

انجمن ریاضی ایران

۱۸

فرهنگ و اندیشه ریاضی

سال ۱۶، شماره ۱، بهار ۱۳۷۶



فرهنگ و اندیشه ریاضی نشریه علمی-ترویجی انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشار مطالبی می‌بردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفی ریاضیات را ترویج دهد و هم بازگوئنده فرهنگ و روند ریاضیات حاکم بر جامعه ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، علوم کامپیوتر، فیزیک نظری، و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائه موضوعیِ فعل و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای بیگیری موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمه مقاله‌هایی از نوع بند قبل یا ترجمه مقالات کلاسیک ریاضی (ترجمه آزاد یزیرفته نمی‌شود)؛
- ارائه موضوعات آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهانهایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند مقالات خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال کنند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیه کافیً ماشین یا با خط خوانا نوشته شود، یا، ترجیحاً، در دیسکت کامپیوتري تحت یکی از ادیتورهای «ویراستار ساده»، «PE2»، یا «لاتک فارسی» باشد.
- فرستادن اصل مقاله ترجمه شده — با ذکر نشانی کامل آن — لازم است.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامه ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن داده شود. در صورتی که مؤلف یا مترجم معتقد است اصطلاح خاصی از واژه‌نامه مناسب نیست باید ترجیح دادن اصطلاح پیشنهادی خود را توجیه کند.
- هیأت تحریریه در رد و قبول و حک و اصلاح مقالات آزاد است.

بسم الله الرحمن الرحيم



فرهنگ و اندیشه ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۱۶، شماره ۱، بهار ۱۳۷۶

شماره پیاپی: ۱۸

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران

مدیر مسؤول: محمد مهدی ابراهیمی

سردبیر: اسفندیار اسلامی

هیأت تحریریه:

محمد مهدی ابراهیمی، دانشگاه شهید بهشتی
اسفندیار اسلامی، دانشگاه شهید باهنر کرمان
مهدی بهزاد، دانشگاه شهید بهشتی
محمدعلی پورعبدالله، دانشگاه فردوسی مشهد
علی دانانی، دانشگاه اصفهان
محمد رضا درفشه، دانشگاه تهران
ارسان شادمان، دانشگاه تهران
محمد رضا مشکانی، دانشگاه شهید بهشتی
نظم الدین مهدوی امیری، دانشگاه صنعتی شریف

حروفچینی: TeX-ماکی دفتر انجمن ریاضی ایران

نشانی:

تهران — صندوق پستی ۱۳۱۴۵/۴۱۸
iranmath@rose.ipm.ac.ir

قیمت: ۲۰۰۰ ریال



فرهنگ و اندیشه ریاضی

سال ۱۶، شماره ۱، بهار ۱۳۷۶

(تاریخ انتشار: بهار ۱۳۷۷)

شماره پیاپی: ۱۸

فرهنگ و اندیشه ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

کسانی که عضو انجمن ریاضی ایران نیستند و علاقه‌مند به اشتراک این مجله هستند می‌توانند با واریز مبلغ ۴,۰۰۰ ریال به حساب جاری ۴۳۶۵-۵۶ بانک سپه شعبه دانشگاه تهران و ارسال فیش آن همراه نشانی دقیق خود به دفتر مجله، به مدت یک سال این مجله را دریافت کنند.

مبلغ اشتراک یک ساله برای کتابخانه‌ها و مؤسسات ۱۰,۰۰۰ ریال است.

شماره‌های ۳، ۴، ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶ در دفتر مجله موجود است؛ با واریز ۱,۰۰۰ ریال بابت هر شماره به حساب مذکور و ارسال فیش آن به دفتر مجله می‌توانید شماره‌های مورد نظر خود را دریافت کنید.



روی جلد:

عبدالسلام (۱۹۲۶-۱۹۹۶)

فهرست مطالب

محمدعلی پورعبدالهزاد، نگاهی به نظام آموزش ریاضی عمومی در کانادا ... ۱
نرگس تولایی و محمد صالح مصلحیان، آشنایی با روش پوشش تمام در آنالیز حقیقی ... ۱۳
فریبرز آذرپناه و علی رضایی، برآوردهای باگویا ... ۲۱
مصطفور معتمدی، قضیه لاغرانژ، قضیه فرما، و حدس گلدباخ در ماتریسهای صحیح ۲۹
کریم صدیقی و عطاءالله عسکری همت، صورتهای یک و نیم خطی ۴۱
علیرضا درودی، یادی از عبدالسلام ۵۷
مسئله ۶۷

* به خاطر اشتباهاتی که در مقاله «چند جمله‌ای رنگی و چند جمله‌ای تطبیقهای گراف» چاپ شده در فرهنگ و اندیشه ریاضی شماره ۱ و ۲، بهار و پاییز ۱۳۷۵، رخ داده است، از نویسنده محترم دکتر مهدی بهزاد و همچنین خوانندگان عزیز پوزش می‌طلبیم. مقاله تصحیح شده در دفتر نشریه موجود است و علاقه‌مندان برای دریافت آن می‌توانند با این دفتر تماس حاصل نمایند.

نگاهی به نظام آموزش ریاضی عمومی در کانادا

محمدعلی پورعبدالله‌نژاد

پیشگفتار

در چند سال اخیر مشکلات دانشجویان در فرآگیری دروس ریاضی عمومی، و افت تحصیلی قابل ملاحظه آنان در این دروس، توجه بسیاری از مدرسان را به خود جلب کرده و کوشش‌هایی در جهت ریشه‌یابی این مشکل و یافتن چاره‌ای برای آن به عمل آمده است. از جمله می‌توان به برگزاری کنفرانسی برای بررسی و بحث درباره جنبه‌های مختلف این مسئله در دانشگاه صنعتی شریف در چند سال قبل، و همچنین درج چند مقاله در مجله نشر ریاضی توسط استادان دست‌اندرکار اشاره نمود.

شاید همین سابقه ذهنی باعث شد که من در مدت نه ماه فرصت مطالعاتی خود در دانشگاه آلبرتا کشور کانادا، از شهریور ماه ۱۳۷۱ تا تیر ماه ۱۳۷۲، سعی نمایم از نحوه تدریس و ویژگیهای این دروس در کانادا و موارد شباخت و تضاد آن با تدریس همین دروس در ایران آگاهی پیدا کنم، تا شاید بتوان اندکی وضعیت موجود در ایران را بهبود بخشید.

آنچه در این گزارش در باره شیوه تدریس ریاضی عمومی در کانادا خواهد آمد حاصل مشاهدات مستقیم من در دانشگاه آلبرتا است، ولی با پرس و جوهایی که کرده‌ام اطمینان دارم که از این جهت بین دانشگاه‌های مختلف کانادا تفاوت اساسی وجود ندارد.

ذکر این نکته لازم است که گرچه مطالبی که خواهد آمد در باره دروس ریاضی عمومی است ولی بسیاری از آنها در مورد سایر دروس نیز صادق‌اند. طبیعی است که هر چه درس تخصصی‌تر و تعداد و اندازه کلاسها محدودتر باشد، استقلال‌ عمل استاد و توئنایی او در اعمال سلیقه شخصی بیشتر خواهد بود.

این مقاله حاصل تلخیص و بازنویسی گزارشی است که در سال ۱۳۷۲ تحت عنوان «بررسی تطبیقی آموزش ریاضی عمومی در ایران و کانادا» همراه با شواهد و مستندات آن به دانشگاه فردوسی مشهد تقدیم، و نسخه‌هایی از آن برای تعدادی از استادان ارسال شده بود. اکنون، همزمان با اولین کنفرانس آموزش ریاضی در اصفهان، ارائه آن در سطحی وسیعتر به جامعه ریاضی ایران نابجا نخواهد بود.

وضعیت در ایران

هرچند که بر مبنای اطلاعات موجود، مشکل تدریس ریاضی عمومی در بسیاری از کشورهای جهان به شکلی خود را نشان داده است، ولی بمنظور می‌رسد که این مشکل در ایران به دلایل ویژه‌ای حادتر از بعضی کشورهایی است که می‌شناسیم.

قریباً همه دست‌اندرکاران در این مورد اتفاق نظر دارند که به‌خاطر رقابت شدید دانش‌آموزان بر سر ورود به دانشگاه، و به‌خاطر روش تستی کنکور ورودی، بسیاری از دانش‌آموزان در سالهای آخر دبیرستان درس خواندن خود را بیشتر به جهتی سوق می‌دهند که توانایی آنها را در یافتن هر چه سرعتی‌گزینه صحیح سوالات تستی افزایش دهد، و البته چیزی که در اینجا فدا می‌شود درک عمیق مطلب و برداشت‌های جامع و سراسری از درس است. چنین دانش‌آموزی هنگام ورود به دانشگاه هنوز گمان می‌کند که برداشت سطحی و سریع و تکنکه‌ای از مطالب درس برای موفقیت کافی خواهد بود. چنین تصوری به‌ویژه در مورد درس ریاضی عمومی ۱ کاملاً غلط و زیانبار است و شاید به همین جهت است که گاهی می‌بینیم تعدادی از دانشجویان با رتبه‌های بسیار درخشان در کنکور سراسری، در برخورد با ریاضی عمومی ۱ چار ناکامی‌های مکرر می‌شوند و پاره‌ای تا مرز اخراج از دانشگاه پیش می‌روند.

این نکته نیز شایان ذکر است که بخشی از مشکل موجود ناشی از عدم آمادگی کافی تعدادی از دانشجویان در بد ورود به دانشگاه است که با استفاده از سهمیه‌های گوناگون و بدون اینکه در دوره دبیرستان آموزش‌های لازم را به صورت رضایت‌بخش دیده باشند وارد دانشگاه می‌شوند. هرچند که سعی می‌شود ضعف چنین دانشجویانی به کمک درس ریاضی تقویتی برطرف گردد، ولی از آنجاکه درس ریاضی تقویتی معمولاً ترکیب ناقص و کمنگی از ریاضی عمومی ۱ و مبانی ریاضیات است و کمتر به مشکلات زیربنایی دانشجو می‌پردازد، حتی پس از گذاردن این درس نیز مشکل تقریباً با همان شدت اولیه باقی می‌ماند، و مانهایتاً شاهد کلاس‌هایی از درس ریاضی عمومی ۱ هستیم که گاهی تا هشتاد و پنج درصد دانشجویان آن مردود می‌شوند.

مسائل متعدد دیگری نیز به وضع موجود دامن می‌زنند، که برای آنها در آینده نزدیک امید بهبود وجود ندارد. از آن جمله می‌توان به بی‌علاقه بودن بیشتر دانشجویان به تحصیل ریاضیات اشاره کرد. این امر از آنجا ناشی می‌شود که دانشجوی ریاضیات برای خود آینده‌ای به‌جز استخدام در یک دستگاه دولتی نمی‌بیند، که آن هم در شرایط موجود با توقعات مادی و عاطفی نسل جوان امروز سازگاری ندارد. از آنجا که نگرانی ناشی از تورم تعداد فاغ‌التحصیلان و امکان عدم استخدام آنان نیز روز به روز جدیتر می‌شود، احتمال

افزایش علاقه دانشجویان به ریاضیات را باید منتفی دانست، مگر اینکه دست اندرکاران و تصمیم‌گیرندگان در بی‌چاره‌جوبی‌های اساسی و فوری برآیند.

مقایسه معلومات ریاضی دانشجویان در ایران و کانادا

بررسی اجمالی کتابهای ریاضی ایران و کانادا نشان می‌دهد که دانشجوی کانادایی هنگام ورود به دانشگاه از لحاظ حجم معلومات ریاضی در سطحی بسیار پایینتر از دانشجویان ایرانی قرار دارد، و به نظر می‌رسد که در دوره دبیرستان، به طور متوسط مدتی که دانش‌آموز ایرانی صرف آموختن ریاضیات می‌کند بسیار بیشتر از دانش‌آموز کانادایی است. در دوره دانشگاه نیز آموخته‌های دانشجویان ایرانی بسیار وسیعتر و متنوعتر است. ولی به نظر می‌رسد که تفاوت اساسی این دو گروه در طرز تلقی آنها نسبت به ریاضیات و، به طور کلیتر، نسبت به علم است. دانشجوی ایرانی به طور سنتی متکی به محفوظات خودش است، و موفقیت خود را غالباً در این می‌بیند که بتواند با تکیه بر حافظه مطالبی را بیان، قضایایی را اثبات، یا حتی جواب مسائلی را (که قبل حل کرده است) ارائه کند. این امر احتمالاً ناشی از این است که از دیرباز در چارچوب تحصیلات سنتی چنین تواناییهایی نشانه فضل محسوب می‌شده است. چنین تواناییهایی ممکن است برای موفقیت در — به اصطلاح — «علوم قدیمه» کارساز باشند، ولی برای علوم دائم‌متغیر امروزی کفایت نمی‌کنند، و از نظر بعضی صاحب‌نظران باعث هدر رفتن انرژی فرد است.

در مقابل، دانشجوی کانادایی از دوران دبستان می‌آموزد که هر مطلب علمی ریشه‌ای در زندگی روزمره دارد و مسائل روزمره زندگی را می‌توان با استفاده از آموخته‌های درسی حل کرد. جهت‌گیری آموزش دبستانی و دبیرستانی آنجا به سمت انطباق آموخته‌ها با نیازهای روزمره عملی آنان است. مثلاً این را دیده‌ام که قبل از آموختن مساحت اشکال هندسی به دانش‌آموزان، آنان را با مسئله تقریب در اندازه‌گیری آشنا می‌سازند و به آنها نشان می‌دهند که اگر طول کلاس توسط ده نفر اندازه‌گیری شده باشد احتمالاً باید ده جواب مختلف نزدیک به هم برای آن به دست آمده باشد. قضایت در باره مزیت چنین روشی را به خواننده وا می‌گذارم. چنین دانش‌آموزی پس از ورود به دانشگاه، این طرز تلقی خود را حفظ و حتی تقویت می‌کند. به عنوان نمونه می‌توانم به دانشجوی کانادایی ضعیفی اشاره کنم که نتوانسته بود قضیه میانگین در انتگرال را درک کند. او پس از آنکه این قضیه و برهان آن برایش تشریح شد، بلافضله این سؤال را (در واقع از خودش) پرسید که معنای این قضیه چیست؟ و پس از مدتی فکر این را گفت که معنای این قضیه باید این باشد که اگر به جای تابع زیر انتگرال مقدار ثابت به دست آمده را قرار دهیم مقدار انتگرال نباید عوض شود، و فوراً برای آزمودن نظر خودش، با مقداری رحمت، به انتگرال‌گیری از یک تابع خطی پرداخت، و تنها هنگامی که به جواب مساعد رسید با خوشحالی به سراغ مطلب بعدی رفت. من در سالهای فراوانی که تدریس کرده‌ام کمتر دیده‌ام که یک دانشجوی ایرانی چنین زود پس از فراگیری یک مطلب نظری فوراً به دنبال یافتن کاربرد آن باشد، آن‌هم در حالی که هنوز با مشکلات تلبی‌شده درسی فراوانی دست به گریبان است. خود من خوب به خاطر دارم که در روزگاری که برای اولین بار در دبیرستان با درس جبر رو به رو

شدیم سؤال اکثر دانشآموزان از معلم جبر این بود که این چیزها به چه دردی می‌خورد، و جواب معلم جبرمان این بود که اگر می‌خواهید از آنها در آش پختن استفاده کنید به درد نمی‌خورند؛ اینها را باید یاد بگیرید تا در موشکسازی از آنها استفاده کنید. این یعنی ممکن به محل کردن جواب سؤال. اگر آن دبیر جبر، که مرد بسیار شریف و زحمتکشی بود، قبل خودش تا اندازه‌ای با دیدگاهی واقع‌گرایانه و همراه با جهتگیری عملی با جبر آشنا شده بود و نظام آموزشی هم به او این اجازه را می‌داد که به شیوه‌ای نزدیک به زندگی واقعی معنای نمادهای جبری را به ما تفهیم کند، آنوقت می‌دیدیم که برای دریافت آن مطالب مجبور نیستیم تا فرا رسیدن زمان موشکسازی صبر کنیم بلکه می‌توانیم آنها را در همان آش پختن هم به کار ببریم. این تلقی ذهنی، مجرد، واسکولاستیک از ریاضیات است که به قول مرحوم دکتر هشتودی ریاضیات را دیووش و غول آسا نموده است.

نکته دیگری که در طرز تلقی دانشجویان مؤثر است، مسئله اشتغال پس از فراغت از تحصیل است. در ایران تا آنجا که به سواد و معلومات و توانایی‌های شغلی مربوط می‌شود نوعی امنیت شغلی مخرب وجود دارد. من موردم را به خاطر ندارم که مثلاً معلمی به خاطر ضعف معلومات از کاربرکنار شده باشد. حتی در دانشگاهها، که احتمالاً از صحیح العمل ترین مؤسسات کشور هستند، پس از آن که کسی به عنوان مدرس آزمایشی وارد گروهی شد خود به خود، در پایان سه سال دوره آزمایشی، به رسمی قطعی تغییر وضعیت خواهد یافت مگر اینکه در طی این مدت عده زیادی را نسبت به خودش بدین کرده باشد، والتبه در این‌گونه موارد برخوردهای فردی او اهمیت بیشتری داشته است تا سلط طی او به مهارت‌های شغلی.

امنیت شغلی به چنین صورتی هرگز در کانادا مطرح نیست. از آنجا که همه مؤسسات، حتی ادارات دولتی، باید هزینه‌هایشان در مقایسه با منفعت وجودی آنها قابل توجیه باشد، به محض اینکه احساس کنند فردی به اندازه دستمزدش کارایی ندارد عذر او را می‌خواهند. این باعث می‌شود که هر دانشجویی در دوره تحصیلات دانشگاهی سعی کند آموخته‌هایش را طوری سازمان ببخشد که در موقع لزوم به بهترین شکل از آنها استفاده کند. به عبارت دیگر در حالی که در ایران مدرک تحصیلی فرد ضامن دستیابی او به شغل و نگهداری آن است، این وظیفه در کانادا بر عهده معلومات فرد و توانایی او در استفاده از آنهاست.

شكل آموزش در کانادا

در کانادا هر سال تحصیلی دارای چهار ترم است. اولین ترم سال تحصیلی، ترم پاییزی است که اواسط شهریور ماه آغاز می‌شود و سیزده هفته ادامه دارد. ترم دوم، که آن هم سیزده هفته‌ای است، از اواسط دی ماه آغاز می‌شود. دو ترم دیگر ترمهای بهاری و تابستانی هستند که هر کدام شش هفته طول می‌کشند و آغاز آنها تقریباً اواسط اردیبهشت و اواسط تیر ماه است. طبعاً تعداد واحدهایی که یک دانشجو می‌تواند در ترمهای بهاری و تابستانی انتخاب کند محدودتر (هر کدام حد اکثر دو درس سه‌واحدی) است و دانشجو باید برای انتخاب این دروس شهریه اضافی بپردازد، به این معنی که حق التدریس مدرسان باید به وسیله همین شهریه‌های دریافتی تأمین شود. انتخاب واحد برای ترمهای پاییزی و زمستانی به طور یکجا در اوایل

شهریور انجام می‌شود و در بین دو ترم دانشجویانی که در بعضی دروس مردود شده‌اند، یا در طی ترم درسی را حذف کرده‌اند، می‌توانند واحدهای ترم دوم خود را متناسب با وضعیت جدید تغییر دهند. هر درس در طول ترم باید حداقل یک امتحان میان‌ترم داشته باشد، که زمان آن از قبل تعیین شده است، به این معنی که در ابتدای سال تحصیلی، هفته هفتم یا هشتم هر ترم به عنوان هفته امتحان میان‌ترم تعیین می‌شود، که هفته قبل از آن کلیه کلاسها تعطیل است. در هفته امتحان میان‌ترم، امتحان هر درسی در یکی از ساعات کلاس آن درس، که از ابتدای ترم مشخص شده است، برگزار می‌گردد. در صورتی که برنامه کلاسی دوگروه از یک درس که استادان متفاوت دارند بر هم منطبق باشد، این استادان باید امتحان میان‌ترم را همزمان و با سوالات یکسان برگزار نمایند. این را نیز باید ذکر کرد که سایر ساعات درس به قوت خود باقی خواهد بود و در هفته امتحان در ساعتی که دانشجو امتحان ندارد تدریس ادامه خواهد داشت. امتحان دوم میان‌ترم به دلخواه استاد درس است ولی باید تاریخ آن را در آغاز ترم مشخص کرده باشد. درسها به طور کلی سه‌واحدی هستند و با توجه به آنچه گفته شد، یک درس سه‌واحدی مستلزم ۳۶ ساعت تدریس ۵۰ دقیقه‌ای است.

این نکته را نیز باید تذکر داد که تعطیل کلاس از امور بسیار نادر است، به این معنی که اگر استادی در طی ترم بخواهد در کنفرانسی شرکت کند یا برای کارهایی مانند داوری رساله مجبور به مسافرت باشد باید یک نفر را که از لحاظ رتبه آموزشی تقریباً هم‌تاز خودش است به جای خودش در کلاس بگمارد، و آن فرد نیز باید طوری خودش را آماده کند که بتواند میزان درس مربوط به آن ساعات را که از ابتدای ترم تعیین شده تدریس نماید. در مواردی مانند بیماری ناگهانی، یا مرگ یکی از خویشاوندان نزدیک استاد، تعیین استاد جانشین به عهده گروه است و در هر حال نهایت سعی جهت جلوگیری از تعطیل کلاس به عمل خواهد آمد. درس‌های ریاضی عمومی همانند ایران به سه دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول برای دانشجویان ریاضی یا آمار، دسته دوم برای دانشجویان مهندسی و فیزیک و شیمی، و یک دسته نیز برای دانشجویان سایر رشته‌های دانشجویان رشته‌های ریاضی یا آمار، ریاضی عمومی را به صورت سه درس سه‌واحدی، و دانشجویان سایر رشته‌ها آن را به صورت دو درس سه‌واحدی می‌گذرانند. این نکته را نیز باید یادآوری کرد که دانشجویان بعضی رشته‌های مربوط به گروه سوم، از قبیل دانشجویان زیست‌شناسی یا مدیریت بازرگانی، فقط اولین درس ریاضی عمومی را الزاماً می‌گذرانند و درس بعدی برایشان الزامی نیست. البته بعضی از این دانشجویان ناچارند به جای آن، درس ریاضی دیگری را که مطابقت بیشتری با نیازهای رشته تحصیلی‌شان داشته باشد بگذرانند.

درس ریاضی عمومی ۱ مربوط به گروه سوم از لحاظ افت تحصیلی رتبه دوم را (پس از شیمی عمومی) در میان همه دروس دانشگاه آلبتا دارد. متوسط تعداد مردودین این درس چیزی در حدود سی درصد است.

تدریس دروس ریاضی عمومی در بسیاری از موارد به کسانی واگذار می‌شود که مشغول دوره‌های تحقیقاتی یک‌ساله بعد از دکترا هستند؛ واگذاری این دروس به کسانی که در فرصت مطالعاتی به سر می‌برند

یا به دانشجویان دوره دکترا نیز رایج است. در سالهای اخیر که، به خاطر اتفاقات بعد از انقلاب فرهنگی در چین، تعداد زیادی از دانشجویان چینی تبار مقیم کانادا شده‌اند، تعداد معلمان حق التدریسی چینی تبار بسیار افزایش یافته است. از آنجا که نحوه تکلم این افراد به زبان انگلیسی تا اندازه زیادی نامفهوم است، این مسئله نوعی گله‌مندی و حتی جبهه‌گیری نسبت به این معلمان را در میان دانشجویان پدید آورده است. همچنین باید متذکر شد که مدیر گروه ریاضی دارای سه یا چهار معاون است که یکی از آنها معاون در امور آموزشی است. وظیفه این معاون‌تی تعیین برنامه کلاسها و امتحانات، تقسیم درس بین استادان، انتخاب استادان حق التدریسی و متصدیان حل تمرین و تصحیح تکالیف و مانند آن است. روش کار به شیوه‌ای است که در همه موارد جز در مورد مربوط به سیاستگذاری‌های کلی، معاون آموزشی گروه شخصاً همه تصمیم‌گیری‌های لازم را انجام می‌دهد.

استاد ناظر درس (course captain). برای درس‌هایی که در بیش از یک گروه ارائه می‌شوند یک نفر از اعضای باسابقه و ارشد گروه ریاضی به عنوان ناظر آن درس انتخاب می‌شود که وظیفه‌اش ایجاد هماهنگی بین مدرسان گروههای مختلف آن درس و نظارت بر یکنواختی مطالب ارائه شده و رعایت استانداردهاست. همچنین در مواردی که امتحان میان‌ترم یا پایان‌ترم گروههای مختلف با هم انجام نمی‌شود وظیفه استاد ناظر این است که سوالات امتحانی گروههای مختلف را از لحاظ مدت، محتوا و میزان مشکل بودن با یکدیگر مقایسه و یکنواخت نماید.

در درس‌هایی که امتحان میان‌ترم یا پایان‌ترم آنها مشترک است، استاد ناظر موظف است که بر طرح سوال مشترک به وسیله مدرسان مختلف نظارت کند. همچنین نظارت بر تقسیم هماهنگ نمره کل بین فعالیتها و امتحانات مختلف به عهده استاد ناظر است.

اطلاعاتی که باید در اولین جلسه درس به دانشجو داد. مدرس موظف است که در اولین جلسه درس علاوه بر نوشتمنام خود و مشخصات کتاب درسی روی تخته‌سیاه، اطلاعات نسبتاً مفصلی را درباره محتوای درس، ساعات رفع اشکال، محل و شماره دفتر کار خودش، ساعات مراجعة دانشجویان جهت رفع اشکال، تعداد امتحانات میان‌ترم و تاریخ و ساعت برگزاری آنها، و میزان تکالیف منزل، در اختیار دانشجویان بگذارد. رسم براین است که مدرس از قبل این اطلاعات را همراه با برنامه تفصیلی تدریس خود تکثیر کرده در اولین جلسه بین دانشجویان توزیع می‌کند. البته تاریخ و ساعت امتحان پایان‌ترم از قبل تعیین شده و هنگام انتخاب واحد در اختیار دانشجو قرار می‌گیرد. تغییر این تاریخ امتحان فقط در موارد بسیار استثنایی و پس از طی مراحل معینی امکان پذیر است.

