برهان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ یازدهم، شمارهٔ : ۱ | شمارهٔ مسلسل: ۱۰۲ | مهر ۱۳۵۳

دراین شماره:

«و» ، «یا»	عبدالحسین مصحفی	۱
ساختمان منطقی قضیه	ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری	۳
جبر گراسمان	دکتر علی‌رضا امیرمعز	۷
مسائل هندسی ماکسیمم و می‌نیمم	ترجمهٔ: جعفر آقایانی چاوشی	۱۰
تقسیم دایره به کمانهای متساوی	ترجمهٔ: جواد فیض	۱۴
عددنویسی در مبنای منفی و مبنای کسری	ترجمهٔ: قوام نحوی	۱۷
وسایل سادهٔ مهندسی	ترجمهٔ: مهندس زرگری	۱۹
با ریاضیات آشتی کنید	ترجمهٔ: عبدالحسین مصحفی	۲۱
مسائلی دربارهٔ شطرنج	ترجمهٔ: داوید ریحان	۲۵
مسائل المپیاد فیزیک	ترجمهٔ: مهندس زرگری	۲۷
مسائل برای حل	—	۳۴
تستهای ریاضی	—	۳۷
مسائل المپیاد جهانی	ترجمهٔ: مهندس زرگری	۴۰
مسائل انتخابی از مسائل امتحانات داخلی دبیرستانها	—	۴۲
معرفی کتاب	—	۴۶
جدول اعداد	محمدعلی علی‌قلی‌زمزه	۴۷
Problems & Solutions	—	۴۸
درآوردن جلیقه از زیر کت بدون درآوردن کت	—	ماقبل آخر

بها: ۴۰ ریال

به‌اتکای دوستداران یکان

ترقی روزافزون ونامتعارف نرخ کاغذ، همچنین بالا رفتن دستمزد چاپ وصحافی، برای مطبوعات مسئله‌ای است که تقریباً همگان بر آن آگاهند. درمـواجههٔ بااین مسئله، یا می‌بایستی که انتشارمجلهٔ یکان متوقف شود، یااینکه برای امکان ادامهٔ انتشار بر بهای فروش آن اضافه گردد. راه‌اول ناگوار بودوانتخاب راه‌دوم احیاناً موجب کاهش تعداد خریداران آن می گردید. امّاانتشارمجله، حتی باتیراژ اندك، برتعطیل آن برتری‌داشت. به‌ویژه که نامه‌های رسیده‌ازطرف دوستداران مجله‌مشوقی‌برادامهٔ انتشار آن بوده‌است.

مجلهٔ‌یکان دریازدهمین دورهٔ‌خود، که نخستین‌شماره ازاین دوره‌هم‌اکنون دردسترس علاقمندان‌است، بازهم منتشرمی‌شودالبته بابهایی بیش‌ازبهای گذشته وباتعداد صفحاتی‌متناسب باهزینه‌وبهای آن و بالاخره با تیراژی کمتر، اما به هرحال با اتکای به‌علاقهٔ دوستداران آن.

دربارهٔ
کتابهای ریاضی نظری

جناب‌آقای **قوام‌نحوی** دبیرومدرس ریاضی‌دانشسراهای راهنمایی اصفهان ضمن نامه‌ای به عنوان مجلهٔ یکان، نکته‌هایی مربوط بمتون‌کتابهای ریاضی‌سال‌اول‌نظری وچنداشتباه موجود دراین‌کتابها رایادآوری فرموده‌وخواسته‌اند تابادرج نامه‌درمجله مراتب به‌آگاهی دیگران برسد.

ازاین‌نظر که سازمان‌کتابهای درسی‌درتجدید چاپ سالانهٔ کتابهای درسی، هراشتباهی ازمتن‌کتابها راکه‌برآن‌آگاهی یابد اصلاح می‌کند، نامهٔ‌آقای نحوی به سازمان مزبور فرستاده شد.

برای آگاهی

«سازمان مکاتبه‌ای یکان» هیچ‌نوع وابستگی وارتباطی بامجلهٔ یکان وهمکاران‌آن‌ندارد.

تجدیدچاپ

کتابهای «راهنمای ریاضیات متوسطه» و «تست هوش» از انتشارات‌یکان هم‌اکنون نایابند. برای تهیهٔ‌کاغذ جهت‌تجدیدچاپ این‌کتابها اقـدام‌شده است‌که مراتب بعداً به‌آگاهی خواستاران آنها خواهد رسید.

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تـأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ‌یازدهم ـ شمارهٔ یکم ـ شمارهٔ مسلسل : ۱۰۲

مهر ۱۳۵۳

صاحب امتیاز و سردبیر: **عبدالحسین مصحفی**

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملك‌یزدی

نشانی اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیك شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

وجه اشتراك برای دورهٔ یازدهم : ۳۲۰ ریال

حساب بانکی:حساب جاری۳۰۹۵شعبهٔ لاله‌زارنوبانك صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume XI, number 1. Oct. 1974

subscription : 6$

TEHERAN_P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است‌که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفـی می‌شوند . کتابهایی‌که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

«و» ، «یا»

و استفادهٔ صحیح از آنها در ریاضیات

عبدالحسین مصحفی

در گفته‌ها و نوشته‌های خود درزندگی روزمره، «و»و«یا» را به مفهومهای مختلف بکارمی‌بریم. این‌تنوع درکاربرد کلمه‌های مزبور ازحد مجاورات متداول گذشته ودر زمینه‌های علمی، وبه ویژه درعبارتهای‌ریاضی، نیز گسترش یافته‌است. نه‌تنها درنوشته‌های‌دانش‌آموزان، بلکه حتی درمتنهای چاپی،مشاهده می‌شود که دریك سطر ازیك عبارت ریاضی چندین‌بار «و» بکاررفته اماهر بار معنی‌دیگری ازآن مراد بوده‌است. چندعبارت ازاین نوع برای مثال یادآوری می‌شود:

۱) $x=ab^2$ و $a=3$ و $b=-5$

$x=3\times(-5)^2$ و $x=75$

۲) $F=\frac{2n+17}{n+1}$

$F=17$ و $n=0$ و $n+1=1$

۳) $x^2=x+1$ و $x^2-x-1=0$

درعبارت‌مثال(۱) نخستین«و» درسطراول به‌معنی«عطف‌توضیحی» ودرحقیقت به‌جای «؛» بکاررفته است. دومین «و» دراین سطربه معنی «حرف‌ربط» و «و»که درسطردوم بکار رفته به‌معنی «پس= بنابراین » می‌باشد.

درعبـارت مثال(۲) نخستین «و» سطردوم به معنی «نتیجه می‌شود» ودومین «و» به‌معنی «بنابراین» می‌باشد.

درعبارت مثال(۳) حرف«و»که بکاررفته به‌معنی «به‌عبارت دیگر» می‌باشد.

دربارهٔ «یا» نیزوضع به‌همین منوال است. به‌مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $5x=3a^2$ یا $\frac{x}{3}=\frac{a^2}{5}$

۲) $x^2+2x=0\Rightarrow x=0$ یا $x=-2$

۳) $ab=0\Rightarrow a=0$ یا $a=0$

در عبارت (۱) کلمهٔ «یا» به مقصود «بنابراین» بکار رفته است. درعبارت (۲) «یا»که بـکاررفته است ادات فصل‌است. در عبارت (۳) مراداز «یا» همان معنی‌منطقی‌آن است.

هریك ازعلامتهایی که درریاضیات بکاربرده می‌شود دارای معنی‌ومفهوم معین ومشخص‌است. اگر نشانه‌ای ریاضی به‌دومقصود بکاربرده شودعملی‌غلط انجام گرفته است. «و» و «یـا» هم‌که در عبارتهای ریاضی‌بکار برده می‌شوند به‌عنوان نشانـه‌هایی ریاضی باید تلقی گردند. ازاین‌جهت لازم‌است‌که درهمهٔ موارد و هرجا که بکار می‌روند معنی‌یکسان داشته باشند. حـال این پرسش به میان می‌آیدکه این‌معنی‌یکسان چه‌باید باشد؟ بـدیهی است همان معنی‌که درعلم منطق موردنظراست.

* *

درمنطق، «و»و«یا» به‌عنوان رابطهایی هستندکه دوگزاره را به یکدیگر ربط می‌دهند وگزاره‌ای مرکب بوجود می‌آورند.

گزارهٔ مرکبی‌که گزاره‌های تشکیل‌دهندهٔ‌آن بوسیلهٔ‌عطف «و» به‌یکدیگر مربوط شده‌باشند، تنهاوقتی درست است‌که هریك ازاین گزاره‌ها درست باشد. به‌عبارت ساده‌تر وقتی‌می‌گوئیم «P وQ» یعنی‌درعین‌حال هم‌P هم‌Q. بنابراین اگر PوQ دوگزارهٔ متناقض یا دوگـزارهٔ متضاد باشند، یعنی‌اینکه PوQ هردو باهم نتوانند صحیح‌باشند، دراین صورت ترکیب «PوQ» غلط است. مثلاوقتی‌بنویسیم «$x=3$و$x=2$» آیادرست‌نوشته‌ایم؟ آیاممکن است‌که x برابر۳ ودرعین‌حال برابر۲ باشد؟ مسلماً نه. بنابراین ترکیب مزبور درست نوشته‌نشده است درعبـارت زیر نیز حرف

«و» بی‌مورد بکاررفته ونوشته غلط‌است.

$$a(a-1)=0 \Longrightarrow a=0 \text{ و } a=1$$

چنانچه خواهیم دیدصحیح این‌عبارت چنین است:

$$a(a-1)=0 \Longrightarrow a=0 \text{ یا } a=1$$

اگر دو گزارهٔ ساده بوسیلهٔ «یا» به یکدیگر ربط یافته باشند، گزارهٔ مرکب حاصل‌ازآنها وقتی‌درست است‌که اقلا یکی ازآن دوگزاره درست باشد. به‌این معنی که یکی‌از سه حالت زیر برقرار باشد:

۱) گزارهٔ اول درست و گزارهٔ دوم نادرست باشد.

۲) گزارهٔ اول نادرست و گزارهٔ دوم درست باشد.

۳) هریك ازدوگزاره درست باشد.

مثلا وقتی گفته می‌شودکه. «اگر حاصل‌ضرب دوعدد صفر باشد یکی ازآن دوعدد صفراست»، مقصودآن است‌که یکی ازسه حالت زیربرقرار است:

۱) عدد اول صفروعدد دوم‌مخالف صفراست.

۲) عدداول مخالف صفر وعدد دوم صفراست.

۳) هریك ازدوعدد برابر صفراست.

بنابراین می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$ab=0 \Longrightarrow a=0 \text{ یا } b=0$$

وقتی‌حاصل‌ضرب دوعددصفرباشد، صفربودن‌آن هردوعدد الزامی نیست. ازاین‌جهت نوشتهٔ زیر(که درآن به‌جای «یا» حرف «و» بکاربرده شده‌است) نادرست می‌باشد:

$$ab=0 \Longrightarrow a=0 \text{ و } b=0$$

تبصرهٔ ۱ـ در ریاضیات گاهی مراد از «یا»که بین دو گزاره بکار می‌رودآن است‌که فقط یکی از آن دوگزاره درست می‌باشد. دراین‌مورد معمولالفظ «یا» دوبارآورده می‌شود.

مثال۱: دوخط دریك صفحه یا متوازیند یامتقاطع.

مثال۲: هرعدد طبیعی یازوج‌است یافرد.

مثال۳: هرعددکه مضرب ۵باشد یابه ۵ ختم می‌شود یا به صفر.

مثال ۴:

$$|x|=7 \Longrightarrow x=7 \text{ یا } x=-7$$

درهریك ازاین مثالها ملاحظه می‌شودکه فقط یکی ازدو حالت‌گفته شده برقرار است وهردوحالت باهم نمی‌توانندبرقرار باشند؛ ممکن‌نیست‌که دو خط هم متوازی وهم متقاطع باشند، ممکن نیست‌که یك‌عدد هم زوج باشد وهم‌فرد... این‌نوع «یا»را **«یای مانع جمع»** و«یا» به‌معنی‌قبل را و **«یای منطقی»** می‌نامند.

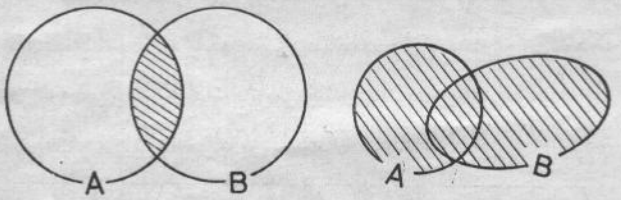
تبصره۲ـ درمنطق ریاضی (= منطق علامتی) برای «و» به‌معنی عطف‌نماد $\wedge$ ، برای «یا» به‌معنی‌یای منطقی‌نماد $\vee$ ، برای «یا» به‌مقصود یای مانع‌جمع نماد $\veebar$ بکار می‌رود؛ امااین نمادها درعبارتهای ریاضی کمتر بکار می‌رود.

* *

بااستفاده ازاشتراك واجتماع دومجموعه معنی «و»به‌معنی عطف ومعنی«یا»که یای منطقی‌باشد به‌سادگی درك‌می گردد.

اشتراك دومجموعهٔ A وB مجموعهٔ عضوهایی‌است‌که به A و به B تعلق‌داشته باشند (شکل‌الف)

$$x\in A\cap B \iff x\in A \text{ و } x\in B$$



الف ب

اجتماع دومجموعهٔ A وB مجموعهٔ عضوهایی است‌که به A یا به B تعلق داشته‌باشد (شکل‌ب)

$$x\in A\cup B \iff x\in A \text{ یا } x\in B$$

تمرین

۱ـ درهریك‌ازعبارتهای زیرآیا«و»و«یا» به‌صورت‌صحیح بکاررفته است یانه؟ اگربه صورت صحیح بکار نرفته است صحیح آن‌چه بایدباشد؟

۱) $x^2=1 \Longrightarrow x=1 \text{ و } x=-1$

۲) $x^2=1 \Longrightarrow x=1 \text{ یا } x=-1$

۳) مجذورعدد a برابر ۲۵است پس:

$$a=+5 \text{ و } a=-5$$

۴) مجذورعدد a برابر ۲۵است پس:

$$a=+5 \text{ یا } a=+5$$

۵) اگر دریك‌صفحه خطی‌برخط a یابرخط b عمودباشد دوخط a وb متوازیند.

دنباله در صفحهٔ۴۶

ساختمان منطقی قضیه

بااستفاده از مقالهٔ ترجمهٔ مهندس فتح‌الله زرگری

دردورهٔ دبستان، ریاضیات بدون هیچگونه استدلالی به‌دانش‌آموزان آموخته می‌شود. هرچندکه در روشهای جدید کوشش می‌شود تادانش‌آموز مفاهیم راعمقی فراگیرد، اماآنچه راکه در این‌زمینه‌بکارمی‌رود نبایداستدلال‌دانست. دراین‌دوره دانش‌آموزان بعضی از قاعده‌ها وحتی استنتاجها راطوطی‌وار یاد می‌گیرند.

دردورهٔ راهنمایی، دانش‌آموزان تصوری تقریبی، غیردقیق ومبهم دربارهٔ تکنیك استدلال بدست می‌آورند.

چگونگی ساختمان یك‌قضیه یکی‌از مهمترین مواردی‌است که دانش‌آموز دردورهٔ بعد ازراهنمایی باید به‌آن پی‌ببرد. دراین باره؛ چگونگی‌بیان صحیح قضیه، فرمولی کردن‌آن، عکس‌قضیه، اثبات باروش‌مستقیم وبابرهان خلف، شرط‌لازم وکافی، وغیره... همه‌باید مطرح شوند.

۱ـ فرمولی کردن

یك کلمه، حتی گاهی یك جمله، در گفتگوهای معمولی به معنی‌های متفاوت بکارمی‌رود. امادرریاضیات لازم‌است‌که هر کلمه یاهرجمله درهمهٔ مواردی‌که بکارمی‌رود معنی‌ومفهوم یکسان‌داشته باشد. برای این‌کار ازنمادها (= نشانه‌ها) استفاده می‌شود.

❁ گاهی پیش می‌آید که‌گزاره‌ای بااستفاده از کلمه‌های «همه»، «هر»، «کلیه»، «دلخواه»، وکلمه‌های دیگری ازاین‌قبیل بیان می‌شود. درریاضی به‌جای این کلمه‌ها نماد «$\forall$» بکارمی‌رود که خوانده می‌شود «هرچه باشد».

برای مثال دوگزارهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

(۱) هرگاه مجموع رقمهای‌عدد طبیعیn بر۹ بخش‌پذیر باشد دراین‌صورت عددn نیز بر۹ بخش پذیراست.

(۲) هرگاه عددطبیعیn به‌رقم‌یك ختم‌شود دراین صورت بر۷ بخش پذیراست.

گزارهٔ (۱) برای هرعدد طبیعی دلخواه n درست است، اما گزارهٔ (۲) برای هرعدد طبیعی‌دلخواه n درست نیست (این گزاره مثلابرای $n=۲۱$ درست‌است ولی‌برای $n=۴۱$ درست نیست).

برای‌آنکه درست‌بودن گزارهٔ(۱) برای‌همهٔ عددهای‌طبیعی n تأکیدشود، آن رابه‌کمك نماد $\forall$ چنین می‌نویسیم: «هرگاه مجموع رقمهای عددطبیعیn بر۹ بخش‌پذیرباشد، دراین صورت $\forall n$، عددn بر۹بخش پذیراست». گزارهٔ(۲) برای همهٔ مقادیر n عمومیت ندارد وهرگاه‌آن‌را با$\forall n$ بنویسیم یك گزارهٔ‌نادرست بدست خواهیم آورد.

❁ برای‌فرمولی‌کردن کلمه‌ها وجمله‌هایی نظیر «اگر»، «هرگاه»، «دراین‌صورت»، «نتیجه می‌شود»، «موجب‌می‌شود» و ... نماد $\Longrightarrow$ بکار می‌رود. وقتی‌بنویسیم «$P\Longrightarrow Q$» می‌خوانیم «اگر P آنگاهQ».

بااستفاده ازاین‌نماد گزارهٔ (۱)رامی‌توانیم چنین‌بنویسیم:

$\forall n ; n\in N$

مجموع رقمهای n بخش پذیر بر۹

$\Longrightarrow$ n بخش پذیربر ۹

[در این رابطه N نماد مجموعهٔ عددهای طبیعی و $\in$ نماد تعلق داشتن است . به‌جای‌آنکه نوشته باشیم «n عددی است طبیعی» نوشته‌ایم «$n\in N$»]

مثالی از هندسه بیاوریم. اگرنقطهٔ M از دو نقطهٔ A و B به یك فاصله باشد برعمود منصف AB واقع است. این گزاره‌را چنین فرمولی می‌کنیم:

$\forall A, \forall B, \forall M ;$

$MA=MB \Longrightarrow M$ برعمود منصفAB

۲ـ فرض و حکم قضیه

هرقضیه رامی‌توانیم با«اگر... آنگاه...» بیان کنیم.وقتی مثلا این‌قضیه‌را بیان می کنیم که: «درهرمثلث متساوی‌الساقین، دو زاویهٔ روبرو به‌دوساق باهـم برابرند»، در حقیقت بیان‌آن چنین است: «اگرمثلثی متساوی‌الساقین باشد، آنگاه دو زاویهٔ روبرو به‌دوساق‌آن باهم برابرند».

دربیان قضیه‌آنچه‌که با اگرمی‌آید **فرض قضیه** وآنچه که باآنگاه می‌آید **حکم قضیه** نامیده می‌شود. درنوشتن قضیه به‌صورت فرمولی، فرض‌قضیه درسمت‌چپ نماد $\Longrightarrow$ وحکم قضیه درسمت راست‌این‌نماد نوشته‌می‌شود وغیرازآن لازم می‌آیدکه قبل ازفرض، جملهٔ‌دیگری برای تـوضیح قضیه نوشته گرددکه آن را **جزء توضیحی** می‌نامیم.

قضیهٔ بالا به‌صورت فرمولی‌چنین نوشته‌می‌شود:

$$\forall \Delta ABC ; AB=AC \Longrightarrow \widehat{C}=\widehat{B}$$

دراین قضیه:

جزء توضیحی: $\forall \Delta ABC$

فرض: $AB=AC$

حکم: $\widehat{C}=\widehat{B}$

غیراز وقتی‌که قضیه‌را فرمولی‌می‌نویسیم، در موردهای دیگر هم اغلب جزء توضیحی بیان‌می‌شود. مثلاقضیه بالارا می‌توانیم چنین بیان کنیم:

فرض‌کنیم‌که ABC یك‌مثلث باشد (جزء توضیحی)؛

اگردوضلع AB و AC ازاین مثلث با هـم برابر باشند (فرض)؛

دوزاویهٔ BوC نیزباهم برابرند (حکم).

قضیهٔ دیگری درنظرمی گیریم که دراین‌مقاله قبلاهم ازآن صحبت کرده‌ایم: هرگاه مجموع رقمهای یك‌عددطبیعی‌بر۹ بخش‌پذیرباشد، آن‌عدد بر۹ بخش پذیراست.

این‌قضیه رامی‌توانیم چنین‌بیان کنیم:

فرض‌کنیم n عددی طبیعی‌باشد (جزء توضیحی)؛

اگرمجموع رقمهای عدد n بر۹ بخش‌پذیرباشد (فرض)؛

آنگاه خود عدد n نیزبر۹ بخش‌پذیراست(حکم).

بیان‌فرمولی این‌قضیه چنین‌است:

$\forall n, n\in N$ ؛

مجموع رقمهای n بخش‌پذیر بر۹

عدد n بخش‌پذیر بر۹ $\Longrightarrow$

جزء توضیحی: $\forall n, n\in N$،

فرض: مجموع رقمهای n بخش‌پذیر بر۹،

حکم : عدد n بخش پذیر بر۹.

تمرین‌ـ هریك ازقضیه‌های زیررا به‌شکل دیگروبه‌شکل فرمولی بنویسید واجـزاءآن (جزء توضیحی، فرض، حکم) را مشخص کنید.

ـ هر عدد طبیعی کـه به رقـم صفر ختم شود مضرب ۱۰ است .

ـ هرعددکه مضرب۹ باشد مضرب ۳ است.

ـ مجموع هرعدد طبیعی وعکس‌آن بزرگتر از۲ یابرابر با ۲ است.

ـ اگردرمثلثی دوضلع باهم‌برابرنباشند، زاویه‌های روبرو به‌آنها نیزباهم نابرابرند وزاویهٔ بزرگتررو‌برو به‌ضلع بزرگتر است.

ـ درمربع مستطیل دو قطربا هم‌برابرند.

* *

درهریك ازقضیه‌هایی‌که درمثالهای گذشته ذکرشد هریك ازاجزاء قضیه، جمله یاگزاره‌ای ساده بود. اجـزاء بسیاری از قضیه‌ها شامل‌چندین جمله یاگزارهٔ ساده‌است.

مثال۱: درهرمثلث خط واصل‌بین اوساط دوضلع باضلع سوم موازی وبانصف‌آن برابراست.

این‌قضیه رامی‌توانیم چنین‌بیان کنیم:

درمثلث ABC (جزء توضیحی)؛

$$\left.\begin{array}{l}\text{اگر } M \text{ وسط } AB \text{ باشد}\\ \text{واگر } N \text{ وسط } AC \text{ باشد}\end{array}\right\}\text{(فرض)؛}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{خط } MN \text{ باضلع } BC \text{ موازی است}\\ \text{وطول } MN \text{ نصف طول } BC \text{ است}\end{array}\right\}\text{(حکم)}$$

همین‌قضیه به‌صورت فرمولی‌چنین نوشته می‌شود:

$$\forall \Delta ABC, M\in[AB] \text{و} N\in[AC]:$$

$$\left.\begin{array}{l}AM=MB\\ AN=NC\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}MN \parallel BC\\ MN=\frac{1}{2}BC\end{array}\right.$$

ملاحظه می‌شود که فرض وهمچنین حکم این قضیه هر کدام ازچندین گزاره تشکیل شده است.

مثال۲: اگرعددی طبیعی بردو عـدد طبیعی دیگربخش پذیرباشد واین‌دوعددنسبت به‌یکدیگر اول‌باشند، آن عددبرحاصل ضرب این‌دوعدد بخش‌پذیراست.

$$\forall a\in N\ \forall b\in N\ \forall c\in N$$

$$\left.\begin{matrix} b|a, c|a \\ (b,c)=1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow bc|a$$

[نماد «$b|a$» یعنی «b می‌شمرد aرا» ونماد «$(b,c)=1$»یعنی اینکه «بزرگترین مقسوم‌علیـه مشترك دوعدد b و c برابر یك است»].

دراین‌قضیه، جزء توضیحی ازسه جمله،فرض ازسه گزارهٔ ساده وحکم ازیك گزارهٔ ساده تشکیل‌شده است.

تمرین۱ـ اجزاء هریك‌ازقضیه‌های‌زیروهمچنین‌جمله‌ها وگزاره‌های سادهٔ تشکیل‌دهندهٔ هریك ازاجزاء را مشخص کنید:

ـ اگردریك تقسیم، هریك ازعددهای مقسوم ومقسوم‌علیه را درعددی ضرب کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند اما باقیمانده درهمان عددضرب‌می‌شود.

ـ اگر کسری تحویل ناپذیر باشد ودر تجزیـهٔ مخرج‌آن هیچیك از عاملهای ۲و۵ وجود نداشته باشد، آن‌کسر مولدکسر اعشاری‌متناوب ساده‌است.

ـ در مربع، دوقطر با هم برابر، منصف یکدیگر و برهم عمودند .

ـ چهارضلعی که‌چهاررأسش دروسطهای‌ضلعهای یك‌چهار ضلعی‌غیرمشخص واقع‌باشند متوازی‌الاضلاع است.

۲ـ درهریك ازرابطه‌های زیر، قضیه‌ای به صورت فرمولی نوشته شده‌است. بیان‌فارسی هریك ازقضیه‌ها را بنویسید. آیااین قضیه‌ها صورتهای مختلف یك‌قضیه‌اند، یااینکه قضیه‌های جداگانه می‌باشند؟

(۱) $\forall a, \forall b$:

$$ab=0 \Longrightarrow (a=0 \text{ یا } b=0)$$

(۲) $\forall a, \forall b$:

$$(ab=0 \text{ و } a\neq 0) \Longrightarrow b=0$$

(۳) $\forall a, \forall b$:

$$ab=0 \Longrightarrow (a\neq 0 \Longrightarrow b=0)$$

۳ـ قضیهٔ عکس (عکس یك قضیه)

قضیهٔ زیررا بازهم درنظر می‌گیریم:

(a) اگرمجموع‌رقمهای عددی‌طبیعی‌بر۹ بخش‌پذیرباشد، خود آن عدد نیزبر۹ بخش‌پذیر است.

اجزاء این قضیه، چنـانکه قبلا هم یـادآوری شده است، عبارتند از:

جزء توضیحی: nعددی است طبیعی.

فرض: مجموع رقمهای‌عدد nبر۹ بخش‌پذیراست.

حکم: عدد nبر۹ بخش‌پذیراست.

بدون‌آنکه جزء توضیحی‌را تغییردهیم، فرض وحکـم را جابجا می‌کنیم:

جزء توضیحی: nعددی است طبیعی.

فرض: عدد nبر۹ بخش‌پذیراست.

حکم: مجموع رقمهای عددn بر۹ بخش‌پذیر است.

قضیهٔ جدیدی بدست‌آورده‌ایم که چنین‌بیان می‌شود:

(b) اگرعددی بر۹ بخش‌پذیرباشد، مجموع رقمهای‌آن نیزبر۹ بخش‌پذیر است.

قضیهٔ (b) راعکس قضیهٔ (a) می‌نامیم.

هرگاه در یك قضیه، جزء توضیحـی تغییر نکند اما فرض وحکم جابجـا شوند، قضیهٔ‌دیگـری بدست می‌آیدکه عکس‌قضیهٔ اولی نام‌دارد.

درمثال‌بالا، قضیهٔ(a) وعکس‌آن، قضیهٔ (b)، هردوصحیح می‌باشند. امادربیشتراز موارد ممکن‌است‌که عکس‌قضیه‌ای‌صحیح نباشد، درصورتی‌که خودآن قضیه صحیح‌است.

مثال: هر عـددکه بر۹بخش پذیر باشد بر۳ نیز بخش پذیر است:

$$\forall n\in N: 9|n \Longrightarrow 3|n$$

عکس‌این قضیه می‌شود: هرعددکه بر۳ بخش پذیرباشد بر ۹ نیز بخش‌پذیر است:

$$\forall n\in N: 3|n \Longrightarrow 9|n$$

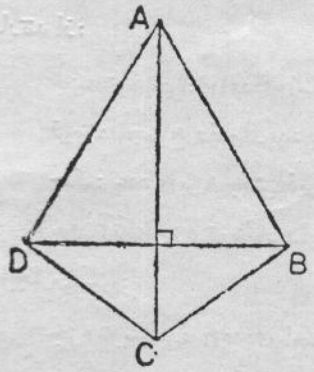
قضیهٔ اخیر، یعنی عکس قضیهٔ مورد مثال، غلط است (مثلا ۱۲بر۳ بخش‌پذیراست امابر۹ بخش‌پذیر نیست).

مثال دیگر: درلوزی دوقطربرهم عمودند:

$\forall ABCD$: $ABCD \Longrightarrow AC \perp BD$ لوزی‌است؛

می‌دانیم که این‌قضیه صحیح‌است. حال عکس‌این قضیه را در نظر می‌گیریم که می‌شود: هرچهارضلعی که دوقطر آن برهم‌عمودباشند لوزی است:

$\forall ABCD$: $AC \perp BD \Longrightarrow$ لوزی‌است $ABCD$



به‌سادگی می‌توان‌معلوم کرد کـه قضیهٔ اخیر (یعنی عکس قضیهٔ گفته شده) صحیح‌نیست(شکل روبرو رانگاه‌کنید).

تمرین: عکس هریك از قضیه‌های زیر را بیان کنید و معلـوم سازیدکه ازقضیه‌های حاصل کدامهاصحیح وکدامهاغلط می‌باشند.

ـ هرعددکه بر۲۴ بخش‌باشد بر۶ وبر۴ نیز بخش پذیر است.

ـ هرعددکه بر۴۰ بخش پذیرباشد بر۸ وبر ۵ نیزبخش‌پذیر است.

ـ هرعددطبیعی که‌رقم سمت راست‌آن ۵ باشد بر۵ بخش‌پذیر است.

ـ درمستطیل دوقطرباهم برابرند.

ـ درمتوازی‌الاضلاع دوقطر منصف یکدیگرند.

