یکان

مجلهٔ ریاضیات

دورهٔ دهم، شمارهٔ ۷: شمارهٔ مسلسل: ۱۰۰ فروردین ـ اردیبهشت ۱۳۵۳

در این شماره:

بها: ۳۰ ریال

اعلام پاسخهای درست کنکور سراسری

همانطور که دریکان سال ۵۲ وعده داده شده است پاسخهای درست پرسشهای کنکورسراسری وسایر پرسشهای مندرج دریکان سال ۵۲ دریکان شمارهٔ ۱۰۱ اعلام خواهد شد. این مجله اواسط خرداد ماه آمادهٔ توزیع خواهدبود.

اشتباههای چاپی مربوط به‌مندرجات یکان سال ۵۲ نیزدریکان شمارهٔ ۱۰۱ اعلام خواهد شد.

قطعنامهٔ میزگرد پنجمین کنفرانس ریاضی کشور

بخش اول

شرکت کنندگان درپنجمین کنفرانس ریاضی کشور از فرمان همایونی دایر بر رایگان بودن تحصیلات دورهٔ ابتدائی وراهنمائی، عمیقاً سپاسگزارند و آن را آغاز دورهٔ جدیدی در پیشرفت فرهنگ کشور وتحکیم وحدت ملی می‌دانند.

بخش دوم

درپنجمین کنفرانس ریاضی کشور دردانشگاه‌پهلوی شیرازمیزگردی‌برای بحث‌دربارهٔ«مسابقهٔ‌ورودی‌دانشگاهها» باشرکت آقایان **دکترمرتضی انواری، دکترعلی اصغر ثقةالاسلام‌زاده** (نمایندهٔ وزارت آموزش‌وپرورش)،**دکتر همایون ثقفی، دکترمحمد قلی جوانشیر** (رئیس‌جلسه) **دکترمحمدعلی مجتهدی، دکترمنوچهروصال** و با حضوراعضای کنفرانس‌درتاریخ یازدهم فروردین‌ماه۱۳۵۳ تشکیل‌گردید. دراین میزگردبحث مفصلی ازطرف‌اعضای میزگرد وسایر اعضای کنفرانس درمورد محاسن ومعایب روشهای مختلف انتخاب دانشجوبعمل آمد ونارسائی‌های کنکورسرتاسری‌به‌نحوی که‌تاکنون‌انجام‌شده‌است، بخصوص

دنباله در صفحهٔ ماقبل آخر

یکان
مجلهٔ ریاضیات

تأسیس : بهمن ۱۳۴۲

هرسال هشت شماره منتشر می‌شود

دورهٔ دهم ـ شمارهٔ هفتم ـ شمارهٔ مسلسل : ۱۰۰

فروردین-اردیبهشت ۱۳۵۳

صاحب امتیاز و سردبیر: **عبدالحسین مصحفی**

مدیرمسؤول: بانو نصرت ملک‌یزدی

نشانی‌اداره:

تهران، خیابان لاله‌زارنو ، نزدیک شاهرضا ، شمارهٔ ۸۱

نشانی پستی : صندوق پستی۲۴۶۳

تلفن اداره: ۳۹۳۱۸۱

حساب بانکی: حساب جاری۳۰۹۵شعبهٔ لاله‌زارنوبانک صادرات

YEKAN

Mathematical Magazine

Editor : MOS'HAFI Abdolhossein

Volume X, number 7. May. 1974

subscription : 4$

TEHERAN-P.O.B. 2463

چاپ تصویر ـ تلفن : ۳۹۳۰۴۶

توجه:

۱ـ اگر بابت اشتراك یا ازبابت دیگر، وجهی به‌حساب بانکی مجله حواله یا واریز می‌کنید، حتما مراتب راضمن نامهٔ جداگانه با ذکر نشانی کامل خود به دفترمجله اطلاع‌دهید.

۲ـ انتشارات یکان منحصر به‌کتابهایی است که معمولادر پشت جلد مجلات یکان ، و پشت جلد همین شماره ، معرفی می‌شوند . کتابهایی که زیر عنوان «معرفی کتاب» یا به صورت آگهی‌در مجله معرفی‌می‌شوند با مجلهٔ یکان ارتباطی ندارند ، از درخواست این‌کتابها از دفترمجلهٔ یکان خودداری فرمایید.

در مورد مندرجات‌کتابهایی‌که به‌صورت آگهی‌درمجلات یکان معرفی می‌شوند، و همچنین درمورد تعهداتی که صاحبان این آگهیها اعلام می‌دارند ، هیچ گونه مسؤولیت یا تعهدی متوجه ادارهٔ یکان نمی‌باشد.

میله های کوئیزنر ـ مینی کمپوتر پاپی

Les reglettes de Cuisenaire — Minicomputer de Papy

درمقدمهٔ مقالهٔ «تاکسی‌فاصله» مندرج دریکان شمارهٔ ۹۶، ازمینی‌کمپوتر نام‌برده شده بود. به‌خواست آشنایانی‌که در زمینهٔ وسایل‌کمك آموزشی حساب صاحب نظر و ذی‌ـ علاقه‌اند، دربارهٔ وسیلهٔ مزبور توضیحاتی به شرح زیرداده می‌شود.

عبدالحسین مصحفی

یکی‌ازمهمترین ومشهورترین وسایل‌کمك‌آموزشی‌حساب، میله‌ها یابه عبارت صحیحتر، مدرجهایی است‌که به‌نام مبتکر آنها **کوئیزنر** معروفند.

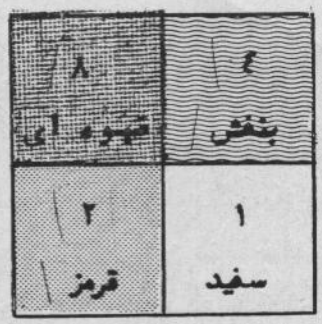
پیش‌ازکوئیزنر،خانم **مونته سوری**(Montessori Maria) مربی ایتالیائی برای آموزش مفاهیم اعدادوعملیات آنها به‌کودکان، بااستفاده ازده میلهٔ چوبی‌به‌درازاهای‌ازیك تاده دسیمتر روشی‌تازه پدیدآورده بود.

کوئیزنر آموزگارگمنام بلژیکی باالهام از روش‌مونته سوری، برای‌آموزش حساب به‌کودکان، روش تازه‌تری بکاربرد که اساس‌آن راده میلهٔ‌چوبی به‌طولهای ازیك تاده سانتیمتر وبا رنگهای مختلف تشکیل می‌داد. هریك ازاین میله‌های چوبی به شکل مکعب مستطیل به‌مقطع مربع یك دریك سانتیمتراست.این میله‌هادونوع‌تفاوت بارزبایکدیگردارند: تفاوت در درازا وتفاوت دررنگ به قسمی‌که هر رنگ نمایندهٔ عدد مشخص است . برای عددهایی‌که باهم دررابطهٔ مخصوص هستند (مثلاعددهای ۲و۴و۸) رنگهای نزدیك به‌هم انتخاب شده‌است. درازا و رنگ مخصوص هریك ازمیله‌های نظیراعداد به‌شرح زیراست:

عدد	درازای میله	رنگ میله
۱	۱سانتیمتر	رنگ‌طبیعی‌چوب
۲	« ۲	قرمز
۳	« ۳	سبزروشن
۴	۴ سانتیمتر	بنفش
۵	« ۵	زرد
۶	« ۶	سبزتیره
۷	« ۷	سیاه
۸	« ۸	قهوه‌ای
۹	« ۹	آبی
۱۰	« ۱۰	نارنجی

چون ازنظر روانشناسی‌توجه‌کودك به‌رنگ مقدم برتوجه وی به‌طول است، درآموزش‌مفاهیم مختلف‌اعداد به وسیلهٔ میله‌ـ های‌کوئیزنر به‌کودکان، نخست تفاوت رنگها مطرح می‌گردد ودر مرحلهٔ بعداز تفاوتهای طولی‌استفاده می‌شود.

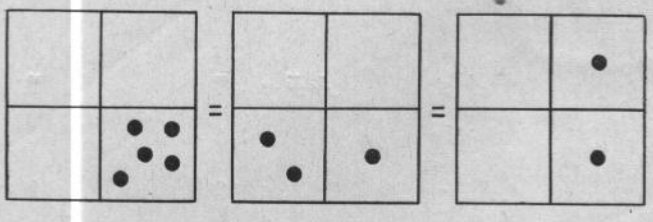
مینی‌کمپوتر که‌توسط‌ریاضیدان بلژیکی **پاپی** برای‌آموزش حساب به‌کودکان ابتکارشده نیزمتأثرازرنگ است. رنگهایی‌که دراین‌وسیله برای اعداد بکار رفته همان‌رنگهای مربوط به‌میله‌ـ های‌کوئیزنر است.



مینی کمپوتر صفحه‌ای مقوایی است به شکل مربع که توسط دومحورآن به‌چهارخانه تقسیم شده است. خانهٔ گوشهٔ پایین وراست به

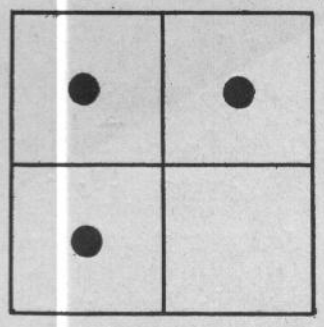
رنگ‌سفید باقی می‌ماند، خانهٔ گوشهٔ پایین وچپ به‌رنگ‌قرمز ، خانـهٔ گوشهٔ بـالا و راست بـه رنگ بنفش و خانهٔ گوشهٔ بالا و چپ به‌رنگ قهوه‌ای رنگ‌آمیزی می‌شود. ضمیمهٔ این صفحهٔ مقوایی مهره‌هایی‌چوبی وبه‌رنگهای مختلف وجوددارد. هرمهره که درخانهٔ سفید قرارگیرد نمایشگر یك‌واحد است، اگر مثلا سه مهره درخانهٔ سفید قراردهیم مجموعاً نمایشگر ۳واحداست. هرمهره‌که درخانهٔ قرمز قرارگیرد نمایندهٔ ۲واحد، هرمهره‌که درخانهٔ بنفش گذاشته شود نمایندهٔ ۴واحد، هرمهره‌که در خانهٔ قهوه‌ای واقع شود نمایندهٔ ۸واحداست.

دروهلهٔ اول کودك برای نمایش‌عدد مثلا ۵تعداد ۵ مهره درخانهٔ سفید قرارمی‌دهد. امابه زودی ودراثـر راهنمایی مربی متوجه می‌شودکه عدد ۵را می‌تواند به‌گونه‌های مختلف نمایش دهد (شکلهای زیر):



۵ ۲+۲+۱ ۴+۱

درمرحلهٔ بعدکودك باید هرعدد راکه به وی می دهند با کمترین تعـداد مهـره نمایش‌دهد. به‌این‌ترتیب عـدد مثلا ۱۴ به شکل مقابل نشان داده‌خواهد شد:



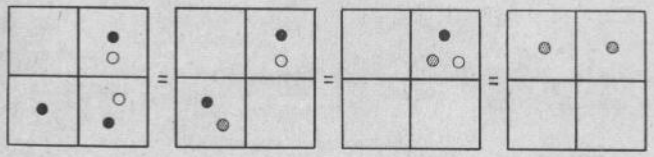
۱۴=۸+۴+۲

درحقیقت‌عدد۱۴

درمبنای ۲نشان داده شده است:

$$۱۴=۲^۳+۲^۲+۲+۰=(۱۱۱۰)_۲$$

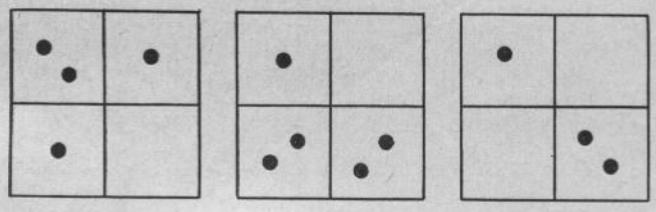
برای جمع دوعدد توسط مینی‌کمپوتر نخست آن دو عدد بامهره‌های‌به‌دورنگ متفاوت نشان‌داده می‌شوند، آنگاه ازمراتب پایین به بالا مجموع ارزشهای مهره‌های واقع در هر خانه معین شده نتیجه با مهرهٔ به‌رنگ دیگر نشان داده می‌شود که البته آن دو مهـرهٔ اولـی از صفحه حذف می‌شونـد . مثلا بـرای تعیین مجموع ۵+۷ مطابق باشکل چپ عدد۷را بامهره های سیاه و عدد ۵ را بامهره‌های سفید نشان می‌دهیم. مجموع این‌دوعدد را



به ترتیبی که بدست می‌آید بامهره‌های خاکستری نشان‌می‌دهیم.

درتفریق دو عدد، نخست عدد بزرگتر نشان داده می‌شود آنگاه به‌اندازهٔ عددکـوچکتر از مهره‌های روی صفحه برداشته می‌شود. البته دراین‌موردگاهی پیش‌می‌آیدکه‌عدد بزرگتررا باید تبدیل‌به واحدهای کوچکتر کرد. عمل‌ضرب به‌صورت تکرارعمل جمع وعمل‌تقسیم به‌صورت تفریقهای مکررانجام می گیرد.

درمرحله‌ای که گفته شدکودك باعددهای بزرگ سروکار ندارد. درمورد این‌اعداد ازدو یـا چندین مینی کمپوتر استفاده می‌شود ؛ بااین‌قرار دادکه اگرچندین مینی کمپوتررا درکنارهم (بطورافقی) قراردهیم، ارزش‌مکانی، هریك ازخانه‌های‌آنکه در طرف راست است همان است که دربالا گفته شد اما ارزش‌مکانی هریك ازخانه‌های مینی‌کمپوترهای دیگر ده برابر ارزش مکانی خانهٔ نظیراز مینی‌کمپوتر سمت‌راست‌آن است. برای‌مثال،عددی که‌به شکل زیرنشان داده‌شده برابراست با:



$$(۲\times۸۰۰+۴۰۰+۲۰۰)+(۸۰+۲\times۲۰+$$
$$+۲\times۱۰)+(۸+۲\times۱)=۲۳۵۰$$

باوجودآنکه دربارهٔ مینی‌کمپوتر پاپی‌یکی‌ازناشران بلژیك‌کتابی چاپ کرده و به همراه یك مینی‌کمپوتر و مهره های‌آن بفروش می‌رساند، وباوجودآنکه برنامه‌هایی ازتلویزیون‌آموزشی بلژیك به‌آموزش حساب توسط مینی‌کمپوتر اختصاص‌دارد؛ اماهنوز در خود بلژیك نیزاستفادهٔ ازمینی‌کمپوتر درهمهٔ‌آموزشگاهها رایج نشده است.

آیا مینی‌کمپوتر وسیله‌ای است‌که هدفهای آموزش‌حساب راسریعتروبهتربرآورده می‌سازد؟ یااینکه وسیله‌ای است‌که‌احیاناً هدف فدای‌آن می‌شود؟ دراین‌باره متخصصان آموزش باید اظهار نظر کنند.

زکریای رازی

جعفر آقایانی چاوشی

خلاصهٔ زندگینامه:

ابوبکر محمد بن زکریاء بن یحیی الرازی، که‌درعالم لاتینی به **Rhazes** معروف است وگاهی او را جالینوس اسلام نامیده‌اند، درسال ۲۵۱ هجری برابر با۸۶۵ میلادی درری دیده برجهان گشود(۱)ودرهمین شهر به‌تحصیلات ژرف خود در فلسفه و ریاضیات ونجوم وادبیات مبادرت کرد. سپس به‌فراگرفتن علم کیمیا پرداخت، توجه واشتغال وی به‌علم طب بعد ازسنین جوانی وبنا برقول **ابوریحان بیرونی** پس ازمطالعات وتجارب آن استاد درکیمیا صورت گرفته است.(۲)

ابن جلجل این دوره ازحیات وی را چنین شرح داده است: «درآغازکار، بربت می‌نواخت، پس این‌کاررا بدرود گفت‌و به‌فراگرفتن علوم طب وفلسفه پرداخت، تا در این علوم به مقام ارجمند پیشینیان‌رسید، ودرعلم‌طب کتابهای بسیاری به‌شیوه‌پسندیده تألیف کرد»(۳)

رازی پس ازشهرت درطب به‌خدمت **ابوصالح منصور بن اسحاق سامانی** حاکم ری درآمد وبه‌زودی ریاست بیمارستانی راکه درآن شهرتأسیس شده بود، برعهده گرفت وبعدها چندی‌در بغداد به‌همین شغل اشتغال داشت. لیکن مدت اقامت اودرآن‌شهر به‌درستی معلوم نیست، قدرمسلم آن است‌که وی قسمت‌اعظم‌حیات خود را درری‌وطن اصلی خودگذرانده است.

مورخین اسلامی وارباب تراجم احوال متفقندکه رازی‌در اواخرعمرنابینا شد، لیکن علل مختلفی برای آن ذکر کرده‌اند.

ابوریحان بیرونی علت نابینا شدن رازی را نتیجه تجربه‌های زیاد ازحدکیمیایی دانسته است.(۴)

ابن‌القفطی ضمن شرح حال رازی چنین می‌نگارد:

«... وصناعت‌کیمیا نیکودانستی،چنانکه بعضی گفته‌انداو می‌گفته‌کیمیا به‌امکان اقرب است ازآن به‌امتناع ودوازده‌کتاب‌در آن باب تألیف نمود و درآخرعمرنابینا شد، به‌سبب نزول‌آب در چشمانش. وی راگفتند چرا قدح‌نکنی؟ گفت: آنقدردنیا رادیده‌ام که ملول شده‌ام».(۵)

۱ـ بیرونی، ابوریحان: «**رسالة فی‌فهرست کتب‌محمد بن‌زکریاءالرازی**» به اهتمام پاول کراوس، پاریس ۱۹۳۶میلادی

۲ـ **همان مأخذ**

۳ـ ابن جلجل، سلیمان بن حسان‌الاندلسی: «**طبقات‌الاطباء والحکماء**» ترجمه و تعلیقات ازسید محمدکاظم امام، انتشارات دانشگاه تهران ۱۳۴۹ هجری شمسی

۴ـ بیرونی، ابوریحان: «**رسالة فی فهرست کتب محمد بن زکریاالرازی**»

۵ـ ابن قفطی: «**تاریخ‌الحکماء**» ترجمه فارسی ازقرن یازدهم به‌کوشش دکتر بهین دارائی، انتشارات دانشگاه تهران ۱۳۴۷ هجری شمسی

ابن خلکان ماجرای نابینائی رازی را چنین شرح داده است:

«چون محمد زکریای رازی کتابی در کیمیا به‌رشتهٔ تحریر درآورده بود ودرآن اثبات کیمیا را برای ساختن طلا بیان داشته، واین کتاب را به‌نام **منصور بن اسحاق** حاکم ری تألیف نموده بود، منصور ازوی خواست که به‌ری آمده و همانطور که در کتاب خود بیان داشته، مدعای خود را به اثبات برساند رازی تعلل و سستی کردوعذرنبودن اسباب وآلات‌را بهانه‌آورد. منصورامر کرد هرچه لازم دارد تهیه نمایند. چون محمد زکریا نتوانست‌ادعای خود را طبق نوشته‌های کتابش به‌موقع اجرا درآورد منصور اورا پیش خواند وخطاب به‌وی گفت: از چنین حکیمی بعید است که کتب خود را به‌دروغ آلوده‌سازد وآن را به‌حکمت وفلسفه‌منسوب دارد. چون تو رنج سفر تحمل کردی هزاردینارت دادم اما چون ازعهدهٔ کاری که خود پیشنهادکرده‌ای برنمی‌آئی وبیهوده مردم‌را به‌رنج وزحمت انداخته‌ای که‌برای بدست‌آوردن طلا درتعب‌افتند، باید ترا کیفر دهم. لذا دستور دادآنقدر باکتاب خود اوبرسرش نواختندکه براثرآن نابینا شد...» (۶)

این نظردرصورتی که اصل قضیه درست باشد ازنظرعلمی و فنی ممکن است وباموازین طبی نیزوفق می‌دهد زیرادربیماریهای چشم‌آبشارضربتی (Cataracte par Contusion)دیده می‌شود، رازی درسال۳۱۳ هجری برابربا ۹۲۵ میلادی درشهر ری چشم ازجهان فروبست.(۷)

شخصیت علمی رازی در شیمی

رازی بزرگترین پزشك بالینی اسلام بود ودرقرون‌وسطی و در دورهٔ رنسانس شهرتی در اروپا داشت که با شهرت**ابن‌سینا** برابری‌می‌کردولی پیش‌ازآنکه‌به‌تحصیل پزشکی بپردازدکیمیاگر بود ودراین‌علم نیزشهرت فراوانی داشت.

از این حیث است که مباحث شیمیائی او را با ارج وقدر می‌شمارند زیرا در این علم روش علمی محض را تعقیب کرده و همین روش اومورخین علمی و محققان را وادارکردکه بگویند رازی مؤسس علم شیمی‌جدید بوده و نخستین‌کسی است‌که زیست شیمی را پایه‌گذاری کرده است .

دکتر یولیوس روسکا(Julius Ruska)شیمیدان برجسته و دانشمند خاورشناس آلمانی که تحقیقات وافری در بارهٔ آثاررازی درشیمی دارد وی را بسیارستوده واظهارمی‌کند:«رازی برای اولین‌بارمکتب جدیدی درعلم‌کیمیا بوجودآورده است‌که آن‌را مکتب علم شیمی تجربی وعلمی می‌توان نامید.»

«مطلبی‌که نمی‌شودآن را انکارکرد این است‌که زکریای رازی پدرعلم شیمی بوده است»(۸)

دکتردونالدکامپبل(D. Campbell)می‌نویسد: «رازی نخستین‌کسی است‌که اعمال شیمیائی را درطب دخالت‌داده است»(۹)

فردیناند هوفر (F. Hoefer) مقام‌ارجمندی‌برای رازی قائل شده ووی رامبتکراسید سولفوریك وتقطیرالکل‌دانسته داست(۱۰)

رازی بنیانگذار شیمی نوین

اگرچه رازی خود را درکیمیا شاگرد **جابر بن حیان** می‌شمرد وحتی‌عنوان اغلب تألیفات‌کیمیایی اوعین یا شبیه نزدیك عناوین مجموعهٔ جابری است ولی اگرآثارجابروکتب رازی به دقت بررسی شود، این امرآشکارخواهد شدکه سروکار رازی با کیمیا نبوده بلکه موضوع بحث اوعلم شیمی به‌معنی امروزی‌است. زیراکیمیای جابری مبتنی برتفسیروتأویل باطنی طبیعت به‌عنوان کتاب تکوین بوده است ازطریق استعمال این روش تأویلی‌معنی باطنی اشیاء هر علم جابری وبالخاصه‌کیمیا، هم به‌جنبهٔ ظاهری‌و نمودها مربوط می‌شده است وهم‌به‌معنی رمزی وباطنی‌آنها.رازی با انکارتأویل روحانی‌که لاینفك ازآن است، ازجنبهٔ رمزی‌کیمیا

۶ـ ابن خلکان،ابوالعباس شمس‌الدین‌احمدبن محمد: **«وفیات‌الاعیان انباءابناءالزمان»** به‌تصحیح و تعلیق محمدمحی‌الدین عبدالحمید. القاهره ۱۳۶۷ هجری قمری

۷ـ برای‌کسب اطلاع بیشترازززندگانی رازی‌وارزش ومقام‌علمی وی درطب رجوع شود به: شرح حال ومقام محمدزکریای‌رازی تألیف دکترمحمود نجم‌آبادی چاپ تهران ۱۳۱۸ هجری شمسی

۸ـ Ruska,J. : «AlRazis Buch, Geheimnis der Geheimnisse» Qullen und Studien Zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin Band 6, Berlin(1937)

۹ـ Campbell D; «Arabic Medicine and its influence on the Middlle Ages» London (1926)

۱۰ـ Hoefer F : «Histoire de la Chimie» Tomel, Paris(1942)

نیز صرف نظر کرده وآنرا به صورت شیمی درآورده است. کتب کیمیایی اودرواقع اولین کتب علم شیمی است. طبقه‌بندی دقیق‌وی ازاجسام کارمهمی است که ازلحاظ‌شیمی، ونه ازلحاظ کیمیا، صورت گرفته است.

کتاب **سرالاسرار** (شرحش خواهد آمد) که مهمترین تألیف کیمیایی رازی‌است، درواقع کتابی‌درشیمی‌است که‌بامصطلاحات کیمیا بیان شده است. در این کتاب ذکرفرایندها وآزمایشهایی‌از شیمی‌آمده که خود رازی‌آنها را انجام داده است ومی‌توان آنهارا با اشکال‌معادل‌آن اعمال درشیمی جدید، همچون تقطیر، وتکلیس، وتبلوروغیره مطابق‌دانست. رازی دراین‌کتاب ودر آثار دیگرش بسیاری ازآلات شیمیائی را همچون قرع وانبیق وقابله وآثال و دیگ وچراغ نفتی واجاق وتابشدان (طابشدان) وسنگ صلایه و نظایرآنها را شرح کرده است‌که بسیاری ازآنها تا زمان حاضر مورد استعمال دارد.

حتی باآنکه‌منابع کیمیایی‌اسلامی، رازی را متعلق‌به‌مکتب سنت جابری می‌شمرده‌اند، مطالعه درآثاروی نشان می‌دهد که‌وی متعلق به‌مکتب دیگری است، مساحتهای رمزی ومتافیزیکی جابر دیگردرنوشته‌های رازی‌دیده نمی‌شود. وی خواص شیمیائی‌وداروی مواد را شرح‌می‌دهد، وازاین لحاظ بعضی کشفیات بزرگ‌همچون کشف الکل وبعضی اسیدها را به‌اونسبت داده‌اند.

ولی نظر کلی وجهانی کیمیا درآثاروی دیده نمی‌شود. رازی با انکار امکان تفسیرباطنی اشیاء مساحت رمزکیمیا را نیز حذف کرده و ازآن علمی به جای گذاشته است‌که تنها با خواص‌خارجی اجسام کاردارد، واین همان علم شیمی است(۱۱)

رازی درعین آنکه به تبدیل کیمیایی یك فلز به‌فلزی دیگر معتقدبود، تنها ازفرایندهای شیمیایی سخن گفته است. با این همه رازی اشاره‌ای به‌نظریهٔ‌جیوه وگوگردی جابری نکرده است(۱۲) درعوض، وی عقیده داشته است‌که اجسام از«ماده» بالقوه فعل و «روح» و «نفس» ترکیب شده است. وچون همهٔ اشیاءذاتاً ازجوهری یگانه ساخته شده‌اند می‌توان تبدل را از طریق‌تغییر دادن نسبتهای عناصرترکیب‌کننده هرجوهرایجادکرد. واین همان چیزی است‌که به‌زبان جدید شیمی از بین بردن ناخالصیها نامیده می‌شود واماخودفرایندکیمیایی‌را رازی شامل پنج مرحله‌می‌داند: تصفیهٔ موادی‌که باید مصرف شود، گداختن آنها، حل‌کردن‌آنها، ترکیب‌کردن محلولهای مختلف، وبالاخره عقدکردن‌آنچه‌بدست آمده. ازاین لحاظ وی با جابراختلاف عمیق نداشته است که او نیز با جزئی تغییرعمل‌کیمیائی را چنین می‌دانسته است.

آثاررازی درشیمی(۱۳)

طبق تحقیقاتی‌که به‌عمل‌آمده رازی بیست وچهارکتاب یا رساله در علم کیمیا نوشته بوده است . متأسفانه از این‌آثارجز معدودی دردست نیست وماآثاررازی را به دوقسمت تقسیم‌کرده‌ایم نخست‌آثارشیمیائی‌وی‌که تاکنون ازآنها اثری به‌دست‌نیامده ودوم آثاروی‌که درکتابخانه‌ها جهان، موجود است. وموردتوجه‌علمای شیمی قرارگرفته است.

الف- آثاری‌که ازآنها اثری در دست نیست.

۱- کتاب‌المدخل البرهانی، الذی‌سمیناه کتاب علل‌المعادن لیعرف التکوین الارواح والاجساد والحجاره والمعادن معرفة صحیحه.

۲- کتاب‌التدبیر الذی فیه بای‌شیئی یکون

۳- کتاب‌الاکسیر الذی‌فیه‌بای قوة یصیغ‌الدواء ولم وکیف

کتاب‌شرف‌الصناعة لیعرف شرف‌الصناعة‌واهلها وفضلها وفضل‌المتکسب علی‌المتکل

۵- کتاب‌الترتیب لیعرف دعاوی روساء اهل الصناعة وطریق‌التجربه

۶- کتاب‌التدابیر لیعرف لم دبرت‌الحکماء ما دبرت‌الحکماء مادبرت‌وماضطرهم‌الیه وکیف‌تدبیر مایحتاج‌الله

۱۱- رجوع شود:
*- Heym, G.: «Al-Râzi and Alchemy» Ambix, vol. I, No.3 (1938)
*- Partington. J.R.:«The chemistry of Râzi» Ambix vol. I, No.3, (1938)

۱۲- Stapleton & Azo-Hussain:«Chemistry in Iraq and Persia in the third century» Memoires of the Royal Asiatic Society of Bengal vol VIII, No.6. (1927)

۱۳- برای اطلاع از آثار زکریای رازی در رسایر رشته‌ها مخصوصاً در طب رجوع شود به مؤلفات و مصنفات ابوبکر محمد بن‌زکریای رازی، تألیف دکترمحمود نجم‌آبادی انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۳۹ هجری شمسی دراین‌کتاب می‌توانید ازترجمه‌ها و تحقیقاتی که در بارهٔ آثار طبی رازی درشرق وغرب انجام شده‌آگاهی یابید.

