یکان

مجله ریاضیات

دورهٔ یازدهم ، شمارهٔ : ۵ شمارهٔ مسلسل : ۱۰۶ اسفند۱۳۵۳

در این شماره:

بها : ۴۰ ریال

یکان سال ۵۳

همزمان با انتشار این شماره از یکان، شمارهٔ ویژهٔ یکان سال ۱۳۵۳ نیز منتشر می‌شود. این شمارهٔ ویژه برای همهٔ آنان که دورهٔ یازدهم یکان را مشترک بوده‌اند فرستاده می‌شود.

مندرجات یکان سال ۵۳ عبارت است از:

* سؤالهای امتحانهای نهایی کلاسهای ششم طبیعی وششم ریاضی در خرداد و در شهریور ۱۳۵۳ با حل مسائل آنها.
* سؤالهای امتحان ورودی سال ۱۳۵۳:
- دانشگاه صنعتی آریامهر
- دانشکدهٔ نفت آبادان
- کنکورسراسری
- کنکورسراسری دورهٔ شبانه
- کنکورسراسری نیمسال دوم
- دانشکدهٔ علم وصنعت
- دانشکدهٔ علوم کرمانشاه
- انستیتوتکنولوژی تهران
* امتحان G.C.E. انگلستان در سال ۱۹۷۴

بهای تکفروشی یکان سال ۵۳: ۱۵۰ ریال

توجه

از این پس برای دورهٔ یازدهم یکان، مشترک قبول نمی‌شود

تجدید چاپ

همانگونه که قبلا وعده داده شده بود، مقدمات تجدید چاپ دو کتاب زیر از انتشارات یکان فراهم شده است. این دو کتاب دراردیبهشت ماه‌سال آینده در دسترس خواستاران خواهد بود:

راهنمای ریاضیات متوسطه

تألیف: عبدالحسین مصحفی

تستهای هوش

ترجمهٔ: باقر مظفرزاده

یکان

مجلهٔ ریاضیات

تأسیس: بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ یازدهم ـ شمارهٔ پنجم ـ شمارهٔ مسلسل ۱۰۶

اسفند ۱۳۵۳

صاحب امتیاز و سردبیر: عبدالحسین مصحفی

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملک‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو، نزدیک شاهرضا، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی: صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

وجه اشتراک برای دورهٔ یازدهم: ۳۲۰ ریال

حساب بانکی: حساب جاری ۳۰۹۵ شعبهٔ لاله‌زارنو بانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume XI, number 5. March. 1975

subscription : 6$

TEHRAN _ P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن: ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراک یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است که معمولادر پشت جلد مجلات یکان، و پشت جلد همین شماره، معرفی می‌شوند. کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

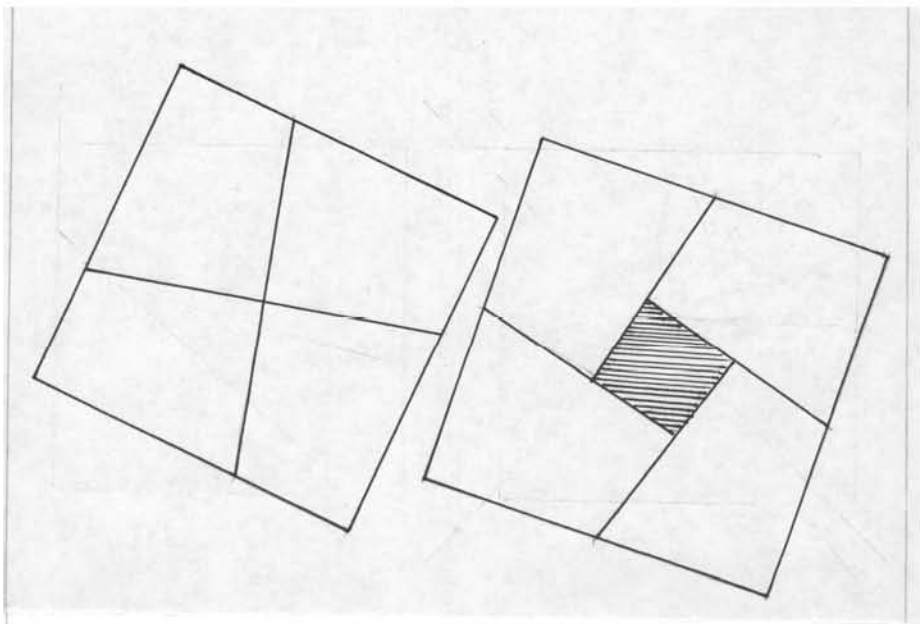
در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

پارادوکس های ریاضی

در ریاضیات ،رابطه ها وروشهایی برای حل مسئله هایی نموده می شوند که یا صحیح هستند و نا صحیح جلوه می کنند ویا نا صحیح اند و صحیح نموده می شوند ، یا درآنها عملی به گونه ی نا صحیح به کار رفته و رابطه ای شگفت انگیز به د ست آمده است . این گونه فرایند ها را بیشتر پارادوکس می نامند . چهار پرسش را که زنون در یونان با ستان بیان کرد کهن ترین پارادوکسها به شمار می آیند .

عمل تقسیم بر صفر ، حذف عاملی که می تواند صفر با شد از دو طرف یک برابری،به کار بردن قاعده یا قا نونی را در مورد نا موجه ، رسم نا د قیق یک شکل ،و جلوه دادن جواب صحیح یا نا صحیح یک مسئله به صورت نا صحیح یا صحیح ،از جمله عامل های پارادوکس ساز به شمار می آیند .

یک نمونه . درزیر ،در شکل سمت چپ ،یک مربع و در داخل آن دو پاره خط محدود به ضلع های رو برو چنان رسم شده اند که در مرکز مربع بر هم عمود ند . مربع به چهار پاره سطح بخش شده است . این پاره سطح ها به گونه ی شکل سمت راست کنار هم جفت شده و مربعی جدید را پدید آورده اند .گمان میرود دو مربع باید همسطح باشند اما در وسط دومی جایی خا لی دیده می شود. اشتباه از چیست ؟



کاوشهایی در تاریخ نجوم اسلامی (۳)

جعفر آقایانی چاوشی

قطب‌الدین شیرازی شاگرد طوسی اثر مهم خود: «نهایة الادراك فی درایة الافلاك»(۱) را بر اساس کتاب تذکرهٔ استاد نصیرالدین طوسی تألیف کرد، این کتاب مطالب تازه‌ای نیز در بردارد از جمله شامل بحث کاملی در بارهٔ نظریه‌های کیهان زائی **ابن‌هثیم** و **ابوبکر محمد بن احمد خرقی** است.»

ابن‌هثیم و **خواجه نصیر الدین طوسی** سطوح کروی (افلاك) مربوط به مدار سیارات را متماس می‌پنداشتند.

قطب‌الدین شیرازی اظهار نظر می‌کند که ممکن است فضائی بین آنها وجود داشته باشد» قطب‌الدین نیز صورت دیگری از طرح طوسی را برای حرکت عطارد در کتاب «نهایة‌الادراك» تصور کرد که بعداً در این باره بحث خواهد شد.

در همین دوره **ابن‌الشاطر دمشقی** در اثر مهم خود: نهایة‌السؤل فی تصحیح الاصول طرحی بر مبنای نظریهٔ طوسی برای حرکت ماه پیشنهاد کرد.(۲) نظریه‌ای که دو قرن پس از او توسط **کپرنیك** در بارهٔ ماه پیشنهاد شد، همان نظریهٔ **ابن‌الشاطر** است و چنان می‌نماید که کپرنیك احتمالا از طریق ترجمه‌های بیزانسی از پیشرفتهای اخیر نجوم اسلامی آگاهی داشته است، زیرا اصول همهٔ آنچه را که در طرح کپرنیك تازگی دارد می‌توان در مکتب طوسی و شاگردان او پیدا کرد.

آخرین مرحلهٔ ترویج علوم اسلامی در زمان **الغ بیك** بود الغ بیك علما را در پایتخت خود گرد آورده و مجموعهٔ جداول فلکی معروف به الزیج السلطانی نتیجهٔ رصدها و محاسبات او و همکارانش می‌باشد. رصدخانهٔ الغ بیك در سمرقند بود و اولین رئیس این رصدخانه **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** بود که به اکتشافات و اختراعات فراوان نایل آید که بعداً در این باره سخن گفته خواهد شد.

۱ـ ویدمان مباحثی از این رساله را در مقاله زیر مورد بحث قرار داده است.

Wiedemann,E.: «**Auszuge aus al - Schirazis Werk uber Astronomie**» Beitr. Zur Gcsch. der Naturwiss. 27, SPMSE, 1912.

Sarton, G.: «**An Introduction to the History Of Scince**» Vol. 2 . Boltimnre , (1953)

(← قربانی، ابوالقاسم، «قطب الدین شیرازی ریاضیدان و منجم زبردست ایرانی» مجله راهنمای کتاب. سال یازدهم، شماره هشتم، آبان، آذر ۱۳۴۷)

۲ـ دکتر کندی و رابرتس تحقیقات جالبی در باره نظریهٔ ابن شاطر کرده و مقادلات زیر را در این باره نوشته‌اند:

*Kennedy, E. S & Roberts, V.:«**The planetary of Al - Shatir**» Isis 50(1959)

** Roberts, A.: «**The Solar and Lunar TheOry of Ibn ash -Shatir**» Isis 48(1957)

در اینجا فقط اشاره می‌شود که کاشانی آلت مخصوصی موسوم به «طبق‌المناطق»(۱) برای تعیین عروض کواکب اختراع کرد و کتاب «نزهة‌الحدائق» را در شرح آن نوشت، طبق نوشتهٔ کاشانی این آلت برای تعیین عرض و طول ستارگان فواصل آنها از زمین، حرکت رجعی آنها، خسوف ماه، کسوف خورشید و موضوعات مربوط اختصاصی داشته است.

اختراع این آلت نمایندهٔ کاملترین پیشرفتی است که برای این دست افزارهای نجومی حاصل شده است. به ویژه آنکه این تنها افزار فنی (مکانیکی) بود که تعیین عروض سیارات را امکان پذیر ساخت.

می‌توان گفت که این ابزار به شکل اسطرلاب ساخته شد و یك نوع نوموگرام* (Nomogramme) مخصوص برای حل ترسیمی تقریبی یك رشته مسائل دربارهٔ حرکت ستارگان آسمان براساس جداول اندازهٔ متوسط مختصات آنها بوده است، اگر هم دربارهٔ عملی بودن نتایجی که از این ابزار حاصل می‌شود با قید احتیاط بیندیشیم، دربارهٔ مهارتی که از جهت هندسی در آن به‌کار رفته شك و تردیدی نمی‌توان داشت.

این خلاصه‌ای از کارهای منجمین اسلامی بود، امکان بررسی جنبه‌های مختلف کارهای آنها میسر نیست، چه تحقیق دربارهٔ کارهای بیش از پانصد منجم شناخته شده اسلامی کاری بس دشوار است، و باید دربارهٔ هریك از آنها کتاب و یا مقاله‌ای مستقل تألیف کرد سعی می‌شود در شماره‌های دیگر این مجلهٔ در بارهٔ کارهای سه منجم برجسته اسلامی که هر سه ایرانی بوده‌اند مقالاتی نوشته خواهد شد. این سه اخترشناس عبارتند: از **ابوالوفای بوزجانی ابوریحان بیرونی و خواجه نصیرالدین طوسی**

منابع اساسی

برای آشنائی بیشتر خوانندگان با نجوم اسلامی به منابع زیر اشاره می‌شود، در متن مقاله به این منابع اشاره‌ای نگردید ولی بعضی از آنها مورد استفاده فراوانی واقع شدند.

*الطاووسی، علی بن موسی: «فرج‌المهوم فی تاریخ علماء النجوم» النجف ۱۳۶۸ ه ق

* طوقان، قدری حافظ: «مآثر العرب فی الفلك» الرساله العداد، السنه‌الاولی، ۱۹۳۳م

۱ـ در بارهٔ آلت طبق المناطق دکتر کندی تحقیقات مهمی انجام داده رجوع شود به:

Kennedy, E . S : «**Afifteenth Century planetary GOmPuter äl — Kashi, S «Tabaq al — Manateq»**

I. Motion of the sun and moon in langitude

II. Lon9itudes, distances and equations of planets Isis, 41(1950) , 43(1952)

* منظور از نوموگرام (Nomogramme) روشهای ترسیمی (Methodes graphiques) حل معادلات جبری و یا متعالی (Transcendant) ولی غیردیفرانسیل است استعمال آنها سریع وآسان. و دقت آنها برای مهندسین کافی است.

* Laplace: «**Exposition du monde** «pag. 60, 1821

(Sedillot. L. A.: «**DecOverte de la Variation par Abeul wefa**»

Journal Asiatique, Vol 16; 1835. P. 426)

* Delambre «**Analyse des trevaux de l . Academie roysie des Scicnces.** pendant l ammee 1877, pag, 50 et suiv, **Histoire de l.àstuonomc au moyen age.** pag. xl, 95 et passim

* **طهرانی، سیدجلال‌الدین:** «تاریخ مختصری از مراصداسلامی» گاهنامهٔ ۵

* **الغراوی، عباس:** «تاریخ علم‌الفلك فی‌العراق» بغداد ۱۳۷۸ ه ق

* **قربانی، ابوالقاسم:** ریاضیدانان ایرانی» تهران ۱۳۵۰ ه ش

* **نصر، سیدحسین:** «علم وتمدن در اسلام» ترجمه احمدآرام تهران ۱۳۵۰ ه ش

* **فرغانی، احمد:** «کتاب فی‌الحرکات السماویه و جوامع علم النجوم» ترجمه احمد آرام مجله معارف اسلامی‌شما ۴ ۱۳۴۶ ه ش

* Schimer. O.:«Arabishe Bestimmungen der Schiefe der Ekliptik»
Sitzungsber der phys med. Soz. vol 58 (1926)

استفاده از نمادها (دنباله از صفحهٔ ۲۰۶)

یا $f(x)\neq f(-x)$ باشد. در عدم توجه به تعریف صحیح گاهی دانش‌آموزان به اشتباه می‌گویند که تابع غیرزوج تابعی است که زوج نباشد».

به عنوان مثال تابع زیررا بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{|x-3|x^2}{\sqrt{x^2-6x+9}}$$

چون $\sqrt{x^2-6x+9}=|x-3|$ است بنابراین به ازای جمیع مقادیر $x\neq 3$ این تابع یك مقدار معین را خواهد داشت و از آنجاکه تابع $y=x^2$ به ازای $x\neq\pm 3$ نیززوج است در نتیجه $f(x)=f(-x)$ بوده وتابع $f(x)$ زوج است. لیکن تابع $f(x)$ یك تابع زوج نمی‌باشد: این موضوع از بیان (۱۸) نتیجه می‌شود. در حقیقت مقدار $x\in M$ مانند $x=-3$ وجود داردکه برای آن $-x\notin M$ است (زیرا حوزهٔ معین بودن M تابع $f(x)$ کلیهٔ اعداد حقیقی جز ۳ را شامل است).

در این مقاله نظریات چند منجم اسلامی در باره میل منطقه البروج مورد بحث قرار گرفته است.

* Tuter. H. «Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre werke» Leipzig (1900)

در این کتاب شرح حال و آثار متجاوز از پانصد ریاضیدان و منجم اسلامی به اختصار آمده است.

* Seemann. Hu9o Th. Mittelberger: «Das Kugel formige Astrolab»
Abhdl Zur Gesch. d. Naturw. 8 (1915)

در این مقاله رسالهٔ نیریزی در باره اسطرلاب کروی مورد بحث واقع شده است.

* Kennedy. E. S. «Asurvey of Islamic Astronomical Tables»
Transactinos of the American philosopbical Societly New Series. 46(1956)

* Suter. H.:«**Die Astronomischen Tabfeln des Muhammed ibn Musa in der Bearbeitung des Maslama ibn al - Madiriti und der latin. Ubersetzung dos Athelar You Bath auf grund der Vorarbeiten Von A. Bjornbo und R. Bestorn**
Memoires de l Ac. des Sciences de Danemask, Section des letters. Uol 3. Copenhague (1914)

در رسالهٔ فوق دکترهانری سوتر به تحقیقی علمی دربارهٔ زیج خوارزمی پرداخته است.

چرا در تجدیدی نیست

علیرضا امیرمعز - دانشگاه تگزاس تك

سالها پیش در بعضی از دهات، پدران و مادران کودکانشانرا مخفی می‌کردند که آنان را به مدرسه نفرستند. البته این موضوع انحصار به مشرق زمین نداشت در اروپا و امریکا هم همین موضوع مدتها تحت مطالعه و تحقیق بود. دهقانان کودکان را برای کمك در مزرعه و چراندن گله لازم داشتند و به مدرسه فرستادن آنان کار را لنگ می‌کرد. از اینرو تعطیل تابستان مرسوم شد که کودکان بتوانند سهم خود را در کمك به خانواده انجام دهند و در ضمن بتوانند خواندن، نوشتن وحساب یاد بگیرند. چون در اروپا و قسمت عمدهٔ امریکای شمالی فصل سرما و یخبندان دراز است، دبستان ودبیرستان کمك بزرگی به نگهداری و تربیت اطفال می‌کرده است. اما وقتی تابستان فرا می‌رسید دوبارهٔ کودکان به مزرعه می‌رفتند. بنابراین تعطیل تابستان مرسوم شد، این روزها برای بیشتر کودکان تابستان فصل تعطیل و تفریح است.

امروزه در ممالك متحدهٔ امریکا، تابستان نیز یك فصل تحصیلی است. دانشگاهها کلاسهای مخصوص دارند، اغلب دبیرستانها نیز درسهای تابستانی دارند. دانشگاهها بطور عموم و بعضی از دبیرستانها در بعضی موارد، سال را به چند فصل تحصیلی قسمت می‌کنند. مواد درسی را به واحدهای کوچك به دانش‌آموزان تعلیم می‌دهند. لذا اگر شاگردی ازدرسی مردود شود. فصل بعد آن‌درس‌بخصوص را تکرار می‌کند. در شهرهای نسبتاً بزرگتر معمولا کلاسهای‌تابستانی‌وجود دارد. دانش‌آموزان و دانشجویانی که‌می‌خواهند جلو بزنند یا موضوعهای خاصی را که در فصل معمولی وقت یادگرفتشانرا ندارند در این کلاسها شرکت می‌کنند، آنچه درکلاسهای تابستانی برای دانش آموزان تدریس می‌شود معمولا مجانی است. برای دانشجویان این‌درسها قدری گرانتر ازدرسهای معمولی است. به این ترتیب درامریکا تجدیدی وجود ندارد.

روش آموزش و پرورش فرانسوی در بیشتر اروپا تقلید شده است. تابستان دبیرستان و دانشگاه همه تعطیلند. آموزگار و دبیر فرصت اینکه به قدرکافی به شاگرد برای آمادگی‌امتحان وقت بدهند ندارند. اگر دانش‌آموزی از درس خاصی تجدیدی شود و پس از تابستان رد شود، باید تمام درسها را تکرار کند. این سبب تلف شدن وقت، قوه و قدرت‌وخرج زیاد می‌شود.

تابستان در فرانسه و اسپانیا دبیرستانها و دبستانها همه بسته‌اند. ولی صدها کلاس خصوصی مشغول کار است. عدهٔ زیادی تجدیدی شده‌اند و باید چند درس را برای امتحان آخرتابستان حاضر کنند.

اکنون چندکلمه راجع به درسهای خصوصی‌بگوئیم. در امریکا رسم نیست که دبیر یا استادی به شاگردان خودش درس خصوصی بدهد. از قضا دانش‌آموزان احتیاجی به درس‌خصوصی ندارند، چون اغلب از امتحان قبول می‌شوند. فقط کسانی که در می‌خواهند درامتحانات خاصی‌شرکت کنندمعلم‌خصوصی‌می گیرند. دانشگاههاهم استادان درس خصوصی نمی‌دهند. فقط دانشجویان ما فوق عالی یا قسمت سال آخر با نرخ خاصی که دانشگاه‌معین کرده است درس خصوصی می‌دهند. این معلمین خصوصی دستی در امتحانات ندارند. لذا شاگردان فقط برای یادگرفتن‌به‌آنان رجوع می‌کنند.

در اروپا به خصوص کشورهایی که سبك تعلیم و تربیت فرانسه را دارند، درس خصوصی قسمتی‌ازطرز زندگیشان‌می‌باشد. گاهی شاگردان پولدار دبیران خودشانرا برای درس خصوصی استخدام می‌کنند. دربیشترموارد وقتی معلم فهمید که شاگرد استعداد ندارد، از درس دادن به او اباء می‌کند. ولی گاهی دیگران از درس دادن‌خصوصی سوء استفاده می‌کنند.

در امریکا هردبیری یك اطاق‌خاص خودش‌دارد. شاگردان به اطاق او می‌روند. لذا این‌اطاق درس نیز اطاق دفترآن دبیر است. تمام‌کتابها و مدارکش درگنجهٔ خاصی درآن اطاق‌است. کار دبیر تنها درس دادن وامتحان‌کردن نیست. روزی یك‌ساعت صرف پذیرائی از شاگردان‌می‌شود. به این معنی که‌اگرشاگردی اشکالی داشت به اطاق درس وکار دبیر می‌رود و موضوع رابا او بحث می‌کند. استادان معمولا یك اطاق دفتر دارند و درهفته چندساعت برای پذیرائی معین‌کرده‌اند. به غیر از این موقع معین، دانشجو می‌تواند از استاد وقت‌بگیرد واشکالاتش رامرتفع کند. از اینروبه‌هیچ‌وجه موضوع‌وموقعیت تجدیدی‌پیش‌نمی‌آید.

بیشتر دانشگاهها برنامهٔ خاص دیگری دارندکه «نمرهٔ‌با امتحان» (Credet with exam.)خوانده‌می‌شود. شخص می‌تواند تقاضا بدهدکه در امتحان هردرس‌که بخواهد شرکت کند. هرگاه ازامتحان قبول‌شود، نمرهٔ‌آن درس‌را جزءنمره‌های دیگر آن دانشجو حساب می‌کنند. در دانشگاه تگزاس‌تك، در سال چهار بار فرصت امتحان برای نمره وجود دارد. معمولا دانشجویان خارجی از آن استفاده می‌کنند. چون گاهی سطح معلوماتشان معلوم نیست و این امتحانات‌آنان را به درسهایی که بایدبخوانند هدایت می‌کند.

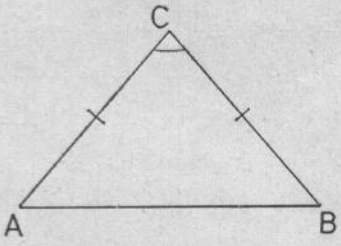
استفاده از نمادهای منطقی در ریاضیات

ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری

۱ـ عطف وفصل

با بررسی دوقانون منطقی بحث خود را شروع می‌کنیم. این دو در نوشتن قضایا بسیار مفید بوده، و مخصوصاً در روشنتر ساختن ساختمان یك تعریف نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

در ریاضیات اغلب بررسی حالاتی پیش می‌آید که دو خاصیت در یك زمان موجودند. ما می‌دانیم که مثلا مثلث قائمه متساوی‌الساقین وجود دارد (در شکل زاویهٔ C قائمه است). این‌بدین معنی است که مثلثی مانند ABC وجود دارد که در یك زمان‌دو خاصیت زیر برای آن صادق است: اولا زاویهٔ رأس C قائمه است درثانی اضلاع AC و BC متساویند. برقرار بودن‌همزمان دو خاصیت را **عطف** این خواص گفته و آنرا با نماد $\wedge$ نمایش داده و می‌خوانند «و» به این ترتیب خواص مثلث ABC را می‌توان به صورت زیر با علائم نوشت:



$$\exists \Delta ABC: (\angle C = ۹۰^\circ) \wedge (AC = BC)$$

یك مثال دیگر در مورد استفاده از عطف می‌آوریم که در مورد ریشهٔ خارجی می‌باشد.

مثلا معادلهٔ زیررا در نظر می‌گیریم:

$$|x-۲| + ۲x = ۰$$

$۲x$ را به طرف راست معادله برده طرفین معادله را مربع می‌کنیم. پس از ساده‌کردن معادله، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر بدست می‌آید:

$$۳x^۲ + ۴x - ۴ = ۰$$

که دارای ریشه‌های:

$$x_۲ = \frac{۲}{۳} \quad ، \quad x_۱ = -۲$$

می‌باشد.

امتحان جوابها در معادلهٔ اصلی نشان می‌دهد که فقط‌ریشهٔ اولی در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند و ریشهٔ $x_۲ = \frac{۲}{۳}$ یك ریشهٔ خارجی است. درحالت کلی یك‌ریشهٔ خارجی رامی‌توان‌به‌صورت زیر فرموله‌کرد.

فرض‌کنیم معادلهٔ (۱) $f(x) = ۰$ داده شده باشد که پس از بعضی تغییرات از آن به معادلهٔ ساده‌تر زیر می‌رسیم:

$$g(x) = ۰ \qquad (۲)$$

برای سادگی حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن هریك از توابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای جمیع مقادیر حقیقی x معین می‌باشند. عدد $x_۰$ را ریشهٔ خارجی معادلهٔ(۱) گویند هرگاه $x_۰$ ریشهٔ معادله (۲) باشد اما در معادلهٔ (۱)صادق نباشد. این‌مطلب را با علامت $\wedge$ به صورت زیر بیان می‌کنند:

$$(g(x_۰) = ۰) \wedge (f(x_۰) \neq ۰)$$

علاوه برعلامت عطف $\wedge$ در ریاضیات اغلب ازعلامت‌فصل بانماد $\vee$ استفاده می‌شودکه خوانده می‌شود«یا». علامت $\vee$ درست معنی«یا» راکه درگفتار استعمال می‌شود نمی‌دهد. در گفتار حرف ربط «یا» در بیشتر موارد خاصیت جداکنندگی‌دارد مثلا جملهٔ «من به مسافرت می‌روم، برای گرفتن کتابها برادریا خواهرم به شما سرخواهند زد»

در اینجا قبل از هرچیز آمدن برادر یا خواهر در نظر است. امکان اینکه آنها هردو باهم بیایند پیش بینی نمی‌شود.

در ریاضیات علامت $\vee$ دارای مفهوم جدائی نیست. این بدین معنی است که، هرگاه دو خاصیت با علامت $\vee$ به هم مربوط باشند این را می‌رساند که یا خاصیت اول صادق است ودیگری صادق نیست و یا خاصیت دوم صادق است و دیگری صادق‌نیست و یا هر دو خاصیت در یك زمان صادقند.

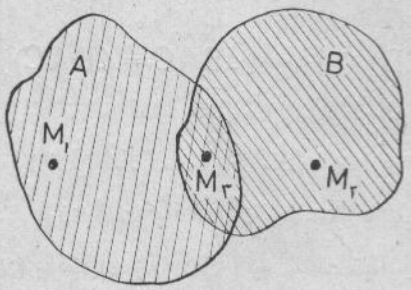
به عنوان مثال اجتماع دو مجموعهٔ A و B را بررسی می‌کنیم. هرگاه‌نقطهٔ M متعلق به $A \cup B$ باشد در این صورت یکی از سه حالت زیرصادق خواهند بود:

۱- $M \in A$ لیکن $M \notin B$ (نقطهٔ M_1 درشکل)

۲- $M \in B$ لیکن $M \notin A$ (نقطهٔ M_2 در شکل)

۳- $M \in A$ و $M \in B$ (نقطهٔ M_3 در شکل)

به این‌ترتیب $(M \in A \cup B) \Longleftrightarrow [(M \in A) \vee (M \in B)]$



به عنوان یك مثال دیگر دوباره‌مفهوم ریشهٔ خارجی رادر حالتی که توابع $f(x)$ و $g(x)$ به‌ازای جمیع مقادیرحقیقی‌معین‌نیستند مورد بررسی قرار می‌دهیم. حوزهٔ معین بودن تابع $f(x)$ راکه در معادلهٔ (۱) صادق می‌باشد را با A نمایش می‌دهیم. عدد x_0 ریشهٔ معادلهٔ(۱)نخواهد بود،هرگاه یا $x_0 \notin A$ یا $f(x_0) \neq 0$ باشد، یعنی هرگاه:

$$(x_0 \notin A) \vee (f(x_0) \neq 0)$$

مانند حالت قبل عدد x_0 ریشهٔ خارجی معادلهٔ (۱)نامیده می‌شودکه از معادلهٔ (۲) حاصل از معادلهٔ (۱) بدست‌آمده و در نتیجهٔ ریشهٔ معادلهٔ (۲) می‌باشد لیکن ریشهٔ معادلهٔ (۱) نمی‌باشد

$$(g(x_0) = 0) \wedge [(x_0 \notin A) \vee f(x_0) \neq 0)]$$

در این بیان فرموله شده از هر دو علامت $\wedge$ و $\vee$ استفاده شده است. اغلب پیش می‌آیدکه می‌خواهیم مطلبی را نفی‌کنیم، که بیان‌کنندهٔ عطف و یا فصل مطلب بسیار ساده‌ای است.

