# یکان

## مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ یازدهم، شمارهٔ : ۴ شمارهٔ مسلسل: ۱۰۵ بهمن ۱۳۵۳

## دراین شماره:


| | | |
|---|---|---|
| آیا نقطه شکل هندسی است؟ | عبدالحسین مصحفی | ۱۴۹ |
| کاوشهایی در تاریخ نجوم اسلامی(۲) | جعفر آقایانی چاوشی | ۱۵۰ |
| ساختمان منطقی قضیه(۴) | ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری | ۱۵۴ |
| مطالب دیگر در بارهٔ تساوی مجموعه‌ها | محمدحسن رزاقی خمسی | ۱۵۶ |
| روشی برای تعیین مجموع دوسری معروف | ترجمهٔ مهندس زرگری | ۱۵۷ |
| دربارهٔ اعداد اول | ترجمهٔ: جواد فیض | ۱۵۸ |
| حقه‌های بازی با ورق | ترجمهٔ: مهندس داوید ریحان | ۱۶۲ |
| با ریاضیات آشتی کنید | ترجمهٔ: عبدالحسین مصحفی | ۱۶۵ |
| حل چند مسئله در بارهٔ ماهواره‌ها | ترجمهٔ مهندس زرگری | ۱۶۹ |
| حل مسائل یکان شمارهٔ ۱۰۴ | - | ۱۷۱ |
| مسائل برای حل | - | ۱۸۵ |
| تستهای ریاضی | - | ۱۸۹ |
| مسائلی از امتحانات دانشسرای راهنمایی اصفهان | - | ۱۹۲ |
| جدول اعداد | محمد مهدی دشتی | ۱۹۵ |
| Problems & Solutions | - | ۱۹۶ |
| بوزینه در دانشگاه | دکتر علیرضا امیرمعز | ۲ ازجلد |


بها : ۴۰ ریال

# دربارهٔ سؤالهای کنکور

ازعلاقمندان به‌مجلهٔ یکان که قسمتی یاهمهٔ سؤالهای کنکور-های مختلف را در اختیار دارند، تقاضا می‌شود در صورت تمایل آنها رابرای درج دریکان سال دراختیار ادارهٔ مجله قـراردهند. ذکر نام‌آنان دریکان سال بستگی‌به تمایل خـودشان دارد. واگر خواسته باشند از ذکرنام‌ایشان به هنگام چاپ سؤالها خودداری خواهدشد واگرشرایط دیگری هم‌داشته باشند می‌توانند درمیان بگذارند.

# بوزینه در دانشگاه

**ترجمه واقتباس توسط علیرضا امیرمعز استاد دانشگاه تکزاس تک**

امتحان از نوع به‌اصطلاح تستی بیش ازهمه جا در کشورآمریکا متداول است. باوجوداین،در این کشور نیزمخالفتهایی بااین‌نوع امتحان‌ابراز می‌شود. داستان فانتزی زیر که اصل‌آن در مجلهٔ آمریکایی (AAUP) چاپ‌شده است‌نموداری از این‌مخالفتهااست.

جوانان، گواهینامه به دست، پشت سر یکـدیگر در صف ایستاده بودند ومنتظر نوبت بودندکه در دانشگاه نام‌نویسی کنند. درآمریکا هرکس گواهینامهٔ دبیرستان‌دارد می‌تواند واردداانشگاه شود. یکی‌یکی‌به‌پیشخان می‌رسیدند واسمشانرا به‌متصدی می گفتند (متصدی نام‌نویسی‌را ثبات می‌خوانند). ثبات‌که نامهارا به‌ترتیب الفبا دراختیار داشت، اسم شخص‌را پیدامی‌کرد ویك‌کتابچه به‌او می‌دادکه سؤالهایش‌را جواب‌دهد و هر صفحهٔ‌آنرا به‌دفتر خاصی ببرد. معمولاشش‌ماهی قبل از نام‌نویسی باید از دانشگاه پذیرش گرفت.

دنباله درصفحهٔ ۳ جلد


# یکان
## مجلهٔ ریاضیات

**تـأسیس : بهمن ۱۳۴۲**

**هرسال هشت شماره منتشر می‌شود**

دورهٔ‌یازدهم ـ شمارهٔ چهارم ـ شمارهٔ مسلسل: ۱۰۵

**بهمن ۱۳۵۳**

صاحب امتیاز و سردبیر: **عبدالحسین مصحفی**

**مدیرمسؤول: بانو نصرت ملك‌یزدی**

**نشانی‌اداره:**

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

**نشانی پستی : صندوق پستی۲۴۶۳**

**تلفن اداره:۳۹۳۱۸۱**

وجه اشتراك برای دورهٔ یازدهم : ۳۲۰ ریال

حساب بانکی:حساب جاری۳۰۹۵شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

**YEKAN**

**Mathematical Magazine**

**Editor : MOS'HAFI Abdolhossein**

**Volume XI, number 4. Jan. 1974**

subscription : 6$

TEHRAN - P.O.B. 2463

**چاپ تصویر ـتلفن : ۳۹۳۰۴۶**


# توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی‌کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است‌که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفـی می‌شوند .کتابهایی‌که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

**در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت‌آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.**

# آیا نقطه شکل هندسی است؟

عبدالحسین مصحفی

بارها شاهد این بحث بوده‌ام که «آیا نقطه شکل هندسی است یا نه؟». یکی از طرفین بحث، به‌استناد کتابهای هندسه‌ای که در دوران تحصیل یا به هنگام تدریس مورد استفاده‌اش بوده‌است، نقطه را نیز شکل هندسی می‌دانست. طرف دیگر، که در زمینه‌های جدید ریاضی وتحولات مربوط به‌بیان مفاهیم آن مطالعه داشت، نقطه‌را شکل هندسی نمی‌دانست. گاهی کتاب مورد استناد از جمله آن کتابهایی بود که درظاهر عنوان ریاضی جدید را دارند امادرحقیقت همان روش قدیم بیان مفاهیم را منتهی همراه باعلامتهای جدید بکار برده‌اند. دراین موارد بحث جنجالی‌تر می‌شد.

برای آنکه معلوم کنیم نقطه شکل هندسی است یا نه، باید قبلا معلوم کنیم تعریف شکل هندسی چیست. درهندسه‌های به‌روش قدیم، قبلا نقطه، خط، سطح وحجم معرفی می‌گردید آنگاه شکل هندسی به‌عنوان «ترکیبی از نقطه، خط، سطح وحجم» تعریف می‌شد. با این تعریف، نقطه، خط، سطح وحجم نیز هر کدام شکلی هندسی منظور می‌شدند. اما درهندسه‌های به‌روش جدید (بازهم اشاره می‌کنم هندسه‌هایی که در واقع روش جدید را بکار برده‌اند نه آن هندسه‌هایی که چندعلامت جدید در آنها وارد شده ولی محتوای آنها باهمان روش قدیم بیان گردیده است) شکل هندسی بدین گونه تعریف می‌شود:

درآغاز، نقطه به‌عنوان مفهومی نخستین و بدون تعریف پذیرفته می‌شود. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌ها به‌نام «فضای هندسی» و به عنوان مجموعهٔ مرجع اختیار می‌گردد. آنگاه هرزیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای هندسی، شکل هندسی نامیده می‌شود.

پس درهندسه‌های به‌روش جدید، شکل هندسی مجموعه‌ای است از نقطه‌های هندسی.

بنابر آنچه که در نظریهٔ مجموعه‌ها بیان گردیده است، عضو یك مجموعه نمی‌تواند زیر مجموعه‌ای از آن باشد. اگر مثلا $a$ عضو مجموعهٔ $E$ باشد، $a$ زیر مجموعه‌ای از $E$ نخواهد بود. اما $\{a\}$ یعنی مجموعهٔ با عضو تنها $a$ زیرمجموعه‌ای از $E$ بحساب می‌آید.

شکل هندسی زیر مجموعه‌ای است از فضای هندسی که مجموعه‌ای است از نقطه‌های هندسی. نقطهٔ هندسی عضو فضای هندسی است، پس نمی‌تواند زیرمجموعه‌ای ازفضای هندسی باشد. یعنی نمی‌توان نقطه را شکل هندسی دانست.

نقطهٔ مثلا $A$ شکل هندسی نیست. اما $\{A\}$ شکل هندسی است که شکل تك نقطه‌ای نامیده می‌شود و ساده‌ترین شکلهای هندسی است.

خط مجموعه‌ای است از نقطه‌ها وشکل هندسی است. دوخط $D$ و $\Delta$ که درنقطهٔ $A$ متقاطع باشند اگر بنویسیم $D\cap\Delta=A$ غلط نوشته‌ایم. صحیح آن به صورت $D\cap\Delta=\{A\}$ باید نوشته شود.

**خلاصه:**

**هرگاه شکل هندسی به‌عنوان مجموعه‌ای از نقطه ها تعریف شود، نقطه شکل هندسی نخواهد بود.**

# کاوشهایی در تاریخ نجوم اسلامی (۲)

جعفر آقایانی چاوشی

در نیمهٔ دوم قرن سوم نیز علمائی بر صحنهٔ علم نجوم اسلامی ظاهر شدند و گامهای مهمی در این علم برداشتند که یکی از آنها **ابوالعباس نیریزی** است که به تشریح کتابهای نجوم یونان پرداخت و از جمله کتابهای شرح المجسطی و تفسیر کتاب الاربعه لبطلمیوس را به رشتهٔ تحریر درآورد.

نیریزی رساله‌یی در اسطرلاب کروی تألیف کرد که مورخین علوم آن را بسیار مورد تحسین قرار داده و آن را استادانه دانسته‌اند*

معاصر وی **ثابت بن قره الحرانی** نیز نقش مهمی در علم نجوم اسلامی داشت، شهرت وی بیشتر به طرح نظریهٔ **حرکت نوسانی اعتدالین** **(Trepidation of movement) است. ثابت برای توضیح این حرکت فلك تازه‌ای به هشت فلك نجوم بطلمیوس افزود.

**البتانی** که بعضی از مورخین علوم اورا بزرگترین اخترشناس اسلامی می‌دانند اندکی پس از **ثابت بن قره** به کار پرداخت رصدهای بتانی از صحیحترین رصدهای نجومی اسلامی به شمار است. وی افزایش فاصلهٔ اوج خورشید را از زمان بطلمیوس تا زمان خودش کشف کرد و از این راه به اکتشاف این امر نایل آمد که خط اوج و حضیض دارای حرکت است. پیش از او عقیدهٔ منجمین براین بود که نقطهٔ اوج خورشید در بعد مجرد غیرمتحرك است ولی او پس از تحقیقات و ترصد زیاد ثابت کرد که این نقطه در

---

Seemann, Hugo, Th. Mittelberger: «Das Kugel formige Astrolab» Abhdl Zur Gesch. d. Naturw. 8(1915)

در مقالهٔ فوق رسالهٔ نیریزی در باب اسطرلاب کروی مورد بحث و بررسی واقع شده است.

**دکتر جرج سارتن در بارهٔ این نظریه چنین نوشته است: «نظریهٔ تقدیم اعتدالین که **ابرخس** آن را کشف کرد و **بطلمیوس** آن را تفسیر کرد، با نظریهٔ نوسانی متناقض یکدیگر است. ولی بعضی از منجمان کوشیده‌اند تا میان این دو نظریه سازشی ایجاد کنند. نظریهٔ نوسان مورد قبول منجم هندی **آریابهاتا** بوده است، و این شخص را می‌توان حلقهٔ اتصال میان **ثئون ازمیری** و **پروکلوس** از یك طرف و **ثابت بن قره** نخستین نویسندهٔ دوره اسلامی که در این باره سخن گفته، ازطرف دیگر دانست. برای آنکه حق اداشود باید گفت که بیشتر منجمان مسلمان نظریهٔ نوسان را مردود دانسته‌اند، مانند **الفرغانی** ، **البتانی**، **عبدالرحمن صوفی** و **ابن یونس** ولی متأسفانه **الزرقانی** و **البطروجی** به تقویت این نظریه پرداختند چون نفوذ آنان زیاد بود، آنان را باید مسئول انتشار این نظریه در میان منجمان مسلمان ویهودی و مسیحی دانست، تاآنجاکه **یوهان ورنر** و خود **کپرنیك** نیز به این نظر معتقد بوده‌اند، **تیکو براهه** و **کپلر** در مورد پیوستگی و انتظام تقدیم اعتدالین شك داشته‌اند، ولی بالاخره نظریهٔ نوسان را مردود شمرده‌اند» از کتاب «تاریخ علم» تألیف **جرج سارتن** ترجمهٔ **احمد آرام**

۱۰ـ در باره کارهای نجومی ثابت بن قره رجوع شود به:

Carmody, F : «The Astronomical Works of Thabit ibn Qurra» University of California Press, (1960)

همه حال باید متحرك باشد ولی حرکت آن با حرکت ثـوابت فرق‌دارد. علاوه براین فرضیات‌ونظریات بطلمیوس را درخصوص ماه و سایر اجرام سماوی قانع کننده ندانسته و بـه تعدیل این فرضیات قیام‌کرده‌است. هرچندکاملا به این‌کار تـوفیق نیافت ولی اغلب معضلات آن را درحد توانائی خود حل‌کرده است.

**بطلمیوس** را عقیده براین‌بودکه ثوابت در صدسال یـك درجه از قوس را می‌پیمایند ولی بتانی این نظریه را ردکـرده اظهار می‌کندکه ثـوابت مسافت مـزبـور را در هفتاد سال طی می‌کنند. نظریهٔ بتانی امروزه از تأئید علمای نجوم بـرخوردار است و ایـن امـر نبوغ علـمی وی را به‌نحو بـارزی نشان می‌دهد. (۱)

بتانی در اندازه‌گیریهای خود، انـدازهٔ سالانـه تقدیـم اعتدالین‌را ۵۴/۵وتمایل دایرةالبروج را ۲۳°,۳۵′ به‌دست‌آورد.

وی‌همچنین روش تازه‌ای برای تعیین رؤیت هلال‌اکتشاف کرد و تحقیق مفصلی درکسوف‌هاو خسوف خورشید به عمل‌آورد و ایـن روش وی همان است کـه در قـرن هـجدهـم **دونژرن** (Dunthorn) هنگام تغییر تدریجی در حرکت مـاه از آن استفاده‌کرده است. اثرنجومی بزرگ بتانی «الزیج»(۲) است که به زبان لاتین ترجمه شده و تا زمان رنسانس یکـی ازکتب اساسی مغرب‌زمین بوده است.

تحقیقات نجومی در قرن چهارم توسط منجمین بـزرگی همچون **ابوسهل کوهی** و **عبدالرحمن‌صوفی** ادامه یافت.

شرح اکتشافات و ابتکارات علمی عبدالرحمن صوفی در این مختصر میسر نیست همینقدر باید گفت‌که وی اولین‌کسی‌است کـه در بـارهٔ حرکت ویژهٔ ستارگان (Proper motion) به تحقیق علمی پرداخته است.

صوفی‌همچنین نخستین کسی‌است‌که سحابی‌امراةالمسلسله و ابرماژلانی بزرگ و ستارگان دیرجنب (Long period variable) و صورتهای جنوبی را رصدکرده و دربارهٔ آنها به تحقیق پرداخته است‌که متأسفانه نویسندگان جدید اروپائـی همهٔ این اکتشافات را به اخترشناسان غربی‌که چند قرن پس از وی می‌زیسته‌اند نسبت می‌دهند. اثرمهم صوفی‌کتاب صورالکواکب است‌که به زبانهای مختلف تـرجمه شده و مـورد تحقیق علمای اخترشناس قرارگرفته است. (۳)

مقارن همین ایام **ابونصرعراق** و **ابوالوفای بوزجانی**و **حامدبن خضرخجندی** و **ابوسعید سنجری** در نقاط دیـگـر اسلامی به‌کارهای نجومی و رصد مشغول بودند.

**ابوالوفای بوزجانی** درکتاب نجومی خود موسوم بـه «المجسطی» حرکات‌کرهٔ ماه را تشریح‌کرده و درآن بـدون هیچ ابهامی در بـارهٔ **بی‌نظمی‌سوم‌ماه** (Variation) سخن گفته و در حقیقت این بی‌نظمی را برای نخستین بارکشف کرده است، کشفی که تا قرن نوزدهم به **تیکوبراهه** منجم دانمارکـی منسوب بود.

ابوسعید سنجری نیز اسطرلاب‌زورقی راکه‌مبتنی برفرضیهٔ حرکت زمین‌گرد خورشید بود اختراع‌کرد.

**ابوحامدبن خضرخجندی** منجم‌نامدار اسلامی نیزابزاری برای رصد موسوم به سدس‌فخری ساخت، این ابزار قابل حمل و نقل نبود بلکه بنای عظیمی داشته است. مقصـود از سدس یك ششم دایره است ، و قوس مدرج این ابزار یك ششم دایره‌ای به شعاع چهل ذراع بـوده است. این ابزار در قلهٔ‌کوه **طبرك**

---

۱ـ نیك‌پور، اردشیر: «التبانی» مجله ارمغان شماره ۷ـ۸ سال بیستم ۱۳۱۸

۲ـ نلینو دانشمند ایتالیائی درباره تبانی تحقیقات مهمی انجام داده وزیج اورا نیز به‌زبان ایتالیائی ترجمه‌کرده است:

Al - Battani: «**Sive Albatènii Opus astronomicum arabice editum, latine versum,** adnotationibus instructum a. C. A. Nallino, Mediolani Insubrum 1899 – 1907

۳ـ متن عربی و ترجمه فرانسوی این‌کتاب درسال ۱۸۷۴ چاپ شده است:

Schjellerup : «**Description des etoiles fixes,** St. Petersbourg (1874)

ترجمهٔ پارسی نفیسی از این‌کتاب صورالکواکب صوفی به خط خواجه نصیرالدین طوسی موجود است که درسال ۱۳۴۸ از طرف بنیاد فرهنگ ایران در تهران چاپ شده است.

همچنین مقالات متعددی به زبانهای مختلف درباره‌کارهای مهم صوفی و اثر معروفش در مجلات مختلف‌جهان چاپ‌شده‌است.

در حوالی شهری واقع بود و **خجندی** حدود سال ۳۸۴هجری در آنجا به رصد می‌پرداخته و ازجمله میل کلی را برابر با "۲۱′۳۲°۲۳ به دست آورده است.

**ابوعلی حسن بن‌عمر مراکشی** درکتاب «جامع‌المبادی و الغایات»(۱) **ابوریحان بیرونی** درکتاب: «حکایت‌الالات المسماة‌السدس‌الفخری»(۲) راجع به این ابزاربحث‌کرده‌اند.

قرن پنجم شاهد فعالیت چندین منجم بزرگ همچون **ابن‌یونس، ابوریحان بیرونی، و ابن‌هیثم** بوده است. دربارهٔ **بیرونی** سخن بسیار است و در فرصتی دیگر در این باره بحث خواهد شد.

و اما **ابن‌یونس** صاحب اثرمهمی است‌که عموم مورخین علوم آن را با اعجاب و تحسین ستوده‌اند وآن زیج وی می‌باشد که‌به «الزیج‌الکبیرالحاکمی» موسوم‌است و یکی ازکاملترین جداول فلکی تألیف شدهٔ در اسلام می‌باشد. این کتاب بوسیلهٔ **کوسن‌دوپرسوال** به فرانسه ترجمه شده است. (۳)

**ابن‌یونس** اولین‌کسی است‌که در همزمانی نوسانهای آونگ به بحث پرداخته‌که همین امربه استفاده از آونگ در ساختن ساعتهای مکانیکی منجر گردیده است. (۴)

نظریات نجومی ابن هیثم‌که درکتاب خلاصهٔ‌نجوم(۵) آمده تأثیر فراوانی در عالم لاتین داشته است. در این‌کتاب **ابن‌هیثم** حرکات سیارات را بنابر مدل فیزیکی موردبحث قرار داده است.

اواخر قرن‌پنجم هجری‌که سلاجقه بر بیشتر خاورمیانه و خاور نزدیک حکمرانی داشتند منجمین بزرگی مانند **حکیم‌عمرخیام و عبدالرحمن خازنی** تحت حمایت آنان به کارهای نجومی اشتغال داشتند.

در این زمان کتب علمی اسلامی به لاتین ترجمه شد و تجمع مترجمین در اسپانیا (=اندلس) انتقال علوم اسلامی را به اروپا فراهم آورد.

**الزرقالی** اولین منجم برجستهٔ اسلامی اندلس از نیمهٔدوم قرن پنجم بود وی اسطرلاب جدیدی به نام صفیحه اختراع‌کرد که رواج بسیار یافت و نیز هموبودکه علت صریح حرکت نقطهٔ

---

۱ـ سدیو متن عربی این‌کتاب را همراه باترجمه فرانسوی آن در سال ۱۸۴۵ در پاریس چاپ‌کرده است:

Sèdillot, L. A.: **«Materiaux pour Servir a l'histoire comparee des science mathematiques»** Paris (1845 - 49)

۲ـ این رساله نیز توسط سدیو به فرانسه ترجمه شده است:

«Sédillot, L. A. : **«Les instruments astronomiques des arbes»** Mémoires presentés per divers Savants a l' Acad. royale des inscriptions, Iser., 1844.

3 - Caussin de Perceval, Jean JacqueA.: **«Le Livre de la grand Hakemite observee par Ibn Iounis»** Notices et autres extraits des manuscripts de la bibiotheque nationale et autres bibliothéques publies par l' Institut de Trana - tomete; paris (1803)

۴ـ آیا علمای اسلامی اولین‌کسانی بوده‌اند که درباره همزمانی نوسان آونگ بحث‌کرده‌اند؟ برای پاسخ به این سؤال رجوع شود به:

عانوتی، اسامة : «هل‌اکتشف العرب رقاص الساعة؟»

مجلة الدرسات الادبیه السنة الخامسه العددان الثالث والرابع (۶۳-۱۹۶۲)

۵ـ اصل عربی این‌کتاب مفقود شده ولی ترجمه‌های عبری و لاتینی از آن موجود است. برای آشنائی ازنظریات ابن‌هیثم در این کتاب رجوع شودبه:

Duhem, P. **«Le système du monde» histoire des doctrines cosmologiques de Platon a Copernic»** Vol. 2, Paris (1914)

اوج خورشید را نسبت به‌ثوابت بیان کرد و این یکی از اکتشافات بزرگ تاریخ نجوم است. نتیجهٔ فعالیت وی «الزیج الطلیطلی» است که آن را به دستیاری چند دانشمند مسلمان و یهودی تألیف کرد که مورد استفادهٔ منجمان لاتین و مسلمان قرون بعد واقع گردید. پس از زرقالی نجوم اندلسی رنگ ضد بطلمیوسی به خود گرفت. بدین معنی که خرده گیری از نظریهٔ فلکهای تدویر آغاز شد. در قرن ششم **جابر بن افلح** در اثر خود: «کتاب الهیئة فی اصلاح المجسطی» به خرده گیری از دستگاه بطلمیوسی پرداخت. ودوفیلسوف مشایی **ابن باجه، و ابن طفیل** نیز به انتقاد از بطلمیوس پرداختند. **ابن طفیل** تحت تأثیر جهانشناسی ارسطویی که در آن هنگام در اندلس رواج یافته بود منظومه‌ای تنها مبتنی بر افلاك متحدالمرکز پیشنهاد کرد (۱)

**ابن طفیل** را واضع نظریه‌ای می‌دانند که شرح وبسط کامل آن، کار شاگرد او **البتروجی** از قرن هفتم است.

این نظریه یك منظومهٔ سنجیده و پرداخته از افلاك متحدالمرکز است که آن را «نظریهٔ حرکت مارپیچی» نیز نامیده‌اند، ازآن جهت که بنابر آن چنان می‌نماید که سیارات یك حرکت مارپیچی انجام می‌دهند، با آنکه این منظومهٔ سیارات تازه طرح شده مزیتی بر منظومهٔ بطلمیوسی نداشت و جای آن را نگرفت ، ولی همین خرده گیری از منظومهٔ بطلمیوسی وسیلهٔ موثری برای مخالفت با نجوم بطلمیوسی به دست منجمان دورهٔ رنسانس داد.

مقارن همین ایام در مشرق زمین نیز همراه با تألیف آثاری برمبنای منظومهٔ بطلمیوسی عدم رضایت از این منظومه اظهار می‌شد، **نصیرالدین طوسی** رئیس منجمان رصدخانهٔ مراغه در اثر نجومی خود «التذکرة النصیریة فی الهیئة» آشکارا به خرده گیری از منظومهٔ بطلمیوسی پرداخته‌است. وی طرح جدیدی برای حرکت ستارگان پیشنهاد و خاطر نشان کرده است که علی‌رغم اعتقاد شدید قدما به کروی بودن افلاك و واقع شدن زمین در مرکز دوایر فلکی در دستگاه بطلمیوسی؛ کرهٔ زمین در مرکز قرار ندارد بلکه دارای انحرافی ازمرکزاست. طوسی با این عمل متین‌ترین قاعدهٔ فلسفهٔ یونانی را برهم ریخت و اساس هیئت قدیم را چند قرن پیش از **گالیله** و **کپرنیك** منهدم ساخت.(۲)

طوسی قصد آن داشت که جزئیات این طرح را برای همهٔ سیارات محاسبه کند. ولی ظاهراً به اتمام کار خود توفیق نیافت. ولی شاگردان مکتب علمی او این کار را دنبال کرده وبه موفقیتهای شایانی نایل آمدند. در اینجا بهتر است مختصری نیز راجع به آلات و افزارهای رصدخانه مراغه گفتگو شود.

معروفترین آلات این رصدخانه یکی ذات الشعبتین بود که احتمالاً خود خواجه نصیر آن را اختراع کرده و به اسم اسطرلاب خطی یا عصای طوسی معروف بوده است. (۳)

آلت دیگر ذات السموت بود که مشابه آن را تیکو براهه بعداً مورد استعمال قرار داد. آلات دیگر این رصدخانه عبارتند از: ذات الحلق بزرگ، ربع مجیب وغیره.

**دنباله دارد**

---

۱- «... و ترك ابن طفیل رأی بطلمیوس فی الافلاك المتداخله و اخذ برای أرسطو فی الافلاك المتمرکزه...»
(← فروخ، عمر: «تاریخ العلوم عند العرب» بیروت ۱۹۷۰ میلادی)

۲- برای کسب اطلاع بیشتر درباره نظریه خواجه نصیرالدین طوسی درباره حرکت سیارات رجوع شود به:

* Hartner, W.: «Nasir al Din al - Tusi,s Lunar Theory» Physics 11(1969)

** Kennedy, E. S.: «**Late Medieval Planetary Theory**» Isis 57(1966)

*** Nasr, S. H.: «**Science and civilization in Islam**» Cambridge (U.S.A), 1968

۳- برای کسب اطلاع بیشتر درباره ذات الشعبتین رجوع شود به مقاله کارادوو:

Carra de Vaux, B: «**L' astralobe Lineaire ou baton d, el - Toussi**» Journal Asiatique, XI e serie, vol 5

# ساختمان منطقی قضیه (۴)

بااستفاده از مقالهٔ ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

## ۱۲ـ قضیه‌های سوری

جملهٔ «عدد x زوج است» یك گزاره‌نما است که ارزش آن بستگی به x دارد. اگر x برابر بایکی ازعددهای مثل ۲، ۳۸، ... باشد دراین‌صورت این گزاره‌نما گزاره‌ای است راست. اگر x برابر بایکی ازعددهای مثل ۳، ۱۷، ۲۱، ... باشد دراین‌صورت گزاره‌نمای مزبور گزاره‌ای است نادرست.

هر گزاره‌نما شامل یك یاچندمتغیر است. اگر P گزاره‌نمایی بامتغیر x باشدآن را با $P(x)$ نشان می‌دهیم.

ممکن است که یك گزاره‌نمای بامتغیرمثل x به‌ازای هر x صحیح باشد، یااینکه فقط به‌ازای بعضی‌از xها درست باشد، یااینکه به‌ازای هیچ x درست نباشد. به‌عنوان مثال سه گزاره‌نمای زیررا درنظر می‌گیریم:

$A(x)$ : مجموع زاویه‌های مثلث x برابر با $180^\circ$ است.

$B(x)$ : مثلث x دارای یك‌زاویهٔ قائمه‌است.

$C(x)$ : مثلث x دارای دوزاویهٔ قائمه است.

گزاره‌نمای $A(x)$ برای هرمثلث x صحیح است ومی‌توانیم آن‌را چنین بیان کنیم:

«هرچه باشد x، مجموع زاویه‌های مثلث x برابر با $180^\circ$ است».

گزاره‌نمای $B(x)$ برای بعضی‌از مثلثها درست‌است وآن رامی‌توانیم چنین‌بیان کنیم: «مثلث x وجوددارد که درآن یك‌زاویه قائمه‌است». به‌عبارت دیگر: «x‌ای (= اقلا یك x) وجود دارد بقسمی که درمثلث x یك‌زاویه قائمه باشد».

گزاره‌نمای $C(x)$ به‌ازای هیچ x درست نیست وآن را می‌توانیم چنین‌بیان کنیم: «به‌ازای هیچ x، مثلث x دارای دوزاویهٔ قائمه‌نیست»، به‌عبارت دیگر: «مثلث x وجود ندارد که دارای دو زاویهٔ قائمه باشد».

«هر» «اقلایکی = بعضی»، «هیچ» را سور می‌نامیم وبرای آنها به ترتیب نشانه‌های ریاضی «$\forall$» ، «$\exists$» و «$\sim$» را بکار می‌بریم.

قضیه‌هایی‌راکه بااستفاده ازسورها بیان‌شده باشند،قضیه‌های سوری می‌نامیم:

ـ هرچه‌باشد عدد x، عدد $x^2$ نامنفی است:

$$\forall x\ ,\ x\in R\ :\ x^2\geqslant 0$$

ـ درهرمثلث هر ضلع کوچکتراز مجموع دو ضلع دیگر است:

$$\forall \Delta ABC\ :\ AB<BC+CA$$

ـ حاصل‌ضرب مجموع هردوعدد درتفاضل آن دوعدد برابر است باتفاضل مربعات آنها:

$$\forall x,\forall y:(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

ـ عددی یافت می‌شودکه در رابطهٔ «$2x+5=0$» صدق می‌کند (= معادلهٔ «$2x+5=0$» دارای جواب‌است).

$$\exists x,x\in R:2x+5=0$$

ـ دربعضی‌از مثلثها دوضلع باهم برابراست:

$$\exists \Delta ABC\ :\ AB=AC$$

ـ هیچ‌مثلث قائم‌الزاویه‌ای متساوی‌الاضلاع نیست:

$$\sim\Delta ABC\ :\ \angle A=90^\circ \text{ و } AB=BC=CA$$

## ۱۳ـ نفی قضیه‌های سوری

دوگزارهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

P: هرچه باشدمثلث ABC، زاویهٔ A ازآن قائمه‌است.