۷ـ کتاب المحن لیعرف محن الذهب والفضه من غیرهما من الاجساد معرفة حقیقة

۸ـ کتاب سر الحکماء وحیلهم لیعرف کیف یدفع عامة الناس وخاصه اهل والائذین به وکیف یتخلص ان هو بلی بالملوك او بعوام الناس

۹ـ کتاب الرد علی الکندی فی رده علی الصناعة الکیمیاء

۱۰ـ کتاب الرد علی محمد بن اللیث الرسائلی فی رده علی الکیمیائین

۱۱ـ کتاب التبویب

۱۲ـ کتاب رسالة الخاصه

۱۳ـ کتاب الحجر الاصفر

۱۴ـ کعاب رسائل الملوك

۱۵ـ کتابان فی التجارب

۱۶ـ رساله الی ماین

۱۷ـ منیة المتمنی

۱۸ـ رساله الی الوزیر القاسم بن عبیدالله

ب ـ آثار موجود رازی

۱۹ـ کتاب المدخل التعلیمی وهو آلات والعقاقیر ویتلوه فی الجزء الثانی المدخل البرهانی ویعرف بعلل المعادن

نسخه‌ای خطی ازاین کتاب در کتابخانهٔ نواب رامپور در هندوستان موجود است.

استاپلتون (H. Stapleton) و همکاران وی فصلی ازمتن عربی کتاب مزبور را همراه با توضیحاتی به زبان انگلیسی درسال ۱۹۱۰ چاپ کرد. (۱۴) ودرسال ۱۹۲۷ میلادی ترجمهٔ انگلیسی **المدخل التعلیمی** و متن عربی آن را چاپ کرده‌اند. (۱۵) آقای دکتر **حسنعلی شیبانی** درسال ۱۳۴۶ هجری شمسی کتاب مدخل التعلیمی رازی را به‌فارسی ترجمه کرد. وهمراه باتوضیحات لازم درتهران به‌چاپ رسانید. (۱۶)

۲۰ـ کتاب الشواهد لیعرف ان الحکماء ـ الماصنین اجمع کانوا لنا موافقین فی رایٔنا

این کتاب نیز ازروی نسخه‌موجود درکتابخانه‌نواب‌رامپور بوسیلهٔ **استاپلتون** و همکاران وی‌به انگلیسی ترجمه شده است. ودر سال ۱۹۱۰ چاپ شده است. (۱۷)

۲۱ـ کتاب الاثبات الصنعة والرد علی منکریها

فصلی ازاین کتاب موجود است (۱۸)

۲۲ـ کتاب الحجر الذی فیه‌ای شیئی یکون

فصلی ازاین کتاب موجود است. (۱۹)

۲۳ـ سه رساله به‌نامهای **شواهد الحجر ـ خواص الحجر ـ تدبیر الحجر** از این سه رساله که به فارسی نیز نوشته‌شده نسخه‌ای در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است. (۲۰)

۲۴ـ کتاب الاسرار وسر الاسرار

این دو کتاب را می‌توان مهمترین کتاب کیمیائی رازی دانست که دراغلب کتابخانه‌های جهان نیز مختصرهای خطی از آن موجود است.

یك نسخهٔ خطی ازاین کتاب درکتابخانهٔ دانشگاه گوتینگن به‌شمارهٔ ۹۵موجود است:

۱۴ـ Stapleton, H. A. & Azo, R.F. : «An Alchemical Compilation of the thirteen Century, A.D.»

Memoirs of the Asiatic Society of Bengal, Vol. III (1910)

۱۵ـ Stapleton, H.A.& Azo, R.F.: «Chemistry in Iraq and Persia in the third century»

Memoires of the Royal Asiatic Society of Bengal Vol. VIII. No. 6. (1927)

۱۶ـ رازی، محمد زکریا: «المدخل التعلیمی» ترجمهٔ فارسی وتوضیحات ازدکتر حسنعلی شیبانی. انتشارات دانشگاه تهران ۱۳۴۶ هجری شمسی

۱۷ـ Stapleton, H.A. & Azo, R.F. : «An Alchemical Compilation of the thirteen Century, A. D.»

۱۸ـ دکتر حسنعلی شیبانی: «ترجمهٔ فارسی المدخل التعلیمی»

۱۹ و ۲۰ـ همان مأخذ

K. Universtitats Bibliothek Gottingen, Cod. Ma. Arab. 95. Abu Bakr Mohammad ibn Zakrije al-Razi, Kitabe Sir ol-Asrar.

نسخهٔ خطی دیگری از این کتاب به‌زبان عربی در کتابخانهٔ شهر لایپزیك به‌شمارهٔ ۲۱۵ موجود است .

(Leipziger Stadtbibliotek , B. Or.215) .

نسخهٔ خطی دیگری نیز به‌زبان عربی . در کتابخانهٔ اسکوریال شمارهٔ ۷۰۰ موجود است (۲۱)

(Biblothek el Escorial, Nr. 700)

ترجمه های کتاب الاسرار و سرالاسرار

ترجمهٔ لاتینی کتاب سرالاسرار یا الاسرار رازی از دیرباز درمغرب زمین شناخته بوده است ودرهمان زمانها مترجمین لاتینی آن‌را به‌زبان لاتین ترجمه و یا تفسیر کرده‌اند واین کتاب تأثیر فراوانی درمغرب‌زمین درعلم کیمیا داشته است. از این ترجمه و تفسیرهای کتاب سرالاسرار رازی آنچه تاکنون شناخته‌شده به‌قرار زیر هستند:

۱ـ درکتابخانه شهر پالرمو واقع در جزیره سیسیل کتاب خطی به زبان لاتینی تحت عنوان:

Liber Ebu Bacchar et Raisy, Codex Specile, Nr. 19

موجوداست طبق‌تحقیقات دکتر **یولیوس روسکا** ومقایسهٔ سر فصلهای این نسخهٔ لاتینی با کتاب خطی سرالاسرار کتابخانه گوتینگین به زبان عربی معلوم شده است که نسخهٔ لاتینی فوق ترجمهٔ کتاب سرالاسرار است .(۲۲)

۲ـ درکتابخانهٔ ملی پاریس زیرشمارهٔ ۶۵۱۴ کتاب خطی لاتینی تحت عنوان:

Alberti de mineralibus et Cet.

موجود است که شامل چندین کتاب ورسالهٔ مختلف است. ازصفحهٔ ۱۰۱ تا ۱۱۲ کتاب زیر دیده می‌شود.

Liber Secretorum de Voce Bubacaris

ودرجملهٔ اول کتاب نام مؤلف به‌شرح زیرآمده است:

Incipit Secretorum de Voce Bubacaris Magumet filii Ceceri Arrasi

طبق تحقیقات **دکتر روسکا** این کتاب تفسیری‌برترجمهٔ لاتینی کتاب سرالاسرار کتابخانهٔ پالرمو است‌دراین کتاب خطی رساله‌های زیر نیربه رازی نسبت داده شده‌است. (۲۳)

Liber qui dicitur Lumen Luminum et Perfecti magisterii, editus per Rhasim,

Incipit Liber Rasis de Aluminibus et Salbus

۳ـ درکتابخانهٔ ملی‌پاریس زیرشمارهٔ ۷۱۵۶ کتاب خطی لاتینی تحت عنوان:

Varii Tractatus de Alchymia

موجود است که شامل رساله‌های مختلفه‌ای است ودرصفحهٔ ۱۱۴ رسالهٔ زیربه‌نام (Rubecaris) که ترجمهٔ لاتینی ابوبکراست ذکرشده واین‌رساله چنین است:

Liber Secretum Rubecaris araboruen

ودرجملهٔ اول کتاب نام‌مؤلف به‌شرح زیرنوشته شده است:

Incipit liber Secretorum de Voce Rubecari Mahometi filii Zec' Asar

تحقیقات **روسکا** ثابت کرده است که این کتاب نیز متعلق به رازی است ومترجم‌آن راتفسیر وتشریح کرده‌است.(۲۴)

۴ـ درکتابخانهٔ شهر ونیزواقع درشمال ایتالیا نسخهٔ‌خطی لاتینی تحت عنوان:

Liber Secretorum Bubacari, Machometi magni philosophi, filii Zerei Arazi

---

۲۱ـ Siggel, A.: «Katalog der arabischen alchemistichen Han – schriften Deutschlands»

Im Auftrag der Deutschen Academie der Wissenscharften Zu Berlin, (1949)

۲۲ و۲۳ـ دکترحسنعلی شیبانی: «المدخل‌التعلیمی»

ازنام این کتاب ومؤلف آن معلوم می‌شود که ترجمهٔ لاتینی کتاب سرالاسرار رازی است (۲۵)

۵ـ یك نسخهٔ خطی ناقص از ترجمهٔ سرالاسرار رازی به زبان لاتینی درکتابخانهٔ دانشگاه گوتینگن موجـود است که در زیرشمارهٔ ۷۵ ثبت شده‌است تحت عنوان:

Incipit liber Albubacaris Vel de dectrina Secretorum Geber et Mahometi filii Zereml Arrazi

۶ـ یك نسخهٔ خطی از ترجمهٔ لاتینی کتاب سرالاسرار در کتابخانهٔ دانشکـدهٔ کمبریج موجـود است ، که نام آن چنین است .(۲۶)

Incipit liber secretorum de Voce Bubaccari Mahumetis filii Zet Arabi

ترجمهٔ به زبان انگلیسی

ترجمهٔ کتاب الاسرار به‌زبان‌انگلیسی‌بوسیلهٔ **استاپلتون وهدایت‌حسین** درسال ۱۹۲۷ میلادی‌در کلکته‌چاپ شده‌است.(۲۷)

ترجمهٔ به‌زبان فرانسوی

برتلو (M. Bertholet) ازروی نسخهٔ خطی‌لاتینی کتاب سرالاسرار رازی را به زبـان فرانسوی ترجمه و تفسیر کرده است. (۲۸)

ترجمهٔ به زبان آلمانی

دکتریولیوس روسکا درسال ۱۹۳۷ میلادی کتاب سرالاسرار رازی راازروی نسخهٔ خطی کتابخانهٔ‌دانشگاه گوتینگن به زبان‌آلمانی ترجمه وتفسیر کرده است. (۲۹)

ترجمهٔ به زبان روسی

در سال ۱۹۵۷ میلادی **عبیـدالله کـریموف** کتاب سرالاسرار رازی را به‌زبان روسی‌ترجمه‌کرده وباشرح وحواشی در تاشکند به‌چاپ رسانده است. (۳۰)

در سال ۱۳۴۳ هجـری شمسی آقای **محمـد تقـی دانش پژوه** دو کتاب الاسرار و سرالاسرار راتواماً به چاپ رسانید(۳۱)

نسخه‌هائی که **دانش‌پژوه** ازآن استفاده کرده‌عبارتند از:

۱ـ فیلم‌شمارهٔ ۱۲۵۸ ازکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه‌تهران

۲ـ نسخهٔ شمارهٔ ۳۷۵۸ آکادمی‌علوم ازبکستان .

۳ـ نسخهٔ شمارهٔ ۲۳۰۵ کتابخانهٔ مجلس شورای‌ملی

۴ـ نسخهٔ‌کتابخانهٔ جامع گوهرشاد مجموعهٔ شمارهٔ ۹۵۳

۵ـ نسخهٔ شمارهٔ ۹۸ دانشکدهٔ ادبیات دانشگاه تهران

ترجمه به زبان فارسی

درسال ۱۳۴۹ هجری شمسی **دکترحسنعلی شیبانی** کتاب الاسرار رازی را استادانه بـه‌زبان فارسی ترجمه‌وتفسیر کرده واکثرمطالب‌آن را باموازین شیمی امروزی تطبیق‌نموده، ودرتهران به‌چاپ رسانده است (۳۱)

دنباله‌دارد

---

۲۴ تا ۲۶ـ همان مأخذ

۲۷ـ Stapleton H. & Hossain: «Memoires of the Royal Asiatic.» Vol. VIII, No. 6 (1927)
Bertholet, M. : «La Chimie au moyan age» Vol. I. Paris (1898)

۲۹ـ Ruska, J. : «Al Razis Buch, Gebeimnis der Geheimnisse» Quelen und Studien Zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin, Band 6, Berlin (1937)

۳۰ـ Karimov, I. : «Al - Razi, Kitab al - Sir al Asrar» Russian translation with explanation Tashkent (1957)

۳۱ـ رازی ، محمد زکریا : «کتاب‌الاسرار و سرالاسرار» به‌کوشش محمد تقی دانش‌پژوه.انتشارات یونسکو در ایران تهران ۱۳۴۳ هجری شمسی

۳۲ـ کتاب‌الاسرار یارازهای صنعت‌کیمیا. تألیف محمد زکریای رازی ترجمه وتحقیق از دکترحسنعلی شیبانی انتشارات‌دانشگاه تهران ۱۳۴۹ هجری شمسی

«برنامه‌های ریاضی در تلویزیون فرانسه»

استفاده از نمودار در حل مسائل

ترجمهٔ: مهندس فتح‌الله زرگری

آموزش تلویزیونی درمدارس فرانسه بسیارواج پیدا کرده است؛ فقط درسال تحصیلی ۷۱ـ۱۹۷۰ درحدود ۱۰۰۰ برنامهٔ آموزشی پخش شده است.

درمورد ریاضیات دوبرنامهٔ نیم‌ساعتهٔ هفتگی عصرها تدارك دیده‌شده است (یکی برای‌معلمین سیکل اول دبیرستانها ودیگری برای معلمین سیکل دوم‌دبیرستانها)ودوبرنامهٔ ۱۳ دقیقه‌ای‌هفتگی درصبحها برای‌دانش‌آموزان اجرامی‌شود.

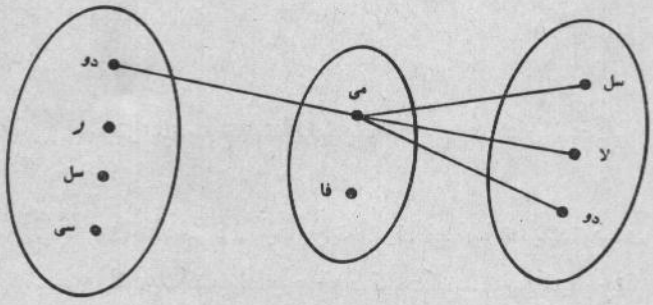
برنامهٔ ریاضیات‌برای‌معلمان، آنان را باپژوهشهای‌مختلف درزمینهٔ‌آموزش آشنا کرده وتجاربی راکه درتدریس ریاضیات‌طبق برنامه جدید بدست‌آمده دراختیارشان قرارمی‌دهد.

چنان مطالبی در اختیار معلم گذاشته می‌شودکه مندرجات موضوع درس را بهتریادگرفته وهمچنین عمیقاً رابطهٔ بین‌موضوع درس را با دیگرموضوعها درك وکشف کند.

برنامه‌ای درسی برای دانش‌آموزان کوتاه مدت بوده و کوتاهی این برنامه‌ها استفادهٔ سریع آنها را درکلاس ممکن می‌سازد. یك برنامهٔ درسی معین دریك‌سال چندین‌بارازتلویزیون پخش می‌گردد. (متناسب با پخش برنامه دانش‌آموزان می‌توانند درمواقع مختلف سال تحصیلی ازآن استفاده کنند).

یکی ازبرنامه‌ها ریاضی برای دانش‌آموزان کلاسهای‌پایین تحت عنوان «چگونه می‌توان محاسبه کرد» پخش می‌شود.دراین برنامه با مثالهای ساده نشان داده می‌شود که چگونه با استفاده ازترسیم‌روی‌کاغذ می‌توان به‌آسانی بعضی‌ازمسائل مربوط به‌حساب را حل کرد.دونمونه‌ازمسائلی‌راکه دراین برنامه‌آمده است‌بررسی می‌کنیم.

۱ـ سه مجموعه کـه عضوهایشان نتهای انتخاب شده از اکتاوهای مختلف است مفروضند (شکل ۱). چند ترتیب مختلف ازسه نت می‌توان ترتیب داد، اگر متوالیاً یك نت از مجموعهٔ I سپس یك نت از مجموعهٔ II وبالاخره یك نت از مجموعهٔ III برداریم؟



(شکل ۱)

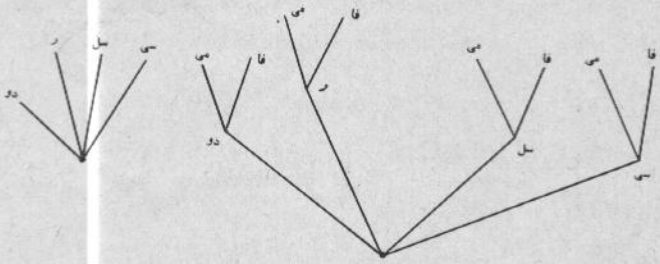
حل‌ـ به عنوان نت اول «دو» را برمی‌گزینیم. در این صورت برای انتخاب‌نت دوم دوامکان وجود خواهد داشت: نتهای «می» و «فا». نت «می» را برمی‌گزینیم. برای انتخاب نت سوم سه امکان وجود دارد: «سل»، «لا» و «دو».

به‌این ترتیب سه‌ترتیب سه نتهٔ زیررا بدست می‌آوریم: (سل،می، دو)، (لا، می، دو) و (دو، می، دو). اگر به عنوان نت دوم نت «فا» را انتخاب کنیم برای انتخاب نت سوم باز سه امکان وجود خواهد داشت‌وبه‌این‌ترتیب‌بدست‌می‌آوریم(سل،فا،دو)،(لا،فا،دو)و (دوفا،دو). اگرمتوالیاً به‌عنوان، نت‌اول‌نتهای «دو»،«ر»،«سل»، «سی»رابرگزینیم‌درنتیجه $۳ \times ۲ \times ۴ = ۲۴$ ترتیب‌سه‌نتهٔ‌مختلف بدست می‌آوریم.

برای حل مسئلهٔ داده شده می‌توان ازنموداراستفاده کرد.

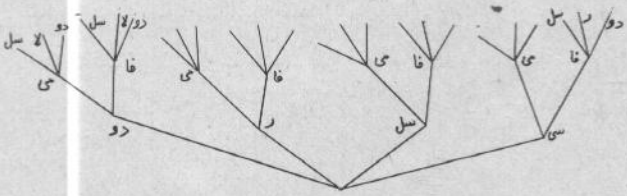
حال مفصلا نشان می‌دهیم که چگونه این عمل انجام می‌شود.

به‌عنوان نت اول می‌توانیم نتهای «دو»، «ر»، «سل»، «سی»، (شکل ۲) را برگزینیم. پس ازهرانتخابی نتهای «فا» و «می» را می‌توان به‌عنوان نتهای دوم (شکل ۳) برگزید.



(شکل۲) (شکل۳)

پس ازانتخاب‌دونت‌اول می‌توانیم نت سوم را ازمیان‌نتهای «سل» یا «لا» یا «دو» (شکل۴) برگزینیم.



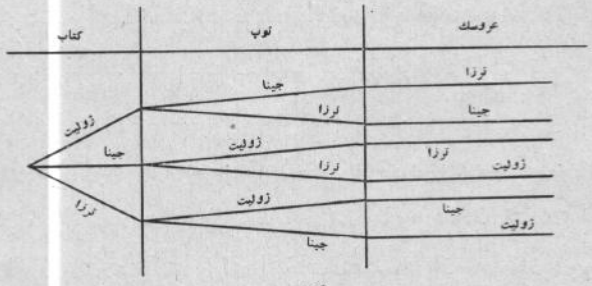
(شکل۴)

هرترتیب سه نته متناظربا یك شاخه روی شکل است.

تعداد این شاخه‌ها ۲۴ است.

۲ـ سه دختر: ژولیت، جینا وترزا می‌خواهند یك توپ و یك عروسك ویك‌کتاب را بین خود قسمت‌کنند. تعیین‌کنیدبه‌چند طریق مختلف می‌توانند این‌کاررا انجام دهند؟

حل این مسئله در (شکل ۵) آمده است‌که جواب آن



(شکل۵)

$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$ طریق مختلف است.

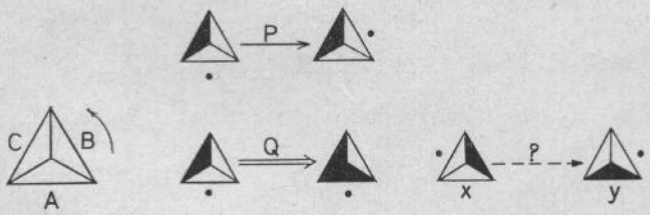
***

حال بـا محتوای برنامهٔ مخصوص دبیران سیکل اول‌تحت عنوان «تعبیرریاضی یك وضعیت» آشنا می‌شویم. برنامه از اینجا شروع می‌شودکه تماشاچیان را با یك بازی آشنا می‌کنند: مثلث متساوی‌الاضلاعی مفروض است، آن را به سه مثلث مساوی تجزیه می‌کنیم‌وهرکدام ازاین سه‌مثلث می‌تواند یا سفید بماند یابه‌رنگ سیاه‌رنگ شود. این سه‌جزء مثلث راباحروف A، B وC(شکل۶) معرفی‌می‌کنیم. بازیکن‌می‌تواندمهره‌ای‌راروی‌یکی‌ازاجزاءدلخواه A، B وC قراردهد (درشکل برای راحتی ترسیم مهره درخارج مثلث ومقابل همان جزئی‌که باید قرارگیرد رسم شده است).

بازی دوترتیب دارد. ترتیب P امکان می‌دهد مهره را در جهت نشان داده‌شده تغییر مکان داد بدون اینکه رنگ مثلث جزء دراین تغییر مکان عوض شود. ترتیب Q امکان می‌دهد که رنگ مثلث جزء راکه مهره داخل آن قراردارد بدون هیچ تغییر مکان مهره، تغییرداد.

دومثال ازترتیبهای P وQ را در(شکل۷) می‌توان مشاهده کرد.

یك وضع ابتدائی مانند x داده شده است. می‌خواهیم به وضع انتهائی معینی مانند y برسیم (شکل ۸) هربازیکنی‌که با کمترین حرکت به‌وضع y برسد برنده خواهد بود.



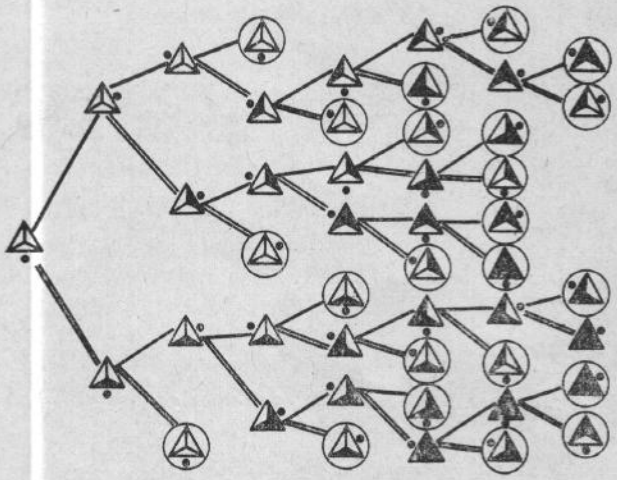
(شکل۶) (شکل۷) (شکل۸)

مشاهده می‌شودکه با سری حرکات PQQPPPQPQ می‌توان به‌نتیجهٔ مطلوب رسید.

برای تجزیه وتحلیل این بازی، لازم است‌که تعداد کلیهٔ حالاتی راکه ممکن است‌درطول بازی به‌آنها برخوردکنیم‌بدست آوریم. برای این منظورنمودار عمل را رسم می‌کنیم. یك حالت دلخواه اولیه را درنظرمی‌گیریم، دو حالت ممکن خواهد بود: حرکت P را انجام دهیم یا حرکت Q را؟

درنتیجه‌به دووضع‌جدیدبرمی‌خوریم. هرگاه دربسط‌نمودار به‌حالتی برخوردکنیم‌که قبلا داشتیم (چنین مثلثهایی درنمودار با دایره‌ای پیرامون‌آنها نمایانده شده‌اند) دراین‌صورت ترتیبهای P و Q دیگر بکار نخواهند آمد زیراکه عمل به نتیجهٔ اخیر منتهی خواهدشد.

رسم نمودار امکان می‌دهد که تعیین کنیم، باریکتان فقط می‌توانند ۲۴ وضع مختلف را پیدا کنند (شکل۹)

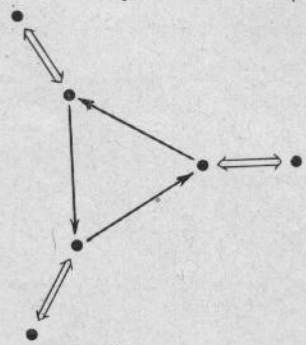


(شکل۹)

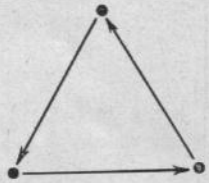
این نمودار، درحالات دیگر کمك می‌کند تا به جوابهای زیرپاسخ دهیم: آیا می‌توان سری حرکاتی را طوری پیدا کرد که امکان دهد ازحالت x به‌حالت y رسید؟ هرگاه حالات x و y روی شاخه‌های مختلف این نمودار قرار داشته باشند در این صورت به این سؤال هرگز نمی‌توان جواب داد. در این صورت لازم است نمودار جدیدی رسم کرد که در آن حالت x به‌عنوان آغاز کار انتخاب شده باشد.

نشان می‌دهیم که رسیدن ازیك حالت به حالت دیگر همیشه ممکن است (این موضوع درنمودارشکل ۹ پیدا نیست).

توجه می‌دهیم که با اثردادن متوالی عامل P برروی حالت معینی دوری بدست می‌آوریم متشکل ازسه‌حالت (شکل۱۰). برای اینکه ازاین دورخارج شویم، کافی است عامل Q را اثردهیم که در



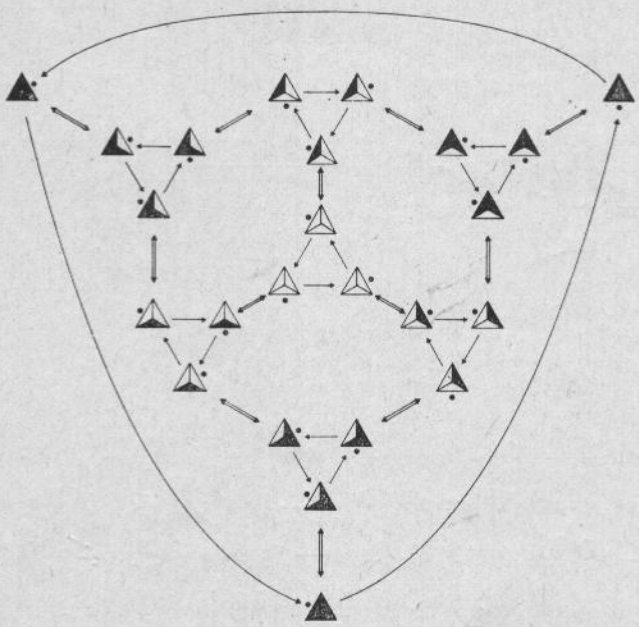
(شکل۱۰)



(شکل۱۱)

نتیجه به‌سه‌حالت می‌رسیم (شکل۱۱)، سپس به کمك عامل P ازاین سه حالت جدید خارج شده ودورجدیدی را بوجود می‌آوریم و این روش را می‌توانیم آنقدر ادامه دهیم، تا وقتی که کلیهٔ ۲۴ حالت ممکن بدست آید (شکل ۱۲).

توجه داریم که با اثردادن سه بارمتوالی عامل P روی مثلث ودوبارمتوالی عامل Q روی مثلث به‌همان وضعی می‌رسیم که قبلا



(شکل۱۲)

داشتیم.

عامل بی‌اثررا به E نشان می‌دهیم. با این ترتیب می‌توان تساوی زیررا نوشت:

$$PPP=E \Longrightarrow P^3=E$$

$$QQ=E \Longrightarrow Q^2=E$$

می‌توان همچنین نتیجه گرفت که:

$$PQPQPQPQPQPQ=E \Longrightarrow (PQ)^6=E$$

اثردادن P وسپس Q برروی یك حالت با اثردادن Q وسپس P برروی همان حالت نتایج یکسانی نمی‌دهد، واین بدین معنی‌است که $PQ\neq QP$ است که از نمودار (شکل۹) پیداست. مجموعهٔ عاملهایی راکه از ترکیب عاملهای P و Q حاصل می‌شوند به S نشان می‌دهیم. مجموعهٔ S متشکل از۲۴ عضواست.

درمجموعهٔ S عمل، طوری تعریف شده است که ، خارج‌از مرزمجموعه نبوده وبعلاوه این عمل شرکت پذیراست، در S عامل بی‌اثر E متناظر با این‌عامل موجود است وکلیهٔ عضوهای مجموعه دارای عضومتقابل می‌باشند که اینها نیزدرمجموعهٔ S قرار دارند.

منظورازشرکت پذیری این است که:

الف) درمورد جمع:

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$$

ب) درمورد ضرب: $(a\cdot b)c=a(b\cdot c)=abc$

به‌این‌ترتیب مجموعهٔ S یك گروه غیرجابجایی تشکیل خواهدداد.

مفهوم جابجایی آن است که:

الف) درمورد جمع: $a+b=b+a$

ب) درمورد ضرب: $ab=ba$

دنباله دارد

قضیه‌هایی دربارهٔ اعداد

ترجمهٔ: محمد معینی

۱ـ فرض می‌کنیم a و n نسبت به‌هم اول باشند، اگر n جملهٔ اول ازتصاعد حسابی ....و $x, x+a, x+2a$ را بر n تقسیم کنیم، باقیمانده‌های $(n-1)$ و ...و۲و۱و۰ مرتباً تکرار می‌شوند وباقیمانده‌ها فقط اعداد مذکورمی‌باشند.

اثبات: اگر فرض کنیم دوجملهٔ $x+m'a$ و $x+ma$ در تقسیم بر n باقیمانده‌های مساوی بدست می‌دهند باید تفاضلشان یعنی $(m-m')a$ بر n بخش‌پذیر باشد، واین غیرممکن است زیرا a و n نسبت به‌هم اولند و $|m-m'|<n$ می‌باشد. بنابراین باقیمانده‌ها متفاوت‌هستند وهمچنین هر کدام‌ازآنها، از n کوچکتر است، پس آن اعداد فقط‌می‌توانند $(n-1)$ و...،۲،۱،۰ باشند. اگر تصاعد حسابی تا اعداد بزرگتراز n ادامه یابد، باقیمانده‌ها همان اعداد $(n-1)$ و ... و۳،۲،۱،۰ خواهند بودکه مرتباً تکرار می‌شوند.

اگر $m=m'+qn$ شود، در این صورت جملات $x+m'a$ و $x+ma$ درتقسیم بر n باقیمانده‌های مساوی‌بدست می‌دهند.

