine
Editor : MOS'HAFI Abdolhossein
Volume XI, number 8. Aug. 1975
subscription : 6$
TEHRAN - P.O.B. 2463
چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت‌آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

فارسی بنویسیم

در پاك کردن زبان فارسی از واژه‌های بیگانه، پیش‌از آنکه واژه‌هایی ساختگی و ناآشنا به‌گوش را جانشین واژه‌های متداول سازیم ، باید خود را به رعایت دو نکته خودهیم؛ نخست آنکه توجه داشته باشیم که برای بسیاری‌از واژه‌های بیگانه ومتداول، واژهٔ فارسی هم‌ارز و نیز متداول یافت می‌شود؛ دراین‌باره واژهٔ فارسی‌را برگزینیم. هرگاه‌که درنوشته یا گفتهٔ خود به واژه‌ای می‌رسیم که اززبان بیگانه آمده است ، آن را بکارنبریم مگرآنکه بـرای آن واژهٔ فارسی هم ارز (و آشنا برای همه) نشناسیم . برای نمونه برخی از این‌گونه واژه‌ها در زیـر یادآوری می‌شود :

(قبل‌از = پیش‌از، بعداز = پس‌از، اول = نخست، قوه = توان، سؤال = پرسش،جواب = پاسخ، نامساوی = نابرابر، اطول = بلندتر، اقصر = کوتاهتر، کثیرالجمله = چند جمله‌ای ، قوس = کمان ، عادت = خو ،...)

نکتهٔ دیگرآنکه اگر واژه‌هایی اززبان‌بیگانه را بکارمی‌بریم، دربارهٔ آنها ازدستورزبان فارسی پیروی کنیم. مثلا اگرآنها را به‌صورت جمع‌بکار می‌بریم از«ان» یا «ها»استفاده کنیم .

برای نمونه: (امثال = مثلها، ارقـام = رقمها، عضلات = عضله‌هـا، جملات = جمله‌ها، ضرایب = ضریبها، = ریاضیون = ریاضیدانان، معلمین = معلمان ،...)

شاید بکاربردن دونکتهٔ بالا درآغازکار دشواریهایی را دربرداشته‌باشد، اما آنگاه که‌این کاررا روان شویم هیچ‌گونه دشواری خودنمایی نخواهدکرد.

عبدالحسین مصحفی

جعفر آقایانی چاوشی

ابوالوفای بوزجانی (۲)

بررسی رسالهٔ : فی اقامة البرهان علی الدائر من الفلك . ابوالوفا

ابوالوفای بوزجانی دراین رساله دوقانون برای شناختن دایره از فلك ارائه می‌دهد وماابنك این قوانین را بیان کرده و سپس با اصطلاحات وعلائم جدیدآن راثابت خواهیم کرد. ولی قبلا اشاره به‌چند نکته لازم است:

همچنانکه پیش‌از این نیز بیان کردیم هر گاه سینوس‌جدید را با (*sin*) وجیب قدیم را با Sin نشان دهیم دردایرهٔ مثلثاتی به‌شعاع R رابطهٔ زیر مابین‌آنها برقرار است:

$$\underset{R}{\mathrm{Sin}}\theta = R\sin\theta$$

همچنین‌بین قطر ظل‌تمام قدیم Cosc و کوسکانت جدید *cosec* رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{R}{\sin\theta} = R\csc\theta = \underset{R}{\mathrm{Cosc}}\theta$$

ونیزرابطهٔ بین جیب معکوس قدیم Vers و کسینوس جدید *cos* چنین است.

$$\underset{R}{\mathrm{Vers}}\theta = R - \underset{R}{\mathrm{Cos}}\theta = R(1-\cos\theta)$$

که دراین رابطه $\underset{R}{\mathrm{Cos}}\theta$ جیب تمام‌یك زاویه است ورابطهٔ‌آن با کوسینوس جدید *cos* چنین است:

$$\underset{R}{\mathrm{Cos}}\theta = R\cos\theta$$

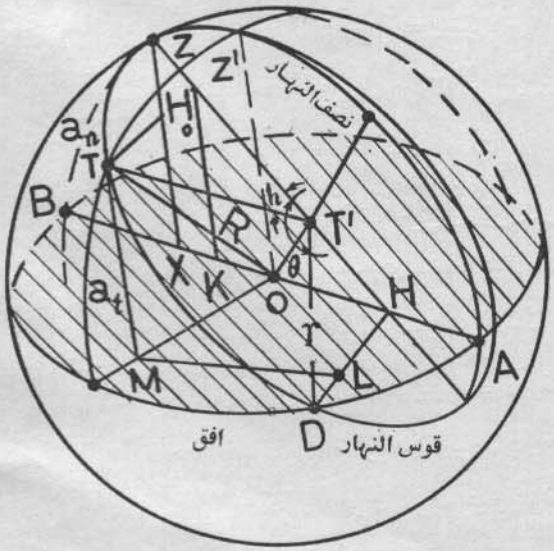
شکل زیر کرهٔ آسمان رانمایش‌می‌دهد. می‌دانیم که‌خورشید هرروز درآسمان مداری را می‌پیماید که فوق دایرهٔ افق است وبه آن قوس‌النهار گویند.

فرض می کنیم DTZ نصف قوس‌النهار باشد، دراین‌صورت HZ مساوی جیب‌النهار کـه جیب معکـوس قـوس‌النهار است خواهد بود.

یعنی:

$$\underset{R}{\mathrm{Vers}}\theta = HZ$$

که درآن r شعاع قوس‌النهار می‌باشد.



فرض می کنیم R شعاع کرهٔ آسمان باشد ، TD قسمتی‌از

قوس‌النهار است ومدت زمان رااز طلوع خورشید در نقطهٔ D تا وضعیت خورشید درنقطهٔ T رامعلوم می‌کندکـه به‌آن دایره از فلك گویند. و این قوس چنانکه درشکل بالا ملاحظه می‌شود در رابطهٔ :

$$DT=\theta-h$$

صدق می‌کند، که درآن h زاویهٔ ساعتی‌است.

فرض می‌کنیمa_t ارتفاع خورشید درلحظـهٔ t و a_nارتفاع خورشید هنگام ظهر باشد . و نیز φ و δ رابه ترتیب عرض جغرافیایی بلد ومیل درجهٔ شمس‌می‌نامیم.ابوالوفا قوانین زیررا برای تعیین دایره ازفلك می‌دهد:

«این برهان بنابرآن چیزی است‌که در رسالـهٔ حبش و دیگران‌آمده است وآن این‌است‌که جیب ارتفاع‌وقت ($\mathrm{Sin}a_t$) را در جیب‌النهار ($\mathrm{Vers}\theta$) ضرب‌کنیم و حـاصل را برجیب ارتفاع نصف‌النهار ($\mathrm{Sin}a_n$) تقسیم‌کنیم وخارج قسمت‌رااز جیب النهار تفریق‌کنیم وآنچه راکه باقی می‌ماند قوس معکوس قرار دهیم وآن را اگر اندازه‌گیری مـا پیش از نصف‌النهار باشد از نصف قوس نهار بکاهیم (قانون اول). و اگر اندازه‌گیری مابعد ازظهر بـاشد بر فضل نصف‌النهار بیفزائیم (قانون دوم) و آنچه بدین ترتیب بدست می‌آیدآن‌دایره ازفلك ($\theta-h$) است [۴۱]

برهان قانون اول ابوالوفا

هرگاه اصطلاحات وعلائم جدیدرادر قانون اول‌جایگزین کنیم این‌قانون به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\theta-h=$$

$$\theta-\underset{r}{\mathrm{arcVers}}\left(\underset{r}{\mathrm{Vers}}\,\theta-\frac{\underset{r}{\mathrm{Vees}}\theta\cdot\underset{R}{\mathrm{Sin}}a_t}{\underset{R}{\mathrm{Sin}}a_n}\right) \quad (1)$$

که درآن θ وa_tوa_n مقادیری‌معلوم می‌باشند، این‌قانون بااندك اختلافی همـان قانـونی است که در زیج خطی حبش‌جاسب در کتابخانهٔ ینی استانبول موجود است.

برهان : از نقطهٔ T مرکز خورشید درکرهٔ آسمان خط عمود TM رابر دایرهٔ افق اخراج می‌کنیم و TL رابر DG (فصل مشترك سطح‌افق وقوس‌النهار) عمودمی‌کنیم به‌همین ترتیب از Z که وضعیت خورشید راهنگام ظهر نشان می‌دهد، عمودZH رابر DG اخراج می‌کنیم. همچنین از T عمـود $TH_\circ$ را بر ZH اخراج‌کرده واز $H_\circ$ خطعمود $H_\circ K$ رارسم می‌نمائیم.

ازتشابه مثلثهای TLM و ZHX خواهیم داشت:

$$TL=\frac{ZH\cdot TM}{ZX}=\frac{\underset{r}{\mathrm{Vers}}\theta\cdot\underset{R}{\mathrm{Sin}}a_t}{\underset{R}{\mathrm{Sin}}\,a_n}$$

به علاوه:

$$\underset{r}{\mathrm{Vers}}h=HZ=ZH-H_\circ H=\underset{r}{\mathrm{Vers}}\theta-TL$$

ازدو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$h=\underset{r}{\mathrm{arcVers}}\left(\underset{r}{\mathrm{Vers}}\theta-\frac{\underset{r}{\mathrm{Vers}}\theta\cdot\underset{R}{\mathrm{Sin}}a_t}{\underset{R}{\mathrm{Sin}}\,a_n}\right),$$

واین‌همان قانون اول ابوالوفا می‌باشد.

قانون دوم ابوالوفا

قانون دوم ابوالوفا رابا اصطلاحات وعلائم جدید می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\theta-h=e+\underset{r}{\mathrm{are\,Sin}}\left(\frac{\underset{R}{\mathrm{Sin}}a_t\cdot\underset{r}{\mathrm{Vers}}\theta}{\underset{R}{\mathrm{Sin}}\,a_n}-\underset{r}{\mathrm{Sin}}\,e\right)$$

که درآن e فضل نصف‌النهار است.

قبل‌ازآنکه به‌اثبات این‌قـانون بپردازیم متذکر می‌شویم که‌این دوقانون درحقیقت حالات خاصی‌ازیك قانون‌کلی‌می‌باشند ولی‌چون درآن زمان علامت منها استعمال نمی‌شد ناچـار به دو صورت بیان شده‌است.

برهان: ازتشابه مثلثهای ZXH و $H_\circ KH$ داریم:

$$H_\circ H=\frac{H_\circ K\cdot HZ}{ZX}=\frac{\underset{R}{\mathrm{Sin}}\,a_t\cdot\underset{r}{\mathrm{Vers}}\theta}{\underset{R}{\mathrm{Sin}}\,a_n}$$

به‌علاوه داریم:

$$T'H = \underset{r}{\text{Sin}}\ e$$

$$HH_{\circ} - T'H = HT' = \underset{r}{\text{Sin}}(\theta - h - e)$$

اکنون باجایگزین کردن مقادیر $H_{\circ}H$ و $T'H$ دررابطهٔ اخیر خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\underset{R}{\text{Sin}}\ a_t \cdot \underset{r}{\text{Vers}}\theta}{\underset{R}{\text{Sin}}\ a_n} - \underset{r}{\text{Sine}}\right) = \underset{r}{\text{Sin}}(\theta - h - e)$$

$$\Longrightarrow \theta - h - e = \underset{r}{\text{arcSin}}\cdot$$

$$\left(\frac{\underset{R}{\text{Sin}}a_t \cdot \underset{r}{\text{Vers}}\theta}{\underset{R}{\text{Sin}}a_n} - \underset{r}{\text{Sin}}\ e\right)$$

و هوالمطلوب [۴۲]

ابوالوفا و بینظمی سوم ماه

ابوالوفای بوزجانی در کتاب‌المجسطی خود مبحثی را به‌حرکات کرهٔ ماه اختصاص‌داده وضمن‌بحث دربارهٔ حرکةالطول (Mouvement en longtitude) و حرکةالاختلاف (Mnuvement d'anomalie) از بینظمی سوم کرهٔ ماه‌سخن گفته است. لوئی‌آمیلی‌سدیو (L.Am. Sedillot) دانشمند فرانسوی ومحقق علوم اسلامی طی‌مقالهٔ مهمی در مجلهٔ آسیایی ثابت‌کرد که‌ابوالوفابینظمی‌سوم‌کرهٔ ماه‌را که واریاسیون[۱] (Variation) نامیده می شود قرنها پیش از توکوبرائه (Tycho Brahe) منجم دانمارکی کشف کرده بوده است.

سدیو پس‌از مقدماتی چنین نوشته است:

«...ماه درهمهٔ‌زمانها توجه کسانی‌را که به‌آن نظرمی‌کرده وآن را رصد می‌کرده‌اند جلب‌کرده است؛ هیچ ستارهٔ دیگری نیست که حرکات‌آن به‌اندازهٔ ماه پیچیده ونامنظم باشد؛

شمارهٔ بینظمیهای عمدهٔ‌آن، بدون درنظر گرفتن حرکت اوج وحرکت عقده ونابرابریهای حرکتی فرعی که نظریهٔ‌جاذبه سبب باز شناخته شدن‌آنها شده‌است، چهار است.

دوبینظمی اول راظاهراً ابرخس و بطلمیوس تعیین‌کرده بودند: یکی‌از خروج ازمرکز مداراماه حاصل می‌شود وهمانند نظیرآن درخورشید است؛ آن‌را تعدیل مدار می‌نامند. دیگری از مواجههٔ‌آن باخورشید حاصل می‌شود ووابستهٔ به‌نسبت خطاوج وحضیض خورشید بامحل مقارنه‌ها ومقابله‌ها است؛

این‌یکی‌را اوکسیون[۲] (Evection) می‌نامند. بطلمیوس اولی‌را بایك فلك‌تدویر ودومی‌را بایك‌فلك خارج‌المرکز نمایانده است.

با یك تدویرمضاعف ممکن بود به صورت بیانی‌کنونی A−D۲[۳] برسد؛ ولی این ساده‌ترکردن، کار کوپرنیك بود. گرچه تاکنون به این‌کار کوپرنیك متوجه نشده‌اند، باید گفت که درکارهای این دانشمند وجود دارد؛ ولی با این همه آن‌را به اولر (L.Eoler) نسبت می‌دهند.

یافتن دو اختلاف دیگر ماه، یعنی واریاسیون و تعدیل سالانه، به توکو براهه و کپلر منسوب است. توکوبراهه فرصت دادن توضیح و آوردن استدلالی برای نظریهٔ خود (۱۶۰۱)

۱ـ واریاسیون اختلاف خاص حرکت ماه است، که دورهٔ تناوب‌آن یك‌ماه اقترانی است و نصف دامنهٔ‌آن "۳۹'۳۰ است. نتیجهٔ کاهش‌اندك جاذبهٔ زمین برماه درحالت هلال و بدر، وافزایش اندك‌آن درتربیعها است.

۲ـ اوکسیون (Evection) اختلاف دوری درحرکت ماه‌است.

اوکسیون دورهٔ تناوبی برابربا ۳۱٫۸۱ روز ونصف دامنه‌ای برابربا °۱'۱۶ دارد.

علت آن جابه‌جا شدن حضیض فلك ماه و تغییرات محسوس خروج از مرکز آن است (از ۴۵٪ تا ۶۵٪). این‌اختلاف‌توسط‌بطلیموس کشف شده است.

۳ـ D نشانهٔ Declinaison به‌معنی میل و A نشانهٔ Ascension به معنی بعد می‌باشد.

پیدا نکرد ؛ ولی نتیجهٔ کار را برای ما باقی گذاشت . می‌دانیم که واریاسیون آن اختلاف حرکت ماه است که، برمداری دایره فرض شده ، به علت نیروی ظلی که به حرکت آن شتاب یا کندی می‌دهد ، در مواضع تثمین ماه حاصل می‌شود . هرشل (M.Herschell) گفته است که «این اختلاف که نخستین‌بار به‌صورت مثبت توسط توکوبرائه برای تصحیح دوری‌موضع ماه‌در نظر گرفته شد، درتاریخ علم جالب توجه است ، ونخستین امری است که نیوتون بنابر قانون جاذبهٔ خود آن را تحلیل کرد.»

چه کس می‌توانست گمان برد که این اختلاف را مسلمانان از قرن دهم می‌شناخته‌اند؟ با اینهمه این امر کاملامسلم است که ابوالوفای بوزجانی شش قرن پیش از توکوبرائه به این حقیقت پی‌برده است و ما امروز حق تقدم او را درکشف این موضوع، برمنجم دانمارکی (= توکوبرائه) مورد مطالعه قرارمی‌دهیم.

ابوالوفا معاصر ابن یونس مصری بود، که در بغداد در سال ۹۷۵ رصد می‌کرده است .

... ما ابتدا عین این متن را در اینجا می‌آوریم ...»

ترجمهٔ متن *:

«فصل دهم دراختلاف سومی که برای ماه پیدا می‌شود و آن را اختلاف محازات (προδγενδοξ) می‌نامند و نیز چون دو اختلاف دیگری‌راکه پیشتر ذکر کردیم شناختیم ویکی ازآنها را برجهت فلك تدویر قرار دادیم ، وآن همان اختلاف اول‌است که پیوسته آن را دراجتماعات و استقبالات می‌یافتیم ، و اندازهٔ آن را به‌رصدهای متوالی یافتیم ، دانستیم که درمثل این اوقات تقریباً از ۵° بیشتر نیست وگاه از این مقدار هم کمتر می‌شود و بساکه اصلا وجود نداشته باشد، سپس دانستیم که این اختلاف‌در غیر اوقات اجتماع و استقبال افزایش پیدا می‌کند و بیشترین مقدار افزایش آن هنگامی است که ماه و خورشید نزدیك تربیع باشند، واندازهٔ آن دراین اوقات تقریباً ۳۲° است . وبساکه از این مقدارهم کمتر شود وبساکه اصلا نباشد .

و این عرض را برجهت فلك خارج مرکز قرار دادیم و نیز پس ازآنکه مقدار این دو اختلاف و مقدار خروج مرکز فلك خارج‌المرکزازمرکز فلك‌البروج دانستیم، اختلاف سومی یافتیم که بر ماه هنگامی عارض می‌شود که مرکز فلك تدویر میان بعدابعد وبعد اقرب از فلك خارج‌المرکز باشد، وبیشترین این‌اختلاف هنگامی‌است که ماه‌نزدیك تثلیث و تسدیس ازخورشید باشد وآن را درمواقع اجتماع و مقابله و نیز در مواقع تربیع نیافتیم. پس چون سیرماه را درطول‌وسیر آن را دراختلاف دانستیم ودر اوقاتی که برای‌آن ازجهت تدویراختلافی نیست تأمل کردیم یعنی اوقاتی که ماه درآنها نزددوبعد مختلف از فلك تدویر است که چون ماه دراین دو موضع از فلك تدویرباشد برای اوازهر دوجهت اختلافی عارض نمی‌شود. و حرکت یکسان او درحول مرکز عالم صورت می‌گیرد. وچون دراین موقع بعد میان آنو خورشید به مقداری باشدکه ذکر کردیم ، برای آن اختلاف سومی یافتیم نزدیك نصف ربع درجه (۰/۷۵ درجه) چون ماه را برامثال این اوقات‌رصد کنیم‌وآن رابردرجه‌ای ازدرجات فلك البروج درحقیقت پیداکنیم ، موضع آن را روی حسابی که با دو اختلاف مذکور تصحیح کرده‌ایم بیابیم دربیشتر یاکمتر از آن به‌اندازهٔ ۰/۷۵ درجه می‌یابیم ، ودرمی‌یابیم که این اختلاف در هنگامی که دوری ماه ازخورشیدکمتریا بیشترازتثلیث یا تسدیس باشد از این مقدارکاسته می‌شود ، بنابراین دانستیم که علاوه‌بر دو عارضی که ذکر آن گذشت عارض دیگری نیز دارد ، ممکن نیست که این جزاز جهت انحراف قطر فلك تدویر از محاذات نقطه‌ای باشدکه برگرد آن حرکت مستقیم صورت می‌گیرد و این نقطه همان مرکز فلك‌البروج است .

چه هنگامی که قطر فلك تدویر ازنقطه‌ای که برگرد آن حرکت مستوی صورت می‌گیرد منحرف باشد برای ماه اختلافی درفلك‌البروج عارض می‌شود . واین‌بدان جهت است که بعدابعد از فلك تدویر تغییرمی‌پذیرد وخط واصل میان مرکز فلك‌البروج و مرکز فلك‌التدویر برهمان جایی نمی‌گذردکه در اوقاتی می‌گذشت که درآنها مرکز فلك‌التدویر به دو بعد مختلف ازفلك خارج‌المرکز است و بعد قمر با بعدابعد از فلك‌التدویر متفاوت است . پس ما همیشه حرکت ماه را در فلك تدویرازبعدابعدقرار دادیم بدان شرط که مرکز آن بردو تدویر مختلف از فلك خارج‌المرکز باشد. پس چون در آنچه گفتیم تأمل کردیم و آن نقطه را استخراج کردیم بعد آن را از مرکز عالم درطرف بعد اقرب از فلك خارج‌المرکز ازخط ماربر مرکز مساوی بعدی یافتیم که‌میان مرکزفلك‌البروج‌و مرکزفلك خارج‌المرکزاست.»

* به درخواست نویسندهٔ مقاله این متن توسط دانشمند محترم آقای احمد آرام از عربی به فارسی برگردان شده است .

سدیو ازاین بحث نتیجه گرفته و ادامه می‌دهد :

«سخن ابوالوفا به اینجا تمام می‌شود. ولی از نوشتهٔ او حقیقت تازه‌ای در تاریخ نجوم آشکار می گردد و آن اینکه مسلمانان ازهمان قرن دهم واریاسیون را تعین کرده بودند. واین کشف بی‌جا بودن ملامتی راکه به‌آنان روا می‌داشته‌اند ثابت می کند. وآن اینکه چیزی‌به نظریه‌های بطلمیوس اضافه نکردند نوشته‌های دلامبر و لاپلاس ازاین جهت بایداصلاح شود. واین کار برعهدهٔ کتب جدید نجوم خواهد بود .

درواقع ازاین پس هروقت دربارهٔ توکوبراهه صحبت‌می‌شود باید از ابوالوفا که‌مقدم‌براوست‌ونیز کشف‌ابوالوفا همچنانکه‌خود او می گوید که نتیجهٔ‌رصدهای‌شخصی خود اوست، یاد شود ...»

سدیو چند ماه پس ازچاپ این مقاله یعنی‌دربیست وهشتم ماه فوریه ۱۸۳۶ گزارشی دایر برکشف بینظمی سوم ماه (Variation) توسط‌ابوالوفای بوزجانی رادراختیار آکادمی علوم فرانسه گذاشت . به‌همین جهت مباحثات و مناقشاتی برای مدت بیش از شش سال بین دانشمندان‌برجسته‌ای در این‌آکادمی درگرفت ولی این مباحثات مثمرثمر نگردیده و به نتیجهٔ نهایی نرسید .

سرانجام‌درسال۱۸۹۲کارادوو(B.Carra de Vaux) این موضوع را در مقالهٔ جامع و مفصلی مورد بررسی قرارداده وبه‌آن منظر دیگری داد .

دانشمند و محقق گرامی آقای ابوالقاسم قربانی خلاصهٔ این مقاله را به زبان فارسی ترجمه‌کرده و درکتاب خود به چاپ رسانده‌اند ، ما اینك این قسمت را به جهت مزید فایدت ازآن‌کتاب اقتباس‌کرده و دراینجا می‌آوریم :

«دربیست و هشتم ماه فوریه ۱۸۳۶ لوئی آمیلی سدیو گزارشی‌دایربرکشف‌اختلاف‌سوم ماه، بوسیلهٔ ابوالوفای بوزجانی منجمی که‌درقرن دهم‌میلادی می‌زیسته ، تسلیم‌آکادمی علوم‌فرانسه کرد. (تاآن زمان‌کشف اختلاف سوم حرکت ماه‌را به‌توکوبراهه نسبت می‌دادند.) سدیو متن عربی قسمتی از کتاب المجسطی ابوالوفای بوزجانی که به زعم او مشتمل برکشف مذکور بود همراه باترجمهٔ فرانسوی آن دراختیار آکادمی علوم فرانسه گذاشت ، و آکادمی هیأتی مرکب از بیو (Biot)و آراگو (Arago) و داموازو (Damoiseau) ولیبری (Libri) راماًمور رسیدگی وبررسی این‌نکتهٔ شگفت‌انگیز تاریخ‌ریاضیات کرده واین دوسؤال رامطرح ساخت:

اولا اگر اختلاف سوم حرکت ماه درکتاب بوزجانی ذکرشده چرا اختر شناسان اسلامی بعد از وی، از آن بحث نکرده‌اند ؟

ثانیاً آیا قسمت موردبحث ازکتاب المجسطی بوزجانی بعد از زمان تیکوبراهه به نسخهٔ خطی کتاب بوزجانی ملحق نشده است؟

درچهاردهم ماه‌مارس همان سال سدیو به‌این اعتراضات جواب داد وبندی ازکتاب تیکوبراهه راکه به عنوان ملحق در چاپ فرانکفورت قرار داشت ودرآن واریاسیون تعریف شده است قرائت‌کرد و اختلافاتی راکه بین این متن و متن کتاب بوزجانی وجوددارد ومانع‌ازآن می‌شودکه یکی‌از دومتن‌اقتباس ازدیگری شناخته شودخاطرنشان ساخت وبه سیلوستر دو ساسی (Sylvester de Sacy) که امکان الحاق قسمتی را به کتاب ابوالوفا نمی‌پذیرفت اتکاکرد . اما در بارهٔ اینکه چرا منجمان اسلامی‌بعد از بوزجانی ، به‌کشف وی اشاره نکرده‌اند، سدیو ادله‌ای از این قرار اقامه‌کرد‌که: تقریباً همهٔ علمای‌اسلامی که آثارشان باقی مانده است قبل از بوزجانی می‌زیسته‌اند وعدم وجود واریاسیون در زیجهایی‌که بعداًمدون شده ، به‌علت آن‌است که این زیجها از روی زیج ابن یونس مدون شده‌اندنه ازروی المجسطی بوزجانی .

همان روز لیبری که به علت‌کسالت از حضور درآکادمی خودداری‌کرده بود دلایلی راکه موجب‌شده بودکه وی گزارش سدیو را با احتیاط تلقی‌کند به آکادمی پیام داد و سدیو را به اظهارنظر نادرست وتحریف‌مطالب‌وتغییردادن ماهیت‌افکاردیگران متهم‌کرد . وافزوداین‌درست نیست ، که گفته شودکه مشهورترین منجمان شرقی پیش از بوزجانی می‌زیسته‌اند و اگر بوزجانی واقعاواریاسیون رادر سال ۹۷۵ کشف‌کرده بود ، ابن‌یونس که‌در زیج حاکمی گزارش رصدهای‌سال۱۰۰۷ راداده‌است بهتروزودتر از هرکس دیگر می‌توانست متوجه این‌کشف گردد .

در آوریل سال ۱۸۳۸ لیبری تهمتهای مشابهی را از سر

دنباله درصفحهٔ ۳۸۴

دربارهٔ تمایز بین
ریاضیات محض و ریاضیات کاربسته

مترجمان: داود قرچه داغی پور، بهزاد بلورچی

- ۲ -

در شمارهٔ گذشته، تئوری افلاطون دربارهٔ تمایز میان ریاضیات محض و ریاضیات کاربسته مورد بررسی و مداقه قرار گرفت. اکنون تئوری معتبر دیگری، که صورتگرایانی چون هیلبرت و کوری ارائه داده‌اند، تقدیم حضورخوانندگان می گردد.

صورتگرایان همچون ایده‌آلیستها (افلاطون) معتقدند که گزاره‌های ریاضیات محض و گزاره‌های ریاضیات کاربسته اساساً دارای جوهروذات متفاوت هستند. ولی، برخلاف افلاطون، آنها را عقیده براین‌است که گزاره‌های ریاضیات محض، اصولادر بارهٔ هیچ‌چیز صحبت نمی کنند. یعنی صرفاً، فرمولهای خوش فرمی هستند از «دستگاههای صوری معین». درمعنای عرفی، آنها حتی گزاره هم نیستند؛ زیرا هیچ چیزی را بیان نمی کنند. البته، ما می‌توانیم دربارهٔ هردستگاه صوری معین، گزاره‌هایی بسازیم. ممکن است فرمول خوش فرمی را در دستگاه صوری معینی‌در نظربگیریم واظهارکنیم که آیا این فرمول یك قضیه است یاخیر، وچنین‌اظهار «ماوراء ریاضی»* حقاً یك گزاره است ونشان‌می‌دهد چه عملی در این دستگاه جایزاست. ولی فرمولها به‌تنهایی گزاره نیستند، وفقط مطالبی که دربارهٔ این فرمولها یا نقیض آنهااظهار می‌شوند، تشکیل گزاره‌های‌صوری می‌دهندواین گزاره‌های‌صوری موجب ردیا قبول آنها به‌عنوان یك‌قضیه می‌باشند. راست‌یادروغ گزاره‌های ریاضیات محض را نمی‌توان با اعمالی نظیرشمردن‌یا اندازه گرفتن تعیین نمود، وبالطبع نتایج چنین اعمالی، نادرست ونامربوط هستند. درمقابل، گزاره‌های ریاضیات کاربسته، گزاره‌های آمپریك هستند، ودرستی آنها به‌نتایج حاصل ازاعمال‌شمردن واندازه گرفتن بستگی‌دارد. بالنتیجه، ازدیدگاه‌فکری‌صورتگرایان نیز، ریاضیات محض وریاضیات کاربسته اختلاف ریشه‌ای‌دارند.