* *

ازتعریفی که برای قضیهٔ عکس‌شد برمی‌آیدکه اگر قضیهٔ مثلا (a) عکس قضیهٔ مثلا (b) باشد، قضیهٔ (b) نیز عکس قضیهٔ (a) خواهـد بـود. از این جهت بـی‌معنی خواهد بود کـه پرسیده‌شود ازدوقضیه که‌عکس یکدیگرنه کدام‌قضیهٔ اصلی وکدام عکس دیگری‌است. درکتابهای‌درسی‌از دوقضیه که‌عکس‌یکدیگرند، آن‌راکه نخست بیان شده باشد قضیهٔ اصلی ودیگـری راعکس‌آن منظور می‌دارند.

* *

برای قضیه‌هایی که فرض‌ویا حکم‌آن ازچندگزاره‌تشکیل شده‌باشد، معمولاچند قضیهٔ عکس می‌توان تشکیل داد که ممکن است همهٔ‌آنها صحیح یاهمهٔ‌آنها غلط یااینکـه فقط بعضی ازآنها صحیح‌باشد. برای مثال‌قضیهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

قضیه: پاره‌خط واصل‌بین وسطهای دوضلع مثلث، باضلع سوم موازی وبانصف ضلع‌سوم برابراست.

$\forall \Delta ABC \wedge M \in [AB] \wedge N \in [AC]$:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ AM = MB \\ (2)\ AN = NC\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}(3)\ MN \parallel BC \\ (4)\ MN = \frac{1}{2}BC\end{array}\right.$$

برای این‌قضیه می‌توانیم قضیه‌هـای زیررا به عنوان قضیهٔ عکس بیان کنیم:

a) تمام فرض‌وتمام حکم‌را به‌جای یکدیگرقراردهیم:

$\forall \Delta ABC \wedge M \in [AB]$ و $N \in [AC]$;

$$\left.\begin{array}{l}MN \parallel BC \\ MN = \frac{1}{2}BC\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}AM = MB \\ AN = NC\end{array}\right.$$

یعنی: پاره‌خط واصل‌بین دوضلع مثلث‌که باضلع سوم موازی وبا نصف‌ضلع سوم برابرباشد، آن دوضلع مثلث‌را نصف می‌کند. این قضیه صحیح‌است.

(b) گزاره‌های (۲) و (۳) راجابجا می‌کنیم:

$\forall \Delta ABC \wedge M \in [AB] \wedge N \in [AC]$ ؛

$$\left.\begin{array}{l}AM = MB \\ MN \parallel BC\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}AN = NC \\ MN = \frac{1}{2}BC\end{array}\right.$$

یعنی: اگراز وسط یك‌ضلع مثلث خطی‌موازی باضلع دیگر رسم کنیم، خط‌مرسوم ضلع‌دیگرمثلث رانصف می‌کند وطول‌پاره‌خطی ازآن‌که بین‌دوضلع محصوراست برابربا نصف‌ضلع سوم‌است. این قضیه نیزصحیح است.

c) ازجابجاکردن گزاره‌های (۳)و(۲) قضیه‌ای مشابه‌با قضیهٔ (b) بدست می‌آید وصحیح‌است.

d) گزاره‌های (۱)و(۴) راجابجا می‌کنیم:

$\forall \Delta ABC, M \in [AB], N \in]AC[$ ؛

$$\left.\begin{array}{l}MN = \frac{1}{2}BC \\ AN = NC\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}MN \parallel BC \\ AM = MB\end{array}\right.$$

قضیه‌ای بـه شرح زیـر است وصحیح نیست: اگـر از وسط یك ضلع مثلث به‌نقطه‌ای ازضلع دیگروصل‌کنیم بقسمی‌که طول پاره

دنباله درصفحهٔ۴۶

جبر گراسمان

علیرضا امیرمعز ـ دانشگاه تگزاس تک

جبر گراسمان همیشه پس از بـررسی مفصلی ازتانسورها مطالعه می‌شود و در ابتدا خواننده را می‌ترسانـد. دراین رساله سعی کرده‌ایم که این جبر را چنانچه **گراسمان** اکتشاف کرده است بررسی کنیم.

۱ـ دترمینان و حاصل‌ضرب داخلی:

دراین بخش مورداستعمال حاصل‌ضرب داخلی بردارهارا در تعریف و قضایای مربوط به دترمینان یك ماتریس را مـرور می‌کنیم [۱].

۱ـ۱ : تعریفها و اصطلاحها : آنچه درجبرخطی مرسوم است دراین مقاله‌بکار می‌بریم ؛ فضای اقلیدسی n بعدی را با R_n نمایش مـی‌دهیم. اعـداد (scalar) را با حـروف a,b,c ... وبردارها را با $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ نمایش می‌دهیم. بردار صفررا $\vec{0}$ می‌نویسیم. حاصل‌ضرب‌داخلی دوبردار ξ,ηعبارتست از (ξ,η).عبارت $[\alpha_1,\ldots,\alpha_p]$ یعنی زیرفضائی‌که بابردارهای $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ ساخته شده است. چنانچه اصطلاح تازه‌ای‌لازم شود، پس‌ازتعریف‌آن معرفی خواهدشد.هرگاه A یك ماتریس $n\times n$ باشد، دترمینان A را با $\det A$ نمایش می‌دهیم .

۱ـ۲ : قائم دست‌راستی: فرض‌کنیم‌که $\{\alpha_1,\alpha_2\}$یك مبنای قائم و نرمال (orthonormal) در R_2 باشد. تبدیل خطی A را چنان می‌گیریم که :

$$\alpha_1 A=\alpha_2 \quad و \quad \alpha_2 A=-\alpha_1$$

واضح است‌که ماتریس‌این تبدیل نسبت به $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ چنین‌است:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

اکنون فرض کنیم که $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$ باشد. آنگاه

$$(x_1\ \ x_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=(-x_2\ \ x_1)$$

به این معنی که :

$$\xi A=\delta=-x_2\alpha_1+x_1\alpha_2$$

بردار δ را **قائم دست راستی** ξ مـی‌نامیم. ملاحظه می‌شود که بردار $\xi\in R_2$ و $\xi\neq\vec{0}$ فقط یك قائم‌دست راستی دارد.

۱ـ۳ : دترمینان ماتریس‌رتبهٔ دو : فرض‌کنیم‌که

$$A=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$$

و $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ یك‌مبنای قائم در R_2 باشد بقسمی که :

$$\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2 \quad و \quad \eta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2$$

اگر δ قائم دست راستی ξ باشد ، ملاحظه می‌شود کـه

$$(\eta,\delta)=x_1y_2-x_2y_1$$

واضح است‌که(η,δ) همان دترمینان A است. از اینرو $\det A$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\det A=\det\langle\xi,\eta\rangle=x_1y_2-x_2y_1$$

باید ملاحظه کردکه $\langle\xi,\eta\rangle$ یك زوج مرتب است و می‌توان گفت که

$$\det\langle\xi,\eta\rangle=f\langle\xi,\eta\rangle$$

تابعی از زوج مرتب $\langle\xi,\eta\rangle$ با مقدار حقیقی است.

اکنون می‌توان به آسانی ثابت‌کردکه

$$\det\langle\eta,\xi\rangle=-\det\langle\xi,\eta\rangle$$

به حقیقت باید قائم دست‌راستی ηراکه γ می‌نامیم بدست‌آورد، سپس نشان دادکه

$$(\xi,\gamma)=-(\eta,\delta)$$

۱ـ۴ بعضی از خواص دترمینان : فرض کنیم که اصطلاحات بخش ۱ ـ ۳ را بکار برده‌ایم . سپس :

$$\det\langle\eta,\xi\rangle=-\det\langle\xi,\eta\rangle \qquad I$$

II- هر گاه $\{\xi,\eta\}$ بطور خطی غیر مستقل باشد،

$$\det<\xi,\eta>=0$$

III- $\det<a\xi,\eta>=a\det<\xi,\eta>$

IV- $\det<\xi,a\xi+\eta>=\det<\xi,\eta>$

V- $\det<\xi,a\eta+b\zeta>=$

$$a\det<\xi,\zeta>+b\det<\xi,\zeta>$$

برهان این خواص بستگی به خواصی سادهٔ حاصلضرب داخلی دارد. آن را به خواننده واگذارمی‌کنیم.

۱-۵: حاصلضرب برداری در R_3 : فرض کنیم که $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ یك مبنای قائم ونرمال در R_3 باشد. دوبردار زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3 \quad \text{و}$$

$$\eta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+y_3\alpha_3$$

حاصلضرب خارجی ξ,η یعنی $\xi\wedge\eta$ را بردار ζ تعریف می‌کنیم بقسمی که

$$\zeta=(x_2y_3-x_3y_2)\alpha_1+(x_3y_1-x_1y_3)\alpha_2+$$
$$+(x_1y_2-x_2y_1)\alpha_3$$

باشد. خواننده به آسانی می‌تواند ثابت کندکه

$$(\zeta,\xi)=(\zeta,\eta)=0$$

به این‌معنی که بردار ζ بردوبردار ξ,η عمود است. اکنون‌ملاحظه می‌شود که :

$$\alpha_1\wedge\alpha_2=\alpha_3 \quad \text{و} \quad \alpha_2\wedge\alpha_3=\alpha_1 \quad \text{و} \quad \alpha_1\wedge\alpha_3=-\alpha_2$$

هر گاه $\{\xi,\eta\}$ بطور خطی‌غیرمستقل باشد، $\xi\wedge\eta=\vec{0}$ است .

۱-۶ : دترمینان یك ماتریس رتبهٔ سه : فرض کنیم که :

$$A=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}$$

دستگاه قائم نرمال $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ را چنان می‌گیریم که:

$$\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3 \quad \text{و}$$

$$\eta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+y_4\alpha_3 \quad \text{و}$$

$$\zeta=z_1\alpha_1+z_2\alpha_2+z_4\alpha_3$$

فرض کنیم که $\delta=\eta\wedge\zeta$ واضح است که δ بر $[\eta,\zeta]$ عمود است.

هر گاه :

$$\delta=t_1\alpha_1=t_2\alpha_2+t_3\alpha_3$$

باشد ، بنا به بخش ۱-۶ نتیجه می‌شودکه:

$$t_1=\det\begin{pmatrix}y_2 & y_3\\ z_2 & z_3\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad t_2=-\det\begin{pmatrix}y_1 & y_3\\ z_1 & z_3\end{pmatrix}$$

$$t_3=\det\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{pmatrix}$$

چنانچه خواننده مطلع است، مقادیر t_3,t_2,t_1 را به ترتیب کوفاکتورهای x_3,x_2,x_1 می‌گویند. ملاحظه می‌شودکه :

$$(\xi,\delta)=x_1t_1+x_2t_2+x_3t_3$$

از اینرو دترمینان A را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\det A=\det<\xi,\eta,\zeta>=(\xi,\delta)$$

دوباره باید در نظر گرفت که $<\xi,\eta,\zeta>$ یك سه‌تائی است و det تابع این سه‌تائی است .

۱-۷ : خواص دترمینان‌ماتریس رتبهٔ‌سه : این‌خواص را از اینرو ذکر می‌کنیم‌که بعداً در حالت کلی می‌توان تکرار کرد.

I- هر گاه $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ بطور خطی غیر مستقل باشد ،

$$\det<\xi_1,\xi_2,\xi_3>=0$$

II- فرض کنیم که $p=[i_1,i_2,i_3]$ ترتیبی از $[1,2,3]$ باشد. اصطلاح sgnp یعنی $+1$ هر گاه **ترتیب‌زوج** است و -1 هر گاه **ترتیب‌فرد** است. بنابراین

$$\det<\xi_{i_1},\xi_{i_2},\xi_{i_3}>=(\text{sgnp})\det<\xi_1,\xi_1,\xi_3>$$

III- $\det<\xi_1+a\xi_2+b\xi_3,\xi_2,\xi_3>=$

$$\det<\xi_1,\xi_2,\xi_3>$$

IV- $\det<a\eta+b\zeta,\xi_2,\xi_3>=$

$$a\det<\eta,\xi_2,\xi_3>+b\ \det<\zeta,\xi_2,\xi_3>$$

برهان را به‌خواننده واگذارمی کنیم.

۱-۸: حاصلضرب برداری در R_{k+1} : فرض‌کنیم که دترمینان‌یك ماتریس $k\times k$ برای $2<k<n$ تعریف‌شده باشد. اکنون ماتریس زیر را درنظر می‌گیریم

$$\begin{pmatrix}x_{11}\cdots x_{1k}\\ \cdots\quad\cdots\\ x_{K1}\cdots x_{kk}\end{pmatrix}$$

مبنای قائم و نرمال $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$ را چنان انتخاب‌می‌کنیم که

$$\xi_j = x_{j1}\alpha_1 + \cdots + x_{jk}\alpha_j, j = 1, \cdots, k,$$

و دترمینان A را به قرار زیر تعریف می‌کنیم که :

$$\det A = \det <\xi_1, \cdots \text{و} \xi_k>$$

بقسمی که اگر $p = [i, \cdots, i_k]$ ترتیبی از $[1, \cdots, k]$ باشد،

$$\det <\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k}> = (\operatorname{sgn} p) \det <\xi_1, \cdots, \xi_k>$$

این تابع تمام خواصی راکه‌در بخش ۱ـ۷ ذکر شد دارا است.

اکنون مبنا را به‌فضای R_{k+1} ادامه می‌دهیم بقسمی که :

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}\}$$

قائم و نرمال باشد. اکنون بردارهای $\xi_1, \cdots, \xi_k$ را چنان می‌گیریم که :

$$\xi_j = x_{j1}\alpha_1 + \cdots + x_{j(k+1)}\alpha_{k+1}, j = 1, \cdots, k$$

سپس آنچه که در بخش ۱ـ۵ گفته شد تقلید می‌کنیم و حاصل ضرب برداری $\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k$ راتعریف می‌کنیم.

ابتدا ماتریس $k \times (k+1)$ زیررا در نظر می‌گیریم

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1(k+1)} \\ \cdots & & \cdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{k(k+1)} \end{pmatrix}$$

اکنون تعریف می‌کنیم که:

$$\zeta = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k \text{ و } \zeta = x_1\alpha_1 + \cdots + x_{k+1}\alpha_{k+1}$$

بقسمی که :

$$x_j = (-1)^{j+1} \det X_j \qquad , j = 1, \cdots, k+1$$

در این فرمول X_j ماتریسی است که از حذف ستون j ، ماتریس M بدست‌می‌آید. باید ملاحظه کرد که هرگاه $\{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$ بطور خطی‌غیرمستقل باشد، $\zeta = \vec{0}$ است وگرنه ζ بر زیر فضای $[\xi_1, \cdots, \xi_k]$ قائم است به‌این معنی که

$$(\zeta, \xi_j) = 0, j = 1, \cdots, k$$

مطالب ایق بخش پس‌از مطالعهٔ بخش بعد بهتر روشن می‌شود.

۱ـ۹ دترمینان ماتریس رتبهٔ n : فرض کنیم که:

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

مبنای قائم و نرمال $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ را چنان می‌گیریم که

$$\xi_j = x_{j1}\alpha_1 + \cdots + x_{jn}\alpha_n \qquad \text{و} j = 1, \cdots, n$$

حاصل‌ضرب زیر را در نظر می‌گیریم

$$\delta = \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n$$

بقسمی که :

$$\delta = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$$

چنانچه در بخش ۱ـ۸ دیدیم

$$x_j = (-1)^{j+1} \det A_j, j = 1, \cdots, n,$$

بقسمی‌که A_j ماتریسی است که از حذف ستون j ماتریس زیر بدست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

عدد x_j را کوفاکتور A مربوط به‌عنصر

$$x_{1j}, j = 1, \cdots, n$$

گویند. ملاحظه می‌شود که :

$$(\xi_1, \delta) = x_1x_{11} + \cdots + x_nx_{1n}$$

از اینرو دترمینان A را چنین تعریف می‌کنیم

$$\det A = \det <\xi_1, \cdots, \xi_n> = (\xi_1, \delta)$$

عبارت n تائی $<\xi_1, \cdots, \xi_n>$ مرتب است و $\det$ تابعی ازاین n تائی است که مقدار آن عددی است حقیقی.

۱ـ۱۰: خواص دترمینان : آنچه در بخش ۱ـ۷ بررسی شد اینجاتکرار می‌کنیم .

I ـ هرگاه $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ بطور خطی غیر مستقل باشد،

$$\det <\xi_1, \cdots, \xi_n> = 0$$

II ـ فرض کنیم که $[i_1, \cdots, i_n]$ ترتیبی از $[1, \cdots, n]$ باشد. آنگاه

$$\det <\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{in}> = (\operatorname{sgn} p) \det <\xi_1, \cdots, \xi_n>$$

III ـ

$$\det <\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n \text{ و } \xi_2, \cdots, \xi_n> = \det <\xi_1, \cdots, \xi_n>$$

IV

$$\det <a\eta + b\zeta, \xi_2, \cdots, \xi_n> = a \det <\eta, \xi_2 \cdots, \xi_n> + b \det <\zeta, \xi_2, \cdots, \xi_n>$$

برهان را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم که ازخواص‌حاصل ضرب داخلی‌واین‌که $\delta = \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n$ بر $[\xi_2, \cdots, \xi_n]$عمود است استفاده کند.

دنباله دارد

مسائل هندسی ماکسیمم ومی‌نیمم

نوشتهٔ : G.D. Chakerian

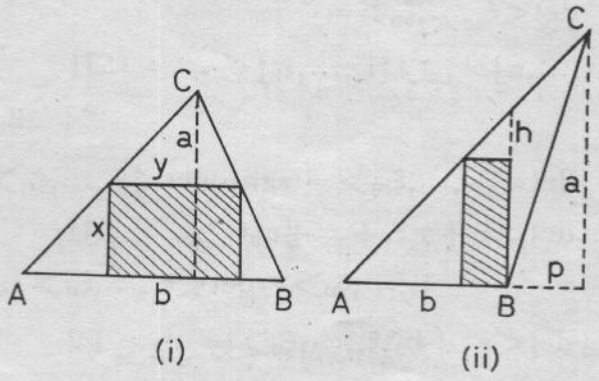
ترجمهٔ : جعفر آقایانی چاوشی

۱ـ مقدمه ـ بامسئلهٔ مقدماتی زیر آشنایی‌داریم:

«مثلث به‌ارتفاع a وقاعدهٔ b مفروض است. ابعاد مستطیل به‌سطح ماکسیمم محاط دراین مثلث‌را بیابید»

این‌قبیل مسائل حداقل قوهٔ تصور دانش‌آموز را گسترش می‌دهد تابه هنگام مواجهه بامسائل مشابهی بتواند آنها را بدون استفاده ازحساب جامع وفاضل حل کند.

مسئلهٔ بالارا بااستفاده ازیك نامساوی مقدماتی به سهولت می‌توان حل کرد. برای حل‌این مسئله بادوشکل مختلف و اساسی مطابق شکل I مواجه می‌شویم. دراین‌شکل چنانکه ملاحظه‌می‌شود: درحالت (i) تصویررأس C روی‌قاعدهٔ مثلث واقع‌است، درصورتی که برای حالت (ii) چنین‌وضعی اتفاق نمی‌افتد. حل‌مسئله رادر حالت (i) بررسی می‌کنیم، سپس حالت (ii) راکه با استفاده از حل‌حالت اول‌بسیار ساده خواهدبود متذکر می‌شویم:



شکل I

درشکل I پس‌از نامگذاری معمول به جستجوی ماکسیمم مساحت مستطیل‌یعنی‌مقدار xy می‌پردازیم. ازتشابه مثلثهای‌تشکیل شده خواهیم داشت:

$$y=\frac{b}{a}(a-x)\Longrightarrow xy=\frac{b}{a}x(a-x)$$

پس‌مسئله منجر به تعیین x، $(0\leqslant x\leqslant a)$ وحاصل‌ضرب $x(a-x)$ می‌گردد.

ازسوی دیگراین حاصل‌ضرب را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$x(a-x)=(\frac{a}{2})^2-(x-\frac{a}{2})^2$$

اما حاصل‌ضرب مزبور هنگامی ماکسیمم است‌که فقط وفقط:

$$(x-\frac{a}{2})^2=0$$

باشدکه در این صورت $x=\frac{a}{2}$ گردیده وخواهیم داشت:

$$xy=\frac{b}{a}x(a-x)\leqslant\frac{1}{2}(\frac{ab}{2})=\frac{1}{2}S(ABC)$$

(منظور از $S(ABC)$ مساحت مثلث ABC می‌باشد).

تساوی هنگامی برقرار است که $x=\frac{a}{2}$ شود. بنابراین مستطیل بامساحت ماکسیمم دارای عرضی‌برابربا $\frac{a}{2}$ خواهد بود ومساحتش درحقیقت برابربا نصف‌مساحت مثلث مفروض‌است.

درحالت (ii) عرض مستطیل مطلوب $\frac{h}{2}$ ومساحت‌آن کمتر ازنصف مساحت‌مثلث مفروض‌است. دراین‌حالت سطح‌ماکسیمم‌برابر است با:

$$\frac{b}{2(b+p)}\cdot S(ABC)$$

درحالت (ii) هرگاه AC راقاعده‌ای‌که ضلع مستطیل‌برآن‌واقع

است اختیار کنیم، ماکسیمم مساحت این مستطیل برابر با نصف مساحت مثلث مفروض می‌شود. پس‌می‌توان نتیجه گرفت که:

همواره ممکن‌است در مثلث مفروضی‌مستطیلی که مساحت آن برابربا نصف مساحت همین مثلث‌است محاط کرد.

دراینجا این‌سؤال مطرح‌می‌شود که ازهمهٔ مستطیلهای‌محاط درمثلث مفروض کدامیك دارای مساحت ماکسیمم است؟ آیامقدار این ماکسیمم می‌تواند بزرگتر از نصف مساحت مثلث مفروض باشد؟

پاسخ این‌سؤالها را بعد بررسی می‌کنیم. همچنین مسائل دیگری ازاین قبیل‌را بعدملاحظه خواهیم کرد.

فعلا هدف اصلی‌بررسی مسائل‌عمومی مربوط به ماکسیمم ومی‌نیمم ازنوع مسئلهٔ بالااست. ونیزبرای اینکه حل این مسائل به‌سهولت صورت‌گیرد ازتبدیل آفین‌استفاده می‌کنیم.

۲ـ چندضلعیهای باسطح می‌نیمم محیط بریك مجموعهٔ محدب

دراین مقاله بامجموعه‌های محدب‌ومسطحی سروکارداریم. هرمجموعهٔ مسطح محدب دارای این‌خاصیت است‌که قطعه خط واصل بین‌هردو نقطه ازاین‌مجموعه به‌همین مجموعه تعلق‌خواهد داشت.

بدیهی است که هرگاه K یك ناحیهٔ محدب و $n\geq 3$ عدد مفروض صحیحی‌باشد. حداقل یك n ضلعی‌بامساحت می‌نیمم وجود داردکه شامل K باشد.

روشن است‌که چنینn ضلعی بایستی بر K محیط بوده و درنتیجه اضلاع آن مرز K راتلاقی می‌کنند. قضیهٔ زیر خاصیت جالبی‌را نشان می‌دهد.

قضیهٔ۱ـ فرض می‌کنیم K یك‌ناحیهٔ محدب و$n\geq 3$ عدد صحیح مفروض‌باشد. همچنین‌فرض می‌کنیم P یكn ضلعی‌محدب بامساحت می‌نیمم‌باشدکه K را دربرگرفته است. دراین صورت اوساط اضلاع P بر مرز های K واقع خواهند بود.

گرچه این قضیه معروف است لیکن تاکنون درهیچیك از کتب هندسی‌اثبات ساده‌ای برای‌آن‌ارائه نشده‌است. بعداً دراین مقاله باروش مقدماتی‌آن را اثبات خواهیم‌کرد.

مااین قضیه رابه‌کمك تبدیل‌آفین‌ثابت می‌کنیم وطرزاثبات این‌قضیه به‌خوبی اهمیت و مزیت تبدیل آفین راکه بعد از آن گفتگو خواهیم‌کرد روشن می‌کند.

اینك برای سهولت عمل به بررسی حالت خاص قضیهٔ۲ می‌پردازیم:

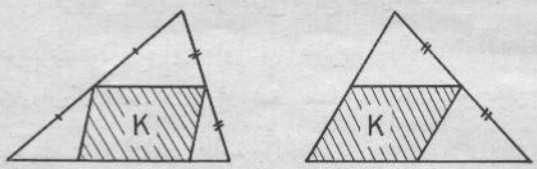
فرض می‌کنیم K متوازی‌اضلاع وT مثلث باسطح می‌نیمم باشدکه K را دربرگرفته است. طبق‌قضیهٔ۱ اوساط اضلاع T ، K را تلاقی می‌کنند.

خواننده ممکن است تصورکند که این فقط در صورتی ممکن است‌که یك یا دوضلع از K بر اضلاع T منطبق گردد، مطابق باشکلهای a و b از شکل II برای هریك از این حالات می‌نویسیم : $S(T)=2S(K)$ به خاطر داشته باشید که T مثلث با مساحت می‌نیمم است. از این بحث نتیجه زیر به‌دست می‌آید :

قضیهٔ ۲ ـ فرض می‌کنیم K یك متوازی‌الاضلاع وT مثلثی باشد که K را در برگرفته است.

پس‌خواهیم داشت : $S(T)\geq 2S(K)$

تساوی هنگامی برقرار است‌که فقط و فقط T دریکی از حالات خاص مطابق شکل II قرار گیرد.



شکل II

اکنون به‌پاسخ سؤالی‌که قبلامطرح‌شد می‌پردازیم.

قضیهٔ۳ـ فرض‌می‌کنیم T مثلث مفروض و R_0 مستطیل به‌سطح ماکسیمم محاط در T باشد . دراین صورت :

$S(R_0)=\frac{1}{2}S(T)$ بوده و R_0 درحالت خاص است‌که در آن یك ضلع آن برروی ضلع T منطبق بوده و اوساط دوضلع دیگر T رأسهای R_0 را تشکیل می‌دهند.

برهان : فرض می‌کنیم R مستطیلی باشدکه در T محاط است البته نه در وضعی که سابقاً مطرح کردیم . پس بنا به‌قضیه ۲ ، T مثلثی با سطح می‌نیمم شامل R نخواهد بود از اینرو هرگاه T^* مثلثی با سطح می‌نیمم باشد خواهیم داشت:

$$S(R)=\frac{1}{2}S(T^*)<\frac{1}{2}S(T)$$

ازسوی دیگر هرگاه R_0 یك‌مستطیل دروضعیت بالاباشدخواهیم

داشت:

$$S(R_0)=\frac{1}{2}S(T)$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که R_0 مستطیل بامساحت ماکسیمم است که شامل T می‌باشد.

(هرگاه T مثلث حادالزاویه باشد ازاین مستطیلها سه‌عدد وجود دارد واگر قائم‌الزاویه باشد دومستطیل ودرحالی که منفرجه‌الزاویه باشد فقط یك مستطیل ماکسیمم وجوددارد.)

تبصره: قضیهٔ ۳ برای نخستین بار در مقالهٔ یکی از نویسندگان به‌نام **لانژ** (L.H.Lange) درمجلهٔ معلم ریاضی چاپ آمریکا مطرح گردید و اخیراً نیز **بیرد** (M. T. Bird) برهان ساده‌ای برای آن ارائه داده‌است. قضیه ۳ نیز شامل نتیجه‌ای از قضیهٔ اول مقالهٔ **فولتون** (C. M. Fulton) و **اشتین** (S. K. Stein). دربارهٔ متوازی‌الاضلاعهای محاط در منحنیهای محدب مندرج درماهنامهٔ ریاضی آمریکا دفتر ۶۷ می‌باشد که درآن گفته شده است:

تقریباً بینهایت متوازی‌الاضلاع محاط در مثلث مفروض وجوددارد وازمیان این متوازی‌الاضلاعها تنهایك متوازی‌الاضلاع وجوددارد که مساحتش از نصف مساحت مثلث کوچکتر است.

طبیعی است که ازاین مطلب سؤالهای زیردرذهن خواننده خطور می‌کند:

اولا آیا متوازی‌الاضلاعها تنها شکل محدبی هستند که در این‌اوضاع واحوال صدق می‌کنند؟

ثانیاً هر شکل محدب K می‌تواند در چند مثلثی که مساحتشان کمتر ویا مساوی بادو برابر مساحت K است، قرار گیرد؟

ماپاسخ این سؤالها راپس‌از بحث تبدیل آفین خواهیم‌داد. این تبدیل امکان حل مسائل را به‌آسانی وبه‌نحو احسن فراهم می‌کند.

دربارهٔ قضیهٔ ۳، **رادزوکسی** (C. Radziszwski) ثابت کرد که هرناحیهٔ محدب K شامل مستطیلی است که مساحتش برابر با نصف مساحت آن است.

۳ـ تبدیل آفین

دراین‌بخش به خواص چند ازتبدیل آفین اشاره می‌شود.

تعریف تبدیل آفین: تبدیل نقطه‌ای به مختصات (x,y) از یك صفحه را به‌نقطه (x',y') درهمین صفحه تبدیل آفین گویند

مشروط برآنکه داشته باشیم:

$$x'=ax+by+c \quad و \quad y'=cx+dy+f$$

که درآن a و b و c ... و f اعداد حقیقی بوده و $ad-bc\neq 0$ می‌باشد. پیش‌ازآنکه خواص تبدیل آفین‌را بیان کنیم به‌ذکرمثالی مقدماتی می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم a و b دوعدد حقیقی مفروض باشند بطوری که $0<a<b$ ونیزفرض می‌کنیم P مجموعه‌ای اززوجهای (x,y) از اعداد حقیقی باشد. تابع μ را در نظر می‌گیریم بطوریکه با تبدیل نقطهٔ (x,y) به $(x',y')=(ax,by)$ که x و y در نامساوی زیرصدق کنند:

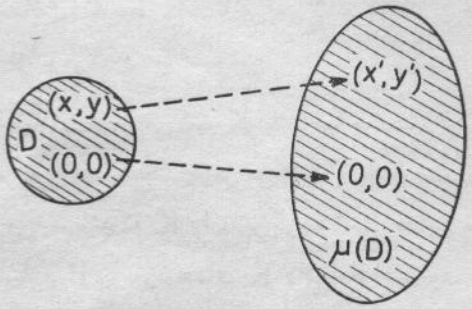
$$x^2+y^2\leq 1$$

ملاحظه خواهیم کردکه نقاط x' و y' مبدل این‌نقاط درنامساوی زیرصدق خواهند کرد:

$$(\frac{x'}{a})^2+(\frac{y'}{b})^2\leq 1$$

تابع μ موردبحث حالت خاص‌ازتبدیل آفین‌است ودرحقیقت‌مثال ساده‌ای ازیك تبدیل‌خطی می‌باشد.