از جمله مطالبی که مدرس در اولین جلسه به اطلاع دانشجویان می‌رساند چگونگی تقسیم نمره نهایی درس بین فعالیتهای مختلف طول ترم و امتحان پایان‌ترم است. رایج‌ترین شیوه تقسیم نمره دروس ریاضی به قرار زیر است:

تکالیف منزل ۱۰٪، امتحان میان‌ترم ۳۰٪، امتحان پایان‌ترم ۶۰٪؛ و یا تکالیف منزل ۱۰٪، امتحان

میان ترم اول ۲۰٪، امتحان میان ترم دوم ۲۰٪، امتحان پایان ترم ۵۰٪.
قابل ذکر است که مطابق مقررات، وزن امتحان پایان ترم باید حداقل ۳۰٪ و حداکثر ۷۰٪ باشد.

تکالیف منزل و نمره آنها. اکثر درسها دارای تکلیف هفتگی منزل هستند، که در بیشتر موارد از ابتدای ترم معین شده است.

از آنجا که طول هر ترم سیزده هفته است تعداد تکالیف هفتگی بین ده تا دوازده تغییر می‌کند. روش کار این است که مدرس تعدادی مسأله را از قبل برای حل شدن در هفته‌های مختلف تعیین می‌کند. تعداد مسائل به اندازه‌ای است که یک دانشجوی خوب برای حل آنها هفته‌ای حدوداً دو ساعت وقت لازم داشته باشد، یا به عبارت دیگر نوشت آنها به طور منظم و نسبتاً مشروح در دو برگ کاغذ A4 امکان‌پذیر باشد. از طرف بخش ریاضی نیز یک دانشجوی خوب دوره کارشناسی انتخاب می‌شود که در مقابل دریافت دستمزد (در حدود ۶ دلار برای هر ساعت کار) جوابهای را که دانشجویان در موعد هفتگی مقرر به استاد درس تحويل داده‌اند بر مبنای حل نوشته‌شده‌ای که استاد تهیه کرده است نمره بدهد. در عین حال، به طور همزمان استاد نسخه‌ای از حل مسائل مذکور را نیز جهت اطلاع دانشجویان پشت در اتاق خود آگهی می‌کند، یا ممکن است که آن را تکثیر کرده در اختیار دانشجویان بگذارد. دانشجوی مصحح نیز در مدت یکی-دو روز کار نمره دادن به تکالیف را انجام داده برگه‌ها را به استاد برمی‌گرداند و استاد نیز آنها را به دانشجویان عودت می‌دهد. معمولاً دانشجویان از هویت مصحح آگاه نمی‌شوند، هرچند که در این مورد مقررات صریحی وجود ندارد. به هر حال مسؤولیت جوابگویی به اعتراضهای دانشجویان با استاد درس است.

تمرینهای تکلیف منزل عموماً از کتاب درسی انتخاب می‌شوند. البته کتاب حل المسائل مربوط به کتاب درسی هم وجود دارد، متنها کتاب حل المسائل به دو صورت مختلف تهیه شده است: یکی شامل حل مسائل شماره فرد است که به تعداد زیاد تهیه شده است و در دسترس دانشجویان قرار دارد؛ کتاب دیگر شامل حل کلیه مسائل کتاب است که به تعداد محدودی تهیه شده و از طرف ناشر در اختیار گروههای ریاضی قرار می‌گیرد و گروه هم آنها را به استادان درس امانت می‌دهد. تمرینهای تکلیف منزل همواره از مسائل شماره زوج انتخاب می‌شوند که حل آنها در دسترس دانشجو نباشد، ولی به دانشجویان توصیه می‌شود که سعی کنند از میان سایر مسائل (با شماره‌های فرد یا زوج) هر تعداد را که می‌توانند مستقلأ حل نمایند.

از آنجا که تضمینی وجود ندارد که دانشجویان خودشان تکالیف را انجام داده باشند، معمولاً هیچ استادی بیش از ده درصد نمره نهایی را برای تکالیف منزل منظور نمی‌کند. این نکته را نیز باید یادآور شده که به خاطر محدودیتهای مالی، بخش ریاضی از استاد می‌خواهد که میزان تکالیف را در حدی نگهدارد که تصحیح آنها در طول ترم به ازای هر دانشجو از ۴۵ دقیقه تجاوز نکند، که میزانی که قبل از تکالیف ذکر شد (دو ساعت در هفته برای دانشجوی خوب) با شرط اخیر سازگار است.

درس ریاضی تقویتی. دانشجویانی که می‌خواهند یکی از دروس عمومی را اختیارکنند در یک امتحان تعیین قوّه مبتنی بر ریاضیات دبیرستانی شرکت می‌کنند. در صورتی که نتیجه این امتحان رضایت‌بخش نباشد به آنها توصیه می‌شود که همزمان با درس ریاضی عمومی ۱، در درس ریاضی تقویتی مخصوصی که آن را pre-calculus program می‌نامند نیز شرکت کنند. این درس به مدت شش هفته، و هفتاهی سه ساعت، برگزار خواهد شد، و البته هزینه آن (در حدود صد دلار برای هر نفر) از دانشجویان دریافت می‌شود، و بابت آن واحدی برای دانشجو منظور نخواهد شد.

این نکته نیز شایان ذکر است که کار اصلی سه نفر از اعضای نیمه وقت بخش، که تجربه‌ای طولانی در ریاضیات دبیرستانی دارند، تهیه جزوّات لازم و تجدید نظر در مطالب آنها و تدریس ریاضی تقویتی است.

آزمایشگاه (lab). تعداد کمی از دروس ریاضی، از جمله درس ریاضی عمومی ۱، دارای — به اصطلاح — «آزمایشگاه» هستند. این آزمایشگاه‌ها به وسیله دانشجویان دوره‌های کارشناسی ارشد و دکترای ریاضی اداره می‌شوند. برای درس ریاضی عمومی ۱ جزوّه‌های مخصوص آزمایشگاه از قبل تهیه شده است و گروههای مختلف به طور یکنواخت و همزمان در هر هفته مطالب معینی از آن جزو را دوره می‌کنند. در بعضی دیگر از دروس، به توصیه استاد درس، متصدی آزمایشگاه فعالیتهای مختلفی از قبیل برگزاری امتحانهای کوتاه هفتگی (quiz)، بررسی مسائل تکالیف منزل، و دوره کردن بعضی از مطالب درسی را دنبال خواهد کرد.

جلسات کمک. در چند سال اخیر جلساتی برای کمک به دانشجویان بعضی از درس‌های مقدماتی خاص برنامه‌ریزی شده است، که در تمام ساعات اداری روزهای دوشنبه تا جمعه هر کدام در اتاق ثابتی دایرند و دانشجو می‌تواند هر وقت که مایل بود به این جلسات برود و به رفع مشکلات خود در حل مسائل آن درس پردازد. معمولاً این جلسات به وسیله دانشجویان مستعد دوره لیسانس سرپرستی می‌شود ولی در صورتی که تعداد دانشجویان فوق لیسانس هم به اندازه کافی باشد ممکن است از وجود آنها نیز استفاده شود.

هدف از جلسات کمک، فراهم کردن محیطی است که دانشجو بتواند یکی-دو ساعت را به درس خواندن پردازد و اگر به اشکالی برخورد کرد کسی باشد که با او در مورد مشکلش مشورت کند. این جلسات در واقع مکمل ساعات مراجعة دانشجو به استاد هستند ولی استاد در هر حال باید ساعاتی را برای مراجعة دانشجویان اختصاص داده اعلام نماید.

ارزیابی کار استاد. هر ترم، کارکلیه استادان دروس ارزیابی می‌شود. در هفته دهم ترم (یا هفته چهارم در ترم‌های بهاری و تابستانی) استاد درس پاکتی حاوی تعدادی پرسشنامه همراه با یک دستورالعمل دریافت می‌کند. در این دستورالعمل از او خواسته شده است که در یکی از جلسات آن هفته درس را بیست دقیقه زودتر تعطیل کند و این پرسشنامه‌ها را در اختیار یکی از دانشجویان کلاس قرار دهد و خودش کلاس را ترک نماید. دانشجوی مذبور پرسشنامه‌ها را بین دانشجویان توزیع کرده، پس از تکمیل آنها را در حضور دیگران در پاکت گذاشته سر پاکت را می‌چسباند و شخصاً آن را به دفترگروه تحويل می‌دهد. این پرسشنامه‌ها در

اداره آموزش مورد بررسی قرار گرفته نتیجه کار، هم برای استاد درس و هم برای معاون آموزشی گروه ارسال می شود. نتایج به دست آمده در بایگانی محترمانه گروه باقی خواهند ماند و هیچ کس به جز معاون آموزشی گروه و منشی او به آن دسترسی نخواهند داشت. علت نگهداری این نتایج این است که تخصیص درس، استخدام، تمدید خدمت، و دعوت مجدد استادان حق التدریسی موقت بر مبنای این نتایج انجام خواهد شد. نکته ای که با روش جاری ما اساساً تقاضا دارد این است که در کانادا نمرات هر استاد به طور خام و کلی نسبت به تمام دروس استادان دیگر مورد قضاؤت قرار نمی گیرد بلکه قضاؤت اصلی در هر درس و در مقایسه با سایر استادان همان درس انجام می شود. در بعضی دروس مشاهده می شوند که نمرات نزدیک به هزار مورد تدریس قبلی آن درس مبنای مقایسه قرار گرفته اند. این روش را می توان از این جهت عادلانه تر به حساب آورد که نفع یا ضرر ناشی از طبیعت درس به رتبه بندی استاد منتقل نخواهد شد. در صورتی که در ایران اگر استادی یک درس مشکل پژ دست انداز را تدریس کند طبعاً دانشجویان ناراضی تر هم خواهد داشت، در صورتی که اگر درس هموارتری را تدریس می کرد چه بسا که نمره اکتسابی او بسیار رضایت بخش تر می بود.

نمره پایان ترم. همان گونه که گفته شد تقسیم نمره درس بین فعالیتهای مختلف دانشجو به صورت درصدی انجام می شود ولی نمره ای که وارد لیست نمره اداره آموزش خواهد شد عددی بین ۱ تا ۹ است. کسب نمرات ۱، ۲، ۳ به معنی مردودی دانشجو در آن است، ولی بعضی از گروهها ممکن است حداقل نمره قبولی در یک درس خاص را ۵ قرار دهند، که این موضوع فقط به دانشجو و گروه آموزشی او مربوط می شود و به استاد درس ربطی ندارد و او ممکن است اصولاً از چنین مسائلهای بی خبر باشد. تبدیل نمرات درصدی به نمره های ۱ تا ۹ در اختیار استاد است ولی معمولاً با توجه به نمره های سایر کلاس های مشابه و آمار نمره های ترم های گذشته و دید کلی استاد نسبت به سطح کلاس انجام می شود. معمولاً در هر ترم استاد هر درس اطلاعات آماری مربوط به نمرات آن درس در ۵ سال گذشته را (که هر ترم مورد بازنگری قرار می گیرد) از طرف اداره آموزش دریافت می کند. می توان گفت که در اغلب مواقع برای کسب نمره قبولی، دانشجو باید بین ۳۵ تا ۴۵ درصد امتیازات را کسب کرده باشد.

امتحان از دانشجویان غایب. دانشجویی که به دلیلی موجه در امتحان پایان ترم غایب باشد اجازه خواهد داشت که در امتحان جداگانه ای شرکت کند. این امتحان برای دروس ترم پاییزی تا قبل از امتحان میان ترم در ترم زمستانی، و برای ترم زمستانی تا اواسط ترم تابستانی، و برای ترم های بهاری و تابستانی تا قبل از آغاز ترم پاییزی باید انجام شود. تاریخ امتحان از طریق توافق بین استاد و دانشجو یا دانشجویان ذی نفع انجام می شود. تشخیص موجه بودن دلیل غیبت در امتحان به عهده رئیس دانشکده ای است که دانشجو در آن تحصیل می کند. در مورد تشخیص موجه بودن دلیل غیبت به نظر می رسد که سختگیری چندانی وجود ندارد، و گذشته از بیماری دانشجو و مرگ یا بیماری سخت خویشاوندان نزدیک او، مواردی مانند گرفتاریهای قضایی ناگهانی، درگیر شدن در یک تصادف اتومبیل، و مانند آن موجه قلمداد خواهد شد. این را نیز باید اضافه کرد که در عمل تعداد دانشجویانی که از این امتیاز استفاده می کنند بسیار ناچیز است.

غیبت موجه در امتحان میان‌ترم باعث اضافه شدن در صد آن امتحان به پایان ترم است، ولی استاد در صورت تعایل می‌تواند از آن دانشجو امتحان مجدد به عمل آورد. غیبت غیرموجه در هر کدام از امتحانات به منزله نمره ۱ در آن امتحان است. در پایان ترم استاد با توجه به فعالیتهای دانشجو در طول ترم و احتساب نمره ۱ در امتحاناتی که او در آنها غیبت غیرموجه داشته یا هنوز تکلیف آنها مشخص نشده است نمره‌ای را با ذکر غیبت دانشجو در لیست نمرات وارد می‌کند. بنابراین همواره این امکان وجود دارد که دانشجوی غایب در امتحان پایان ترم با نمره ۳ مردود شود نه نمره ۱. در صورتی که بعداً تشخیص داده شود که غیبت او موجه بوده است نمره امتحان مجدد جانشین نمره امتحان پایان ترم خواهد بود.

امتحان مجدد. در شرایط خاص، دانشجویی که در درسی مردود شده باشد ممکن است اجازه یابد در یک امتحان مجدد برای آن درس شرکت کند. مقررات دانشگاه اجازه امتحان مجدد را موکول به سه شرط می‌کند:

- (۱) وزن امتحان پایان ترم اقلًا ۴۵٪ باشد؛
- (۲) معدل آن ترم دانشجو اقلًا ۵/۵ (از ۹) باشد (یادآوری می‌شود که حداقل نمره قبولی در هر درس ۴ است)؛

(۳) به تشخیص مدیر گروه ریاضی یا معاون آموزشی او، شانس قبولی آن دانشجو قابل ملاحظه باشد. در صورت اعطای اجازه امتحان مجدد، نمره این امتحان جانشین نمره امتحان پایان ترم دانشجو خواهد شد. امتحان مجدد برای دروس ترم‌های فشرده بهاری و تابستانی امکان‌پذیر نیست.

تقلب در امتحان. در صورتی که مدرس در حین امتحان متوجه تقلب دانشجویی شود، روش جاری این است که برگه امتحانی و هرگونه مدرک تقلب از او گرفته شود و از او بخواهد که جلسه امتحان را ترک کند و مدرس نیز در اولین فرصت ممکن موضوع را به معاون آموزشی گروه اطلاع دهد. در صورتی که مدرس پس از امتحان متوجه وقوع تقلب شود باز هم باید در اولین فرصت ممکن موضوع را به اطلاع معاون آموزشی گروه برساند.

به طور مختصر، روش برخورد با تقلب این است که در جلسه‌ای با حضور خود دانشجو و یک شخص ثالث (ترجیحاً معاون آموزشی گروه) اتهام تقلب بررسی شود. پس از بررسی، مدرس می‌تواند یکی از مجازاتهای زیر را برای دانشجو در نظر بگیرد:

الف) توبیخ؛

ب) کار اضافی؛

ج) حذف نمره آن قسمت؛

د) تقلیل نمره.

مدرس همچنین می‌تواند به رئیس دانشکده‌ای که دانشجو در آنجا درس می‌خواند تعلیق یا اخراج دانشجو از دانشکده یا دانشگاه را توصیه کند. مدرس همچنین باید طی گزارشی ماجرای قلب و مجازات اعمال شده را به اطلاع رئیس دانشکده آن دانشجو برساند.

رسیدگی به مشکلات فردی دانشجو. به منظور کمک به دانشجویانی که از جهتی دچار ناتوانی یا اشکال جسمی یا روحی مربوط به مسائل آموزشی هستند، دفتری در دانشگاه تأسیس شده است که به مشکلات چنین دانشجویانی رسیدگی، و در صورت امکان چاره‌ای متناسب با وضع خاص آنان ارائه می‌کند. مثلاً اگر پس از بررسیهای لازم مشخص شود که دانشجویی از نظر درک مطلب مشکلی ندارد ولی برای نوشتن برگه امتحانی نیازمند شرایط ویژه‌ای است، مثلاً باید وقت بیشتری به او بدهند یا امتحان در محیط خلوتی انجام شود، در این صورت دفتر مذکور نامه‌ای خطاب به استادان درسهای آن دانشجو در اختیار او می‌گذارد که در آن مشکل آن دانشجو با اختصار توضیح داده شده، و از استاد خواسته شده است که روز قبل از امتحان نسخه‌ای از سوالهای امتحانی را در پاکت درستهای از طریق پست داخلی دانشگاه برای آن دفتر بفرستد تا امتحان به طور همزمان و تحت شرایط موردنظر از آن دانشجو به عمل آید. پس از انجام امتحان نیز برگه امتحانی بلاfaciale جهت تصحیح به استاد برگردانده می‌شود. از صحبتی‌ای که با بعضی استادان در این مورد داشتم چنین دریافت کم که این برنامه به طور کلی بسیار موفق بوده، و توانسته است حل چنین مسائلی را از شکل فردی و بی‌ضابطه آن به یک نظام منسجم تبدیل کند و در عین حال عزت نفس دانشجویان ذی نفع را نیز حفظ کند.

در پایان به خود اجازه می‌دهم که از این بررسی نتیجه‌گیری مختصری نیز به عمل آورم، بی‌آنکه ادعای ارائه طریق داشته باشم.

می‌توان گفت در حالی که تدریس ریاضی عمومی در دانشگاه‌های کانادا کم و بیش دارای وحدت رویه است و همواره سعی شده است که آن را هر چه بیشتر به صورتی استاندارد در آورند، ولی در ایران چنین کوشش‌هایی هنوز چندان به نتیجه نرسیده است و دانشگاه‌های مختلف، حتی مدرسان مختلف، هر کدام شیوه‌ای مخصوص به خود دارند. هرچند که در پاره‌ای از موارد شاهد روش‌های تدریس بسیار چشمگیر هستیم، ولی به طور کلی احساس می‌شود که هنوز جای فراوانی برای بهتر شدن باقی است، و شاید اندکی کوشش همگانی بتواند کیفیت کار را بهبود فراوان ببخشد، یا دست کم تفاوت‌های موجود در شیوه‌های تدریس را کاهش دهد.

آشنایی با روش پوششِ تمام در آنالیزِ حقیقی

نرگس تولایی و محمد صالح مصلحیان

پیشگفتار

مفهوم پوششِ تمام^۱ توسط تامسن [۵] در مباحث مشتق معمولی^۲، مشتق تقریبی^۳، و مشتق متقارن^۴ بدکار برده شده است. در [۳] نیز از این مفهوم برای اثبات پاره‌ای از قضایای آنالیز کلاسیک استفاده شده است. در این مقاله سعی داریم ضمن ارائه چند قضیه مشهور آنالیزِ حقیقی شیوه استفاده از مفهوم پوششِ تمام را به نمایش گذاریم.

۱. تعاریف مقدماتی و یک لم اساسی

۱.۱. تعریف. گردایه C متشکل از زیربازه‌های بسته یک بازه $[a, b]$ رایک پوششِ تمام برای زیرمجموعه از C از $[a, b]$ می‌گوییم هرگاه به ازای هر $x \in C$ ، $\exists \delta_x > 0$ وجود داشته باشد که هر زیربازه بسته از $[a, b]$ که شامل x است و طولی کمتر از δ_x دارد متعلق به C باشد.

۱.۲. تعریف. یک افزار $[a, b]$ عبارت است از یک خانواده متناهی $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ از زیربازه‌های بسته $[a, b]$ که به ازای هر $n \geq 1$ ، $1 \leq k \leq n$ ، $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ و به علاوه $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

۱.۳. قرارداد. اگر $I = [a, b]$ و f تابعی بر I باشد، طول I ، $b - a$ را با $|I|$ ، تصویر I تحت f ، $f[I] = \{f(x) : x \in I\}$ ، را با $f(I)$ ، و بالاخره $f(b) - f(a)$ را با $f[b] - f[a]$ نمایش می‌دهیم.

1) full cover(ing) 2) ordinary derivative 3) approximate derivative 4) symmetric derivative

۱.۴. لم تامسن [۵]. هر پوشش تمام برای یک بازه، شامل افزایی از آن بازه است.

برهان. فرض کنیم C یک پوشش تمام برای $[a, b]$ باشد و بخلافه شامل هیچ افزایی از $[a, b]$ نباشد. اگر بازه $[a, b]$ را به دو نیم تقسیم کنیم، لااقل یکی از این قسمتها دارای هیچ افزایی در C نخواهد بود؛ جنابه این قسمت را نیز به دو نیم تقسیم کنیم، لااقل یکی از آنها دارای هیچ افزایی در C نخواهد بود. به کمک این فرآیند دو نیم کردن، می‌توانیم به دنباله $\{J_n\}$ ای از زیربازه‌های $[a, b]$ دست یابیم که به ازای هر n , $J_{n+1} \subseteq J_n$, و C هیچ افزایی از J_n را شامل نباشد. بدیهی است که طول J_n برابر $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = (b-a)/2^n$ است. بنا به قضیه ۳۸.۲ از [۱]، ای در $[a, b]$ وجود دارد که $\lim_n |J_n| = 0$ ، عدد طبیعی N ای موجود است که $|J_N| < \delta_x$ و لذا $J_N \in C$. پس C یک افزای (بدیهی) از J_N را شامل می‌شود، که تناقصی آشکار است. \square

۲. بعضی کاربردهای پوشش تمام در آنالیز مقدماتی

اینک به کمک مفهوم پوشش تمام و لم فوق به اثبات تعدادی از قضایای آنالیز مقدماتی، نظری قضیه هاینه-بورل و قضیه بولتسانو-واریشتراس، می‌پردازیم.

۲.۱. قضیه (هاینه-بورل). بازه $[a, b]$ فشرده است.

برهان. فرض کنیم G گردایه‌ای از مجموعه‌های باز باشد که $[a, b]$ را می‌پوشاند و

یک زیربازه بسته $[a, b]$ و نیز زیرمجموعه عضوی از G است : $I = \{I : I \subseteq [a, b]\}$.

اگر $x \in [a, b]$ آنگاه $G \in G$ و لذا $\exists \delta_x > 0$ ای وجود دارد که $G \subseteq (x - \delta_x, x + \delta_x)$. بنابراین به ازای هر بازه بسته I که شامل x باشد و $\delta_x < |I|$ ، رابطه $G \subseteq (x - \delta_x, x + \delta_x) \subseteq I$ برقرار است و لذا $I \in C$. بنابراین C یک پوشش تمام برای $[a, b]$ است. پس C افزایی از $[a, b]$ را شامل می‌شود و چون هر عضو افزای زیرمجموعه عضوی از G است، $[a, b]$ می‌تواند توسط تعدادی متناهی از اعضای G پوشانیده شود. \square

۲.۲. قضیه. اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه بر $[a, b]$ به طور یکنواخت پیوسته است.

برهان. فرض کنیم $\forall \epsilon > 0$ داده شده باشد و

یک زیربازه بسته $[a, b]$ است و به ازای هر y و z در I , $|f(y) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$.

اگر $x \in [a, b]$, آنگاه بنا به پیوستگی f , $\exists \delta_x > 0$ ای وجود دارد که به ازای هر $t \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$, $|f(t) - f(x)| < \epsilon/4$. بنابراین اگر I زیربازه بسته‌ای از $[a, b]$ باشد که $\exists \delta_x > 0$ آنگاه به ازای هر

y و z در I

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(z) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

بنابراین $I \in \mathcal{C}$. درنتیجه \mathcal{C} یک پوشش تمام $[a, b]$ است ولذا افزایی از $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ مانند \mathcal{C} افزایی از $[a, b]$ است. فرض کنیم $\delta = \min\{|I_k| : 1 \leq k \leq n\}$. در این صورت به ازای هر x و y در $[a, b]$ که $|x - y| < \delta$ در یک بازه یا در دو بازه مجاور از افزای قرار دارند، که در هر صورت $\square. |f(x) - f(y)| < \epsilon$

۲.۳. قضیه. اگر تابع حقیقی f روی زیرمجموعه همبند E از \mathbb{R} پیوسته باشد آنگاه $f(E)$ نیز همبند است.

برهان. فرض کنیم $f(E)$ اجتماع دو مجموعه باز جدا از هم مانند G_1 و G_2 باشد. نشان می‌دهیم $G_2 = \emptyset$ یا $G_1 = \emptyset$. نقطه دلخواه $a \in E$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $b \in E$ چون $E \subseteq \mathbb{R}$ همبند است، پس به صورت یک بازه می‌باشد و لذا $E \subseteq [a, b]$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{C} = \{I : f(I) \subseteq G_2 \text{ یا } f(I) \subseteq G_1\} \text{ است، و}$$

بنا به پیوستگی f گردایه \mathcal{C} یک پوشش تمام $[a, b]$ است ولذا افزایی مانند $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ از $[a, b]$ را شامل می‌شود. از طرفی به ازای هر $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$ ، $1 \leq i \leq n-1$ ، و لذا عدد j باشد که $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ و وجود دارد که به ازای هر $i \leq j$ ، $f(I_i) \subseteq G_j$. به این ترتیب $f(a) \in G_j$ و $f(b) \in G_j$. به این ترتیب $f(a) \in G_1$ و $f(b) \in G_2$ هستند. بنابراین $f(E)$ زیرمجموعه G_1 یا G_2 است. پس

$$\square. G_2 = \emptyset \text{ یا } G_1 = \emptyset$$

۲.۴. قضیه. اگر f بر $[a, b]$ مشتقپذیر باشد و به ازای هر $x \in [a, b]$ ، آنگاه $f'(x) \leq 0$ بودن f نزولی است.

برهان. فرض کنیم $x < y$ ($x < y$ متعلق به $[a, b]$) باشند و به ازای هر $J = [x, y]$ برای اثبات نزولی بودن f کافی است ثابت کنیم $f(y) - f(x) < \epsilon(y - x)$. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد و

$$\mathcal{C} = \{I : f(z_2) - f(z_1) < \epsilon(z_2 - z_1)\} \text{ زیربازه بسته‌ای از } J \text{ است و } I = [z_1, z_2].$$

می‌توان به کمک تعریف مشتق ثابت نمود که \mathcal{C} یک پوشش تمام برای J است ولذا شامل افزایی از J مانند $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ می‌باشد. بنابراین اگر به ازای هر $J_i = [z_i, z_{i+1}]$ ، $1 \leq i \leq n$ ، آنگاه

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n (f(z_{i+1}) - f(z_i)) < \epsilon \sum_{i=1}^n (z_{i+1} - z_i) = \epsilon(y - x). \square$$

۲.۵. قضیه. اگر تابع f بر $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه بر $[a, b]$ کراندار است.

