یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ یازدهم، شمارهٔ : ۳ شمارهٔ مسلسل: ۱۰۴ آذر ـ دی ۱۳۵۳

دراین شماره:

بها : ۴۰ ریال

تأخیر در انتشار مجله

به‌علت گرفتاریهایی داخلی، انتشار این شماره ازمجله به تأخیرافتاد. باپوزش از خوانندگان، به‌استحضار آنان می‌رساند که شماره‌های بعدی مجله مرتباً درهفتهٔ اول هر ماه در دسترس علاقمندان قرار خواهد گرفت.

چاپ مجدد اعلام پاسخهای درست پرسشهای کنکورهای سال ۱۳۵۲

پاسخهای درست پرسشهای کنکورهایی که در یکان سال ۱۳۵۲ چاپ شده‌بود دریکان‌ماهانهٔ خرداد۱۳۵۳، شمارهٔ‌مسلسل ۱۰۱،چاپ شد. اما به زودی تمام نسخه‌های این شماره بفروش رفت درحالی که‌مرتباً تقاضاهایی برای‌دریافت‌آن واصل‌شده‌است. چون این‌تقاضاها روزافزون بود، ازاینروپاسخهای مزبورمجدداً در این‌شماره ازمجله درج گردید. ازبابت‌آن برصفحات مجله‌نیز اضافه شد.

معرفی کتاب

بیرونی نامه

پژوهش و نگارش ابوالقاسم قربانی

ازبین محققانی که درعصر حاضر به‌تحقیق در آثار علمی دانشمندان اعصار گذشته می‌پردازند، فقط عده‌ای انگشت شمار مبنای کار خودرا تحقیق در آثار ریاضی این دانشمندان قرار داده‌اند. آقای ابوالقاسم قربانی‌ازجملهٔ این‌عده‌است. وی‌سالهاست که‌عمدهٔ وقت خودرا صرف این‌تحقیق ارزنده کرده وتوانسته‌است بسیاری ازگوشه‌های تاریك تاریخ ریاضیات درایران را روشن سازد. ازآثارآقای قربانی دراین زمینه‌آنچه‌که تاکنون چاپ و منتشرشده مورد توجه خاص‌دانشمندان اهل‌فن در سراسر جهان قرارگرفته است. مقامات علمی ایران نیز به اهمیت‌کار آقای قربانی واقف بوده با قدردانی ازکوششهای وی، از جمله اعطاء جایزهٔ سلطنتی بهترین تحقیق ۱۳۵۰ به کتاب کاشانی نامه، او رابه پی‌گیری هرچه بیشترکوششها و پژوهشهای خود ترغیب و تشویق کرده‌اند.

ابوریحان بیرونی دانشمند ایرانی درسدهٔ چهارم وپنجم هجری درهمهٔ جهان شهرت ومعروفیت دارد. امابیشتر وی را به عنوان یك منجم می‌شناسند. آقای قربانی در کتاب بیرونی‌نامه کوشیده است تا چهرهٔ واقعی بیرونی را به‌عنوان یك ریاضیدان عالی‌مقام نشان دهد وبی‌شك باشایستگی کافی که در این‌کار داشته ازعهدهٔ انجام‌آن برآمده است. درزیر قسمتهایی‌از مقدمهٔ کتاب بیرونی‌نامه‌که ضمن‌آن هدف ازنگارش کتاب بیان شده‌است نقل می‌شود:

«... اگرچه درصدسال اخیر که دانشمندان جهان باآثار

بقیه درصفحه ۱۴۷

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ‌یازدهم ـ شمارهٔ سوم ـ شمارهٔ مسلسل : ۱۰۴

آذر ـ دی ۱۳۵۳

صاحب امتیاز و سردبیر: **عبدالحسین مصحفی**

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

وجه اشتراك برای دورهٔ یازدهم : ۳۲۰ ریال

حساب بانکی: حساب جاری۳۰۹۵شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume XI, number 3. Dec. 1974

subscription : 6$

TEHRAN _ P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی‌کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است‌که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند .کتابهایی‌که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت‌آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

تناقضهای نظریهٔ مجموعه‌ها

اقتباس از کتاب «مقدمات نظریهٔ مجموعه‌ها» تألیف J. BREUER

عبدالحسین مصحفی

بعداز بنیان نظریهٔ مجموعه‌ها توسط **کانتور** ریاضیدان آلمانی، در مواردی مشاهده شد که در این نظریه تناقضهایی وجود دارد. این تناقضها که زیر عنوان پارادوکس مطرح می‌شوند عبارتند از :

۱ـ پارادوکس برتراندراسل

می‌توانیم مجموعه‌ای در نظر بگیریم که هر عضو آن نیز مجموعه‌ای باشد. مثلا وقتی که مجموعهٔ زیر مجموعه‌های یك مجموعه راتشکیل می‌دهیم. اکنون مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها را درنظر می‌گیریم. آیا این مجموعه عضو خودش هست یا نه ؟ اگر عضو خودش نباشد پس مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها نیست. اگرفرض کنیم که عضو خودش باشد. دراین‌صورت مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها به‌دو مجموعهٔ ناتهی زیر افراز شده است :

الف ـ مجموعهٔ M ، مجموعه همهٔ مجموعه‌هایی که عضو خود نیستند.

ب ـ مجموعهٔ N ، مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که عضو خود می‌باشند .

هر مجموعه‌ای که در نظر بگیریم یا به M متعلق است یا به N . حال اگرمجموعهٔ M رادرنظر بگیریم به کدام‌یك‌از دو مجموعهٔ بالا تعلق دارد؟

اگر M به M متعلق باشدخلاف تعریف M است : M مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی است که عضوخود نیستند. پس $M \notin M$

اگر M به N متعلق باشد باز هم تناقض پیش‌می‌آید ؛ مجموعه‌ای که عضو خودش نیست نمی‌تواند عضو N باشد. قبلا فرض کرده‌ایم که N مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی است که عضو خود می‌باشند. بنابراین : $M \notin N$

مشاهده می‌شود که در مورد مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها به هر ترتیب که فرض کنیم با تناقض مواجه می‌باشیم. برای توجیه بهتر پارادوکس راسل‌می‌توان پارادوکسهای‌معروف‌زیرا مثال‌زد:

الف ـ در دهی تنها یك سلمانی وجود دارد . مردمان ده به دو دسته بخش می‌شوند : دسته‌ای که ریش خود را خودشان می‌تراشند و دسته‌ای که ریش آنان را سلمانی می تراشد. خود سلمانی به کدامیك از این دودسته تعلق دارد؟

ب ـ ناشری برای معرفی کتابهای خود فهرستهایی چاپ می‌کند. بعضی از این فهرستها شامل اسم خود نیز می‌باشد.این ناشر اگر بخواهد فهرستی از همهٔ فهرستهایی را چاپ کندکه اسم خودرا در بر ندارند، آیا نام خود این فهرست را باید در آن بیاورد یانه ؟

۲ـ پارادوکس ریشارد

برای نامیدن هر عدد طبیعی تعدادی از حروف بکار می‌رود. برای نامیدن عدد ۱۲۳۵ یعنی برای بیان « هزار و دویست و سی و پنج » تعداد ۱۷ حرف بکار رفته است. باچند حرف بیش از عده‌ای متناهی از عددهای طبیعی را نمی‌توانیم بیان‌کنیم . پس مجموعه‌ای نامتناهی از عددهای طبیعی وجود دارد که برای نامیدن هر کدام از آنها بیش ازصد حرف بکار رفته باشد. این مجموعه دارای کوچکترین عضوی است که‌آن را می توانیم‌چنین‌بنامیم: «کوچکترین‌عدد طبیعی که‌برای نامیدن آن حد اقل صد حرف بکار می‌رود ». اما در بیان این عبارت فقط ۴۹ حرف بکار رفته است و نمی‌تواند عضو مجموعهٔ مزبور باشد. پس تناقض وجود دارد.

۳ـ پارادوکس بورالی‌فورتی

برای هر مجموعه عدداصلی تعریف می‌شودکه نشان دهندهٔ

بقیه درصفحهٔ ۱۰۶

کاوشهایی در تاریخ نجوم اسلامی

جعفر آقایانی چاوشی

مقدمه: پیش از آنکه محققان و دانشمندان خاورشناس به بررسی نجوم دورهٔ اسلامی بپردازند و نکات قابل توجه آن را برای جهانیان روشن سازند، عقاید و نظرهای نادرست و احیاناً غرض‌آلودی از جانب پاره‌ای از علما و منجمین اروپائی در بارهٔ نجوم اسلامی ابراز می‌شد.

آنان نجوم اسلامی را نجومی یونانی نهایت‌در قالب‌زبان عربی می‌دانستند وبرآن بودندکه منجمین اسلامی نه تنها در دستگاه نجومی بطلمیوس تغییری نداده‌اند بلکه از این دستگاه‌تا آن درجه آگاهی داشتندکه خسوفها و حالات مختلف ستارگان را خبر داده وگاهنامه تنظیم نمایند و احکام نجومی استخراج کنند. من باب مثال عقیدهٔ **لاپلاس** را در این پاره از رسالهٔ تاریخ نجوم وی در اینجا می‌آوریم. وی چنین‌می‌نویسد:

«فعالیت منجمین اسلامی که‌به رصد محدودبود به‌پژوهش اختلافهای تازه‌گسترش نیافت و در این مورد آنان چیزی به فرضیات بطلمیوس نیفزودند. این‌کنجکاوی شدیدکه ما را به کشف علل و قوانین نمودهای‌طبیعی‌علاقمند می‌کند، ازویژگیهای دانشمندان اروپائی جدید است»

دلامبر نیز عقیدهٔ مشابهی‌در این باره اظهارکرده وچنین می‌نگارد:

«اطلاعاتی‌که اخیراً دربارهٔ اعراب، ایرانیان و مغولان بدست آمده مؤید این است‌که بیش از یك‌نجوم بین آنهامتداول نبوده وآن همان نجوم یونانی بوده است‌که باکم‌و بیش توفیقی برحسب آنکه میزان آگاهی آنان از علم هندسه تا چه اندازه بوده باشد مورد تقلید اقوام دیگر قرارگرفته است.

قدر مسلم این است‌که مسلمانان بدون هیچ دخل و تصرفی فرضیات بطلمیوس را پذیرفتند و این فرضیات را فقط **کپلر** واژگون ساخت. درحالی‌که مسلمین نسبت‌به آن حرمتی خرافی ابراز می‌کردند. عموم منجمین اسلامی درپی‌آن بودندکه‌آنچه پیشنیان آنها به اجمال گفته بودند روشنتر و به تفصیل‌بیان‌کنند. لیکن حتی‌کمترین نیازی به تغییر فرضیات احساس نمی‌کردند و در این مورد هیچگونه‌کوششی حتی از جانب برجسته‌ترین آنها نیز مشاهده نشده است، تنهاهنرآنها این بودکه هفتصد تا هشتصد سال پس از بطلمیوس می‌زیسته‌اند»

خوشبختانه با تحقیقاتی‌که اخیراً از طرف عده‌ای از دانشمندان علوم اسلامی صورت‌گرفته، گوشه‌های تاریك تاریخ نجوم اسلامی روشن شده و نادرست بودن اینگونه اظهارات خصمانه در بارهٔ علمای اسلامی به ثبوت رسیده است. معلوم گردیده است‌که‌کوششهای پیگیرمسلمین دراین علم تاچه اندازه مثمرثمر بوده و منجمین عالیقدر اسلام چه‌گامهای مهمی‌دراین علم برداشته اند. عده‌ایی از آنها نه‌تنها پیرو سنت بطلمیوس نبوده‌اند بلکه اساس این دستگاه را چند قرن قبل‌از **کپرنیك** واژگون‌کرده‌اند.

با توجه به مراتب فوق، پژوهش در بارهٔ نجوم اسلامی لازم بنظر آمد و چون این‌کار نیاز به تحقیقات فراوان و تتبع عمیق داشت‌که ذکرجزئیات آن از حوصلهٔ این مقال خارج‌است سعی شدکه مطلب حتی‌الامکان خلاصه‌گردیده و به اجمال و اختصار بیان‌شود. ولی به منظور آشنائی بیشتر خوانندگان و محققین، هرجا نکتهٔ قابل‌توجهی باشد به مآخذ مربوطه اشاره شده وکتابهای موردنیاز معرفی می‌شود.

نجوم اسلامی

پژوهشهای محققین در باب تکوین نجوم اسلامی این‌امر را روشن کرده است که نجوم اسلامی از امتزاج سه‌مکتب نجومی ایرانی، هندی و یونانی به‌وجود آمده است.

دورهٔ اول که شامل قرن‌دوم‌هجری است نفوذ نجوم‌ایرانی دورهٔ ساسانی بیش از هر عامل دیگر نمایان است. در این زمان مجموعهٔ جداول فلکی معروف به زیخ شهریاری یا زیج شاه (*) از جداول اصلی پهلوی موسوم به زیک‌شتریار به وسیلهٔ **ابوالحسن التمیمی** به‌زبان عربی‌ترجمه‌شدو **ابومعشر بلخی** که‌ازبزرگترین منجمان آن دوره بود بر آن شرحی‌نوشت. این زیج محوراصلی عمل‌منجمین‌معروفی‌همچون **آل نوبخت**، **ماشاءالله**، و**عمر بن‌فرخان طبری** بوده است که در دوران خلافت منصور عباسی شکوفان شدند.

با پژوهشهای نجومی **ابواسحاق ابراهیم‌الفزاری** اولین منجم رسمی عباسیان تأثیر مستقیم نجوم هندی آشکار شد، الفزاری زیج خود را براساس کتاب سدهانت که به وسیلهٔ **براهماگوپتا** نوشته شده بود تألیف کرده وآن را «الزیج‌علی سنی‌العرب» نامید.

شخص دیگری که در شناساندن نجوم هندی به مسلمانان سهم عمده‌ای داشته است، یکی از معاصران فزاری موسوم به **یعقوب بن‌طارق** می‌باشد، در همین زمان آثار سانسکریت‌دیگری مخصوصاً سدهانت تألیف **آریابها** به زبان عربی ترجمه گردید.

فزاری اولین کسی است که دراسلام **اسطرلاب** (**) را به‌کار انداخت و اولین کسی است که درآن موضوع دست‌به‌تألیف زد و کتابهائی‌دربارهٔ اسطرلاب تحت عناوین: «کتاب‌العمل بالاصطرلاب ذوات‌الحلق» و «کتاب‌العمل بالاصطرلاب‌المسطح» نوشت.

فزاری نخستین کسی است که در امرزیج به نثر و نظم تألیف دارد.

دورهٔ نفوذ نجوم یونانی که با ترجمهٔ «المجسطی» بطلمیوس در قرن سوم آغاز شد به زودی محور عمل منجمین واقع شد، همچنین کتاب چهار مقاله در احکام نجوم‌به‌نام« کتاب الاربع‌مقالات» به وسیلهٔ **ابویحیی‌البطریق** به عربی‌ترجمه شد. در اینجا مطلبی درخور ذکر است و آن اینکه نجوم یونانی در اسلام از دو مکتب مختلف ارسطوئی و بطلمیوسی مطالعه می‌شده است.

فلاسفهٔ مکتب مشایی، به‌نحو بارزی به‌نظریات نجومی‌ارسطو توجه‌داشته‌اند. **یعقوب بن اسحاق‌الکندی** در بعضی رسایل خود منجمله: «رسالة فی‌ان‌العناصر و الجرم الاقصی کریة‌الشکل» به طرح‌جنبه‌هایی‌ازنظام فلکی‌ارسطومی‌پردازد. **ابن‌سینا** در«شفا»و آثار دیگر مشایی خویش هم دستگاه نجوم بطلمیوسی‌وهم‌دستگاه نجومی ارسطو را شرح می‌دهد. در مغرب عالم اسلامی‌نیرعلمائی چون **ابن‌باجه** و **ابن‌رشد** و **ابن‌طفیل** با اعتقادبه‌نجوم ارسطویی نجوم بطلمیوسی را مورد حمله قرار داده‌اند. به طورکلی، نجوم ارسطو از رهگذر فلسفهٔ مشایی دو تأثیر مهم در تفکر اسلامی‌به جا نهاده است. نخست اینکه حکمای اسلامی درتوجیه آن‌قسمت از پدیدارهای نجومی که در فلسفهٔ ارسطو مربوط به عالم تحت القمر است، عموماً نظر ارسطو را پذیرفته‌اند و کتاب «**Meteorologica**» منشأ اصلی «علم‌کاینات جو»آنان بوده

دنباله در صفحهٔ ۱۰۳

---

* برای‌کسب اطلاع بیشتر دربارهٔ زیج شهریاری به یکی از مآخذ زیرمراجعه شود:

«تاریخ نجوم اسلامی» تألیف **نکینو**، **کارلو**، **آلفونسو** ترجمهٔ **احمدآرام** تهران، ۱۳۵۰

«نکاتی چند دربارهٔ علم هیئت اسلامی» اثر: **کندی**، **ای.اس** مجلهٔ مهرشمارهٔ ۲سال هشتم خرداد ۱۳۳۱

** اسطرلاب واژه‌ای یونانی است، که ازکلمهٔ «اسطرلابون» گرفته شده است و این کلمه به معنی «آئینه ستاره» است (اسطر به معنای ستاره ولابون به معنای آئینه می باشد) اسطرلاب انواع مختلف دارد دسته‌ای از آنها دارای حلقه‌هائی است که از دائـره‌های مسی ترکیب یافته است، یعنی دائرهٔ نصف‌النهار، دائرهٔ معدل النهار، دائرهٔ منطقةالبروج، دائرهٔ عرض، دائرهٔ شب، اشکال دیگری به نام مسطح وکروی و هلالی‌نیز دارد. برای‌کسب اطلاع بیشتردراین باب‌رجوع شودبه:

«الاسطرلاب عندالعرب» من محاضرات ابن‌الهیثم‌التذکاریه **صبری**، **احمدمختار**

ساختمان منطقی قضیه (۳)

بااستفاده از مقالهٔ ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

۸ـ نقیض یك‌حکم

از هرحکم می‌توان حکم دیگری بدست آورد که حکم اولی را نفی کند. یعنی اگر حکم اول صحیح است حکم دوم‌غلط باشد و اگر حکم اول غلط باشد حکم دوم صحیح باشد. این‌دو حکم، که هردو باهم نمی‌توانند صحیح باشند و همچنین هر دو باهم نمی‌توانند غلط باشند، نقیض یکدیگر نامیده‌می‌شوند. نقیض حکم P را به یکی از صورتهای $\bar{P}$ یا $\sim P$ یا $\neg P$ نشان می‌دهند و در هرصورت آن را «نه P» می‌خوانند.

مثال۱ـ فرض‌کنیم حکم A عبارت باشد از : «۳۵=۷×۵». نفی این حکم، یعنی‌نقیض آن‌که A ~ است عبارت می‌شود از «۳۵≠۷×۵». در این مثال حکم A صحیح و نقیض آن غلطاست.

مثال۲ـ حکم P را به شرح زیردر نظرمی‌گیریم: «در مثلث قائم‌الزاویه‌که اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه ۴و۵ باشد اندازهٔ وتر۶است.»

نقیض این حکم یعنی $\sim P$ چنین می‌شود: «درمثلث‌قائم الزاویه‌که اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه ۴ و ۵ باشد اندازهٔ وتر۶ نیست.»

در این مثال حکم P غلط و نقیض آن صحیح است.

می‌توان یك حکم را دوبار نفی‌کرد، در این صورت‌حکم معادل با حکم اول بدست می‌آید. نقیض نقیض یك‌حکم با آن حکم هم ارزاست. $\sim\sim P = P$

مثال‌ـ نقیض حکم «۳۵=۷×۵» می‌شود «۳۵≠۷×۵»، نقیض حکم اخیر بدان معنی است که ۳۵≠۷×۵ درست نیست یعنی ۳۵=۷×۵درست است.

۹ـ قضیهٔ مخالف=خلاف‌قضیه

هرگاه در یك قضیه فرض را تغییر ندهیم اما حکم آن را نفی‌کنیم، قضیه‌ای بیان می‌شود که آن راخلاف قضیهٔاول‌می‌نامیم. بطورکلی هرگاه P فرض و Q حکم یك قضیه باشد، خلاف قضیهٔ «$P \Longrightarrow Q$» عبارت است از«$\sim P$ و$\sim Q$».

وقتی قضیه صحیح باشد خلاف آن غلط است و برعکس ، اگر خلاف قضیه غلط باشد خود قضیه صحیح است.

مثال‌ـ قضیهٔ صحیح زیر را در نظر می‌گیریم: « در هر متوازی‌الاضلاع دو قطر منصف یکدیگرند». خلاف این قضیه که غلط خواهد بود، چنین می‌شود، «چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است و دو قطر آن منصف یکدیگر نمی‌باشند»

۱۰ـ برهان خلف

هرگاه ثابت‌کنیم‌که خلاف قضیه‌ای غلط است در این صورت ثابت شده است‌که خود آن قضیه صحیح است. این روش که در اثبات بسیاری از قضیه‌ها بکار می‌رود به برهان خلف معروف است.

در اثبات یك قضیه با روش برهان‌خلف، فرض می‌شودکه خلاف آن قضیه صحیح باشد. آنگاه ازآن حکمی بدست می‌آید که نقیض فرض قضیه یا نقیض یکی از قضیه‌های ثابت شدهٔ قبلی است. به این ترتیب غلط بودن خلاف قضیه ثابت می‌شود.

مثال۱ـ در اثبات این قضیه‌که «چند ضلعی محدب نمی‌تواند بیش از سه زاویهٔ حاده داشته باشد»، از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم‌که خلاف قضیه درست باشد، یعنی چندضلعی محدبی وجود داشته باشدکه دارای بیش از سه زاویهٔ حاده‌باشد. چون زاویهٔ مجانب هرزاویهٔ حاده زاویهٔ منفرجه است.

پس این چند ضلعی بیش ازسه زاویهٔ خارجی منفرجه‌دارد (حداقل چهارتا). در این صورت مجموع زاویه‌های خارجی آن بیش از °۳۶۰ می‌شود. اما قبلا ثابت شده است که مجموع زاویه‌های خارجی هرچند ضلعی محدب برابر °۳۶۰ است. بنابراین خلاف قضیه، که فرض کردیم صحیح‌است، غلط می‌باشد. پس خود قضیه صحیح است.

مثال۲ـ ثابت کنید که اگر دو عدد طبیعی a و b نسبت به‌هم اول‌باشند، دوعددطبیعی $s=a+b$ و $p=ab$ نیز نسبت به هم اولند.

فرض می‌کنیم که خلاف قضیه درست باشد. در این‌صورت عددی طبیعی و غیر از یك مانند k وجود داردکه p و s را می‌شمرد. چون a و b نسبت به هم اولند پس هرگاه k عدد p را بشمرد یکی از دو عدد a یا b، مثلا a را می‌شمرد. هرگاه k دوعدد s و a را بشمرد b را هم می‌شمرد. پس k هریك ازدوعدد a و b را می‌شمرد. اما درفرض‌داشتیم که a وb نسبت به‌هم اولند. بنابراین خلاف‌قضیه غلط است و درنتیجه‌خود قضیه صحیح می‌باشد.

مثال۳ـ ثابت کنید که دو خط موازی با خط دیگرخود متوازیند.

فرض می‌کنیم خلاف قضیه درست باشد. یعنی‌دو خط‌متقاطع باشند. در این صورت لازم می‌آیدکه از یك نقطه دوخط‌موازی با خطی رسم شده باشد. امااین موضوع نقیض اصل اقلیدس‌است. پس دو خط نقطهٔ مشترك ندارند و خلاف قضیه غلط و خود قضیه صحیح است.

۱۱ـ عکس نقیض‌قضیه

هرگاه در یك قضیه، نقیض حکم را به جای فرض و نقیض فرض را به جای حکم قراردهیم، قضیه‌ای که حاصل‌می‌شود عکس نقیض قضیهٔ اول نام دارد. قضیه وعکس نقیض آن معادلند، یعنی هریك از آنهاکه صحیح باشد دیگری نیز صحیح است.

اگر P فرض و Q حکم قضیه‌ای باشد داریم:

$$P \Rightarrow Q$$

عکس نقیض این قضیه می‌شود:

$$\sim Q \Rightarrow \sim P$$

و داریم:

$$[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\sim Q \Rightarrow \sim P]$$

بنابراین به جای اثبات یك قضیه، می‌توانیم عکس نقیض آن را ثابت کنیم. این روش نیز نوعی برهان خلف است.

مثال ـ در مثلث ABC ارتفاع AH رسم شده است. ثابت کنید که اگر AB و AC باهم برابر نباشند، BH وCH نیز باهم برابر نیستند.

فرض این قضیه را P وحکم آن را Q می‌گیریم. پس:

$$P : AB \neq AC$$

$$Q : BH \neq CH$$

$$\sim P : AB = AC$$

$$\sim Q : BH = CH$$

قبلا ثابت کرده‌ایم که اگر در مثلثی ارتفاع وارد بر یك ضلع میانهٔ آن ضلع باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است:

$$[BH = CH] \Rightarrow [AB = AC]$$

ثابت کرده‌ایم که: $\sim Q \Rightarrow \sim P$

بنابراین ثابت شده‌است که: $P \Rightarrow Q$

یعنی ثابت شده است که:

$$[AB \neq AC] \Rightarrow [BH \neq HC]$$

تمرین

۱ـ نقیض هریك از حکمهای‌زیررابیان کنید ومعلوم کنید کدام‌صحیح وکدام غلط‌است:

ـ مجموع‌دوعدد اول‌عددی‌است‌اول.

ـ سه‌میانهٔ هرمثلث متقاربند.

ـ اگراندازه‌های دو ضلع ازمثلثی ۵و۷باشد، اندازهٔ‌ضلع دیگراز۱۲ بزرگتراست.

ـ عددی که مضرب ۶ باشداول نیست.

۲ـ خلاف هریك ازقضیه‌های زیررابیان کنید:

ـ اگردومیانه ازمثلثی‌باهم برابرباشند آن‌مثلث متساوی‌ـ الساقین‌است.

ـ اگرعددی‌بر۳وبر۸ بخش‌پذیرباشدبر۲۴ نیز بخش‌پذیر است.

۳ـ عکس‌نقیض هریك از قضیه‌های‌زیررا بیان کنید:

ـ اگرعدد a ازعدد b بزرگترباشد، عدد a^3 نیزازعدد b^3 بزرگتراست.

ـ درلوزی دوقطر برهم‌عمودند.

نکاتی چند در بارهٔ مجموعه‌های مساوی

نوشتهٔ محمدحسن رزاقی خمسی

در ریاضیات عمومی مبحث تساوی مجموعه‌ها از مباحث دقیق و حساس بوده و شایستهٔ تعمق و بررسی است. دو مجموعهٔ مساوی یك چیزواحد است، عناصر متشکلهٔ آنها که مجموعه‌ها را می‌سازند نمی‌توانند از یکدیگر مجزا بوده باشند. به‌همین دلیل همیشه فقط یك نمودار ون-اولر برای دو مجموعهٔ متساوی رسم می‌شود. پس اگر بنا به‌عادت هندسهٔ مسطحه (مثل دو شکل متساوی) دو مجموعهٔ متساوی را بوسیلهٔ دودایرهٔ متساوی مرسوم در روی‌صفحه و جدا از هم نشان دهیم بی‌شك دچار اشتباه‌شده‌ایم. برای توضیح مطلب قبلا زیر مجموعه را تعریف می‌کنیم:

یك زیرمجموعه چگونه معرفی می‌شود؟

فرض می‌کنیم مجموعهٔ متناهی A دارای n عضو باشدبرای p عضو آن $(0 \leq p \leq n)$ یك خصلت مشخص جدیدی‌قائل می‌شویم که آنها را از سایر عضوها مشخص می‌گرداند. در این صورت یك مجموعهٔ B منشعب از مجموعهٔ مادر A با p عضو خواهیم داشت‌که اصطلاحاً B را یك زیرمجموعهٔ A می‌نامیم.

p که عددی است صحیح و نامنفی می‌تواند مقادیرمختلف اختیارکند $(p = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$ در اینجامقادیرانتهائی p مورد توجه‌است. به ازای $p = 0$ مجموعهٔ B تهی‌است $(B = \emptyset)$ و این بدان معنی است‌که هیچیك از عضوهای A واجد خصلت جدید نیستند و چون صفر جزء اعداد منسوب به p می‌باشدپس طبیعی است‌که بگوئیم مجموعهٔ تهی هم یك زیرمجموعهٔ A است. مقدار انتهایی دیگر p عدد n است. به‌ازای $p = n$ داریم $B = A$ یعنی تمامی عضوهای مجموعهٔ A واجد خصلت جدید هستند.

و اما در مورد نمودار ون-اولر که قبلا یك منحنی‌مسدود در داخل منحنی مسدود نمودار A رسم شده بود اکنون‌کاملا بر آن منطبق می‌شود وچون n جزء اعدادی است‌که p می‌تواند اختیارکند پس هرمجموعه یك زیرمجموعهٔ خودش است. بطوری که‌مشاهده می‌شود دو مجموعهٔ متساوی از عناصر واحدی تشکیل شده‌اند و نمی‌توانند از یکدیگر مجزا باشند.

دو مجموعهٔ برابر را چگونه می‌توان‌شناخت؟

مسئلهٔ شناسائی دو مجموعه معمولا بدین طریق صورت می‌گیرد که ثابت‌کنیم آن دو مجموعه در عین حال می‌توانندزیر مجموعه‌های یکدیگر واقع گردند. البته این‌کار مستلزم استدلال دقیق است - قضیهٔ زیر برای شناسائی دو مجموعهٔ برابر که‌بیشتر جنبهٔ عملی دارد درحل بسیاری از مسائل موردتوجه است.

قضیه: شرط لازم وکافی برای آنکه دو مجموعه مساوی باشند آن است که اشتراك مجموعهٔ اول با متمم مجموعهٔ دوم و اشتراك مجموعهٔ دوم با متمم مجموعهٔ اول مجموعه‌های‌تهی‌باشند. اگر A و B مجموعه‌های مورد بحث فرض شوند تعادل‌منطقی قضیه به‌صورت‌زیراست:

$$P: A = B \Longleftrightarrow Q: \begin{cases} A \cap B' = \emptyset \\ B \cap A' = \emptyset \end{cases}$$

اثبات-اولا شرط لازم است یعنی اگرداشته‌باشیم $A = B$ باید روابط Q را ثابت‌کنیم. برای این منظور می‌گوئیم وقتی دو مجموعه متساوی هستند که هرعضو اولی عیناً همان عضو دومی بوده و بالعکس هرعضو دومی عیناً همان عضواولی باشد، لذا برحسب تعریف تفاضل دو مجموعه بلافاصله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} A \cap B' = A - B = \emptyset \\ B \cap A' = B - A = \emptyset \end{cases}$$

ثانیاً شرط کافی است یعنی باداشتن Q می‌خواهیم P را ثابت‌کنیم. برای‌این منظور دو مجموعهٔ $A \cup \emptyset$ و $B \cup \emptyset$ را تشکیل‌داده ودرهریك‌ازآنها به‌جای $\emptyset$ متساویش‌را ازروی روابط Q قرارمی‌دهیم.

$$A\cup\emptyset=A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cup A')=$$
$$=(A\cup B)\cap M=A\cup B$$
$$B\cup\emptyset=B\cup(A\cap B')=(B\cup A)\cap(B\cup B')=$$
$$=A\cup B\cap M=A\cup B$$

و ازآنجا: $A\cup\emptyset=B\cup\emptyset$

ویا: $A=B$

قانونی که در متن قضیهٔ فوق بیان شد و در کمال سهولت به ـ اثبات رسید از قوانین اساسی جبر مجموعه‌هاست و بسیاری از تساویها و رابطه‌ها از روی آن به آسانی ثابت می‌شود. منتهادر پاره‌ای موارد حل مسئله از این راه‌کمی طولانی می‌شود و باید راه حلهای دیگری جستجو کرد. با اندکی تجربه و ممارست‌این راههای گوناگون را تمیز و تشخیص می‌دهیم. اکنون بپردازیم به حل چند تمرین به عنوان‌کاربرد این قضیه:

تمرین۱ـ رابطهٔ محقق $A\cup M=M$ را مجدداً به کمك قضیهٔ فوق ثابت‌کنید.