۲ـ اگر a و n نسبت‌به‌هم اول نباشند و g بزرگترین‌مقسوم علیه مشترك آنها باشد، باقیمانده‌ها درتقسیم n جملهٔ اول ازتصاعد حسابی .... و $x, x+a, x+2a$ بر n، تکراری خواهندبود ودورهٔ گردش آنها $\frac{n}{g}$ اعداد مذکورمی‌باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم $a=ya'$ و $n=gn'$ بطوری‌که a' و n' نسبت به‌هم اولند. جملات $x+m'a$ و $x+ma$ در در تقسیم بر n، باقیمانده‌های یکسان خواهند داشت، اگر و فقط اگر $a(m-m')$ بر n بخش‌پذیر باشد، یعنی اگر $a'(m-m')$ بر n' بخش‌پذیر باشد، وازاینجا چون a' نسبت به n' اول است ناچار $m-m'$ باید بر n' بخش‌پذیر باشد، پس n' جملهٔ‌اول تصاعد در تقسیم بر n، باقیمانده‌های متفاوت بدست می‌دهد و پس ازآن باقیمانده‌ها تکرارمی‌شوند اما چون $n=gn'$ است پس $n'=\frac{n}{g}$ وحکم ثابت است.

۳ـ **تعریف:** اگر P عددی اول باشد، عدد $P!+1$ بزرگتراز P است ونیز $P!+1$ بر P ویا عدد اول کوچکتر از آن بخش‌پذیر نیست، پس اگر $P!+1$ اول نباشد باید برعددی نسبت به P اول وبزرگتراز P بخش‌پذیر باشد و در هرحال این عدد نسبت به P اول وبزرگتراز P وجود دارد.

۴ـ **همنهشتی:** فرض می‌کنیم n عدد مثبتی باشد که آنرا مدول می‌نامیم، اگر a و b دوعدد مثبت یا منفی باشند به‌طریقی که $a-b$ بر n بخش‌پذیر باشدمی‌گوئیم a و b را با مدول n همنهشت می‌باشند وچنین می‌نویسیم:

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\cdot n) \quad \text{یا} \quad a-b\equiv 0(\mathrm{mod}\cdot n)$$

هر باقیمانده‌ای از a نسبت به‌مدول n به شکل $a+qn$ می‌باشد که q ممکن است مثبت یامنفی باشد. اگر r باقیمانده باشدوقتی a بر n تقسیم شود داریم:

$$a\equiv r(\mathrm{mod}\cdot n) \quad \text{و} \quad 0\leqslant r<n$$

r کوچکترین باقیمانده مثبت a است.

همچنین $a\equiv r\equiv -(n-r)(\mathrm{mod}\cdot n)$ ونیز:

$$n-r\leqslant\frac{1}{2}n$$

می‌توانیم r' را به طریقی بیابیم که $a\equiv r'(\mathrm{mod}\cdot n)$ و $|r'|\leqslant\frac{1}{2}n$ باشد، r' ممکن است مثبت یا منفی باشد.

r' قدرمطلق کوچکترین باقیمانده a نسبت به‌مدول n است. مثلا برای ۵ و ۳۴ داریم. (۵ مدول است).

$$۳۴\equiv۴\equiv-۱ \quad \text{و} \quad -۳۴\equiv-۴\equiv۱$$

کوچکترین عدد مثبت از ۳۴ و ۳۴ — ، ۴و۱ و قدرمطلق آنها یك است که به‌ترتیب باقیمانده‌ها ۱ — و۱ خواهند بود.

۵ـ قضیهٔ اصلی: اگر $a\equiv b(\text{mod}\cdot n)$

و $a'\equiv b'(\text{mod}\cdot n)$

باشد داریم:

I: $a+a'\equiv b+b'$

II: $a-b\equiv a'-b'$

III: $aa'\equiv bb'$ و مخصوصاً $ac\equiv bc$

IV: اگر a و b بر d بخش‌پذیر باشند و a نسبت به n اول باشد داریم:

$$\frac{a}{d}\equiv\frac{b}{d}$$

اثبات: بنا به‌فرض $a-b$ و $a'-b'$ بر n بخش‌پذیرند پس $(a+a')-(b+b')$ و $(a-a')-(b-b')$ بر n بخش‌پذیرخواهند بود ونیز $aa'-bb'=(a-b)a'+(a-b)b'$ بنابراین $aa'-bb'$ بر n بخش‌پذیراست. بالاخره، اگر q عددی غیرمشخص باشد به طریقی که $a-b=qn$ و a و b بر d بخش‌پذیر باشند، qn نیز بر d بخش‌پذیرخواهد بود، اگر d نسبت به n اول باشد داریم:

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{q}{d}\cdot n$$

نتیجه اینکه : $\frac{a}{d}\equiv\frac{b}{d}(\text{mod}\cdot n)$.

هرگاه p عددی اول و d مقسوم علیه مشترك a و b باشد خواهیم داشت:

$$\frac{a}{d}\equiv\frac{b}{d}(\text{mod}\cdot p)$$

بجزوقتی که $d\equiv ۰(\text{mod}\cdot p)$

ازقضیهٔ فوق نتیجه می‌شود:

۶ـ اگر نسبت به‌مدولی‌داشته باشیم:

$a\equiv a'$ ، $b\equiv b'$،...،$k\equiv k'$ نسبت به همان مدول خواهیم داشت:

$$ab\ldots k\equiv a'b'\ldots k'$$

ونیزمخصوصاً $a^m\equiv a'^m$

۷ـ اگر $f(x, y, z\ldots)$ کثیرالجمله‌ای از اعداد مثبت ...وzوyوx باشد ونسبت به‌مدول مشخصی داشته باشیم ...:

و $z\equiv z'$ و $y\equiv y'$، $x\equiv x'$، نسبت به‌همان مدول خواهیم‌داشت:

$$f(x,y,z\cdots)\equiv f(x',y',z'\cdots)$$

۸ـ اعدادکوچکتر از عدد مفروض و نسبت به آن اول:

اگر n عددی بزرگترازواحد باشد، تعداد اعداد مثبت و صحیح کوچکتراز n ونسبت به‌آن‌اول،را با $\varphi(n)$ نمایش‌می‌دهیم.

مثلا: اعدادکوچکتراز۱۲ ونسبت به‌آن اول چنین است:

$$۱،۵،۷و۱۱\Longrightarrow\varphi(۱۲)=۴$$

۹ـ اگر a نسبت به n اول باشد تعداد جملات تصاعد حسابی:

$$x،x+a،x+۲a\text{و}\cdots\text{و}x+(n-۱)a$$

که نسبت به n اولند عبارت است از: $\varphi(n)$

اثبات: اگر این اعداد بر n تقسیم شوند باقیمانده‌های $(n-۱)$و...و۲،۱،۰ حاصل می‌شود (طبق قضیهٔ ۱) و اگر عددی نسبت به n اول باشد نسبت به باقیمانده‌ها نیز اول خواهد بود، نتیجتاً همانطورکه جملات تصاعد نسبت به n اولند، اعداد کوچکتر از n وجود داردکه نسبت به n اول باشد که می‌دانیم تعدادشان $\varphi(n)$ است.

۱۰ـ اگر m نسبت به n اول باشد داریم:

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$$

اثبات: برای‌تعیین اعدادکوچکتراز mn ونسبت‌به آن اول، اعداد mn و...و۳،۲،۱ را در n ردیف و m ستون مرتب می‌نویسیم:

۱	۲	k	m
m+۱	m+۲	m+k	۲m
۲m+۱	۲m+۲	۲m+k	۳m
(n−۱)m+۱	(n−۱)m+۲	(n−۱)m+k	nm

که دراینجا m نسبت به n اول است واعدادی بکاررفته شده که نسبت به m و n اول باشند، برحسب اینکه k نسبت به m اول باشد یا نباشد اعداد ستون k ام نسبت به m اول خواهند بود و در حالت دوم اول نیستند. اعداد مفروض در صورت قضیه نسبت به m اولند بنابراین ستون $\varphi(m)$ به وسیله اعدادنسبت به m اول درست می‌شوند.

هرستون شامل $\varphi(n)$ عدد است که نسبت به m اولند ، اعداد هرستون تشکیل تصاعدحسابی با قدر نسبت m می‌دهندکه نسبت به n اولند نتیجه اینکه تعداد $\varphi(m)\cdot\varphi(n)$ عددکوچکتر از mn می‌باشدکه نسبت به‌آن‌ها اولند (m و n) ودرنتیجه‌با mn اولند پس:

$$\varphi(m\cdot n)=\varphi(m)\varphi(n)$$

۱۱ـ اگر m_1، m_2، m_3 و ... و m_r اعدادی نسبت به‌هم اول، باشند داریم:

$$\varphi(m_1 m_2 m_3 \cdots m_r)=$$
$$=\varphi(m_1)\cdot\varphi(m_2)\varphi(m_3)\cdots\varphi(m_r)$$

اثبات: با استفاده‌ازقضیهٔ ۱۰ داریم:

$$\varphi(m_1 m_2)=\varphi(m_1)\cdot\varphi(m_2)$$

m_3 با m_1 و m_2 اول است بنابراین با $m_1 m_2$ اول می‌باشدپس:

$$\varphi(m_1\cdot m_2\cdot m_3)=\varphi(m_1 m_2)\varphi(m_3)=$$
$$=\varphi(m_1)\varphi(m_2)\cdot\varphi(m_3)$$

که با ادامهٔ عمل حکم ثابت می‌شود.

۱۲ـ اگر p عددی اول باشد داریم:

$$\varphi(p^r)=p^r(1-\frac{1}{p})$$

اثبات: قضیه به ازاء $r=1$ ثابت است زیرا

$$\varphi(p)=p(1-\frac{1}{p}),\ \varphi(p)=p-1$$

اگر $r>1$ باشد، چون p عددی است اول از اعداد

$1, 2, 3, \cdots$ و p^r

آنهایی که نسبت به p اول نیستندعبارتند از

$p, 2p, \cdots$ و p^r

که تعدادشان عبارت‌است از p^{r-1}

بقیه که با p^r اولند تعدادشان p^r-p^{r-1} می‌باشد پس

$$\varphi(p^r)=p^r-p^{r-1}\Longrightarrow$$

$$\varphi(p^r)=p^r(1-\frac{1}{p})$$

وحکم ثابت است.

۱۳ـ اگر $n=p^a\cdot q^b\cdot r^c\cdots$ باشد (که در اینجا $p, q, r\cdots$، عوامل اول n هستند.) داریم:

$$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{r})\cdots$$

اثبات: چون $p^a, q^b, r^c\cdots$ نسبت به‌هم اولند با توجه به قضیهٔ ۱۲، اثبات قضیه به‌سادگی امکان‌پذیراست.

مثال: مطلوبست تعیین اعدادکوچکتراز n که با آن اولند درصورتی که:

$$n=1024\ ،\ 1025\ و\ 1026$$

حل: داریم

$$1024=2^{10}\Longrightarrow\varphi(1024)=1024(1-\frac{1}{2})=512$$

$$1025=5^2\times 41\Longrightarrow$$

$$\varphi(1025)=1025(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{41})=800$$

$$1026=2\times 3^3\times 19\Longrightarrow$$

$$\varphi(1026)=1026(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{19})$$

$$\varphi(1026)=324$$

۱۴ـ اگر $d_1(=1), d_2, d_3, \cdots d_r(=n)$ مقسوم علیه‌های عددی مانند n باشد داریم:

$$\varphi(d_1)+\varphi(d_2)+\varphi(d_3)+\cdots+\varphi(d_r)=n$$

اثبات: درصورتی که p, q, r و ... نسبت به هم اول باشند داریم $n=p^a q^b r^c\cdots$ حال فرض می‌کنیم

$$S=\varphi(d_1)+\varphi(d_2)+\cdots+\varphi(d_r)$$

پس هرمقسوم‌علیه از n به‌شکل $p^x q^y r^z\cdots$ می‌باشد که‌داریم

$0\leqslant x\leqslant a$ ، $0\leqslant y\leqslant b$ و $0\leqslant z\leqslant c$ و ...

بنابراین:

$$S=\Sigma\varphi(p^x q^y r^z\cdots)=$$
$$=\Sigma[\varphi(p^x)\cdot\varphi(q^y)\cdot\varphi(r^z)\cdots]$$

که x ، y و z .... درشرایط فوق صدق می‌کنند.

پس S برابراست با:

$$[1+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\cdots+\varphi(p^a)]\times$$
$$\times[1+\varphi(q)+\cdots+\varphi(q^b)]\times$$
$$\times[1+\varphi(r)+\cdots+\varphi(r^c)]\times\cdots$$

اما داریم:

$$1+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\cdots+\varphi(p^a)=$$
$$=1+(p-1)+(p^2-p)+\cdots+$$
$$+(p^a-p^{a-1})=p^a$$

به طریق مشابه برای هریك ازکروشه‌ها مقادیر نظیرشان بدست می‌آید. بنابراین:

$$S=p^a\cdot q^b\cdot r^c\cdots=n$$

مثال: مقسوم‌علیه‌های ۲۴ عبارتنداز ۲۴ و ۱۲ و ۸ و ۶ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱

پس:

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(6)+\varphi(8)+$$
$$\varphi(12)+\varphi(24)=1+1+2+2+4+8=24$$

دنباله دارد

داستانهای ریاضی

ترجمهٔ: مهندس داوید ریحان

طفیلی و شیطان

یك طفیلی ازاینکه همیشه بی‌پول است، ناراحت بود. در ضمن اینکه ازاین موضوع مستأصل شده بود، فکر احضار شیطان به خاطرش رسید. هنوز اسم او را نیاورده بودکه شیطان در رو- برویش سبز شد . در حالی‌که ترس بر وی مستولی شده بود از شیطان خواست‌که راهی برای ثروتمند شدن به وی نشان بدهد. شیطان چنین راهنمائی کرد:

«ـ ساده است، کافی است چندین بـار از پلی که آنجا می‌بینی عبور کنی. پس از هر رفت وآمد خواهی دیدکه‌پولهای جیبت دو برابر شده است.

طفیلی اظهار می‌دارد: ـ غیر ممکن است.

ـ امکان این موضوع را تضمین می‌کنم مشروط بر آنکه در هر رفت‌وبرگشت و پس از دو برابر شدن پولهایت، باید ۲۴ ریال مزد زحمت مرا بدهی. قبول است؟

طفیلی‌که از این فکر ساده بـرای ثروتمند شدن مسرور شده بود، بااین امرموافقت‌کرد وگفت: هم‌الساعه شروع‌می‌کنیم!»

طفیلی یك بار از پل عبور می‌کند و مشاهده می‌کندکه‌دو برابر قبلی پول در جیبش وجود دارد. مسرور از این واقعه، بـا عجله نزد شیطان می‌رود و۲۴ریال را به شیطان می‌دهد تا برای بار دوم‌از پل عبورکند. می‌خواست اطمینان حاصل‌کندکه شیطان دروغ نگفته است : پولش بـاز هـم دو برابر شد . ۲۴ ریال به شیطان می‌دهد و سومین رفت و برگشت را انجام می‌دهد و پس از دو برابر شدن پولش درست ۲۴ ریال برایش باقی می- ماندکه نزدشیطان برمی‌گردد و آنرا دودستی به او تحویل می- دهد. در همین هنگام شیطان نا پدید می‌شود .

پول اولیهٔ طفیلی چقدر بوده است؟

پاسخ: بهتر است‌که از آخر مسئله شروع‌کنیم و در نظر داشته باشیم‌که در آخرین رفت و برگشت طفیلی درست ۲۴ ریال‌داشته است. اینکه پس از آخریـن رفت و برگشت، طفیلی ۲۴ ریال داردِ بدین معنی است‌که قبل از این رفت و برگشت نهائی وی ۱۲ریال داشته است. ولی این ۱۲ ریال موقعی درجیب‌وی قرار داشت که وی ۲۴ ریال به شیطان داده بود ؛ پس کلا ۳۶ ریال داشته است. در نتیجه دردومین رفت و برگشت وی ۱۸ ریال در اختیار داشته‌است‌واین‌هنگامی‌بوده‌است‌که‌وی اولین رفت‌وبرگشت راانجام داده و ۲۴ ریال را به شیطان داده است . مفهوم بیانات اخیر اینست‌که پس‌ازاولین‌رفت‌وبرگشت۴۲ = ۲۴ + ۱۸ریال‌در اختیارداشته‌است. به‌سادگی‌نتیجه می‌گیریم‌که طفیلی درابتدا۲۱ ریال در جنبش، داشته است.

بچهٔ حیله‌گر

بیست‌وچهار سیب می‌بایست بین سه بـرادر تقسیم می‌شد؛ والدین تصمیم‌گرفتندکه به هر کدامشان به تعداد سنینی که سه سال قبل از این داشته‌اند سیب بدهند . جوانترین آنان، که در زرنگی ید طولائی داشت به‌سه برادرش راه زیر را پیشنهادکرد:

«ـ فقط نصف سیبهائی را که دریافت کرده‌ام، بر می‌دارم و بقیه را بطور مساوی بین شما تقسیم می‌کنم. پس‌از این، توهم که فرزند میانی‌هستی باید همین‌کاررا بکنی: فقط نصف‌سیبهایت را در تصاحب خود نگاه می‌داری و بقیه رابطور مساوی بین‌من و فرزند مهتر تقسیم می‌کنی و در خاتمه نتیجهٔ عملیات مساوی خواهد بود.

بدون آنکه متوجه حیلهٔ او شوند، دوبرادر بزرگتر این تبادل را پذیرفتند .... پس از این هر سه دریافتند که تعداد- سیبهای هرکدام با هم برابر است.سنین متوالی سه برادر چقدر بوده است؟

پاسخ: در خاتمهٔ عمل‌هرکدام از برادران ۸ سیب داشته است . در نتیجه ، قبل از آنکه فرزند مهتر نصف سیبها را به برادرانش بدهد، صاحب ۱۶ سیب بوده است، فرزند میانی‌مانند فرزند کوچکتر، ۴ سیب داشته است. قبل از آنکه فرزند میانی سیبهایش را تقسیم‌کند ۸ سیب، فرزند ارشد ۱۴ سیب و فرزند

کهتر ۲ سیب داشته است.

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که قبل از آنکه فرزند کهتر سیبهایش را تقسیم کند ۴ سیب، فرزند میانی ۷ سیب و فرزند ارشد ۱۳ سیب داشته است.

چون هر کدام از سه برادر برطبق توزیع اولیه به تعداد سنینی که سه سال قبل از این داشته‌اند، سیب دریافت کرده‌اند، سنین کنونی عبارتست از : ۷ سال برای فرزند کهتر ، ۱۰ سال برای میانی و ۱۶ سال برای فرزند ارشد .

شکارچی‌ها

سه شکارچی با هم شکار می‌کردند . کیسهٔ آنها تقریباً پر شده بود که حادثهٔ کوچکی اتفاق افتاد:

هنگام عبور از یك گذرگاه، دو نفر از شکارچیان قدمی اشتباه برداشتند و تاکمربند در آب فرورفتند. چیزمهمی نبود، فقط چند تا ازفشنگهایشان ضایع شده بود. سه دوست فشنگها را بطور منصفانه بین خود تقسیم کردند و هر کدام از آنها ۴ تیر دیگر نشانه رفتند. در لحظهٔ عزیمت، فهرست مهمات باقی مانده را ارزیابی کردند و متوجه شدند که تعداد کل فشنگهای باقی‌مانده برابر با تعدادی است که هر کدام ازآنها در لحظهٔ تقسیم گرفته است. پس از حادثهٔ ناگوار گذرگاه ، چند فشنگ سالم تقسیم شده بود ؟

پاسخ: پس‌از تقسیم فشنگها، هرسه شکارچی ۱۲فشنگ دیگر را نیز مصرف کردند. پس‌از این متوجه شدند که در خاتمه به همان تعدادی که درلحظهٔتقسیم دریافت کرده‌اند، فشنگ باقی مانده است، یعنی تعداد کل فشنگها ۴ مرتبه تقلیل یافته است.

به بیانی دیگر، شکارچی‌ها ۲ قسمت آنرا استفاده کرده و یك قسمت آن را باقی گذارده‌اند. دو قسمت معرف ۱۲ فشنگ است، بنابراین یك قسمت۶فشنگ می‌شود. در نتیجه، در خاتمه ۶فشنگ‌باقی‌می‌ماند. همینطورتعداد فشنگهای‌دست نخورده‌ای که هر کدام‌از آنها در لحظهٔ تقسیم دریافت کرده‌است، برابر با همین تعداد است . بنابراین ، در لحظهٔ تقسیم ۱۸ فشنگ سالم وجود داشته است.

داستان قارچها

پنج دوست به نامهای نیکلا، ژان، آندره، پیروفرانسواز تصمیم به چیدن قارچ گرفتند . ناگهان بچه‌ها ترجیح دادند که روی علف‌های جنگل بنشینند و داستانهای خوب تعریف کنند ؛ تنها فرانسو از هدف اولیهٔ گردش را فراموش نکرد و در این لحظه وی ۴۵ قارچ در سبد خود داشت، در صورتی که سبد دوستانش خالی بود.

فرانسواز به رقت می‌آید و می‌گوید: «ـ اگر ناکام باز گردید چه حالتی خواهد داشت» ودر این حال بدون اینکه‌حتی یك قارچ در سبد خود باقی بگذارد ، همه را بین سبدهای پسر بچه‌هاتقسیم می‌نماید. ولی، در هنگام عزیمت، نیکلا و آندره بر حسب اتفاق به قارچ‌زاری برمی‌خورند و سبدهای خودرا لبالب پرمی کنند(نیکلا۲قارچ‌پیدا می کنددرصورتی که آندره‌موفق‌می‌شود که تعداد قارچهائی که در سبد خود می‌داشت، دو برابر کند). برعکس، ژان و پیر کاری بجز دویدن و سر به سر هم‌گذاشتن نمی‌کنند و در خاتمه چندتا از قارچهائی راکه فرانسواز به‌آنها داده بود، گم می‌کنند: ژان ۲ تا و پیر نصف قارچهائی را که گرفته بود گم می‌کند.

با دانستن اینکه‌پس‌از تمام این حوادث در سبدهای چهار پسر بچه به‌یك تعداد قارچ وجود داشته‌است، آیا قادرید که تعداد قارچهائی راکه هر کدامشان از فرانسواز دریافت کرده است، بیابید؟

پاسخ: فرض می‌کنیم که x تعداد قارچهائی باشد که هر کدام از پسر بچه‌ها به خانه‌های خود می‌برند. از فرض مسئله می‌فهمیم که فرانسواز به نیکلا: $x-2$ قارچ، به ژان: $x+2$ قارچ، به آندره: $\frac{x}{2}$ قارچ وبه پیر: $2x$ قارچ داده است. جمع اینها می‌شود : $(x-2)+(x+2)+\frac{x}{2}+2x=4\frac{1}{2}x$

ولی بنا به فرض می‌دانیم که $4\frac{1}{2}x=45$. بنابراین $x=10$ است . پس فرانسواز ۸، ژان ۱۲، آندره ۵ و پیر ۲۰ قارچ دریافت کرده است . هر کدام از آنها در موقع رسیدن به خانه ۱۰ قارچ داشته است.

چه کسی زودتر خواهد رسید

دوپاروزن هر کدام در قایقهای خود وهمزمان‌با یکدیگر حرکت می‌کنند: یکی از آنها بایدیك دفعه در جهت جریان آب بالا و پائین برود، درحالی که دومی باید فاصله‌ای‌مساوی را روی آبهای ساکن دریاچهٔ مجاور طی کند. فرض می‌کنیم که‌نیروهای حاصله توسط هر دو در طول مسابقه باهم کاملا مساوی باشند ؛

کدامیك از اینهاباید زودتر برسد (ازاحتساب زمانهای مصرف‌شده برای دورزدن‌ها صرف نظر کنید)؟

پاسخ: بر خلاف ظاهر، ۲ پاروزن باهم نمی‌رسند. زیرا، جریان‌آب در کوتاه‌کردن زمان درهنگامی که قایق درجریان‌آب پائین می‌آید ودرطویل کردن‌آن وقتی که قایق درجریان آب‌بالا می‌رود، سهیم‌است؛ این‌موضوع تنها درحالتی است که رودخانه در یکی ازمسیرها کمك و در مسیر دیگر جلوگیری ازحرکت قایق می‌کرد. ولی‌مدت کمك خیلی کمتراز مدت جلوگیری است ودر این‌صورت واضح است که پاروزنی که روی رودخانه پارومی‌زده است‌بعداز پاروزنی که روی‌آبهای ساکن بوده‌است، خواهدرسید.

شناگر وکلاه

شناگری را در نظربگیرید که ازقایقی که در جریان‌آب حرکت‌می‌کند، درآب غوطه‌ور می‌شود؛ پس‌ازچند لحظه‌درخلاف جریان‌آب شنامی‌کند، سپس نیم‌چرخی می‌زند وقایق‌را می‌گیرد. آیازمان مصرف‌شده برای بالاآمدن درخلاف جریان‌آب بزرگتر مساوی یاکوچکتر اززمانی است که وی برای گرفتن قایق‌مصرف می‌کند (فرض می‌کنیم که نیروهایش‌ثابت ویکنواخت باقی‌بماند)؟

برخلاف ظاهر، زمـان مصرف شده برای پائین‌آمدن در جریان‌آب به‌منظور گرفتن قایق مساوی بازمانی است که‌درخلاف جریان‌آب شناکرده است؛ زیرا جریان‌آب، قایق وشناگررا با یك سرعت می‌برد ودرنتیجـه هیچ فاصلهٔ جدائی بین آنها ایجاد نمی‌کند. همه‌وقایع همانند وقتی‌است که جریان‌آب وجودندارد.

***

حال ورزشکار دیگری را درنظر بگیرید، که ازبالای پلی که روی‌آن افرادکنجکاوی ایستاده‌اند، در رودخانه شیرجه زده ومی‌خواهد درخلاف جریان آب شناکند. درهنگام شیرجه، کلاه یکی‌ازافرادکنجکاو توسط‌بادبه‌هوا رفته‌ودرآب می‌افتدوباجریان آب حرکت می‌کند. پس‌از ۱۰دقیقه، شناگر نیم دور می‌زند و وقتی‌به‌پل می‌رسد، ازوی می‌خواهندکه مسیرخودش‌را ادامه دهد وکلاه رابگیرد، وی موفق‌شدکلاه را از بالای پل دیگری که از اولی ۱۰۰۰ مترفاصله داشت، نشان بدهد.

درصورتی که بدانیم که نیروهای شناگر درطول مسیرثابت ویکنواخت باقی‌مانده است، سرعت جریان‌آب راتعیین کنید.

پاسخ: از مفروضات صورت مسئله‌چنین برمی‌آیدکه‌زمان مصرف شده برای شناگربه منظوربالارفتن ازجریان‌آب اولین‌پل تامحلی که نیم دور را زده‌است مساوی بازمانی است که برای‌پائین آمدن درامتداد جریان‌آب ازمحل زدن نیم دور تاپل‌دوم (که در آنجاکلاه گرفته شده‌است)، مصرف شده‌است. درنتیجه شناگرنیز مانندکلاه، درمدت ۲۰ دقیقه درون‌آب بوده‌است. درطی‌این‌مدت کلاه فاصلهٔ بین‌دوپل یعنی ۱۰۰۰ متررا باسرعتی مساوی باسرعت جریان‌آب‌طی کرده‌است. دراین‌صورت، سرعت جریان‌آب‌مساوی است با :

$$\frac{1000}{20} = 50\,m/\text{دقیقه}$$

راهنمای شناور

دوکشتی بخاری ، « ژان‌بار » و «سورکوف» همزمان با یکدیگر تجهیز شده بودند: «ژان‌بار» می‌بایست درامتدادجریان آب پائین می‌رفت و«سورکـوف» می‌بایست در همین امتداد بالا می‌رفت. سرعت «مطلق» دوکشتی بخاری (یعنی سرعتی که هردو درغیاب هرگونه جریانی دارند) مساوی هم است.

هنگام‌تهیهٔ مقدمات حرکت‌کشتی‌ها، راهنمای شناور «ژان بار» به‌آب می‌افتدوتوسط جریان‌آب برده می‌شود. درصورتی که بدانیم که یك‌ساعت بعد به دوکشتی‌بخاری امرشدکه برای ملحق شدن به‌یکدیگرنیم دوربزنند وبه طرف‌هم حرکت‌کنند، می‌توانید بگوئیدکه‌آیا «ژان‌بار» قبل‌از ملحق‌شدن به «سورکوف»می‌تواند راهنمای شناورخود را دوباره تصاحب‌کند؟

پاسخ : دوکشتی بخاری هم‌زمان باهم به راهنمای شناور می‌رسند. زیرا اگرانتقال‌آنها رانسبت به‌بندر در نظر به‌گیریم، ملاحظه می‌شودکه‌کشتی‌بخاری‌پائین‌رونده‌ازسرعت‌متممی‌مساوی با سرعت جریان‌آب بهره‌مند می‌گردد، درصورتی که‌کشتی‌بالارونده ازجریان همین سرعت متمم‌را ازدست می‌دهد. در صورتی که، بر خلاف این‌موضوع، انتقال‌آنها رانسبت به راهنمای شناور درنظر بگیریم که باسرعتی مساوی باسرعت جریان‌آب‌کشتی پائین‌رونده ازاین‌جریان رادنبال می‌کند، ملاحظه می‌کنیم که برای این‌کشتی تمام بهره‌ای که درسرعت‌داشت ازدست می‌رود ولی‌برعکس، برای کشتی‌بخاری بالا رونده ازجریان، تمام سرعتهـای از دست رفته ذخیره می‌شود. به بیانی دیگر، تمام وقایع برای راهنمای شناور به مثابه آن است که در جای خود بی‌حرکت است و درضمن‌دو کشتی بخاری درآبهای ساکن حرکت می‌کنند. نتیجه می‌شود که در انتهای یك ساعت دوکشتی در فواصل مساوی‌ازراهنمای شناور قرارمی‌گیرند (زیرا سرعتهای مطلق‌آنها باهم مساوی‌است) وپس اززدن یك‌نیم دور یك ساعت وقت صرف خـواهندکرد تاباهم به راهنمای شناور برسند.