برهان. گردایه $\{I\}$ یک زیربازه بسته $[a, b]$ است و f بر I کراندار است. $C = \{I : f$ یک پوشش تمام برای $[a, b]$ است و لذا شامل یک افزار از $[a, b]$ است. چون f بر هر بازه موجود در این افزار کراندار است، f بر $[a, b]$ کراندار می‌باشد. \square

۲.۶. قضیه. اگر S یک مجموعه نامتناهی و کراندار از اعداد حقیقی باشد آنگاه S دارای یک نقطه حدی است.

برهان. چون S کراندار است بازه‌ای مانند $[a, b]$ وجود دارد که $S \subseteq [a, b]$. فرض کنیم S دارای هیچ نقطه حدی‌ای نباشد و

$$C = \{I : I \cap S \text{ متناهی است}\}.$$

در این صورت C یک پوشش تمام برای $[a, b]$ است و لذا C افزاری از $[a, b]$ مانند $\{I_1, \dots, I_n\}$ را در بر می‌گیرد. اینک

$$S = S \cap [a, b] = S \cap \left(\bigcup_{k=1}^n I_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (S \cap I_k).$$

بنابراین S متناهی است، که متناقض با فرض است. \square

۲.۷. قضیه. اگر f بر $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر $x \in [a, b]$ آنگاه $f'(x) > 0$. فرض کنیم b_1 بر $[a, b]$ اکیداً صعودی است.

برهان. فرض کنیم $b_1 < b_1 < b$. گردایه

$$C = \{I : f[I] > 0\}$$

یک پوشش تمام برای $[a_1, b_1]$ است. بنابراین C شامل افزاری مانند $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ از $[a_1, b_1]$ است. اینک

$$f(b_1) - f(a_1) = \sum_{k=1}^n f(I_k) > 0.$$

بس $f(a_1) < f(b_1)$. بنابراین f روی $[a, b]$ اکیداً صعودی است. \square

۲.۸. قضیه. اگر f بر $[a, b]$ مشتق‌پذیر و با مشتق پیوسته باشد و $f(a) = f(b)$ آنگاه عدد $x \in [a, b]$ وجود دارد که $f'(x) = 0$.

برهان. فرض کنیم به ازای هر $x \in [a, b]$ ، $f'(x) \neq 0$ ، و نیز

$C = \{I : I \text{ یک زیربازه بسته } [a, b] \text{ است و تابع علامت بر } f' \text{ تک مقداری است}\}$.

با به پیوستگی f' ، C یک پوشش تمام $[a, b]$ است ولذا افزایی از $[a, b]$ مانند $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ وجود دارد که زیرمجموعه C است. به ازای هر $i \leq n$ ، تابع علامت بر (I_i) f' تک مقداری است و چون به ازای هر $1 \leq i \leq n-1$ ، $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$ ، پس علامت کلیه مقادیر f' بر $[a, b]$ یکی است. بنابراین f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است ولذا $f(a) \neq f(b)$ ، که خلاف فرض است. \square

۲.۹. قضیه. اگر α تابعی پیوسته و صعودی بر $[a, b]$ باشد و f بر $[a, b]$ یکنوا باشد آنگاه f روی $[a, b]$ نسبت به α به مفهوم ریمان-استیلیتسیس انتگرال پذیر است.

برهان. فرض کنیم f بر $[a, b]$ صعودی باشد و نیز $\epsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت چون α پیوسته است، گردایه $\{I : \alpha[I] < \epsilon/(f(b) - f(a))\}$ است و $C = \{I : \alpha[I] < \epsilon/(f(b) - f(a))\}$ یک پوشش تمام $[a, b]$ است ولذا افزایی مانند $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ از $[a, b]$ را در بر می‌گیرد. بنابراین اگر به ازای $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ و $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ، $1 \leq k \leq n$ آنگاه

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f[I_k] \alpha[I_k] < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^n f[I_k] = \epsilon. \quad \square$$

۳. بعضی از کاربردهای پوشش تمام در آنالیز پیشرفته

در این قسمت ابتدا دو لم بیان می‌کنیم:

۳.۱. لم. فرض کنید E_1 و E_2 زیرمجموعه‌هایی از $[a, b]$ باشند. اگر C_1 یک پوشش تمام E_1 و C_2 یک پوشش تمام E_2 باشد، آنگاه $C_1 \cup C_2$ یک پوشش تمام $E_1 \cup E_2$ است.

برهان. $C_1 \cup C_2$ مشکل از زیربازه‌های بسته‌ای از $[a, b]$ است. اگر $x \in E_1 \cup E_2$ ، آنگاه x در یکی از دو مجموعه E_1 یا E_2 واقع می‌شود. بدون اینکه خللی به کلیت مسئله وارد آید فرض می‌کنیم $x \in E_1$. با توجه به اینکه C_1 یک پوشش تمام E_1 است، $x \in C_1$ و وجود دارد که هر زیربازه بسته از $[a, b]$ که شامل x باشد و طولی کمتر از δ_x داشته باشد متعلق به C_1 و لذا متعلق به $C_1 \cup C_2$ است. پس $C_1 \cup C_2$ یک پوشش تمام برای $E_1 \cup E_2$ است. \square

۳.۲. لم. فرض کنید E یک زیرمجموعه $[a, b]$ و G یک پوشش باز E باشد. در این صورت گردایه C مشکل از تمام زیربازه‌های بسته‌ای از $[a, b]$ که هر یک مشمول در یک عضو G هستند یک پوشش تمام E است.

برهان. فرض کنیم x متعلق به E باشد. چون \mathcal{G} یک پوشش باز E است، عضوی از \mathcal{G} مانند O وجود دارد که x را در بر می‌گیرد. چون O باز است، $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subseteq O$ و وجود $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ ای وجود دارد که شامل x است و طولی کمتر از δ_x دارد، آنگاه

$$I \subseteq (x - \delta_x, x + \delta_x) \subseteq O.$$

بنابراین $I \in \mathcal{C}$. پس \mathcal{C} یک پوشش تمام E است. \square

اینک به اثبات قضیه زیر که تعمیم قضیه ۲.۹ است می‌پردازیم:

۳.۳. قضیه. اگر تابع کراندار f تعدادی شمارا نقطه ناپیوستگی بر $[a, b]$ داشته باشد و بخلافه تابع صعودی α در هر نقطه ناپیوستگی f پیوسته باشد، آنگاه f روی $[a, b]$ نسبت به α به مفهوم ریمان-استیلیتسیس انتگرال پذیر است.

برهان. فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد و f در هر نقطه $[a, b]$ به جز در $\{c_1, c_2, \dots\}$ پیوسته باشد. در این صورت

$$\mathcal{C} = \left\{ I : \sup_{t \in I} f(t) - \inf_{t \in I} f(t) < \frac{\epsilon}{2(\alpha(b) - \alpha(a))} \right\}$$

یک پوشش تمام برای $E = [a, b] - \{c_1, c_2, \dots\}$ است. همچنین فرض کنیم به ازای هر n

$$\mathcal{C}_n = \{J : c_n \in J, \alpha[J] < \frac{\epsilon}{2^{n+1}M}\},$$

که در آن $|f(x)| \leq M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n)$ یک پوشش تمام برای E خواهد بود و لذا بنابراین $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n)$ یک پوشش تمام برای $[a, b]$ است و بنابراین شامل یک افزار $P = \{x_0, x_1, \dots, x_t\}$ از $[a, b]$ است. اینک اگر $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ و $I_k = \{I_1, I_2, \dots, I_t\}$ آنگاه

$$\begin{aligned} U(P, t, \alpha) - L(P, t, \alpha) &= \sum_{k=1}^t (M_k - m_k) \alpha[I_k] \\ &= \sum_{I_k \in \mathcal{C}} (M_k - m_k) \alpha[I_k] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I_k \in \mathcal{C}_n} (M_k - m_k) \alpha[I_k] \\ &< \frac{\epsilon}{2(\alpha(b) - \alpha(a))} \sum_{I_k \in \mathcal{C}} \alpha[I_k] + \sum_{n=1}^{\infty} (2M \sum_{I_k \in \mathcal{C}_n} \alpha[I_k]) \\ &< \frac{\epsilon}{2(\alpha(b) - \alpha(a))} (\alpha(b) - \alpha(a)) + \sum_{n=1}^{\infty} (2m \cdot 2 \cdot \frac{\epsilon}{2^{n+1}M}) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

توجه داریم که در هر \mathcal{C}_n حداقل دو تا از I_k ها واقع می‌شود. \square

۳.۴. تعریف. زیرمجموعه E از \mathbb{R} یک مجموعه صفر-اندازه نامیده می‌شود هرگاه

$$\inf \left\{ \sum_n |I_n| : E \subseteq \bigcup_n I_n \right\} = 0.$$

۳.۵. قرارداد. می‌گوییم خاصیت p تقریباً همه‌جا روی مجموعه A برقرار است (یا تقریباً هر خاصیت p دارد) هرگاه مجموعه تمام اعضای $A \in A$ که خاصیت p ندارند یک مجموعه صفر-اندازه باشد.

۳.۶. تابع حقیقی f روی $[a, b]$ پیوسته مطلق نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ داشته باشد که به ازای هر گردایه متناهی $\{(x_i, x'_i)\}$ از بازه‌های جدا از هم که $|x_i - x'_i| < \delta$ باشند

$$\sum_i |f(x_i) - f(x'_i)| < \epsilon.$$

۳.۷. اگر به ازای تقریباً هر $x \in [a, b]$

$$\underline{D}f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf_{0 < |y-x| < \delta} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

و f روی $[a, b]$ پیوسته مطلق باشد، آنگاه f روی $[a, b]$ صعودی است.

برهان. فرض کنیم c و d دو نقطه دلخواه $[a, b]$ باشند و $c < d$. ثابت می‌کنیم $\underline{D}f(x) \geq 0$. ابتدا توجه می‌کنیم که تحت شرایط مسئله، به ازای تقریباً هر $x \in [c, d]$ ، $\underline{D}f(x) \geq 0$ و نیز f روی $[c, d]$ پیوسته مطلق است. اینک فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. چون f روی $[c, d]$ پیوسته مطلق است پس $\delta > 0$ وجود دارد که در تعریف پیوستگی مطلق صدق می‌کند. اما اگر $\underline{D}f(x) \geq 0$ ، آنگاه بنا به فرض $[c, d] \setminus A$ صفر-اندازه است و لذا یک گردایه $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq \delta$ از فاصله‌ها در $[c, d] \setminus A$ وجود دارد که $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \epsilon$ باشد که این فرض کنیم

$$\mathcal{C} = \{J : f[J] > -\epsilon |J|\} \text{ است و } J \in \mathcal{C}$$

$\mathcal{D} = \{J : J \subseteq I_i, i \in \mathbb{N}\}$ یک زیربازه بسته $[c, d]$ است و به ازای لاقل یک $J \in \mathcal{D}$.

در این صورت \mathcal{D} بنا به لم ۳.۱ یک پوشش تمام $[c, d] \setminus A$ است. همچنین \mathcal{C} یک پوشش تمام $[c, d]$ است (زیرا اگر $x_0 \in [c, d]$ آنگاه، چون $\underline{D}f(x_0) \geq 0$ و وجود دارد که به ازای هر y که $|y - x_0| < \eta$ ، $f(y) - f(x_0) / (y - x_0) > -\epsilon$)؛ لذا اگر J یک بازه شامل x_0 باشد که $|J| < \eta$ ، $f[J] > -\epsilon |J|$ است و آنگاه $J \in \mathcal{C}$. پس بنا به لم ۳.۲ $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ یک پوشش تمام برای $[c, d]$ است و

لذا یک افزار $\{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ از $[c, d]$ وجود دارد که به ازای هر k , $I_k \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. بنابراین

$$f(d) - f(c) = \sum_{k=1}^m f[I_k] = \sum_{I_k \in \mathcal{C}} f[I_k] + \sum_{I_k \in \mathcal{D}} f[I_k].$$

جون δ , با به تعریف پیوستگی مطلق, $\epsilon < \sum_{I_k \in \mathcal{D}} |I_k| < \delta$, و $\sum_{I_k \in \mathcal{D}} f[I_k] \leq \sum_{I_k \in \mathcal{D}} |f[I_k]| < \epsilon$. لذا $\sum_{I_k \in \mathcal{C}} f[I_k] > -\epsilon$. همچنین $\sum_{I_k \in \mathcal{D}} f[I_k] > -\epsilon(d - c)$. بنابراین $\sum_{I_k \in \mathcal{C}} f[I_k] > -\epsilon(d - c) + \epsilon$. حال اگر $f(d) \geq f(c)$, آنگاه $f(d) - f(c) > -\epsilon(d - c) + \epsilon$. \square .

البته توجه داریم که اثبات دیگری از قضیه فوق می‌تواند به کمک لم پوششی ویتالی انجام گیرد (فصل پنجم مرجع [۲] را ملاحظه فرمایید).

در خاتمه، قضاویت در مورد اینکه «آیا استفاده از روش پوشش تمام اساساً برهانهای قضایای آنالیز را ساده‌تر می‌نماید یا خیر؟» و، در صورت مشتبت بودن جواب، پاسخ این را که «آیا می‌توان در دروس آنالیز ریاضی دوره کارشناسی ریاضی از این شیوه کمک گرفت؟» به خواننده واگذار می‌کنیم.

مراجع

- [۱] والتر رودین. اصول آنالیز ریاضی، ترجمه علی اکبر عالم‌زاده. انتشارات علمی و فنی، تهران، ۱۳۶۲.
- [۲] اج. ال. رویدن. آنالیز حقیقی، ترجمه نوروز ایزددوستدار. انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۶۶.
- [۳] M.W. Botsko. A Unified Treatment of Various Theorems in Elementary Analysis. *Amer. Math. Monthly*, **94** (1987), 450-452.
- [۴] M.W. Botsko. The Use of Full Covers in Real Analysis. *Amer. Math. Monthly*, **96** (1989), 328-333.
- [۵] B.S. Thomson. On Full Covering Properties. *Real Analysis Exchange*, **6** (1980-81), 77-93.

برآورد گنگ با گویا

فریبرز آذرپناه و علی رضایی

ابتدا توجه خواسته را به سه مسئله زیر جلب می‌کنیم:

۱. اگر \mathbb{A} یک زیرگروه جمعی از مجموعه اعداد صحیح \mathbb{Z} باشد و $\{n \in \mathbb{A} : n > 0\}$ آنگاه $\{\sin n : n \in \mathbb{A}^+\}$ در $[1, 1 -]$ چگال است. در حالت خاص، $\{\tan 1, \tan 2, \dots, \tan n, \dots\}$ در مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} چگال می‌باشد.
۲. دنباله $\{\frac{1}{n \sin n}\}$ واگرای است.
۳. اگر \mathbb{P} مجموعه اعداد اول باشد، آنگاه $\{p, q \in \mathbb{P} : p, q \in \mathbb{P}\}$ در $[0^\circ, \infty)$ چگال است.

اگر برای نخستین بار است که با این مسائل روبه رو می‌شویم شاید کمی عجیب به نظر برسند و اگر بخواهیم به اثبات آنها بپردازیم می‌بینیم که کار به سادگی انجام نمی‌گیرد مگر اینکه از چند نتیجه و قضیه بالهیت که اعداد گنگ را توسط اعداد گویا تخمین می‌زنند آگاه باشیم. این سه مسئله زیبا ما را برآن داشت تا این قضایا و نتایج را معرفی کرده، تعمیم بعضی از آنها را ارائه دهیم و به کمک آنها این سه مسئله را حل کنیم.

قضیه زیر شرح دیگری از قضیه ۱، صفحه ۷، از مرجع [۲] و تعمیمی از قضیه کرونکر است. اثبات‌های متعددی از قضیه کرونکر را در مراجع [۴] و [۱۰] می‌توان مشاهده کرد.

قضیه ۱. هر زیرگروه جمعی \mathbb{R} یا دوری است یا در \mathbb{R} چگال است.

اثبات. فرض می‌کنیم G یک زیرگروه جمعی \mathbb{R} باشد. می‌گیریم $\{0^\circ < a < G^+\}$ و $\alpha = \inf G^+$ دو حالت پیش می‌آید:

حالت ۱. اگر $0^\circ < \alpha < G$ ثابت می‌کنیم G دوری است. ابتدا نشان می‌دهیم $\alpha \in G$. فرض می‌کنیم چنین نباشد. چون $0^\circ < \alpha$ ، پس عدد طبیعی n موجود است که $\alpha < \frac{1}{n}$ ، و به ازای $\frac{1}{2n} = \epsilon$ ، بنا به تعریف اینفیموم، یک $a \in G^+$ وجود دارد که $\alpha < a < \alpha + \frac{1}{2n}$. حال چون $\alpha < b < \alpha + t$ و $t = a - \alpha$ اینفیموم G^+ است، پس یک $b \in G^+$ وجود دارد که $\alpha < b < \alpha + t$ ، و یا

به این ترتیب، $b - \alpha < t = a - \alpha$

$$a - b = (a - \alpha) + (\alpha - b) > t - t = 0,$$

یعنی $a - b \in G^+$. از طرفی

$$a - b = |a - b| \leq |a - \alpha| + |b - \alpha| < \frac{1}{2n} + t < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} < \alpha.$$

در نتیجه $a - b < \alpha$ با $\alpha = \inf G^+$ تناقض دارد. بنابراین $\alpha \in G$. اکنون ثابت می‌کنیم G دوری است و با α تولید می‌شود. فرض می‌کنیم $b \in G$. بدیهی است که یک $n \in \mathbb{Z}$ یافت می‌شود که $n\alpha \leq b < (n+1)\alpha$ و بنابراین $0 \leq b - n\alpha < \alpha$. حال اگر $b \neq n\alpha$ در G^+ است و از این‌فهمی G^+ کمتر می‌باشد، که غیرممکن است. پس $b = n\alpha$ و این نشان می‌دهد که G دوری است و با α تولید می‌شود.

حال ۲. اگر $\alpha = 0$ ، آنگاه فرض می‌کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند، و بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود می‌توانیم بگیریم $y < x < 0$. قرار می‌دهیم $x' = \sup\{a \in G^+ : a \leq x\}$. چون $x' = \sup\{a \in G^+ : a \leq x\}$ پس $y - x' \geq y - x > 0$. همچنین، با توجه به تعریف x' ، یک $a \in G^+$ یافت می‌شود که $a \leq x' < b$. بنابراین $x' - b < a \leq x'$.

$$b + a < (y - x') + a \leq y - x' + x' = y.$$

در نتیجه $y < a + b < x$ ، ولذا $y < a + b < x$. از آنجاکه $a + b \in G^+$ ، ثابت کردہ‌ایم که بین هر دو عدد حقیقی یکی از اعضای G وجود دارد، یعنی G در چگال است. \square

نتیجه ۱. اگر λ عددی گنگ و \mathbb{A} یک زیرگروه جمعی \mathbb{Z} باشد، آنگاه به ازای هر عدد طبیعی k یک عدد گویای $\frac{m}{n}$ موجود است که $|\frac{m}{n} - \lambda| < \frac{1}{nk}$ و $m, n \in \mathbb{A}$.

اثبات. فرض می‌کنیم $G = \{m - n\lambda : m, n \in \mathbb{A}\}$. بدیهی است که G یک زیرگروه جمعی است. اگر G دوری باشد و با یک عضو $m - n\lambda$ تولید شود، آنگاه چون $\lambda \in G$ پس یک $p \in \mathbb{Z}$ یافت می‌شود که $(m - n\lambda) - p(m - n\lambda) = 0$ ، و این نشان می‌دهد که $\lambda = p$ ، بر خلاف فرض، گویاست. بنابراین G دوری نیست و مطابق قضیه ۱، باید در \mathbb{R} چگال باشد. به این ترتیب، بهویژه صفر یک نقطه حدی G است و مطابق تعریف، به ازای هر k متعلق به اعداد طبیعی \mathbb{N} ، یک عضو G مانند $m - n\lambda$ وجود دارد که $|\frac{m}{n} - \lambda| < \frac{1}{k}$ ، یا $|\frac{m}{n} - \lambda| < \frac{1}{kn}$.

نتیجه زیر تعمیمی از قضیه C در صفحه ۶۹ از مرجع [۳] است.

نتیجه ۲. اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $\lambda \in \mathbb{A}$ یک عدد گنگ، و \mathbb{A} یک زیرگروه جمعی \mathbb{Z} باشد، آنگاه دنباله‌های $\{m_k\}$ و $\{n_k\}$ ای در \mathbb{A} وجود دارند که $\lim_{k \rightarrow \infty} (m_k + n_k \lambda) = \alpha$.

ایات. مانند قبل، $G = \{m + n\lambda : m, n \in \mathbb{A}\}$ در R چگال است؛ بنابراین به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ دنباله‌ای از اعضای G وجود دارد که به α همگرایست، یعنی اعضایی مثل m_k و n_k از \mathbb{A} وجود دارند که $\lim_{k \rightarrow \infty} (m_k + n_k\lambda) = \alpha$.

نکته. مطابق قضیه ۱، اگر $\lambda \in \mathbb{R}$ و \mathbb{A} یک زیرگروه جمعی \mathbb{Z} باشد، آنگاه $\{a + b\lambda : a, b \in \mathbb{A}\}$ یک زیرگروه دوری \mathbb{R} است اگر و تنها اگر اعضای a و b از \mathbb{A} یافت شوند که $\lambda = \frac{a}{b}$.

حل مسئله ۱. اگر $\alpha \in [-1, 1] \cup (0, 1) \cup (1, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ آنگاه یک $\beta \in (\circ, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ موجود است که $\sin \beta = \alpha$. مطابق نتیجه ۲، دنباله‌های $\{m_k\}$ و $\{n_k\}$ ای در \mathbb{A} موجودند که $m_k + n_k\pi$ به β همگرایست. اگر $\{m_k\}$ دارای یک زیردنباله $\{m_{k_p}\}$ با جمله‌های مثبت باشد، آنگاه $2m_{k_p} + 2n_{k_p}\pi \rightarrow \beta$ و از آنجاکه تابع \sin پیوسته است،

$$\lim_{k_p \rightarrow \infty} \sin 2m_{k_p} = \lim_{k_p \rightarrow \infty} \sin(2m_{k_p} + 2n_{k_p}\pi) = \sin \beta = \alpha,$$

که در آن $2m_{k_p} \in \mathbb{A}^+$. حال اگر $\{m_k\}$ چنین زیردنباله‌ای نداشته باشد، یعنی عدد طبیعی N موجود باشد که به ازای هر $m_k < N$ ، $k \geq 0$ ، آنگاه دنباله‌های $\{s_p\}$ و $\{t_p\}$ ای در \mathbb{A} وجود دارند که $s_p + t_p\pi$ به صفر همگرایست. بدیهی است که به ازای هر $p_k \in \mathbb{N}$ ، یک $m_k \in \mathbb{A}$ موجود است که $|s_{p_k} + t_{p_k}\pi| > |m_k|$. پس $\{s_{p_k} + t_{p_k}\pi\}$ به صفر همگرایست، و بنابراین

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{2(s_{p_k} + m_k) + 2(t_{p_k} + n_k)\pi\} = \beta,$$

که در آن $2(s_{p_k} + m_k) \in \mathbb{A}^+$. چون تابع \sin پیوسته است،

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin 2(s_{p_k} + m_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sin[2(s_{p_k} + m_k) + 2(t_{p_k} + n_k)\pi] = \sin \beta = \alpha.$$

به این ترتیب در هر حالت نشان دادیم که دنباله‌ای در $\{\sin n : n \in \mathbb{A}^+\}$ موجود است که به α همگرایست، یعنی S در $[1, -1]$ چگال است. در حالت خاص، وقتی فرض کنیم $\mathbb{A} = \mathbb{N}$ ، نتیجه می‌شود که $\{\sin 1, \sin 2, \dots, \sin n, \dots\}$ در $[1, -1]$ چگال است. برای اینکه نشان دهیم $\{\tan 1, \tan 2, \dots, \tan n, \dots\}$ در \mathbb{R} چگال است، مانند قبل مشاهده می‌کنیم که به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، یک $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ وجود دارد که $\tan \beta = \alpha$ ، و مشابه قبل عمل می‌کنیم. □

در مسئله ۱، اگر قرار دهیم $I = \{k, 2k, 3k, \dots\}$ ، آنگاه بوضوح نتیجه می‌گیریم که $\{\tan k, \tan 2k, \tan 3k, \dots\}$ در \mathbb{R} چگال است.

نتیجه ۱ هر عدد گنگ λ را با یک عدد گویای $\frac{m}{n}$ با تقریب کمتر از $\frac{1}{kn}$ برآورد می‌کند، یعنی به ازای هر عدد گنگ λ و هر $k \in \mathbb{N}$ ، تعدادی نامتناهی عدد گویای $\frac{m}{n}$ موجود است که $|\frac{1}{kn} - \lambda| < \frac{1}{n}$. آیا از

میان این اعداد گویا یکی یافت می شود که مخرج آن نایبیشتر از k باشد؟ در قضیه زیر ثابت می کنیم پاسخ این پرسش مثبت است. وقتی به ازای هر $N \in \mathbb{N}$ چنین عدد گویایی وجود داشته باشد، آنگاه می توانیم عدد گنگ λ را با اعداد گویای $\frac{m}{n}$ با تقریب کمتر از $\frac{1}{n^2}$ برآورد کنیم. در اینجا باز هم پرسش مشابهی مطرح است: آیا عدد گنگ λ را می توان با اعداد گویای $\frac{m}{n}$ با تقریب کمتر از $\frac{1}{n^2}$ برآورد کرد؟ پاسخ منفی است. در واقع حتی پاسخ این پرسش که آیا می توان عدد گنگ λ را با اعداد گویای $\frac{m}{n}$ با تقریب کمتر از $\frac{1}{\alpha n^2}$ برآورد کرد نیز به ازای $\sqrt{\alpha} > \alpha$ منفی است. هورویتس^۱ نشان داده است که اگر λ عددی گنگ باشد، آنگاه تعدادی نامتناهی عدد گویای $\frac{m}{n}$ وجود دارد که $|\frac{1}{\sqrt{\alpha} n^2} - |\lambda| | < \frac{1}{\alpha n^2}$ ، و نیز اگر $\sqrt{\alpha} > \alpha$ ، آنگاه عدد گنگ λ موجود است که تعداد اعداد گویای $\frac{m}{n}$ ای که در نابرابری $|\frac{1}{\alpha n^2} - |\lambda| | < \frac{1}{\alpha n^2}$ صدق می کنند متناهی است—مرجع [۴] را برای اثباتهای ساده‌تر ببینید. در صفحه ۱۰۰ مرجع [۶]، به ازای $\alpha = 5$ نشان داده شده است که تعداد اعداد گویای $\frac{m}{n}$ ای که در نابرابری $|\frac{1}{5n^2} - |\lambda| | < \frac{1}{5n^2}$ صدق می کنند متناهی است. در واقع ثابت شده است که $|\frac{1}{5n^2} - \sqrt{2}| < |\frac{m}{n}|$ به ازای $n > 10$ غیرممکن است.