Q: هرچه باشد مثلث ABC، زاویهٔ A ازآن قائمه‌نیست.

آیااین دوگزاره نقیض یکدیگرند؟ به‌عبارت دیگر آیا Q نفی P و P نفی Q است؟ دوگزاره راچه موقع نقیض یکدیگر می‌گفتیم؟ وقتی که یکی‌ازآنها درست ودیگری نادرست باشد. اما دوگزارهٔ P و Q هر دو نادرست می‌باشند، پس نقیض یکدیگر نمی‌باشند (این‌دوگزاره متضاد نامیده می‌شوند). اکنون که‌معلوم شدگزارهٔ Q نفی گزارهٔ P نیست، پس‌نفی گزارهٔ P چگونه‌بدست می‌آید؟

برای نفی قضیه‌های سوری (همچنین گزاره‌های‌سوری) که با «هر» یا «هیچ» بیان شده باشند، اولا «هر» یا «هیچ» را به «بعضی = اقلا یکی وجود دارد» تبدیل می‌کنیم، ثانیاً خاصیت ذکر شده را نفی می‌کنیم.

بنابراین نفی گزارهٔ P، مثال‌بالا، چنین می‌شود:

$\sim P$: اقلا یك‌مثلث ABC وجود دارد که زاویهٔ A از آن قائمه نیست.

$$P : \forall \Delta ABC \; ; \; \angle A = ۹۰^\circ$$
$$\sim P : \exists \Delta ABC \; ; \; \angle A \neq ۹۰^\circ$$

مثال دیگر- فرض می‌کنیم که:

P: هیچ‌عدد زوجی اول‌نیست.

نفی‌این گزاره می‌شود:

$\sim P$ : عدد زوجی وجود دارد که اول است.

## ۱۴- نمونهٔ خلاف

قبلا گفتیم که اگر قضیه‌ای صحیح باشد نفی‌آن غلط است واگر قضیه‌ای غلط‌باشد نفی‌آن صحیح‌است. بنابراین برای‌اثبات غلط بودن قضیه‌هایی که باهریا هیچ بیان شده‌اند کافی‌است که یك حالت ارائه شودکه قضیه درآن صادق نباشد. زیرا دراین‌صورت ثابت‌شده است که نفی‌قضیه صحیح‌است.

مثال- قضیهٔ زیربیان شده‌است. آیااین قضیه صحیح است یا نه؟

«هرچه باشد عدد طبیعی n، عدد $n^۲+n+۴۱$ اول است.»

اگرفقط یك‌عدد طبیعی بیابیم که درازای‌آن عدد بالا غیر اول‌باشد، قضیهٔ گفته شده غلط خواهد بود. عددهای طبیعی‌را به ترتیب درعبارت بالا امتحان می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که درازای $n=۴۱$ عدد مزبور برابرمی‌شود با $۴۱ \times ۴۳$ که غیراول‌است پس‌قضیهٔ گفته شده صحیح نیست.

ریاضیدان بزرگ قرن هفدهم پیرفرما اعلام داشته بودکه

«هرچه باشد عدد طبیعی n عدد $۲^{۲^n}+۱$ اول است»

درازای مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴ برای n به‌ترتیب عددهای‌اول ۵، ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷ بدست‌می‌آید. به‌ازای عددهای ۵، ۶، ... عدد حاصل‌آنقدر بزرگ‌است که تحقیق اول بودن آن‌کار بسیار مشکل‌است. اما لئونارد اولر ریاضیدان بزرگ قرن هیجدهم‌ثابت کردکه عدد $۲^{۲^۵}+۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است ودر نتیجه ثابت شدکه قضیهٔ فرما غلط‌است.

## ۱۵- استقراء

هرگاه ازمشاهدهٔ چند حالت‌خاص حکمی کلی بیان‌کنیم می‌گوئیم که روش استقراء رابکار برده‌ایم. در ریاضیات روش استقراء به‌عنوان یك‌نوع اثبات پذیرفته نیست مگر اینکه همهٔ حالتهای ممکن تحقیق شده‌باشدکه این‌نیز ممکن‌نیست.

مثال- معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+۴x-۴=۰$ را حل می‌کنیم. جوابهای‌آن می‌شود:

$$x_۱=-۲+\sqrt{۲} \; , \; x_۲=-۲-\sqrt{۲}$$

ملاحظه می‌کنیم که مجموع جوابها برابربا ۴- یعنی برابر با جملهٔ معلوم معادله است.

در معادله‌های:

$$x^۲-۶x+۶=۰ \; , \; x^۲+۱۰x-۱۰=۰$$

نیز ملاحظه می‌کنیم که مجموع دوریشه برابراست باجملهٔ معلوم معادله. اماآیا می‌توانیم دراین‌مورد یك حکم کلی بیان‌کنیم؟ نه، مگراینکه این‌موضوع رابرای همهٔ معادله‌های درجهٔ‌دوم آزمایش کنیم. اما اگریك معادلهٔ درجهٔ دوم بیابیم که حکم مزبور درآن صادق نباشد، مثل‌معادلهٔ:

$$x^۲+۳x+۲=۰$$

دراین‌صورت محقق شده‌است که حکم مزبور غلط‌است.

هرچندکه روش استقرائی یك‌روش اثبات ریاضی نیست‌اما باید یادآوری کردکه بسیاری‌ازقضیه‌های ریاضی درآغازبااستفاده ازروش استقرائی کشف شده وبعدبه‌روش ریاضی اثبات‌شده است.

**یادآوری-** آنچه‌که در بالا به عنوان استقراء گفته شد غیراز استقراء ریاضی‌است. استقراء ریاضی یك‌نوع روش اثبات ریاضی‌است که به‌ویژه درحوزهٔ اعداد طبیعی نافذاست.

پایان

# مطالب دیگر دربارهٔ مجموعه های متساوی

نوشتهٔ : محمد حسن رزاقی خمسی

در شمارهٔ گذشتهٔ مجلهٔ یکان دربارهٔ مجموعه‌های متساوی بحثی داشتیم که پس از بیان مقدمات موضوع منجرشد به‌اثبات یك‌قضیهٔ اساسی در مورد شناسائی دو مجموعهٔ برابر باهم.صورت این قضیه را که به نام «قانون» خوانده می‌شود یك بار دیگر دراینجا تکرار می‌کنیم :

« شرط لازم وکافی برای آنکه دو مجموعه متساوی باشند این است که اشتراك مجموعهٔ اول بامتمم مجموعهٔ دوم و اشتراك مجموعهٔ دوم با متمم مجموعهٔ اول مجموعه‌های تهی‌باشند.»

در شمارهٔ گذشته چند نمونه از تمرینهایی که به‌کمك این قضیه حل می‌شوند ارائه دادیم. اکنون می‌خواهیم نمونه‌های دیگری از آنها راکه محسوساً بادستهٔ اول تفاوتهائی دارند ، در مورد کار برد این قضیه حل‌کنیم.

**تمرین ۱ ـ** امکان درستی رابطهٔ $A-B=A$ را بررسی کنید.

**حل ـ** برحسب تعریف مجموعهٔ $(A-B)$ مجموعهٔ همهٔ عضوهای $A$ است که در $B$ نباشند و چون این تفاضل با $A$ برابر است پس معلوم می‌شود که $A$ و $B$ هیچ عضو مشترکی ندارند و دومجموعه از یکدیگر جدا می‌باشند. تا اینجا مطلب تمام است ولی غریزهٔ کنجکاوی ما موقعی اقناع می‌شود که از راه محاسبه همین نتیجه را بگیریم چرا که محاسبه زبان‌گویای ریاضی است و استدلالها را تکمیل می‌کند. لذا به منظور انجام محاسبه شرایط تساوی دو مجموعه $A$ و $A-B$ را از روی قضیه بالا نوشته و نتیجه را تعیین می‌کنیم:

$$(A-B)\cap A'=(A\cap B')\cap A'=(A\cap A')\cap B'=$$
$$=\varnothing\cap B'=\varnothing$$

$$A\cap(A-B)'=A\cap(A'\cup B)=$$
$$=(A\cap A')\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$$

رابطهٔ دوم هم عیناً مثل رابطهٔ اول باید تهی باشد و این شرط هنگامی بر قرار می‌شود که $A\cap B=\varnothing$ باشد . یعنی همان نتیجهٔ قبلی بدست‌آمد. پس هر گاه در یك تفاضل کاسته وکاهشیاب مجموعه‌های‌جدا ازیکدیگر باشندتفاضل‌مساوی‌است باکاهشیاب.

اکنون به مثالهای زیر توجه کنید:

$$A-(B-A)=A$$
$$B-(A-B)=B$$
$$(A\cup B)-(A'\cap B')=(A\cup B)$$
$$(A\cap B)-(A'\cup B')=(A\cap B)$$

**تمرین۲ـ** امکان‌تساوی $A-B=B-A$ رابررسی کنید .

**حل ـ** مفاد قانون‌را درمورد دومجموعهٔ متساوی $A-B$ و $B-A$ اجراکرده می‌نویسیم:

$$\begin{cases}(A-B)\cap(B-A)'=\varnothing\\(B-A)\cap(A-B)'=\varnothing\end{cases}$$

اماهر گاه دراین دورابطه اشتراك رابه تفاضل تبدیل کنیم‌باتوجه به تمرین شمارهٔ۱ خواهیم داشت:

$$(A-B)\cap(B-A)'=A-B$$
$$(B-A)\cap(A-B)'=B-A$$

پس‌نتیجه می‌شودکه:

$$A-B=\varnothing \text{ و } B-A=\varnothing$$

یعنی دومجموعهٔ $A$و$B$ باهم مساویند.

**تمرین۳ـ** امکان تساوی اشتراك واجتماع دومجموعه در چه‌صورت است.

**حل ـ** اگر $A$ و$B$ مجموعه های مورد بحث باشند باید داشته باشیم:

$$(A\cap B)\cap(A\cup B)'=(A-A)\cap(B-B)=\varnothing$$
$$(A\cup B)\cap(A\cap A)'=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$$

رابطهٔ اول خود به‌خود محقق است ودررابطهٔ دوم برای آنکه اجتماع دومجموعه تهی باشد باید هردومجموعه تهی باشندیعنی داشته باشیم:

$$\left|\begin{array}{l} A-B=\varnothing \\ B-A=\varnothing \end{array}\right. \Longrightarrow A=B$$

**تمرین۴ـ** درچه‌صورت تفاضل دومجموعه بااجتماع آنها مساوی می‌شود؟

**حل ـ** می‌نویسیم:

$$\left|\begin{array}{l} (A-B)\cap(A\cup B)'=A\cap B'\cap A'\cap B'=\varnothing \\ (A\cup B)\cap(A-B)'=B\cup(A\cap A')=B=\varnothing \end{array}\right.$$

یعنی برای اینکه داشته باشیم $A-B=A\cup B$ باید $B=\varnothing$ باشد.

**تمرین۵ـ** ثابت کنید که دو مجموعهٔ B وC متساویند هنگامی که متفقاً داشته باشیم:

$$\begin{cases} A\cup B=A\cup C \\ A\cap B=A\cap C \end{cases}$$

**حل ـ** مفادقانون رادربارهٔ هریك ازتساویهای فوق به‌مورد اجرا می گذاریم.

$$\left|\begin{array}{l} (A\cup B)\cap(A\cup C)'=\varnothing \\ (A\cup C)\cap(A\cup B)'=\varnothing \\ (A\cap B)\cap(A\cap C)'=\varnothing \\ (A\cap C)\cap(A\cap B)'=\varnothing \end{array}\right.$$

ترکیب عناصر طرف چپ چهار رابطهٔ فوق باید طوری باشد که هر چهار رابطه متفقاً مجموعه‌های تهی شوند. با اجرای عملیات لازم به مانند تمرینات گذشته بدون هیچ اشکالی خواهیم داشت:

$$=A'\cap B\cap C'=A'\cap(B-C)=\varnothing$$
$$=A'\cap C\cap B'=A'\cap(C-B)=\varnothing$$
$$=A\cap B\cap C'=A\cap(B-C)=\varnothing$$
$$=A\cap C\cap B'=A\cap(C-B)=\varnothing$$

برای آنکه اشتراك دومجموعه تهی باشدکافی است که‌یکی از آن دو مجموعه تهی باشد. باشد اگر فرض کنیم $B\neq C$ و $A=\varnothing$ آنگاه $A'=M$ بوده و طرف چپ روابط فوق متفقاً تهی نخواهندبود. پس حتماً باید داشته باشیم $B=C$ تا طرف چپ روابط چهارگانهٔ فوق متفقاً تهی گردند.

# روشی برای تعیین مجموع دوسری معروف

ترجمهٔ : مهندس زرگری

برای اثبات اینکه:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}(n+3n^2+2n^3)$$

$$1^3+3^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$$

**فیبوناچی** ریاضیدان ایتالیائی روش زیررا بکار برده است: جدولی مثلث شکل از اعداد فرد به‌شکل زیرتنظیم کرده است:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | ۱ | ۱ |
| | | | ۳ | ۵ | ۲ |
| | | ۷ | ۹ | ۱۱ | ۳ |
| | ۱۳ | ۱۵ | ۱۷ | ۱۹ | ۴ |
| | . | . | . | . | . |
| m | . | . | . | l | n |

تعداد عناصر در هر ردیف برابراست با شمارهٔ نظیر آن ردیف و تعداد کلیهٔ عناصر مثلث برابر است با :

$$S=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

در سطر nام آخرین عنصر $l=2S-1$ و اولین عنصر برابر است با $m=l-2(n-1)$ و مجموع عناصر می‌شود :

$$\frac{n(m+1)}{2}=\frac{(2l-2n+2)n}{2}=(2S-n)n=n^3$$

بنابراین $\Sigma n^3$ برابر می‌شود با مجموع کلیهٔ عناصر جدول:

$$\Sigma n^3=\frac{(1+l)S}{2}=S^2=(\Sigma n)^2$$

سالها پس از فیبوناچی روش زیرارائه شده است. باتنظیم جدول به شکل زیر:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | ۱ |
| | | | ۲ | ۲ |
| | | ۳ | ۳ | ۳ |
| | ۴ | ۴ | ۴ | ۴ |
| n | . | . | . | n |

ملاحظه می‌شود که درسطر n ام تعداد عناصر n ومجموع آنها $n^2$ است پس $\Sigma n^2$ مجموع همهٔ عناصر جدول است. اماهرگاه این عناصر راستونی جمع کنیم نتیجه می‌شود:

$$\Sigma n^2=\frac{1}{6}(n+3n^2+2n^3)$$

# دربارهٔ اعداد اول چه می‌دانید؟

ترجمه از: جواد فیض دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تبریز

### ۶ـ فرض گلدباخ

درسال ۱۷۴۷، **گلدباخ** بیان کرد که هرعدد زوج بزرگتر از ۲ مجموع دوعدد اول است. این نظریه هنوز نه اثبات شده و نه رد گردیده است. البته این نظریه برای هرعدد زوج بزرگتر از ۶ و کوچکتر از ۱۰۰۰۰۰ تحقیق شده‌است، یعنی تحقیق کرده‌اند که هرعدد زوج بزرگتر از ۶ مجموع دوعدد اول مجزا می‌باشد.

فرض دیگری معادل با نظریهٔ فوق می‌توان بیان کرد این است که هرعدد طبیعی بزرگتر از ۱۷ مجموع سه‌عدد اول مختلف است. از نظریهٔ گلدباخ به‌آسانی نتیجه می‌شود که هرعدد بزرگتر از ۷ مجموع سه‌عدد فرد اول است. هرگاه $n$ یک عدد طبیعی باشد و $2n+1>7$ پس $2n+1-3=2(n-1)>4$ عدد زوج $2(n-1)>4$ بنابه نظریهٔ گلدباخ مجموع دو عدد اول $p$ و $q$ است که نمی‌توانند زوج باشند، چون از ۴ بزرگترند. پس عدد $3n+1=3+p+q$ مجموع سه عدد فرد اول می‌باشد.

آینکه آیا هرعدد فرد بزرگتر از ۷ مجموع سه‌عدد اول فرد هست یا نه معلوم نیست، اما درسال ۱۹۳۷ **وینوگرادف** ثابت کرد که هرعدد فرد (به‌قدر کافی بزرگ) مجموع سه‌عدد فرد اول است. ثابت شده‌است که هرعدد فرد بزرگتر از $a=3^{3^{15}}$ مجموع سه‌عدد فرد اول باشد.

اما دربارهٔ این سؤال که آیا هر عدد فرد بزرگتر از ۷ مجموع سه‌عدد فرد اول است یا نه، محاسبات طولانی لازم است.

موقعیت قضیهٔ گلدباخ متفاوت است. اگر محاسبات طولانی لازم، مانع نمی‌شد می‌توانستیم اظهار کنیم که نظروی صحیح است یا نه. به روشی خیلی مقدماتی‌تر از روش **وینوگرادف** ثابت شده‌است که هرعدد طبیعی (هرچقدر هم که بزرگ باشد) مجموع هیجده (یا کمتر) عدد اول است. ثابت شده‌است که هرعدد طبیعی بزرگتر از ۱۱ مجموع دو یا چند عدد اول متفاوت می‌باشد. برای مثال:

$$17=2+3+5+7,\quad 13=2+11,\quad 12=5+7$$
$$29=3+7+19$$

**واکوسکی** ثابت کرده است که هرعدد طبیعی بزرگتر از ۵۵ مجموع اعداد اولی به‌فرم $4k+3$ است وقضایای مشابه با این را درمورد مجموع اعداد اولی که هرکدام به‌صورت $4k+1$ یا $6k+1$ یا $6k+5$ هستند ثابت کرده‌اند.

از نظریهٔ گلدباخ به‌آسانی نتیجه می‌شود که هر عدد فرد (مثبت یا منفی) را می‌توان به راههای نامحدودی به‌صورت $p+q-r$ نوشت باتوجه به‌اینکه $p$ ، $q$ ، $r$ اعداد فرد واول هستند.

درواقع برای هرعدد صحیح $k$، عدد فرد اول $r$ چنان وجود دارد که $2k-1+r>4$ (کافی است $r$ را عدد اول بزرگی در نظر گرفت). اما $2k-1+r$ عددی است زوج وبزرگتر از ۴ واز اینرو بنابه نظریهٔ گلدباخ $2k-1+r=p+q$ که $p$ و $q$ اعداد فرد اول هستند. بنابراین $2k-1=p+q-r$ چنان است که عدد اول $r$ به‌حد ممکن بزرگ باشد.

این نتیجهٔ جالب در سال ۱۹۳۷ توسط **واندرکرپت** باروشی بسیار مشکل ثابت شده است. اما با توجه به نظریهٔ گلدباخ ملاحظه می‌کنیم اثبات آنکه هرعدد طبیعی بزرگتر از ۱۱ مجموع دوعدد غیراول است آسان می‌باشد. اگر $n>11$ عدد زوجی باشد، پس $n-4$ عدد زوج بزرگتر از ۲ است و $m$ مجموع اعداد غیراول $n-9,9$ است.

تحقیق این‌موضوع دراعداد مرکب آسانتراز اعـداد اول است. اماقادر نیستیم به‌این سؤال پاسخ دهیم کـه آیا بین اعداد $F_n=2^{2^n}+1$ که‌درآن $n=1,2,3,\ldots$ به‌تعدادنامحدودی عدد غیراول وجود دارد؟

(تاکنون فقط تعداد ۳۸ تا ازچنین اعدادی معین شده که بزرگترین آنها $F_{1945}$ است).

**لیتوود و هاردی** فرض کردندکه هرعدد طبیعی به‌قدر کافی‌بزرگ، که مربع‌کامل نباشد مجموع مربعات یك‌عدد صحیح ویك‌عدداول‌است (تاکنون بدون‌اثبات مانده‌است)، باتوجه به‌این موضوع، اثبات اینکه‌تعداد نامحدودی مربعات اعدادطبیعی‌وجود داردکه مجموع‌آنها برابریك‌عدد طبیعی‌باشند آسان‌است،همچنین اینکه‌عدد طبیعی‌مجموع یك‌عدد اول ومربع یك‌عدد صحیح‌نیست.

اگر $p$ عدد فرداولی باشد $(\frac{p+1}{2})$ عدد طبیعی خـواهد بود و داریم:

$$(\frac{p+1}{2})^2=(\frac{p-1}{2})^2+p$$

ازطرف دیگر، اگر $n=3k+2$ ($k$ عددی است طبیعی)پس به‌ازای اعداد صحیح $x$، وعدد اول$p$ داریم:

$$n^2=x^2+p \Longrightarrow p=n^2-x^2=(n+x)(n-x)$$

با در نظر گـرفتن اینکه $p$ عـدد اولی است $n-x=1$ و $n+x=p$ بطوری کـه: $p=2n-1=3(2k+1)$ که برای اعداد طبیعی$k$ ممکن نیست.

## ۷ـ فرض ژیلبرت

هرگاه دریك ردیف رشتهٔ اعداد متوالی‌اول را بنویسیم، و درردیف دوم‌قدر مطلق تفاضل‌جملات متوالی‌ردیف اول، ودرسومین ردیف رشته قدرمطلق تفاضل جملات ردیف دوم وبه همین ترتیب ردیفهای بعدرا بنویسیم. درهریك ازردیفها جمله‌اول یك خواهد بود.

برای مثال ۱۷ ردیف برای ۱۸ عـدداول به‌صورت زیر می‌باشد:

نظریهٔ **ژیلبرت** تاآنجاکه در ردیف اول تعـداد ۶۳۸۱۴ عدد اول باشد تحقیـق شده است ولـی هنوز صحت‌کلـی آن اثبات نشده‌است.

برای عدد طبیعی $n$، که‌با $a_n$ نشان می‌دهیم، کوچکترین

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷, ۵۳, ۵۹, ۶۱

۱, ۲, ۲, ۴, ۲, ۴, ۲, ۴, ۶, ۲, ۶, ۴, ۲, ۴, ۶, ۶, ۲

۱, ۰, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۴, ۲, ۲, ۲, ۴, ۰, ۴

۱, ۲, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۲, ۰, ۲, ۰, ۰, ۰, ۲, ۴

۱, ۲, ۰, ۰, ۰, ۰, ۲, ۲, ۲, ۲, ۰, ۰, ۲, ۲

۱, ۲, ۰, ۰, ۲, ۲, ۰, ۰, ۲, ۲, ۲, ۲

۱, ۲, ۰, ۲, ۰, ۲, ۰, ۲, ۰, ۰, ۰

۱, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۰, ۰

۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۲, ۰

۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۲, ۲

۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۲, ۰

۱, ۰, ۰, ۰, ۲, ۲

۱, ۰, ۰, ۲, ۰

۱, ۲, ۲, ۲, ۰

عددی که $(a_n+1)$ امین جملهٔ $n$ امین ردیف، اول باشد جملات آن ردیف بزرگتر از ۲ هستند و داریم:

$a_1=3$ ، $a_2=8$ ، $a_3=14$ ، $a_4=18$ ، $a_5=25$

$a_6=24$ ، $a_7=23$ ، $a_8=22$ ، $a_9=25$

$a_{10}=59$ ، $a_{14}=97$ ، $a_{15}=174$ ، $a_{22}=289$

$a_{23}=240$ ، $a_{24}=874$ ، $a_{34}=866$

$a_{35}=2180$ ، $a_{64}=5940$ ، $a_{65}=23266$

$a_{94}=31533$

## ۸ـ تجزیهٔ یک عدد طبیعی به عوامل اول

به کمک قضیهٔ ۱ اکنون ثابت می‌کنیم:

**قضیهٔ ۴ـ** هر عدد طبیعی بزرگتر از یک حاصل‌ضرب عواملی است که هریک از آنها اول هستند (حاصل‌ضربهایی را که فقط یک عامل دارند مستثنی نمی‌کنیم).

اثبات ـ $n>1$ یک عدد طبیعی است بنا به قضیهٔ ۱، عدد $n$ حداقل یک مقسوم علیه اول $p'$ را دارد و امکان دارد فرض کنیم که $p'$ کوچکترین عامل اول $n$ است پس $n=p'n'$ خواهد بود که $n'$ عددی است طبیعی.

اگر $n'=1$ باشد پس $n=p'$ و $n$ حاصل‌ضرب متشکل از یک عامل اول است. هرگاه $n'>1$ پس $n'$ مقسوم علیه اول $p''$ را داراست. این عدد مقسوم علیه $n$ است و با توجه به تعریف عدد $p'$ نتیجه می‌شود که می‌بایست داشته باشیم: $p'\leq p''$ . پس $n'=p''n''$ یا $n''=1$ است درحالتی که $n$ حاصل‌ضرب دو عدد اول $p'$ و $p''$ است (لزوماً متفاوت نیستند). یا $n''>1$ است که می‌توانیم عملی را که قبلا با $n$ و $n'$ انجام داده بودیم باز عمل کنیم و به همین ترتیب. چنانکه $n=p'n'$ ، و $p'>1$ داریم $n'<n$. بطور مشابه $n''<n'$ والی آخر. اعداد طبیعی $n$ ، $n'$ ، $n''$ ، ... ، تشکیل یک رشتهٔ نزولی را می‌دهند و از اینرو نمی‌توانیم بیش از $n$ جمله داشته باشیم، چنانکه، برای عدد طبیعی و معین $k$ ، $n^{(k)}$ آخرین جمله این رشته باشد پس مسلماً $n^{(k)}=1$ است. چون درحالت $n^{(k)}>1$ می‌توانیم آنرا چنین باز تجزیه کنیم از اینرو:

$$n=p'n' \ , \ n'=p''n'', \ldots,$$
$$n^{(k-1)}=p^{(k)}n^{(k)} \ , \ n^{(k)}=1$$

بنابراین:

$$n=p'p''p'''\ldots p^{(k)} \qquad (1)$$

که $p'$ ، $p''$ ، $p'''$ ، ... ، $p^{(k)}$ اعداد اول هستند و ممکن است فرض کنیم که:

$$p'\leq p''\leq p'''\leq\cdots\leq p^{(k)}$$

بین عوامل اول رابطهٔ (۱) ممکن است بعضی باهم برابر باشند. اگر عوامل مساوی را باتوانهائی از اعداد طبیعی بنویسیم از فرمول (۱) داریم:

$$n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_s^{\alpha_s} \qquad (2)$$

که $s$ عددی است طبیعی و $q_1$ ، $q_2$ ، ... ، $q_n$ اعداد اولی هستند که پشت سرهم درحال افزایش‌اند، و نماهای $\alpha_1$ ، $\alpha_2$ ، ... ، $\alpha_n$ اعداد طبیعی هستند. فرمول (۲) را «تجزیهٔ $n$ به عوامل اول» می‌نامیم.

ما نه تنها قضیهٔ ۴ را اثبات نمودیم، بلکه روشی راهم برای یافتن تجزیهٔ هرعدد طبیعی $n>1$ بدست آوردیم. بطور نظری همواره امکان دارد که این تجزیه را برای هرعدد داده‌شده $n>1$ بدست آوریم. اما درعمل ممکن است که خیلی مشکل و مستلزم محاسبات طولانی باشد. برای عده‌ای از اعداد محاسبات به اندازه‌ای طولانی است که حتی درحال حاضر با استفاده از بزرگترین ماشین‌های محاسبه قادر به بدست آوردن آن‌ها نیستیم. برای مثال تجزیهٔ عدد $2^{101}-1$ (۳۱ رقمی) به عوامل اول را نمی‌دانیم. فقط ثابت شده است که این عدد حاصل‌ضرب دو عدد اول متفاوت است که حداقل ۱۱ رقم دارند. و نیز تجزیهٔ به عوامل اول عدد $E_{13}=2^{2^{13}}+1$ را نمی‌دانیم. چه در مورد عدد $F_{1945}=2^{2^{1945}}+1$ که بیش از ۵۸۲ رقم دارد و نمی‌توانیم ارقامش را تعیین کنیم کوچکترین مقسوم علیهی که چندسال قبل بدست آمد $5\times 2^{1947}+1$ بود که ۵۸۷ رقم دارد. لیکن هیچکدام از مقسوم علیه‌های اول دیگر عدد $F_{1945}$ نمی‌دانیم.

باتوجه به فرمول (۲) تجزیهٔ عدد $n>1$ به عوامل اول، این سؤال ناشی می‌شود که آیا چنین تجزیه‌ای منحصر به فرد است (اگر اعداد $q_1$ ، $q_2$ ، ... ، $q_n$ یک رشتهٔ صعودی تشکیل دهند). اثبات این موضوع به بعضی از قضایای ساده اعداد اول بستگی دارد.

**قضیهٔ ۵ـ** عدد اول $p$ فقط دو مقسوم علیه دارد، ۱ و $p$.

اثبات ـ هرگاه عدد $p$ غیر از مقسوم علیه ۱ و $p$ مقسوم علیه $a$ راهم داشته باشد واضح است که $1<a<p$ و $p=a.b$ ،

بطوری که $b$ عدد طبیعی بزرگتر از یك است، چون در حالی که $b=1$ باشد $p$ مساوی با $a$ خواهد شد و این مخالف فرض ما در مورد عدد $a$ است، پس عدد $p$ حاصل ضرب دو عدد طبیعی خواهد شد که بزرگتر از ۱ است و این با این فرض که $p$ عدد اولی است تناقض دارد.

همین طور صحت قضیهٔ زیر محقق است:

«هر گاه عدد طبیعی $p$ فقط دارای دو مقسوم علیه باشد عددی است اول.

**قضیهٔ ۶ـ** برای آنکه یك عدد طبیعی اول باشد، لازم و کافی است که فقط دو مقسوم علیه متفاوت داشته باشد (بدیهی است که این دو مقسوم علیه عدد ۱ و خودش می باشد).

**قضیهٔ ۷ـ** هر گاه $a$ و $b$ اعداد طبیعی باشند و حاصل ضرب $ab$ به عدد اول $p$ بخش پذیر باشد پس حداقل یکی از اعداد $a$ و $b$ بر $p$ بخش پذیر است.

اثبات ـ اگر قضیهٔ ۷ درست نباشد، حداقل یك عدد اول $p$ وجود خواهد داشت، که به ازای آن قضیه صحیح نباشد. یعنی حاصل ضرب $ab$ بر $p$ بخش پذیر است اما هیچکدام از عوامل $a$ و $b$ بر $p$ قابل قسمت نیستند. در این صورت اعداد $a$ و $b$ از $p$ کوچکتر هستند. درواقع اگر، بطور مثال $a>p$ باشد خواهیم داشت: $a=kp+a_1$ که $a_1<p$ و $a_1>0$، چون $a$ بر $p$ بخش پذیر نیست بنابراین:

$$ab=(kp+a_1)b=kpb+a_1b$$

و چون $ab$ و $kpb$ به $p$ بخش پذیر هستند، $a_1b$ بر $p$ قابل قسمت است. اما $a_1<p<a$ و $a_1$ بر $p$ بخش پذیر نیست، یعنی $a_1b<ab$ که با فرض متناقض است. بدین ترتیب $a<p$ و بطور مشابه ثابت می کنیم که $b<p$ بنابراین $ab<p^2$.