تعهدهای بی‌احتیاطانه

روزی‌دستهٔ پیشاهنگان تصمیم گرفت که به‌دهاقینی که‌باغهای میوهٔ ایشان دراثر آخرین طغیان‌آب ازبین رفته بود، کمك کند. می‌بایست تاسرحدامکان درخت‌غرس کنند. دستهٔ گشتی به‌سرپرستی میشل موظف بودکه به‌اندازهٔ نصف درختهائی که توسط بقیهٔ‌دسته غرس می‌شد، بکارد. برای‌آنکه جای خالی‌باقی‌نماند، آندره، که رئیس گشتی‌هایی بودکه ازحیث تعداد مهمترین بود، مأمورشدکه به‌اندازهٔ‌تمام درختهائی که توسط‌اجتماع سایر گشتی‌ها (که گشتی های میشل‌هم شامل‌آن می‌شود) کاشته می‌شود، درخت غرس کند.

چون گشتی‌ها می‌بایست که به نوبت در باغ میوه کار کنند، گشتی های میشل وآندره هردو برای آخرین نوبت کار تعیین‌شدند. گشتی‌های قبل‌ازآنها جمعاً ۴۰ درخت غرس کردند. وقتی‌نوبت به گشتی‌های میشل وآندره رسید، هر دو اعلام کردند که برای برآوردن تعهدشان، باید هرکدامشان بداند که گشتی های حریف، چند درخت خواهدکاشت. راه‌چاره‌ئی به نظر نمی‌رسید، هرکدام مطمئن بودکه دیگری قبل‌از اتمام‌کار اززیرآن درخواهد رفت، درهمین موقع رئیس‌دسته میانجی گری کرد وراه ساده ومنطقی‌را برای خاتمهٔ نزاعشان به‌آنها نشان داد. این راه حل‌کدام است؟

پاسخ: فرض می‌کنیم‌که تمام افراددسته x درخت‌کاشته باشند. گشتی اندره موظف بودکه به اندزاهٔ درختانی‌که توسط اجتماع سایر گشتی‌ها کاشته می‌شود، درخت بکارد، یعنی گشتی آندره باید به‌اندازهٔ نصف تعدادکل درختها یعنی $\frac{x}{2}$، بکارد.

گشتی‌میشل وظیفه‌داشت که‌به‌اندازهٔ‌نصف‌درختهائی که‌توسط‌بقیهٔ‌دسته کاشته می‌شد، درخت بکارد. اگر در نظر بگیریم که‌کار انجام شده توسط گشتی میشل‌معرف یك‌قسمت ازتعدادکل درختهای‌غرس شده باشد، کار انجام‌شده توسط سایر گشتی‌های مجتمع، دوبرابر این‌قسمت خواهد بود. مفهوم عبارت اخیر این است که‌گشتی میشل باید ثلث x یعنی $\frac{x}{3}$ درخت بکارد.

بنابراین، گشتی‌های میشل وآندره موظفند که باهم $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5x}{6}$ درخت غرس کنند.

درنتیجه، سایر گشتی‌ها باید $\frac{x}{6}$ بکارند وبرطبق فرض‌مسئله مقدار اخیر ۴۰ بوده است.

$\frac{x}{6}=40$ ازآنجا: درخت $x=240$

بنابراین گشتی آندره باید ۱۲۰ درخت وگشتی‌میشل ۸۰ درخت غرس کند.

یك روش مقدماتی

روزی‌که بادوستم پل‌قرار ملاقات‌داشتم، این‌فکر به‌سرم‌افتاد که فاصلهٔ بین منزلهایمان را باقدم اندازه بگیرم. درحینی‌که با قدمهای منظم راه می‌پیمودم، درضمن اولین‌نیمهٔ مسیر، هر دوقدم رایکی بشمار می‌آوردم ودرضمن نیمهٔ‌دوم مسیر، شمارشم برمبنای سه قدمی‌بود ودرآخرشمارش دریافتم‌که اولین عدد بدست‌آمده از دومی به‌اندازهٔ ۲۵۰ بیشتربود. تعداد قدمهای برداشته‌شده چقدر بوده است؟

پاسخ: فرض می‌کنیم که فاصلهٔ مطلوب مساوی با $2x$ قدم‌باشد. نصف این‌فاصله معرف $\frac{x}{2}$ دوقدمی است؛ ونیمهٔ دوم‌معرف $\frac{x}{3}$ سه قدمی است. برطبق فرض می‌دانیم که‌تعداد دوقدمی‌ها ازسه قدمی‌ها ۲۵۰ تابیشتربوده است. در نتیجه:

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=250 \Longrightarrow x=1500 \text{ قدم}$$

بنابراین فاصلهٔ $2x$ برابربا ۳۰۰۰ قدم بوده است.

مسئلهٔ لوکاس

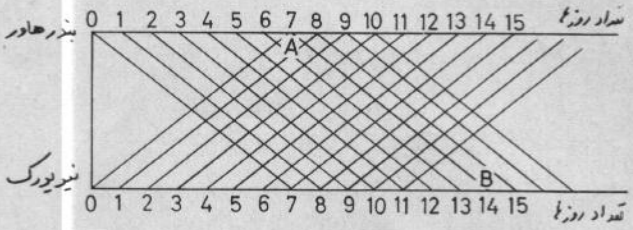
روایت می‌کنندکه لوکاس ریاضیدان فرانسوی، درضیافتی که درآن تعداد زیادی ازدانشمندان عالیرتبه‌گردهم‌آمده بودند، مسئلهٔ زیررا، مانندآنکه بسیارغامض است، مطرح ساخت:

ـ فرض می‌کنیم‌که هرروز ظهریك‌کشتی بندرهاور را به قصد نیویورك ترك می‌کند و درهمین موقع‌کشتی دیگری از همین کمپانی ازنیویورك عازم هاور می‌شود. درهرکدام ازاین‌جهات، درست ۷روز وقت لازم‌است‌که مسیرمربوط به‌هرکدامشان پیموده شود. این‌کشتی‌که امروزهاور راترك‌گفته است، درضمن سفربا چندکشتی‌دیگرکه باآن ازیك‌کمپانی‌هستند، ملاقات خواهدکرد؟ اگرشما بودید چه‌جوابی می‌دادید؟

پاسخ: دقت‌کنیدکه‌کشتی‌هایی را که هنوز درراه هستند فراموش نکنید.

برای حل‌مسئله، روش ترسیمی موفقیت آمیزتر است. اگربه‌عنوان مثال‌کشتی‌را درنظر بگیریم‌که مسیرش درامتدادخط AB است، می‌بینیم‌که‌کشتی‌عازم ازهاور به‌قصد نیویورك باسیزده

بعلاوهٔ دو کشتی، درضمن سفرخود ملاقات می کند: دو کشتی اخیر عبارتند ازیك کشتی که وی درضمن ترك هاور ازنیویورك می رسد وکشتی دیگری که در لحظهٔ رسیدنش بهمقصد، نیویورك را ترك می کند، بنابراین جمع کل کشتی های ملاقات شده ۱۵ است.



شکل نیز نشان می دهد که کشتی ها هرشبانه روز در ظهر و نصف شب به همدیگر می رسند.

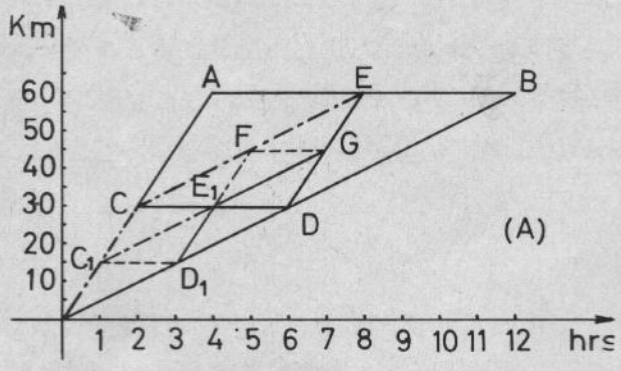
مبادلهٔ دوچرخه

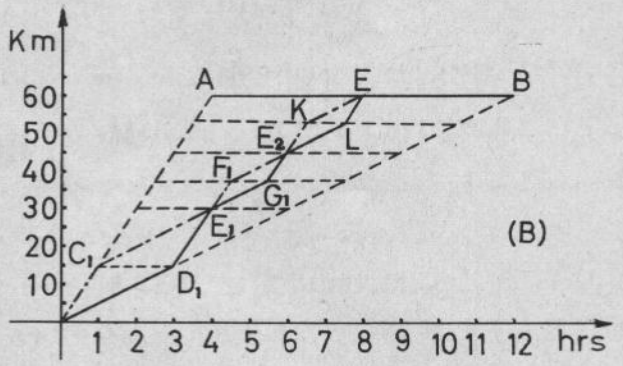
دو دوچرخه سوار جوان بدون حادثه طی طریق می کردند که ناگهان یکی از دوچرخه ها پنچر می شود . چون قبلا وسائل به همراه خود نیاورده بودند، تعمیر دوچرخه درآن مکان غیر ممکن بود، بنابراین تصمیم گرفتند که موقتاً دو چرخهٔ غیرقابل استفاده را به کناری گذارده وراه خودرا به طریق زیرادامه دهند: هردو باهم حرکت می کنند، یکی پیاده ودیگری با دوچرخه؛ در یك محل قراردادی، دوچرخه سوار ازدوچرخه پیاده شده، چرخ خودرا درکنار جاده گذارده و راه خودرا پیاده طی می کند؛ نفر اول پیاده پس از رسیدن به همین محل، سوار دوچرخه شده وبه دوست خود درمحلی که قرار گذاشته اند ملحق شده و دوباره پیاده می شود. این عمل چندین بار تکرارمی شود. درچه فاصله ای ازمقصد دوچرخه سوار باید برای آخرین بار دوچرخه اش را درکنار جاده بگذارد، تاهردو باهم بهمقصد برسند؟

بدانید که ۶۰km را بدین ترتیب پشت سر گذاشته اند و سرعتهایشان عبارت بوده است ازپیاده ۵ کیلومتر درساعت و با دوچرخه ۱۵ کیلومتر درساعت. آیا بااین روش دروقت صرفه جوئی کرده اند؟

پاسخـ برای تحلیل وحل این مسئله بازهم ازروش ترسیمی استمداد می جوئیم.

روی محورقائم (شکل A) فواصل (برحسب کیلومتر) و روی محورافقی، مشخصات زمانی (برحسب ساعت) رانقل می کنیم. انتخاب مقیاسها آزاد است. درصورتی که تمام مسیررا بادوچرخه (باسرعت ۱۵ کیلومتر درساعت) بپیمائیم، بطوری که نقطهٔ انتهائی A ازخط پیشروی OA نشان می دهد، ۴ساعت وقت لازم است. اگر، برعکس، تمام راه راباپا بپیمائیم (باسرعت ۵ کیلو متر در ساعت وبدون اینکه به نفس نفس بیفتیم) ۱۲ ساعت وقت لازم است، این موضوع ازروی شکل وازنقطهٔ B از خط پیشروی OB نشان داده شده است. چون هردوجوان به تناوب پیاده وسوار دوچرخه بوده اند ودرخاتمه باهم بهمقصد رسیده اند ، نتیجه می شود که خط پیشروی ایشان باید درنقطهٔ انتهائی مشترك باشد. درفرض مسئله قید نشده است که آنان چندمرتبه وسیلهٔ نقلیهٔ خودرامبادله کرده اند. فرض می کنیم که هر کدام یك دفعه مبادله کرده باشند.





بنابراین خط پیشروی ایشان باید تشکیل یك متوازی الاضلاع بدهد. فرض می کنیم که خط پیشروی OC از دوچرخه سوار از نقطهٔ C توسط خط پیشروی CE معرف تغییرمکان شخص پیاده که نتیجتاً بهموازات OB است، ادامه داده شود.

خط پیشروی OD ازدومین جوان درلحظه ای پیاده، سوار دوچرخه می شود منحرف می شود: بنابراین درنقطهٔ D طوری خم می شود که نسبت به محور افقی هم طراز با نقطهٔ C قرار گیرد ، زیرا این دومین جوان باید تا نقطه ای که دوستش

دوچرخه را برزمین نهاده است ، پیاده طی طریق کند (یعنی باید فاصله‌ای مساوی با فاصلهٔ طی‌شده توسط دوچرخهٔ جوان دوم راپیاده طی کند).

دومین‌جوان بقیه راه را بادوچرخه طی‌می‌کند، بنابراین خط DE ازپیشرویش به‌موازات OA است.

بنابراین، شکل OCED مانند شکل: CDBE

(CD ∥ CE و CE ∥ DB)

متوازی‌الاضلاع است.

بامحاسبهٔ اضلاع متوازی‌الاضلاعها، بدست می‌آید :

OD=CE و CE=DB وازآنجا OD=DB

در نتیجه ، نقاط D و C مربوط به نصف کل مسیراست . در این‌حالت، تبادل وسایل نقلیه تنها یك‌مرتبه ودرفاصلهٔ ۳۰ کیلومتری هدف گردش ، صورت می‌گیرد. بنابراین نقطهٔ E وسط قطعه خط AB است ونشان می‌دهد که به یمن استفاده ازروش انتقالی‌بکار برده‌شده توسط دوجوان، برای طی‌تمام مسیر۸ساعت وقت لازم است (به‌جای ۱۲ساعتی که هرگاه هردو پیاده‌می‌رفتند، می‌بایست صرف می‌کردند) .

ولی‌واقعیت امراین است که تغییروسیلهٔ نقلیه بیش‌از یك‌بار صورت می‌گیرد. برطبق‌فرض می‌دانیم که درموقع رسیدن به‌پیاده دوچرخه‌سوار دوچرخه‌اش راجاگذاشته وراه خودرا پیاده ادامه می‌دهد. درلحظه‌ای یکی ازاین جوانها بدین‌طریقه دوچرخه‌اش را به‌دیگری واگذار می‌کند، روی شکل باید نقطهٔ برخورد دو خط پیشروی تعلق گیرد. واضح است که نقطهٔ E_1 وسط قطعه خط CD، جوابگوی این احتیاج است.

باتعقیب این استدلال به‌عنوان مثال می‌توانیم به خطوط پیشروی زیربرسیم: OC_1E_1FE برای اولی وOD_1E_1GE برای دومی. دراین‌مورد تغییر وسایل نقلیه، آخرین بار در ۱۵ کیلومتری‌نقطهٔ انتهای گردش (که درشکل A درطراز FG است) صورت می‌گیرد.

اکنون‌فهم این‌نکته ساده‌است که خطوط پیشروی می‌توانند بینهایت مرتبه تغییر کنند.

مثلا، روی شکل B دو خط پیشروی $E_1E_1E_2KE$ و $E_1G_1E_2LE$ رانمایش داده‌ایم که آخرین تغییروسیلهٔ نقلیه در ۷/۵ کیلومتری هدف انتهائی گردش صورت می‌گیرد (درشکل B درارتفاع KL قرارگرفته است).

چیزی که درتغییر وسایل نقلیهٔ دوجوان غیر قابل تغییر و مستقل ازتعداد دفعات تغییر وسایل است این است که : برای طی تمام مسیردقیقاً ۸ساعت وقت لازم‌است.

حل مسائل (بقیه از صفحهٔ ۳۶۳)

ژیان شاهین ندارد، پس‌آقای شاهین ژیان دارد وبنابه ۴آقای ژیان پیکان دارد و بالاخره آقای پیکان‌آریا دارد وتناقض پیش نمی‌آید .

۲ـ ده‌پاره زنجیررا دست نمی‌زنیم وسه پاره زنجیردیگر را به۹ حلقه زنجیرتقسیم می‌کنیم. با این ۹ حلقه می‌توانیم ۱۰ پاره زنجیررابه‌هم وصل‌کنیم. برای بهم‌بستن دوسرزنجیر نیزباید یکی ازحلقه‌های انتهایی‌را بازکنیم وبعد جوش بدهیم. بنابراین رویهم ۱۰حلقه زنجیر را باید بازکنیم وبعد جوش بدهیم ووقت لازم برای این‌کار می‌شود:

$10\times(10+4)=140$ دقیقه

۳ـ از هر ۱۰۰ نفر:

۱۵ نفر ازدواج نکرده‌اند.

۳۰ نفر تلفن ندارند

۲۵ نفر اتومبیل ندارند.

۲۰ نفرخانهٔ شخصی ندارند.

پس رویهم حداکثر ۹۰ نفرفاقد حداقل یکی از امتیازات می‌باشند ، در نتیجه حداقل ۱۰ نفر می‌توانند صاحب هر چهار امتیاز باشند.

۴ـ اگر a طول هریك ازچهار مسافت باشد، زمانی که تمام مسافت را می‌پیماید برابراست با:

$$\frac{a}{10}+\frac{a}{5}+\frac{a}{30}+\frac{a}{15}=\frac{2a}{5}$$

سرعت متوسط می‌شود:

$$4a : \frac{2a}{5}=10km/h$$

۵ـ آدمك به‌ترتیب زیر می‌تواند بعد ازده عمل مقدار ۶ لیترآب درپیمانهٔ ۷لیتری بدست‌آورد.

پیمانهٔ ۷ لیتری	پیمانهٔ ۱۱ لیتری
۷	۰
۰	۷
۷	۷
۳	۱۱
۳	۰

پیمانهٔ ۷ لیتری	پیمانهٔ ۱۱ لیتری
۰	۳
۷	۳
۰	۱۰
۷	۱۰
۶	۱۱

ازخواص اعداد سه رقمی درمبنای ۱۰ وغیراز ۱۰ (مبناهای زوج)

ترجمهٔ: قوام نحوی

عددسه‌رقمی به‌فرم $\overline{abc}$ رادرنظرمی گیریم بطوری که‌ارقام آن‌هرسه‌باهم‌مساوی‌نباشند. باارقام‌این‌عددبزرگترین‌وکوچکترین عدد سه رقمی‌راتشکیل داده وآنهارا ازهم‌کم می کنیم، عددی سه رقمی‌حاصل می‌شود به‌فرم $\overline{a_1b_1c_1}$. مجدداً با ارقام این عدد بزرگترین‌وکوچکترین عدد سه رقمی را تشکیل می‌دهیم و آنها را از هم‌کم می‌کنیم تاعددسه رقمی $\overline{a_2b_2c_2}$ حاصل‌شود، و این عمل را ادامه می‌دهیم. نتیجهٔ آخرهمواره عدد ۴۹۵ می‌باشد ـ مثلا عـدد ۲۱۵ را درنظرمی گیریم، بزرگترین،وکوچکترین عدد سه رقمی‌می‌شود۵۲۱و۱۲۵ وتفاضل‌آنها ۳۹۶ است وداریم:

۵۲۱ −	۹۶۳ −	۹۵۴ −
۱۲۵	۳۶۹	۴۵۹
۳۹۶	۵۹۴	۴۹۵

می‌بینیم که نتیجهٔ‌آخری ۴۹۵ است. اگر دربارهٔ این‌عدد مجدداً عمل‌را تکرارکنیم خودآن حاصل‌می‌شود :

$$۹۵۴ - ۴۵۹ = ۴۹۵$$

اگرعدد ۷۲۹ را درنظر بگیریم داریم:

۹۷۲ −	۹۶۳ −	۵۹۴ −
۲۷۹	۳۶۹	۴۵۹
۶۹۳	۵۹۴	۴۹۵

عدد در هر مبنای زوج ـ اگر مبنارا عدد زوج ۶ بگیریم ومثلاعدد $(۴۱۵)_۶$ باشدداریم [تفریق‌ها درمبنای ۶انجام شده است]

۵۴۱ −	۵۳۲ −
۱۴۵	۲۳۵
۳۵۲	۲۵۳

تفاضل‌آخری همواره عدد ۲۵۳ خواهد بود.

اگرمبنا ۸باشد وعدد $(۴۱۶)_۸$ راداشته باشیم.

۷۴۳ −	۶۴۱ −
۳۴۷	۱۴۶
۳۷۴	۴۷۳

اگربرای ۳۷۴ دوباره تکرارکنیم خود ۳۷۴حاصل می‌شود.

حالت کلی ـ بطورکلی اگرمبنای عددنویسی عدد زوج B باشد و عدد سه رقمی $(\overline{abc})_B$ را در نظـر بگیریم وباارقام این‌عدد دوعدد سه رقمی بیشترین وکمترین مقداررا تشکیل داده‌و ازهم‌کم‌کنیم عدد $(\overline{a_1b_1c_1})_B$ بدست می‌آیـد و به همین ترتیب عمل را ادامه دهیم نتیجهٔ آخر همواره عدد ثابت سه رقمی زیر می‌باشد :

$$N=\overline{(\frac{B}{۲}-۱)(B-۱)\frac{B}{۲}}$$

اثبات ـ اگرعدد سه رقمی $N=\overline{(\frac{B}{۲}-۱)(B-۱)\frac{B}{۲}}$

را درنظر گرفته باارقام‌آن بیشترین عدد وکمترین عدد سه رقمی را تشکیل‌داده وازهم‌کم‌کنیم خود N بدست می‌آید.

$$\begin{array}{l} \overline{(B-۱)\frac{B}{۲}(\frac{B}{۲}-۱)} \quad - \\ \overline{(\frac{B}{۲}-۱)\frac{B}{۲}(B-۱)} \\ \hline \overline{(\frac{B}{۲}-۱)(B-۱)(\frac{B}{۲})} \end{array}$$

اگر بخواهیم $(B-۱)$ را از $\frac{B}{۲}-۱$ کم‌کنیم به رقم بالا B اضافه می‌کنیم.

$$(\frac{۳B}{۲}-۱)-B+۱=\frac{B}{۲}$$

بقیه در صفحهٔ ۳۵۲

سری گالیله

ترجمهٔ : مهندس فتح‌الله زرگری

درسال ۱۶۱۵ گالیله ضمن مطالعه و بررسی سقوط آزاد اجسام، خاصیت‌جالب ودرعین‌حال مشغول کنندهٔ سری اعداد فرد به‌صورت زیر راکشف کرد:

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۱+۳}{۵+۷}=\frac{۱+۳+۵}{۷+۹+۱۱}=$$

$$=\frac{۱+۳+۵+۷}{۹+۱۱+۱۳+۱۵}=\dots \quad (۱)$$

تعبیر فیزیکی این تساویهای عددی چنین‌است: درسقوط آزادیك جسم فواصل‌طی‌شده درهرلحظه‌متناسب بامجذور زمان است، بدین ترتیب که درثانیهٔ اول بعداز رهاشدن جسم‌یك واحدطول، درثانیهٔ دوم ۴واحد طول، درثانیهٔ سوم ۹واحد طول وبالاخره در ثانیهٔ nام بعداز رها شدن $n^۲$ واحد طول راطی می‌کند ، فواصلی‌که جسم درهرثانیه بعد ازرها شدن طی‌می‌کند اعداد فردی هستند به ترتیب زیر (h ارتفاعی است‌که جسم ازآنجا رهاشده است)

$$\Delta h_۱=۱ \text{ و } \Delta h_۲=۴-۱=۳ \text{ و}$$

$$\Delta h_۳=۹-۴=۵ \quad \dots$$

بنابراین تساویهای (۱) این‌حقیقت را می‌رسانندکه مسافات طی شده توسط جسم درn ثانیهٔ اول $\frac{۱}{۳}$ مسافتی است کـه در n ثانیهٔ بعدی توسط جسم طی می‌گردد.

باارتباط دادن این‌خاصیت سری اعداد فرد باقانون‌سقوط آزاداجسام، گالیله پنداشت‌که سری عددی‌دیگری باچنین‌خاصیتی نمی‌تواند وجود داشته‌باشد.

امادانشجویان کالج‌تورنتو، درسال تحصیلی ۶۹-۱۹۶۸ باشوق وذوق وافری به بررسی نظریهٔ گالیله ویافتن سری‌های عددی پرداختند که دارای این خاصیت باشند، که نسبت مجموع n جملهٔ اولشان به‌مجموع n جمله‌بعدیشان مقداری ثابت‌باشند. این‌چنین سری‌ها به «سری‌های گالیله» معروفند.

خاصیت «سری‌های گالیله» رامی‌توان توسط سه‌تساوی‌زیر که معادل یکدیگر می‌باشند بیان‌کرد:

$$S_{۲n}-S_n=p\cdot S_n \quad (۲)$$

که درآن S_n مجموعn جملهٔ اول، p ثابتی است معین($p=۳$ برای سری اعداد فرد) . یا:

$$S_{۲n}=q\cdot S_n \quad (q=p+۱) \quad (۳)$$

ویا(۴) $a_{۲n-۱}+a_{۲n}=q\cdot a_n$

که درآن a_n جملهٔ nام سری‌است .

بررسی وتحقیق نشان می‌دهد که سری اعداد فرد، تصاعد عددی منحصر به فـردی نیست کـه دارای خواص سری گالیله می‌باشد. بلکه تعداد این چنین سری‌ها بیشتراست: فرض‌کنیم دو سری‌برهم بخش‌پذیرباشندحال اگریکی‌ازاین دوسری گالیله‌باشد دیگری نیز سری گالیله می‌باشد باهمان نسبت p (اثبات‌کنید!)

جالبترین نتیجه‌ای‌که از بررسی‌خواص وویژگیهای‌سری گالیله بدست‌آمد، این‌کشف معروف بود، که $p>۲$ شرط لازم وکافی برای‌وجود سری گالیله کلا صعودی می‌باشد. (اثبات‌این مطلب را به عنوان یك تحقیق وبررسی به دانش‌آموزان پیشنهاد می‌کنیم) ثابت می‌شود که در فرمول تعریف سری گالیله عدد q (وبنابراین p) صحیح می‌باشد.

اثبات: فرض‌کنیم $q=\frac{m}{k}$ یك‌کسرساده نشدنی‌باشد (m وk نسبت به‌هم اول باشند) دراین‌صورت ازفرمول (۴) برمی‌آید که هرجملهٔ a_n ازسری گالیله برk بخش پذیراست ومامی‌توانیم باتقسیم جمـلات این‌سری برk یك سری گالیلهٔ جدید با همان نسبتq بدست‌آوریم. اگراین‌عمل‌را r بار برای‌سری‌های‌جدید بدست‌آمده‌انجام دهیم‌متوجه‌می‌شویم کهa_n برk^r بخش‌پذیراست.

می‌توانیم این‌عمل‌را بینهایت بار تکرارکنیم و سری های گالیله‌ای ازتقسیم سری‌های گالیلهٔ قبلی‌بهk بدست‌آوریم باهمان نسبت qدارای مخرج k، ولی‌هرگاه a_nبرk^r به‌ازاءr دلخواه بخش‌پذیرباشد این‌فقط دریك حالت ممکن‌است وآن وقتی‌است‌که $k=۱$ باشد یعنیq عددی باشد صحیح.

زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت

[آقای **حسن نیکو آمال‌راد** درمقاله‌ای که برای‌درج درمجله فرستاده‌اند، مسئلهٔزیر را طرح وحل کرده‌اند: «بین ساعتهای m و m+۱ چه موقع دوعقربهٔ ساعت برهم منطبق، یا برهم عمود، یا درامتداد یکدیگرواقع می‌شوند؟». به‌مناسبت مقالهٔ مزبور، مقالهٔ زیر درج می‌شودکه درآن مسئلهٔ زاویهٔ بین دوعقربهٔ ساعت به‌صورت کلیترمطرح می گردد.]

I- زاویهٔ بین عقربه‌ها درلحظهٔ معین

وقتی که‌عقربه‌های ساعت زمان h ساعت و mدقیقه‌را نشان می‌دهند، زاویهٔ بین دوعقربه چند درجه است؟

خطی راکه برمرکزصفحهٔ ساعت وبرنشانهٔ مربوط به‌ساعت ۱۲ می گذرد، خط مبدأ می گیریم.وقتی که عقربه‌های ساعت‌زمان h ساعت وm دقیقه را نشان می‌دهند، زاویهٔ بین‌عقربهٔ دقیقه‌شمار وخط مبدأ برابراست با $\frac{m}{60}$ محیط دایرهٔساعت. با توجه به‌اینکه سرعت زاویه‌ای حرکت عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{1}{12}$ سرعت زاویه‌ای حرکت عقربهٔ دقیقه شمار است، در لحظهٔ مزبور زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار وخط مبدأ برابر است با $\frac{h}{12}+\frac{m}{720}$ بنابراین‌زاویهٔ بین دوعقربه برحسب محیط دایرهٔ ساعت برابراست با:

$$\left|\left(\frac{h}{12}+\frac{m}{720}\right)-\frac{m}{60}\right|=\left|\frac{60h-11m}{720}\right|$$

اگر α اندازهٔ این زاویه برحسب درجه باشد داریم:

$$\alpha^\circ \text{ یا } (360-\alpha)^\circ=\left|\frac{60h-11m}{2}\right|$$

مثال۱- وقتی که عقربه‌ها زمان ۲ ساعت و۲۰ دقیقه را نشان می‌دهند زاویهٔ بین عقربه‌ها برابراست با:

$$\alpha=\left|\frac{60\times 2-11\times 20}{2}\right|=50^\circ \text{ یا } 310^\circ$$

مثال۲- درلحظهٔ ۹ ساعت و۱۲ دقیقه بعد از ظهر زاویهٔ بین عقربه‌ها برابراست با:

$$\alpha=\left|\frac{60\times 9-11\times 12}{2}\right|=204^\circ \text{ یا } 156^\circ$$

II- تعیین زمانی‌که زاویهٔ بین‌عقربه‌ها مقدارمعین باشد

درچند دقیقه بعد ازساعت h دوعقربهٔ ساعت با یکدیگر زاویهٔ α درجه می‌سازند؟ اگرتعداد دقیقه‌های بعد ازساعت h را به m نشان دهیم، از رابطه‌هایی که در (I) بدست آمد نتیجه می‌شود:

$$m=\frac{60h\pm(720-2\alpha)}{11} \text{ یا } m=\frac{60h\pm 2\alpha}{11}$$

مقادیر m که از این رابطه‌ها بدست می‌آیند وقتی قابل قبولند که محصوربین صفرو۶۰ باشند.

مثال: درچه‌لحظه‌هایی بین ساعتهای ۱۰ و ۱۱ دوعقربهٔ ساعت با یکدیگرزاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازند؟

دراین مثال $h=10$ و $\alpha=30$ است، پس:

$$m=\frac{60\times 10\pm 660}{11} \text{ یا } m=\frac{60\times 10\pm 60}{11}$$

$$m=60 \text{ یا } 49\frac{1}{11}$$

یعنی بعد ازساعت ۱۰ یك‌باردرلحظهٔ $49\frac{1}{11}$ دقیقه بعد ازساعت و یك‌باردرلحظهٔساعت ۱۱ دوعقربه با هم زاویهٔ ۳۰ درجه‌می‌سازند.