قضیه ۲. اگر λ یک عدد گنگ و n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه عدد گویای $\frac{m}{n}$ ای با شرط $n \leq k$ یافت می شود که $|\frac{1}{kn} - |\lambda| | < \frac{1}{kn}$.

اثبات: عدد $\lambda, 2\lambda, \dots, k\lambda$ را در نظر می گیریم. به ازای هر $k \leq i \leq 1$ ، قسمتهای صحیح و اعشاری $i\lambda$ را به ترتیب با a_i و β_i نشان می دهیم؛ پس

$$\lambda - a_1 = \beta_1, \quad 2\lambda - a_2 = \beta_2, \dots, \quad k\lambda - a_k = \beta_k.$$

از آنجا که هر a_i یک عدد صحیح است، پس به ازای هر $k \leq i \leq 1$ ، β_i عددی گنگ بین صفر و یک است. بازه $[0, 1]$ را به k : زیرفاصله مساوی $[\frac{1}{k}, \frac{2}{k}], [\frac{2}{k}, \frac{3}{k}], \dots, [\frac{k-1}{k}, 1]$ تقسیم می کنیم. بدینهی است که هر β_i درون یکی از این زیرفاصله ها قرار دارد، و چون هر β_i گنگ است، هیچ کدام از نقاط انتهایی زیرفاصله ها نمی تواند باشد. در مورد زیرفاصله I_1 دو حالت وجود دارد: یا شامل حداقل یک β_i است و یا I_1 شامل هیچ کدام از β_i ها نیست.

حالت ۱. اگر عدد صحیح n ای در بازه $[1, k]$ موجود باشد که $\beta_n \in I_1$ ، آنگاه

$$-\frac{1}{k} < 0 < n\lambda - a_n < \frac{1}{k}.$$

اگر طرفین این نابرابری را بر n بخش کنیم، آنگاه $|\frac{1}{kn} - |\lambda| | < |\frac{a_n}{n}|$ و اگر عدد صحیح a_n را بگیریم به نتیجه مطلوب دست یافته ایم.

حالت ۲. اگر I_1 شامل هیچ کدام از β_i ها نباشد، آنگاه k عدد $\lambda, 2\lambda, \dots, k\lambda$ در $(1-k)$ زیربازه I_2, I_3, \dots, I_k قرار دارند. بنا به اصل لانه کبوتر^۲، باید دو عدد در یکی از زیربازه ها قرار گیرند؛

Hurwitz (۱)

(۲) «اگر k کبوتر در $(1-k)$ لانه قرار گرفته باشد، در یکی از لانه ها بیش از یک کبوتر قرار دارد.»

منلاً فرض می‌کنیم $k \leq j < i \leq 1$ و $\beta_i - \beta_j$ در یک زیربازه قرار داشته باشند. چون طول هر زیربازه برابر با $\frac{1}{k}$ است و $\beta_i - \beta_j$ گنگ است، پس

$$|\beta_i - \beta_j| < \frac{1}{k},$$

بعنی

$$|(i\lambda - a_i) - (j\lambda - a_j)| < \frac{1}{k},$$

$$|(a_j - a_i) - (j - i)\lambda| < \frac{1}{k}.$$

با تقسیم طرفین نابرابری فوق بر عدد طبیعی $j - i$ ، بدست خواهد آمد $|\frac{a_j - a_i}{j - i} - \lambda| < \frac{1}{(j-i)k}$. با قرار دادن $a_i = j - m$ و $a_j = i - m$ ، بدست می‌آید $n \leq k \leq n - i$ و $\frac{a_j - a_i}{j - i} = \frac{m}{n}$. ونتیجه مطلوب بدست آمده است. \square

نتیجه ۳. اگر λ یک عدد گنگ باشد، تعدادی نامتناهی عدد گویای $\frac{m}{n}$ (به ساده‌ترین شکل) وجود دارند

$$|\frac{m}{n} - \lambda| < \frac{1}{n^r}.$$

اثبات. مطابق قضیه ۲، به ازای هر عدد طبیعی k ، عدد گویای $\frac{m}{n}$ ای با شرط $k \leq n$ وجود دارد که $|\frac{m}{n} - \lambda| < \frac{1}{kn}$. اگر عدد گویای $\frac{m}{n}$ در نابرابری فوق صدق کند و $\frac{M}{N}$ ساده‌شده $\frac{m}{n}$ باشد، باز هم آن نابرابری برقرار است زیرا که $n \leq N$ و $|\frac{m}{n} - \lambda| < \frac{1}{n^r} = |\frac{m}{N} - \lambda|$. برای کامل کردن اثبات باید نشان دهیم تعدادی نامتناهی عدد گویا با شرایط فوق وجود دارد. فرض می‌کنیم تعداد اعداد گویای $\frac{m}{n}$ ای که در نابرابری $|\frac{m}{n} - \lambda| < \frac{1}{n^r}$ صدق می‌کنند متناهی باشند و آنها را $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_p}{n_p}$ می‌نامیم. قرار می‌دهیم

$$\delta = \min \left\{ \left| \frac{m_1}{n_1} - \lambda \right|, \left| \frac{m_2}{n_2} - \lambda \right|, \dots, \left| \frac{m_p}{n_p} - \lambda \right| \right\}.$$

بدیهی است که $\delta > 0$. عدد $N \in \mathbb{N}$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $\delta < \frac{1}{N}$. اکنون مطابق قضیه ۲، عدد گویای $\frac{m}{n}$ ای با شرط $k \leq n$ موجود است که $|\frac{m}{n} - \lambda| < \frac{1}{kn} < \frac{1}{N}$ ، و بهوضوح به ازای هر i با $\frac{m}{n_i} \neq \frac{m}{n}$ ، که با متناهی بودن تعداد اعداد گویای $\frac{m}{n}$ ای که در نابرابری $|\frac{m}{n} - \lambda| < \frac{1}{n^r}$ صدق می‌کنند متناقض است. \square

اکنون به حل مسئله ۲ می‌پردازیم. قسمت اول این راه حل از مرجع [۹] گرفته شده است.

حل مسئله ۲. مطابق نتیجه ۳، دنباله‌های $\{m_k\}$ و $\{n_k\}$ ای در \mathbb{Z} وجود دارند که $|\frac{m_k}{n_k} - \pi| < \frac{1}{n_k^r}$ و $|\sin m_k| = |\sin(m_k - n_k\pi)| \leq |m_k - n_k\pi| < \frac{1}{n_k}$. از آنجا که $|m_k - n_k\pi| < \frac{1}{n_k}$

$$\left| \frac{1}{m_k \sin m_k} \right| \geq \frac{1}{|m_k||m_k - n_k\pi|} > \frac{1}{m_k \frac{1}{n_k}} = \frac{n_k}{m_k}.$$

فریدریش آذرپناه و علی رضایی

ولی $|m_k - n_k\pi| < \frac{1}{n_k}$ نتیجه می‌دهد که $\pi + \frac{1}{n_k} < \pi + m_k \leq \pi + \frac{1}{n_k}$ ، و بنابراین $|\frac{1}{m_k \sin m_k}| > \frac{n_k}{m_k} > \frac{1}{\pi + 1}$. این نشان می‌دهد که $\frac{1}{m_k \sin m_k}$ به صفر همگرا نیست. از طرفی مطابق نتیجه ۲، تعدادی نامتناهی عدد صحیح p_k و q_k وجود دارند که به ازای آنها دنباله $\{p_k + q_k\pi\}$ به $\frac{\pi}{1}$ همگراست. در مورد این دنباله، $1 = \sin \frac{\pi}{1} = |\sin(p_k + q_k\pi)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\sin(p_k + q_k\pi)|$ پس $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{p_k \sin p_k} = 1$. به این ترتیب دو زیردنباله از $\{\frac{1}{n \sin n}\}$ یافتیم که یکی به صفر همگراست و دیگری به صفر همگرا نیست؛ پس $\{\frac{1}{n \sin n}\}$ واگرای است. \square

در انتهای این مقاله قصد داریم اعداد گنگ را با زیرمجموعه‌های خاصی از اعداد گویا برآورد کنیم. همیشه می‌توان تعدادی از اعضای یک مجموعه چگال را حذف کرد به طوری که باقی مانده همچنان چگال باشد. مثلاً می‌توان زیرمجموعه‌های کوچکتری از \mathbb{Q} یافت که در \mathbb{R} چگال باشند. حال این پرسش به طور طبیعی مطرح است که این مجموعه‌ها کدام‌اند و تا چه حد می‌توان \mathbb{Q} را کوچک کرد. در مرجع [۵] ثابت شده است که مجموعه $\{p, q \in \mathbb{P} : p, q \in \mathbb{P}\}$ در \mathbb{R} چگال است، و این سوال مطرح شده است که به ازای کدام زیرمجموعه‌های A از \mathbb{N} مجموعه $\{\frac{m}{n} : m, n \in A\}$ در \mathbb{R} چگال است. در مرجع [۸] شرطی کافی برای چگال بودن این مجموعه داده شده است که به شرح زیر است. این قضیه اعداد گنگ را با زیرمجموعه‌های خاصی از اعداد گویا برآورد می‌کند.

قضیه ۳. اگر $A \subseteq \mathbb{N}$ و یک دنباله اکیداً صعودی $\{a_n\}$ در A موجود باشد که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ آنگاه مجموعه $S = \{\frac{a}{b} : a, b \in A\}$ در $[0, \infty)$ چگال است.

اثبات. فرض می‌کنیم $(0, 1) \times \mathbb{N}$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $a_1 > a_{n-1} > \dots > a_m > a_{m-1} < x a_n \leq a_m$ (بدیهی است که m تابعی از n است). چون $a_{m-1} < x a_n \leq a_m$ ، پس $a_n \geq a_m$ و $\frac{a_m}{a_n} \leq 1$.

$$\frac{a_m - x a_n}{a_n} < \frac{a_m - a_{m-1}}{a_n} \leq \frac{a_m - a_{m-1}}{a_m} = 1 - \frac{a_{m-1}}{a_m}.$$

چون دنباله $\{a_n\}$ صعودی است، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ، و بنابراین $x a_n \leq a_m$ سمت ∞ میل خواهد کرد. پس با توجه به فرض قضیه، حد $1 - \frac{a_{m-1}}{a_m} = 1$ صفر می‌شود و به این ترتیب $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_m}{a_n} - x) = 0$. بنابراین $\frac{a_m}{a_n} = x$. اگر $x > 1$ ، آنگاه $(0, 1) \times \mathbb{N}$ ، و بنابراین $\frac{a_m}{a_n} \in (0, 1)$ در S موجود است که به y همگرا شود، و در نتیجه دنباله $\{\frac{a_n}{a_m}\}$ در S به x همگرا می‌باشد، یعنی S در $[0, \infty)$ چگال است. \square

عكس قضیه فوق درست نیست — مرجع [۸] را ببینید.

نتیجه ۴. هرگاه $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی ویکران در $[0, \infty)$ باشد که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ آنگاه $\{\frac{a_m}{a_n} : m, n \in \mathbb{N}\}$ در $[0, \infty)$ چگال است.

انبات. مانند اثبات قضیه قبل عمل می‌کنیم. \square

حل مسأله ۳. اگر فرض کنیم $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ شمارشی از مجموعه اعداد اول باشد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $p_n < p_{n+1}$ ، آنگاه بنا به قضیه اعداد اول که نشان می‌دهد p_n با $n \log n$ هم ارز است (مراجع [۱] و [۴] را ببینید)، $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = 1$ ، و مطابق قضیه ۳، مجموعه $\{\frac{p_m}{p_n} : m, n \in \mathbb{N}\}$ در $[0, \infty]$ چگال است. \square

با استفاده از قضیه ۳ و نتیجه ۴ به سادگی می‌توان نشان داد که مجموعه‌های زیر نیز در $[0, \infty]$ چگال هستند:

$$\text{الف. } s_n = 1 + 2 + \dots + n, n \in \mathbb{N}, A = \left\{ \frac{s_n}{s_m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\text{ب. } B = \{\log_n m : 1 < n, m \in \mathbb{N}\}$$

مراجع

- [1] T. Bateman and H.G. Diamond. A Hundred Years of Prime Numbers. *Amer. Math. Monthly*, **103** (1996), 729-741.
- [2] N. Bourbaki. *General Topology*, Part 2. Hermann, Editeurs Des Sciences Et Des Arrs, 1966.
- [3] P.R. Halmos. *Measure Theory*. Springer-Verlag, 1974.
- [4] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*, fifth edition. Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [5] D. Hobby and D.M. Silberger. Quotients of Primes. *Amer. Math. Monthly*, **100** (1993), 50-52.
- [6] I. Niven. *Numbers: Rational and Irrational*. The Mathematical Association of America, 1961.
- [7] I. Niven and H.S. Zuckerman. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, New York, 1960.
- [8] P. Starni. Answer to Two Questions Concerning Quotients of Primes. *Amer. Math. Monthly*, **102** (1995), 347-349.

فریبرز آذربناه و علی رضایی

- [9] W. Wardlaw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sin n}$ Does not Exist. *The College Mathematics Journal*, 24, no. 1 (1993), 99-100.

[۱۰] مسلم نیکفر. اثبات دیگری از قضیه کرونکر. فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره پنجم (۱۳۶۴)، ۱۳۱-۱۳۳.

فریبرز آذربناه، علی رضایی
دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم، گروه ریاضی

قضیه لاگرانژ، قضیه فرما، و حدس گلدباخ در ماتریسهای صحیح

منصور معتمدی

مقدمه

از معروف‌ترین قضیه‌های نظریه اعداد، قضیه لاگرانژ و قضیه فرما، و از مشهور‌ترین مسائل حل شده آن حدس گلدباخ است که به منظور یادآوری به بیان آنها می‌پردازیم.

۱. قضیه لاگرانژ. هر عدد طبیعی مجموع مربعات چهار عدد طبیعی است. \square

۲. قضیه فرما. اگر n عدد صحیحی بزرگ‌تر از ۲ باشد، معادله $x^n + y^n = z^n$ ، با شرط $xyz \neq 0$ دارای جواب صحیح نیست. \square

۳. حدس گلدباخ. هر عدد صحیح زوج بزرگ‌تر از ۲ مجموع دو عدد اول است. \square

در این نوشتار که به سه بخش تقسیم شده است به بررسی سه مسئله فوق در حلقة ماتریسهای صحیح می‌پردازیم. یادآوری چند تعریف و اصطلاح را ضروری می‌دانیم.
 اگر R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و واحددار باشد، حلقة ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های متعلق به R را با $M_n(R)$ نشان می‌دهیم. در این صورت اگر $A \in M_n(R)$ ، تعريف دترمینان A ، که یک عضو R است، همان تعريف دترمینان در مورد حلقة ماتریسها روی یک هیأت است. اگر دترمینان A را با $\det A$ نشان دهیم به‌سادگی دیده می‌شود که A در $M_n(\mathbb{Z})$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$ در R وارون‌پذیر باشد. از این رو ماتریس‌هایی در $(\mathbb{Z})^{n \times n}$ وارون‌پذیر هستند که دترمینان آنها ۱ یا -1 باشد. گروه اعضای $M_n(\mathbb{Z})$ را که به گروه خطی عمومی موسوم است با $GL_n(\mathbb{Z})$ نشان می‌دهیم. اعضای در $GL_n(\mathbb{Z})$ که دترمینان آنها برابر ۱ باشد تشکیل یک زیرگروه می‌دهند که آن را با $SL_n(\mathbb{Z})$ نشان می‌دهیم.

منصور معتمدی

هر ماتریس $n \times n$ با درایه‌های صحیح را یک ماتریس صحیح می‌نامیم. حلقة اعداد صحیح به پیمانه n را یا \mathbb{Z}_n نشان خواهیم داد. تابع $\text{tr} : M_n(R) \rightarrow R$ تابعی است که به هر ماتریس مجموع درایه‌های قطر اصلی آن را نظیر می‌کند.

۱. قضیه لاگرانژ

این بخش را با طرح و حل یک مسئله شروع می‌کنیم.

مسئله (کانل^{۱)}). نشان دهید که هر ماتریس صحیح 2×2 مجموع مربعات سه ماتریس صحیح است. حل. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یک ماتریس صحیح 2×2 باشد. با توجه به اینکه تساوی

$$(*) \quad \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2$$

به ازای هر عدد صحیح u برقرار است، اگر عدد صحیحی مانند x وجود داشته باشد که تساوی

$$A - \begin{bmatrix} x & b \\ c & 1-x \end{bmatrix}^2 = A - \begin{bmatrix} x^2 + bc & b \\ c & (1-x)^2 + bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - x^2 + bc & 0 \\ 0 & d - (1-x)^2 - bc \end{bmatrix}$$

برقرار گردد، آنگاه می‌توانیم از (*) نتیجه بگیریم که A مجموع مربعات دو ماتریس صحیح است، که برای این کار لازم است که معادله $a - x^2 - bc = d - (1-x)^2 - bc$ یا $a - x^2 - bc = d - (1-x)^2 - bc$ یا معادله $2x = a - d + 1$ یا $a - x^2 - bc = d - (1-x)^2 - bc$ جواب صحیح داشته باشد. اما این معادله جواب صحیح دارد اگر و تنها اگر $(a-d+1) \pmod{2} \neq 0$. در حالتی که $a-d$ فرد باشد، A مجموع مربعات دو ماتریس صحیح است و در حالتی که $a-d$ زوج باشد، $a-d-1$ فرد است و لذا، بنا بر استدلال فوق، ماتریس

$$\begin{bmatrix} a-1 & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مجموع مربعات دو ماتریس صحیح خواهد بود. اکنون تساوی

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} a-1 & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1) I. Conell

نشان می‌دهد که A مجموع مربعات سه ماتریس صحیح است و حل مسئله کامل می‌شود. \square
در ادامه به بررسی حالت‌هایی که یک ماتریس 2×2 مجموع مربعات دو ماتریس صحیح است می‌پردازیم.
مسئله (کائل). نشان دهید که ماتریس صحیح

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مجموع مربعات دو ماتریس صحیح نیست اگر و تنها اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{2}$$

و $a \equiv 2 \pmod{4}$ (مقصود از ' \equiv ' بین دو ماتریس این است که درایه‌های دو ماتریس نظیر به نظیر به پیمانه ۲ همنهشت هستند).

حل. فرض کنیم با شرایط داده شده A مجموع مربعات دو ماتریس صحیح باشد. پس

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & x' \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} t & u \\ v & t' \end{bmatrix}^2.$$

در این صورت

$$x^2 + yz + t^2 + uv = a,$$

$$y(x + x') + u(t + t') = b,$$

$$z(x + x') + v(t + t') = c,$$

$$x'^2 + yz + t'^2 + uv = d.$$

اگر معادله چهارم را از معادله اول کم کنیم به دست می‌آوریم

$$x^2 + y^2 = a - d + x'^2 + t'^2.$$

به لحاظ اینکه فرض کردۀ ایم $a - d \equiv 2 \pmod{4}$ یا (ب) در ذیل برقرار خواهد بود:

$$(1) \quad \begin{cases} x \equiv t \equiv 1 \pmod{2}, \\ x'^2 \equiv t'^2 \equiv 0 \pmod{2}; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x \equiv t \equiv 0 \pmod{2}, \\ x'^2 \equiv t'^2 \equiv 1 \pmod{2}; \end{cases}$$

و در هر حالت،

$$x + x' \equiv t + t' \equiv 1 \pmod{2},$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$(2) \quad \begin{cases} y + u \equiv b \equiv 0 \pmod{2}, \\ z + v \equiv c \equiv a \pmod{2}. \end{cases}$$

از طرف دیگر،

$$x' + yz + t' + uv \equiv a \pmod{2},$$

ولذا

$$(3) \quad yz + uv \equiv 1 \pmod{2}.$$

اما به موجب (2)، $v \equiv z \pmod{2}$ و $u \equiv y \pmod{2}$ ، که با (3) تناقض دارد. پس تساوی (1) نمی‌تواند برقرار باشد.

اکنون نشان می‌دهیم که در هر حالت دیگر A مجموع مربعاتِ دو ماتریس صحیح است.

(آ) ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که $a - d \equiv 2 \pmod{4}$ و b یا c (یا هر دو) زوج هستند. قرار می‌دهیم

$$a - d + 2 = 4c,$$

و نشان می‌دهیم که دستگاهِ معادلات زیر دارای جواب است:

$$\begin{cases} 2e' + yz + uv = a, \\ y + u = b, \\ z + v = c, \\ 2(1 - e)' + yz + yz + uv = d. \end{cases}$$

اگر معادله چهارم را از معادله اول کم کنیم تساوی $4e - 2 = a - d = 4c$ بدست می‌آید؛ پس می‌توان معادله چهارم را نادیده گرفت. پس از حذف u و v ،

$$yz + (b - y)(c - z) + 2e' = a,$$

یا اینکه

$$(y' - b)(z - c) + bc + 4e' = 2a.$$

قضیه لاغرانژ، قضیه فرما، و حدس گلدباخ

حال اگر فرض کنیم که c عددی فرد باشد، قرار می‌دهیم $z = (c + 1)/2$; پس

$$2y + b(c - 1) + 4e^2 = 2a,$$

واز اینجا y و سپس u و v بدست می‌آیند.

(ب) فرض کنیم $a \equiv d \pmod{4}$. اگر $b \equiv c \equiv 0 \pmod{2}$ ، معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} & 2-x \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a - x^2 - \frac{bc}{4} & 0 \\ 0 & d - (2-x)^2 - \frac{bc}{4} \end{bmatrix}.$$

چنانچه $4x = a - d + 4$ ، تساوی اخیر به شکل

$$\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{bmatrix}^2$$

در می‌آید؛ پس فرض می‌کنیم d یا c فرد باشد و قرار می‌دهیم $4e = a - d = 1$ و $1 = a - d$ معادله

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & y \\ z & 1-e \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} e+1 & u \\ v & -e \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم، که یعنی

$$e^2 + (e+1)^2 + yz + uv = a,$$

$$y + v = a,$$

$$z + u = a,$$

$$e^2 + (1-e)^2 + yz + uv = d.$$

اگر معادله چهارم را از معادله اول کم کنیم تساوی $4e = a - d = 4$ حاصل می‌شود. پس از حذف u و v به دست می‌آید

$$e^2 + (e+1)^2 + yz + (b-y)(c-z) = a,$$

یا اینکه

$$(2y - b)(2z - c) + bc + 2e^2 + 2(e+1)^2 = 2a.$$

اگر c فرد باشد قرار می‌دهیم $2z = c + 1$; پس

$$2y + b(c - 1) + 2e^2 + 2(e+1)^2 = 2a,$$

و بدین ترتیب y به دست می‌آید.

(ب) اثبات در حالتی را که a, b, c ، و d همگی زوج هستند به عهده خواننده می‌گذاریم. \square

قضیه زیر تعمیم کلی مسأله کامل است که به بیان آن اکتفا می‌کنیم.

قضیه (ویسراشتاین^{۱)}). اگر R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و واحددار باشد آنگاه به ازای هر $m \geq 2$ هر ماتریس در $M_n(R)$ مجموع مربعات سه ماتریس در $M_n(R)$ است.

اثبات. ر.ک. [۵]. \square

نتیجه. هر ماتریس صحیح $n \times n$ مجموع مربعات سه ماتریس صحیح است. \square

۲. قضیه فرما در $M_2(\mathbb{Z})$

به نظر می‌رسد نخستین مطلبی که به شکل قضیه فرما در مورد حلقه ماتریسهای صحیح مطرح شده است مسأله زیر است.

مسأله (دَمِیاتی^{۲)}). نشان دهید که معادله $A^t + B^t = C^t$ در $M_2(\mathbb{Z})$ دارای جواب x و y و z است که در آن $x^t \neq 0$, $y^t \neq 0$, $z^t \neq 0$.

حل. قرار می‌دهیم

$$A = \begin{bmatrix} \circ & a \\ b & \circ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \circ & c \\ d & \circ \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \circ & e \\ f & \circ \end{bmatrix}.$$

در این صورت $C^t = (cf)I_2$, $B^t = (cd)I_2$, $C^t = (ea)I_2$, و لازم است که

$$(ab)^t + (cd)^t = (ef)^t.$$

می‌توان فرض کرد که $a = b = d = f = 1$, که در این صورت معادله $a^t + c^t = e^t$ از معادله قبلی نتیجه می‌شود. این معادله دارای جوابهای کلی $e = m^t + n^t$, $c = m^t - n^t$, $a = 2mn$ است ولذا

$$\begin{bmatrix} 1 & 2mn \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} \circ & m^t - n^t \\ 1 & \circ \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \circ & m^t + n^t \\ 1 & \circ \end{bmatrix}^t.$$

قابل توجه است که ماتریسهای

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن a و b وارون‌پذیر نیستند نیز در معادله $x^t + y^t = z^t$ و علاوه بر آن به ازای هر عدد طبیعی m در معادله $x^m + y^m = z^m$ صدق می‌کنند. \square

1) L.N. Vaserstein 2) R.Z. Domiaty

اگر جوابهای فوق را «بدیهی» بنامیم، طبعاً باید در جستجوی جوابهایی باشیم که A, B ، و C وارونپذیر باشند. در این مورد قضیه زیر موجود است:

قضیه (ویساشتاین). اگر m عددی صحیح باشد، معادله $x^m + y^m = z^m$ در $GL_2(\mathbb{Z})$ جواب دارد اگر و تنها اگر m بر ۴ یا ۶ بخشپذیر نباشد.

اثبات. گروه (\mathbb{Z}_2) از مرتبه ۶ است؛ پس اگر u عضوی از این گروه باشد، بنا بر قضیه لاغرانژ در مورد گروههای متناهی، $u^6 \equiv I_2 \pmod{2}$. بنابر این اگر m بر ۶ بخشپذیر باشد معادله $x^m + y^m = z^m$ دارای جواب نیست.

