یکان

مجله ریاضیات

دورهٔ یازدهم ، شمارهٔ : ۶ شمارهٔ مسلسل : ۱۰۷ اردیبهشت ۱۳۵۴

دراین شماره:

بها : ۴۰ ریال

چاپ دوم

تستهای هوش

ترجمهٔ : باقر مظفرزاده

از انتشارات یکان

درشرف انجام‌است‌ودرخردادماه‌دردسترس علاقمندان خواهد بود.

تاریخ انتشار وبهای جدید این کتاب دریکان‌شمارهٔ بعد آگاهی خواهد شد.

چاپ پنجم

راهنمای ریاضیات متوسطه

تألیف : عبدالحسین مصحفی

از انتشارات یکان

نیز درشرف انجام است . تاریخ انتشار وبهای جدید این کتاب نیز در یکان شمارهٔ بعد آگاهی خواهد شد.

توجه

از مشترکان مجله که با پایان سال‌تحصیلی نشانی پستی آنهاتغییرمی کند،درخواست می‌شودبرای دریافت شماره‌های ۷ و ۸ یکان دورهٔ یازدهم نشانی جدید خودرا اطلاع دهند.

یادآوری

در چاپ مقالهٔ کاوشهایی در تاریخ نجوم اسلامی مندرج در یکان شمارهٔ۳ دورهٔ یازدهم، مآخذ زیر از قلم افتاده است:

۱ـ Sedillot,L.A. : «Décover de la variation par Aboul wefâ» Journal Asiatique, vol. 16 (1835)

۲ـ حداد عادل، غلامعلی: «نجوم درفلسفهٔ ارسطو» مقاله نوزدهم، یادنامه علامه امینی چاپ تهران ۱۳۵۲

۳ـ نصر، سیدحسین: «علم و تمدن در اسلام» ترجمه احمد آرام، چاپ تهران ۱۳۵۰

تسلیت

درگذشت عالم فاضل حجةالاسلام آقای حاج شیخ محمدباقر شریف‌زادهٔ گلپایگانی والد آقایان هوشنگ ومحمد شریف‌زاده، همکاران یکان، را به ایشان و خانوادهٔ محترم تسلیت می‌گویم.

عبدالحسین مصحفی

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ یازدهم ـ شمارهٔ ششم ـ شمارهٔ مسلسل ۱۰۷

اردیبهشت ۱۳۵۴

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملک‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیک شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی۲۴۶۳

تلفن اداره:۳۹۳۱۸۱

وجه اشتراک برای دورهٔ یازدهم : ۳۲۰ ریال

حساب بانکی:حساب جاری۳۰۹۵شعبهٔ لاله‌زارنوبانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume XI, number 6. May. 1975

subscription : 6$

TEHRAN - P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـتلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراک یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است‌که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی‌که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

کاوشهایی در تاریخ نجوم اسلامی

دستگاههای نجومی، بابلی، یونانی و اسلامی

جعفر آقایانی چاوشی

هر گاه دروقت مناسبی بر آسمان نظر افکنیم پس از مدت کوتاهی مشاهده می کنیم که کرهٔ آسمان ظاهراً درنقطه‌ای نزدیك ستارهٔ جدی می‌چرخد که آن نقطه شمال نامیده شده است.

سرعت این حرکت به‌اندازهٔ سرعتی است که کرهٔ زمین در هرشبانه روز یك‌بار به‌دور خود می گردد.

اکثر ستارگان فقط وفقط دارای این‌حرکت یومی هستند ومکان آنها نسبت به‌همدیگر تغییر نمی کند ومثل این است که بر سطح داخلی کرهٔ آسمان نقاشی شده‌اند، ازاین‌جهت این‌ستارگان را ثوابت می‌نامند.

امابه‌غیراز اخترهای ثابت عدهٔ کمی ازاجرام سماوی‌یافت می‌شوند که مابین ثوابت می گردند و چون دارای مکان معینی نیستند آنها را سیارات می گویند.

سیارات را ازنقطه نظرزمین به دو دستهٔ اصلی می‌توان تقسیم کرد:

نخست سیارات سفلی که مدارشان داخل درمدار زمین است وآنها عبارتند از: عطارد، و زهره.

ودسته‌دوم سیارات علوی که مدارشان خارج ازمدارزمین است وآنها عبارتند از: زحل، مشتری، ومریخ.

حرکت خورشید از حرکات بقیهٔ سیارات ساده‌تر است. مسافت‌طی‌شدهٔ آن درشبانه‌روزتقریباً یك‌درجه‌برروی دایرهٔ‌عظیمه‌ای می‌باشد، بطوری که‌درعرض‌یك‌سال‌یك دورهٔ کامل می گرددوبه‌محل اول‌برمی گردد. آن دایرهٔ عظیمه راکه‌قطب آن باقطب‌شمال‌متفاوت است دایرةالبروج می‌نامند.

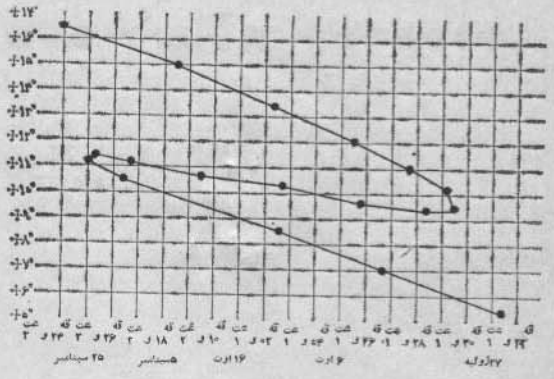
برعکس، مسیرهایی که سایرسیارات مابین‌ستاره‌های ثابت می‌پیمایند بسیار درهم وبرهم به‌نظرمی‌آیند. این‌سیارات اگرچه ازدایرةالبروج هیچ‌وقت‌زیاد دورنمی‌شوند اماگاهی به‌طرف‌شمال وگاهی به‌طرف جنوب آن دایره درحرکتند. منطقه‌ای ازکرهٔ آسمانی که حرکات سیارات درآن انجام می گیرد ومحصور بین دومدار موازی بادایرةالبروج است منطقةالبروج نام‌دارد.

اگرمسیر سیارات برگرد زمین مسیری‌ساده ومستدیری بود، به‌نحوی که هرگز سیاره ازآن مسیر تخلف نمی کرد، تنها کافی‌بود فرض‌شودکه هرسیاره متصل به‌فلکی است که با سرعتی خاص ودرامتدادی معین می‌چرخد.

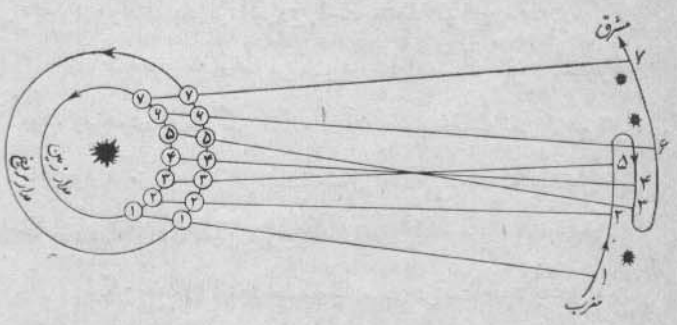
لیکن مشکل اینجاست که‌سیاره درحرکت خود به‌دورزمین همواره روی مسیرمستدیر درحرکت نیست، بلکه‌گاهی ازادامهٔ مسیرمعمول خود باز می‌ماند وبه‌عقب باز می گردد (رجعت) و دوباره پس‌از توقف نسبتاً کوتاهی (اقامت) به‌راه نخستین باز می گردد و همان مسیر راست ومستقیم خود را از سر می گیرد (استقامت). این حرکت قهقرایی سیارات از دیرباز برمنجمان مصروبابل معلوم‌بود وهمین انحراف وتخلف ازحرکت مستدیر بودکه تبیین حرکات سماوی را دشوار ساخته بود.

هر گاه تصویرخط مسیریکی از سیارات روی کره سماوی را مورد بررسی قراردهیم مشاهده خواهیم کردکه آن مسیرچون نجیری از حلقه‌هاکج می‌باشدکه در آن هیچ‌کدام ازحلقه‌های عین حلقهٔ دیگری نیست.

برای توجیه حرکت سیارات قسمتی‌ازکرهٔ سماوی راکه مسیرسیارهٔ مریخ درسال ۱۹۷۳ میلادی درآن مشخص شده است درشکل ترسیم شده است.



حرکت نامنظم ظاهری مریخ درآسمان به‌نظر می‌رسد که نسبت به‌ستارگان دیگر از مغرب به مشرق آمده و درجهت عکس برمی‌گردد. درشکل زیر حرکات نسبی زمین ومریخ نشان داده شده وچنانکه ملاحظه می‌شود سیارهٔ مریخ نسبت به زمین مداری منحنی‌شکلی شبیه به‌حرف S را می‌پیماید.



دستگاههای مختلف توجیه حرکت سیارات

این‌واقعهٔ آسمان ازدیرباز موردتوجه انسان‌بوده ودرقرون واعصار مختلف علما ومنجمین درصدد حل این مسئلهٔ مربوط به حرکات سیارات بوده‌اند.

اصل مسئله چنین است که محل هر سیاره‌ای راکه در منطقةالبروج دروقت معین پیش‌بینی کنند.

قدماترجیح می‌دادند برای‌هریك‌ازسیارات حقیقی‌سیاره‌ای موهومی فرض کنند واین‌نوع سیاره به سیارهٔ وسط معروف بود. مثلا مشتری وسط نقطه‌ای است که سرعت ثابت او مساوی سرعت میانهٔ‌مشتری‌بوده‌ودوردایرةالبروج‌می‌چرخد. گاهی‌سیارهٔ‌حقیقی‌از سیارهٔ وسط جلو می‌افتدوگاهی‌عقب‌وگاهی تندتر می‌رود وگاهی کندتر، ولی‌هیچوقت از همدیگر زیاد دور نمی‌شوند پس مطلب اصلی‌ما راهی به‌طرز دیگری تعبیر کرد.

یعنی می‌خواهیم بدانیم که درلحظهٔ معینی‌فاصله مابین‌سیارهٔ وسط چیست؟ باز در ازمنهٔ قدیم اخترشناسان به‌این مطلب پی‌برده بودندکه تعبیرات این‌فاصله (یاتعدیل) متناوبند. تعدیل خورشید کوچك وفقط دارای یك‌انحراف متناوب است. اما سایر کواکب متغیرشامل دوانحراف بادورهٔ تناوب مختلف می‌باشند ویکی از آنها اثرش به‌قدری شدیداست که نه‌فقط حرکت سیاره را تند و کند می‌کند بلکه‌گاهی جهت مسیررا معکوس می‌کند.

پس‌لازم بود دستگاه فلکی بسازند به طوری‌که به‌سرعت متوسط کوکب دو تغییر متناوب مختلف بدهد. در طول تاریخ سه دورهٔ نجومی درخور ذکر می‌باشد:

۱ـ نجوم بابلی

اقوام بابل، این‌ساکنان دشتهایی که‌آسمانی‌صاف وپرستاره دارد، پرکارترین وپرحوصله‌ترین منجمان تاریخ‌بوده‌اند. اینان به‌دلایل خاصی که در درجهٔ اول ناشی ازفرهنگ دینی ومعنوی ایشان بوده‌است، علاقه‌مند به‌پیش‌بینی مواضع کواکب ونیز تنظیم گاهنامه بوده‌اند.

بابلیان حقایق بسیاری درمورد کواکب می‌دانسته‌اند، از انواع حرکات محسوس‌ومشهود سیارات وماه‌وخورشیدو دوره‌های تناوب هریك ازآن حرکات‌آگاه بوده‌اند وبه‌مدد همین معلومات نجومی می‌توانسته‌اند قبلا اعلام کنندکه فلان سیاره در فلان شب درکدام نقطه‌آسمان ودرچه ارتفاعی‌است وبدانندکه درفلان روز وفلان ساعت‌کسوفی باچه مشخصاتی رخ خواهد داد.

دستگاه نجوم بابلی‌کاملا عددی یاحسابی بود و هیچ اصل هندسی‌نداشت، ولی‌با استعمال‌توابع خطی‌کنگره‌ای تغییرات‌لازم را به‌سرعت وسط می‌داد.

۲ـ نجوم یونانی

در یونان باستان دو دستگاه نجوم معروف وجود داشت: نجوم ارسطویی ونجوم بطلیموسی.

نجوم ارسطویی

درك نجوم ارسطویی بـدون توجه به نظریـات نجومی **ائودوکسوس** میسر نیست، حتی خود ارسطو نیز هنگامی که می‌خواهد آراء فلکی خود را بیان کند، ابتدا به شرح نظریه ائودوکسوس می‌پردازد.

ائودوکسوس بااستفاده ازحرکات مستدیر و ترکیب انواع این حرکت، مدلی تأسیس کرد که می‌تـوانست علاوه برحرکت مستدیر سیارات، حرکت قهقرائی واعوجاجات مشهود دیگر آنها رانیز مبین‌سازد.

مدل ائودوکسوس از بیست و هفت کرهٔ متحـدالمرکز که زمین مرکز واحد همهٔ آنهاست تشکیل یافته است و سهم ثوابت وسیارات وماه وخورشید ازین مجموعه بدین قراراست:

ثوابت: ۱ کره

ماه وخورشید هریك: ۳ کره

سیارات پنجگانه هریك: ۴ کره (عطارد ، زهره ، مریخ، مشتری وزحل)

ساده‌ترین حرکات‌سماوی که حرکتی کاملا مستدیرومکرر است حرکت ستارگان ثابت‌است.

بدیهی‌است که برای تبیین این‌حرکت تنها فرض یك کره کافی‌است. می‌دانیم که این‌حرکت شبانه‌روزی ثوابت راکه دورهٔ آن بیست وچهار ساعت است هریك ازاجرام ماه و خـورشید و سیارات نیزدارند، پس برای هریك ازآنها نیز کـره‌ای می‌باید فرض کرد که بادوران خود موجب پیدایی این‌حرکت شبانه‌روزی گردد. اما ماه وخورشید و سیارات علاوه براین حرکت شبانه‌روزی یك‌حرکت دورانی دیگر نیز برگرد زمین دارند که همان حرکت آنها درمنطقةالبروج است، دورهٔ این‌حرکت برای‌خورشید وعطارد وزهره یك‌سال است وبرای ماه یك‌ماه وبرای سه سیاره دیگر، مدتی مخصوص به‌هریك ازآنهـاست. ائودوکسوس برای تأمین این‌حرکت به‌هریك ازاین‌اجرام‌یك‌کرهٔ دیگر نسبت‌می‌دهد که چرخش آن موجب دوران آنهـا در منطقةالبروج در تغییر است.

علاوه براین، حرکت قهقرایی نیزبه شرحی کـه گفته شد درکاراست ومی‌بایدآن‌رابه نحوی توجیه‌کرد، ائودوکسوس برای ایجاد این‌حرکات، یك‌کره به‌ماه ویك‌کره به‌خورشید و دوکره به‌هریك ازسیارات پنجگانه نسبت داد.

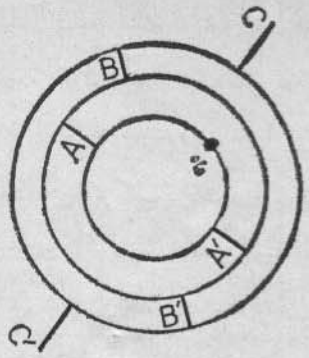
برای تصور نحوهٔ ترکیب‌کرات و چگونگی تبعیت سیاره ازحرکات مختلف‌آنها، کره‌ای را تصورکنیدکه به‌دور محوری باقطبهای A و A′ وباسرعت زاویه‌ای ω درحرکت است‌وسیاره روی‌استوای این‌کره قرار دارد، حرکت‌این‌کره به‌تنهایی‌موجب می‌شودکه سیاره یك مسیر مستدیرکه همان مسیر حرکت‌شبانه‌روزی‌آن‌است طی‌کند، اینك برای حرکت‌انتقالی سیاره درمنطقة البروج، فرض‌کنیدکه دوقطب A و A′ خودروی سطح کرهٔ بیرونی دیگری هستند که BB′ محـور آن با AA′ زاویه‌ای مانند α می‌سازد وخود باسرعت ω' درحرکت است، پس‌سیاره تحت‌تأثیر دوحرکت قرار داردکه حرکت دوم موجب ظهورحرکت انتقالی است،اینك برای حرکت قهقرایی ونیز تغییرات مشهود درعرض سیاره نسبت به دایرةالبروج می‌توان باردیگر B و B′ را واقع برسطح کره‌ای دیگربه محور CC′ تصورکردکه باسرعت ω'' و بازاویه‌ای برابربا β نسبت به BB′ درچرخش است.

برای توجیه حرکات ماه وخورشید وجود سه‌کره‌کفایت می‌کند، امابرای سیارات، کرهٔ چهارم دیگری لازم‌است‌که وضع آن نسبت به‌کرهٔ سوم‌مانندوضع کرهٔ سوم به‌کرهٔدوم ویاکرهٔ دوم‌به کرهٔاول باشد. خلاصه اینکه ائودوکسوس باانتخاب کره‌هایی با سرعتهای‌زاویه‌ای ω و ω' و ω'' و... ومحورهای AA′ و BB′ و CC′ و ... که هریك از آنها برای خود در فضا راستای معینی را داراست حرکات مستدیررا چنان باهـم ترکیب می‌کند واین سرعتها وزاویا را چنان انتخاب می‌نماید که برای هرسیاره کماً وکیفاً مسیری فراهم می‌شودکه باآنچه درآسمان به‌چشم می‌آید مطابق است.

منحنی خاصی‌که حاصل ازترکیب دو حـرکت انتقالی و حرکت قهقـرایی سیاره است ، شکلی شبیه بـه (8) دارد که ائودوکسوس خود آن را «Hippopede» نامیده است.

اگربخواهیم از مدل نجومی ائودوکسوس تصور دقیقتری داشته باشیم می‌توانیم شکل زیر را کـه نمودار حرکت ماه (یا

خورشید) است مورد توجه قرار دهیم:



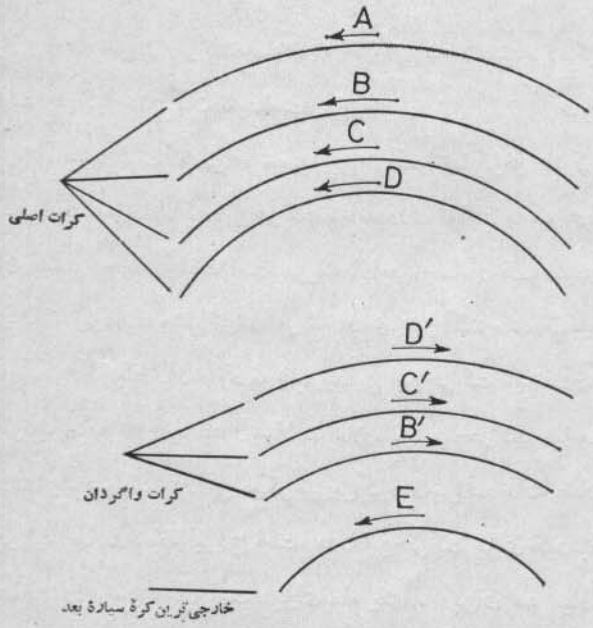
ارسطو بـا واقعی دانستن مفاهیم هندسی مدل نجومی ائودوکسوس، آن را مبنای نجوم خود قرار داد.

ائودوکسوس برای توجیه حرکت هر سیاره چندکره در نظر گرفته بود که به‌گرد زمین‌در گردش بودند. لیکن ازارتباط کرات مربوط بـه‌یك سیاره باکرات سیارهٔ دیگر سخنی نگفته بود. امااارسطو که این کرات را افلاك واقعی و موجود می‌دانست و به خلاء نیزقائل نبود، ارتباط‌کرات با یکدیگربرایش ایجاد مشکل می‌کرد. مشکل ارسطو این بود که اگر حرکات چندکرهٔ وابسته به‌یك سیاره، به‌هم منتقل می‌شوند و درونی‌ترین کره که حامل سیاره است حرکتی مرکب از حرکات همهٔ آن چندکره را دارد، ناگزیر می‌باید قبول کنیم که‌کرات مربوط به سیاره‌ای بـالاتر نیز چون بـا کرات این سیاره در اتصالند، حرکات خودرا به‌آنها منتقل می‌کنند و تصور چنین امری‌ممکن نیست، زیرا اصولا ائودوکسوس بدین‌علت توانسته بود حرکات ظاهری سیارات را توجیه کند که به هریك از چند کرهٔ خاص سیاره، حرکتی خاص‌با زاویه‌ای معین نسبت داده بود، حال‌اگر قرار شود همهٔ این ۲۶ کره حرکات خود را به‌هم انتقال دهند، آن نتیجه هـرگز حـاصل نمی‌شود. ارسطو انتقال یکی ازین حرکات را بلااشکال می‌دانستو آن‌حرکت چون در همهٔ‌اجرام سماوی به‌نحو واحدی دیـده می‌شود، سرایت آن از کرات یك سیاره به‌کرات‌سیارهٔ دیگر، باعث اختلال نمی‌گردد، اما درمورد سایر حرکات خاص ماه و خورشید و سیارات، لازم بـود این تأثیر و سرایت را به‌شکلی از میان‌برد.

ارسطو بدین منظور ناچارشدبه‌کرات منتسب به‌هرسیاره، کرات دیگری اضافه‌کند (یا به‌عبارت مناسبتر، ارسطو معتقدبود همراه با کراتی‌که ائودوکسوس به سیاراث نسبت داده بود، در آسمان‌کرات دیگری نیز واقعاً وجود دارد) که وظیفهٔ آنهاخنثی کردن حرکات‌کراتی است‌که حرکات ویژهٔ هرسیاره را ایجاد می‌کنند. هریك ازین‌کرات‌اضافی باگردش درخلاف جهت‌کره‌ای معین و با سرعتی برابر سرعت آن، تأثیر آن را در سرایت به کرات‌سیارهٔ دیگر کان‌لم‌یکن می‌سازد. ارسطو این کرات اضافی را میان درونی‌ترین‌کره مربوط به‌یك سیاره (که خود سیاره‌نیز روی همان درونی‌ترین‌کره واقع‌است) و بیرونی‌ترین‌کرهٔ سیاره بعدی قرار می‌دهد و آنها را «کرات واگردان» می‌نامد.

مثلا اگر کرات A وB وC وD را کراتی بدانیم که عامل ایجادحرکت زحل درمدل ائودوکسوس هستند و A را خارجی ترین و D را درونی‌تـرین کـره فرض کنیم، در این صورت می‌بایست بعداز D ، کرهٔ دیگری مانند D' وجود داشته باشد که حرکت آن حول همان قطبین‌کرهٔ D منتها در خلاف جهت و با همان سرعت کرهٔ D صورت بگیرد.

بدیهی‌است کـه، دو حرکت D و D' یکدیگر را خنثی می‌کنند و اگرنقطه‌ای را روی کرهٔ C که بالاتر از D است‌به منزلهٔ نقطهٔ ثابتی است اینك دوباره بعد از D' کره‌ای دیگر مانند C' درنظرمی‌گیریم که نسبت به C همان وضع D' نسبت به D را دارد، این‌کره نیزموجب خنثی‌شدن حرکت C می‌شود، به همین ترتیب با افزودن کرهٔ دیگری مانند B' تأثیر B نیز از میان می‌رود، نقطه‌ای که روی B' واقع باشد از هیچیك از کرات D و C و B تأثیرنمی‌پذیرد ونسبت به‌کرهٔ A به‌منزلهٔ نقطهٔ ثابتی است. توجه به شکل زیـر درك این معنی را آسانتر می‌سازد.



پس در واقع نقاط‌کرهٔ B' از حرکت‌کرهٔ A تبعیت‌می‌کنند، اما A کرهٔ حرکت شبانه‌روزی است و انتقال این‌حرکت از طریق کرهٔ B' به‌کرات مربوط به سیارهٔ مشتری کـه سیارهٔ بعداز زحل است (یعنی درونی‌تراز آن و نزدیکتر به زمین‌است) اشکالی ندارد، پس‌لازم است‌برای جلوگیری از انتقال حرکات زحل، ۳ کره به ۴ کرهٔ آن افزوده شود. به‌طورکلی می‌توان گفت

که اگر تعداد کرات لازم در مدل کالیپوس برای هر سیاره n باشد، ارسطو ناچار است به این n کره، n − ۱ کره به ترتیبی که گفتیم بیفزاید(*).

نجوم بطلمیوسی

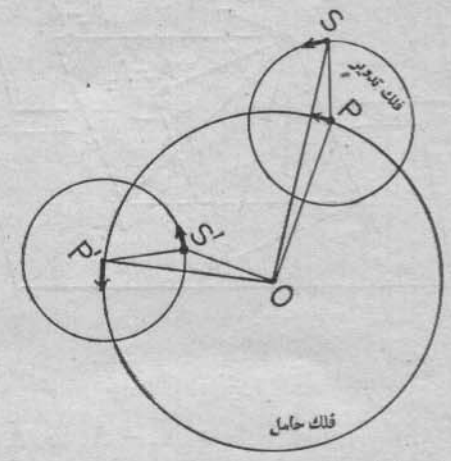
نظریات نجومی بطلمیوس که قرنها برافکار علمی حکومت داشت در کتابی تحت عنوان:

«Megale Syntanister Astronomian»

ثبت گردیده است. مسلمین این کتاب را به عربی ترجمه کرده و نام «المجسطی» بر آن نهادند.

بطلمیوس در وهلهٔ اول حرکت سیارات را چنین توجیه می کند: هر سیاره‌ای مانند P دایره‌ای درحول مرکز O می‌پیماید درحالی که مرکز C′ خود دایره‌های درحول مرکز عالم یعنی زمین طی می کند.

دایرهٔ به مرکز C′ را فلك تدویر (Epicycle) و دایرهٔ به مرکز زمین را فلك حامل (Deperent) می نامند.

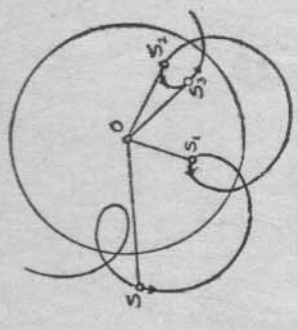


تمام سیارات فلك تدویر را در مدت یك سال طی می کنند ولی مدت دوران نقطهٔ C′ روی فلك حامل برای سیارات مختلف متفاوت است.

ملاحظه می کنیم هروقت طول شعاع متحرك OS ازطول OP زیادتر باشد سرعت زاویه‌ای OS از سرعت OP زیادتر خواهدبود، بالعکس هرگاه اندازهٔ آن شعاع ازطول متوسط خود یعنی OP کمتر باشد (مثلا دروضعیت OS′) سرعت زاویه‌ای OS′ ازسرعت OP کمتر خواهد بود.

حتی اگر سرعت S دور P به اندازهٔ کافی تند باشد ممکن است اثر S آنقدر زیادباشد که برای مدتی جهت دوران OS را عوض کند ودرجهت عکس برگرداند. یعنی اگرچه اغلب اوقات حرکت OS مخالف حرکت عقربهٔ ساعت می‌باشد اما گاهی هم حرکتش موافق آن می‌شود.

پس مکان هندسی S توالی حلقه‌ها حول مرکز O می‌باشد هرگاه شعاع متحرك درموضعی مانند OS باشد می‌توان گفت OS مستقیم‌السیر است ودر OS_1 راجع است ودر نقاط OS_2 و OS_3 مقیم می‌ایستد.

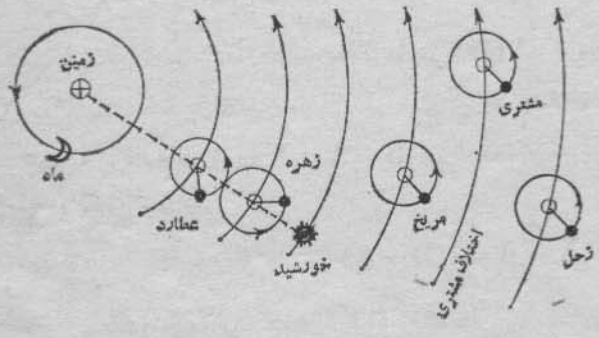


بطلمیوس درمورد خورشید نظریهٔ فلك خارج از مرکز (Excentrique) را بیان می کند.

