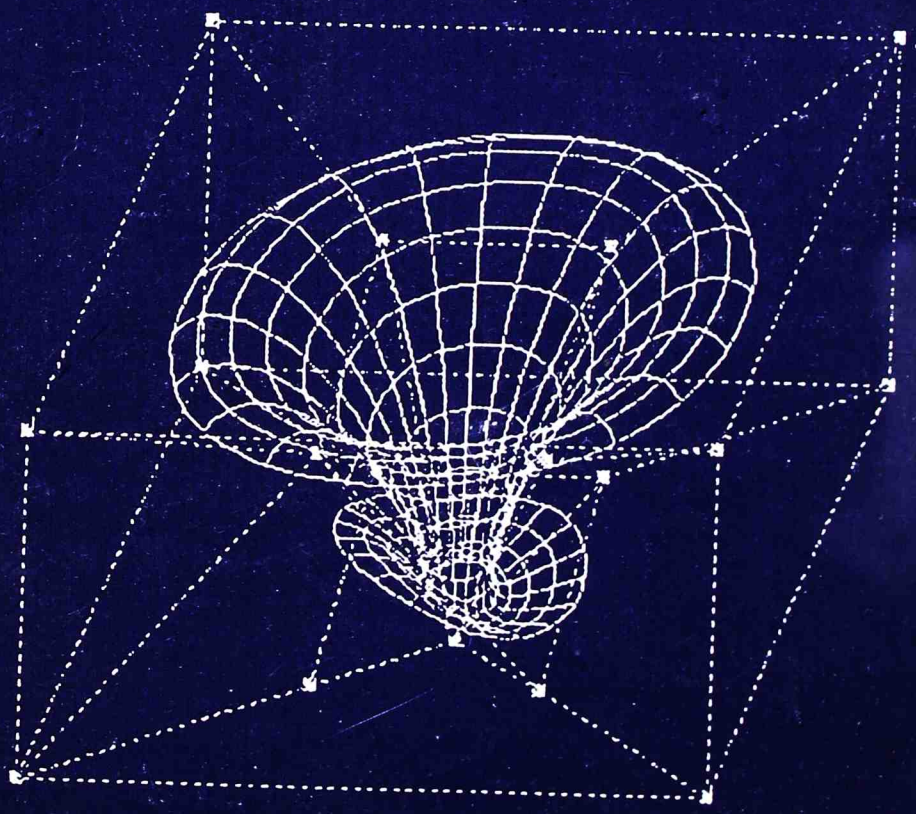
ت ریاضی ایران

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۱۷، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۷۷



ISSN 1022-6443

بسم الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۱۷، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۷۷

شمارهٔ پیاپی: ۲۱

صاحب‌امتیاز: انجمن ریاضی ایران

مدیر مسؤول: محمدمهدی ابراهیمی

سردبیر: اسفندیار اسلامی

حروفچینی: TEX-پارسی دفتر انجمن ریاضی ایران

نشانی:
تهران ــ صندوق پستی ۱۳۱۴۵ـ۴۱۸
iranmath@rose.ipm.ac.ir

قیمت: ۲۰۰۰ ریال

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی-ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روندِ ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، علوم کامپیوتر، فیزیک نظری، و کاربردهای ریاضیات در علومِ دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوعِ مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع بندِ قبل یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهانهایی ساده‌تر از آنچه در متونِ کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند مقالاتِ خود را با شرایطِ زیر به نشانی دفتر مجله ارسال کنند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافیْ ماشین یا با خطِ خوانا نوشته شود، یا، ترجیحاً، در دیسکتِ کامپیوتری تحت یکی از ادیتورهای «ویراستارِ ساده»، «PE2»، یا «لاتکِ فارسی» باشد.
- فرستادنِ اصلِ مقالهٔ ترجمه‌شده ــ با ذکر نشانیِ کاملِ آن ــ لازم است.
- اصطلاحاتِ ریاضیِ به‌کار رفته باید بر طبقِ واژه‌نامهٔ ریاضی و آمارِ انجمن ریاضی ایران باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادلِ انگلیسیِ آن داده شود. در صورتی که مؤلف یا مترجم معتقد است اصطلاحِ خاصی از واژه‌نامه مناسب نیست باید ترجیح دادنِ اصطلاحِ پیشنهادیِ خود را توجیه کند.
- هیأت تحریریه در رد و قبول و حک و اصلاحِ مقالاتْ آزاد است.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر ارسال شده باشد.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۱۷، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۷۷
(تاریخ انتشار: پاییز ۱۳۷۸)
شمارهٔ پیاپی: ۲۱

فهرست مطالب

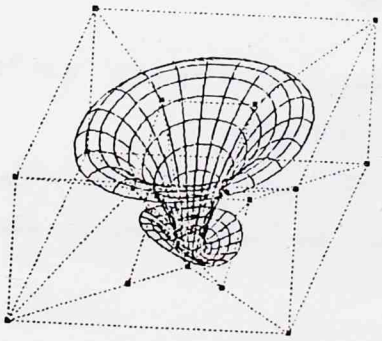
• دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی در اجرای بخشی از رسالت فرهنگی خود با در اختیار گرفتن متن آمادهٔ لیتوگرافی و تقبل کلیهٔ هزینه‌ها، این شماره از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی را در اختیار علاقه‌مندان قرار داده است. شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران از این همکاری ارزشمند صمیمانه سپاسگزار است.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای انجمن ریاضیِ ایران ارسال می‌شود.

کسانی که عضو انجمن ریاضی ایران نیستند و علاقه‌مند به اشتراکِ این مجله هستند می‌توانند با واریزِ مبلغ ۴,۰۰۰ ریال به حساب جاریِ ۵۶ـ۴۳۶۵ بانک سپه شعبهٔ دانشگاه تهران و ارسال فیشِ آن همراه نشانیِ دقیقِ خود به دفتر مجله، به مدت یک سال این مجله را دریافت کنند.

مبلغ اشتراکِ یک‌ساله برای کتابخانه‌ها و مؤسسات ۱۰,۰۰۰ ریال است.

شماره‌های ۳، ۴، ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۱۹ و ۲۰ در دفتر مجله موجود است؛ با واریزِ ۲,۰۰۰ ریال بابت هر شماره به حساب مذکور و ارسال فیشِ آن به دفتر مجله می‌توانید شماره‌های مورد نظرِ خود را دریافت کنید.



روی جلد:
رویهٔ Bـاسپلاین تولید شده توسط روش تقریب.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۱ (پاییز ۱۳۷۷)، صص. ۱ تا ۸

ارتباطی بین گروههای n ـانگل و گروههای پوچتوان

شادروان اکبر حسنی و شعبان صدقی

چکیده

فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد، در این صورت گروه G را nـ انگل نامند، هر گاه به ازای هر $x, y \in G$، $[x, \underbrace{y, \cdots, y}_{n\text{ـمرتبه}}] = [x,_n y] = 1$ واضح است هر گروه پوچتوان از ردهٔ n یک گروه nـ انگل است. امّا هیچ لزومی ندارد که یک گروه nـانگل، گروهی پوچتوان باشد. در این مقاله شرایطی که یک گروه nـانگل می‌تواند گروهی پوچتوان شود مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

۱. مفاهیم اولیه و نتایج مقدماتی گروههای nـانگل

فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد و $x, y \in G$. در این صورت مزدوج x به وسیلهٔ y را با $x^y = y^{-1}xy$ نشان می‌دهیم و $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$ را تعویضگر x و y می‌نامیم.
اگر $x_1, x_2, \cdots, x_n \in G$ آنگاه تعویضگر ساده $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ از وزن $(n \geq 2)$ به طور استقرایی تعریف می‌شود. برای این منظور فرض کنیم تمام تعویضگرهای از وزن کمتر از n تعریف شده باشند تعویضگر از وزن n به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[x_1, x_2 \cdots, x_n] = [[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}], x_n]$$

اتحادهای زیر که اثبات آنها به آسانی انجام‌پذیر است، در محاسبات تعویضگرها بسیار مفیدند و ما آنها را در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌دهیم.

$$\left.\begin{aligned}[xy,z]&=[x,z]^y[y,z]\\ [x,yz]&=[x,z][x,y]^z\end{aligned}\right\}\quad \text{اتحادهای ف- هال}$$

$$[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x=1$$

یا به‌طور معادل

$$[y,x,z^y][z,y,x^z][x,z,y^x]=1$$

که به اتحاد هال- ویت موسوم است. ([۹] را ببینید)

تعریف. گروه G را یک گروه انگل گویند هرگاه به ازای هر جفت مرتب (x,y) از عناصر G یک عدد صحیح مثبت $n(x,y)$ موجود باشد به قسمی که

$$[x,\underbrace{[\cdots[x,[x}_{n(x,y)\text{-مرتبه}},y]]]]=1 \qquad (1)$$

البته عبارت فوق را با توجه به محاسبات تعویضگرها می‌توان به صورت زیر نوشت

$$[[[[y,x],x]\cdots],x]=[x^{-1},[\cdots[x^{-1},[x^{-1},y]]]]^{x^m}$$

بنا به تعریف، واضح است که هر گروه موضعاً پوچتوان یک گروه انگل است. زیرا به ازای هر $x,y\in G$، $H=<x,y>\leq G$، لذا H پوچتوان است.

در نتیجه یک عدد صحیح مثبت n موجود است به قسمی که $[x,_n y]=1$. در حالی که عکس آن در حالت کلی برقرار نیست. زیرا گولد[1] در [۳] گروههای انگل متناهیاً تولید شده‌ای ساخت که پوچتوان نیستند. به عبارت دیگر ردهٔ گروههای موضعاً پوچتوان زیر مجموعهٔ سرهٔ ردهٔ گروههای انگل است.

البته برای ردهٔ خاصی از گروهها، شرط انگل بودن گروهها با موضعاً پوچتوانی گروهها معادل است. به بیان دیگر قضایای زیر نشان می‌دهند که برای گروههای حل پذیر شرط انگل بودن گروه با موضعاً پوچتوانی آن معادل است.

---

۱) Golod

۱.۱. **قضیه.** *(i) هر گروه انگل حل‌پذیر یک گروه موضعاً پوچتوان است. (به [۴] مراجعه شود)*
(ii) هر گروه انگلی که در شرط ماکسیمال صدق کند، یک گروه موضعاً پوچتوان است. ([۲] را ببینید)
در حالی‌که برای گروههای متناهی، شرط انگل بودن با پوچتوانی آن معادل است. البته این مطلب را پروفسور زورن (Zorn) در سال ۱۹۳۶ [۱۷] ثابت کرد که در واقع اولین قضیهٔ مربوط به گروههای انگل می‌باشد و آنرا به صورت زیر می‌آوریم.

۲.۱. **قضیه** (Zorn). *هر گروه انگل متناهی یک گروه پوچتوان است.* **اثبات.** فرض کنیم حکم قضیه برقرار نباشد. در این صورت گروههای انگل متناهی وجود دارند که پوچتوان نیستند. از این رو اگر G کوچکترین گروه انگل متناهی باشد که پوچتوان نیست، آنگاه هر زیرگروه سرهٔ G پوچتوان است. در نتیجه بنا به قضیه اشمیت (۹۱۹ از [۱۲]) گروه G حل پذیر است. لذا بنا به قضیهٔ ۱.۱(i)، گروه G موضعاً پوچتوان است و چون G متناهی است، از این رو گروه G پوچتوان است.□

تعریف. در رابطه (۱) اگر $n = n(x, y)$ مستقل از انتخاب x و y باشد آنگاه گروه G را یک گروه nـ انگل گویند. به عبارت دیگر گروه G را nـ انگل نامند، اگر به ازای هر $x, y \in G$، $[x, \underbrace{y, \cdots, y}_{n\text{ـبار}}] = [x,_n y] = 1$

واضح است هر گروه پوچتوان از ردهٔ n یک nـ انگل گروه می‌باشد. امّا گروههای nـ انگل هیچ لزومی ندارد که پوچتوان باشند (به ۱۲.۳.۱ از [۱۲] مراجعه شود)
در حالی که بنا به قضیه زورن، شرط انگل بودن یک گروه با پوچتوانی آن معادل است.
البته ناگفته نماند که موضوع گروههای انگل از نظریه جبرهای لی ریشه گرفته است. از این رو خیلی از نتایج در نظریه جبرهای لی انگل را می‌توان به قضایایی در نظریهٔ گروههای انگل بیان کرد.

به عنوان مثال یکی از نتایج اساسی که در نظریهٔ جبرهای لی بیان شده است این است که هر جبر لی انگل با بعد متناهی روی یک میدان، پوچتوان است . نظیر این مطلب در نظریه گروههای انگل در قضیهٔ زورن گفته شده است. در ادامه همین موضوع دو قضیه از زلمانف ($E.I.Zel'Manov$) را به صورت زیر می‌آوریم (به [۱۴]،[۱۵]،[۱۶] مراجعه شود).

قضیه ۱Z. *هر جبر لی nـانگل روی میدان K با مشخصه $K = 0$، پوچتوان است.*

قضیه ۲Z. *یک جبر لی nـانگل روی میدان دلخواه، موضعاً پوچتوان است.*

حال متناظراً برای گروههای انگل سؤالات زیر را داریم .
سؤال ۱. آیا هر گروه nـانگل بدون تاب، پوچتوان است؟
سؤال ۲. آیا هر گروه n ـ انگل ، یک گروه موضعاً پوچتوان است؟
برای پاسخ به سؤالات فوق، می‌دانیم که برای $n = 1$ جواب مثبت است. زیرا هر گروه ۱ـانگل، یک گروه آبلی است.

در سال ۱۹۴۲، لیوی (Levi) مسأله را برای $n = 2$ ثابت کرد که در قضیهٔ زیر آن را می‌آوریم.

۱.۳. قضیه. (لیوی). فرض کنیم G گروهی ۲ـانگل باشد. در این صورت به ازای هر $x, y, z, t \in G$،

آ) $A = x^G$ آبلی است.

ب) $[x, y, z] = [z, x, y]$

پ) $[x, y, z]^2 = 1$

ت) $[x, y, z, t] = 1$، یعنی G گروهی پوچتوان از ردهٔ حداکثر ۳ است.

اثبات. (آ) بنا به اتحادهای تعویضگرها

$$[x, x^y] = [x, x[x, y]] = [x, [x, y]]$$

امّا چون G گروه ۲ـانگل است، عضو x با $[y, x]$ و در نتیجه با $[x, y]$ جابه‌جا می‌شود از این رو $[x, x^y] = 1$ و در نتیجه هر دو تزویج از x تعویض‌پذیرند. یعنی $A = x^G$ آبلی است.

ب) فرض کنیم $A = x^G$، در این صورت A یک گروه آبلی است. نگاشت $a \to [a, y]$ یک درونریختی از A می‌باشد که به صورت y^* می‌نویسیم. چون $(y^*)^2$ عنصر a را به $[a, y, y] = 1$ می‌برد در نتیجه $(y^*)^2 = 0$.

با استفاده از خواص مقدماتی تعویضگرها برای $[x, yz]$ و $[x, y^{-1}]$ نتایج زیر به دست می‌آید.

$$(yz)^* = y^* + z^* + y^* z^* \qquad (2)$$

و

$$(y^{-1})^* = -y^* \qquad (3)$$

چون $(yz)^{-1}$ با $[a, yz]$ جابه‌جا می‌شود، در نتیجه بنابر (۲) و (۳) داریم

$$0 = (yz)^*(z^{-1}y^{-1})^* = (y^* + z^* + y^* z^*)(-z^* - y^* + z^* y^*) = -y^* z^* - z^* y^*$$

بنابراین

$$y^* z^* = -z^* y^* \qquad (4)$$

یعنی

$$[x, y, z] = [x, z, y]^{-1}$$

چون A آبلی است،

$$[x, z, y]^{-1} = [[x, z]^{-1}, y] = [z, x, y]$$

از این رو

$$[x, y, z] = [z, x, y]$$

و در نتیجه ب) برقرار است .

پ) با استفاده از (ب) داریم،

$$[x, y^{-1}, z]^y = [x, y^{-1}, z]$$

بنابراین

$$[x, y^{-1}, z]^y = [[x, y]^{-1}, z] = [x, y, z]^{-1}$$

حال با بکار بردن اتحاد هال-ویت و (ب) نتیجهٔ (پ) به دست می‌آید.

ت) بنابه (۴) داریم،

$$y^*(zt)^* + (zt)^*y^* = 0$$

با بسط دادن رابطهٔ فوق و استفاده از روابط (۲) و (۴) عبارت زیر نتیجه می‌شود

$$0 = y^*z^* + y^*t^* + y^*z^*t^* + z^*y^* + t^*y^* + z^*t^*y^* = 2y^*z^*t^*$$

از این رو $[x, y, z, t]^2 = 1$. امّا قسمت (پ) ایجاب می‌کند که $[x, y, z, t]^3 = 1$، بنابراین $[x, y, z, t] = 1$. توجه کنید که بنابه قضیه لیوی (Levi) گروه G یک گروه ۲ـ انگل است اگر و فقط اگر x^G به ازای هر $x \in G$، آبلی باشد. بعلاوه هر گروه ۲ـانگل یک گروه پوچتوان از ردهٔ حداکثر ۳ است. در پی پاسخ به سئوال‌های ۱و۲ مطرح شده، هینکن Heineken در سال ۱۹۶۱ در [۸] نشان داد که گروه ۳ـانگل G یک گروه پوچتوان از ردهٔ حداکثر ۴ است اگر G هیچ عنصری از مرتبه ۲ یا ۵ را دارا نباشد. به عبارت دیگر ۵ـگروهها و ۲ـگروههای ۳ـانگلی موجودند که پوچتوان نیستند. در حقیقت ۵ـگروه ۳ـانگلی موجود است که حل پذیر نیست ([۱]را ببینید) در حالی که گوپتا در [۵] نشان داده است که ۲ـگروههای ۳ـانگل حل پذیرند.□

مجدداً جهت پاسخ به سئوالهای (۱) و (۲) برای $n = 3$ (W.Kappe,L.Kappe) در سال ۱۹۷۲ در [۱۰] نشان داده‌اند که شرایط زیر با هم معادلند

(آ) گروه G یک گروه ۳ـانگل است،

ب) به ازای هر $x \in G$، x^G یک گروه ۲ـانگل است،

پ) به ازای هر $x \in G$، x^G پوچتوان از ردهٔ حداکثر ۲ است.

از پ) نتیجه می‌شود که یک گروه ۳ـانگل با r مولد یک گروه پوچتوان از ردهٔ حداکثر $2r$ می‌باشد. در صورتی که (N.Gupta,F.Levin) در [۷] یک گروه ۴ـانگلی ساختند که دارای عنصر x هست که ردهٔ پوچتوانی x^G بزرگتر از ۳ می‌باشد.

در نهایت در پی پاسخ به سئوال (۱) Traustason در [۱۳] نشان داد که تمام گروههای ۴ـانگل پوچتوان‌اند اگر و فقط اگر گروههای ۴ـانگل بدون تاب باشند و به ازای هر عدد اول p، همهٔ pـ گروههای ۴ـانگل موضعاً متناهی باشند.

همچنین در پی پاسخ به سئوال (۲)، زلمانف (Zelmanov) در [۱۵] ثابت کرد که هر گروه nـ انگل موضعاً

پوچتوان بدون تاب، پوچتوان است .

از این رو سئوالهای (۱) و (۲)، برای $n \geq ۴$ مسأله‌ای باز هستند. در بخش ۳ این مقاله، شرایطی که تحت آنها بعضی از گروهها در سئوالهای (۱) و (۲) صدق می‌کنند مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲. برقراری شرایطی که تحت آن شرایط، بعضی از گروهها در سئوالهای (۱) و (۲) صدق می‌کنند.

با توجه به مطالب بخش ۱ این مقاله، در حالت کلی گروههای nـ انگل برای $n \geq ۳$ پوچتوان نیستند. در این قسمت شرایطی را بررسی می‌کنیم که یک گروه ۴ـانگل می‌تواند در سئوالهای (۱) و (۲) صدق کند. ابتدا لم مقدماتی زیر را ثابت می‌کنیم.

۲.۱.لم. *فرض کنیم G یک گروه nـ انگل بدون تاب باشد و $x, y \in G$. هرگاه به ازای یک عدد صحیح $s \geq ۱$، $[x^s, y] = ۱$ آنگاه $[x, y] = ۱$.*

اثبات. فرض کنیم $i \geq ۱$ کوچکترین عددی باشد که $[y_{,i} x] = ۱$. حال اگر $i > ۱$، آنگاه $[[y_{,i-۱} x], x] = ۱$ در نتیجه $[[y_{,i-۲} x], x^s] = ۱$ از این رو $[[y_{,i-۲} x], x]^s = ۱$ امّا چون G گروه بدون تاب است لذا $[y_{,i-۱} x] = ۱$ که با فرض تناقض دارد و لم برقرار است□.

حال با استفاده از لم فوق، به ازای $x, y \in G$، شرایط پوچتوانی $< x, y >$ را بررسی می‌کنیم .

۲.۲.لم. *فرض کنیم G یک گروه nـ انگل بدون تاب باشد و $x, y \in G$. هرگاه به ازای یک عدد صحیح $s \geq ۱$، $< x^s, y >$ پوچتوان از ردهٔ K باشد آنگاه $< x, y >$ نیز پوچتوان از K است.*

اثبات. با استقراء روی K، حکم لم را ثابت می‌کنیم. برای این کار فرض کنیم $K > ۱$، در این صورت به سادگی می‌توان نشان داد که $\frac{<x,y>}{Z(<x,y>)}$ یک گروه nـ انگل بدون تاب است. چون $Z(< x^s, y >) = Z(< x, y >) \cap < x^s, y >$ لذا گروه،

$$\frac{< x^s, y > Z(< x, y >)}{Z(< x, y >)} \simeq \frac{< x^s, y >}{Z(< x^s, y >)}$$

پوچتوان از ردهٔ $k - ۱$ است و از این رو بنابه استقراء، گروه $\frac{<x,y>}{Z(<x,y>)}$ پوچتوان از ردهٔ $k - ۱$ می‌باشد و لذا $< x, y >$ پوچتوان از ردهٔ k است.□

حال با استفاده از دو لم فوق قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم.

۳.۲ قضیه. فرض کنیم G یک گروه ۴-انگل باشد. اگر $x, y \in G$ و $a = x^{-1}yx$ ، آنگاه $< a, a^y >$ پوچتوان از ردهٔ حداکثر ۲ است.

اثبات. بنابه اتحادهای تعویضگر از $[x^{-1}, y, y, y, y] = 1$ نتیجه می‌شود

$$[[y, x]^{x^{-1}}, y, y, y] = 1$$

لذا

$$[y, x, y^x, y^x, y^x] = 1$$

در نتیجه

$$1 = [y^{-1}y^x, y^x, y^x, y^x] = [y^{-1}, y^x, y^x, y^x]^{y^x}$$

به عبارت دیگر،

$$[y^{-1}, a, a, a] = 1$$

یعنی $[[a, y]^{y^{-1}}, a, a] = 1$

از این رو، $1 = [a, y, a^y, a^y] = [a^{-1}a^y, a^y, a^y]$

در نتیجه $[a^{-1}, a^y, a^y]$ (*)

با استدلال مشابه $[a, (a^{-1})^{y^{-1}}, (a^{-1})^{y^{-1}}] = 1$

یعنی $[a, (a^{-1})^{y^{-1}}]$ با $a^{y^{-1}}$ تعویض می‌گردد، در نتیجه $[a^y, a^{-1}]$ با a تعویض می‌گردد. از این رو $[a^y, a^{-1}] = [a, a^y]^{a^{-1}}$ با a و بنابه (*) با a^y تعویض می‌گردد. لذا $[a, a^y] \in Z(< a, a^y >)$ در نتیجه بنابه (۵.۱.۹ [۱۲]) گروه $< a, a^y >$ پوچتوان از ردهٔ حداکثر ۲ است.□

مراجع

[1] S.Bachmuth and H.Y.Mochizuki, Third Engel group and the Macdonald-Neumann conjecture, Bull. Austral. Math. Soc.5(1971), 379-386.

[2] R.Baer, Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen, Math. Ann. 133(1957), 256-270.

[3] E.S.Golod, Some problems of Burnside type, in Proc.Int. Conger. Math., Moscow, 1966, PP.284-289, 1968; English translation, in Amer. Math. Soc. Transl, ser.2, Vol, 84, PP.83-88 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

[4] K.W. Gruenberg, Two theorems on Engel Groups, Math. Proc. Cambridge Philos Soc. 49(1953), 377-380.

[5] N.D. Gupta, Third-Engel 2-groups are soluble, canad, Math. Bull. 15 (1972), 523-524.

[6] N.D. Gupta Burnside Groups and Related Topic. Manitoba (1976).

[7] N.D.Gupta and F.Levin, on soluble Engel groups and Lie algebra, Arch. Math. 34 (1980), 289-295.

[8] H.Heineken, Engelsche Elemenete der Länge drei, Illionis J. Math.5 (1961), 681-707.

[9] P.Hall, Nilpotent Groups, Edmonton Notes, (1957) & Queen Mary College Math. Notes, London (1970).

[10] L.C.Kappe and W. P. Kappe, on three-Engel groups- Bull. Austral, Math. Soc. 7 (1972), 391-405.

[11] F.W.Levi, Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions, J. Indian Math. Soc 6(1942), 87-97.

[12] D.J.S. Robinson, A course in Group Theory, Springer-Verlag, GTM Vol. 80 (1982).

[13] G.Traustason, "On 4-Engel groups", J. Algebra 178 (1995), 414-429.

[14] E.I.Zelmanov On some problems of group theory and Lie algebra, Mat.Sb. 66,No.1 (1990), 159-167

[15] E.I.Zelmanov, The Solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent, Math. USSR. Izu. 36, No.1 (1991), 41-60.

[16] E.I.Zelmanov, The solution of the restricted Burnside problem for 2-groups, Mat. Sb. 182, No. 4(1991), 568-592.

[17] M.Zorn, Nilpotency of finite groups, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 485-486.

شادروان اکبر حسنی و شعبان صدقی
گروه ریاضی دانشگاه علم وصنعت ایران و
گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائم شهر

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۱ (پاییز ۱۳۷۷)، صص. ۹ تا ۱۷

انتگرالهای ریمان اشتیلیس از دیدگاهی دیگر

فریبرز آذرپناه

چکیده

با توجه به تاریخچه پیدایش انتگرالهای ریمان و اشتیلیس[1] که به ترتیب بر اساس مفاهیم مساحت و گشتاور پی‌ریزی شده‌اند انتظار می‌رود رفتار انتگرالهای دو تابع که فقط در تعداد متناهی نقطه تفاوت دارند یکسان باشند. این انتظار در مورد انتگرالهای ریمان برآورده می‌شود ولی گاهی می‌بینیم که دو تابع که فقط در یک نقطه تفاوت دارند، یکی نسبت به یک تابع α انتگرالپذیر اشتیلیس است و دیگری نسبت به همان تابع α انتگرالپذیر اشتیلیس نمی‌باشد و یا هر دو نسبت به α انتگرالپذیرند ولی مقدار انتگرالها یکسان نیست. طبعاً، این موضوع انسان را به تردید وا می‌دارد که آیا تعریف اشتیلیس جامع است؟

همانطور که انتگرال ریمان اشتیلیس به شکل فعلی تعمیمی از انتگرال ریمان است، بی‌شک وقتی اشتیلیس مفهوم انتگرال یک تابع را نسبت به تابعی دیگر بیان کرد، مبنا را مفهوم انتگرال ریمان قرار داد. ولی روشهایی مختلف برای تعریف انتگرال وجود دارد که معادل با مفهوم انتگرال ریمان هستند. اگر این روشها را مبنای تعریف انتگرال اشتیلیس قرار دهیم ممکن است انتگرال ریمان اشتیلیس با شکل فعلی تفاوت داشته باشد. در این مقاله تعریفی جدید از انتگرال ریمان ارائه و این تعریف را مبنایی برای تعریف انتگرال ریمان اشتیلیس قرار می‌دهیم. به این ترتیب تعریف جدیدی برای انتگرال ریمان اشتیلیس بدست می‌آوریم که از لحاظ کاربردی هیچ تفاوتی با تعریف معمول انتگرال ریمان اشتیلیس ندارد و علاوه بر این اگر تابعی با تعریف جدید انتگرالپذیر اشتیلیس باشد، با تعریف کلاسیک نیز انتگرالپذیر اشتیلیس است. با استفاده از این تعریف نشان می‌دهیم که تعداد متناهی نقطه در وجود و مقدار انتگرال ریمان اشتیلیس تأثیر ندارند. نهایتاً ثابت می‌کنیم که اگر تابعی فقط در تعداد متناهی نقطه ناپیوسته باشد، انتگرال ریمان اشتیلیس آن نسبت به هر تابع صعودی α وجود دارد.