مثلاً گزارهٔ زیر،را بررسی می‌کنیم : متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. این گزاره را می‌توان به صورت‌زیر نوشت:

$$(AB \| CD) \wedge (AD \| BC)$$

فرض کنیم این مطلب نادرست باشد ، یعنی چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع نباشد در این صورت بیان مطلب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sim[(AB \| CD)] \wedge [(AD \| BC)] \qquad (۳)$$

این بدین‌مفهوم است که‌اقلایکی‌از گزاره‌های $AB \| CD$ یا $AD \| BC$ درست نیست ویکی‌ازگزاره‌های $\sim(AB \| CD)$ یا $\sim(AD \| BC)$ واقعیت دارند. با بیان دیگر گزارهٔ (۳) همان‌گزارهٔ زیراست:

$$[\sim(AB \| CD)] \vee [\sim(AD \| BC)] \qquad (۴)$$

هرگاه گزارهٔ $AB \| CD$ را با P وگزارهٔ $AD \| BC$ را با Q نشان دهیم دراین‌صورت گزارهٔ(۳) به‌صورت$(P \wedge Q)$ وگزارهٔ (۴) به صورت $(\sim P) \vee (\sim Q)$ نوشته می‌شود .

همانطورکه دیدیم گزاره‌های (۳) و (۴) هردویك مطلب را بیان می‌کنند:

$$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q) \qquad (۵)$$

حال گزارهٔ دیگری‌را بررسی‌می‌کنیم: ذوزنقهٔ $ABCD$ مفروض است. این گزاره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(AB \| CD) \vee (AD \| BC)$$

یعنی به صورت $P \vee Q$ که در آن P و Q همان مفهوم قبلی راکه گفته شد دارند.

فرض می‌کنیم که گزارهٔ $P \vee Q$ درست نباشد یعنی‌چهار ضلعی $ABCD$ ذوزنقه نباشد. این بدین معنی است که هیچیك ازگزاره‌های P و Q صادق نیستند. یعنی‌هردوگزاره‌های $\sim P$ $\sim Q$ درستند. با بیان دیگر، چهار ضلعی $ABCD$ یك ذوزنقه نیست. این‌موضوع‌رانه‌تنهامی‌توان به‌صورت‌گزارهٔ$\sim(P \vee Q)$ بلکه به صورت‌گزاره $(\sim P) \wedge (\sim Q)$ نوشت به این ترتیب گزاره‌های $\sim(P \vee Q)$ و $(\sim P) \wedge (\sim Q)$ یکسان هستند. یعنی:

$$\sim(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\sim P) \wedge (\sim Q) \qquad (۶)$$

روابط (۵) و (۶) راکه فقط در مثالهائی بررسی‌کردیم برای گزاره‌های دلخواه P و Q صادقند.

۲ـ ساختمان یك تعریف

اغلب بر مبنای مفاهیمی که بـرای ما معلـومند، مفاهیم جدیدی ظاهر می‌گردند.

معمولا در چنین مواردی از جملاتی‌که آنـها را تعاریف می‌نامند استفاده می‌کنند. مثلاتعریف لوزی‌به صورت زیرفرموله می‌گردد:

لوزی متوازی الاضلاعی است‌که، اضلاع مجاورش بـاهم برابرند. در این تعریف مفهوم جدید «لوزی» بـراساس سری مفاهیم زیر که تاکنون برای ما معلومند ظاهر شده است:متوازی الاضلاع، اضلاع متوازی‌الاضلاع، اضلاع جانبی ، مساوی بودن اضلاع.

در منطق‌مرسوم می‌آموزیم‌که هرتعریفی شامل یك‌اصطلاح تعریف شده، نمایش مفهوم اصلی و همچنین تـوصیف اختلافات ظاهری می‌باشد. در تعریفی‌که در بالا بررسی شد اصطلاح‌جدید «لوزی» ظاهر شده است. مفهـوم اصلی عبـارتست از «متوازی الاضلاع».مانند همیشه این مفهوم اصلی خیلی عمومیتر از مفهوم تعریف شده«لوزی»می‌باشد. (هرمتوازی‌الاضلاعی لوزی‌نمی‌تواند باشد). برای تشخیص هرلوزی از متوازی الاضلاعها اختلافات ظاهری لازم است. درحالت اخیر اختلاف ظاهر فقط یکی است و آن مساوی بودن اضلاع مجاور است.

واضح است‌که در چنین تفکیك‌کاملا شفاهی اجزاء اصلی یك تعریف(اصطلاح، مفهوم‌اصلی، اختلافات ظاهری) فایدهٔ‌خیلی زیادی موجود نیست.

در ضمن تفکیك دقیق این اجزاء اصلی به‌کمك قـوانین منطقی همانطور از که به زودی خواهیم دید، منجر بـه داشتـن استطاعت خیلی زیاد برای حل مسائل بسیار مشکل می‌گـردد. چگونه یك تعریف را به‌کمك قوانین منطقی بنویسیم؟

این را در مثال تعریف لوزی بررسی می‌کنیـم. متوازی الاضلاع دلخواه ABCD را در نظر می‌گیریم. برای آنکـه نشان دهیم‌که ABCD یك‌لوزی است باید مطابق تعریف‌فرموله شده متقاعد شویم‌که اضلاع مجاور متساویند:

$AB=BC$. توجه می‌دهیم‌که برقراری این شرط لازم‌و کافی است برای آنکه متوازی الاضلاع ABCD یك لـوزی باشد. یعنی فقط و فقط وقتی متوازی الاضلاع ABCD لـوزی است‌که $AB=BC$ باشد. در نتیجه تعریف لوزی بـه صورت زیر در می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l}(\forall ABCD: AB\|CD \wedge BC\|AD)\\ (ABCD\text{لوزی}) \overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow} (AB=BC)\end{array}\right\}(۷)$$

فرمول (۷) یك تعریف است، یعنی یك مفهوم جدید را ظاهر می‌سازد (در این مثال مفهوم لوزی را ظاهرمی‌سازد) بهتر است نوشتن تعریف را با نوشتن قضیه مقایسه‌کنیم. برای‌راحتی مقایسه قضیه‌ای را انتخاب می‌کنیم‌که برای آن قضیهٔ عکس‌نیـز درست باشد (قضیه‌ای‌که در نوشتن آن از عـلامت $\Longleftrightarrow$ مانند نوشتن تعریفش استفاده می‌شود). در زیر دوقضیه درموردخواص لوزی را می‌توانیم مشاهده‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}(\forall ABCD: ABCD\ \text{متوازی الاضلاع است})\\ (ABCD\text{لوزی}) \Longleftrightarrow (AC\perp BD)\end{array}\right\}(۸)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\forall ABCD: ABCD\ \text{متوازی‌الاضلاع‌است})\\ (ABCD\text{لوزی}) \Longleftrightarrow (\angle BAC=\angle DAC)\end{array}\right\}(۹)$$

هر یك از این قضایا شامل بعضی شرایط لازم وکافی‌لوزی می‌باشد. مثلا اولی بیان‌کننده این است‌که متوازی الاضلاع‌فقط و فقط وقتی لوزی است‌که‌اقطار آن‌برهم عمود باشند. از مقایسهٔ تعریف (۷) با قضایای (۸) و (۹) به شباهت زیاد این نوشته‌ها پی‌می‌بریم. تعریف و هرقضیه به سه جزء تقسیم شده‌اند، بطـوری که فرمولهای (۷) و (۸) و(۹) دارای ساختمانهای‌کاملامشابهی هستند. هر یك از نوشته‌های (۷)،(۸)و(۹) بـیان کننده ایـن هستندکه متوازی الاضلاع ABCD فقط وفقط درحـالتی‌لوزی است‌که یکی ازاین سه‌خاصیت‌راداشته باشد، لیکن نقش‌برقراری روابط (۷) و (۸) و (۹) یکسان نیست. رابطهٔ(۷) یك‌تعـریف است یعنی برای بیان اولیهٔ مفهوم لوزی استفاده می‌شود.

به این جهت برقراری (۷) در اثبات لازم نیست. روابط (۸) و (۹) قضیه هستند و باید اثبات شوند. توجه مـی‌دهیم‌که ما توانستیم مفهوم لوزی را متداول‌کنیم. مثلا می‌توانستیم رابطهٔ (۸) را در تعریف لوزی بکار بریم. در این حـالت لازم نیست رابطهٔ (۸) را اثبات‌کنیم (این اثبات در مورد تعریف باید انجام گیرد)، لیکن در این صورت رابطهٔ (۷) را باید به صورت یك قضیه بررسی‌کرد، که باید به‌کمك تعریف (۸) اثبات شود. مابه قدرکافی در مورد تعریف لوزی به منظور روشن‌کردن ساختمان عمومی تعریف بحث‌کردیم. بعدمثالهای دیگری‌را درموردتعریف بررسی می‌کنیم.

تعریف علامت یك نامعادلهٔ ساده رامی‌توان چنین نوشت:

$$(\forall a,b)(a\geq b)\overset{\text{تعریف}}{\Longleftrightarrow}[(a>b)\vee(a=b]$$

دراین تعریف دوحالت متفاوت $a=b$ و $a>b$ که بارابطهٔ فصل (نماد $\vee$) بهم مربوط شده‌اند موجود است. جفت اعدادحقیقی a وb مفهوم اصلی می‌باشد. به‌عنوان مثال دیگر تعریف تابع از بالا محدودی را بررسی می‌کنیم. این تعریف در فرموله کردن شفاهی به‌ترتیب زیر جلوه می‌کند. فرض کنیم $f(x)$ تابعی باشد که M حوزهٔ معین‌بودن آن است. تابع $f(x)$ را از بالا محدود گویند هرگاه عددی مانند a موجود باشد که برای مقادیر دلخواه $x\in M$ نامساوی $f(x)\leq a$ برقرار باشد.

این تعریف رابه کمك قوانین منطقی می‌نویسیم:

$\forall f$ و M (حوزهٔ تابع: M

$$(\exists a,\forall x\in M)(f(x)\leq a)\Longleftrightarrow(\text{تابع } f \text{ ازبالامحدوداست}) \quad (۱۰)$$

دراینجا مفهوم تابع، مفهوم اصلی‌می‌باشد (که حوزهٔ معین بودن تابع ضمن آن بیان می‌شود).

اختلاف ظاهری (جداکنندهٔ تابع ازبالا محدود از کلیهٔ توابع) درحالت داده‌شده به کمك سور وجودی $\exists$ وسور عمومی $\forall$ نوشته می‌شود.

درپایان تعریف یك تابع زوج متناوب را بررسی می‌کنیم (f و M همان مفاهیمی رادارند که درتعریف قبلی‌داشتند):

$$(\forall f,M)(f \text{ تابع زوج}) \Longleftrightarrow$$

$$(\forall x\in M)[(-x\in M)\wedge(f(x)=f(-x))] \quad (۱۱)$$

$$(\forall f,M)(f \text{ تابع متناوب})\Longleftrightarrow(\exists T>0)(\forall x\in M)$$

$$[(x+T\in M)\wedge f(x+T)=f(x))] \quad (۱۲)$$

دراینجا اختلافهای ظاهری نه‌تنهاشامل نمادهای $\exists$ و $\forall$ بلکه‌شامل نماد عطف $\wedge$ نیزمی‌باشند.

باداشتن چنین فرمولهایی برای تعاریف به‌سادگی‌می‌توان براساس درك وتحلیل آنهاکار خودرا پی‌ریزی کرد.. اصولاچنین کاری باید براساس رسیدگی درانجام کلیهٔ اصول تشکیل دهندهٔ اختلافات‌ظاهری قرار داشته‌باشد. مثلا، درحل مسئلهٔ «ثابت کنید تابع مفروض متناوب است» دانش‌آموزان اغلب اشتباه ویژه‌ای رامرتکب می‌شوند: فقط صادق‌بودن رابطهٔ $f(x+T)=f(x)$ راتحقیق می‌کنند. اگردانش‌آموزان نوشتن تعریف به‌کمك نماد های منطقی‌را آموخته باشند، [(۱۲) رانگاه‌کنید] واین نوشته رامقابل چشمانشان داشته باشند، این اشتباه به سادگی ازمیان برداشته می‌شود.

توجه می‌دهیم که فرم‌نوشتن تعریفی راکه دراینجا بررسی کردیم‌وازسه قسمت تشکیل‌می‌شد، (مفهوم‌اصلی، اصطلاح، اختلاف ظاهری)، درعلوم ریاضی گاهی نوشته‌هایی بکار می‌برند، که از نظرفرم بانوشتهٔ بررسی‌شده فرق دارد. مثلا نماد $\Longleftrightarrow$ اغلب با نماد $\equiv$ جایگزین می‌گردد. حالمی‌توانید درزیرفرمول‌تعریف عدد زوج‌را بانمادی‌که گفتیم مشاهده کنید:

$$(\forall n\in N)(n \text{ زوج})\equiv(n \text{ بر ۲ بخش پذیراست})$$

اغلب‌ازفرم نوشتنی که درآن‌آکولاد بکاررفته نیزاستفاده‌می‌کنند به این ترتیب‌که اگر P مجموعهٔ کلیهٔ اعداد زوج باشد، دراین صورت تعریف اعداد زوج رامی‌توان به‌صورت زیر نیزنوشت:

$$P=\{x\in N|\ x \text{ بر ۲ بخش‌پذیراست}\}$$

درهردو حالت تقسیم صحیح تعریف به‌سه جزء درنظر است.

۳ـ غیر وابستگی به مفهوم

نتیجهٔ‌امتحانات‌ورودی‌دانشگاه نشان‌می‌دهد که‌بیشتر اشکالاتی که‌امتحان‌دهندگان کنکور دانشکده‌هادرکارباتعاریف‌باآنهاروبرو هستند، مسائلی‌است براساس غیروابستگی‌به مفهوم. به‌عنوان مثل می‌توان توابعی‌را مثال زدکه بخواهم ثابت‌کنیم متناوب نیستند:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x})^2}{x}\sin x \quad (۱۳)$$

$$g(y)=\sin(x^2) \quad (۱۴)$$

$$h(x)=\sin\pi x-\sin x \quad (۱۵)$$

توجه می‌کنیدکه معمولااین‌مسائل خیلی مشکل نیستند، طراح‌این مسائل، مسائل خیلی ساده‌تری را پیشنهاد کرده بود که قابل مقایسه‌بااین‌مسائل نیستند(مثلا، ثابت‌کنیدکه تابع $y=2+\sqrt{x}$

متناوب نیست) لیکن معمولا این نـوع مسائل موجب مشکلات جدی‌تری می گردند. دلیل‌این مشکلات معلوم است: مفروضات منفی که بطورشفاهی درتعریف موجودند، مسئله رانسبتاً مشکلتر می کنند. نوشتن تعریف به‌کمك نماد های منطقی می‌تواند بطور محسوسی حل‌چنین مسائلی‌را ساده‌تر کند.

این سؤال‌را مفصلتر بررسی‌می کنیم. درحالت کلی تعریف یك‌مفهوم به‌صورت زیر است.

$$(\forall x\in M)A(x)\Longleftrightarrow B(x) \qquad (۱۶)$$

دراینجا وابستگی به‌مجموعهٔ M مفهوم اصلـی می‌باشد (مثلا در تعریف (۷)، Mمجموعهٔ کلیهٔ متوازی‌الاضـلاعها است)، $A(x)$ صورت جدیدی به‌خود می گیرد و $B(x)$ شامل‌انتقال اختلافات ظاهری می‌باشد.

ازآنجاکه $B(x)$ شرط لازم وکافی‌برای $A(x)$ می‌باشد که درتعریف علامت$\Longleftrightarrow$ بیان شده‌است، ازتعریف (۱۶)درستی بیان زیر نتیجه می‌شود.

$$(\forall x\in M),\sim A(x)\Longleftrightarrow\sim B(x) \qquad (۱۷)$$

بابیانی دیگر، برای‌آنکه x متعلق به مفهومی کـه توسط تعریف (۱۶) بیان شده‌است نباشد، لازم وکافی‌است که x در رابطهٔ فوق صادق‌باشد، یعنی باید گزارهٔ $\sim B(x)$ درست باشد. رابطهٔ(۱۷) نتیجهٔ غیرمستقیم تعریف (۱۶) است. توجه می‌دهیم که از(۱۶)به (۱۷) مشابه رفتن‌ازیك‌قضیه (شامل‌شرط لازم‌وکافی) به‌قضیهٔ‌عکس است. رفتن ازتعـریف (۱۶) به‌نتیجـه‌اش (۱۷) رادر مثالهایی تجزیه وتحلیل می کنیم.

ازتعریف (۷) بدست می‌آوریم:

$$(\forall ABCD\ ،\ ABCD \text{ یك متوازی‌الاضلاع است})$$

$$(ABCD \text{ لوزی نیست})\Longleftrightarrow\sim(AB=BC)$$

یعنی‌برای اینکه متوازی‌الاضلاع لوزی نباشد، لازم وکافی‌است که اضلاع جانبی‌آن مساوی نباشند. این‌معیار غیروابستگی متوازی‌ـ الاضلاع به‌مفهوم لوزی‌است (اغلب چنین‌فرموله کردنها«تعریفات منفی» نامیده می‌شود).

درحالت داده شده رفتن‌از «تعریف منفی» خیلی‌ساده‌بود: کافی‌بود فقط «نه» رابه قضیهٔ تعریف شده واختلاف ظاهری اضافه کنیم.

به‌تعریف (۱۰) که خیلی‌پیچیده‌تر است می‌پردازیم. بافرض اینکه f و M دارای همان مفاهیم قبلی‌اند خواهیم داشت.

$$(\forall f,M)(\text{تابع } f \text{ ازبالا محدود نیست})\Longleftrightarrow$$

$$\sim[\exists a،\forall x\in M،f(x)\leqslant a]$$

اما داریم:

$$\sim[\exists a،\forall x\in M،f(x)\leqslant a]\Longleftrightarrow\forall a،\sim(\forall x\in M)$$

به‌این ترتیب غیروابستگی به‌مفهوم، تابع محدود ازبالارامی‌توان چنین‌نوشت:

$$(\forall f,M)(\text{تابع } f \text{ ازبالا محدود نیست})\Longleftrightarrow$$

$$(\forall a،\exists x\in M)(f(x)>a)$$

بابیان دیگر: تابعf (باحوزهٔ معیین‌بودن M) فقط وفقط‌درحالتی ازبالا محدودست که به‌ازای عدد دلخواهa داشته‌باشیم $x\in M$ که $f(x)>a$ باشد.

بدیهی است که فرموله کردن این‌موضوع امری‌است عادی وهرشاگردخوب (دانش‌آموزی که معلومات ریاضی‌کافی رادارد) باید بتواند خودشخصاً این‌فرمول را ارائه‌کند. لیکن بدبختانه عیب‌کار دراین است که به‌دانش‌آموزان چگونگی فرموله کردن را درمورد غیروابستگی به‌مفهوم آموزش نمی‌دهیم، دانش‌آموزان مجبورند خود روش منطقی را پیداکنند واین از عهـدهٔ هرکسی ساخته نیست. استفاده ازنمادهای منطقی امکان می‌دهد تاروشهای بحث‌رابطورصحیح فرموله کنیم، ودراین‌صورت کلیهٔ‌دانش‌آموزان ازعهدهٔ فرموله کردن‌آنها برخواهند آمد.

به‌عنوان‌مثال، غیروابستگی به‌مفهوم‌یك‌تابع زوج‌رابررسی می کنیم. ازتعریف (۱۱) بدست می‌آوریم:

$$(\forall f,M)(f \text{ زوج نیست})\Longleftrightarrow(\exists x\in M)\ ،$$

$$\sim[(-x\in M)\wedge(f(x)=f(-x))]$$

بااستفاده ازفرمول (۵) می‌توان این‌بیان‌را به‌صورت زیر نوشت:

$$(\forall f,M)(f \text{ زوج نیست})\Longleftrightarrow$$

$$(\exists x\in M)[(-x\notin M)\vee(f(x)\neq f(-x))] \qquad (۱۸)$$

بابیان دیگر: تابعf (باحوزهٔ معین بودن M) فقط وفقط درحالتی زوج است که چنان $x\in M$ پیدا شودکه‌یا $-x\notin M$

دنباله در صفحهٔ ۲۰۰

گروهی کنفرم از تبدیلات در فضای n بعدی

علیرضا امیر معز دانشگاه تگزاس تك

دراین مقاله انعکاس و تجانس روی فضاهای اقلیدسی n بعدی را بررسی می‌کنیم. چون حاصل‌ضرب دو انعکاس، انعکاس نیست، تجانس‌را به‌تبدیلات‌می‌افزائیم تامجموعه تحت‌حاصل‌ضرب گروه‌شود.

۱ـ اصطلاحات: حاملهارا باحروف بزرگ واعدادرا باحروف کوچك نمایش می‌دهیم . فضای اقلیدسی n بعدی رابه E می‌نمائیم. حاصل‌ضرب داخلی X وY عبارتست از (X,Y) واندازهٔ حامل X را با $\|X\|$ نمایش می‌دهیم. بقیهٔ اصطلاحات فضاهای اقلیدسی‌را مطابق معمول درکتابها بکار می‌بریم.

هرگاه f تابعی روی فضای E باشد، رسم‌است که‌بنویسیم

$$f(X)=Xf$$

این اصطلاح درکتابهای جبر خطی وهندسه بیشتر معمول است، حاصل‌ضرب توابع‌راکه معمولاتابع تابع‌است آسان‌می‌کند [۴وصفحه ۱۱۳].

۲ـ انعکاس: فرض کنیم که $A\neq\vec{0}$ و $A\in E$ باشد. تبدیل f را روی E چنین‌تعریف می‌کنیم: اگر $Af=B$ باشد؛

۱ـ $\{A,B\}$ بطور خطی غیرمستقل است، یعنی که A وB روی‌یك خطند.

۲ـ $\|B\|\|A\|=k\neq 0$

نتیجه می‌شودکه $B\neq\vec{0}$ باشد. تبدیل f را انعکاس (به مرکز O وبه قوت k) می‌نامیم. خواننده می‌تواند نشان دهدکه وقتی‌نقاط A وB دریك صفحه باشند، f همان انعکاس درهندسه است [۱].

اکنون B رابرحسب A حساب می‌کنیم. چون $\{A,B\}$ غیرمستقل است. نتیجه می‌شودکه $B=mA$ که m عددی‌است حقیقی.

از اینرو با در نظر گرفتن قسمت ۱ و ۲ چنین نتیجه می‌گیریم:

$$m=\frac{\pm k}{\|A\|^2}$$

چون حالت $-k$ بسیار شبیه حالتی‌است‌که $+k$ را درنظر بگیریم تنها حالتی‌راکه m مثبت است بررسی می‌کنیم.ازاینرو معادلهٔ انعکاس روی E می‌شود:

$$Af=B=\frac{kA}{\|A\|^2} \quad \text{و} \quad A\neq\vec{0}$$

۳ـ عکس تبدیل: ملاحظه می‌شودکه:

$$Af^2=[Af]f=[\frac{kA}{\|A\|^2}]f=$$

$$\frac{k[\frac{kA}{\|A\|^2}]}{\|\frac{kA}{\|A\|^2}\|^2}=A$$

نتیجه می‌گیریم‌که عکس f خودf است، به‌این‌معنی‌که $f^{-1}=f$ چنین توابعی‌را انولوسیون (Involution) می‌گویند.

۴ـ مشتق یك بردار: فرض‌کنیم‌که $X\in E$ برداری تابع متغیرt باشد. یعنی $X=X(t)$. ملاحظه می‌شودکه:

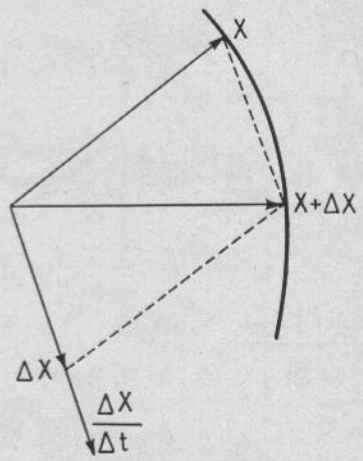
$$X(t+\Delta t)=X+\Delta X$$

بنابراین مشتق X نسبت به t را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta X}{\Delta t}=\frac{dX}{dt}$$

هرگاه حد وجود داشته باشد.

ملاحظه می شود که بردار $\frac{dV}{dt}$ موازی مماس برمنحنی است که انتهای X می سازد (مطابق شکل).



۵ـ مشتق حاصل ضرب داخلی : فرض کنیم که $X=X(t)$ و $Y=Y(t)$ باشد و $\frac{dX}{dt}$ و $\frac{dY}{dt}$ درهمسایگی $t=t_0$ وجود داشته باشد . سپس مشتق (X,Y) وجود دارد و

$$\frac{d}{dt}(X,Y)=(\frac{dX}{dt}\ ,\ Y)+(X\ ,\ \frac{dY}{dt}).$$

برهان را به خواننده واگذارمی کنیم.

۶ـ قضیه : انعکاس،زاویهٔ بین‌دو منحنی‌را حفظمی کند، به‌این معنی، فرض کنیم که:

$$X_1=X(t) \text{ و } X_2=X_2(t)\in E$$

وفرض کنیم که درهمسایگی $t=t_0$ مشتقات این‌توابع وجودداشته باشند. اکنون فرض کنیم کـه f انعکاس به قوت k ومرکز $\vec{O}$ باشد. لذا:

$$X_1f=Y_1=\frac{kX_1}{\|X_1\|^2} \text{ و } X_2f=Y_2=\frac{kX_2}{\|X_2\|^2}$$

آنگاه درمحل تلاقی دو منحنی یعنی در $X_1=X_2=X$ نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\left(\frac{dY_1}{dt}\ ,\ \frac{dY_2}{dt}\right)}{\left\|\frac{dY_1}{dt}\right\|\cdot\left\|\frac{dY_2}{dt}\right\|}=\frac{\left(\frac{dX_1}{dt}\ ,\ \frac{dX_2}{dt}\right)}{\left\|\frac{dX_1}{dt}\right\|\cdot\left\|\frac{dX_2}{dt}\right\|}$$

برهان. ملاحظه می‌شود که:

$$\frac{dY_1}{dt}=k\frac{\|X_1\|^2\frac{dX_1}{dt}-2(\frac{dX_1}{dt}\ ,\ X_1)X_1}{\|X_1\|^4}$$

$$\frac{dY_2}{dt}=k\frac{\|X_2\|^2\frac{dX_2}{dt}-2(\frac{dX_2}{dt},X_2)X_2}{\|X_2\|^4}.$$

به‌آسانی می‌توان حساب کرد که:

$$(1)\qquad \left\|\frac{dY_1}{dt}\right\|\left\|\frac{dY_2}{dt}\right\|=$$

$$=k^2\frac{\left\|\frac{dX_1}{dt}\right\|\left\|\frac{dX_2}{dt}\right\|}{\|X\|^4}.$$

به‌علاوه ملاحظه می‌شود که:

$$(2)\qquad (\frac{dY_1}{dt}\ ,\ \frac{dY_2}{dt})=k^2\Big(\frac{1}{\|X\|^2}\ \frac{dX_1}{dt}-\frac{2(\frac{dX_1}{dt}\ ,\ X)X}{\|X\|^4} \text{ و } \frac{1}{\|X\|^2}\ \frac{dX_2}{dt}-\frac{2(\frac{dX_2}{dt}\ ,\ X)X}{\|X\|^4}\Big)=k^2\frac{\left(\frac{dX_1}{dt}\ ,\ \frac{dX_2}{dt}\right)}{\|X\|^8}.$$

ازمقایسه (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که:

$$\frac{\left(\frac{dY_1}{dt}\ ,\ \frac{dY_2}{dt}\right)}{\left\|\frac{dY_1}{dt}\right\|\left\|\frac{dY_2}{dt}\right\|}=\frac{\left(\frac{dX_1}{dt}\ ,\ \frac{dX_2}{dt}\right)}{\left\|\frac{dX_1}{dt}\right\|\cdot\left\|\frac{dX_2}{dt}\right\|}$$

۷ـ حاصل‌ضرب دو انعکاس: فرض کنیم که f و g دوانعکاس روی E باشند چنانکه :

$$Xf=\frac{k_1X}{\|X\|^2} \text{ و } Xg=\frac{k_2X}{\|X\|^2}$$

ملاحظه می‌شود که:

$$Xfg=[Xf]g=\frac{k_2[\frac{k_1X}{\|X\|^2}]}{\left\|\frac{k_1X}{\|X\|^2}\right\|^2}=\frac{k_2}{k_1}X$$

لذاحاصل‌ضرب دوانعکاس‌یك تجانس‌است. به‌علاوه‌خواننده می‌تواند موضوع اینکه بطورکلی $fg\neq gf$ است امتحان کند .