گزاره‌های ریاضیات محض را هرگز نمی‌توان تحلیل نمود، و درستی آنهارا نمی‌توانیم به‌روش تجزیه وتحلیل مفاهیم تجربی مدلل سازیم. آنها صرفاً ترکیباتی ازعلائم هستند که ملاحظات صوری معینی را ادا می کنند. ازطرف دیگر، عبارات ریاضیات کاربسته، گزاره‌هایی هستند وابسته به«تجربهٔ حسی». درحقیقت، صورتگرایان گزاره‌های ریاضی را به‌سه گروه مختلف تقسیم می کنند. گروه اول همان فرمولهای ریاضیات محض هستندکه در سطور قبلی دربارهٔ آنها صحبت‌شد، گروه دوم فرمولهای‌ریاضیات کاربسته است، وسوم عبارات ماوراء ریاضی هستند دایر براینکه فرمولهای ارائه شده دریك دستگاه صوری معین قضیه‌اند یا خیر. تفاوت میان گزاره‌های گروه دوم وسوم به‌اندازهٔ تفاوت میان گزاره‌های گروه اول ودوم چشمگیر نیست، زیرا هردو گروه‌دوم وسوم گزاره‌های آمپریك هستند. معهذا، فرق مهمی میان آن‌دو وجود دارد. مثلا، ملاحظاتی که راست‌ودروغ گزاره‌های‌ریاضیات کاربسته را می‌نمایانند با ملاحظاتی که راست و دروغ عبارات ماوراء ریاضی را تعیین‌می کنندتفاوت بسیار دارند. درمورداولی باید بگوئیم معمولا تجربی است‌وشامل برخی اعمال‌نظیرشمردن و اندازه گرفتن است. ولی دومی وابسته به‌روشهای اثبات در دستگاه صوری‌ریاضیات‌است. صورتگرایان راهمچون‌ایده‌آلیستها

*- ماوراء (= Meta) - این پیشوند در ترکیبهایی مانند ماوراء زبان، ماوراء قضیهٔ، ماوراء ریاضی و غیره بکار می‌رود. بطورکلی هرگاه T تئوری یا دستگاهی باشد، تئوری که در باب تئوری T بحث کند متا تئوری T خوانده می‌شود.

عقیده براین است که کاربرد ریاضی وابسته به‌شناسایی تشابهات است. ولی، این تشابهات، همانندی میان صورتها واجسام فیزیکی نیستند. بلکه، تشابهات صوریی هستند بین «اعمال وروابط ریاضی محض» و «اعمال وروابط فیزیکی معین». بدین ترتیب، برای این چنین تشابهات صوریی، سد ومانع منطقی برای نشان دادن این اعمال و روابط فیزیکی بوسیلهٔ اعمال و روابط ریاضی، وجود ندارد. بنابراین اعداد وارقام ریاضی قابل تعبیر به‌اندازه‌های کمیتهای معین می‌باشند وهمچنین اعمال ریاضی $+$ ، $-$ ، $\times$ ، $\div$ وغیره نیز قابل تعبیر به اعمال فیزیکی معین روی اشیایی که این کمیات رادارا می‌باشند، هستند و روابط $>$ ، $=$ ، $<$ برای روابط فیزیکی معینی که به این اشیاء مربوط می‌شوند، بکار می‌روند. درنتیجه، فرمولهای ریاضیات محض تبدیل به گزاره‌های آمپریك می‌شوند. گزاره‌هایی که چگونگی نتایج انجام اعمال معین را نشان می‌دهند.

سومین تئوری معتبر دربارهٔ تمایز میان ریاضیات محض وریاضیات کاربسته از منطقیون چون فرگه و راسل است. ازدیدگاه فکری این فلاسفه، ریاضیات محض جزیی از منطق محسوب می‌شود وبنابراین تصور، فرمولهای ریاضیات محض در «حساب مجموعه‌ها»، عباراتی تحلیلی می‌باشند. به‌قول راسل دومجموعه باهم متشابهند وقتی وفقط وقتی که اعضای آنها دریك تناظر یك‌به یك شرکت کنند. فرض کنید E مجموعه‌ای باشد بطوری که :

(i) $(\exists x)(x\in E)$

(ii) $(x)(y)[((x\in E)(y\in E))\supset(x=y)]$

آنگاه E مجموعهٔ یکانی است ، و عدد ۱ را به عنوان مجموعهٔ مجموعه‌های متشابه E تعریف می کنیم . اکنون فرض کنید F مجموعه‌ای باشد بطوری که :

(i) $(\exists x)(\exists y)[(x\in F)(y\in F)(x\neq y)]$

(ii) $(x)(y)(z)[((x\in F)(y\in F)(Z\in F))\supset$
$((x=y)\vee(x=z)\vee(y=z))]$

آنگاه F مجموعهٔ دو عضوی است، و عدد ۲ را به‌عنوان مجموعهٔ مجموعه‌های متشابه F تعریف می کنیم.

النهایه، فرمول ریاضی محض $۲=۱+۱$ بوسیلهٔ فرمول تحلیلی زیر توجیه می‌شود:

(I)
$(X)(Y)[((X\in ۱)(Y\in ۱)(X\neq Y))\supset((X\cup Y\in ۲))]$

اکنون می‌بینیم درزمینهٔ تمایز میان ریاضیات محض و کاربسته؛ منطقیون با چه مشکلاتی روبرو هستند. بدین ترتیب، منطق‌دان مجبور به‌تمیز دو نوع کاربرد مختلف ریاضی می‌شود. کاربرد اول راکاربرد نخستین ریاضیات نام می‌نهیم. این‌چنین کاربردی می‌تواند مثلاً گزارهٔ «یك سیب به‌اضافهٔ سیب دیگر می‌شود دوسیب» باشد. واین‌همان است که‌درفرمول (I) ارائه‌شد، وهمچنین می‌توانیم آن‌را با فرمول زیر نمایش دهیم:

(II) $((A\in ۱)(B\in ۱)(A\neq B))\supset((A\cup B)\in ۲))$

مشاهده می‌شود که اگر (I) تحلیلی است، بالاقتضاء (II) هم تحلیلی می‌شود. لذا تاآنجاکه به کاربرد نخستین ریاضیات مربوط می‌شود، هیچ تفاوت ریشه‌ای بین ریاضیات محض و کاربسته وجود ندارد ـ برخلاف ایده‌آلیستها وصورتگرایان که معترف به‌چنین اختلاف ریشه‌ای هستند. ازنظر منطقیون، چون هردو گزارهٔ (I) و (II) تحلیلی هستند، لذا اختلاف ریاضیات محض وکاربسته بطور وضوح روشن نیست. ظاهرا دومین نوع کاربرد ریاضی که منطقی (منطقدان) باید مورد توجه قراردهد، چیزی است که آنرا کاربرد ثانی ریاضی نام می‌نهیم واین‌همان عبارات ریاضیات کاربسته است که وابسته هستند به‌نتایج اندازه گیری‌هایی که در مقیاس معین ، تحت شرایط ویژه، بدست می‌آیند. حال به‌مثالهای زیر توجه کنید:

(a) اگر انتهای دومیلهٔ یك‌فوتی را به‌هم متصل کنیم، آنگاه طول میلهٔ حاصل دو فوت خواهد شد.

(p) اگر سیمی به‌مقاومت الکتریکی یك‌اهم را بطور سری به‌سیم دیگری به مقاومت یك اهم متصل کنیم، آنگاه مقاومت معادل سیستم دواهم می گردد.

به‌وضوح می‌بینیم که این دو کاربرد فرمول ریاضی: $۲=۱+۱$ نمی‌تواند جانشین فرمول عمومی (I) شود. زیرا، هرگونه تشابه صوریی که ممکن است بین عمل فیزیکی «اتصال انتهای میله‌ای به‌میلهٔ دیگر» وعمل منطقی «جمع (اجتماع) دومجموعه» وجود داشته باشد، معذالك، نمی‌توانیم بگوییم هردوی این اعمال یکسانند. بنابراین، چنین به‌نظر می‌رسد که منطقیون می‌بایست تفسیر جداگانه‌ای در مورد این دو کاربرد ریاضی ارائه دهند.

این موضوع به‌ندرت بوسیلهٔ منطقیون مورد بحث قرار می‌گیرد، و به‌وضوح روشن نیست که چه نظری می‌توانستند در مورد تمایز میان ریاضیات محض و کاربرد ثانی ریاضی ارائه‌دهند ـ وآیا واقعاً می‌توانستند چنین تفاوتی را قائل شوند. به‌عقیدهٔ من، برای اینکه نظر منطقیون دربارهٔ تمایز میان ریاضیات محض و کاربسته منقح وبی‌عیب باشد، بایدکار بردثانی ریاضی را وارد عمل سازیم، وتفسیر جداگانه‌ای ازمراحل طرح این کاربرد ارائه‌دهیم. وظیفهٔ پرکردن این شکاف، درتئوری منطقیون، مربوط است به‌کار آتی ما درمقالات آینده .

پایان

فیثاغورس، آپولونیوس، جوردان، فن نویمان، ...

علیرضا امیرمعز: دانشگاه تگزاس تک

ریاضی دانان تصور می‌کنند که «قضیهٔ کوسینوس» تنها تعمیم «قضیهٔ فیثاغورس» است. البته «قضیهٔ آپولونیوس» تعمیم بهتری است. به علاوه این قضیه مورد بررسی جوردان و فن نویمان قرار گرفته است و شرط لازم و کافی برای اینکه فضای خطی طول‌دار زاویه هم داشته باشد بدست آمده است.

در این مختصر حل برداری این قضایا را بررسی می‌کنیم. سپس مسائلی پیشنهاد می‌کنیم که برای دانشجویان مأخذ رساله‌های مقدماتی باشد.

۱ـ اصطلاحات : روش برداری را بکار می‌بریم. حاصلها را با حروف یونانی می‌نمائیم. حاصلضرب داخلی ξ و η را با $(\eta\ ،\ \xi)$ نمایش می‌دهیم.

۲ـ اثبات برداری قضیهٔ فیثاغورس : قضیهٔ فیثاغورس را به دو روش می‌توان به زبان جبر برداری ترجمه کرد :

(I) فرض کنیم که ξ و η دوبردار درصفحه باشند به‌قسمی که $(\eta\ ،\ \xi)=0$. از اینرو :

$$\|\xi-\eta\|^2=\|\xi\|^2+\|\xi\|^2$$

ملاحظه می‌شود که طول بردار $\eta-\xi$ همان طول وتر است. دراین قضیه ممکن است که بردارها صفر باشند. اثبات این قضیه بسیار ساده است وازتساوی $\|\alpha\|^2=(\alpha\ ،\ \alpha)$ استفاده می‌شود.

(II) فرض کنیم که ξ و η دوبردار درصفحه باشند به‌قسمی که $(\xi\ ،\ \eta)=0$.

سپس $\|\xi+\eta\|^2=\|\xi\|^2+\|\eta\|^2$

این رابطه یعنی که مربع طول قطر مربع مستطیل که اضلاع آن ξ و η اند مساوی مجموع مربعات طولهای دوضلع آن است. اثبات این رابطه شبیه اثبات (I) است.

۳ـ قضیهٔ آپولونیوس : در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات دوقطر آن مساوی مجموع مربعات چهارضلع آن است.

برهان ـ این قضیه را به‌زبان جبر برداری ترجمه می‌کنیم فرض کنیم که ξ و η دوبردار در صفحه باشند. سپس

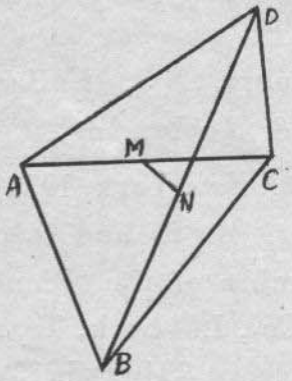
$$\|\xi+\eta\|^2+\|\xi-\eta\|^2=2\|\xi\|^2+2\|\eta\|^2 \qquad (1)$$

اثبات این تساوی بسیار ساده است. آنرا به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

هرگاه نگاهی به رسالهٔ جوردان و فن نویمان [۴] بکنیم ملاحظه می‌شود که از رابطهٔ (۱) دریك فضای خطی طول دار نتیجه می‌شود که حاصلضرب برداری زیر نتیجه می‌شود :

$$(\xi,\eta)=\frac{1}{2}[\|\xi+\eta\|^2-\|\xi\|^2-\|\eta\|^2]$$

۴ـ تعمیم قضیهٔ آپولونیوس : چهار ضلعی ABCD را در نظر می‌گیریم. لازم نیست که این چهارضلعی مسطح باشد. مجموع مربعات دو قطر را با مجموع اضلاع مقایسه می‌کنیم. نتیجه می‌شود که :



$$(AB)^2+(BC)^2+(CD)^2+(DA)^2=$$
$$=(AC)^2+(BD)^2+4(MN)^2$$

که در آن M میان پاره‌خط AC و N میان پاره خط BD است.

برهان: نقطهٔ A را مبدأ می‌گیریم و هر نقطه را با برداری که با حرف یونانی آن نقطه مرتبط است نمایش می‌دهیم ؛ مثلا $B\longleftrightarrow\beta$, $C\longleftrightarrow\gamma$, $D\longleftrightarrow\delta$, $M\longleftrightarrow\mu$ و $N\longleftrightarrow\nu$. از اینرو :

$$\mu=\frac{1}{2}\gamma \quad و \quad \nu=\frac{1}{2}(\beta+\delta).$$

ملاحظه می‌شود که :

$$(MN)^2=\frac{1}{4}\parallel \beta+\delta-\gamma \parallel^2$$

هر گاه این را حساب کنیم نتیجه می‌شود که :

$$4(MN)^2=\|\beta\|^2+\|\delta\|^2+\|\beta-\gamma\|^2+\|\delta-\gamma\|^2 \\ -\|\beta-\delta\|^2-\|\gamma\|^2$$

لذا برهان کامل است .

۵- پیشنهادها : هر گاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد طول MN صفر است . عکس آن را ثابت کنید .

قضایا را درفضاهای n بعدی تعمیم دهید؛ n عددی است طبیعی و محدود .

ثابت کنید که درچهارضلعی بخش‌اوساط۴خطوطی که‌اوساط اضلاع را به‌هم می‌پیوندددومیان پاره خط MN بریك استقامتند.

تعمیم قضیهٔ آپولونیوس رابه‌متوازی‌السطوحهای چندبعدی بررسی کنید .

قضایا را برای فضاهای برداری روی اعدادمختلط بررسی کنید .

شکل قضایا را درفضاهای دو وسه بعدی بکشید .

کتابها

[1] Altshiller Court, N., College Geometry, Barnes & Noble, Inc., New York (1952).

[2] Amir - Moèz, A. R. and B. S. Duran, Linear Algebra of the Plane, Western Printing Co., Lubbock, Texas 79409 (1973).

[3] Feanley - Sander, Desmond, J.S.V. Symons, Apollonius and Inner Products Amer. Math. Monthly, (81), 9, (1974), 990 - 993.

[4] Jordan, P. and J. Von Neumann, On Inner Products in Linear Metric Spaces, Ann. of Math. (2) 36 (1935), 719 - 723.

مسائل شطرنج دنباله از صفحهٔ ۳۵۴

در موردمهرهٔفیل، تعدادجوابها $n-2$ است.برای اثبات این موضوع، کافی است یادآوری شودکه تعداد اقطار هم‌جهت برابر با $2n-1$ است. واضح است که ازدوقطری که فقطدارای یك خانه‌اند نمی‌توان استفاده کرد، زیراکه دوفیل بر روی قطر بزرگی که درجهت دیگرمی‌رود، خواهند بود . با این تذکر، تعداد ماکسیمم به $2n-2$ می‌رسد. بنابراین حداکثرفیلهایی راکه می‌توان روی یك صفحهٔ شطرنج عادی قرارداد برابر با چهارده است. دودنی ثابت کرده است که این جوابها می‌توانند سی‌وشش ترکیب اساسی مختلف را تشکیل دهند. برای‌یك‌صفحهٔ شطرنجی مرتبهٔn، تعدادکل‌این ترکیبات برابربا 2^n است،ولی چون همانند مسئلهٔ رخها، نمی‌توان جوابهای ثانویه‌ای‌راکه‌ناشی از دوران ویا برگردان جوابهای اولیه‌است، حذف کرد، برای قراردادن حداکثرتعداد فیلها برروی صفحهٔ شطرنجی با مرتبهٔ غیرمشخص، کافی است که یك ردیف‌ازn فیل را دریك ردیف‌واقع درلبه‌ها (حاشیه‌ای) قراردهید و$n-2$ فیل بقیه را در ردیف مقابل متمرکز کنید.

حداکثر مهره‌های شاه راکه می‌توان برروی یك صفحهٔ شطرنجی مرتبهٔ زوج قرار داد برابر با $\frac{n^2}{4}$ و برای صفحات شطرنجی‌مرتبهٔفردبرابربا $\frac{(n+1)^2}{4}$ است. یکی از وضعیتهای ممکن بدین‌ترتیب است که مهره‌های شاه را به‌صورت شبکه‌های مربعی‌قراردهیم به‌نحوی‌که بین دومهرهٔمجاور درهرجهت‌دلخواه یك خانه فاصله‌باشد.تعیین تعدادترکیبات مختلفی که‌برای‌حداکثر تعداد مهره‌های شاه واقع بریك صفحهٔ شطرنجی $n \times n$ موجود است، بدون اینکه یکدیگر راتهدیدکنند، بسیارمشکل است. این مسئله تا چندی پیش لاینحل باقی مانده بود تا اینکه کارل‌فایل و س - ای-کمپ آنراحل کردند. بااحتساب‌جوابهای‌ثانویه‌ناشی از دوران وبرگردان برای صفحهٔ شطرنجی عادی8×8 تعداد جوابها ۲۸۱۷۵۱ است.

به زعم دودنی‌مطالعهٔ اسب «کمدین‌بلامنازع‌صفحهٔشطرنج» که با آن حرکت نامنظمش انسان را به‌اشتباه می اندازد، بدون شك ازسایر بهره‌ها مشکلتراست. حداکثر تعداد اسبهایی راکه می‌توان درصفحهٔ شطرنج معمولی 8×8 قرارداد، بطوری که یکدیگر را تهدید نکنند، چندتا است؟ و تعداد ترکیبات ممکن برای قراردادن این تعداد مهره‌ها درصفحهٔ شطرنج چند است؟

مسائلی در بارهٔ شطرنج

نوشتهٔ مارتین گاردنر

ترجمهٔ : مهندس داوید ریحان

اتاق آقای پنی پارکر در اداره‌اش بالینولئوم فرش شده بود ، وبنظر می‌آمد که از این کفپوش کـه همچون صفحه شطرنج به خانه‌هـایی متناوبـاً سیاه و سفید رنگ شده بود ، بوئی برمی‌خاست . این نوع شکل هندسی از همـان طفـولیت در پنی دو احساس عجیب پدید می‌آورد و او بین دو احساس حویش‌دائماً در جدال بود .

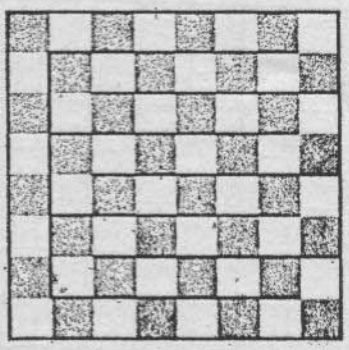
از کتاب **Pigeon Feathens**

نوشتهٔ : جان آپدیك

برای بعضی از اشخاص ممکن است که ازتماشای نقشهای شطرنجی احساس عصبی‌دست دهد، ولی‌اگریك متخصص‌حرفه‌ای در ریاضیات تفریحی به یك صفحـهٔ شطرنجی بنگـرد ، مسائل خوشایندی را می‌تواند دوآن به‌تصور درآورد. باید اذعان داشت که هیچ ساختمان هندسی‌نتوانسته‌است این چنین جلوه‌گاه‌کاملی در ریاضیات تفریحی بیابد ، دراینجا دربارهٔ بازی دام باشطرنج وبازی‌گو (go) که مستلزم داشتن صفحهٔ شطرنجی است صحبتی نمی‌کنم ، بلکه دربارهٔ مسائل‌نامحدود وجوراجوری‌که ازخواص متریك و توپولوژیك خود آنهـا سرچشمه می‌گیرد، مثالهایـی ذکر می‌کنم .

ابتدا یکی از مسائلی راکه در سال ۱۹۵۷ چـاپ شده است و امروزه نزد همگان آشناست معرفی می‌کنم. اگردوخانهٔ قطری متقابل یك صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ خانـه را برداریم ، آیا می‌توان ۶۲ خانهٔ باقیمانده را به‌کمك ۳۱ دومینو پوشانید؟ چون هر دومینو باید دوخانهٔ مجاور ، یکی سیاه ویکی سفید را بپوشاند، ۳۱ دومینو، ۳۱ خانهٔ سفیدو ۳۱ خانهٔ سیاه‌راخواهند پوشاند . ولی باید توجه داشت‌که دوخانه‌ای‌که در دوانتهای‌یك قطر واقعند همرنگند ، وبدین‌ترتیب‌دراین مسئله ۳۲ خانه‌ازیك رنگ‌و۳۰خانه‌ازرنگ‌دیگرخواهیم‌داشت و واضح‌است که‌نمی‌توان آنرابا۳۱دو مینو پوشانید. این‌اثبات عدم‌امکان‌یك‌مسئله، یکی‌از مثالهای‌کلاسیکی است‌که باید صفحهٔ شطرنجی را رنگ آمیزی کرد تا بتوان به‌حالات مختلف این ساختمان پی‌برد و این‌عمل از افکار ساده‌ای‌که از لحاظ زیبائی مورد نظر است و یا آنچه که برای بازیهای دام و شطرنج منظور است‌کاملا بدور است .

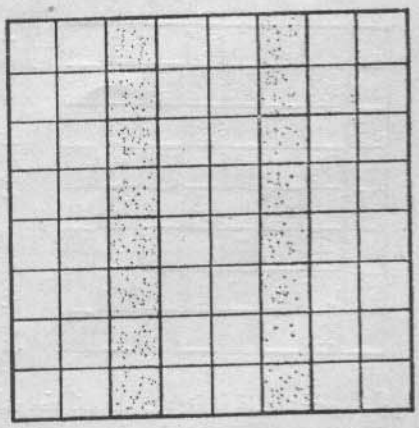
حال به‌جای اینکه دوخانه از یك رنگ را برداریم، دو خانه با رنگهای مخالف را برمی‌داریم . این‌خانه‌ها را می‌توانیم از هرجای دلخواهی برداریم . آیا همواره می‌توان ۶۲ خانـهٔ باقیمانده را به‌کمك ۳۱ دو مینو پوشانید ؟ پاسخ مثبت است ، ولی آیا اثبات این موضوع ساده است ؟ واضح است‌کـه برای پاسخ‌گفتن به این مسئله می‌توان تمام ترکیبهای متفاوت را در نظر گرفت ولی این‌کارخسته‌کننده وپرزحمت است. دانالاسکات یکی ازریاضیدانان دانشگاه‌کالیفرنیا اثبات ساده‌ای را شرح‌داده است‌که توسط دوستش دالف‌گومری که یکی ازمتخصصین‌کاوشهای ریاضی است، کشف شده است . در روی صفحهٔ شطرنج خطـوط پری را مانند شکل ـ روبرو می‌کشیم . بدین تـرتیب مسیر بسته‌ای بدست می‌آید که‌درطول آن‌خانه‌های سفیدوسیاه همچون‌دانه‌های‌مروارید پشت‌سرهم‌قرارمی‌گیرند

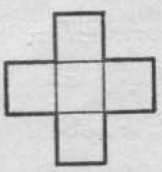


اگر دوخانه با رنگهای مخالف را از دونقطهٔ غیر مشخص ازاین

مسیر برداریم ، به دوقطعه خط باز تبدیل می‌شود (ویا اگر دو خانهٔ برداشته شده همجوار یکدیگر باشند ، بـه یك قطعه خط تبدیل می‌شود). چون هر کدام ازاین‌پاره خطها بایددارای‌تعداد زوج خانه می‌باشد، هرپاره‌خط ودرنتیجه تمام صفحه را می‌توان کاملا بوسیلهٔ دو مینوها پوشانید .

به‌جای‌اینکه سعی کنیم یك‌صفحهٔشطرنجی‌را که چندخانه‌اش رابرداشته‌ایم، بوسیلهٔ دومینوها بپوشانیم، فرض می‌کنیم که‌آنرا طوری ببریم که دیگر نتوان هیچ دومینوئی روی آن قرار داد. حداقل تعداد خانه‌هائی را که باید برداشت چقدر باید باشدکه بتوانیم به‌چنین هدفی‌نائل شویم؟ به سادگی می‌توان دیدکه باید ۳۲ خانهٔ همرنگ را ازصفحهٔ شطرنجی جدا کرد. هرگاه به‌جای‌دومینو، از «پلی‌مینو» استفاده‌کنیم، مسئله صورت‌پیچیده‌تری به‌خود می‌گیرد. [هرشکلی‌که از چند خانهٔ مربع شکل مجاور هم‌تشکیل شده باشد پلی‌مینو (= چند خانه‌ای) نامیده می‌شود]. سلیمان گولمب یکی‌از ریاضیدانان دانشگاه کالیفرنیای جنوبی ومؤلف‌کتاب پلی‌مینوها، کـه درسال ۱۹۶۵ در نیویورك چاپ شد، اخیراً این‌نوع مسئله‌را عنوان‌کرده‌است وآنهارا برای پلی مینوهای مختلف تادوازده پانتامینو (= پنج‌خانه‌ای) پاسخ گفته است. این‌مسئله درحالت خاص پانتامینو هائی‌که به شکل صلیب یونانی‌هستند، بسیارجالب توجه است. هرگاه خانه‌های‌شطرنجی ۶۴خانه‌ای را برروی یك‌برگ کاغذ رسم‌کنیم و مانند شکل‌زیر شانزده خانه‌را حذف‌کنیم، واضح است‌که دیگرنمی‌توان یك‌چنین صلیب یونانی‌را ازتوی‌خانه‌های باقیمانده برید ویاروی‌خانه‌های باقیمانده قرارداد. ولی مسئله این‌است کـه شانزده خانه حداقل خانه‌هایی‌نیست‌که بتوان‌حذف‌کرد، پس‌تعداد حداقل خانه‌هاچقدر است ؟

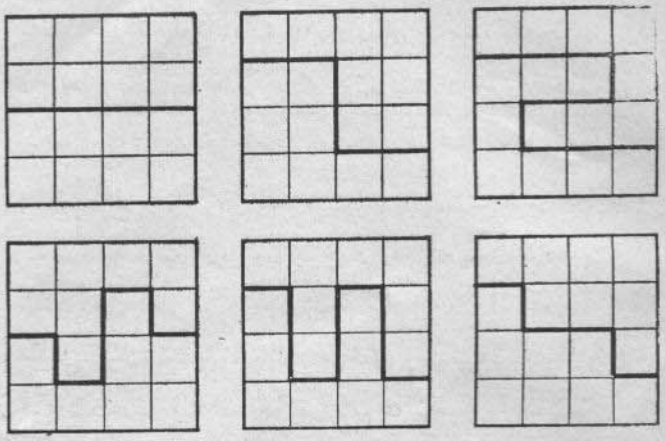




یکی از مسائل بـرش صفحهٔ شطرنج کـه بسیار مشکل و وقت‌گیراست وتابه‌حال لاینحل باقی مـانده است چنین است که تعداد برشهای مختلفی‌را بدست‌آوریم که روی یك‌صفحهٔشطرنجی ۸ × ۸ خانه‌ودر امتداد خطوطی‌که از میان خانه‌ها می‌گذرند و دارای شرایط زیر می‌باشند، می‌توان انجام‌داد: دونیمه باید هم مساحت وهم شکل باشند به‌نحوی‌که بتوان بدون اینکه یکی از آنها راپشت و روکنیم بر دیگری منطبق سازیم. اولین کسی‌که این‌مسئله را عنوان‌کرد هانری دودنی یکی از متخصصین بریتانیائی بازیهای ریاضی‌بود وبه زعـم وی این مسئله «آبستن مشکلات» است. وی موفق نشدکه لیست تمام ساختمانهای ممکن را ارائه دهد. واضح است‌که یك جـدول ۲ × ۲ رافقط به یك طریق می‌توان تقسیم‌کرد، ویك جدول ۳ × ۳ را نمی‌توان‌تقسیم کرد چراکه دارای تعداد خانه‌های فرداست؛ اگر فرض‌کنیم‌که به‌جای‌خانهٔمرکزی یك‌سوراخ قراردهیم، مسئله دارای‌دوجواب خواهد بود. صفحهٔ شطرنجی ۴ × ۴ احتیاج به‌کمی تفکر دارد ولی‌برای‌یافتن۶ جواب‌ممکن مسئله دچارچندان اشکالی‌نمی‌شویم (شکل بعد) این جوابها را می‌تـوان بادوران و برگـردانهای مختلی به‌صورتهای دیگری درآورد ولی‌جوابهایی‌که بدین‌صورت بدست‌می‌آید به‌عنوان جوابهای‌مختلف پذیرفته نمی‌شوند. دودنی توانست ثابت‌کندکه برای صفحهٔ شطرنجـی ۵ × ۵ بدون خانهٔ مرکزی، تعدادجوابها ۱۵ وبرای صفحهٔ شطرنجی ۶ × ۶تعداد جوابها به ۲۵۵ بالغ می‌گرددوازآن پارا فراترنتهـاد. مسائل صفحات شطرنجی ۷ و۸ خانه‌ای را امروزه به سادگی می‌توان بوسیلهٔ شمارگرهای الکترونیکی‌حل‌کرد ولی‌تا به‌امروزنشنیده‌ام که‌کسی برای برنامه‌ریزی این‌مسئله تـوسط شمارگرها اقدامی کرده باشد.

مسئله‌ای نزدیك به‌مسئله فوق بوسیلهٔ هوارد گراسمن یکی ازاساتید ریاضی نیویورك مطـرح شده‌است بـدین ترتیب‌که یك صفحهٔ شطرنجی مربع شکل‌را به۴ پارهٔ هم‌نهشت وهم‌شکل بخش کنیم. مانند مسئلهٔ پیشین، چهارجزء باید هم‌سطح، هم‌شکل وهم «جهت» باشند. واضح است‌که برای‌صفحهٔ شطرنجی ۲ × ۲ تنها یك پاسخ وجـود دارد؛ برای صفحهٔ شطرنجی ۳ × ۳ که خانهٔ مرکزی‌اش‌برداشته شده‌باشدنیزتنها یك‌جواب وجوددارد. وبرای

صفحهٔ شطرنجی ۴ × ۴ بدون توجه به‌جـوابهایی که حـاصل از برگردان ودوران جوابهای قبلی‌است، چندپاسخ می‌توان‌یافت؟



خواننده بدون اشکال می‌تواند به‌تمام جـوابها دست‌یابد. مسئلهٔ سرسام‌آور بعدی اقدام به‌یافتن‌پاسخهای صفحهٔ شطرنجی ۵ × ۵ است که دارای‌هفت تقسیم‌می‌باشد (فراموش نشودکه خانهٔمرکزی رابایدبوسیلهٔیك‌سوراخ جانشین‌کرد). (همواره می‌توان‌هرصفحهٔ شطرنجی‌زوج وهرصفحهٔ شطرنجی فردی راکه خانهٔ مرکزی‌اش خالی‌باشد به‌چهار بخش تقسیم کـرد. زیرا مربع یك‌عـدد زوج همواره مضربی‌از ۴است وباقیماندهٔ تقسیم‌مربع یك‌عدد فردبرعدد ۴برابربا‌واحد است. صفحهٔ شطرنجی۶ × ۶ رانیز بدون‌استفاده از شمارگرها می‌توان حل‌کرد وتعداد جوابها برابربا ۳۷است مانند مسئله‌پینشین، تعداد جوابها برای صفحات شطرنجی۷ × ۷ و ۸ × ۸ هنوز نامعلوم است؛ کافی‌است باصرف چنددقیقه وقت، جوابها رابه کمك‌یك شمارگر بدست‌آورد.