بنابراین $ab$ بر $p$ بخش پذیر بوده داریم $ab=lp$ ($l>1$ عددی است طبیعی). از سوی دیگر، بنابر $ab<p^2$ داریم $l<p$. اما $l>1$ عددی است طبیعی و یك مقسوم علیه اول دارد $q<l<p$ چون $q<p$ و بنابه تعریف عدد اول، حاصل ضرب $ab$ بر $l$ بخش پذیر می باشد، بر عدد اول $q<p$ بخش پذیر است بنابراین حداقل یکی از عوامل $a$ و $b$ می بایست بر $q$ بخش پذیر باشد بطور مثال هر گاه $a$ به $q$ قابل قسمت باشد پس $a=a'q$.

اما $l$ بر $q$ قابل قسمت است، بنابراین $l=tq$ ($t$ عددی است طبیعی)، چون $ab=lp$ داریم:

$$a'qb=tqp \Rightarrow a'b=tp$$

بدینوسیله چون $a=a'q$ داریم $a'<a$. و از اینرو $a'b<ab$ و این با فرض ما در مورد $ab$ متناقض است. پس با فرض صحیح نبودن قضیهٔ ۷ به یك تناقض می رسیم. به عبارت دیگر قضیه صحیح است.

از قضیهٔ فوق قضیهٔ زیر استنباط می شود:

**نتیجه:** هر گاه $a_1, a_2, \cdots, a_n$ رشتهٔ محدودی از اعداد طبیعی باشند بطوری که حاصل ضربشان به عدد اول $p$ بخش پذیر باشد، حداقل یکی از اعداد طبیعی $a_1, a_2, \cdots, a_n$ می بایست به $p$ قابل قسمت باشد.

اثبات ـ قضیه به ازای $m=2$ صحیح است. فرض می کنیم که به ازای عدد $m$ نیز صحیح است و $m+1$ عدد طبیعی $a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}$ را در نظر می گیریم. هر گاه حاصل ضرب $a_1a_2\cdots a_ma_{m+1}$ بر عدد اول $p$ بخش پذیر باشد، پس بنابه قضیهٔ ۷، حداقل یکی از اعداد $a_1a_2\cdots a_m$ و $a_{m+1}$ بر $p$ بخش پذیر است. هر گاه عدد $a_1a_2\cdots a_m$ بر $p$ قابل قسمت باشد، پس بنابه صحیح بودن قضیه به ازای عدد $m$، حداقل یکی از اعداد $a_1, a_2, \cdots, a_m$ بر $p$ بخش پذیر است. از صحت قضیه به ازای عدد $m$، درستی آن برای $(m+1)$ نتیجه می شود.

اکنون فرض می کنیم که اعداد طبیعی وجود دارند که دو تجزیهٔ متفاوت به عوامل اول دارند، بین چنین اعداد طبیعی یکی کوچکترین مقدار است، به فرض آنکه $n$ چنین عددی باشد:

$$n=q_1^{a_1}q_2^{a_2}\cdots q_s^{a_s}$$

و نیز تجزیهٔ (۳) $n=r_1^{b_1}\cdot r_2^{b_2}\cdots r_t^{b_t}$، که $r_1$، $r_2$، $\cdots$، $r_t$ رشته صعودی اعداد اول و $b_1, b_2, \cdots, b_t$ اعداد طبیعی هستند. بنابر رابطهٔ (۲) عدد $n$ بر $q_1$ قابل قسمت است و از اینرو بنابه رابطهٔ (۳) و از روی مفهوم نتیجهٔ قضیهٔ ۷، حداقل یکی از اعداد $r_1, r_2, \cdots, r_t$ می بایست بر $q_1$ بخش پذیر باشند بدیهی است علت این است که $q_1$ کوچکترین مقسوم علیه اول عدد (۳) است. اما بنا به قضیهٔ ۵، عدد اول $r_1$ فقط دو مقسوم علیه دارد: ۱ و $r$ بنابراین عدد اول $q_1$ نیز یك مقسوم علیه $r_1$ دارد و باید داشته باشیم $r_1=q_1$. در رابطهٔ (۳) $q_1$ را به جای $r_1$ قرار داده و از روی رابطهٔ (۲) به ازای عدد طبیعی $n'$، $n=q_1n'$ این معادله حاصل می شود:

بقیه در صفحهٔ ۱۶۴

# حقه‌های بازی با ورق

نوشتهٔ مارتین گاردنر

ترجمهٔ مهندس داوید ریحان

سامرست موام در قصهٔ کوتاه به‌عنوان «آقای اقیانوس‌العلوم» گفتگوی زیر را نقل کرده است :

ـ آیا تردستی با ورق را دوست دارید ؟

ـ من از حقه و کلك ورق سررشته ندارم.

ـ خیلی خوب ، پس هم‌اکنون یك چشمه برای شما نمایش می‌دهم.

پس ازسومین تردستی، شخص قربانی با عرض معذرت از اطاق خارج می‌شود. عکس‌العمل وی قابل توجیه است. بسیاری از تردستیهای بازی ورق حاصل ریزه‌کاریها وچشم بندیهایی‌است که با مهارت و ممارست حاصل می‌شود. معهذا بعضی از حقه‌های ورق وجود دارد که هر شخص به تنهایی می‌تواند آنها را فرا گیرد و هرکدام از آنها از یك نقطه نظر ریاضی جالب و مورد توجه است.

تردستی زیر را ملاحظه بفرمائید: شعبده باز، که مستقیماً در مقابل یك تماشاچی بر روی یك میز نشسته است ، ابتدا ۲۰ ورق را روی میز می‌چیند این ۲۰ ورق راکه پشتشان به طرف بالاست روی بقیهٔ کارتهاکه رویشان به طرف بالاست قرارمی‌دهد و یك تماشاچی آنها را خوب بر می‌زند تا اینکه خوب مطمئن شود که ورقهای پشت و رو شده بطور دلخواه برخورده باشند. شعبده بازاین دسته ورق را زیر میزمی‌برد وبطوری که هیچکس نبیند، ۲۰ ورق را از بالای آن می‌شمارد. این دستهٔ ۲۰ ورقی در دست شعبده باز در زیر میزنگهداشته می‌شود.

شعبده باز دسته ووق را زیر میزنگاه می‌دارد بطوری که نتواند ورقها را ببیند. آنگاه می‌گویدکه «نه‌هیچکدام از شما و نه خودمن، نمی‌دانیم در این گروه ۲۰ ورقی‌که در دست من است چند تا پشت و روشده است. معهذا روشن است‌که تعداداین ورقها کمتر از تعداد ورقهای پشت و روشده‌ای است که دربین ۳۲ ورقی‌است‌که در اختیار شما است. حالابدون‌اینکه به ورقهایم نگاه‌کنم، چند ورق را پشت و رو می‌کنم و سعی می‌کنم‌که تعداد ورقهای پشت و رو شده در دست من برابر با ورقهای پشت و رو شده‌ای باشد که اختیار شمااست».

شعبده باز برای لحظه‌ای برروی ورقها مکث می‌کند و اینطور نشان می‌دهد که می‌تواند پشت و روی ورقها را با دست کشیدن روی آنها بفهمد. سپس ورقها را رو می‌کند و آنها را روی میز قرار می‌دهد. ورقهای پشت و رو شده شماره می‌گردد. مشاهده می‌شود که تعداد آنها برابر با تعداد ورقهای پشت و رو شدهٔ نزد تماشاچی است.

این‌کلك قابل توجه رابخوبی می‌توان با مراجعه به‌یکی از قدیمی‌ترین سرگرمیهای ریاضی توجیه کرد. تصور کنید که در مقابل شما دولیوان قرار داشته باشد که محتوای یکی ازآنها یك لیتر آب و در دیگری‌یك لیتر شیر باشد. یك سانتیمترمکعب آبرا درون‌لیوان شیر می‌ریزیم وآب و شیر راکاملا باهم‌مخلوط می‌کنیم. سپس یك سانتیمتر مکعب از مخلوط را بر داشته و در لیوان آب می‌ریزیم. حال بگوئید آیا مقدار شیر درآب بیشتر است یامقدار آب در شیر ؟ (حجم مخلوطی از دو مایع گاهی غیر ازمجموع حجمهای آنها قبل از مخلوط شدن آنها است، معهذا این نکته را در اینجا نادیده می‌گیریم).

پاسخ این است که به‌همان اندازه‌ای‌که شیردر آب است به‌همان اندازه‌هم آب در شیر است. نکتهٔ سرگرم کننده درمورد این مسئله اطلاعات خارق‌العاده و زیادآن است. هیچ لازم نیست بدانیم چقدر مایع در هر کدام از لیوانهاست یا اینکه چقدر از آنها جابجا شده یا این جابجائی چند دفعه انجام شده است. به‌علاوه لازم نیست بدانیم که آیا مخلوطها را کاملا بهم‌زده‌ایم یا خیر . حتی اجباری نیست که مقدار مایعات هرکدام از دوظرف

در لحظهٔ شروع با هم برابر باشد! تنها شرط مهم آن است که مقدار مایع هر لیوان در آخر آزمایش به همان اندازه‌ای باشد که در اول داشته‌است. باچنین شرایطی اگر مقدار شیر به‌حجم x از لیوان شیر برداریم ، حجمی که قبلا بوسیلهٔ آن اشغال شده بود،حالا باید بوسیلهٔ مقداری آب به‌همان حجم x پرشود.

در صورتی که خواننده این استدلال را درك نکرده باشد می‌تواند موضوع را بایك دسته ورق روشن سازد. ۲۶ ورق را پشت و رو قرار دهید و آنرا به منزلهٔ شیر بگیرید. کنار آنها ۲۶ ورق را که رویشان به‌طرف بالا باشد و نمایش دهندهٔ آب است، قرار دهید. حال می‌توانیدهر کدام ازورقها را که‌بخواهید پشت و رو کنید وبه هر نحوی که مایل باشیدازهر قسمتی در دسته دیگر قرار دهید، البته باید توجه داشته باشید که تعداد ورقها در هر کدام‌از دسته‌ها همان ۲۶ ورق باقی بماند. بالاخره متوجه خواهید شد که تعداد ورقهای پشت در هر کدام از دسته‌ها برابر با ورقهای روشده در دستهٔ دیگر خواهدبود.

حال همین آزمایش را با ۳۲ ورق پشت و ۲۰ ورق رو انجام دهید. همین تبدیلات را هرچند بار که خواستید روی این ورقها انجام دهید بطوری که در آخر کار دردستهٔ کوچك ورقها همان۲۰ ورق را داشته باشید. الزاماً تعداد ورقهای پشت شدهٔ در دستهٔ بزرگ برابر با تعداد ورقهای روشدهٔ دستهٔ کوچك خواهد بود. حال ورقهای دستهٔ کوچك را پشت و رو کنید، در این صورت ورقهای رو، پشت شده و ورقهای پشت ، رو می‌شود و ورقهای رو شدهٔ در هر گروه باهم برابر خواهدشد.

حال می‌توان طرز عمل این کلك را روشن ساخت. در ابتدا، شعبده بازدقیقاً ۲۰ورق راپشت و رو می‌کند. بعد ، وقتی بسته ۲۰ ورقی را از تماشاچی دریافت می‌کند، این دسته شامل تعداد ورقهای پشت رو شده ای برابر باورقهای رو پشت شدهٔای است که دربقیهٔورقها وجود دارد. پس‌وی‌کافی‌است‌ورقهای در دست خود را پشت و روکند. و در این حالت تعداد ورقهای پشت و رو شده برابر با ورقهای پشت و رو شده دستهٔ ۳۲ تایی است که دردست تماشاچی است . این تردستی برای یك نفر ریاضیدان که برای تفکر به‌تمام انواع مسائل پیچیده آمادگی دارد معمای بسیار جالبی خواهدبود.

بعضی‌از حقه‌های ورق که به‌آنها «چشم‌بندی» می‌گویند از اصول ریاضیات مقدماتی سرچشمه می‌گیرد. یکی از بهترین آنها در زیر نقل‌می‌شود: پشت خود را به‌حضار کنید، ازکسی بخواهید که از دستهٔ ورقها ازیك تا ۱۲ کارت را از دسته ورق بردارد و بدون اینکه تعداد آنها را به شما بگوید، آنها را پشت سر خود مخفی کند. سپس به‌او بگوئید که ازروی ورقهای باقی‌مانده، به تعداد ورقهایی که برداشته است، بردارد ورقی راکه می‌باید نگاه‌کند و آنرا به‌خاطر بسپارد.

روی خود را به‌طرف حضار برگردانید و اسم کسی راکه مرده و یازنده‌باشد بپرسید. مثلاممکن است کسی‌اسم‌ناپلئون‌بناپارت را بر زبان آورد ( تعداد حروف اسم باید بیش از ۱۲ باشد). دسته ورق را در دست بگیرید، به شخصی که قبلا ورقها را در دست داشته‌است بگوئید: «همانطورکه من ورقها را روی میز می‌گذارم شما باید مثل حالا اسم ناپلئون‌بناپارت را هجی کنید». برای اینکه طرف را متوجه عمل خودکنید، ورقها را از روی‌دسته برداشته و به‌صورت یك ستون ورق رو به‌طرف‌میزقرار دهید و به ازای هر حرفی‌که هجی‌می‌شود یك ورق را از روی میز بر می‌دارید. از روی ستون کوچك برمی‌دارید و آنراروی دستهٔ ورق قرار می‌دهید.

ادامه می‌دهید که «البته قبل از اینکه این کار رابکنید، می‌خواهم کارتهایی راکه در دست شما است به این دسته ورق اضافه کنم». حقیقت امر اینکه شما به‌هیچ طریقی نمی توانید حدس بزنید که تعداد این‌کارتها چقدر است.

حال باتوجه به اینکه‌شما تعداد ورقها را نمی‌دانید، پس‌از اینکه تماشاچی‌هجی کردن ناپلئون بناپارت را به اتمام رساند، ورق جدید (که دربالای دسته قرار دارد) بیرون‌کشیده می‌شود و همان‌کارت موردنظر خواهدبود!

طرز عمل این تردستی را به سادگی می‌توان تجزیه و تحلیل کرد. فرض‌کنید x تعداد ورقهای در دست تماشاچی ونیز موقعیت‌کارت مورد نظر از روی دسته ورق باشد. تعداد حروف اسم انتخاب شده را هم y می‌گیریم. نمایش شما دال براینکه چگونه اسم را هجی کنند، بطور خودکار ترتیب y ورق را تغییر می‌دهد و ورق انتخاب شده را به وضعیتی از بالای ورقها در می‌آوردکه برابر با y منهای x خواهد شد، بنابراین با اضافه‌کردن x ورق به دسته ورقها حاصل اخیر را به صورت y منهای x به علاوه x ورق نسبت به وضعیت اول در می‌آورد. پس از حذف x دقیقا y ورق باقی می‌ماندکه باید قبل ازرسیدن به ورق مورد نظر هجی‌شود.

یکی دیگر از اصول جالب در مسئله زیر وجود دارد. از یك نفر تماشاچی بخواهیدکه سه ورق را انتخاب‌کرده و آنهارا

بدون اینکه بگذارد شعبده‌باز به‌آنها نظری بیفکند پشت رو روی میز قرار دهید. بقیهٔ ورقها را برزده و به دست شعبده‌باز بسپارید

شعبده باز اظهار می‌دارد که: «من وضعیت یك ورق راتغییر نمی‌دهم وتنها کاری که می‌کنم این است که یك ورق رابرمی‌دارم که از لحاظ رنگ‌و مقدار برابر باهمان باشد که هم اکنون شما انتخاب کرده‌اید. سپس یك ورق را از دسته ورقها برمی‌دارد و آنرا پشت رو دریك‌طرف‌میز قرار می‌دهد.

حال از تماشاچی خواسته می‌شود که ورقهای باقیمانده‌را در دست گیرد و سه ورقی راکه قبلا برروی میز قرار داده بود روکند. فرض کنید که این سه ورق عبارت باشند از یك نه، یك بی‌بی ویك آس. شعبده باز می‌گوید که ازکارت ۹ شروع‌می‌کند وکارتهای باقیمانده را رو به طرف پائین در بالای نه قرارمی‌دهد و بدین ترتیب عمل می‌کند که شمارش را از ۱۰ شروع می‌کند وکارتها را می‌شمارد تا به ۱۵ برسد. به بیانی دیگر، تماشاچی شش ورق را رو به‌طرف پائین برروی نه قرار مـی‌دهد . همین روش را برای سایر ورقها بکار می‌برد. بی‌بی کـه ارزشش ۱۲ است (سرباز ۱۱ و شاه ۱۳)، احتیاج به سه ورق دارد تاازا۱۲ به ۱۵ برسد. آس (۱) محتاج به ۱۴ ورق است.

حال شعبده باز از جمع کل مقادیر سـه‌ورق رو شدهٔ اولیهٔ تماشاچی باخبر است ورق را در وضعی کـه از بـالای دسته‌های باقیمانده‌شمارش می‌گردد، در نظرمی‌گیرد.در این موردمجموع برابر با ۲۲(۹ به‌علاوه ۱۲ به‌علاوه۱) است، پس اوبربیست و دومین ورق انگشت می‌گذارد. شعبده‌باز ورق پیشگوئـی شده را رو می‌کند و عجباکه دو ورق از لحاظ رنگ‌و عدد یکسانند!

این عمل چگونه انجام شده است؟ وقتی شعبده باز برای یافتن ورق پیشگوئی شده دسته ورقها را می‌شمارد، چهارمین‌ورق از پائین را یادداشت می‌کند سپس سایر ورقها راکـه از لحاظ رنگ‌وعدد با آن برابرند، برمی‌دارد. (در برخی حالات بسیار نادر ممکن است‌کارت پیشگوئی شده را از میان سه ورق زیری دسته ورقها بدست آورید. وقتی چنین اتفاقی افتاد، شماباید بـه خاطر داشته باشید که بعداً وقتی تماشاچی آخرین شمارش خود را برکارت انتخاب شده انجام داد بـه‌اوبگوئید کـه شمارش را تمام‌کند و برورق بعدی نگاه‌کند). اثبات جبری اینکه‌چرااین کلك را می‌توان همیشه سوارکرد به خواننده واگذارمی‌شود .

چون ورق را به‌سادگی می‌توان برزد ، گاه برای اثبات قضایای متنوع احتمالات از آن‌استفاده‌های خاص می‌شودچنانچه گاه به عنوان چشم بندی می‌توان از آنها نام‌برد. به عنوان‌مثال تصورکنید دونفر هرکدام دارای یك دسته ورق ۵۲تایی باشند . یکی ازآنها این ورقها رااز ۱تا۵۲ می‌شمارد، و در هرشمارش هرکدام از آنها یك ورق را رو می‌کند و روی میز می‌گذارد. احتمال اینکه در یك لحظهٔ دلخواه دو ورق یکسان همزمان بـا یکدیگر روشوند چقدر است؟

خیلی‌ها فکر می‌کنندکه این احتمال اندك باشد ، ولـی واقعیت این است کـه ایـن احتمال بیشتر از $\frac{1}{2}$ است! احتمـال اینکه پیشامدی رخ ندهد برابر با یك تقسیم بر عدد اصم e است. (دقیقاً اینطورنیست، بلکه خطای حاصل‌کمتر از ۱ بخش بر۱۰ به توان ۶۹ است.

چون e برابربا۲/۷۱۷.... است،احتمال پیشامدبرابر $\frac{17}{27}$ یا تقریباً برابـر بـا $\frac{2}{3}$ است.

اگرکسی را پیداکردیدکـه حاضر بـود سراینکه ایـن پیشامد هیچگاه بوقوع نخواهد پیوست شرط ببندد، شانس خوبی داریدکه از او ببرید. ذکراین نکته جالب‌است‌که روش تجربی که براحتمالات استوار است، برای بسط e وجـود دارد (کـه مشابه با روش «سوزن‌بوفن» برای بسط π است). هرقدر تعداد ورقها بیشترباشد، احتمال نیامدن پیشامد بـه $\frac{1}{e}$ نـزدیـکتـر می‌گردد.

---

**درباهٔ اعداد اول...** (دنباله از صفحهٔ ۱۶۱)

$$n' = q_1^{a_1-1} q_2^{a_2-1} \cdots q_s^{a_s} =$$
$$= q_1^{b-1} r_2^{b_2} \cdots r_t^{b^t}$$

چون عدد $n'$ کمتراز $n$ است عدد $n'$ فقطیك تجزیهٔ به‌عوامل اول دارد وبنابراین به‌آسانی نتیجه می‌شودکه:

$$a_1 = b_1 \ ، \ a_2 = b_2 \ ، \ r_s = q_s ، \cdots$$
$$r_3 = q_3 \ ، \ t_2 = q_2 \ ، \ s = r$$

بنابراین تجزیهٔ (۲) و (۳) یکسان است.

بنابراین ثابت‌کردیم که:

**قضیهٔ ۸ـ** هر عدد طبیعی بزرگتر ازیك فقط یك تجزیهٔ به‌عوامل اول‌دارد، در صورتی‌که ترتیب عوامل‌را درنظربگیریم.

# با ریاضیات آشتی کنید

(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

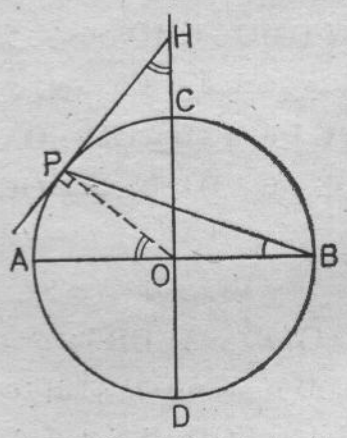
تألیف: A.BULLAS استاد آموزش ریاضی در فرانسه

ترجمهٔ: عبدالحسین مصحفی

## بخش دوازدهم- حل چند مسئله با استفاده از روش تصاویر (۲)

**مسئله-** دایرهٔ به‌مرکز O و دو قطرعمود برهم AB و CD ازآن مفروض است. بر کمان AC نقطهٔ P اختیارمی‌کنیم و در آن مماسی بردایره رسم می‌کنیم تا امتداد CD را در H قطع کند. ثابت کنیدکه اندازهٔ زاویهٔ PBA نصف اندازهٔ زاویهٔ PHD است.

تصاویر فیلم قضیه‌ها:




خط‌مماس‌بردایره برشعاع نقطهٔ تماس عموداست. پس‌اگر OP را رسم‌کنیم OP بر PH عمود است.

دو زاویه که ضلعهایشان دو به دو بر هم عمود باشد و هردو حاده باشند باهم برابرند. پس دوزاویهٔ POA و PHO باهم برابرند.

اندازهٔ زاویهٔ مرکزی بااندازهٔ کمان روبرویش برابراست.

اندازهٔ زاویهٔ POA برابر است‌با اندازهٔ کمان PA .

اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف اندازهٔ کمان روبرویش است .

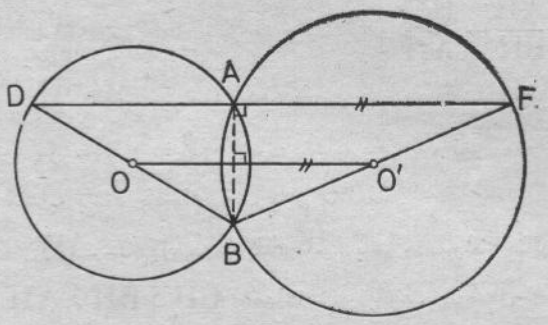
اندازهٔ زاویهٔ PBA نصف اندازهٔ کمان PA است.

نتیجه: اندازهٔ زاویهٔ PBA نصف اندازهٔ زاویهٔ POA است. چون دوزاویهٔ POA وPHO باهم برابرند، پس‌اندازهٔ زاویهٔ PBA نصف اندازهٔ زاویهٔ PHO است.

**مسئله-** دو دایرهٔ به مرکزهای O و O′ در A و B متقاطعند. از A خطی موازی با خط المرکزین دودایره رسم می‌کنیم‌که دایرهٔ به مرکز O را در D ودایرهٔ به مرکز O′ را در F تلاقی می‌کند. ثابت کنیدکه سه نقطهٔ D و O و B همچنین سه نقطهٔ F و O′ و B بریك خط راست واقعند.

تصاویر فیلم قضیه‌ها:

خط المرکزین دو دایرهٔ متقاطع عمود منصف وترمشترك




آنهاست. OO′ عمود منصف AB است.

اگر یکی از دو خط متوازی برخطی عمود باشد، خط دیگر نیز برآن خط عموداست. DF با OO′ موازی است. OO′ بر AB عموداست. پس DF بر AB عمود استوهریك‌از زاویه‌های DAB و FAB قائمه‌اند.

زاویهٔ قائمه‌ای‌که در دایره محاط باشد رو برو به قطر دایره است. زاویهٔ DAB قائمه و در دایرهٔ به مرکز O محاط

است. پس DB قطر این دایره‌است واز O می گذرد. به‌عبارت دیگر سه نقطهٔ D و O و B بر یك خط راست واقعند.

زاویهٔ BAF قائمه است و در دایرهٔ به مرکز O′ محاط است. پس BF قطر این دایره است. یعنی سه نقطهٔ F و O′و B بریك خط راست واقعند.

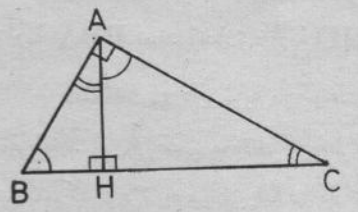
* *

در مسئله‌هایی از هندسه موضوع اثبات رابطه‌ای بین اندازه‌های چهارپاره خط، مثل $ab=cd$ یا رابطه‌ای بین اندازه‌های سه پاره خط مثل $h^2=mn$ به میان می‌آید. درزیر چند مسئله از این‌نوع حل می‌شود:

**مسئله**ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که زاویه A قائمه است ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که:

$$AH^2=BH\cdot HC \qquad (1)$$

مرحله‌های زیر را در نظر می‌گیریم:




I ـ می‌دانیم در هر تناسب حاصل‌ضرب طرفین باحاصل ضرب وسطین برابر است. پس می‌توانیم رابطهٔ(۱) را به صورت تناسبی بنویسیم که اگر آن را به اصطلاح طرفین و وسطین کنیم رابطهٔ (۱) بدست آید. این تناسب را می‌توانیم چنین بگیریم:

$$\frac{AH}{BH}=\frac{HC}{AH} \qquad (2)$$

II ـ تناسب به صورت (۲) بین پاره خطها نوشته‌شده است. پس باید به دنبال مثلثهای متشابه بگردیم. زیرا دو مثلث که متشابه باشند ضلعهای آنها باهم متناسبند.

III ـ درشکل مسئله کدام‌مثلثها باهم متشابهند؟ مثلثهایی که AH و BH و CH ضلعهای آنها باشند. در شکل‌سه‌مثلث وجود دارد، AH ضلعی‌ازدومثلث ABH وAHC است. BH ضلع مثلث ABH وHC ضلع مثلث ACH است. پس باید دو مثلث ABH وACH رادر نظر بگیریم وثابت کنیم که باهم‌متشابهند.

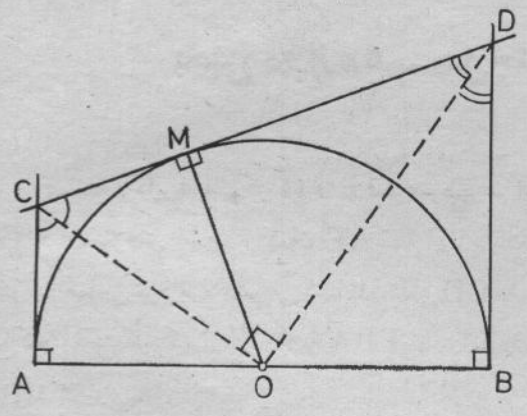
IV ـ دو مثلث ABH و ACH هر دو در زاویهٔ H قائمه‌اند. دو زاویهٔ حادهٔ BAH و BCA که ضلعهایشان برهم عمودند باهم برابرند. بنابراین دو مثلث متشابهند. در دو مثلث متشابه ضلعهای روبرو به زاویه‌های متساوی متناسبند. زاویه‌های متساوی را روی شکل بانشانه مشخص می‌کنیم و از این راه ضلعهای متناسب را ساده‌ترمعین می‌کنیم. به سادگی تناسب (۲) و از روی آن رابطهٔ (۱) بدست می‌آید.

**مسئله**ـ برنیمدایرهٔ به مرکز O و به قطر AB نقطهٔ M را اختیار می‌کنیم و در آن‌مماسی برنیمدایره رسم می‌کنیم تا عمودهایی راکه در A و B بر AB رسم می‌شوند در C و D قطع کند.

اولا اندازهٔ زاویهٔ COD چقدر است؟

ثانیاً ثابت کنید که: $OA^2=AC.BD$

اولا برای تعیین اندازهٔ زاویهٔ COD آنچه ازتصاویرفیلم قضیه‌ها که مشاهده می‌کنیم:




خط مماس بردایره برشعاع نقطهٔ‌تماس‌عمود است. هریك از زاویه‌های CMO و DMO قائمه است. هرنقطه ازدوضلع یك زاویه به یك فاصله باشد برنیمساز آن زاویه واقع است. OA و OM برضلعهای زاویهٔ C عمودند وباهم برابرند. پس OC نیمساز زاویهٔ D است و زاویهٔ ODM نصف زاویهٔ D است.

در ذوزنقه دو زاویهٔ مجاور به هرساق مکمل یکدیگرند. در ذوزنقهٔ ACDB دو زاویهٔ C و D مکمل یکدیگرند. پس نصفهای این دو زاویه یعنی دو زاویهٔ OCM و ODM متمم یکدیگرند و مثلث COD در زاویهٔ O قائمه است. اندازهٔ زاویهٔ COD برابر ۹۰° است.