اگر m فرد باشد قرار می‌دهیم

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

در این صورت $z^m = z = x + y$, $y^m = y$, $x^m = x$.

اگر m زوج باشد اما بر ۴ یا ۶ بخشپذیر نباشد جوابهای زیر موجود است:

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

توجه می‌کنیم که $x^4 = y^4 = z^4 = I_2$ ، $x^6 = y^6 = z^6 = I_2$ ، یا اینکه $y^m = y$, $x^m = x^3$, $y^m = y^3$, $x^m = x^4$ و $y^m = y^4$ باشد دارای جواب نیست. در هر صورت، $y^m = x^2$ و $x^m = y^2$

$$x^m = y^m = x^2 + y^2 = I_2 = z^2 = z^m.$$

برای اثبات اینکه معادله در حالتی که m بر ۴ بخشپذیر باشد دارای جواب نیست از تابع اثر $\text{tr} : M_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که به ازای هر ماتریس u در $GL_2(\mathbb{Z})$ ، که دترمینان آن لزوماً ۱ و ۱- است، تساوی

$$\text{tr}u^4 = (\text{tr}u)^4 + 2 \det u = (\text{tr}u)^4 \pm 2$$

برقرار است؛ پس

$$(\text{tr}u)^4 = ((\text{tr}u)^2 \pm 2)^2.$$

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که اگر u عددی زوج باشد $\text{tr}u \equiv 4 \pmod{8}$ ، و اگر $\text{tr}u$ عددی فرد باشد $\text{tr}u \equiv 1 \pmod{8}$. با توجه به این دو همنهشتی ملاحظه می‌شود که معادله $x^4 + y^4 = z^4$ و در نتیجه معادله $x^m + y^m = z^m$ بر ۴ بخشپذیر باشد دارای جواب صحیح نیست. \square

ویسراشتاین در [۷] این مسئله را مطرح کرده است که در مورد جوابهای $x^m + y^m = z^m$ در $SL_2(\mathbb{Z})$ چه می‌توان گفت. هوزنگ در [۴] به حل این مسئله پرداخته است.

قضیه (هوزنگ). معادله $x^m + y^m = z^m$ در $SL_2(\mathbb{Z})$ دارای جواب است اگر و تنها اگر m بر ۳ یا ۴ بخش‌پذیر نباشد.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $m \in \mathbb{Z}$ بر ۳ یا ۴ بخش‌پذیر نباشد آنگاه معادله $x^m + y^m = z^m$ دارای جوابی در $SL_2(\mathbb{Z})$ است.

فرض کنیم $m \equiv 1 \pmod{2}$. در این صورت قرار می‌دهیم

$$x = \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \circ \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} -1 & \circ \\ \circ & -1 \end{bmatrix},$$

و توجه می‌کنیم که $x^1 + y^1 = z^1$, $x + y = z$, $z^1 = I_2$, $y^1 = I_2$, $x^1 = I_2$ و $x^1 + y^1 = z^1$, $x + y = z$, $z^1 = I_2$, $y^1 = I_2$, $x^1 = I_2$ آنگاه $m \equiv 1 \pmod{2}$ است. و نتیجه با توجه به تساوی $x^m + y^m = z^m$ حاصل می‌شود.

اگر $m \equiv 2 \pmod{3}$, آنگاه $x^m + y^m = z^m$, $y^m = y^1$, $x^m = x^1$ نتیجه مطلوب را بدست خواهد داد.

اینک فرض می‌کنیم $m \equiv 0 \pmod{2}$ و قرار می‌دهیم

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \circ \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \circ & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ -1 & \circ \end{bmatrix}.$$

بسادگی دیده می‌شود که $x^1 + y^1 = z^1$, $x^1 + y^1 = z^1$, $x^6 + y^6 = z^4 = I_2$ و $x^1 + y^1 = z^1$, $x^1 + y^1 = z^1$, $x^m = x^1$, $y^m = y^1$, $x^m = x^1$, $y^m = y^1$, $x^m = x^1$ (زیرا m بر ۴ بخش‌پذیر نیست). بدیهی است که در هر دو حالت معادله $x^m + y^m = z^m$ دارای جواب است. از طرفی اگر m بر ۴ بخش‌پذیر باشد، به موجب قضیه قبل معادله $x^m + y^m = z^m$ در $GL_2(\mathbb{Z})$ دارای جواب نیست. ولذا در $SL_2(\mathbb{Z})$ دارای جواب نیست.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر m بر ۳ بخش‌پذیر باشد آنگاه معادله $x^m + y^m = z^m$ در $SL_2(\mathbb{Z})$ جواب ندارد. بدیهی است کافی است نشان دهیم که $z^3 = x^3 + y^3$ در $SL_2(\mathbb{Z})$ دارای جواب نیست. اعضای $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم.

(۱) اعضای به یکی از اشکال

$$\begin{bmatrix} \delta & \circ \\ \circ & \delta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \delta & \circ \\ \epsilon & \delta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \delta & \epsilon \\ \circ & \delta \end{bmatrix},$$

قضیه لاغرانژ، قضیه فرما، و حدس گلدباخ

که در آن $\{\pm 1, \pm \delta\}$ به ازای هر A که به یکی از سه شکل فوق باشد،

$$A^3 = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

(ب) اعضايی به شکل

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{bmatrix},$$

که در آن $\{\pm 1, \pm \delta\}$ بدیهی است که در مورد چنین δ هایی،

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{bmatrix}.$$

(ب) اعضايی به شکل

$$\begin{bmatrix} \epsilon & \delta \\ \delta & -\epsilon \end{bmatrix},$$

که در آن $\{\pm 1, \pm \delta, \pm \epsilon\}$. در این حالت به سادگی می‌توان درستی تساوی

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta \\ \delta & -\epsilon \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -\epsilon & -\delta \\ -\delta & \epsilon \end{bmatrix}$$

را تحقیق کرد.

(ت) اعضايی به شکل

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & \epsilon \end{bmatrix},$$

که در آن $\{\pm 1, \pm \delta, \pm \epsilon\}$. با این مقادیر ϵ و δ .

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta \\ \delta & \epsilon \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix}.$$

اکنون به سادگی می‌توان نشان داد که به ازای هر z و y و x در $SL_2(\mathbb{Z})$. $x^3 + y^3 \neq z^3$. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. \square

۳. حدس گلدباخ

در [۷] ویسراشتاین نشان داده است که به ازای هر عدد صحیح p و هر ماتریس A در $M_2(\mathbb{Z})$ ، ماتریسهای x و y ای در $M_2(\mathbb{Z})$ وجود دارد که $\det x = \det y = p$ و $x + y = A$. وی سؤال مشابهی را برای $M_2(\mathbb{Z})$ مطرح کرده است. به این سؤال در [۱] و [۴] و [۸] پاسخ داده شده است. پیش از آنکه به شرح پاسخها بپردازیم، به بیان یک لم مورد نیاز می‌پردازیم.

اگر $A = (a_{ij})$ یک عضو $M_n(\mathbb{Z})$ باشد، $d(A)$ را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک درایه‌های آن تعریف می‌کنیم. پس

$$d(A) = d = \{a_{ij}\}_{\text{ب.م.م}}.$$

در اینجا می‌بذریم که $\text{ب.م.م}(\cdot, \cdot) = \cdot$

لم. به ازای هر A در $M_n(\mathbb{Z})$ و V ای در $M_n(\mathbb{Z})$ وجود دارد که $\det U = \det V = 1$ و

$$UAV = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

که در آن $d_1 = d(A)$ هر d_i را می‌شمارد.

اثبات. رج. [۵]. \square

اگر قرار دهیم $A = 0_2$ ، مشاهده می‌کنیم که x و y ای در $M_2(\mathbb{Z})$ وجود ندارد که $x + y = A$ و $\det x = \det y \neq 0$. اما در این مورد قضیه زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه (هورنگ). اگر A یک عضو $M_n(\mathbb{Z})$ باشد، $3 \leq n \leq p$ یک عدد صحیح باشد، آنگاه ماتریسهای $x, y \in M_n(\mathbb{Z})$ ای وجود دارد که $x + y = A$ و $\det x = (-1)^n \det y = p$.

اثبات. بنا بر لم فوق کافی است تنها حالتی را که A یک ماتریس قطری است در نظر بگیریم. فرض کنیم $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$$x = \begin{bmatrix} x & -a_2 x & 0 & \cdots & 0 & p \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} -x + a_1 & a_1 x & \cdots & \cdots & -p \\ 1 & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & 1 & \circ \end{bmatrix},$$

نتیجه مطلوب به دست می آید. \square

مراجع

- [1] G. Bloy. Goldbach's Problem in Matrix Rings. *Mathematics Magazine*, **69** (1996), 136-137.
- [2] L. Carlitz. Solution to Problem 140 (proposed by I. Conell). *Canad. Math. Bull.*, **11** (1968), 615-619.
- [3] R.Z. Domiaty. Solutions of $x^4 + y^4 = z^4$ in 2×2 Matrices. *Amer. Math. Monthly*, **73** (1966), 631.
- [4] O. Hourong. Fermat's Problem and Goldbach's Problem over $M_n(\mathbb{Z})$. *Linear Algebra and its Applications*, **236** (1996), 131-135.
- [5] N. Jacobson. *Basic Algebra I*. W.H. Freeman and Company, 1974.
- [6] L.N. Vaserstein. Every Matrix is the Sum of Three Squares. *Linear and Multilinear Algebra*, **20** (1986), 1-4.
- [7] L.N. Vaserstein. Non-commutative Number Theory. *Contemporary Mathematics*, **83** (1989), 445-449.
- [8] J. Wung. Goldbach's Problem in the Ring $M_n(\mathbb{Z})$, *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 856-857.

صورتهای یک و نیم خطی

کریم صدیقی و عطالله عسکری همت

۱. پیشگفتار و تعاریف مقدماتی

هر چند جمله‌ای بر حسب چند متغیر که تمام عبارات آن درجه یکسان دارند یک فرم یا صورت نامیده می‌شود. تعداد متغیرها را به m و درجه عبارات را به n نمایش می‌دهیم. اگر $2 = m$ ، صورت را دوتایی، $3 = m$ ، صورت را سه‌تایی می‌گویند، و به همین ترتیب صورتها را نامگذاری می‌کنند. برای $1 = n$ و اگر $2 = n$ صورت را درجه دوم، و برای $3 = n$ صورت را درجه سوم می‌گویند؛ بقیه صورتها به همین طریق نامگذاری می‌شود.

اگر در یک صورت بتوان متغیرها را طوری دسته‌بندی کرد که هر عبارت آن صورت به‌طور خطی وابسته به متغیر آن دسته باشد، چنین صورتی را چندخطی می‌نامند. یک صورت دوتایی را که در متغیر اول خطی و در متغیر دوم مزدوج خطی باشد یک صورت یک و نیم خطی می‌نامند. در نظریه اعداد نمایش اعداد صحیح به شکل مقدار یک صورت با ضرایب و متغیرهای صحیح از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است—قضیه فرما نمونه‌ای از این نمایش است. در هندسه دیفرانسیل و هندسه ریمانی نیز از صورتهای دیفرانسیل استفاده می‌شود. صورتهای یک و نیم خطی در کتب کلاسیک جبر خطی [۳] و [۲] مطالعه می‌شوند. به‌طور کلی اگر V یک فضای نرم‌دار حقیقی یا مختلط باشد، تابع اسکالر مقدار f روی $V \times V$ می‌شوند. به‌طور کلی اگر V یک فضای نرم‌دار حقیقی یا مختلط باشد، تابع اسکالر مقدار f روی V و هر اسکالر a ، یک صورت یک و نیم خطی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر x, y, z در V و هر اسکالر a ،

$$f(ax + y, z) = af(x, y) + f(y, z),$$

$$f(x, ay + z) = af(x, y) + f(x, z).$$

صورت f را کراندار نامیم هرگاه یک $0 > M$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x, y \in V$ $|f(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$.

در این بحث صورتهای بیکران $t[u, v]$ را روی یک زیرفضای D از فضای هیلبرت H مورد توجه قرار می‌دهیم؛ بنابراین $\mathbb{C} \ni t : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(الف) به ازای هر $u, v \in D$ و هر زوج از اسکالرهای α, β ,

$$t[\alpha u, \beta v] = \alpha \bar{\beta} t[u, v];$$

(ب) به ازای هر عضو تثبیت شده v از D و هر $u_1, u_2 \in D$

$$t[u_1 + u_2, v] = t[u_1, v] + t[u_2, v];$$

(ج) به ازای هر عضو تثبیت شده u از D و هر $v_1, v_2 \in D$

$$t[u, v_1 + v_2] = t[u, v_1] + t[u, v_2].$$

می‌گوییم D دامنه‌ی t می‌باشد و آن را با $D(t)$ نمایش می‌دهیم. اگر $D(t)$ در H چگال باشد گوییم که t به طور چگال تعریف شده است.

$t[u] = t[u, u]$ صورت مربعی متناظر با $t[u, v]$ $t[u, v]$ نامیده می‌شود. $t[u]$ به طور یکتایی $t[u, v]$ را مشخص می‌کند:

$$(1) \quad t[u, v] = \frac{1}{4}(t[u+v] - t[u+v] + it[u+iv] - it[u-iv]).$$

دو صورت t و t' با هم برابرند، یا $t = t'$ اگر $D(t) = D(t')$ و به ازای هر $u, v \in D(t)$. صورت t توسعه صورت t' نامیده می‌شود هرگاه $D(t') \subset D(t)$ و به ازای هر $t'[u, v] = t[u, v]$ $u, v \in D(t')$. در این حالت t' را تحدید t نیز می‌گویند.

مجموع دو صورت t_1 و t_2 ، $t = t_1 + t_2$ ، $t_1, t_2 \in D(t)$ چنین تعریف می‌شود:

$$(2) \quad t[u, v] = t_1[u, v] + t_2[u, v], \quad D(t) = D(t_1) \cap D(t_2).$$

حاصل ضرب یک صورت t در اسکالر α ، αt چنین تعریف می‌شود:

$$(3) \quad (\alpha t)[u, v] = \alpha t[u, v], \quad D(\alpha t) = D(t).$$

صورت واحد $1[u, v]$ بنا به تعریف برابر با حاصل ضرب داخلی (u, v) می‌باشد، و صورت صفر $0[u, v]$ به ازای همه مقادیر u و v صفر است، بنابراین $D(0) = D(1) = H$. لذا $t + \alpha = t + \alpha 1 = t + \alpha 1[u, v] = t + \alpha(u, v)$ به ازای هر صورت t چنین تعریف می‌شود:

$$(4) \quad (t + \alpha)[u, v] = t[u, v] + \alpha(u, v), \quad D(t + \alpha) = D(t).$$

صورت t را متقارن گویند اگر

$$(5) \quad t[u, v] = \overline{t[v, u]}, \quad u, v \in D(t).$$

همان طور که از (۱) مشخص است، t متقارن است اگر و تنها اگر $t[u]$ با مقادیر حقیقی باشد.
متناظر با هر صورت t ، صورت دیگر t^* را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(6) \quad t^*[u, v] = \overline{t[u, v]}, \quad D(t^*) = D(t).$$

می‌گوییم t^* صورت الحاقی t می‌باشد. t متقارن است اگر و تنها اگر صورت الحاقی دارای خاصیت ذیل است:

$$(7) \quad (\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)^* = \overline{\alpha_1} t_1^* + \overline{\alpha_2} t_2^*.$$

به ازای هر صورت t ، دو صورت h و k به با

$$(8) \quad h = \frac{1}{2}(t + t^*), \quad k = \frac{1}{2i}(t - t^*)$$

تعریف می‌شوند متقارن هستند و

$$(9) \quad t = h + ik.$$

h و k را به ترتیب قسمت حقیقی و قسمت موهومی t می‌نامند و با t و $Re t$ و $Im t$ نمایش می‌دهند؛ در حقیقت

$$(10) \quad h[u] = Re t[u], \quad k[u] = Im t[u],$$

گرچه $[h[u, v]$ و $k[u, v]$ با مقدار حقیقی نیستند و ربطی به $Re(t[u, v])$ و یا $Im(t[u, v])$ ندارند.

۲. نیم‌کرانداری

یک صورت متقارن h از پایین کراندار نامیده می‌شود اگر مجموعه (حقیقی) $\{h[u] : u \in D(h), \|u\| = 1\}$ از پایین کراندار باشد، یا به طور معادل، به ازای یک γ حقیقی،

$$(11) \quad h[u] \geq \gamma \|u\|^r, \quad u \in D(h);$$

در این حالت برای سهولت می‌نویسیم

$$(12) \quad h \geq \gamma.$$

کریم صدیقی و عطالله عسکری همت

بزرگترین عدد γ که در این شرط صدق می‌کند کران پایین h نامیده شده با $h \geq h$ نشان داده می‌شود. اگر آنجاکه غالباً با صورتهای از پایین کراندار سروکار داریم علامت γ_h منحصراً برای کران پایین به کار می‌رود. فرض کنید h یک صورت متقابن نامتفق باشد. در این صورت از رابطه

$$h[\lambda u + v] \geq 0.$$

با قرار دادن $\lambda = -\overline{h[u, v]}h[u]^{-1}$ بدست می‌آوریم که

$$|h[u, v]| \leq h[u]^{\frac{1}{\gamma}}h[v]^{\frac{1}{\gamma}} \leq \frac{1}{2}(h[u] + h[v]).$$

نابرابری اول همان نابرابری کوشی-شورتس می‌باشد. در حالت $\lambda = 1$

$$h[u + v]^{\frac{1}{\gamma}} \leq h[u]^{\frac{1}{\gamma}} + h[v]^{\frac{1}{\gamma}},$$

که همان نابرابری مثلثی است.

اگر یک صورت متقابن h هم از پایین کراندار و هم از بالا کراندار باشد، آنگاه h کراندار است با کرانی برابر با ماکریم قدر مطلق کرانهای بالا و پایین. به عبارت دیگر، از رابطه $|h[u]| \leq M\|u\|^{\alpha}$ به ازای هر $u \in D(h)$ ، نتیجه می‌شود که به ازای هر $(u, v) \in D(h)$ ، زیرا $|h[u, v]| \leq M\|u\|\|v\|$.

$$\begin{aligned} |h[u, v]| &= \frac{1}{4}|h[u, v] - h[u - v]| \\ &\leq \frac{1}{4}(|h[u + v]| + |h[u - v]|) \\ &\leq \frac{1}{4}M(\|u + v\|^{\alpha} + \|u - v\|^{\alpha}) = \frac{1}{4}M(\|u\|^{\alpha} + \|v\|^{\alpha}). \end{aligned}$$

اکنون اگر به جای u قرار دهیم αu و به جای v قرار دهیم $\frac{v}{\alpha}$ ، که در اینجا $\alpha^2 = \frac{\|v\|}{\|u\|}$ ، آنگاه

$$|h[u, v]| \leq M\|u\|\|v\|.$$

یادآور می‌شویم که در حالت کلیتر، $|k[u]| \leq Mh[u]$ به ازای $k \in D = D(h) = D(k)$ ، ایجاب می‌کند که به ازای هر $|k[u, v]| \leq Mh[u]^{\frac{1}{\gamma}}h[v]^{\frac{1}{\gamma}}$ ، $u, v \in D$ ، مشروط بر اینکه هر دوی h و k متقابن باشند و $h \geq k$.

حال یک صورت نامتفابن t را در نظر می‌گیریم. مجموعه

$$\Theta(t) = \{t[u] : u \in D(t), \|u\| = 1\}$$

را برد عددی t می‌نامیم. در کتاب [۱] نشان داده شده است که $\Theta(t)$ یک مجموعه محدب در صفحه مختلط است. یک صورت متفابن h از پایین کراندار است اگر و تنها اگر $\Theta(h)$ متاهی بوده یا به شکل

(a, ∞) یا $[a, \infty]$ باشد، که در آن $a \in \mathbb{R}$. در تعمیم این موضوع می‌توان گفت که یک صورت t از چپ کراندار است اگر $\Theta(t)$ زیرمجموعهٔ نیم صفحه $\gamma \geq \operatorname{Re} \zeta \geq \operatorname{Im} \zeta$ باشد. بهویژه، t را قطاعی کراندار از چپ (یا مختصرًا قطاعی) گوییم اگر $\Theta(t)$ زیرمجموعهٔ یک قطاع به شکل

$$(13) \quad |\arg(\zeta - \gamma)| \leq \theta, \quad 0^\circ \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

باشد که γ حقیقی است؛ این بدان معنی است که

$$(14) \quad |k[u]| \leq \tan \theta (h - \gamma)[u], \quad u \in D(t), \quad h \geq \gamma,$$

که در اینجا $t = \operatorname{Im} t$ و $h = \operatorname{Re} t$. اعداد γ و θ به طور منحصر به فردی با t تعیین نمی‌شوند؛ γ رأس و θ رانیم زاویهٔ صورت t می‌نامند. با توجه به نابرابری‌های ذکر شده،

$$(15) \quad \begin{aligned} |(h - \gamma)[u, v]| &\leq (h - \gamma)[u]^{\frac{1}{\theta}}(h - \gamma)[v]^{\frac{1}{\theta}}, \\ |k[u, v]| &\leq (\tan \theta)(h - \gamma)[u]^{\frac{1}{\theta}}(h - \gamma)[v]^{\frac{1}{\theta}}, \\ |(t - \gamma)[u, v]| &\leq (1 + \tan \theta)(h - \gamma)[u]^{\frac{1}{\theta}}(h - \gamma)[v]^{\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

در قسمتهای بعدی فقط عملگرهای قطاعی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
از رابطه (15) نابرابری‌های زیر را بدست می‌آوریم:

$$(16) \quad \begin{aligned} (h - \gamma)[u] &\leq |(t - \gamma)[u]| \leq (\sec \theta)(h - \gamma)[u], \\ |(t - \gamma)[u + v]|^{\frac{1}{\theta}} &\leq (\sec \theta)^{\frac{1}{\theta}} \{ |(t - \gamma)[u]|^{\frac{1}{\theta}} + |(t - \gamma)[v]|^{\frac{1}{\theta}} \}, \\ |(t - \gamma)[u + v]| &\leq 2(\sec \theta) \{ |(t - \gamma)[u]| + |(t - \gamma)[v]| \}. \end{aligned}$$

مثال ۲.۱. فرض کنید T یک عملگر در H باشد و قرار دهید

$$(17) \quad t[u, v] = (Tu, v), \quad D(t) = D(T).$$

بردهای عددی T و t یکی هستند. همچنین t متقارن است اگر T متقارن باشد، و t از پایین کراندار است اگر T از پایین کراندار باشد. t از چپ کراندار است اگر T شباهنود باشد (عملگر T افزاینده است اگر برد عددی T ، زیرمجموعه‌ای از نیم صفحه سمت راست باشد؛ T شباهنود است اگر $T + \alpha$ به ازای یک ثابت α افزاینده باشد، که این معادل است با اینکه $\Theta(t)$ در نیم صفحه‌ای به صورت $\operatorname{Re} \zeta \geq c$ مشمول باشد، که خود یعنی که t از چپ کراندار باشد). t قطاعی است اگر T قطاعی باشد.

مثال ۲.۲. فرض کنید S عملگری از فضای هیلبرت H' باشد، و قرار دهید

$$(18) \quad h[u, v] = (Su, Sv), \quad D(h) = D(S),$$

که این ضرب داخلی H' است. h یک صورت متقارن نامنفی است.

مثال ۲.۳. فرض کنید $H = \ell^2$ و

$$(19) \quad t[u, v] = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi_j \bar{\eta}_j, \quad u = (\xi_j), \quad v = (\eta_j),$$

که $\{\alpha_j\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط است. در اینجا

$$D(t) = \{u = (\xi_j) \in H : \sum |\alpha_j| |\xi_j|^2 < \infty\}.$$

فرض کنید t . تحدید t به $D(t)$ باشد، که مجموعه همه $u \in H$ هایی است که تعدادی متناهی درایه ناصلفر دارند. واضح است که t به طور چگال تعریف شده است. t متقانن است اگر و تنها اگر همه α_j ها حقیقی باشند. قطاعی با رأس γ و نیم‌زاویه θ است اگر و تنها اگر α_j ها در قطاع (۱۳) مشمول باشند.

مثال ۲.۴. فرض کنید $H = L^2(E)$ و

$$(20) \quad t[u, v] = \int_E f(x) u(x) \overline{v(x)} dx,$$

که در اینجا f یک تابع اندازه‌پذیر از E به توی \mathbb{C} می‌باشد. در اینجا

$$D(t) = \{u \in L^2(E) : \int |f(x)| |u(x)|^2 dx < \infty\}.$$

واضح است که t به طور چگال تعریف شده است. همچنین اگر $f(x)$ با مقادیر حقیقی باشد، t متقانن است. اگر مقادیر (x) f در قطاع (۱۳) باشد، t قطاعی است با یک رأس γ و یک نیم‌زاویه θ .

مثال ۲.۵. فرض کنید $L^2([0, 1]) = H$ و

$$(21) \quad h[u, v] = u(\circ) \overline{v(\circ)}.$$

واضح است که $D(h) = C[0, 1]$. همچنین $D(h)$ در $L^2([0, 1])$ چگال است. قبل از بیان مثال بعدی به ذکر یک لم می‌پردازیم و اثبات آن را به عهده خواننده می‌گذاریم.

لام ۲.۶. فرض کنید $X = L^p(a, b)$ ، که در اینجا (a, b) متناهی است. در این صورت به ازای هر $c \in [a, b]$

$$u(c) = (u', g) + (u, h) = \int_a^b u' g + \int_a^b u h,$$

که در اینجا X و $u \in X$

$$g(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(b-a)(c-a)^n}, \quad h(x) = \frac{(n+1)(x-a)^n}{(b-a)(c-a)^n}, \quad a \leq x \leq c,$$

$$g(x) = \frac{-(b-x)^{n+1}}{(b-a)(b-c)^n}, \quad h(x) = \frac{(n+1)(b-x)^n}{(b-a)(b-c)^n}, \quad c < x \leq b. \quad \square$$

مثال ۲.۷. فرض کنید $(a, b) \in H = L^r(a, b)$, که (a, b) بازه‌ای متناهی است، و قرار دهد

$$(22) \quad t[u, v] = \int_a^b \{ p(x)u'(x)\overline{v'(x)} + q(x)u(x)\overline{v(x)} \\ + r(x)u'(x)\overline{v(x)} + s(x)u(x)\overline{v'(x)} \} dx \\ + h_a u(a)\overline{v(a)} + h_b u(b)\overline{v(b)},$$

که در اینجا $p(x), q(x), r(x)$ و $s(x)$ توابع مختلط‌مقدار داده شده‌اند و h_a و h_b ثابت هستند. فرض کنید p, q, r و s روی فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته باشند (حالت منظم)، و همچنین $D(t)$ مجموعه تمام $u \in H$ ‌هایی باشد که $u(x) \in L^r(a, b)$ را مطلقاً پیوسته است و $u'(x) \in H$ (بنابراین سمت راست (۲۲) با معنی است).