---

۱) اگر چه استیلتجس و اشتیلتیس تلفظ های درست تری هستند ولی برای سهولت بیان، این ریاضیدان را به اشتیلیس خطاب می‌کنیم.

۱. پیشگفتار

می‌دانیم انتگرال ریمان بر اساس مفهوم مساحت پی‌ریزی شده است. وقتی تابع f روی بازهٔ بسته $[a,b]$ کراندار و $P=\{x_0=a,x_1,\dots,x_n=b\}$ یک افراز برای $[a,b]$ باشد، آنگاه $S(P,\sigma,f)=\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta x_i$ را مجموع ریمان تابع f نسبت به افراز P می‌نامیم که در آن $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$، $1 \le i \le n$ و $\sigma=\{s_i : x_{i-1}\le s_i \le x_i, i=1,2,\dots,n\}$ یک مجموعهٔ انتخاب می‌باشد. وقتی با ظریف کردن افراز P (یعنی با اضافه کردن عناصر P)، $S(P,\sigma,f)$ به عدد مشخصی نزدیک شود می‌گوئیم f روی $[a,b]$ انتگرالپذیر ریمان است. به طور دقیق‌تر می‌توان چنین گفت که f روی $[a,b]$ انتگرالپذیر ریمان است، هرگاه عدد I موجود باشد به قسمی که برای هر $\varepsilon>0$ افراز P برای $[a,b]$ یافت شود به طوری که به ازای هر مجموعهٔ انتخاب σ داشته باشیم $|S(P,\sigma,f)-I|<\varepsilon$. در این صورت می‌گوئیم مقدار انتگرال ریمان f روی $[a,b]$ برابر با I است. وقتی تابع f روی $[a,b]$ مثبت باشد، عدد I رامساحت ناحیه زیر منحنی f محدود به بازه $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. به عبارتی مساحت ناحیه زیر منحنی f از a تا b برابر با حد مجموع مساحتهای مستطیلهایی است که به وسیله افراز کردن بازه $[a,b]$ با $P=\{x_0=a,x_1,\dots,x_n=b\}$ به ابعاد Δx_i و $f(s_i)$ ساخته می‌شوند که $s_i\in[x_{i-1},x_i]$.

حدهای چپ و راست یک تابع و یا حدهای زیردنباله‌های زوج و فرد یک دنباله علاوه بر اینکه در اثبات وجود حد نقش تعیین کننده‌ای دارند، اغلب به سهولت فهم موضوع حد نیز کمک می‌کنند. انتگرال ریمان را نیز می‌توان با تعریف‌های ملموس‌تر انتگرالهای بالایی و پائینی مشابه حدهای چپ و راست آغاز کرد.

هرگاه $P=\{x_0=a,x_1,\dots,x_n=b\}$ یک افراز برای $[a,b]$ باشد و اگر برای هر $1\le i\le n$،

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad M_i = sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i = inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

آنگاه تعریف می‌کنیم

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i, \qquad L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

هرگاه P و Q دو افراز برای $[a,b]$ باشند، بسادگی دیده می‌شود که $U(Q,f)\ge L(P,f)$. بنابراین مجموعه‌های $\{U(P,f)$: P افراز برای $[a,b]$ است$\}$ و $\{L(P,f)$: P افراز برای $[a,b]$ است$\}$ به ترتیب از پائین و بالا کراندار هستند. اینفیمم مجموعه اول را انتگرال بالایی f و سوپرمم مجموعه دوم را انتگرال پائینی f روی $[a,b]$ می‌نامیم و به ترتیب با $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ و $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ نمایش میدهیم. در صورتی که $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ می‌گوئیم f انتگرالپذیر ریمان است و مقدار مشترک انتگرالهای پائینی و بالایی را با $\int_a^b f(x)dx$ نشان می‌دهیم. وقتی f روی $[a,b]$ انتگرالپذیر ریمان باشد، اصطلاحاً می‌نویسیم $f\in R$ روی $[a,b]$. بسادگی می‌توان نشان داد که $f\in R$ روی $[a,b]$ اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon>0$ افراز P برای $[a,b]$ موجود باشد که $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$ (مرجع [۴] را ببینید).

اگر کمی دقیق‌تر به مسأله بنگریم، در واقع در انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ و یا در مجموع ریمان $\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta x_i$ سه کمیت دخالت دارند، یکی بازهٔ $[a,b]$، یکی مقادیر تابع و دیگری دیفرانسیل dx یا تغییرات Δx_i که می‌توان آنرا دیفرانسیل تابع همانی $\alpha(x)=x$ نیز تصور نمود. با توجه به این موضوع تعمیم انتگرال ریمان تابع f به دو صورت امکان‌پذیر است، یکی بجای تابع همانی α هر تابع دلخواه α را انتخاب نمائیم که به انتگرالهای موسوم به اشتیلیس

منجر می‌شود و دیگری بجای بازهٔ $[a,b]$ هر مجموعه دلخواه A را روی محور حقیقی در نظر بگیریم که به انتگرالهای موسوم به لبگ منتهی می‌شود. آنچه مورد نظر ما است حالت اول یعنی انتگرال ریمان اشتیلیس می‌باشد.

۲. تاریخچه مختصری از انتگرال اشتیلیس

ایده این نوع انتگرال برای ت.ج. اشتیلیس (۱۸۹۴- ۱۸۵۶) وقتی به وجود آمد که وی توجه خود را به مطالعه کسرهای مسلسل در اعداد مختلط با ضرایب a_n به صورت

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 z + \cdots}}}}} \tag{1}$$

معطوف کرد. او موفق شد نشان دهد هنگامی که سری $\sum a_n$ واگرا است، آنگاه کسر مسلسل (۱) به یک تابع $F(z)$ که روی همه صفحه بجز قسمت منفی محور x ها و مبدأ تحلیلی است همگرا می‌باشد. همچنین وقتی سری $\sum a_n$ همگرا باشد، اشتیلیس ثابت کرد دنباله مجموعهای جزئی زوج و دنباله مجموعهای جزئی فرد کسر مسلسل (۱)، یعنی دنباله‌های کسرهای متناهی که به ضرایب a_{2n} و a_{2n-1} ختم می شوند به ترتیب به دو تابع متفاوت $F_1(z)$ و $F_2(z)$ همگرا هستند و آنها را می‌توان به صورت

$$F_1(z) = \frac{\mu_1}{z+\lambda_1} + \frac{\mu_2}{z+\lambda_2} + \cdots + \frac{\mu_i}{z+\lambda_i} + \cdots$$

$$F_2(z) = \frac{\nu_0}{z} + \frac{\nu_1}{z+\theta_1} + \cdots + \frac{\nu_i}{z+\theta_i} + \cdots \tag{2}$$

نمایش داد که ضرایب μ_i، λ_i، ν_i و θ_i نامنفی‌اند. در آن زمان این واقعیت را می‌دانستند که کسر مسلسل (۱) را می‌توان به صورت سری

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \cdots + (-1)^k \frac{c_k}{z^{k+1}} + \cdots \tag{3}$$

با ضرایب مثبت نوشت و به عکس. اشتیلیس نشان داد هنگامی که سری $\sum a_n$ همگرا است، ضرایب c_k توسط تساویهای

$$c_k = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \lambda_i^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$c_k = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \theta_i^k, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

به توابع F_1 و F_2 ارتباط پیدا می‌کنند. این ارتباط یک تعبیر فیزیکی برای اشتیلیس القا کرد به این ترتیب که اگر توده ذرات تشکیل دهنده جسمی در قسمت مثبت محور xها توزیع شده باشد و اگر فاصله هر ذره بجرم m_i تا مبدأ برابر با d_i باشد، آنگاه گشتاور مرتبه kام جسم نسبت به مبدأ به صورت $\sum m_i d_i^k$ تعریف می‌شود. باین ترتیب در (۴) می‌توان چنین تعبیر کرد که در واقع c_k گشتاور مرتبه kام دستگاه متشکل از توده‌ای ذرات نسبت به مبدأ

است که هر ذره بجرم $m_i = \mu_i$ و به فاصله $d_i = \lambda_i$ تا مبدأ یا بجرم $m_i = \nu_i$ و به فاصله $d_i = \theta_i$ تا مبدأ می‌باشد. بنابراین مسأله گشتاورها را که اشتیلیس به عنوان مسأله یافتن گشتاور مرتبه kام دستگاه متشکل از توده ذرات با مشخصات m_i و d_i تعریف کرد، برای هر k منجر به مقدار c_k می‌شد که حلپذیری هر c_k خود مستلزم این شرط است که ضرایب a_k در کسر مسلسل (۱) تشکیل یک سری همگرا بدهند. در این حالت مسأله گشتاورها دو جواب و در نتیجه تعداد نامتناهی جواب خواهد داشت.

جهت رسیدگی به مسأله گشتاورها، وقتی ضرایب a_k در ارتباط با c_kها تشکیل یک سری واگرا بدهند، اشتیلیس توزیع ذرات جسم را پیوسته تصور نمود. در چنین حالتی برای هر $x > 0$ کل وزن جسم مابین 0 و x تابعی مانند $g(x)$ است. این تابع مثبت و صعودی خواهد بود. اکنون گشتاور مرتبه kام جسم به صورت حد مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^k [g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

می‌شود وقتی $\| P \| \to 0$ که $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ یک افراز بازهٔ [a,b] است و $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. اشتیلیس نشان داد هنگامی که f یک تابع پیوسته باشد، آنگاه نظیر فوق، حد

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

هم وجود دارد و آن را با $\int_a^b f(x)dg(x)$ نمایش داد. باین ترتیب صورت مسأله گشتاورها چنین شد که برای اعداد مثبت c_k، یک تابع مثبت و غیر نزولی بیابید که $c_k = \int_a^b \mu^k dg(x)$. اشتیلیس توانست به این پرسش پاسخ دهد، او نشان داد هنگامی که سری $\sum a_k$، یعنی سری ضرایب متناظر به اعداد c_k واگرا باشد، دقیقاً یک جواب منحصر به فرد g دارد که توسط فرمول

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{dg(u)}{z+u}$$

با $F(z)$(حد کسر مسلسل (۱)) در ارتباط است. همچنین وقتی $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه دو جواب متفاوت g_1 و g_2 به دست می‌آید که به شرح زیر با $F_1(z)$ و $F_2(z)$ در ارتباط‌اند

$$F_1(z) = \int_0^\infty \frac{dg_1(u)}{z+u}, \qquad F_2(z) = \int_0^\infty \frac{dg_2(u)}{z+u}.$$

برای اطلاع بیشتر به منبع [۲] مراجعه کنید.

۳. آیا انتگرال اشتیلیس دارای ضعف است؟

اکنون که تا حدودی در جریان شکل‌گیری انتگرال اشتیلیس قرار گرفتیم، تابع α را که جایگزین تابع وزن است روی بازهٔ $[a, b]$ صعودی و کراندار فرض کرده و تابع f را کراندار می‌گیریم. با این شرایط مناسب مانند قبل می‌توانیم از انتگرالهای پائینی و بالایی برای تعریف انتگرال اشتیلیس استفاده کنیم. پس افراز $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ را برای $[a, b]$ در نظر گرفته و برای هر $1 \leq i \leq n$ قرار می‌دهیم

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}), \qquad M_i = sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i = inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i, \qquad L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i.$$

در اینجا نیز به سادگی دیده می‌شود که مجموعه‌های $\{U(P,f,\alpha) : P$ یک افراز برای بازهٔ $[a,b]$ است$\}$ و $\{L(P,f,\alpha) : P$ یک افراز برای بازهٔ $[a,b]$ است$\}$ به ترتیب از پائین و بالا کراندار هستند. به طور مشابه اینفیمم مجموعهٔ اول را با $\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)$ و سوپرمم مجموعه دوم را با $\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)$ نشان می‌دهیم که به ترتیب انتگرالهای بالایی و پائینی تابع f نسبت به α روی $[a,b]$ نامیده می‌شوند. هرگاه $\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)$ و $\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha(x)$ برابر باشند می‌گوئیم تابع f نسبت به α روی $[a,b]$ انتگرالپذیر ریمان اشتیلیس است و به طور خلاصه می‌نویسیم $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$. بسادگی نشان داده می‌شود که $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon>0$، افراز P برای $[a,b]$ وجود داشته باشد به طوری که $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\epsilon$. اکنون توابع کراندار f و g و تابع صعودی α را روی $[a,b]$ به صورت

$$\alpha(x)=f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\le 2\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1\\ 1 & 1<x\le 2\end{cases}$$

در نظر می‌گیریم. با استفاده از تعریف، می‌بینیم که $g\in R(\alpha)$ ولی $f\notin R(\alpha)$ روی $[0,2]$. مشاهده می‌کنیم که دو تابع f و g که مقدارشان فقط در $x=1$ متفاوت است یکی نسبت به α انتگرالپذیر ریمان اشتیلیس است و دیگری نیست. وقتی برای نخستین بار با انتگرال ریمان اشتیلیس مواجه می‌شویم با توجه به برداشتی که از انتگرال چه به عنوان مساحت و چه به عنوان گشتاور داریم این پدیده را اگر هم باور کنیم به طور طبیعی این پرسش را از خود می‌کنیم که آیا این یک ضعف است؟ اگر به انتگرال ریمان توجه کنید این وضعیت به هیچوجه پیش نمی‌آید، یعنی هرگاه دو تابع f و g در تعداد متناهی نقطه در یک بازه تفاوت داشته باشند یا هیچ یک انتگرالپذیر نیست یا هر دو انتگرالپذیرند و در این صورت مقدار انتگرال این دو تابع یکسان است. یکی از علل پیدایش این پدیده در انتگرال ریمان این است که تابع همانی $\alpha(x)=x$ پیوسته است، به طور کلی، هرگاه تابع f فقط در یک نقطه $x_0\in[a,b]$ ناپیوستگی چپ (راست) داشته باشد و α در x_0 از راست (چپ) پیوسته باشد، آنگاه $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ و این حقیقت را می‌توان به تعداد متناهی نقطه در بازهٔ $[a,b]$ نیز تعمیم داد (مراجع [۱و۴] را ببینید). اکنون این پرسش مطرح است که آیا می‌توان انتگرال اشتیلیس f را نسبت به هر تابع صعودی α به گونه‌ای تعمیم داد که تعداد متناهی نقطه در وجود انتگرال یا مقدار آن سرنوشت ساز نباشد؟

اگر به تعریف انتگرال ریمان توجه کنیم می‌بینیم که برای هر افراز $P=\{x_0=a,x_1,\dots,x_n=b\}$ تمام عناصر P بجز a و b در محاسبه مجموعهای ریمان هرکدام دوبار منظور می‌شود، مثلاً x_1 هم در محاسبه M_1 و هم در محاسبه M_2 منظور شده است، زیرا

$$M_1=sup_{x\in[x_0,x_1]}f(x), \qquad M_2=sup_{x\in[x_1,x_2]}f(x).$$

ولی گفتیم که چند نقطه در وجود یا مقدار انتگرال ریمان تأثیری ندارند، بنابراین نقاط افراز P که تعدادشان متناهی است در محاسبه بی‌تأثیرند. پس چرا به جای آنکه هرکدام دوبار در محاسبه منظور شوند آنها را از محاسباتمان حذف نکنیم؟ مثلاً فرض کنیم $M_i=sup_{x\in(x_{i-1},x_i)}f(x)$. در مسأله گشتاورها هم وقتی توده ذرات نامتناهی باشد می‌توانیم تعداد متناهی از نقاط را حذف کنیم بدون اینکه در مقدار گشتاور تأثیر کنند. ابتدا این ایده را برای تعریف

انتگرال نسبت به تابع همانی به کار می‌بریم و نشان می‌دهیم که انتگرال جدید همان انتگرال ریمان است. سپس با این ایده، انتگرالهای ریمان را نسبت به هر تابع صعودی تعمیم داده مفهوم جدیدی برای انتگرالها ارائه می‌دهیم. نهایتاً نشان می‌دهیم این انتگرالها اغلب با انتگرالهای ریمان اشتیلیس یکی هستند با این تفاوت که دیگر تعداد متناهی نقطه در وجود انتگرال وحتی در مقدار آن تأثیری نخواهند داشت.

۴. انتگرال ریمان اشتیلیس با دیدگاه جدید

نخست تعریف انتگرال ریمان را به روش جدید بیان می‌کنیم. فرض کنید تابع حقیقی f روی $[a,b]$ کراندار است و $P=\{x_0=a,x_1,\ldots,x_n=b\}$ یک افراز برای $[a,b]$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$M_i' = sup_{x\in(x_{i-1},x_i)}f(x), \qquad m_i' = inf_{x\in(x_{i-1},x_i)}f(x)$$

$$U'(P,f)=\sum_{i=1}^{n}M_i'\Delta x_i, \qquad L'(P,f)=\sum_{i=1}^{n}m_i'\Delta x_i.$$

در اینجا نیز می‌توان نشان داد که اگر P و Q دو افراز برای $[a,b]$ باشند، همواره $U'(P,f)\geq L'(Q,f)$. یعنی مجموعه‌های $\{U'(P,f)$: P یک افراز برای $[a,b]$ است$\}$ و $\{L'(P,f)$: P یک افراز برای $[a,b]$ است$\}$ به ترتیب دارای اینفیمم و سوپرمم هستند که در صورت تساوی می‌گوئیم f روی $[a,b]$ انتگرالپذیر است و به اختصار می‌نویسیم $f\in R'$ روی $[a,b]$. وقتی f انتگرالپذیر باشد مقدار مشترک اینفیمم و سوپرمم فوق را با $\int_a^b f(x)dx$ نشان می‌دهیم و آنرا انتگرال f روی $[a,b]$ می‌نامیم.

قضیه۱. *فرض کنیم تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ کراندار باشد، در این صورت $f\in R'$ اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon>0$ یک افراز P برای $[a,b]$ وجود داشته باشد که $U'(P,f)-L'(P,f)<\varepsilon$.*

اثبات این قضیه مانند اثبات قضیه مشابه در انتگرال ریمان است، بنابراین از ارائه آن خودداری می‌کنیم.

قضیه۲. *فرض کنیم f روی $[a,b]$ کراندار باشد، در این صورت $f\in R'$ روی $[a,b]$ اگر و تنها اگر $f\in R$ روی $[a,b]$ و $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$.*

اثبات. وجود یا عدم وجود همزمان دو انتگرال از نابرابریهای

$$U(Q,f)-L(Q,f)\leq Mn\eta+U'(P,f)-L'(P,f)\leq Mn\eta+U(P,f)-L(P,f)$$

نتیجه می‌شود که در آن $P=\{x_0=a,x_1,\ldots,x_n=b\}$ یک افراز دلخواه بازهٔ $[a,b]$، M کرانی برای f، η عددی به قدر کافی کوچک و Q تظریفی از P با افزودن نقاط $x_i\pm\eta$ (به استثنای $a-\eta$ و $b+\eta$) می‌باشد. برابری دو انتگرال نیز در صورت وجود از نابرابریهای $L'(P,f)\geq L(P,f)$ و $U'(P,f)\leq U(P,f)$ آشکارا به دست می‌آید.□

تبصره. توجه داریم که اگر $\alpha(x)=x$ و $P=\{x_0=a,x_1,\ldots,x_n=b\}$ یک افراز برای $[a,b]$ باشد، آنگاه برای هر $1\leq i\leq n$،

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})=sup_{x\in(x_{i-1},x_i)}\alpha(x)-inf_{x\in(x_{i-1},x_i)}\alpha(x).$$

از این به بعد برای هر تابع صعودی α از رابطه بالا برای $\Delta\alpha_i$ استفاده می‌کنیم.

اکنون با این دیدگاه، انتگرال ریمان اشتیلیس را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم روی $[a,b]$ تابع f کراندار و تابع α صعودی باشد. اگر افراز $P=\{x_0=a,x_1,\ldots,x_n=b\}$ را برای $[a,b]$ در نظر بگیریم، آنگاه برای هر $1\leq i\leq n$ تعریف می‌کنیم

$$M_i^{'}=sup_{x\in(x_{i-1},x_i)}f(x),\qquad m_i^{'}=inf_{x\in(x_{i-1},x_i)}f(x)$$

$$\Delta^{'}\alpha_i=sup_{x\in(x_{i-1},x_i)}\alpha(x)-inf_{x\in(x_{i-1},x_i)}\alpha(x)$$

$$U^{'}(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}M_i^{'}\Delta^{'}\alpha_i,\qquad L^{'}(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}m_i^{'}\Delta^{'}\alpha_i.$$

در صورتی که $sup_P L^{'}(P,f,\alpha)=inf_P U^{'}(P,f,\alpha)$، می‌گوئیم f نسبت به α روی $[a,b]$ انتگرالپذیر است و اصطلاحاً می‌نویسیم $f\in R^{'}(\alpha)$ روی $[a,b]$. در این حالت مقدار مشترک اینفیمم و سوپرمم فوق را با $\int_a^b f d\alpha$ نشان می‌دهیم.

قضیه۳. *فرض کنید توابع f و α به ترتیب روی $[a,b]$ کراندار و صعودی باشند. در این صورت $f\in R^{'}(\alpha)$ روی $[a,b]$ اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon>0$ افراز P برای $[a,b]$ وجود داشته باشد که $U^{'}(P,f,\alpha)-L^{'}(P,f,\alpha)<\varepsilon$.*

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیهٔ نظیر آن در مبحث انتگرال در مرجع [۴] است و بنابراین از بیان آن خودداری می‌کنیم.

قضیه زیر نشان می‌دهد که با تعریف جدید دسته بزرگتری از توابع نسبت به یک تابع α انتگرالپذیرند.

قضیه۴. *هرگاه $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$، آنگاه $f\in R^{'}(\alpha)$ روی $[a,b]$ و $\int_a^b f d\alpha=\int_a^{'b} f d\alpha$.*

اثبات. $\varepsilon>0$ را در نظر می‌گیریم، چون $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$، افراز $P=\{x_0=a,x_1,\ldots,x_n=b\}$ برای $[a,b]$ وجود دارد به قسمی که $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon$. از آنجاکه برای هر $1\leq i\leq n$، $M_i^{'}\leq M_i$ و $m_i^{'}\geq m_i$، $\Delta^{'}\alpha_i\leq\Delta\alpha_i$، به وضوح داریم

$$U^{'}(P,f,\alpha)-L^{'}(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(M^{'}-m^{'})\Delta\alpha_i^{'}\leq\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i=$$

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon.$$

پس بنا به قضیه۳، $f\in R^{'}(\alpha)$. از طرفی

$$\int_a^b f d\alpha=inf_P U(P,f,\alpha)\geq inf_P U^{'}(P,f,\alpha)$$

$$\int_a^b f d\alpha=sup_P L(P,f,\alpha)\leq inf_P L^{'}(P,f,\alpha)$$

و بنابراین $\int_a^b f d\alpha = \int_a^{b'} f d\alpha$. □

عکس قضیه فوق درست نیست. قبلاً دیدیم که اگر

$$\alpha(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \le 1 \\ 1 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

آنگاه $g \in R(\alpha)$ ولی $f \notin R(\alpha)$ روی $[0, 2]$. حال اگر افراز $P = \{0, 1, 2\}$ را برای $[0, 2]$ انتخاب کنیم، آنگاه داریم

$$M_1' = sup_{x\in(0,1)} f(x) = 0, \qquad m_1' = inf_{x\in(0,1)} f(x) = 0$$

$$M_2' = sup_{x\in(1,2)} f(x) = 1, \qquad m_2' = inf_{x\in(1,2)} f(x) = 1$$

$$\Delta' \alpha_1 = sup_{x\in(0,1)} \alpha(x) - inf_{x\in(0,1)} \alpha(x) = 0 - 0 = 0$$

$$\Delta' \alpha_2 = sup_{x\in(1,2)} \alpha(x) - inf_{x\in(1,2)} \alpha(x) = 1 - 1 = 0.$$

درنتیجه برای هر $\varepsilon > 0$، $U'(P, f, \alpha) - L'(P, f, \alpha) = 0 < \varepsilon$، یعنی $f \in R'(\alpha)$ روی $[0, 2]$. توجه داریم که بنا به قضیه ۴، همچنین $g \in R'(\alpha)$ روی $[0, 2]$.

تعریف جدید نشان می‌دهد که تغییر دادن مقدار یک تابع انتگرالپذیر در یک نقطه، نه تنها وجود انتگرال را نفی نمی‌کند بلکه مقدار انتگرال را نیز تغییر نخواهد داد. به طور کلی قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر تابع f فقط در تعداد متناهی نقاط $[a, b]$ ناپیوسته و α یک تابع صعودی دلخواه باشد، آنگاه $f \in R'(\alpha)$ روی $[a, b]$ و مقدار انتگرال بستگی به نقاط ناپیوستگی ندارد. ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم. فرض می‌کنیم $a < b < c$، در این صورت $f \in R'(\alpha)$ روی $[a, b]$ و روی $[b, c]$ اگر و تنها اگر $f \in R'(\alpha)$ روی $[a, c]$ و در این حالت $\int_a^{c'} f d\alpha = \int_b^{c'} f d\alpha + \int_a^{b'} f d\alpha$.

اثبات این لم مشابه اثبات قضیه نظیر آن در مبحث انتگرالهاست، مرجع [۴] را ببینید.

قضیه ۵. فرض می‌کنیم f روی $[a, b]$ کراندار و α روی $[a, b]$ صعودی باشد. هرگاه تعداد نقاط ناپیوستگی f در $[a, b]$ متناهی باشند، آنگاه $f \in R'(\alpha)$ روی $[a, b]$. در این صورت اگر $f \in R'(\alpha)$ روی $[a, b]$ و مقادیر تابع g فقط در تعدادی متناهی نقطه با مقادیر f متفاوت باشند، آنگاه $g \in R'(\alpha)$ روی $[a, b]$ و $\int_a^{b'} f d\alpha = \int_a^{b'} g d\alpha$.