معادلات $x'=ax$ و $y'=by$ مبین این مطلب است که نقاط (x',y') درمجموعهٔ P مفروض‌اند، ونقاط (x,y) درهمین مجموعه وجود دارند آنچنانکه تابع μ هر نقطهٔ (x,y) را به نقطهٔ (x',y') مبدل کند. تابع μ تابع یکبیك خوانده می‌شود. بویژه، ما ملاحظه می‌کنیم که هر نقطه ازناحیهٔ بیضی‌شکل درشکل III باناحیهٔ دایره شکل D رابطهٔ یکبیك داشته واین دو مبدل یکدیگرند.



شکل III

تابع μ ازناحیهٔ دایره شکل ناحیهٔ بیضی‌شکل‌را کاملاودقیقاً بدست می‌دهد (زیرا μ تابع پوششی‌است)

اکنون فرض می‌کنیم p و q و r اعداد حقیقی باشندومجموعهٔ:

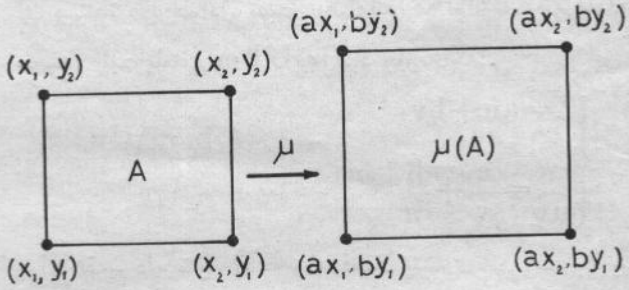
$$\{(x,y): px+qy+r=0\}$$

راکه خطی‌است مستقیم درنظر می گیریم پس‌تابع μ این مجموعه رابه مجموعهٔ:

$$\left\{(x',y'):\frac{p}{a}x'+\frac{q}{b}y'+r=0\right\}$$

مبدل می‌کند . بنابراین در تبدیل μ مبدل هر خط راست ، یك خط راست می‌باشد.

به آسانی ملاحظه می کنیم که تصویر قطعه خط قائم واصل بین‌نقاط (x_1, y_1) و (x_1,y_2) قطعه خطی است قائم که‌تصاویر نقاط (ax_1 , by_1) و (ax_1 , by_2) را به هم وصل می کند. به شکل IV نگاه کنید. متذکر می‌شویم که اندازهٔ طول این تصویر برابر است با حاصل ضرب $b|y_2-y_1|$ کـه در آن $|y_2-y_1|$ مساوی طـول قطعه خط اصلی است . بـه طـریق مشابه اندازه تصویرخط افقی برابراست‌باحاصل‌ضرب a در طول قطعه خط افقي اصلی است .



شکل IV

اکنون باردیگر اگر تصویر ناحیه دایره‌شکل را درتبدیل μ درنظر بگیریم ملاحظه خواهیم کرد که اگرمستطیل A درشکل IV درداخل ناحیهٔ دایره‌شکل D باشد مبدل $\mu(A)$ یك‌مستطیل درناحیهٔ بیضی‌شکل $\mu(D)$ خواهدبود.

به‌علاوه اگرمساحت A برابر α باشد پس مساحت مستطیل $\mu(A)$ برابراست باحاصل‌ضرب α در ab.

ازاینجا این‌نتیجه بدست می‌آیدکه: هرگاه $\Sigma\alpha_i$ مجموع مساحتهای‌مجموعه‌های‌متناهی‌ازچنین مستطیلهایی که‌درداخل‌ناحیهٔ دایره شکل D قرارگـرفته‌اند باشد، پس $(ab)\Sigma\alpha_i$ برابر با مجموع‌مساحتهای مستطیلهایی خواهد شد که درناحیهٔ بیضی‌شکل $\mu(D)$ قرار گرفته‌اند.

درنتیجه‌اگرتعدادی ازاین‌مستطیلها (دراندازه‌های‌مختلف) رادرD قراردهیم (این مستطیلهاطوری قرارگرفته‌اندکه‌هیچکدام درداخل دیگری نبوده ویکدیگررا قطع نمی‌کنند) ودراین‌حالت بدیهی‌است‌که مجموع مساحتهـای این مستطیلها یعنی $\Sigma\alpha_i$ در نامساوی زیرصدق می کنند:

$$\Sigma\alpha_i<4$$

ازآنجاکه عدد۴ برابراست بامساحت مربع به‌ضلع ۲ محاط در D نتیجه می‌شودکه مساحتهای مستطیلهای گنجانده شده‌در $\mu(D)$ درنامساوی زیرصادق می‌باشند:

$$(ab)\Sigma\alpha_i<(ab)(4)$$

اکنون گوییم‌که عدد۴ مقداری نیست‌که ازآن بتوانیم به عنوان حداکثر برای مجموعه‌ای ازهمهٔ اعداد ممکن $\Sigma\alpha_i$ استفاده کنیم این خصوصیت مخصوص عدد π است.

دنباله دارد

تقسیم دایره (دنباله از صفحهٔ ۱۶)

$$(x+1)^{p(p-1)}+(x+1)^{p(p-2)}+\ldots+(x+1)^p+1=0$$

تعداد جملات p می‌باشد وجملهٔ مستقل‌از x بعدازبسط مساویp خواهدشد ومجموع این‌شکل راخواهدگرفت:

$$xp^{(p-1)}+pX(x)$$

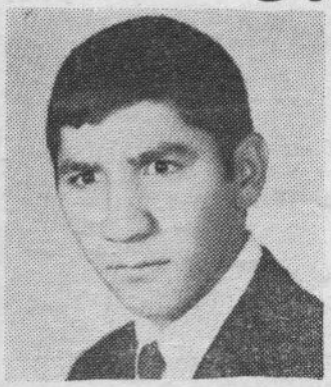
که $X(x)$ کثیرالجمله‌ای‌باضرایب‌صحیح باجملهٔ‌ثابت ۱می‌باشد .

پس‌حقیقتاً نشان داده‌ایم‌که چنین عبارتی همواره غیر قابل تحویل است، وبنابراین معادلهٔ(C) جدیدهم‌غیرقابل‌تحویل‌است.

درجهٔ این‌معادله $p(p-1)$ است، و از طرفی یك معادلهٔ غیرقابل تحویل فقط هنگامی‌قابل حل‌است‌که درجهٔ‌آن توانی از ۲ باشد وازاینرو فقط وقتی‌دایره به p^2 قسمت مساوی قابل‌تقسیم است‌که $p=2$ باشد، (pعدد اول است). بطوری‌که هم اکنون ملاحظه شد، همین‌مطلب برای تقسیم دایره به p^α $(\alpha<2)$نیز صحیح است.

دانش‌آموزان رتبهٔ اول و دوم ششم ریاضی‌دبیرستانهای

دزفول



محمد رضا نادر شهباز ←
از دبیرستان قطب
جمع نمرات کتبی: ۲۲۴/۱۶
معدل کل: ۱۹/۵

← غلامحسین رضوانی
از دبیرستان قطب
جمع نمرات‌کتبی: ۲۰۹/۶۶
معدل کل: ۱۸/۶۹

تقسیم دایره به قسمتهای متساوی

ترجمهٔ : جواد فیض

۱ـ مسئلهٔ تقسیم یك‌دایرهٔ مفروض به n قسمت متساوی از روزگار باستان مطرح بوده‌است وبرای مدت درازی امکان حل آن رابه‌ازای ۵و۳و$n=۲^h$، یاحاصلضرب دویاسه تاازاین‌اعداد می‌دانسته‌اند. **گؤس** در « رسالهٔ «حساب» خودنشان دادکه‌این تقسیم، به‌ازای هرعدد اول به‌صورت $p=۲^{۲^u}+۱$ ممکن‌است اما به‌ازای همهٔ اعداد اول دیگر، وتوانهایی ازآنها، این تقسیم غیرممکن می‌باشد، گؤس این‌سری اعدادرا توسعه‌داد.

اگر در $p=۲^{۲^u}+۱$ قرار می‌دادیم ۱و۰ $=u$ حاصل می‌شد ۵و۳ $=p$ که تقریباً ازقدیم معلوم بوده‌اند.

به‌ازای $u=۲$ می‌شود $p=۲^{۲^۲}+۱=۱۷$ ، که این حالت‌کاملا توسط گؤس بحث شده‌است.

به ازای $u=۳$ می‌شود $p=۲^{۲^۳}+۱=۲۵۷$ کـه عددی اول‌بوده وچند ضلعی‌منتظم ۲۵۷ ضلعی‌را می‌توان بنانمود بطور مشابه برای $u=۴$ می‌شود: $p=۲^{۲^۴}+۱=۶۵۵۳۷$ که باز عددی است اول ولی به ازای $u=۵$، $u=۶$، $u=۷$، $u=۸$، $u=۹$، $u=۱۱$، $u=۱۲$، $u=۱۵$، $u=۱۸$، $u=۲۳$، $u=۳۶$، $u=۳۸$، $u=۷۳$ هیچ عدد اولی بدست نمی‌آید.

البته‌اثبات اینکه‌اعداد بزرگ‌متناظر با ۷۳و..و۶و۵ $=u$ اعداد اول نیستند، استادی وخبرگی زیادی لازم‌دارد.

درمورد ۲۵۷ ضلعی منتظم شرطی‌که توسط **ریشلـو** در مجله‌ای ریاضی‌چاپ شدبیش ازصد صفحه ازمجله را اشغال‌کرد. پروفسور **هرمس** برای ۶۵۵۳۷ ضلعی‌منتظم ده‌سال از زندگی‌خود راصرف‌کرد.

۲ـ ممکن‌است مسئلهٔ تقسیم‌دایره به n قسمت متساوی رابه حالتی‌که n عدداول p یابه‌صورت توانی‌ازچنین عددی‌است‌منحصر نمائیم. برای این‌منظور اگر n عددغیراولی باشدکه uوvعوامل آن هستند، واین‌عوامل نسبت به‌هم‌اولند، می‌توان همواره اعداد صحیح، مثبت یامنفی aوb راپیداکرد بطوری‌که:

$$\begin{cases} ۱=au+bv \\ \dfrac{۱}{uv}=\dfrac{a}{v}+\dfrac{b}{u} \end{cases}$$

برای تقسیم دایره به $uv=n$ قسمت متساوی‌کافی است بدانیم چگونه دایره را به‌ترتیب به uوv قسمت متساوی می‌توان تقسیم کرد. بنابراین به‌ازای $n=۱۵$ داریم:

$$\frac{۱}{۱۵}=\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۵}$$

۳ـ همانطورکه به‌نظرخواهدآمد، تقسیم‌دایره‌به p قسمت متساوی (p عدداول است) فقط وقتی‌که p به‌شکل $p=۲^h+۱$ باشد ممکن‌است. بعداً نشان خواهیم‌دادکه p عدد اول‌خواهدبود فقط وقتی‌که $h=۲^u$ باشد. برای‌این‌کاراز **قضیهٔ‌فرما** استفاده خواهیم‌کرد. (اگر p عدداولی‌بوده و a عددصحیح‌غیرقابل تقسیم به p باشد، این‌اعداد در«هم‌نهشت» زیرصادقند:

$$a^{p-۱}\equiv+۱(\mathrm{mod}\cdot p)$$

لزوماً $(p-۱)$ کمترین توانی‌نیست‌که برای مقدارداده شدهٔ a دراین هم‌نهشت صادق‌است.

درصورتی‌که s کمترین توان‌باشد می‌توان نشان دادکه s مقسوم علیهی‌از $(p-۱)$ است.

علی‌الخصوص، اگر $s=p-۱$ باشد، می‌گـوئیم‌که a «ریشهٔ اصلی یااولیه» p است و ملاحظه می‌کنیم‌که برای هرعدد

اول p یك «ریشهٔ اصلی یا اولیه» وجود دارد.

پس به فرض آنکه p عدد اولی چنان باشد که:

$$(۱)\quad p=۲^h+۱$$

و s حداقل عدد صحیح صادق دراین رابطه:

$$(۲)\quad ۲^s\equiv+۱(\mathrm{mod}\cdot p)$$

ازرابطهٔ (۱) داریم $۲^h<p$، ازرابطهٔ (۲) $۲^s>p$ وبنابراین $s>h$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که h عددصحیح حداقل، وصادق درهم‌نهشت زیراست:

$$(۳)\quad ۲^h\equiv-۱(\mathrm{mod}\cdot p)$$

ازتقسیم روابط (۲) و (۳) داریم:

$$۲^{s-h}\equiv-۱(\mathrm{mod}\cdot p)$$

وبنابراین: $s-h\geqslant h$ و $s\geqslant ۲h$ (۴)

بامربع کردن رابطهٔ (۳) داریم

$$۲^{۲h}=۱(\mathrm{mod}\cdot p)$$

درمقایسهٔ بارابطهٔ (۲) وملاحظهٔ آنکه s نمای حداقل صادق در هم‌نهشتی بشکل زیر است داریم:

$$(۵)\quad ۲^x\equiv۱(\mathrm{mod}\cdot p)\Longrightarrow s\leqslant ۲h\Longrightarrow s=۲h$$

ملاحظه کرده‌ایم که s مقسوم علیهی از $(p-۱)=۲^h$ است. همین درمورد h نیزصحیح است، که ازاینرو توانی از ۲است. از این‌جهت اعداد اول به فرم $۲^{۲^u}+۱$ لزوماً به شکل $۲^h+۱$ هستند.

۴ـ بطریق دیگری هم ممکن است این نتیجه را بدست آورد. بفرض آنکه h قابل‌قسمت به‌عدد فردی باشد یعنی:

$$h=h'(۲n+۱)$$

بنا به اتحاد:

$$x^{۲n+۱}+۱=(x+۱)(x^{۲n}-x^{۲n-۱}+\cdots+x^۲-x+۱)$$

$p=۲^{h'(۲n+۱)}+۱$ به $۲^h+۱$ بخش‌پذیر بوده و عدد اولی نخواهد بود.

۵ـ حال به‌قضیهٔ اصلی‌خود می‌رسیم:

«اگر p عدد اولی‌باشد تقسیم دایره‌به p قسمت متساوی توسط خط‌کش وپرگار غیر ممکن است مگرآنکه p به شکل زیر باشد:

$$p=۲^h+۱=۲^{۲^u}+۱$$

اکنون درصفحهٔ z $(z=x+iy)$ دایره‌ای به‌شعاع واحد رسم می‌کنیم. تقسیم این‌دایره به n قسمت متساوی، در $z=۱$، همان حل‌معادلهٔ $z^n-۱=۰$ می‌باشد.

ریشهٔ $z=۱$ رااین‌معادله می‌پذیرد، که باتقسیم معادلهٔ اصلی به $(z-۱)$ ازآن صرفنظر می‌کنیم، چون معادل بااین است (بطور هندسی) که به‌نقطهٔ‌آغاز تقسیم توجه ننمائیم. بنابراین معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$z^{n-۱}+z^{n-۲}+\cdots+z+۱=۰$$

این معادله را باحرف اختصاری (C) نشان می‌دهیم.

بطوری‌که دربالا اشاره‌شد ممکن‌است توجه خود را به حالتهایی‌که nعدداول، یاتوانی‌از یك‌عدد اول‌است منحصرسازیم اول حالتی‌راکه $n=p$ است بررسی‌خواهیم نمود. مطلب اصلی اثبات این‌است‌که «معادلهٔ فوق غیرقابل تحویل» است.

واما معادلات غیرقابل تحویل فقط با جذر اعداد محدود، می‌توانند حل شوند، تقسیم دایره به p قسمت در صورتی‌که $p\neq۲^h+۱\neq۲^{۲^u}+۱$ باشد همواره غیرممکن است.

بنابراین علت‌اینکه «گوس» برای‌چنین موقعیت استثنائی اعداد اول‌را بکاربرد روشن‌شد.

۶ـ دراینجا، لمی‌راکه به «لم‌گوس» معروف‌است معرفی می‌کنیم. اگر:

$$F(z)=z^m+Az^{m-۱}+Bz^{m-۲}+\cdots+Lz+M$$

باشد (AوBو... اعدادصحیح هستند) و $F(z)$ بتواند به‌دوعامل گویای $f(z)$و$\varphi(z)$ تجزیه شودپس:

$$F(z)=f(z)\cdot\varphi(z)=(z^{m'}+\alpha_۱z^{m'-۱}+\alpha_۲z^{m'-۲}+\cdots)\times(z^{m''}+\beta_۱z^{m''-۱}+\cdots)$$

که αوβها نیزاعداد صحیح هستند. به‌عبارت دیگر:

«اگرعبارت صحیحی بتواند به‌دوعامل گویا تجزیه شود این‌عوامل می‌بایست عبارات صحیح‌باشند». αوβ راکسری فرض می‌کنیم. درهریك ازعوامل ودر همهٔ ضرایب کوچکترین مضرب مشترك $b_۰$و$\alpha_۰$ رابدست می‌آوریم. وبالاخره طرفین‌معادله رادر

$a_0 b_0$ ضرب می‌کنیم، معادله چنین شکلی به‌خود می‌گیرد:

$$a_0 b_0 F(z) = f_1(z)\varphi_1(z) = (a_0 z^{m'} + a_1 z^{m'-1} + \cdots)(b_0 z^{m''} + b_1 z^{m''-1} + \cdots)$$

a_0 و b_0 راغیرواحد فرض می‌کنیم، و q رامقسوم علیه‌اول $a_0 b_0$ درنظر می‌گیریم، به‌علاوه به‌فرض a_i اولین‌ضریب $f_1(z)$ و b_k اولین‌ضریب $\varphi_1(z)$ باشند که‌به q قابل‌قسمت نیستند. حاصل‌ضرب $f_1(z)\varphi_1(z)$ رابسط داده وضریب جملهٔ $z^{m'm''-i-k}$ را در نظرمی‌گیریم. خواهیم داشت:

$$a_i b_k + a_{i-1} b_{k+1} + a_{i-2} b_{k+2} + \cdots + a_{i+1} b_{k-1} + a_{i+2} b_{k-2} + \cdots$$

برطبق فرض، تمام‌جملات بعداز جملهٔ اول به q بخش پذیرند، اما اولی چنین‌نیست یعنی‌به q قابل‌قسمت نیست.

اکنون ضریب $z^{m'+m''-i-k}$ اولین قسمتی است‌که به $a_0 b_0$ یعنی‌به q قابل‌قسمت است. ازاینرو اگراین اتحادصحیح باشد، برای یك‌ضریب غیرممکن است‌که به‌q بخش‌پذیر نباشد.

پس‌حداقل ضرایب یکی‌ازکثیرالجمله‌های فوق به q قابل قسمت‌اند، ازاینرو دیگری امر محال است چون دیده‌ایم‌که تمام ضرایب نسبت به‌همدیگراول هستند.

ازاینرو نمی‌توانیم a_0 و b_0 راغیراز ۱فرض‌کنیم وبنابراین α و β صحیح‌هستند.

۷ـ برای نشان‌دادن اینکه معادلهٔ (C) غیرقابل تحویل است‌کافی‌است با«لم گوس» نشان‌دهیم‌که طرف‌اول نمی‌تواند به‌دو عامل باضرایب صحیح تجزیه‌شود. در زیر روش ساده‌ای راکه مربوط به‌**ایسنشتین** است بکارخواهیم برد.

باجانشین‌سازی $z = x+1$ بدست می‌آوریم:

$$f(z) = \frac{z^p - 1}{z-1} = \frac{(x+1)^p - 1}{x} =$$

$$= x^{p-1} + px^{p-2} + \frac{p(p-1)}{1\times 2}x^{p-3} + \cdots + \frac{p(p+1)}{1\times 2}x + p = 0$$

همهٔ‌ضرایب قسمت بسط داده‌شده بجز اولی به p قابل قسمت‌اند. ضریب‌آخرهم همواره خود p است.

بافرض‌هائی‌که درمورد عدداول p داشتیم، یك‌عبارت ازاین دسته همواره غیرقابل تحویل است. اگراین حالت نبود خواهیم داشت:

$$f(x+1) = (x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m)(x^{m'} + b_1 x^{m'-1} + \cdots + b_{m'-1}x + b_{m'})$$

که a و bها اعداد صحیح هستند.

چون جملهٔ درجهٔ صفر در عبارت فوق p است داریم: $a_m b_{m'} = p$، چون p عدداول‌است‌پس‌یکی‌ازعوامل a_m یا $b_{m'}$ می‌بایست واحدباشد یعنی:

$$a_m = \pm p \quad \text{و} \quad b_{m'} = \pm 1$$

بامعادل قراردادن ضرایب x داریم:

$$\frac{p(p-1)}{2} = a_{m-1}b_{m'} + a_m b_{m'-1}$$

طرف‌اول وجملهٔ دوم‌طرف دوم‌به‌p قابل قسمت‌اند، $a_{m-1}b_{m'}$ نیزمی‌بایست چنین باشد چون $b_{m'} = \pm 1$ است‌پس a_{m-1} به p بخش‌پذیر می‌باشد. بامعادل قرار دادن ضرایب جملات x^2 می‌توان نشان‌داد a_{m-2} به‌p قابل‌قسمت است، امااین‌موردبرای ضرایب x^m که مساوی یك‌است نمی‌تواند صحیح‌باشد.

به‌فرض تساوی غیرممکن بوده وازاینرو معادلهٔ (C) وقتی که p اول‌است غیرقابل تحویل می‌باشد.

۸ـ اکنون حالتی‌راکه n توانی ازیك عدداول استمثلا $n = p^\alpha$ درنظر می‌گیریم. منظور این‌است‌که نشان دهیم وقتی $p > 2$ تقسیم دایره‌به p^2 قسمت مساوی غیر ممکن است. پس مسئله درحالت‌کلی حل خواهد شد، چون تقسیم دایره به p^α قسمت متساوی بطورآشکار شامل‌تقسیم‌آن‌به p^2 قسمت متساوی‌هم هست.

اکنون معادلهٔ (C) زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\frac{z^{p^2} - 1}{z-1} = 0$$

معادلهٔ $z^p - 1 = 0$ رابه‌این صورت تحویل‌می‌کنیم:

$$\frac{z^p - 1}{z-1} = 0 \quad \text{و} \quad f(z) = \frac{z^{p^2} - 1}{z^p - 1}$$

این‌معادلهٔ (C) است ومی‌توان‌آنرا بدین‌صورت نوشت:

$$z^{p(p-1)} + z^{p(p-2)} + \cdots + z^p + 1 = 0$$

باجانشین‌سازی $z = x+1$ خواهیم‌داشت:

دنباله در صفحهٔ ۱۳

عددنویسی در مبناهای منفی و کسری

ترجمهٔ :قوام نحوی

بطور مقدمه عددنویسی در مبنای اعداد صحیح و مثبت را یادآوری‌می کنیم: هر گاه عدد $(۳۲۴)_۵$ را داشته باشیم مقدار یا ارزش آن در مبنای ۱۰ می‌شود:

$$(۳۲۴)_۵ = ۳\times۵^۲+۲\times۵+۴ = ۷۵+ \\ +۱۰+۴ = ۸۹$$

برعکس اگر بخواهیم عدد ۸۹ (به مبنای ۱۰) را به مبنای ۵ بنویسیم به‌طریق تقسیمات متوالی عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۸۹ & ۵ \\ ۴ & ۱۷ \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r|l} ۱۷ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{array} \Longrightarrow ۸۹ = (۳۲۴)_۵$$

برای عدد ممیزدار هم طریقهٔ عمل مانند طریقهٔ بالا است.

مثلا داریم

$$(۳۲۴/۱۲)_۵ = ۳\times۵^۲+۲\times۵+۴+۱\times۵^{-۱}+ \\ +۲\times۵^{-۲} = ۸۹+\frac{۱}{۵}+\frac{۲}{۲۵} = ۸۹\frac{۷}{۲۵}$$

I- مبنای منفی- هر گاه مبنای عددنویسی اعداد مثلا عدد منفی (-۷) باشد در اینجا تعداد رقمهای بکار برده شده ۷ می‌باشد که عبارتنداز $(۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶)$ (مانند مبنای ۷) هر گاه عدد $(۳۲۴)_{(-۷)}$ را داشته باشد ارزش آن در مبنای ۱۰ می‌شود :

$$(۳۲۴)_{(-۷)} = ۳\times(-۷)^۲+۲\times(-۷)+ \\ +۴ = ۱۴۷-۱۴+۴ = (۱۳۷)_{۱۰}$$

وبه همین‌ترتیب اگر عدد ممیزدار باشد داریم:

$$(۳۲۴/۱۵)_{(-۷)} = ۳\times(-۷)^۲+۲\times(-۷)+ \\ +۴\times(-۷)+۱\times(-۷)^{-۱}+۵\times(-۷)^{-۲} = \\ = ۱۳۷-\frac{۱}{۷}+\frac{۵}{۴۹} = \left(۱۳۶\frac{۴۷}{۴۹}\right)_{۱۰}$$

بطور کلی هر گاه مبنای عددنویسی $(-\beta)$ باشد تعداد ارقام بکار برده شده β بود و عبارتنداز $(۱,۲,۳,۴,\ldots\beta-۱)$

عددنویسی در مبنای (-۷) به‌صورت زیر است:

$$\left\{\begin{array}{l} ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶ \\ ۱۶۰,۱۶۱,۱۶۲,۱۶۳,۱۶۴,۱۶۵,۱۶۶ \\ ۱۵۰,۱۵۱,۱۵۲,۱۵۳,۱۵۴,۱۵۵,۱۵۶ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ۲۶۰,۲۶۱,۲۶۲,۲۶۳,۲۶۴,۲۶۵,۲۶۶ \\ ۲۵۰,۲۵۱,۲۵۲,۲۵۳,۲۵۴,۲۵۵,۲۵۶ \end{array}\right.$$

مثلا در سطر ۲ داریم:

$$(۱۶۰)_{(-۷)} = \\ = ۱\times(-۷)^۲+۶(-۷) = ۴۹-۴۲ = ۷$$

ودر سطر ۳ داریم

$$(۱۵۰)_{(-۷)} = \\ = ۱\times(-۷)^۲+۵\times(-۷) = ۴۹-۳۵ = (۱۴)_{۱۰}$$

و ارزش اعداد سطر آخر به مبنای ۱۰ می‌شود:

۶۳,۶۴,۶۵,۶۶,۶۷,۶۸,۶۹

II- مبنای کسری- هر گاه‌مبنای‌عددنویسی مثلا کسر $\frac{۱}{۵}$ باشد، تعداد رقمهای لازم۵ است که عبارتنداز: $(۰,۱,۲,۳,۴)$ (مانند مبنای ۵) . اگرعدد $(۳۴۲)_{\frac{۱}{۵}}$ داداشته‌باشیم ارزش آن‌در مبنای ۱۰ می‌شود:

$$(۳۴۲)_{\frac{۱}{۵}} = ۳\times\left(\frac{۱}{۵}\right)^۲+۴\times\left(\frac{۱}{۵}\right)+۲ = \\ = ۳\times\frac{۱}{۲۵}+\frac{۴}{۵}+۲ = ۲\frac{۲۳}{۲۵}$$

در صورتی‌که عدد ممیزدار باشد نیز به‌صورت بالا عمل می‌شود مثلا داریم:

$$(۳۴۲/۱۳)_{\frac{۱}{۵}} = ۳\times(\frac{۱}{۵})^{۲}+۴(\frac{۱}{۵})+۲+$$

$$+۱\times(\frac{۱}{۵})^{-۱}+۳\times(\frac{۱}{۵})^{-۲}=\frac{۳}{۲۵}+\frac{۴}{۵}+۲+۵+$$

$$+۷۵=(۸۲\frac{۳۳}{۲۵})_{۱۰}$$

پیدااست که ارزش اعداد طرف راست ممیز بیش از اعداد طرف چپ ممیز است.

می‌توانیم عددنویسی درمبنای $\frac{۱}{۵}$ را به‌صورت زیر نمایش دهیم:

۰	۱	۲	۳	۴
۰/۱	۱/۱	۲/۱	۳/۱	۴/۱
۰/۲	۱/۲	۲/۲	۳/۲	۴/۲
۰/۳	۱/۳	۲/۳	۳/۳	۴/۳
۰/۴	۱/۴	۲/۴	۳/۴	۴/۴

مثلا در سطر دوم داریم:

$$(۰/۱)_{\frac{۱}{۵}} = ۱\times(\frac{۱}{۵})^{-۱}=۵$$

$$(۱/۱)_{\frac{۱}{۵}} = ۱+۵=۶ \qquad ۲/۱=۲+۵=۷$$

در سطر سوم داریم:

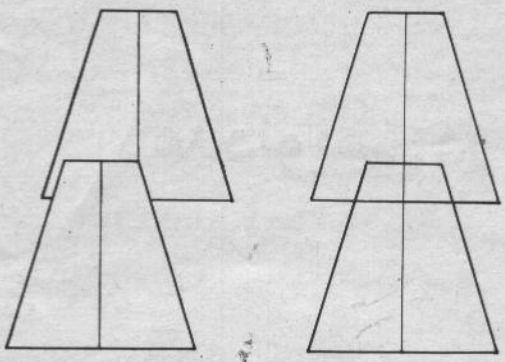
$$(۰/۲)_{\frac{۱}{۵}} = ۲\times(\frac{۱}{۵})^{-۲}=۲\times۵=۱۰$$

$$۱/۲=۱+۱۰=۱۱$$

وارزش اعداد سطر آخر می‌شود: ۲۴,۲۳,۲۲,۲۱ و ۲۰ و بعداز آن $(۰/۰۱)_{\frac{۱}{۵}} = ۲۵$ می‌باشد. به‌همین ترتیب می‌توانیم مبناهایی کسری ومنفی مانند $(-\frac{۱}{۵})$ درنظر بگیریم ویامبنای عدد گنگ مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}+۲$، وحتی می‌توان مبنای اعداد را اعداد مختلط مثلا $(۲+۳i)$ اختیار کرد که مبناهای جالبی خواهد بود.

وسایل... (دنباله از صفحهٔ ۲۰)

سفید بزرگ که در وسط شیاری تیره‌دارند می‌سازند این صفحه‌ها



منطبق غیرمنطبق

در سکوی دید به‌فاصله‌ای معین ازیکدیگر نصب می‌گردند.

درمحیطی که اشیای روشن زیادی اطراف را فراگرفته‌اند صفحه‌های قرمز را باشیار سفید در وسط آنها انتخاب می‌کنیم. در بیشتر نقاط همانطور که صفحات سفید شیار سیاه دارند صفحات قرمز نیز دارند ودر شب هرگاه آنها برهم منطبق باشند، یعنی اگر نشانه روی درست باشد، در این صورت نور آنها روی یکدیگر ودر یك صفحه شاقولی مشاهده خواهند شد.

(نورها معمولا سفیدند، لیکن وقتی‌دراطراف نورهای‌سفید زیادی موجود باشند از چراغهای قرمز یا زرد استفاده می‌کنند)

تمرینات: ۱ـ چند چیزرا نام ببرید که تشکیل یك‌نشانه رو را بدهند.