حالتهای خاص

الف- انطباق عقربه‌ها: درچند دقیقه بعد ازساعت معین h دو عقربهٔ ساعت برهم منطبق می‌شوند؟ با فرض $\alpha = ۰$ از رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$m = \frac{۶۰h}{۱۱}$$

مثال: بین ساعتهای ۱ و ۲ چه موقع دوعقربهٔ ساعت بر هم منطبق می‌شوند؟

$$h = ۱ \Longrightarrow m = \frac{۶۰}{۱۱} = ۵\frac{۵}{۱۱}$$ دقیقه

ب- عمود بودن دوعقربه: درچه موقع بعد ازساعت h دوعقربهٔ ساعت درامتدادهای عمود برهم واقع می‌شوند؟ به‌فرض $\alpha = ۹۰$ داریم:

$$m = \frac{۶۰h \pm ۱۸۰}{۱۱} \text{ یا } m = \frac{۶۰h \pm ۵۴۰}{۱۱}$$

مثال۱- بین ساعتهای ۱و۲:

$$h = ۱ \Longrightarrow$$

$$m = \frac{۲۴۰}{۱۱} = ۲۱\frac{۹}{۱۱} \text{ یا } m = \frac{۶۰۰}{۱۱} = ۵۴\frac{۶}{۱۱}$$

مثال۲- بین ساعتهای ۸ و ۹:

$$h = ۸ \Longrightarrow m = ۶۰ \text{ یا } m = ۲۷\frac{۳}{۱۱}$$

ج- دریك امتداد بودن دوعقربه: بعد ازساعت h چه موقع‌دوعقربهٔ ساعت درامتدادیکدیگرقرارمی گیرند؟ باانتخاب $\alpha = ۱۸۰$ داریم:

$$m = \frac{۶۰h \pm ۳۶۰}{۱۱}$$

مثال: بعد ازساعت ۳:

$$h = ۳ \Longrightarrow m = \frac{۵۴۰}{۱۱} = ۴۹\frac{۱}{۱۱}$$

مسئله: با استفاده ازرابطه‌های بالا و توجه بـه حالتهای خاص‌دیگرمی‌توان مسئله‌های‌زیادی مربوط به‌زاویهٔ بین‌عقربه‌های ساعت مطرح کرد. مثلا: «درمدت‌یك شبانه روزابتداازنیمه‌شب‌چند باردوعقربهٔساعت برهم منطبق می‌شوند؟یا اینکه درامتدادیکدیگر قرارمی گیرند؟و ازاین قبیل. مسئله‌های دیگری‌نیزاز نوع مسئلهٔ زیرمی‌توان بیان کرد:

چند دقیقه بعد از ۵ ساعت و۲۰ دقیقه دوعقربهٔ ساعت بـا یکدیگرزاویهٔ قائمه می‌سازند؟ برای حل این مسئله نخست‌تعیین می‌کنیم‌که وضع مورد نظرچه موقع بین ساعتهای ۵ و ۶ واقع می‌شود:

$$h = ۵ و \alpha = ۹۰ \Longrightarrow m = ۴۳\frac{۷}{۱۱} \text{ یا } m = ۱۰\frac{۱۰}{۱۱}$$

$$۴۳\frac{۷}{۱۱} - ۲۰ = ۲۳\frac{۷}{۱۱}$$ دقیقه

از خواص اعداد ... (بقیه از صفحهٔ ۳۴۹)

$$\frac{۳B}{۲} - \frac{B}{۲} - ۱ = B - ۱$$

$$B - ۱ - \frac{B}{۲} = \frac{B}{۲} - ۱$$

مثال: در مبنای $B = ۱۲$ عدد حاصل در آخری به فرم $(\overline{۵\beta۶})_{۱۲}$ می‌شودکه $\beta = ۱۱$ است.مثلاعدد سه‌رقمی $(۱۳۵)_{۱۲}$ رادرنظر می گیریم، بیشترین وکمترین‌عددرا نوشته‌وکم‌می کنیم:

$\beta۶۵-$	$\beta۷۴-$	$\beta۸۳-$	$۵۳۱-$
۵۶β	۴۷β	۳۸β	۱۳۵
$۵\beta۶$	$۶\beta۵$	$۷\beta۴$	$۳\beta۸$

[تفریق‌ها درمبنای ۱۲ انجام شده‌است]

مثال- درمبنای ۲ عدد حاصل‌آخری می‌شود $(۰۱۱)_۲$. مثلا $(۱۰۱)_۲$ را درنظر می گیریم:

$$(۱۱۰)_۲ - (۰۱۱)_۲ = (۰۱۱)_۲$$

بازی با اعداد

تقسیم زیردرمبنای۲ انجام گرفته وهرستاره نمایندهٔ رقم۰ یا ۱ است. رقمهای مجهول را پیداکنید:

```
******1 | ****
****   | ****
  ****
  ****
   ***1
  ****
```

حل مسائل یکان شمارهٔ: ۹۹

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای چهارم دبیرستان

۹۹/۱ـ فرستنده: **محمد معینی** دانشجوی دانشکدهٔ نفت

هرگاه $(\alpha+\delta)$ و $(\beta+\gamma)$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0$$

و $(\alpha-\beta)$ و $(\gamma-\delta)$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$a_2x^2+b_2x+c_2=0$$

باشد ثابت کنید که:

$$(a_1b_2-a_2b_1)(a_1b_2+a_2b_1)=$$
$$=4a_1a_2(a_1c_2-a_2c_1)$$

حل ـ مقادیر مطلق تفاضل ریشه‌های دو معادله باهم برابرند زیرا:

$$|(\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)|=|(\alpha-\beta)-(\gamma-\delta)|$$

بنابراین:

$$\frac{\sqrt{b_1^2-4a_1c_1}}{|a_1|}=\frac{\sqrt{b_2^2-4a_2c_2}}{|a_2|}$$

از این رابطه پس از اختصار و انجام عملیات، رابطهٔ مورد نظر بدست می‌آید.

۹۹/۲ـ فرستنده: **علی حاجی ابراهیمی**

در مثلثی میانه‌های m_a ، m_b ، m_c تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که بین اندازه‌های ضلعهای این مثلث رابطهٔ زیر بر قرار است:

$$2(a^4-b^2c^2)+2(c^4-a^2b^2)=b^4-a^2c^2$$

حل ـ طبق رابطه‌های مربوط به میانه‌ها داریم:

$$\left(\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}\right)^2=$$
$$\left(\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}\right)\left(\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}\right)$$

از ساده کردن این رابطه به رابطهٔ مورد نظر می‌رسیم.

حل مسائل ویژهٔ کلاس چهارم ریاضی

۹۹/۳ـ فرستنده: **مناف شریف‌زاده** دانش آموز دبیرستان خوارزمی شمارهٔ ۱

چه رابطه‌ای بین ریشه‌های معادله‌های:

$$f(x)=ax^2+bx+c=0$$

و

$$g(x)=a'x^2+b'x+c'=0$$

بر قرار باشد برای آنکه یك چهارم مجموع چهار ریشه‌های دو معادلهٔ بالا ریشهٔ معادلهٔ:

$$a'f(x)-ag(x)=0$$

نیز باشد.

حل ـ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ اول و x_3 و x_4 ریشه‌های معادلهٔ دوم باشد داریم:

$$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)=\frac{1}{4}\left(-\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)$$

$$a'f(x)-ag(x)=(a'b-ab')x+a'c-ac'$$

$$x=-\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}=-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}\right)$$

از این رابطه بدست خواهد آمد:

$$\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{b'^2-4a'c'}{a'^2}\Longrightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{\Delta'}}{|a'|}$$

یعنی تفاضل ریشه‌های دو معادله با هم برابرند.

۹۹/۴ـ فرستنده: **جوادفیض** دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تبریز

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^3=\frac{x-4}{x+5}$$

حل ـ با فرض $\frac{x-1}{x+2}=y$ خواهیم داشت:

$$x=\frac{2y+1}{-y+1}\Longrightarrow\frac{x-4}{x+5}=\frac{2y-1}{-y+2}$$

$$y^3=\frac{2y-1}{-y+2}$$

$$y^4-2y^3+2y-1=0$$

$$(y^2-1)(y^2+1)-2y(y^2-1)=0$$

$$(y^2-1)(y^2-2y+1)=0\Longrightarrow y=\pm1$$

جواب $y=1$ قابل قبول نیست چون درازای آن x نامعین است. درازای $y=-1$ خواهیم داشت: $x=-\frac{1}{2}$

۹۹/۵ـ فرستنده: **قوام نحوی**

تصاعد هندسی‌را مشخص کنید که جملهٔ دوم آن $-\frac{۴}{۳}$ و مجموع‌سه جملهٔاول آن $\frac{۲۸}{۹}$ باشد.

حل ـ اگر a جملهٔ اول و q قدر نسبت تصاعد باشد داریم:

$$\begin{cases} aq = -\frac{۴}{۳} \\ a+aq+aq^۲ = \frac{۲۸}{۹} \end{cases}$$

$$\frac{۱+q+q^۲}{q} = -\frac{۷}{۳}$$

$$۳q^۲+۱۰q+۳=۰ \Longrightarrow q=-۳ \text{ یا } -\frac{۱}{۳}$$

$$q=-۳ \Longrightarrow a=\frac{۴}{۹}$$

$$q=-\frac{۱}{۳} \Longrightarrow a=۴$$

۹۹/۶ـ فرستنده: **قوام نحوی**

اولین جملهٔ یك‌تصاعد حسابی یك‌است و اگر $S_۵$ مجموع پنج جملهٔ اول، $S_{۱۰}$ مجموع ده جملهٔ اول و $S_{۲۰}$ مجموع‌بیست جملهٔ اول آن باشد، سه عدد $S_۵$ و $S_{۱۰}$ و $S_{۲۰}$ تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند. قدر نسبتهای دو تصاعد را پیدا کنید.

حل ـ اگر d قدر نسبت تصاعد باشد داریم:

$$S_۵=۵(۱+۲d) \text{ ، } S_{۱۰}=۵(۲+۹d) \text{ ،}$$
$$S_{۲۰}=۱۰(۲+۱۹d)$$

$$۲۵(۲+۹d)^۲=۵۰(۱+۲d)(۲+۱۹d)$$

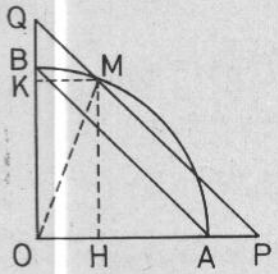
$$d^۲-۲d=۰ \Longrightarrow d=۲$$

$$d=۲ \text{ و } q=\frac{۲+۹d}{۱+۲d} \Longrightarrow q=۴$$

۹۹/۷ـ ترجمهٔ از فرانسه

ربع دایرهٔ AOB به مرکز O مفروض است. از نقطهٔ M واقع بر کمان AB موازی با وتر AB رسم می‌کنیم تا امتدادهای OA و OB را به ترتیب در P و Q قطع کند. ثابت کنید که:

$$\overline{MP^۲}+\overline{MQ^۲}=AB^۲$$



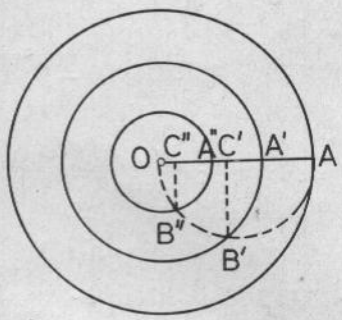
حل ـ عمودهای MH و MK را به ترتیب بر OP و OQ فرود می‌آوریم. مثلثهای MHP و MKQ با مثلث AOB متشابهند و نتیجه می‌شود که $MH=HP$ و $MK=KQ$ و خواهیم داشت:

$$MP^۲=MH^۲+HP^۲=۲MH^۲$$
$$MQ^۲=۲MK^۲$$
$$MP^۲+MQ^۲=۲(MH^۲+MK^۲)=$$
$$=۲(MH^۲+OH^۲)=۲OM^۲=OA^۲+OB^۲=AB^۲$$

۹۹/۸ـ ترجمهٔ از فرانسه

داخل دایرهٔ مفروض دو دایرهٔ هم مرکز با آن، چنان رسم کنید که مساحت دایرهٔمفروض‌به سه قسمت متناسب با عددهای m و n و p تقسیم شود.

حل ـ به‌فرض آنکه OA ، OA' و OA'' شعاعهای دایرهای‌مطلوب‌باشند داریم:



$$\frac{\pi(OA^۲-OA'^۲)}{m}=\frac{\pi(OA'^۲-OA''^۲)}{n}=\frac{\pi OA''^۲}{p}$$

نیمدایره‌ای به‌قطر OA رسم‌می‌کنیم که‌دایره‌هارا در B'وB'' قطع می‌کندو عمودهای $B'C'$و$B''C''$ رابر OAرسم‌می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$OA'^۲=OB'^۲=OC'.OA$$
$$OA''^۲=OB''^۲=OC''.OA$$
$$\frac{OA^۲-OC'.OA}{m}=\frac{OC'.OA-OC''.OA}{n}=\frac{OC''.OA}{p}$$

از این رابطه بعد از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\frac{AC'}{m}=\frac{C'C''}{n}=\frac{C''O}{p}$$

بنابراین برای رسم دایره‌ها، نخست OA را به پاره‌های متناسب با m و n و p تقسیم می‌کنیم تا نقطه‌های C'وC'' بدست‌آیند. آنگاه در این نقطه‌ها عمودهایی بر OA اخراج می‌کنیم تا دایرهٔ به قطر OA را در B' و B'' قطع کند. OB' و OB'' شعاعهای دایره‌های مطلوبند.

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای پنجم دبیرستان

۹۹/۹ـ سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۲x$ و نقطهٔ P به‌ـ

طول یك واقع بر Ox را درنظرمی گیریم. خط Δ بر P می گذرد وسهمی‌را در دونقطهٔ A و B قطع‌می کند. هرگاه فاصلهٔ P از Q وسط AB برابر باشد بـا فاصلهٔ P از S رأس سهمی، اولا معادلهٔ خط Δ را مشخص کنید. ثانیاً در Q عمودی بر Δ اخراج می کنیم. که سهمی‌را در C قطع می کند ودر C مماسی برسهمی‌رسم می کنیم. ضریب زاویه‌ای‌این مماس را پیدا کنید.

حل ـ قبلاً یادآوری می‌شود که در شمارهٔ گذشته که معادلهٔ سهمی $y=x^2+2x$ چاپ شده اشتباه است و صحیح آن $y=x^2-2x$ بوده است.

رأس سهمی $S(1 \text{ و } -1)$ است واگر m ضریب زاویه‌ای خط Δ باشد معادلهٔ این خط $y=mx-m$ است که ازحل آن با معادلهٔ سهمی خواهیم داشت:

$$x^2-(m+2)x+m=0 \qquad (1)$$

$$Q\left(x=\frac{m+2}{2} \text{ و } y=\frac{m(m+2)}{2}-m=\frac{m^2}{2}\right)$$

$$PQ=PS \Longrightarrow \overline{PQ}^2=\overline{PS}^2$$

$$\left(\frac{m+2}{2}-1\right)^2+\left(\frac{m^2}{2}\right)^2=1$$

$$m^4+m^2-4=0 \Longrightarrow m^2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$m=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}}$$

با توجه به‌اینکه معادلهٔ (۱) در ازای همهٔ مقادیر m جواب دارد هردومقداری که‌برای m بدست‌آمده‌است قابل قبول‌می‌باشد. در ازای این مقادیراز m داریم:

$$Q\left(x=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} \quad \text{و} \quad y=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$$

ثانیاً ـ ملاحظه می‌شود که دو خط Δ ونظیر آن دو نقطهٔ Q وجود دارد که متناظر با دومقدار بدست آمده برای m می‌باشند. با توجه به‌تشابه عملیات برای دومقدار، جواب مربوط به‌مقدار مثبت m را بدست می‌آوریم.

اگر D خطی‌باشد که در Q عمودبر Δ اخراج می‌شود، m' ضریب زاویه‌ای خط D ومعادلهٔ آن می‌شود:

$$m'=-\sqrt{\frac{2}{\sqrt{17}-1}}=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$$

$$D:\ y-\frac{-1+\sqrt{17}}{4}=$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\left(x-1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}}\right)$$

به فرض $a=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ معادلهٔ‌خط D عبارت خواهدشداز:

$$y=-ax+a^2+a+1$$

ازحل این معادله با معادلهٔ سهمی خواهیم داشت:

$$x^2-(2-a)x-a^2-a-1=0$$

این معادله دوجواب قابل قبول x' و x'' دارد که طولهای دونقطهٔ نظیر C می‌باشند. چون مشتق تابع $y'=2x-2$ است‌پس‌ضریب زاویه‌ای مماسی که در C برسهمی رسم می‌شود برابراست با:

$2x'-2$ یا $2x''-2$

۹۹/۱۰ ـ فرستنده: **محمد معینی**

ثابت کنید عبارت زیر به ازای مقادیری از x که معین باشد مثبت است:

$$(1-tg^2x)(1-3tg^2x)(1+tg2x\,tg3x)$$

حل ـ به‌فرض $t=tgx$ عبارت بالا می‌شود:

$$(1-t^2)(1-3t^2)\left(1+\frac{2t}{1-t^2}\times\frac{3t-t^3}{1+3t^2}\right)$$

این عبارت به ازای $1-t^2=0$ و $1-3t^2=0$ نامعین است و به ازای مقادیر دیگر t برابرخواهد شد با t^4+2t^2+1 که همواره مثبت است.

حل مسائل ویژهٔ کلاس پنجم‌ریاضی

۹۹/۱۱ ـ فرستنده **احمد امام** پنجم ریاضی دبیرستان البرز

تابع زیرمفروض است:

$$y=(x^2-6x+10)^n+3x-5$$

اولا ثابت کنید کـه منحنیهای نمایش تابع به ازای همـهٔ مقادیر n از نقطهٔ ثابتی می گذرند و در این نقطهٔ ثابت بر خط ثابتی مماس می‌باشند ومعادلهٔ این مماس را بنویسید.

ثانیاً هرگاه مماس برمنحنی درنقطهٔ به طول ۲ ازآن بـا محور Ox زاویهٔ $45°$ بسازد و n عدد صحیح باشد تابع رامشخص کنید.

حل ـ مقدار y وقتی مستقل از n است که سه جمله‌ای $x^2-6x+10$ یا برابر با صفریا برابر با یك باشد. این سه جمله‌ای صفر نمی‌شود اما در ازای $x=3$ برابربا یك می گردد

که در ازای آن $y=1+9-5=5$ می‌شود. پس منحنیهای نمایش تابع به ازای همهٔ مقادیر n از نقطهٔ ثابت $A(3 \text{ و } 5)$ می‌گذرند. مشتق تابع می‌شود:

$$y'=n(2x-6)(x^2-6x+10)^{n-1}+3$$

$$x=3 \Longrightarrow m=3$$

$$y-5=3(x-3) \text{ ، } y=3x-4$$

ثانیاً ـ درازای $x=2$ و $m=tg45^\circ=1$ داریم:

$$-2n\times 2^{n-1}+3=1 \Longrightarrow n\times 2^{n-1}=1$$

حاصل‌ضرب دومقدار n و 2^{n-1} برابر با یك است، پس یا هریك ازاین‌دومقدار برابر با یك است که دراین صورت $n=1$ است. یا اینکه یکی ازدومقدارمزبور بزرگتر ازیك ودیگری کوچکتر ازیك است. چون n عدد صحیح است پس ازیك بزرگتراست اما دراین صورت 2^{n-1} نیزبزرگتراست یعنی برای n مقدار قابل قبول وجود ندارد. در ازای $n=1$ داریم:

$$y=x^2-3x+5$$

۹۹/۱۲ـ ترجمهٔ ازفرانسه

بر منحنی C به معادلهٔ $xy=2$ نقطهٔ A به‌طول -2 و دو نقطهٔ M و M' به‌طولهای m و m' را درنظرمی‌گیریم. رابطه‌ای بین m و m' پیداکنید برای‌آنکه AM و AM' برهم عمود باشند. ثابت کنیدکه در این حالت خط MM' با خط ثابتی موازی است ومعادلهٔ مکان I وسط MM' را بدست آورید.

حل ـ داریم:

$$A(-2 \text{ و } -1) \text{ و } M(m \text{ و } \frac{2}{m}) \text{ و } M'(m' \text{ و } \frac{2}{m'})$$

برای آنکه دو خط AM و AM' برهم عمود باشند لازم وکافی است‌که حاصل‌ضرب ضریب زاویه‌ایهای آنها برابربا -1 باشد.

$$\frac{\frac{2}{m}+1}{m+2}\times\frac{\frac{2}{m'}+1}{m'+2}=-1$$

$$\frac{1}{m}\times\frac{1}{m'}=-1 \Longrightarrow mm'=-1$$

ضریب زاویه‌ای خط MM' برابراست با:

$$\frac{\frac{2}{m}-\frac{2}{m'}}{m-m'}=\frac{-2}{mm'}$$

در ازای $mm'=-1$ ضریب زاویه‌ای خط MM' برابر با مقدار ثابت ۲ است یعنی خط MM' با خط ثابت $y=2x$ موازی است. برای تعیین معادلهٔ مکان I:

$$I[x=\frac{m+m'}{2} \text{ و } y=\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}=-(m+m')]$$

$$m+m'=2x \Longrightarrow y=-2x$$

۹۹/۱۳ـ فرستنده: **احمدامام**

معادلهٔ مثلثاتی زیررا درنظرمی‌گیریم:

$$\sin^2(2x-\frac{\pi}{8})-2p\cos(\frac{5\pi}{8}-2x)+q=0$$

هرگاه تفاضل دوریشهٔ اصلی این معادله برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد ثابت کنیدکه:

$$4p^2=2q+1$$

حل ـ دوکمان $2x-\frac{\pi}{8}$ و $\frac{5\pi}{8}-2x$ متمم یکدیگرند پس معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$\sin^2(2x-\frac{\pi}{8})-2p\sin(2x-\frac{\pi}{8})+q=0$$

$$x'-x''=\frac{\pi}{4} \Longrightarrow 2x'=\frac{\pi}{2}+2x''$$

$$\sin(2x'-\frac{\pi}{8})=\cos(2x''-\frac{\pi}{8})$$

$$\sin(2x'-\frac{\pi}{8})=p+\sqrt{p^2-q}$$

$$\cos(2x'-\frac{\pi}{8})=\sin(2x''-\frac{\pi}{8})=p-\sqrt{p^2-q}$$

$$(p+\sqrt{p^2-q})^2+(p-\sqrt{p^2-q})^2=1$$

$$4p^2-2q=1$$

۹۹/۱۴ـ فرستنده: **محمدمعینی**

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$2\cos x\cos(2x-\alpha)=(1+\cos 2x)\cos(x-\alpha)$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$\cos(3x-\alpha)+\cos(x-\alpha)=$$
$$=\cos(x-\alpha)+\cos 2x\cos(x-\alpha)$$

$$2\cos(3x-\alpha)=\cos(3x-\alpha)+\cos(x+\alpha)$$

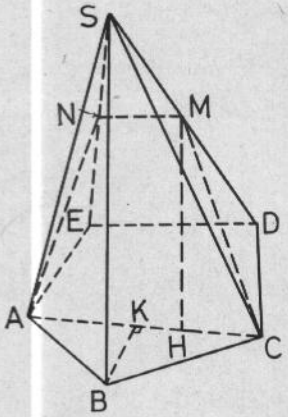
$$\cos(3x-\alpha)=\cos(x+\alpha)$$

$$(3x-\alpha)\pm(x+\alpha)=2k\pi$$

$$x=k\pi+\alpha \text{ یا } x=\frac{k\pi}{2}$$

۹۹/۱۵ـ فرستنده: **محمدمعینی**

هرم منتظم $SABCDE$ مفروض است که قاعدهٔ آن پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ به طول ضلع a ویال جانبی آن به ـ طول l می‌باشد. صفحه‌ای می‌گذرانیم‌که بررأسهای A و C و براوساط یالهای SD و SF بگذرد. مساحت مقطع این صفحه را که توسط هرم ایجاد می‌شود برحسب a و l حساب کنید.



حل ـ اگر M وسط SD و N وسط SE باشد خط MN موازی با DE ومساوی با نصف DE است و چهارضلعی ACMN ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. درمثلث SCD چون CM میانهٔ ضلع SD است نتیجه خواهد شد که:

$$CM=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+l^2}$$

اگر K وسط AC باشد در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABK داریم:

$$AK=AB\sin 54^\circ \Longrightarrow AC=\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$$

$$MN=\frac{DE}{2}=\frac{a}{2}$$

$$CH=\frac{AC-MN}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{4}$$

$$MH^2=MC^2-CH^2=\frac{3a^2+4l^2}{16}$$

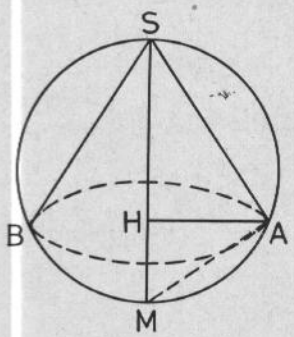
$$MH=\frac{1}{4}\sqrt{3a^2+4l^2}$$

$$S=\frac{(AC+MN)MH}{2}=$$

$$=\frac{a}{16}(2+\sqrt{5})\sqrt{3a^2+4l^2}$$

۹۹/۱۶ـ فرستنده: **محمد معینی**

در کرهٔ به شعاع R مخروطی محاط شده است که سطح جانبی آن k برابر مساحت قاعدهٔ آن است. حجم این مخروط را برحسب R و k حساب کنید.



حل ـ اگر $SH=h$ ارتفاع و $HA=r$ شعاع قاعدهٔ مخروط و $SA=l$ مولد آن باشد بنا به فرض داریم:

$$\pi rl=k\pi r^2 \Longrightarrow l=kr$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ SAM داریم:

$$HA^2=HS\cdot HM\Longrightarrow r^2=h(2R-h)$$

$$SA^2=SM\cdot SH\Longrightarrow l^2=2R\cdot h$$

$$\frac{l^2}{k^2}=\frac{l^2}{2R}(2R-h)\Longrightarrow h=\frac{2R(k^2-1)}{k^2}$$

$$r^2=\frac{2R(k^2-1)}{k^2}\left[2R-\frac{2R(k^2-1)}{k^2}\right]=$$

$$=\frac{4R^2(k^2-1)}{k^4}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{8\pi R^3}{3}\left(\frac{k^2-1}{k^3}\right)^2$$

حل مسائل ویژهٔ کلاسهای ششم دبیرستان

۹۹/۱۷ـ فرستنده: **محمد علی مرادی‌نسب**

دبیرستان کوروش سمنان

دایره‌ای متغیر بر نقطهٔ ثابت $P(a$ و $a)$ می‌گذرد و بر محور $x'x$ مماس است. به‌فرض آنکه $a>0$ و α طول مرکز دایره باشد:

اولا معادلهٔ این دایره را برحسب a و α بنویسید.

ثانیاً قطر PQ ازدایره را درنظرمی‌گیریم. وقتی α تغییر کند معادلهٔ نقطهٔ Q را بدست‌آورید ونوع منحنی مکان ومشخصات آن را معلوم کنید.

حل ـ اگر $\omega(\alpha$ و $\beta)$ مرکزدایره و R شعاع آن باشد چون دایره بر محور $x'x$ مماس و دربالای این محور واقع است پس $\beta=R$ ومعادلهٔ دایره می‌شود:

$$(x-\alpha)^2+(y-R)=R^2$$

دایره از $P(a$ و $a)$ می‌گذرد، پس:

$$(a-\alpha)^2+(a-R)^2=R^2\Longrightarrow R=\frac{a^2+(a-\alpha)^2}{2a}$$

معادلهٔ دایره می‌شود:

$$x^2+y^2-2\alpha x-\left[\frac{a^2+(a-\alpha)^2}{a}\right]y+\alpha^2=0$$

ثانیاً به‌فرض $Q(x$ و $y)$ داریم:

$$\alpha=\frac{x+a}{2}\ \text{و}\ \beta=R=\frac{y+a}{2}$$

$$\left(a-\frac{x+a}{2}\right)^2+\left(a-\frac{y+a}{2}\right)^2=\left(\frac{y+a}{2}\right)^2$$

ازاین رابطه پس ازساده کردن خواهیم داشت:

$$(x-a)^2=4ay$$

مکان Q سهمی است که $(0$ و $a)$ رأس و $p=2a$ پارامتر و $F(a$ و $a)$ کانون و $y=-a$ خط هادی آن است.

۹۹/۱۸ـ فرستنده: **محمدمعینی**

معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\sin\alpha+\sin(x-\alpha)+\sin(2x+\alpha)=$$
$$=\sin(x+\alpha)+\sin(2x-\alpha)$$

حل ـ به‌ترتیب داریم:

$$\sin\alpha+[\sin(2x+\alpha)-\sin(2x-\alpha)]=$$
$$=\sin(x+\alpha)-\sin(x-\alpha)$$

$$\sin\alpha+2\sin\alpha\cos 2x=2\sin\alpha\cos x$$

$$1+2\cos 2x-2\cos x=0$$

$$4\cos^2 x-2\cos x-1=0$$

$$\cos x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}=\cos\frac{\pi}{5} \text{ یا } \cos\frac{3\pi}{5}$$

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{5} \text{ یا } x=2k\pi\pm\frac{3\pi}{5}$$

حل مسائل ویژهٔ کلاس ششم ریاضی

۹۹/۱۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

در صفحهٔ محورهای مختصات متعامد منحنی C به معادلهٔ $y=x\sqrt{x}$ را در نظرمی‌گیریم. به فرض $a>0$ براین منحنی نقطهٔ A به‌طول a را انتخاب و عمودهای AA_1 و AA_2 را به‌ترتیب بر Ox و Oy رسم می‌کنیم. حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی و OA_1 و AA_1 حول Ox را با V_1 وحجم حادث ازدوران سطح محصوربین منحنی و OA_2 و AA_2 حول Oy را با V_2 نشان می‌دهیم.

اولا مقادیر V_1 و V_2 را برحسب a حساب کنید.

ثانیاً معلوم کنید که به ازای چه مقادیر a این دوحجم با هم معادلند.