حل‌ـ مفاد قضیه رادرموردومجموعهٔ M و $A\cup M$ اجرا کرده‌و می‌نویسیم:

$$M\cap(A\cup M)'=M\cap(A'\cap M')=$$
$$=M\cap M'\cap\emptyset=\emptyset$$
$$(A\cup M)\cap M'=(A\cup M)\cap\emptyset=\emptyset$$

تمرین۲ـ درستی رابطهٔ $A\cup(A\cap B)=A$ را تحقیق‌کنید.

حل‌ـ دو مجموعهٔ A و $A\cup(A\cap B)$ را در نظر گرفته ومی‌نویسیم:

$$[A\cup(A\cap B)]\cap A'=(A\cap A')\cup[A'\cap(A\cap B)]=$$
$$=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$$
$$A\cap[A\cup(A\cap B)]'=$$
$$=A\cap[A'\cap(A'\cup B')]=\emptyset$$

تمرین۳ـ تساوی $A-(B-A)=A$ را اثبات کنید.

حل‌ـ این رابطه نیزمانند رابطهٔ تمرین (۲) بوسیلهٔرسم نمودار ون‌ـ اولر بلافاصله اثبات می‌شود ولی حل آن از راه قضیهٔ فوق و انتقال به‌بعضی‌نکات دقیق‌بسیارجالب توجه است.مانند تمرینهای قبل عمل می‌کنیم:

$$[A-(B-A)]\cap A'=[A\cap(B'\cup A)]\cap A'=$$
$$=(A\cap A')\cap[(B'\cup A)\cap A']=\emptyset$$
$$A\cap[A-(B-A)]'=A\cap[A'\cup(B\cap A')]=$$
$$=(A\cap A')\cup[A\cap A']=\emptyset$$

تمرین۴ـ رابطهٔ $A\cup B=A$ را با محقق بودن رابطهٔ $A\cap B=B$ ثابت‌کنید (رابطهٔ اخیرجانشین $B\subset A$ شده‌است)

راهنمائی ـ در مورد مجموعه‌های A و $A\cup B$ مفادقضیهٔ فوق را اجراکرده و درضمن محاسبه ازرابطهٔ محقق استفاده می‌کنیم.

نجوم اسلامی(دنباله از صفحهٔ ۹۹)

است. تأثیردیگر و مهمترارسطودربحث از «ماهیت‌اجرام‌فلکی» جلوه‌گرشده است. فیلسوفان ومنجمان مسلمان حتی‌درمواردی‌که دستگاه نجومی بطلمیوسی‌را پذیرفته‌اند، هرگز مانند بطلمیوس این دستگاه را یك مدل ریاضی محض تلقی‌نکرده‌اند. بطلمیوس به اصطلاح معروف یونیان در پی آن بوده است تا «پدیدارها را نجات دهد» به همین لحاظ تنها یك مدل ریاضی عرضه کرد تا آنچه را به‌ظاهر می‌بیند به‌نحوی توجیه‌کند. اما ارسطو،دستگاه نجومی خود را یك‌واقعیت خارجی ویك حقیقت فیزیکی‌می‌دانست نه یك توجیه ریاضی و ذهنی. منجمان اسلامی ازآنجاکه وظیفهٔ علوم طبیعی‌راکشف واقعیت‌طبیعت‌می‌دانستند، از تحمیل‌ساخته‌های ذهن خود بر طبیعت ابا داشتند و به همین لحاظ حتی افلاك بطلمیوسی را نیز به شیوه ارسطو، مجسم‌انگاشتند و درعالم‌واقع موجود دانستند» در قرن سوم چهره‌های برجسته‌ای در این علم درخشیدند ازآن جمله **حبش‌الحاسب** بودکه به سرپرستی او زیج مأمونی که گاهی آن را«زیج‌حبش‌المعروف بالدمشقی» نامیده‌اند تهیه شد.

دیگر **محمدبن موسی خوارزمی** است‌که جداول‌نجومی مهمی موسوم به زیج خوارزمی از خود برجای‌گذاشت. اختر-شناس معروف دیگراین دوره **ابومعشر** است‌که وی رابزرگترین علماءنجومی‌اسلام‌نامیده‌اند وکتاب «المدخل‌الی‌احکام‌النجوم» او به لاتین ترجمه شده وبارها در اروپا چاپ شده‌است.

در همین زمان منجم معروف **احمدبن‌کثیر،فرغانی** به کارهای نجومی می‌پرداخت. اثرمعروف او «کتاب فی‌الحرکات السماویه و جوامع علم النجوم» که به بحث دربارهٔ اندازهٔعالم و سیارات بود به لاتین ترجمه شده و فواصلی‌که درآن‌آمده بود تا زمان‌کپرنیك در مغرب زمین قبول عام داشت.

دربارهٔ اعداد اول چه می‌دانید؟

ترجمه از : جوادفیض دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تبریز

۱ـ عدد اول چیست؟

از روی‌اعمال مربوط به اعداد به‌ویژه ضرب اعدادطبیعی به «اعداد اول» پی‌برده شد . می‌دانیم که حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی همواره عددی است طبیعی . بعضی از اعداد طبیعی وجود دارندکه حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یك می‌باشند ، و نیز اعداد طبیعی وجود دارندکه حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر ازیك نمی‌باشند ، برای مثال اعداد ۲ و ۳ و ۵ و۱۳ـ چنین اعدادی را «اعداد اول» می‌نامند بنابراین :

«عدد اول‌عددی است طبیعی و بزرگتر از یك، بطوری که حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر ازیك نمی‌باشد».

اکنون سؤالی پیش می‌آید : آیا می‌توان تعیین کردکه عدد طبیعی $n>1$ اول است یا نه ؟ برای این تشخیص باتوجه به تعریف عدد اول، روشی به‌صورت زیرپیشنهاد شده است:

هرگاه عدد طبیعی n اول نباشد، پس حاصل‌ضرب دوعدد طبیعی‌بزرگتر ازیك مثلا a وb خواهد بود. یعنی $n=a\times b$ بطوری‌که $a>1$ و $b>1$ ، نتیجه می‌گیریم که $n>a$ و $n>b$ و بدین ترتیب عدد طبیعی $n>1$ حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی کمتر ازخودش‌می‌باشد، چنین‌اعدادی را«اعدادتجزیه‌پذیر» یا غیر اول می‌نامند . پس بطورخلاصه :

$$n=a\cdot b \quad ; \quad 1<a<n \quad و \quad 1<b<n$$

b خارج قسمت تقسیم n بر a عددی است طبیعی ، و a یعنی مقسوم‌علیه عدد بزرگتر از ۱ وکوچکتر از n است . بنابراین برای تعیین آنکه عدد طبیعی $n>1$ اول است یا نه، کافی‌است پیدا کنیم که آیا این عدد مقسوم‌علیه طبیعی بزرگتر از یك و کوچکتر از n دارد یا نه ؟ برای انجام چنین کاری کافی‌است n را به ترتیب به ۲، ۳، ... ، $n-1$ تقسیم کنیم . هرگاه در تقسیم n براین اعداد هیچیك ازباقیمانده‌ها صفر نباشد، nعددی است اول .

بدین ترتیب همواره حداقل بطور تئوری ، ممکن است (بعد از تعداد محدودی تقسیم) گفت‌که آیا عدد طبیعی داده‌شدهٔ n اول است یا نه؟ البته درعمل چنین روشی بسیار مشکل است ، و امروزه بکار نمی‌رود ، زیرا مستلزم محاسبات طولانی است. به‌جای بکار بردن این روش در مورد عدد $2^{101}-1$ به‌طریق دیگری ثابت نموده‌اندکه این‌عدد اول نیست . گرچه دو عامل تجزیهٔ این‌عددکه اعداد طبیعی بزرگتر ازیك هستند معلوم‌نیست (اما می‌دانیم‌که چنین تجزیه‌ای وجود دارد). هنوز نمی‌دانیم‌که آیاعدد $2^{2^{27}}+1$ ، اول است یا نه؟

۲ـ مقسوم‌علیه‌های اول یك‌عدد

اکنون بعضی ازقضایای ساده را درمورد اعداد اول ثابت خواهیم‌کرد .

قضیهٔ۱ـ هرعدد طبیعی $n>1$ حداقل یك مقسوم‌علیه اول دارد .

اثبات‌ـ $n>1$ عددی است طبیعی که دارای مقسوم‌علیه بزرگتر از یك است، برای مثال خود عددn.

بین مقسوم‌علیه‌های عدد $n>1$ ، یکی وجود داردکه از همه‌کوچکتر است آن‌را p می‌نامیم. اگر p عدد اولی نباشد پس بنا به‌تعریف حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی a و b است‌که هر یك بزرگتر از یك وکوچکتر از p می‌باشند ، اما این خلاف آن است‌که قبول‌کردیم p کوچکترین مقسوم‌علیه n است. پسp اول است .

قضیهٔ ۲ـ هرعدد غیر اول n حداقل دارای یك مقسوم‌علیه اول کوچکتر یا مساوی با $\sqrt{n}$ است.

اثبات ـ هرگاه n عدد غیر اول باشد پس $n=ab$، که a و b اعداد طبیعی کوچکتر از n هستند. فرض کنیم که $a<b$ بنابراین $n=ab\geq a^2$ یعنی $a\leq\sqrt{n}$. اما عدد a بزرگتر از یك است چون اگر $a=1$ باشد $n=b$ خواهد بود درصورتی که باید $n<b$ باشد. بنا به‌قضیهٔ ۱، عدد a دارای یك مقسوم‌علیه اول p است و بدیهی است که $p\leq a$. و درنتیجه $p\leq\sqrt{n}$.

۳ـ چند عدد اول وجود دارد؟

قضیهٔ ۳ـ هرگاه $n>2$ عددی طبیعی باشد، بین n و $n!$ حداقل یك عدد اول وجود دارد ($n!$ عبارتست از حاصل‌ضرب: $1\times2\times\dots\times n$)

اثبات ـ چون $n>2$ عدد صحیح و مثبتی است پس: $N=n!-1>1$ است. بنا به‌قضیهٔ ۱ عدد N دارای مقسوم‌علیه اول p است که کوچکتر یا مساوی N و از اینرو از $n!$ کوچکتر می‌باشد. اما نمی‌توانیم $p\leq n$ داشته باشیم، چون p یکی از عوامل عدد $n!$ و عدد N است و $n!-N=1$، می‌باشد یعنی مقسوم‌علیه مطلوب یك می‌شود که غیرقابل قبول است. از اینرو $p>n$ و چنانکه می‌دانیم $p<n!$ یعنی $n<p<n!$، و قضیهٔ ۳ ثابت شده است.

بدین‌ترتیب، نتیجه می‌شود که اعداد اول نامحدودند. این موضوع را اقلیدس تشخیص داده است. درعمل معلوم شده است که اعداد اولی با حداقل هزار رقم داریم، ولی خود این اعداد مشخص نشده‌اند. بزرگترین عدد اول معلوم‌شده کنونی ۱۳۳۲ رقم دارد که عدد $2^{4423}-1$ می‌باشد. درسال ۱۹۶۱ اول بودن این‌عدد به‌کمك‌ماشین محاسبهٔ الکترونیکی (IMB ـ ۷۰۹۰) اثبات شد. ونیز درسال ۱۸۷۶ ثابت شده بود که عدد $2^{127}-1$ اول است درصورتی که تعداد ارقام آن درآغاز سال ۱۹۵۱ بدست آمد.

به دنبال قضیهٔ ۳، «برترانددپوستوله» درسال ۱۸۵۰ ثابت کرد که اگر $n>3$ یك عدد طبیعی باشد، حداقل یك عدد اول بین n و $2n-2$ وجود دارد. یعنی درقضیهٔ ۳ به‌جای $n!$ عدد $2n$ را قرار داد. چگونگی اثبات مقدماتی این‌قضیه نسبتاً طولانی است. حتی‌می‌توان ثابت کرد که به ازای اعداد طبیعی $n>5$ حداقل دوعدد اول بین n و $2n$ وجود دارد.

ازقضیهٔ چبیسف به‌آسانی نتیجه می‌شود که به ازای هرعدد طبیعی s حداقل سه عدداول، هرکدام با s رقم وجود دارد. هرکدام از اعداد 10^{s-1}، $2\times10^{s-1}$، $4\times10^{s-1}$، $8\times10^{s-1}$ دارای s رقم هستند بنا به‌قضیه چبیسف به‌ازای $s>1$، اعداداول p، q و r چنان وجود دارند که:

$$10^{s-1}<p<2\times10^{s-1}<q<4\times10^{s-1}<$$
$$<8\times10^{s-1}$$

واضح است که هرکدام از اعداد p، q و r دارای s رقم‌هستند. به ازای $s=1$، چهارعدد یك‌رقمی و اول ۲، ۳، ۵ و ۷ را داریم. تعداد ۲۱ عدد دو رقمی‌اول و بالاخره تعداد ۱۴۳ عدد سه رقمی اول‌داریم. ونیزحداقل سه عدد اول با صد رقم‌وجود دارد، که رابینسون آنها رابه‌صورت زیرپیدا کرد:

$81\times2^{324}+1$ و $63\times2^{326}+1$ و $35\times2^{327}+1$

تاکنون عدد اول هزار رقمی در سه‌نوع پیدا شده است.

۴ـ چگونگی پیداکردن اعداد اول کوچکتر از عدد مفروض

روشی راکه ارائه می‌شود، مدتهاست معلوم شده و به غربال‌اراتستن معروف است. فرض کنید می‌خواهیم اعداد اول کوچکتر از a را پیدا کنیم. برای‌این‌منظورهمهٔ اعدادطبیعی‌متوالی کوچکتر از a را می‌نویسیم، از این رشته اعداد تمام‌عددهائی راکه اول نیستند حذف می‌نمائیم، یعنی‌نظیر هرعدد اول $p<a$ همه‌اعداد بزرگتر از p راکه بزرگترند وبر p بخش‌پذیرهستند حذف می‌کنیم. در این روش تمام اعداد غیر اول کوچکتراز a حذف‌شده وفقط اعداد اول‌باقی می‌مانند. ابتداهمهٔ اعدادبزرگتر از ۲و۳ و قابل‌قسمت به‌آنها را حذف می‌کنیم. دیگرلازم‌نیست اعداد قابل‌قسمت به۴ را حذف‌کنیم، چون تمام اعداد بزرگتر از۲ و قابل‌قسمت به‌آن‌کاملا حذف شده‌اند. همهٔ اعداد بزرگتر از۵ و قابل‌قسمت به۵راحذف‌می‌نمائیم و.... اکنون دیگراحتیاج به‌حذف مضربهای عدد بزرگتر از $\sqrt{a}$ نداریم، چون، اگر n عدد غیر اول کوچکتر یا مساوی a باشد، بنا به‌قضیهٔ ۲، عدد n دارای مقسوم‌علیه اول $p\leq\sqrt{n}$ است و بنابراین $p\leq\sqrt{a}$، چون مضربهای عدد n کاملا حذف شده‌اند پس اعداد بزرگتر از p و قابل‌قسمت به‌آن‌را حذف کرده‌ایم.

nامین اعداد اول متوالی‌درسری اعداد طبیعی را با P_n نشان‌می‌دهیم، بنابراین $P_1=2$، $P_2=3$، $P_3=5$، $P_4=7$، $P_5=11$، $P_{10}=29$، $P_{25}=97$، محاسبهٔ $P_{1000}=5041$ آسان است. درسال ۱۹۰۹ جدول اعداد اول کوچکتراز ده‌میلیون

انتشار یافت . در این جدول بـرای هر عدد طبیعی کـوچکتر از ۶۰۰، ۱۰۰،۱۰ که بر ۲،۳،۵،۷ قـابـل قسمت نـباشد، کوچکترین عامل آن داده شده است.

در سال ۱۹۵۱ جدول اعداد اول بالاتـر از ۱۱ میلیون منتشرشد.

یك لهستانی به نام Jacob philip Kulik یـك کتاب خطی تدوین نمود (که درآکادمی علوم اتریش محفوظ است) که در آن تمام اعداد اول تایکصدمیلیون داده شده است. اخیراً C.L.Backer و F.J.Gruenbeger میکروکارتهایـی شامل تمام اعداد اول کوچکتر از ۱۰۴٬۳۹۵٬۳۰۱ شصت میلیونیمین عدد اول را تهیه کرده‌اند.

حافظهٔ ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی، تا ۵۰۰ میلیون عدد اول متوالی ذخیره می‌کند.

۵ـ اعداد اول دوقلو

در بارهٔ رشته اعداد اول متوالی یعنی مثلا رشته:

۲،۳،۵،۷،۱۱،۱۳،۱۷،۱۹،۲۳،۲۹،۳۱،۳۷،۴۱،۴۳،۴۷،...

سؤالهایی پیش می‌آید که فقط عده‌ای از آنها را می‌توان پـاسخ گفت.

برای مثال، کوچکترین اعداد اول متوالی ۲ و ۳ هستند، این دوعدد، طبیعی و متوالی هستند. این سؤال پیش می‌آید که آیا اعداد طبیعی متوالی دیگری هم وجود دارد کـه هر دو اول باشند؟ به آسانی می‌توان نشان داد که چنین اعدادی وجودندارد چون دو عدد طبیعی متوالی حتماً یکی زوج است واگر بزرگتر از ۲ باشد عدد غیراول خواهد بود.

ولیکن ، تعداد بیشتری اعداد متوالی فرد وجود دارنـد که اول هستند. بـرای مثال ۳ و ۵، ۵ و ۷، ۱۱ و ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۹، ۳۱، ۴۱، ۴۳. چنین جفتهایی را «اعداد اول دوقلو» می‌نامیم تعداد ۱۵۲۸۹۲ از چنین جفت اعداد و کمتـر از ۳۰ میلیون وجود دارد.

از مدتها قبل، این سؤال پیش آمده است که آیـا تعداد اعداد اول دوقلو نامحدوداست؟ پاسخ این سؤال را نمی‌دانیم. به‌عبارت دیگر نمی‌دانیم مثلا آیا عدد ۲ به چند طریق نامحدود به صورت تفاضل دوعدد اول می‌تواند نوشته شود.

فرض چنین است که هرعدد زوج را بتوان به‌صورت تفاضل دو عدد اول متوالی به‌طریقه‌های نامحدودی نوشت، اماحتی قادر نیستیم ثابت کنیم که هرعدد زوج حداقل به یك طریق می‌تواندبه تفاضل دو عدد اول متوالی نـوشته شود . این مـوضوع در مورد تعدادی از اعداد زوج متوالی تحقیق شده است برای مثال:

۸۹ − ۹۷ = ۸ و ۲۳ − ۲۹ = ۶ و ۷ − ۱۱ = ۴ و ۳ − ۵ = ۲

و ۱۹۹ − ۲۱۱ = ۱۲ و ۱۳۹ − ۱۴۹ = ۱۰

و ۱۸۳۱ − ۱۸۴۷ = ۱۶ و ۱۱۳ − ۱۲۷ = ۱۴

۵۲۳ − ۵۴۱ = ۱۸

همچنین نمی‌توانیم ثابت کنیم که هرعدد زوج تفاضل دو عدد اول است (که لزوماً متوالی نیستند).

لیکن می‌توانیم، همهٔ اعداد فردی راکه تفاضل دوعدداول هستند تعیین کنیم. اگرعدد طبیعی و فرد n تفاضل دوعدداول p و q باشد از اعداد p و q می‌بایست یکی مساوی ۲ باشد. بدین ترتیب $n=p-2$ که p عدد فرد اولی است. بنابرایـن تمام اعداد فردطبیعی را می‌توان به صورت تفاضل دو عدد اول بـیان نمود، و این کار باکم کردن ۲ از این اعداد فرد اول یعنی اعداد:

۱،۳،۵،۹،۱۱،۱۵،...

حاصل می‌شود که تعداد شان نامحدود است.

اما تعداد نامحدودی اعداد فرد وجود دارند که تفاضل دو عدد اول نیستند، برای مثال همهٔ اعداد به صورت $6k+1$ که k عدد طبیعی است. در حقیقت، نمی‌توانیم $6k+1=p-2$ را چنان داشته باشیم که p عدد اولی باشد بنابراین:

$$p=6k+3=3(2k+1)$$

و در نتیجه p عدد غیراول خواهدبود.

دنباله دارد

تناقضهای نظریهٔ مجموعه‌ها (دنباله‌ازصفحه ۹۷)

تعداد عضوهای آن می‌باشد. بورالی‌فورتی (Burali-Forti) ریاضیدان ایتالیائی در ۱۸۹۷ اعلام داشت که مجموعهٔ عددهای اصلی مجموعه‌ای مشخص نیست. زیرا این مجموعه خود دارای یك عدد اصلی است که ازبزرگترین عدد اصلی عضو مجموعه بزرگتر است. آیا این عدد اصلی عضو مجموعهٔ مزبور می‌باشد یا نه؟

تناقضهای دیگری نیز در نظریهٔ مجموعه‌ها وجود خواهد داشت. از اینرو لازم است که در بیان مسائل و کار برد نظریهٔ مجموعه‌ها توجه داشت که تناقض پیش نیاید.

قضایایی ظریف دربارهٔ مثلث

نوشتهٔ: مارتین گاردنر

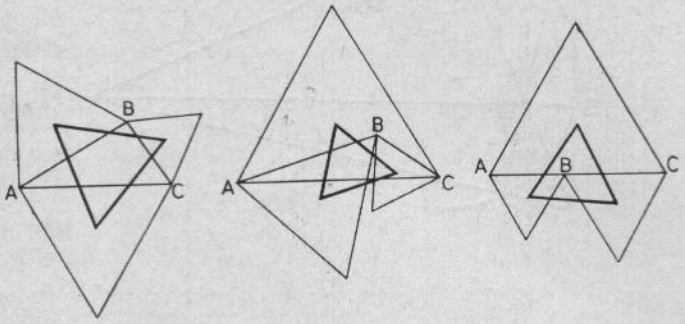
ترجمه و تنظیم از: مهندس داویدریحان

ممکن است اینطور فرض شود که مثلث بی‌پیرایه و ساده توسط هندسه دانان قدیم یونان چنان دقیق بررسی شده است که تا قرنها بعد تعداد بسیار زیادی از مفاهیم پر معنای مربوط به چند ضلعیهای باتعداد زیادتر اضلاع و زوایا نتوانست به آنها اضافه شود. امّا این عقیده به دور از واقعیت‌است. مطمئناً، تعداد قضایای مربوط به مثلث نامحدود است ولی‌از برخی جهات این قضایا چنان پیچیده و بی‌ثمر می‌شوند که دیگر نمی‌توان به آنها لغت‌ظریف‌را اتلاق کرد. اولین‌بار ژرژ پولیا (George Polya) درجهٔ ظرافت یك قضیهٔ هندسی را چنین تعریف کرد:

«درجهٔ ظرافت یك قضیهٔ هندسی متناسب با عده افکاری است که در آن می‌بینید و باکوششی که صرف دیدنشان می‌کنید نسبت عکس دارد».

برخی از قضایای ظریف مربوط به مثلث درسده‌های‌اخیر کشف شده‌اند ولی خواننده آنها را در دروس هندسهٔ مسطحهٔ مقدماتی خود زیارت نکرده است. در اینجا فقط قضایای‌ساده‌ای راکه بخصوص سرگرم‌کننده هم هستند مورد بررسی قرار خواهیم داد.

موضوع را بارسم مثلث ABC با مقیاس و اندازهٔ غیر مشخص (شکل زیررا ببینید) شروع می‌کنیم . روی هرکدام از اضلاع آن یك‌مثلث متساوی الاضلاع‌در خارج (شکل طرف‌چپ) یا در داخل (شکل وسط) می‌سازیم. در هردو حالت، با متصل کردن مرکزهای (محل تقاطع دو ارتفاع) سه مثلث جدید(که با خط پررنگ‌تر نمایش داده شده است)، مشاهده می‌شود که مثلث متساوی الاضلاع چهارمی بدست می‌آید. (گاهی مسئله چنین عنوان می‌شود که مثلثهای متساوی‌الساقینی‌رسم کنیم که زوایای مجاور به قاعده‌اش مساوی با °۳۰ باشد، سپس‌رأسهای



آنها را به هم وصل‌کنیم، و چون این رأسها بر مرکز مثلثهای متساوی الاضلاع منطبقند، این دو قضیه در حقیقت یکی هستند) هرگاه خودمثلث اولیه متساوی الاضلاع باشد، مثلثی‌که ازبه‌هم پیوستن مرکزهای مثلثهای متساوی الاضلاع بنا شده در طرف داخل این مثلث بدست می‌آید، تبدیل به یك نقطه خواهد شد. این مسئله در مورد حالت خاصی‌که مثلث تبدیل به قطعه خط ABC می‌گردد، نیز صحیح است (در شکل طرف راست نشان داده شده است). اطلاعی ندارم‌که چه‌کسی برای اولین بار به این مسئله اندیشیده است، اما آن را به ناپلئون نسبت می‌دهندو در دهه‌های اخیر اثباتهای متفاوتی برای آن به چاپ رسیده است. اثبات غیرمعمولی برای این مسئله که فقط با استفاده از نظریهٔ گروهها وعملیات تقارنی‌انجام گرفته است توسط‌ریاضیدان روسی ایزاك موئیزویچ یاگلوم در کتاب تبدیلات‌هندسی‌به‌چاپ رسیده است.

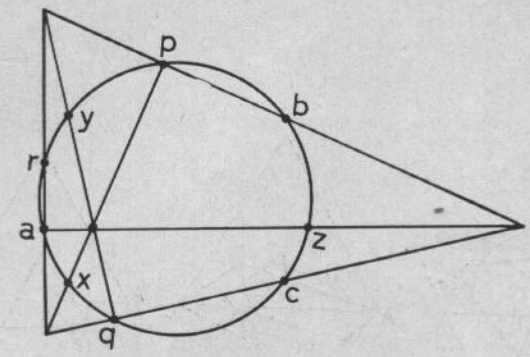
قضیهٔ ظریف دیگرکه در آن یك دایره (مانند چهارمین

مثلث متساوی الاضلاع‌در مثال قبلی) بطورناگهانی پدیدارمی‌شود قضیهٔ معروف دایرهٔ نه نقطه است. این قضیه توسط دو ریاضیدان فرانسوی کشف و در سال ۱۸۲۱ انتشار یافت. روی هر مثلث می‌توان سه دستهٔ سه‌تائی نقاط را مشخص کرد (شکل زیر را ببینید):

۱) اوساط اضلاع (a،b،c)

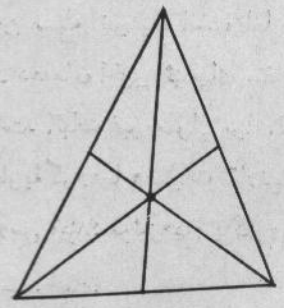
۲) پاهای سه ارتفاع (p،q،r)

۳) وسطهای پاره‌خطهایی که هررأس رابه «مرکزارتفاعی» (محل تقاطع سه ارتفاع) وصل می‌کند (x،y،z). بطوری که در



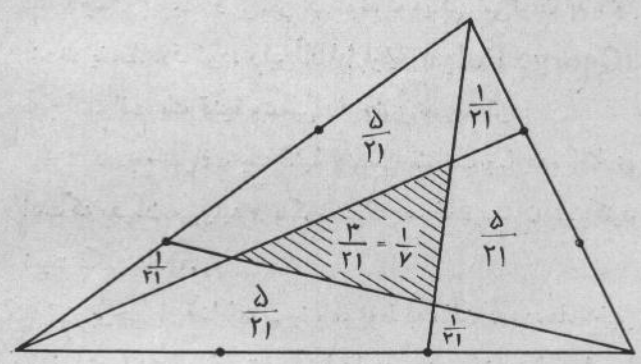
شکل دیده می‌شود، این نه نقطه متعلق به یك دایره‌اند و این قضیهٔ تکان دهنده منتهی به قضایای پربرکت دیگری می‌شود. به سادگی می‌توان ثابت کرد که شعاع دایرهٔ نه نقطه درست برابر با نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث اولیه است. حقیقت این‌امر که سه ارتفاع نیز متقاربند (در یك نقطه‌یکدیگر را قطع می‌کنند) خود نکتهٔ جالبی است. این موضوع اخیر نیز درکتاب اقلیدس نیامده است. هرچند ارشمیدس اشاره کرده است که، پروکلوس فیلسوف و هندسه‌دان قرن پنجم اولین کسی بوده که این موضوع را بطور ضمنی بیان داشته است.

سه خطی که وسطهای ضلعها را به رأسها وصل می‌کنند، میانه‌های مثلث نامیده می‌شوند. (شکل پائین را ببینید). این سه خط نیز در یك نقطه متقاربند واین نقطه به نام نقطهٔ مرکزی مثلث نامیده می‌شود. نقطهٔ مرکزی مثلث هرمیانه را ثلث می‌کند و سه‌میانه مثلث را به شش جزء با مساحتهای متساوی‌تقسیم



می‌نماید. واقعیت دیگر این است که نقطهٔ مرکزی مثلث،مرکز ثقل آنهم هست و این امر توسط ارشمیدس شناخته شده است. شاید معلم فیزیك شما برای اثبات این موضوع مثلثی را روی یك قطعهٔ مقوائی ترسیم کرده و آن را بریده است، سپس‌محل مرکز ثقل را با ترسیم سه میانه‌اش تعیین کرده و این مثلث را در این نقطه روی نوك یك مداد به حالت متعادل نگاهداشته است.

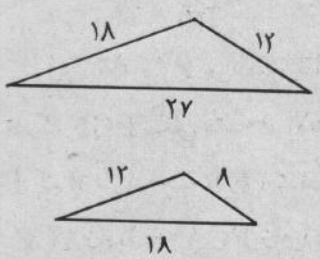
میانه حالت خاصی از یك خط کلی است که به نام خط «سوائی» معروف است (منسوب به‌ریاضیدان ایتالیائی قرن‌هفدهم جیووانی‌سوا Giovani Ceva). هر خطی که یك رأس‌را به نقطه‌ای واقع در روی ضلع مقابل یك مثلث وصل کند، خط سوائی نامیده می‌شود. هرگاه به جای اوساط اضلاع ،نقاطی را اختیار کنیم که ضلع را به سه ثلث تقسیم کنند، سه خط‌سوائی‌نظیر که در شکل زیر نشان داده شده است، مثلث را به هفت ناحیه تقسیم می‌کنند و مساحت هرناحیه مضرب صحیحی از $\frac{1}{21}$ مساحت



مثلث اولیه است، مثلث‌مرکزی، که در روی شکل‌هاشورخورده است دارای مساحتی برابر با $\frac{3}{21}$ یا $\frac{1}{7}$ است. راههای مشخصی برای اثبات این موضوع وجود دارد. یکی از آنها استفاده از حالت کلی است که درآن هرضلع مثلث به n جزء متساوی‌تقسیم شده باشد. هرگاه خطوط سوائی حالت اخیر را به اولین نقطهٔ بعد از رأس، در جهت‌عقربه‌های ساعت (یاخلاف‌جهت عقربه‌های ساعت)، وصل کنیم مساحت مثلث مرکزی (همانطور که هوارد. دی.گراسمن اثبات کرده‌است) برابربا $\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$ خواهدبود. حالت کلی‌تری از این مسئله که در آن عدهٔ تقسیمات متساوی در روی هرضلع مثلث اولیه بطور مستقل تغییر می‌کنند ، توسط

ا.چ.اس.ام.کوکستر در کتاب خود تحت‌عنوان «مقدمه‌ای بر هندسه» (سال ۱۹۶۱) مورد بحث قرار گرفته است. کوکستر فرمولی‌را که در سال ۱۸۹۶ بدست آمده است، اختیار کرده و نشان داده است که چگونه می‌توان به سادگی این‌فرمول را با محاط کردن یك مثلث در یك شبکهٔ منتظم نقاط بدست آورد.