چون مجموعهٔ انعکاسهای به مـرکز $\vec{o}$ روی E نسبت به حاصل‌ضرب **بسته** نیست، برای اینکه یك گروه ازتبدیلات‌بدست آوریم تجانسهای به مرکز $\vec{o}$ را به‌این مجموعه می‌افزائیم.

۸ـ تجانس: فرض کنیم که $A \neq \vec{o}$ و $A \in E$ تبدیل f را روی E چنین تعریف می‌کنیم.

$$Af = B = kA \quad k \neq 0$$

تبدیل f راتجانس به مرکز $\vec{o}$ ونسبت k می‌گوئیم[۱صفحه۳۱]. به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که تجانس تبدیلی کنفرم است.

۹ـ قضیه (یك گروه کنفرم) : مجموعهٔ $\{f,o\}$ که درآن f یا انعکاس به مرکز $\vec{o}$ و یا تجانس به مرکز $\vec{o}$ است گروه است.

برهان: باید ثابت کنیم که‌هر گاه $f,g \in \{f\}$ نتیجه‌می‌شود که $fg \in \{f\}$. بعضی‌از حاصل‌ضربها را امتحان کرده‌ایم. برای نمونه حاصل‌ضرب یك انعکاس ویك تجانس را بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم $Xf = hX$ و $Xg = \frac{kX}{\|X\|^2}$. ازاینرو

$$Xgf = [Xg]f = h[Xg] = h[\frac{kX}{\|X\|^2}] = \frac{hkX}{\|X\|^2}$$

که یك انعکاس است. هر گاه h منفی‌باشد، انعکاس باقوت‌منفی بدست می‌آید که می‌توان آن‌را حاصل‌ضرب یك‌انعکاس باقوت مثبت ویك‌تجانس بانسبت (۱ ـ) گرفت.

همچنین‌باید ثابت کنیم که‌هر گاه $f \in \{f\}$ باشد، $f^{-1} \in \{f\}$ است.

برای انعکاس‌این‌بسیارساده است‌چون تابع‌عکس‌یك انعکاس همان انعکاس است. هر گاه f تجانس‌باشد ، مثلا $Xf = hX$ ، عکس‌آن چنین می‌شود $Xf^{-1} = \frac{1}{h}X$ که نیز تجانس است.

بنابراین $\{f,o\}$ گروه‌است [۴وصفحه ۱۱۵].

۱۰ـ مبدل یك عنصر خطی: یك عنصرخطی در E را چنین می‌شود نوشت:

$$(A,X) = 0 \qquad (1)$$

که درآن A برداری است ثابت، X برداری است متغیر و c عدد است. انعکاس $Y \neq \vec{o}$ و $X = \frac{kY}{\|Y\|}$ را درنظرمی‌گیریم عنصر (۱) بدل می‌شود به

$$(kA,Y) = c\|X\|^2$$

دوحالت اتفاق می‌افتد.

(i) هر گاه $c = 0$ عنصرخطی به‌خودش بدل می‌شود.

(ii) هر گاه $c \neq 0$ عنصرخطی به‌یك کرهٔ $(n-1)$بعدی بدل می‌شود. البته هر گاه بگیریم:

$$Y \Longleftrightarrow (y_1,\cdots,y_n) \text{ و } A \Longleftrightarrow (a_1,\cdots,a_n)$$

معادلهٔ $(kA,Y) = c\|Y\|^2$ چنین می‌شود:

$$c\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - k\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0$$

این کره ازمرکزمی‌گذرد. البته درفضای دوبعدی دایره می‌شود.

۱۱ـ مبدل کره‌ها: کرهٔ $(n-1)$ بعدی در E را در نظر می‌گیریم. معادلـهٔ آن عبارتست از $\|X-C\| = r$. این معادله راچنین می‌شود نوشت.

$$(1) \quad \|X\|^2 - 2(C,X) + \|C\|^2 - r^2 = 0$$

اکنون انعکاس $X = \frac{kY}{\|Y\|^2}$, $Y \neq \vec{o}$ را درنظـر می‌گیریم مبدل (۱) چنین می‌شود:

$$\|C\|^2 - r^2\|Y\|^2 - 2k(C,Y) + k^2 = 0$$

(i) هر گاه این‌کره از مرکز بگذرد $\|C\| = r$ است و مبدل آن یك‌عضو خطی به معادلهٔ $(C,Y) = \frac{k}{2}$ می‌شود.

(ii) هر گاه‌کره از مرکز نگـذرد به‌کره‌ای دیگر بدل می‌شود.

بین کره‌ها هر گاه کرهٔ $\|X\| = \sqrt{k}$ را در نظر بگیریم، انعـکاس $X = \frac{kY}{\|Y\|^2}$ و $Y \neq \vec{o}$ آن‌را نقطه به‌نقطه‌به‌خودش بدل می‌کند.

مبدل عناصر خطی و مدور E را تحت تجانس به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

مراجعات

1. Amir-Moéz, A.R., **Lecture Notes on Geometric Transformations** on the Plane, Edward Brothers Inc., Ann Arbor, Michigan, 1969.

2. Amir-Moez, A. R., and Fass, A. L., **Elements of Linear Spaces.** Pergamon Press, Oxford, 1962.

3. Amir-Moéz, A.R. and Duran, B. S. **Linear Algebra of the Plane.** Western Printing Company, Lubbock, Texas. 1973

4. Birkhoff, Garrett and Maclane, Saunders, **A Survey of Modern Algebra** Mac Millan Company, New York, Collier – Mac Millan Ltd, London, 1965

دوران و برگردان

نوشتهٔ مارتین گاردنر

ترجمهٔ: مهندس داوید ریحان

یك شکل هندسی را موقعی متقارن گوئیم که پس از اینکه یك «تبدیل هندسی» برروی آن انجام دادیم به صورت اولیه‌اش باقی بماند. هرقدرتعداد تبدیلات ممکن بیشتر باشد، تقارن شکل کاملتر خواهد بود. مثلا حرف بزرگ A را اگردرآئینه‌تصویر کنیم، تغییر نمی‌کند. در این صورت گوئیم که این شکل دارای تقارن عمودی است. حرف B دارای تقارن عمودی نیست بلکه دارای یك تقارن افقی‌است: اگرآینه‌ای زیریا بالای این حرف قرار دهیم ، تصویرش فرق نمی‌کند. حرف S نه دارای تقارن عمودی و نه تقارن افقی است ولی اگر آنرا به اندازهٔ ۱۸۰ درجه (تقارن دوگانه) بچرخانیم، به حالت اولیهٔ خودباز می‌گردد. حرفهای‌بزرگ H ، I ، O و X بطور همزمان‌هرسهٔ این خصوصیات را دارا می‌باشند. هرگاه دوشاخهٔ حرف X با یکدیگر زاویهٔ قائمه‌بسازند، مرتبهٔ تقارن‌این‌حرف بیش ازحروف H و I است، چرا که بوسیلهٔ دوران به اندازهٔ یك ربع دور تغییری نمی‌کند (تقارن چهارگانه) حرف‌کاملا گرد O دارای بالاترین تقارن است زیرا تحت هرگونهٔ دوران ویا برگردان قرارگیرد، تغییری نمی‌کند.

چون زمین کره‌ای است که تمام اجسام بواسطهٔ نیروی‌ثقل به‌مرکز آن‌کشیده می‌شوند، فرمهای زنده عملا تحت تأثیر یك تکامل تدریجی قرارگرفته‌اندکه در نتیجه آن دارای یك تقارن عمودی قوی شده که‌با فقدان تقارن‌افقی و یاتقارن دورانی همراه است. انسان با توجه به اشیائی‌که بکار برد، از همین رویه پیروی‌کرد. اگر به دورو برخود نظری بیفکنیم، از اینکه‌تعداد بسیار زیادی از اشیاء پس‌از تصویرشدن در یك آئینهٔ‌قائم،صورت ظاهر خود را حفظ می‌کنند، به شدت تعجب خواهیم‌کرد: میز صندلی، لامپ،ظروف، اتومبیل، هواپیما، ساختمانها...،وغیره.

به علت همین مزیت تقارن قائم است‌که در بعضی از عکسهائی‌که برگردان شده‌اند، با وجود برخی از صحنه‌های غیرعادی و یا مشخصات معلومی چون حروف برگشت خورده و یا وسایط نقلیه‌ای‌که در قسمتهای بد از یك جاده حرکت می‌کنند، به سختی می‌توان آنرا ازعکس مثبت تشخیص داد. برعکس، در عکسهایی‌که سروته شده‌اند و حداقل در بسیاری‌از مواردمی‌توان به فوریت این موضوع را تمیز داد.

در مورد نقاشی نیز وضع به همین منوال است. حتی‌اگر نقاشیها به‌صورت برگردانی، از چپ به راست باشند ، چندان تأثیری در دید ندارند. ولی، سوای نقاشی‌هائی که‌کاملا آبستره هستند، دیده نشده است‌که هیچکدام از مسؤولان موزه‌ها یکی‌از تابلوها را سروته‌نصب‌کرده باشد. تاکنون در موارد بسیارنادری دیده شده است‌که نقاشیهای آبستره‌ای تصادفاً بطور وارونه‌باشند. در شمارهٔ پنجم اکتبرسال ۱۹۵۸ مجلهٔ نیویورك تایمز، چاپ یکی‌ازنقاشیهای‌آبستره‌اثرپیه‌موندریان(Pier Mendrian) در عین حال‌که چپ و راست بود. به صورت سروته نیز چاپ شده بودو این تفاوت تنها برای آنهائی‌که با این تصویرآشنائی داشتند قابل تشخیص بود. در سال ۱۹۶۱، در موزهٔ هنرهای مدرن نیویورك ، نقاشی Bateou de Matisse (کشتی ماتیس) به مدت ۴۷ روز به صورت سرو ته‌به نمایش‌گذاشته‌شده بود تا اینکه یك‌نفر به این اشتباه پی‌برد.

ما آنچنان به تقارن عمودی عادت‌کرده‌ایم و چنان‌اشیائی که سر و ته هستند برایمان نامأنوسندکه‌اگر بعضی از صحنه‌ها تابلوها و اشیاء را سروته‌کنیم، تصور شکل جدیدشان برایمان بسیار مشکل خواهد بود. دیده شده‌است‌که بسیاری از هنرمندان نقاشی دورنما و صحنه آرایان برای آزمایش رنگ منظره خم

شده‌اند و آن را از بین پاهایشان مشاهده کرده‌اند. حالت وارونه‌ای که بدین گونه دیده می‌شود آنچنان عجیب است که رنگها با حالت اول ممکن است کاملا مغایرت داشته باشند، بدین ترتیب که ترکیب رنگشان با فرمهای معمولی نمی‌خواند.

تورو Toreou عادت داشت که به مناظر بدین گونه بنگرد. وی در فصل نهم از کتاب Walden در بارهٔ مردابی که بدین طریق مشاهده شده بود، صحبتی به میان آورده‌است. بسیاری از فلاسفه و نویسندگان احساس سمبلیکی در بارهٔ دید مناظر وارونهٔ سروته داشته‌اند؛ به عنوان مثال می‌توان یکی از تمهای معروف جی. کی. چسترتون را نام برد. به نظر من، عالیترین حکایات جادوئی را **گابریل گال** (در کتاب The poet and the Lunatics شاعر و دیوانگان) به رشتهٔ تحریر در آورده است و در آن حکایت از کسی رفته‌است که گهگاه روی دست خود بالانس می‌زد تا بتواند «مناظر را آنچنان که واقعاً وجود دارد ببیند: که در آن ستارگان همچون گلها، ابرها چون تپه‌ها و تمام آدمیان به مشیت پروردگار آویزان باشند.»

یکی از مواردی که تصویر چیزهای وارونه را برایمان غیرمقدر می‌سازد نقاشیهای ماهرانه‌ای است که اگر آنها را ۱۸۰ درجه دوران دهیم به نقاشی متفاوت دیگری بدل می‌شوند. کاریکاتوریستهای سیاسی قرن نوزدهم از این نوع آثار را بسیار دوست می‌داشتند. وقتی خوانندهٔ کاریکاتور یك شخصیت برجسته را وارونه می‌کرد، یك خوك یا الاغ و یا هر گونه کفایهٔ توهین‌آمیز دیده می‌شد. امروزه اینگونه آثار عملا به ندرت بوجود می‌آید، هرچند که در شمارهٔ ۱۸ سپتامبر مجلهٔ لایف یکی از آفیشهای مشهور ایتالیائی را زیب جلد خود کرده بود که در آن تصویر **گاریبالدی** را اگر ۱۸۰ درجه دوران می‌دادیم به تصویر **استالین** مبدل می‌شد.

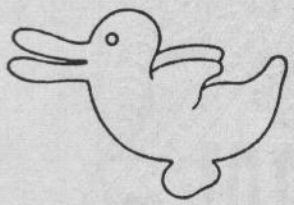
روزنامه‌های بچه‌ها نیز گاهگاهی از این نوع آثار را به‌طبع می‌رسانند، در ضمن برای آنونسهای تبلیغاتی نیز از این شیوه استمداد می‌جویند. در پشت جلد مجلهٔ لایف ۲۳ نوامبر ۱۹۵۳ مردی سرخپوست را نشان می‌داد که یك ساقهٔ ذرت را تماشا می‌کرد. شاید هزاران خواننده متوجه نشده‌اند که اگر این تصویر را وارونه کنیم، تبدیل به مردی می‌شود که با دیدن یك جعبه ذرت باز شده دارد لبهایش را می‌لیسد.

من فقط با چهار اثر که منتخبی از تصاویر قابل وارونه کردن باشند، آشنائی دارم. **پیتر نیوول** یکی از نقاشان مشهور کودکان که در سال ۱۹۲۴ ناپدید شد، دو مجموعه از صحنه‌های رنگین که پس از سروته کردنشان تبدیل به اشکال سرگرم کننده‌ای می‌شوند، منتشر کرد: تاپسی‌ها و توزوی‌ها (۱۸۹۳) و تاپسی‌ها و توزوی‌های جلد دوم (۱۸۹۴). در ۱۹۴۶ یکی از ناشران لندنی مجموعه‌ای از پانزده پرترهٔ جالب و قابل وارونه کردن از **رکس ویستلر** را منتشر کرد که یکی از نقاشان آفیش بود که در سال ۱۹۴۴ فوت کرد. عنوان کاملا متقارن این اثر iOHOi نام داشت (شکل زیر روی جلد کتاب را نشان می‌دهد).

فن تصاویر واژگون پذیر بین سالهای ۱۹۰۳ و ۱۹۰۴ بوسیلهٔ یکی از نقاشان به نام **گوستاو وربیك** به اندازهٔ غیر قابل تصوری پیشرفت کرد. وی هرهفته یك نوار نقاشی رنگی شش تصویری را برای صفحهٔ «خنده» نیویورك هرالد که روزهای یکشنبه منتشر می‌شد، تهیه می‌کرد. این شش تصویر را باید به ترتیب نگاه کرد و شرحهای مربوطه را خواند، سپس صفحه را سروته کرد و شرحهایی را که در پائین تصاویر واژگون شده و در ترتیب عکس قرار گرفته است خواند. **وربیك** تداوم بین دوسری را به کمك دو پرسناژ که او آنها را **خانم لاوکینز کوچولو و موفاروی پیر** می‌نامید، حفظ می‌کرد. هر کدام از این سریها پس از دوران ۱۸۰ درجه به دیگری تبدیل می‌شد. معلوم نشد که چگونه وربیك توانست هفته به هفته این تصاویر را بیافریند و خود دیوانه نشود. مجموعه‌ای از

بیست وپنج‌نوار از این‌نوع درسال ۱۹۰۶ بوسیلهٔ **جی.دبلیو. دیلینگام** Dillingham تحت عنوان «تصاویرقابل‌سروته کردن خانم لاوکینزکوچولو و موفاروی‌پیر» بطبع رسید. این اثر نایاب است.

در این بازیهای گرافیك دوران ۹۰ درجه کمترمعمول است، زیرا حدس نتیجه بسیار آسان است. ممکن است بابکار بردن کمی هنراثری قابل اعجاب بوجود آورد. به عنوان مثال یکی از مناظر نقاش قرن هفدهم سوئیسی به‌نام **ماتوئوس مریان** پس از دوران به اندازهٔ یك ربع دور به صورت تصویر یك مرد در می‌آمد. تصویر «خرگوش ـ مرغابی» یکی‌ازمثالهای مشهوری است‌که در مورد نقاشیهای تبدیل پذیر به اندازهٔ ربع دور می‌توان ذکر کرد بسیاری از روانشناسان در تستهای خود ازاین تصاویر بسیار بکار برده‌اند. چندسال‌پیش **مورتون‌وایت** یکی از فیلسوفان هاروارد، نقاشی«خرگوش‌ـمرغابی» را در یکی از مقالات خود چاپ‌کرد تا نشان دهدکه دو تاریخ نویس از یك حادثهٔ منحصر به فرد از وقایع تاریخی‌می‌توانند دوبرداشت‌کاملامتفاوتی داشته باشند.



صفحه را ربع‌دور به راست بچرخانید وشکل را نگاه کنید

در بسیاری از موارد تجربه کرده‌ایم که بعضی چیزهادر تحت زاویهٔ بخصوصی دیده شوند و اگر آنهاراسروته‌کنیم‌ممکن است دچار اشتباه شویم. همهٔ منجمین می‌دانند عکسهائی راکه از ماه‌گرفته شده است باید طوری مشاهده‌کردکه نور خورشید از بالا به به پائین برآتشفشانهای ماه تابیده شده باشد. اگریك عکس از ماه را سروته‌بگیریم، قلل آتشفشانی آن مانندبسترهای صخره‌ای بلندی‌که برروی یك سطح قرارگرفته باشد، بنظر می‌رسد واین‌پدیده معلول این واقعیت است‌که مابه اشیائی‌که از پائین‌به‌آنها نور تابیده شوند، بسیارکم عادت داریم. درشکل روبرویکی‌ازاشتباههایی راکه ازمیان نمونه‌های سرگرم‌کننده برگزیده شده است می‌بینید. اگر

شکل‌را وارونه‌کنید، قسمت‌کسری نان‌شیرینی راملاحظه‌می‌کنید. بازهم دراینجا، می‌توان علت‌این موضوع راچنین تشریح‌کردکه ماهمواره به‌بشقابها وشیرینی‌جات از بالا نظاره‌کرده‌ایم و تقریباً هرگزآنهارا ازپائین رؤیت نکرده‌ایم.

واضح است که پرتره‌های وارونه امکان وجودی ندارد چراکه چشمان ماتقریباً درنیم فاصلهٔ بالائی سروچانه قراردارد. دیده شده‌است‌که دانش‌آموزان گاهی اوقات‌کتاب تاریخشان را وارونه‌کرده‌اند وبامداد، بینی‌ودهان برروی پیشانی‌شخصیت‌مشهور گراورها تعبیه‌کرده‌اند.

وقتی‌این تبدیل‌را باتصویر یك نفر وبه‌کمك مداد ابرو و ماتیك انجام‌دهیم، نتیجهٔ عمل‌بسیار مضحك خواهد شد. این‌عمل یکی‌از سرگرمیهای موردعلاقهٔ مجالس دوستانهٔ قرن نوزدهم‌بوده است. روایت زیر مستخرج ازیکی‌ازکتب قدیمی تحت عنوان «امشب‌چه خواهیدکرد» است.اسب‌سربریده‌شده‌همواره تولید یك نوع ناراحتی درتماشاچی نموده‌است وآنرا نباید بطور ناگهانی جلوی اشخاص عصبی قرارداد... دروسط اتاق میزبزرگی قرار دهید وروی آنرا باسفره‌ای بپوشانید به‌نحوی‌که این‌سفره از طرفین‌میز آویزان باشد وتاروی زمین‌برسد ونتوان زیر آنرا رؤیت‌کرد... پسربچه‌ای‌که دارای موهای‌نرم ونسبتاً بلندی‌باشد انتخاب‌کنید، تاازآن بتوانید به‌عنوان سر استفاده‌کنید؛ این‌پسر بچه به پشت (تاقباز) زیرمیز دراز می‌کشد وبغیراز قسمتی‌از صورتش‌که دربالای بینی‌اش واقع است، کاملا درزیر سفره مخفی می‌شود.

حال‌کافیست بادقت موهای اورا شانه‌بزنید وآنرابه‌صورت یك سبیل درآورید وروی پیشانی وگونه‌هایش یك صورت نقاشی کنید؛ ابروهای دروغین، بینی‌ودهان رابه‌کمك مداد ابروی سیاه یامرکب چین‌کاملا مشخص می‌کنید ودر عین‌حال ابروهای اورا درزیرنقابی ازپودر یاآرد بپوشانید. درضمن می‌توانید بقیهٔ صورتش‌راکمی پودر بمالید تارنگ مردگان‌را به خود بگیرد..

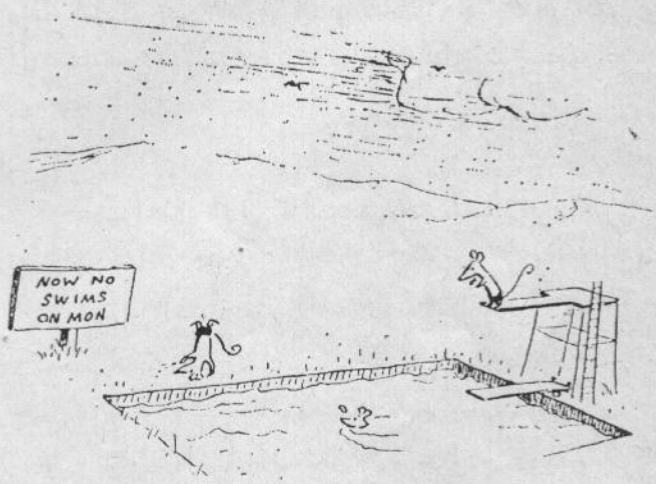
به‌کمك یك‌نورکمرنگ دراتاقی‌که محل نمایش است، می‌توانید برشدت‌وحشت‌بیفزائید. بدین‌ترتیب می‌توانید با«بزك» کردن سر، بسیاری ازافراد رابه اشتباه بیندازید. صحنه وقتی حالت وحشتزاتری به‌خود می‌گیردکه«سر» چشمانش‌را بازکند نگاهش‌را به طرف چپ و راست بگرداند، گونه‌ها و پیشانی حقیقی‌اش‌را چین‌وچروك بیندازد.

یك‌نفر فیزیکدان به‌نام **رابرت‌وود** حالت دیگری از سر بریده‌شده‌را به‌صورت سر گرمی‌پیشنهاد داده‌است. بازهم‌صورت به‌وضعی که اخیراً تشریح‌شد درمعرض دیدقرار می گیرد ولی‌این دفعه‌پیشانی، چشمان و بینی‌پوشانیده می‌شوند ودهان وچانه‌آشکارا می‌شوند. برروی چانه‌دوچشم ویك‌بینی نقاشی‌می کنیم ونتیجهٔ‌عمل مخلوق عجیبی می‌شود که دارای یك‌سر بزرگ همراه بایك‌دهان عظیم وجنبان است. این‌حقه یکی‌از چشمه‌کارهای مورد علاقهٔ **پل‌وینسل**، شعبده بازتلویزیونی است. وی سرخودرا برروی بدن یك عروسك سوار می کند وپرسناژی به نام **ازوالد** (Ozwald) می آفریند. بایك‌تکنیك مصنوعی دوربین‌تلویزیونی تصویررا سروته‌می‌سازد تا ازوالد رادرجهت خوبی‌قرار دهد. در سال ۱۹۶۱، یك‌آرم‌کامل ازوالد درتجارت بکار گرفته شد؛ این آرم باعروسك وآئینهٔ مخصوصی که هر کس می‌توانست خودرادر آن ببیند، کامل‌می‌شد.

بادست، می‌توان کلماتی نوشت که دارای تقارن دوجانبه‌ای باشند. ازاین‌نوع، می‌توان روزنامهٔ مخصوص انجمن باغ‌وحش سان‌دیگو رانام‌برد که‌به‌نام Zoonooz نامیده‌می‌شود. بزرگترین جمله‌ای ازاین نوع‌راکه من‌می‌شناسیم، درکنار استخری قرار داشت که هم‌درحالت عادی و هم درحالتی که بالانس زده باشیم، می‌توانیم آنرا بخوانیم:

NOW NO SWIMS ON MON

(دوشنبه‌ها شنا نکنید).



درمورد اعداد نیزمی‌توان ترکیباتی رابدست‌آورد که پس ازواژگون کردنشان، همان عدد قبلی‌بدست‌آید. تاکنون‌خیلی‌ها ملاحظه‌کرده‌اند که عدد **1961** دارای چنین خاصیتی‌است. این عدد اولین‌سال متقارن دوجانبه پس‌از **1881** است ودومی پس از **6009** وبیست وسومین عدد پس‌از۱ بشمار می‌رود. برمبنای محاسبه‌ای که **جان پومری** بعمل‌آورده است، بین‌سالهای ۱ و ۱۰۰۰۰ سی‌وهشت سال را می‌توان یافت که دارای چنین‌خاصیت بارزی باشند. بزرگترین‌فاصلهٔ‌خالی‌بین **1961** و **6009** وجود دارد. درشمارهٔ دسامبر **1961** «مجله ریاضیات **بووزر**» روش میان‌بری‌برای‌اثبات اینکه‌بین‌سال۱و۱۰۰۰۰۰۰ دقیقاً۱۹۸سال برگشت پذیر وجود دارد، ارائه داده است. در روی جلد شمارهٔ ژانویهٔ **1961** مجلهٔ **ماد Mad**، تصویر قابل معکوس کردنی چاپ شده‌بود که دروسط آن سال به‌عدد نوشته شده‌بود وشخصی را روی‌آن نشان می‌داد که درحال مسخره کردن‌آن سال‌بود.

بعضی‌اعداد مانند **7734** (با۴ ازبالاباز)، وقتی‌معکوس شوند، به‌صورت یك‌کلمه درمی‌آیند؛ بعضی دیگر به هنگامی‌که تصویرشوند، چنین‌صورتی‌را به‌خود می گیرند. برهمین مبنا، خواننده می‌تواند مسائل ساده زیررا حل‌نماید.