مسئلهٔبرش صفحهٔ شطرنجی به دونیمه ویاچهار پاره‌دارای مسائلی مشابه درفضای سه‌بعدی می‌باشد ولی‌تجزیه وتحلیل مسائل کاملا پیچیده‌تراست. حتی‌مکعب ۱ × ۲ × ۲ تولید اشکالاتی‌چند می‌کند. بسیاری ازاشخاص فکر می‌کنندکه تنها بـه یك طریق می‌توان چنین مکعبی‌را به‌کمك صفحاتی‌کـه از میان خانه‌های مکعبی‌آن می‌گذرند، به‌دو نیمهٔ هم نهشت بخش‌کنند؛ در واقـع تعداد جوابها سه‌تا است! آیاخواننده می‌تواند این‌تـرکیبات را ارائه دهد؟ به‌دوطریق می‌توان این‌مکعب رابه چهـار پاره تقسیم کرد. درمورد مکعب ۴ × ۴ × ۴ وسایر مکعباتی که می‌شناسیم تاکنون‌کسی هیچگونه ایده‌ای درمورد تقسیمات ممکن‌آنها به‌دو پاره ویاچهار پاره ابراز نکرده‌است.

* * *

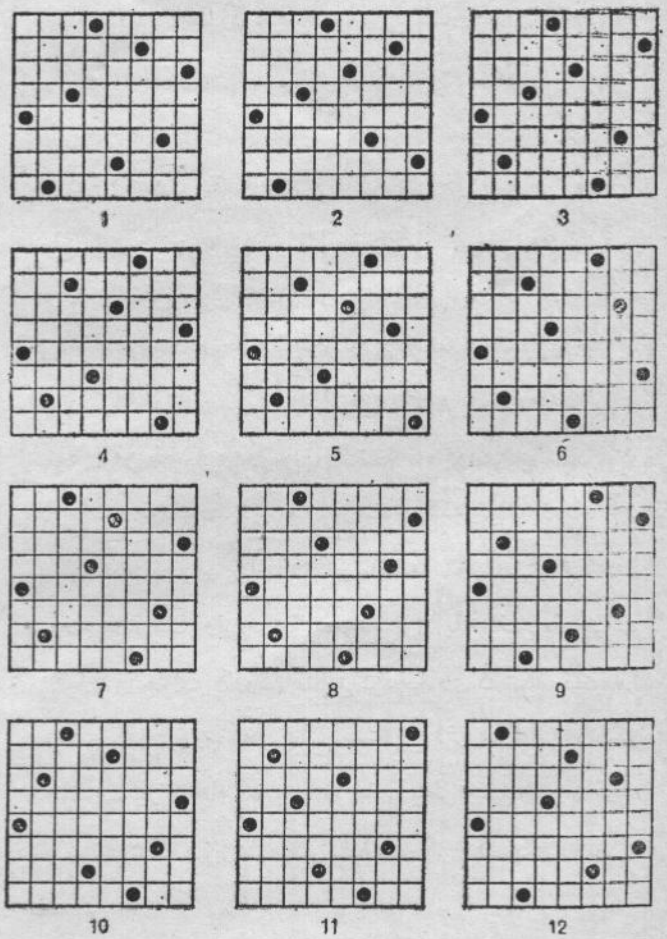
بادرنظرگرفتن مهره‌های مختلف بازی شطرنج و حرکات آنها مسائلی به‌تعداد کاملا زیاد می‌توان‌طرح‌کرد. به‌عنوان‌مثال فرض می‌کنیم‌که یك صفحهٔ شطرنجی مـرتبهٔ n دراختیار داریم (مرتبهٔ صفحهٔشطرنجی‌تعداد خانه‌های‌یك ضلع‌آن است)،حداکثر تعدادوزیرهایی راکه می‌توان‌درآن‌قرارداد به نحوی‌که هیچکدام یکدیگر راتهدید نکنند، چندتااست؟ چون وزیرمی‌تواند درخانه های مختلف بالا وپائین، چپ وراست وحتی درامتدادهای قطری حرکت‌کند، مسئله چنین می‌شودکه حداکثر مهره ها را طوری قراردهیم‌که هیچگاه دومهره دریك سطر، یك ستون ویایك قطر قرار نگیرند. به‌سادگی می‌توان دیدکه حداکثر تعدادنمی‌تواند ازمرتبهٔ صفحهٔ شطرنجی تجاوزکند؛ ثابت‌شده‌است‌که برای‌صفحهٔ شطرنجی مرتبهٔ n بالاترازا۳، می‌توانn وزیررا طوری‌قرارداد که درشرایط مسئله صدق‌کنند.

بدون در نظرگرفتن جـوابهایی کـه حاصل از دوران و برگردانند، فقط به‌یك طریق‌می‌توان این وزیرها راروی‌صفحهٔ شطرنجی ۴ × ۴ وبه دوطریق روی صفحهٔ شطرنجی ۵ × ۵ وبه یك روش برروی صفحهٔ ۶ × ۶ قرارداد. (خواننده می‌تواندابن مواضع را جستجـوکند. مسئلهٔ صفحهٔ شطرنجی مرتبه۶ غالباً به صورت یك‌صفحهٔ شطرنجی بامهره‌های متحرك در بـازارها یافت می‌شد). درمورد صفحهٔ شطرنجی ۷ × ۷ تعداد جـوابها شش تا است، برای صفحهٔ شطرنجی معمولی ۸ × ۸ پاسخ دوازده‌وبرای صفحهٔ ۹ × ۹ چهل وشش وبرای‌صفحهٔ ۱۰ × ۱۰ به‌تعداد نودو دوجواب وجود دارد. تابه حال فرمـولی‌کـه بتوان ازروی آن مستقیما تعداد جوابها راازروی مرتبهٔصفحهٔ شطرنجی بدست‌آورد شناخته نشده‌است. وقتی‌مرتبهٔ شطرنج بر۲ یا۳ بخش پذیرنباشد می‌توان n جواب راورویهم منطبق‌کرد بطوری‌که تمام خانه‌هارا بپوشانند. بدین‌ترتیب که‌می‌توان بیست‌وپنج وزیرراکه‌ازپنج رنگ مختلف شکیل شده‌است، برروی صفحهٔ شطرنجـی ۵ × ۵ قرار داد به نحوی‌که وزیرهای همرنگ هـرگز یکـدیگر را تهدید نکنند.

درشکل‌بعددوازده جواب‌اصلی مسئله برای صفحهٔشطرنجی

معمولی ۸×۸ ، دیده می‌شود. تابه‌حال ادبیات عظیمی درمورد این پرسش مشهوروتحت عنوان «مسئلهٔ هشت وزیر» بوجودآمده و منتشرشده است ؛ این مسئله برای اولین باربوسیلهٔ ماکس بزل (Bezzel) از اهالی برلین در شمارهٔ سپتامبر ۱۸۴۸ مجلهٔ Schachzeitung طرح شده است ؛ دوازده جواب در سال ۱۸۵۰ بوسیلهٔ فرانز نوك (Nauck) در مجلهٔ : Illustrierte Zeitung بچاپ رسید .

اثبات اینکه این دوازده‌جواب تمام پاسخهای ممکن‌مسئله را شامل می‌شود چندان آسان نیست . یکی از ریاضیدانان بریتانیائی‌به‌نام گلایشر (Glaisher) توانست‌به‌کمك‌دترمینانها به این مسئله پاسخ قطعی دهد ، طریقهٔ اثباتش در شمارهٔ دسامبر ۱۸۷۴ مجلهٔ philosophical Magazine منتشرشد. هر کدام ازاین پاسخهای اصلی را به‌کمك دوران و برگردان می‌توان به‌هفت پاسخ دیگربدل ساخت‌که عبارت ازمواضع‌ثانویهٔ پاسخهای اولیه می‌باشند واین عمل درموردهمگی‌بجزپاسخ شمارهٔ ۱۰ قابل اجرااست چراکه پاسخ شمارهٔ ۱۰ به‌علت تقارن خود،



فقط سه وضعیت ثانویهٔ دیگر را می‌تواندبدهد. بنابراین‌کلا ۹۲ جواب وجود دارد . پاسخ ۱۰ به علت اینکه هیچ وزیری روی شانزده خانهٔ مرکزی واقع نیست ، از دیگران مستثنی است . پاسخ اخیر با پاسخ شمارهٔ ۱ دارای‌این خاصیتند که‌هیچکدام‌از وزیرها برروی قطرهای بزرگ واقع نیستند؛ پاسخ ۷ جالبتر ازهمه است : این تنها پاسخی است‌که درآن سه وزیر برروی‌خط مستقیم واقع نیستند. خواننده می‌تواند با آزمایش سایر جوابها که درآنها هرسه وزیر ویا هرچهار وزیر دریك امتدادند پی‌به صحت‌گفتار اخیر ببرد . (دراینجا مراد ازخط راست ، خطوط ماربر اقطار نیست بلکه منظور هرخطی است‌که از مرکز این خانه‌ها و درهر امتداد دلخواهی رسم شود) ممکن است‌گهگاهی کسی پیدا شود واظهار داردکه پاسخ متفاوت دیگری‌بدست‌آورده است‌که درآنهاسه وزیردریك امتدادنیست ؛ ولی اگر کمی دقیقتر به پاسخ یافته شده بنگرید خواهید دیدکه یا اشتباه‌کرده است‌و یا اینکه این پاسخ از دوران ویابرگردان جوابهای اولیه بدست می‌آید . لازم به یاد آوری است‌که به زعم عده‌ای ، مسئلهٔ هشت وزیر در مورد وقتی‌که یك وزیر در خانه‌های قطری واقع باشد، دارای جواب نیست ؛ بطوری‌که درلیست جوابها دیده می‌شود ، دونوع از این جوابها وجود دارد. لازم بـه تذکار است‌کـه در هرکدام از تمام جوابها ، یك وزیردرخانهٔ چهارم‌کناری شطرنج واقع است .

به‌جای‌وزیرمی‌توان‌ازسایرمهره‌های شطرنج‌استفاده‌کرد.اگر از رخ استفاده کنیم، واضح است‌که تعداد حداکثر رخهایی‌که می‌توان برروی صفحهٔ شطرنجی مرتبهٔ n قرار داد به نحوی‌که حائز شرایط‌اخیرالذکرباشند، برابربا n است؛ اگربیش‌ازاین تعداد رخ درصفحهٔ شطرنج قراردهیم، حداقل دو رخ‌دریك ردیف قرارخواهند گرفت. یك‌روش‌راکه می‌توان‌درتمام‌صفحات‌شطرنجی بکاربست‌این است‌که تمام رخها رادرامتدادیکی‌از اقطار بزرگ قراردهیم. تعداد وضعیتهای ممکن برای یك صفحهٔ شطرنجی مرتبهٔn برابر است‌با $n!(=1\times2\times3\times\cdots\times n)$. ولی تشخیص اینکه‌کدامیك از جوابهای بدست‌آمده حاصل از دوران ویا برگردان جوابهای اولیه است، آنچنان مشکل است کـه تاکنون نتوانسته‌اند حتی برای صفحهٔ شطرنجی معمولی ۸×۸ نیز تعداد دقیق جوابهای اولیه را بیابند.

دنباله صفحهٔ در ۳۵۰

دربارهٔ اعداد اول چه‌می دانید؟ (۵)

ترجمهٔ: **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی‌دانشگاه‌آذرآبادگان

۲۲ـ اعداد فرما

صورت کلی اعداد فرما $F_k=2^{2^k}+1$ است که درآن $k=0,1,2,\ldots$ می‌باشد. فرما ریاضی‌دان مشهور قرن هفده اول‌بودن این‌سری‌اعداد راتخمین‌زد. به‌ازای $k=0,1,2,3,4$ اول بودن F_k بدیهی است ولی در سال ۱۷۳۲ اولر نشان داد که عدد F_5 دارای ۱۰ رقم بوده و عددی است غیر اول زیرا بر ۶۴۱ قابل قسمت است:

$$F_5=2^{2^5}+1=4294967297$$

تاسال ۱۹۶۳ تعداد ۳۸ عدد ازسری F_k غیراول بوده‌اندکه به ازای kهای زیرحاصل شده‌است:

$$k=5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18,$$
$$19,23,36,38,39,55,58,63,73,77,81,117,$$
$$125,144,150,207,226,228,260,267,268,$$
$$284,316,452,1945$$

این۳۸ عدد F_k شامل عوامل اولی‌هستند (مثلا F_5 و F_6)ولی نمی‌توانیم عوامل اول‌آنها رانشان دهیم. درمورد مثلا F_{1945} می‌دانیم‌که آن را به‌حاصل‌ضرب دو عدد صحیح بزرگتراز (۱) می‌توان تجزیه‌کرد ولی درمورد اعداد دیگری از سری نظیر F_{14} ، F_{13} ، F_8 ، F_7 حتی تجزیهٔ به حاصل ضرب دوعدد صحیح بزرگتر از (۱) را هم نمی‌دانیم ولی می‌دانیم که چنین تجزیه‌ای وجود دارد.

بزرگترین عدد غیراول شناخته شده از سری F_k یعنی F_{1945} رادر نظر می‌گیریم . تعداد ارقام این عدد از 10^{582} بیشتراست واز اینرو نوشتن تمام ارقام‌آن غیرممکن است وتنها کوچکترین‌مقسوم‌علیه اول‌آن‌را به‌صورت $m=5\times 2^{1947}+1$ می‌نویسیم.

حال دو سؤال پیش می‌آید:

(۱) چگونه این‌مقسوم‌علیه را بدست‌آوریم؟

(۲) چگونه می‌توانیم تحقیق کنیم‌که عدد m دارای۵۸۷ رقم است؟ ازاینرو نمی‌توانیم رقمهای مقسوم‌علیه F_{1945} راهم بنویسیم. بدیهی است‌که این‌نتیجه راباتقسیم عدد F_{1945} بر m بدست نخواهیم آورد ، بلکه از طریق دیگری تحقیق می‌کنیم . در حقیقت چگونگی تعیین باقیماندهٔ تقسیم عدد F_{1945} بر m راکه باید صفرشود شرح می‌دهیم.

باقیماندهٔ تقسیم عدد صحیح t بر m رابا $\bar{t}$ (t بار) نشان می‌دهیم. از تعریف عدد صحیح $\bar{t}$ نتیجه می‌شودکه به ازای عدد صحیح t، $m|t-\bar{t}$ است. حال‌رشتهٔ r_k رابا شرایط زیرتعریف می‌کنیم $(k=1,2,\ldots)$.

$$(I)\quad r_1=2^2 \text{ و } r_{k+1}=\bar{r}_k^{\,2}$$

باروش استقراء ریاضی ثابت می‌شودکه:

$$(II)\quad m\,|\,2^{2^k}-r_k$$

رابطهٔ (II) به‌ازای $k=1$ درست است زیرا $2^{2^1}-r_1=0$ خواهد بود. اگر درستی رابطهٔ II را به ازای $k=k$ محرز بدانیم خواهیم داشت $m|2^{2^{k+1}}-r_k^2$ ، وبنابراین: $m|t-\bar{t}$. به‌ازای $t=r_k^2$ داریم:

$$m|r_k^2-\bar{r}_k^2 \text{ و } m|2^{2^{k+1}}-\bar{r}_k^2$$

یعنی بنابه رابطهٔ (I) داریم $m|2^{2^{k-1}}+r_{k+1}$. پس به‌ازای $k=1945$ داریم:

$m \mid F_{1945} - r_{1945} - 1$

پس در تقسیم عدد F_{1945} بر m همان باقیماندهٔ $r_{1945}+1$ بدست می‌آید. برای اینکه بخش‌پذیری عدد F_{1945} بر m را تحقیق کنیم، کافی‌است قابلیت تقسیم $r_{1945}+1$ بر m را بررسی کنیم. اکنون عملیات لازم را درمورد r_{1945} دنبال می‌کنیم.

ازفرمول(I) نتیجه می‌گیریم که اعداد $r_2, r_3, \ldots$ باقیمانده های بعداز تقسیم بر m همه‌کمتر از m هستند، یعنی هریك کمتراز ۵۸۷ رقم دارند. بنابراین از (I) نتیجه می‌شود که برای بدست‌آوردن r_{1945} لازم است که مربع اعداد ۱۹۴۴ هر کدام بیش‌از۵۸۷ رقم نداشته باشد. این‌عملیات امروزه توسط کمپیوترهای الکترونیکی صورت می‌گیرد وبدین ترتیب‌است که بخش پذیری F_{1945} بر $m = 5 \times 2^{1947} + 1$ محقق شده‌است بنابراین بانشان دادن اینکه $F_{1945} > m$ است عدد F_{1945} غیراول خواهد بود.

اماچگونگی یافتن این‌مقسوم علیه؟

طبق قضیهٔ مشهور در تئوری اعداد، مقسوم‌علیه طبیعی‌عدد F_n می‌بایست به‌فرم $(2^{n+2}k+1)$ باشد بطوری که k عدد صحیح وبزرگتر یامساوی صفر است. به ازای $n = 1945$ ، مقسوم علیه عدد F_{1945} تنها اعدادی به‌تصاعد حسابی خواهدبود $(2^{1947}k+1)$ $[k = 0,1,2,\ldots]$ که‌درآن $k=0$ نخستین مقسوم علیه یعنی (۱) راارائه می‌دهد. دومین مقسوم‌علیه به‌ازای $k=1$ برابر $2^{1947}+1 = 2^{n+2}+1$ است که بر ۳ بخش‌پذیر بوده عدد اول نیست. به‌ازای $k=2$ عدد :

$$(2^{1948}+1) = (2^{n+2} \times 2 + 1) = (2^4)^{487} + 1$$

بر 2^4+1 قابل‌قسمت بوده عدد اول نیست.

به‌ازای $k=3$ عدد $2^{1947} \times 3 + 1 = 2^{n+3} \times 3 + 1$ غیراول است وقابل‌قسمت بر ۵ پس:

$$5 \mid 2^4 - 1 \Longrightarrow 5 \mid 2^{1944} - 1$$

ازضرب طرف راست در $2^3 \times 3$ داریم: $2 \mid 2^{1947} \times 3 - 24$

بنابراین:

$$5 \mid 2^{1947} \times 3 + 1$$

به‌ازای $k=4$ عدد $2^{1949}+1 = 2^{n+2} \times 4 + 1$ قابل‌قسمت بر ۳ بدست می‌آید.

به‌هنگام کوشش درراه بدست‌آوردن مقسوم‌علیه اول F_{1945} باید آنرا بر $m = 2^{1947} \times 5 + 1$ تقسیم کنیم، تا باقیماندهٔ تقسیم صفر شود. نتیجه می‌گیریم که m کوچکترین مقسوم علیه F_{1945} وبزرگتر ازیك بوده عدد اول‌است.

بطور مشابه می‌توانیم اعداد دیگرفرما را مشخص کنیم. به ازای عدد F_5 که فرما اعتقاد به اول بودن آن داشت می‌توان به‌سادگی مسئله راحل کرد، یعنی تشخیص اول بودن یا نبودن F_5 به‌سادگی میسراست.

بطوری‌که می‌دانیم باید مقسوم علیه‌های عدد F_5 به فرم $(2^7 \times k + 1)$ باشد یعنی‌به‌صورت $128k+1$. به‌ازای $k=1$ عدد ۱۲۹ حاصل می‌شودکه بر۳ قابل قسمت است یعنی‌غیراول می‌باشد. به ازای $k=2$ عدد ۲۵۷ بدست می‌آیدکه مقسوم علیهی ازعدد F_5 نبوده، وآنرا می‌توان باتقسیم F_5 (شامل ۱۰ رقم) برعدد ۲۵۷ تحقیق نمود.

به‌ازای $k=3$ عدد ۳۸۵ قابل‌قسمت بر۵ بدست می‌آید که عدد غیراول است. به ازای $k=4$ عدد $2^9+1 = 513$ حاصل می‌شودکه بر۳ قابل‌قسمت‌بوده عدد غیراول است. به‌ازای $k=5$ عدد اول ۶۴۱ بدست می‌آید و می‌توان به‌آسانی تحقیق کردکه عدد ۶۴۱ کوچکترین مقسوم علیه اول‌عدد F_5 است. زیرا از تقسیم عدد $F_5 = 4294967297$ بر ۶۴۱ مقدار ۶۷۰۰۴۱۷ بدست می‌آید. مقسوم‌علیه‌های این‌عدد،مقسوم‌علیه‌های‌عدد F_5 است که می‌بایست به‌فرم $2^7 \times k + 1$ باشد، واگر F_5 غیراول باشد می‌بایست مقسوم علیه اولی‌کوچکتر از مربع ریشهٔ‌آن ونیز کمتراز (۲۶۰۰) داشته‌باشد.

بنابراین به ازای k نامساوی $128k+1 < 2600$ یعنی $k < 21$ راداریم، ازطرف دیگر می‌دانیم که k باید از ۴ بزرگتر باشد ازاینرو ۶۴۱ کوچکترین مقسوم علیه عدد F_5 است. به‌کمك‌تقسیمات‌متوالی‌می‌توان اول بودن‌عدد (۶۷۰۰۴۱۷) را بررسی کرد وتجزیهٔ F_5 به‌دوعامل اول‌را بدست‌آورد. درمورد عدد F_6 مقسوم علیه $2^8 \times 1071 + 1$ بدست می‌آید وغیراول بودن‌آن محقق شده‌است.

درجستجوی مقسوم علیه‌های اول F_n، بین‌اعداد به تصاعد حسابی $k \times 2^{n+2} + 1$، به کشف چنین مقسوم علیهی نایل شده‌ایم، واین‌فقط وقتی‌است که مقسوم علیه بزرگی برای F_n موجودنباشد. به‌ازای kهایی که اعدادبسیاربزرگی ارائه‌می‌دهند

نمی‌توان چنین مقسوم علیهی را شمرد.

این‌مسئله درمورد اعداد F_7 و F_8 که اولی ۳۹ و دومی ۷۸ رقم دارند صدق می‌کند. یعنی‌مقسوم علیه اول این اعداد را نمی‌دانیم ونیز تجزیهٔ آنها را به حاصل‌ضرب‌دوعدد طبیعی‌وبزرگتر از (۱) بدست نیاورده‌ایم، ولـی J. C. Morehead در سال ۱۹۰۵ ثابت‌کردکه عدد F_7 غیراول است و A. E. Western نیز غیر اول بـودن F_8 را درسال ۱۹۰۹ اثبات نمود. اثبات وی بااستفاده ازقضیهٔ زیرصورت گرفت:

قضیهٔ ۲۱ـ هرگاه F_n عدداول باشد، عدد :

$(3^{2^{2n}-1}+1)$ بر F_n بخش پذیراست.

برای شروع اثبات لم زیررا ثابت می‌کنیم:

لم‌ـ هرگاهk عدد صحیح و نامنفی‌وعدد $p=12k+5$ اول باشد عدد $3^{6k+2}+1$ برp بخش پذیراست.

اثبات‌ـ صحت لم به‌ازای $k=0$ بدیهی‌است. به‌ازای عدد طبیعی k، عدد $p=12k+5$ رامورد نظر قرار می‌دهیم.

حاصل‌ضرب اولین $(6k+2)$ اعداد طبیعی بر۳ بخش‌ـ پذیراست باقرار دادن‌گروه $2k$ ، $2k+1$ ، وعوامل‌باقیمانده حاصل‌ضرب $3\times6\times9\times\cdots\times6k$ بدست می‌آید.

بامعکوس‌کردن عوامل، عوامل‌گروه دوم حاصل می‌شود:

$$(6k+3)(6k+6)\cdots(12k-3)12k(12k+3)$$

وچون $p=12k+5$ را می‌توان به‌این فرم نوشت:

$$(p-1)(p-5)(p-8)\cdots[p-(6k+2)]$$

چون مقسوم علیه‌ها اعداد فردند $(2k+1)$ حاصل‌ضرب ما بعد ازبسط وجمع‌جملات برp بخش پذیراست واعداد زیررا می‌دهد:

$$pu-2\times5\times8\cdots(6k+2)$$

که درآن u عدد صحیح مشخصی‌است. عوامل سومین گروه‌حاصل ضرب به‌شرح زیراست:

$$(12k+6)(12k+9)(12k+12)\cdots(18k+6)=$$
$$=(p+1)(p+4)(p+7)\cdots(p+6k+1)=$$
$$=pv+1\times4\times7\cdots(6k+1)$$

که درآن v عدد طبیعی است. بنابراین داریم:

$$3\times6\times9\times\cdots\times(18k+6)=3\times6\times9\times\cdots$$
$$\times6k[pu-2\times5\times8\times\cdots\times(6k+2)]\times$$
$$\times[pv+1\times4\times7\times\cdots\times(6k+1)]$$
$$=pw-1\times2\times3+4\times5\times6\times\cdots$$
$$\times(6k+1)(6k+2)=pw-(6k+2)!$$

که درآن w عدد صحیح است.

اما داریم :

$$3\times6\times9\times\cdots\times(18k+6)=$$
$$=(6k+2)!\times3^{6k+2}$$

پس معلوم می‌شودکه عدد pw بر $(6k+2)!$ قابل‌قسمت بوده و از اینـرو $pw=(6k+2)!t$ کـه درآن t عـدد صحیح می‌باشد. اما$p=12k+5>6k+2$ وازاینرو$(6k+2)!$ برp قابل قسمت نیست. ازطرفی $(6k+2)!t$ بر p و t قابل قسمت است واز اینروباید برpبخش‌پذیرباشد. $t=ps$ بنابراین $w=(6k+2)!s$ (s عدد صحیح). بدین ترتیب داریم:

$$3^{6k+2}=ps-1$$

پس‌عدد $3^{6k+2}+1$ برp قابل قسمت است ولم اثبات‌شد.

اثبات قضیهٔ ۲۱ـ فرض‌کنیدکه n عددی طبیعی باشد ازطرفی $2^n=2m$ که m عدد طبیعی بنابراین:

$F_n-1=4^m$ یعنی عدد F_n-5 بر۴ بخش پذیر است. از طرف دیگرداریم:

$$F_n-1=4^m=(3+1)^m=3t+1$$

که t عدد طبیعی است. بنابراین $F_n-5=3(t-1)$ یعنی F_n-5 بر۳ هم قابل‌قسمت است، یعنی F_n-5 بر۱۲ بخش‌ـ پذیراست یعنی $F_n=12k+5$ (k عدد صحیح). از لم قبلی نتیجه می‌گیریم‌که اگر F_n اول‌باشد داریم:

$$3^{6k+2}+1=3^{\frac{(F_n-1)}{2}}+1=3^{2^{n}-1}+1$$

که بر $\overline{t_n}$ قابل قسمت است.

اثبات فوق‌کامل است، برای ما لازم نیست ولـی می‌توان عکس قضیهٔ ۲۱ را هم اثبات‌کرد.

اکنون قضیهٔ (۲۱) رابرای اثبات غیراول بودن عدد F_7 بکار می‌بریم. بدین منظور کافی‌است نشان دهیم‌که عدد :

$3^{2^{127}}+1$ بر :

$F_۷=۳۴۰,۲۸۲,۳۶۶,۹۲۰,۹۳۹,۶۴۳,۴۶۳,۳۷۴,$
$۶۰۷,۴۳۱,۷۶۸,۲۱۱,۴۵۷$

بخش پذیرنیست. از اینرو محاسبهٔ باقیماندهٔ تقسیم عدد $۳^{۲^{۱۲۷}}$ بر $F_۷$ لازم است.

عدد $۳^{۲^{۱۲۷}}$ بسیار بزرگ است بطوری که نمی‌توان تعداد ارقام آنرا نوشت. امابرای محاسبهٔ باقیمانده درتقسیم این عدد بر $F_۷$ می‌توان ازروش زیراستفاده کرد:

عدد $۳^{۲^{۷}}$ دارای ۶۱ رقم است واز اینرو می‌توان آنرا نوشت، از طرفی r را باقیماندهٔ تقسیم آن بر $F_۷$ فرض کرد (امروزه این محاسبه به کمک کمپیوترهای الکترونیکی کار مشکلی نیست، ولی درسال ۱۹۰۵ که Morehead روی این مسئله کار می‌کرد بازحمت فراوان به‌این‌محاسبات نایل‌می‌شد). $r_۱$ باقیماندهٔ تقسیم $r^۲$ بر $F_۷$ همان باقیماندهٔ تقسیم $۳^{۲^{۸}}$ بر $F_۷$ خواهدبود.

$r_{۱۲۰}$ ازتقسیم عدد $۳^{۲^{۱۲۷}}$ بر $F_۷$ بدست می‌آید و می‌توان تحقیق کردکه $r_{۱۲۰}\neq ۲^{۲^{۷}}$ است ودر نتیجه عدد :

$۳^{۲^{۱۲۷}}+۱$ بر $F_۷$ بخش پذیرنبوده، وبرطبق قضیهٔ ۲۱ عدد $F_۷$ عدد اول نیست.

به طریق مشابه غیراول بودن اعداد $F_۸$ ، $F_{۱۳}$ ، $F_{۱۴}$ بررسی می‌شود (که درمورد $F_{۱۳}$ و $F_{۱۴}$ باکمپیوتر تشخیص صورت گرفته است).

برای هریك ازاعداد F_n به ازای $n=۹,۱۰,۱۱,۱۲$ که اعداد غیر اولند مقسوم علیه‌های اولی به‌صورت زیرمی‌دانیم:

$F_{۱۰}|۲^{۱۶}\times ۳۷+۱$ و $۲^{۱۲}\times ۱۱+۱۳+۱$

$F_{۱۱}|۲^{۱۴}\times ۷+۱$ و $F_{۱۲}|۲^{۱۳}\times ۳۹+۱$

وحتی غیراول بودن $F_{۱۵}$ و $F_{۱۶}$ هم اثبات‌شده ومقسوم علیه‌های اول زیررا بدست‌آورده‌اند:

$F_{۱۶}|۲^{۱۸}\times ۳۱۵۰+۱$ و $F_{۱۵}|۲^{۲۱}\times ۵۷۳+۱$

چون عدد $F_{۱۷}$ بیش‌از۳۰ هزار رقم‌دارد، کمپیوترهای موجود قادر به محاسبهٔ تقسیمات لازم نیستند.