ثانیاً رابطهٔ مورد نظررا به صورت تناسب می‌نویسیم:

$$\frac{OA}{AC}=\frac{BD}{OA}$$

چون $OA=OB$ پس:

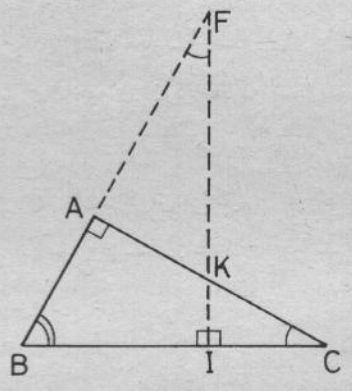
$$\frac{OA}{AC}=\frac{BD}{OB}$$

کدام دو مثلث متشابهند تا تناسب بالاتناسب ضلعهای آنها

باشد؟ با اندك دقت معلوم می‌شود که باید دو مثلث OAC و OBD را درنظر بگیریم. این دو مثلث قائم الزاویه‌اند و زاویه‌های حادهٔ ACO و BOD از آنها با هم برابرند زیرا ضلعهای این دو زاویه برهم عمودند. دو مثلث متشابهند. تناسب ضلعهای متناظر آنها را می‌نویسیم و از روی آن رابطه‌ای را که می‌خواستیم ثابت می‌شود.

**مسئله ـ** مثلث ABC قائمه درزاویهٔ A داده شده است. بر امتداد ضلع BA نقطهٔ F را اختیار می‌کنیم و ازآن عمودی بر BC رسم می‌کنیم که آن را در I وضلع AC را در K قطع می‌کند. ثابت کنید که :

$$IB \cdot IC = IK \cdot IF \qquad (1)$$




رابطهٔ (۱) را به صورت تناسب می‌نویسیم:

$$\frac{IB}{IK} = \frac{IF}{IC} \qquad (2)$$

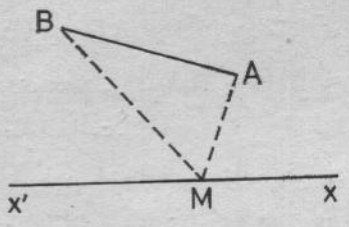
بادرنظر گرفتن اجزاء این تناسب معلوم می‌شود که باید ثابت کنیم دو مثلث IBF و ICK با هم متشابهند. این دو مثلث به ترتیب درزاویه‌های A و I قائمه‌اند. دو زاویهٔ حادهٔ F و C که ضلعهایشان برهم عمودند باهم برابرند پس دو مثلث متشابهند. از تشابه این دو مثلث تناسب (۲) و از روی آن رابطهٔ (۱) بدست می‌آید.

***

در اینجا باید نکتهٔ مهمی را به شما یادآوری کنم : درحل هرمسئله نظامی را پیروی می‌کنیم که شامل یك سلسله عملیات است. اما بسیاری از این عملیات را بایدذهنی انجام داد. شما می‌توانید روی کاغذ چرکنویس هرچه‌خواسته باشید وبه هرترتیب بنویسید . اماروی کاغذی که برای تصحیح به دبیر می‌سپارید باید آنچه را که لازم است بنویسید و از نوشتن عملیات غیر لازم پرهیز کنید مثلا در اثبات رابطهٔ $IB \cdot IC = IF \cdot IK$ روی کاغذ چرکنویس، یا در ذهن خود ، آن را تبدیل به تناسب می‌کنید و بعد جمله‌های این تناسب را در نظر گرفته مثلثهای متشابه مربوط را جستجومی‌کنید. در صورتی که موقع پاکنویس از همان آغاز می‌نویسید که « دو مثلث BIF و CIK با هم متشابهند...»

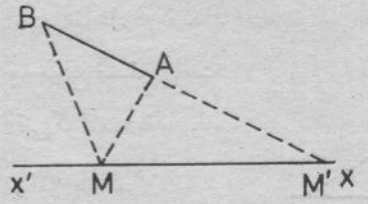
یك بار دیگر این موضوع را نیزتکرار می‌کنم که ممکن است بسیاری از شما در ریاضیات قوی باشید و این مطالب را در اثر کنجکاوی بخوانید. شاید برای این دسته مسائلی که مطرح می‌شود و توضیحات مربوط به حل آنها مقدماتی به نظر آید. اما باید توجه داشته‌باشید که این‌مطالب برای‌آنان نوشته می‌شود که‌تصور می‌کنند در ریاضیات ضعیف می‌باشند و می‌خواهند ضعف خود را جبران کنند. وانگهی همانان هم که در ریاضیات قوی هستند از همین مسائل ساده و توضیحات مربوط به حل آنها می‌توانند چیزهای تازهٔ بیاموزند.

**مسئله ـ** خط x'x و پاره خط AB در یك طرف آن داده شده است. نقطهٔ M روی x'x تغیرمکان می‌دهد. وضع M' از این نقطه را بیابید بقسمی که تفاضل M'A و M'B ماکسیمم باشد.




به یاد داریم که «حالت خاص ، حالت خاص‌راموجب‌می‌شود». بنابراین به جستجوی حالت‌خاص برمی‌آییم.

شاید دانش‌آموزی بگوید که چگونه می‌توان روی یك خط نامحدود حالت خاص از یك نقطه را معین کرد. روی یك پاره خط، هریك از نقطه‌های دوسر آن یا نقطهٔ وسط آن حالتهای خاص می‌باشند. اما خط نا محدود که آغاز و فرجامش معین نیست، نقطهٔ وسط که ندارد . این دانش آموز درست می‌گوید اما به جزء دیگری از شکل توجه ندارد. درشکل علاوه برخط نا محدود x'x پاره خط AB نیزوجود دارد، پس می‌توان بر x'x نقطهٔ M را چنان اختیارکرد که نسبت به AB درحالت خاص باشد.




یك حالت‌خاص که زود به‌فکر می‌رسد آن است که M' نقطهٔ تلاقی امتداد AB با x'x باشد.

ممکن است که دانش‌آموزی M' را نقطهٔ تلاقی امتداد AB با x'x بدست‌آورده باشد امانه با استفاده از فکر «حالت

خاص حالت خاص راموجب می‌شود» بلکه ازاین راه که وی مسئله را مسئله‌ای از نوع دوم تلقی می‌کند که باید خط تازه‌ای به شکل اضافه‌شود. آنگاه AB را امتداد می‌دهد تا $x'x$ را در $M'$ قطع کند.

به هرحال نقطهٔ $M'$ که بدست آمده است باید معلوم کنیم نقطهٔ مطلوب هست یا نه. یعنی باید معلوم کنیم آیا در این وضع مقدار $BM'-AM'$ ماکسیمم می‌باشد یا نه. چون $M'$ حالت خاص از M است پس $BM'-AM'$ نیز حالتی خاص از $BM-AM$ است. اما آیا مقدار $BM-AM$ در حالت خاص $BM'-AM'$ ماکسیمم است؟ به فیلم قضیه‌ها رجوع کنیم: در هرمثلث هرضلع بزرگتر است از تفاضل دوضلع دیگر. در مثلث ABM داریم:

$$AB>MB-MA \Longrightarrow MB-MA<AB$$

این نامساوی برای هروضعی از M روی $x'x$ صادق است مگر آنکه M در $M'$ باشد.

دراین حالت خاص داریم:

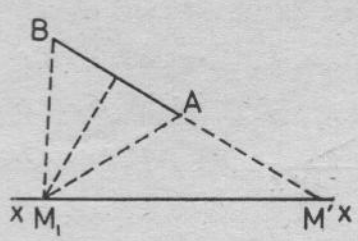
$$M'B-M'A=AB$$

بنابراین AB بزرگترین مقداری است که با تغییر مکان M روی $x'x$ برای $MB-MA$ حاصل می‌شود. پس $M'$ نقطهٔ مطلوب است.

در اینجا یك سؤال پیش می‌آید، وقتی M روی $x'x$ تغییرمکان‌می‌دهدمقدار $BM-AM$ نیز تغییر می‌کند. بیشینهٔ این مقدار وقتی است که M روی $M'$ یعنی در امتداد AB واقع شود. آیا مقدار مزبور کمینه‌ای دارد و اگر دارد چیست؟

باید متذکر شویم که مقصود از تفاضل اندازه‌های دو پاره خط زیادتی اندازهٔ پاره خط بزرگتر بر اندازهٔ پاره خط کوچکتر است. اگر BM از AM بزرگتر باشد تفاضل آنها را $BM-AM$ می‌نویسیم و اگر BM از AM کوچکتر باشد تفاضل آنها را $AM-BM$ می‌نویسیم.

یعنی در هرحال تفاضل اندازه‌های دو پاره خط AM و BM عددی است نامنفی. پس می‌نیمم آن برابر باصفر است. تفاضل دومقدار چه موقع صفر است؟ وقتی که آن دومقدار باهم برابر باشند.




می‌نیمم $BM-AM$ وقتی است که $BM=AM$.

در این حال نیز نقطهٔ M در وضع خاص است و ازدو نقطهٔ A و B به یك فاصله است. پس این وضع خاص M عبارت است از $M_1$ نقطهٔ تلاقی عمود منصف AB با $x'x$.

دنباله‌دارد

---

**حل مسائل ...** (دنباله از صفحهٔ ۱۸۴)

**۴۹ـ** داریم:

$$a=\frac{3}{4}\log 50=\frac{3}{4}\log\frac{100}{2}=\frac{3}{4}\log 100-\frac{3}{4}\log 2$$

**۵۰ـ** D نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث ABC است پس اندازهٔ زاویهٔ BDC برابراست با $90^\circ+\frac{A}{2}$

**۵۲ـ** معادلهٔ خط AB $3y+5x-15=0$ است و برای ناحیه‌ای ازاین خط که شامل مبدأ مختصات است داریم:

$$3y+5x<15$$

**۵۳ـ** فرض می‌کنیم:

$$f(x)-g(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+kx+l$$

پس داریم:

$$f'(x)-g'(x)=$$
$$nax^{n-1}+(n-1)bx^{n-2}+\dots+k$$
$$f'(x)-g'(x)=k\Longrightarrow a=b=\dots=h=0$$
$$f(x)-g(x)=kx+l$$

**۵۴ـ** چون تانژانتهای دو زاویهٔ مکمل قرینهٔ یکدیگرند پس در هرچهار ضلعی که زاویه‌های مقابل یا زاویه‌های مجاور دو به دو مکمل یکدیگر باشند مجموع تانژانتهای چهار زاویه برابر با صفر است.

**۵۷ـ** از $y''=0$ نتیجه می‌شود:

$$x^3+3x^2-9x+1=0$$

و از حل معادلهٔ $y=ax+b$ با تابع نتیجه می‌شود:

$$x^3+\frac{b-a}{a}x^2+\frac{2a-b-1}{a}x+\frac{2b-1}{a}=0$$

از مقایسهٔ ضریبهای دو معادله داریم:

$$a=\frac{1}{7}\ \text{و}\ b=\frac{4}{7}\ ،\ y=\frac{1}{7}x+\frac{4}{7}$$

**۵۸ـ** به‌ازای $0<x<1$ داریم:

$$y=\frac{(1-x)x+(x-1)x}{x^2-1}=0$$

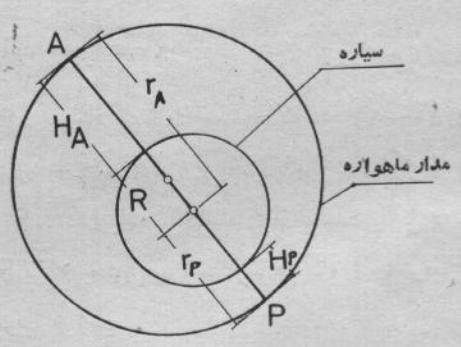
دنباله در صفحهٔ ۵۷۱

# حل چند مسئله دربارهٔ ماهواره ها

ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری

**مقدمه ـ** هر ماهواره به دور زمین، یا سیاره‌ای دیگر، مسیری بیضی‌شکل (نزدیك به‌دایره) می‌پیماید که آن را مدار آن ماهواره می گوئیم ونصف قطر بزرگتر آن رابا a نشان می‌دهیم. زمین وسیاره‌های دیگر کروی فرض می‌شوند وچون مرکز مدار ماهواره برمرکز سیاره واقع نیست، به‌علاوه مدار ماهواره‌بیضی است، نقطه های مختلف مدار ماهواره ازسطح سیاره ارتفاعهای متفاوت دارند.

مطابق باشکل، وقتی‌ماهواره در A باشد ازسطح سیاره بیشترین ارتفاع رادارد ووقتی‌در P باشد ازسطح سیاره دارای کمترین ارتفاع‌است. ارتفاع A رااز سطح سیاره ارتفاع اوج یا به خلاصه اوج ماهواره می‌نامیم وبا $H_A$ نشان می‌دهیم. ارتفاع B رااز سطح‌سیاره ارتفاع حضیض یابطورساده حضیض ماهواره می گوییم وبا $H_P$ نشان می‌دهیم. شعاع سیاره را R وفاصله‌های




A و P را تامرکز سیاره به‌ترتیب با $r_A$ و $r_P$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$r_A = R + H_A \quad , \quad r_P = R + H_P$$

ازاین دو رابطه نتیجه می گیریم که:

$$a = \frac{r_A + r_P}{۲} = \frac{۲R + H_A + H_P}{۲}$$

**مسئلهٔ ۱ـ** مطلوبست تعیین نصف محور بزرگتر مدار ماهواره‌ای به‌دور زمین که اوج آن ۱۵۴۰ کیلومتر وحضیض آن ۱۴۲۵ کیلومتر است.

**حل ـ** شعاع کرهٔ زمین‌را ۶۳۷۱ کیلومتر می گیریم. پس داریم:

$$a = \frac{۲ \times ۶۳۷۱ + ۱۵۴۰ + ۱۴۲۵}{۲} = ۷۸۵۳/۵^{km}$$

**مسئلهٔ ۲ـ** ماهواره‌ای که به‌دور مریخ می گردد، نسبت به این سیاره دارای اوج ۲۵۰۰۰ کیلومتر و حضیض ۱۳۸۰ کیلومتر است. اگرشعاع کرهٔ مریخ ۳۳۸۶ کیلومترباشد نصف محور بزرگترمدار ماهواره چقدراست؟

جواب: ۱۶۶۰۰ کیلومتر.

**مسئلهٔ ۳ـ** ماهواره‌ای که به‌دورماه می گردد دارای اوج ۳۸۵ کیلومتر وحضیض ۷۷ کیلومتر است. شعاع کرهٔ ماه ۱۷۳۸ کیلومتراست. نصف محور بزرگترمدار ماهواره چقدراست؟

جواب: ۱۹۷۰ کیلومتر.

**مسئلهٔ ۴ـ** ماهواره‌ای به‌دور زمین می گردد و اوج آن ۲۵۲ کیلو متر و نصف محور بزرگتر مدارش ۶۶۰۱/۵ کیلومتراست. اوج این‌ماهواره چقدراست؟

**حل ـ** داریم:

$$a = \frac{۲ \times ۶۳۷۱ + ۲۵۲ + H_P}{۲} \Longrightarrow H_P = ۲۰۹^{km}$$

**مسئلهٔ ۵ـ** سفینه‌ای فضایی درمدار دایره‌ای به دورزمین می گردد. اوج این‌سفینه ۳۰۰ کیلومتر وحضیض آن ۱۸۰ کیلومتر است. طول مداراین سفینه چقدراست؟

**حل ـ** طول‌مدار که دایره‌ای است $C = ۲\pi a$ است و:

$$a = \frac{۲ \times ۶۳۷۱ + ۲۰۰ + ۱۸۰}{۲} = ۶۶۱۱$$

$$C = ۲ \times ۳/۱۴ \times ۶۶۱۱ \approx ۴۱۵۰۰^{km}$$

## تعیین مدت یك دورهٔ گردش ماهواره

بنابرقانون سوم کپلرمبنی براینکه «نسبت‌مکعب نصف‌محور بزرگترمدار سیاره به‌مجذور مدت‌یك دورهٔ گردش‌آن مقدارثابت است» بادانستن مشخصات مربوط به‌ماه می‌توانیم مدت یك دورهٔ گردش ماهواره را به دور زمین از روی نصف محور بزرگتر مدارآن، یانصف محور بزرگترمدارآن را ازروی مدت یك‌دورهٔ گردش آن حساب کنیم.

اگر $A$ نصف محور بزرگترمدار ماه و $T$ مدت یك دورهٔ گردش‌آن به دورزمین و $a$ نصف محور بزرگتر مدار ماهواره و $t$ مدت یك‌دورهٔ گردش‌آن به‌دورزمین باشد، داریم:

$$\frac{A^3}{T^2}=\frac{a^3}{t^2}$$

**مسئلهٔ ۶ ـ** ماهواره‌ای به دورزمین می گـردد. اوج‌آن ۲۴۶ کیلومتر و حضیض آن ۲۰۸ کیلومتر است. مدت یك‌دورهٔ گردش این ماهواره چقدر است؟

**حل ـ** می‌دانیم که نصف محوربزرگترمدارماه ۳۸۴۴۰۰ کیلومتر و مدت یك دورهٔ حرکت آن به دورزمین ۲۷/۳۲روز برابر با ۲۷/۳۲ × ۱۴۴۰ دقیقه است. برای ماهواره داریم :

$$a=\frac{2\times 6371+246+208}{2}=6598\approx 6600\,Km$$

اگر $t$ دقیقه مدت یك دورهٔ گردش ماهواره به دور زمین باشد طبق فرمول بالا داریم:

$$\frac{(6600)^3}{t^2}=\frac{(384400)^3}{(27/32\times 1440)^2}=3669\times 10^4$$

از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$2\log t=3\log 6600-(4+\log 3669)$$

$$2\log t=2+3\log 2+2\log 3+3\log 11-\log 1223$$

$$\log t=1/94703\Longrightarrow t\approx 89 \text{ دقیقه}$$

**مسئلهٔ ۷ ـ** ماهواره‌ای هر ۱۱ساعت و ۴۶ دقیقه یك‌بار به دور زمین می گـردد. نصف محور بـزرگتر مدار آن چقدر است؟

**حل ـ** ۱۱ ساعت و۴۶ دقیقه می شود ۷۰۶ دقیقه. پس:

$$\frac{a^3}{(706)^2}=3669\times 10^4$$

$$3\log a=4+\log 3669+2\log 706$$

$$\log a=4/4207\Longrightarrow a\approx 26300\,km$$

**مسئلهٔ ۸ ـ** ماهواری به دور مریخ به گردش در آمده است که هر ۱۸ ساعت یك‌بار به دور این سیاره می گردد. نصف محور بزرگتر مدارآن چقدر است؟

برای حل این مسئله باید مشخصات یکی از ماههای‌مریخ را داشته باشیم تا از روی آن و با استفاده از قانون کپلر مقدار مجهول را حساب کنیم. یکی از ماههای مریخ به نام فوبوس‌هر ۷/۶۵ ساعت یك باربه دورمریخ می گردد ونصف محور بزرگتر مدار آن برابر با ۹۴۰۰ کیلومتر است. بنابراین :

$$\frac{a^3}{(18)^2}=\frac{(9400)^3}{(7/65)^2}\Longrightarrow a=16600\,km$$

**مسئلهٔ ۹ـ** یکی‌از ماهواره‌هایی که درمدار مریخ‌قرارداده شده دارای‌مداری است‌که نصف محـور بزرگتر آن ۱۹۹۲۰۰ کیلومتراست. مدت‌زمان یك‌دور گردش این‌ماهواره به دور مریخ چقدراست؟

**حل ـ** داریم:

$$\frac{(199200)^3}{t^2}=\frac{(9400)^3}{(7/65)^2}\Longrightarrow t\approx 11 \text{ روز}$$

---

## حل مسائل ... (دنباله از صفحهٔ۱۶۸)

**۵۹ـ** از تبدیل حاصل ضرب سینوسها بـه حاصل جمع نتیجه خواهد شد: $x=\frac{1}{16}$

**۶۱ـ** به سادگی ثابت می‌شود که عدد $a(a^2-1)$ و در نتیجه عدد $a(a^{2n}-1)$ بر ۶ بخش پذیراست. اگر $T$ مجموع عددهای $a$، $b$، ...، $l$ باشد، با استفاده ازخاصیت بالانتیجه می‌شود که $S-T$ بر ۶ بخش پذیراست. پس‌هر گاه $T$ مضرب ۶ باشد $S$ نیز مضرب ۶ است.

**۶۲ـ** اگر $a$ یکی از این عددها باشد داریم $a>15$ و درضمن $a$ مقسوم‌علیه‌مشترك‌دوعدد $13860=15-13875$ و $936=13-949$ است، کـه نتیجه خواهد شد $a=18$ یا $a=36$

**۶۴ـ** با توجه به اینکه تصویر کانون هذلولی برهرخط مماس برآن بر دایرهٔ اصلی آن واقع است، نتیجه می‌شود کـه $\Delta$ از کانون هذلولی می گذرد و درنتیجه باهذلولی و مجانبهای آن متقاطع است.

# حل مسائل یکان شمارهٔ: ۱۰۴

## حل مسائل ویژهٔ سال اول نظری وجامع

**۱۰۴/۱ـ** ترجمهٔ ازفرانسه

ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$(C\cap B)\subset(A\cap B)$ و $(C\cup B)\subset(A\cup B)$

خواهیم داشت: $C\subset A$

**حل ـ** باید ثابت کنیم که اگر $x\in C$ باشد $x\in A$ نیز می‌باشد. فرض می کنیم که $x\in C$ دراین صورت نسبت به‌مجموعهٔ B دو حالت خواهیم داشت:

حالت اول : $x\in B$ که در این صورت نتیجه می‌شود:

$x\in C\cap B$

و چون $C\cap B$ زیر مجموعهٔ $A\cap B$ است پس:

$x\in A\cap B \Longrightarrow x\in A$

حالت دوم: $x\notin B$ که دراین صورت نتیجه می‌شود:

$x\in C\cup B$

و چون $C\cup B$ زیر مجموعهٔ $A\cup B$ است پس:

$x\in A\cup B$

از این رابطه و باتوجه به اینکه $x\notin B$ نتیجه می‌شود:

$x\in A$

از $x\in C$ درهرحال نتیجه می‌شود که $x\in A$ پس: $C\subset A$

**۱۰۴/۲ـ** ترجمهٔ از فرانسه

هر گاه مجموعهٔ مرجع عبارت باشد از مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های مجموعهٔ:

$E=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸\}$

هریك از معادله‌های مجموعه‌ای زیررا حل کنید (مجموعهٔ X را مشخص کنید):

۱) $\{۱،۲،۳،۴،۵\}\cap X=\{۲،۴،۶\}$

۲) $\{۱،۲،۳،۴،۵\}\cap X=\{۲،۴\}$

**حل ـ** ۱) می‌دانیم که هرعضو از اشتراك دو مجموعه باید عضو هریك از آن دو مجموعه باشد. در رابطهٔ (۱) مشاهده می‌کنیم که ۶ عضو اشتراك دو مجموعهٔ $\{۱،۲،۳،۴،۵\}$ و X نوشته شده است درحالی که عضو مجموعهٔ $\{۱،۲،۳،۴،۵\}$ نیست پس این رابطه غیر ممکن است و مجموعه‌ای که به جای X در این رابطه صدق کند وجود ندارد.

۲) مجموعهٔ X حداقل دارای دو عضو ۲ و ۴ است و عضوهای ۱ و ۳ و ۵ را دارا نیست و چون X زیر مجموعهٔ E است پس X می‌تواند هریك از مجموعه‌های زیر باشد:

$X=\{۲،۴،۷\}$ یا $X=\{۲،۴،۶\}$ یا $X=\{۲،۴\}$

$X=\{۲،۴،۶،۸\}$ یا $X=\{۲،۴،۶،۷\}$ یا $X=\{۲،۴،۸\}$

$X=\{۲،۴،۶،۷،۸\}$ یا $X=\{۲،۴،۷،۸\}$

معادلهٔ مجموعه‌ای (۱) غیرممکن است. معادلهٔ مجموعه‌ای (۲) دارای ۸ جواب است.

**۱۰۴/۳ـ** ترجمهٔ مهندس زرگری

کودکی ۱۰ ریال دارد. باآن می‌تواند مداد مشکی یا مداد قرمز بخرد. سه‌مداد مشکی گرانترازیك مداد قرمزودومداد قرمز گرانتر از ۵ مداد مشکی است . بهای مداد مشکی چقدر است؟

**حل ـ** فرض x ریال بهای مداد مشکی و y ریال بهای مداد قرمز باشد، بنا به فرضهای مسئله داریم:

$x<۱۰$ و $y<۱۰$ و $۳x>y$ و $۲y>۵x$

از نامساوی سوم نتیجه می‌شود $۶x>۲y$ و از این نامساوی و نامساوی چهارم نتیجه می‌شود:

$۶x>۲y>۵x$

اگر $x=۱$ باشد داریم $۶>۲y>۵$ و چون y عدد صحیح است پس این نامساوی غیرممکن‌است. بنابراین $x\neq۱$

اگر $x=۲$ باشد نتیجه می‌شود:

$۱۲>۲y>۱۰ \Longrightarrow ۶>y>۵$

این نامساوی هم غیرممکن است پس $x\neq۲$

اگر $x=۳$ باشد:

$۱۸>۲y>۱۵ \Longrightarrow y=۸$

پس یك جواب مسئله می‌شود:

$x=۳$ و $y=۸$

اگر $x\geq۴$ باشد داریم:

$$۲y > ۵x \geqslant ۲۰ \Longrightarrow y > ۱۰$$

که قابل قبول نیست.

بنابراین بهای مداد مشکی ۳ ریال است.

**۱۰۴/۴ـ** هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{۱۶^{۲} \times ۴^{a} \times ۳^{۲b}}{۲۷} = (\frac{۱}{۶} \times ۹^{b})^{۲} \times [(\frac{۱}{۴})^{a} \times ۱۲]^{۳}$$

عددهای a و b را پیدا کنید.

**حل ـ** رابطهٔ داده شده را به ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$(۲^{۴})^{۲} \times (۲^{۲})^{a} \times ۳^{۲b} \times ۳^{-۳} =$$

$$= [۲^{-۱} \times ۳^{-۱} \times (۳^{۲})^{b}]^{۲} \times [(۲^{-۲})^{a} \times ۲^{۲} \times ۳]^{۳}$$

$$۲^{۸} \times ۲^{۲a} \times ۳^{۲b} \times ۳^{-۳} =$$

$$= ۲^{-۲} \times ۳^{-۲} \times ۳^{۴b} \times ۲^{-۶a} \times ۲^{۶} \times ۳^{۳}$$

$$۲^{۸+۲a} \times ۳^{۲b-۳} = ۲^{-۲-۶a+۶} \times ۳^{-۲+۴b+۳}$$

$$\frac{۲^{۸+۲a}}{۲^{-۲-۶a+۶}} = \frac{۳^{-۲+۴b+۳}}{۳^{۲b-۳}}$$

$$۲^{۸+۲a+۲+۶a-۶} = ۳^{-۲+۴b+۳-۲b+۳}$$

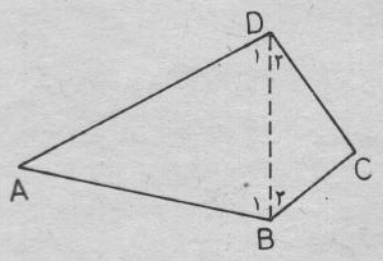
$$۲^{۸a+۴} = ۳^{۲b+۴}$$

این رابطه تنها وقتی برقرار است که:

$$\begin{cases} ۸a+۴=۰ \\ ۲b+۴=۰ \end{cases} \Longrightarrow a = -\frac{۱}{۲} \text{ و } b = -۲$$

**۱۰۴/۵ـ** درچهار ضلعی محدب ABCD هرگاه AD بزرگترین ضلع و BC کوچکترین ضلع باشد، ثابت کنید که زاویهٔ ABC بزرگتر از زاویهٔ ADC و زاویهٔ BCD بزرگتر از زاویهٔ BAD است.

**حل ـ** قطر BD ازچهار ضلعی را رسم می‌کنیم. درمثلث DAB ضلع AD بزرگتر از ضلع AB است. پس:




$$\angle B_{۱} > \angle D_{۱}$$

در مثلث BDC داریم:

$$CD > BC \Longrightarrow \angle B_{۲} > \angle D_{۲}$$

طرفین دونامساوی بدست‌آمده را نظیر به‌نظیر باهم جمع می‌کنیم:

$$\angle B_{۱} + \angle B_{۲} > \angle D_{۱} + \angle D_{۲} \Longrightarrow \angle B > \angle D$$

با رسم قطر AC و باتوجه به اینکه $AD > DC$ و $AB > BC$ است به روش بالا نتیجه خواهد شد که زاویهٔ C از زاویهٔ A بزرگتر است.

## حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

**۱۰۴/۶ـ** از **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه آذرآبادگان

هرگاه a و b عددهای مثبت و r عدد حقیقی نامنفی باشد، ثابت کنید که:

$$a^{r+۲} + b^{r+۲} > ab(a^{r} + b^{r})$$

**حل ـ** نامساوی داده شده را به ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$a^{r+۲} + b^{r+۲} > a^{r+۱}b + ab^{r+۱}$$

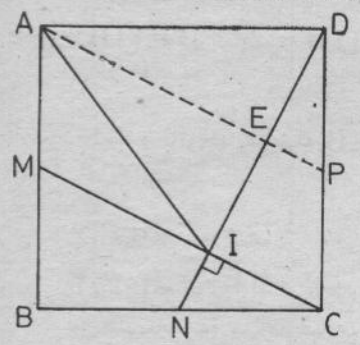
$$a^{r+۱}(a-b) - b^{r+۱}(a-b) \geqslant ۰$$

$$(a-b)(a^{r+۱} - b^{r+۱}) \geqslant ۰$$

چون a و b عددهای مثبت می‌باشند پس $a-b$ با $a^{r+۱} - b^{r+۱}$ هم‌علامت است و در نتیجه حاصل ضرب آنها نامنفی است.

**۱۰۴/۷ـ** مربع ABCD داده شده است. از C به M وسط AB و از D به N وسط BC وصل می‌کنیم. دوخط CM و DN در I برخورد می‌کنند. ثابت کنید که مثلث ADI متساوی‌الساقین است.

**حل ـ** دو مثلث BCM و CDN به حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین با هم برابرند. نتیجه می‌شود که زاویهٔ NDC با زاویهٔ MCB برابر و در نتیجه متمم زاویهٔ DCM می‌باشد.




در مثلث DIC چون دوزاویه متمم یکدیگرند پس زاویهٔ I قائمه است و دوخط CM و DN برهم عمودند.

از A به P وسط CD وصل می‌کنیم. چون AM و CP باهم برابر و موازیند، چهار ضلعی AMCP متوازی‌الاضلاع است و AP با CM موازی است. بنابراین AP بر DN عمود است.

در مثلث DIC چون P وسط CD و EP با IC موازی است پس E وسط DI است. AE عمودمنصف DI است پس $AI = AD$

## حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم ریاضی

**۱۰۴/۸ـ** فرستنده: **جواد فیض**

هرگاه داشته باشیم:

$$x^2-y^2-axy=0 \text{ و } x\neq 0 \text{ و } y\neq 0$$

حاصل عبارت زیررا برحسب a بدست‌آورید:

$$\frac{x^5}{y^5}-\frac{y^5}{x^5}=?$$

**حل‌ـ** ازعبارت داده‌شده داریم:

$$x^2-y^2=axy \Longrightarrow \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=a$$

$$(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})^5=\frac{x^5}{y^5}-5\frac{x^4}{y^4}\cdot\frac{y}{x}+10\frac{x^3}{y^3}\cdot\frac{y^2}{x^2}$$

$$-10\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y^3}{x^3}+5\frac{x}{y}\cdot\frac{y^4}{x^4}-\frac{y^5}{x^5}$$

$$\frac{x^5}{y^5}-\frac{y^5}{x^5}=(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})^5+5(\frac{x^3}{y^3}-\frac{y^3}{x^3})-$$

$$-10(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})$$

$$\frac{x^3}{y^3}-\frac{y^3}{x^3}=(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})^3+3(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})=a^3+3a$$

$$\frac{x^5}{y^5}-\frac{y^5}{x^5}=a^5+5(a^3+3a)-10a=a^5+5a^3+5a$$

**۱۰۴/۹ـ** از **کاظم حافظ قرآن**

هرگاه داشته باشیم:

$$x^{n+1}=ax-a+1$$

حاصل عبارت زیررا برحسب a بدست‌آورید:

$$P=x^n+(x^{n+1}+x^n+\ldots+x+1)(x^{n-1}+$$
$$+x^{n-2}+\ldots+x+1)$$

**حل‌ـ** ازرابطهٔ داده‌شده داریم:

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=a$$

عبارت P رابه‌ترتیب زیرمی‌نویسیم:

$$P=x^n+(\frac{x^{n+2}-1}{x-1})(\frac{x^n-1}{x-1})$$

$$P=x^n+\frac{x^{2n+2}-x^{n+2}-x^n+1}{(x-1)^2}$$

$$P=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=\{\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\}^2$$

$$P=a^2$$

**۱۰۴/۱۰ـ** ترجمهٔ **مهندس زرگری**

به‌ازای چه مقادیر از x نامساوی زیردرست است:

$$\log_{\frac{1}{2}}(4^x+2^x-\frac{3}{2})>1$$

**حل‌ـ** باتوجه به‌اینکه $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$ نتیجه می‌شود:

$$4^x+2^x-\frac{3}{2}>\frac{1}{2}\Longrightarrow 2^{2x}+2^x-2>0$$

$$(2^x+2)(2^x-1)>0$$

$$2^x>1\Longrightarrow x>0$$

**۱۰۴/۱۱ـ** ترجمهٔ **مهندس زرگری**

چهار ضلعی محدب ABCD داده شده است. دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABC و ACD در نقطه‌های P و Q برقطر AC مماسند. دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABD و BCD در نقطه‌های M و N برقطر BD مماسند. ثابت‌کنید که: $PQ=MN$

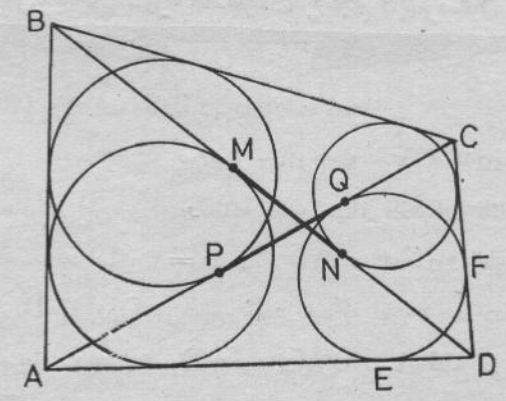
**حل‌ـ** درمثلثهای ABC و ADC به‌ترتیب داریم:

$$AP=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$$

$$AQ=\frac{1}{2}(AC+AD-CD)$$

$$|AP-AQ|=\frac{1}{2}|AB+CD-BC-AD|$$

در مثلثهای ABD و BCD خواهیم داشت:



$$|BM-BN|=\frac{1}{2}|BC+AD-AB-CD|$$

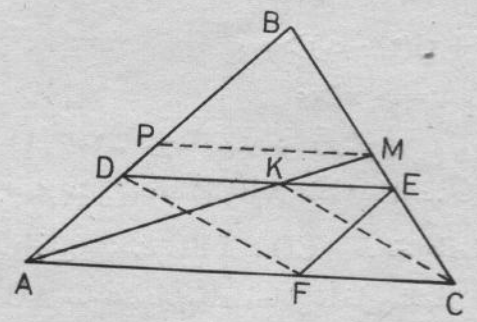
بنابراین:

$$|AP-AQ|=|BM-BN|\Longrightarrow PQ=MN$$

**۱۰۴/۱۲ـ ترجمهٔ مهندس زرگری**

در مثلث ABC متوازی‌الاضلاع ADEF را محاط کرده‌ایم بقسمی که D بر AB و E بر BC و F بر AC واقع است. خطی که A را به M وسط ضلع BC وصل می‌کند با DE در K برخورد می‌کند. ثابت کنید که CFDK متوازی‌الاضلاع است.

**حل‌ـ** از M به P وسط ضلع AB وصل می‌کنیم. MP با AC موازی و بانصف AC برابر است. ازتشابه دومثلث ADK و APM نتیجه می‌شود:




$$DK=\frac{AD}{AP}\times PM=\frac{AD\cdot AC}{AB}$$

ازتشابه مثلثهای FEC و ABC نتیجه می‌شود:

$$FC=\frac{EF}{AB}\times AC=\frac{AD\cdot AC}{AB}$$

بنابراین $DK=FC$ وچون بنابه‌فرض $DK \parallel FC$ پس‌چهار ضلعی DKCF متوازی‌الاضلاع است.

## حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

**۱۰۴/۱۳ـ** معادلهٔ زیرداده شده است:

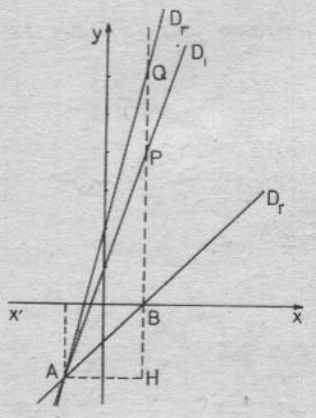
$$(m+1)x-y+m-1=0$$

نمایش هندسی این‌معادله درصفحهٔ محور های مختصات یك خط راست است. در ازای $m=2$ و $m=0$ و $m=3$ خطهای نظیرا $D_1$، $D_2$و$D_3$ می‌نامیم. ثابت کنید که این‌سه خط در یك نقطهٔ A متقاربند. خط $D_2$ محور $x'x$ را در B قطع می‌کند وخطی که در B عمود بر $x'x$ رسم شود با $D_1$ در P وبا $D_3$ در Q برخورد می‌کند. مساحت مثلث APQ را بدست‌آورید.

**حل‌ـ** به‌ترتیب داریم:

$$(D_1):\ y=3x+1$$
$$(D_2):\ y=x-1$$
$$(D_3):\ y=4x+2$$

ارحل معادله‌های دوخط $D_1$ و $D_2$ با هم نتیجه می‌شود که این دو خط در $A(-1,-2)$ متقاطعند. مختصات A درمعادلهٔ خط $D_3$ صدق می‌کند، پس سه‌خط $D_1$ و $D_2$ و $D_3$ در A متقاربند.




ازمعادلهٔ خط $D_2$ نتیجه می‌شود که $B(1,0)$.معادلهٔ خطی که درB عمود بر $x'x$ رسم‌شود $x=1$ است.از معادله های خطهای $D_1$و$D_3$ بدست می‌آید که $P(1,4)$ و $Q(1,6)$.در مثلث APQ ارتفاع AH رارسم می‌کنیم:

$$PQ=6-4=2 \text{ و } AH=1+1=2$$

$$S=\frac{1}{2}PQ\cdot AH=2 \text{ واحد سطح}$$

**۱۰۴/۱۴ـ** هرگاه $tg(\pi-\alpha)$ و $cotg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ ریشه‌های معادلهٔ زیر باشند:

$$mx^2+(m-1)x+m-3=0$$

مقدار عددی عبارت زیر را بدست‌آورید:

$$(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha})^2+(\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha})^2+(tg\alpha+cotg\alpha)^2$$

**حل‌ـ** به‌ترتیب داریم:

$$tg(\pi-\alpha)+cotg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\frac{1-m}{m}$$

$$tg(\pi-\alpha)\,cotg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\frac{m-3}{m}$$

$$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha \quad \text{و} \quad cotg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=tg\alpha$$

$$\frac{1-m}{m} = -tg\alpha + tg\alpha = 0 \Longrightarrow m = 1$$

$$-tg\alpha \cdot tg\alpha = -2 \Longrightarrow tg^2\alpha = 2$$

عبارت داده شده را با P نشان می‌دهیم:

$$P = \sin^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} + 2 + \cos^2\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\cos^2\alpha} + 2 + tg^2\alpha + cotg^2\alpha + 2$$

$$P = 7 + \frac{1+tg^2\alpha}{tg^2\alpha} + (1+tg^2\alpha) + tg^2\alpha + \frac{1}{tg^2\alpha}$$

$$P = \frac{2}{tg^2\alpha} + 2tg^2\alpha + 9$$

$$P = 1 + 8 + 9 = 18$$

## حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم ریاضی

**۱۵/۱۰۴ـ** ترجمهٔ از فرانسه

درصفحهٔ محورهای مختصات $x'Ox$ و $y'Oy$ نقطه‌های زیررا در نظر می‌گیریم:

$$A(4,6), B(2,-2), C(7,0)$$

برپاره خط OC نقطهٔ H به‌طول $\alpha$ را انتخاب می‌کنیم ودرآن عمود $\Delta$ رابر $x'x$ اخراج می‌کنیم. خط $\Delta$ بادوضلع ازچهار ـ ضلعی OACB در M و P برخورد می‌کند.

به‌فرض $PM = \beta$ اولاـ $\beta$ را برحسب $\alpha$ بدست آورید.

ثانیاً ـ نمایش هندسی‌تابع$\beta$را درصفحهٔ محورهای‌مختصات $\alpha'\omega\alpha$ و $\beta'\omega\beta$ رسم کنید واز روی‌آن معلوم‌کنید که درازای‌چه مقدار از $\alpha$ طول PM بیشترین مقدار را دارد.

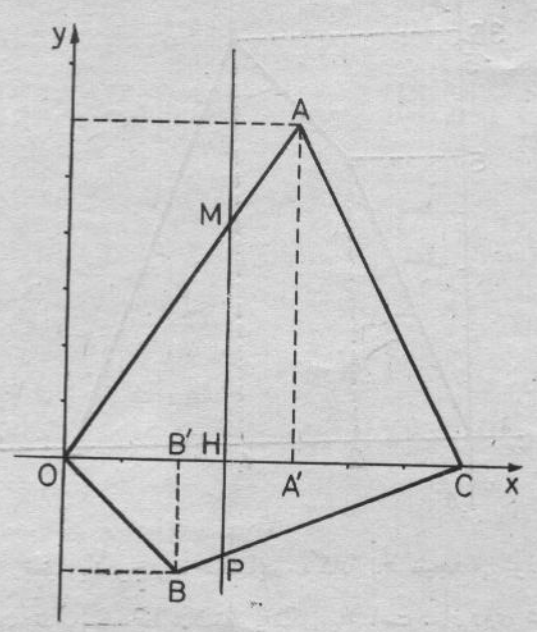
**حل ـ** اولا: معادله‌های ضلعهای چهار ضلعی را بدست می‌آوریم:

$$(OA) : y = \frac{3}{2}x \ ، \ (OB) : y = -x$$

$$(AC) : y = -2x + 14$$

$$(BC) : y = \frac{2}{5}x - \frac{14}{5}$$

برای خط $\Delta$ به‌معادلهٔ $x = \alpha$ سه‌حالت درنظر می‌گیریم:




۱) اگر H برپاره خط $OB'$ واقع باشد یعنی $0<\alpha<2$ در این‌صورت $\Delta$ با OA و OB متقاطع است وداریم:

$$M(\alpha\ ,\ \frac{3\alpha}{2}) \text{ و } P(\alpha, -\alpha)$$

$$\beta = PM = \frac{3\alpha}{2} + \alpha = \frac{5\alpha}{2}$$

۲) اگر H برپاره خط $B'A'$ واقع باشد یعنی $2<\alpha<4$ دراین صورت $\Delta$ با OA و BC برخورد می‌کند وداریم:

$$M(\alpha\ ,\ \frac{3\alpha}{2}) \text{ و } P(\alpha, \frac{2\alpha}{5} - \frac{14}{5})$$

$$\beta = PM = \frac{3\alpha}{2} - \frac{2\alpha}{5} + \frac{14}{5} = \frac{11\alpha}{10} + \frac{14}{5}$$

۳) اگر H برپاره خط $A'C$ واقع باشد یعنی $4<\alpha<7$ دراین‌صورت $\Delta$ با AC و BC برخورد دارد وداریم:

$$M(\alpha, -2\alpha + 14) \text{ و } P(\alpha, \frac{2\alpha}{5} - \frac{14}{5})$$

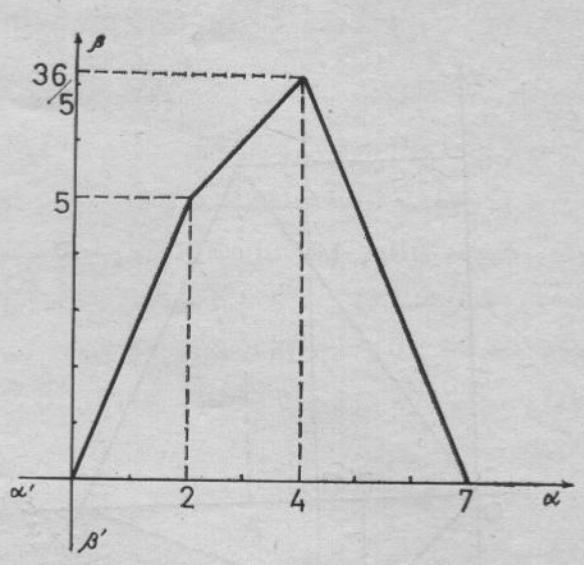
$$\beta = PM = -2\alpha + 14 - \frac{2\alpha}{5} + \frac{14}{5} = -\frac{12\alpha}{5} + \frac{84}{5}$$

خلاصه:

$$0<\alpha<2 \Longrightarrow \beta = \frac{5\alpha}{2}$$

$$2<\alpha<4 \Longrightarrow \beta = \frac{11\alpha}{10} + \frac{14}{5}$$

$$4<\alpha<7 \Longrightarrow \beta = \frac{-12\alpha}{5} + \frac{84}{5}$$




ثانیاً باتـوجه به حالتهای سه‌گانهٔ بالا نتیجه می‌شود که نمایش هندسی $\beta$ خط شکستهٔ به‌شکل بالا است . از روی شکل معلوم می‌شودکه بیشترین مقدار $\beta$ برابر است‌با $\frac{۳۶}{۵}$

**۱۰۴/۱۶ـ ترجمهٔ مهندس زرگری**

درصفحهٔ محورهای مختصات $x'Ox$ و $y'Oy$ برای دو نقطهٔ $M(x_۱,y_۱)$ و $N(x_۲,y_۲)$ مقدار $d(M,N)$ رابه‌عنوان ماکسی فاصله طبق رابطهٔ زیرتعریف می‌کنیم:

$$d(M,N)=\max\{|x_۱-x_۲|,|y_۱-y_۲|\}$$

به این معنی که از دو مقـدار $|x_۱-x_۲|$ و $|y_۱-y_۲|$ آنکـه بزرگتر باشد برابربا $d(M,N)$ خواهد بود.

مجموعهٔ نقطه‌هایی را تعیین کنیدکه ماکسی فاصلهٔهر کدام ازآنها از دونقطهٔ $A(۰,۱)$ و $B(۰,۳)$ باهم برابرباشد.

**حل**ـ به فرض $M(x,y)$ نقطهٔ غیر مشخص از مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب باشد، داریم:

$$d(M,A)=\max\{|x|,|y-۱|\}$$
$$|x|\geq|y-۱|\Longrightarrow d(M,A)=|x|$$
$$|x|\leq|y-۱|\Longrightarrow d(M,A)=|y-۱|$$
$$d(M,B)=\max\{|x|,|y-۳|\}$$
$$|x|\geq|y-۳|\Longrightarrow d(M,B)=|x|$$
$$|x|\leq|y-۳|\Longrightarrow d(M,B)=|y-۳|$$

چهارحالت در نظرمی‌گیریم :

) هرگاه داشته باشیم :

$$(I)\quad\begin{cases}|x|\geq|y-۱|\\|x|\geq|y-۳|\end{cases}$$

در این صورت داریم:

$$d(M,A)=d(M,B)=|x|$$

پس آن قسمت از صفحه که مختصات نقطه‌هایش در دستگاه (I) صادق باشند جزء مجموعهٔ مـورد نظر است. دستگاه (I) معادل است با دستگاههای‌زیر:

$$(II_۱)\begin{cases}x\geq۰\\-x\leq y-۱\leq x\\-x\leq y-۳\leq x\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\geq۰\\۳-x\leq y\leq x+۱\end{cases}$$

$$(II_۲)\begin{cases}x\leq۰\\-x\geq y-۱\geq x\\-x\geq y-۳\geq x\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\leq۰\\۱-x\geq y\geq x+۳\end{cases}$$

۲) هرگاه داشته باشیم :

$$(III)\quad\begin{cases}|x|\leq|y-۱|\\|x|\leq|y-۳|\end{cases}$$

در این صورت تساوی $d(M,A)=d(M,B)$ می‌شود:

$$|y-۱|=|y-۳|\Longrightarrow y=۲\ .$$

درازای این مقدار و از دستگاه (III) نتیجه می‌شود که‌نمایش هندسی دستگاه زیر جزء دیگری از مجموعهٔ مطلوب‌است:

$$(IV)\quad\begin{cases}y=۲\\-۱\leq x\leq۱\end{cases}$$

۳) اگر داشته باشیم :

$$(V)\quad\begin{cases}|x|>|y-۱|\\|x|<|y-۳|\end{cases}$$

در این صورت برابری $d(M,A)=d(M,B)$ می‌شود:

$$|x|=|y-۲|$$

اما این رابطه با رابطهٔ دوم از دستگاه(V) مغایراست.

۴) اگرداشته باشیم :

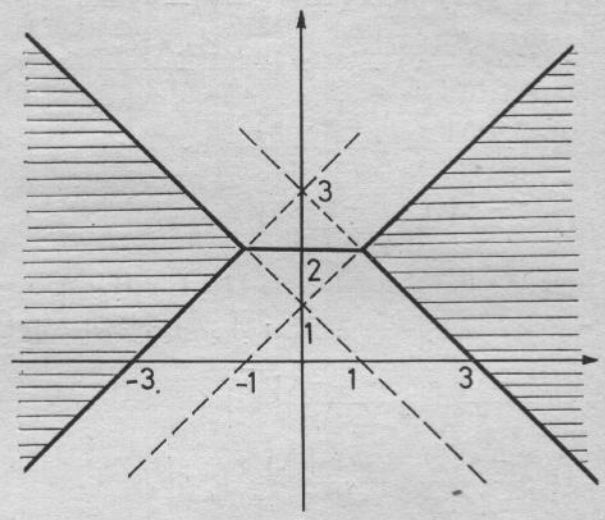
$$(VI)\quad\begin{cases}|x|<|y-۱|\\|x|>|y-۳|\end{cases}$$

در این صورت برابری $d(M,A)=d(M,B)$ می‌شود :

$$|x|=|y-1|$$

اما این رابطه با رابطهٔ اول از دستگاه (VI) مغایر است.

بنابراین ناحیه‌هایی از صفحه که مختصات نقطه‌های آنها




در دستگاههای (II) و (IV) صدق می‌کندمجموعهٔ مطلوب را مشخص می‌کند. این ناحیه‌ها در شکل روبرو باخطهای سیاه و با هاشور نموده شده است.

**۱۰۴/۱۷ـ** فرستنده: **رضا راشدی**

همهٔ مقادیر $x$و$y$ راکه در رابطهٔ زیرصدق می‌کنند بدست آورید:

$$\sin^2 x\sin^2 y+\cos^2 x\cos^2 y=1$$

**حل ـ** رابطهٔ داده شده را به ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$\sin^2 x(1-\cos^2 y)+\cos^2 x(1-\sin^2 y)=1$$

$$\sin^2 x\cos^2 y+\cos^2 x\sin^2 y=0$$

مجموع دومقدار نا منفی تنها وقتی برابر با صفر است که هر یك ازآن دومقدار برابر باصفر باشد. پس :

$$\begin{cases}\sin^2 x\cos^2 y=0\\ \cos^2 x\sin^2 y=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\sin x=0\\ \sin y=0\end{cases}$$ یا

$$\begin{cases}\cos x=0\\ \cos y=0\end{cases}$$

همهٔ مقادیر $x$ و $y$ که در این دستگاهها صدق کنند عبارتند از:

$$x=\frac{k_1\pi}{2}\quad و\quad y=\frac{k_2\pi}{2}$$

**۱۰۴/۱۸ـ** ترجمهٔ ازفرانسه

دستگاه دو معادلهٔ زیررا در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}\sin^3 x=a\sin y\\ \cos^3 x=a\cos y\end{cases}$$

۱) با حذف $y$ بین دو معادله، معادله‌ای برحسب $tg\,x$ بدست آورید.

۲) اگر $x=\frac{3\pi}{4}$ دردستگاه معادلات صدق کند، مقدار $a$ و مقادیر $x$و$y$ رابدست‌آورید.

**حل ـ** ۱)طرفین هریك از معادله‌ها را مجذور کرده بعد آنها را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم نتیجه می‌شود:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=a^2$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=a^2$$

$$1-3\sin^2 x\cos^2 x=a^2$$

$$1-3\times\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}\times\frac{1}{1+tg^2 x}=a^2$$

$$(a^2-1)tg^4 x+(2a^2+1)tg^2 x+a^2-1=0$$

۲) با منظور کردن $x=\frac{3\pi}{4}$ درمعادلهٔبالانتیجه خواهد شد $a^2=\frac{1}{4}$ و معادله چنین می‌شود:

$$tg^4 x-2tg^2 x+1=0\Longrightarrow tg\,x=\pm 1$$

$$\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow\sin y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

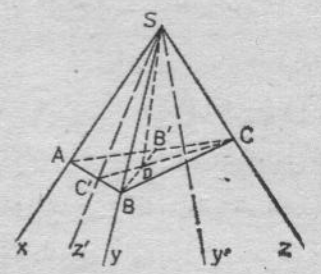
$$x=\frac{k_1\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\quad و\quad y=\frac{k_2\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

**۱۰۴/۱۹ـ** ترجمهٔ ازفرانسه

اولا ثابت‌کنید که درهرسه وجهی،صفحه‌هایی که برهریال می‌گذرند و بروجه مقابل به آن عمود می‌باشند در یك خط متقاربند.

ثانیاً ـ ازرأس سه‌وجهی مفروض و درهریك از صفحه‌های وجه‌های‌آن خطی رسم می‌کنیم‌که بریال مقابل به‌آن وجه عمود باشد. ثابت‌کنید‌که سه‌خط حاصل دریك صفحه واقعند.

**حل ـ** اولاصفحه‌ای که بر $Sy$ بگذرد و بروجه $xSz$ عمود باشد این وجه را در خط $Sy'$قطع می‌کند. صفحه‌ای که بر $Sz$ بگذرد وبروجه $xSy$



عمود باشد این وجه‌را درخط $Sz'$ تلاقی‌می‌کند. دوصفحهٔ $ySy'$ و $zSz'$ در خط $St$ متلاقی می‌باشند، کافی است ثابت کنیم که صفحهٔ $xSt$ بروجه $ySz$ عموداست.

بر $St$ نقطهٔ $D$ را اختیار می‌کنیم و صفحه‌ای می‌گذرانیم که در $D$ بر $SD$ عمود باشد. ازبرخورد این صفحه با یالهای کنج مثلث $ABC$ پدیدمی‌آید. $AC$ با $Sy'$ در $B'$ و $AB$ با $Sz'$ در $C'$ متلاقی است. $AB$ فصل‌مشترك دو صفحهٔ $ASB$ و $ABC$ است که هر دوبرصفحهٔ $CSC'$ عمودند، پس $AB$ بر صفحهٔ $CSC'$ و در نتیجه بر خط $CC'$ عمود است. یعنی $CC'$ ارتفاع مثلث $ABC$ است همچنین $BB'$ ارتفاع این مثلث است. پس $D$ مرکز ارتفاعی مثلث $ABC$ است و خط $AD$ بر خط $BC$ عمود **است**. چون هریك از دوخط $AD$ و $SD$ برخط$BC$ عمودند پس‌صفحهٔ $SAD$ برخط $BC$ وبروجه $BSC$ عمود می‌باشد.

ثانیاً خط $AB$ بر صفحهٔ $zSz'$ و در نتیجه برخط $Sz$ عمود است. پس هرگاه از $S$ خطی موازی با $AB$ رسم کنیم، این خط در وجه $xSy$ واقع است و بریال $Sz$ عمود است. نتیجه می‌گیریم خطهایی که از $S$ در هریك از وجوه و عمود بر یال مقابل بر آن وجه رسم می‌شوند با ضلعهای مثلث $ABC$ موازیند پس دریك‌صفحه واقعند.

## حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم‌دبیرستان

**۱۰۴/۲۰ـ از جواد فیض**

دایرهٔ به‌معادلهٔ زیرداده شده‌است:

$$x^2+y^2-2x+4y-76=0$$

مربعی‌دراین دایره‌محاط می‌کنیم‌که ضلعهایش با محورهای مختصات موازی باشند. مختصات چهار رأس این مربع، همچنین معادلهٔ دایرهٔ محاط درمربع را بدست آورید.

**حل‌ـ** معادلهٔ دایره را چنین می‌نویسیم:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=81$$

مرکز دایره $C(1,-2)$ است. چون ضلعهای مربع با محورهای مختصات‌موازیند پس قطرهای‌آن‌با نیمسازهای‌محورها موازی می‌باشند، یعنی ضریب زاویه‌ایهای آنها $\pm 1$ است. پس معادله‌های قطر به ترتیب می‌شود:

$$(AC):\ y+2=(x-1)\ ،\ y=x-3$$

$$(BD):\ y+2=-(x-1)\ ،\ y=-x-1$$

از حل معادله‌های قطرها با معادلهٔ دایره‌مختصات رأسهای مربع بدست می‌آید. برای حل معادلات کافی است که درمعادلهٔ دایره به‌جای $y$ مقدار آن را از معادله‌های قطرها قراردهیم:

$$x^2+(x-3)^2-2x+4(x-3)-76=0$$

$$2x^2-4x-79=0 \Longrightarrow x=\frac{2\pm 9\sqrt{2}}{2}$$

$$A\left(\frac{2+9\sqrt{2}}{2},\ \frac{-4+9\sqrt{2}}{2}\right)\ ،$$

$$C\left(\frac{2-9\sqrt{2}}{2},\ \frac{-8-9\sqrt{2}}{2}\right)$$

چون $A$ با $B$ و $C$ با $D$ دارای طولهای برابرندو $A$ با$D$و $C$ با $B$ دارای عرضهای برابرند پس:

$$B\left(\frac{2+9\sqrt{2}}{2},\ \frac{-8-9\sqrt{2}}{2}\right)\ ،$$

$$D\left(\frac{2-9\sqrt{2}}{2},\ \frac{-4+9\sqrt{2}}{2}\right)$$

**۱۰۴/۲۱ـ** فرستنده: **رضا راشدی**

دایرهٔ مثلثاتی راکه درآن $A$ مبدأکمانها است در نظر می‌گیریم. هرگاه $M$ انتهای کمان $AM=\alpha$ باشد، از $M$ عمودی بر $A'A$ (محورکسینوسها) رسم می‌کنیم که‌آن رادر $H$ قطع می‌کند. اندازهٔ جبری $\overline{HA}$ را $v(\alpha)$ می‌نامیم.

اولاـ مقدار $v(\alpha)$ را برحسب هریك ازنسبتهای مثلثاتی $\alpha$ بدست‌آورید.

ثانیاـ ازمعادلهٔ زیرمقدار $\alpha$ را پیدا کنید:

$$v(2\alpha)+v(\alpha)=0$$

**حل‌ـ** اولا اگر $O$ مرکز دایرهٔ مثلثاتی باشد داریم:

$$v(\alpha)=\overline{HA}=\overline{OA}-\overline{OH}=1-\cos\alpha$$

$$v(\alpha)=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$v(\alpha)=\frac{2tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{1+cotg^2\frac{\alpha}{2}}$$

ثانیاً با استفاده از اولین رابطهٔ بالا معادله را برحسب $\cos\alpha$ می‌نویسیم:

$$1-\cos 2\alpha+1-\cos\alpha=0$$

$$1-(2\cos^2\alpha-1)+1-\cos\alpha=0$$

$$2\cos^2\alpha+\cos\alpha-3=0$$

$$\cos\alpha=1\Longrightarrow\alpha=2k\pi$$

## حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

**۱۰۴/۲۲ـ** ترجمه ازمجلهٔ فرانسوی ریاضیات مقدماتی تابع زیرمفروض است:

$$y=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

الف ـ جهت تغییرات و جهت تحدب و تقعر منحنی نمایش تغییرات تابع را تعیین کنید واگر نقطهٔ عطف داردمماس برمنحنی در آن نقطه را بدست آورید.

ب ـ منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید.

**حل ـ** تابع درازای $x=\pm 1$ نا معین و درازای سایر مقادیر $x$ معین است. برای ساده کردن عبارت تابع دوحالت در نظر می گیریم:

۱) اگر $x<-1$ باشد داریم :

$$y=-x-1+\frac{x}{x^2-1}=\frac{-x^3-x^2+2x+1}{x^2-1}$$

$$y'=-1-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}<0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

در این حالت منحنی دو مجانب دارد :

$$x=-1 \text{ و } y=-x-1$$

$$y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

چون $x<-1$ پس $y''<0$ یعنی در این حالت تقعر منحنی همواره در جهت $y$ های منفی است.

