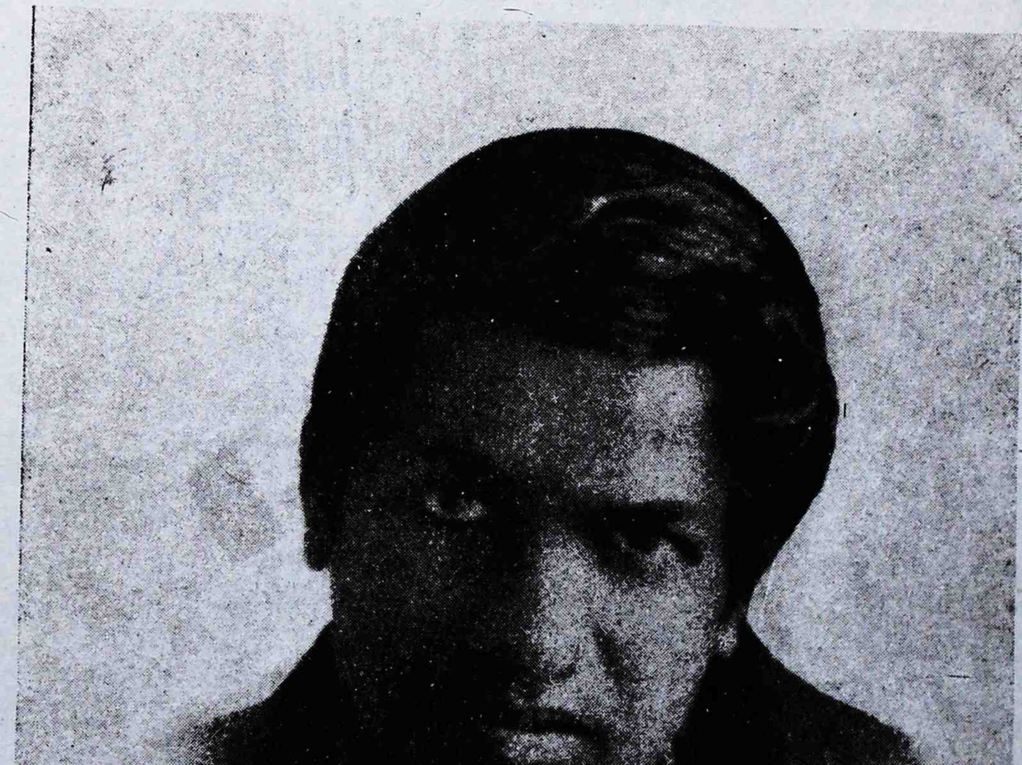
انجمن ریاضی ایران
IRANIAN MATHEMATICAL SOCIETY

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی



RAMANUJAN

شماره ۵ سال ۱۳۶۴

آبونمان

ازافراد ومؤسسات دعوت میشود که تقاضای آبونمان خود را مستقیماً به‌آدرس تهران، صندوق پستی ۴۱۸ ـ ۱۳۱۴۵ وحق اشتراك را بحسابجاری ۴۳۶۵ بانك سپه، شعبه دانشگاه تهران بنام انجمن ریاضی ایران واریز ورسید آنرا به همان‌آدرس ارسال فرمایند.

اعضاء انجمن ریاضی‌ایران یك نسخه ازهرشماره رابطوررایگان دریافت مینمایند.

تایپ فارسی : پروین پورحسینی، دانشگاه اصفهان

» لاتین : زهرا صدرعاملی، دانشگاه صنعتی اصفهان

افست وصحافی : دانشگاه اصفهان

تیراژ : ۱۰۰۰ جلد

قیمت : ۲۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

شماره دیگری از مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی تقدیم علاقمندان میگردد.

یکی از مشکلاتی که در تهیه و انتشار این مجله همیشه وجود داشته مسئله چاپ و چاپخانه بوده است تاکنون. دانشگاه صنعتی اصفهان همکاری های لازم را در جهت چاپ این مجله با انجمن ریاضی ایران نموده است. از این به بعد براساس مقاوله نامه بین انجمن ریاضی ایران و دانشگاه اصفهان، نشریه فرهنگ و اندیشه در چاپخانه این دانشگاه به چاپ خواهد رسید. در عین حال همکاری دانشگاه صنعتی اصفهان در جهت تامین مواد اولیه قابل تقدیر بوده و امید است کماکان ادامه داشته باشد.

هیئت تحریریه وظیفه خود میداند از هیئت رئیسه محترم هردو دانشگاه که نهایت لطف و همکاری را در کمک به انتشار این نشریه نموده اند تشکر و سپاسگزاری نماید.

ومن الله توفیق

رمنـــوجـــــان [1]

(۱۸۸۷ - ۱۹۲۰)

رمنوجان [2] ، نابغهٔ ریاضی هند ، در۲۲ دسامبر۱۸۸۷ دریک خانواده فقیرولی آبرومند برهمن درارود [3] واقع درنزدیکی شهرکومباکونام [4] درایالت تنجور [5] مدرس [6] متولدشد.

او یک هندی نیمه تحصیلکرده بودکه حتی موفق به گذراندن اولین امتحان دانشگاهی هندهم نشد. وی درحالی که ازآنچه دردنیای مدرن ریاضی می‌گذشت کاملا" ناآگاه بود، بیشترعمرش رامصروف مسائل ریاضی نمود.گرچه آثارریاضی منتشرشدهٔ رمنوجان کتابی درحدود۴۰۰ صفحه راتشکیل می‌دهد، ولی نوشته‌های منتشرنشده ونامنظم اوکه گاه شامل کشفیات تکراری وناقص هم می شودبسیارزیادتراز آثارمنتشر شدهٔ اوست.

رمنوجان درهفت سالگی به مدرسه‌ای واقع درکومباکونام فرستاده شدودرآنجا ۹ سال تمام به تحصیل پرداخت. استعدادونبوغ خاص اوقبل ازده سالگی شکوفاشد. به طورمثال به محض شروع به یادگیری مثلثات، قضایای اولرپیرامون سینوسهاوکسینوسها (رابطهٔ بین توابع نمایی و دایره‌ای) رابدون آنکه ازاثباتشان اطلاعی داشته باشدازنوکشف کردوپس

۱- این مقاله توسط آقای علی رجالی گردآوری وبرای این نشریه ترجمه شده است.

2.Sriniviasa Ramanujan Aiyangar

3.Erode

4.Kumbakonam

5.Tanjore

6.Madras

ازاینکه فهمیدقبلا" اثبات شده‌اند، بسیار نا راحت شد.

رمنوجان تا سن ۱۶ سالگی، هرگز یک کتاب ریاضی غیرکلاسی ندیده بود برای اولین بار دوجلد از کتابهای کار[۱]، به نام خلاصه‌ای از نتایج مقدماتی در ریاضیات محض وکاربردی را که یکی از دوستانش از کتابخانه کالج دولتی کومباکونام برایش به عاریت گرفته بود مشاهده کرد و تحت تاثیر آن قرار گرفت. مطالعهٔ این کتاب نبوغ او را شکوفاتر ساخت. رمنوجان سعی می‌کرد تمام فرمولهای کتاب را ثابت کند و با توجه به عدم دسترسی او به سایر منابع علمی اثبات هریک از این فرمولها خود یک کار تحقیقی به حساب می‌آمد رمنوجان معمولا" نتایجی را یادداشت می‌کرد و به سرعت به اثبات‌شان می‌پرداخت گاهی هم که نمی‌توانست اثبات دقیقی ارائه کند، همان اثبات ناقص را می‌نوشت.

در دسامبر ۱۹۰۳ در امتحان ورودی دانشگاه مدرس قبول و در ژانویه سال بعد وارد کلاس اول کالج دولتی کومباکونام شد و از بورس سابرامانیام[۲] نیز استفاده نمود. اما پس از آن، یک سری حوادث ناگوار برایش اتفاق افتاد. در آن زمان او فقط به ریاضی می‌اندیشید و به دروس کلاسیک توجهی نداشت و لذا اجازه رفتن به کلاس بالاتر را نیافت و در نتیجه بورس او هم قطع شد. با این پیشامد و به توصیهٔ یکی از دوستانش به شهر تلوگو[۳] رفت ولی پس از مدتی به کومباکونام بازگشت و دومرتبه به کالج رفت. بالاخره در سال ۱۹۰۶ به کالج پاشایاپا[۴] واقع در مدرس رفت ولی به دلیل بیماری به کومباکونام مراجعت نمود. بازدر سال ۱۹۰۷ به عنوان داوطلب خصوصی در امتحانات کالج شرکت کرد و باز رد شد.

رمنوجان در سال ۱۹۰۹ ازدواج کرد و لذا برای تامین معاش مجبور شد به جستجوی شغلی بپردازد. در سال ۱۹۱۰ با افرادسرشناسی چون راماسوامی ایار[۵]، شوایار[۶] و راماشلندرا رائو[۷] آشنا شد. اما تلاشهای آنان نیز جهت یافتن کار مناسبی برای او به دلیل عدم موفقیت در تحصیل، تا مدتی، بی نتیجه ماند. تا اینکه در سال ۱۹۱۲ در اداره بنادر مدرس به

۱- Carr,G.Shoobridge　۲- Subrahmanyam

۳- Telugu Country　۴- Pachaiyappa

۵- V.Ramaswami Aiyar　۶- P.V.Seshue Aiyar

۷- R.Ramachandra Rao

عنوان یک کارمندساده باحقوقی اندک به کارگماشته شد.

اولین مقاله معتبررمنوجان درسال ۱۹۱۱ به‌چاپ رسید(27) وازسال ۱۹۱۲ نبوغ استثنائیش شناخته شد.(متاسفانه هندوستان ومردم آن نتوانستندوارابه خوبی‌درک کنندوامکاناتی جهت شکوفایی بیشترنبوغ خارق العاده‌اش دراختیارش بگذارند.) دراین سال، سرفرانسیس اسپرنیگ (۱) رئیس اداره بنادرمدرس وسرگیلبرواکر (۲) بورس مخصوصی دراختیاررمنوجان گذاشتند. در۱۶ ژانویه ۱۹۱۳، برای اولین بار، براساس توصیه آقای شوایارودیگران، رمنوجان مکاتبات خودرابا پرفسورهاردی (۳)، عضوکالج ترینیتی، کمبریج (۴) آغاز کرد.

رمنوجان دراولین نامه خودبه هاردی باتواضع بسیارخاصی‌می‌نویسد: من هیچ گونه تحصیلات دانشگاهی ندارم ولی پس ازترک مدرسه، فرصتهای اضافی خودراصرف ریاضی کرده‌ام. درارابطه باسریهای واگرامطالعاتی داشته واخیرا" درمقاله‌ای ازشماخواندم که برای $\pi(x)$، تعداداعداد اول نابیشترازعددمفروض x، هنوزعبارت مشخصی پیدانشده‌است. من عبارتی راپیداکرده‌ام که به نتیجهٔ واقعی باخطایی قابل اغماض نزدیک است. اگرشمافکرمی‌کنیدکه ارزشی دارد، علاقمندم قضایایم رابه‌چاپ برسانم و...

پس ازدریافت جواب مناسب، دردومین نامه خود، رمنوجان ضمن تشکر، ازهاردی می خواهدکه توصیه نامه‌ای برایش بنویسدتا شایدبتواند ازدانشگاه یادولت بورسی دریافت کند. وی دراین نامه می نویسد"برای **حفاظت ازاستعدادم، به غذانیازمندم واین درحال حاضراولین هدف من است**." هاردی پس ازدریافت این نامه،به سرپرست دانشجویان هندی مقیم انگلستان نامه می نویسدواظهارمی داردکه ممکن است رمنوجان یکی از ریاضیدانان بزرگ باشدوازومی خواهددرباره امکان تحصیل اودرکمبریج مطالعه کند.نظرهاردی به دبیرکمیته مشورتی دانشجویی درمدرس ارجاع می شودوازرمنوجان می خواهدکه به انگلستان برود. پس ازاینکه رمنوجان به دلیل تعصبات فرقه‌ای ازاین مسافرت امتناع می ورزد،دبیر کمیته مزبور، موضوع رابه اطلاع دانشگاه مدرس می رساند.ازطرف دیگر

۱– Sir Francis Spring

۲– Sir Gilber Walker

۳– Prifessor Godfrey Harold Hardy

۴– Trinity collge,Cambridge

درفوریه ۱۹۱۳ ، دکترواکر[1] مدیرکل رصدخانه سیملا[2] وعضوسابق کالج ترینتی که به مدرس رفته بود، پس ازدریافت برخی ازتحقیقات رمنوجان توسط سرفرانسیس اسپرنیگ ، طی نامه‌ای ضمن ارج نهادن به کارهای رمنوجان ، ازدانشگاه مدرس می خواهدبه رمنوجان اجازه داده شودکه چند سالی رادرآن دانشگاه به طورتمام‌وقت به تحقیق درمسائل ریاضی بپردازد.

بهرحال ، دانشگاه مدرس بورسی برای دوسال ، ازاول ماه مه ۱۹۱۳ دراختیارا و قرارمی دهدوازآن تاریخ ، رمنوجان یک ریاضیدان حرفه‌ای می شود. ۳ گزارش ازکارهای رمنوجان در۵ اوت ۱۹۱۳، ۷ نوامبر ۱۹۱۳و۹ مارس ۱۹۱۴ به دانشگاه‌مدرس ارائه شده است. متاسفانه اصل این مقالات دردانشگاه مدرس مفقودشده‌اند، ولی درسال ۱۹۲۷ ، ساتاگوپان[3] نسخه‌ای خطی ازاین گزارشهارا تهیه می کندوبرای هاردی می فرستد. این نسخه هم اکنون درکتابخانه کالج ترینیتی موجوداست. درهمان کتابخانه نسخهٔ دیگری هم ازاین گزارشها وجوددارد‌که توسط واتسون[4] تهیه شده‌است. گرچه این گزارشها به چاپ نرسیده‌اندولی هاردی مطالب آنها رااساس بخشی ازکتاب خود [13] قرارداده است. خلاصه آنها نیز توسط برنت [8] به‌چاپ رسیده است.

(قضیه اصلی اولین گزارش عبارت است از:

اگردرهمسایگی $x=0$ ،
$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi(k)(-x)^k}{k}$$
آنگاه

$$I\equiv\int_0^\infty x^n F(x)dx \equiv \Gamma(n)\phi(-n) \quad *$$

که‌درآن $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ تابع گاما است.

وبه عکس اگرمقدار I برحسب فرمول * داده شده باشد، ضرایب مک‌لورن[5] تابع F، قابل محاسبه‌اند.

دردومین گزارش ، رمنوجان به بحث بیشتری راجع به قضیه اصلی گزارش اول پرداخته وبطورمثال برای e^{ax} بسط غیرمعمولی

۱- Dr.G.T.Walker ۲- Simla

۳- T.A.Satagopan ۴- G.N.Watson

۵- Maclaurin Coefficients

زیر را ارائه می کند :

$$e^{ax} = 1 + \frac{ae^{-bx}\sin(cx)}{c} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{k}\left(e^{-bx}\frac{\sin(cx)}{c}\right)^k$$

که درآن برای $k>2$,

$$a(a+kb)\prod_{j=1}^{n-1}\{(a+kb)^2+(2jc)^2\} \quad ,k=2n$$

$$a\prod_{j=1}^{n-1}\{(a+kb)^2+((2j-1)c)^2\} \quad , k=2n-1$$

دراینجا a ، b و c اعدادحقیقی هستندو $b,c>0$ $0< x < \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{c}{b}$

دراین گزارش بسطهای دیگری نیز وجوددارد.

درسومین گزارش ، رمنوجان علاوه بربحث پیرامون قضیهٔ اصلی گزارش اول ، شرحی هم دررابطه باترکیب معمولی توابع ودرجه کسری توابع(۱) نوشته است . دراین گزارش ، وی مشتقات کسری(۲) را به فرم :

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x)$$

برای اعدادصحیح وغیرمنفی ، n ، موردمطالعه قرارداده ونشان داده است که :

$$\int_0^{\infty} x^n f^{(r)}(a-x)dx = \Gamma(x)\ f^{(r-n)}(a)$$

برای $n>0$. رمنوجان دراین مورداشاره کرده است که این فرمول به عنوان تعریف مشتقات کسری هم می توندبکار رود.

البته بسیاری ازاثباتهای موجوددراین گزارشها دقیق نیستند. برنت 8 بااشاره به منابع دیگر، چگونگی اثبات دقیق قضایای موجود دراین گزارشها رابااستفاده ازایده‌های رمنوجان تشریح کرده است.

درهمین حال ، هاردی تلاش خودرابرای فایق آمدن برتعصبات فرقه‌ای رمنوجان ادامه می دهدوازیکی ازهمکارانش به نام نویل (۳) که جهت تدریس به مدرس رفته بودمی خواهدرمنوجان راراضی کند به انگلستان

۱- The fractional order of functions

۲- Fractional Differentiations

۳- Neville

برود. دانشگاه مدرس هم یک بورس دوساله برای مسافرت رمنوجان به انگلستان و اقامتش در آنجا، دراختیارش می گذارد. رمنوجان در ۱۷ مارس ۱۹۱۴ عازم انگلستان می شود و در آوریل همان سال به محض ورود به انگلستان به کالج ترنیتی پذیرفته می شود. این کالج هم قسمتی از هزینه زندگی رمنوجان را تقبل می کند.

(درحقیقت هاردی اولین کسی بود که کارهای رمنوجان را به خوبی درک و به بیانی او را کشف کرد. البته، به قول هاردی، قبلا" رمنوجان خودش را با کارهایش شناسانده بود ولی تشویق و کمک هاردی برای رمنوجان اهمیت خاصی داشت. هاردی حدود سه سال، روزی چندساعت با رمنوجان کار کرد و عقیده داشت که بیش از آن که مدیون دیگران باشد، مدیون رمنوجان است.) هاردی ولیتلوود (۱) به رمنوجان کمک می کردند تا مقالاتش را به چاپ برسانند. کارها به خوبی می گذشت، تا اینکه متاسفانه در پائیز ۱۹۱۷، رمنوجان به یک بیماری غیرقابل علاج گرفتار شد. در فوریه ۱۹۱۸ به عنوان اولین هندی به عضویت در انجمن سلطنتی لندن (۲) انتخاب شد. با بدست آوردن این افتخار علمی، بدون توجه به بیماری، مجددا" به کار برگشت و بعضی از قضایای زیبا و جالبش را اثبات کرد. در اکتبر همان سال نیز، به عضویت در کالج ترینتی در آمد. هاردی ضمن اعلام این خبر مهم به دانشگاه مدرس، به اهمیت مقام علمی رمنوجان اشاره و اظهار امیدواری کرد که هندوستان هم او را به عنوان یک ذخیره علمی بستاید. لذا دانشگاه مدرس هم بورس او را به مدت ۵ سال دیگر تمدید و به او کرسی استادی دانشگاه مدرس را پیشنهاد کرد.

سرانجام، با توجه به بهبودی نسبی و به دلیل عدم تناسب هوای انگلستان با بیماری او، به هندوستان مراجعت کرد. از زمان بازگشت تحت مراقبتهای دقیق پزشکی قرار گرفت و کلیه امکانات برای او فراهم آمد. ثروتمندان هندوستان مخارج او را تامین و حتی به او خانه شخصی اهدا کردند ولی همهٔ اینها بی فایده بود و این دانشمند جوان در ۳۲ سالگی، ۲۶ آوریل ۱۹۲۰ در چت پوت (۳) در حوالی مدرس بدرود حیات گفت.

آخرین نامه اش به هاردی در ۱۲ ژانویه ۱۹۲۰ حاوی معرفی توابعی

۱- Littlewood ۲- The Royal Society of London

۳- Chet put

بنام موک‌آی(۱) است.[17]

گرچه فقدان رمنوجان ضایعه‌ای بزرگ به حساب می‌آمدولی فاجعه مهم درباره او مرگ زودرسش نیست ، بلکه ۵ سال عمرگرانبهای اوست که به ناراحتی وبطالت گذشت . اگرازاین فرصت هم می توانست استفاده کند وبه قول هاردی اجل نیز امانش می داد، چه ریاضیدان بزرگتری که نمی توانست باشد.

آثارمنتشرشده رمنوجان در۳ بخش به شرح زیرمی باشد:

الف- مقالاتی که دراروپابه چاپ رسیده است:

(1)"Some definite integrals" ,Messenger of Mathematics,Vol.44 (1914),PP.10-18.

(2)"Some definite integrals connected with Gauss's sums",ibid., PP.75-85.

(3)"Modular equations and approximations to π" ,Quarterly Journal of Mathematics,Vol.45(1914),PP.350-372.

(4)"New expressions for Riemann's functions ξ (s)and (t)",ibid., Vol.46(1915),PP.253-260.

(5)"On certain infinite series",Messenger of Mathematics,Vol.45 (1916),PP.11-15.

(6)"Summation of a certain series",ibid.,PP.157-160.

(7)"Highly composite unmbers",Proc.London Math.Soc.,Ser.2,Vol.14 (1915)PP.347-409.

(8)"Some formulae in the analytic theory of numbers",Messenger of Mathematics,Vol.45(1916),PP.81-84.

(9)"On certain arithmetical function",Trans.Cambridge Phil.Soc., Vol.22(1916)No.9,PP.159-184.

(10)" A series for Euler's constant γ ",Messenger of Mathematics, Vol.46(1917)PP.73-80.

۱- Mock I-functions

(11) "On the expression of a number in the form $ax^2+by^2+cx^2+dt^2$" Proc.Cambridg Phil.Soc.,Vol.19(1917),PP.11-21.

(12) "Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n", Comptes Rendus 2 Jan.1917.

(13) "Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types",Proc London Math.Soc.,Ser.2,Vol.16(1917),PP. 112-132.

(14) "The normal number of prime factors of a number n",Quarterly Journal Mathematics,Vol.48(1917),PP.76-92.

(15) "Asymptotic formulae in Combinatory Analysis",Proc.London Math.Soc .,Ser.2 Vol.17(1918),PP-115.

(16) "On the coefficients in the expansions of certain modular functions",Proc.Roy Soc.(A),Vol.95(1918),PP.144-155.

(17) "On certain trigonometrical sums and their applications in the theory numbers",Trans.Cambridge Phil.Soc.,Vol.22,No.13 (1918),PP.259-276.

(18) "Some properties of p(n),the mumber of partitions of n", Proc.Cambridge Phil Soc.,Vol.19(1919),PP.207-210.

(19) "Proof of certain identities in Combinatory Analysis",ibid., PP.214-216.

(20) " A class of definite integrals",Quarterly Journal of Mathematics,Vol.48(1920)PP.294-310.

(21) "Congruence Properties of Partitions",Math.Zeitschrift,Vol.9 (1921),PP.147-153.

ب ـ مقالاتی که در سمینارها توسط رمنوجان ارائه شده‌اند :

(22) "Proof that almost all numbers n are composed of about log log n prime factors", 14 Dec. 1916.

(23) "Asymptotic formulae in Combinatory Analysis", I March 1917.

(24) "Some definite integrals", 17 Jan. 1918.

(25) "Congruence properties of partitions", 13 March 1919.

(26) "Algebraic relations between certain infinite products", 13 March 1919.

ج ـ مقالاتی که در مجله انجمن ریاضی هندبه چاپ رسیده است :

Journal of the Indian Mathematical Society.

Articles and Notes.

(27) "Some properties of Bernoulli's numbers", Vol. 3 (1911), PP. 219-234.

(28) "One Q. 330 of Prof. Sanjana", Vol. 4 (1912), PP. 59-61.

(29) " A set of equations", Vol. 4 (1912), PP. 94-96.

(30) "Irregular numbers", Vol. 5 (1913), PP. 105-106.

(31) "Squaring the circle", Vol. 5 (1913), P. 132.

(32) "On the integral $\int_0^x \frac{\tan^{-1} t}{t} dt$", Vol. 7 (1915), PP. 93-96.

(33) "On the divisors of a number", Vol. 7 (1915), PP. 131-133.

(34) "The sum of the square roots of the first n natural numbers", Vol. 7 (1915), PP. 173-175.

(35) "On the product $\prod \left[1+ \frac{x^2}{(a+nd)^2} \right]$ ", Vol. 7 (1915), PP. 209-211.

(36) "Some definite integrals", Vol. 11 (1919), PP. 81-87.

(37) "A Proof of Bertrand's postulate", Vol. 11 (1919), PP. 181-182.

(38) (Communicated by S. Narayana Aiyar), Vol. 3 (1911), P. 60.

درخاتمه بجاست ازآقای دکترمهدی بهزاد جهت تصحیح دقیق مقاله و ازآقای دکتررحیم زارع نهندی به خاطرمعرفی مقاله برنت سپاسگزاری شود.

بعضی ازمنابع ومآخذ درموردکارهای رمنوجان

1 G.E.Andrews,An Introduction to Ramanujan's "Lost" notebook, Amer.Math.Monthly,86(1979)89-108.

2 R. Askey, Ramanujan's extensions of the gamma and beta functions,Amer.Math.Monthly,87(1980)346-359.

3 B.C.Berndt, "Chapter 8 of Ramanujan's second notebook" J.reine angew.Math.,338(1983)1-55.

4 B.C.Berndt, "Chapter 10 of Ramanujan's second notebook" J. Indian Math.Soc.,(to appear)

5 B.C.Berndt, "Chapter 11 of Ramanujan's second notebook," Bull.London Math.Soc.,15(1983)273-320.

6 B.C.Berndt,Ramanujan's note books,Math Mag.,51(1978)147-164.

7 B.C.Berndt,Ramanujan's quarterly reports,Bull.London Math. Soc.,(to appear)

8 B.C.Berndt,The quarterly report of S.Ramanjan.Amer.Math. Monthly,90(1983)505-516.

9 B.C.Berndt,R.J.Evans and B.M.Wilson "Chapter 3 of Ramanujan's second notebook" Adv.in Math.,(to appear).

10 B.C.Berndt,and B.M.Wilson,"Chapter 4 of Ramanujan's second notebook"Proc.Royal Soc.Edinburgh,89A(1981)87-109.

11 J.A.Ewell,Aformula for Ramanujan's taw fumction.Proc.Amer. Math.Soc.,91(1984)34-40.

12 G.H.Hardy, "A chapter from Ramanujan's note-book" Proc. Cambridge Philos. Soc., 21(1923) 492-503.

13 G.H.Hardy, Ramanujan (Chelsea, New York, 1927).

14 G.H.Hardy, The Indian Mathematician Ramanujan, Amer. Math. Monthly, 44(1937) 137-155.

15 G.H.Hardy, The Mathematical Work of Ramanujan, Lectures, The Institute for Advanced Study, 1936.

16 K.R.Johnson, A Result for the other variable of Ramanujan's Sum, Elem. Math., 38(1983) 122-124.

17 S.Ramanujan,collected papers(chelsea,New York,1962).

18 S.Ramanujan,Note books,2volumes (Tata Institute of Fundamental Research,Bombay,1957).

19 K.G.Ramanathan,The unpublished manuscripts of Srinivasa Ramanujan,Current Sci,50(1981)203-210.

20 R.A.Rankin,Ramanujan's manuscripts and note books,Bull. London Math.Soc.,14(1982)81-97.

21 G.N.Watson,Ramanujan's notebooks,J.London Math.Soc.,6(1931) 137-153.

اثبات قضیهٔ اعداد اول فرما (با استفاده از فیزیک)

نوشتهٔ : اچ.گت فرند و دبلیو.آ. لیتل

ترجمهٔ : علی‌اکبر بابائی، بخش فیزیک
دانشگاه صنعتی اصفهان

(۲)

اعداد اول، به دلیل اینکه پایه یا نمایش اعداد مرکب را تشکیل می‌دهند، نقشی کلیدی در نظریهٔ اعداد به عهده دارند. در این مقاله نشان می‌دهیم که بین تجزیهٔ اعداد صحیح به اعداد اول و خواص تقارنی پیکربندیهای سیستمهای آیزینگ ـ اسپین[۳] رابطه‌ای وجود دارد. این رابطه، تعبیر "فیزیکی" خاصی از اعداد اول را مطرح می‌کند که یقینا" مورد توجه فیزیکدانان آشنا با استدلالهای تقارنی قرار خواهد گرفت.

یکی از معروفترین قضیه‌های بخش‌پذیری در نظریهٔ اعداد که نقش مهمی را در تکامل آن به عهده دارد، قضیهٔ اعداد اول فرما است [به ازای هر عدد صحیح مثبت a و هر عدد اول p، که a مضربی از p نباشد، عدد $a^{p-1}-1$ بر p بخش‌پذیر است، یا به صورت نماد فشرده، $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$]. اثبات این قضیه، که معمولا" در کتابهای درسی نظریهٔ اعداد داده می‌شود، بر پایهٔ حساب همنهشتی استوار است[۴]. در این مقاله اثباتی از قضیهٔ فرما را عرضه می‌کنیم که مبتنی بر خواص تقارنی پیکربندیهای آیزینگ ـ اسپین یک بعدی است. برای روشن شدن هر چه بیشتر مطلب، اثبات در سه مرحله بیان می‌شود.

ابتدا ثابت می‌کنیم که به ازای هر عدد اول p ، 2^p-2 بر p بخش پذیر است. حلقه‌ای با p جایگاه را درنظر می‌گیریم و به هرجایگاه i ، یک متغیر آیزینگ ـ اسپین $s_i=\pm 1$ رانسبت می‌دهیم. عملگرانتقال T راطوری تعریف می‌کنیم که وقتی بر پیکربندی مفروضی اثر می‌کند، همهٔ متغیرهای اسپین آنرا یک جایگاه (برای مثال، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) به جلو می‌راند. اکنون همهٔ پیکربندیها را چنان به رده‌هایی تقسیم می‌کنیم که اگر برای یک عدد صحیح n داشته باشیم $\beta = T^n \alpha$ ، دو پیکربندی α و β در یک رده باشند. همهٔ پیکربندیهای با اسپین "بالا" یا اسپین "پایین"، هم رده هستند. واضح است که به ازای هر α ، $\alpha = T^p \alpha$ ؛ زیرا T^p با یک دوران کامل متناظر است. ادعا می‌کنیم که وقتی p اول باشد، به ازای هر α ، غیر از دوپیکربندی بدیهی ، $\alpha \neq T^n \alpha$ هرگاه $n<p$. با قبول این ادعا، هرپیکربندی به رده‌ای از p عنصر مجزا تعلق می‌گیرد، و بنابراین تعداد کل پیکربندیها منهای دو پیکربندی بدیهی ، بر p بخش‌پذیر است. روشن است که تنها وقتی $\alpha = T^n \alpha$ بر قرار است که پیکربندی دارای تعداد صحیحی از زیر دوره تناوبهای به طول n باشد، و به ازای $n<p$ این خود ایجاب می‌کندکه n عاملی از p باشد. این حکم برای عدد اول p ممکن نیست، مگر آنکه $n=1$ ، که در این صورت دو پیکربندی بدیهی حاصل می‌شوند.

اول بودن p به این معناست که هیچ پیکربندی (غیر بدیهی) تقارنی بیش از دوران کامل ندارد. به بیان دیگر این بدان مفهوم است که گروه آبلی دورانهای به اندازهٔ زاویهٔ $2\pi/p$ دارای زیر گروهی نیست.

توجه می‌کنیم که 2^p-2 ، که بر p بخش‌پذیر است، باید بر $2p$ نیز بخش‌پذیر باشد، زیرا 2^p-2 زوج و p فرد است[(5)]. بدین ترتیب، $2^{p-1}-1$ بر p بخش‌پذیر است. بااستفاده از پیکربندیهای آیزینگ ـ اسپین ، می‌توان مستقیما" به این نتیجه رسید. حال عملگر I راچنان تعریف می‌کنیم که وقتی بر پیکربندی مفروضی عمل کند، علامت همهٔ متغیرهای اسپین آنرا وارون سازد. این بار نیز، پیکربندیها رابه نحوی به رده‌هایی تقسیم می‌کنیم که، اگر برای یک عدد صحیح n داشته باشیم $\beta=(TI)^n\alpha$ ، دو پیکربندی α و β در یک رده باشند. اما به ازای

هر α داریم $\alpha = (TI)^{2p}\alpha$، زیرا p که عددی اول است، باید فردباشد و از ینرو تک‌دوران تعداد فردی از وارونی را شامل است. تنها پس از دو بار دوران پیاپی، پیکربندی به خود باز می‌گردد. عینا" مانند قبل، می‌توان نتیجه گرفت‌که هر پیکربندی (بجز دو پیکربندی بدیهی که رده‌ای از دو عنصر راتشکیل می‌دهند) به رده‌ای مشتمل بر $2p$ عنصر مجزا تعلق دارد.

سرانجام، بررسیهای بالا که در مورد $a = 2$ بودند را برای هر a اختیاری تعمیم می‌دهیم که در این صورت شکل نرمال قضیهٔ فرماحاصل می‌شود. اینک اسپین j (باشرط $a = 2j + 1$) رادرنظر می‌گیریم، که هر متغیر "آیزینگ" s_i یکی از $2j + 1$ تصویر اسپین ممکن، یعنی ($-j, -j+1, \ldots, j$) را می‌پذیرد. تعداد a^p پیکربندی وجود داردکه از این تعداد باید a پیکربندی (که عملگر انتقال T در آنها اثر نمی‌گذارد) را کم کنیم. از این بحث‌بی درنگ‌نتیجه می‌شود که به ازای هر a، $a^p - a$ بر p بخش‌پذیر است. برای تعمیم مرحلهٔ دوم، عملگر I رابدین نحو تعریف می‌کنیم که اثر آن بر هر پیکربندی مفروض متغیرهای s_i را به اندازهٔ یک افزایش‌دهد و وقتی $s_i = j$ به اندازهٔ ۱ "افزایش" یابد، به $s_i = -j$ تغییر داده شود. واضح است‌که به ازای هر α، داریم $\alpha = (TI)^{ap}\alpha$. برای اطمینان از این که هیچ $(TI)^n$ درازای $n < ap$ (بجز برای پیکربندیهای بدیهی) چنین عمل نمی‌کند، لازم است داشته باشیم که a مضربی از p نیست. چرا که در غیر این صورت، به ازای هر α، خواهیم داشت $\alpha = (TI)^a\alpha$. بنابراین اگر a مضربی از p نباشد، هر پیکربندی به رده‌ای از ap عنصر مجزا تعلق دارد به طوری که $(a^p - a)/ap$ یا $(a^{n-1} - 1)/p$ عدد صحیحی است. این مطلب اثبات قضیهٔ فرما را کامل می‌کند.

توجه کنید این شرط که a مضربی از p نباشد، امکان تقارنی از پیکربندیهای بیشتر از حاصل ضرب دورانهای کامل مواضع جایگاهی و متغیرهای جایگاهی را مستثنی می‌کند.

جنبهٔ بدیع این روش اثبات در آن است‌که امکان می‌دهد تا اثبات فرما برای اعداد اول را به سادگی به حکمی در مورد اعداد مرکب تعمیم دهیم. به عنوان مثال، اگر m حاصل ضرب دو عدد اول متفاوت p_1 و p_2

باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که

$$(a^{m-1}-1)-(a^{p_1-1}-1)-(a^{p_2-1}-1)$$

بر m بخش‌پذیراست: عباراتی که از $(a^{m-1}-1)$ کم می‌شوند نمایشگر تعداد پیکربندیهایی هستند که در رده‌هایی کوچکتر از m و باساختار دوره‌ای قرار دارند. این نتیجه را می‌توان در مورد اعدادمرکب پیچیده ترنیز تعمیم داد. عدد $m=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$ را که در آن p_i ها اعداداول و a_i ها اعداد صحیحی هستندرا درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم a نسبت‌به m اول باشد. آنگاه ثابت می‌کنیم که

$$[(a^{m-1}-1)-\Sigma_i(a^{(m/p_i-1)}-1)+\Sigma_{ij}(a^{(m/p_ip_j-1)}-1)\dots$$

$$\dots+(-1)^k(a^{(m/p_1p_2\dots p_k-1)}-1)]$$

بر m بخش‌پذیر است. این حکم تعمیم قضیهٔ فرما به اعداد مرکب‌است. "اثبات" این حالت‌نیز مانند اثبات‌قبل است. جملهٔ اول، مجموع تمامی پیکر بندیها منهای تعداد پیکربندیهایی است‌که ازنظر انتقال پایا هستند. جملهٔ دوم، تعداد پیکربندیهای دوره‌ای بادورهٔ تناوب (m/p_i) راکسر می‌کند، ولی در انجام این کار، پیکربندیهای بادورهٔ تناوب (m/p_ip_j) را دوبار کم کرده‌ایم، زیرا این دورهٔ تناوبی است از هر دو پیکربندی بادوره تناوبهای (m/p_i) و (m/p_j). ازینرو، برای تصحیح مجموع بالا باید یک‌بار دیگر آنها را اضافه کنیم. اما، درواقع این افزودن بیش‌از حد بوده است، زیرا پیکربندی بادورهٔ تناوب $(m/p_ip_jp_k)$ ابتدا سه بار [در پیکربندیهای (m/p_i)، (m/p_j)، و (m/p_k)] تفریق، و سپس سه بار [در پیکربندیهای (m/p_ip_j)، (m/p_jp_k)، و (m/p_ip_k)] افزوده شده است. بنابراین یک‌باردیگر باید آنرا کسر کنیم، و بهمین ترتیب. سرانجام به عبارت‌نشان داده شده دست می‌یابیم که نمایشگر تعداد پیکربندیهایی است‌که‌عاری ازهمهٔ زیر دوره تناوبهای بالا است. پیکربندیهای باقیماندهٔ اخیر را می‌توان به رده‌هایی، هر یک با m عضو، دسته‌بندی کرد و بدین ترتیب، این عدد باید بر m بخش‌پذیر باشد.

در خاتمه ، به تشابه جالبی بین اعداد اول و فقدان تقـــــارن در برخی از دستگاه های فیزیکی پی برده‌ایم .

---

(1) H.Gutfreund and W.A.Little, *Physicst's proof of Fermat's Theorem of Primes*, Am.J.Phys. 50(3), March 1982.

(۲) اشاره به قضیهٔ اساسی حساب است .

(3) Ising- spin.

(4) C.S.Ogilvy and J.T.Anderson, *Excursions in Number Theory*, Oxford University , New York , 1980.

(۵) مولف حالت $p=2$ را مستثنی نموده که درمورد این اشکال با ایشـــان مکاتبه شده است .

نظریه رکوردها و کاربردهای آن *

نوشته : غلامرضا درگاهی نوبری
گروه ریاضی، دانشگاه علم وصنعت ایران

خلاصه : با اینکه کلمه رکورد در موارد مختلفی بکار گرفته می شود اما در اکثر مواقع شنونده را به یاد مسابقات ورزشی می اندازد. رکورد، رکوردشکن ورکوردشکنی مختص ورزش و ورزشکاران نیست . هرجاکه مشاهدات یا وقایع و پیشامدها دارای تسلسل باشند رکورد معنی پیدا کرده و می توانند مورد مطالعه قرار گیرد.

هدف این مقاله معرفی نظریه ریاضی رکوردهاست که شاخه ای نسبتا" جدید بوده و رشد اصلی خود را در دو دهه اخیر نموده است. این نظریه علاوه بر ویژگیهای مهم نظری دارای کاربردهای خاص عملی است. تغییرات جوی ، بعضی از مسائل ترافیک ، پیشامدهای طبیعی مانند زلزله و مسائل اقتصادی مربوط به تعیین مقاومت مصالح و محاسبه احتمال کار افتادن از جمله کاربردهای این نظریه هستند که برخی از آنها در اینجا ذکر و بکمک مثالهایی نشان داده شده اند.

---

* سخنرانی عمومی : پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور. شیراز فروردین ۶۳

مقدمه

وقتی ما با مشاهدات متوالی سرکار داریم سوالات جالب و از جنبه کاربردی مفیدی مطرح می شود. مثلا" ممکن است شما طی سالهای متمادی میزان بارندگی روزانه یا هفتگی را، در منطقه‌ای که خود زندگی می کنید ثبت کرده و بخواهید در مورد تعداد روزها یا هفته‌هایی که ممکن است میزان بارندگی بیش از گذشته باشد مطالعه کنید. یا مثلا" طراح یک سازه بخواهد بداند که در طول عمر مفید سازه مورد طرح وی احتمال وقوع، بطور مثال، زلزله‌ای بزرگتر یا مخربتر از آنچه که در گذشته اتفاق افتاده است چقدر است. بعبارت دیگر اگر سازه‌ای بر اساس بزرگترین زلزله در تاریخ منطقه‌ای مورد نظر محاسبه و طرح شود احتمال کارافت آن در اثر بار زلزله در ۲۰ یا ۵۰ سال آینده چقدر است؟

هدف این مطالعه ارائه نظریه‌ایست که رشد اصلی خود را در دو دهه اخیر نموده و قادر به فراهم آوردن پاسخی به سوالات مذکور می باشد. مزیت این نظریه را می توان در سادگی و غیرتقریبی بودن برخی از نتایج آن بویژه آن دسته که مستقل از توزیع زیرین مشاهدات هستند دانست. در اینجا پس از ارائه نظریه در بخش‌های مختلف کاربرد آنها در مورد مسائل مربوط به زلزله و باد که دارای سابقه قبلی نمی باشد مطرح و نتایج برای برخی از مناطق حساس ایران مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

همچنین در هر بخش پس از ذکر نتایج اصلی کاربرد آنها با ذکر مثالهای متنوع از جمله تغییرات جوی، ترافیک، مسائل اقتصادی در رابطه با طول عمر مولفه‌های مختلف و تعیین مقاومت مصالح و محاسبه قابلیت اعتماد و غیره نشان داده شده است.

نظریه رکوردها

فرض کنید که $x_1, x_2, \dots, x_n$ دنباله‌ای از متغیرهای (مشاهدات) تصادفی با توزیع یکسان باشد (مثلا" این دنباله می تواند زلزله‌های متوالی یک منطقه در فاصله زمانی معین یا بزرگترین زلزله‌های سالانه در n سال متوالی و یا ماکزیمم سرعت باد در ماههای مختلف چند سال و یا متوسط درجه حرارت n روز متوالی و یا میزان بارندگی هفتگی در فاصله‌ای

معین وغیره باشد).

مشاهده x_i یک رکوردبالاخوانده می شودهرگاه x_i ازتمامی‌مشاهدات قبلی بزرگترباشد (توجه کنیدکه دراینجا احتمال، مقادیردقیقا" مساوی صفرفرض می شود). مثلا" برای داده‌های زیرمربوط به حداکثروحداقل درجه حرارت مطلق سالانه شیراز بین سالهای1970 تا 1979 تعدادرکوردهای بالابترتیب 2 و 4 است.

سال	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	197
حداکثر درجه حرارت سالانه	42.0	39.0	40.0	41.0	39.3	40.0	39.5	43.2	41.6	41.2
حداقل درجه حرارت سالانه	-9.0	-7.0	-11.0	-140	-4.0	-9.9	-4.2	-6.6	-3.8	-5.0

درواقع رکوردهای بالابرای حداکثردرجه حرارت $x_1=42$ $x_8=43/12$ وبرای حداقل درجه‌حرارت $x_1=-9.0$ $x_2=-7.0$ $x_5=-4.0$ $x_9=-3.8$ می باشد.

باتعریف فوق روشن است‌که به سمت‌انتهای دنباله احتمال داشتن رکوردکمترمی شود.

درواقع اولین مشاهده الزاما" یک رکوردبالاست وچنانچه فرض‌کنیم که x_i ها مستقل انداحتمال آنکه دومین مشاهده یک رکوردبالاباشد $\frac{1}{2}$ است زیرامشاهده دوم شانس‌مساوی برای کوچکتریابزرگتربودن ازمشاهده اول‌را دارد. بهمین ترتیب احتمال داشتن ماکزیممی جدید (رکوردی بالا)درسومین مشاهده $\frac{1}{3}$ است، زیرااین مشاهده شانس‌مساوی برای کوچکتربودن یا بین دومشاهده اول قرارگرفتن ویابزرگترازآنها بودن دارد.

درحالت‌کلی باتوجه باینکه قرارگرفتن مشاهده i ام دریکی ازi مرتبه ممکن همشانس‌هستنداحتمال آنکه $x_i=\max(x_1,x_2,\dots,x_i)$ باشد برابر $\frac{1}{i}$ است.