کوچکترین مقسوم علیه اول‌عدد $F_{۱۶}$ یعنی :

$(۲^{۱۸}\times ۳۱۵۰+۱)$

در سال ۱۹۵۳ کشف شد . بنابراین تخمین اینکه همهٔ رشته اعداد زیر:

$۲+۱$ و $۲^۲+۱$ و $۲^{۲^۲}+۱$ و $۲^{۲^{۲^۲}}+۱$ و ...

اولند بدون اثبات است، واز جملهٔ $F_{۱۶}$ یعنی شانزدهمین جملهٔ بالاتر نمی‌توان صعودکرد، واز اینرو نمی‌دانیم که آیا تعداد نامحدودی عدد اول یاتعداد نامحدودی اعداد غیراول دراین‌رشته وجود دارد؟

۲۳ـ اعداد اول به فرم $n^n+۱$ و $n^{n^n}+۱$ و...

بدنبال اعداد اول فرما، اعداد اول به فرم $n^n+۱$ (n عدد طبیعی) رامورد توجه قرار می‌دهیم. فرض کنید n عدد طبیعی بوده و $n^n+۱$ اول‌باشد. هریك ازاعداد طبیعی n باید به‌شکل $n=۲^k\times m$ باشد، که درآن k عددصحیح نامنفی است و m عدد مثبت وفرد است، هرگاه $m>۱$ باشد عدد:

$$n^n+۱=\left(n^{۲^k}\right)^m+۱$$

بزرگتراز $(n^{۲^k}+۱)$ شده وبر $n^{۲^k}+۱$ بخش پذیراست یعنی غیر اول می‌باشد. بدین ترتیب m باید مساوی بایك و $n=۲^k$ گردد.

اگر $k=۰$ و $n=۱$ باشد عدد $n^n+۱$ اول است.

هرگاه $a>۰$ و $k=۲^r\times s$ (r عدد صحیح نا منفی و s عدد فرداست)، درصورتی‌که $s>۱$ باشد داریم:

$$n^n+۱=۲^{۲^r.sn}+۱=(۲^{۲^r.n})^s+۱>۲^{۲^r.n}+۱$$

وعدد سمت راست برعدد سمت چپ نامساوی بخش‌پذیر است واز اینرو عدد غیراول می‌باشد.

بدین ترتیب باید $s=۱$ بوده $k=۲^r$ و $n=۲^{۲^r}$ باشد و:

$$n^n+1=2^{2r}\cdot 2^{2^r}+1=2^{2^r+2r}+1=$$
$$=F_{r+2\cdot r}$$

بنابراین عدد n^n+1 ($n>1$ عدد طبیعی) فقط وفقط وقتی اول است که $n=2^{2^r}$ باشد، دراینجا $r\geq 0$ عدد صحیح و F_{r+2r} عدد اول است.

به‌ازای $r=0$ عدد $F_1=5$ یا $5=1+2^2$ عدد اول است.

به‌ازای $r=1$ عدد $F_2=257$ یا $257=1+4^4$ عدد اول است.

به‌ازای $r=2$ عدد F_6 غیراول وقابل قسمت بر:

$(1+1071\times 2^8)$ است یعنی عدد اول بدست نمی‌آید.

به‌ازای $r=3$ عدد F_8 غیراول وبخش پذیر بر:

$(1+39\times 2^{13})$ است یعنی عدد اول حاصل نمی‌شود.

درورای اعداد اول ۲ ، ۵ و ۲۵۷ اعداد اول دیگری به فرم n^n+1 وجود دارد که آنها بیش‌از ۳۰۰ هزار رقم دارند.

بین‌اعداد به‌فرم n^n+1 (n عدد طبیعی) تنها سه‌عدداول وجود دارد که تعداد ارقامش کمتر از ۳۰۰ هزار است و آنها عبارتند از:

$$1^1+1=2\ ,\ 2^2+1=5\ ,\ 4^4+1=257$$

بدین‌علت تخمین‌می‌زدند که بین‌اعداد بدین‌فرم (n^n+1) تعداد نامحدود ازاعداد غیراول فرما وجود دارد.

برای سری F_{r+2^r} به ازای $r=4,5,6,000$ اعداد F_{20} ، F_{37} ، F_{70} ، F_{135} ، F_{521} ، F_{1034} ، ...، حاصل می‌شود که تاکنون قادر به اثبات غیراول بودن آن نشده‌ایم.

اکنون اعداد اول به شکل $n^{n^n}+1$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مثلا داریم:

$$1^{1^1}+1=17 \text{ و } 2^{2^2}+1=17$$

برای اول بودن عدد $n^{n^n}+1$ ($n>1$ عدد طبیعی) باید $n=2^{2^r}$ ($r\geq 0$ عدد طبیعی) باشد یعنی:

$$n^{n^n}+1=F_{r+2\cdot r+2^r}$$

به‌ازای $r=0$ عدداول $F_5=17$ بدست می‌آید.

به‌ازای $r=1$ عدد غیراول F_9 که بر $1+36\times 2^{16}$ بخش‌پذیر است حاصل می‌گردد.

به‌ازای $r=2$ عدد F_{69} با 10^{18} رقم حاصل می‌گردد.

بنابراین: بین‌اعدادی که بیش‌از 10^{18} رقم ندارند، تنها دوعدد ۲ و ۱۷ اعداد اول به‌فرم $n^{n^n}+1$ هستند.

همچنین‌اعداد $n\times 2^n+1$ به‌ازای $n=1,2,3,000$ اول‌تشخیص داده‌شده‌اند، این‌اعداد به‌اعداد Cullen مشهورند ولی‌فقط به‌ازای $n=1$ عدد اول۳ بدست می‌آید.

ازطرفی‌می‌توان اثبات کرد که اعداد اولی‌به‌فرم 2^n+1 بجز اعداد اول فرما نخواهند بود.

به‌ازای $n=2^{r}\cdot m$ که $m>1$ عدد صحیح وفرداست داریم:

$$2^n+1=(2^{2^r})^m+1$$

که بر $(1+2^{2r})<1$ بخش‌پذیر بوده‌وغیراول‌است. بین‌اعداداول به‌شکل 2^n+1 که درآن $n=1,2,000$ تنها پنج‌عدد به‌ازای $n=1,2,4,8,16$ بدست‌می‌آید. نمی‌دانیم‌از $(1+2^{131072})$ به‌بعد وخود این‌عدد اول هست یانه. بدین ترتیب تنها چهار عدد اول به‌فرم $2\times 2^n+1$ را می‌شناسیم (n عدد طبیعی) که به ازای $n=1,3,4,15$ بدست می‌آید. اما ۱۹ عدد اول به‌فرم $3\times 2^n+1$ می‌شناسیم به‌ازای:

$$n=1,2,5,6,8,12,18,30,36,41,66,189,$$
$$201,209,276:353,408,438,534$$

فقط سه عدداول به‌فرم $4\times 2^n+1$ به‌ازای $n=2,6,14$ را می‌شناسیم. ولی ۱۲ عدد اول به شکل $5\times 2^n+1$ می‌شناسیم به‌ازای:

$$n=1,3,7,13,15,25,39,55,75,85,127,1947$$

به‌ازای هرعدد طبیعی $k\leq 100$ حداقل یك عدد طبیعی n چنان وجود دارد که عدد $k\times 2^n+1$ اول‌باشد. بنابراین می‌توان

نشان دادکه تعداد نامحدودی عددطبیعی وفرد k وجود دارد که به‌ازای آن اعداد $k\times 2^n+1$ غیراول شوند. این‌مطلب رادر کتابی‌که **Scerpinski** تألیف نموده ملاحظه کنید.

اعداد اولی‌هم به‌فرم 2^m+2^n+1 (m و n اعدادطبیعی و $m>n$) وجود دارد. به‌عنوان مثال:

$$2^2+2+1=7\ ,\ 2^3+2+1=11\ ,$$
$$2^3+2^2+1=13\ ,\ 2^4+2+1=19$$

اما نمی‌دانیم که این تعداد محدودند یا نـا محدود ولی می‌توان نشان دادکه تعداد نامحدودی عدد به‌فرم 2^m+2^n+1 وجود داردکه همه غیراولند.

برای مثال داریم:

$$2^{2n}+2^{n+1}+1=(2^n+1)^2 \qquad (n=2,3,\cdots)$$

یاازاین‌حقیقت‌که‌به‌ازای $k=1,2,\cdots$ عدد$(2^{4k+1}+2+1)$ همواره بر۵ بخش‌پذیر است و عدد $(2^{2l}+2^{2k}+1)$ به ازای اعداد طبیعی l و k همیشه بر۳ قـابل قسمت‌اند نیزاین تجـزیه حاصل می‌شود.

$$2^{4k}+2^{2k}+1=(2^{2k}+2^k+1)(2^{2k}-2^k+1)$$

A. Pichner بررسی کرد که‌اعداد 2^n+3 به‌ازای$n<24$ وفقط برای:

$$n=1,2,3,4,6,7,12,15,16,18$$

اول است. اثبات اینکه بین‌اعداد به‌فرم $2^{2^{2n}}+3$ تعـداد نامحدودی عدد مرکب وجود دارد آسان است زیرا عدد:

$(3+2^{2^{(2k+1)}})$ به‌ازای $k=0,1,2,\cdots$ تماماً بر۱۹ بخش‌پذیراند وعدد $2^{2^{2k+1}}+3$ هم‌به‌ازای$k=0,1,2,\cdots$ همگی بر۷ قابل قسمت‌اند.

ونیز $2^{2^{2k}}-3$ | ۱۳ به‌ازای $k=1,2,3,\cdots$ پس هریك از اعداد زیر:

$$2^{2^{2^2}}-3\ ,\ 2^{2^{2^{2^2}}}-3\ ,\ \cdots$$

بر ۱۳ بخش‌پذیر بوده وازاینرو اعداد غیراول هستند. تنها تعداد محدودی عدد اول از این نوع‌وجود دارد.

اما بین اعداد $2^{2^{2^2}}+5$, $2^{2^{2^{2^2}}}+5$ اعـداد اول وجود ندارد وهرکدام ازآنها بر۷ قـابل قسمت‌اند. اثبات این قابلیت تقسیم آسان است. به‌ازای عددطبیعی k عدد :

$2^{2k}=(3+1)^k$ در تقسیم بر ۳ باقیماندهٔ یك می‌دهـد یعنی $2^{2k}=3t+1$ (t عدد طبیعی). بنابراین:

$$(7+1)^t\times 2+5=2^{2^{2k}}+5=2^{3t+1}+5$$

که قابلیت تقسیم‌آن بر۷ بدیهی‌است.

هنوز معلوم نشده است‌که آیاتعداد نامحدودی عدد اول به فرم زیر وجود دارد:

$$2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_k}+1$$

که درآن k ، n_1 ، n_2 ، $\cdots$ ، n_k اعـداد طبیعی هستند. و نیز آیا تعداد اعداد اول به‌فرم 2^n+n^2 (nعدد طبیعی)نامحدود است؟ کوچکترین ۴ عدد اول به‌این‌فرم عبارتند از:

$$3=2^1+1^2\ ,\ 17=2^3+3^2\ ,$$
$$593=2^9+9^2\ ,\ 32993=2^{15}+15^2$$

A. Schinzel ثابت‌کردکه به‌ازای هرعدد مثبت و صحیح a که در نامساوی $2<a<2^{27}$ صدق‌کند حداقل یك‌عدد مثبت و صحیح $n<15$ وجود دارد بطوری‌که $a^{2n}+1$ غیراول‌باشد.

بااین تخمین‌که به‌ازای هرعدد صحیح $a>1$. حداقل‌یك عدد صحیح ومثبت n به‌شرط غیراول بودن $2^{2^n}+1$ وجـود دارد نشان می‌دهدکه تعداد اعداد غیر اول فرما نامحدود است.

درحقیقت به‌ازای $a=2^{2^k}$ که $k=1,2,\cdots$ داریم:

$$a^{2^n}+1=F_{n+k}$$

به‌ازای $a=2^{2^{1945}}$ نمی‌تـوان نشان دادکه حداقل یك‌عدد مثبت وصحیح n وجـود دارد بطـوری‌که عدد $a^{2^n}+1$ غیر اول باشد.

اثبات نامحدودیت اعداد صحیح ومثبت n آسان است (به ازای جمیع اعداد $a^{2^n}+1$ ($n=1,2,\cdots$) کـه غیر اول

هستند). ازطرفی نمی‌توان هیچ‌عدد صحیح و مثبت مثل $a>1$ پیدا کرد بطوری که به‌ازای آن‌تمام اعداد $a^{2^n}+1$ $(n=1,2,..)$ اول شوند.

۲۴ـ سه قضیهٔ غلط ازفرما

فرما درسال ۱۶۴۱ طی‌نامه‌ای به مرسن سه قضیهٔ زیر را ذکر کرده است:

۱ـ هیچ عدد اولی‌به فرم $(2k+1)$ مقسوم علیهی ازیك عدد به‌فرم 3^n+1 نیست.

۲ـ هیچ عدد اولی‌به فرم $(10k+1)$ مقسوم علیهی‌ازیك عدد به‌فرم 5^n+1 نیست.

۳ـ هیچ عدداولی به‌فرم $(10k-1)$ مقسوم علیهی‌ازیك عدد به‌فرم 5^n+1 نیست.

تحقیق اشتباه بودن سه قضیهٔ فوق آسان است. به عنوان مثال درمورداولی $641|3^5+1$ ، $241|3^{60}+1$، درمورد دومی $521|5^5+1$ وبالاخره درمورد سومی، $29|5^7+1$ می‌باشد A. Schinzel اثبات کرد که تعداد نامحدودی عدد اول به فرم فوق وجود داشته وقضایا غلط‌است. البته این‌وضع بابیان‌اول بودن تعدادی ازاعداد 2^n+1 متفاوت است.

قضیهٔ دیگری که به‌صورت زیر بیان می‌شود بعداً ثابت شده است: «هیچ عدد اولی به‌فرم $(12k-1)$ مقسوم علیهی از عدد به‌فرم 3^n+1 نیست».

۲۵ـ اعداد مرسن

اعداد مرسن به‌فرم $M_n=2^n-1$ هستند که در آن $n=1,2,3,...$ می‌باشد. دومطلب جالب‌ازاعدادمرسن‌حاصل می‌شود.

۱ـ اعدادمرسن بزرگترین اعداد اول‌را معلوم کرده‌اند.

۲ـ به کمك اعداد مرسن، اعدادی راکه به اعداد کامل مشهورند کشف کرده‌ایم.

اعدادکامل‌را از زمانها قبل‌می‌شناخته‌اند،وخاصیت آنهااین است‌که هرعددکامل برابراست بامجموع مقسوم علیه‌های طبیعی خودکه البته این‌مقسوم علیه‌ها باید ازخود عددکمتر باشند.

برای بررسی n امین عدد مرسن، تصاعد هندسی زیر (با n جمله) را درنظر می‌گیریم:

$$1,2,2^2,2^3,2^4,...$$

و ازآنجا داریم:

$$M_1=1\ ,\ M_2=3\ ,\ M_3=7\ ,\ M_4=15\ ,$$
$$M_5=31\ ,\ M_6=63\ ,\ M_7=127$$

بطوری‌که اثبات‌آن به‌سادگی میسراست. هرگاه اندیسnاعداد M_n غیر اول باشد، M_n غیر اول خواهد بود. زیرا اگر $n=a.b$ باشد $(a,b>1$ واعداد طبیعی) داریم:

$$2^{ab}-1>2^a-1\ ,\ 2^a-1>1$$

یعنی‌عدد $2^{ab}-1$ بر 2^a-1 بخش‌پذیر است وازاینروعددM_n غیر اول است.

بنابراین برای اینکه M_n اول‌باشد $(n>1)$ حتماً باید عدد n اول‌باشد، اماعکس‌آن لزوماً صحیح‌نیست.

به‌عنوان مثال:

$$M_{11}=2^{11}-1=2047=23\times 89$$

ثابت شده است‌که اگر p عدد اولی‌باشد، هریك ازمقسوم‌علیه‌های عدد M_p می‌بایست به فرم $(2kp+1)$ باشدکه درآن $k>0$ عدد صحیح است. بنابراین، برای مثال، مقسوم علیه‌های عددM_{11}به‌صورت$(22k+1)$ هستندکه‌درآن$k=0,1,4,93$ است. به‌همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت‌که مقسوم علیه‌های‌عدد $M_{101}=2^{101}-1$ می‌بایست به فرم $202k+1$ باشد. بدبختانه تاکنون هیچ‌یك ازمقسوم علیه‌های عدد M_{101} پیدانشده (ظاهراً k عدد بسیار بزرگی است)، ولی به‌روشهای دیگری غیر اول بودن M_{101} محقق شده است.

همچنین‌ثابت شده‌است‌که اگر p عدداولی‌به‌فرم $(8k+7)$ باشد پس $q\left|\frac{n(q-1)}{2}\right.$ واین اجازه می‌دهدکه تأییدکنیم‌که حتی‌بیشتر اعدادM_pدرآن pعدداول‌است غیراول‌می‌باشندبه‌عنوان مثال : $M_{131}|263$, $M_{83}|167$, $M_{23}|47$

$M_{239}|479$, $M_{191}|383$, $M_{179}|359$

این مطلب فقط پیشنهاد شده ولی ثابت نگردیده است که در بین اعداد M_p که p عدداولی است، تعداد نامحدودی عدد غیراول وجود دارد» .

تنها ۲۰ عددمرسن می‌شناسیم که آنها اعداد M_n به‌ازای

$n=2,3,5,7,13,17,19,31,61,89,107,127,$

$521,607,1279,2203,2281,3217,4253,4423$

هستند و ۸ تا از بزرگترین اعداد اول مرسن از آنها به‌کمك کمپیوترهای الکترونیکی بدست آمده است .

چگونگی وتحقیق اعداد بزرگ مرسن که اولند بـه‌کمك قضیهٔ زیر صورت می‌گیرد :

این قضیه به دونفر E.Lucas - D.H.Lenhner تعلق دارد :

«تنها وقتی M_p اول است (p عدد فرد اول) که M_p ، $(p-1)$ امین‌مقسوم‌علیه رشتهٔ u_n $(n=1,2,\dots)$ باشدبطوری که u به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$u_1=4 \ , \ u_{n+1}=u_n^2-2 \quad (n=1,2,\dots)$$

(بنابراین جملات اول این رشته ۴, ۱۴, ۱۹۴, ۳۷, ۶۳۴ و ... هستند) .

به‌آسانی می‌توان ثابت‌کـرد برای اینکـه $M_p|u_{p-1}$ باشد لازم وکافی است که M_p مقسوم علیه $(p-1)$ امین‌جملهٔ رشتهٔ r_n باشد $(n=1,2,\dots)$ که r_n مربوط به n_p بوده و $r_1=4$ و r_{n+1} باقیماندهٔ تقسیم عدد r_n^2-2 بر n_p است .

پس برای بدست آوردن اعداد اول M_p به مربع کـردن احتیاج داریم . به‌خصوص برای اینکـه اول نبودن M_{101} را محقق سازیم بایدقابلیت تقسیم $M_{101}|r_{100}$ را برای‌عدد M_{101} با ۳۱ رقم بررسی کنیم. با این‌محاسبات‌نتیجه می‌شودکه M_{101} اول نیست .

برای تحقیق اینکه عدد M_{3217} بـا ۹۶۹ رقم اول است لازم‌است‌قابلیت تقسیم‌عدد r_{3216} (مطابق M_{3217}) را بر M_{3217} بررسی‌کنیم . این مسئله توسط‌کمپیوتر انجام پذیر است.

در اینجا چندرقم اول وآخر عدد M_{3217} را می‌نویسیم :

$$M_{3217}=259117\dots093150571$$

۹۶۹ رقم این عدد در جداول ریاضی اعداد اول داده شده است. عمل محاسبه وتحقیق‌اول‌بودن این عددتوسط‌کمپیوترالکترونیکی سوئدی BESK در مدت ۵/۵ ساعت صورت گرفته است .

تخمین زده‌اندکه اعداد M_{M_n} هم اولند. این اول‌بودن به‌ازای ۴ تا ازکوچکترین عدد مرسن درست است امـا به‌ازای پنجمین‌عداول مرسن یعنی $M_{13}=8191$ عدد M_{M_n} اول نیست‌این‌مطلب‌درسال ۱۹۵۳ توسط D.H.Wheeler تحقیق شد. عدد $M_{M_{13}}=2^{8191}-1$ دارای ۲۴۶۶ رقم است . این مطلب به‌کمك Lucas - lehmer با صدساعت‌کارروی کمپیوتر الکترونیکی تحقق پذیرفته است . اما ما هنوزمقسوم‌علیهی ازاین عدد را نمی‌دانیم. عدد $M_{M_{17}}$ هم بر :

$1+(2^{17}-1)1768$ قابل قسمت بوده و اول نیست .

با وجود اول بودن M_{19} عدد $M_{M_{19}}$ غیراول‌بوده وبر $1+(2^{19}-1)120$ قابل قسمت می‌باشد.

بدون اثبات تخمین زده‌اندکه اعداد $q_0,q_1,q_2,\dots$ که درآن $q_0=2$ و $q_{n+1}=2^{q_n}-1$ است اعـداد اولنـد $(n=0,1,2,\dots)$. این تخمین تا $n<4$ در مورد q_n صحیح است ، ولی q_5 دارای 10^{37} رقم بوده قادر به نوشتن ارقام آن نیستیم ولی به‌فرض تنها بتوانیم عدد اول بودنش را تحقیق‌کنیم .

به‌دنبال اعداد مرسن، به‌اعدادزوج‌کامل هدایت می‌شویم. درآغاز اقلیدس روش زیررا برای بدست‌آوردن اعداد زوج‌کامل ارائه داد :

مجموع جملات متوالی تصاعد هندسی $1,2,2^2,2^3,\dots$ را محاسبه می‌کنیم ، اگر این مجموع عدد اولی باشد آنرا در جملهٔ بعدی تصاعد ضرب می‌کنیم ویك عددکامل‌بدست می‌آوریم. اولر ثابت‌کردکه این روش امکان بدست آوردن تمام اعداد زوج کامل را می‌دهد. به‌عبارت دیگراین روش نشان می‌دهدکه تمام اعداد زوج‌کامل به‌فرم $2^{p-1}M_p$ هستندکه درآنها M_p عـدد اول است .

ازاین نوع اعدادکه توسط اعداد مرسن بدست می‌آید تا کنون ۲۰ عدد مشخص شده است .

کوچکترین عددزوج‌کامل $2M_2=6$ و بزرگترین‌آنها که تاکنون پیدا شده $(2^{4423}-1)2^{4422}$ است . اعداد فـرد کاملی را نمی‌شناسیم و فقط Kanold اثبات موجودیت آنها را ارائه داده است و این‌گونه اعداد بیش از 10^{20} رقم دارند .

F.Jakobazyk این تخمین را تأییدکردکه اگرعددی‌اول باشد، عدد M_p بمربع هیچ عـدد اولی بخش پـذیـر نیست . A . Schenzel ایـن سؤال را مطرح ساخت‌که آیا تعداد نامحدودی اعداد مرسن وجود دارندکه حاصل‌ضرب اعداد اول متفاوت باشند ؟

۲۶ـ اعداد اول در رشته‌های نامحدود

اینکه معین‌کنیم دریك سری اعداد داده شده ، چـه تعداد اعداد اول وجود دارد ، کار مشکلی است . همانگونه‌که تاکنون مطرح شده هنوز نمی‌دانیم‌که آیا رشته‌هایی مثل :

$(n!-1)$, (2^n+1) , (2^n-1) ,

$(n!+1)$, (n^2+1)

شامل چه‌تعدادا‌عداد اول هستند؟ آیا تعدادمحدود است یانامحدود یا مثلا رشته اعداد زیر :

۱,۱۱,۱۱۱,۱۱۱۱,۱۱۱۱۱,...

حاوی تعداد نامحدودی عدد اول هست یا نه ؟

در اعدادی‌که آنها را رشتهٔ فیبوناچی می‌نامیم وبـا u_n نشان می‌دهیم ($n=1,2,...$) وبه‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$u_1=u_2=1$, $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$

$u_1=1, u_2=1, u_3=2, u_4=3, u_5=5, u_6=8$,

$u_7=13$, $u_8=21$,...

پیدا شده‌که اعداد u_n به‌ازای :

$n=1,2,3,4,5,7,11,29,47$

اولند . اعداد اول دیگراین رشته هنوز معلوم نشده‌اند. می‌توان ثابت‌کردکه اگر $n\neq 4$ وعدد u_n اول باشد n اول است ولی عکس آن لزوماً صحیح نیست برای مثال :

$u_2=1$, $u_{19}=4181=37\times 113$ و

$u_{31}=1346269=557\times 2417$

و ازآنجا نمی‌دانیم که آیا بین اعداد u_p (p عدد اول) تعداد نا محدودی اعداد غیر اول وجود دارد .

رشتهٔ v_n را با شرایط زیر تعریف می‌کنیم :

$v_1=1$, $v_2=3$, $v_{n+2}=v_n+v_{n+1}$

که درآن $n=1,2,3,...$ است . اعداد v_n به‌ازای :

$n=2,4,5,7,8,11,13,17,19,31,37,41,47,53,61,71$

اول هستند. بزرگترین عدد اول ازاین سری‌که تاکنون شناخته شده است به صورت v_{71} است :

$v_{71}=6888468025883999$

نمی‌دانیم آیا تعداد اعداد اول درسری v_n نامحدود است ؟

رشتهٔ دیگری‌که درچند سال اخیر موردتوجه ریاضی‌دانان بوده است مطرح می‌کنیم : رشتهٔ اعداد فرد متوالی را درنظر می‌گیریم :

۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,...

$u_1=1$ می‌گذاریم . دراین رشته‌کوچکترین عدد رشته‌کـه از u_1 بزرگتراست $u_2=3$ می‌باشد.ازاین‌رشته سومین ، ششمین نهمین ... عدد را حذف‌کرده رشتهٔ جدیدزیررابدست می‌آوریم:

۱,۳,۷,۹,۱۳,۱۵,۱۹,۲۱,۲۵,۲۷

در رشتهٔ جدیدکوچکترین عدد رشته‌که از u_2 بزرگتر است ۷ است وآنرا با u_3 نشان می‌دهیم. حال هفتمین، چهاردهمین‌و... جمله از رشتهٔ فوق را حذف‌کرده و رشتهٔ جدید زیر را بدست می‌آوریم :

۱,۳,۷,۹,۱۳,۱۵,۲۱,۲۵,۲۸,...

کوچکترین عدد این رشته‌که از u_3 بزرگتر است ۹ می‌باشد ، حال به فاصلهٔ ۹ عددحذف را انجام می‌دهیم پس :

۱,۳,۷,۹,۱۳,۱۵,۲۱,۲۵,۳۱,۳۳,۳۷,۴۳,۴۹,۵۱,۶۳,

۶۷,۶۹,۷۳,۷۵,۷۹,۸۷,۹۳,۹۹

جملات این رشته را lucky گویند نمی‌دانیم‌کـه آیا اعداد اول به تعداد نامحدودی دراین سری‌وجود دارد . بین این سری اعدادوکمتراز ۹۸۶۰۰ تعداد ۷۱۵ عدد اول وجود داشته است.

۲۷ـ جوابهای اول معادلات

در تعدادی از معادلات ساده (حتی درجهٔ اول) نمی‌توانیم درمورد نامحدود بودن تعداد جوابهای آن‌که اعداد اولند اظهار نظرکنیم . برای مثال در معادلهٔ $x+y=z$ فـرض‌کنیدکـه p , q و r اعداد فرد و صادق در معادلـه بـاشند یعنی داریم $p+q=r$. واضح‌است‌که اعداد اول p و q هردو فرد نیستند (زیرا مجموع آنها عدد زوج بزرگتر از ۲ خواهد شد) . پس p یا q باید زوج باشد مثلا $q=2$ (q عدداول) . پس اعداد

مورد نظر p و $r=p+2$ خواهد بود . ازاینرو $x=p$ ، $y=2$ و $z=p+2$ اعداد اول و پاسخ معادلهٔ $x+y=z$ هستند .

درموردمعادلهٔ $y=2x+1$ یا $y=2x-1$ نمی‌توانیم نامحدود بودن تعداد جوابهایش را مشخص کنیم. امـا تعدادی از آنها را بهصورت زیر می‌شناسیم :

در معادلهٔ $y=2x+1$:

$(x,y)=(2,5)$, $(3,7)$, $(5,11)$, $(11,23)$

در معادلهٔ $y=2x-1$:

$(x,y)=(2,3)$, $(3,5)$, $(7,13)$, $(19,37)$

در مورد معادلهٔ $x+y=z+t$ می‌توان گفت تعداد نامحدودی جواب اول مجزا دارد ، همچنین در مورد معادلهٔ :

$x^2+y^2=z^2+t^2$ چنین حـدسی را مـی‌توان زد (مثلا : $7^2+19^2=11^2+17^2$) . ازطرفی می‌توان نشان دادکـه معادلهٔ $x^2+y^2+z^2=t^2$ اگر x , z,y و t اول باشند جواب ندارد .

درمورد اینکه آیا تعداد نامحدودی مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع صحیح وجود داردکه‌دوتا ازآنها اول باشند ، معلوم‌نیست، یا آیا معادلهٔ $p^2=2q-1$ تعداد نامحدود جواب اول برای p و q دارد .

مثالهایی درمورد مثلث قائم‌الزاویهٔ مذکور عبارتست از :

$(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(11,60,61)$,
$(19,180,181)$, $(29,240,241)$,
$(61,1860,1861)$

بدست آوردن جوابهای اول معادلهٔ $x^2-2y^2=1$ آسان است بـدیهی است کـه x عدد فـرد است کـه $x=2k+1$ که k عدد صحیح می‌بـاشد پس $x^2=4k^2+4k+1$ بنابراین $y^2=2k(k+1)$ پس y عدد زوج است و چون عدد اول هم هست پس $y=2$ می‌باشد بنابراین تنها جوابهای اول $x=3$ و $y=2$ بدست می‌آید. اما تعداد جوابهای اول x و y درمعادلهٔ $x^2-2y^2=-1$ را نمی‌دانیم. بعضی ازآنها عبارتست از :

$x=7$, $y=5$, $x=41$ و $y=29$

نمی‌توان اثبات کردکه اگر $n>1$ (عدد طبیعی) باشد معادلـهٔ $p^n+q^n=r^n$ جواب اول ندارد .

از اینرو تاکنون تخمین فرما دراین مورد ثابت شده‌است یعنی اگر عدد p فرد باشد معادلـهٔ $x^p+y^p=z^p$ بـرای x، y و z جواب اول دارد. تنهابرای اعدادفرداول $p<4002$ توسط افراد زیر این اثبات صورت گرفته است :

Nicol - selfridge

۱۸- مربعهای وفقی متشکل از اعداد اول

یك مربع وفقی از n سطر و n ستون (یعنی n^2 خانه) تشکیل یافته است که اعداد درهرخانه اول بوده و دارای خواص زیر است :

مجموع اعدادهرردیف، مجموع اعداد هرستون وبالاخره مجموع اعداد دوقطر جدول با هم برابرند. دومربع وفقی یکی 3×3 و دیگری 4×4 در زیر ملاحظه می‌شود :

۵۶۹	۵۹	۴۴۹
۲۳۹	۳۵۹	۴۷۹
۲۶۹	۶۵۹	۱۴۹

۱۷	۳۱۷	۳۹۷	۶۷
۳۰۷	۱۵۷	۱۰۷	۲۲۷
۱۲۷	۲۷۷	۲۵۷	۱۳۷
۳۴۷	۴۷	۳۷	۳۶۷

درمربع اولی مجموع سطرها یا ستونها یا اقطار ۱۰۷۷ و در دومی ۷۹۸ است .

دراکتبر ۱۹۶۱ یك مربع وفقی‌متشکل از ۱۶۹ عدداول دریکی ازمجلات ریاضی منتشرشد. تخمین زده‌اندکـه به ازای عدد طبیعی $n\geq3$ تعداد نا محدودی از این مربعات وفقی وجود داردکه حاوی n^2 عدد اول متمایز است .

پایان

مسائل انتخابی از

مسائل المپیادهای ریاضی

ترجمهٔ : مهندس فتح‌الله زرگری

۱ـ درجزیرهٔ مربع شکلی چندناحیه به‌عنوان استراحتگاه موجود است. آیامی‌توان این استراحتگاهها رابه‌قطعات کوچکتر طوری تقسیم کرد، که نقاطی به عنوان فصل مشترك این قطعات بوجود نیاید ، و بتوان درنقشه همهٔ این استراحتگاههای تجزیه شده را با دو رنگ مشخص کرد

۲ـ آیا عددی متشکل ازششصدشش وتعدادی‌صفرمی‌تواند مربع کامل باشد ؟

۳ـ در صفحه‌ای پنج نقطه مفروض است بطوری‌که هیچ سه نقطه روی یك خط و هیچ چهار نقطه روی یك دایره قرار ندارند. ثابت کنید که می‌توان‌سه‌نقطه از این نقاط را پیداکرد، که یکی از نقاط باقی درداخل ودیگری در خارج دایرهٔ ماربر آن سه نقطه بیفتند .

۴ـ برای هرعددطبیعی p معادلهٔ زیر را بررسی‌می‌کنیم.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$$

جواب (x و y) را در مجموعه اعداد طبیعی برای این معادله بدست می‌آوریم(دراینجا فرض است‌که جوابهای (x,y) و (y,x) وقتی $x\neq y$ باشدجوابهای مختلفی‌هستند) ثابت کنید، که هرگاه p عدداول باشد، در این‌صورت معادله درست دارای سه دسته جواب و درصورتی‌که p عدد غیر اول باشد معادله‌بیش از سه دسته جواب خواهد داشت.

۵ـ در سه رأس مربعی سه جیرجیرك نشسته و مشغول جفتك چهارکش‌بازی‌کردن هستند، یعنی ازپشت یکدیگرمی‌پرند درنتیجه هرگاه جیرجیرك A ازپشت جیرجیرك B پرش کند ، پس ازپرش درهمان فاصله از B و در روی همان امتدادکه قبل ازپرش قرارداشت قرار خواهدگرفت . آیا پس ازچندپرش‌یکی ازاین سه می‌تواند در رأس چهارم مربع قرارگیرد؟

۶ـ روی هریك ازاضلاع متوازی‌الاضلاع نقطه‌ای درنظر می‌گیریم . مساحت چهارضلعی‌که این نقاط رأسهایش می‌باشند نصف مساحت متوازی‌الاضلاع مفروض است . ثابت‌کنیدکه اقلا یکی از اقطار چهار ضلعی بدست آمده باضلع متوازی‌الاضلاع موازی است .

۷ـ مربعی به‌چند ضلعیهای محدب تجزیه شده است . ثابت‌کنید که آنها را می‌توان‌به‌چند ضلعیهای محدب‌کوچکتری تقسیم‌کرد بطوری‌که در تجزیهٔ جدید مربع هریك ازچندضلعیها با تعداد فردی از چند ضلعیهای دیگر مجاور باشد

۸ـ چند جمله‌ای با ضرایب صحیح مفروض است . در ازای سه مقدار متمایز صحیح مقدار این چند جمله برابر با ۲ است. ثابت‌کنید، که درازای هیچ مقدارصحیحی مقدار این چند جمله‌ای برابر با ۳ نیست .

۹ـ درشهر N ازیك ایستگاه متروی معین می‌توان به‌هر ایستگاه دلخواه دیگر رفت وآمدکرد .

کدامیك از ایستگاهها را ببندند (بطوری‌که قطاری از آن عبورنکند) به‌قسمی‌که بین‌ایستگاههای باقی بازازآن‌ایستگاه معین بتوان به‌سایر ایستگاهها رفت وآمدکرد .

۱۰ـ وجوه مکعبی با اعداد ۱,۲,...,۶ شماره‌گذاری شده است بطوری‌که مجموع شماره‌های هردووجه مقابل هم‌برابر هفت است . صفحهٔ شطرنجی با ۵۰×۵۰ خانه وجود داردکه

هریك ازخانه‌های آن برابروجه مکعب می‌باشد، مکعب از گوشهٔ پائین وسمت چپی صفحه به طرف گـوشهٔ بالا وسمت راستی غلت می‌زند. به‌قسمی که بعداز استقرار در هرخانه با دوران حول یال خود به خانه مجاور می‌افتد وعمل دوران فقط بسمت راست یا بسمت بالا انجام می گیرد .در ضمن این حرکت شمارهٔ هروجه درخانهٔ نظیری که وجه مزبور روی آن می‌افتد نوشته می‌شود .

ماکسیمم مقداری که مجموع اعداد نوشته شده می‌توانـد داشته باشند چقدر است ؟

همچنین می‌نیمم مقـداری کـه مجموع اعـداد نوشته شده می‌تواند داشته باشد چقدر است ؟

۱۱ـ با عدد طبیعی k عمل زیر را انجام می‌دهیم : آنرا بصورت حاصلضرب اعداد اول می‌نویسیم :

$k=p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$، سپس مجموع $p_1+p_2+\cdots+p_n+1$ رامحاسبه‌می کنیم. با عدد بدست آمده نیز همین عمل را انجام می‌دهیم. وعمل را بهمین ترتیب ادامه می‌دهیم .

ثابت کنید، که سری اعداد بدست آمده ازیك وضع معین به‌بعد متناوب خواهد بود.

۱۲ـ چند جمله‌ای $P(x)$ با ضرایب صحیح که به ازای بعضی x های صحیح مقادیر ۱ ، ۲ ، ۳ بخود می گیرد مفروض است . ثابت کنید، که حداکثر یك x صحیح موجود است که به ازای آن این چندجمله‌ای مقدار ۵ را بخود می گیرد.

۱۳ـ ثابت کنید، که درهرچند وجهی محدب دو وجه با تعداد اضلاع برابر پیدا می‌شود .

۱۴ـ درکشوی تاریکی ، تابلویی با k لامپ کـوچك و تابلویی ازکلیدهای دو وضعیتی قـرار دارد . درتقسیم بندی کلیهٔ حالات‌ممکن‌تابلوی کلید،درتابلوی لامپها به‌ترتیب کلیهٔ ترکیبات ممکنه از لامپها روشن می گردند. یك وضع معین از تابلولامپها توسط وضع معینی از کلیدها روی تابلوتعیین می گردد. می‌دانیم که‌با تغییر وضعیت دادن یکی ازکلیدها فقط یکی ازلامپها روشن یا خاموش می گردد. ثابت کنید. که وضعیت هرلامپ‌بستگی دارد به‌وضعیت فقط یکی ازکلیدها (برای هرلامپ کلید نظیرخودش)

۱۵ـ ازیك عدد چهاررقمی عدد دیگر نتیجه شده است که متشکل ازسه‌رقم‌است لیکن به‌ترتیب عکس‌قرار گرفته‌اند (مقلوب عدد). آیا ممکن است که تفاضل این دوعدد ۱۰۰۸ باشد ؟

۱۶ـ مثلث حـاده‌الزوایای ABC مفروض است . این مثلث توسط دوایری به‌مرکز رأسهای مثلث وبه شعاعهای برابر با ارتفاعهای نظیر رأسها پوشانیده شده است ، ثـابت‌کنیدکـه هرنقطه ازمثلث اقلا توسط یکی ازاین دوایر پوشانیده می‌شود.

۱۷ـ صفحهٔ‌کاغذ شطرنجی ۱۰۰ × ۱۰۰ خانه، در۱۰۰ رنگ نقاشی شده است (هریك ازخانه‌های شطرنجی بـا یکی از این ۱۰۰ رنگ نقاشی شده ویا اصلا نقاشی نشده است). نقاشی وقتی درست است. که درهرسطر یا ستون دوخانهٔ همرنگ وجود نداشته باشد. آیا می‌توان صفحهٔ شطرنجی‌را دوباره بطورصحیح نقاشی کرد، بطوری که تمام خانه‌ها نقاشی‌شده باشند؟ درصورتی که بدانیم:الف) $۱۰۰^۲-۱$ خانه بطور صحیح نقاشی شده‌است. ب) $۱۰۰^۲-۲$ خانه بطور صحیح نقاشی شده است . ج) ۱۰۰ خانه بطور صحیح نقاشی شده است .

۱۸ـ در مرکز مربعی یك روباه ودریکی از رأسهـایش خرگوشی قرار دارد. روباه‌می‌تواند درتمام مربع بدوددرصورتی که خرگوش فقط می‌تواند روی اضلاع مربع بدود . می‌دانیم که که سرعت ماکسیمم خرگوش ۲/۹ برابر سرعت ماکسیمم روباه است. روباه می‌خواهد دریکی ازاضلاع مربع با خرگوش‌روبرو شود. آیا درهرحال می‌تواند به‌منظورخود برسد ؟

۱۹ـ لکهٔ جوهری روی‌صفحهٔ‌کاغذی مفروض است. برای هرنقطه از لکهٔ جوهر ماکسیمم ومی‌نیمم فاصلـه‌اش تا پیرامون لکهٔ جوهر معیین است . ازبین ماکسیمم فـاصله‌هاکـوتاهترین فاصله وازبین می‌نیمم فاصله‌هابلندترین فاصله‌را انتخاب کرده‌آن دو را با هم مقایسه می کنیم .

مطلوبست شکل لکهٔ جوهر هرگاه این دو مقدار بـا هم برابرباشند .

۲۰ـ ثابت کنید، که درپنج ضلعی متساوی‌الاضلاع محدب (حتماً لازم نیست که‌منتظم باشد) می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کردکه یك ضلعش برروی یکی از اضلاع پنج ضلعی و رأس مقابل به‌آن ضلع درداخل پنج ضلعی بیفتد.

۲۱ـ در یك عدد صد رقمی دلخواه عمل زیر را انجام می‌دهیم :

ده رقم متوالی دلخواه را برداشته جای پنج رقم اول آن

را با پنج رقم‌بعدی نظیر به‌نظیر عوض می‌کنیم (اولی را باششمی دومی را با هفتمی و... وپنجمی را بادهمی) . دوعدد صد رقمی راکه به‌این ترتیب حاصل می‌شود، اعداد مشابه می‌گوئیم .

چند عدد صد رقمی متشکل ازارقام یك و دو می‌توان پیدا کردکه هیچ دوتا ازآنها مشابه با هم نباشند ؟

۲۲ـ روی‌صفحهٔ شطرنجی نامحدودی خط شکستهٔ بسته‌ای ماربر اضلاع خانه‌های شطرنجی رسم می‌کنیم ، بطوری‌که خود را قطع نکند. درداخل این خط شکسته تعداد k خانهٔ شطرنجی قراردارد . مطلوبست ماکسیمم مساحتی را کـه این خط شکسته بسته در برمی‌گیرد.

۲۳ـ عدد $A=\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m$ مفروض‌است

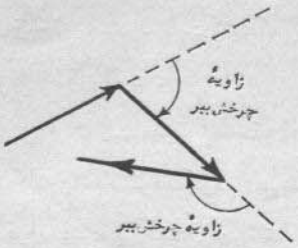
که درآن $n\geqslant 2$ و $m\geqslant 2$ عددهای طبیعی می‌باشند. ثابت‌کنید ، که عدد طبیعی مانند k موجود است‌که به ازای آن :

$$A=\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$$

۲۴ـ روی‌هریك ازدوسرپاره خطی عددواحد قرارگرفته است. دروسط این پاره خط عدد ۲ را می‌نویسیم کـه مجمـوع عددهای دوسرپاره خط است . درمرحلهٔ دوم در وسط هریك از پاره خطهای حاصل مجموع عددهای دو سر آن پـاره خـط را می‌نویسیم که رشته عددهای «۱,۳,۲,۳,۱» بدست می‌آیـد. در مرحلهٔ سوم بهمین ترتیب عمل می‌کنیم که رشته عددهای «۱,۴,۳,۵,۲,۵,۳ ۴,۱» بدست خواهد آمد . هرگاه این عمل را تا مرحلهٔ میلیونیم ادامه دهیم ، دراین مرحله عدد ۱۹۷۳ چند بار نوشته خواهد شد ؟

۲۵ـ دوازده رنگرز در دوازده خانهٔ آبی یا سفید واقع در دور یك میدان زندگی می‌کنند. هرماه یکی از رنگرزها به اندازهٔ کافی از رنگهای سفید وآبی با خودبرداشته ازخانه‌خارج می‌شود ودرجهت عقربه‌های ساعت دردور میدان شروع به‌حرکت می‌کند . درراه ازابتدای حرکت (با شروع ازخانـهٔ خود) هر خانه را بارنگی مخالف با رنگ‌خانهٔ خود رنگ‌می‌کند. کار او وقتی تمام می‌شودکه یك خانهٔ سفید راآبی‌کند. درعرض یك‌سال هر نقاش درست یك باراین عمل جالب را انجام می‌دهد . ثـابت کنید، که درپایان سال هرخانه به‌همان رنگی خواهد بودکه در ابتدای آن سال بوده است. درصورتی‌که، درابتدای سال اقلایك خانهٔ آبی وجود داشته باشد .

۲۶ـ در میدان یك سیرك دایره‌ای به‌شعاع ۱۰ متر ببری مشغول دویدن است . این ببر درحرکت‌روی خط شکسته (بطـور زیگزاگ) ۳۰ کیلومتر راه طی می‌کند. ثـابت



کنیدکه مجموع زوایایی‌که ببر دراین حرکت زیگـزاك ایجاد کرده است حداقل ۲۹۹۸ رادیان است .

۲۷ـ درمحاکمه‌ای به‌عنوان برگهٔ جرم ۱۴ سکه عرضه شده است . ازاین سکه‌ها هشت عدد سالم وشش عدد دیگر تقلبی است. محکمه فقط این را می‌داندکه سکه‌های تقلبی بـا هم و سکه‌های سالم با هم هموزن بوده وبه‌علاوه سکه‌های تقلبی‌سبکتر از سکه‌های سالم هستند. در اختیارکارشناس یك تـرازوی بدون وزنه قرارگرفته است. کارشناس می‌خواهد تقلبی بودن‌سکه‌های اولی تا هفتمی را ثابت‌کند . ثابت‌کنیدکه‌وی می‌تواند این عمل را فقط با سه‌بار استفادهٔ از ترازو انجام دهد.

۲۸ـ ثابت‌کنیدکه عدد نه‌رقمی‌که درآن کلیهٔ ارقام به‌غیر ازصفر شرکت دارند، وبه‌رقم ۵ ختم می‌شود، نمی‌توانـد مربع کامل یك عدد صحیح باشد .

۲۹ـ n نقطه داده شده است‌که $n>4$. ثابت‌کنیداین نقطه‌ها را می‌توان با بردارهایی چنان به‌هم وصل‌کرد، که ازهر نقطه به نقطهٔ دیگر یا با یك بردار یا با دوبردار بتوان رسید . (هردونقطه را می‌توان فقط درجهت بردارها به‌هم وصل‌کـرد ، حرکت روی یك بردار فقط درجهت تعیین شدهٔ روی آن انجام می‌گیرد .)

۳۰ـ روی اضلاع مثلث حاده‌الزوایای ABC ودرقسمت بیرون آنها سه مثلث حاده‌الزوایای مشابه بـا هم AC_1B , BA_1C , CB_1A را می‌سازیم .

(در نتیجه $\angle AB_1C=\angle ABC_1=\angle A_1BC$ و $\angle BCA_1=\angle B_1CA$ و $\angle CAB_1=\angle C_1AB$)

a) ثابت‌کنید، که دوایـر محیطی مثلثهـای AC_1B , BA_1C و CB_1A دریك نقطه متقاطعند .

b) ثابت‌کنید، که درهمین نقطه خطوط AA_1 , BB_1و

CC_1 متقاربند .

۳۱ـ n نفر با هم‌آشنا نیستند. می‌خواهیم بعضی ازآنان را طوری باهم آشنا کنیم که هرسه نفردلخواه تعداد یکسانی آشنا نداشته باشند . ثابت کنید که این موضوع به‌ازای هرمقدارصحیح n ممکن است .

۳۲ـ مهرهٔ شاه صفحهٔ 8×8 شطرنج را دورزد، ودرهر خانه یك‌بار توقف کرد، ودرهمان مسیر به‌خانه‌ای که نخست‌درآن قرارداشت برگشت (مهرهٔ شاه همان قانونی که درشطرنج برایش تعیین شده‌است حرکت می‌کند). از وصل مرکزهای خانه‌هایی که مهرهٔ شاه درآنها توقف کرده بود، خط شکسته بسته‌ای بدست آمد، که خود را قطع نکرده بود.

a) مثالی بیاورید، که درآن مهرهٔ شاه بتواند درست ۲۸ حرکت را بطور افقی و قائم انجام دهد .

b) ثابت کنید، که این مهره نمی‌تواند با کمتر از ۲۸ حرکت مسیری باشرط بالا را بپیماید.

۳۳ـ زاویه‌ای به رأس O ودایرهٔ مماس براضلاع آن در نقاط A و B مفروض است . از نقطهٔ A خطی موازی OB رسم می‌کنیم تا دایره را درنقطهٔ C قطع کند . قطعه خط OC دایره را درنقطهٔ E و خطوط AE و OB همدیگر را درنقطهٔ K قطع می‌کنند. ثابت کنید، که $OK=KB$

۳۴ـ اعداد حقیقی c,b,a چنانند که به ازای کلیهٔ اعداد x به شرط $-1\leq x\leq 1$ — نامساوی زیر برقرار است :

$$|ax^2+bx+c|\leq 1$$

ثابت کنید، که به ازای همین مقادیر x نامساوی زیر نیز درست است:

$$|cx^2+bx+a|\leq 2$$

۳۵ـ فدراسیون تنیس به‌کسانی که عضو آن می‌شوند به عنوان درجهٔ مهارت دربازی تنیس نمره‌ای می‌دهد : به‌قوی‌ترین بازیکن نمرهٔ اول ، به‌بعدی ازنظر مهارت بازی نمرهٔ دوم و به همین ترتیب تاآخر. می‌دانیم که درروبروشدن تنیس بازان، نمرهٔ مهارتهایی که به‌آنان داده شده است همیشه باهم ۲ نمره اختلاف داشته ، و تنیس بازی که نمرهٔ کمتر را می‌گیرد پیروز است . مسابقه‌ای که درآن ۱۰۲۴ نفر از قویترین تنیس بازان شرکت کرده‌اند به‌صورت المپیك انجام می‌گیرد: شرکت کنندگان دورهٔ تناوبی ازروی قرعه به‌زوجهائی تقسیم می‌شوند و در دورهٔ بعدی برنده‌های دورهٔ قبلی شرکت می‌کنند، بطوری که تعداد شرکت‌کنندگان بعدازهردوره به‌نصف تقلیل می‌یابد. به‌این‌ترتیب، پس ازدورهٔ دهم قهرمان تعیین خواهد شد. این قهرمان بیشترین نمره‌ای راکه می‌تواند داشته باشد چقدراست ؟

۳۶ـ مثلثی به‌مساحت واحد واضلاع c, b, a مفروض است ومی‌دانیم که $a\geq b\geq c$. ثابت کنید که : $b\geq\sqrt{2}$

۳۷ـ n ضلعی محدبی با اضلاع دو به دو غیرموازی و نقطه‌ای در داخل آن مفروض است . ثابت کنید، که ازاین نقطه نمی‌توان بیش از n خط رسم کرد بطوری که هر یك از آنها مساحت n ضلعی را نصف کند.

۳۸ـ سه جمله‌ای درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ چنان است که معادلهٔ $f(x)=x$ دارای ریشهٔ حقیقی نیست. ثابت کنید که معادلهٔ $f(f(x))=x$ نیز دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

۳۹ـ درصفحهٔ شطرنجی نامحدود تعداد n خانه با رنگ سیاه رنگ شده‌اند وبقیهٔ خانه‌ها سفید می‌باشند. درلحظات‌زمانی $t=1,2,\ldots$ تجدید رنگ‌همزمان کلیهٔ خانه‌های صفحه به‌ترتیب زیر انجام می‌گیرد: هرخانهٔ K همان رنگی راکه در لحظهٔ قبلی اکثریت سه خانهٔ سمت راستی وخانه‌های بالائیش داشته‌اند به‌خود می‌گیرد. (مرگاه دویا سه تا ازاین خانه‌ها سفید باشند. خانهٔ K سفید وهرگاه دویا سه تا ازآنها سیاه باشند خانهٔ K سیاه خواهد شد).

a) ثابت کنید که یعداز زمان محدودی روی صفحه خانهٔ سیاهی باقی نخواهد ماند .

b) ثابت کنید که خانه‌های سیاه زودتر از لحظهٔ زمانی $t=n$ محو نمی‌گردند.

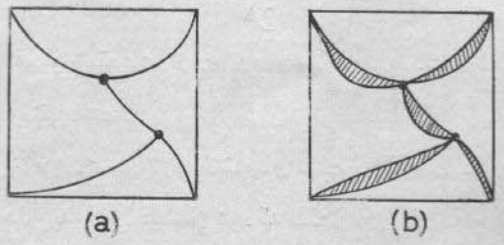
۴۰ـ ثابت کنید که هرگاه x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 عددهای مثبت باشند خواهیم داشت :

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2>$$
$$4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)$$

۴۱ـ چهارنقطهٔ غیر واقع بر یك صفحه مفروضند . چند متوازی‌السطوح می‌توان پیدا کرد که چهار رأس ازآن بر چهار نقطهٔ مفروض واقع باشد.

راهنمایی و حل مسائل

۱ـ کافی است کلیهٔ مرزهای ناحیه‌های شکل a را مانند شکل b درآوریم :



۲ـ هرگاه عدد مربع کامل باشد در این صورت تعداد صفرهای آن زوج است که می‌توان آنهارا حذف کرد. عددباقیمانده به‌صورت $2B$ خواهد بودکه درآن B عددی است متشکل از ششصد رقم ۳. برای آنکه عدد $2B$ مربع کامل باشد لازم است که B زوج باشد . اما B به رقم ۳ ختم می‌شود و فرد است‌پس عدد مفروض مربع کامل نیست .

۳ـ دونقطهٔ B,A چنان‌یافت‌می گردند، که سه نقطهٔ‌دیگر دریك سمت خط AB می‌افتند. این نقاط را با حروف C_1,C_2 C_3 نشان می‌دهیم بطوری‌که :

$$\angle AC_1B<\angle AC_2B<\angle AC_3B$$

دراین صورت C_3 در داخل و C_1 درخارج دایرهٔ مار بر نقاط C_4,B,A قرار می گیرند.

۴ـ برای $p<1$ دلخواه سه جواب زیر برای x و y وجود دارد :

$$(2p,2p)\ ,\ (p+1,p(p+1))\ ,$$
$$(p(p+1)\ ,\ p+1)$$

هرگاه $p=a.b$ غیر اول باشد ، یك جواب دیگر خواهیم داشت مثلا :

$$((a+1)b\ ,\ a(a+1)b)$$

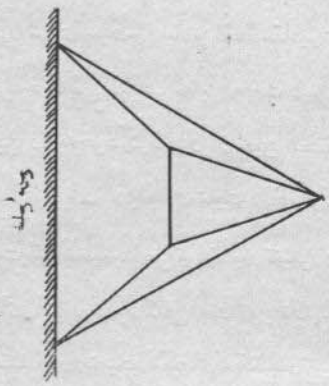
حال می‌ماند ثابت‌کنیم‌که برای عدد اول p جوابهای دیگر وجود ندارد .

واضح‌است‌که $x,y>p$ یعنی $y=p+r, x=p+q$ در این صورت :

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+r}=\frac{1}{p}$$

پس $qr=p^2$ وچون p اول است ، بنابراین غیر از جوابهای $(1,p^2)$, (p,p) , $(p^2,1)$ جوابهای دیگری برای معادله وجود ندارد .

۷ـ نخست تمام مربع‌رابه‌مثلثهایی تقسیم می کنیم، بطوری که هیچ یك از رأسهای مثلثها روی اضلاع یکدیگر نیفتد. در این صورت هر مثلث داخلی با سه مثلث مجاور است (تعداد فرد مثلث). باقی می‌ماند، حالتی‌رابررسی کنیم که در آن یکی از



اضلاع مثلث روی ضلع مربع بیفتد. دراین حالت باید مثلث را مانند شکل تجزیه کرد .

۸ـ می‌دانیم که برای اعداد صحیح $p,q\ (p\neq q)$ عدد p^k-q^k بر $p-q$ بخش پذیراست . هرگاه داشته باشیم:

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+1$$

دراین صورت داریم :

$$f(p)-f(q)=a(p^n-q^n)+b(p^{n-1}-q^{n-1})+$$
$$+\dots+k(p-q)$$

بنابراین $f(p)-f(q)$ بر $p-q$ بخش پذیر است . بنا به فرض داریم :

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=2$$

اگر مقداری مانند x_4 وجود داشته باشدکه $f(x_4)=3$ در این صورت $f(x_4)-f(x_1)=1$ باید بر x_4-x_1 بخش پذیر

باشد . پس $x_۴-x_۱=۱$ همچنین $x_۴-x_۲=۱$ و $x_۴-x_۳=۱$ یعنی :

$$x_۴=x_۱+۱=x_۲+۱=x_۳+۱$$

اما $x_۱\neq x_۲\neq x_۳$ بنابراین $x_۴$ با شرط بالا وجود ندارد.

۹ـ فرض کنیم A ایستگاه متروی معین باشد. دراین صورت ایستگاه متروی مانند B پیدا می‌شود که فاصلهٔ آن تا A بیشتر ازبقیه است . این ایستگاه را باید بست .

۱۱ـ می‌دانیم که برای دوعدد $a,b\geq ۲$ داریم: $a+b<ab$ هرگاه اولین عدد حاصل از k را به‌ترتیبی که گفته شده است با $f(k)$ نشان دهیم چون :

$$p_۱+p_۲+\cdots+p_n<p_۱p_۲\cdots p_n$$

بنابراین : $f(k)<k+۱$. همچنین نتیجه می‌شود که :

$$f(f(k))<k$$

یعنی سری بررسی شده فقط مقادیری از فاصلهٔ $[۱\ ,\ k+۱]$ را به‌خود می‌گیرد. به‌این جهت این سری درحد دوباریک‌مقدار معین را به‌خود گرفته و ازهمین لحظه متناوب می‌شود .

۱۴ـ a) در وضعیت دلخواه کلیدها ، وضعیت دلخواه و ثابت‌یك لامپ را می‌توان با تغییر وضعیت یك کلید تغییر داد : برای این منظور کافی‌است توجه کنیم که با تغییر وضعیت کلیدهای مختلف دروضعیت لامپهای مختلف تغییر ایجاد می‌کنیم.

b) تمام کلیدها را دروضعیتی قرارمی‌دهیم که لامپها همگی خاموش باشند . این وضعیت هریك ازکلیدها را وضعیت خاموش ووضعیت عکس آنرا وضعیت روشن می‌نامیم . هرگاه تعداد k کلید روشن باشند، دراین‌صورت $l\leq k$ لامپ روشن خواهندبود. ثابت می‌کنیم که $l\geq k$. هرگاه $l<k$ باشد می‌توان l کلید را طوری‌تغییر وضعیت داد که کلیهٔ لامپها خاموش گردند. (قسمت a را نگاه کنید)، نتیجه می‌گیریم که کلیهٔ لامپها اگرچه کلیهٔ کلیدها خاموش نباشند باز خاموشند پس درنتیجه $l=k$

c) کلیدها را با اعداد $۱,۲,\cdots,n$ شماره گذاری کرده وسپس لامپها را طوری شماره گذاری می‌کنیم که هرگاه کلید iام را روشن کنیم وبقیه را دروضعیت خاموش قرار دهیم لامپ i ام روشن‌شود. ثابت می‌کنیم که هرگاه کلیدهای $i_۱,\cdots i_k$ راروشن کنیم لامپهای با همین شماره‌ها روشن خواهند شد . اگر چنین نباشد دراین‌صورت لامپی با شمارهٔ j غیراز لامپهای $i_۱,\cdots,i_k$ روشن خواهد شد . به‌کمك $(k-۱)$ امین تغییروضعیت‌می‌توان بقیهٔ $(k-۱)$ لامپ را نیز روشن‌کرد (به‌قسمت a نگاه کنید) . نتیجه می‌گیریم که روشن‌کردن کلیدهای $i_۱,\cdots i_k$ با روشن شدن فقط لامپ jام مغایرت دارد .

۱۵ـ فرض کنیم $\overline{a_۱a_۲a_۳a_۴}$ عدد چهاررقمی مفروض‌باشد وباز فرض کنیم تفاضل بین این عدد ومقلوبش ۱۰۰۸ باشد . در این صورت $a_۴=۰$ و $a_۲=۲$ اما تفریق :

$$\overline{۲a_۳a_۲۰}-\overline{a_۳a_۲۲}=۱۰۰۸$$

به‌ازای هیچ مقداری از $a_۲$ و $a_۳$ ممکن نمی‌باشد. پس جواب مسئله منفی است .