۲ـ این چیزها در چه حالت باشند تا نشانه رفته باشیم.

۳ـ چگونه به‌کمك صفحه‌ای که روی آن دو سوزن فرو باشد نشانه‌رو ساخته می‌شود.

۴ـ چه وسائل مهندسی را که براساس نشانه روی ساخته شده‌اند می‌شناسید؟

۵ـ مدلی از نشانه روی با دو صفحهٔ شیار دار بسازیدو طرز استفادهٔ ازآنرا شرح دهید.

دنباله دارد

دانش‌آموزان رتبهٔ اول امتحانهای نهایی

استان اصفهان

حمید بصیرکازرونی

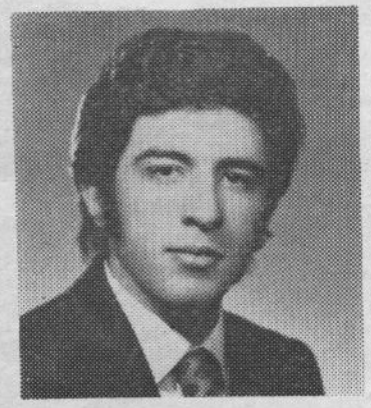
ششم ریاضی

دبیرستان شمارهٔ ۱

گروه فرهنگی حکیم سنائی

جمع نمرات کتبی: ۲۲۹/۷۵

معدل کل: ۱۹/۴۳



شهریار دبیری

ششم طبیعی

دبیرستان شمارهٔ ۱

گروه فرهنگی حکیم سنائی

جمع نمرات کتبی: ۱۷۲/۴۱

معدل کل: ۱۹/۶۲

فرستندهٔ خبر : کتابفروشی امید اصفهان نمایندگی فروش یکان

وسایل سادهٔ مهندسی

ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری

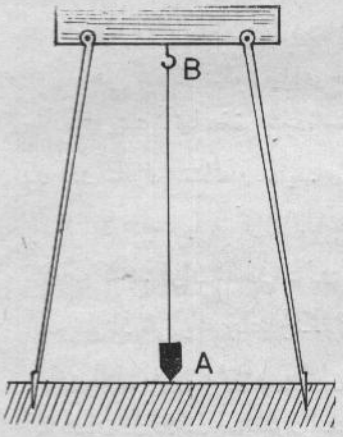
در این مقاله دو هدف اساسی دنبال می گردد:

۱) جلب توجه دانش‌آموزان به چند پرسش مربوط به‌اندازگیری در زمینه‌های ترسیم، نقشه ورسم‌فنی وهمچنین بوجود آوردن رابطه‌ای بین ریاضیات وسایر علوم.

۲) معطوف ساختن‌فکر دانش‌آموزان بموارد استفاده‌های متنوع مفاهیم ریاضی در زندگی وعمل.

۱ـ خط‌شاقولی (قائم)،صفحهٔ قائم، خط‌افقی، صفحهٔ‌افقی.

هر گاه وزنهٔ A را با نخ AB آویزان کنیم، وسیله‌ای بدست می‌آوریم که آن‌را شاقول و امتداد AB را شاقولی یا قائم نامند.



هر گاه نخ را در این حالت پاره کنیم وزنه‌درامتداد شاقولی (قائم)سقوط خواهد کرد .

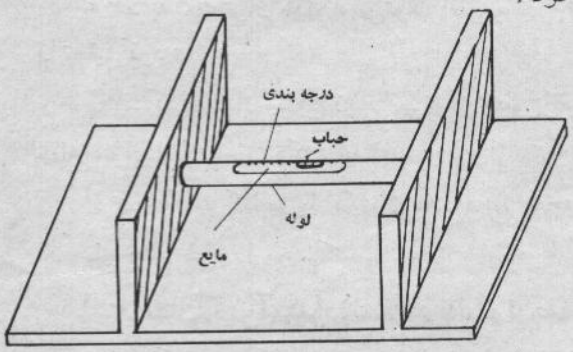
ارتفاع‌درخت، ساختمان، کوه وتپه وهمچنین عمق چاه‌ها. دریاها ، رودخانه‌ها ، همهٔ اینها طول قطعه‌های شاقولی هستند . ارتفاع هواپیماها از سطح زمین نیز توسط خط قائم اندازه گرفته می‌شود . خط شاقولی نقش بسیار مهمی در عمل و علوم داراست.

تمرین: ۱ـ یك‌شاقول بسازید. (برای‌این‌منظور می‌توانید از نخ ابریشمی نازك وبه‌جای وزنه ازکرهٔ کوچك استفاده کنید).

۲ـ خط فصل مشترك دو دیوار را در نظر گرفته وتحقیق کنید که آیا این خط قائم است؟

سطح آب در حالت سکون یك استخر بزرگ قسمتی از سطح‌افق را به‌ما نشان می‌دهد. خط دلخواه AB در صفحهٔ‌افقی (سطح‌افقی) را می‌توان یك خط افقی دانست. صفحه وخط افقی کاربردهای زیادی در عمل دارند . سطح کف اطاق و همچنین شاسی وسائل نقلیه نیز افقی ساخته می‌شوند.

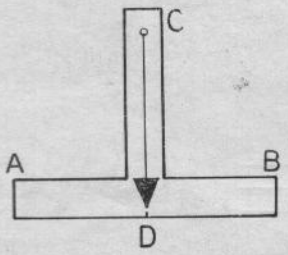
افقی بودن‌خط یا صفحه رامی‌توان به‌کمك **تراز** سنجید. قسمت عمدهٔ ساختمان تراز، لوله‌ای است پراز مایع، دراین‌مایع حبابی از هوا شناور است ، این حباب سبکتر از مایع است و بنابراین باکج‌کردن تراز می‌خواهد بلندترین نقطهٔ تراز (مایع لوله) را اشغال کند (به علت سبکی). این پدیده کلی بوده ودر موقع جوشیدن آب و بالا رفتن بخار آب نیز می‌توان آن را مشاهده کرد .



برای تعیین افقی بودن سطح مفروضی تراز را روی آن قرار می‌دهیم و این عمل را برای دو امتداد عمود بر هم روی سطح مزبور انجام می‌دهیم شرط افقی بودن سطح آن است که در هر دو حالت حباب در وسط لوله تراز بایستد. در صورت افقی بودن‌سطح کلیهٔ خطوط واقع روی آن نیز افقی‌خواهندبود.

یك تیکه نی یا چوب‌کبریت را در آب می‌اندازیم . هر یك از این دو (نی یا چوب کبریت) نمایشگر یك **خط افقی** می‌باشند. به‌کمك شاقول می‌توان تحقیق کرد که این تیکه چوبها با امتداد شاقولی زاویهٔ ۹۰° می‌سازند.

تراز شاقولی (شکل روبرو) براساس این خاصیت خط افقی ساخته شده است. این وسیله از دو خطکش تشکیل شده که بطور قائم به‌هم محکم شده‌اند، بطوری که CD از وسط خطکش AB گذشته و بر آن قائم است و در نقطهٔ D به آن محکم شده است. هرگاه نخ شاقول روی خطکش CD بیفتد و وزنهٔ شاقول در نقطهٔ D قرار گیرد، در این صورت AB با خط شاقولی زاویهٔ قائمه می‌سازد. یعنی AB خطی است افقی. به‌منظور تعیین افقی بودن صفحه، مانند حالتی که با تراز آبی انجام می‌شد تراز شاقولی را به‌ترتیب روی دو خط عمود برهم قرار داده وافقی بودن آنها را می‌سنجیم تا افقی بودن صفحه از روی آن نتیجه شود.



توضیح: تراز شاقولی در بنائی به شکلهای مختلف ساخته می‌شود. و به جای خطکش از شمش (تیر چوبی چهارگوش‌بلند) استفاده می‌کنند (این وسیلهٔ بنائی خیلی قدیمی است و در بیش‌از ۲۰۰۰ سال پیش از آن استفاده می‌کرده‌اند).

تمرینات: ۱ـ به‌کمك یك شاقول چگونه می‌توان روی سطح‌تخته (دیوار)خطی افقی رسم کرد؟

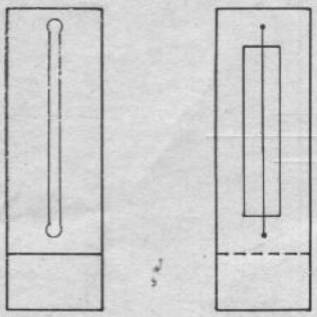
۲ـ به‌کمك تراز چگونه می‌توان افقی بودن سطح جاده را تحقیق کرد؟

۳ـ کدام‌یك از سطوح زیررا می‌توان سطوح‌افقی دانست سطح دیوار اطاق، سقف وکف اطاق؟

۴ـ به‌کمك کتابها یا انگشتان دست وضع صفحه‌ای افقی در سطح چشم خود را مجسم‌کنید.

۲ـ نشان‌رفتن امتداد (لنگهٔ در به‌عنوان صفحهٔ قائم)

فرض‌کنیم چشم شما (درست وسط مردمك) در نقطهٔ O و مرکز لیوان در نقطهٔ B (از تخته) قرار گرفته باشد. هرگاه شعاع‌نوری‌ازچشم‌شما (نقطهٔ O) واز نقطهٔ B بگذرد آن‌را شعاع دیدگویند. شعاع نورانی تعیین کنندهٔ امتداد دید شما تا شیشهٔ مورد تماشا می‌باشد. برای اینکه شعاع دید را روی جسم با نقطهٔ معینی بیندازیم، وسیله‌ای لازم‌است. این وسیله یك خط‌کش مسی از ۲۵cm تا ۵۰cm می‌باشد. در یك انتهای آن که مقابل چشم قرارمی‌گیرد، صفحه‌ای فلزی دارای شکاف باریك (دیوپترچشمی) قرارگرفته و در انتهای دیگر که مقابل جسم قرار می‌گیرد، صفحه‌ای با شکاف گشاد که از آن رشته‌ای نخ باریك عبورداده شده است قراردارد (دیوپترشیئی). دستگاه‌طوری درست شده است که وقتی خطکش بطور افقی قرار گرفته باشد شکاف باریك‌ورشتهٔ نخ بطور قائم‌قرارمی‌گیرند. از دوخط قائم فقط یك صفحهٔ قائم می‌تواند عبور کند، واین‌صفحه جهت‌داده‌شده رامعین می‌کند.



هرگاه شماشعاع دیدخود را روی‌درختی قائم بیندازیدبطوری‌که بنظر برسد رشتهٔ نخ تنه درخت را از بالا به‌پائین نصف کرده‌است، در این صورت می‌توان گفت‌که تنهٔ‌درخت‌دریك‌صفحهٔ قائم(متشکل از شکاف باریك ورشتهٔ نخ) قرارگرفته است.

می‌توان نشانه روی را توسط دو سوزن یا سنجاق که بر روی صفحه‌ای نصب شده‌باشند انجام داد. این‌دو سوزن باید بطور قائم در روی صفحه محکم‌شده باشند.

همچنین می‌توان نشانه روی را توسط دو ستون از یك ساختمان، دو برج یا دو درخت که جدا از هم قرار گرفته‌اند انجام داد. (نیز می‌توان نشانه روی را به کمك دو شاقول که به دو شاخه یا دو پایه آویزان شده‌اند انجام داد).

هر گاه دو شاقول برای چشم شما بر هم منطبق گردند و ستاره‌ای پشت آنها مخفی شود، ستارهٔ مزبور را توسط این نشانه رو (دو شاقول) نشانه رفته‌اید.

دو دوست با هم قرارگذاشتند در کنار ساحل همدیگر را ملاقات کنند. قرار شد دوست دوم در ساحل منتظر باشد ودوست اول پس از طی یك جادهٔ جنگلی به ساحل ومحل ملاقات برود. نشانی محل ملاقات‌را دومی‌به‌اولی‌چنین گفت: «در راه به‌مرغزاری که درآن دو درخت مستقیم وبلندی قرار دارند می‌رسی. هرگاه در جهت آنها طوری حرکت کنی که یکی از درختها همواره دیگری را از نظر تو پنهان کند در این‌صورت به محلی که من منتظرت هستم خواهی‌رسید».

نشانه‌رونده مورد استعمال فراوان دارد. مثلا ناخداهای کشتی‌ها از این وسیله‌در دریا، رودخانه، کانالها ودر نزدیکی سواحل دریایی استفاده می‌کنند. در بین وسائلی که به‌کمك آنها ناخداها مسیرهای‌بی‌خطر راپیدامی‌کنندعلائم مختلفی موجوداست که در ساحل یا در آب نصب می‌گردند (علائم شناور) بعضی از از این علائم در حقیقت یك‌وسیلهٔ نشانه روی هستند.

علائم نشانه روی متفاوتند اغلب نشانه روها را از دوصفحه

دنباله‌در صفحهٔ ۱۸

با ریاضیات آشتی کنید

(اعجوبهٔ ریاضیات شوید)

تألیف: A.BULLAS استاد آموزش ریاضی در فرانسه

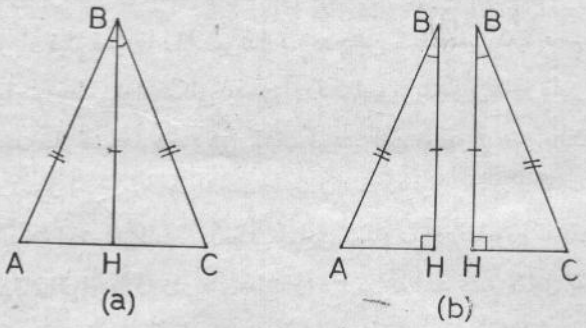
ترجمهٔ: ع. مصحفی

بخش یازدهم ـ مسئلهٔ هندسه

بالاخره به‌بخشی از کتاب رسیدیم که بابی‌صبری درانتظار آن بودید . این را می‌دانم که در طول مطالعهٔ بخشهای گذشته: «یادگرفتن‌ازطریق‌قوهٔ‌تصور، تحلیل‌یك شکل، تهیهٔ فیلم قضیه‌ها»، همواره با خود زمزمه داشته‌اید که: همهٔ‌اینها به‌جای خودخوب، اما کو آن روشی که بر اساس آن بتوانیم مسائل هندسی را به سادگی حل کنیم. اکنون به شما روشی را ارائه می‌دهم که با بکار بستن آن به‌سادگی بتوانید آنچه را بـدست آورید که در سابق برای نیل به آن بایستی کوششهای توان‌فرسا و گاهی بی‌ثمر را متحمل شده باشید . اما قبلا نکته‌ای مهم را یادآوری می‌کنم:

بی شك‌برخی از خوانندگان این کتاب در ریاضیات به اندازهٔ‌کافی یا کاملا قوی می‌باشند. اینان این کتاب را از روی کنجکاوی خریده‌اند وچه بسا به هنگام خواندن توصیه‌های من با نیشخند اظهار دارنـد که : «بـرای حل مسائل که احتیاجی به‌این چیزها نیست». به‌اینان می‌گویم که: «اگر در ریاضیات قوی هستید می‌توانید خود را قویتر سازید، وانگهی می‌توانید مسائلی را به‌آسانی حل کنید که قبلا برای حل آنها جانتان به لب می‌آمده است . انسان در هر سطحی از معلومات که باشد بازهم نیاز به‌یادگرفتن دارد. در این‌باره در بخش دوم به‌تفصیل وبا دلیل بحث کرده‌ام».

برای حل مسئله تکیه به شکلی داشته باشید که فرض را نشان می‌دهد. مثلا برای اثبات اینکه در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویهٔ رأس بر ارتفاع نظیر قاعده منطبق است، شکل مـربوط را مـی‌کشید (شکـل a) و آن را وارسی مـی‌کنید تا از روی آن دلایل مربوط به حل مسئله را بدست آورید. در این شکل به جستجوی تصاویری از فیلم قضیه‌ها می‌پردازید تـا



در نتیجهٔ آن به آنچه که می‌خـواهید نائل آیید . شکل b را نگاه‌کنید، آیا تصویری این چنین در فیلم قضیه‌ها وجود ندارد؟ اگر دو مثلث در دو ضلع وزاویهٔ بین آنها نظیر به‌نظیر متساوی باشند با هم برابرند . شکل a نیز این تصویر را در بر دارد ، آیا در آن ضلعهای نظیر به‌نظیر متساوی وزاویه‌های متساوی بین آنها را نمی‌بینید؟ چشمهای خود را بهتر بازکنید و به‌نشانه‌های روی ضلعها یا زاویه‌های نظیرتوجه داشته باشید. یك نشانه روی BH که دردومثلث مشترك‌است، دونشانه روی هریك ازضلعهای BA و BC که باهم برابرند وکمانهای‌کوچکی روی دو زاویهٔ متساوی‌که توسط نیمساززاویهٔ B پدید آمده‌است. اما بین شکل مسئله وشکل فیلم قضیه‌ها اختلاف‌کوچکی وجود دارد، در شکل مسئله دو مثلث به هم چسبیده‌انـد، در صورتی که در شکل فیلم قضیه‌ها ازهم جدا هستند . در این مورد نکته‌ای مربوط به فیلم قضیه‌ها راکه گفته‌ام باز یادآوری می‌کنم:

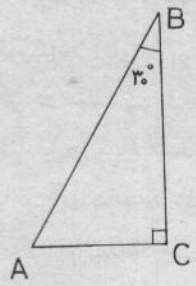
«برای‌آنکه حالتهای اتفاقی شما راگیج نکند عادت‌کنید

که شکلها رادر وضعیتهای مختلف درنظر بگیرید» وتوصیه‌می کنم که دفترچهٔ ویژه‌ای‌تهیه کنید ودرآن وضعیتهای مختلف شکلها را رسم کنید. درچنین صورتی به‌سادگی در می‌یابید که شکل مسئلهٔ مورد نظردرحقیقت همان شکل حالت دوم تساوی‌دومثلث است که در فیلم قضیه‌های شما مضبوط است. دو مثلث ABH وHBC متساویند ودر نتیجه دوزاویهٔ به‌رأس H از دومثلث باهم‌برابرند، اما ایـن دو زاویه مجانبند و مکمل یکدیگرند. پس هر کـدام قائمه‌اند، یعنی BH بر AC عمود است.

خلاصه : برای حل این مسئلهٔ ساده ــ که در حقیقت قضیه‌ای ازکتاب درسی هندسه است ــ مراحل زیر راگذراندیم:

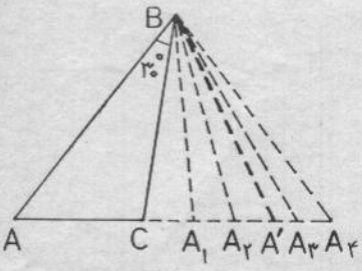
تمرکزحواس(بررسی دقیق‌شکل)، حافظه (شناسائی‌شکل نظیرشکل‌مسئله‌درفیلم‌قضیه‌ها)، استدلال که مارا به‌مقصودرهبری کرد.

در تعداد زیادی ازمسائل، شکلی که برطبق مفروضات رسم می‌شود برای حل مسئله کفایت نمی‌کند زیرا این شکل تصویری نظیر از فیلم قضیه‌ها را دربرندارد. درچنین مسئله‌هایی که‌با رسم یك‌یاچندخط‌می‌توان‌شکلی بدست‌آوردکه‌تصویریاتصویرهای نظیر آن در فیلم قضیه‌ها به‌سادگی کشف گردد. این موضوع هنر بارز قوهٔ تصور است‌وبه‌خاطراهمیت‌خاص‌آن‌است که قبلا بخشی‌ازکتاب را به‌آن اختصاص‌دادم. دربخش‌نهم‌این مسئله راآورده بودم که در مثلث‌قائم‌الزاویه‌اگرزاویه‌ای‌به‌اندازهٔ ۳۰ درجه‌باشد ضلع مقابل به آن‌نصف‌وتر است.شکل مربوط را رسم می‌کنیم؛ مثلث ABC در



زاویهٔ C قائمه است واندازهٔ زاویهٔ B ازآن ۳۰° می‌باشد. حال باید ثابت‌کنیم که ضلع AC نصف وتر AB است. شکل‌را دقیقاً بررسی‌می کنید اما در آن هیچ تصویری از فیلم قضیه‌ها مشاهده‌نمی‌کنید ودر یافتن استدلال معطل می‌مانید.

در اینجااست که باید این اصل مهم را به‌خاطر آورید: هیچ شکلی‌را نباید تنها دانست، بلکه بایدآن‌را جزئی ازبینهایت شکل دیگر در نظـر گرفت. مثلث ABC جـزئی از بینهایت مثلث‌دیگر است: ABA_1 ، ABA_2 ، ABA_3، وغیره. در بین این مثلثها یك یا چند عدد یافت می‌شودکه در آنها تصویری از فیلم قضیه‌ها مشاهده می‌شود. اما این شکل با شکلهای خاص را چگونه باید پیدا کرد؟ هرگاه جمله‌ای راکه در طول بخش دهم مرتباً تکرار شد به‌خاطر داشته باشید کـارتان بسیار ساده خواهد بود:



هرحالت خاص حالتی خاص راموجب می‌شود. شکل مقابل‌رادقیقاً نگاه کنید. ملاحظه می‌کنید که مثلث ABC در هریك از مثلثهای ABA_1، ABA_2 و... قرارگرفته است. این مثلثها به‌این طریق‌بدست می‌آیند که‌نقطهٔ B را به‌نقطه‌های مختلف امتداد AC وصل‌کنیم. بین نقطه‌های روی امتداد AC یك نقطه است که وضع خاص دارد. این نقطه‌قرینهٔ A نسبت به C است‌که اگر A' باشد داریم:

$$CA = CA'$$

چون حالت خاص موجب حالت‌خاص می‌شود، پس می‌توانیم بگوئیم که مثلث BAA' در وضع خاص است. به عبارت دیگردر بین مثلثهای ABA_1، ABA_2، ABA_3، ... مثلث ABA' مثلثی خاص است. مسلماً تصویر این حالت خاص در فیلم قضیه‌ها وجود دارد واز روی‌آن می‌توانیم به‌حل مسئله نائل آییم.

اکنون گفتگویی را که با یکی از شاگردان داشته‌ام نقل می‌کنم:

ــ برای حل این مسئله چه می‌کنی؟ ممکن است که‌برای من شرح دهی.

ــ صورت مسئله را به‌دقت می‌خوانم و زیر کلمه‌های مهم خطی‌می‌کشم وشکلی برمبنای‌مفروضات‌رسم می‌کنم وآن کلمه‌های مهم‌را با نشانه‌هایی‌روی‌آن‌وارد می‌کنم.

ــ بسیار خوب، بعد؛

ــ شکل را بررسی می‌کنم و می‌کوشم تا تصویرهایی از فیلم قضیه‌هایم را در آن بـاز یابم. یکی از این تصویرها را در شکل می‌بینیم. مجموع زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰° است. چون B به اندازهٔ ۳۰° و C به‌اندازهٔ ۹۰° است نتیجه می‌گیریم کـه اندازهٔ زاویهٔ A برابر با ۶۰° است.

ــ آفرین، اما این‌کشف‌برای اثبات‌آنکه AC نصف AB است کافی است؟ آیا تصویری دیگر از فیلم قضیه‌ها را در آن نمی‌بینی؟

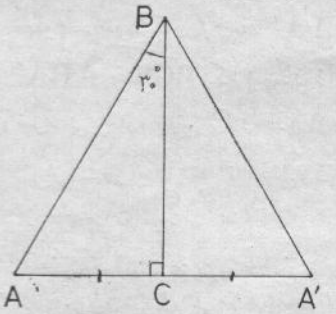
ــ فعلا که نه، اما باید شکل مسئله را تبدیل‌کنم تا چنین تصویری را درآن بیابم.

چگونه؟

ـ تصویر مورد نیاز در یکی از مثلثهایی وجود دارد که مثلث ABC جزئی از آنهااست.

ـ تعداد این مثلثها نامتناهی است. مثلث مورد نظر را چگونه می‌یابی؟

ـ خیلی ساده است، مثلث موردنظر یك مثلث‌خاص است. برای تعیین آن ضلع AC را به‌اندازهٔ CA′ برابر باخود امتداد می‌دهم و B را به A′ وصل می‌کنم.



ـ اکنون به مرحلهٔ حساس رسیده‌ایم. اما ثابت کن که مثلث ABA′ مثلث خاص است.

ـ آقا،...

ـ تصویرهای فیلم قضیه‌هابت را مرور کن.

ـ یافتم، یافتم،

ـ هان؟

ـ یکی از تصویرهای‌فیلم را درشکل می‌بینم؛ ارتفاع BC از مثلث ABA′ درعین‌حال میانهٔ ضلع AA′ است، پس‌مثلث ABA′ متساوی‌الساقین است.

ـ آیا این برای حل مسئله کافی است؟

ـ کافی است. مثلث ABA′ متساوی‌الساقین است و در ضمن زاویهٔ A ازآن ۶۰° است. پس‌زاویهٔ A′ نیز ۶۰°می‌باشد. و در نتیجهٔ زاویهٔ B نیز ۶۰° می‌باشد.مثلث ABA′ متساوی الاضلاع استو AA′ باAB برابراست. AC که نصف AA′ است نصف AB نیز می‌باشد.

حل مسئله پایان یافت امـا ناگریز از ذکر نکته‌ای هستم که مرا دلواپس می‌دارد. یك اثبات را می‌توان یاد گرفت وآن را تکرار کرد بدون آنکه برای این‌کار فکر بکار انداخته شده باشد، در صورتی که آنچه شایان اهمیت است درك روح اثبات است. بسیاری‌از دانش‌آموزان اثبات این یاآن قضیه راکاملابیان می‌کنند. امابیشتر آنان آنچه را بازگو می‌کنندکه حفظ کرده‌اند و یك سال بعد از تکرار آن عاجزند زیرا که آن را فراموش کرده‌اند.

شماکه می‌خواهید در ریاضیات بسیار قوی شوید نباید به کمك حافظه یاد بگیریدکه برای حل فلان مسئله بایدفلان‌خطرا امتداد داد وبرای حل فلان مسئلهٔ دیگر فلان عمود رارسم کرد، برای‌قوی‌شدن در ریاضیات لازم است که در مطالعهٔجدی دروس سایراستعدادهای‌ذهن‌خودرا پرورش‌داده‌وبکار گرفته‌باشید، به‌این جهت است که من می‌کوشم تا شما را بر مسئله مسلط سازم، تا شما را وادارم‌که در حل مسئله فکر خودرا بکار اندازید. تصور می‌کنم که به اهمیت افـزودن‌از حد اصل طلائی «یك عنصر را هیچگاه تنها در نظر نگیرید» واقفید و می‌تـوانید آن را بکار ببرید. اما مایلم که در این باره احاطهٔ شما بسیار بیشتر باشد، مایلم که نه‌تنها از آن بهره‌برداری کنید بلکه جوهر استدلال را دریابید. اگر در این‌کار موفق شده باشم، همین مسئلهٔ ساده می‌تواند به‌گونه‌های شگفت‌آور موجب پیشرفت شما باشد.

با همهٔ دقت خود به‌من گوش دهید:

موضوع‌مسئله چه‌بود؟ می‌خواستیم‌بین ACوAB رابطه‌ای بدست‌آوریم، اما در شکلی که بنابه مفروضات مسئله رسم کرده بودیم گودالی‌وجود داشت‌که برای پرش از روی‌آن بایستی پلی بسازیم؛ این پل همان مثلث ABA′ بود.

وانگهی، این نکته اساسی است‌که AB وAC درحالی که به‌دو مثلث ABCو ABA′ تعلق دارند مشمول خواص این دو مثلث می‌باشند. در مثلث ABC دو عضو AB وAC نسبت به هم بیگانه می‌نمایند، ولی وقتی‌که مثلث ABA′ ساخته شود عضوهای یك‌فامیل مشاهده می‌شوند.

پلی که عبور از حفرهٔ موجود بین AB وAC رامیسر ساخت شکل ABA′ بودکه به شکل موجود اضافه گردید. این شکل در خدمت AB وAC گمارده شد و تساوی ضلعهای آن رابطهٔ بین AB و AC را پدیدار گردانید.

روح اثبات موضوع ظریفی است ومن نمی‌دانم‌که چگونه می‌توان آن‌را عمیقاً به شما فهمانید. در این‌باره به زبان ریاضی صحبت می‌کنم تا کاملا فراگیرید: با استفاده از اینکه AB و AC هردو از خواص مثلث متساوی‌الاضلاع ABA′ برخوردارند توانستیم ثابت‌کنیم که AC نصف AB است. همهٔ مسئله همین بود. این قوهٔ تصور ما بودکه از بین همهٔ مثلثهای به ضلع AB این مثلث متساوی‌الاضلاع (یعنی مثلث خاص) را انتخاب کرد. یك مثلث غیرمشخص به ضلع AB، مثلا مثلث ABA_1 دارای خواصی است‌که اهمیت آنها بسیار کمتر از خواص مثلث متساوی‌الاضلاع ABA′ است واز این جهت نمی‌تواند برای ما جالب باشد. از مثلث ABA_1 آنچه‌که می‌توانیم نتیجه بگیریم

این است که AB یك ضلع آن و AC قسمتی از ضلع دیگر آن AA_1 است و از این راه نمی‌توان نتیجه گرفت که AC نصف AB است. برعکس ، مثلث متساوی‌الاضلاع ABA' سرشار از خواص مفید (تساوی سه ضلع) است ودر آن ارتفاع و میانه بر هم منطبقند و به آسانی از آن نتیجه می‌شود که AC نصف AB است.

ما به‌این مثلث متساوی‌الاضلاع نیاز داریم در حالی که‌روی شکل اولیه‌وجود ندارد. با توسل به قوهٔ تصور خود در می‌یابیم که AC را تا A' امتداد دهیم و از B به A' وصل کنیم تا مثلث مورد نیاز را بدست آوریم. همچنین با توجه به اصل مهم «حالت‌خاص موجب‌حالت خاص می‌شود»می‌فهمیم که‌مثلث ABA' وقتی نیاز ما را رفع می‌کند که A' قرینهٔ A نسبت به C باشد. در چنین حالتی (که C وسط AA' باشد) ارتفاع BC میانهٔ ضلع مقابل نیزهست ومثلث ABA' متساوی‌الاضلاع است.

در اینجا بمورد است بحثی راکه با یکی ازدانش‌آموزان داشته‌ام نقل کنم . این دانش‌آموز اظهارداشت :

ـ دربارهٔ این مسئله نکته‌ای به‌نظرم رسیده است که باید بازگو کنم.