هرمثلث دارای سه ضلع وسه‌زاویه است که آنها رااجزاء اصلی مثلث می‌نامیم. اقلیدس در سه مورد تساوی دو مثلث راثابت کرد وتساوی دو مثلث متضمن این نکته‌بودکه سه جزء ازاجزاء اصلی باهم‌برابر باشند (به‌عنوان مثال دوضلع‌و زاویهٔ بین آنها). آیا ممکن است که در دو مثلث چهارجزء اصلی باهم برابر باشند ولی آن دو مثلث‌مساوی یکدیگر نباشند؟ این موضوع‌غیرممکن به نظر می‌رسد، ولی بطوری‌که دیچارد. جی. پاولی یکی از معلمان ریاضی‌کالیفرنیا، اطلاع داده است، مجموعه‌ای نامتناهی از مثلثهایی «۵شرطی» وجود دارد. دومثلث «۵شرطی»وقتی‌باهم برابرندکه سه ضلعشان باهم برابر باشد و در اینصورت تنها وضعیتی‌که درآن نابرابری مثلثها وجود دارد حالتی است‌که دو ضلع و سه زاویه باهم برابر باشند. کوچکترین مثالی از این مثلثها که‌اضلاعشان اعداد صحیح است در شکل روبرو نموده شده‌است.



لازم به یاد آوری است که اضلاع متساوی۱۲و ۱۸ اضلاع متناظر نیستند الزاماً مثلثها متشابهند. زیرا زوایای متناظر با هم برابرند، ولی این دو مثلث برابر نیستند مسئلهٔ یافتن چنین مثلثهایی رابطهٔ نزدیکی با نسبت طلائی دارد (نسبت ذات وسط و طرفین).

کوچکترین جفت‌های مثلث۵شرطی

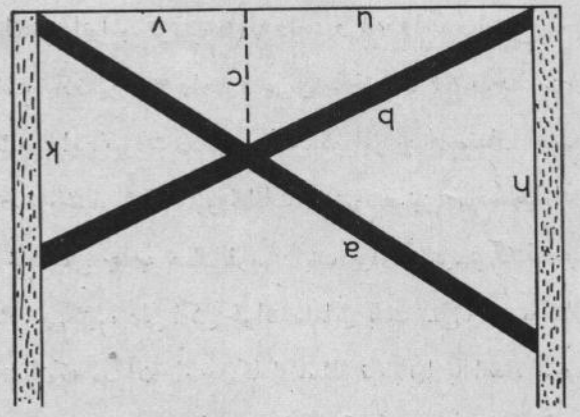
فرمولهای قدیمی زیادی برای‌بدست‌آوردن اضلاع مثلث، سطح، زوایا،وجود داردکه با داشتن‌اندازهٔ ارتفاعات، میانه‌ها و غیر و حاصل می‌شود. عبارت:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)p-c)}$$

که در آن a،b،c اندازه‌های اضلاع هرمثلث و p نصف‌مجموع سه ضلع است، معرف مساحت مثلث است. این فرمول اولین بار در **Metrica** «متریکا»ی هرون اسکندرانی ثابت شد. شخص اخیر در قرن اول یا دوم زندگی می‌کرده است. فرمول هرون را می‌توان به سادگی به‌کمك مثلثات اثبات نمود. راه حلهای هندسی مختلفی نیز برای اثبات آن وجود دارد.

هرون‌که غالباً هرو نامیده می‌شده است ، امروزه بواسطهٔ رساله‌هایش دردستگاههای خودکاریونانی و بازیچه‌های‌ئیدرولیکی بسیار مشهور است، مثلا می‌توان «چشمهٔ هرو» را نام بردکه‌در آن به نظر می‌رسدکه آب جاری بالاتر از سطح چشمه فوران می‌کندکه این خود ناقض قانون جاذبه است.

یکی از سرگرمیهای بامنشاء نامعلوم‌که لازمهٔ پاسخ‌به‌آن مثلثهای متشابه است، بنابه‌گفتهٔ ا.ف.چرچ نسبتاً انگشت‌نمااست. وی می‌گوید: «افسون این مسئله به واسطهٔ سادگی ظاهری‌اش (در نظر اول) در حل مسئله است‌که به سرعت بـه صورت یـك وضع درهم و برهم جبری در می‌آید». مسئله بدین قراراست‌که دو نردبان با طولهای نامساوی (اگر مساوی بودند مسئله بسیار مقدماتی می‌شد) که هردو بردوساختمان‌مطابق‌شکل زیرمتکی‌اند. در صورتی‌که طولهای نردبانها و ارتفاع نقطهٔ تقاطع آنها معلوم باشد، عرض فضای محدود بین ساختمانها چقدر است؟ سه مقدار مفروض در نسخه‌های بطبع رسیدهٔ مسئله متفاوت است. دراینجا



اعدادی راکه درکتاب صد مسئلهٔ سرگرم‌کنندهٔ ریاضی نوشتهٔ ویلیام رانسون آمده‌است، ذکر می‌کنیم. طولهای نردبانهاعبارتند از ۱۰۰ واحد (a) و ۸۰ واحد (b) و ارتفاع محل تقاطعشان از زمین ۱۰ واحد (c) است، با در نظر گرفتن مثلثهای متشابه رانسون به معادلهٔ زیررسید:

$$k^4-2ck^3+k^2(a^2-b^2)-2ck(a^2-b^2)+$$
$$+c^2(a^2-b^2)=0$$

که به صورت زیردر می‌آید:

$$k^4-20k^3+3600k^2-72000k+360000=0$$

این معادله از درجهٔ چهارم است که می‌توان آنرا به روش هرنر Horner یا سایرروشهای‌تقریبات متوالی حل‌نمود. از حل این معادله جواب k در حدود۱۱/۹۵۴ بدست می‌آید که به ازای آن عرض ساختمانها (u+v) برابر با +۷۹/۱۰ می‌شود.

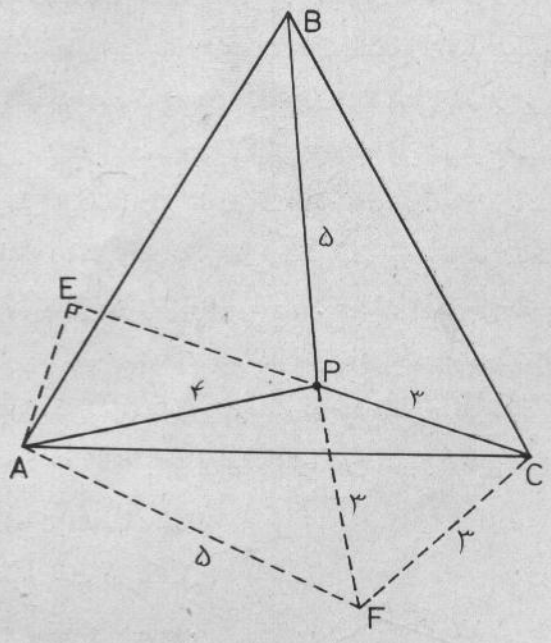
راه حلهای دیگری برای این مسئله‌موجود است که یکی از راه حلهای خوب مثلثاتی‌اش توسط گراهام درکتابش به نام «راههای جالب در مسائل ریاضی» (۱۹۶۸) داده شده‌است.

پرسش مشکلی در مقابل ما قد علم می‌کند وآن این‌است که‌آیا صورتی از این مسئله وجود دارد (فرض می‌شودکه طول نردبانها باهم برابر نیستند) که هرچهار مقدار اعدادصحیح‌باشند؟ آنطورکه من می‌دانم این پرسش اولین‌بار توسط آلبرت-آ-بنت Bennett از دانشگاه براون در آوریل ۱۹۴۱ در مجلهٔ ماهنامهٔ ریاضی آمریکا پاسخ گفته شد. بعدها معادلهٔ بنت مجدداً کشف شد. کوچکترین مقادیر صحیح که هم ارتفاع محل تقاطع و هم عرض بین ساختمانها را حداقل می‌سازد موقعی است که طول نردبانها به ترتیب ۱۱۹ واحد و ۷۰ واحد و ارتفاع محل تقاطع اززمین ۳۰ واحد و عرض ساختمانها ۵۶ واحد است. مسئله به این صورت در می‌آیدکه اگر این چهار مقدار اعداد صحیح باشند، طول سایر قطعات در نمودار نیزاعداد صحیح‌اند. به علت‌کمی جا به همان فرمول بنت برای تصدیق گفتهٔ اخیر بسنده می‌کنیم، ولی اگر خواننده مایل باشد می‌تواند به‌کتاب رانسون‌که در آن راه حل‌کامل مسئلهٔ نردبانها با اعداد صحیح بیان شده‌است مراجعه‌کند. اضافه می‌کنم که پاسخهای دیگری وجود داردکه فاصلهٔ بین سرنردبانها نیزاعداد صحیح باشند.

در صورتی‌که به غیر از فواصل یك نقطه از سه رأس‌یك مثلث عدد دیگری نداشته باشیم، واضح است‌که نمی‌توان مثلث‌را ساخت یا اینکه طولهای اضلاع آنرا تعیین نمود. در صورتی‌که بدانیم‌که این مثلث متساوی الاضلاع است، می‌توان اضلاع را محاسبه نمود. نقطه ممکن است داخل یا خارج مثلث باشد.

مسئله‌ای ازاین نوع‌که غالباً سؤال می‌شود، معمولا به صورت زیراست:

فاصلهٔ نقطه‌ای‌در داخل مثلث متساوی الاضلاعی از سه‌رأس آن برابر با ۳،۴و۵ واحداست. طول اضلاع آن چقدر است؟ راههای مختلفی برای حل این‌مسئله موجود است ولی یکی‌از آنها که فقط از ترسیمات ساده و مثلثهای متشابه استفاده شده است،در زیر شرح داده‌می‌شود.



این نقطه را P می‌نامیم، نقاط خط چین در شکل طوری هستندکه PCF مثلثی متساوی الاضلاع و بر AE برامتداد PC که از طرف چپ تا E امتداد داده شده است، عمودباشد.

$$ACF \text{ زاویهٔ} = (PCA \text{ زاویهٔ}) - 60 = PCB \text{ زاویهٔ}$$

در این صورت مثلثهای PCB و FCA با هم برابرند و داریم:

$$AF=BP=5$$

چون مثلث APF قائم‌الزاویه است در این‌صورت:

$$APE \text{ زاویهٔ} = (180-60-90)^\circ$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم‌که AE برابر با ۲بوده و EP دو برابرجذر ۳ است ومی‌توان نوشت:

$$AC=\sqrt{2^2+(3+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$$

که برای طول AC مثلث اولیه مقداری برابر با +۶/۷۶۶ بدست می‌آید.

با ریاضیات آشتی کنید

(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

تألیف: A.BULLAS استاد آموزش ریاضی در فرانسه

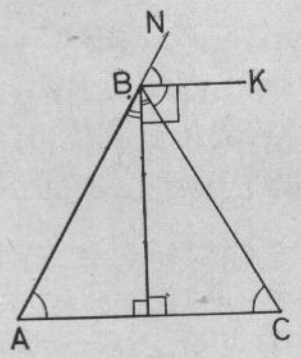
ترجمهٔ: عبدالحسین مصحفی

بخش دوازدهم- حل چندمسئله با استفاده از روش تصاویر

اکنون که با روشهای استفاده از تصاویر آشنا شده‌اید، حل چند مسئله راکه ازاین راه انجام گرفته‌است به عنوان نمونه ارائه می‌دهم.

اگر بخواهیم آنگونه که در بخشهای پیش انجام گرفت در برگرداندن تصاویر فیلم قضیه‌ها روی شکلها همهٔ جزئیات کار را شرح دهیم کاری طولانی خواهد بود . در این باره فقط نکته‌های اصلی یاد آوری می‌شود:

مسئله: ثابت کنید که در مثلث متساوی الساقین، نیمساز زاویهٔ خارجی رأس با قاعده موازی است .



در مثلث ABC دو ضلع AB و BC با هم برابرند و BK نیمساز زاویهٔ خارجی رأس B است.

تصاویر فیلم قضیه‌ها:

ABC متساوی الساقین است پس زاویه‌های A و C باهم برابرند.

NBC زاویهٔ خارجی است و برابر است با مجموع زاویه‌های A و C و برابر است با دو برابر زاویهٔ A . زاویهٔ NBK نصف زاویهٔ NBC است پس با زاویهٔ A برابراست. بنابراین BK با AC موازی است (به علت تساوی دو زاویهٔ متقابل داخل و خارج A و NBK).

همچنین می‌توان چنین عمل کرد:

از B خطی سرشار از استفاده به شکل اضافه می‌کنیم (عمود BH بر AC یعنی ارتفاع رأس B)

تصاویر فیلم قضیه‌ها:

در مثلث متساوی الساقین ABC ارتفاع BH برنیمساز زاویهٔ B منطبق است.

نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب بریکدیگرعمودند (BK بر BH عمود است).

دو خط عمود برخط دیگر باهم موازیند (پس BK با AC موازی است زیرا هردوبر BH عمودند)

حل این مسئله به صورت اجمالی بیان شد. اما شماآن‌را چگونه باید انجام دهید؛ قلم وکاغذ فراهم کنید و شکل‌مربوط به مسئله را بنا برداده‌های آن رسم کنید. آنگاه روشی راکه در بخش پیش گفته شد بکار ببرید. به سادگی به نتیجهٔ مطلوب می‌رسید. در آغاز باید روی شکل چهارنشانه بگذارید : روی ضلعهای AB وBC که باهم برابرند وداخل زاویه‌های NBK و CBK که اینها نیزباهم برابرند . پس از آن با مشاهدهٔ اولین تصویر از فیلم قضیه‌ها داخل زاویه‌های باهم برابر ABH و HBC نیز نشانه می‌گذارید. دومین مشاهده از فیلم‌قضیه‌ها قائمه بودن زاویه‌های KBH و BHC را می‌رساند و روی این زاویه‌ها هم نشانه می‌گذارید. در اینجا توازی دوخط BK

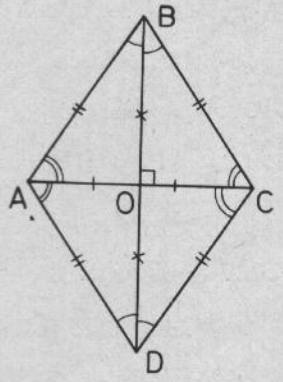
و HC روی شکل پدیدار می‌شود.

**

در بیشتر از مسئله‌ها رسم یك شکل کافی است . اما در مسئله‌هایی به علت زیاد بودن خطهای شکل و درهم شدن نشانه‌های روی آنها مناسبتر آن خواهد بود که یك یا چند شکل (شکلهای کمکی) رسم کنیم. مسئلهٔ زیر نمونه‌ای از آن است.

مسئله : در لوزی ABCD از O نقطهٔ برخوردقطرها عمودهایی بر ضلعها رسم می‌کنیم که آنها را به ترتیب در E،F و L و K تلاقی می‌کند. ثابت کنید که چهار ضلعی FELK مستطیل است.

کلمه‌های مهم فرض عبارتند از: لوزی، قطرها، عمود. شکلی کمکی رسم می‌کنیم و روی آن همهٔ خاصیتهای مربوط به لوزی را بانشانه‌گذاری مشخص می‌سازیم:



چهارضلع لوزی باهم برابرند؛

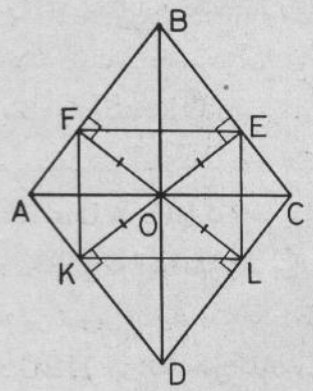
ضلعهای روبروی لوزی باهم‌موازیند؛

دو قطر لوزی یکدیگر را نصف‌می‌کنند؛

دوقطر لوزی برهم عمودند؛

قطرهای لوزی نیمسازهای زاویه‌های نظیرمی‌باشند.

ملاحظه می‌کنیم که نشانه‌های مربوط به این خاصیتهاچنان زیادندکه اگر خطهای دیگری به شکل اضافه‌کنیم موجب بی‌اثر شدن بعضی از این نشانه‌ها می‌شود. بنابراین شکل مربوط‌به مسئله را جداگانه رسم می‌کنیم. در این شکل نشانه‌های مربوط به قائمه بودن‌زاویه‌های F ، E ، L و K را می‌گذاریم. می‌بینیم که رسم خطهای EL،FE LK وKF این‌نشانه‌ها را قطع می‌کند وموجب می‌شود تا آنها دقیقاً



مورد توجه ما نباشد. بنابراین مفیدتر آن است که‌از رسم چهار خط EF،EL،LK و KF خودداری‌کنیم. برای حل مسئله این شکل و شکل کمکی را باهم باید در نظر بگیریم. در این شکل مشاهده می‌کنیم که OE و OK به ترتیب بر BCوAD عمودند و در شکل کمکی می‌بینیم که BC و AD باهم موازیند. می‌دانیم که از یك نقطه فقط یك عمود می‌توان بر خطی فرود آورد و همچنین می‌دانیم که اگر خطی‌بریکی از دو خطمتوازی عمود باشد بردیگری نیزعمود است. پس OE و OK در یك امتدادند یعنی سه نقطهٔ E ، O و K بریك خط مستقیم واقعند. به طریق مشابه معلوم می‌شودکه سه نقطهٔF،O،L نیز بریك‌خط مستقیم قراردارند.

از ملاحظهٔ شکل کمکی در می‌یابیم که OB نیمساز زاویهٔ B است. با مرور در تصاویر فیلم قضیه‌ها در می‌یابیم که هر نقطه از نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یك فاصله است پس OF و OE باهم برابرند. همچنین معلوم خواهد شدکه:

$$OF=OE=OL=OK \Longrightarrow KE=FL$$

دو پاره خط KE و FL با هم برابرند و یکدیگر را نصف کرده‌اند. در مستطیل دو قطر باهم برابر و منصف یکدیگرند. پس چهار ضلعی FEKL مستطیل است.

ضمن حل این مسئله متوجه شدیم که اگر از رسم‌بعضی‌از خطها در شکل خودداری‌کنیم ،تنها چیزی را از دست نمی‌دهیم بلکه موجب می‌شود تاشکل و اجزاء آن را بهترمشاهده‌کنیم و مورد توجه قرار دهیم. البته در هرحال باید آن خطها راروی شکل در ذهن خود در نظر داشته باشیم. اصولا برای هرقضیه یا مسئله باید شکلی در ذهن خود داشته باشیم. در بسیاری ازموارد می‌توانیم از رسم شکل روی کاغذ خودداری‌کنیم و شکل را فقط در ذهن خود درنظرداشته باشیم. مامی‌توانیم به هنگام‌استراحت به هنگامی‌که درازکشیده‌ایم، به هنگامی‌که در اتوبوس به محل کار خود می‌رویم و درمواقع دیگر، در بارهٔ یك‌شکل فکر کنیم. در این مواقع ما آن شکل را فقط در ذهن خود مجسم می‌کنیم . وانگهی در موقعهایی که قلم وکاغذ نیزدر دسترس داریم‌می‌توانیم اگر شکلی ساده باشد ازرسم آن خودداری‌کنیم و آن را ذهنی در نظربگیریم. مثلا می‌توانیم شکل مربوط‌به منطبق بودن‌ارتفاع و میانه را در مثلث متساوی الساقین روی‌کاغذ رسم نکنیم و آن را در ذهن خود مجسم‌کنیم. اما از من به شما نصیحت که‌همواره شکل مربوط به قضیه یا مسئله را هرچندکه ساده باشد، روی‌کاغذ رسم‌کنید. به ویژه در موقع امتحان‌کتبی.شکل‌مسئله‌ای را روی

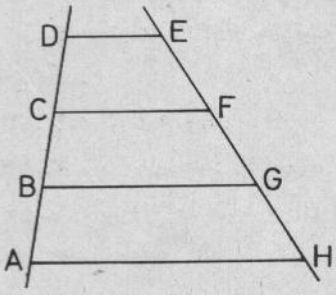
ورقهٔ امتحانی رسم نمی‌کنید ولی با در نظر گرفتن شکل ذهنی مسئله را به تمامی حل می‌کنید. ممتحن خیال می‌کند که تقلب کرده‌اید و یك نمره صفر برای شما می‌گذارد!

اما به هرحال، حتی موقعی که شکل را روی کاغذ رسم کرده‌اید، یك شکل نیز در ذهن خود مجسم دارید؛ وانگهی فیلم قضیه‌ها همواره در ذهن شما باز یا پیچیده می‌شود. هرکس که بهتر بتواند تصاویر مربوط به قضیه‌ها را متوالیاً و به سرعت در ذهن خود از نظر بگذراند در حل مسئله ها مهارت بیشتر دارد.

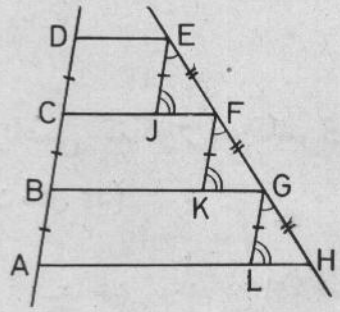
**

در بعضی از مسئله‌های از نوع دوم که باید خط یا خطهایی به شکل اضافه کنیم، این خط یا خطها را می‌توانیم به‌چندین نوع رسم کنیم. درمواردی فقط یك نوع آن بکار می‌آید در صورتی که در مواردی دیگر آنها را به هر نوع که رسم کنیم تفاوت نمی‌کند.

مسئله: دو خط AD و EH داده شده است. خطهایی موازی باهم AD را در A، B، C، و D قطع می‌کنند بقسمی که $AB=BC=CD$. ثابت کنید که این خطهای موازی روی EH پاره‌خطهای برابر باهم پدید می‌آورند.

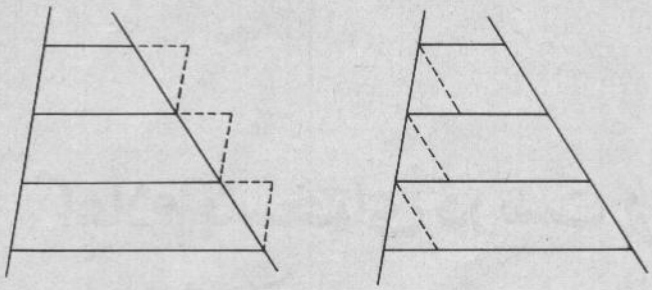


درشکل این مسئله هیچ تصویری از فیلم قضیه را که بکار آید مشاهده نمی‌کنیم مگر اینکه زاویه‌های متقابل بین خطهای متوازی وهریك از موربها باهم برابر یا اینکه مکمل یکدیگرند. بنابراین مسئله از نوع دوم است و باید خطهایی به شکل اضافه کنیم. از E و F و G خطهایی موازی با AD رسم می‌کنیم. سه متوازی الاضلاع پدید می‌آید و سه مثلث. این مثلثها با هم برابرند و نتیجه می‌شود که:



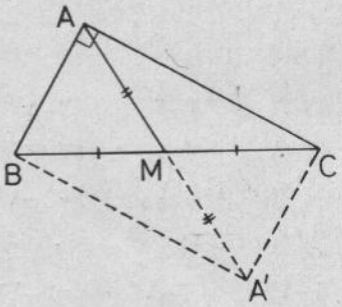
$$EF=FG=GH$$

در این مسئله خطهایی را که به‌شکل باید اضافه کنیم می‌توانیم به نوعهای دیگر رسم کنیم. مثلا



مطابق با یکی از شکلهای بالا. اما درهرحال نتیجهٔ مطلوب بدست می‌آید.

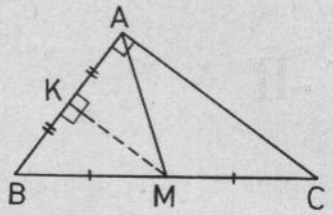
مسئله: ثابت کنید که در مثلث قائم الزاویه میانهٔ وتر با نصف وتر برابر است.



مثلث ABC درزاویهٔ A قائمه است و M وسط وتر BC است. می‌خواهیم ثابت کنیم که AM نصف BC است.

دراین مسئله هم باید خطی جدید رسم کنیم؛ مثلث ABC را می‌توانیم جزئی از بینهایت شکل تصور کنیم. مثلا یك چهارضلعی ABCX. هرگاه این چهار ضلعی را به‌حالت خاصی اختیار کنیم که متوازی‌الاضلاع باشد مستطیل نیز خواهد بود. دو قطر آن باهم برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند. از $AA'=BC$ و $AM=MA'$ نتیجه می‌شود که AM نصف BC است.

دراین مسئله نیز می‌توانیم خطی را که باید به‌شکل اضافه کنیم به نوع دیگر رسم کنیم. مثلا از M موازی با AC رسم کنیم تا با AB در K برخورد کند. چون M وسط BC و MK با AC موازی است پس K وسط AB و MK عمود منصف AB است. از خاصیت عمود منصف نتیجه می‌شود که AM با BM یعنی با نصف BC برابر است.



دنباله‌دارد

به توضیح مندرج در صفحهٔ دوم جلد توجه شود

اعلام پاسخهای درست پرسشهای کنکور سرتاسری دانشگاهها ومدارس عالی کشور در سال ۱۳۵۲

(مندرج در یکان سال ۱۳۵۲)

I-آزمون هوش گروه طبیعی کنکور سرتاسری

(صفحهٔ ۵۰ یکان سال ۵۲)

۱-۲ ۲-۴ ۳-۳ ۴-۲ ۵-۴

۶-۳ ۷-۲ ۸-۳ ۹-۱ ۱۰-۱

۱۱-۱. (باقبول اینکه فرزندان دوزن با یکدیگر ازدواج نکرده باشند).

۱۲-۴ ۱۳-۳ ۱۴-۲ ۱۵-۱ ۱۶-۴

۱۷-۲ ۱۸-۴ ۱۹-۱

۲۰- پاسخ درست این پرسش «۲۰» ریال است («۳-۳۰» اشتباه چاپی است ودرست آن «۳-۲۰» است).

۲۱-۲ ۲۲-۲

۲۳-۱؛ انسان هرچه بیشتر کوشش کند موفقتر خواهد بود.

۲۴-۴ ۲۵-۳ ۲۶-۲ ۲۷-۱ ۲۸-۴

۲۹-۴ ۳۰-۳

۳۱-«۱۲ کیلوگرم ازهمان کاغذ» که چاپ شده اشتباه است، درست آن «۲۲ کیلوگرم ازهمان نوع کاغذ» می‌باشد ودراین صورت پاسخ «۴-۸۰۰» درست است.

۳۲-۳ ۳۳-۲ ۳۴-۱ ۳۵-۳ ۳۶-۴

۳۷-۳ ۳۸-۱ ۳۹-۲ ۴۰-۳ ۴۱-۲

۴۲-۴ ۴۳-۱ ۴۴-۳ ۴۵-۲ ۴۶-۳

۴۷-۱ ۴۸-۴ ۴۹-۲ ۵۰-۲ ۵۱-۱

۵۲-۳، رقمهای ۲و۴و۶ به‌ترتیب در مرتبهٔ یکان اعداد تکرار می‌شوند.

۵۳-۴: م،ك،ق،ع،ش،ر

۵۴-۲ ۵۵-۳ : ا،ب،ن،ه

۵۶-۱ : بیرونی را عقیده برآن بودکه روح جاودان است.

۵۷-۴ ۵۸-۳ ۵۹-۱

۶۰-۴ : سود به‌نسبت یك‌پنجم خریداست.

۶۱-۲ اعداد به‌ترتیب با اعداد ۱،۲،۳،... جمع شده‌اند.

۶۲-۱ : کمترین فاصلهٔ بین‌دونقطه‌یك‌خط مستقیم تشکیل می‌دهد.

۶۳-۳ ۶۴-۲ ۶۵-۴ ۶۶-۱ ۶۷-۳

۶۸-۴

II- آزمون هوش گروه ریاضی کنکور سرتاسری

(صفحهٔ ۷۷ یکان سال ۵۲)

۱-۳ ۲-۴ ۳-۲ ۴-۴ ۵-۱

۶-۲ ۷-۲ ۸-۳ ۹-۴ ۱۰-۱

۱۱-۲ ۱۲-۳ ۱۳-۱: ا،ب،ج

۱۴-۴ ۱۵-۳ ۱۶-۲ ۱۷-۱

۱۸-۳، نظیر پرسش ۶۱ ازگروه طبیعی

۱۹-۱ ۲۰-۲ ۲۱-۳: درچهارده‌سالگی به‌دامغان رفت‌ودرآن شهرسکنی گزید.

۲۲-۴ ۲۳-۲ ۲۴-۳ ۲۵-۳ ۲۶-۲

۱-۲۷ ۴-۲۸ ۳-۲۹ ۴-۳۰ ۲-۳۱

۱-۳۲ ۴-۳۳ : آشکار ۱-۳۴ ۳-۳۵

۲-۳۶ ۳-۳۷ ۴-۳۸ ۱-۳۹ ۲-۴۰

۴-۴۱ ۱-۴۲ ۳-۴۳ ۲-۴۴ ۴-۴۵

۳-۴۶ ۱-۴۷ ۲-۴۸ ۳-۴۹

۴-۵۰؛ از ابتدا به‌ترتیب سه‌عدد با ۲وچهارمی با ۸ جمع‌می‌شود تا عدد بعدازآن بدست‌آید.

۲-۵۱ : م، ك، ق، ف، غ، ظ، ش

۴-۵۲ ۲-۵۳

۱-۵۴ : اورا نمی‌توان فیلسوف نامید زیرا بیشترمردکاربود تا اندیشه

۳-۵۵ ۲-۵۶ ۱-۵۷ ۴-۵۸

۴-۵۹؛ از جملهٔسوم به‌بعد هرعدد ازجمع عدد ماقبل بادوبرابر عدد قبل‌از این‌عدد بدست می‌آید.