اثبات. اگر $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ تنها نقاط ناپیوستگی f باشند، آنگاه بنا به لم فوق کافی است نشان دهیم $f \in R'(\alpha)$ روی $[a, a_1]$، روی $[a_1, a_2]$، ... و روی $[a_k, b]$ (ممکن است a_1 و a_k به ترتیب برابر با a و b باشند که در این صورت کافی است وجود انتگرال را روی بازه‌های $[a_1, a_2]$، ... و $[a_{k-1}, a_k]$ نشان دهیم). همچنین کافی است ثابت کنیم مقدار انتگرال f روی هرکدام از این زیربازه‌ها بستگی به نقاط انتهائی ندارد. بنابراین از ابتدا می‌توان فرض کرد که f روی $[a, b]$ همه جا بجز یکی از نقاط انتهائی مثلاً b پیوسته است. برای هر $x \in [a, b]$ فرض می‌کنیم $|f(x)| \le M$. $\varepsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $\beta = sup\{\alpha(x) : a \le x < b\}$ ،

پس $a \leq z < b$ موجود است که $\alpha(z) > \beta - \frac{\varepsilon}{8M}$. چون تابع f روی بازهٔ $[a, z]$ پیوسته یکنواخت است، پس $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر $x, y \in [a, z]$ داشته باشیم

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(\alpha(b) - \alpha(a))}.$$

اکنون افراز $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $x_{n-1} = z$، و برای هر $1 \leq i \leq n-1$ داشته باشیم $|x_i - x_{i-1}| < \delta$. در این صورت اگر $1 \leq i \leq n-1$، آنگاه

$$\forall x, y \in (x_{i-1}, x_i) \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(\alpha(b) - \alpha(a)}$$

$$\Longrightarrow M_i' - m_i' \leq \frac{\varepsilon}{4(\alpha(b) - \alpha(a)}.$$

به این ترتیب داریم

$$U'(P, f, \alpha) - L'(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} (M_i' - m_i')\Delta'\alpha_i + (M_n' - m_n')\Delta'\alpha_n$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4(\alpha(b) - \alpha(a))} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta'\alpha_i + 2M(\beta - \alpha(z))$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + 2M\frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

از طرفی اگر $g : [a, b] \longrightarrow R$ و برای هر $x \in [a, b)$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$ ، آنگاه بدیهی است که برای هر افراز P برای $[a, b]$ داریم

$$M'(P, f, \alpha) = M'(P, g, \alpha), \qquad m'(P, f, \alpha) = m'(P, g, \alpha)$$

و به این ترتیب $\int_a^{b\,\prime} g d\alpha = \int_a^{b\,\prime} f d\alpha$. پس مقدار انتگرال بستگی به نقاط ناپیوستگی f ندارد. □

مراجع

1. Tom M. Apostol, Mathematical Analysis, sixth printing, Addison-Wesley Publishing Co., 1973.

2.T. Hawkins, Lebesgue's Theory of Integration, Chelsea Publishing Co., 1975.

3.H.L. Royden, Real Analysis, second eddition, McMilan Publication Co., INC., 1998.

4. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, third eddition, McGraw-Hill International Book Co., 1976.

فریبرز آذرپناه
دانشگاه شهید چمران اهواز، بخش ریاضی

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۱ (پاییز ۱۳۷۷)، صص. ۱۹ تا ۳۷

مدل‌سازی، تولید و نمایش Bـاسپلاین‌ها

صمد موسوی و نظام‌الدین مهدوی‌امیری

چکیده

دو روش کلی برای تولید الگوهای مدلسازی و طراحی کامپیوتری مورد بحث قرار می‌گیرند. یکی روش تقریب که در آن الگوی مورد نظر نقاط داده شده را درونیابی نمی‌کند، بلکه از نزدیکی آنها می‌گذرد، و بدین ترتیب نقاط داده شده به‌عنوان ابزاری جهت کنترل شکل الگو به‌کار می‌آیند. دیگری روش درونیابی که در آن الگوی مورد نظر از نقاط داده شده عبور می‌کند. بررسی روشهای مؤثر درونیابی و تقریب برای تعدادی نقاط داده شده (در صفحه یا در فضا) توسط توابع پایه Bـاسپلاین ([۹]، [۱۰]) و ارایهٔ الگوریتمهای کارا جهت تولید الگوهای مربوطه مورد تأکید قرار می‌گیرند. بدین منظور، چگونگی استفاده از توابع پایهٔ Bـاسپلاین در روشهای تقریب و درونیابی جهت تولید منحنی‌ها و رویه‌ها بررسی می‌شوند. نمونه‌های متنوعی از منحنی‌ها و رویه‌ها با استفاده از مدلهای Bـاسپلاین توسط نرم‌افزار ایجاد شده تولید و نمایش داده می‌شوند.

۰. مقدمه

با توسعه گرافیک کامپیوتری و طراحی به‌کمک کامپیوتر و تکنولوژی صنعتی کامپیوتری، مدلسازی هندسی برای اولین بار در سال ۱۹۷۰ میلادی مطرح شد. این مدلسازی عمدتاً به مجموعه‌ای از روشهای مؤثر برای تعریف شکل و سایر مشخصه‌های هندسی یک الگو در کامپیوتر می‌پردازد، به‌گونه‌ای که پارامترهایی مانند سرعت، کارایی، کیفیت و فضای ذخیره‌سازی اطلاعات مورد توجه قرار گیرند.

به‌طور کلی، روشهای مدلسازی هندسی را برای تشریح ساختار ریاضی یک الگوی حقیقی و یا شبیه‌سازی بعضی فرایندها به‌کار می‌گیرند. یک رده خاص از این روشها بر اساس توابع Bـاسپلاین پایه‌گذاری شده است. به خاطر خواص مطلوب این توابع ([۹]، [۱۰])، Bـاسپلاین‌ها به‌عنوان یکی از مهمترین ابزارها در مدلسازیهای کامپیوتری به‌شمار می‌روند. مطالب در پنج بخش ارایه می‌شوند.

بخش اول به اصول اولیه می‌پردازد. در بخش دوم الگوریتمی کارا برای محاسبهٔ توابع پایه Bـاسپلاین مطرح می‌شود [۹]. در بخش سوم منحنی‌های Bـاسپلاین و خواص مربوطه مورد بررسی قرار می‌گیرند ([8], [6], [4]).

بخش چهارم به تشریح رویه‌های Bـاسپلاین می‌پردازد ([2], [4], [8]). در بخش پنجم درونیابی رویه‌ها توسط توابع Bـاسپلاین به‌طور اجمالی مرور می‌شود ([3], [9], [5]).

بر اساس مباحث ارایه شده نرم‌افزاری طراحی کرده‌ایم که از طریق هر یک از دو روش درونیابی و تقریب توسط رئوس کنترلی قادر به ایجاد منحنی‌ها و رویه‌های Bـاسپلاین است. کلیه اشکال ارایه شده توسط این نرم‌افزار تولید شده‌اند ([۹]).

۱. اصول اولیه

رویه‌های پارامتری. یک رویهٔ پارامتری در فضای $\mathbb{R}^3$ را با پارامترهای مستقل $\bar{u}$ و $\bar{v}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q(\bar{u},\bar{v}) = [X(\bar{u},\bar{v}), Y(\bar{u},\bar{v}), Z(\bar{u},\bar{v})].$$

ساده‌ترین عنصر هندسی وابسته به یک رویه را **وصله رویه** می‌نامیم و آن عبارت است از یک منحنی بسته متشکل از نقاطی که مختصاتشان توسط توابع (دو پارامتری) تک مقداری به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$x = X(\bar{u},\bar{v}), \qquad y = Y(\bar{u},\bar{v}), \qquad z = Z(\bar{u},\bar{v}).$$

با توجه به ترکیبهای ممکن از دو متغیر پارامتری، در محدودهٔ پارامترهای تعیین شده برای هر پارامتر، هر وصله رویه دارای چهار نقطهٔ گوشه و همچنین چهار منحنی است که لبه‌های وصله رویه را تعریف می‌کنند [8].

حاصلضرب تانسوری. فرض کنید X فضای برداری توابعی باشد که از مجموعهٔ U به داخل مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف می‌شوند، همچنین Y نیز فضای برداری توابع از مجموعهٔ V به داخل مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، رابطه $w(u,v) = x(u)y(v)$ به ازای هر $(u,v) \in U \times V$ یک تابع روی $U \times V$ تعریف می‌کند، که آن را حاصلضرب تانسوری x در y گویند و با $x \otimes y$ نشان می‌دهند. به‌علاوه، مجموعه کلیه ترکیبهای خطی توابع به صورت $x \otimes y$ بر روی $U \times V$ را، که $x \in X$ و $y \in Y$، حاصلضرب تانسوری X در Y گوئیم و با $X \otimes Y$ نشان می‌دهیم.

۲. محاسبه توابع Bـاسپلاین

محاسبهٔ توابع پایهٔ Bـاسپلاین $B_{\delta,k}(\bar{u})$ مورد نظر است. برای محاسبهٔ توابع Bـاسپلاین از مرتبهٔ دلخواه می‌توان به‌طور مستقیم از فرمول بازگشتی زیر استفاده کرد. برای هر $i \in [0, 1, \ldots, m]$ داریم:

$$B_{i,1}(\bar{u}) = \begin{cases} 1 & \bar{u}_i \le \bar{u} < \bar{u}_{i+1} \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

(۱)

$$B_{i,r}(\bar{u}) = \frac{\bar{u} - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+r-1} - \bar{u}_i} B_{i,r-1}(\bar{u}) + \frac{\bar{u}_{i+r} - \bar{u}}{\bar{u}_{i+r} - \bar{u}_{i+1}} B_{i+1,r-1}(\bar{u}), \qquad r = 2, 3, \ldots, k,$$

که در آن هنگامی که هر یک از روابط $\bar{u}_{i+r-1} - \bar{u}_i = 0$ و یا $\bar{u}_{i+r} - \bar{u}_{i+1} = 0$ برقرار باشند، به ترتیب جمله‌های مربوطه $\frac{\bar{u}-\bar{u}_i}{\bar{u}_{i+r-1}-\bar{u}_i} B_{i,r-1}(\bar{u})$ و یا $\frac{\bar{u}_{i+r}-\bar{u}}{\bar{u}_{i+r}-\bar{u}_{i+1}} B_{i+1,r-1}(\bar{u})$ صفر در نظر گرفته می‌شوند. فرض کنید بخواهیم کلیه توابع Bـاسپلاین غیرصفر از مرتبهٔ k را در نقطهٔ $\bar{u} \in (\bar{u}_{k-1}, \bar{u}_{m+1})$ محاسبه کنیم. فرض کنید δ اندیس یکتایی باشد به طوری‌که $\bar{u}_\delta < \bar{u} < \bar{u}_{\delta+1}$. بنابه تعریف، مقدار تمام توابع Bـاسپلاین مرتبهٔ اول به غیر از $B_{\delta,1}$ در $\bar{u}$ صفر می‌شوند، یعنی، داریم:

$$\begin{cases} B_{i,1}(\bar{u}) = 0, & i \neq \delta \\ B_{\delta,1}(\bar{u}) = 1 \end{cases}$$

از طرف دیگر، با توجه به تکیه‌گاه موضعی توابع Bـاسپلاین، کلیهٔ توابع Bـاسپلاین مرتبهٔ اول تا مرتبه kـام را که در نقطهٔ $\bar{u}$ غیرصفر هستند، می‌توان مطابق جدول ۱ مرتب کرد.

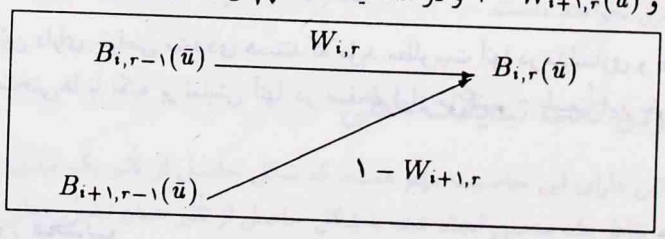
			0
			$B_{\delta-k+1,k}(\bar{u})$
			$B_{\delta-k+2,k}(\bar{u})$
			$\vdots$
		0	
	0	$B_{\delta-2,3}(\bar{u})$	
0	$B_{\delta-1,2}(\bar{u})$	$B_{\delta-1,3}(\bar{u})$	
$B_{\delta,1}(\bar{u})$	$B_{\delta,2}(\bar{u})$	$B_{\delta,3}(\bar{u})$	$B_{\delta,k}(\bar{u})$
0	0	0	0

جدول ۱: محاسبهٔ توابع Bـاسپلاین در $\bar{u}$.

این مقادیر غیرصفر را می‌توان ستون به ستون از چپ به راست و برای هر ستون از بالا به پائین محاسبه نمود. الگوریتم محاسبه را به صورت زیر شرح می‌دهیم. فرمول بازگشتی (۱) را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$B_{i,r}(\bar{u}) = W_{i,r}(\bar{u}) B_{i,r-1}(\bar{u}) + (1 - W_{i+1,r}(\bar{u})) B_{i+1,r-1}(\bar{u}),$$

که در آن $W_{i,r}(\bar{u}) = \frac{\bar{u}-\bar{u}_i}{\bar{u}_{i+r-1}-\bar{u}_i}$، و در نتیجه $1 - W_{i+1,r}(\bar{u}) = \frac{\bar{u}_{i+r}-\bar{u}}{\bar{u}_{i+r}-\bar{u}_{i+1}}$. هر عضو $B_{i,r}(\bar{u})$ با استفاده از $W_{i,r}(\bar{u})$ و $1 - W_{i+1,r}(\bar{u})$ و دو همسایه سمت چپش به‌صورت زیر قابل محاسبه است:



این روش از نظر عددی پایدار است، زیرا تنها تعدادی از اعداد نامنفی با یکدیگر جمع می‌شوند. با توجه به مطالب فوق الگوریتم زیر را برای محاسبهٔ جدول (۱) ارایه می‌دهیم [9].

الگوریتم ۱. محاسبه توابع Bـاسپلاین.

```
bval. ← ۱
for r ← ۲ step ۱ until k do
    i ← δ − r + ۱
    bval_{r−۱} ← ۰
    for s ← r − ۲ step −۱ until ۰ do
        i ← i + ۱
        omega ← (ū − ū_i)/(ū_{i+r−۱} − ū_i)
        bval_{s+۱} ← bval_{s+۱} + (۱ − omega) × bval_s
        bval_s ← omega × bval_s
    endfor
endfor
```

بعد از اجرای الگوریتم، مقادیر $bval_{\circ}$، $bval_{۱}$، ...، $bval_{k-۱}$ به ترتیب مقادیر $B_{\delta,k}(\bar{u})$، $B_{\delta-۱,k}(\bar{u})$، ...، $B_{\delta-k+۱,k}(\bar{u})$ را به‌دست می‌دهند.

۳. منحنی‌های Bـاسپلاین

تعریف. فرض کنید نقاط $V_i \in \mathbb{R}^۲(\mathbb{R}^۳)$ داده شده باشند. منحنی Bـاسپلاین مرتبهٔ kام حاصل از این نقاط بر روی دنباله گره‌های $\bar{u}_{\circ} < \bar{u}_{۱} < \cdots < \bar{u}_{m+k}$ به صورت

$$Q(\bar{u}) = \sum_{i=\circ}^{m} V_i B_{i,k}(\bar{u}) \qquad \bar{u} \in [\bar{u}_{k-۱}, \bar{u}_{m+۱})$$

تعریف می‌شود، که در آن V_iها رئوس کنترلی این منحنی نامیده می‌شوند.

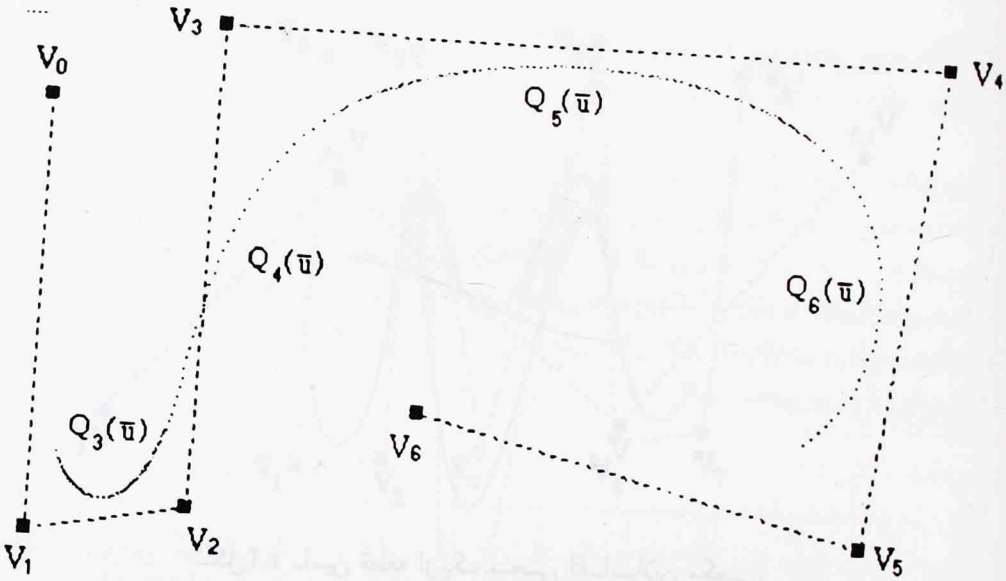
شکل ۱ یک منحنی Bـاسپلاین مکعبی با دنبالهٔ گره‌های یکنواخت حاصل از رئوس کنترلی $V_{\circ}$، ...، $V_{۶}$ را نشان می‌دهد.

۱.۳. خواص منحنی‌های Bـاسپلاین

منحنی‌های Bـاسپلاین دارای خواص متعددی هستند که مؤید مطلوبیت آنها در مدلسازی و طراحی هندسی است. این خواص را برای منحنی‌ها با تکیه بر نمایش آنها در صفحه ابراز می‌کنیم. طبیعتاً این خواص به رویه‌ها تعمیم می‌پذیرند.

خاصیت پوشش محدب

تعریف. فرض کنید $V = \{V_{\circ}, V_{۱}, \cdots, V_m\}$ مجموعه نقاطی از $\mathbb{R}^n$ باشند. پوشش محدب مجموعه نقاط V، کوچکترین مجموعهٔ محدبی را گویند که شامل تمام نقاط V باشد. به‌بیان دیگر، پوشش محدب V شامل کلیه



شکل۱. منحنی Bـاسپلاین مکعبی یکنواخت با هفت رأس کنترلی.

نقاطی است که به‌صورت ترکیب محدبی از اعضای مجموعه V نوشته می‌شوند، یعنی کلیه نقاط Q به صورت

$$Q = \sum_{i=0}^{m} w_i V_i, \qquad \begin{cases} w_i \in \mathbb{R} \\ w_i \geq 0 \qquad i = 0, 1, \cdots, m \\ \sum_{i=0}^{m} w_i = 1 \end{cases}$$

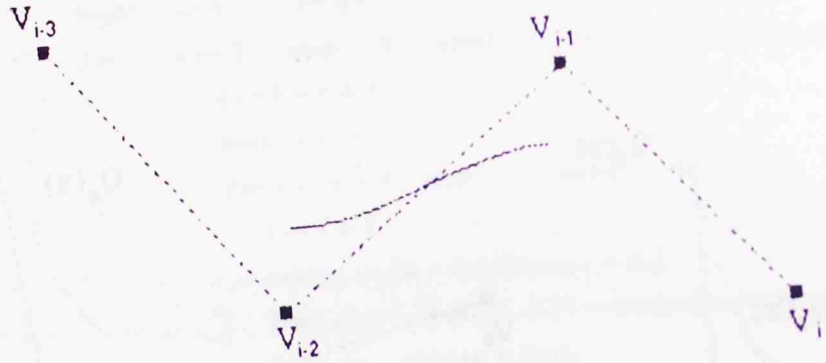
قضیه. *کلیهٔ نقاط یک منحنی Bـاسپلاین در داخل پوشش محدب رئوس کنترلی خود قرار می‌گیرند [9].*

در طراحی و مدلسازی کامپیوتری، اصولاً روشهایی برای ایجاد منحنی‌ها مورد توجه قرار می‌گیرند که منحنی‌های تولید شده توسط آنها فاقد هرگونه نوسانات اضافی و ناخواسته باشند. بنابه قضیهٔ فوق، چون کلیه نقاط یک منحنی Bـاسپلاین در پوشش محدب رئوس کنترلی خود قرار می‌گیرند (شکل ۲)، بنابراین منحنی‌های Bـاسپلاین نوسانات اضافی و غیرقابل کنترل نخواهند داشت.

خاصیت پایا بودن تحت تبدیلات خطی

منحنی‌های Bـاسپلاین دارای این خاصیت مهم هستند که شکل حاصل از تأثیر یک تبدیل خطی (دوران، انتقال، انعکاس) بر روی کلیه نقاط یک منحنی ایجاد شده با شکل حاصل از تأثیر همان تبدیل خطی بر روی رئوس کنترلی و سپس ایجاد منحنی یکسان است [9].

بنابراین برای ایجاد شکل حاصل از تأثیر یک تبدیل خطی بر روی منحنی Bـاسپلاین، می‌توان تبدیل خطی را بر رئوس کنترلی اثر داد، و سپس منحنی حاصل از رئوس به‌دست آمده را ایجاد کرد، یا می‌توان تبدیل خطی را بر روی



شکل ۲.i ـامین قطعه از یک منحنی Bـاسپلاین مکعبی.

کلیه نقاط منحنی اثر داد و منحنی جدید را ایجاد کرد.

خاصیت کنترل‌پذیری موضعی

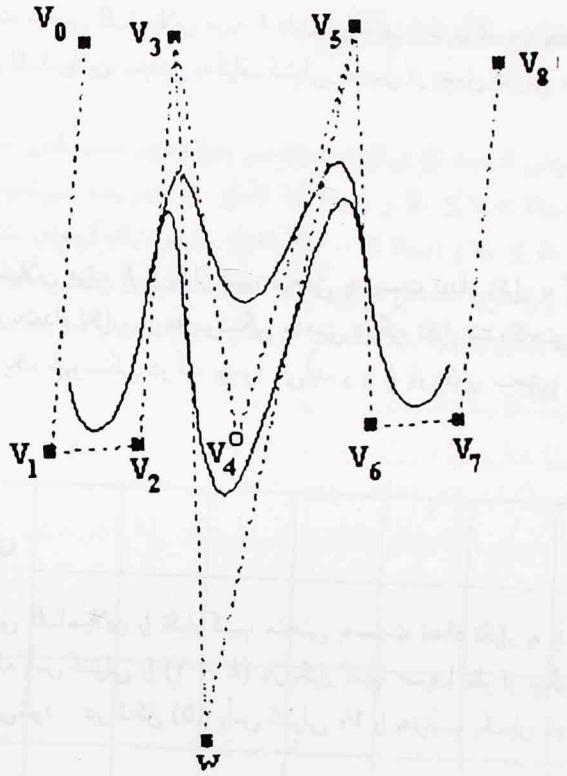
یکی از مهمترین خاصیتهای منحنی Bـاسپلاین خاصیت کنترل‌پذیری موضعی آن است. این خاصیت ایجاب می‌کند که تغییر مختصات یک رأس کنترلی فقط به‌طور موضعی بر شکل منحنی تأثیر داشته باشد [9]. این خاصیتی مهم در مدلسازی و طراحی به‌شمار می‌رود، زیرا برای اصلاح یک منحنی به محاسبات کمتری نسبت به محاسبات اولیه نیاز دارد. شکل (۳) یک منحنی Bـاسپلاین مکعبی یکنواخت حاصل از رئوس کنترلی V_0، V_1، ... ، V_8 را نشان می‌دهد که در آن مختصات رأس کنترلی V_4 به W تغییر داده شده است. ملاحظه می‌شود که این تغییرات به‌طور موضعی بر شکل منحنی تأثیر می‌گذارند و موجب تغییر سراسری در منحنی نمی‌شوند.

۲.۳. مشخصه‌های کاربردی منحنی‌های Bـاسپلاین

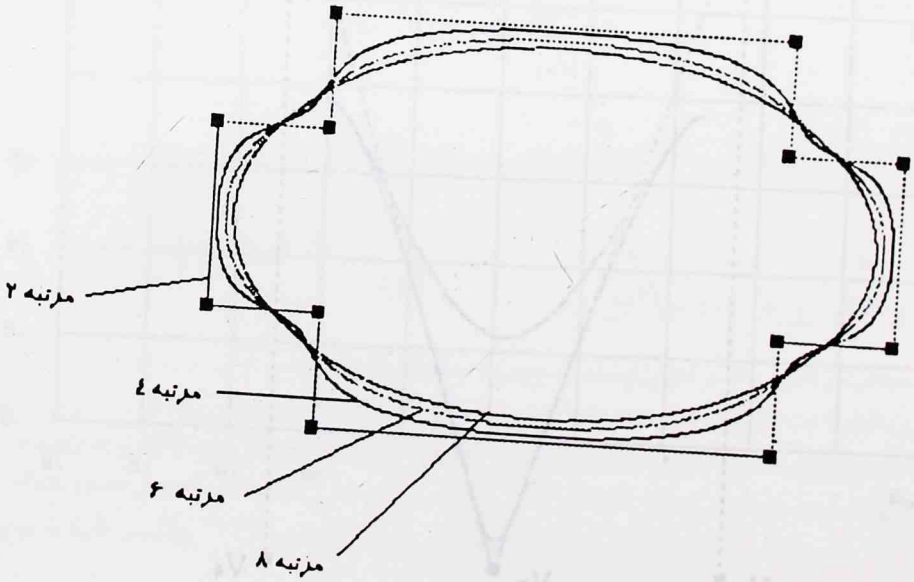
به‌طور کلی برای تولید یک منحنی Bـاسپلاین به فرم دلخواه لازم است که برخی از مشخصه‌های کلی منحنی‌های Bـاسپلاین شناخته شوند. اکنون یک بررسی اجمالی بر روی این گونه مشخصه‌ها ارایه کنیم.

رفتار منحنی‌های Bـاسپلاین از مرتبه‌های مختلف

اگر کلیه رئوس کنترلی یک منحنی Bـاسپلاین را ثابت در نظر بگیریم و مرتبهٔ منحنی Bـاسپلاین را افزایش دهیم، تعداد قطعات منحنی و در نتیجه نوسانات آن کمتر می‌شود. زیرا با افزایش مرتبهٔ منحنی Bـاسپلاین تعداد رئوس کنترلی بیشتری در ایجاد یک قطعه منحنی موثر می‌شوند، و در نتیجه قطعه منحنی باید در پوشش محدب رئوس کنترلی بیشتری قرار بگیرد. در شکل (۴) منحنی‌های Bـاسپلاین از مرتبه‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ حاصل از یک مجموعه رئوس کنترلی ثابت نشان داده شده‌اند.



شکل۳. تغییر موضعی منحنی B-اسپلاین.



شکل۴. منحنی B-اسپلاین با مرتبه‌های مختلف.

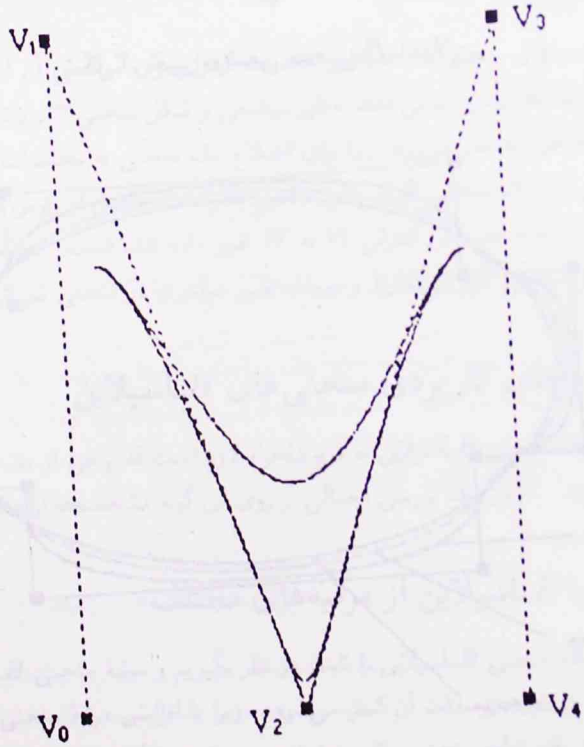
همان طور که مشخص است، منحنی Bـاسپلاین مرتبه ۸ دارای نوسانات کمتری نسبت به سایر منحنی‌ها است. از طرفی، با کاهش مرتبه منحنی Bـاسپلاین، منحنی به گراف کنترلی حاصل از رئوس کنترلی خود نزدیکتر می‌شود.

تأثیر تکرار گره‌ها

اگر یک گره از یک منحنی Bـاسپلاین مرتبه k را تکرار کنیم، منحنی به نسبت تعداد تکرار به گراف کنترلی مربوط به‌خود نزدیکتر می‌شود. به‌علاوه، به‌تعداد تکرار، درجهٔ پیوستگی منحنی در گره تکرار شده کاهش می‌یابد. همچنین اگر این تکرار $(k-1)$ بار باشد، یک ناپیوستگی در گره بوجود می‌آید، و با k بار تکرار، منحنی در آن گره یک پرش خواهد داشت ([9], [10]).