۲) اگر $x>-1$ باشد داریم :

$$y=x+1+\frac{x}{x^2-1}=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

$$y'=1-\frac{x^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$y'=0 \Longrightarrow x=0 \text{ یا } x=\sqrt{3}$$

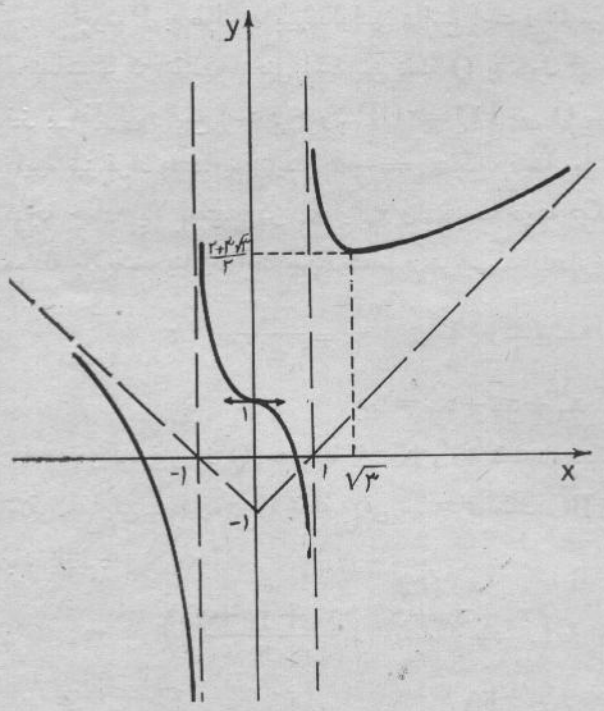
| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | | $-$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ $\searrow$ | $\frac{2+3\sqrt{3}}{2}$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

در این حالت منحنی سه مجانب دارد :

$$x=-1 \text{ و } x=1 \text{ و } y=x+1$$

$$y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | |
| تقعر منحنی | | | $\uparrow$ | $0$ | $\downarrow$ | | $\uparrow$ | |
| | | | | عطف | | | | |




نقطهٔ $(0,1)$ نقطهٔ عطف منحنی‌است. درازای $x=0$ داریم $y'=0$ پس مماس بر منحنی در این نقطه بامحور $x'x$ موازی است و به معادلهٔ $y=1$ است.

با توجه به دوحالت بالا و جدولهای مربوط به تغییرات تابع در دو حالت ، منحنی نمایش تابع به شکل بالا است.

**۱۰۴/۲۳ـ** ترجمهٔ **مهندس زرگری**

برمنحنی نمایش‌تغییرات تابع $y=\frac{k}{x}$ نقطهٔ P را انتخاب می‌کنیم. به‌فرض آنکه O مبدأ مختصات باشد، دایرهٔ به مرکز P و به شعاع ۲OP باهذلولی عموماً در چهار نقطه برخورد می‌کند. ثابت‌کنید که سه نقطه از این چهار نقطه رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

**حل‌ـ** طول نقطهٔ P را $\alpha$ می‌گیریم پس:

$$P\left(\alpha,\frac{k}{\alpha}\right) \text{ و } OP=\sqrt{\alpha^2+\frac{k^2}{\alpha^2}}$$

معادلهٔ دایرهٔ به مرکز P و به شعاع ۲OP می‌شود:

$$(x-\alpha)^2+\left(y-\frac{k}{\alpha}\right)^2=4\left(\alpha^2+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)$$

از حل این معادله با معادلهٔ هذلولی نتیجه خواهد شد:

$$\alpha^2x^4-2\alpha^3x^3-3(\alpha^4+k^2)x^2-2k^2\alpha x+$$
$$+k^2\alpha^2=0$$

چون P به طول $\alpha$ بر هذلولی واقع است و O مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است پس نقطهٔ Q به طول $-\alpha$ نیز برهذلولی واقع است و چون $PQ=2OP$ پس Q بر دایره نیز قرار دارد. بنابراین $x_1=-\alpha$ یک ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ چهارم بالا است. اگر $x_2$ و $x_3$ و $x_4$ سه ریشهٔ دیگر معادلهٔ بالاباشند بنابرروابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله‌داریم:

$$-\alpha+x_2+x_3+x_4=\frac{2\alpha^3}{\alpha^2}=2\alpha$$

$$x_2+x_3+x_4=3\alpha$$

هرگاه غیر از Q سه نقطهٔ A وB و C نقطه‌های‌دیگر تلاقی هذلولی و دایره و G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشدداریم:

$$G\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3},\frac{y_2+y_3+y_4}{3}\right)$$

$$G\left(\alpha \text{ و } \frac{k}{\alpha}\right)$$

نقطهٔ G برنقطهٔ P واقع است. اما G نقطهٔ تلاقی میانه‌هاو P مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است . این دو نقطه بر هم منطبقند. بنابراین ABC مثلث متساوی الاضلاع است.

**۱۰۴/۲۴ـ** ترجمهٔ **مهندس زرگری**

. معادلهٔ زیررا حل‌کنید:

$$\cos 5x\cos 4x+\cos 4x\cos 3x-\cos^2 2x\cos x=0$$

**حل‌ـ** به‌ترتیب داریم:

$$\cos 4x(\cos 5x+\cos 3x)-\cos^2 2x\cos x=0$$

$$2\cos^2 4x\cos x-\cos^2 2x\cos x=0$$

$$\cos x(2\cos^2 4x-\cos^2 2x)=0$$

$$\cos x(8\cos^4 2x-9\cos^2 2x+2)=0$$

$$\cos x=0\Longrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\cos^2 2x=\frac{9\pm\sqrt{17}}{16}=\frac{(1\pm\sqrt{17})^2}{32}$$

$$\cos 2x=\pm\frac{1\pm\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{34}}{8}$$

$$x=k\pi\pm\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\left(\pm\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{34}}{8}\right)$$

**۱۰۴/۲۵ـ** ترجمهٔ **مهندس زرگری**

هرگاه a، b، c و d کمانهای حاده باشند ثابت‌کنید که:

$$\sin a+\sin b-\sin c-\sin d<\sin(a+b-c-d)$$

آیا این مسئله تعمیم می‌یابد وچگونه؟

**حل‌ـ** رابطهٔ زیررا در نظر می‌گیریم:

$$\sin a-\sin c=2\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{a+c}{2}$$

چون کمانها حاده‌اند پس:

$$0\leqslant\frac{a-c}{2}\leqslant\frac{a+c}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$\cos\frac{a+c}{2}>\cos\frac{a-c}{2}$$

بنابراین از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

$$\sin\alpha-\sin c\leqslant 2\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{a-c}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin c\leqslant\sin(a-c)$$

یعنی: تفاضل سینوسهای دوکمان از سینوس تفاضل آن دوکمان کوچکتر یا با آن برابر است. پس برای دوکمان b و d نیزداریم:

$$\sin b-\sin d\leqslant\sin(b-d)=-\sin(d-b)$$

از جمع نظیر به‌نظیرطرفین دونامساوی داریم:

$$\sin a+\sin b-\sin c-\sin d\leqslant\sin(a-c)-\sin(d-b)$$

برای طرف دوم این نامساوی خاصیت بالا را بکار می‌بریم که نتیجه می‌شود:

$$\sin a+\sin b-\sin c-\sin d\leqslant\sin(a+b-c-d)$$

بطور کلی باروش استقراء ریاضی می‌توان ثابت کرد که:

$$\sum_{1}^{n}\sin a_i-\sum_{1}^{n}\sin b_i\leqslant\sin\left(\sum_{1}^{n}a_i-\sum_{1}^{n}b_i\right)$$

**۱۰۴/۲۶ ـ** در چاپ صورت مسئله اشتباه روی داده است. ازاین رو مجدداً دراین شماره از مجله‌اما به صورت‌صحیح چاپ می‌شود و حل آن در شماره بعد ارائه می گردد.

**۱۰۴/۲۷ـ** ترجمهٔ **مهندس زرگری**

مطلوب است تعیین عـدد هـای صحیح x و y بقسمی که بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد $3x+2y$ و $2x+3y$ برابربا ۸ باشد.

**حل ـ** بزرگترین مقسوم علیه مشترك دوعدد a وb رابا $(a\ ,\ b)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که:

$$(a,b)=(a\pm b,b)=(a,a\pm b)$$

بنابراین داریم:

$$(2x+3y,3x+2y)=(x-y,2x+3y)=$$
$$=(x-y,x+4y)=(x-y,5y)$$

هر گاه $x-y$ مضرب ۵ باشد دراین صورت بزرگترین مقسوم علیه مشترك عددهای‌مفروض نیزمضرب ۵ است ونمی‌تواند ۸ باشد.

هر گاه $x-y$ مضرب ۵ نباشد، در این‌صورت:

$$(x-y,5y)=(x-y,y)=(x,y)$$

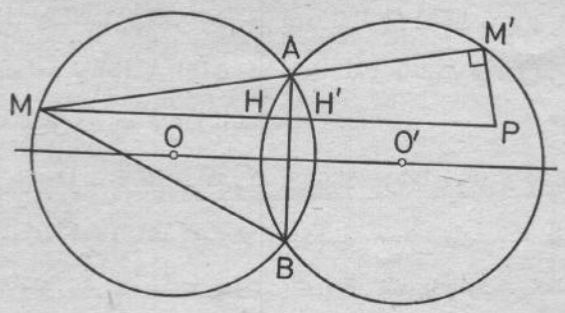
بنابراین بـزرگترین مقسوم علیه مشترك عددهـای $2x+3y$ و $3x+2y$ وقتی برابر۸است که $x-y$ مضـرب۵ نبـوده و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد x وy برابر۸ باشد.

**۱۰۴/۲۸ـ** ترجمهٔ از فرانسه

دو دایرهٔ با هم برابر به مرکزهای O و O′ دردو نقطهٔ A و B متقاطعند . قاطع متغیری در نظر می گیریم کـه دایرهٔ به‌مرکز O را در M و دایرهٔ به مـرکز O′ را در M′ قطع کند. در M′ عمودی بر MM′ اخراج می‌کنیم تا خطی راکه از M موازی با OO′ رسم می‌شود در P تلاقی کند. هر گاه H وسط MP باشد، مکان H را پیداکنید.

**حل ـ** کمانهای AB از دو دایره باهم برابرند. پس‌دو زاویهٔ M′MB و MM′B با هم برابرند . مثلث BMM′ متساوی الساقین است و عمود منصف MM′ از B می گذرد .

عمود منصف MM′ با M′P موازی است پس از وسط MP

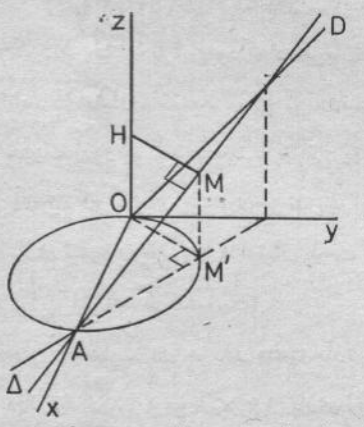



یعنی‌ازH می گذرد. بنابراین H مرکز ارتفاعی مثلث ABM است. می‌دانیم که درهرمثلث قرینهٔ مرکز ارتفاعی نسبت به هر ضلع بردایرهٔ‌محیطی آن مثلث واقع‌است. بنابراین‌اگر H′قرینهٔ H نسبت‌به‌AB باشد، H′ بردایرهٔ (O) قراردارد. امادودایره (O) و (O′) نسبت‌به AB قرینهٔ‌یکدیگرند، پس‌H که قرینهٔ H′ نسبت‌به AB است‌بردایرهٔ (O′) واقع‌است. دایرهٔ (O′) مکان هندسی نقطهٔ H است.

**۱۰۴/۲۹ـ** ترجمهٔ از فرانسه

کنج سه قائمهٔ Oxyz و نقطهٔ ثابت A بریال Ox داده شده است. درصفحه‌ای‌که بر Ox ونیمساز زاویهٔ yOz می گذرد خط متغیر Δ را درنظر می گیریم که ازA بگذرد. هر گاه HM عمود مشترك دوخط Δ و Oz باشد بقسمی‌کـه M بـر Δ قرار داشته باشد، مکان هندسی‌نقطهٔ M راپیداکنید.

**حل ـ** خط MH که بر Oz عمود است‌با صفحهٔ xOy مـوازی است. زاویـهٔ AMH قائمه‌است پس تصویـر آن بـرصفـحهٔ xOy نیززاویـهٔ قائمه است. تصویرM برصفحهٔ xOy رابا M′می‌نمائیم. چون زاویـهٔ AM′O قائمه وAوO نقطه‌های




ثابت می‌باشند، پس‌مکان M′دایره‌ای است واقع درصفحهٔxOy در نتیجه مکان M بیضی است‌که در صفحهٔ گذرنده بـر Ox و نیمساز yOz قرار داشته و AO قطر کوچکتر آن است.

## حل مسائل گوناگون

**ترجمهٔ مهندس زرگری**

**۱۰۴/۳۰ـ** جیرجیرکی روی خط مستقیمی دونوع‌پرش

انجام می‌دهد. پرش بلند به‌طول ۱۲ سانتیمتر و پرش کوتاه به طول ۷ سانتیمتر. اگر جیرجیرك در نقطهٔ O ازخط مزبور باشد وبخواهد به‌نقطهٔ A ازآن خط وبه‌فاصلهٔ ۳ سانتیمتری ازO برسد چند پرش وازچه نوع‌را باید انجام دهد؟

**حل-** فرض می‌کنیم که x تعداد پرشهای بلند و y تعداد پرشهای کوتاه باشد که x و y عددهای صحیح مثبت یا منفی می‌باشند. هر x مثبت نمایش یك پرش بلند به‌جلو و هر x منفی نمایش یك پرش بلند به‌عقب است. همچنین برای y. با این قرار دادها باید داشته‌باشیم:

$$۱۲x+۷y=۳\Longrightarrow y=\frac{۳-۵x}{۷}-x$$

$$۳-۵x=۷z\Longrightarrow x=\frac{۳-۲z}{۵}-z$$

$$۳-۲z=۵u\Longrightarrow z=\frac{۳-u}{۲}-۲u$$

$$۳-u=۲t\Longrightarrow u=۳-۲t$$

$$y=۱۲t-۱۵ \text{ و } x=۹-۷t$$

در ازای مقادیر مختلف t جوابهای مختلف مسئله بدست می‌آید. در ازای $t=۱$ خواهیم داشت $x=۲$ و $y=-۳$ یعنی جیرجیرك می‌تواند با دوپرش بلند به جلو و سه‌پرش کوتاه به عقب به‌نقطهٔ A برسد.

**۱۰۴/۳۱-** دریك دور مسابقه‌های فوتبال ۱۶ تیم‌شرکت کردند. قرار براین‌بود که درهر بازی بین‌دوتیم، اگر تیمی‌برنده شود دوامتیاز داشته‌باشد، واگر دوتیم برابر کنند در وقت اضافی هریك ازدوتیم تعداد معینی پنالتی به دروازهٔ حریف شوت کند و آن تیم که گلهای بیشتری بزند یك امتیاز داشته باشد. پس‌از۱۶ بازی تیمها رویهم ۲۲۲ امتیاز بدست آوردند. چند بازی بانتیجه برابر انجام گرفته است؟

**حل-** در هردور هشت بازی‌انجام می‌گیرد. پس از۱۶ دور تعداد $۱۶\times۸=۱۲۸$ بازی انجام می‌گیرد. هرگاه در هیچیك از بازیها تیمها مساوی نشده باشند در این صورت کل امتیازها می‌شود $۱۲۸\times۲=۲۵۶$، اما چون تیمها رویهم۲۲۲ امتیاز بدست آورده‌اند پس تعداد $۲۵۶-۲۲۲=۳۴$ بازی با نتیجهٔ برابر انجام‌گرفته است.

**۱۰۴/۳۲-** دریك دورمسابقه‌های شطرنج ۳۰ نفرشرکت کردند. بنابرمقررات مسابقه‌بازیکنی‌می‌توانست به‌دورهٔ نهایی‌مسابقه راه یابد که‌حداقل‌شصت درصداز کل‌امتیازهاراکسب کند. ماکسیمم تعداد بازیکنانی‌که به دورهٔ نهایی رسیده‌اند چند نفر بوده‌است؟

**حل-** هر شطرنج باز برای رسیدن به دورهٔ نهایی باید شصت درصد از ۲۹ امتیاز ممکن یعنی حداقل ۱۷/۵ امتیاز بدست آورد. رویهم $\frac{۳۰\times۲۹}{۲}=۴۳۵$ بازی انجام می‌شود پس حداکثر عدهٔ بازیکنانی‌که به دورهٔ‌نهایی می‌رسند برابراست با خارج قسمت تقسیم ۴۳۵ بر۱۷/۵ که برابر است‌با ۲۴ نفر.

**۱۰۴/۳۳-** مکعب یك عدد برابراست با :

۹۹۹۴۰۰۱۱۹۹۹۲

بدون کعب گیری این عدد را پیداکنید.

**حل-** به ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$۹۹۹۴۰۰۱۱۹۹۹۲=۱۰^{۱۲}-۵۹۹۸۰۰۰۸=$$
$$=۱۰^{۱۲}-۶\times۱۰^{۸}+۱۱۹۹۹۲=$$
$$=۱۰^{۱۲}-۶\times۱۰^{۸}+۱۰^{۵}+۲\times۱۰^{۴}-۸$$
$$=۱۰^{۱۲}-۶\times۱۰^{۸}+۱۲\times۱۰^{۴}-۸$$
$$=(۱۰^{۴}-۲)^{۳}=۹۹۹۸^{۳}$$

**۱۰۴/۳۴-** برای تأمین مصرف نفت دوشهر A و B لازم است‌که انبار نفتی ساخته شود. این انبار رادرچه‌محل‌بسازیم تا با توجه به‌هزینهٔ حمل ونقل، نفتی‌که به‌دست مصرف‌کنندگان دو شهر A و B می رسد تاحد امکان ارزان باشد.

**حل-** اگر نقطهٔ C محل انبار و D تصویرقائم C روی AB باشد از نامساویهای $DA<CA$ و $DB<BC$ نتیجه می‌شودکه اگر C به D منتقل شود هزینهٔ حمل و نقل‌کمتر خواهد بود. پس C روی خط AB و بین A و B باید باشد.

فرض می‌کنیم u مصرف نفت در شهر A و v مصرف نفت در شهر B و S کیلومتر فاصلهٔ A تا B و بالاخره I هزینهٔ حمل یك تن نفت در یك‌کیلومتر و بالاخره $x=AC$ باشد. در این صورت هزینهٔ‌کل حمل ونقل تابعی از x استو می‌شود:

$$I(x)=Iux+Iv(S-x)=I[vS+(u-v)x]$$

هرگاه $u>v$ باشد می‌نیمم $I(x)$ در ازای $x=۰$ خواهد بود. هرگاه $u<v$ باشد می‌نیمم $I(x)$ در ازای $x=S$ خواهد بود. هرگاه $u=v$ باشد $I(x)$ برابر بامقدار ثابت IvS می‌باشد.

بنابراین‌انبار نفت را بایددرشهری ساخت‌که مصرف‌بیشتر دارد. در صورت برابری مصرف نفت‌در دو شهرانبار رامی‌توان در هرنقطهٔ دلخواه بین دوشهر ساخت.

**۱۰۴/۳۵ـ** پایه‌های a و b و c کوچکتر از ده از دستگاههای عدد نویسی را پیدا کنید ، که برای آنها داشته باشیم :

$$111_{(a)}=111_{(b)}=111_{(c)}$$

**حل ـ** اگر $a\geq 4$ و $b\geq 2$ باشد خواهیم‌داشت:

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)\geq 147$$

اماچون $2\leq c\leq 10$ پس:

$$c^2+c+1\leq 111$$

بنابراین $a<4$ و $b=2$ یااینکه $a=2$ و $b<4$

به‌فرض $a=2$ و $b=2$ نتیجه می‌شود:

$$c^2+c+1=49$$

اما این‌معادله ریشهٔ صحیح ندارد.

هرگاه $a=3$ و $b=2$ یا $a=2$ و $b=3$ باشدنتیجه می‌شود:

$$c^2+c+1=91 \Longrightarrow c=9$$

مسئله دارای دودسته جواب‌است:

$(a=2 ، b=3 ، c=9)$ یا $(a=3 ، b=2 ، c=9)$

**۱۰۴/۳۶ـ** ثابت‌کنید که :

$$\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\cdots+\frac{1}{2000}>\frac{1}{2}$$

**حل ـ** داریم:

$$\frac{1}{1001}>\frac{1}{2000} ، \frac{1}{1002}>\frac{1}{2000} ، \cdots$$

ازجمع نظیر به نظیرطرفین این‌نامساویها نامساوی مطلوب محقق می‌شود.

**۱۰۴/۳۷ـ** نا معادلهٔ زیر را نسبت به x حل کنید:

$$x-1<\log_6(x+3)$$

**حل ـ** نامعادله به‌ازای $x>-3$ مفهوم‌دارد. بااین‌شرط می‌نویسیم:

$$6^{x-1}<x+3$$

نامساوی مخالف این‌نامساوی را درنظر می‌گیریم:

$$6^{x-1}\geq x+3$$

عدد۲ دراین نامعادله صدق می‌کند. هرگاه عدد $k>2$ دراین نامعادله صدق‌کند عدد $k+1$ نیزدرآن صدق‌خواهدکرد زیرا:

$$6^k=6^{k-1}\times 6\geq(k+3)\times 6\geq k+4$$

بنابراین بنابه اصل‌استقراء ریاضی هرعدد بزرگتراز۲ وهمچنین عدد ۲ جواب نامعادلهٔ اخیر است پس جواب نا معادلهٔ مفروض $-3<x<2$ است.

## مسائلی از آمار واحتمالات

ترجمهٔ از فرانسه

**۱۰۴/۳۸ـ** کیسه‌ای محتوی ۳۰ عدد گلوله است که از آنها ۵ عدد سفید ، ۱۰ عدد آبی و ۱۵ عدد قرمز می‌باشند. سه گلوله‌را با هم از کیسه بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه از هررنگ گلوله‌ای بیرون آورده باشیم چقدر است؟

**حل ـ** تعداد حالتهای ممکن برابراست با $\binom{30}{3}$ یعنی تعدادترکیبهای‌سه‌به‌سه‌از۳۰ گلوله. باتوجه‌به‌اینکه‌هریك‌از۵ گلولهٔ سفیدمی‌تواندباهریك از۱۰ گلولهٔ آبی‌همراه‌باشدکه رویهم $5\times 10$ جفت خواهدشد وهریك ازاین جفتها می‌تواند باهریك از ۱۵ گلولهٔ قرمزهمراه گردد پس‌تعداد حالتهای مساعد برابراست با $5\times 10\times 15$ بنابراین احتمال خواسته شده برابراست‌با:

$$p=\frac{5\times 10\times 15}{\binom{30}{3}}=$$

$$=\frac{(5\times 10\times 15)(1\times 2\times 3)}{30\times 29\times 28}=\frac{75}{406}$$

**۱۰۴/۳۹ـ** کوزه‌ای محتوی ۷ گلولهٔ سفید و ۳ گلولهٔ سیاه است. چهارگلوله ازآن به تصادف بیرون می‌آوریم. تعیین کنید:

احتمال، $P_3$، برای‌آنکه‌سه‌عدد ازگلوله‌ها سیاه‌باشد.

احتمال، $P_2$، برای‌آنکه دوعدد ازآنهاسیاه‌باشد.

**حل ـ** تعداد حالتهای ممکن برابر است با $\binom{10}{4}$ یعنی تعداد ترکیبهای چهار به چهار از۱۰ گلوله.

اولا ـ چون مجموعهٔ سه گلولهٔ سیاه می‌تواند باهریك از۷ گلولهٔ سفید همراه گردد پس‌برای $P_3$ تعداد حالتهای ممکن۷ است و:

$$P_3=\frac{7}{\binom{10}{4}}=7\times\frac{1\times 2\times 3\times 4}{10\times 9\times 8\times 7}=\frac{1}{30}$$

ثانیاً ـ به‌تعداد $\binom{۳}{۲}$ حالت می‌توان دو گلـولهٔ سیاه ازسه گلولهٔ سیاه را انتخاب کرد. تعداد انتخابهای ۲ گلولهٔ سفید از ۷ گلولهٔ سفید $\binom{۷}{۲}$ است. پس‌تعداد حالتهای مساعد برابراست با $\binom{۷}{۲}\binom{۳}{۲}$ و داریم:

$$P_۲=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۳\times۶\times۷\times۲\times۳\times۴}{۲\times۷\times۸\times۹\times۱۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

**۱۰۴/۴۰ـ** الف ـ کوزه‌ای محتوی ۱۰ مهـره است که به‌ترتیب از ۰ تا ۹ شماره‌گذاری شده‌اند. یك‌مهره‌به تصادف‌بیرون می‌آوریم. تعیین‌کنید احتمال آن راکه عدد نظیر این مهره:

بر ۲ بخش‌پذیر باشد؛

بر ۳ بخش‌پذیر باشد؛

بر ۶ بخش‌پذیر باشد.

ب ـ دو کوزهٔ A وB همانندکوزهٔ قسمت الف کناریکدیگر گذاشته شده‌اند. یك مهـره از A سپس یك مهره از B بیرون می‌آوریم وعددی دورقمی درنظر می‌گیریم که رقم دهگان آن رقم مهرهٔ اول ورقم یکان‌آن رقم مهرهٔ دوم‌باشد. احتمال‌آن راتعیین کنیدکه عدد حاصل بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

**حل ـ** الف ـ ازبین ۱۰ مهره تعداد ۵ مهره دارای عـدد زوج می‌باشند (۰،۲،۴،۶،۸)، تعداد چهارمهره باعددهای‌بخش پذیر بر ۲ می‌باشند (۰،۳،۶،۹) و بالاخره تعداد دومهره باعدد بخش‌پذیر بر ۶ وجوددارد (۰،۶) بنابراین:

$$P_۲=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}\ ;\ P_۳=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}\ ,\ P_۶=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

ب ـ تعداد حالتهای ممکن ۱۰۰ است زیرا هریك از ۱۰ مهرهٔ کوزهٔ A را می‌توان باهریك از ۱۰ مهرهٔ کـوزهٔ B همراه کرد. ازبین عددهای از ۰ تا ۹۹ تعداد عددهای بخش‌پذیر بر ۳ برابر است با $\frac{۹۹}{۳}+۱=۳۴$ بنابراین:

$$P=\frac{۳۴}{۱۰۰}=۰/۳۴$$

**۱۰۴/۴۱ـ** دوتاس راباهم می‌اندازیم. برای آنکه‌مجموع عددهایی که رومی‌شود ۸ باشد، احتمال مربوط چیست؟

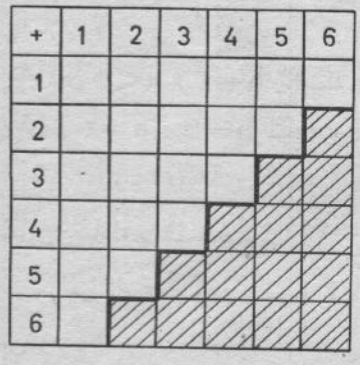
مسئله رابرای سه‌تاس نیزحل کنید.

**حل ـ** تعداد حالتهای‌ممکن $۶\times۶=۳۶$ است. حالتهایی که مجموع عددهای نظیر ۸ است عبارتند از:

(۲،۶)، (۳،۵)، (۴،۴)، (۵،۳)، (۶،۲)

پس‌تعداد حالتهای مساعد ۵ است و:

$$P=\frac{۵}{۳۶}$$




برای سه تاس تعـداد حـالـتهـای ممکـن $۶\times۶\times۶=۲۱۶$ است. تعداد حـالتهای مساعد برابراست باتعداد حالتهایی که‌مجموع‌عدد‌های ۲ تاس نابزرگتراز ۷ باشد. این‌تعداد برابراست باتعداد خانه‌هایی ازجدول روبروکه هاشور نخورده وخالی‌است‌که برابراست با ۲۱. بنابراین:

$$P=\frac{۲۱}{۲۱۶}=\frac{۷}{۷۲}$$

# پاسخ تستهای ریاضی

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۴۲ـج | ۴۳ـد | ۴۴ـالف | ۴۵ـد | ۴۶ـج |
| ۴۷ـب | ۴۸ـالف | ۴۹ـب | ۵۰ـب | ۵۱ـالف |
| ۵۲ـد | ۵۳ـج | ۵۴ـج | ۵۵ـالف | ۵۶ـب |
| ۵۷ـج | ۵۸ـب | ۵۹ـب | ۶۰ـد | ۶۱ـد |
| ۶۲ـالف | ۶۳ـج | ۶۴ـج | | |

## توضیحات مربوط به تستها

**۴۸ـ** معادلهٔ داده‌شده وقتی‌دارای جواب حقیقی است‌که:

$$\begin{cases} ۴x^۲-۱\geqslant۰ \\ -۲x^۲\geqslant۰ \end{cases}$$

$-۲x^۲\geqslant۰$ فقط بـه ازای $x=۰$ درست است اما $x=۰$ در $۴x^۲-۱\geqslant۰$ صدق نمی‌کند.

**دنباله در صفحهٔ ۱۶۸**

# مسائل برای حل

## برای دانش‌آموزان سال اول نظری و جامع

**۱۰۵/۱ـ** ترجمهٔ از فرانسه

سه مجموعهٔ A و B و C نسبت به هم چگونه باشند تا داشته باشیم:

$$A \cup B = B \cap C$$

**۱۰۵/۲ـ** ترجمهٔ از فرانسه

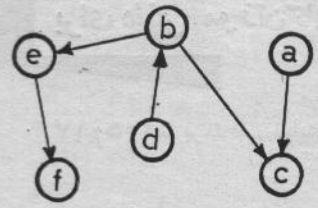
سه مجموعهٔ A و B و C ومجموعهٔ مرجع M را در نظر می‌گیریم. حاصل هریك از عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت بدست آورید:

$$X = A \cup (A' \cap B)$$

$$Y = (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap C') \cup B$$

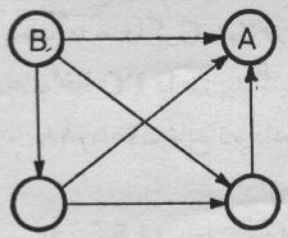
**۱۰۵/۳ـ** ترجمهٔ مهندس زرگری

در شکل زیر هریك از حرفهای a، b، c، d، e، f بایکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ برابراست و هرپیکان نمایندهٔ آن است که عددواقع در انتهای آن مقسوم‌علیهی (= شمارنده‌ای) از عدد واقع در ابتدای آن است. عددهای نظیر هریك از حرفها را بیابید و همهٔ پیکانهای دیگری را که رسم نشده است رسم کنید.




**۱۰۵/۴ـ** ترجمهٔ مهندس زرگری

در شکل روبرو در هریك از دایره‌ها یکی از عددهای از ۱ تا ۱۰۰ قرار می‌گیرد و هر پیکان از هرعدد به مقسوم‌علیه (= شمارندهٔ) آن عدد متوجه است.




۱) بزرگترین عددی راکه می‌توان به جای A قرار داد کدام‌است؟

۲) چه عددهایی نمی‌توانند به جای B نوشته شوند؟

**۱۰۵/۵ـ** در مثلث ABC زاویهٔ B حاده و دوبرابر زاویهٔ C است. ارتفاع AH ازاین مثلث رارسم می‌کنیم وضلع AB را از طرف B به اندازهٔ BE برابربا BH امتداد می‌دهیم. ثابت‌کنیدکه خط EH باعمود منصف پاره خط HC یکدیگررا روی ضلع AC قطع می‌کنند.

**۱۰۵/۶ـ** برپاره خط AB نقطهٔ M را به دلخواه اختیار می‌کنیم و مثلثهای متساوی الاضلاع AMC و BMD را در یك طرف AB می‌سازیم. خطهای AD و BC را رسم می‌کنیم که در P متلاقی می‌شوند. ثابت‌کنیدکه:

الف ـ دومثلث AMD و BMC باهم و دو پاره خط AD و BC باهم برابرند.

ب ـ زاویهٔ APB با زاویهٔ AMD برابراست و ازاین راه اندازهٔ زاویهٔ APB را پیداکنید.

## برای دانش‌آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

**۱۰۵/۷ـ** فرستنده: محمد معینی

هرگاه a و b و c عددهای مثبت و $a+b \geqslant c$ باشد ثابت‌کنیدکه:

$$a^2+b^2 \geqslant \frac{c^2}{2}$$

$$a^4+b^4 \geqslant \frac{c^4}{8}$$

$$a^8+b^8 \geqslant \frac{c^8}{128}$$

**۱۰۵/۸ـ** ترجمهٔ مهندس زرگری

دو دایرهٔ برابرباهم در دو نقطهٔ A و B متقاطعند. از A خطی رسم می‌کنیم‌که دایره‌هارا در C و D قطع‌کند. سپس از B عمودی بر CD رسم می‌کنیم‌که دایره‌ها را در E و F تلاقی می‌کند. ثابت‌کنیدکه چهار ضلعی CEDF لوزی است.

## برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

**۱۰۵/۹ـ** ترجمهٔ از فرانسه

اولا معلوم کنید که عدد حقیقی $k$ چگونه باشد تا معادلهٔ زیر دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta-k=0$$

ثانیاً هرگاه $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادلهٔ بالا و $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ زیر باشند، مقدار $m$ را برحسب $k$ بدست آورید و بحث کنید:

$$(y-x')(y-x'')+m^2-4m=0$$

**۱۰۵/۱۰ـ** از **جواد فیض**

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$(x+1)^3+(x-5)^3+(x+13)^3=$$
$$=27(x+3)^3$$

**۱۰۵/۱۱ـ** از **کاظم حافظ قرآن**

یك تصاعد عددی و یك تصاعد هندسی داده شده است. جمله‌های مرتبه‌های نظیر این دو تصاعد را باهم جمع کرده‌ایم که در نتیجه رشتهٔ زیر بدست آمده است:

۸، ۲۵، ۸۷، ۳۲۹، ...

هر یك از دو تصاعد را مشخص کنید و جملهٔ $n$ ام رشتهٔ بالا را بدست آورید.

**۱۰۵/۱۲ـ** فرستنده: **قوام نحوی** از اصفهان

اگر $u_n$ جملهٔ $n$ ام از یك تصاعد عددی باشد و داشته باشیم:

$$v_n=u_{2n-1}+u_{2n}$$

ثابت کنید که $v_n$ نیز جملهٔ $n$ ام یك تصاعد عددی است. در حالت خاصی که تصاعد باجملهٔ $n$ ام $u_n$ رشتهٔ اعداد طبیعی باشد تصاعد باجملهٔ $n$ ام $v_n$ را مشخص کنید.

**۱۰۵/۱۳ـ** ترجمهٔ **مهندس زرگری**

از رأس $A$ از مربع $ABCD$ دو خط $Ax$ و $Ay$ را رسم می‌کنیم که اندازه زاویهٔ $xAy$ برابر $45^\circ$ باشد و $Ay$ با ضلع $CD$ و قطر $BD$ به ترتیب در $P$ و $Q$ و $Ax$ باضلع $BC$ و قطر $BD$ به ترتیب در $M$ و $N$ برخورد کند. ثابت کنید که پنج نقطهٔ $C$ ، $M$ ، $N$ ، $Q$ و $P$ بریك دایره واقعند.

**۱۰۵/۱۴ـ** ترجمهٔ **مهندس زرگری**

در صفحه دایرهٔ $\omega$ و خط $l$ و خط $s$ غیرموازی با $l$ داده شده است خط $g$ را موازی با $s$ چنان رسم کنید که $l$ را در $C$ ودایره را در $B$ و $A$ قطع کند بقسمی که $AB=BC$ باشد.

## برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

**۱۰۵/۱۵ـ** سه تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y_1=ax^2+bx+c$$
$$y_2=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$y_3=\frac{ax-a+b}{x-1}$$

مجموع مشتقهای این سه تابع برابر شده است با:

$$S=6x^2+dx+\frac{1}{(x-1)^2}$$

مقادیر عددی ضریبهای $a$، $b$، $c$ و $d$ را بدست آورید.

**۱۰۵/۱۶ـ** از **کاظم حافظ قرآن**

هرگاه داشته باشیم:

$$\cos b-\sin a=1$$

ثابت کنید که خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin(a+b)}+\frac{1}{\sin(a-b)}=1$$

## برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

**۱۰۵/۱۷ـ** برمنحنی نمایش هندسی تابع:

$$y=x^2+px+q$$

دو نقطهٔ $A$ و $B$ را چنان انتخاب می‌کنیم که ضریب زاویه‌ای مماس برمنحنی درنقطهٔ $A$ برابر با $-2$ و درنقطهٔ $B$ برابر با $4$ باشد. هرگاه $P$ وسط پاره خط $AB$ به طول $\frac{3}{2}$ و بر نیمساز ربع اول محورها واقع باشد، مقادیر عددی $p$ و $q$ را بدست آورید واگر $C$ نقطهٔ تلاقی دومماس مزبور باشد ضریب زاویه‌ای خط $PC$ را نیز پیدا کنید.

**۱۰۵/۱۸ـ** تابع زیرداده شده است:

$$y=m(x-a)^2(x-b)^3$$

الف ـ آیا این تابع در ازای $x=b$ ماکسیمم یامی‌نیمم می‌باشد یانه؟

ب- چه رابطه بین a و b برقرار باشد تا تابع درازای $x=a$ نه ماکسیمم باشد و نه می‌نیمم؟

ج- هرگاه تابع درازای $x=-4$ ماکسیمم و درازای $x=-2$ می‌نیمم بوده ومقدارمی‌نیمم آن $-4$ باشد مقادیرعددی a و b و m را پیداکنید.

**۱۰۵/۱۹- ترجمهٔ مهندس زرگری**

مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع

$$y=\sin^4 x\cos^{10} x$$

را بدست آورده و نتیجه بگیرید که:

$$7^7\sin^4 x\cos^{10} x\leqslant 12500$$

**۱۰۵/۲۰-** هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases}\sin(a+b)=p\\ \sin(a-b)=q\end{cases}$$

۱) رابطهٔ بین $tg\,a$ و $tg\,b$ را بدست‌آورید.

۲) معادله‌ای تشکیل دهید که ازآن بتوان $tg\,a$ یا $tg\,b$ را برحسب p و q بدست آورد.

**۱۰۵/۲۱-** ترجمهٔ از فرانسه

مثلث ABC به ضلعهای $BC=a$ و $CA=b$ و $AB=c$ داده شده است. در رأسهای مثلث و در یک طرف صفحهٔ آن پاره خطهای $AA'=x$ و $BB'=y$ و $CC'=z$ را عمود برصفحهٔ مثلث اخراج می‌کنیم. مقادیر x و y و z راچنان تعیین کنید که وجه‌های جانبی منشور ناقص $ABCA'B'C'$ بایکدیگر معادل باشند وبحث کنید. ثابت کنید که اگر مسئله یک دسته جواب داشته باشد بینهایت دسته جواب خواهد داشت. در این‌حالت ثابت کنید که صفحهٔ $A'B'C'$ برخط ثابتی می‌گذرد

## برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

**۱۰۵/۲۲-** اولا بیضی به معادلهٔ زیررا مشخص کرده و رسم کنید:

$$9x^2+25y^2-36x+50y-164=0$$

ثانیاً معادلهٔ هذلولی را بنویسید که رأسهای آن کانونهای بیضی وکانونهای آن رأسهای بیضی بالاباشد. این هذلولی را در همان شکل بیضی رسم کنید.

**۱۰۵/۲۳-** در مثلث ABC داریم:

$$AC=\frac{3}{2}BC \text{ و } \angle B=\frac{\pi}{2}+\frac{\angle A}{2}$$

مقدار $\sin A$ و مقدار $\cos C$ را بدست‌آورید.

## برای دانش‌آموزان کلاس ششم ریاضی

**۱۰۵/۲۴-** ترجمهٔ از فرانسه

دو تابع زیر داده شده است؛

$$y=\frac{x^2+3x+3}{x+m}\ ،\quad y=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}$$

منحنیهای نمایشهای هندسی این دو تابع دارای مجانبهای مشترك می‌باشند و یکی از دو منحنی برمحور $x'x$ پاره‌خط به طول $\sqrt{5}$ جدا می‌کند. مقادیرعددی a و b و c و m راپیداکنید و پس از آن دو منحنی را در یك شکل رسم کنید.

**۱۰۵/۲۵-** ترجمهٔ از فرانسه

منحنی نمایش هندسی تابع زیررا رسم کنید:

$$y=\frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}$$

**۱۰۵/۲۶- از جوادفیض**

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$(\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x)+2\cos x=$$
$$=(\cos x+\cos 2x+\cos 3x)^2-\cos 2x$$

**۱۰۵/۲۷- ترجمهٔ: مهندس زرگری**

در مثلث ABC داریم: $AB=20$ و $AC=24$ و می‌دانیم که سه‌نقطهٔ: رأس C، نقطهٔ تلاقی نیمساززاویهٔ A باضلع AC و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی بردایره‌ای واقعند که مرکز آن روی ضلع AC قراردارد. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بدست‌آورید

**۱۰۵/۲۸- ترجمهٔ مهندس زرگری**

(این مسئله در یکان شمارهٔ گذشته به شمارهٔ ۱۰۴/۲۶ اما توأم با اشتباه چاپ شده بود)

در یك تقسیم مقسوم عددی است پنج رقمی وبارقمهای یکسان، مقسوم علیه عددی است چهار رقمی و با رقمهای یکسان وخارج قسمت ۱۶ است. هرگاه یکی ازرقمهای مقسوم ویکی ازرقمهای مقسوم‌علیه را حذف کنیم خارج قسمت تغییر نمی‌کند اما باقیمانده ۲۰۰۰ واحدکم می‌شود، عددهای مقسوم و مقسوم علیه را پیدا کنید.

**۱۰۵/۲۹ـ ترجمهٔ مهندس زرگری**

عدد پنج رقمی $\overline{abcde}$ راپیدا کنید بقسمی که هریك از عددهای دورقمی $\overline{ab}$ ، $\overline{bc}$ ، $\overline{cd}$ و $\overline{de}$ مجذور کامل باشد.

**۱۰۵/۳۰ـ ترجمهٔ از فرانسه**

پاره خط OA به‌طول $4a$ داده شده است. این پاره خط را نخست درانعکاس به‌قطب O و به قوت $-3a^2$ تبدیل‌می‌کنیم آنگاه مبدل آن را درانتقال به بردار $\overrightarrow{OA}$ مجدداً تبدیل‌می‌کنیم. این تغییر مکان را U می‌نامیم

۱) ثابت کنید کـه در تغییر مکان U دو نقطهٔ B و C وجود دارد که ثابت می‌مانند.

۲) فرض می‌کنیم‌که M نقطه‌ای غیر مشخص از صفحه و $M'$ مبدل آن در تغییر مکان U و $M'_1$ مبدل‌آن در انعکاس به قطب O و به قوت $3a^2$ باشد. معلوم کنید کـه درچه تغییر مکانی $M'$ مبدل $M'_1$ می‌باشد. نتیجه بگیرید که در تغییر مکان U دایرهٔ به قطر BC ثابت می‌ماند.

۳) هرگاه M نقطه‌ای غیرمشخص از دایرهٔ به‌قطر BC و $M'$ مبدل‌آن‌در تغییرمکان U باشد، ثابت کنید که خط $MM'$ بر هذلولی ثابتی مماس است.

## مسائل گوناگون

**۱۰۵/۳۱ـ فرستنده: رضا راشدی**

دانشجوی مدرسهٔ عالی فنی

ثابت‌کنید هرعدد حقیقی کـه در معادلهٔ زیـر صدق کند مثبت است:

$$3x^{2n+1}-x^{2n}+5x^{2n-1}+10x^n-15=0$$

**پنج مسئله از: کاظم حافظ قرآن**

**۱۰۵/۳۲ـ** مطلوبست‌تعیین $S=x+y+z$ ازدستگاه زیر بدون حل آن:

$$\begin{cases} \frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{z}{9}=1 \\ \frac{x}{10}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1 \\ \frac{x}{12}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=1 \end{cases}$$

**۱۰۵/۳۳ـ** مجموع n جمله از رشتهٔ زیررا پیدا کنید.

$$S=1+21+221+2221+\cdots$$

**۱۰۵/۳۴ـ** مجموع n جمله از رشتهٔ زیـر را بـدست آورید:

$$S=1+31+331+3331+\cdots$$

**۱۰۵/۳۵ـ** بدون استفاده ازمشتق ماکسیمم تابع زیر را پیدا کنید:

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^2(x+2)}}{3x+1}$$

**۱۰۵/۳۶ـ** معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$[x]+[x-2]=12$$

منظور از $[n]$ بزرگترین عدد صحیح است که از n بـزرگتر نباشد.

## مسائل ترجمهٔ مهندس زرگری

**۱۰۵/۳۷ـ** در دایرهٔ $\omega_1$ به مرکز O وبه‌شعاع R شعاع OA را رسم‌می‌کنیم. ازنقطهٔ دلخواه N واقع برOA عمودی بر OA اخراج می‌کنیم تادایرهٔ $\omega_1$ را در P قطع کند. دایرهٔ $\omega$ را رسم می‌کنیم که بردابرهٔ $\omega_1$ و همچنین بردایرهٔ به‌مرکز N و به‌شعاع $NA=l$ مماس باشد. اگـر r شعاع دایرهٔ $\omega$ باشد وقتی که $l\to 0$ حد r چه خواهد بود؟

**۱۰۵/۳۸ـ** الفبای زبانی از چهار حرف با صدا و شش حرف بی صدا تشکیل شده است. درهرکلمهٔ این زبان حرفهای باصدا و بی صدا یك درمیان به‌دنبال هم می‌آیند. در این زبان چند کلمهٔ نه‌حرفی وجود دارد؟

**۱۶۵/۳۹ـ** درکنجی‌سه‌وجهی نیمسازهای‌زاویه‌های رأس دوبه دو با یکدیگر زاویه‌های برابر می‌سازند. بین اندازه‌های زاویه‌های رأس‌کنج داده‌شده چه رابطه برقرار است؟

**۱۰۵/۴۰ـ** عددهای a و b و c از ریختن تاس نتیجه می‌شوند. احتمال آن را پیدا کنید که:

الف ـ خط به معادلهٔ $ax+by=c$ ازنقطهٔ (۱ و ۱) بگذرد.

ب ـ سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ با محـور طولها برخوردنداشته باشند.

# تستهای ریاضی

## در حدود برنامهٔ سال اول نظری

**۱۰۵/۴۱ـ** هر گاه P مجموعهٔ ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین و Q مجموعهٔ ذوزنقه‌های قائم باشد، $P \cap Q$ عبارتست از:

الف ـ $\varnothing$ ب ـ مجموعهٔ مستطیلها

ج ـ مجموعهٔ ذوزنقه‌ها د ـ مجموعهٔ متوازی‌الاضلاعها

**۱۰۵/۴۲ـ** هر گاه در مجموعهٔ عددهای حقیقی داشته باشیم:

$P=\{x|x>۲\}$ ، $Q=\{x|x<۲\}$

$R=\{x|x>۱\}$ ، $S=\{x|x<۱\}$

در این صورت $(P\cap R)\cup(Q\cap S)$ برابر است با:

الف ـ $\{x|x<۱$ یا $x>۲\}$ ب ـ $\{x|x\neq ۱\}$

ج ـ $\{x|x\neq ۲\}$ د ـ $\{x|۱<x<۲\}$

**۱۰۵/۴۳ـ** در چه مبنای عددنویسی $۸+۳=۱۲$ درست است

الف ـ ۷ ب ـ ۸ ج ـ ۱۰ د ـ ۱۲

**۱۰۵/۴۴ـ** هر گاه P مجموعهٔ مضربهای مشترك دو عدد ۱۲ و ۱۸ و Q مجموعهٔ مضربهای مشترك دو عدد ۲۴ و ۳۶ باشد، کدام یك از گزاره‌های زیر غلط است:

الف ـ $P\subset Q$ ب ـ $P\cup Q=Q$

ج ـ $P\cap Q=P$ د ـ $P\cap Q=Q$

**۱۰۵/۴۵ـ** در مثلث ABC که $AB<AC$ نیمساز زاویهٔ A با ضلع BC در نقطهٔ D برخورددارد. در D عمودی بر AD رسم می‌کنیم که امتداد ضلع AB را در E وضع AC را در F قطع می‌کند هر گاه $BE=CF$ باشد:

الف ـ $AE=AC$

ب ـ $AF=AB$

ج ـ $AE=\frac{AB-AC}{۲}$

د ـ $AF=\frac{AB+AC}{۲}$

## درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

**۱۰۵/۴۶ـ** هر گاه $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ

$x^۲-px+p+۱=۰$

باشند مقدار $\alpha+\beta-\alpha\beta$ برابر است با:

الف ـ ۱ ب ـ ۱ ـ ج ـ $۱-۲p$ د ـ ۰

**۱۰۵/۴۷ـ** به فرض آنکه $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادلهٔ

$۳x^۲+۵x+۱=۰$

باشند، مقدار $\frac{x'}{x''}+\frac{x''}{x'}$ برابر است با:

الف ـ $\frac{-۳۱}{۳}$ ب ـ $\frac{۱۹}{۳}$ ج ـ $\frac{۳۱}{۳}$ د ـ $\frac{۲۲}{۳}$

**۱۰۵/۴۸ـ** در تصاعدی عددی جملهٔ اول n و مجموع n جمله برابر $\frac{n^۲(n+۱)}{۲}$ است. قدر نسبت این تصاعد برابر است با:

الف ـ n ب ـ $n-۱$ ج ـ $۲n$ د ـ $n+۱$

**۱۰۵/۴۹ـ** حد اکثر چند عدد از مضربهای مشترك متفاوت دوعدد ۲۴ و ۳۲ را با هم جمع کنیم تا حاصل برابر با ۵۲۸۰ شود:

الف ـ ۱۰ ب ـ ۹ ج ـ ۱۱ د ـ ۵۵

**۱۰۵/۵۰ـ** درمثلث ABC نیمساز زاویهٔ خارجی A با امتدادضلع BC در D برخورددارد. هر گاه $BA=BC=۸$ و $AC=۴$ باشد طول CD برابر است با:

الف ـ ۴ ب ـ ۶ ج ـ ۷ د ـ ۸

**۱۰۵/۵۱ـ** در مثلث ABC زاویهٔ C منفرجه است و سه نقطهٔ: C، نقطهٔ تلاقی نیمساز زاویهٔ داخلی B با BC، مرکز دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ B، بر دایره‌ای واقعند که مرکز آن روی امتداد BC واقع است. اندازهٔ زاویهٔ C از مثلث برابر است با:

الف- $90^\circ + A$ ب- $90^\circ + B$

ج- $90^\circ + \frac{A}{2}$ د- $90^\circ + \frac{B}{2}$

## درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

**۱۰۵/۵۲-** تابع زیر را در نظر می‌گیریم :

$$y = a(x-b)^n + p$$

که $n$ عدد صحیح و مثبت است. برای اینکه این تابع در ازای $x=b$ ماکسیمم باشد باید :

الف- $a$ مثبت و $n$ زوج باشد

ب- $a$ منفی و $n$ زوج باشد.

ج- $a$ منفی و $n$ فرد باشد.

د - $a$ مثبت و $n$ فرد باشد.

**۱۰۵/۵۳-** خط به‌معادلهٔ $y=mx$ چه‌موقع برمنحنی تابع $y=x+\sin x$ مماس است ؟

الف- هیچگاه ب- هرچه باشد $m$

ج- درازای $m=2$ د- درازای $m=1$

**۱۰۵/۵۴-** درنقطهٔ برخورد منحنی نمایش هریك از دو تابع

$$y=x^2+5 \quad \text{و} \quad y=x\sqrt{x+1}$$

با محور $y'y$ مماسی برآن رسم می‌کنیم. زاویهٔ حادهٔ بین این دومماس برابر است با :

الف- $30^\circ$ ب- $60^\circ$ ج- $45^\circ$ د- کوچکتر از $30^\circ$

**۱۰۵/۵۵-** هرگاه $tg\alpha = 2tg\beta$ باشدمقدار $\sin(\alpha+\beta)$ برابر می‌شود با :

الف - $\cos\alpha\sin\beta$ ب- $3\sin\beta\cos\alpha$

ج- $3\sin\alpha\cos\beta$ د- $\sin\alpha\cos\beta$

**۱۰۵/۵۶-** درمثلث ABC داریم: $\cos A = \frac{1}{3}$ و $\cos B = -\frac{1}{4}$ منداد $\cos C$ برابراست با :

الف- $\frac{2\sqrt{30}+1}{12}$ ب- $\frac{-2\sqrt{30}-1}{12}$

ج- $\frac{1-2\sqrt{30}}{12}$ د- $\frac{2\sqrt{30}-1}{12}$

**۱۰۵/۵۷-** چند صفحه می‌توان رسم کرد که یالهای جانبی منشور کامل مثلث‌القاعده را قطع کند و آن را به دو قسمت معادل باهم تقسیم کند؟

الف- یك صفحه ب- دوصفحه

ج- چهارصفحه د - بیش از چهار صفحه

## درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

**۱۰۵/۵۸-** تابع زیر را در نظر می‌گیریم.

$$y=|x|\sqrt{x+1}$$

کدام یك از گزاره‌های زیر غلط است :

الف- تابع در ازای $x=0$ می‌نیمم است.

ب- مشتق تابع در ازای $x=0$ نامعین است .

ج- مشتق تابع درازای $x=0$ معین است

د- تابع در ازای $x=0$ پیوسته است

**۱۰۵/۵۹-** هرگاه منحنیهای نمایشهای هندسی دوتابع

$$y=x+\sqrt{x^2-1} \quad \text{و} \quad y=ax-\sqrt{x^2-1}$$

دارای مجانبهای مشترك باشند ، مقدار $a$ برابر است با :

الف- ۳ ب- ۱ ج- ۱- د- ۳ یا ۱-

**۱۰۵/۶۰-** در مثلث ABC فرض می‌کنیم که :

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{3}{5} \quad \text{و} \quad B=90^\circ+A$$

نسبت $\frac{a}{b}$ دراین مثلث برابر است‌با:

الف - $\frac{7}{24}$ ب- $\frac{4}{3}$ ج- $\frac{3}{4}$ د- $\frac{24}{7}$

**۱۰۵/۶۱-** در مثلث ABC داریم :

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{و} \quad \cos B+\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

این مثلث:

الف - قائم الزاویه است.

ب - متساوی‌الساقین است.

ج- تفاضل دو زاویه از آن برابر $90^\circ$ است.

د- قائم الزاویه و متساوی الساقین‌است.

**۱۰۵/۶۲-** مجموع رقمهای عدد طبیعی $n$ با مجموع رقمهای عدد $n^2$ برابراست. در این صورت کدام یك ازحکمهای زیر غلط است:

الف ـ ممکن است که n مضرب ۹ باشد

ب ـ ممکن است که n مضرب ۹ نباشد.

ج ـ الزاماً n مضرب ۹ می‌باشد.

د ـ ممکن است کسه n یك واحد بیشتر از مضربی از ۹ باشد.

**۱۰۵/۶۳ـ** چند چند عدد طبیعی n وجود دارد که در ازای آنها عدد $n^5+n+1$ اول است ؟

الف ـ یك‌عدد　　ب ـ دوعدد

ج ـ بیش‌از دوعدد　　د ـ هیچ عدد

**۱۰۵/۶۴ـ** در مثلث ABC پای ارتفاع وارد از رأس A برضلع BC را D می‌نامیم. درانعکاس به قطب D که B و C مبدلهای یکدیگر باشندمبدل A را 'A می‌نامیم. دراین‌صورت کدام یك از گزاره‌های زیر غلط است :

الف ـ 'A بر مرکز ارتفاعی مثلث واقع است.

ب ـ 'A قرینهٔ مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به BC است

ج ـ دایره‌های محیطی دومثلث ABC و A'BC برهم منطبقند

د ـ دوزاویهٔ BAC و BA'C مکمل یکدیگرند

## مسائل امتحات ... (دنباله از صفحهٔ ۱۹۴)

شده است.

$$\begin{cases} a*b=a^2+b^2 \\ a\Delta b+a^2.b^2 \end{cases}$$

معین کنید عمل Δ خاصیت شرکت‌پذیری داردیانه.

ثالثاً ـ معین کنید عمل* عنصر بی‌اثر داردیانه.

رابعاً ـ معین کنید عمل Δ نسبت به‌عمل* دارای خاصیت‌پخشی چپ می‌باشد یاخیر.

### مسائل ریاضی نظری سال دوم

### بهمن‌ماه ۵۲

۱ـ سری‌هندسی‌زیرمفروض‌است $\ldots+(-24)+192$ جملهٔ عمومی این‌سری رانوشته ومعین کنید متقارب‌است یامتباعد (ازدوراه) ثانیاً معین کنید جملهٔ چندم‌آن مساوی $\frac{-3}{512}$ می‌باشد.

۲ـ جملهٔ عمومی رشته زیررا بنویسید.

$$-\frac{1}{2} \text{ و } \frac{27}{6} \text{ و } \frac{-125}{18} \text{ و } \frac{343}{54}\ldots$$

۳ـ تحقیق کنید هرگاه دریك سری‌عددی جملهٔاول با قدر نسبت‌آن مساوی‌باشدمجموع n جملهٔاول آن مساوی‌است با $(n+1)$ برابر نصف جملهٔ آخرآن سری.

۴ـ ازدونقطهٔ A و B دو متحرك دریك زمان به طرف هم حرکت می‌کنند. اولی‌دردقیقهٔاول‌یك متر ودردقیقه‌های بعدهردقیقه $\frac{1}{2}$ متربیش‌از دقیقهٔ قبل‌حرکت می‌کند. متحرك‌دوم در هردقیقه ۶ مترحرکت می‌کند. اگرفاصلهٔ A و B مساوی ۱۱۷ متر باشد پس ازچند دقیقه دومتحرك به‌هم می‌رسند.

۵ـ ثابت کنید درهرگروه متقارن هر عنصر منحصر به فرد می‌باشد.

۶ـ زیرگروه یك‌گروه راتعریف کرده ویك‌مثال بنویسید.

۷ـ درمجموعهٔ اعداد حقیقی‌عمل(*) به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$a*b=a+\frac{a}{b}\ ،\ (b\neq 0)$$

اولاـ خواص جابجائی وشرکت پذیری رابرای عمل(*) بررسی کنید.

ثانیاً ـ آیاعمل (*) عنصر بی‌اثر دارد یانه (بادلیل).

ثالثاً ـ تحقیق کنیدآیا عمل‌ضرب نسبت به عمل* خاصیت پخشی‌چپ دارد یانه.

رابعاً ـ معادلهٔ زیررا حل کرده x را پیداکنید.

$$(x*3)*4=(x*\frac{x}{2})+2$$

### شماره‌های گذشتهٔ مجلهٔ یکان

از ۱۰۳ شماره ماهانهٔ مجلهٔ یکان که از ابتدای تأسیس تاکنون منتشرشده است، فقط مجله‌های به‌شماره‌های زیر دراداره مجله موجوداست که به‌بهای مندرج در روی‌آنها بفروش می‌رسد.

۳۲ـ۳۳ـ۳۶ـ۴۲ـ۴۴ تا ۴۹ـ۵۱ تا ۵۸ـ۶۱ تا ۶۹ ۷۱ تا ۷۷ـ۷۹ تا ۸۵ـ۸۸ تا ۱۰۰ـ۱۰۲تا۱۰۴

یکان‌سال ۵۱: ۱۰۰ریال ، یکان‌سال ۵۲: ۱۵۰ریال

# مسائل انتخابی از مسائل امتحانات دانشسرای راهنمایی اصفهان

مدرس : قوام نحوی

## مسائل ریاضی نظری سال اول بهمن ۱۳۵۱

۱ـ سه مجموعهٔ زیرمفروضند:

$A=\{۱,۲,۴\}$ و $B=\{۴,۵\}$ و $C=\{۲,۵,۶\}$

ومجموعهٔ کل به‌فرم $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ می‌باشد. اولا این سه مجموعه را با نمودار نمایش دهید. ثانیاً صحت روابط زیر را تحقیق کنید:

I $(A\cap B')\cup(A'\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cap B)'$

II $A'\cup B'\cup C'=(A\cap B\cap C)'$

ثالثاً صحت رابطهٔ (I) را بانمودار ون نیز تحقیق کنید.

۲ـ اگر A و B و C سه مجموعه به فرم سه دایرهٔ دوبه دو متقاطع باشند صحت رابطهٔ زیررا ازروی نمودار وهمچنین مستقیماً اثبات کنید ازروی آن چه مطلبی‌را نتیجه می گیرید؟

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

۳ـ دریك مدرسهٔ راهنمائی تحصیلی ۳۰۰ نفر ازدانش آموزان گندم گون هستند و ۴۰۰ نفر بلندقد هستند و ۵۰ نفرعینکی هستند و ۱۰۰ نفرشان گندم گون وبلند قدند و ۲۰ نفر گندم گون وعینکی هستند وهیچ‌دانش آموز بلندقدی عینکی نیست. معین کنید چند نفر دانش آموز دراین‌مدرسه تحصیل می کنند (ازدوراه شکل وفرمول حل کنید).

۴ـ مجموعهٔ اعداد گویا و گنگ و حقیقی را تعریف کرده وآنها را بانمودار نمایش‌دهید.

۵ـ اگررابطهٔ بین دومجموعه این‌باشد که دومجموعه متمم یکدیگرند معین کنید کدامیك از خواص روابط را این رابطه دارد.

۶ـ عددزیررا به‌مبنای ده تبدیل کرده ومعین کنید درمبنای ده چه‌نوع کسر اعشاری است.

$(۱۰۰۰۰۱/۰۱۰۱۰۱)_۲$

۷ـ دستگاه دومعادلهٔ دو مجهولی زیررا در مبنای ۲ حل کنید.

$$\begin{cases} ۱۰x+۱۱y=۱۰۰۰۱ \\ ۱۰۱x-۱۱۰y=۱۰ \end{cases}$$

۸ـ عدد ۸۸۸۸ راتاکمتراز ۱۰۰۰ واحد سرراست کنید. ثانیاً این‌عدد رادر دستگاه رومی‌بنویسید.

۹ـ a را ازرابطهٔ زیرحساب کرده وسپس درستی‌رابطه را به ازاء مقداریافته شدهٔ a امتحان کنید (در مبنای ۷)

$(\overline{a۴})_۷+(\overline{a۴})_۸=(\overline{a۴})_{۱۷}$

## مسائل ریاضی نظری سال‌دوم‌علوم تجربی‌شبانه فروردین ماه ۵۲

۱ـ درمجموعهٔ اعداد حقیقی‌عمل (*) بین عضوهای آن به صورت زیرتعریف شده است:

$a*b=\sqrt{a^۲+b^۲}$

اولاـ صحت رابطهٔ زیررا تحقیق کنید:

$(۳*۴)*۱۲=۳*(۴*۱۲)$

ثانیاـ تحقیق کنید مجموعهٔ مزبور باعمل(*) تشکیل گروه می‌دهد یانه.

ثالثاـ تحقیق کنید عمل‌تقسیم نسبت به عمل (*) دارای

خاصیت پخشی‌چپ یاپخشی راست می‌باشد یاخیر.

۲ـ اولا ثابت کنید در هر گروه آبلی $(G,\circ)$ معادلهٔ $a\circ x=b$ یك‌جواب داردبه‌فرم $x=b\circ a'$ واین‌جواب‌منحصر به‌فرد می‌باشدویك مثال‌بنویسید.

ثانیاً ـ گروه $G$ رابادو عمل ترکیب داخلی $(\circ)$ و $(\Delta)$ درنظر می‌گیریم. معادلهٔ زیررا حل‌کرده $x$ را بدست‌آورید.

$$b\Delta(a\circ x)=c$$

۳ـ ثابت‌کنید مجموعهٔ اعداد نسبی و مضرب۳ تشکیل یك گروه جابجائی می‌دهد ویك زیر گروه‌آن رابنویسید.

۴ـ جملهٔ عمومی‌سری زیررا نوشته تحقیق کنید متقارب است یامتباعد ($x<1$ است)

$$\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}x^4+\frac{11}{32}x^9-\frac{15}{128}x^{16}+\cdots$$

۵ـ عبارات زیررا حساب‌کنید وجواب راساده نمائید.

$$(1+x^3+x^6+x^9+\cdots+x^{300})^2$$

$$\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{999\times 1000}\right)^2$$

۶ـ گلوله‌ای رادریك سطح شیب‌دار رها می‌کنیم گلوله درثانیهٔ اول ۰/۲ متردرثانیهٔ دوم ۰/۸ متردرثانیهٔ سوم۱/۴متر و...اولا رشته‌ای تشکیل‌دهید که جملاتش مسافتهای‌طی‌شده‌بوسیلهٔ گلوله باشد وجملهٔ عمومی‌آن را بنویسید. آیااین رشته متقارب است یا نه؟

ثانیاً معین‌کنید پس‌از ۲ دقیقه‌گلوله چه مسافتی را طی کرده‌است.

## مسائل وسؤالهای ریاضی نظری سال‌اول‌علوم تجربی اردیبهشت ۵۲

۱ـ گزارهٔ ترکیبی زیر مفروض است (اگر شخصی یك حرف بمن‌آموخت هرآینه مرابندهٔ خود گرداند).

حضرت علی‌علیه‌السلام

اولا این‌گزاره رابافرمول نوشته و گزاره‌های نقیض و عکس نقیض‌آن‌را بافرمول نوشته وآنهارا بیان‌کنید. ثانیاً رابطهٔ زیر را درنظر می‌گیریم؛

$$\sim(p\Longrightarrow q)\Longleftrightarrow p\wedge(\sim q)$$

هریك ازدوطرف رابطه راباجملات معمولی‌بیان‌کرده تحقیق‌کنید که این‌گزاره راستگوست یانه.

۲ـ صحت روابط زیررا تحقیق‌کنید:

$$p\uparrow q=\sim(p\wedge q)$$

$$p\downarrow q=\sim(p\vee q)$$

۳ـ اولاصحت رابطهٔ زیررا از راه استقراء ریاضی تحقیق کنید.

$$S_n=1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$$

ثانیاً ثابت‌کنید رابطه‌های زیربرقرار است:

$$S_{n+2}-3S_{n+2}+3S_{n+1}=S_n$$

$$S_{2n}=3(S_{2n}-S_n)$$

(مقصوداز $S_{n+3}$ مجموع $n+3$ جمله‌ازمجموع $1+3+5+\ldots$ می‌باشد).

۴ـ اولا استدلال قیاسی را تعریف کنید ثانیاً ثابت کنید عبارت: $12^{2n}-10^{2n}$ بر۴۴ بخش‌پذیراست وتعیین‌کنیدعبارت بالا به‌چه رقمی‌ختم می‌شود (برحسب $n$زوج یا فرد).

۵ـ اولا اثبات ازراه برهان خلف‌را تعریف‌کنید. ثانیاًیك مثال بزنید واثبات‌کنید.

۶ـ معین‌کنید گزارهٔ زیرراست است یا دروغ.

$$[\exists x\,,\ (x^4+1)>0 \text{ و } x\in R]\rightarrow$$

$$(\forall x\,,\ \frac{x+1}{x+1}=1 \text{ و } x\in N]$$

۷ـ تعیین‌کنید چنددرصد عددی رابه‌آن اضافه‌کنیم تاآن عددسه برابرونیم شود (بادلیل).

۸ـ خدمات دانشمند ایرانی خواجه نصیرالدین طوسی رابه دانش‌ریاضی شرح دهید.

۹ـ گزاره‌های ترکیبی زیررا به‌صورت فرمول نوشته و نوع‌ترکیب وحالات راست‌بودن هریك رامشخص کنید: ۱) عدد ۸ نه‌اول است ونه مجذورکامل.

۲) امتحان مرتب‌است وهمهٔ دانشجویان آمده‌اند.

۱۰ـ اولا تحقیق‌کنید رادیکال زیر همواره دارای جواب گویاست:

$$\sqrt{(a^2-1)^2+(2a)^2}$$

ثانیاً ـ اگر $a=20$ باشد جواب رادیکال را حساب کنید.

## مسائل ریاضی عملی سال دوم علوم تجربی

### اردیبهشت ۵۲

۱ـ روی محور $Oz$ مختصات نقطه $A$ راطوری پیدا کنید که ازنقطه $M(1,-2,0)$ وصفحهٔ $P$ بمعادلهٔ: $3x-2y+6z+9=0$ به‌یك‌فاصله باشد.

۲ـ پیدا کنید فاصلهٔ نقطه $A(2,3,-1)$ رااز خط $d$ به معادلهٔ زیر:

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}=t$$

۳ـ معادلهٔ صفحه‌ای راکه ازسه نقطهٔ $A(-1,0,0)$ و $B(0,3,0)$ , $C(0,0,4)$ می گذرد نوشته وسپس سینوس زاویهٔ بین‌این صفحه وخط $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z-5}{6}$ را پیدا کنید.

۴ـ تحقیق کنید صفحهٔ $P$ بمعادلهٔ :

$$x+2y-2z-9=0$$

ازنقطهٔ فصل‌مشترك سه‌صفحهٔ زیرمی گذرد:

$$x+y+z-1=0 \quad \text{و} \quad x-y-z-1=0 \quad \text{و}$$

$$2x+3y-8=0$$

۵ـ جملهٔ عمومی یك‌سری به‌فرم $A_n=3n-5$ می‌باشد تحقیق کنیداین‌سری عددی است ومجموع ۲۰۰ جملهٔ آن را حساب کنید.

۶ـ دریك‌سری هندسی‌مجموع ۶جملهٔ اول‌آن مساوی ۹ برابرمجموع ۳جملهٔ اول‌آن است. پیدا کنید قدرنسبت سری‌را.

۷ـ ثابت کنید مجموعهٔ $S=(0,1,2)$ ( باقیمانده های اعداد بر۳) با دوعمل $(+)$ و $(\times)$ تشکیل یك‌میدان جابجائی می‌دهد.

۸ـ اگرعمل بین $a,b$ به‌صورت $a*b=\sqrt{a+b}$ داده‌شده‌باشد معادلهٔ زیررا حل کنید ($a,b$ متعلق به‌اعدادحقیقی)

$$[x*(x+2)]*7=3$$

## سؤالها ومسائل‌ریاضی نظری

۱ـ اولا طریقهٔ پیداکردن فصل مشترك دوصفحه را در حالت کلی‌شرح‌دهید. ثانیاً اگردوصفحه موازی باشند فصل‌مشترك چگونه خواهد شد.

۲ـ جمله عمومی‌یك رشته به‌صورت $u_n=\frac{3n+1}{n}$ می‌باشد ثابت کنید عدد $n$ رامی‌شود طوری پیدا کردکه به‌ازاء هر عدد $n$ وقتی $n>n_0$ داشته‌باشیم $|u_n-3|<\varepsilon$ که $\varepsilon$ عدد کوچکی است. دراین‌صورت حدرشتهٔ بالاچه عددی است.

۳ـ میدان وزیرمیدان ومیدان اول‌را تعریف کرده برای هر کدام یك‌مثال بنویسید.

## مسائل ریاضیات عمومی سال اول

### بهمن‌ماه ۵۲

۱ـ سه مجموعهٔ $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{2,3,4,5\}$ و $C=\{3,4\}$ مفروضند معین کنید تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B$ چندبرابر تعدادزیرمجموعه‌های‌مجموعهٔ $(A\cap C)\Delta B$ می‌باشد.

۲ـ اگر $A$ و $B$ و $C$ سه مجموعه به‌فرم سه دایرهٔ دو به دو متقاطع باشند صحت رابطهٔ زیررا به‌کمك شکل وهمچنین‌مستقیماً تحقیق کنید:

$$(A-B)-C=(A-B)\cap(A-C)$$

۳ـ ازروی جبرمجموعه‌ها صحت‌رابطهٔ زیررا تحقیق کنید.

$$(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C)\cup$$
$$\cup(A\cap B\cap C')\cup(A\cap B'\cap C')=A$$

۴ـ اگر $A$ و $B$ و $C$ و $D$ چهارمجموعه باشند به‌کمك شکل ثابت‌کنید رابطهٔ زیربرقرار است.

$$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$$

۵ـ اگرنقطهٔ ثابت $O$ ودونقطه $A$ و $A'$ را درنظر بگیریم ورابطهٔ بین‌این دونقطه‌آن باشدکه $A$ و $A'$ مجانس یکدیگرند به مرکز تجانس $O$ و نسبت $K$. ($\frac{OA'}{OA}=K$) معین کنید این رابطه‌کدامیك ازخواص روابط رادارد.

۶ـ معین کنید رابطهٔ $R$ چه خاصیتی دارد اگر اولا: $R=R^{-1}$ و ثانیا $R\cap R^{-1}=\emptyset$ (با ذکردلیل)

۷ـ اولا فرمول عدداصلی اجتماع سه‌مجموعه رابنویسید. ثانیاً حداکثر وحداقل این‌عدد اصلی‌را بدست‌آورید (با دلیل)

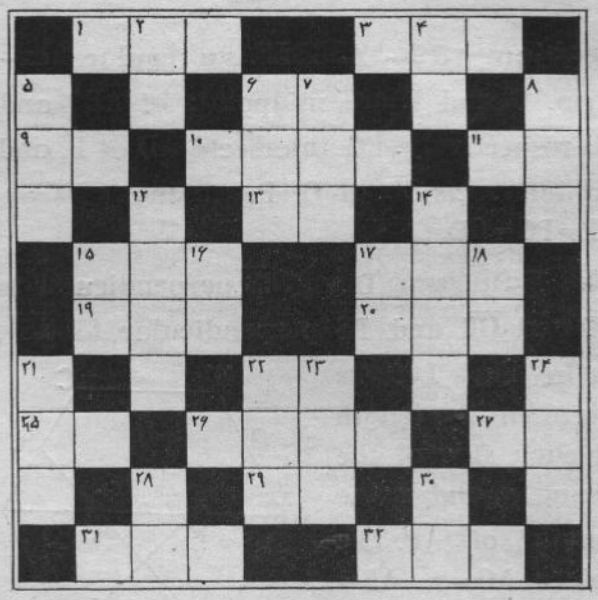
۸ـ اولا خواص جابجائی وشرکت پذیری‌را برای‌یك‌عمل تعریف کند.

ثانیاً درمجموعهٔ اعدادحقیقی‌دوعمل‌ترکیب‌داخلی‌زیرتعریف

دنباله در صفحهٔ ۱۹۱

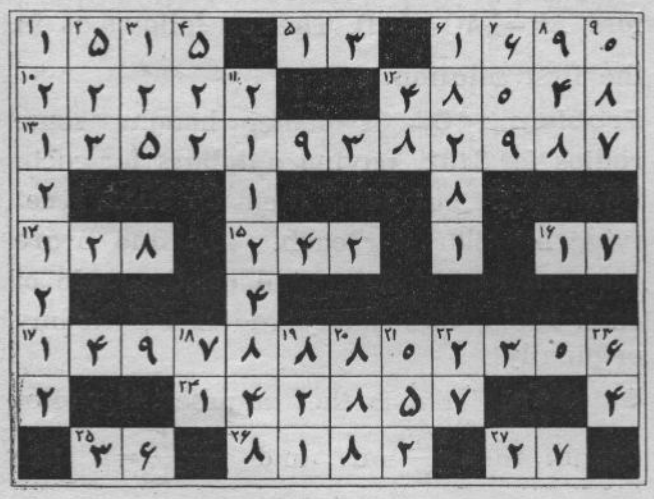
# جدول اعداد

طرح از: محمد مهدی دشتی (ارسال از زهدان در تاریخ ۱۳۵۰/۱۰/۷)



**افقی:** ریشهٔ چهارم آن مجذور کامل است. ۳ـ توان چهارم رقم یکان خود می‌باشد. ۶ـ تفاضل عدد دورقمی برمجموع رقمهایش وقتی که این مجموع رقمها بیشترین مقدار خودرا داشته باشد. ۹ـ اگر رقم نصف رقم دهگان آن را بین رقمهایش قرار دهیم عددسه رقمی حاصل مکعب کامل می‌باشد. ۱۰ـ برابراست باتوان سوم مجموع رقم یکانش با ۶. ۱۱ـ یك واحد بیشتر از جذرعدد ۶ افقی. ۱۳ـ مقلوبش مضربی ازمجذور کعب آن است. ۱۵ـ بزرگترین عددسه رقمی که رقمهایش تصاعد حسابی باقدرنسبت برابر با رقم یکان آن تشکیل می‌دهند. ۱۷ـ همان عدد ۳ افقی. ۱۹ـ کوچکترین عدد سه رقمی که رقمهایش تصاعدحسابی می‌سازند. ۲۰ـ مجذورمقلوب عدد ۶ افقی. ۲۲ـ سه برابر رقم یکان خود. ۲۵ـ جذرعدد ۳ افقی ۲۶ـ تکرارعددی دورقمی که مجذور رقم یکان خود ومضربی از مجموع رقمهای خود می‌باشد. ۲۷ـ متمم حسابی عدد ۶ افقی. ۲۹ـ مقلوب عدد ۲۷ افقی. ۳۱ـ حاصل جمع آن باعدد ۳۲ افقی برابر با ده برابر این عدد گردد. ۳۲ـ عددسه رقمی که حاصل ضرب رقمهایش باهریك ازرقمهای آن برابراست.

**قائم:** ۲ـ مقلوب عدد ۲۵ افقی. ۴ـ از دوبرابر عدد ۳۰ قائم ۵ واحد بزرگتراست. ۵ـ مجذورعدد ۲۲ افقی. ۶ـ حاصل ضرب دوعدد متوالی که مجموع آنها ۵۷ است. ۷ـ باقیماندهٔ تقسیم عدد ۱۰ افقی بر ۱۰۰۰. ۸ـ مجذورعدد ۱۱ افقی. ۱۲ـ تکرار عدد ۹ افقی. ۱۴ـ تکرار یك رقم. ۱۵ـ همان عدد ۲۹ افقی. ۱۶ـ سه برابر عدد ۳۰ افقی. ۱۷ـ مجموع رقمهایش مجذوررقم یکان آن است. ۱۸ـ متمم حسابیش ازمقلوبش یك واحد بیشتراست. ۲۱ـ مجذورعدد ۳۰ افقی. ۲۲ـ مجذور کعب عدد ۱۵ افقی. ۲۳ـ رقمهایش تصاعد حسابی می‌سازند ومجموع آنها مجذور کامل است. ۲۴ـ دررشتهٔ عددهای مجذور کامل بین عددهای ۵ قائم و ۲۲ قائم واقع است. ۲۸ـ نه برابر عدد ۳۰ قائم. ۳۰ـ تکرار یك رقم.



حل جدول مندرج دریکان شمارهٔ ۱۰۳


**کتابفروشی فخررازی**

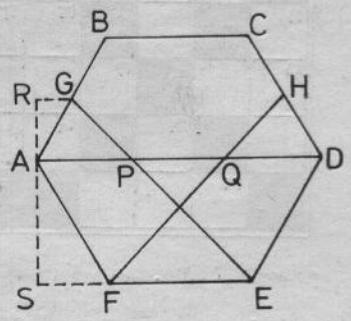
محل فروش مجله و سایر انتشارات یکان

تهران ـ خیابان شاه‌آباد ـ تلفن ۳۱۰۵۵۲

# PROBLEMS & SOLUTIONS

**Problem 139–** ABCDEF is a regular hexagon. G and H are midpoints of $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$ respectively. $\overline{EG}$ intersects $\overline{AD}$ at P, and $\overline{FH}$ intersects $\overline{CD}$ at Q Prove that $AP=PQ=QD$.

**Fist Solution:** Draw $\overline{RS}$ perpendicular to $\overline{AD}$ and $\overline{GR}$ and $\overline{FS}$ perpendicular to $\overline{RS}$, as in Fig. Let 2s represent the length of each side of the hexagon, and x the length of $\overline{AP}$. Therefore $AG=s$, $AF=FE=2s$, and $AD=4s$ (the length of a side of a regular hexagon is equal to the length of its radius).



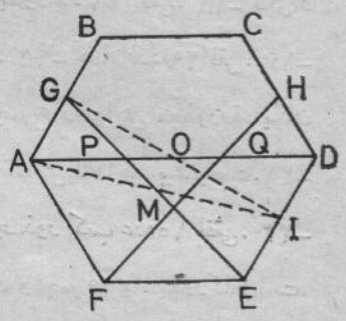

Since $m\angle GAP=m\angle PAF=60°$, then $m\angle RAG=m\angle SAF=30°$. Therefore $RG=\frac{s}{2}$, $RA=\frac{s\sqrt{3}}{2}$, $SF=s$, $As=s\sqrt{3}$. Now RGES is a trapezoid with $\overline{AP}$ parallel to its bases. Therefore by the formula.

$$x=\frac{AS.RG+AR.SE}{AS+AR}=\frac{s\sqrt{3}\left(\frac{s}{2}\right)+3s\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)}{s\sqrt{3}+\frac{s\sqrt{3}}{2}}=\frac{4s}{3}.$$

Similarly, $QD=\frac{4s}{3}$. And finally,

$$PQ=AD-(AP+QD)=\frac{4s}{3}.$$

**Second Solution:** Let O be the center of the polygon, and I the midpoint of $\overline{ED}$. Draw $\overline{AI}$ and $\overline{GI}$. $\overline{AB}\parallel\overline{DE}$ ; therefore the line through O perpendicular to both of them bisects both chords and must coincide with $\overline{GI}$. Since $AB=DE$, $AG=IE$, and $\overline{AO}$ is a median of $\Delta AGI$. Now AGIE is a parallelogram since $AG=IE$; $\overline{AG}\parallel\overline{IE}$ (AGIE is actually a rectangle). Hence diagonal $\overline{GE}$ bisects $\overline{AI}$ at M, and $\overline{GM}$ is a second median of $\Delta AGI$. But medians $\overline{AO}$ and $\overline{GM}$ trisect each other at P. Therefore $AP=\frac{2}{3}AO=\frac{1}{3}AD$. The rest follows as in the first solution.




**Problem 140–** A dealer bought some radios for \$432, paying a dollars for each. He sold all but 18 of them for \$324, receiving b dollars for each. If a and b are integers, and if he gaind on the sale of each radio, how many radios did he buy originally?

**Solution:** If n is the number of radios bought, then $\frac{432}{n}=a$, and $\frac{324}{n-18}=b$ are both integers. The factor of 324 are the terms of the product $(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3+3^4)$, viz. 1,3,9,27,81,2,6,18,54,162,4,12,36,108.324. If $n-18$ is set equal to each of these in turn, we obtain as tentative values: n=19,21,27,45,99,20,24,36,72,180,22,30,54,126,324.

But n is a factor of 432. Therefore n=27,24,36,72,54. The values of (a,b) that correspond are, in order: (16,36),(18,54),(12,18),(6,6),(8,9). In the case (6,6), no profit is made. Hence the final answers are: n=27, 24, 36, 54.

## از سری کتب جدید و جامع ۲۰ استاد و دانشجو منتشر شد

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | حداقل وراهنمای نمرات کنکور سراسری | ۱۰ ریال | ۲ | حل‌المسائل وراهنمای فیزیك نهائی | ۵۰ ریال |
| ۳ | حل‌المسائل وراهنمای شیمی نهائی | ۳۰ « | ۴ | حل‌المسائل وراهنمای جبر و مثلثات نهائی | ۲۰ ریال |
| ۵ | حل‌المسائل و راهنمای جبر نهائی | ۲۰ « | ۶ | حل‌المسائل و راهنمای مثلثات نهائی | ۲۰ ریال |
| ۷ | حل‌المسائل استدلالی وهندسهٔ نهائی | ۳۰ « | ۱۷ | خودآموز وراهنمای ریاضیات متوسطه و کنکور | ۵۵ ریال |
| ۸ | تستها وراهنمای کنکور سراسری با راه حل تستی | ۳۲۰ صفحه | | ۱۷۰ ریال زیر نظر دکتر حسن ربانی استاد دانشگاه | |
| ۹ | حل‌المسائل وراهنمای کلیهٔ دروس کلاس ۴ و ۵ | ۲۳۵ صفحه | | ۱۴۰ « زیر نظر دکتر حسن ربانی استاد دانشگاه | |

کتاب ۸: شامل کلیهٔ تستهای کنکور سراسری وسایر کنکورها باراه حل وراهنمای تستی و پاسخ صحیح کلیهٔ تستها

کتاب ۹: شامل حل وراهنمای مسائل کلیهٔ دروس کلاس ۴ و ۵ متوسطه طبیعی وریاضی ومتفرقه.

### مراکز فروش: کتابفروشیهای معتبر در سراسر کشور

* علاقمندان جهت تهیه بااستفاده از ۱۰ درصد تخفیف می‌توانند وجه را به حساب بانکی (تهران - بانك صادرات ۳۰۸۹-جاری ۱۹) حواله و رسید را همراه تعداد کتب به آدرس ( تهران - صندوق پستی ۷/۷۰۲۷ ) ارسال دارند ، تا کتب توسط پست فرستاده شود.


## بوزینه در دانشگاه (دنباله ازصفحهٔ ۲ جلد)

درمیان صف شخصی عاقل مرد دست بوزینه‌ای را گرفته بود وآهسته به‌طرف پیشخان جلو می‌رفت. پس از ربع ساعتی به ثبات رسید وبه‌او گفت: «جانی ایپ (Johnny Ape)». چون بعضی ازنامهای حیوانات رادر زبان انگلیسی به‌عنوان نام‌فامیل انتخاب می‌کنند، ثبات ازاسم (ایپ) که به معنی بوزینه است تعجبی نکرد وبه او گفت: آقای ایپ، گویا درتاریخ تولد شما اشتباه کرده‌اند و آنرا ۱۹۵۹ نوشته‌اند. عاقل مرد گفت: «خیر! قبولی مال من نیست؛ بلکه مال جانی است» وبوزینه رانشان ثبات داد. ثبات از جاپرید و گفت: «دانشگاه بوزینه نمی‌پذیرد!» عاقل‌مرد باخشونت گفت: «نگو بوزینه! اسم اوجانی است وخیلی حساس است. ممکن است به‌او بربخورد. به‌علاوه جانی گواهینامهٔ دبیرستان دارد و دانشگاه به‌او پذیرش داده‌است. باید نامش‌را بنویسی.»

مدتی جروبحث شد. هیچکدام ازدو طرف کوتاه نیامدند. جوانان درصف به‌سروصدا درآمده بودند. بالاخره قرارشد که جانی وسرپرستش را به دفتر رئیس دانشگاه ببرند که او تصمیم بگیرد. معمولا رؤسای دانشگاهها آدمهایی محتاط هستند. اولا که کسی را به‌دفترشان راه نمی‌دهند. ثانیاوقتی کسی راکه مجبور شدند بپذیرند، خیلی بااحترام وخوشروئی بااوصحبت می‌کنند. دربارهٔ جانی موضوع خیلی غامض شده بود. ازطرفی قانون دانشگاه را مجبورمی‌کرد که جانی‌را بپذیرد چون گواهینامهٔ دبیرستان داشت. ازطرفی دیگر آبروی دانشگاه درکار بود. ازاینرو رئیس دانشگاه جانی ایپ وسرپرستش‌را دردفترش راه‌داده بود وباکمال خوشروئی ازاوپرسید که جریان راشرح دهد.

سرپرست گفت: «جانی گواهینامهٔ دبیرستان دارد و از دانشگاه پذیرش گرفته است. لذانام‌اورا بایدثبت کنید.» تارئیس دانشگاه خواست چیزی بگوید: جانی بادقت خاصی به اوخیره‌شد رئیس سخت ناراحت‌شد وبه سرپرست گفت: «ممکن است خواهش کنم که بوزینه را بیرون بفرستید؟» سرپرست باخشونت گفت: «نام اوجانی است وخیلی حساس است. اورا جانی خطاب کنید وگرنه سخت می‌رنجد.» رئیس ناچار باخوشروئی گفت: «تقاضا می‌کنم که جانی‌را بیرون بفرستید.»

سرپرست دست جانی‌را گرفت واورا بیرون برد و دستی به‌شانه وپشت‌اوزد که پشت در منتظر بماند. رئیس بالبخندی مصنوعی روبه سرپرست کرد وازاوجویاشد که چگونه جانی گواهینامهٔ متوسطه گرفته است. سرپرست گفت: «بسیارساده‌است. وقتی جانی طفلی بیش نبود، در حیاط دوچرخه‌سواری می‌کرد. همسایگان ازهوش وذکاوت اوتحسین کردند وپیشنهاد دادند که اورا به‌مدرسه بفرستیم. لذااورا به‌دبستان فرستادیم.» رئیس دوباره بابی‌صبری پرسید: «چطور گواهینامهٔ دبیرستان گرفت؟» سرپرست جواب‌داد: «به‌آسانی! جانی سه‌خاصیت بسیارمهم داردکه اورا دانش‌آموز نمونه می‌کند. نخست آنکه حرکت لبهای انسان چنان‌اورا شیفته می‌کند که بی‌اختیار ساکت می‌نشیند وبه‌انسان خیره می‌شود. آموزگاران ودبیران شاگردی راکه بااینهمه دقت به درس گوش می‌دهد خیلی‌دوست دارند. دوم آنکه وقتی‌جانی می‌خوابد چشمهایش‌را هم‌نمی‌گذارد. بنابراین به‌آموزگار ودبیراهانت نمی‌شود. سوم ومهمترین این‌خواص‌این است که جانی درتمام امتحانات (صحیح و غلط) نمرهٔ ۶۸/۲۶ (ازصد) گرفته است. ازاینرو ازتمام امتحانات قبول‌شده است. لذا می‌خواهد دردانشگاه تحصیل کند.»

در این میان سر و صدای زیادی از بیرون به گوش‌می‌رسد رئیس‌دانشگاه وسرپرست‌بوزینه، ازروی کنجکاوی، بیرون‌می‌دوند معلوم می‌شود که‌مراکز برادری (Faternty) دانشگاه‌سرجانی بایکدیگر دعوا می‌کنند که درچه برادری اورا وارد کنند. دراین کشمکش لباس جانی‌را ازتنش درمی‌آورند. بوزینهٔ بیچاره، قنداق به‌دور کمر، می‌دود بالای یك‌درخت. ماشین آتشنشانی‌را خبرمی‌کنند که آب بپاشد وبوزینهٔ بی‌نوارا پائین بیاورد. سرپرست جانی که‌ترسش می‌گیرد، می‌رود جلو وهمه‌را ساکت‌می‌کند. مدتی پای درخت با بوزینه به‌زبان‌پدرانه حرف‌می‌زند تابوزینه‌نترسد وپایین بیاید. همین کافی بود. سرپرست دست جانی‌رامی گیرد وازجادهٔ خلوتی به‌اتومبیلش می‌رود.

چقدر به‌امتحانات (صحیح وغلط) باید اطمینان کرد؟ آمار نشان داده‌است که این امتحانات زیاد ملاك ومدرکی برای سنجش‌دانش تحصیلی نیست. به‌علاوه دراین امتحانات تقلب به حد اعلایش می‌رسد.

# انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

**مجموعهٔ علمی**
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

**سرگرمیهای جبر**
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

**مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها**
تألیف:علی اصغرهومانی

**تمرینهای ریاضیات مقدماتی**
تألیف: استاد هشترودی

روش سادهٔ حل
**مسائل شیمی**
ترجمهٔ: عطاءالله‌بزرگ‌نیا

**راهنمای ریاضیات متوسطه**
تألیف : عبدالحسین مصحفی

**تستهای هوش**
ترجمهٔ : باقرمظفرزاده

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

## تستهای چندجوابی شیمی

ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا

بها : ۴۰ریال

## معماهای ریاضی

ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار

بها : با جلدشمیز ۷۵ ریال

با جلدزرکوب : ۱۰۰ریال

## مسائلی ازحساب استدلالی

تألیف: محمودکاشانی

| جلد اول | جلددوم | جلدسوم |
|---|---|---|
| ۱۲ریال | ۱۵ریال | ۱۵ریال |

## مبادی منطق وریاضی جدید

تألیف: غلامرضا عسجدی

بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان‌که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان‌که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان‌که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.