۱-۶۰ : هرمربع چهار ضلع وچهارزاویهٔ مساوی دارد

۲-۶۱ ۴-۶۲ ۱-۶۳ ۲-۶۴ ۴-۶۵

۳-۶۶ ۱-۶۷ ۳-۶۸

III- شیمی گروه طبیعی کنکور سرتاسری

(صفحهٔ ۵۸ یکان سال ۵۲)

۲-۱ ۴-۲ ۱-۳ ۱-۴ ۴-۵

۳-۶ ۲-۷ ۳-۸ ۴-۹ ۳-۱۰

۲-۱۱ ۱-۱۲ ۲-۱۳ ۳-۱۴ ۱-۱۵

۲-۱۶ ۴-۱۷ ۲-۱۸ ۱-۱۹ ۴-۲۰

۳-۲۱ ۱-۲۲ ۴-۲۳ ۱-۲۴ ۴-۲۵

۲-۲۶ ۳-۲۷ ۴-۲۸ ۱-۲۹ ۲-۳۰

۱-۳۱ ۴-۳۲ ۲-۳۳ ۱-۳۴ ۳-۳۵

۳-۳۶ ۱-۳۷ ۳-۳۸ ۲-۳۹ ۳-۴۰

۴-۴۱ ۲-۴۲ ۴-۴۳ ۲-۴۴ ۱-۴۵

۴-۴۶ ۳-۴۷ ۱-۴۸ ۲-۴۹ ۱-۵۰

۴-۵۱ ۱-۵۲ ۲-۵۳ ۳-۵۴ ۱-۵۵

۴-۵۶

IV- شیمی گروه ریاضی کنکور سرتاسری

(صفحهٔ ۹۱ یکان سال ۵۲)

۳-۱ ۴-۲ ۱-۳ ۳-۴ ۲-۵

۰-۶ ۲-۷ ۱-۸ ۴-۹ ۳-۱۰

۴-۱۱ ۲-۱۲ ۱-۱۳ ۲-۱۴ ۴-۱۵

۲-۱۶ ۳-۱۷ ۲-۱۸ ۱-۱۹ ۱-۲۰

۴-۲۱ ۱-۲۲ ۴-۲۳ ۳-۲۴ ۱-۲۵

۲-۲۶ ۳-۲۷ ۱-۲۸ ۱-۲۹ ۲-۳۰

۴-۳۱ ۲-۳۲ ۴-۳۳ ۳-۳۴ ۴-۳۵

۳-۳۶ ۱-۳۷ ۴-۳۸ ۲-۳۹ ۱-۴۰

۳-۴۱ ۴-۴۲ ۳-۴۳ ۲-۴۴ ۰-۴۵

۴-۴۶ ۱-۴۷ ۳-۴۸ ۲-۴۹ ۱-۵۰

۲-۵۱ ۴-۵۲ ۳-۵۳ ۴-۵۴ ۲-۵۵

۱-۵۶ ۴-۵۷ ۳-۵۸ ۱-۵۹ ۳-۶۰

V- شیمی دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تهران

(صفحهٔ۱۱۳ یکان سال ۵۲)

۲-۱ ۱-۲ ۴-۳ ۲-۴ ۴-۵

۱-۶ ۳-۷ ۳-۸ ۲-۹ ۳-۱۰

۴-۱۱ ۲-۱۲ ۲-۱۳ ۴-۱۴ ۱-۱۵

۱-۱۶ ۳-۱۷ ۲-۱۸ ۱-۱۹ ۳-۲۰

۴-۲۱	۲-۲۲	۴-۲۳	۳-۲۴	۱-۲۵	۴-۳۶	۲-۳۷	۱-۳۸	۲-۳۹	۴-۴۰
۳-۲۶	۲-۲۷	۲-۲۸	۱-۲۹	۳-۳۰	۳-۴۱	۴-۴۲	۲-۴۳	۳-۴۴	۱-۴۵
۴-۳۱	۲-۳۲	۲-۳۳	۳-۳۴	۱-۳۵	۴-۴۶	۱-۴۷	۴-۴۸	۱-۴۹	۳-۵۰

VI- شیمی دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تبریز

(صفحهٔ ۱۲۵ یکان سال ۵۲)

۱-۱	۲- منظور ۲ است		۲-۳	۳-۴	۱-۳۴	۴-۳۵	۳-۳۶	۳-۳۷	۱-۳۸
۳-۵	۶-؟	۷- منظور ۱ است		۴-۸	۲-۳۹	۳-۴۰	۳-۴۱	۲-۴۲	۲-۴۳
۱-۹	۲-۱۰	۱-۱۱	۲-۱۲	۲-۱۳	۴-۴۴	۴-۴۵	۳-۴۶	۳-۴۷	۳-۴۸
۱-۱۴	۴-۱۵	۳-۱۶	۴-۱۷	۱-۱۸	۱-۴۹	۳-۵۰	۴-۵۱	۱-۵۲	۲-۵۳
۲-۱۹	۱-۲۰	۲-۲۱	۱-۲۲	۱-۲۳	؟-۵۴	۲-۵۵	۱-۵۶	۳-۵۷	۳-۵۸
۱-۲۴	۱-۲۵	۲-۲۶	۳-۲۷	۲-۲۸	۲-۵۹	۲-۶۰			
۴-۲۹	۲-۳۰	۳-۳۱	۲-۳۲	۴-۳۳					

VII- شیمی دانشکدهٔ نفت آبادان

(صفحهٔ ۱۴۹ یکان سال ۵۲)

۴-۱	۱-۲	۳-۳	۱-۴	۱-۵	است. درست آن «C_2H_8O» بوده است).				
۳-۶	۴-۷	۲-۸	۳-۹	۳-۱۰	۳-۲۲	۲-۲۳	۱-۲۴	۲-۲۵	۲-۲۶
۲-۱۱	۴-۱۲	۱-۱۳	۲-۱۴	۴-۱۵	۱-۲۷	۱-۲۸	۱-۲۹	۴-۳۰	۴-۳۱
۲-۱۶	۱-۱۷	۴-۱۸	۲-۱۹	۴-۲۰	۳-۳۲	۳-۳۳	۱-۳۴	۱-۳۵	د-۳۶
۱-۲۱ ، (پاسخ ۴ ازاین‌پرسش که«C_3H_6O» چاپ‌شده اشتباه					۲-۳۷	د-۳۸	۳-۳۹	۴-۴۰	

VIII- فیزیك گروه طبیعی کنکور سرتاسری

(صفحهٔ ۶۲ یکان سال ۵۲)

۲-۱	۱-۲	۲-۳	۳-۴	۴-۵	۲-۱۶	۱-۱۷	۴-۱۸	۲-۱۹	۴-۲۰
۲-۶	۱-۷	۲-۸	۱-۹	۳-۱۰	۲-۲۱	۳-۲۲	۱-۲۳	۳-۲۴	۱-۲۵
۴-۱۱	۱-۱۲	۲-۱۳	۳-۱۴	۱-۱۵	۲-۲۶	۳-۲۷	۲-۲۸	۱-۲۹	

IX- فیزیك ومکانیك گروه ریاضی کنکور سرتاسری

(صفحهٔ ۵۸ یکان سال ۵۲)

۲-۱	۴-۲	۱-۳	۳-۴	۱-۵	۱-۱۶	۳-۱۷	۲-۱۸	۱-۱۹	۴-۲۰
۳-۶	۱-۷	۱-۸	۳-۹	۴-۱۰	۲-۲۱	۱-۲۲	۳-۲۳	۴-۲۴	۳-۲۵
۴-۱۱	۲-۱۲	۳-۱۳	۲-۱۴	۴-۱۵	۲-۲۶	۴-۲۷	۱-۲۸	۳-۲۹	۱-۳۰

۴-۳۱	۳-۳۲	۱-۳۳	۴-۳۴	۲-۳۵	۴-۴۱	۲-۴۲	۴-۴۳	۴-۴۴	۱-۴۵
۲-۳۶	۱-۳۷	۴-۳۸	۱-۳۹	۳-۴۰	۴-۴۶	۳-۴۷	۴-۴۸	۱-۴۹	۳-۵۰

X- فیزیك رشتهٔ طبیعی دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تهران

(صفحهٔ ۱۰۹ یکان سال ۵۲)

۲-۱	۲-۲	۴-۳	۴-۴	۱-۵	۳-۱۶	۲-۱۷	۱-۱۸	۲-۱۹	۳-۲۰
۳-۶	۳-۷	۱-۸	۴-۹	۴-۱۰	۳-۲۱	۲-۲۲	۴-۲۳	۱-۲۴	۳-۲۵
۱-۱۱	۳-۱۲	۱-۱۳	۴-۱۴	۴-۱۵					

XI-فیزیك ومکانیك رشتهٔ ریاضی دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تهران

(صفحهٔ ۱۲۱ یکان سال ۵۲)

۲-۵	۲-۶	۴-۷	۳-۸	۱-۱۳	۳-۳۷ ،$(P_L = P_C = ۰)$			۱-۳۸	۱-۳۹
۳-۲۰	۲-۲۲	۱-۲۶	۳-۲۷	۲-۲۸	۳-۴۰	۴-۴۱	۳-۴۲	۲-۴۳	۲-۲۵
۲-۳۰	۲-۳۴	۱-۳۵	۳-۳۶		۳-۴۶	۱-۴۷	۲-۴۹	۴-۵۰	

XII- فیزیك دانشکدهٔ نفت آبادان

(صفحهٔ ۱۴۲ یکان سال ۵۲)

۲-۱	۱-۲	۳-۳	۴-۴	۲-۵	۲-۲۱	۱-۲۲	۲-۲۳	۳-۲۴	۴-۲۵
۳-۶	۱-۷	۱-۸	۲-۹	۲-۱۰	۴-۲۶	۴-۲۷	۴-۲۸	۳-۲۹	۳-۳۰
۲-۱۱	۲-۱۲	۳-۱۳	۱-۱۴	۳-۱۵	۴-۳۱	۳-۳۲	۳-۳۳	۲-۳۴	۱-۳۵
۳-۱۶	۱-۱۷	۲-۱۸	۴-۱۹	۲-۲۰	۲-۳۶	۳-۳۷	۳-۳۸	۲-۳۹	۲-۴۰

XIII- دانشکدهٔ علم و صنعت - مسائل فیزیك (برای دیپلمه‌های هنرستان)

(صفحهٔ ۱۵۴ یکان سال ۵۲)

حل مسئلهٔ ۱ -

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

$$e = ۲\pi \times ۱۲/۷ \times ۲۰۰۰ \text{ cm}$$

$$s = \pi \times ۰/۱^۲ = ۰/۰۱\pi \text{ cm}^۲$$

$$R = ۱/۷۵ \times ۱۰^{-۶} \times \frac{۲\pi \times ۱۲/۷ \times ۲۰۰۰}{۰/۰۱\pi}$$

$$R = ۸/۸۹\Omega$$

$$\frac{R_{۶۰}}{R_{۲۰}} = \frac{\rho_{۶۰}}{\rho_{۲۰}} = \frac{\rho(۱+۶۰\alpha)}{\rho_۰(۱+۲۰\alpha)}$$

$$R_{۶۰} = R_{۲۰}\frac{۱+۶۰\alpha}{۱+۲۰\alpha} = ۸/۸۹\frac{۱+۶۰\times ۰/۰۰۴}{۱+۲۰\times ۰/۰۰۴}$$

$$= ۸/۸۹\frac{۱/۲۴}{۱/۰۸} = ۱۰/۲۰\Omega$$

$$H = ۴\pi \times ۱۰^{-۷} \times \frac{NI}{l} =$$

$$= ۴\pi \times ۱۰^{-۷} \times \frac{۲۰۰۰ \times ۰/۵}{۰/۲۰}$$

$H = ۰/۰۰۲\pi = ۰/۰۰۶۲۸$ تسلا $= ۸۲/۸$ گوس

حل مسئلهٔ ۲ـ بافرض اینکه میلهٔ مسی درابتدا در دمای صفر درجه بوده‌است حل مسئله چنین است:

$$l = l_۰(۱+\alpha t)$$

$$t = \frac{l-l_۰}{l_۰\alpha} = \frac{۲/۵}{۳۰۰\times ۴/۲\times ۱۰^{-۵}} = ۲۰۰^\circ$$

$$v = v_۰(۱+۳\alpha t)$$

$$v - v_۰ = ۳v_۰\alpha t = ۳l_۰s_۰\alpha t$$

$$= ۳\times ۳۰\times ۱\times ۴/۲\times ۱۰^{-۵}\times ۲۰۰ = ۰/۷۵۶cm^۳$$

$$Q = mct = (۳۰\times ۱\times ۸/۹)\times ۰/۰۹\times ۲۰۰$$

$$= ۴۸۰۶cal$$

حل مسئلهٔ ۳ـ

$$W = ۴۵\times \frac{۱}{۲}mv^۲ = ۴۵\times \frac{۱}{۲}\times ۶\times ۱۰^۲ = ۱۳۵۰۰J$$

$$Q = \frac{۰/۳۰\times ۱۳۵۰۰}{۴/۱۸} = ۹۷۰cal$$

$$Q = mct$$

$$t = \frac{۹۷۰}{۵۰۰\times ۰/۱۱۳} = ۱۷^\circ C$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{۱۳۵۰۰}{۷۰} = ۱۹۳w$$

حل مسئلهٔ ۴ـ

$$P = V_eI_e = \frac{۱}{۲}V_mI_m$$

$$I_m = \frac{۲P}{V_m} = \frac{۲\times ۵۰۰}{۱۶۹} \# ۶A$$

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۶۹}{۱/۴۱} = ۱۲۰$$ ولت

$$i = ۶\sin(۳۱۴t+۶۰^\circ)$$

$$W = ۵۰۰\times ۳۶۰۰J$$

$$Q = \frac{۵۰۰\times ۳۶۰۰}{۴/۱۸} = ۴۳۰\times ۱^۳cal$$

XIV- ریاضی گروه طبیعی کنکور سرتاسری

(صفحهٔ ۶۵ یکان سال ۵۲)

۱ـ «تفاضل دو ریشه برابر ۱ باشد» اشتباه چاپی است که درست آن «تفاضل دوریشه برابر ۲ باشد» می‌باشد. دراین صورت پاسخ ۳ یعنی $m = \frac{۱}{۸}$ صحیح است.

۲ـ۱؛ درحل این مسئله می‌توانیم سه‌جمله‌ای طرف اول را متحد با $a(x-۱)^۲$ قرار دهیم، ومی‌توانیم‌ازاین خاصیت استفاده کنیم که اگر α ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f(x)=۰$ باشد ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=۰$ نیز خواهد بود.

۴ـ۳ ۲ـ۴ ۲ـ۵ ۱ـ۶ ۲ـ۷

۸ـ۱؛ دومنحنی‌دردونقطهٔ (۱و۱)و(۱و۱ —) مشترکندومشتقهای آنها به‌ازای مختصات این نقاط با یکدیگر برابرند.

۹ـ۴: طول خط‌المرکزین دودایره $۲\sqrt{۲}$ ومجموع شعاعهای دودایره نیز $۲\sqrt{۲}$ است.

۲ـ۱۰ ۳ـ۱۱ ۴ـ۱۲ ۱ـ۱۳ ۲ـ۱۴

۴ـ۱۵ ۳ـ۱۶ ۱ـ۱۷ ۲ـ۱۸ ۴ـ۱۹

۳ـ۲۰ ۲ـ۲۱

۳ـ۲۲ ؛کوچکترین عدد صحیح‌بزرگتر از۱۶ عدد ۱۷ است که ۲۲ بار در ۳۸۵ می گنجد.

۱ـ۲۳ ۲۴ـ درچاپ این پرسش اشتباه شده است. صحیح آن چنین است:

$$\log a + \log b = ۲\log(a-b)$$

دراین صورت پاسخ ۴ درست‌است:

$$\log ab = \log(a-b)^۲$$

$$ab = a^۲+b^۲-۲ab$$

$$a^۲+b^۲ = ۳ab$$

۴ـ۲۵؛ حد مجموع برابراست با:

$$\frac{۵^n}{۱-\frac{۱}{۵}} = \frac{۵^n}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۵^{n+۱}}{۴}$$

$$\frac{۵^{n+۱}}{۴} = \frac{۱۲۵}{۴} \Longrightarrow n = ۲$$

۱ـ۲۶، اگر n تعداد ضلعها باشد داریم:

$$\frac{۲n-۴}{n} = ۷\times\frac{۴}{n} \Longrightarrow n = ۱۶$$

۳ـ۲۷ ۲ـ۲۸ ۱ـ۲۹ ۴ـ۳۰

XV- ریاضی گروه ریاضی کنکور سر تاسری

(صفحهٔ ۸۰ یکان سال ۵۲)

۱-۱؛ اگر A نقطهٔ مفروض باشد، چون در ربع اول محورهای مختصات واقع است وبعداز دوران بر Ox' قرار گرفته است پس $tg\alpha$ برابر است با $-m$ که m ضریب زاویه‌ای خط OA است.

۱-۲ ۳-۳ ۲-۴ ۴-۵ ۱-۶

۲-۷ ۱-۸ ۹-۳: درعبارت مفروض x رابه $-x$ تبدیل می‌کنیم، دراین‌صورت دوعبارت زیررا خواهیم داشت:

$$\sin x f(x)+\cos x f(-x)=x$$

$$-\sin x f(-x)+\cos x f(x)=-x$$

طرفین عبارت اول را $\sin x$ و از عبارت دوم را در $\cos x$ ضرب کرده وطرفین عبارتهای حاصل رانظیر به‌نظیر باهم جمع می‌کنیم.

۱۰-۴؛ ناحیهٔ خارجی منحنی $xy=1$ که شامل مبدأ مختصات نیز می‌باشد نظیر نامعادلهٔ $xy-1<0$ است

۲-۱۱؛ ۴-۱۲ ۲-۱۳ ۳-۱۴ ۱-۱۵

۴-۱۶ ۲-۱۷ ۱-۱۸؛ نخست صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم وآنگاه مشتق می‌گیریم.

۱۹-۴؛ تابع را چنین می‌نویسیم:

$$y=(1+tg^2x)(1+cotg^2x)=$$
$$=(1+tg^2x)+(1+cotg^2x)$$

۲۰-۱؛ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=(x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=$$
$$=(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

۲۱-۴ ۲۲-۱؛ نقطهٔ $(1 و \pm\frac{\pi}{2})$ دومین نقطهٔ نظیر ماکسیمم منحنی $y=\sin x$ ابتدا ازمبدأ است وخط $y=\frac{2x}{5\pi}$ از این نقطه می‌گذرد وغیراز آن درمبدأ ودر چهارنقطهٔ دیگر منحنی را قطع می‌کند.

۲۳-۲ ۲۴-۳؛ چنین عمل می‌کنیم:

$$Arctg x=\alpha \text{ و } Arctg y=\beta \text{ و } Arctg z=\gamma$$

$$\alpha+\beta=-\gamma \Longrightarrow \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=-tg\gamma$$

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma$$

$$x+y+z=xyz$$

۲۵-۱؛ معادله چنین می‌شود:

$$\log tg x=-1 \Longrightarrow tg x=0/1$$

۲۶-۴ ۲۷-۳؛ داریم:

$$4^{\sin^2 a}+4^{1-\sin^2 a}=\sqrt{2}$$

$$4^{\sin^2 a}=x \Longrightarrow x+\frac{4}{x}=\sqrt{2}$$

۲۸-۱؛ بادرنظر گرفتن تابع $y=\sin^5 x+\sin^3 x-1$ مشتق این تابع:

$$y'=\cos x(5\sin^4 x+3\sin^2 x)$$

در فاصلهٔ صفر و $\frac{\pi}{2}$ مثبت است. پس تابع دراین فاصله صعودی است وچون در ازای مقادیر $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ به ترتیب $y=-1$ و $y=1$ است، پس منحنی نمایش تابع در فاصلهٔ مزبور فقط در یك نقطه با $x'x$ تلاقی می‌کند.

۲۹-۴ ؛ طرفین معادله‌ها را مجذور کرده با هم جمع می‌کنیم:

$$2\sin^2 x+b^2\cos^2 x=1$$

$$tg^2 x=1-b^2\geqslant 0 \Longrightarrow -1\leqslant b\leqslant 1$$

۳۰-۱؛ صورت ومخرج را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم.

۳۱-۴؛ دراین مثلث داریم:

$$\frac{\sin B}{\sin C}=2 \Longrightarrow \frac{\sin B+\sin C}{\sin B-\sin C}=3$$

$$tg\frac{B+C}{2}cotg\frac{B-C}{2}=3$$

$$tg\frac{B+C}{2}=cotg\frac{A}{2}=3 \Longrightarrow tg A=\frac{3}{4}$$

۳۲-۲؛ ازرابطهٔ داده‌شده وازروابط سینوسها درمثلث نتیجه‌می‌شود:

$$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\cos C}{\cos B} \Longrightarrow \sin 2B=\sin 2C$$

۳۳-۳؛ داریم:

$$2a+(n-1)d=6n+4$$

$(d-۶)n+۲a-d-۴=۰$

$d=۶$ و $a=۵$

۲-۳۴ ؛ صورت ومخرج هر کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

۳-۳۵ ۱-۳۶ ۱-۳۷ ۴-۳۸ ۲-۳۹

۲-۴۰؛ اعداد مورد نظر به‌شکل $۶k\pm۱$ می‌باشند.

۴-۴۱ ۱-۴۲ ۳-۴۳

۴-۴۴؛ عدد داده شده برابر است‌با:

$۳\times۷۲۹^k+۵\times۶۲۵^k$

$۷۲۹=۱۳\times۵۶+۱$ و $۶۲۵=۱۳\times۴۸+۱$

۲-۴۵ ۳-۴۶ ۲-۴۷

۴۸- درچاپ این پرسش اشتباه شده‌است، صحیح آن چنین‌است که صفحهٔ قاطع بامحور استوانه زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ می‌سازد . در این صورت پاسخ ۳ درست است.

۲-۴۹ ۳-۵۰ ۴-۵۱ ۳-۵۲

۱-۵۳؛ داریم :

$$۲B_۱=\frac{AM}{\sin D} \quad و \quad ۲R_۲=\frac{AM}{\sin C}$$

۴-۵۴ ؛ مماسهایی که درنقاط A وB بردایره رسم می‌شوندمکان مطلوبند.

۱-۵۵ ؛ مکان مطلوب فصل مشترك صفحهٔ عمود منصف AB با سطح استوانی بمحور D وبه‌شعاع d است.

۴-۵۶ ۲-۵۷ ۳-۵۸ ۲-۵۹ ۱-۶۰

XVI-ریاضی رشتهٔ طبیعی دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تهران

(صفحهٔ ۱۱۱ یکان سال ۵۲)

۴-۱ (به‌شرط $a\neq۰$) ۱-۲ ۳-۳ ۴-۴

۳-۵ ۲-۶ ۱-۷ ۴-۸ ۳-۹

۲-۱۰ ۲-۱۱ ۱-۱۲ ۱-۱۳ ۴-۱۴

۱-۱۵ ۱-۱۶ ۲-۱۷ ۲-۱۸ ۴-۱۹

۴-۲۰ ۴-۲۱ ۱-۲۲

۲۳- پاسخ درست $۳\sqrt{۳}$ است.

۳-۲۴ ۳-۲۵

XVII- ریاضی رشتهٔ ریاضی دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تهران

(صفحهٔ ۱۱۷ یکان سال ۵۲)

۳-۱ ۲-۲ ۳-۳ ۲-۴ ۴-۵

۳-۶ ۱-۷ ۳-۸ ۴-۹ ۲-۱۰

۲-۱۱ ، («$f(x)=-x$» صحیح‌است)

۳-۱۲ ۱-۱۳ ۴-۱۴ ۳-۱۵ ۴-۱۶

۳-۱۷ ۱-۱۸ ۲-۱۹ ۱-۲۰ ۴-۲۱

۳-۲۲ ۳-۲۳ ۱-۲۴ ۲-۲۵ ۳-۲۶

۴-۲۷ ۲-۲۸: به‌جای $\sin A$ قرارمی‌دهیم $\sin(B+C)$ وبعداز بسط‌طرفین نتیجه‌خواهد شد $\sin B=\cos B$

۳-۲۹: صورت ومخرج را بر $۴x^۲$ تقسیم می‌کنیم.

۲-۳۰

۱-۳۱ ۲-۳۲ ۳-۳۳ ۱-۳۴ ۳-۳۵

۴-۳۶ ۴-۳۷ ۱-۳۸ ۲-۳۹ ۳-۴۰

۱-۴۱ ۱-۴۲ ۲-۴۳ ۴-۴۴ ۲-۴۵

۲-۴۶ ۲-۴۷ ۱-۴۸ ۴-۴۹ ۴-۵۰

۲-۵۱ ۱-۵۲ ۲-۵۳ ۴-۵۴ ۴-۵۵

۱-۵۶ ۴-۵۷ ۴-۵۸ ۴-۵۹ ۳-۶۰

XVIII- ریاضی دورهٔ شبانهٔ دانشگاه تبریز

(صفحهٔ ۱۲۹ یکان سال ۵۲)

۲-۱ ۴-۲ ۳-۳ ۴-۴ ۱-۵

۳-۶ ۳-۷ ۲-۸ ۲-۹ ۳-۱۰

۲-۱۱ ۴-۱۲ ۱۳ - هیچکدام ۱۴-۲و۴

۳-۱۵ ۴-۱۶ ۴-۱۷ ۱-۱۸ ۲-۱۹

۱-۲۰ ۱-۲۱ ۲-۲۲ ۱-۲۳ ۳-۲۴

۲-۲۵ ۱-۲۶ ۳-۲۷ ۴-۲۸ ۲-۲۹

۳-۳۰ ۲-۳۱ ۳-۳۲ ۱-۳۳ ۲-۳۴

۳-۳۵ ۳-۳۶ ۱-۳۷ ۱-۳۸ ۴-۳۹

۲-۴۰ ۴-۴۱ ۱-۴۲ ۲-۴۳ ۳-۴۴

۴-۴۵ ۳-۴۶ ۱-۴۷ ۴-۴۸ ۲-۴۹

۱-۵۰ ۵۱- («p.۲» اشتباه‌چاپی‌است.درست آن «p،r» است وپاسخ درست پرسش نیز می‌باشد).

۲-۵۲ ۲-۵۳ ۲-۵۴ ۲-۵۵ ۴-۵۶

۳-۵۷ ۲-۵۸ ۴-۵۹ ۲-۶۰ ۲-۶۱

۴-۶۲ ۱-۶۳ ۱-۶۴ ۲-۶۵ ۳-۶۶

۳-۶۷ ۲-۶۸ ۱-۶۹ ۴-۷۰ ۱-۷۱

۱-۷۲ ۱-۷۳ ۱-۷۴ ۴-۷۵ ۴-۷۶

۱-۷۷ ۲-۷۸ ۴-۷۹ (بشرط $a\neq ۰$ و $b\neq ۰$)

۴-۸۰ ۴-۸۱ ۴-۸۲ ۱-۸۳ ۱-۸۴

۲-۸۵ ۴-۸۶ ۴-۸۷ ۸۸-؟ ۱-۸۹

۴-۹۰

XIX - ریاضی دانشکدهٔ نفت

(صفحهٔ ۱۴۶ یکان‌سال ۵۲)

۲-۱ ۴-۲ ۳-۳ ۱-۴ ۲-۵

۴-۶ ۷-الف ۲-۸ ۹-هیچکدام ۲-۱۰

۱-۱۱ ۳-۱۲ ۱-۱۳ ۲-۱۴

۱۵- پاسخ درست $a(\sqrt{۲}+۱)$ است.

۳-۱۶ ۲-۱۷ ۴-۱۸ ۳-۱۹

۲۰-۳؛ اگر x مقدارکسر باشد داریم:

$$x=۱+\frac{۱}{x}$$

۱-۲۱ ۳-۲۲ ۳-۲۳ ۴-۲۴ ۲-۲۵

۴-۲۶ ۳-۲۷ ۲-۲۸ ۱-۲۹ ۳-۳۰

۴-۳۱ ۲-۳۲ ۲-۳۳ ۳-۳۴ ۲-۳۵

۱-۳۶

۱-۳۷؛ عبارت مفروض برابراست با:

$$\left(\frac{\log a}{\log b}\right)^۲+\left(\frac{\log b}{\log c}\right)^۲+\left(\frac{\log c}{\log a}\right)^۲>$$

$$۳\sqrt[۳]{\frac{\log a}{\log b}\cdot\frac{\log b}{\log c}\cdot\frac{\log c}{\log a}}$$

۳-۳۸ ۳-۳۹؛ اگر x وy وz فواصل نقطه ازسه‌ضلع باشد داریم:

$$x+y+z=h=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sqrt[۳]{xyz}<\frac{x+y+z}{۳}=\frac{a}{۲\sqrt{۳}}$$

۴-۴۰؛ داریم:

$$۱^۳+۲^۳+\cdots+n^۳=\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=$$

$$=(۱+۲+\cdots+n)^۲$$

XX- حل مسائل ریاضی دانشکدهٔ علم و صنعت

(صفحهٔ ۱۵۴ یکان سال ۵۲)

مسائل برای دیپلمه‌های هنرستان

مسئلهٔ ۱- ب- داریم:

$$f(x)=(x-۱)(x-۲)+ax+b$$

$$\begin{cases} f(۱)=a+b=۴ \\ f(-۲)=-۲a+b=-۵ \end{cases}$$

$a=۳$ و $b=۱$ و $R=۳x+۱$

مسئلهٔ ۲- ب: داریم:

$$S=x'^۲+x''^۲=(x'+x'')^۲-۲x'x''$$

$$S=(a-۲)^۲+۲(a+۳)=a^۲-۲a+۱۰$$

$$S=(a-۱)^۲+۹\geqslant ۹\Longrightarrow a=۱$$

مسئلهٔ ۳- الف- اگر a جملهٔ اول و q قدرنسبت تصاعدباشد:

$$\begin{cases} a+aq^۳=۲۷ \\ aq+aq^۲=۱۸ \end{cases}\Longrightarrow \frac{۱+q^۳}{q(۱+q)}=\frac{۳}{۲}$$

$$۲q^۲-۵q+۲=۰ \Longrightarrow q=۲ \text{ یا } \frac{۱}{۲}$$

ب- از طرفین در مبنای a لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_a A=\log_a y\log_a x-\log_a x\log_a y$$

$$\log_a A=۰ \Longrightarrow A=۱$$

مسئلهٔ ۴- الف- میانهٔ AM رابه‌اندازهٔ MD=AM امتداد می‌دهیم. درمثلث ABD داریم:

$$BD=AC \text{ و } AD=۲AM<AB+BD$$

ب- پاسخها:

$$x=k\pi+\frac{\pi}{3} \text{ یا } x=k\pi+\frac{\pi}{6}$$

مسائل برای دیپلمه‌های ریاضی

۱-الف- به‌ترتیب داریم:

$$f(2x^2-1)=\log(2x^2-1+\sqrt{4x^4-x^2})$$
$$=\log[x^2+(x^2-1)+2x\sqrt{x^2-1}]$$
$$=2\log[x+\sqrt{x^2-1}]^2$$
$$=2\log[x+\sqrt{x^2-1}]=2f(x)$$

ب- داریم:

$$m_{AB}=-2y'=3x^2=-2$$

معادله جواب ندارد.

۲- الف- به‌فرض $M(30,0)$ و $N(x_0\pm\sqrt{2x})$ داریم:

$$Z=\overline{MN}^2=(x-3)^2+2x=x^2-4x+9$$
$$Z=(x-2)^2+5\geqslant 5\Longrightarrow x=2$$
$$N(2,2) \text{ یا } N(2,-2)$$

ب- صورت ومخرج رابر x^n تقسیم‌می‌کنیم. نتیجه‌خواهد شد که حدمطلوب برابر با یك است.

۳- الف؛ داریم:

$$\log y=\frac{1}{1-\log x}\Longrightarrow \log x=1-\frac{1}{\log y}$$

$$\log z=\frac{1}{1-\log y}\Longrightarrow \log y=1-\frac{1}{\log z}$$

$$\log x=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\log z}}=\frac{1}{1-\log z}$$

ب- از رابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\log_{b+c} a}+\frac{1}{\log_{c-b} a}=2$$

$$\log_a(b+c)+\log_a(c-b)=2$$

$$\log_a(c^2-b^2)=2\Longrightarrow c^2-b^2=a^2$$

۴- الف- اگر A' قرینهٔ A نسبت‌به‌نیمساز زاویهٔ α باشد، کافی‌است دایره‌ای رسم‌کنیم که‌بر A و A' بگذردوبرضلع α مماس باشد.