۱ـ الیویه‌لی، چهل ودوساله، که‌درخیابان مین‌شمارهٔ **312** زندگی‌می کرد، ازشهرداری‌تقاضا کرد که‌شمارهٔ **770 31—337** رابرای ماشینش بدهند. چرا؟

۲ـ ثابت‌کنید نتیجهٔ جمع زیر صحیح است:

```
      3 4 1 4
        3 4 0
    7 4 8 1 3
  -----------
  4 3 3 7 4 8 1 3
```

۳ـ در جدول زیر دور شش رقم را که مجموعشان برابر با ۲۱ است، بامداد خط بکشید.

```
1 1 1
3 3 3
5 5 5
9 9 9
```

۴ـ سبدی دارای بیش‌از نیم‌دوجین تخم‌مرغ است. هر تخم‌مرغ‌یاسفیداست یاقهوه‌ای. فرض می کنیم که‌تعداد تخم‌مرغهای سفید x وتعداد تخم‌مرغهای قهوه‌ای y باشد. مجموع yx را اگرازآنطرف بخوانیم، برابربا حاصل‌ضرب x و y می‌شود. تعداد تخم‌مرغها چقدراست؟

دنباله در صفحهٔ ۲۱۹

دربارهٔ اعداد اول چه‌می دانید؟ (۳)

ترجمهٔ: **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی‌دانشگاه آذرآبادگان

۹ـ چه ارقامی می‌توانند در ابتدا و انتهای اعداد اول باشند؟

بدیهی است آخرین رقم یك عدد اول که بیش از یك رقم دارد نمی‌تواند زوج یا ۵ باشد ، زیرا در این صورت عدد به ۲ یا ۵ قابل قسمت خواهد بود یعنی عدد اول نیست . بنابراین آخرین رقم یك عدد اول بزرگتر از ده ۱،۳،۷ یا ۹ می‌باشد.

حال این مسئله پیش می‌آید که آیا می‌توان دربارهٔ ارقام عدد اول، مثلا در مورد قرارگرفتن کمترین یا بیشترین رقم در اول و آخر عدد اظهار نظر کرد؟ قضیهٔ زیر آشکار می‌سازد که نمی‌توان بیش از این دراین باره گفتگو کرد:

«هرگاه دو رشته ارقام به طور دلخواه داشته باشیم (دستگاه دهدهی) یعنی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ که در آن $b_n = 1$ و ۳ و ۷ و ۹ و a_n است، پس به تعداد p چنین عدد اختیاری وجود دارد که اولین m رقم آنها بطور متوالی $a_1, a_2, \ldots, a_m$ و آخرین n رقم آن اعداد متوالی b_1, b_2 و b_n باشد».

با وجود اینکه از طریق مقدماتی می‌توان به برهان قضیه رسید، اما باز اثبات آن بسیار مشکل است. از این قضیه نتیجه می‌شود که اعداد اول موجود در آغاز و انتهای آن عدد دلخواه برابر یك است (لیکن ارقام وسط ممکن است غیر یك باشند). بلافاصله این فکر ناشی می‌شود که آیا تعداد نامحدودی اعداد اول وجود دارند که همه ارقامشان (۱) باشد. پاسخ چنین سؤالی را نمی‌دانیم ولی تعداد کمی از این اعداد را می‌شناسیم. مثلا عدد ۱۱ و عدد زیر:

$$\frac{10^{23}-1}{9} = 11{,}111{,}111{,}111{,}111{,}111{,}111{,}111{,}111$$

اثبات اول بودن عدد فوق در جلد دوم کتابی که M.Kraitchik تألیف کرده وجود دارد، والبته این اثبات آسان نیست. اعدادی هم مطابق زیر وجود دارند که با وجود یك بودن تمام ارقامشان عدد اول نیستند:

$$111 = 3 \times 37 \text{ و } 11{,}111 = 41 \times 271 \text{ و}$$

$$1{,}111{,}111 = 239 \times 4649$$

و نیز عدد $\left(\frac{10^{37}-1}{9}\right)$ دارای ۳۷ رقم و غیر اول و عدد $\frac{10^{641}-1}{9}$ دارای ۶۴۱ رقم و غیر اول (قابل قسمت به ۱۲۸۳) می‌باشند.

بعد از این کاوش، می‌ماند اعدادی که بجز یك رقم آنها، بقیه یك باشد مثل ۱۳ و ۱۱۳. نمی‌دانیم آیا تعداد این اعداد هم محدود است یا نامحدود. تعداد ومحدودیت اعداد اولی که اول و آخر آنها (۱) و باقی ارقامشان صفر باشد غیرمشخص نیست (مثل ۱۰۱). واضح است که چنین اعدادی باید به صوت $(10^{2^n}+1)$ باشند (n عدد طبیعی)، البته این شرط کافی برای اول شدن نیست زیرا:

$$10^{2^2}+1 = 73 \times 137$$

۱۰ـ اعداد اولی که از عدد داده شده‌ای بزرگتر نیستند:

به فرض آنکه x عدد مفروضی باشد، اعداد اولی را که از x کوچکترند با $\pi(x)$ نشان می‌دهند به عنوان مثال:

$$\pi(1)=0 \text{ و } \pi(2)=1 \text{ و } \pi(3)=2 \text{ و } \pi(4)=2$$

$$\pi(5)=3 \text{ و } \pi(10)=4 \text{ و } \pi(100)=25 \text{ و}$$

$$\pi(1000)=168 \text{ و } \pi(10000)=1229 \text{ و}$$

$$\pi(10^8)=5{,}761{,}455 \text{ و } \pi(10^9)=50{,}847{,}534$$

$$\pi(10^{10})=455{,}052{,}512$$

L.Locher - Ernst ملاحظه کرد که به ازای $n>50$ عبارت:

$$f(n)=\frac{n}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

تقریباً مقدار تقریبی خوبی برای عدد $\pi(n)$ است. مثلا $\pi(10^3)=168$ و $f(10^3)=167/1$. به ازای $n=10^9$ خارج قسمت $\frac{\pi(n)}{f(n)}$ برابر ۱/۰۰۷ و به ازای $n=10^{10}$ برابر ۱/۰۰۵ می‌باشد.

همچنین می‌توان ثابت کرد (این اثبات مقدماتی گرچه طولانی و پیچیده است) که نسبت $\frac{\pi(n)}{f(n)}$ وقتی n به بینهایت میل کند مساوی یك است.

محاسبه $f(n)$ به ازای مقدار بزرگ n مشکل است، هر چند عبارت تقریبی دیگری برای $\pi(n)$ می‌توان به صورت $\frac{n}{\text{Log}n}$ دست‌وپا کرد که Logn لگاریتم نپری است، درسال ۱۸۹۶ آقای:

J. Hadonard و ch de la vallee poussion

ثابت کرد که نسبت $\pi(n)$ به $\frac{n}{\text{Log}n}$ وقتی n به‌بینهایت میل کند مساوی (۱) است. می‌توان ثابت کرد که میلیاردمین عدد اول به صورت فوق (یعنی عدد p) دارای یازده رقم است.

اثبات برای عدد صحیح $n>1$ آسان است:

n عدد اول $\qquad \frac{\pi(n-1)}{n-1}<\frac{\pi(n)}{n}$

nعددغیراول $\qquad \frac{\pi(n-1)}{n-1}>\frac{\pi(n)}{n}$

به طریق مقدماتی می‌توان نشان داد که نسبت $\pi(n)$ به nوقتی n به سمت بینهایت میل نماید برابر صفراست. به ازای‌هرمقدار طبیعی n نیز رابطهٔ $\pi(p_n)=n$ واضح است.

بسادگی می‌توانیم اثبات کنیم که می‌توان سری اعداد دلخواهی بدست آورد که حاوی اعداد اول نباشند. یك سری از چنین اعدادی وقتی m اعداد متوالی است عبارتند از:

$(m+1)!+2$ و $(m+1)!+3$ و $(m+1)!+4$ و

$(m+1)!+(m+1)$

واضح است که اولین عدد این سری به ۲، دومین عددبه۳ و...، آخرین عدد به $(m+1)$ بخش پذیر است، به‌ازای $m=1000$ اعداد بسیار بزرگی بدست‌می‌آید. بین ۱۰۰ عدد متوالی از (۱،۶۷۱،۸۰۰) تا (۱،۶۷۱،۹۰۰) هیچ‌عدد اولی وجود ندارد.

اثبات اینکه چه تعداد از اعداد اول وجود دارند که‌ارقام دو طرف آنها اعداد غیراول باشد نیز مشکل است. قضیهٔ وابسته به E.Landau که می‌گوید «به ازای اعداد طبیعی به‌قدر کافی بزرگ n داریم $\pi(2n)<2n(\pi)$. نیز، اثبات‌مشکلی‌دارد به ازای اعداد طبیعی نامحدود $x>1$ و $y>1$ صحت‌نامساوی $\pi(x+y)\leqslant\pi(x)+\pi(y)$ هنوزمحقق نیست.

۱۱ـ خاصیتهای nامین‌عدد اول

H.J.Scherk در سال۱۸۳۰ اعلام داشت که به‌ازای عدد طبیعی n، با اختیار علامت مناسب + یا − فرمول‌زیر برقرار است:

$$p_{2n}=1\pm p_1\pm p_2\pm p_3\pm\cdots\pm p_{2n-2}+p_{2n-1}$$

$$p_{2n+1}=1\pm p_1\pm p_2\pm p_3\pm\cdots\pm p_{2n-1}+2p_{2n}$$

که البته اثبات آن مشکل است. به عنوان مثال:

$$\begin{cases}p_6=1+p_1-p_2-p_3+p_4+p_5\\ p_7=1+p_1-p_2-p_3+p_4-p_5+2p_6\end{cases}$$

یعنی:

$$\begin{cases}13=1+2-3-5+7+11\\ 17=1+2-3-5+7-11+2\times 13\end{cases}$$

می‌توان‌رابطهٔ $p_{2n+1}=\pm p_1\pm p_2\pm\cdots\pm p_{2n-1}+p_{2n}$ را هم داشت بطور مثال:

$$p_7=p_1+p_2-p_3-p_4+p_5+p_6\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 17=2+3-5-7+11+13$$

اگر a و $b>a$ اعداد مثبتی باشند اعداد اول p و q را می‌توان چنان بدست آورد که $a<\frac{p}{q}<b$ شود، می‌توان اثبات کرد که به ازای هرمقدار مثبت و حقیقی x، رشته $\frac{p\pi(nx)}{n}$ وقتی n به بینهایت میل کند به x میل می‌کند.

ثابت شده است که تعداد نامحدودی اعداد اول p با این خاصیت وجود دارند که عدد اول بعد از p از عدد اول قبل از p به p نزدیکتر است. به عبارت دیگر به اثبات رسیده است که تعداد نامحدودی از اعداد طبیعی n وجود دارد بطوری که:

$$p_n > \frac{1}{2}(p_{n-1} + p_{n+1})$$

یعنی

$$p_{m+1} - p_n < p_n - p_{n-1}$$

و تعداد نامحدود از اعداد n هم وجود دارد بطوری که:

$$p_n < \frac{1}{2}(p_{n-1} + p_{n+1})$$

باشد. ولی نمی‌دانیم آیا تعداد نامحدودی از اعداد n وجود دارد بطوری که:

$$p_n = p_{n-1} + p_{n+1}$$

P.Turàn و P.Erdäs حتی ثابت کرده‌اند که تعداد نامحدودی از اعداد اول n وجود دارد بطوری که:

$$p^2_n > p_{n-1} + p_{n+1}$$

و تعداد زیادی n نیز می‌توان یافت بطوری که:

$$p^2_n < p_{n-1} - p_{n+1}$$

گردد. و همچنین به‌ازای

$$n = 3, 4, 5, \ldots \quad p_{n+1} < p_{n-1} + p_n$$

است. قضیهٔ زیر را که اثباتش مشکل نیست ولی مسلماً طولانی می‌باشد داریم:

«برای هرمقدار طبیعی m، یك عدد طبیعی m چنان وجوددارد که:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} > m$$

سری‌های ۴تایی از اعداد اول هم وجود دارند که شامل دو عدد اول «دوقلو» هستند مثلا:

۱۹و۱۷ و ۱۳ و ۱۱ - ۱۷۹ ، ۱۸۱ ، ۱۹۱ ، ۱۹۳

چنانکه دستگاه‌اعدادی‌متشکل‌ازاعداد p، $p+2$ و $p+6$ و $p+8$ داشته باشیم می‌گوئیم «چهارقلو» یا quadruplet داریم. مثلا دسته اعداد (۱۹و۱۷و۱۳و۱۱) چنین اعدادی هستند ولی (۱۷۹و۱۸۱و۱۹۱و۱۹۳)جزء چنین اعدادی نیستند. به‌ازای: $p = 5$ و ۱۰۱ و ۱۹۱ و ۸۲۱ و ۱۴۸۱ و ۳۲۵۱ مثالهای دیگری هم از چنین اعداد قابل دسترسی‌است. فرض پیشنهادی این است که تعداد نامحدودی از چنین دسته اعدادی وجود دارد.

W.A.Golubew در سال ۱۹۵۹ تا ده میلیون به تعداد ۸۹۹ سری از این اعداد، و تا ۱۵ میلیون به تعداد ۱۲۰۹ از چنین سری اعداد را بدست آورد. تاکنون بزرگترین‌سری اعداد اول چهار قلوتوسط A.Ferrier به‌ازای

$$p = 2,863,308,731$$

بدست آمده است.

۱۲ـ کثیر الجمله‌ها و اعداداول

ممکن است این سؤال در ذهن خواننده خطور کند که آیاکثیرالجملهٔ $f(x)$ با متغیر x چنان وجود دارد (با ضرایب صحیح) که به ازای هرعدد طبیعی x مقدار $f(x)$ عدد اولی را ارائه دهد. نشان خواهیم داد که چنین کثیرالجمله‌ای وجودندارد به فرض :

$$f(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots \alpha_{m-1} x + \alpha_m$$

کثیرالجملهٔ درجهٔ m با ضرایب صحیح $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ باشد $(\alpha_0 \neq 0)$ اگر $\alpha_0 < 0$ باشد وقتی x بقدرکافی بزرگ است $f(x) < 0$ خواهد شد. پس فرض می‌کنیم $\alpha_0 > 0$. می‌دانیم‌عدد صحیح x_0 را می‌توان چنان بدست آورد که $n = f(x_0) > 1$ شود و به ازای $x > x_0$ داریم $f(x) > f(x_0)$ نشان خواهیم دادکه به‌ازای هر عدد طبیعی k ، $f(x_0 + k_n)$ عدد غیراول است. اگر x و h اعداد طبیعی باشند به ازای عدد طبیعی i مقدار $(x+h)^i - x^i$ به $(x+h) - (x) = h$ قابل قسمت می‌باشد بنابراین اعدادی به صورت:

$$a_{m-i}(x+h)^i - a_{m-i}x^i$$

به ازای $i = 0, 1, \ldots m$ به h بخش‌پذیرند. نتیجه اینکه‌عدد $f(x_0 + k_n) - f(x_0)$ به k_n قابل قسمت است یعنی $f(x_0 + k_n) - n = t_n$ که‌می‌دهد $f(x_0 + kn) = (t+1)n$ و ثابت شدکه عدد $f(x_0 + k_n)$ (که از $f(x_0) = n$ بزرگتر است) به عدد طبیعی $n > 1$ بخش پذیر بوده وبنابراین‌غیراول است. پس اگر $f(x)$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد و ضریب بزرگترین توان نیز مثبت باشد، تعداد نا محدودی از اعداد طبیعی x وجود داردکه به ازای آن عدد $f(x)$ غیراول است. بااین وضع کثیرالجمله‌هائی می‌شناسیم که به‌ازای بعضی‌از اعداد، مقدارشان اعداد اول را ارائه می‌دهند . به عنوان مثال

بقیه‌درصفحهٔ ۲۱۹

با ریاضیات آشتی کنید

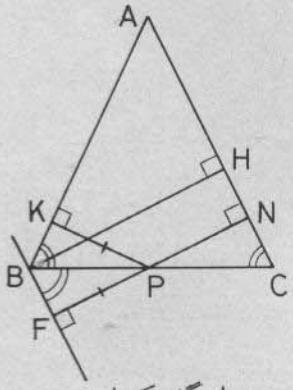
(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

تألیف A.BULLAS استاد آموزش ریاضی در فرانسه

ترجمه : عبدالحسین مصحفی

مسئله- مثلث متساوی‌الساقین ABC به‌رأس A داده‌شده است. برقاعدهٔ BC ازآن نقطهٔ P رابه دلخواه اختیار می‌کنیم وازآن عمودهای PK وPN رابه ترتیب بر AB و AC رسم می‌کنیم. ثابت‌کنیدکه مجموع PK+PN مقدار ثابت است و به‌وضع نقطهٔ P برBC بستگی‌ندارد.

«حالت خاص موجب حالت خاص می‌شود». وقتی P در وضع خاص روی B اختیارشود،دراین‌حالت PK=۰ و PN با BH ارتفاع وارد از B بر AC برابر می‌گردد. اگر مجموع PK+PN به وضع P برBC بستگی نداشته باشد پس می‌توان گفت‌که این مجموع برابراست باطول BH که‌مقدار ثابت‌است. ازاین جهت صورت مسئله چنین‌می‌شود: ثابت‌کنیدکه P به‌هر وضعی بر BC باشد PK+PN=BH است.



این‌مسئله از کدام نوع است؟ از نوع دوم. پس باید خط جدیدی به‌شکل اضافه‌کرد. این‌خط را ازکدام نقطه رسم‌کنیم‌که سرشار ازفایدهٔ بیشتر باشد؟ از نقطهٔ B که رأس یکی‌از دو زاویهٔ متساوی مثلث‌است وارتفاع BH نیزازآن رسم می‌شود. از B خطی‌موازی باضلع AC رسم می‌کنیم. اکنون معلوم کنیم‌که‌چه تصویرهایی ازفیلم قضیه‌ها درشکل مشاهده می‌شود.

دوزاویهٔ C و CBF نسبت به دوخط متوازی BF وAC ومورب BC باهم برابرند.دوزاویهٔ C و ABC نیزبنا به‌فرض باهم‌برابرند. دوزاویه‌که بازاویهٔ سوم برابر باشند خود باهم برابرند. پس‌دو زاویهٔ ABC وCBF باهم برابرند، یعنی خط BC نیمساز زاویهٔ ABF است.

برای اثبات تساوی PK+PN=BH قبلا مجموع PK+PN را مشخص‌کنیم. پس PN را امتداد می‌دهیم. اولین تصویری از فیلم قضیه‌هاکه مشاهده می‌کنیم این است‌که AC و BF که باهم موازیند و AC بر FN عمود است BF نیزبر FN عموداست. دومین تصویر اینکه PK=PF زیرا P برنیمساز زاویهٔ ABF واقع‌است و PK و PF بردو ضلع این‌زاویه عمودند. سومین تصویر: پاره‌خطهای متوازی محصور بین‌خطهای متوازی باهم برابرند. یعنی FN=BH

داریم: PN+PK=PN+PF=FN

وهمچنین داریم:

FN=BH پس PN+PK=BH

**

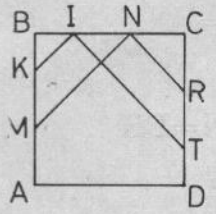
درهردبیرستان افرادی‌هستندکه‌درریاضیات قوی‌می‌باشند. اماگاه پیش‌می‌آیدکه بعضی‌از این افراد خیلی پرمدعا و پرافاده تشریف دارند. شمادرامتحان ثلث‌اول درریاضی‌نمرهٔ‌تك‌آورده‌اید. درامتحان ثلث‌دوم‌هم بازنمرهٔ ریاضی‌شما تك‌شده است. قبلاًمأیوس بوده‌ایدوخودرا درریاضی‌آخرسال تجدیدی‌به‌حساب‌می‌آورده‌اید. امابنا به‌توصیهٔ یکی‌از دوستان مقاله‌های «باریاضیات آشتی‌کنید» را خوانده‌اید وفعلا درتلاش هستید وامیدوارید‌که درپایان سال‌در ریاضی نمرهٔ عالی خواهیدگرفت. جناب پرافاده ازاین موضوع باخبرمی‌شود، آنگاه شمارا به باد تمسخر می‌گیرد. در ساعت تفریح درگوشه‌ای ازحیاط مدرسه بادوستان خود سرگرم صحبت هستید. ایشان سرمی‌رسند وباحالت تمسخرخطاب به‌شمامی‌گوید

«آقای اعجوبهٔ ریاضیات سلام عرض می کنم». شما هیچ نمی گویید. اما وی دست بردار نیست. روبه دوستان شما کرده و می گوید: «اگر اینشتین زنده بود برای رفع اشکالهای ریاضی خود به آقا مراجعه می کرد». آیا شما همچنان باید ساکت بمانید. ناسزا گفتن و کتك کاری که شایستهٔ شما نیست. اورا بی جواب هم نباید گذاشت. مجبورید که خودی نشان دهید. صحنهٔ زیررا نزد خود مجسم می کنم:

پرافاده باچند نفراز دانش آموزان در گوشه‌ای ازحیاط ایستاده‌اند وبه گفتگو مشغولند. شما به گروه ایشان نزدیك می‌شوید ومی گویید که مسئله‌ای دارید ومی‌خواهید برای شما حل کند.

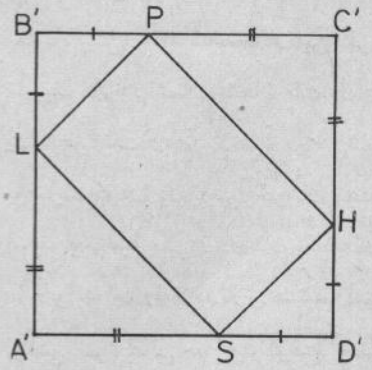
پرافاده با بی‌اعتنایی می گوید: این مسئله‌ها رابه هر کس بدهی برایت حل می کند. شما جواب می‌دهید: به هر کدام از همکلاسها که داده‌ام نتوانسته است حل کند. مخصوصاً ازرقیب وی نیز نام می‌برید ومی گویید که اوهم نتوانسته است. پرافاده می گوید مسئله‌ات رابگو تاحل کنم. بگذار تایك دقیقه ازوقتم را صرف تو کنم. شما مسئله راشرح می‌دهید:

مسئله ـ مربع ABCD داده شده است. روی ضلعهای AB، BC وCD به‌ترتیب نقطه‌های K، I وT رااختیارمی کنیم بقسمی که $BK = BI = DT$ وهمچنین سه‌نقطهٔ M وN وR بقسمی که $BM = BN = DR$.



اکنون مربع دیگر $A'B'C'D'$ را در نظر می گیریم که هر ضلع آن دو برابر ضلع مربع ABCD باشد. روی ضلعهای این مربع نقطه های L، P، H وS را انتخاب می کنیم بقسمی که:

$$B'L = B'P = D'S = D'H$$



و محیط چهار ضلعی LPHS رابا p نشان می‌دهیم. ثابت کنید که:

$$p = 2(KI + IT + MN + NR)$$

پرافاده درآغاز مثل اینکه باچیز مهمی مواجه نیست خطاب به‌شما می گوید: خوب... آهان... این که چیزی نیست. سکوت برقرار می‌شود. شما می گویید: اگر می‌خواهی باشد برای بعد، اما او می گوید: صبر کن، الآن حل می‌شود وخود کاررا به‌دهان می برد ودندانهایش را روی آن فشار می‌دهد. وقت می گذرد. شما می گویید: اگر خسته هستی باشد. پرافاده این بار می گوید مثل اینکه مسئله اشتباه است، لابد قسمتی ازآن ازقلم افتاده است. این دفعه شما علاوه برآنکه تأکید می کنید که مسئله درست است اضافه می کنید که خودتان کلید حل آن رامی‌دانید. پرافاده از این بابت بیشتر ناراحت می‌شود وباجدیت بیشتر به فکرخود فشار می‌آورد.

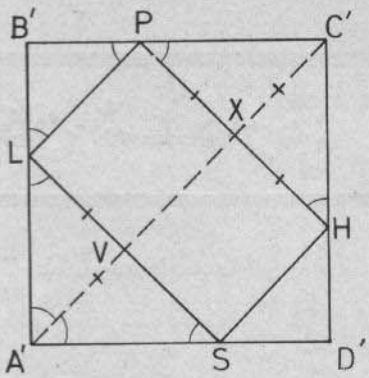
دانش آموزان دیگری هم به جمع شما اضافه شده‌اند وبعضی ازآنان اظهار نظرهایی هم می کنند. بالاخره شما کاغذ رااز دست پرافاده می‌قاپید وخطاب به‌او می گویید: مسئله خیلی ساده‌است، چشمهایت را بازکن وگوشت رابه من بده. می‌دانی کلید حل آن چیست؟

ـ !!!!

ـ «حالت خاص موجب حالت خاص می‌شود». چهارضلعی LPHS مستطیل است. زیرا هریك ازمثلثهای $B'PL$، $C'PH$، $A'SL$ و $D'SH$ متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است. پس هر یك از زاویه‌های حادهٔ آن به‌اندازهٔ ۴۵ درجه است. درنتیجه هر یك از زاویه‌های چهار ضلعی LPHS قائمه است.

اگر P دروضع خاص، منطبق بر B' اختیار شود، چهار ضلعی LPHS به‌خط $B'D'$ تبدیل می‌شود ودراین وضع محیط آن برابربا $2B'D'$ یعنی دوبرابر قطرمربع است. اگر P در وضع خاص منطبق بر C' اختیار شود، دراین حالت خاص نیز چهارضلعی به‌قطر $C'A'$ تبدیل می‌شود وبازهم محیط آن دوبرابر قطرمربع است.

می‌فهمی پرافاده!؟ در دو وضع خاص محیط چهار ضلعی برابربا دوبرابر قطرمربع است. پس می‌توان حدس زد که در هرحال محیط آن دوبرابر قطرمربع است. این موضوع راامتحان می کنیم.



ازروی شکل می بینیم که :

$LP=HS=VX$

$PX=XC'=HX$

$LV=VA'=VS$

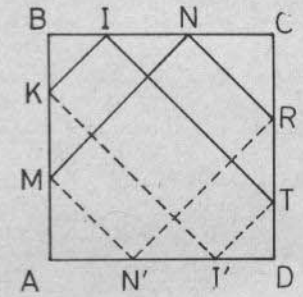
$p=LP+PX+XH+HS+SV+VL=$

$=VX+XC'+XC'+VX+VA'+A'V$

$p=2XC'+2VX+2VA'=2A'C'$

بنابراین P به‌هروضعی که بر $B'C'$ اختیار شود محیط چهارضلعی LPHS دوبرابر قطرمربع $A'B'C'D'$ است.

این استدلال برای مربع ABCD نیزصادق است. طول خط‌شکستهٔ KIT نصف محیط‌مستطیل $KITI'$ و طول خط شکستهٔ MNR نصف محیط مستطیل $MNRN'$ است. محیط هر یك از این مستطیلها دو برابر قطرمربع ABCD است. پس مجموع :



$s=KI+IT+MN+NR$

برابراست بانصف مجموع محیطهای دومستطیل وبرابراست بادو برابرقطرمربع ABCD. قطر مربع $A'B'C'D'$ دو برابر قطرمربع ABCD است بنابراین: $p=2s$

ضرب شستی به پرافاده نشان داده‌اید. اما بین خودمان باشد خوب حقه‌ای سوارکرده‌اید. مسئلهٔ اساسی این بوده‌است: «هرگاه مستطیلی در مربعی محاط کنیم که ضلعهایش باقطرهای مربع موازی باشد محیط آن دوبرابر طول قطرمربع است». این مسئله برای پرافاده یك‌مسئلهٔ پیش‌پا افتاده بود وآن‌را به‌سادگی حل می‌کرد. اماآن راتبدیل به مسئلهٔ پیچیده‌ای کردی و طفلك رابه دردسرانداختی.

در باره‌اعداداول (بقیه ازصفحهٔ۲۱۶)

چندجمله‌ای‌اولر (x^2+x+41) که‌به‌ازای $x=0$ و۱و... و۳۹ اعداد اول خواهد داد. چند جمله‌ای $(y^2-79y+1601)$ که از جایگزاری $x=y-40$ در چند جمله‌ای اولر نتیجه شده نیز به ازای $y=0$ و۱و۲و... و۷۹ اعداد اول را خواهند داد.

کثیرالجملهٔ‌درجهٔ‌اول مثلا $(2x+1)$ به‌ازای بعضی‌مقادیر x اعداد اول را می‌دهدکه‌این تعداد نامحدود است ولی‌نمی‌دانیم که‌کثیرالجملهٔ با درجهٔ بزرگتر از (۱) مثلا (x^2+1) نیز تعداد نامحدودی عدد اول می‌دهند؟ این دو جمله‌ای به ازای $x=1$ و۲و۴و۶و۱۰ اعداد اول را مشخص‌می‌کنند. محاسبه‌شده است‌که به ازای $x\leqslant 10000$ تعداد ۸۴۲ عدد اول به صورت (x^2+1) وجود داردکه در آن x اعداد طبیعی است. به‌ازای $x\leqslant 100000$ تعداد ۶۶۵۶ از چنین اعدادی وجود دارد، وبه‌ازای $x\leqslant 180000$ این‌تعداد ۱۱۲۲۳ می‌باشد. تخمین‌زده‌شده‌است که به ازای هرعدد طبیعی k تعداد نامحدودی عدداول‌به‌صورت (x^2+k) وجود دارد.

B.M.Bredihim ثابت‌کرده‌است که‌تعدادنامحدودی عدد اول‌به صورت (x^2+y^2+1) وجود داردکه x و y اعداد طبیعی‌هستند. این مطلب دارای اثبات پرزحمت ودشواری است. بعدها درسال ۱۹۶۶ ثابت شدکه تعداد نامحدودی عدد اول به صورت x^2+y^2 وجود دارد (x وyاعداد طبیعی). باوجوداین نمی‌دانیم آیا تعداد نامحدودی اعداد اول وجوددارندکه مجموع مکعبات سه عدد صحیح باشند؟

دنباله دارد

پاسخها (دنباله از صفحهٔ ۲۱۳)

۱ـ اگرعدد **770 31-337** را سروته کنید، **Ollie Lee** خوانده می‌شود.

۲ـ این جمع را جلوی آئینه بگیرد. (به‌انگلیسی

NINE=۹ ، EIGHT=۸ ، ONE=۱

(EIGHTEEN=۱۸

۳ـ صفحه را سروته بگیرید و دور سه **6** وسه **1** راکه مجموعشان برابربا ۲۱است، خط‌بکشید.

۴ـ سبد دارای ۹تخم مرغ‌سفید و۹ تخم‌مرغ قهوه‌ای‌است وقتی‌مجموع **18** رامعکوس‌کنیم، عدد **81** خوانده می‌شود، که برابربا حاصل‌ضرب ۹در۹ است. اگر تصریح‌نمی‌شدکه بیش ازنیم دوجین تخم‌مرغ درسبد وجود دارد، یك‌جواب دیگربرای مسئله وجود داشت‌که عبارت‌بود ازسه‌سفید وسه‌قهوه‌ای.

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۱۰۵

حل مسائل ویژهٔ سال اول نظری وجامع

۱۰۵/۱ـ ترجمهٔ از فرانسه

سه مجموعهٔ A و B و C نسبت به هم چگونه باشند تا داشته باشیم:

$$A\cup B=B\cap C$$

حل ـ هرگاه رابطهٔ بالا برقرارباشد، بنابه تعریف اشتراك دومجموعه، خواهیم داشت:

$$A\cup B\subset B \quad \text{و} \quad A\cup B\subset C$$

که نتیجه می‌شود:

$$A\subset B \text{ و } B\subset C \Longrightarrow A\subset B\subset C$$

۱۰۵/۲ـ ترجمهٔ از فرانسه

سه مجموعهٔ A و B و C ومجموعهٔ مرجع M را در نظر می‌گیریم. حاصل هریك از عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت بدست آورید:

$$X=A\cup(A'\cap B)$$
$$Y=(A\cap B'\cap C)\cup(A\cap C')\cup B$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

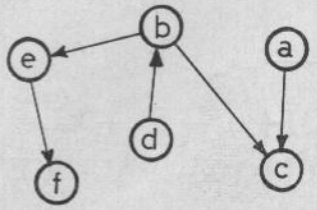
$$X=(A\cup A')\cap(A\cup B)=M\cap(A\cup B)$$
$$X=A\cup B$$

برای محاسبهٔ Y بنابررابطهٔ بالا داریم:

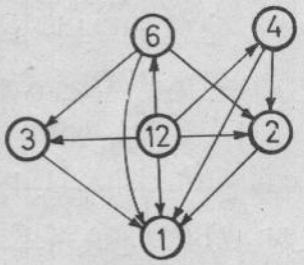
$$(A\cap B'\cap C)\cup B=B\cup[B'\cap(A\cap C)]=$$
$$=B\cup(A\cap C)$$
$$B\cup(A\cap C)\cup(A\cap C')=B\cup A$$
$$(A\cap C)\cup(A\cap C')=A\cap(C\cup C')=A\cap M=A$$
$$Y=A\cup B$$

۱۰۵/۳ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

در شکل زیر هریك از حرفهای a،b،c،d،e،f بایکی از عددهای ۱،۲،۳،۴،۶و۱۲ برابراست و هرپیکان نمایندهٔ آن است که عددواقع در انتهای آن مقسوم‌علیهی (=شمارنده‌ای) از عدد واقع در ابتدای آن است. عددهای نظیر هریك از حرفها را بیابید و همهٔ پیکانهای دیگری را که رسم نشده است رسم کنید.

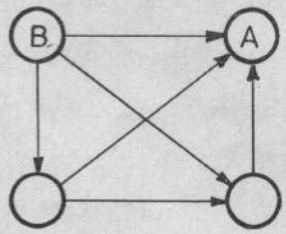


حل ـ ملاحظه می‌شود که عدد d برچهار عدد b،c،e وf بخش‌پذیر است یعنی‌حداقل چهار شمارنده دارد پس ۱۲=d . عدد b حداقل دارای ۳ شمارنده است (f،e،c) پس ۶=b. هریك ازعددهای c و e شمارنده‌ای از ۶=b می‌باشند وعدد f شمارنده‌ای ازعددe است. پس ۱=f ویکی‌از دوعدد e وc برابر با۲ و دیگری برابر با ۳ است. از عدد های داده شده ۴ باقی می‌ماند پس ۴=a و چون c شمارنده‌ای ازaاست‌پس ۲=c وازآنجا۳=e با تعیین جای عددها مطابق باشکل همهٔ پیکانهای لازم را رسم می‌کنیم.



۱۰۵/۴ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

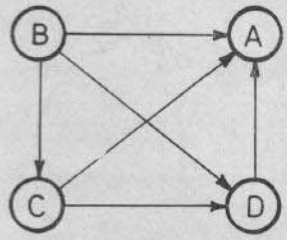
در شکل‌روبرو در هریك از دایره‌ها یکی از عددهای از ۱تا ۱۰۰ قرار می‌گیردو هر پیکان از هرعدد به مقسوم‌علیه(=شمارندهٔ) آن عدد متوجه است.



۱) بزرگترین عددی راکه می‌توان به جای A قرار داد کدام‌است؟

۲) چه عددهایی نمی‌توانند به جای B نوشته شوند؟

حل ـ ۱) هرگاه مطابق باشکل C و D نمایشگر عددهای واقع در دودایرهٔ دیگر باشد باتوجه به جهت پیکانها واینکه هر شمارندهٔ یك عدد (غیر از خودش) ازنصف آن عدد بزرگتر نیست پس باید داشته باشیم:



$A<۱۲$ و $D<۲۵$ و $C<۵۰$ و $B<۱۰۰$

بنابراین بزرگترین مقدار برای A عدد ۱۲ است وداریم:

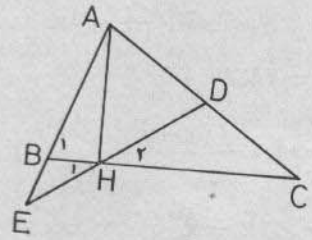
$A=۱۲$ و $D=۲۴$ و $C=۴۸$ و $B=۹۶$

۲) عدد B برهریك ازعددهای C و D و A بخش پذیراست پس B عدد اول نیست وعدد غیراولی است که حداقل دارای سه شمارنده است.

بنابراین از عددهای کوچکتر از ۱۰۰ آنهاکه اولند و آنهاکه کمتراز سه‌شمارنده داشته باشند نمی‌توانند به‌جای B قرار گیرند.

۱۰۵/۵ـ در مثلث ABC زاویهٔ B حاده و دوبرابر زاویهٔ C است. ارتفاع AH ازاین مثلث رارسم می‌کنیم وضلع AB را از طرف B به اندازهٔ BE برابربا BH امتداد می‌دهیم. ثابت کنیدکه خط EH باعمود منصف پاره خط HC یکدیگررا روی ضلع AC قطع می‌کنند.

حل ـ خط EH با AC در نقطهٔ D برخورد می‌کند. ثابت می‌کنیم که عمود منصف HC نیزاز D می‌گذرد.



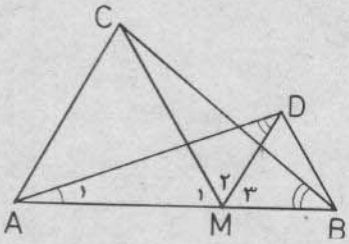
چون مثلث BEH متساوی‌الساقین است پس دو زاویهٔ E و H_1 باهم برابرند. زاویهٔ B_1 زاویهٔ خارجی مثلث BEH است پس با مجموع دوزاویهٔ E و H_1 برابراست وچون این دوزاویه باهم برابرند پس زاویهٔ ابرهر B دوبریك از زاویه‌های E و H_1 است. دوزاویهٔ H_1 و H_2 متقابل به‌رأس می‌باشندو باهم برابرند پس زاویهٔ B_1 دوبرابر زاویهٔ H_2 است. درفرض داشته‌ایم که زاویهٔ B_1 دو برابر زاویهٔ C است. بنابراین دو زاویهٔ C و H_2 با هم برابرند و مثلث DHC متساوی‌الساقین است وعمود منصف HC ازD می‌گذرد.

۱۰۵/۶ـ برپاره خط AB نقطهٔ M را به دلخواه اختیار می‌کنیم و مثلثهای متساوی الاضلاع AMC و BMD را در یك طرف AB می‌سازیم. خطهای AD و BC را رسم می‌کنیم که در P متلاقی می‌شوند. ثابت کنید که:

الف ـ دومثلث AMD و BMC باهم و دو پاره خط AD و BC باهم برابرند.

ب ـ زاویهٔ APB با زاویهٔ AMD برابراست و ازاین راه اندازهٔ زاویهٔ APB را پیداکنید.

حل ـ الف: اندازهٔ هریك ازدو زاویهٔ M_1 و M_3 برابر ۶۰ درجه است. پس اندازهٔ زاویهٔ M_2 نیز برابر ۶۰° است ودو زاویهٔ AMD و BMC باهم برابرند. دو مثلث AMD و BMC به حالت تساوی دوضلع و زاویهٔ بین باهم برابرند (AM ازمثلث اول با MC ازمثلث دوم و MD ازمثلث اول با MB ازمثلث دوم برابراست). ازتساوی این‌دو مثلث برمی‌آیدکه $AD=BC$.



ب: دومثلث AMD و APB در زاویهٔ A_1 مشترکند ودو زاویهٔ ADM و ABC ازآنها نیز باهم برابرند (به علت تساوی دومثلث AMD و BMC). بنابراین زاویه های سوم این‌دو مثلث یعنی دوزاویهٔ AMD و APB نیز باهم برابرند واندازهٔ زاویهٔ APB برابربا ۱۲۰ درجه‌است.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۱۰۵/۷ـ فرستنده: **محمد معینی**

هرگاه a و b و c عددهای مثبت و $a+b\geqslant c$ باشد ثابت کنید که:

$$a^2+b^2\geqslant\frac{c^2}{2}$$

$$a^4+b^4\geqslant\frac{c^4}{8}$$

$$a^8+b^8 \geqslant \frac{c^8}{128}$$

حل- بااستفاده ازفرض داریم:

$$(a+b)^2 \geqslant c^2 \Longrightarrow a^2+b^2+2ab \geqslant c^2$$

همچنین داریم:

$$(a-b)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow a^2+b^2-2ab \geqslant 0$$

ازجمع نظیربه نظیر طرفین این دونامساوی نتیجه‌می‌شود:

$$2a^2+2b^2 \geqslant c^2 \Longrightarrow a^2+b^2 \geqslant \frac{c^2}{2}$$

هرگاه طرفین این‌رابطه را به توان دوبرسانیم:

$$a^4+b^4+2a^2b^2 \geqslant \frac{c^4}{4}$$

وچون داریم:

$$a^4+b^4-2a^2b^2 \geqslant 0$$

پس‌نتیجه می‌شود:

$$2a^4+2b^4 \geqslant \frac{c^4}{4} \Longrightarrow a^4+b^4 \geqslant \frac{c^4}{8}$$

چون طرفین این‌رابطه رابه‌توان دوبرسانیم وباتوجه به‌اینکه:

$$a^8+b^8-2a^4b^4 \geqslant 0$$

نتیجه می‌شودکه:

$$a^8+b^8 \geqslant \frac{c^8}{128}$$

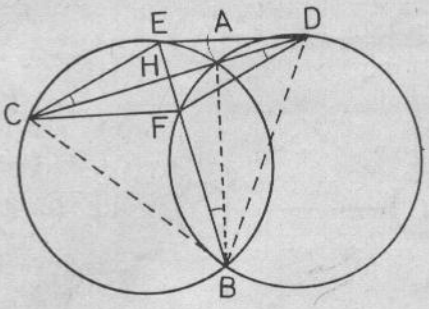
بطورکلی می‌توان ثابت‌کردکه:

$$a^n+b^n \geqslant \frac{c^n}{2^{n-1}}$$

۱۰۵/۸- ترجمهٔ مهندس زرگری

دو دایرهٔ برابرباهم در دو نقطهٔ A و B متقاطعند . از A خطی رسم می‌کنیم‌که دایره‌هارا در C و D قطع کند. سپس از B عمودی بر CD رسم می‌کنیم‌که دایره‌ها را در E و F تلاقی می‌کند. ثابت‌کنیدکه چهار ضلعی CEDF لوزی است.

حل- مثلث BCD متساوی‌الساقین است زیرا دو زاویهٔ BCD و CDB که در دودایرهٔ متساوی محاطی وروبروی به کمانهای برابر واقعند باهم برابرند. بنابراین DE که‌بر CD عمود است عمود منصف CD است. دو زاویهٔ ACE و ABE که محاطی وروبرو به‌یك‌کمان واقعند باهم برابرند. همچنین دو زاویهٔ ADF و ABF نیزباهم برابرند. پس دوزاویهٔ ECD و CDF باهم برابرند و دو مثلث CEH و DFH در حالت



تساوی دوزاویه وضلع بین باهم برابرند ودرنتیجه $EH=HF$ یعنی CD نیز عمود منصف EF است. بنابراین چهار ضلعی CEDF لوزی است.

حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم‌ریاضی

۱۰۵/۹- ترجمهٔ از فرانسه

اولا معلوم‌کنیدکه عدد حقیقی k چگونه باشد تا معادلهٔ زیر دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta-k=0$$

ثانیاً هرگاه x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ بالا و α و β ریشه‌های معادلهٔ زیرباشند، مقدار m رابرحسب k بدست‌آورید و بحث‌کنید :

$$(y-x')(y-x'')+m^2-4m=0$$

حل- باید داشته‌باشیم:

$$\Delta=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+4k \geqslant 0$$

$$(\alpha-\beta)^2+4k \geqslant 0 \Longrightarrow k \geqslant -\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$$

ثانیاً معادله رانسبت به‌yمرتب می‌کنیم:

$$y^2-(x'+x'')y+x'x''+m^2-4m=0$$

چون $x'+x''=\alpha+\beta$ و $x'x''=\alpha\beta-k$ پس:

$$y^2-(\alpha+\beta)y+\alpha\beta-k+m^2-4m=0$$

وقتی αوβ ریشه‌های این معادله‌اندکه:

$$m^2-4m-k=0 \Longrightarrow m=2\pm\sqrt{4+k}$$

m وقتی برابربا مقدار حقیقی است‌که $k \geqslant -4$

۱۰۵/۱۰ـ از جواد فیض

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$(x+1)^3+(x-5)^3+(x+13)^3=$$
$$=27(x+3)^3$$

حل ـ با فرض $a=x+1$ و $b=x-5$ و $c=x+13$ معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$$

اما می‌دانیم که:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3+$$
$$+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

بنابراین:

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0$$
$$(2x-4)(2x+8)(2x+14)=0$$
$$x=2 \text{ یا } x=-4 \text{ یا } x=-7$$

۱۰۵/۱۱ـ از کاظم حافظ قرآن

یك تصاعد عددی و یك تصاعد هندسی داده شده است. جمله‌های مرتبه‌های نظیر این دو تصاعد را باهم جمع کرده‌ایم که در نتیجه رشتهٔ زیر بدست آمده است:

$$8, 25, 87, 329, \ldots$$

هر یك از دو تصاعد را مشخص کنید و جملهٔ n ام رشتهٔ بالا را بدست آورید.

حل ـ فرض می‌کنیم که در تصاعد عددی a جملهٔ اول و d قدر نسبت و در تصاعد هندسی b جملهٔ اول و q قدر نسبت باشد در این صورت:

$$\begin{cases} a+b=8 \\ a+d+bq=25 \\ a+2d+bq^2=87 \\ a+3d+bq^3=329 \end{cases}$$

از حذف a بین معادله‌های اول و دوم و همچنین بین معادله‌های سوم و چهارم نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} d+b(q-1)=17 \\ d+bq^2(q-1)=242 \end{cases}$$

$$b(q^2-1)(q-1)=225 \qquad (1)$$

از جمع معادلات اول و دوم و سوم و بعداز حذف a و d بین معادلهٔ حاصل و معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود:

$$b(q^2-2q+1)=b(q+1)^2=45$$

از تقسیم طرفین این معادله برطرفین معادلهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{(q+1)(q-1)^2}{(q-1)^2}=5 \Longrightarrow q=4$$

$$b=5 \text{ و } a=3 \text{ و } d=2$$

$$\div 3, 5, 7, 9, \ldots$$

$$\div\div 5, 20, 80, 320, \ldots$$

۱۰۵/۱۲ـ فرستنده: قوام‌نحوی از اصفهان

اگر u_n جملهٔ n ام از یك تصاعد عددی باشد و داشته باشیم:

$$v_n=u_{2n-1}+u_{2n}$$

ثابت کنید که v_n نیز جملهٔ nام یك تصاعد عددی است. در حالت خاصی که تصاعد باجملهٔ nام u_n رشتهٔ اعداد طبیعی باشد تصاعد باجملهٔ n ام v_n را مشخص کنید.

حل ـ هرگاه a جملهٔ اول و d قدر نسبت تصاعد باشد داریم:

$$u_n=a+(n-1)d$$
$$v_n=a+(2n-2)d+a+(2n-1)d$$
$$v_n=2a+(4n-3)d$$
$$v_n=2a+d+(n-1)4d$$

v_n جملهٔ n ام از تصاعدی عددی است که جملهٔ اول آن $2a+d$ و قدر نسبتش $4d$ است. در حالت خاص $a=1$ و $d=1$ داریم:

$$v_n=3+(n-1)4$$

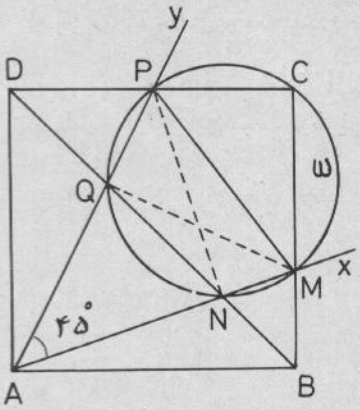
$$\div 3, 7, 11, 15, \ldots$$

۱۰۵/۱۳ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

از رأس A از مربع $ABCD$ دو خط Ax و Ay را رسم می‌کنیم که اندازه زاویهٔ xAy برابر 45° باشد و Ay با ضلع CD و قطر BD به ترتیب در P و Q و Ax باضلع BC و قطر BD به ترتیب در M و N برخوردکند. ثابت کنید که پنج نقطهٔ C ، M ، N ، Q و P بریك دایره‌واقعند.

حل ـ دوزاویهٔ MAQ و QBM که هرکدام به‌اندازهٔ ۴۵ درجه‌اند باهم برابرند پس چهار ضلعی $ABMQ$ محاطی

است و در نتیجه زاویهٔ AQM قائمه است.

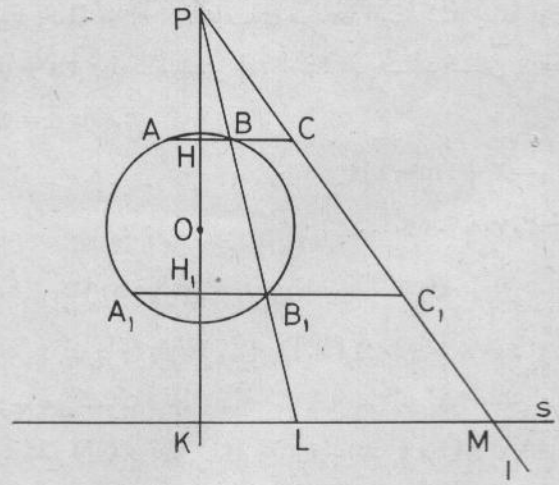


چهار ضلعی ADPN نیز محاطی است و نتیجه می‌شود که زاویهٔ ANP قائمه است. هریك از زاویه‌های PCM ، PQM و PNM قائمه است پس دایرهٔ به قطر PM بر نقطه‌های C ، Q و N می‌گذرد.

۱۰۵/۱۴ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

در صفحه دایرهٔ ω و خط l و خط s غیرموازی با l داده شده است خط g را موازی با s چنان رسم کنید که l را در C ودایره را در B و A قطع کند بقسمی که AB = BC باشد.

حل ـ مسئله را حل شده می‌انگاریم. از O مرکز دایره عمودی بر AB رسم می‌کنیم که خط l را در P و خط s را در K قطع می‌کند. اگر H پای این عمود روی AB باشد H وسط AB است و بنابراین HB نصف BC است. خط PB را که رسم کنیم خط s را در L قطع می‌کند و اگر M نقطهٔ تلاقی دو خط l و s باشد چون سه خط KH و LB و MC در P متقاربند دو خط متوازی HC و KM به یك نسبت تقسیم می‌شوند. پس KL نصف LM است.



بنابراین برای رسم خط مطلوب از O مرکز دایره خطی عمود برخط s رسم می‌کنیم که آن را در K و خط l را در P قطع می‌کند. برخط s نقطهٔ L را چنان تعیین می‌کنیم که KL نصف LM باشد. خط PL را رسم می‌کنیم که اگر دایره را قطع کند (در B یا B_1) و از نقطهٔ تقاطع موازی با s رسم کنیم خط مطلوب بدست می‌آید.

اگر PL با دایره متقاطع باشد مسئله دو جواب دارد. هرگاه PL با دایره مماس باشد مسئله یك جواب دارد. اگر PL با دایره متخارج باشد مسئله جواب ندارد.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۰۵/۱۵ـ سه تابع زیررا در نظر می‌گیریم:

$$y_1 = ax^2 + bx + c$$

$$y_2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y_3 = \frac{ax - a + b}{x - 1}$$

مجموع مشتقهای این سه تابع برابرشده است با:

$$S = 6x^2 + dx + \frac{1}{(x-1)^2}$$

مقادیر عددی ضریبهای a، b، c و d را بدست آورید.

حل ـ به ترتیب داریم:

$$y_1' = 2ax + b \quad \text{و} \quad y_2' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y_3 = a + \frac{b}{x-1} \quad \text{و} \quad y_3' = \frac{-b}{(x-1)^2}$$

$$3ax^2 + 2(a+b)x + b + c - \frac{b}{(x-1)^2} \equiv$$

$$\equiv 6x^2 + dx + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} 3a = 6 & a = 2 \\ 2(a+b) = d \implies & b = -1 \\ b + c = 0 & c = 1 \\ -b = 1 & d = 2 \end{cases}$$

۱۰۵/۱۶ـ از کاظم حافظ قرآن

هرگاه داشته باشیم:

$$\cos b - \sin a = 1$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin(a+b)} + \frac{1}{\sin(a-b)} = 1$$

حل ـ از فرض داریم $\cos b = 1 + \sin a$ و ازطرفی:

$$\frac{1}{\sin(a+b)} + \frac{1}{\sin(a-b)} =$$

$$= \frac{\sin a\cos b - \cos a\sin b + \sin a\cos b + \cos a\sin b}{(\sin a\cos b + \cos a\sin b)(\sin a\cos b - \cos a\sin b)}$$

$$= \frac{2\sin a\cos b}{\sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b}$$

$$\frac{2\sin a(1+\sin a)}{\sin^2 a(1+\sin a)^2 - \cos^2 a[1-(1+\sin a)^2]}$$

$$= \frac{2\sin a(1+\sin a)}{(1+\sin a)^2 - \cos^2 a} =$$

$$= \frac{2\sin a(1+\sin a)}{(1+\sin a)^2 - (1-\sin a)^2}$$

$$= \frac{2\sin a(1+\sin a)}{2\sin a(1+\sin a)} = 1$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۷/۱۰۵ـ برمنحنی نمایش هندسی تابع:

$$y = x^2 + px + q$$

دو نقطهٔ A و B را چنان انتخاب می‌کنیم که ضریب زاویه‌ای مماس برمنحنی درنقطهٔ A برابر با ۲ـ و درنقطهٔ B برابر با ۴ باشد. هرگاه P وسط پاره خط AB به طول $\frac{3}{2}$ و بر نیمساز ربع اول محورها واقع باشد، مقادیر عددی p و q را بدست‌آورید واگر C نقطهٔ تلاقی دومماس مزبور باشد ضریب زاویه‌ای خط PC را نیز پیدا کنید.

حل ـ به ترتیب داریم:

$$y' = 2x + p$$

$$2x + p = -2 \Longrightarrow A\left(\frac{-p-2}{2} \text{ و } y_1\right)$$

$$2x + p = 4 \Longrightarrow B\left(\frac{-p+4}{2} \text{ و } y_2\right)$$

$$p\left(\frac{-p+1}{2} \text{ و } \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$\frac{-p+1}{2} = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow p = -2$$

$$y = x^2 - 2x + q$$

$$A(0 \text{ و } q) \text{ و } B(3 \text{ و } 3+q)$$

$$\frac{q+3+q}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow q = 0$$

$$A(0 \text{ و } 0) \text{ و } y = -2x$$

$$B(3 \text{ و } 3) \text{ و } y = 4x - 9$$

$$C\begin{cases} y = -2x \\ y = 4x - 9 \end{cases} \Longrightarrow C\left(\frac{3}{2} \text{ و } -3\right)$$

دو نقطهٔ P و C دارای طولهای برابرند پس خط PC برمحور $x'x$ عمود است.

۱۸/۱۰۵ـ تابع زیرداده شده است:

$$y = m(x-a)^2(x-b)^3$$

الف ـ آیا این تابع در ازای $x=b$ ماکسیمم یامی‌نیمم می‌باشد یانه؟

ب ـ چه رابطه بین a و b برقرار باشد تا تابع درازای $x=a$ نه ماکسیمم باشد و نه می‌نیمم؟

ج ـ هرگاه تابع درازای $x=-4$ ماکسیمم و درازای $x=-2$ می‌نیمم‌بوده ومقدارمی‌نیمم آن ۴ـ باشد مقادیرعددی a و b و m را پیدا کنید.

حل ـ الف ـ داریم:

$$y' = m[2(x-a)(y-b)^3 + 3(x-b)^2(x-a)^2]$$

$$y' = m(x-a)(x-b)^2(5x-3a-2b)$$

به فرض اینکه $a \neq b$ و همچنین $x=b$ در معادلهٔ:

$$5x - 3a - 2b = 0$$

صدق نکند، y' در ازای $x=b$ صفر شده اما تغییر علامت نمی‌دهد و بنابراین تابع در ازای $x=b$ نه ماکسیمم است و نه می‌نیمم.