توجه کنید که t به طور چگال تعریف شده است. t متقارن است اگر p و q با مقادیر حقیقی باشند و $\overline{r(x)} = s(x)$ و h_a و h_b حقیقی باشند. t قطاعی است اگر بر $[a, b] \ni x > 0$. برای اثبات این مطلب، توجه کنید که می‌دانیم که اعداد ثابت δ و M وجود دارند که $\delta \geq |q(x)| \leq M$ ، $|p(x)| \leq M$ ، $|r(x)| \leq M$ و $|s(x)| \leq M$ ؛ در نتیجه

$$\operatorname{Re} t[u] \geq \int \{\delta|u'|^r - M(|u|^r + 2|uu'|)\} dx \\ - |h_a||u(a)|^r - |h_b||u(b)|^r.$$

چون $2|uu'| \leq \epsilon|u'|^r + \epsilon^{-1}|u|^r$ با استفاده از تساوی (۲.۶) (ر.ک. لم) که در اینجا $c \in [a, b]$ و g و h دو تابع در L^q هستند، نابرابری

$$(23) \quad h[u] = \operatorname{Re} t[u] \geq \delta\|u'\|^r - M\|u\|^r$$

نتیجه می‌شود که در اینجا δ و M لزوماً همان مقادیر بالا نیستند. همچنین با توجه به اینکه $p(x)$ حقیقی است،

$$(24) \quad |k[u]| = |\operatorname{Im} t[u]| \leq \epsilon\|u'\|^r + M_\epsilon\|u\|^r,$$

که در اینجا $\epsilon > 0$ را می‌توان خیلی کوچک انتخاب نمود.

۳. صورتهای بسته

فرض کنید t یک صورت قطاعی باشد. یک دنباله $\{u_n\}$ از بردارها $-t$ -همگرا ($u \in H$) نامیده می‌شود، یا

$$(25) \quad u_n \xrightarrow{t} u, \quad n \rightarrow \infty,$$

اگر $u_n \in D(t)$, وقتی $u_n \rightarrow u$, $n, m \rightarrow \infty$ و $t[u_n - u_m] \rightarrow 0$. توجه می‌شود که u ممکن است در $D(t)$ باشد یا نباشد.

به راحتی از تعریف دیده می‌شود که t -همگرایی معادل با $(\alpha + t)\gamma$ -همگرایی به ازای هر ثابت α است. همچنین اگر $t, h = \operatorname{Re} t$, $h = \operatorname{Im} t$ -همگرایی معادل با h -همگرایی است، زیرا $b_n = (\alpha + t)[u_n - u_m] \rightarrow 0$ است. اگر و تنها اگر $\alpha u_n + \beta v_n \xrightarrow{t} \alpha u + \beta v$ و $v_n \xrightarrow{t} v$, آنگاه $\alpha u_n + \beta v_n \xrightarrow{t} \alpha u + \beta v$. برای اثبات کافی است t متقارن و نامتفق در نظر گرفته شود؛ در این صورت با استفاده از نابرابری کوشی-شوارتس به نتیجه خواهیم رسید.

یک صورت قطاعی t بسته است اگر $u \xrightarrow{t} u$ ایجاب کند ($t[u_n - u] \rightarrow 0$). بحث اخیر نشان می‌دهد که t بسته است اگر و تنها اگر $\operatorname{Re} t$ بسته باشد، و t بسته است اگر و تنها اگر $t + \alpha$ بسته باشد. در مطالعه صورتهای بسته لم زیر گرچه اثبات آسانی دارد نقش اساسی دارد.

لم ۳.۱. یک صورت کراندار t بسته است اگر و تنها اگر دامنه آن یک فضای خطی بسته باشد. \square

فرض کنید h یک صورت نامتفق متقارن باشد و قرار دهید

$$(26) \quad (u, v)_h = (h + 1)[u, v] = h[u, v] + (u, v), \quad u, v \in D(h).$$

$(u, v)_h$ را می‌توان به عنوان یک ضرب داخلی در $D(h)$ در نظر گرفت زیرا متقارن و اکیداً مثبت است:

$$(27) \quad \|u\|_h^2 = (u, u)_h = (h + 1)[u] = h[u] + \|u\|^2 \geq \|u\|^2.$$

هرگاه H_h را با ضرب داخلی $h(\cdot, \cdot)$ به عنوان یک فضای پیش‌هیلبرت در نظر بگیریم، آن را با H_h نمایش خواهیم داد.

اگر یک صورت قطاعی t داده شده باشد، فضای پیش‌هیلبرت H_t را برابر با H_h تعریف می‌کنیم که $h' = \operatorname{Re} t - \gamma \geq 0$, که در اینجا γ یک رأس t است. H_t را فضای پیش‌هیلبرت متناظر با t می‌نامیم. با $D(t)$ به عنوان فضای برداری یکی گرفته می‌شود، اما ضرب داخلی H_t , $t = (\cdot, \cdot)_t$, وابسته به انتخاب γ است لذا H_t به طور یکتا با t مشخص نمی‌شود. به هر حال از (۲۷) این نتایج به دست می‌آید: یک دنباله $u_n \in D(t)$, $u_n \rightarrow u$ معادل با $\|u_n - u\|_t \rightarrow 0$ است. از (۱۵) و (۲۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} |t[u, v]| &= |\gamma|(u, v) + (1 + \tan\theta)h'[u]^{\frac{1}{2}}h'[v]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\gamma|\|u\|\|v\| + (1 + \tan\theta)\|u\|_t\|v\|_t \\ &\leq (|\gamma| + 1 + \tan\theta)\|u\|_t\|v\|_t, \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $t[u, v]$ یک صورت یک و نیم خطی کراندار روی H_t است.

قضیهٔ ۳.۲. یک صورت قطاعی t در H بسته است اگر و تنها اگر فضای پیش‌هیلبرت H_t کامل باشد.

اثبات. چون t بسته است اگر و تنها $\gamma = h' = \operatorname{Re} t - h$ بسته باشد، می‌توان فرض کرد که $h = h$ متقابله و نامنفی است و ضرب داخلی $H_h = H_t$ با (۲۶) تعریف می‌شود. فرض کنید h بسته باشد و $\{u_n\}$ یک دنباله کوشی در H_h باشد: $\|u_n - u_m\|_h \rightarrow 0$. بنا به (۲۷)، $\{u_n\}$ در H نیز کوشی است، لذا $u \in H$ ای وجود دارد که $h[u_n - u_m] \rightarrow 0$. چون بنا به (۲۷)، $h[u_n - u_m] \rightarrow 0$ و $h[u_n - u] \rightarrow 0$. پس $h[u_n - u] \rightarrow 0$. پس بنا به h -همگراست و بسته بودن آن ایجاب می‌کند که $h[u_n - u] \rightarrow 0$. پس بنا به (۲۷)، $\|u_n - u\|_h \rightarrow 0$ ، که نشان می‌دهد H_h کامل است.

از طرف دیگر فرض کنید H_h کامل باشد و $u \xrightarrow{h} u_n$. این بدان معنی است که $\|h[u_n - u]\|_h \rightarrow 0$. پس بنا به (۲۷)، $\|u_n - u_m\|_h \rightarrow 0$. چون H_h کامل است پس $u = u$. پس $h[u_n - u] \rightarrow 0$. بنابراین باید $h[u_n - u] \rightarrow 0$ و $h[u_n - u] \rightarrow 0$. پس $h[u_n - u] \rightarrow 0$. \square

قضیهٔ ۳.۳. فرض کنید t یک صورت قطاعی باشد. اگر $u \xrightarrow{t} u$ و $v \xrightarrow{t} v$ ، آنگاه $t[u, v] = t[u_n, v_n]$ وجود دارد. اگر t بسته باشد این حد برابر با $t[u, v]$ است.

اثبات.

$$\begin{aligned} |t[u_n, v_n] - t[u_m, v_m]| &\leq |t[u_n - u_m, v_n]| + |t[u_m, v_n - v_m]| \\ &\leq (1 + \tan\theta) \{ h[u_n - u_m]^{\frac{1}{2}} h[v_n]^{\frac{1}{2}} + h[u_m]^{\frac{1}{2}} h[v_n - v_m]^{\frac{1}{2}} \}, \end{aligned}$$

که نابرابری دوم از قراردادن $\gamma = \operatorname{Re} t$ در (۱۵) حاصل می‌شود. چون $u \xrightarrow{t} u$ ایجاب می‌کند که $h[u_n - u_m] \rightarrow 0$ و $h[u_n] \rightarrow h[u]$ کراندار است و همین روابط با v به جای u هم برقرار است، پس $t[u_n, v_n] - t[u, v] \rightarrow 0$ وجود دارد. قسمت دوم قضیه با در نظر گرفتن $t[u_n, v_n] - t[u, v] \rightarrow 0$ به همین طریق ثابت می‌شود. \square

مثال ۳.۴. صورت نامنفی و متقابله $h[u, v] = (Su, Sv)$ از مثال ۲.۲ را در نظر بگیرید. بسته h است اگر و تنها اگر S یک عملگر بسته باشد. برای اثبات این موضوع کافی است توجه کنید که $u \xrightarrow{h} u$ معادل با $u \xrightarrow{S} u$ و $v \xrightarrow{h} v$ معادل با $v \xrightarrow{S} v$ است. در اینجا نماد $u \xrightarrow{S} u$ بدین معنی است که $\{u_n\}$ و $\{Su_n\}$ دنباله‌هایی کوشی هستند و $u \xrightarrow{h} u$. توجه کنید که S بسته است h هرگاه $u \xrightarrow{S} u$ ایجاب کند ($Su \in D(S)$ و $u \in D(S)$).

۴. صورتهای بستارپذیر

یک صورت قطاعی بستارپذیر نامیده می‌شود اگر یک توسعه بسته داشته باشد.

قضیه ۴.۱. یک صورت قطاعی t بستار پذیر است اگر و تنها اگر $\xrightarrow{t} u_n$ ایجاب کند. هرگاه این شرط برقرار باشد t دارای بستار \tilde{t} (کوچکترین توسعی بسته) است که به این روش تعریف می‌شود: $D(\tilde{t})$ مجموعه همه $u \in H$ هایی است که یک دنباله $\{u_n\}$ وجود داشته باشد که $u \xrightarrow{t} u_n$ و

$$(28) \quad \tilde{t}[u, v] = \lim t[u_n, v_n], \quad u_n \xrightarrow{t} u, \quad v_n \xrightarrow{t} v.$$

هر توسعی بسته t یک توسعی \tilde{t} نیز هست.

اثبات. فرض کنید t_1 یک توسعی بسته t باشد. $\xrightarrow{t} u_n$ ایجاب می‌کند که $\xrightarrow{t_1} u_n$. بنابراین چون t_1 بسته است،

$$t[u_n] = t_1[u_n] = t_1[u_n - 0] \rightarrow 0.$$

از طرف دیگر فرض کنید $D(\tilde{t})$ همان طور که در قضیه بیان شده تعریف شود؛ در این صورت حد سمت جب (28) بنا به قضیه ۳.۳ وجود دارد. نشان می‌دهیم که این حد تنها به u و v بستگی دارد نه به دنباله‌های خاص $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$. فرض کنید $\{u'_n\}$ و $\{v'_n\}$ دنباله‌های دیگری باشند که $u \xrightarrow{t} u'_n$ و $v \xrightarrow{t} v'_n$. در این صورت $\xrightarrow{t} u'_n - u_n$ و $\xrightarrow{t} v'_n - v_n$. پس بنا به فرض $\xrightarrow{t} u'_n - u_n$ و $\xrightarrow{t} v'_n - v_n$. بنابراین شبیه اثبات قضیه ۳.۳،

$$t[u'_n, v'_n] - t[u_n, v_n] = t[u'_n - u_n, v'_n] + t[u_n, v'_n - v_n] \rightarrow 0.$$

توجه می‌کنیم که $\xrightarrow{t} u$ اگر $u \xrightarrow{\tilde{t}} u$ در حقیقت بنا به (28).

$$(29) \quad \lim \tilde{t}[u_n - u] = \lim_n \lim_m t[u_n - u_m],$$

و چون $u \xrightarrow{t} u$ ، پس (29) به صفر میل می‌کند.

بدین ترتیب یک صورت \tilde{t} با دامنه $D(\tilde{t})$ تعریف کرده‌ایم. واضح است که \tilde{t} قطاعی است (چون t قطاعی است) و $t \subset \tilde{t}$. برای اثبات بسته بودن \tilde{t} ، بنا به قضیه ۳.۲ کافی است نشان دهیم که $H_{\tilde{t}}$ کامل است. چون ساختار فوق نشان می‌دهد که H_t در \tilde{t} چگال است، اگر $\{u_n\}$ دنباله‌ای کوشی در $H_{\tilde{t}}$ باشد دنباله‌ای مانند $\{v_n\}$ در H_t وجود دارد که $\frac{1}{n} \leq \|v_n - u_n\|_{\tilde{t}} \leq \|v_n - u_n\|_t$. پس $\{v_n\}$ کوشی است ولذا به ازای یک $v \in H_{\tilde{t}}$ $v_n \rightarrow v$ ، $v \in H_t$. بنابراین $v \in H_{\tilde{t}}$ کامل است. اگر $t \subset t_1$ بسته باشد و $u \xrightarrow{t} u$ ، آنگاه $u \xrightarrow{t_1} u$ و درنتیجه $u \in D(t_1)$: بنابراین $D(\tilde{t}) \subset D(t_1)$ و $\tilde{t}[u, v] = t_1[u, v]$ و $u \xrightarrow{t} u$ ، $v \xrightarrow{t} v$ ، و بنا به قضیه ۳.۳،

$$\tilde{t}[u, v] = \lim t_1[u_n, v_n] = t_1[u, v].$$

بنابراین t_1 توسعی \tilde{t} است و قضیه ثابت می‌شود. \square

قضیه ۴.۲. فرض کنید t و \tilde{t} همانند بالا باشند. برد عددی t , $(t)\Theta$, یک زیرمجموعه چگال از برد عددی \tilde{t} , $(\tilde{t})\Theta$, است.

اثبات. به ازای هر $D(\tilde{t})$ که $u \in D(\tilde{t})$ دنباله‌ای مانند $\{u_n\}$ در $D(t)$ وجود دارد که $u \xrightarrow{t} u_n$. می‌توانیم فرض کنیم $1 = \|u\| = \|u_n\|$ زیرا در غیر این صورت u_n را با $\frac{u_n}{\|u_n\|}$ جایه‌جا می‌کنیم. چون $\square . \tilde{t}[u] \in \Theta(\tilde{t})$ $t[u_n] \in \Theta(t)$ و $\tilde{t}[u_n] \rightarrow \tilde{t}[u]$ تیجه حاصل است زیرا $(t)\Theta \subseteq (\tilde{t})\Theta$.

قضیه ۴.۳. هر صورت قطاعی بستارپذیر t با دامنه H کراندار است.

اثبات. چون t و \tilde{t} دارای دامنه H هستند، لزوماً t بسته است؛ بنابراین $t = \tilde{t}$. مجدداً فرض می‌کنیم که t دارای رأس صفر است. فضای هیلبرت کامل H_t متناظر با t ، به عنوان یک فضای برداری با H یکی است، با نرم $\|u\|_t \geq \|u\|$. اگر عملگر $T : H_t \rightarrow H$ باشد، آنگاه چون $H_t = H$ است، $\|T\| \leq 1$ کراندار است و $\|T\| \leq M$ را به صورت یک به یک و پوشایی روی H می‌نگارد. بنابراین t بسته است، T^{-1} کراندار است، یعنی M ای وجود دارد که $\|u\|_t \leq M\|u\|$. بنابراین به قضیه نمودار بسته [۴]، T^{-1} کراندار است، یعنی $\|h[u]\| \leq M^2\|u\|^2$.

$$|t[u, v]| \leq (1 + \tan\theta)h[u]^{\frac{1}{2}}h[v]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (1 + \tan\theta)M^2\|u\|\|v\|,$$

\square یعنی t کراندار است.

اثبات قضیه ۴.۱ قضیه ذیل را نتیجه می‌دهد:

قضیه ۴.۴ فرض کنید t' و t'' دو صورت قطاعی باشند که $t' \subset t''$. فرض کنید $H_{t'}$ و $H_{t''}$ فضاهای پیش‌هیلبرت متناظر باشند. (در اینجا فرض این است که یک رأس مشترک γ برای t' و t'' داریم و نرم‌های $H_{t'}$ و $H_{t''}$ به ترتیب با $\|u\|^2$ و $\|u\|^2$ داده شده‌اند). اگر t'' بسته باشد، t' بسته است اگر و تنها اگر $H_{t'}$ یک زیرفضای بسته $H_{t''}$ باشد. هرگاه t'' بستارپذیر باشد، $t'' = \tilde{t}$ اگر و تنها اگر $H_{t'}$ در $H_{t''}$ چگال باشد. \square

مثال ۴.۵. صورت (S, h) از مثال ۲.۲ را در نظر بگیرید. h بستارپذیر است اگر و تنها اگر S بستارپذیر باشد. در حقیقت $h[u_n] \rightarrow 0$ هم ارز است با $0 \rightarrow u_n \rightarrow 0$. هرگاه S بستارپذیر باشد، $D(h) = D(\tilde{S})$ با $\tilde{h}[u, v] = (\tilde{S}u, \tilde{S}v)$. همچنین می‌دانیم که h بسته است اگر و تنها اگر S بسته باشد.

مثال ۴.۶. صورت (S, h) از مثال ۲.۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید همه α_j ‌ها در قطاع (۱۲) هستند. بنابراین t قطاعی و بسته است. در مثال ۲.۳ نشان دادیم که $D(k)$ در H_t چگال است؛ یعنی k بستارپذیر است و $\tilde{k} = t$.

مثال ۴.۷. یک مثال از صورتی (حتی متقارن و نامنفی) که بستارپذیر نیست صورت $h[u, v] = u(\circ) \overline{v(\circ)}$ است که در مثال ۲.۵ آوردیم. برای اثبات بستارپذیر بودن آن کافی است توجه کنیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$ ایجاب می‌کند که $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\circ) = \alpha$ وجود دارد (u_n دنباله‌ای از توابع پیوسته است) اما این ایجاب نمی‌کند که $\alpha = \alpha$.

۵. صورتهای ساخته شده از عملگر قطاعی

یادآوری می‌کنیم که عملگر T در H قطاعی نامیده می‌شود اگر برد عددی آن زیرمجموعه‌ای از یک قطاع به شکل (۱۳) باشد. فرض کنید T قطاعی باشد و قرار دهد

$$(30) \quad D(T) = D(t), \quad t[u, v] = (Tu, v).$$

واضح است که صورت t قطاعی با یک رأس γ و نیم‌زاویه θ است.

قضیه ۵.۱. هر عملگر قطاعی T صورتی بستارپذیر است، یعنی صورت t که از T بدست می‌آید بستارپذیر است.

اثبات. بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که T یک رأس γ دارد و $t \geq \gamma$. فرض کنید $t[u_n] \in D(t) = D(T)$ همگرا به γ باشد، یعنی $t[u_n] \rightarrow \gamma$ و وقتی که $n, m \rightarrow \infty$ و $t[u_n - u_m] \rightarrow 0$. باید نشان دهیم که $t[u_n - u_m] \rightarrow 0$. بنا به (۱۵)،

$$(31) \quad \begin{aligned} |t[u_n]| &\leq |t[u_n, u_n - u_m]| + |t[u_m, u_m]| \\ &\leq (1 + \tan\theta) h[u_n]^{\frac{1}{\gamma}} h[u_n - u_m]^{\frac{1}{\gamma}} + |(Tu_n, u_m)|. \end{aligned}$$

چون $t[u_n - u_m] \rightarrow 0$ و $t[u_n] \rightarrow \gamma$ پس $|t[u_n - u_m]| \rightarrow 0$ و به ازای هر $\epsilon > 0$ ای N وجود دارد که به ازای $h[u_n - u_m] \leq \epsilon^{\frac{1}{\gamma}}$ ، $m, n \geq N$ کراندار است، از (۳۱) نتیجه می‌شود که

$$|t[u_n]| \leq M\epsilon + |(Tu_n, u_m)|, \quad m, n \geq N,$$

که M یک ثابت است. با فرض $n \geq N$ و ثابت گرفتن آن و نیز $m \geq N$ چون همواره $|t[u_n]| \leq M\epsilon$ و بنا به فرض $|t[u_n] - t[u_m]| \leq |(Tu_n, u_m)| + |(Tu_m, u_m)| \leq 2M\epsilon$ در نتیجه $t[u_n] \rightarrow t[u_m]$ و بنا به قضیه ۴.۱ بستارپذیر است. \square

نتیجه ۵.۲. هر عملگر متقارن از پایین کراندار صورتی بستارپذیر است.

اثبات. فرض کنید T عملگری متقارن باشد. پس برد عددی آن، (t, Θ) ، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. چون T بنا به فرض از پایین کراندار است پس T قطاعی است با رأس γ برابر با کران پایین T و $\theta > 0$ بعنوان نیم‌زاویه. پس بنا به قضیه ۵.۱، T صورتی بستارپذیر است. \square

۶. مجموع صورتها

قضیه ۶.۱. فرض کنید t_s, t_1, \dots, t_n صورتهایی قطاعی در H باشند و $t = t_1 + \dots + t_n$. در این صورت t قطاعی است. t بسته است اگر همه z ها بسته باشند. t بستارپذیر است اگر همه z ها بستارپذیر باشند و

$$(32) \quad \tilde{t}_1 \subset \tilde{t} + \dots + \tilde{t}_n.$$

اثبات. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که همه z ها دارای رأس صفر هستند. فرض کنید $|\arg \zeta| \leq \theta_j$ یک نیم‌زاویه z برای رأس صفر باشد. چون برد عددی z یک زیرمجموعه قطاع $\frac{\pi}{2} < \theta_j < \theta$ است، برد عددی t یک زیرمجموعه قطاع $\frac{\pi}{2} < |\arg \zeta| \leq \theta = \max_j \theta_j$ است. بنابراین t قطاعی است با یک رأس صفر و نیم‌زاویه θ .

اگر همه z ها بسته باشند و $u \in \tilde{t}$, آنگاه به ازای t_j و $h_j = \operatorname{Re} t_j = h_1 + \dots + h_s$ و $h_j \geq m, n \rightarrow \infty$ هرگاه $h[u_n - u_m] \rightarrow 0$ است. چون $h_j \geq 0$, پس به ازای هر j $h_j[u_n - u_m] \rightarrow 0$. بنابراین $u \xrightarrow{h_j} u_n$ و لذا $u \xrightarrow{h_j} u_n$. پس به ازای همه z ها $u \in D(t_j)$ است. بنابراین $t_j[u_n - u] \rightarrow 0$, یعنی $t[u_n - u] \rightarrow 0$. حال فرض کنید همه z ها بستارپذیر باشند. در این صورت بنا به آنچه گفته شد $\tilde{t}_1 + \dots + \tilde{t}_n$ بسته است و یک توسعی t است. بنابراین t بستارپذیر است و (۳۲) برقرار می‌باشد. \square

تذکر ۶.۲. در (۳۲) به طور کلی نمی‌توان ' \subset ' را با تساوی عوض کرد، حتی اگر همه z ها متقابران باشند. در این مورد مثال نقضی در کتاب کاتو [۱] آمده است. قضیه ۶.۱ را می‌توان به مجموع تعدادی نامتناهی صورت با مفروضاتی که همگرایی آن و به طور قطاعی کرانداری مجموع را تضمین کند تعمیم دارد. فرض کنید t یک صورت قطاعی در H باشد. یک صورت t' در H , که لزوماً قطاعی نیست، نسبت به t کراندار (یا به طور ساده t -کراندار) نامیده می‌شود اگر $D(t') \subset D(t)$ و

$$(33) \quad |t'[u]| \leq a\|u\|^2 + b|t[u]|, \quad u \in D(t),$$

که a و b ثابت‌هایی نامنفی هستند. بزرگترین کران پایین برای همه مقادیر ممکن t -کران t' نامیده می‌شود. چون $\|u\|^2 = t[u] + \alpha|t[u]|$, به ازای هر ثابت α , t -کرانداری t' معادل با $(t + \alpha)$ -کرانداری است. همچنین از (۱۶) (به ازای $\gamma = 0$) بدست می‌آید

$$h[u] \leq t[u] \leq (\sec \theta)h[u].$$

بنابراین به ازای $t = \operatorname{Re} h$, t -کرانداری معادل با h -کرانداری است، یعنی

$$(34) \quad |t'[u]| \leq a\|u\|^2 + bh[u],$$

که a و b لزوماً با a و b در (۳۳) برابر نیستند.

اگر هر دوی t و t' قطاعی و بستارپذیر باشند، (۳۳) را به ازای همان ثابت‌های a و b می‌توان به \tilde{t} و \tilde{t}' به ترتیب به جای t و t' توسعی داد. برای این کار فرض کنید $D(\tilde{t}) \subset D(\tilde{t}')$. $u \in D(\tilde{t})$: پس عضوهای $u_n \in D(\tilde{t})$ ای وجود دارند که $u_n \xrightarrow{t} u$: یعنی هرگاه $m, n \rightarrow \infty$ و $u_n \rightarrow u$ باشد. $t[u_n - u_m] \rightarrow 0$. پس

$$\begin{aligned} |\tilde{t}'[u]| &= \lim_n |\tilde{t}'[u_n]| \leq a \lim_n \|u_n\|^r + b \lim_n |t[u_n]| \\ &= a\|u\|^r + b|\tilde{t}[u]|. \end{aligned}$$

قضیه ۶.۳. فرض کنید t یک صورت قطاعی و t' صورتی کراندار با $1 < b$ در (۳۴) باشد. در این صورت $t + t'$ قطاعی است. $t + t'$ بسته است اگر و تنها اگر t بسته باشد. $t + t'$ بستارپذیر است اگر و تنها اگر t بستارپذیر باشد؛ در این حالت $D(\tilde{t} + \tilde{t}') = D(\tilde{t})$.