ب- به فرض $tg\alpha=\frac{1}{3}$ و $tg\beta=\frac{1}{7}$ و $tg\gamma=\frac{1}{2}$ داریم:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{21}}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}=tg\gamma$$

XXI-ریاضی مدرسهٔ عالی ریاضیات ومدیریت کرج

(صفحهٔ ۱۵۶ یکان سال ۵۲)

۴-۱	۲-۲	۳-۳	۲-۴	۴-۵
۱-۶	۱-۷	۲-۸	۳-۹	۲-۱۰
۴-۱۱	۳-۱۲	۱-۱۳	۳-۱۴	۳-۱۵
۲-۱۶	۱-۱۷	۴-۱۸	۳-۱۹	۲-۲۰
۲-۲۱	۴-۲۲	۲-۲۳	۴-۲۴	۴-۲۵
۱-۲۶	۳-۲۷	۴-۲۸	۱-۲۹	۴-۳۰

۳-۳۱	۲-۳۲	۴-۳۳	۲-۳۴	۱-۳۵
۲-۳۶	۲-۳۷	۲-۳۸	۱-۳۹	۳-۴۰
۴-۴۱	۳-۴۲	۱-۴۳	۲-۴۴	۱-۴۵
۴-۴۶	۲-۴۷	۴-۴۸	۱-۴۹	۴-۵۰
۳-۵۱	۳-۵۲	۴-۵۳	۱-۵۴	۳-۵۵
۱-۵۶	۳-۵۷	۲-۵۸	۱-۵۹	۲-۶۰

XXII-ریاضی مؤسسهٔ‌عالی حسابداری

(صفحهٔ ۱۶۰ یکان سال ۵۲)

۱-۱	۴-۲	۱-۳	۱-۴	۱-۵
۲-۶	۲-۷	۱-۸	۴-۹	۴-۱۰
۲-۱۱	۳-۱۲	۴-۱۳	۱-۱۴	۱-۱۵

۴-۱۶	۱۷- پاسخ‌درست۲۰۸۲۸ است.	
۴-۱۸	۱-۱۹	۲-۲۰

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۱۰۲

حل مسائل ویژهٔ سال اول نظری وجامع

۱۰۳/۱ ـ ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

مجموعهٔ عددهای طبیعی بخش‌پذیر بر عدد طبیعی n را با A_n نشان می‌دهیم . مثلا :

$$A_5=\{5،10،15،...\}$$
$$A_7=\{7،14،21،...\}$$

و مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های عددطبیعی n را با B_n نشان‌می‌دهیم. مثلا :

$$B_6=\{1،2،3،6\} \text{ ، } B_{11}=\{1،11\}$$

هریك از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید :

$$A_4\cap A_6 ، B_8\cap B_9 ، A_{16}\cap B_4 ، A_4\cap B_{16} ،$$
$$A_{18}\cap A_9 ، B_{18}\cup B_9 ، B_{18}\cup B_4$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$A_4=$ مجموعهٔ عددهای طبیعی بخش‌پذیر بر۴؛

$A_6=$ مجموعهٔ عددهای طبیعی بخش‌پذیر بر۶؛

$A_4\cap A_6=$ مجموعهٔ عددهای طبیعی‌که برهریك ازدو عدد ۴و۶ بخش پذیرند. اما هرعددکه بر ۴و۶ بخش پذیرباشد برکوچکترین مضرب مشترك آنها ۱۲ نیز بخش پذیر است. بنابراین:

$$A_4\cap A_6=A_{12}$$

همچنین داریم:

$$B_8=\{1،2،4،8\}$$
$$\Longrightarrow B_8\cap B_9=\{1\}=B_1$$
$$B_9=\{1،3،9\}$$

برای سایرمجموعه‌ها به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$A_{16}\cap B_4=\varnothing$$

[هرعدد طبیعی‌که بر۱۶ بخش‌پذیر باشد از۱۶ ودر نتیجه از ۴ بزرگتراست پس نمی‌تواند مقسوم‌علیه ۴باشد.]

$$A_4\cap B_{16}=\{4،8،16\}$$
$$A_{18}\cap A_9=A_9$$
$$B_{18}\cup B_9=B_{18}$$
$$B_{18}\cup B_4=\{1،2،3،4،6،9،18\}$$

۱۰۳/۲ـ ترجمه از فرانسه

مجموعهٔ X را تعیین کنید بقسمی کـه در سه رابطهٔ زیر صدق کند:

(۱) $X\subset\{a،b،c،d،e\}$

(۲) $X\subset\{c،d،e،f،g\}$

(۳) $\{c،d،e\}\subset X$

حل ـ ازرابطه‌های (۱)و(۲) نتیجه می‌شودکه:

$$X\subset\{a،b،c،d،e\}\cap\{c،d،e،f،g\}$$
$$X\subset\{c،d،e\}$$

باتوجه به‌این رابطه ورابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود:

$$X=\{c،d،e\}$$

۱۰۳/۳ـ هرگاه‌داشته باشیم :

$$A=\{x|x\in N \text{ و } (x^2-1)(x+2)=0\}$$
$$B=\{x|x\in Z \text{ و } (x^2-1)(x+5)=0\}$$
$$C=\{x|x\in R \text{ و } (2x-1)(x+1)=0\}$$

هریك‌از مجموعه‌های A و B و C ومجموعه‌های‌زیرا به صورت تفصیلی مشخص کنید :

$$A\cup B ، B\cup C ، C\cup A ، A\cup B\cup C$$
$$A\cap B ، B\cap C ، C\cap A ، A\cap B\cap C$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$(x^2-1)(x+2)=0$$
$$(x-1)(x+1)(x+2)=0$$
$$x=1 \text{ یا } x=-1 \text{ یا } x=-2$$
$$1\in N ، -1\notin N ، -2\notin N \Longrightarrow A=\{1\}$$
$$(x^2-1)(x+5)=0 \Longrightarrow$$
$$x=1 \text{ یا } x=-1 \text{ یا } x=-5$$
$$1 و -1 و -5\in Z \Longrightarrow B=\{-1،1،-5\}$$

$(2x-1)(x+1)=0 \Longrightarrow x=\frac{1}{2}$ یا $x=-1$

$\frac{1}{2}$ و $-1 \in R \Longrightarrow C=\{\frac{1}{2}, -1\}$

$A \cup B=\{1, -1, -5\}$ و

$B \cup C=\{1, -1, \frac{1}{2}, -5\}$

$C \cup A=\{1, -1, \frac{1}{2}\}$

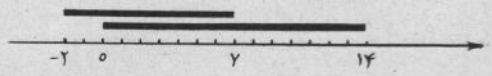
$A \cup B \cup C=\{1, -1, \frac{1}{2}, -5\}$

$A \cap B=\{1\}$ ، $B \cap C=\{-1\}$ ، $C \cap A=\varnothing$

$A \cap B \cap C=\varnothing$

۱۰۳/۴ـ برمحور اعداد مجموعه نقاط دو پاره خط $[-2, 7]$ و $[0, 14]$ را در نظر می‌گیریم. اشتراك و اجتماع این دو مجموعه نقاط را معین کنید.

حل ـ شکل‌را رسم می‌کنیم وبرای واضح بودن آن پاره خطها راجدا ازهم وبالای محور درنظر می‌گیریم.



مطابق با این‌شکل ملاحظه می‌کنیم که:

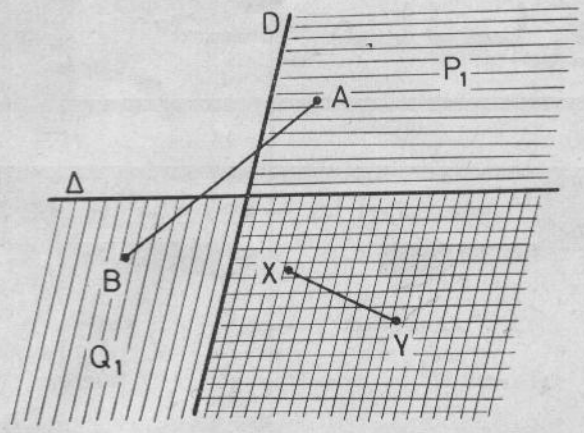
$[-2, 7] \cap [0, 14]=[0, 7]$

$[-2, 7] \cup [0, 14]=[-2, 14]$

۱۰۳/۵ـ یك مجموعه‌نقاط‌را محدب (= کوژ) می‌نامیم هرگاه هر دو نقطهٔ دلخواه را از آن در نظر بگیریم پاره خط واصل بین این دونقطه به تمامی درآن مجموعه واقع باشد.

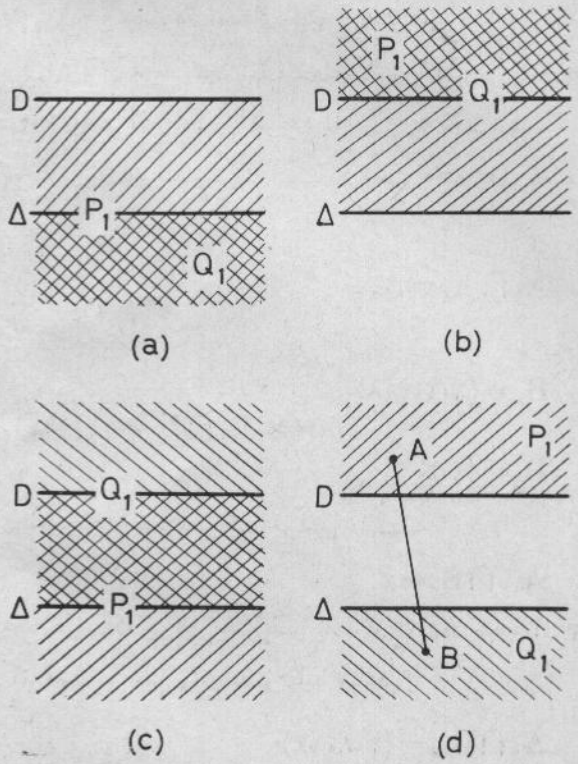
آیا اجتماع دو نیم صفحه و همچنین اشتراك دونیم صفحه مجموعه‌ای است محدب ؟ حالتهای مختلف را در نظر بگیرید.

حل ـ درصفحه دو خط D و Δ را درنظر می‌گیریم ونیم صفحه‌های حاصل ازآنها را به‌ترتیب P_1 و P_2 ، Q_1 و Q_2 می‌نامیم. مسئله رابرای دونیم صفحهٔ P_1 و Q_1 بررسی می‌کنیم. در شکل هریك ازاین دونیم صفحه را با هاشور مشخص می‌کنیم. اجتماع دونیم صفحه تمام بخشی‌از صفحه است که‌هاشور خورده است‌خواه این هاشورها یك‌خطی باشند خواه دوخطی. اشتراك دونیم‌صفحه آن بخش از صفحه خواهد بود که در دو جهت هاشور خورده است.



حالت اول ـ اگر دوخط D و Δ متقاطع باشنددرناحیه‌ای از P_1 که با Q_1 مشترك نیست نقطهٔ A را انتخاب می‌کنیم. ازاین‌نقطه خطی رسم می‌کنیم که بادوخط D و Δ برخورد کند و ازناحیهٔ مشترك بین P_1 و Q_1 نگذرد. دراین‌صورت ازیك نقطهٔ B واقع در Q_1 وغیر مشترك در P_1 خواهد گذشت. چون A و B درناحیهٔ $P_1 \cup Q_1$ واقعنداما نقطه‌هایی ازپاره‌خط $[AB]$ درخارج این‌ناحیه واقع‌است، پس $P_1 \cup Q_1$ یعنی‌اجتماع دونیم صفحهٔ P_1 و Q_1 مجموعه‌ای است غیرمحدب (= کاو)

ناحیهٔ اشتراك دونیم صفحه به‌تمامی دریك طرف هریك‌از دوخط D و Δ واقع‌است. پس دو نقطهٔ دلخواه X و Y را به هر ترتیب‌که در این ناحیه انتخاب کنیم، تمام نقطه های پاره خط $[XY]$ نیز درهمین ناحیه قرار دارند. پس اشتراك دونیم‌صفحهٔ



P_1 و Q_1 یعنی $P_1 \cup Q_1$ مجموعه‌ای است محدب.

حالت دوم- اگر دوخط D و Δ باهم موازی باشند، برحسب نوع انتخاب P_1 و Q_1 سه‌شکل بالا را خواهیم داشت:

درحالتهای (a) و (b) ، اجتماع دونیم صفحه و همچنین اشتراك آنها ناحیه‌ای است که به‌تمامی دریك طرف یکی‌از دوخط قرار دارد. پس‌دراین دوحالت هریك ازمجموعه‌های $P_1 \cup Q_1$ و $P_1 \cap Q_1$ محدب است.

درحالت (c) اجتماع P_1 و Q_1 برابر بامجموعه نقاط‌تمام صفحه و محدب است. اشتراك P_1 و Q_1 نوارصفحه واقع بین دو خط D و Δ است و مجموعه‌ای است محدب.

درحالت (d) اجتماع دونیم صفحه ازدو ناحیهٔ جدا از هم تشکیل شده پس‌مجموعهٔ مقعراست واشتراك دونیم صفحه تهی‌است که محدب می‌باشد.

خلاصه- اشتراك دونیم‌صفحهٔ مربوط به‌دوخط ازیك‌صفحه درهرحال مجموعه‌ای است محدب، اما اجتماع آنها ممکن است محدب باشد یا مقعر.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۱۰۳/۶- دوعدد $A=\sqrt{24}$ و $B=\sqrt{2}+\sqrt{4}$ را با هم مقایسه کنید.

حل- می‌توانیم A^3 و B^3 را باهم مقایسه کنیم. داریم $A^3=24$ وباتوجه به اتحاد:

$$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

داریم:

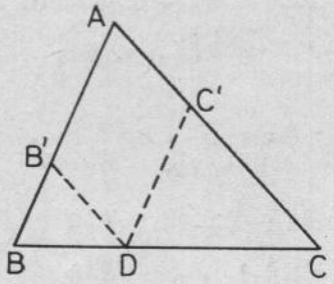
$$B^3=2+4+3\sqrt{8}(\sqrt{2}+\sqrt{4})=$$
$$=6+6B=6(1+B)$$

پس‌باید $1+B$ رابا۴ یعنی $\sqrt{2}+\sqrt{4}$ رابا ۳ مقایسه کنیم. اگر $\sqrt{2}+\sqrt{4}>3$ باشدچون $\sqrt{3}>1$ است پس‌باید $\sqrt{4}>2$ باشد. اما این‌نامساوی غلط است زیرا $4<2^3=8$ بنابراین:

$$\sqrt{2}+\sqrt{4}<3 \Longrightarrow B<3$$
$$B+1<4 \Longrightarrow 6(1+B)<24$$
$$B^3<A^3 \Longrightarrow B<A$$

۱۰۳/۷- درمثلث غیر مشخص ABC از نقطهٔ اختیاری D واقع بر BC موازی با AB رسم می‌کنیم تا با AC در C′ بر خورد کند وموازی با AC رسم‌می‌کنیم تا با AB در B′ بر خورد کند. ثابت کنید که طول خط‌شکستهٔ B′DC′ بین طولهای AB و AC محصور است.

حل- فرض می‌کنیم $AB<AC$ در این صورت زاویهٔ C از زاویهٔ C′DC و زاویهٔ B′DB اززاویهٔ B کوچکتر است و داریم:



$$B'B<B'D \text{ و } C'D<C'C$$

چهارضلعی AB′DC′ متوازی‌الاضلاع استو: $AB'=C'D$ و $B'D=AC'$ پس:

$$AB'+B'B<B'D+C'D \Longrightarrow$$
$$AB<B'D+DC'$$
$$B'D+C'D<AC'+C'C \Longrightarrow$$
$$B'D+DC'<AC$$
$$AB<B'D+DC'<AC$$

اگر $AB=AC$ باشد طول خط شکستهٔ B′DC′ نیز با طولهای AB و AC برابراست.

حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم‌ریاضی

۱۰۳/۸- فرستنده: **جواد فیض** ازدانشکدهٔ‌فنی‌دانشگاه آذرآبادگان

هرگاه رابطهٔ زیر به ازای همه مقادیر x بر قرار باشد:

$$(x-r)(x-s)=x^2+bx+c$$

الف- مقدار b^2-4c را برحسب r و s پیدا کنید.

ب - به‌فرض آنکه داشته باشیم:

$$Q_0=2 \text{ و } Q_1=r+s \text{ و } Q_2=r^2+s^2 \text{ و } Q_3=r^3+s^3$$

حاصل عبارتهای زیر را بر حسب b و c بدست آورید:

$$Q_2+bQ_1+cQ_0 \text{ و } Q_3+bQ_2+cQ_1$$

حل- بعد ازبسط ومرتب کردن عبارت طرف اول داریم:

$$x^2-(r+s)x+rs=x^2+bx+c$$
$$b=-(r+s)\ ,\ c=rs$$
$$b^2-4c=(r+s)^2-4rs=(r-s)^2$$

ب- به‌ترتیب داریم:

$$Q_2=r^2+s^2=(r+s)^2-2rs=b^2-2c$$

$$Q_3=r^3+s^3=(r+s)^3-3rs(r+s)=$$
$$=-b^3+3bc$$

$$Q_2+bQ_1+cQ_0=b^2-2c-b^2+2c=0$$

$$Q_3+bQ_2+cQ_1=$$
$$=-b^3+3bc+b^3-2bc-bc=0$$

۱۰۳/۹- فرستنده : محمد علی مرادی‌نسب

دستگاه دو معادلهٔ زیر داده شده است :

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$$

هرگاه جوابهای این دستگاه در معادلهٔ :

$$ax^3+by^3+c=\lambda xy$$

صدق کند، مقدار λ را برحسب a و b c پیدا کنید.

حل- ازدستگاه داده شده داریم:

$$x=\frac{b-c}{a-b} \quad و \quad y=\frac{c-a}{a-b}$$

بنابراین داریم:

$$a\left(\frac{b-c}{a-b}\right)^3+b\left(\frac{c-a}{a-b}\right)^2=\lambda\left(\frac{b-c}{a-b}\right)\left(\frac{c-a}{a-b}\right)$$

$$\lambda=\frac{a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$\lambda=\frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$\lambda=a+b+c$$

۱۰۳/۱۰- فرستنده : جواد فیض

هرگاه $\log 2=a$ و $\log 3=b$ باشد ، مقدار x ازرابطهٔ زیررا برحسب a و b بدست آورید :

$$4^{2x+1}\times 5^{x-2}=6^{1-x}$$

حل- ازطرفین تساوی لگاریتم می‌گیریم:

$$(2x+1)\log 4+(x-2)\log 5=(1-x)\log 6$$

$$\log 4=2\log 2=2a$$

$$\log 5=1-\log 2=1-a$$

$$\log 6=\log 2+\log 3=a+b$$

$$(2x+1)2a+(x-2)(1-a)=(1-x)(a+b)$$

بعد ازعملیات لازم خواهیم داشت:

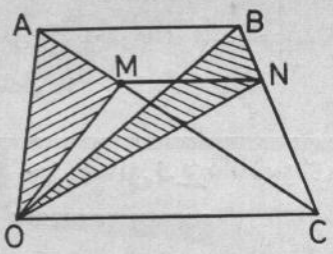
$$x=\frac{2+b-3a}{1+b+4a}$$

۱۰۳/۱۱- ترجمهٔ مهندس زرگری

درچهار ضلعی $OABC$ از نقطهٔ M واقع برقطر AC خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا با BC در N برخورد کند. هرگاه دو مثلث OAM و OBN معادل باشند، ثابت کنید که AB با OC موازی است. عکس این قضیه را نیز بیان و ثابت کنید.

حل- بنابه قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AM}{MC}=\frac{BN}{NC}$$



دو مثلث که در ارتفاع نظیر رأس مشترك باشند نسبت مساحتهای آنها بر نسبت قاعده‌های آنهاست پس:

$$\frac{S_{OAM}}{S_{OMC}}=\frac{AM}{MC} \quad و \quad \frac{S_{OBN}}{S_{ONC}}=\frac{BN}{NC}$$

$$\frac{S_{OMA}}{S_{OMC}}=\frac{S_{OBN}}{S_{ONC}} \Longrightarrow S_{OMC}=S_{ONC}$$

اما دو مثلث OMC و ONC در قاعدهٔ OC مشترکند پس ارتفاعهای نظیر رأسهای M و N ازآنها باهم برابرند یعنی دو نقطهٔ M و N از خط OC به یك فاصله‌اند. بنابراین MN با OC موازی است وچهار ضلعی $OABC$ ذوزنقه است.

عکس قضیه: هرگاه از نقطهٔ M واقع بر قطر AC از ذوزنقهٔ $OABC$ خطی موازی با دوقاعده رسم کنیم تاباساق BC در N برخورد کند، دومثلث OAM و OBN باهم معادلند.

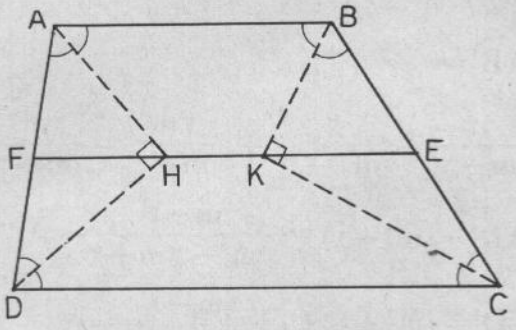
اثبات به‌ترتیب عکس انجام می‌گیرد.

۱۰۳/۱۲- ترجمهٔ از فرانسه

در ذوزنقهٔ $ABCD$ وسط ساق BC را E و وسط ساق AD را F می‌نامیم. اگر H نقطهٔ تلاقی نیمسازهای دوزاویهٔ A و D و K نقطهٔ تلاقی نیمسازهای دوزاویهٔ B و C باشدثابت

کنید که HF با نصف AD و KE با نصف BC برابر است و نتیجه بگیرید شرط لازم وکافی برای تقارب نیمسازهای چهار زاویهٔ ذوزنقه آن است که مجموع دوساق آن با مجموع دوقاعده‌اش برابر باشد.

حل- چون دو زاویهٔ A و D از ذوزنقه مکمل یکدیگرند پس نصفهای آنها متمم یکدیگرند وبنابراین زاویهٔ AHD قائمه است. همچنین زاویهٔ BKC قائمه می‌باشد.



درمثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وتر بانصف وتر برابر است. پس FH بانصف AD و KE بانصف BC برابراست.

مثلث FAH متساوی‌الساقین است. پس دوزاویهٔ FHA و FAH باهم برابرند. بنابه فرض دو زاویهٔ FAH و HAB باهم برابرند. بنابراین دوزاویهٔ AHF و HAB باهم برابرند وخط HF باخط AB موازی است. همچنین خط KE باخط AB موازی است. در ذوزنقه خطی که وسطهای دوساق رابه هم وصل کند بادو قاعده موازی و طول آن نصف مجموع طولهای دو قاعده است. بنابراین K و H بر EF واقعند و داریم:

$$HK = EF - (FH + KE)$$

$$HK = \frac{AB+CD}{۲} - \frac{AD+BC}{۲}$$

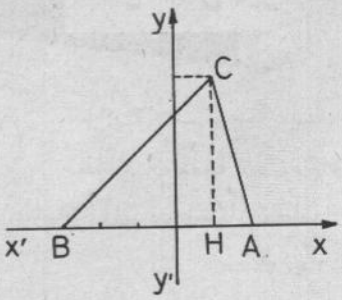
برای آنکه نیمسازهای چهارزاویهٔ ذوزنقه متقارب باشند لازم و کافی است که $HK = ۰$ یعنی:

$$AB + CD = AD + BC$$

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۰۳/۱۳- بر محور $x'x$ دونقطهٔ A و B به‌ترتیب به طولهای ۲ و ۳- انتخاب می‌کنیم.

براین دو نقطه دو خط می‌گذرانیم که یکدیگر را بالای محور $x'x$ درنقطهٔ C به‌طول یك تلاقی می‌کنند. هرگاه مساحت مثلث ABC برابر با ۱۰ واحد سطح باشد، عرض نقطهٔ C و معادله‌های دوخط AC و BC را بدست آورید.



حل- اگر H پای عمود وارد از C بر $x'x$ باشد، مساحت مثلث ABC برابر است بانصف حاصل‌ضرب AB در CH پس:

$$AB \cdot CH = ۲ \times ۱۰ = ۲۰$$

$$AB = |x_A - x_B| = ۵ \Longrightarrow CH = ۴$$

نقطهٔ C بالای $x'x$ است، پس عرض آن مثبت وبرابر با ۴ است. بنابراین $C(۱,۴)$

$$(CA) : \frac{y-۴}{x-۱} = \frac{۴}{۱-۲} \Longrightarrow y = -۴x + ۸$$

$$(CB) : \frac{y-۴}{x-۱} = \frac{۴}{۱+۳} \Longrightarrow y = x + ۳$$

۱۰۳/۱۴- هرگاه α کمان حاده باشد و داشته باشیم:

$$\sin\alpha = \frac{۱}{x-۱} \text{ و } \cot g\alpha = \sqrt{۳x}$$

مقدار $\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)$ چقدراست؟

حل- به ترتیب داریم:

$$\cos\alpha = \sqrt{۱ - \sin^۲\alpha} = \sqrt{۱ - \frac{۱}{(x-۱)^۲}} = \frac{\sqrt{x^۲ - ۲x}}{x-۱}$$

$$\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{x^۲ - ۲x}$$

$$\sqrt{x^۲ - ۲x} = \sqrt{۳x} \Longrightarrow x^۲ - ۵x = ۰$$

از این معادله دومقدار $x = ۰$ و $x = ۵$ بدست می‌آید. چون α زاویهٔ حاده است پس $\sin\alpha > ۰$ و بنابراین فقط $x = ۵$ قابل

قبول است و در ازای آن داریم :

$$\sin\alpha=\frac{1}{4} \quad و \quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۰۳/۱۵ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

نقاطی از صفحهٔ محورهای مختصات را پیدا کنید که مختصات آنها در دستگاه معادله‌های زیر صدق کند :

$$\begin{cases}18x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3=0\\12y^2-2xy^2+3y^3=0\end{cases}$$

حل ـ معادله‌های داده‌شده به ترتیب‌زیر تجزیه می‌شوند:

$$\begin{cases}x^2y^2(18-4x-3y)=0\\y^2(12-2x+3y)=0\end{cases}$$

اگر $y=0$ باشد x عدد حقیقی دلخواه است . در این حالت تمام محور $x'x$ نمایش هندسی دستگاه است .

اگر $y\neq 0$ باشد و $x=0$ داریم :

$$y^2(12+3y)=0\Longrightarrow y=-4$$

در این‌حالت نقطهٔ $(0 \text{ و } -4)$ نمایش هندسی معادله است.

اگر $y\neq 0$ و $x\neq 0$ باشد داریم :

$$\begin{cases}18-4x-3y=0\\12-2x+3y=0\end{cases}\Longrightarrow x=5 \text{ و } y=-\frac{2}{3}$$

بنابراین نمایش هندسی دستگاه داده شده عبارتست از مجموعهٔ نقاط محور $x'x$ و دونقطهٔ $(0 \text{ و } -4)$ و $(5,-\frac{2}{3})$

۱۰۳/۱۶ـ چهارخط به معادله‌های زیر داده شده‌است :

$$\Delta_1 : y=x+3 \qquad \Delta_2 : y=2x+2$$

$$\Delta_3 : y+x=5 \qquad \Delta_4 : y+3x=7$$

الف ـ تحقیق کنید که‌این چهار خط دریك نقطهٔ S متقاربند مختصات S را پیدا کنید.

ب ـ خط Δ از مبدأ مختصات می‌گذرد و خطهای Δ_1 ، Δ_2 ، Δ_3 و Δ_4 رابه‌ترتیب در A ، B ، C و D قطع‌می‌کند. اگر $AB=CD$ باشد معادلهٔ Δ را بدست آورید.

حل ـ الف ـ از حل معادله‌های خطهای Δ_1 و Δ_2 با هم بدست‌می‌آوریم $S(4,1)$ وچون مختصات S در معادله‌های‌خطهای Δ_3 و Δ_4 نیزصدق می‌کند پس هرچهارخط از S می‌گذرند .

ب ـ خط Δ را به معادلهٔ $y=mx$ اختیار می‌کنیم. ازحل این معادله با هریك از معادله‌های داده شده خواهیم داشت :

$$A\left(\frac{3}{m-1} \text{ و } \frac{3m}{m-1}\right) ، B\left(\frac{2}{m-2} \text{ و } \frac{2m}{m-2}\right)$$

$$C\left(\frac{5}{m+1} \text{ و } \frac{5m}{m+1}\right) ، D\left(\frac{7}{m+3} \text{ و } \frac{7m}{m+3}\right)$$

$$AB=CD\Longrightarrow AB^2=CD^2$$

$$AB^2=$$

$$\left(\frac{3}{m-1}-\frac{2}{m-2}\right)^2+\left(\frac{3m}{m-1}-\frac{2m}{m-2}\right)^2$$

$$AB^2=(m^2+1)\left(\frac{m-4}{m^2-3m+2}\right)^2$$

$$CD^2=(m^2+1)\left(\frac{2m-8}{m^2+4m+3}\right)^2$$

$$\frac{m-4}{m^2-3m+2}=\pm\frac{2m-8}{m^2+4m+3}$$

از حل این معادله‌ها نتیجه می‌شود :

$$m=4 \text{ یا } m=5\pm 2\sqrt{6}$$

با تعیین مقدار m معادلهٔ خط Δ نیزمشخص می‌شود. در ازای $m=4$ داریم $AB=CD=0$ و Δ از S می‌گذرد.

۱۰۳/۱۷ـ هرگاه $0<\alpha<\pi$ وداشته باشیم :

$$\beta-\alpha=\frac{\pi}{2} \text{ و } \sin\alpha=2tg\beta$$

نسبتهای مثلثاتی دوکمان α و β را بدست آورید.

حل ـ از رابطه‌های داده شده داریم:

$$\sin\alpha=2tg\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-2cotg\alpha=\frac{-2\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha+2\cos\alpha=0\Longrightarrow 1-\cos^2\alpha+2\cos\alpha=0$$

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0\Longrightarrow\cos\alpha=1-\sqrt{2}$$

چون مقدار $\cos\alpha$ منفی‌است پس $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ و

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$$

$$tg\alpha=\frac{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}{1-\sqrt{2}}=-\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\,(1+\sqrt{2})$$

$$= -\sqrt{2(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})^2} = -\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$$

$$cotg\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}} = \frac{-\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}{2}$$

$$sin\beta = sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = cos\alpha = 1-\sqrt{2}$$

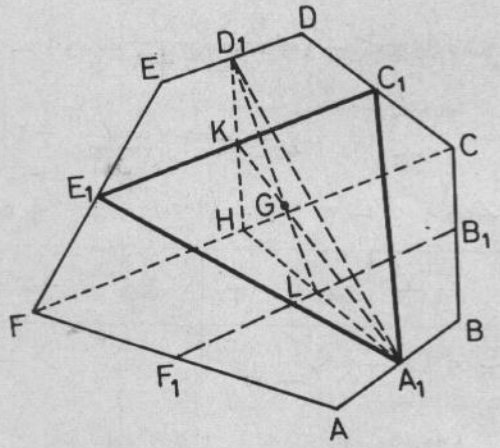
$$cos\beta = -sin\alpha = -\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$$

$$tg\alpha = -cotg\alpha = \frac{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}{2}$$

$$cotg\alpha = -tg\alpha = \sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$$

۱۰۳/۱۸ـ ترجمهٔ از فرانسه

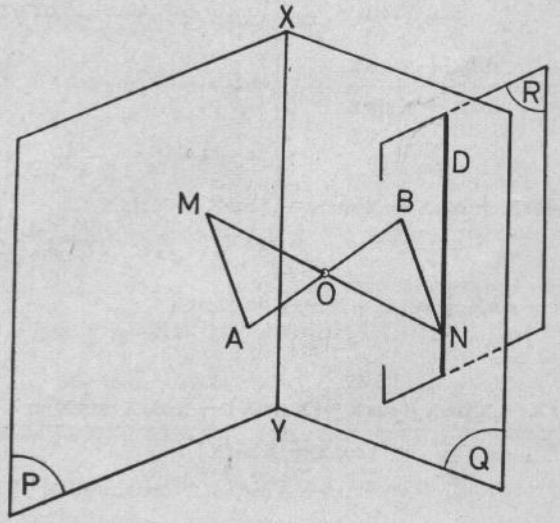
شش‌ضلعی چپ (=غیر مسطح) ABCDEF داده شده است. هرگاه A_1، B_1، C_1، D_1، E_1 و F_1 بـه ترتیب وسطهای اضلاع AB، BC، ... و FA باشد، ثابت‌کنید که مرکزهای ثقل دو مثلث $A_1C_1E_1$ و $B_1D_1F_1$ برهم منطبقند.