حل ـ اولا به‌فرض $g(x)=y^2$ داریم:

$$g(x)=x^3\Longrightarrow G(x)=\frac{1}{4}x^4+C$$

$$V_1=\pi\,|G(a)-G(0)|=\frac{\pi a^4}{4}$$

$$h(y)=x^2=\sqrt[3]{y^4}\Longrightarrow H(y)=\frac{3}{7}y^2\sqrt[3]{y}+C$$

$$V_2=\pi|H(a)-H(0)|$$

$$V_2=\pi|H(a\sqrt{a})-H(0)|=\frac{3\pi}{7}a^3\sqrt{a}$$

ثانیاً به‌فرض $V_1=V_2$ خواهیم داشت:

$$\frac{a^4}{4}=\frac{3}{7}a^3\sqrt{a}\Longrightarrow a=\frac{144}{49}$$

۹۹/۲۰ـ ترجمهٔ ازفرانسه

منحنیهای نمایش‌هندسی تابعهای‌زیررا در دوشکل‌جداگانه رسم کنید وبا یکدیگرمقایسه کنید.

$$(1)\ y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\ ،\ (2)\ y=x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

حل ـ تابع (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y=|x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

این تابع در ازای $x\geqslant 0$ همان تابع (۲) است و در ازای $x\leqslant 0$ قرینهٔ تابع (۲) است. بنابراین برای‌رسم‌نمایش هندسی تابع (۱) می‌توانیم ازنمایش هندسی تابع (۲) استفاده کنیم به‌این ترتیب که آن قسمت ازمنحنی تابع (۲) راکه زیرمحور $x'x$ است حذف کنیم وقرینهٔ‌آن نسبت به $x'x$ را به‌جای‌آن قراردهیم.

رسم نمایش هندسی تابع (۲):

$$y=x\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

این تابع درازای مقادیر $x>1$ و $x\leqslant 0$ معین است. وقتی $x\to+\infty$ حد y برابربا $+\infty$ ووقتی $x\to-\infty$ حد y برابربا $-\infty$ است:

$$x\to+\infty\Longrightarrow\lim\frac{y}{x}=1$$

$$y-x=x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)=\frac{\frac{x}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1}$$

$$x\to+\infty\Longrightarrow\lim(y-x)=\frac{1}{2}$$

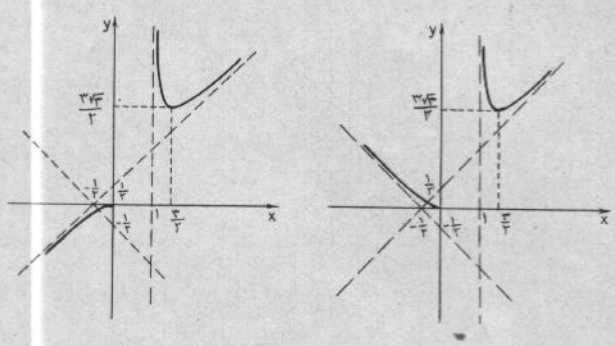
خط به معادلهٔ $y=x+\frac{1}{2}$ مجانب شاخهٔ نظیر $x=+\infty$ منحنی است. با روش مشابه معلوم خواهد شد که خط به معادلهٔ $y=-x-\frac{1}{2}$ مجانب‌شاخهٔ نظیر $x=-\infty$ منحنی است. خط $x=1$ نیزمجانب قائم منحنی است:

$$y'=\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$$

$$y'=0\Longrightarrow x=0 \text{ یا } x=\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

نمایش هندسی تابع (۲) و از روی آن، نمایش هندسی تابع (۱) به‌شکلهای زیر است:



(۱) ، $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ (۲) ، $y=x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

۹۹/۲۱ـ فرستنده: **حبیب میرتبریزیان** دانشجوی دانشکدهٔ علوم کرمانشاه

هرگاه x به‌سمت صفرمیل کند حد تابع زیرچقدراست؟

$$y=\frac{\sin(\sin x)}{x}$$

حل ـ تابع را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

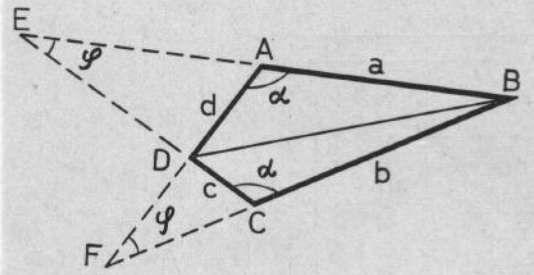
$$y=\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}$$

$$\sin x=a\Longrightarrow y=\frac{\sin a}{a}\times\frac{\sin x}{x}$$

$$[x\to 0 \quad \sin x=a\to 0]\Longrightarrow y=1\times 1=1$$

۹۹/۲۲ـ ترجمهٔ **مهندس فتح‌الله زرگری**

در یك چهار ضلعی زاویه‌های بین ضلعهای مقابل با هم برابرند. مساحت این چهارضلعی را برحسب اندازه‌های ضلعهای آن حساب کنید.



حل ـ با فرض $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ و $DA=d$ وبافرض آنکه‌اندازهٔ هریك ازدوزاویهٔ(CDوAB) و(BC,DA) برابربا φ باشدازتشابه دومثلث ABF و BCE نتیجه خواهد شدکه دو زاویهٔ BAF و BCE با هم برابرند. اندازهٔ هریك ازاین دوزاویه را α اختیار می‌کنیم.

درمثلثهای ABDوCBD داریم:

$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha$$

$$BD^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

ازاین دورابطه نتیجه می‌شود:

$$\cos\alpha=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad-bc)}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left[\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad-bc)}\right]^2}$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{2(ad-bc)}\times$$

$$\times\sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-a+d)(b-c-a+d)}$$

S مساحت چهارضلعی می‌شود:

$$S=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin\alpha$$

که دراین رابطه به‌جای $\sin\alpha$ مقداربالا را قرارمی‌دهیم.

هرگاه $ad-bc=0$ باشد دستوربالاقابل‌استفاده نمی‌باشد که دراین صورت‌چهارضلعی‌مربوط‌یامتوازی‌الاضلاع است‌یاچهارضلعی است که در آن ضلعهای مجاوردوبه دوبا هم برابرند.

۹۹/۲۳ـ ترجمهٔ ازفرانسه

کسر $\frac{3}{7}$ را می‌توان حد مجموع بینهایت‌کسر کوچکتر ازواحد دانست‌که مخرج هرکدام ازآنها توانی از۶ باشد. رشتهٔ این‌کسرها را مشخص کنید.

حل ـ درتبدیل یك‌کسر به مجموع کسرهایی که مخرجهای آنها توانهای ده باشند، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم وهر بارباقیمانده را در ده ضرب می‌کنیم. همین عمل را برای تبدیل کسر به‌مجموع کسرهایی که مخرجهایشان‌توانهایی از۶ باشدانجام می‌دهیم با این تفاوت که باقیمانده‌های جزئی تقسیمها را هر بار در۶ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 7 \\ \hline 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3\times 6 & 7 \\ \hline 4 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4\times 6 & 7 \\ \hline 3 & 3 \end{array} \quad \cdots$$

$$\frac{3}{7}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6^2}+\frac{2}{6^3}+\frac{3}{6^4}+\cdots$$

می‌توان گفت‌که‌کسر $\frac{3}{7}$ مولد کسر اعشاری متناوبی است که در دستگاه عددنویسی به‌پایهٔ۶به‌صورت ۰/۲۳۲۳... نوشته‌می‌شود.

۹۹/۲۴ـ ترجمهٔ از فرانسه

ثابت کنید که :

۱ـ برای آنکه یك کسر مجذور کامل باشد، لازم و کافی است که حاصل ضرب دو جملهٔ آن مجذور کامل باشد.

۲ـ برای آنکه یك کسر مکعب کامل باشد، لازم و کافی است که حاصل‌ضرب یکی از دوجملهٔ آن در مجذور جملهٔ دیگر مکعب کامل باشد.

حل ـ ۱) به فرض آنکه $\frac{\alpha}{\beta}$ کسری تحویل ناپذیر باشد و داشته باشیم $\frac{a}{b}=(\frac{\alpha}{\beta})^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ کسر $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ نیز تحویل ناپذیر است ودر نتیجه:

$$\alpha=k\alpha^2 \text{ و } b=k\beta^2 \Longrightarrow ab=(k\alpha\beta)^2$$

برعکس اگر داشته باشیم $ab=c^2$ نتیجه می‌شود :

$\frac{a}{b}=\frac{c^2}{b^2}=(\frac{c}{b})^2$ پس کسر $\frac{a}{b}$ مجذور کامل است.

۲) نظیر آنچه که در بالا آمد:

$$\frac{a}{b}=(\frac{\alpha}{\beta})^3=\frac{\alpha^3}{\beta^3}$$

$$a=k\alpha^3 \text{ و } b=k\beta^3 \Longrightarrow a^2b=(k\alpha^2\beta)^3$$

$$a^2b=c^3 \Longrightarrow \frac{a^2b}{a^3}=\frac{c^3}{a^3}=(\frac{c}{a})^3$$

۹۹/۲۵ـ ترجمهٔ از فرانسه

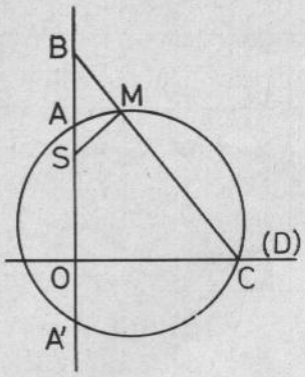
خط D ونقطهٔ Q واقع بر آن مفروض‌است. در O عمودی بر D اخراج می‌کنیم و روی‌آن ودر یك طرف O دو نقطهٔ ثابت A و B را درنظر می‌گیریم.

نقطهٔ دلخواه C را بر خط D اختیار می‌کنیم و در انعکاس به قطب D و به قوت $\overline{CA}^2$ منعکس نقطهٔ B را M می‌نامیم،

اولا ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث AMC به یك‌دسته دوایر تعلق دارد.

تانیاً وقتی C خط D را بپیماید مکان نقطهٔ M را تعیین کنید.

حل ـ درانعکاس گفته‌شده دایرهٔ AMC منعکس خط AB است وچون این خط برخط D عمود است خط D درانعکاس مزبور ثابت باقی می‌ماند، پس دایرهٔ AMC برخط D عمود است. بنابراین مرکز دایرهٔ مزبور برخط D واقع است و این دایره بر نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت به D نیز می‌گذرد. دونقطهٔ A و A' ثابت می‌باشند، پس دایرهٔ AMC به‌دسته دایره‌هایی تعلق دارد که همه بر A و A' می‌گذرند.



ثانیاً ـ اگر S مزدوج توافقی B نسبت به A و A' باشدخواهیم‌داشت :

$$\overline{BM}\cdot\overline{BC}=\overline{BA}\cdot\overline{BA'}=\overline{BS}^2$$

مکان M دایرهٔ به‌قطر BS است که در انعکاس به‌قطب B وبه‌قوت $\overline{BS}^2$ منعکس خط (D)، مکان C، می‌باشد.

حل مسائل منطق و ریاضی جدید

ترجمهٔ از فرانسه

۹۹/۲۶ـ درمجموعهٔ $A=\{۱،۲،۳،۶،۹،۱۰\}$ رابطهٔ **R** چنین تعریف می‌شود:

$x\in A، y\in A : x\mathbf{R}y \Longleftrightarrow$ x می‌شمرد y را

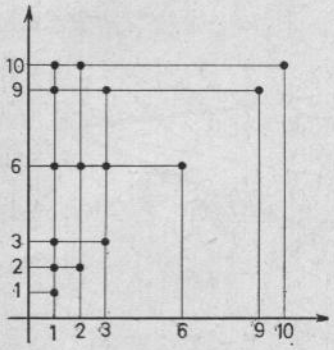
۱) رابطهٔ **R** را به صورت مجموعه‌ای از جفتهای مرتب مشخص کنید ونمودار آن را رسم کنید.

۲) آیا رابطهٔ **R** رابطه‌ای هم‌ارزی است یااینکه‌یك‌رابطهٔ ترتیب است؟

حل ـ ۱) اولا داریم:

$$\mathbf{R}=\{(۱،۱)،(۱،۲)،(۱،۳)،(۱،۶)،(۱،۹)،(۱،۱۰)،(۲،۲)،(۲،۶)،(۲،۱۰)،(۳،۳)،(۳،۶)،(۳،۹)،(۶،۶)،(۹،۹)،(۱۰،۱۰)\}$$

ثانیاً ـ نمودار دکارتی **R** به‌شکل‌مقابل است.



۲) رابطهٔ **R** انعکاسی است، زیرا به ازای هر x متعلق به A جفت (x،x) به R تعلق دارد.

رابطهٔ **R** تقارنی

نیست، زیرا اگر x و y دوعضو متمایز از A باشند:

$$(x،y)\in R \Longrightarrow (y،x)\notin R$$

بنابراین R رابطهٔ هم‌ارزی نیست.

رابطهٔ R انتقالی است زیرا برای هرسه عضو x و y و z از A داریم:

$$(x،y)\in R \text{ و } (y،z)\in R \Longrightarrow (x،z)\in R$$

بنابراین رابطهٔ R رابطهٔ ترتیب است، اما ترتیب کامل نیست زیرا مثلا دوعضو ۳ و ۱۰ راشامل نمی‌شود.

۹۹/۲۷ ـ در مجموعهٔ $A=\{۵،۸،۱۰،۱۵،۲۰\}$ بین x و y دوعضو غیرمشخص آن رابطهٔ R را در نظر می‌گیریم این رابطه را درهریك ازحالتهای زیر مشخص کنید:

۱) x عاملی (علاوه بریك) از y را دارااست:

۲) $y=۲x+۵$

۳) $y>۲x+۵$

۴) $y\geqslant ۲x+۵$

۵) $x+y$ مضربی از ۵است.

حل ـ به‌ترتیب داریم:

۱) $R=\{(۵،۵)،(۵،۱۰)،(۵،۱۵)،(۵،۲۰)،(۸،۸)،$
$(۸،۱۰)،(۸،۲۰)،(۱۰،۵)،(۱۰،۸)،$
$(۱۰،۱۰)،(۱۰،۱۵)،(۱۰،۲۰)،(۱۵،۵)،$
$(۱۵،۱۰)،(۱۵،۱۵)،(۱۵،۲۰)،(۲۰،۵)،$
$(۲۰،۸)،(۲۰،۱۰)،(۲۰،۱۵)،(۲۰،۲۰)\}$

۲) $R=\{(۵،۱۵)\}$

۳) $R=\{(۵،۲۰)\}$

۴) $R=\{(۵،۱۵)،(۵،۲۰)\}$

۵) $R=\{(۵،۱۵)،(۵،۱۰)،(۱۰،۵)،(۱۰،۱۰)،$
$(۱۰،۱۵)،(۱۵،۱۰)،(۱۵،۱۵)،(۱۵،۲۰)،$
$(۲۰،۱۵)،(۲۰،۲۰)،(۵،۱۵)،(۱۵،۵)،$
$(۵،۲۰)،(۲۰،۵)،(۱۰،۲۰)،(۲۰،۱۰)\}$

۹۹/۲۸ ـ به‌فرض آنکه N مجموعهٔ عددهای طبیعی باشد، در مجموعهٔ $N\times N$ برای جفت غیر مشخص $(x،y)$ رابطهٔ R به‌شرح زیررا درنظر می‌گیریم:

$$(a،b)R(x،y)\Longleftrightarrow ay=bx$$

۱) ثابت کنید که R رابطهٔ هم ارزی است.

۲) ثابت کنید که جفت $(ka،kb)$ با $(a،b)$ در رابطهٔ R است و کلاس هم‌ارزی (۲،۳) رامشخص کنید.

حل ـ رابطهٔ R اولا انعکاسی است زیرا:

$$ab=ba\Longleftrightarrow (a،b)R(a،b)$$

ثانیاً تقارنی است زیرا:

$$(a،b)R(x،y)\Longleftrightarrow ay=bx$$

ازرابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$xb=ya\Longleftrightarrow (x،y)R(a،b)$$

ثالثاً انتقالی است زیرا:

$$\left.\begin{matrix}(a،b)R(x،y)\\(x،y)R(c،d)\end{matrix}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{matrix}ay=bx\\xd=yc\end{matrix}\right.$$

$$(ay)(xd)=(bx)(yc)\Longleftrightarrow ad=bc\Longleftrightarrow (a،b)R(c،d)$$

بنابراین رابطهٔ R هم‌ارزی است.

۲) به‌ازای عددطبیعی دلخواه k داریم:

$$(ka)b=a(kb)\Longleftrightarrow (ka،kb)R(a،b)$$

کلاس هم‌ارزی (۲،۳) عبارتست از:

$$(۲k،۳k)=(۲،۳)،(۴،۶)،(۶،۹)،\ldots$$

۹۹/۲۹ ـ درمجموعهٔ دایره‌های صفحهٔ P برای دودایرهٔ غیرمشخص $C_۱$ و $C_۲$ رابطهٔ R راچنین تعریف می‌کنیم:

$$C_۱RC_۲\Longleftrightarrow (C_۱ \text{ داخل } C_۲ \text{ است})$$

آیا این رابطه رابطهٔ هم ارزی است؟

حل ـ چون رابطهٔ R انعکاسی نیست، زیرا یك دایره داخل خودش نمی‌باشد، پس هم ارزی نمی‌باشد.

۹۹/۳۰ ـ یك‌رابطهٔ R رادوری می‌نامیم‌هر گاه‌داشته‌باشیم:

$$(aRb \text{ و } bRc)\Longrightarrow cRa$$

چه شرطی لازم وکافی است برای آنکه یك رابطهٔ دوری رابطهٔ هم‌ارزی نیزباشد؟

حل ـ رابطه‌ای که دوری باشد الزاماً انعکاسی نیست. پس اولین شرط لازم برای آنکه‌یك رابطهٔ دوری رابطهٔ هم‌ارزی باشد آن است که انعکاسی باشد.

حال اگررابطه‌ای دوری وانعکاسی باشد داریم:

$$(aRb \text{ و } bRb)\Longrightarrow bRa$$

$$(aRb \text{ و } bRc)\Longrightarrow cRa=aRc$$

یعنی‌رابطهٔ مزبور تقارنی‌وانتقالی نیزمی‌باشد. برعکس به‌سادگی محقق می‌شودکه هررابطهٔ هم‌ارزی، دوری نیز می‌باشد. بنابراین شرط لازم وکافی برای هم ارزی بودن یك رابطهٔ دوری‌آن است که انعکاسی باشد.

پاسخ تستهای ریاضی

۳۱ـب	۳۲ـالف	۳۳ـد	۳۴ـب
۳۵ـالف	۳۶ـب	۳۷ـج	۳۸ـد
۳۹ـب	۴۰ـب	۴۱ـد	۴۲ـج
۴۳ـالف	۴۴ـالف	۴۵ـب	۴۶ـهیچکدام
۴۷ـج	۴۸ـالف	۴۹ـب	۵۰ـد

۵۱ـج (به توضیحی که در زیرداده خواهدشد توجه شود)

۵۲ـج

توضیحات مربوط به تستها

۳۱ـ با انتخاب مجهول معاون $\sqrt{x^2+mx}=A$ مقدار A منفی‌نیست وازمعادلهٔ $A^2+A=6$ یك جواب قابل قبول $A=2$ بدست می‌آید ومعادلهٔ $x^2+mx=2$ در ازای همهٔ مقادیر m دوریشهٔ حقیقی دارد.

۳۲ـ اگر $\pm a$ و $\pm b$ چهار ریشهٔ معادلهٔ دو مجذوری باشند وتصاعد حسابی تشکیل دهند، چون a بزرگترین آنهااست پس یکی ازدو تصاعد زیررا داریم:

$$-a,-b,b,a$$

$$a,b,-b,-a$$

درهر دوتصاعد داریم:

$$a-b=2b \Longrightarrow b=\frac{a}{3}$$

قدرنسبت تصاعد اول می‌شود:

$$a-b=a-\frac{a}{3}=\frac{2a}{3}$$

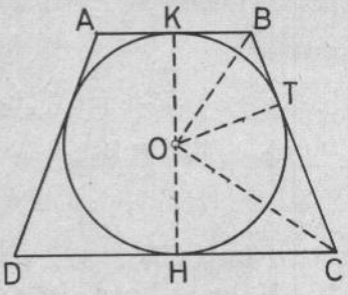
واز دومی‌می‌شود:

$$b-a=\frac{a}{3}-a=-\frac{2a}{3}$$

۳۵ـ اگر q قدرنسبت تصاعد هندسی باشد، بنا به فرض داریم:

$$\log_2 3q-\log_2 3=-2 \Longrightarrow q=\frac{1}{4}$$

۳۶ـ اولا چون چهارضلعی محیطی‌است، مجموع‌ضلعهای روبرو بایکدیگر برابر است پس:



$$a+b=2d$$

ثانیاً ـ مثلث BOC در زاویهٔ O قائمه است و داریم:

$$BT\cdot TC=OT^2 \Longrightarrow BK\cdot CH=OT^2$$

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=R^2 \Longrightarrow ab=4R^2$$

ثالثاً ـ داریم:

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab\geqslant 0$$

$$(a+b)^2\geqslant 16R^2 \Longrightarrow a+b\geqslant 4R$$

۳۷ـ اگر P وسط AB باشد درمثلث MAB داریم:

$$MA^2+MB^2=2PM^2+\frac{1}{2}AB^2$$

مقدار طرف اول این‌تساوی وقتی کمترین مقدار خود را داردکه PM کمترین مقدارخودرا داشته‌باشد واین موقعی است که PM بر Δ عمود باشد.

۳۹ـ اگر m ضریب زاویه‌ای خط Δ فرض شود معادلهٔ Δ می‌شود $y=mx-1$ و از حل این معادله با معادلهٔ تابع خواهیم داشت:

$$mx^2-(m+2)x+1=0$$

$$P\left(x=\frac{m+2}{2m} \quad و \quad y=\frac{m(m+2)}{2m}-1=\frac{m}{2}\right)$$

مختصات P را درمعادلهٔ $y=3x+1$ منظور می‌کنیم که -1 یا $m=6$ بدست می‌آید.

۴۱ـ ازتبدیل عبارات صورت و مخرج کسر داده شده به حاصل‌ضرب مقدار $tg\frac{x+y}{2}$ وازروی‌آن مقدار $tg(x+y)$ بدست می‌آید.

۴۲ـ داریم:

$$\cos(B+C)=-\cos A=\frac{1}{3}$$

$$\cot g\frac{B+C}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos(B+C)}{1-\cos(B+C)}}$$

۴۴ـ $OB=h$ ارتفاع و $OA=R$ شعاع قاعدهٔ استوانه

است و داریم:

$$\frac{2a}{h}=\frac{R-2a}{R}\Longrightarrow h=\frac{2aR}{R-2a}$$

۴۵ـ از $y''=0$ خواهیم داشت:

$$x^3+3ax^2-3x-a=0$$

بافرض $x=X-a$ داریم:

$$X^2+3(3a^2-1)x-4a^3+2a=0$$

$$4p^3+27q^2=31a^6-31a^4+10a^2-1$$

این عبارت به‌ازای مقادیر $a=1$ و $a=\pm\frac{1}{2}$ مثبت وبه‌ازای $a=\frac{1}{3}$ منفی است.

۴۶ـ داریم:

$$4p^3+27q^2=2m^3+1<0\Longrightarrow m^3+1<\frac{1}{2}<1$$

۴۸ـ باتبدیل x به $\frac{\pi}{2}-x$ معادله فرق نمی‌کند پس اگر x' یك جواب معادله باشد $\frac{\pi}{2}-x'$ نیز جواب معادله است.

۴۹ـ داریم:

$$BIC=90^\circ+\frac{A}{2}=120^\circ\Longrightarrow A=60^\circ$$

$$a^2=25+36-60\cos 60^\circ=31$$

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\sqrt{93}}{3}>3$$

۵۰ـ داریم:

$$N\times 10^M=Dq+N$$

$$N+(10^M-1)=Dq$$

$$(D\text{و}N)=1\Longrightarrow 10^M-1=dk$$

$$n(10^M-1)=dkn$$

$$n\times 10^M=dkn+n \quad \text{و} \quad n<d$$

ازاین رابطه‌معلوم می‌شودکه از تقسیم $n\times 10^M$ بر d باقیماندهٔ n بدست می‌آید، پس M تعداد رقمهای یك دوره یا چند دورهٔ گردش کسر اعشاری نظیر $\frac{n}{d}$ می‌باشد، پس M مضرب m است.

۵۱ـ متأسفانه درچاپ صورت این‌مسئله اشتباه شده‌است. صحیح‌آن چنین است: هرگاه مقدار تقریبی نقصانی **جذر** کسر $\frac{a}{b}$ باتقریب $\frac{1}{b}$ برابر با $\frac{a}{b}$ باشد،... که دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2\leq\frac{a}{b}<\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{b}\right)^2$$

$$a^2\leq ab<a^2+2a+1$$

$$a\leq b\leq a+2$$

۵۲ـ درانعکاس به قطب M وبه‌قوت:

$$\overline{MA}\cdot\overline{MA'}==\overline{MB}\cdot\overline{MB'}$$

خط $M\omega$ ثابت می‌ماند ودایرهٔ محیطی $MA'B'$ به خط AB تبدیل می‌شود. چون دایرهٔ مزبور بر $M\omega$ عمود است پس AB نیزبر $M\omega$ عمود است.

حل مسائل ریاضی برای سرگرمی (مندرج در صفحهٔ ۲۲۰ یکان‌شمارهٔ ۹۹)

۱ـ بنابه مفروضات داریم:

۱ـ آقای‌آریا صاحب ژیان یاشاهین است

۲ـ آقای پیکان صاحب ژیان یا آریا است

۳ـ یا آقای ژیان صاحب شاهین یا آقای شاهین صاحب ژیان است.

۴ـ یا آقای پیکان صاحب ژیان یا آقای ژیان صاحب پیکان است.

اگرفرض‌کنیم‌که آقای‌آریا صاحب ژیان‌است بنابه ۳ آقای شاهین ژیان ندارد، پس‌آقای ژیان شاهین‌دارد وبنابه ۴ بایدآقای ژیان پیکان داشته باشد. پس‌آقای ژیان هم شاهین‌دارد وهم‌پیکان وممکن نیست.

فرض می‌کنیم آقای آریا شاهین داشته باشد بنابه ۳ آقای

دنباله در صفحهٔ ۳۴۸

مسائل برای حل

برای دانش‌آموزان کلاسهای چهارم دبیرستان

۱۰۰/۱ـ فرستنده: **محمد علی مرادی‌نسب**

دستگاه دومعادلهٔ زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} x^2-xy+1=0 \\ 18y^2+51y-370=0 \end{cases}$$

۱۰۰/۲ـ ترجمهٔ ازفرانسه

درمثلث ABC زاویهٔ A قائمه است و AD نیمساززاویهٔ A است. هرگاه $AB=c$ و $AC=b$ و $AD=v$ باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sqrt{2}}{v}$$

برای دانش‌آموزان کلاس چهارم ریاضی

۱۰۰/۳ـ ترجمهٔ **مهندس فتح‌الله زرگری**

دستگاه دومعادلهٔ زیرراحل کنید:

$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases}$$

۱۰۰/۴ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z=2 \\ y^2+z^2+x=2 \\ z^2+x^2+y=2 \end{cases}$$

۱۰۰/۵ـ ترجمهٔ: **قوام نحوی**

سه عدد تصاعد حسابی‌تشکیل داده‌اند وسه عدد دیگر تصاعد هندسی ساخته‌اند. اگرجمله‌های دوتصاعد را نظیر به نظیربا هم جمع کنیم عددهای ۷۵، ۷۶، ۸۴ بدست می‌آید. اگر سه جملهٔ تصاعد حسابی را با هم‌جمع کنیم ۱۲۶ حاصل می‌شود. جمله‌های دوتصاعد را پیدا کنید.

۱۰۰/۶ـ از **عباس جزء امیرسیافی**

مقادیرحقیقی xوy را ازدستگاه زیربدست آورید:

$$\begin{cases} \log_x(x^{2y}+1)=y+\log_x 2 \\ \log_y(y^{2x}+4)=x+\log_y 4 \end{cases}$$

۱۰۰/۷ـ ترجمهٔ **قوام نحوی**

سری هندسی زیرمفروض است:

$$S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots$$

اگر S_n مجموع n جملهٔ اول این سری باشد، به‌ازای‌چه مقدار n تفاضل S_n بر S (حد مجموع بینهایت جملهٔ سری) کمتر از ۰/۰۰۰۰۱ می‌باشد؟

۱۰۰/۸ـ ترجمهٔ **مهندس زرگری**

دایرهٔ به‌مرکز O ونقطهٔ A درداخل آن مفروض است. وتر متغیر KL ازدایره از A می‌گذرد. در KوL مماسهایی بردایره رسم می‌کنیم که در M متقاطع می‌شوند. مکان M راتعیین کنید.

۱۰۰/۹ـ ترجمهٔ ازفرانسه

در دایرهٔ به‌مرکز O وبه‌شعاع R دووترمتوازی AB و $A'B'$ در یك طرف مرکز واقعند. هرگاه AB ضلع سه ضلعی منتظم و $A'B'$ ضلع شش‌ضلعی منتظم‌محاطی باشد، مساحت قطعهٔ‌محصور بین دووترمزبوررا حساب کنید.

برای دانش‌آموزان کلاسهای پنجم دبیرستان

۱۰۰/۱۰ـ سهمی به‌معادلهٔ زیرمفروض است:

$$y=-x^2+2x+1$$

دوممماس عمود برهم Δ و Δ' براین سهمی رسم می‌کنیم که Δ در P و Δ' در Q برآن مماس می‌شود. دوممماس در M متلاقی می‌شوند واز M خط D را عمود بر PQ رسم می‌کنیم. هرگاه ضریب زاویه‌ای خط Δ برابر ۲ باشد، معادلهٔ خط D را بدست آورید.