اثبات. چون $D(t) \subset D(t')$ ، $D(t) \cap D(t') = D(t)$. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که t یک رأس صفر دارد که $0 \geq \operatorname{Re} t$ (یادآوری می‌کنیم که عوض کردن $h - \gamma$ با θ موجب تغییر b در (۳۴) نمی‌شود، گرچه ممکن است a را تغییر دهد). نیم‌زاویه t را با θ نشان داده قرار می‌دهیم

$$k = \operatorname{Im} t, h' = \operatorname{Re} t', k' = \operatorname{Im} t'.$$

از (۱۴) و (۳۴) به دست می‌آید

$$(35) \quad \begin{aligned} |(k + k')[u]| &\leq |k[u]| + |k'[u]| \leq |k[u]| + |t'[u]| \\ &\leq (\tan \theta + b)h[u] + a\|u\|^r, \end{aligned}$$

$$(36) \quad (h + h')[u] \geq h[u] - |h'[u]| \geq (1 - b)h[u] - a\|u\|^r.$$

بنابراین به ازای $1 = \|u\|$

$$|(k + k')[u]| \leq (1 - b)^{-1}(\tan \theta + b)((h + h')[u] + a) + a.$$

این نشان می‌دهد که برد عددی $t + t'$ یک زیرمجموعه از قطاع $\theta' < \theta$ با $|arg(\zeta + R)| \leq \theta'$ بزرگ و $\frac{\pi}{2} < \theta'$ است و $t + t'$ قطاعی است (۱۴) را بیینید. از (۳۳) نتیجه می‌شود که $u_n \xrightarrow{t+t'} u$ ایجاب می‌کند $u \xrightarrow{t'} u_n$ و بنابراین $u \xrightarrow{t+t'} u_n \xrightarrow{t+t'} u$. بر عکس، (۳۶) نشان می‌دهد که $u_n \xrightarrow{t+t'} u$ (که همارز $u_n \xrightarrow{h+k} u$ است) ایجاب می‌کند که $u_n \xrightarrow{h} u$ (که همارز $u_n \xrightarrow{t} u$ است). به طور مشابه می‌بینیم که $t[u_n - u] \rightarrow 0$ همارز $(t + t')[u_n - u]$ است. ادعای باقی‌مانده قضیه نتیجه مستقیم این همارزی‌هاست. ضمناً توجه می‌کنیم که هرگاه t بستارپذیر باشد همه همارزی‌های فوق با تعویض t با \tilde{t} ، ... \tilde{t} ، $(\tilde{t} + \tilde{t}')$ ، ... تعیین می‌یابند. \square

تذکره ۶.۴. اگر در قضیه ۶.۳، t' نیز قطاعی و سtar بذیر باشد، آنگاه $D(t') \subset D(t)$ و $D((\tilde{t} + \tilde{t}')) = D(\tilde{t})$ در حقیقت بنا به قضیه ۶.۳، $\tilde{t} + \tilde{t}' \subset \tilde{t}$ ، اما بنا به همین قضیه،

مثال ۶.۵. صورت t از مثال ۲.۷ را در نظر بگیرید. می‌توان t را به صورت مجموع $t_1 + t_2 + t_3$ نوشت، که

$$\begin{aligned} t_1[u, v] &= \int pu' \bar{v}' dx, \\ t_2[u, v] &= \int \{qu\bar{v} + ru'\bar{v} + su\bar{v}'\} dx, \\ t_3[u, v] &= h_a u(a) \overline{v(a)} + h_b u(b) \overline{v(b)}, \end{aligned}$$

و به ازای $i = 1, 2, 3$ داشته باشیم $D(t_i) = D(t)$. اگر مانند قبل فرض کنیم $p(x) > 0$ می‌توان t_1 را به صورت $Su = p^{\frac{1}{2}}u'$ نوشت که S یک عملگر خطی است و چنین تعریف می‌شود: $D(S) = D(t)$. با $D(S) = D(t)$ تعریف شده در مثال ۲.۷ S یک عملگر بسته در H است. حال اگر M عدد ثابتی باشد که به ازای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $|r(x)| \leq M$ و $|s(x)| \leq M$ و $|q(x)| \leq M$

$$\begin{aligned} |t_2[u, u]| &\leq \int_a^b [|q||u|^2 + |r||u||u'| + |u||u'|] dx \\ &\leq M(b-a+1)\|u\|^2. \end{aligned}$$

یعنی t_2 صورتی t_1 -کراندار است با t_1 -کران $b-a+1$. به طور مشابه t_3 t_1 -کراندار است با t_1 -کران 1 . چون در این حالت $1 < b-a+1$ ، پس بنا به قضیه ۶.۳ $t = t_1 + t_2 + t_3$ بسته است. سپاسگزاری. در تهیه این مقاله از نظرات ارزشمند آقایان دکتر پورعبدالله (مشهد) و دکتر رجبعلی پور (کرمان) استفاده شده است.

مراجع

- [1] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, 1966.
- [2] K. Hoffman, R. Kunze. *Linear Algebra*. Prentice-Hall, 1971.
- [3] P. Halmos. *Finite Dimensional Vector Spaces*. Springer-Verlag, 1966.
- [4] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1990.

یادی از عبدالسلام

علیرضا درودی

محمد عبدالسلام (و به قولی، آبدوس سلام) در سال ۱۹۲۶ میلادی در روستای جانگ از توابع ایالات پنجاب پاکستان (که در آن زمان جزو هندوستان و تحت سلطه انگلستان بود) به دنیا آمد. سلام کودک بسیار باهوشی بود، ولی استعدادهای سرشار او می‌توانست در اثر بی‌توجهی معمول در این گوشه دنیا پیژمرده شود. او خیلی شانس آورد که در خانواده‌اش، سنت تقوی و تحصیل دانش سابقه‌ای طولانی داشت. پدرش در یک شرکت تعاونی زراعی در سواحل رود بزرگ سند به کار دفتری مشغول بود. هر روز وقتی سلام از مدرسه به خانه می‌آمد، پدرش با دقت در باره آنچه او آموخته بود می‌پرسید و نیز گاهی دائیش که سابقًا در افريقای غربی مبلغ مذهبی بود به کار رسیدگی درس و مشق او می‌پرداخت. عبدالسلام از اعقاب و نوادگان امیرزادگان راجپوت شبہ‌قاره هند است که در حدود قرن هفتم هجری (دوازدهم میلادی) مشرف به دین اسلام شده‌اند و اغلب اجداد او حکیمان و عالمانی فقیر و تهییدست بوده‌اند. او در دامان خانواده‌اش با دین اسلام آشنا شد و این دلیستگی عمیق به اسلام تقریباً در تمامی مقالات عمومی و سخنرانی‌هاش مشاهده می‌شود. نوعی از اوان کودکی و نوجوانی شروع به شکوفایی کرد، به طوری که در سال ۱۹۴۰، در سن چهارده سالگی، در امتحان ورودی دانشگاه پنجاب بالاترین نمره را که تا آن زمان بی‌سابقه بود کسب نمود. از آن زمان به بعد عبدالسلام سرمایه ملی کشورش پاکستان شناخته شد و بعدها به یک سرمایه جهانی تبدیل شد. به همین دلیل خانواده‌اش اجباری در تقبل مخارج تحصیل او نداشت زیرا دانشگاه پنجاب در لاہور به وی بورسیه تحصیلی اعطاء نمود.

همچنانکه تحصیلات سلام پیش می‌رفت، دانش غربی در ذهن او مکمل فرهنگ اسلامی می‌شد، هم ادبیات انگلیسی و هم قرآن می‌خواند. البته رشته اصلیش ریاضیات بود و از دانشگاه پنجاب لیسانس ریاضی خود را گرفت و به قول بعضیها با بخت مساعد و به قول خودش در استجابت دعای پدرش بورسیه تحصیلی برای ادامه تحصیل در دانشگاه کیمبریج انگلستان به وی تعلق گرفت و در همان روز دریافت بورسیه، تلگرافی مبنی بر اینکه در کالج سنت جان جای خالی برای او وجود دارد به دست او رسید و راهی کشور انگلستان شد.

عبدالسلام در کیمبریج دو سال اول را ریاضی خواند و در کلاس‌های دیراک، فیزیکدان معروف نیز شرکت می‌کرد. او دانشجوی ممتاز دوره تحصیل خودش در دانشگاه کیمبریج شد و بدون زحمت زیاد عنوان رنگار (عنوانی که در کیمبریج به فارغ‌التحصیلان ممتاز ریاضیات می‌دهند) گرفت. بنا به سنتی که از دوره راتر فورد فیزیکدان بزرگ تجربی در این دانشگاه بنا گذاشته شده بود، دانشجویان رتبه اول به کارهای تجربی می‌پرداختند. به همین دلیل وقتی در ابتدای سال سوم نزد هویل، اخترفیزیکدان معروف انگلیسی رفت و برای انتخاب رشته فیزیک با او مشورت کرد، هویل به او گفت که اگر می‌خواهی فیزیک بخوانی باید فیزیک تجربی بخوانی و باید به آزمایشگاه کاوندیش بروی. عبدالسلام به کاوندیش رفت و در آنجا حدود یک سال فیزیک تجربی بخواند. خود او نوشتند است که آن سال از سخت‌ترین سالهای عمرش بود چون مراجعت با فیزیک تجربی سازگاری نداشت. عبدالسلام به درد کار آزمایشگاهی نمی‌خورد. نتایج عجیب و غریبی بدست می‌آورد و برای توضیح دادن آنها مرتب نظریه اختراع می‌کرد. سرنظریه‌دانهای کیمبریج را به درد می‌آورد تا بالاخره چیزی مطابق میل او بگویند اعتماد به نفس و تیزبینی نادر این دانشجوی جوان ایجاد می‌کرد که او بنیادی‌ترین خصوصیات طبیعت را به سوال بکشاند. سرانجام سراغ فیزیک نظری رفت و تصمیم گرفت که فیزیک نظری بخواند. سلام سراغ کمیر رفت که استاد دانشگاه کیمبریج بود. کمیر را به ماتیوس ارجاع داد. یکی از مسائلی که در آن سالهای مطرح بود مسأله بینهایتها در فیزیک بود (به عنوان مثال بینهایت شدن انرژی پتانسیل یک الکترون وقتی شعاع آن به سمت صفر میل کند). این مسأله بینهایتها برای نیروهای الکترومغناطیسی در دهه ۱۹۴۰ به روشنی به نام بازبینجاردش^۱ حل شده بود و فیزیکدانان دنبال این بودند که همین روش بازبینجاردش را برای نیروهای قوی هسته‌ای هم به کار گیرند. در آن موقع فکر رایج این بود که نیروی قوی از طریق مبادله ذراتی به نام مزون اعمال می‌شود و تا آن زمان توانسته بودند مسأله را برای مزونهای تا مرتبه دوم در نظریه اختلال حل کنند. قهرمان این قضیه دایسون بود. وقتی عبدالسلام به نزد ماتیوس رفت و به او گفت که مسأله‌ای برای رساله دکترا می‌خواهد، ماتیوس گفت که چنین مسأله‌ای مطرح است و می‌توانی روی این مسأله فکر کنی که این بازبینجاردش‌پذیری را در همه رتبه‌ها یعنی ورای تقریبهای اول و دوم ثابت کنی. عبدالسلام حدود ۳ ماه روی این مسأله کار کرد و نزد ماتیوس برگشت. ماتیوس که می‌خواست به مسافرت برود به عبدالسلام پیشنهاد کرد که نزد دایسون برود، زیرا او روی این مسأله کار کرده بود. اتفاقاً دایسون هم در آن زمان به بیرمنگام آمده بود. دایسون گفت که او بازبینجاردش‌پذیری را برای همه مرتبه‌ها ثابت نکرده و فقط امکان آن را حدس زده است و پیشنهاداتی به عبدالسلام داد. او پیشنهادات دایسون را در عرض چند ماه به نتیجه رسانید و مقاله‌ای منتشر کرد و راه جلوگیری از بینهایت شدن در همه مراتب را به صورت ریاضی فرمولیندی کرد. عبدالسلام به خاطر اثبات بازبینجاردش‌پذیری نظریه مزونها شهرت جهانی یافت. ولی دانشگاه کیمبریج به خاطر مقررات خاص خود نمی‌توانست به او مدرک دکترا بدهد. در همین حال مؤسسه مطالعات پیشرفته پرینستون از ایشان دعوت کرد که برای مدتی به پرینستون برود. سلام در سال ۱۹۵۱ چند ماهی به پرینستون رفت و قبل از اینکه دکتراش را بگیرد به پاکستان بازگشت و به دانشگاه پنجاب جهت کار مراجعه کرد. او تا سال ۱۹۵۴ در

1) renormalization

پاکستان بود و در این فاصله دکتراش را از دانشگاه کیمبریج گرفت. او بازگشت به وطن را وظیفه خود می‌دانست و می‌خواست که در میان هم‌میهانش کار کند و به تدریس پردازد، اما بخت با او یار نبود. اگرچه او نمی‌خواست به آسانی دست از این کار بکشد ولی پس از گذراندن سه سال پرزمخت بالاخره ناگواریهای حرفه‌ای و نبود تحقیقات و فیزیک در پاکستان باعث شد که به انگلستان برگردد. او بدون آنکه بخواهد در جریان فرار مغزاها قرار گرفت. همان جریانی که بهترین استعدادهای آسیا را از مردمی که شدیداً نیازمند آنها هستند می‌رباید. زمانی که او به کیمبریج برگشت کمر به دلایلی می‌خواست دانشگاه کیمبریج را ترک کند و برای کرسی خود عبدالسلام را نامزد کرد. عبدالسلام به کیمبریج آمد و کرسی کمر را اشغال کرد و بخش فیزیک نظری را در دانشگاه کیمبریج به راه انداخت. او در سال ۱۹۵۷ به کالج سلطنتی دانشگاه لندن رفت و در آنجا استاد فیزیک شد.

به این ترتیب یکی از مهمترین کارهای علمی عبدالسلام که باعث شهرت جهانی او شد سهم وی در اثبات بازیهنجارش بذری نظریه‌های مژونی بود. کار مهم دیگرش که خود را برای آن کار مستحق جایزه نوبل می‌دانست مربوط به توضیح نقض زوجیت (تقارن چپ و راست) است. عبدالسلام با مطرح کردن نظریه دو مؤلفه‌ای نوترینو توانست مسئله بالا را توضیح دهد. اما کار اساسی که عبدالسلام کرد و به خاطر آن جایزه نوبل گرفت مسئله وحدت نیروها بود. ما تا اول این قرن فقط با دو نیرو آشنا بودیم که یکی نیروی جاذبه نیوتونی بین هر دو جرم مادی بود و دیگری نیروی الکترومغناطیسی که در قرن نوزدهم خصوصیات آن کشف شده بود و ماسکول هم نظریه جامعی در مورد آن ارائه کرده بود. در دهه سوم قرن حاضر دو نیروی دیگر نیز سر برآورند، یکی نیروی هسته‌ای قوی که همان نیرویی است که پروتونها را در هسته اتمها نگه می‌دارد و مانع پاشیدن هسته اتم در اثر نیروی کولنی پروتونها می‌شود و دیگری نیروی هسته‌ای ضعیف است که باعث پدیده رادیوакتیویته، یعنی ناپایداری بعضی از هسته‌های اتمی می‌شود. این نیروها که در دهه ۱۹۳۰ کشف شدند به همراه دو نیروی قبلی در مجموع چهار نیروی مستقل از هم بودند. وحدت نیروها در گذشته نیز مطرح شده بود. قبل از نیوتون مکانیک آسمانها و مکانیک زمینی از هم جدا بود تا اینکه نیوتون گفت همان مکانیکی که بر سقوط اجسام بر زمین حاکم است بر حرکت ماه و دیگر سیارات نیز حاکم است و به این ترتیب به مکانیک سماوی و مکانیک زمینی و مطرح کردن نیروی الکترومغناطیسی (به عنوان یک بخشیدن به نیروهای الکتریکی و نیروهای مغناطیسی و مطرح کردن نیروی الکترومغناطیسی

(به عنوان یک نیرو) به دنبال این بود که نیروی الکترومغناطیسی و نیروی جاذبه نیوتونی را نیز به یک نیرو تقلیل دهد، یعنی به دنبال وحدت این نیروها بود. اینشتین نیز تمام تلاش خود را در ۴۰ تا ۵۰ سال آخر عمرش به کار بست تا نیروی الکترومغناطیسی را با نیروی جاذبه نیوتونی پیوند دهد و به دنبال ساختن نظریه‌ای بود که هم ثقل و هم الکترومغناطیس را در بر داشته باشد. بنا بر این مسئله وحدت نیروها مسئله جدیدی نبود. در اواخر دهه ۱۹۵۰ چند نفر هم‌زمان در فکر این بودند که بین نیروی هسته‌ای ضعیف که عامل رادیوакتیویته است و نیروی الکترومغناطیسی وحدت برقرار کنند. دلیل آن این بود که این نیروها علی‌رغم تقاضهایی، دارای تشابهات خاصی نیز بودند. از جمله افراد فعال در این زمینه شوئینگر و دانشجوی دکتراش گلاشو بودند.

علیرضا درودی

اما مدل وحدت‌بخش آنها بعضی مشکلات اساسی داشت که نمی‌توانستند آن را حل کنند. عبدالسلام و یکی از همکارانش به نام وارد^۱ نیز در سال‌های ۱۹۵۷ و ۱۹۵۸ به فکر وحدت‌بخشیدن به این دو نیرو افتاده بودند ولی به اندازه شوئینگر و گلاشو جلو نرفته بودند. گلاشو، سلام و واینبرگ همیگر را در سال ۱۹۵۰ در انگلستان ملاقات کردند. همه آنها گرفتار این مشکل بودند که در نظریه‌هایشان، ذرات واسطه عامل برکنشهای ضعیف و الکترومغناطیسی را بدون جرم پیش‌بینی می‌کردند، در حالی که نیروی ضعیف کوتاه‌برد است و نیروی الکترومغناطیسی یک نیروی بلندبرد است. این مشکل در سال ۱۹۶۴ توسط پیتر هیگز حل شد. واینبرگ و سلام با درک اهمیت مقاله پیتر هیگز و با بهره‌گیری از آن، هر یک جدایانه در سال ۱۹۶۷ نظریه وحدت‌بخش خود برای نیروهای ضعیف و الکترومغناطیسی را عرضه کردند. ولی هنوز این نظریه پذیرفته نشده بود. در سال ۱۹۷۱ یک جوان داشجوی هلندی ثابت کرد که نظریه واینبرگ-سلام باز بهنگارش پذیر است و بی‌نهایتها را حذف می‌کند. در سال ۱۹۷۲ نیز حادثه مهمی به وقوع پیوست. براساس پیش‌بینی نظریه فوق در طبیعت جریانهای خنثی وجود دارد یعنی یک نوع ذره بی‌بار در مبادله نیروهای ضعیف نقش بازی می‌کند. حادثه رخداده آن بود که در سال ۱۹۷۲ این ذره کشف شد و آزمایشی در سرن نشان داد که جریانهای خنثی وجود دارند. اما بعد از آزمایش سرن، آزمایش‌هایی در امریکا انجام شد که ناقض آزمایش سرن بود و به همین دلیل در فاصله سال‌های ۱۹۷۲ تا ۱۹۷۸ نظریه سلام-واینبرگ معلم بود تا اینکه در سال ۱۹۷۹ صحت آزمایش ۱۹۷۲ سرن قطعی و مسجل شد. در این سال به واینبرگ، عبدالسلام و گلاشو به خاطر ارائه نظریه وحدت‌بخش نیروهای ضعیف و الکترومغناطیسی جایزه نوبل در فیزیک اعطای شد.

بعد از قطعی شدن وحدت فوق، تعمیم قضیه به سایر نیروها نیز مطرح شد. گلاشو با همکارانش در دانشگاه هاروارد و عبدالسلام به همراه همکارانش در تریست ایتالیا به این فکر بودند که نیروی هسته‌ای قوی را هم وارد جرگه وحدت نیروها کنند و نظریه‌ای بسازند که هر سه نیرو را در بر داشته باشد. در این کار تا حدودی هم موفق شدند ولی وحدت سه نیرو هنوز سرانجام نهایی نیافته است.

عبدالسلام علاوه بر فعالیت در زمینه فیزیک، در زمینه‌های مختلف دیگری نیز فعالیت داشته است. فاصله زیاد در زمینه علم و تکنولوژی میان کشورهای شمال و جنوب همواره وی را رنج می‌داد. او به دنبال یافتن راه حلی برای کاهش این فاصله بود. او معتقد بود که سطح زندگی هر ملتی به علم و تکنولوژی وابسته است و فاصله رو به فزونی که در زمینه اقتصاد و نفوذ یا قدرت سیاسی میان ملت‌های شمال و جنوب وجود دارد اساساً معلوم فاصله‌ای است که در زمینه علم میان این ملت‌ها وجود دارد. به نظر او اصل مسئله این است که در جهان سوم علم و تکنولوژی را جدی نمی‌گیرند. عبدالسلام می‌گوید که رکود و درماندگی جهان سوم سه علت اصلی دارد:

الف) فقدان تعهد جدی در مقابل علم، اعم از علم محض یا کاربردی،

ب) راه و روشی که جهان سومی‌ها در اداره کار و بار علمیشان دارند،

ج) فقدان تعهد نسبت به تحصیل خودکفایی و اتکای به نفس در زمینه تکنولوژی در اکثر کشورهای جهان

1) Ward

سوم

پروفسور عبدالسلام در بخشی از سخنان خود در فرهنگستان علوم جهان سوم در سال ۱۹۹۱ در تریست ایتالیا می‌گوید:

«کُرَّةٌ مَا رَا دُوْغُونَهُ انسانٌ مُتمَيِّزٌ از هُم اشغالٌ كرده‌اند. بنا به آمار سال ۱۹۸۷ برنامه توسعه سازمان ملل، یک چهارم انسانها، در حدود ۱/۲ میلیارد نفر، توسعه‌یافته هستند. اینان در دو پنجم خشکیهای زمین ساکن‌اند و بیش از چهار پنجم (٪۸۲) تولید ناخالص دنیا را در اختیار دارند. ۳/۸ میلیارد نفر دیگر در حال توسعه‌اند. اینان بینوایان و مستضعفان و محروم‌ان هستند که سه پنجم کره زمین را اشغال کرده‌اند و کمتر از یک پنجم تولید ناخالص دنیا را در اختیار دارند. آنچه گروه اول را از گروه دوم متمایز می‌کند خواست و کنجکاوی و توان آنها در سلطه بر دانش و تکنولوژی روز و به کارگیری آنهاست. آنها که سرفوشت انسانهای در حال توسعه را در دست دارند، باید تصمیم سیاسی بگیرند که می‌خواهند به این بینوایان اجازه بدنهند در دانش و تکنولوژی جدید به درجه تبحر و سلط و آفرینندگی برسند و نتایج آن را به خدمت بگیرند.»

در این جملات، عبدالسلام با استادی تمام توانسته است فاصله میان کشورهای توسعه‌یافته و در حال توسعه را بیان کند و اندیشمندانه علت عقب‌ماندگیها را شناسایی کرده است و نیز در دشناسانه درمان را نشان داده است. بر مبنای همین باور، خود نیز از هر فرصتی استفاده می‌کرد و به عارف و عامی گوشزد می‌کرد که تکنولوژی خریدنی نیست و باید در سایه علوم پایه فهمیده و آفریده شود. به کشورهای در حال توسعه و به خصوص کشورهای اسلامی سفر می‌کرد و به رؤسای جمهور و شاهان و امیران و شیوخ توصیه می‌کرد که باید حداقل دو درصد تولید ناخالص کشورشان را صرف تحقیقات علم و تکنولوژی کنند تا مردمشان بتوانند به مرحله آفرینندگی در صحته علم و صنعت برسند. به این ترتیب تنها راه رهایی کشورهای جهان سوم از معضلات فعلی را اشاعه علم و دانش در این کشورها به صورت بنیادی می‌دانست. او برای جهان سومی‌ها منادی توجه به علم بود و هیچ کس به اندازه او برای کشورهای جهان سوم در این بعد کار نکرده است.

بر مبنای همین اعتقاد عمیق به اشاعه علم و دانش در کشورهای جهان سوم به عنوان تنها راه رهایی بود که خود دامن همت به کمر بست و علی‌رغم همه ناباوریها و پوزخندهای همطران غربی‌اش نهادهایی آفرید تا دانش‌پیشگان و فن‌آوران کشورهای جهان سوم را از انزوای علمی بیرون آورد، آنها را بدور هم جمع کند و بخواهد برای خودشان و مردمشان و کشورشان با هم به چاره‌اندیشی و عمل برخیزند.

در راستای کمک به پیشبرد علم و دانش در کشورهای جهان سوم در اوایل دهه ۱۹۶۰ عبدالسلام به فکر افتاد تا از طریق سازمان ملل متحد، دولتهای بزرگ را راضی کند تا برای تأسیس یک مرکز فیزیک نظری که به کشورهای جهان سوم کمک کند، سرمایه‌گذاری کنند. کشورهای بزرگ استقبال چندانی نکردند و فقط ایتالیا بود که از این امر حمایت کرد. عبدالسلام پس از مدت‌ها بحث و تکاپو در محافل بین‌المللی و کشورهای شمال و جنوب سرانجام موفق شد در سال ۱۹۶۴ مرکز بین‌المللی فیزیک نظری را در شهر تریست واقع در شمال ایتالیا تأسیس کند. این مرکز در زیر چتر حمایتی یونسکو و آژانس بین‌المللی انرژی اتمی ولی عمدتاً

با پشتیبانی مالی ایتالیا به وجود آمد. سرپرستی و ریاست آن پس از تأسیس به عبدالسلام واگذار گردید.

مرکز بین‌المللی فیزیک نظری برای دستیابی به چند هدف ایجاد شده است:

الف) کمک به پیشرفت مطالعات و پژوهش‌های عالی در علوم فیزیک و ریاضی، بهویژه در کشورهای جهان سوم.

ب) تدارک میعاد بین‌المللی برای برقراری تماسهای علمی میان دانشمندان همه کشورها.

ج) فراهم آوردن تسهیلات به منظور هدایت پژوهش‌های اصیل و بنیادی و گذاردن این تسهیلات در اختیار دیدارکنندگان، اعضای پیوسته و وابسته، بهویژه آنان که به کشورهای رو به رشد تعلق دارند.