حل ـ هرگاه K وسط E_1C_1 و H وسط FC و L وسط B_1F_1 و G نقطهٔ‌تلاقی A_1K با D_1L باشد چون C_1، D_1، E_1 و H اوساط ضلعهای متوالی‌چهارضلعی CDEF می‌باشند، چهار ضلعی $C_1D_1E_1H$ متـوازی‌الاضلاع است و در نتیجه K وسط D_1H نیز می‌باشد. همچنین L وسط HA_1 است و A_1K و D_1L دومیانه از مثلث A_1D_1H می‌باشند و G هریك از دو پاره خط A_1K و D_1L را به‌نسبت یك بردوتقسیم می‌کند. اما A_1K میانهٔ مثلث $A_1C_1E_1$ است پس G مرکز ثقل این مثلث است. همچنین D_1L یك میانه از مثلث $B_1D_1F_1$ است پس G مرکز ثقل این‌مثلث نیز می‌باشد.

۱۰۳/۱۹ـ ترجمه از فرانسه

دوصفحهٔ‌متقاطع P و Q و نقطهٔ O غیرواقع بر آنها مفروض است. خطهایی در نظر می‌گیریم که از O بگذرند و دو صفحهٔ P و Q را به ترتیب در M و N قطع کنند بقسمی که O وسط MN باشد. مکان هندسی این خطها چیست؟



حل ـ نقطهٔ دلخواه A را در صفحهٔ P اختیار می‌کنیم و B قرینهٔ آن را نسبت به O بدست آورده خطهای MA و NB را رسم می‌کنیم. چون MN و AB منصف یکدیگرند پس BN با خط AM و درنتیجه با صفحهٔ P موازی است، اگر صفحهٔ R را بر B به موازات صفحهٔ P بگذرانیم، ایـن صفحه شامل خط BN است و صفحهٔ Q را در خط D قطع می‌کند که بر N می‌گذرد و با xy فصل مشترك دوصفحهٔ P و Q موازی است. خط D مکان هندسی نقطهٔ N است و صفحه‌ای که با خط D و نقطهٔ O مشخص می‌شود مکان خط متغیر MN است.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم‌دبیرستان

۱۰۳/۲۰ـ منحنی به معادلهٔ زیرداده شده است:

$$x^2+2xy+3y^2-x+1=0$$

هرگاه A نقطه‌ای به‌طول ۲ از این منحنی باشد که مماس بـر منحنی در A با نیمساز ربع دوم محورهای مختصات موازی‌باشد، عرض نقطهٔ A چقدر است؟

حل ـ مشتق تابع y برحسب x در ازای مختصـات A برابر است‌با ضریب زاویه‌ای نیمساز ربع دوم محورها یعنی‌برابر است با ۱ـ

$$y' = \frac{-2x-2y+1}{2x+6y}$$

$$x=2 \text{ و } y'=-1 \Longrightarrow \frac{-4-2y+1}{4+6y}=-1$$

$$\Longrightarrow y=-\frac{1}{4}$$

۱۰۳/۲۱ـ مشتق تابع زیررا تعیین و ساده کنید :

$$y=\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+x\sin x}$$

حل ـ مشتق صورت می‌شود:

$$\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$$

مشتق مخرج می‌شود :

$$-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$$

$$y'=$$

$$\frac{(2\cos x-x\sin x)(\cos x+x\sin x)-x\cos x(\sin x+x\cos x)}{(\cos x+x\sin x)^2}$$

بعد از انجام عملیات نتیجه خواهد شد :

$$y'=\frac{2\cos^2 x-x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۳/۲۲ـ منحنی زیر داده شده است :

$$y^2=x^2+2mx+m$$

این منحنی به ازای مقادیر مختلف m از دونقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد . هرگاه زاویهٔ بین خطهایی که در A و B بر منحنی مماس می‌شوند ۴۵ درجه باشد مقدار m چقدراست؟

حل ـ قبلا نقطه‌های ثابت‌را پیدا می‌کنیم :

$$m(2x+1)+x^2-y^2=0$$

$$\begin{cases}2x+1=0\\ x^2-y^2=0\end{cases} \Longrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ و } y=\pm\frac{1}{2}$$

$$A(-\frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2}),\ B(-\frac{1}{2} \text{ و } -\frac{1}{2})$$

اکنون m_1 و m_2 ضریب زاویه‌ایهای مماسهای برمنحنی را در A و B بدست می‌آوریم :

$$y'=\frac{x+m}{y}$$

$$m_1=-1+2m \text{ و } m_2=1-2m$$

$$\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=tg45^\circ=1$$

$$\frac{-2+4m}{1-(1-4m^2)}=\pm 1$$

$2m^2-2m+1=0$ جواب حقیقی ندارد

$$2m^2+2m-1=0 \Longrightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

۱۰۳/۲۳ـ منحنی نمایش‌هندسی تابع زیر را رسم کنید:

$$y=x\left|1+\frac{1}{x}\right|^{-1}$$

حل ـ به ترتیب داریم :

$$y=x\left|\frac{x+1}{x}\right|^{-1}=x\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

تابع در ازای $x=-1$ نامعین و در ازای سایر مقادیر x معین است . عبارت $\frac{x}{x+1}$ درفاصله‌های $x\geqslant 0$ و $x<-1$ مثبت و درفاصلهٔ $-1<x\leqslant 0$ منفی است پس دو حالت درنظر می‌گیریم .

$$1)\ x\geqslant 0 \text{ یا } x<-1 \Longrightarrow y=\frac{x^2}{x+1}$$

$$y'=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2},\ y'=0 \Longrightarrow x=0 \text{ یا } -2$$

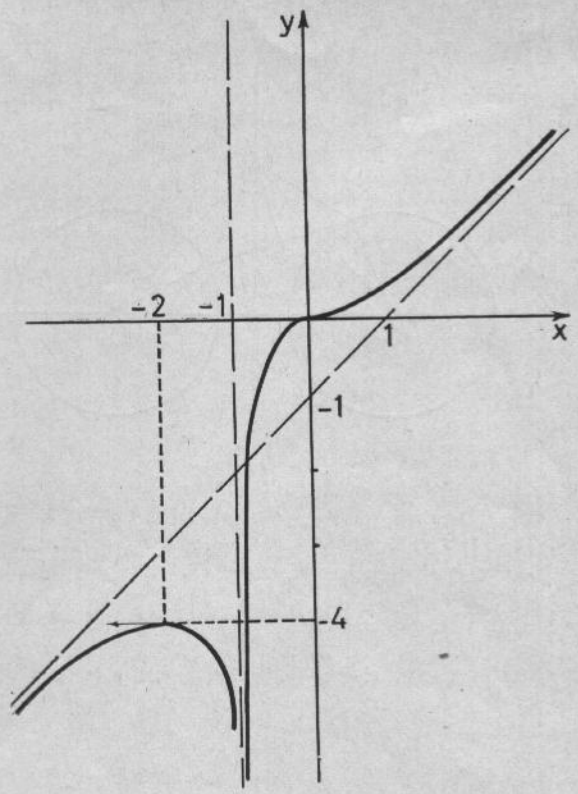
x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ |		0	$\nearrow$	$+\infty$

$$2)\ -1<x\leqslant 0 \Longrightarrow y=\frac{-x^2}{x+1}$$

$$y'=\frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		|		$+$	0		
y		|	$-\infty$	$\nearrow$	0		

با توجه به‌جدولهای بالا و اینکه درحالت اول‌خط $y=x-1$ مجانب منحنی است ، منحنی نمایش تابع مفروض به شکل زیر است .



۱۰۳/۲۴ـ ترجمهٔ از فرانسه

تابع زیر را درنظر می‌گیریم :

$$y = \frac{\sin^3 \pi|x|}{x^2}$$

الف‌ـ حد تابع را پیدا کنید وقتی‌که $x \to 0$

ب‌ـ به‌فرض آنکه در ازای $x=0$ داشته باشیم $y=0$

آیا در ازای $x=0$ تابع دارای مشتق می‌باشد یا نه ؟

حل‌ـ الف‌ـ می‌توانیم چنین بنویسیم :

$$y = x \times \frac{\sin^3 \pi|x|}{x^3} = \pi^3 x \times \left[\frac{\sin \pi|x|}{\pi x}\right]^3$$

وقتی $x \to 0$ حد $\frac{\sin \pi|x|}{\pi x}$ برابریك است و در نتیجه حدتابع y برابر با صفر است .

ب‌ـ مشتق تابع در ازای $x=0$ برابر است با حد $\frac{y}{x}$ وقتی‌که $x \to 0$ اما:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin^3 \pi x|}{x^3} = \pi^3 \times \left[\frac{\sin \pi|x|}{\pi x}\right]^3$$

اگر x مثبت باشد و به سمت صفر میل کند حد $\frac{\sin \pi|x|}{\pi x}$ برابربا یك است ، و اگر x منفی باشد و به سمت صفر میل کند حد $\frac{\sin \pi|x|}{\pi x}$ برابربا ۱ ـ است . بنابراین مشتق تابع در ازای $x=0$ معین نیست . یعنی تابع در ازای $x=0$ مشتق ندارد.

۱۰۳/۲۵ـ در معادلهٔ زیر نشانهٔ $\oplus$ به‌جای یکی از نشانه‌های $\sin$ ، $\cos$ ، tg یا $cotg$ قرارگرفته است :

$$a \oplus^2 x + b \oplus x + c = 0$$

هرگاه انتهای کمانهای نظیر ریشه‌های معادله‌مثلثی متساوی‌الاضلاع در دایرهٔ مثلثاتی پدید آورند :

الف‌ـ نشانهٔ $\oplus$ چه می‌تواند باشد ؟

ب‌ـ به‌فرض $a+c=b$ ریشه‌ها و ضریبهای معادله را به ساده‌ترین صورت بدست آورید .

حل‌ـ الف: نشانهٔ $\oplus$ جانشین نشانه‌های tg یا $cotg$ نیست زیرا درغیر این‌صورت هرکمان‌که در معادله صدق کند کمان دیگری‌که تفاضل‌آن برکمان اول $180°$ باشد نیزدرمعادله‌صدق خواهدکرد و انتهای دوکمان‌که تفاضل آنها $180°$ باشد نمی‌توانند رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع باشند .

ب‌ـ به‌فرض‌داریم:

$$a \oplus^2 x + (a+c) \oplus x + c = 0$$

$$\oplus x = -1 \text{ یا } \oplus x = -\frac{c}{a}$$

اگر $\oplus$ جانشین $\sin$ باشد از $\sin x = -1$ نتیجه می‌شود که $x_1 = \frac{3\pi}{2}$ یك‌جواب معادله است و در نتیجه $\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ جوابهای دیگر معادله‌اند .

و:

$$-\frac{c}{a} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$-2c\sin^2 x + (c-2c)\sin x + c = 0 \quad \text{و} \quad a = -2c$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

اگر $\oplus$ جانشین $\cos$ باشد جوابهای معادله π و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ است و خواهیم داشت :

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

۱۰۳/۲۶ـ فرستنده: **کاظم حافظ‌قرآن**

دبیر دبیرستانهای تهران

چند عدد n رقمی وجود داردکه حد اقل یکی‌ازرقمهایش صفرباشد .

حل- نخست پیدا می‌کنیم که چند عدد n رقمی وجود دارد که هیچیك از رقمهای آن صفر نیست. فرض کنیم غیر از رقم یکان بقیهٔ رقمهای عدد ثابت باشند، در این‌صورت رقم یکان می‌تواند یکی از رقمهای ۱، ۲، ۳، ...، ۹ باشد که تعداد اعداد می‌شود ۹ . حال اگر فرض کنیم که غیر از رقمهای یکان ودهگان بقیهٔ رقمهای عددثابت باشند تعداد اعداد می‌شود ۹×۹. باادامهٔ استدلال نتیجه خواهد شد که تعداد عددهای n رقمی که هیچیك از رقمهایش صفر نباشد برابر است با ۹^n. تعداد همهٔ عددهای n رقمی برابراست با تعداد عددهای ابتدا از $۱۰^{n-۱}$ تا $۱۰^n - ۱$ که برابراست با $۹ \times ۱۰^{n-۱}$. بنابراین تعداد عددهای n رقمی که حداقل یك رقم آن صفر باشد برابراست با :

$$۹ \times ۱۰^{n-۱} - ۹^n = ۹(۱۰^{n-۱} - ۹^{n-۱})$$

۱۰۳/۲۷- ترجمهٔ از فرانسه

آیا عدد طبیعی N وجود دارد که در دستگاه به‌مبنای ۵ به‌صورت $\overline{abcca}$ و در دستگاه به‌مبنای ۸ به‌صورت $\overline{bbab}$ نوشته شود؟ عدد N را در دستگاه دهدهی بدست‌آورید .

حل- باید داشته باشیم :

$$a \times ۵^۴ + b \times ۵^۳ + c \times ۵^۲ + c \times ۵ + a$$
$$= b \times ۸^۳ + b \times ۸^۲ + a \times ۸ + b$$

$$a(a^۴ + ۱ - ۸) + b(۵^۳ - ۸^۳ - ۸^۲ - ۱) +$$
$$+ c(۵^۲ + ۵) = ۰$$

$$۳۰۹a - ۲۲۶b + ۱۵c = ۰$$

چون $۳۰۹a + ۱۵c$ مضرب ۳ است و ۲۲۶ مضرب ۳ نیست ، پس b مضرب ۳ است وچون $۰ < b < ۵$ پس $b = ۳$ وازآنجا:

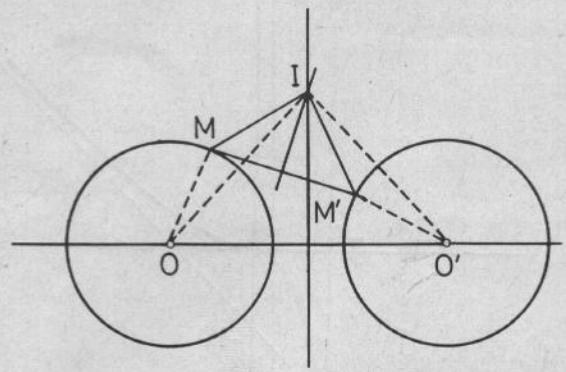
$$۱۰۳a + ۵c = ۲۲۶$$
$$۰ \leqslant c \leqslant ۴ \implies ۲۰۶ \leqslant ۱۰۳a \leqslant ۲۲۶$$
$$a = ۲ \text{ و } c = ۴$$
$$N = (۲۳۴۴۲)_۵ = ۱۷۴۷$$

۱۰۳/۲۸- ترجمهٔ از فرانسه

در دایرهٔ برابربا هم (O) و (O') داده شده است. نقطهٔ M بر دایرهٔ (O) ونقطهٔ M' بر دایرهٔ (O') چنان‌تغییرمکان می‌دهند که زاویهٔ امتدادهای OM و O'M' برابر با مقدارثابت α است . ثابت کنید که عمودمنصف MM' بر نقطهٔ ثابت می‌گذرد .

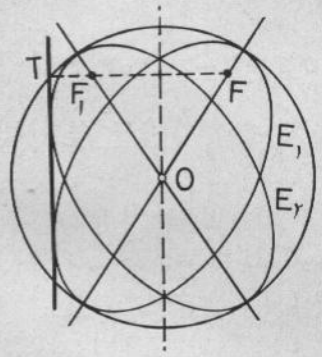
حل- برعمودمنصف OO' نقطهٔ I را چنان تعیین‌می‌کنیم که زاویهٔ (OI و O'I) برابربا α باشد، در دوران به‌مرکز I و به‌زاویهٔ α دایرهٔ O' بر دایرهٔ O و نقطهٔ M' بر نقطهٔ M منطبق می‌شود.

بنابراین $IM = IM'$ یعنی عمودمنصف MM' از I می‌گذرد .



۱۰۳/۲۹- ترجمهٔ از فرانسه

دو بیضی $E_۱$ و $E_۲$ هم‌مرکز و برابر با هم می‌باشند. خطی موازی نیمساز زاویهٔ بین محورهای کانونی آنها بر یکی از آنها مماس می‌کنیم . ثابت کنید که این خط بر بیضی دیگر نیز مماس است .



حل- دو بیضی $E_۱$ و $E_۲$ دارای یك دایرهٔ اصلی می‌باشند. اگر F کانون $E_۱$ و $F_۱$ کانون نظیر از $E_۲$ و O مرکز مشترك دو بیضی باشد ، از $OF = OF_۱$ نتیجه می‌شود که $FF_۱$ بر نیمساز زاویهٔ محورهای دو بیضی عمود است . پس $FF_۱$ برمماس بر $E_۱$ عمود است یعنی F و $F_۱$ در یك نقطه روی این خط تصویر می‌شوند . تصویر F برمماس روی دایرهٔ اصلی واقع است ، پس تصویر $F_۱$ بر آن نیز روی دایرهٔ اصلی واقع است . بنابراین خط مزبور بر $E_۲$ نیز مماس است .

حل مسائل گوناگون

ترجمهٔ : مهندس فتح‌الله زرگری

۱۰۳/۳۰- عدهٔ دانش‌آموزان عضو یك انجمن علمی را که به‌رقم یکان سرراست کرده‌ایم ۱۰۰ نفر می‌باشد . یك‌سوم این عده دخترند که نیمی ازآنها در دبیرستان درس می‌خوانند $\frac{۵}{۷}$

عدهٔ پسران عضو انجمن دانش‌آموز دبیرستان نمی‌باشند. چندنفر دانش‌آموز دبیرستان عضواین انجمن می‌باشند؟

حل ـ ازعدهٔ دانش‌آموزان عضوانجمن $\frac{1}{6}$ دخترانی هستند که در دبیرستان درس می‌خوانند و $\frac{2}{3}$ آنان پسر می‌باشند که $\frac{2}{7}$ ایشان‌دانش‌آموز دبیرستان می‌باشند . پس عدهٔ عضوهای‌انجمن که دانش‌آموز دبیرستان می‌باشند برابر است با :

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{5}{14}$$

عدهٔ دانش‌آموزان عضوانجمن مضربی است از۶ و ۷ پس‌مضربی است از ۴۲ و چون سرراست شدهٔ آن به رقم یکان ۸۰ است ، پس ۸۴ است و: $84\times\frac{5}{14}=30$

۱۰۳/۳۱ـ نیم‌کیلوپیاز و ۳کیلو سیب‌زمینی و یك‌کیلو سبزی رویهم ۵۹ ریال بها دارد . بهای ۲کیلو پیاز و ۴کیلو سبزی ۱۰۴ ریال است . پیداکنید بهای یك‌کیلوپیاز و ۲ کیلو سیب‌زمینی و ۲کیلو سبزی را.

حل ـ از فرض دوم نتیجه می‌شودکه نیم‌کیلو پیاز و یك کیلو سبزی ۲۶ ریال بها دارد . با توجه به‌این نتیجه و ازفرض اول نتیجه می‌شودکه ۳کیلو سیب‌زمینی ۳۳ ریال و یك‌کیلوی آن ۱۱ ریال بها دارد . با دانستن بهای پیاز و با توجه‌به‌فرض دوم نتیجه می‌شودکه بهای یك‌کیلوپیاز و ۲کیلو سیب‌زمینی و ۲ کیلو سبزی برابر است با : $2\times26+22=74$ ریال

۱۰۳/۳۲ـ درجادهٔ خارج از شهر سه اتومبیل به ترتیب زیر درحرکتند :

اتومبیل A با سرعت ۹۰کیلومتر در ساعت ، ۱۰۰ متر جلوتر از آن و درهمان جهت حرکت اتومبیل A اتومبیلB با سرعت ۶۰کیلومتر درساعت، در فاصلهٔ یك‌کیلومتری ازA و در جهت مخالف حرکت اتومبیل A اتومبیل C با سرعت ۱۲۰ کیلومتر درساعت .

اگرسرعت اتومبیلها تغییرنکند ، آیا اتومبیلAمی‌تواند از اتومبیل B سبقت بگیرد درصورتی‌که شرط سبقت‌گرفتن آن است‌که درلحظهٔ پایان سبقت فاصله‌اش ازBکمتر از۶۰ و از C کمتر از۱۲۰ نباشد.

حل ـ سرعتهای اتومبیلهای A و B و C برحسب‌متر بر ثانیه به ترتیب ۲۵ و $\frac{50}{3}$ و $\frac{100}{3}$ است . فرض‌کنیم t ثانیه زمانی باشدکه درطول آن A به اندازهٔ ۶۰ متر از Bجلوافتاده باشد . در این مدت A مسافت ۲۵t وB مسافت $\frac{50t}{3}$ راپیموده است . بنابراین داریم :

$$25t-\frac{50t}{3}=100+60\Rightarrow t=19/2$$

در زمان ۱۹/۲ ثانیه A مسافت $25\times19/2=480$ متر و Cمسافت $\frac{100}{3}\times19/2=640$ متر را می‌پیماید . اما $480+640>1000$ بنابراین در موقع سبقت A ازBبرای اتومبیلها احتمال برخورد وجود دارد . پسA نمی‌تواند از B سبقت بگیرد .

۱۰۳/۳۳ـ درجدول‌زیرحرفهای a و b وc و dنمایندهٔ چهار رقم متفاوتند . این رقمها را پیداکنید به‌شرط آنکه‌هریك از عددهای سه رقمی واقع درهرسطر و هرستون جدول توان‌دوم باشد .

a	b	c
b	d	b
c	b	a

حل ـ بین عددهای سه رقمی و مجذورکامل تنها سه عدد ۱۲۱ و ۴۸۴ و۶۷۶ دارای رقمهای یکان و سدگان برابرمی‌باشند . اما $\overline{bdb}$ نمی‌تواند برابر با ۱۲۱ باشد زیرا $\overline{abc}$ که مجذورکامل باشد b برابر با یك نیست . همچنین $\overline{bdb}$ برابر با ۴۸۴ نیز نمی‌تواند باشد زیرا با فرض $b=4$ عدد $\overline{abc}$ یا ۴۴۱ یا ۱۴۴ است و در این‌صورت b و c متمایز نیستند . پس $\overline{bdb}=676$ و دوجواب زیر را خواهیم داشت:

۹	۶	۱
۶	۷	۶
۱	۶	۹

۱	۶	۹
۶	۷	۶
۹	۶	۱

۱۰۳/۳۴ـ شخصی در bام ماه c از سال $1900+a$ متولد شد و درسال ۱۹۷۳ سن او d سال تمام شد . به فرض

$abcd=۷۶۰۹۶$ سال تولد این شخص را پیدا کنید .

حل ـ از مفروضات مسئله داریم :

$a+d=۷۳$ و $۱\leq c\leq ۱۲$ و $۱\leq b\leq ۳۱$

$abcd=۲^{۶}\times ۲۹\times ۴۱$

بنابراین یا $a=۴۱$ یا $d=۴۱$. اگر $a=۴۱$ باشد $d=۳۳$ و از آنجا $b=۲۹$ و $c=۲$ بدست می‌آید . با این مقادیر تولد شخص ۲۹ فوریه ۱۹۴۱ است . اما ۱۹۴۱ سال کبیسه نبوده است . پس $a\neq ۴۱$ و بنابراین :

$d=۴۱\Longrightarrow a=۳۲$ و $b=۲۹$ و $c=۲$

شخص در ۲۹ فوریه ۱۹۳۲ متولد شده است .

۱۰۳/۳۵ ـ به ازای کدام مقادیر عدد طبیعی a معادلهٔ زیر برحسب مجهولهای x و y درحوزهٔ عددهای طبیعی دارای یك دسته جواب منحصر به‌فرد است .

$$ax^{۳}+xy-۶۱a=۰$$

حل ـ معادله را چنین می‌نویسیم :

$xy=a(۶۱-x^{۳})$

$۶۱-x^{۳}>۰\Longrightarrow x=۱$ یا ۲ یا ۳

۱) $a=۶k\Longrightarrow xy=۶k(۶۱-x^{۳})$

$$\begin{cases}x=۱\\ y=۳۶۰k\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}x=۲\\ y=۱۵۹k\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}x=۳\\ y=۶۸k\end{cases}$$

۲) $a=۶k\pm ۱\Longrightarrow xy=(۶k\pm ۱)(۶۱-x^{۳})$

$$\begin{cases}x=۱\\ y=۶۰(۶k\pm ۱)\end{cases}$$

۳) $a=۶k\pm ۲$

$$\begin{cases}x=۱\\ y=۶۰(۶k\pm ۲)\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}x=۲\\ y=۵۳(۳k\pm ۱)\end{cases}$$

۴) $a=۶k+۳$

$$\begin{cases}x=۱\\ y=۶۰(۶k+۳)\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}x=۳\\ y=۳۴(۶k+۱)\end{cases}$$

بنابراین در ازای $a=۶k\pm ۱$ معادلهٔ داده شده دارای یك دسته جواب است .

۱۰۳/۳۶ ـ معادلهٔ زیر را در حوزهٔ عددهای اول حل کنید :

$$a^{b}+۱=c$$

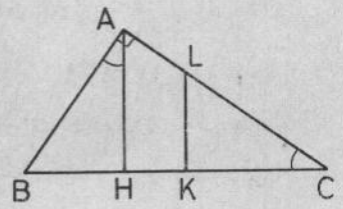
حل ـ چون $a^{b}\geq ۲^{۲}$ پس $c\geq ۵$. هرگاه $a>۲$ باشد در این‌صورت a فرد و c زوج است . اما چون c اول است و ۲ نیست پس‌فرض $a>۲$ قابل‌قبول نیست . هرگاه $b>۲$ باشد در این‌صورت :

$$c=۲^{b}+۱=$$
$$=(۲+۱)(۲^{b-۱}-۲^{b-۲}+\ldots-۲+۱)=۳n$$

c بر ۳ بخش‌پذیر است اما چون c اول است و ۳ نیست پس‌فرض $b>۲$ نیز قابل‌قبول نیست . بنابراین :

$a=۲$ و $b=۲$ و $c=۵$

۱۰۳/۳۷ ـ در دونقطه از وتر یك مثلث قائم‌الزاویه دو عمود بر وتر رسم کنید که مثلث به سه بخش معادل تقسیم‌شود.



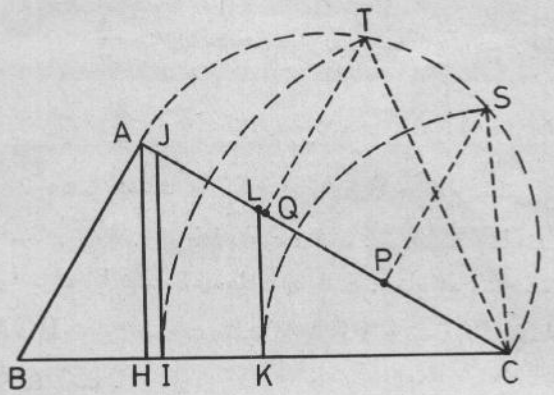
حل ـ مثلث ABC را درنظر می‌گیریم که درآن‌زاویهٔ A قائمه و $AB<AC$ باشد . ارتفاع AH از این مثلث را رسم می‌کنیم .

۱) اگر BH برابربا یك‌سوم BC باشد، دراین‌صورت مساحت مثلث ABH یك‌سوم مساحت مثلث ABC است وبرای تقسیم‌مثلث به‌سه‌بخش‌معادل کافی است که از مساحت مثلث AHC مساحتی به‌اندازهٔ مساحت ABH جداکنیم . برای این‌کار بر CB پارهٔ CK را برابربا AH جدا می‌کنیم و در K عمودی بر CB رسم می‌کنیم که با AC در L برخورد می‌کند. زاویهٔ C با زاویهٔ BAH برابراست، پس دومثلث ABH و CKL با هم برابر و درنتیجه معادلند . بنابراین با عمودهای HA و KL مثلث ABC به سه بخش معادل تقسیم شده است.

۲) اگر BH ازیك‌سوم BC کوچکتر باشد، دراین‌صورت هرگاه KL و IJ عمودهای مطلوب باشند هر دو در یك‌طرف AH واقعند . از تشابه مثلثهای CKL و CIJ و اینکه‌نسبت مساحتهای دومثلث متشابه برابربا مجذور نسبت تشابه‌آنها است ، نتیجه می‌شود :

$$\frac{CK^{۲}}{CA^{۲}}=\frac{۱}{۳}\Longrightarrow CK^{۲}=CA\times\frac{CA}{۳}$$

$$\frac{CI^2}{CA^2}=\frac{2}{3} \Longrightarrow CI^2=CA\times\frac{2CA}{3}$$



CK واسطهٔ هندسی بین AC ویك‌سوم آن وCI واسطهٔ‌هندسی بین CA و دوسوم‌آن است. بنابراین برای پیداکردن نقطه‌های K و I :

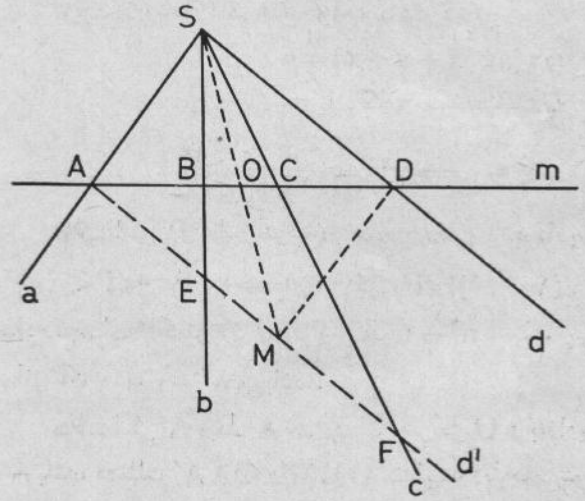
بر AC نقطه‌های P وQ را پیدا می‌کنیم که آن رابه‌سه پارهٔ برابربخش‌کنند . درP و Q عمودهـایی بر CA اخراج می‌کنیم تا نیمدایرهٔ به‌قطر AC را در S و T تلاقی‌کنند . بر CB پاره‌خطهای CK و CI را به اندازه‌های CS و CTجدا می‌کنیم .

۳) هرگاه BH ازیك‌سوم BC بزرگتر و ازدوسوم آن کوچکتر باشد، عمودهای KL وIJ در دوطرف AH واقع‌می‌شوند . دراین حالت نتیجه می‌شود:

$$CK^2=CA\times\frac{CA}{3} \text{ و } BI^2=AB\times\frac{AB}{3}$$

CK واسطهٔ هندسی بینAC ویك‌سوم آن، وBI واسطهٔ‌هندسی بین BA ویك‌سوم آن است.

۱۰۳/۳۸ـ چهار خط a،b،c وd درنقطهٔ S متقاربند .



خط m را رسم‌کنیدکه این خطها را به‌ترتیب درA،B،C وD

قطع‌کند و $AB=CD$ باشد .

حل‌ـ هرگاه m خط مطلوب باشد ، چون از A و D به‌ترتیب موازی با d و a رسم‌کنیم تا درM برخوردکنند،چهار ضلعی SAMD متوازی‌الاضلاع است و درنتیجه SM ازOوسط AD (همچنین وسط BC) می‌گذرد .

هرگاه E و F نقطه‌های برخورد خط AM با خطهای b و c باشد، از تشابه دومثلث ABE و SBD و همچنین دو مثلث ACF و SCD نتیجه می‌شود :

$$\frac{AE}{SD}=\frac{AB}{BD} \text{ و } \frac{AF}{SD}=\frac{AC}{CD}$$

$$AB=CD \Longrightarrow AC=BD$$

$$\frac{AE}{SD}=\frac{SD}{AF} \Longrightarrow SD^2=AE\cdot AF$$

$$SD=AM \Longrightarrow AM^2=AE\cdot AF$$

برای رسم خط مطلوب :

از نقطهٔ دلخواه A واقع‌بر a خط d′ را موازی بـا d رسم می‌کنیم تا b و c را درE و F قطع‌کند . بر d′ نقطهٔ M را پیدا می‌کنیم‌که AM واسطهٔ هندسی بین AE و AF باشد و ازA به O وسط SM وصل می‌کنیم .

نقطهٔ M را ممکن است با E و F دریك‌طرف A یا در طرف دیگرآن انتخاب‌کرد . پس‌نظیرهرنقطهٔ A ازa دوجواب برای مسئله وجود دارد وچون A نقطـهٔ دلخواه از a است پس مسئله به‌تعداد نامتناهی جواب دارد .