تأثیر تکرار رئوس کنترلی

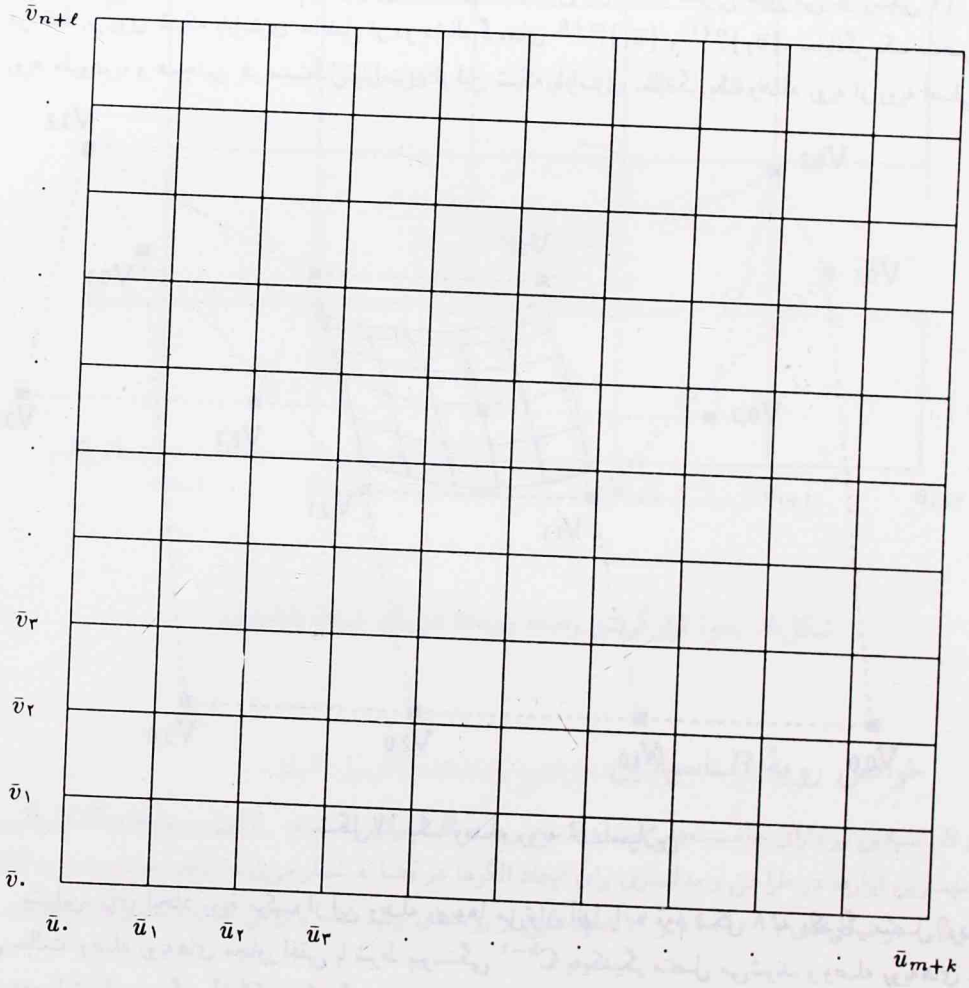
اگر یک رأس کنترلی از یک منحنی Bـاسپلاین را تکرار کنیم، منحنی به‌نسبت تعداد تکرار به رأس کنترلی مربوطه نزدیکتر می‌شود. به‌علاوه، اگر یک رأس کنترلی را $(k-1)$ بار تکرار کنیم، صرف نظر از چگونگی ترتیب گره‌ها، آن رأس توسط منحنی درونیابی می‌شود. در شکل (۵)، رأس کنترلی V_2 را به‌ترتیب یک‌بار، دو بار و سه بار تکرار کرده‌ایم.



شکل۵. منحنی Bـاسپلاین با تکرار رأس کنترلی V_2.

۴. رویه‌های Bـاسپلاین

تعریف. فرض کنید $\bar{u}$ و $\bar{v}$ دو متغیر پارامتری مستقل باشند که به‌ترتیب بر روی محدوده‌های $\bar{u}_0 \le \bar{u} < \bar{u}_{m+k}$ و $\bar{v}_0 \le \bar{v} < \bar{v}_{n+l}$ تعریف می‌شوند. همچنین فرض کنید $\bar{u}_0 \le \bar{u}_1 \le \cdots \le \bar{u}_{m+k}$ و $\bar{v}_0 \le \bar{v}_1 \le \cdots \le \bar{v}_{n+l}$ دو دنباله گره‌های متناظر از این محدوده‌ها باشند. در این صورت **شبکه پارامتری** حاصل از این گره‌ها خطوط عمودی و افقی متقاطعی به‌صورت شکل (۶) است. محدوده‌های $[\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}]$ و $[\bar{v}_j, \bar{v}_{j+1}]$ قطعات این شبکه پارامتری را تعریف می‌کنند، که آنها را **مستطیلهای پارامتری** می‌نامیم [9].



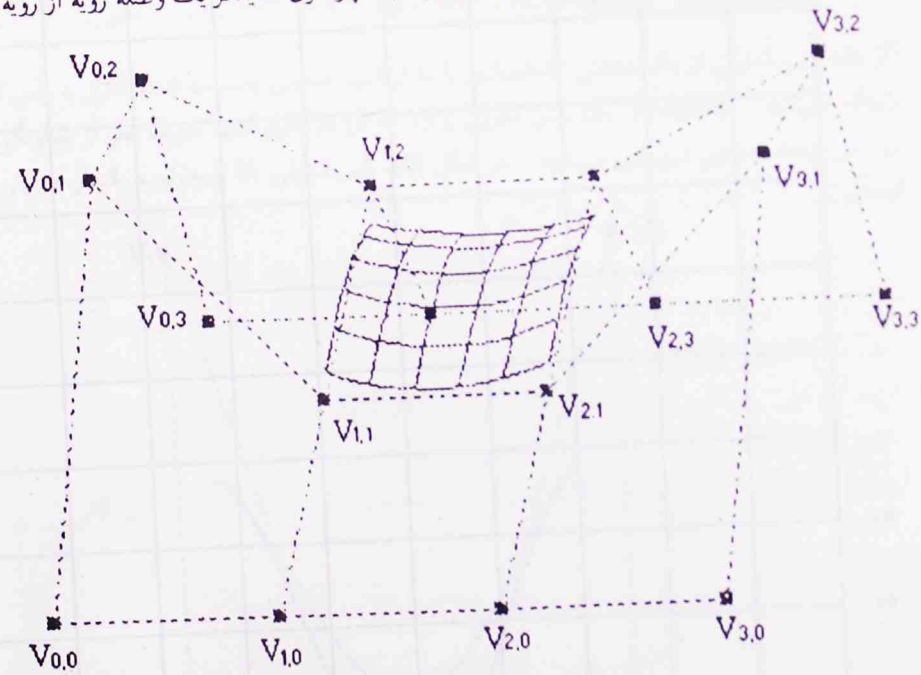
شکل۶. شبکه پارامتری حاصل از گره‌های $\{\bar{u}_i\}_0^{m+k}$ و $\{\bar{v}_j\}_0^{n+l}$.

تعریف. فرض کنید رئوس کنترلی $V_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$ در فضا داده شده باشند. رویه Bـاسپلاین حاصل از این رئوس کنترلی بر روی شبکه پارامتری حاصل از دو دنباله گره‌های $\{\overline{u}_i\}_{0}^{m+k}$ و $\{\overline{v}_j\}_{0}^{n+l}$ به صورت

$$Q(\bar{u},\bar{v}) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} V_{i,j} B_{i,j}^{k,l}(\bar{u},\bar{v})$$
$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} V_{i,j} B_{i,k}(\bar{u}) B_{j,l}(\bar{v})$$

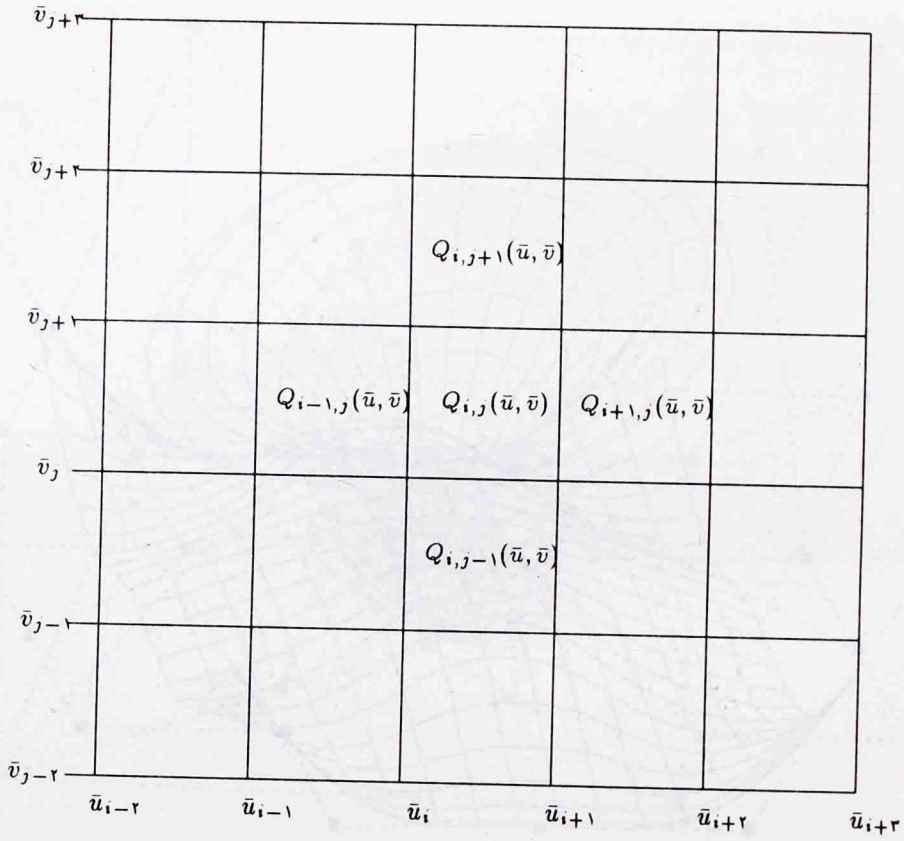
تعریف می‌شود ([2], [8]).

با اتصال رئوس کنترلی $V_{i,j}$ به یکدیگر که به فرم یک ماتریس مرتب شده‌اند، یک **شبکه کنترلی** در فضا ایجاد می‌شود به‌طوری‌که رویه حاصل از این رئوس کنترلی از نزدیکی این شبکه کنترلی عبور می‌کند (شکل ۷). به‌علاوه، هر خط بر روی شبکه پارامتری حاصل از دو دنباله گره‌های $\{\overline{u}_i\}_{0}^{m+k}$ و $\{\overline{v}_j\}_{0}^{n+l}$، نمایانگر یک منحنی بر روی رویه مفروض، و همچنین هر مستطیل پارامتری از این شبکه پارامتری نمایانگر یک وصله رویه از رویه اصلی است.



شکل۷. یک وصله رویه Bـاسپلاین.

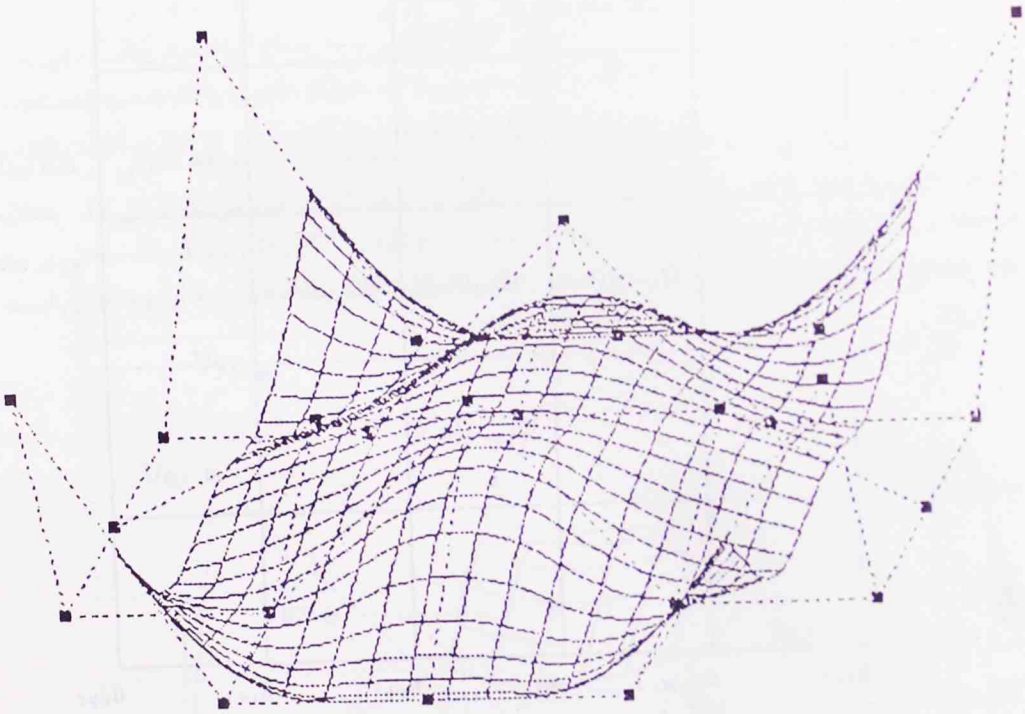
بنابراین، برای ایجاد رویهٔ مرکب از این وصله رویه‌ها می‌توان آنها را به فرم شکل ۸ به یکدیگر متصل کرد. در این حالت، وصله رویه‌های مجاور افقی با شرط پیوستگی $\mathbb{C}^{k-2}$ به‌یکدیگر متصل می‌شوند، و وصله رویه‌های مجاور عمودی با شرط پوستگی $\mathbb{C}^{l-2}$ به یکدیگر اتصال می‌یابند.



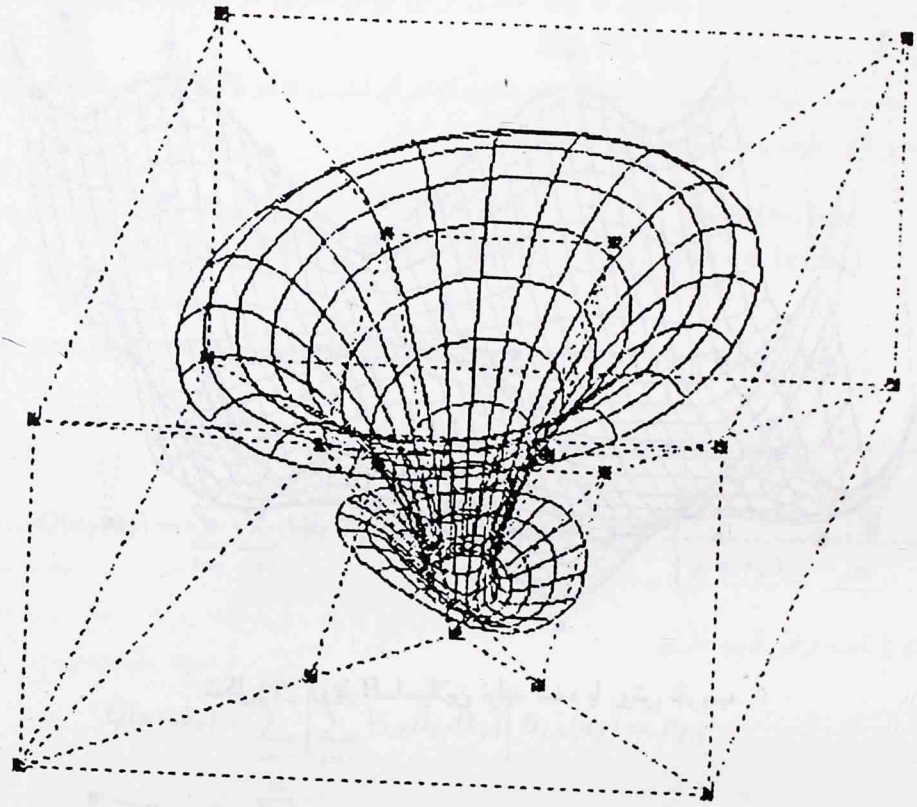
شکل۸. نحوهٔ قرارگرفتن وصله رویه‌ها در یک شبکهٔ پارامتری.

۱.۴. خواص رویهٔ Bـاسپلاین

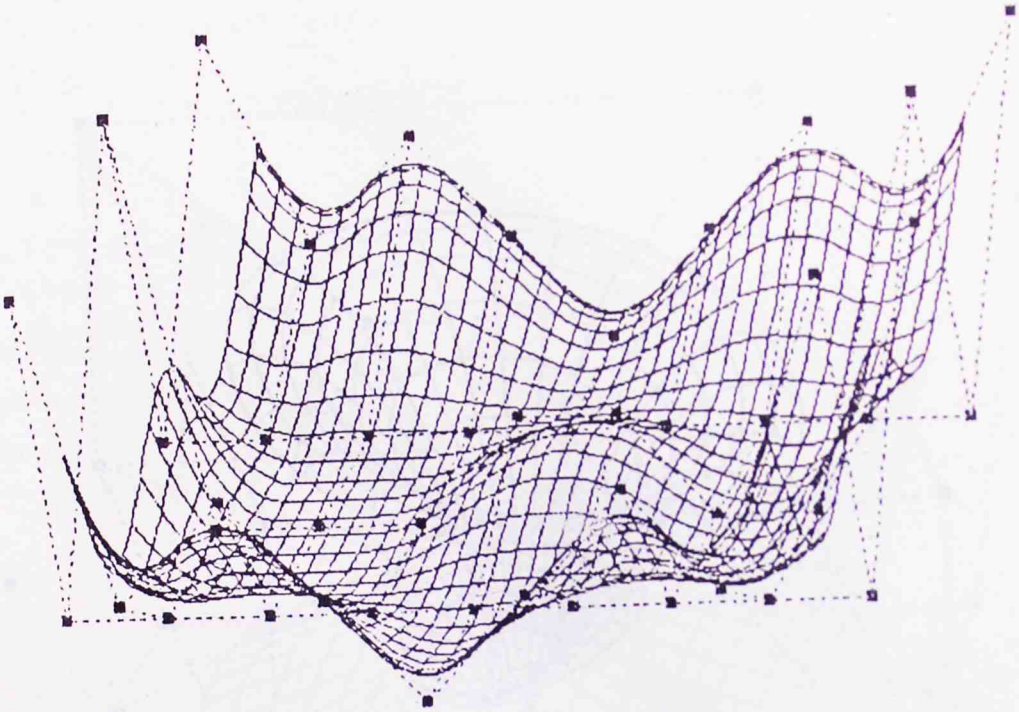
رویه‌های Bـاسپلاین نیز دارای خاصیت‌هایی مشابه با منحنی‌های Bـاسپلاین هستند. از این رو رویه‌های Bـاسپلاین یکی از مهمترین ابزارها در طراحی و مدلسازی برای ایجاد الگوها در فضا به شمار می‌روند (برای بحث بیشتر به [9] رجوع شود). در شکل‌های ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ نمونه‌هایی از رویه‌های تولید شده با روش تقریب نشان داده شده‌اند.



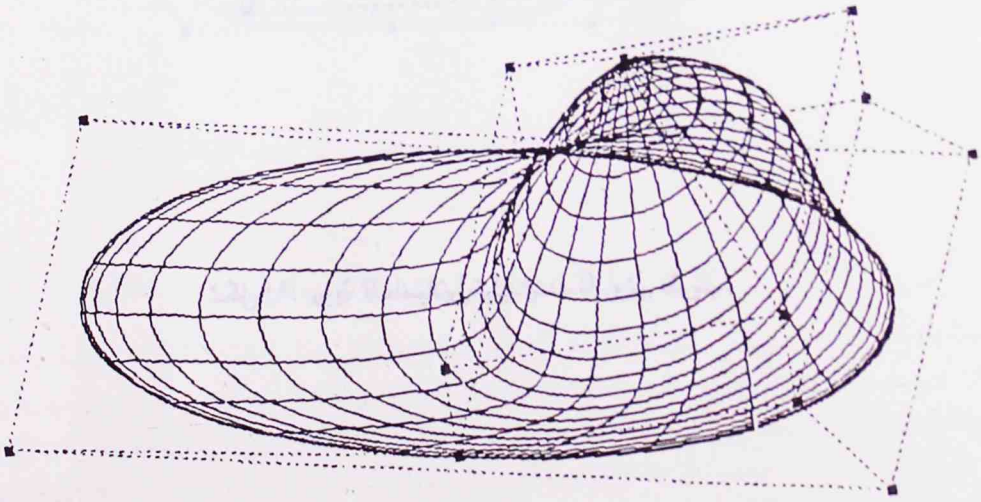
شکل۹. رویهٔ Bـاسپلاین تولید شده با روش تقریب.



شکل ۱۰. رویهٔ Bـاسپلاین تولید شده با روش تقریب.



شکل۱۱. رویهٔ Bـاسپلاین تولید شده با روش تقریب.



شکل۱۲. رویهٔ Bـاسپلاین تولید شده با روش تقریب.

۵. درونیابی رویه‌ها با استفاده از توابع B-اسپلاین

فرض کنید نقاط $P_p = (r_p, s_p, t_p)$ داده شده باشند. در این حالت، هدف تعیین رئوس کنترلی $V_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$ است به‌طوری که رویهٔ حاصل از این رئوس کنترلی در مقادیر پارامتری A_p از نقاط مشخص P_p از این رویه عبور کنند ([1], [9], [6]).

فرض کنید مقادیر A_p به‌صورت زیر مرتب شده باشند، که در آن اندیس p در P_p متناظر است با زوج g, f، اندیسهای a و b در طرف راست تعریف ابراز شده برای A_p:

$$\begin{array}{llll} A_0 = (a_0, b_0), & A_1 = (a_0, b_1), & \cdots, & A_n = (a_0, b_n), \\ A_{n+1} = (a_1, b_0), & A_{n+2} = (a_1, b_1), & \cdots, & A_{2n+1} = (a_1, b_n), \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{L-n} = (a_m, b_0), & A_{L-(n-1)} = (a_m, b_1), & \cdots, & A_L = (a_m, b_n) \ . \end{array}$$

بدین ترتیب، دستگاه معادلات درونیاب به صورت زیر درمی‌آید:

$$Q(a_f, b_g) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} V_{i,j} B_{i,k}(a_f) B_{j,l}(b_g) = P_{f,g} \qquad \begin{cases} f = 0, 1, \cdots, m \\ g = 0, 1, \cdots, n. \end{cases} \tag{۲}$$

حال اگر g را ثابت فرض کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} Q(a_f, b_g) &= \sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{j=0}^{n} V_{i,j} B_{j,l}(b_g) \right] B_{i,k}(a_f) = P_{f,g} \\ &= \sum_{i=0}^{m} W_{i,g} B_{i,k}(a_f) = P_{f,g} \quad , \quad f = 0, 1. \cdots, m, \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن $W_{i,g}$ به صورت زیر است:

$$W_{i,g} = \sum_{j=0}^{n} V_{i,j} B_{j,l}(b_g), \qquad g = 0, 1, \cdots, n \ . \tag{۴}$$

بنابراین، برای حل دستگاه (۲) می‌توان ابتدا دستگاه را برای $W_{i,g}$ به‌ازای $g = 0, 1, \cdots, n$ حل کنیم، که متناظر با حل $(n+1)$ مسأله درونیابی یک بعدی است. توجه داریم که ماتریس ضرایب

$$\begin{bmatrix} B_{0,k}(a_0) & \cdots & B_{m,k}(a_0) \\ B_{0,k}(a_1) & \cdots & B_{m,k}(a_1) \\ \vdots & & \\ B_{0,k}(a_m) & \cdots & B_{m,k}(a_m) \end{bmatrix}$$

در حل $(n+1)$ دستگاه (۳) مشترک است. بنابراین، فقط یک‌بار نیاز به محاسبه این ماتریس داریم. این ماتریس نامنفرد است اگر و فقط اگر مقادیر a_f به‌ازای $f = 0, 1, \ldots, m$ در رابطهٔ $\bar{u}_f \le a_f < \bar{u}_{f+k}$ صدق کنند ([۱۰]،

[۹]، [9]). بدین ترتیب، پس از محاسبه $W_{i,g}$، دستگاه معادلات (۴) را برای $V_{i,j}$ به‌ازای $i = 0, 1, \cdots, m$ حل می‌کنیم، که منجر به حل $(m+1)$ مسأله درونیابی یک بعدی می‌شود. در این حالت نیز ماتریس

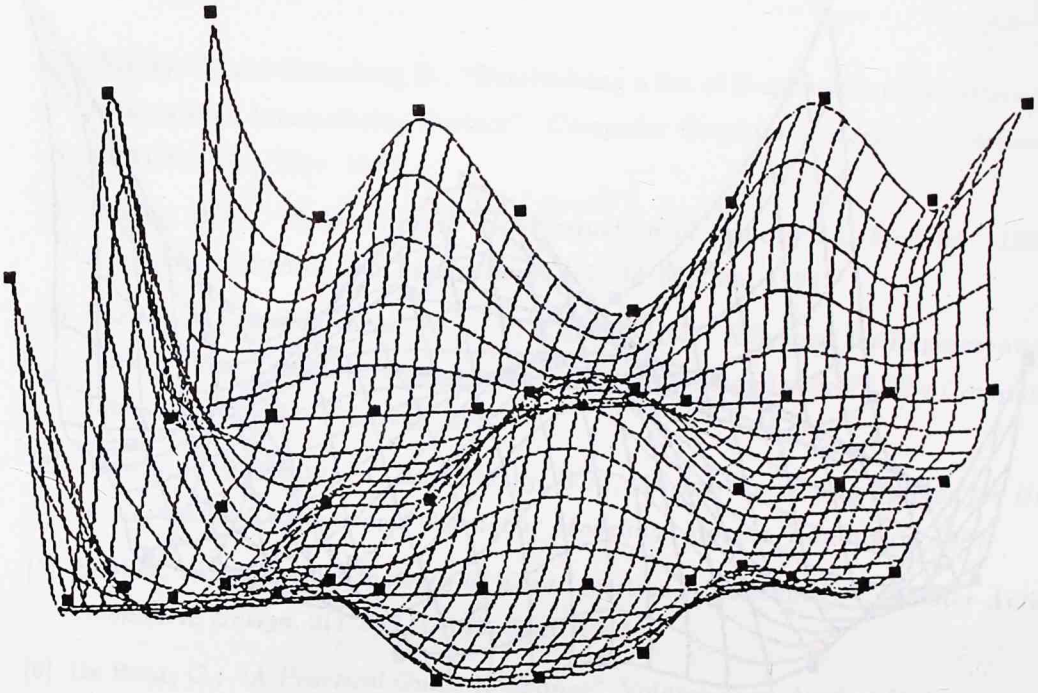
$$\begin{bmatrix} B_{0,l}(b_0) & \cdots & B_{n,l}(b_0) \\ B_{0,l}(b_1) & \cdots & B_{n,l}(b_1) \\ \vdots & & \\ B_{0,l}(b_n) & \cdots & B_{n,l}(b_n) \end{bmatrix}$$

در حل $(m+1)$ دستگاه حاصل از (۴) مشترک است، و در نتیجه این ماتریس را نیز فقط یک‌بار محاسبه می‌کنیم. مجدداً این ماتریس نامنفرد است اگر و فقط اگر به‌ازای $g = 0, 1, \ldots, n$ داشته باشیم $\bar{v}_g \leq b_g < \bar{v}_{g+l}$.