۱۰۰/۱۱ـ فرستنده: **محمد معینی**

معادلهٔ مثلثاتی زیررا حل کنید:

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$$

برای دانش‌آموزان کلاس پنجم ریاضی

۱۰۰/۱۲ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

برهذلولی به معادلهٔ $y=\frac{1}{x}$ سه‌نقطهٔ A وB وC را درنظر می‌گیریم. ازO مبدأ مختصات به‌نقطه‌های A_1 وB_1 وC_1 وسطهای BC وCA وAB وصل‌می‌کنیم. خط Δ_1 رااز A موازی‌با OA_1 خط Δ_2 رااز B موازی‌با OB_1 وخط Δ_3 رااز C موازی‌با OC_1 رسم‌می‌کنیم. ثابت‌کنیدکه سه‌خط Δ_1 وΔ_2 وΔ_3 روی دایرهٔ‌محیطی مثلث ABC متقاربند.

۱۰۰/۱۳ـ ترجمهٔ ازفرانسه

برهذلولی $y=\frac{1}{x}$ سه‌نقطهٔ A وB وC به‌طولهای a وb وc اختیار می‌کنیم.

۱) معادله‌های ارتفاعهای رأسهای B وC ازمثلث ABC رابدست‌آورید وثابت‌کنیدکه K مرکز ارتفاعی‌مثلث مزبورروی هذلولی واقع‌است.

۲) مقادیر a وb وc درچه‌شرط لازم‌وکافی صدق‌کنندبرای آنکه مثلث ABC درزاویهٔ A قائمه باشد.

۳) به‌فرض‌آنکه A ثابت وB وC برهذلولی متغیر باشند بقسمی‌که زاویهٔ BAC قائمه باقی‌بماند، معادلهٔ‌مکان I وسط BC را بدست‌آورید.

۱۰۰/۱۴ـ فرستنده: محمد معینی

عبارت زیررا قابل‌محاسبهٔ لگاریتمی‌کنید:

$$S=\cot g^2 2x-tg^2 2x-8\cos 4x\cot g 4x$$

۱۰۰/۱۵ـ ترجمهٔ مهندس زرگری

اگر مثلث ABC درهرسه‌زاویه‌حاده‌باشد ثابت‌کنیدکه :

$$tg^n A+tg^n B+tg^n C\geqslant 3\sqrt{3^n}$$

۱۰۰/۱۶ـ ترجمهٔ مهندس داویدریحان

ثابت‌کنیدکه درچهار وجهی ABCD خطهایی‌که رأسها را به‌ترتیب به‌نقطه‌های A′ وB′ وC′ وD′ مرکزثقلهای وجوه مقابل وصل می‌کنند دریك نقطهٔ G متقاربندکه مرکز ثقل چهار وجهی‌است. همچنین چهار هرمی‌که رأس هرکدام G وقاعدهٔ‌آن یکی‌از وجوه چهاروجهی است باهم معادلند.

۱۰۰/۱۷ـ ترجمهٔ ازفرانسه

درصفحهٔ مفروض P دایرهٔ C وخط D درخارج‌آن‌مفروض است. کرهٔ متغیرS بردایرهٔ C می‌گذرد. صفحه‌ای برD می‌گذرد ودرنقطهٔ M برکرهٔ S مماس‌است. مکان نقطهٔ M راتعیین‌کنید.

برای دانش‌آموزان کلاسهای ششم دبیرستان

۱۰۰/۱۸ـ ترجمهٔ ازفرانسه

معادلهٔ زیرداده شده‌است:

$$y^2=a(x^2+2x)-3$$

۱) به‌ازای مقادیرمختلف a درنوع منحنی به معادلهٔ بالا بحث‌کنید.

۲) درازای دومقدار $a=-4$ و $a=1$ منحنیهای‌نظیر را دریك شکل‌رسم ومشخصات‌آنها رامعلوم‌کنید.

۱۰۰/۱۹ـ فرستنده: محمد معینی

معادلهٔ زیررا حل‌کنید:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=2(\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos x)$$

برای دانش‌آموزان کلاس ششم‌ریاضی

۱۰۰/۲۰ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دوسهمی‌به معادله‌های $x^2=2qy$ و $y^2=2px$ درنقطهٔ P متقاطعند. هرگاه مقادیر p و q تغییرکنند بقسمی‌که مساحت سطح محصوربین دومنحنی مقدار ثابت باقی‌بماند، مکان‌نقطهٔP را مشخص‌کنید.

۱۰۰/۲۱ـ ترجمهٔ ازفرانسه

تابع $y=x\sin x$ مفروض‌است؛

۱) جدول ومنحنی‌نمایش تغییرات‌تابع‌را درفاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant\pi$ رسم‌کنید.

۲) مساحت سطح محصور بین منحنی و نیمساز ربع اول محورها رادرفاصلهٔ مزبور حساب‌کنید.

۳) فرض می‌کنیم‌که x همهٔ مقادیراز $-\infty$ تا $+\infty$ را قبول‌کند. ثابت‌کنیدکه منحنی نمایش تابع دربینهایت نقطه بردو خط‌ثابت مماس‌است. مختصات این‌نقاط و وضع منحنی‌را نسبت به این‌دوخط مشخص‌کنید.

۱۰۰/۲۲ـ فرستنده: **محمد معینی**

دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} \sin(y-3x)=2\sin^3 x \\ \cos(y-3x)=2\cos^3 x \end{cases}$$

۱۰۰/۲۳ـ ترجمهٔ ازفرانسه

داخل زاویهٔ xOy خط Oz را رسم می‌کنیم که با Ox زاویهٔ α وبا Oy زاویهٔ β بسازد. بر Oz نقطهٔ A را انتخاب می‌کنیم که $OA=a$ باشد واز A خطی رسم می‌کنیم که Ox را در P و Oy را در R قطع کند. هرگاه زاویهٔ حادهٔ خط OA با خط PQ برابر با γ باشد؛

۱) S مساحت مثلث OPQ رابرحسب a و α و β و γ بدست آورید.

۲) به‌فرض آنکه‌اندازهٔ زاویهٔ xOy برابر با ۶۰ درجه باشد وداشته باشیم:

$$a=1 \text{ و } tg\gamma=2 \text{ و } S=\frac{2(9-\sqrt{3})}{39}$$

مقادیر α و β راحساب کنید.

۱۰۰/۲۴ـ از: **ا. آقا ابراهیمیان** دانشجوی‌دانشگاه آریامهر

فرض‌می‌کنیم که x و y و z عددهای طبیعی‌باشند.

اولاـ ثابت کنید که‌اگرمجموع $x^7+y^7+z^7$ مضرب ۷ باشد مجموع $x+y+z$ نیز مضرب ۷ است .

ثانیاـ عددسه رقمی $\overline{xyz}$ را پیداکنید که رقمهای آن در روابط زیرصدق کنند:

$$\begin{cases} x^7+y^7+z^7=7 \text{ مضرب} \\ x+y-z=5 \end{cases}$$

۱۰۰/۲۵ـ ترجمهٔ: **قوام نحوی**

مبناهای x و y رااز رابطه‌های زیرپیداکنید:

$$\frac{1}{5}=(0/171717000)_x$$

$$\frac{5}{6}=(0/652525200)_y$$

۱۰۰/۲۵ـ ترجمهٔ **جعفر آقایانی‌چاوشی**

برضلعهای BC و CA و AB ازمثلث ABC نقطه های A' و B' و C' رابه ترتیب‌چنان انتخاب کرده‌ایم که‌سه خط AA' و BB' و CC' در G متقاربند بقسمی که:

$$\frac{AG}{GA'}=\frac{BG}{GB'}=\frac{CG}{GC'}$$

ثابت کنید که AA' و BB' و CC' میانه‌های مثلث ABC می‌باشند.

۱۰۰/۲۷ـ ترجمهٔ ازفرانسه

دونقطهٔ ثابت S و A داده شده‌است. سهمی متغیری بر A می‌گذرد و S رأس‌آن است. ثابت کنید که خط هادی این‌سهمی‌بر سهمی‌ثابتی مماس‌است.

مسائل گوناگون

۱۰۰/۲۸ـ از **محمد جواد راسخ**

دریك میلیون جملهٔ اول دوتصاعد زیر چند جملهٔ مشترك بین‌آنها وجود دارد؟

۱،۵،۹،۱۳،...

۱،۳،۹،۲۷،...

ازمسائل ارسالی آقای قوام نحوی

۱۰۰/۲۹ـ دو رشته اعداد $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ با مشخصات زیررا درنظرمی‌گیریم:

$$x_0=1 \ ، \ x_1=1 \ ، \ x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}$$

$$y_0=1 \ ، \ y_1=7 \ ، \ y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}$$

ثابت کنید که به‌استثنای ۱ هیچ عدد دیگردر دورشته مشترك نیست.

۱۰۰/۳۰ـ درمجموعهٔ اعداد حقیقی‌عمل دوتایی* بارابطهٔ زیر مشخص شده‌است: $a*b=a+b+ab$

معادله‌های زیررا حل کنید:

I $\quad 2*x+\frac{3*x}{4}=5$

II $\quad \begin{cases} 5*x+7*y=0 \\ x*2+4*y=2 \end{cases}$

III $\quad \frac{x^2}{4}+5*x+2*2-2=0$

۱۰۰/۳۱ـ یك سربازدرمیدان مشق چهارحرکت به‌شرح زیرانجام می‌دهد:

S: به جای خود، R: به‌راست راست، L: به چپ چپ، A: عقب گرد. اگرمجموعهٔ $G=\{S,R,L,A\}$ را درنظر گرفته‌و

عمل * ترکیب حرکتهای بالا باشد، ثابت کنید که مجموعهٔ G با عمل * یك گروه جابجائی تشکیل می‌دهد.

از مسائل ترجمهٔ آقای جعفر آقایانی چاوشی

۱۰۰/۳۲ـ هرگاه a و b و c اندازه‌های ضلعها، p نصف محیط و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی یك مثلث باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}$$

۱۰۰/۳۳ـ رشتهٔ $(0,1,1,2,2,\ldots)$ که جملهٔ عمومی آن اگر n زوج باشد برابر با $\frac{n}{2}$ و اگر n فرد باشد برابر با $\frac{n-1}{2}$ است درنظر می‌گیریم. هرگاه $f(n)$ مجموع n جمله از رشتهٔ بالا باشد و x و y دو عدد صحیح مثبت باشند که $x>y$ ثابت کنید که:

$$xy=f(x+y)-f(x-y)$$

۱۰۰/۳۴ـ به‌فرض:

$$0<x_1<1 \quad \text{و} \quad x_{n+1}=x_n(1-x_n)\ ،$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

ثابت کنید که:

$$\lim_{x\to\infty} nx_n=1$$

۱۰۰/۳۵ـ چند ضلعی محدبی درمربع به‌ضلع یك محاط شده است. ثابت کنید که مجموع مربعات ضلعهای این چندضلعی کوچکتر از ۴ ویا حداکثر برابر با ۴ است.

تستهای ریاضی

درحدود برنامهٔ کلاس چهارم ریاضی

۱۰۰/۳۶ـ هرگاه x' و x'' ریشه‌های حقیقی ومتمایز معادلهٔ $x^2+px+8=0$ باشند خواهیم داشت:

الف‌ـ $|x'|>\sqrt{2}$ و $|x''|<2\sqrt{2}$

ب‌ـ $|x'+x''|>4\sqrt{2}$

ج‌ـ $|x'+x''|<4\sqrt{2}$

د‌ـ $x'<0$ و $x''<0$

۱۰۰/۳۷ـ سه ریشهٔ معادلهٔ:

$$64x^3-144x^2+ax-15=0$$

تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. تفاضل ریشهٔ بزرگتر بر ریشهٔ کوچکتر برابر است با:

الف‌ـ $\frac{1}{2}$ ب‌ـ ۲ ج‌ـ $\frac{1}{4}$ د‌ـ ۱

۱۰۰/۳۸ـ معادلهٔ:

$$x^2+a|x|+a-1=0$$

الف‌ـ درازای همهٔ مقادیر a چهارریشهٔ حقیقی دارد

ب‌ـ درازای همهٔ مقادیر $a\neq 2$ چهارریشهٔ حقیقی دارد

ج‌ـ فقط در ازای $a=2$ ریشهٔ حقیقی دارد

د‌ـ در ازای هیچ مقدار از a ریشهٔ حقیقی ندارد

۱۰۰/۳۹ـ هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{\log a}{p}=\frac{\log b}{q}=\frac{\log c}{r}=\log x$$

به‌شرط $x\neq 1$ مقدار y از رابطهٔ $x^y=\frac{b^2}{ac}$ برابراست با:

الف‌ـ $2q-pr$ ب‌ـ $2q-p-r$

ج‌ـ q^2-pr د‌ـ q^2-p-r

۱۰۰/۴۰ـ جملهٔ اول یك تصاعد هندسی یك وحد مجموع بینهایت جملهٔ آن $\frac{4}{3}$ است.

هرگاه تعداد n جملهٔ اول این تصاعد را حذف کنیم، حد مجموع بینهایت جملهٔ بقیهٔ آن $\frac{1}{768}$ می‌شود. مقدار n برابر است با:

الف‌ـ ۶ ب‌ـ ۴ ج‌ـ ۵ د‌ـ ۷

۱۰۰/۴۱ـ برضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC نقطه‌های D و E و F را بقسمی انتخاب می‌کنیم که:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=\frac{1}{n}$$

نسبت مساحت مثلث DEF به‌مساحت مثلث ABC برابر است با:

الف- $\frac{n^2-n+2}{(n+1)^2}$

ب- $\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$

ج- $\frac{n^2-n}{(n+1)^2}$

د- $\frac{1}{(n+1)^2}$

۱۰۰/۴۲- نیمدایرهٔ به‌قطر AB مفروض است. مماسهای Ax و By را بر آن رسم می‌کنیم و نقطهٔ M را بر نیمدایره در نظر گرفته AM و BM را رسم می‌کنیم که By و Ax را در C و D قطع می‌کنند. به فرض $AD=a$ و $BC=b$ قطر نیمدایره برابر است با:

الف- $\frac{ab}{a+b}$ ب- $\frac{a+b}{2}$

ج- $\sqrt{ab}$ د- $\frac{ab}{2(a+b)}$

درحدود برنامهٔ کلاس پنجم ریاضی

۱۰۰/۴۳- دوتابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$y_1=f(x) \qquad y_2=\frac{x^2}{f(x)}$$

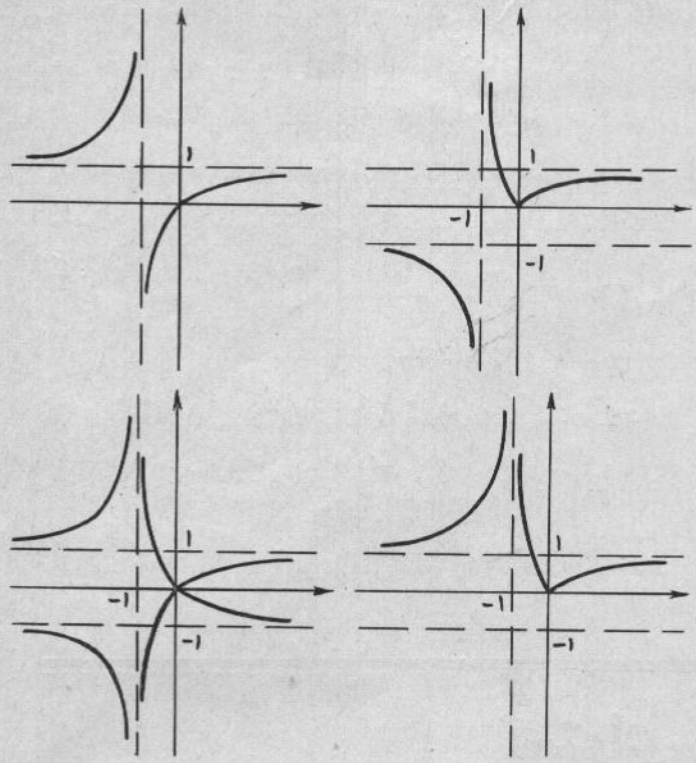
هرگاه y_1' و y_2' مشتقهای این دوتابع باشند به فرض

$$\frac{y_1'}{y_1}+\frac{y_2'}{y_2}=g(x)$$

تابع $g(x)$ برابر است با:

الف- $\frac{2}{x}$ ب- $2x$ ج- x د- $\frac{1}{x}$

۱۰۰/۴۴- منحنی نمایش تابع $y=\frac{|x|}{x+1}$ کدامیك از شکلهای زیر است:



۱۰۰/۴۵- منحنیهای نمایش هندسی دوتابع

$$y=\frac{x}{x+1} \quad \text{و} \quad y=-x^2+ax$$

به ازای همهٔ مقادیر a در یك نقطه متقاطعند. هرگاه زاویهٔ بین دومنحنی دراین نقطه قائمه باشد مقدار a برابر است با:

الف- ۱ ب- ۱- ج- ۲ د- ۲-

۱۰۰/۴۶- مقدارعبارت:

$$\frac{1}{\cos 80^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}$$

برابر است با:

الف- ۲ ب- $\frac{1}{2}$ ج- $\frac{1}{4}$ د- ۴

۱۰۰/۴۷- جوابهای معادلهٔ زیرعبارتند از:

$$\sin(x-a)=\sin x-\sin a$$

الف- $2k\pi$ ب- $2k\pi-a$

ج- $2k\pi$ و $2k\pi+a$ د- $2k\pi\pm a$

۱۰۰/۴۸- خط Δ ونقطهٔ S واقع برآن مفروض است. مکان هندسی نقاطی ازقضا که نسبت فاصلهٔ آنها ازخط Δ به‌فاصلهٔ آنها ازنقطهٔ S برابربا مقدارثابت $k<1$ باشد؛

الف- سطحی استوانی است.

ب- سطحی کروی است.

ج- سطحی مخروطی است.

د- خطی مستقیم است.

۱۰۰/۴۹- ظرف سربازی است به‌شکل استوانهٔ دوارکه سطح کل آن (سطح جانبی وسطح قاعده) مقدارثابت $2\pi a^2$ است. هرگاه حجم این ظرف بیشترین مقدارخود را داشته باشد،شعاع قاعدهٔ آن برابراست با:

الف- $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ ب- $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

ج- $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ د- $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

درحدود برنامهٔ کلاس ششم ریاضی

۱۰۰/۵۰- برمنحنی نمایش هندسی تابع $y=\frac{4x^3+1}{x}$ نقطهٔ M به‌طول a را درنظرمی‌گیریم که $0<a<\frac{1}{2}$ و در این نقطه مماسی برمنحنی رسم می‌کنیم که محور $y'y$ را در T قطع می‌کند و عمود MO را بر $x'x$ رسم می‌کنیم. اگر O مبدأ مختصات باشد مساحت ذوزنقهٔ OPMT برابراست با؛

الف- a^2 ب- $2a^2$ ج- $1-a^2$

د- مقدارثابت مستقل از a

۱۰۰/۵۱- اگر u عددی حقیقی باشد بزرگترین عدد صحیح موجود در u را با [u] نشان می‌دهیم. با این قرار داد تابع:

$$y=\cos x-[\cos x]$$

درفاصلهٔ $(0,\pi)$

الف- درهمهٔ نقاط پیوسته است

ب- درهمسایگی $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته نیست

ج- در ازای $x=\frac{\pi}{2}$ دو مقداردارد

د- در ازای $x=\frac{\pi}{2}$ ماکسیمم است

۱۰۰/۵۲- به فرض آنکه $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ یك‌دسته‌جواب معادلهٔ:

$$\sin 2x+\operatorname{tg} x=a$$

باشد، این معادله:

الف- یك دسته جواب دیگردارد.

ب- دو دسته‌جواب دیگردارد.

ج-جواب دیگر ندارد.

د- نسبت به x اتحاد است .

۱۰۰/۵۳- درمثلث ABC داریم:

$$m_a=\sqrt{27-11\sqrt{3}}\ ,\ B=60^\circ\ ,\ C=45^\circ$$

اگرSمساحت‌این‌مثلث باشد، کدامیك‌ازرابطه‌های‌زیرصحیح است:

الف- $S>6$ ب- $S<6$

ج- $S=6$ د- $S\neq 6$

۱۰۰/۵۴- به فرض آنکه n عدد طبیعی و $P=(n+5)(n+6)$ باشدکدامیك ازگزاره‌های زیرصحیح است؟

الف- اگر P بر 6n بخش‌پذیر باشد n عدد ۳۰ را نمی‌شمرد

ب- شرط لازم وکافی‌برای آنکه P بر n بخش‌پذیر باشد آن است‌که n مقسوم‌علیه ۳۰ باشد

ج- اگر n مقسوم‌علیه ۳۰ باشد P بر 6n بخش‌پذیراست

د- اگر P بر 6n بخش‌پذیرباشد n مقسوم‌علیه ۳۰ است

۱۰۰/۵۵- جذرنقصانی عدد طبیعی A تا یك واحد تقریب برابر a وباقیماندهٔ‌جذر برابر R است.درتقسیم A بر a باقیماندهٔ R' بدست می‌آید، برای‌آنکه $R'=R$ باشد لازم وکافی است

الف- $R<a$ ب- $2a\geqslant R>a$

ج- $R\leqslant a$ د- $R=a$

۱۰۰/۵۶- دایرهٔ (O) به‌مرکزO و به‌شعاع R ونقطهٔ ثابت A در داخل‌آن مفروض است. نقطهٔ‌دلخواه M واقع بردایرهٔ مزبورا درنظرمی‌گیریم وبه‌مرکز M وبه‌شعاع $r=\lambda.MA$ دایره‌ای رسم می‌کنیم (λ عددی است مثبت ومخالف بایك). بر OA نقطهٔ I را درنظرمی‌گیریم‌بقسمی‌که $\overline{OI}=\lambda^2.\overline{OA}$ باشد. وقتی M دایرهٔ (O) را بپیماید:

الف- قوت I نسبت به‌دایرهٔ متغیر(M) مقدار ثابت‌است.

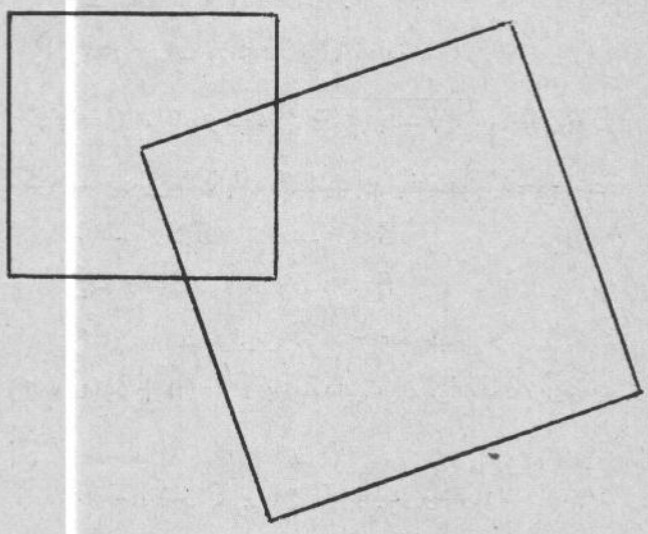
ب- قطبی I نسبت به‌دایرهٔ (M) ازنقطهٔ ثابت می‌گذرد.

ج- I مرکزتجانس‌دودایرهٔ (O) و (M) است.

د- I قطب انعکاس دودایرهٔ (O) و (M)است.

مسائل ریاضی برای سرگرمی

۱ـ مطابق با شکل دو مربع چنان متقاطعند که یك رأس

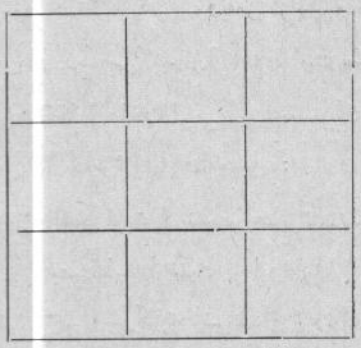


مربع بزرگتر درمرکز مربع کوچکتر واقع است و دو ضلع از مربع کوچکتر به‌وسیلهٔ دوضلع ازمربع بزرگتر به‌نسبت‌یك‌بر سه تقسیم می‌شوند . طول ضلع مربع کوچکتریك واحد وطول ضلع مربع بزرگتر ۱/۵ واحداست. مساحت‌سطح‌محصور بین‌دومربع چند واحد سطح است؟

۲ـ درعمل‌ضرب زیر، هر I نمایندهٔ یك‌رقم فرد و هر P نمایندهٔ یك‌رقم زوج است. این‌رقمها را پیداکنید.

```
 IPP×
  PP
 ----
 PIPP
 PIP
 ----
 IIPP
```

۳ـ آیا ممکن است که اولین نه عدد اول‌رادرخانه‌های‌مربع ۳×۳ مقابل‌چنان‌قرار دهید که مربعی وفقی بدست‌آید، یعنی اینکه مجموع عددهای واقع



درهر سطر، هرستون وهرقطرآن باهم برابر باشند؟

۴ـ ازجوانی پرسیدند:

ـ چند سال‌داری؟

جواب داد :

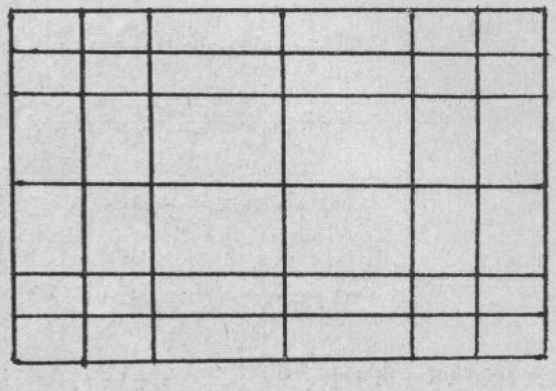
ـ درآن موقع که من‌سن‌کنونی پدرم را داشته باشم، سن خواهرم دوبرابر سن‌کنونیش خواهد بود، ودرهمان موقع، سن پدرم دوبرابر سنی خواهد بودکه درموقعی‌که خواهرم سن‌فعلی پدرم‌را دارد من‌دارا می‌باشم. به‌علاوه، من وخواهر وپدرم رویهم ۱۰۰ سال داریم.

این‌جوان وخواهر وپدرش هرکدام چند سال‌دارند؟

۵ـ عمل ضرب زیر در دستگاه عدد نویسی به‌پایهٔ ۲ انجام گرفته است؛ هریك از ستاره‌ها نمایندهٔ یکی ازدورقم صفر یایك است. فقط یك‌رقم یك از حاصل‌ضرب مشخص است. سایر رقمها را پیداکنید.

```
 * * * * ×
   * * *
 -------
   * * * *
 * * * *
 -------
 * * * 1 * * *
```

۶ـ درشکل زیرچند مستطیل وجود دارد؟



۷ـ عدد های صحیح از صفر تا یك میلیارد را متوالیاً نوشته‌ایم. حاصل جمع تمام رقمهایی‌که نوشته‌ایم چقدراست؟

مسائل انتخابی از مسائل

امتحانات داخلی دبیرستانها

ثلث دوم، سال تحصیلی ۵۲-۱۳۵۱ (فروردین - اردیبهشت ۱۳۵۲)

مسائل رقومی و ترسیمی کلاسهای ششم ریاضی

دبیر: مهندس محمود خوئی

دبیرستانهای: انوشیروان دادگر، بهمن قلهك، پیشاهنگ جام‌جم، حکیم‌الهی، نقش‌جهان، مدائن، ورجاوند (آریا).

الف - هندسهٔ رقومی

واحد سانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ را رسم کنید ومحل تلاقی آن‌ها رامرکز بنامید.

۱- نقطهٔ a_4 به‌فاصلهٔ ۴ زیرمرکز کاغذ روی محوراطول قرار دارد. ازنقطهٔ a_4 خط a_4b_8 را به‌شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی‌رسم کنید که نقطهٔ b_8 روی محور اقصر سمت چپ مرکز کاغذ واقع شود وبرخط a_4b_8 صفحهٔ P رابه شیب $p=1$ بقسمی‌مروردهید که ترقی‌رقوم مقیاس شیب آن ازپائین به‌بالا باشد. یك مقیاس شیب صفحهٔ P راکنار چپ کاغذ رسم کنید.

۲- قطعه خط a_4b_8 ضلع مستطیل ABCD واقع در صفحهٔ P است که BD قطر آن بوده و d_7 سمت راست ab واقع است‌ملخص مستطیل مزبوررارسم کرده وسعت حقیقی آن رادرسمت پائین کاغذ نشان دهید.

۳- بر روی مستطیل ABCD متوازی السطوح ABCDEFGH را بقسمی بناکنید که یال جانبی CG در فضا بر CD عمود بوده و g_8 روی محور اطول کاغذواقع گردد. ملخص متوازی‌السطوح را رسم وآن رامرئی ومخفی نمایید.

۴- عمود مشترك خط AG وافقیهٔ رقوم ۸ صفحهٔ P را روی شکل رسم کنید.

۵- مقطع متوازی‌السطوح فوقرا باصفحهٔ قائمی که اثرش برمحور اقصر کاغذ منطبق است یافته وسعت حقیقی آن را درسمت پائین نشان دهید.

ب: هندسهٔ ترسیمی

۱- ازنقطهٔ aa' به‌طول ۱وبعد ۴وارتفاع ۱خط نیمرخی رسم کنید که باصفحهٔ افق‌تصویرزاویهٔ ۳۰ درجه بسازدوبراین‌خط نیمرخ صفحهٔ مواجه PQ' را مرور داده آثارآن رانشان‌دهید.

۲- ازنقطهٔ aa' به‌بعد ۵ وارتفاع ۲خطی رسم کنید که با صفحهٔ افق تصویرزاویهٔ ۳۰درجه بسازد و با صفحهٔ نیمساز اول موازی باشد.

۳- فصل مشترك صفحهٔ $P\alpha Q'$ که برنیمساز دوم عمود است باصفحهٔ نیمساز اول ودوم روی یك‌شکل رسم کنید.

۴- فصل مشترك خط غیرمشخص DD' راباصفحهٔ مواجه PQ' تعیین کنید.

۵- ازنقطهٔ aa' خطی رسم کنید که برخط غیرمشخص و مفروض DD' عمود بوده وخط‌الارض راقطع کند.

گروه فرهنگی جاویدان

الف- هندسهٔ رقومی

واحد سانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ

را رسم کنید ـ محل تلاقی آن‌ها را مرکز کاغذ اختیار نمائید.

۱ـ نقطهٔ a_2 را به‌فاصلهٔ ۳ سمت‌چپ مرکز کاغذ روی‌محور اقصر انتخاب کرده خط a_2b_5 را به‌شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی رسم کنید که b_5 برروی محور اقصر سمت راست مرکز کاغذ قرار گیرد وبراین خط صفحهٔ P را به شیب $p=1$ بقسمی مرور دهید که افقیهٔ رقوم ۲ صفحهٔ P محور اطول کاغذ را دربالای مرکز کاغذ قطع کند. یك مقیاس شیب صفحه‌را سمت چپ کاغذ رسم کنید.

۲ـ ازنقطهٔ b_5 صفحهٔ Q را برخط a_2b_5 عمود کرده و فصل مشترك دوصفحهٔ P وQ را رسم و بـرروی آن نقطهٔ c_2 را مشخص کنید.

۳ـ ملخص مستطیل ABCD راکه AC قطر آنست رسم و وسعت حقیقی آن‌را با تسطیح درسمت پائین کاغذ نشان‌دهید.

۴ـ ملخص هـرم SABCD را که قاعـده‌اش مستطیل ABCD ویال های جانبی $SA=SB=SC=SD$ بوده و s_{11} رأس آن باشد رسم وآن را مرئی ومخفی کنید.

۵ـ مقطع هرم مزبوررا باصفحهٔ قائمی که اثرش برمحور اطول کاغذ منطبق است‌درجسم یافته و وسعت حقیقی آن‌رادر سمت چپ کاغذ نشان دهید.

ب: هندسهٔ ترسیمی

۱ـ ازنقطهٔ aa' خطی رسم کنید که یك خط منتصب و یك خط نیمرخ $cdc'd'$ را قطع کند.

۲ـ دوخط متقاطع DD' و $\Delta\Delta'$ مفروضند. DD' افقی و $\Delta\Delta'$ موازی‌نیمساز دوم می‌باشد . آثار صفحه‌ای که براین دو خط می گذرد بیابید .

۳ـ فصل مشترك صفحهٔ مواجهٔ PQ' را باصفحـهٔ نیمساز دوم رسم نمایید.

۴ـ فاصلهٔ aa' به‌بعد ۵ و ارتفاع ۶ را از صفحهٔ مواجه PQ' که بعداثرافقی آن ۴ وارتفاع‌اثرقائمش ۳ است پیدا کنید.

۵ـ ازنقطهٔ aa' خطی رسم کنید که برخط مفروض DD' عمود بوده وباصفحهٔ نیمسازاول موازی باشد.

دبیرستان‌رازی

الف ـ هندسهٔ رقومی

واحد سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱ محورهای اقصر واطول کاغذ رارسم کرده محل تلاقی آن‌ها را مرکز کاغذ بنامید.

۱ـ صفحهٔ P بوسیلهٔ بـزرگترین شیب آن درسمت چپ کاغذ بقسمی مفروض است که‌افقیهٔ رقوم یك آن برمحور اقصر کاغذ منطبق وشیب آن برابریك وترقی رقومش‌ازبالا به‌پائین می‌باشد. دراین صفحه نقطهٔ a_1 رابه فاصلهٔ ۶ سمت چپ محور قائم کاغـذ انتخاب کنید وازنقطهٔ A درصفحهٔ P خط a_1b_5 را بقسمی‌مرور دهید که بااثرصفحه زاویهٔ حقیقی ۳۰ درجه تشکیل دهد وآن را درسمت راست a قطع نماید .

۲ـ برروی قطعه‌خط AB درصفحهٔ P مستطیل ABCD راکه درآن قطر AC افقیه و حـروف در جهت مثلثاتی تصویر می‌شود رسم کنید.

۳ـ ازنقطهٔ D خط DH رابه‌شیب $p=\frac{3}{2}$ بقسمـی رسم کنید که باخط AC زاویهٔ حقیقی ۹۰ درجه بسازد ونقطهٔ h_4 در سمت‌بالای کاغذ قرار گیرد ومتوازی‌السطوح ABCDEFGH رارسم وملخص آن را مرئی ومخفی نمایید.

۴ـ عمود مشترك دو خـط DH و AC را روی شکل رسم کنید.

۵ـ صفحهٔ Q راعمود برصفحهٔ P بقسمی رسم کنید که افقیهٔ رقوم۲ آن برمحور اقصر کاغذ منطبق باشد. یك مقیاس شیب آن راسمت راست‌کاغذ نشان داده ومقطع متوازی‌السطوح را باصفحهٔ Q تعیین وآن را مرئی ومخفی نمائید.

ب ـ هندسهٔ ترسیمی

۱ـ خط DD' رابطور غیرمشخص رسم کرده آثارآن را مشخص‌نموده روی‌آن نقطه‌ای بیابید که فاصله‌اش از اثرقائم خط دوبرابر ارتفاعش باشد.

۲ـ بریك خط نیمرخ $aba'b'$ ویك نقطهٔ cc' که در خارج آنست صفحه‌ای مرور داده آثارش $P\alpha Q'$ را رسم نمایید.

۳ـ P و S' اثرافقی واثرقائم دوصفحهٔ مواجه می‌باشند که aa' یك نقطه ازفصل مشترك دوصفحه هم معلوم است آثار این‌دو صفحه را بیابید.

۴ـ فصل مشترك خط DD' راکـه در صفحهٔ نیمساز دوم است باصفحهٔ غیرمشخص $P\alpha Q'$ رسم نمایید.

۵ـ نقطهٔ bb' به‌بعد ۱ وارتفاع ۱ وطرف راست آن‌نقطهٔ cc' به بعد ۴ وارتفاع ۳ که فاصلهٔ رابطهای آن‌ها ۳/۵ می‌باشد مفروضند. ملخص‌مثلث متساوی‌الساقین ABC راکه BC قاعده‌و $AB=AC$ بـوده و نقطهٔ A به ارتفاع ۱/۵ در صفحهٔ قائم تصویر است رسم‌نمایید .

دبیرستان کوشش مریم

الف: هندسهٔ رقومی

واحد سانتیمتر- مقیاس ۱:۱ محورهای اقصرواطول کاغذ را رسم کرده، محل تلاقی آن‌ها را مرکز کاغذ بنامید.

۱- نقطهٔ a_3 برروی محوراقصر کاغذ به فاصلهٔ ۶ سمت‌چپ مرکز کاغذ مفروض است. از این نقطه خط a_3b_7 را بـه شیب $p=\frac{1}{2}$ بقسمی مروردهید که تصویرش با محوراقصرزاویهٔ ۳۰ درجه بسازد و محورقائم کاغذ را در بالای مرکزقطع کند و ترقی رقومش ازراست به‌چپ وپائین به‌بالا باشد. براین خط صفحهٔ P را به شیب $p=\frac{2}{3}$ مروردهید بقسمی که افقیهٔ رقوم ۵ آن محور اقصررادرسمت راست‌مرکز کاغذ قطع نماید. یك مقیاس شیب‌صفحهٔ P را در سمت چپ‌کاغذکه ترقی رقومش ازپائین ببالا باشد رسم کنید.

۲- درصفحهٔP خط a_3d_0 را بقسمی مروردهید که باصفحهٔ افق تصویر زاویهٔ $\alpha=25$ درجه بسازد وd سمت راست a قرار گیرد.

۳- ملخص متوازی‌الاضلاع ABCD را در صفحهٔ P که AC قطرآنست رسم کرده رقوم C را تعیین کنید ووسعت حقیقی آن‌را درسمت پائین‌کاغذ نشان دهید.

۴- هرم SABCD راکه S درصفحهٔ مقایسه واقع‌بوده وsbموازی محورقائم وSB درفضا برAB عمود است رسم‌نموده مقطع هرم‌را با صفحه‌ای که ازوسط خط‌الرأسهای‌جانبی‌می گذرد یافته وقسمتی‌ازهرم راکه بین صفحهٔ قاطع وقاعده ABCD قرار گرفته است به‌فرض آنکه فقط قاعده فوقانی هرم ناقص مزبـور حاکی ماوراء باشد مرئی ومخفی کنید. هرم ناقص فوق مجوف‌و وجوه‌آن را کدر فرض نمایید.

۵- زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ دووجه HDCG وHDAE را درسمت پائین‌کاغذ نشان دهید.

ب: هندسهٔ ترسیمی

۱- aa' نقطه‌ایست به‌ارتفاع ۲ واقع درنیمسازدوم از این نقطه افقیه‌ای رسم‌کنیدکه برخط نیمرخ $cdc'd'$ متکی باشد.

۲- برنقطهٔ aa' وخط DD' که درصفحهٔ نیمساز دوم‌است صفحه‌ای مروردادهٔ آثارش $P\alpha Q'$ را رسم‌نمائید.

۳- P وS' آثارافقی وقائم دوصفحهٔ مواجه مفروضندا گر aa' نقطه‌ای ازفصل مشترك دوصفحه دردست باشد Q' وR آثـار دیگر دو صفحه را بیابید.

۴- فصل مشترك خط مواجه DD' را با صفحهٔ $P\alpha Q'$ که برصفحهٔ نیمسازدوم عمود است تعیین‌کنید.

۵- ملخص مثلث متساوی‌الساقین ABC راکه A بر روی خط‌زمین و $bb'(1,4,3)$ و$cc'(-2,1,1)$ و cc' سمت چپ bb' باشد رسم‌کنید.

گروه فرهنگی مرجان

الف: هندسهٔ رقومی

واحد سانتیمتر-مقیاس ۱:۱ محورهای اقصرواطول کاغذرا رسم‌کنید محل تلاقی آنها مرکز کاغذ می‌باشد.

۱- نقطهٔ c_3 به‌فاصلهٔ ۶ سمت چپ مرکز کاغذ روی‌محور اقصرواقعست ازاین نقطه صفحهٔP را به‌شیب $p=1$ بقسمی مرور دهید که‌افقیه‌هایش‌موازی‌محوراقصر بوده‌وترقی‌رقوم خط بزرگترین شیب‌آن ازبالابه‌پائین باشد. یك مقیاس شیب صفحهٔP راکنارچپ کاغذ رسم نمائید. ازنقطهٔ c_3 خطc_3b_7 را به‌شیب $p=\frac{2}{3}$ در صفحهٔP بقسمی رسم‌کنیدکه b سمت راست c قرارگیرد.

۲- برروی قطعه خط BC در صفحهٔ P مثلث ABC را بقسمی‌رسم‌نمائیدکه‌شعاع‌دایرهٔ محیطی‌آن برابر $R=4/5$ ورقوم A برابر ۴ و a سمت راست محوراطول‌کاغذ واقع گردد. وسعت حقیقی‌مثلث‌را با تسطیح حول افقیهٔ رقوم ۷صفحهٔ Pدرسمت پائین کاغذ نشان دهید.

۳- صفحهٔ Q را به‌موازات صفحهٔP ودربالای آن‌به‌فاصلهٔ $3\sqrt{2}$ رسم نموده و یك مقیاس شیب صفحهٔ Q را در محل مناسب سمت چپ‌کاغذ نشان دهید.

۴- بر روی مثلث ABC در صفحهٔ P متوازی‌الاضلاع ABCD را بقسمی بناکنیدکـه AC قطـرش بـاشد و ملخص متوازی‌السطوح ABCDEFGH را که قاعده‌اش متوازی الاضلاع ABCD بوده‌ویال‌های جانبی‌آن افقی می‌باشدوتصویر یال CG با محوراقصرزاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازدوcg ازچپ‌به‌راست وپائین به‌بالا امتداد دارد وG در صفحهٔ Q می‌باشد و g درسمت بالای محوراقصروسمت چپ محوراطول واقع می‌شود رسم‌کرده‌و آن را مرئی ومخفی نمائید.

۵- صفحهٔ R را به‌شیب $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$ بقسمی رسم‌کنیدکه افقیهٔ‌رقوم ۶ آن برمحوراقصر کاغذ منطبق بوده‌وازبالابه‌پائین‌ترقی کند یك مقیاس شیب صفحهٔ R را درسمت راست‌کاغذ رسم‌کرده و

مقطع متوازی‌السطوح ABCDEFGH را به صفحهٔ R یافته وآن را مرئی ومخفی کنید.

ب: هندسهٔ ترسیمی

۱ـ ازنقطهٔ aa' به‌بعد ۵ وارتفاع ۲ خطی رسم کنید که نیمرخ $cdc'd'$ را قطع کرده و با صفحهٔ نیمساز اول موازی باشد.

۲ـ بریك خط جبهی DD' ویك خط موازی نیمساز دوم $\Delta\Delta'$ که متقاطعند صفحه‌ای مرورداده آثارش راتعیین کنید.

۳ـ فصل‌مشترك صفحهٔ $P\alpha Q'$ را با صفحهٔ‌ماربرخط‌الارض ونقطهٔ oo' به‌بعد ۲ وارتفاع ۱ تعیین کنید.

۴ـ ازنقطهٔ aa' خطی‌رسم نمائید که خط‌الارض را قطع کند وبا صفحهٔ مفروض $P\alpha Q'$ موازی باشد.

۵ـ ازنقطهٔ aa' خطی رسم کنید که برخط مفروض DD' عمود بوده وبا صفحهٔ افق تصویرزاویهٔ $\alpha = ۳۰$ درجه‌بسازد.

گروه فرهنگی هدف (دبیرستان هدف دختران)

الف: هندسهٔ رقومی

محورهای‌اطول واقصر کاغذ رارسم کنید. محل برخورد آنها مرکز کاغذ، واحد: سانتیمتر ـ مقیاس ۱:۱

۱ـ صفحهٔ P راکه‌باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ $\alpha = ۴۵^\circ$ می‌سازد درنظر گرفته مقیاس شیب آن را سمت چپ کنار کاغذ با ترقی‌رقوم ازپائین به‌بالا به‌قسمی رسم کنید که افقیهٔ رقوم ۱ آن برمحوراقصر کاغذ منطبق باشد. دراین صفحه‌نقطهٔ $b_۱$ را به‌فاصلهٔ ۱ سمت‌راست محوراطول کاغذ انتخاب کنید.

۲ـ خط $a_۴b_۱$ را درصفحهٔ P چنان رسم کنید که باافقیه‌های صفحه زاویهٔ حقیقی ۳۰° بسازد و a سمت چپ b باشد.

۳ـ مستطیل ABCD را در صفحهٔ P چنان بسازید که AB ضلع و AC قطرآن باشند و $c_۵$ سمت راست ab واقع گردد. وسعت حقیقی‌آن را سمت پائین‌کاغذ نشان دهید.

۴ـ صفحهٔ Q را عمود برصفحهٔ P بقسمی رسم کنید که افقیهٔ رقوم ۳ ـ آن‌برمحوراقصرمنطبق باشد. یك خط بزرگترین‌شیب آن را سمت راست کاغذ نشان دهید و از $b_۱$ خطی رسم کنید که تصویرش موازی محور اطول و شیبش $p = \frac{۱}{۲}$ باشد و ترقی رقومش از بالا به پائین باشد. زاویهٔ حقیقی این خط را باصفحهٔ P روی شکل مشخص کنید و نقطهٔ تلاقی خط با صفحهٔ Q را F بنامید.

۵ـ مستطیل ABCD قاعدهٔ متوازی‌السطوح ABCDEFGH است که BF یال جانبی آن است. ملخص آن‌را با مراعات مرئی ومخفی رسم کنید.

۶ـ فصل مشترك صفحات P وQ را یافته Δ بنامید وعمود مشترك Δ ویال BF را رسم کنید.

۷ـ ارتفاع متوازی‌السطوح را ازمرکزقاعدهٔ فوقانی رسم کنید واندازهٔ حقیقی‌آن را روی شکل نشان دهید.

ب: هندسهٔ ترسیمی

۱ـ ازنقطهٔ A به‌طول ۳وبعد ۴ وارتفاع۱ خط نیمرخی‌رسم کنید که‌با صفحهٔ‌افقی تصویرزاویهٔ ۳۰° بسازدوبرروی‌آن‌نقطهٔ bb' را طوری تعیین کنید که فاصله‌اش ازاثرقائم خط دوبرابرارتفاعش باشد.

۲ـ ازنقطهٔ aa' به بعد ۴ وارتفاع ۲ خطی رسم کنید که با صفحهٔ نیمسازدوم موازی باشد وبا صفحهٔ افقی تصویرزاویهٔ ۳۰° بسازد. براین خط صفحهٔ $P\alpha Q'$ را چنان مرور دهید که زاویهٔ بین تصاویرآثارش ۶۰° باشد.

۳ـ فصل مشترك صفحهٔ مواجه PQ' راکه بعد اثرافقیش ۴ وارتفاع اثرقائمش ۳ است باصفحهٔ ماربرخط‌الارض و نقطهٔ oo' به بعد ۵ وارتفاع ۲ رسم نمائید.

۴ـ قرینهٔ نقطهٔ aa' به‌بعد ۲ وارتفاع ۱ را نسبت‌به‌صفحهٔ $P\alpha Q'$ که برصفحهٔ نیمسازدوم عمود است تعیین کنید.

۵ـ قطعه خط $bcb'c'$ مفروض است. bb' به‌بعد ۱/۵ وارتفاع ۱ و cc' طرف راست آن به‌بعد ۴ وارتفاع ۳/۵ وفاصلهٔ رابطهای آنها ۲ است. ملخص‌مثلث متساوی‌الساقین ABC راکه در آن $AB = AC$ باشد به‌قسمی رسم کنید که رأس‌آن به بعد ۰/۵ وارتفاع ۱/۵ باشد.

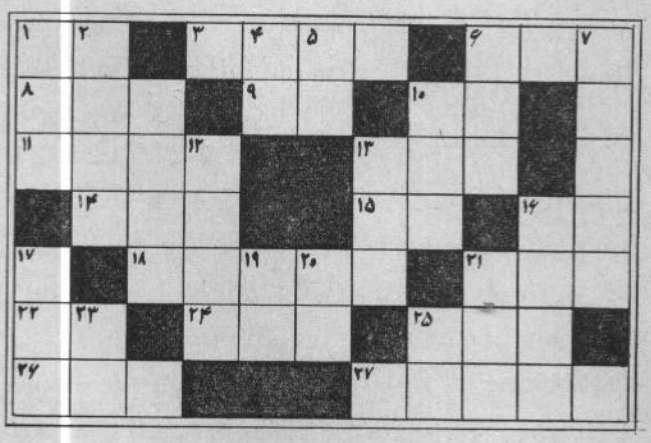
عمل غلط، اما جواب صحیح

$$\frac{\log_a \frac{۹}{۴}}{\log_a \frac{۲۷}{۸}} = \frac{\frac{۹}{۴}}{\frac{۲۷}{۸}}$$

$$\frac{\log_a \left(\frac{m+۱}{m}\right)^m}{\log_a \left(\frac{m+۱}{m}\right)^{m+۱}} = \frac{\left(\frac{m+۱}{m}\right)^m}{\left(\frac{m+۱}{m}\right)^{m+۱}}$$

جدول اعداد

طرح از: مجید قره‌باغی (تاریخ وصول به دفترمجله: ۱۳۵۰/۵/۶)



افقی: ۱ـ مقدار n ازتساوی زیر:

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=$$
$$=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$$

۳ـ بزرگترین عدد چهار رقمی که چون با مقلوب خود جمع‌شود عدد چهاررقمی $\overline{aabb}$ حاصل شود. ۶ـ عدد طبیعی که درازای کوچکترین عدد طبیعی n ازرابطهٔ زیربدست می‌آید:

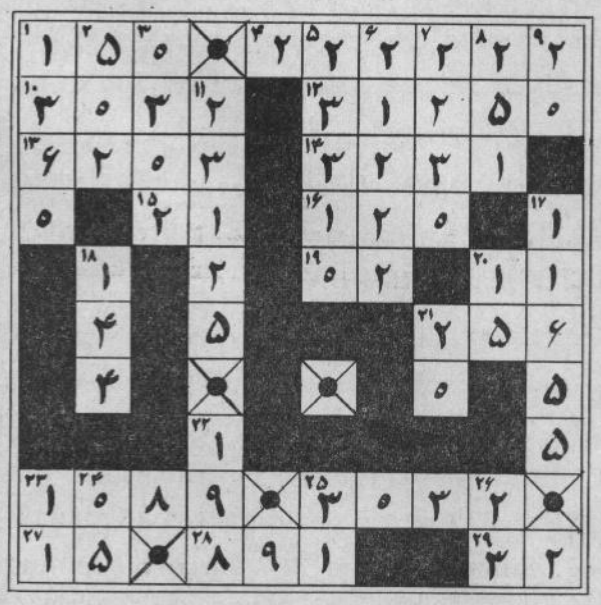
$$n(78+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7})$$

۸ـ جواب معادلهٔ $\log_7\log_2\log_{13}x=0$ ۹ـ عدد دو رقمی که‌برابراست بامجذورمجموع‌رقمهای‌خود. ۱۰ـ مقداردرجهٔزاویهٔ A ازمثلث حادالزوایای ABC وقتی که $tgA\,tgB\,tgC$ کمترین مقدارخود را داشته باشد. ۱۱ـ عدد به‌صورت $\overline{aabb}$ که اگر آن را بر۵ تقسیم کنیم باقیمانده b وخارج‌قسمت $\overline{bb0(b+1)}$ باشد. ۱۳ـ یك واحد بیشترازعدد ۸ افقی. ۱۴ـ توان‌نهم‌است. ۱۵ـ یکدهم عدد۱۳ افقی. ۱۶ـجذرعدد ۸ افقی. ۱۸ـ دەبرابر مجموع بزرگترین‌عددسه رقمی با رقمهای‌متفاوت باکوچکترین عدد چهار رقمی با رقمهای یکسان. ۲۱ـ عدد سه رقمی با رقمهای یکسان که مجموع رقمهایش‌مجذور کامل است. ۲۲ـ عدد $\overline{ab}$ ازرابطهٔ زیر:

$$(\overline{ab})^2=\overline{(2a)(2a)b}\ ,\ a>b$$

۲۴ـ همان عدد ۲۱ افقی. ۲۵ـ همان عدد ۱۴ افقی. ۲۶ـ مجموع عددهای ۹ افقی و۲۱ افقی. ۲۷ـ به صورت $\overline{ababa}$ است که $\overline{ab}$ همان عدد ۱ افقی است.

قائم: ۱ـ به صورت $\overline{aab}$ است که $\overline{ab}$ همان عدد ۱افقی است. ۲ـ ۱۴۴ واحد بیشتر از عدد ۱۱ افقی. ۴ـ متمم حسابی آن دوبرابر تفاضل رقمهایش است. ۵ـ متمم حسابی رقم دهگان خود می‌باشد. ۶ـ به صورت $\overline{abb}$ است که مجذورآن به صورت $\overline{cabb}$ است بقسمی که c نصف a است. ۷ـ ازنوشتن عدد ۲۱ افقی درسمت راست عدد ۲۵ قائم بدست می‌آید. ۱۰ـ تفاضل آن برعدد ۶ قائم برابراست با ۷ برابرخمس عدد ۲۵ قائم. ۱۲ـ کوچکترین عدد چهاررقمی با رقمهای متفاوت بقسمی که‌رقمهای سدگان و هزارگان آن متوالیند. ۱۳ـ دوبرابرخمس عدد ۲۵ قائم. ۱۶ـاگرعدد ۶ افقی به‌صورت $\overline{abc}$ باشداین عدد ۵برابر $\overline{bac}$ است. ۱۷ـ اگربا رقم یکانش جمع شود حاصل توان‌هفتم باشد. ۱۹ـ ۵ واحدکمترازعدد ۴ قائم. ۲۰ـ ۲ واحد بیشتراز عدد ۹ افقی. ۲۱ـ ۲۲ واحدکمتر ازعدد ۲۱ افقی. ۲۳ـ خمس عدد ۲۵ قائم. ۲۵ـ عددی دورقمی بارقمهای یکسان.



حل جدول‌شمارهٔ قبل

PROBLEMS & SOLUTIONS

Problem 127– If the quadratic equation $x^2+px+q=0$ has two real roots, they can be located graphically as follows. On a set of axes locate $A(0,1)$ and $B\left(\frac{-p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$. The circle will intersect the x–axes in two points whose abscissas are the roots of the given equation. Provet his. What happens if the roots are imainagry?

Solution: If (x,y) is any point on the circle described, then its distance from B is equal to the lenght of $\overline{AB}$. Therefore, by the distance formula:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(y-\frac{q+1}{2}\right)^2=\left(\frac{-p}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2$$

If, in this equation, y is set equal to zero, the resulting equation will give the abscissas of the intersection of the circle with the x–axis. If the indicated operations are performed, the resulting equation is $x^2+px+q=0$, which is the given equation.

Problem 128– Examine the following numerical relationships:

$$1^3=1^2-0^2$$
$$2^3=3^2-1^2$$
$$3^3=6^2-3^2$$
$$4^3=10^2-6^2$$

What generalization do they suggest? Prove it.

Solution: The suggested generalization is: $x^3=S^2-(S-x)^2$, where x is any positive integer, and S is the sum of the integers from 1 to x.

Since S is the sum af an arithmetic progression of x terms with first term 1 and difference 1, $S=\frac{x+x^2}{2}$. We must therefore prove:

$$x^3=\left(\frac{x+x^2}{2}\right)^2-\left(\frac{x+x^2}{2}-x\right)^2$$

The right side of this reduces to x^3, as required. The simplest way of evaluating it is to factor it as the difference of two squares.

Note: A formula to be found in many books on advanced algebra is the following:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

The proof of the required result can then be given in one step by observing that:

$$n^3=(1^3+2^3+\ldots+n^3)-[1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3]$$

Problem 129- In the product 9.HATBOX =4.BOXHAT, find the six–digit numbers, HATBOX and BOXHAT.

Solution: Let x and y represent the 3–digit numbers HAT and BOX respectively. Then 9. HATBOX=4BOXHAT becomes $9(1000x+y)=4(1000y+x)$. Therefore $8996x=3991y$, or dividing by 13, $692x=307$. Since 692 and 307 have no common factors, $x=307$ and $y=692$. Thus HATBOX =307,692 and BOXHAT=692,307.

قطعنامهٔ میز گرد پنجمین کنفرانس ریاضی کشور

(دنباله ازصفحهٔ ۲ جلد)

در مورد امتحان مواد ریاضی کـه باید فکری و استدلالی باشد موردتأیید قرار گرفت، وباتوجه‌به‌مجموع پیشنهادها نظرمیز گرد به‌شرح زیراعلام شد ومورد تصویب اعضای کنفرانس قرار گرفت.

۱ـ انتخاب دانشجو برای ورود به دانشگاهها ومؤسسات آموزش عالی‌باتوجه به‌نمره‌های کتبی امتحانات نهایی‌دبیرستانها انجام گیرد وبرای این منظور پیشنهاد می‌شود:

الف‌ـ در برگزاری امتحـانات نهائی دبیرستانها در تمام کشورچه ازلحاظ انتخاب سؤالها وچه ازلحاظ مراقبت درصحت جریان امتحانات دقت وتوجه بیشتری بعمل‌آید.

ب‌ـ اوراق امتحانی در مراکز محدودی بوسیلهٔ متخصصین مبرز تصحیح وبامراقبت ونظارت مؤثر وتعیین بارمهای دقیق ترتیبی اتخاذ شود که تصحیح اوراق درتمام کشور یکنواخت گردد.

ج‌ـ به دانش آموزانی که طبق ضوابط وزارت آموزش و پرورش به دریافت دیپلم متوسطه نایل می‌شوند کارنامه‌ای حاوی نمره‌های کتبی امتحانات نهائی‌داده شود تامؤسسات آموزش عالی باتوجه به‌این‌نمره‌ها وطبق‌ضوابط وشرایطی که خود تعیین‌می‌کنند دانشجویان مورداحتیاج خودرا ازبین‌داوطلبان انتخاب کنند.

۲ـ به‌شورای اجرائی‌انجمن ریاضی‌ایران توصیه می‌شود که بارعایت اصولی که درمادهٔ یك این قطعنامه مندرج است طرح تفصیلی‌تهیه وبه‌مقامات ذیربط تسلیم نماید.

ساعات کار ادارهٔ مجلهٔ یکان

همه روزه غیراز روزهـای تعطیل صبحها از ساعت ۹ تا ساعت ۱۲، عصرهاازساعت ۱۷ تاساعت ۱۹

یکان‌سال

ازشماره‌های مخصوص یکان سال فقط از

یکان سال ۱۳۵۱

و یکان سال۱۳۵۲

تعداد محدودی باقیمانده است که در ادارهٔ مجله‌بفروش می‌رسد

سایرشماره‌های مخصوص یکان سال‌که تاکنون چاپ شده است نایاب می‌باشند.

انتشارات یکان

۱ـ انتشاراتی که‌اکنون نایاب است:

مجموعهٔ علمی
شامل مقالات ریاضی، فیزیك وشیمی
حل‌مسائل‌ممتاز ریاضی ومطالب دیگر

سرگرمیهای جبر
ترجمهٔ : پرویزشهریاری

مقدمه‌ای بر تئوری‌مجموعه‌ها
تألیف:علی اصغرهومانی

تمرینهای ریاضیات مقدماتی
تألیف: استاد هشترودی

روش سادهٔ حل مسائل شیمی
ترجمهٔ : عطاءالله‌بزرگ‌نیا

۲ـ انتشاراتی که در شرف اتمام است و فقط در ادارهٔ مجله بفروش می‌رسد.

راهنمای ریاضیات متوسطه
تألیف : عبدالحسین مصحفی
چاپ چهارم : ۱۲ ریال

تستهای هوش
ترجمهٔ: باقرمظفرزاده
بها : ۶۰ریال

۳ـ انتشارات آمادهٔ فروش:

تستهای چندجوابی شیمی
ترجمهٔ : عطاءالله بزرگ‌نیا
بها : ۴۰ریال

معماهای ریاضی
ترجمهٔ : محمد رکنی قاجار
بها : با جلدشمیز ۷۵ ریال
با جلدزرکوب : ۱۰۰ریال

مسائلی ازحساب استدلالی
تألیف: محمودکاشانی

جلد اول	جلددوم	جلدسوم
۱۲ریال	۱۵ریال	۱۵ریال

مبادی
منطق وریاضی جدید
تألیف: غلامرضا عسجدی
بها:۲۴۰ریال

مشترکان یکان‌که به خرید انتشارات یکان با استفاده از تخفیف مایل باشند؛ آنان‌که ساکن تهران می‌باشندمستقیماً به دفتر مجله مراجعه فرمایند وآنان‌که در شهرستانها اقامت دارند می‌توانند وجه را به‌صورت نقدی یاتمبرباطل نشده یا چك‌بانکی ارسال دارند تا کتاب توسط پست برای ایشان فرستاده‌شود.