یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ یازدهم ، شمارهٔ : ۷ شمارهٔ مسلسل : ۱۰۸ خرداد ـ تیر ۱۳۵۴

دراین شماره:

نمره‌های امتحانهای داخلی دبیرستانها را نباید ملاک انتخاب دانشجو قرار داد	عبدالحسین مصحفی	۲۹۳
خوکچه‌های هندی روشهای آموزشی	دکتر علیرضا امیرمعز	۲۹۴
دربارهٔ تمایز بین ریاضیات محض و ریاضیات کاربسته	ترجمهٔ: قرچه‌داغی-بلورچی	۲۹۵
کاوشهایی در نجوم اسلامی؛ ابوالوفای بوزجانی	جعفر آقایانی چاوشی	۲۹۷
نامه‌ای به مجله	عباس جزء امیرسیافی	۳۰۱
دربارهٔ اعداد اول	ترجمهٔ: جواد فیض	۳۰۲
هشت مسئله	ترجمهٔ: مهندس داوید ریحان	۳۱۰
حل مسائل یکان شمارهٔ ۱۰۷	-	۳۱۷
سی مسئلهٔ هندسی سریع	ترجمهٔ: مهندس داوید ریحان	۳۲۹
مسائل برای حل	-	۳۳۱
تستهای ریاضی	-	۳۳۲
جدول اعداد	داود کفشگر لاریجانی	۳۴۰
Problems & Solutions	-	ماقبل آخر

بها : ۴۰ ریال

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ یازدهم ـ شمارهٔ هفتم ـ شمارهٔ مسلسل ۱۰۸

خرداد ـ تیر ۱۳۵۴

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملک‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیک شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

وجه اشتراک برای دورهٔ یازدهم : ۳۲۰ ریال

حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume XI, number 7. June. 1975

subscription : 6$

TEHRAN _ P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراک یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات کتابهایی که به‌صورت آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

توجه

از مشترکان مجله که با پایان سال تحصیلی نشانی پستی آنها تغییر می‌کند، درخواست می‌شود برای دریافت شماره‌های ۷ و ۸ یکان دورهٔ یازدهم نشانی جدید خود را اطلاع دهند.

تسلیت

درگذشت نابهنگام آقای اکبر مهماندوست بصیر دبیر باسابقهٔ ریاضیات و رئیس انجمن معلمان ریاضی را به‌خانوادهٔ آن مرحوم و به‌جامعهٔ معلمان ریاضی به ویژه به همکاران وی در دبیرستان البرز ، تسلیت می‌گویم.

عبدالحسین مصحفی

نمره‌های امتحانهای داخلی دبیرستانها، ملاك شایسته‌ای برای انتخاب دانشجو نمی‌باشد

اگر بپذیریم که نمره‌های کتبی امتحان نهایی تحصیلات متوسطه را می‌توان ملاك انتخاب دانشجو برای ورود به‌دانشگاهها قرار داد، امانمی‌توان دخالت‌دادن نمره‌های امتحانهای داخلی دبیرستانها را دراین‌باره، شرطی شایسته وقرین به عدالت تلقی کرد.

روش آموزش ونوع امتحان ونحوهٔ نمره دادن در دبیرستانها متفاوت است. این‌تفاوت نه تنها بین دبیرستانهای تهران وشهرستانها، یاشهرستانها با یکدیگر، بلکه حتی‌بین دو دبیرستان مجاور به‌هم در تهران، به نحو کاملا بارز مشاهده می‌شود . در یك دبیرستان بیشتر از ساعات درس به‌تفریح‌وشوخی‌وجوك گفتن می گذرد، اغلب‌بیش‌از نیمی‌از کتاب تدریس نمی‌شودودرموقع امتحان هم همهٔ نمره ها در سطح بالا است. در دبیرستانی دیگر، معلم و اولیاء مدرسه همه سخت‌گیر و جدی می‌باشند و درامتحان هم دقت را به حد اعلی می‌رسانند. دانش آموزی که دراین دبیرستان آموزش می‌بیند معلوماتی به مراتب بیشتر از دانش‌آموز دبیرستان دیگر دارد درحالی که نمرهٔ امتحانی وی به مراتب کمتر از نمرهٔ امتحانی آن یکی است. حال آیا انصاف است که این‌نمرهٔ امتحانی ملاك انتخاب برای ادامهٔ تحصیلات عالی‌باشد؟

دانشگاهها و مرکز سنجش آزمونها در بررسی روشهای مختلف انتخاب دانشجو باید همهٔ جوانب کار را در نظر داشته باشند وآن روش را برگزینند که انتخاب احسن انجام گیرد.

عبدالحسین مصحفی

خوکچهٔ هندی (guinea pig) روشهای آموزشی

علیرضا امیرمعز دانشگاه تکزاس تک

خوك گینه‌ای یاخوکچهٔ هندی حیوان بیچاره‌ای است که گرفتار آدمیزاد شده است . درآزمایشگاهها انواع و اقسام دوا و غذا را به خورد این حیوان می‌دهند . او را گرفتار امراض مختلف می‌کنند که بلکه مداوای آن‌را پیدا کنند .

اصطلاحی امریکائی ورد زبان مردم است که می‌گویند: آزمایش تازه راشروع کردند ومن خوکچهٔ‌هندی آنم. چند سال است که خوکچه‌های‌هندی ریاضیات جدید به دانشگاه می‌آیند . بیشتر آنان نمی‌دانند که چگونه دوکسر متعارفی را جمع بزنند ولی طوطی واری جدول غلط وصحیح گزاره‌ها را می‌نویسند. البته کسانی که‌ازشهرهای‌دور افتاده‌می‌آیند آنرا هم‌یادنگرفته‌اند. سال‌اول و دوم دانشگاه با درسهایی که سطح آن مساوی کلاسهای هفتم وهشتم روش فرانسوی است تدریس می‌شود . البته، عده‌ای ازفارغ‌التحصیلان دبیرستانهای درجهٔ اول‌به دانشگاههای‌بزرگ می‌روند و بلافاصله درسهای دانشگاهی راشروع می‌کنند.

منظورازاین مختصرتشریح‌نتیجهٔ طرز تازهٔ تدریس‌ریاضیات است که‌درحدودبیست‌سال پیش‌مرسوم شده بود وامروزه ازبین‌رفته است.مقالاتی‌درمجله‌های‌امریکاتحت‌عنوان «جانی‌حساب‌بلدنیست» (Johny can't do arithmetic)چاپ شده‌است که جنبه‌های خوب‌و بد طرز جدید تدریس‌ریاضی را بحث کرده‌اند. بدون مراجعه به آنها ، نتایج را بررسی می‌کنیم.اینك بحثی که بارئیس آموزش و پرورش این شهر کرده‌ام به عرض می‌رسانم :

پرسش : ازاینکه نظریهٔ مجموعه‌هاو منطق‌را به‌شاگردان سال سوم وچهارم ابتدائی درس می‌دهید چه نتیجه‌ای گرفته‌اید .

جواب : شاگرد با هوش و بااستعداد آنچه به او درس بدهی یاد می‌گیرد و بالاخره راهش را دراجتماع باز می‌کند . شاگردهای بی‌استعداد بیشتر ازپدر و مادرشان کمك‌می‌گیرند. این چندساله این‌شاگردان مجبور شدندکه تکلیفشانرا خودشان انجام دهند.این‌باعث می‌شود که جوان اعتماد به‌نفس پیداکند .

پرسش : آیا به این نتیجه رسیده‌اید .

ج : به حقیقت‌نه . کودکانی‌که از خانواده‌های متمولند معمولا معلم خصوصی‌دارند. کودکانی‌که ازطبقهٔ بی‌استطاعتندهیچ وقت‌کمکی از پدرو مادر نگرفته‌اند . فقط به طبقهٔ متوسط کمك شده است .

پ : آیا هنوز هم‌همان‌روش را ادامه می‌دهید.

ج : نه . روشها روزبه‌روز عوض می‌شود. روش ثابتی‌که به همهٔ آموزش وپرورش برسد وجود ندارد . به علاوه اولیای اطفال به‌قدری درکار ما دخالت می‌کنند که مجبوریم به حرف آنان‌کم و بیش‌گوش کنیم.

خوشبختانه این‌شخص‌برای درس خاصی به دانشگاه آمده بود ودر یکی‌از درسهای من‌شرکت داشت . روزی به من گفت: ریاضیات تازه وکهنه ندارد. آنچه را حس‌کنیم درك می‌کنیم . وگرنه مقداری دستور و فرمول حفظ کردن تدریس ریاضی نیست » .

آزمایشهاو تجربه‌هامعمولا زیر نظر استادان تعلیم وتربیت ریاضی انجام می‌شود. دولت امریکا مقدار زیادی خرج‌آزمایشها می‌کند . بعضی از ممالك متحده برای با استعدادها برنامه‌های خاصی دارند. مثلا شاگردی‌که در حقیقت درکلاس پنجم است خواندن و انشاء را با کلاس هفتم دارد ، ریاضیات را با کلاس هشتم‌می‌گیرد و ورزش‌راباکلاس‌چهارم. به این‌ترتیب وقتش‌بیهوده تلف نمی‌شود و به اندازهٔ استعدادش یاد می‌گیرد. همینطور برنامه‌هایی‌برای عقب‌افتاده‌ها دارند. بدون‌اینکه چیزی‌به‌کودك یا پدرومادرش بگویند ، اورا درکلاسهای مخصوص می‌برندکه به اندازهٔ قوه وقدرتش یاد بگیرد .

دربعضی ازممالك‌طفل‌تاهیجده‌سالگی‌باید مدرسه‌برود و در برخی‌دیگر تا شانزده سالگی . گاهی اتفاق می‌افتدکه جوان

بقیه در صفحهٔ ۲۹۶

دربارهٔ تمایز بین
ریاضیات محض و ریاضیات کاربسته

ترجمهٔ قسمتی از بخش اول کتاب Basic concepts of measurment تألیف پرفسور B.Ellis از دانشگاه کمبریج

مترجمان: داود قرچه داغی پور، بهزاد بلورچی

تمام اندازه گیری‌ها مشمول کاربرد ریاضات می‌شوند. منطق اندازه گیری وابسته به انواع کاربردهای ریاضی ارائه شده وچگونگی امکان طرح آنهاست. بنابراین لازم است مفهوم کار برد ریاضی را مورد بررسی و مداقه قرار دهیم و تمایز بین «ریاضیات محض» و «ریاضیات کاربسته» را بشناسیم. هدف ما شناسایی این تمایز و توضیح شرایط لازم وکافی‌است که‌یك کار برد ریاضی باید دارا باشد.

سه نوع اساسی بیانهای «ریاضیات کار بسته» را تمیز خواهیم داد که یکی ازآنهااصلی است مربوط به «منطق اندازه‌گیری».

تمایز بین «ریاضیات محض» و «ریاضیات کار بسته»

بحث دربارهٔ تمایز «ریاضیات محض» و «ریاضیات کاربسته» حداقل به‌عصر افلاطون برمی گردد وموضوعی است که افلاطون درحوزهٔ فلسفهٔ ریاضیات مطرح کرد و تاکنون به‌کرات مورد تحقیق و پرسش واقع شده است. به استثنای J.S.Mill تمام نویسندگان معتبر درحوزهٔ فلسفهٔ ریاضی چنین فرق و تمایزی‌را قائل شده‌اند. این فلاسفه فقط در نحوهٔ پندار و تصور این تمایز اختلاف دارند. افلاطون و ایده‌آلیستهای بعدی معتقد بودندکه گزاره‌های‌ریاضیات‌محض وریاضیات کاربسته اساساً دارای‌جوهر و ذات متفاوت هستند. یك گزارهٔ ریاضیات کاربسته ممکن است، برای مثال، عبارتی درمورد گروه سنگها باشد.ولی‌سنگها اجسام بی‌دوام وفنا پذیری‌اندکه آنها رافقط ازطریق احساس می‌شناسیم وبرداشت ذهنی ما از آنها نادقیق‌است. زیرا بین سنگ و غیر سنگ‌نمی‌توان مرز کاملامشخص وتعریف شده‌ای آنطورکه‌تعاریف ما درریاضیات محض قاطعیت دارند، تعیین‌کرد. به دلایل فوق معلومات ما دربارهٔ آنها ناکامل است وعلاوه براین، خودسنگها هم‌که موردبحث قرارگرفته بودند نیز عناصر ناکاملی هستند. ازاین جهت آنها را ازمرتبهٔ وجودی پست‌تری می‌شماریم. ولی گزاره‌های «ریاضیات محض» دارای صفت و سیرتی متفاوت از گزاره‌های «ریاضیات کاربسته» است. به‌قول افلاطون جهان ریاضی محض با اشیاء وهستی‌های کامل، نامیرنده و جاودانی سروکاردارد که بدانها لفظ صورت یا ایده‌آل اطلاق می‌کنیم. صورتها برکنارازشناخت‌وخاطرهٔ حسی می‌باشند، هرچنداحساس فقط می‌تواند محرك ویاوری‌ازبرای درك آنها باشد ولی‌مستقیماً توسط خرد ادراك می‌شوند. نتیجتاً دانش ما از صور وابسته‌به تجارب حسی و ناکاملی‌های منتج ازآن نیست وبرداشت ذهنی‌ما از آنهاکاملا دقیق واستوار است. ممکن است یك مورد فیزیکی را دقیقاً نتوان مشخص نمودکه به‌کدام صورت ریاضی شبیه‌است، اما دربارهٔ خود صورتها و روابطشان با هم ابهام و ایهامی وجود ندارد. درجهان ریاضی محض هرصورتی ازصورت دیگر توسط مرزکاملا معینی قابل‌تمیز است. بنا به دلایل فوق چنین فرض می‌کنندکه صورتها نسبت به اشیای فیزیکی (عناصر ریاضیات کار بسته) دارای مرتبهٔ وجودی بالاتری هستند، وعلم بر آنها نیز دارای درجهٔ شناخت بالاتری است.

افلاطون ارتباط بین گزاره‌های «ریاضی‌محض»و«کاربسته» راوابسته به‌تشابه بین‌صورتها درریاضیات محض وهستی‌های‌مرتبهٔ پایین‌تر (اشیاء ومجموعه‌های عالم‌مادی ونتایج انتزاعی حاصل‌از آنها) در ریاضیات کاربسته می‌دانست. بدین‌ترتیب که هرگاه بتوان بین‌دوهستی فیزیکی و دو صورت محض تشابهی‌یافت ومیان

دوصورت فوق‌الذکر ارتباط معینی وجود داشته باشد، مـی‌توان امکان وجود همان‌ارتباط‌را بین‌دوهستی‌فیزیکی نیزدرنظر گرفت. میزان تشابه رابطهٔ ایده‌آلی‌بین دوصورت و رابطهٔ فیزیکی‌بین‌دو هستی فیزیکی وابسته به‌میزان تشابه دوصورت محض و دوهستی فیزیکی‌اولیه‌دارد. سپس افلاطون چنین‌نتیجه می گیردکه بادرنظر گرفتن تشابه صورتهای محض و هستی‌های فیـزیکی، ریاضیات محض به قالب ریاضیات کاربسته درمی‌آید، و دقت نظرریاضیات کار بسته تابعی از تشابه اولیه بین صورتهای محض و هستی‌های فیزیکی خواهد بود.

تئوری افلاطون در مورد رابطهٔ میان ریـاضیات محض و کاربسته بدون شك از نظر علم زیبایی‌شناسی مورد استیناف قرار می گیرد. ولی اگرطالب حقیقت ودقت‌نظر هستیم بایداین‌مسائل را کنار گذاریم.

با توجه به‌بحث بالا تمایز میان ریاضیات محض وکاربسته را بر چهار مطلب زیر استوار می کنیم:

۱ـ گزاره‌های ریاضی‌محض‌قائم‌بالذاتند (*) و حقیقت یا دروغ‌آنها مطلقاً معین است. بدین معنی‌که تغییرات‌جهان‌فیزیکی در راست یا دروغ بودن‌آنها تأثیرندارد زیرا ذاتاً جاودانی‌اند.

۲ـ مفاهیم در ریاضیات محض کاملا دقیق‌اند. مثلا عدد۴ دارای خواص کاملا معینی است. از جمله با سایراعداد، رابطهٔ مشخص‌ومعینی دارد وخواص مذکور هیچگاه تغییر نمی‌یابند.

۳ـ راست‌ودروغ گزاره‌های ریاضیات کاربسته قائم‌بالذات نیستند و تابع جهان فیزیکی‌اند.

۴ـ مفاهیمی‌که از طریق تجربهٔ حسی‌ادراك می‌شوندکاملا دقیق نیستند (مفاهیمی که در ریاضیات کار بسته با آنها سر و کار داریم) به‌عبارت دیگر موضوعاتی‌که درحیطهٔ چنین مفاهیمی قرار می گیرند ممکن است دارای خواص متفاوتی باشند؛ یعنی خواص آنها متغیر است.

با تقسیم‌بندی بالا از غرابتی که تئوری افلاطون در وهلهٔ نخست به‌ذهن‌متبادرمی کردکاسته می‌شود وامروزه فلاسفهٔ زیادی براین تئوری صحه می گذارند. در مورد مطالب قسمت(۱)و(۳) قریباً به بحث خواهیم پرداخت و ملاحظه خـواهیم نمود صحت تئوری افلاطون در هندسه بیش ازحساب به‌چشم می‌خورد. زیرا هنگامی‌که گفته‌شود یك جسم فیزیکی کمابیش شبیه به‌دایره است، ابهامی پیش نمی‌آید. ولی چه‌مفهومی ازعبارت «یك گروه سنگ شباهت به عدد ۴ دارد» مستفاد می‌شود؟! ملاحظه می‌شود اگـر افلاطون در بیان تئوری خویش مجبـور بود فقط از امثلهٔ علـم حساب استفاده کند تا چه‌اندازه درکارش دچار اشکال می‌شد.

مسئلهٔ بالا ما را به‌این اندیشه سوق مـی‌دهدکه آیا علـم حساب وعلم هندسه دارای پایه‌های منطقی یکسان هستند یاخیر، و حداقل باعث می‌شود هنگام استفاده از دلایل کمکی علم‌هندسه از برای تشریح پایه‌های منطقی گزاره‌های علم حساب محتاط باشیم و جوانب کار را دقیقا بررسی کنیم زیرا آنچه در هندسه درست است، درعلم حساب ممکن‌است نادرست باشد. اگرطالب تشخیص صحیحی بین ریاضیات محض و ریاضیات کاربسته هستیم، بایدبتوان این تمیز و جدایی را در حوزهٔ علم حساب نیزیافت.

دنباله دارد

خوکچهٔ هندی... (دنباله از صفحهٔ ۲۹۴)

هیجده سالش شده است ولی هنوز کلاس نهم است. این جوانان معمولا خودشان دبیرستانرا ترك می کنند و دنبال کار وکاسبی می‌روند. ولی گاهی با کمك معلم خصوصی وفشار پدر و مـادر جوان دبیرستان را به‌پایان می‌رساند و وارد دانشگـاه می‌شود. چون این روزها درآمریکا هیجده سال سن قانونی شده است، دیگر پدر و مادرها نمی‌توانند پسر یا دختـرشانرا به زور بـه دانشگاه بفرستند. البته دانشگاههای بسیارگران‌قیمت وجود دارد که این جوانان را به زور درسهای اختصـاصی جلو مـی‌برند. آزمایش و تجربه درآمریکا جزء تفریحات مردم است. عده‌ای برای گرفتن گواهینامه آزمایش و تجربه می کنند و عده‌ای از کودکان را خوکچهٔ هندی می کنند، معمولا نتیجهٔ این‌آزمایشها در مجلات چاپ می‌شوند. ممالك دیگر، با دیدن این مقالات، تصور می کنندکه این روشها بسیار خوبند. (مثل این است که شربت به‌لیموی ایرانی را دور بریزیم و با چلو کباب پپسی‌کلا بیاشامیم).

در آمریکا بسیار چیزهای خوب وجود دارد و همچنین بسیاری از کارهایشان بداست. متصدیان آمـوزش و پرورش را باید قسم دادکه اگر تقلید می کنند فقط کارهای خوب را تقلید کنند.

---

* Apiori≠Apstriori

نویسندهٔ مقاله ازاستاد گرامی جناب آقای **احمد آرام** که وی‌را در حل مشکلات علمی مقاله یاری کرده‌اند سپاسگزاری می کند.

کاوشهایی در تاریخ نجوم اسلامی

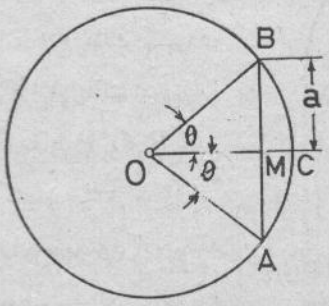
جعفر آقایانی چاوشی

ابوالوفای بوزجانی

کارهای بوزجانی در بارهٔ شکل قطاع و شکل مغنی:

مقدمه : در بررسی تاریخ مثلثات ملاحظه می‌شود که ابرخس و بطلمیوس درآثار خود تابعی بکار می‌بردند که آن‌را وتر می‌نامیدند که آن را با علامت اختصاری **Cord** مأخوذ از کلمهٔ یونانی **Chord** به‌معنی وتر نشان می‌دهیم. آنها دایره را به ۳۶۰ درجه تقسیم کرده وکسرهای شصتگانی درجه، یعنی‌دقیقه و ثانیه وغیره رابکار می‌بردند. همچنین شعاع دایره را به ۶۰قسمت مساوی کرده وهرقسمت راجزء می‌نامیدند.

بین‌رکود علوم یونانی و آغاز علوم اسلامی هندیان به ریاضیات وهیئت مشغول بودند. آنها ملتفت شدند که درمحاسبات مثلثاتی مناسبتر این است که به‌جای وتر قوس مفروض نصف وتر مضاعف آن قوس‌را بکاربرند و به این تابع جدید نام سانسکریتی **Jiva** نهادند. پس‌از انتقال علوم هندی به‌عالم اسلامی این کلمه به جیا وبعدازآن به جیب تبدیل‌شد که بعد ها اروپائیان قرون وسطی‌جیب رابه لاتین ترجمه کردند وآن‌را سینوس نامیدند.



علمای اسلامی مورد استعمال جیب را نیز از هندیها آموختند وجداول بسیاردقیق جیبها را در زیجهای خود داخل کردند.

بنابه‌تعریف‌قدما: جیب هرزاویه مانند θ (مطابق شکل) مساوی است با $BM=a$ یعنی: $\sin\theta=a$ مشروط براینکه‌اولاشعاع دایرهٔ مثلثاتی‌مساوی $R=1/0$ یعنی شصت بوده وثانیاً $BM=a$ بریکی‌از دوضلع زاویهٔ مفروض θ عمودباشد.

این‌تعریف نزد قدما به جیب مستوی یاجیب راست اطلاق می‌شد.

مثلا ابوریحان بیرونی جیب راست راچنین تعریف کرده است:

«جیب راست چیست؟ : اونیمهٔ وتر دوتو کردهٔ قوس‌است. واگرخواهی گوی که آن عمود است که از یك سرقوس فرودآید برآن قطر که ازدیگر سرقوس‌آید وهرگاه که جیب شنوی مطلق بی‌صفت، بدانك اوراست است.» [۲]

هندیان‌همچنین خطی‌راکه وسط قوس‌رابه‌وسط وترمربوط می‌کند به‌عنوان یك تابع مثلثاتی به کار برده ونام سانسکریتی **Sagitta** برآن نهادند که بعداً علمای اسلامی‌آن را به عربی ترجمه کرده وسهم نامیدند.

بیرونی سهم‌را چنین تعریف کرده است:

«سهم کدامست : آن‌خط که به‌میان‌نیمهٔ وتراست ومیان‌نیمهٔ قوس. و او پاره‌ای باشد ازقطر دایره. اگرقوس از نیمهٔ دایره افزون‌بود سهم‌ازنیم قطر افزون‌بود. واگرقوس ازنیم دایره کمتر بود سهم ازنیم‌قطر کمتر بود ...»[۲]

جیب معکوس- جیب معکوس نزد قدما عبارت‌از سهم دو برابر قوسی‌بود که این‌سهم به‌منزلهٔ جیب‌آن قوس، باشد،

مثلا مطابق با شکل قبل اگر جیب معکوس رابا Vers نمایش دهیم داریم:

$$\text{Vers}\,\theta = CM$$

بیرونی جیب معکوس‌را باشگونهٔ جیب نامیده و آن را این‌چنین تعریف کرده است: «جیب باشگونه کدامست: سهم دوی قوس‌است واگرخواهی گوی آن‌خطی‌است که میان‌آغاز قوس‌باشد ومیان‌آن سرجیب که برابر اوست وبزرگترین جیب‌های‌باشگونه همهٔ قطراست همچنانکه بزرگترین جیب‌راست نیم قطراست»[۲] ازاین بحث چنین معلوم می‌شودکه جیب، یك‌پاره خط است و جیب هرقوس مساوی‌است بانصف وترمضاعف‌آن قوس، درصورتی که‌آنچه‌که امروز سینوس نامیده می‌شود پاره‌خط نیست بلکه یك نسبت یعنی‌یك عدد مطلق است.

درواقع‌اگرجیب قدیم رابا Sin و سینوس جدید را با $\sin$ نشان دهیم بنابه تعریف سینوس‌زاویهٔ θ ازرابطهٔ زیربدست‌می‌آید

$$\sin\theta = \frac{BM}{BO} = \frac{a}{R}$$

وبه‌همین جهت شعاع دایرهٔ مثلثاتی‌را مساوی واحد فرض‌می‌کنند تا $\sin\theta$ مساوی اندازهٔ جبری قطعهٔ a باشد.

برای هرزاویهٔ θ همواره رابطهٔ زیربین جیب قدیم‌وسینوس جدید برقرار است:

$$\text{Sin}\theta = R\sin\theta = ۱/۰\sin\theta \qquad (۱)$$

همچنین باتوجه به‌شکل قبل می‌توان روابط زیر را مابین وتر و جیب زاویهٔ مفروضی به‌دست‌آورد:

$$\begin{cases} ۲\text{Sin}\theta = \text{cord}\,۲\theta & (۲) \\ \frac{۱}{۲}\text{cord}X = \text{Sin}\frac{X}{۲} & (۳) \end{cases}$$

وبه همین‌ترتیب‌اگرجیب تمام رابا Cos وکسینوس‌جدیدرابا $\cos$ نمایش دهیم خواهیم‌داشت:

$$\text{Cos}\theta = R\cos\theta = ۱/۰\cos\theta$$

ورابطهٔ بین جیب معکوس وکسینوس جدید چنین‌است:

$$\text{Vers}\theta = R - \text{Cos}\theta = R(۱-\cos\theta) = ۱/۰(۱-\cos\theta)$$

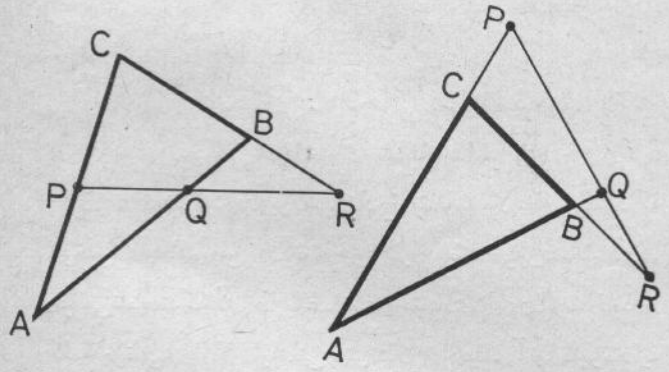
شکل قطاع

درکتاب منلائوس معروف‌به «کتاب مانالاوس‌فی‌الاشکال الکریة» قضیه‌ای مورد بحث قرار می‌گیردکه از آن به نام قضیهٔ منلائوس یا شکل‌القطاع یادمی‌شود.

علمای اسلامی‌این قضیه را درهندسهٔ مسطحه شکل القطاع السطحی ودر هندسهٔ‌کروی شکل القطاع‌الکری نام‌نهاده‌وازآن قضایای زیررا مراد می‌کردند:

شکل قطاع سطحی ـ هرگاه قاطعی سه ضلع مثلث مفروض‌را قطع‌کرده وهریك ازآنها رابه دوپاره خط اضافی یا نقصانی تقسیم‌کند حاصل‌ضرب سه قطعه خطی‌که انتهای مشترك ندارند مساوی‌است‌با حاصل‌ضرب سه‌قطعه‌خط دیگر. به‌تعبیردیگر اگر ABC مثلث مفروض و PQR خط قاطع‌باشد وداریم:

$$AP\cdot BQ\cdot CR = AQ\cdot BR\cdot CP$$

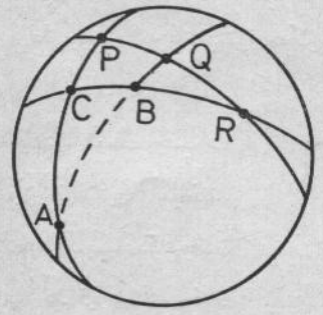


قدما رابطه را به صورت زیر می‌نوشتند:

$$\frac{CP}{AP} = \frac{CR}{CB}\cdot\frac{CQ}{QB}$$

و می‌گفتندکه نسبت $\frac{CP}{AP}$ مؤلف‌است از نسبت $\frac{CR}{CB}$ ونسبت $\frac{BQ}{QB}$

شکل قطاع الکری ـ یعنی قضیهٔ منلائوس در مثلث کروی چنین‌بود:



هرگاه بر سطح کره، دایرهٔ عظیمه‌ای اضلاع مثلث کروی ABC یاامتداد آنهارا در نقاط R,Q,P قطع کند (مطابق شکل) رابطهٔ‌زیر برقرارخواهد بود:

$$\text{cord}\,2AP \cdot \text{cord}\,2BQ \cdot \text{cord}\,2CR =$$
$$= \text{cord}\,2AQ \cdot \text{cord}\,2BR \cdot \text{cord}\,2CP$$

قدما این‌رابطه رابه صورت زیرمی‌نوشتند:

$$\frac{\text{cord}\,2AP}{\text{cord}\,2CP} = \frac{\text{cord}\,2AQ}{\text{cord}\,2BQ} \cdot \frac{\text{cord}\,2BR}{\text{cord}\,2CR} \qquad (\alpha)$$

ومی گفتند که نسبت: $\frac{\text{cord}\,2AP}{\text{cord}\,2CP}$ مؤلف است از نسبت: $\frac{\text{cord}\,2AQ}{\text{cord}\,2BQ}$ و نسبت $\frac{\text{cord}\,2BR}{\text{cord}\,2CR}$ وچون دراین‌رابطه شش مقدار وجود دارد قدماگاهی این‌رابطه را قانون شش‌مقدار می‌نامیدند.