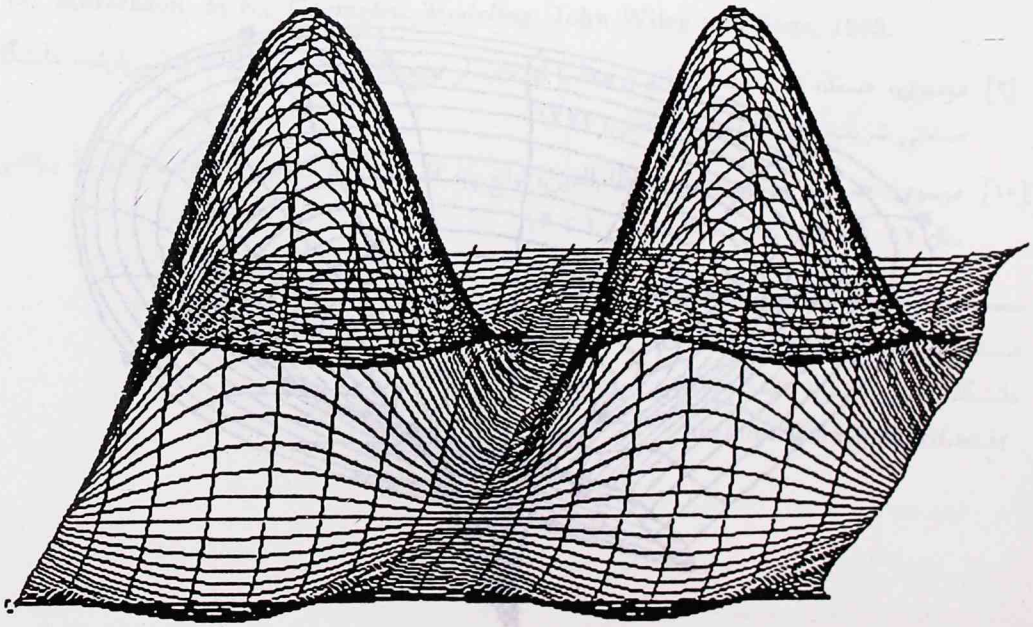
در شکل‌های ۱۳، ۱۴، ۱۵ و ۱۶ نمونه‌هایی از رویه‌های درونیابی شده توسط توابع Bـاسپلاین دو مکعبی نشان داده شده‌اند.

نتیجه‌گیری

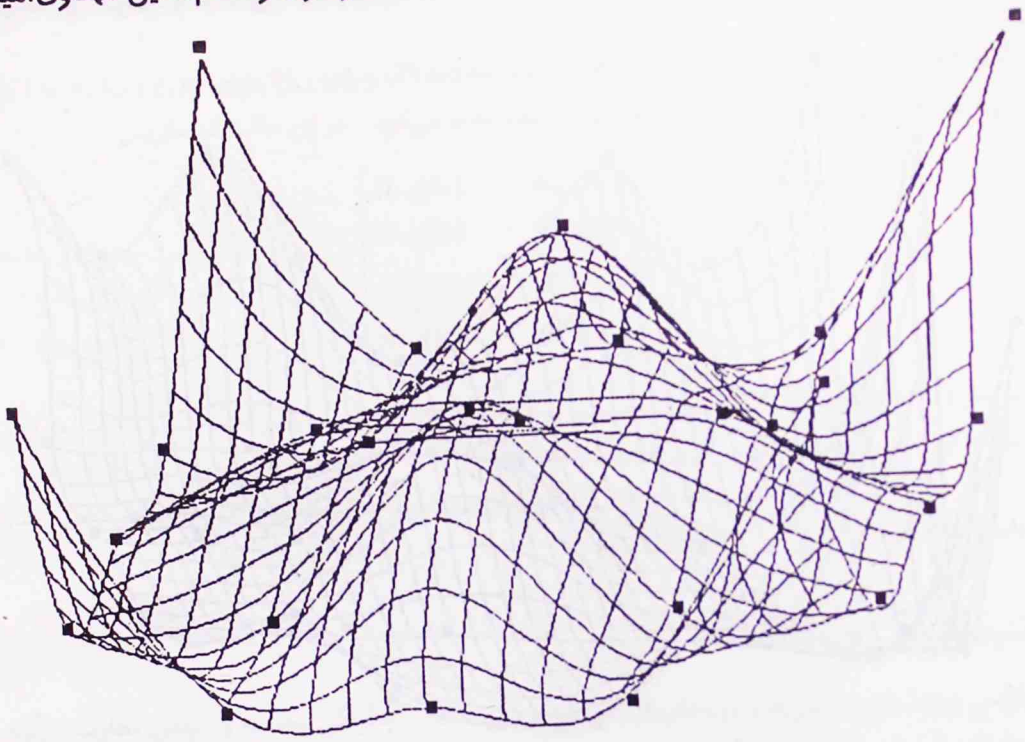
طراحی و مدلسازی منحنی‌ها و رویه‌های Bـاسپلاین بررسی شدند. چگونگی محاسبه و خواص مطلوب این‌گونه مدل‌ها به تفصیل مورد بحث قرار گرفتند. بر اساس مطالب ارایه شده، نرم‌افزاری تولید کرده‌ایم که منحنی‌ها یا رویه‌های Bـاسپلاین را هم از طریق درونیابی و هم از روش تقریب تولید می‌کنند. نمونه‌هایی متنوع از اشکال تولید شده توسط این نرم‌افزار ارایه شدند.



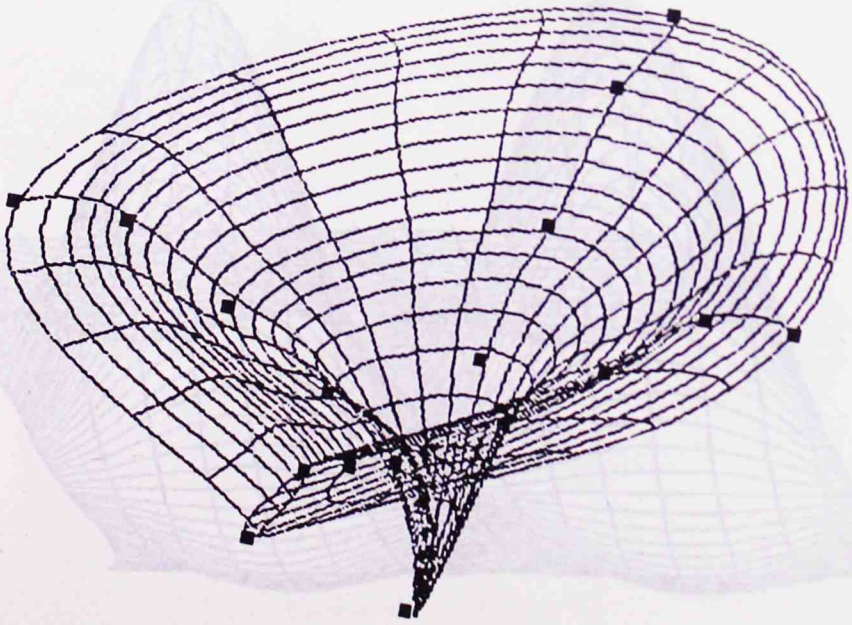
شکل۱۳. رویهٔ درونیابی شده توسط توابع Bـاسپلاین.



شکل۱۴. رویهٔ درونیابی شده توسط توابع Bـاسپلاین.



شکل۱۵. رویهٔ درونیابی شده توسط توابع Bـاسپلاین.



شکل۱۶. رویهٔ درونیابی شده توسط توابع Bـاسپلاین.

مراجع

[1] Barsky, B. and Greenberg D., "Determining a Set of B-spline Control Vertices to Generate an Interpolating Surface", *Computer Graphics and Image Processing*, 14(3):203–229, Nov. 1980.

[2] Barsky, B.A., "A Description and Evaluation of Various 3-D Models", *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4(1):38–52, Jan. 1984.

[3] Barsky, B.A. and Spencer, W.T., "TRANSPLINE - A System for Reperesenting Curves Using Transformation Among Four Spline Formulations", *The Computer Journal*, 27(3):271–277, Aug. 1981.

[4] Bartels, R.H., Beaty, J.C. and Barsky, B.A., *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling*, Morgan Kaufmann, 1987.

[5] Boehm, W., "On the Efficiency of Knot Insertion Algorithms", *Computer Aided Geometric Design*, 2(1-3):141–143, Sept. 1985.

[6] De Boor, C., *"A Practical Guide to Splines"*, Volume 27 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[7] Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Second Edition, Academic Press, 1990.

[8] Mortenson, M.E., *Geometric Modeling*, John Wiley and Sons, 1985.

[۹] موسوی، صمد، تولید منحنی‌ها و رویه‌ها با استفاده از توابع B-اسپلاین، رسالهٔ کارشناسی‌ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی، ۱۳۷۴.

[۱۰] موسوی، صمد و مهدوی‌امیری، نظام‌الدین، توابع پایه B-اسپلاین و درونیابی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، سال ۱۷، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۷۷، صص ۱ تا ۱۴.

صمد موسوی و نظام‌الدین مهدوی‌امیری
دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف
nezamm@math.sharif.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۱ (پاییز ۱۳۷۷)، صص. ۳۹ تا ۴۸

درونیابی، اصول و کاربرد آن

شادروان کریم صدیقی

چکیده

فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی باشد. اگر L_1، L_2، $\cdots$، L_n عبارت از n تابعک خطی روی V و $y_1, \cdots, y_n$ عبارت از n اسکالر باشند آنگاه هدف از درونیابی پیدا کردن یک بردار x در V می‌باشد به طوری که

$$L_i X = y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

این نوع مسائل را مسائل درونیابی تعمیم یافته می‌نامند. فرمول درونیابی لاگرانژ اظهار می‌دارد که اگر $n+1$ مقدار متمایز d_0، d_1، $\cdots$، d_n در هیأت F داده شده باشد آنگاه برای هر $n+1$ اسکالر c_0، c_1، $\cdots$، c_n یک چند جمله‌ای p با ضرایب در F وجود دارد به قسمی که

$$p(d_i) = c_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

حال فرض کنید $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ قرص یکهٔ باز باشد. مجموعهٔ تمام توابع تحلیلی کراندار روی $\mathbb{D}$ را با H^∞ نمایش می‌دهیم. دنباله $\{z_n\}$ در $\mathbb{D}$ را یک دنبالهٔ درونیابی برای H^∞ گوئیم اگر برای هر دنبالهٔ کراندار از اعداد مختلط $\{a_n\}$ یک تابع $f \in H^\infty$ وجود داشته باشد به طوری که $f(z_n) = a_n$ برای $n = 1, 2, \cdots$.

هدف ما بررسی دنباله‌های درونیابی برای فضای H^∞ و فضاهای مشابه است.

۱. مقدمه

درونیابی لاگرانژ را درکتب مقدماتی جبر خطی خوانده‌ایم. فرض کنید F هیأتی ثابت و d_0، d_1، $\cdots$، d_n، $n+1$ عنصر متمایز عبارت از F باشند. فرض کنید

$$V = \{p \in F[x] : deg \quad p \leq n\}$$

و $L_i : V \to F$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$L_i p = p(d_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n, \quad p \in V.$$

توجه کنید که مجموعه $\{L_0, L_1, \cdots, L_n\}$ یک پایه برای V^*، فضای دوگان V، می‌باشد. در حقیقت پایه‌ای چون $\{p_0, \cdots, p_n\}$ برای V وجود دارد به طوری که

$$L_i(p_j) = p_j(d_i) = \delta_{ij}.$$

این چند جمله‌ایها به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$P_i = \Pi_{j \neq i}\left(\frac{x - d_i}{d_i - d_j}\right)$$

و از درجهٔ n می‌باشند، پس به V تعلق دارند. حال اگر $p = \sum_i c_i p_i$ آنگاه برای هر j داریم

$$p(d_j) = \sum_i c_i p_i(d_j) = c_j$$

از فرمول فوق نتیجه می‌شود که چند جمله‌ایهای p_0، p_1، $\cdots$، p_n مستقل خطی هستند که در حقیقت تشکیل یک پایه برای V از بعد $n + 1$ می‌باشد. پس به ازای هر p از V داریم

$$p = \sum_{i=0}^{n} p(d_i) p_i$$

عبارت بالا را فرمول درونیابی لاگرانژ می‌نامند. برای مطالعهٔ درونیابی به مراجع [۲; ۵; ۸] مراجعه کنید.
چون در مسائل درونیابی با تابعکهای خطی سروکار داریم استقلال خطی آنها برای ما اهمیت فراوان دارد. اطلاعاتی در این زمینه را در قضایای زیر ضبط می‌کنیم

۱.۱. قضیه. *فرض کنید V یک فضای خطی n بعدی باشد. پایه مرتب $\mathbb{B} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ از V را در نظر بگیرید. آنگاه تابعکهای خطی $L_1, \cdots, L_n$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر ماتریس $[L_i x_j]_{i,j=1}^{n}$ دارای دترمینان ناصفر باشد.*

۲.۱. قضیه. *فرض کنید V یک فضای خطی n بعدی باشد. آنگاه مسألهٔ درونیابی $L_i x = y_i$، $i = 1, \cdots, n$ دارای جواب یکتاست اگر و تنها اگر تابعکهای خطی $L_1, \cdots, L_n$ در V^*، دوگان V، مستقل خطی باشند.*

در بسیاری از مواقع هدف ما پیدا کردن یک چند جمله‌ای است که مقادیر خود و مشتقاتش تا حد معینی در نقاط متمایزی داده شده‌اند. یک چنین مسائلی را مسائل درونیابی تعمیم یافتهٔ هرمیتی می‌نامند. در اینجا هدف پیدا کردن یک چند جمله‌ای $p(x)$ است به طوری که

$$p^{(i)}(x_1) = y_1^{(i)}, \quad i = 0, 1, \cdots, m_1 - 1$$

$$p^{(i)}(x_n) = y_n^{(i)}, \quad i = 0, 1, \cdots, m_n - 1$$

اعداد $y_1^{(i)}$ ، ... ، $y_n^{(i)}$ مفروض‌اند و ما m_j شرط، $j = 1, \cdots, n$ روی $p(x)$ در نقطهٔ x_j داریم. اگر قرار دهیم $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ آنگاه یک چند جمله‌ای، یکتا در میان آنهایی که درجه‌شان کمتر یا مساوی $N - 1$ است وجود دارد که جواب معادلات بالا می‌باشد.

درونیابی مثلثاتی: تابع f را متناوب با دور تناوب 2π گویند هرگاه

$$f(t + 2\pi) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

به‌طور کلی توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ با دور تناوب 2π در تناظر یک به یک با توابع $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ می‌باشند که در اینجا $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ این تناظر به صورت

$$F(e^{it}) = f(t)$$

داده شده است. قضیهٔ استون- وایراشتراس می‌گوید که چند جمله‌ایهای مثلثاتی

$$p_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

در مجموعهٔ توابع پیوسته با دور تناوب 2π چگال هستند. بدین معنی که هر تابع f در فضای $C[0, 2\pi]$ را می‌توان با یک دنباله از چند جمله‌ایهای مثلثاتی تقریب زد. برای مسائل درونیابی که $p_n(t)$ یک جواب آن می‌باشد، چون $p_n(t)$ دارای $2n + 1$ ضریب c_k می‌باشد می‌بایست $2n + 1$ شرط درونیابی داشته باشیم. همچنین فرض می‌کنیم که گره‌های درونیابی زیر وجود دارد

$$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_{2n} < 2\pi$$

و چند جمله‌ای p_n در شرط زیر صادق است

$$p_n(t_i) = f(t_i), \quad i = 0, 1, \cdots, 2n$$

یک چنین مسأله‌ای یک جواب یکتا دارد.

درونیابی بکمک توابع کسری: توجه کنید که تابع کسری

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}$$

با $m + n + 2$ ضریب

$$a_0, a_1, \cdots, a_m, b_0, b_1, \cdots, b_n$$

مشخص می‌شود. از طرف دیگر $r(x)$ این ضرایب را تا یک مضرب مشترک $\lambda \neq 0$ مشخص می‌کند. بنابراین $r(x)$ کاملاً با $m+n+1$ شرط (۱)

$$r(x_i) = r_i, \quad i = 0, 1, \cdots, m+n \tag{1}$$

مشخص می‌شود. بنابراین لازم است که ضرایب a_j, b_j از $r(x)$ در دستگاه معادلات همگن زیر صدق کنند

$$p(x_i) - r_i q(x_i) = 0, i = 0, 1, \cdots, m+n$$

این معادله رانیز به صورت زیر می‌توان نوشت

$$a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m - r_i(b_0 + b_1 x_i + \cdots + b_n x_i^n) = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, m+n \tag{2}$$

کار کردن با توابع کسری به دقت بیشتری نیاز دارد. در حقیقت یک جواب (۲) لزومی ندارد جواب (۱) نیز باشد. لیکن چون دستگاه معادلات همگن (۲) دارای $m+n+2$ معادله برای $m+n+1$ مجهول می‌باشد دارای جواب غیربدیهی می‌باشد. برای هر یک چنین جوابی داریم $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$، $q(x) \not\equiv 0$، یعنی پاسخهای غیربدیهی همه توابع کسری هستند.

۲. فضاهای نامتناهی- بعد

تاکنون فضاهای متناهی- بعد موردنظر ما بوده‌اند. اینک به بررسی فضاهای نامتناهی- بعد می‌پردازیم. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد که نرم آن کامل است. چنین فضا را یک فضای باناخ گویند. چند مثال از فضاهای باناخ عبارت‌اند از

(الف) $C[0, 1]$ فضای توابع پیوسته روی $[0, 1]$ با نرم سوپرمم.

(ب) فضاهای $L^p[0, 1]$ برای $p \geq 1$.

(ج) فضای دنباله‌های جمعپذیر ℓ^1، اگر $c = \{c_i\}$ در ℓ^1 باشد آنگاه $\|c\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty$.

حال فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. دنبالهٔ $\{f_n\}$ در X را یک پایهٔ ℓ^1 می‌نامند اگر عددهای ثابت مثبت a, b وجود داشته باشند به طوری که

$$a \sum_{i=1}^{n} |c_i| \leq \|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\| \leq b \sum_{i=1}^{n} |c_i|$$

برای هر اسکالر $c_1, \cdots, c_n$ و هر n. اگر X دارای یک پایه ℓ^1 باشد، آنگاه X دارای یک نسخهٔ همانند ℓ^1 می‌باشد.

۱.۲. مثال. فرض کنید $X = L^1[0, 1]$ و دنبالهٔ $\{f_n\}$ در X را طوری انتخاب کنید که $\|f_n\| = 1$ و دارای محمل مجزا باشند، یعنی $f_n f_m = 0$ برای $n \neq m$. حال نشان می‌دهیم که $\{f_n\}$ یک پایهٔ ℓ^1 می‌باشد. به

۱.۲. مثال. فرض کنید $X = L^1[0,1]$ و دنبالهٔ $\{f_n\}$ در X را طوری انتخاب کنید که $||f_n|| = 1$ و دارای محمل مجزا باشند، یعنی $f_n f_m = 0$ برای $n \neq m$. حال نشان می‌دهیم که $\{f_n\}$ یک پایهٔ ℓ^1 می‌باشد. به راحتی دیده می‌شود که

$$||f_n + f_m||_1 = ||f_n||_1 + ||f_m||_1$$

برای هر n و m. در نتیجه داریم

$$||\sum_{i=1}^{n} c_i f_i||_1 = \sum_{i=1}^{n} ||c_i f_i||_1 = \sum_{i=1}^{n} |c_i|.$$

۲.۲. قضیه. اگر $\{f_n\}$ یک پایه ℓ^1 برای فضای باناخ X باشد آنگاه بست ترکیبهای خطی $\{f_n\}$ همانند ℓ^1 می‌باشد.

اثبات. فرض کنید $L = [f_n]$ بست ترکیبهای خطی $\{f_n\}$ باشد. عملگر $T : \ell^1 \to L$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$T(\{c_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i.$$

چون $||T(\{c_i\})|| = ||\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i|| \leq b \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty$ دیده می‌شود که T پیوسته است. همچنین T یک به یک است زیرا اگر $T(\{c_i\}) = 0$ داریم که $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i = 0$ پس

$$a \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \leq ||\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i|| = 0$$

در نتیجه $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| = 0$ و $c_i = 0$ بنابراین T یک به یک است.□

توجه کنید که چون T از پایین کراندار است یعنی $||Tc|| \geq a||C||_1$ برای هر $c = \{c_i\}$ در ℓ^1 برد T بسته است. در حقیقت $||Tc - Td|| \geq a||c - d||$ حال اگر $g_k = Tc^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(k)} f_i$ یک دنباله در برد T باشد به طوری که $g_k \to g$ آنگاه $||g_k - g_l|| = ||Tc^{(k)} - Tc^{(l)}|| \geq a||c^{(k)} - c(l)|| = 1$. چون دنبالهٔ $\{g_k\}$ کوشی است نتیجه می‌گیریم که $\{c(k)\}$ در ℓ^1 کوشی می‌باشد. پس $\{c^{(k)}\} \to c$ در ℓ^1. بنابراین $g = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$.

۳.۲. تعریف. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X را یک دنبالهٔ ضعیف کوشی گویند هرگاه برای $x^* \in X^*$، $lim_n x^*(X_n)$ وجود داشته باشد.

در بررسی مسائل مربوط به درونیابی قضیهٔ رزنتال [۷] اهمیت بسیاری دارد. این قضیه را رزنتال [۷] برای فضای باناخ حقیقی و دَر [۴] برای فضای باناخ مختلط اثبات کرده است. کاربردی از این قضیه در [۳] آمده است.

یا

(ب) f_{n_k} یک دنبالهٔ ضعیف کوشی می‌باشد.

حال فرض کنید X یک فضای باناخ تفکیکپذیر و $Y = X^*$ فضای باناخ توابعی باشد که روی دامنهٔ کراندار G باشد. توجه کنید که X یک فضای نرمدار و در نتیجه فضای متریک است. توپولوژی Y یعنی دوگان X توپولوژی ضعیف ستاره می‌باشد. بنابراین اگر $\{x^*_\alpha\}$ یک تور اختیاری در X^* باشد آنگاه $\{x^*_\alpha\} \to x^*$ به طور ضعیف ستاره اگر $x^*_\alpha \to x^*(x)$ برای هر $x \in X$. همچنین فرض کنید برای هر $\lambda \in G$ تابعک خطی $e_\lambda : Y \to \mathbb{C}$ که با ضابطهٔ $e_\lambda(\varphi) = \varphi(\lambda)$ داده می‌شود در توپولوژی ضعیف ستاره پیوسته باشد.

۵.۲. تعریف. دنبالهٔ $\{\lambda n\}$ در G را یک دنبالهٔ درونیابی برای فضای باناخ $Y = X^*$ گوییم اگر برای هر دنبالهٔ کراندار $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ وجود داشته باشد $\varphi \in Y$ به طوری که $\varphi(\lambda_n) = a_n$.

چون e_{α_n} یک تابعک خطی ضعیف ستاره، پیوسته روی X^* می‌باشد و $(X^*, wk^*)^* = X$، وجود دارد $x_n \in X$ به طوری که $e_{\lambda_n}(\varphi) = \varphi(\lambda_n) = \varphi(x_n)$ همچنین $||x_n|| = ۱$.
قضیهٔ زیر که نتیجه مستقیم قضیهٔ رزنتال است اهمیت زیادی برای ساختن دنباله‌های درونیابی دارد.

۶.۲ *فرض کنید $\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای در دامنه G باشد به طوری که*

$$e_{\lambda_n}(\varphi) = \varphi(\lambda_n) = \varphi(x_n)$$

برای هر $\varphi \in Y$. فرض کنید شرط (الف) قضیهٔ رزنتال برقرار باشد یعنی یک زیردنبالهٔ $\{x_n\}$ وجود داشته باشد که یک پایهٔ $\ell^۱$ برای X می‌باشد. آنگاه زیردنباله‌ای از $\{\lambda_n\}$ وجود دارد که برای Y یک دنبالهٔ درونیابی می‌باشد.

اثبات. فرض کنید $\{x_{n_k}\}$ زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ است که از قضیهٔ رزنتال به دست می‌آید و عملگر $T : \ell^۱ \to X$ که با ضابطهٔ $\{a_k\} \to \sum_{k=۱}^{\infty} a_k x_{n_k}$ داده می‌شود یک همسانی است. حال نشان می‌دهیم که زیردنبالهٔ $\{\lambda_{n_k}\}$ یک دنبالهٔ درونیابی برای Y می‌باشد.

فرض کنید $a = \{a_k\}$ یک عضو در ℓ^∞ باشد. عملگر الحاقی T یعنی $T^* = X^* \to \ell^\infty$ را در نظر بگیرید. چون برد T بسته است نتیجه می‌گیریم $ran\tau$ نیز بسته است و چون $ranT^* = (ker\tau)^\perp$ و T یک به یک است دیده می‌شود که T^* پوشاست. بنابراین $\varphi \in X^* = Y$ وجود دارد به طوری که $T^*\varphi = a$. اما $T^*\varphi = \varphi o T$ پس $\varphi o T = a$. حال هر دو طرف این تساوی را روی بردار e_k در $\ell^۱$ که شامل ۱ در مختص kام و بقیه جاها صفر است اثر می‌دهیم. بنابراین

$$\varphi o T(e_k) = \varphi(x_{n_k}) = a_k$$

نتیجه می‌شود که $\varphi(\lambda_{n_k}) = \varphi(x_{n_k}) = a_k$ پس $\{\lambda_{n_k}\}$ یک دنبالهٔ درونیابی برای Y می‌باشد.□

۳. فضاهای هیلبرت با هسته مولد

فرض کنید X یک مجموعه و $K : X \times X \to \mathbb{C}$ یک تابع باشد. در این صورت K را یک هسته می‌نامیم. اگر X متناهی باشد آنگاه K شبیه یک ماتریس می‌باشد. در حقیقت هسته‌ها تعمیم ماتریس‌ها هستند. بر این اساس توابع $K_y(\circ) = K(\circ, y), K^x = K(x, \circ)$ را به ترتیب xـ سطر yـ ستون K می‌گوئیم. اگر $E \subset X$ آنگاه تحدید $K : E \times E \to \mathbb{C}$ را با K_E نمایش می‌دهیم. هستهٔ K را مثبت $K \geq \circ$ و یا مثبت معین $K > \circ$ گوییم هرگاه تحدید آن به مجموعه‌های متناهی همه به ترتیب ماتریسهای مثبت یا مثبت معین باشند.

فرض کنید H یک فضای هیلبرت از توابع مختلط روی مجموعهٔ X باشد به طوری که تابعکهای محاسبه نقطه‌ای همه پیوسته باشند آنگاه یک هستهٔ مثبت یکتای K وجود دارد که دارای خاصیت مولدی زیر می‌باشد

برای هر تابع $f \in H$ و هر $y \in X$ داریم $K_y \in H$ و

$$f(y) = (f, K_y)$$

که در اینجا $(\circ, \circ)$ ضرب داخلی H می‌باشد.

به عکس، برای هر هستهٔ مثبت K روی مجموعهٔ X فضای هیلبرت یکتایی از توابع مختلط روی X وجود دارد به طوری که K هستهٔ مولد آن می‌باشد. فضای هیلبرت موردنظر را با $H(K)$ نمایش می‌دهیم. این فضا بست فضای تولید شده از ستونهای K می‌باشد. ضرب داخلی در $H(K)$ توسیع ضرب داخلی زیر می‌باشد

$$(K_y, K_x) = K(x, y)$$

که روی ستونهای K تعریف شده است.

برای هر $f \in H(K)$ هستهٔ $f \otimes f^*$ نمایشگر $(x, y) \to f(x)f(y)^*$ می‌باشد.

همچنین توابع $H(K)$ و نرم آنها را با یک شرط مثبت بودن می‌توان مشخص کرد، آنها توابع f روی X هستند که $r^z K - f \otimes f^* \geq \circ$ برای یک $r \geq \circ$

فرض کنید K یک هستهٔ مثبت باشد. تابع $\varphi : X \to \mathbb{C}$ را یک ضربگر $H = H(K)$ گوییم اگر $\varphi F \in H$ برای هر $f \in H$. تحت چنین شرایطی عملگر $f \to \varphi F$ روی $H(k)$ کراندار است و آن را با M_φ نمایشی می‌دهیم. همچنین می‌نویسیم $||\varphi||_{M(K)} = ||M_\varphi||$ که در اینجا $M(K)$ مجموعه همه ضربگر است با نرم عملگری.