ب ـ برای آنکه تابع در ازای $x=a$ نیز نه ماکسیمم باشد و نه می‌نیمم باید y' شامل توان زوجی از عامل $(x-a)$ باشد، بنابراین باید $x=a$ در معادلهٔ $5x-3a-2b=0$ صدق کند:

$$5a - 3a - 2b = 0 \Longrightarrow a = b$$

ج ـ مشتق تابع در ازای دو مقدار $x=a$ و

$$x = \frac{3a+2b}{5}$$

وقتی صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد برحسب اینکه از دو مقدار مزبور کدام کوچکتر و کدام بزرگتر باشد حالتهای مختلف باید در نظر بگیریم و در هرحالت مقادیر نظیر قابل قبول پارامترها را پیدا کنیم.

با توجه به صورت مسئله جداول تغییرات تابع چنین است:

x		-۴		-۲	
y'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
y	$\nearrow$	?	$\searrow$	-۴	$\nearrow$

در این صورت یا داریم:

$$a=-۴ \text{ و } \frac{۳a+۲b}{۵}=-۲ \Longrightarrow b=۱$$

$$y=m(x+۴)^۲(x-۱)^۳$$

$$y=-۴ \text{ و } x=-۲ \Longrightarrow m=\frac{۱}{۲۷}$$

یا داریم:

$$a=-۲ \text{ و } \frac{۳a+۲b}{۵}=-۴ \Longrightarrow b=-۷$$

$$y=m(x+۲)^۲(x+۷)^۳$$

$$x=-۲ \text{ و } y=-۴ \Longrightarrow m=\text{نامعین}$$

۱۰۵/۱۹ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع

$$y=\sin^۴x\cos^{۱۰}x$$

را بدست آورده و نتیجه بگیرید که:

$$۷^۷\sin^۴x\cos^{۱۰}x\leqslant ۱۲۵۰۰$$

حل ـ داریم:

$$y'=۴\sin^۳x\cos^{۱۱}x-۱۰\cos^۹x\cos^۵x$$

$$y'=۲\sin^۳x\cos^۹x(۲\cos^۲x-۵\sin^۲x)$$

$$۲\cos^۲x-۵\sin^۲x=۰ \Longrightarrow tg^۲x=\frac{۲}{۵}$$

$$y=\left(\frac{tg^۲x}{۱+tg^۲x}\right)^۲\left(\frac{۱}{۱+tg^۲x}\right)^۵$$

$$tg^۲x=\frac{۲}{۵}\Longrightarrow y=\frac{۱۲۵۰۰}{۷^۷}$$

مشتق در ازای مقادیر $\sin x=۰$ یا $\cos x=۰$ یا $tg^۲x=\frac{۲}{۵}$ صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد و در ازای این مقادیر یا $y=۰$ یا $y=\frac{۱۲۵۰۰}{۷^۷}$ است. پس مقدار اخیر ماکسیمم تابع است و داریم:

$$\sin^۴x\cos^{۱۰}x\leqslant\frac{۱۲۵۰۰}{۷^۷}\Longrightarrow ۷^۷\sin^۴x\cos^{۱۰}x\leqslant ۱۲۵۰۰$$

۱۰۵/۲۰ـ هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases}\sin(a+b)=p\\ \sin(a-b)=q\end{cases}$$

۱) رابطهٔ بین $tg\,a$ و $tg\,b$ را بدست آورید.

۲) معادله‌ای تشکیل دهید که از آن بتوان $tg\,a$ یا $tg\,b$ را برحسب p و q بدست آورد.

حل ـ مقادیر $\sin(a+b)$ و $\sin(a-b)$ را بسط می‌دهیم و بعد طرفین رابطه‌های حاصل را یك بار با هم جمع و یك‌بار از هم کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\sin a\cos b=\frac{p+q}{۲}\\ \cos a\sin b=\frac{p-q}{۲}\end{cases}$$

$$tg\,a\,cotg\,b=\frac{p+q}{p-q}$$

$$tg\,a=\frac{p+q}{p-q}tg\,b$$

۲) از رابطهٔ اول دستگاه بالا داریم:

$$\sin^۲a=\frac{(p+q)^۲}{۴\cos^۲b}$$

$$\frac{tg^۲a}{۱+tg^۲a}=\frac{(p+q)^۲}{۴}(۱+tg^۲b)$$

$$\frac{tg^۲a}{۱+tg^۲a}=\frac{(p+q)^۲}{۴}\left[۱+\left(\frac{p-q^۲}{p+q}\right)^۲tg^۲a\right]$$

$$(p-q)^۲tg^۴a+۲(p^۲+q^۲-۲)tg^۲a+$$
$$+(p+q)^۲=۰$$

۱۰۵/۲۱ـ ترجمهٔ از فرانسه

مثلث ABC به ضلعهای $BC=a$ و $CA=b$ و $AB=c$ داده شده است. در رأسهای مثلث و در یك طرف صفحهٔ آن پاره خطهای $AA'=x$ و $BB'=y$ و $CC'=z$ را عمود برصفحهٔ مثلث اخراج می‌کنیم. مقادیر x و y و z را چنان تعیین کنید که وجه‌های جانبی منشور ناقص $ABCA'B'C'$ بایکدیگر معادل باشند وبحث کنید. ثابت کنید که اگر مسئله یك دسته جواب داشته باشد بینهایت دسته جواب خواهد داشت. در این‌حالت ثابت کنید که صفحهٔ $A'B'C'$ برخط ثابتی می‌گذرد.

حل ـ مساحت‌هریك ازذوزنقه‌های وجه‌های جانبی‌را k^2 می‌گیریم. پس‌داریم:

$$(y+z)a=(z+x)b=(x+y)c=2k^2$$

$$x=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)k^2$$

$$y=\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)k^2$$

$$z=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)k^2$$

برای اینکه این‌مقادیر قابل‌قبول باشند لازم وکافی است که مثبت باشند واین درصورتی است که معکوس هریك از مقادیر a و b و c ازمجموع معکوسات دومقدار دیگر کوچکتر باشد. در هر مثلث اندازه‌های ضلعها بااندازه‌های ارتفاعهامعکوساً متناسبند بنابراین درمثلث ABC هریك ازارتفاعها باید کوچکتر ازمجموع دو ارتفاع‌دیگر باشد. هرگاه شرط‌بالا برقرارباشد، به‌ازای هرمقدار از k یك‌دسته مقادیر برای مجهولات بدست می‌آید. پس دستگاه دارای‌بینهایت دسته‌جواب است.

ازمقادیر بدست آمده برای x و y و z نتیجه می‌شود که هر یك از نسبتهای $\frac{x}{y}$ و $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ مقدارثابت است. بنابراین $A'B'$ با AB درنقطهٔ ثابت α همچنین $B'C'$ با BC در نقطهٔ ثابت β و $C'A'$ با CA درنقطهٔ ثابت γ برخورد می‌کند. پس صفحهٔ $A'B'C'$ براین‌سه نقطهٔ‌ثابت واقع برصفحهٔ ABC می‌گذرد. فصل مشترك دوصفحه‌خط مستقیم‌است. بنابراین سه‌نقطهٔ α و β و γ برخط ثابت Δ واقع درصفحهٔ ABC قراردارندوصفحهٔ $A'B'C'$ همواره بر Δ می‌گذرد.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم‌دبیرستان

۱۰۵/۲۲ـ اولا بیضی به معادلهٔ زیررا مشخص کرده و رسم کنید:

$$9x^2+25y^2-36x+50y-164=0$$

ثانیاً معادلهٔ هذلولی را بنویسید که رأسهای آن کانونهای بیضی وکانونهای‌آن رأسهای بیضی بالاباشد. این هذلولی را در همان شکل‌بیضی رسم کنید.

حل ـ اولا خواهیم داشت:

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

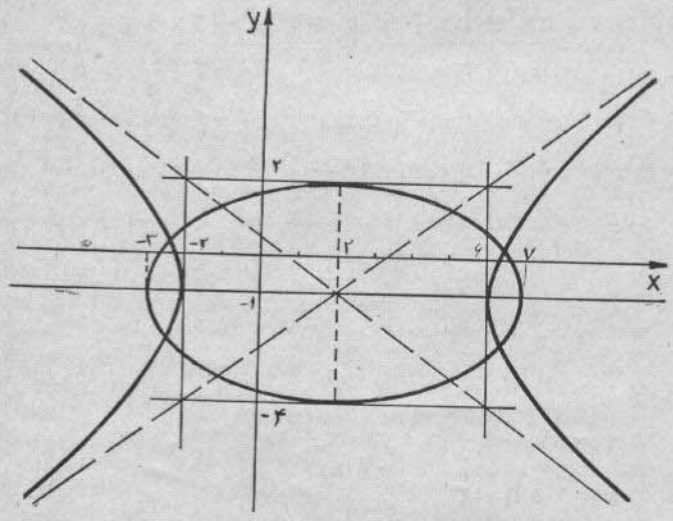
$C'(\alpha=2,\beta=-1)$، $a=5$ و $b=3$

$c=4$ و $F(6,-1)$ و $F'(-2,-1)$

ثانیاً: برای هذلولی داریم:

$C'(2,-1)$ و $a=4$ و $c=5 \Longrightarrow b=3$

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$$



۱۰۵/۲۳ـ در مثلث ABC داریم:

$$AC=\frac{3}{2}BC \text{ و } \angle B=\frac{\pi}{2}+\frac{\angle A}{2}$$

مقدار $\sin A$ و مقدار $\cos C$ را بدست‌آورید.

حل ـ به‌فرض $AC=b$ و $BC=a$ داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B} \Longrightarrow \frac{2}{3}=\frac{\sin A}{\sin B}$$

$$3\sin A = 2\sin B = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)$$

$$6\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2\cos\frac{A}{2} \Longrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin A = 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$A+B+C = A+\left(90^\circ+\frac{A}{2}\right)+C = 180^\circ$$

$$C = 90^\circ - \frac{3A}{2} \Longrightarrow \cos C = \sin\frac{3A}{2}$$

$$\cos C = 3\sin\frac{A}{2} - 4\cos^3\frac{A}{2} = \frac{23}{27}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۵/۲۴ـ ترجمهٔ از فرانسه

دو تابع زیر داده شده است؛

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}\ ,\quad y=\frac{x^2+3x+3}{x+m}$$

منحنیهای نمایشهای هندسی این دو تابع دارای مجانبهای مشترك می‌باشند و یکی از دو منحنی برمحور $x'x$ پاره‌خط به طول $\sqrt{5}$ جدا می‌کند. مقادیرعددی a و b و m راپیداکنید و پس از آن دو منحنی را در یك شکل رسم کنید.

حل ـ مقدار $m=1$ است و معادله های مجانبهای دو منحنی می‌شود:

$$y=ax-a+b \text{ و } y=x+2$$

$$a=1 \text{ و } b=3$$

معادلهٔ $x^2+3x+3=0$ جواب حقیقی ندارد پس‌تابع نظیر آن محور $x'x$ راقطع نمی‌کند وبرای تابع دیگر داریم:

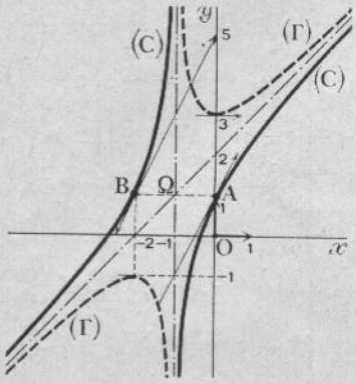
$$x^2+3x+c=0 \Longrightarrow |x'-x''| = \sqrt{9-4c}$$

$$\sqrt{9-4c} = \sqrt{5} \Longrightarrow c=1$$

$$y=\frac{x^2+3x+1}{x+1} = x+2-\frac{1}{x+1}$$

$$y'=1+\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$			$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



$$y=\frac{x^2+3x+3}{x+1}$$

$$=x+2+\frac{1}{x+1}$$

$$y'=1-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Longrightarrow x=-2 \text{ یا } 0$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

۱۰۵/۲۵ـ ترجمهٔ از فرانسه

منحنی نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y=\frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}$$

n عدد طبیعی بزرگتر از یك

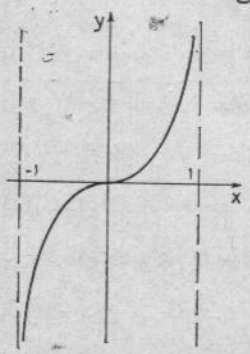
حل ـ تابع وقتی معین است که:

$$1-x^{2n}>0 \Longrightarrow -1<x<1$$

دراین فاصله داریم:

$$y'=\frac{x^{2n-2}}{\sqrt{1-x^{2n}}}\left[2n-1+\frac{nx^{2n}}{1-x^{2n}}\right]$$

n عدد طبیعی بزرگتر ازیك است، پس درفاصلهٔ $-1<x<1$ عبارت داخل کروشه مثبت است. بنابراین مشتق‌تابع در ازای $x=0$ صفرمی‌شود اما تغییرعلامت نمی‌دهد.



x	-1		0		1
y'		$+$	0	$+$	
	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

۱۰۵/۲۶ـ از **جوادفیض**

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$(\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x)+2\cos x=$$
$$=(\cos x+\cos 2x+\cos 3x)^2-\cos 2x$$

حل ـ باتوجه به‌اتحاد:

$$(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+bc+ca)$$

نتیجه خواهد شد:

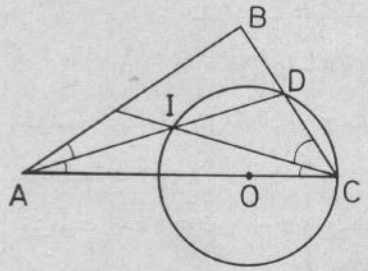
$$2(\cos x\cos 2x+\cos 2x\cos 3x+\cos 3x\cos x)=$$
$$2\cos x+\cos 2x$$

حاصل‌ضربهای طرف اول‌را به‌حاصل جمع تبدیل می‌کنیم . بعد ازاختصار خواهیم داشت:

$$\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=0$$
$$2\cos 4x(2\cos x+1)=0$$
$$x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8} \text{ یا } x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

۱۰۵/۲۷ـ ترجمهٔ: **مهندس زرگری**

در مثلث ABC داریم: $AB=20$ و $AC=24$ و می‌دانیم که سه‌نقطهٔ: رأس C، نقطهٔ تلاقی نیمساززاویهٔ A باضلع AC و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی بردایره‌ای واقعند که مرکز آن روی ضلع AC قراردارد. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بدست‌آورید.



حل ـ هرگاه I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و D پای‌نیمساز زاویهٔ A روی ضلع BC باشد، با توجه به کمان روبروی زاویهٔ محاطی ADC نتیجه خواهد شدکه این زاویه برابر است با $90^\circ+\frac{C}{2}$. نسبت به‌مثلث ADC زاویهٔ ADB برابر است‌با $C+\frac{A}{2}$ بنابراین:

$$90^\circ+\frac{C}{2}+C+\frac{A}{2}=180^\circ$$
$$A=180^\circ-3C\Longrightarrow B=2C$$
$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}\ ,\ \frac{20}{\sin C}=\frac{24}{\sin 2C}$$

$$\cos C=\frac{3}{5} \text{ و } \sin C=\frac{4}{5}$$
$$R=\frac{AB}{2\sin C}=\frac{20\times 5}{2\times 4}=\frac{25}{2}$$

۱۰۵/۲۸ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

(این مسئله در یکان شمارهٔ گذشته بـه شمارهٔ ۱۰۴/۲۶ اما توأم با اشتباه چاپ شده بود)

در یك تقسیم‌مقسوم‌عددی‌است پنج رقمی وبارقمهای‌یکسان، مقسوم علیه عددی است چهار رقمی و با رقمهای یکسان وخارج قسمت ۱۶ است. هرگاه یکی ازرقمهای مقسوم ویکی ازرقمهای مقسوم‌علیه را حذف کنیم خارج قسمت تغییر نمی‌کند اما باقیمانده ۲۰۰۰ واحدکم می‌شود، عددهای مقسوم و مقسوم علیه را پیدا کنید.

حل ـ داریم:

$$\begin{cases}\overline{aaaaa}=\overline{bbbb}\times 16+r\\ \overline{aaaa}=bbb\times 16+(r+2000)\end{cases}$$

طرفین‌رابطهٔ دوم‌رااز طرفین‌رابطهٔ اول‌کم می‌کنیم نتیجه‌می‌شود:

$$a\times 10^4=b\times 10^3\times 16+2000$$
$$5a=8b+1$$

ازاین معادلهٔ سیال با توجه به اینکه a و b رقم می‌باشند بدست می‌آید $a=5$ و $b=3$ عـددهای مطلوب ۵۵۵۵۵ و ۳۳۳۳ می‌باشند.

۱۰۵/۲۹ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

عدد پنج رقمی $\overline{abcde}$ راپیداکنید بقسمی که هریك از عددهای دورقمی $\overline{ab}$ ، $\overline{bc}$ ، $\overline{cd}$ و $\overline{de}$ مجذور کامل باشد.

حل ـ عددهای دورقمی مجذورکامل بارقمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸ شروع وبارقمهـای ۱، ۴، ۵، ۶، ۹ ختم می‌شـوند. رقمهای b، c، b درهر دودسته ازرقمهای بالا قراردارند پس‌این سه رقم ۱و۴و۶ می‌توانند باشند. چون $\overline{bc}$ و $\overline{cd}$ مجذور کامل است پس $b=1$ و $c=6$ و $d=4$ ونتیجه می‌شودکه $e=9$ و $a=8$ پس‌عدد مطلوب ۸۱۶۴۹ است.

۱۰۵/۳۰ـ ترجمهٔ از فرانسه

پاره خط OA به‌طول $4a$ داده شده است. این پاره خط را نخست درانعکاس به‌قطب O و به قوت $-3a^2$ تبدیل‌می‌کنیم.

آنگاه مبدل آن را درانتقال به بردار $\overrightarrow{OA}$ مجدداً تبدیل می‌کنیم. این تغییر مکان را U می‌نامیم.

۱) ثابت کنید که در تغییر مکان U دو نقطهٔ B و C وجود دارد که ثابت می‌مانند.

۲) فرض می‌کنیم که M نقطه‌ای غیر مشخص از صفحه و M' مبدل آن در تغییر مکان U و M'_1 مبدل آن در انعکاس به قطب O و به قوت $3a^2$ باشد. معلوم کنید که درچه تغییر مکانی M' مبدل M'_1 می‌باشد. نتیجه بگیرید که در تغییر مکان U دایرهٔ به قطر BC ثابت می‌ماند.

۳) هرگاه M نقطه‌ای غیرمشخص از دایرهٔ به‌قطر BC و M' مبدل آن‌در تغییرمکان U باشد، ثابت کنید که خط MM' بر هذلولی ثابتی مماس است.

حل- ۱) هرگاه M نقطهٔ دلخواهی ازصفحه و M_1 مبدل آن درانعکاس $(O, -3a^2)$ و M' مبدل M_1 درانتقال به‌بردار $\overrightarrow{OA}$ باشد، داریم:

$$\overline{OM}\cdot\overline{OM_1}=-3a^2 \text{ و } \overrightarrow{M_1M'}=\overrightarrow{OA}$$

اگر $M=M'$ و M نقطه‌ای از OA باشد وپاره‌خط OA از O به‌سمت A جهت دارشده باشد خواهیم داشت:

$$\overline{OM}\cdot\overline{OM_1}=-3a^2 \text{ و } \overline{OM}-\overline{OM_1}=4a$$

$$\overline{OM}(\overline{OM}-4a)=-3a^2$$

$$\overline{OM}=a \text{ یا } \overline{OM}=3a$$

بر OA دونقطهٔ ثابت B و C وجوددارد که $OB=a$ و $OC=3a$ بقسمی که درتبدیل U ثابت می‌مانند.

۲) داریم:

$$\begin{cases}\overline{OM}\cdot\overline{OM_1}=-3a^2\\ \overline{OM}\cdot\overline{OM'_1}=3a^2\end{cases}\Longrightarrow\overrightarrow{OM'_1}=-\overrightarrow{OM_1}$$

اگر I وسط OA (همچنین وسط BC) باشد:

$$\overrightarrow{M_1M'}=\overrightarrow{OA}\Longrightarrow\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OI}$$

$$\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OM'_1}=2\overrightarrow{OI}$$

معلوم می‌شود که I وسط M'_1M' است یعنی تغییر مکانی که M'_1 رابه M' تبدیل می‌کند تقارن به‌مرکز I است.

چون $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=3a^2$ است پس‌دایرهٔ به‌قطر BC درانعکاس $(O, 3a^2)$ وهمچنین در تقارن به مرکز I (مرکز دایره) و در نتیجه درتغییر مکانی که‌ترکیب‌این‌انعکاس‌وتقارن باشدثابت‌می‌ماند. اما ترکیب این دوتبدیل‌همان تغییرمکان U است پس‌دایرهٔ مزبور در تغییرمکان U ثابت است.

۳) دونقطهٔ M'_1 و M' درانتهای قطری ازدایرهٔ به‌قطر BC واقعند پس‌زاویهٔ OMM' قائمه است. رأس این‌زاویه بر دایرهٔ به‌قطر BC حرکت می‌کند وضلع OM بر نقطهٔ ثابت O می‌گذرد، پس MM' برهذلولی ثابتی مماس است که O یکی ازکانونها ودایرهٔ به‌قطر BC دایرهٔ اصلی آن است.

حل مسائل گوناگون

۱۰۵/۳۱- فرستنده: رضا راشدی

دانشجوی مدرسهٔ عالی فنی

ثابت‌کنید هرعدد حقیقی که در معادلهٔ زیر صدق کند مثبت است:

$$3x^{2n+1}-x^{2n}+5x^{2n-1}+10x^n-35=0$$

حل- (باتوجه به‌رفع اشتباه چاپی صورت مسئله) معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$3x^{2n+1}+5x^{2n-1}=(x^n-5)^2+10$$

$$x^{2n-1}(3x^2+5)=(x^n-5)^2+10$$

طرف دوم به‌ازای هرمقدار از x مثبت است، پس طرف اول نیز مقدار مثبت است و چون $3x^2+5$ نیزمثبت است پس x^{2n-1} نیزمثبت است وچون $2n-1$ عدد فرد است بنابراین x نیز مثبت است.

پنج مسئله از: کاظم حافظ قرآن

۱۰۵/۳۲- مطلوبست‌تعیین $S=x+y+z$ ازدستگاه زیر بدون حل آن:

$$\begin{cases}\frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{z}{9}=1\\ \frac{x}{10}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1\\ \frac{x}{12}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=1\end{cases}$$

حل- معادلهٔ زیر بامجهول U رادر نظر می‌گیریم:

$$\frac{x}{U}+\frac{y}{U-۷}+\frac{z}{U-۵}=۱$$

باتوجه بمعادله‌های داده شده ریشه‌های این‌معادله عددهای ۱۴، ۱۰و۱۲ است. اما اگر معادله رامرتب کنیم:

$$U^{۳}-(۱۲+x+y+z)R^{۲}+\cdots$$

بنابه روابط بین ریشه‌ها وضریبها نتیجه می‌شود:

$$۱۲+x+y+z=۱۴+۱۰+۱۲$$

$$S=x+y+z=۲۴$$

۱۰۵/۳۳- مجموع n جمله از رشتهٔ زیررا پیدا کنید.

$$S=۱+۲۱+۲۲۱+۲۲۲۱+\cdots$$

حل- به‌ترتیب داریم:

$$۱=\frac{۲\times ۱۰^{۱}-۱۱}{۹}\ ،\ ۲۱=\frac{۲\times ۱۰^{۲}-۱۱}{۹}$$

$$۲۲۱=\frac{۲\times ۱۰^{۳}-۱۱}{۹}$$

$$\text{جملهٔ } n \text{ام}=\frac{۲\times ۱۰^{n}-۱۱}{۹}$$

$$S=\frac{۲}{۹}(۱۰+۱۰^{۲}+\cdots+۱۰^{n})-\frac{۱۱n}{۹}$$

$$S=\frac{۲\times ۱۰^{n+۱}-۹۹n-۲۰}{۸۱}$$

۱۰۵/۳۴- مجموع n جمله از رشتهٔ زیر را بدست آورید:

$$S=۱+۳۱+۳۳۱+۳۳۳۱+\cdots$$

حل- داریم:

$$۱=\frac{۱۰-۷}{۳}\ ،\ ۱۱=\frac{۱۰^{۲}-۷}{۳},\cdots$$

$$\text{جملهٔ } n \text{ام}=\frac{۱۰^{n}-۷}{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۳}(۱۰+۱۰^{۲}+\cdots+۱۰^{n})-\frac{۷n}{۳}$$

$$S=\frac{۱۰^{n+۱}+۶۳n-۱۰}{۲۷}$$

۱۰۵/۳۵- بدون استفاده ازمشتق ماکسیمم تابع زیر را پیدا کنید:

$$y=\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}(x+۲)}}{۳x+۱}$$

حل- تابع‌را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{۱}{\sqrt{۵۰}}\sqrt[۳]{\frac{۵x}{۳x+۱}\times\frac{۵x}{۳x+۱}\times\frac{۲x+۴}{۳x+۱}}$$

درفاصله‌ای که تابع معین‌باشد هریك از کسرهای داخل رادیکال مثبت است وباتوجه به‌اینکه برای عددهای مثبت:

$$\sqrt[۳]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{۳}$$

نتیجه می‌شود که:

$$y\leqslant\frac{۱}{\sqrt{۵۰}}\times\frac{۱۲x+۴}{۳(۳x+۱)}\Longrightarrow y\leqslant\frac{۴}{۳\sqrt{۵۰}}$$

۱۰۵/۳۶- معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$[x]+[x-۲]=۱۲$$

منظور از $[n]$ بزرگترین عدد صحیح است که از n بزرگتر نباشد.

حل- داریم:

$$x+(x-۲)=۱۲\Longrightarrow x=۷$$

$x=۷$ درمعادلهٔ‌داده‌شده‌صدق می‌کند. اگر $x<۷$ باشد داریم:

$$\begin{matrix} x<۷ & & [x]<۷ \\ & \Longrightarrow & \\ x-۲<۵ & & [x-۲]<۵ \end{matrix}$$

$$[x]+[x-۲]<۱۲$$

پس $x<۷$ درمعادله صادق نیست. اگر $x\geqslant ۸$ باشد نتیجه‌می‌شود

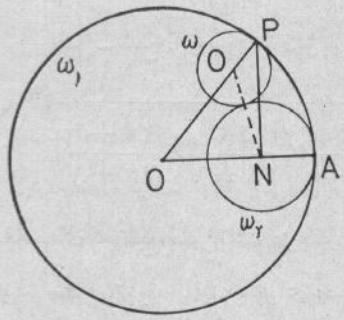
$$[x]+[x-۲]\geqslant ۱۴$$

بنابراین $x\geqslant ۸$ نیز درمعادله صدق نمی‌کند. پس: $۷\leqslant x<۸$

مسائل ترجمهٔ مهندس زرگری

۱۰۵/۳۷- در دایرهٔ $\omega_{۱}$ به مرکز O وبه‌شعاع R شعاع OA را رسم‌می‌کنیم. ازنقطهٔ دلخواه N واقع برOA عمودی بر OA اخراج می‌کنیم تادایرهٔ $\omega_{۱}$ را در P قطع کند. دایرهٔ ω را رسم می‌کنیم که بردابرهٔ $\omega_{۱}$ و همچنین بردایرهٔ بمرکز N و به‌شعاع $NA=l$ مماس باشد. اگر r شعاع دایرهٔ ω باشد وقتی که $l\to ۰$ حد r چه خواهد بود؟

حل ـ درمثلث ONO_1 داریم:



$$OO_1 = R - r \quad \text{و}$$

$$ON = R - 1 \quad \text{و}$$

$$O_1N = 1 + r$$

$$O_1N^2 = OO_1^2 + ON^2 - 2OO_1 \cdot ON \cos O$$

$$\cos O = \frac{ON}{OP} = \frac{R-1}{R}$$

$$(1+r)^2 = (R-r)^2 + (R-1)^2 - \frac{2(R-r)(R-1)^2}{R}$$

ازاین معادله نتیجه می‌شود:

$$r = \frac{R^2 - R1}{3R - 1}$$

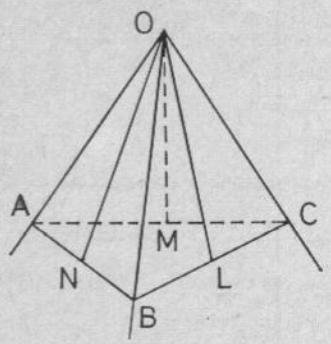
$$1 \to 0 \Longrightarrow \lim r = \frac{R}{3}$$

۱۰۵/۳۸ـ الفبای زبانی از چهار حرف با صدا و شش حرف بی صدا تشکیل شده است. درهر کلمهٔ این زبان حرفهای باصدا و بی صدا یك درمیان به‌دنبال هم می‌آیند. در این زبان چند کلمهٔ نه‌حرفی وجود دارد؟

حل ـ درکلمه‌های نه‌حرفی که باحرف باصدا شروع‌شوند پنج حرف باصدا وچهار حرف بی‌صدا بکارمی‌رود. تعدادحرفهای باصدا ۴ است پس‌به 4^5 طریق می‌توان چهار حرف باصدا را در پنج محل بکار بـرد. همچنین به 6^4 طریق می‌توان شش حرف بی‌صدا را درچهار محل‌بکار برد. پس‌تعداد همهٔ کلمه‌های نه‌حرفی که باحرف باصدا شروع می‌شوند $4^5 \times 6^4$ است. به‌روش مشابه معلوم خواهد شدکه تعداد همهٔ کلمه‌های نه حرفـی‌که با حرف بی‌صدا شروع می‌شوند $4^5 \times 6^4$ است. بنابراین رویهـم تعـداد 10×24^4 کلمهٔ نه‌حرفی درزبان فرضی‌وجود دارد.

۱۶۵/۳۹ـ درکنجی‌سه‌وجهی نیمسازهای‌زاویه‌های رأس دوبه دو با یکدیگر زاویه‌های برابر می‌سازند. بین اندازه‌های زاویه‌های رأس‌کنج داده‌شده چه رابطه برقرار است؟

حل ـ رأس‌کنج را O می‌نامیم. روی یالهای کنج‌طولهای



$OA = OB = OC = 1$

راجدا می‌کنیم نیمساز‌های زاویه‌های

$BOC = \alpha$ و

$COA = \beta$ و

$AOB = \gamma$ ضلعهـــای

BC و CA و AB را به ترتیب در L وM وN قطع می‌کنند.

بنابه تعریف حاصل‌ضرب اسکالر دوبردار خواهیم داشت:

$$\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OL}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OL}}{OM \cdot OL} = \frac{(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA})}{4OM \cdot OL}$$

$$\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OL}) = \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

به‌همین ترتیب داریم:

$$\cos(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1}{4\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\cos(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1}{4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

هرگاه نیمسازها بایکدیگرزاویه‌های برابربسازند دراین‌صورت:

$$(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1)(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}) = 0$$

$$(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1)(\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}) = 0$$

ازاین دو رابطه نتیجه می‌شودکه یا $\alpha = \beta = 2$ یا:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1 = 0$$

۱۰۵/۴۰ـ عددهای a و b و c از ریختن تاس نتیجه می‌شوند. احتمال آن را پیدا کنید که :

الف ـ خط به معادلهٔ $ax + by = c$ ازنقطهٔ (۱ و ۱) بگذرد.

ب ـ سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ با محـور طولها برخوردنداشته باشند.

حل- الف: تعداد حالتهای ممکن که در ریختن سه تاس پیش می‌آید $۶^۳=۲۱۶$ است. برای آنکه خط $ax+by=c$ از نقطهٔ (۱,۱) بگذرد باید داشته باشیم $a+b=c$ و چون $۱\leqslant c\leqslant ۶$ پس $۲\leqslant a+b\leqslant ۶$. بادرنظر گرفتن مقادیر مختلف a و b معلوم خواهد شد که در ۱۵ حالت مجموع $a+b$ دررابطهٔ بالا صدق می‌کند. یعنی تعداد حالتهای مساعد ۱۵ است واحتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{۱۵}{۲۱۶}=\frac{۵}{۷۲}$$

ب: سهمی به‌معادلهٔ داده شده وقتی دربالای محور طولها است که $b^۲<۴ac$ باشد. برای شمارش تعداد حالتهای مساعد جدول زیررا تشکیل می‌دهیم که درخانه‌های اصلی آن تعدادمقادیر مربوط به b نظیرمقادیر a و c ثبت شده است.

a \ c	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
۱	۱	۲	۳	۳	۴	۴	۱۷
۲	۲	۳	۴	۵	۶	۶	۲۶
۳	۳	۴	۵	۶	۶	۶	۳۰
۴	۳	۵	۶	۶	۶	۶	۳۲
۵	۴	۶	۶	۶	۶	۶	۳۴
۶	۴	۶	۶	۶	۶	۶	۳۴
						جمع	۱۷۳

احتمال مطلوب برابر می‌شود با: $\frac{۱۷۳}{۲۱۶}$

پاسخ تستهای ریاضی

۴۱-ب	۴۲-الف	۴۳-هیچکدام	۴۴-د	۴۵-د
۴۶-ب	۴۷-ب	۴۸-الف	۴۹-الف	۵۰-د
۵۱-ج	۵۲-ب	۵۳-ج	۵۴-ج	۵۵-ب
۵۶-الف	۵۷-د	۵۸-ج	۵۹-ب	۶۰-د
۶۱-ب	۶۲-ج	۶۳-الف	۶۴-الف	

توضیحات مربوط به تستها

۴۱- هرمستطیل درعین‌حال ذوزنقه است (قائم ومتساوی‌الساقین).

۴۳- درچاپ صورت مسئله اشتباه روی داده است. رابطهٔ مفروض $۳+۷=۱۲$ بوده است که اگر x مبنای عدد نویسی باشد $۳+۷=x+۲$ وجواب $x=۸$ بدست می‌آید. امابرای رابطه‌ای که چاپ شده است داریم:

$$۳+۸=x+۲\Longrightarrow x=۹$$

۴۵- مثلث AEF متساوی‌الساقین است. زیرا AD نیمساز زاویهٔ‌رأس ونیزارتفاع نظیررأس‌است. پس $AE=AF$ اما:

$$BE=AE-AB=AF-AB$$
$$CF=AC-AF$$
$$AF-AB=AC-AF\Longrightarrow ۲AF=AB+AC$$

۴۹- کوچکترین مضرب مشترك دوعدد ۲۴و۳۲ برابر ۹۶ است. باید معلوم کنیم که چند جمله ازتصاعد حسابی باجملهٔ اول ۹۶ وقدر نسبت ۹۶ اختیار شودکه مجموع جمله‌های آن ۵۲۸۰ باشد.

$$\frac{n}{۲}[۲\times ۹۶+(n-۱)۹۶]=۵۲۸۰$$

$$n^۲+n=۱۱۰\Longrightarrow n=۱۰$$

۵۱- نظیر قسمت اول حل‌مسئلهٔ ۱۰۵/۲۷

۵۵- ازرابطهٔ $tg\alpha=۲tg\beta$ نتیجه می‌شود:

$$\sin\alpha\cos\beta=۲\sin\beta\cos\alpha$$

۵۶- داریم:

$$\sin A=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\quad و\quad \sin B=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$\cos C=-\cos(A+B)=\cdots$$

۵۷- اگر G و G′ مرکزهای ثقل دوقاعدهٔ منشور باشد هرصفحه که بروسط G′G بگذرد ویالهای‌جانبی‌را قطع کندمنشور را به دوقسمت معادل تقسیم می‌کند.

۵۸- اگر $x<۰$ باشد داریم:

مسائل برای حل

برای دانش‌آموزان سال اول نظری و جامع

۱۰۶/۱ـ مجموعهٔ همهٔ عضوهای غیر مشترك دومجموعهٔ A و B را تفاضل متقارن این دو مجموعه گفته با $A\Delta B$ نشان می‌دهیم:

$$A\Delta B=\{x|(x\in A \text{ و } x\notin B) \text{ یا } (x\in B \text{ و } x\notin A)\}$$

الف ـ برای دومجموعهٔ:

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$$
$$B=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$

هریك از مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ و $A\Delta B$ رامشخص کنید.

ب ـ تحقیق کنید که:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$
$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

۱۰۶/۲ـ در یك آموزشگاه مختلط؛ عدهٔ دانش‌آموزانی که پسر یاشبانه روزی می‌باشند ۱۶۰ نفراست. عدهٔ دانش‌آموزانی که دختر یا شبانه روزی می‌باشند ۱۱۰ نفر است. معلوم کنید که عدهٔ کل دانش‌آموزان این آموزشگاه چند نفر است و ازاین عده چند نفر پسر، چند نفردختر، چندنفر شبانه‌روزی، چندنفر پسر شبانه روزی و چند نفر دختر شبانه روزی می‌باشند.

۱۰۶/۳ـ می‌دانیم که:

$$۹۶۸۴۲=۲۵۶\times ۳۷۵+۸۴۲$$

بدون آنکه عمل تقسیم ۹۶۸۴۲ برهریك از عددهای ۲۵۶ و ۳۷۵ را انجام دهید، خارج قسمت و باقیماندهٔ هر یك از این تقسیمها راپیدا کنید.

۱۰۶/۴ـ بزرگترین عدد طبیعی را پیدا کنید که چون هریك از عددهای ۶۳۵۵ و ۱۷۰۵ و ۱۲۷۱ را برآن تقسیم کنیم باقیمانده‌ها به ترتیب برابر باشند با ۵۵ و ۲۵ و ۱۱

۱۰۶/۵ـ فرض می‌کنیم:

$$A=\frac{ax^۲y}{z} \quad \text{و} \quad B=\frac{bx^۲y}{z}$$

هرگاه مقدار $A+B$ در ازای $x=-۳$ و $y=۴$ و $z=-۶$ برابر با ۱۲ و مقدار $A-B$ در ازای $x=۳$ و $y=-۱$ و $z=۳$ برابر با ۲۴ـ باشد مقادیر a و b را پیدا کنید.

۱۰۶/۶ـ در مثلث ABC اندازه زاویهٔ C برابر با ۳۰ درجه است. روی ضلع AB و در خارج مثلث ABC مثلث متساوی‌الاضلاع ABD را می‌سازیم واز C به D وصل می‌کنیم. ثابت کنید که طولهای CA، CB و CD ضلعهای یك مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

برای دانش‌آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

۱۰۶/۷ـ فرستنده: **کاظم حافظ قرآن**

حدود m را چنان تعیین کنید که اقلا یکی از ریشه‌های معادلهٔ زیر بین ۳ و ۵ واقع باشد.

$$x^۲-(۲m-۳)x+m^۲-۳m+۲=۰$$

۱۰۶/۸ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

ذوزنقهٔ متساوی الساقینی بردایرهٔ به شعاع r محیط و در دایرهٔ به شعاع R محاط شده است بقسمی که مرکز دایرهٔ اخیر برقاعدهٔ ذوزنقه قرار دارد. رابطهٔ بین r و R را بیابید.

برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

۱۰۶/۹ـ فرستنده: **کاظم حافظ قرآن**

ثابت کنید که لااقل یکی از معادله‌های زیردارای ریشه‌های حقیقی است:

$$۲x^۲+۲(a+۱)x+ab+۱=۰$$
$$۲x^۲+۲(b+۱)x+a+b=۰$$

۱۰۶/۱۰ ـ ترجمهٔ از فرانسه

عدد طبیعی n داده شده است. بزرگترین عدد صحیح g را

بیابید بقسمی که : $\frac{s(s+1)}{2} < n$

حالت خاص: $n = 1000$

۱۰۶/۱۱ـ فرستنده: **رضاراشدی بنفشه‌ورق**

دانشجوی مدرسهٔ عالی فنی

بین دو عدد ۳۱۳ و ۳۳۱۳۳ چند عدد قابل‌قسمت‌بر۱۳ وجود دارد؟

۱۰۶/۱۲ـ فرستنده: **قوام‌نحوی**

هرگاه در یك تصاعدحسابی m برابر جملهٔ mام‌برابر باشد با n برابر جملهٔ nام، ثابت‌کنیدکه جملهٔ $(m+n)$ام این تصاعد صفر است (به فرض $m \neq n$)

۱۰۶/۱۳ـ فرستنده: **جوادفیض** دانشجوی دانشکده فنی دانشگاه آذرآبادگان

در متوازی الاضلاع $ABCD$ قطر AC از قطر BD بزرگتر است. عمودهای CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می‌کنیم. ثابت‌کنید:

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$$

۱۰۶/۱۴ـ ترجمهٔ **مهندس‌زرگری**

مکان هندسی نقطه‌هایی را بیابیدکه مجموع سه زاویه‌ای که تحت آنها سه ضلع مثلث مفروض دیده می‌شوند مقدار ثابت α باشد.

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۰۶/۱۵ـ فرستنده: **رضا راشدی بنفشه ورق**

مقدار می‌نیمم تابع زیررا پیداکنید:

$$y = 3^{(x^2-2)^3+8}$$

۱۰۶/۱۶ـ فرستنده : **کاظم‌حافظ‌قرآن**

هرگاه داشته باشیم:

$$\cos\alpha + \cos\beta = a \quad \text{و} \quad \sin\alpha + \sin\beta = b$$

مقدار $tg\frac{\alpha+\beta}{2}$ و از روی آن مقادیر تابعهای مثلثاتی کمان $\alpha+\beta$ را بدست آورید.

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۱۰۶/۱۷ـ ترجمهٔ از فرانسه

دو تابع زیررا در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{و} \quad g(x) = x + \sqrt{x}$$

تحقیق کنید که مشتق تابع $g(f(x))$ برابر است با $g'(f(x))f(x)$

۱۰۶/۱۸ـ فرستنده: **کاظم حافظ قرآن**

برهذلولی به معادلهٔ $y = \frac{1}{x}$ نقطهٔ P به طول k را اختیار کرده در آن قائمی برمنحنی رسم می‌کنیم‌که در نقطهٔ دیگر Q آن را تلاقی می‌کند. قرینهٔ Q نسبت به مرکز هذلولی را R می‌نامیم. هرگاه k تغییر کند معادلهٔ مکان‌هندسی نقطهٔ M وسط PR را بدست آورید.

۱۰۶/۱۹ـ فرستنده : **کاظم حافظ‌قرآن**

به فرض $x + y = \frac{\pi}{4}$ مقادیر x و y را از معادلهٔ زیر بدست آورید:

$$2\cos(x+2y) = \cos(x-y)$$

۱۰۶/۲۰ـ فرستنده: **رضا راشدی بنفشه‌ورق**

ثابت‌کنیدکه:

$$\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)^2 < \frac{a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2}{a^2 - 2ab\cos\beta + b^2} < \left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)^2$$

۱۰۶/۲۱ـ ترجمهٔ از فرانسه

سطح مخروطی دوار به رأس S و امتداد Δ مفروض‌است. کدام مولد از سطح مخروطی با امتداد Δ کوچکترین زاویه یا بزرگترین زاویه را می‌سازد.

۱۰۶/۲۲ـ ترجمهٔ از فرانسه

خط D در نقطهٔ O با صفحهٔ P متقاطع است. در صفحهٔ P خط غیرمشخص D' را رسم می‌کنیم‌که بر O بگذرد و Ox نیمساز زاویهٔ DOD' را در نظر می‌گیریم. هرگاه D' در صفحهٔ P حول O دوران‌کند مکان هندسی خط Ox چیست؟

برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۱۰۶/۲۳ـ سطح محصور بین هذلولی $x^2-y^2=a^2$ و محور Ox وخط $x=h$ (به فرض $h>a>0$) راحول‌محور Ox دوران می‌دهیم. هرگاه حجم حادث برابر باشد با حجم کرهٔ به شعاع a مقدار h را برحسب a حساب کنید.

۱۰۶/۲۴ـ فرستنده: **محمدحسنی نژاد**

ثابت کنید که در هرمثلث رابطهٔ زیر برقرار است:

$$a(1+2\cos 2A)\cos 3B+b(1+2\cos 2B)\cos 3A=c(1+2\cos 2C)$$

برای دانش‌آموزان کلاس ششم ریاضی

۱۰۶/۲۵ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

قسمت صحیح عدد $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3$ را پیدا کنید.

۱۰۶/۲۶ـ ترجمهٔ از فرانسه

منحنی نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y=\cos(\pi\sqrt{x})$$

۱۰۶/۲۷ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

در مثلث ABC داریم $b+c=2R\sqrt{3}$ ثابت کنید که:

$$\frac{\sin 2A}{\sin 3A}=\frac{2}{3}$$

۱۰۶/۲۸ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

چهار ضلعی محدب $ABCD$ در دایرهٔ به‌شعاع R محاط است. شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای BCD، CDA، DAB و ABC را به ترتیب r_1، r_2، r_3 و r_4 می‌نامیم. ثابت کنید که:

$$r_1+r_3=r_2+r_4$$

۱۰۶/۲۹ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

عدد طبیعی‌را پیدا کنید که مکعبش عددشش رقمی. بارقمهای ۳، ۵، ۵، ۷، ۷ و ۸ باشد.

۱۰۶/۳۰ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

ثابت کنید که اگر عدد $2a^3-3a^2b+2b^3$ بر ۵ بخش پذیر باشد، هریك از عددهای صحیح a و b نیز بر ۵ بخش‌پذیر است.

۱۰۶/۳۱ـ ترجمهٔ از فرانسه

از نقطهٔ ثابت P واقع درخارج دایرهٔ ثابت به مرکز O دو مماس PA و PA' را بر دایره رسم‌می‌کنیم. قاطع‌متغیری که از P بگذرد دایره را در B و C قطع می‌کند. هرگاه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و H' مرکز ارتفاعی مثلث $A'BC$ و M وسط HH' باشد، مکان هندسی هریك از نقطه‌های H، H' و M را تعیین کنید.

۱۰۶/۳۲ـ ترجمهٔ از فرانسه

دو نقطهٔ ثابت A و H مفروض است. مثلث متغیر ABC را در نظر می‌گیریم که H مرکز ارتفاعی آن بوده و شعاع دایرهٔ محیطی آن با ارتفاع AA' از مثلث برابر باشد. مکان هندسی M وسط BC را بدست آورید.

مسائل گوناگون

۱۰۶/۳۳ـ فرستنده: **جوادفیض**

هرگاه برای مقادیر مثبت a_1 و a_2 و ... داشته‌باشیم:

$$a_1c_1-b_1^2>0,\ a_2c_2-b_2^2>0,\ a_3c_3-b_3^2>0$$

ثابت کنید که

$$(a_1+a_2+a_3)(c_1+c_2+c_3)>(b_1+b_2+b_3)^2$$

۱۰۶/۳۴ـ فرستنده: **قوام‌نحوی**

جملهٔ عمومی رشتهٔ:

$$3, 6, 11, \ldots$$

عبارتست از:

$$u_n=A\times 2^n+B\times n$$

اولا A و B را پیدا کنید. ثانیاً مجموع n جمله از رشته را بدست آورید.

از مسائل فرستاده شده توسط: رضا راشدی

۱۰۶/۳۵ـ هرگاه $tg\,a$ و $tg\,b$ و $tg\,c$ ریشه‌های معادلهٔ

$$x^3-2(m-1)x-(m+1)=0$$

و $cotg\,a$ و $cotg\,b$ و $cotg\,c$ ریشه‌های معادلهٔ

$$x^3-(m+1)x^2-2(m-1)=0$$

باشد، مقدار m را پیدا کنید که:

$$tg(a+b+c)=cotg(a+b+c)$$

۱۰۶/۳۶ـ هرگاه $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادلهٔ

$$x^2-mx+m+1=0$$

و $\log a$ و $\log c$ ریشه‌های معادلهٔ

$$x^2-2mx+m-2=0$$

باشد، مقدار m را پیدا کنید که:

$$\log_a 10b-\log_c 100a=\log_a 100c-\log_b 10a$$

مسائل ترجمهٔ مهندس زرگری

۱۰۶/۳۷ـ در زبانی فقط سه‌حرف a و b و o وجوددارد. کلمه‌هایی که با این حرفها ساخته می‌شود چنانندکه سه حرف یکسان دنبال هم نمی‌آید. چندکلمهٔ سه حرفی می‌توان‌ساخت؟

۱۰۶/۳۸ـ به ازای چه مقدار از عدد طبیعی $n\geqslant 2$ گزارهٔ زیر درست است:

«هرگاه‌مجموع عددهای‌صحیح $a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3$ بر ۹ بخش پذیرباشد، اقلا یکی از عددهای a_i بر ۳ بخش پذیر است.

۱۰۶/۳۹ـ ثابت‌کنیدکه عدد $a_n=(2n)^{2n}-1$ نمی‌تواند توانی‌طبیعی (بزرگتر از یك) از یك عدد طبیعی‌باشد.

۱۰۶/۴۰ـ ثابت‌کنیدکه در هرچهار وجهی نسبت «حاصل‌ضرب طول هریال در مساحتهای دو وجه روبرو به آن» بر «سینوس فرجهٔ به یال مزبور» مقدار ثابت است.

تستهای ریاضی

در حدود برنامهٔ سال اول نظری

۱۰۶/۴۱ـ هرگاه داشته باشیم:

$A\{1,2,3,4,5,6\}$

$B=\{4,5,6,7,8,9\}$

$A-B$ کدام یك از مجموعه‌های زیراست:

الف ـ $\{7,8,9\}$ ب ـ $\{1,2,3\}$

ج ـ $\{4,5,6\}$ د ـ $\{1,2,3,7,8,9\}$

۱۰۶/۴۲ـ هرگاه n_1 عدد اصلی مجموعهٔ A و n_2 عدد اصلی مجموعهٔ B و n عدد اصلی مجموعهٔ E باشد بقسمی $A\cup B=E$ کدام یك ازگزاره‌های زیر همواره درست است:

الف ـ $n=n_1+n_2$ ب ـ $n>n_1+n_2$

ج ـ $n<n_1+n_2$ د ـ $n\leqslant n_1+n_2$

۱۰۶/۴۳ـ عبارت:

$$x^3y+y^3+4xy^2-5y+6$$

نسبت به دو متغیر x و y ازچه درجه است:

الف ـ ۳ ب ـ ۴ ج ـ ۲ د ـ هیچکدام

۱۰۶/۴۴ـ حاصل عبارت $(3a^2b-b^3)^2$ به ازای $a=-2$ و $b=-1$ کدام است:

الف ـ ۱۲۱ ب ـ ۱۶۹ ج ـ ۸۱ د ـ ۲۲۵

۱۰۶/۴۵ـ ذوزنقهٔ $ABCD$ متساوی الساقین است و قطر AC برساق BC عمود و نیمساز زاویهٔ A است. کدام‌یك ازگزاره‌های زیرغلط است:

الف ـ مثلث ADC متساوی الساقین است.

ب ـ اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۶۰ درجه است.

ج ـ ارتفاع ذوزنقه نصف ساق BC است.

د ـ ارتفاع ذوزنقه نصف قطر AC است.

۱۰۶/۴۶ـ مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. از نقطهٔ C در خارج مثلث خطی رسم می‌کنیم که با CA زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد و امتداد BA را در D قطع کند. اگر P وسط BD و M وسط BC باشد، کدام یك ازگزاره‌های زیر درست است:

الف ـ $BP=BM$

ب ـ $BP=AM$

ج ـ PM بر BC عمود است.

د ـ خط PM محیط مثلث ABC را نصف می‌کند.

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۱۰۶/۴۷ـ دو معادلهٔ زیررا در نظر می‌گیریم:

$x^2+px+q=0$ و $qx^2-px+1=0$

ریشه‌های این دو معادله نسبت به هم چگونه‌اند:

الف ـ قرینهٔ یکدیگرند　　ب ـ عکس یکدیگرند

ج ـ قرینهٔ عکس یکدیگرند　　د ـ باهم برابرند

۱۰۶/۴۸ـ به ازای چه مقدار از m عبارت:

$$(x^2-4x+4)(x^2+m^2x-5)$$

به ازای $x=2$ تغییر علامت می‌دهد

الف ـ هیچ‌مقدار　　ب ـ هرمقدار

ج ـ $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　　د ـ $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۱۰۶/۴۹ـ در یك تصاعد هندسی جملهٔ اول و قدرنسبت هرکدام برابر با 10^x است. اگر l جملهٔ n ام این‌تصاعدباشد $\log l$ برابر است با :

الف ـ nx　　ب ـ $(n-1)x$

ج ـ 10^{nx}　　د ـ $10^{(n-1)x}$

۱۰۶/۵۰ـ هرگاه داشته باشیم:

$$S=5\times5^2\times5^3\times\dots\times5^{10}$$

به فرض $\log 2=a$ مقدار $\log S$ برابر است‌با:

الف ـ $55a$　　ب ـ $55(a-1)$

ج ـ $55(1+a)$　　د ـ $55(1-a)$

۱۰۶/۵۱ـ مساحت‌مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای یك هشتم‌مساحت مربعی است‌که روی وتر آن ساخته می‌شود. میانهٔ نظیروتر با ارتفاع وارد بروتر چه زاویه‌ای می‌سازد:

الف ـ 60°　　ب ـ 30°　　ج ـ 15°　　د ـ 45°

۱۰۶/۵۲ـ در مثلث ABC هر سه زاویه حاده و H مرکز ارتفاعی آن است. دایرهٔ محیطی مثلث HBC را رسم می‌کنیم و خط Δ را در نقطهٔ B براین دایره مماس می‌کنیم. زاویهٔ حادهٔ بین دو خط Δ و BC را α می‌نامیم

الف ـ $\alpha>A$　　ب ـ $\alpha=A$

ج ـ $\alpha<A$　　د ـ $\alpha=90^\circ-A$

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۰۶/۵۳ـ مشتق تابع:

$$y=x(x+1)(x+2)\dots(x+n)$$

راکه نسبت به x مرتب‌کنیم حداکثر شامل چند جمله‌خواهد بود:

الف ـ n　　ب ـ $n+1$

ج ـ $n-1$　　د ـ $n-2$

۱۰۶/۵۴ـ به ازای چه مقادیر از a تابع $y=\frac{a^2x+1}{1-ax}$ همواره نزولی است:

الف ـ $a>0$ یا $a<-1$

ب ـ $a>1$ یا $a<0$

ج ـ $0<a<1$

د ـ $-1<a<0$

۱۰۶/۵۵ـ برای آنکه از هر نقطهٔ خط $y=mx$ بتوان مماسی برمنحنی تابع $y=\frac{2-x}{x-1}$ رسم‌کرد، لازم وکافی است‌که:

الف ـ $-3-2\sqrt{2}\leq m\leq-3+2\sqrt{2}$

ب ـ $-3-2\sqrt{2}<m<-3+2\sqrt{2}$

ج ـ $m\leq-3-2\sqrt{2}$ یا $m\geq-3+2\sqrt{2}$

د ـ $m<-3-2\sqrt{2}$ یا $m>-3+2\sqrt{2}$

۱۰۶/۵۶ـ هرگاه داشته باشیم:

$$tg\alpha+tg\beta=x \text{ و } tg\alpha-tg\beta=y$$

مقدار $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$ برابراست‌با:

الف ـ $\frac{y}{x}$　　ب ـ $\frac{x}{y}$

ج ـ $\frac{1-x}{1-y}$　　د ـ $\frac{1+x}{1+y}$

۱۰۶/۵۷ـ اگر $tg\frac{\alpha}{2}=2$ باشد $\cos 2\alpha$ برابراست‌با:

الف ـ $-\frac{3}{5}$　　ب ـ $\frac{3}{5}$

ج ـ $-\frac{7}{25}$　　د ـ $\frac{7}{25}$

۱۰۶/۵۸ـ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول وترش دوران داده‌ایم. حجم حادث برابر شده است با یا هشتم حجم کره‌ای که قطرش وتر آن مثلث است. زاویهٔ حادهٔ مثلث مزبور چه اندازه است:

الف ـ 30° ب ـ 45°

ج ـ 15° د ـ هیچکدام

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۶/۵۹ـ به ازای چند مقدار از x تابع زیرماکسیمم یا می‌نیمم است:

$$y=x^4+3x^2-4x+5$$

الف ـ هیچ ب ـ یك ج ـ دو د ـ سه

۱۰۶/۶۰ـ سطح محصور بین منحنی تابع

$$y=\sin x+|\sin x|$$

و محور x ها در کدام یك از فاصله‌های زیر صفراست:

الف ـ $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{2}$ ب ـ $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

ج ـ $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ د ـ $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{5\pi}{4}$

۱۰۶/۶۱ـ در مثلثی به ارتفاع h وشعاع دایرهٔمحیطی $2h$ حاصل ضرب دو ضلع مجاور به ارتفاع‌مزبور برابراست‌با:

الف ـ h^2 ب ـ $2h^2$

ج ـ $4h^2$ د ـ هیچکدام

۱۰۶/۶۲ـ کسر $\frac{1}{aaa}$ به ازای چند مقدار از a مولدکسر اعشاری متناوب‌مرکب است:

الف ـ هیچ ب ـ نه ج ـ چهار د ـ پنج

۱۰۷/۶۳ـ در مثلث متساوی الاضلاع ABC دایره‌ای در نظر می‌گیریم که بر دو رأس B و C و برمرکز ارتفاعی مثلث بگذرد. قطبی نقطهٔ A نسبت به این دایره:

الف ـ بر BC منطبق است.

ب ـ بین A و BC واقع است.

ج ـ در خارج مثلث واقع است.

د ـ با BC متقاطع است.

۱۰۶/۶۴ـ سهمی رسم می‌کنیم که در B و C برضلعهای AB و AC از مثلث متساوی الاضلاع ABC مماس باشد. کانون این سهمی:

الف ـ وسط BC است.

ب ـ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است.

ج ـ مرکز دایرهٔ محاطی خارجی‌مثلث است.

د ـ بردایرهٔ محیطی مثلث واقع است.

حل مسائل (دنباله ازصفحهٔ۲۳۲)

$$y=x\sqrt{x+1} \text{ و } y'=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

اگر $x>0$ باشد داریم:

$$y=-x\sqrt{x+1} \text{ و } y'=\frac{-3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

وقتی $x\to 0$ حدتابع برابربا صفراست اماحدمشتق ازچپ‌برابر -1 واز راست برابر $+1$ است.

۶۰ـ نسبت $\frac{a}{b}$ برابر است با $\frac{\sin A}{\sin B}$ که برابرمی‌شود با $tg A$.

۶۱ـ مجموع $\cos B+\cos C$ رابه حاصل ضرب تبدیل می‌کنیم. بااستفاده ازداده‌ها نتیجه خواهدشد:

$$\cos\frac{B-C}{2}=1$$

۶۲ـ خواهیم داشت:

$$n^2-n=n(n-1)=9k$$

یکی‌از دوعدد n یا $n-1$ مضرب ۹است.

۶۳ـ خواهیم داشت:

$$n^5+n+1=(n^2+n+1)(n^3-n^2+1)$$

به‌ازای $n=1$ عدد برابربا۳ واول‌است. به ازای $n>1$ عدد حاصل‌ضرب دوعدد مخالف یك است واول‌نیست.

۶۴ـ قوت انعکاس برابربا قوت نقطهٔ D نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث است. درهرمثلث قرینهٔ مرکز ارتفاعی نسبت به هر ضلع بردایرهٔ محیطی واقع است.

شماره‌های گذشتهٔ مجلهٔ یکان

از ۱۰۳ شماره ماهانهٔ مجلهٔ یکان‌که از ابتدای تأسیس تاکنون منتشر شده است، فقط مجله‌های به شمارهای زیردرادارهٔ مجله موجود است‌که به‌بهای مندرج در روی‌آنها بفروش‌می‌رسد.

۳۲ـ۳۳ـ۳۶ـ۴۲ـ۴۴تا۴۹ـ۵۱تا۵۸ـ۶۱تا ۶۹ـ۷۱ تا۷۷ـ۷۹تا۸۵ـ۸۸تا۱۰۰ـ۱۰۲ـ۱۰۳

یکان‌سال۵۱: ۱۰۰ریال، یکان‌سال۵۲: ۱۵۰ریال

مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث دوم ، سال تحصیلی ۵۲-۱۳۵۳ (اسفند ۱۳۵۲)

کلاس چهارم ریاضی

جبر

دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۱

دبیر: اصغری، حق بین- فرستنده: سید علی‌اکبر ریاضی

* مقدار k راچنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر رابطه $3x'x''=2x'-2x''$ برقرار باشد:

$$3x^2-kx+2=0$$

* معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$x^4+(x+\sqrt{2})^4=68$$

گروه فرهنگی دکتر هشترودی

دبیر: مقدم، مجمریان - فرستنده : کمال عرفانی

* اولا جذر عبارت زیر را بدست آورید:

$$a^6-2a^5-a^4+3a^2+2a+1$$

ثانیاً معادلهٔ زیر را با استفاده از جذر حل کنید:

$$(a-1)x^2-(a^3-a^2+a+1)x+a^3+a^2=0$$

سپس علامت ریشه‌هارا مستقیماً ازروی جوابها بدست آورید.

* m راچنان تعیین کنید که کسر زیر تحویل پذیر باشد:

$$\frac{x^2-x-2m}{x^2-4x+m}$$

گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر: هدانیا- فرستنده : لطف‌الله معینی

* معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\sqrt{x'}+\sqrt{x''}=5\\ x'-x''=5\end{cases}$$

* علامت عبارت زیر را تعیین کنید:

$$(x^2+\frac{2}{3})^n(-x^2+x-4)(x^2-9)$$

حساب

دبیرستان بابکان

دبیر: اسعدی - فرستنده: علیرضا حقوقی‌نیا

دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}10^{2-\log(x-y)}=25\\ \log(x-y)+\log(x+y)=1+2\log 2\end{cases}$$

دبیرستان حبیب‌الله آموزگار (اصطهبانات)

دبیر: سجادی

اگر داشته باشیم $\log 6=0/77815$ و $\log 5=0/69897$ مطلوب است محاسبهٔ $x=\log\sqrt[3]{30}$

دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۱

دبیر: مهدوی - فرستنده : سیدعلی‌اکبر ریاضی

* معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$3\log_3\log_{16}(x^2+37)^2-\log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{x^2+37}=4$$

* اگر x و y و z به ترتیب جملات mام و nام و kام یك تصاعد هندسی باشند ثابت کنید:

$$\frac{x^{n-k}}{y^{m-k}\times z^{n-m}}=1$$

گروه فرهنگی هشترودی

دبیر: پرورش ـ فرستنده: کمال عرفانی

اگر رابطهٔ $\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}=\frac{\log_a N}{\log_c N}$ برقرار باشد ثابت کنید b واسطهٔ هندسی است بین a و c.

مسائل هندسه

دبیرستان بابکان

دبیر: اسعدی ـ فرستنده: علیرضا حقوقی‌نیا

مثلث ABC مفروض است. خط DE را چنان رسم کنید که داشته باشیم:

$$DB=DE=EC$$

گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر: هدانیا ـ فرستنده: لطف‌الله معینی

زاویهٔ xOy و خط Δ مفروض است. نقطه‌ای مانند M چنان پیدا کنید که اگر از نقطهٔ M دو عمود MA و MB را بر اضلاع زاویه فرود آوریم AB=1 باشد و با خط Δ موازی باشد.

کلاس پنجم ریاضی

جبر

دبیرستان ادب وسعدی

دبیر: موحدی ـ فرستنده: مرتضی آریا

نقطهٔ $A(3,-1)$ یکی از رئوس و خط به معادله $y+5=0$ یکی از اقطار لوزی ABCD می‌باشد. درصورتی که مساحت این لوزی ۴۸ واحد مربع باشد اولا مختصات رئوس دیگر لوزی را بدست آورید. ثانیاً تحقیق کنید نقاط $A(3,-1)$ و $B(-3,-5)$ و $C(3,-9)$ و $D(9,-5)$ روی منحنی C_2 به‌معادلهٔ زیر واقع می‌باشد:

$$4x^2+9y^2-24x+90y+117=0$$

ثالثاً تحقیق کنید خط به معادلات $x=3$ و $y=-5$ معادلات محورهای تقارن منحنی C_2 می‌باشد.

گروه فرهنگی خوارزمی ـ دبیرستان شمارهٔ ۱

دبیر: قاسملو ـ فرستنده: سید علی‌اکبر ریاضی

* حاصل عبارت زیر را در ازاء مقدار داده شده حساب کنید:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{tg7\alpha}{\sqrt{1+\sin 5\alpha}-\sqrt{1-\sin 5\alpha}}$$

* اگر y' و y'' مشتقات مرتبه اول و دوم باشد در تابع زیر:

$$y=(x+\sqrt{x^2-1})^{50}(x-\sqrt{x^2-1})^{40}$$

رابطهٔ زیر را بدست آورید:

$$(x^2-1)y''+xy'=100y$$

دبیرستان رازی شیراز

دبیر: جوادپور ـ فرستنده: غلامرضا سراجی

* مطلوب است تعیین

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$

* ناحیه وجود تابع زیر را در صفحهٔ محورهای مختصات تعیین کنید:

$$y=\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2}+\sqrt{xy}$$

* ازتابع زیر مشتق بگیرید:

$$y=\sin^5 tg^3\sqrt[5]{x}$$

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر: قمیصی ـ فرستنده: حمیدی

* اولا مطلوبست تعیین جدول و رسم منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=-\frac{2}{3}x^2+x+\frac{2}{3}$$

ثانیاً اگر A و B نقاط برخورد سهمی به معادلهٔ $y=mx^2+x-m$ با خط به معادلهٔ $y=mx-m+1$ باشد تعیین کنید که به ازاءچه مقادیر پارامتر m پاره‌خط AB از نقطهٔ $C(2,1-m)$ به زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود و باتغییر پارامتر m معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P وسط پاره خط AB را بدست آورید.

* یك کارخانهٔ رادیوسازی می‌تواند در روز تعداد x رادیو و با رعایت رابطهٔ عرضه وتقاضای $3x+2p=270$ تولید کرده وهر دستگاه آنرا به p تومان بفروش برساند. اگرهزینهٔ کل تولید این کالا $2x^2+9x+134$ تومان باشد معین کنید که این کارخانه برای اینکه بیشترین سود ممکن را ببرد، درروز باید چند دستگاه رادیو تولید کند.

* در تابع $y=2x-3+\sqrt{ax^2+bx+c}$ مطلوبست محاسبهٔ a و b و c بشرطی که منحنی نمایش تغییرات تابع از نقطهٔ $A(0,2)$ مرور کرده و $\lim_{x\to-\infty} y=-1$ باشد.

گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر: هدانیا ـ فرستنده: لطف‌الله معینی

تابع $y=(a+1)x^2+2x-1$ مفروض است. مطلوب است معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ ماکزیمم یا می‌نیمم منحنی نمایش هندسی تابع فوق وقتی که پارامتر a تغییر می‌کند.

دبیرستان میرداماد

دبیر: رجائی ـ فرستنده: امیر حسین کریمی

ثابت کنید منحنی‌های نمایش تابع زیر از نقاط ثابتی که مختصات آنرا تعیین خواهید کرد می‌گذرد:

$$y=\frac{ax^2+3}{x^2+ax+2}$$

مثلثات

دبیرستان ادب و سعدی

دبیر: همدانی ـ فرستنده: مرتضی آریا

ثابت کنید $\sin x=tg\frac{2a}{2}$ اگر:

$$x=\mathrm{Arc}\,cotg\sqrt{\cos\alpha}-\mathrm{Arc}\,tg\sqrt{\cos\alpha}$$

گروه فرهنگی خوارزمی ـ دبیرستان شمارهٔ ۱

دبیر: صداقت کیش ـ فرستنده: سید علی‌اکبر ریاضی

* صحت تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\mathrm{Arc}\,tg\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\mathrm{Arc}\sin\frac{4}{5}+\mathrm{Arc}\,tg\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

* معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\cos^4 x+\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{4}$$

دبیرستان رازی شیراز

دبیر: جوادپور ـ فرستنده: غلامرضا سراجی

* اولا درستی تساوی زیررا تحقیق کنید:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}+cotg\,2\alpha=cotg\,\alpha$$

ثانیاً معادلهٔ زیر را حل کنید ومقدار α را بدست آورید:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\dots+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}=0$$

* درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$tg^2\alpha+cotg^2\alpha=2\times\frac{3+\cos 4\alpha}{1-\cos 4\alpha}$$

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر: قمیصی ـ فرستنده: حمیدی

* از روابط زیر مقدار $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ رابرحسب a و b و c بدست آورید:

$$\begin{cases} a\sin\alpha+b\cos\alpha=c \\ a\sin\beta+b\cos\beta=c \end{cases}$$

* بین روابط زیر x و y را حذف کرده و رابطهٔ گویایی برحسب $tg\,\alpha$ و $tg\,\beta$ و $tg\,\gamma$ بدست آورید (رابطه بدست آمده حتی‌الامکان خلاصه شود)

$$\cos(x-y)=\sin\beta\sin\gamma$$

$$\sin\gamma=\sin\alpha\cos y$$

$$\sin\beta=\sin\alpha\cos x$$

* تحقیق کنید که به ازاء هیچیك از مقادیر x مقدارعددی $tg\,3x\,tg\,x$ نمی‌تواند بین ۳ و $\frac{1}{3}$ قرار گیرد.

گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر: کنگرلو ـ فرستنده: لطف‌الله معینی

ثابت کنید $x=\sin 4A$ اگر

$$(1+\sqrt{1+x})\,tg A=1+\sqrt{1-x}$$

گروه فرهنگی شهریار قم

دبیر: امیدوار ـ فرستنده: سید محمد باقر کاشانی

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{2\sin x}+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{2\sin x}=8$$

دبیرستان هدایت

فرستنده: منصور حدایان

اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$\cos 175\cos 65\cos 55=\frac{-\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}$$

مسائل هندسه

دبیرستان ادب و سعدی

فرستنده: مرتضی آریا

ثابت کنید در هر چهار وجهی دلخواه اولا پاره‌خطهائی که اوساط یالهای متقابل را بهم وصل می‌کنند از یك نقطهٔ مانند O می‌گذرند. ثانیاً چهار پاره خطی که رؤس چهار وجهی را به محل تلاقی میانه‌های وجوه مقابل متصل می‌نمایند از O می‌گذرند و در این نقطه هریك به نسبت $\frac{1}{4}$ از قاعده و $\frac{3}{4}$ از رأس تقسیم می‌شوند.

دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۱

دبیر: وکیلی، امامی ـ فرستندگان: علی‌اکبر ریاضی، حمید بهداد

اگر M و N و P اوساط اضلاع مثلث ABC مقطع یك صفحه با یالهای کنج سه قائمه باشد ثابت کنید مجموع زوایای حادث در هریك از رئوس کنج OMNP دو قائمه است. (نقطهٔ O رأس کنج است).

گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر: هدانیا ـ فرستنده: لطف الله معینی

کنج چهار وجهی محدب Sxyzu مفروض است. از نقطهٔ M صفحه‌ای مرور دهید که فصل مشترکش با یالهای کنج متوازی الاضلاع گردد.

فیزیك

گروه فرهنگی خوارزمی ـ دبیرستان شمارهٔ ۱

فرستنده: سید علی اکبر ریاضی

مداری تشکیل یافته از مولدی به نیروی محرکهٔ ۲۴ ولت و مقاومت داخلی یك اهم موتوری به نیروی ضد محرکهٔ e و مقاومت داخلی ۲ اهم و یك رئوستا به مقاومت $R=7$ اهم. ولتمتری اختلاف پتانسیل دوسرموتور را ۱۴ ولت نشان می‌دهد. اولا تعیین کنید شدت جریان مدار و نیروی ضد محرکهٔ موتور و توان کل مصرف شده در مدار را. ثانیاً اگر موتور ترمز شود شدت جریان درمدار چقدر می‌گردد. نسبت توان مصرفی موتور در حالت دوم برحالت اول چقدر می‌شود؟

دبیرستان رازی شیراز

دبیر: فیروزمند ـ فرستنده: غلامرضا سراجی

ولتامتری که دارای آب اسیدار است ودارای الکتروهای پلاتین می‌باشد بین دونقطه که اختلاف پتانسیل آن ۶/۶ ولت با سیمی به مقاومت ۷ اهم بطور متوالی بسته شده است. درمدت ۱۰ دقیقه ۳۳/۴cc هیدرژن تهیه شده است. در صورتی که سیم مقاومت داررا حذف کنیم درهمان مدت ۱۰ دقیقه ۱۱۸cc هیدرژن متصاعد می‌شود.

الف: شدت جریان را در دو آزمایش فوق تعیین کنید.

ب: نیروی ضد محرکه و مقاومت داخلی ولتامتر راتعیین کنید.

ج: گرمای حاصل در مقاومت درحالت اول را تعیین کنید. $F=96500$ Caul

د: اگر مقاومت مخصوص سیم ۳۵ میکرو اهم سانتی و طول آن ۱۰ متر بوده است اندازه سطح مقطع سیم را برحسب میلی‌مترمربع تعیین کنید.

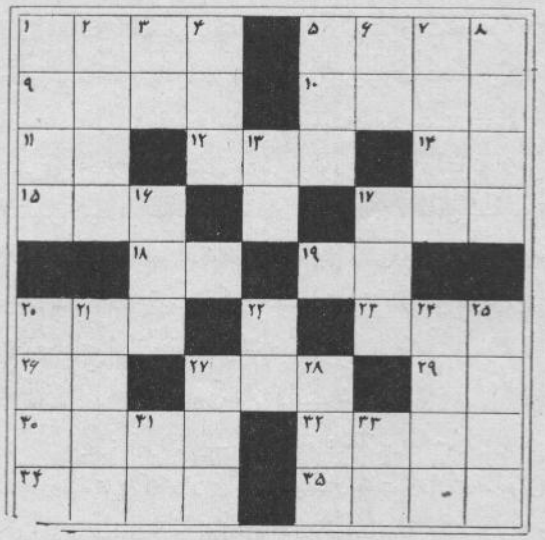
گروه فرهنگی شیخ بهایی

دبیر: فرجی ـ فرستنده: لطف‌الله معینی

عدسی همگرای L به فاصلهٔ کانونی ۶۰ سانتیمتر درفاصلهٔ ۴۱ سانتیمتری ازیك عدسی واگرای L′ به فاصلهٔ کانونی ۲۰ سانتیمتر قرار گرفته و محور اصلی آنها بریکدیگر منطبق می‌باشد. در فاصلهٔ بینهایت ستاره‌ای به قطر ظاهری $\frac{1}{100}$ رادیان وجود دارد که نور آن نخست بعدسی L سپس به‌عدسی L′ می‌تابد. اولا پرده را درچه فاصله‌ازعدسی L قراردهند تا تصویر روشن ستاره برآن ظاهرشود. ثانیاً قطردایره تصویر چقدراست ثالثاً اگر بجای دو عدسی L و L′ بخواهند از یك عدسی استفاده نمایند همگرائی این عدسی چقدر بایستی باشد.

جدول اعداد

طرح از: سید جمال آشفته (تاریخ وصول به دفتر مجله: ۱۳۵۰/۱۱/۱۰)



افقی: ۱ـ بزرگترین عددچهار رقمی که نه‌برابرمجموع رقمهایش است. ۵ـ تعداد رقمهای بکار رفته‌برای شماره گذاری صفحات کتابی که ۱۲۵۱ صفحه دارد. ۹ـ عدد چهاررقمی که هم مربع کامل وهم مکعب کامل است. ۱۰ـ کوچکترین عددبه‌صورت $\overline{abba}$ که مضرب ۹ باشد. ۱۱ـ عدد دو رقمی که چون با مجموع رقمهایش جمع شود با مقلوب خود برابر گردد. ۱۲ـ اگر رقمهای یکان و دهگان آن را جابجا کنیم یك نهم‌عدد۱ افقی بدست آید. ۱۴ـ مقلوب مجموع رقمهای عدد ۱۲ افقی. ۱۵ـ به صورت $\overline{aba}$ است که اگر یك واحد به رقم یکان آن اضافه شود مربع کامل گردد. ۱۷ـ متمم حسابی عدد۱۲ افقی. ۱۸ـ عدد دورقمی که با متمم‌حسابی‌خود برابر است. ۱۹ـ تعداد دفعاتی که مجموع رقمهای عدد ۱۲ افقی در این عدد می گنجد. ۲۰ـ دوبرابر ریشهٔ معادلهٔ : $x^2-554x+76729=0$

۲۳ـ مقدارعبارت زیر برحسب درجه:

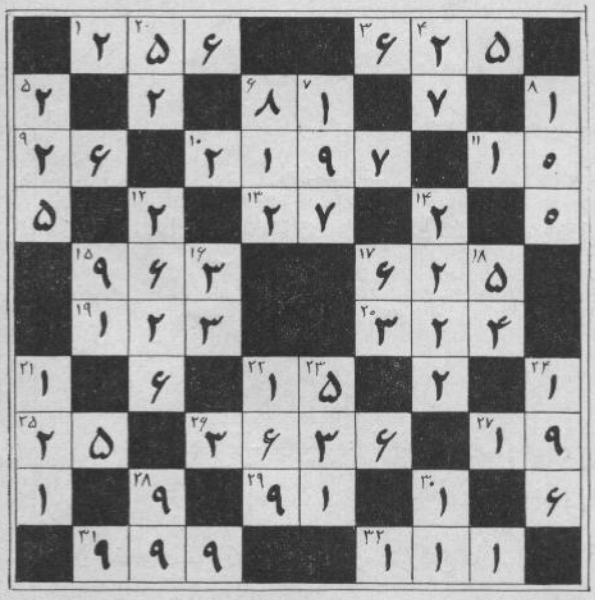
$$2\,\mathrm{Arccotg}\frac{1}{2}-\mathrm{Arccotg}\,2+\mathrm{Arccotg}\frac{13}{9}$$

۲۶ـ کوچکترین عدد دو رقمی که مجموع رقمهایش ۱۶ است. ۲۷ـ مقدار α برحسب درجه از رابطهٔ:

$$\cos\alpha+\cos 100^\circ+\cos 20^\circ=0$$

۲۹ـ اگر آن را با نصف خود وباربع خود جمع کنیم بامقلوب خود برابرشود. ۳۰ـ به صورت $\overline{aa(a+2)(a+2)}$ که مجموع رقمهایش ۱۶ است. ۳۲ـ از نوشتن دو برابر عدد ۱۹ افقی در سمت چپ عدد ۲۹ افقی بدست می‌آید. ۳۴ـ اگر دو رقم سمت چپ آن را سمت راست دو رقم دیگر آن بنویسیم عدد ۵ افقی بدست آید. ۳۵ـ بزرگترین عدد چهار رقمی که رقمهایش تصاعد حسابی با بزرگترین قدر نسبت ممکن راتشکیل می‌دهند.

قائم: ۱ـ به‌صورت $\overline{abbc}$ است که $\overline{ab}$ توان ششم و c نصف a است. ۲ـ اگر ۲ واحداز رقم یکان آن کم کنیم تکرار عدد ۱۸ افقی باشد. ۳ـ ۵ واحد بیشتر از یك مربع کامل و همچنین ۱۲ واحد کمتر از یك مربع کامل است. ۴ـ به‌رقم یکان آن اگر ۲ واحد اضافه کنیم عدد مربع کامل شود و اگر یك واحد اضافه کنیم عدد حاصل مضربی از رقم یکان فعلی آن باشد. ۵ـ مضربی از ۱۳ است و مجموع رقمهایش ۶ است. ۶ـ دو برابرعدد ۱۹ افقی. ۷ـ بزرگترین عدد به صورت $\overline{abbc}$ که مجموع‌رقمهایش ۲۵ است. ۸ـ چون‌با عدد۲۸۸۱ جمع‌شودعددی با رقمهای یکسان بدست آید. ۱۳ـ از مجموع رقمهایش ۳۴۲ واحد بیشتر است. ۱۷ـ آن‌را اگر بر۸ تقسیم کنیم باقیمانده‌یك شود و اگر بر۷ تقسیم کنیم باقیمانده ۳ گردد. ۲۰ـ ۷۲۷واحد بیشتر از عدد ۲ قائم. ۲۱ـ همان عدد ۲۰قائم که رقمهای‌یکان و سدگان آن جا بجا شده‌اند. ۲۲ـ یکدهم عدد ۲۷ افقی. ۲۴ـ تکراریك رقم. ۲۵ـ به صورت $\overline{abbc}$ است که مضربی‌از $\overline{abb}$ است و حاصل‌ضرب abb برابر ۱۸۰ است. ۲۷ـ اگر رقمهای یکان و دهگان آن را جابجا کنیم عددحاصل کوچکترین عدد سه رقمی باشد که حاصل‌ضرب رقمهایش۲۷ است. ۲۸ـ یك واحد بیشتر از عدد ۶ قائم. ۳۱ـ بزرگترین عدد دورقمی که چون با دوبرابر رقم یکان خود جمع شود عددی دو رقمی با رقمهای یکسان بدست آید. ۳۳ـ بزرگترین عدد دورقمی زوج که مجموع رقمهایش ۱۴ است.



حل جدول شمارهٔ قبل

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 141– If n is a positive integer, express in terms of n the number of solutions in positive integers of $2x+y+z=n$ when (**a**) n is even; (**b**) n is odd.

Solution: (**a**) n is even.

$y+z$ takes its smallest value when $y=z=1$, and $2x$ is then $n-2$. Thus we may let $x=1,2,3,\ldots,\frac{n-2}{2}$. We have then, $y+z=n-2,\ n-4,\ n-6,\ \ldots$ to which there are $n-3,\ n-5,\ n-7,\ \ldots$ solutions in positive integers. Using the formula:

$$S=\frac{N}{2}\left[2a+(N-1)d\right]$$

in which $N=\frac{n-2}{2}$ (the number of x's), $a=n-3$, $d=-2$, we obtain $\frac{n^2-4n+4}{4}$ solutions.

(**b**) n is odd.

Reasoning as in (a), $x=1,2,3,\ldots,\frac{n-3}{2}$, $y+z=n-2,\ n-4,\ n-6,\ldots$ to which there are $n-3,\ n-5,\ n-7,\ldots$ solutions. In the formula for S, we substitute $a=n-3$, $N=\frac{n-3}{2}$, $d=-2$, and obtain $\frac{n^2-4n+3}{4}$ solutions.

Problem 142– A greeting card dealer has three kinds of packets. Packet **A** contains 3 get-well cards, 1 birthday card, and 7 anniversay cards. Packet **B** contains 2,3, and 1 respectively. Packet **C** contains 5, 4, and 2, respectively. He wishes to merge these so as to form new packets, each containing one get-well card, one birthday card,and one anniversary card.

What is the least number of packets **A**, **B**, and **C** that must be used to accomplish this? How many new packets will be made?

Solution: Let x be the number of packets A, y the number of packets B, and z the number of packets C. There will then be $3x+2y+5z$ get-well cards, $x+3y+4z$ greeting cards, and $7x+y+2z$ anniversary cards.

To form the new packets with one of each type of card, the number of each type of card must be the same. Let this number be represented by t. Then:

$$3x+2y+5z=t$$
$$x+3y+4z=t$$
$$7x+y+2z=t$$

Solving for x, y, and z in terms of t we obtain:

$$x=\frac{2t}{21},\ y=\frac{5t}{21},\ \text{and}\ z=\frac{t}{21}$$

The smallest value of t that will make x, y, and z integial and positive is 21. Thus if we merge 2 packets of type A, 5 packets of type B, and 1 packet of type C, we will obtain:

$3\times2+2\times5+5\times1=21$ get-well cards;
$1\times2+3\times5+4\times1=21$ greeting cards: and
$7\times2+1\times5+2\times1=21$ anniversary cards.

These can therefore be merged to form 21 new packets.