بنابراین میانگین یاامیدریاضی تعدادرکوردهای بالادردنباله‌ای شامل n مشاهده‌مستقل برابراست‌با:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

قبل از ادامه مطلب متذکر می شویم که مشاهده x_i یک رکورد پایین نامیده می شود هرگاه x_i از تمامی مشاهدات قبلی کوچکتر باشد. همانگونه که می توان حدس زد رکوردهای بالا و پایین بطور طبیعی دارای توزیع یکسان هستند. علاوه بر این رکوردهای بالا و پایین پسرو که حاصل شمارش رکوردها از انتها به ابتدا (درجهت معکوس) هستند نیز دارای همان توزیع مشترک رکوردهای پیشرو می باشند. ضمنا" با بزرگ شدن حجم نمونه تعداد رکوردهای تعداد رکوردهای بالا و پایین تقریبا" مستقل از یکدیگرند. از این مطلب می توان درعمل استفاده های مختلفی نمود. مثلا" برای برآورد تعداد رکوردهای یک دنباله از مشاهدات می توان تعداد رکوردهای بالا و پایین پیشرو و پسرو را که هریک بتنهایی برآوردی برای تعداد رکوردها هستند با یکدیگر جمع و بر 4 تقسیم نمود. برآورد اخیر همانگونه که می دانیم دارای پراکندگی کمتری از هریک از برآوردها بتنهایی است مثلا" برای مثال فوق داریم :

			حداقل درجه حرارت	حداکثر درجه حرارت
پیشرو	رکورد بالا	H	4	2
	رکورد پایین	L	3	2
پسرو	رکورد بالا	RH	2	3
	رکورد پایین	RL	4	4
	متوسط تجربی		3.25	2.75
	متوسط نظری		2.93	2.93

جدول 1) تعداد رکوردهای حداکثر و حداقل درجه حرارت سالانه شیراز (1979- 1970)

مثال (2) زلزله های اطراف بوشهر را که درون مربعی بضلع 2^0 درجه و بین سالهای 1907 تا 1975 بوقوع پیوسته اند.

(H)(L) 5.3	(H) 5.6	(L) 4.5	(L) 4.4	4.5	4.7	4.7	4.5	4.3	4.5	(H) 5.8 (RH)
4.5	4.8	4.9	5.1	4.9	(L) 4	(L) 3.7	5	4.9	(L) 3.4 (RL)	4.9
5	4.9	5	5.7 (RH)	5.1	4.3	4.6	5	4.7	5.2	4.9
5.2	5	4.5	4.8	5.3	5	4.7	5.1	4.8	5.1	5.6 (RH)
4.3	4.4	5.2 (RH)	4.8	4.5	4.3	4.3	4.5	3.9	4.1	4.4
5.1 (RH)	4.3	4.1	4	4.6	4.6	3.8 (RL)	4.2 (RL)	5 (RH), (RL)		

جدول 2) زلزله‌های اطراف بوشهر (درون مربعی با طول وعرض جغرافیایی 28^0-30^0 50^0-52^0) بین سالهای 1907 تا 1975 بترتیب وقوع.

پیشرو رکوردبالا	H	3
پیشرو رکوردپایین	L	6
پسرو رکوردبالا	RH	6
پسرو رکوردپایین	RL	4
متوسط تجربی		4.75
متوسط نظری		4.7446

جدول 3 تعداد رکوردهای زلزله منطقه بوشهر

مورد استفاده دیگر آنکه با استفاده از مجموع وتفاضل رکوردهای بالا وپایین می توان بوجود یا عدم وجود روند درمیانگین وواریانس پی برد. درواقع چنانچه تفاوت این مقادیر با میانگین نظری آنها زیاد باشد می توان نتیجه گرفت که مشاهدات مستقل نیستند (مثلا" دررکوردهای مربوط به دوهای سرعت وشنا ووزنه برداری درمسابقات المپیک وجود روند روشن است).

کاربرد نظریه رکوردها ، استراتژی دنباله ای برای آزمونهای تخریبی

اغلب محصولات دراثر تنش (stress) از کار میافتد. مثلا" محیط بسیار گرم باعث کارافت یک موءلفه الکترونیکی شده ویا یک باطری دراثر تنش زمانی خالی می شود. توجه کنیدکه مقدار تنش تا نقطه کارافت برای دومحصول کاملا" مشابه متفاوت بوده ومتغیری تصادفی است .

فرض کنیدکه نقطه کارافت یک محصول رابتوان درآزمایشگاه باافزایش تدریجی تنش (نیرو، درجه حرارت ، زمان وغیره) بدست آورد. اگر چنین آزمون تجربی رابرای 100 محصول مشابه انجام دهیم حاصل صدمقدار متناظر با نقاط کارافت خواهد بود.

حال فرض کنیدکه منظوراز انجام این آزمایشات یافتن ضعیف ترین محصول (درمقاومت مصالح یکی ازروشهای عمده ، تعیین مقاومت براساس ضعیفترین نمونه یانمونه هاست ۲)یعنی تعیین مینیمم(تنش تاکارافت) $x_1\ x_2 \ldots x_{100}$ باشد. در چنین شرایطی آنچه که می توانددراینجا موردبحث قرارگیرد آنست که درواقع نیازی به اعمال تنش تاکارافت برای تمامی نمونه هات نیست . بعبارت دیگرمی توان بدون تخریب تعدادی قابل توجه ای ازمحصولات وباانتخاب یک استراتژی دنباله ای به نتیجه مطلوب دست یافت. بدین ترتیب که نمونه اول رامورد آزمایش قرارداده و x_1 یعنی مقدار تنشی راکه منجربه کارافت آن می شودیادداشت می کنیم . اگرنمونه دوم این مقدار تنش (یعنی x_1) راتحمل نمودواز کارنیافتد آزمایش رامتوقف نمودهو به نمونه سوم می پردازیم . بدین ترتیب x_2 فقط درصورتی دقیقا "مشخص می شودکه $x_2 < x_1$ باشد. درغیراینصورت ما فقط این اطلاع رابدست خواهیم آوردکه $x_2 > x_1$ (اطلاع سانسورشده)بوده وداریم $x_1 = \min (x_1, x_2)$

درهرحال به نمونه سوم پرداخته وآزمایش را درصورت تحمل تنش با اندازه $\min(x_1,x_2)$ متوقف می کنیم . بدین ترتیب x_3 درصورتی دقیقا" مشخص می شودکه ($x_3<\min(x_1,\ x_2)$ باشدلیکن درهرصورت $\min(x_1,x_2,x_3)$ مشخص خواهدشد.

درحالت کلی برای نمونه iام آزمایش درصورتی متوقف می شودکه :

$$x_i > \min(x_1,x_2,\dots,x_{i-1})=\min(x_1,x_2,\dots,x_i)$$

باشد. درغیراینصورت یعنی وقتی

$$x_i=\min(x_1,x_2,\dots x_i)< \min(x_1,x_2,\dots,x_{i-1})$$

است حاصل آزمایش تعیین دقیق تنش تاکارافت این نمونه بوده ودرهر دوصورت مقدار ($\min(x_1,x_2,\dots,x_i)$ مشخص خواهدشد.

باکمی دقت متوجه می شویم که نمونه‌های تخریب شده دراین روش دنباله‌ای درواقع متناظربا رکوردهای پایین خواهندبود. یعنی در آزمایش n محصول مشابه میانگین نظری تعدادنمونه‌های تخریب شده عبارت خواهدبوداز $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ مثلا" برای n=100 و n=1000 این مقداربترتیب برابر 5.19 , 7.49 است.

استراتژی دنباله‌ای رامی توان بسادگی برای موردی که نظریافتن کوچکترین مقادیر(بجای کوچکترین مقدار) است تعمیم داد. فرض کنیدکه می خواهیم کوچکترین مقادیر(بتعداد j) از n مقدار $x_1,x_2,\dots,x_n$ راتعیین کنیم . ابتدا j نمونه راموردآزمایش قرارداده وتنشهای مربوطه یعنی $x_1,x_2,\dots,x_j$ رابدست می آوریم . اگرنمونه i ام- تنش مربوط به قویترین نمونه از j نمونه انتخاب شده در i-1 آزمایش قبلی راتحمل نمودآزمایش متوقف می شوددرغیراین صورت تنش مربوط باین نمونه جای قویترین نمونه از j نمونه قبلی مورداستفاده رامی گیرد.

احتمال مربوط به تنش تاکارافت برای نمونه i ام ($i>j$) برابر احتمال آنست که این تنش میان کوچکترین j مقداراز i مقدارمستقل مشاهده شده ازهمان توزیع پیوسته باشد. باتوجه به همشانس بودن تمام ترتیبات ممکن ، این احتمال برابر j/i بوده وبنابراین متوسط نظری تعدادنمونه‌های تخریب شده در n آزمایش برابرخواهدبود.

$$1+1+\dots+1+\frac{j}{j+1}+\frac{j}{j+2}+\dots+\frac{j}{n}=J\left(1+\frac{1}{j+1}+\frac{1}{j+2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

$$\leqslant J\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

اگر ز خیلی کوچکتراز n باشد میانگین آن نیز کوچک خواهد بود. مثلا" برای یافتن کوچکترین 4 مقدار نمونه‌ای با حجم 1000 انتظار ما تخریب حدود نمونه و برای یافتن کوچکترین 8 مقدار آن تخریب 50 (حدود 47) نمونه خواهد بود. بویژه در ارتباط با محاسبه مقدار مشخصه مقاومت مصالح بر اساس مثلا" کوچکترین دو مقدار که در 2 ارائه گردیده است متوسط تعداد نمونه‌هایی که ممکن است تخریب شوند برای n=100 و n=1000 بترتیب حدود 10 و 14 است که اقتصادی بودن روش را نشان می دهد.

حدود تولورنس برای توزیعهای کارافت

درطرح وساخت سازه‌ها ممکن است بکارگیری قطعه یا موءلفه‌ای خاص تنها وقتی مجاز باشد که آن قطعه یا موءلفه بتواند با احتمال بیش از 95% تنشی جدی را تحمل کند. بگفته دیگر درسمت راست صدک پنجم ($x_{0.05}$) توزیع کارافت قرار بگیرد یعنی $x>x_{0.05}$. اگر نمونه بزرگ باشد احتمال آنکه نقطه کارافت ضعیف ترین آنها پایین تر از $x_{0.05}$ باشد بزرگ است. مثلا" برای n=90 احتمال آنکه $x=\min(x_1,x_2,...,x_{90})< x_{0.05}$ باشد 99% است. یعنی در اینمورد استنباط $x< x_{0.50}$ دارای اطمینان 99% است. کوچکترین مقدار نمونه ای با حجم $n> 90$ یک حدتولورنس 99% برای صدک پنجم ($x_{0.05}$) توزیع متناظر نامیده می شود. دومین مقدار کوچک نمونه وقتی یک تولورنس 99% برای $x_{0.05}$ است که داشته باشیم $n\geq 130$ وبرای سومین مقدار کوچک لازم است $n\geq 165$ باشد بطورکلی j امین مقدار کوچک نمونه وقتی یک حدتولورنس 99% برای صدک پنجم محسوب می شود که داشته باشیم $n\geq n_j$ (مقادیر n_j در جدول زیرخلاصه شده است). برای روشن شدن مطلب، متذکرمی شویم که صدک p ام یک توزیع پیوسته بصورت مقدار منحصربفردی که برای آن $F(x_p)=p$ یا $x_p=F^{-1}(p)$ باشد تعریف می شود. دراینمورد می توان نشان داد که برای $x^{(n)}_{(j)}$ امین مقدار کوچک از نمونه‌ای شامل n مشاهده داریم .

$$p\left[x^{(n)}_{(j)} < x_p\right] = \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} \left[F(x_p)\right]^i \left[1-F(x_p)\right]^{n-i} = \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1- \sum_{i=o}^{j-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

در این جدول علاوه بر n_j متوسط کارافتها (نمونه‌های تخریب شده) در آزمایش n_j نمونه برای یافتن ضعیف‌ترین j تای آنها محاسبه ودرستون m_j داده شده است. ازآنجائیکه نسبت m_j/n_j تقریبا" $\frac{1}{10}$ است می‌توان نمونه با حجم ده برابر تعداد نمونه‌هایی راکه تخریب خواهند شد موردآزمایش قرارداد. مثلا" جدول نشان می‌دهدکه برای بدست‌آوردن پنج کوچکترین مقدار با حدتولورنس 99% برای $x_{0.05}$ می‌بایست حداقل 228 نمونه را موردآزمایش قرارداد. اما متوسط نمونه‌های تخریب شده تنها 23.63 خواهدبود.

جداول مشابه جدول زیربرای سطوح متفاوت 75%و 90% ویا 95% حدودتولورنس برای $x_{0.05}$ وجوددارندهمچنین برای سایرصدکها ازقبیل $x_{0.01}$ وغیره. نکته مهم آنکه باتغییرسطح از 75%به 99%حجم نمونه به تقریبا" سه برابرافزایش میابد(از 27به 90) امافزایش درمتوسط نمونه‌های تخریب شده بسیارکم است (از3.89 به 5.08) . بنابراین سطح 99% افزایش هزینه کمی رادرمقابل 75% تحمیل می‌کند.

j	n_j	m_j	m_j/n_j
1	90	5.08	0.056
2	130	9.90	0.076
3	165	14.56	0.088
4	197	19.12	0.097
5	228	23.63	0.104
6	258	28.09	0.109
7	287	32.52	0.113
8	315	36.91	0.11
9	343	41.29	0.120
10	371	45.66	0.123
11	398	50.00	0.126
12	425	54.33	0.129
13	451	58.63	0.130
14	477	62.92	0.132
15	503	67.21	0.134

جدول 4) مقادیر n_j مربوط به حدتولورنس 99% برای صدک پنجم با ضمام متوسط کارافتها (نمونه های تخریب شده) در Tn_j زمایش برای یافتن ضعیف ترین های آنها (m_j)

نتایج مهم نظریه رکوردها

در این قسمت می پردازیم به ذکربرخی از نتایج مهم نظریه رکوردها که ممکن است درمسائل کاربردی مورداستفاده قرارگیرند.

الف) فراوانی رکوردها (شکستن رکوردها)

در این جا ابتدا متغیردوتایی Y_i را که برای رکوردهای بالا برابر یک وبرای سایرمقادیرصفراست بصورت زیرتعریف نموده

$$Y_i=\begin{cases}1 & X_i=\max(X_1,X_2,\ldots,X_i)\\ 0 & X_i\neq\max(X_1,X_2,\ldots,X_i)\end{cases}$$

ونشان داده می شودکه Y_i ها متغیرهای تصادفی مستقل اند. بااستفاده از این مطلب واینکه تعدادرکوردهای بالا برابر $R_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i$ است بسادگی می توان نشان دادکه

$$E\,R_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

$$\mathrm{Var}\;R_n=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\,(Y_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$$

توجه کنیدکه چون با بزرگ شدن

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\log n\longrightarrow \text{ثابت اولر}=0.5772,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\rightarrow\frac{\pi^2}{6}=1.6449$$

می توان امیدریاضی وواریانس R_n را برای n های بزرگ بااستفاده از جدول لگاریتم ویا ماشین حساب عادی بطورتقریبی محاسبه نمود. جدول 5 مقادیردقیق $\mathrm{Var}\,R_n$,$E\,R_n$ را برای مقادیرمختلف n بدست می دهد .

n	$E\,R_n$	$\mathrm{Var}\ R_n$	$\mathrm{Var}\ R_n$
2	1.50	0.25	0.50
3	1.83	0.47	0.69
4	2.08	0.66	0.81
5	2.28	0.82	0.91
15	2.93	1.38	1.17
25	3.60	2.00	1.44
30	3.99	2.38	1.54
40	4.28	2.66	1.63
50	4.50	2.87	1.70
100	5.19	3.55	1.88
200	5.88	4.24	2.06
300	6.28	4.64	2.15
400	6.57	4.93	2.22
500	6.79	5.15	2.27
1000	7.49	5.84	2.42
1000000	14.39	12.75	3.57

جدول) میانگین ، واریانس وانحراف معیار تعداد رکوردهای بالا برای مقادیر مختلف n .

نتـــــــایج مهـــم درارابطه با تعدادرکوردها را می توان بصورت زیرخلاصه نمود :

۱ـ قانون قوی اعدادبزرگ : وقتی $n \to \infty$ داریم $R_n/\log n$

۲ـ قضیه حـــــدمرکـــزی: وقتی $n \to \infty$ داریم $(R_n-\log n)/\sqrt{\log n} \to N(0,1)$ که درآن $N(0و1)$ نمایش توزیع نرمال با میانگیـــن صفروواریانـس یک است .

۳ـ توزیع مجانبی $R_{2n}-R_n$ یعنی تعدادرکوردهای بـــــالا درمشاهدات $n+1, n+2, \ldots 2n$ پواسن با میانگین $\log 2$ است یعنی وقتی $n \to \infty$ داریم

$$P\,(R_{2n}-R_n=k) \to \frac{(\log 2)^k}{2k}$$

بویژه برای تمامی مقادیر n تساوی $P\,(R_{2n}-R_n=0) = \frac{1}{2}$ برقراربوده است وبطورکلی فراوانی رکوردهای بالادرمشاهداتی که اندیس آنها بیـــن an و bn $(0< a< b)$ قرارمی‌گیرندبطورمجانبی ازتوزیع پواسن با میانگیـــن $\log(b/a)$ پیروی می کنندیعنی وقتی $n \to \infty$ داریم

$$P(R_{bn}-R_{an}=k) \to \frac{a}{b}\,\frac{(\log b/a)^k}{k}$$

۴ـ برای های بزرگ داریم

$$P(R_n=r) = \frac{|s_n^{r-1}|}{(r-1)} \simeq \frac{\log n^{r-1}}{n(r-1)}$$

که‌درآن $|s_n^{r-1}|$ عددنوع اول استرلینگ می باشدکه برابرباضریب x^{r-1} دربسط $x(x-1)\ldots(x-n+1)$ است 4 .

ب) شماره سریال رکوردها

بجای تعدادرکوردها یعنی R_n دراین قسمت می پردازیم به نتایـــج مربوط به متغیرتصادفی N_r که عبارتست ازشماره سریال مشاهده‌ای که درآن r امین رکوردبالابوقوع خواهدپیوست . عدداخیریعنی N_r معمولا" زمـــان r امین رکوردخوانده می شود.

نتایج مهم درارابطه با N_r را می توان بصورت زیرخلاصه نمود :

$$P\left[(N_r=n)\right] = \frac{|s_{n-1}^{r-1}|}{n} \qquad P\left[(N_2=1)\right] = \frac{1}{i(i+1)}$$

۲- قانون قوی اعداد بزرگ وقتی $r \to \infty$ داریم

$$\log(N_r)/r \to 1 \quad \text{یا} \quad N_r^{1/r} \to e$$

۳- قضیه حدمرکزی : وقتی $r \to \infty$ داریم

$$(\log(N_r)-r)/\sqrt{r} \to N(0,1)$$

۴- برای مقایسه زمان r امین رکورد با زمان سایر رکوردها وقتی $r \to \infty$ داریم

$$P\left[\frac{N_r}{N_{r+s}} < x\right] \to x \sum_{k=0}^{s-1} (-\log x)^k/k \qquad 0<x<1$$

این نتیجه برای $s=1$ عبارت است از

$$P\left[\frac{N_r}{N_{r+1}} < x\right] \to x \qquad 0<x<1$$

یعنی $\frac{N_r}{N_{r+1}}$ بطورمجانبی دارای توزیع یکنواخت روی فاصله واحد است. اگرندانیم که شماره سریال r امین رکورد m بوده است یعنی $N_r=m$ داریم

$$P\left[\frac{N_r}{N_{r+1}} < \frac{m}{n} \middle| N_r=m\right] = m/n$$

دراین زمینه ثابت می شودکه وقتی $r \to \infty$ داریم $0<x<1$

$$P\left[\frac{N_r}{N_{r+1}} < x \middle| N_r\right] \to x$$

ودرحالت کلی تر

$$P\left[\frac{N_r}{N_{r+s}} < x \quad N_r\right] \to x \sum_{k=0}^{s-1} (-\log x)^k/k! \qquad 0< x<1$$

قضیه اخیرنشان می دهدکه نسبتهای متوالی $\ldots \frac{N_{r+1}}{N_{r+2}} \; \frac{N_r}{N_{r+1}}$ به طورمجانبی مستقل ودارای توزیع یکنواخت هستند. یکی ازموارد استفاده این نتیجه آنست که ازهرتوزیع پیوسته نامعلوم می توان بعنوان تقریبی برای مولداعداد تصادفی یکنواخت استفاده نمود. آنچه که دراینمورد لازم است شماره‌های سریالی است که رکوردها درآنها اتفاق می افتد.

ج) فواصل زمانی وقوع رکوردها

دراین قسمت می پردازیم به نتایج مهم دررابطه با زمانهای میان وقوع رکوردها یعنی $W_r=N_{r+1}-N_r$
متذکرمی شویم که این نتایج وهمچنین نتایج مذکوردرقسمت ب توزیع آزاد بوده وتنها شرط لازم برای صحت آنها پیوسته بودن توزیع مشاهدات است.

۱ـ قانون قوی اعدادبزرگ : وقتی $r \to \infty$ داریم $\log(W_r)/r \to 1$

۲ـ قضیه حدمرکزی : وقتی $r \to \infty$ داریم $(\log(W_r)-r)/\sqrt{r} \to N(0,1)$

۳ـ W_r دارای میانگین ∞ $(E(W_r)=\infty)$ مد ۱ و میانه محدوداست که درجدول زیربرای برخی ازمقادیر n مشخص شده است. دراین جدول همچنین نسبت میانه W_r به W_{r-1} نیز داده شده است.

r	2	3	4	5	6	7	8
median (W_r)	4	15	26	69	183	490	1316
median(W_r)/ median(W_{r-1})	25		2.60	2.65	2.65	2.68	2.69

لازم به تذکراست که $\frac{\text{median}(W_r)}{\text{median}(W_{r-1})}$ $e=2.718..$ بوده واین تقریب با بزرگ شدن r بهترمی شود.

۴ـ دررابطه با مقایسه W_r و W_{r+1} وقتی $r \to \infty$ داریم

$$P\left[\frac{W_{r+1}}{W_r} < x\right] \to \frac{\log(1+x)}{x} \qquad x>0$$

د) مقادیررکوردها

آنچه که تاکنون موردمطالعه قرارگرفت نتایج مربوط به فراوانی وشماره سریال رکوردها بودکه نتایجی توزیع آزادهستند. بعبارت دیگرتنها شرط بکارگیری آنها دانستن آنست که مشاهدات مستقل ودارای توزیع یکسان پیوسته F هستند اماهیچگاه F دراین نتایج ظاهرنشد. مقادیرواقعی رکوردهایعنی $x_1 x_{N2} x_{N3}$ .... وضعیت کاملا" متفاوتی رابوجودآورده ونتایج مربوط به آنها الزاما" به F بستگی دارد. قبل از پرداختن باین نتایج متذکرمی شویم که خواص مقادیررکوردها را می توان بااستفاده ازتبدیل $G(x)=-\log 1-F(x)$ بصورتهای ساده تری بیان نمود. توجه کنیدکه $G'(x)=F'(x)/1+F(x)$ همان نرخ کارافت است که درنظریه ریاضی قابلیت اطمینان رلی اساسی دارد.

روشن است که برای $\alpha<\beta$ بطوریکه $0<F(\alpha)<F(\beta)<1$ هرتعداد ازرکوردهای $X_1<X_{N2}<X_{N3}<$ .... می‌توانندمقادیری بین

α و β داشته باشند. دراین زمینه نتیجه مهم زیردردست است:

۱- تعدادرکوردهایی که مقادیرآنها بین α و β باشددارای توزیع پواسن بامیانگین

$$G(\beta) - G(\alpha) = -\log\left(\left[1-F(\beta)\right] / \left[1-F(\alpha)\right] \right)$$

است که به F بستگی دارد.

۲- اگرمشاهدات $x_1, x_2, \ldots\ldots$ دارای توزیع نمایی $F(x)=1-e^{-x}$ باشدیعنی

$$G(x) = -\log\left[1-F(x)\right] = x$$

آنگاه

۱-۲ نتیجه بند ۱ نشان می دهدکه تعدادرکوردهایی که مقادیرآنها ممکن است بین α و β قرارگیرندفقط به تفاضل آنها بستگی دارد.

۲-۲ نشان داده می شودکه دراینصورت مقدار r امین رکورددارای توزیع گاما باتابع چگالی $x^{r-1} \quad e^{-x}/(r-1)$ است.

۳ - اگر X_i هادارای توزیع پیوسته F باشندآنگاه مقدار r امین رکورد دارای توزیع زیرخواهدبود:

$$dp\left[X_{N_r} = X_r \right] = \frac{\left[G(x_r)\right]^{r-1}}{(r-1)} \quad dF(x_r)$$

۴- قانون قوی اعدادبزرگ: وقتی $r \to \infty$ داریم

$G(X_{N_r})/r \to 1$ بااحتمال یک

۵- قضیه حدمرکزی: وقتی $r \to \infty$ داریم $(G(X_{N_r})-r)/\sqrt{r} \to N(0,1)$

درواقع متناظربانتایج ندنکو (گمبل) توزیع حدی مقادیررکورد rام وقتی $r \to \infty$ یکی از سه فرم زیررادارا می باشد (نرمال یا نرمال لگاریتمی مثبت یا نرمال لگاریتمی منفی)

$$(1) \quad P\left[\frac{X_{N_r} - G^{-1}(r)}{G^{-1}(r+ r) - G^{-1}(r)} < x \right] \to N(x)$$

$$(11) \quad P\left[\frac{X_{N_r}}{G^{-1}(r)} < x \right] \to \begin{cases} 0 & x<0 \\ N\ \alpha\log x & x\geq 0 \end{cases}$$

$$(111) \quad P\left[\frac{X_{N_r} - \bar{X}}{\bar{X} - G^{-1}(r)} < x \right] \to \begin{cases} N\ \alpha - \log x & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$$

که درآن N توزیع نرمال استانداردبوده و α ثابتی مثبت است که به F بستگی دارد. همچنین $\bar{x}$ در (111) نقطه بالایی (الزاما" محدود) - فاصله‌ایست که F روی آن مقدار می پزد.

چندنکته مهم

دراین قسمت می پردازیم به شرح مختصررابطه میان نظریه رکوردها ونظریه مقادیرفرین که درابتدای مطلب بدان اشاره شد. هر نمونه تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ دارای ماکزیمم است. اگربنویسیم $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots X_n)$ روشن است که $M_1 = X_1$ بوده وهرماکزیمم جدیدیک رکورداست. بعبارت دیگرشکستن رکوردها متناظراست با جهش یانامساوی $M_n < M_{n+1}$ دردنباله ماکزیمم های نمونه یعنی $X_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq M_4$ .... بنابراین دنباله مقادیررکوردها را می توان ازدنباله ماکزیمم ها استخراج کرداما عکس آن امکان ندارد.

دراین زمینه نشان داده شده است که میان قضایای حدی مقادیرفرین ورکوردها دوگانگی وجوددارد 5 . درواقع ترسیم دنباله ماکزیمم‌های نمونه درمقابل n رامی توان یک فرایندمارکف جداتلقی نمودکه دارای جهش درزمان رکوردهای N_r است. در 6 نشان داده شده است فرم پیوسته این ماکزیمم ها (فرایند (M(t) بازمانهای جهش طبق یک فرایندپواسن غیرهمگن (باشدت یاپارامتر 1/t)دارای اسکلتون جدا (M(n),1,2,3,.....) است که جهشهای آن دقیقا" مانندزمانهای رکوردها رفتارمی‌کند. این نتیجه رامی توان بصورتی دیگروبااستفاده ازاین نکته که (به بندالف رجوع شود).

$$E\left[R_n\ (a,b)\right] = \sum_{i=[na]+1}^{nd} \frac{1}{i}\int_a^b \frac{1}{t}\,dt = \log\ b/a$$

است بدین صورت بیان نمودکه درحد (بطورمجانبی) R_n فرایندی پواسن دارای شدت 1/t است.

درخاتمه متذکرمی شویم که نتایج مذکورممکن است برای متغیرهای غیر مستقل قابل اعمال نباشد. امامطالعات انجام شده نشان می دهدکه برای‌تعدادزیادی ازدنباله‌های (مشاهدات) وابسته نتایج بطورمجانبی درست هستند.

مثال کاربردی(درارتباط باسازه‌ها)

برای نشان دادن کاربردنظریه رکوردها ، دراین قسمت می پردازیم به مسئله زلزله وباددرارتباط بانیروگاههای اتمی بوشهرکه می دانیم ازاهمیت ویژه‌ای برخوردا ربوده وبرای تکمیل آن اخیرا "قراردادی میان ایران ویک شرکت آلمانی منعقدگردیده است . گرچه بنا به اظهارمسئولین عمده‌عملیات احداث این نیروگاه که ازبزرگترین نیروگاههای اتمی جهان محسوب می شودانجام شده‌است لکن بدلیل اهمیت آن واینکه این نیروگاه اولین وتنهانیروگاه اتمی ایران است دراینجا موردبحث قرار می گیرد.

زلزله : زلزله‌های اطراف بوشهرکه درون مربعی بضلع 20 درجه (بترتیب طول وعرض جغرافیایی $52^0-50^0, 30^0-28^0$) وبین سالهای 1907 تا 1975 بوقوع پیوسته‌اندقبلا" معرفی ودرجدول 2 نشان داده شد. تعدادرکوردهای مربوط به این داده‌هانیز درجدول 3 آمده است که همان گونه که دیده می شودبطورقابل ملاحظه‌ای بانتایج نظری مطابقت دارد.

حال فرض کنیدکه درمرحله طرح سازه بزرگترین زلزله تاریخ منطقه اساس محاسبات قرارگرفته باشد. بعبارت دیگرسازه قادربه تحمل زلزله‌ای با قدرت 5.8 ریشتربوده ووقوع زلزله‌ای باقدرت بیش ازآن باعث کارافت می شود. درچنین حالتی چگونه می توان احتمال کارافت وازآنجا قابلیت اعتمادسازه رامحاسبه نمود؟ باکمی دقت می توان دریافت که احتمال موردبحث برابربا احتمال وقوع رکوردی درفاصله زمانی معین مثلا" طول عمرمفیدسازه‌است . گرچه می توان دراین موردازنتایج مختلفی استفاده نمودامابدلیل کوچک بودن تعدادمشاهدات (زلزله‌ها)بایدحتی المقدور ازنتایج غیرمجانبی استفاده کرد. نتیجه‌ای که مادراینجا مورداستفاده خواهیم دادبه شماره سریال رکوردهاارتباط داشته وعبارتست از

$$P\left[\frac{N_r}{N_{r+1}} < \frac{m}{n} \,\middle|\, N_r=m\right] = p\left[N_{r+1}>n \,\middle|\, N_r=m\right] = \frac{m}{n} \qquad n>m\geq r$$

که درآن m شماره سریال آخرین رکورداست .

قبل ازبحث درموردچگونگی استفاده ازنتیجه مذکورلازم است که طول عمرمفیدسازه که درموردنیروگاه بوشهر 30 سال گرفته می شودبصورتی

بتعدادزلزله‌هایی که ممکن است دراین فاصله اتفاق بیفتدارتباط داده ـ شود. درموردتعدادزلزله های سالانه عمدتا" توزیع پواسن فرض وبکـــار گرفته شده وپارامترنا معلوم آن بااستفاده ازمتوسط تعدادزلزله‌هـــای گذشته منطقه برآوردمی شود. درموردبوشهراین متوسط (نرخ) برابر $\frac{64}{69}$ برای هرسال بوده ونتیجتا" تعدادزلزله‌های موردنظردر 30 سال حدودا" ـ برابر $\frac{64}{69} \times 30 = 28$ است. بنابراین احتمال آنکه درطول عمرمفیـــد نیروگاه (توجه کنیدکه دراینجا 1975 مبداء فرض‌شده است) رکـــوردی نداشته باشیم (یعنی زلزله‌ای بزرگترازه 5.8 بوقوع نپیوندد) رامی توان باتوجه باینکه $N_3 = 11$ بوده ازسال 1907 تاسال 1975 مجموعـــا "64 زلزله داشته‌ایم بصورت زیرمحاسبه نمود.

$$P[A] = P[N_4 > 64+28 \mid N_3 = 11] = \frac{11}{92} \qquad P[B] = P[N_4 > 64 \mid N_3 = 11] = \frac{11}{64}$$

وازاینجا

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A]}{P[B]} = \frac{\frac{11}{92}}{\frac{11}{64}} = \frac{64}{92}$$

بنابراین احتمال کارافت درطول عمرسازه عبارت خواهدبودازـ

$$P_f = 1 - \frac{64}{92} = \frac{28}{92} = \%\ 30$$

(بایدمتذکرشدکه درعمل لازم است سازه‌ها برای زلزله‌های بزرگترازبزرگترین زلزله گذشته منطقه طرح شوندا ما تعیین چنین مقداری معادل بـــرآورد بزرگترین زلزله ممکن آن منطقه است‌که هنوز راه‌کاملا" رضایتبخشی برای آن ارائه نشده است). توجه کنیدکه نتیجه فوق بااستفاده ازمیانگیـــن توزیع پواسن برای تعدادزلزله‌ها بدست آمد. اگربخواهیم P_f رابادقـــت بیشتری محاسبه نماییم می توانیم ازتابع چگالی توزیع پواسن بـــرای تعدادزلزله‌ها درفاصله 30 سال یعنی

$$F(x) = \frac{\left(\frac{64}{69} \cdot 30\right)^x \exp\left(\frac{64}{69} \cdot 30\right)}{x} \qquad x = 0,1,2,3,\ldots\ldots$$

استفاده نمودواحتمال کارافت رابصورت زیرمحاسبه نماییم.

$$P_f = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x}{64+x} \times \frac{\left(\frac{640}{23}\right)^x \exp\left(-\frac{640}{23}\right)}{x} = 0.300734$$

باد: اطلاعات مربوط به باددرشهربوشهرکه توسط ایستگاه هواشناسی این شهرتهیه شده است درفرمهای 1-29 , 2-29 خلاصه شده‌اند. آنچـــه

که در این قسمت موردنظر ماست ماکزیمم سرعت ماهانه باد است که تعداد آن 299 بوده ومربوط به سالهای 1951 تا 1975 می باشد.

اگرفرض کنیم که مانندموردزلزله سازه برای سریعترین باد گذشته منطقه یعنی 75 طرح شده باشد آنگاه باتوجه باینکه این مقدار رکوردپنجم بوده و شماره سریال آن 100 است برای طول عمرمفید 30 سال (ماه 30x12=360) یعنی 1975 تا 2005 داریم .

$$P[A] = P[N_6 > 299+360 \mid N_5=100] = \frac{100}{659}$$

$$P[B] = P[N_6 > 299 \mid N_5=100] = \frac{100}{299}$$

واز آنجا

$$P\ A|B = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A]}{P[B]} = \frac{100/659}{100/299} = 299/659$$

بنابراین احتمال کارافت ناشی ازباد در طول عمرمفیدسازه برابر با

$$P_f = 1-299/659=360/659 = 0.546 \ \%55$$

می باشد (به نکات مطروحه دربندزیر توجه شود .) توجه کنیدکه اگر بجای 30 سال طول عمرسازه 10 سال منظورشودخواهیم داشت :

$$P_f = 120/419 = 0.289 = \%29$$

درواقع علاوه برطول عمرمفیدکه درصورت کسرظاهرمی شودمقدار P_f بستگی به تعدادمشاهدات یعنی فاصله زمانی مربوط به جمع آوری اطلاعات مربوط به جمع آوری اطلاعات مربوط به گذشته منطقه که درمخرج ظاهر می شودنیز دارد.

نکات مهم کاربردی

آمارمربوط به ماکزیمم سرعت ماهانه باددربوشهرنشان می دهدکه اختلاف سرعت بزرگترین ودومین بزرگترین بادگذشته منطقه نسبتا" بزرگ بوده وبرابر 27=48-75 است درحالیکه این اختلاف برای سایرمشاهدات متوالی حداکثر 2 است . آنچه که ذکرآن ضروری بوده وازاهمیت خاصی برخوردار است آنکه درچنین مواردی کاربردروشهای معمول (مانند

روشهای مبتنی برمقادیرفرین) دچارمشکلات مختلفی شده ونتایج حاصل ازآنها ازقابلیت اعتمادکافی برخوردارنخواهدبود. درواقع باتوجه باینکه درمطالعه اثربارهای مختلف روی سازه‌ها مقادیرفرین (ماکزیمم‌ها) دارای نقش اساسی بوده واین مقادیردم فوقانی توزیع مربوط به وقوع این پیشامدها راتشکیل می دهند، روشن استکه وجودمقداری بسیاربزرگ که باسایرمقادیرفرین هماهنگی ندارد دم فوقانی رابنحو غیرمطلوبی تغییرداده ودربرخی ازموارد نتایج حاصل راغیرقابل قبول می نماید. مثلا" بکارگیری نظریه مقادیرفرین ممکن است حدبالایی برای اندازه پیشامدها بدست ندهدویا منجربه برآوردمقداری بعنوان بزرگترین پیشامد ممکن منطقه شودکه ازبزرگترین مقداربوقوع پیوسته درگذشته کوچکتر باشد(بعنوان مثال به نتایج ارائه شده در 7 مراجعه‌شود) .علاوه‌بر این نکته ممکن است ماکزیمم ثبت شده اشتباه یاغیردقیق بوده ونتیجتا" دم فوقانی راتغییردهد. (توجه کنیدکه تغییری مختصردردم فوقانی احتمالهای مربوط به مقادیربزرگ راکه حوزه اساسی درمحاسبات مربوط به کارافت وقابلیت اعتمادهستند بطورقابل ملاحظه تغییرمیدهد). توجه به نکات فوق اهمیت برخی ازنتایج نظریه رکوردها راروشن می سازد.همانگونه که دیدیم این نتایج رامی توان بصورت زیربه چهاردسته تقسیم نمود.

الف: نتایج مربوط به فراوانی رکوردها

ب : نتایج مربوط به شماره سریال رکوردها

ج : نتایج مربوط به فواصل زمانی وقوع رکوردها

د : نتایج مربوط به مقادیررکوردها

که درآنها تنها بند د به مقادیررکوردها مرتبط می شود. درواقع نتیجه‌ای که درمحاسبه احتمال کارافت درمثال کاربردی فوق بکاربرده شدمربوط به بند ب یعنی شماره سریال رکوردها بودکه‌باندازه رکوردبستگی نداشته ودر آن تنها شماره سریال وقوع آن واردمحاسبات می شود. مثلا" اگرفرض کنیم که درمسئله مربوط به داده‌های بادماکزیمم سرعت70بوده وبدلیلی 75 ثبت یاگزارش شده باشدنتیجه بدست‌آمده تغییری نخواهدکرد. بعبارت دیگرنتیجه بدست‌آمده مستقل ازاندازه اختلاف میان بزرگترین ودومین بزرگترین مقادیرمشاهده شده است. درخاتمه متذکرمی شویم که استفاده از نتایج‌مربوط به بند ب درموردزلزله رامی توان بدین دلیل که وقوع

زلزله‌های بزرگ حاصل جمع تنش درفاصله زمانی نسبتا" زیادی است توصیه کرد. بگفته دیگردرموردزلزله پس ازوقوع یک رکوردوآزادشدن انرژی نمی توان بلافاصله انتظاررکوردجدیدی راداشت.

فهرست منابع

1. B.V.Gnedenko, "Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire". Ann of Math., 44 (1943), 423-453
2. G.R.Dargahi-Noubary, "Statistical aspects of material toughness characterization". Proc of 14th Iran Nat. Mat. Conf., Tabriz(1983).
3. Zijun Gan and C.C.Tung, "Extreme value distribution of earthquake magnitude". Phys. of the Earth and plan. Inte. 32, (1983),325-330
4. M.Abramowitz and I.A.Segun (Eds), Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York. (1965)
5. S.I.Resnick, "Limit laws for records values". Stochastic Processes and Their Applications 1 (1973) 67-82
6. S.I.Resnick, "External Processes and Record Value Times", J Appl. Probability 10 (1973) 864-898
7. P.W.Burton, "Seismic risk in Southern Europe through to India examined using Gumbels third distribution of extreme values". Geophys. T. R. Astr. Soc. 59, 249-280

هندسه، آمار، احتمال:
صورتهای گوناگون یک معنی

نوشتهٔ: پیتربرایانت
دانشگاه کلرادو، دنور
ترجمهٔ: عبدالرحمن آذری   محمدرضا مشکانی
دانشگاه شهیدبهشتی

این مقاله برخی ازایده‌های متداول هندسی وایده‌های مشابه آماری واحتمالی آنها رابه هم پیوندمی‌دهدونکات برجستهٔ آنها رابرای تدریس ایده‌های آمارمقدماتی به دانشجویان علوم ریاضی وغیرریاضی عرضه می کند. ثمرهٔ اصلی این رهیافت شناخت قدرت شگفت انگیزتعداد قلیلی ازاصول اولیه است. این رهیافت، به جای تشریح‌یک طرزبیان برهم ارزی مفاهیمی که به"زبانهای" مختلف بیان شده‌اندتاکید می کند.

۱. مقدمه

درپنج شش سال گذشته ایده‌های مقدماتی‌آمار رابه نحوی که تاکیدبرهم ارزی بعضی از ایده‌های مشترک درزبانهای مختلف هندسه و آمارداشته است تدریس‌کرده‌ام . ارائهٔ مطالب ازیک درس دوساعته تا سمینار یک هفته‌ای وحتی یک درس‌نیمسال کامل بوده‌است وهمهٔ اینها تاحدودی موفق بوده‌اندودرآنها، کم یابیش، ازرهیافت این مقاله استفاده شده است.

مارگولیس (۱۹۷۹) اشاره می کند که به نظر می رسد هندسه راه طبیعی برای تاکید بر وحدت ایده‌های بنیادی است. تصویر کردن بهترین برازش را به دست می دهد، و زاویه خوبی این برازش را اندازه‌گیری می کند. دانشجویانی که رشتهٔ تحصیلی آنها سوای علوم ریاضی است، باید، این مطلب را درک کنند که اصولاً "تعداد زیادی دستور وجود ندارد، بلکه تعداد زیادی صورتهای گوناگون از یک معنی موجود است. اگر دانشجویان بتوانند این معنی را فرا بگیرند و دریابند که صورتهای گوناگون فقط صورتهای گوناگون هستند، بهتر قادر خواهند بود تا اصول بنیادی را به کار ببرند، و به این ترتیب ممکن است قسمتی از تحسینی را که ریاضیدانان از بیان هندسی ایده‌های آماری ابراز می کنند.

یک داور آگاه، در نقد پیش نویس اولیهٔ این مقاله، متذکر شد که البته واداشتن دانشجویان به فهم این .... مشکل اصلی تدریس هر مبحث ریاضی است. واضح است که قدرت انتقال نظریات مشترک از یک موضوع "زبان" به موضوع دیگر به طور طبیعی در اغلب دانشجویان موجود نیست. بنابراین، مثلاً، موضوعهایی از قبیل آمار زیستی، آمار روانشناسی، آمار بازرگانی، و آمار پرستاری داریم. از این رو، اگرچه ... نشان دادن این شیرازهٔ مشترک که کل موضوع را به هم پیوند می دهد مهم است، شگفت انگیز نیست که بشنویم بسیاری از مدرسین و دانشجویان تدریس و فراگیری ایده‌های مجزا را ساده‌تر می یابند و از غفلت خود به عدم توجه به این شیرازهٔ مشترک بسیار خوشحال اند. در واقع، همان طور که هر (۱۹۸۰) تذکر می دهد، رهیافت هندسی به دلیل استفادهٔ خیلی زیاد از آن در دوران اولیهٔ آمار ریاضی از نظرها افتاده است.

احساس می کنم شاید یکی از دلایل این عدم یگانگی آن است که مطالب مربوطه در سطح مناسب مقدماتی منتشر نشده‌اند. بنابراین، اگرچه از بیان ایده‌های مشابه برحسب مفاهیم هندسه، هندسه تحلیلی و آمار، به عنوان مثال، در کتاب دمپستر (۱۹۶۸)، به طور منظم استفاده شده است، لیکن این مطالب در سطح بالای ریاضی ارائه شده‌اند و منبعی در سطح مطالب بخش ویژهٔ معلمین[۲] موجود نیست.

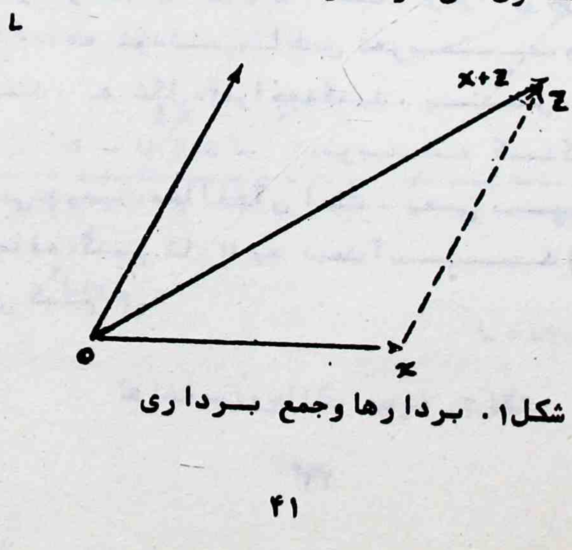
بخشهای ۲ تا ۵ شامل ایده‌های مربوط به هندسه ، هندسهٔ تحلیلی آمار و احتمال است . بخش ۶ شامل نظراتی دربارهٔ ارائهٔ این مطالب و برخی مراجع پیشنهادی است . هیچیک از این مطالب تازه نیستند .