عناصر $M(K)$ و نرم آنها را می‌توان با یک شرط مثبت بودن مشخص کرد، آنها توابع φ روی X هستند به طوری که $(r^z - \varphi \otimes \varphi^*)K \geq \circ$ برای یک $r \geq \circ$. اگر $\varphi \in M(k)$ مجموعهٔ تمام این rها بازهٔ $[||\varphi||_{M(k),\infty})$ می‌باشد. اگر $K > \circ$ در این صورت برای هر زیرمجموعهٔ E از X دوفضای $H(K_E)$ و $(M(K), M(K_E))H(K)$ در ارتباط منطقی با یکدیگر هستند. در حقیقت نگاشت $U : H(K_E) \to H(K)$ که با ضابطهٔ $U((K_E)_X) = K_x$ برای هر $x \in E$ تعریف شده هرگاه به فضای $H(K_E)$ توسیع داده شود $H(K_E)$ را به طور طولپای پوششی در $H(K)$ می‌نشاند.

اگر $K \geq \circ$ و $\varphi \in M(K)$ یک ضربگر $H(K)$ و φ_E تحدید φ به E باشد، آنگاه

$$(||\varphi||^z_{M(K)} - \varphi \otimes \varphi^*)K \geq \circ$$

اما $(||\varphi||^z_{M(K)} - \varphi_E \otimes \varphi_E^*)K_E$ تحدید این هسته می‌باشد و در نتیجه مثبت است، پس φ_E یک ضربگر $H(K_E)$ بوده و $||\varphi_E||_{M(K_E)} \leq ||\varphi||_{M(K)}$. بنابراین تحدید یک ضربگر $H(K)$ به E یک ضربگر $H(K_E)$

با نرم کمتر می‌باشد.
قضیهٔ درونیابی به وسیلهٔ توابع تحلیلی کراندار (H^∞) پیک ($Pick$) را اینک می‌توان به صورت زیر نوشت. برای مطالعهٔ بیشتر به [۶] مراجعه کنید.

۱.۳. قضیه. *تابع $\varphi \in H^\infty$ با $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ که n نقطه $z_i \in \mathbb{D}$، $i = 1, \cdots, n$ $W_i \in \mathbb{C}$ نقطه n را به $i = 1, \cdots, n$ می‌برد وجود دارد اگر و تنها اگر ماتریس*

$$[\frac{1 - w_i\overline{w_j}}{1 - z_i\overline{z_j}}]_{i,j=1}^n \geq 0$$

این قضیه را می‌توان در قالب هستهٔ مولد فضای هیلبرت نوشت. در اینجا نمادهای ما چنین است $X = \mathbb{D}$ گوی یکه باز، $k(x, y) = \frac{1}{1-x\overline{y}}$ هستهٔ زگو، $E = \{z_1, \cdots, z_n\}$ و K_E تحدید k به E و f تابعی که روی E به صورت $f(z_i) = w_i, i = 1, \cdots, n$ تعریف شده است. در این صورت $H(K) = H^2$ فضای هاردی و $M(K) = H^\infty$ فضای توابع تحلیلی کراندار روی $\mathbb{D}$ و $\|\cdot\|_{M(K)} = \|\cdot\|_\infty$ و ماتریس قضیهٔ پیک هسته متناهی $(1 - f \otimes f^*)K_E$ می‌باشد که مثبت بودن آن معادل است با $\|f\|_{M(K)} \leq 1$. بنابراین می‌توان قضیهٔ پیک را چنین نوشت.

۲.۳. قضیه. *یک ضربگر $\varphi \in M(K)$ با $\|\varphi\|_{M(K)} \leq 1$ که توسیع ضربگر $f \in M(K_E)$ است وجود دارد اگر و تنها اگر $\|f\|_{M(K_E)} \leq 1$.*

۴. عملگرهای درونیاب

دو خانواده از بردارهای $\{x_\alpha\}$ و $\{y_\alpha\}$ را در یک فضای هیلبرت درنظر بگیرید، یک عملگر درونیاب به عملگر T گوییم هرگاه $Tx_\alpha = y_\alpha$ برای هر α. شرط لازم و کافی روی دو خانوادهٔ $\{x_\alpha\}$ و $\{y_\alpha\}$ در یک فضای هیلبرت برای وجود عملگر T در یک آشیانهٔ $\mathcal{N}$ به طوری که $Tx_\alpha = y_\alpha$ برای هر α در [۱] داده شده است. توجه کنید که یک مجموعهٔ کاملاً منظم کامل از تصویرهای متعامد را یک آشیانه گویند. اگر N یک آشیانه در فضای هیلبرت H باشد، آنگاه

$$Alg\mathcal{N} = \{X \in B(H) : N^\perp \times N = 0, N \in \mathcal{N}\}$$

۱.۴. لم. *فرض کنید $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m$ بردارهایی در H باشد. قرار دهید*

$$V = span\{x_i : i = 1, \cdots, m\}$$

فرض کنید عدد حقیقی $M > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\|\sum_{i=1}^m c_i y_i\| \leq M\|\sum_{i=1}^m c_i x_i\|, c_i \in \mathbb{C}, i = 1, \cdots, m.$$

در این صورت عملگر $T : V \to H$ وجود دارد به طوری که $T_{x_i} = y_i$ برای $i = 1, 2, \cdots, m$ و $\|T\| \leq M$.

۲.۴. لم. فرض کنید A یک عملگر انقباضی مثبت ($\|A\| \leq 1$) در $B(H)$ باشد. نرم هرمیتی B را روی H چنین تعریف می‌کنیم $B(x,y) = < x, Ay >$ برای $x, y \in H$. فرض کنید V یک فضای متناهی- بعد روی H باشد. آنگاه زیرفضای بستهٔ V_0 از H وجود دارد به طوری که

$$V + V_0 = H, V \cap V_0 = \{0\}; \tag{1}$$

$$B(x,y) = 0, x \in V, y \in V_0. \tag{2}$$

اثبات. فرض کنید $V_1 = \{x \in H : B(x,y) = 0, \forall y \in V\} = (AV)^{\perp}$. نشان می‌دهیم $V + V_1 = H$ اگر $z \perp V + V_1$ آنگاه $z \in V^{\perp} \cap V_1^{\perp}$. چون $V_1 = (AV)^{\perp}$ از همبعد متناهی است $z = Av$ برای یک v در V داریم

$$< v, Av >= 0 \Rightarrow A^{\frac{1}{2}}v = 0 \Rightarrow Av = 0 \Rightarrow z = 0$$

قرار دهید $V_0 = V_1 \ominus (V \cap V_1)$. در این صورت

$$V + V_0 = V + V_1 = H, V \cap V_0 = (V \cap V_1) \cap V_0 = \{0\}$$

بنابراین شرط لم برقرار است.□

۳.۴. قضیه. فرض کنید

$$\mathcal{N} = \{0 = N_0, N_1, N_2, \cdots, N_K = I\}$$

یک آشیانهٔ متناهی در H باشد. فرض کنید $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m$ بردارهایی در H باشد و $M > 0$. در شرط زیر با یکدیگر معادل‌اند

(۱) عملگر T در $Alg\mathcal{N}$ وجود دارد به طوری که $Tx_i = y_i$، برای $\|\tau\| \leq M, i = 1, \cdots, m$.

(۲) برای اعداد مختلط $c_i \in \mathbb{C}$، $i = 1, \cdots, m$ شرط زیر برقرار است

$$\|N^{\perp}(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i)\| \leq M\|N^{\perp}(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i)\|, N \in \cap N$$

به طور کلی قضیه زیر را داریم

۴.۴. قضیه. فرض کنید $\mathcal{N}$ یک آشیانه در H باشد. فرض کنید $\{x_\alpha\}$ و $\{y_\alpha\}$ در خانواده از بردارهای H باشند و $M \geq 0$. دو شرط زیر با یکدیگر معادل‌اند

(۱) وجود دارد T در $Alg\mathcal{N}$ به طوری که $Tx_\alpha = y_\alpha$ برای هر α و $\|T\| \leq M$.

(۲)

$$\|N^\perp(\sum c_\alpha y_\alpha)\| \leq M\|N^\perp(\sum c_\alpha x_\alpha)\|$$

برای هر $N \in \mathcal{N}$ و برای هر خانوادهٔ $\{c_\alpha\}$ در $\mathbb{C}$ که غیر تعدادی متناهی بقیه صفر است.

مراجع

[1] Soc. M. Annousis, Interpolating operators in nest algebras, Proc. Amer. Math. 114(1992), 707-710.

[2] K. E. Atkinson, An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley and Sons, 1989.

[3] S. Axler, Interpolation by multipliers of the Dirichlet space, Quart. J. Math. Oxford 43(1992), 409-419.

[4] L. R. Dor, On sequences spanning a complex ℓ^1 space, Proc. Amer. Math. Soc. 47(1975), 515-516.

[5] P. Linz, Theoretical Numerical Analysis, John Wiley and Sons, 1979.

[6] P. Quiggin, For which reproducing kernel Hilbert spaces is Pick's theorem true, Integr Equat Oper th 16(1993), 244-266.

[7] H. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing ℓ^1 Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71(1974), 2411-2413.

[8] J. Stoer and R. Burlisch, Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag 1991.

شادروان کریم صدیقی
گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۱ (پاییز ۱۳۷۷)، صص. ۴۹ تا ۵۷

حدس فیلیپ هال و عکس آن

محمدرضا رجب‌زاده‌مقدم

چکیده

در این مقاله مفاهیم زیرگروه های لفظی[1] و حاشیه‌ای[2] یک گروه و خواص آنها نسبت به یک چندگونای $\mathcal{V}$ از گروهها معرفی می‌شوند که اولین بار فیلیپ هال در سال ۱۹۴۰ آنها را معرفی کرد. همچنین حدس مشهور هال را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم و قضایایی در این خصوص ارائه خواهیم کرد. به ویژه عکس مسألهٔ هال نیز بحث و بررسی خواهد شد.

۱. تعاریف و نتایج مقدماتی

فرض کنید F_∞ گروه آزاد روی مجموعهٔ شمارای نامتناهی $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ باشد. اگر $v = v(x_1, x_2, \cdots, x_r) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_r^{\alpha_r}$، که $\alpha_i \in \mathbb{Z}$، واژه‌ای از F_∞، G گروهی دلخواه و $g_1, g_2, \cdots, g_r$ عناصری اختیاری از G باشند، حاصل

$$v(g_1, g_2, \cdots, g_r) = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \cdots g_r^{\alpha_r}$$

مقدار[3] واژهٔ $v(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ در $(g_1, g_2, \cdots, g_r)$ از عناصر G نامیده می‌شود. چنانچه به ازای هر $g_1, g_2, \cdots, g_r \in G$، مقادیر واژهٔ $v = v(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ بدیهی باشد، یعنی $v(g_1, g_2, \cdots, g_r) = 1$، آنگاه اصطلاحاً گوئیم که واژهٔ v یک قانون[4] برای G است.

حال فرض کنید V زیر مجموعه‌ای ناتهی از واژه‌های گروه آزاد F_∞ باشد. در این صورت ردهٔ گروههای $\mathcal{V}$ را یک چندگونای[5] گروهها تعریف شده به وسیلهٔ مجموعهٔ قوانین V نامند، هرگاه تمام واژه‌های $v \in V$ برای هر گروه $G \in \mathcal{V}$ یک قانون باشد.

1) Verbal subgroup 2) Marginal subgroup 3) Value 4) Law 5) Variety

مثال

(الف). فرض کنید $V = \{[x_1, x_2]\}$ تنها شامل واژهٔ تعویضگر x_1 و x_2 باشد. دراین صورت چندگونای $\mathcal{V} = \mathcal{A}$، چندگونای تمام گروههای آبلی است.

(ب). فرض کنید $V = \{[x_1, x_2], x_3^n\}$. در این صورت چندگونای $\mathcal{V}$ شامل تمام گروههای آبلی است که نمای[1] آنها n را عاد می‌کنند. علاقمندان به موضوع چندگونای گروهها را به اچ.نویمن[2][۹] ارجاع می‌دهیم. در سال ۱۹۳۵،جی.برکهف[3]([۱۰] را ملاحظه کنید) یک شرط لازم و کافی برای آن که رده‌ای از گروهها یک چندگونا باشد به صورت زیر به دست آورد.

۱.۱. قضیه (جی. برکهف[۱۰]).*رده‌ای از گروهها یک چندگوناست اگر و تنها اگر نسبت به تشکیل زیرگروه، تصویر همریخت، و زیرحاصلضرب دکارتی بسته باشد.*

اگر G گروهی دلخواه باشد، آنگاه فیلیپ هال[4][۲] دو زیرگروه از G وابسته به چندگونای مفروض $\mathcal{V}$ به صورت زیر معرفی کرد:

$$V(G) = \langle V(g_1, g_2, \cdots, g_r) | v \in V, \quad g_1, g_2, \cdots, g_r \in G \rangle$$

و

$$V^*(G) = \{a \in G | v(g_1, \cdots, g_i a, \cdots, g_r) = v(g_1, \cdots, g_r), g_i \in G, 1 \leq i \leq r, v \in V\}$$

که به ترتیب زیرگروه لفظی و زیرگروه حاشیه‌ای G نامیده می‌شوند.

تبصره. به آسانی می‌توان نشان داد که $V(G)$ و $V^*(G)$ به ترتیب زیرگروههای کاملاً ناوردا[5] و مشخصه[6] در G هستند.

مثال.

(الف). اگر $v = [x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ واژهٔ تعویضگر باشد، آنگاه به آسانی ملاحظه می‌شود که

$$v(G) = [G, G] = G'$$
$$v^*(G) = Z(G)$$

به ترتیب زیرگروه مشتق[7] (یا تعویضگر) و مرکز G هستند.

(ب). فرض کنید $v = [x_1, x_2, \cdots, x_{c+1}]$ واژهٔ پوچتوانی باشد، در این صورت

$$v(G) = \gamma_{c+1}(G)$$
$$v^*(G) = Z_c(G)$$

1) Exponent 2) H.Neumann 3) G.Birkhoff 4) P. Hall 5) Fully-invariant
6) Characteristic 7) Derived subgroup

که در آن $\gamma_{c+1}(G) = [\underbrace{G, \cdots, G}_{(c+1)\text{مرتبه}}]$ جملهٔ $(c+1)$ـام سری مرکزی پائینی و $Z_c(G)$ جملهٔ cـام سری مرکزی بالایی G است.

۲.۱. تعریف. فرض کنید x_1، x_2، $\cdots$ واژه‌های تعویضگر خارجی با وزن[1] ۱ باشند، سپس به روش استقرایی فرض می‌کنیم تمام واژه‌های تعویضگرهای خارجی با وزن کمتر از n تعریف شده باشند. در این صورت

$$[v, w]$$

یک تعویضگر خارجی با وزن n است، اگر

$$\text{وزن}[v, w] = \text{وزن}\, v + \text{وزن}\, w = n$$

در سال ۱۹۶۴، ر.ف.ترنر- اسمیت[2] [۱۳] قضیهٔ زیر را در مورد شیوهٔ دیگری از بیان زیرگروه حاشیه‌ای نسبت به واژه‌های تعویضگر خارجی ارائه نمود.

۳.۱. قضیه. *فرض کنید $\mathcal{V}$ چندگونایی از گروهها باشد که توسط مجموعهٔ قوانینی از واژه‌های تعویضگر خارجی V تعریف شده است. در این صورت زیرگروه حاشیه‌ای گروه دلخواه G نسبت به چندگونای $\mathcal{V}$ به صورت زیر خواهد بود.*

$$V^*(G) = \{a \in G | v(g_1, \cdots, g_{i-1}, a, g_{i+1}, \cdots, g_r) = 1, \forall g_i \in G, 1 \leq i \leq r, \forall v \in V\}$$

۴.۱. تعریف. فرض کنید $v = v(x_1, \cdots, x_n)$ و $u = u(x_1, \cdots, x_t)$ دو واژهٔ دلخواه باشند. در این صورت ترکیب v و u به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v \circ u = v(u(x_1, \cdots, x_t), \cdots, u(x_{(s-1)t+1}, \cdots, x_{st}))$$

به ویژه، اگر $\gamma_{c_i+1} = [x_1, x_2, \cdots, x_{c_i+1}]$ واژهٔ پوچتوان باشد آنگاه حاصل ترکیب واژه‌های پوچتوان

$$\gamma_{c_1+1} \circ \gamma_{c_2+1} \circ \cdots \circ \gamma_{c_r+1}$$

را واژهٔ چند پوچتوان[3] نامند، و چندگونایی که توسط چنین واژه‌ای تعریف شود، چندگونای گروههای چند پوچتوان[4] نامیده می‌شود.

۲. حدس فیلیپ هال

فرض کنید $v(x_1, \cdots, x_r)$ واژه‌ای از گروه آزاد F_∞ روی مجموعهٔ شمارش‌پذیر نامتناهی $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ باشد. همچنین G را گروهی دلخواه اختیار کنید. در سال ۱۹۵۷، ف.هال [۳] حدسی در ارتباط با زیرگروه لفظی $v(G)$ و زیرگروه حاشیه‌ای $v^*(G)$ از گروه G نسبت به واژهٔ دلخواه v به شرح زیر ارائه کرد:

1) Outer commutator word of weight 1 2) R.F. Turner-Smith 3) Polynilpotent word
4) variety of polynilpotent groups

سئوال. اگر $n = |\frac{G}{v^*(G)}|$ متناهی باشد، آیا $|v(G)|$ متناهی است و $|v(G)||n$ ؟

البته در سال ۱۹۸۳، کلایمن[1] [۵]، مثال نقضی ارائه کرد و نادرستی عادپذیری حدس فوق را در حالت کلی نشان داد. به جز این مورد، حدس فوق هنوز در حالت کلی اثبات یا رد نشده است.

به هر حال اگر واژه‌ای مانند $v = v(x_1, \cdots, x_r)$ در حالت متناهی بودن حدس فوق صدق کند، یعنی: «اگر عامل حاشیه‌ای $G/v^*(G)$ متناهی باشد، آنگاه زیرگروه لفظی $v(G)$ نیز متناهی است»، گوئیم که v دارای خاصیت شور- بئر[2] است.

به همین نحو، اگر چندگونای V که توسط مجموعهٔ واژه‌های V تعریف می‌شود در شرط فوق صدق کند، چندگونای V نیز دارای خاصیت شور- بئر می‌باشد.

اگر $v = [x_1, x_2]$ واژهٔ تعویضگر باشد، ایسای شور در [۹] قضیهٔ زیر را اثبات کرد. البته اثباتی که در اینجا آمده است با آنچه که در [۹] بوده، بسیار متفاوت است.

۱.۲. قضیه. *اگر G گروهی دلخواه باشد و $|G/Z(G)| = n$ متناهی باشد، آنگاه G' متناهی است و مرتبه آن n- کراندار است.*

اثبات. فرض کنید $G = g_1Z \dot\cup g_2Z \dot\cup \cdots \dot\cup g_nZ$، که در آن $Z = Z(G)$ مرکز G است. واضح است که با استفاده از اتحادهای تعویضگرها داریم

$$G' = [G, G] = \langle [g_i, g_j] \quad | \quad 1 \leq i, j \leq n \rangle$$

از این رو زیرگروه مشتق G' مشمول زیرگروه تعویضگر $\langle g_1, \cdots, g_n \rangle$ است.

در نتیجه می‌توان فرض کرد که

$$G = \langle g_1, g_2, \cdots, g_n \rangle$$

یعنی گروه G متناهیاً تولید شده است. در این صورت بنا بر قضیهٔ معروف شرایر[3]، Z زیرگروهی از گروه متناهیاً تولید شده G است با شاخص متناهی n، در نتیجه Z متناهیاً تولید شده است، که به n بستگی دارد.

اینک به ازای هر $g \in G$ و هر $1 \leq i \leq n$، قرار می‌دهیم

$$gg_i = g_{i(g)}z_{i(g)}$$

که در آن $z_{i(g)} \in Z$ و $g_{i(g)} \in \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که نگاشت

$$\theta : G \longrightarrow Z$$

با ضابطهٔ $\theta(g) = \prod_{i=1}^{n} z_{i(g)}$، $g \in G$، یک همریختی است (که اصطلاحاً همریختی انتقال[4] نامیده می‌شود). بدیهی است

$$\theta(z) = z^n, \quad \forall z \in Z.$$

1) Yu. G. Kleiman 2) Schur-Baer property 3) Schreier's Theorem 4) Transfer homomorphism

از آبلی بودن Z نتیجه می‌شود که $G' \subseteq Ker\theta$. بنابراین

$$1 = \theta(G' \cap Z) = (G' \cap Z)^n$$

یعنی $G' \cap Z$ دارای نمای [1] متناهی است که n را عاد می‌کند. حال $G' \cap Z$ زیرگروهی از گروه آبلی متناهیاً تولید شدهٔ Z است، و در نتیجه خود $G' \cap Z$ نیز متناهیاً تولید می‌شود که به n بستگی دارد. از این رو زیرگروه $G' \cap Z$، که آبلی متناهیاً تولید شده و با نمای متناهی است، متناهی خواهد بود. از طرفی داریم

$$[G' : G' \cap Z] \leq [G : Z] = n$$

زیرا بنا به قضیهٔ سوم یکریختی $G'/G' \cap Z \simeq G'Z/Z \leq G/Z$. لذا گروه G' نیز متناهی است، که وابسته به n است و حکم برقرار است.

ریاضیدانان بسیاری در جهت اثبات این مسأله تلاش کرده‌اند که به منظور آشنایی خوانندگان به موضوع، صورت بعضی از قضایا را به شرح زیر بیان می‌کنیم.

۲.۲. قضیه(ر. بئر[2] [۱]). *اگر G گروهی دلخواه باشد، که به ازای $c > 1$، $|\frac{G}{Z_c(G)}| = n$ متناهی است، آنگاه $|\gamma_{c+1}(G)|$ نیز متناهی و n، عکراندار است.*

۳.۲. قضیه (پ. استرود[3] [۱۱]). *فرض کنید v و w دو واژه باشند که به ازای هر گروه G دارای خاصیت شور- بئر هستند. در این صورت واژهٔ تعویضگر $[v, w]$ نیز دارای خاصیت شور- بئر است.*

گروه G را چنددوری- در- متناهی [4] نامند، اگر زیرگروهی نرمال مانند $N \lhd G$ وجود داشته باشند، به طوری که N چنددوری و $\frac{G}{N}$ متناهی است.

توجه شود که می‌توان با محدود کردن گروهها نشان داد که هر واژهٔ دلخواه دارای خاصیت شور- بئر است. دو قضیه زیر گویای این واقعیت هستند.

۴.۲. قضیه (ف. هال [۳]). *اگر G گروهی چند دوری -در- متناهی باشد، آنگاه هر واژهٔ دلخواه V دارای خاصیت شور-بئر است.*

۵.۲. تعریف گروه G را به طور مانده‌ای متناهی [5] نامیم، اگر به ازای هر $g \in G$، زیرگروه نرمالی در G مانند N وجود داشته باشد به قسمی که $g \notin N$ و $\frac{G}{N}$ متناهی باشد.

۶.۲. قضیه (ر.ف.ترنر- اسمیت [۱۳]). *اگر G و تمام گروههای خارج قسمت آن به طور مانده‌ای متناهی باشند، آنگاه هر واژهٔ دلخواه v نسبت به چنین گروههایی دارای خاصیت شور- بئر است.*

۷.۲. قضیه (ی. مرزلیاکوف[6] [۶]). *اگر G گروهی خطی روی یک میدان باشد، آنگاه هر واژهٔ v نسبت به این گروه دارای خاصیت شور- بئر است.*

اینک به منظور بیان قضایایی با کران دقیق برای مرتبهٔ زیرگروه لفظی به تعریف زیر نیاز داریم.

1) Exponent 2) R. Baer 3) P.Stroud 4) Polycyclic-by-finite 5) Residually finite
6) I.Merzljakov

۸.۲. تعریف. فرض کنید v یک واژهٔ تعویضگر خارجی و G گروهی دلخواه باشد. گوییم که v دارای خاصیت p^n- شور-بتر است، اگر به ازای هر عدد اول p و هر عدد طبیعی n، فرض $|G/v^*(G)| = p^n$ نتیجه دهد که $|v(G)| \leq p^{f(n)}$، که در آن

$$p^{f(n)} = |vM(\mathbb{Z}_p^n)|$$

و $\mathbb{Z}_p^n = \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{n\text{-مرتبه}}$ و $vM(\mathbb{Z}_p^n)$ ناوردای بتر است، برای اطلاعات بیشتر در این مورد به [۷] رجوع شود.

اینک قادریم دو قضیهٔ زیر را بیان کنیم که در جهت تعیین کران دقیقی از زیرگروه لفظی است.

۹.۲. قضیه (م.ر.رجب‌زاده‌مقدم [۷]). *فرض کنید u و v دو واژهٔ تعویضگر خارجی و $w = u \circ v$ ترکیب آنها باشد. اگر u و v دارای خاصیت p^n- شور- بتر باشند، چنین است واژه ترکیب w.*

۱۰.۲. قضیه (م.ر.رجب‌زاده‌مقدم [۷]). *هر واژهٔ تعویضگر خارجی v دارای خاصیت p^n- شور- بتر می‌باشد.*

قضیهٔ فوق دارای نتیجهٔ زیر است که واژهٔ تعویضگر خارجی v را واژهٔ تعویضگر $[x_1, x_2]$ در نظر بگیریم.

۱۱.۲. نتیجه (ج.وایگلد[1] [۱۴]). *فرض کنید G گروهی دلخواه و Z مرکز آن باشد. اگر $|G/Z| = p^n$، آنگاه $|G'| \leq p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.*

البته خواننده را جهت ملاحظهٔ نتایج جامعتر به [۸] ارجاع می‌دهیم.

۳. عکس حدس فیلیپ هال

فرض کنید $v = v(x_1, \cdots, x_r)$ واژه‌ای دلخواه از گروه آزاد F_∞، و G گروهی دلخواه باشد. می‌توان عکس حدس هال را به صورت زیر بیان کرد:

«اگر زیرگروه لفظی $v(G)$ متناهی باشد، آیا نتیجه می‌دهد که $\frac{G}{v^*(G)}$ نیز متناهی است؟» یا می‌توان آن را به عنوان عکس خاصیت شور- بتر در نظر گرفت.

مطمئناً این سئوال در حالت کلی نادرست است. مثال نقض زیر نشان می‌دهد که عکس قضیهٔ ۱.۲ نادرست می‌باشد.

مثال نقض. فرض کنید

$$G = \langle a_i, b_i | i = 1, 2, \cdots, [a_i, a_j] = [b_i, b_j] = [a_i, b_j] = 1,$$
$$i \neq j; [a_i, b_j] = c, [a_i, c] = [b_i, c] = 1; \forall i; c^2 = 1\rangle$$

به آسانی ملاحظه می‌شود $G' = \langle c | c^2 = 1\rangle$، که‌گروهی است دوری از مرتبهٔ ۲ و همچنین $Z(G) =< c >$، که دارای شاخص نامتناهی در G است، یعنی $G/Z(G)$ نامتناهی است. به هرحال می‌توان با فرض اضافی نتیجهٔ ضعیفتری از عکس حدس هال به‌دست آورد.

۱.۳. قضیه. *فرض کنید G گروهی دلخواه و مجموعهٔ تمام تعویضگرهای $\{[g, h] \quad | g, h \in G\}$ شامل n عنصر باشد. در این صورت $G/Z_2(G)$ متناهی است.*

برای اثبات قضیهٔ فوق، ابتدا لم زیر را می‌آوریم که اثباتش به سادگی دیده می‌شود.یادآور می‌شویم که به ازای $a \in G$، نماد $C_G(a)$ نشانگر مرکز سازه a در G است.