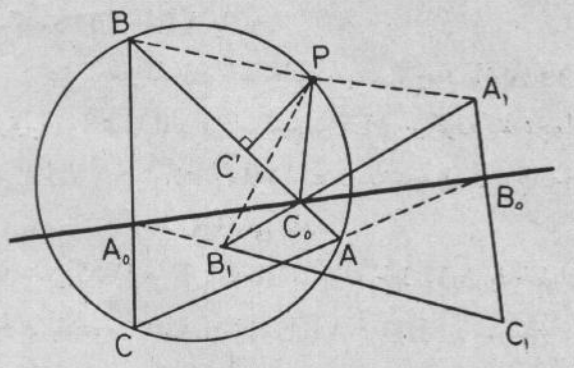
۱۰۳/۳۹ـ مثلث ABC را حـول‌نقطهٔ P از دایـرهٔ محیطی‌اش‌دوران داده‌ایم تا به مثلث $A_1B_1C_1$ تبدیل‌شده است. هرگاه BC با B_1C_1 درA_0 و CA با C_1A_1 درB_0وAB با A_1B_1 درC_0 برخوردکند ، ثابت‌کنیدکه سه‌نقطهٔ A_0وB_0 وC_0 بریك خط راست واقعند .

حل‌ـ هرگاه عمود PC′ را برAB رسم کنیم زاویـهٔ $C'PC_0$ برابر با نصف زاویهٔ دوران است‌که آن‌را $\frac{\alpha}{2}$می‌گیریم

اگرنسبت PC_0 بر PC′ را k بگیریم داریم :

$$k=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

پس C_0 از روی C در نتیجهٔ دوران به مرکز P و به زاویهٔ



$\frac{\alpha}{2}$ و پس‌از آن تجانس به‌مرکز P و به‌نسبت k بدست می‌آید. این تبدیل مرکب که C' را به C_0 تبدیل‌می‌کند T می‌نامیم. هرگاه عمودهای PA' و PB' را به‌ترتیب بر BC و CA رسم کنیم، به سادگی معلوم خواهد شد که درتبدیل T نقطه‌های A_0 و B_0 به ترتیب مبدلهای A' و B' می‌باشند. اما بنا به‌قضیهٔ سمسن سه نقطهٔ A' و B' و C' بر یك خط راست واقعند، پس‌مبدلهای آنها یعنی سه نقطهٔ A_0 و B_0 و C_0 نیز بر یك خط راست واقعند.

پاسخ تستهای ریاضی

۴۰ـ الف	۴۱ـ ب	۴۲ـ د	۴۳ـ ب	۴۴ـ ب
۴۵ـ د	۴۶ـ ب	۴۷ـ الف	۴۸ـ ج	۴۹ـ د
۵۰ـ د	۵۱ـ الف	۵۲ـ ج	۵۳ـ ج	۵۴ـ ب
۵۵ـ ب	۵۶ـ الف	۵۷ـ د	۵۸ـ ب	۵۹ـ الف
۶۰ـ ج	۶۱ـ الف	۶۲ـ د	۶۳ـ د	۶۴ـ الف
۶۵ـ ج				

توضیحات مربوط به تستها

۴۶ـ کافی است که حاصل عبارت $3x^6+2x^2+7$ را برحسب $x^2=-2$ بدست آوریم:

$$3(-2)^3+2(-2)+7=-21$$

۴۷ـ از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

۴۸ـ در رابطهٔ داده شده با تبدیل x به $x+2$ داریم:

$$f(x+2)=(x+4)^2+4(x+4)+3=$$
$$=x^2+12x+35$$

$$f(x)=x^2+8x+15$$

$$f(x+2)-f(x)=4x+20$$

۴۹ـ داریم:

$$\log 8=\log 2^3=3\log 2=a\Longrightarrow \log 2=\frac{a}{3}$$

$$\log 50=\log\frac{100}{2}=2-\log 2=2-\frac{a}{3}$$

۵۰ـ دومثلث BGA' و BAA' در رأس مشترکند و قاعده‌های آنها بریك خط راست واقعند. پس نسبت مساحتهای آنها برابر با نسبت قاعده‌های آنها است. بنابراین مساحت مثلث BGA' یك‌سوم مساحت مثلث BAA' و درنتیجه یك‌ششم مساحت ABC است.

۵۱ـ هرگاه A_2 نقطه برخورد PC_1 با BC باشد، چهارضلعی PB_1CA_2 متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی PC_1BA_1 ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین و مثلث PA_1A_2 متساوی‌الاضلاع است.

۵۲ـ ریشه‌های معادله m و $m-1$ می‌باشند.

۵۳ـ داریم:

$$\frac{MA^2}{MB^2}=\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=\frac{1}{4}$$

۵۵ـ درهرچهار ضلعی محاطی زاویه‌های روبرو مکمل یکدیگرند. کسینوسهای دو زاویهٔ مکمل قرینهٔ یکدیگرند.

۵۶ـ هرخط که درصفحهٔ P از O بگذرد و بر Δ عمودباشد در صفحه‌ای واقع است که از O می‌گذرد و بر Δ عموداست. فصل مشترك دوصفحه یك خط مستقیم است.

۵۸ـ داریم:

$$y=4x^2+\frac{1}{x}$$

خط $x=0$ و منحنی $y=4x^2$ مجانبهای منحنی مفروضند.

۶۲ـ از معادلهٔ داده شده خواهیم داشت:

$$tg\,x(a\,tg^2x+a+2)=0$$

$$tg\,x=0\Longrightarrow x=0 \text{ یا } \pi$$

$$a<-5\Longrightarrow tg^2x=\frac{-a-2}{a}>0$$

۶۴ـ اگر P حاصل‌ضرب n عدد n رقمی باشد داریم:

$$(10^{n-1})^n<P<(10^n)^n\Longrightarrow 10^{n^2-n}<P<10^{n^2}$$

تعداد رقمهای P کمتر از n^2 و بیش از n^2-n است. پس حداقل آن n^2-n+1 می‌باشد.

۶۵ـ اگر A' مبدل A در دوران به‌مرکز O و به‌زاویهٔ $-\alpha$ باشد، دومثلث OAA' و OMM' متشابهند و نتیجه‌می‌شود که چهارضلعی $OA'AM$ محاطی است.

مسائل برای حل

برای دانش‌آموزان سال اول نظری و جامع

۱۰۴/۱ـ ترجمهٔ ازفرانسه

ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$(C\cup B)\subset(A\cup B)$ و $(C\cap B)\subset(A\cap B)$

خواهیم داشت: $C\subset A$

۱۰۴/۲ـ ترجمهٔ از فرانسه

هرگاه مجموعهٔ مرجع عبارت باشد از مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های مجموعهٔ:

$E=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸\}$

هریك از معادله‌های مجموعه‌ای زیررا حل کنید (مجموعهٔ X را مشخص کنید):

۱) $\{۱،۲،۳،۴،۵\}\cap X=\{۲،۴،۶\}$

۲) $\{۱،۲،۳،۴،۵\}\cap X=\{۲،۴\}$

۱۰۴/۳ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

کودکی ۱۰ ریال دارد. باآن می‌تواند مداد مشکی یا مداد قرمز بخرد. سه‌مداد مشکی گرانتر ازیك مداد قرمزودومداد قرمز گرانتر از ۵ مداد مشکی است . بهای مداد مشکی چقدر است؟

۱۰۴/۴ـ هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{۱۶^{۲}\times ۴^{a}\times ۳^{۲b}}{۲۷}=(\frac{۱}{۶}\times ۹^{b})^{۲}\times[(\frac{۱}{۴})^{a}\times ۱۲]^{۳}$$

عددهای a و b را پیدا کنید.

۱۰۴/۵ـ درچهار ضلعی محدب ABCD هرگاه AD بزرگترین ضلع و BC کوچکترین ضلع باشد، ثابت کنید که زاویهٔ ABC بزرگتر از زاویهٔ ADC و زاویهٔ BCD بزرگتر از زاویهٔ BAD است.

برای دانش‌آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

۱۰۴/۶ـ از **جواد فیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه آذرآبادگان

هرگاه a و b عددهای مثبت و r عدد حقیقی نامنفی باشد، ثابت کنید که:

$$a^{r+۲}+b^{r+۲}\geqslant ab(a^{r}+b^{r})$$

۱۰۴/۷ـ مربع ABCD داده شده است. از C به M وسط AB و از D به N وسط BC وصل می‌کنیم. دوخط CM و DN در I برخورد می‌کنند. ثابت کنید که مثلث ADI متساوی‌الساقین است.

برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

۱۰۴/۸ـ فرستنده: **جواد فیض**

هرگاه داشته باشیم :

$x^{۲}-y^{۲}-axy=۰$ و $x\neq ۰$ و $y\neq ۰$

حاصل عبارت زیررا برحسب a بدست‌آورید:

$$\frac{x^{۵}}{y^{۵}}-\frac{y^{۵}}{x^{۵}}=?$$

۱۰۴/۹ـ از **کاظم حافظ قرآن**

هرگاه داشته باشیم:

$x^{n+۱}=ax-a+۱$

حاصل عبارت زیررا برحسب a بدست‌آورید:

$$P=x^{n}+(x^{n+۱}+x^{n}+\dots+x+۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+\dots+x+۱)$$

۱۰۴/۱۰ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

به‌ازای چه مقادیر از x نامساوی زیردرست است:

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(۴^{x}+۲^{x}-\frac{۳}{۲})>۱$$

۱۰۴/۱۱ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

چهار ضلعی محدب ABCD داده شده است. دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABC و ACD در نقطه‌های P و Q برقطر AC مماسند. دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABD

و BCD در نقطه‌های M و N برقطر BD مماسند. ثابت کنید که: $PQ=MN$

۱۰۴/۱۲ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

در مثلث ABC متوازی‌الاضلاع ADEF را محاط کرده‌ایم بقسمی که D بر AB و E بر BC و F بر AC واقع است. خطی که A را به M وسط ضلع BC وصل می‌کند با DE در K برخورد می‌کند. ثابت کنید که CFDK متوازی‌الاضلاع است.

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۰۴/۱۳ـ معادلهٔ زیرداده شده است:

$$(m+1)x-y+m-1=0$$

نمایش هندسی این‌معادله درصفحهٔ محور های مختصات یك خط راست است. در ازای $m=2$ و $m=0$ و $m=3$ خطهای نظیررا D_1، D_2 و D_3 می‌نامیم. ثابت کنید که این‌سه خط در یك نقطهٔ A متقاربند. خط D_2 محور $x'x$ را در B قطع می‌کند وخطی که در B عمود بر $x'x$ رسم شود با D_1 در P وبا D_3 در Q برخورد می‌کند. مساحت مثلث APQ را بدست‌آورید.

۱۰۴/۱۴ـ هرگاه $tg(\pi-\alpha)$ و $cotg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ ریشه‌های معادلهٔ زیر باشند:

$$mx^2+(m-1)x+m-3=0$$

مقدار عددی رابطهٔ زیر را بدست‌آورید:

$$(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha})^2+(\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha})^2+(tg\alpha+cotg\alpha)^2$$

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۱۰۴/۱۵ـ ترجمهٔ از فرانسه

درصفحهٔ محورهای مختصات $x'Ox$ و $y'Oy$ نقطه‌های زیررا در نظر می‌گیریم:

$$A(4,6),B(2,-2),C(7,0)$$

برپاره خط OC نقطهٔ H به‌طول α را انتخاب می‌کنیم ودرآن عمود Δ رابر $x'x$ اخراج می‌کنیم. خط Δ بادوضلع ازچهار ضلعی OACB در M و P برخورد می‌کند.

به‌فرض $PM=\beta$ اولاـ β را برحسب α بدست آورید.

ثانیاـ نمایش هندسی‌تابع βرا درصفحهٔ محورهای‌مختصات $\alpha'\omega\alpha$ و $\beta'\omega\beta$ رسم کنید واز روی‌آن معلوم کنید که درازای‌چه مقدار از α طول PM بیشترین مقدار را دارد.

۱۰۴/۱۶ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

درصفحهٔ محورهای مختصات $x'Ox$ و $y'Oy$ برای دو نقطهٔ $M(x_1,y_1)$ و $N(x_2,y_2)$ مقدار $d(M,N)$ رابه‌عنوان ماکسی فاصله طبق رابطهٔ زیرتعریف می‌کنیم:

$$d(M,N)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$$

به این معنی که از دو مقدار $|x_1-x_2|$ و $|y_1-y_2|$ آنکه بزرگتر باشد برابربا $d(M,N)$ خواهد بود.

مجموعهٔ نقطه‌هایی را تعیین کنید که ماکسی فاصلهٔ‌هر کدام ازآنها از دونقطهٔ $A(0,1)$ و $B(0,3)$ باهم برابرباشد.

۱۰۴/۱۷ـ فرستنده: **رضا راشدی**

همهٔ مقادیر x وy را که در رابطهٔ زیرصدق می‌کنند بدست آورید:

$$\sin^2x\sin^2y+\cos^2x\cos^2y=1$$

۱۰۴/۱۸ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دستگاه دو معادلهٔ زیررا در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}\sin^3x=a\sin y\\ \cos^3x=a\cos y\end{cases}$$

۱) با حذف y بین دو معادله، معادله‌ای برحسب tgx بدست آورید.

۲) اگر $x=\frac{3\pi}{4}$ دردستگاه معادلات صدق کند، مقدار a و مقادیر x وy رابدست‌آورید.

۱۰۴/۱۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

اولا ثابت کنید که درهرسه وجهی، صفحه‌هایی که برهریال می‌گذرند و بروجه مقابل به آن عمود می‌باشند در یك خط متقاربند.

ثانیاـ ازرأس سه‌وجهی مفروض و درهریك از صفحه‌های وجه‌های‌آن خطی رسم می‌کنیم که بریال مقابل به‌آن وجه عمود باشد. ثابت کنید که سه‌خط حاصل دریك صفحه واقعند.

برای دانش آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۱۰۴/۲۰ـ از جواد فیض

دایرهٔ بهمعادلهٔ زیرداده شده‌است:

$$x^2+y^2-2x+4y+86=0$$

مربعی‌دراین دایره‌محاط می‌کنیم‌که ضلعهایش با محورـ های مختصات مـوازی باشند. مختصات چهـار رأس این مربع، همچنین معادلهٔ دایرهٔ محاط درمربع را بدست آورید.

۱۰۴/۲۱ـ فرستنده: رضا راشدی

دایرهٔ مثلثاتی راکه درآن A مبدأکمـانها است در نظر می‌گیریم. هرگاه M انتهای کمـان $AM=\alpha$ باشد، از M عمودی بر $A'A$ (محورکسینوسها) رسم می‌کنیم که‌آن رادر H قطع می‌کند. اندازهٔ جبری $\overline{HA}$ را $v(\alpha)$ می‌نامیم.

اولاـ مقدار $v(\alpha)$ را برحسب هریك ازنسبتهای مثلثاتی α بدست‌آورید.

ثانیاًـ ازمعادلهٔ زیرمقدار α را پیداکنید:

$$v(2\alpha)+v(\alpha)=0$$

برای دانش آموزان کلاس ششم ریاضی

۱۰۴/۲۲ـ ترجمه ازمجلهٔ فرانسوی ریاضیات مقدماتی تابع زیرمفروض است:

$$y=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

الف ـ جهت تغییرات و جهت تحـدب و تقعـر منحنی نمایش تغییرات تابع را تعیین‌کنید واگر نقطهٔ عطف داردمماس برمنحنی در آن نقطه را بدست آورید.

ب ـ منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم‌کنید.

۱۰۴/۲۳ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

برمنحنی نمایش‌تغییرات تابع $y=\frac{k}{x}$ نقطهٔ P را انتخاب می‌کنیم. بفرض آنکه O مبدأ مختصات باشد، دایرهٔ به مرکز P و به شعاع $2OP$ باهذلولی عموماً در چهـار نقطه برخورد می‌کند. ثابت‌کنید که هرسه نقطه ازاین‌چهار نقطه رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

۱۰۴/۲۴ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

معادلهٔ زیررا حل‌کنید:

$$\cos 5x\cos 4x+\cos 4x\cos 3x-\cos^2 2x\cos x=0$$

۱۰۴/۲۵ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

هرگاه a، b، c و d کمانهای حاده باشند ثابت‌کنید‌که:

$$\sin a+\sin b-\sin c-\sin d<\sin(a+b-c-d)$$

آیا این مسئله تعمیم می‌یابد وچگونه؟

۱۰۴/۲۶ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

عدد N پنج رقمی است واز رقمهـای یکسان تشکیل شده است.عدد M چهار رقمی است و از رقمهای یکسان تشکیل شده است. درتقسیم N بر M خارج قسمت ۱۶ وباقیمانده r است. در تقسیم $N-1$ بر $M-1$ خارج‌قسمت بازهم۱۶ است‌اماباقیمانده برابر $r-2000$ است. N وM راپیداکنید.

۱۰۴/۲۷ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

مطلوب است تعیین عـدد هـای صحیح x و y بقسمی که بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد $3x+2y$ و $2x+3y$ برابربا ۸ باشد.

۱۰۴/۲۸ـ ترجمهٔ از فرانسه

دو دایرهٔ با هم برابر به مرکزهای O و O′ دردو نقطهٔ A و B متقاطعند . قاطع متغیری در نظر می‌گیریم کـه دایرهٔ بهمرکز O را در M و دایرهٔ به مـرکز O′ را در M′ قطع کند. در M′ عمودی بر MM′ اخراج می‌کنیم تا خطی راکه از M موازی با OO′ رسم می‌شود در P تلاقی کند. هرگاه H وسط MP باشد، مکان H را پیداکنید.

۱۰۴/۲۹ـ ترجمهٔ از فرانسه

کنج سه قائمهٔ Oxyz و نقطهٔ ثابت A بریال Ox داده شده است. درصفحه‌ای‌که بر Ox ونیمساز زاویهٔ yOz می‌گذرد خط متغیر Δ را درنظر می‌گیریم‌که ازA بگذرد. هرگاه HM عمود مشترك دوخط Δ و Oz باشد بقسمی‌کـه M بـر Δ قرار داشته باشد، مکان هندسی‌نقطهٔ M راپیداکنید.

مسائل گوناگون

ترجمهٔ مهندس زرگری

۱۰۴/۳۰ـ جیرجیرکی روی خط مستقیمی دونوع‌پرش انجام می‌دهد. پرش‌بلند به‌طول ۱۲ سانتیمتر و پـرش‌کوتاه به طول ۷سانتیمتر. اگر جیرجیرك درنقطهٔ O ازخط مزبور باشد

وبخواهد به‌نقطهٔ A ازآن خط وبه‌فاصلهٔ۳ سانتیمتری ازO برسد چند پرش وازچه نوع‌را باید انجام دهد؟

۱۰۴/۳۱ـ دریك دور مسابقه‌های فوتبال ۱۶ تیم‌شرکت کردند. قرار براین‌بود که درهربازی بین‌دوتیم، اگرتیمی‌برنده شود دوامتیاز داشته‌باشد، واگر دوتیم برابر کنند در وقت اضافی هریك ازدوتیم تعداد معینی پنالتی به دروازهٔ حریف شوت‌کند و آن تیم که گلهای بیشتری بزند یك امتیاز داشته باشد. پس‌از۱۶ بازی تیمها رویهم ۲۲۲ امتیاز بدست آوردند. چند بازی بانتیجه برابر انجام گرفته است؟

۱۰۴/۳۲ـ دریك دورمسابقه‌های شطرنج ۳۰ نفرشرکت کردند. بنابرمقررات مسابقه‌بازیکنی‌می‌توانست‌به‌دورهٔ نهایی‌مسابقه راه‌یابد که شصت درصد از کل امتیازها راکسب کند. ماکسیمم تعداد بازیکنانی‌که به دورهٔ نهایی رسیده‌اند چند نفر بوده‌است؟

۱۰۴/۳۳ـ مکعب یك عدد برابراست با :

۹۹۹۴۰۰۱۱۹۹۹۲

بدون کعب گیری این عدد را پیداکنید.

۱۰۴/۳۴ـ بـرای تأمین مصرف نفت دوشهر A و B لازم است‌که انبار نفتی ساخته شود.این انبار رادرچه‌محل‌بسازیم تا با توجه به‌هزینهٔ حمل ونقل، نفتی‌که به‌دست مصرف‌کنندگان دو شهر A و B می رسد تاحد امکان ارزان باشد.

۱۰۴/۳۵ـ پایه‌های a و b و c از دستگاههای عـدد نویسی را پیداکنید، که برای آنها داشته باشیم :

$$111_{(a)}=111_{(b)}=111_{(c)}$$

۱۰۴/۳۶ـ ثابت‌کنید که :

$$\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\dots+\frac{1}{2000}>\frac{1}{2}$$

۱۰۴/۳۷ـ نا معادلهٔ زیر را نسبت به x حل کنید:

$$x-1<\log_6(x+3)$$

مسائلی از آمار واحتمالات

ترجمهٔ از فرانسه

۱۰۴/۳۸ـ کیسه‌ای محتوی ۳۰ عدد گلوله است کـه از آنها ۵ عدد سفید ، ۱۰ عدد آبی و ۱۵ عدد قرمز می‌باشند. سه گلوله‌را با هم از کیسه بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه از هررنگ گلوله‌ای بیرون آورده باشیم چقدر است؟

۱۰۴/۳۹ـ کوزه‌ای محتوی ۷ گلولهٔ سفید و ۳ گلولهٔ سیاه است. چهارگلوله ازآن به تصادف بیرون می‌آوریم. تعیین کنید:

احتمال، P_3، برای‌آنکه‌سه‌عدد ازگلوله‌ها سیاه‌باشد.

احتمال، P_2، برای‌آنکه دوعدد ازآنهاسیاه‌باشد.

۱۰۴/۴۰ـ الف‌ـ کوزه‌ای محتوی ۱۰ مهـره است‌که به‌ترتیب از۰تا۹ شماره‌گذاری شده‌اند. یك‌مهره‌به تصادف‌بیرون می‌آوریم. تعیین‌کنید احتمال آن راکه عدد نظیر این مهره:

بر۲ بخش‌پذیر باشد؛

بر۳ بخش‌پذیر باشد؛

بر۶ بخش‌پذیر باشد.

ب‌ـ دوکوزهٔ A وB همانندکوزهٔ قسمت الف‌کناریکدیگر گذاشته شده‌اند. یك مهـره از A سپس یك مهره از B بیرون می‌آوریم وعددی دورقمی درنظر می‌گیریم‌که رقم دهگان آن رقم مهرهٔ اول ورقم یکان‌آن رقم مهرهٔ دوم‌باشد. احتمال‌آن راتعیین کنیدکه عدد حاصل بر۳ بخش‌پذیر باشد.

۱۰۴/۴۱ـ دوتاس راباهم می‌اندازیم. برای‌آنکه‌مجموع عددهایی‌که رومی‌شود ۸باشد، احتمال مربوط چیست؟

مسئله رابرای سه‌تاس نیزحل کنید.

تستهای ریاضی

در حدود برنامهٔ سال اول نظری

۱۰۴/۴۲ـ P مجموعهٔ عددهای اول وQ مجموعهٔ عدد‌های زوج است. اشتراك دومجموعهٔ P وQ برابر است‌با:

الف‌ـ $\emptyset$ ب‌ـ ۲ ج‌ـ $\{2\}$ د‌ـ $\{\emptyset\}$

۱۰۴/۴۳ـ دومجموعهٔ زیرداده شده‌است:

$$A=\{x|x\in R \text{ و } x^2-4=0\}$$

$B=\{x|x\in R \text{ و } x^2-4\neq 0\}$

هرگاه R مجموعهٔ مرجع باشد، کدام‌یك از گزاره‌های زیرغلط است:

الف ـ A وB متمم یکدیگرند　　ب ـ $A\neq B$

ج ـ $A\cap B=\emptyset$　　د ـ $A\cup B=\emptyset$

۱۰۴/۴۴ ـ هرگاه $x=a^2$ باشد، x^3 برابر است با:

الف ـ a^6　　ب ـ a^8　　ج ـ a^5　　د ـ a^9

۱۰۴/۴۵ ـ هرگاه به ازای همهٔ مقادیر a وb هریك از دو نامساوی $a<b$ و $a^2<b^2$ که صحیح باشد لازم آید که دیگری نیز صحیح باشد، دراین‌صورت عددهای a وb متعلقند به‌مجموعهٔ:

الف ـ عددهای حقیقی　　ب ـ عددهای گویا

ج ـ عددهای نسبی　　د ـ عددهای طبیعی

۱۰۴/۴۶ ـ درمثلث غیرمشخص ABC از A به‌نقطهٔ M واقع بر BC وصل می‌کنیم. از B وC به‌ترتیب عمودهای BH و CK را بر خط AM رسم می‌کنیم. هرگاه $BH=CK$ باشد خط AM:

الف ـ ارتفاع مثلث است

ب ـ نیمساز زاویهٔ A است.

ج ـ میانهٔ ضلع BC است.

د ـ عمود منصف ضلع BC است.

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۱۰۴/۴۷ ـ به‌ازای چه مقدار m معادلهٔ زیرمبهم است:

$m^2(x-1)=mx-1$

الف ـ $m=0$ یا $m=1$　　ب ـ $m=1$

ج ـ $m=0$　　د ـ $m=\pm 1$

۱۰۲/۴۸ ـ هرگاه x عددی حقیقی باشد، معادلهٔ

$\sqrt{4x^2-1}=-2x^2$

الف ـ جواب ندارد.　　ب ـ یك جواب دارد.

ج ـ دوجواب دارد.　　د ـ چهار جواب دارد.

۱۰۴/۴۹ ـ هرگاه داشته‌باشیم:

$\log\sqrt[4]{50^3}=a$

دراین‌صورت $\log 2$ برابر است با:

الف ـ $\frac{4a-3}{3}$　　ب ـ $\frac{6-4a}{3}$　　ج ـ $\frac{4a}{3}$　　د ـ $\frac{3a}{4}$

۱۰۴/۵۰ ـ در مثلث ABC دایره‌ای رسم می‌کنیم که در B بر AB ودر C بر AC مماس باشد. این دایره نیمساز زاویهٔ A را در D قطع می‌کند. هرگاه اندازهٔ زاویهٔ A برابر با ۵۰ درجه باشد، اندازه زاویهٔ BDC برابر است با

الف ـ 130°　　ب ـ 115°　　ج ـ 140°　　د ـ 125°

۱۰۴/۵۱ ـ دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر دو رأس B و C از مثلث ABC بگذرد و ضلع AB را در D وضلع AC را در E قطع کند. کدامیك از حکمهای زیر غلط است:

الف ـ زاویهٔ BDC از زاویهٔ A کوچکتر است.

ب ـ زاویهٔ BDC با زاویهٔ BEC برابر است.

ج ـ زاویه BDC از زاویهٔ A بزرگتر است

د ـ زاویهٔ BEC از زاویهٔ A بزرگتر است

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۰۴ـ۵۲ ـ در صفحهٔ محورهای مختصات $x'Ox$ و $x'Oy$ بر محور $x'x$ نقطهٔ A به طول ۳ و بر محور $y'y$ نقطهٔ B به‌عرض ۵ را درنظر می‌گیریم. مختصات نقطه‌های واقع در داخل مثلث OAB درکدامیك از نامعادله‌های زیر صدق می‌کنند.

الف ـ $3y-5x>15$　　ب ـ $3y>5x-15$

ج ـ $3y-5x<15$　　د ـ $3y+5x<15$

۱۰۴/۵۳ هرگاه تفاضل مشتقهای دو تابع از x مقدار ثابت باشد، تفاضل دو تابع مزبور:

الف ـ مقدار ثابت است.

ب ـ صفر است.

ج ـ دوجمله‌ای است نسبت به x از درجهٔ اول،

د ـ نسبت به x از درجهٔ دوم است.

۱۰۴/۵۴ ـ مجموع تانژانتهای چهار زاویهٔ چهار ضلعی ABCD برابر با صفر است.

کدامیك از حکمهای زیر ممکن است که غلط باشد:

الف ـ ABCD محاطی است.

ب ـ ABCD متوازی‌الاضلاع است.

ج ـ ABCD محیطی است،

د ـ ABCD ذوزنه است.

۱۰۴/۵۵ـ هرگاه A و B زاویه‌های حاده باشند و :

$$\sin A=\frac{1}{3} \text{ و } \sin(A+B)=\frac{1}{9}(\sqrt{5}+4\sqrt{2})$$

باشد. مقدار $\sin B$ برابر است با :

الف ـ $\frac{2}{3}$ ب ـ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ج ـ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ د ـ $\frac{1}{3}$

۱۰۴/۵۶ـ خط D برصفحهٔ Q عمود است صفحهٔ Q با صفحهٔ P در خط Δ متقاطع است. خط D′ تصویر خط D در صفحهٔ P است. دو خط D′ و Δ :

الف ـ متوازیند. ب ـ برهم عمودند ج ـ متنافرند

د ـ با یکدیگر زاویهٔ حاده می‌سازند

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۴/۵۷ـ منحنی نمایش هندسی تابع

$$y=\frac{x+1}{x^2-x+2}$$

دارای سه‌نقطهٔ عطف است که بریك خط راست واقعند. عرض نقطهٔ برخورد این خط با محور y′y برابر است با :

الف ـ $\frac{1}{2}$ ب ـ $\frac{1}{7}$ ج ـ $\frac{4}{7}$ د ـ ۱

۱۰۴/۵۸ـ در فاصلهٔ [۰و۱+] نمایش هندسی تابع:

$$y=\frac{|x-1|x+(x-1)|x|}{x^2-1}$$

الف بالای محور x′x واقع‌است:

ب ـ برمحور x′x منطبق است.

ج ـ زیرمحور x′x واقع‌است.

د ـ درطرفین محور x′x واقع‌است.

۱۰۴/۵۹ـ به‌فرض $\log 2=a$ و:

$$x=\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}$$

مقدار $\log x$ برابراست‌با:

الف ـ $4a$ ب ـ $-4a$

ج ـ a^4 د ـ a^{-4}

۱۰۴/۶۰ـ عبارت $3\cos x+4\sin x$ به‌صورت : $A\cos(x-\varphi)$ در می‌آید که درآن φ کمانی حاده است. مقدار $\sin 2\varphi$ برابر است‌با:

الف ـ $\frac{12}{25}$ ب ـ $\frac{3}{5}$ ج ـ $\frac{4}{5}$ د ـ $\frac{24}{25}$

۱۰۴/۶۱ـ مجموع عددهای طبیعی a، b، ...، l مضرب ۶ است. دراین‌صورت باقیماندهٔ تقسیم مجموع زیر بر۶:

$$S=a^{2n+1}+b^{2n+1}+\dots+l^{2n+1}$$

الف ـ ۱± است. ۲ ـ ۲± است.

ج ـ ۳ است. د ـ صفراست.

۱۰۴/۶۲ـ چند عدد یافت می‌شود که چون عددهای ۱۳۸۷۵ و ۹۴۹ را برآنها تقسیم کنیم باقیمانده‌ها به ترتیب ۱۵ ۱۳ باشد.

الف ـ دوعدد ب ـ یك‌عدد

ج ـ هیچ عدد د ـ بیش ازدوعدد.

۱۰۴/۶۳ـ سه دایرهٔ ثابت α و β و γ دریك صفحه واقعند ودایرهٔ متغیر C برهریك ازآنها عمود است. هرگاه‌مکان هندسی مرکز دایرهٔ C دونیم‌خط بدون‌نقطهٔ مشترك‌باشد، کدامیك از حکمهای زیرغلط است:

الف ـ مرکزهای سه‌دایرهٔ α و β و γ روی یك خط راست واقعند.

ب ـ سه دایرهٔ α و β و γ در دو نقطه مشترکند.

ج ـ سه دایرهٔ α و β و γ دوبه‌دو یامتداخلند یامتخارج

د ـ سه دایرهٔ α و β و γ دارای یك محور اصلی مشترك می‌باشند.