۲. هندسه

در این بخش نشان می دهیم که چگونه ایده‌های هندسی - خط ،صفحه ، طول ، فاصله ،زاویه ، وتصویر- را می توان برحسب بردارها وضرب داخلی بیان کرد . این کار را برای معرفی دو ایدهٔ مهم انجام می‌دهیم : (الف) ایده‌های آشنا (در این مورد ایده‌های هندسی)را می توان به زبان دیگر ،یعنی زبان فضای برداری ، معرفی کرد . (ب)هرگاه چیزی خواص یک بردار را داشته باشد صرفنظر از تصوری که در ابتدا از آن داریم ، می‌توان آن را به طور هندسی تعبیر کرد .

بردارها

با به کاربردن بردارها وبرخی عملیات ساده روی آنها ، می توان ایده‌های پاره خط ، خط، صفحه ، وشکلهای مسطح نظیر مثلث را به این زبان بیان کرد . درشکل ۱ ،صفحهٔ L ویک نقطهٔ خاص روی L راکه مبداء یا صفر ، نامیده می شوددرنظربگیرید . حروفی نظیر x و z رابرای نشان دادن پاره خطهای جهتدار به‌ترتیب از o تا نقاط x و z به کار می‌بریم . پیکانهای روی خطوط شکل ۱ را برای نشان دادن این مطلب رسم نموده‌ایم . درعمل ، این ابهام درعلامتگذاری آنقدر که در ابتدا به نظر می‌رسد، مزاحمت چندانی نیست .



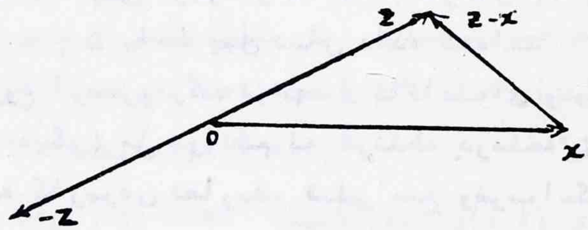
شکل۱. بردارها وجمع برداری

پاره خط جهتدار را بردار می‌نامیم. بنابراین، بردار x پاره خط جهتدار از o تا نقطهٔ x است. هر بردار هم طول دارد و هم جهت. بردار از o تا x همان بردار از x تا o نیست، زیرا با وجود اینکه این دو بردار دارای طولهای برابر می‌باشند، در جهت مخالف هم هستند. به طور کلی، دو بردار را برابر می‌نامیم اگر طول و جهت آنها یکی باشند، هرچند که از نقاط متفاوتی شروع می‌شوند. با این قاعده، مثلاً" بردار نشان داده شده با خط چین در شکل ۱ برابر با بردار z است، زیرا جهت و طول آن با z یکی است. با وجود اینکه این بردار از نقطهٔ x شروع می‌شود نه از نقطهٔ o. به طور ذهنی همهٔ بردارها را، با حفظ جهت و طول، جابه‌جا می‌کنیم تا از مبداء شروع شوند. (در اینجا "همسنگ" ممکن است مناسبتر از اصطلاح اول است.)

همچنین می‌توان راجع به جمع بردارهای x و z، به دست آوردن بردار رسوم x + z صحبت کرد. به طور هندسی، منظورمان این است که از o شروع می‌کنیم و در یک جهت به طول بردار x حرکت می‌کنیم. آنگاه در جهت و طول داده شده به وسیلهٔ بردار x به حرکت ادامه می‌دهیم، تا بالاخره به نقطه‌ای که x + z می‌نامیم برسیم. جمع x و z به معنی قرار دادن مبداء z در انتهای x است. مجموع برداری است از o تا انتهای z. به این طریق x، z، و x + z مثلث شکل ۱ را تشکیل می‌دهند. در بخش ۳ خواهیم دید که چگونه این مطلب به ایدهٔ معمولی جمع اعداد مربوط می‌شود. تا اینجا، فقط یک تعریف است.

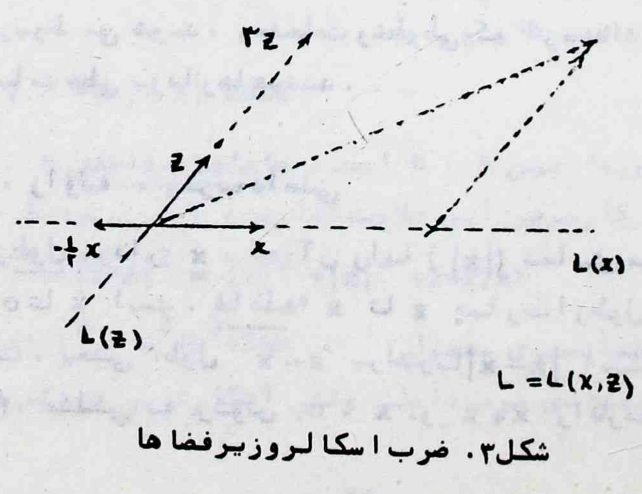
همچنین می‌توانیم بردارها را از هم کم کنیم. بردار از x تا z عبارت از بردار تفاضل z − x است، زیرا آن برداری است که باید به x اضافه شود تا طبق تعریف جمع، بردار z به دست آید. به شکل ۲ مراجعه کنید. پس با این تعریف z = z − o و −z = o − z. توجه کنید که −z همان طول z را دارد، ولی در جهت مخالف آن است، یعنی برداری است که باید به z اضافه کنیم تا o به دست آید (زیرا توجهی به نقطهٔ شروع نمی‌کنیم).

همین طورمی توانیم درموردضرب بردارهادراعداد (که آنها را



شکل ۲ . تفاضل برداری

اسکالرمی نامیم تاازبردارها متمایز باشند) صحبت کنیم به شکل ۳ مراجعه کنید. منظورازبردار $3z$ برداری است درجهت z که طول آن سه برابرطول z است. (به بیان دیگر، منظوربردار $z+z+z$ است.) ازلحاظ هندسی، این بردارحاصل امتدادپاره خط o تا z است. به طورکلی، اگر $c>0$، بردار cz دارای طولی c برابرطول z بوده ودرهمان جهت z است، اگر $c<0$، بردار cz در جهت مخالف است. بنابراین $(-\frac{1}{2}x)$ برداری است که درشکل ۳ نشان داده شده است.



شکل۳. ضرب اسکالروزیرفضاها

بردار x ، خطی را که L (x) نامیده می شود تعیین می کند. این خط حاصل امتداد بیکران پاره خط o تا x از دو طرف است. به اصطلاح برداری، L (x) شامل کلیهٔ مضارب اسکالری x است. هر نقطه، روی L (x) انتهای مضربی از بردار x است. در شکل ۳، خطهای L (x) و L (z) با خط چین نشان داده شده‌اند.

با شروع از صفر و حرکت در جهت x تا فاصله‌ای و سپس حرکت در جهت z تا فاصله‌ای (دیگر) می توانیم به هر نقطه در صفحهٔ L شکل ۳ برسیم، یعنی، با به کاربردن تعاریف قبلی جمع و ضرب اسکالری، هر نقطهٔ روی L را می توان به صورت $ax + bz$ ، به ازای اسکالرهای (عددهای) معین a و b، بیان کرد. درصورتی که x و z با هم موازی نباشند، به ازای هر نقطه از L تنها یک ترکیب خطی به این صورت موجود است. از این لحاظ، x و z با هم صفحه را تعیین می کنند، به همان نحو که x و z بتنهایی، بترتیب، L (x) و L (z) را معین می سازند.

بنابراین، می نویسیم L = L (x و z) ، که همان مجموعهٔ همهٔ ترکیبهای خطی x و z است. L (x)، L (z) و L (x و z) مثالهایی از فضاهای برداری (خطی) هستند. (به طوری که خواهیم دید) از این نظر فضا خوانده می شوند که مترادف با تصور معمولی ما از فضا هستند و خطی به دلیل آنکه از ترکیبات خطی تشکیل شده‌اند. از آنجا که L (x) درداخل L (x ، z) قرار دارد، آن را یک زیرفضا می نامیم. توجه کنید که زیرفضاهای خطی همواره شامل o هستند.

پاره خطها متناظر با بردارها هستند، اطلاع اشکال مستوی به جمع بردارها مربوط می شوند، و صفحات و خطوطی که از مبداء می گذرند مشابه با ترکیبات خطی بردارها هستند.

طول ، فاصله ، زاویه ، وضرب داخلی

منظور از طول بردار x ، که آن را با (|x|) نمایش می دهیم، طول پاره خط o تا x است. فاصلهٔ x تا z عبارت از طول پاره خط از x تا z است، یعنی، طول z-x برابر با |z-x| است.

درشکل ۴، مثلثی به رئوس o ، x ، و x+z را درنظر گرفته‌ایم

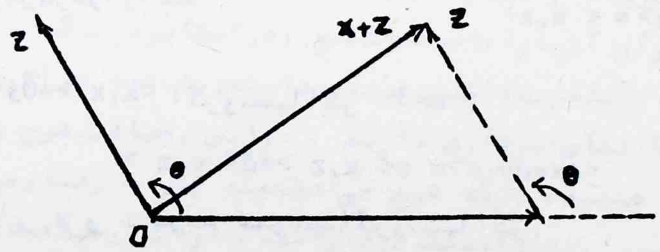
طبق قاعدهٔ کسینوسها :

$$|x+z|^2=|x|^2+|z|^2+2|x||z|\cos\theta \qquad (۱.۲)$$

که درآن θ زاویهٔ بین بردارهای x و z است . موقعی که $\theta=۹۰$ (x و z برهم عمودباشند) ، این مثلث قائم الزاویه است ، $\cos\theta=۰$ ، و (۱.۲) به رابطهٔ آشنای فیثاغورس بدل می شود :

$$|x+z|^2=|x|^2+|z|^2 \qquad (۲.۲)$$

تفاوت بین عبارتهای (۱.۲)و(۲.۲) کمیت $2|x||z|\cos\theta$ است ، که عبارت از معیاری است که میزان نقص رابطهٔ فیثاغورس (۲.۲) ،یعنی



شکل ۴. قانون کسینوسها

میزان قائمه __نبودن__ زاویهٔ بین x و z ، رامی سنجد. این کمیت توصیف بنیادی رابطهٔ بین دوبردار x و z است ، وماآن رابیشترمورد مطالعه قرارخواهیم داد.

به ازای دوبردار x و z ، کمیت

$$\langle x,z\rangle=|x||z|\cos\theta \qquad (۳.۲)$$

که درآن θزاویهٔ بین x ، z است ، __حاصلضرب داخلی__ x ، z نامیده می شود. با به کاربردن این علامت گذاری ، (۱.۲) تبدیل می شودبه

$$|x+z|^2=|x|^2+|z|^2+2\langle x,z\rangle \qquad (۴.۲)$$

که متناظربااتحادجبری معمولی $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ است .

طبیعت بنیادی ضرب داخلی وقتی آشکارترمی شودکه دریابیم

اگرحاصلضرب داخلی دوبردار را بدانیم ، طولها ، فاصله‌ها ،وزوایای مربوط به دوبردار را نیز می دانیم :

طول :

$$|x|^2 = \langle x,x \rangle$$

$$|z|^2 = \langle z,z \rangle$$

فاصله :

$$|z-x|^2 = |x|^2 + |z|^2 - 2\langle x,z \rangle$$

$$= \langle x,x \rangle + \langle z,z \rangle - 2\langle x,z \rangle$$

زاویه :

$$\cos\theta = \langle x,z \rangle / (|x||z|)$$

$$= \langle x,x \rangle / \sqrt{\langle x,x \rangle \langle z,z \rangle}$$

هنگامی که ضرب داخلی را بدانیم ، ازهندسه آگاهی داریم . درموردضرب داخلی روابط زیربرقرار است

$$\langle x,z \rangle = \langle z,x \rangle$$

$\langle x,x \rangle \geq 0$ و $\langle x,x \rangle = 0$ اگروتنها اگر $x=0$,

(۵۰۲)

$$\langle cx+dy,z \rangle = c\langle x,z \rangle + d\langle y,z \rangle$$

بویژه ، دوبردار x و z برهم عمودنداگروتنها اگر

(۶۰۲)

$$\langle x,z \rangle = 0$$

فضاهای برداری

قبلا" دیدیم که هندسهٔ مسطحه را می توان برحسب بردار، جمع برداری ، ضرب اسکالر، وضرب داخلی بیان کرد. این عمل را می توان درموردهندسهٔ سه بعدی نیز انجام داد. به جای نقطهٔ x درصفحه، نقطهٔ x درفضا راداریم . پاره خط جهتدار امتدادیافته ازمبداء به x یک بردار است . حاصلضرب داخلی دوبردار x و z همچنان به وسیلهٔ (۳۰۲) تعریف می شود، زیرا باوجوداینکه بردارها درفضاهستند، هردوی از آنها درصفحه‌ای قراردارند، وزاویهٔ بین آنها کاملا" تعریف شده است .

بنابراین ، باجمع ، ضرب اسکالر، وضرب داخلی بردارها درفضا ما هم معمولی هندسهٔ اقلیدسی سه بعدی را به دست می آوریم .درواقع

خودمفهوم **بعد** مربوط به این ایده‌ها می شود. یک خط نظیر $L(x)$ به وسیلهٔ یک بردار x تعیین می شود ـ این خط **یک** بعدی است. صفحهٔ $L(x, y)$ به وسیلهٔ دوبردار همخط x ، y معین می شود. ایدهٔ معمولی ما ازفضا سه بعدی است: هرنقطه را می توان به وسیلهٔ ترکیب خطی سه بردار غیرهمصفحه نشان داد، ومی توان آن را $L(x, y, z)$ نامید. $L(x, y)$ **یک زیرفضای** دوبعدی از $L(x, y, z)$ ـ صفحه‌ای که ازمبداء می گذرد ـ خواهدبود. $L(y, z)$ یک زیرفضای دیگر است. به طورکلی، حداقل تعدادبردارهای لازم برای تعیین یک زیر فضا **بعد** آن زیرفضانامیده می شود.

یک فضای برداری (با بعدمتناهی) تجریداین رهیافت به هندسه است. هرگاه (الف) مجموعه‌ای ازعناصری راکه بردارنامیده می شوندومی توان آنها را مانندبالاجمع ودراسکالرضرب کرد، داشته باشیم، و(ب) حاصلضرب داخلی هردوبردارتعریف شده در(۵۰۲) صدق کند، گوییم یک فضای برداری داریم. دراین رهیافت شرح نمی دهیم که بردارهاچه هستند، بلکه شرح می دهیم‌که چگونه رفتارمی کنند. هر چیز که این چنین رفتارکندیک بردار است. ازاین رهیافت دوایدهٔ مهم که مکمل هم هستندسرچشمه می گیرند: (الف) باوجوداینکه ایده‌های اولیه ازایده‌های هندسی سرچشمه‌گرفته‌اند، لازم نیست‌که اعضای یک فضای برداری شکل وشمایل هندسی داشته باشند. (ب) به محض تعریف یک ضرب داخلی، عناصریک فضای برداری رابدون توجه به ماهیت "واقعی" آنهامی توان به طورهندسی تعبیرکرد. به‌عنوان مثال، متغیرهای تصادفی x و y رادرنظربگیرید. جمع و ضرب آنها نیز یک متغیرتصادفی است، وبه همین ترتیب $cx+dy$ نیز به ازای همهٔ اعداد c و d یک متغیرتصادفی است. یعنی، متغیرهای تصادفی رامی توان جمع وضرب اسکالری کرد، که این عمل آنها رابه صورت بردارددرمی آورد. اگریک ضرب داخلی مناسب تعریف شود، می توانیم دربارهٔ متغیرهای تصادفی به طورهندسی فکرکنیم، آنگاه، ترکیبهای خطی متغیرهای تصادفی نظیرصفحاتی هستندکه ازمبداء می گذرند، والی آخر. دربخش ۵ به این مثال مجددا" برخواهیم گشت.

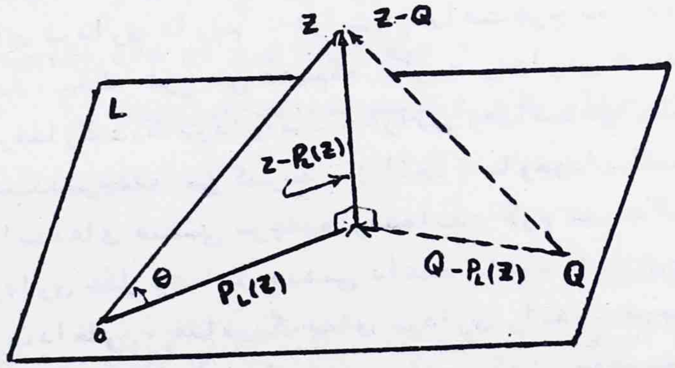
تصاویر

درشکل ۵، **تصویرقائم** $P_L(z)$ یکنقطهٔ z راروی صفحهٔ L ،شامل o داریم . به طریق دیگر، می‌توانیم بگوییم که بردار $P_L(z)$ تصویرقائم بردار z روی صفحهٔ L است . دوخاصیت ، تصویرقائم راتعریف می‌کنند

خاصیت الف : $P_L(z)$ روی صفحهٔ L قراردارد . و

خاصیت ب : $z-P_L(z)$ عمودبرهربردار L است ، یعنی $\langle x, z-P_L(z)\rangle = 0$ بازای هر x و L .

قضیهٔ سادهٔ زیربرخی ازخواص مهم تصاویررا ارائه می کند. برهانها قدرت فوق العادهٔ ضربهای داخلی رابخوبی نشان می دهند. این برهانها تمرینهای خوبی برای دانشجویان پیشرفته است . (روابط (۵.۲)،(۶.۲) وخاصیتهای الف وب رابه کاربریدوآنهارابه ترتیبی که فهرست شده‌اند ثابت کنید.)



شکل ۵. تصاویر

قضیهٔ ۱(ق ۱) بردار z در L است اگروتنها اگر $P_L(z)=z$. این قضیه می گویداگر z از اول درصفحهٔ L باشد، تصویرکردن آن چیزی را عوض نمی کند. بعکس ، هربرداری که باتصویرکردن آن بر L چیزی عوض نشود، آن بردارازاول در L قرارداشته است.

قضیهٔ ۲ (ق۲) بردار z بر L عموداست اگروتنها اگر $P_L(z)=0$. این قضیه می گویداگر z بر L عمودباشد، ازتصویرکردن بر L چیزی حاصل نمی شود. بعکس، هرچیزی که ازتصویرکردن آن بر L چیزی حاصل نشود بایدازاول برL عمودبوده باشد.

قضیهٔ ۳(ق ۳) $P_L \; P_L(z) = P_L(z)$. تصویرکردن تصویرچیزی را عوض نمی کند، زیرا $P_L(z)$ در L است وبنابراین (ق۱) مورداستفاده قرارمی گیرد.

قضیهٔ ۴(ق ۴) $|z|^2 = |P_L(z)|^2 + |z-P_L(z)|^2$. این همان رابطهٔ فیثاغورس است.

قضیهٔ ۵(ق ۵) برای هربردار z ، تصویریکتاست. یعنی، اگر $P_L''(z)$, $P_L'(z)$ دوتصویریک نقطهٔ z برروی یک زیرفضای L باشند، $P_L'(z)=P_L''(z)$.

قضیهٔ ۶(ق ۶) $P_L(z)$ ازهمهٔ بردارهای واقع در L ، نزدیکترین بردار به z است.

قضیهٔ ۷(ق ۷) عمل تصویرکردن یک عمل خطی است: $P_L(ay+z)=aP_L(y)+P_L(z)$.

اثبات (ق۶) آموزنده است (به شکل ۵ مراجعه کنید). نقطهٔ دلخواه دیگری در L رادرنظربگیرید. ازخاصیت ب، بردار $z-P_L(z)$ بر بردار $Q-P_L(z)$ عموداست. آنگاه، ازرابطهٔ فیثاغورس نتیجه می شودکه:

$$|z-Q|^2 = |z-P_L(z)|^2 + |Q-P_L(z)|^2$$

$$\geqslant |z-P_L(z)|^2$$

برحسب ضرب داخلی این برهان به این صورت درمی آید :

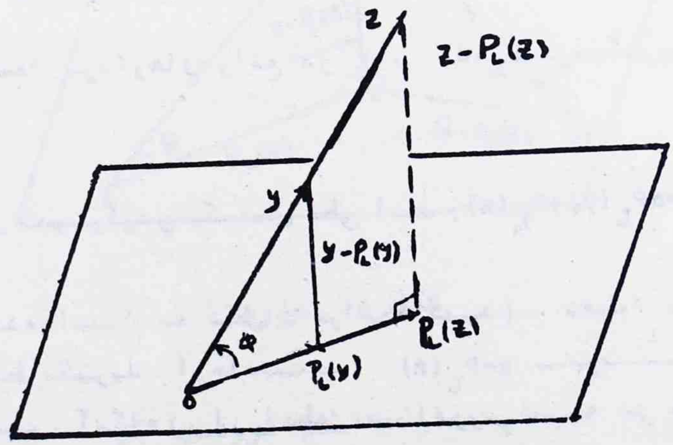
$$|z-Q|^2 = |z-P_L(z)+P_L(z)-Q|^2$$
$$= < z-P_L(z)+P_L(z)-Q, z-P_L(z)+P_L(z)-Q >$$
$$= < z-P_L(z), z-P_L(z) > + < P_L(z)-Q, P_L(z)-Q >$$
$$+2 < z-P_L(z), P_L(z)-Q >$$

(با به کاربردن خاصیت ب)

این گونه بیان موازی ایده‌ها در " زبان " هندسه وضربهای داخلی مضمون ثابت بحث ماست .

ازلحاظ آموزشی ، این اثبات یک مزیت دیگردارد و آن حل مسئله کمینه کردن با استفاده ازمفاهیم آشنای هندسه به جای مفاهیم حساب دیفرانسیل وانتگرال است . البته ، به طوررسمی بایدوجودیک بردار باخاصیتهای الف وب وغیره راثابت کنیم .

شکل ۶ رادرنظربگیرید. فاصلهٔ بردار y ازصفحهٔ L چقدراست ؟ بردار z چطور ؟ یک معیارطبیعی برای این فاصله‌ها ازتوان دوم فاصله



شکل۶. اندازه‌گیری فاصله‌تاصفحه

تانزدیکترین نقاط صفحه، یعنی اعداد $|y-P_L(y)|^2$ و $|z-P_L(z)|^2$ به دست می آید. این معیارهاقدرمطلق توان دوم فاصله‌ها ازانتهای بردارهاتاصفحه رااندازه‌گیری می کنند.

براساس این اندازه‌ها z دورتر از y نسبت به صفحهٔ L است. اندازهٔ دیگر زاویهٔ ψ بین z و L است. کمیت $\cos^2(\psi) = |P_L(z)|^2 / |z|^2$ درمقیاس 0 (وقتی z بر L عمود است) تا ۱ (وقتی z در L است)، میزان نزدیکی z به L را اندازه‌گیری می کند، یعنی مقداری که نشان می دهد تا چه اندازه می توان z را به وسیلهٔ ترکیبهای خطی بردارهای واقع بر L بیان کرد. هردو اندازه کاربرد خاص خود را دارند. عبارت $|z-P_L(z)|$ طبیعتا" به عنوان فاصله تعبیر می شود، در حالی که زاویه این مزیت را دارد که وقتی z امتداد یا انقباض یابد، این معیار نزدیکی تغییر نمی یابد. برحسب این معیار بردارهای y و z به یک اندازه نزدیک به L هستند، و این موضوع در کاربردهای آماری می تواند مفید باشد. به طور خلاصه:

ملاک ۱. تصویر $P_L(z)$ نزدیکترین بردار واقع در L به z است.

ملاک ۲. کمیت $|z-P_L(z)|$ یا زاویهٔ ψ (یا تابعی از آن، نظیر کسینوس آن زاویه) می تواند برای اندازه‌گیری $P_L(z)$ به z مورد استفاده قرار گیرد.

دربخش ۴، مجددا" به این اصول برخواهیم گشت. توجه کنید که تصویر و زاویه، هردو به حاصلضرب داخلی بستگی دارند.

۳. هندسه تحلیلی

دربخش ۲، بردارها و ضربهای داخلی معرفی شدند و برای تشریح ایده‌های هندسی مورد استفاده قرار گرفتند. اگرچه تنها هنگامی می توانیم عملا" محاسبات جبری را انجام دهیم که این ایده‌ها را برحسب مختصات بیان کرده باشیم. در این بخش، به طور خلاصه هندسه مختصاتی را مرور می کنیم و از آن برای رسیدن به ایده‌های هندسه‌های n بعدی استفاده می کنیم.

مختصات

فضای برداری، ظاهرا" جدید، L را درنظر می گیریم که به

صورت زیرتعریف شده است :

۱. بردارها (اعضای L) همگی سه‌گانه‌های اعداد به صورت $z=(z_1,z_2,z_3)$ ، $x=(x_1,x_2,x_3)$ والی آخر، هستند.

۲. جمع دوبردار موءلفه به موءلفه تعریف شده است :

$$(z+x)=(z_1+x_1,z_2+x_2,z_3+x_3)$$

۳. ضرب اسکالری به طورمشابه تعریف شده است :

$$cz=(cz_1,cz_2,cz_3)$$

۴. حاصلضرب داخلی هردوبردار با ضابطهٔ

$$\langle z,x \rangle = z_1x_1+z_2x_2+z_3x_3 \tag{۱۰۳}$$

تعریف شده است . تحقیق این مطلب که L در تعاریف فضای برداری با بعد متناهی صدق می کند ساده است . پس ، طول بردار z با ضابطهٔ

$$|z|^2 = z_1^2+z_2^2+z_3^2 \tag{۲۰۳}$$

داده می شود.

بردارهای $i_1=(1,0,0)$ ، $i_2=(0,1,0)$ ، $i_3=(0,0,1)$ رادرنظر می‌گیریم . با به کاربردن (۱۰۳) و (۲۰۳) می بینیم که

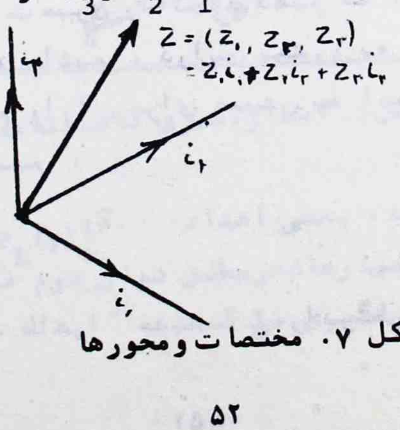
$|i_1|^2=|i_2|^2=|i_3|^2=1$ و

$$\langle i_1,i_2\rangle = \langle i_1,i_3\rangle = \langle i_2,i_3\rangle = 0 \tag{۳۰۳}$$

یعنی ، بردارهای i_1 ، i_2 و i_3 بردارهای یکه (به طول ۱) هستندودوبه‌دو برهم عمودند. بعلاوه ، هربردار $z=(z_1,z_2,z_3)$ رامی توان به صورت

$$z = z_1i_1+z_2i_2+z_3i_3 \tag{۴۰۳}$$

به عنوان ترکیبی خطی ازبردارهای i_1، i_2 و i_3 نوشت.



شکل ۷. مختصات ومحورها

بنابراین ، فضای برداری L عبارت است از $L=L(i_1, i_2, i_3)$ ، یعنی فضای سه بعدی که با i_3, i_2, i_1 معین می شود . شکل ۷ این رابطه را به طور هندسی نشان می دهد . **محورهای** i_2 ، i_1 و i_3 به صورت دو به دو عمود بر هم نشان داده شده اند . ضرایب z در (۴۰۳) **مختصات** z نسبت به این محورها نامیده می شوند .

پس ، سه گانه های اعداد (z_1, z_2, z_3) را می توان به طور هندسی تعبیر کرد ، درصورتی که آنها را به عنوان بردارهایی در فضای معین شده با (۴۰۳) نسبت به یک مجموعهٔ فرضی محورهای متعامد i_1 ، i_2 و i_3 و ضرب داخلی (۱۰۳) تجسم کنیم ، می توان ثابت کرد که زاویه ها ، کسینوسها ، وغیره که از این ضرب داخلی به دست می آیند با مفاهیم معمولی هندسی توافق دارند . بویژه ، هرگاه (۱۰۳) صفر شود ، بردارهای x و z بر هم عمودند . یک قضیهٔ استاندارد در هندسهٔ تحلیلی عبارت است از :

$$\cos^2 \psi = \frac{(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3)^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)} \tag{۵۰۳}$$

که با (۱۰۳) توافق دارد . معادلهٔ (۲۰۳) رابطهٔ فیثاغورس در فضای سه بعدی است . بنابراین ، یک تناظر بین ایده های هندسی و سه گانه های اعداد داریم که از تعبیر سه گانه ها به عنوان یک فضای برداری با ضرب برداری تعریف شده با (۱۰۳) به دست می آید .

از بخش ۲ ، می دانیم که اگر بردارها و ضربهای داخلی را داشته باشیم ، یک هندسه را اساسا" معین کرده ایم . با این دیدگاه ، نیازی به محدود کردن خود به فضای سه بعدی نداریم . می توانیم گرد آورده ای از n عدد z_1 ، z_2 ، .... ، z_n را به عنوان یک بردار $z=(z_1, z_2, ..., z_n)$ ، یا به عنوان نقطه ای که مختصات آن همین z ها نسبت به یک مجموعهٔ فرضی محورهای متعامد است تجسم کنیم . در این الگو ، بردارها n گانه هایی به صورت $z=(z_1, z_2, .., z_n)$ هستند ، وجمع وضرب اسکالری برحسب یک یک مختصات تعریف شده اند . محورها در جهتهای $i_1=(1,0,..,0)$ ، $i_2=(0,1,...,0)$ و $i_n=(0,0,....,1)$ هستند . فضای n بعدی $L(i_1, i_2, ..., i_n)$ عبارت از کلیهٔ ترکیبهای خطی $i_1, ..., i_n$ است . حاصلضرب داخلی x و z

عبارت است از :

$$< x,z >= x_1z_1+x_2z_2+\dots+x_nz_n \qquad (۶۰۳)$$

اثبات این امرکه با این تعریفها n گانه‌ها نظیربردارها عمل می کنند ساده است و (۵۰۲) برقرار است . به این ترتیب ، به روشی مجرد ، n گانه‌های اعداد به بردارهای یک فضای n بعدمتناظرمی شوند . این n گانه‌ها دارای طول $< z,z >= |z|^2$ هستندوسایرمطالب . این موضوع درفضای سه بعدی ($n=۳$) دقیقا" همان هندسهٔ معمولی است .هنگامی که $n> 3$ ، فضای مربوطه مشابه یک تعمیم (تصوری) ایده‌های معمولی ماست . مثلا" ، $L(x,z)$ ، مجموعهٔ همهٔ ترکیبهای خطی x و z ، اکنون یک صفحهٔ دوبعدی است که ازمبداء یک فضای n بعدی می گذرد والی آخر . اگرچه تعریفهایی ازقبیل (۶۰۳) به صورت مختصاتی داده‌شده‌اند ، لکن درصورتی که مفیدباشد ، می توانیم درمورد n گانه‌های اعداد به عنوان اشیایی هندسی فکربکنیم .

محورهای دیگر

اگرمختصات رابدانیم ، می توانیم حاصلضرب داخلی رااز روی (۶۰۳) حساب کنیم . این دستوربرای یک مجموعهٔ خاص ازمحورهاست. اگرمی خواستیم مجموعهٔ دیگری ازمحورهای متعامدرابه کاربریم ، هرنقطهٔ هندسی دارای مجموعهٔ مختصات جدیدی برای به کاربردن در محاسبهٔ حاصلضربهای داخلی (وازروی آنها ، طول ،زاویه ،وغیره) خواهدبود . تاموقعی که محورها متعامدباشند ، دستوربه صورت کلی (۶۰۳) خواهدبود . اگرمحورها متعامدنباشند ، دستورخیلی پیچیده‌ای لازم است .

ازطرف‌دیگر ، مفاهیمی که اساسا" هندسی هستندازقبیل طول، زاویه ، وغیره که ازضرب داخلی به دست می آیندبرای هردستگاه مختصات یکی هستند . به عنوان مثال ، زاویهٔ بین دوبردار بستگی به این ندارد که شماکدام محورها را به کارمی برید . از این لحاظ محورها عصای دست محاسب هستند . هرمجموعه‌ای ازمحورها راکه‌بخواهیم می توانیم به کاربریم ولااقل برای منظورهای هندسی هرمجموعه‌ای راکه به کاربریم همان جواب رابه دست خواهیم آورد .

ضربهای داخلی دیگر

ضرب داخلی (۶۰۳) ضرب داخلی اقلیدسی است ، زیرا برای $n = 3$ متناظر با هندسهٔ معمولی اقلیدسی است . این ضرب تاکنون رایجترین ضرب داخلی بوده که برای n گانه‌های اعداد به کار رفته است و تنها ضرب داخلی موردنیاز این مقاله است ، لکن به هیچ وجه تنها ضرب داخلی که بتوان تعریف کرد نیست . هر تابعی از x و z که در (۵۰۲) صدق کند ، یک ضرب داخلی قابل قبول است . وقتی طبق قراردادهای ما (مثلاً $<z,z>$ توان دوم طول z است) تعبیر شود ، آن ضرب داخلی هندسهٔ خاص خود را به وجود خواهد آورد که ممکن است با مفاهیم معمولی ما موافق با شد یا نباشد .

اگرچه در بخش ۵ ، یک ضرب داخلی دیگر را خواهیم دید ، این ضرب داخلی برای n گانه‌های اعداد نیست . نتایج بخشهای ۲ و ۳ را می توانیم به صورتی که در دو ستون اول جدول ۱ نشان داده شده‌اند خلاصه کنیم . هر مفهوم هندسی دارای یک بیان متناظر به صورت مختصاتی است و می توانیم به هر طریقی که برای ما مناسب باشد در مورد آن فکر کنیم . مدرسین می توانند از دانشجویان بخواهند که جدول ۱ یا معادل آن را تشکیل دهند ، و بتدریج که تدریس می شوند ستونهای متوالی آن را تکمیل کنند .

جدول ۱.۱ ایده‌های فضای برداری که به طرق گوناگون بیان شده‌اند.

ایده‌های فضای برداری	بیان هندسی: صورت بدون استفاده از مختصات	بیان هندسی: صورت تحلیلی	بیان آماری	بیان احتمالی
بردار z	پاره‌خط جهتدار از o تا z	$z=(z_1,\dots,z_n)$	داده‌ها $z_1,\dots,z_n$	متغیر تصادفی z
بردار z-y	پاره‌خط جهتدار از y به z	$z-y=(z_1-y_1,\dots,z_n-y_n)$	تفاضلها $z_1y_1,\dots,z_n-y_n$	متغیر تصادفی z-y
حاصلضرب داخلی $\langle x,z\rangle$,z,x	معیار عدم تعامد	$x_1z_1+\dots+x_nz_n$	مجموع حاصلضربهای مستطیلی z	$E(z)$
$\lvert z\rvert^2=\langle z,z\rangle$	توان دوم فاصلهٔ از o تا z	$z_1^2+\dots+z_n^2$	مجموع توانهای دوم z	$E(z^2)$
$\lvert z-y\rvert^2$	توان دوم فاصله از y تا z	$(z_1-y_1)^2+\dots+(z_n-y_n)^2$	مجموع توان دوم تفاضلها	$E(z-y)^2$
$\langle x,z\rangle=0$	تعامد: x و z برهم عمودند			
همه بردارهای به صورت	صفحهٔ L(x، y، z...) که از o می گذرد		همه مدلهایی به صورت ax+by+cz+...	همهٔ قالبهای توان دوم انتگرال پذیر از x y z ..
بردار p روی L(x ،y ،...) طوری که $\langle x-P,Q\rangle=0$ به ازای هر Q در L	تصویر $P_L(z)$ از z بر روی	L(x,y,...)	مدلی با بهترین برازش به صورت ax+by+cz+...	
بردار "۴۵ درجهٔ" J		$J=(1,1,\dots,1)$	ثابت (۱،۱،...،۱)	ثابت ۱
$\lvert x-P_J(x)\rvert^2$		$\Sigma(x_i-\bar{x})^2$	(n-1) × واریانس نمونه‌ای x	واریانس x
$\langle x-P_J(x),z-P_J(z)\rangle/\lvert x-P_J(x)\rvert\cdot\lvert z-P_J(z)\rvert$	کسینوس زاویهٔ بین $x-P_J(x),z-P_J(z)$		همبستگی نمونه‌ای بین x و z	همبستگی بین x و z
$\langle x-P_J(x),z-P_J(z)\rangle=0$	$z-P_J(z)$ و $x-P_J(x)$ موازی هستند		x و z همبستگی ندارند	x و z همبستگی ندارند

۴. آمار

موارد معمول زیر از آمار توصیفی را در نظر می‌گیریم .

(س ۱) می خواهیم داده‌های $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ را به عددی تک مانند a خلاصه کنیم . بهترین عدد a که از آن استفاده کنیم چیست ؟ این عدد خلاصه تا چه حد خوب است ؟

(س ۲) اندازه‌های $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ و $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ برای دو مشخصهٔ y و z از n واحد آزمایشی را در اختیار داریم . رابطهٔ بین این دو مشخصه ، در صورت وجود ، تا چه حد قوی است ؟

(س ۳) گمان می رود که مشخصاتی مانند z ، x ، و y از n واحد آزمایشی با تابع خطی $z = a + bx + cy$ (لااقل به طور تقریبی) به هم مربوط هستند . کدام تابع خطی این رابطه را به بهترین وجه توصیف خواهد کرد ؟ این توصیف تا چه حد رسا است ؟

در رهیافت کلاسیک برای این موارد ، از ملاک کمترین توانهای دوم استفاده می کنیم تا بهترین برازش را تعریف کنیم . در این بخش ، نشان می دهیم که این رهیافت چگونه با ایده‌های هندسی بخشهای ۲ و ۳ ارتباط دارد . پس از آنکه این ارتباط روشن شد ، رهیافت کمترین توانهای دوم رهیافتی مناسب و جامع برای مواردی که غالباً "با فرمولها جداگانه عمل می شوند ، در اختیار خواهد گذاشت . اصول رسمی استنباط آماری نیز رهیافت کمترین توانهای دوم را توجیه می کنند ، اما به خاطر بسیاری از هدفهای آموزشی ، وحدت ، سادگی ، و جاذبهٔ شهودی هندسی آن توجیهات کافی هستند .

مناسب است که داده‌های مذکور در (س ۱) – (س ۳) را به صورت ماتریسی شامل n سطر (هر سطر برای یک مشاهده یا یک واحد آزمایشی) و یک ستون برای هر مشخصه یا متغیر به شرح زیر در نظر بگیریم :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & z_1 & x_1 & y_1 & \ldots \\
1 & z_2 & x_2 & y_2 & \ldots \\
. & . & . & . & \\
. & . & . & . & \\
1 & z_n & x_n & y_n & \ldots,
\end{array}$$

n گانه‌هایی‌که ستونهای ماتریس را تشکیل می‌دهندبه عنوان بردار تعبیر کنیم . بردار ثابت $J = (1,1,\ldots,1)$ درمطالب بعدی نقش ویژه‌ای به عهده خواهدداشت . البته ، n گانه‌ء $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ را از لحاظ هندسی تعبیرخواهیم کرد .

طبق اصل کمترین توانهای دوم بهترین عددخلاصه‌ء تک در (س ۱) عددی مانند a است که

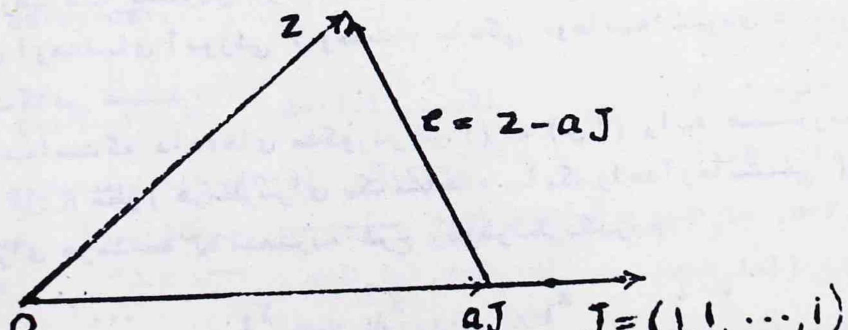
$$\Sigma (z_i - a)^2 \tag{۱۰۴}$$

کمینه باشد . بااستفاده ازتعاریف قبلی وتعریف ضرب داخلی اقلیدسی رابطه‌ء (۱۰۴) را می توان به صورت زیرنوشت :

$$| z - aJ |^2 \tag{۲۰۴}$$

پس از لحاظ هندسی (به شکل ۸ مراجعه کنید) ، رهیافت کمترین توانهای دوم برای (س ۱) مبین آن است که به عنوان مدلهای ممکن بایستی همه‌ء مضارب aJ از J رادرنظربگیریم ومضربی راکه نزدیکترازهمه به z است انتخاب کنیم ، زیرا بااستفاده ازحاصلضرب داخلی اقلیدسی ، " کمترین توانهای دوم " به معنی " کوتاهترین " فاصله است .

ازبحث هندسی بخش ۲ ، می فهمیم که نزدیکترین نقطه عبارت است از $P_J(z)$ یعنی تصویر z بر J .اگرعمل تصویرکردن را با عمل ضرب داخلی مشخص کنیم ، می توانیم مقدار a را به دست آوریم :



مدلهای ممکن

شکل ۸. یک مدل آماری ساده

بنا برخاصیت الف ،

(۳۰۴)   a یی وجود دارد که $P_J(z)=aJ$

بنا برخاصیت ب ،

(۴۰۴) $\langle z-P_J(z)\ ,\ J\rangle =0$

پس از جایگذاری (۳۰۴) در (۴۰۴) ، به دست می آوریم

(۵۰۴) $\langle z,J\rangle=a\langle J,J\rangle$

با استفاده از ضرب داخلی اقلیدسی ، رابطهٔ (۵۰۴) تبدیل می شود به

$\Sigma z_i = an$ یا

(۶۰۴) $a=\bar{z} = \frac{1}{n}\ \Sigma z_i$

بدین ترتیب به سوال اول (س ۱) جواب داده می شود. میانگین نمونه ، یعنی $\bar{z}$ ، بهترین عددتک برای خلاصه کردن داده‌هاست. هندسه راه حل رانشان می دهد، هندسهٔ تحلیلی امکان محاسبهٔ آن رافراهم می سازد. جوابی که درشکل ۹ تصویرشده است نشان می‌دهدکه چگونه z رابه دو مؤلفهٔ متعامدیکی $\bar{z}J$ یعنی مؤلفهٔ واقع برراستای J ، ودیگری $e = z - \bar{z}J$ یعنی باقیمانده یاخطا، تجزیه کرده‌ایم . اگرهمه z ها مساوی می‌بودند، z دقیقا" روی J واقع می شد، ومی داشتیم $|e|^2=0$. پس می توانیم $\bar{z}J$ رابه عنوان قسمتی از z درنظربگیریم که می تواند به طوررضایتبخشی با مقداری ثابت تبیین شود. هرقدرکه $|e|^2$ بزرگتر ازصفرباشد، این تبیین ناقصتراست ، زیراداده‌هابیشترتغییرمی کنند. ازاین رو e رابه عنوان تغییرات z تعبیرمی کنیم . بنابراین ،

z =(مؤلفهٔ ثابت)+(تغییرات)= $\bar{z}J+\ (z-\bar{z}J)$

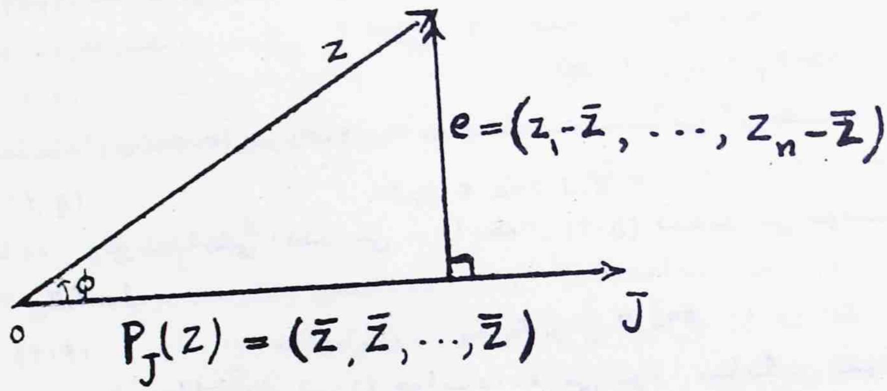
تجزیهٔ متناظربرای توان دوم طولها رامی توان ازرابطهٔ فیثاغورس به دست آورد:

$$|z|^2 = |\bar{z}J|^2 + |z-\bar{z}J|^2$$

این تجزیه دراین موردعبارت است از

$$\Sigma z_i^2 = n\bar{z}^2 + \Sigma (z_i-\bar{z})^2$$

و این همان تجزیهٔ معمولی مجموع توانهای دوم است .



شکل۹. به دست آوردن میانگین نمونه

تا چه حد $\bar{z}$ آمارهٔ خلاصهٔ خوبی است؟ برای سنجش خوبی آن معیارهای مختلفی به کار می روند. بنابر ملاک ۲، کمیت ψ یا $|e|^2$ می تواند به کار گرفته شود. اغلب $|e|^2$ را مجموع توان دوم خطاها (SSE) می نامند. (می توانید برای ψ تعبیری برحسب کمیتهای آماری کلاسیک پیدا کنید؟) غالبا" شکل تغییریافته‌ای از $|e|^2$ موسوم به میانگین توان دوم خطاها (MSE) به کار می رود (اگرچه در این مورد خاص معمولا" این نام به آن اطلاق نمی شود). انتظار می رود که $|e|^2$ به n بستگی داشته باشد، یعنی هرقدر تعداد مشاهدات بیشتر شوند، تغییرات نیز، لااقل به طور مطلق، بیشتر شوند. برای آنکه این وابستگی را به حساب آوریم، می توانیم SSE را بر بعد زیرفضای مربوطه تقسیم کنیم، تا متوسط توان دوم خطا "درهر بعد" به دست آید. چون e مقید است به اینکه در زیرفضای (n −۱) بعدی متعامد بر J واقع شود، SSE را بر (n−۱) تقسیم می کنیم و به دست می آوریم :

$$MSE = |e|^2 \ /(n-1) = (n-1)^{-1} \ \Sigma \ (z_i - \bar{z} \ )^2$$

که همان واریانس معمولی نمونه‌است. پس هریک از دو مقدار SSE یا MSE معیاری است برای این امر که تا چه حد بهترین عدد خلاصهٔ

تک یعنی $\bar{z}$ درتلخیص داده‌ها موفق نیست. ضمنا، ابعادزیرفضایی که برداری مقیدبه قرارگرفتن درآن است غالبا درجهٔ آزادی مربوط به آن بردارنامیده می شود.

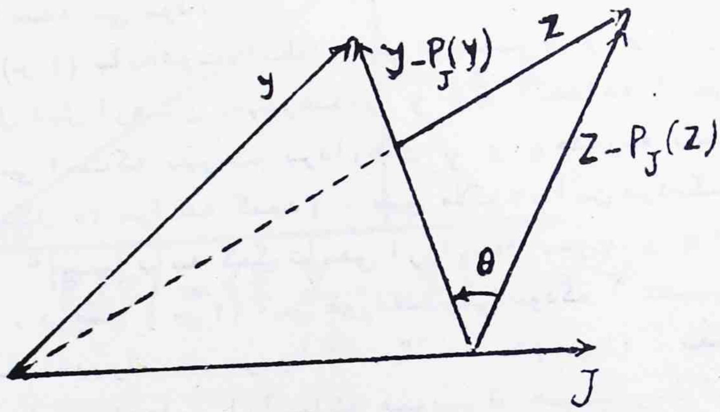
درمورد (س ۲) بایدقوت رابطهٔ بین دومتغیر y و z راارزیابی کنیم. اگرمثل قبل ازهمان تعبیرهندسی y و z استفاده کنیم، این مطلب بدان معنی است که بپرسیم بردارهای y و z چقدربه یکدیگر نزدیکند (به شکل ۱۰ مراجعه کنید). طبق ملاک ۲، این نزدیکی را می توان با $|y-z|^2$ یابه کمک تابعی اززاویهٔ بین y و z اندازه گرفت. لیکن، درعمل (س ۲) این طورتفسیرمی شودکه "تغییرات y باچه قوتی به تغییرات z مربوط است؟" مانند (س ۱)، تغییرات y و z برابربا موءلفه‌هایی ازآنها که عمودبر J هستنددرنظرگرفته می شوند، یعنی بردارهای $y-\bar{y}J = y-P_J(y)$ و $z-\bar{z}J = z-P_J(z)$ درشکل ۱۰. ملاک معمول برای رابطهٔ بین تغییرات y و z عبارت است از $\cos(\theta)$ درشکل ۱۰، که معمولا "همبستگی (سادهٔ) y و z خوانده می شود. وقتی $\cos^2(\theta)=1$ ($\theta=0°$ یا $180°$)، تغییرات y دقیقا " متناسب باتغییرات z است یعنی $y-\bar{y}J$ و $z-\bar{z}J$ موازی اند. وقتی $\cos(\theta)=0$ ($\theta=90°$)، تغییرات y z رابطه‌ای ندارد، یعنی $y-\bar{y}J$ و $z-\bar{z}J$ متعامدند.

وقتی حاصلضرب داخلی $y-\bar{y}J$ و $z-\bar{z}J$ بردرجهٔ آزادی مناسب یعنی $(n-1)$ تقسیم شود، کوواریانس y و z حاصل می شود.

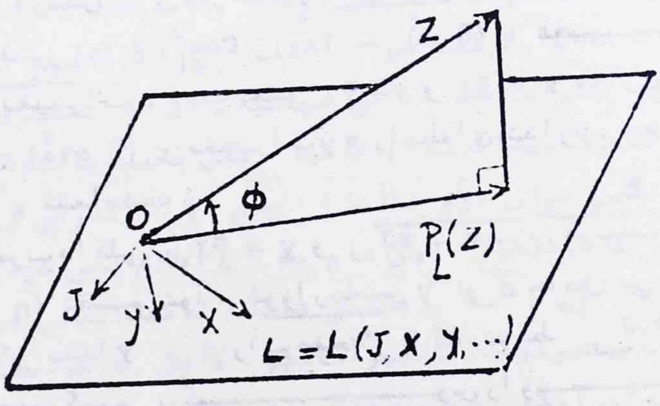
درحالت کلیتر، اگرابتدا y و z رابرصفحهٔ L که توسط J, w, x, ... تعیین می شود، تصویرکنیم، کسینوس زاویهٔ بین $(y-P_L(y))$ و $(z-P_L(z))$ همبستگی جزئی y و z پس ازحذف اثرات w، x، ... نامیده می شود. بسیاری ازتحلیلهای همبستگی ازلحاظ هندسی تعبیرهای طبیعی دارند- تنها پیچ مسئله آن است که معمولا " به زیرفضای متعامدبر J یعنی زیرفضای تغییرات متغیرها توجه می شود.

در (س ۳) مثالی ازمدل خطی (یا مدل رگرسیونی) عمومی تر $z=a+bx+cy+...$ راداریم، ومثل قبل z، x، و y، ...

رابه عنوان بردار تعبیر می کنیم . برای ملاک کمترین توانهای دوم ضروری است که a ، b ، c ، ..... ، را چنان اختیار نماییم که



شکل ۱۰. ضریب همبستگی ساده

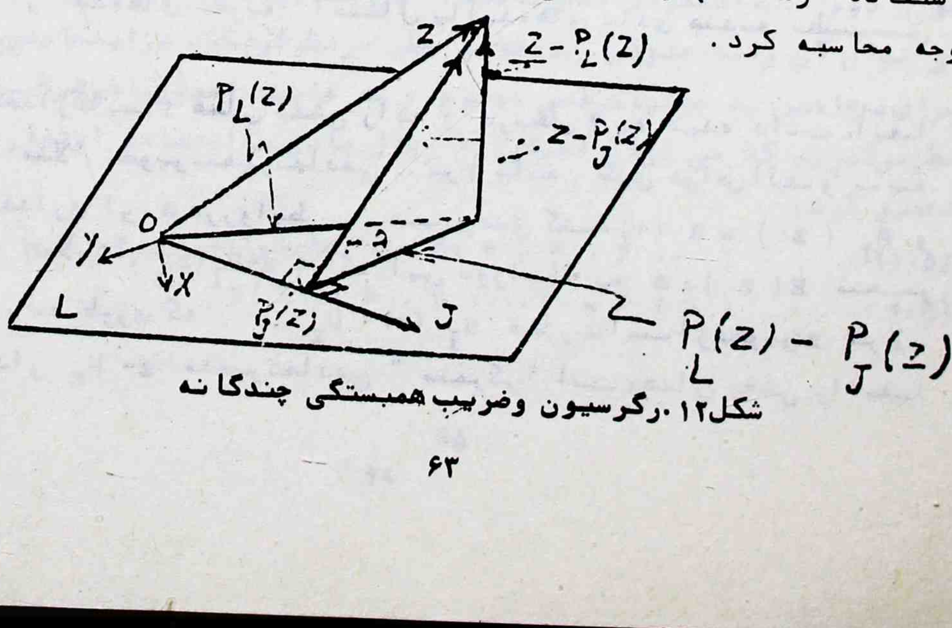


شکل ۱۱. رگرسیون

$|z-aJ-bx-cy-\dots|^2$ کمینه شود و ملاک ۱ جواب را به دست می دهد. اگر $L= L(J,x,y,\dots)$ صفحهٔ تعیین شده توسط J ، x ، y ، ... باشد، بهترین تابع خطی برازنده شده به داده ها یعنی $aJ+bx+cy+\dots$ عبارت است از تصویر $P_L(z)$ (به شکل ۱۱ مراجعه کنید). از ملاک ۲ چنین برمی آید که برای اندازه گیری نیکویی برازش باید از ψ یا $SSE = |z-P_L(z)|^2$ یعنی

زاویهٔ بین z و (z) P_L ، یا چیزی شبیه به آنها ، استفاده کنیم . مانند (س ۱) و (س ۲) ، گاهی توجه خودرا به زیرفضای متعامد J ، یعنی زیرفضای تغییرات ، متمرکز می کنیم . بویژه ، θ زاویهٔ بین (z) $z - P_J$ و (z) P_L (z) $-P_J$ معیاری است برای آنکه ببینیم برازش حاصل ازگنجاندن J ، x ، y ، .... درمدل چقدربهتر ازبرازش حاصل ازاستفاده از J تنهااست (به شکل ۱۲ مراجعه کنید) .وقتی $\theta = 0$ ($\cos^2(\theta) = 1$)، بردار z در L واقع است ، وبرازشی بی کاست داریم . وقتی $\theta = 90^\circ$ ($\cos^2(\theta) = 0$)، برازش از برازشی که بااستفاده از J تنها حاصل می شودبهترنیست . کمیت $\cos^2(\theta)$ توان دوم ضریب همبستگی چندگانه (R^2) نامیده می شود ومی توان آن را مانندضریب همبستگی ساده در(س ۲) تعبیرکرد . توجه داشته باشیدکه از(ق ۱) – (ق ۷) نتیجه می شودکه $P_L(z)-P_J(z)$ تصویر(z) $z - P_J$ برصفحهٔ L است . بردارهای (z) $z - P_L$ و (z) P_L (z) $-P_J$ هردوبر J عمودند. پس $\cos^2(\theta)$ میزان وابستگی رااندازه می گیرد، یعنی تا چه حدتغییرات z (یعنی(z) $z - P_J$) را می توان برحسب تغییرات x ، y ، ....(که به وسیلهٔ نزدیکترین نقطهٔ واقع برقسمت متعامد L بر J اندازه گرفته می شود)تبیین کرد

همهٔ مواردسه گانهٔ فوق (ودرواقع بسیاری ازموارد آمارکلاسیک) رامی توان طبق قواعدهندسی ملاکهای ۱ و۲ ، موردبحث قرارداد. راه- حلها ازاصول هندسی الهام گرفته می شوند: بهترین برازش تصویراست ، این راه حلها بادرنظرگرفتن یک زاویه یا طول ارزیابی می شوند، با استفاده ازمعادلهای تحلیلی ، می توان مقادیرآنها را به بهترین وجه محاسبه کرد.



شکل ۱۲ .رگرسیون وضریب همبستگی چندگانه

۵. نظریهٔ احتمال

در بخش ۲ متذکر شدیم که می توانیم متغیرهای تصادفی را به عنوان بردار در نظر بگیریم . در اینجا این موضوع را دوباره پی می‌گیریم . برای آنکه دربارهٔ متغیرهای تصادفی به طورهندسی بیندیشیم ، باید بردارها وحاصلضرب داخلی را بشناسیم .

تعمیم موضوع به این حالت (یعنی یک فضای برداری با ابعاد بالقوه نامتناهی) از لحاظ فنی - پیچیده است . در اینجا به تعبیرهندسی ایده‌ها تاکید می کنیم وبرای آگاهی از جزئیات خواننده را به کتب مرجع مراجعه می دهیم .فرض کنیم چند متغیرتصادفی z ، x ، y .... داریم که تواما" دارای تابع توزیع F (z ، x ، y ،....) هستند. امید ریاضی یک متغیرتصادفی به صورت $E(z)= \; zdF(z)$ محاسبه می شود ، که در آن F ( ) ، نوعا" توزیع متغیرهای مربوطه را نشان می دهد. فرض کنیم متغیرهای تصادفی ما دارای میانگینهای $E(x)=\mu_x$,$E(z)= \mu_z$ وغیره باشند. این متغیرهای تصادفی بردارهای ما هستند. آنها را به طریق متعارف باهم جمع می کنیم ، درمقادیرثابت (اعداد) ضرب می کنیم وعملیاتی از این قبیل دربارهٔ آنها انجام می‌دهیم . چنانکه با انجام محاسبات مربوطه می توان تحقیق نمود ،کمیت

$$<z,x> = E(zx)= \; zx \, dF(z,x)$$

در رابطهٔ (۵.۲) صدق می کند و ما آن را به عنوان تعریف حاصلضرب داخلی دو بردار (متغیرتصادفی) z و x اختیار می کنیم . با این تعریف بسیاری از ایده‌های نظریهٔ احتمال با ایده‌های عادی هندسه تطبیق می کنند .

مقدار ثابت ۱ همان نقشی را که J دربخش ۴ به عهده داشت ،ایفا می کند . مثلا"، تصویرمتغیرتصادفی ، بر ۱ باید، طبق خواص الف و ب به ازای مقداری از a در روابط زیر صدق کند: (۱) $P_1 (z) = a$ و $< z-P_1(z) , 1 >=0$ که این دو رابطه به $E(z)= a$ منجر می شوند، به طوری که $\mu_1 (z)= \mu_z$ عبارت است از تصویر z بر ۱. بردار $z- \mu_z$ متغیرتصادفی " متمرکز" است وهمان نقشی را ایفا

می‌کندکه بردارتغییرات $\bar{z}$ ـ z دربخش ۴ به عهده داشت.

به ازای هرمتغیرتصادفی z ، کمیت $< z , z > = E(z^2)$ توان دوم طول z است. پس توان دوم طول متغیرتصادفی متمرکز $z-\mu_z$ برابر است با $|z-\mu_z|^2 = E(z-\mu_z)^2 = \sigma_z^2$ واین کمیت واریانس z نامیده می شود. مانندبخش ۳ ، θ زاویهٔ بین بردارهای متمرکز $z - $ و $x - \mu_x$ نقش مهمی رابه عهده دارد (به شکل ۱۲ مراجعه‌کنید): بآسانی ثابت می شودکه

$$\text{Cos}(\theta) = < z-\mu_z , x-\mu_x > / |z-\mu_z||x-\mu_x|$$

همبستگی بین z و x است. وقتی درنظریهٔ احتمال می‌گوییم

$$\text{Var}(z+x) = \text{Var}(z) + V(x) + 2\text{Cov}(z,x)$$

صرفا " قاعدهٔ کسینوسهای (۱۰۲) راتکرارمی کنیم . وقتی دومتغیر تصادفی ناهمبسته باشند، مثل آن است که دوبردارمتناظرمتعامدباشند،و الی آخرتعبیرهای هندسی دقیقا "باتعبیرهای آماری بخش ۴ یکی هستند. در مورداحتمال ، یک مدل نظری راتعبیرمی کنیم . درموردآمار، خوددادهها راتعبیرمی کنیم ، ولی هندسهٔ هردویکی است.

دربالا، حالت خاصی ازتصویرکردن، یعنی تصویربرروی مقدارثابت ۱ رادرنظرگرفتیم . مفهوم کلی متناظرباتصویرکردن درنظریهٔ احتمال چیست ؟ یک جواب این سوال احتمال شرطی است. امیدریاضی z ، به‌شرط x ، y ، .... عبارت است از $E(z | x, y, ...)$ ومشابه باتصویر z برصفحهٔ تعیین شده‌توسط x ، y ، .... به روش زیراست. منظورازصفحهٔ $L(x , y ....)$ به طورکلی همهٔ توابعی از x ، y ، .... است‌که توان دوم آنهاانتگرال پذیرباشند. این فضاتحت‌عملهای خطی بسته‌است‌و می توان آن رابه عنوان زیرفضایی خطی درنظرگرفت. دراینجابدون‌توقف برای‌پرداختن به جزئیات‌فنی موضوع ، سه خاصیت امیدریاضی‌شرطی رادر نظرمی‌گیریم که می توان آنهارابه روال عادی بااستفاده ازتعاریف تحقیق کرد:

(۱۰۵) $E(z | x , y ....)$ تابعی‌است‌از x ، z ، ....

(۲۰۵) $E(E(z| x , y ....)) = E(z)$

اگر g تابع " دلخواهی " از x ، y ، ... باشد ،

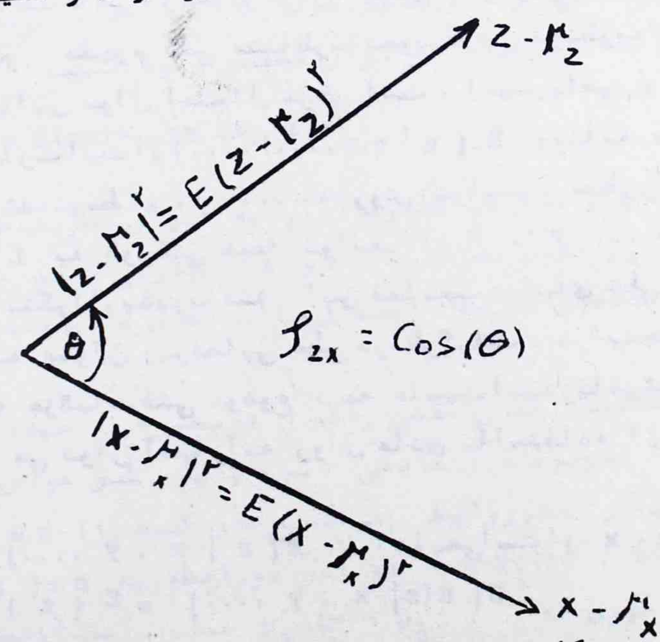
$$E(zg|x,y,\ldots)=gE(z|\ x,y,\ldots) \quad (۳۰۵)$$

از (۲۰۵) و (۳۰۵) نتیجه می شودکه اگر g تابع "دلخواهی از "x ، y ، ... باشد

$$<g\ ,z-E\ (z|\ x,y,\ldots)> =0 \quad (۴۰۵)$$

به زبان مطالب بخش ۳ ، نکتهٔ مستتر در تمام این روابط این است که رابطهٔ (۱۰۵) بیان می دارد که $E(z|\ x,y,\ldots)$ در صفحهٔ L واقع است ، درحالی که (۴۰۵) مبین آن است که $z-E(z\ |x,y,\ldots)$ به هر بردار g واقع در L عمود است . این شرایط دقیقا" همان شرایط تعریف کنندهٔ تصویر $P_L(z)$ اند . پس به این مفهوم ، امید ریاضی شرطی همانند تصویر است (به شکل ۱۴ مراجعه کنید) . در این بحث منظور از تساوی مربع به یقین است ، و بسیاری نکات فنی دیگر وجود دارند که باید ملحوظ شوند . Loeve (1963) و Doob (1953) برای مطالعهٔ این نکات مراجع مناسبی هستند . در اینجا علاقهٔ ما به آن موضوعی است که هندسه پیش می کند .

یک تعبیر از این ایدهٔ هندسی حاصل می شود و آن اینکه عمل تصویر کردن ، نزدیکترین نقطهٔ موجود در صفحه به بردار z را تعیین می کند . مثلا"



شکل ۱۳. متغیرهای تصادفی و همبستگی

اگر x ، y ، .... معرف آگاهی فعلی ما و z معرف مقدار آینده باشد که باید پیش بینی شود، تمثیل فوق این امر را پیش می کشد که این تصویر عبارت است از تابع آگاهی فعلی ما که نزدیکترین نقطه به مقدار آینده (z) است. بنابراین، برای پیش بینی آینده، از $E(z \mid x, y, \ldots)$ استفاده می کنیم. این تابع کمینهٔ میانگین توان دوم خطا را دارا است (به فصل ۵ و ۹ کتاب Breiman (1969) مراجعه کنید).

قضیهٔ دیگری از نظریه احتمال عبارت است از

$$Var(z)=Var\left[E(z \mid x,y,\ldots)\right]+E\left[Var(z \mid x,y,\ldots)\right] \qquad (۵.۵)$$

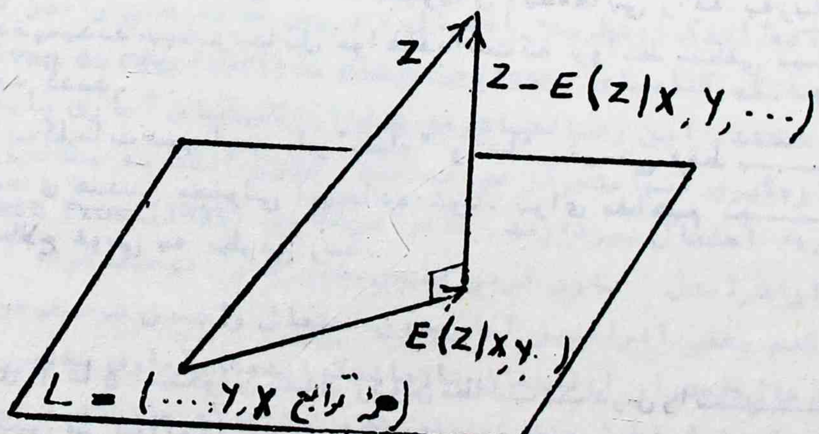
دقت کنید که چون $E\left[z-E(z \mid x,y,\ldots)\right]=0$, داریم

$$Var\left[z-E(z \mid x,y,\ldots)\right] = E\left[z-E(z \mid x,y,\ldots)\right]^2$$

از آنجا که واریانس شرطی عبارت است از واریانس مربوط به توزیع شرطی، رابطهٔ (۲.۵) همچنین دال بر آن است که این مقدار برابر با $E\left[Var(z \mid x,y,\ldots)\right]$ می باشد. پس رابطه (۵.۵) را می توان به صورت زیر نوشت

$$Var(z)=Va\left[E(z \mid x,y,\ldots)\right] + Var\left[z-E(z \mid x,y,\ldots)\right]$$

که این همان رابطهٔ فیثاغورس است.



شکل ۱۴. امید ریاضی شرطی

۶. تذکرات

ترتیب مطالب

ترتیب ارائه شده یعنی هندسه، هندسهٔ تحلیلی، آمار و احتمال را مؤثرترین ترتیب می دانم، زیرا متکی بر ایده‌های زاویهٔ قائمه و رابطهٔ فیثاغورس است. که اکثر دانشجویان، اگرچه به طور مبهم، به خاطر دارند. قسمت احتمال را می توان حذف کرد، هرچندکه بیان امید ریاضی شرطی به عنوان یک تصویر، این امکان را می‌دهدکه ایده‌های آماری ("نمونه‌ای") به زیبایی به معادلهای احتمالاتی (مدلی) آنها ربط یابند.

تجرید

ریاضیدانان دوست دارند بیشتر دربارهٔ چگونگی رفتار اشیاء صحبت کنند تا دربارهٔ ماهیت آنها. غیرریاضیدانان غالباً عکس آن را ترجیح می دهند. بیان مطالب به صورت "چیزی که این طوررفتار کند یک بردار است (زیرا من چنین می گویم)" راه طبیعی سخن گفتن با غیرریاضیدانان نیست. حساسیت ریاضیدانان به این امر باید بیشتر از حدی باشد که متداول است. مهم این است که مثالها با عبارات مختلف تکرار شوند، بر معادل بودن وسایل گوناگون بیان مطالب تاکید شود و نه آنکه کدام مطلب اول ذکر شود و کدام یک بعد. پس از آنکه دانشجویان ایده‌هایی را که به زبانی بیان شده اند فهمیدند، بیشتر تمایل خواهند داشت که روابط منطقی بین آنها را مطالعه کنند.

انتخاب کلمات مهم است. از "نقطه" و "خط" بایستی فقط برای انتقال ایده‌های هندسی معمولی استفاده شود. برای مفاهیم مجرد، "بردار" اصطلاح خوبی به نظر می رسد.

گسترشها

بخشهای ۲ تا ۵ استخوان بندی رئوس مطالب یک درس را تشکیل می‌دهند. مدرسین می توانند با توجه به زمان، علاقه، و زمینهٔ علمی دانشجویان به طرق بسیار مطالبی بر آن بیفزایند. مثلاً: (الف) وقتی مطالب به صورت ماتریسی بیان شوند خواص الف و ب بدون استفاده از حساب

دیفرانسیل وانتگرال مستقیما" به معادلات نرمال برای مدلهای خطی منتهی خواهندشد. (ب) برنامه‌های کامپیوتری نظیر آنهایی که در Beaton (1964) پیشنهادشده‌اند این مطلب را به طورطبیعی گسترش می دهند. هربرنامه کاری راانجام می دهدکه یک اتم محاسباتی طبیعی است ونیز دارای تعبیرهای طبیعی آماری وهندسی است. این چنین ترکیبی بویژه وقتی موءثراست که ازسیستمهای کامپیوتری فعل وانفعالی استفاده گردد(به Bryant and Dempster (1975) وShatzoff مراجعه کنید). هرقدرازمدلهای خطی (یعنی آنالیزواریانس، رگرسیون چند متغیری، وغیره) مطالب بیشتری راموردبحث قراردهیم، ازسرمایه‌گذاری درراه فهم هندسه سودبیشتری می بریم. مثلا"، درنظرگرفتن درجات آزادی به عنوان بعدزیرفضا، برای بسیاری ازدانشجویان جهش فکری بزرگی خواهدبود، امابه محض اینکه این جهش تحقق یافت دیگرناچارنیستیم که فرمولهای جداگانه‌ای رابرای مواردانفرادی متعددبه خاطربسپاریم. برای هرتعدادازمدلهای مختلفی که بتوان آنهارامعرفی کرد ومعرفی آنهامناسب به نظربرسدملاکهای ۱ و۲صادق خواهند بود. کتابهای Seber (1966و1977) نقطه‌های شروع خوبی هستند. (د) ایده‌های احتمال رادرموردتوزیعهای نرمال به طورقابل توجهی می‌توان گسترش داد (به فصل ۱۴ Demqster (1968) وبخشهای ۳۳ -۳۴ Loeve (1963) - مراجعه کنید). توجه داشته باشیدکه می توان بدون استفاده یابا استفادهٔ اندک ازنظریهٔ احتمال، دروس رضایتبخشی رانیز تدوین وتهیه کردچنانکه کتابهای Demqster (1968) یا van de Geer (1971) شاهداین مدعاهستند. این رهیافتها توجه خودرابرکمیتهای آماری پایه وروشهای اندازه‌گیری آنهامتمرکز می نمایند، بدون آنکه به مطالب ریاضی نظریهٔ احتمال بپردازند. شاعرآمریکایی Robert Frost (1935) سرودن شعرآزادرامثل "بازی کردن تنیس بدون تور" توصیف کرده است وگمان می کنم بعضی افرادنیز آماربدون احتمال راچنین توصیف خواهندکرد. با این حال احتراز ازاحتمال تازمانیکه ایده‌های آماری بخوبی جابیفتند می تواندازلحاظ آموزشی مفیدباشد. مادام که بازیکنان می دانندهدف بازی زدن توپ به جلووعقب است نیازی به تورنیست.

علاوه برمراجع فوق Kendall (1961) مرجع مفیدی برای فرمولهای
ظریه است . سایرکاربردها در (Haberman (1978 (مدلهای لگاریتم-خطی)
؛ (Koopmans (1974 (تحلیل طیفی سریهای زمانی) تشریح شده‌اند .بدیهی
ست که تقریبا " هرکتاب درسی مربوط به آنالیز چندمتغیری لااقل
اشاره‌ای گذرابه تعبیرهندسی بعضی ازکمیات دارد ، اما تعدادانذکی
ازآنهابه طورمنظم ازآن بهره می گیرند . وتاآنجاکه‌من می دانم ، هیچ
کدام دریک سطح مقدماتی به آن نمی پردازند .

توضیحات :

۱- این مقاله ترجمهٔ مقالهٔ زیراست :
PETER BRYANT (1984), " Geometry,Statistics,Probability :
Varatians on a Common Theme ," The American
Statistician,Vol.38,PP. 38-48.

۲- ویژهٔ معلمین (Teacher's Corner) بخشی ازمجلهٔ
The American Statistician است که درآن مدرسین نظرات خود را
دربارهٔ تدریس‌آمار ارائه می کنند .

مراجع :

BEATON, ALBERT E. (1964), " The Use of Special Matrix Operators in Statistical Calculus," Research Bulletin, RB-64-51, Educational Testing Service Princeton, N.J.

BREIMAN, LEO (1969), Probability and Stochastic Processes with a view Toward Applications, Boston: Houghton Mifflin.

DEMPSTER, ARTHUR P. (1968), Elements of Continuous Multivariate Analysis, Reading, Mass.: Addison-Wesley.

DOOB, J.L. (1953), Stochastic Processes, New York: John Wiley.

FROST, ROBERT (1935), address at Milton Academy, Milton, Mass., 17 May 1935, in The Oxford Dictionary of Quotations, 3rd ed., Oxford: Oxford University Press, 219.

HABERMAN, SHELBY J. (1978), Analysis of Qualitative Data, New York: Academic Press.

HERR, DAVID G. (1980), "On the History of the Use of Geometry in the General Linear Model," The American Statistician, 34, 43-47.

KENDALL, M.G. (1961), A Course in the Geometry of n Dimensions, London: Charles Griffin & Co.

KOOPMANS, LAMBERT H. (1974), The Spectral Analysis of Time Series, New York: Academic Press.

LOEVE, MICHEL (1963), Probability Theory, 3rd ed., Princeton, N.J.: D.Van Nostrand.

MARGOLIS, MARVIN S. (1979), " Perpendicular Projections and Elementary Statistics," The American Statistician, 33, 131-135.

SCHATZOFF, MARTIN, BRYANT, PETER, and DEMPSTER, ARTHUR P. (1975), " Interactive Statistical Computation With Large Data Structures, " in Perspectives in Biometrics, ed R.Elashoff, New York: Academic Press, 1-28.

SEBER, G.A.F (1966), The Linear Hypothesis: A General Theory, New York: Hafner Press.

- (1977). Linear Regression Analysis, New York: John Wiley.

VAN DE GEER, JOHN P. (1971), Introduction to Multivariate Analysis for the Social Sciences, San Francisco: W.H.Freeman & Co.

ریاضیات کاربردی چیست ؟

نوشتهٔ : ب .ل.مویرویچ

مترجمین: *

عبدالله‌شیدفر ،گروه‌ریاضی دانشگاه‌علم‌وصنعت ایران

محمداسدیان،گروه‌برق دانشگاه‌علم‌وصنعت ایران

در این مقاله کوشش می‌کنم تفاوت بین ریاضیات محض وریاضیات کاربردی را نشان‌دهم وفرق نمایان بین این دورا بیان کنم .به‌نظرمن انجام این امرمهم‌به‌عهدهٔ دست اندرکاران‌ریاضیات‌کاربردی است ،زیرا متاسفانه برخلاف گذشته ،ریاضیات کاربردی‌دارای‌نقش‌بسیارکوچکی دربرنامهٔ درسی دبیرستانی،وحتی‌دانشگاهی است .دلیل این‌کارشاید‌عدم‌تمایزبین‌موضوعاتی است که‌ظاهرا "امروزه‌درست ارزیابی‌نشده‌اند.

برای این‌کاراحتمالا"سه‌رهیافت وجوددارد .می‌توانیم‌آنچه‌راکه‌درباره نقشهای متفاوت ریاضیات محض وکاربردی گفته‌اندبررسی کنیم ، می‌توانیم تاریخ ریاضیات را مطالعه کنیم ، ومی توانیم بررسی کنیم که‌ریاضیات محض‌وکاربردی عملا" چه می‌کنند، وتفاوتهای فعالیتهای آنها رابیابیم.

---

* این مقاله‌ترجمهٔ مقالهٔ زیراست .

What is Applied Mathematics?

B.L. Moisewitsch

Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics,

The Queen's University of Belfast,

Bulletin Volume 17 Number 7 July 1981,

The Institute of Mathematics and -ts Applications (I.M.A.)

دیدگاههای راسل ، هاردی، وکورانت

درآغاز کار شاید هیچ چیز بهتر از خواندن مقالهٔ برجستهٔ راسل با عنوان " ریاضیات ومتافیزیک[1]" نباشد. در این مقاله می خوانیم" در ریاضیات محض از قواعد معین استنتاج شروع می کنیم که با توجه به آن نتیجه می‌گیریم که اگر گزاره‌ای صادق باشد گزارهٔ دیگری نیز صادق باشد گزارهٔ دیگری نیز صادق است. این قواعد استنتاج بخش اعظم اصول موضوع منطق صوری را تشکیل می‌دهند. برای این منظور می توانیم از فرضی شروع کنیم ونتایج این فرض را استنتاج کنیم. چنانچه فرض موردنظر دربارهٔ چیزی نامشخص باشد ودر مورد این یا آن شیئی خاص نباشد، آنگاه استنتاجهای حاصل ریاضیات را تشکیل می‌دهند. بنابراین می توان ریاضیات را به عنوان موضوعی تعریف کرد که در آن هرگز نمی دانیم دربارهٔ چه صحبت می‌کنیم و آیا آنچه می‌گوییم صادق است یا نه".

راسل پیش از بیان مطالب فوق می‌نویسد که ریاضیات محض مرکب است از احکامی مبنی بر این که اگر این یا آن گزاره دربارهٔ چیزی نامشخص صادق باشد، آنگاه فلان گزاره دیگر دربارهٔ آن چیز صادق است. در مورد صدق واقعی آن گزاره بحث نمی وذکری هم از ماهیت چیزی که فرض کرده‌ایم وحکم صادقی دربارهٔ آن داریم نمی کنیم. این دو نکته اختصاص به ریاضیات کاربردی دارد."

حال اگر فرض کنیم گفته‌های راسل عینا" درست باشد، آنگاه به ناچار بایستی بپذیریم که در ریاضیات کاربردی می دانیم که دربارهٔ چه چیزی صحبت می کنیم ومهم آن است که بدانیم آنچه در ریاضیات کاربردی درباره‌اش صحبت می کنیم صادق است یا نه. بدون تردید این حکم درست است.

راسل ادعا می کند که ریاضیات محض توسط جورج بول(George Boole) کشف شده است. جورج بول اولین استاد ریاضی در کالج کویین کرک بود و با ماری اورست برادرزاده سرجورج اورست ،کاشف بزرگ هندوستان ازدواج کرد. ایده‌های جورج بول در کتابی که برای اولین بار در سال ۱۸۵۴ تحت عنوان " تفحص در قوانین فکر"[2] چاپ شده آمده است. او در این کتاب می نویسد که "هدف این رساله جستجوی قوانین بنیادی آن دسته از اعمال فکری است که به کمک آنها استدلال انجام می شود، و با بیان

آنها به زبان حسابی نمادی علم منطق را پایه ریزی کرده روش آن را بیان می‌کنیم ..." بنابراین راسل می‌نویسدکه درواقع کاربول درباره منطق صوری بودواین همان ریاضیات محض است. راسل درکتابی باعنوان "مقدمه‌ای برفلسفهٔ ریاضی"[3] اظهارمی کندکه" اگرهنوزکسانی باشندکه تساوی ریاضیات محض ومنطق رانپذیرند، درآن صورت ازآنها می پرسیم نشان‌دهندکه‌نظرشان درکجای تعاریف واستنتاجهای "پرینسیپیا[4]" منطق خاتمه‌یافته وریاضی‌شروع شده است".

نظربه پیچیدگی بسیارزیاد "پرینسیپیا" بعیدبه نظرمی رسدتعدادزیادی درپاسخگویی به این مبارزه طلبی برخاسته‌باشند. باوجوداین بیشتر ریاضیدانان امروز منکریکی بودن منطق وریاضیات محض هستندومعتقدند که ریاضیات دارای مطالب خیلی بیشتری ازمنطق صوری است. علی الخصوص انتخاب گزاره‌های اولیه برای ساختمان ریاضیات اهمیت اساسی دارد. چنانچه حق بجانب راسل باشد، آنگاه بخش بزرگی ازریاضیات محض راباید جزء ریاضیات کاربردی دانست.

آنچه راسل می نویسدجالب وانگیزاننده است. مثلا" راسل درمقالهٔ جالب دیگری تحت عنوان "بررسی ریاضیات[5]" می‌نویسد"ریاضیات نه فقط دارای حقیقت محض است بلکه دارای زیبایی اعلی است زیبایی بی سردو خشن شبیه زیبایی مجسمه‌ها، ...، مافوق پاکی وآنچنان کامل که درحد کمال آثاربزرگ هنری است." این مطلبی است که بیشترریاضیدانان آن را تائیدمی‌کنند.

حال توجه خودرابه آنچه هاردی، یکی ازبزرگترین ریاضیدانان محض درقرن اخیر، نوشته است معطوف می‌داریم. اودرکتاب "اعتذاریک ریاضیدان" می‌گویدکه ریاضیات دارای عمق است، ومنظوراوزعمق اهمیت داشتن، پرمعنی بودن، جاودانگی، وهمچنین عمومیت داشتن است که ازصفات مشحصه ریاضیات هستند. هاردی علاوه‌برآن می نویسد، ریاضیدانان بابه کاربردن منطق نمادی، الگوها یاعوالمی خیالی متشکل ازروابط مجردراابداع می‌کنند. این همان "واقعیت ریاضی" است که به نظر هاردی باواقعیت فیزیکی تفاوت دارد. هاردی اشاره می کندکه واقعیات ریاضی‌یی که ریاضیدان محض باآنهاسروکاردارد مستقل ازواقعیات فیزیکی است، واس واقعیات ریاضی به تعبیری واقعی ترازواقعیات ریاضیات

کاربردی است زیرا لازم نیست الگوهای ریاضیدانان محض درصورت مواجه با طبیعت وعدم مطابقت آن به فراموشی سپرده شوند.

این گفتار نفوذ عمیقی درتفکرریاضی دربریتانیا داشته است. حکم فوق به صورت دیدگاه سنتی ریاضیدانان محض درآمده است وبیشتراز همه مورد توجه زیمن واقع شده است. او درمقاله‌ای درمورد ریاضیات درکتاب "گزینش دانشگاهی[۷]" نوشت: "ریاضیات محض خودرا به طورکامل ازقیدریاضیات کاربردی خلاص کرده است، به طوری که هم اکنون دردانشگاهها برای مطالعهٔ ریاضیات محض نیاز به ریاضیات کاربردی نیست." این موضوع کاملاً" مقابل گفته‌های کورانت است که درمقاله‌ای باعنوان "ریاضیات دردنیای نوین" نوشت: "بین ریاضیات محض وکاربردی نمی توان خطی ترسیم کرد، نباید دستهٔ برگزیده‌ای تنها با زیباییهای دست نخوردهٔ ریاضی سروکار داشته باشندوتنها مسئول تمایلات خودباشندودستهٔ دیگری درخدمت اربابانشان باشند."

درتایید نظریهٔ کورانت اغلب ریاضیدانان متذکرمی شوندکه ریاضیدانان اصول موضوع، تعاریف، واصطلاحات هندسه، جبر، وآنالیز رابا توجه به دنیای خارج درذهن آورده‌اند. مفهوم نقطه، بردار، خط، سطح فاصله، مساحت، حجم، فضای برداری، وغیره کلاً" وابستگی نزدیکی باواقعیات فیزیکی دارند. بجزاین، این مفاهیم ازکجا می توانسته‌اند بیایند؟

ریاضیدانان چه چیز را مطالعه می کنند

دراین قسمت برای روشن شدن مطالب توجه مستقیمی به شاخه‌های مختلف ریاضیات محض وکاربردی می نمائیم تا ببینیم حوزه های فعالیت هرکدام ازآنها چه بوده وارتباط آنها به یکدیگرچطوراست.

لازم است توجه کنیم که نمی خواهیم خودرا باریاضیات عملی یا روشهای ریاضی که مواردِاستعمال ریاضیات درفیزیک، مهندسی، شیمی، بیولوژی، اقتصادوغیره‌اند درگیرکنیم. همچنین به نظریهٔ احتمال، آمار تحقیق درعملیات یا آنالیز عددی نگاهی گذرا خواهیم داشت وبیشترتوجه خودرا به موضوعات سنتی ریاضیات محض وکاربردی اختصاص می‌دهیم که

برخی از آنها درذیل دسته‌بندی شده‌اند .

ریاضیات محض : منطق صوری ، نظریهٔ مجموعه‌ها ، نظریهٔ اعداد ،جبر، نظریهٔ گروهها ، هندسه‌فضاهای برداری ، توپولوژی ، آنالیز حقیقی ، آنالیز مختلط ، آنالیز تابعی .

ریاضیات کاربردی :دینامیک نیوتنی ، دینامیک سیالات ،الاستیسیته ،حرکت موج ، هدایت گرما ، نظریهٔ الکترومغناطیس ، نظریهٔ کوانتم ، مکانیک آماری ،نظریهٔ نسبیت ، کیهان شناسی ، نظریهٔ ذرات بنیادی .

موضوعات متعددی نیزموجودندکه باتوجه به حوزه مطالعه‌شان می‌توانندهم متعلق به ریاضیات محض وهم متعلق به ریاضیات کاربردی باشندکه ازآن جمله‌اند: جبروآنالیزبرداری ،آنالیزتانسوری،معادلات دیفرانسیل معمولی وبامشتق پاره‌ای . آنالیز فوریه ، تبدیلات انتگرالی معادلات انتگرالی ، حساب تغییرات .

موضوعات فوق درشکل ۱ آمده‌اند. دراین شکل روابطشان به‌همدیگر وارتباطشان باعلوم **چهارگانه** :حساب، هندسه ، نجوم ، موسیقی،که بنیادهای تاریخی ریاضیات رامی سازند، نشان داده شده‌است . درهر صورت ارتباط های بسیارزیادی بین موضوعات مختلف موجودندکه امکان نشان دادن همهٔ آنها درشکل ممکن نبوده‌است .

البته تشخیص تمایزبین موضوعات مختلف ازروی نقش متداول‌آنها کارمشکلی نیست . منظورتأکیدی است که درریاضیات محض برتحلیل دقیق می شودوارتباط نزدیک مباحث ریاضیات کاربردی باجهان فیزیکی است .

تاریخ ریاضیات

حال توجه‌خودرابه تاریخ ریاضیات معطوف می‌داریم . موضوع‌اولیهٔ ریاضیات بررسی خواص اعدادصفحه وهندسهٔ فضایی ، آماروهیدرواستاتیک بوده‌است‌که درکارریاضیدانان یونان مانندائودوکسوس ،اقلیدس ارشمیدس ، آپولونیوس شروع شده است وسپس باجبرودرآغاز قرن هفدهم باهندسهٔ مختصاتی دکارت وفرما ادامه یافته است .

پس ازآن حساب فلوکسیونها واردمعرکه‌شدوتوسط نیوتن درحین بحث درمطالبی مانندحرکت سیارات به دورخورشیدتعمیم یافت ومنجربه ظهور

ریاضیات مدرن گردید. قبل از گالیله، کپلر، ونیوتن، تقریباً "کلیهٔ مباحث ریاضی دربارهٔ اجسام ساکن بود و آنها را می شد با به کار گرفتن هندسهٔ اقلیدسی وجبر ساده تجزیه وتحلیل نمود. امکان پرداختن به پیکربندیهائی که برحسب زمان تغییر می‌کنند یا سینماتیک، با عرضهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال، عرصهٔ گسترده‌ای برای بررسی ریاضی موضوعات وابسته به پدیده‌های طبیعی مانند دینامیک دستگاههای ذره‌ای، حرکت سیالات وحرکت موج توسط برنولی واویلر ولاگرانژ وسایرین راگشود.

گرچه حساب، هندسه، ومکانیک یونانیان پایهٔ درستی برمبنای دستگاههای صوری نداشت، ولی چنانچه درنظرداشته باشیم که اقلیدس کوشش جالبی درابداع یک دستگاه اصل موضوعی کرده است، منطقی است که بگوییم ریاضیات یونان پایه‌ای برای ریاضیات محض بوده است. به علاوه این موضوع کاملاً "قابل قبول است که ریاضیات کاربردی به معنای واقعی آن معرفی نظریهٔ حساب فلوکسیونها ودینامیک توسط نیوتن براساس کار گالیله درارتباط باعلم حرکت شروع شده است.

ایستا چون مجسمه یا پویا چون موسیقی ؟

ملاحظات فوق منجر به مباحثه اصلی این مقاله می شود که بیان می کند فرق اصولی بین ریاضیات محض وریاضیات کاربردی، فرق بین ساختهای ایستا وپویاست، یعنی فرق بین ساختهای ریاضی است که، به ترتیب، مستقل ووابسته به زمان هستند. اصولا" حضورمتغیرزمان برای بررسی صحیح درهمه موضوعاتی که تحت عنوان ریاضیات کاربردی آورده ایم ضروری است، البته نمونه‌هایی خاص ومعین مثل موضوعات مربوط به الاستیسیته وساختهای استاتیک، که درمهندسی راه وساختمان ومعماری موردتوجه هستند، نیزموجودند که متغیرزمان درآنها نقشی ندارد.

درریاضیات محض متغیرها برای نمایش یک نقطه یا یک بردارفضایی به کارمی‌روند. ولی برای افزودن متغیرزمان به صورت یکی ازمختصات یک نقطه، همان طورکه دست اندرکاران ریاضیات کاربردی درنظریهٔ نسبت خاص انجام می‌دهند، لازم است باتعریف مختص موهومی شبه ـ زمانی در پیوستارفضا ـ زمان ۳+۱ بعدی مینکوفسکی این گونه فضاها راازسایر فضاها متمایزکنیم.

بدون شک برای ریاضیدانان جالب خواهد بودکه اززمان چشم‌پوشی‌کنند وجهان را از دیدگاه هندسی ، مانند آنچه درنظریهٔ عمومی نسبیت اینشتین انجام می شود، بررسی کنند. بیخود نیست که هاردی تصور می کردکه نظریهٔ نسبیت ونظریهٔ کوانتم ازمجرای ریاضیات محض می‌گذرند، برای اینکه این موضوعات به ترتیب براساس تعمیم هندسه‌های فضای ریمانی وفضای‌هیلبرت پایه ریزی شده‌اند.

بنابراین به نظرمن دست اندرکاران ریاضیات محض بیشتر به هندسه‌های ساکن ، هندسه‌های جبری وغیره علاقمندهستند. آنها به جستجوی نمایش" سراسری " ، کم وبیش‌نمایشی جغرافیایی ، می پردازندوحال آنکه اگربخواهیم کلی گوئی کنیم ریاضیات کاربردی با پیکربندیهای پویا سروکار دارد. اختلاف دوشاخه ریاضیات درریاضیات دبیرستانی ، که هر دوشاخه بایک دقت بیان می شوند، واضح است. ریاضیات کاربردی " دبیرستانی " شامل سرعت ، شتاب ، گشتاور، نیرو، وانرژی است وحال آنکه پیکربندیهای ساکن مثل نقطه، گرادیان ، سطح ، مساحت وحجم یعنی هندسه وحساب دیفرانسیل وانتگرال به ریاضیات محض " دبیرستانی"مربوط هستند.

تفاوتی ازاین نوع بین ریاضیات محض وکاربردی دردانشگاهها هم دیده می شودولی عجیب است که هیچگونه تاکیدی دراین موردنمی شود.

تمثیلی ازجهان هنروموسیقی می آوریم . به نظرمن تفاوت بین این دوموضوع مانندتفاوت بین طرح ، گراوور، یانقاشی یی که صحنه‌ای را درلحظهٔ ثابتی نشان می‌دهد، وآهنگی است که هرگاه تغییران درزمان نادیده گرفته شود، کاملا" غیرقابل درک می شود. دریک طرح یانقاشی می توان نقشهٔ آن راتجزیه وتحلیل کرد، درصورت تمایل رنگ وبافت صحنه وجزئیات آن رازیرمیکروسکوپ قرارداد وحال آنکه درموسیقی‌گام ، فاصله ،منتها ، تغییردرفرکانس یاکوک وشدت یا بلندی صداوقتیکه زمان می‌گذردتغییرمی کند. طبیعتا " این ایدهٔ جدیدی نیست. این موضوع با موسیقی کرات آسمانی که توسط منجمان یونان قدیم تصورمی شدوبه‌تغییر مکان سیارات متناظربودمطابقت دارد. تشریح روشن دیگرازاین موضوع اختلاف درتحلیل یک عکس تنها ازیک صحنه درلحظه‌ای مفروض وفیلمی از آن صحنه است که رشته‌ای ازحوادث رادربردارد.

البته تعدادی ازدستاندرکاران ریاضیات محض هستندکه علاقمندبه معادلات مربوط به تحول پدیده‌ها وموضوعات مشابه هستند، ولی باید اذعان داشت که مرز دوشاخهٔ ریاضی به ناچار ازبین می‌رودوهمان طورکه کورانت گفته است خطی بین آنها نمی توان کشید. به هرحال، درحالت کلی همان حرکت وتغییرحاصل ازوجودمتغیرزمان، یا محورشبه زمان است که بین ریاضیات "کاربردی" وریاضیات" محض" فرق می گذارد، که بنابر تمثیل راسل، ایستامانند" مجسمه" است.

درپایان جالب است توجه کنیم که این تفاوت شباهتی بافرق بین دومکتب فلسفی یونان قدیم یعنی مکاتب هراکلیتوس وپارمنیدس داردکه اولی معتقدبه تغییرهمهٔ اشیاء عالم ودومی معتقدبه عدم وجودتغییر بود.

References:

1. Russell, B., "Myticism and Logic," Chapter V, George Allen and Unwin, London, 1917.
2. Boole, G., "An Investigation of the Laws of Thought," Dover, New York, 1951.
3. Russell, B., "Introduction to Mathematical Philosophy," George Allen and Unwin, London, 1919.
4. Whitehead, A. N., and Russell, B., "Principia Mathematica," Cambridge University Press, Cambridge, 1925.
5. Russell, B., "Mysticism and Logic," Chapter IV, George Allen and Unwin, London, 1917.
6. Hardy, G. H., "A Mathematicians's Apology," Cambridge University Press, London, 1940.
7. Zeeman, E. C., "University Choice." In Boehm, K., Editor, Penguin Books, 1966.
8. Courant, R., Scientific American, 1964, 211, No. 3, 41.

بیاد استاد فقید دکتر محسن هشترودی
که مشوق وراهگشای جوانان ایران به جهان ریاضیات بود.

مرز ریاضیات کهنه و نو

نوشته: منوچهر میثاقیان
دانشگاه صنعتی اصفهان

به اعتقاد برخی ها اصولاً" چنین مرزی وجود ندارد و خودبخود طرح این عنوان کار بیهوده‌ای است. اما شخصاً" قائل به چنین مرزی هستم و در این نوشتار قصد معرفی و مشخص کردن آنرا دارم.

احتمالاً "واژهٔ ریاضیات جدید" در ایران از سال ۱۳۴۸ [۱] که برنامه‌های ریاضی دورهٔ فوق لیسانس دانشگاههای تهران و تربیت معلم تغییر یافت برسر زبانها افتاد و از آن پس پراکندن برخی اصطلاحات و علامت گذاریهای مربوط به مجموعه‌ها و منطق ریاضی بطور آشفته‌ای در سطوح مختلف صورت پذیرفت. تب ریاضیات جدید در ایران بطوری بالا گرفت که رسماً" در برخی از دانشگاههای کشور و بعد هم در دبیرستانها درسی بنام "ریاضیات جدید" که هم اکنون نیز ادامه دارد، دایر گردید. وقتی در کنار درس "ریاضیات جدید" دروس دیگری از قبیل جبر، آنالیز، هندسه،.... عرضه می‌شود به شاگردان این احساس دست می‌دهد که "ریاضیات جدید" شاخه‌ای از ریاضیات است و در همان حال اکثریت نزدیک به اتفاق آموزندگان ریاضیات در ایران قادر به مشخص کردن محتوای " ریاضیات جدید" بعنوان یک شاخه از ریاضیات بطوریکسان

۱- بی شک در محافل خصوصی تر ریاضی ایران این تاریخ به مراتب بیشتر از این است.

وهمگونی نیستند. برخی ازدانش آموختگان "ریاضیات جدید" را مشتمل بر" مجموعه‌ها"، منطق ریاضی" و" ماتریس‌ها" می‌دانند. برخی‌نیز گمان برده‌اند درهرمبحثی که علامتهائی‌ازقبیل $\not\subset$، $\cup$، $\subset$، و اصطلاحاتی مربوط به مجموعه‌ها وجبرگزاره‌ها بکاربرده شود، آن مبحث نونوار(مدرنیزه) می‌شود. بنابراین ارائه برداشتی از" جدید" و" قدیم" درریاضیات هر چندبه عنوان پاسخی به آشفتگی مذکورهم که شده، نامناسب نخواهدبود.

اصطلاحات" ریاضیات جدید" باعرضه نظریه مجموعه‌ها توسط ژرژکانتور دراواخرقرن نوزدهم همراه است. پی آمدهای بعدی کارهای کانتوردر حدودنیم قرن بعدبه تغییربرنامه‌های درس ریاضیات دبیرستانی‌دراروپا نیزمنجرگردید. برداشت عمومی‌از" ریاضیات جدید" در بسیاری موارد مبتنی براین پندار بودکه " ریاضیات جدید" یعنی، تجریدمحض، یعنی منطق صوری. مثلا" هنگامیکه درفرانسه برنامه‌های درسی ریاضیات را در دبیرستانها عوض کردند، مشاجرات مفصلی درنشریات علمی‌عامه‌پسند روی دادکه به چندموردازآنها اشاره می کنیم:

ازجمله درمجلهء علم وزندگی آمده است:" ازنظرتجربی بنظرمی‌رسدکه ریاضیات مدتهاست به نقطهء اعلاء رسیده است وازمدتها پیش وازیک قرن به این طرف هیچ کشف اساسی مهم‌نظیرکشف حساب دیفرانسیل وانتگرال یا آنالیزبرداری به میان نیامده‌است". ریاضیات‌هم مانندهرعلم دیگری که به نقطهء اعلای خودمی‌رسدازمسیراولیه خودمنحرف می‌شودوحرکت نخستین درسال ۱۸۵۰ صورت می‌گیرد، دراین تاریخ ریمان ولوباچفسکی برای هندسه مدلهائی مطالعه می‌کنندکه پایه‌های اساسی قدیمی رادورمی‌ریزد[1] وبدرد هیچ کارعملی نمی خورد. درهمان زمان دانشمندانگلیسی بول کوشش می کندمنطق رابصورت فرمول درآورد(منطق صوری) برای اینکار از روشهای آنالیزریاضی وجبراستفاده می کند، که درواقع حساب گزاره‌ها را پیش می کشدکه درعمل بیش ازده صفحه برای تشریح لازم ندارد، پس از این طرف هیچ انقلاب علمی دیده نمی‌شودبالعکس باکانتورهمه چیز عوض می‌گردد، این بارریاضیات ازراه تجربی منحرف می‌شود.

تحقیقات کانتوررا پیرامون نظریه مجموعه‌ها نمی توان نادیده

۱ـ هندسه‌های ریمان ولوباچفسکی چیزی ازهندسهء اقلیدسی‌را دورنمی‌ریزندو حتی ازاهمیت آن نیزنکاسته‌اند.

گرفت ،ازطرف دیگراین تحقیقات به معنای اخص ریاضی‌نیست ،مثلا"تحقیق در حساب اعداد ترانسفینی درست مانند بحث درجنس فرشتگان است ،زیرا "بی‌نهایت" درترازوی عقل بشربیشتراز "ابدیت" نمی‌سنجد وسود علمی اینگونه تحقیقات صفر است !

همچنین پروفسورلوئی‌نل Louis Neel دارنده جایزهٔ نوبل فیزیک در همین‌رابطه می‌گوید "برای پرورش مهندسان وفیزیکدانان بهتراست فکر مشاهده واستقراء ومنطق استقرائی‌را بجای استدلال های‌محرد بسط دهند[2] ونیز ویلیام .ژ. اسپون William .G.Spohn درمقاله‌ای‌تحت عنوان "آیا ریاضیات رامی‌توان نجات داد؟" می‌گوید : "برای ریاضیات کنونی‌ماندن در روءیای فریب انگیزخوش آیند است این فقط یک سیستم منطقی‌تشکیل می‌دهد و هدف اساسی‌این ریاضیات ایده آل تعمیم غائی است[3].

ملاحظه می‌شود که این پندار که "ریاضیات جدید" چیزی‌جز تجرد محض وانقیاد در ریاضیات درچهارچوب منطق صوری نیست ،ازیک طرف سایه روشنی‌ازمرز "جدیدوقدیم" را مشخص می‌کندوازطرفی‌ارزش های‌عظیم‌وسازندهٔ ریاضیات قرن‌اخیررا مخدوش می‌سازد .بنظرما تجرید ومنطق صوری هیچکدام مبین مرزجدید وقدیم درریاضی نیستند درهیچ‌دوره ای‌ازمطالعه ریاضی‌بطورغیرمجرد عرضه نشده است . درمورد ابطال اینکه ریاضیات جدیدهمان منطق صوری یاقسمتی‌از آن است ،هم‌جای هیچگونه شک و تردیدی‌نیست ،ازجمله به ناکام ماندن تزمنطق گرایان درتحقیق این هدف که توسط کارهای عظیم‌کورت گودل صورت پذیرفت. می‌توان نظرداشت، وبقول ژان دیودونه :"منطق همانقدرریاضیات است که دستگاههای شکنندهٔ اتم فیزیک هسته ای[4].

همچنانکه این موارد رامحکی برای‌تعیین مرزجدید وقدیم نمی‌شناسیم صرف عرضه‌مقالات بدیع وتازه‌و یاکتابهای بنیادی همچون "مقدمات‌اقلیدس" رانیزدیده هائی‌برای نو شدن ریاضیات نمی دانیم‌هنگامی که‌اقلیدس‌کتاب "مقدمات" رابه بند نوشتن‌آورد ،قطعا "بزرگترین کارد رتثبیت‌روش نبشتی (Axiomatic)بعنوان گرانقدرترین‌شیوهٔ علمی پایه گذاری شد ، اماکاراقلیدس درآنزمان مبین‌یک دورهٔ جدید از

۱– به نقل باندک تصرف ازترجمهٔ دکترمحمد حسن مهدوی‌اردبیلی‌درنشریه‌کوشش‌دانشگاه جندی شاپوراهوازشماره اول اسفندماه ۱۳۵۰صفحات ۱۰و۱۱.

۲– به‌نقل‌ازترجمهٔ دکترمحمد حسن‌مهدوی‌اردبیلی‌درنشریه‌کوشش‌دانشگاه جندی شاپوراهواز شماره‌های سوم‌وچهارم اردیبهشت ۱۳۵۱.

۳– همان مرجع.

۴– به نقل ازبولتن انجمن ریاضی ایران شماره ۵ زمستان ۱۳۵۵(صفحهٔ ۳۵.

ریاضیات به حساب نمی‌آید بلکه او با اینکار به تنقیح روش علمی که بطور پراکنده بین حکما و علمای[1] قدیم مرسوم بود پرداخت. بنظر ما ریاضیات سه دوره[2] را که هر دوره نسبت به ما قبل خود "ریاضیات جدید" با ید نامیده شود، پشت سر گذاشته است و ریاضیات کنونی چهارمین دورهٔ ریاضیات است که هنوز به پایان نرسیده[3] است.

با عرضه صفتی که این دوره‌ها را مشخص می‌کند، مرز ریاضیات کهنه و نو را مشخص می‌کنیم. صفت اصلی و تعیین کنندهٔ هر سه دورهٔ گذشتهٔ ریاضیات را "عدد" یا بطور عامتر "کمیت" بصورت "فردی" تعیین می‌کند. رابطهٔ تنگاتنگ ریاضیات گذشته با عدد را نه تنها در تاریخ ریاضیات می‌توان دید، بلکه هنوز هم حتی نزد دانشجویان رشته‌های ریاضی تصور ریاضیات بدون عدد مشکل است تا چه رسد بدیگران. نقش تعیین کننده و مبنائی عدد در ریاضیات آنچنان بوده است که فیثاغورثیان به دیدگاه الحادی خدا بودن عدد ایمان یافتند.

۱- مثلاً" ارسطو در مورد شروع یک مبحث علمی مدلل به مفاهیم اولیه، بنشت‌ها وغیره اشاره می‌کند از جمله مرجع [۵] دیده شود.

۲- بی‌آنکه به خرده کاریها بپردازیم دوره‌های سه‌گانهٔ ریاضیات را آنطور که مورد نظر نگارنده است در زیر نام می‌بریم.

الف) ریاضیات ابتدائی یا نخستین دورهٔ ریاضیات، ریاضیات مبتنی بر شمارش است که نیازهای هزاران سالهٔ بشر اولیه را برآورده می‌کرد و مبنای آن را اعداد طبیعی تشکیل می‌داد.

ب) ریاضیات دورهٔ سوم یا ریاضیات عصر کشاورزی و دامداری که مبتنی بر اعداد گویا بود. کشف اعداد گویا آغاز دورهٔ نوینی در ریاضیات است که با ضروریات عصر کشاورزی و دامداری در زندگی اجتماعی انسان پیدایش آن ناگزیر بوده است

د) دوره سوم ریاضیات، ریاضیاتی است که از قرن هفدهم تا اواخر قرن نوزدهم پربارترین ثمرات دانش ریاضی را به همراه داشته است و مبتنی بر اعداد حقیقی است. بی‌تردید بنیان نظریات بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال که از مقتضیات مبرم و انکارناپذیر عصر انقلاب صنعتی بود، بدون اعداد حقیقی و تنها به اتکای اعداد گویا، میسر نبوده است.

۳- الکساندروف ریاضیدان معاصر روسی نیز چهار دوره برای ریاضیات قائل می‌شود. مرجع [۴] فصل اول ملاحظه شود. همچنین در مرجع [۶] یک تقسیم بندی دیگر عرضه شده است. البته دیدگاههای این تقسیم بندیها با دیدگاه ما متفاوت است.

تلاش علمای گذشته ،مخصوص فیثاغورثیان وحتی معاصر[1] برای توجیه همهء پدیده‌ها برمبنای عدددر تاریخ ریاضیات ، دانش وهنرضبط ومحفوظ[2] است . برتر اندراسل فیلسوف وریاضی دان معاصردرمورد پیوستگی خط حقیقی ومسائل مربوط به آن که عمدتا" ناشی ازخواص توپولژیک اعداد حقیقی است بگونه‌ای سخن می‌راندکه‌گوئی این خواص عینا" خواص عددی وناشی از ترتیب اعداد حقیقی[3] است . جان کلام ما این که زیربنای ریاضیات قبل از کانتوررا" عدد" تشکیل می‌داد واین تعریف قدیمی اما هنوزمتداول که " ریاضیات علم کمیات است " خودمبین نقش عدددر ریاضیات بعنوان شاخص این علم است .

درنیمهء دوم قرن نوزدهم که عصربزرگانی همچون وایشتروس ،ددکیند وکانتوراست خودعددکه تا آن هنگام مبنای ریاضیات بودموردپرسش قرار گرفت . به ویژه‌با توجه به مفاهیم حدو بی نهایت این سوال که آیا " بی نهایت بالفعل " وجوددارد یا خیر؟ ذهن کانتوررا به خودمشغول ساخت واندیشهء مقایسهء " بی نهایت‌ها " وکوشش برای عرضهء مفهوم عددرهنمون کانتوربه دورهء جدید ریاضیات گردید. بواقع دستگاه اعداددرآن زمان از عهدهء توضیح " بی نهایت‌ها " برنمی‌آمد . دراین مورداین گفتهء گاوس قابل توجه است که : " من علیه بکارگرفتن بی نهایت بعنوان یک کمیت کامل شده اعتراض می کنم[4] . تغییرمبنای ریاضیات از"عدد" به"مجموعه" که بدست کانتورانجام پذیرفت چهارمین دورهء ریاضیات راکه امروزه

۱- مثلا"لردکلون Lord Clven ازفیزیک دانان معاصرمی‌گوید :
"هنگامی‌که دربارهء موضوعی صحبت می‌کنیداگربتوانیدآنرااندازه‌بگیرید وبه‌زبان اعدادوارقام بیان دارید ، شمادربارهء آن چیزی‌می‌دانید ،درغیر این صورت دانش شما غیرکافی خواهدبود." به‌نقل ازمرجع [۷] صفحه ۳۵۰.

۲- فی‌المثل عددطلائی درمعماری هنوزکاربری دارد. گامهای موسیقی و بعدها نت نویسی ، یامطالعهء امواج براساس اندازه‌گیری طول موج و... .همه وهمه‌گویای نقش " عدد" درتمامی شئونات زندگی آدمی است .

۳- مرجع [۵] مبحث اتصال وپیوستگی دیده‌می‌شود .

۴- به نقل ازمرجع [۸] صفحهء ۴ومرجع ۲ صفحه ۷۹۰.

" ریاضیات جدید" نامیده می‌شود، آغاز نمود. از نتایج شگفت آور این دورهٔ نوین تسخیر بی نهایت ها، مقایسهٔ آنها و بطور کلی حساب بی نهایت هاست کاری که از عهدهٔ اعداد خارج بود. این نکته قابل تاکید است که حساب اعداد ترانسفینی یا همان حساب بی نهایت ها، ریاضیات جدید را مشخص نمی کند، بلکه خود در سایهٔ دورهٔ جدید ریاضیات است که حیات می یابد و رشد می کند. به اعتبار باید گفت که ریاضیات کهنه (نسبت به ریاضیات فعلی) مفاهیم و مباحث ریاضی را براساس " فرد" که عمدتا " عدد" مبین آن بود، مطالعه می کند و در ریاضیات جدید، مفاهیم و مباحث را براساس " مجموعهٔ افراد، " تنقیح دیدگاه جدید به مطالعهٔ "ساختمانها" رهنمون شده است یعنی دیدگاه فعلی یک دیدگاه ساختاری است. در ریاضیات جدید همه چیز به صورت مجموعه عرضه می شود. البته این نکته نیز قابل ذکر است که امروزه در برخی مباحث ریاضی " عنصر" که فی الواقع نقش " فرد" را بازی می‌کند، دارای شخصیت و سرشت قابل توجهی است. این ویژگی بخصوص در جبر از عینیت بیشتری برخوردار است، مثلا" عضو بی اثر در یک ساختمان جبری، فرد ممتازی است. تفاوت اساسی بین حلقه های " یک دار" و حلقه های فاقد یک برکسی پوشیده نیست. لکن در عین حال قابل تاکید و توجه است که عناصر ممتاز (از قبیل یک ها، خودتوانها، پوچ توانها ،...) قائم بذات نیستند و در رابطه با یک مجموعه (یا بهتر بگوئیم یک ساختمان) دارای شخصیت و منش می‌شوند. از لحاظ فرهنگی دست کم این موضوع درخورد توجه است که به نظر می آید مباحثی از ریاضیات از قبیل جبر که " افراد" مورد توجه اند در کشورهای بلوک غرب (دنیای سرمایه داری) بیشتر رشد کرده اند، برعکس مباحثی از قبیل مجموعه ها و توپولوژی که شخصیت عناصر مطرح نظر نیست که در کشورهای بلوک شرق (دنیای سوسیالیسم) از رشد بیشتری برخوردارند. این نکته تاثیرات متقابل فرهنگ جامعه بر ریاضیات و بالعکس را یادآوری می‌کند. توجه به شکل گیری مکتب ریاضیات لهستان بعد از جنگ جهانی دوم که شاید در نظریهٔ مجموعه ها و توپولوژی امروزه مقام اول را در جهان داراست، این ارتباط متقابل را بین فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی روشن می کند.

متاسفانه هنوز مشکل اساسی که در ریاضیات گذشته مطرح بود، وجود دارد. یعنی پرسش هائی از نوع اینکه: " خود مجموعه چیست؟ آیا " مجموعه

را می توان بکمک خودمجموعه‌ها مطالعه کرد؟ هنوز دارای جواب مقنعی نیستند. بنظرما شایدیکی ازعلل تعارضات موجوددرمجموعه‌هاکه دراوان- پیدایش نظریه مجموعه‌ها بعنوان حربه‌ای علیه کانتوراز جانب مخالفین بکارمی رفت، ناشی ازهمین واقعیت است که مجموعه‌ها رانمی توان بکمک خودمجموعه‌ها مطالعه[1] کردوازهمین روست که گمان می‌کنیم دوره‌ٔ دیگری ازریاضیات بایستی پدیدآیدتاگره گشای این مشکل باشد[2].

درمورداین مشکل ریاضیات جدیدقسمتی ازحرفهای پروفسورنویکوف ریاضیدانان معاصرشوروی رانقل می‌کنیم ، اومی‌گوید: آیانظریه مجموعه‌ها یک بنیان کامل ومطمئن برای ریاضیات است؟ تاچه اندازه می‌توانیم به سازگاربودن خودنظریه مجموعه‌هااطمینان کنیم؟ این نظام که در انتهای قرن گذشته بوجودآمد، بسرعت پیشرفت نمودونفوذ عظیمی رابر ریاضیات اعمال کردواهمیت اساسی درمسائل مربوط به مبانی ریاضی رابعهده گرفت. امادرابتدای پیشرفت نظریه مجموعه‌ها معلوم شدکه بکار گرفتن نامحدودمفاهیمی که ازاین نظریه ساخته می‌شوندمنجربه تناقضاتی می‌شود، این واقعیت گسترش وتوسعه‌ٔ نظریه مجموعه‌ها رامتوقف نساخت زیرادرحوزه‌هائیکه مفاهیم آن بکارگرفته می‌شد، هیچ تناقضی رادرحقیقت بوجودنمی آورد. همچنین تجزیه وتحلیل بیشترمبانی نظریه مجموعه‌هاهیچ مبنای رضایت بخشی رابرای باورآن حداقل دریک چهارچوب قابل استفاده‌از ایده‌های این نظریه که امکان عدم تناقضی رامحرزکند، بدست نمی‌دهد.

۱- چنین دیدگاهی چندان دورازانتظارنیست، من باب مثال می‌دانیم کد درنظریه کاتگوریها، یک تیره ازکاتگوریها رامی‌توان توسط خود کاتگوریها مطالعه کرد (یعنی ازکاتگوری کاتگوریها می توان سخن راند) مرجع [۴] ملاحظه شود.

۲- بگمان نگارنده بیان اکثرتعارضات (وچه بسا همه‌ٔ آنها) درمورد مجموعه‌هاکه بطریقی درقالب تعارض (پارادکس) راسل قابل بیان هستند، ناشی ازپذیرش منطق ارزشی است. بنابراین‌درافق های آینده ریاضیات شایدبتوان مکتب شهودگرائی براوروحواریونش راملاحظه کرد، زیرامی‌دانیم که اصل "طردشق ثالث" که منشاء تعارض راسل است موردقبول شهودگرایان نیست [۳] و [۸]

بنابراین تائیدعدم تناقض درحدودموجودیت ساختمانهای تئوریک مجموعه، یک برداشت تجربی است که متضمن مبانی موءثروبسنده‌ای که میبایست آنرا پذیرفت این است که علی رغم خدمت بسیارمفیدی که نظریه مجموعه‌ها بروش بنشتی (Axiomatic) کرده است، بنیانهائیکه خوداین نظریه برآن پای داردمورداطمینان نیستند.[1]

فهرست مراجع

[۱]تئوری مقدماتی اعداد، تالیف غلامحسین مصاحب، جلداول قسمت ، تهران، انتشاران دهخدا، ۱۳۵۵.

[۲]ریاضیدانان نامی، تالیف اریک تمپل بل، ترجمهٔ حسن صفاری تهران انتشاران امیرکبیر،۱۳۴۹.

[۳]ریاضیات چیست؟ تالیف ریچاردکورانت، هربرت رابینز،ترجمهٔ حسن صفاری، تهران انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۹.

[۴]ریاضیات (محتوی، روش واهمیت آن) تالیف گروهی ازریاضیدانان شوروی، ترجمهٔ پرویزشهریاری چاپ دوم، جلداول تهران انتشارات توکا ۱۳۵۶.

[۵]علم مابه عالم خارج، تالیف برتراندراسل، ترجمهٔ منوچهربزرگمهر، تهران بنگاه ترجمه ونشرکتاب ۱۳۴۸.

[۶]دستگاه اصولی ونظریه اصولی مجموعه. تالیف علی اکبرمنتظرحقیقی تهران موءسسه آماروانفورماتیک ایران ۱۳۵۳.

[۷]فلسفهٔ علوم، تالیف علی اکبرترابی،چاپ سوم، تبریزانتشارات چهر ۱۳۵۷.

[۸] " سخنی درشهودگرائی "، نوشته غلامرضا برادران خسروشاهی مجله ریاضی تهران شماره اول، جلداول دانشکده‌علوم دانشگاه‌تهران.

[۹]کوشش، نشریه دانشجویان رشته ریاضی دانشگاه جندی شاپوراهواز شماره‌های اول، سوم وچهارم.

[۱۰] بولتن انجمن ریاضی ایران، شماره ۵،۷،۱۰.

۱ـ به نقل ازمقدمهٔ مرجع [۱] صفحهٔ ۴

1. P.S. Novikov, "Elements of Mathematical Logic", Oliver and Boyd Co.
2. R.L. Goodstein, "Recursive Number Theory", North-Holland, Publishing Company, Amsterdam, 1964.
3. S.C. Kleene, R.E. Vesley, "The Foundations of Intuitionistic Mathematics", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964.
4. William S. Hatcher, "Foundations of Mathematics", Sounders Company
5. Raymond L. Wilder, "Introduction to The Foundations of Mathematics", Second Edition, Wiley International Edition, 1965.

مسئلهء چهاررنگ

نوشتهء : کنت آپل
و
ولفگانگ هاکن
ترجمهء : حسین ناهید
گروه ریاضی وکامپیوتردانشگاه اصفهان

سرانجام به سال ۱۹۷۶ میلادی مساله مشهورچهاررنگ حل گردید : هرنقشهء جغرافیائی راکه برروی کاغذ رسم شده باشدمی توان بااستفاده ازتنهاچهاررنگ مختلف به گونه‌ای رنگ آمیزی نمودکه هر دوکشورمجاوردرآن به رنگ‌های متفاوتی نشان داده شوند. نتیجه بدست آمده ازبسیاری جهات موردعلاقه وتوجه جامعهء ریاضی دانان جهان بود زیراازجمله درطول مدتی بیش ازیکصدسال، ریاضی دانان بسیاری برای حل این مساله که بتمامی درگزارهء ساده فوق بیان گردیده است ،بدون کامیابی صرف کوشش کرده بودند. بااینهمه ازنظرآندسته ازریاضی دانان که از نزدیک درجریان تحولات منجربه حل آن قرارنگرفته بودند، راه‌حل بدست آمده دارای جنبه‌های تشویش انگیز وتاحدودی بیمناک کننده بوده است ، زیرادراثبات ارائه شده بگونه‌ای بی سابقه ازمحاسبات کامپیوتری استفاده شده‌است ودرستی اثبات رانیز نمی توان بدون کمک‌گیری ازکامپیوتر بررسی نمود. علاوه برآنچه ذکرش گذشت ، نکتهء عجیب دیگرآن بودکه برخی ازایده‌های اساسی اثبات ازطریق تجربیات ونتایج کامپیوتری تکامل یافته بودند. هیچکس نمی تواند این امکان را مردود بشماردکه درآینده اثباتی کوتاه ازمسئله چهاررنگ احتمالا" حتی توسط دانش آموزی دبیرستانی بانبوغ سرشاربدست داده شود. البته این امر

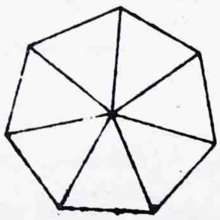
نیز تصورکردنی است که چنین اثباتی هرگز امکان پذیرنباشد .دراین صورت بایستی اذعان نمود که قضیه‌ای ازیک نوع کاملا" جدیدوجالب درریاضیات بدست آمده است که برای آن اثباتی ازنوع سنتی وجودندارد .

تاریخچه مسأله

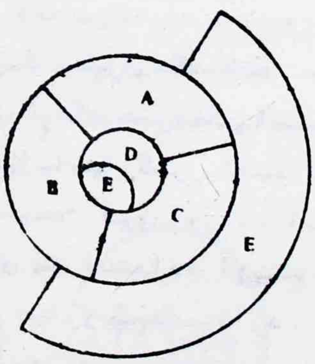
علیرغم جنبه‌های نوین وبدیع اثبات آن ، مساله چهاررنگ واثبات آن هردوازریشه‌هایی عمیق درریاضیات برخوردارند ، برای روشن شدن موضوع ، بایستی تاریخچه مساله رامختصرا" موردبررسی قراردهیم .

درسال ۱۸۵۲ میلادی ، فرانسیس گوتری (۱۸۳۱-۱۸۹۹) که باتفاق برادرش فردریک درلندن به تحصیلات دانشگاهی اشتغال داشت درنامه‌ای به برادرش نوشت که بنظرمیرسدکشورهای هرنقشه جغرافیایی راهمواره می توان فقط بااستفاده ازچهاررنگ مختلف به گونه‌ای رنگ آمیزی کردکه کشورهای همسایه دارای رنگ های متفاوت باشند . منظورازکشورهای همسایه مسلما" آنهایی بوده‌اندکه دارای خطوط مرزی مشترک بوده باشند . نه آنهایی که دارای یک نقطه مرزی مشترک (یاحتی تعدادی متناهی ازچنین نقاطی) باشند ، زیرادرغیرآنصورت برای رنگ آمیزی متمایز کشورهایی که به

صورت مثلث‌های متساوی الساقین تشکیل یک چندضلعی منتظم را داده باشد
ـه تعداد آن کشورها رنگ‌های مختلف موردنیاز خواهد بود. (ن.ک.شکل ۱).
همچنین منظور از "کشور" می بایستی منطقه‌ای هم بند از صفحه بوده
باشد. زیرا اگر یکی از کشورها مثلاً" از چند منطقه تشکیل یافته باشند، می‌توان
ـه آسانی نمونه‌ای از یک نقشهٔ جغرافیایی با پنج کشور بر کاغذ رسم کرد
بگونه‌ای که هر یک از آنها با چهار کشور دیگر مرز مشترک پیدا نماید
(ن . ک . شکل ۲) .



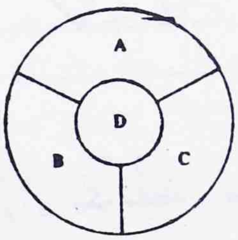
شکل۱- چرا کشورهای دارای یک نقطهٔ مشترک همسایه بحساب نمی‌آیند.



شکل۲- چرا یک کشور می بایستی از یک منطقهٔ واحد تشکیل گردد.

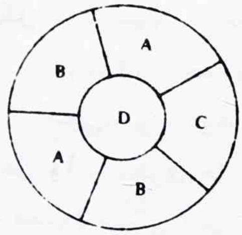
فرانسیس ازبرادرخودفردریک پرسیده بودآیا راهی ریاضی برای اثبات درستی یانادرستی این گمانه (Conjecture) وجود دارد؟ درآن زمان فردریک گوتری هنوز درکالج دانشگاهی لندن بود، جائی که هردوبرادردرجلسات درس اگوستوس دومرگان (۱۸۰۶-۱۸۷۱) که یکی ازریاضیدانان نامدارعصرخویش بودشرکت می کردند. فردریک پس ازآنکه خود راازیافتن پاسخ مساله ناتوان یافت، آنرا ازدومرگان پرسیدکه اونیز راهی برای تعیین درستی یانادرستی گمانه بدست نیاورد.

گوتری ودومرگان مسلما" پی برده بودندکه نقشهٔ نمایش داده شده درشکل ۳ نیاز به چهاررنگ مختلف داردزیرادرآن نقشه هریک ازکشورهای چهارگانه باسه کشوردیگرمرز مشترک دارد. این البته بدان معنی است که " گمانهٔ سه رنگ " نادرست است.



شکل ۳- چرابه چهاررنگ مختلف نیاز است.

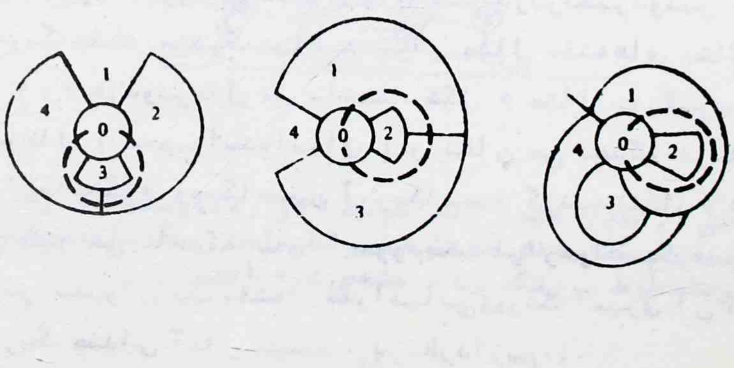
به عبارت دیگر، برای رنگ آمیزی یک نقشهٔ جغرافیایی سه رنگ کفایت نمی کند. دومرگان ثابت کردکه غیرممکن است پنج کشورطوری پهلوی هم قرارگیرندکه هریک ازآنها باچهارکشورباقیمانده مجاورباشند (ن.ک. مستطیل صفحهٔ بعد) . نتیجهٔ فوق اورابه این باوررهنمون گردیدکه بدین ترتیب هیچگاه نیازی به استفاده ازپنج رنگ مختلف وجودنخواهد داشت وبنابراین گمانهٔ چهاررنگ صحت دارد. اما این استدلال که پنج کشوردوبدومجاورنمی توانندروی یک نقشه وجودداشته باشند، اثباتی برای گمانهٔ چهاررنگ بحساب نمی آید. اشکال این امردرشکل ۴ نمایانده



شکل۴ ـ چرا تعمیم دادن وضعیت شکل ۴ گمراه‌کننده است .

استدلال دومرگان

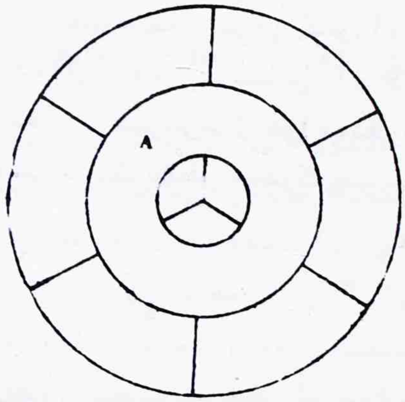
اگوستوس دومرگان ، یکی از نخستین ریاضی دانانی که درجهت حل گمانهٔ چهاررنگ کوشش‌هائی بخرج دادونتایجی بدست آورد، نشان داد هیچ پنج منطقه‌ای دریک صفحه نمی توانند دوبدو کناریکدیگرقرار بگیرند. ایدهٔ اساسی اثبات او براین نکته مبتنی بودکه مجموعه‌ای ازپنج منطقهٔ دوبدو مجاور را مفروض بگیرد و آنگاه به یک تناقض درونی (هندسی) دست یابد. پنج منطقه را درنظربگیرید و آنها را به ترتیب زیرشماره گذاری نمائید : منطقه‌ای را به عنوان منطقهٔ 0 درنظرگرفته ، سپس منطقهٔ دیگری را که مجاور آن قرارگرفته باشمارهٔ ۱ مشخص نمایید. آنگاه ازنقطه‌ای واقع برمرز مشترک مناطق 0 و ۱ درجهت چرخش عقربه‌های ساعت حرکت کنید تا مرز منطقهٔ جدیدی فرا برسد. منطقهٔ اخیررا با شمارهٔ ۳ و منطقه آخررا با عدد ۴ شماره گذاری نمایید. حالت‌های مختلف درزیرنشان داده شده است



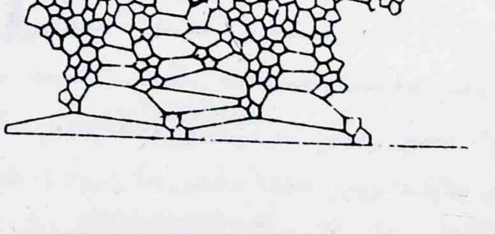
می توان به آسانی نشان داد که درهریک ازحالات ، یک منحنی بسته (که بصورت نقطه چین درشکل های فوق مشخص گردیده است) وجوددارد که مناطق ۱ و ۳ یامناطق ۲ و ۴ راازیکدیگرجدا می کند. مناطقی که توسط این منحنی ازیکدیگرجداشده اندنمی توانند درمجاورت یکدیگرقرارگیرند ،زیرا بزبان ساده یکی ازآندو داخل وآندیگری خارج آن واقع می شوند.

استدلال فوق براین واقعیت متکی است که هرمنحنی مسدودواقع درصفحه که شباهت به یک دایره ٔ تغییرشکل یافته (درزبان فنی ریاضی یک منحنی مسدودساده) داشته باشد، نقاط واقع درصفحه، بجز آنهایی که خودمنحنی ازآنها تشکیل یافته است، رابه دودسته ٔمتشکل از نقاط درونی وبرونی تقسیم بندی می نماید. این بدان معنی است که هرمنحنی دیگری که بخواهدیکی ازنقاط درونی رابه نقطه‌ای برونی متصل نمایدبایستی الزاما" منحنی اول راقطع نماید. (گزاره ٔ دقیقی که ایده ٔ فوق رابیان می کندبنام قضیه ٔ خم جردان معروف است.) گرچه گزاره ٔ فوق تقریبا" بدیهی بنظرمی رسد، بااینهمه درموردهررویه‌ای صدق‌نمی کند. برای مثال یک منحنی مسدودواقع بررویه‌ای به شکل دونات، به شرط آنکه سوراخ آن رادوربزند دارای یک منطقه ٔ متمایز درونی نیست.) تناقضی که از استدلال دومرگان نتیجه می شودتماما" بدان سبب است که درموردیک منحنی مسدودساده ، مناطق درونی وبرونی آن ازیکدیگرجدا می باشند.

یک نقشه ٔ جغرافیایی را " نرمال" می خوانیم هرگاه هیچکدام از- کشورهای آن کشوریاکشورهای دیگری راکاملا" دربرنگیردونیز درآن بیش ازسه کسوردریک نقطه مشترک نباشند.برای مثال نقشه‌های نشان داده شده درشکل های ۳ و۴ هردونرمال می باشند. شکل ۶ مثال بزرگتری ازقسمتی از یک نقشه نرمال (تصویراستوانه‌ای) رانشان می دهدکه درسال۱۹۷۷توسط ادواردمور ازدانشگاه ویسکانسین آمریکاتهیه گردید(شکل ۶ دارای خواص جالب دیگری نیز می باشدکه بعدا" موردبحث قرارخواهندگرفت ، لکن در اینجا فقط آنرابعنوان یک نقشه ٔ جغرافیایی‌که‌رنگ آمیزی آن بااستفاده ازتنهاچهاررنگ چندان آسان نیست . درنظرداریم.).



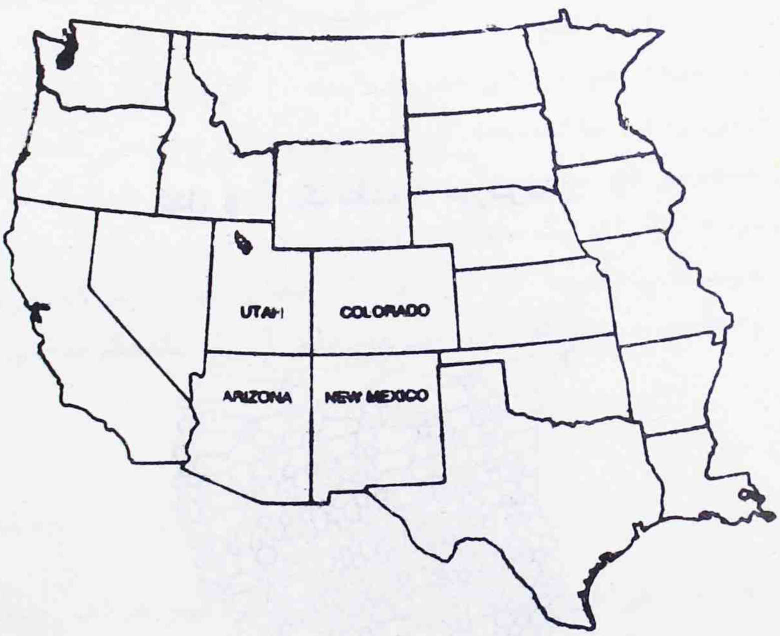
شکل ۵ ـ یک نقشهٔ غیرنرمال



شکل۶ـ قسمتی ازمثال تهیه شده توسط ادوارد مور نقشه‌ای را نشان می‌دهد که دارای هیچ شکل‌بندی کاهش‌پذیر نمی‌باشد (یک شکل‌بندی حلقه ۱۲ کاهش پذیر با خطوط پررنگ سیاه مشخص شده است .)

نقشه‌های نرمال

یک نقشهٔ نرمال عبارت از نقشه‌ای است که در آن بیش از سه منطقه دریک نقطه مشترک نبوده ونیز هیچ منطقه‌ای تماما" منطقه‌دیگری را درمیان نگرفته باشد. ایالات نیمهٔ شرقی کشورآمریکا تشکیل یک نقشهٔ نرمال را می دهندحال آنکه اگرتمامی ایالات آمریکا رابحساب آوریم ، درآنصورت یک نقشهٔ غیرنرمال خواهدشدزیراایالات یوتا،کلرادو آریزوناونیومکزیکو همگی دریک نقطه مشترک هستند :



چون بازاء هر نقشه می‌توان یک نقشهٔ نرمال را متناظر نمود که حداقل همان تعداد رنگ برای رنگ آمیزی لازم داشته باشد، بنابراین کافی است گمانهٔ چهار رنگ برای نقشه‌های نرمال اثبات گردد. گام بعدی نشان دادن آنست که رابطهٔ زیر در مورد هر نقشهٔ نرمال برقرار است:

$$4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 - p_7 - 2p_8 - 3p_9 - \cdots - (N-6)p_N = 12,$$

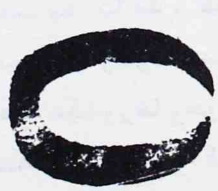
که در آن P_n تعداد کشورهایی که دارای n همسایه هستند و N بیشترین تعداد همسایه‌های هر کشور در نقشه می‌باشند. (توجه داشته باشید که $n = 0$ یا $n = 1$ نمی‌توانند اتفاق بیافتند زیرا در یک نقشهٔ نرمال مناطق جزیره‌ای یا محصور وجود ندارند و از آن رو رابطه با P_2 آغاز شده است.) اما هر یک از P_n ها یا صفر یا مثبت بوده وضریب آن اگر کوچکتر از ۶ باشد مثبت است. بدین ترتیب برای آنکه حاصل جمع طرف چپ رابطه مثبت گردد، بایستی اقلاً یکی از مقادیر P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 مثبت بوده باشند. به عبارت دیگر بایستی الزاماً "کشور یا کشورهایی با دو، سه، چهار یا پنج همسایه وجود داشته باشند.

به آسانی می‌توان یک نقشهٔ غیر نرمال را تغییر داد تا از آن نقشهٔ نرمال بوجود آید که حداقل همان تعداد رنگ برای متمایز بودن نیاز داشته باشد. بدین ترتیب اگر نقشه‌ای وجود داشته باشد که رنگ آمیزی آن به پنج رنگ نیاز داشته باشد، در آنصورت بایستی یک نقشهٔ پنج رنگی نرمال نیز وجود داشته باشد. پس برای اثبات گمانهٔ چهار رنگ کافی است نشان دهیم هیچ نقشهٔ پنج رنگی نرمال امکان پذیر نیست. استدلال کمپه با اندکی تغییر نشان می دهد (ن. ک. به مستطیل صفحهٔ بعد) هر نقشهٔ نرمال بایستی شامل یک کشور با پنج یا کمتر همسایه باشد. کمپه بدین مطلب توجه کرد که چنانچه یک نقشهٔ پنج رنگی نرمال وجود داشته باشد، در آنصورت بایستی یک چنین نقشه‌ای با کمترین تعداد کشورها وجود داشته باشد. سپس با استفاده از روش کلاسیک برهان خلف استدلال نمود که اگر یک نقشهٔ نرمال پنج رنگی می نیمال شامل کشوری با کمتر از ۶ همسایه باشد - که در مورد یک نقشهٔ نرمال آنگونه که قبلاً نشان داده شد ضروری

است ـ درآنصورت می بایستی یک نقشهٔ نرمال پنج رنگی باتعداد کمتری کشور وجودداشته باشد. (طرحی از استدلال کمپه درمستطیل صفحهٔ بعد ارائه شده است.) بنابراین چنانچه استدلال تااینمرحله کاملاً" صحیح بوده باشد، هیچ عددی برای تعداد کشورهای یک نقشهٔ پنج رنگی می‌نیمال وجودنخواهدداشت ودرنتیجه یک نقشهٔ پنج رنگی می نیمال امکان پذیر نخواهدبود. این امرنیز به نوبهٔ خودمنجربه‌عدم‌امکان هرنوع نقشهٔ پنج رنگ گردیده وبدینترتیب اثبات پایان یافته خواهدبود.

یازده سال بعددر ۱۸۹۰، پرسی ج هیوود (۱۹۵۵-۱۸۶۱) خاطرنشان ساخت استدلال کمپه دراین موردکه هیچ نقشهٔ می نیمال پنج رنگی نمی تواند دارای کشوری باپنج همسایه باشددارای اشکال است وآنهم ازنوعی که رفع آن بهیچوجه آسان نمی باشد. درجریان مطالعهٔ این مساله، او به بررسی نوعی تعمیم مسالهٔ چهاررنگ اقدام کرد. نقشه‌هایی که توسط گوتری وکمپه موردمطالعه قرارگرفته بودندازنوع واقع برصفحه یا رویهٔ کره بودند. اماهیوودعلاوه برآنها نقشه‌های واقع برررویه‌های به اصطلاح " دسته دار" و" تاب خورده" رانیز درنظرگرفت. (ن.ک. شکلهای ۷ و ۸).

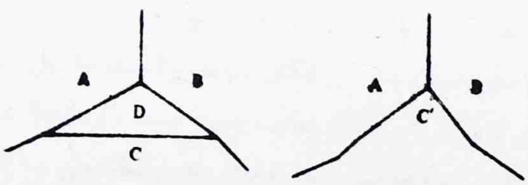
شکل ۷ ـ یک رویهٔ " چوب شور" دارای دودسته



شکل ۸ ـ " نوارموبیوس" بایک تاب

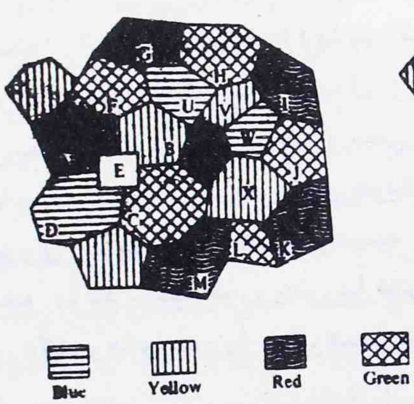
استدلال کمپه

هستهٔ اصلی استدلال ادعایی کمپه براین مطلب قرار داشت که یک نقشهٔ نرمال پنج رنگی می نیمال (یعنی کوچکترین نقشهٔ نرمالی که نیاز به پنج رنگ داشته باشد) نمی تواند شامل کشوری با دو، سه، چهار یا پنج همسایه باشد. ازطرفی چون هرنقشهٔ نرمال لزوماً" می بایستی شامل چنین کشوری باشد، لذا کمپه نتیجه گرفت هیچ نقشهٔ پنج رنگی نمی‌تواند وجودداشته باشد. بمنظورروشن ساختن خطوط اصلی استدلال کمپه ، اثبات او درموردکشورهای سه یا چهارهمسایه‌ای را با تفصیل بررسی می‌نماییم.



فرض کنیدیک نقشهٔ پنج رنگی می نیمال شامل کشوری سه همسایه‌ای باشد (مانندکشور D درسمت چپ شکل بالا). حال چنانچه آن کشوردریکی ازهمسایگان خودادغام گردد (درسمت راست شکل بالا،کشورهای C و D با یکدیگرادغام شده کشور C' رابوجودآورده‌اند) ، درآنصورت نقشهٔ حاصله شامل تعدادکمتری کشورگردیده وبنابراین قابل رنگ آمیزی با چهار رنگ خواهدبود.

حال اگربجز کشورادغام شدهٔ D ، بقیهٔ کشورها به رنگ های متناظردرنقشهٔ ادغام شده رنگ آمیزی گردند، درآنصورت می توان D را با رنگی متفاوت ازرنگ های سه کشورهمسایه‌اش متمایز نمود. بدین ترتیب معلوم می گرددکه نقشهٔ اولیه می بایستی باتنها چهاررنگ قابل رنگ آمیزی بوده باشدکه بافرض پنج رنگی بودن نقشه درتناقض می باشد. (اساساً" همین استدلال برای نشان دادن اینکه هیچ نقشهٔ پنج رنگی می نیمال شامل کشوردوهمسایه‌ای نیست کفایت می کند).



استدلال نظیردرموردکشورچهارهمسایه‌ای ایده‌ای است‌که درنتایج بدست‌آمده توسط کمپه ازاهمیت‌اصلی برخوردار است. فرض‌کنیددریک نقشهٔ پنج رنگی می‌نیمال کشوری باچهارهمسایه وجوددارد. مانندقبل می‌توان آن کشور را با یکی ازهمسایه‌ها ادغام کرده ،بقیهٔ نقشه را باچهار رنگ بطورکامل رنگ آمیزی نمود و کشورادغام شده را بیرنگ باقی گذاشت (درنقشهٔ بالاکشورچهارهمسایه‌ای باحرف E مشخص‌گردیده است.) حال اگر کشورهای همسایه باکمتر از چهار رنگ مشخص‌شده باشند، می‌توان رنگی برای کشوربا قیمانده انتخاب‌کردو درغیرآنصورت استدلال زیرکه توسط کمپه ارائه گردیدکفایت‌خواهدکرد.

رنگ‌های یک زوج ازکشورهایی راکه دردوسمت متقابل کشور بیرنگ قرارگرفته‌اند(مثلا" رنگ قرمز کشور A ورنگ‌سبز کشور C)ملاحظه نمایید. ممکن است‌مسیری ازکشورهای مجاوربه رنگ‌های ذکرشده درفوق ازیکی به دیگری وجودداشته یانداشته باشد. (درشکل فوق ، مسیر متشکل ازکشورهای A, F, G, H, I, J, K, L, M و C که A و C رابه یکدیگر

متصل می نماید چنین مسیری است . ازطرف دیگرچنین مسیری بارنگهای زردوآبی که کشورهای B وD رابه یکدیگرمتصل نمایدوجودندارد.) به نشانهٔ ادای احترام ، چنین مسیرهایی اصطلاحا "زنجیره‌های کمپه نامگذاری شده‌اند.

هرگاه هردوزوج کشورهای متقابل توسط زنجیره‌های کمپه ارتباط پیداکنند، درآنصورت می بایستی هردوشامل یک کشورمشترک گردندکه بوضوح غیرممکن است. پس می بایستی یکی اززوج C (درشکل فوق کشورهایB و D) بی زنجیره باشد. یکی ازکشورهای آن زوج (مثلاً" B) راانتخاب کرده آنگاه کلیهٔ کشورهایی راکه به یکی ازدورنگ انتخابی مشخص گردیده (در مثال موردنظررنگ های زردوآبی متعلق به B و D) وتوسط مسیری زردوآبی به کشورانتخابی مربوط شده‌اندصورت نمایید (درمثال فوق ، صورت مورد نظرمتشکل ازکشورهای B ، U،V ، Wو X می شود). حال رنگ های این کشورها رابایکدیگرتعویض نمایید. (شکل سمت راست حاصل تعویض رنگ کشورهای B ، U ، V ، Wو X درشکل سمت چپ است.) ملاحظه می نماییم که کشوربیرنگ دارای همسایه‌هایی به فقط سه رنگ می باشد، زیرا لیست کشورهایی که رنگ آنهاتعویض گردیده نمی تواند شامل بیش ازیکی ازچهارهمسایه (درمثال ، B) باشد. بدینترتیب کشوربیرنگ (E) را- می توان بارنگ چهارم (زرد) مشخص نمودکه به تناقض منحرمی گرددزیرا بنابرفرض ، نقشه می بایستی به پنج رنگ نیاز داشته باشد.

بدین ترتیب اوقادر به یافتن استدلالی جالب درمورد کلیه رویه‌ها بجز کره وصفحهٔ مسطح گردید که به موجب آن یک کران بالا برای تعداد رنگ های لازم جهت متمایز کردن نقشه‌های واقع بر این رویه‌ها بدست می‌آید. حال گرروش مورد استفاده او در مورد صفحه مسطح نیز قابل اطلاق می‌بود، در آنصورت اثباتی برای گمانهٔ چهار رنگ بدست می‌آمد.

چرا ریاضی‌دانان به این مسئله علاقمندند؟

هیوود مدت زمانی قریب ۶۰ سال از عمر خویش را صرف تفکر دربارهٔ این مسئله نمود. ظرف این مدت بسیاری از ریاضی دانان برجسته دیگر (ونیز تعدادی بیشمار از ریاضی‌دانان آماتور) کوشش های قابل ملاحظه‌ای را به گمانهٔ چهار رنگ اختصاص دادند. درحقیقت بخش قابل‌توجهی از آنچه امروزه تحت عنوان نظریهٔ گرافها رده‌بندی شده است، درمسیرکوشش برای حل مسئله چهار رنگ بوجود آمد ورشد کرد. این موضوع بخودی خود جالب است بدانیم که چرا عده‌ای کثیر از ریاضی‌دانان مقدار معتنابهی از وقت خود را صرف مسئله‌ای که از نظر علمی دارای اهمیت اندکی بودنمودند. درک پاسخ این پرسش همانا درک انگیزهٔ ریاضی‌دانان در انجام پژوهش های ریاضی محض می باشد.

تقریبا" در اواخر سدهٔ نوزدهم میلادی، ریاضی‌دانان موفق به ساختن بسیاری نظریه‌های پرقدرت ریاضی شده بودند که آنان را قادر ساخته بود بسیاری از مسائل دشوار را حل نمایند. این احساس بوجود آمده بود که هرمسئله‌ای به شرط آنکه به‌گونه‌ای منطقی وعقلانی به‌زبان ریاضی قابل بیان باشد، با استفاده از نظریه‌هائی‌که از قدرت کافی برخوردار باشند قابل حل خواهد بود. بعلاوه چنین انگاشته می‌شد که هرمسئله می‌تواند به‌گونه‌ای حل‌شود که یک ریاضی‌دان ورزیده درمدت زمانی معقول ومتعارف بتواند درستی راه حل ارائه شده را بررسی نماید. گمانهٔ چهار رنگ مسلما" یکی از این نوع مسائل بشمار می‌رفت. درواقع بیان مسئله چنان روشن وخالی از ابهام است که هرفرد عاقل فهمیده آنرا درک می کند. حال اگر راه‌حلی برای این مسئله بدست نیامده باشد، ناگزیر بایستی تصور کرد که ابزار لازم ریاضی برای حل آن بوجود نیامده است.

درسالهای دهه ۱۹۳۰، پاره‌ای از ابهام در افق دوردست ریاضی پدیدار گردید. در منطق ریاضی یعنی آن رشته از ریاضیات که در آن ایدهٔ برهان به دقیق‌ترین صورت بیان می گردد، فعالیت های کورت گودل و آلونزو

چرچ به برخی نتایج نگران کننده منجرگردید. اول آنکه دردستگاهی که بنظرمی رسیدطبیعی ترین دستگاه منطقی باشد، گزاره‌هایی یافت شدکه ازصحت برخوردارلکن قابل اثبات نبودند، دوم آنکه قضایائی درآن دستگاه وجوددارندکه بیان آنها ازچندگزارهٔ کوتاه تجاوز نمی کند لکن درعین حال کوتاهترین اثبات شان درمدت زمانی‌معقول میسرنمی‌باشد درسالهای دههٔ ۱۹۵۰ معلوم گردیدچنین اشکالاتی درسایررشته‌های ریاضی علاوه برمنطق نیز وجوددارند. برخی ریاضی دانان می پنداشتندچون‌گمانهٔ چهاررنگ برای مدتی طولانی وبدون موفقیت موردمطالعه قرار گرفته است، احتمالا" بایستی جزو آندسته ازمسائلی باشدکه هیچ اثباتی برای درستی یانادرستی آن وجودنداشته باشد. برخی دیگرمی پنداشتنداگرهم اثباتی وجودداشته باشدممکن است به گونه‌ای استثنایی طولانی باشد. امادسته‌ای دیگرعقیده داشتندکه بیماری حل ناپذیری به‌این قلمرو سرایت نکرده ، واحتمالا" راه حلی ظریف‌برای اثبات یاردآن بایستی وجودداشته باشد.

ماهم اکنون بطورقطع می دانیم که یک اثبات‌برای مسئله فوق وجوددارد. اماتااین لحظه نمی دانیم (وامکان داردهرگز ندانیم)آیا اثباتی ظریف، کوتاه وقابل بررسی توسط یک مغز ریاضی (انسانی)وجود داردیانه ؟

مجموعه‌های اجتناب ناپذیروشکل بندی های کاهش‌پذیر

تعدادحوزه‌های ریاضی که درجهت اثبات‌گمانهٔ چهاررنگ مورد استفاده قرارگرفته‌اندبقدری زیاداست‌که بحث‌دربارهٔ همگی‌آنها از حوصلهٔ این مقاله بیرون است. خوانندهٔ علاقمندمی تواندبه ماخذ ذکرشده درپایان این ترجمه برای بدست‌آوردن اطلاعات تاریخی بیشتر مراجعه نماید. ماتوجه خودرابه فعالیت‌هایی که مستقیما" به حل مسئله منتهی گردیدندمحدودمی نماییم .

کمپه ثابت‌کرده بودکه هرنقشهٔ نرمال می بایستی دارای اقلا" یک کشوربادو، سه، چهاریاپنج همسایه باشد، هیچ نقشهٔ نرمالی(در - صفحه) نمی تواندوجودداشته باشدبطوریکه درآن هرکشورشش‌همسایه یا بیشترداشته باشد. این موضوع رامی توان بدین صورت بیان کردکه

مجموعهٔ " شکل بندی " (CONFIGURATION) های دوهمسایه‌ای سه همسایه‌ای ، چهارهمسایه‌ای وپنج همسایه‌ای یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیر (UNAVOIDABLE) است بدین معنی که هرنقشهٔ نرمال بایستی اقلاً یکی ازآنها راشامل باشد. اجتناب ناپذیری یکی ازدوایدهٔ مهمی است که برای درک نظریه جنبهٔ اساسی دارند. درسراسراین مقاله هرجا ازاجتناب ناپذیری یک مجموعه سخن گفته شودمنظورآنست که هرنقشهٔ نرمال بایستی ضرورتاً "برخی ازاعضای مجموعه راشامل باشد.

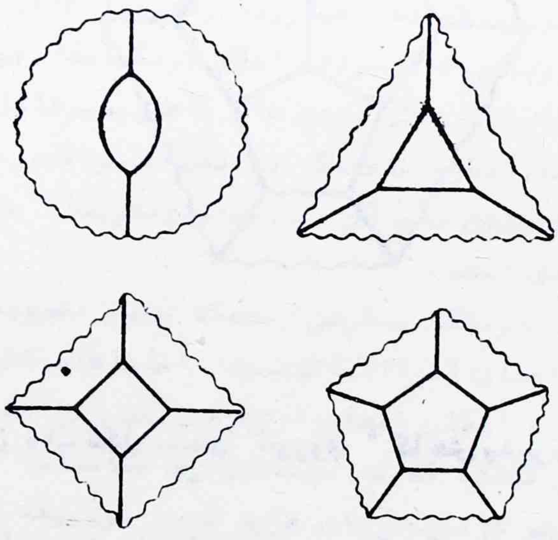
ایدهٔ بااهمیت دیگرکاهش پذیری (REDUCIBILITY) است. بطورشهودی وذهنی ، یک شکل بندی راکاهش پذیرمی نامیم هرگاه فقط بابررسی آن شکل بندی ونحوه قرارگرفتن کشورهانسبت به یکدیگربتوان نشان دادکه آن شکل بندی نمی توانددریک نقشهٔ پنج رنگی می نیمال ظاهرگردد . روش اثبات کاهش پذیری شکل بندی هاالهام گرفته ازروشی است که کمپه بااستفاده ازآن ثابت کرد دریک نقشهٔ پنج رنگی می‌نیمال هیچ کشورچهارهمسایه‌ای نمی تواندوجودداشته باشد. کاربردواژهٔ "کاهش پذیر" ازاستدلال کمپه ناشی می شود. اوثابت کردهرگاه نقشه‌ای پنج‌رنگی شامل یک کشورمثلاً" چهارهمسایه‌ای باشد، آنگاه بایستی یک نقشهٔ پنج رنگی باتعدادکمتری کشوروجودداشته باشد. خواننده‌ای‌که استدلال مستطیل قبل رادرک کرده باشد، ایده‌های اساسی اثبات‌های کاهش پذیری‌رادریافت کرده است.

درمدت قریب به یک قرن که ازمطرح شدن مفهوم کاهش پذیری توسط کمپه می گذرد، برخی روش‌های استانداردجهت بررسی کاهش پذیری یک شکل بندی تکامل یافته‌اند. استفاده ازچنین روشهائی برای اثبات‌کاهش پذیری شکل بندی های بزرگ فقط بااستفاده ازکامپیوترانجام پذیر است . می توان فعالیت کمپه برای حل گمانهٔ چهاررنگ راکوشش درجهت یافتن مجموعه‌ای اجتناب ناپذیراز شکل بندی های کاهش پذیرخلاصه کرد یافتن چنین مجموعه‌ای برای اثبات‌گمانهٔ چهاررنگ کفایت می کند.

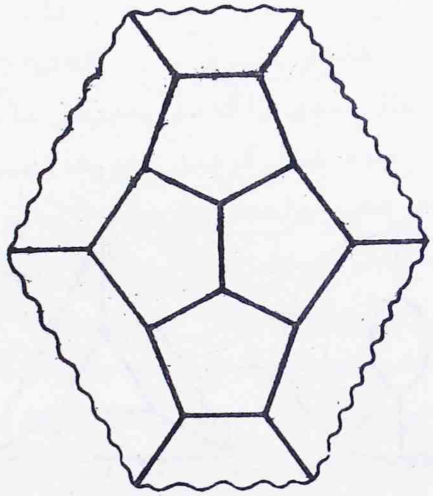
از ۱۹۰۰ تا ۱۹۷۰

درسال ۱۹۱۳ ، جرج دیویدبیرکاف (۱۹۴۴ -۱۸۸۴) که یکی ازاولین

ریاضی دانان برجسته آمریکائی است استدلال معیوب کمپه را مورد بررسی قرار داد و اساس بسیاری از روش های بعدی استدلال را پایه گذاری کرد. بیرکاف با استفاده از روش کمپه و برخی تکنیک های ابداعی خود توانست نشان دهد تعدادی شکل بندی های بزرگتر (از جمله شکل بندی نشان داده شده در شکل ۱۰) کاهش پذیرند.



شکل ۹- مجموعه های کوچک اجتناب ناپذیر کمپه



شکل ۱۰- شکل بندی "لوزوی" کاهش پذیربیرکاف

با استفاده از روش های فوق وبرخی تکنیک های تازه ، ریاضی‌دان دیگری بنام فیلیپ فرانکلین (۱۸۹۸-۱۹۴۵) ثابت کردیک نقشهء پنج رنگی (نقشه‌ای که بنا به فرض نیاز به پنج رنگ داشته باشد) بایستی اقلا" شامل ۲۳ کشورباشد. روش های ابداع شده توسط بیرکاف بین سالهای ۱۹۱۳تا ۱۹۵۰ متعاقبا" توسط بسیاری ازریاضی دانان مورداستفاده واقع گردیده وبهبودداده شدند. اگرچه این کوشش های ظریف ودقیق ، کاهش پذیری تعدادزیادی ازشکل بندی‌ها را به اثبات رسانید، باآینهمه تعداد شکل بندی هایی که دریک فاصله زمانی چهل ساله‌بعداز انتشارمقاله بیرکاف کاهش پذیری شان به اثبات رسیده بودبهیچوجه برای اثبات گمانهء

چهار رنگ کفایت نمی کرد. به عبارت دیگر این شکل بندی ها بهیچ روی تشکیل یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیر را نمی دادند. فقط معدودی از ریاضی دانان به ایجاد مجموعه‌های اجتناب ناپذیر اشتغال داشته و آنها نیز امیدواری اندکی داشتند که فعالیتشان به پیدایش یک مجموعه اجتناب ناپذیر از شکل بندی های کاهش پذیر منتهی شود. در واقع نتیجهٔ اصلی بکارگرفتن شکل بندی های کاهش پذیر در طول نیمهٔ اول قرن حاضر فقط منجر به افزایش عدد بیرکاف از ۲۳ به ۳۶ گردید (یعنی ثابت گردید هر نقشه‌ای که شامل کمتر از ۳۶ کشور باشد لزوما" چهار رنگی است.) این در واقع بهترین نتیجهٔ بدست آمده تا قبل از سال ۱۹۵۰ بود.

هاینریش هیش (Heinrich Heesch) از دانشگاه هانورکه کار خویش برروی گمانهٔ چهار رنگ را در سال ۱۹۳۶ آغاز کرد ظاهرا" بعد از کمپه اولین ریاضی دانی بود که اعلام کرد گمانهٔ چهار رنگ با یافتن مجموعه‌ای اجتناب ناپذیر از شکل بندی های کاهش پذیر قابل حل است. او در سال ۱۹۵۰ این گمانه را مطرح ساخت که نه تنها چنین مجموعه‌ای دست یافتنی است بلکه تعداد شکل بندی های آن نیز محدود و تقریبا" متشکل از نزدیک به ده هزار شکل بندی است.

در آن زمان بسیار مشکل بنظر می رسید که چنین مجموعه‌ای را بوجود آورد و کاهش پذیری اعضای آنرا اثبات نمود. اما با ظاهر شدن کامپیوتر های دیژیتال سریع، امکان اقدام از نظر فنی میسر می نمود. نومیدی و دلسردی پژوهشگران گذشته که به سبب دشواری محاسبات دستی موجه بنظر می‌رسید اکنون در پرتو کامپیوترهای هرچه سریع تر و پرقدرت تر می بایستی مورد ارزیابی مجدد قرار گیرد. هیش روشهای شناخته شدهٔ موجود برای اثبات کاهش پذیری را به شکل صوری (Formal) در آورد و مشاهده نمود که اقلا" یکی از آن روشها (نوعی تعمیم صاف و سادهٔ روش کمپه) در اساس آنقدر مکانیکی هست که بتوان انجام آنرا به عهدهٔ کامپیوتر محول نمود.

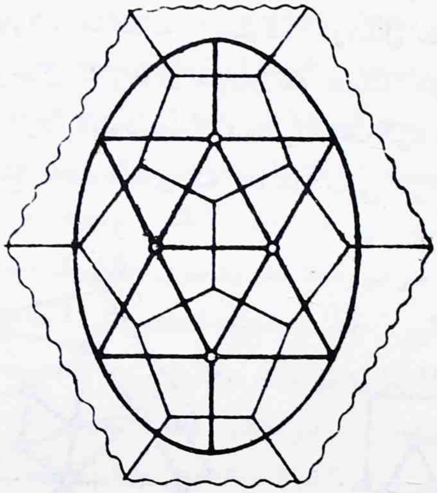
سپس یکی از دانشجویان هیش به نام کارل دیوره (Karl Durre) برنامه‌ای کامپیوتری بر مبنای روش فوق تهیه نمود تا کاهش پذیری شکل بندی ها را اثبات کند. هرگاه این برنامه موفق به اثبات کاهش پذیری یک شکل بندی می گردید، در آنصورت مسلما" آن شکل بندی کاهش پذیر بود، اما یک نتیجهٔ منفی می توانست بدین معنی باشد که روش مورد استفاده قادر به اثبات

کاهش پذیری نشده است وامکان دارد احتمالا" روشی دیگرموفق به انجام آن گردد. دربرخی مواردهنگامی که برنامهٔ دیوره موفق به اثبات کاهش پذیری نمی گردید، هیش ازعهدهٔ این کاربرمی آمد. جریان بدینترتیب بودکه هیش بااستفاده ازاطلاعات بدست آمده دراجرای برنامه وانجام برخی محاسبات، تکنیکی رابکارمی گرفت که اساسا" توسط بیرکاف توصیف گردیده بود.

نمودارهای همزاد(dual) وموانع کاهش پذیری

هیش شکل بندی های کاهش پذیررا به گونه‌ای مناسب ترازپژوهشگران قبل ازخودتوصیف نمود. آغاز کاراو ازاین نقطه بودکه نقشهٔ مفروض اولیه رادرقالب دیگری که ریاضی دانان آنراشکل همزاد(dual) می خوانندقرارداد. برای اینکار، پایتخت های کشورهای نقشه رامشخص کیدوسپس هرگاه دوکشوربایکدیگرهمسایه باشند، پایتخت های آندو راتوسط پاره خطی که ازمرز مشترک عبورنمایدبهم وصل نمایید. (ن.ک. شکل ۱۱). اکنون همه چیز بجز پایتخت ها وجاده‌های اتصال که به‌ترتیب رئوس ولبه‌ها خوانده می شوندراازنقشه حذف نمایید. آنچه برجای می ماندا صطلاحا" نمودار همزادنقشهٔ اولیه خوانده می شود. این امرامکان پذیراست واغلب باعث تسهیل نیز می گرددکه درنمودارهمزاد کمانها رابه شکل قطعه خطهای مستقیم رسم نماییم. لبه‌های یک نمودارصفحه رابه مناطقی تقسیم می نمایندکه معمولا"وجوه خوانده می شوند. حال اگراز یک نقشهٔ نرمال آغاز کنیم - که موضوع موردنظرماست - تمامی این وجوه بشکل مثلث خواهندبودزیراوجوه نمودارهمزادمتناظربا رئوس نقشه اصلی اندودریک نقشهٔ نرمال هرراس دقیقا" سه لبه رابهم وصل می‌نماید. دراین حالت تمامی نموداررایک مثلث بندی می نامند. تعدادلبه‌هایی که درنمودارهمزادبه یک راس منتهی می شونداصطلاحا" درجهٔ آن راس - نامیده می شود. درجهٔ هرراس درواقع تعدادهمسایه‌هایی است که کشور متناظر به راس فوق درنقشهٔ اصلی دارامی باشد. هرگاه مسیری مشتمل برتعدادی ازلبه‌هاازنقطه‌ای شروع وبدون عبورازروی خوددوباره بهمان نقطه بازگردد، آن مسیررایک مدارمی خوانند که نمودارارابه دوبخش

درونی وبرونی تقسیم بندی می نماید . شکل ۱۱ نمودا رهمزا دشکل بندی شکل ۱۰ راکه درآن کشورهای اولیه کمرنگ ترندنشان می دهد .توجه نماییدکه حلقه کشورهای شش گانه نقشهٔ اولیه بصورت مدا رمتصل کنندهٔ



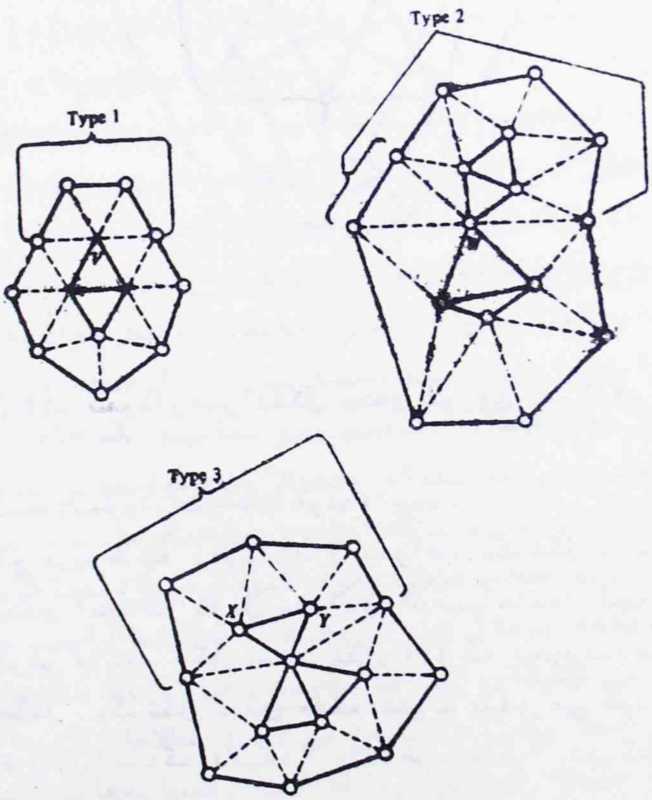
شکل ۱۱- نمودا رهمزا دشکل بندی لوزوی بیرکاف

شش را س وشش لبه‌درنمودا رهمزا دظا هرشده است .

درا صطلاح مربوط به نمودا رهای همزاد ، یک شکل بندی عبا رت از آن بخش ا زمثلث بندی است که شامل تعدادی رئوس با ضافهٔ لبه‌های متصل‌کننده آنها به یکدیگرمی باشد . شکل بندی شکل ۱۱ (که بصورت نمودا رهمزا درسم گردیده) اصطلاحا " یک شکل بندی حلقه شش نا میده می شودزیرا حلقهٔ آن متشکل از ۶ راس است که دقیقا " متناظربا حلقهٔ شش کشوردربرگیرنده درنقشهٔ اولیه می باشد .

هیش هنگام بررسی ومطالعه شکل بندی ها ا زنظرکاهش پذیری؛ برخی پدیده‌های متمایز راکه نشانه‌هایی ا زموفقیت درکاهش پذیری بحساب می آمدندموردتوجه قرارداد . برای مثال برخی شرایط درموردهمسایه‌های

رئوس یک شکل بندی کشف شدندکه تحت آن شرایط هرگز یک شکل بندی کاهش پذیریافت نشده بود. مثلا" هرگز یک شکل بندی کاهش پذیریافت نشده بودکه شامل اقلا" دوراس بوده ، یک راس مجاوربا حلقه چهارداشته وشامل هیچ شکل بندی کوچکترکاهش پذیرنباشد. درحالیکه هیچ اثباتی دردست نیست که نشان دهدیک شکل بندی کاهش پذیربا وجوداین " موانع کاهش پذیری " امکان پذیرنیست . با اینهمه اگرکسی مایل باشدشکل بندی های کاهش پذیررا بدست آورد، عاقلانه است که ازشکل بندی های یادشده اجتناب کند. هیش درخلال کارهای خویش سه دسته موانع کاهش پذیری وازجمله آن یکی که دربالاتوصیف گردیدراکشف کرد (ن . ک . شکل ۱۲)تاکنون کاهش پذیری هیچ مجموعه‌ای که شامل یکی ازاین نوع موانع باشد اثبات نشده است .



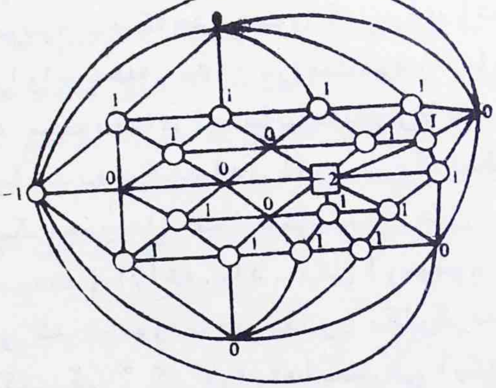
شکل ۱۲ - مثالهایی ازسه نمونه موانع کاهش‌پذیری هیش

نوعی تخلیه الکتریکی

باکارهایی که هیش درزمینهٔ شکل بندی های کاهش پذیرانجام داد، نظریهٔ کاهش پذیری درسطح بالایی ازتکامل قرارگرفت. باآنکه برخی پیشرفتها دراین زمینه ازآنزمان به بعدصورت گرفتند، بااینهمه تمامی ایده‌های مربوط به کاهش پذیری که برای اثبات قضیه چهاررنگ موردنیازبودنددراواخردههٔ ۱۹۶۰ دردست بود. اما پیشرفتی مشابه‌در زمینهٔ دسترسی به مجموعه‌های اجتناب ناپذیرحاصل نگردیده بود. هیش روشی راکه بی شباهت به‌حرکت دادن شارژ دریک شبکهٔ الکتریکی نبود برای پیداکردن یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیرازشکل بندی ها (که همگی اجتناب ناپذیرنبودند) ارائه داد. لکن اوموضوع اجتناب ناپذیری راباهمان شوروحرارتی که درموردکاهش پذیری بکارگرفته بود، دنبال ننمود. روش "تخلیه الکتریکی" که درابتدابصورتی ابتدایی درآثارهیش مطرح گردیده بود، درجریان پژوهش های بعدی روی مجموعه‌های اجتناب ناپذیر نقشی کلیدی واساسی داشت. درشکلی بسیارپیشرفته تروپیچیده تر، روش مذکوردرواقع هستهٔ مرکزی اثبات قضیه چهاررنگ راتشکیل می دهدوازاین رو درزیربه توضیح برخی جزئیات آن اقدام می کنیم.

یک مثلث بندی که نمایش دهندهٔ یک نقشهٔ پنج رنگی می‌نیمال باشد، به موجب بخش صحیح استدلال کمپه نمی تواندداری روش با کمتر ازپنج همسایه باشد. بنابراین درآنچه بدنبال خواهدآمد، ازنظر سهولت یک مثلث بندی ازنوع فرضی خواهدشدکه درآن هیچ راس کمترازدرجه پنج وجودنداشته باشد. بدینترتیب ازاستدلال کمپه نتیجه میشودکه اگر به هرراس درجهٔ K ام (یعنی دارای K همسایه) عدد (K − 6) متناظر گردد، درآنصورت حاصل جمع اعدادمتناظرشده (که آنها راشارژ می‌نامیم) دقیقا" برابربا ۱۲ خواهدبود. (شکل ۱۳ یک مثال رادراینموردنشان می دهد.) (این نتیجهٔ تاحدودی شگفت انگیز به این‌ واقعیت بستگی داردکه اولا" نمودارbرروی یک صفحهٔ مسطح قراردارددوثانیا "آنکه نمودار یک مثلث بندی است.) عدد خاص ۱۲ چندان حائز اهمیت نیست. آنچه بسیار اهمیت داردآنست که این حاصل جمع شارژها برای هرمثلث بندی درصفحهٔ مسطح مثبت می باشد. همچنین توجه به‌این‌نکته دارای‌اهمیت

است که چون به رئوس درجهٔ K ، مقدار شارژ (6-K) متناظر گردیده



شکل ۱۳ - یک مثلث بندی کوچک همراه با شارژهای توزیع شده در رئوس

است ، بنابراین رئوسی که درجه شان بیش از 6 باشد (چنین رئوسی را اصطلاحا "رئوس اصلی می نامند) دارای شارژ منفی گردیده وفقط رئوس درجه پنج دارای شارژ مثبت خواهند بود . (بخاطربیاورید که رئوس درجهٔ کمتر با توجه به دلیل ذکر شده درفوق موردنظر نیستند .) .

حال فرض کنید شارژهای واگذار شده بدون افزایش یا کاهش شارژ در کل دستگاه جابجا گردند . خصوصا " شارژ مثبت از برخی رئوس که شارژ آنها مثبت است (درجه پنج) به برخی از آنهایی که شارژ آنها منفی است (رئوس اصلی) انتقال خواهد یافت . درحالیکه مسلما " مقدار شارژ کل دستگاه درنتیجهٔ این عمل تغییر پیدا نمی کند ، با اینحال رئوس دارای شارژ مثبت ممکن است دستخوش تغییر شوند ، مثلا "برخی رئوس درجه پنج ممکن است تمامی شارژ خود را از دست بدهند (تخلیه شوند) ، درحالیکه برخی از رئوس اصلی آنقدر شارژ دریافت کنند که مثبت شوند (اضافه شارژ

داشته باشند).

هدف از عمل "تخلیه" رئوس مثبت پیدا کردن شیوه کاری دقیق برای توصیف چگونگی انتقال شارژها بگونه‌ای است که کلیه رئوس مثبت باقیمانده در توزیع نهایی به یک شکل بندی کاهش پذیر تعلق داشته باشند. آنگاه چون هر مثلث بندی بایستی ضرورتا" دارای رئوس مثبت باشد، شکل بندی حاصله می بایستی ضرورتا" اجتناب ناپذیر گردد. پس اگر کلیهٔ این شکل بندی ها کاهش پذیر نیز باشند، در آنصورت گمانهٔ چهار رنگ حل شده است (یک مثال ساده از روش تخلیه در مستطیل صفحهٔ بعد نشان داده شده است). البته اگر همگی شکل بندی های حاصله کاهش پذیر نباشند، پیشرفتی اساسی حاصل نگردیده است، زیرا وضعیت اساسا" با آنچه کمیه بدست آورده بود تفاوت محسوسی نخواهد داشت. درحقیقت می توان مجموعهٔ اجتناب ناپذیر کمپه را حاصل جابجایی صفر واحد شارژ در نظر گرفت.

وضعیت مساله از ۱۹۷۰ تاکنون

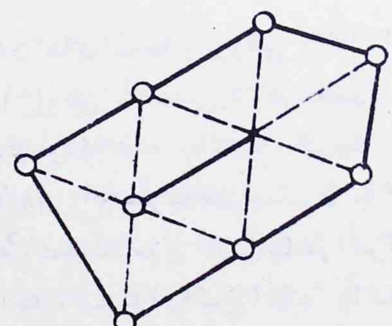
درسال ۱۹۷۰ هاکن برخی روشهای بهبود شیوه‌های تخلیه را مورد توجه قرارداد و این امیدواری در او بوجود آمد که بهبود روش‌های فوق احتمالا" به حل گمانهٔ چهار رنگ منجر خواهد گردید. با اینحال مشکلات کار هنوز سهمناک می نمودند.

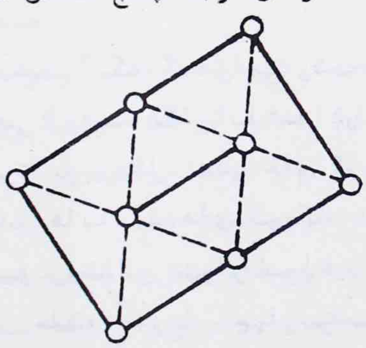
نخست آنکه گمان می رفت شکل بندی های بسیار بزرگی (دارای حلقه‌هایی از همسایگان با تعداد رئوس تا ۱۸) می بایستی در هر مجموعهٔ اجتناب ناپذیر شکل بندی های کاهش پذیر وجود داشته باشند. گرچه بررسی شکل بندی ها با حلقه‌های کوچک (مثلا" تا ۱۱) از نظر کاهش پذیری با استفاده از کامپیوتر چندان دشوار نبود، با اینهمه، مدت زمان لازم با هر افزایش اعضای حلقه حدودا" چهار برابر می گردید. بدتر از این آنکه حافظهٔ لازم نیز بهمین سرعت افزایش پیدا می کرد. هنگامی که برنامهٔ کامپیوتری دیوره را در مورد یک شکل بندی بسیار دشوار حلقه ۱۴ بکار بردند. ۲۶ ساعت وقت کامپیوتری صرف گردید تا فقط ثابت شود آن شکل بندی مکانیکی‌ترین تعاریف کاهش پذیری را ارضاء نمی نماید. حتی اگر مدت زمان میانگین برای بررسی یک شکل بندی حلقه ۱۴ به حدود ۲۵ دقیقه کاهش می یافت، -

یک روش تخلیه وتوزیع

کلید اساسی اثبات گمانهٔ چهاررنگ درتوزیع " شارژ" میان روش یک نمودار به ترتیبی که مکان شکل بندی های کاهش پذیردرهمسایگی رئوس مثبت را مشخص نماید . قرار دارد. درآغاز به هرراس مقدار شارژی برابربا ۶ منهای درجهٔ آن راس متناظرمی نماییم (ر. ن . ک . شکل ۱۳) . بدین ترتیب روش درجهٔ پنج با مقدار شارژ ۱+ آغاز می کنند .چون مثلث بندیهایی که دراثبات گمانهٔ چهاررنگ مورداستفاده واقع می شونددارای رئوسی کمترازدرجهٔ پنج نیستند، بنابراین رئوس درجهٔ پنج تنها رئوسی هستند که دارای شارژ اولیهٔ مثبت می باشند.

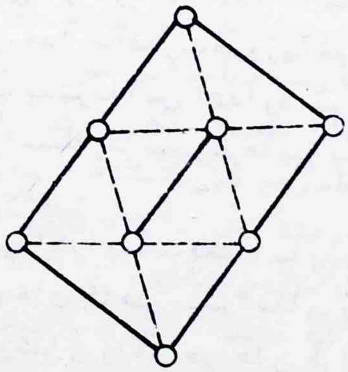
برای آنکه مثالی ساده ازروش تخلیه وتوزیع رابدست دهیم . فرض کنیدمقدارشارژی برابربا $\frac{1}{5}$ واحدشارژ ازهرراس درجهٔ پنج به هر همسایه عمده ، یعنی آنهایی که ازدرجهٔ هفت یا بالاترهستندانتقال یابد. درتوزیع جدیدی که حاصل می شود، وجوداجتناب ناپذیریک راس مثبت بمعنای آنست که مثلث بندی می بایستی شامل یک شکل بندی بصورت دو راس درجه پنج که توسط لبه‌ای به یکدیگرمتصل گردیده اندیا یک شکل بندی بصورت راس درجه شش که توسط لبه‌ای به یک راس درجه پنج متصل شده بوده باشد.

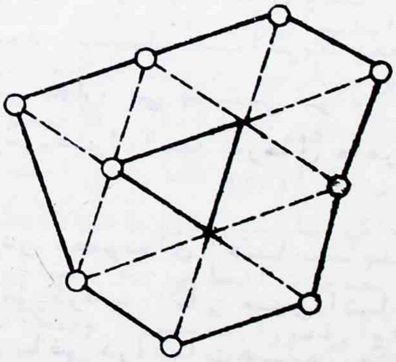




این موضوع رامی توان بابررسی کلیهٔ امکانات مدلل ساخت . درتوزیع حاصله پس ازانتقال شارژ ، یک راس درجه پنج فقط به شرطی دارای شارژ مثبت خواهدبودکه همگی همسایگان آن عمده نباشند ، یعنی همسایه‌ای از درجه پنج یا شش داشته باشد. یک راس درجه شش نمی تواندداری شارژ مثبت باشدزیرا بدلیل آنکه ازرئوس عمده نیست ، پس هرگز شارژ دریافت نمی نماید لکن یک راس درجه هفت فقط هنگامی می تواندداری شارژ مثبت گرددکه

دارای شش همسایه درجه پنج باشدکه مسلماً " درمیان آنها دوراس مجاور وجوددارند . هیچ راس با درجهٔ بالاتر از هفت نمی توانددارای شارژمثبت باشدزیراشارژانتقال یافته به آن به میزان $\frac{1}{5}$ ازهرهمسایه درجه پنج نمی تواندشارژ منفی اولیه آنرا خنثی نماید. مجموعه‌های متشکل از این دوشکل بندی (باضافهٔ شکل بندی های مشتمل برتک راس‌های درجه دو، سه وچهار) تشکیل یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیررا می‌دهند. اما این شکل بندی هاکاهش پذیرنیستندزیراهریک ازآندوشامل موانعی از نوع 1 هستند. این روش خاص تخلیهٔ اثباتی آسان برای یکی ازنتایج بدست آمده دراجتناب ناپذیری توسط پ. ورنیکه ازدانشگاه گونینگن درسال ۱۹۰۴ رابه دست می‌دهد. اگربجای $\frac{1}{5}$ که درمثال بالا بکاررفت به تعداد $\frac{1}{4}$ واحدشارژ مورداستفاده قرارمی گرفت . درآنصورت اثبات نتیجه‌ای که قدری قوی ترازنتیجهٔ فرانکلین (۱۹۲۲) می باشد، بدست می آید. واگر $\frac{1}{3}$ واحدشارژ بکاررود، مجموعه‌های اجتناب ناپذیربازهم بهتری حاصل خواهدشد :





وبالاخره اگر $\frac{1}{2}$ واحدشارزبکارگرفته شود، درآنصورت وضعیتی مشابه با آنچه اولین تقریب نسبت به روش تخلیهٔ واقعی مورداستفاده مابوده است بدست می آید.

ضریب ۴ جهت انتقال از حلقه ۱۴ به حلقه ۱۸ به معنای آن بود که هر شکل بندی حلقه ۱۸ـ در حدود ۱۰۰ ساعت وقت کامپیوتر و حجم حافظه‌ای بسیار بیشتر از آنچه تا آن زمان موجود بود طلب می نماید. از طرف دیگر کسانی مانند هیش وژان مایر استاد ادبیات فرانسه در دانشگاه پل والری فرانسه اغلب برای اثبات کاهش پذیری شکل بندی‌ها از روشهای ابتکاری و ظریفی که اغلب بسیار کوتاهتر از برنامه‌های موجود کامپیوتری بود استفاده می کردند. اما حتی آنها نیز بسیار بندرت شکل بندی های بزرگتر را مورد استفاده قرار می دادند. این امکان وجود داشت که برخی از روشها و شگردهای ابتکاری و نبوغ آمیز ایشان بمنظور سرعت بخشیدن به اثبات کاهش پذیری در یک برنامه کامپیوتری بکار گرفته شود.

مشکل دیگر آن بود که هیچکس بطور قطع نمی دانست تعداد شکل بندی‌های کاهش پذیر برای ایجاد یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیر چقدر باید باشد. احتمال می رفت که این تعداد به حدود چندهزار بالغ شود لکن هیچ کران بالایی مشخص نشده بود. از نظر زمان محاسباتی، اعداد فوق تقریبا" درست در مرز امکان قرار داشتند. فرض کنید مثلا" برای اثبات کاهش پذیری یک شکل بندی توسط کامپیوتری با حافظهٔ کافی ۱۰۰ ساعت وقت لازم باشد، حال چنانچه در یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیر ۱۰۰۰ شکل بندی حلقه ۱۸ وجود داشته باشد مدت زمانی در حدود ۱۰۰.۰۰۰ ساعت یا چیزی در حدود ۱۱ سال وقت یک کامپیوتر بسیار پرقدرت ضروری خواهد بود. بدینترتیب اگر یک مجموعه اجتناب ناپذیر تا این اندازه بزرگ می بود، می بایستی برای اثبات مساله در انتظار کامپیوترهایی بسیار سریعتر از آنچه در حال حاضر وجود دارند بمانیم.

حتی اگر اثبات قضیه با پیدا کردن مجموعه‌ای اجتناب ناپذیر از شکل بندی های کاهش پذیر امکان پذیر می گردید. باز چنین اثباتی آندسته از کسان را که خواهان ظرافت ریاضی در اثبات هستند راضی نمی‌کرد. مسلما" هیچگونه امیدواری وجود نداشت که یک فرد انسانی بتواند شخصا" کاهش پذیری کلیه شکل بندی های یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیر را مورد بررسی قرار دهد. از طرف دیگر در اوایل سالهای دههٔ ۱۹۷۰ خبرگان بسیاری از یافتن یک اثبات نسبتا "کوتاه برای گمانهٔ چهار رنگ اظهار نومیدی می کردند. از جنبهٔ دیگر چون مساله از زیبائی بسیار ساده برخوردار است

ریاضی دانان حرفه‌ای وغیرحرفه‌ای بسیاری درجهت حل آن کوشش بخرج داده بودند. برخی روش‌ها زمینه‌های کاملا" معقولی (گرچه ناموفق) برای حمله به مسئله‌ٔ چهاررنگ بدست می‌دادند. گرچه برخی از این روشها به نتایج بسیار پراهمیتی برای بخش‌های دیگرریاضیات محض وکاربردی منجر شدند، با اینحال هرگز به حل مساله موردنظرحتی نزدیک هم نشدند.

دونوع "برهان" استاندارد مطرح گردیده‌اند. نوع معمولی ترکه اغلب توسط غیرحرفه‌ای‌ها ارائه می شدبرمبنای درک ناقص ازمسئله قرار داشت (که مثلا" منجربه اثبات مجددنتیجهٔ بدست آمده توسط دومرگان می گردید) یاآنکه دارای اشتباه‌هایی بودندکه بلافاصله تشخیص داده می شدند. درنوع دوم معمولا" ازایده‌های بسیارپیشرفته وپیچیده‌ای استفاده می گردیدکه تحلیل آنها کاربسیاردشواری بود.

فرانک برنارت که پدرش آرتوربرنارت دردانشگاه اوکلاهما خدمات ارزنده‌ای درزمینهٔ کاهش پذیری انجام داده بود، دریافتن خطاهای این استدلال‌ها خبرگی خاصی پیداکرده ودرکلیهٔ چنین "استدلال" ها خطاهایی را تشخیص داده بود. درحال حاضربرخی اثبات‌های نه چندان طولانی ادعا شده‌اندکه هیچکدام موردبررسی دقیق وموشکافانه قرارنگرفته اند. مسلما" این امکان وجوددارد‌که‌یکی ازمیان این دسته اثبات‌ها صحیح باشد اما این نیز امکان پذیراست‌که هیچ اثباتی بجز برمبنای یافتن یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیرازشکل بندی های کاهش پذیروجودنداشته باشد. درحالت اخیر چنین بنظرمی رسیدکه هراثباتی نیازمندمحاسباتی خواهدبودکه بررسی آنها بدون استفاده ازکامپیوترممکن نیست. بدینترتیب احتمالا" قضیهٔ چهاررنگ ازنوع قضایایی است‌که علیرغم صورت ساده‌اش دارای‌اثباتی ازآنگونه که تاکنون درریاضیات بکارمیرفته نمی باشد، یعنی استدلالی که توسط یک فرد انسانی به تنهایی‌قابل بررسی‌باشد.

ادواردمورازدانشگاه ویسکانسین که نقشهٔ شکل ۶ رابوجودآورده‌ بود، موفق به ابداع تکنیک هایی برای ایجادنقشه‌هایی که دارای هیچ شکل بندی کاهش پذیرکوچک نباشندگردید. مثلا" شکل ۶ دارای هیچ‌شکل‌بندی کاهش پذیرکوچکترازحلقه ۱۲ نمی باشد. (آنرامی توان باچهاررنگ مختلف رنگ آمیزی کردوشامل یک شکل بندی حلقه ۱۲ کاهش پذیرمی‌باشد). درحالیکه مثال مورنشانگرآنست‌که هرمجموعهٔ اجتناب ناپذیرازشکل

بندی های کاهش پذیر بایستی اقلا" یک شکل بندی حلقه ۱۲ یا بزرگتر را شامل باشد، بسیار محتمل است که شکل بندی های حلقه ۱۳ نیز ضروری باشند و در نتیجه کوشش محاسباتی قابل ملاحظه‌ای حتی برای اجرای بهترین روش حل مسئله لازم خواهد بود.

شکل بندی های جغرافیایی مطلوب

هنگامی که ما کار خود را در سال ۱۹۷۲ برروی مسئله آغاز کردیم اطمینان داشتیم تکنیک هایی که تا آن زمان در دست بودند قادر به ارائه‌ء راه حل بدون استفاده از ماشین نبودند. حتی در این باره که چنین تکنیک هایی قبل از بوجود آمدن کامپیوترهای بسیار پرقدرت به هیچگونه راه حلی منجر شوند تردید بسیار داشتیم. اولین اقدام ما در زمینه‌ء یافتن مجموعه‌ای اجتناب ناپذیر از شکل بندی های کاهش پذیر این بود که تعیین نماییم آیا امیدی به یافتن چنین مجموعه‌ای با حلقه‌هایی آنقدر کوچک که زمان لازم برای اثبات کاهش پذیری شان در حد معقول باشد وجود دارد یا نه؟ از این سئوال بوضوح چنین برمی آید که اولین اقدام نمی توانست بررسی تعیین کاهش پذیری شکل بندی های مورد نظر باشد، چون در آنصورت مدت زمان لازم برای تعیین برآورد از مدت زمان پیش بینی شده برای تمامی پروژه تجاوز می کرد.

در اینجا ایده‌ء موانع کاهش پذیری به گونه‌ای فوق العاده سودمند افتاده به آسانی می توان نشان داد آیا یک شکل بندی شامل موانع کاهش پذیری می باشد یا نه ، و بر اساس داده‌های تاکنون شناخته ، احتمال کاهش پذیری شکل بندی هایی که فاقد موانع کاهش پذیری اند قابل توجه است. ما متقاعد شده بودیم اگر مجموعه‌های نسبتا" مناسبی (از نظر اندازه) از شکل بندی های اجتناب ناپذیر و فاقد موانع کاهش پذیری وجود داشته باشد، در آنصورت می بایستی مجموعه‌ای در همان حدود (از نظر اندازه) از شکل بندی های اجتناب ناپذیر کاهش پذیر وجود داشته باشد.

بنابراین تصمیم گرفته شد ابتدا برخی شیوه‌های تخلیه و توزیع بمنظور تعیین انواع مجموعه شکل بندی های فاقد موانع که امکان پیدایش داشتند مورد بررسی و مطالعه قرار گیرند. برای دستیابی به درکی

بهترازملزومات وضروریات حتی یک چنین مطالعه‌ای، بررسی خودرابه آن دسته ازشکل بندی هاکه اصطلاحا " ازنظرجغرافیایی مطلوب " خوانده می‌شوند، یعنی آنهایی که فاقدموانع نوع اول ودوم دررده بندی هیش بودند، محدودنمودیم (ن . ک . شکل۱۲) . این شکل بندی هارابه‌آسانی می توان بصورت زیرمشخص نمود: هیچیک ازرئوس واقع درشکل بندی بیش ازسه راس همسایه واقع برحلقهٔ شکل بندی نداردواگریک راس دقیقاً " سه همسایه ازاینگونه داشته باشد، درآنصورت این رئوس همسایه یکی بدنبال دیگری دردنباله قرارگرفته باشند.

مکالمه باکامپیوتر

همزمان باپائیزسال ۱۹۷۲ برنامه‌ای کامپیوتری تدوین نمودیم تا آن شیوهٔ تخلیه‌وتوزیعی راکه بنظرمان معقول ترین وکارآمدترین بود وبعنوان خروجی آندسته ازشکل بندی هاراکه درمهمترین وضعیت‌ها بوجود آمدند، دراختیارقرارمی‌داد، بموردا جراء بگذارد. گرچه ازیک برنامهٔ کامپیوتری نمی توان انتظارداشت بازیرکی وهوشمندی انسانی‌عمل نماید امامسرعت بی مانندعملیاتی - محاسباتی کامپیوتروپذیرفتن برخی کم ظرافتی هاوعدم کارآیی هارااامکان پذیرمی ساخت. بهرصورت برنامه به شکلی تهیه وتدوین گردیدکه خروجی های آن به آسانی توسط انسان قابل بررسی باشد.

اولین اجراء های برنامهٔ فوق درا واخرسال ۱۹۷۲ اطلاعات ذیقیمت بسیاری دراختیارقرارداد. اولا" معلوم گردیدبااستفاده ازشیوهٔ موردنظراولیه ، شکل بندی های مطلوب جغرافیایی بااندازه‌های نسبتا" مناسب (حداکثرحلقه ۱۶) درنزدیکی اکثررئوس که‌سرانجام دارای شارژ مثبت گردندپیداخواهندشد. ثانیا" پیدایش شکل بندی های تکراری به میزانی بودکه امیدوارشدیم مجموعه‌های کل شکل بندی های متمایزاز اندازه‌ای معقول برخوردارباشد. ثالثا" معلوم گردیدباروش سازماندهی اولیه ، حجم زیادخروجی هاامکان بررسی رانامقدورمی ساخت - موارد مشابه استدلال های تکراری بسیاری راموجب می گردیدند. نکتهٔ چهارم این بودکه اصولا" برخی نقایص‌هم درنوع شیوه‌های اتخاذ شده‌وهم

درجزئیات اجرایی بوضوح قابل مشاهده بودند، زیرا برخی رئوس نهایتا" مثبت وجودداشتندکه درهمسایگی آنها هیچ شکل بندی مطلوب جغرافیایی قابل تضمین نبودو بالاخره اینکه برنامه توانسته بودمقدار بسیار معتنابهی اطلاعات درمدت زمانی نزدیک چندساعت بدست آوردکه نشان می‌داد آزمون وبررسی مکرروزودبه زودامری امکان پذیراست.

بمنظوربرطرف کردن اشکالاتی که دراجراهای اولیه پیش آمد کرده بودند، لازم آمدبرنامه وایده‌های اساسی آن درزمینهٔ شیوهٔ تخلیه وتوزیع موردتجدیدنظرقرارگیرند. ازآنجایی که بدنهٔ اصلی برنامه قابل نگاهداری بود، اجرای تغییرات اشکالات چندان زیادی ایجادنکردبطوریکه یکماه بعداجرای دوم راعملی نمودیم. اکنون که مشکلات کلی وبزرگتر قبلی ازسرراه کنارزفته بودند، برخی مشکلات ظریف تروکوچک ترآشکار گردیدندکه تغییربرخی جزئیات راضروری ساختند. پس از بررسی ومطالعه، راه حل این مشکلات نیز یافته شدوتغییرات لازم دربرنامه منعکس گردید.

مکالمه بین انسان وماشین بمدت شش ماه دیگرادامه یافت تا هنگامی که بنظررسیدروشی قابل اجراء برای یافتن یک مجموعهٔ اجتناب- ناپذیرازشکل بندی های مطلوب جغرافیایی بدست آمده است. دراین مقطع تصمیم گرفتیم توانایی روش خودرادریافتن یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیر ازشکل بندی های مطلوب جغرافیایی به اثبات برسانیم. برای انجام چنین کاری مجبورشدیم روش کارتجربی خودرابیکسونهاده توصیفی ازشیوهٔ کلی کارارائه دهیم. ضرورت داشت نشان دهیم تمامی حالات ممکنه درنظر گرفته شده‌اندوآن حالاتی که موردعمل برنامهٔ کامپیوتری قرارنگرفته بودندازپیچیدگی های پنهان وغیرمنتظره‌ای برخوردارنبودند. بسیاربر خلاف انتظارمان، این کاربادشواری زیادهمراه بودوبیش ازیکسال وقت صرف آن گردید.

مشکل ازآنجاناشی می شدکه درریاضیات محض ضرورت داردابتدا تعاریف عمومی واژه‌ها (Terms) فرمول بندی گرددوسپس گزاره‌های مجرددربارهٔ واژه‌های تعریف شده به اثبات برسند. بسیاری حالات خاص باوجودآنکه احتمال بروزشان درجریان کاربسیارناچیزبودمی بایستی به تفضیل موردبررسی قرارگیرندکه اغلب مستلزم تجزیه وتحلیل پیچیده و

طولانی بودند. نتیجهٔ نهایی این فعالیتها اثباتی طولانی برای این موضوع بودکه یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیرا زشکل بندی های مطلوب جغرافیایی قطعاً" وجوددارد. علاوه براین به شیوهٔ کارکردی عملی دست یافته بودیم که امکان ساخت چنین مجموعه‌ای را باشکل بندی های محدود (گرچه بسیار بزرگتر ازآنچه می خواستیم) فراهم می ساخت. ازنظرما روش کارفوق دارای اهمیت بسیاربودزیرا قصدداشتیم آنرا برای حملهٔ احتمالی به گمانهٔ چهاررنگ مورداستفاده قراردهیم. کمی بعدوالترستروم کویست که درآن زمان دانشجوی دکترای دانشگاه هاروارد ویکی ازکسانی بودکه کارهای باارزشی درنظریهٔ کاهش پذیری انجام داده بود. اثبات ظریف وزیبایی دربارهٔ وجودمجموعه‌های اجتناب ناپذیرا زشکل بندی های مطلوب جغرافیایی ارائه داد. لکن به سبب آنکه اثباتاوروشی عملی برای ساختن یک چنین مجموعه‌ای رابدست نمی داد. احتمال آنکه بطورمستقیم درجریان راه حل گمانهٔ چهاررنگ مورداستفاده واقع شودنمی رفت.

آزمایش ها وتغییرات

دراواسط پاییز ۱۹۷۴، پس ازاثبات این مطلب که شیوهٔ کارپیشنهادی مادرموردشکل بندی های مطلوب جغرافیایی انجام شدنی است، دریافتیم که ماخودهنوز اطلاعات اندکی دربارهٔ دشواری ها وپیچیدگی هایی که درمرحلهٔ اجرا پیش آمدخواهندکرددراختیارداشتیم. برای دستیابی به اطلاعات بیشترتصمیم گرفتیم برنامهٔ موردنظرخودراابتدابرروی مسئلهٔ محدودتروساده تری - یعنی شکل بندی های فاقدزوج های درجه پنج مجاور به آزمایش بگذاریم البته این امرمحدودیت شدیدی بحساب می آمد، لکن مجموعهٔ اجتناب ناپذیرشکل بندی های مطلوب جغرافیایی متناظربسیار کوچک (۴۷ شکل بندی) ازکاردرمی آمدوبه هیچ‌شکل بندی بزرگترازحلقه ۱۶ نیاز نداشت. سپس سعی کردیم تعیین نماییم مسئلهٔ عمومی به چه میزان می تواندپیچیده ترباشدونظرمان درحول وحوش ۵۰ قرارگرفته بود (بعداً" معلوم گردیدنظراولیه‌مان قدری خوشبینانه بوده‌است) وبدین ترتیب دلایل قوی برای ادامه کاروجودداشت.

دراوایل سال ۱۹۷۵ تغییراتی دربرنامهٔ آزمایش واردساختیم تابتواندشکل بندی های فاقدموانع راتهیه نماید. همچنین برنامه را-

وادار ساختیم بدنبال استدلال هایی برود که در آنها شکل بندی های حلقه کوچک مورد استفاده قرار گیرند. اجراهای بعدی ضرورت برخی اصلاحات تازه را خاطرنشان ساختند ولی درعین حال یک شگفتی دلپذیر نیز بهمراه آوردند. جانشین سازی شکل بندیهای مطلوب جغرافیایی توسط شکل بندی های فاقد مانع تعداد اعضای مجموعهٔ اجتناب ناپذیر را بیش از دو برابر افزایش نخواهد داد.

در این مرحله از کار، برنامه‌ای که تا آن زمان بیش از دو سال وقت صرف اصلاح ودستکاری آن گشته بود برخی شگفتی ها از خود بروز داد. در ابتدا ما همواره استدلال های آنرا خود مورد بررسی قرار می‌دادیم تا بتوانیم مسیر آنرا در هر وضعیتی پیش بینی نماییم. اما پس از چندی ناگهان رفتاری همانند یک برنامهٔ شطرنج کامپیوتری در پیش گرفت، بدین معنی که بر مبنای تمامی شگردهایی‌که به او "آموخته شده بود" یک استراتژی ترکیبی تدوین می نمود که اغلب بسیار تیز هوشانه تر از آنچه ما خود می توانستیم طرح نماییم بود. از اینقرار برنامه شروع به یاد دادن مطالبی درباره‌ٔ روش ادامهٔ کار به ما کرد که هرگز در انتظار آن نبودیم. به یک معنی می شد گفت برنامه از آفرینندگان خودش در برخی جنبه‌های "عقلانی" علاوه بر جنبه‌های مکانیکی کاربرتری جسته و پیشی گرفته بود.

برنامه‌های کاهش پذیری

درحوالی تابستان ۱۹۷۵ آشکار گردید که احتمال خوبی برای اجرای یک حملهٔ موفقیت آمیز برگمانهٔ چهار رنگ وجود دارد. تقریبا" اطمینان حاصل کرده بودیم که امکان دستیابی به مجموعه‌های اجتناب ناپذیر از شکل بندی های بی مانع که احتمالا" کاهش پذیر نیز باشند وجود دارد. گرچه بسیار محتمل بنظر می آمد که چنین مجموعه‌ای شامل برخی شکل بندی های کاهش پذیر نیز باشد، از طرف دیگر احتمال بسیار نیز وجود داشت که برخی تغییرات مختصر در شیوهٔ کار بتواند آنها را با شکل بندی های کاهش پذیر جانشین سازد. اکنون برای نخستین بار، مجبور بودیم شکل بندی ها را از نظر کاهش پذیری مورد آزمایش قرار دهیم. از آنجاییکه شکل بندی‌هایی تا حداکثر حلقه ۱۷ مورد انتظار بودند، بنظر می رسید برخی حدس و گمان های

کوتاه کننده ومیان بربرای نشان دادن کاهش پذیری شکل بندی‌ها مورد نیاز باشد. همچنین ازآنروکه روشهای ماضرورتا " قدری محدودکننده بوده وقادربه تشخیص قطعی کاهش پذیری نبودند، احتمال بررسی کاهش‌پذیری بااستفاده ازکلیه روش‌های شناخته شدهٔ دیگرنیزدرمدنظرقرارگرفت.

پس ازآن درصددنوشتن برنامه‌ای کارآمدوموٴثربرای آزمایش مکانیکی ترین شکل کاهش پذیری برآمدیم. برای این کاراززبان برنامه نویز اسمبلروکامپیوتر IBM 360 دانشگاه ایلی نویزاستفاده شد. دراواخر سال ۱۹۷۴، جان کخ که درآنزمان دانشجوی دورهٔ دکترای علوم کامپیوتر ودرحال حاضردرکالج ویلکس بکار اشتغال داردبه‌ملحق گردید. اوتصمیم گرفت رسالهٔ خودرادرزمینهٔ کاهش پذیری شکل بندیهای کوچک به‌نگارش درآورد. (بعدا" معلوم شدفرانک‌آلیردردانشگاه کالگری وادواردسوارت دردانشگاه رودزیانیز درهمین زمینه کارمی کردندبدون آنکه، اطلاعی ازموضوع داشته باشیم.) درحوالی پاییز ۱۹۷۵ کخ‌موفق به نوشتن برنامه‌هایی برای بررسی وتعیین مکانیکی ترین تعریف کاهش‌-پذیری برروی شکل بندی های تاحلقه ۱۱ گردیدوسپس پژوهش های عمومی ترخودراآغاز نمود. درنیمهٔ دوم سال ۱۹۷۵، برنامه هایی برای تعیین کاهش‌پذیری شکل بندی های حلقه ۱۲، حلقه ۱۳ و حلقه ۱۴ باانجام برخی تغییرات مناسب دربرنامه های کخ به رشتهٔ تحریردرآمدند. پس از آن بمنظورآنکه بتوانندازروش عمومی ترکاهش پذیری بیرکاف استفاده کنند، تغییراتی دراین برنامه‌هاداده شدوحالادیگرتقریبا " برای آغاز حملهٔ مستقیم به مسئلهٔ اصلی ازهرجهت آماده شده بودیم.

روش‌تخلیه وتوزیع

دراین زمان کارهایی که درزمینهٔ روشهای تخلیه وتوزیع انجام شده بودبه مرحله‌ای رسیده بودندکه تغییرات لازم برای بهبودروشها بعوض برخی تغییروتنظیم های فنی بیش ازنوع تغییرهای ساختی واساسی بحساب می آمدند. به سبب آنکه هرچنین تغییری مستلزم تغییری عمده دربرنامه بود، تصمیم گرفتیم برنامهٔ موجودرابکلی کناربگذاریم وشکل نهایی روش‌تخلیه وتوزیع رابدون استفاده ازماشین عملی سازیم. چنین کاری ازیکطرف انعطاف پذیری بیشتری بوجودمی آوردواز طرف

دیگرتغییرات " موضعی " راا گرضرورت ایجاب می کردا مکان پذیرمی‌ساخت . دردسامبرسال ۱۹۷۵ متوجه شدیم یکی ازقواعدیکه درتعریف روش های تخلیه وتوزیع مورداستفاده بودانعطاف چندانی نداشت . باسست کردن این قاعده بمیزان قابل توجهی به کارآیی روش تخلیه وُتوزیع افزوده گردید . اکنون این امرامکان پذیربنظرمی رسیدکه بتوان مجموعه‌های اجتناب ـ ناپذیری ازشکل بندی های کاهش پذیرباحلقه‌هایی کوچکترازآنچه با روش قبلی ممکن بودپیداکرد . این البته بدان معنی بودکه زمان کامپیوتری لازم احتمالا" کمترازبرآوردهای قبلی خواهندبود .

کمی پس ازآنکه روش اصلاح شدهٔ جدیدمکشوف گردیده بود ، مکاتبهٔ ازمایربدستمان رسیدکه درآن خاطرنشان می کرداگرموضوع " راس های حداافتادهٔ پنج تایی " بعوض حالتی خاص ازروش کلی به صورت مسئله‌ای خاص وجداگانه تلقی شود ، درآنصورت بهبودقابل توجهی درمجموعه‌های اجتناب ناپذیر حاصل خواهدگردید . (بجای چهل وهفت شکل بندی با اندازه‌های تاحلقهٔ ۱۶ ، مایرفقط به چهارده شکل بندی بااندازه‌های تاحلقه ۱۴ نیاز داشت .) موضوع فوق مارابرآن داشت تاروش اصلاحی خودرادرمورداین حالت خاص اعمال نماییم . روش عمومی برای حل گمانهٔ چهاررنگ نمی توانست باکارآیی روش خاص مایردراینحالت ویژه برابری کند : نتیجهٔ کارعبارت از ۲۸ شکل بندی بااندازه‌هایی تاحلقه ۱۳ بود . بااینهمه چنین بنظررسیدکه روش جدیدممکن است حجم مجموعه اجتناب ـ ناپذیرحاصله رابه نصف تقلیل دهدونیز اندازهٔ شکل بندی هارابه‌حلقه ۱۵ یاحتی حلقه ۱۴ محدودسازد .

اجرای نهایی اثبات

درژانویه سال ۱۹۷۶ بااستفاده ازروش جدیدتخلیه وتوزیع مان ، دست بکاربوجودآوردن یک مجموعهٔ اجتناب ناپذیرازشکل بندی های کاهش پذیرگردیدیم . صورت نهایی روش تخلیه وتوزیعکه مورداستفاده قرار گرفت ازیک مزیت دیگربمنظورتعیین کاهش پذیری شکل بندی های نهایی برخورداربودوآن اینکه هرگونه تغییرات لازم درخودرامعلوم می ساخت . هرموردممکنه‌ای که درآن یکی ازرئوس عمده اجبارا" شارزمثبت پیدا می کردموردبررسی قرارمی گرفت ودرهریک ازاین موارد ، همسایگی

راس مثبت برای یافتن یک شکل بندی بی مانع موردکاوش قرار می گرفت. هرگاه چیزی یافته نمی شد، آن همسایگی را اصطلاحا" "بحرانی" نامگذاری می کردیم، بدینمعنی که درروش تخلیه می بایستی بمنظوراحتراز از این شکل تغییراتی داده شود. ولی حتی هنگامی که یک شکل بندی بی مانع یافت می گردید، تضمینی برای یک شکل بندی کاهش پذیروجودنداشت.

برنامه های کاهش پذیری جدیدبمنظوریافتن شکل بندی های بی مانعی که کاهش پذیرباشندموداستفاده قرارگرفتند. هرگاه چیزی یافته نمی شد، این همسایگی نیز بحرانی نامگذاری می گردید. دراین نامگذاری تمایزی بین شکل بندی های با مانع وآنهایی که برنامه قادربه اثبات کاهش پذیری شان نبودوجودنداشت.

روش فوق برای بوجودآوردن یک مجموعه های اجتناب ناپذیراز شکل بندی های کاهش‌پذیرفقط درسایه ٔ یک مکالمه ٔ مجددباکامپیوترامکان‌پذیر گردید. برای تعیین همسایگی های بحرانی ضرورت کامل داشت که کاهش پذیری شکل بندی ها هرچه سریعتراز نظرزمان کامپیوتری وهم از نظر زمان واقعی بررسی گردد. دراین زمینه ما قدری خوش شانس بودیم زیرا بندرت بیش از چندروز درانتظارنتایج می ماندیم باوجودآنکه اغلب مقدارقابل ملاحظه ای وقت کامپیوترموردنیازبود. از آنجاییکه این رابطه ٔ گسترده متقابل انسان - ماشین برای موفقیت کارجنبه ٔ اساسی داشت، بایستی چگونگی امکان آنرا شرح دهیم.

گرچه ترتیباتی که جهت استفاده ازکامپیوترداده بودیم درآنزمان بنظرمان طبیعی وعادی می رسیدند، بااینحال بعدهادریافتیم تشکیلات منظم کامپیوتری دانشگاه ایلی نویزهمراه باسیاستی روشن بینانه درمورداستفاده تحقیقاتی ازتشکیلات برای مافرصتی استثنایی فراهم ساخته بودکه تقریبا" درهیچ دانشگاه یا موء سسه ٔ تحقیقاتی دیگرامکان پذیرنبود. هنگامی که تقاضای خویش رادرموردبکارگیری بیش ازهزارساعت وقت کامپیوترباشورای پژوهشی دانشگاه درمیان گذاشتیم قادرنبودیم تضمین نماییم کاربه حل مسئله ٔ چهاررنگ منجرخواهدگردید. (ما ازهیچگونه حمایت مادی خارج دانشگاهی برخوردارنبودیم گرچه دراین مورددرخواستی کرده بودیم. ظاهرا" شرط بدست آوردن کمک مادی نظرموافق کلیه ٔ اعضای ژوری درموردموفقیت پروژه است که درموردمسئله ٔ

ما چنین امری مطلقاً" امکان پذیرنبود.) مرکز محاسبات کامپیوتری دانشگاه به ما اطلاع دادچون تمامی وقت آن مرکز مورداستفاده دانشجویان وپژوهشگران عادی قرارنمی گرفت، بنابرین، آنها می توانستندما رادرزمره گروه چوچکی ازاستفاده کنندگان که وقت اضافی کامپیوتررامشترکاً" بکار می بردندقراردهند. ما اکنون متوجه این امرهستیم که چنین روشی بسیار غیرعادی وتوام باشهامت بوده است زیرادربسیاری موسسات ترجیح می دهندتشکیلات کامپیوتری رابلااستفاده بگذرانندتااینکه به اقدامی ازاین دست که احیاناً" گردانندگان رابابرخی مشکلات اداری مواجه خواهدساخت موافقت نمایند. بهرصورت این اقدام همهٔ وقت ماشین مورد نیاز مارا تامین ساخت بدون آنکه جریان کارهای روزانه کارهای کامپیوتری دانشگاه دچاروقفه یااختلالی گرددوازهرجهت درموفقیت ما نقشی اساسی داشت.

ازژانویه ۱۹۷۶ تاژوئن ۱۹۷۶، مشغول کاربرروی آخرین جزییات روش تخلیه وتوزیع ونیز همزمان باآن ایجادمجموعه اجتناب ناپذیر شکل بندی های حاصله توسط روش فوق بودیم. تقریباً" بیش از یکهزار ساعت وقت روی سه دستگاه کامپیوترصرف گردیدونیز موفق گشتیم بخش های کاهش پذیری راباچنان سرعتی (ازنظرزمان واقعی) انجام دهیم که ازتحولات روشن تخلیه وتوزیع که بادست انجام می گرفت عقب نمانیم.

روش تخلیه تقریباً" حدود ۵۰۰ وضعیت تخلیه خاص رادربرگرفت (حاصل ازهمسایگی های بحرانی) که اولین تقریب ژانویهٔ ۱۹۷۶ راموردإصلاح و تغییرقرارداد. این امرشامل بررسی دستی حدود ده هزارهمسایگی رئوس مثبت وتحلیل وبررسی کاهش پذیری حدوددوهزار شکل بندی توسط کامپیوترگردید. درحالیکه تمامی این نتایج بدست آمده جزو اثبات نهایی مسئله قرارندارند، بااینهمه بخش قابل توجهی از آن وازجمله اثبات کاهش پذیری حدود ۱۵۰۰ شکل بندی برای اثبات ضرورت اساسی دارند. یک فردانسانی می تواندبدقت آن بخش از روش تخلیه راکه شامل محاسبات کاهش پذیری نیست درمدت یکی دوماه موردبررسی قرار دهند، لکن بهیچوجه بنظرنمی رسدخودمحاسبات کاهش پذیری بوسیلهٔ انسان به تنهایی قابل بررسی باشند. درواقع هیئت داوران مقاله ازتمامی مجموعهٔ یادداشت های مابرای بررسی روش تخلیه وتوزیع استفاده

کردند. لکن برای بررسی صحت محاسبات کاهش پذیری یک برنامه‌ء کامپیوتری مستقل را موردبهره گیری قرار دادند.

ماهیت اثبات: محدودیت ها و امکان ها

دلیل اساسی اینکه روش مجموعه‌ء اجتناب ناپذیر به نتیجه رسید درحالیکه سایرروشهای حل مسئله چهاررنگ موفقیتی بدست نیاوردند آن بود که تمامی روشهای دیگربجز آن برای اجرا واعمال برنامه‌ء خود به ابزارهای نظری نسبتا " قوی تری نیاز داشتند. درحالیکه امکان ایجاد چنین ابزارهایی غیرمحتمل بنظرنمی رسد، با اینحال هیچگونه تضمینی درمورد امکان ایجاد آنها وجودندارد واگرهم چنین تضمینی بدست آید هیچ راه وروش روشنی برای یافتن آنها وجودندارد.

ازطرف دیگر، بسیاری ریاضی دانان عقیده داشته‌اندکه یک مجموعه‌ء اجتناب ناپذیر از شکل بندی های کاهش پذیرممکن است وجودداشته باشد، لکن حتی کوچکترین مجموعه از این نوع خارج ازقلمرو امکان معقول محاسباتی قرار دارد. این نظربا توجه به امکانات قبل ازسالهای ۱۹۶۰– موجه بنظرمی رسد. درسالهای بعدازه۱۹۶۰ زمانی که کامپیوترهای سریعتری پا به عرصه گذاشته بودند، هنوز شواهدقانع کننده‌ای وجودداشت دال براینکه میزان محاسبات تاحدی غیرعلمی واجرائی سنگین خواهد بود، لکن مسلما " هیچگونه سدومانع نظری بجزانتخاب روش برای دست یافتن به مجموعه‌ء اجتناب ناپذیربرسرراه قرارنداشت. ازاینقرار درسالهای حدود ۱۹۷۰ مسئله عبارت ازبررسی این امربودکه آیا بهره‌گیری کارآمدازتکنیک های موجودواصلاحات فنی (درمقابله بااصلاحات نظری) امکان دست یابی به یک مجموعه‌ء اجتناب ناپذیرازشکل بندی های کاهش-پذیررا فراهم خواهدساخت یانه؟

بیشترریاضی دانانی که تحصیلات خودراقبل ازروی کارآمدن کامپیوترهای بسیارسریع بپایان رسانده‌اندبه کامپیوترهمچون ابزاری روزمره وعادی همانندابزارهای قدیمی ترونظری تردرجهت پیشبرددانش ریاضی نمی نگرند. آنها به گونه‌ای غریزی وذهنی احساس می کنندا گر اثباتی ریاضی شامل بخشهایی باشدکه توسط انسان قابل بررسی نباشد، بر شالوده‌ای استوارقرارندارد. تمایلی نیزبرای این احساس وجوددارد که

اگردربررسی درستی یک اثبات بجای انسان ریاضی دان ازیک برنامه مستقل کامپیوتری دیگراستفاده گردد، اعتمادچندانی به صحت بررسی آنگونه‌که درسنت ریاضی مرسوم است نمی توان داشت.

چنین نقطه نظری درموردآندسته ازقضایایی که طول اثباتشان کوتاه یانسبتا" متوسط بوده وجنبهٔ نظری بالایی داشته باشندموجه می نماید. لکن اگراثباتی بهردلیل بسیارطولانی بوده وشامل‌تعدادقابل توجهی محاسبات باشد، می توان استدلال نمودکه یک بررسی دستی حتی اگر امکان پذیرنیز باشدممکن است نسبت به یک بررسی ماشینی از خطاپذیری کمتری برخوردارباشد. علاوه براین اگرمحاسبات بقدرکافی معمولی باشند، درآنصورت بررسی درستی برنامه‌ها بمراتب آسانتر ازبررسی‌صحت خودمحاسبات انجام می گیرد.

درهرصورت حتی اگرسرانجام معلوم شودکه مسئله‌چهاررنگ ازراه‌حلی ساده تربرخوردار بوده است، ریاضی دانان بایستی باین مطلب توجه نمایندکه برخی مسائل ممکن است به طرقی مشابه باآنچه شرح آن گذشت حل شدنی باشندکه تجزیه وتحلیل راه حل آن توسط انسان بدون کمک ماشین میسرنباشد. دلایل زیادی وجوددارد که معتقدباشیم مسائل زیادی ازاین نوع ممکن است وجودداشته باشند. این استدلال که تقریبا" تمامی اثبات‌ها می بایستی درحدمعقول کوتاه باشندرامی توان چنین پاسخ دادکه اگربرای اثبات مطالب ابزاری بکارگرفته‌شوندکه به اثبات‌های نسبتا کوتاه منجرگردند، درآنصورت تعجبی نداردکه تاکنون اثبات‌های نسبتا کوتاه ازکاردرآمده‌اند.

حال بدنیست این پرسش رامطرح نماییم که آیاکارانجام شده ازهیچ گونه ارزش‌عملی برخوردار بوده است یانه؟ بنظرمی‌رسدجواب چنین باشدکه ارزش‌کارانجام شده برای ریاضیات بمراتب بیشتربوده است تابرای نقشه نگاری. مثال مسئلهٔ چهاررنگ ممکن است به روشن ساختن مقدورات ومحدودیت های روش‌های ریاضیات محض ازیکطرف وروش‌های محاسباتی ازطرف دیگرکمک نماید. این امکان وجوددارد که برخی مسائل توسط هیچیک ازدوروش به تنهایی قابل حل نباشدحال آنکه ترکیبی ازآندو،گره‌حل مسئله رابگشاید. دراین زمینه یک نمونهٔ قدیمی درتاریخ علم وجوددارد. اززمان افلاطون تااواخرقرون وسطی روشهای تحلیلی

ریاضی نسبت به روشهای تجربی وفیزیکی ازارزش بسیاروالاتری برخوردار بودندبطوریکه روشهای اخیردرنظردانشمندان جدی قابل قبول وپذیرفتنی نبودند. این امر راه تکامل وتوسعهٔ برخی رشته‌های فیزیک راتاحدودزیادی مسدودساخته بود. برای مثال ارسطوکه سعی می کرداز طریق نظری قوانین سقوط اجسام راتدوین نماید، نتایج اشتباه آمیزی رادراین زمینه ارائه داده‌بود که حدوددوهزارسال دوام آوردندتاآنزمان که گالیله ازطریق تجزیه و مشاهده اشتباهات ارسطورابرطرف ساخت وراه تکامل سریع وآتی دانش حرکت شناسی راهموارنمود. بمجردآنکه اهمیت تجربه گری درپیشبرددانش موردشناخت قرارگرفت (وبرخی محدودیت های نسبتاً شدیدتردرمورد روشهای ریاضی محض موردپذیرش واقع گردید)، توسعه وتکامل ثمربخش فیزیک باترکیب دوروش یادشده امکان پذیرگردید. پس این مطلب که نتایج حاصله ازحل مسئله چهاررنگ به‌معنای محدودیت های شدیدتر روشهای ریاضیات محض نسبت به آنچه برخی ریاضیدانان بدان تمایل دارندمی باشدرانبایستی بمنزلهٔ نتیجه‌ای منفی بلکه بعنوان شاخصی درجهت پیشرفت تلقی کرد.

ممکن است چنین استدلال‌شود که اهمیت‌عملی هیچ چیز به اندازه آن نیست‌که شخص ایده‌ای درست ودربارهٔ توانایی ها ومحدودیت های روش های مورداستفاده اش بدست آورد، زیرادراین قلمروهرگونه کژداوری می تواندخطیرترین عواقب منفی راببارآورد. ماامیدوارهستیم نتیجهٔ تلاش مان گامی به پیش دراین جهت محسوب گرددواین بینش نوین کوشش عظیم انسانهایی‌راکه ازسال ۱۸۵۲ تاکنون درجهت حل مسئله چهاررنگ صرف همت وکوشش نموده‌اندموجه ساخته باشد.

منابع زیرمی توانندا طلاعات بیشتری دراختیارخواننده قراردهند:

General

Biggs,N.L.,Lloyd,E.K.and Wilson,Robin J.Graph Theory 1736-1936.

Claren don Pr,Oxford,1976.

Contains a history of the Four-Color Problem,along with other classic problems in graph theory.A pleasure to read both for the professional mathematican and for the curious beginner.A first-rate bibliography of older papers is included.

Technical

Appel,Kenneth and Haken,Wolfgang.Every planar map is four colorable,part 1: discharging. Illinois J.of Mathematics 21(1977) 429-490.

Appel,Kenneth,Haken,Wolfgang,and Koch,John.Every planar map is four colorable,part II: reducibility.Illinois J.of Mathematics 21(1977)491-567.

The reader interested in the full details of the proof will find them here,along with over 460 pages of microfiched checklists.

Harary,Frank.Graph Theory.Addison-Wesley,Reading,1969.

for the reader who wishes to see more of the general subject of graph theory; Contains an excellent bibliography.

Ore,Oystein.The Four Color Problem.Academic Pr,New York,1967.

Highly recommended survey of the status of various approaches to the problem in the mid-1960's.It also has a voluminous bibliography.

Saaty.Thomas L.Thirteen colorful variations on Guthrie's four color conjecture.

American Mathematical Monthly 79(1972)2-43.

" اثبات دیگری از قضیه کرونکر "

نوشته : مسلم نیکفر
دانشگاه صنعتی اصفهان

قضیه کرونکر : اگر ν عددی اصم باشد، آنگاه

$$\overline{\{a+b\nu : a,b\in Z\}} = \mathbb{R}$$

به عبارت دیگر،

$$\forall \varepsilon>0, \forall \psi \in \mathbb{R}, \exists (a,b)\in Z\times Z: [a+b\nu-\psi]<\varepsilon$$

برای این قضیه درکتاب نظریه اعداد هاردی ورایت [۱] چهار اثبات مختلف آورده شده است. دراینجا ما اثبات دیگری برای این قضیه ارائه کرده ، سپس نتیجه‌ای از این قضیه را درمورد توابع متناوب می آوریم.

درآغاز به بیان یک لم که براساس استدلالی از دیریکه می باشد (صفحه ۱۵۶ [۱]) می پردازیم.

لم : اگر ν عددی حقیقی باشد، آنگاه

$$\forall \varepsilon>0, \exists a\in Z, \exists b\in \mathbb{N} : [a+b\nu]<\varepsilon$$

اثبات : فرض کنید N عددی طبیعی باشد بطوریکه $\frac{1}{N}<\varepsilon$. قرار می دهیم :

$$f_k=k\nu-[k\nu], \quad k=0,1,2,\ldots,N.$$

چون $[0,1[=\bigcup_{k=0}^{N-1}[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N}[, \; 0\leq f_k<1$ ، پس حداقل دوتا از N+1 عدد f_k (برای $k=0,1,\ldots,N$) دریکی

از N فاصله $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right[$ قراردارند. اگراین دوعددرابـــــــــــا f_{k_1} , f_{k_2} $(k_2 > k_1)$ نشان دهیم،خواهیم داشت :

$$[f_{k_2} - f_{k_1}] < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

<u>اثبات قضیه کرونکر</u>:فرض کنید ν اصم است . برای $\varepsilon > 0$ و $\psi > 0$ برطبق لـــــــم داریم :

$$\exists a' \in Z\ , \exists b' \in Z\ :\ [a'+b'\nu] < \varepsilon' = \mathrm{Min}\ \{\varepsilon, \psi\}$$

قرار می دهیم

$\eta = [a'+b'\nu]$, $k = \left[\frac{\psi}{\eta}\right]$ روشـــــن است که

$$[k\eta - \psi] < \eta < \varepsilon$$

اما $\eta = a'+b'\nu$ ویا $\eta = -a'-b'\nu$ که درهـــــردو حالت a و b بدست می‌آیند .

<u>توضیح چندنکته دررابطه بالم وقضیه کرونکر</u>: به سهولت می توان نشان دادکه اگر ν اصم باشدآنگاه می توان درصورت لزوم - چه درلم وچـــه درقضیه کرونکر -b را <u>عددی طبیعی</u> آنهم به تعدادنامتناهی برگزید. ایـــن امردرمورد a نیز مصداق دارد. دربرهان نتیجه زیر a عددی طبیعی انتخاب می شود .

نتیجه : اگر $f: R \to R$ تابعی پیوسته ومتناوب بادوره تناوب اصـــم ν باشد، آنگاه

$$\overline{\{f(1), f(2), \ldots\}} = f(R)$$

<u>اثبات</u> : برای هر $\ell \in f(R)$ یک ψ موجوداست بطوری که $\ell = f(\psi)$:
وبرای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ هست بطوری که :

$$\forall x, [x-\psi] < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\psi)| < \varepsilon$$

که ازاینجاوباتوجه به قضیه کرونکرخواهیم داشت (ν دوره تناوب) :

$$\exists a \in N\ ,\ \exists b \in Z\ :[a+b\nu-\psi] < \delta\ ,$$

$$[f(a+b\nu) - f(\psi)] = [f(a) - f(\psi)] = [f(a) - \ell] < \varepsilon$$

که این دقیقا" به این معنی است که $\ell \in \overline{\{f(1), f(2), \ldots\}}$
بعبارت دیگر

$$f(R) \subseteq \overline{\{f(1), f(2), \ldots\}}$$

که باتوجه به اینکه $f(R) = f([0,\nu])$ ، تساوی برقرار است.

مثالهای مهم : توابع $\mathrm{Sin}(\lambda\pi x)$ و $\mathrm{Cos}(\lambda\pi x)$ توابعی پیوسته ومتناوب هستند. بنابراین اگر λ عددی اصم باشدآنوقت (دوره تناوب هردوتابع $\frac{2}{\lambda}$ است):

$$\overline{\{\mathrm{Sin}(\lambda\pi),\mathrm{Sin}(2\lambda\pi),\ldots\}} = \overline{\{\mathrm{Cos}(\lambda\pi),\mathrm{Cos}(2\lambda\pi),\ldots\}} = [-1,1] .$$

علی الخصوص اگر $\lambda = \frac{1}{\pi}$ ، آنگاه (به صفحه ۸۵ [۲] نگاه شود).

$$\overline{\{\mathrm{Sin}(1),\mathrm{Sin}(2),\ldots\}} = \overline{\{\mathrm{Cos}(1),\mathrm{Cos}(2),\ldots\}} = [-1,1]$$

به عبارت دیگر، دنباله‌های $\{\mathrm{Sin}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\mathrm{Cos}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ هردو درفاصله [۱و۱-] متراکم هستند.

موضوع جالبی که دررابطه بانتیجه فوق می توان گفت این است که اگردوره تناوب تابع f (خواه پیوسته ، وخواه غیرپیوسته)عددی گویا باشدآنگاه تساوی $\overline{\{f(1),f(2),\ldots\}}=f(R)$ برقرارنخواهدبود مگراینکه تعدادعناصرمجموعه $f(R)$ متناهی باشد.

مراجع :

1) G.H.Hardy & E.M.wright,An Introduction to the Theory of Numbers,4th edition,1959,1960.

2) S.M.Nikolsky,A course of Mathematical Analysis volume 1, 1977.

چرا توپولژی حاصلضرب ؟

نوشته : ولادیمیر درابات وجان ساکا

ترجمه : قدسیه وکیلی
دانشگاه صنعتی اصفهان

غالبا "دانشجوئی که برای اولین بار به توپولژی حاصلضرب برخورد ـ می‌کند گیج و مبهوت می‌شود. توپولژی معمولی بر یک حاصلضرب نامتناهی $\Pi_\alpha X_\alpha$ از فضاهای توپولژیک X_α دارای پایه‌یی است از مجموعه‌هایی که به شکل $\Pi_\alpha U_\alpha$ هستند که در آن هر U_α باز است و $U_\alpha = X_\alpha$ برای تمام، مگر تعدادی متناهی از مقادیر α. این قید اخیر برای چیست ؟ چرا بعنوان پایه تمام مجموعه‌های $\Pi_\alpha U_\alpha$، که در آن هر U_α در X_α باز است اختیار نشود (همانگونه که در حالت حاصلضرب متناهی عمل می‌گردد) ؟ این پایه‌یی است برای یک توپولژی، که اکثرا "توپولژی جعبه‌یی نامیده می‌شود (صفحه ۱۱۳ مرجع [۱] را ملاحظه کنید). توپولژی جعبه‌یی وقتیکه تعداد فضاها متناهی باشد با توپولژی حاصلضرب یکسان است، گو اینکه برای حاصلضربهای نامتناهی با آن کاملا" فرق می‌کند.

حاصلضرب فضاهای همبند، درتوپولژی حاصلضرب، همبنداست. این مطلب درتوپولژی جعبه‌یی درست نیست. برای مثال R^ω، حاصلضرب شمارش پذیر (نامتناهی) خطهای حقیقی را درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ:

$A = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid$ دنباله‌یی کرانداراست $\{x_i\}\}$

درتوپولژی جعبه‌یی بازودرعین حال بسته‌است ولذا R^ω همبندنیست (صفحه ۱۵۲ مرجع [۱] راببینید.)

حاصلضرب فضاهای فشرده، درتوپولژی حاصلضرب، فشرده‌است. این نیزدرتوپولژی جعبه‌یی برقرارنیست. حاصلضرب شمارش پذیرکپی‌های فاصله یکه I، یعنی I^ω را درنظرمی‌گیریم. اگر $A_0 = [0,1)$ ، $A_1 = (0,1]$، آنگاه مجموعه‌تمام مجموعه‌های بازبه‌شکل

$$A_{\varepsilon_1} \times A_{\varepsilon_2} \times \cdots$$

که درآن $\varepsilon_i = 0$ یا ۱ یک پوشش بازشمارش ناپذیربرای I^ω است که زیرپوشش سره ندارد. زیرااگر $A_{\varepsilon_1} \times A_{\varepsilon_2} \times \cdots$ ازپوشش حذف شود، نقطه $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ پوشیده نخواهدشد.

توابع پیوسته $f: X \to \Pi_\alpha X_\alpha$ درتوپولژی حاصلضرب به‌عنوان توابعی رده بندی می‌شوندکه برایشان هرتابع مختص $f_\alpha (= \pi_\alpha f): X \to X_\alpha$ پیوسته است. برای اینکه ببینیم این مطلب درتوپولژی‌جعبه‌یی برقرارنیست تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ راکه به‌وسیله $f(x) = (x, x, x, \ldots)$ تعریف می‌شوددرنظر می‌گیریم. استدلالی ساده نشان می‌دهدکه f پیوسته نیست (مرجع [۱] صفحه ۱۱۵ ملاحظه شود)

ذیلاً یک رده بندی توابع پیوسته‌بتوی فضاهای حاصلضرب باتوپولژی

جعبه‌یی ارائه می‌گردد .

قضیه : فرض کنید X و X_α $(\alpha \in \Lambda)$ فضاهای متریک باشند یک تابع $f: X \to \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ در توپولوژی جعبه‌یی پیوسته است اگر و تنها اگر هر تابع مختص $f_\alpha (= \pi_\alpha f): X \to X_\alpha$ پیوسته بوده و هر $x \in X$ دارای یک همسایگی باشد که بر آن کلیه f_α ها، مگر تعدادی متناهی از آنها، ثابت باشند .

اثبات : فرض کنیم f پیوسته باشد ولی در شرایط مذکور صدق نکند. نقطه $x \in X$ را که برایش این شرایط محقق نیست در نظر می‌گیریم. اکنون می‌توانیم یک دنباله نامتناهی $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ در Λ و یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ بسازیم بطوریکه به ازاء هر i بتوان $x_i \in N_{\frac{1}{i}}(x)$ یافت بقسمی که

$$d(f_{\alpha_i}(x_i), f_{\alpha_i}(x)) > \varepsilon_i .$$

نتیجه می‌شود که برای هر مجموعه باز U که شامل x باشد :

$$f(U) \subset \prod_{i=1}^{\infty} N_{\varepsilon_i}(f_{\alpha_i}(x)) \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i} X_\alpha$$

برقرار نیست .

برعکس فرض کنید U_x مجموعه‌یی باز شامل x باشد بطوریکه f_α بر U_x به ازاء کلیه $\alpha \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ثابت می‌باشد. اگر $V = \prod_\alpha V_\alpha$ یک مجموعه باز پایه در توپولوژی جعبه‌یی باشد که شامل $f(x)$ است آنگاه

$$U = f_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap f_{\alpha_2}^{-1}(V_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap f_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n}) \cap U_x$$

مجموعه‌یی باز شامل x است بطوریکه $f(U) \subset V$.

بعنوان یک تبصره فوری بدست می‌آوریم.

تبصره: فرض کنیم X و X_α $(\alpha \in \Lambda)$ فضاهای متریک و X فشرده باشد. اگر $f: X \to \Pi_\alpha X_\alpha$ و فرض کنید که $f_\alpha = \pi_\alpha f$ تابع مختص f باشد، در این صورت f در توپولوژی جعبه‌یی پیوسته است اگر و تنها اگر کلیه f_α ها پیوسته بوده و تنها تعدادی متناهی از آنها نا ثابت باشند.

مرجع

1. J.R.Munkres, Topology : A First Course, Prentice-Hall, Englewood cliffs, NJ, 1975.

نام و نشان اصل مقاله چنین است :

Vladimir Drobot and John Sawka: Why The Product Topology? Math. Monthly ; Feb 1984, P 137-138.

سینرژتیک یا دانش همیاری

کاربرد روشهای ریاضی‌سینرژتیک درسیستمهای خودسازمانده

نوشته : هرمان هاکن
انستیتوی فیزیک نظری
دانشگاه اشتوتگارت

ترجمه‌ونگارش : عیسی یاوری
انستیتوی شیمی
دانشگاه مازندران

یادداشت مترجم :

بیان پدیده‌های طبیعی به زبان ریاضی ، یکی ازعرصه‌های پژوهش دردانش ریاضی است که ازروزگارگالیله ، دکارت ، ونیوتون رواج‌داشته است . پدیده‌خودسازماندهی درسیستمهای گوناگون مانندلیزرها ،واکنشهای نوسانی ، ساعتهای شیمیائی ، حرکت سیالات ، پیدایش مولکول های زیستی ازاتمها ومولکولهای کوچکترو، سرانجام ، پیدایش سلول زنده ، مشاهده می‌گردد. دراین سیستمها ، همیاری میان سیستمهای فرعی تشکیل دهنده آنها ، سبب پدیدارگشتن ویژگی ها وکیفیت های جدیدی درمقیاس ماکروسکپیک گشته است . عوامل گوناگونی‌ماننداافزایش شمارااجزاء سیستم وافزایش پیچیدگی آن ، پارامترهای درونی وبرونی حاکم بررفتارسیستم ، پارامترهای نظم درسیستم ، وغیره دربروز پدیده‌خودسازماندهی موءثر بوده‌اند.

دراین نوشتارازاصول کلی تلاش برای بیان ریاضی عوامل موءثر درپدیده‌خودسازماندهی درسیستمهاگفتگو می شود. باوجودیکه درمقدمه نوشتار، اشاره دقیقی به پدیده سینرژتیک وسیستمهای خودسازمانده‌شده است ، برای کسب اطلاعات بیشتری درموردمفهوم سینرژتیک می توان به شماره‌ٔ نهم سال سوم‌نشریه علمی وفرهنگی " هدهد" (بهمن ۱۳۶۰) مراجعه‌نمود .درموردااهمیت درک اصول حاکم برپدیده خودسازماندهی در سیستمها ، می توان ازتکامل یادکرد،که درآن افزایش پیچیدگی وفزونی

شما را اجزاء تشکیل دهندهٔ سیستمهای شیمیائی، یکی ازعوامل پیدایش حیات برروی زمین بوده است وبرای آن سه مرحلهٔ متمایز می توان درنظر گرفت: نخست، یک دوران تکامل شیمیائی وجودداشته که طی آن تمام ساختارهای مولکولی لازم که پیشنیاز آغاز حیات هستند پدیده آمده اند. درآن معجون آغازین، سامان یابی مولکولهای پیچیده ای چون پروتئینها واسیدهای هسته ای، که توان خودسازی داشته اند، نمی توانسته است به صورتی تصادفی وبختانه بوده باشد. سامان زیستی وپدیدارگشتن پیچیدگی می بایست حاصل فرآیندخودسازماندهی، که شامل انتقال مکررو تکرارپذیر ساختارهای مولکولی درجهت فزونی پیچیدگی آنهاست، بوده باشد. پدیده خودسازماندهی، درشرایط ویژه محیط پیرامون منجربه پدیدآمدن سیستمهای جدیدی (شامل پروتئین ها واسدهای هسته ای) گردیده که از سه ویژگی اساسی حیات، یعنی سوخت وساز، خودزائی وجهش پذیری برخوردار بوده وتوانائی نامحدودی برای ذخیره سازی وانتقال اطلاعات زیستی داشته اند. ازاین رو، آنهارا می توان سنگهایهٔ پدیدآمدن سلول زنده دانست. درسومین مرحله تکامل، سیستمهای آغازین وساده تک سلولی به سیستمهای پیچیده تروسازمان یافته ترپرسلولی تبدیل گشته ومرحله خودسازماندهی مولکول ها، باگذار ازجهان بی جان به جهان جاندار سروکار داشته است.

. درآمد

عنوان این نوشتار، سه مفهوم سینرژتیک، سیستمهای خودسازمانده وروشهای ریاضی مربوط به آنها رادربرمی گیرد، که لازم است پیش از پرداختن به اصل مطلب، تعریف دقیقی ازیکایک آنها بدست دهیم. بنابراین ابتدامی خواهیم برای پرسشهای زیرپاسخهائی پیداکنیم:

۱ـ موضوع سینرژتیک چیست؟

۲ـ سیستمهای خودسازمانده کدامند؟

۳ـ روشهای ریاضی مربوط به سیستمهای خودسازمانده چگونه هستند؟

ابتدا ازاصطلاح "سینرژتیک" آغاز می کنیم. این کلمه ازدو ریشه یونانی تشکیل شده ومعنای آن "کارکردن باهمدیگر" یا، به عبارت دقیقتر، "دانش همیاری" است. تقریبا، تمام موضوع هایی که مورد بررسی علمی قرارمی گیرند ازسیستمهای فرعی تشکیل شده اند. اغلب اوقات خواص وویژگیهای یک سیستم رانمی توان به صورت ترکیب سادهٔ خواص

سیستمهای فرعی تشکیل دهنده آن توضیح داد. همیاری میان سیستمهای فرعی به صورتی منظم وحتی هدفمند جلوه می کند. بویژه درقلمرو دانش زیست شناسی ، که درآنجاناگزیریم باسیستمهای پیچیده سروکارداشته باشیم . سیستمهای اخیرازتعدادفراوانی سیستم فرعی تشکیل شده اندکه به روال پیچیده‌ای باهمدیگراندرکنش دارند. هدف اساسی دانش همیاری یافتن پاسخی برای این پرسش است :

آیاسازوکاریااصولی عمومی براثرات همیاری میان سیستمهای فرعی،صرفنظر ازماهیت آنها ، حاکم است؟ احتمالا" ، طرح مسئله به این صورت آن قدر کلی وعام است که نمی توان آن رابا روشی ساده ومعقول حل کرد. اما ، بررسی دقیق مسئله ، باکمال شگفتی ، می تواندچنان اصولی عمومی رابدست دهد. مثلا" ، به بررسی ومطالعه مواردی بپردازیم که درآنها سیستمها درمقیاس ماکروسکپیک ، به صورت کیفی ، دستخوش تغییرمی‌گردند. دراینجا به رفتاروپویش سیستمهائی که ازحالت بیسامان وآشفته به حالت سامانمندومنظم می رسند، توجه ویژه‌ای مبذول خواهیم داشت. اکنون روشن شده است که چنین تغییراتی (گذارازحالت آشفتگی به حالت سامانمندومنظم) درعرصه‌های گوناگون علم ، مانندزیست شناسی ،فیزیک شیمی ، جامعه شناسی ،اقتصاد، وسایررشته‌هارخ می‌دهد. ازاین رو،دانش همیاری حقیقتا" عرصه‌ای میان رشته‌ای Interdisciplinary وبهمین جهت شناسائی وشناساندن تمام وجوه‌وجنبه‌های آن کارآسانی نیست .

حال ببینیم که سیستمهای خودسازمانده راچگونه می توان تعریف کرد. سیستم‌خودسازمانده ، سیستمی است که درآن همیاری میان سیستمهای فرعی می تواندویژگی های نوینی (ازنظرکیفیت) رادرمقیاس ماکروسکپیک برای سیستم اصلی پدیدآورد. بطورخاص ، وضعیت هائی رادرنظرمی‌گیریم که درآنهاانگاره‌هایاساختارهای ماکروسکپیک نوین پدیدمی‌آیند. این ساختارهامی توانندآرایش فضائی باشند، مانندآنچه که‌درریختزائی Morphogenesis وجوددارد، ویاممکن است ساختارهای زمانیTemporal باشند مثلا" پدیدارگشتن نوسانهای مستقل ویاحرکت شبه تناوبی، همچنین،پدیدار گشتن حرکات کاملا" آشفته ، نظیرهباء ، رامی تواندشامل گردد، وبا ساختارهای فضائی وزمانی باهمدیگرترکیب شوند(پدیدآمدن امواج).هنگامی که اثراین ساختارهای فضائی ـ زمانی رابرسایرسیستمهادرنظرمی‌گیریم ،

ممکن است ازساختارهای کارکردی نیز سخن به میان آوریم . اخیرا" ،روشن شده است که میان تشکیل انگاره‌ها وبازشناخت آنها همانندی هائی موجود است ، زیرا ، درهردومورد بایستی بترتیب ، باهمیاری میان سیستمهای فرعی یا با اصلی ها (ویژگی ها)سروکارداشته باشیم . پدیدارگشتن کیفیتهای نوین درمقیاس ماکروسکپیک رامی توان به روشهای گوناگون درک کرد. یکی ازاین روشها ، تغییرشرایط بیرونی یا تغییرکنترل هائی است که سیستم مقیدبرآنهاست . روش دیگر، که اخیرا" آن راموردبررسی قرارداده‌ایم ، به وسیلهٔ افزایش شماراجزاء تشکیل دهنده سیستم بدست می آید. هرچندکه این اجزاء دارای ماهیت همسانی باشند، باافزایش شمارآنها ، ازنظرکیفی ویژگی‌های کاملا" نوینی درسیستم بروزکنند.

حال به سراغ سیستمهای چندجزئی می رویم . رفتارکلی این گونه سیستمها رابامتغیرهای $q_1 - q_N$ می توان بیان داشت . این متغیرها به زمان بستگی دارند ونتیجه برهم افزائی آنها ، بردارحصالت State vector سیستم است :

$$\dot{\underset{\sim}{q}}(t) = (q_1, q_2, \ldots\ldots, q_N) \qquad (1)$$

هریک ازمتغیرها ممکن است به یک سیستم فرعی ویا به بخشی ازیک سیستم فرعی اشارت داردکه بطورپیوسته درفضا توزیع گشته است ، بطوریکه $\underset{\sim}{q}$ به متغیرفضا ، یعنی $\underset{\sim}{x}$ بستگی پیداکرده‌است . دشواری مسئله درپیدا کردن مادلاتی مناسب برای بیان $\underset{\sim}{q}$ است ، که انجام این امربه ماهیت رشته موردنظربستگی دارد. درفیزیک ، وحتی درشیمی ،قوانینی بنیادی وجوددارندکه برچگونگی رفتارمعادله (۱) حاکمند ،اما ، دربرخی رشته‌ها ماننذزیست شناسی ، رفتارسیستمهای فرعی چنان پیچیده است که برای تبیین آنها نیاز به مدلها وتلگوهای نوینی داریم . البته ، دراینجا به مسئله الگوسازی نمی پردازیم ، ولی نوع معادلاتی راکه دراختیار داریم بررسی می کنیم .

دسته‌ای ازمعادلات که معمولا" بیشترازآنها استفاده می شود. معادلات تکامل اند. صورت عمومی این معادلات چنین است :

$$\underset{\sim}{q}(\underset{\sim}{x},t) = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{q}, \quad ,t,v,\alpha) + F(\underset{\sim}{q},\underset{\sim}{x},t) \qquad (2)$$

تغییرزمانی بردار $\underset{\sim}{q}$ رابادسته‌ای ازمعادلات دیفرانسیل درجه‌اول می‌توان

توضیح داد. $\underset{\sim}{N}$ تابعی غیرخطی از $\underset{\sim}{q}$ است، که ممکن است به فضا ($\underset{\sim}{x}$) وزمان (t) نیز بستگی داشته باشد. همچنین ممکن است به مشتقات ∇ نسبت به فضا، و، بطورکلی، به پارامترهای کنترل ، که نشاندهنده اثرمحیط پیرامون برسیستم است، بستگی پیداکند. ازنمونه‌های آشکاری که درفیزیک وشیمی آموخته‌ایم، می‌دانیم که بحساب آوردن نیروهای تصادفی Stochastic Forces ، که ریشه آنها درنوسانها نهفته است، امری ضروری است. هنگامیکه نیروهای تصادفی به متغیرهای $\underset{\sim}{q}$ بستگی پیدا می کنند، بایستی درارزیابی وسنجش آنها دقت ویژه‌ای مبذول داشت وازشاخه‌های پیشرفته علم حساب بهره گرفت.

هنگامیکه به ماهیت آماری فرآیندها توجه می کنیم، می بینیم که برای توضیح آنها راه دیگری هم وجوددارد. البته، دراینجانیز لازم است به نظریه فرآیندهای تصادفی مراجعه نمائیم. معادله (۲) و، همچنین، معادلات مشابه آن (مثلا معادله چپمان کلموگروف) قادرند چگونگی رفتارسیستمهای بیشماری راتوضیح دهند. دردانش فیزیک می‌توان دینامیک مایعات، پلاسماها، لیزرها، نوسانگرهای پارامتریک، شبکه‌های الکتریکی، وسیستمهای مکانیکی رانام برد.

رفتاردسته بزرگی ازپویشها وفرآیندهای شیمیائی رامی توان به کمک معادلات نفوذ واکنش Reaction Diffusion ، که درآنها متغیرهای q_j دارای معنای غلظت هستند، توضیح داد. صورت کلی این معادلات چنین است:

$$\dot{n}_j = R_j(\underset{\sim}{n}) + D_j \nabla^2 n_j + F_j \qquad (۳)$$

که درآن R_j، واکنشهای غیرخطی راتوضیح می‌دهد، درحالیکه D_j مربوط به ثابت‌های نفوذ و F_j بیانگرنیروهای نوسانی است. این معادلات می‌توانند تشکیل انگاره درمقیاس ماکروسکپیک و، همچنین، پدیده‌هائی چون "ساعتهای شیمیائی" و "امواج شیمیائی" راتوضیح دهند.

درزیست شناسی فرآیندهای بسیاری ازمعادله فراگیر (۲) تبعیت می کنند. به عنوان مثال، می توان ازپویائی (دینامیک) جمعیت، نفوذ وپراکندگی عفونت‌ها، تکامل زیستی، رفتاراجتماعی، عرصه‌های رختزایی Morphogenesis شبکه‌های عصبی، هدایت عصبی وغیره نام برد.

۲ . رهیافت عمومی

معادله (۲) ، یا سایر معادلات تصادفی (استوکاستیک)مشابه آن، هنوز آنقدرعمومی هستندکه حتی امیدی به یافتن یک راه حل کلی نیز برای آنها نمی رود (دست کم با دانسته‌های کنونی ما) . بهرحال ، دسته‌های وجوددارندکه دارای اهمیت وارزش فراوانی هستندواین دسته‌ها به مواردی مربوط می گردندکه تغییرات ماکروسکپیک فاحش دراین سیستمها رخ می‌دهد . بیش ازهرچیز ، مقیاس‌های زمان Time Scale دارای اهمیت هستندونقش اساسی را بازی می‌کنند. لازم است فرض کنیم که تغییرات پارامترهای کنترل α ، نسبت به سایرفرآیندهای سیستم ، بسیارآرام تراست .در سطوربعدی خواهیم دیدکه هنگام بروز تغییرات فاحش دررفتارماکروسکپیک سیستم ، دومقیاس زمانی دیگرنیزاهمیت پیدا خواهندکرد. برای توضیح وبیان شیوه‌های جمعی رفتارسیستمها ، بایستی ازپارامترهای نظم استفاده نمائیم . این پارامترهای نظم باکندی فراوانی دستخوش دگرگونی و تغییرمی گردند. درسومین مقیاس زمانی ، که کوتاهترین آنها نیزمی‌باشد سیستمهای فرعی که باصطلاح به بردگی وانقیادپارامترهای نظم درآمده‌اند پیکربندیها وحرکات آرمیده خودراکه توسط این پارامترها بیان گردیده است ، پیدا می‌کنند. برای روشنترشدن این پدیده‌ها ،ابتدا فرض کنیدکه درمعادله (۲) پارامتر $\underset{\sim}{N}$ به زمان بستگی ندارد. یعنی بایک سیستم خود مختارروبروهستیم . همچنین ، تصورکنیدکه برای یک پارامترکنترل ویژه ، نظیر α_0 ، توانسته‌ایم پاسخی پایدارمانند $\underset{\sim}{q}_0$ راپیداکنیم . این متغیرمی‌تواندیک پیکربندی پایداربایک پویش پایداربرای تمام سیستم بیان نماید. ابتدا بایدفرض کنیم که $\underset{\sim}{N}$ به طریقی بسیارهمواربه α و $\underset{\sim}{q}$ بستگی دارد. یعنی $\underset{\sim}{N}$ ازقابلیت مشتق پذیری برخورداراست وتا درجه معینی قابلیت تمیزدارد. اکنون پارامترکنترل α راتغییرمی‌دهیم وپایداری راه حل نوین راباا ستفاده ازروش تحلیل خطی پایداری ، مورد مطالعه قرارمی‌دهیم. درصورتیکه q_0 به زمان بستگی نداشته باشد،خطی سازی معادله (۲) (باصرفنظرکردن ازنیروهای نوسان کننده)می‌تواند راه حلهائی بدست دهدکه همراه با زمان بصورت نمائی Exponential با نمای λ (معروف به نمای فلوکت Floquet) افزایش یاکاهش

می‌یابند. اگر q_0 متناوب باشد، رفتار سیستم با نمای λ نمایش داده می‌شود. درصورتی‌که q_0 شبه تناوبی باشد، لازم است نمای عمومی λ را به صورت حالتی با تعداد بیشماری خطی سازی تعمیم دهیم.

خطی سازی معادله (۲) حول q_0، منجربه پدیدآمدن دسته کاملی از بردارهای ویژه دریک فضای مناسب (مثلا" ، فضای باناک Banach) می‌گردد. راه حل مطلوب معادلات غیرخطی شامل نیروهای نوسانگردرچهارچوب q_0 نیز می‌شودوطی آن بردارهای ویژه گسترش داده می‌شوند. درموردی که q_0 تناوبی یا شبه تناوبی باشد، فرض یک راه حل برای q را بایستی با شامل ساختن زاویه‌های فازعمومیت بخشیم.

تقریبا" ، دراغلب موارد، باسیستمهای مصرفی یا تلف کننده (Dissipative) روبروهستیم ودراینجاست که یک ویژگی بسیارمهم ازطیف خطی سازی رخ می‌دهد. درمورد α_0 اولیه ، تمام قسمتهای حقیقی λ ها منفی اند، زیرا فرض آغازین ما این بوده است که با یک سیستم پایدار روبروهستیم. هنگامیکه α راتغییرمی‌دهیم ، λ نیز به صورتی پیوسته تغییرمی‌کند، اما، دریک حالت عمومی وکلی می‌توانیم فرض کنیم که λ ها همدیگرتفاوت دارند. معنی این نکته آن است که همراه با تغییردادن α، قسمت حقیقی یکی از λ ها مثبت خواهدشد، درحالیکه قسمتهای حقیقی سایر λ ها منفی باقی خواهندماند. پیکربندی جمعی سیستم که به λ با قسمت حقیقی مثبت بستگی دارد، پارامترنظم خوانده می شود. درمورد λ نیز زوایای فازبه مثابه پارامترنظم عمل می‌کنند، زیراقسمتهای حقیقی ارزشهای ویژه آنها مساوی صفراند. روشی که درسطوربالا ازآنها یادنمودیم ، به ما امکان می‌دهدتا تمام درجه‌های آزادی سیستم را تنها برحسب پارامتر (یا پارامترهای) نظم بیان کنیم. البته ، این روش شامل جوابهای گذرا ونیروهای نوسانگرهم می‌شود. ازجهت دیگر، به قضیه چندمرکزی شباهت دارد ، که حالتی ویژه ازروش موردبحث ماست ازامکان حذف سایرمتغیرها، بجز پارامترهای نظم ، بانام" اصل برده‌سازی" یاد خواهیم کرد. این اصل ما را قادرمی‌سازدتا درجات آزادی سیستمهای پیچده راکاهش دهیم ، یعنی شمارآنها را تا حدشمارپارامترهای نظم محدود سازیم .بمحض آنکه پارامترنظم تعیین گردیدوشناخته شد، رفتارکل سیستم تثبیت می‌شود،واین به ما امکان می‌دهدتا پدیدارگشتن نظم

ماکروسکپی وساختارماکروسکپی راتبیین نمائیم . همچنین مفهوم پارامتر نظم به ماامکان می‌دهدتاحافظه تداعی کننده (Associative Memory) راتوصیف‌کنیم . یعنی ، پیکربندی چندسیستم‌فرعی ممکن است‌چنان پارامترنظمی پدیدآوردکه بعدا" بتواندرفتاریاحالت‌کل سیستمهای فرعی راتعیین نماید. دربازشناخت‌انگاره یاشناسائی الگو (Pattern Recognition) نیز سازوکارمشابهی رامی توان به میان کشید.

برای آنکه نمونه‌ای ازیک معادله پارامترنظم رابدست داده‌باشیم، معادلهٔ سادهٔ زیررامورد‌بررسی قرارمی‌دهیم :

$$\xi \ddot{\tilde{u}} = \lambda \tilde{u} \xi \tilde{u} - C \xi \tilde{u}^{3} + F \qquad (۴)$$

(۴)

این معادله درشماری ازمواردعملی ، مانندزمینه‌های ریختزائی تک‌بعدی دینامیک (پویائی) سیالات ، لیزرها ، وسایرسیستمها ، بکاربسته می‌شود. بدون نیروهای نوسانگر F ودرحالیکه $\xi \ddot{\tilde{u}} = 0$ باشد، معادله (۴) به‌صورت معادله‌ای معروف درمی‌آیدکه درنظریه‌تسهیم سازی Bifurcation Theory بکاربسته می شود.

ویژگی بدیع رهیافت مادراینجااین است‌که پدیده‌های واهلش (آسودگی) ونیروهای نوسان کننده رادرنظرمی‌گیریم . ازاین راه‌ می توان بانظریه انتقال فازهادرفیزیک ، ازجمله شکستن تقارن ،آرامش بحرانی ، ونوسانهای بحرانی آشناشد.

۳. برخی تعمیم ها

روش بالارا به‌چندطریق می توان تعمیم وگسترش داد. به عنوان مثال، بعلت‌وجودتقارن هادرمیان اجزاء سیستم هاویاسیستمهای فرعی ممکن است‌چندگونگی هائی تشخیص‌داده شودوازاین طریق چندین پارامترنظم مشخص‌گردند. دراینگونه موارددسته‌ای ازمعادلات پارامترنظم راپیداخواهیم کرد. درموردتقارنهای انتقالی پارامتر u به یک پیوستارتعلق دارد، یعنی به تدوین روشهائی توفیق یافته‌ایم

که امرتسهیم درحضوریک پیوستا ررا ازراه تشکیل دسته‌های موجی تحقق بخشند. درمواردی که چندین پارامترنظم وجوددارند، بااستفاده از نظریه گروهها، می توان شمارمعادلات مربوط به پارامترهای نظم را کاهش داد. دربرخی حالات، معادلات پارامترنظم، رفتاری رابیان می‌دارندکه تشخیص آن با رقابت باهمیاری میسراست. درموردرقابت سرعتهای رشدپارامترهای نظم هنوز متفاوتندوبعلت وجوفرآیندهای غیرخطی، میان آنان رقابت درمی گیردتا بالاخره به بقای یکی از پارامترهای نظم منجرشود. این پارامترنظم، سپس برتمام رفتارهای سیستم حاکم خواهدشد. نظیرچنین رفتاری درلیزرها، وسیله‌ای فیزیکی که انتخاب نوع ویژه‌ای ازفوتونها یا ذرات نوررا ممکن می سازد، مشاهده شده است.

درنظریه آیگن (M. Eigen) برای تکامل، که سرعت رشد مولکولهای زیستی رابه واکنش‌های خودکاتالیزری (اتوکاتالیتیک) مربوط می سازد. نیز همان نوع معادلات پدیدمی‌آیند. ازطرف دیگر،همیاری پارامترهای نظم اجازه می‌دهندتا زمینه‌های ریختزائی پیچیده بوجودآوریم که بتوانندانگاره‌های ویژه رانمایان سازند. مابه وجوددسته‌هائی از معادلات پارامترنظم پی برده‌ایم که دقیقا" به " بازیها" (براساس نظریهٔ بازی Game Theory) مربوط می‌گردند. همچنین موردی رابررسی نمودیم که درآن باتغییرشماراجزاء توانستیم ازیک وضعیت به وضعیتی دیگربرسیم . درموردفرآیندهای مدلسازی درمغز، موردمربوط به بسیاری ازپارامترهای کنترل راکه بصورت ویژه‌ای برسیستم عمل می‌کنندنیز موردبررسی قرارداده‌ایم . اکنون روشن شده است که تغییر یک پیکربندی ویژه پارامترکنترل می تواندرشته‌ای ازفرآیندهای تسهیم سازی راپدیدآورد،مثلا"، ازراه انتقال حالت پایدارکل سیستم به یک پیکربندی کاملا" جدید.

۴. سلسله مراتب (هیرارشی)ناپایداری ، آشفتگیها ،وراه‌گریزازآنها

بااستفاده ازروش فوق الذکر، سیستمهای بیشماری درفیزیک، شیمی، وزیست شناسی موردبررسی قرارگرفتندوتقریبا" درتمام آنها،

رفتا رزیرا مشاهده کردیم :
هنگامیکه یک پارامترکنترل رابیش ازپیش تغییرمی‌دهیم ، سیستم دچار برخی ناپایداریها می گردد. پدیده لیزرمثال مناسبی است ، که درآن یک پرتونورانی با یک تابش کاملا" همسیما جایگزین میگردد. یعنی تغییر پارامترکنترل ، بالاخره بحالت مرزی رسیده وپدیده جایگزینی رخ داده‌است درمواردویژه‌ای نیزممکن است یک حرکت شبه تناوبی رخ دهد، ولی درموارد دیگرآشفتگیها ، یعنی حرکات کاملا" نامنظم مشاهده گردند. لازم به یادآوری است که طبیعت ، دست کم درموردبیشترسیستمهای زیست شناسی ، توانسته‌است ازآشفتگی وبیسامانی جلوگیری نماید. دلیل این عمل شاید این باشدکه طبیعت ازراه واردساختن اجزاء جامددرسیستم ، توانسته‌است به این امرتحقق بخشد. مثلا" ، طبیعت می تواندکارکردرابه ساختارها ، وبالعکس ، تغییردهد. ظاهرا" ، دراینجاست که ازیک طرف زیست شناسی مولکولی واردصحنه می شودوازطرف دیگرپرسش های مربوط به چگونگی انقسام Compartmentalization مطرح می‌گردند. گرچه‌برای چنین پویش هائی ، برخی امکانات مطالعه وبررسی موجوداست .اما ، به نظر نگارنده ، بویژه دراینجالازم است که درزمینه تکوین ابزارهای ریاضی لازم برای این بررسیها پژوهشهای بیشتری انجام گیرد.

۵. نتیجه‌گیری

دردرآمداین نوشتارگفتیم که هدف‌اساسی دانش‌همیاری،یافت سازوکارهاواصول عمومی حاکم بررفتارسیستمهای پیچیده (درشرایطی که رفتار ماکروسکپیک آنها دستخوش تغییرات فاحش می‌گردد) است . ازبخش‌های فوق الذکرمی توان نتیجه گرفت که‌چنین سازوکارهائی رادرسیستمهای فراوانی می توان تشخیص داد. درنقاط بحرانی پارامترهای کنترل، پایداری سیستم دستخوش‌نوسان می شودوسرانجام حالت گذشته سیستم با حالتی جدید، که ازنظرکیفی باآن متفاوت است ،جایگزین می‌گردد. بطور کلی درهمین نقاط بحرانی وحالتهای ناپایدار، تنها برخی ازپیکربندیها یاروشهای جمعی (درچهارچوب خطی سازی) پایدارمی مانندوبه‌عنوان پارامترنظم درخدمت تغییرسیستم درمی‌آیند، سامان جدیدآن راپدیدمی‌آورند

وپارامترهاهمه روشهای دیگرپایداربوده وبااستفاده ازاصل برده سازی میتوانندحذف شوند.

انجام عملیات حذف، درچهارچوب معادلات کاملا" غیرخطی،میتوانند دسته‌ای محدودازمعادلات رابرای پارامترهای نظم، که دستکم در حالت کلی امکان دستیابی به راه حلهای پایداررانویدمی‌دهند، بوجود آورد. این پارامترهای جدیدنظم، الگوهای جدیددرحال تکوین، ساختارها فرآیندها راتوصیف می‌کنند. نکته‌جالب توجه اینجاست که چنان معادلات پارامترنظم می توانندبرای سیستمهای‌گوناگون صورتی یکسان داشته‌باشند یعنی درنقاط بحرانی، سیستمهای کاملا" متفاوت وقتی که ازیک حالت ماکروسکپیک به حالت ماکروسکپیک دیگرگذرمی‌کنندازسازوکارهای همانندی استفاده می کنند. این نتیجه تاحدودی به نظریه‌رویدادهای غیرمنتظره شباهت دارد، ولی بایدتوجه داشت‌که معادلات مورداستفاده ما نسبت به معادلات‌نظریه رویدادهای غیرمنتظره، ازکلیت وعمومیت بیشتری برخوردارند.

نقل از

H. Haken, in "Biomathematics in 1980", L. M. Ricciardi and A. C. Scott (eds.), North-holland Publishing Co., 1982.

مراجع

(1) H. Haken, Synergetics, An Introduction. Nonequilibrium phase Transitions and self-Organization in Physics, Chemistry and Biology, 2nd enlarged edition, Springer 1978.

(2) H. Haken, ed., Pattern Formation by Dynamic Systems and Pattern Recognition, Proceedings of the Internat. Symposium on Synergetic, 1979, Springer 1979.

(3) H. Haken, Z. Physik B 29, 61 (1978) and Z. Physik B 30, 423 (1978).

(4) H. Haken, ed., Dynamics of Synergetic Systems, Proceedings of the Internat, Symposium on Synergetics, Bielefeld, Springer 1979.

هدف از انتشار نشریه فرهنگ و اندیشه ریاضی که توسط انجمن ریاضی ایران منتشر میگردد گسترش جنبه های عام دانش ریاضی در سطح قابل استفاده برای دانشجویان، دبیران واساتید دانشگاه میباشد. این مجله مقالاتی بامشخصات فوق الذکر را که بخصوص در زمینه های توصیفی اندیشه و فرهنگ ریاضی، نکات آموزشی مناسب نظیر نحوه جدید اثبات قضایا، نقد وبررسی کتب ریاضی ومسائل جالب ریاضی باشد برای انتشار میپذیرد.

از نویسندگانی که علاقمند به چاپ مقاله خود دراین مجله میباشند تقاضا میشود باتوجه به نکات زیر آنرا برای سردبیر مجله ارسال دارند.

۱ ـ مقاله باید به فارسی تهیه شده باشد.

۲ ـ مشخصات مقاله منجمله نام وآدرس نویسنده ویامترجم وعنوان مقاله باید درصفحه اول تایپ شود.

۳ ـ مقالات باید روی کاغذ A_4 بافاصله دوبل وحاشیه مناسب تایپ شود مراجع بطور شماره گذاری شده درآخر مقاله آورده شود.

۴ ـ نویسندگان باید سه نسخه ازمقاله را ارسال نمایند.

۵ ـ نویسندگان مسئول عقایدی هستند که درمقاله خود بیان میکنند.

۶ ـ هیأت تحریریه هرمقاله را برای اظهارنظر جهت تناسب مطالب آن با خط مشی مجله به حداقل یك داورفرستاده وباتوجه به نظریات داوریاداوران درمورد قبول یا ردآن برای چاپ تصمیم می گیرد.

۷ ـ نویسندگان ۱۰ نسخه ازمقاله خود ویك نسخه ازمجله ای را که مقاله شان درآن چاپ شده بطوررایگان دریافت می‌دارند. نسخه های اضافی بشرط تقاضای نویسندگان قبل ازچاپ مجله وپرداخت هزینه های مربوطه برای آنان ارسال میگردد.

فهرست مقالات

انجمن ریاضی ایران