به این معنی که مدار آفتاب را دایره و حرکت آن را روی دایره متشابه می‌داند ولی می گوید زمین درمرکز این دایره نیست. بطلمیوس به‌خوبی متوجه بود که تغییرات طول سماوی آفتاب یکنواخت نیست و به‌علاوه حرکت مستدیر یکنواخت ایجادمی کند که طول چهارفصل سال باهم برابر باشد درحالی که این طور نیست وبنابراین نمی‌توان حرکت خورشید را با یك حرکت دورانی متشابه درحول زمین تعبیر کرد به‌همین جهت فرضیهٔ فلك خارج مرکز را بیان می کند.

بطلمیوس دربارهٔ سیارات سفلی که نزدیکتر اززمین به آفتاب هستند باپدیدهٔ انحراف از خورشید مواجه می‌شود. این سیارات همیشه در مجاورت خورشید دیده می‌شوند زیرا به خورشید نزدیکترند. مثلا فاصله عطارد ازآفتاب وقتی که ما از زمین نگاه می کنیم از ۲۸ درجه تجاوز نمی کند ودرمورد زهره حداکثر این زاویه ۴۸ درجه است. این زاویه‌را بعد زاویه‌ای سیاره می‌نامند.

بطلمیوس برای توجیه این پدیده فرضیهٔ دیگری برای سیارات سفلی اضافه می کند ومی گوید مرکز فلك تدویر آنها روی خطی که زمین‌را به‌خورشید وصل می کند قرار دارد.



دستگاه نجومی بطلیموس دارای نقایصی بود که رصدهای دقیق وعدیدهٔ منجمین اسلامی واروپائی واختراع دوربین نجومی این نقایص‌را به‌مرور زمان معلوم ساخت. در فرصت مناسب این نقایص تشریح خواهد شد.

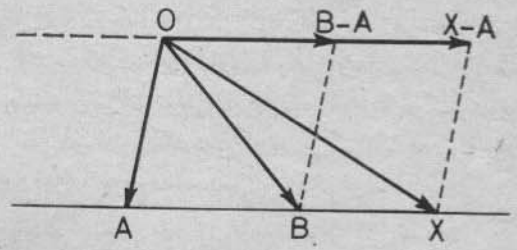
* نجوم ارسطویی از مقاله آقای غلامعلی حداد عادل تحت عنوان «نجوم در فلسفهٔ ارسطو» در کتاب یادنامهٔ علامه امینی اقتباس و خلاصه شده است.

قضیهٔ منالائوس در فضاهای برداری

علیرضا امیر معز: دانشگاه تگزاس تك

روش برداری اثبات قضیهٔ منالائوس، یعنی شرط لازم و کافی برای آنکه سه نقطه در یك استقامت را تبدیل به دترمینان یك ماتریس می‌کند. از اینرو این قضیه را می‌توان به فضای n بعدی برداری تعمیم داد. چون قضیه مربوط به فصل مشترك خطها و در نتیجه عناصر خطی است، احتیاجی به طول و زاویه نیست. از اینرو تنها فضاهای خطی یا برداری را در نظر می‌گیریم و به فضاهای اقلیدسی حاجتی نداریم.

۱ـ معادلهٔ برداری خط راست: فرض کنیم که $\vec{0}$ بردار صفر و نقاط A و B انتهای دو بردار A و B باشد



(شکل بالا). برای بدست آوردن معادلهٔ برداری خط AB، بردار X را که روی خط پایان می‌یابد در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌شود که بردارهای $X-A$ و $B-A$ بر یك استقامتند. لذا متغیر t چنان وجود دارد که:

$$X-A=t(B-A)$$

این معادله را به صورت زیر می‌توان نوشت:

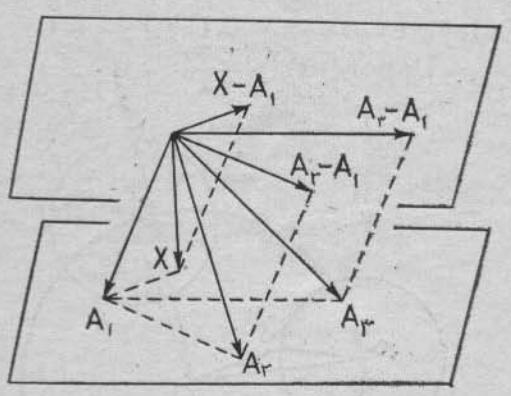
$$X=(1-t)A+tB$$

رسم است که معادلهٔ برداری خط را چنین بنویسند:

$$X=pA+qB \quad \text{و} \quad p+q=1$$

که در این معادله $p=(1-t)$ و $q=t$ است[۱].

۲ـ عناصر خطی: هرگاه سه بردار بطور خطی مستقل A_1، A_2 و A_3 را در فضای سه بعدی در نظر بگیریم، از انتهایشان یك صفحه بدست می‌آید. (شکل زیر). فرض کنیم بردار متغیر X در



این صفحه ختم شود. ملاحظه می‌شود که بردارهای $X-A_1$، A_2-A_1 و A_3-A_1 در یك صفحه‌اند که از مبدأ می‌گذرد از اینرو دو متغیر t و s وجود دارد بقسمی که.

$$X-A_1=t(A_2-A_1)+s(A_3-A_1)$$

این معادله را معمولا چنین می‌نویسند:

$$X=p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3 \quad \text{و} \quad p_1+p_2+p_3=1$$

ملاحظه می‌شود که:

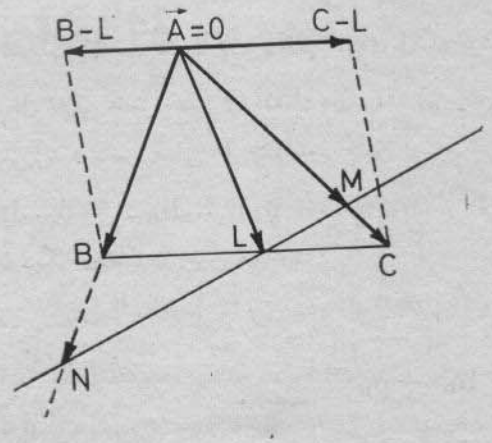
$$p_1=1-t-s \quad \text{و} \quad p_2=t \quad \text{و} \quad p_3=s$$

هرگاه با استقراء ریاضی این موضوع را ادامه دهیم، ملاحظه می‌شود که:

$$X=\sum_{i=1}^{n} p_i A_i \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i=1$$

نمایش یك عنصر خطی $(n-1)$ بعدی در فضای n بعدی است. چون اثبات آن شبیه اثبات خط و صفحه است، آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۳ـ قضیهٔ منالائوس: فرض کنیم که نقاط N، M، L به ترتیب بـر اضـلاع BC، CA و AB مثـلث ABC واقعند (شکل‌زیر) شرط لازم‌وکافی برای اینکه نقاط L و M و N بریك



استقامت باشند چنین است:

$$\frac{LB}{LC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{NA}{NB}=1 \qquad (1)$$

ملاحظه می‌شودکه این پاره خطها را جهت‌دار گرفته‌ایم.

برهان: نقطهٔ A را مبدأ می‌گیریم. ازاینرو $A=\vec{0}$ نقاط به بردارها بدل می‌شوند. ملاحظه می‌شودکه اعداد h و k موجودند بقسمی که:

$$M=hC \text{ و } N=kB$$

چون L روی خط AB است:

$$L=pB+qC \text{ و } p+q=1 \qquad (2)$$

اکنون نسبتهای رابطهٔ (۱) را محاسبه می‌کنیم. فرض کنیم که:

$$\frac{LB}{LC}=t$$

لذا ملاحظه می‌شودکه:

$$B-L=t(C-L) \qquad (3)$$

هرگاه مقدار L را از رابطهٔ (۲) دررابطهٔ (۳) بگذاریم وساده کنیم نتیجه می‌شودکه:

$$q(B-C)=tp(C-B)$$

از اینرو

$$\frac{LB}{LC}=t=\frac{-q}{p}$$

اکنون برای بدست آوردن $\frac{MC}{MA}$ ملاحظه می‌شودکه:

$$A-M=-M=-hC \text{ و } C-M=(1-h)C$$

ازاینرو:

$$\frac{MC}{MA}=\frac{h-1}{h}$$

به روشی شبیه این‌نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{NA}{NB}=\frac{k}{k-1}$$

اکنون رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{-q}{p}\cdot\frac{h-1}{h}\cdot\frac{k}{k-1}=1$$

این رابطه راخلاصه‌کنیم نتیجه می‌شودکه:

$$hp+kq=hk \qquad (4)$$

اکنون به برهان برداری بپردازیم. هرگاه نقاط L، M و N بر یك استقامت باشند، اعداد r و s چنان موجودند که:

$$L=rM+sN \text{ و } r+s=1$$

مقادیر M و N را به حسب C و B می‌نویسیم. لذا:

$$L=rhC+skB \text{ و } r+s=1 \qquad (5)$$

با مقایسهٔ روابط (۲) و (۵) نتیجه می‌شودکه:

$$rhC+skB=pB+qC$$

از این رابطهٔ برداری و (۵) سه معادله‌برای r و s بدست‌می‌آید:

$$\begin{cases} hr & -q=0 \\ ks & -p=0 \\ r+s & -1=0 \end{cases}$$

شرط لازم وکافی برای‌آنکه r و s در هر سه‌معادله صدق‌کنندا‌ین است که: [۲]

$$\begin{vmatrix} h & 0 & -q \\ 0 & k & -p \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

هرگاه این دترمینان رابسط دهیم، نتیجه می‌شودکه:

$$hp+kq=hk$$

که همان رابطهٔ (۴) است.

لذا می‌توان گفت‌که رابطهٔ (۴) شرط لازم و کافی است برای اینکه بردار L در محل تلاقی دو خط BC و MN ختم شود.

۴ـ تعمیم در فضای سه‌بعدی : مجموعهٔ بردارهای $\{A_1, A_2, A_3\}$ را بطورخطی مستقل می‌گیریم. سه نقطهٔ A_1، A_2 و A_3 یك صفحهٔ ثابت P را تعیین می‌کنند.

بردارهای M_1 و M_2 و M_3 را به ترتیب روی A_1 و A_2 و A_3 انتخاب می‌کنیم.

از اینرو

$$M_1 = h_1 A_1 \quad و \quad M_2 = h_2 A_2 \quad و \quad M_3 = h_3 A_3$$

سه نقطهٔ M_1، M_2 و M_3 بریك صفحهٔ Q واقعند. فرض کنیم که بردار L روی صفحهٔ P ختم شود. بنابراین:

$$L = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 \qquad (1)$$

شرط لازم وکافی برای اینکه بردار L روی محل‌تلاقی‌این دو صفحه پایان یابد این است که:

$$p_1 h_2 h_3 + p_2 h_3 h_1 + p_3 h_1 h_2 = h_1 h_2 h_3$$

برهان: اثبات این قضیه شبیه بخش۳ است. هرگاه L روی Q ختم شود نتیجه می‌شود که:

$$L = r_1 M_1 + r_2 M_2 + r_3 M_3 \quad و \qquad (2)$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = 1$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} h_1 r_1 - p_1 = 0 \\ h_2 r_2 - p_2 = 0 \\ h_3 r_3 - p_3 = 0 \\ r_1 + r_2 + r_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

از چهار معادلهٔ خطی و سه مجهول r_1 ، r_2 و r_3 نتیجه می‌شود که:

$$\begin{vmatrix} h_1 & 0 & 0 & -p_1 \\ 0 & h_2 & 0 & -p_2 \\ 0 & 0 & h_3 & -p_3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

از بسط این دترمینان نتیجه می‌گیریم که:

$$p_1 h_2 h_3 + p_2 h_3 h_1 + p_3 h_1 h_2 = h_1 h_2 h_3$$

۵ـ تعمیم در فضای n بعدی: فرض کنیم که: $\{A_1, \ldots, A_n\}$ یك مجموعهٔ بردارهای بطور خطی مستقل باشند و بردار L روی‌عنصرخطی P که‌ازانتهای این بردارها می‌گذرد ختم شود. لذا:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i A_i \quad و \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad (1)$$

بردارهای:

$$M_i = h_i A_i \quad و \quad i = 1 \ldots و n$$

را در نظر می‌گیریم. شرط لازم وکافی برای اینکه بردار L روی محل تلاقی عنصر خطی Q که از مجموعهٔ $\{M_1, \ldots, M_n\}$ بدست می‌آید و عنصر خطی P ختم شود چنین است:

$$p_1 h_2 \cdots h_n + \cdots + p_n h_1 \cdots h_{n-1} = h \cdots h_n$$

به زبان دیگراین‌تساوی چنین می‌شود:

$$\begin{vmatrix} h_1 & 0 & -p_1 \\ & & \vdots \\ 0 & h_n & -p_n \\ 1 & \cdots 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

برهان: برای اینکه L روی‌عنصرخطی Q ختم‌شود، باید:

$$L = \sum_{i=1}^{n} r_i M_i \quad و \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \qquad (2)$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) معادلات خطی‌زیر بدست‌می‌آید:

$$\begin{cases} h_i r_i - p_i = 0 \quad و \quad i = 1 و \ldots و n \\ \Sigma r_i = 1 \end{cases}$$

شرط لازم وکافی برای‌اینکه این دستگاه جواب داشته‌باشد چنین است:

$$\begin{vmatrix} h_1 & 0 & -p_1 \\ & & \vdots \\ 0 & h_n & -p_n \\ 1 & \cdots 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

البته این دترمینان را می‌توان بسط دادو صورت دیگراین رابطه را بدست‌آورد.

بحث‌قضیه رابه‌عهدهٔ‌خواننده می‌گذاریم. همچنین‌تعمیم‌قضیهٔ منالائوس در جهات دیگراحتمال دارد. آن را نیز بـه‌خـواننده واگذار می‌کنیم.

مراجعات:

1– A. R. Amir – Moéz, B. S. Duran, Linear Algebra of the plane, Western Printing Company, Lubbock. Iex. 79405(1973).

2– A.R, Amir – Moéz, A. L. Fass, Elements of Linear spaces, pergmon Press, Oxford, England (1962).

دربارهٔ اعداد اول چه‌می دانید؟ (۴)

ترجمهٔ: **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی‌دانشگاه آذرآبادگان

۱۳ـ تصاعد حسابی از اعداد اول

تعداد نامحدودی تصاعد حسابی وجود دارد که از سه عدد اول مختلف تشکیل شده‌اند، اما اثبات چنین‌موضوعی مشکل‌است. محدودیت تعداد تصاعدهای حسابی که جملهٔ اول آنها ۳ است مشخص نیست‌ولی تعدادی‌از آنها را می‌شناسیم مثلا.

۳,۷,۱۱ و ۳,۱۱,۱۹ و ۳,۱۳,۲۳ و ۳,۱۷,۳۱ و ۳,۲۳,۳۴و

۳,۳۱,۵۹ و ۳,۳۷,۷۱ و ۳,۴۱,۷۹ و ۳,۴۳,۸۳

می‌توان به‌سادگی اثبات کرد که‌تصاعدهای حسابی با جملهٔ اول ۲ و شامل سه جمله وجود ندارد (چون سومین جملهٔ‌تصاعد عدد زوجی بزرگتر از ۲ خواهد شد). ولی تخمین زده شده‌است که تعداد نامحدودی تصاعد حسابی حاوی سه عدد اول‌وجوددارد که اولین جملهٔ آنها عدد فرد اول است.

فقط یك تصاعد حسابی وجوددارد که قدرنسبت آن ۲ بوده وهر سه جملهٔ آن عدد اول استو آن عبارتست از: ۷ , ۵ , ۳ (زیرا از سه‌عدد فرد متوالی همواره یکی‌به سه قابل قسمت‌است). اثبات اینکه تنهایك تصاعد حسابی ازسه‌عدد اول می‌توان‌یافت که قدرنسبت‌آن ۴ باشد ساده است. این تصاعد (۳,۷,۱۱) می‌باشد. بدیهی است تصاعدی با سه جملهٔ (عدد اول) نداریم که قدر نسبت آن عدد فردی باشد اما تخمین زده شده است که‌تعداد نامحدودی تصاعد حسابی داریم که از سه عدد اول با قدر نسبت ۶ تشکیل شده است. به‌عنوان مثال:

۵,۱۱,۱۷ و ۱۱,۱۷,۲۳ و ۱۷,۲۳,۲۹

یك تصاعد حسابی با ۵ جمله به صورت زیروجود دارد که این ۵ جمله عدد اول بوده و قدر نسبت آن ۶ است:

۵,۱۱,۱۷,۲۳,۲۹

ولی فقط یك تصاعد حسابی به این فرم داریم ، زیرا هر تصاعد دیگر با ۵عدد طبیعی حتماً یك جمله قابل قسمت به۵دارد. اکنون سؤالی که پیش می‌آید این‌است که‌آیا ازاین نوع تصاعدها با قدرت نسبتهای دلخواه به تعداد زیادی وجود دارد یانه وچند جمله‌ای هستند .

طولانی‌ترین تصاعد حسابی از این نوع ۱۳ جمله دارد، جملهٔ اول آن ۴۹۴۳ و قدر نسبت آن۶۰۰۶۰ است. این‌تصاعد توسط **Seredinski** پیدا شد.

آقای **M.Cantor** ثابت‌کرده است که، در یك تصاعد حسابی متشکل از $n>1$ عدد اول بزرگتر از n، قدر نسبت می‌بایست به هر کدام از اعداد اول نابزرگتر از n بخش‌پذیر باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که اگر تصاعد حسابی با ۱۰۰عدد مختلف داشته باشیم باید قدرنسبتی بزرگ داشته باشیم که حداقل ارقام را دارا باشد.

۱۴ـ قضیهٔ سادهٔ فرما

قضیهٔ۹ـ هرگاه p عدداولی باشد، به‌ازای جمیع مقادیر صحیح و مثبت a عدد a^p-a به p بخش پذیر است.

اثبات: p عدد اول مفروضی است. قضیهٔ فوق به ازای $a=1$ صحیح می‌باشد. اگر a یك عدد طبیعی باشد که قضیه به ازای آن درست باشد، بنابر قضیهٔ دو جمله‌ای:

$$(a+1)^p=a^p+\binom{p}{1}a^{p-1}+\binom{p}{2}a^{p-2}+\dots+$$
$$+\binom{p}{p-1}a+1$$

به‌ازای $k=1,2,\dots,p-1$ داریم:

$$\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)(\cdots)(p-k+1)}{1\times2\times\cdots\times k}$$

وهمانطورکه‌معلوم است، اعداد $\binom{p}{k}$ صحیح هستند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که عدد $1\times 2\times\cdots\times k\binom{p}{k}$ بر p بخش پذیراست، وبا استنباط ازقضیهٔ۷، حداقل یکی‌از اعداد ۱ ، ۲ ، ...،k، $\binom{p}{k}$ می‌بایست برp بخش‌پذیر باشد. ولی‌چون $k<p$ است، هیچکدام ازاعداد ۱،۲،...وk برp قابل قسمت نیستند. بنابراین عدد $\binom{p}{k}$ می‌بایست برp بخش‌پذیر باشد. ازاینرو عدد $(a+1)^p-a^p-1$ بر p قابل قسمت است، وعلاوه بر آن‌عدد a^p-a برp بخش‌پذیراست (به‌ازای مقادیر صحیح ومثبت a). پس‌این‌نتیجه‌که $(a+1)^p-(a+1)$ برp قابل قسمت می‌باشد محقق می‌سازدکه صحت‌قضیه به‌ازای $(a+1)$ نیز برقرار است.

پس بااستفاده ازروش استقراء ریاضی ثابت‌کردیم‌که قضیهٔ فوق به‌ازای‌تمام مقادیر طبیعیa درست است. درستی‌قضیه به‌ازای صفرهم بدیهی است.

هرگاه p عدد فرد واولی باشد $(-a)^p=-a^p$ واز اینرو :

$$(-a)^p-(-a)=-(a^p-a)$$

بنابراین قضیه به ازای مقادیر صحیح ومنفی a هم درست است.

اگر $p=2$ باشد داریم:

$$a^2-a=(a-1)a$$

واز دوعدد متوالی و صحیح $(a-1)$ و (a) یکی همواره زوج است وازاینرو همواره عدد (a^2-a) بر۲ بخش پذیر است.

قبلا درحالت خاص قضیه به‌ازای $a=2$ پیدا کردیم که به ازای هرعدد اولp عدد (2^p-2) برp قابل‌قسمت است. این سؤال پیش می‌آید که آیا عکس قضیه درست است یعنی به‌ازای عدد طبیعی $n>1$، چنانچه 2^n-2 برn بخش پذیر باشد n می‌بایست اول باشد.

دراین موردبه‌قضایا وتخمین‌هایی باآزمایش اعداد بزرگ راهنمائی می‌شویم. به عنوان مثال تمام اعداد طبیعی و متوالی بزرگتر ازیك تا ۱۲۳۰۰ رادرنظر می‌گیریم و پیدا می‌کنیم‌که به‌ازای هر عدد طبیعی n چنانچه $1<n\leqslant 300$ باشد وعدد 2^n-2 برn قابل‌قسمت باشد n عددی است اول. ولی به‌ازای $n=341$ که عدد $2^{341}-2$ بر ۳۴۱ قابل قسمت بوده و $341=11\times 31$ عددی‌است‌غیراول. بخش‌پذیری $(2^{341}-2)$ به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$2^{341}-2=(2^{31})^{11}-2^{11}+2^{11}-2$$

و

$$2^{10}-1=1023=3\times 341$$

پس‌عدد $(2^{10})^3-1$ نیز بر۳۴۱ قابل قسمت است بنابراین $(2^{31})^{11}-2^{11}$ بر ۳۴۱ بخش پذیر می‌باشد.

به‌سؤال بعدی می‌رسیم‌که آیاتعداد نامحدودی عددnبرای غلط بودن قضیهٔ فوق وجوددارد. برای این‌منظور کافی‌است نشان دهیم‌که به‌ازای هرعدد فرد وغیراول n، قضیهٔ فوق صادق نیست. به‌فرض $n=a\cdot b$ عدداول ومرکبی‌باشد، بطوری‌که aوb اعداد طبیعی بزرگتر ازیك است،عدد $m=2^n-1=(2^a)^b-1$ فرد وغیراول می‌باشد زیرا برعدد $2^a-1>1$ $(a>1)$بخش پذیراست، واین‌عدد خود ازm کمتر می‌باشد $(b>1)$ و نیز توجه داریدکه $m>n$ است $(n>1)$. کافی‌است نشان دهیم‌که 2^m-2 برm بخش پذیراست. حال بنابرآنکه 2^n-2 بر nبخش پذیر باشد با توجه به‌فرد بودن n عدد $2^{n-1}-1$ بر n بخش پذیر است یعنی :

$$2^{n-1}-1=kn$$

(k عددی است طبیعی). بنابراین:

$$2^{m-1}=2^{2(2^{n-1}-1)}=2^{2kn}=(2^n)^{2k}$$

بدین‌ترتیب عدد $2^{m-1}-1=(2^n)^{2k}-1$ بر$m=2^n-1$ وبنابراین 2^m-2 برm بخش پذیر بوده ومطلب فوق ثابت‌شده است.

حال این‌سؤال قابل طرح است‌که آیا اعداد زوج مرکب وجود دارندکه قضیهٔ فوق درموردآنها صادق نباشد؟ فقط درسال ۱۹۵۰، O.H.lehner چنین عددی‌را برابر (۱۶۱۰۳۸) کشف‌کرد. یافتن این‌عدد تا اندازه‌ای مشکل است:

$$161038=2\times 73\times 1103$$

و

$$161037=3^2\times 29\times 617$$

$$2^9-1=2\times 73$$

$$2^{29}-1=1103\times 486\times 737$$

بدین ترتیب عدد $(2^{161037}-1)$ بر $(2^{29}-1)$ و بر $(2^{161038}-2)$ ونیز بر ۷۳ و ۱۱۰۳ قابل‌قسمت است. ازاینرو عدد $2^{161038}-2$ بر ۲ و ۷۳ و ۱۱۰۳ بخش پذیر می‌باشد و در نتیجه عدد $2^{161038}-2$ به حاصل‌ضرب آنها ۱۶۱۰۳۸ بخش‌پذیر است. درسال ۱۹۵۱، N. G. W. H. Beeger ثابت کرد که تعداد نامحدودی عدد زوج n برای بخش پذیری (2^n-2) بر n وجود دارد. همچنین ثابت‌شده است که تعداد نامحدودی اعداد اول دوقلوی p و q وجود دارند که $2^{pq}-2$ بر pq قابل قسمت باشد. ونیز A. Schinzel ثابت کرد که به‌ازای هر عددصحیح a وهرعدد طبیعی m، اعداد مجزا ازهم واول $p>m$ و $q<m$ چنان وجود دارند که $a^{pq}-a$ بر pq بخش‌پذیر است.

به‌دنبال مطالب فوق می‌توان سؤال کرد آیاعدد غیراول n چنان وجود دارد که برای هر عدد صحیح a عدد (a^n-a) بر n قابل‌قسمت باشد؟ چنین اعداد غیراولی‌را «اعداد شبه‌اول‌مطلق» (Absolut Pseudo Prime=APP) می‌نامیم. باقرار دادن درآن تخمین زده‌شده (هنوز ثابت نگردیده است) که تعداد نامحدودی ازچنین اعدادی وجود دارد. کوچکترین عدد APP عدد $561=3\times11\times17$ می‌باشد. برای اثبات‌کافی است نشان دهیم که به‌ازای هرعدد صحیح a عدد $(a^{561}-a)$ برهر یك‌ازاعداد ۳، ۱۱و۱۷ قابل‌قسمت است. عدد $(a^{561}-a)$ بدیهی است که بر ۳ بخش پذیر می‌باشد پس a به فرم $(3k\pm1)$ بوده داریم:

$$a^2-1=(3k\pm1)^2-1=3(3k\pm2)k \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow .2\mid a^2-1$$

بنابراین $3\mid a^{2\times280}-1$ و از اینرو $3\mid a^{561}-a$. بدیهی است وقتی‌عدد $a^{561}-a$ بر ۱۱ قابل‌قسمت است که عدد a هم بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. بنابر قضیهٔ فرما برای هرعدد صحیح a: $11\mid a^{11}-a=a(a^{10}-1)$، اگر a بر ۱۱ بخش پذیر نباشد، درنتیجه $11\mid a^{10}-1$ پس $11\mid a^{10\times56}-1$ و ازاینرو بدیهی است که $11\mid a^{561}-a$

عدد $a^{561}-a$ بر ۱۷ درصورتی قابل قسمت است که a بر ۱۷ بخش پذیر باشد. بنابه قضیهٔ فرما به ازای هرعدد صحیح a داریم: $17\mid a^{17}-a$ ، اگر a بر ۱۷ قابل قسمت نباشد، $17\mid a^{16}-1$ حاصل می‌شودپس $17\mid a^{16\times35}-1$، وازاینرو $17\mid a^{561}-a$ (زیرا $16\times35+1=561$). پس‌عدد ۵۶۱ «APP» است. اعداد زیرهم APP می‌باشند:

$2\times29\times73$ و $7\times13\times31$

$7\times23\times31$ و $7\times31\times73$

$13\times37\times61$ و $5\times17\times29$

$113\times337\times673\times2689$

ازقضیهٔ سادهٔ فرما نتیجه می‌شود که $p>2$ عدد اول‌بوده پس‌عدد $2^{p-1}-1$ بر p قابل قسمت است. ازاینجا این‌سؤال پیش‌می‌آید که آیا اعداد اولی وجود دارند که $2^{p-1}-1$ بر p^2 بخش پذیرباشد. دوتا ازچنین اعدادی ۱۰۹۳ و ۳۵۱۱ می‌باشد و از چنین اعداد در $p<100000$ وجود ندارد بنابراین نمی‌دانیم آیا تاچه حدودی از این اعداد وجود دارد. یعنی نمی‌دانیم آیا تعداد محدودی اعداد اول وجود دارند که $(2^{p-1}-1)$ بر p^2 بخش پذیرباشد. ازقضیهٔ فرما به‌آسانی نتیجه می‌شود که اگر p عدد اولی باشد عدد :

$$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\dots+(p-1)^{p-1}+1$$

بر p بخش پذیراست. G. Guga درسال ۱۹۵۰ این فرض را مبنا قرار دادکه این قابلیت تقسیم فقط برای اعداد اول درست است وآنرا تا اعداد 10^{1000} تحقیق کرد.