قدما این‌قضیه رابیشتر برای حل‌مسائل هیئت و نجوم بکار می‌بردند. در این مورد مثالی از کتاب مجسطی بطلمیوس نقل می‌شود:

مسئله: اگرشکل‌بالارابه عنوان کرهٔ آسمان فرض کنیم‌و نقطهٔ A راقطب جنوب و دایرهٔ PQR را معدل النهار ودایرهٔ CBR را دایرةالبروج بنامیم وفرض کنیم که سیاره‌ای مانندB با طول معینی (یعنی BR) روی معدل‌النهار واقع شده‌است.

برای تعیین میل‌آن (یعنی BQ) چنین‌عمل می‌کنیم:

دایرهٔ عظیمهٔ APC رارسم می‌کنیم بطوری‌که نقطهٔ R قطب‌آن باشد، پس‌قوس PQR قاطعی‌است که اضلاع مثلث کروی ABC راقطع می‌کند وبنابه قضیهٔ منلائوس داریم:

$$\frac{\text{cord}\,2AP}{\text{cord}\,2CP} = \frac{\text{cord}\,2AQ}{\text{cord}\,2BQ} \cdot \frac{\text{cord}\,2BR}{\text{cord}\,2CR}$$

ازاین شش‌مقدار، پنج‌مقدار معلوم‌اند. چون:

$$CR = AQ = 90^\circ = AP$$

وBRطول مفروض سیاره‌است، وCP با زاویهٔ بین‌دایرةالبروج‌و معدل‌النهار مساوی است. پس در رابطهٔ فوق فقط $\text{cord}\,2BQ$ مجهول است وآن را می‌توان به‌آسانی پیدا کرد. بدین ترتیب که مقدار $\text{cord}\,2BQ$ رادرجدول اوتار پیدا کرده ونصف‌آن جواب مسئله‌است.

درآثار ریاضیدانان اسلامی‌شکل قطاع کروی به صورت رابطهٔ بین‌جیبها ونه‌اوتار بکاررفته است. یعنی‌باتوجه به‌رابطهٔ(۲) رابطهٔ (α) رامی‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\text{Sin}AP}{\text{Sin}CP} = \frac{\text{Sin}AQ}{\text{Sin}BQ} \cdot \frac{\text{Sin}BR}{\text{Sin}CR}$$

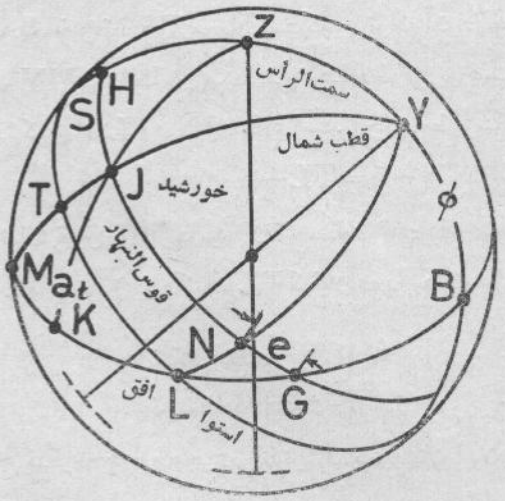
واین‌همان رابطه‌ای است که علمای اسلامی‌استعمال می‌کردند.

مثلا، در کتاب تلخیص مجسطی عبدالملک‌شیرازی که بوسیلهٔ قطب‌الدین شیرازی به فارسی ترجمه شده این قضیه به صورت زیربیان گریده است:

«وچون رسم‌کنیم بربسیط‌کره قوس اب و[قوس] اج، و واقع‌شود برایشان [قوسهای] ه ب و ج د واین‌قسی از دوایر عظام باشد، وهریك ازآنها اقل‌از نصف دایره [باشد] نسبت‌جیب قوس ج ه به‌جیب قوس ه ا مؤلف‌باشد ازنسبت جیب‌قوس ج‌ز به جیب‌قوس دز وازنسبت جیب قوس دب به‌جیب‌قوس با،...»[۳]

ابوالوفای بوزجانی در رسالهٔ: اقامةالبرهان علی‌الدائر من‌الفلك من قوس‌النهار» در مقالهٔ «معرفة الدائر بالشکل‌القطاع»، ازشکل قطاع‌برای شناختن دایره ازفلك استفاده‌کرده است ومااینك این‌مقاله رابا استفاده ازعلائم و اصطلاحات جدید بررسی می‌کنیم:

شکل زیر کرهٔ آسمانی‌را نشان‌می‌دهد (مقالهٔ بوزجانی‌شکل ندارد ومابرای روشن‌شدن مطلب شکل کشیده‌ایم) و درآن دایرهٔ MKB دایرهٔ افق ودایرهٔ HJNG قوس‌النهار، و نقطهٔ Z سمت‌الرأس ونقطه J موضع خورشید فرض شده می‌خواهیم قوس JG یعنی‌دایره ازفلك رابرحسب ارتفاع وقت یعنیa_t وپارامتر های φ و δ که به‌ترتیب نمایندهٔ عرض‌جغرافیائی بلد، ومیل‌شمس می‌باشد بدست‌آوریم (دایرهٔ STL، استوای‌کره آسمانی‌فرض شده‌است.)



درمثلث کروی JZY که امتداد اضلاع آن بوسیلهٔ دایرهٔ MKB قطع شده‌اند، ابوالوفا قضیهٔ منلائوس را بکار برده و

می‌نویسد:

$$\frac{\sin ZK}{\sin KJ}=\frac{\sin ZB}{\sin BY}\cdot\frac{\sin MY}{\sin MJ}$$

ویا پس‌از جایگزین کردن مقادیر آنها:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin a_t}=\frac{\sin 90^\circ}{\sin\varphi}=\frac{\sin MY}{\sin[MY-(90-\delta)]} \quad (4)$$

درمقالهٔ ابوالوفا ذکرشده که کمان MY را می‌توان معین کرد ولی‌خود اوطریقهٔ تعیین‌آن راذکر نکرده است، ولی‌با بکاربردن اتحاد مثلثاتی:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

که ابوالوفا ازآن‌آگاه بود رابطهٔ (۴) رامی‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\sin MY\sin\delta-\cos NY\cos\delta\sin\varphi=\sin MY\sin a_t$$

وازاین رابطه پس‌از عملیات لازم نتیجه می‌شود:

$$tg\,MY=\frac{\sin\varphi\cos\delta}{\sin\varphi\sin\delta-\sin a_t} \quad (5)$$

وبنابراین کمان MY قابل محاسبه می‌شود. در اینجا متذکر می‌شویم که‌تابع تانژانت نیز بوسیلهٔ ابوالوفا شناخته‌شده بود.

بوزجانی برای باردوم قضیهٔ منلائوس‌را برای‌مثلث کروی YTS وقاطع MLB بکار برده می‌نویسد:

$$\frac{\sin SL}{\sin TL}=\frac{\sin SB}{\sin YB}\cdot\frac{\sin MY}{\sin MT}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin 90^\circ}{\sin TL}=\frac{\sin(\varphi+90^\circ)}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin ML}{\sin(MY-90^\circ)}$$

درمعادلهٔ اخیرفقط TL مجهول‌است که می‌توان آن را محاسبه کرد. MY ازرابطهٔ (۵) پیدا می‌شود. ازطرفی برحسب درجه اندازهٔ کمانهای TL و JN مساوی‌است. وچون مطابق‌شکل‌داریم

$$JG=JN+e=TL+e$$

پس‌اندازهٔ قوس JG یادایره ازفلك مساوی است با مجموع فضل نصف‌النهاریعنی (e) وکمان TL که‌قبلاآن راپیدا کرده‌ایم [۶]

شکل مغنی یارابطهٔ سینوسها درمثلث کروی

درقرن چهارم هجری چندتن ازریاضیدانان اسلامی که به تحقیقات علمی مشغول بودند درصدد برآمدند رابطه‌ای در مثلث کروی بدست‌آورند که آنهارا از بکاربردن شکل قطاع یا قضیهٔ منلائوس که بکار بردنش دشوار بود بی‌نیاز سازد، آنها قضیه‌ای کشف کردند که درآن لزوم به‌قاطع یاهیچ مقداری غیراز مقادیر اضلاع و زوایای خودمثلث اصلی‌نبود واین‌قضیه راشکل مغنی ویا قانون الهیئة نام‌نهادند که امروزه به‌نام قضیهٔ سینوسها در مثلث کروی موسوم‌است وآن چنین است که درهرمثلث کروی ABC به‌اضلاع c,b,a رابطهٔ زیربین جیب اضلاع و جیب زوایای آن برقرار است:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

برای افتخارکشف این قضیه مابین ـ ابوالوفای بوزجانی ، و ابونصر عراق، و حامدبن خضر خجندی و کوشیاربن لبان جیلی منازعه درگرفت. زیراهریك‌ازآنهامدعی‌بودند که آن‌را برای‌اولین بارکشف کرده‌اند. ابوریحان‌بیرونی درکتاب: «مقالیدعلم‌الهیئة ومایحدث فی‌بسیط الکرة» شرحی دراین‌باره نوشته واستادخود ابونصر عراق را احق به‌کشف این‌قضیه می‌داند.

ولی‌شواهدودلایلی مشعربراین‌است که ابوالوفای‌بوزجانی این‌قضیه را مستقل ازدیگران کشف کرده است.

برهان ابوالوفای بوزجانی در اثبات شکل مغنی

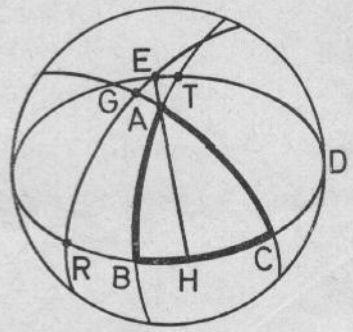
دراینجا به ذکربرهانی که بوزجانی در کتاب المجسطی خود برای شکل مغنی‌ادامه داده می‌پردازیم ولی قبلا به ذکر یك حکم کلی می‌پردازیم:

دردو مثلث کروی ABC و A′B′C′ اگر $C=C'=90$ و $A=A'=90$ بوده و a و b و c و a′ و b′ و c′ به‌ترتیب اضلاع مقابل‌زوایای C,B,A و C′,B′,A′ باشند ، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\sin a}{\sin a'}=\frac{\sin c}{\sin c'}$$

(اثبات این‌مطلب را به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.)

شکل مغنی‌با قضیهٔ سینوسها بااستفاده ازقضیهٔ منلائوس به آسانی‌ثابت می‌شود. ولی‌ابوالوفا این قضیه رابا روشی مستقل از قضیهٔ منلائوس ثابت می‌کند و اینك استدلال وی را با توجه به اصطلاحات وعلائم جدید دراینجا می‌آوریم: مثلث کروی ABC رامطابق شکل‌زیر درنظرمی‌گیریم و دوایر عظیمهٔ GR و DT رارسم می‌کنیم بطوری که قطبهای آنها به ترتیب B و C باشد.



ونقطهٔ تقاطع این دودایرهٔ عظیمه را E می‌نامیم. قوسهای AC و AB را امتداد می‌دهیم تا در نقاط G و T قوسهای RE و DE را قطع کنند. قوسی از دایرهٔ عظیمه‌ای را از نقاط E و A عبور می‌دهیم تا آن قوس در نقطهٔ H ضلع CB را قطع کند. فاصلهٔ نقطهٔ E ازدو نقطهٔ B و C، برابر ۹۰° است وازاین جهت E قطب قوس دایرهٔ عظیمهٔ BC است. پس زوایای BRE و CHE و CDE قائمه‌اند ودومثلث DTB و BHA قائم‌الزاویه ودر زاویهٔ B مشترکند. پس بنابه حکمی که قبلا ذکر کردیم رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\sin TB}{\sin AB}=\frac{\sin DT}{\sin HA} \qquad (۶)$$

اماچون B قطب قوس DE است پس: $\widehat{BT}=۹۰^\circ$ و $\sin BT=۱/۰$ و همچنین قوس DT با زاویهٔ B مثلث اصلی مساوی است پس رابطهٔ (۶) را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۱/۰}{\sin AB}=\frac{\sin B}{\sin AH}$$

$$\Longrightarrow ۱/۰\sin AH=\sin B\cdot\sin AB \qquad (۷)$$

اما چون نقطهٔ C قطب قوس $\widehat{RE}$ است پس $\widehat{CG}=۹۰^\circ$ و قوس $\widehat{RG}$ مساوی است بازاویهٔ C مثلث اصلی ABC وبنابراین رابطهٔ اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۱/۰}{\sin AC}=\frac{\sin C}{\sin AH}$$

$$\Longrightarrow ۱/۰\sin AH=\sin C\cdot\sin CA \qquad (۸)$$

چون طرفین چپ روابط (۷)و(۸) یکسانند طرفین راست آنها نیزمساوی خواهند بود یعنی:

$$\sin B\cdot\sin AB=\sin C\cdot\sin AC$$

ویا:

$$\frac{\sin B}{\sin AC}=\frac{\sin C}{\sin AB}\Longrightarrow\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

یعنی جیب اضلاع مثلث کروی متناسب است باجیب زوایای مقابل آن اضلاع وهوالمطلوب.

موارد استعمال شکل مغنی در حل مسائل هیئت

اکنون برای اینکه نشان دهیم کـه چگونه استعمال شکل مغنی یا قانون الهیئة حل مسائل هیئت راساده‌تر می‌کند این قضیه را برای حل همان مسئله که قبلا حل شد بکارمی‌بریم:

منظور این است میل سیاره‌ای را (یعنی BQ) که طول آن (یعنی BR) مفروض است محاسبه کنیم:

بنابه قضیهٔ سینوسها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\sin\widehat{BQ}}{\sin\widehat{BRQ}}=\frac{\sin\widehat{BR}}{\sin\widehat{BQR}}$$

وچون $\angle BQR=۹۰^\circ$ و $\angle BRQ$ زاویهٔ ثابت بین دایرهٔ البروج ومعدل النهار است (یعنی تقریباً ۲۳° ۲۷′ می‌باشد) پس ازمعادلهٔ فوق مقدار BQ بدست می‌آید. وهوالمطلوب.

دنباله دارد

نامهٔ رسیده

آقای عباس جزء امیرسیافی ضمن نامه‌ای مشروح بعضی ازاشتباههای چاپی یاغیر چاپی مربوط به سلسله مقاله‌های «دربارهٔ اعداد اول چه می‌دانید» را یادآوری کرده‌اند. چاپ این سلسله مقاله‌ها دریکان شمارهٔ بعدپایان می‌پذیرد. برای آقای امیرسیافی فرصتی است که دنبالهٔ مقـاله‌ها را نیز از نظـر بگذرانند واگر تذکرات دیگری نیزلازم است یادآوری کنند. آنگاه نامهٔ مشروح ایشان درمجله درج خواهد شد.

دربارهٔ اعداد اول چه‌می دانید؟ (۵)

ترجمهٔ: **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی‌دانشگاه‌آذرآبادگان

۱۸- قضیهٔ ویلسون

اکنون موارد استعمال نتیجهٔ قبلی را بررسی می‌کنیم. به‌فرض p عدد اول‌بوده وکثیرالجملهٔ زیرازدرجهٔ $(p-2)$ و با ضرایب صحیح باشد:

$$f(x)=(x-1)(x-2)\dots(x-p+1)-x^{p-1}+1$$

درکثیرالجملهٔ فوق $x=1$ و 2 و ... و $p-1$ خواهد بود. بنابه قضیهٔ فرما $x(x^{p-1}-x)=p|x^2-x$ بنابراین: $p|(x^{p-1}-1)$. اما به ازای $x=1$ و 2 و ... و $p-1$ بدیهی است که:

$$p|(x-1)(x-2)\dots(x-p+1)$$

چون به‌ازای چنین x یکی ازعوامل‌حاصل‌ضرب فوق صفراست. ازفرمول $f(x)$ (ودرنظر گرفتن اینکه تفاضل دوعدد بخش پذیر بر p بر p قابل قسمت است) استنباط می‌کنیم که به‌ازای $x=1$و2و...و$p-1$ خواهیم‌داشت: $p|f(x)$. بنابراین‌بااستفاده ازنتیجهٔ قضیهٔ‌لاگرانژ (به‌ازای $n=p-2$) استنباط می‌کنیم که ضرایب کثیرالجمله، وبنابراین جملات آن ثابت بوده و بر p بخش پذیرند.

اما به‌ازای‌مقدارفرد p (چون $(-1)^{p-1}=1$) جملهٔ ثابت کثیرالجملهٔ $f(x)$ خواهد شد:

$$1\times2\times3\times\dots\times(p-1)+1=(p-1)!+1$$

بدین ترتیب، اگر p عدد فردواول باشد: $p|(p-1)!+1$ واین به‌ازای $p=2$ صحیح است‌زیرا $1!+1=2$ می‌باشد. پس ثابت کردیم که:

قضیهٔ ۱۴ (ویلسون): به‌ازای هرعدد اول p عدد $(p-1)!+1$ بر p بخش پذیر است.

ولی نتیجه‌گیری ازقضیهٔ ۱۴ بدین‌ترتیب که به‌ازای‌هرعدد طبیعی $n>1$، اگر $(n-1)!+1$ بر n بخش‌پذیر باشد، پس n عدد اول است، اشتباه خواهد بود.

اگر n عددی مرکب‌بود، $n=a\cdot b$ (a,b اعدادطبیعی وبزرگترازیك وکوچکتراز n می‌باشند) وعدد a یکی ازعوامل حاصل‌ضرب $1\times2\times3\times\dots\times(n-1)$ خواهد بود و از اینرو هنگامی‌که عدد $(n-1)!+1$ بر a تقسیم شودباقیمانده (۱) می‌گردد، البته وقتی بر n قابل قسمت است می‌بایست بر a بخش پذیرباشد. بنابراین، تناقض اول بودن n ثابت شده‌است. پس: برای آنکه عدد طبیعی $n>1$ اول باشد لازم وکافی است که عدد $(n-1)!+1$ بر n بخش پذیرباشد.

بطورتئوری، می‌توان گفت‌که فقط با یك تقسیم قادریم دربارهٔ اول بودن یا اول نبودن عددی اظهارنظر کنیم، ولی عملا بکاربردن این روش غیرممکن است، چون حتی برای عدد سه رقمی n عدد $(n-1)!+1$ بیش از ۱۰۰ رقم دارد.

به‌دنبال قضیهٔ ویلسون این سؤال مطرح می‌شودکه «آیا برای $(p-1)!+1$ اعداداولی‌وجود داردکه $(p-1)!+1$ بر p^2 بخش پذیر گردد». برای $p\leqslant50000$ فقط سه تا ازاین نوع اعداد وجوددارندکه عبارتند از ۵۶۳,۱۳,۵، امانمی‌دانیم که آیا چنین اعداد p به‌تعداد نامحدودند یا خیر؟ قضیهٔ فرما و ویلسون را می‌توان به‌صورت قضیهٔ زیرترکیب کرد:

«هرگاه p عدد اول باشد، به‌ازای جمیع مقادیرصحیح a عدد $a^p+(p-1)!a$ بر p قابل قسمت است».

زیرا: اگر p عدد اول و a عدد دلخواه صحیح باشد، بنابه قضیهٔ فرما (a^p-a) بر p، وبنابه‌قضیهٔ ویلسون:

$$a+(p-1)!a=[1+(p-1)!]a$$

نیزبر p بخش پذیراست بنابراین مجموع آنها یعنی:

$a^p+(p-1)!a$ بر p قابل قسمت است .

همچنین می‌توان اثبات کرد که قضیهٔ فرما و ویلسون را قادریم درهم ادغام کرده قضیهٔ زیر را که بـه Leo - Moser منسوب است ارائه دهیم : «اگر p عدداول باشد و a عددصحیح پس $(p-1)!a^p+a$ بر p بخش پذیراست.

ازقضیهٔ ویلسون استنباط قضیهٔ زیر به آسانی صورت می گیرد :

قضیهٔ ۱۵ (لایب نیز) : برای آنکه عددطبیعی $p>2$ اول باشد، لازم وکافی است که عدد $(p-2)!-1$ بر p بخش‌پذیر باشد.

اثبات ـ هرگاه $p>2$ اول باشد ، بنابر قضیهٔ ویلسون عـدد $(p-1)!+1$ بـر p بخش پـذیـراست . اما چون : $(p-1)!=(p-2)!(p-1)$ پس داریم :

$$(p-1)!+1=(p-2)!p-[(p-2)!-1]$$

ازقابلیت تقسیم طرف چپ بر p نتیجه‌می‌شود که $(p-2)!-1$ برعدد p بخش پذیراست. ازطرف دیگر، اگر : $p|(p-2)!-1$ باشد $p|(p-1)!-(p-1)$ بوده و از اینرو $p|(p-1)!+1$ است. از آنجاکه $(p>2)$ در بالا ثابت شد، نتیجه می گیریم که p می‌بایست عدد اول باشد.وبدین ترتیب قضیهٔ «لایب نیز» ثابت گردید.

اگر $p>3$ عدد اول باشد ، $(p-1)!>p$ خواهد بود ، زیرا : $(p-1)!\geqslant 2(p-1)=p+(p-2)>p$ بدیهی است که $(p-1)!+1$ نیزاز p بزرگتر بوده و بنا به قضیهٔ ویلسون بر p قابل قسمت است یعنی عـددی است مرکب . بنابراین ، اگر $p>3$ عدد اول بود، عدد $(p-1)!+1$ عدد غیراول است، این قضیه پیش می‌آید که آیا به مقدار نامحدودی عدد طبیعی n وجود دارد بطوری که $n!+1$ اول باشد . پاسخ این مسئله را نمی‌دانیم .

اعداد $1!+1=2$ ، $2!+1=3$ ، $3!+1=7$ اول هستند، عدد اول بعدی به فرم $11!+1=39916801$ می‌باشد ، معلوم نیست که $27!+1$ اول هست یاته ؟

ازقضیهٔ «لایب نیز» به‌آسانی نتیجه‌می‌شود که‌تعدادنامحدودی عدد طبیعی n وجود دارد بطوری کـه $(n!-1)$ مرکب باشد ولی نمی‌دانیم که آیا تعداد نـا محدودی عدد n داریم بطوری که $(n!-1)$ اول باشد .

اعداد $3!-1=5$ ، $4!-1=23$ ، $6!-1=719$ اول هستند . و نیز نمی‌دانیم که آیا بین اعداد $P!+1$ ، وقتی p عدداول است ، تعداد نامحدودی عددمرکب وجود دارد ؟ (بطور مشابه درمورد اعداد $p!-1$).هنوز پاسخ به این سؤال هم داده نشده که آیا تعداد نامحدودی عدد اول n برای اینکه $p_1p_2\cdots p_n+1$ اول باشد وجود دارد (p_n ، nامین عدداول است). نامحدود بودن‌عددطبیعی n برای‌مرکب بودن عدد $p_1p_2\cdots p_n+1$ هم معلوم نیست .

اعداد $p_1+1=3$ ، $p_1p_2+1=7$ ، $p_1p_2p_3+1=31$ ، $p_1p_2p_3p_4+1=211$ ، $p_1p_2p_3p_4p_5+1=2311$ اول هستند، اما اعداد : $p_1p_2\cdots p_n+1$ به‌ازای $n=6,7,8$ مرکب بوده وبه‌ترتیب بر ۵۹ ، ۱۹ و ۳۴۷ بخش پذیرند.

نشان خواهیم دادکه‌به‌ازای عدد $n>3$ حاصل‌ضرب a_n همهٔ اعداد اول کمتر از n ، از n بزرگترهستند.فرض می کنیم که به‌ازای بعضی ازاعداد طبیعی $n>3$ داریم $a_n\leqslant n$. بدین‌ترتیب $a_n-1<n$ اما a_n-1 بر هیچ عددکوچکتر از n قابل قسمت نیست (زیرا این اعداد مقسوم علیه‌های a_n هستند) و به‌ازای $n\geqslant 4$،عدد $a_n-1\geqslant a_4-1=5>1$ مقسوم علیه‌اول p را داردکه می‌بایست بزرگتر یا مساوی n باشد، و از آنجا به تناقض $a_n-1\geqslant n$ برمی‌خوریم ، ازاینرو $a_n>n$ (بـه‌ازای $n>3$) .

درمورد حاصل‌ضرب p_n برای تمام اعدادکـوچکتر یا مساوی n می‌توان ثابت کردکـه بـه ازای اعـداد طبیعی n ، $p_n<4^n$ وبه‌ازای‌عددطبیعی $n\geqslant 29$ داریم $p_n>2^n$.همچنین ثابت شده است که به‌ازای عددطبیعی $n>2$ ، مجموع همهٔ اعداد نابزرگتر از n خواهدشد.

۱۹ـ تجزیهٔ اعداد اول به‌مجموع دو مربع

فرض کنید p عدد اول به فرم $(4k+1)$ باشد . چون $\frac{(p-1)}{2}=2k$ زوج است داریم :

$$1\times 2\times 3\times\cdots\times\frac{p-1}{2}=(-1)(-2)\cdots\times\left(-\frac{p-1}{2}\right)$$

که بعد از تقسیم بر p باقیمانده‌ای به‌صورت :

$$(p-1)(p-2)\cdots\left(p-\frac{p-1}{2}\right)$$

می‌دهد. که بعد از وارونه نوشتن به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$(\frac{p+1}{2})(\frac{p+1}{2}+1)\cdots(p-2)(p-1)$$

از آنجا حاصل‌ضرب $[\frac{(p-1)}{2}]!$ بدست می‌آید . باملاحظهٔ

$\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2}+1$ استنباط می‌کنیم که عدد :

$\left\{[\frac{(p-1)}{2}]!\right\}^2$ در تقسیم بر p باقیمانده‌ای به صورت

$(p-1)!$ می‌دهد. حال همان عدد قبل باکم‌کردن (۱) بنا به

قضیهٔ ویلسون بر p بخش پذیراست ، بدین ترتیب عدد :

$[(\frac{p-1}{2})!]^2+1$ بر p قابل‌قسمت است‌بنابراین ثابت کردیم:

قضیهٔ ۱۶ـ هرگاه p عدد اول به‌فرم $(4k+1)$ باشد

عدد $[(\frac{p-1}{2})!]^1+1$ بر p قابل قسمت است .

برای استنباط بیشتر نتیجهٔ این قضیه ، قضیهٔ زیررا ثابت می‌کنیم :

لم : هرگاه p عدداول باشد، وعددصحیح a بر p بخش‌پذیر نباشد ، اعداد طبیعی $x<\sqrt{p}$ و $y<\sqrt{p}$ چنان وجود دارند که به‌ازای علامت مناسب + یا − عدد $ax\pm y$ بر p قابل قسمت است .

اثبات : با فرض اول بودن p و اینکه m بزرگترین عدد طبیعی نابزرگتر از p باشد ، $(m+1)>\sqrt{p}$ یعنی $(m+1)^2>p$ است. اعداد صحیح $ax-y$ راکه x و y مقادیر $0,1,\ldots,m$ هستند درنظرمی‌گیریم .

در این حالت اعداد $(m+1)^2>p$ وجود دارند ، بطوری که‌باقیمانده‌های ممکن بعدازتقسیم‌بر p، برای دودستگاه متفاوت x_1 ، y_1 و x_2، y_2 (بطوری‌که $x_1\geqslant x_2$ است) عبارتند از ax_1-y_1وax_2-y_2 وهمین باقیمانده به‌هنگام تقسیم‌برp هم باید بدست‌آید. ازاینرو اعداد :

$$(ax_1-y_1)-(ax_2-y_2)=a(x_1-x_2)-(y_1-y_2)$$

بر p بخش‌پذیر است . چون نمی‌توان $x_1=x_2$ داشت پس اعداد (y_1-y_2) بر p بخش پذیرخواهند بود. چون :

$$0\leqslant y_1\leqslant m\leqslant\sqrt{p}<p \quad \text{و} \quad 0\leqslant y_2<p$$

است پس تقسیم‌های y_1، x_1وy_2، x_2 متفاوتند وهمانطورکه فرض شده چنین چیزی امکان ندارد. ازطرف دیگر $a(x_1-x_2)$ بر p قابل قسمت است ، وچون a بر p بخش پذیر نیست پس (x_1-x_2) بر p قابل قسمت می‌باشد و این نیز غیر ممکن است . بنابرآنکه $x_1>x_2$ و $x_1\neq x_2$ عدد (x_1-x_2) عدد طبیعی است وعدد (y_1-y_2) عددی است مخالف صفر (مثبت) وبا علامت مناسب عدد $y=\pm(y_1-y_2)$ یك‌عددطبیعی‌ومخالف صفراست وداریم $x=x_1-x_2\leqslant x_1\leqslant m\leqslant\sqrt{p}$ پس $x<\sqrt{p}$.