ـ گوش به تودارم؛

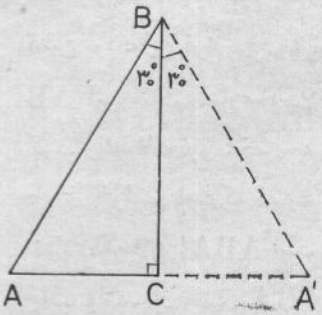
ـ وقتی که AC را به‌اندازهٔ $CA'=AC$ امتدادمی‌دهیم و از B به A' وصل می‌کنیم، نمی‌توانیم‌به‌حتم پیش بینی کنیم که مثلث ABA' متساوی‌الاضلاع است. زیرا درهر مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانهٔ نظیر رأس برهم منطبقند.

ـ درست است ، اما مسلم است که مثلثی خاص خواهیم داشت.

ولی می‌توان طوری عمل کرد که این پیش بینی حتمی باشد.

ـ چگونه ؟

ـ اندازهٔ هریك از زاویه‌های یك مثلث متساوی الاضلاع ۶۰° است. در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۶۰° و اندازهٔ‌زاویهٔ B برابر ۳۰° است . ۳۰° نصف ۶۰° است. پس کافی است که از B نیم خطی رسم کنیم که با BC زاویهٔ ۳۰° بسازدو AC را امتداد دهیم تا آن نیم خط را در A' قطع کند. مثلث ABA' متساوی الاضلاع است زیرا اندازه‌های دوزاویه از آن ۶۰° است پس اندازهٔ زاویهٔ سوم‌آن نیز ۶۰° است.



[ضمن اینکه نزد خودم به‌استعداد شگرف این‌دانش‌آموز اعتراف داشتم به او گفتم:]

ـ اما پرسش دیگری به میان می‌آید: طبق آنچه که ماقبلا عمل کردیم معلوم بود که C وسط AA' است.

ـ درست است ، ولی در روش پیشنهادی من نیز به سادگی معلوم می‌شود که C وسط AA' است؛ درمثلث متساوی‌الاضلاع ABA' خط BC که نیمساز زاویهٔ B است میانهٔ ضلع AA' نیزمی‌باشد ، یعنی C وسط AA' است.

ـ مرا به‌واهمه انداختی، زیرا می‌بینیم که در ریاضی قویتر از من می‌نمائی.

خوانندهٔ عزیز ، دربخشهای قبل گفته بودم که چنین باید کرد، چنان باید کرد، این‌یکی بهتر است و ...، اما به این قانع نشدم و فعلا بازگفتم که چرا چنان‌باید کرد وچرا چنان نباید کردچرا هیچگاه نباید یك شکل را به‌همان صورت که‌هست تنها در نظر گرفت، چرا اصل‌طلائی «حالت خاص موجب حالت‌خاص می‌شود»را باید عمیقا درك کردو بکاربست‌تادرپرتو آن هرشاگرد کوشا که بخواهد بتواند همانند پاسکال همهٔ قضیه‌های هندسهٔ مقدماتی را شخصاً کشف کند.

برخی از دانش آموزان از استعداد کافی برخوردارند و این آمادگی را نیز دارند که فلان خط را رسم کنند و فلان شکل را نمودار سازند اما بنظرمی‌آید که این عمل آنان ماشین‌وار انجام می‌گیرد. بین شما و اینان تفاوتی بارز است زیرا شما می‌دانید که چرا باید فلان خط را رسم کرد و چرا باید فلان شکل را پدیدار ساخت. در مثال قبل شمامی‌دانید که چرا باید AC رابه اندازهٔ خود تا A' امتداد داد و از B به A' وصل کرد.

شما روح اثبات را درك کرده‌اید زیرا اصول و رموز کار را می‌دانید و بکار می‌بندید؛ اگر در ظاهر یك مسئله انجام داده‌اید اما در حقیقت هزاران مسئله بوده است. آنچه که کلید حل‌مسئله و در حکم‌طلسمی برای شما می‌باشد این است که‌کاری را انجام دهید و بدانید که چرا آن‌کار را انجام می‌دهید. خودرا به چنین توانایی مجهز سازید در این صورت در قلمرو کشف راه‌حلها باگامهایی غول آسا به پیش خواهید رفت .

اکنون به‌آن مرحله رسیده‌اید که معنی دقیق «مسائل از نوع اول، مسائل از نوع دوم، را به‌خوبی‌می‌دانید. اما برای تکمیل اطلاعات شما بمورد می‌دانم که برای هر نوع ازمسائل

دنباله در صفحهٔ ۲۶

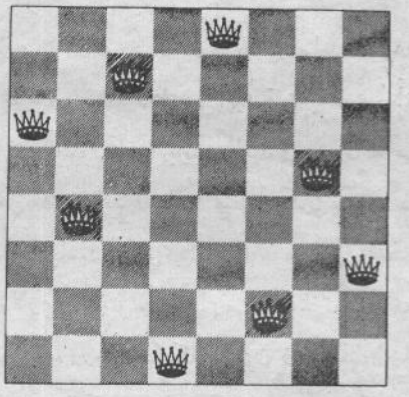
مسائلی از شطرنج

نوشته برلوکن (Berloquin)

ترجمهٔ : مهندس داوید ریحان

مهره‌های بازی شطرنج‌رادرصفحهٔ شطرنج درنظرمی گیریم درکلیهٔ مسائلی که ذیلا مطرح می‌شود ، تمام خصوصیات عادی در مورد حرکت هر کدام از مهره‌ها ثابت است وتنها موردی‌که بی‌اهمیت می‌باشد، رنگ آنها است.

صفحهٔ شطرنج شکل زیر شامل هشت وزیر است. عدد هشت بیشترین‌تعداد وزیرهای مستقر درصفحهٔ شطرنج است‌بقسمی که هیچکدام توسط دیگری گرفته نشود. این شکل یکی از اوضاع صحیح استقرار هشت وزیر در صفحهٔ شطرنج است.



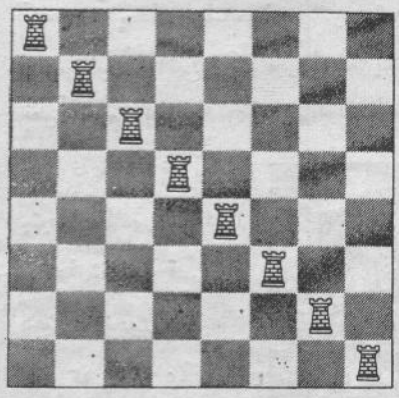
آیا می‌توانید تعداد کل اوضاع ممکن را معلوم کنید؟

وضعی که در شکل نشان داده شده شامل دو ردیف مورب سه وزیری است. آیا ممکن است که هشت وزیر را طوری‌قرار دهیم که هیچ وزیری توسط وزیر دیگر گرفته نشده و عرصه شامل ردیفهای سه وزیری و یا بیشتر باشد؟ دقت‌کنید : برای ردیفها، تمام موربها مناسبندوشیب آنها بی‌اهمیت‌است.

وزیر قویترین مهرهٔ بازی است که اگر دریکی ازچهار خانهٔ مرکزی شطرنج قرار گیرد، بربیست و هفت خانهٔ دیگر مسلط است. در همین موقعیت ، یك فیل بر چهارده خانه تسلط خواهد داشت. رخ‌هم برچهارده خانه مسلط است و این تعداد، مستقل ار موقعیتش در صفحهٔ شطرنج است.

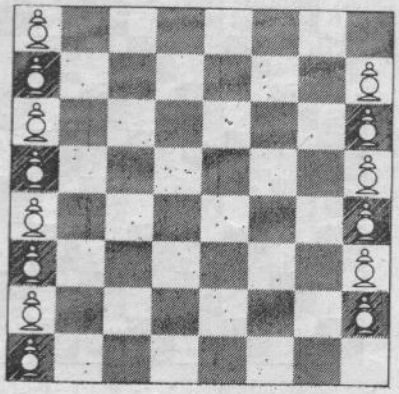
مع‌الوصف، رخ را با وجود قدرت‌کمترش نمی‌توانیم‌بیشتر از تعداد وزیرها درصفحهٔ شطرنج قراردهیم، بقسمی‌که هیچکدام دیگری را تهدید نکند. عدد ماکسیمم آن هشت است.

به‌چند طریق مختلف‌می‌توان‌رخهارا قرارداد که هیچکدام دیگری راتهدیدنکند؟



به‌نظر می‌رسدکه می‌نیمم تعداد رخهای لازم برای آنکه تمام عرصه شطرنج مورد تهدیدقرار گیرد همان هشت است. این عدد هشت از مطرح کردن سؤال اخیر بدست آمد ولی تعداد وضعیتهایی‌که تمام عرصه شطرنج را تهدیدکند، مطمئناً بیشتر ازتعداد وضعیتهایی است‌که از تهدیدهای دوجانبه خود مهره‌ها احتراز جسته باشیم.

واما در بارهٔفیلها ،قدرت‌کمترشان مولودمسائل پیچیده‌تری است. تعداد فیلهای مسلط بر تمام عرصه شطرنج کمتر از تعداد فیلهایی است که می‌توانند بدون تهدید یکدیگر قرارگیرند.



درواقع می‌توانیم تا چهارده فیل را بدون تهدید دوجانبه‌درصفحهٔ شطرنج قرار دهیم. به چند طریق مختلف می‌توانیم این چهارده فیل را قرار دهیم؟ پس می‌باید دوعدد را بدست‌آوریم:

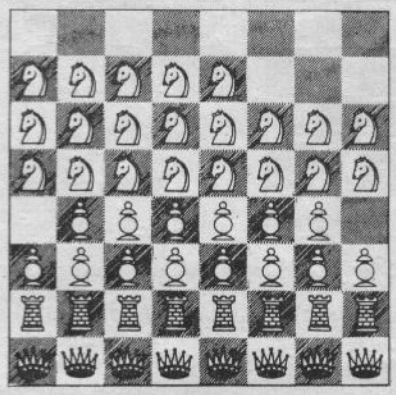
a) کمترین تعداد فیلهای لازم برای تسلط برتمام عرصهٔ شطرنج چقدر است ؟

b) کمترین تعداد فیلهای لازم برای تسلط به‌تمام عرصهٔ شطرنج ، بقسمی که هر فیل توسط فیل دیگر پشتیبانی شود،

چقدر است؟

آخرین مهرهٔ جالب توجه، اسب است. کمترین تعداد اسبهای لازم برای آنکه تمام‌خانه‌های صفحهٔ شطرنج‌مورد تهدید قرار گرفته و هر اسب توسط دیگری پشتیبانی شود ، چقدر است؟

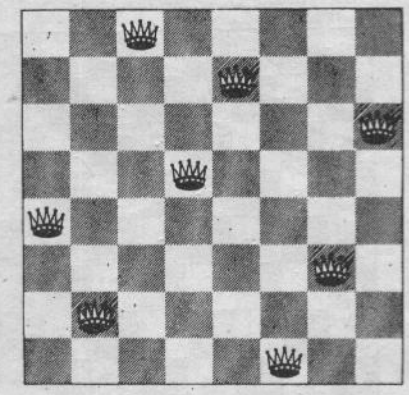
بالاخره به‌مسئلهٔ اجتماع همهٔ این مهره‌ها می‌پردازیم. هشت وزیر، هشت رخ، چهارده فیل و بیست‌اسب در اختیارداریم که جمعاً پنجاه و یك مهره می‌شود. تهدیدهای مهره‌های مختلف و همینطور موانعی راکه سرراه یکدیگر ایجاد می کنند، درنظر نمی گیریم ولی دو مهره نمی‌توانند یك خانه را اشغال کنند .



چگونه می‌توانیم این پنجاه ویك‌مهره را در صفحهٔ شطرنج قرار دهیم به نحوی که‌هیچ وزیری وزیر دیگر، هیچ‌رخی‌رخ‌دیگر ،هیچ فیلی‌فیل‌دیگر وبالاخره هیچ اسبی اسب دیگر را تهدید نکند؟ **(مسئلهٔ دودنی Dudeney).**

پاسخ‌ها :

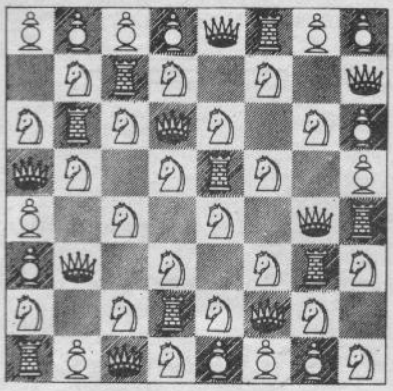
در مورد وزیرها تعداد اوضاع مختلف دوازده تا است (با



تقریب تقارنها و دورانها). استقرار بدون وجود ردیف مورب به‌شکل زیر است . در مورد رخها، تعداد اوضاع مختلف پس‌از حذف دورانها وتقارنها به ۴۰۳۲۰ = !۸ تقلیل می‌یابد.

فیلها را می‌توانیم به۲۵۶ طریق قرار دهیم. تعداد فیلهای لازم برای تسلط برتمام عرصهٔ شطرنج هشت تا است. برای‌آنکه فیلها پشتیبان یکدیگر نیز باشند، این تعداد به۱۰ می‌رسد.

تعداد اسبهای مسلط بر تمام صفحهٔ شطرنج ۱۲ تا است و



اگر شرط پشتیبانی هر اسب توسط اسب دیگر را نیز در نظر بگیریم باید عدد ۱۴ را منظور کنیم.

بالاخره در مورد مسئلهٔ اجتماع مهره‌ها، می‌توانیدبه‌شکل بالا مراجعه کنید.

با ریاضیات آشتی کنید(دنباله از صفحهٔ ۲۴)

دستورهای لازم را ارائه دهم تا از مرحلهٔ خواندن صورت مسئله تا آنگاه‌که به حل مسئله نایل می‌آیید قدم به قدم بدانید که‌چه باید بکنید. این دستورها را باید بدانید و هربارکه می‌خواهید مسئله‌ای راحل کنید باید آنها را منظماً بکار ببرید. دراین‌باره اگرممارست‌داشته‌باشیدبالاخره‌به‌مرحله‌ای می‌رسید که‌خود به‌خود همهٔ کارهای لازم را به‌نوبت انجام می‌دهید. تمرینهای خود را آغاز کنید به‌زودی درمی‌یابید که بدون زحمتهای اضافی همهٔ فعالیتهای ذهنی شما یکی پس‌از دیگری و بدون وقفه به موفقیت می انجامد، آنگاه بر سرعت پیشرفت خود خواهید افزود و مرحله‌ای فرا خواهد رسیدکه برای‌شما غیر قابل تصور خواهد بود، البته این موضوع به‌شرط‌آن است‌که فیلم قضیه هارا به‌همان گونه‌که دربخش مربوط توصیه کرده‌ام ومرتباً مرورکرده باشید.

این اصل را هم در نظر داشته باشید که برای تند رفتن بایدآهسته رفت. به عبارت دیگراگراز ابتداآهسته‌بروید درانتها توانایی تند رفتن خواهید داشت. در فرا گرفتن و در تمرینهای ذهنی هم نخست باید با تأنی پیشروی کرد تا به دوباره کاری مجبورنشوید. این اصل در همهٔ زمینه‌های فعالیتهای بشری صادق است.

اکنون به‌ذکر دو مثال انتخابی مبادرت می کنم. اولی‌به‌مسائل از نوع اول ودومی به مسائل از نوع دوم مربوط است.

دنباله دارد

مسائل یکی از المپیادهای فیزیک

برای دانش آموزان دبیرستان

ترجمهٔ : مهندس فتح‌الله زرگری

درحدود برنامهٔ کلاس هفتم، مرحلهٔ I

۱ـ یك انشای ساده دربارهٔ زندگی و کارهای یکی از دانشمندان فیزیك به‌دلخواه بنویسید، و دربارهٔ کشف جدیدی که اوبرای علم ودانش به‌ارمغان آورده است توضیح دهید.

۲ـ اتومبیلی‌یك سوم مسیرخودرا باسرعت $۲۰m/s$ و بقیهٔ مسیررا باسرعت $۳۶km/h$ طی‌کرد. سرعت متوسط این اتومبیل دراین‌مسیرچقدر بوده است؟

حل‌ـ اگر s طول تمام مسیرو t کل زمانی باشد که s پیموده شده‌است، سرعت متوسط برابر می‌شودبا: $v_m=\frac{s}{t}$.

مسافت s را برحسب متر و زمان t را برحسب ثانیه در نظر می‌گیریم:

$$t_۱=\frac{۱}{۳}s : v_۱=\frac{s}{۳v_۱} \quad و \quad t_۲=\frac{۲}{۳}s : v_۲=\frac{۲s}{۳v_۲}$$

$$t=t_۱+t_۲=\frac{s}{۳v_۱}+\frac{۲s}{۳v_۲}=\frac{s(v_۲+۲v_۱)}{۳v_۱v_۲}$$

$$v_m=\frac{s}{t}=\frac{۳v_۱v_۲}{v_۲+۲v_۱}$$

$$v_۱=۲۰m/s \text{ و } v_۲=\frac{۳۶\times ۱۰۰۰}{۳۶۰۰}=۱۰m/s$$

$$v_m=\frac{۳\times ۲۰\times ۱۰}{۱۰+۴۰}=۱۲m/s$$

۳ـ صفحهٔ حلبی به‌شکل‌مستطیل به‌طول $۱/۴m$ وبه‌عرض $۷۰cm$ وبه‌ضخامت $۰/۵mm$ مفروض‌است. ازاین‌صفحهٔ حلبی دایره‌ای بریده‌خارج می‌کنیم. وزن‌حلبی باقیمانده$۳kg$می‌شود. مساحت دایرهٔ بریده شده چقدر بوده‌است؟

(وزن مخصوص‌آهن: $۷۸۰۰kg/m^۳$)

پاسخ: تقریباً $۰/۲$ مترمربع

۴ـ تحقیق کنید که‌در آزمایش فشاراسمزی، آیاسرعت‌نفوذ مایع به‌نوع مایع مجاور بستگی‌دارد؟

مرحلهٔ II

۱ـ اتومبیلی نیمی از زمان حرکت خود را باسرعت $۵۴km/h$ ونیمهٔ‌دیگررا باسرعت $۲۰m/s$ طی‌می‌کند. سرعت متوسط اتومبیل را پیداکنید.

حل‌ـ سرعت متوسط مساوی‌است با $v_m=\frac{s}{t}$ که در آن t زمان حرکت وs طول طی‌شده است. ولی:

$$s=s_۱+s_۲=v_۱t_۱+v_۲t_۲=\frac{(v_۱+v_۲)t}{۲}$$

بنابراین $v_m=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Longrightarrow v_m=۱۷/۵m/s$

۲ـ حجم‌کرهٔ مسی$۲dm^۳$ وجرم‌آن $۶kg$ است. تعیین کنیدکه این‌کره توخالی‌است یاتوپر. هرگاه توخالی‌است حجم قسمت خالی‌آن چقدر است؟ مقادیر لازم را می‌توانید از جدول استخراج کنید.

حل‌ـ حجمی راکه بایدکرهٔ مسی‌توپر داشته باشدازروی جرم آن بدست می‌آید. $V_۱=\frac{m}{\rho}$ که در آن m جرم داده

شده و $\rho = ۸۹۰۰ kg/m^۳$ جرم مخصوص مس است. از اینجا داریم: $V_۱ \neq ۰/۰۰۰۶ m^۳$ اگر V حجم تمام کره باشد، حجم قسمت خالی برابر است با:

$$V_۲ = V - V_۱ \neq ۰/۰۰۱۴ m^۳$$

۳ـ ظرف کوچکی پراز ساچمه مفروض است. بدون وزن کردن، وزن سرب بکاررفته برای ساختن ساچمه‌ها را بدست آورید. چه وسائلی برای حل این مسئله لازم است؟

راهنمائی : جدول وزن مخصوص اجسام و همچنین شیشه مدرج داده شده است.

کلاس هشتم ـ مرحلهٔ I

۱ـ آیا انرژی تولیدشده دریك نیروگاه آبی برای بجوش آوردن آبی که ازمیان توربین‌هایش می گذرد کفایت می کند؟

حل ـ فرض کنیم جرم آبی که در زمان معینی از توربین نیروگاه آبی عبور می کند m وارتفاع سد h باشد. با ریختن آب روی پره‌های توربین انرژی پتانسیل آن به‌مقدار:

$$W = ۹/۸ [\frac{N}{kg}] \cdot m \cdot h$$

کاهش می‌یابد. $(N/kg = \text{نیوتن برکیلوگرم})$

فرض کنیم تمام این انرژی به‌انرژی الکتریکی و انرژی اخیر نیز به انرژی حرارتی (غیرممکن) بدل‌شود. به‌این ترتیب دارای ذخیرهٔ انرژی معادل $Q_۱ = ۹/۸ [\frac{N}{kg}] \times m \times h$ می‌باشیم. برای جوشاندن آب به‌جرم m و درجهٔ حرارت اولیهٔ صفردرجهٔ سانتیگراد مقدار حرارتی معادل $Q_۲ = cm\Delta t$ لازم است که درآن $\Delta t = ۱۰۰^\circ C$ می‌باشد. بامساوی قرار دادن $Q_۱$ و $Q_۲$ بدست می‌آوریم:

$$۹/۸ [\frac{N}{kg}] \cdot m \cdot h = cm\Delta t$$

$$h = \frac{c\Delta t}{۹/۸ [\frac{N}{kg}]} = ۴۲ km$$

ساختن سد باچنین ارتفاعی غیرممکن است. بنابراین انرژی تولید شده در نیروگاه آبی برای جوشاندن آب عبوری ازتوربین کافی نیست.

۲ـ درظرفی محتوی جیوه کره‌ای فولادی قراردارد. اگر درظرف آب اضافه شود، بر سر این کره چه‌خواهد آمد؟

حل ـ کره درجیوه غوطه‌ور بوده ومقداری ازآن داخل جیوه است. هرگاه درظرف آب اضافه کنیم دراین‌صورت به‌قسمت غیرغوطه‌ورکره درجیوه باز نیرویی (از طرف آب) اثر خواهد کرد. ودرنتیجه قسمت غوطه‌ور در جیوه کمتر خواهد شد ومانند این است که آب کره راکمی بالا می کشد (دانش آموزان متوجه هستند که این نیروکه باعث سبك شدن کره شد همان نیروی ارشمیدس است که به‌اندازهٔ آب هم‌حجم قسمت داخل آب کره را سبکتر کرد).

۳ـ دریك کیلوگرم آب $۲۰^\circ C$ تیکه‌ای برف آبدار به‌جرم ۲۵۰g گرم وبه‌درجهٔ حرارت صفردرجهٔ سانتیگراد می‌اندازیم. وقتی تمام برفها آب شد، درجهٔ حرارت تعادل به $۵^\circ C$ می‌رسد. تعیین کنید وزن آب داخل گلولهٔ برف.

حل ـ جرم آب را $m_۱$ وجرم گلولهٔ برف را $m_۲$ فرض می کنیم. فرض کنیم در گلولهٔ برف $m_۳$ گرم آب موجود باشد، دراین صورت جرم خود برف $m_۲ - m_۳$ خواهد بود . معادلهٔ تعادل حرارتی را می‌نویسیم:

$$cm_۱(t_۱ - \theta) = \lambda(m_۲ - m_۳) + cm_۲\theta$$

$$m_۳ = \frac{m_۲(\lambda + c\theta) - cm_۱(t_۱ - \theta)}{\lambda}$$

بااستخراج مقادیر c و λ ازجدول بدست می‌آوریم:

$$m_۳ = ۷۵g$$

۴ـ باآزمایش، مطلوبست تعیین توان مصرفی برای چندین باربالا وپایین بردن وزنهٔ معین. توضیحی مختصر در مورد اساس وچگونگی آزمایش داده ونتیجهٔ عمل را بدست آورید.

مرحلهٔ II

۱ـ ازمحوطهٔ پرس آجر فشاری درهردقیقه ۵۰ آجر روی نوار دوارمی‌افتد. این آجرها روی نوار طوری حرکت می کنند که فاصلهٔ بین مراکزشان ۰/۵m می‌باشد. مطلوبست سرعت دوران نوار دوار.

حل ـ سرعت حرکت نوار دوار $v = \frac{s}{t}$ است که در آن s مسافتی است که نوار دردقیقه جابجا می‌شود. لیکن $s = s_۱ \cdot n$ که درآن n تعداد آجرهایی است که دردقیقه روی نواردوارمی‌افتد و $s_۱$ فاصلهٔ بین‌مراکز آجرهای متوالی است. بنابراین:

$$v = \frac{s_۱ n}{t} \neq ۰/۴ m/s$$

۲ـ درلیوانی محتوی ۵۰۰g گرم‌یخ صفردرجهٔ‌سانتیگراد ۲۰۰ گرم‌آب $80^\circ C$ می‌ریزیم.

درجهٔ حرارت‌تعادل‌لیوان‌راتعیین کنید. درلیوان‌چه‌خواهد بود؟ ازگرمای تلف‌شده صرف‌نظر می‌کنیم.

حل‌ـ درسردکردن آب تا درجـهٔ صفرسانتیگراد مقدار گرمایی معادل Q_1لازم است:

$$Q_1 = cm_2(t_2 - t_1) \Longrightarrow Q_1 = ۶۷۲۰۰ \text{ ژول}$$

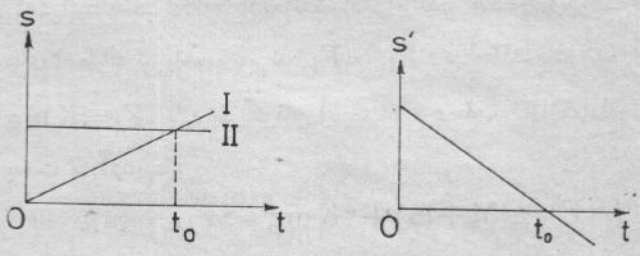
تعیین می‌کنیم که چه مقداریخ m_3 بااین گرما می‌تواندآب‌شود:

$$m_3 = \frac{Q_1}{\lambda} \# ۰/۲\text{kg}$$

ازآنجاکه $m_3 < m_1$ است بنابراین تمام‌یخ‌آب نشده ومخلوط دارای درجهٔ حرارت صفرخواهدبود. بنابراین در لیوان ۰/۳ کیلوگرم یخو۰/۴ کیلوگرم‌آب خواهیم داشت.

کلاس نهم ـ مرحلهٔ I

۱ـ درشکل زیرمنحنی تغییرمکان دو جسم نسبت‌به ناظر ساکن واقع روی‌زمین رسم‌شده است. مطلوبست رسم‌منحنی تغییر مکان جسم‌دوم دردستگاه اندازه‌گیری وابسته به‌جسم اول.



حل‌ـ این منحنی درشکل سمت‌راست رسم‌شده است.

۲ـ اتومبیلی ازحالت سکون به‌راه افتاده و۱۰۰ متراول راباشتاب a_1 و۱۰۰ متردوم راباشتاب a_2 طی مـی‌کند. سرعت آن درانتهای ۱۰۰متراول به 10m/s می‌رسد، ودرپایان۱۰۰ متردوم دوباره اندازهٔ 5m/s بیشتر می‌شود. کدام شتاب بیشتر بوده است؟

حل‌ـ سرعت اتومبیل رادرپایان ۱۰۰متر اول v_1 و در پایان ۱۰۰متردوم v_2 می‌گیریم. دراین صورت شتاب اتومبیل درصدمتر اول برابر خواهدشد با :

$$a_1 = \frac{v_1^2}{2s}$$

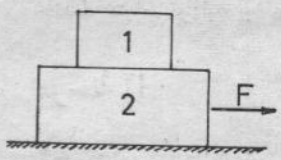
وشتاب درصد متردوم برابر می‌شود با:

$$a_2 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

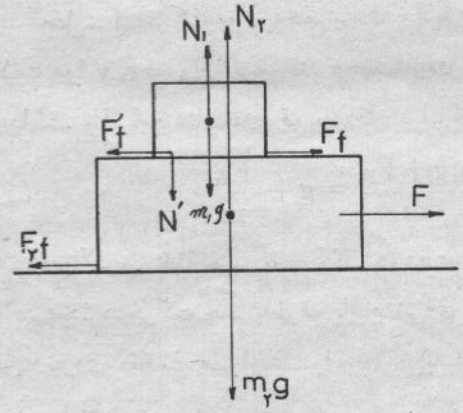
با در نظر گرفتن $v_1 = 10\text{m/s}$ و $v_2 = 15\text{m/s}$ بدست می‌آوریم:

$$a_1 = ۰/۵\text{m/s}^2 \quad \text{و} \quad a_2 = ۰/۶۲۵\text{m/s}^2$$

۳ـ مطلوبست حداکثر نیرویی که بتوان‌به‌وزنهٔ پائینی(در شکل زیر) واردآورد که‌دراثرحرکت‌باشتاب‌ثابت این وزنه،وزنهٔ بالایی درمحل‌خود روی‌وزنهٔ زیرساکن باقی‌بماند. ضریب‌اصطکاك بین‌وزنه‌ها $K_1 = ۰/۱$ وبین وزنهٔ پائینی‌وسطح زیر آن $K_2 = ۰/۲$ می‌باشد. جرم‌وزنهٔ‌بالایی $m_1 = 1\text{kg}$ وجرم وزنهٔ پایینی $m_2 = 2\text{kg}$ می‌باشد.



حل‌ـ درشکل کلیهٔ‌نیروهای مؤثر بروزنه‌ها رارسم‌می‌کنیم (شکل‌زیر) N_1وN_2 نیروهای عکس‌العمل و F_f نیروی‌اصطکاك



دراثر سرخوردن است.

معادلهٔ دینامیك هریك از وزنه‌ها را در امتـداد نیروی $\vec{F}$ می‌نویسیم.

برای جسم اول‌داریم:

$$F_f = m_1 \cdot a_1 \qquad (1)$$

برای جسم دوم:

$$F - F'_f - F_{2f} = m_2 a_2 \qquad (2)$$

ازآنجاکه وزنهٔ بالائی‌هنوز نسبت به‌پائینی ساکن‌است هردو بایك شتاب حرکت می‌کنند: $a_1 = a_2 = a$ توجه می‌کنیم که:

$$|F_f| = |F'_f|$$

ازآنجاکه جسم اول‌روی سطح حرکت قراردارد بنابراین :

$$F_{2f} = K_2 N_2 = K_2(m_1 + m_2)g$$

$$F_f = K_1 m_1 g$$

معادلات (۱)و(۲) به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{cases} K_1 m_1 g = m_1 a \\ F - K_1 m_1 g - K_2 (m_1 + m_2) g = m_2 a \end{cases}$$

ازحل این‌دستگاه معادلات نسبت به F بدست می‌آوریم:

$$F = (m_1 + m_2)(K_1 + K_2) g = 9$$ نیوتن

۴ـ بااستفاده ازروشهای مختلف، وزن مخصوص مثلاروغن مایع را به‌چند طریق بدست‌آورید.

چندطریق می‌توانید پیشنهادکنید؟.