۱۵ـ در رشته نامحدود $(4k+1)$ ، $(4k+3)$ و $(6k+5)$ تعداد نامحدودی عدد اول وجود دارد

به فرض $n>1$ یك عدد اختیاری باشد. اعداد $n!$ زوج و $(n!)^2+1$ فرد وبزرگتر ازیك خواهند بود. بااستفاده از قضیهٔ (۱) واضح است که عامل p اول‌بوده به فرم $4k+1$ یا $4k+3$ (k عدد صحیح) می‌باشد. فرض‌کنید $p=4k+3$ بدیهی است که $(n!)^2+1\mid(n!)^{2(2k+1)}$ زیرا، به ازای عدد طبیعی a وعدد فرد m عدد a^m+1 بر $a+1$ بخش پذیراست چون :

$$a^{m+1}=(a+1)(a^{m-1}-a^{m-2}+\dots-a+1)$$

و $$2(2k+1)=4k+2=p-1$$

ونیز بنابر رابطهٔ $p|(n!)^2+1$ خواهیم داشت $p|(n!)^{p-1}+1$ وبنابراین $p|(n!)^p+n!$. امابنا به‌قضیهٔ فرما داریم:

$$p|(n!)^p-(n!)$$

وازآنجا $p \mid 2\times n!$ که‌امکان ندارد زیرا p عدد فردوبزرگتر از n است. ازاینرو p می‌بایست عددی به‌فرم $(4k+1)$ باشد بنابراین ثابت کردیم که به‌ازای هرعدد طبیعی $n>1$ عدد اول وبزرگتراز n به‌فرم $(4k+1)$ داریم (که چنین‌عددی مقسوم علیه اول $(n!)^2+1$ خواهد داشت). بنابراین ثابت کرده‌ایم:

قضیهٔ ۱۰: تعداد نامحدودی عدد اول به فرم $(4k+1)$ وجود دارد.

به‌دنبال اثبات قضیهٔ فوق این سؤال پیش می‌آید که آیا به ازای هرعدد اول p به‌فرم $(4k+1)$ ، عدد طبیعی n چنان وجود دارد که $p \mid (n!)^2+1$ گردد :

(برای مثال داریم: $13 \mid (6!)^2+1$ و $5|(2!)^2+1$)

حال می‌توان نشان داد که اگر p عدد اولی به فرم $(4k+1)$ باشد پس: $p|[(\frac{p-1}{2})!]^2+1$ مثلا:

$$17|(8!)^2+1 \text{ و } 29|(14!)^2+1 \text{ و } 37|(18!)^2+1$$

باتوجه به‌قضیهٔ ۱۰، این مسئله پیش می‌آید که چند عدد اول به فرم $4k+3$ وجوددارد. اثبات نامحدود بودن چنین اعداداولی عملاآسان است. در زیر یکی‌از این روشهای اثبات را بررسی می‌کنیم :

لم - هرعدد طبیعی به‌فرم $(4k+3)$ حداقل یك مقسوم علیه اول به‌همان فرم دارد.

اثبات: عددطبیعی به‌فرم $n=4k+3$ رادرنظرمی‌گیریم. واضح است که این‌عدد مقسوم علیه‌هائی به‌فرم $(4t+3)$ دارد (t عدد صحیح) زیرا خودش به این فرم است. کوچکترین مقسوم علیه به‌این فرم را با $p>1$ نشان می‌دهیم. اگر p عدد غیراول باشد $p=a.b$ (a و b اعداد طبیعی وبزرگتر ازیك) a و b از p کمتر بوده وفردهستند زیرا عددهای به‌فرم $(4k+3)$ فرد می‌باشند. اعداد a و b نمی‌توانند باهم به فرم $(4k+1)$ باشند زیر حاصل‌ضرب آنها به‌فرم $(4k+1)$ خواهد شد که غیر ممکن‌است:

$$p=ab=(4t_1+1)(4t_2+1)=$$
$$=4(4t_1t_2+t_1+t_2)+1$$

ازاینرو حداقل یکی‌از اعداد a و b به‌فرم $(4t+3)$است. بنابرآنکه مقسوم علیه‌های عدد p درعین‌حال مقسوم علیه‌های‌عدد n هم‌هستند، عدد n مقسوم‌علیه‌های طبیعی به‌فرم $(4t+3)<p$ خواهد داشت که باتعریف عدد p متناقض‌است پس عدد p اول‌بوده ولم ثابت شده است.

حال اگر n عدد طبیعی دلخواهی باشد $4\times n!-1$ عددی به‌فرم $(4k+3)$ است. بااین‌لم، حداقل یك مقسوم علیه اول به‌فرم $(4t+3)$ داریم. پس می‌بایست $p>n$ باشد زیرا $4\times n!-1$ به p بخش پذیراست ومعلوم نیست که به‌هر عدد طبیعی بزرگتراز یك وکوچکتر (یامساوی) n قابل قسمت‌باشد. بنابراین ثابت کردیم که به‌ازای‌هرعددطبیعی n اعداداول بزرگتر از n وبه‌فرم $4k+3$ وجود دارد پس:

قضیهٔ ۱۱: تعداد نامحدودی اعداد اول به‌فرم $(4k+3)$ وجود دارد.

به‌ازای جمیع اعداد n، تعداداعداد اول به‌فرم $(4k+1)$ که از x بزرگتر نیست با $\pi_1(x)$ و تعداد اعداد اولی به فرم $(4k+3)$ که از x کوچکتر است با $\pi_3(x)$ نشان می‌دهیم. به‌عنوال مثال:

$$\pi_1(17)=\pi_3(17)=3 \text{ و } \pi_1(100)=11$$
$$\pi_3(100)=13 \text{ و } \pi_1(100)=11$$

تحقیق شده است که $\pi_1(x)\leqslant\pi_3(x)$ (تا حدود $x<26861$). البته این‌نامساوی درهمهٔ حالتها درست‌نیست. درسال ۱۹۵۷ آقای J. Leech به‌ازای $x=26861$ عددهای $\pi_1(x)=1473$ و $\pi_3(x)=1472$ را بدست آورد . و حتی درسال ۱۹۱۴ Littlewood ثابت کرد که تعداد نامحدود اعداد طبیعی x وجود دارد بطوری‌که $\pi_1(x)>\pi_3(x)$ و نیز تعداد نامحدودی اعداد x وجوددارد بطوری‌که نامساوی $\pi_1(x)<\pi_3(x)$ برقرار باشد. بنابراین تخمین درمورد این چنین اعداد اولی نادرست از

آب درمی‌آید. قضایای ۱۰و۱۱ رامی‌توان به‌طریق زیر نیز بیان داشت:

هر کدام از تصاعد های زیر تعداد نامحدودی عـدد اول دربردارند:

$$۱,۵,۹,۱۳,۱۷,۲۱,\cdots,$$

$$۳,۷,۱۱,۱۵,۱۹,۲۳,\cdots,$$

وبه دنبال مطلب فوق این‌فکر به‌نظر می‌رسد که تعداد نامحدودی تصاعد حسابی ازاعداد طبیعی وجود دارند که حاوی اعـداد اول نامحدودی هستند. فرض کنید تصاعـد حسابی نامحدود:

$$a,a+r,a+۲r,\cdots$$

باجملهٔ اول a وقدر نسبت r داده شده‌باشد.

هر گاه اعداد aوr مقسوم علیه مشترك $d>۱$ داشته‌باشند بدیهی است که هر کدام ازجملات تصاعد بر d بخش‌پذیر خواهد بود ومی‌توان به‌آسانی‌ملاحظه کرد که جملات‌تصاعد بجز جملهٔ‌اول ممکن‌است بتواند اول‌باشد. نتیجه اینکه شرط لازم برای آنکه تصاعدی حسابی باجملهٔ اول a وقدرنسبت r تعداد نامحدود عدد اول داشته‌باشد آنست که اعدادaوr عامل‌مشترکی‌جز (۱) نداشته باشند. درسال ۱۸۳۷، P. G. Dirichlet ثابت کرد که این‌شرط کافی‌هم هست. اثبات این قضیه بعداً توسط ریاضی‌دانان آسان وساده‌شد ولی‌بازهنوز پیچیده وطولانی می‌نماید. حتی‌اثبات این مطلب که «درهر تصاعد حسابی که اولین جمله وقدر نسبت‌آن اعداد طبیعی‌باشند وعامل مشترکی‌غیراز (۱) نداشته باشندحداقل یك عدد اول وجـود دارد» هم با وجـود آنکه ظاهـراً از قضیهٔ Dirichlet ضعیف‌تر است آسان نخواهد بود. دربعضی‌حالات خاص اثبات قضیهٔ Dirichlet (قضیهٔ درمورد تصاعد حسابی) آسان است. دراینجا به‌ازای $a=۵$ و $r=۶$ اثباتی به صورت زیر ارائه‌می‌دهیم. با لم زیر شروع می‌کنیم.

لم- هرعدد طبیعی به فرم $(۶k+۵)$ حداقل یك مقسوم علیه اول به‌همین فرم دارد.

اثبات این‌لم درست مشابه بااثبات چنین لمی درمورداعداد $(۴k+۳)$ است بااین تفاوت که به جـای فرم $(۴k+۳)$ فرم $(۶k+۵)$ رانوشته وسپس بایادآوری اینکه این‌عدد بر ۲ و ۳ قابل‌قسمت نیست، مقسوم‌علیه‌هائی به‌فرم $(۶t+۱)$ و $(۶t+۵)$ ارائه می‌دهیم که حاصل‌ضرب اعداد به‌فرم $(۶t+۱)$ نیز به‌همین فرم است. برای اثبات خود قضیه برای عدد داده‌شده وطبیعیn، می‌نویسیم$(۶\times n!-۱)$ بدیهی‌است که‌این‌فرم همان$(۶k+۵)$ است وتوسط این‌لم، مقسوم علیه‌های اولp همین‌فرم را خواهند داشت بطوری که اثبات کردن‌آن برای $p>n$ آسان‌است. برای هرعدد طبیعی n عدد اول $p>n$ به‌فرم $۶k+۵$ وجـود دارد بنابراین:

قضیهٔ ۱۲- اعداداول به‌فرم$(۶k+۵)$ به‌تعداد نامحدودی وجود دارند.

همچنانکه تصاعد حسابی $۵,۱۱,۱۷,۲۳,۲۹,۳۵,\cdots,$ شامل تعداد نامحدودی عدد اول‌است، تصاعد حسابی:

$$۲,۵,۸,۱۱,۱۴,۱۷,۲۰,\cdots$$

هم حاوی تعداد نامحدودی عدد اول است که‌هردو شامل جملات ۵، ۱۱، ۱۷، ۲۳، ... هستند.

بنابراین تعدادنامحدود عدد اول به‌فرم $(۳k+۲)$ وجود دارد.

توجه داریدکه به‌این ترتیب تعداد زیادی تصاعـد حسابی وجود داردکه شامل تعداد نامحدودی عدد اول‌است. به‌عنوان‌مثال تصاعد $۸k+۱$ جزءآنهاست. (که $k=۱,۲,۳,\cdots$).

۱۶- کلیاتی درمورد اعداد اول

n عدد طبیعی وبزرگتراز(۱) را درنظر می‌گیریم. اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ...، $n^۲$ را در n ردیف با n عدد در هر ردیف تشکیل می‌دهیم، یعنی جدول زیررا تنظیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{llll}
۱, & ۲, & k, & n, \\
n+۱, & n+۲, & n+k, & n+n, \\
۲n+۱, & ۲n+۲, & ۲n+k, & ۲n+n, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(n-۱)n+۱, & & (n-۱)n+k, & \\
 & (n-۱)n+۲, & & n\cdot n,
\end{array}$$

ستونهای جدول فوق تصاعـد حسابی با n جملهٔ ارائه می‌دهد.

A. Schinzel تخمین زدکه اگر $k<n$ عدد طبیعی بوده وهیچ عامل مشترك وبزرگتر از (۱) با n نداشته باشد، k امین ستون این جدول حداقل یك‌عدد اول دربرخواهد داشت.

A. Gorzelewiski تا $n\leqslant ۱۰۰$ این تخمین را تحقیق نمود.

پس‌فرض وتخمینی پیش کشیده‌ایم که هرردیف نوشته شدهٔ درجدول $(n>۱)$ حداقل حاوی یك‌عدد اول می‌باشد.

به‌کمك جدول D.H. Lehmer, A. Western توسط A. Schinzel این تخمین بـه ازای جمیع اعـداد $n\leqslant ۴۵۰۰$ تحقیق‌شده‌است. اولین‌ردیف جدول (به‌ازای $n>۱$) همواره شامل عدد اول (۳) خواهد بود. این قضیه که ردیف دوم جدول حداقل شامل یك عدداول است، از قضیهٔ Chebyshev نتیجه می‌شود. ونیز ثابت شده است کـه به ازای $n\geqslant ۳$ سومین ردیف جدول حاوی حداقل یك عدد اول‌است. به‌عبـارت دیگر، به‌ازای $n\geqslant ۳$ حداقل یك عدد اول‌بـین $۲n$ و $۳n$ وجود دارد (به‌ازای $n=۲$ نیزدرست‌است). بطور عمومی‌تر، به‌ازای $n\geqslant ۹$ ثابت شده است که هر کدام از ۹ ردیف اول جدول حداقل شامل یك‌عدد اول هستند.

دوردیف آخر جدول عبارتند از:

$$\begin{cases}(n-۱)^۲,(n-۱)^۲+۱,\cdots,n^۲-n\\ n^۲-n+۱,n^۲-n+۲,\cdots,n^۲\end{cases}$$

نتیجهٔ دیگری که می گیریم این‌است که بین‌مربعات دوعددمتوالی طبیعی حداقل دوعدد اول وجود دارد. اثبات این‌مطلب به‌آسانی صورت می گیرد. اگر m و n اعداد طبیعی باشند بطوری که:

$$m^۳\leqslant(n-۱)^۲ \text{ و } n^۲\leqslant(m+۱)^۳$$

ازاین قضیه که بین مکعبات متوالی اعداد طبیعی حداقل یك عدد اول وجود دارد رابطهٔ فوق ناشی می‌شود. گرچه هنوز نمی‌دانیم که‌آیا به‌ازای اعدادطبیعی بسیار بزرگ m بین $m^۳$ و $(m+۱)^۳$ تعداد اعداد اول دلخواهی وجود دارد یانه؟

همانگونه‌که L. Skula ملاحظه کرد از روی جدول فوق $(n=۲,۳,\ldots)$ نتیجه می‌شودکه $(n+۱)$ امین ردیف و نیز $(n+۲)$ امین ردیف شامل حداقل یك‌عدد اول است (یعنی به‌ازای اعداد طبیعی $n>۱$ هرکدام از رشته‌های:

$$n^۲+۲n,\cdots,n^۲+n+۲,n^۲+n+۱ \quad \text{و}$$
$$n^۲+n,\ldots,n^۲+۲,n^۲+۱$$

حداقل یك‌عدد اول را دربردارد). این مطلب بطورکلی به ازای $(n+۳)$ امین ردیف صحیح است.

ازمفروضات جدول به‌آسانی می‌توان استنباط کردکه‌اگر تمام اعداد طبیعی‌را متوالیاً به‌صورت یك‌جدول مثلثی مطابق‌شکل زیر بنویسیم، در هرردیف‌آن، باشروع از دومین ردیف، حداقل یك‌عدد اول وجود دارد. نمی‌دانیم که صحت این ادعا تا چه حد صحیح است.

۱,
۲, ۳,
۴, ۵, ۶,
۷, ۸, ۹, ۱۰,
۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴,
.. ..

۱۷ـ قضیهٔ لاگرانژ

قضیهٔ ۱۳ـ اگر p عدد اولی باشد و:

$$\text{(I)}\quad f(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\cdots a_{n-۱}x+a_n$$

کثیرالجمله‌ای از درجهٔ $n\geqslant ۱$ با ضـرایب صحیـح، و ضریب بزرگترین توان x، برابر $a_۰$ بر p بخش پـذیر نباشد بین اعداد زیر:

$$\text{(II)}\quad x=۰,۱,۲,۳,\cdots,p-۱$$

بیش از n عدد برای آنکه $f(x)$ بر p قابل قسمت باشد وجود ندارد.

اثبات‌ـ قضیه به‌ازای کثیرالجملهٔ درجهٔ یك صحیح است. در حقیقت، اگر بین اعداد (II) حداقل دو عـدد مختلف $x_۱$ و $x_۲>x_۱$ چنان وجود داشته باشدکه $p\mid f(x_۱)$ و $p\mid f(x_۲)$ خواهیم داشت: $p\mid f(x_۲)-f(x_۱)$ وازاینروکه:

$$f(x)=a_۰x+a_۱$$

خواهیم داشت $p\mid a_۰(x_۲-x_۱)$ که $(x_۲-x_۱)$ تفاضل دوعدد

مجزا ازرشتهٔ II می‌باشد، وازاینرو از p کمتر بوده به‌آن قابل قسمت نیست.

اکنون n عدد طبیعی بزرگتـر از (۱) را نشان می‌دهد. فرض کنید که قضیه برای کثیرالجملهٔ درجهٔ $(n-1)$ صحیح است. به‌فرض آنکه قضیهٔ لاگرانژ هنوز برای همـان کثیرالجملهٔ (I) (از درجهٔ n) صحیح نباشد $(n+1) \geqslant 0$ وجود دارد بطوری که:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} < p$$

چنانکه $p \mid f(x_i)$ به‌ازای $i=1,2,\cdots,n+1$ پس:

$$f(x)-f(x_1)=a_0(x^n-x_1^n)+$$
$$+a_1(x^{n-1}-x_1^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(x-x_1)$$

بنابر آن‌که:

$$x^k-x_1^k=$$
$$(x-x_1)(x^{k-1}+x^{k-2}x_1+\cdots+x_1^{k-2}x+x_1^{k-1})$$

به‌ازای $k=2,3,\cdots,n$ به‌آسانی بدست می‌آوریم:

$$\text{(III)}\quad f(x)-f(x_1)=(x-x_1)f_1(x)$$

بطوری‌که $f_1(x)$ کثیرالجمله درجهٔ $(n-1)$ وباضرایب‌صحیح است بطوری‌که ضریب x^{n-1} برابر a_0 خواهد شد و از اینرو عدد بر p بخش پذیر نیست.

چون ازاتحاد III بدست می‌آوریم:

$$\text{(IV)}\qquad f(x_i)-f(x_1)=(x_i-x_1)f_1(x_i)$$

این اتحـاد بـه‌ازای $i=2,3,\cdots,n+1$ است. اما از $p \mid f(x_i)$ به‌ازای $i=1,2,\cdots,n+1$ نتیجه می‌شود که $i=2,3,\cdots,n+1$ بـه ازای $p \mid f(x_i)-f(x_1)$ بنابراین بنابه IV $p \mid (x_i-x_1)f_1(x_i)$. به‌ازای $i=2,3,\cdots,n+1$ را داریم، اعداد (x_i-x_1) بر p قابل قسمت نیستند، می‌بایست بنابه‌قضیهٔ ۷مقدار $p \mid f_1(x_i)$ با فـرض اینکه قضیه کثیرالجمله درجه $(n-1)$ صحیح است متناقض می‌باشد.

نتیجهـ اگر p عدد اولی‌باشد و f کثیرالجملهٔ درجهٔ n باضرایب صحیح، وهرگاه برای بیش از n عدد طبیعی $x<p$ وجود داشته‌باشد بطوری که $f(x)$ بر p بخش پـذیر باشد، تمام ضرایب کثیرالجمله f می‌بایست بر p قابل قسمت باشد.

اثبات ـ فرض کنید که f خاصیت فوق را داراست، اما همهٔ ضرایب آن بر p بخش پذیر نیست. به‌فرض a_{n-k} اولین‌ضریب غیرقابل قسمت بر p و $k>0$ باشد، به‌ازای هرعـدد طبیعی x برای‌آنکه $f(x)$ بر p بخش پذیر باشد $g(x)$ بر p قابل قسمت خواهد گردید بطوری‌که:

$$g(x)=a_{n-k}x^k+a_{n-k+1}x^{k+1}+\cdots+a_n$$

به‌ازای کثیرالجمله درجهٔ k، $g(x)$، بیش‌از n $(k\leqslant n)$ و بیش از k عدد طبیعی برای $x<p$ برای اینکه $p \mid g(x)$ باشدوجود دارد و این باقضیهٔ لاگرانژ ناسازگار است (زیرا a_{n-k} بر p قابل قسمت است).

دنباله دارد

ساختمانها ... (دنباله ازصفحهٔ ۲۶۲)

مسئله تقریباً همیشه ناشی ازاین است که خویشاوندی مباحث را لازم نمی‌بیند. مشاهـده کنید مثلا چرا دانش آموز ازعهدهٔ حل مسائلی درمورد حرکت یا طرح ومعیار برنمی‌آید.

اغلب فقط به‌این جهت که یکی‌از عناصر خانوادهٔ مسافت ـ زمان ـ سرعت یاخانوادهٔ طرح ـ مدت ـ معیار را درحل خود وارد نکرده است. اغلب در مورد عنصر خویشاوندکه لازم است درحل‌مسئله وارد گردد طراح مسئله به‌عنوان راهنمائی برای‌حل مسئله سخن بمیان می‌آورد. مثلا مسئله زیررا در نظر می‌گیریم:

مسئله ـ «یك ماهیگیر سه ماهی و ماهیگیر دیگر چهار ماهی صیدکردند وازآنها سوپ ماهی درست‌کردند. آنگاه‌سوپ را بانفرسوم‌که ۷۰ ریال به آنان پرداخت‌کرد خوردند. تعیین کنید این‌پول را ماهیگیرها چگونه بین‌خود تقسیم‌کنند».

(راهنمائی: ارزش تمام سوپ را تعیین‌کنید.)

با این راهنمائی به حل کنندهٔ مسئله این مـوضوع تفهیم می‌گردد که دریك خانواده ازمباحث مفروض مسئله مبحث‌ارزش تمام سوپ نیز وارد می‌گردد. و این مشکل‌را برطرف می‌کند. دریادگیری حل مسائل قبل‌از هرچیز آشنائی باخانوادهٔ مباحث این‌مسائل، روشهای استاندارد تغییر حالت، روشهـای جستجوی عناصر (مباحث) خویشاوند درحالات ومواقعی که‌این‌عناصرمعلوم نیستند، لازم می‌باشد.

ساختمانهای تکمیلی برای حل مسائل

ترجمهٔ : مهندس فتح‌الله زرکری

درحل یك‌مسئلهٔ به‌اندازهٔ کافی مشکل، اغلب وضع وشرایط مسئله طوری است که مانع بکار رفتن مستقیم قضیه‌ای می‌باشد. درحل مسئله لازم می‌آیدکه به روش ویا روشهـای تغییر وضعیت متوسل‌شد. یکی‌ازاین‌روشها ساختمانهای تکمیلی‌است. می گویند که ساختمانهای تکمیلی برای دانش‌آموزان مشکل است ، زیرا درموردآنها اغلب باید قبلا پیش‌بینی شود. درحقیقت اغلب‌درمورد آنها پیش‌بینی‌نکرده بلکه بطور ساده آنها را می‌دانند وبه خاطر می‌سپارند. این ساختمانهای تکمیلی استاندارد بوده وتنهامشکل موجودآن است که دانش‌آموزان را با این ساختمانها قبلا آشنا نکرده‌اند.

مثلا درحل مسئله‌ای درمورد مثلث متساوی‌الاضلاع‌احتمالا ارتفاع آنرا رسم می‌کنید. و تقریباً رسم این ارتفاع همیشه لازم به‌نظر می‌آید.

هرگاه مسئله در مورد ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین باشد بدون شك قاعدهٔ کوچکتررا روی‌قاعدهٔ بزرگتر تصویر کرده وازقطعات مساوی بدست‌آمده استفاده خواهیدکرد.

دربررسی یك‌خط مایل وتصویرش بدون تعریف‌قائم‌مشخص کنندهٔ تصویرصورت مسئله برای شماکامل نخواهد بود. در مورد دودایره خط‌المرکزین‌آنها بررسی می‌گردد و به همین ترتیب مثالهای دیگر. تمام این‌موردهاساختمانهای استاندارد می‌باشند.

درحل‌مسئله لازم‌است ازتعریفها وقضیه‌های مربوط‌به‌خواص وجود ساختمـانهای استانـدارد بر اساس وجود این ساختمانها استفاده شود. مباحثی از هندسه‌که موضوعهای هندسی را دریك گروه متحد می‌کنند تشکیل خانواده‌هائی رامی‌دهند. مثلا تعیین تصویر یك‌قطعه خط، خط‌مایل، تصویرش وقائم نظیرش را دریك خانواده متحد می‌سازد.

هرگاه درمسئله‌ای فقط درمورد چند عضو خانواده صحبت به‌میان‌آمده باشد ودر مورد دیگر اعضاء صحبتی نشده باشد، در این‌صورت لازم می‌آیـد که آنها را نیز در حل مسئله شرکت دهیم.

این شرکت دادن به نوبـهٔ خود یك ساختمـان تکمیلی است.

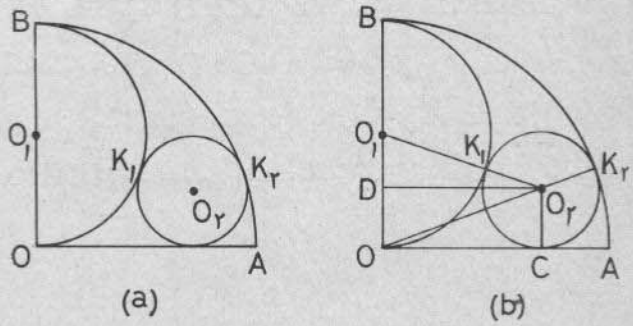
آیااین ساختمانها حقیقت دارندیانه، چندان اساسی‌نیست. ساختمانها را می‌توان بطور خیالی دنبال‌کرد. توجـه می‌دهیم که خانوادهٔ مباحث مورد بحث درمسائل حساب، جبر وغیره‌نیز وجود دارند ودراینجا مانند هندسه حـل کنندهٔ مسئله به پیشواز مباحث‌جدیدی براساس‌خویشاوندی مباحث ذکرشده درمفروضات مسئله می‌رود.

وقتی برای حل‌کنندهٔ مسئلهٔ مباحثی وجود داشته باشندکه رابطهٔ خویشاوندی آنها برای او کامـلا واضح باشد به سادگی ساختمانهای استاندارد را بکار می‌گیرد. این موضوع را به‌کمك مثالهایی روشنتر می‌کنیم.

۱ـ مماسهای یك دایره (یاکمانی ازدایـره) و شعاعهای نظیر نقاط تماس یك خانواده تشکیل می‌دهند. اغلب بین داده‌ها شعاع ازقلم افتـاده است. به‌این جهت اغلب یك ساختمان مکمل استاندارد وابسته به‌این خانواده به‌ترتیب زیر تعریف می‌گردد:

«هرگاه درمسئله‌ای دربارهٔ مماس بردایره صحبت به‌میان آید، باید شعاعهای نظیر نقاط تماس‌را رسم کرده وازخاصیت عمود بودن آنها برمماسها استفاده کرد».

مسئله ـ شعاعهای OA و OB ازدایرهٔ به‌مرکز O و به شعاع R برهم عمودند. نیمدایره‌ای به‌قطر OB درداخل OAB رسم می‌کنیم. مطلوبست شعاع x دایرهٔ مماس برنیمدایره وکمان AB وشعاع OA (شکل a).



طبق‌روش گفته شده حل‌کنندهٔ مسئله ازمراکز O، O_1 و O_2 شعاعهایی برنقاط تماس (شکل b) فرودمی‌آورد. درنتیجه شعاعهای O_1K_1 و O_2K_2 روی‌یك خط‌راست می‌افتند، زیرا هردوی آنها برمماس در نقطهٔ K_1 عمودند. این موضوع در مورد شعاعهای OK_2 و O_2K_2 نیز صادق است. با استفاده از عمود بودن خطوط OB و O_2C برخط OA خط O_2D را موازی با OA رسم می‌کنیم ومستطیل OCO_2D را بدست می‌آوریم. درمثلث قائم‌الزاویهٔ O_1O_2D داریم:

$$O_1O_2^2=O_1D^2+DO_2^2$$

$$(\frac{R}{2}+x)^2=(\frac{R}{2}-x)^2+[(R-x)^2-x^2]$$

$$x=\frac{R}{4}$$

۲ـ وتروشعاع عمود برآن وشعاع نظیر انتهای آن تشکیل مثلث قائم‌الزاویه می‌دهند. اینها نیز یك خانواده‌تشکیل می‌دهند. اغلب درمسائل وتررا داده ودیگرعناصررا به‌خود حل‌کنندهٔ مسئله واگذار می‌کنند. ساختمان استاندارد نظیر این حالت به‌صورت زیرتعریف می‌گردد:

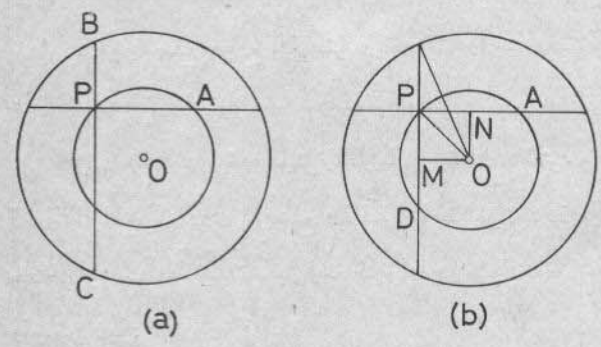
«هرگاه وتری ازدایره داده‌شود باید شعاع نظیرانتهای آن وهمچنین شعاع عمود برآن رارسم کرده وسپس مثلث قائم‌الزاویه بدست‌آمده را بررسی کرد.»