۱۶ـ محل تلاقی‌ارتفاعهای مثلث ABC را با O نمایش می‌دهیم. به‌آسانی دیده می‌شود که مثلث ABC از سه چهارضلعی تشکیل شده است که هریك از این چهار ضلعیها توسط دایرهٔ نظیرش پوشانیده می‌شود.

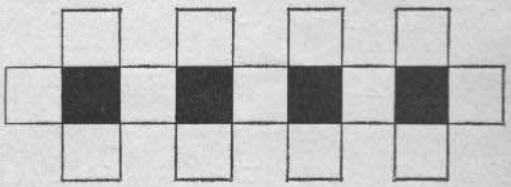
دایره‌های به‌شعاعهای OC,OB,OA وبه‌مرکزهای A C,B را بررسی کرده نشان می‌دهیم که تمام چهار ضلعیها توسط این دایره‌ها پوشانیده می‌شوند زیرا دایرهٔ مثلا به مرکز A و به‌شعاع OA دایره‌ای راکه OA قطر آن است در داخل خود دارد وبه‌همین ترتیب هردایرهٔ دیگردایرهٔ نظیر خود را درداخل دارد و مسئله ثابت است .

۱۹ـ فرض کنیم کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه لکهٔ جوهر تا پیرامون لکهٔ جوهر بزرگترین مقدار $r_۱$ را درنقطهٔ A به خود بگیرد وبلندترین فاصلهٔ کوچکترین مقدار $r_۲$ را درنقطهٔ B به‌خودبگیرد دایرهٔ به‌شعاع $r_۱$ وبه‌مرکز A درداخل لکهٔ جوهر قرارداشته ودایرهٔ به‌شعاع $r_۲$ و به‌مرکز B لکهٔ جوهر را در خوددارد. ازطرفی طبق فرض $r_۱=r_۲=r$ پس نقطهٔ A برنقطهٔ B منطبق بوده و لکهٔ جوهر دایره‌ای است به‌شعاع r .

۲۲ـ فرض کنیم l تعداد خانه‌های سفید و $k+l$ تعداد کل خانه‌های درداخل خط شکسته باشد. تعداد ضلعهای خانه‌هایی راکه کاملا درداخل خط شکسته قرار دارند S فرض می‌کنیم . واضح است که $S<۴k$ ، زیرا به‌هرضلع فقط یك خانهٔ سیاه‌وصل بوده وهرخانه بیش ازچهارضلع داخلی ندارد. ثابت می‌کنیم که $S\geq k+l-۱$ است. چون خط شکسته بسته است، بنابراین می‌توان خانه‌های آنرا شمارش‌کرد . هریك ازاین خانه‌ها به غیرازخانهٔ اولی دارای خانهٔ مجاوری با شمارهٔ کمتر می‌باشد .

هرگاه ضلعی راکه خانه‌های شمارهٔ $k+1,\ldots,3,2$ با خانهٔ شمارهٔ کمتر مشترك دارند در نظر بگیریم در این صورت $k+1-1$ ضلع متفاوت بدست خواهیم آورد .

به این ترتیب $4k\geq S\geq k+1-1$ است و از اینجا مساحت خط شکستهٔ بسته $k+1\leq 4k+1$ خواهد بود. در شکل مثالی برای شکلی بمساحت $4k+1$ آورده شده است .



۲۴ـ معادلهٔ $x+\frac{1}{x}=n$ که در آن $n\geq 2$ عددی است طبیعی داری دو جواب عکس :

$$x=\frac{n\pm\sqrt{n^2-4}}{2}$$

می‌باشد، بزرگترین این دوحداقل برابریك وکوچکترین این دوحداکثر یك است .

با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم که هرگاه $x+\frac{1}{x}$ صحیح باشد. دراین‌صورت برای هر عدد طبیعی دلخواه m عدد $x^m+\frac{1}{x^m}$ نیز صحیح است زیرا :

$$(x^m+\frac{1}{x^m})(x+\frac{1}{x})=(x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}})+(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}})$$

هرگاه عدد $\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}$ رابه x نشان‌دهیم‌دراین‌صورت $x+\frac{1}{x}=n$ که $x\geq 1$ از اینجا $x^m+\frac{1}{x^m}=k$ عددصحیح است‌که $x^m\geq 1$ یعنی :

$$A=x^m=\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$$

۳ـ به سادگی می‌توان دیدکه هرگاه ابتدا رنگرز A سپس رنگرز B عمل را انجام دهد ، نتیجهٔ نقاشی خانه‌ها با آنچه‌که ابتدا رنگرز B و سپس رنگرز A حرکت‌کند فرقی نخواهد داشت. ازاینجا معلوم است‌که نتیجهٔ نهایی نقاشی‌یکسان خواهد بود اگر رنگرزها باترتیبهای متفاوتی کارخود را انجام دهند .

فرض‌کنیم آنها به ترتیب زیر کار خود را انجام دهند :

ابتدا رنگرزهایی‌که درخانه‌های سفید زندگی می‌کنند به نوبت ازخانه‌های خود خارج شوند. آنها فقط خانه‌های خود را آبی‌رنگ‌خواهندکرد. حال تمام خانه‌ها آبی هستند. سپس رنگرزی‌که از ابتدا درخانهٔ آبی زندگی می‌کرد از خانهٔ خود خارج می‌شود. او به‌همان ترتیبی‌که فرض است ، تمام خانه‌هارا سفید وخانهٔ خود را دوباره‌آبی رنگ می‌کند . سپس بقیهٔ رنگرزهایی‌که قبلا درخانه‌های آبی زندگی می‌کردند خانه‌های خود را به رنگ آبی درمی‌آورند. مشاهده می‌کنیم خانه‌ها با همان رنگهای قبلی بدست می‌آیند.

۲۷ـ اولین توزین : کارشناس اولین سکه رادرکفهٔ‌سمت چپ و هشتمین سکه را درکفهٔ سمت راست قرار می‌دهد . کفهٔ سمت راست سنگینترازکفهٔ سمت‌چپ است. محکمه نتیجه‌می‌گیرد که سکهٔ اولی تقلبی و هشتمی سالم است .

دومین توزین : کارشناس برکفهٔ سمت چپ سکه‌های ۹ و ۱۰ وبرکفهٔ سمت راست سکه‌های ۲ و ۳ را اضافه می‌کند. کفهٔ سمت راست سنگینتر است . محکمه نتیجه می‌گیردکه درکفهٔ چپ سکهٔ سالم بیشتری است تا درکفهٔ سمت راست (سکه‌های ۹ و ۱۰ سالمند) ، ودرکفهٔ سمت راست سکه‌های تقلبی بیشتری است تا درکفهٔ سمت چپ (سکه‌های ۲و۳ تقلبی‌اند) .

سومین توزین : کارشناس درکفهٔ سمت چپ سکه‌های ۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰ و درکفهٔ سمت راست سکه‌های ۱۱,۱۲, ۱۳,۱۴,۱,۲و۳ راقرارمی‌دهد. دوباره درکفهٔ سمت راست‌تعداد سکه‌های سالم بیشتر ازسکه‌های سالم درکفهٔ سمت چپ است، و تعداد سکه‌های تقلبی درکفهٔ سمت چپ بیشتر از سکه‌های تقلبی درکفهٔ سمت راست است . به‌این ترتیب چهار سکهٔ جدید درکفهٔ سمت چپ تقلبی ودرسمت راست سالم می‌باشند.

۲۸ـ حالت عکس را درنظر می‌گیریم . فرض‌کنیم عدد

نه رقمی D که در آن کلیهٔ رقمها به غیر از صفر شرکت داشته و به علاوه به رقم ۵ ختم شده است مربع کامل باشد : $D=A^2$

درنتیجه عدد A به ۵ ختم می‌شود : $A=10a+5$ و

$$D=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$$

دوحالت پیش می‌آید : ۱ـ رقم ماقبل آخر D برابر ۲ است

۲ـ رقم سوم از سمت راست عدد D رقم دلخواهی نبوده بلکه فقط چنان‌رقمی باشد که عدد $a(a+1)$ به‌آن ختم می‌شود

ازجدول زیردیده می‌شود که اعدادبه‌صورت $a(a+1)$ می‌توانند به ارقام صفر، دو وشش ختم شوند ، لیکن طبق فرض در نوشتن عدد D صفر وجود ندارد، و رقم دو فقط یك‌بار ظاهر می‌شود ، بنابراین رقم سوم ازسمت راست شش خواهد بود .

۵×۶	۶×۷	۷×۸	۸×۹	۹×۰
۰	۲	۶	۲	۰

۰×۱	۱×۲	۲×۳	۳×۴	۴×۵
۰	۲	۶	۲	۰

بنابراین D به ۶۲۵ ختم می‌شود ، یعنی :

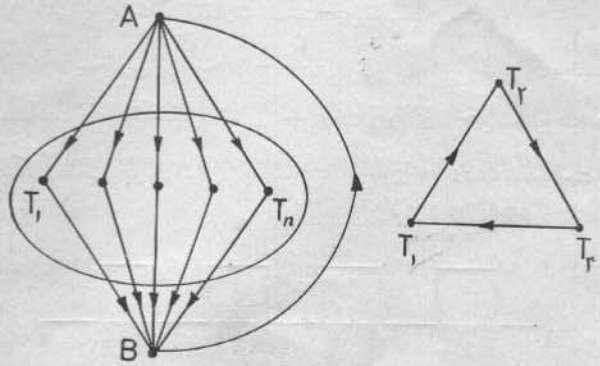
$$D=1000B+625$$

درنتیجه D بر 5^2 بخش پذیر است وچون D مربع کامل است پس D بر 5^4 نیز بخش پذیر خواهد بود، یعنی B بر ۵ بخش پذیر است ، دراین‌صورت رقم آخر B صفریا ۵ خواهد بود . یعنی رقم چهارم ازسمت راست عدد D یا صفر ویا ۵ است. هیچ یك ازاین دوممکن نیست : صفردر D بطورکلی وجود نداشته، و ۵ فقط در اولین رقم سمت راست D موجود است .

به‌تناقض برمی‌خوریم‌وبنابراین D نمی‌تواندمربع کامل‌باشد

۲۹ـ مسئله را به روش استقراء ریاضی اثبات می‌کنیم .

فرض‌کنیم n نقطهٔ $T_1,\dots,T_n$ به‌ترتیبی که درفرض مسئله‌آمده توسط بردارهائی به‌هم وصل شده باشند: از هر نقطه به‌نقطهٔ‌دیگر می‌توان توسط یك یا دوبردار رسید. دو نقطهٔ دیگر به نقاط $T_1,\dots,T_n$ می‌افزائیم: این دونقطه را با A,B نشان می‌دهیم (شکل) بردارهای جدید نظر آنها را رسم می‌کنیم .



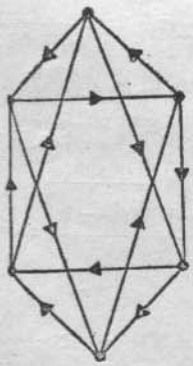
۱) از نقطه A به‌کلیهٔ نقاط $T_1,\dots,T_n$ وصل می‌کنیم.

۲) ازنقاط $T_1,\dots,T_n$ به B وصل می‌کنیم.

۳) ازنقطه B به A وصل می‌کنیم .

حال می‌توان توسط یك یا دوتا ازبردارهای قبلی از T_i به T_k ($k<n$ و $i\geq 1$) رسید،ازنقطهٔ A به‌نقطه T_i ($1<i<n$) یك بردار جدیدکشیده می‌شود و از A به T_i یك یا دو بردار کشیده می‌شود ، همچنین از A به B دوبردار ، از B به A یك بردار ، از B به T_i دوبردار، از T_i به B یك بردار بالاخره از T_i به A دو بردار جدیدکشیده می‌شود .

به‌این ترتیب $n+2$ نقطهٔ $A, B, T_1,\dots,T_n$ به همان ترتیبی که درفرض مسئله آمده توسط بردارهایی به‌هم‌متصل شده اند .



به‌ازای $n=3$ بردارها به صورتی که در شکل‌قبل(سمت چپ) ترسیم شده در می‌آیند.

با اضافه کردن دونقطه به طریقی که در بالا گفتیم ، حل مسئله را به ازای n فرد و دلخواه $n>3$ بدست می‌آوریم. برای‌حل مسئله برای n زوج $n>4$ می‌ماند نشان دهیم که چگونه بردارها رابه‌ازای $n=6$ رسم می‌کنیم . این ترسیم را می‌توانیم در شکل بالا مشاهده

کنیم. بررسی حالت n زوج را لازم می‌آید با $n=6$ شروع کنیم نه با $n=4$ ، زیرا به ازای $n=4$ مسئله غیر قابل حل است :

وصل کردن چهار نقطه به طریقی که در فرض مسئله آمده غیرممکن است .

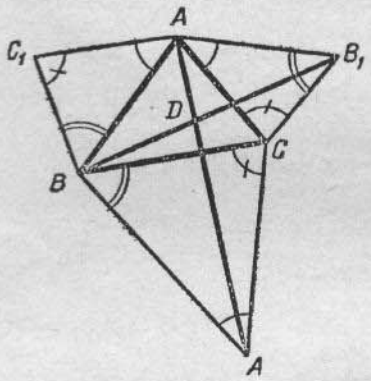
۳۰ـ هردو خواستهٔ a) ، b) را در یك زمان بررسی می‌کنیم .

طبق فرض $\angle BCA_1=\angle B_1CA$ ، به‌آنها مقدار $\angle ACB$ را اضافه می‌کنیم که بدست می‌آوریم :

$$\angle A_1CA=\angle BCB_1 \qquad (1)$$

ازتشابه ΔA_1CB و ΔACB_1 نتیجه می‌شود که :

$$\frac{A_1C}{BC}=\frac{AC}{B_1C} \qquad (2)$$



طبق روابط (۱) و (۲) مثلثهای A_1CA و BCB_1 متشابهند . در نتیجه هرگاه مثلث A_1CA را حول نقطهٔ C به اندازهٔ $\angle A_1CB$ دوران دهیم خط CA_1 بر CB و خط CA بر CB_1 قرار گرفته وقطعه خط A_1A موازی BB_1 می‌گردد.

بنابراین قطعات AA_1 و BB_1 تحت زاویه‌ای برابر $\angle A_1CB$ همدیگر را قطع می‌کنند :

$$\angle ADB_1=\angle ACB_1 \quad \text{و} \quad \angle A_1DB=\angle A_1CB$$

یعنی، نقطهٔ تقاطع D آنها بردایره‌ای‌مانند α که دایرهٔ محیطی مثلث A_1BC وهمچنین بردایره‌ای دیگر مانند β که دایرهٔ محیطی مثلث AB_1C است قراردارد .

نتیجهٔ اخیر را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم : نقطهٔ تقاطع AA_1 و α برنقطهٔ تقاطع BB_1 و β منطبق است .

می‌ماند ثابت کنیم که آنها برنقطهٔ تقاطع CC_1 و γ (γ دایرهٔ محیطی مثلث ABC_1) منطبقند، چون سه جفت AA_1 و α ، BB_1 و β ، CC_1 و γ کاملامشابه هم هستند این موضوع ثابت بوده و مسئله حل شده است .

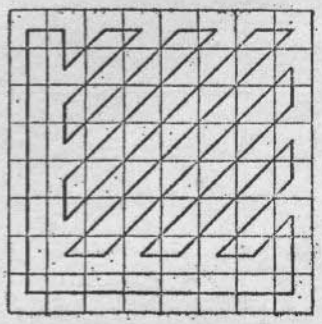
۳۱ـ کلیهٔ n نفر را شماره گذاری می‌کنیم . نفر n ام را باکلیهٔ $(n-1)$ نفر بقیه آشنا می‌کنیم و نفر $(n-1)$ام را با باقی افراد به غیراز اولی ، نفر $(n-2)$ام راباکلیهٔ افراد باقی به‌غیراز اولی ودومی و همینطور تا آخرعمل می‌کنیم. تعداد افراد آشنا با نفر k ام را با a_k نشان می‌دهیم .

دراین‌صورت به‌ازای $n=3$ داریم $a_1=1$ و $a_2=1$ $a_3=2$ وبه‌ازای $n=4$ داریم $a_1=1$ ، $a_2=2$ ، $a_3=2$ ، $a_4=3$ وبطورکلی‌به‌ازای $n=2k$ و $n=2k+1$ خواهیم داشت :

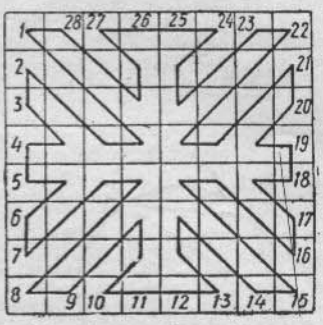
$$a_1=1<\cdots<a_k=a_{k+1}<\cdots<a_n=n-1$$

یعنی هرسه نفر تعداد یکسان آشنا ندارند.

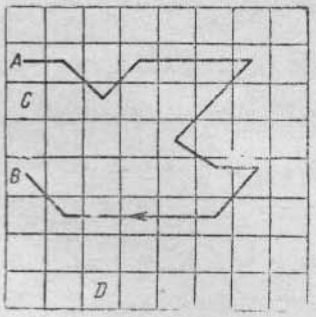
۳۲ـ a) مثالی که در آن نشان دهیم که مهرهٔ شاه می‌تواند درست ۲۸ حرکت قائم و افقی انجام دهد در شکل روبرو آمده است



b) در حاشیه و دور تا دور صفحهٔ شطرنجی ۲۸ خانه جدا می‌کنیم (شکل روبرو). با دور زدن صفحه،مهرهٔ شاه یك‌بار درهرخانه خواهد بود. درحالت خاص، او ۲۸ حرکت درخانه‌های متعلق به حاشیهٔ صفحه انجام می‌دهد . این خانه‌ها را با اعداد ۱ و ۲،...،۲۸ به‌ترتیبی که مهرهٔ شاه در آنها قرار می‌گیرد شماره گذاری می‌کنیم . دراین‌صورت مسیرمهرهٔ شاه به ۲۸ قطعه تقسیم می‌شود : ازخانهٔ یك تا خانهٔ ۲، ازخانهٔ ۲ تا خانهٔ ۳ ،...، از خانهٔ ۲۸ تا خانهٔ یك (شکل بعد)



ثابت می‌کنیم که به‌ازای مسیر حرکت‌دلخواه روی صفحه



که خودرا قطع نمی‌کند هر دو انتهای هر قطعه حتماً روی خانه‌های مجاور می‌افتند.

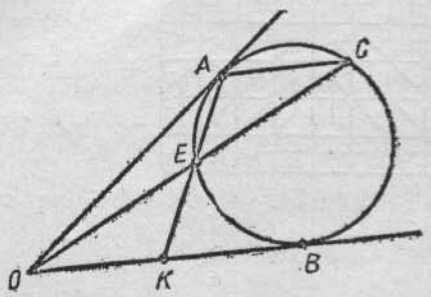
عکس قضیه را ثابت فرض می‌کنیم: فرض کنیم چنان مسیر حرکتی موجود باشد که برای آن اقلا یکی از ۲۸ قطعه دارای انتهایی روی خانه‌های مجاور نباشد. (قطعه AB درشکل بالا). ازآنجاکه مسیر حرکت مهرهٔ شاه خط شکستهٔ بسته‌ایست، ابتداو امتداد مسیر حرکت را می‌توان به‌دلخواه انتخاب کرد.

مطابق این گفته‌ها، فرض می‌کنیم درمسیر حرکتی که در شکل اخیر نشان داده شده است مهرهٔ شاه حرکت را از خانهٔ A شروع و در مسیری به‌سمت B به راه می‌افتد.

خانه‌های A و B مجاور هم قرار ندارند، بنابراین قطعهٔ AB صفحه را به‌دوقسمت که توسط خط شکستهٔ AB انجام می‌گیرد تقسیم می‌کند. دوخانهٔ (D و C) متعلق به‌قسمتهای مختلف را درنظرمی‌گیریم. دربرگشت از B به A مهرهٔ شاه باید در خانه‌های C وD قرارگیرد. درنتیجه خط شکستهٔ CD خطAB راقطع می‌کند. این موضوع با فرض مسئله در مورد قطع نشدن مسیر توسط خودش مغایرت دارد.

به‌این‌ترتیب هریك از ۲۸ قطعه دارای انتهایی، درخانه‌های مجاور درحاشیهٔ صفحه می‌باشد. درصفحهٔ شطرنج معمولی این دو خانه به رنگهای مختلف هستند. نتیجه می‌شود، که هریك از۲۸ قطعه اقلاشامل یك حرکت می‌باشد، «تغییررنگ» یعنی حرکت یابطورافقی ویابطور قائم می‌باشد. بنابراین، کلیهٔ چنین حرکتها حداقل به تعداد ۲۸ است.

۳۳ـ مثلثهای OEK و OAK متشابهند، زیرا



$\angle OKA$ در آنها مشترك بوده و $\angle OCA=\angle OAK$ ($AC \parallel OB$ و $\angle OCA=\angle OAK$، زیرا هر دوی این زوایا برابرند با نصف‌کمان AE).

ازآنجاکه $\frac{EK}{OK}=\frac{OK}{AK}$، پس $OK^2=EK\cdot AK$

از طرفی دیگر $BK^2=EK\cdot AK$ پس تساوی موردنظریعنی $OK=BK$ نتیجه می‌گردد.

۳۴ـ بدون محدودیتی درحالت کلی می‌توانیم اعداد a و b را مثبت فرض کنیم (درحالت عکس یا درتبدیل x به $(-x)$ چند جمله‌ای ax^2+bx+c تغییر علامت می‌دهد). باقرار دادن مقادیر $x=1$, $x=-1$ و $x=0$ در نا معادلهٔ $|ax^2+bx+c|\leq 1$ بدست می‌آوریم:

$$|a+b+c|\leq 1 \quad \text{و} \quad |a-b+c|\leq 1 \quad \text{و} \quad |c|\leq 1$$

از اینجا: $|a+b|\leq 2$ و $|a-b|\leq 2$

فرض کنیم $c\geq 0$ باشد. از نامساویهای واضح $0\leq cx^2\leq c$ و $-b\leq bx\leq b$ بدست می‌آوریم:

$$-2\leq a-b\leq cx^2+bx+a\leq b+c+a\leq 1$$

هرگاه $c<0$ باشد از:

$$c\leq cx^2\leq 0 \quad \text{و} \quad -b\leq bx\leq b$$

نتیجه می‌شود. که:

$$-1\leq a+c-b\leq cx^2+bx+a\leq a+b\leq 2$$

ونامساوی $|cx^2+bx+a|\leq 2$ ثابت است.

۳۵ـ برنده می‌تواند حداکثر ۲۰ نمره بدست‌آورد.

هربار پس ازهردور تناوبی نمرهٔ ماهرترین تنیس باز را بررسی می‌کنیم.

واضح است، که ازهربازی به‌بازی بعدی این‌نمره نه تنها کاهش پیدانکرده بلکه‌این نمره حداکثردونمره‌افزایش‌می‌یابد.

بنابراین، نمرهٔ ماهرترین تنیس باز پس از هربازی از مقدار معینی تجاوز نمی‌کند.

پس ازدورهٔ اول حداکثر ۳ نمره

پس از دورهٔ دوم حد اکثر ۵ نمره

.....

پس از دورهٔ دهم حداکثر ۲۱ نمره

نشان می‌دهیم که تنیس باز با نمرهٔ ۲۱ نمی‌تواند قهرمان

باشد. بافرض عکس موضوع نتیجه می گیریم، که پس از دورهٔ i ام نمرهٔ ماهرترین تنیس باز برابر $2i+1$ می‌شود. (هرگاه برای یك i این نمره خیلی کمتر از $2i+1$ باشد، دراین‌صورت تنیس‌باز بانمرهٔ ۲۱ قهرمان نخواهد بود) .

پس ازاولین دوره بازیکنان دارای نمره‌های ۱ و ۲ حذف می گردند (بازیکنان با نمره‌های ۳ و ۴ برنده‌اند) پس از دور دوم بازیکنان با نمره‌های ۳ و ۴ حذف می گردند (بازیکنان با نمره‌های ۵ و ۶ برنده‌اند) وبه‌همین ترتیب تا آخر. بالاخره در فینال بازیکنان با نمره‌های ۱۹ و ۲۰ که در نیمه فینال برنده بوده‌اند حذف می گردند، درنتیجه تنیس باز با نمرهٔ ۲۱ قهرمان نخواهد بود .

می‌ماند مثالی بیاوریم ،که درآن بازیکن بـا نمرهٔ ۲۰ قهرمان باشد .

بهتر است این را به‌صورت کلی ، وقتی کل بازیکنان 2^n است انجام دهیم ، بازیکن با نمرهٔ $2n$ قهرمان خواهـد بود . مثالی اندیسی می‌آوریم : فرض می کنیم که مثالی با 2^{n-1} بازیکن داشته باشیم .

حال کلیهٔ 2^n نفربازیکن را به‌دوگروه 2^{n-1} نفری که افرادشان با هم تماسی ندارند تقسیم می کنیم (بازیکنان دستهٔ اول با بازیکنان دستهٔ دوم بازی نمی کنند).

دستهٔ اول : $2n$ و $1-2n$ وبقیهٔ بازیکنان ضعیف

دستهٔ‌دوم: $1,2,\dots,2n-2$ وبقیه خیلی‌قوی (ماهرتر)

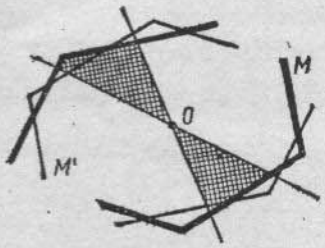
بازیکنان‌چنان‌بازی می کنند، که قهرمان دستهٔ‌اول‌بازیکنی است با $2n$ نمره وقهرمان دستهٔ دوم بازیکنی است با $2n-2$ نمره . به‌این‌ترتیب درفینال بازیکنانی با $2n$ و $2n-2$ نمره شرکت دارند که بازیکن با $2n$ نمره پیروز است .

۳۶ـ مساحت مثلث $S=1<\frac{bc}{2}<\frac{b^2}{2}$ است پـس :

$$b>\sqrt{2}$$

۳۷ـ فرض کنیم هریك از k خط ماربرنقطهٔ O مساحت n ضلعی M را به دوقسمت متساوی تقسیم کند. چندضلعـی M' قرینهٔ M نسبت به نقطهٔ O را می‌سازیم .

درهریك از $2k$ زاویه‌ای که تحت آنها k خط صفحه را تقسیم می کنند ، باید اقلا یك نقطهٔ تقاطع پیرامونهای M و M' قرارداشته باشدچون مساحت دوقطعه چندضلعی M که درزاوایای قائم با رأسهای O قراردارند، باهم‌برابرند پس پیرامونهای‌چند ضلعیهای M و M' حداقل در $2k$ نقطه متقاطعند . لیکن، در هرضلع n ضلعی‌محدب M نمی‌تواند بیش‌ازدو نقطه تقاطع قرار داشته باشد .



درنتیجه $2k\leq 2n$ و ازاینجا بدست‌می‌آید

$$k\leq n$$

۳۸ـ معادلهٔ $f(x)=x$ دارای ریشه‌های حقیقی نیست، نتیجه می گیریم که سه جمله‌ای درجهٔ دوم $f(x)-x$ هیچگـاه صفر نشده‌واین بدین معنی است که‌به‌ازای جمیع مقادیر x دارای علامتی است معین . به‌این ترتیب لازم می‌آید دوحالت زیر را بررسی کنیم :

۱) به‌ازای جمیع مقادیر x داشته باشیم : $f(x)>x$

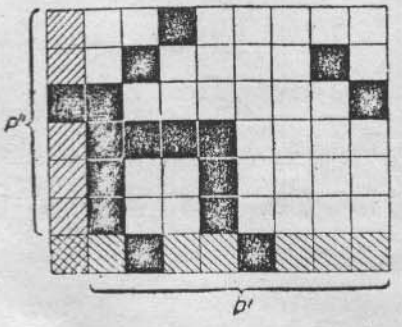
۲) به‌ازای جمیع مقادیر x داشته باشیم : $f(x)<x$

حالت اول را بررسی می کنیم ، برای این منظـور عـدد حقیقی و دلخواه x_0 را انتخاب کرده ، نامعادلهٔ $f(x)>x$ را برای مقادیر $x=f(x_0)$ و $x=x_0$ می‌نویسیم. بدست‌می‌آوریم $f(f(x_0))=f(x_0)$ و $f(x_0)>x_0$ ازاینجا نتیجه می گیریم $f(f(x_0))>x_0$ است، یعنی‌درحالت‌اول معادلهٔ $f(f(x))=x$ نمی‌تواند دارای ریشه‌های حقیقی باشد. به‌همین‌ترتیب حالت‌دوم را بررسی می کنیم .

۳۹ـ با اثبات‌خواستهٔ b) خواستهٔ a) نیز اثبات می‌شود. به‌این جهت مستقیماً خواستهٔ b) را اثبات می کنیم . اثبات را به روش اندیسی با n انجام می‌دهیم: به‌ازای $n=1$ قضیه ثـابت است. فرض می کنیم که قضیه به‌ازای کلیهٔ مقادیر $n<n_0$ صادق باشد ، سپس نشان می‌دهیم کـه به‌ازای $n=n_0$ نیز قضیه صادق است . مستطیل P متشکل از تعداد صحیحی خانـه را بـررسی می کنیم . دارای n_0 خانهٔ‌سیاه، بطوری‌که درستون سمت‌چپی‌اش وسطر پائینی‌اش حداقل یك خانهٔ سیاه موجـود است . مستطیل بدست آمده از حذف ستون سمت چپی مستطیل P را با P' نشان می‌دهیم.مستطیل اخیرکمتر از n_0 خانـهٔ سیاه دارد ، و طبق فرض ، این خانه‌ها که بطورجدا ازخانه‌های حذف شده ازستون

سمت چپی بررسی شده‌اند، زودتر از لحظهٔ $t=n_0-1$ حذف نمی‌گردند.

به سادگی می‌توان دید که وجود خانه‌های سیاه در ستون سمت چپی مستطیل P، (درعمل تغییر رنگ‌شرکت نمی‌کند) که در مستطیل P' قراردارند، می‌تواند باعث ظهور خانه‌های سیاه جدیدی درستون سمت چپی گردد.



به این ترتیب، با اجرای قانون خود برای تبدیل کلیهٔ n_0 خانه، نتیجه می‌گیریم که در لحظهٔ زمانی $t=n_0-1$ درمستطیل P' حتی یك خانهٔ سیاه وجود نخواهد داشت.