۱۰۴/۶۴ـ هذلولی H و دایرهٔ اصلی‌آن را در نظر می‌گیریم. خط T درصفحهٔ هذلولی تغییرمکان می‌دهد اماهمواره برهذلولی مماس می‌باشد. خط T دایرهٔ اصلی هذلولی رادرM قطع می‌کند. درM ودرصفحهٔ‌هذلولی خط Δ را عمود برخطT رسم می‌کنیم. برای خط‌متغیرΔ کدامیك ازحکمهای‌زیرغلط‌است:

الف ـ Δ هذلولی را قطع می‌کند.

ب ـ Δ ازکانون هذلولی می‌گذرد.

ج ـ Δ برهذلولی مماس است.

د ـ Δ مجانبهای هذلولی را قطع می‌کند.

مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث اول ، سال تحصیلی ۵۲ ـ ۱۳۵۳ (آذر ۱۳۵۲)

دنباله از شمارهٔ قبل

هندسهٔ ترسیمی و رقومی کلاس ششم ریاضی

دبیرستانهای انوشیروان دادگر و رازی

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی: واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱ : ۱

محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم کرده محل تلاقی آنها را مرکز انتخاب نمایید .

۱ـ نقطهٔ a_2 به‌فاصلهٔ ۲ بالای محور اقصر و به فاصلهٔ ۲ سمت چپ محورقائم کاغذ مفروض است . از این نقطه صفحهٔ P راکه با صفحهٔ افق تصویرزاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد بقسمی مرور دهید که اثرش موازی محور اقصر بوده و یك مقیاس شیب صفحه را درکنار چپ کاغذ رسم کنید و ترقی رقوم مقیاس شیب از پائین به‌بالا می‌باشد.

۲ـ قطعه خط a_2b_5 را در این صفحه بقسمی رسم کنید که $AB=8$ بوده و b سمت راست a قرار گیرد .

۳ـ قطعه خط AB ضلع مثلثی است واقع درصفحهٔ P که شعاع‌دایرهٔ محاطی داخلی آن $r=1/9$ وزاویهٔ $ACB=75^\circ$ درجه و رقوم c بیش از a و b و تصویرش سمت چپ ab واقع و $AC>CB$ است . ملخص مثلث مزبور را رسم نمایید .

۴ـ به‌فرض آنکه c_7 تصویرش برمحور قائم کاغذ درنظر گرفته شود متوازی‌الاضلاع $a_2b_5c_7d_4$ را درصفحهٔ P مشخص کنید .

۵ـ برخط d_4c_7 صفحهٔ P' را بقسمی مرور دهید که‌شیب آن $p=\frac{2}{3}$ باشد ومقیاس‌شیب آن ازچپ به‌راست و ازبالا به‌پائین ممتد باشد .

۶ـ از نقطهٔ D در صفحهٔ P' خط d_4h_9 را طوری مرور دهید که با صفحهٔ افق تصویر زاویهٔ $\alpha=Arctg\frac{1}{2}$ بسازد واثرش سمت چپ و بالای کاغذ واقع گردد .

۷ـ ملخص متوازی‌السطوح ABCDEFGH را که قاعدهٔ تحتانی آن ABCD و DH یالجانبی آن باشد رسم و ملخص آن‌را مرئی و مخفی نمایید .

۸ـ مقطع صفحهٔ قائمی را درجسم تعیین کنید که از وسط خط EF مرور کرده وبرقائم متکی به‌دوخط AE و HG می‌گذرد یافته و بزرگی مقطع را با تسطیح آن درسمت پائین کاغذ نشان دهید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی: در مسائل هندسهٔ ترسیمی رسم یك‌جواب کافی است . واحد و مقیاس در مسائل ترسیمی اختیاری است .

مسئلهٔ ۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ A تا نیمساز دوم برابر ۴ ومجموع فواصل آن‌ازخط زمین‌ونیمساز اول برابر ۷ است. نقطه‌راکه‌دربالای نیمساز ناحیهٔ ۱ می‌باشد رسم کنید.

مسئلهٔ ۲ـ بر روی خط نیمرخ $aba'b'$ نقطه‌ای پیدا کنید که ارتفاعش یك واحد بیش از بعدش باشد .

مسئلهٔ ۳ـ از نقطهٔ aa' خطی رسم کنید که یك‌خط قائم و یك خط افقی مفروضی را قطع نماید .

مسئلهٔ ۴ ـ از نقطهٔ aa' به بعد ۴ و ارتفـاع ۲ خطی رسم کنید که با صفحهٔ افق تصویر زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد و باصفحهٔ نیمساز دوم موازی باشد .

دبیرستان بامداد

دبیر: منوچهر ارشاقی ـ فرستنده : سید مجتبی عرفانی

هندسهٔ رقومی ـ مسئلهٔ اول : محورهـای اطول و اقصر کاغذرا رسم کنید. واحد سانتیمتر و مقیاس ۱:۱ است.

۱ـ صفحهٔ P به‌شیب $\frac{۲}{۳}$ مفروض است. مقیاس شیب آنـرا در طرف چپ کاغذ با ترقی رقوم از پائین به بالا طوری رسم کنید که محور اقصر کاغذ افقیهٔ رقوم ۴ آن باشد ، نقطهٔ $a_۲$ را دراین صفحه روی محور اطول کاغذ اختیار کرده خط $a_۲b_۴$ را به شیب $\frac{۱}{۳}$ در این صفحه رسم کنید بطوری که b طرف چپ a باشد .

۲ـ ملخص لوزی ABCD واقع درصفحهٔ P راکه یك ضلع آن $a_۲b_۴$ و رقوم نقطهٔ C مساوی ۵ باشد رسم کنید .(c طرف راست b قرار دارد).

۳ـ خط Δ راکه تصویرش برمحور اطول کاغد قرار دارد و یك نقطهٔ آن $a_۲$ است درنظر می گیریم . این خط را به اساس ۲ و ترقی رقوم ازپائین به‌بالا مدرج کنید ، بر این خط صفحهٔ Q را به‌شیب یك مرور دهید و از دوجواب آنکه اثرش محور اقصر کاغذ را طرف راست مرکز کاغذ قطع کند انتخاب کـرده ، یـك مقیاس شیب ازآنرا درطرف راست کاغذ رسم کنید .

۴ـ نقطهٔ $h_۲$ را درصفحهٔ Q طوری بدست آورید که فاصلهٔ حقیقی آن تا خط Δ مساوی ۶ بوده و h طرف راست محوراطول کاغذ قرار گیرد .

۵ـ ملخص منشوری که یك قاعدهٔ آن لوزی ABCD و یك یال جانبی آن DH باشد رسم نموده و خطوط مرئی ومخفی آنرا مشخص کنید .

۶ـ مقطع صفحهٔ افقی که رقوم آن ۳/۵ است در منشور تعیین کرده و آنرا نیز مرئی و مخفی نمائید .

مسئلهٔ دوم ـ خط $a_۱b_۴$ به شیب یك و خط d به شیب $\frac{۲}{۳}$ مفروضند . ملخص مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A=۹۰^\circ)$ را که یك ضلع آن $a_۱b_۴$ و نقطهٔ c روی خط d باشد رسم کنید .

مسئلهٔ سوم ـ درصفحهٔ P به‌شیب یك نقطهٔ $m_۲$ را اختیار کرده خطی دراین صفحه رسم کنید که زاویهٔ حقیقی آن با افقیه‌های این صفحه مساوی ۴۵° بوده و فاصلهٔ حقیقی نقطهٔ $m_۲$ تا این خط مساوی ۳ گردد (یك جواب کافی است) .

دبیرستانهای پیشاهنگ و پیمـان

دبیر. مهندس محمودخوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی: واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم نمـائید . محل تلاقی دو محور مرکز کاغذ می‌باشد .

۱ـ نقطهٔ $c_۶$ را به‌فاصلهٔ ۳ زیرمرکز کاغذ برروی محور قائم انتخاب نمایید از این نقطه صفحهٔ P را بقسمی مرور دهید که شیب آن برابر یك و تصویر مقیـاس شیب آن موازی محور قائم بوده وجهت ترقی رقوم آن از بالا به‌پائین باشد .

۲ـ ازنقطهٔ $c_۶$ درصفحهٔ P خط CB را به‌شیب $p=\frac{۲}{۳}$ بقسمی مرور دهید که b سمت چپ c و رقوم آن برابر ۲ باشد.

۳ـ قطعه خط CB ضلـع مثلث متساوی‌الساقین ABC واقع درصفحهٔ P می‌باشد که ارتفاع مثلث مزبوربرابر قاعدهٔ BC می‌باشد. مثلث فوق راکه رقوم رأس A از C کمتر وتصویرش سمت راست bc است رسم کنید :

۴ـ بروی مثلث فوق متوازی‌الاضلاع ABCD رابقسمی بسازید که AC قطرش بـاشد و مساحت حقیقی آن را در سمت پائین کاغذ نشان دهید .

۵ ـ متـوازی‌الاضلاع ABCD قاعدهٔ متـوازی‌السطوح ABCDEFGH می‌باشد که یال CG در فضا برCB عمود بوده و تصویرش cg از فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ سمت چپ مـرکز کاغذ روی محور اقصر می گذرد ورقوم g برابر ۱۴ می‌باشدملخص متوازی‌السطوح را رسم و مرئی و مخفی کنید .

۶ـ مقطع متوازی‌السطوح را با صفحهٔ افقی رقوم ۸ تعیین کرده و آنرا نسبت به‌جسم مرئی و مخفی کنید .

۷ـ ارتفاع متوازی‌السطوح راکه از رأس F رسم می‌شود بروی شکل نشان داده و موقع عمود (ارتفاع) را مشخص کنید .

ب ـ هندسهٔ ترسیمی: سه مسئله ازچهار مسئلهٔ زیررا انتخاب نموده و رسم کنید . واحد و مقیاس اختیاری است.

مسئلهٔ ۱ ـ فاصلهٔ نقطه‌ای تا خط زمین ۵ و فاصله‌اش تا نیمساز دوم دو برابرارتفاعش می‌باشد. نقطه را درناحیهٔ اول نشان دهید .

مسئلهٔ ۲ ـ خط DD' مفروض است . آثار آن‌را تعیین کنید و برروی آن نقطه‌ای بیابید که بعدش $\frac{۲}{۳}$ ارتفاعش باشد.

مسئلهٔ ۳ـ بر روی خط نیمرخ $aba'b'$ نقطه‌ای تعیین کنید که به یك فاصله ازنیمساز اول و افق تصویر باشد .

مسئلهٔ۴ـ از نقطهٔ A به‌بعد ۳ واقع درصفحهٔ نیمسازاول خطی رسم کنید که با صفحهٔ افقی تصویرزاویهٔ °۳۰ بسازدوتصویر افقش با خط زمین زاویهٔ ۴۵درجه تشکیل دهد . (رسم‌یك‌جواب کافی‌است).

دبیرستان دکتر حکیم‌الهی

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف‌ـ هندسهٔ رقومی: واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محل تلاقی محور اطول و محور اقصر کاغذ را مرکز بنامید.

۱ـ صفحهٔ P که بزرگترین شیب آن موازی محور قائم کاغذ و افقیه رقوم ۲ آن بر مرکز کاغذ می گذرد با شیب $p=1$ درسمت‌چپ‌کاغذ رسم کنید بقسمی که ترقی رقوم آن ازبالا به‌پائین باشد . نقطهٔ a_2 را به‌فاصلهٔ ۴ سمت چپ محور قائم در صفحهٔ P انتخاب کنید .

۲ـ از نقطهٔ a_2 واقع درصفحهٔ P خط a_2b_5 را به شیب $p=\frac{1}{2}$ رسم کنید بقسمی که b سمت راست a قرار گیرد .

۳ـ ازنقطهٔ a_2 خط AE را بر صفحهٔ P عمود نموده و ملخص $AE=10$ را بقسمی مشخص کنید که رقوم E از A بیشتر باشد .

۴ـ ازنقطهٔ b_5 خطی مرور دهید که به a_2b_5 درفضاعمود بوده و نقطهٔ c_1 آن بر روی محور اقصر کاغذ قرار گیرد .

۵ـ تصویر مستطیل ABCD راکامل نموده وسعت حقیقی آن را با تسطیح مستطیل درسمت پائین‌کاغذ نشان دهید .

۶ـ متوازی‌السطوحی که قاعده‌اش ABCD وخط‌الرأس جانبی آن AE می‌باشد مشخص نموده ملخص آن‌را رسم ومرئی و مخفی نمائید .

۷ـ مقطع متوازی‌السطوح را باصفحهٔ افقی رقوم ۴ تعیین نموده و آن‌را مرئی و مخفی کنید .

۸ـ از نقطهٔ G ازخط‌الرأس CG خطی به صفحهٔ قاعدهٔ ABCD عمودکرده پای عمود را بیابید .

ب‌ـ هندسهٔ ترسیمی :

مسئلهٔ۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ A از خط زمین ۵ و به‌یك فاصله از صفحهٔ نیمساز دوم و صفحهٔ افق تصویـراست ملخص نقطه را در ناحیهٔ اول رسم کنید .

مسئلهٔ۲ـ خط DD' مفروض است. آثارآن‌را رسم‌نموده روی آن نقطه‌ای بیابید که بعدش 1 واحد بیشتر از ارتفـاعش باشد .

مسئلهٔ ۳ـ خط نیمرخ $aba'b'$ در ناحیهٔ اول مفروض است. روی‌آن نقطهٔ cc' را بقسمی تعیین‌کنید که به‌یك فاصله از افق تصویر و اثرقائم نیمرخ‌باشد.

مسئلهٔ ۴ـ دوخط قائم و دوخط غیرمشخص بطوردلخواه انتخاب‌کنید. خطی‌مرور دهید که هر چهار خط مفروض را قطع کند .

گروه فرهنگی‌مرجان ـ دبیرستان‌شمارهٔ ۲ دختران

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف‌ـ هندسهٔ رقومی: واحد سانتیمتر ـ مقیاس۱:۱ محور اقصرکاغذ افقی و محور اطول را قائم اختیارکرده محل تلاقی آنها را مرکزکاغذ بنامید .

۱ـ صفحهٔ P به شیب $p=\frac{2}{3}$ راکه‌افقیه‌هایش موازی‌محور اقصربوده و افقیهٔ رقوم ۶ آن برمحور اقصرکاغذ منطبق و ترقی رقوم مقیاس شیب آن ازبالا به‌پائین است رسم نموده یك مقیاس شیب آن‌را سمت چپ‌کاغذ نشان دهید .

۲ـ نقطهٔ c_6 را درصفحهٔ P به‌فاصلهٔ ۵ سمت چپ محور قائم‌کاغذ اختیارکرده از این نقطه در صفحهٔ P خط a_6b_9 را به شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی مرور دهیدکه b سمت راست a قرارگیرد.

۳ـ بر روی AB در صفحـهٔ P مثلث متساوی‌الساقین ABC راکه درآن $CA=CB$ بوده و رقوم C برابر ۶/۵ است رسم کنید .

۴ـ متوازی‌الاضلاع ABCD را درصفحهٔ P رسم‌نمایید.

۵ـ بـر روی متوازی‌الاضلاع مزبور متوازی السطوحی بسازیدکه یال جانبی آن b_9f_1 در فضا بر a_6b_9 عمود بوده و تصویرش bf موازی محور اقصر باشد. متوازی‌السطوح را رسم و مرئی و مخفی کنید .

۶ـ مقطع متوازی‌السطوح را با صفحهٔ قائمی‌که اثرش‌به فاصلهٔ ۱/۵ بالای‌محور اقصر و موازی محور اقصر رسم شده‌در جسم یافته و وسعت حقیقی مقطع را با تسطیح آن درسمت بالای کاغذ نشان دهید . صفحهٔ افق تصویر را حـاکی مـاوراء فرض نمائید .

ب‌ـ هندسهٔ ترسیمی: در مسائل هندسهٔ ترسیمی‌واحد

و مقیاس اختیاری است. رسم یك جواب کافی بوده اشکال را به‌دقت رسم کنید .

مسئلهٔ ۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ A از خط زمین ۵ و مجموع فواصل آن از نیمساز اول ودوم برابر ۶ است. نقطه‌را درناحیهٔ اول زیر نیمساز نشان دهید .

مسئلهٔ ۲ـ خط غیرمشخص DD' مفروض است آثار آن را تعیین کنید و روی آن نقطه‌ای بیابید که به‌یك فاصله از افق تصویر و اثرقائم خط باشد .

مسئلهٔ ۳ـ خط نیمرخ $aba'b'$ مفروض است. از نقطهٔ dd' خط $cdc'd'$ را بقسمی رسم کنید که نیمرخ مزبوررا قطع کرده با نیمساز اول موازی باشد .

مسئلهٔ ۴ـ صفحهٔ PaQ' مفروض است در این صفحه یك افقی به ارتفاع ۲ ویك جبهی به‌بعد ۱ رسم کرده نیمساز زاویهٔ دوخط را درصفحهٔ مزبور رسم نمائید .

دبیرستان نقش‌جهان

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی : واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم کنید ومحل تلاقی آنها را مرکز کاغذ بنامید.

۱ـ نقطهٔ d_6 را به‌فاصلهٔ ۳ زیر مرکز کاغذ روی محور اطول انتخاب کرده از این نقطه خط d_6a_3 را به‌شیب $p=\frac{1}{2}$ به قسمی رسم کنید که نقطهٔ a روی محور اقصر سمت راست مرکز کاغذ قرار گیرد .

۲ـ برخط a_3d_6 صفحهٔ P را که با صفحهٔ افق تصویرزاویهٔ $\alpha=45^\circ$ درجه می‌سازد وافقیه‌های آن با محور اقصر کوچکترین زاویهٔ ممکنه را می‌سازند مرور داده و یك مقیاس شیب صفحه را سمت چپ کاغذ نشان دهید .

۳ـ ازنقطهٔ D درصفحهٔ P خطی رسم کنید که با امتداد افقیه‌های صفحهٔ مزبور در فضا زاویهٔ 45° درجه بسازد و اثرافقی این خط سمت چپ محورقائم کاغذ قرار گیرد و بر روی آن نقطهٔ c_3 را انتخاب نمایید .

۴ـ برسه نقطهٔ A و C و D متوازی‌الاضلاع ABCD را بقسمی بسازید که AC قطرش باشد. ملخص متوازی‌الاضلاع را نشان دهید .

۵ـ مساحت حقیقی متوازی‌الاضلاع را با تسطیح آن حول افقیهٔ ۶ درسمت پایین کاغذ رسم کنید .

۶ـ متوازی‌الاضلاع ABCD قاعدهٔ تحتانی منشورناقص قائمی است که یالهای آن به‌ترتیب $AE=10$ و $BF=10$ و $CG=5$ و $DH=5$ می‌باشندرسم کرده وآن‌را مرئی ومخفی کنید .

۷ـ مقطع منشور ناقص را با صفحهٔ افقی رقوم ۴ تعیین نموده مرئی و مخفی کنید .

۸ـ عمود مشترك خط BF و AC را روی شکل رسم نمائید .

ب ـ هندسهٔ ترسیمی: مسئلهٔ ۱ـ مجموع بعدوارتفاع نقطهٔ A برابر ۷ وبه‌یك‌فاصله از صفحهٔ افق و نیمساز اول است . نقطه را در ناحیهٔ اول اول نشان دهید .

مسئلهٔ ۲ـ خط غیرمشخص DD' مفروض‌است. اولاً آثار آن را تعیین کنید . ثانیاً نقطه‌ای بروی آن بیابید که به‌یك‌فاصله از صفحه افق و اثرقائم خط باشد .

مسئلهٔ ۳ـ خط نیمرخ $aba'b'$ مفروض است. بر روی آن نقطه‌ای تعیین کنید که ارتفاعش ازبعدش یك‌واحد بیشتر باشد.

گروه فرهنگی هدف

دبیر : مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی: واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید . محل تلاقی دو محور مرکز کاغذ می‌باشد .

۱ـ صفحهٔ P که اثرش برمحور اقصر کاغذ منطبق است و ترقی رقوم آن از بالا به‌پائین بوده و زاویه‌اش با افق تصویر $\alpha=45^\circ$ است درسمت چپ کاغذ رسم کنید و ازنقطهٔ b_2 واقع درصفحهٔ P که تصویرش برمحور قائم کاغذ منطبق می‌باشد خطی مرور دهید که شیب آن $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$ بوده و برروی آن نقطهٔ d_5 را که تصویرش سمت راست محور قائم است انتخاب نمایید .

۲ـ قطعه خط BD قطر لوزی ABCD واقع درصفحهٔ P است که رأس c_6 آن سمت‌چپ bd واقع است. ملخص لوزی را رسم کنید .

۳ـ صفحهٔ Q را به موازات صفحهٔ P و به فاصلهٔ ۱۰ در بالای آن رسم نمایید . یك مقیاس شیب صفحهٔ Q را سمت‌راست کاغذ نشان دهید .

۴ـ قطعه‌خط $b_{۲}8_{۱۰}$ راکه تصویرش با سمت راست‌محور اقصر زاویهٔ ۱۲۰ درجه درجهت مثلثاتی می‌سازد بقسمی‌رسم کنید که S در صفحهٔ Q واقع شود و ملخص هرم SABCD را رسم و مرئی و مخفی کنید.

۵ـ مقطع هرم فوق را با صفحهٔ قائمی که اثرش به‌فاصلهٔ ۱ سمت چپ محورقائم کاغذ موازی محور اطول می‌باشد درجسم یافته و وسعت حقیقی آن‌را نشان دهید.

۶ـ اندازهٔ حقیقی ارتفاع هرم را با رسم آن روی شکل مشخص کنید.

۷ـ اندازهٔ حقیقی زاویهٔ SBC را درسمت چپ کاغذنشان دهید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی:

مسئلهٔ ۱ـ مجموع‌بعد و ارتفاع نقطهٔ A برابر ۷ وفاصله‌اش از نیمساز دوم دوبرابر ارتفاعش می‌باشد. نقطه را در ناحیهٔ اول نشان دهید.

مسئلهٔ ۲ـ خط DD′ مفروض‌است آثارآن را تعیین کنید و روی آن نقطه‌ای تعیین کنید که به‌یك فاصله ازصفحهٔ افق‌وصفحهٔ نیمساز اول باشد.

مسئلهٔ ۳ـ نیمرخ aba′b′ مفروض است. ازنقطهٔ aa′ نیمرخ دیگر aca′c′ را بقسمی رسم کنید که زاویهٔ حقیقی بین دونیمرخ ۳۰درجه باشد.

مسئلهٔ ۴ـ از نقطهٔ aa′ به بعد ۴ و ارتفاع ۲خطی‌رسم کنید که یك خط قائم به بعد ۱ را قطع‌نموده با صفحهٔ افق زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد.

گروه فرهنگی جاویدان

دبیر: مهندس محمود خوئی

الف ـ هندسهٔ رقومی (همان مسئلهٔ رقومی‌دبیرستانهای پیشاهنگ و پیمان).

ب ـ هندسهٔ ترسیمی: درمسائل هندسهٔ ترسیمی‌واحد و مقیاس‌اختیاری است. رسم یك جواب‌کافی است، شرح‌وتوضیح لازم نیست.

مسئلهٔ ۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ A از خط زمین ۵ و بعدش $\frac{۲}{۳}$ ارتفاعش می‌باشد. به‌طریق رسم نقطه‌را در ناحیهٔ اول‌نشان دهید.

مسئلهٔ ۲ـ خط DD′ مفروض است. آثار آن‌را تعیین نمائید و بر روی آن نقطه‌ای بیابید که به‌فاصلهٔ حقیقی ۴ از اثر افقی خط باشد.

مسئلهٔ ۳ـ خط نیمرخ aba′b′ مفروض است برروی‌آن نقطه‌ای بیابید که به یك فاصله ازصفحهٔ نیمساز اول و افق تصویر باشد.

مسئلهٔ ۴ـ از نقطهٔ مفروض aa′ خطی رسم کنید که یك خط قائم vv′ و یك‌خط نیمرخ مفروض cdc′d′ را قطع کند.

بیرونی نامه (دنباله از صفحهٔ ۲جلد)

ارزندهٔ این‌نابغهٔ بزرگ آشنا شده‌اند، صدها کتاب ورساله ومقاله دربارهٔ شخصیت علمی وی وتصنیفات و تألیفات متعددش‌در رشته‌های گوناگون دانش به‌زبانهای مختلف نوشته شده اما هنوز هم بعضی‌ازآثار نفیس‌ریاضی اوچنانکه بایدوشاید مورد پژوهش‌قرار نگرفته است...

... نه‌تنها تاکنون قسمت اعظم‌آثار ریاضی استاد بیرونی درایران ناشناخته مانده‌بود بلکه تااین اواخر دانشمندان مغرب زمین‌هم ازوجود نسخهٔ خطی‌یکی‌از مهمترین تحقیقات ریاضی‌وی یعنی‌کتاب «مقالید علم‌الهیئة» اطلاعی نداشتند...

...تألیف کتابی که‌موضوع آن‌معرفی آثارریاضی‌استادبیرونی وبحث‌وتحقیق دربارهٔ محتویات‌برخی‌ازآنها باشد، به‌زبان‌فارسی، نهایت لزوم را داشت...

...هدف اصلی‌از تألیف کتاب‌حاضر تحقیق در آثارریاضی استاد بیرونی بوده‌است ونه‌پژوهش درشرح زندگانی وسایرآثار علمی‌او. بااین‌حال ... خلاصهٔ زندگینامهٔ وی را باشمه‌ای از آنچه راکه متفکران بزرگ دربارهٔ شخصیت علمی‌او نوشته‌اند در آغاز بخش‌اول کتاب آورده‌ام...

... دربخش دوم کتاب آماری از کلیهٔ تألیفات بیرونی بدست داده‌ام ومشخصات آثارموجود و فهرست‌آثار مفقود استاد را در ریاضیات ونجوم معین کرده‌ام ...

... دربخش سوم‌کتاب فرهنگ مشروحی از اصطلاحات ریاضی‌کتاب «التفهیم» فراهم‌آورده معادل هراصطلاح رابه زبان انگلیسی وگاهی به‌زبان فرانسوی درمقابل‌آن ثبت‌کرده هرجا لازم‌بوده به‌شرح اصطلاحات و تاریخچهٔ آنها پرداخته‌ام...

... خلاصهٔ کتاب «راشیکات الهند» تألیف استاد راکه موضوعش نسبت و تناسب نزد ریاضی‌دانان هندی ومقایسهٔ آن با ریاضیات یونانی است دربخش چهارم آورده‌ام. در بخش پنجم منتخباتی ازکتاب «آثارالباقیه» راکه مشتمل برحل‌مسائل جالب توجه وچندنوع تصویر جسم نمااز مخترعات استاد بیرونی است شرح داده‌ام...

بخش‌ششم کتاب مشتمل است برتحقیق دربارهٔ یکی از مشکلترین مقالات کتاب «قانون مسعودی»...

بخش‌هفتم مشتمل‌است برمعرفی‌یکی‌از مهمترین‌آثارریاضی بیرونی یعنی‌کتاب «مقالید علم‌الهیئة»...

... دربخش هشتم شخصیت ریاضی‌استاد بیرونی‌راآنگونه که ازآثار اواستنباط کرده‌ام موردبحث قرارداده‌ام...

دربخش‌نهم حدود پنجاه تن‌از ریاضیدانان دورهٔ اسلامی‌را به‌اختصار معرفی‌کرده‌ام...

* * *

بیرونی‌نامه در ۶۲۰ صفحه ازطرف انجمن‌آثار ملی چاپ شده است.

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 137– In a new variation of the game of NIM, two players **A** and **B** start with a pile of N matches and alternate in removing them. **A**, playing first, removes any number of matches, from one to not more than half the pile. **B** then removes any number from one to not more than half the remaining pile. Alternating turns (with the additional rule that if a single match remains it may be removed), the one who removes the last match is the winner.

(**a**) Show that, with best play on both sides, **A** will win when $N=1,3,4,$ or 6 ; **B** will win, when $N=2$ or 5.

(**b**) If N_x is the xth value for which **B** will win, express N_{x+1} in term of x.

Solution: (a) (i) when $N=1$, **A** removes 1 and wins.

(ii) When $N=2$, **A**(must) remove 1, leaving $N=1$, and **B** the first move. Therefore **B** wins as in(i).

(iii) When $N=3$, **A** (must) remove 1, leaving $N=2$. Thus **A**–now the second player–wins as in (ii).

(iv) When $N=4$, **A**removes 2 matchs and wins as in (ii)

(v) When $N=5$ **A** removes 1 or 2 matches, leaving $N=4,3$. Thus **B** wins as in (iv),(iii)

(vi) When $N=6$. **A** removes 1 maches, leaving $N=5$, and wins as in (v)

(**b**) If $N_1, N_2, \ldots N_x$ are the first x winnig positions, it is clear from the pattern in the special cases in (**a**), that.

$N_{x+1}=2N_x+1$. Also $N_x=2N_{x+1}+1$.

Hence $2N_x+1=2^2N_{x-1}+2+1$.

Also $N_{x-1}=2N_{x-2}+1$.

Hence $2^2N_{x-1}+2+1=2^3N_{x-2}+2^2+2+1$.

Continuing in like manner, we obtain finally:

$$N_{x+1}=2^xN_1+2^{x-1}+2^{x-2}+\ldots+2+1$$

But $N_1=2$[case (ii) of part (**a**)] and

$$2^{x-1}+2^{x-2}+\ldots+2+1=\frac{2^{x-1}}{2-1}=2^x-1.$$

Therefore $N_{x+1}=2^{x+1}+2^x-1=2^x(2+1)-1$

$=3\cdot 2^x-1$. Thus for $x=0,1,2,3,4,$ we obtain $N_{x+1}=2,5,11,23,47$.

Problem 138– Construct a circle that passes through two given points and is tangent to a given line. Is this possible for any line and any two points?

Solution: Let the given points be A and B, and the given line t. obviously A and B must lie on the same side of t. There are two possibilities: (**a**) $\overline{AB}$ intersects t at P (say) ; (**b**) $AB \| t$.

Case a : Let $\overline{PT}$ be the tangent to the desired circle. Then $\frac{PB}{PT}=\frac{PT}{PA}$. Find PT by the construction for a mean proportional, and use this to locate T. This leads to two solutions, since T can occur on either side of P. The center of the required circle is the intersection of the perpendicular bisector of $\overline{AB}$ and the perpendicular to t at T.

Case b : Draw the perpendicular bisector of AB and let it intersect t at T. This is obviously the point of tangency of the required circle. The circle can now be constructed through the three points A, B, and T.

شماره‌های گذشتهٔ مجلهٔ یکان

از ۱۰۳ شماره ماهانهٔ مجلهٔ یکان که از ابتدای تأسیس تاکنون منتشرشده است، فقط مجله‌های به‌شماره‌های زیر دراداره مجله موجوداست که به‌بهای مندرج در روی‌آنها بفروش می‌رسد.

۳۲-۳۳-۳۶-۴۲-۴۴ تا ۴۹-۵۱ تا ۵۸-۶۱ تا ۶۹
۷۱ تا ۷۷-۷۹ تا ۸۵-۸۸ تا ۱۰۰-۱۰۲-۱۰۳
یکان‌سال ۵۱: ۱۰۰ریال ، یکان‌سال ۵۲: ۱۵۰ریال

تسلیت

روز چهار شنبه سیزدهم آذرماه جامعهٔ مطبوعات و کتابفروشان‌ایران یکی‌از همکاران صدیق وباوفای خودرا از دست داد.

مرگ نابهنگام وغم‌انگیز شادروان **مسیح ثقفی** مدیر کتابفروشی ثقفی اصفهان مصیبتی بزرگ و فاجعه‌ای الیم برای عموم طبقات، به ویژه‌فرهنگیان‌وهمکاران آن مرحوم می‌باشد.

این‌مصیبت ناگوار وتأثرانگیز رابه خانوادهٔ ثقفی وبه‌کلیهٔ بازماندگان‌آن شادروان تسلیت می گوئیم.

نمایندگی مجلهٔ یکان دراصفهان کتابفروشی‌امید