1) J.Wiegold

برای اثبات قضیهٔ فوق، ابتدا لم زیر را می‌آوریم که اثباتش به سادگی دیده می‌شود. یادآور می‌شویم که به ازای $a \in G$، نماد $C_G(a)$ نشانگر مرکز سازه a در G است.

۲.۳. لم. *فرض کنید G گروهی دلخواه و a عنصری از G باشد. در این صورت تناظری یک‌ـ به‌ـ یک بین مجموعهٔ $\{[g,a] | g \in G\}$ و مجموعهٔ همرده‌های راست $\{C_G(a)g | g \in G\}$ وجود دارد.*

حال می‌توان قضیه را اثبات نمود.

اثبات قضیهٔ ۱.۳. بنابر لم ۲.۳ و فرض قضیه، به ازای هر $g \in G$،

$$[G : C_G(g)] \leq n$$

فرض کنید c_1، c_2، ...، c_n تمام تعویضگرهای عناصر G باشند. به ازای هر c_i، مجموعهٔ $\{b_{ij}\}$ را نماینده‌های ثابت همرده‌های $C_G(c_i)$ در G در نظر می‌گیریم. چون $[G : C_G(c_i)] \leq n$، در نتیجه تعداد نماینده‌های b_{ij} بایستی nـکراندار باشد، که $1 \leq i \leq n$. بنابر لم ۲.۳، به ازای هر $g \in G$ و هر c_i، نماینده‌ای متناظر مانند $b_{ij(g)}$ وجود دارد به قسمی که

$$[g, c_i] = [b_{ij(g)}, c_i] \tag{1}$$

فرض کنید

$$M = (\cap_{i,j} C_G(b_{ij})) \cap (\cap_t C_G(c_t))$$

که در آن اشتراکها روی تمام b_{ij}ها و c_tها تغییر می‌کنند. ملاحظه می‌شود که شاخص $[G : M]$ متناهی و nـکراندار است، زیرا شاخص هر مرکزساز و تعداد مرکز سازها هر دو متناهی و nـکراندار هستند.

حال برای اثبات این که $G/Z_2(G)$ متناهی است، کافی است نشان دهیم که $M \subseteq Z_2(G)$. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم که به ازای هر $m \in M$ و هر $g_1, g_2 \in G$،

$$[m, g_1, g_2] = 1$$

واضح است که تعویضگر $[m, g_1]$ با یکی از تعویضگرهای c_1، c_2، ...، یا c_n برابر است. از این رو با استفاده از (۱)، داریم:

$$[m, g_1, g_2] = [c_i, g_2] = [c_i, b_{ij}] = [m, g_1, b_{ij}] \tag{2}$$

حال با استفاده از اتحاد ویت،

$$[m, g_1, b_{ij}]^{g_1^{-1}} [g_1^{-1}, b_{ij}^{-1}, m]^{b_{ij}} [b_{ij}, m^{-1}, g_1^{-1}]^m = 1$$

بدیهی است که با فرض $[g_1^{-1}, b_{ij}^{-1}] = c_t$ و چون $m \in C_G(c_t)$، حاصل می‌شود

$$[g_1^{-1}, b_{ij}^{-1}, m] = [c_t, m] = 1$$

به همین نحو چون $m \in C_G(b_{ij})$،

$$[b_{ij}, m^{-1}, g_1^{-1}] = 1$$

بنابراین $[m, g_1, b_{ij}]^{g_1^{-1}} = 1$، که نتیجه می‌شود $[m, g_1, b_{ij}] = 1$ که از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود $[m, g_1, g_2] = 1$. یعنی $M \subseteq Z_2(G)$ و لذا $\frac{G}{Z_2(G)}$ متناهی است که حکم برقرار می‌شود. □

تبصره. در قضیهٔ ۱.۳ ، اگر فرض دیگری اضافه کنیم که گروه G متناهیاً تولید شده نیز هست، می‌توان نشان داد که $[G : Z(G)]$ متناهی است.

۳.۳. قضیه. فرض کنید G گروهی متناهیاً تولید شدهٔ t-مولدی باشد و مجموعهٔ تعویضگرهای $\{[g,h] \mid g,h \in G\}$ متناهی و برابر n باشد. در این صورت $[G : Z(G)]$ نیز متناهی است.

اثبات. با استفاده از لم ۲.۳، نتیجه می‌شود که به ازای هر $g \in G$،

$$[G : C_G(g)] \leq n$$

فرض کنید $G = \langle a_1, a_2, \cdots, a_t \rangle$. در این صورت $\cap_{i=1}^{t} C_G(a_i)$ دارای شاخص متناهی و (n,t)-کراندار در G است . بدیهی است که

$$\bigcap_{i=1}^{t} C_G(a_i) \subseteq Z(G).$$

در نتیجه $[G : Z(G)]$ نیز متناهی است و حکم برقرار می‌شود.□

تبصره. یادآور می‌شویم که نتایج دیگری نیز در این مورد وجود دارد که خواننده را به مراجع [۳] و [۴] ارجاع می‌دهیم.

مراجع

[1] Baer, R. ,"Representation of groups as quotient groups I",Trans. Amer. Math. Soc.58 (1945), 295-419.

[2] Math. 182 (1940), "Verbal and marginal Subgroups", J.Reine Angew. Hall, P., 156-157.

[3] Hall, P., "Nilpotent groups", Canad. Math. Cong. Univ. Algebra, and Queen Mary College Math. Notes (1970).

[4] Khokhro, E.I.,"Nilpotent groups and their automorphisms", Walter de Gruyter (1993).

[5] Kleiman, Yu.G., "Basis of identities of some products of varieties of groups (Russian)", Sibirsk Math.Zh. no.1, 26 (1985), 104-123.

[6] Merzljakov, Yu.I.,"Verbal and marginal subgroups of linear groups", Dokl. Akad. Nauk. 177 (1967), 1008-1011, Soviet Dokl.8 (1967), 1538-1541.

[7] Moghaddam, M.R.R., "On the Schur-Baer property", J. Austral. Math. Soc. (Series A)31(1981), 343-361.

[8] Moghaddam, M.R.R. and Salemkar, A.R.,"Some remarks on generalized Schur pairs", Arch.Math.71 (1998) 12-16.

[9] Neumann, H., "Varieties of groups", Springer-Verlag, Berlin (1967).

[10] Robinson, D.J.S., "A course in the Theory of Groups", New York- Heidelberg-Berlin: Springer (1980).

[11] Schur, I., "Uber die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare substitutionen." J.Reine Angew. Math. 127 (1904),20-50.

[12] Stroud, P.W., "On a property of verbal and marginal subgroups", Proc. Cambridge Philos. Soc. 61 (1965), 41-84.

[13] Turner-Smith, R.F. "Finiteness conditions for verbal subgroups", J.London Math. Soc. 41 (1966), 166-176.

[14] Wiegold, J., "Multiplicators and groups with finite central factor-groups", Math.Z.89 (1965), 345-347.

محمدرضا رجب‌زاده‌مقدم
دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۱ (پاییز ۱۳۷۷)، صص. ۵۹ تا ۶۱

یک محک تقارن برای تزویج در گروههای متناهی

سولومون دبلیو گولومب

یک روش استاندارد در نظریهٔ گروههای متناهی، افزاز کردن عناصر گروه به روشی طبیعی است. دو افراز مفید یک گروه عبارتند از افراز به هم‌مجموعه‌ها و افراز به رده‌های تزویج. قضیهٔ لاگرانژ و گروههای عامل دو نتیجهٔ افراز یک گروه به هم‌مجموعه‌ها است. معادلهٔ رده‌ای و قضایای سیلو دو نتیجهٔ افراز یک گروه به رده‌های تزویج است (برای جزئیات بیشتر، به عنوان مثال [۱] را ملاحظه کنید.) در این یادداشت محکی ساده برای تزویج ارائه می‌دهیم.

تعریف. دو عضو a و b در گروه G مزدوج نامیده می‌شوند هرگاه به ازای عضوی مانند g در G، $b = g^{-1}ag$.

این تعریف چند نتیجهٔ ساده دارد.

۱. تزویج، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی G است و نسبت به این رابطه اعضای G به رده‌های تزویج افراز می‌شوند.

۲. در یک گروه جابجائی، ردهٔ تزویج هر عنصر مجموعه یک عضوی خود آن عنصر است.

۳. در یک گروه غیرجابه‌جائی، عنصرهمانی خودش به تنهائی در یک ردهٔ تزویج است (زیرا به ازای هر g، $g^{-1}eg = e$) و بطور کلی‌تر، یک عنصر گروهی c خودش به تنهائی در یک ردهٔ تزویج است اگر وتنها اگر c با هر عنصر این گروه جابجا شود.

۴. اگر G متناهی باشد، تعداد اعضای هر ردهٔ تزویج در G مرتبهٔ G (تعداد عناصر در G) را می‌شمارد.

برای تعیین این که عناصر مفروض a و b در G مزدوجند، مسلماً کافی است تا $g^{-1}ag$ را به ازای هر g در G محاسبه کنیم و ملاحظه کنیم که آیا یکی از اینها با b برابر است. برای تعیین رده‌های تزویج در G، کافی است به ازای هر g و a در G، $g^{-1}ag$ را محاسبه کنیم. هدف این مقاله آن است که نشان دهیم که این محاسبات اگر جدول گروه (یاجدول ضرب) G قبلاً در دسترس باشد غیرضروری‌اند. اگر چه بیان و اثبات این محک برای تزویج بسیار ساده است به نظر می‌رسد که نسلهایی از نویسندگان کتابهای درسی بطور کلی برای جبر جدید و به ویژه برای نظریهٔ گروهها از آن اجتناب ورزیده‌اند.

محک. دو عنصر a و b از یک گروه متناهی G مزدوجند اگر و تنها اگر بتوان آنها را نسبت به قطر اصلی جدول این گروه در وضعیتی متقارن یافت.

این محک را به صورت زیر بازگو می‌کنیم:

قضیه ۱. عناصر متمایز a و b در G مزدوجند اگر و فقط اگر عناصر u و v در G موجود باشند به‌طوری که $a = uv$ و $b = vu$. (از این رو، به‌ازای عناصری مانند u و v در G، a در سطر u و ستون v واقع است، در حالی که b در سطر v و ستون u از جدول این گروه قرار دارد.)

اثبات. حاصلضربهای uv و vu همواره عناصری مزدوج در G هستند، زیرا

$$u^{-1}(uv)u = (u^{-1}u)(vu) = vu.$$

برعکس، به ازای عناصر مزدوج a و b در G، عنصری مانند g در G وجود دارد به طوری که $b = g^{-1}ag$. با فرض $u = g$ و $v = g^{-1}a$ داریم $uv = g(g^{-1}a) = a$ و $vu = (g^{-1}a)g = b$. در نتیجه اثبات کامل است.□

مشاهدهٔ این مطلب که عنصر a از گروه G در هر سطر g در ستون $g^{-1}a$ در جدول گروه ظاهر می‌شود مفید است.

شکل ۱ جدول ضرب گروه دو وجهی مثلث متساوی‌الاضلاع یعنی D_3، را نشان می‌دهد که با گروه تمامی جایگشتهای روی سه نماد یعنی S_3، یکریخت است. (سه رأس مثلث متساوی الاضلاع در همهٔ حالتهای ممکن با عناصر D_3 جایگشت می‌شوند، از این رو این گروه با S_3 یکریخت است.) این کوچکترین گروه غیرجابه‌جائی است. در این شکل، I عنصر همانی است؛ R_1 و R_2 به ترتیب دورانهای به اندازهٔ ۱۲۰° و ۲۴۰° هستند؛ و A، B و

D_3	I	R_1	R_2	A	B	C
I	I	R_1	R_2	A	B	C
R_1	R_1	R_2	I	B	C	A
R_2	R_2	I	R_1	C	A	B
A	A	C	B	I	R_2	R_1
B	B	A	C	R_1	I	R_2
C	C	B	A	R_2	R_1	I

شکل ۱۷. جدول گروه D_3، که در آن زوجهای با وضعیت متقارن (B, C)، (A, B) و (A, C) برجسته‌تر نشان داده شده‌اند. بنابر قضیهٔ ۱، به سادگی ملاحظه می‌شود که رده‌های تزویج در D_3 عبارتند از: $\{I\}$، $\{R_1, R_2\}$، $\{A, B, C\}$.

C انعکاس نسبت به محورهای مثلث هستند. توجه می‌کنیم که R_1 و R_2 سه مرتبه بطور متقارن در جدول واقع شده‌اند؛ و هریک از زوجهای (A, B)، (A, C) و (B, C) دو مرتبه در جدول در وضعیتهای متقارن هستند؛ و I فقط با خودش متقارن است. لذا، رده‌های تزویج در D_3 عبارتند از $\{I\}$، $\{R_1, R_2\}$ و $\{A, B, C\}$.

هر جفت از عناصر مزدوج a، b به شرط $a \neq b$، حداقل دوبار در موقعیتهای متقارن در جدول ضرب G ظاهر می‌شوند. تعداد دقیق پدیدار شدن جفتهای a و b از عناصر مزدوج در موقعیتهای متقارن در جدول ضرب G در قضیهٔ زیر ارائه می‌شود:

قضیهٔ ۲. اگر a و b دو عنصر مزدوج گروه متناهی G باشند و $a \neq b$، آنگاه تعداد $r = \frac{n}{k}$ جفت $\{u_i, v_i\}$ در $G \times G$ وجود دارد بطوری که $u_i v_i = a$ و $v_i u_i = b$، که در آن n مرتبهٔ G است، و k تعداد اعضای ردهٔ تزویجی است که b, a به آن تعلق دارند.

اثبات. فرض کنید a و b به ردهٔ تزویج K با k عنصر از گروه G با n عنصر تعلق دارند و $C(a)$ زیر مجموعهٔ عناصری از G باشد به‌طوری که به‌ازای هر h در $C(a)$، $h^{-1}ah = a$. روشن است که $C(a)$ زیرگروهی از G است. فرض کنید g_1 عنصری از G باشد به‌طوری که $g_1^{-1}ag_1 = b$ در این صورت هر عضو g_i از هم‌مجموعهٔ راست $C(a)g_1$ از $C(a)$ نیز نتیجه می‌دهد $g_i^{-1}ag_i = b$، و هم مجموعه‌های راست $C(a)$ در تناظر یک به‌یک با عناصر K هستند. لذا، مرتبهٔ r از $C(a)$ عبارت است از $\frac{n}{k}$. فرض کنید عناصر $C(a)$، $\{h_1, h_2, \cdots, h_r\}$ باشد. آنگاه عناصر هم مجموعهٔ راست $C(a)g_1$ عبارت است از $\{g_1, g_2, \cdots, g_r\}$ که در آن به ازای $i = 1, 2, \cdots, r$، $g_i = h_i g_1$. توجه کنید که به ازای هر $i = 1, 2, \cdots, r$،

$$g_i^{-1}ag_i = (h_i g_1)^{-1}a(h_i g_1) = g_1^{-1}(h_i^{-1}ah_i)g_1 = g_1^{-1}ag_1 = b$$

فرض کنید $u_i = g_i$ و $v_i = g_i^{-1}a$. آنگاه به ازای هر i، $u_i v_i = a$ و $v_i u_i = b$ که در آن $u_i = g_i$، r عنصر متمایز $C(a)g_1$ را می‌پیماید. برعکس، فرض کنید دو عضو دلخواه u و v در G موجودند که $uv = a$ و $vu = b$. آنگاه $v = u^{-1}a$، و $vu = u^{-1}au = b$؛ بنابراین u یک عنصر g در هم‌مجموعهٔ $C(a)g_1$ است.□

تبصره. در شکل ۱، ملاحظه کردیم که هر یک از جفت‌های (A, B)، (A, C) و (B, C)، دوبار در وضعیتهای متقارن نسبت به قطر اصلی رخ می‌دهند، در حالی که جفت (R_1, R_2) سه‌بار رخ می‌دهد. از نقطه‌نظر قضیه ۲، این مطلب متناظر با این واقعیت است که $\{A, B, C\}$ یک ردهٔ تزویج با ۳ عنصر است و $\frac{6}{2} = 2$؛ در حالی که $\{R_1, R_2\}$ یک ردهٔ تزویج با دو عنصر است و $\frac{6}{2} = 3$.

مراجع

[1] Jacobson, N., *Basic Algebra I*, W.H. Freeman, San Francisco, CA, 1974.

ترجمهٔ کریم احمدی‌دلیر
دانشگاه آزاد اسلامی تبریز، گروه ریاضی

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۱ (پاییز ۱۳۷۷)، صص. ۶۳ تا ۶۸

نقد کتاب

محمدرضا مشکانی

تجزیه و تحلیل سریهای زمانی
تألیف جاناتان دی. کرایر
ترجمه دکتر حسینعلی نیرومند
مؤسسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی (مشهد)، آذر ۱۳۷۱.

آنچه در زیر می‌آید حاصل نگاهی نقادانه بر ترجمهٔ کتاب «تحلیل سریهای زمانی» اثر جاناتان دی.کرایر (۱۹۸۶) است. این کتاب در واقع خلاصه‌ای از دو باب اول کتاب «تحلیل سریهای زمانی: پیش‌بینی و کنترل» تألیف باکس وجنکینز (۱۹۷۶) است. البته، مؤلف مطالب مختصر دیگری نیز از سایر مباحث سریهای زمانی به غیر از مدلهای اتورگرسیو- میانگین متحرک بر آن افزوده است. بنابر تجربه‌ای که از تدریس این کتاب به زبان اصلی داریم، آن را کتابی موجز، رسا، و مناسب برای یک درس کاربردی در زمینهٔ تحلیل سریهای زمانی از دیدگاه حوزهٔ زمان یافتیم، زیرا نه چندان دستوری است که خواننده از مبانی نظری غافل بماند و نه چندان نظری است که خواننده از طرز کار بست مدلها در عمل ناتوان باشد. بویژه، گنجاندن برنامه‌های کامپیوتری در متن درس، مزیتی است که کتابهای دیگر فاقد آن هستند.

کوشش همکار ارجمند برای برگرداندن این کتاب به زبان فارسی، در هر حال، کوششی مأجور است. اما اگر با دقت بیشتر نارساییهایی را که در زیر به طور نمونه‌ای بر می‌شمریم و متأسفانه کم هم نیستند، رفع می‌کردند، دعای خیر مدرسان و دانشجویان بیشتر بدرقهٔ راه ایشان می‌شد.

از آنجا که در اذهان عامه، به طور کلی نگرشی منفی نسبت به نقد و انتقاد وجود دارد، ناقد لازم دید که قبل از پرداختن به ذکر نارساییها، به روشن کردن چند نکته بپردازد. هدف ازاین نقد کاملاً خیرخواهانه و دور از هرگونه غرض و مرض است. با آنکه به کار مترجم و زحمتی که کشیده‌اند ارج می‌گذاریم، برآنیم که تذکر برخی نارساییها و پیشنهاد اصلاح آنها به نفع جامعهٔ علمی آمار است و مترجم نیز با عنایت به آنها، چاپ دوم کتاب را آراسته‌تر و درست‌تر عرضه خواهد کرد. در این خصوص، از همهٔ خوانندگان نیز انتظار داریم که توجه فرمایند: چه گفته می‌شود، نه آنکه چه کسی می‌گوید. از جملهٔ مطالبی که بحث خواهد شد رعایت نکات دستوری، فنی و علمی است، که هر مترجمی مخصوصاً مترجمین کتابهای علمی باید بدانها متعهد باشند. دیگر آنکه ناقد گمان می‌برد که ارائهٔ نقدی بی‌غرض و علمی، که هر نکتهٔ آن مستند به شواهد و مدارک باشد، راه را برای سایر ناقدان و رواج فرهنگ نقد و بررسی، دست کم در انتشارات جامعهٔ آماری، بگشاید. امید می‌رود که از این رهگذر کیفیت انتشارات آماری به تدریج بالا برود و شاهد

اعتلای آنها باشیم.

هدف از ترجمهٔ کتابهای علمی، بویژه کتابهای درسی، چیست و چه انتظاری از مترجمین این کتابها داریم؟ جواب این سؤالها ضوابطی را مطرح می‌کنند که می‌توانند در نقد و بررسی کتابهای ترجمه شده به کار آیند. حقیقت آن است که اوضاع فعلی دانشگاهها و انواع اشتغالات وقتگیر و ساعتهای زیاد تدریس مانع از آن می‌شود که همکاران بتوانند در زمینه‌هایی به پژوهش و مطالعهٔ عمیق بپردازند و با پیشرفتهای آن زمینه همگام باشند. این وضع اجازه نمی‌دهد که کتابهای تألیف شدهٔ خوب در دسترس داشته باشیم. کمبود منابع و مراجع برای تألیف کتب علمی نیز از جملهٔ عوامل بازدارنده‌اند. تعداد انگشت‌شماری از همکاران نیز که از لحاظ علمی دارای ظرفیت تألیف هستند، ظاهراً علاقه‌ای به نوشتن ندارند.

ناچار، برگردان کتابهای علمی، بویژه کتابهای درسی دانشگاهی اقدامی مؤثر برای تهیهٔ متون درسی است. گرانی فوق‌العادهٔ سفارش کتاب خارجی نیز بر ضرورت ترجمهٔ کتابهای خوب می‌افزاید و این فعالیت را امری شایسته و اقتصادی می‌سازد زیرا تعداد زیادی از خوانندگان این گونه کتابها از این رهگذر به منابعی دست می‌یابند که در غیر این صورت هرگز به دستشان نمی‌رسید. اکنون که مترجمین کتابهای علمی به چنین کار ارزنده‌ای می‌پردازند، چه باید بکنند تا نتیجه زحمتهای طاقت‌فرسای آنها به شکلی زیبا، آراسته، و مهمتر از همه مفید به حال دانش‌پژوهان باشد؟ به گمان ناقد رعایت سه اصل زیر کمترین انتظاری است که از مترجم می توان داشت:

۱ـ درک دقیق مطالب علمی کتاب مورد ترجمه، به گونه‌ای که بتواند با توانایی آن را به دیگران درس دهد.

۲ـ انتقال درست مفاهیم و مطالب علمی کتاب به زبان فارسی سره، به نحوی که خوانندهٔ واجد شرایط بتواند آنها را درک و هضم کند. اگر مطلبی را خواننده نتواند درک کند. تنها به خاطر پیچیدگی علمی مطلب باشد که مستلزم توضیح بیشتر است، نه به خاطر نادرستی ترجمه، و یا پیچیدگی و آشفتگی جمله‌های مترجم.

۳ـ رعایت امانت در ترجمه، به طوری که هویت کتاب و سبک نویسنده محفوظ بماند.

درکنار این اصول، چاپی زیبا، منقح و عاری از غلطهای چاپی نیز به عهدهٔ ناشران است. بدیهی است که رسیدن به این هدفها کاری سخت و پر زحمت است. حتی غلط گیری و نظارت بر چاپ نیز اغلب به عهدهٔ مترجم واگذار می‌شود. اما در صورت رعایت آنها کتابی زیبا، خواندنی و ماندنی خواهیم داشت که چون طبق زر خواهند برد.

اکنون که قصد و نیت خود از نقد و بررسی، و نیز ضوابط و معیارهای سنجش توفیق مترجم را بیان کردیم، به اصل کار یعنی ارزیابی میزان توفیق مترجم کتاب فوق‌الذکر می‌پردازیم.

برای نیل به این هدف، لازم است که مقابله‌ای دقیق بین متن اصلی به زبان انگلیسی و متن ترجمه شده به زبان فارسی به عمل آید. متن انگلیسی کتاب ۲۸۶ صفحه به اضافهٔ ۱۱ صفحه مقدمات است. متن فارسی ۴۰۲ صفحه به اضافهٔ ۱۳ صفحه مقدمات است. مقابلهٔ سطر به سطر این دو متن، کار ویراستاری موظف است و از عهده ناقد بیرون است. از طرف دیگر، یکی از ابزارهای کار ما آمارشناسان نمونه‌گیری است. با یک نمونه‌گیری سیستماتیک تصادفی ساده، ۳۰ صفحه از متن اصلی را نمونه گرفتیم و با ترجمهٔ فارسی آن مقابله کردیم. حاصل کار در یک نگاه سریع به قرار زیر است:

۳۰ مورد برابر نهاده‌های نادرست، نامناسب، یا ناسازگار با متن اصلی.

۲۸ مورد ترجمهٔ نادرست از مفهوم متن اصلی به زبان فارسی.

۱۵ مورد از قلم‌افتادگی و ترجمه نکردن واژه‌ها، یا جمله‌هایی از کتاب.

۱۵ مورد ناسازگاریهای دیگر از قبیل درهم ریختن پاراگرافها.

۱۵ مورد غلط تایپی واژه‌ها، فرمولها، و پانوشتها.

مهمترین موارد، ترجمهٔ نادرست مفاهیم علمی است که به لحاظ القای مطلبی نادرست به دانشجو، بدترین گناه برای هر مترجم است. با توجه به نحوهٔ نمونه‌گیری تصادفی ساده فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد نسبت واقعی صفحه‌هایی از کتاب که در آنها مفهومی غلط یا تا حدی نادرست ترجمه شده است، عبارت است از (۰٫۷۴ و ۰٫۴۰).

با ذکر تعداد موارد نادرست، یا ناسازگار نمی‌توان کیفیت ترجمه را به خواننده منتقل کرد. از این رو در زیر از هر یک از گروههای فوق چند نمونه را به دقت بررسی و پیشنهادهای خود را بیان می‌کنیم. فهرست کامل این موارد خارج از حوصلهٔ یک مقاله است. در زیر ص به صفحهٔ متن فارسی اشاره می‌کند.

نمونه‌هایی از برابر نهاده‌های نادرست، نامناسب، یا ناسازگار با متن اصلی

صص پنج و۳۲، غیرتصادفی بودن به جای Deterministic؛ که در جاهای دیگر مثلاً ص ۳۲۳، قطعی بکار رفته است. البته، قطعی بهتر است.

صص ۸ و ۳۳، طبیعت به جای Inclination؛ که باید زاویهٔ تمایل یا زاویهٔ انحراف بکار می‌رفت.

ص ۹ و...، برای Subcommand سه برابر نهاده: زیرفرمان، فرمان کوچک، و فرمان فرعی آورده‌اند. زیرفرمان بهتر از آن دو است.

ص ۲۲ و...، برای Differenced برابر نهادهٔ تفاضلی شده آورده‌اند همان‌طور که می‌گوییم مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری، چرا نگوییم تفاضل‌گیری شده؟

ص ۵۶ و...، Normal Score را اندازهٔ نرمال گفته‌اند، معنی آماری آن چندک توزیع نرمال است و نمرهٔ نرمال برای آن مناسبتر است. زیرا اندازه را برای Size و Measure نیز به کار می‌بریم. به علاوه در اینجا به هر مشاهده نمره‌ای می‌دهیم.

صص ۱۱۹، ۱۶۴، ۱۶۵ و ۲۰۴، سری مصالح راه‌آهن یا سری مصالح خط راه‌آهن برای Railroad bond yield series که معنی آن سری سود سهام راه‌آهن است، عجیب به نظر می‌رسد.

ص ۱۹۲، نتایج و مفاهیم برای Results and implications نادرست است و باید نتایج و استلزامها یا نتایج و پیامدها ترجمه شود. اولی دقیقتر است.

نمونه‌هایی از ترجمهٔ نادرست از مفهوم متن اصلی به زبان فارسی

ص یازده، پیشگفتار مؤلف: «کتابهای زیادی... به چاپ رسیده که برخی از آنها زمینه نظری غیر قابل قبولی را در مورد الگوها می‌دهد و بعضی از آنها کاربرد عملی ناچیزی از روشها را ارائه می‌نماید.» با این ترجمه، خواننده گمان می‌کند که این کتابها از جنبهٔ نظری غلط و از جنبهٔ کاربردی بی‌فایده هستند. حال آنکه در اصل می‌گوید: ...برخی از آنها زمینهٔ نظری ناکافی برای مدلها عرضه می‌دارند در حالی که برخی دیگر کاربردهای کمی از مدلها را ارائه می‌کنند.