این موضوع رابا مسئلهٔ زیرروشنتر می‌سازیم.

مسئله ـ دو دایرهٔ متحدالمرکز به‌شعاعهای r و R $(r<R)$ مفروضند.

ازنقطهٔ دلخواه P از دایرهٔ کوچکتر دو وتر عمود برهم رسم می‌کنیم. یکی‌ازآنها دایرهٔ کوچکتررا درنقطهٔ A ودیگری دایرهٔ بزرگتر را در نقطه‌های B و C قطع می‌کند (شکل a) مطلوبست تعیین مقدار مجموع زیر:

$$PA^2+PB^2+PC^2$$



ساختمان استاندارد رابرای وترهای PA و PD از دایرهٔ کوچکتر (شکل b) بکار می‌بریم: P رابه O وصل کرده و OM را عمود بر PD و ON را عمود بر PA رسم‌می‌کنیم نتیجه خواهیم گرفت که $PM=MD$ و $PN=AN$. B را به O وصل‌کرده و متوجه می‌شویم که، $BM=CM$. باقی می‌ماندکه قضیهٔ فیثاغورس رابرای مثلثهای POM و BOM بکار بریم. فرض‌کنیم $PA=x$، $PB=y$ و $PC=z$ باشد. از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ POM و BOM بدست می‌آوریم:

$$(\frac{x}{2})^2+(\frac{y+z}{2}-y)^2=r^2$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2+z^2-2yz=4r^2$$

$$(\frac{y+z}{2})^2+(\frac{x}{2})^2=R^2$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2+z^2+2yz=4R^2$$

برای بدست‌آوردن مجموع مورد نظرکافی‌است طرفین تساویهای بدست‌آمده را باهم جمع کنیم که‌خواهیم داشت:

$$x^2+y^2+z^2=2(r^2+R^2)$$

ساختمان بررسی شدهٔ فوق‌معادل این‌ساختمان است که، ازانتهای

وترقطری رسم کرده وازانتهای دیگر به انتهای این وتر وصل کنیم وسپس ازمثلث قائم‌الزاویهٔ بدست آمده استفاده کنیم.

اغلب درفرض مسئله درمورد وترها صحبتی نمی‌شود، لیکن درشکل نظیرمسئله قطعاتی موجـودند که همانا وتر هـای دایره می‌باشند. واضح است که در این مـورد نیز باید همین ساختمان استاندارد رابکار گیریم. مثلا درحل مسئلهٔ «برمربعی به ضلع a دایره‌ای محیط شده‌است، ودریکـی ازقطاعهـای بدست آمده نیز مربعی محاط شده است. مطلوبست تعیین طول‌ضلع این مربع».

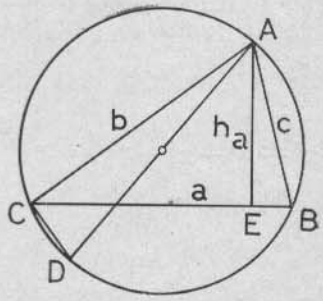
دراینجا ضلع مربع بزرگتر وکوچکتر وترهای‌هستند که درساختمان استاندارد ازآنها صحبت می‌شود.

۳ـ مثلث‌بادایرهٔ‌محیطیش، قطرماربرانتهای ضلعش، مثلث قائم‌الزاویه‌ای که روی این‌ضلع و قطـر ساخته می‌شود وزوایای محاطی بدست‌آمدهٔ نیز تشکیل یك خانواده را می‌دهند با اصول وقوانین زیر:

« هرگاه مثلثی بادایرهٔ‌محیطیش‌داده شود، باید قطرماربر انتهای یکی‌از اضلاعش راکشیده وانتهای دیگرقطر رسم شده را به‌انتهای دیگراین‌ضلع وصل کرد وازتساوی‌زوایای محاطی‌بدست آمده استفاده کرد».

مسئله ـ ثابت کنید که در هرمثلث اضلاع a ، b ، c ، مساحت S وشعاع دایرهٔ محیطی R بارابطهٔ زیر به‌هم مربوطند:

$$R=\frac{abc}{4S}$$



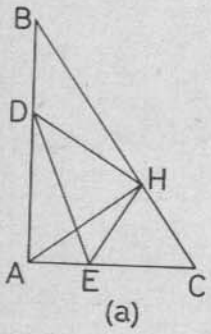
برای حل این‌مسئله‌لازم است قطر AD را رسم کرده D رابه C(یا D را به B) وصل کنیم. برای اینکه از زوایای مساوی ADC وABC استفاده کنیم AE را عمودبرBC رسم می‌کنیم. ازتشابه مثلثهای ADC وABE نتیجه می‌گیریم که $\frac{2R}{b}=\frac{c}{h_a}$ لیکن $h_a\cdot a=2S$. و درنتیجه $\frac{2R}{b}=\frac{ca}{2S}$ وبالاخره بدست می‌آوریم:

$$R=\frac{abc}{4S}$$

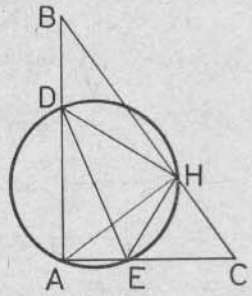
۴ـ دومثلث‌قائم‌الزاویهٔ باوترهای مشترك، دایرهٔ محیطی، زوایای محاطی نظیریك کمان‌نیزتشکیل یك خانواده رامی‌دهند. اغلب‌دایرهٔ محیطی عنصرغایب این خانواده است. لازم است این دایره را رسم کرده وسپس‌زوایای‌محاطی حاصل‌رابررسی کرد.

مسئله ـ در مثلث ABC (شکل a) که $A=90^\circ$ و $AH\perp BC$ است ازنقطهٔ H دوخط عمود برهم رسم‌می‌کنیم تا AB رادر نقطهٔ D و AC را درنقطهٔ E قطع کنند. ثابت کنید که مثلثهای DHE و ABC متشابهند.

درشکل‌مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای باوترهای‌مشترك (DAE و DHE) مشاهده می‌کنیم، عنصرغایب خانواده‌راکه دایره‌باشد



(a)



(b)

اضافه می‌کنیم. این دایره را روی DE به عنوان قطـر دایره (شکل b) بنا می‌کنیم. طبق فرض مسئله:

$$\angle DHE=\angle DAE=90^\circ$$

وبنابراین دایرهٔ مذکور ازنقاط A و H می‌گذرد. چون:

$$\angle DAH=\angle DEH$$

(زوایای محاطی نظیر کمـان DH) و $\angle DAH=\angle ACB$

(زوایا بااضلاع دوبه دوعمود برهم) است نتیجه می‌شود:

$$\angle DEH=\angle ACB$$

وتشابه مثلثها ثابت است.

مانمی‌خواهیم بگوییم که حل کنندهٔ مسئله همیشه درست به همین ترتیب که مامسئله را حل وبحث کردیم آن را حل می‌کند. لیکن شکی نیست که فکرخویشاوندی مباحث یکی از فکر های اساسی است که اعمال او را هدایت می‌کند. مشکلات حل کنندهٔ

دنباله در صفحهٔ ۲۵۹

از خواص بعضی از تصاعدهای هندسی

چگونه می‌توان باداشتن فقط چهار وزنه، وزنهای از یك تاچهل کیلوگرم را وزن کرد

ترجمهٔ: قوام نحوی

۱ـ تصاعد هندسی زیررا در نظر می‌گیریم:

$$S_n = ۱ + ۳ + ۹ + ۲۷ + ۸۱ + ۲۴۳ + \dots + ۳^{n-۱}$$

می‌توانیم جمله‌های این تصاعد را به مبنای ۳ (قدر نسبت تصاعد) بنویسیم که می‌شود:

$$S_n = ۱ + ۱۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + \dots + ۱۰^{n-۱}$$

همچنین داریم:

$$S_۱ = ۱ \qquad S_۲ = ۱ + ۳ = ۴ = (۱۱)_۳$$

$$S_۳ = ۱ + ۳ + ۹ = ۱۳ = (۱۱۱)_۳$$

$$S_۴ = ۱ + ۳ + ۹ + ۲۷ = ۴۰ = (۱۱۱۱)_۳$$

$$S_۵ = ۱ + ۳ + ۹ + ۲۷ + ۸۱ = ۱۲۱ = (۱۱۱۱۱)_۳$$

$$S_n = ۱ + ۳ + ۹ + ۲۷ + \dots + ۳^{n-۱} = \overbrace{(۱۱۱۱\dots۱)}^{n}{}_۳$$

خاصیت این تصاعد هندسی آن‌است که اگر مثلا مجموع سه‌جملهٔ آنرا انتخاب کنیم $S_۳ = ۱ + ۳ + ۹ = ۱۳$ می‌توانیم وزنهای از یك کیلوگرم تا ۱۳ کیلوگرم را باسه وزنهٔ ۱و۳و۹ کیلوگرم وزن کنیم یا اگر $S_۴$ را انتخاب کنیم:

$$S_۴ = ۱ + ۳ + ۹ + ۲۷ = ۴۰$$

می‌توان وزنهای از یك کیلوگرم تا ۴۰ کیلوگرم را فقط با ۴ وزنهٔ ۱و۳و۹و۲۷ کیلوگرم وزن نمود. به همین ترتیب می‌توان وزنهای از یك تا ۱۲۱ کیلوگرم را فقط با ۵ وزنه ۱و۳و۹ و ۲۷و۸۱ وزن کرد. مثلا برای کشیدن ۱۱ کیلوگرم می‌نویسیم $۱۱ = ۹ + ۳ - ۱$ یعنی باید وزنه‌های ۹ و ۳ کیلوگرم را یك طرف ترازو گذاشت و یك کیلو را طرف دیگر. یا برای کشیدن وزن ۱۰ کیلو می‌نویسیم: $۱۰ = ۹ + ۱$

به کمك عدد نویسی در مبنای ۳ می‌توان این مطلب را نیز نمایش داد:

$$۱۰ = (۱۰۱)_۳ = ۹ + ۱$$

$$۱۱ = (۱۰۲)_۳ = (۱۱۰)_۳ - ۱$$

در اینجا باید سعی کرد عدد داده شده را طوری به‌مبنای ۳ بنویسیم که ارقام اعداد حاصل فقط ۰ و ۱ باشند مثلا برای کشیدن وزنهای ۲۲و۲۵و۲۶ کیلوگرم می‌نویسیم:

$$(۲۲)_{۱۰} = (۲۱۱)_۳ = (۱۰۱۱)_۳ - (۱۰۰)_۳ = ۲۷ + ۳ + ۱ - ۹$$

یعنی وزنه‌های ۱و۳و۲۷ کیلو را یك طرف و ۹ کیلو را طرف دیگر ترازو می‌گذاریم:

$$۲۵ = (۲۲۱)_۳ = (۱۰۰۱)_۳ - (۱۰)_۳ = ۲۷ + ۱ - ۳$$

$$۲۶ = (۲۲۲)_۳ = (۱۰۰۰)_۳ - ۱ = ۲۷ - ۱$$

$$۶۶ = (۱۰۱۱۰)_۳ - (۱۰۰)_۳ = ۸۱ + ۹ + ۳ - ۲۷$$

۲ـ تصاعد هندسی زیررا در نظر می‌گیریم:

$$S_n = ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ + ۳۲ + \dots + ۲^{n-۱}$$

جمله‌های این تصاعد در مبنای ۲ (قدر نسبت تصاعد) می‌شود:

$$S_n = ۱ + ۱۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + \dots + ۱۰^{n-۱}$$

و داریم:

$$S_۱ = ۱ \qquad S_۲ = ۱ + ۲ = ۳ = (۱۱)_۲$$

$$S_۳ = ۱ + ۲ + ۴ = ۷ = (۱۱۱)_۲$$

$$S_۴ = ۱ + ۲ + ۴ + ۸ = ۱۵ = (۱۱۱۱)_۲$$

$$S_n = ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + \dots + ۲^{n-۱} = \overbrace{(۱۱۱\dots۱)}^{n}{}_۲$$

دنباله درصفحهٔ ۲۶۶

با ریاضیات آشتی کنید

(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

تألیف: A.BULLAS استاد آموزش ریاضی در فرانسه

ترجمهٔ: عبدالحسین مصحفی

بخش سیزدهم ـ فرا گرفتن فرمولهای جبری

بخش چهاردهم کتاب به‌جبر اختصاص دارد. در این بخش نیز ملاحظاتی دراین زمینه یادآوری می‌گردد که دانش آموزان رازیاد بکار خواهدآمد.

«پس‌از شکل نوبت عددهاست؛ جبر قلمرو فرمولها، تساویها واتحادها است».

هرچیز راجع به‌جبر راباید به‌صورت ارقام وحروف ثبت کنید ودراین‌باره مشکلات بسیار است بقسمی که انجام آن میسر نیست؛ کافی است که دریك علامت، یك‌حرف، یك‌رقم اشتباه کنید که درنتیجهٔ آن همهٔ استدلال وهمهٔ مسئله غلط خواهد شد.

باوجود این دربارهٔ ثبت وبه‌خاطرداشتن فرمولهای‌جبری توصیه‌های زیررا درنظر داشته باشید: بعضی تصور می‌کنند که اگرتوانستند جمله‌های یك‌فرمول‌را به‌دنبال هم‌بنویسند دیگرآن فرمول راکاملا یادگرفته‌اند، درصورتی‌که اینان معنی فرمول را نفهمیده‌اندبقسمی‌که اگرهمان فرمول به‌صورت دیگری برآنان عرضه شودآن را درنمی‌یابند.

برای‌آنکه یك‌فرمول راکاملا بدانید بایدکه سه‌نوع‌اجزاء آن‌را تشخیص دهید:

الف ـ حروف واعداد، ضریبها وتوانها.

ب ـ علامتها وعملیات.

ج ـ نوع رابطه: تساوی یا نابرابری.

چند مثال

ـ در رابطهٔ $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ عملیات عبارتند ازتوان وجمع یعنی مربع کردن مجموع دوعدد a و b. حروف عبارتند از a وb که جانگهدار دومقدارند.

ـ در رابطهٔ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ عملیات عبارتند از ضرب، جمع و تفریق به این معنی که حاصل‌ضرب مجموع دومقدار درتفاضل آن دومقدار.

ـ در رابطهٔ $(2a+3)^2=4a^2+9+12a$ ضریبها به ترتیب ۲، ۴و۱۲ است.

نوع رابطه دراین مثال و مثالهای قبلی اتحاد است. باید عادت کنیدکه هراتحاد را ازدوسو بتوانید بکاربرید. دراین‌باره بیشتر توضیح می‌دهم: فرض کنید دبیر از شما می‌پرسد: مجذور $(a+b)$ چه می‌شود؟ شما پاسخ می‌دهید: a^2+b^2+2ab. این درست، اما اگر یك ماه بعد دبیرازشما بپرسدکه: عبارت a^2+b^2+2ab باچه برابر است؟ باید بدون درنگ بتوانید پاسخ دهید: $(a+b)^2$.

هراتحاد توسط نماد= به دو قسمت می‌شودکه قسمت چپ نماد= را طرف اول اتحاد وقسمت دیگر را طرف دوم اتحاد می‌گوئیم. درهراتحاد باید بتوانیم از طرف اول طرف دوم را بدست‌آوریم وهمچنین ازطرف دوم طرف اول‌را بدست‌آوریم.

دراتحادهای ساده مثل:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

به‌عمل کردن یکی‌از دوطرف وبدست‌آوردن طرف دیگر از روی آن نیازی نیست، اما باید در مقابل هرطرف بتوانیم طرف‌دیگر را بیـان کنیم. وقتی داشته باشیم a^2-b^2 در مقابل آن بگوئیم $(a+b)(a-b)$ واگر داشته باشیـم $(a+b)(a-b)$ در مقابل بگوئیم a^2-b^2.

موضوع مهمتر کاربرد اتحادها است. یك اتحاد مثل

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

همیشه با a و b بیان نمی‌شود. ازاین جهت بهتراست‌که اتحادها را مستقل‌از حروف‌آنها یادبگیریم. مثلا اتحـاد بالارا چنین یاد بگیریم:

مجذور مجموع دوجمله برابراست بامجذور جملهٔ اول به علاوهٔ مجذور جملهٔدوم به‌اضافهٔ دوبرابر حاصل‌ضرب‌آن دوجمله.

اگریك اتحاد همیشه به‌یك صورت وبایك‌نوع حروف بما عرضه می‌شد دراین صورت تشخیص عبارتهای طرف اول و طرف دوم‌آن‌کاری ساده‌بود. امادرعمل باعبارتهایی سروکار پیدامی‌کنیم که هرچند یکی‌از دوطرف یك‌اتحاد است اماتشخیص‌آن درابتدا کمی مشکل است. برای مثال عبارت $\frac{25x^2}{9}-\frac{49k^2}{16}$ طرف اول یاطرف دوم کدامیك ازاتحادها است؟

همین‌قدر که توجه کنیم این‌عبارت تفاضل مربعات دوجمله است در می‌یابیم که طرف اول اتحاد:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

می‌باشد. اگراین اتحادراچنین یادگرفته باشیم: «تفاضل‌مربعات دوجمله برابراست باحاصل‌ضرب مجموع‌آن دوجمله درتفاضل‌آن دوجمله»دراین‌صورت حساب‌می‌کنیم که‌جذر $\frac{25x^2}{9}$ می‌شود $\frac{5x}{3}$ و جذر $\frac{49k^2}{16}$ می‌شود $\frac{7k}{4}$ ومی‌نویسیم:

$$\frac{25x^2}{9}-\frac{49k^2}{16}=(\frac{5x}{3}+\frac{7k}{4})(\frac{5x}{3}-\frac{7k}{4})$$

مثال دیگر: عبارت $4x^2+9+12x$ برابر با چیست؟

نخست عبارت را بررسی می‌کنیم؛ عبارت مجموع سه‌جمله‌است. جملهٔاول $4x^2$ است‌که مجذوراست وجذرآن $2x$ می‌باشد. جملهٔ دوم۹ نیز مجذور است‌که جذرآن ۳می‌باشد. جملـهٔ دیگر یعنی $12x$را درنظر می‌گیریم. این‌جمله برابراست‌با $2\times 2x\times 3$ پس‌عبارت داده شده به‌این صورت است: «مجموع مجذورات دو جمله به علاوهٔ دوبرابر حاصل ضرب‌آن دوجمله» و می‌دانیم این عبارت طرف‌دوم اتحاد «مجذور مجموع دوجمله» است. بنابراین می‌نویسیم:

$$4x^2+9+22x=(2x+3)^2$$

برای‌آنکه یك اتحادرا به‌خوبی‌یاد بگیرید وبفهمیدتوصیه می‌کنم که به‌ترتیب زیرعمل کنید:

۱) درفرمولی‌که برای شمـا عرضه شده به‌جای حرفهای موجود، حـرفهای دیگـری بکار ببرید. مثلا وقتی فـرمـول $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ را ملاحظه می‌کنید آن را به صورتهای زیرنیز بنویسید:

$$(c+d)^2=c^2+d^2+2cd$$

$$(p+m)^2=p^2+m^2+2pm$$

۲) به‌جای حروف، اعداد (مخصوصاً عددهای کسری) را بکار ببرید:

$$(\frac{2}{3}+\frac{7}{5})^2=\frac{4}{9}+\frac{49}{25}+2\times\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$$

دراین موردبه‌ویژه‌رابطه را به ترتیب عکس نیزبکار ببرید:

$$\frac{4}{9}+\frac{49}{25}+\frac{28}{15}=(\frac{2}{3})^2+(\frac{7}{5})^2+2\times\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$$

۳) به جای حرفهای فرمول جمله های دیگری را بکار ببرید:

$$(\frac{2}{3}+a)^2=(\frac{2}{3})^2+a^2+2\times\frac{2}{3}\times a=\frac{4}{9}+a^2+\frac{4}{3}a$$

$$(\frac{2a}{3b}+\frac{7}{6})^2=(\frac{2a}{3b})^2+(\frac{7}{6})^2+2\times\frac{2a}{3b}\times\frac{7}{6}$$

$$=\frac{4a^2}{9b^2}+\frac{49}{36}+\frac{14a}{9b}$$

هریك از رابطه‌هـایی راکه می‌نویسید به ترتیب عکس نیز عمل کنید:

$$\frac{4a^2}{9b^2}+\frac{49}{36}+\frac{14a}{9b}=\dots=\left(\frac{2a}{3b}+\frac{7}{6}\right)^2$$

۴) عددهای گنگ رانیز بکاربرید:

$$(\sqrt{5}+3)^2=(\sqrt{5})^2+9+2\times3\times\sqrt{5}=$$
$$=14+6\sqrt{5}$$

$$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2=5+2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}=$$
$$=7+2\sqrt{10}$$

$$14+6\sqrt{5}=9+5+2\times3\times\sqrt{5}=(\sqrt{5}+3)^2$$

۵) اتحاد را به‌صورت کلی ولفظی بیان کنید:

مجموع دوجمله به‌توان دوبرابراست‌با: جملهٔاول به‌توان دو + جملهٔ دوم به توان دو + دو برابر جملهٔ اول ضرب در جملهٔ دوم.

مجموع سه جمله که جملهٔ اولش مجذور و جملهٔ دومش مجذور وجملهٔ سومش دوبرابر حاصل ضرب جذرهای جمله‌های اول و دوم باشد برابر است با مجموع جذر های آن دو جمله به‌توان دو.

درپایان این‌بخش بازهم به‌این موضوع اشاره می کنم که هیچگاه یك مطلب را به‌عنوان‌اینکه ساده وپیش‌پا افتاده است بی اهمیت ندانید . هرمطلب را هر چقدرکه ساده جلوه کند به دقت بررسی کنید.

یك‌بار با یك دانش‌آموز بر خورد کردم که می گفت در ریاضیات ممتازاست. ازاو پرسیدم که‌آیا تقسیم کسرها رامی‌داند؟ باخندهٔ مسخره‌آمیز پاسخ دادکه بلی. کاغذ وقلمی ازاوگرفتم و نوشتم $\frac{ad}{bc}=$؟ وی فوری نوشت $\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ من‌پذیرفتم اما باز نوشتم:

$$\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=?$$

این‌بار دانش‌آموزکمی معطل ماند امابالاخره نوشت:

$$\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$$

بازهم‌جلوی عبارت‌علامت سؤال گذاشتم ودانش‌آموز تقریباًدرماند آن وقت من‌چنین نوشتم:

$$\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{d}{b}\times\frac{a}{c}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b}=\frac{d}{c}\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=$$
$$=\frac{d}{b}:\frac{c}{a}=\frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{d}{c}:\frac{b}{a}=ad\times\frac{1}{bc}$$
$$=1\times\frac{ad}{bc}=1:\frac{bc}{ad}=a\times\frac{d}{bc}=d\times\frac{a}{bc}=$$
$$a:\frac{bc}{d}=d:\frac{bc}{a}$$

ازاین یك مثال ساده می‌توان فهمید که طرز صحیح خواندن و یادگرفتن یك فرمول چیست. امیداست‌که خوانندگان بـه نکتهٔ اساسی‌آن پی‌برده باشند.

ازخواص بعضی از... (بقیه از صفحهٔ۲۶۳)

در اینجا نیز داریم $S_3=1+2+4=7$ یعنی برای کشیدن وزنهای از ۱ تا ۷ کیلوگرم می‌توان با سه وزنهٔ ۱ و۲ و ۴ کیلو وزن‌کرد. یا برای توزین‌وزنهای ازیك تا۱۵ کیلو فقط می‌توان از وزنه‌های ۱و۲و۴و۸ کیلوگرم استفاده‌کـرد ـ در اینجا نیز می‌توان از عدد نویسی در مبنـای ۲ استفاده‌کرد . مثلا بـرای کشیدن ۶ کیلوگرم می‌نویسیم:

$$6=(110)_2=4+2$$

برای‌کشیدن وزن ۲۵ کیلوگرم داریم:

$$25=(11001)_2=16+8+1$$

به همین ترتیب داریم:

$$S_6=1+2+4+8+16+32=63$$

یعنی برای وزن‌کردن وزنهای از یك تا ۶۳ کیلوگرم می‌توان‌از وزنه‌های۱و۲و۴و۸و۱۶و۳۲ کیلوگرم‌استفاده‌کرد.البته‌بااستفاده از عدد نویسی در مبنای ۲. مثلا اگربخواهیم وزن ۵۳ کیلو را بکشیم آنرا به مبنای ۲ می‌نویسیم :

$$53=(110101)_2=2^5+2^4+2^2+1=$$
$$=32+16+4+1$$

یعنی از وزنه‌های ۱و۴و۱۶ و۳۲ کیلوگرم استفاده می کنیم.

مثال‌ـ می‌خواهیم ۵۱ کیلوگرم را به‌کمك عدد نویسی در مبنای ۳و۲ وزن‌کنیم:

$$51=(110011)_2=32+16+2+1$$

یعنی از وزنهای ۱و۲و۱۶و۳۲ استفاده مـی‌کنیم و ایـن اعداد جملاتی از تصاعد هندسی دوم است.

$$51=(10000)_3-(1010)_3=81-27-3$$

یعنی ۸۱ کیلوگرم را یك طرف و ۳و۲۷ کیلـوگرم را طرف دیگر ترازو قرار می‌دهیم واعداد ۳و۲۷و۸۱ جملاتی از تصاعد هندسی اول است.

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۱۰۶

حل مسائل ویژهٔ سال اول نظری وجامع

۱۰۶/۱ـ مجموعهٔ همهٔ عضوهای غیر مشترك دومجموعهٔ A و B را تفاضل‌متقارن این دو مجموعه گفته با $A\Delta B$ نشان می‌دهیم:

$$A\Delta B=\{x|(x\in A \text{ و } x\notin B) \text{ یا } (x\in B \text{ و } x\notin A)\}$$

الف ـ برای دومجموعهٔ:

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$$
$$B=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$

هریك از مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ و $A\Delta B$ رامشخص کنید.

ب ـ تحقیق کنید که:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$
$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

حل ـ به ترتیب داریم:

$$A-B=\{۱،۲،۳\}$$
$$B-A=\{۸،۹\}$$
$$A\Delta B=\{۱،۲،۳،۸،۹\}$$
$$(A-B)\cup(B-A)=\{۱،۲،۳،۸،۹\}=A\Delta B$$
$$A\cup B=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹\}$$
$$A\cap B=\{۴،۵،۶،۷\}$$
$$(A\cup B)-(A\cap B)=\{۱،۲،۳،۸،۹\}=A\Delta B$$

۱۰۶/۲ـ در چاپ صورت این مسئله در یکان ۱۰۶ اشتباههایی روی داده است ازاین جهت صورت صحیح مسئله مجدداً در این شماره‌دربخش مسائل برای حل چاپ‌می‌شود.

۱۰۶/۳ـ می‌دانیم که:

$$۹۶۸۴۲=۲۵۶\times۳۷۵+۸۴۲$$

بدون آنکه عمل تقسیم ۹۶۸۴۲ برهریك از عددهای ۲۵۶ و ۳۷۵ را انجام دهید ، خارج قسمت و باقیماندهٔ هر یك از این تقسیمها راپیدا کنید.