بهمین ترتیب ثابت می‌کنیم که در لحظهٔ $t=n_0-1$ در مستطیل P'' حتی یك خانهٔ سیاه وجود نخواهد داشت. P'' با حذف سطر پائینی مستطیل P بدست می‌آید. ازآنجاکه درهیچ لحظهٔ زمانی خانه‌های سیاه نمی‌توانندخارج از P باشند، نتیجه می‌گیریم که درلحظهٔ $t=n_0-1$ فقط خانه‌ای که‌درهیچ یك از مستطیلهای P' و P'' قرارندارد، می‌تواند سیاه باقی بماند. یعنی خانه‌ای که‌در گوشهٔ سمت‌چپی مستطیل P قراردارد. این‌خانه درلحظهٔ $t=n_0$ حذف می‌گردد یعنی دراین لحظه کلیهٔ خانه‌های سیاه محو می‌گردند.

۴۰ـ توجه می‌کنیم که درتغییر دوره‌ای اندیسها قسمتهای چپ وراست نامساوی تغییر نمی‌کنند یعنی، هرگاه شماره گذاری جدیدی برای اعداد x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 با ثابت نگاه داشتن ترتیب توالی آنها ازیکدیگر انجام دهیم (فرض براین است که پس از x_5 عدد x_1 می‌آید). به این جهت می‌توان برای بیشتر این پنج عدد داده شده اندیسهای جدید مطابق نظر خودمان انتخاب کنیم. بهتراست فرض کنیم که عدد x_2 بزرگترین است (یعنی $x_2 \geq x^i$ کـه $i=1,2,3,4,5$). هرگاه هر دو طرف نا مساوی را به‌طرف چپ نامساوی آورده مرتب کنیم در سمت چپ رابطهٔ زیر را خواهیم داشت.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-2x_1x_2-2x_2x_3-$$
$$-2x_3x_4-2x_4x_5-2x_5x_1+2x_1x_3+2x_1x_4+$$
$$2x_2x_4+2x_2x_5+2x_3x_5=(x_1-x_2+x_3)^2+$$
$$+(x_4-x_5)^2+2x_4(x_1+x_2-x_3)+$$
$$+2x_5(x_2+x_3-x_1)$$

با درنظر گرفتن اینکه $x_2 \geq x_1$ ، $x_2 \geq x_3$ واینکه کلیهٔ اعداد x_i طبق فرض مسئله مثبتند مشاهده می‌کنیم که رابطهٔ بدست آمده مثبت است. واین همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۱ـ سه تا از نقاط داده شده را درنظرمی‌گیریم: A، B و C. طبق‌فرض مسئله نقطهٔ چهارم D خارج ازصفحهٔ ABC قراردارد. مثلث ABC را بررسی می‌کنیم. فقط سه حالت جدا از یکدیگروجوددارد: اضلاع مثلث ABC یالهای متوازی‌السطوح باشند.

۱) دوتا از اضلاع ۲) یکی از اضلاع ۳) هیچ یك از اضلاع مثلث یال متوازی‌السطوح نباشند.

تعداد متوازی‌السطوحها را درهریك ازاین حالات‌شمارش می‌کنیم.

درحالت اول به سه‌طریق می‌توان دویال متوازی‌السطوح راازبین سه‌ضلع مثلث انتخاب کرد. درهرانتخاب یالها یك وجه متوازی‌السطوح درصفحهٔ ABC قرار می‌گیرد. در نتیجه نقطهٔ D باید در وجه موازی با این صفحه قرار گرفته ویکی‌ازچهار رأس این وجه را انتخاب کند، و به این ترتیب چهار متوازی‌السطوح جدید نیز ظاهرمی‌گردند.

بنابراین درحالت اول $۳\times۴=۱۲$ متوازی‌السطوح مختلف خواهیم داشت.

درحالت دوم هریك‌ازسه ضلع مستطیل ABC به دلخواه می‌توانند یال متوازی‌السطوح باشند. به سادگی متوجه می‌شویم که درهریك ازاین انتخابها یکی از دوضلع باقی باید قطریکی از وجوه متوازی‌السطوح بشود. وبالاخره نقطهٔ D می‌تواند به دلخواه دو وضع را روی یال موازی با یال انتخابی درصفحهٔ ABC به‌خودبگیرد. بنابراین درحالت دوم $۳\times۲\times۲=۱۲$ امکان وجود دارد.

بالاخره درحالت سوم هیچ‌یك ازرأسهای متوازی‌السطوح روی صفحهٔ ABC قرار نداشته ونقطهٔ D می‌تواند یکی از ۵ رأس باقیمانده را انتخاب کند، و در هر بار فقط و فقط یك متوازی‌السطوح نتیجه می‌گردد.

به‌این‌ترتیب کلا $۲۹=۵+۱۲+۱۲$ متوازی‌السطوح وجود دارد.

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۱۰۸

۱۰۸/۱ـ ثابت کنید که:

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۱۹۹}-\frac{۱}{۲۰۰}=$$

$$=\frac{۱}{۱۰۱}+\frac{۱}{۱۰۲}+\cdots+\frac{۱}{۲۰۰}$$

حل ـ طرف اول تساوی را به ترتیب زیر می‌نویسیم :

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۹۹}+\frac{۱}{۲۰۰}-۲(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+$$

$$+\cdots+\frac{۱}{۲۰۰})=(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۱۰۰})+$$

$$+(\frac{۱}{۱۰۱}+\frac{۱}{۱۰۲}+\cdots+\frac{۱}{۲۰۰})-(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+$$

$$+\cdots+\frac{۱}{۱۰۰})=\frac{۱}{۱۰۱}+\frac{۱}{۱۰۲}+\cdots+\frac{۱}{۲۰۰}$$

۱۰۸/۲ـ ثابت کنید که عدد $۲^{۹۹}+۲^{۹}$ بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

حل ـ داریم :

$$۲^{۹}+۲^{۹۹}=(۲^{۳})^{۳}+(۲^{۳۳})^{۳}=(۲^{۳}+۲^{۳۳})(۲^{۶}-$$

$$-۲^{۳۶}+۲^{۶۶})=(۲+۲^{۱۱})(۲^{۲}-۲^{۱۲}+$$

$$+۲^{۲۲})(۲^{۶}-۲^{۳۶}+۲^{۶۶})=۲(۲+۲^{۱۱})n=۴۱۰۰n$$

۱۰۸/۳ـ عبارت زیر را به ضرب چهار عامل تجزیه کنید :

$$P=a(b+c)(b^{۲}+c^{۲}-a^{۲})(a+b-c)-$$

$$-c(a+b)(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲})(b+c-a)$$

حل ـ چون به ازای $b=۰$ و همچنین $c=a$ داریم $P=۰$ پس P دارای عامل $b(c-a)$ است . بعد از بسط P سپس بعد از عملیات لازم نتیجه خواهد شد :

$$P=b(c-a)(a+b+c)(a^{۲}-b^{۲}+c^{۲})$$

۱۰۸/۴ـ صد عدد به‌ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$n_۱=۱\ ،\ n_۲=۱۲\ ،\ n_۳=۱۲۳،\cdots$$

$$n_{۱۰}=۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰$$

$$n_{۱۰۰}=۱۲۳\cdots۹۱۰۱۱\cdots۹۸۹۹۱۰۰$$

چند عدد ازاین اعداد بر۳ بخش‌پذیر است؟

حل ـ شرط لازم وکافی برای آنکه عددی بر ۳ بخش پذیرباشد آن است‌که مجموع رقمهایش بر ۳ بخش پذیر باشد . پس می‌توانیم در اعداد داده شده به جای هررقم باقیماندهٔ تقسیم آن رقم برصفر را قراردهیم . دراین‌صورت رشتهٔ زیر راداریم:

$$۱,۱۲,۱۲۰,۱۲۰۱,۱۲۰۱۲,۱۲۰۱۲۰,۱۲۰۱۲۰۱,..$$

در این رشته عددهای اولی ، چهارمی ، هفتمی ،...، صدمی مضرب ۳ نیستند . این عددها تصاعدی حسابی می‌سازند که جملهٔ اولش ۱ ، جملهٔ آخرش ۱۰۰ و قدرنسبتش ۳ است :

$$۱۰۰=۱+(n-۱)۳ \Longrightarrow n=۳۴$$

۳۴ عدد از عددهای داده شده مضرب ۳ نمی‌باشند پس ۶۶ عدد ازآنها بر ۳ بخش پذیرند .

۱۰۸/۵ـ همهٔ عدد های اول p را بیابید که عدد $N=p^{۳}+p^{۲}+۱۱p+۲$ اول‌باشد.

حل ـ سه حالت درنظر می‌گیریم .

۱) $p=۳$ دراین صورت $N=۷۱$ که اول است .

۲) $p=۳k-۱$ دراین‌صورت خواهیم داشت :

$$N=۹(۳k^{۳}-۲k^{۲}+۴k-۱)$$

که عدد غیراول است .

۳) $p=۳k+۱$ دراین صورت خواهیم داشت :

$$N=۳(۹k^{۳}+۱۲k^{۲}+۱۶k+۵)$$

که باز عدد غیر اول است .

بنابراین مسئله دارای جـواب منحصر به فرد $p=3$ می‌باشد .

۱۰۸/۶ـ ثابت کنید که به ازای مقادیر صحیح و دلخواه m و n عدد

$$A=(5m+3n+1)^5(3m+n+4)^4$$

بر ۱۶ بخش پذیر است.

حل ـ اگر m و n هردو زوج یا هردو فرد باشند عدد $(3m+n+4)$ زوج است وتوان چهارم آن مضرب ۱۶ است اگر یکی از دوعدد m و n فرد و دیگـری زوج بـاشد عـدد $(5m+3n+1)$ زوج است و تـوان پنجم آن مضرب ۳۲ است . پس در هرحال عدد A مضرب ۱۶ است .

۱۰۸/۷ـ هر گاه n عدد طبیعی دلخواه باشد، ثابت کنید که بین عددهای:

$$n, n+1, n+2, \ldots, n^3+n^2+n+2$$

توان چهارم عددی طبیعی یافت می‌شود.

حل ـ اگر $n=m^4$ باشد که مسئله حل است . فرض می‌کنیم :

$$m^4<n<(m+1)^4$$

نتیجه می‌شود که $n>m^4+1$ و :

$$n^3+n^2+n+2-(m+1)^4>(m^4+1)^3+$$
$$+(m^4+1)^2+(m^4+1)-(m+1)^4>0$$

زیرا به‌ازای $m=1$ رابطهٔ بالامحقق‌است وبه‌ازی $m>2$ داریم

$$(m^4+1)^2>(m+1)^4$$

نتیجه می‌شود که :

$$n<(m+1)^5<n^3+n^2+n+2$$

و مسئله ثابت است .

۱۰۸/۸ـ ثابت کنید که دستگاه معادله‌های زیر درمجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد.

$$\begin{cases} x^2+z^2+3x-3y-3=0 \\ y^2+z^2+3y+z+5=0 \end{cases}$$

حل ـ معادلهٔ دوم دستگاه به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$(y+\frac{3}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}=0$$

طرف اول این معادله به‌ازای هرمقدار حقیقی از y و z مخالف صفراست . پس دستگاه مفروض نه‌تنها درمجموعهٔ عددهای صحیح بلکه حتی درمجموعهٔ عددهای حقیقی جواب ندارد .

۱۰۸/۹ـ دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} x^3y=9 \\ 3x+y=6 \end{cases}$$

حل ـ اولا ملاحظه می‌شود که $x>0$ و $y>0$ ثانیاً بنا به نامساوی‌کوشی داریم:

$$\sqrt[4]{x^3y}\leq\frac{3x+y}{4} \Longrightarrow \sqrt[4]{9}\leq\frac{3}{2}$$

اما رابطهٔ طرف راست غیر ممکن است . پس دستگاه داده شده جواب ندارد .

۱۰۸/۱۰ـ دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} y^3+z^3=2a(yz+zx+xy) \\ z^3+x^3=2b(zx+xy+yz) \\ x^3+y^3=2c(xy+yz+zx) \end{cases}$$

حل ـ با فرض $xy+yz+zx=t$ (۱) داریم :

$$\begin{cases} y^3+z^3=2at^3 \\ z^3+x^3=2bt^3 \\ x^3+y^3=2ct^3 \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه خواهد شد :

$$x=\sqrt{b+c-a}\cdot t \quad و \quad y=\sqrt{c+a-b}\cdot t$$
$$z=\sqrt{a+b-c}\cdot t$$

این مقادیر را در رابطهٔ (۱) منظور می‌کنیم . مقدار t مشخص می‌شود واز روی آن مقادیر x و y و z معین می‌شود .

۱۰۸/۱۱ـ نابرابری زیررا ثابت کنید:

$$(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n)^2+$$
$$+(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n)^2\leq n^2$$

حل ـ به موجب نامساوی‌کوشی داریم :

$$(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n)^2\leq n(\sin^2\alpha_1+$$
$$+\sin^2\alpha_2+\cdots+\sin^2\alpha_n)$$
$$(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n)^2\leq n(\cos^2\alpha_1+$$
$$+\cos^2\alpha_2+\cdots+\cos^2\alpha_n)$$

ازجمع نظیربه نظیرطرفین دو رابطهٔ بالا، رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید.

۱۰۸/۱۲ـ سه خط موازی ومتمایزداده شده‌است.مثلثی مشابه بامثلث داده شده رسم‌کنیدکه سه رأسش روی آن سه خط واقع باشد.

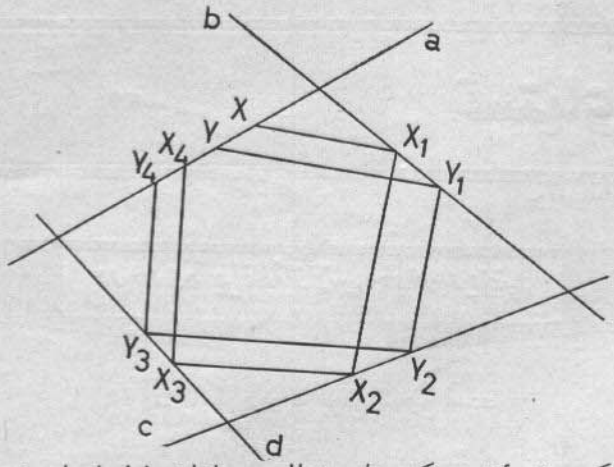
حل‌ـ اگر a و b و c سه‌خط متوازی و PQR مثلث داده شده باشد. فرض می‌کنیم کـه ABC مثلث مطلوب باشد به قسمی‌که A بر a و B بر bوCبرc واقع باشد.هرگاه تجانس بمرکز A وبه نسبت $k=\frac{AC}{AB}=\frac{PQ}{PR}$ ودوران به‌مرکز A وبه زاویهٔ $\varphi=BAC=QPR$ راانجام‌دهیم BبرCواقع شده وخط b به‌خط b_1 گذرندهٔ برc بدل می‌گردد.

بنابراین‌برای‌رسم‌مثلث‌مطلوب‌نخست‌نقطهٔAرا بر خط a در نظر گرفته درتبدیلی‌که گفته شد خط b_1 را بـدست می‌آوریم. ازتلاقی b_1 با c نقطهٔ C وازآنجا مثلث ABC بدست‌می‌آید. نظیر هرنقطهٔ A حداکثر دو جواب برای مسئله وجود خواهد داشت.

۱۰۸/۱۳ـ چهار ضلعی رسم کنیدکه ضلعهایش با چهار خط داده شده موازی باشد ورأسهایش روی چهار خط داده شدهٔ دیگر واقع باشد.

حل‌ـ فرض‌کنیم چهار رأس چهـار ضلعی روی خطوط مفروض a_1،b_1،c_1وd_1 (شکل زیر) قرار داشته باشند. نقطهٔX رأس چهار ضلعی مورد نظرواقع روی خط a_1 را درنظر گرفته وازآن خطی‌موازی خطa رسم می‌کنیم. این‌خطb_1 رادر نقطه‌ای مانند X_1 قطع می‌کند، از X_1 خطی‌موازی b رسم می‌کنیم تا خط c_1 را در نقطه‌ای مانند X_2 قطع‌کند، سپس‌از نقطـهٔ X_2 خطی موازی c رسم می‌کنیم تا d_1 رادر نقطـه X_3 قطع‌کند و بالاخره ازنقطهٔX_3 خطی‌موازی d رسم می‌کنیم تاخط a_1 را در نقطه‌ای مانند X_4 قطع‌کند. هرگاه نقاط X,X_4 برهم منطبق گردند مسئله حل‌است. حالتی را بررسی می‌کنیم‌که X , X_4 برهم منطبق نگردند.

نقطهٔ دیگری مانند yرا روی a_1 درنظر گـرفته ونتیجه می‌گیریم‌که به‌نقطهٔ y_4روی a_1 منتهی می‌گردد. توجه می‌کنیم



که درنتیجهٔ تصویرکردنهای متوالی به‌موازات خطوط داده شده خـط a_1 روی b_1 و b_1 روی c_1 و c_1 روی d_1 و d_1 روی a_1 تصویر می‌گردند وبه‌علاوه تصویر یك خط روی‌یك خط دیگریك تبدیل ساده می‌باشد. بنابراین درنتیجهٔ انجام چهـار تبدیل سادهٔ متوالی‌خط a_1، به بدلی‌روی خودش منجر می‌گردد. هرگاه در حالت خاص $\overrightarrow{xy}=\overrightarrow{x_4y_4}$ باشد دراین‌صورت یك انتقـال بدست می‌آوریم ومسئله جواب ندارد. درحالت‌کلی $\overrightarrow{xy}\neq\overrightarrow{x_4y_4}$ یك تجانس داریم‌که دارای یك‌نقطهٔ ثابت‌است وبنابراین مسئله‌دارای یك جواب می‌باشد. هرگاه تصویرخط a_1 روی خودش‌باشد (در این حالت $\overrightarrow{XX_4}=\overrightarrow{0}$) وبینهایت جواب خواهیم داشت.

۱۰۸/۱۴ـ نمایش هندسی تابع زیررا رسم‌کنید (استفادهٔ ازمشتق لازم نیست):

$$x=\log\sin x$$

حل‌ـ تابع وقتی معین‌است‌که:

$$\sin x>0\Longrightarrow 2k\pi<x<2k\pi+\pi$$

تابع متناوب و دارای دورهٔ تناوب 2π است. فاصلهٔ $(0,2\pi)$ را که درنظر بگیریم تابع‌درفاصلهٔ $(0,\pi)$ ازآن معین‌است. باتوجه به‌اینکه ماکسیمم $\sin x$ مقدار یك‌است پس‌ماکسیمم تابع مفروض صفر است وداریم؛

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
y	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$	

منحنی نمایش تابع به‌شکل بعد است.

دنباله در صفحهٔ ۳۸۳

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۱۰۹/۱ـ رابطهٔ زیرچه موقع صحیح است:

$$|a|+|b|\geq a+b$$

الف ـ فقط وقتی‌که $a<0$ و $b>0$

ب ـ هرچه باشد a وهرچه باشد b

ج ـ به‌ازای هیچ a وهیچ b

د ـ فقط وقتی‌که $a\leq 0$ و $b\geq 0$

۱۰۹/۲ـ اگر a و b دوعـدد حقیقی و $ab>0$ باشد، کدام‌یك ازرابطه‌های استلزامی زیرصحیح است:

$$a>b \Longrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a}>\frac{1}{b} \Longrightarrow a>b \qquad (2)$$

الف ـ هردو ب ـ فقط (۱)

ج ـ فقط(۲) د ـ هیچکدام

۱۰۹/۳ـ به‌ازای چه‌مقدار از a چند جمله‌ای زیر نسبت به x و y همگن (=متجانس) ومتقارن است:

$$2x^3-4x^2y+axy^2+2y^3+2a-6$$

الف ـ $a=3$ ب ـ هرمقدار از a

ج ـ هیچ‌مقدار از a د ـ $a=-4$

۱۰۹/۴ـ به‌ازای چـه مقادیر p و q معادلهٔ زیر مبهم است:

$$\frac{x-4}{2}-\frac{x+4}{3}=\frac{2x+q}{p}$$

الف ـ $p=12$ وهرچه باشد q

ب ـ $p=12$ و $q=-40$

ج ـ $q=-40$ وهرچه باشد p

د ـ هیچ مقدار از p و q

۱۰۹/۵ـ به‌ازای چه مقدار از m دستگاه معـادله های زیر سازگار است:

$$\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2\\ 6(x-y)+xy=0\\ x+y=m\end{cases}$$

الف ـ $m=1$ ب ـ $m=-1$

ج ـ $m=5$ د ـ $m=-5$

۱۰۹/۶ـ درکدامیك از فاصله‌های داده‌شده داریم:

$$-1\leq\frac{x^2+x-1}{x^2+5x+4}\leq 1$$

الف ـ $x>0$ ب ـ $x<0$

ج ـ $x<-4$ د ـ $x>-4$

۱۰۹/۷ـ هرگاه $a=\log 370$ باشد.

$\log 0/027027\ldots$ برابراست‌با:

الف ـ $a-1$ ب ـ $1-a$

ج ـ $a+1$ د ـ $-1-a$

۱۰۹/۸ـ دریك دوازده ضلعی‌محدب طـولهای دوضلع و همهٔ قطر هایی‌کـه از یك رأس می‌گذرند تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند. هرگاه a طول کوچکترین ضلع و a^{12} طول بزرگترین ضلع ازدوضلع مزبور باشد، قدر نسبت این‌تصاعدکدام است:

الف ـ $\sqrt[10]{a^{a}}$ ب ـ a

ج ـ $\sqrt[11]{a^{10}}$ د ـ $a\sqrt[11]{a}$

۱۰۹/۹ـ دو دایره به شعاعهای ۵ و ۶ در A متقاطعند وبا یکدیگر زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازند. از A قاطعی‌می‌گذرانیم که دو دایره را غیراز A در M و N قطع می‌کند. بیشترین‌طول MN کدام‌است:

الف- ۳۱ ب- ۳۵ ج- ۶۰ د- ۶۲

۱۰۹/۱۰- در مثلث متساوی‌الاضلاع نیمدایره‌ای چنان محاط کرده‌ایم که مرکزش روی یک‌ضلع واقع است و بردوضلع دیگر مماس می‌باشد. هرگاه مساحت سطح محصور بین مثلث و نیمدایره برابر باشد با $8\sqrt{3}-3\pi$ ، شعاع نیمدایره برابر است‌با:

الف- $2\sqrt{2}$ ب- ۴ ج- $\sqrt{2}$ د- $\sqrt{6}$

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم‌ریاضی

۱۰۹/۱۱- درصفحهٔ محورهای مختصات دونقطهٔ $A(3,1)$ و $B(-5,7)$ داده شده‌است. محور $x'x$ را ثابت می‌داریم ومحور $y'y$ را انتقال می‌دهیم به قسمی که در دستگاه جدید دونقطهٔ A وB نسبت به‌نیمساز ربع‌اول وسوم قرینهٔ یکدیگر باشند. طول مبدأ جدید نسبت به‌دستگاه اول چقدر است:

الف- ۵ ب- ۵- ج- ۴ د- ۱-

۱۰۹/۱۲- برمنحنی نمایش هندسی تابع $y=\frac{x}{x^2+1}$

دونقطهٔ دلخواه به‌طولهای x_1 و $x_2>x_1$ را انتخاب می‌کنیم. هرگاه مقدار $f(x_2)-f(x_1)$ منفی باشد دو نقطهٔ مزبور در کدام یک‌از فاصله‌های زیرواقع می‌باشند:

الف- $[-1,+1]$ ب- $[-2,+2]$

ج- $[2,5]$ د- $[0,3]$

۱۰۹/۱۳- به‌ازای کدام مقادیر a تابع $y=ax+\sin x$ همواره صعودی است؟

الف- $a>0$ ب- $a>1$

ج- $-1<a<1$ د- $a<-1$

۱۰۹/۱۴- درصفحهٔ محورهای مختصات منحنی‌به معادلهٔ $y=\frac{x+1}{x+2}$ ودو خط D_1 و D_2 به معادله‌های $x=-1$ و $x=3$ را درنظر می‌گیریم. درنقطهٔ به‌طول $-1<\alpha<3$ خطی برمنحنی مماس می‌کنیم که D_1 رادر A و D_2 را در B قطع می‌کند. خطهای D_1 و D_2 با $x'x$ به‌ترتیب در D و C تلاقی می‌کنند. به ازای چه مقدار از α مساحت ذوزنقهٔ ABCD می‌نیمم است:

الف- $\alpha=0$ ب- $\alpha=3$

ج- $\alpha=1$ د- $\alpha=-1$

۱۰۹/۱۵- از نقطهٔ $(-1,3)$ دو خط برمنحنی تابع $y=\frac{2x+1}{x+2}$ مماس کرده‌ایم. از مبدأ مختصات خط Δ را می‌گذرانیم که زاویهٔ آن با $x'x$ برابربا زاویهٔ بین‌دومماس مزبور باشد. ضریب زاویه‌ای خط Δ کدام است:

الف- $4\sqrt{3}$ ب- $2\sqrt{3}$

ج- $3\sqrt{2}$ د- $4\sqrt{2}$

۱۰۹/۱۶- به فرض آنکه داشته باشیم:

$$3tgx+4cotgx=5\sqrt{2}$$

مقدار $\sin 2x$ ممکن‌است که برابر باشدبا:

الف- $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ب- $\frac{\sqrt{3}}{4}$

ج- $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ د- $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

۱۰۹/۱۷- درچهار ضلعی‌محدب ABCD داریم:

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin C}{\sin D}$$

دراین‌صورت چهار ضلعی ABCD

الف- محیطی است ب- محاطی است

ج- دوقطرش برهم عمودند د- دوقطرش باهم‌برابرند

۱۰۹/۱۸- هرگاه $\log cotgx=a$ باشدمقدار زیرچقدر است:

$$\log\frac{\sin 2a+\sin 4a}{\cos 2a+\cos 4a}$$

الف- $a-1$ ب- $1-a$

ج- $-a$ د- $2a$

۱۰۹/۱۹- حجم منشور هشت پهلوی منتظمی $4R^2\sqrt{2}$ وشعاع قاعدهٔ آن R است. ارتفاع این‌منشور چقدر است:

الف- $2R$ ب- $R\sqrt{2}$

ج- R د- $2R\sqrt{2}$

۱۰۹/۲۰- از گستردن سطح جانبی مخروط دوار به شعاع قاعدهٔ R، قطاع دایرهٔ به‌زاویهٔ مرکزی 120° بدست آمده است. ارتفاع این‌مخروط چقدر است؟

الف- $R\sqrt{2}$ ب- $R\sqrt{3}$

ج- $2R\sqrt{3}$ د- $2R\sqrt{2}$

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۹/۲۱- منحنی نمایش تابع:

$$y=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

الف- شامل دوشاخه است که دربخشهای اول وسوم‌محورها واقعند.

ب- به‌تمامی دربخش اول محورها واقع است.

ج- دربخشهای اول ودوم وسوم محورها واقع‌است.

د- شامل یك نقطهٔ تنها واقع بر $y'y$ و یك شاخهٔ‌منحنی واقع دربخش اول محورها است.

۱۰۹/۲۲- هرگاه m عدد منفی باشد، ریشه‌های معادلهٔ

$$(m-1)x^2-2mx+1=0$$

نسبت به‌دوعدد $+2$ و -2 چه وضع دارند:

الف- $x'<-2<x''<2$

ب- $x'<x''<-2<2$

ج- $-2<x'<x''<2$

د- $x'<-2<2<x''$

۱۰۹/۲۳- هرگاه معادلهٔ $4a^2x^2+bx^2+2=0$ ریشهٔ مضاعف داشته‌باشد، مقدار b برحسب a کدام است:

الف- $3a^2$ ب- $6a^2$

ج- $-6a^2$ د- $-3a^2$

۱۰۹/۲۴- سطح محصور بین‌منحنی تابع $x=\frac{-1}{x+1}$ ومحور $x'x$ ودو خط $x=0$ و $x=k>0$ را حول $x'x$ دوران می‌دهیم. هرگاه $k\to\infty$ حد حجم حادث چقدراست؟

الف- π ب- 2π ج- π^2 د- π^3

۱۰۹/۲۵- هرگاه داشته باشیم

$$\begin{cases} x+y=a \\ tgx+tgy=tgb \\ cotgx+cotgy=cotgc \end{cases}$$

نتیجه می‌شودکه tga برابراست با:

الف- $\frac{tgb}{1+tgbtgc}$ ب- $\frac{tgb}{1-tgbtgc}$

ج- $\frac{1-tgb}{1+tgc}$ د- $\frac{1+tgb}{1-tgc}$

۱۰۹/۲۷- درمثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر 60° وزاویهٔ C دوبرابر زاویهٔ B است. دراین مثلث مقدار $b+c$ کدام است:

الف- $2a\sin 20^\circ$ ب- $2a\cos 20^\circ$

ج- $a\sin 20^\circ$ د- $a\cos 20^\circ$

۱۰۹/۲۷- در نیمدایرهٔ به‌قطر $AB=4$ چهار ضلعی $ABCD$ را محاط کرده‌ایم که اندازهٔ کمان CD برابر 60درجه است. اندازهٔ کمان حادهٔ BC چقدر باشد تامساحت چهار ضلعی برابر باشدبا $3+\sqrt{3}$:

الف- 30° ب- 45° ج- 60° د- 75°

۱۰۹/۲۸- کوچکترین مضرب مشترك دوعدد را بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها تقسیم کرده‌ایم، خارج قسمت عدد اول p شده‌است. کدام حکم زیرصحیح است:

الف- آن دوعدد نسبت به‌هم اولند

ب- بزرگترین مقسوم علیه مشترك آن دوعدد p است.

ج- یکی ازآن دوعدد برابر p است.

د- نسبت آن دوعدد برابر p است

۱۰۹/۲۹- چه شرط وکافی‌است برای آنکه کسر $\frac{A}{375}$ مولدکسر اعشاری تحقیقی باسه رقم اعشار باشد؟

الف- A مضرب ۳باشد.

ب- A مضرب ۵باشد

ج- A مضرب ۱۵ باشد.

د- A مضرب ۱۵ باشد اما مضرب ۲۵ نباشد.

۱۰۹/۳۰- فرض می‌کنیم که n عدهٔ مقسوم علیه‌های عدد A باشد. برای آنکه A مربع کامل باشد:

الف- لازم و کافی است که n زوج باشد.

ب- لازم و کافی است که n فرد باشد.

ج- لازم است که n فرد باشد.

د- کافی است که n فرد باشد.

۱۰۹/۳۱- دو دایرهٔ متخارج به مرکزهای O و O′ مفروض است. اگر A نقطه‌ای باشد که نسبت به این دو دایره دارای یک قطبی باشد:

الف- A درخارج هریک ازدو دایره واقع است.

ب- A برمحور اصلی دو دایره قرار دارد.

ج- A داخل یکی ازدو دایره اماخارج پاره خط OO′ است.

د- A داخل یکی از دودایره وروی پاره‌خط OO′ است.

۱۰۹/۳۲- ازنقطهٔ A واقع درخارج دایرهٔ ثابت C به نقطهٔ متغیر M ازدایره وصل می‌کنیم. برپاره خط AM نقطهٔ N را انتخاب می‌کنیم که AM رابه نسبت معین k تقسیم کند. خط Δ را در N عمود بر AM رسم می‌کنیم. هرگاه M بردایرهٔ C تغییر کند، خط Δ:

الف- ازنقطهٔ ثابت می‌گذرد

ب- بربیضی ثابت مماس است.

ج- برهذلولی ثابت مماس است.

د- برسهمی ثابت مماس است.

دانش‌آموز رتبهٔ اول

دوشیزه طاهره کریم‌الدینی

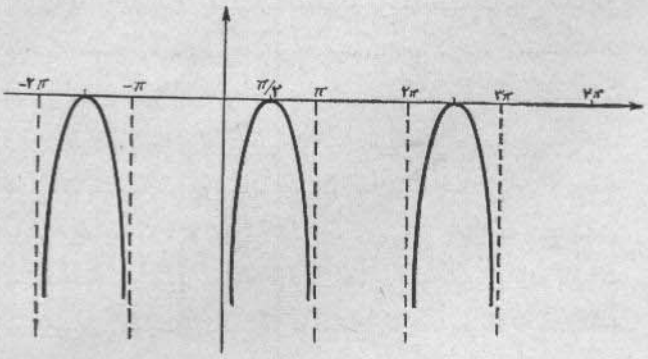
سال سوم راهنمائی

مدرسهٔ راهنمایی مؤید سیرجان

معدل: ۱۹٫۴۳

فرستندهٔ خبر: زرین خط نمایندهٔ فروش یکان

حل مسائل دنباله از صفحهٔ ۳۷۹



پاسخ تستهای ریاضی

۱۵-الف	۱۶-د	۱۷-ب	۱۸-الف
۱۹-ج	۲۰-ب	۲۱-ب	۲۲-ج
۲۳-د	۲۴-د	۲۵-الف	۲۶-ج
۲۷-الف	۲۸-د	۲۹-ج	۳۰-ب
۳۱-الف	۳۲-الف	۳۳-د	۳۴-ب
۳۵-ج	۳۶-د	۳۷-الف	۳۸-ب
۳۹-ب	۴۰-ج	۴۱-د	۴۲-ب
۴۳-د	۴۴-ج	۴۵-الف	۴۶-د
۴۷-ب	۴۸-ج	۴۹-ب	۵۰-د
۵۱-الف	۵۲-ب	۵۳-د	۵۴-ب
۵۵-ج	۵۶-د	۵۷-ب	۵۸-الف
۵۹-د	۶۰-الف	۶۱-ج	۶۲-ب
۶۳-ج	۶۴-د	۶۵-ب	۶۶-ج
۶۷-ب	۶۸-الف	۶۹-ج	۷۰-د
۷۱-د	۷۲-ب	۷۳-ج	۷۴-الف
۷۵-ج	۷۶-ب	۷۷-ج	۷۸-د
۷۹-ج	۸۰-ب	۸۱-ج	۸۲-الف

گرفت و سدیو و متتابعین او در رداظهارات وی قیام کردند ، و کار به منازعهٔ بین آنان کشید . کمیسیون رسیدگی به این مسئله که در سال ۱۸۳۶ انتخاب شده بود بدون اخذ نتیجهٔ قطعی در ۱۸۴۲ منحل شد و به‌علت‌اینکه‌مسئلهٔ مورد بحث از نوع مسایلی نبود که معمولا آکادمی به آنها رسیدگی می‌کرد ، کمیسیون از اظهار نظر دراین‌امر خود داری کرد . بیو که خبرنگار کمیسیون و قبلا طرفدار سدیو بود پس از بررسی دقیق موضوع به صف مخالفان نظریهٔوی پیوست ، بیو از اطلاعات خاورشناس برجسته موسوم به مونك (Munk) که خود در علم نجوم دست داشت ، استمداد جسته بود. مونك ازقبول معنایی که سدیو برای کلمات «تسدیس» و تثلیث‌بیان می‌کرد امتناع کرده بود . این دو کلمه در متن المجسطی بوزجانی وضع ماه را نسبت به خورشید در موقعی که اختلاف سوم ماه به بیشترین مقدار خود می‌رسد بیان می‌کندمونك استنتاج سدیو را از این‌دوکلمه ردکرده واظهارات او را دراین باره اقناع کننده نمی داند .

از آن پس بیو باعقیدهٔ مونك همراه شدو در سال ۱۸۴۳ چندین مقاله دراین باره نوشت . در ۱۸۴۵ بیو فصلی ازکتاب بوزجانی راکه مربوط به ماه ایست توسط دنو (Reinaud) و مونك و دسلان (De Slane) ترجمه‌کرده و انتشار داد و هر نوع بحثی را بعدازآن غیرممکن شمرد .

اما سدیوکه درعقیدهٔ خود راسخ بود ، و اصرار داشت که از آن درآکادمی دفاع کند ، تصمیم گرفت‌که برای آخرین‌بار به بیو جواب‌دهد. آکادمی‌در ۲۸ آوریل ۱۸۴۵ برای استماع سخنان سدیو در این باره تشکیل جلسه داد و سدیو خطاب به اعضای آکادمی گفت برای حیثیت آکادمی شایسته نیست‌که یك اشتباه علمی به این اهمیت‌که اکنون درك آن آسان‌است متوالیاً در این مجمع‌علمی مطرح‌شود وحتی یك نفربرای رفع این‌اشتباه قیام نکند .

به این‌نحوبه نظر می‌رسیدکه مسئله به طورقطعی حل‌شده باشد . روشی که‌مونك و بیو پیش گرفته‌بودند ، وقطعات‌موردبحث را باقطعاتی مشابه‌از مؤلفان‌مختلف مقایسه‌می‌کردند .روشی‌منطقی و نتیجهٔ آن‌کاملا آشکار بود .

اما ابهامی‌که درچند موضع این متن وجود داشت ومرتفع نشده بود ، ونیزشاید ابهامی‌که بریکی دوموضع از فصل موبوط به ماه در «المجسطی» بطلمیوس سایه‌افکنده بود ، موجب شدکه بحث از نو عنوان گردد .

پانزده سال بعداز آنکه مذاکرات توسط بیو متوقف شده بود ، سدیو توانست شال (M. Chasles) دانشمند معروف را باخودهم‌عقیده سازد و او رابه دفاع از نظر خود وادارد واز آن پس برتراند (Bertrand) در این مورد رقیب سرسخت شال گردید .

در ۱۸۶۲ شال نامه‌ای تحت عنوان : «نامه‌ای به آقای سدیو ؛ دربارهٔ موضوع اختلاف سوم حرکت ماه‌که ابوالوفا آن راکشف کرده‌است» به‌آکادمی تسلیم کرد ودرآن نامه‌باذکردلایلی از نظریهٔ سدیو پشتیبانی‌کرد . این نامه‌ومحتویات آن‌موجب‌شد که بحثی بین شال و برتراندکه مخالف‌نظریهٔ سدیو بود درگیرد از ابتدای این منازعه‌چندتن ازاعضای آکادمی واز جمله آراگو پیشنهادکرده بودندکه درکتابخانه‌های مشرق‌زمین‌جستجوشودشاید نسخهٔ کاملی از «المجسطی» ابوالوفا به دست آید وبه‌این وسیله مشکلات حل شود .

درنهم‌اکتبر ۱۸۷۱ لوریه (Le Verrier) اعلام‌کرد که این پیشنهاد به نظر رئیس دولت رسیده و دستور داده شده‌که مأموران‌کشور فرانسه در مشرق‌زمین برای یافتن نسخه‌ای از «المجسطی» ابوالوفا به تجسس پردازند، شال دراین باره گفت که درحدود بیست سال قبل از آن تاریخ درکتابی‌که نامش را فراموش‌کرده ، نشانه‌ای ازوجودکتاب ابوالوفا درقسطنطنیه دیده است وبعد اضافه‌کردکه شخصی موسوم به الله‌ودی‌که از وجود نسخه‌ای خطی از «المجسطی» بوزجانی اطلاع داشته برای‌عکس برداری از آن به آنجا عزیمت کرده و در آیندهٔ نزدیك عکس اوراق این‌کتاب‌رابه آکادمی‌تسلیم خواهدکرد . اما بعداً خبری از این نسخهٔ خطی به‌آکادمی نرسید و برتراند دریازدهم اکتبر انتقاد خود را دربارهٔ نظریهٔ سدیو و متتابعین وی از سرگرفت وآن‌رادرطی‌مقاله‌ای درمجلهٔ: (Journal des Savants) به‌چاپ‌رسانید ورأی‌او براین قرارگرفت‌که ابوالوفای بوزجانی «واریاسیون» را کشف نکرده و تنها باروش خود نظریهٔ بطلیموس را بیان کرده است . »

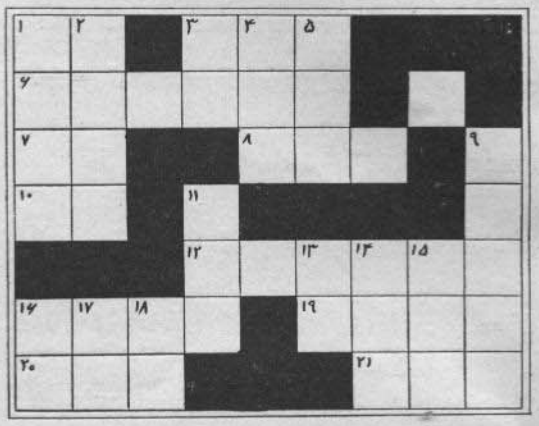
این‌بودخلاصهٔ‌مباحثه‌ای که‌ازسال۱۸۳۶تا۱۸۷۱درآکادمی علوم‌فرانسه دربارهٔ «المجسطی» بوزجانی درجریان بود. کارادوو سپس مقالهٔ خود را در این باره باچنین عباراتی خاتمه می‌دهد : «حق هرکس رابه خود اوواگذاریم ، توکوبرابهٔ از افتخارکامل خوددرمورد کشف «واریاسیون» برخورداراست . زیراوی‌هرگز نوشته‌ای ازعلمای اسلاف که حاوی این کشف باشد ندیده است ،

بطلمیوس و اسلاف وی افتخاربیان نظریه‌ای را دارند ، که درست تراز آن است‌که معمولا در بارهٔ آن فکرمی‌کنند ، ونطفهٔ «واریاسیون» درآن مشهود است . ابوالوفا و هموطنان‌او ازاین‌مطلب سهم قابل توجهی ندارند وحداکثر سهم‌آنها این‌است

دنباله در صفحهٔ سوم‌جلد

جدول اعداد

طرح از : محمد قاسم سلیمانی از آمل (تاریخ وصول به دفتر مجله: ۱۳۵۰/۱۲/۱۴)



افقی: عددی است دورقمی که برابر است بامجموع مجذور رقم یکان و مکعب رقم دهگان خود. ۳ـ عددی است سه رقمی که مجذورش توان پنجم مجموع رقمهای آن است. ۶ـ اگر این عدد شش رقمی را مقلوب کرده ازهریك ازرقمهای عدد حاصل یك واحد کم کنیم، کوچکترین عدد پنج رقمی بارقمهای متفاوت بدست آید که اگر آن رادر ۷ ضرب کنیم عددی بارقمهای یکسان حاصل شود. ۷ـ چهاربرابر یك نهم عدد۱۷ قائم. ۸ـ عدد سه‌رقمی با رقمهای یکسان که تعداد مقسوم علیه‌های آن ۴است. ۱۰ـ عددی است دورقمی که برابراست با حاصل‌ضرب رقم‌یکان در مجموع رقمهای خود. ۱۲ـ برابراست باحاصل عبارت زیر که در آن a^5 عدد سه رقمی است:

$$[(a^5+1)^2+1](a^2-1)$$

۱۶ـ تکرارعدد ۱۶ قائم. ۱۹ـ عدد چهار رقمی که چون برهر یك ازعددهای ازیك تاده‌تقسیم‌شود باقیمانده یك‌واحد کوچکتراز مقسوم‌علیه‌باشد. ۲۰ـ نه برابرعدد ۸افقی. ۲۱ـ مقلوبش‌توان سوم رقم‌یکان خود می‌باشد.

قائم: ۱ـ مکعب تعداد واسطه‌های حسابی که می‌توان‌بین ۱و۳۱ درج کرد به قسمی که مجموع تمام رقمهای تصاعد حاصل ۲۵۶ باشد. ۲ـ تکرار عدد ۱۰افقی. ۳ـ نصف‌عدد۷افقی. ۴ـ جذرش یك واحدکمتر ازعدد۳ قائم است. ۵ـ اگربه‌جای هریك ازرقمهای یکان ودهگان‌آن سه برابرآنها راقراردهیم عددحاصل سه برابرعدد ۸ افقی‌باشد. ۹ـ به‌صورت $\overline{abcde}$ است‌که $\overline{ba}$ همان عدد ۱۰ افقی و $\overline{ecd}$ جملهٔ بعداز عـدد ۱۱قائم در رشتهٔ مجذورات اعداد طبیعی‌است. ۱۱ـ مقلوب‌عدد ۴قائم. ۱۳ـ اگر بانصف خود جمع‌شود درعدد حاصل‌رقم دهگان سه‌برابر رقم‌یکان است. ۱۴ـ عدد فرد به‌صورت $\overline{abb}$ است‌که b جذر $\overline{ab}$ می‌باشد. ۱۵ـ مجموع رقمهایش ۱۲است واگر مقلوبش‌را ازآن کم‌کنیم ۶۹۳ بدست‌آید. ۱۶ـ عدد دورقمی‌که خودش و هریك ازرقمهایش مجذور کامل‌است. ۱۷ـعدد دورقمی بارقمهای‌یکسان. ۱۸ـ همان عدد ۱۷ قائم.

حل جدول شمارهٔ قبل در صفحهٔ ۳ جلد

$$\cot g B=\frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc}$$

and

$$\cot g C=\frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}.$$

Therefore

$$\cot g A+\cot g B+\cot g C=\frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}.$$

But $\Delta=\frac{abc}{4R}$. Therefore the required result follows.

Let a circle be circumscribed about ΔABC, and let $\overline{CD}$ be an altitude and $\overline{CE}$ a circumdiameter.

Draw $\overline{BE}$; then $\Delta CAD\sim\Delta CBE$, and $\frac{CA}{CE}=\frac{CD}{CB}$. Hence $ab=h_c.2R$ (h_c is the altitude to $\overline{CD}$). Therefore $\frac{ch_c}{2}=\Delta=\frac{abc}{4R}$.

We note also that $\frac{CB}{CE}=\sin E$ or, Since $m\angle A$, $\sin A=\frac{a}{2R}$.

PROBLEMS & SOLUTIONS

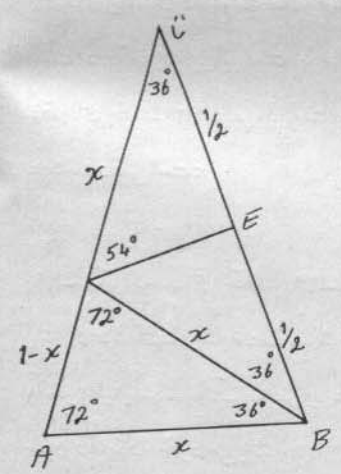
Problem 146– Prove without the use of tables that $(\sin 12^\circ)(\sin 48^\circ)(\sin 54^\circ)=\frac{1}{8}$.

Solution: $\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ = \frac{1}{8}$, if $(2\sin 12^\circ \cos 42^\circ)\sin 54^\circ = \frac{1}{4}$, if $(\sin 54^\circ - \sin 30^\circ)\times$ $\times \sin 54^\circ = \frac{1}{4}$, if $4\sin^2 54^\circ - 2\sin 54^\circ - 1 = 0$, if $\sin 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. (Not $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$, which is negative.)

Now the latter can be verified in a number of ways. Then, since the steps are reversible, the given identity will have been proven.

First Method

Construct isosceles $\triangle ABC$ with $m\angle C = 36^\circ$, and $AC = CB = 1$. Draw other lines as indicated in Fig. . Since $\triangle ABC \sim \triangle ADB$, $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$



Thus $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$, from which it follows that $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Therefore from $\triangle CDE$, $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{1}{2x} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Since $\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$, we obtain

$$\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2}\right] \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right] = \frac{1}{8}.$$

Second Method

Let $A = 18^\circ$; then $\sin 2A = \cos 3A$, and $2\sin A \cos A = 4\cos^3 A - 3\cos A$. Divide through by $\cos A$ (which does not equal zero), and substitute $1-\sin^2 A$ for $\cos^2 A$. The resulting quadratic equation leads to $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Substituting in $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$ yields $\sin 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Third Method

Let one fifth root of 1 be $e = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$ where $i = \sqrt{-1}$. Then $e^{-1} = \cos 72^\circ - i\sin 72^\circ$. Therefore $e + e^{-1} = 2\cos 72^\circ = f$, where f is chesen arbitrarily. Since e is a root of $x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$. and $e-1$ does not equal zero, it follows that $e^4+e^3+e^2+e+1=0$. Divide by e^2; $e^2+e+1+e^{-1}+e^{-2}=0$. But $f^2-2 = e^2+e^{-2}$. Therefore $f^2+f-1=0$ and $f = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos 72^\circ$. There fore $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Now $\sin 54^\circ = \sin 3(18^\circ)$ leads to the same result as the other methods.

Problem 147– Prove that in any triangle ABC, $\cot g A + \cot g B + \cot g C = \frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta}$, where Δ represents the area of triangle ABC.

Solution: Since in $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ and $\sin A = \frac{a}{2R}$ (R = circumradius), then $\cot g A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$. Also →

فهرست مندرجات مجله‌های یکان دورهٔ یازدهم

آموزشی ـ انتقادی

بوزینه دردانشگاه ۱-۱۴۹

چرا درآمریکا تجدیدی نیست ۲۰۱

نمره‌های امتحانهای داخلی دبیرستانها ملاك شایسته‌ای برای انتخاب دانشجو نمی‌باشد ۲۹۳

خوکچه‌های هندی روشهای آموزشی ۲۹۴

فارسی بنویسیم ۳۴۱

تاریخی

کاوشهایی درتاریخ نجوم اسلامی ۹۹-۱۵۰-۱۹۸-۲۴۵-۲۹۷-۳۴۲

روشها و کلیات

و، یا، واستفادهٔ صحیح ازآنها درریاضیات ۱

ساختمان منطقی‌قضیه ۳-۵۱-۱۰۰-۱۵۱

اصلهای موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها ۴۹

تناقضهای نظریهٔ مجموعه‌ها ۹۷

نکاتی دربارهٔ تساوی مجموعه‌ها ۱۰۲-۱۵۶

استفاده ازنمادهای منطقی درتعاریف ۲۰۲

دربارهٔ تمایز بین ریاضیات محض و ریاضیات کار بسته ۲۹۵-۳۴۷

راهنمای ریاضیات متوسطه

آیا نقطه شکل هندسی است ۱۴۹

ساختمانهای تکمیلی درحل مسائل ۲۶۰

ریاضیات متوسطه

مسائل هندسی‌ماکسیمم ومی‌نیمم ۱۰-۵۶

تقسیم دایره به‌قسمتهای متساوی ۱۴

ازخواص بعضی از تصاعدها ۲۶۳

در حاشیهٔ ریاضیات متوسطه

عددنویسی درمبنای منفی ومبنای کسری ۱۷

دربارهٔ اعداد اول ۱۰۴-۱۵۸-۲۱۴-۲۵۳-۳۰۲-۳۵۶

روشی برای تعیین دوسری معروف ۱۵۷

گوناگون

جبر گراندیسمان ۷-۵۳

وسایل سادهٔ مهندسی ۱۹-۶۱

قضایائی ظریف دربارهٔ مثلث ۱۰۷

گروهی کنفرم ازتبدیلات درفضای n بعدی ۲۰۷

تعمیم قضیهٔ منالائوس درفضای n بعدی ۲۵۰

فیثاغورس، آپولونیوس... ۳۴۹

ریاضیات تفننی

مسائلی دربارهٔ شطرنج ۲۵

حقه‌های بازی باورق ۱۶۲

دوران وبرگردان ۲۱۰

هشت مسئله ۳۱۰

سه مسئله حدسی سریع ۳۲۹

مسائلی دربارهٔ شطرنج ۳۵۱

باریاضیات آشتی کنید

۲۱-۶۳-۱۱۱-۱۶۵-۲۱۷-۲۶۴

جدول اعداد

۴۷-۹۵-۱۹۵-۲۴۴-۲۹۲-۳۴۰-۳۸۵

Problems & Solutions

۴۸-۹۶-۱۴۸-۱۹۶-۲۴۴+۱-۲۹۲+۱-۳۴۰+۱-۳۸۶

مسائل

مسائل نمونه

تعیین مرکز دایرهٔ معلوم بااستفادهٔ ازخط‌کش تنها ۶۷
حل‌چند مسئله دربارهٔ ماهواره‌ها ۱۶۹

مسائل المپیادها

المپیاد فیزیك ۲۷
پانزدهمین المپیاد جهانی ریاضی ۴۰-۸۱
المپیادهای شوروی ۳۶۵

مسائل برای حل

۳۴-۸۴-۱۳۷-۱۸۵-۲۳۴-۲۷۸-۲۳۲

تستهای ریاضی

۳۷-۸۷-۱۴۰-۱۸۹-۲۳۷-۲۸۱-۳۲۳-۳۸۰

مسائل انتخابی ازمسائل امتحانات داخلی دبیرستانها

۴۲-۹۱-۱۴۳-۱۹۲-۲۴۰-۲۸۴

حل مسائل

یکان شمارهٔ ۱۰۲ ۶۸
» » ۱۰۳ ۱۲۳
» » ۱۰۴ ۱۷۱
» » ۱۰۵ ۲۲۰
» » ۱۰۶ ۲۶۷
» » ۱۰۷ ۳۱۷
» » ۱۰۸ ۳۷۷

اعلام پاسخهای درست پرسشهای کنکور سرتاسری‌مندرج در یکان سال ۱۳۵۲ ۱۱۴

فهرست مندرجات یکان سال ۱۳۵۳

امتحانهای نهایی

کلاس ششم طبیعی خرداد ۵۳ ۳
کلاس ششم طبیعی شهریور ۵۳ ۵
کلاس‌ششم ریاضی خرداد ۵۳ ۶
کلاس ششم ریاضی شهریور ۵۳ ۱۳
حل مسائل کلاس ششم طبیعی ۱۹
حل‌مسائل کلاس ششم ریاضی ۲۴

امتحانهای‌ورودی دانشگاهها

دانشگاه آریامهر ۴۴
دانشکدهٔ نفت آبادان ۶۸
کنکور سراسری ۹۱
دورهٔ شبانه ۱۲۰
سراسری نیمسال دوم ۱۳۱
دانشکدهٔ علم و صنعت ۱۳۵
دانشکدهٔ علوم کرمانشاه ۱۳۸
انستیتو تکنولژی تهران ۱۴۲
پاسخهای صحیح تستها ۱۵۵
امتحانهای G.C.E. انگلستان ۱۴۶

کاوشهایی درنجوم... (دنبالهٔ صفحهٔ ۳۸۴)

که رصدهای مکرر ولی بی‌ثمر انجام داده‌اندکه برای تأیید علم مفید بوده است ونه برای پیشرفت آن »

ما در انتساب کشف اختلاف‌سوم حرکت ماه بـه ابوالوفا اصراری‌نداریم ودرعین حال استدلال کارادوو رادررد این‌انتساب اقامه‌کرد ، کوششی بی مورد است و از معاضدت برهانی قاطع برخور دار نیست ونمی دانیم به‌چه دلیل توکوبرائه‌ازآثار علمای اسلامی دراین باره ندیده است ؟

مآخذ

۱ـ ابوالوفا : «رسالة فی‌اقامة البرهان علی الدائر من الفلك من قوس النهار و ارتفاع نصف النهار و ارتفاع الوقت »
چاپ حیدرآباد ۱۹۴۸ م

۲ـ بیرونـی : «التفهیم لاوائل صناعة التنجیم» باتصحیح ومقدمه وحواشی‌آقای جلال همائی،تهران ۱۳۱۶ـ۱۳۱۸ ه ش

۳ـ شیرازی ، قطب‌المدین‌مسعود : «درةالتاج لغرةالدباج» ج ۲ تهران ۱۳۲۴ ه ش

۴ـ کندی ، ا . س . : «نکته‌هایی‌دربارهٔهئیت اسلامی» مجلهٔفرهنگ ایران زمین دفترچهارم ۱۳۳۲ ه ش

۵ـ قربانی ، ابوالقاسم : « ریاضیدانـان بـزرگ ایرانی» تهران ۱۳۵۰

5. Carra de Vaux:L'almagest d'Abu -l - Wéfa. Journal Asiatique tome 19(1892), pp408-471

6- Nadir , N . : «Abu al-Wafa on the solar altitude»
The Mathematics Teacher 53(1960) pp460-463

7- Sedillot , L . Am . : «Découverte de la variation par Abul Wefa»
Journal Asiatique , vol . 16 , (1835,) , pp 420 - 438

پاسخ تستهای ریاضی

مندرج در همین شماره

۱ـب	۲ـد	۳ـج	۴ـب	۵ـج
۶ـالف	۷ـب	۸ـالف	۹ـد	۱۰ـد
۱۱ـب	۱۲ـج	۱۳ـب	۱۴ـج	۱۵ـالف
۱۶ـد	۱۷ـب	۱۸ـج	۱۹ـالف	۲۰ـد
۲۱ـد	۲۲ـج	۲۳ـج	۲۴ـالف	۲۵ـب
۲۶ـب	۲۷ـ الف	۲۸ـد	۲۹ـد	۳۰ـج
۳۱ـد	۳۲ـج			

شماره های گذشتهٔ مجله‌های یکان

از ۱۰۹ شمارهٔ مجلهٔیکان ماهانه‌که ازابتدای انتشارآن تاکنون منتشرشده است، فقط مجله‌های به‌شماره‌های زیردرادارهٔ مجله‌موجود است‌که به‌بهای‌مندرج درروی‌آنها به‌فروش می‌رسد:

۳۲-۳۳-۳۶-۴۲-۴۴-۴۵-۴۶-۴۷-۴۸-۴۹-۵۱-۵۲-

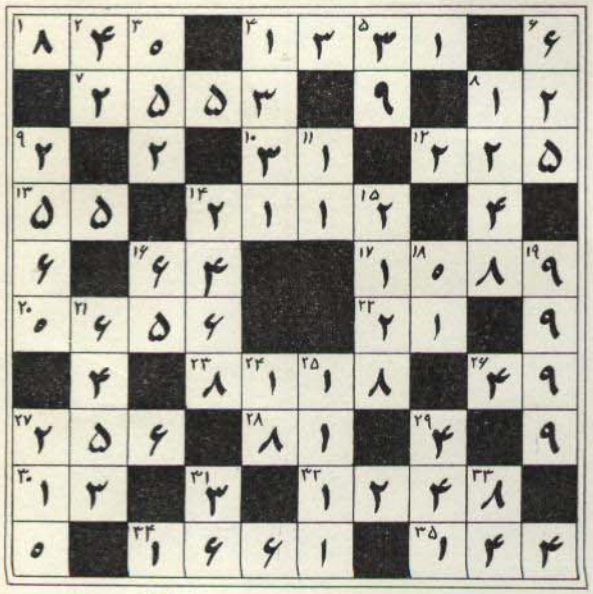
۵۴-۵۵-۵۶-۵۷-۵۸-۶۱-۶۲-۶۳-۶۵-۶۶-۶۷-۶۸

۶۹-۷۱-۷۳-۷۴-۷۵-۷۶-۷۷-۷۹-۸۰-۸۱-۸۲-۸۳-۸۴

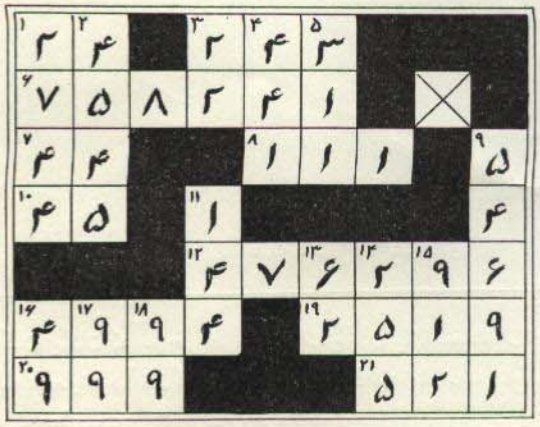
۸۵-۸۸-۸۹-۹۰-۹۱-۹۲-۹۳-۹۴-۹۵-۹۶-۹۷-۹۸

۹۹-۱۰۰-۱۰۳-۱۰۴-۱۰۵-۱۰۶-۱۰۷-۱۰۸-۱۰۹

یکان‌سال ۱۳۵۰	۱۰۰ ریال
یکان‌سال ۱۳۵۱	۱۰۰ «
یکان‌سال ۱۳۵۲	۱۵۰ «
یکان‌سال ۱۳۵۳	۱۵۰ «



حل جدول مندرج در شمارهٔ قبل



حل جدول مندرج درهمین شماره

انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها
تألیف:علی اصغرهومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هشترودی

روش سادهٔ حل مسائل شیمی ترجمهٔ: عطاءالله بزرگ‌نیا

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

راهنمای ریاضیات‌متوسطه

تألیف: عبدالحسین محصفی
بها: ۳۰ ریال

تستهای هوش

ترجمه: باقر مظفرزاده
بها : ۱۰۰ ریال

تستهای چندجوابی شیمی

ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا
بها : ۴۰ریال

معماهای ریاضی

ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار
بها : با جلدشمیز ۷۵ ریال
با جلدزرکوب : ۱۰۰ریال

مسائلی ازحساب استدلالی

تألیف: محمودکاشانی

جلد اول	جلددوم	جلد سوم
۱۲ریال	۱۵ریال	۱۵ریال

مبادی منطق وریاضی جدید

تألیف: غلامرضا عسجدی
بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان‌که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان‌که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان‌که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.