مرحلهٔ II

۱ـ جسمی بطورقائم پرتاب شده وبه‌زمین می‌افتد. درمسیر رفت وبرگشت‌آن شتاب چگونه خواهد بود در صورتی‌که از مقاومت هوا صرف‌نظر نشود. شتاب درچه حالتی حداکثر ودرچه حالتی‌حداقل خواهدبود؟

حل‌ـ درحرکت‌به‌بالا به‌جسم‌نیروی جاذبهٔ mg ونیروی مقاومت هوا $F_A = Kv$ اثرمی‌کند وجهت هردو نیرو به طرف پایین‌است. بنابراین شتاب درموقع بالارفتن برابراست‌با:

$$a_1 = \frac{mg + F_A}{m} = g + \frac{F_A}{m}$$

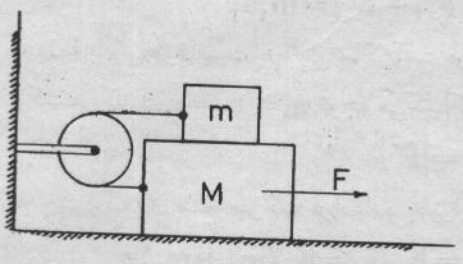
دربالاترین نقطهٔ مسیر $v = 0$ شده و $F_A = 0$ و $a_2 = g$ خواهد بود. درحرکت جسم به‌طرف پایین نیروی جاذبه‌به‌طرف پایین ونیروی مقاومت هوا به‌طرف بالا می‌باشد و بنابراین خواهیم داشت:

$$a_3 = \frac{mg - F_A}{m} = g - \frac{F_A}{m}$$

ازتجزیه وتحلیل نتایج بدست‌آمده متوجه می‌شویم‌که:

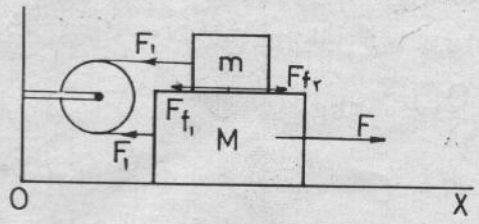
$$a_1 > a_2 > a_3$$

۲ـ درروی میزافقی وزنهٔ $M = 2kg$ و روی آن وزنهٔ $m = 1kg$ قرارگرفته‌اند. (شکل زیر) این دووزنه توسط نخ



بدون‌کششی وتوسط قرقره‌ای به‌هم وصل‌شده‌اند. مطلوبست‌تعیین نیروی F بطوری‌که وزنهٔ پایینی M باشتاب ثابت $a_1 = \frac{g}{2}$ از وزنهٔ بالایی m دور (جدا) شود. ضریب اصطکاک بین وزنه‌ها $K = 0/5$ وازاصطکاک بین میزو وزنهٔ M صرف‌نظر می‌گردد (ازوزن قرقره نیز صرف‌نظر می‌گردد).

حل‌ـ روی شکل نیروهای عمل کننده برروی وزنه‌ها را بطورافقی رسم‌می‌کنیم (شکل‌زیر) هرگاه روی محور Ox جهت



ازمبدأ به‌طرف‌راست راجهت مثبت فرض‌کنیم وسپس‌معادلهٔ‌حرکت وزنه‌ها رابنویسیم (درجهت Ox) بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} Ma_1 = F - F_1 - F_{f_1} \\ -ma_2 = -F_1 + F_{f_2} \end{cases}$$

که دراینجا F_1 تصویرنیروی مقاومت است از آنجاکه نخ بدون کشش‌است شتاب وزنه‌ها ازلحاظ‌مقداربرابرند: $a_1 = a_2$ ونیرو-های اصطکاک نیزباهم برابرند $F_{f_1} = F_{f_2}$ و در حالت داده شده $F_f = Kmg$. بادرنظرگرفتن این‌موضوع وحذف F_1 ازمعادله بدست می‌آوریم:

$$F = a(M + m) + 2Kmg = 24/5$$ نیوتن

کلاس دهم ـ مرحلهٔ I

۱ـ مقالهٔ‌کوچکی دربارهٔ یك‌تئوری فیزیکی بنویسید. در این‌مقاله تجارب داده‌شده راتجزیه وتحلیل‌کرده و اصولی راکه این تجارب ازآن پیروی می‌کنند و همچنین نام دانشمند یا دانشمندانی را که بر روی این تئوری فیزیکی کار کرده‌اند بنویسید.

۲) اسکی‌بازی ازتپه‌ای به‌شیب α پایین آمده وپس ازطی طول s می‌ایستد. تعیین کنید اوداین عمل‌چه مقدار برف‌راآب کرده‌است درصورتی‌که بدانیم جرمش m وضریب اصطکاک‌اسکی‌ها روی‌سطح‌برف K ودرجهٔ‌حرارت‌انتهایی‌برف صفردرجهٔ‌سانتیگراد باشد. (فرض‌می‌کنیم تمام‌گرما صرف‌آب‌کردن برف‌شود).

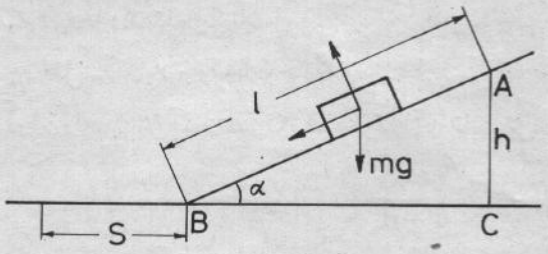
حل‌ـ ازآنجاکه مقدارگرمایی‌که صرف آب شدن برفها

می‌شود مساوی است با تغییرات انرژی پتانسیل اسکی باز، بنابراین داریم:

$$mgh=\lambda m_{\circ} \qquad (1)$$

که در آن λ گرمای ویژهٔ آب‌شدن و $m_{\circ}$ وزن برف آب شده‌است.

بنابراین $m_{\circ}=\frac{mg\cdot h}{\lambda}$. برای بدست‌آوردن h از این موضوع استفاده می‌کنیم که تغییرات انرژی پتانسیل اسکی‌باز برابر است با مقدار کاری که در مقابل نیروی اصطکاک مصرف کرده است (شکل زیر):



$$mgh=mgkl\cos\alpha+mgKs$$

$$h=Kl\cos\alpha+Ks \qquad (2)$$

ازمثلث ABC بدست می‌آید که:

$$l\cos\alpha=h\cot g\alpha$$

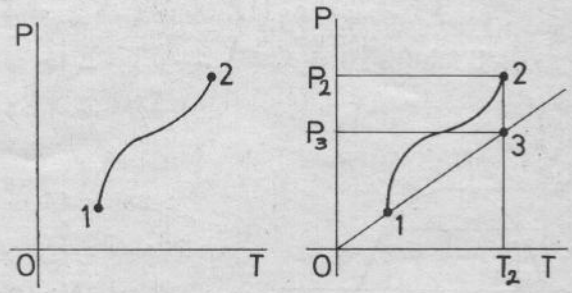
ازقرار دادن رابطهٔ اخیر دررابطهٔ (۲) بدست می‌آوریم:

$$h=Kh\cot g\alpha+Ks \Longrightarrow h=\frac{Ks}{1-K\cot g\alpha}$$

بنابراین:

$$m_{\circ}=\frac{K\cdot m\cdot g\cdot s}{\lambda(1-K\cot g\alpha)}$$

۳ـ گازی ازحالت (۱) به‌حالت(۲) رسیده است. دراین تحول رابطهٔ بین فشار ودرجهٔ حرارت مطلق آن در (شکل زیر سمت‌چپ) نشان‌داده‌شده‌است. آیا حجم گاز زیادشده یا کم گردیده است؟ جرم گاز ثابت فرض‌می‌شود.



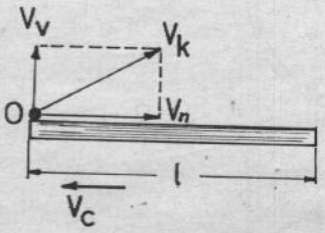
حل‌ـ ازنقطهٔ (۱) خط‌حجم ثابت وازنقطهٔ (۲) خط‌درجهٔ حرارت‌ثابت (شکل سمت راست) رارسم می‌کنیم. این‌دویکدیگر را درنقطهٔ (۳) که‌دارای فشار P_3 می‌باشد قطع می‌کنند. چون $P_2>P_3$ ودرجهٔ حرارت گاز درحالت (۲) و(۳) یکسان است بنابراین $V_2<V_3$ بوده وبه‌این‌ترتیب $V_2<V_1$ می‌شودزیرا $V_3=V_1$ است. بنابراین حجم گاز در رفتن از حالت (۱) به حالت (۲) کم می‌شود.

مرحلهٔ II

۱ـ درانتهای میله‌ای به‌جرم M وبه‌طول l واقع‌روی‌میز صاف، جیرجیرکی به‌جرم m نشسته است. اوباچه حداقل‌سرعتی بایدپرش کند تابه‌انتهای دیگرمیله برسد؟

ازاصطکاک بین‌میز ومیله صرف‌نظر می‌شود.

حـل‌ـ بـرای آنکه سرعت جیرجیرک حداقل باشد باید تحت زاویـهٔ ۴۵° پرش کند (نسبت به‌افق) درنتیجه



$v_v=v_h$ یعنی سرعت درجهت افق‌باسرعت درجهت قائم برابر خواهدشد (شکل بالا).

درهنگام پرش جیرجیرک بامیله‌ضربه‌ای (نسبتاً سبك) وارد می‌کندکه مقدار آن در امتدادافق برابراست‌با Mv_c و مساوی mv_h درنتیجه میله در محل خـود به‌اندازهٔ $s_1=v_ct$ درجهت خلاف جهت $\overrightarrow{v_h}$ حرکت می‌کند. جیرجیرک نیزبه اندازهٔ همین مدت‌درهوا پرش‌می‌کند وفرض‌کنیم به‌اندازهٔ $s_2=v_ht$ در جهت افقی به‌جلوپرش کند ($s_2<l$) برای‌آنکه جیرجیرک به‌انتهای میله‌پرش‌کند لازم‌است تساوی زیربرقرار گردد:

$$s_1+s_2=l$$

بادرنظر گرفتن این‌موضوع که پرش‌جیرجیرک بمدت $t=\frac{2v_h}{g}$

ادامه پیدا می‌کند وسرعت میله $v_c=\frac{mv_h}{M}$ می‌بـاشد بـدست می‌آوریم:

$$\frac{m}{M}v_h\cdot\frac{2v_n}{g}+v_h\cdot\frac{2v_n}{g}=l$$

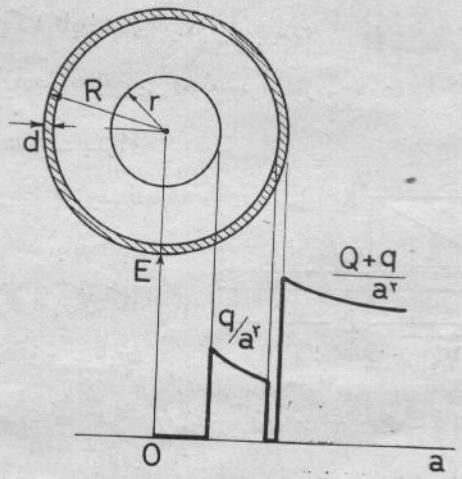
وچون $v_h=v_n$ بنابراین خواهیم داشت:

$$v_h = v_n = \frac{v}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \frac{v^2}{g} \cdot \frac{m+M}{M} = 1$$

$$v = \sqrt{\frac{l \cdot g \cdot M}{m+M}}$$

۲ـ دوکرهٔ فلزی توخالی بهشعاعهای R و r وبه ضخامت جداره‌های d طوری قرارگرفته‌اندکه مراکزشان برهم‌منطبقند. دوکره دریك‌لحظه باردارمی‌شوند به‌ترتیب‌با Q و q. مطلوبست رسم میدان الکتریکی ازفاصلهٔ a تامرکز کره‌ها.

حل‌ـ میدان الکتریکی به‌صورت (شکل‌زیر) خواهدبود.



به‌این ترتیب مشاهده می‌کنیم که میدان در داخل کرهٔ داخلی ودر ضخامت کرهٔ توخالی‌صفراست.

۳ـ بااستفاده ازقطره‌چکان ضریب‌کشش سطحی دومایع مختلف رامقایسه‌کنید.

کلاس یازدهم ـ مرحلهٔ I

۱ـ بالنی‌به‌حجم $V = ۲۰/۵$ لیترمحتوی‌مخلوطی‌ازئیدروژن $(\mu_H = ۲kg/kMol)$ و هلیم $(\mu_{He} = ۴kg/kMol)$ می‌باشد. جرم مخلوط $m = ۱۳g$ ودرجهٔ حرارت‌آن $۲۷^\circ C$ و فشارش $P = ۵/۴$ آتمسفر می‌باشد.

مطلوبست تعیین‌جرم هیدروژن وهلیم.

حل‌ـ جرم هیدروژن وهلیم‌را می‌توان بااستفاده‌ازمعادلهٔ «مندلیف ـ کلاپیرون» بدست‌آورد.

$$P_H \cdot V = \frac{m_H}{\mu_H} \cdot RT \quad \text{و} \quad P_{He} \cdot V = \frac{m_{He}}{\mu_{He}} \cdot RT$$

بادرنظر گرفتن‌قانون دالتن $P = P_H + P_{He}$ که‌درآن P فشار مخلوط گازها می‌باشدو $m = m_H + m_{He}$، دستگاه معادلات را نسبت‌به m_H و m_{He} حل می‌کنیم، بدست می‌آوریم:

$$m_H = \frac{\mu_H \cdot \mu_{He}}{\mu_{He} - \mu_H} \cdot \left(\frac{PV}{RT} - \frac{m}{\mu_{He}}\right)$$

$$m_H = ۵g \quad \text{و} \quad m_{He} = ۸g$$

۲ـ خازن‌هوایی تاولتاژ $V = ۵۰$ ولت شارژشده وازمنبع تغذیه جدامی‌شود. سپس صفحهٔ فلزی ایزوله شده‌ای به ضخامت $d_1 = ۱mm$ را موازی صفحات خازن واردآن می‌کنیم. مطلوبست تعیین‌اختلاف پتانسیل‌بین صفحات خازن درصورتی که بدانیم فاصلهٔ‌بین‌آنها $d = ۵mm$ می‌باشد. مساحت جوشنهای خازن وصفحهٔ واردشده یکسان است.

حل‌ـ کل‌بار جوشنهای خازن بعداز داخل کردن صفحهٔ فلزی ایزوله‌شده بین‌آنها تغییرنکرده وظرفیت‌آن ثابت می‌ماند.

$$C_1 = \frac{۴۴۰S}{d - d_1}$$

ازآنجائی‌که $C_1 = \frac{q}{V}$ است بنابراین:

$$V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{q}{\frac{۴۴۰S}{d-d_1}}$$

بارq رامی‌توان برحسب اختلاف پتانسیل وظرفیت خازن نوشت:

$$q = CV = \frac{۴۴۰SV}{d}$$

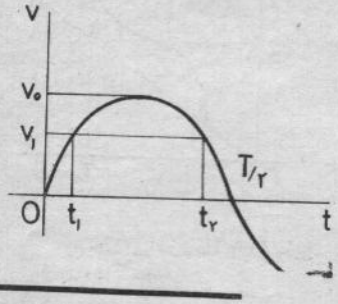
C وV بترتیب ظرفیت وپتانسیل ابتدایی خازن‌هستند.

بنابراین:

$$V_1 = \frac{d-d_1}{d} V = ۴۰ \text{ ولت}$$

۳ـ فشاردرشبکهٔ متناوبی $V = ۱۲۰$ ولت می‌باشد. مطلوبست زمانی‌که درهرنیم پریود در طول‌آن، لامپ نئون درشبکه روشن می‌شود. نئون به ازای ولتاژ $V_1 = ۸۴$ ولت روشن و خاموش می‌گردد. فرکانس جریان $۵۰HZ$ است.

حل‌ـ شکل‌ترسیمی وابستگی‌فشار وجریان‌به‌زمان‌درروبرو رسم‌شده است.



در هر نیم پریود لامپ‌درنقطه‌ای ازمنحنی روشن می‌شود که ولتاژ ولت$V \geq ۸۴$ باشد.

این زمانها بدین

ترتیب بدست می‌آیند:

$$t = t_۲ - t_۱$$

که در آن $t_۱$ و $t_۲$ به‌ترتیب لحظات روشن شدن و خاموش شدن لامپ هستند $t_۱$ و $t_۲$ را می‌توان از معادلهٔ زیر بدست آورد:

$$V = V_۰ \sin \frac{۲\pi}{T} t_{۱,۲}$$

با در نظر گرفتن $V_۰ = V \times \sqrt{۲}$ بدست‌می‌آوریم.

$$۸۴ = ۱۲۰ \times \sqrt{۲} \sin \frac{۲\pi}{T} \cdot t_{۱,۲}$$

$$\sin \frac{۲\pi}{T} t_{۱,۲} = ۰/۵ \Longrightarrow \frac{۲\pi}{T} t_۱ = \frac{\pi}{۶} \text{ و } \frac{۲\pi}{T} t_۲ = \pi - \frac{\pi}{۶}$$

$$t_۱ = \frac{T}{۱۲} \text{ و } t_۲ = \frac{۵T}{۱۲} \Longrightarrow t = \frac{T}{۳}$$

و ازآنجائی‌که $T = \frac{۱}{f}$ ومساوی ۰/۰۲ است بدست می‌آوریم

ثانیه $t = \frac{۱}{۱۵۰}$

۴ـ توسط لیوان آب و سکه و خط‌کش مطلوبست تعیین تقریبی ضریب شکست آب. دربارهٔ طرز عمل توضیح داده وبحث کنید.

مرحلهٔ II

۱ـ در ظرفی‌به‌جرم $m_۱$ که توسط فنری با ضریب سختی k آویزان شده است‌از ارتفاع h وزنه‌ای به‌جرم $m_۲$ می‌افتد و در آن باقی می‌ماند. دراثر ضربهٔ وزنه در انتهای ظرف، ظرف شروع به‌نوسان می‌کند. مطلوبست طول نوسانات آن. از مقاومت هوا وتغییرات انرژی داخلی صرف‌نظر می‌گردد.

حل‌ـ درنتیجهٔ‌ضربه وزنه به‌ظرف، ظرف‌سرعتی‌معادل v به خود می‌گیرد که آنرا براساس قانون اصل بقای ضربه می‌توان محاسبه‌کرد. برای دستگاه (وزنه وظرف) داریم:

$$m_۲ v_۱ = (m_۱ + m_۲) v$$

که در آن $v_۱$ سرعتی است‌که وزنه در موقع رسیدن از ارتفاع h به‌کف ظرف به خود می‌گیرد. چون $v_۱ = \sqrt{۲gh}$ بنابراین

$$v = \frac{m_۲}{m_۱ + m_۲} \sqrt{۲gh}$$

قانون‌اصل‌بقای مقدار حرکت‌را برای‌تحول نوسانی می‌نویسیم. دستگاه ما متشکل از ظرف و فنر و وزنه می‌باشد و باید در نظر بگیریم که قبل‌از رسیدن‌وزنه فنر به‌اندازهٔ a ($Ka = m_۱ g$) به علت وجود ظرف کشیده شده است:

$$\frac{Kx^۲}{۲} - \frac{Ka^۲}{۲} = \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)V^۲ + (m_۱ + m_۲)(x - a)g$$

در اینجا x تغییر محل ظرف ووزنه است. در رابطهٔ فوق مقدار v را قرار می‌دهیم:

$$\frac{Kx^۲}{۲} - \frac{Ka^۲}{۲} = \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)\left(\frac{m_۲^۲}{(m_۱ + m_۲)^۲} \cdot ۲gh\right) + (m_۱ + m_۲)(x - a)g.$$

با در نظر گرفتن $a = \frac{m_۱ g}{K}$ معادله را نسبت به x حل‌می‌کنیم.

$$x = \frac{m_۱ + m_۲}{K} \cdot g \pm \sqrt{\frac{m_۲^۲ g^۲}{K^۲} + \frac{۲m_۲^۲ g.h}{(m_۱ + m_۲)k}}$$

جزء اول از رابطه بدست آمده وضع تعادلی را که حول آن نوسانات انجام می‌شود وجزء دوم طول نوسان را نشان می‌دهد.

۲ـ n منبع انرژی با نیروهای محرکهٔ E و مقاومتهای داخلی r بطور دلخواه و با قطبهای دلخواه بطور حلقوی به هم وصل‌شده‌اند. مطلوبست‌اختلاف‌پتانسیل V در دوسریکی‌ازاین‌منابع.

حل‌ـ اختلاف‌پتانسیل‌دردوسریکی‌ازاین‌منابع $V = E - Ir$ است که در آن I شدت جریان داخل حلقه است. فرض کنیم تعداد m ازاین منابع طوری بسته شده باشندکه قطب مثبت آنها در جهت حرکت ما در حلقه قرار گیرند در این صورت نیروی محرکه این منابع منفی وبرابر $(-mE)$ خواهد بود وفرض کنیم $(n - m)$ دیگر طوری باشند که قطب منفی آن در جهت حرکت ما در حلقه‌قرار گیرند. در این صورت‌نیروی‌محرکه آنها مثبت وبرابر $(n - m)E$ خواهد بود. طبق قانون اهم دربارهٔ حلقهٔ بسته می‌توانیم بنویسیم:

$$I = \frac{(n - m)E - mE}{nr} \Longrightarrow V = \frac{۲m}{n} E$$

۳ـ در دسترس ما منبع متناوب با فرکانس ۵۰HZ و ولتاژ ۱۰ ـ ۶ ولت و آمپرمتر قرار دارد. مطلوبست تعیین ظرفیت یك خازن.

حل‌ـ با آمپرمتر شدت جریان گذرنده از حلقه و افت ولتاژ روی خازن را بدست می‌آوریم. سپس مقاومت آن را به ترتیب زیر بدست می‌آوریم:

$$R_c = \frac{V}{I}$$

از فرمول $R_c = \frac{۱}{\omega C}$ رابطهٔ بین ظرفیت‌خازن $C = \frac{۱}{\omega R_c}$ و دیگر پارامترهای معلوم را بدست می‌آوریم. از اینجا

$$C = \frac{۱}{\omega V} = \frac{۱}{۲\pi f V}$$

مسائل برای حل

برای دانش آموزان سال اول نظری و جامع

۱۰۲/۱ـ ترجمهٔ ازفرانسه

مجموعه‌های زیرمفروض است:

$A=\{x|x\in N \text{ و } x<8\}$

$B=\{x|x\in N \text{ و } x\geq 4\}$

$C=\{x|x\in N \text{ و } x<9\}$

$D=\{x|x\in N \text{ و } x>3\}$

$E=\{x|x\in N \text{ و } x<5 \text{ و } x>4\}$

۱) هریك ازاین مجموعه‌ها رابه صورت تفصیلی بنویسید (آنها راباذکر یکایك عضوها مشخص کنید).

۲) مجموعه‌های زیررا مشخص کنید:

$A\cap B$ ، $A\cap E$ ، $B\cup A$

۱۰۲/۲ـ اقتباس ازفرانسه

مجموعه‌های زیرداده شده‌است:

$A=\{x|x \text{ حیوانی چهار پااست}\}$

$B=\{x|x \text{ حیوانی دوپااست}\}$

$C=\{x|x \text{ حیوانی‌است که نام آن بام آغاز می‌شود}\}$

$D=\{\text{میمون، مرغابی، میش، مرغ، کبوتر، موش، شیر}\}$

الف ـ هریك ازمجموعه‌های زیررا مشخص کنید:

$A\cap B$ ، $C\cap D$ ، $B\cap D$ ، $A\cap D$

ب ـ برای مجموعه‌های «الف» نمودار ون ـ اولر رسم کنید.

ج ـ مجموعه‌های زیررا باذکر نام همهٔ عضوهای آنهامشخص کنید:

$E=A\cap C\cap D$ و $F=B\cap G\cap D$ و $E\cup F$

مسائل ترجمهٔ ازروسی توسط مهندس زرگری

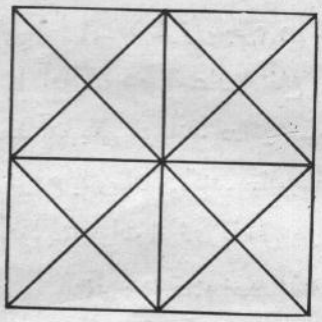
۱۰۲/۳ـ مربعی رسم‌می‌کنیم وآنرا باخطهای موازی‌با ضلعها به ۵×۵ خانه بخش می‌کنیم. اعدادی نسبی‌را درخانه‌های این‌مربع چنان می‌نویسیم که حاصل ضرب عددهای واقع درهر سطرعددی منفی‌است. ثابت کنیدکه حاصل‌ضرب عددهای واقع‌در هرستون نیزعددی منفی‌است.

۱۰۲/۴ـ ماهیگیری هرماهی‌سفیدرا ۳ماهی وهرسه‌بچه ماهی را یك ماهی به حساب می‌آورد. این ماهیگیر در پایان ماهیگیری ۲۴ماهی به حساب می‌گذارد و معلوم می‌شودکه در واقع نیز۲۴ ماهی صید کرده است. در این صید تعداد ماهیهای سفید چقدر بوده است ؟

۱۰۲/۵ـ عدد ۳۹۲ رابرعدد طبیعی a تقسیم واز حاصل a راکم وحاصل رابازبر a تقسیم وباز ازحاصل a راکم‌می‌کنیم. حاصل‌بدست‌آمده را بازبر a تقسیم وازحاصل a راکم می‌کنیم که حاصل a — می‌شود. عدد a را پیداکنید.

۱۰۲/۶ـ چهار مفتول فلزی داریم‌که درازای هرکدام ۹سانتیمتر است. بدون بریدن این‌مفتولها باآنها مکعب‌مستطیلی به بعدهای ۲و۳و۴ سانتیمتر ساخته‌ایم. چگونه؟

۱۰۲/۷ـ درشکل زیر مربعی را به چهار مربع برابر با هم بخش کرده‌وقطرهای هریك ازمربعهای حاصل را رسم کرده‌ایم دراین‌شکل؛



الف ـ چند جفت زاویه‌های دوبه‌دومجاور موجود است؟

ب ـ چند جفت زاویه موجوداست‌که در رأس مشترکند و ضلعهای‌آنها دوبه دوبرهم عمودند.

برای دانش آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

۱۰۲/۸ـ فرستنده: **جوادفیض** ازدانشکدهٔ فنی‌دانشگاه آذرآبادگان

هرگاه داشته باشیم:

$3yz+2y+z+1=0$ و $3xz+2z+x+1=0$

ثابت کنیدکه خواهیم داشت:

$3xy+2x+y+1=0$

۱۰۲/۹ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

درصفحه سه‌خط a وb وm داده شده‌است. خط d راچنان رسم کنید که a رادر A وb رادر B قطع کند بقسمی که m عمود منصف AB باشد.

برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

۱۰۲/۱۰ـ فرستنده: **هاشم حیدرنژاد**

هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{f(x^2)}{[f(x)]^2}=\frac{x+1}{x-1}$$

ساده‌ترین عبارت $f(x)$ چیست؟

۱۰۲/۱۱ـ فرستنده: **جوادفیض**

هرگاه $f(x)=ax^2+2bx+c$ باشد وداشته باشیم:

$ac-b^2\neq 0$ و $axy+b(x+y)+c=0$

الف ـ ثابت کنید که:

$$f(x)f(y)=(ac-b^2)(x-y)^2$$

ب ـ به فرض $F(x)=Ax^2+2Bx+D$ ثابت کنید که:

$$\frac{F(x)}{f(x)}+\frac{F(y)}{f(y)}=\frac{AC-2Bb+Da}{ac-b^2}$$

۱۰۲/۱۲ـ فرستنده: **جواد فیض**

هرگاه داشته باشیم:

$x=a(b^3-c^3)$ و $y=b(c^3-a^3)$ و

$z=c(a^3-b^3)$

ثابت کنید که:

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

۱۰۲/۱۳ـ ترجمهٔ ازفرانسه

ازنقطهٔ O واقع درخارج خط Δ عمود OA و مایلهای OB و OC و OD و... رانسبت به Δ رسم می‌کنیم به‌قسمی که همهٔ مایلها دریك طرف عمود واقع باشند و:

$AB=BC=CD=\dots$

ثابت کنید که زاویه های AOB ، BOC ، COD ، ... به‌ترتیب کوچك می‌شوند.

۱۰۲/۱۴ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

درمثلث متساوی‌الساقین ABC زاویهٔ رأس B به اندازهٔ ۱۰۸ درجه است. دراین‌مثلث BD ارتفاع وارد برAC وAF نیمساز داخلی زاویهٔ A است. ثابت کنید که BD نصف AF است.

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۰۲/۱۵ـ درصفحهٔ مربع ABCD به طول ضلع a نقطهٔ M انتخاب شده‌است بقسمی که:

$$MA^2\cdot MC^2+MB^2\cdot MD^2=a^4$$

فاصلهٔ نقطهٔ M راازمرکز مربع برحسب a بدست‌آورید.

۱۰۲/۱۶ـ برداییره‌ای چهار نقطهٔ A وB وC وD را به‌ترتیب چنان انتخاب می‌کنیم که اندازه‌های کمانهای AB وBC وCD به‌ترتیب ۱۵۰ گراد، $\frac{\pi}{3}$ رادیان و یك قائمه باشد. این نقطه‌ها رابه‌هم وصل‌می‌کنیم. خطهای AB وCD درP وخطهای AC و BD در Q متلاقی می‌شوند. اندازهٔ هریك اززاویه‌های APD وAQD برحسب رادیان چقدراست؟

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۱۰۲/۱۷ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$$

۱۰۲/۱۸ـ از: **کاظم حافظ قرآن**

دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y})=a\\ \frac{1}{y}(\frac{1}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z})=b\\ \frac{1}{z}(\frac{1}{z}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x})=c\end{cases}$$

مثال عددی:

$$a=\frac{19}{6}\ ,\quad b=\frac{23}{12}\ ,\quad c=\frac{17}{18}$$

۱۰۲/۱۹ـ ترجمهٔ: **مهندس زرگری**

هرگاه α وβ وγ اندازه‌های زاویه‌های‌مثلثی برحسب‌رادیان

باشد، ثابت کنید که:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\frac{\pi^2}{3}$$

۱۲۰/۲۰ـ به‌فرض آنکه داشته‌باشیم:

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{a^2}$$

مقدار $S=tg^3x+cotg^3x$ را برحسب a حساب کنید.

۱۰۲/۲۱ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دوصفحهٔ غیرمتوازی PوQ ونقطـهٔ O غیر واقع بر آنها مفروض است. ازO خطی رسم کنید که باصفحهٔ Q موازی‌باشد، صفحهٔ P رادرA قطع کند و طـول OA برابر با مقدار معلوم 1 باشد.