برنامه‌های این مرکز طیف گسترده‌ای از رشته‌های علمی، از پیچیده‌ترین موضوعها همچون ساختار نهایی ذرات بنیادی، تا حوزه‌های عملی تری چون علم دوریابی یا تله‌ماتیک را در بر می‌گیرد. شاخه‌های مختلف مورد پژوهش و یا آموزش برای پژوهش در این مرکز عبارتند از: فیزیک بنیادی، فیزیک ماده جگال، ریاضیات، فیزیک و انرژی، فیزیک و محیط زیست، فیزیک حالت زنده و فیزیک کاربردی.

اکنون سالهای است که دانش‌پیشگان به خصوص فیزیکدانان و ریاضیدانان کشورهای در حال توسعه معمولاً می‌توانند به سهولت به این مرکز مسافرت کنند، با همدیگر و با همطرازان غربی خود در مسائل پژوهشی مورد علاقه تبادل نظر کنند و از امکانات کتابخانه‌ای و آزمایشگاهی و ارتباطاتی مرکز بهره‌مند شوند. عبدالسلام تا سال ۱۹۹۳ در مقام مؤسس و رئیس مرکز بین‌المللی فیزیک نظری، قسمت عده وقت و کوشش خود را صرف اداره و گسترش این مرکز کرد و از سال ۱۹۹۴ تا پایان عمر ریاست عالیه آن را به عهده داشت.

نهاد دیگری که عبدالسلام در پایه‌ریزی و ایجاد آن نقش اساسی داشت فرهنگستان علوم جهان سوم بود. فکر ایجاد فرهنگستان علوم برای جهان سوم، در اکتبر ۱۹۸۱ و در مناسبی که فرهنگستان علوم خلیفه‌گری واتیکان به همایش عمومی دعوت کرده بود به ذهن عبدالسلام خطور کرد. پس از گفتگو با اعضای جهان سومی فرهنگستان خلیفه‌گری در باره این فکر، یادداشتی به حمایت از این ابتکار تهیه شد که در آن، بررسی امکان ایجاد چنین سازمانی هدف قرار گرفته بود. همایش پایه‌گذاری این فرهنگستان در نوامبر ۱۹۸۳ در دانشگاه تریست ایتالیا تشکیل شد. در تاریخ پنجم جولای ۱۹۸۵، فرهنگستان علوم جهان سوم، به مناسبی گشایش کنفرانس «همکاریهای علمی جنوب با جنوب و جنوب با شمال» که از سوی همین فرهنگستان سازماندهی شده بود، رسمیاً توسط دبیر کل سازمان ملل متعدد آغاز به کار کرد.

این فرهنگستان اولین مجمع بین‌المللی است که دانشمندان برجسته جهان سوم را، اعم از زن و مرد، با یکدیگر متحده می‌سازد، با این هدف که از طریق تربیت بهترین و متقدhtرین نسلهای دانشمندان کشورهای رو به رشد، علوم پایه و کاربردی را در این کشورهای اعتلا بخشد. این فرهنگستان یک سازمان غیردولتی، غیرسیاسی و غیرانتفاعی است که هدف خود را شناسایی و اعتلا پژوهش‌های علمی چشمگیری قرار داده است که دانشمندان کشورهای جهان سوم بدان مبادرت می‌ورزند، تا به این ترتیب تماسهای متقابل آنان را تسهیل، کارهای پژوهشی آنان را تقویت و با نظارت بر این کارها آنها را در خدمت رشد جهان سوم و بشریت درآورد. فرهنگستان علوم جهان سوم در سال ۱۹۸۴ به عضویت شورای بین‌المللی اتحادیه‌های

علمی در آمد و در سال ۱۹۸۵ نیز شورای اقتصادی و اجتماعی سازمان ملل آن را به عنوان یک سازمان غیردولتی رسماً به عضویت خود پذیرفت.

اهداف اصلی فرهنگستان عبارتند از:

- الف) شناسایی و حمایت از پژوهش‌های علمی برجسته‌ای که دانشمندان منفرد در جهان سوم انجام می‌دهند،
- ب) تأمین شرایط لازم برای پیشرفت کار دانشمندان متعدد در کشورهای رو به رشد،
- ج) برقراری تماس بین خود پژوهشگران کشورهای رو به رشد جنوب و نیز با جامعه علمی جهانی،
- د) گردآوری اطلاعات برای ایجاد آگاهی و تفاهم در جهان سوم و پشتیبانی از این آگاهیها،
- ه) تشویق پژوهش‌های علمی در باره مسائل میرم جهان سوم.

عبدالسلام همچنین در سال ۱۹۸۸ شبکه سازمانهای علمی کشورهای جهان سوم را تأسیس کرد. در سال ۱۹۸۶ فرهنگستان علوم جهان سوم از چند فرهنگستان ملی علوم و شورای پژوهش در کشورهای رو به رشد که از مدتی پیش با آنها پیوندهای تزدیک برقرار کرده بود، دعوت کرد تا به منظور تحکیم پیوند همکاری میان فرهنگستان علوم جهان سوم و این مؤسسات علمی، موافقت‌نامه‌ای را امضاء کنند. از میان سی کشور جنوب که برای آنها دعوت‌نامه فرستاده شده بود بیست و سه کشور پاسخ مثبت دادند. این واکنش مثبت، ریاست فرهنگستان علوم جهان سوم را برانگیخت تا در جلسه گشایش دومین کنفرانس عمومی فرهنگستان که در سپتامبر ۱۹۸۷ در پکن برگزار شد، پیشنهاد گسترش دامنه این ابتکار را عنوان کند. به این ترتیب که شبکه‌ای از فرهنگستانهای علوم، شوراهای پژوهشی و سایر سازمانهای علمی مهم در جنوب با حضور فعالانه وزارت‌خانه‌های علوم، تکنولوژی و آموزش عالی تأسیس شود تا ارتباط و همکاری میان آنها را بیشتر و کارآئی علمی جنوب را افزونتر کند. در نتیجه پیشنهاد تشکیل شبکه در کنفرانس مورد بحث قرار گرفت و به امضاء رسید. بالاخره همایش پایه‌گذاری شبکه از ۴ تا ۶ اکتبر ۱۹۸۸ در دفتر مرکزی فرهنگستان علوم جهان سوم گشایش یافت. در این همایش اساسنامه شبکه به تصویب رسید و رئیس و هیئت اجرایی آن برای مدت یک سال برگزیده شدند. ضمناً اعلامیه‌ای نیز با عنوان «اعلامیه تریست در باره دانش و تکنولوژی به عنوان ابزاری برای رشد جنوب» صادر شد.

هدف کلی شبکه، گسترش همکاریهای جنوب با جنوب و جنوب با شمال در راستای توسعه و کاربرد دانش و تکنولوژی در جهان سوم است که می‌توان از طریق اقدامات زیر به آن دست یافت.

- الف) سهیم کردن هر چه بیشتر جنوب در طرحهای جهانی علم (مانند برنامه بین‌المللی زمین‌سپهر و زیست‌سپهر)،
- ب) سهیم کردن هر چه بیشتر جنوب در آن عرصه‌هایی از دانش و تکنولوژی که مرزهای علم امروز را تشکیل می‌دهند و احتمالاً تأثیر شگرفی بر رشد اقتصادی و اجتماعی جهان سوم می‌گذارند (مانند دانش و تکنولوژی فضا، گدازگرما-هسته‌ای و تکنولوژی زیستی)،
- ج) همکاری جنوب با جنوب: توسعه و تحکیم همکاری میان فرهنگستانها، شوراهای پژوهشی و سازمانهای علمی جهان سوم،

د) همکاری جنوب با شمال،

- ه) تشویق دولتهای جهان سوم به انجام اقدامات سیاسی مناسب برای رشد نهادهای علمی کشورهای خود،
وا دست یازیدن به هر اقدام دیگری که هدف شبکه را به پیش ببرد.
لازم به ذکر است که از کشور ما ایران، وزارت فرهنگ و آموزش عالی و سازمان انرژی اتمی ایران عضو
این شبکه هستند.

در پایان فهرستی از مهمترین مدالها و جوایز و افتخارات کسب شده توسط عبدالسلام آورده می‌شود.

- ۱۹۵۸ - جایزه هاپکینز و جایزه آدامز از طرف دانشگاه کیمبریج
- ۱۹۵۹ - ستاره امتیاز، مدال و جایزه فخر کارآمدی از طرف پاکستان
- ۱۹۶۱ - مدال و جایزه ماکسول از طرف انجمن فیزیک لندن
- ۱۹۶۴ - مدال هیوز از طرف انجمن سلطنتی لندن
- ۱۹۶۸ - جایزه و مدال اتم برای صلح از طرف بنیاد اتم برای صلح
- ۱۹۷۸ - جایزه سلطنتی از طرف انجمن سلطنتی لندن
- ۱۹۷۹ - جایزه نوبل فیزیک
- ۱۹۷۹ - نشان امتیاز پاکستان
- ۱۹۷۹ - جایزه اینشتین، یونسکو، پاریس
- ۱۹۸۰ - شهسوار صلیب بزرگ، نشان لیاقت جمهوری ایتالیا
- ۱۹۸۸ - نشان شهسوار افتخاری امپراطوری ایتالیا
- ۱۹۹۵ - جایزه و مدال ماکسول از طرف آکادمی کوشش‌های خلاق مسکو

عبدالسلام تمام هم و غمینش را در توسعه علوم مخصوصاً فیزیک در کشورهای عقب‌مانده و بالاخص مسلمان و دفاع از دستاوردهای دانش در کشورهای مسلمان در اعصار و قرون گذشته صرف نمود و در عین حال سرپرستی مرکز بین‌المللی فیزیک نظری را تا پایان عمر به عهده داشت (این مرکز در سال گذشته به نام خود وی نامگذاری گردید). سرانجام این چراغ پر فروغ حکمت و علم، کسی که به قول همکارانش و دیگران، عمیقاً زیبایی را دوست می‌داشت، زیبا فکر می‌کرد و لحظه لحظه زندگیش ایمان محض بود، در صبح روز پنجمین ۲۲ نوامبر ۱۹۹۶ (اول آذرماه ۱۳۷۵) در انگلستان درگذشت.

روانش شاد باد و امید اینکه پیام این مرد بزرگ دانش، که افتخار همه دنبا و علی‌الخصوص جهان اسلام است، در کشورهایی که تمام عمر به آنها عشق می‌ورزید شنیده و فهمیده شود و از میان نسلهای جوان این کشورها عبدالسلامهای دیگری بیرون آیند و عنوان عقب‌مانده بودن را از خود و مردمشان بزدایند.

مراجع

- [۱] مجله فیزیک، شماره ۳ و ۴، پاییز و زمستان ۱۳۷۵.
- [۲] انرژی هسته‌ای، شماره ۱۹، بهار ۱۳۷۶.
- [۳] آرمانها واقعیتها، گزیده مقالات عبدالسلام، ترجمه ناصر نفری و مرتضی اسعدی.
- [۴] یادداشت‌هایی درباره دانش، تکنولوژی و آموزش علوم از محمد عبدالسلام، ترجمه لطیف کاشیگر.

علیرضا درودی

سازمان انرژی اتمی ایران، مرکز فیزیک نظری و ریاضیات

مسئله

این قسمت از فرهنگ و اندیشه ریاضی به طرح و سپس حل مسائلی در حد دروس دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضیات اختصاص دارد. حل مسائل عنوان شده در این بخش و یا مسائل پیشنهادی خود را به نشانی محمدرضا درفشه، گروه ریاضی دانشگاه تهران، بفرستید.

حل مسائل شماره قبیل

حل مسئله ۱. فرض کنید $G \in a$ عضوی دلخواه باشد. واضح است که $\dots \supseteq \langle a \rangle \supseteq \langle a^n \rangle \supseteq \dots$ و چون G در شرط زنجیرهای نزولی صدق می‌کند، پس لزوماً $n \in \mathbb{N}$ ای موجود است که $\langle a^n \rangle = \langle a^{n+1} \rangle$ و لذا به ازای یک $t \in \mathbb{Z}$ ، $a^{nt-n-1} = a^{nt}$ یا $e^{a^{nt-n-1}} = e^{a^{nt}}$ پس $\langle a \rangle < \infty$. چون a دلخواه بود، تمام اعضای G دارای مرتبه متناهی هستند و لذا G گروهی تابدار است. حال نشان می‌دهیم G متناهی مولد است. برای این کار یک عضو $a_1 \in G$ انتخاب می‌کنیم. اگر $\langle a_1 \rangle = G$ ، کار تمام است. اگر $\langle a_1 \rangle \neq G$ ، یک عضو $a_2 \in G - \langle a_1 \rangle$ انتخاب می‌کنیم؛ پس $\langle a_1, a_2 \rangle \subsetneq \langle a_1 \rangle$. اگر $\langle a_1, a_2 \rangle = G$ ، کار تمام است. اگر $\langle a_1, a_2 \rangle \neq G$ ، یک عضو $a_3 \in G - \langle a_1, a_2 \rangle$ انتخاب می‌کنیم؛ پس $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subsetneq \langle a_1, a_2 \rangle$. چون G در شرط زنجیرهای صعودی صدق می‌کند، پس از تعدادی متناهی مرحله لزوماً $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ، یعنی G متناهی مولد است. پس G گروهی حل پذیر متناهی مولد، و تابدار است، و لذا متناهی خواهد بود. \square

حل مسئله ۲. می‌دانیم اگر R حلقه‌ای یکدار باشد، R -مدول متناهی مولد خواهد بود که زیرمدول‌های R به عنوان R -مدول دقیقاً همان ایده‌آل‌های چپ R به عنوان حلقه هستند و متناهی مولد بودن این زیرمدول‌ها معادل با متناهی مولد بودن ایده‌آل‌های چپ است. حال قرار می‌دهیم $R = \mathbb{R}[[x_1, x_2, \dots]]$. در این صورت R یک R -مدول متناهی مولد است و زیرمدول (یا: ایده‌آل) $\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ از آن متناهی مولد نمی‌باشد. \square

حل مسئله ۳. (الف) چون اشتراک همه زیرگروههای p -سیلوی G مساوی $\{e\}$ است پس زیرگروه p -سیلوی مانند P وجود دارد که به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، $P \neq P_i$. حال اگر $N(H)$ شامل تمام زیرگروههای p -سیلوی G باشد آنگاه $P \leq N(H)$ و در نتیجه PH زیرگروهی از G خواهد شد. اما PH یک p -گروه است که P زیرگروه حقیقی آن است، و این یک تناقض است.

(ب) فرض کنید چنین نباشد و G یک مثال نقض با کمترین تعداد زیرگروههای p -سیلو باشد؛ تعداد زیرگروههای p -سیلوی G را با n_p نمایش می‌دهیم. با توجه به اینکه اشتراک کلیه زیرگروههای p -سیلوی G زیرگروه بدیهی است، یک عدد طبیعی n و زیرگروههای p -سیلوی P_1, P_2, \dots, P_n از G وجود دارند که $\{e\} = P_i = \bigcap_{i=1}^n P_i$ ولی $\{e\} \neq \{P_i\}$. بنا به قسمت (الف)، $N(H)$ شامل کلیه زیرگروههای p -سیلوی G نیست و از طرف دیگر چون P_i ‌ها آبلی هستند نتیجه می‌شود که $P_i \leq N(H)$ ، $i \leq n$ ، و لذا هر زیرگروه p -سیلوی $N(H)$ زیرگروه p -سیلوی از G نیز می‌باشد و در نتیجه

اما زیرگروههای p -سیلوی $N(H)/H$ دقیقاً به شکل S/H هستند که $n_p(N(H)) < n_p(G)$. زیرگروه p -سیلوی از $N(H)$ می‌باشد. بنابراین $n_p(N(H)/H) < n_p(G)$. اما اشتراک کلیه زیرگروههای p -سیلوی $N(H)/H$ نیز زیرگروه بدیهی است و با توجه به فرضمان در مورد الزاماً دو زیرگروه p -سیلوی از $N(H)$ وجود دارد که اشتراکشان بدیهی باشد. در نتیجه دو زیرگروه p -سیلوی از $N(H)$ وجود دارد که اشتراکشان H باشد. اکنون $P_1 \cap N(H)$ یک p -زیرگروه از N/H بوده لذا مشمول در زیرگروه p -سیلوی مانند Q از $N(H)$ می‌باشد، یعنی $Q \leq P_1 \cap N(H)$. با درنظرگرفتن مزدوجها می‌توان فرض کرد که زیرگروه p -سیلوی مانند R از $N(H)$ وجود دارد که $Q \cap R = H$. اکنون با توجه به اینکه R یک زیرگروه p -سیلوی G نیز می‌باشد می‌توان نوشت

$$\{e\} < P_1 \cap R \leq P_1 \cap R \cap P_1 \cap N(H) \leq P_1 \cap R \cap Q \leq H \cap P_1 = \{e\},$$

که بهوضوح یک تناقض است. \square

حل مسئله ۴. چون M نامتناهی است، پس شامل دنباله‌ای مانند $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های سره و غیرتهی است. به ازای هر تابع $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}$ مجموعه E_f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_f = E_1^{f(1)} \cap E_2^{f(2)} \cap \dots \cap E_n^{f(n)} \cap \dots,$$

که در آن

$$E_n^{f(n)} = \begin{cases} E_n, & f(n) = 1 \\ E_n^c, & f(n) = 0. \end{cases}$$

روشن است که $E_f \in M$. فرض کنید $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}$ یک تابع است و $\emptyset \neq A \subseteq M$. ادعا می‌کنیم که: $A \neq \{\emptyset\}$ و $A \neq \{A\}$.

برای این منظور E_1 را در نظر می‌گیریم. اگر $E_1 \cap E_2^c = E_1 \cap \emptyset = \emptyset$ ، آنگاه $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. اگر $E_1 \cap E_2^c \neq \emptyset$ ، آنگاه $E_1 \cap E_2^c \cap E_2 \neq \emptyset$. با استقرا می‌توان نشان داد که یک تابع $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ وجود دارد که $E_1^{f(1)} \cap E_2^{f(2)} \cap \dots \cap E_n^{f(n)} \cap \dots \neq \emptyset$ (مثلاً با شرایط فوق قرار می‌دهیم $f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = 0, f(4) = 1$). پس A خاصیت مورد نظر را داراست.

۲. به ازای هر دو تابع $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ و $f \neq g$ ، اگر $E_f \cap E_g = \emptyset$ آنگاه $f \neq g$. زیرا اگر $f \neq g$ ، آنگاه یک $i \in \mathbb{N}$ موجود است که $f(i) \neq g(i)$ ؛ یعنی $E_i^{f(i)} \cap E_i^{g(i)} = \emptyset$ و لذا $E_f \cap E_g = \emptyset$.

۳. به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ ، توابعی مانند $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ موجودند که E_i اجتماعی از E_f هاست. زیرا فرض کنید $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ طوری باشد که $f(i) = 1$. پس $E_f \subseteq E_i$. در نتیجه $\bigcup_f E_f \subseteq E_i$ (اجتماع روی f ‌هایی گرفته شده که $f(i) = 1$). از طرف دیگر اگر $x \in E_i$

آنگاه به ازای تابعی مانند $\{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$ با شرط $g(i) = x \in E_i^{g(i)}$ حال به ازای $n \in \mathbb{N}$, اگر $x \in E_x$ (یا $x \in E_n^c$) آنگاه $g(n)$ را مساوی ۱ (یا مساوی ۰) می‌گیریم. در نتیجه $E_i \subseteq \bigcup E_f$ بنابراین $x \in E_g \subseteq E_1^{g(1)} \cap E_2^{g(2)} \cap \dots \cap E_n^{g(n)} \cap \dots$

۴. A متناهی نیست.

زیرا اگر A متناهی باشد آنگاه $P(A)$ نیز متناهی است، ولذا با توجه به (۳) تعداد E_i ها متناهی می‌شود، که با فرض در تناقض است. \square
حال با انتخاب یک دنباله نامتناهی از توابع متمایز از \mathbb{N} به $\{0, 1\}$, یک دنباله نامتناهی از مجموعه‌های غیرتنهی و جدا از هم در M به دست می‌آید.

حل مسئله ۵. می‌دانیم $m(A) = \sup\{m(K) : K \subseteq A\}$ و K فشرده است: $m(A) < m(K_0) < m(A)$. پس با فرض $k < m(K_0) < m(A)$ وجود دارد که A از K فشرده‌ای مانند K باشد. برای این منظور فرض کنید

حال به ازای هر $t \geq 0$ قرار می‌دهیم

$$E_t = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq t, i = 1, \dots, n\}.$$

تابع $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $\phi(t) = m(K_0 \cap E_t)$ در نظر می‌گیریم. روشن است که $K_0 \cap E_t$ یک زیرمجموعه فشرده A است و $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = m(K_0)$. پس برای یافتن زیرمجموعه فشرده‌ای از A کافی است نشان دهیم ϕ پیوسته است. برای این منظور فرض کنید $t \leq s$.

$$\begin{aligned} \phi(s) - \phi(t) &\leq m(K_0 \cap E_s) - m(K_0 \cap E_t) = m(K_0 \cap (E_s - E_t)) \\ &\leq m(E_s - E_t) = m(E_s) - m(E_t) \\ &= 2^n(s^n - t^n) \end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد ϕ تابعی پیوسته است. \square

حل مسئله ۶. چون به ازای هر n , $f_n \in L^+$, پس $\liminf \int f_n \in [0, \infty]$. فرض کنید $\liminf \int f_n < \infty$, و فرض کنید $(f_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای از (f_n) باشد که $\liminf \int f_{n_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_{n_i}$. چون $f \xrightarrow{\text{در اندازه}} f_{n_i}$, پس $\liminf \int f_n = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_{n_i} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_{n_{i_j}}$ از $(f_{n_i})_{j=1}^{\infty}$ موجود است که تقریباً همه‌جا $f_{n_{i_j}} \rightarrow f$. حال $\int f_{n_{i_j}} d\mu \geq \int f d\mu$. اما $\int f d\mu \leq \liminf \int f_{n_i} d\mu$

$$\liminf \int f_{n_i} d\mu = \lim \int f_{n_i} d\mu = \lim \int f_{n_i} d\mu = \liminf \int f_n d\mu.$$

$$\square \quad \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

مسئلے جدید

۷. فرض کنید E یک فضای خطی نرمار و F زیرفضایی از E است. اگر $E - F$ ناهمبند باشد، ثابت کنید F بسته است. (علی تقوی، دانشگاه صنعتی شریف)
۸. فرض کنید G یک گروه متناهی نابدیهی است و $P \leq \text{Aut}(G)$ یک p -گروه است. ثابت کنید Q -زیرگروه سیلویی مانند Q از G وجود دارد که به ازای هر $\sigma \in P$ و $q \in Q$ $\sigma(Q) = Q$ (مسعود صباحان، دانشگاه تهران).
۹. اگر x ماتریسی $n \times n$ روی میدان F باشد آنگاه ثابت کنید

$$\det(I_n + xx^t) = 1 + x^t x.$$

۱۰. فرض کنید $f \in L^1(R, m)$ و $f \geq 0$. ثابت کنید اگر به ازای هر زیرمجموعه باز U از R , $\int_U f(x) dm = \int_{\bar{U}} f(x) dm$, آنگاه تقریباً همه جا $f = 0$. (مسعود صباحان، دانشگاه تهران)
۱۱. فرض کنید

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

دو ماتریس با درایه‌های در میدان \mathbb{Q} باشند. نشان دهید دو ماتریس فوق متشابه هستند، و یک ماتریس وارون پذیر $P \in \text{Mat}_3(\mathbb{Q})$ بپیدا کنید که $PBP^{-1} = A$. (مسعود صباحان، دانشگاه تهران)

* * *

از آقای دکتر مسعود صباحان که در تنظیم حل مسائل شماره ۴ و ۵ و ۶ با این جانب همکاری داشته‌اند تشکر می‌کنم. همچنین لازم است از آقای محمد رضا پورنکی که حل مسائل شماره ۱ و ۲ را تنظیم نموده‌اند سپاسگزاری شود. از آقای شهرام رضاییور از دانشگاه کرمان نیز که راه حل‌هایی برای مسائل ۴ و ۵ ارسال داشته‌اند تشکر می‌شود. در خاتمه، از دانشجویان علاقه‌مند تقاضا می‌شود که مسائل این شماره از مجله را مونس اوقات تنهایی خود قرار داده دست‌اندرکاران این قسمت از مجله را از راه حل‌های ابتکاری برای مسائل محروم نسازند. در ضمن از کسانی که مسائلی را برای طرح در مجله ارسال می‌دارند خواهش می‌کنم که حل مسائل را همراه صورت آنها ارسال نمایند زیرا که در غیر این صورت هیچ‌گونه اقدامی صورت نمی‌پذیرد. تا شماره‌ای دیگر و مسائلی دیگر همگی شما دوستداران این بخش از مجله را به خداوند بزرگ می‌سپارم.

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the
Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 16, No. 1, Spring 1997

Editor-in-Chief

E. Eslami, Shahid Bahonar University of Kerman
eslami@arg3.uk.ac.ir

Editorial Board

M. Behzad, Shahid Beheshti University
arashbeh@rose.ipm.ac.ir

A. Chademan, University of Tehran
chademan@rose.ipm.ac.ir

A. Danaee, University of Isfahan
danaee@math.ui.ac.ir

M.R. Darafsheh, University of Tehran
darafshe@rose.ipm.ac.ir

M.M. Ebrahimi, Shahid Beheshti University
metopos@rose.ipm.ac.ir

N. Mahdavi-Amiri, Sharif University of Technology
nezam@math.sharif.ac.ir

M.R. Meshkani, Shahid Beheshti University

M.A. Pourabdollah, Ferdowsi University of Mashhad
pourabd@toos.um.ac.ir

P.O. Box 13145-418

Tehran – Iran

e-mail: iranmath@rose.ipm.ac.ir



فهرست مطالب

۱	محمدعلی پورعبدالهزاد، نگاهی به نظام آموزش ریاضی عمومی در کانادا.....
۱۳	نرگس تولایی و محمد صالح مصلحیان، آشنایی با روش پوششِ تمام در آنالیز حقیقی
۲۱	فریبرز آذرپناه و علی رضایی، برآورده گنج با گویا.....
۲۹	منصور معتمدی، قضیه لاگرانژ، قضیه فرما، و حدس گلدباخ در ماتریسهای صحیح
۴۱	کریم صدیقی و عطاءالله عسکری همت، صورتهای یک و نیم خطی.....
۵۷	علیرضا درودی، یادی از عبدالسلام.....
۶۷	مسئله.....