حل ـ ازتقسیم ۸۴۲ برهریك از عددهای ۲۵۶ و ۳۷۵ نتیجه می‌شود:

$$۸۴۲=۳\times۲۵۶+۷۴ \text{ و } ۸۴۲=۲\times۳۷۵+۹۲$$

از این رابطه‌ها و با توجه به رابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود:

$$۹۶۸۴۲=۲۵۶\times۳۷۵+۲۵۶\times۳+۷۴$$
$$۹۶۸۴۲=۲۵۶(۳۷۵+۳)+۷۴=۲۵۶\times۳۷۸+۷۴$$

یعنی در تقسیم ۹۶۸۴۲ بر۲۵۶ خارج قسمت ۳۷۸ و باقیمانده ۷۴ است .

$$۹۶۸۴۲=۲۵۶\times۳۷۵+۳۷۵\times۲+۹۲$$
$$۹۶۸۴۲=۳۷۵\times۲۵۸+۹۲$$

در تقسیم ۹۶۸۴۲ بر ۳۷۵ خارج‌قسمت ۲۵۸ و باقیمانده ۹۲ است .

۱۰۶/۴ـ بزرگترین عدد طبیعی را پیدا کنید که چون هریك از عددهای ۶۳۵۵ و ۱۷۰۵ و ۱۲۷۱ را برآن تقسیم کنیم باقیمانده‌ها به ترتیب برابر باشند با ۵۵ و ۲۵ و ۱۱

حل ـ اگر A عدد مطلوب باشد بنابه فرض داریم:

$$۶۳۵۵=A\cdot k_۱+۵۵$$
$$۱۷۰۵=A\cdot k_۲+۲۵$$
$$۱۲۷۱=A\cdot k_۳+۱۱$$

از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود:

$$۶۳۰۰=Ak_۱ \text{ و } ۱۶۸۰=Ak_۲ \text{ و } ۱۲۶۰=Ak_۳$$

عدد A هریك از سه عدد ۶۳۰۰ و ۱۶۸۰ و۱۲۶۰ رامی‌شمرد و بزرگترین مقدار A بزرگترین شمارندهٔمشترك سه‌عدد مزبور است که برابر است با: ۴۲۰

۱۰۶/۵ـ فرض می کنیم:

$$A=\frac{ax^۲y}{z} \text{ و } B=\frac{bx^۲y}{z}$$

هرگاه مقدار $A+B$ در ازای $x=-۳$ و $y=۴$ و $z=-۶$ برابر با ۱۲ و مقدار $A-B$ در ازای $x=۳$ و

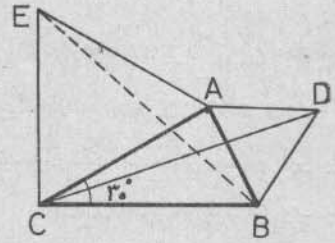
$y=-1$ و $z=3$ برابر با -24 باشد مقادیر a و b را پیدا کنید.

حل- در ازای مقادیر داده شده داریم:

$$A+B=-6a-6b=-6(a+b)=12$$
$$\Rightarrow a+b=-2$$
$$A-B=-3a+3b=-3(a-b)=-24$$
$$\Rightarrow a-b=8$$
$$\begin{cases} a+b=-2 \\ a-b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=3 \\ b=-5 \end{matrix}$$

۱۰۶/۶- در مثلث ABC اندازه زاویهٔ C برابر با ۳۰ درجه است. روی ضلع AB و در خارج مثلث ABC مثلث متساوی‌الاضلاع ABD را می‌سازیم واز C به D وصل می‌کنیم. ثابت کنید که طولهای CA ، CB و CD ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

حل- روی ضلع AC و در خارج مثلث، مثلث متساوی الاضلاع ACE را می‌سازیم و از B به E وصل می‌کنیم. دو مثلث ABE و ACD در حالت تساوی دوضلع و زاویهٔ بین باهم برابرند



$(\angle EAB=\angle DAC$ و $AC=AE$ و $AD=AB)$

بنابراین $BE=CD$. بنابه فرض اندازهٔ زاویهٔ ACB برابر ۳۰ درجه است. اندازهٔ زاویهٔ ACE برابر ۶۰ درجه است. پس زاویهٔ ECB قائمه است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE یک ضلع BC است، یك ضلع (BE) برابر با CD و ضلع دیگر (CE) برابر با AC است. بنابراین CA،CB،CD ضلعهای یك مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۱۰۶/۷- فرستنده : **کاظم حافظ قرآن**

حدود m را چنان تعیین کنید که اقلا یکی از ریشه‌های معادلهٔ زیر بین ۳ و ۵ واقع باشد.

$$x^2-(2m-3)x+m^2-3m+2=0$$

حل- از حل معادله نتیجه می‌شود:

$$x'=m-1 \text{ و } x''=m-2$$
$$3<m-1<5 \Rightarrow 4<m<6$$
$$3<m-2<5 \Rightarrow 5<m<7$$

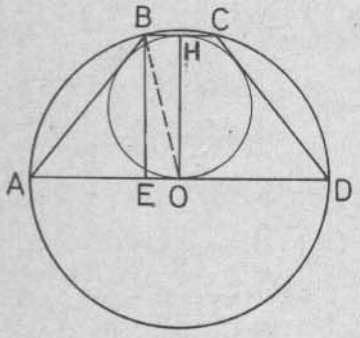
برای آنکه اقلا یکی ازاین دو نامساوی برقرار باشد کافی است که:

$$4<m<7$$

۱۰۶/۸- ترجمهٔ **مهندس زرگری**

ذوزنقهٔ متساوی الساقینی بردایرهٔ به شعاع r محیط و در دایرهٔ به شعاع R مجاط شده است بقسمی که مرکز دایرهٔ اخیر برقاعدهٔ ذوزنقه قرار دارد. رابطهٔ بین r و R را بیابید.

حل- بنابه فرض $AD=2R$ و $BE=2r$ است.



فرض می‌کنیم $AB=y$ و $BC=2x$ چون چهارضلعی ABCD محیطی است پس:

$$AB+CD=$$
$$=AD=BC$$
$$2y=2R+2x \Rightarrow y=R+x$$

از طرف دیگر داریم:

$$AE=OA-HB=R-x$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE داریم:

$$AB^2=AE^2+EB^2$$
$$(R+x)^2=(R-x)^2+4r^2 \Rightarrow x=\frac{r^2}{R}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ BEO داریم:

$$R^2=4r^2+x^2=4r^2+\frac{r^4}{R^2}$$
$$\frac{R^2}{r^2}=4+\frac{r^2}{R^2}$$

با فرض $\frac{R^2}{r^2}=p$ داریم:

$$p=4+\frac{1}{p} \Rightarrow p^2-4p-1=0$$

چون p مثبت است پس:

$$p=2+\sqrt{5}\Longrightarrow\frac{R}{s}=\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم ریاضی

۱۰۶/۹ـ فرستنده: **کاظم حافظ قرآن**

ثابت کنید که لااقل یکی از معادله‌های زیر دارای ریشه‌های حقیقی است:

$$2x^2+2(a+1)x+ab+1=0$$
$$2x^2+2(b+1)x+a+b=0$$

حل ـ اگر هیچیك ازدو معادله ریشهٔ حقیقی نداشته باشد خواهیم داشت:

$$\Delta_1'=a^2+2a-2ab-1<0$$
$$\Delta_2'=b^2-2a+1<0$$

طرفین دو نامساوی را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم نتیجه می‌شود:

$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2<0$$

اما این نامساوی غیر ممکن است. بنابراین اقلا یکی از دومقدار Δ'_1 یا Δ'_2 مثبت است.

۱۰۶/۱۰ ـ ترجمهٔ از فرانسه

عدد طبیعی n داده شده است. بزرگترین عدد صحیح s را بیابید بقسمی که:

$$\frac{s(s+1)}{2}<n$$

حالت خاص: $n=1000$

حل ـ داریم:

$$s^2+s-2n<0\ ,\ s>0$$

$$0<s<\frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2}$$

بزرگترین مقدار s برابر است بابزرگترین عددصحیح موجود در $\frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2}$ درازای $n=1000$ داریم:

$$0<s<\frac{-1+\sqrt{8001}}{2}\Longrightarrow 0<s<\frac{-1+89/4}{2}$$

$$0<s<44/2\Longrightarrow s=44$$

۱۰۶/۱۱ـ فرستنده: **رضا راشدی بنفشه‌ورق**

دانشجوی مدرسهٔ عالی فنی

بین دو عدد ۳۱۳ و ۳۳۱۳۳ چند عدد قابل‌قسمت بر ۱۳ وجود دارد؟

حل ـ داریم:

$$313=13\times24+1$$
$$33133=13\times2948+9$$

بعداز ۳۱۳ اولین عددمضرب ۱۳ برابراست با $313+12=325$

وقبل‌از ۳۳۱۳۳ آخرین عدد مضرب ۱۳ برابراست با:

$$33133-9=33124$$

بنابراین باید تعداد جمله‌های تصاعد حسابی را پیدا کنیم که قدر نسبتش ۱۳، جملهٔ اولش ۳۲۵ وجملهٔ آخرش ۳۳۱۲۴ است.

$$33124=325+(n-1)13\Longrightarrow n=2524$$

۱۰۶/۱۲ـ فرستنده: **قوام نحوی**

هرگاه در یك تصاعدحسابی m برابر جملهٔ mام برابر باشد با n برابر جملهٔ nام، ثابت کنید که جملهٔ $(m+n)$ام این تصاعد صفر است (به فرض $m\neq n$)

حل ـ جملهٔ اولرا a وقدر نسبت را d می‌گیریم. پس:

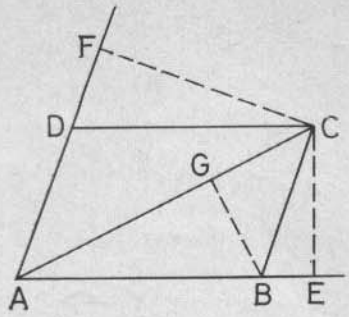
$$m[a+(m-1)d]=n[a+(n-1)d]$$
$$(n-m)(a+nd+md-d)=0$$
$$n-m\neq0\Longrightarrow a+(m+n-1)d=0$$

۱۰۶/۱۳ـ فرستنده: **جواد فیض** دانشجوی دانشکده فنی دانشگاه آذرآبادگان

در متوازی الاضلاع ABCD قطر AC از قطر BD بزرگتر است. عمودهای CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2$$

حل ـ عمود BG را بر AC رسم می‌کنیم.



ازتشابه دومثلث ACE و ABG وهمچنین از تشابه دو مثلث ACF وBCG نتیجه می‌شود:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AE}{AG}$$

و

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AF}{CG}$$

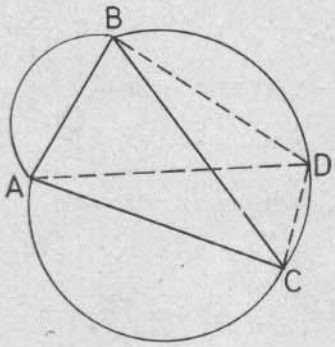
$$AC\cdot AG=AB\cdot AE \quad \text{و} \quad AC\cdot CG=BC\cdot AF$$

$$AB\cdot AE+BC\cdot AF=AC(AG+GC)$$

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^{۲}$$

۱۰۶/۱۴ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

مکان هندسی نقطه‌هایی را بیابید که مجموع سه زاویه‌ای که تحت آنها سه ضلع مثلث مفروض دیده می‌شوند مقدار ثابت α باشد.



حلـ به ازای $\alpha=۳۶۰^\circ$ مکان مورد نظر مجموعهٔ نقاط داخلی مثلث است.

به‌ازای $\alpha=۱۸۰^\circ$ مکان مورد نظر مجموعهٔ نقاط پیرامون مثلث به استثنای سه‌رأس آن است.

غیر از دوحالت بالا اگر D نقطه‌ای واقع در خارج مثلث باشد بقسمی که DA با BC متقاطع باشد داریم:

$$\angle BDC+\angle BDA+\angle ADC=۲\angle BDC=\alpha$$

$$\Rightarrow \angle BDC=\frac{\alpha}{۲}$$

مکان D کمان درخور $\frac{\alpha}{۲}$ است که بر B و C می‌گذرد.

همچنین کمانهای درخور $\frac{\alpha}{۲}$ که بر B وA یابر C وA می‌گذرند نیز جزء مکان مورد نظرند.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۰۶/۱۵ـ فرستنده: **رضا راشدی بنفشه ورق**

مقدار می‌نیمم تابع زیررا پیدا کنید:

$$y=۳^{(x^{۲}-۲)^{۳}+۸}$$

حلـ تابع y وقتی می‌نیمم است که تابع:

$$f(x)=(x^{۲}-۲)^{۳}+۸$$

می‌نیمم باشد. برای این‌تابع داریم:

$$f'(x)=۶x(x^{۲}-۲)^{۲}$$

وقتی x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند، $f'(x)$ درازای $x=۰$ صفر شده از منفی به‌مثبت تغییر علامت می‌دهد. پس $f(x)$ و در نتیجه y در ازای $x=۰$ می‌نیمم است.

۱۰۶/۱۶ـ فرستنده: **کاظم حافظ قرآن**

هر گاه داشته باشیم:

$$\cos\alpha+\cos\beta=a \quad \text{و} \quad \sin\alpha+\sin\beta=b$$

مقدار $tg\frac{\alpha+\beta}{۲}$ و از روی آن مقادیر تابعهای مثلثاتی کمان $\alpha+\beta$ را بدست آورید.

حلـ داریم:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}{۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}=tg\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۰۶/۱۷ـ ترجمهٔ از فرانسه

دو تابع زیررا در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=x^{۲}+۱ \quad \text{و} \quad g(x)=x+\sqrt{x}$$

تحقیق کنید که مشتق تابع $g(f(x))$ برابر است با $g'(f(x))f'(x)$

حلـ داریم:

$$g(f(x))=x^{۲}+۱+\sqrt{x^{۲}+۱}$$

$$[g(f(x))]' = 2x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

همچنین داریم:

$$f'(x) = 2x \quad و \quad g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(f(x)) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = [1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}] \times 2x =$$

$$= 2x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = [g(f(x))]'$$

۱۰۶/۱۸ـ فرستنده: **کاظم حافظ قرآن**

برهذلولی به معادلهٔ $y = \frac{1}{x}$ نقطهٔ P به طول k را اختیار کرده در آن قائمی برمنحنی رسم می‌کنیم که در نقطهٔ دیگر Q آن را تلاقی می‌کند. قرینهٔ Q نسبت به مرکز هذلولی را R می‌نامیم. هرگاه k تغییر کند معادلهٔ مکان‌هندسی نقطهٔ M وسط PR را بدست آورید.

حل‌ـ قبلا معادلهٔ قائم‌را بدست می‌آوریم:

$$x = k \text{ و } y = \frac{1}{k} \text{ و } y' = \frac{-1}{x^2} \Longrightarrow m = k^2$$

$$y = k^2(x-k) + \frac{1}{k}$$

ازحل این‌معادله بامعادلهٔ هذلولی نتیجه می‌شود:

$$P(k, \frac{1}{k}), Q(-\frac{1}{k^3}, -k^3) \Longrightarrow R(\frac{1}{k^3}, k^3)$$

$$M(x = \frac{k}{2} + \frac{1}{2k^3}, y = \frac{1}{2k} + \frac{k^3}{2})$$

ازحذف k بین xوy نتیجه می‌شود:

$$x^2 + y^2 - 4x^3y^3 = 0$$

۱۰۶/۱۹ـ فرستنده: **کاظم حافظ قرآن**

به فرض $x + y = \frac{\pi}{4}$ مقادیر x و y را از معادلهٔ زیر بدست آورید:

$$2\cos(x+2y) = \cos(x-y)$$

حل‌ـ طرفین معادله را بسط داده ساده می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$3tgx = cotg2y = cotg(\frac{\pi}{2} - 2x) = tg2x$$

$$3tgx = \frac{2tgx}{1 - tg^2x}$$

$$tgx(1 - 3tg^2x) = 0 \Longrightarrow tgx = 0 \text{ یا } \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = k\pi \text{ یا } k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۱۰۶/۲۰ـ فرستنده: **رضا راشدی بنفشه‌ورق**

ثابت کنید که:

$$\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)^2 < \frac{a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2}{a^2 - 2ab\cos\beta + b^2} < \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)^2$$

حل‌ـ اگر مقدارکسر داده شده را m بگیریم،خواهیم داشت:

$$(m-1)\frac{a^2}{b^2} - 2(m\cos\beta - \cos\alpha)\frac{a}{b} + m - 1 = 0$$

این‌معادله که برحسب $\frac{a}{b}$ ازدرجهٔ دوم است وقتی‌جواب دارد که:

$$\Delta' = (m\cos\beta - \cos\alpha)^2 - (m-1)^2 \geqslant 0$$

ازحل این نامعادله برحسب m بدست خواهدآمد:

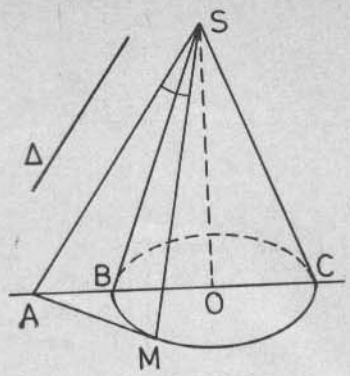
$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta} < m < \frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)^2 < m < \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)^2$$

۱۰۶/۲۱ـ ترجمهٔ از فرانسه

سطح مخروطی دوار به رأس S و امتداد Δ مفروض‌است. کدام مولد از سطح مخروطی با امتداد Δ کوچکترین زاویه یا بزرگترین زاویه را می‌سازد.

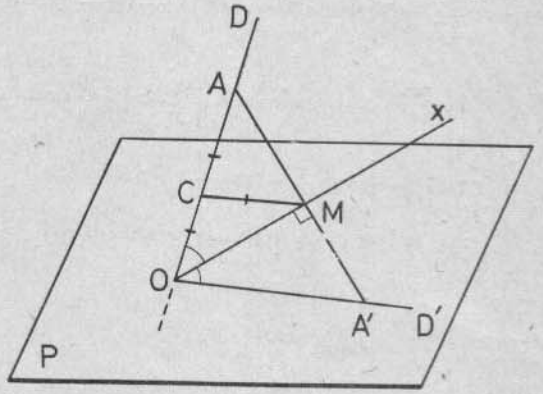
حل ـ از S موازی با Δ رسم می‌کنیم و بر آن نقطهٔ A را اختیار کرده بر A صفحه‌ای عمود بر محور سطح مخروطی می‌گذرانیم. مقطع این صفحه باسطح مخروطی دایرهٔ به‌مرکز O خواهد بود. خط AO با این دایره در B و C متقاطع است.



نقطهٔ غیرمشخص M را بر دایرهٔ O در نظر می‌گیریم. هرگاه M دایره را بپیماید ازمثلث ASM اندازه‌های دوضلع SA و SM ثابت مانده اندازهٔ ضلع AM تغییر می‌کند که AB کوچکترین مقدار و AC بزرگترین مقدار آن خواهد بود. بنابراین زاویهٔ ASB کوچکترین و زاویهٔ ASC بزرگترین زاویه‌ای است که مولدهای سطح مخروطی باامتداد Δ می‌سازند.

۱۰۶/۲۲ـ ترجمهٔ از فرانسه

خط D در نقطهٔ O با صفحهٔ P متقاطع است. در صفحهٔ P خط غیرمشخص D′ را رسم می‌کنیم که بر O بگذرد و Ox نیمساز زاویهٔ DOD′ را در نظر می‌گیریم. هرگاه D′ در صفحهٔ P حول O دوران کند مکان هندسی خط Ox چیست؟



حل ـ برخط D نقطهٔ A را انتخاب می‌کنیم و بر D′ نقطهٔ A′ را پیدا می‌کنیم که OA′ = OA باشد. مثلث AOA′ متساوی‌الساقین است، پس Ox از M وسط AA′ می‌گذرد و بر AA′ عمود است.

از M به C وسط OA وصل می‌کنیم. MC با OA′ موازی و بانصف OA′ یعنی نصف OA برابر است. هرگاه D′ درصفحهٔ P حول O دوران کند، نقطهٔ C، امتداد CM وطول CM ثابت می‌ماند. پس مکان M دایره‌ای است به‌مرکز C که صفحهٔ آن باصفحهٔ P موازی است. مکان Ox سطح مخروطی است که O رأس آن ودایرهٔ مزبور دایرهٔ هادی آن است.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم دبیرستان

۱۰۶/۲۳ـ سطح محصور بین هذلولی $x^2-y^2=a^2$ و محور Ox وخط $x=h$ (به فرض $h>a>0$) راحول محور Ox دوران می‌دهیم. هرگاه حجم حادث برابر باشد با حجم کرهٔ به شعاع a مقدار h را برحسب a حساب کنید.

حل ـ داریم:

$$g(x)=y^2=x^2-a^2$$

$$G(x)=\frac{1}{3}x^3-a^2x+C$$

$$V=\pi|G(h)-G(a)|=\frac{\pi}{3}(h-a)^2(h+2a)$$

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3 \Rightarrow (h-a)^2(h+2a)=4a^3$$

ازحل معادله $h=2a$ بدست می‌آید.

۱۰۶/۲۴ـ فرستنده: **محمدحسنی نژاد**

ثابت کنید که در هرمثلث رابطهٔ زیر برقرار است:

$$a(1+2\cos 2A)\cos 3B+b(1+2\cos 2B)\cos 3A=c(1+2\cos 2C)$$

حل ـ باتوجه به‌اینکه:

$$1+2\cos 2A=3-4\sin^2 A=\frac{\sin 3A}{\sin A}$$

طرف اول رابطه برابر می‌شود با:

$$\frac{a}{\sin A}\sin 3A\cos 3B+\frac{b}{\sin B}\sin 3B\cos 3A$$

$$=\frac{c}{\sin C}(\sin 3A\cos 3B+\sin 3B\sin 3A)$$

$$=\frac{c}{\cos C}\sin(3A+3B)=$$

$$=\frac{c}{\sin C}\sin 3C=c(1+2\cos 2C)$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۶/۲۵ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

قسمت صحیح عدد $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3$ را پیدا کنید.

حل ـ فرض می‌کنیم $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ وطرفین را به‌توان سه می‌رسانیم، نتیجه می‌شود:

$$x^3-6x-6=0$$

عدد $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ یك ریشهٔ این‌معادله است وریشهٔ منحصر به‌فرد آن است زیرا:

$$4p^3+27q^2=-4\times 6^3+27\times 6^2=108>0$$

فرض می‌کنیم $f(x)=x^3-6x-6$ دراین صورت به‌سادگی نتیجه می‌شود که:

$$f(\sqrt[3]{24})=18-6\sqrt[3]{24}>0$$

$$f(\sqrt[3]{23})=17-6\sqrt[3]{23}<0$$

بنابراین:

$$\sqrt[3]{23}<\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}<\sqrt[3]{24}$$

$$23<(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3<24$$

قسمت صحیح عدد داده شده برابر ۲۳است.

۱۰۶/۲۶ـ ترجمهٔ از فرانسه

منحنی نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y=\cos(\pi\sqrt{x})$$

حل ـ تابع متناوب نیست وبه‌ازای مقادیر $x\geq 0$ معین است. دراین‌فاصله داریم:

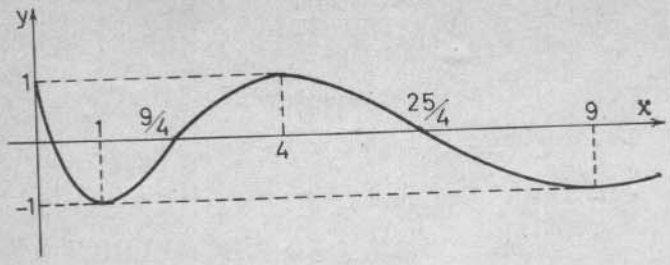
$$y'=-\frac{\pi}{2\sqrt{x}}\sin(\pi\sqrt{x})$$

$$y'=0\Longrightarrow x=k^2=1,4,9,\ldots$$

$$y=0\Longrightarrow \pi\sqrt{x}=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$x=(k+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4},\frac{9}{4},\frac{25}{4},\ldots$$

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$\frac{9}{4}$		4		$\frac{25}{4}$		9 ....
y′			+		0		−		0		+		0
y	1	↗	0	↗	−1	↘	0	↘	1	↗	0	↗	−1



۱۰۶/۲۷ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

در مثلث ABC داریم $b+c=2R\sqrt{3}$ ثابت کنید که:

$$\frac{\sin 2A}{\sin 3A}>\frac{2}{3}$$

حل ـ (توجه داشته باشید که درچاپ صورت مسئله در شمارهٔ قبل اشتباه شده‌است). باتوجه‌به‌قضیهٔ سینوسها ازرابطهٔ داده شده‌نتیجه می‌شود:

$$\sin B+\sin C=\sqrt{3}$$

$$2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\sqrt{3}$$

$$2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\sqrt{3}$$

اگر $B=C$ باشدنتیجه خواهد شدکه مثلث متساوی‌الاضلاع‌است ودراین حالت نسبت $\frac{\sin 2A}{\sin 3A}$ بی‌معنی است.

پس $B\neq C$ ودر نتیجه:

$$0<\cos\frac{B-C}{2}<1\Longrightarrow 1>\cos\frac{A}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{A}{2}<\frac{\pi}{6}\Longrightarrow\frac{1}{2}<\cos A<1$$

بافرض $x=\cos A$ داریم:

$$y=\frac{\sin 2A}{\sin 3A}=\frac{2\sin A\cos A}{3\sin A-4\sin^3 A}=\frac{2\cos A}{3-4\sin^2 A}$$

$$y=\frac{2\cos A}{4\cos^2 A-1}=\frac{2x}{4x^2-1}=f(x)$$

$$y'=\frac{-8x^2-2}{(4x^2-1)^2}<0$$

تابع همواره نزولی است پس:

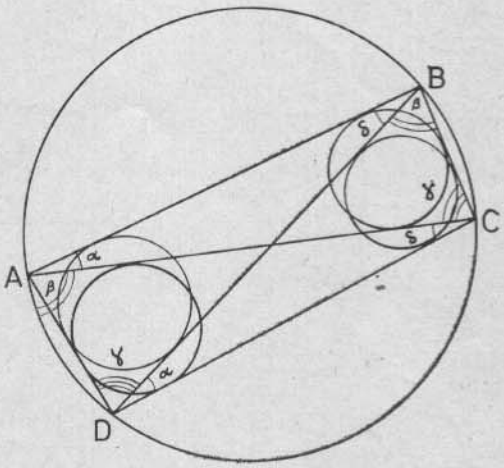
$$\frac{1}{2}<x<1\Longrightarrow f(\frac{1}{2})>y>f(1)$$

$$f(1)=\frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{\sin 2A}{\sin 3A} > \frac{2}{3}$$

۱۰۶/۲۸ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

چهار ضلعی محدب ABCD در دایرهٔ به‌شعاع R محاط است. شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای BCD ، CDA، DAB و ABC را به ترتیب r_1، r_2، r_3 و r_4 می‌نامیم. ثابت کنید که:

$$r_1+r_3=r_2+r_4$$



حلـ فرض می‌کنیم که:

$$\angle BAC=\angle BDC=\alpha$$
$$\angle CAD=\angle DBC=\beta$$
$$\angle ACB=\angle ADB=\gamma$$
$$\angle ABD=\angle ACD=\delta$$

دراین صورت داریم:

$$r_1=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$r_1=R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos C-1)$$
$$r_2=R(\cos\beta+\cos\delta+\cos D-1)$$
$$r_3=R(\cos\gamma+\cos\delta+\cos A-1)$$
$$r_4=R(\cos\alpha+\cos\gamma+\cos B-1)$$

با توجه به‌اینکه:

$$\cos A+\cos C=0 \quad \text{و} \quad \cos B+\cos D=0$$

نتیجه می‌شود که:

$$r_1+r_3=r_2+r_4$$

۱۰۶/۲۹ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

عدد طبیعی‌را پیدا کنید که مکعبش عددشش رقمی بارقمهای ۳،۵،۵،۷،۷و۸ باشد.

حلـ چون مکعب عدد شش‌رقمی است پس خود عدد دو رقمی به‌صورت $\overline{ab}$ است. بزرگترین و کوچکترین عددی که با رقمهای داده شده می‌توان نوشت ۸۷۷۵۵۳ و ۳۵۵۷۷۸ است پس:

$$70^3<\overline{ab}^3<96^3 \Longrightarrow 70<\overline{ab}<96$$

رقم a یکی‌از سه‌رقم ۷یا۸یا۹ است.

چون درمکعب عدد رقمهای ۱و۹ وجود نداردپس $b\neq 1$ و $b\neq 9$ وهمچنین چون هیچیك ازعددهایی که با شش رقم داده شده ساخته می‌شود مضرب ۴ (درنتیجه مضرب۸) نیست پس b زوج نمی‌باشد.

مجموع رقمهای داده‌شده مضرب ۳ نیست پس $\overline{ab}$ نیزمضرب ۳ نیست.

نتیجه می‌شود که $\overline{ab}$ می‌تواند یکی از عددهای زیر باشد:

۷۳،۷۷،۸۳،۸۵،۹۵

باامتحان این‌عددهامعلوم خواهد شد که ۹۵ عدد مطلوب‌است.

۱۰۶/۳۰ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

ثابت کنید که اگر عدد $2a^3-3a^2b+2b^3$ بر۵ بخش پذیر باشد، هریك از عددهای صحیح a و b نیز بر ۵بخش‌پذیر است.

حلـ نسبت به‌تقسیم بر۵ بنابه فرض داریم:

$$2a^3-3a^2b+2b^3=0$$

هرگاه باقیماندهٔ تقسیم b بر۵ صفر نباشد خواهیم داشت:

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}\right)^2+2=0$$

هرگاه هیچیك ازدوعدد a وb مضرب ۵نباشد، درتقسیم بر۵عدد $\frac{a}{b}$ بایکی ازعددهای ۱± یا ۲± یا $\pm\frac{1}{2}$ برابر است اما هیچیك ازاین عددها درمعادلهٔ بالا صدق نمی‌کند. پس یکی از دوعدد a و b مضرب ۵ است ودر این صورت به سادگی نتیجه می‌شود که دیگری نیز مضرب ۵است.

۱۰۶/۳۱ـ ترجمهٔ از فرانسه

از نقطهٔ ثابت P واقع درخارج دایرهٔ ثابت به مرکز O

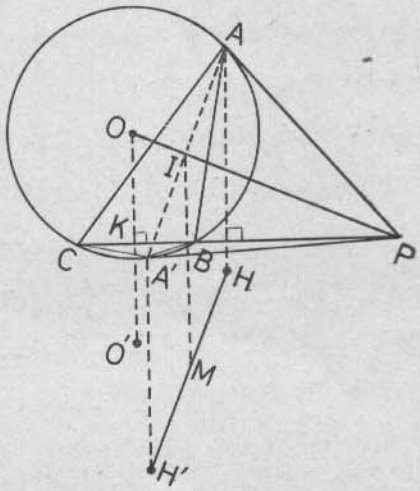
دو مماس PA و PA′ را بر دایره رسم‌می‌کنیم. قاطع‌متغیری که از P بگذرد دایره را در B و C قطع می‌کند. هرگاه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و H′ مرکز ارتفاعی مثلث A′BC و M وسط HH′ باشد، مکان هندسی هریك از نقطه‌های H، H′ و M را تعیین کنید.

حل- هرگاه K پای عمود مرسوم از O بر BC و O′ قرینهٔ O نسبت به BC باشد داریم:

$$\overline{AH}=2\overline{OK}=\overline{OO'}$$

چهار ضلعی AOO′H متوازی‌الاضلاع است و $\overline{O'H}=\overline{OA}$ می‌باشد.

مکان K کمان AOA′ از دایرهٔ به قطر PO است. پس



مکان O′ کمانی از دایره‌ای است که در تجانس به مرکز O و به نسبت ۲ مجانس کمان AOA′ است. این کمان را $\alpha\alpha'$ می‌نامیم. مکان H کمانی است که از انتقال کمان $\alpha\alpha'$ به بردار $\overrightarrow{OA}$ بدست‌می‌آید.

به روش مشابه ثابت می‌شود که مکان H′ کمانی است که از انتقال کمان $\alpha\alpha'$ به بردار $\overrightarrow{OA'}$ بدست‌می‌آید.

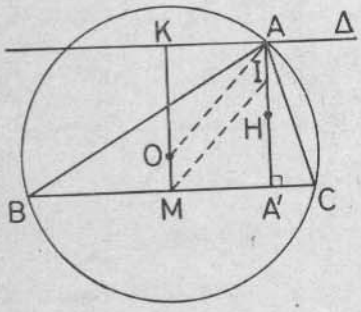
از رابطه‌های $\overline{AH'}=\overline{OO'}$ و $\overline{A'H'}=\overline{OO'}$ نتیجه می‌شود که $\overline{AH}=\overline{A'H'}$. پس اگر I وسط AA′ باشد $\overline{IM}=\overline{AH}$ و در نتیجه $\overline{HM}=\overline{AI}$ است. بنابراین اگر مکان H را به‌بردار $\overrightarrow{AI}$ انتقال دهیم مکان M بدست می‌آید که کمانی از دایره‌خواهد بود.

۱۰۶/۳۲- ترجمهٔ از فرانسه

دو نقطهٔ ثابت A و H مفروض است. مثلث متغیر ABC را در نظر می‌گیریم که H مرکزارتفاعی آن بوده و شعاع دایرهٔ محیطی آن با ارتفاع AA′ از مثلث برابر باشد. مکان هندسی M وسط BC را بدست آورید.

حل- اگر I وسط AH و A′ نقطهٔ تلاقی AH با BC باشد داریم:

$$\overline{AM}=2\overline{OM}\Longrightarrow\overline{AI}=\overline{OM}$$



چهار ضلعی OAIM متوازی الاضلاع است و در نتیجه MI=OA در A عمود Δ را بر AH رسم می‌کنیم و از O عمود OK را بر Δ فرود می‌آوریم که OK در امتداد OM است. چون OA=AA′=MK پس MI=MK. بنابراین M برسهمی واقع است که I کانون و Δ خط‌هادی آن است.

حل مسائل گوناگون

۱۰۶/۳۳- فرستنده: **جوادفیض**

هرگاه برای مقادیر مثبت a_1 و a_2 و... داشته‌باشیم:

$$a_1c_1-b_1^2>0,\ a_2c_2-b_2^2>0,\ a_3c_3-b_3^2>0$$

ثابت کنید که

$$(a_1+a_2+a_3)(c_1+c_2+c_3)>(b_1+b_2+b_3)^2$$

حل- با توجه به نامساوی:

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+\dots+a_nb_n)^2$$

وبا توجه به نامساویهای داده شده نتیجه می‌شود که:

$$(\sqrt{a_1c_1}+\sqrt{a_2c_2}+\sqrt{a_3c_3})>b_1+b_2+b_3$$

$$(a_1+a_2+a_3)(c_1+c_2+c_3)>$$

$$>(\sqrt{a_1c_1}+\sqrt{a_2c_2}+\sqrt{a_3c_3})^2>(b_1+b_2+b_3)^2$$

۱۰۶/۳۴ـ فرستنده: **قوام‌نحوی**

جملهٔ عمومی رشتهٔ:

۳،۶،۱۱،...

عبارتست از:

$$u_n = A \times ۲^n + B \times n$$

اولا A و B را پیدا کنید. ثانیاً مجموع n جمله از رشته را بدست آورید.

حل‌ـ اولا به ازای ۳و۲و۱ = n به ترتیب داریم:

$$\begin{cases} A \times ۲ + B = ۳ \\ A \times ۴ + ۲B = ۶ \\ A \times ۸ + ۳B = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow A = B = ۱$$

ثانیاً مجموع n جمله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$S_n = (۲+۱) + (۴+۲) + \dots + (۲^n + n)$$

$$S_n = (۱+۲+\dots+n) + (۲+۴+\dots+۲^n)$$

$$S_n = \frac{n(n+۱)}{۲} + ۲(۲^n - ۱)$$

از مسائل فرستاده شده توسط: رضا راشدی

۱۰۶/۳۵ـ هرگاه $tg\,a$ و $tg\,b$ و $tg\,c$ ریشه‌های معادلهٔ

$$x^۳ - ۲(m-۱)x - (m+۱) = ۰$$

و $cotg\,a$ و $cotg\,b$ و $cotg\,c$ ریشه‌های معادلهٔ

$$x^۳ - (m+۱)x^۲ - ۲(m-۱) = ۰$$

باشد، مقدار m را پیدا کنید که:

$$tg(a+b+c) = cotg(a+b+c)$$

یکان‌ـ مسئله به‌صورتی که فرستاده‌شده نادرست است. زیرا ریشه‌های دو معادله نظیر به‌نظیر عکس یکدیگرند و دراین‌صورت باید هریك از معادلات ازمعادلهٔ دیگر با تبدیل x به $\frac{۱}{x}$ بدست آید و چنین نیست.

۱۰۶/۳۶ـ هرگاه $log\,a$ و $log\,b$ ریشه‌های معادلهٔ

$$x^۲ - mx + m + ۱ = ۰$$

و $log\,c$ و $log\,d$ ریشه‌های معادلهٔ

$$x^۲ - ۲mx + m - ۲ = ۰$$

باشد، مقدار m را پیدا کنید که:

$$log_a ۱۰b - log_c ۱۰۰a = log_d ۱۰۰c - log_b ۱۰d$$

حل‌ـ (با توجه به رفع اشتباه‌های مندرج در صورت مسئله در یکان شمارهٔ قبل) بنابه روابط بین ریشه‌ها و ضریبها داریم:

$$\begin{cases} log\,a + log\,b = m \\ log\,a\,log\,b = m + ۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} log\,c + log\,d = ۲m \\ log\,c\,log\,d = m - ۲ \end{cases}$$

با استفاده از رابطهٔ $log_b a = \frac{log\,a}{log\,b}$ رابطهٔ داده شده را بسط می‌دهیم، بعد از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\frac{(log\,a + log\,b)(۱ + log\,a + log\,b)}{log\,a\,log\,b} = \frac{(log\,c + log\,d)(۲ + log\,c + log\,d)}{log\,c\,log\,d}$$

$$\frac{m(m+۱)}{m+۱} = \frac{۲m(۲m+۲)}{m-۲}$$

ازاین معادله باتوجه به اینکه $m \neq ۰$ است نتیجه می‌شود:

$$m = -۲$$

مسائل ترجمهٔ مهندس زرگری

۱۰۶/۳۷ـ در زبانی فقط سه‌حرف a و b و o وجوددارد. کلمه‌هایی که با این حرفها ساخته می‌شود چنانندکه سه حرف یکسان دنبال هم نمی‌آید. چندکلمهٔ سه حرفی می‌توان‌ساخت؟

حل‌ـ هرکلمهٔ شش حرفی از ترکیب سه تا از ترکیبات دو حرفی زیرتشکیل می‌شود:

aa و ab و ao و ba و bb و bo و oa و ob و oo

هرگاه در وسط کلمه aa قرارگیرد، در اینصورت در ابتدای کلمه می‌توانند هریك از ترکیبات دوتائی بالاکه به a ختم نشوند به دلخواه قرار گیرند. و در انتهای آن هر یك از این ترکیبات دوتائی که با حرف a شروع نمی‌شوند می‌توانند به دلخواه قرار گیرند. به‌این‌ترتیب‌وقتی ترکیب aa در وسط کلمه باشد می‌توانیم ۳۶ = ۶ × ۶ کلمه بسازیم و درحالت کلی ۱۰۸ = ۳ × ۳۶ کلمه که دارای دو حرف وسطی یکسان هستند خواهیم داشت.

هرگاه در وسط کلمه ترکیبی از دو حرف مختلف قرار گرفته باشد، دراین صورت در سمت چپ و راست این ترکیب دوتائی هریك از هشت ترکیب دوتائی باقی می‌توانند قراربگیرند و به این ترتیب ۶۴ کلمه با دو حرف مختلف در وسط خواهیم داشت. تعدادکل کلماتی که دروسط دارای حروف متفاوت‌می‌باشند

برابر خواهد شد با $۶۴ \times ۶ = ۳۸۴$

در این زبان کلا می‌تواند ۴۹۲ کلمهٔ شش حرفی به همان ترتیبی که گفتیم وجود داشته باشد.

۱۰۶/۳۸ـ به ازای چه مقدار از عدد طبیعی $n \geqslant ۲$ گزارهٔ زیر درست است:

«هرگاه مجموع عددهای صحیح $a_۱^۳ + a_۲^۳ + \dots + a_n^۳$ بر ۹ بخش پذیر باشد، اقلا یکی از عددهای a_i بر ۳ بخش پذیر است.

حل- گزارهٔ داده شده برای n زوج درست نیست زیرا هرگاه $\frac{n}{۲}$ اعداد a_i برابر یك و $\frac{n}{۲}$ باقی برابر منهای یك باشند در این‌صورت مجموع مکعباتشان برابر صفر شده و بر ۹ بخش‌پذیر است اگر چه هیچ یك از اعداد a_i بر ۳ بخش پذیر نباشد. گزارهٔ داده‌شده‌درموردی که $n \geqslant ۹$ وفرد نیز باشددرست نیست‌زیرا هرگاه ۹ عدد اوّل برابر یك باشند وبین اعداد باقیمانده (تعداد زوج) نیمی برابر یك ونیمی دیگر برابر منهای یك باشند. در این صورت مجموع مکعباتشان برابر ۹ و بنابراین بر ۹ بخش پذیراست اگرچه هیچ یك از اعداد a_i برسه بخش پذیر نباشد. حال می‌ماند تحقیق شود که آیا گزارهٔ داده شده به ازای $n = ۳$ و ۵ و ۷ درست است یانه.

هرگاه هیچ یك‌از اعداد a_i بر ۳ بخش پذیر نباشد، در این صورت $a_i = ۳b_i \pm ۱$ و از اینجا

$$a_۱^۳ + a_۲^۳ + a_۳^۳ = ۹d_۱ + r_۱ \quad \text{و} \quad a_i^۳ = ۹c_i \pm ۱$$

چون از سه‌عددبرابر ± ۱ نمی‌توان‌صفرو ± ۹ ساخت‌بنابراین عدد $r_۱$ مخالف صفر بوده و مقدار آن‌کمتر از ۹ است. به‌همین ترتیب $n = ۵$ و $n = ۷$ بررسی می‌گردند. به این ترتیب به ازای $n = ۳$ و ۵ و ۷ هرگاه هیچ یك از a_i ها بر ۳ بخش پذیر نباشد، $a_۱^۳ + \dots + a_n^۳$ بر ۹ بخش پذیر نخواهد بود بابیانی دیگر هرگاه $a_۱^۳ + \dots + a_n^۳$ بر ۹ بخش پذیر باشد، اقلا یکی از اعداد a_i بر ۳ بخش‌پذیرخواهد بود.

گزارهٔ داده شده فقط به‌ازای $n = ۳$ و ۵ و ۷ درست است.

۱۰۶/۳۹ـ ثابت کنید که عدد $a_n = (۲n)^{۲n} - ۱$ نمی‌تواند توانی‌طبیعی (بزرگتر از یك) از یك عدد طبیعی‌باشد.

حل- داریم:

$$a_n = [(۲n)^n + ۱][(۲n)^n - ۱]$$

عددهای $(۲n)^n + ۱$ و $(۲n)^n - ۱$ دوعدد فردمتوالیند پس نسبت به هم اولند. هرگاه $a_n = b^k$ باشد $(k \geqslant ۲)$ عدد b نمی‌تواند اول باشدپس:

$$h = b_۱ b_۲ \quad \text{و} \quad b_۱ \neq ۱ \quad \text{و} \quad b_۲ \neq ۱$$

$$(۲n)^n + ۱ = b_۱^k \quad \text{و} \quad (۲n)^n - ۱ = b_۲^k$$

$$b_۱^k - b_۲^k = ۲$$

$$(b_۱ - b_۲)(b_۱^{k-۱} + b_۲^{k-۲} b_۲ + \dots + b_۲^{k-۱}) = ۲$$

$b_۱$ و $b_۲$ عددهای فرد متفاوتند پس:

$$b_۱ - b_۲ = ۲ \quad \text{و} \quad b_۱^{k-۱} + b_۱^{k-۲} b_۲ + \dots + b_۲^{k-۱} = ۱$$

اما این رابطه به ازای عدد طبیعی $k \geqslant ۲$ غیر ممکن است پس

$$a_n \neq b^k$$

۱۰۶/۴۰ـ ثابت کنید که در هرچهار وجهی نسبت «حاصل‌ضرب طول هریال در مساحتهای دو وجه روبرو به آن» بر «سینوس فرجهٔ به یال مزبور» مقدار ثابت است.

حل- فرض کنیم $A_۱A_۲A_۳A_۴$ چهار وجهی باشد که درآن $S_۱$ مساحت وجه روبرو به رأس $A_۱$ و $S_۲$ مساحت وجه روبرو به رأس $A_۲$ است. بریال $A_۳A_۴$ صفحه‌ای عمود بریال $A_۱A_۲$ می گذارنیم که در M با آن‌متقاطع است. هریك ازخطهای $A_۳M$ و $A_۴M$ بر $A_۱A_۲$ عمودند و داریم:

$$\frac{S_۱S_۲ \times ۲A_۱A_۲}{\sin(\angle A_۱A_۲)} = \frac{S_۱S_۲ \cdot A_۳M \cdot A_۱A_۲ \cdot A_۴M \cdot A_۱A_۲}{A_۳M \cdot A_۴M \cdot A_۱A_۲ \cdot \sin(\angle A_۱A_۲)}$$

$$= \frac{S_۱S_۲ \times ۲S_۳ \times ۲S_۴}{۲A_۱A_۲S_{A_۳MA_۴}} = \frac{۲}{۳} \cdot \frac{S_۱S_۲S_۳S_۴}{V}$$

برای رأسهای دیگر نیز همین مقدار بدست می‌آید.

پاسخ تستهای ریاضی

۴۱ـب	۴۲ـد	۴۳ـب	۴۴ـالف
۴۵ـ ج	۴۶ـد	۴۷ـج	۴۸ـج
۴۹ـالف	۵۰ـد	۵۱ـالف	۵۲ـب
۵۳ـب	۵۴ـد	۵۵ـالف	۵۶ـب
۵۷ـج	۵۸ـج	۵۹ـب	۶۰ـد
۶۱ـج	۶۲ـد	۶۳ـالف	۶۴ـب

دنباله درصفحهٔ ۲۹۱

مسائل برای حل

برای دانش‌آموزان سال اول نظری و جامع

۱۰۷/۱ـ از سه‌شیء x، y و z یکی سفید، یکی سیاه و یکی سرخ است. هرگاه ترکیبهای شرطی زیر هرسه درست باشند، رنگ هریك ازسه شیء مفروض راپیدا کنید.

y سرخ است ⟸ x سفید باشد

y سیاه است ⟸ x سرخ باشد

z سرخ است ⟸ y سفید نباشد

۱۰۷/۲ـ دریك آموزشگاه مختلط؛ عدهٔ دانش آموزانی که پسریا شبانه‌روزی می‌باشند ۱۶۰ نفراست. عدهٔ دانش‌آموزانی که‌دختریاشبانه‌روزی می‌باشند ۱۱۰ نفراست. عدهٔ دانش‌آموزانی که شبانه‌روزی می‌باشند ۷۰ نفراست. عدهٔ کل دانش‌آموزان این آموزشگاه چند نفراست؟

۱۰۷/۳ـ فرستنده: **جواد فیض**

هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{x}{1+t^2}=\frac{y}{2t}=\frac{z}{1-t^2}$$

ثابت‌کنید که خواهیم داشت:

$$x^2=y^2+z^2$$

۱۰۷/۴ـ مقدار عددی عبارت $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ را به ازای $x=\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}})$ بدست آورید.

۱۰۷/۵ـ حاصل‌عبارت زیر را به‌ساده‌ترین صورت‌بدست آورید:

$$E=\frac{4a^2-1}{(a-b)(a-c)}+\frac{4b^2-1}{(b-a)(b-c)}+\frac{4c^2-1}{(c-a)(c-b)}$$

۱۰۷/۶ـ ترجمهٔ از فرانسه

درمثلث ABC زاویهٔ A قائمه واندازهٔ زاویهٔ C کوچکتر از ۳۰ درجه است. درخارج مثلث ودر امتداد CB نقطهٔ M را چنان می‌گیریم که طول AM نصف طول BC باشد. ازM خط Mx راموازی باAC رسم‌می‌کنیم. ثابت‌کنید که زاویهٔ AMx سه برابرزاویهٔ CMx است.

۱۰۷/۷ـ ترجمهٔ ازفرانسه

مثلثABC داده شده‌است. نقطهٔM راداخل مثلث‌انتخاب وازآن به‌سه رأس وصل می‌کنیم. CM را ازطرف M به اندازهٔ ME دو برابر CM امتداد می‌دهیم. دو متوازی‌الاضلاع MADB و MDPE را می‌سازیم که نقطهٔ تلاقی دوقطرآنها به‌ترتیب C′ و F است. ثابت کنید که چهار ضلعی CC′FM متوازی‌الاضلاع است.

برای دانش‌آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

۱۰۷/۸ـ فرستنده: **جواد فیض**

ازمعادلهٔ زیرمقدار x رابدست آورید:

$$\frac{1}{2-\log x}-\frac{1}{3-\log x}=\frac{1}{4}$$

۱۰۷/۹ـ فرستنده: **علی رحیم نوری** دانشجوی‌ریاضی مدرسهٔ عالی‌علوم اراك

مثلث ABC چنان است‌که اگر AH ارتفاع وارد بر BC باشد H برپاره خط BC واقع است و $AH=3BH$ و $AH=2CH$ می‌باشد. ثابت‌کنید که زاویهٔ A به اندازهٔ ۴۵ درجه است.

برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

۱۰۷/۱۰ـ فرستنده: **جواد فیض**

بین عددهای مثبت a و b و c چه رابطه برقرار باشد تا در ازای هرمقدار از x داشته باشیم:

$$(a-c)x^2+2(b-c)^2x+(a-c)^3>0$$

۱۰۷/۱۱ـ ترجمهٔ **مهندس فتح‌الله زرگری**

دستگاه دومعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2}\\ x+xy+y=9\end{cases}$$

۱۰۷/۱۲ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

سه عدد به ترتیب جمله‌های اول ، پنجم ونهم یك تصاعد هندسی‌اند. اگر به‌عدد دوم ۸ واحد بیفزائیم دراین صورت سه‌عدد به ترتیب جمله‌های چهارم، دهم و شانزدهم یك تصاعد حسابی خواهند شد. سپس اگر به‌عدد سوم ۶۴ واحد بیفزائیم سه عدد به‌ترتیب جمله‌های دوم، چهارم وششم یك تصاعد هندسی خواهند بود. سه‌عدد راپیدا کنید.

۱۰۷/۱۳ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

هرگاه a_n جملهٔ nام ازیك تصاعد هندسی باشد که جملهٔ اول وهمچنین قدرنسبت آن مثبت‌است و b_n جملهٔ nام ازیك‌تصاعد حسابی باشد که قدر نسبت‌آن نیز مثبت است، عدد x را بیابید بقسمی که $\log_x a_n - b_n$ به n بستگی نداشته باشد.

۱۰۷/۱۴ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

در ذوزنقهٔ ABCD طولهای دو قاعده $BC=a$ و $AD=c$، طولهای دوساق $CD=b$ و $AB=d$ وطولهای دوقطر $AC=p$ و $BD=q$ می‌باشد. ثابت کنید که:

$$\frac{p^2-q^2}{b^2-d^2}=\frac{a+c}{a-c}$$

۱۰۷/۱۵ـ ترجمهٔ **جعفر آقایانی چاوشی**

مربع ABCD به ضلع a داده شده است . خط Δ را متقاطع بامربع رسم می کنیم وعمودهای AA'، BB'، DD' را بر آن فرود می‌آوریم. هرگاه داشته باشیم:

$$AA'\cdot CC'=BB'\cdot DD'$$

فاصلهٔ O مرکز مربع ازخط Δ رابرحسب a بدست‌آورید.

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۰۷/۱۶ـ سه نقطهٔ $A(0,1)$ و $B(-1,-1)$ و $C(1,-1)$ درصفحهٔ محورهای مختصات داده شده است.

۱) تابع $y=ax^2+bx+c$ رامشخص کنیدبنابر آنکه منحنی نمایش هندسی‌آن برسه نقطهٔ A و B و C بگذرد.

۲) در B و C مماسهایی برمنحنی مزبور رسم می کنیم که یکدیگر را درP قطع می کند. مساحت چهارضلعی PBAC را حساب کنید.

۱۰۷/۱۷ـ فرستنده: **جواد فیض**

هرگاه داشته باشیم:

$$0<\gamma<\alpha<\beta<\delta<2\pi$$
$$\alpha+\beta=\gamma+\delta<2\pi$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma+\sin\delta$$

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۱۰۷/۱۸ـ منحنیهای C و C' به‌معادله‌های زیر را در نظر می گیریم:

$$(C):y=x^2+px \qquad (C'):y=\frac{x}{1-x}$$

۱) به‌ازای چه مقادیر p این دو منحنی علاوه بر مبدأ مختصات در دونقطهٔ دیگر A وB یکدیگررا تلاقی می کنند.

۲) به‌فرض آنکه دو منحنی غیراز مبدأ در A و B نیز متقاطع باشند:

الف ـ معادلهٔ مکان هندسی P وسط AB را بدست آورید.

ب ـ مقدار p را بیابید که طول AB کمترین مقدار ممکن باشد.

۳) به‌ازای $p=+1$ دومنحنی را دریك شکل رسم کنید

ومعلوم کنید که در مبدأ مختصات نسبت به‌هم چه وضعی‌دارند.

۱۰۷/۱۹ـ فرستنده: **کاظم حافظ قرآن**

هرگاه داشته باشیم:

$$k^2 \sin^2 2x + 2\sin(x+y)\sin(x-y)\cos 2y = \sin^2(x+y) + \sin^2(x-y)$$

مقدار $\frac{tg(x+y)}{tg(x-y)}$ رابرحسب k بدست آورید.

۱۰۷/۲۰ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

حجم مخروط دواری m برابر حجم کرهٔ محاط درآن است. تانژانت زاویهٔ مولد این مخروط باصفحهٔ قاعدهٔ آن را برحسب m حساب کنید. حالت خاص: $m=2$

۱۰۷/۲۱ـ ترجمهٔ ازفرانسه

سطح جانبی مخروط ناقص دواری پس‌از گسترش در یك صفحه برابر شده است بااختلاف سطحهای دوقطاع دایره‌ای به شعاعهای a و b (بشرط $a>b$) وبه زاویهٔ مرکزی θ درجه. ارتفاع وشعاعهای قاعده‌های مخروط ناقص را برحسب a و b و θ حساب کنید.

حالت خاص: $a=37$ ، $b=1$ ، $\theta=288^\circ$

۱۰۷/۲۲ـ ترجمهٔ از فرانسه

ناظری که به‌ارتفاع h از سطح کرهٔ زمین قرار دارد چه مساحتی ازسطح کرهٔ زمین‌را می‌بیند؟

حالت خاص: $h=5^{km}$

برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۱۰۷/۲۳ـ سهمی به‌معادلهٔ $y^2-4x+4=0$ داده شده است. براین‌سهمی نقطهٔ P به‌عرض ۲ را درنظر می‌گیریم.

۱) خط Δ از P می‌گذرد وضریب زاویه‌ای‌آن $\frac{3}{4}$ است. معادلهٔ خط Δ ومختصات نقطهٔ تلاقی دیگرآن با سهمی را بدست آورید.

۲) خط Δ محور Oy را در Q قطع می‌کند. مختصات Q ومختصات C وسط PQ وطول CQ راحساب کنید.

۳) معادلهٔ دایرهٔ به‌قطر PQ رابنویسید و مختصات نقاط تلاقی‌آن را باسهمی حساب کنید.

۱۰۷/۲۴ـ منحنی نمایش هندسی تابع زیررا در فاصلهٔ $(0,2\pi)$ رسم کنید ومساحت سطح محصور بین‌منحنی ومحور Ox راکه بالای Ox واقع است بدست‌آورید.

$$y=\sin x(1+\cos x)$$

برای دانش‌آموزان کلاس ششم ریاضی

۱۰۷/۲۵ـ تابع زیرداده شده است:

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}$$

۱) جهت تغییرات تابع را معین کنید.

۲) جهت تقعر منحنی نمایش تابع را معلوم کنید و اگر نقطهٔ عطف دارد مختصات‌آن را تا ۰/۱ تقریب بدست‌آورید.

۳) منحنی نمایش هندسی تابع را رسم کنید.

۴) سطح محصور بین منحنی و Ox و دوخط $x=0$ و $x=k$ رابه شرط $0<k<1$ پیداکنید وحد این‌سطح راوقتی $k\to 1$ بدست‌آورید.

۱۰۷/۲۶ـ دوتابع زیر داده شده است:

$$y=\sin x \quad \text{و} \quad y=a\sin\frac{x}{2}$$

۱) درفاصلهٔ $(0,\pi)$ دو منحنی غیر از مبدأ مختصات در یك نقطهٔ A متقاطعند. مختصات‌نقطهٔ A را برحسب a حساب کنید.

۲) مساحت سطح محصور بین دومنحنی را درفاصلهٔ از O تا A با S_1 ودرفاصلهٔ از A تاخط $x=\pi$ با S_2 نشان می‌دهیم. مقدار a را حساب کنید برای آنکه $S_1=S_2$ باشد.

۳) به‌ازای $a=1$ دومنحنی‌را دریك شکل رسم کنید.

۱۰۷/۲۷ـ فرستنده: **کاظم حافظ قرآن**

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\frac{tg x+\cot g x}{\sin x+\cos x}=\sqrt{2}$$

۱۰۷/۲۸ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

چهارضلعی ABCD به محیط $2p$ در یك دایره محاط و بردایرهٔ بمرکز M محیط است. ثابت کنید:

$$1)\quad \frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MC^2}=\frac{1}{MB^2}+\frac{1}{MD^2}$$

$$2)\quad p=\sqrt{MA^2+MC^2}+\sqrt{MB^2+MD^2}$$

۱۰۷/۲۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

عددهای طبیعی x و y و z را پیدا کنید برای آنکه داشته باشیم:

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{11}+\frac{z}{13}=0/946053946053000$$

۱۰۷/۳۰ـ ترجمهٔ از فرانسه

دوعدد طبیعی a و b داده شده‌است. عدد طبیعی x راپیدا کنید برای آنکه کسر $\frac{x+a}{x+b}$ مجذور کامل باشد.

۱۰۷/۳۱ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دو دایرهٔ C و C′ درنقطهٔ A مماس خارجی‌اند. ازنقطهٔ دلخواه M واقع برمماس مشترك داخلی دودایره مماسهای MT و MT′ رابر دو دایره رسم می‌کنیم کـه برمماس مشترك آنهـا منطبق نباشند. هرگاه M برمماس مشترك داخلی دودایره تغییر مکان دهد، ثابت کنید که خط TT′ برنقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۱۰۷/۳۲ـ سطـح مخـروطی دوار Σ به زاویـهٔ رأس $\theta\neq 90^\circ$ مفروض است. صفحهٔ P باΣ درمنحنیΓ متقاطع است. نقطهٔ M رابر Γ در نظر می‌گیریم. قائـم بر Σ در M درنقطهٔ دیگرNباΣ برخورد می‌کند. وقتی M منحنیΓ را بپیمایدمکان N چیست؟

تستهای ریاضی

در حدود برنامهٔ سال اول نظری

۱۰۷/۳۳ـ کدام‌یك از گزاره‌هـای زیر نقیض گزارهٔ «هوا آفتابی‌است» می‌باشد:

الف‌ـ هوا ابری‌است. ب‌ـ هوا تاریك‌است.

ج‌ـ هوا ناآفتابی است. د‌ـ هوا مهتابی است.

۱۰۷/۳۴ـ A مجموعهٔ‌همه عضوهایی است که خاصیت P را دارند. Q مجموعهٔ همهٔ عضوهایی است که خاصیت Q رادارند. هرگاه داشته باشیم: «$P\Longrightarrow Q$» دراین صورت:

الف‌ـ A زیرمجموعهٔ B است.

ب‌ـ B زیرمجموعهٔ A است.

ج‌ـ A وB دومجموعهٔ جدا ازهم می‌باشند.

د‌ـ A وB متمم یکدیگرند

۱۰۷/۳۵ـ به‌فرض $x=\frac{a-b}{a+b}$ که a وb دوعدد مثبت باشند مقدار $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ برابر است با:

الف‌ـ $\frac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ب‌ـ $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ج‌ـ $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$ د‌ـ $\frac{a-b}{\sqrt{ab}}$

۱۰۷/۳۶ـ حاصل عبارت زیر کدام است :

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

الف‌ـ ۲۰ ب‌ـ $12\sqrt{3}$

ج‌ـ $6\sqrt{3}$ د‌ـ ۱۰

۱۰۷/۳۷ـ زاویهٔ قائمهٔ xOy و نقطهٔ M واقع درداخل آن داده شده‌است. ازM دوخط عمود برهم رسم می‌کنیم که یکی ازآنها با Ox درA ودیگری با Oy درB برخـورد می‌کند. هرگاه P وسط AB باشد، کدام یك از گزاره‌های زیر غلط

است:

الف- عمود منصف OM از P می‌گذرد.

ب- عمود منصف OM از P نمی‌گذرد.

ج- PM بانصف AB برابراست.

د- مثلث OPB متساوی‌الساقین است.

۱۰۷/۳۸- در مربع ABCD برضلع BC نقطهٔ K راچنان انتخاب می‌کنیم که اندازهٔ زاویهٔ KAB برابر ۳۰ درجه باشد. اگر M وسط BC باشد؛

الف- K و M برهم منطبقند

ب- K بین B و M واقع است.

ج- M بین B و K واقع‌است.

د- M بین C و K واقع‌است.

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۱۰۷/۳۹- هرگاه داشته باشیم:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=3\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{1}{2}$$

خواهیم داشت:

الف- $4a=9b$ ب- $2a+3b=0$

ج- $a=4b$ د- $a=2b$

۱۰۷/۴۰- معادلهٔ زیرچه موقع ریشهٔ حقیقی‌دارد:

$$x^6-px^3+p-1=0$$

الف- هرچه باشد مقدار p

ب- هیچگاه

ج- به‌ازای $p>1$

د- به‌ازای $p>0$

۱۰۷/۴۱- برای آنکه $\log(y-x)<0$ درست باشد لازم وکافی است که:

الف- $y<x+1$ ب- $y>x$

ج- $y<x-1$ د- $x<y<x+1$

۱۰۷/۴۲- هرگاه ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^2+px+q=0$$

جمله‌های اول وآخریك تصاعد هندسی‌باشند که تعداد جمله‌هایش $2n+1$ است، جملهٔ $(n+1)$ام این‌تصاعد برابر است‌با:

الف- q ب- $\sqrt{q}$ ج- q^2 د- $-p$

۱۰۷/۴۳- در مثلث ABC ارتفاع AH ومیانهٔ AM رارسم می‌کنیم. هرگاه $|AB^2-AC^2|=6BC$ دراین‌صورت AM^2-AH^2 برابر است‌با:

الف- ۹ ب- ۳ ج- ۶ د- ۳۶

۱۰۷/۴۴- دونقطهٔ A و B بردایره‌ای واقعند به‌قسمی که اندازهٔ کمان AB برابربا ۶۰ درجه‌است. هرگاه مساحت قطعهٔ محصور بین کمان AB ووتر AB برابرباشد با $(4\pi-3\sqrt{3})$ دراین‌صورت شعاع دایره برابر است‌با:

الف- ۱۲ ب- $2\sqrt{3}$ ج- $\sqrt{3}$ د- ۶

در حدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۰۷/۴۵- منحنی نمایش هندسی تابع:

$$y=x^2+px+q$$

محور $x'x$ رادر A و B قطع می‌کند. هرگاه $AB=2$ باشد مقدار p برحسب q برابر است‌با:

الف- $\pm2\sqrt{q-1}$ ب- $\pm\sqrt{4q+2}$

ج- $\pm2\sqrt{q+1}$ د- $\pm\sqrt{4q-2}$

۱۰۷/۴۶- منحنیهای:

$$(C): y=x^2+2x \text{ و } (C'): y=\frac{x}{1-x}$$

وخط Δ به معادلهٔ $x=k>0$ را در یك شکل رسم می‌کنیم. مماس برمنحنی C درمبدأ مختصات باΔ در A و مماس برمنحنی C' درمبدأ مختصات با Δ در B برخورد می‌کند. هرگاه H نقطهٔ برخورد Δ با $x'x$ باشد:

الف- B وسط AH است.

ب- $AH>2BH$

ج- $AH<2BH$

د- A وسط BH است.

۱۰۷/۴۷ـ درچه نوع مثلثی‌داریم:

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$$

الف‌ـ متساوی‌الساقین

ب‌ـ متساوی‌الاضلاع

ج‌ـ قائم‌الزاویه

د‌ـ قائم‌الزاویه یا متساوی‌الساقین

۱۰۷/۴۸ـ عبارت زیر برابر باکدام است؟

$$\log \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{\sin(x+y)-\sin(x-y)}$$

الف‌ـ $\log tg x - \log tg y$

ب‌ـ $\log tg x + \log tg y$

ج‌ـ $\log(tg x + tg y)$

د‌ـ $\log(tg x - tg y)$

۱۰۷/۴۹ـ سطح کل مخروط دواری مقدار πa^2 است. هرگاه حجم این مخروط دوار ماکسیمم باشد، طول مولد آن برابر است‌با:

الف‌ـ $\frac{3a}{2}$ ب‌ـ $\frac{a}{2}$ ج‌ـ $\frac{2a}{3}$ د‌ـ $2a$

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۷/۵۰ـ منحنیهای به معادله‌های زیر در چند نقطه متقاطعند.

$$y^2 = x \text{ و } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

الف‌ـ چهار نقطه ب‌ـ دونقطه

ج‌ـ یك‌نقطه د‌ـ هیچ نقطه

۱۰۷/۵۱ـ برای تابع $y = \log \sin x$ کدام یك‌ازحکم های زیرغلط است:

الف‌ـ تابع متناوب است.

ب‌ـ تابع درازای $0 \leqslant x \leqslant \pi$ معین‌است.

ج‌ـ تابع درازای $x = \frac{\pi}{2}$ ماکسیمم است.

د‌ـ منحنی نمایش تابع زیر $x'x$ واقع است.

۱۰۷/۵۲ـ زاویهٔ A ازمثلثی چگونه‌باشد تا:

$$m_a < \frac{a\cos B + b\cos A}{2}$$

الف‌ـ حاده ب‌ـ کوچکتراز $60°$

ج‌ـ حاده وبزرگتراز $60°$ د‌ـ منفرجه

۱۰۷/۵۳ـ زاویهٔ xOy به‌اندازهٔ ۶۰درجه مفروض‌است. ازنقطهٔ A واقع درداخل زاویه‌عمود AB رابر Ox وعمود AC رابر Oy رسم می‌کنیم. به‌فرض $OA = a$ زاویهٔ $x = AOx$ چه اندازه باشد تا $y = OB + OC$ ماکسیمم باشد.

الف‌ـ $45°$ ب‌ـ $30°$

ج‌ـ $15°$ د‌ـ $22/5°$

۱۰۷/۵۴ـ کسر تحویل ناپذیر $\frac{a}{b}$ مولدکسر اعشاری متناوب ساده‌ای است که دورهٔ تناوب آن۶ رقمی‌است. کوچکترین عدد n بـه قسمی که عـدد $(10^n - 1)$ مضرب b باشد برابر است با:

الف‌ـ ۶ ب‌ـ ۵ ج‌ـ ۷ د‌ـ ۴

۱۰۷/۵۵ـ برای‌آنکه مقدارتقریبی $\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}$ رابا تقریب ۰/۰۰۱ حساب کنیم، کافی‌است تا $\frac{1}{3}$ راباچه‌تقریب حساب کنیم:

الف‌ـ ۰/۰۰۱ ب‌ـ ۰/۰۰۰۱

ج‌ـ ۰/۰۰۰۰۰۱ د‌ـ ۰/۰۰۰۳

۱۰۷/۵۶ـ دایرهٔ C و منحنی γ در نقطـهٔ M قائم بر یکدیگرند. بر دایرهٔ C نقطهٔ P غیر واقـع برM را درنظـر می‌گیریم. درانعکاس به‌قطب P دایرهٔ C به‌خط Δ ومنحنی γ به منحنی γ' ونقطهٔ M به نقطـهٔ M' تبدیل می‌شود. خطی‌که در M' بر γ' مماس باشد:

الف‌ـ برΔ منطبق است.

ب‌ـ باΔ موازی است.

ج‌ـ باΔ زاویهٔ حاده می‌سازد

د‌ـ برΔ عمود است.

مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث دوم ، سال تحصیلی ۵۲-۱۳۵۳ (اسفند ۱۳۵۲)

کلاس ششم طبیعی

جبر و مثلثات

دبیرستان شهریارقلهك

دبیر: قمیصی- فرستنده : احمد فاخری

* معادلهٔ هذلولی را بنویسید که فاصلهٔ کانونی آن $4\sqrt{2}$ بوده ویکی از مجانبهای آن نیمساز ربع اول و سوم بوده ومرکز آن روی خط $y=2x-1$ باشد(عرض یکی از رئوس آن بزرگتر ازیك است).

* پارامتر a راچنان معین کنید که مماس برمنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{a}{\cos x-0/5}$ درنقطه‌ای بـه طول $\frac{11\pi}{6}$ از آن برخط به معادلهٔ $(2-\sqrt{3})(x+1)-y=0$ عمود باشد .

* در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ اگر $\overline{BC}^2=(2-\sqrt{3})\overline{AC}^2$ باشد انـدازهٔ زاویـهٔ A را بدست آورید.

* اولا سهمی‌به معادلهٔ $x^2-4x+4\sqrt{2}y-4=0$ رارسم کرده ومعادلهٔ خط هادی‌آن رابنویسید.

ثانیاً اندازهٔ مساحت سطح بین‌این سهمی ومحور x ها را بدست آورید.

ثالثاً اندازهٔ حجم حاصل ازدوران سطح محصور بین خط به معادلهٔ $y=(2-\sqrt{3})(x+1)$ و محورهـای مختصات را حول محور xها بدست‌آورید.

کلاس ششم ریاضی

جبر

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر: قمیصی

* مطلوبست محاسبهٔ حد زیر بدون استفاده‌ازروش‌هوپیتال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1+\cos x-2\cos^2 x}$$

* منحنی‌های C_1 به معادلهٔ $y=ax\sqrt{x^2+1}$ و C_2 به معادلهٔ $y=\frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$ مفروضند:

اولا: خط $x=k\neq 0$ این دومنحنی‌را درنقاط M و N قطع می‌کند (طول وعرض هریك ازدو نقطه M وNهمعلامتند) اگرمثلث OMN (O مبدأ مختصات است) در رأسOشبه قائمه بوده (تفاضل دوزاویهٔ M وN ۹۰ درجه است) وC_1وC_2 درمبدأ مختصات برهم مماس‌باشند a وb راپیداکنید.

ثانیاً: مطلوبست تعیین جدول و رسم منحنی نمایش تابع

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

ثالثاً: مطلوبست محاسبهٔ اندازهٔ سطح محصور بین منحنی فوق ومجانب آن ومحور yها وخط $x=\alpha$ $(\alpha>0)$ آن قسمت که در ربع اول واقعست. آیا اندازهٔ این سطح وقتی $\alpha\to\infty$ دارای حداست یا خیر.

* اولا نقطه‌ای روی منحنی (C) به معادلهٔ $y=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ چنان تعیین کنید که خط مماس برمنحنی در آن نقطه باخط مجانب مایل منحنی (C) زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{3\pi}{4}$ بسازد.

ثانیاً: معین کنید که وقتی $x\to\infty$ منحنی (C) بالای مجانب مایل خود قرار می گیرد یا بین آن.

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر: مظاهری ـ فرستنده: لطف‌الله معینی

درتابع $y=\frac{x+a}{1-x^2}$ مقدار a راچنان پیدا کنید که مجموع ماکزیمم ومی‌نیمم تابع برابر ۲+ شود. اگر خط D به معادلهٔ $y=m$ منحنی را در دونقطهٔ M_2 و M_1 قطع کند و A نقطه‌ای به طول h روی خط D باشد مکان هندسی مزدوج توافقی A را نسبت به M_1 و M_2 وقتی D به موازات خود حرکت نماید پیدا کنید.

به ازاء چه مقدار h این مکان به یك خط راست تبدیل می‌شود.

دبیرستان فارابی کرج

دبیر: سوداگری ـ فرستنده: مجید مصباح

تابع $y=\frac{3x}{x^2+2}$ مفروض است:

اولا: اگر خط $y=k$ منحنی این تابع را درسه نقطه به طولهای α و β و γ قطع نماید مقدار k را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{4}{\gamma}=0$$

ثانیاً: برحسب مقادیر مختلف k در وجود وعلامت طولهای نقاط تلاقی بحث کنید ودر حالاتی که خط $y=k$ برمنحنی مماس است مختصات نقاط تماس را بیابید.

ثالثاً ـ بدون رسم منحنی تابع فوق حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی ومحور طولها ودوخط $x=0$ و $x=1$ راحول محور xها بدست آورید.

مثلثات

گروه فرهنگی بابکان

* دستگاه دومعادله دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\sin(x+y)+\sin x+\sin y=\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ \cos(x+y)+\cos x+\cos y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

* درمثلثی رابطهٔ $(d_a)^2+(d'_a)^2=k^2a^2$ که درآن $k>0$ است برقرار می‌باشد. معادلهٔ درجهٔ دومی برحسب $tg\frac{B-C}{2}$ بدست آورید وحدود k راچنان مشخص کنید که مسئله دارای جواب باشد.

* درمثلثی رابطهٔ زیر برقرار است. نوع مثلث را مشخص کنید:

$$tg B=\frac{\cos(B-C)}{\sin A-\sin(B-C)}$$

دبیرستان پهلوی بهبهان

دبیر: پرورشی ـ فرستنده: غلامحسین رنجبر

* ارتفاع نظیر ضلع a درمثلث ABC برابر مجموع دو ارتفاع دیگر مثلث است:

۱ـ ثابت نمائید:

$$\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$$

۲ـ درصورتی که زاویهٔ A معلوم باشد دوزاویهٔ B و C را محاسبه نمایید. (بحث).

۳ـ به فرض $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$ تحقیق نمایید که مثلث متساوی‌الساقین است.

* ثابت نمایید که درمثلث ABC اگریکی از دو رابطهٔ $\angle A=\angle 2B$ و $a^2=b(b+c)$ برقرار باشد دیگری نیز برقراراست.

دبیرستان شیخ بهایی

دبیر: مظاهری ـ فرستنده : لطف‌الله معینی

* منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{\cos 2x}{\cos x+1}$ رابین‌صفر و 2π رسم کنید.

* درمثلثی $\angle A-\angle C=90^\circ$.

اولا: ثابت کنید:

$$d_b=d'_b=\sqrt{2}h_b$$

$$\frac{\cos\frac{B}{2}}{d_b}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{d'_b}=\frac{1}{c}$$

ثانیاً: درصورتی که $\frac{a+c}{b}=\sqrt{2}$ باشد زوایای مثلث‌را حساب کنید.

ثالثاً: اگررابطهٔ $k\cos^2 B-(k-1)\cos B-2k=0$ دراین‌مثلث برقرار باشد به‌ازاء چه مقدار k معادله دارای‌جواب است.

حساب استدلالی

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر: قمیصی

* اولا یکان عددی درمبنای ۱۰ برابر ۶ است. مطلوبست تعیین آن عدد درصورتی که نمایش آن در مبنای ۱۲ به‌صورت $\overline{(3m)cd}$ و درمبنای ۲۱ به‌صورت $\overline{m1d}$ است.

ثانیاً: هریك ازاعداد ۰/۰۳ و ۱۵۷۲ راکه درمبنای ۱۰ نوشته شده‌اند درمبنای ۱۲ نوشته‌ودرهمان مبنای ۱۲ حاصل‌ضرب آن دورا بدست‌آورید.

* ثابت کنید که خارج قسمت تقسیم $a-1$ بر b مساوی خارج قسمت تقسیم $ab^{n-1}-1$ بر b^n است. (a و b و n اعداد طبیعی بزرگتراز واحد هستند).

* عددهای صحیح a را بافرض $200<a<300$ طوری معین کنید که معادلهٔ $ax^2+x-6=0$ دارای دو ریشهٔ منطبق باشد.

* کسر $\frac{a^3-a}{20a^2+2}$ مفروض است.

اولا: تعیین کنید که به‌ازاء مقادیرمختلف عددطبیعی $a>1$ کسرمفروض مولد چه‌نوع عدد اعشاری است.

ثانیاً: a راچنان معین کنید که جذرتقریبی نقصانی a^3-a باتقریب کمتر ازیك واحد برابر $2a$ باشد.

دبیرستان فارابی کرج

دبیر: اعتمادی ـ فرستنده : مجید مصباح

* دریك تقسیم باقی‌مانده ۱۷ است. اگریك صفر بین رقم یکان ودهگان مقسوم قرار دهیم وتقسیم را مجدداً انجام دهیم خارج‌قسمت‌جدید ازخارج قسمت قبلی ۱۶۹ واحد بیشترمی گردد. عوامل تقسیم را پیدا کنید.

* عدد اعشاری که دارای دورقم اعشار باشد بدست آورید بطوری که بدانیم جذر تقریبی نقصانی این عدد تا ۰/۰۱ تقریب باخودش برابر باشد.

هندسهٔ ترسیمی ورقومی

دبیرستان‌های انوشیروان دادگر

بهمن قلهك ـ پیشاهنگ ـ پیمان ـ کارون ـ مدائن

نقشجهان ـ ورجاوند (آریا)

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محور اقصر کاغذ افقی و محور اطول راقائم اختیارکرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز کاغذ بنامید.

۱ـ نقطهٔ b_9 رابه فاصلهٔ ۳ زیرمرکز کاغذ روی محور

اطول انتخاب کرده ازاین نقطه‌خط b_9a_6 را به شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی رسم کنید که نقطهٔ a روی محور اقصر سمت چپ مرکز کاغذ قرار گیرد.

۲- برخط a_6b_9 صفحهٔ P راکه با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ $\alpha=45$ درجه می‌سازد بقسمی مرور دهید که جهت ترقی رقوم بزرگترین شیب آن از بالا بسمت پائین باشد و یك مقیاس شیب صفحه را سمت چپ کاغذ رسم نمائید.

۳- از نقطهٔ b_9 در صفحهٔ P خط b_9c_7 را بقسمی مرور دهید که باصفحه افق تصویر زاویهٔ $\alpha=30$ درجه بسازد و c_7 سمت راست b_9 قرار گیرد.

۴- بر سه نقطه A وB وC متوازی الاضلاع ABCD راکه AC قطرش باشد رسم نموده ملخص متوازی الاضلاع را نشان داده و وسعت حقیقی آن را با تسطیح آن حول افقیهٔ ۹ در سمت پائین کاغذ مشخص نمائید.

۵- بر روی متوازی الاضلاع ABCD متوازی السطوح ABCDEFGH راکه یال جانبی BF بر BA در فضاعمود بوده و bf در تصویر در فاصله‌یك‌سمت راست مرکز کاغذمحور اقصر را قطع نموده و امتداد دارد و رقوم F برابر ۱۲ می‌باشد رسم و ملخص متوازی السطوح را مرئی و مخفی نمایید.

۶- مقطع متوازی السطوح فوقرا با صفحهٔ افقی رقوم۷ تعیین ومرئی ومخفی کرده اندازهٔ‌حقیقی زاویهٔ‌مسطحه فرجه‌صفحه P وصفحهٔ ABFE را مشخص نمائید.

ب- هندسهٔ ترسیمی

۱- از نقطهٔ aa' خط $aba'b'$ را بقسمی رسم کنید که خط قائم vv' و خط نیمرخ مفروض $cdc'd'$ را قطع کند.

۲- بر یك خط افقی DD' و یك خط موازی نیمساز دوم $\Delta\Delta'$ که متقاطعند صفحه‌ای مرور داده آثارش $P\alpha Q'$ را رسم نمائید.

۳- فصل مشترك صفحهٔ غیرمشخص $P\alpha Q'$ را با صفحهٔ مار برخط الارض ونقطهٔ OO' به بعد ۳ و ارتفاع ۲ پیدا کنید.

۴- قرینهٔ نقطهٔ مفروض aa' واقع برخط‌الارض را نسبت به صفحه مواجه مفروض PQ' که بعد اثر افقی آن ۴ و ارتفاع اثر قائمش ۲می‌باشد بیابید.

۵- قطعه‌خط $bcb'c'$ داده‌شده است. قاعده مثلث‌متساوی الساقینی است که‌رأسش(A) روی خط‌قائم مفروض vv' می‌باشد تصاویر مثلث را رسم کنید.

گروه فرهنگی جاویدان

کلاسهای ششم ریاضی شبانه

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف- هندسهٔ رقومی

واحد سانتیمتر-مقیاس ۱:۱محورهای‌اقصرو اطول کاغذرا رسم کرده محل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید.

۱- نقطهٔ b_8 بفاصلهٔ ۳ زیر مرکز کاغذ برروی محور اطول قرار دارد. از این نقطه خط a_5b_8 را به شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی رسم کنید که نقطهٔ a_5 برروی‌محوراقصر و در سمت راست مرکز کاغذ واقع شود.

۲- برخط AB صفحهٔ P را به شیب $p=1$ بقسمی مرور دهید که جهت ترقی رقوم مقیاس‌شیب‌آن ازبالا بپائین‌باشد و ملخص خط بزرگترین شیب آن را در سمت چپ کاغذ رسم نمائید.

۳- برروی‌قطعه خط AB درصفحه P مربع ABCD راکه AC قطرآنست و c سمت چپ ab و رقومش از رقوم a کمتر است رسم نموده ملخص مربع را مشخص کنید . مساحت و وسعت حقیقی مربع را با تسطیح آن حول افقیه رقوم ۸ در سمت پائین کاغذ نشان دهید.

۴- مربع ABCD قاعده مکعب ABCDEFGH می‌باشد که قاعده فوقانی‌آن در بالای صفحهٔ P قرار دارد.ملخص مکعب را رسم و مرئی و مخفی کنید.

۵- مقطع مکعب فوق را با صفحه قائمی که اثرش‌بفاصله ۳ سمت راست محور اطول کاغذ موازی محور اطول رسم شده یافته و وسعت حقیقی آن را در سمت راست کاغذ نشان‌دهید.

ب- هندسهٔ ترسیمی

مسئلهٔ۱- برروی خط نیمرخ مفروض $aba'b'$ نقطه cc' را بقسمی تعیین کنید که مجموع بعد و ارتفاعش ۵ باشد.

مسئلهٔ۲- فصل مشترك صفحه مواجه PQ' را باصفحه نیمساز فرجه دوم رسم‌نمائید.

مسئلهٔ۳ـ بریك خط جبهی ویك خط نیمرخ که‌متقاطعند صفحه‌ای مرورداده آثارش $P\alpha Q'$ را رسم‌نمائید.

مسئلهٔ۴ـ از نقطه aa' خطی موازی صفحهٔ نیمساز دوم رسم‌کنید که با صفحهٔ $P\alpha Q'$ موازی باشد.

مسئلهٔ۵ـ از نقطهٔ مفروض aa' خطی رسم کنید که برخط مفروض DD' عمود بوده وخط منتصب مفروض $\Delta\Delta'$ را قطع کند.

دبیرستان دکتر حکیم الهی

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف‌ـ هندسهٔ رقومی

واحد سانتیمترـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم‌کنید ـ محل تلاقی آن ها را مرکز کاغذ اختیار کنید.

۱ـ نقطهٔ b_2 را به فاصلهٔ ۳ سمت چپ مرکز کاغذ روی محور اقصر انتخاب‌کرده خط b_2c_5 را به شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی رسم نمائیدکه c_5 برروی محور اقصر سمت راست‌مرکز کاغذ قرارگیرد و بر این خط صفحه P را به شیب $p=1$ بقسمی مرور دهیدکه افقیه رقوم ۲ صفحهٔ P محور اطول کاغذ را در بالای مرکز کاغذ قطع کند. یك مقیاس شیب صفحه P را سمت چپ کاغذ رسم نمائید.

۲ـ از نقطهٔ c_5 صفحهٔ Q را بر خط b_2c_5 عمودکرده و فصل مشترك دو صفحهٔ P و Q را رسم و برروی آن نقطهٔ d_2 را مشخص کنید.

۳ـ ملخص مستطیل $ABCD$ راکه AC قطر آنست‌رسم نموده و وسعت حقیقی آن را با تسطیح در سمت پائین کاغذ نشان دهید.

۴ـ ملخص هرم $SABCD$ را که قاعده‌اش مستطیل $ABCD$ و یال‌های جانبی $SA=SB=SC=SD$ بوده‌و s_{11} رأس آن باشد رسم و آن را مرئی و مخفی کنید.

۵ـ مقطع هرم مزبور را با صفحهٔ قائمی که اثرش برمحور اطول کاغذ منطبق است در جسم یافته وسعت حقیقی آن‌را درسمت چپ کاغذ نشان دهید.

ب‌ـ هندسهٔ ترسیمی

۱ـ دو خط قائم ویك خط منتصب‌بطور دلخواه رسم‌نموده خطی رسم‌کنیدکه با صفحهٔ نیمساز اول موازی بوده و هرسه‌خط مزبور را قطع کند.

۲ـ بریك نقطه واقع در صفحهٔ نیمساز دوم (aa') ویك خط غیرمشخص DD' صفحه‌ای مرور داده آثارش $P\alpha Q'$ را رسم نمائید.

۳ـ فصل مشترك صفحهٔ $P\alpha Q'$ راکه برنیمساز اول‌عمود است با صفحه مار برخط الارض و oo' به بعد ۳ و ارتفاع ۲ رسم نمائید.

۴ـ از نقطهٔ aa' به بعد ۳ و ارتفاع ۱ خطی بر صفحهٔ مار برخط‌الارض و oo' به بعد ۲ و ارتفاع ۳ عمودکرده پای عمود را بیابید.

۵ـ ازنقطهٔ aa'خطی رسم‌کنیدکه‌برخط مفروض DD' عمود بوده و باصفحهٔ قائم $R\beta S'$ موازی باشد.

دبیرستان‌های رازی، کوشش‌پسران و کوشش مریم

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف‌ـ هندسهٔ‌رقومی

واحد سانتیمتر مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم‌کرده محل تلاقی آن‌ها رامرکز کاغذ بنامید.

۱ـ نقطهٔ c_6 به‌فاصلهٔ ۳ سمت چپ‌مرکز کاغذ روی‌محور اقصر واقع است، خط c_6d_2راکه تصویرش برمحور اقصرمنطبق می‌باشدبقسمی‌رسم‌کنید که‌شیبش $p=\frac{1}{2}$ و نقطهٔ d سمت راست مرکز واقع گردد. نقطهٔ b را به فاصلهٔ $3\sqrt{3}$ درسمت بالای کاغذ روی محور اطول اختیار نموده و رقوم آن را بطریقی تعیین‌کنید که مثلث BCD در فضا درزاویهٔ C قائمه بوده وBD وترمثلث قائم‌الزاویه مزبور باشد.

۲ـ به فرض آنکه‌رقوم b برابر ۱۲ باشد ملخص‌مستطیل $ABCD$ راکهAC قطر آن‌است رسم‌نموده یك خط‌بزرگترین شیب آن در (P) در سمت چپ کاغذ نشان دهید.

۳ـ وسعت حقیقی مستطیل $ABCD$ را با تسطیح‌آن حول افقیهٔ رقوم ۶ صفحهٔ P در سمت پائین‌کاغذ نشان دهید.

۴ـ مستطیل $ABCD$ قاعدهٔ مکعب مستطیلی است‌که رأس G از یال CG در صفحه مقایسه واقع می‌باشد. ملخص

مکعب مستطیل ABCDEFGH را رسم کرده خطوط مرئی ومخفی را تمیز دهید.

۵- مقطع مکعب مستطیل‌فوق رابا صفحهٔ افقی‌رقوم ۵یافته مرئی‌ومخفی کنید. ازنقطهٔF صفحهٔQرابقسمی مرور دهید که‌فاصلهٔ C ازصفحهٔ Q دوبرابر فاصلهٔ هریك ازنقاط BوA ازآن صفحه باشد مقطع صفحهٔ Q رادر جسم نشان دهید.

ب- هندسهٔ ترسیمی:

۱- ازنقطهٔ 'aa به‌بعد ۶ وارتفاع ۵ خطی رسم کنید که خط نیمرخ 'cdc'd را درنقطهٔ 'bb قطع کند وباصفحهٔ نیمساز اول موازی باشد.

۲- نقطهٔ 'bb درصفحهٔ نیمساز اول وخط 'DD درصفحهٔ نیمساز دوم مفروضند. آثار صفحه‌ای که براین‌نقطه وخط می گذرد رسم نمائید.

۳- فصل مشترك صفحهٔ مواجه 'PQ را با صفحهٔ مار بر خط‌الارض و 'oo رسم کنید.

۴- ازنقطهٔ 'aa صفحه‌ای موازی صفحهٔ ماربرخط‌الارض و نقطه 'oo رسم‌نمائید.

۵- ازنقطهٔ 'aa خطی رسم کنید که برخط مفروض 'DD عمود بوده وباصفحهٔ افق تصویر زاویهٔ $\alpha = ۳۰$ درجه بسازد.

دبیرستان شیخ‌بهایی

دبیر: جلالی - فرستنده : لطف‌الله معینی

هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر ومقیاس ۱:۱. محور های اقصر و اطول کاغذ را رسم کنید.

۱- نقطهٔ $a_۴$ را روی محور اقصر به‌فاصلهٔ ۴ از مرکز و سمت چپ‌آن انتخاب کرده وخط $a_۴b_۱$ را به شیب ۰/۵ طوری رسم کنید که فاصلهٔ نقطهٔ $b_۱$ از محور اقصر وسمت راست a قرار گیرد.

۲- برخط $a_۴b_۱$ صفحهٔ P را به‌شیب۱ مرور دهیدبطوری که مقیاس شیب‌آن با محور اطول موازی باشد وآن را سمت چپ کاغذ رسم کنید.

۳- ملخص متوازی‌اضلاع ABCD واقع درصفحهٔ P را طوری رسم کنید که یك ضلع آن $a_۴b_۱$ بوده ونقطهٔ O مرکزآن به‌رقوم ۳بوده وطول حقیقی‌قطر AC ازآن ۱۰ باشد و c طرف راست b قرار گیرد.

۴- از نقطهٔ A صفحهٔ Q راعمود برخط $a_۴b_۱$ رسم کرده ومقیاس شیب‌آن را پائین‌کاغذ وسمت چپ رسم کنید دراین صفحه نقطهٔ $a_۶$ را سمت راست محور اطول وبفاصلهٔ ۱ ازآن انتخاب کرده ملخص هرم SABCD را رسم کنید.

۵- ازوسط یال SA صفحه‌ای به‌موازات صفحهٔ P رسم نموده مقطع‌آن راباهرم تعیین‌کرده وهرم ناقص‌حاصل‌رامرئی و مخفی نمائید.

۶- ازنقطهٔ S خطی برصفحهٔ P عمودکرده وملخص‌عمود مشترك‌آن را باافقیه رقوم ۴صفحهP رسم کنید.

هندسهٔ ترسیمی:

۱- نقطهٔ 'aa مفروض است قرینه‌آن رایك مرتبه نسبت به‌صفحه نیمساز اول وسوم ویك مرتبه نسبت به‌دوم وچهارم پیدا کنید.

۲- دوخط متقاطع 'DD و 'ΔΔ که اولی افقی و دومی موازی نیمساز فرجه دوم است مفروض‌اندآثار صفحه‌ایکه براین دوخطمی گذرد رسم کنید.

۳- دوصفحه 'PαQ و 'PαS که در نقطه α روی خط زمین‌آثارشان مشترك است مفروضند فصل مشترك آنهـا را پیدا کنید.

۴- صفحهٔ قائم 'PαQ که اثر افقیش با خط زمین زاویه ۴۵° می‌سازد مفروض‌است ازنقطه 'aa به‌بعد ۳ وارتفاع ۵واقع دراین صفحه خطی‌موازی نیمساز فرجه اول وسوم رسم کنید.

۵- خط 'bcb'c مفروض است 'bb به‌بعد ۲ و ارتفاع 'cc به‌بعد ۶ وارتفاع ۵ که فاصله دو راس ۳ و 'bb سمت چپ 'cc واقع است. برروی 'bcb'c ملخص مثلث متساوی‌الساقین ABC که AB=AC ورأس A به‌بعد ۱/۵ وارتفاع۲می‌باشد رسم کنید.

دبیرستان دخترانه مرجان

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف- هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم کنید. محل تلاقی آن‌ها رامرکز کاغذ بنامید.

۱- نقطهٔ a_4 رابه فاصلهٔ $2\sqrt{3}$ سمت‌چپ مرکز کاغذروی محور اقصر انتخاب کنید وازاین نقطه خط a_4b_7 رابقسمی رسم کنیدکه $\overline{AB}=3\sqrt{5}$ بوده‌وتصویرش ab درفاصلهٔ ۲ زیرمرکز کاغذ محور اطول راقطع کرده وادامه داشته و b زیرمحور اقصر وسمت راست محور اطول قرار گیرد. برخط a_4b_7 صفحهٔ P را به‌شیب $p=1$ مروردادہ و ازدوجواب آن‌راکه ترقی‌رقوم‌مقیاس شیبش ازبالا بپائین است انتخاب نموده یك مقیاس شیب آن را سمت چپ‌کاغذ رسم‌نمائید.

۲- ازنقطهٔ b_7 خط b_7c_3 را بقسمی مرور دهیدکه BC درفضابر BA عمود بوده و c_3 روی محور اقصرکاغذ قرار گیرد.

۳ اگر c_3 به فاصلهٔ ۵/۶ سمت راست مرکز کاغذ روی محور اقصر باشد ملخص‌مستطیل $ABCD$ راکه AC قطر آنست رسم نموده ویك خط بزرگترین شیب‌آن را بنام Q سمت راست کاغذرسم کرده‌و وسعت‌حقیقی‌مستطیل‌رادرسمت‌پائین‌کاغذنشان‌دهید.

۴- برروی مستطیل $ABCD$ متوازی‌السطوحی بسازید که $ABCD$ قاعده تحتانی‌آن بوده و $AE=10$ یال جانبی آن برصفحهٔ P عمودباشد ورقوم E از A بیشتر گردد. ملخص متوازی‌السطوح را رسم وآن رامرئی ومخفی نمائید.

۵- مقطع متوازی‌السطوح فوق را با صفحهٔ افقی رقوم ۶ تعیین ومرئی ومخفی کنید. واندازهٔ حقیقی زاویهٔ دوصفحهٔ PوQ رابا تسطیح بدست‌آورید.

ب- هندسهٔ ترسیمی:

درمسائل ترسیمی واحد و مقیاس اختیاری است. رسم یك جواب‌کافی است - اشکال را بدقت رسم‌کنید.

مسئلهٔ ۱- خط نیمرخ $aba'b'$ مفروض است. آثارش را تعیین‌کنید وبراین خط نیمرخ صفحهٔ $P\alpha Q'$ را بقسمی‌مرور دهیدکه زاویهٔ بین‌آثارش درتصویر 60° درجه باشد.

مسئلهٔ۲- αP اثرافقی صفحهٔ $P\alpha Q'$ مفروض‌است. اثر قائم این‌صفحه رابقسمی تعیین‌کنیدکه زاویهٔ صفحهٔ مزبور باافق تصویر ۶۰ درجه باشد.

مسئلهٔ ۳- فصل مشترك دوصفحهٔ $P\alpha Q'$ و $P_1\alpha Q_1'$ که در α مشترکند بیابید.

مسئلهٔ ۴- ازنقطهٔ مفروض aa' صفحه‌ای موازی صفحهٔ مواجهٔ PQ' رسم نمائید وآثارش را مشخص‌کنید.

مسئلهٔ ۵- ازنقطهٔ aa' خطی رسم‌کنیدکه برخط DD' عمود بوده ونقطهٔ A وسط‌آثارش باشد.

گروه فرهنگی هدف

دبیرستان هدف دختران

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف- هندسهٔ رقومی:

واحد سانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم‌کرده محل تلاقی‌آن‌ها را مرکز کاغذ بنامید.

۱- نقطه a_0 راکه تصویرش برمحور اطول‌کاغذ بفاصله۲ بالای مرکز واقع است انتخاب نموده خط a_0b_4 رابه شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی رسم‌کنیدکه امتداد تصویرش بامحور اقصر کاغذ زاویهٔ ۳۰درجه بسازد وآن رادر سمت چپ مرکز کاغذ قطع کند ترقی رقومش ازراست بچپ وازبالا بپائین باشد و b_4 زیرمحور اقصر قرارگیرد. براین خط صفحه P رابه شیب $p=1$ بقسمی مروردهیدکه ترقی‌رقومش ازبالابپائین باشد یك‌مقیاس شیب صفحه P راسمت چپ‌کاغذ رسم‌کنید.

۲- برروی قطعه‌خط AB مربع مستطیلی بسازیدکه‌رأس d_5 آن برروی محور اقصرواقع وملخص‌مربع مستطیل$ABCD$ راکامل‌کنید.

۳- یك خط بزرگترین شیب صفحهٔ مستطیل $ABCD$ را درسمت راست‌کاغذ نشان‌داده مساحت حقیقی مستطیل$ABCD$ رادر سمت پائین‌کاغذ نشان دهید.

۴- مستطیل $ABCD$ قاعده متوازی‌السطوحی است‌که یالهای جانبی‌آن افقی‌بطول ۹ وقاعدهٔ $EFGH$ درسمت بالای کاغذ تصویرمی‌شود ملخص متوازی‌السطوح رارسم وخطوط مرئی ومخفی‌را تمیز دهید بفرض آنکه تصویر یالهای جانبی بامحور اطول‌کاغذ موازی باشند.

۵- صفحهٔ Q راکه محور اقصر اثرش‌بوده وبرصفحهٔ P عمودمی‌باشد درسمت راست‌کاغذنشان داده مقطع آن را بامتوازی‌السطوح بدست‌آورده مرئی ومخفی نمائید.

ب- هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱- ازنقطهٔ مفروض aa' خطی رسم کنید که با صفحهٔ افق تصویر زاویهٔ $\alpha=30$ درجه‌بسازد وخط‌جبهی‌مفروض DD' را قطع کند.

مسئلهٔ ۲- خطی رسم‌کنیدکه‌دوخط قائم‌ویك‌خط منتصب

ویك‌خط نیمرخ مفروض راقطع نماید.

مسئلهٔ۳ـ برخط مفروض $aba'b'$ صفحه‌ای مانند $P\alpha Q'$ بقسمی مروردهید که باصفحهٔ قائم تصویرزاویهٔ ۶۰ درجه بسازد.

مسئلهٔ۴ـ فاصلهٔ حقیقی نقطه aa' رااز صفحهٔ غیرمشخص $P\alpha Q'$ تعیین کنید.

مسئلهٔ۵ـ قطعه‌خط $aba'b'$ مفروض‌است وضلع‌مستطیلی است که رأس dd' آن روی‌خط زمین می‌باشد تصاویرمستطیل‌را رسم‌نمائید.

فیزیك

دبیرستان شیخ بهایی

فرستنده : لطف‌الله معینی

بین دونقطهٔ A و B به ترتیب یك مقاومت R ویك بوبین به مقاومت ناچیز وبه ضریب خودالقاء L ویك‌خازن به ظرفیت C بطور متوالی قرارگرفته بین‌این دو نقطه اختلاف پتانسیل متناوبی به‌معادلهٔ $V=۸۰\sin ۱۰۰\pi t$ برقرار می‌کنیم ولت متر حرارتی اختلاف پتانسیل در دو سر مقاومت ودر دوسر بوبین را به‌ترتیب ۴۰و۶۰ ولت نشان می‌دهد.

اولا: اختلاف پتانسیل دردوسر خازن رابدست آورید.

ثانیاً: اگرشدت جریان مؤثر درمدار ۲ آمپرباشد مقاومت R وضریب خودالقاءL وظرفیت C را بدست‌آورید ومعادلهٔ شدت جریان درمدار را بنویسید ودراین‌حالت‌توان مصرف شده درمدار را محاسبه‌کنید.

ثالثاً: خازن دیگری بطور متوالی به‌اجزاء فوق درمدار اضافه می‌کنیم ظرفیت این‌خازن‌چقدرباشد تادرمدارتشدیدحاصل شود.

دبیرستان فارابی کرج

دبیر: وطنچی ـ فرستنده : مجید مصباح

صوت سوم لولهٔ صوتی بسته‌ای با صوت سوم تار مرتعشی ۳۳ ضربان درثانیه تولیدمی‌کند وفاصله موسیقی این‌دوصوت یك پرده بزرگ (صوت تار زیر می‌باشد) است اگر سرعت صوت درگاز داخل‌لوله ۳۲۰m/s وجرم هرمترتار ۲/۵ گرم‌باشد مطلوبست :

اولا: تواتر دوصوت ونام نت‌آنها.

ثانیاً: سرعت انتشار ارتعاشات عرضی‌درتارو نیروی کشش آن درصورتی که طول لوله ۳برابرطول‌تارباشد.($la_3=۴۴۰$)

توضیحات مربوط به تستها (از صفحهٔ ۲۷۷)

۴۸ـ عبارت x^2-4x+4 برابر است با $(x-2)^2$ و به ازای $x=2$ تغییر علامت نمی‌دهد. بنابراین عبارت x^2+m^2x-5 باید به ازای $x=2$ تغییرعلامت دهد یعنی این عبارت به ازای $x=2$ باید برابر باصفر باشد.

۵۱ـ دراین‌مثلث ارتفاع وارد بروتر یك چهارم وتراست پس زاویهٔ حاده مثلث برابر با 15° است.

۵۲ـ زاویهٔ BHC مکمل زاویهٔ A و در نتیجه اندازهٔ کمان BHC دوبرابر اندازهٔزاویهٔ A است.

۵۳ـ تابع داده شده نسبت به x از درجهٔ $n+1$ است پس مشتق آن نسبت به x ازدرجهٔ n است وعبارت مشتق‌حداکثر شامل $n+1$ جمله است.

۵۵ـ لازم وکافی است که خط درخارج منحنی واقع باشد یعنی باآن نقطهٔ مشترك نداشته باشد.

۵۶ـ کافی است مجموع و تفاضل دو تانژانت‌را به‌حاصل ضرب تبدیل‌کنیم.

۵۸ـ اگر طول وتر را a و طول ارتفاع وارد برآن را h بگیریم نتیجه خواهد شدکه $a=4h$ پس زاویهٔ حادهٔ مثلث 15° است.

۶۰ـ سطح محصوربین منحنی و محور $x'x$ وقتی‌صفر است که معادلهٔ منحنی به صورت $y=0$ باشد:

$$\sin x+|\sin x|=0 \Longrightarrow |\sin x|=-\sin x$$

رابطهٔ اخیر وقتی برقرار است که انتهای کمان x در بخشهای سوم یا چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد.

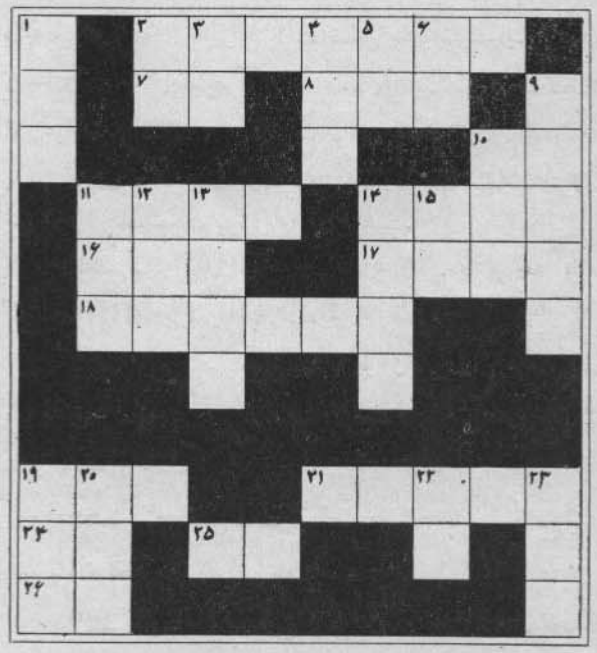
۶۲ـ عدد واقع در مخرج کسر باید زوج یا مضرب ۵ باشد.

۶۳ـ دایرهٔ مرسوم در B و C بر AB و AC مماس است.

۶۴ـ اگر قائم برسهمی در نقطهٔ B را رسم‌کنیم تامحور سهمی (که برارتفاع رأس A از مثلث منطبق است) رادرD قطع کند، کانون سهمی در وسط AD قرارخواهد داشت.

جدول اعداد

طرح از: منیژه نجفی (تاریخ وصول به دفتر مجله: ۱۳۵۰/۱۱/۱۶)

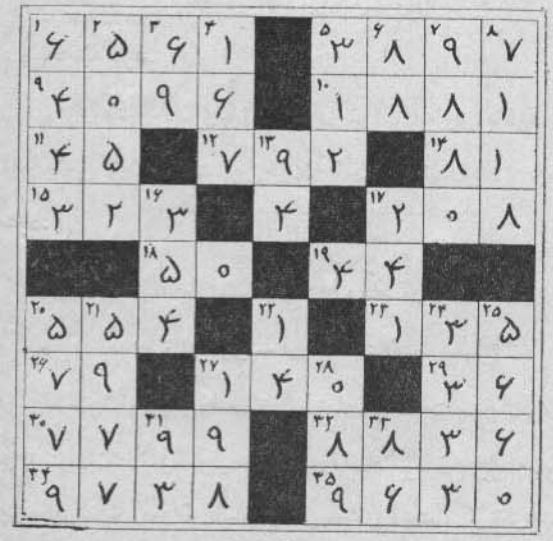


افقی: ۲ـ عدد به‌صورت $\overline{abcdefg}$ به‌قسمی که $\overline{abca}$ کوچکترین عدد چهار رقمی است که رقمهایش به تصاعد حسابی هستند و $\overline{efg}$ بزرگترین عدد سه‌رقمی است که رقمهایش به تصاعد هندسی می‌باشند. ۷ـ عدد دورقمی که ازمجذور تفاضل رقمهایش ۳ واحد بیشتر است. ۸ـ عدد $\overline{abc}$ به قسمی که این عدد و هریك از عددهای $\overline{cba}$ و $\overline{ab}$ و c مجذور کامل است. ۱۰ـ دوبرابر مجموع رقمهایش است. ۱۱ـ توان دهم است. ۱۴ـ به صورت $\overline{aabb}$ که مجموع رقمهایش ۱۲ و $\overline{aa}$ عدد اول است. ۱۶ـ جذرش ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که طول وترش ۲۵ است. ۱۷ـ ده برابر عددی که مجذور کامل است وجذر آن یك واحد کمتر از عدد ۱۰ افقی است. ۱۸ـ مقلوب عدد شش رقمی واقع در سمت راست عدد ۲ افقی. ۱۹ـ بزرگترین عدد سه رقمی که رقمهایش به‌تصاعد حسابی می‌باشند. ۲۱ـ کوچکترین عدد به صورت $\overline{abcba}$ که مجموع رقمهایش ۲۸ و $b=a+c$ است. ۲۴ـ مقلوب عدد ۲۶ افقی. ۲۵ـ توان چهارم است. ۲۶ـ مکعب جذر عدد ۲۵ افقی.

قائم: ۱ـ مقلوب عدد ۸ افقی. ۲ـ جذر عدد ۸ افقی. ۳ـ از مجذور تفاضل رقمهایش ۲۰ واحد کمتر است. ۴ـ به‌صورت $\overline{aba}$ که $\overline{baa}$ مجذور کامل است. ۵ـ شمارهٔ دهگان عدد ۱ قائم. ۶ـ همان عدد ۷ افقی. ۹ـ به‌صورت $\overline{abcde}$ به قسمی که:

$$\overline{abde}=\overline{edba}\times a \quad \text{و} \quad c=5e$$

۱۰ـ کوچکترین عدد سه رقمی که رقمهایش تصاعد حسابی با بزرگترین قدر نسبت ممکن را می‌سازند. ۱۱ـ به صورت $\overline{aba}$ به قسمی که $\overline{ab}+a$ توان چهارم است. ۱۲ـ از هفت برابر مجموع رقمهایش ۳ واحد بیشتر است. ۱۳ـ مقلوبش از عدد ۱ قائم فقط یك واحد بیشتر است. ۱۴ـ مساحت مربعی که قطرش $35\sqrt{2}$ است. ۱۵ـ همان عدد ۱۰ افقی. ۱۹ـ اگر با ۵۳ جمع شود عددی با رقمهای متساوی بدست آید و اگر با ۵۴ جمع شود عددی چهار رقمی حاصل شود. ۲۰ـ ۷۲ واحد کمتر از عدد ۱۹ قائم. ۲۲ـ مقلوب عدد ۱۰ افقی. ۲۳ـ مکعب رقم یکان خود می‌باشد.



حل جدول شمارهٔ گذشته

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 143— Restore the missing numerals in this multiplication:

```
      4 * *
        3 *
  ---------
    3 6 * *
  * * 7 *
  ---------
  * * 3 * *
```

Solution: indicate the missing digits by the letters: a,b,...,k

```
      4 a b
        3 c
  ---------
    3 6 d e
  f g 7 h
  ---------
  i j 3 k e
```

(i) $499 \cdot 39 = 19{,}461$ is the largest product obtainabte. Therefore $f = i = 1$.

(ii) Since $6+7$ sums to $13, d+h \leq 9 = k$.

(iii) From (i), there was nothing to carry in $3+g+1=j$. Hence $g \leq 5$.

(iv) From (iii), $3(400+10a+b) \leq (1570+h)$

(v) Since $499 \cdot 7 = 3493 < 36de$, $c = 8$ or 9.

(vi) If $c = 9$, $9(400+10a+b) = 3600+90a+$ $+9b \leq 3699$. Therefore $10a+b \leq 11$. But this is impossible because $3(10a+b)$ end in $70+h$. Hence $c=8$.

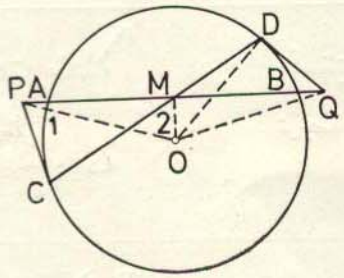
(vii) Therefore $8(400+10a+b) < 3699$ and $10a+b \leq 62$.

(viii) A few trials now yield the answer $457 \cdot 38 = 17{,}366$.

Problem 144— M is the mid point of chord $\overline{AB}$ of a circle. Any other chord $\overline{CD}$ is drawn through M so that the order of points is A,D, B,C. Tangents drawn at C and D meet AB in P and Q respectively.

Prove: $CP = QD$, and $PA = QB$.

Solution: Draw $\overline{OC}, \overline{OP}, \overline{OM}, \overline{OD}$, and $\overline{OQ}$, where O is the center of the circle. Therefore C,P,M,O are concyclic and $m\angle 1 = m\angle 2$.



Also M, O, Q,D are concyclic, and $m\angle OQD = m\angle 2$ (both are supplements of $\angle OMD$). Terefore $m\angle 1 = m\angle OQD$, $\Delta OCP \cong \Delta ODQ$, (SAA), and $CP = QD$, one of the required results.

Now $(PC)^2 = (PA)(PB)$, and $(QD)^2 = (QB) \times (QA)$. Therefore $PA \cdot PB = QB.QA$, or $PA(PA+AB) = QB(QB+AB)$. Thus $(PA)^2 + PA.AB = (QB)^2 + QB.AB$. Then $(PA)^2 - (QB)^2 + PA.AB - QB.AB = 0$, and $(PA+QB)(PA-QB) + AB(PA-QB) = 0$. The common factor is $PA-QB$; hence $(PA-QB)(PA+QB+AB) = 0$. Only the first factor can equal zero; Therefore $PA = QB$.

There are at least two other methods of reaching this result, beginning with $(PA)^2 + PA \cdot AB = (QB)^2 + QB.AB$

(i) $\dfrac{PA}{QB+AB} = \dfrac{QB}{PA+AB}$. Therefore $\dfrac{PA}{PA+QB+AB} = \dfrac{PA}{PA+QB+AB}$ and $PA = QB$.

(ii) Complete the square on each side:

$$(PA)^2 + PA.AB + \frac{(AB)^2}{4} = (QB)^2 + QB.AB + \frac{(AB)^2}{4}.$$

Therefore $(PA + \frac{AB}{2})^2 = (QB + \frac{AB}{2})^2$, and $PA = QB$.

انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها
تألیف:علی اصغرهومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هشترودی

روش سادهٔ حل
مسائل شیمی
ترجمهٔ: عطاءالله‌بزرگ‌نیا

راهنمای ریاضیات متوسطه
تألیف : عبدالحسین مصحفی

تستهای هوش
ترجمهٔ : باقرمظفرزاده

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

تستهای چندجوابی شیمی

ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا

بها : ۴۰ریال

معماهای ریاضی

ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار

بها : با جلدشمیز ۷۵ ریال

با جلدزرکوب : ۱۰۰ریال

مسائلی ازحساب استدلالی

تألیف: محمودکاشانی

جلد اول	جلددوم	جلدسوم
۱۲ریال	۱۵ریال	۱۵ریال

مبادی منطق وریاضی جدید

تألیف: غلامرضا عسجدی

بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.