۱۰۲/۲۲ـ ترجمهٔ **داوید ریحان**

$ABCD$ متوازی‌الاضلاعی است که در آن :

$$AD=2AB=20cm$$

وزاویهٔ A به‌اندازهٔ $60°$است. EوFوGبه‌ترتیب وسطهایADوBCوCDوM نقطهٔ‌تلاقیAFوBEاست. صفحهٔ متوازی‌الاضلاع راحولBE تا می‌کنیم تاصفحهٔ ABE برصفحهٔ $BCDE$عمود باشد. مساحت مثلث AMG راحساب کنید.

برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۱۰۲/۲۳ـ فرستنده : **حسین محقق دولت آبادی**
دبیرستان صدراصفهان

هر گاه داشته‌باشیم:

$$af(x)+bf(-x)=cg(x)$$

ثابت کنید که اگر $g(x)$ تابعی‌فرد‌باشد، $f(x)$نیز تابع فرداست.
aوbوc عددهای حقیقی‌اند.

۱۰۲/۲۴ـ فرستنده: **عباس جزء امیر سیافی**

ثابت کنید که عبارت زیر مکعب کامل‌است:

$$A=\sin 3x+\cos 3x+2\sin^3 x-2\cos^3 x$$

برای دانش‌آموزان کلاس ششم‌ریاضی

۱۰۲/۲۵ـ از **جواد فیض**

ثابت کنید که عبارت:

$$A=nx^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+(n+2)x-n$$

برعبارت $B=(x-1)^3$ بخش‌پذیر است.

۱۰۲/۲۶ـ فرستنده: **مناف شریفزاده**

تابع زیررا درنظر می‌گیریم:

$$y=\frac{1}{\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}}$$

مقدار aرا برحسب y'وy''وy''' مشتقهای متوالی این‌تابع‌حساب کنید.

۱۰۲/۲۷ـ از: **داوید ریحان**

معادلهٔ زیررا درنظر می‌گیریم که در آن xوy متغیرو m پارامتر است:

$$m^2x^3+y^3+m(1-3mxy)=0$$

ثابت کنید که به‌ازای هر مقدار معین m نمایش هندسی‌معادله در ربع اول محورهای مختصات منحصربه یك نقطهٔ A است. معادلهٔ مکان A را وقتی m تغییر کند بدست آورید.

۱۰۲/۲۸ـ فرستنده: **محمد معینی**

هر گاه $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$ باشد نتیجه بگیرید که:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}$$

۱۰۲/۲۹ـ فرستنده **عباس جزء امیر سیافی**

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\sin^4 2x+\cos^4 2x+\sin^4 3x+\cos^4 3x=2$$

۱۰۲/۳۰ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

دردستگاه عددنویسی به‌چه مبنائی عددهای n رقمی وجود داردکه باحاصل‌ضرب رقمهایشان برابرند.

۱۰۲/۳۱ـ فرستنده: **قوام نحوی**

عدد چهاررقمی $\overline{mcdu}$ راپیدا کنید بقسمی که:

$$\overline{mcdu}=(\overline{mc})^3+(\overline{du})^3$$

۱۰۲/۳۲ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

ازرأسA ازمتوازی‌الاضلاع $ABCD$ و در خارج صفحهٔ آن خط AM را می‌گذرانیم وعمودهای BB_1 وCC_1 وDD_1 را براین‌خط فرود می‌آوریم. ثابت کنید که پاره خطهای BB_1 وCC_1 و DD_1 می‌توانند ضلعهای مثلثی‌باشند.

۱۰۲/۳۳ـ ترجمهٔ **مهندس‌زرگری**

دومثلث متساوی‌الاضلاع ABC و AB_1C_1 در رأس A مشترکند. اندازهٔ زاویهٔ بین دوخط BB_1وCC_1 چقدراست؟

مسائل گوناگون

ترجمهٔ مهندس زرگری

۱۰۲/۳۴ـ همهٔ عدد های ازیك تا ۱۰۱ را پشت سرهم

نوشته‌ایم. عدد حاصل آیا اول‌است یاغیراول. اگرغیر اول است آیا مربع کامل است؟

۱۰۲/۳۵ـ هفده شهر با یکی از سه‌نـوع راه : مالرو، ماشین‌رو وراه‌آهن باهمدیگر ارتباط دارند، بقسمی که هرسه‌شهر دلخواه باسه‌نوع راه مختلف به هم‌مربوطند. ثابت کنید که اقلا سه شهریافت می‌شود کـه هر جهانگردی بدون تغییر وسیلهٔ نقلیه‌اش (یعنی بدون تغییر نوع‌راه) می‌تواند به هرسه شهر مسافرت کند.

۱۰۲/۳۶ـ دومتحرك ازدو نقطهٔ A وB در یك لحظه به سمت یکدیگر حـرکت می‌کنندواین‌دو در نقطهٔ C همـدیگر را ملاقات کرده به‌راه خود ادامه می‌دهند. متحرك دوم پس‌ازرسیدن به A برگشته درD وسط AB به متحرك اولی می‌رسد. متحرك دومی پس‌ازرسیدن به B برگشته در E برای سومین‌بار اولی را ملاقات می‌کند؛

اولا نقطه‌های C وE راروی AB مشخص کنید.

ثانیاً اگردو متحرك بازهم به‌همان ترتیب به‌حرکت خود ادامه دهند، درچه نقطه‌هایی یکدیگررا ملاقات می‌کنند؟

۱۰۲/۳۷ـ دایره‌ای رسم‌شده امامرکز آن مشخص‌نیست. بااستفادهٔ فقط ازخط‌کشی که پهنای آن بیش‌از قطردایره نیست؛

۱ـ مرکز دایره را مشخص کنید.

۲ـ 2^n ضلعی منتظمی دردایره محاط کنید.

۱۰۲/۳۸ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که زاویهٔ C قائمه است ارتفاع CD ونیمسازهای زاویه‌های ACD وBCD رارسم می‌کنیم که وترAB رادر E وF قطع می‌کنند. اگر S مساحت مثلث ABC وS۱ مساحت مثلث CEF باشد، ثابت کنید که‌نسبت S بر S۱ برابربا $1+\sqrt{2}$ است.

۱۰۲/۳۹ـ درچهار ضلعی‌محدب ABCD دوقطرمنصف یکدیگر نیستند. آیا نقطهٔ O وجود دارد بقسمی که چهار مثلث OAB وOBC وOCD وODA معادل باشند؟

۱۰۲/۴۰ـ سه‌کره دوبه دوبریکدیگر مماسند وبرصفحهٔ مثلثABC نیزدرنقطه‌های A وB وC مماس می‌باشند. اندازه‌های شعاعهای این‌کره‌ها را برحسب a وb وc طولهای ضلعهای مثلث ABC بدست‌آورید.

یك مسئله ترجمهٔ: جعفر آقایانی چاوشی

۱۰۲/۴۱ـ هرگاه a وb وc طولهای ضلعهای یك مثلث باشند به‌فرض $a<b<c$ ماکسیمـم ومی‌نیمم A از رابطهٔ زیر را بدست آورید:

$$A=[\max(\frac{a}{b} \text{ و } \frac{b}{c} \text{ و } \frac{c}{a})][\min(\frac{a}{b} \text{ و } \frac{b}{c} \text{ و } \frac{c}{a})]$$

تستهای ریاضی

در حدود برنامهٔ سال اول نظری

۱۰۲/۴۲ـ کدامیك ازکسرهای زیربه‌عدد یك نزدیکتر است:

الف‌ـ $\frac{۱۰}{۹}$ ب‌ـ $\frac{۵}{۷}$ ج‌ـ $\frac{۷}{۸}$ د‌ـ $\frac{۱۱}{۱۰}$

۱۰۲/۴۳ـ کسری معادل باکسر $\frac{۳}{۴}$ است. ازصورت‌این کسریك واحدکم می‌کنیم وبرمخرج آن دو واحد می‌افزاییم؛ کسر حاصل معادل باکسر $\frac{۲}{۴}$ می‌گردد. صورت‌کسر مفروض کدامیك ازعددهای زیراست:

الف‌ـ ۲۰ ب‌ـ ۲۱ ج‌ـ ۲۸ د‌ـ ۳۰

۱۰۲/۴۴ـ هرگاه a عددی حقیقی و n عـددی طبیعی باشد، نامساوی $a^n>a$ چه موقع برقرار است:

الف‌ـ همواره.

ب‌ـ وقتی‌که $a>۰$ باشد.

ج‌ـ وقتی‌که $a<۱$ باشد.

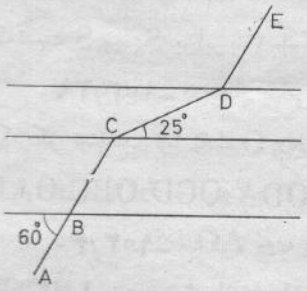
د‌ـ وقتی‌که $a>۱$ باشد.

۱۰۲/۴۵ـ درعددهای گـویای زیر رقمهای مرتبه‌های اعشاری نوشته شده وبه جای رقمهای مرتبه‌های صحیح چند نقطه گذارده شده‌است. کدامیك ازاین عددها مجذورکامل یك‌عدد گویا نمی‌تواند باشد:

الف- ۰۰۰۰/۲۵ ب- ۰۰۰/۸۴

ج- ۰۰۰۰/۶۲۵۰ د- ۰۰۰/۰۱۴۴

۱۰۲/۴۶- درشکل‌زیرسه خط Δ_1وΔ_2وΔ_3 باهم‌موازیند ودوخط AC وDE نیز باهم موازیند. باتوجه به‌اندازه‌های‌زاویه‌هایی که نوشته شده، اندازهٔ زاویهٔ CDE برابراست با:

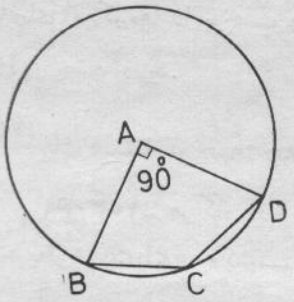


الف- ۸۵°

ب- ۱۳۵° ج- ۱۴۵°

د- ۲۱۵°

۱۰۲/۴۷- در شکل روبرو A مرکز دایره‌وزاویهٔ BAD قائمه است. اندازهٔ‌زاویهٔ BCD برابراست‌با:



الف- ۹۰°

ب- ۱۳۵° ج- ۲۷۰°

د- ۱۱۰°

۱۰۲/۴۸- اگر داشته‌باشیم:

$A=\{۱،۳،۵،۷،۹\}$ و $B=\{۳،۶،۹،۱۲\}$

دراین‌صورت $A\cap B$ برابراست‌با:

الف- $\{۳،۹\}$ ب- $\{۱،۳،۵،۶،۷،۹،۱۲\}$

ج- $\{۱،۵،۶،۷،۱۲\}$ د- $\emptyset$

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۱۰۲/۴۹- به فرض آنکه $f(x)=ax+b$ باشد، $ff(x)$ نسبت به x:

الف- سه جمله‌ای درجهٔ دوم‌است.

ب- سه جمله‌ای درجهٔ اول‌است.

ج- دوجمله‌ای درجهٔ اول است.

د- از درجهٔ دوم‌است.

۱۰۲/۵۰- حاصل عبارت زیرنسبت به x‌وy:

$$۲(x-y)^۲+۳(x+y)^۲$$

الف- چند جمله‌ای‌است متجانس وغیرمتقارن.

ب- چند جمله‌ای است متقارن وغیرمتجانس.

ج- چند جمله‌ای است غیرمتقارن وغیرمتجانس

د- چند جمله‌ای است متقارن ومتجانس

۱۰۲/۵۱- اگرعبارت $f(x)$ متحد باصفر وaعددحقیقی باشد دراین‌صورت $f(a)$:

الف- مثبت است ب- منفی است.

ج- صفر است د- مخالف صفراست.

۱۰۲/۵۲- تساوی $۴^۳=۶۴$ هم ارزاست باتساوی:

الف- $log_۴۶۴=۳$ ب- $log_{۶۴}۴=۳$

ج- $log_۳۶۴=۴$ د- $log_۳۴=۶۴$

۱۰۲/۵۳- حاصل‌عبارت زیر برابراست با:

$$log(xy)+log(x)-logy$$

الف- $logx^۲$ ب- $log(xy)$

ج- $log۲x$ د- $log۲+logx$

۱۰۲/۵۴- اندازهٔ یکی‌از زاویه‌های خارجی پنج ضلعی منتظم برابراست با:

الف- ۶۰° ب- ۷۲° ج- ۷۵° د- ۱۰۸°

۱۰۲/۵۵- مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی یك‌چند ضلعی‌محدب ۱۰۸۰° است. تعداد ضلعهای این چند ضلعی برابر است‌با:

الف- ۱۰ ب- ۶ ج- ۸ د- ۱۲

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۰۲/۵۶- معادلهٔ درجهٔ دوم زیرمفروض است:

$$x^۲+(a-۱)x+a+۱=۰$$

به‌فرض‌آنکه x' و x'' ریشه‌های این معادله باشند، معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل می‌دهیم‌که ریشه‌هایش $x'+x''$ و $x'x''$ باشد. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ اخیربرابر است‌با:

الف- $۱-a^۲$ ب- $۱-a^۲$ ج- ۲ د- $۲a$

۱۰۲/۵۷- برمحور افقی $x'x$ به‌مبدأ O که‌جهت‌مثبت آن ازچپ به راست است، نقطهٔ A به‌طول $۳a$ ونقطهٔ B به‌طول a را درنظر می‌گیریم. به‌فرض $a\neq۰$ کدامیك از حکمهای‌زیر غلط است:

الف- هرچه باشد a، نقطهٔ B بین O وA واقع است.

ب- هرچه باشد a، نقطهٔ A سمت راست نقطهٔ B واقع است.

ج ـ ممکن است که A سمت‌چپ B باشد.

د ـ ممکن است که A سمت راست B باشد.

۱۰۲/۵۸ـ قرینهٔ نقطهٔ (۳ ـ و۴) نسبت به‌محور $x'x$ بر قرینهٔ کدامیك از نقطه‌های زیر نسبت به محور $y'y$ منطبق است:

الف ـ (۳ ـ و۴ ـ)　　ب ـ (۳و۴ ـ)

ج ـ (۳و۴)　　د ـ (۳ ـ و۴)

۱۰۲/۵۹ـ اندازهٔ قوسی ازدایرهٔ بشعاع ۵سانتیمتر ۸۰ گراد است. طول این‌قوس برحسب سانتیمتر برابر است‌با:

الف ـ 2π　　ب ـ π　　ج ـ ۲　　د ـ ۵

۱۰۲/۶۰ـ مجموع اندازه‌های دوزاویه ازمثلثی‌برحسب رادیان $\frac{5\pi}{12}$ است. مقدارکسینوس زاویهٔ سوم ازاین مثلث:

الف ـ برابر یك‌است.　　ب ـ صفراست.

ج ـ مثبت است.　　د ـ منفی است.

۱۰۲/۶۱ـ دورأس C وD ازمتوازی‌الاضلاع ABCD درصفحهٔ P ودورأس A وB ازآن درخارج‌صفحهٔ P واقع‌است. کدامیك ازحکمهای زیرغلط است:

الف ـ A وB دریك طرف صفحهٔ P واقعند.

ب ـ خط AB باصفحهٔ P موازی است.

ج ـ خط AB باهرخط ازصفحهٔ P که موازی CD نباشد متنافر است

د ـ خط AB باهمهٔ خطهای صفحهٔ P موازی‌است.

۱۰۲/۶۲ـ دوخط D و Δ نسبت به یکدیگر متنافرند. صفحهٔ P رابرD وموازی باΔ، وصفحهٔ Q رابر Δ و موازی با D می‌گذرانیم؛

الف ـ دوصفحهٔ P وQ متقاطعند.

ب ـ همهٔ خطهای دوصفحهٔ P وQ نسبت به‌هم‌متنافرند.

ج ـ دو صفحهٔ P وQ متوازیند.

د ـ دوصفحهٔ P وQ فصل مشترکی دارندکه دو خط D وΔ راقطع می‌کند.

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۲/۶۳ـ هریك ازدوتابع $f(x)$ و$g(x)$ فردمی‌باشد. دراین صورت $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ تابعی‌است:

الف ـ فرد　　ب ـ زوج.

ج ـ به‌ازای مقادیرمثبت x فرد.

د ـ به‌ازای مقادیرمثبت x زوج.

۱۰۳/۶۴ـ اگر تابعی در ازای $x=x_0$ ماکسیمم یا می‌نیمم باشد، مشتق این‌تابع درازای $x=x_0$

الف ـ حتماً صفراست.

ب ـ حتماً معین‌است.

ج ـ ممکن است‌که صفرباشد.

د ـ غیرممکن است‌که صفر نباشد.

۱۰۲/۶۵ـ منحنی‌نمایش تابع $f(x)$ درنقطهٔ به طول a برخطی‌موازی با $x'x$ مماس است. تابع y درازای $x=a$:

الف ـ مسلماً ماکسیمم یامی‌نیمم است.

ب ـ مسلماً نه‌ماکسیمم ونه می‌نیمم‌است.

ج ـ به‌ازای هرمقدار دلخواه $b\neq a$ همواره:

$$f(b)\neq f(a)$$

د ـ ممکن است‌که نه‌ماکسیمم باشد ونه می‌نیمم.

۱۰۲/۶۶ـ اگر تساوی یا نا مساوی $\sin 2x \geqslant \sin x$ برقرار باشد به‌فرض $\frac{1}{2} < \cos x \geqslant 1$، مقدار $\sin x$:

الف ـ مثبت‌است　　ب ـ منفی یاصفراست.

ج ـ مثبت یاصفراست　　د ـ منفی‌است.

۱۰۲/۶۷ـ برای آنکه $tgx=cotgx$ باشد لازم و کافی است که:

الف ـ $\sin x=\cos x$　　ب ـ $\sin|x|=\cos|x|$

ج ـ $|\sin x|=\cos|x|$　　د ـ $\sin x=\cos|x|$

۱۰۲/۶۸ـ ماکسیمم نسبت عددی n رقمی بر مجموع رقمهایش برابراست با:

الف ـ 10^{n-1}　　ب ـ 10^n-1

ج ـ 10^n　　د ـ $10^{n-1}-1$

۱۰۲/۶۹ـ چندعدد دورقمی برابربا مجموع دو عدد دو رقمی وجود دارد؟

الف ـ ۷۹عدد　　ب ـ ۸۰عدد　　ج ـ ۹۹عدد　　د ـ ۹۸عدد

۱۰۲/۷۰ـ دومثلث متساوی‌الاضلاع ABC وADE در رأس A مشترکندو $AB<AD$ است. دراین‌صورت:

الف ـ $BD<CE$　　ب ـ $BD>CE$

ج ـ $AD\perp CE$　　د ـ $BD=CE$

مسائل پانزدهمین المپیاد جهانی ریاضیات

ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری

شرکت‌کنندگان در این المپیاد به دوگروه بخش شده‌اند و برای هر گروه شش مسئله داده شده است. کشور های شرکت کنندهٔ دراین المپیاد وامتیازهایی که هرکدام بدست آورده‌اند به شرح جدول زیراست:

شمارهٔ مسئله‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
ماکسیمم امتیاز ممکن برای هرمسئله	۷	۷	۷	۷	۷	۷	۴۲
استرالیا	۱۵	۲۳	۴۸	۴۳	۱۵	۰	۱۴۴
بلغارستان	۱۶	۶	۳۰	۱۹	۲۵	۰	۹۶
بریتانیای کبیر	۱۷	۳۰	۳۸	۳۰	۲۴	۲۵	۱۶۴
مجارستان	۳۴	۳۱	۵۰	۴۴	۴۵	۱۱	۲۱۵
آلمان دموکراتیک	۳۹	۱۸	۳۱	۴۶	۴۰	۱۴	۱۸۸
کوبا	۹	۶	۳	۱۱	۱۳	۰	۴۲
مغولستان	۱۰	۲۱	۱۲	۱۲	۱۰	۰	۶۵
هلند	۹	۳۳	۲	۲۷	۱۷	۸	۹۶
لهستان	۳۵	۳۶	۱۶	۳۷	۴۲	۸	۱۷۴
رومانی	۳۰	۱۸	۴۳	۲۹	۱۳	۸	۱۴۱
اتحاد جماهیرشوروی	۳۵	۴۱	۵۳	۴۷	۴۸	۳۰	۲۵۴
فنلاند	۵	۳۱	۱۶	۱۷	۱۷	۰	۸۶
فرانسه	۱۸	۱۳	۳۶	۲۸	۴۲	۱۶	۱۵۳
چکوسلواکی	۱۶	۱۱	۵۷	۳۱	۲۷	۷	۱۴۹
سوئد	۱۴	۱۲	۱۴	۲۸	۲۱	۱۰	۹۹
یوگوسلاوی	۲۰	۶	۵۰	۳۷	۲۰	۴	۱۹۷

مسائل گروه یك

۱ـ نقطهٔ O روی‌خط l قرارگرفته و $\overrightarrow{OP_1}$ ، $\overrightarrow{OP_2}$ و .... و $\overrightarrow{OP_n}$ بردارهای یکه‌هستند. نقاط P_1، P_2، ...، P_n در صفحه‌ای که خط l درآن قراردارد، واقع هستند. و همگی دریك طرف خط l قرارگرفته‌اند. ثابت کنید، که هرگاه n فـردباشد دراین صورت:

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\dots+\overrightarrow{OP_n}|\geq 1$$

مقصود از $|\overrightarrow{OM}|$ طول بردار $\overrightarrow{OM}$ است.

(ازچکوسلواکی)

۲ـ ثابت کنیدآیا مجموعه‌ای متناهی مانندM ازنقاط در فضا وغیرواقع بریك صفحه وجـود دارد بطوری‌که برای هر دو نقطهٔ دلخواه A وB متعلق بهM دونقطهٔ دیگرمانند C وD متعلق بهM موجود باشندکه خطوط AB وCD موازی وغیر منطبق برهم باشند؟ (ازلهستان)

۳ـ مطلوبست‌مینیمم‌مقدار a^2+b^2 کهدرآن a وb اعدادی حقیقی‌هستندکه برای‌آنها معادلهٔ زیرریشهٔ حقیقی‌دارد:

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

(ازسوئد)

۴ـ سرباز باید از نبـودن مین در سطحی بـه شکل مثلث متساوی‌الاضلاع مطمئن گردد. شعاع‌عمل‌وسیلهٔ کشف مین‌برابراست باارتفاع مثلث. سربازکه ازیك‌رأس‌مثلث شروع بحرکت‌می‌کند چه مسیری راباید انتخاب کند، تا با طی حداقل مسافت ممکنه مأموریت خود را انجام دهد.

(از یوگسلاوی)

۵ـ مجموعهٔ غیر خالی G ازتوابع ثابت غیر متساوی از متغیر حقیقی x به صورت $f(x)=ax+b$ مفروض است، که در آن a و b اعداد حقیقی می‌باشند. ثابت کنید که G دارای خواص زیر است:

۱) هرگاه $g\in G$ و f باشد در این صورت $g*f\in G$ خواهد بود که در آن $(g*f)(x)=g(f(x))$

۲) هرگاه $f\in G$ باشد که در آن $f(x)=ax+b$، این‌صورت تابع معکوس $f^{-1}\in G$ وجود دارد که در آن

$$f^{-1}(x)=\frac{x-b}{d}$$

۳) برای هر $f\in G$ عددحقیقی k وجود دارد بطوری‌که

$$f(k)=k$$

(از لهستان)

۶ـ n عدد مثبت $a_1,\dots,a_n$ و عدد حقیقی q به شرط $0<q<1$ مفروض است. مطلوبست n عدد حقیقی مانند: $b_1,b_2,\dots,b_n$ که برای آنها:

الف) به‌ازای کلیهٔ مقادیر k از یك تا n داشته باشیم:

$$a_k<b_k$$

ب) به‌ازای کلیهٔ مقادیر k ازیك تا $n-1$ داشته‌باشیم:

$$q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q}$$

ج)

$$b_1+b_2+\dots+b_n<\frac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\dots+a_n)$$

(از سوئد)

مسائل گروه دو

۱ـ فرض‌کنیم چهار وجهی $ABCD$ در کرهٔ S محاط باشد. مطلوبست مکان هندسی نقاط P واقع در داخل کره که برای آنها تساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{AP}{PA_1}+\frac{BP}{PB_1}+\frac{CP}{PC_1}=4$$

که در آن A_1,B_1,C_1,D_1 نقاط تقاطع خطوط AP، BP، CP و DP با کره می‌باشند.

(از بلغارستان)

۲ـ مطلوبست کرهٔ با شعاع ماکسیمم که بتواند در چهار وجهی که کلیهٔ ارتفاعهایش بزرگتر یا مساوی واحد است محاط شود.

(از یوگسلاوی)

۳ـ P مجموعه‌ای است از هفت عدد اول مختلف و C مجموعه‌ای است از ۲۸ عدد غیر اول، که هریك از آنها برابر حاصلضرب دو عدد (متساوی یا متفاوت) از مجموعهٔ P می‌باشد. مجموعهٔ C را به‌هفت زیر مجموعهٔ مختلف وغیرمتقاطع که هریك متشکل از چهار عدد است تقسیم می‌کنیم بقسمی که هریك‌از این‌اعداد دارای‌مقسوم‌علیه اول‌مشترکی بادیگر اعداد و حداقل با دو عدد از سه عدد دیگر همان مجموعه می‌باشد. چنین تجزیهٔ مجموعهٔ C را به چند طریق می‌توان انجام داد؟

(از بریتانیای‌کبیر)

۴ـ ثابت‌کنید، که دقیقاً $\binom{k}{\left[\frac{k}{2}\right]}$ سری $a_1,a_2,\dots$ و a_{k+1} از اعداد صحیح مثبت موجود است که:

$$a_1=0,|a_i-a_{i+1}|=1\ ;\ i=1,2,\dots,k$$

($\left[\frac{k}{2}\right]$ نمایش بزرگترین عدد صحیح مساوی یا کوچکتر از $\frac{k}{2}$ است)

(از رومانی)

۵ـ فرض‌کنیم Ox و Oy و Oz سه نیم خط و G نقطه‌ای در داخل کنج سه وجهی $Oxyz$ باشد. صفحهٔ ماربر G را در نظر می‌گیریم که Ox و Oy و Oz را به‌ترتیب در نقاط A و B و C قطع کند. این صفحه را چگونه عبوردهیم، که حجم چهاروجهی $OABC$ ماکسیمم گردد؟

(از رومانی)

۶ـ کرهٔ K مفروض‌است. مطلوبست مکان هندسی رأس A از متوازی‌الاضلاع $ABCD$، که برای آن قطر $AC\leq BD$ بوده وبه علاوه قطر BD تماماً در داخل کرهٔ K قرار گیرد.

مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث اول ، سال تحصیلی ۵۲ ـ ۱۳۵۳ (آذر ۱۳۵۲)

کلاس چهارم ریاضی

جبر

دبیرستان ایرانشهر یزد

دبیر : سالور ـ فرستنده: فرید قدرت

* عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$x^{۱۵}+x^{۳}+۱$$

* کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{۱}{\sqrt[۷]{(\sqrt{x}+\sqrt[۳]{y})^{۳}}}$$

دبیرستان آموزگار اصطهبانات

دبیر : سجادی

* مطلوبست محاسبهٔ a و b به‌قسمی که عبارت:

$$f(x)=a(x-۲)^{۲n}+b(x-۱)^{n}-۱$$

برعبارت $x^{۲}-۳x+۲$ قابل قسمت باشد.

* اگر داشته باشیم :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{۱}{k}$$

مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{۱}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a'}+\sqrt{b'}+\sqrt{c'}}$$

گروه فرهنگی دکتر هشترودی

دبیر: مقدم، مجمریان ـ فرستنده: کمال عرفانی

* اگر $x^{۲}=x+۱$ باشد، ثابت کنید $x^{۵}=۵x+۳$

* مطلوبست A و B و C بطوری که داشته باشیم :

$$\frac{۲}{(x-۱)(x^{۲}+x-۴)}\equiv\frac{Ax+B}{x^{۲}+x-۴}+\frac{C}{x-۱}$$

* $f(x)=(x+۱)^{m}$ مفروض است. اولا m را چنان تعیین کنید که مجموع ضرایب بسط برابر با ۱۲۸ باشد. ثانیاً اگر در بسط بالا ضریب جملهٔ ششم باضریب جملهٔ سوم برابر باشد مطلوبست مقدار m.

گروه فرهنگی رازی شیراز

دبیر : جواد پور ـ فرستنده : غلامرضا سراجی

* مطلوبست شمارهٔ جملهٔ از بسط دوجمله‌ای زیر که پس‌از ساده کردن شامل $x^{۵}$ باشد (بدون بسط عبارت) :

$$(x\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})^{۷}$$

* با فرض اینکه $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$ باشد مطلوبست محاسبهٔ :

$$\underbrace{ff\dots f(x)}_{\text{بار n}}$$

حساب

دبیرستان ایرانشهر یزد

دبیر : نبوی زاده ـ فرستنده : فرید قدرت

* درستی رابطهٔ زیرا ثابت کنید :

$$\left(\sqrt[5]{16}\right)^{5\log_4 3}+\left(\sqrt[3]{25}\right)^{\log_5 8}=13$$

* حاصل ضرب سه عدد که تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند برابر ۲۱۶ و مجموع مربعات آن اعداد برابر ۳۶۴ است. این سه عدد را پیدا کنید.

دبیرستان بزرگمهر تبریز

دبیر: سعید فرشاد

* مجموع یك تصاعد عددی همواره برابر n^2 است. آن تصاعد را پیدا کنید.

* معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$5^{\log_2 x}+x^{\log_2 5}=125$$

دبیرستان حبیب‌الله آموزگار اصطهبانات

دبیر : احمد سجادی

* اگر x و y و z تشکیل تصاعد هندسی بدهند ثابت کنید :

$$x^2y^2z^2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)=x^3+y^3+z^3$$

* دریك تصاعد هندسی با قدر نسبت ۲ حاصل ضرب ۱۵ جملهٔ اول برابر 2^{150} می‌باشد. جملهٔ اول تصاعد را بدست آورید.

گروه فرهنگی دکتر هشترودی

دبیر: پرورش ـ فرستنده : کمال عرفانی

* مجموع جملات اول و آخر یك تصاعد عددی که سیزده جمله‌دارد برابر ۵۷ است. در صورتی که x^2+5 و $2x+44$ جملات پنجم و نهم آن باشد پیدا کنید اولا x را. ثانیاً اگر اعداد ۹ و ۴۸ جمله‌های پنجم و نهم یك تصاعد عددی باشند جملهٔ سوم را تعیین کنید.

* حاصل جمع مجموع زیر را بدست آورید :

$$A=(\alpha+\frac{1}{\alpha})^2+(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2})^2+\ldots+(\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n})^2$$

دبیرستان شاهدخت تبریز

دبیر : کارگر نژاد ـ فرستنده : صفورا امیکچیان

* از رابطهٔ زیر x را بدست آورید :

$$\log x=\frac{1}{2}\log a+\frac{2}{3}\log b+2\operatorname{colog} c+\frac{1}{3}\operatorname{colog} d$$

* معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1}\times\left(\frac{8}{27}\right)^{x}=\frac{16}{81}$$

دبیرستان فیوضات مشهد

دبیر : نیرومند ـ فرستنده: احمدی تیغ‌چی

* هرگاه $\log_{30}5=a$ و $\log_{30}6=b$ باشد مطلوبست تعیین $\log_{8}45$ برحسب a و b

* معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\log_{3x}81\times\log_{x}3=\log_{\sqrt[4]{3x}}3$$

کلاس پنجم ریاضی

جبر

دبیرستان انصاری آبادان

دبیر: اشرف ـ فرستنده : محسن خطیبی

دسته خطوط زیر مفروض است:

$$\alpha(x+y+4)+\beta(x-2y-3)=0$$

ثابت کنید ازمیان این خطوط فقط یك خط وجود دارد که به‌فاصلهٔ $\sqrt{10}$ از نقطهٔ $P(2و-3)$ است. معادلهٔ این خط را بنویسید.

گروه فرهنگی خوارزمی

دبیر: قاسملو ـ فرستنده: سیدعلی‌اکبر ریاضی

* معادلهٔ دو ضلع مثلث ABC عبارتند از

$$AB:\ y=-5x+22$$

$$AC:\ y=x+4$$

و نقطهٔ $O'(\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{3})$ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد. مختصات سه رأس مثلث را تعیین کنید.

* خط متغیر D به معادلهٔ زیر مفروض است:

$$2(2m+1)x-(3m+1)y-12=0$$

اولا ثابت کنید که درازاء جمیع مقادیر m خط D بریك نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

ثانیاً فاصله‌مبدأ مختصات‌را ازخط D برحسب m حساب کنید و m را چنان پیداکنید که این فاصله ماکسیمم باشد و مقدار آنرا بیابید.

دبیرستان رازی شیراز

دبیر : جوادپور ـ فرستنده: غلامرضا سراجی

*مختصات مرکز وشعاع دایره‌ای را تعیین کنید که بر دو

خط $y+x-5=0$ و $2y=-2x-9$ مماس بوده و مرکزش برروی خط $y-2x+3=0$ باشد.

* نمایش هندسی تابع زیر را رسم کنید :

$$|y+x-2|+|y-2x+1|=6$$

* روی یك محور $x'x$ پنج نقطهٔ A و B و C و D و E چنان انتخاب شده که رابطهٔ زیر برقرار می باشد:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{EA}}+\frac{\overline{DB}}{\overline{EB}}+\frac{\overline{DC}}{\overline{EC}}=0$$

ثابت کنید که

$$\frac{3}{\overline{ED}}=\frac{1}{\overline{EA}}+\frac{1}{\overline{EB}}+\frac{1}{\overline{EC}}$$

دبیرستان رهنما

دبیر: سیدین ـ فرستنده : کامـران کردی

مکان نقطهٔ $M(x,y)$ را درصفحهٔ دومحور بیابید برای آنکه معادلهٔ :

$$z^2-2xz+2x+y=0$$

دوریشه متحد العلامه داشته باشد .

دبیرستانهای سعدی و ادب

دبیر : موحدی ـ فرستنده : مرتضی آریا

معادلات اضلاع مثلثی عبارتند از :

$$(CB) : 3x+y=16$$

$$(AB) : x-3y+8=0$$

$$(AC) : x+2y=2$$

بـدون تعیین مختصات رأس A معادلـهٔ میانهٔ AM رابـدست آورید .

دبیرستان شهریار قلهك

دبیر : قمیصی ـ فرستنده : حمیدی

* نقاط $A(m+2,2m+1)$ و $B(4m-1,5m-2)$ و $C(-m+4,3m)$ رئوس مثلثی هستند ؛

اولا تحقیق کنید کـه با تغییر پارامتر m مثلث ABC متشابه با خود باقی می‌ماند (مثلثهائی کـه با تغییر پارامتر m بدست می‌آیند همگی باهم مشابه‌اند).

ثانیاً معین کنید که به‌ازاء چـه مقادیر m مثلث ABC نمی‌تواند وجود داشته باشد.

ثالثاً m را چنان معین کنید که‌محیط مثلث ABC برابر $2(3\sqrt{2}+\sqrt{29}+\sqrt{5})$ شود.

رابعاً با تغییر پارامتر m معادلـهٔ مکانی هندسی مرکز ثقل مثلث ABC را بدست آورید.

* دسته خط (D) به معادلهٔ:

$$m(1-m)y+(m^2-m+2)x-2=0$$

مفروض است است . (m پارامتر متغیر است)

اولا تحقیق کنید که این‌دسته خط با تغییر پارامتر m از نقطهٔ ثابتی که مختصات آنرا تعیین خواهید کرد می گذرند.

ثانیاً مشخص کنید که ازچه نقاطی‌ازصفحهٔ دستگاه‌مختصات هیچ خطی از دسته خط مفروض عبور نمی‌کند.

*معادلات میانه‌های مثلثی عبارتند از :

$$6y^3+xy^2-20x^2y-12x^3=0$$

اگر طول یکی از رئوس این مثلث ۱ بوده و عرض همان رأس مثبت باشد مختصات رئوس مثلث را بدست آورید.

مثلثات

دبیرستان انصاری آبادان

دبیر : اشرف ـ فرستنده : محسن خطیبی

*به‌ازاء چه‌مقدار x عبارت $12\sin x-9\sin x$ ماکزیمم می‌شود.

* اگر داشته باشیم

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=b\\ \sin x+\sin y=a\end{cases}$$

ثابت کنید :

$$tg x+tg y=\frac{8ab}{(a^2+b^2)^2-4a^2}$$

گروه فرهنگی بابکان

* زاویهٔ θ را از تساویهای زیر حذف کنید:

$$\begin{cases}\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1\\ \frac{x}{a}\sin\theta-\frac{y}{b}\cos\theta=1\end{cases}$$

* صحت اتحاد زیررا ثابت کنید :

$$\frac{2\sin x\cos 3x}{\sin 2x}=2\cos 2x-1$$

گروه فرهنگی خوارزمی

دبیر : صداقت‌کیش ـ فرستندگان : علی اکبر ریاضی ، احمد صبوری‌جهرمی

* اگر تساوی زیربرقرار باشد ثابت‌کنید هرطرف‌تساوی

برابر است با :

$$|\sin x \sin y \sin z|$$

$$(1-\cos x)(1-\cos y)(1-\cos z)=$$

$$=(1+\cos x)(1+\cos y)(1+\cos z)$$

*درصورتی که $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ باشد مطلوبست محاسبهٔ

$$A=\frac{\sin\frac{25\pi}{8}-\cos\frac{13\pi}{8}+tg(-\frac{41\pi}{8})}{\cos(-\frac{17\pi}{8})+cotg\frac{27\pi}{8}+\sin\frac{29\pi}{8}}$$

دبیرستان رازی شیراز

دبیر : جوادپور ـ فرستنده : غلامرضاسراجی

* اگر A وB وC زوایای حاده بمجموع $\frac{\pi}{2}$ باشندماکزیمم عبارت $y=tgA\,tgB\,tgC$ راتعیین کنید.

* اگر درمثلثی tgA و tgB و tgC تصاعد عددی تشکیل دهند ثابت کنید $tgA\,tgC=3$ می‌باشد.

* جوابهای کلی معادلهٔ $1+tg^2\frac{x}{5}=\cos x$ را تعیین کنید .

* مطلوبست محاسبهٔ x ازرابطهٔ زیردرصورتی که $\sin x\geqslant 0$ باشد:

$$1^{\sin x}+(1+2)^{\sin x}+(1+2+3)^{\sin x}+\cdots$$

$$+(1+2+\cdots+n)^{\sin x}=n$$

دبیرستان‌رهنما

دبیر: مشگین قلم ـ فرستنده: کامران کردی

اولا دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیررا حل کنید. ثانیاً اندازهٔ $tg(x+y)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \sin x\cdot\cos y=\frac{1}{4}\end{cases}$$

دبیرستان سعدی وادب

دبیر: همدانی ـ فرستنده : مرتضی آریا

* بین دورابطهٔ زیرزاویهٔ α راحذف کنید:

$$\begin{cases}x\sin\alpha-y\cos\alpha=\sqrt{x^2+y^2}\\ \frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}=\frac{1}{x^2+y^2}\end{cases}$$

* درصورتی که α در ربع اول‌باشد خطوط مثلثاتی α را چنان تعیین کنید که مقدارکسر زیر بیشترین مقدار ممکن‌را داشته باشد:

$$\frac{tg\alpha-cotg\alpha+1}{tg\alpha+cotg\alpha-1}$$

دبیرستان فیروز بهرام

دبیر: فرهمندپور ـ فرستنده: ارجمند مهربانی

* معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$tg\,x=2\sin\left\{\mathrm{Arc}tg[\tfrac{2}{3}\cos(\mathrm{Arc}\sin\tfrac{1}{2})]\right\}$$

* هرگاه $x+y+a+b=\pi$ و $\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{\cos b}{\cos a}$ باشد ثابت کنید:

$$tg\,a\,tg\,x+tg\,b\,tg\,y=2$$

دبیرستان قوام‌کاشمر

دبیر: جمشیدی ـ فرستنده : داریوش بیاتی

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\sin(nx)=\cos\pi(x+1)$$

مسائل هندسه

دبیرستان انصاری آبادان

دبیر : پریزاده ـ فرستنده ـ محسن خطیبی

* ازیك‌ضلع مستطیل صفحه‌ای مروردهید بقسمی که‌تصویر مستطیل برروی‌آن مربع شود.

* خط Δ صفحهٔ P رادر نقطهٔ A قطع کرده است. ازA خطی درصفحهٔ P چنان رسم کنیدکه باخط Δ زاویهٔ α بسازد.

دبیرستان بزرگمهر تبریز

دبیر: سعید فرشاد

* صفحهٔ P ودو نقطهٔ A وB بالای‌آن مفروض است.روی صفحهٔ P نقطه‌ای مانند M طوری تعیین کنیدکه داشته باشیم:

$$2\overline{AM}=BM=l$$

* دوخط متنافر Δ و Δ' که اقصرفاصله‌شان 3 واحداست،

مفروض‌است. براین دوخط خطی‌بطول۶ واحد وموازی باصفحهٔ مفروضی متکی کنید .

دبیرستان رهنما

دبیر: تدریسی ـ فرستنده : کامران کردی

خط مایل d نسبت به‌صفحهٔ P مفروض است. از نقطهٔ A واقع برروی d خطی رسم‌کنیدکه برخط d عمود بوده باصفحهٔ P زاویهٔ α بسازد.

دبیرستان سعدی وادب

دبیر: زند ـ فرستنده : مرتضی آریا

* مطلوبست مکان هندسی‌نقاط M واقع درصفحهٔ‌مفروض P که‌ازآن نقاط قطعه خط AB واقع درخارج P به‌زاویهٔ‌قائمه دیده شود.

* خط d و دو نقطهٔ A و B مفروضند بطوری‌که قطعه AB با d متنافر می‌باشد. خطی‌مانند Δ موازی d به طریقی رسم کنیدکه به فاصلهٔ l از نقطهٔ A وبه‌فاصلهٔ l' ازنقطهٔB باشد (بحث).

دبیرستان محمد رضاشاه پهلوی مهاباد

دبیر : شاطریان ـ فرستنده : مناف شریف‌زاده

* خط راست D و صفحهٔ P ونقطهٔ A واقع در خارج یکدیگر مفروضند. خط راستی معین‌کنیدکه ازنقطهٔ A بگذرد وباصفحهٔ P موازی باشد وخط D راقطع کند.

* نقطه‌ای تعیین‌کنیدکه ازچهارنقطهٔ غیرواقع دریک‌صفحه به‌یك فاصله باشد.

* فرجهٔ (PوQ) ونقطهٔ A در وجهP ونقطهٔ B در وجه Qمفروض است. روی یال فرجه نقطه‌ای مانند M تعیین‌کنیدکه زاویهٔ ABMقائمه شود.

و ، یا (دنباله از صفحهٔ ۲)

۶) اگرمثلث ABC ارتفاع نظیررأسA یانیمساز زاویهٔ A ازوسط ضلع BC بگذرد، دوضلع ABوAC متساویند.

۷) $\frac{a}{x}=\frac{a}{y} \Longrightarrow a=0$ یا $x=y$

۸) $\frac{a}{x}=\frac{a}{y} \Longrightarrow$ یا $a=0$، یا $x=y$

۹) $n^a=n^b \Longrightarrow n=1$ و $a=b$

۱۰) ازحل معادلهٔ:

$$(x+1)(x-3)=5(x+1)$$

نتیجه می‌شودکه:

$$x=-1 \text{ و } x=8$$

۱۱) جوابهای معادلهٔ:

$$(x+1)(x-3)=5(x+1)$$

عبارتند از:

$$x=-1 \text{ و } x=8$$

۲ـ وقتی‌می‌نویسیم $\pm a$ مقصودکدام دو حالت زیراست:

«$+a$ و $-a$» ، «$+a$ یا $-a$»

مثال :

$$x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$$

$$x\to 0 \Longrightarrow \lim\frac{1}{x}=\pm\infty$$

۳ـ درعبارتهای زیربه جای * یکی‌از دولفظ «و»یا «یا» راقرار دهید ودرحالتی‌که لفظ (یا) رابکار می‌برید معلوم‌کنیدکه یای منطقی‌است یا یای مانع‌جمع،

۱) $a\geq b \Longrightarrow a=b * a>b$

۲) $x^2>4 \Longrightarrow x>2 * x<-2$

۳) $x=0 * y\neq 0 \Longrightarrow xy=0$

۴) $x^2+y^2=0 \Longrightarrow x=0 * y=0$

ساختمان منطقی‌قضیه (دنباله ازصفحهٔ ۶)

خط حاصل‌بانصف ضلع‌سوم برابرباشد، این‌پاره خط ضلع دوم‌را نصف می‌کند وباضلع سوم‌موازی است.

e) ازجابجاکردن گزاره‌های (۲)و(۴) قضیه‌ای مشابه با قضیهٔ (d) بدست می‌آید وصحیح نیست.

تمرین‌ـ برای‌قضیه‌های زیرهرچندقضیهٔ عکس‌راکه ممکن است تشکیل‌دهید ومعلوم‌کنیدکه ازقضیه‌های حاصل‌کدامهاصحیح وکدامها غلط می‌باشند:

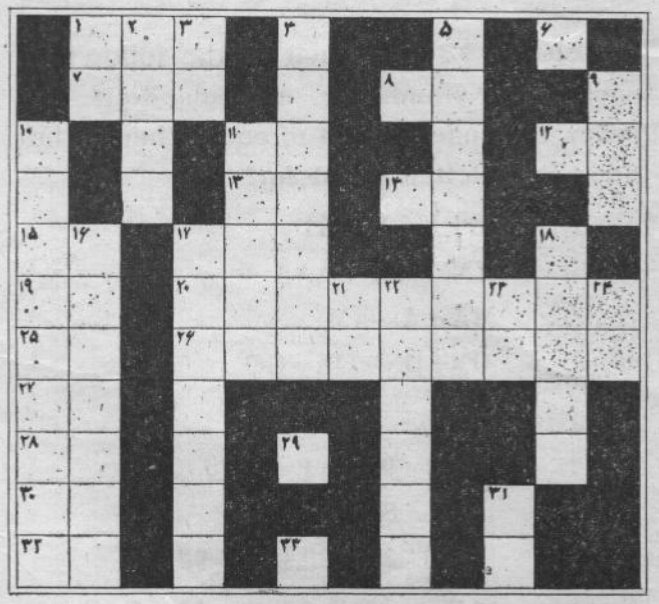
ـ اگرحاصل‌ضرب دوعدد برابرباصفر ویکی‌ازاین دوعدد مخالف‌با صفرباشد دراین‌صورت عددیگر برابربا صفراست.

ـ دردایره، قطرعمودبریك وتر، آن‌وتروهریك‌ازکمانهای آن‌رانصف می‌کند.

دنباله دارد

جدول اعداد

طرح از: محمد علی علی قلی زمزه (تاریخ وصول به‌دفتر مجله: ۱۳۵۰/۷/۲۲)



افقی: ۱ـ توان ششم است و مجموع رقمهایش مضرب ۹ می‌باشد.

۶ـ مقدار n از رابطهٔ زیر:

$$۲^{n+۱} - ۲^{n} = ۲۵۶$$

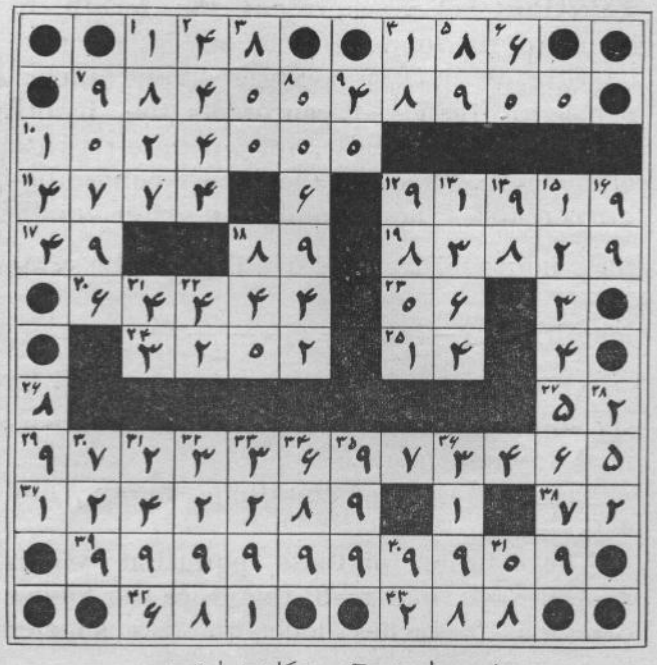
۷ـ به‌صورت $\overline{abb}$ است که خودش و مقلوبش مجذور کامل است ۸ـ جذر عدد ۱ افقی. ۱۱ـ حاصل ضرب دو عدد متوالی و مجموع رقمهایش مضرب ۶ است. ۱۲ـ اگر این عدد و متمم حسابیش را بر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان تقسیم کنیم به ترتیب ۱۱ و ۹ بدست آید. ۱۳ـ حاصل ضرب سه عدد اول متوالی. ۱۴ـ جملهٔ $n^{۳}$ ام از تصاعد حسابی که جملهٔ اول و قدر نسبتش هر کدام $n^{۳}$ است. ۱۵ـ مجذور مجموع رقمهایش است. ۱۷ـ به‌صورت $\overline{aaa}$ است که چون در مبنای ۵ نوشته شود رقمهای عدد حاصل به تصاعد هندسی باشند. ۱۹ـ مضرب ۱۰ و تجزیهٔ آن به‌صورت $ab^{۳}$ است. ۲۰ـ بزرگترین عدد نه رقمی با رقمهای متفاوت. ۲۵ـ عددی است زوج که از متمم حسابی خود بزرگتر است و کوچکترین مضرب مشترک رقمهایش ۲۴ است. ۲۶ـ به‌صورت $\overline{aaabbbccc}$ است بقسمی که $b^{۲}=c=۹a$. ۲۷ـ از مقلوب خود ۴۵ واحد کوچکتر است و مجذور کامل است. ۲۸ ـ دو برابر مقلوب عدد ۱۵ افقی. ۲۹ـ بزرگترین مقسوم علیه هریک از رقمهای عدد ۱۲ افقی. ۳۰ـ مانتیس لگاریتم آن صفر است.

۳۲ـ سه برابر عدد $\overline{ab}$ که $a=۳b$. ۳۳ـ بزرگترین مقسوم علیه مشترک رقمهای عدد ۳۲ افقی.

قائم: ۱ـ ده‌واحد کمتر از عدد ۱۵ افقی. ۲ـ حاصل ضرب عدد ۲۴ در عدد به‌صورت $\overline{a۰a}$. ۳ـ مقلوب عدد ۲۷ افقی ۴ـ به‌صورت $\overline{abc}+\overline{aba}=۳۴۳$ است بقسمی که $\overline{abc}۰\overline{aba}$ ۵ـ به‌صورت $\overline{aabbbbc}$ و مجموع رقمهایش ۳۳ است. ۹ـ بزرگترین عدد سه رقمی که رقمهایش تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. ۱۰ـ عدد متشکل از سه رقم سمت راست آن به‌صورت $\overline{abc}$ است بقسمی که $c=۳a=۹b$ و بقیهٔ عدد تکرار عدد به‌صورت $\overline{du}$ است که مجموع دو رقم u و d برابر ۱۲ و u زوج بوده مقسوم علیه d است. ۱۱ـ به‌صورت $\overline{abcdc}$ است که $\overline{abc}-\overline{cdc}=۲۵۰$ ۱۶ـ به صورت $\overline{a۰bccb۰d}$ است بقسمی که:

$$۲c=۳b=۶d=۱۸a$$

۱۷ـ به‌صورت $\overline{abababa}$ است بقسمی که $\overline{ab}$ متمم حسابی b است. ۱۸ـ حاصل ضرب عدد ۸ افقی درصد برابر خود به‌اضافهٔ یک برابر خود. ۲۱ـ مقلوب عدد ۲۸ افقی. ۲۲ـ به‌صورت $\overline{abccba}$ بقسمی که a و b و c سه رقم فرد و تصاعد حسابی می‌سازند. ۲۳ـ مقلوب عدد ۳۲ افقی. ۲۴ـ متمم حسابی عدد ۱۵ افقی. ۳۱ـ مجذور عدد ۲۹ افقی.



حل جدول مندرج در یکان شمارهٔ ۱۰۱

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 133– In each of the following, each letter stands for a single digit. The codes are independent of each other. What does each letter stand for?

(a) Y+Y+Y=MY

(b) XXX+B=BAAA

(c) MA+A=AM

(d) ON+ON+ON=GO

Solution: (a) 5+5+5=15

(b) 999+1=1000

(c) 89+9=98

(d) 23+23+23=92

Problem 134- Fill in the blank spaces in the magic square shown in Fig. Using each of the following numbers 4,6,7,8, 10,11,12, 13, 14, 15, so that the sum of the integers in each column, row, and diagonal is 34.

	1		
	5		
2	16	9	
3			

Solution: This solution is given in the language of SETS.

It is obvious that g=7, h=12. The set {a,b} must equal the set {14, 15}, and {a,j}={6, 14}

Since {a}={a,i}∩{a,d} and {14}={14, 15} ∩{6, 14}, it follows that a=14. Hence d=15, j=6, and i=13 .Now {b,c}={8, 11}, and {b, e}={4, 8}. Since {b}={b, c}∩{b, e} and {8}={8, 11}∩{4,8}, we have b=8. So c=11, e=4, and f=10.

Note:
As the reader porbably knows, this is called Magic Square. In a square n by n, using consecutive integers from 1 to n^2, one should expect the sum in any column, row, or diagonal to be $\frac{1+2+\ldots+n^2}{n}=\frac{n^2}{2}\cdot\frac{1+n^2}{n}=\frac{n(n^2+1)}{2}$.

a	1	b	c
d	5	e	f
2	16	9	g
3	h	i	j

For n=4, this gives the magic sum 34.

Problem 135– On christmas Eve two candles, one of which was one inch longer than the other, were lighted.

The longer one was lighted 4:30 and the shorter one dt 6:00 At 8:30 they were both the same length.

The longer one burned out at 10:30, and the shourter one at 10:00 How long was each candle originally?

Solution: Let x represent the length in inches of the longer candle, and let r denote its rate of burning expresed in inches per hour. then x–1 represents the length of the shorter candle, let s denote its rate of burning. At 8:30, the longer candle has burned for 4 hours and the sorter candle for $\frac{5}{2}$ hours. Since they are then of the same length, $x-4r=(x-1)-\frac{5s}{2}$

Also the longer candle is consumed in six hours and the shorter candle is consumed in four hours.

This yields the equations 6r=x, and 4s=x–1.

The solution of these equation yields r=1.5, s=2, and x=9. therefore the longer candle is 9 inches long. and the shorter is 8 inches long.

سری کتب جدید و جامع **۲۰ استاد و دانشجو** که نایاب شده بود در ۱۷ شماره

زیر نظر **استادان دانشگاهها** منتشر شد

ازسطح ضعیف تا عالی شامل حل المسائل و راهنمای کلیه دروس و دوره کامل تست قدم بقدم و تست کنکور با راه حل و راهنمای تستی با انضمام خلاصه درس و نکات مهم مخصوص کلاسهای ۴ و ۵ و ۶ متوسطه و داوطلبان کنکور طبیعی ریاضی. جهت تهیه در تهران و شهرستانها بمراکز فروش زیر مراجعه فرمائید.

۱ـ کلیه فروشگاههای انتشارات امیرکبیر ۲ـ انتشارات خوارزمی (۲) روبروی دانشگاه ۳ـ مرکز نشر سپهر روبروی دانشگاه تهران

۴ـ کتابفروشی فخررازی خیابان شاه آباد ۵ـ کتابفروشی اشرفی میدان فوزیه ۶ـ انتشارات خوارزمی (۱) خیابان دانشگاه

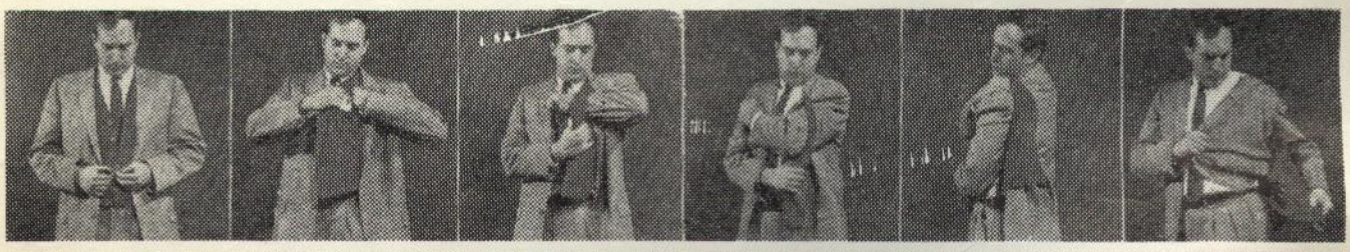
شهرستان	کتابفروشی	شهرستان	کتابفروشی	شهرستان	کتابفروشی	شهرستان	کتابفروشی	شهرستان	کتابفروشی	شهرستان	کتابفروشی	شهرستان	کتابفروشی
آبادان	جوهری	بروجرد	بندرپهلوی	شهرام	اقبال	رشت	رضائیه	طاعتی	انزلی	شاهرود	شاهی	داودی	ایمانی
آباده	امینی	بندرپهلوی	بهبهان	رضائیه	بهبهانی	رضائیه	زنجان	انزلی	تمدن	شاهی	شهسوار	ایمانی	دانش
اراک	سعدی	بهبهان	تبریز	زنجان	شمس	ساری	ساری	تمدن	زعفری	شهسوار	شیراز	دانش	محمدی
اردبیل	یاوریان	تبریز	تبریز	ساری	حکمت	ساری	سبزوار	زعفری	فرهنگ	شیراز	شیراز	محمدی	شفیعی
اصفهان	ثقفی	تبریز	جهرم	سبزوار	رجائی	سمنان	سمنان	فرهنگ	حامی	شیراز	قزوین	شفیعی	فردوسی
اصفهان	امید	جهرم	خرم‌آباد	سمنان	سعدی	سمنان	سنندج	حامی	ح-امینی	قزوین	قم	فردوسی	علمی
آمل	ع-امینی	خرم‌آباد	خرمشهر	سنندج	ب-حسینی	سنندج	شاهپور-آ	ح-امینی	هاشمی	قم	قوچان	علمی	موسویان
اهواز	بوستان	خرمشهر	خوی	شاهپور-آ	سینا	شاهپور-آ	امیرکبیر	هاشمی	علمیه	قوچان	کازرون	موسویان	هوشداران
اهواز	جعفری	خوی	دزفول	امیرکبیر	امیرکبیر	امیرکبیر		علمیه	معرفت	کازرون	کاشان	هوشداران	کرمانی
بابل	تابان	دزفول						معرفت		کاشان		کرمانی	

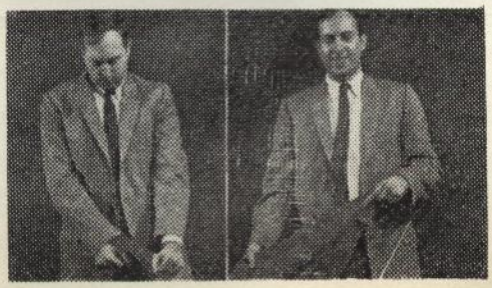
شهرستان	کتابفروشی	شهرستان	کتابفروشی	شهرستان	کتابفروشی	شهرستان	کتابفروشی
کرج	لشگری	مشهد	جواهری				
کرمان	تابان	ملایر	یوسفی				
کرمان	کیمیا	ملایر	ابن‌سینا				
کرمانشاه	فردوسی	مهاباد	حمیدی				
گرگان	سمنانی	میانه	نعیمی				
لاهیجان	سعادتمند	نیشابور	سخنور				
لنگرود	میرفطرس	همدان	بوعلی‌سینا				
مراغه	فرهنگ	یزد	تاج				
مسجد سلیمان	بال‌افکن						
مشهد	باستان						

سایر شهرستانهای بدون نماینده میتوانند باآدرس (تهران ـ صندوق پستی ۲۷/۷۰۲۷) مکاتبه فرمایند.

در آوردن جلیقه از زیر کت بدون در آوردن کت

چگونگی انجام این مسئلهٔ توپولژی در تصاویر زیر نموده شده است. (به ترتیب از چپ به‌راست)





انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها
تألیف:علی اصغرهومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هشترودی

روش سادهٔ حل مسائل شیمی
ترجمهٔ: عطاءالله‌بزرگ‌نیا

راهنمای ریاضیات متوسطه
تألیف : عبدالحسین مصحفی

تستهای هوش
ترجمهٔ : باقرمظفرزاده

۲ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

تستهای چندجوابی شیمی

ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا

بها : ۴۰ریال

معماهای ریاضی

ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار

بها : با جلد شمیز ۷۵ ریال

با جلدزرکوب : ۱۰۰ریال

مسائلی ازحساب استدلالی

تألیف: محمودکاشانی

جلد اول	جلددوم	جلد سوم
۱۲ریال	۱۵ریال	۱۵ریال

مبادی منطق وریاضی جدید

تألیف: غلامرضا عسجدی

بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان‌که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان‌که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان‌که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.