چون معادلهٔ $x^2=p$ غیرممکن است ، پس‌عدد p اول‌می‌باشد. بطورمشابه $y<\sqrt{p}$ بدست‌می‌آید. به‌همین گونه‌عدد $(ax\pm y)$ با علامتی مناسب با عدد $a(x_1-x_2)-(y_1-y_2)$ (قابل قسمت بر p) متناسب‌است. پس لم ثابت گردید.

حال به فرض p عدد اول به فرم $(4k+1)$ باشد و $a=(\frac{p-1}{2})!$ عدد غیرقابل قسمت بر p ، بنا به لم قبل ، اعداد طبیعی x و y با $x<\sqrt{p}$ و $y>\sqrt{p}$ وجود دارند بطوری‌که $ax\pm y$ با علامت مناسب بر p بخش‌پذیراست . در هرحالت عدد : $a^2x^2-y^2=(ax-y)(ax+y)$ بر p قابل قسمت خواهد بود. اما بنا به قضیهٔ ۱۶ عدد (a^2+1) بر p قابل قسمت است، و عدد $a^2x^2+x^2$ نیز بر p بخش پذیر می‌باشد. چنانکه اعداد $a^2x^2+x^2$ و$a^2y^2-y^2$ بر pبخش‌پذیرباشند ، مجموع آنها x^2+y^2 بر p قابل‌قسمت است. پس $x^2+y^2=kp$ (k عدد طبیعی) . همینطور به‌ازای : $x<\sqrt{p}$ ، $y<\sqrt{p}$ داریم : $x^2+y^2<2p$ یعنی $kp<2p$ و $k<2$ (k عدد طبیعی) پس $k=1$ است.پس $x^2+y^2=p$ وثابت کردیم که :

قضیهٔ ۱۷ (فرما) ـ هرعدد اول به‌فرم $(4k+1)$ مجموع مربعات دوعدد طبیعی است .

به‌عنوان مثال :

$$5=1^2+2^2 \ ، \ 13=3^2+2^2 \ ، \ 17=1^2+4^2$$
$$29=2^2+5^2 \ ، \ 37=1^2+6^2 \ ، \ 41=4^2+5^2$$
$$53=2^2+7^2 \ ، \ 61=5^2+6^2 \ ، \ 73=3^2+8^2$$

اکنون ثابت می‌کنیم که این تجزیه منحصر به فرد است .

درواقع تعمیم قضیهٔ فوق را به‌صورت زیر بیان می‌داریم :

قضیهٔ ۱۸ـ هرگاه a و b اعداد مفروض باشند ، عدد غیراول p می‌تواند به دوطریق به‌فرم $p=ax^2+by^2$ نوشته شود (xوy اعداد طبیعی) ، که درحالت $a=b=1$ ، از اعداد غیراول صرف‌نظر می‌شود.

اثبات : به‌فرض عدد اول به‌دوصورت زیرقابل‌تجزیه‌باشد:

$$p=ax^2+by^2=ax_1^2+by_1^2$$

که درآن x و y، x_1 و y_1 اعداد طبیعی هستند. بنابراین داریم:

$$p^2=(axx_1+byy_1)^2+ab(xy_1-yx_1)^2=$$
$$(axx_1-byy_1)^2+ab(xy_1+yx_1)^2$$
$$(axx_1+byy_1)(xy_1+yx_1)=$$
$$(ax^2+by^2)x_1y_1+(ax_1^2+by_1^2)xy=$$
$$p(x_1y_1+xy)$$

بدین ترتیب ، حداقل یکی از عوامل سمت چپ می‌بایست برعدد اول p قابل قسمت باشد. هرگاه $p|axx_1+byy_1$ پس از فرمول اول به ازای p^2 نتیجه می‌شود که $(xy_1-yx_1)=0$ یعنی $xy_1=yx_1$ وداریم : $p=axx_1+byy_1$ بنابراین:

$$px=(ax^2+by^2)x_1=px_1$$

بنابرروابط فوق $x=x_1$ ونیز $y=y_1$ است .

حال اگر $p|(xy_1+yx_1)$ باشد از دومین فرمول برای p^2 نتیجه می‌شودکه axx_1-byy_1 و $p^2=ab(xy_1+yx_1)^2$ که با توجه به‌اینکه اعداد x، y ، x_1، y_1 طبیعی هستند ، وفقط وقتی امکان برقراری این روابط وجوددارد که $a=b=1$ باشد،پس‌داریم ، $p=xy_1+yx_1$ و بنابررابطهٔ $p=x'+y^2=x_1^2+y_1^2$ خواهیم داشت $y=x_1$ وفرض مافقط درصورت مرکب بودن عددتفاوت‌می‌کند، ازاینجا قضیهٔ ۱۸ ثابت شده است .

از قضیهٔ ۱۸ نتیجه می‌گیریم که اگر عدد طبیعی n بتواند حداقل به‌دوصورت به مجموع مربعات دوعدد طبیعی‌نوشته شود n عدد اول نخواهد بود .

به‌عنوان مثال درمورد عدد :

$$2501=1^2+50^2=10^2+49^2$$

نتیجه می‌گیریم که اول نیست .

هرگاه $m=n$ یا $m=2n$ باشد، تجزیهٔ به مجموع همان‌مربعات تبدیل می‌شود، وچون $m^2+4n^2=5n^2$ می‌شود فقط به‌ازای $m=n=1$ عدد اول خواهیم داشت یا :

$m^4+4n^4=20n^4$ عددی‌است مرکب پس باید $m\neq n$ و $m\neq 2n$ باشد. پس : اگر m و n اعداد طبیعی باشندبطوری که حداقل یکی ازآنها مخالف واحد باشد عدد n^4+4m^4 عدد غیر اول است (*) .

به‌خصوص (به‌ازای $m=1$) نتیجه می‌شودکه اعداد $(4n^2+1)>1$ همگی اعداد غیر اول هستند (n عدد طبیعی) هرگاه دوتجزیه از یك عدد را به‌مجموع دو مربع بدانیم نشان خواهیم دادکه می‌توان این عددرا به‌حاصل‌ضرب دوعددبزرگتر از (۱) نیزتجزیه نمود . لیکن ملاحظه می‌کنیم، که اگرعددی طبیعی تنها به‌یك صورت به مجموع دومربع عدد طبیعی تجزیه شود نمی‌توان ادعاکردکه این عدد اول است ، به‌عنوان مثال می‌توان دیدکه عدد ۱۰ تنها به‌یك صورت به شکل فوق قابل تجزیه است :

$3^2+1^2=10$ وهمینطور $3^2+3^2=18$ و $6^2+3^2=45$

اما می‌توان نشان داد، که اگریك عدد فرد فقط یك تجزیه به‌دو مجموع مثبت داشته باشد ، و اجزاء این مجموع عامل مشترکی نداشته باشند، n توانی است از یك عدد اول . توسط ماشین محاسبهٔ الکترونیکی نشان داده شده است که عدد $2^{39}-7$ عددی اول :

$$2^{39}-7=64045^2+738684^2$$

واجزاء مجموع عامل مشترك بزرگتراز یك ندارند. توجه‌داشته باشیدکه‌اعداد 2^n-7 به‌ازای $n=4,5,\dots,38$ اول‌نیستند.

این سؤال‌که آیا همهٔ اعداد (2^n-7) به‌ازای $n>3$ غیراولند توسط P.Erdos جواب منفی داده شده است .اعداد (2^n-7) به‌ازای $n=40,41,\dots,50$ غیراولندزیرابطوری که تحقیق شده به ترتیب براعداد $3,11,3,5,3,107,3,5,3,61$ بخش پذیرند.پس به‌ازای $3<n\leq 50$ فقط به‌ازای $n=39$ از (2^n-7) عدد اول بدست می‌آید .

اما اثبات اینکه بین اعداد 2^p-7 (p عدد اول) تعداد نا محدودی عدد غیراول وجود داردآسان است . بنا به‌قضیهٔ ۱۰ تعداد نا محدودی اعداد اول به‌فرم $4k+1$ وجود دارد وبرای چنین عدد اول p، $5|2^4-1$ پس $2|2^{4k}-1$ پس $5|2^{4k+1}-2$ ونیز دراین‌صورت : $5|2^p-7$

بایدتصریح نمودکه وقتی n عدد طبیعی است معلوم‌نیست که‌تعداد نامحدودی عدد اول 2^n-7 وجود دارد یا نه . به دنبال قضیهٔ ۱۷ این سؤال پیش‌می‌آید، که درموردتجزیهٔ اعداداول به‌مجموع دومربع چه می‌توانیم بگوئیم .

بدیهی است‌که عدد ۲ فقط به‌یك صورت به‌مجموع دومربع عدد طبیعی درمی‌آید: $2=1^2+1^2$ اکنون دربارهٔ اعداد اول

---

* چون تجزیهٔ زیررا داریم :

$$m^4+4n^4=(m^2+2mn+4n^2)(m^2-2mn+n^2)$$

به‌فرم $(4k+3)$ (که $k=0,1,2,\ldots$) تحقیق خود را ادامه می‌دهیم : اثبات اینکه هیچ عدد طبیعی به این فرم را نمی‌توان به‌صورت مجموع مربعات دوعدد طبیعی نوشت آسان است. چون عدد طبیعی به‌فرم $4k+3$ فرد می‌باشد بافرض :

$4k+3=x^2+y^2$ (x و y اعداد صحیح هستند) نتیجه می‌گیریم که اعداد y,x نمی‌توانند هردو فرد یا هردوزوج باشند پس باید یکی ازاعداد y,x فرد و دیگر زوج باشد، اما مربع یك عدد زوج بر ۴ قابل قسمت است ومربع عدد فرد وقتی بر ۴ تقسیم شود باقیمانده (۱) می‌گردد . پس مجموع (x^2+y^2) باقیماندهٔ (۱) رادرتقسیم بر۴ دارد وباقیماندهٔ عدد $4k+3$ بر ۴ برابر ۳ می‌باشد، پس‌رابطهٔ $4k+3=x^2+y^2$ نمی‌تواند به ازای اعداد طبیعی y,x,k برقرارباشد.

پس بین‌اعداداول‌تنهاعدد ۲ واعداداول به‌فرم $(4k+1)$ را می‌توان به مجموع مربعات دوعدد تجزیه نمود، بطوری‌که که این تجزیه یکی بیشتر نیست .

پاسخ بدین سؤال که «کدام اعداد طبیعی مجموع مربعات دوعدد طبیعی هستند» خیلی مشکلتر است. حتی شرط لازم وکافی برای آنکه یك عدد طبیعی مجموع مربعات اعداد طبیعی باشد نسبتاً پیچیده است . می‌توان نشان دادکه شرط لازم وکافی برای اینکه عدد طبیعی n را بتوان به مجموع مربعات دوعدد طبیعی نوشت این است که عدد n حداقل یك مقسوم علیه اول به فرم $(4k+1)$ داشته باشد. همچنین تشخیص داده شده که یك عدد طبیعی مفروض مثل n ممکن است به‌چندفرم به‌مجموع‌مربعات اعداد طبیعی تجزیه گردد. البته این تجزیه به‌عوامل اول‌مربوط می‌شود. عدد ۶۵ دو تجزیه و عدد ۱۱۰۵ چهارتجزیه به‌مجموع مربعات دارد:

$$65=1^2+8^2=4^2+7^2$$

$$1105=4^2+33^2=9^2+32^2=12^2+31^2$$
$$=23^2+24^2$$

۲۰ـ تجزیهٔ اعداد اول به تفاضل مربعات و تجزیه‌های دیگر .

به‌دنبال بحث فوق این سؤال پیش می‌آیدکه آیا می‌توان یك عدد اول را به‌صورت تفاضل مربعات دوعدد طبیعی بیان‌نمود؟ ودرصورت امکان به‌چند طریق ؟

به‌فرض‌آنکه عدد اول به‌صورت تفاضل مربعات دو عدد طبیعی بیان شود یعنی داشته باشیم : $p=x^2-y^2$ ، که درآن y,x اعدادطبیعی هستندوبدیهی‌است که $x>y$ ، خواهیم‌داشت: $p=(x-y)(x+y)$ که $(x-y)$ و $(x+y)$ دو مقسوم علیه عدد اول p است، که اولی کوچکتر از دومی می‌باشد. به‌علت اول بودن عدد p بایدداشته باشیم $x-y=1$ و $x+y=p$ پس :

$$x=\frac{p+1}{2} \quad \text{و} \quad y=\frac{p-1}{2}$$

که عدد p باید فرد باشد وازاینرو فقط تجزیهٔ زیررا داریم:

$$p=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

پس قضیهٔ زیررا داریم :

قضیهٔ ۱۹ـ هرعدد اول غیراز ۲ تفاضل مربعات دوعدد طبیعی است واین تنها به‌یك طریق امکان دارد.

می‌توان نشان دادکه تعداد زیادی عدد دلخواه وجوددارند که می‌توان آنها را به تفاضل مربعات دوعدد طبیعی تجزیه‌کرد. ازقضیهٔ ۱۹ استنباط می‌شودکه یك عدد طبیعی بیش ازیك تجزیه به‌تفاضل مربعات دوعدد طبیعی داردکه این دوعدداول نمی‌باشند. اما اثبات اینکه اگر عددی فردتنها یك تجزیه به‌تفاضل مربعات دوعددصحیح داشته‌باشد عددی‌است اول، به‌آسانی صورت‌می‌گیرد.

اگر عدد فرد n غیراول باشد پس $n=a\cdot b$ (که a و b اعداد طبیعی بزرگتراز (۱) است). بدیهی است که :

$$n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

اگربرای مثال $a\geqslant b$ باشد $ab-1=(n-1)>a-b$ (چون $b>1$) پس تجزیه‌های مختلفی داریم .

پس عددفردغیر اول n دوتجزیهٔ متفاوت به‌تفاضل‌مربعات دوعدد صحیح دارد. اگرچه اعداد فرد غیراولی نیزوجود دارند که فقط یك تجزیه به‌تفاضل مربعات دوعدد طبیعی دارند . برای مثال عدد ۹. (می‌توان نشان دادکه مربعات اعدادفرد جزءچنین اعدادی‌اند). اکنون به‌سؤال دیگری می‌رسیم که‌آیا یك عدد اول را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات سه عدد طبیعی نشان داد ؟ ممکن است نشان دهیم که تعداد نامحدودی عدد اول بااین‌شرایط وجود دارد، ونیز تعداد نامحدودی عدد اول وجود دارندکه این شرایط را پذیرا نیستند .

بین اعداد اول کوچکتراز (۱۰۰) که مجموع مربعات سه عدد طبیعی هستند تنها اعداد زیر را داریم :

$$۳=۱^۲+۱^۲+۱^۲ \ , \ ۱۱=۱^۲+۱^۲+۳^۲ \ ,$$
$$۱۷=۲^۲+۲^۲+۳^۲ \ , \ ۱۹=۱^۲+۳^۲+۳^۲$$
$$۲۹=۲^۲+۳^۲+۴^۲ \ , \ ۴۱=۱^۲+۲^۲+۶^۲=$$
$$۳^۲+۴^۲+۴^۲ \ , \ ۴۳=۳^۲+۳^۲+۵^۲ \ ,$$
$$۵۳=۱^۲+۴^۲+۶^۲ \ , \ ۵۹=۱^۲+۳^۲+۷^۲ \ ,$$
$$۶۱=۳^۲+۴^۲+۶^۲ \ , \ ۶۷=۳^۲+۳^۲+۷^۲$$
$$۷۳=۱^۲+۶^۲+۶^۲ \ , \ ۸۳=۱^۲+۱^۲+۹^۲=$$
$$۳^۲+۵^۲+۷^۲ \ , \ ۸۹=۲^۲+۲^۲+۹^۲=۲^۲+۶^۲+۷^۲$$
$$=۳^۲+۴^۲+۸^۲ \ , \ ۹۷=۵^۲+۶^۲+۶^۲$$

بین اعداد اول فوق ، اعداد اولی وجود دارند که بیش از یك تجزیه به‌مجموع مربعات سه عددطبیعی‌دارند مثلا ۴۱، ۸۳ و۸۹.

بنابراین می‌توان به آسانی نشان داد که هرعدد صحیح را می‌توان بفرم $x^۲+y^۲-z^۲$ به‌راههای بسیار زیادی‌نوشت بطوری‌که z,y,x اعداد طبیعی‌اند. کافی است به‌ازای اعداد k و t و اتحاد زیر نتیجه بدست آید:

$$(۲k-۱)=(۲t)^۲+(k-۲t^۲)^۲-(k-۲t^۲-۱)^۲$$
$$۲k=(۲t+۱)^۲+(k-۲t^۲-۲t)^۲-$$
$$(k-۲t^۲-۲t-۱)^۲$$

همچنین می‌توان بعضی ازاعداد اول‌را به‌صورت‌مجموع مربعات ۴ عدد طبیعی درآورد . می‌توان ثابت‌کرد که تمام اعداد بجز اعداد اول : ۲,۳,۵,۱۱,۱۳,۱۹,۴۱ چنین نمایشی دارند .

همچنین می‌توان ثابت‌کرد که غیراز اعداد ۲,۳,۵ اعداد اول دیگر را می‌توان به‌مجموع مربعات ۵ عدد طبیعی نوشت ، وبالاخره به‌ازای $m>۳$ فقط تعداد محدودی عداداول وجوددارد که مجموع مربعات m عدد طبیعی نیست .

I.Chowla براین مبنا که عدد (۱) عدد اول باشد (سابقاً بیشتر مردم چنین فرض می‌کردند) اظهارنموده است که جمیع اعداد طبیعی، مجموع مربعات ۸ عدد اول یاکمتر ازآن می‌باشند. این‌موضوع برای اعدادطبیعی نابزرگتراز ۲۸۸۰۰۰ تحقیق شده است .

با توجه به قضیهٔ ۱۷ ممکن است این سؤال پیش آید که چه اعداد اولی را می‌توان به‌فرم $x^۲+۲y^۲$ یا $x^۲+۳y^۲$ نوشت (y,x اعداد سبیعی) . قضیهٔ زیربرقراراست :

برای آنکه ؛ عدد اول p به‌فرم $x^۲+۲y^۲$ باشد لازم و کافی است که p به‌شکل $(۸k+۱)$ یا $(۸k+۳)$ باشد . هر عدد اول به این صورت فقط یك نمایش به‌فرم $x^۲+۲y^۲$ دارد (نتیجه از قضیهٔ ۱۸) . به‌عنوان نمونه :

$$۳=۱^۲+۲\times۱^۲ \ \text{و} \ ۱۱=۳^۲+۲\times۱^۲$$
$$۱۷=۳^۲+۲\times۲^۲ \ \text{و} \ ۱۹=۱^۲+۲\times۳^۲$$

با قرار دادن اعدادی تخمین زده شده‌که تعداد نامحدودی اعداد اول‌به‌فرم $(۸k+۱)$ و $(۸k+۳)$ وجوددارد. رابطهٔ‌مخصوص $p=۱^۲+۲y^۲$ هم از $x^۲+۲y^۲$ با فرض $x=۱$ بدست می‌آید که‌می‌توان‌اظهارداشت که‌تعدادنامحدودی عدداول p بطوری که $p=x^۲+۲\times۱^۲$ باشد وجود دارد مثلا :

$۷۳=۱^۲+۲\times۶^۲$ یا $۸۳=۲\times۱^۲+۹^۲$. برای‌اینکه عدد اولی به‌فرم $p=x^۲+۳y^۲$ باشد (x و y اعداد طبیعی) لازم وکافی است که p شکل $(۴k+۱)$ را پیداکند. هر عدد اولی بدین فرم تنها یك تجزیه به‌شکل $x^۲+۳y^۲$ دارد. برای‌مثال:

$$۱۹=۴^۲+۳\times۱^۲ \ \text{و} \ ۱۳=۱^۲+۳\times۲^۲$$
$$۷=۲^۲+۳\times۱^۲ \ \text{و} \ ۳۷=۵^۲+۳\times۲^۲$$
$$۳۱=۲^۲+۳\times۳^۲$$

تخمین زده‌اند که تعداد نامحدودی عدد اول به‌فرم $(۶k+۱)$ وجود دارد بطوری‌که $p=۱+۳y^۲$ باشد (y عدد طبیعی) . به‌علاوه تعداد نامحدودی عدد p به شکل $p=x^۲+۳\times۱^۲$ وجود دارد (x عدد طبیعی) مثلا :

$$۶۷=۸^۲+۳\times۱^۲ \ \text{و} \ ۱۰۳=۱۰^۲+۳\times۱^۲$$

و از قضیهٔ (۱۷) چنین نتیجه می‌گیریم :

«برای‌اینکه عدداول p به‌شکل $x^۲+۴y^۲$ باشد لازم وکافی‌است که p فرم $(۴k+۱)$ راداشته باشد» که y,x اعداد طبیعی‌اند.

«برای اینکه عدد فرد اول p به‌شکل $x^۲-۲y^۲$ باشد لازم وکافی است که p به‌فرم $(۸k+۱)$ یا $(۸k+۳)$ باشد» که x و y اعداد طبیعی‌اند .

اکنون سؤال درمورد اعداد اولی که مجموع مکعبات دو عدد طبیعی هستندمطرح می‌شود. اگرعدداول p مجموع مکعبات دوعدد طبیعی باشد، $p=x^۳+y^۳$ ، پس $(x+y)|p$ ، در صورت بزرگتر از (۱) بودن هرکدام از اعداد xوy :

$x+y<x^۳+y^۳=p$ یعنی عدد p مقسوم علیه طبیعی $x+y>۱$ که‌کمتراز p است می‌باشد و این غیرممکن است.

بدین ترتیب می‌بایست $x=y=۱$ یعنی $p=۲$ باشد پس :

«هیچ عدد اولی بجز عـدد $۲=۱^۳+۱^۳$ مجموع مکعبات دو طبیعی نیست» .

اما کدام اعداد اول تفاضل مکعبات دو عدد طبیعی است ؟ اگـر $p=x^۳-y^۳$ عدد اولی باشد بطوری‌که x و y اعداد طبیعی‌اند $x>y$ است وداریم :

$$p=x^۳-y^۳=(x-y)(x^۲+xy+y^۲)$$

وچون عامل دوم بزرگتر از اولی است ، می‌بایست :

$$x^۲+y^۲+xy=p \quad \text{و} \quad x-y=۱$$

باشد وازآنجا :

$$p=۳x^۲-۳x+۱=x^۳-(x-۱)^۳$$

بدین ترتیب، عدد اول p، تفاضل مکعبات دوعدد طبیعی است ، تنها درصورتی‌که به‌فرم $۳x(x-۱)+۱$ باشد ($x>۱$ عـدد طبیعی) یعنی p تفاضل مکعبات دوعـدد طبیعی متوالی است . نمی‌دانیم آیا تعداد نامحدودی عدداول به‌ترتیب فوق وجوددارد؟ تخمین‌می‌زنندکه این سؤال جواب مثبتی داشته باشد. مثلابه‌ازای $x=۲,۳,۴,۵$ اعداد اول زیررا داریم :

$$۷=۲^۳-۱^۳ \quad \text{و} \quad ۱۹=۳^۳-۲^۳$$

$$۳۷=۴^۳-۳^۳ \quad \text{و} \quad ۶۱=۵^۳-۴^۳$$

اما به‌ازای $x=۶$ عدد غیر اول $۹۱=۷\times۱۳$ ونیز به‌ازای $x=۸$ و $x=۹$ اعداد مرکب :

$$۱۲۷=۷^۳-۶^۳ \quad \text{و} \quad ۲۱۷=۷\times۳۱$$

وبه‌ازای $x=۱۰,۱۱,۱۲$ اعداد اول زیر :

$$۲۷۱=۱۰^۳-۹^۳ \quad \text{و} \quad ۳۳۱=۱۱^۳-۱۰^۳ \quad \text{و}$$

$$۳۹۷=۱۲^۳-۱۱^۳$$

و به‌ازای $x=۱۳$ عدد مرکب $۴۶۹=۶۷\times۷$ و بـه‌ازای ۱۵ و $x=۱۴$ اعداد اول زیر :

$$۵۴۷=۱۴^۳-۱۳^۳ \quad \text{و} \quad ۶۳۱=۱۵^۳-۱۴^۳$$

وبه‌ازای $x=۱۶$ و $x=۱۷$ اعداد مرکب زیر :

$$۷۲۱=۷\times۱۰۳ \quad \text{و} \quad ۸۱۷=۱۹\times۴۳$$

وبه‌ازای $x=۱۸$ عـدد اول $۹۱۹=۱۸^۳-۱۷^۳$ را خواهیم داشت. بنابراین‌اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰۰ که تفاضل مکعبات دوعدد طبیعی‌اند عبارتند از :

$$۷,۱۹,۳۷,۶۱,۱۲۷,۲۷۱,۳۳۱,۳۹۷,۵۴۷,۶۳۱,۹۱۹$$

بنابراین اثبات اینکه تعداد نا محدودی عدد اول وجود داردکه تفاضل مکعبات دوعدد طبیعی‌اند آسان است . بطوری‌کـه ثابت کردیم، آن عدد اول که تفاضل مکعبات دوعدد طبیعی بـاشد به شکل $۳x(x-۱)+۱$ خواهدبودکه درآن $x>۱$ عددی‌است طبیعی. ازطرفی یکی ازاعداد متوالی و طبیعی $(x-۱)$ و x همواره‌زوج است، بدین‌ترتیب عدد اول مابایدبه‌فرم $(۶k+۱)$ باشد. اما بنا به قضیهٔ ۱۲ ، تعداد نا محدودی عدد اول به شکل $(۶k+۵)$ وجود داردوبدیهی است‌که بدین‌ترتیب هیچ عداداول به‌شکل $(۶k+۱)$ تفاضل مکعبات اعدادطبیعی نیست. بنابراین اعداد مرکبی به‌فرم $۶k+۵$ وجود داردکه تفاضل مکعبات دو عدد طبیعی است. به‌عنوان مثال:

$۲۱۵=۶\times۳۵+۵=۶^۳-۱^۳$. هرچند مشکل است، ولی می‌توان‌اثبات‌کردکه تعدادنامحدودی عدداول‌به‌شکل $(۶k+۱)$ وجود داردکه درعین حال تفاضل مکعبات دوعدد طبیعی نیستند.

به‌عنوان مثال: اعداد اول ۱۵۷,۱۳۹,۱۰۳,۶۷,۳۱

راجع به اعداد اولی‌که مجموع‌مکعبات‌اعدادطبیعی‌هستند، تخمین زده‌اند که محدودیتی در تعدادشان نیست. درواقع تخمین کلی‌تر زده شده است‌که تعداد نا محدودی عدد اول بـه‌فـرم : $x^۳+۲=x^۳+۱^۳+۱^۳$ وجود داردکه x عدد طبیعی است.

به‌عنوان مثال اعداد زیر درزمرهٔ اعداد فوق‌اند :

$$۱۲۷=۵^۳+۲ \;,\; ۲۹=۳^۳+۲ \;,\; ۳=۱^۳+۲$$

$$۲۴۳۹۱=۲۹^۳+۲$$

بازمی‌توان نشان دادکه تعداد نامحدودی عدد اول وجود داردکه مجموع مکعبات سه‌عدد صحیح و مثبت نیست .

بنابراین (همانگونه‌که به‌ازای $n=۳$ دربـالاثابت شد) نشان دادن اینکه هیچ عدد اول بزرگتراز ۲ مجموع توان nام اعداد طبیعی نیست آسان است‌که درآن n عدد فرد بزرگتر از (۱) می‌باشد .

درسال ۱۹۵۱ ، K.F.Roth ثابت‌کردکه هرعددی‌که به‌قدرکافی بزرگ (وطبیعی) باشدمجموع مکعبات ۸ عددطبیعی است‌که حد اقل ۷ تا از آنها عدد اول است .

۲۱ـ نهشتهای (*) درجهٔ دوم

هرگاه p عدد اول باشدوعدد r که به‌ازای‌آن عددصحیح

* Residue

x چنان‌باشد که (x^2-r) بر p قابل قسمت باشد ، آنرا نهشت درجهٔ دوم نسبت به p گویند .

به‌عبارت دیگر ، عدد صحیح r ، نهشت درجهٔ دوم نسبت‌به p خوانده می‌شود، اگر مربع عددصحیحی درتقسیم بر p باقیماندهٔ r را بدهد .

به ازای عدد ۲ این امر بدیهی است. اگر r فرد باشد $2|1^2-r$ وهرگاه r زوج باشد $2|0^2-r$ خواهد بود.

حال به‌فرض آنکه p عدد اول غیراز ۲ باشد. در رشتهٔ $1,2,3,\dots,p-1$ چند عدد پیدا می‌کنیم که نسبت به p نهشت درجهٔ دوم باشد ؟

بطور کلی باقیماندهٔ تقسیم x^2 بر p را به r_x نشان‌می‌دهیم به‌ازای عدد صحیح x اعداد r_x همه نسبت بـه p نهشت درجهٔ دوم خواهند شد (چون $p|x^2-r_x$). بویژه‌هریك ازاعدادزیر :

$$r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{2}} \qquad (I)$$

نسبت به p نهشت درجهٔ دوم هستند . $\frac{p-1}{2}$ عـــددی است طبیعی زیرا p را عددی اول وفرد فرض کردیم ، بدیهی است که اعداد دستگاه (I) غیرصفرند(زیرا اعداد $1^2, 2^2, \dots, (\frac{p-1}{2})^2$ بر p بخش پـذیر نیستند) . بدین ترتیب متفاوت بودن اعداد دستگاه (I) واضح است.

به فرض برای تعدادی از اعداد طبیعی i و j داشته باشیم $i<j\leq\frac{p-1}{2}$ که $r_i=r_j$ باشد. این شرط بـدان معناست که اعداد i^2 و j^2 درتقسیم بر p باقیماندهٔ یکسانی می‌دهند و بدین ترتیب عدد $(j^2-i^2)=(j-i)(j+i)$ بر p قابل‌قسمت‌خواهد بود. اما بنابه نامساوی فوق‌اعداد $(j-i),(j+i)$ اعدادطبیعی وهر دوکمتر از p هستند (زیرا $j+i<2j\leq p-1<p$) و عدد اول p نمی‌تواند مقسوم علیه حاصل‌ضرب دوعدد طبیعی کمتر از p باشد. پس‌ثابت شدکه به‌شرط $i<j\leq\frac{p-1}{2}$ داریم $r_i\neq r_j$

بنابراین ، حداقل $(\frac{p-1}{2})$ نهشت درجهٔ‌دوم‌نسبت به p بین‌اعداد $1,2,3,\dots,p-1$ وجود دارد. حال نشان می‌دهیم که دراین دستگاه نهشتهای درجهٔ دوم زیادی نسبت به p بجز اعداددستگاه (I) وجود ندارد.

برای اثبات فرض می‌کنیم کـه r عددی است در دستگاه $(1,2,\dots,p-1)$ که نهشت درجهٔ‌دوم نسبت‌به p است. بنابراین عدد صحیح a چنان وجود دارد که $p|a^2-r$ باشد و از آنجا نتیجه می‌گیریم:

$$p|(a^2)^{\frac{p-1}{2}}-(r)^{\frac{p-1}{2}}$$

بنابرآنکه عدد r بر p قابل‌قسمت نیست، عدد a بر p بخش پذیر نمی‌باشد. بنابه قضیهٔ فرما داریم:

$$p|a^{p-1}-1$$

اما : $p|a^{p-1}-r^{(\frac{p-1}{2})}$ واز این‌دو $p|r^{(\frac{p-1}{2})}-1$ است

پس : $p|r_i^{(\frac{p-1}{2})}-1$

به‌ازای $i=1,2,\dots,\frac{p-1}{2}$.

بنا به قضیهٔ لاگرانژ چند جملـه‌ای $x^{\frac{p-1}{2}}-1$ نمی‌تواند بر p به‌ازای بیش از $\frac{p-1}{2}$ عدد قابل‌قسمت باشد. بنابراین‌ثابت کردیم که :

قضیهٔ ۲۰ـ هرگاه p عـدد فـرد و اول باشد، دستگاه $(1,2,3,\dots,p-1)$ درست به‌تعداد $\frac{p-1}{2}$ نهشت درجهٔ دوم نسبت به p دارد.

ازاثبات قضیه نتیجه می‌گیریم که برای بدست‌آوردن تمام اعداد دستگاه $(1,2,\dots,p-1)$ که نهشتهـای درجهٔ دوم نسبت به p هستند کافی است باقیماندهٔ تقسیم اعداد $[1^2,2^2,3^2,\dots,(\frac{p-1}{2})^2]$ را بر p پیدا کنیم.

بدین طریق به‌عنوان مثال همهٔ نهشتهای درجهٔ دوم نسبت به ۱۳ راپیدا می‌کنیم که‌کمتر از۱۳ بوده وعبارتند از:

۱،۴،۹،۳،۱۲،۱۰

بطوری‌که دربالاگذشت، عدد r در دستگاه $(1,2,\dots,p-1)$ نهشت درجهٔ دومی‌است نسبت‌به عدد p فقط و فقط به شرطـی که $r^{\frac{p-1}{2}}-1$ بر p بخش پذیر باشد.

هرگاه عدد a ازدستگاه نهشت درجهٔ دوم نسبت‌به p نباشد

دنباله در صفحهٔ ۳۳۸

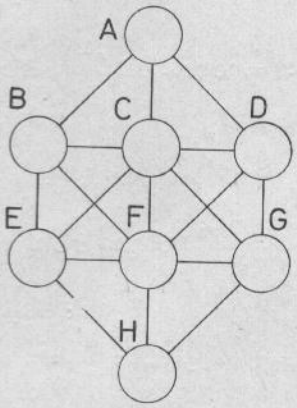
هشت مسئله

نوشتهٔ : مارتین گاردنر

ترجمهٔ: مهندس داویدریحان

۱ـ مسئلهٔ جایگذاری ارقام

ارقام ازیك تا ۸ راطوری در ۸ دایرهٔ شکل قراردهیم که دو رقم متوالی از این سری ، در روی شکل مجاور یکدیگر قرار نگیرند ، یعنی دو رقم متوالی در دو دایـرهٔ مجاورکـه بوسیلهٔ یك قطعه خط به هم مربوط شده‌اند، واقع نشوند، اگرفرض کنیم که عدد ۵ رادردایرهٔ بالائی قراردهیم، دیگر نمی‌توانیم هیچکدام از ارقام ۴ و ۶ را در سه دایره‌ای که درردیف دوم واقعند و مستقیماً بوسیلهٔ یك قطعه خط راست به دایرهٔ بالائی مرتبط شده‌اند، قراردهیم .



درصورتی که جوابهای یکسانی راکه ازدوران ویا تقارن ازیك جواب واحد بدست می‌آیند، به‌عنوان یـك جواب منحصر درنظربگیریم، برای این مسئله یك جواب منحصر به‌فرد وجود دارد. ولی، بدون پیگیری ازیك روش منطقی دست‌یافتن به‌چنین پاسخی بسیار مشکل است .

۲ـ دختر زیبا و پلنگ

پادشاهی نیمه‌بربر که‌بر کشوربزرگی حکمفرمائی‌می کرد، عدالت رابه نحوعجیبی به موقع اجرا می گذارد. برتخت بلندی که مشرف به‌میدان بود می‌نشست. درجلوی او، دو در به قسمت شن ریزی شدهٔ میدان بازمی‌شد.

زندانی مورد بازجوئی می‌باید تنها یکی ازاین درهـا را برحسب تصادف بگشاید. درپشت یکی از این درها پلنگی گرسنه قراردارودرپشت دردیگر، دخترکی زیبا وخواستنی وجوددارد. اگرپلنگ ازدرگشوده شده به‌بیرون می‌جست، سرنوشت زندانی موردنظربه‌عنوان تنبیه عادلانه‌اش به‌ازای خطائی که مرتکب شده بود، این‌بودکه بوسیلهٔ حیوان خونخوار دریده شود ، ولی اگر دختر زیبا قدم به‌جلومی‌نهاد، رأی برائت اوخوانده می‌شدوبساط عقد وعروسی آندودرهمان لحظه برگزارمی‌شد.

روزی پادشاه پی به‌رابطهٔ یکی ازدرباریان بادخترش‌برد، وهمین تنبیه را برای این شخص جوان درنظر گرفت . شاهزاده خانم می‌دانست که پلنگ درپشت کدام درقراردارد. ونیزمی‌دانست که‌درپشت دردیگریکی اززیباترین زنان حرم قرار دارد. همان که وی‌چندباراورادیده‌بودومی‌دانست که اطراف‌عاشقش می‌پلکد. مردجوان می‌داندکه شاهزاده خانم دری راکه باید بـاز شود ، می‌داند. دخترپادشاه «حرکت آرام وسریعی» به‌طرف دست‌راست خودکرد. جوانك در طرف راست راگشود.ازاین‌درچه‌موجودی خارج خواهد شد : بانوی زیبا یا پلنگ ؟

پس ازاینکه با دقت تمام به‌این مسئله فکرکردم ، به این نتیجه رسیدم‌که شاید من اولین نفری باشم‌که توانسته باشم پی‌به راه حل مسئله برده باشم. دودرموردنظردرکنار یکدیگر قرار داشته وبه‌نحوی تعبیه شده‌اند یکی به‌طرف دیگری بازشود. پس ازاینکه درسمت راستی بازشود ، شخص درباری به‌سرعت درطرف چپ رابازمی‌کند ودرمثلثی که با این دودرودیوار تشکیل می‌شود کمین می‌کند.پلنگ ازیکی‌ازاین‌درها خارج‌می‌شود، وارد اطاق

دیگرمی‌شود وزن زیبا را می‌خورد.

شاه ازاین واقعه ناراحت می‌شود، خود را نمی‌بازد و یك شانس دیگررا به‌درباری می‌دهد. چون مجدداً نمی‌خواست‌شانس مساوی مرگ وزندگی‌رابه‌وی دهد، به‌جای یك‌جفت در، سه‌جفت دربه‌شن‌ریزی روبه‌میدان ایجادکرد. دریك جفت ازاین درها، دو پلنگ گرسنه مخفی شده‌اند. در جفت دوم، یك‌پلنگ ویك‌زن زیبا قراردارد. درسومی دوخواهردوقلو که ازلحاظ‌لباس وزیبائی همتای یکدیگرند، قراردارند.

مسئلهٔ جنائی که مردجوان با آن روبروست چنین است: اوباید ابتدا یك جفت در را انتخاب کند. سپس باید یکی از این دو در را انتخاب کندوآنگاه کلیداین دررا به‌طرف‌اومی‌اندازند تا دررابگشاید. اگرپلنگ خارج شود، زندگی اوسرخواهد آمد. اگربانوی جوانی‌درآن‌باشد، درفوراً بسته خواهدشد. زن‌جوان وهمراه نامشخص(خواهردوقلویش یاپلنگ) مجدداً بین دواطاق تقسیم می‌شوند وبرای این منظورازیك سکه طلاکه دریك رویش عکس زن ودرطرف دیگر عکس پلنگ نقش بسته است، استفاده می‌شود واطاق مربوطه تعیین می‌شود. مرد جوان بدون اینکه بداند وضعیت جدید با وضع قدیم فرق‌کرده و یا به‌همان صورت است، باید دومین انتخاب را بنماید. اگرپلنگ را انتخاب کند، وای به‌حالش؛ ولی اگرزن جوان را برگزیند، دراطاق‌مجدداً به‌هم‌کوبیده می‌شود وقرعه سرنوشت بازهم انداخته خواهد شدتا درباری بتواندآخرین انتخاب رابین دودرانجام دهد. اگربخت برای بارسوم‌هم برروی اولبخندبزند، بازن‌جوان ازدواج‌خواهد کرد و آزمایشها پایان خواهدگرفت.

روزقضاوت فرا رسیدوهمه چیزمطابق معمول‌وپیش‌بینی‌شده سپری شد. دردوباراول،درباری درمربوط به‌زن جوان راانتخاب کرد. وی هرچه‌کردنتوانست بفهمدکه دومین زن جوان همان اولی بوده است یا خیر، معهذا نتوانست بطورقطع به‌نتیجهٔ غائی برسد.عرق سردی برپیشانی‌اش نشست، شاهزاده خانم‌نیزهمچون مرمرسپیدی رنگ ازرخساره‌اش پرید، زیرا اونیز به‌نوبهٔ خود نمی‌دانست پشت درها چه خبراست.

احتمال دقیق اینکه مرد جوان درسومین انتخاب خود، زن جوان را برگزیند، چقدراست؟

۳ـ مسابقه تنیس

دریك ست تنیس میراندا شش برسه بر دزمری پیروز شده است. پنج امتیازازمجموعهٔ امتیازهای گرفته شده‌بوسیلهٔ بازیکنی که سرویس نداشته گرفته شده است. درابتدای ست چه‌کسی سرویس‌کرده است؟

۴ـ چهارگلولهٔ رنگین تیله بازی

شخصی دارای دودسته گلولهٔ تیله بازی است. دردستهٔاول ده‌گلولهٔ تیره ودردستهٔ دوم ده‌گلولهٔ روشن وجود دارد. این شخص دارای فکر ریاضی است ودریك بعداز ظهربه مسئلهٔ زیر فکرکرد: آیا می‌توان ده‌گلوله را باهم قاطی‌کرد، سپس بطور دلخواه ده تای آنها را انتخاب کرد و آنها را طوری چید که تشکیل یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع‌بدهند ودرضمن‌سه‌گلولهٔ همرنگ رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل ندهند؟

اگر چنین امری ممکن است، طریق نیل به آنرا شرح دهید. درغیراین‌صورت، عدم امکان چنین وضعی را ثابت‌کنید. این مسئله را می‌توان به راحتی بوسیلهٔ مهره‌های شطرنج که از دورنگ متفارت تشکیل شده‌اند، مورد مطالعه قرارداد.

۵ـ مسئلهٔ شش چوب‌کبریت

پروفسور لوسیوس. اس. ویلیامز هرچندکه‌کمی از مرحله پرت است معهذا یکی از توپولوژیست‌های برجسته به شمارمی‌رود. اسم واقعی او ویلسون است ولی، وقتی‌محصل‌بود، ملاحظه‌کردکه تمام حروف (Lucius Sims Wilson) اسمش اگربا حروف بزرگ نوشته شود مجموعه حروفی بدست می‌آیدکه به‌استثنای حرف O از لحاظ توپولوژیکی معادلنداین موضوع آنچنان وی را ناراحت‌کردکه تمام مراحل قانونی را برای تغییرنامش پیگیری کرد.

اخیراً درضمن یك میهمانی ناهار با اوبرخوردکردم واز اینکه می‌دیدم به کمك شش چوب کبریت دارد شکلهائی را روی میز درست می‌کند با کمال امیدواری از او پرسیدم که «بازهم یك مسئله جدید توپولوژیکی»؟

اودرپاسخ گفت: «ازبرخی لحاظ بلی، می‌خواهم بدانم که به‌کمك شش عدد چوب‌کبریت‌که به‌صورت مسطح روی یك میز قرارگرفته باشند ودرضمن همدیگررا قطع نکنند وفقط با انتهایشان با هم تماس داشته باشند، چند شکل می‌توان درست کردکه ازلحاظ توپولوژیکی با هم متفاوت باشند.»

«این مسئله نباید برای شما مشکل باشد»

«اینطورکه خیال می‌کنید نیست. می‌خواهم‌تمام اشکالی‌را که می‌توان با تعدادکمترازشش عدد چوب‌کبریت ساخت،درست

کنم.» اویك پاکت را به سمت من درازکرد که درپشت آن‌جدول (شکل زیر) رابه صورت کج ومعوج ومچاله ترسیم کرده بود.

من به او گفتم :

«فکر نمی کنید که یکی ازشکلهای پنج چـوب کبریتی را فراموش کرده باشید ؟ شکل سوم راکـه یك مربع دم دار است نگاه کنید. می‌توانستید این دم را به‌جای اینکه درخـارج مربع قراردهید، درداخل آن قراردهید. واگر چوب کبریت‌ها ملـزم به بودن دریك صفحه باشند، واضح است که بوسیلهٔ یك‌تغییرشکل پیوسته نمی‌توان ازیك شکل به شکل دیگررسید.»

ویلسون شانه‌هایش را بالا انداخت. «این خطا معمولادر مورد تعادل توپولوژیکی تکرارمی‌شود. درست است که اگر یك شکل را بوسیلهٔ یك دسته‌کش وواکشهایی کـه آنرا نشکند ونیز پاره نکند، بتوان به‌شکل دیگری تبدیل کرد، باید این دو شکل ازلحاظ توپولوژیکی‌یکسان‌ودقیقاً طبق‌زبان محاورهٔ توپولوژیکی همشکل (همومرف) باشند، ولی عکس موضوع درست نیست . درصورتی که دوشکل همومرف باشند ، همواره نمی‌توان بوسیلهٔ تغییر شکلهایی ازیکی به دیگری رسید.»

ـ «معذرت می‌خواهم !»

تعداد شکلهای متعادل توپولژیکی

تعداد چوب کبریتها	
1	1
2	1
3	3
4	5
5	10
6	?

ـ «شما توپولوژیست نیستید. دو شکل وقتی همومرفند که بین تمام‌نقاط وتمام حرکاتی که ازیك نقطه واقع براولی برخاسته وبرحرکتی وابسته به نقطهٔ مربوط بـه دومی اثـر کند، بتوان رابطه‌ای یك‌به‌یك بدست آورد. برای روشن شدن موضوع‌می‌توان یك قطه ازیك ریسمان راکه به‌صورت یك حلقهٔ بسته است مثال زدکه با یك حلقه ازریسمانی که دارای یك گره است ، همومرف است وبوسیلهٔ‌تغییرشکل نمی‌توان‌ازیکی به‌دیگری رسید. دوکرهٔ مماس خارج با دوکرهٔ نامساوی که مماس داخل باشند، همومرف است .»

می‌باید از حرف اوتعجب کرده باشم چراکه وی بلافاصله اضافه کرد : «گوش کنید، الساعه راهی رابه شما نشان خواهم دادکه بتوانید این موضوع را برای‌خوانندگانتان تشریح کنید. شکلهای درست شده‌بوسیلهٔ چوب کبریتهای‌من‌درصفحه‌واقع بودند ولی فرض کنیم که دربارهٔ نوارهای کشی بحث کنیم. می‌توانیم‌آنها را دردست بگیریم، به دلخواهمان آنرا دستکاری کنیم، و اگر خواستیم آنرا پشت وروکنیم وآنها را سرجایشان بگذاریم . در هردفعه‌ای که ازیك‌شکل به شکل دیگر رسیدیم می‌توانیم بگوئیم که دوشکل ازلحاظ توپولوژیکی معادلند . به اوپاسخ دادم‌که : «خودم می‌بینم . اگریك ساخت را درنظر بگیریم که دریك فضای بالاترقرارداشته باشد، می‌توان آنرا تغییرشکل داد به نحوی‌که ساخت دیگـری بوجود آوردکـه از لحاظ توپولوژیکی معادل اولی باشد.»

«دقیقاً همینطوراست . یك حلقه طناب یا دوکره‌ای راکه قبلا دربارهٔ آنها بحث کردیم، درنظربگیرید. بدون اینکه حلقه را پاره کنیم، می‌توان گره‌رابست یاباز کرد. کرهٔ کوچك‌می‌تواند داخل یا خارج کرهٔ بزرگ باشد.»

بادرنظر گرفتن‌چنین تعریفی که درموردتعادل‌توپولوژیکی صورت گرفت، خوانندهٔ جستجوگر باید تعداد دقیق شکلهایی را که ازلحاظ توپولوژیکی متفاوتند، تعیین کند، البته تعدادچوب کبریتها شش عدداست وهمگی دریك صفحه خواهند بود.درضمن باید توجه داشت که خود چوب کبریتهاصلب می‌باشندوطول‌همگی باهم برابراست. این چوب کبریتها را نمی‌توان خم کرد یاکشید ونیز نباید روی همدیگر را بپوشانند وتنها تماسشان بـایـد در انتهایشان صورت گیرد. واما هربارکه یك‌شکل‌درست شد،می‌توان آنرا ارتجاعی وازجنس لاستیك فرض کرد وبا این فرض می‌توان آنرا ازتوی صفحه بلندکرد، درفضای سه‌بعدی پشت و روکرد و آنگاه آنرا توی صفحه قرارداد. شکلهای حاصلـه نمودارهایی هستندکه رأسهایشان یعنی نقاطی که چوب کبریتها با یکدیگردر

تماسند، باید یکسانی خود را حفظ کرده باشند. در این صورت یك مثلث با یك مربع یا یك پنج ضلعی معادل خواهد بود ؛ یك زنجیر ازدوچوب کبریت باهرزنجیرساده که به هرطول دلخواهی باشد، معادل است ؛ تمام حروف بزرگ T،F،E و Y با هم معادلند؛ حرف R با تصویر آینه‌اش معادل است‌والخ .

۶ـ دومسئلهٔ شطرنج : تهدید حداقل و تهدیدحداکثر

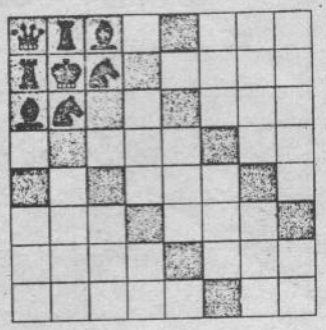
دربازیهای شطرنج گاه مواردی پیش می‌آید که برای‌بازی کردن آن اجباراً احتیاج به دوحریف نیست ، مهره‌ها و صفحهٔ شطرنج تنها برای طرح یك پرسش ریاضی مورد بهره برداری قرارمی گیرند.دراینجا دومثال کلاسیك رابرای‌تکمیل مطالب‌اخیر ذکر می کنیم :

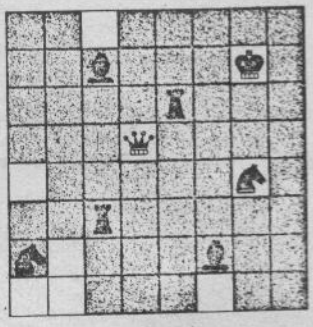
۱ـ مسئلهٔ تهدید حداقل : هشت مهرهٔ همرنگ شطرنج را (شاه ، وزیر ، دو فیل ، دو اسب و دو رخ) طوری روی صفحهٔ شطرنج قرار دهید که تعداد خانه‌های مورد تهدید به حداقل خود برسد. واضح است که یك مهره خانهٔ خودش را تهدید نمی کند ولی خانه‌هائی را که بوسیلهٔ سایر مهره‌ها اشغال شده است می‌تواند تهدید کند. درشکل زیر(چپ) تعداد ۲۲خانهٔ سیاه مورد تهدید واقع شده‌اند، معهذا این تعداد را می‌توان تقلیل داد. دراین مسئله لازم نیست که دوفیل الزاماً در دوخانه‌با دو رنگ مخالف قرارگیرند .

۲ـ مسئلهٔ تهدید حداکثر : همین هشت مهره را طوری درروی یك صفحهٔ شطرنج قرار دهید که تعداد خانه‌های تهدید شده به‌حداکثر مقدار خود برسد. دراینجا نیز، یك مهره نمی‌تواند خانهٔ مربوط به‌خودش را تهدیدکند ولی خانه‌های اشغال شده دیگر را می‌تواند مورد تهاجم قرار دهد. تعداد ۳۵ خانهٔ سیاه ازشکل زیر (راست) تهدید شده‌اند. این تعداد از مقدار حداکثر خود بسیار دوراست .

درصورتی که دوفیل درروی خانه‌های‌همرنگ واقع‌باشند، اثباتی برای تعیین تعداد حداکثرخانه‌های مورد تهدید وجود دارد. ولی اگر دوفیل‌در دو خانه‌با رنگهای مخالف قرار داشته باشند، اثباتی معادل با این اثبات وجود ندارد. تصور می‌شود که خواه فیلها درخانه‌های همرنگ واقع باشند ویا در خانه‌های با رنگهای مختلف قرار داشته باشند، تعداد حداقل خانه‌های‌تهدید شده برابربا هم باشد ولی‌این حدس برهیچ اثباتی استوارنیست.

واینگونه مسائل آنچنان وقت‌متخصصین رابه‌خود مشغول‌داشته‌اند که نمی‌توان این وضعیت را تغییرداد. درصورتی که خواننده‌ای قادربه‌انجام چنین‌کاری باشد، بدون شك تحول عظیمی در دایرهٔ بازیکنان شطرنج بوجود خواهدآورد .





۷ـ مسافت طی شده بوسیلهٔ اسمیث‌ها چقدر است ؟

یك روز صبح ، حدود ساعت ۱۰ آقای اسمیث و خانمش خانهٔ خود راکه در کانکیتیکان‌واقع بودبا اتومبیل به‌سمت‌خانه والدین عیالش‌واقع‌در پنسیلوانیا، ترك کردند. آنها تصمیم گرفتند که برای صرف ناهار دررستوان شمع وگل و پروانه واقع در ونچستر توقف کنند .

این دیدار پدرومادرزن اسمیث که باعث واردشدن‌خدشه‌ای درکارهایش شده بود، ازوی موجودی ساکت ساخت . در حدود ساعت یازده بودکه بالاخره خانم اسمیث سکوت را شکست : «عزیزم ، خیلی راه رفته‌ایم ؟»

آقای اسمیث نگاهی به‌کنتور ماشین‌کرد وگفت : «نصف راهی راکه باید تا رستوران برسیم ، طی‌کرده‌ایم .»

ظهر به‌رستوران رسیدند، همان وقت ناهارخود را صرف کردند وبه‌راه خود ادامه دادند. سکوت جدید نیز تا حدود ساعت پنج بعدازظهر ادامه داشت تا اینکه خانم اسمیث در۲۰۰ مایلی محلی‌که اولین سؤالش راکرده بود، برای باردوم سکوت را شکست : «عزیزم ، چقدر دیگر راه مانده است ؟»

آقا با غرغر جواب داد : «نصف راهی راکه از اینجا تا رستوران فاصله داریم» .

بالاخره ساعت هفت شب به مقصد رسیدند. به علت تراکم ترافیك آقای اسمیث مجبوربودکه با سرعت متغیری راه خودرا بپیماید . حال مسئله‌ای‌که پیش می‌آید این است‌که فاصلهٔ دقیق پیموده شده‌بوسیلهٔ آقای اسمیث برای رفتن ازخانهٔ خود به‌خانهٔ فامیل خانمش ، چقدراست ؟

۸ـ پیشگوئی یك محاسبه بوسیلهٔ انگشتان دست

دریکی ازروزهای آخر سال ، توجه این ریاضیدان به طریقهٔ جالبی که دختر کوچکش برای شمردن به کمك انگشتان دست چپش بکار می‌بست، معطوف شد. دخترك برای هر کدام از انگشتانش عددی را قائل شده بود، برای انگشت شصت ۱، برای انگشت اشاره ۲، انگشت وسطی ۳، انگشت چهارمی ۴، برای انگشت کوچك ۵، وسپس در موقع برگشت برای انگشت چهارم ۶، انگشت وسطی ۷، انگشت اشاره ۸، انگشت شصت ۹ را در نظرمی گرفت ومجدداً قبل ازاینکه درجهت دیگر حرکت کند ، عدد ۱۰ را برای انگشت اشاره ، ۱۱ را برای انگشت وسطی وبه همین ترتیب تا به‌آخر ادامه می‌داد. دختربچه پس‌ازشمارش دریك جهت ، در جهت دیگر به شمارش خود ادامه داد تا اینکه عدد ۲۰ را روی انگشت چهارمی خود یافت.

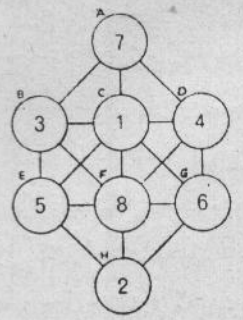
پدرش ازاو سؤال کرد . «چه می کنی ؟»

ودخترك اعتراض کنان جواب داد : «فراموش کردم کجا بودم . باید ازنوشروع کنم. می‌خواهم تا عدد ۱۹۶۲ بشمارم تا ببینم روی کدام انگشتم می‌رسم.»

ریاضیدان چشمانش را بست وبه کمك محاسبهٔ ذهنی بسیار ساده‌ای اظهار داشت : «توبه انگشت ... می‌رسی» پس‌از اینکه دختربچه به‌حساب خودپایان داد، ملاحظه کرد که حق با پدرش بوده است : وی آنچنان تحت تأثیر قدرت استنتاجی پدرش‌قرار گرفت که تصمیم گرفت کوشش خود را برای دروس حسابش دو برابرقبل کند. پدر اوچگونه‌توانسته بود، چنین امری را پیش‌بینی کند و انگشت مورد حدس اوکدام بوده است ؟

پاسخها

۱ـ درصورتی که ارقام از ۱ تا ۸ را آنطورکه در شکل زیر نمایانده شده است ، درروی دوایر مربوط قراردهیم ، هیچ عددی رانمی‌توان یافت که با یك خط به‌عددی که بلافاصله بعد یا قبل از آن باشد ، مربوط شده باشد. این جواب منحصر به‌فرد است ولی می‌توان آنرا سروته‌کرد یا اینکه جای اعداد چپ وراست را با هم عوض کرد.



برای این مسئله راه حل منطقی زیر را می‌توان عنوان کرد. دردنباله اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ بجزدورقم ۱ و ۸ هر رقم دارای دوهمسایه است . درروی شکل ، دایرهٔ C بجز با H با تمام دوایرمربوط است . درصورتی که یکی ازاعدادغیرمشخص ازمجموعه ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ را درآن قرار دهیم، تنها دایرهٔ H است که می‌تواند یکی ازدوهمسایه این عدد را درخودجای‌دهد. این امرغیرممکن است وبنابراین درون C بایدعدد ۱ یا ۸قرار گیرد. همین استدلال درمورد دایرهٔ F نیز بکار می‌رود. باتوجه به تقارن شکل،فرق نمی‌کند که عدد ۱ یا ۸ را در C قراردهیم پس عدد ۱ را در C قرار می‌دهیم . عدد ۲ را فقط می‌توان در دایرهٔ H قرار داد. به‌همین ترتیب، دایرهٔ F حاوی ۸ خواهد بود و فقط دایرهٔ A خواهد توانست عدد ۷ را در خود جای دهد. پس، توزیع بقیهٔ اعداد درسایر دوایرساده خواهد بود .

دو نفردیگر که‌این مسئله راحل کرده‌اند برای‌آن نمودار جدیدی رسم کرده‌اند که شبکهٔ خطوط‌قدیمی بوسیلهٔ شبکهٔ‌جدیدی ازقطعه خطوط جانشین شده است که این قطعه خطوط دوایری راکه قبلابه هم مربوط نبوده‌اندبه‌هم وصل می کند.ومسئله بدین‌صورت درمی‌آید که ارقام را طوری دردوایرجای دهیم که بتوان یك مسیر پیوسته را از ۱ تا ۸ دنبال کرد. با مطالعهٔ این نمودار ، به‌راحتی می‌توان ملاحظه کرد که فقط به‌چهار صورت می‌توان ارقام را بطور صحیح قرارداد واین چهار جواب ازدوران یا برگردان یکی از جوابها که جواب منحصر مسئله‌است، بدست می‌آیند .

۲ـ مسئلهٔ زن جوان و پلنگ صورت تلطیف شده مسئلهٔ مشهورگلوله‌های شنی ریاضیدان بزرگ فرانسوی پیرسیمون دولاپلاس است. ملاحظه می‌شود که‌درسومین‌آزمایش، مردجوان برای انتخاب زن جوان دارای شانس ۹ روی ۱۰ است. دری که پشت‌آن دوپلنگ نهفته شده بودند، دراولین آزمایش‌که به یك زن جوان برخورده است ، حذف می‌شود: بنابراین برای سری کامل سه‌آزمایش، ده‌امکان وجود دارد.

درصورتی که درپشت‌درهای انتخاب شده‌دوزن جوان‌مخفی شده باشند:

خانم ۱ ـ خانم ۱ ـ خانم ۱
خانم ۱ ـ خانم ۱ ـ خانم ۲
خانم ۱ ـ خانم ۲ ـ خانم ۱
خانم ۱ ـ خانم ۲ ـ خانم ۲

خانم ۲ ـ خانم ۱ ـ خانم ۱
خانم ۲ ـ خانم ۱ ـ خانم ۲
خانم ۲ ـ خانم ۲ ـ خانم ۱
خانم ۲ ـ خانم ۲ ـ خانم ۲

در صورتی که در پشت در یك‌زن جوان و یك پلنگ مخفی شده باشند :

خانم ۳ ـ خانم ۳ ـ خانم ۳
خانم ۳ ـ خانم ۳ ـ پلنگ

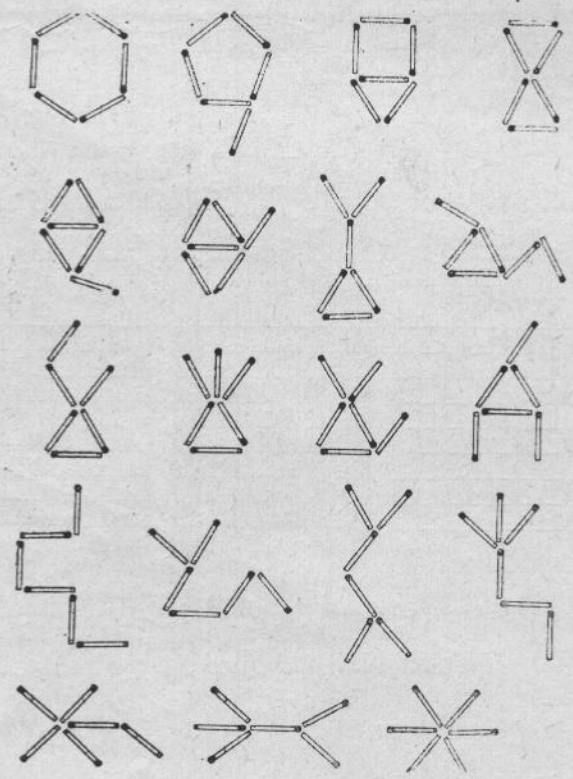
ازبین این ده احتمال، تنها یکی خطر جانی دارد. پس احتمال زنده ماندن مرد جوان ۹ روی ۱۰ است .

۳ـ کسی که اولین بار سرویس کرده است پنج بار و دیگری چهاربارسرویس کرده است . فرض می کنیم کسی که‌اولین بارسرویس کرده است ازپنج توپ خود x باربرنده شده باشد و از چهارتوپ دیگری y تا را بدست‌آورده باشد. بنابراین‌تعداد کل توپهای ازدست رفته بازیکنی که سرویس کرده است برابربا $5-x+y$ است . بنابرفرض این مقداربرابربا عدد ۵ است؛ درنتیجه $x=y$ است وبنابراین‌اولین بازیکن $2x$ ازکل‌توپها را بدست آورده است. چون این عدد زوج است و میراندا تنها کسی است که تعداد توپهایش زوج است ، پس اجباراً وی اولین کسی بوده است که سرویس کرده است.

۴ـ پاسخ بـه‌این پرسش منفی است . یعنی نمی‌توان ده گلوله را دورنگ مختلف را باهم مخلوط کرد و ازتوی آنها ده گلوله از قرعه کشید وبا آنها مثلثی ساخت که سه مثلث همرنگ هرگز برروی رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع واقع نباشند . این امررا به‌راههای مختلفی منجمله طریقهٔ زیر می‌توان اثبات کرد :

فرض می کنیم که دورنگ مورد نظر قرمز ومشکی باشدو رنگ کلولهٔ شمارهٔ۵ را قرمز درنظرمی گیریم. گلوله‌های ۴،۹و ۳ یك مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند ؛ بنابراین حداقل یکی ازاینها بایدقرمزرنگ باشند. چون‌شکل متقارن‌است، اهمیتی ندارد که واقعاً کدامیك‌ازاین گلوله‌هاقرمز باشد؛ پس‌فرض می کنیم که رنگ گلولهٔ۳ قرمزباشد. پس گلوله‌های ۲ و ۶ باید مشکی باشند. گلوله‌های ۲،۶ و ۸ یك مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازندو بنابراین گلولهٔ۸ باید اجباراً قرمز باشد. این موضوع ایجاب می کندکه گلوله‌های ۴ و ۹ قرمز باشند . گلولهٔ ۱۰ نمی‌تواند مشکی باشدزیرا باگلوله‌های ۶و۹ یك مثلث سیاه تشکیل می‌دهد؛ درضمن همین گلوله نمی‌تواند قرمزهم باشد زیر باگلوله‌های قرمز ۳ و ۸ تشکیل یك مثلث می‌دهد. بنابراین گلولهٔ شمارهٔ ۵ که ازآن شروع به بحث کردیم نمی‌تواند قرمز باشد. و همین استدلال نشان می‌دهد که این گلوله نمی‌تواند سیاه رنگ باشد .

۵ـ ازشش چوب کبریب می‌توان نوزده شکل درست کرد که ازلحاظ توپولوژیکی متفاوت باشند ودرضمن طوری درصفحه واقع باشند که رویهم سوارنشده و درعین حال فقط با انتهایشان باهم درتماس باشند. این نوزده تصویردرشکل زیرنموده شده‌اند. اگربه‌جای اینکه مقید به بودن در یك صفحه باشیم، به فضای سه‌بعدی عبورکنیم، تنها یك شکل اضافی پدیدار خواهدگشت . یك چهار وجهی،

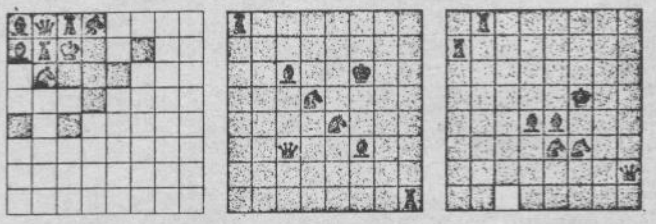


۶ـ درشکل زیر (چپ) طریقهٔ قرار دادن هشت مهرهٔ همرنگ روی صفحهٔ شطرنج نشان داده است ، بطوری که دیده می‌شود فقط شانزده خانه موردتهدید واقع شده است. اگرجای وزیر و فیل خانهٔ گوشه‌ای عوض شود یکی دیگر از جوابهایی بدست می‌آید که حداقل تهدید موردنظربوده و فیلها درخانه‌های همرنگ واقع باشند . تصور می‌شود که خواه فیلهادر خانه‌های همرنگ واقع باشند وخواه درخانه‌های با رنگهای مخالف‌قرار گیرند، جواب مربوط به‌حداقل تهدیدهمین باشد. همین‌وضعیت برای دومسئلهٔ می‌نیمم دیگر به‌عنوان پاسخ قید می گردد : تعداد

حرکتهای حداقل (ده) و عدهٔ مهره‌های متحرك حداقل (سه) است .

درشکل زیر (وسط) چگونگی قراردادن هشت مهره روی صفحهٔ شطرنج نشان داده‌است وبطوری که دیده می‌شود همهٔ خانه‌ها همزمان با یکدیگر مورد تهدید واقع شده‌اند و بالمآل وضعیت اخیرمربوط به‌حالت حداکثر است . تصورمی‌شودکه اگردوفیل برروی خانه‌های بارنگهای مخالف قرارگیرند، عدد حداکثربه ۶۳ خانه تقلیل یابد. برای این حالت راه‌حلهای زیادی وجود دارد. درشکل ۴۰ یکی ازاین جوابها نمایانده شده است. تعداد جوابهای مختلفی‌که برای حالت اخیر وجود دارد هنوز معلوم نیست .

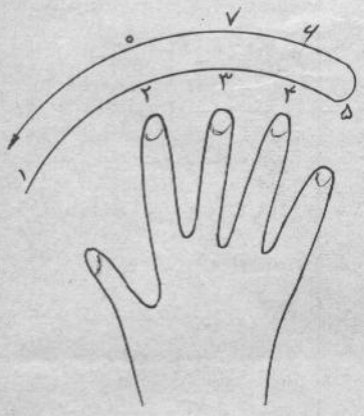
مسئلهٔ تهدید حداکثر با فیلهای بـرخانه‌های با رنگهای مخالف برای اولین باربا یك شرط اضافی مطرح شد وآن اینکه شاه باید درتنها خانـه‌ای بـاشدکـه مورد تهدید واقع نشود . خوانندگان می‌توانند سرگرم پیداکردن یکی از جوابهایی که داری چنین خاصیتی‌باشند شوند ویا اینکه‌شکلی رابدست‌بیاورند



که یکی ازخانه‌های گوشه‌ای ازگزند تهدیدهای مهره‌های دیگر در امان باشد (که پیداکردن آن بسیار مشکل است).

۷ـ برای پیداکردن فاصلهٔ طی شده بوسیلهٔ اسمیث‌ها در مسافرتشان از کانکتیکات به پنسیلوانیا ساعاتی‌کـه در صورت مسئله ذکر شده است غیر ضروری است چراکـه سرعت اتومبیل اسمیث متغیر بوده است. دردونقطه ازجـادهٔ خانم اسمیث سؤال کرده است. پاسخهای آقا به‌ترتیب معلوم کرده‌اندکه فاصلهٔ اولین نقطه از رستوران برابربا دوسوم فاصلهٔ نقطهٔ عـزیمت از همین رستوران است ونیز فاصلهٔ دومین نقطه‌ازرستوران برابربادوسوم فاصلهٔ رستوران از آخرمسیراست . فاصلهٔ بین این دونقطه برما معلوم است ومی‌دانیم‌که برابربا ۲۰۰ مایل است و برابر با دو سوم فاصلهٔ کل است‌که مقداراخیر برابربا ۳۰۰ مایل می‌باشد . ازروی شکل زیرنحوهٔ استدلال روشن می گردد.

۸ـ درصورتی‌که فرزند ریاضیدان اعدادازیك تا ۱۹۶۲ رابوسیلهٔ انگشتان‌خود و باهمان‌روش‌ذکرشده‌انجام دهد،عددآخرروی‌انگشت اشاره‌اش خواهد رسید. شمارش انگشتی بوسیلهٔ مدار رسم شدهٔ در شکل زیر انجـام می‌شود . برای این منظورکـافی است از همنهشتی مدول



۸ استفاده‌کنیم تا ببینیم عـدد مطلوب روی کـدام انگشت اصابت می‌کند. کافی است این عدد را بر ۸ تقسیم‌کنیم، باقیماندهٔ‌تقسیم را درنظربگیریم ومطابق شکل‌ببینیم‌که عدد موردنظرمربوط بـه کدام انگشت است. با تقسیم ۱۹۶۲ بر ۸، باقیمانده ۲ بدست می‌آید و بنابراین شمارش باید در روی انگشت اشاره پایان پذیرد .

دنبالهٔ پاسخها ... (ازصفحه۳۳۹)

ومخرج در سیستم دهی باحروف رومی است . اولین‌گروه III نتیجه نیز در دستگاه دهدهی رومی و دومی در دستگاه دوگانـی است.

۲۶ـ دومین‌گیلاس را برمی‌داریم و قبل از اینکه آنـرا سرجـایش بگذاریـم ، محتوایش را در پنجمین گیلاس خالـی می‌کنیم.

۲۷ ـ ده.

۲۸ـ « تعداد کلمات این جمله دقیقاً بـرابـر با هشت نیست ».

۲۹ـ سه قلو بوده‌اند .

۳۰ـ خیر. ممکن است پنج‌ریالی شمارا بگیرد و با پس دادن یك‌ریالی کـه با شما شرط بسته است بـه شما بگوید کـه «من‌باخته‌ام» . درهرصورت شما شرط را خواهیدبرد ولی چهار ریال ازدست خواهیدداد .

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۱۰۷

حل مسائل ویژهٔ سال اول نظری وجامع

۱۰۷/۱ـ از سه‌شیء x، y وz یکی سفید، یکی سیاه و یکی سرخ است. هرگاه ترکیبهای شرطی زیر هرسه درست باشند، رنگ هریك ازسه شیء مفروض راپیدا کنید.

(۱) y سرخ است ⟹ x سفید باشد

(۲) y سیاه است ⟹ x سرخ باشد

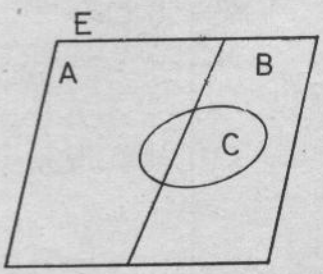
(۳) z سرخ است ⟹ y سفید نباشد

حل ـ هرگاه x سفیدباشد، بنابر (۱)، y سرخ‌است. پس y سفیدنیست وبنابر(۳)، z سرخ‌است. دراین صورت لازم می‌آید که y و z هردو سرخ باشند که خلاف فرض است. پس x سفید نیست.

هرگاه x سرخ باشد، بنابر(۲)، y سیاه است. پس y سفید نیست وبنابر(۳)، z سرخ‌است. دراین‌صورت z و x هردو سرخ می‌باشند واین نیزخلاف فرض‌است.

بنابراین x سیاه است وچون بنابر(۳)، y نمی‌تواندسرخ باشد (زیرا درآن صورت z نیزسرخ است) پس y سفیداست و در نتیجه z سرخ است.

۱۰۷/۲ـ دریك آموزشگاه مختلط؛ عدهٔ دانش آموزانی که پسریا شبانه‌روزی می‌باشند ۱۶۰ نفراست. عدهٔ دانش‌آموزانی که‌دختریاشبانه‌روزی می‌باشند۱۱۰ نفراست. عدهٔ دانش‌آموزانی که شبانه‌روزی می‌باشند ۷۰ نفراست. عدهٔ کل دانش‌آموزان این آموزشگاه چند نفراست؟



حل ـ مطابق با نمودار روبرو فرض می کنیم E مجموعهٔ کل دانش‌آموزان آموزشگاه، A مجموعهٔ دانش‌آموزان پسر، B مجموعهٔ دانش‌آموزان دختر و C مجموعهٔ دانش‌آموزانی (پسریا دختر) باشدکه شبانه روزی می‌باشند. مطابق با نمودار ملاحظه می کنیم که:

$$n(E)=n(A\cup C)+n(B\cup C)-n(C)$$

امابنا به‌فرض:

$$n(A\cup C)=۱۶۰ ،\ n(B\cup C)=۱۱۰ و\ n(C)=۷۰$$

بنابراین:

$$n(E)=۱۶۰+۱۱۰-۷۰=۲۰۰$$

۱۰۷/۳ـ فرستنده: **جواد فیض**

هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{x}{۱+t^۲}=\frac{y}{۲t}=\frac{z}{۱-t^۲}$$

ثابت‌کنید که خواهیم داشت:

$$x^۲=y^۲+z^۲$$

حل ـ فرض می کنیم:

$$\frac{x}{۱+t^۲}=\frac{y}{۲t}=\frac{z}{۱-t^۲}=k$$

دراین‌صورت به‌ترتیب داریم:

$$x=k(۱+t^۲)\Longrightarrow x^۲=k^۲(۱+t^۲)^۲$$
$$y=k(۲t)\Longrightarrow y^۲=k^۲(۴t^۲)$$
$$z=k(۱-t^۲)\Longrightarrow z^۲=k^۲(۱-t^۲)^۲$$
$$y^۲+z^۲=k^۲[۴t^۲+(۱-t^۲)^۲]=$$
$$=k^۲(۴t^۲+۱+t^۴-۲t^۲)=k^۲(t^۴+۲t^۲+۱)$$
$$=k^۲(t^۲+۱)^۲=x^۲$$

۱۰۷/۴ـ مقدار عددی عبارت $y=\frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x+\sqrt{۱+x^۲}}$ را به ازای $x=\frac{۱}{۲}(\sqrt{\frac{۳}{۴}}-\sqrt{\frac{۴}{۳}})$ بدست‌آورید.

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$x=\frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۲}{\sqrt{۳}})=\frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}$$

$$۱+x^۲=۱+\frac{۳}{۱۴۴}=\frac{۱۴۷}{۱۴۴}=\frac{۴۹\times ۳}{۱۴۴}$$

$$\sqrt{1+x^2}=\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

$$x+\sqrt{1+x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{7\sqrt{3}}{12}=\frac{6\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y=\frac{7\sqrt{3}}{12}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{6}$$

۱۰۷/۵ـ حاصل‌عبارت زیر را به‌ساده‌ترین صورت‌بدست آورید:

$$E=\frac{4a^2-1}{(a-b)(a-c)}+\frac{4b^2-1}{(b-a)(b-c)}+$$
$$+\frac{4c^2-1}{(c-a)(c-b)}$$

حل‌ـ به‌ترتیب داریم:

$$E=\frac{(4a^2-1)(c-b)+(4b^2-1)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}+$$
$$+\frac{(4c^2-1)(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

عبارت صورت این کسر را به‌ترتیب زیرعمل می‌کنیم:

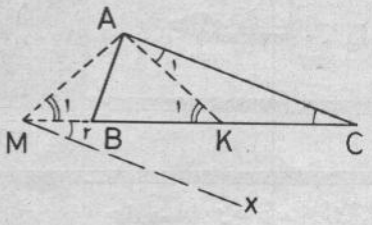
$$4a^2c-4a^2b-c+b+4ab^2-4b^2c-a+c+$$
$$+4bc^2-4ac^2-b+a$$
$$=4ac(a-c)-4b(a^2-c^2)+4b^2(a-c)$$
$$=(a-c)[4ac-4b(a+c)+4b^2]$$
$$=(a-c)[4ac-4ab-4bc+4b^2]$$
$$=4(a-c)[c(a-b)-b(a-b)]$$
$$=4(a-c)(a-b)(c-b)$$
$$=4(a-b)(b-c)(c-a)$$

نتیجه می‌شود: $E=4$

۱۰۷/۶ـ ترجمهٔ از فرانسه

درمثلث ABC زاویهٔ A قائمه واندازهٔ زاویهٔ C کوچکتر از ۳۰ درجه است. درخارج مثلث ودر امتداد CB نقطهٔ M را چنان می‌گیریم که طول AM نصف طول BC باشد. ازM خط Mx راموازی باAC رسم‌می‌کنیم. ثابت‌کنید که زاویهٔ AMx سه برابرزاویهٔ CMx است.

حل‌ـ میانهٔ AK از مثلث را رسم می‌کنیم. در هر مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وتر بانصف وتر برابراست.



پس AK نصف BC است. بنابه‌فرض AM نیزنصف BC است. پس $AM=AK$ و مثلث AMK متساوی‌الساقین است وزاویهٔ K_1 بازاویهٔ M_1 برابر است. مثلث AKC نیزمتساوی‌الساقین است و زاویهٔ C بازاویهٔ A_1 برابراست. زاویهٔ K_1 زاویهٔ خارجی‌مثلث AKC است‌پس:

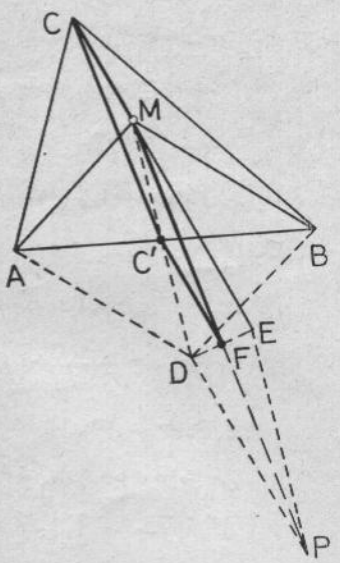
$$\angle K_1=\angle C+\angle A_1=2\angle C\Longrightarrow\angle M_1=2\angle C$$

نسبت به‌دوخط متوازی AC وMx ومورب MC دو زاویهٔ C و M_2 باهم برابرند. بنابراین:

$$\angle M_1=2\angle M_2\Longrightarrow\angle AMx=3\angle CMx$$

۱۰۷/۷ـ ترجمهٔ ازفرانسه

مثلث ABC داده شده‌است. نقطهٔ M راداخل مثلث‌انتخاب وازآن به‌سه رأس وصل می‌کنیم. CM را ازطرف M به‌اندازهٔ ME دو برابر CM امتداد می‌دهیم. دو متوازی‌الاضلاع MADB و MDPE را می‌سازیم که نقطهٔ تلاقی دوقطرآنها به‌ترتیب C' و F است. ثابت کنید که چهار ضلعی $CC'FM$ متوازی‌الاضلاع است.



حل‌ـ دوقطرهر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. پس C' وسط DM و F وسط DE است. درمثلث DEM چون C' وسط DM و F وسط DE است پس $C'F$ باME موازی و با نصف ME برابراست. بنابه فرض، CM درامتداد ME و برابر بانصف ME است.

پس $C'F$ با CM موازی وبرابراست و در نتیجه چهار ضلعی $C'FMC$ متوازی‌الاضلاع است.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۱۰۷/۸ـ فرستنده: **جواد فیض**

ازمعادلهٔ زیرمقدار x رابدست آورید:

$$\frac{1}{2-\log x}-\frac{1}{3-\log x}=\frac{1}{4}$$

حل ـ به‌فرض $y=\log x$ داریم:

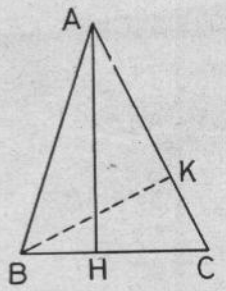
$$\frac{1}{2-y}-\frac{1}{3-y}=\frac{1}{4}$$

$$y^2-5y+2=0\Longrightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$x=10^{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}}$$

۱۰۷/۹ـ فرستنده: **علی رحیم نوری** دانشجوی ریاضی مدرسهٔ عالی علوم اراك

مثلث ABC چنان است که اگر AH ارتفاع وارد بر BC باشد H برپاره خط BC واقع است و $AH=3BH$ و $AH=2CH$ می‌باشد. ثابت کنید که زاویهٔ A به اندازهٔ ۴۵ درجه است.



حل ـ فرض می کنیم $AH=6x$ در این‌صورت $BH=2x$ و $HC=3x$ و از مثلثهای قائم الزاویهٔ ABH و ACH بدست می‌آید:

$$AB=\sqrt{36x^2+4x^2}=2x\sqrt{10}$$

$$AC=\sqrt{36x^2+9x^2}=3x\sqrt{5}$$

ارتفاع BK ازمثلث رارسم می کنیم. درمثلث ABC داریم:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC\cdot AK$$

$$25x^2=40x^2+45x^2-6x\sqrt{5}\times AK$$

$$AK=\frac{60x^2}{6x\sqrt{5}}=\frac{10x}{\sqrt{5}}=2x\sqrt{5}$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABK داریم:

$$BK=\sqrt{AB^2-AK^2}=\sqrt{40x^2-20x^2}=$$
$$=2x\sqrt{5}$$

$$\angle K=90^\circ \text{ و } AK=BK\Longrightarrow\angle A=45^\circ$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم ریاضی

۱۰۷/۱۰ـ فرستنده: **جواد فیض**

بین عددهای مثبت a و b و c چه رابطه برقرار باشد تا در ازای هرمقدار از x داشته باشیم:

$$(a-c)x^2+2(b-c)^2x+(a-c)^3>0$$

حل ـ باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}a-c>0\\ \Delta'=(b-c)^4-(a-c)^4<0\end{cases}$$

ازاین دستگاه نتیجه می‌شود:

$$|b-c|<a-c$$

اگر $b-c\geqslant 0$ باشد خواهیم داشت:

$$b-c<a-c\Longrightarrow a>b\Longrightarrow a>b\geqslant c$$

اگر $b-c<0$ باشد خواهیم داشت:

$$c-b<a-c\Longrightarrow a>c+(c-b)$$

$$a>c>b$$

نتیجهٔ کلی آنکه عدد مثبت a باید بزرگتراز هریك ازدوعددمثبت دیگر باشد.

۱۰۷/۱۱ـ ترجمهٔ **مهندس فتح‌الله زرگری**

دستگاه دومعادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2}\\ x+xy+y=9\end{cases}$$

حل ـ با فرض $\sqrt{\frac{x}{y}}=t\geqslant 0$ ازمعادلهٔ اول نتیجه‌می‌شود:

$$2t^2-3t-2=0\Longrightarrow t=2$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=2\Longrightarrow x=4y$$

واز معادلهٔ دوم خواهیم داشت:

$$4y^2+5y-9=0\Longrightarrow y=1 \text{ یا } -\frac{9}{4}$$

$(y=۱)\ ,\ x=۴)$ یا $(y=-\frac{۹}{۴}\ ,\ x=-۹)$

۱۰۷/۱۲ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

سه عدد به ترتیب جمله‌های اول ، پنجم ونهم یك تصاعد هندسی‌اند. اگر به‌عدد دوم ۸ واحد بیفزائیم دراین صورت سه‌عدد به ترتیب جمله‌های چهارم، دهم و شانزدهم یك تصاعد حسابی خواهند شد. سپس اگر به‌عدد سوم ۶۴ واحد بیفزائیم سه عدد به‌ترتیب جمله‌های دوم، چهارم وششم یك تصاعد هندسی خواهند بود. سه‌عدد راپیدا کنید.

حل‌ـ اگر xوyوz سه‌عدد مورد نظر باشند داریم:

$$\begin{cases} y^۲=xz \\ ۲(y+۸)=x+z \\ (y+۸)^۲=x(z+۶۴) \end{cases}$$

ازمعادله‌های اول وسوم نتیجه می‌شود:

$$xz=xz+۶۴x-۱۶y-۶۴\Longrightarrow y=۴x-۴$$

این‌مقدار را درمعادلهٔ دوم منظور می‌کنیم که بدست می‌آید:

$$z=۷x+۸$$

بااستفاده ازمقادیر بالا ومعادلهٔ اول داریم:

$$(۴x-۴)^۲=x(۷x+۸)\Longrightarrow x=۴ \text{ یا } \frac{۴}{۹}$$

$$(x=۴, y=۱۲, z=۳۶) \quad \text{یا}$$

$$(x=\frac{۴}{۹}\ ,\ y=-\frac{۲۰}{۹}, z=\frac{۱۰۰}{۹})$$

۱۰۷/۱۳ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

هرگاه a_n جملهٔ nام ازیك تصاعد هندسی باشد که جملهٔ اول وهمچنین قدرنسبت آن مثبت‌است وb_n جملهٔ nام ازیك‌تصاعد حسابی باشد که قدر نسبت‌آن نیز مثبت است، عدد x را بیابید بقسمی که $log_x a_n - b_n$ بهn بستگی نداشته باشد.

حل‌ـ هرگاه d قدر نسبت تصاعد حسابی و q قدر نسبت تصاعد هندسی باشد، داریم:

$$b_n=b_۱+(n-۱)d\ ,\ a_n=a_۱q^{n-۱}$$

$$log_x a_n-b_n=(n-۱)(log_x q-d)+log_x a_۱-b_۱$$

برای اینکه این‌عبارت به n بستگی نداشته باشد، لازم وکافی است که:

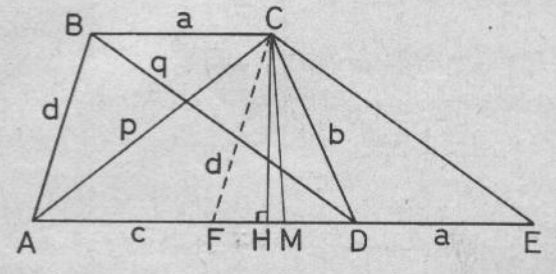
$$log_x q-d=۰\Longrightarrow log_x q=d$$

$$q=x^d\Longrightarrow x=q^{\frac{۱}{d}}$$

۱۰۷/۱۴ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

در ذوزنقهٔ $ABCD$ طولهای دو قاعده $BC=a$ و $AD=c$، طولهای دوساق $CD=b$ و $AB=d$ وطولهای دوقطر $AC=p$ و $BD=q$ می‌باشد. ثابت کنید که:

$$\frac{p^۲-q^۲}{b^۲-d^۲}=\frac{a+c}{a-c}$$



حل‌ـ ازC به‌ترتیب موازی با BAوBD رسم می‌کنیم که ADرادر EوFقطع می‌کنند و $AF=DE=a$ می‌باشد. اگرM وسط DF باشد وسط AE نیز می‌باشد و در مثلثهای ACE و FCD به‌ترتیب داریم:

$$p^۲-q^۲=(a+c)MH$$

$$b^۲-d^۲=(a-c)MH$$

ازتقسیم طرفین این دورابطه بریکدیگر، رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید .

۱۰۷/۱۵ـ ترجمهٔ جعفر آقایانی چاوشی

مربع $ABCD$ به ضلع a داده شده است . خط Δ را متقاطع بامربع رسم می‌کنیم وعمودهای AA'، BB'، DD' را بر آن فرود می‌آوریم. هرگاه داشته باشیم:

$$AA'\cdot CC'=BB'\cdot DD'$$

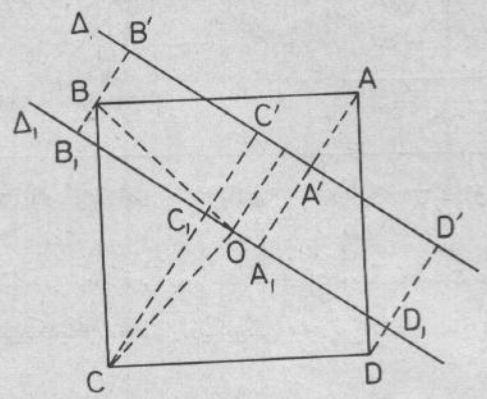
فاصلهٔ O مرکز مربع ازخط Δ رابرحسب a بدست‌آورید.

حل‌ـ ازO خط $\Delta_۱$ راموازی باΔ وعمود $OH=x$ را برΔ رسم می‌کنیم. به‌آسانی نتیجه می‌شود که $AA_۱=CC_۱$ و $BB_۱=DD_۱$ فرض می‌کنیم که:

$$m=AA_۱=AA'+x=CC'-x$$

$$n=BB_۱=x-BB'=DD'-x$$

ازاین روابط وازرابطهٔ داده‌شده بدست می‌آید:



$$(m-x)(m+x)=(x-n)(x+n)$$

$$m^2-x^2=x^2-n^2 \Longrightarrow x^2=\frac{m^2+n^2}{2}$$

دومثلث OBB_1 و OCC_1 باهم برابرند (چرا؟) پس:

و $OC_1=BB_1$

$$m^2=CC_1^2=OC^2-OC_1^2, n^2=BB_1^2=OC_1^2$$

$$x^2=\frac{1}{2}(OC^2-OC_1^2+OC_1^2)=\frac{1}{2}OC^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}\Longrightarrow x=\frac{a}{2}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۰۷/۱۶ـ سه نقطهٔ $A(0,1)$ و $B(-1,-1)$ و $C(1,-1)$ درصفحهٔ محورهای مختصات داده شده است.

۱) تابع $y=ax^2+bx+c$ رامشخص کنیدبنابرآنکه منحنی نمایش هندسی آن برسه نقطهٔ A و B و C بگذرد.

۲) در B و C مماسهایی برمنحنی مزبور رسم می‌کنیم که یکدیگر را درP قطع می‌کند. مساحت چهارضلعی PBAC را حساب کنید.

حل ـ ۱) مختصات داده شده را درتابع منظورمی‌کنیم:

$$\begin{cases} 1=c \\ -1=a-b+c \\ -1=a+b+c \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} a=-2 \\ b=0 \\ c=1 \end{vmatrix}$$

$$y=-2x^2+1$$

۲) ضریب زاویه‌ایهای مماسها ومعادله‌های آنها را بدست می‌آوریم:

$$y'=-4x \Longrightarrow m_B=4\ ,\ m_C=-4$$

$$y+1=4(x+1)\ ،\ y=4x+3$$

$$y+1=-4(x-1)\ ،\ y=-4x+3$$

ازحل معادله‌های مماسها $P(0,3)$ بدست می‌آید.

مساحت چهارضلعی PBAC برابر است باتفاضل‌مساحت مثلث PBC برمساحت مثلث ABC که برابر می‌شودبا:

$$S=\frac{BC\cdot PA}{2}=\frac{2\times 2}{4}=1$$

۱۰۷/۱۷ـ فرستنده: **جواد فیض**

هرگاه داشته باشیم:

$$0<\gamma<\alpha<\beta<\delta<2\pi$$

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta<2\pi$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma+\sin\delta$$

حل ـ ازنامساویهای داده شده نتیجه می‌شود:

$$\delta-\gamma>\alpha-\beta \Longrightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2}>\cos\frac{\delta-\gamma}{2}$$

همچنین بنابه‌فرض داریم:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma+\delta}{2}>0$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\delta-\gamma}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma+\sin\delta$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۰۷/۱۸ـ منحنیهای C و C′ به‌معادله‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(C): y=x^2+px \qquad (C'): y=\frac{x}{1-x}$$

۱) به‌ازای چه مقادیر p این دو منحنی علاوه بر مبدأ

مختصات در دونقطهٔ دیگر A وB یکدیگر را تلاقی می‌کنند.

۲) به‌فرض آنکه دو منحنی غیراز مبدأ در A و B نیز متقاطع باشند:

الف ـ معادلهٔ مکان هندسی P وسط AB را بدست آورید.

ب ـ مقدار p را بیابید که طول AB کمترین مقدار ممکن باشد.

۳) به‌ازای $p=+1$ دومنحنی را دریك شکل رسم کنید ومعلوم کنید که در مبدأ مختصات نسبت به‌هم چه وضعی‌دارند.

حل ـ ازحل معادله‌ها باهم خواهیم داشت:

$$x[x^2+(p-1)x-p+1]=0$$

$$\Delta\geqslant 0\Longrightarrow(p-1)^2+4(p-1)\geqslant 0$$

$$(p-1)(p+3)\geqslant 0\Longrightarrow p\leqslant -3 \text{ یا } p\geqslant 1$$

۲) الف ـ داریم:

$$P[x=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1-p}{2},$$

$$y=\frac{(1-p)^2}{4}+\frac{p(1-p)}{2}]$$

$$p=1-2x\Longrightarrow y=-x^2+x$$

ب ـ به‌ترتیب داریم:

$$AB=\sqrt{(p-1)(p+3)}=\sqrt{p^2+2p-3}$$

$$(AB)'=\frac{p+1}{\sqrt{p^2+2p-3}}$$

با تعیین علامت $(AB)'$ نتیجه خواهد شد که AB در ازای $p=-1$ کمترین مقدار را دارد.

۳) داریم:

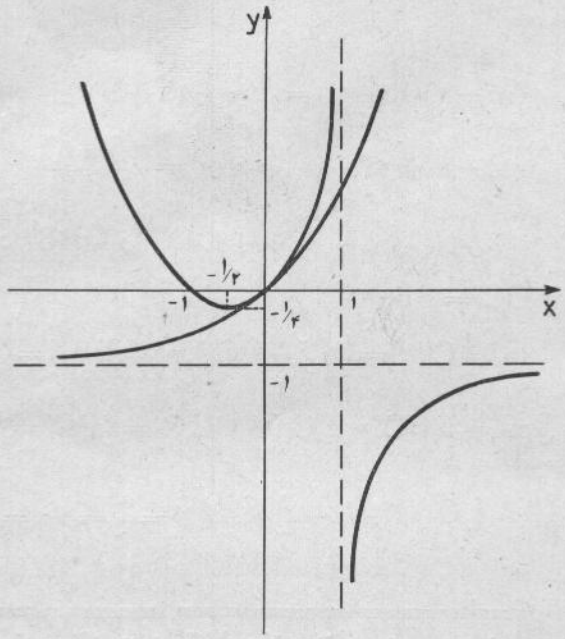
$$y=\frac{x}{1-x}\ ,\ y'=\frac{1}{(1-x)^2}>0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+				+	
y	-1	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1

$$y=x^2+x\ ,\ y'=2x+1$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
y'		−			0	+			
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$

دومنحنی در شکل زیر رسم شده‌اند و در مبدأ مختصات علاوه بر آنکه بریکدیگر مماسند ازیکدیگر عبور می‌کنند.



۱۰۷/۱۹ـ فرستنده: **کاظم حافظ قرآن**

هر گاه داشته باشیم:

$$k^2\sin^2 2x+2\sin(x+y)\sin(x-y)\cos 2y=$$
$$=\sin^2(x+y)+\sin^2(x-y)$$

مقدار $\frac{tg(x+y)}{tg(x-y)}$ رابرحسب k بدست آورید.

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$2\sin(x+y)\sin(x-y)\cos 2y=$$
$$=(\cos 2y-\cos 2x)\cos 2y=$$
$$=\cos^2 2y-\cos 2x\cos 2y$$

$$\sin^2(x+y)+\sin^2(x-y)=\frac{1}{2}[1-\cos(2x+2y)$$
$$+1-\cos(2x-2y)]=1-\cos 2x\cos 2y$$

$$k^2\sin^2 2x=1-\cos^2 2y=\sin^2 2y$$

$$\frac{\sin 2x}{\sin 2y}=\pm\frac{1}{k}$$

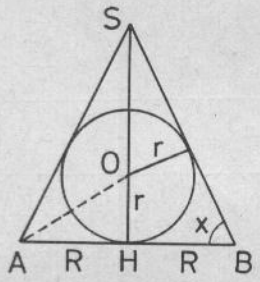
$$\frac{\sin 2x-\sin 2y}{\sin 2x+\sin 2y}=\pm\frac{1-k}{1+k}$$

$$\frac{2\sin(x-y)\cos(x+y)}{2\sin(x+y)\cos(x-y)}=\pm\frac{1-k}{1+k}$$

$$\frac{tg(x-y)}{tg(x+y)}=\pm\frac{1-k}{1+k}$$

۱۰۷/۲۰ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

حجم مخروط دواری m برابر حجم کرهٔ محاط درآن است. تانژانت زاویهٔ مولد این مخروط باصفحهٔ قاعدهٔ آن را برحسب m حساب کنید. حالت خاص: $m=2$



حل ـ شعاع قاعدهٔ مخروط را R و ارتفاع آن را h و زاویهٔ مولد آن را با سطح قاعده x و شعاع کرهٔ محاط در آن را r می‌گیریم. دراین‌صورت و با توجه به‌شکل داریم:

$$h=R\,tg\,x \Longrightarrow V_1=\frac{1}{3}\pi R^3 tg\,x$$

$$r=R\,tg\frac{x}{2} \Longrightarrow V_2=\frac{4}{3}\pi R^3 tg^3\frac{x}{2}$$

$$V_1=mV_2 \Longrightarrow tg\,x=4m\,tg^3\frac{x}{2}$$

$$2m\,tg^4\frac{x}{2}-2m\,tg^2\frac{x}{2}+1=0$$

$$x=2\,Arctg\sqrt{\frac{m\pm\sqrt{m^2-2m}}{2m}}$$

این جواب وقتی قابل قبول است که $m\geqslant 2$. درازای $m=2$ خواهیم داشت:

$$x=2\,Arctg\frac{\sqrt{2}}{2}=Arctg\frac{4}{3}$$

۱۰۷/۲۱ـ ترجمهٔ ازفرانسه

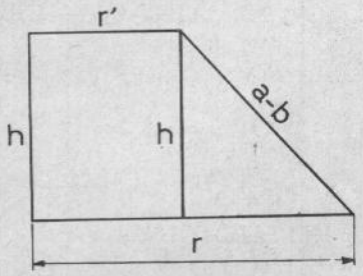
سطح جانبی مخروط ناقص دواری پس از گسترش در یك صفحه برابر شده است بااختلاف سطحهای دوقطاع دایره‌ای به شعاعهای a و b (به‌شرط $a>b$) وبه زاویهٔ مرکزی θ درجه. ارتفاع وشعاعهای قاعده‌های مخروط ناقص را برحسب a و b و θ حساب کنید.

حالت خاص: $a=37$ ، $b=1$ ، $\theta=288^\circ$

حل ـ هرگاه r و r' شعاعهای دو قاعدهٔ مخروط ناقص باشد ، محیطهای دوقاعده که همان طولهای دوکمان قطاعها ، بعداز گسترش مخروط ناقص ، می‌باشند به ترتیب برابرند با:

$$2\pi r=\frac{\pi a\theta}{180^\circ} \quad و \quad 2\pi r'=\frac{\pi b\theta}{180^\circ}$$

$$r=\frac{a\theta}{360} \quad و \quad r'=\frac{b\theta}{360}$$



برای‌محاسبهٔ h مطابق با شکل داریم:

$$h^2=(a-b)^2-(r-r')^2$$

$$h^2=\left(\frac{a-b}{360}\right)^2\times(360^2-\theta^2)$$

$$h=\frac{a-b}{360}\sqrt{360^2-\theta^2}$$

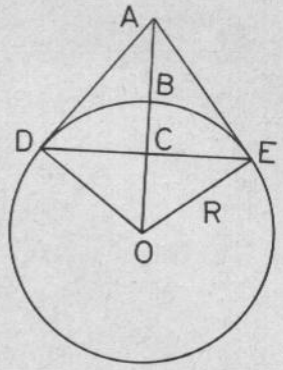
درحالت خاص به ازای مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$r=29/6$ ، $r'=0/8$ ، $h=21/6$

۱۰۷/۲۲ـ ترجمهٔ از فرانسه

ناظری که به‌ارتفاع h از سطح کرهٔ زمین قرار دارد چه مساحتی ازسطح کرهٔ زمین‌را می‌بیند؟

حالت خاص: $h=5^{km}$



حل ـ به فرض که R شعاع کرهٔ زمین باشد ، مساحت سطحی که‌توسط ناظر دیده می‌شود ، یعنی، مساحت عرقچین کروی DBE برابر است با $S=2\pi R.BC$ اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODA داریم:

$$R^2 = OC.OA = (R-BC)(R+h)$$

$$BC = \frac{2h}{R+h} \quad و \quad S = \frac{2\pi R^2 h}{R+h}$$

$$h = 5 \quad و \quad R = 40000 \Longrightarrow S \approx 20000$$

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم دبیرستان

۱۰۷/۲۳ـ سهمی به معادلهٔ $y^2 - 4x + 4 = 0$ داده شده است. براین سهمی نقطهٔ P به‌عرض ۲ را درنظر می‌گیریم.

۱) خط Δ از P می‌گذرد وضریب زاویه‌ای آن $\frac{3}{4}$ است. معادلهٔ خط Δ ومختصات نقطهٔ تلاقی دیگر آن با سهمی را بدست آورید.

۲) خط Δ محور Oy را در Q قطع می‌کند. مختصات Q ومختصات C وسط PQ وطول CQ راحساب کنید.

۳) معادلهٔ دایرهٔ به‌قطر PQ رابنویسید و مختصات نقاط تلاقی آن را باسهمی حساب کنید.

حل ـ ۱) داریم:

$$P(2 \text{ و } 2) \quad و \quad (\Delta) : 4y - 3x = 2$$

$$\left(\frac{3x+2}{4}\right)^2 - 4x + 4 = 0$$

$$9x^2 - 52x + 68 = 0 \Longrightarrow x = 2 \quad یا \quad \frac{34}{9}$$

۲) داریم:

$$x = \frac{3}{4} \Longrightarrow y = \frac{17}{16}$$

$$Q(0 , \frac{1}{2}) \quad و \quad C(1 , \frac{5}{4}) \quad و \quad CQ = \frac{5}{4}$$

۳) داریم:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y - \frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16} \\ y^2 = 4(x-1) \end{cases}$$

$$\frac{y^4}{16} + (y - \frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16}$$

$$y^4 + 16y^2 - 40y = 0$$

یك جواب این‌معادله $y = 2$ (عرض نقطهٔ P) است پس:

$$y(y^3 - 8 + 16y - 32) = 0$$

$$y(y-2)(y^2 + 2y + 20) = 0$$

$$(y = 0 \quad و \quad x = 1) \quad و \quad (y = 2 \quad و \quad x = 2)$$

۱۰۷/۲۴ـ منحنی نمایش هندسی تابع زیررا در فاصلهٔ $(0, 2\pi)$ رسم کنید ومساحت سطح محصور بین‌منحنی ومحور Ox راکه بالای Ox واقع است بدست‌آورید.

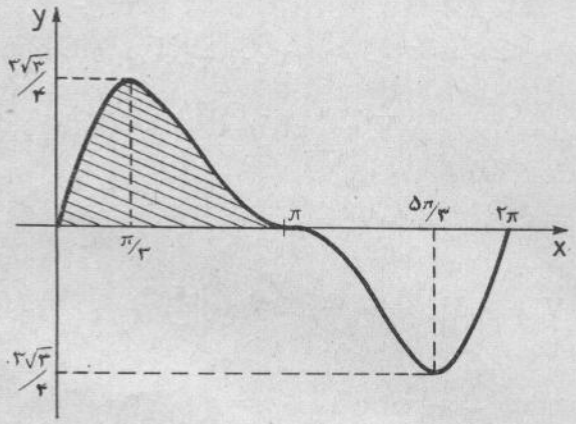
$$y = \sin x(1 + \cos x)$$

حل ـ تابع متناوب و دورهٔ تناوب آن 2π است.

$$y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x \quad و \quad y' = \cos x + \cos 2x$$

$$y' = 2\cos^2 x + \cos x - 1 \; ; \; \cos x = -1 \quad یا \quad \frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y'	+		0	−	0	−	0	+	
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0



$$Y = F(x) = -\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

$$S = |F(\pi) - F(0)| = 2 \quad \text{واحد سطح}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۷/۲۵ـ تابع زیرداده شده است:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^3}}$$

۱) جهت تغییرات تابع را معین کنید.

۲) جهت تقعر منحنی نمایش تابع را معلوم کنید و اگر نقطهٔ عطف دارد مختصات آن را تا ۰/۱ تقریب بدست آورید.

۳) منحنی نمایش هندسی تابع را رسم کنید.

۴) سطح محصور بین منحنی و Ox و دوخط $x=0$ و $x=k$ را به شرط $0<k<1$ پیدا کنید وحد این سطح راوقتی $k\to 1$ بدست آورید.

حل ـ ۱) تابع وقتی معین است که :

$$1-x^3>0 \Longrightarrow x<1$$

در ازای این مقادیر از x بعد از عملیات لازم داریم :

$$y'=\frac{-x(x^3-4)}{2(1-x^3)\sqrt{1-x^3}}$$

از $x<1$ نتیجه می‌شود که y' فقط در ازای $x=0$ برابر با صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد .

x	$-\infty$		0		1	
y'		$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	

تابع در ازای $x=0$ دارای می‌نیممی برابر با صفر است .

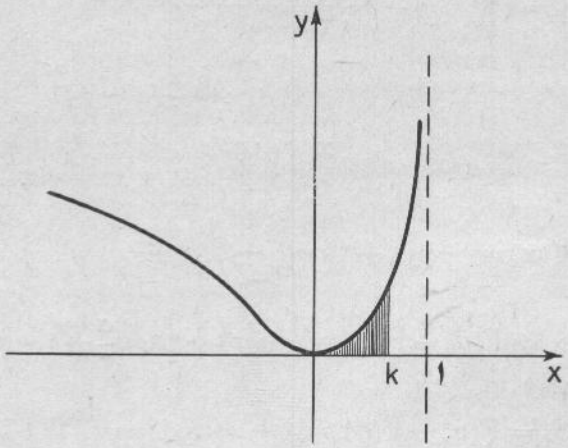
۲) خواهیم داشت :

$$y''=\frac{-7x^6+44x^3+8}{4(1-x^3)^3\sqrt{1-x^3}}$$

$$y''=0 \text{ و } x<1 \Longrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{22-\sqrt{540}}{7}}\approx 0/5$$

x	$-\infty$		$0/5$		1	
y''		$-$	0	$+$		
تقعر		به‌سمت پائین	عطف	به‌سمت بالا		

۳) با توجه به جدول تغییرات و جهت تقعر،منحنی به شکل زیر است .



۴) داریم

$$y=f(x)=-\frac{2}{3}\times\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$$

$$Y=F(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}+C$$

$$S=|F(k)-F(0)|=-\frac{2}{3}\sqrt{1-k^3}+\frac{2}{3}$$

$$k\to 1 \;:\; \lim S=\frac{2}{3}$$

۱۰۷/۲۶ـ دوتابع زیر داده شده است:

$$y=\sin x \quad \text{و} \quad y=a\sin\frac{x}{2}$$

۱) درفاصلهٔ $(0,\pi)$ دو منحنی غیر از مبدأ مختصات در یك نقطهٔ A متقاطعند. مختصات نقطهٔ A را برحسب a حساب کنید.

۲) مساحت سطح محصور بین دومنحنی را درفاصلهٔ از O تا A با S_1 ودرفاصلهٔ از A تاخط $x=\pi$ با S_2 نشان می‌دهیم. مقدار a را حساب کنید برای آنکه $S_1=S_2$ باشد.

۳) به‌ازای $a=1$ دومنحنی‌را دریك شکل رسم کنید.

حل ـ ۱) از حذف y بین دو معادله نتیجه می‌شود :

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=a\sin\frac{x}{2}$$

$$\sin\frac{x}{2}=0 \Longrightarrow x=0 \text{ و } y=0$$

به شرط $-2<a<2$:

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{a}{2} \Longrightarrow x=\mathrm{Arc}\cos a=\alpha$$

$$y=a\sqrt{1-\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{a\sqrt{4-a^2}}{2}$$

۲) به ترتیب داریم :

$$f(x)=\sin x-a\sin\frac{x}{2}$$

$$F(x)=-\cos x+2a\cos\frac{x}{2}+C$$

$$S_1=|F(\alpha)-F(0)|=|-\cos\alpha+2a\cos\frac{\alpha}{2}+1-2a|$$

$$S_2=|F(\pi)-F(\alpha)|=|1+\cos\alpha-2a\cos\frac{\alpha}{2}|$$

با توجه به اینکه وضع دو منحنی نسبت به یکدیگر ، از نظر پایین و بالا بودن ، قبل از A و بعد از A متفاوت است ، از $S_1=S_2$ خواهیم داشت :

$$-\cos\alpha+2a\cos\frac{\alpha}{2}+1-2a=$$

$$=-(1+\cos\alpha-2a\cos\frac{\alpha}{2})$$

$$1-2a=-1 \Longrightarrow a=1$$

۳) به ترتیب داریم :

$$y=\sin x \quad \text{و} \quad y'=\cos x$$

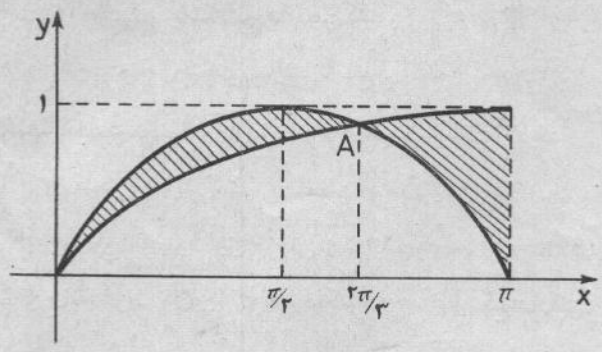
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'		+	0	−	
y	0	↗	1	↘	0

$$y=\sin\frac{x}{2} \quad \text{و} \quad y'=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$$

x	0		π
y'		+	0
y	0	↗	1

$$\sin x=\sin\frac{x}{2}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$



$$A\left(x=\frac{2\pi}{3} \quad \text{و} \quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

۱۰۷/۲۷ـ فرستنده: کاظم حافظ قرآن

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\frac{tg x+cotg x}{\sin x+\cos x}=\sqrt{2}$$

حل ـ خواهیم داشت :

$$\sqrt{2}\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=1$$

$$\sin 2x\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$$

از این معادله و با توجه به اینکه سینوس هرزاویه محصور بین ۱+ و ۱− است دو دستگاه زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases}\sin 2x=1\\ \sin(x+\frac{\pi}{2})=1\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}\sin 2x=-1\\ \sin(x+\frac{\pi}{4})=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=k_1\pi+\frac{\pi}{4}\\ x=2k_2\pi+\frac{\pi}{4}\end{cases} \Longrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases}x=k_3\pi-\frac{\pi}{4}\\ x=2k_4\pi-\frac{3\pi}{4}\end{cases} \quad \text{جواب ندارد}$$

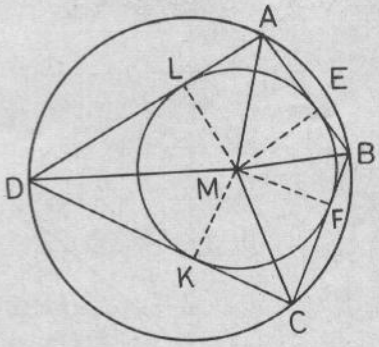
بنابراین $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ جواب کلی معادله است .

۱۰۷/۲۸ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

چهارضلعی ABCD به محیط 2p در یك دایره محاط و بردایرهٔ بمرکز M محیط است. ثابت کنید:

$$1)\quad \frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MC^2}=\frac{1}{MB^2}+\frac{1}{MD^2}$$

۲) $p=\sqrt{MA^2+MC^2}+\sqrt{MB^2+MD^2}$



حل ـ درمثلث MAE (مطابق شکل)ومثلثهای .... داریم :

$$MA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$MB=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}$$

$$MC=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}\ ،\ MD=\frac{r}{\sin\frac{D}{2}}$$

چون چهارضلعی ABCD محاطی است پس :

$$\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\Longrightarrow MA=\frac{r}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MC^2}=\frac{1}{r^2}\left(\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{1}{MB^2}+\frac{1}{MD^2}=\frac{1}{r^2}=\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MC^2}$$

چون چهارضلعی محیطی است پس :

$$AB+CD=BC+DA\Longrightarrow p=AB+CD$$

$$p=r\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}\right)+r\left(\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{D}{2}\right)$$

$$p=r\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}\right)$$

$$p=r\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)$$

$$p=\sqrt{\frac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{r^2}{\cos^2\frac{A}{2}}}+\sqrt{\frac{r^2}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{r^2}{\cos^2\frac{B}{2}}}$$

$$p=\sqrt{MA^2+MC^2}+\sqrt{MB^2+MD^2}$$

۱۰۷/۲۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

عددهای طبیعی x و y وz را پیداکنید برای آنکه داشته باشیم:

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{11}+\frac{z}{13}=0/946053946053000$$

حل ـ عدد اعشاری متناوب داده شده برابر است با :

$$\frac{946053}{999999}=\frac{946053}{7\times11\times13\times999}$$

$$x\times11\times13+y\times7\times13+z\times7\times11=$$

$$=\frac{946053}{999}=947$$

$$7(13y+11z)=947-143x$$

عددطبیعی x حداکثر برابر با ۶وچنان است که $947-143x$ مضرب ۷ است که نتیجه می‌شود $x=3$ وازآنجا خواهیم‌داشت:

$$13y+11z=74$$

$$11z=74-13y\Longrightarrow y\leq5$$

و چون $74-13y$ مضرب ۱۱ است پس $y=4$ و در نتیجه

$$z=2$$

۱۰۷/۳۰ـ ترجمهٔ از فرانسه

دوعدد طبیعی a و b داده شده‌است. عدد طبیعی x راپیدا کنید برای آنکه‌کسر $\frac{x+a}{x+b}$ مجذور کامل باشد .

حل ـ برای آنکه‌کسر داده شده مربع کامل باشد لازم‌و کافی است که داشته باشیم :

$$(x+a)(x+b)=y^2$$

$$4(x+a)(x+b)=4y^2$$

$$(2x+a+b)^2-(a-b)^2=4y^2$$

$$(2x+a+b)^2-4y^2=(a-b)^2$$

$$(2x+2y+a+b)(2x-2y+a+b)=(a-b)^2$$

هرگاه d و d′ دوعدد باشندکه حاصل ضرب آنها $(a-b)^2$ باشد خواهیم داشت :

$$\begin{cases}2x+2y+a+b=d\\2x-2y+a+b=d'\end{cases}$$

$$x=\frac{d+d'-2(a+b)}{4}\ \text{و}\ y=\frac{d-d'}{4}$$

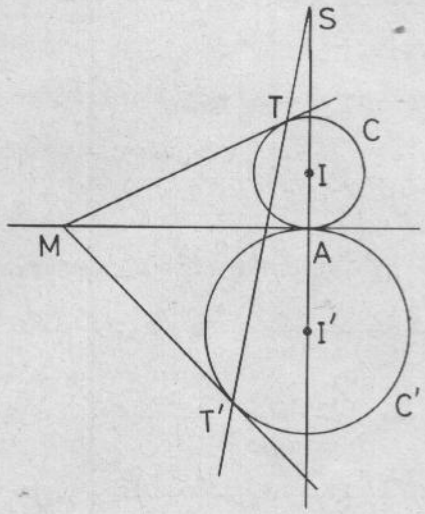
برای آنکه مسئله ممکن باشد لازم وکافی است که :

$d+d'-2(a+b)$ عدد طبیعی و مضرب ۴ باشد

۱۰۷/۳۱ـ ترجمهٔ از فرانسه

دودایرهٔ C و C′ درنقطهٔ A مماس خارجی‌اند. از نقطهٔ دلخواه M واقع برمماس مشترك داخلی دودایره مماسهای MT و MT′ رابر دو دایره رسم می‌کنیم کـه برمماس مشترك آنهـا منطبق نباشند. هرگاه M برمماس مشترك داخلی دودایره تغییر مکان دهد، ثابت کنید که خط TT′ برنقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

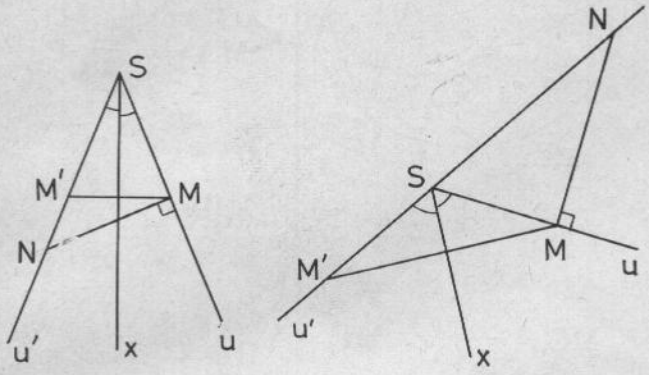
حل ـ دایرهٔ Γ به مرکز M وبه شعاع MT′=MT بر هریك از دایره‌های C و C′ عمود است . در انعکاسی که‌دو



دایرهٔ C و C′ به یکدیگر تبدیل شوند نقاط T و T′ نیز به یکدیگر تبدیل می‌شوند . بنابراین خط TT′ بر نقطهٔ S مرکز تجانس مستقیم دو دایرهٔ C و C′ می‌گذرد .

۱۰۷/۳۲ـ سطـح مخـروطی دوار Σ به زاویـهٔ رأس $\theta\neq 90^\circ$ مفروض است. صفحهٔ P باΣ درمنحنیΓ متقاطع است. نقطهٔ M رابر Γ در نظر می‌گیریم. قائـم بر Σ در M درنقطهٔ دیگرNباΣ برخورد می‌کند. وقتی M منحنیΓ را بپیمایدمکان N چیست؟

حل ـ هرخط قائم برسطح مخروطی دوار با محورآن متقاطع است . اگر Su مولدی از سطح مخروطی باشدکه بر M می‌گذرد قائم بر Σ در M با مولـد Su′ از Σ متقاطـع می‌شود بقسمی که Su و Su′ با Sx محـور Σ در یك صفحه واقعند . این صفحه را صفحـهٔ شکل می‌گیریم . مثلث SMN



قائم‌الزاویه است و داریم :

$$\frac{SN}{SM}=\frac{1}{\cos\theta}$$

هرگاه M′ قرینهٔ M نسبت به Sx باشد خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{SN}}{\overline{SM'}}=\frac{1}{\cos\theta}$$

N مبدل M′ است در تجانس به‌مرکز S وبه نسبت $\frac{1}{\cos\theta}$ و در نتیجه مکان N مجانس مکان M′ است . مکان M′ یعنی Γ یك مقطع مخروطی است . مکان M′ مقطع مخروطی Γ′ قرینهٔ Γ نسبت به Sx است . پس مکان N نیز یك مقطع مخـروطی است که مجانس Γ′ (در تجانس مذکور دربالا) می‌باشد .

پاسخ تستهای ریاضی

۳۳ـ ج ۳۴ـ الف ۳۵ـ د ۳۶ـ د ۳۷ـ ب

۳۸ـ ج ۳۹ـ ج ۴۰ـ الف ۴۱ـ د ۴۲ـ ب

۴۳ـ الف ۴۴ـ ب ۴۵ـ ج ۴۶ـ الف ۴۷ـ ج

۴۸ـ الف ۴۹ـ الف ۵۰ـ ب ۵۱ـ ب ۵۲ـ د

۵۳ـ ب ۵۴ـ الف ۵۵ـ ج ۵۶ـ د

سی مسئلهٔ حدسی سریع

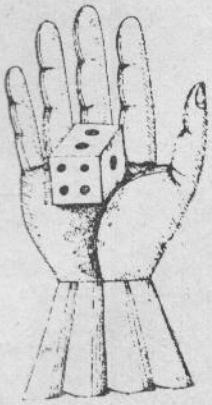
نوشتهٔ مارتین گاردنر

ترجمهٔ : مهندس داوید ریحان

دراینجا مجموعهٔ سی‌مسئله داده‌شده است که امیدواریم هر چه بیشترخوانندگان را «بگیرد». درتمام مسائل‌یك حقه ازنوع غیرمشخص وجوددارد. برخی‌ازاین مسائل‌عاری ازمفاهیم ریاضی است. ازخواننده دعوت می‌شودکه قبل‌از مراجعه به پاسخهای مسائل مختصری کوشش کند تاخود بتواند به‌تعیین‌پاسخ آنها نایل شود و هرچه بیشتر به پرسشها پاسخ گوید.

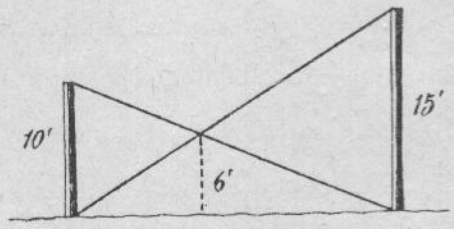
۱ـ فیزیکدانی که بسیارخسته‌بود ساعت‌ده‌شب به‌رختخواب رفت وساعت را برای ظهرروز آینده کوك کرد. وقتی‌زنگ‌ساعت به‌صدا دربیاید، وی چند ساعت خوابیده است؟

۲ـ احمد یك تاس‌نرد را انداخت و سپس محمود همان تاس را انداخت. احتمال اینکه تعداد خالهای‌بار اول بیشترازباردوم‌باشد چقدراست؟



۳ـ عبارت دقیق ومخالف «غیرداخل» چیست؟

۴ـ برروی زمینی‌صاف، تیری ۱۰متری در فاصله‌ای از تیر۱۵ متری دیگرواقع‌است(شکل‌زیررا ببینید). باوصل کردن‌سر هرتیربه پایین تیردیگر، خطوط همدیگررا درنقطه‌ای به‌ارتفاع ۶متراز سطح زمین‌قطع می‌کنند. فاصلهٔ بین‌دوتیر چقدراست؟



۵ـ خریدار: «قیمت این‌چقدر است؟»

فروشندهٔ ظروف واشیاء مسی وحلبی درپاسخ گفت: «بیست فرانك».

خریدار: «برای دوازده چقدرباید بپردازم ؟»

فروشنده: «چهل فرانك»

خریدار: «بسیارخوب! پس نهصد و دوازده رابرخواهم داشت».

فروشنده: «برای شما شصت فرانك می‌شود»

مشتری چه خریده است؟

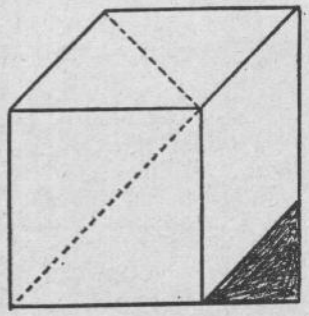
۶ـ اضلاع‌یك‌مثلث به‌ترتیب برابربا ۱۳،۱۸،۳۱سانتیمتر است. مساحت‌آن چقدراست؟

۷ـ کدام‌کلمهٔ فارسی است‌که بسیار معروف است وتمام اعضای انجمن بین‌المللی مطالعات پیشرفته آنرا بد تلفظ می‌کنند؟

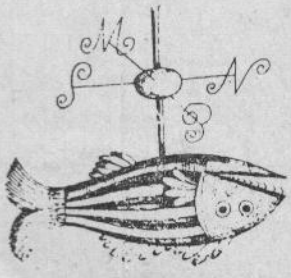
۸ـ جان‌کندی درسال ۱۹۱۷ متولد شد. درسال ۱۹۶۰ رئیس‌جمهور شد. در سال ۱۹۶۳ دارای ۴۶ سال سن‌بود و سه سال بر روی کار بود. مجموع این سه عدد برابر با ۳۹۲۶ است.

شارل دوگل در ۱۸۹۰ متولد شد. درسال ۱۹۵۸ رئیس جمهور شد. در ۱۹۶۳ دارای ۷۳ سال سن بود و سه سال بود که عنوان اخیر را یدك می‌کشید. مجموع این سه عدد هم باز مساوی با ۳۹۲۶ است. آیا می‌توانید علت این انطباق راشرح دهید ؟

۹ـ زاویهٔ‌بین دو خط چین شکل روبرو چند درجه است ؟



۱۰ـ حروف «دجله مجید» را طوری پس وپیش کنید تا جملهٔ جدید بدست آید.



۱۱ـ کنارهٔ یك دریاچه به‌صورت دایرهٔ کامل است . یك ماهی ازنقطه‌ای از این دایره به‌اندازهٔ ۶۰۰ متر در جهت شمال تا کنارهٔ دیگر شناکرد. آنگاه راه خود رابه‌سمت مشرق کج کرد و ۸۰۰ متر تاکنارهٔ دریاچه شناکرد. قطردریاچه چقدراست ؟

۱۲ـ یك مأمورآمار مأمور نمونه برداری ریاضی ازتمام ساکنین یك دهکدهٔ ۶۰۰۰ نفری شد ودرضمن طول پاهایشان را اندازه می‌گرفت . وی رابطهٔ بسیار زیادی بین نمونه‌های ریاضی و طول پاهایشان یافت ، چرا ؟

۱۳ـ فرمول ساده‌ای برحسب یك متغیر x بنویسید به قسمی که هرگاه به جای x یك عدد مثبت غیرمشخص بگذاریم ، همیشه عددی اول بدست آید .

۱۴ـ شخصی می‌خواهد منزلش را در زمین بزرگ مثلثی شکلی بسازد ؛ سپس می‌خواهد سه جاده به خط مستقیم از منزلش به هر ضلع مثلث بکشد به‌نحوی که همگی جاده‌ها به‌اضلاع مربوطه عمود باشند . مثلث متساوی‌الاضلاع است .

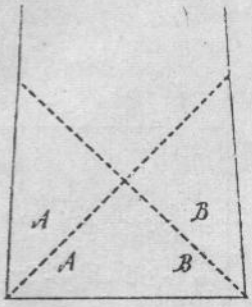
وی خانه‌اش را کجا بسازد که مجموع طولهای جاده‌ها حداقل باشد ؟

۱۵ـ عدد ۵۰ رابر $\frac{1}{2}$ تقسیم کرده‌وبه‌آن۳ واحدبیفزائید. حاصل چقدر خواهد بود ؟

۱۶ـ دردنبالهٔزیر،شش‌حرف‌راخط بزنیدبقسمی که‌حروف باقیمانده که به‌همین ترتیب‌قرارگرفته‌اند، یك کلمهٔ فارسی آشنا برای شما باشد .

ش ی ش ك خ ا ر ن ف

۱۷ـ خط ـ چینهای شکل روبرو نیمسازهای قاعدهٔ مثلث می‌باشند. این دونیمساز به‌زاویهٔ قائمه همدیگر را قطع می‌کنند . در صورتی‌که طول قاعده



۱۰ باشد، ارتفاع این مثلث چقدر خواهد بود؟

۱۸ـ چندماه از سال وجود داردکه سی روز داشته‌باشند؟

۱۹ـ خانم اسمیث تصمیم می‌گیردکه پس از اتمام نه سیگاری که‌برایش باقی مانده است ، سیگار کشیدن راترك کند. وی ازسه‌ته سیگار وپیچیدن آنها در کاغذ سیگار می‌تواند یك سیگار

جدید بسازد. بابکاربستن این روش تا آنجاکه ممکن است ، قبل ازاینکه تمام سیگارها تمام شود، وی چند سیگار دود خواهد کرد؟

۲۰ـ در زیریك معما ملاحظه می‌کنید. آیا می‌توانید معنای آنرا درك کنید :

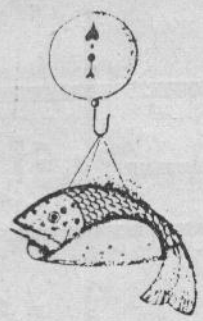
۱۲۶۴۸۵۳۹۷۱/۲۷۵۸۴۶۳

۲۱ـ دکتربه شمامی‌گویدکه «سه‌قرص برای شما تجویز کرده‌ام وشما باید هرنیم ساعت یکی از آنها را بخورید». این مداوا چه مدت طول می‌کشد ؟

۲۲ـ صد وسی و هفت بازیکن برای یك مسابقهٔ حذفی نامنویسی کرده‌اند. برای اولین دوره ، بازیکنان را به صورت زوجی تقسیم بندی می‌کنند وچون ۱۳۷ عددی‌است فرد، لامحاله بازیکن باقیمانده برای دورهٔ بعدی باقی می‌ماند .

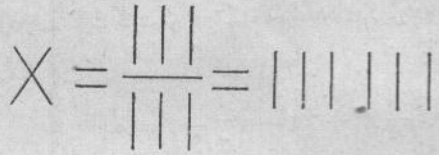
بدین ترتیب‌درهردوره بازیکنان رازوجی انتخاب‌می‌کنند وبازیکن فرد باقیمانده را برای دورهٔ بعدی درنظر می‌گیرند . بازی طوری ترتیب داده شده است‌که بتوان با حداقل تعداد مسابقات ممکن ، قهرمان بازی را تعیین‌کرد . تعداد مسابقات چقدر خواهد بود ؟

۲۳ـ درجعبه‌ای پولهای ایرانی موجوداست که مجموعشان ۵۵ ریال می‌شود. یکی از پولها ، سکهٔ ۵ ریالی نیست. پولهای مورد نظر کدامند ؟



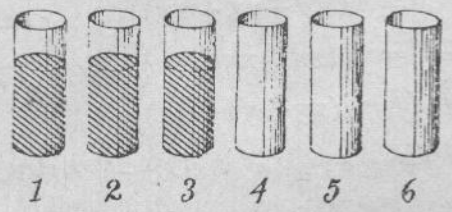
۲۴ـ وزن یك ماهی برابر با ده کیلو به‌علاوهٔ نصف تمام‌وزنش است. وزن کل ماهی چقدر است ؟

۲۵ـ ریاضیدانی از منچستر معادلهٔ متقارن زیر راکشف کرده است :



مقدار x چقدراست؟ (هر گروه III را می‌توان به گونه‌های مختلفی تعبیر کرد) .

۲۶ـ شش ظرف شیشه‌ای را همانطورکه در شکل نشان داده شده است ، پشت سرهم ردیف کنید . سه تای اولی را پراز آب کنید ، وسه‌تای دیگررا خالی باقی بگذارید. با جابجاکردن فقط یك گیلاس ، موقعیت را طوری تغییر دهید که گیلاسهای خالی وپر بطور متناوب یك در میان قرار گیرند .



۲۷ـ چرخی دارای سه پره است . چند فاصله بین این پره‌ها وجود دارد ؟

۲۸ـ «تعدادکلمات این جمله برابر با هشت است .» واضح است که این گزاره درست است . معمولا نقیض یك گزارهٔ صحیح ، گزاره‌ای است غلط . جمله‌ای پیداکنید که دقیقاً نقیض گفتهٔ اخیر را بگوید ودرعین حال صحیح باشد.

۲۹ـ دودختر از یك پدرومادر، دریك روز از یك ماه و دریك ساعت معین به دنیا آمده‌اند ، معهذا دوقلو نیستند ، آیا می‌توانید علت را بگوئید ؟

۳۰ـ اگر کسی بگوید که: «من سریك‌ریال شرط می‌بندم که اگر شما پنج ریال به من بدهید ، من صد ریال به شما پس خواهم داد»، آیا این شرط بندی را قبول می کنید ؟

پاسخها دریکی از صفحات همین شماره

دربارهٔ اعداد اول (دنباله از صفحهٔ ۳۰۹)

عدد $a^{\frac{p-1}{2}}-1$ بر p قابل قسمت نخواهد بود.

اما بنابه قضیهٔ فرما، عدد $(a^{p-1}-1)$ بر p بخش پذیر بوده ودررابطهٔ $a^{p-1}-1=(a^{\frac{p-1}{2}}-1)(a^{\frac{p-1}{2}}+1)$ عامل سمت چپ مقسوم علیه p نیست بلکه عامل دومی بر p قابل قسمت است یعنی:

$$p \mid a^{\frac{p-1}{2}}+1$$

بنابراین عدد a نهشت درجهٔ دومی نسبت به‌عدد اول p است اگر رابطهٔ $p \mid a^{\frac{p-1}{2}}-1$ برقرار نبوده ورابطهٔ $p \mid a^{\frac{p-1}{2}}+1$ صحت داشته باشد.

به روش‌دیگری متوسل می‌شویم. به‌ازای $n=15$ بین اعداد طبیعی کوچکتراز ۱۵ تنها ۵ نهشت درجهٔ دوم [یعنی کمتر از $7=(\frac{n-1}{2})$] نسبت به ۱۵ وجود داردکه عبارتند از ۱، ۴،۶،۹،۱۰ وبقیهٔ اعداد طبیعی کوچکتراز ۱۵ نهشت درجهٔ دوم نسبت به ۱۵ نخواهند بود. بین‌اعداد طبیعی کوچکتراز ۸ تنها اعداد ۱و۴ نهشتهای درجهٔ دوم ۸هستند.

در یادداشتهای A. Valevins اشاره شده است که یك عدد فرد به‌شرطی اول‌است که هیچ یك ازاعداد زیر:

$$2^2, 3^2, 4^2, \ldots, (\frac{n-1}{2})^2$$

باقیماندهٔ صفریا یك درتقسیم بر n ندهند.

نهشتهای مکعب ودرجات بالاترهم موردبحث‌واقع‌شده‌اند. می‌توان اثبات کردکه برای هرعدد فرد n تعداد نامحدودی عدد اول p وجود دارد، برای آنکه عددی صحیح نهشت درجهٔ nام آن باشد. به‌عنوان‌مثال برای اعداد ۵ و۱۱ نهشت درجهٔ سوم و برای اعداد ۵و۷ نهشت درجهٔ پنج ازاعداد صحیح وجوددارد.

درمورد نهشت درجهٔ پنجم وصحیح درمورد ۷ از روابط زیراستفاده می کنیم:

$$7 \mid 0^5-0,\ 7 \mid 1^5-1,\ 7 \mid 4^5-2,\ 7 \mid 5^5-3$$
$$7 \mid 2^5-4,\ 7 \mid 3^5-5,\ 7 \mid 6^5-6$$

ونیز می‌توان اثبات کردکه برای‌آنکه عدد اول p دارای‌نهشت درجهٔ فردباشد (عدد صحیح) لازم وکافی‌است که عدد اول p به‌فرم $2^{2^k}+1$ (یعنی یك عدد اول فرما) باشد.

دنباله‌دارد

مسائل برای حل

ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

۱۰۸/۱ـ ثابت کنید که:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=$$

$$=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\dots+\frac{1}{200}$$

۱۰۸/۲ـ ثابت کنید که عدد $2^{99}+2^{9}$ بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

۱۰۸/۳ـ عبارت زیر را به ضرب چهار عامل تجزیه کنید:

$$P=a(b+c)(b^2+c^2-a^2)(a+b-c)-$$
$$-c(a+b)(a^2+b^2-c^2)(b+c-a)$$

۱۰۸/۴ـ صد عدد به‌ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$n_1=1\ ,\ n_2=12\ ,\ n_3=123,\dots$$

$$n_{10}=1234567891 0$$

$$n_{100}=123\dots91011\dots9899100$$

چند عدد ازاین اعداد بر۳ بخش‌پذیر است؟

۱۰۸/۵ـ همهٔ عدد های اول p را بیابید که عدد $N=p^3+p^2+11p+2$ اول باشد.

۱۰۸/۶ـ ثابت کنید که به ازای مقادیر صحیح و دلخواه m و n عدد

$$A=(5m+3n+1)^5(3m+n+4)^4$$

بر۱۶ بخش پذیراست.

۱۰۸/۷ـ هرگاه n عدد طبیعی دلخواه باشد، ثابت کنید که بین عددهای:

$$n, n+1, n+2, \dots, n^3+n^2+n+2$$

توان چهارم عددی طبیعی یافت می‌شود.

۱۰۸/۸ـ ثابت کنید که دستگاه معادله‌های زیردرمجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد.

$$\begin{cases} x^2+z^2+3x-3y-3=0 \\ y^2+z^2+3y+z+5=0 \end{cases}$$

۱۰۸/۹ـ دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} x^3y=9 \\ 3x+y=6 \end{cases}$$

۱۰۸/۱۰ـ دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} y^3+z^3=2a(yz+zx+xy) \\ z^3+x^3=2b(zx+xy+yz) \\ x^3+y^3=2c(xy+yz+zx) \end{cases}$$

۱۰۸/۱۱ـ نابرابری زیررا ثابت کنید:

$$(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\dots+\sin\alpha_n)^2+$$
$$+(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\dots+\cos\alpha_n)^2\leq n^2$$

۱۰۸/۱۲ـ سه خط موازی ومتمایزداده شده‌است.مثلثی مشابه بامثلث داده شده رسم کنید که سه رأسش روی آن سه خط واقع باشد.

۱۰۸/۱۳ـ چهار ضلعی رسم کنید که ضلعهایش با چهار خط داده شده موازی باشد ورأسهایش روی چهار خط داده شدهٔ دیگر واقع باشد.

۱۰۸/۱۴ـ نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید (استفادهٔ ازمشتق لازم نیست):

$$x=\log\sin x$$

تستهای ریاضی

منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها

۱۰۸/۱۵ـ برای دوعدد حقیقی x و y، از ترکیبهای دو شرطی زیر کدامها صحیحند.

$A: xy=0 \Leftrightarrow x=0$ یا $y=0$

$B: xy=0 \Leftrightarrow x=0$ و $y=0$

$C: xy=0 \Leftrightarrow x=0$

$D: xy=0 \Leftrightarrow y=0$

الف ـ فقط A　　ب ـ فقط B

ج ـ C و D　　د ـ A و B و C و D

۱۰۸/۱۶ـ اگر گزارهٔ «$P \Longrightarrow Q$» درست باشد، آنگاه گزارهٔ «$\sim Q \Longrightarrow \sim P$»:

الف ـ نادرست است.

ب ـ فقط وقتی درست است که P نادرست باشد.

ج ـ فقط وقتی درست است که Q درست باشد.

د ـ درست است.

۱۰۸/۱۷ـ قضیهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$P \Longrightarrow Q$

عکس این قضیه کدام است:

الف ـ $\sim Q \Longrightarrow \sim P$　　ب ـ $Q \Longrightarrow P$

ج ـ $\sim P \Longrightarrow \sim Q$　　د ـ $\sim(P \Longrightarrow Q)$

۱۰۸/۱۸ـ هرگاه مجموعهٔ P زیرمجموعه‌ای ازمجموعهٔ Q باشد، ازرابطه‌های زیر کدامها صحیح‌اند:

$A: x \in P \Longrightarrow x \in Q$

$B: x \in Q \Longrightarrow x \in P$

$C: x \notin P \Longrightarrow x \notin Q$

$D: x \notin Q \Longrightarrow x \notin P$

الف ـ A و D　　ب ـ B و C

ج ـ فقط A　　د ـ فقط D

۱۰۸/۱۹ـ هرگاه N مجموعهٔ عدد های طبیعی، N_1 مجموعهٔ عددهای طبیعی‌فرد، N_2 مجموعهٔ عددهای طبیعی زوج، P مجموعهٔ عددهای اول باشد، از رابطه‌های زیر کدامها درست می‌باشند.

$A: P \subset N_1 \subset N$　　$B: P \cap N_2 = \varnothing$

$C: N_1 \cup N_2 = N$　　$D: (P \cup N_1) \subset N$

الف ـ فقط A　　ب ـ A و C و D

ج ـ C و D　　د ـ A و B و C و D

۱۰۸/۲۰ـ P مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های مجموعهٔ A و Q مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های مجموعهٔ B است. تعداد عضوهای P دوبرابر تعداد عضوهای Q است. هرگاه m تعداد عضوهای A و n تعداد عضوهای B باشد:

الف ـ $m=2n$　　ب ـ $m=n+1$

ج ـ $m=n-1$　　د ـ $n=2m$

۱۰۸/۱۲ـ مجموعهٔ A دارای ۵ عضو ومجموعهٔ B دارای ۷ عضو و $A \cup B$ دارای ۱۰ عضواست. دراین‌صورت:

الف ـ $A \cap B = \varnothing$　　ب ـ $n(A \cap B)=2$

ج ـ $A \subset B$　　د ـ $B \subset A$

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۱۰۸/۲۲ـ به‌ازای چه‌مقادیر از a و b کسرزیر مستقل از x است:

$$\frac{x^2+ax+b}{(2x+3)^2}$$

الف ـ هیچ مقدار　　ب ـ $a=12$ و $b=9$

ج ـ $a=3$ و $b=\frac{9}{4}$　　د ـ هرمقدار از a و b

۱۰۸/۲۳ـ به ازای چه مقادیر از p و q عبارت زیر مکعب کامل یك دوجمله‌ای است:

$$x(x^2+q)+p(x^2+1)$$

الف ـ $q=3$ و $p=3$

ب- $p=3$ و $q=9$

ج- $p=\pm\sqrt{3}$ و $q=3$

د- $p=\pm 3\sqrt{3}$ و $q=9$

۱۰۸/۲۴- معادلهٔ زیرچه موقع غیرممکن است:

$$m(x+m+2n)=n(x+3n)$$

الف- به‌ازای $m=n$ ب- به‌ازای $m=0$

ج- به‌ازای $n=0$ د- هیچگاه

۱۰۷/۲۵- حاصل عبارت زیر کدام است:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{2(a+b)}{a-b}$$

الف- صفر ب- ۲

ج- $a+b$ د- $a-b$

۱۰۸/۲۶- به فرض $-1\leqslant m<0$ برای معادلهٔ زیر کدام حالت صادق است:

$$(m-1)x^2+mx-m-2=0$$

الف- دوریشهٔ حقیقی دارد.

ب- ریشهٔ حقیقی‌دارد

ج- ریشهٔ حقیقی ندارد

د- دوریشهٔ مثبت دارد.

۱۰۸/۲۷- اگر $x>3$ باشد برای عبارت:

$$P=\frac{3x^2-2x+4}{x^2-3x}$$

کدام یك‌از حالتهای زیردرست است:

الف- $P>1$ ب- $P<1$

ج- $P<0$ د- $P<-1$

۱۰۸/۲۸- معادلهٔ زیرچند ریشهٔ حقیقی دارد:

$$\sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=1$$

الف- هیچ ب- یك ج- دو د- بیش‌ازدو

۱۰۸/۲۹- هرگاه $-1<x<0$ باشد کدام یك از مقادیرزیر دارای معنی‌است:

(۱) $\log x$ (۲) $\log|x|$ (۳) $|\log x|$

الف- هیچکدام ب- هرسه

ج- فقط (۲) د- (۲) و (۳)

۱۰۸/۳۰- معادلهٔ زیردارای چند جواب حقیقی است.

$$2\log 2+\log(x^2-1)+\operatorname{colog}(4x-1)=0$$

الف- هیچ ب- یك ج- دو د- سه

۱۰۸/۳۱- به فرض $\log a=p$ و $\log b=q$ مقدار x ازمعادلهٔ زیر کدام است:

$$a^{(b^x)}=b^{(a^x)}$$

الف- $\frac{\log p-\log q}{p-q}$ ب- $\frac{p-q}{\log p-\log q}$

ج- $\frac{\log p+\log q}{p-q}$ د- $\frac{\log p-\log q}{p+q}$

۱۰۸/۳۲- دوحکم زیررا درنظر می‌گیریم.

P: سه عدد زیر به ترتیب به‌تصاعد حسابی می‌باشند:

$$\frac{1}{a+b}\ ،\ \frac{1}{c+a}\ ،\ \frac{1}{b+c}$$

Q: سه‌عدد زیر به ترتیب به‌تصاعد حسابی می‌باشند:

$$a^2\ ،\ b^2\ ،\ c^2$$

کدام‌یك ازحکمهای زیردرست می‌باشد:

الف- هرکدام ازدو حکم P وQ که درست باشد دیگری نیز درست است.

ب- هرکدام ازدو حکم P و Q که درست باشد دیگری نادرست است.

ج- اگر P درست باشد نتیجه می‌شود که Q نیز درست است. اما ازدرست بودن Q نمی‌توان نتیجه گرفت که P نیز درست است.

د- اگر Q درست باشد نتیجه می‌شودکه P نیز درست است. اما از درست بودن P نمی‌توان درست بودن Q را نتیجه گرفت.

۱۰۸/۳۳- مجموع n جمله ازیك تصاعد حسابی برابر با $n(3n+1)$ است. جملهٔ nام ازاین تصاعدکدام است:

الف- $6n+2$ ب- $6n+6$

ج- $6n-4$ د- $6n-2$

۱۰۸/۳۴ـ دریك تصاعد هندسی جملهٔ آخر، ۹۷۲، قدر نسبت، ۳، ومجموع جمله‌ها، ۱۴۵۶ است. تعداد جمله‌های این تصاعد کدام است:

الف‌ـ ۵ ب‌ـ ۶ ج‌ـ ۷ د‌ـ ۴

۱۰۸/۳۵ـ هرگاه معادلهٔ $x^2-ax+b=0$ دوریشهٔ x' و x'' داشته باشد به‌قسمی که a، x'، x''، b به همین ترتیب به تصاعد هندسی باشند، برای a کدام حالت زیر صادق است:

الف‌ـ $a>1$ ب‌ـ $a<1$

ج‌ـ $a=1$ د‌ـ هرچه باشد a

۱۰۸/۳۶ـ درمثلث ABC از M وسط BC خط Δ راچنان می‌گذرانیم که محیط مثلث را نصف کند. دراین صورت کدام یك از گزاره‌های زیر نادرست است:

الف‌ـ Δ با نیمساز زاویهٔ (داخلی) A موازی است.

ب‌ـ Δ با BC زاویهٔ برابر با $B+\frac{A}{2}$ می‌سازد.

ج‌ـ Δ با BC زاویهٔ برابر با $C+\frac{A}{2}$ می‌سازد.

د‌ـ Δ با BC زاویهٔ برابر با $\frac{A}{2}$ می‌سازد.

۱۰۸/۳۷ـ درمثلث ABC زاویهٔ C قائمه وزاویهٔ A به اندازهٔ ۳۰ درجه‌است. نیمدایرهٔ به‌قطر AB را رسم می‌کنیم. اگر S مساحت قطعهٔ محصور بین‌وتروکمان AC و S_2 مساحت قطعهٔ محصور بین وتروکمان BC و O وسط AB باشد. مقدار S_1-S_2 برابر است با:

الف‌ـ مساحت قطاع BOC

ب‌ـ مساحت مثلث BOC

ج‌ـ نصف S_1 د‌ـ S_2

۱۰۸/۳۸ـ درصفحه دایرهٔ (O) ودونقطهٔ A و B داده شده‌است. بر A چند خط می‌توان رسم کرد که در M و N بادایره متقاطع باشد به‌قسمی که $BM=BN$:

الف‌ـ هیچ ب‌ـ یك ج‌ـ دو د‌ـ بیش‌ازدو

۱۰۸/۳۹ـ از H مرکز ارتفاعی مثلث ABC به وسط ضلع AB وصل کرده وآن‌را امتداد می‌دهیم تادایرهٔ محیطی‌مثلث رادر D قطع کند. مثلث ABC ازهرنوع که باشد خط CD از کدام یك ازنقطه‌های زیر می‌گذرد.

الف‌ـ مرکز ارتفاعی مثلث

ب‌ـ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث

ج‌ـ مرکز دایرهٔ محاطی مثلث

د‌ـ مرکز ثقل مثلث

۱۰۸/۴۰ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$ چند خط موازی بادو قاعده می‌توان رسم کرد که به‌وسیلهٔ دوساق و دوقطر به سه قسمت متساوی تقسیم‌شود:

الف‌ـ هیچ ب‌ـ یك ج‌ـ دو د‌ـ بیش‌ازدو

۱۰۸/۴۱ـ درمثلث قائم‌الزاویهٔ به‌طول وتر a، مجموع مربعات طولهای سه‌میانه برابراست با:

الف‌ـ $\frac{3a^2}{4}$ ب‌ـ $\frac{4a^2}{3}$ ج‌ـ $\frac{2a^2}{3}$ د‌ـ $\frac{3a^2}{2}$

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۰۸/۴۲ـ برخط به معادلهٔ $2x+3y=6$ چند نقطه می‌توان یافت که مجموع فاصله‌های آن ازدو محور برابر با ۸ باشد؟

الف‌ـ یك ب‌ـ دو ج‌ـ سه د‌ـ هیچ

۱۰۸/۴۳ـ ازنقطهٔ به‌عرض ۱ ـ واقع بر $y'y$ خطی‌با ضریب زاویه‌ای m می‌گذرانیم که باخط به‌معادلهٔ $y=2x+1$ درنقطهٔ $A(x_1,y_1)$ وبا خط به معادلهٔ $y+2x=1$ در نقطهٔ $B(x_2,y_2)$ برخورد می‌کند. کدام یك از مقادیر زیر به m بستگی ندارد:

الف‌ـ مختصات وسط AB ب‌ـ طول AB

ج‌ـ x_1x_2 د‌ـ y_1y_2

۱۰۸/۴۴ـ به فرض $A(0,4)$ و $B(4,1)$ و $C(-2,-2)$ از B خط Δ_1 راعمود بر AB واز C خط Δ_2 راعمود بر AC می‌گذرانیم دوخط Δ_1,Δ_2 در D برخورد می‌کنند. هرگاه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، کدام یك ازحکمهای زیرصحیح است:

الف‌ـ $BC=HD$ ب‌ـ $BC\perp HD$

ج‌ـ BC و HD منصف یکدیگرند

د‌ـ BC و HD عمود منصف یکدیگرند.

۱۰۸/۴۵ـ چند نقطه به طول ۲ یافت می‌شودکه از دو خط به معادله های $y=x+1$ و $y+x=1$ به یك فاصله

باشند.

الف- یك ب- دو ج- چهار د- هیچ

۱۰۸/۴۶- مجموعهٔ نقطه‌هایی‌ازصفحهٔمحورهای‌مختصات که مختصات آنها در دستگاه‌نامعادله‌های‌زیرصدق‌کند کدام است:

$$\begin{cases}(y-x+1)^2\leqslant 1\\(y+x-1)^2\leqslant 1\end{cases}$$

الف- دونیم صفحهٔ جدا ازهم

ب- دونوار جدا ازهم

ج- تمام صفحه به‌استثنای ناحیه‌ای مربع شکل ازآن.

د- ناحیه‌ای مربع شکل.

۱۰۸/۴۷- نمایش هندسی تابع:

$$y=|x+3|+|x+1|+|x-2|$$

الف- خطی‌است مستقیم

ب- خطی‌است شکستهٔ پیوسته امانابسته

ج- خطی است شکستهٔ پیوسته وبسته

د- خطی‌است شکسته امانا پیوسته

۱۰۸/۴۸- به فرض $x>1$ مشتق تابع زیر کدام است (تعداد جمله‌ها نامحدود است).

$$y=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\cdots$$

الف- $y'=\frac{3x^2-2x}{(x-1)^2}$ ب- $y'=\frac{3x^2+2x}{(x-1)^2}$

ج- $y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ د- $y'=\frac{2x-x^2}{(x-1)^2}$

۱۰۸/۴۹- به‌ازای چه مقدار از a منحنیهای نمایش دو تابع زیردرمبدأ مختصات قائم بریکدیگرند.

$$y=x^2+ax \quad , \quad y=\frac{x}{1-x}$$

الف- $a=1$ ب- $a=-1$

ج- $a=2$ د- $a=-2$

۱۰۸/۵۰- منحنیهای به‌معادله‌های زیرداده شده است:

$$(C):y=-x^2+x+1 \qquad (C'):y=\frac{1-x}{x}$$

اگر ω مرکزتقارن منحنی (C') باشد. از ω چند خط می‌توان برمنحنی (C) مماس کرد.

الف- بیش‌از دو ب- دو ج- یك د- هیچ

۱۰۸/۵۱- تابع $y=x^2-|2x-1|$ درازای $x=\frac{1}{2}$ چگونه است:

الف- ماکسیمم ب- می‌نیمم

ج- نامعین د- ناپیوسته

۱۰۸/۵۲- مقدار $tg40^\circ$ با کدامیك از مقادیر زیر برابر است:

الف- $tg\frac{2300^g}{9}$ ب- $-tg\frac{16\pi}{9}$

ج- $-cotg230^\circ$ د- $cotg130^\circ$

۱۰۸/۵۳- در دایرهٔ مثلثاتی (به شعاع یك) A مبدأ کمانها و B' انتهای کمان -90° است. دایرهٔ به‌مرکز A وبه شعاع AB' محور تانژانتها را در T قطع می‌کند به قسمی T و B' دریك طرف محورکسینوسها واقعند. از T به‌مرکز دایره وصل می‌کنیم وامتداد می‌دهیم تاربع دوم ازدایره را در M قطع کند. به‌فرض $\alpha=\widehat{AM}$ کدامیك از گزاره های زیر درست است:

الف- $cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ب- $cotg\alpha=-\sqrt{2}$

ج- $tg\alpha=\sqrt{2}$ د- $sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$

۱۰۸/۵۴- به‌ازای چه مقدار از m داریم:

$$sin\,a=\frac{m-1}{m+1} \quad و \quad cos\,a=\frac{m}{m+1}$$

الف- $m=-4$ ب- $m=4$

ج- $m=2$ د- $m=-2$

۱۰۸/۵۵- کدام مقدار درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند:

$$sin(2x+\frac{\pi}{3})=cos(\frac{\pi}{4}-x)$$

الف- 15° ب- 20° ج- 25° د- 35°

۱۰۸/۵۶- به‌ازای چه مقدار m داریم:

$$sin\alpha=\frac{m+1}{2} \quad و \quad cos2\alpha=\frac{m^2-1}{4}$$

الف- $\frac{2\pm\sqrt{19}}{3}$ ب- $\frac{-2\pm\sqrt{19}}{3}$

ج- $\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$ د- $\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$

۱۰۸/۵۷- درمثلث ABC داریم:

$$tg A=\frac{1}{2} \text{ و } \cos B=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

اندازهٔ زاویه C کدام است:

الف- 45° ب- 135° ج- 60° د- 120°

۱۰۸/۵۸- مقدار $2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$ با کدام مقدار زیر برابر است:

الف- $\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$ ب- $\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{8\pi}{7}$

ج- $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}$ د- $\cos\frac{8\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}$

۱۰۸/۵۹- درهرم به‌رأس S وبه‌قاعدهٔ ABCD از A به P وسط SC وصل‌می‌کنیم وازQ وسط AP صفحه‌ای موازی باقاعدهٔ هرم رسم می‌کنیم که یالهای جانبی‌رادر K، L، M، N قطع می‌کند. نسبت حجم هرم SKLMN به هرم ناقص KLMNABCD برابر است‌با:

الف- $\frac{27}{64}$ ب- $\frac{9}{16}$ ج- $\frac{9}{7}$ د- $\frac{27}{37}$

۱۰۸/۶۰- هرم منتظم S.ABCD داده شده است که ABCD مربع به‌ضلع a وحجم هرم $2a^3$ است. برAB صفحه‌ای عمود بر صفحهٔ ABCD می‌گذرانیم و در این صفحه مربع ABEF را می‌سازیم. حجم هرم S.ABEF کدام است:

الف- $\frac{a^3}{6}$ ب- $\frac{a^3}{2}$ ج- $\frac{a^3}{3}$ د- $\frac{2a^3}{3}$

۱۰۸/۶۱- مربع مستطیل به‌بعدهای ۳و۴ راحول قطر خود دوران می‌دهیم حجم جسم پدیدآمده برابر است‌با:

الف- $\frac{84\pi}{5}$ ب- $\frac{1197\pi}{160}$

ج- $\frac{4269\pi}{320}$ د- $\frac{96\pi}{5}$

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۸/۶۲- منحنی‌نمایش تابع زیرچند مجانب دارد:

$$y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\cdots+\frac{1}{x-n}$$

الف- n ب- n+1

ج- n+2 د- n-1

۱۰۸/۶۳- منحنی نمایش‌تابع $y=x|x|$ درمبدأمختصات دارای چند مماس است:

الف- هیچ ب- دو ج- یك د- بیش‌ازدو

۱۰۸/۶۴- حد تابع زیروقتی $x\to 0$ کدام است.

$$y=x\left|1+\frac{1}{x}\right|$$

الف- وجود ندارد ب- +1

ج- -1 د- ±1

۱۰۸/۶۵- نقطهٔ A به‌طول صفر ونقطهٔ B به‌طول ۳از منحنی نمایش تابع:

$$y=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

را درنظر می‌گیریم. کدام یك ازحکمهای زیرغلط است.

الف- AB در A برمنحنی مماس است.

ب- AB درB قائم برمنحنی است.

ج- AB غیراز A وB بامنحنی‌نقطهٔ مشترك دیگرندارد

د- ضریب زاویه‌ای AB عدد منفی‌است.

۱۰۸/۶۶- تابع زیرچند ماکسیمم یامی‌نیمم دارد.

$$y=\frac{x^3+10x}{x^2+1}$$

الف- دو ب- یك ج- چهار د- سه

۱۰۸/۶۷- غیراز $x=1$ معادله های مجانبهای منحنی تابع زیر کدام است.

$$y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

الف- $y=\pm x+1$ ب- $2y=\pm(2x+1)$

ج- $2y=\pm 2x+1$ د- $y=\pm(x+1)$

۱۰۸/۶۸- هرگاه $x\to 0$ حدتابع زیر کدام است.

$$y=\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}$$

الف- $\frac{1}{2}$ ب- 1 ج- -1 د- $-\frac{1}{2}$

۱۰۸/۶۹ـ به‌ازای کدام مقادیر داده‌شده دستگاه‌نامعادله های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x > 0 \\ \sin x - \cos x < 0 \end{cases}$$

A) $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ B) $0 < x < \frac{\pi}{2}$

C) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ D) $-\frac{\pi}{4} < x < 0$

الف‌ـ فقط A ب‌ـ فقط B

ج‌ـ A وC وD د‌ـ فقط D

۱۰۸/۷۰ـ معادلهٔ زیر در فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant \pi$ چند جواب دارد.

$$\sin 2x = 1 - 2\cos^2 \frac{x}{2}$$

الف‌ـ هیچ ب‌ـ دو ج‌ـ سه د‌ـ یك

۱۰۸/۷۱ـ درمثلث ABC به‌محیط $2p$ وبه‌شعاع دایرهٔ محیطی R وبه‌شعاع دایرهٔ محاطی r مقدار زیربرابر باچیست:

$$\frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

الف‌ـ r ب‌ـ $2r$ ج‌ـ $2R$ د‌ـ R

۱۰۸/۷۲ـ درمثلث ABC به‌شعاع دایرهٔ محیطی R دوارتفاع BK و CL رارسم می‌کنیم. مقدار KL کدام‌است.

الف‌ـ $2R\sin 2A$ ب‌ـ $R\sin 2A$

ج‌ـ $R\cos 2A$ د‌ـ $2R\cos 2A$

۱۰۸/۷۳ـ سطح محصور بین‌منحنی $y = \sin x$ ومحور $x'x$ واقع بین‌صفرو π راحول $x'x$ دوران می‌دهیم. حجم‌حاصل برابربا چیست:

الف‌ـ 2π ب‌ـ $2\pi^2$ ج‌ـ $\frac{\pi^2}{2}$ د‌ـ π^2

۱۰۸/۷۴ـ بزرگترین مقسوم علیه مشترك دوعددطبیعی a وb برابربا D و کوچکترین مضرب مشترك آنها M است. بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد $S = a + b$ و M کدام است.

الف‌ـ D ب‌ـ aD ج‌ـ bD د‌ـ $2D$

۱۰۸/۷۵ـ هرگاه داشته باشیم $36 + 45 = 103$ در این‌صورت 36×45 برابربا چیست:

الف‌ـ ۲۰۰۰ ب‌ـ ۱۸۰۰

ج‌ـ ۲۱۲۶ د‌ـ ۱۶۲۰

۱۰۸/۷۶ـ عدد $A = 3^{2n} + 3^n + 1$ چه موقع بر ۱۳ بخش پذیراست:

الف‌ـ هرچه باشد n

ب‌ـ هرگاه n مضرب ۳ نباشد.

ج‌ـ هرگاه n مضرب ۳ باشد.

د‌ـ هرگاه n فردباشد.

۱۰۸/۷۷ـ به‌ازای چند مقدار ازعدد طبیعی n، مقدار تقریبی نقصانی کسر $\frac{n+13}{n-2}$ با ۰/۱ تقریب برابر ۱/۸ است.

الف‌ـ هیچ مقدار ب‌ـ یك‌مقدار

ج‌ـ دومقدار د‌ـ هرچه باشد n

۱۰۸/۷۸ـ اگر $ab' - a'b = 1$ باشدکدام یك از کسرهای زیرتحویل ناپذیر است:

(۱) $\frac{a}{a+a'}$ (۲) $\frac{b}{b+b'}$ (۳) $\frac{a+a'}{b+b'}$

الف‌ـ فقط(۱) ب‌ـ فقط (۲) ج‌ـ فقط(۳) د‌ـ هرسه

۱۰۸/۷۹ـ دایرهٔ C به‌مرکز O ودو نقطهٔ P و Q در صفحهٔ آن و غیر متقارن نسبت به O مفروض است. O' مزدوج توافقی O رانسبت به P و Q بدست‌آورده ودایرهٔ به‌قطر OO' رارسم می‌کنیم که بادایرهٔ C در A برخورد می‌کند. خطهای PA و QA به ترتیب دایرهٔ C را در B و C قطع می‌کنند. کدام حکم زیرصحیح است:

الف‌ـ $AB > AC$ ب‌ـ $AB < AC$

ج‌ـ $AB = AC$ د‌ـ $AB \perp AC$

۱۰۸/۸۰ـ دودایرهٔ ثابت C وC' داده شده است. دایرهٔ دلخواه Γ را رسم می‌کنیم که‌مرکزش بر Δ محور اصلی‌دو دایرهٔ C و C' واقع باشد. دایرهٔ Γ بادایرهٔ C در A، با دایرهٔ C' در A' وبا Δ در P برخورد می‌کند. باتغییردایرهٔ Γ کدام حکم‌زیر صحیح است.

الف‌ـ MM' از نقطهٔ ثابت می‌گذرد

ب‌ـ MM' امتداد ثابت دارد

ج‌ـ MM' ازمرکز دایرهٔ Γ می‌گذرد

د‌ـ MM' ازوسط AA' می‌گذرد.

دنبالهٔ مقالهٔ «دربارهٔ اعداد اول» در صفحهٔ ۳۳۱ درج است

۱۰۸/۸۱ـ قطبی معکوس کدام مثلث نسبت به دایرهٔ محیطی آن یك مثلث است:

الف ـ هر نوع مثلث

ب ـ هر نوع مثلث غیر از مثلث متساوی‌الساقین

ج ـ هر نوع مثلث غیر از مثلث قائم‌الزاویه

د ـ هیچ نوع مثلث

۱۰۸/۸۲ـ سطح استوانی دوار به‌قطر $2R$ مفروض است. صفحهٔ P باسطح استوانی متقاطع است وبا محور آن زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد. مساحت سطح محصور به مقطع صفحهٔ P باسطح استوانی برابر با:

الف ـ $2\pi R^2$ ب ـ $\pi R^2\sqrt{3}$

ج ـ $2\pi R^2\sqrt{3}$ د ـ πR^2

پاسخها (مربوط به سی مسئلهٔ حدسی سریع)

۱ـ دو ساعت.

۲ـ پاسخ $\frac{5}{12}$ است. احتمال اینکه هردویك عدد بدست آورند برابر با $\frac{1}{6}$ است . بنابراین شانس اینکه یکی بیش از دیگری بیاورد برابر با ۵ به ۶ است که برابر با $\frac{10}{12}$ می‌شود . بنابراین برای بدست آوردن احتمال آنکه خال تاس احمد بیشتر باشد، کافی‌است آنرا بر۲ بخش کنیم .

۳ـ « داخل »

۴ـ فاصله غیر مشخص است . ارتفاع محل تقاطع برابر است باحاصل‌ضرب ارتفاعات دو تیر بخش برمجموعشان .

۵ـ پلاکهای شامل شمارهٔ منزل .

۶ـ صفر

۷ـ «بد» .

۸ـ با اضافه‌کردن سالهای جریان یافته از یك تاریخ‌معین تاکنون ، زمان فعلی بدست می‌آید . بنابراین دو جمع از این نوع برابر خواهند بود ومجموعشان دوبرابر زمان فعلی خواهد بود .

۹ـ شصت‌درجه. باوصل‌کردن دوانتهای خطوط خطچین ، مثلثی متساوی الاضلاع بدست می‌آید .

۱۰ـ جملهٔ‌جدید.

۱۱ـ هزار متر. مسیرپیموده شده بوسیلهٔ ماهی یك زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهد . هرزاویه قائمه‌ای‌که رأسش بر محیط یك دایره واقع باشد، دایره رادر دونقطه واقع‌در دو انتهای یك‌قطر قطع‌می‌کند . بنابراین‌قطردایره برابر با وترمثلث قائم‌الزاویه‌ای است‌که اضلاعش به ترتیب ۶۰۰ مترو ۸۰۰ متر می‌باشد .

۱۲ـ وی بچه‌ها و شیرخوارگان را بحساب می‌آورد.

۱۳ـ فرمولهای بیشماری وجود دارد که درشرط مورد نظرصدق‌کنند ، فی‌المثل $2+1^x$ ، 5^x+3 ، $2+\frac{x}{x}$ و غیره .

۱۴ـ هرجایی‌می‌تواند باشد . مجموع سه طول ثابت و برابر با ارتفاع مثلث است .

۱۵ـ پاسخ ۱۰۳ است .

۱۶ـ پس از خط زدن حروف تشکیل دهندهٔ جملهٔ «شش حرف » از حروف داده شد ، کلمهٔ «یکان» باقی می‌ماند.

۱۷ـ پاسخ بینهایت است . مجموع زوایای A و B برابر با یك قائمه است. بنابراین مجموع دوزاویهٔ قاعدهٔ مثلث یعنی $2A$ و $2B$ برابر با یك زاویهٔ تخت است . زاویهٔ رأس مثلث برابر با 0° است‌ودرنتیجه اصلاع‌این مثلث به موازات‌یکدیگرند وهمدیگر رادربینهایت قطع خواهندکرد .

۱۸ـ ۱۱ ماه (تمام ماهها مگر ماه اسفند)

۱۹ـ سیزده، بعضی بـه‌من گفته‌اندکـه به عقیدهٔ ایشان در این‌مسئله اجباراً ته سیگار آخری به‌هدر خواهد رفت .بهتربود که از مجموعهٔ ده سیگاری شروع می‌کردیم . پس از دودکردن چهارده‌سیگار، دوته سیگار برای خانم اسمیت باقی‌می‌ماند .وی می‌توانست ته‌سیگار دیگری را ازکسی قرض بگیرد ویا ازجائی پیداکند وپس‌ازاینکه پانزدهمین سیگارش را دودکرد ، ته‌سیگار باقی مانده را سرجایش بگذارد .

۲۰ـ هـزار ودویست وشست و چهار میلیون و هشتصد و پنجاه وسه‌هزار ونهصدوهفتاد و یك، ممیزدو،هفت ، پنج، هشت، چهار ـ شش ، سه .

۲۱ـ یك ساعت .

۲۲ـ چون باید ۱۳۶ رقیب را حذف‌کرد، الزاماً ۱۳۶ مسابقه باید داده شود .

۲۳ـ یك اسکناس‌پنجاه‌ریالی ویك‌سکهٔ‌پنج‌ریالی. اسکناس پنجاه ریالی برابر بایك سکهٔ پنج‌ریالی نیست .

۲۴ـ بیست کیلو .

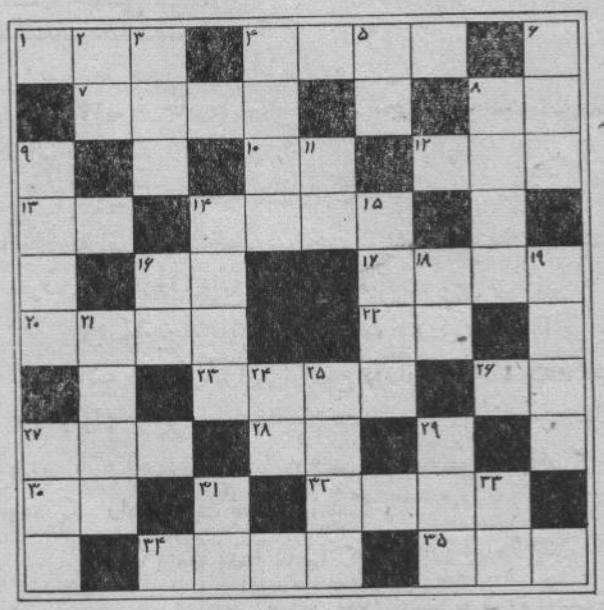
۲۵ـ $X=\frac{111}{3}=37$

دراین‌کسر، صورت دردستگاه اعشاری عددنویسی‌معمولی

بقیه در صفحهٔ ۳۱۶

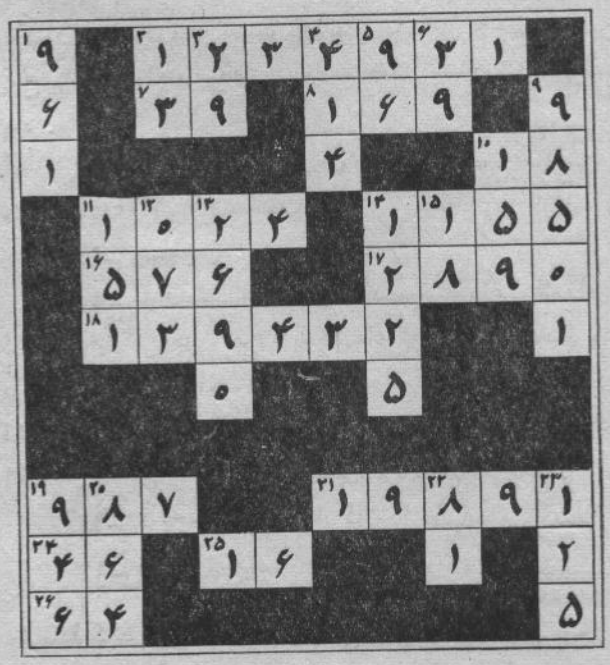
جدول اعداد

طرح از : داود کفشگر لاریجانی (تاریخ وصول به دفتر مجله: ۱۳۵۰/۱۱/۲۶)



افقی: ۱ـ بزرگترین عدد سه‌رقمی که اگر بامقلوب‌خود جمع‌شود عددی سه رقمی‌با رقمهای یکسان بدست‌آید. ۴ـ سطر سوم ازمثلث خیام‌ـ پاسکال. ۷ـ عددی چهاررقمی که چون با مجموع رقمهایش جمع‌شود ۲۵۶۸ بدست‌آید. ۸ـ عدد دو رقمی که از مجذور مجموع رقمهای خود به اندازهٔ مجموع رقمهای خود بیشتراست. ۱۰ـ عدد اولی که مجموع رقمهایش دو برابر تفاضل آنها است. ۱۲ـ مجذورسه برابر رقم‌یکان خود می‌باشد ۱۳ـ پنج برابرعدد ۱۱ قائم. ۱۴ـ از نوشتن مقلوب عدد ۸ افقی درسمت چپ‌آن بدست می‌آید. ۱۶ـ توان ششم است. ۱۷ـ اگردررقم یکان‌خود ضرب شودمقلوبش بدست‌آید. ۲۰ـمجموع عددهای ۱۰ افقی و۶ قائم. ۲۲ـ مقلوب عدد ۸ افقی. ۲۳ـ به صورت $\overline{abba}$ به‌قسمی که $\overline{ab}$ همان عدد ۲۸ افقی است. ۲۶ـ مجذورکامل است وهریك ازرقمهایش نیزمجذورکامل است. ۲۷ـ توان هشتم است. ۲۸ـ مجذور مجموع رقمهای خود می‌باشد. ۳۰ـ مقلوب عدد ۱۰ افقی. ۳۲ـ کوچکترین عدد چهاررقمی که رقمهایش به تصاعد هندسی می‌باشند. ۳۴ـ به‌صورت $\overline{abba}$ که $\overline{ab}$ جذرعدد ۲۷ افقی‌است. ۳۵ـ مجذور عدد ۸ افقی.

قائم: ۲ـ دو برابر عدد ۲۲ افقی ۳ـ چهار برابر عدد ۳۰ افقی. ۴ـهمان عدد۴ افقی.۵ـ سه برابرعدد ۳۰افقی.۶ـ توان چهارم رقم یکان خود. ۸ـ همان عدد ۳۲ افقی. ۹ـ ده برابرعدد ۲۷افقی. ۱۱ـ عدد دورقمی بارقمهای یکسان. ۱۴ـ عدد معروف «بدوح». ۱۵ـ ازعدد ۳۲ افقی ۸۸۰ واحد بیشتر است. ۱۶ـ پنج برابرعدد ۳۰افقی. ۱۸ـ هر عدد را می‌شمرد. ۱۹ـ اگر یك‌واحد به آن اضافه شود توان چهارم شود. ۲۱ـ برابر است با $a^3 \times \overline{bac}$ که $c = a^2$ و $b = a - 1$. ۲۴ـ مقلوب عدد ۲۸ افقی. ۲۵ـ یك‌نهم‌عدد ۱۹قائم. ۲۷ـ ده‌برابر عدد ۲۲ افقی. ۲۹ـ مقلوب عدد ۳۵ افقی. ۳۱ـ مجذور رقم یکان خود. ۳۳ـ شمارهٔ دهگان عدد ۱ افقی.



حل جدول شمارهٔ قبل

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 145– Show how to construct through a given point a line which will pass through the inaccessible intersection of two given lines.

First Solution

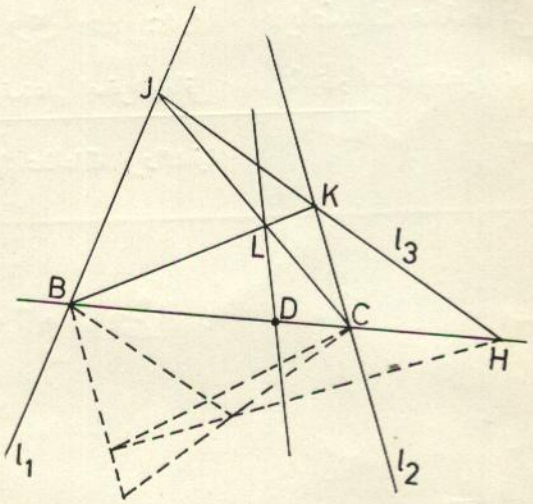
Let the two lines be designated as l_1 and l_2 and let D be the given point . To obtian a line through D which will pass through the inaccessible intersection, A, of l_1 and l_2, proceed as follows : draw $\overleftrightarrow{DF}$ perpendicular to l_2 intersecting l_1 at E and l_2 at C; then draw $\overline{BC}$. Now draw $\overleftrightarrow{DT}$ perpendidicular to $\overline{BC}$. $\overrightarrow{DT}$ will pass through the inaccessible intersection, A, of $\overleftrightarrow{BE}$ (l_1) and $\overleftrightarrow{CF}$ (l_2) because the three altitudes of ΔBCA must be concurrent.

Note: This solution is valid whether D is taken between the two lines, or outside of them. If D is taken on one of the given lines, the solution is trivial.

Second Solution

This solution can be effected with straightedge alone. Construct any line through D intersecting l_1 and l_2 at B and C respectively. Determine H, the harmonic conjugate of D with respect to B and C.

Through H Construct any line l_3 intersectiug l_1 and l_2 at J anb K respectively. If $\overline{BK}$ and $\overline{CJ}$ intersect at point L, $\overleftrightarrow{DL}$ is the required line. See Fig.



Third Solution

If D is the midpoint of $\overline{BC}$, Hen its harmonic conjugafe is a point at infinity, and $\overline{EF}$ will be parallel to $\overline{BC}$. This suggests the following procedure: Draw a line through D intersecting l_1 and l_2 at B and C respectively such that BD=DC. (Through D draw any line intersecting l_1 at P. Extend $\overleftrightarrow{PD}$ to Q. so that PD=QD. Through Q draw a line parallel to l_1 intersecting l_2 at C. $\overrightarrow{CD}$ will intersect l_1 at B such that BD=DC). Draw line parallel to $\overline{BC}$ intersecting l_1 and l_2 at F and E respectively. If $\overline{BE}$ and $\overline{CF}$ intersect at G. $\overrightarrow{DG}$ is the required line.

Note : In all these constructions it is assumed that all points of l_1 and l_2 are accessible except their intersection.