ص یازده، «بویژه با به کارگرفتن هدف کلی یعنی سیستم آماری می نی تب در اینجا «هدف کلی یعنی سیستم آماری می نی تب» ترجمهٔ عبارت انگلیسی زیر است.

General Purpose Minitab Statistical System که باید سیستم آماری چندمنظورهٔ مینی تب، ترجمه می‌شد.

ص دوازده، «... یک پایهٔ محاسباتی و مقدمه‌ای بر آمار الزامی است»، ترجمهٔ عبارت زیر است:

A calculus- based introduction to Statistics is necessary

معنی آن چنین است: ...مقدمه‌ای بر آمار که مبتنی بر حسابان باشد، ضروری است.

ص ۱۱، «میانگین مربع خطای پیش‌بینی» به جای Minimum mean squared error prediction نادرست است. زیرا متن اصلی به معنی «پیش‌بینی مبتنی بر مینیمم mse است.

ص ۶۳، «نمودار ۳ـ ۱۴ و ۳ـ ۱۵ کمبود نرمال بودن را که با مراجعه به اندازه‌های نرمال در مقابل همبستگی باقیمانده‌ها (۰/۹۸۸ در جدول ۳ـ۱) تایید می‌شود را نشان می‌دهد.» خواننده از این جمله چه می‌تواند بفهمد؟ در اصل چنین بوده است «نمودارهای ۳ـ۱۴ و ۳ـ۱۵ نانرمالی را نشان می‌دهند، که با مقایسهٔ ضریب همبستگی نمرات نرمال و باقیمانده‌ها، یعنی ۰/۹۸۸ با جدول ۳ـ۱، نرمال نبودن تایید می‌شود.»

ص ۱۱۹، «در می‌نی‌تب تفاضلها با فرمان DIFF و با فرمت DIFF...K...in C، $z_t - z_{t-k}$ ، سری تفاضلی شده حاصل می‌باشد، در صورت حذف K ، آنرا یک در نظر می‌گیریم.» مؤلف خواسته است بگوید: در مینی تب تفاضلها با فرمان DIFF و با فرمت DIFF...K...in C به دست می‌آیند. اگر سری را با z بنمایانیم، $z_t - z_{t-k}$ سری تفاضل گیری شده حاصل است. اگر K ذکر نشود، کامپیوتر فرض می‌کند که $K = 1$. ملاحظه می‌شود که با حذف قسمتهایی از جمله‌ها، ترجمه کاملاً نامفهوم شده است.

ص ۱۱۹، «تفاضل مرتبه دوم متمرکز z» از این عبارت چنین می‌فهمیم که برای z تفاضل مرتبهٔ دوم متمرکز حساب کنیم. حال آنکه در اصل منظور این بوده است که ابتدا z را مرکزی کنیم یعنی انحراف از میانگین آن را در نظر بگیریم، سپس تفاضل مرتبهٔ دوم آن را حساب کنیم. پس باید گفت: تفاضل مرتبهٔ دوم z مرکزی شده یا بهتر از آن، تفاضل مرتبهٔ دوم انحراف از میانگین z.

ص ۱۳۲، در تبدیل باکس کاکس : «$g(x)\cdots$ به کندی تغییر می‌کند.» حال آنکه مؤلف می‌گوید وقتی λ به سمت صفر میل می‌کند، تابع $g(x)$ به طور هموار تغییر می‌کند.

ص ۱۶۱، «... در صورت کسر انحرافات حاصلضربهای با تأخیر از میانگین $\bar{z}$ و در مخرج واریانس ثابت منظور شده است.» مفهوم این جمله برای کسی که بخواهد ACF را عملاً حساب کند چیست؟ باید ترجمه می‌شد: در صورت کسر حاصلضربهای با تأخیر مربوط به انحرافات از میانگین $\bar{z}$ را به کار می‌بریم و در مخرج واریانس ثابت منظور می‌شود.

ص ۳۰۶، با ترجمهٔ نادرستی از Take over مفهوم جمله وارونه شده است، مترجم می‌نویسد: «جملات اغتشاش $a_{t-۱۲}, a_{t-۱۳}, \cdots, a_t$ به ازاء $l = ۱, ۲, \cdots, ۱۳$ در پیش‌بینی‌ها دخالت دارند ولی برای $l > ۱۳$ بخش اتورگرسیو الگو حذف می‌شود و داریم.» در اینجا اشکال بر سر «حذف می‌شود» است که باید ترجمه می‌شد حاکم می‌شود، تسلط می‌یابد، یا چیزی شبیه به آن، یعنی باید می‌گفتند: به ازای $l > ۱۳$ بخش اتورگرسیو حاکم می‌شود.

ص ۳۴۵، در پاراگراف آخر صفحه، بی‌دقتی مترجم به نهایت می‌رسد. در پاراگراف قبل دو مقدار برای یک خودهمبستگی در دو حالت (با در نظر گرفتن دادهٔ پرت و بدون آن) محاسبه شده‌اند. در پاراگراف بعد، مؤلف می‌خواهد درباره تفاوت این دو مقدار بحث کند و می‌گوید: روشن است که چنین تفاوتی بر برآورد پارامترها تاثیر خواهد گذاشت. مترجم کلمه Difference را که در اینجا به معنی تفاضل یا تفاوت دو عدد است به معنی تفاضل گیری به کار برده، بدون آنکه به معنی جمله بیاندیشد و آورده است: «این گونه تفاضلی کردن قطعاً روی بر آوردهای پارامترها تاثیر می‌گذارد.»

ص ۳۶۱، در سطر آخر، مؤلف در جمله‌ای تک واژه‌ای، می‌خواهد خواننده را تشویق به تجربه کرده وادارد که دست به آزمایش یا تجربه بزند. می‌گوید !Experiment. مترجم بدون توجه به سیاق عبارات، ترجمه می‌کند. «آزمایش!.» آیا بهتر نبود که می‌نوشت آزمایش کنید یا تجربه کنید!

نمونهٔ از قلم افتادگیها و حذف واژه‌ها یا جمله‌های متن اصلی.

در این گروه دو نوع مسأله داریم. یکی مواردی است که شامل قیدها، صفتها و عباراتی است که برای زیبایی نوشته یا تاکید بر مطلبی خاص به کار می‌روند. اینها سبک نویسنده را معرفی می‌کنند. حذف این گونه موارد چندان

مخل معنی نیست ولی دور از امانت است و ترجمه را به خلاصه‌ای از کتاب تبدیل می‌کند. دوم جا انداختن یک یا چند سطر از کتاب است که اشکال اساسی در فهم مطلب ایجاد می‌کند. از هر کدام چند نمونه را ذکر می‌کنیم.

ص ۵، «... در پارزان (۱۹۸۲ صفحه)» منظور پارزن (۱۹۸۲ ص ۶۸) است که شمارهٔ صفحه ذکر نشده است.

ص ۵۵، صفت Gross در سطر آخر به عنوان صفت نرمال نبودن حذف شده است.

ص ۹۰، «شکل جواب صریح بستگی به ریشه‌های ... دارد.» قید Critically ترجمه نشده است. یعنی شکل جواب صریح به طور تعیین کننده‌ای به ریشه‌های ... بستگی دارد.

ص ۹۱، در پاراگراف دوم، بعد از «اشکال ممکن» دو جملهٔ مهم زیر از قلم افتاده‌اند: نمودار ۱۴.۴ شبیه سازی کامپیوتری از یک سری را به ازای $\Phi_1 = 1/5$ و $\Phi_2 = -0/75$ نشان می‌دهد. رفتار دوره‌ای ρ که در شکل ۲.۴ (ج) نشان داده شده است، در رفتار تقریباً دوره‌ای این سری، در همان طول دورهٔ $12 = 360/30$ واحد زمانی به روشنی منعکس شده است. با حذف این دو جمله از مطلب مذکور از این پاراگراف چیزی نمی‌توان فهمید.

ص ۱۰۷، ضمیمهٔ ج. در جملهٔ اول، قید Mathematically ترجمه نشده است. در همین جا پس از پایان جمله دو قسمت عمدهٔ جملهٔ سوم حذف شده و بقیه آن به صورت «تعیین ایستائی و یا وارون پذیری و ایستائی را مشخص کنیم.» کاملاً بی‌معنی است. در اصل این طور بوده است: اگر مجموعهٔ خاصی از مقادیر پارامتری داده شده باشند، مفید خواهد بود که بتوانیم به آسانی تعیین کنیم که آیا الگو ایستا یا وارون پذیر است. پس از آن پاراگراف دیگری باید شروع شود و جملهٔ دیگری ترجمه شود تا به جمله‌ای که مترجم آورده است برسیم.

ص ۲۶۹، ضمیمهٔ ح، در جملهٔ اول، واژه‌های اتورگرسیو (قبل از $\Phi(x)$ و میانگین متحرک قبل از $\Theta(x)$) ترجمه نشده‌اند و جمله کاملاً مبهم شده است.

ص ۲۸۱، در فرمول دوم از بالای صفحه جملهٔ جبری $\theta\Theta X^{13}$ افتاده است.

متاسفانه محدودیت صفحه‌های مجله اجازه نمی‌دهد که همه جزئیات را در اینجا بیان کنیم. از این رو تنها با ذکر چند نکتهٔ مهم دیگر مطلب را به پایان می‌بریم.

یکی از نکات مهم در مقابلهٔ حاضر این بود که ملاحظه شد مترجم خود را پای بند پاراگراف بندی اصل کتاب نکرده است. هر جا به میل خود پاراگراف جدیدی ایجاد کرده یا دو پاراگراف را در هم ادغام کرده است. مثلاً در صفحه‌های ۳۵، ۳۶، ۴۹، ۵۵، ۱۷۴، ۲۰۴ و بسیاری جاهای دیگر چنین کرده است. در ترجمهٔ ماههای فرنگی رعایت یکنواختی نشده است، مثلاً در ص ۵ می‌بینیم که نوشته شده است، «ژوئن و جولای»، یکی تلفظ فرانسوی است، دیگری انگلیسی. در تلفظ اسمها گاهی بی‌دقتی عجیبی دیده می‌شود، مانند McIntire که در ص ۱۶۸ به مکلنتایر ترجمه شده است. غلطهای چاپی فراوانند. در ص پیشگفتار، ۹ مورد غلط چاپی دیده شد. در ص ۵۰ و ص ۵۱ یک اشتباه دو بار تکرار شده است. مقادیر N و n جا به جا نوشته شده‌اند. در ص ۶۹، شمارهٔ فرمولها درج نشده‌اند. در سطر آخر صفحه ۸۹ باید $K = 1$ باشد نه $K = 0$. پیش‌نویس مقدماتی این نقد در حدود ۲۰ صفحه بود که غیر از آنچه توضیح داده شدند موارد بسیاری را در برداشت. برای رعایت اختصار برخی موارد کم اهمیت را ذکر نکردیم. در مجموع، ترجمهٔ کتاب بدون دقت کافی، و با بی‌حوصلگی زیاد صورت گرفته است. جمله‌هایی به ظاهر فارسی در واقع از ردیف کردن معادلهای انگلیسی و بدون رعایت دستور زبان فارسی در سراسر کتاب به چشم می‌خورند. امیدواریم مترجم محترم در فرصتی کافی با چشم خریداری به متاع خود بنگرند و در چاپ دوم نقایص آن را برطرف کنند و از این راه دانشجویان بیشماری را رهین محبت خود سازند.

Box, G.E.P. and G.M. Jenkins (1976). Time Series Analysis: Forecasting and Control. Holden - Day, San Francisco

Cryer, Jonathan, D.(1986). Time Series Analysis. Duxbury Press, Boston.

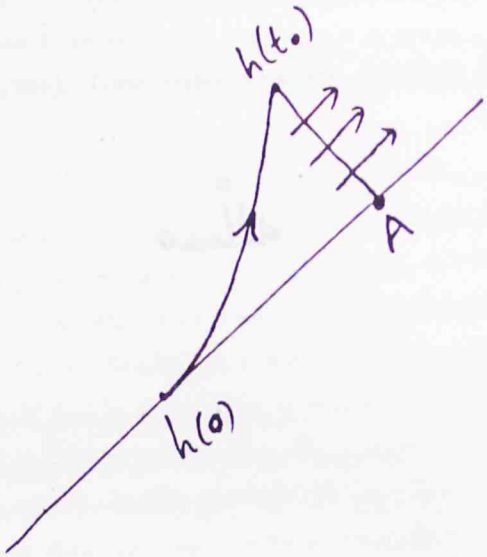
فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۱ (پاییز ۱۳۷۷)، صص. ۶۹ تا ۷۳

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضیات اختصاص دارد. حلِ مسائلِ عنوان‌شده در این بخش و یا مسائلِ پیشنهادیِ خود را به نشانیِ محمدرضا درفشه، گروه ریاضیِ دانشگاه تهران، بفرستید.

حل مسائل شماره قبل

حل مسألهٔ ۱۷. میدان برداری $H(x,y) = (f(x), f(y))$ را روی $\mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $h(t) = (x(t), y(t))$ جواب میدان برداری H با مقدار اولیه $h(0) = (x(0), y(0))$ است. حکم مسأله این است که برای هر $t \geq 0$، $h(t)$ در ناحیهٔ $D = \{(x,y) | x \geq y\}$ باقی می‌ماند. برای این کار ثابت می‌کنیم D در زمان مثبت ناورداست. یعنی هر مداری که در زمان صفر از نقطه‌ای در D آغاز شود برای هر $t \geq 0$ در D باقی می‌ماند. چون $h(0) \in D$ پس حکم مسأله از آن نتیجه می‌شود. گیریم $\partial D = \{(x,y) | x = y\}$ و فرض می‌کنیم D ناوردا در زمان مثبت نباشد، مثلاً مدار $x(t)$ به گونه‌ای باشد که $x(0) \in D$ ولی برای یک $t_0 > 0$، $x(t_0) \notin D$. بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد $x(0) \in \partial D$ و برای هر $0 < t \leq t_0$ داریم $x(t) \notin D$. بنابر یکتایی جواب $X(h(0)) \neq 0$. همچنین بخاطر $f \geq g$ پس برای هر $x \in \partial D$، میدان برداری H برونگرا نمی‌باشد. از طرف دیگر چون مدار x از D بیرون نمی‌رود پس $X(h(0))$ باید بر ∂D مماس باشد. حال برای t_0 به قدر کافی کوچک، نقطهٔ A را تصویر $h(0)$ بر ∂D می‌گیریم و خم زردان Γ_{t_0} را اجتماع سه قطعهٔ زیر می‌گیریم (به شکل توجه کنید)



یکی $\{h(t)\}_{0\le t\le t_0}$ و در قطعهٔ دیگر پاره‌خط‌های واصل بین $h(0)$ و A و نیز $h(t_0)$ و A. برای t_0های کوچک میدان برداری H روی هیچیک از سه قطعهٔ فوق درونگرا نمی‌شود پس شاخص پوانکارهٔ آن برابر $(-1)^2 = 1$ است، پس برای t_0 به قدر کافی کوچک در هر Γ_{t_0} یک نقطهٔ بحرانی دارد. با میل دادن t_0 به سمت صفر نتیجه می‌شود که $X(h(0)) = 0$ که خلاف یکتایی جواب است.□

توجه کنید که اگر میدان برداری X روی $\mathbb{R}$ جواب یکتا نداشته باشد و $x(t)$ و $y(t)$ دو جواب متفاوت X با $x(0) = y(0)$ باشند مثال نقض به ما می‌دهد.

حل مسألهٔ ۱۸. قرار می‌دهیم $r = 2^n$ پس $f(x) = x^r + x + 1$. توجه می‌کنیم که:

$$f(x)^r = (x^r + x + 1)^r = (x^r)^r + x^r + 1 = f(x^r)$$

و لذا $f(x)|f(x^r)$. اما

$$f(x) + f(x^r) = x^r + x + 1 + x^{r^2} + x^r + 1 = x(x^{r^2-1} + 1)$$

و در نتیجه $f(x)|x(x^{r^2-1} + 1)$ و لذا $x(x^{r^2-1} + 1) = f(x).t(x)$.

فرض می‌کنیم α ریشهٔ $f(x)$ در توسیعی از $GF(2)$ باشد، در اینصورت $\alpha(\alpha^{r^2-1} + 1) = 0$ و چون $\alpha \neq 0$ پس $\alpha^{r^2-1} + 1 = 0$ و یا $\alpha^{r^2-1} = 1$ و لذا $\alpha \in GF(r^2)$. این نتیجه می‌دهد که تمام ریشه‌های $f(x)$ در $GF(r^2)$ هستند. گیریم $p(x)$ یک سازهٔ تحویلناپذیر از $f(x)$ باشد. اگر α ریشهٔ $p(x)$ فرض شود، داریم $degp(x) = [GF(2)(\alpha) : GF(2)]$ و در نتیجه $[GF(r^2) : GF(2)] = t.degp(x)$ و لذا $degp(x)|[GF(r^2) : GF(2)]$. قرار می‌دهیم $[GF(r^2) : GF(2)] = k$ لذا $GF(r^2) \cong GF(2)^k$ به عنوان فضای برداری و لذا $2^{2n} = 2^k$ پس $k = 2n$، یعنی $degp(x)|2n$ و حکم ثابت می‌شود.□

حل مسألهٔ ۱۹. فرض کنید X نقطه‌ای در $[0, 1]$ باشد که در آن f ماکزیمم می‌شود و نیز $Y = f(X)$. در این صورت:

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > \frac{1}{|Y|}\int_0^1 |f''(x)|dx \ge \frac{1}{|Y|}\left|\int_0^1 f''(x)dx\right| = \frac{f'(1) - f'(0)}{Y}$$

به نظر می‌رسد که در اینجا به مانع رسیدیم زیرا بی‌تردید لازم نیست که $f'(1) - f'(0) \geq 4|Y|$. با وجود این، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، نقاط a در $(0, X)$ و b در $(X, 1)$ طوری موجودند که:

$$f'(a) = \frac{f(X) - f(0)}{X - 0} = \frac{f(X)}{X} = \frac{Y}{X}$$

$$f'(b) = \frac{f(1) - f(X)}{1 - X} = \frac{-Y}{1 - X}$$

در نتیجه

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geq \int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geq \frac{1}{|Y|}\left|\int_a^b f''(x)dx\right|$$

بنابراین با به کار بردن قضیهٔ اصلی در انتگرال آخری، داریم:

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > \frac{1}{|Y|}|f'(b) - f'(a)| = \frac{1}{|Y|}\left|\frac{-Y}{1-X} - \frac{Y}{X}\right| = \frac{1}{|Y|}\left|\frac{Y}{1-X} + \frac{Y}{X}\right| = \left|\frac{1}{X(1-X)}\right|$$

ولی مقدار ماکزیمم $X(1 - X)$ در $(0, 1)$ برابر $\frac{1}{4}$ است (وقتی که $X = \frac{1}{2}$) و بنابراین

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > \frac{1}{|X(1-X)|} \geq 4. \square$$

حل مسألهٔ ۲۰. معادلهٔ پارامتری خطی که از نقطهٔ (a_1, a_2, a_3) و در راستای (d_1, d_2, d_3) می‌گذرد توسط معادلات زیر داده می‌شود:

$$\begin{cases} x = a_1 + d_1 t \\ y = a_2 + d_2 t \\ z = a_3 + d_3 t \end{cases}$$

شرط لازم و کافی برای آنکه چنین خطی در رویه $z = xy$ واقع باشد آن است که به ازای هر t داشته باشیم:

$$a_3 + d_3 t = (a_1 + d_1)(a_2 + d_2 t) = a_1 a_2 + (a_2 d_1 + a_1 d_2)t + d_1 d_2 t^2$$

از این نتیجه می‌شود که $d_1 d_2 = 0$ و d_1 و d_2 نمی‌توانند همزمان صفر شوند زیرا این موجب می‌شود که $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ که تناقض است.

اگر $d_2 = 0$ آنگاه $a_3 + d_3 t = a_2(a_1 + d_1 t)$ یا $z = a_2 x$.

اگر $d_1 = 0$ آنگاه $a_3 + d_3 t = a_1(a_2 + d_2 t)$ یا $z = a_1 y$.

پس تنها خطهای راستی که در رویه $z = xy$ واقع‌اند به شکل $z = ax$، $y = a$ یا به شکل $z = ay$ و $x = a$ هستند که در آن a عدد ثابت دلخواهی است. $\square$

حل مسألهٔ ۲۱. S را مجموعهٔ متشکل از 10^{18} عدد حقیقی به شکل $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3}$ می‌گیریم که در آن r و s و t در مجموعه $\{0, 1, 2, \ldots, 10^6 - 1\}$ تغییر می‌کند و قرار می‌دهیم $d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})10^6$. در این صورت هر عضو x از S در بازهٔ $(0, d]$ قرار می‌گیرد. این بازه را به $10^{18} - 1$ زیر بازه مساوی تقسیم می‌کنیم که طول هرکدام $e = \frac{d}{10^{18} - 1}$ است. بنابر اصل لانه‌کبوتری، دو تا از 10^{18} عدد مجموعهٔ S باید در یکی از لانه‌ها قرار گیرند. با تفریق این دو عدد، عددی به شکل $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ به دست می‌آید که در آن c, b, a اعداد مورد نظر

مسأله‌اند، زیرا $c < \frac{1.7}{1.78} = 10^{-11}$. □

حل مسألهٔ ۲۲. فرض‌کنید $a, b \in R$ و $ab \in P$. باید ثابت‌کنیم $a \in P$ یا $b \in P$. فرض‌کنیم $a \notin P$ و $b \notin P$. در این صورت اعداد طبیعی m و n چنان وجود دارند که $a \notin I^n$ و $b \notin I^m$. چون R حلقهٔ زنجیر فرض شده پس $aR \supseteq I^n$، $bR \supseteq I^m$ و لذا $abR \supseteq I^{m+n} \supseteq I^{m+n+1}$. اما از $ab \in P$ نتیجه می‌شود $ab \in I^{m+n+1}$ و در نتیجه $abR = I^{m+n+1} = I^{m+n}$. بنابراین $I^{m+n} = I^{m+n+1} = I^{m+n+2} = \dots = I^{2m+2n}$. قرار می‌دهیم $J = I^{m+n}$ و $c = ab$. در این صورت $J^2 = J$ و لذا $cR = abR = J = J^2 = c^2R$ پس $cR = c^2R$ و بنابراین $r \in R$ چنان وجود دارد که $c = c^2r$ یعنی $c(1 - cr) = 0$. چون R حلقهٔ زنجیر فرض شده پس فقط یک ایدال ماکسیمال مانند M دارد و می‌توان فرض کرد $c \in M$ و در نتیجه $1 - cr \notin M$. بنابراین $1 - cr$ وارون‌پذیر است و از $c(1 - cr) = 0$ نتیجه می‌شود $c = 0$ یعنی $J = 0$ که از آن نتیجه می‌شود $P = 0$ که یک تناقض است.□

حل مسألهٔ ۲۳. واضح است که $gcd(X) | gcd(AX)$. اکنون اگر $detA = \pm 1$ آنگاه از $A^{-1} = \pm\, adj\,(A)$ نتیجه می‌شود $gcd(AX) | gcd(A^{-1}AX) = gcd(X)$ و در نتیجه $gcd(AX) = gcd\,(X)$. بر عکس فرض کنید $gcd(AX) = gcd(X)$ برای هر ماتریس ستونی X برقرار باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم A باید وارون‌پذیر باشد زیرا اگر A وارون‌پذیر نباشد آنگاه ماتریس ستونی ناصفر X چنان وجود دارد که $AX = 0$ و لذا $gcd(X) = gcd(AX) = 0$ که یک تناقض است. اکنون چون A وارون‌پذیر است پس $detA = \lambda \neq 0$ عددی صحیح است و لذا $Aadj(A) = diag(\lambda, \dots, \lambda)$ اکنون اگر X را یک ستون دلخواه از $adj(A)$ در نظر بگیریم از $gcd(X) = gcd(AX)$ نتیجه می‌گیریم که درآیه‌های X و در نتیجه درآیه‌های $adj(A)$ بر λ قابل قسمت هستند و لذا $\lambda^{n+1} | det(Aadj(A))$ و بنابراین $\lambda = \pm 1$. □

حل مسألهٔ ۲۴. فرض کنید $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \dots \lhd G_n = G$ سری ترکیبی G باشد. همچنین فرض کنید اعداد اول متمایز p و q چنان وجود دارند که اگر P یک سیلو p-زیرگروه یا یک سیلو q-زیرگروه از G باشد آنگاه $N_G^{(P)} = P$. چون p و q از مقسوم‌علیه‌های $|G|$ هستند و G حل‌پذیر فرض شده و عوامل ترکیب در سری فوق گروههای ساده‌اند لذا i چنان وجود دارد که $G_i/G_{i-1} \cong \mathbb{Z}_p$ و لذا G_{i-1} شامل سیلو q-زیرگروه Q از G می‌باشد. پس $Q \leq G_{i-1} \lhd G_i$ و بنا به بحث فراتینی داریم $G_i = G_{i-1}.N_{G_i}^{(Q)}$. اکنون چون $N_{G_i}^{(Q)} \leq N_G^{(Q)} = Q$ پس $N_{G_i}^{(Q)} = Q$ و لذا $G_i = G_{i-1}.Q = G_{i-1}$ که یک تناقض است.□

مسائل جدید

۲۵. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد به طوری که $Aut(G) \cong \mathbb{Z}_{p^t}$ که در آن p یک عدد اول است و $t \in \mathbb{N}$. ابتدا ثابت کنید $p = 2$ و سپس نشان دهید که G یک ۲-گروه آبلی است یا $G \cong \mathbb{Z}^q$ یا $G \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2$ که در آنها q عدد اولی به صورت $2^t + 1$ است.

(آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی دانشگاه تربیت معلم در سال ۷۷)

۲۶. فرض کنید F میدانی با مشخصهٔ مخالف ۲ است. اگر $f(x, y) \in F[x, y]$ چند جمله‌ای متقارن باشد و $x - y | f(x, y)$ آنگاه ثابت کنید $(x - y)^2 | f(x, y)$

۲۷. اگر $a_1, a_2, \dots, a_t$ اعداد حقیقی مثبت باشند و $n \in \mathbb{N}$ آنگاه ثابت کنید

$$\lim_{n \to 0} \left(\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_t^n}{t}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[t]{a_1 a_2 \cdots a_t}$$

(ارسال شده توسط خانم لیلا نارنجانی از مشهد)

۲۸. فرض کنید G گروه ماتریسهای ۲×۲ با دترمینان ۱ و با درایه‌ها در میدان حقیقی $\mathbb{R}$ است. ثابت کنید G دارای زیرگروهی یکریخت با گروه کواترنیونهای مرتبه ۸ نیست.

۲۹. فرض کنید $P, Q : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ دو تابع به قدر کافی هموار باشند و میدان برداری $f = (P, Q)$ را در نظر بگیرید طوری که $div f > ۰$. آیا دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

می‌تواند جواب تناوبی داشته باشد؟

۳۰. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و p عددی اول که $p \| |G|$. اگر $n_p(G)$ تعداد عناصر از مرتبهٔ p در G باشد آنگاه ثابت کنید $n_p(G) \equiv -۱ (mod p)$.

توضیح: به این‌وسیله از آقای محمدرضا پورنکی دانشجوی دورهٔ دکترای ریاضی دانشگاه تهران که در تنظیم حل مسائلِ این شماره با این‌جانب همکاری داشته‌اند تشکر می‌نمایم.

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the
Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 17, No. 2, Fall 1998

P.O. Box 13145-418
Tehran – Iran

e-mail: iranmath@rose.ipm.ac.ir

فهرست مطالب

لیتوگرافی و چاپ و صحافی : چاپخانه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی