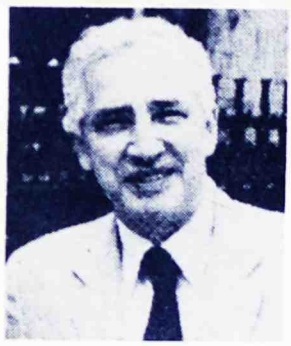
انجمن ریاضی ایران

فرهنگ و اندیشه ریاضی

۱۷

۳۷۶۶

سال ۱۵، شماره‌های ۱ و ۲، بهار و پاییز ۱۳۷۵



ISSN 1022-6443

بسم الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۱۵، شماره‌های ۱ و ۲، بهار و پاییزِ ۱۳۷۵
شمارهٔ پیاپی: ۱۷

صاحب‌امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: محمدمهدی ابراهیمی

مدیر اجرایی: رشید زارع‌نهندی
حروفچینی: TEX-پارسی دفتر انجمن ریاضی ایران

نشانی:
تهران — صندوق پستی ۱۳۱۴۵/۴۱۸
iranmath@rose.ipm.ac.ir

قیمت: ۲۰۰۰ ریال

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی-ترویج
انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتش
مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلس
ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهت
و روندِ ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باش
فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی از مقالات در زمینه‌ه
ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، عل
کامپیوتر، فیزیک نظری، و کاربردهای ریاضیا
در علومِ دیگر که در چارچوب زیر نوشته ش
باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات
قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی
برای پیگیریِ موضوعِ مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوعِ بندِ قبل یا ترج
مقالاتِ کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرف
نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضا
و برهانهایی ساده‌تر از آنچه در متونِ کلاسیک
موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند مقالاتِ خود را با شرایط
زیر به نشانی دفتر مجله ارسال کنند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ
یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافی
ماشین یا با خطِ خوانا نوشته شود، یا، ترجیحاً
در دیسکتِ کامپیوتری تحت یکی از ادیتورهای
«ویراستارِ ساده»، «PE2»، یا «لاتِکِ فارسی»
باشد.
- فرستادنِ اصلِ مقالهٔ ترجمه‌شده —با ذکر
نشانیِ کاملِ آن— لازم است.
- اصطلاحاتِ ریاضیِ به‌کار رفته باید بر طبقِ
واژه‌نامهٔ ریاضی و آمارِ انجمن ریاضی ایران
باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادلِ
انگلیسیِ آن داده شود. در صورتی که مؤلف یا
مترجم معتقد است اصطلاحِ خاصی از واژه‌نامه
مناسب نیست باید ترجیح دادنِ اصطلاحِ
پیشنهادیِ خود را توجیه کند.
- هیأت تحریریه در رد و قبول و حک و اصلاحِ
مقالاتْ آزاد است.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۱۵، شماره‌های ۱ و ۲، بهار و پاییز ۱۳۷۵
(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۷۶)
شمارهٔ پیاپی: ۱۷

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.
کسانی که عضو انجمن ریاضی ایران نیستند و علاقه‌مند به اشتراکِ این مجله هستند می‌توانند با واریزِ مبلغ ۴,۰۰۰ ریال به حساب جاری ۵۶ـ۴۳۶۵ بانک سپه شعبهٔ دانشگاه تهران و ارسال فیشِ آن همراه نشانیِ دقیق خود به دفتر مجله، به مدت یک سال این مجله را دریافت کنند.
مبلغ اشتراکِ یک‌ساله برای کتابخانه‌ها و مؤسسات ۱۰,۰۰۰ ریال است.

شماره‌های ۳، ۴، ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶ در دفتر مجله موجود است؛ با واریزِ ۱,۰۰۰ ریال بابت هر شماره به حساب مذکور و ارسال فیشِ آن به دفتر مجله می‌توانید شماره‌های مورد نظرِ خود را دریافت کنید.

روی جلد، از راست به چپ:
ژیلیام برنساید، ژالتر فایت،
جان تامپسن، دنی گورنشتاین.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۱۷ (بهار ۱۳۷۵)، صص. ۱ تا ۱۶

چندجمله‌ایِ رنگی و چندجمله‌ایِ تطابقهای گراف

مهدی بهزاد

چکیده

به هر گراف چندجمله‌ای‌های بسیاری می‌توان نسبت داد. در بخش اولِ این مقالهٔ توصیفی، با عنوانِ «مقدمه»، با برخی از مفاهیم اولیه آشنا می‌شویم و به‌طور مجمل، به‌خاطر نیاز، چندجمله‌ایِ مشخصهٔ گراف را معرفی می‌کنیم. بخشهای دوم و سوم را به‌ترتیب به چندجمله‌ایِ رنگی و چندجمله‌ایِ تطابقهای گراف اختصاص می‌دهیم. قسمت اولِ بخشِ سوم عمدتاً به مطالب عمومی اختصاص دارد و هدفْ ارائهٔ مطالبی در بارهٔ چندجمله‌ای‌های متعامد است. قسمت دومِ این بخش به گرافهای خاصی موسوم به گرافهای دترمینانی اختصاص دارد که چندجمله‌ایِ تطابقهای آن برابر با دترمینانِ ماتریسی خاص است. در دو بخشِ اخیر علاوه بر بیان صورت قضیه‌ها، در حد امکان به اثبات نیز می‌پردازیم و در مواردی به ذکر رؤوسِ اثبات اکتفا می‌کنیم. اصولاً برای اینکه مضمون برای دانش‌آموزانِ زبدهٔ دبیرستانی هم قابل درک باشد ضمن ارائهٔ مطالبِ نسبتاً ساده می‌کوشیم مفاهیم و صورتِ قضیه‌ها را با مثال روشن کنیم. از کاربرد و تاریخچه هم غافل نیستیم. از دیگر اهداف ما بیانِ چند مسألهٔ حل‌نشدهٔ مناسب و ارائهٔ منابعی است که علاقه‌مندان را راه‌گشا باشد.

I. مقدمه

منظور از گراف، گرافی متناهی و بدون جهت و طوقه و یالِ چندگانه است. چنین گرافی، که آن را با $G = (V, E)$ نمایش می‌دهیم، از یک مجموعهٔ ناتهی و متناهیِ V موسوم به مجموعهٔ رأسها یا نقطه‌ها، و از یک زیرمجموعهٔ E، موسوم به مجموعهٔ یالها یا خطها، از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دوعضویِ V تشکیل می‌شود. اگر $x, y \in V$ و $x \neq y$ و $\{x, y\} \in E$، می‌گوییم دو رأسِ x و y مجاورند.

به‌جای $\{x,y\} \in E$ به‌اختصار می‌نویسیم $xy \in E$. به عنوان مثال اگر $V = \{a,b,c,d\}$ و $E = \{ab, ad, bc, bd, cd\}$، آنگاه $G = (V,E)$ یک گراف است. $|V|$ را که معمولاً با p نمایش می‌دهیم مرتبه، و $|E|$ را که معمولاً با q نمایش می‌دهیم اندازه‌ی گرافِ G می‌نامیم. واضح است که $۰ \leq q \leq p(p-۱)/۲$. اگر $q = p(p-۱)/۲$، گراف را با K_p نمایش می‌دهیم و آن را گرافِ کامل از مرتبهٔ p می‌نامیم، و اگر $q = ۰$، گراف را با $\overline{K_p}$ نمایش می‌دهیم و آن را گرافِ تهی از مرتبهٔ p می‌نامیم.

به هر گراف نموداری هم نسبت می‌دهیم و برای سادگیْ گراف را با نمودارِ آن یکی می‌گیریم. در شکلِ ۱ نمودارِ گرافِ مذکور را نمایش داده‌ایم.

$$A(G) \quad : \quad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} \end{array}$$

شکل ۲.

G :

شکل ۱.

هر گرافِ $G = (V,E)$ با $V = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_p\}$ را می‌توان با یک ماتریسِ $p \times p$، موسوم به ماتریس مجاورتِ G هم نمایش داد. این ماتریسِ را که با $A(G) = [a_{ij}]$ نمایش می‌دهیم به این صورت تعریف می‌کنیم: $a_{ij} = ۱$ هرگاه $v_iv_j \in E$، و $a_{ij} = ۰$ هرگاه $v_iv_j \notin E$. واضح است که برچسب‌گذاری‌های مختلفِ رأسهای G به ماتریسهای متشابه می‌انجامند. شکل ۲ ماتریسِ مجاورتِ گرافِ شکل ۱ را نمایش می‌دهد. به‌سادگی دیده می‌شود که هر گراف از مرتبهٔ p چیزی جز ماتریسِ متقارنِ مربعیِ $p \times p$ نیست که هر درایهٔ آن به مجموعهٔ $\{۰,۱\}$ تعلق دارد و هر درایهٔ واقع بر قطر اصلیِ آن صفر است.

اگر A ماتریس مجاورت گرافِ G، p مرتبهٔ G، و I ماتریس یکهٔ $p \times p$ باشد، دترمینانِ ماتریسِ $xI - A$ را که با $\varphi(G;x)$ نمایش می‌دهیم چندجمله‌ایِ مشخصه، و ریشه‌های این چندجمله‌ای را ریشه‌های مشخصه یا ویژه‌مقدارهای G می‌نامیم. توجه کنید که $\varphi(G;x)$ و ویژه‌مقدارهای G خوش‌تعریف‌اند.

تعداد مقالاتی که در این باره نوشته شده‌اند از هزار افزون است. دو کتابِ [۶] و [۷] به این مطلب اختصاص دارند. در اینجا صرفاً صورتِ سه قضیه را به‌عنوان نمونه ذکر می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. *ویژه‌مقدارهای هر گرافِ G اعدادی حقیقی‌اند و لذا می‌توانیم آنها را به‌طور خطی مرتب کنیم.* □

قضیهٔ ۲. *اگر مرتبه و اندازهٔ گرافِ همبند و نابدیهیِ G به‌ترتیب p و q باشد و اگر $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_p$ ویژه‌مقدارهای G باشند، آنگاه $2\cos(\pi/(p+1)) \leq \lambda_p \leq \sqrt{2q(p-1)/p}$.* □

حال خاطرنشان می‌کنیم که مقولهٔ رنگ‌آمیزیِ گرافها نه‌تنها جالب است بلکه کاربردهای فراوان هم دارد. کمترین تعدادِ رنگهای لازم برای رنگ‌آمیزیِ رأسهای گرافِ G با این ویژگی که رنگهای هر دو رأسِ مجاور متفاوت باشند عدد رنگیِ (رأسیِ) G نام دارد و با $\chi(G)$ [بخوانید «خیِ جی»] نمایش داده می‌شود. واضح است که $\chi(K_p) = p$ و $\chi(\bar{K}_p) = 1$. منظور از رنگ‌آمیزیِ مناسبِ G نسبت دادنِ رنگهایی به رأسهای G است با این ویژگی که به هر دو رأسِ مجاور رنگهای متفاوت تخصیص یابند.

قضیهٔ ۳. *به ازای هر گرافِ G از مرتبهٔ p، $\chi(G) \leq +\lambda_p(G)$. در اینجا $\lambda_p(G)$، ماکسیمم ویژه‌مقدارهای گراف G است.* □

برای مشاهدهٔ اثباتِ این احکام و مفاهیم و نمادهای دیگر به [۱] یا [۳] رجوع کنید.

II. چندجمله‌ایِ رنگی

برای یافتن کمترین تعداد رنگهای لازم برای رنگ‌آمیزی مناسبِ یک گرافِ مسطح و در نتیجه حلِ مسألهٔ چهاررنگ، برکهف [۲] در سال ۱۹۱۲ عددِ $P(G;\lambda)$ را معرفی کرد. به‌طور کلّی به ازای هر گراف دلخواهِ G این عددْ تعداد رنگ‌آمیزی‌های مناسب و متفاوتِ رأسهای G با حداکثر λ رنگِ ۱، ۲، ۳، ...، λ است. اگر رأسهای G را با v_1، v_2، ...، v_p نمایش دهیم، دو رنگ‌آمیزیِ مناسبِ G وقتی متفاوت تلقی می‌شوند که با این دو رنگ‌آمیزیْ به رأسی چون v_i، $1 \leq i \leq p$، دو رنگِ متفاوت تخصیص داده شود. لذا اگر $\lambda < \chi(G)$، آنگاه $P(G;\lambda) = 0$. برکهف نشان داد که $P(G;\lambda)$، به‌عنوان تابعی از λ، چندجمله‌ای است، لذا $P(G;\lambda)$ را چندجمله‌ای رنگی‌ی گرافِ G می‌نامیم.

توجه کنید که $\chi(G)$ کوچکترین عددِ صحیح و مثبتی است که جوابِ معادلهٔ $P(G;\lambda) = 0$ نباشد. به‌عنوان مثال، $P(K_p;\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-p+1)$ و $P(\bar{K}_p;\lambda) = \lambda^p$.

قضیهٔ ۴. *اگر $a \neq b \in V(G)$ و اگر $ab \notin E(G)$، آنگاه*

$$P(G;\lambda) = P(G+ab;\lambda) + P(G';\lambda).$$

در اینجا $G+ab$ گرافِ حاصل از افزودنِ یالِ ab به گرافِ G است و گرافِ G' گرافِ حاصل از «ادغامِ» دو رأسِ a و b از G، و $V(G)$ و $E(G)$ به‌ترتیب مجموعهٔ رأسها و مجموعهٔ یالهای گراف G هستند.

اثبات. اثباتِ قضیهٔ ۴ در یک جمله خلاصه می‌شود. تمام رنگ‌آمیزی‌های مناسب و متفاوتِ G به دو دسته تقسیم می‌شوند: رنگ‌آمیزی‌هایی که به a و b دو رنگِ متفاوت نسبت می‌دهند، و آنهایی که به a و b دو رنگِ یکسان تخصیص می‌دهند. □

به‌عنوان مثال، اگر G گرافِ شکل ۱ باشد آنگاه

$$P(G;\lambda) = P(K_4;\lambda) + P(K_3;\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

قضیهٔ ۵. *اگر p، q، و k به‌ترتیب تعدادِ رأسها، یالها، و مؤلفه‌های (همبندِ) G را نمایش دهند آنگاه*

الف) تابع $P(G;\lambda)$ چندجمله‌ای است.

ب) درجهٔ $P(G;\lambda)$ برابر با p است.

پ) ضریبِ λ^p در $P(G;\lambda)$ برابر با یک است.

ت) جملهٔ ثابتِ $P(G;\lambda)$ برابر با صفر است.

ث) ضریبِ λ^{p-1} در $P(G;\lambda)$ برابر با $-q$ است.

ج) کوچکترین توانِ جملهٔ ناصفرِ $P(G;\lambda)$ برابر با k است.

اثبات. بندهای (الف)، (ب)، (پ)، و (ت) اساساً از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شوند. بند (ث) را می‌توان با استقراء بر q ثابت کرد. درستیِ بند (ج) واضح است. □

قضیهٔ ۶. *با شرایط مذکور در قضیهٔ ۵، اگر $P(G;\lambda) = a_1\lambda^p + \cdots + a_k\lambda^k$ چندجمله‌ای رنگیِ G باشد آنگاه*

الف) a_i مثبت است هرگاه i فرد باشد، و a_i منفی است هرگاه i زوج باشد.

ب) شرط لازم و کافی برای اینکه G درخت باشد این است که $P(G;\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{p-1}$. □

توجه کنید که درختْ گرافی است که واجد دو شرطِ $k = 1$ و $q = p - 1$ باشد. از بندِ (ب)ی قضیهٔ ۶ نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای‌های رنگیِ تمام درختهای از مرتبهٔ p با هم برابرند و نیز نتیجه می‌گیریم که عدد رنگیِ تمام درختها، به‌جز درختِ K_1، دو است. اگر نتیجهٔ اول واضح نباشد مسلماً نتیجهٔ دوم واضح است.

تعیین جوابهای معادلهٔ $P(G;x) = 0$ یکی از مسائلی است که هنوز به‌طور کامل حل نشده است. واضح است که 0، 1، ...، $\chi(G) - 2$، و $\chi(G) - 1$ تنها جوابهای گویای این معادله‌اند. اما در حالتِ کلّیْ این اعداد تمام جوابها را به‌دست نمی‌دهند. چون ضرایبِ $P(G;x)$ متناوباً مثبت و منفی هستند مسلماً $P(G;x) = 0$ جواب منفی ندارد. در سال ۱۹۷۴ تات نشان داد که xهایی که $0 < x < 1$، ریشهٔ این معادله نیستند. در سال ۱۹۹۳ جکسن ثابت کرد که xهایی که $1 < x < \frac{32}{27}$ در این معادله صدق نمی‌کنند. در بارهٔ ریشه‌های مختلطِ $P(G;x)$ اطلاع چندانی در دست نیست. یکی از نتایجِ موجود به شرح زیر است [۱۷]:

قضیهٔ ۷. *تمام جوابهای $P(G;z)$ در صفحهٔ مختلط به ناحیه‌های بستهٔ زیر تعلق دارند:*

الف) اجتماعِ قرصهای مستدیرِ $|z-q| \le q$ و $|z| \le q - 1$؛

ب) اجتماع قرصهای مستدیرِ $|z-q+p-2| \le q$ و $|z-1| \le q - 1$؛

پ) *اجتماع قرص مستدیرِ* $|z-1| \leq q-1$ *و خاگیِ کاسینیِ*

$$|z-q+p-2| \cdot |z-1| \leq q(q-1). \ \square$$

برای حل مسالهٔ چهاررنگ عده‌ای کوشیده‌اند نشان دهند به ازای هر گرافِ مسطح G، $P(G;4) > 0$. گراف مسطح گرافی است که بر صفحه (یا کره) نموداری داشته باشد که خطها، به‌جز در نقاطِ متناظر با رأسها، یکدیگر را قطع نکنند. در این موردْ یکی از نتایج زیبا تساویِ مذکور در قضیهٔ زیر موسوم به تساویِ طلایی است که به تات [۱۹] منسوب است.

قضیهٔ ۸. *اگر p تعداد رأسهای گرافِ مسطح و ماکسیمالِ G باشد آنگاه*

$$P(G;\tau+2) = (\tau+2) \cdot \tau^{3p-10} (P(G;\tau+1))^2. \ \square$$

در اینجا $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ همان نسبتِ طلایی است.

با شرایط مذکور در صورتِ قضیهٔ ۸ تات ثابت کرد که $P(G;\tau+1)$ صفر نیست و لذا بنا به تساویِ طلایی، $P(G;\tau+2) > 0$. توجه کنید که $\tau+2 > 3{,}618$. گرافِ مسطحِ ماکسیمال گرافی است که اگر یالی به آن اضافه شود گرافِ حاصلْ مسطح نباشد. اگر چنین گرافی دست‌کم سه رأس داشته باشد مرزِ هر ناحیهٔ نمودارِ آن الزاماً مثلث است و لذا در این مورد اصطلاحِ «مثلث‌بندی» مصداق دارد.

در این مبحث چند مسألهٔ حل‌نشده به شرح زیر وجود دارد:

ــ مشخص‌سازیِ گرافهایی که چندجمله‌ای‌های رنگیِ متساوی دارند.

ــ مشخص‌سازی چندجمله‌ای‌هایی که چندجمله‌ایِ رنگیِ گرافها هستند.

ــ محاسبهٔ چندجمله‌ایِ رنگیِ رده‌های خاصی از گرافها چون مشبکه‌ها، گرافهای شطرنجی.

ــ محاسبهٔ چندجمله‌ای رنگیِ حاصل‌ضرب‌هایی (چون حاصل‌ضربِ دکارتی) از گرافها، بر حسب چندجمله‌ای‌های رنگیِ هر یک از عواملِ ضرب.

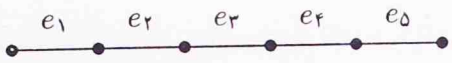
ـ اثبات یا ردِ این حدس که: قدرمطلقهای ضرایبِ هر چندجمله‌ایِ رنگی ابتدا اکیداً صعود و سپس تا آخر اکیداً نزول می‌کنند [۱۲، ۱۴].

در این زمینه کارهای برکهف، لوئیس، تات، و ویتنی بنیادی است و ما خوانندهٔ علاقه‌مند را به [۲ و ۱۵] ارجاع می‌دهیم.

III. چندجمله‌ایِ تطابقها

فرض کنید $G = (V,E)$ یک گراف باشد و $M \subseteq E$. مجموعهٔ M را یک تطابقِ G می‌نامیم هرگاه اشتراکِ هر دو عضوِ آن تهی باشد. به عنوان مثال، در گرافِ شکل ۳ دو مجموعهٔ $M = \{e_2, e_4\}$ و $M' = \{e_1, e_3, e_5\}$ هر دو تطابق‌اند. اما M' ویژگی دیگری هم دارد و آن اینکه M' تمام رأسهای G

را می‌پوشاند؛ یعنی M' زیرمجموعه‌ای از E است که هر رأسِ G بر عضوی از M' واقع است. چنین تطابقی را یک تطابقِ تامّ گراف می‌نامیم.



شکل ۳.

حال فرض کنید n عددی طبیعی باشد. یک تطابقِ nیالی از G که رأسهایش با v_1، v_2، ...، v_p مشخص شده است تطابقی چون M است که $|M| = n$. تعداد تطابقهای nیالیِ G را با $\mu(G,n)$ نمایش می‌دهیم. قرارداد می‌کنیم که $\mu(G,0)$ برابر با یک باشد. چندجمله‌ایِ تطابقهای G را که با نمادِ $\mu(G;x)$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(G;x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \mu(G,n)x^{p-2n}.$$

مثلاً در مورد گرافِ شکل ۱،

$$\mu(G;x) = x^4 - 5x^2 + 2.$$

اگر n عددی طبیعی باشد و $p \geq 2n$، آنگاه به‌سهولت دیده می‌شود که

$$\mu(K_p,n) = \binom{p}{2n}\mu(K_{2n},n)$$

و با شرطِ $n \geq 2$،

$$\mu(K_{2n},n) = (2n-1)\mu(K_{2m-2},m-1).$$

حال با استقراء بر n تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu(K_{2n},n) = (2n)!/n!2^n.$$

لذا، با شرطِ $p \geq 2n$،

$$\mu(K_p,n) = p!/n!(p-2n)!2^n.$$

پس اگر تعداد تطابقهای تامّ گراف G را با $\mathrm{pm}(G)$ نمایش دهیم، آنگاه

$$\mathrm{pm}(K_{2n}) = \mu(K_{2n},n) = (2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1).$$

قضیهٔ ۹. *به ازای هر عدد طبیعی p،*

$$\mathrm{pm}(K_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} x^p dx.$$

اثبات. فرض کنید $f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} x^n dx$. در این صورت با روشِ جزء به جزء به‌دست می‌آید

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [x^{n+1} e^{-x^2/2}/(n+1)]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+2} e^{-x^2/2} dx.$$

بنابراین $f(n+2) = (n+1)f(n)$. $f(1) = 0$؛ پس به ازای هر nهای فرد $f(n) = 0$، و چون $f(0) = 1$، به نتیجهٔ مطلوبِ زیر دست می‌یابیم:

$$f(2n) = (2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1). \ \square$$

قضیهٔ ۱۰. الف) *اگر گرافهای G و H هیچ رأسِ مشترک نداشته باشند آنگاه*

$$\mu(G \cup H; x) = \mu(G; x)\mu(H; x).$$

ب) *اگر $e = uv \in E(G)$ و مرتبهٔ G دست‌کم سه باشد آنگاه*

$$\mu(G; x) = \mu(G - e; x) - \mu(G - u - v; x).$$

اثبات. الف) هر تطابقِ nیالیِ $G \cup H$ از یک تطابقِ sیالیِ G و یک تطابقِ $(n-s)$یالیِ H، $0 \leq s \leq n$، تشکیل می‌شود. پس $\mu(G \cup H, n) = \sum_{s=0}^{n} \mu(G, s)\mu(H, n-s)$. چون ضریبِ $x^{p(G\cup H)-2n} = x^{[p(G)-2s]+[p(H)-2(n-s)]}$ در $\mu(G \cup H; x)$ برابر با

$$(-1)^n \mu(G \cup H, n) = \sum_{s=0}^{n} [(-1)^s \mu(G, s)].[(-1)^{n-s} \mu(H, n-s)]$$

است درستی حکم اثبات می‌شود.

ب) تطابقهای nیالیِ G به دو دسته تقسیم می‌شوند: آنهایی که e را شامل‌اند و آنهایی که e را شامل نیستند. از هر تطابقِ nیالیِ G که e را شامل باشد یک تطابقِ $(n-1)$یالی برای $G - u - v$ به دست می‌آید. لذا تعداد تطابقهای nیالیِ G که e را شامل باشند برابر با $\mu(G - u - v, n-1)$، و تعداد تطابقهای nیالیِ G که e را شامل نباشند برابر با $\mu(G - e, n)$ است. پس به ازای هر عدد طبیعیِ n،

$$\mu(G, n) = \mu(G - e, n) + \mu(G - u - v, n-1).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\mu(G,x) &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\mu(G,n)x^{p-2n}\\ &= x^p + \sum_{n\geq 1}(-1)^n(\mu(G-e,n)+\mu(G-u-v,n-1))x^{p-2n}\\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\mu(G-e,n)x^{p-2n} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n\mu(G-u-v,n-1)x^{p-2n}\\ &= \mu(G-e_i x) - \sum_{n-1\geq 0}(-1)^{n-1}\mu(G-u-v,n-1)x\\ &= \mu(G-e;x) - \mu(G-u-v;x).\square\end{aligned}$$

توجه کنید که بند (الف) در مورد چندجمله‌ایِ مشخصهٔ (ماتریسِ مجاورتِ) G هم برقرار است، ولی بندِ (ب) خاصِ چندجمله‌ای تطابقهاست (چرا؟).

قضیهٔ ۱۱. *به ازای هر گراف G،*

$$\mathrm{pm}(\bar{G}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\mu(G;x)dx.$$

اثبات. اگر مرتبهٔ G یک یا دو باشد مسلماً حکم درست است؛ لذا فرض می‌کنیم $p \geq 3$. در این حالت طرف راستِ تساوی بالا را $I(G)$ می‌نامیم و از استقراء بر q استفاده می‌کنیم. اگر $q = 0$ آنگاه $\mu(G;x) = x^p$ و $\bar{G} = K_p$. در این حالت قضیهٔ ۹ جوابگوست. فرض می‌کنیم G دست‌کم یک یالِ $e = uv$ داشته باشد و قضیه در مورد هر زیرگرافی از G که تعداد یالهایش از $q(G)$ کمتر است برقرار باشد. بنا به بند (ب) از قضیهٔ ۱۰، $I(G) = I(G-e) - I(G-u-v)$؛ پس

$$I(G) = \mathrm{pm}(\overline{G-e}) - \mathrm{pm}(\overline{G-u-v}).$$

کافی است نشان دهیم طرف راستِ این تساوی با $\mathrm{pm}(\bar{G})$ برابر است. تطابقهای تامِّ $\overline{G-e}$ را می‌توان به دو ردهٔ مجزا افراز کرد: آنهایی که e را شامل‌اند و آنهایی که e را شامل نیستند. از هر تطابقِ تامّی که e را شامل باشد یک تطابق تامّ برای $\overline{G-u-v}$ به‌دست می‌آید و هر تطابق تامّی که e را شامل نباشد خود تطابقی تامّ برای $\bar{G}$ است. $\square$

قضیهٔ زیر حاکی است که چندجمله‌ای‌های تطابقهای گرافهای کامل، «خانواده‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد» تشکیل می‌دهند. برای مطالعهٔ در بارهٔ چندجمله‌ای‌های متعامد به [۴ و ۱۶] رجوع کنید.

قضیهٔ ۱۲. اگر $V(K_m) \cap V(K_n) = \varnothing$ آنگاه

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \mu(K_m; x)\mu(K_n; x) = \begin{cases} mi, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

اثبات. توجه کنید که اولاً $\overline{K_m \cup K_n} = K_{m,n}$ ، که گرافِ $K_{m,n}$ گراف دوبخشیِ کاملی را نمایش می‌دهد. ثانیاً

$$p^m(K_{m,n}) = \begin{cases} m!, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

ثالثاً بنا به بند (الف) از قضیهٔ ۱۰ تساویِ $\mu(K_m \cup K_n; x) = \mu(K_m; x)\mu(K_n; x)$ برقرار است. حال قضیهٔ ۱۱ اثبات را کامل می‌کند. □

در پایانِ این قسمت از بخشِ III خاطرنشان می‌کنیم که به ازای هر $p \in \mathbb{N}$ چندجمله‌ایِ $\mu(K_p; x)$ از درجهٔ p و تکین است. در نتیجه هر چندجمله‌ای، به‌ویژه هر چندجمله‌ایِ تطابقها، را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از $\mu(K_p; x)$ها نوشت. ارتباط تنگاتنگ بین چندجمله‌ای تطابقها، $\mu(G; x)$، و چندجمله‌ای مشخصه، $\varphi(G; x)$، جالب و کاراست. می‌توان ثابت کرد که اگر G بیشه باشد، آنگاه $\varphi(G; x) = \mu(G; x)$. همچنین می‌توان نشان داد که به ازای هر گرافِ همبندِ G درختی چون T وجود دارد که $\mu(G; x)$ چندجمله‌ایِ $\mu(T; x)$ را عاد می‌کند. چون $\mu(T; x) = \varphi(T; x)$ و تمامِ صفرهای $\varphi(T; x)$ حقیقی‌اند، به ازای هر گرافِ G تمام صفرهای $\mu(G; x)$ نیز حقیقی‌اند. علاوه بر این، هیلمان و لیب [۱۱] ثابت کرده‌اند که اگر Δ، ماکسیمم درجهٔ گراف G، بیش از یک باشد آنگاه صفرهای $\mu(G; x)$ در بازهٔ $(-2\sqrt{\Delta - 1}, 2\sqrt{\Delta - 1})$ واقع می‌شوند. توجه کنید که توزیعِ صفرهای $\mu(G; x)$ حول مبداء متقارن است زیرا اگر مرتبهٔ G زوج باشد $\mu(G; x)$ را می‌توان به‌صورتِ یک چندجمله‌ای بر حسبِ $y = x^2$ نوشت، و اگر مرتبهٔ G فرد باشد $\mu(G; x)$ از حاصل‌ضربِ x در یک چنین چندجمله‌ای به دست می‌آید. برای مطالعهٔ بیشترْ مراجعِ [۱۱ و ۱۳] را ببینید. در مرجعِ [۱۱] هیلمان و لیب با سه روش مختلفْ حقیقی بودنِ صفرهای $\mu(G; x)$ را اثبات کرده‌اند.

گرافهای دترمینانی

الگوریتمهای موجود برای یافتنِ چندجمله‌ای تطابقهای یک گرافْ ناچندجمله‌ای‌اند، اما محاسبهٔ دترمینان را می‌توان در زمانِ چندجمله‌ای انجام داد. لذا طبیعی است گرافهایی را بررسی کنیم که چندجمله‌ای‌های تطابقهایشان را بتوان به‌صورت دترمینان نوشت. مطالب این قسمت از بخش III عمدتاً از مرجع [۹] اقتباس شده‌اند.

هر تطابقِ گرافِ G را می‌توان زیرگرافِ فراگیری از G تلقی کرد که مؤلفه‌هایش K_1 یا K_2 باشند. فرض کنید G دارای p رأسِ v_i، $1 \leq i \leq p$، باشد و طبق معمول $\mu(G,n)$ تعداد تطابقهای nیالیِ G را نمایش دهد. در این قسمت تابعِ دومتغیریِ $\mu(G;x,y)$ را چندجمله‌ای تطابقهای G می‌نامیم و برای سادگی آن را با $\mu(G)$ نمایش می‌دهیم:

$$\mu(G) = \mu(G;x,y) = \sum_{m \geq 0} \mu(G,n) x^{p-2n} y^n.$$

توجه کنید که $\mu(G;x,-1) = \mu(G;x)$.

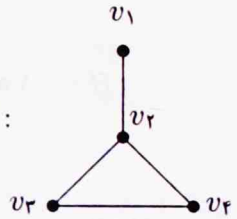
ماتریسِ $M(G) = (m_{ij})$، موسوم به ماتریسِ تطابقهای گرافِ G، درسال ۱۹۸۷ به‌صورت زیر تعریف شده است [۸]:

$$m_{ij} = \begin{cases} \sqrt{y}, & i < j \text{ و دو رأسِ } v_i \text{ و } v_j \text{ مجاورند} \\ -\sqrt{y}, & i > j \text{ و دو رأسِ } v_i \text{ و } v_j \text{ مجاورند} \\ 0, & i \neq j \text{ و دو رأسِ } v_i \text{ و } v_j \text{ مجاور نیستند} \\ x_0, & i = j. \end{cases}$$

بدیهی است ماتریسِ تطابقهای G از ماتریس مجاورتِ G بدین ترتیب به‌دست می‌آید که به‌جای صفرهای واقع بر قطر اصلیْ x، به‌جای درایه‌های ناصفر واقع در بالای قطر اصلیْ $\sqrt{y}$، و به جای درایه‌های ناصفرِ واقع در زیرِ قطرِ اصلیْ $-\sqrt{y}$ قرار می‌گیرند.

مثال.

$G:$

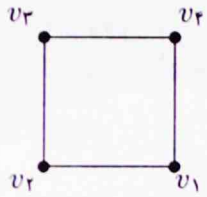


$$\mu(G) = x^4 + 4x^2y + y^2$$

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} x & \sqrt{y} & 0 & 0 \\ -\sqrt{y} & x & \sqrt{y} & \sqrt{y} \\ 0 & -\sqrt{y} & x & \sqrt{y} \\ 0 & -\sqrt{y} & -\sqrt{y} & x \end{pmatrix} \end{array}$$

$$|M(G)| = x^4 + 4x^2y + y^2 = \mu(G)$$

$H:$



$$\mu(H) = x^4 + 4x^2y + 2y^2$$

$$M(H) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} x & \sqrt{y} & 0 & \sqrt{y} \\ -\sqrt{y} & x & \sqrt{y} & 0 \\ 0 & -\sqrt{y} & x & \sqrt{y} \\ -\sqrt{y} & 0 & -\sqrt{y} & x \end{pmatrix} \end{array}$$

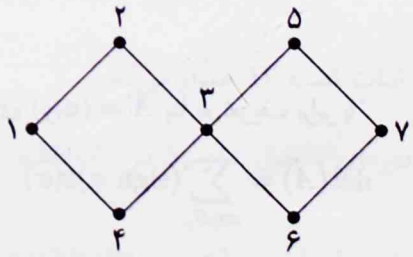
$$|M(H)| = x^4 + 4x^2y + 4y^2 \neq \mu(H)$$

لذا می‌بینیم که گاهی مقدار دترمنیانِ ماتریسِ تطابقهای G با چندجمله‌ایِ تطابقهای G برابر است و گاهی برابر نیست.

قضیهٔ ۱۳. *اگر گراف G دورِ زوج نداشته باشد آنگاه $|M(G)| = \mu(G)$.*

عکسِ این قضیه درست نیست؛ مثال زیر این نکته را نشان می‌دهد.

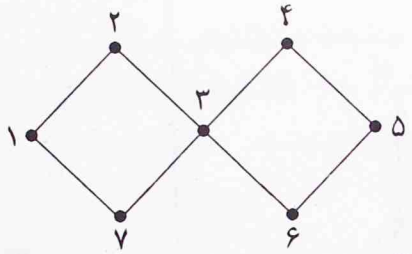
$G:$



$$|M(G)| = \mu(G) = x^7 + 8x^5y + 16x^3y^2 + 8xy^3.$$

اگر برچسبِ رأسهای گرافِ بالا را به‌صورت زیر عوض کنیم می‌بینیم که $|M(H)| \neq \mu(H)$:

$H:$



$$|M(H)| = \mu(H) + U(H), \quad U(H) = ۶x^۳y^۲ - ۶xy^۳.$$

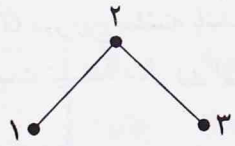
در واقع در مورد گرافِ G هم تساویِ $|M(G)| = \mu(G) + U(G)$، با شرطِ $U(G) = ۰$، برقرار است؛ لذا تعریفِ زیر به‌طور طبیعی مطرح می‌شود.

تعریف. اگر گرافی چون G دارای این ویژگی باشد که رأسهایش را بتوان با نمادهای i، $۱ \leq i \leq p$، چنان نامگذاری کرد که تساویِ $|M(G)| = \mu(G)$ برقرار باشد، آنگاه گراف G را یک گرافِ دترمینانی می‌نامیم.

بنا به قضیهٔ ۱۳ هر گرافی که دورِ فرد نداشته باشد دترمینانی است. مشخص‌سازیِ گرافهای دترمینانی مسأله‌ای است که هنوز حل نشده است.

اثباتِ قضیهٔ ۱۳ صرفاً بر اساس تعریفِ دترمینان است؛ توجه کنید که ارائهٔ چنین اثباتی جز با درک عمیقِ این مفهوم میسر نیست. ابتدا به مثال زیر توجه کنید.

$H:$



$$M(G) = \begin{bmatrix} x & \sqrt{y} & ۰ \\ -\sqrt{y} & x & \sqrt{y} \\ ۰ & -\sqrt{y} & x \end{bmatrix}$$

چون دترمینانِ ماتریسِ $(p \times p)$ی $A = (a_{ij})$ بنا به تعریف برابر با

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sign } \sigma) t(\sigma)$$

است که در آن $t(\sigma) = a_{۱\sigma(۱)} a_{۲\sigma(۲)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots \sigma_{p\sigma(p)}$، با استفاده از این تعریف جدولِ صفحهٔ بعد را تشکیل می‌دهیم و $|M(G)|$ را محاسبه می‌کنیم.

σ	sign σ	$t(\sigma)$	sign $\sigma t(\sigma)$
$\sigma_۱ = (۱)(۲)(۳)$	$+$	$a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳} = x^۳$	$x^۳$
$\sigma_۲ = (۱)(۲۳)$	$-$	$a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲} = -xy$	xy
$\sigma_۳ = (۲)(۱۳)$	$-$	$a_{۲۲}a_{۱۳}a_{۳۱} = ۰$	۰
$\sigma_۴ = (۳)(۱۲)$	$-$	$a_{۳۳}a_{۱۲}a_{۲۱} = -xy$	xy
$\sigma_۵ = (۱۲۳)$	$+$	$a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱} = ۰$	۰
$\sigma_۶ = (۱۲۳)$	$+$	$a_{۱۳}a_{۳۲}a_{۲۱} = ۰$	۰
			$\lvert M(G)\rvert = x^۳ + ۲xy.$

اگر با تعمیمِ مفهومِ دورِ گراف، هر یال را دوری به طولِ دو و هر رأس را دوری به طولِ یک بپنداریم، آنگاه، همچنان که در مثال دیدیم، اعضایی از S_p آن جمله‌های ناصفر یا مثبت یا منفی‌ای از $|M(G)|$ را تولید می‌کنند که حاصل‌ضرب دورهایی باشند که با دورهایی از گرافِ G در تناظرند. بالاخص، هر عضوِ S_p که حاصل‌ضرب ترانهش‌ها یا ۱ـدورها (اعضایی که به خودشان می‌روند) باشد و جمله‌ای ناصفر برای $|M(G)|$ تولید کند با تطابقی از G در تناظر است. به عکس، هر تطابقِ kیالیِ موجود در G با عضوی چون σ از S_p در تناظر است که از k ترانهشِ مجزا و $(p-۲k)$ ۱ـدور تشکیل می‌شود. لذا در این حالت

$$t(\sigma) = x^{p-۲k}((\sqrt{y})(-\sqrt{y}))^k = (-۱)^k x^{p-۲k} y^k.$$

در نتیجه $\text{sign}\sigma \cdot t(\sigma) = x^{p-۲x}y^x$. بنابراین $|M(G)|$ تمام جملاتِ $\mu(G)$ را در بر دارد. حاصلِ این مشاهدات قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۱۴. *به ازای هر گرافِ G،*

$$|M(G)| = \mu(G) + U(G).$$

در اینجا $U(G)$ یک چندجمله‌ای با متغیرهای x و y است و از اعضایی از S_p حاصل می‌شود که با تطابقهای G در تناظر نیستند.

قضیهٔ زیر راه را برای تکمیلِ اثباتِ قضیهٔ ۱۳ هموار می‌کند.

قضیهٔ ۱۵. *الف) سهم کلّیهٔ دورهای به طولِ r از S_p در $|M(G)|$، با شرط اینکه $r > ۲$ فرد باشد، صفر است.*

ب) سهم هر دورِ σ با طولِ r همراه با سهمِ $\sigma^{-۱}$ در $|M(G)|$، با شرط اینکه $r > ۲$ زوج باشد، $\pm ۲x^{p-۲}y^{\frac{r}{۲}}$ است.

اثبات. الف) فرض کنید $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_r)$ دوری از S_p و $r > 2$ فرد باشد. اگر سهم σ در $|M(G)|$ برابر با k فرض شود سهم σ^{-1} در $|M(G)|$ که $\sigma^{-1} \in S_p$ و $\sigma^{-1} \neq \sigma$، برابر با $-k$ است زیرا در σ اگر $i_j \to i_k$ آنگاه در σ^{-1}، $i_k \to i_j$.

ب) در این حالت علامتِ سهمِ σ در $|M(G)|$ با علامت سهم σ^{-1} در $|M(G)|$ یکی است؛ لذا سهم σ و سهم σ^{-1} در مجموع برابر با $+2x^{p-r}y^{\frac{r}{2}}$، یا برابر با $-2x^{p-r}y^{\frac{r}{2}}$ است. □

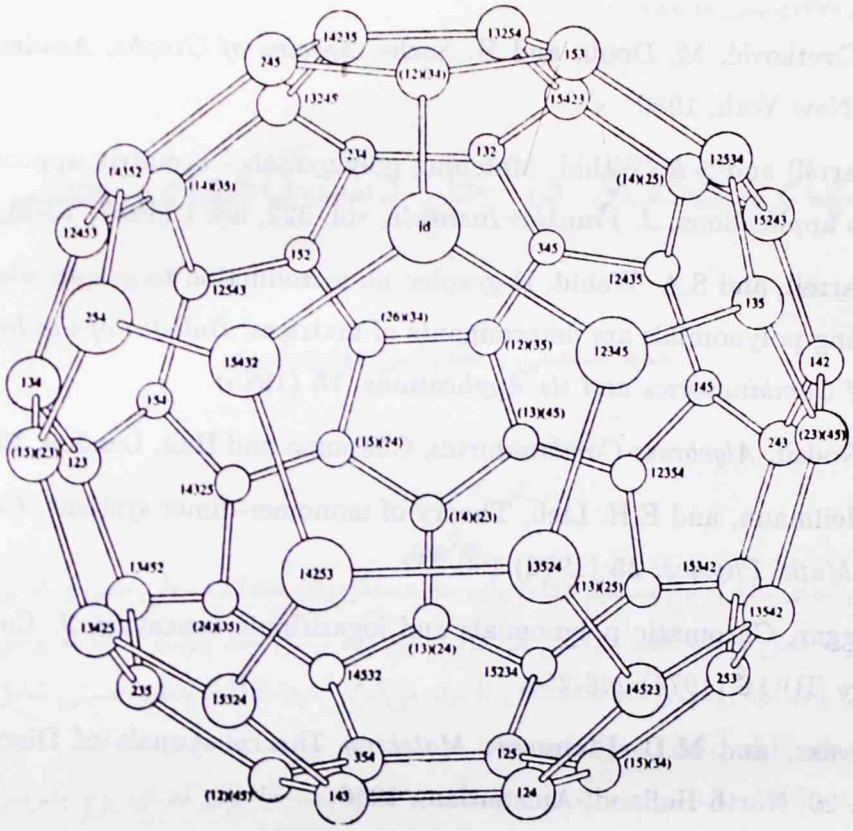
اثبات قضیهٔ ۱۳. بنا بر قضیهٔ ۱۴ و قضیه ۱۵ جملات موجود در $U(G)$ تنها از اعضایی از S_p به‌دست می‌آیند که حاصل‌ضرب‌های دورهای زوجی باشند که طولِ هیچ‌یک دو نباشد. چنین اعضایی با دورهایی به طول $2l$، $l \geq 2$، از G در تناظرند.

از نظر تاریخی تا به حال سه بار به‌طور مستقل صورتی از چندجمله‌ای تطابقها مطرح شده است. نخستین بار این چندجمله‌ای در ترکیبیات ظاهر شد. سپس هیلمان و لیب [۱۱] آن را در فیزیکِ آماری مطرح کردند. سرانجام چندجمله‌ایِ تطابقها در شیمیِ نظری مورد بحث قرار گرفت. هرچند نمایشِ ملکول به‌وسیلهٔ گراف کار ساده‌ای است ــ اتمها به عنوان رأسها و پیوندها به عنوان یالها ــ اما وجود همبستگیِ قویِ موجود بین ویژگیهای شیمیاییِ ملکول و مفاهیم و پارامترهای مشخصی از گرافِ متناظر با آن شگفت‌آور است. یکی از این پارامترها، مجموعِ قدرمطلق‌های صفرهای چندجمله‌ایِ تطابقهای گرافِ مربوط به هر هیدروکربنِ معطر (آروماتیک) است که با رایحهٔ هیدروکربن ارتباط نزدیک دارد!

حال که ارتباط بین نظریهٔ گرافها و علم شیمی مطرح شد اضافه می‌کنیم که در سال ۱۸۷۴ کِیلی با نوشتنِ مقاله‌ای تحت عنوانِ «نظریهٔ ریاضیِ ایزومرها» بین نظریهٔ گرافها و شیمی پیوندی ناگسستنی برقرار کرد. کتابی دوجلدی با عنوانِ نظریهٔ شیمیایی گرافها [۱۸] منتشر شده است.

یکی از پژوهشهای جاریْ مطالعهٔ باکیبال است. باکیبال ملکولی متشکل از ۶۰ اتمِ کربن است که به توپ فوتبال شباهت زیادی دارد ــ شکل ۴ را ببینید.

اهمیتِ باکیبال در این است که با مواد جدیدی موسوم به ابررساناهای دمای بالا که در سالهای آخرِ دههٔ ۸۰ میلادی کشف شدند و در صنعت کاربرد فراوان دارند ویژگیهایی مشترک دارند. این ملکول، به قول باری سیپرا، بسیاری از شیمیدانها و فیزیکدانها و متخصصانِ علمِ مواد را مثل موریانه به دور خود جمع کرده است [۵]. اخیراً هم چند ریاضیدان، از جمله ر.ک. چانگ متخصصِ نظریهٔ گرافها و ش. شترنبرگ متخصص نظریهٔ نمایش گروهها به این جمع پیوسته‌اند.



شکل ۴.

مراجع

[1] M. Behzad, G. Chartrand, and L. Lesniax-Foster, *Graphs and Digraphs*, Wadsworth, Belmont, CA, 1979.

[2] G.D. Birkhoff, A determinantal formula for the number of ways of coloring a map, *Ann. of Math.* **14** (1912) 42-46.

[3] J.A. Bondy, and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Macmillan, London, 1976.

[4] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[5] B. Cipra, Map-coloring theorists look at new worlds, *What's Happening in the Mathematical Sciences*, (1995) 43-47.

[6] D.M. Cretković, M. Doob, I. Gutman, and A. Torgašev, *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*, Annals of Discrete Math, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[7] D.M. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs, *Spectra of Graphs,* Academic Press, New York, 1980.

[8] E.J. Farrell and S.A. Wahid, Matching polynomials - a matrix approach and its applicalions, *J. Franklin Institute,* vol. 322, no. 1 (1987) 13-21.

[9] E.J. Farrell, and S.A. Wahid, D-graphs: an introduction to graphs whose matching polynomials are determinants of matrices, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications,* **15** (1995).

[10] C.D. Godsil, *Algebraic Combinatorics,* Chapman and Hall, London, 1993.

[11] O.J. Heilmann, and E.H. Lieb, Theory of monomer-dimer systems, *Commun. Math. Physics,* **25** (1972) 190-232.

[12] S. Hoggar, Chromatic polynomials and logarithmic concavity, *J. Comb. Theory* (B) **16** (1974) 248-254.

[13] L. Lovász, and M.D. Plummer, *Matching Theory,* Annals of Discrete Math. 29, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[14] A. Nijenhuis, and H.S. Wilf, *Combinatorial Algorithms for Computers and Calculators,* Academic Press, New York, 1978.

[15] R.C. Read, and W.T. Tutte, Chromatic polynomials, *Selected Topics in Graph Theory 3*, editors: L.W. Beineke, and R.J. Wilson (1988) 15-42.

[16] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials,* 4th edition, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.

[17] V. Thier, Graphen ünd Polynome, Diploma Thesis, TU München, 1983.

[18] N. Trinajstic , *Chemical Graph Theory,* vols. I & II, CRC Press Inc, Boca Raton, Florida, 1983.

[19] W.T. Tutte, On chromatic polynomials and the golden ratio, *J. Comb. Theory,* **9** (1970) 289-296.

مهدی بهزاد
دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ ریاضی
arashbeh@rose.ipm.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۱۷ (بهار ۱۳۷۵)، صص. ۱۷ تا ۲۸

روشهای ABS در حلِ دستگاههای خطی

حمید اسمعیلی و نظام‌الدین مهدوی‌امیری

چکیده

ردهٔ روشهای تکراریِ نوع مستقیمِ ABS برای حل دستگاههای معادلاتِ خطیِ معین یا نامعین و با رتبهٔ کامل یا رتبهٔ ناقص بررسی می‌شود. این رده شامل چند پارامتر است که برخی مقادیر برای آنها روشهای شناخته‌شده‌ای را ابراز می‌کنند. ردهٔ ABS به‌طور ضمنی شامل تجزیه‌های LU، LL^T، و تجزیه‌های متعامد می‌شود. در حلِ دستگاههای معادلات نامعین، روشهای ABS یک جوابِ ویژه برای دستگاه به همراه یک پایه برای فضای پوچِ ماتریسِ ضرایبِ دستگاه تولید می‌کنند به‌طوری که جواب عمومی دستگاه را می‌توان به‌صورتِ بسته نمایش داد.

پس از طرحِ الگوریتمِ ABS، برخی مقایسات عددی میان روشهای کلاسیک (همچون روش تجزیهٔ QR از طریق تبدیلاتِ هاؤس‌هولدر) و روشهای ABS (مانند روش هوانگ) روی انواع متنوعی از ماتریسهای بدحالت ارائه می‌شوند. نتایجِ به‌دست‌آمده برای روشهای ABS نه‌تنها از لحاظِ نظری بااهمیت هستند بلکه از دیدگاه محاسباتِ عددی نیز شایانِ توجه‌اند. این روشها در حالی که از قابلیتِ تولید جوابهای مناسب برای دستگاههای بدحالت برخوردارند، در حل دستگاههای بزرگ نیز کارایی دارند.

مقدمه

دستگاهِ $Ax = b$ متشکل از m معادله بر حسب n مجهول، $m \leq n$، را در نظر بگیرید که در آن $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$. الگوریتمهای ABS یک جوابِ x^+ این دستگاه را، پس از حداکثر m تکرار، از دنبالهٔ تقریباتِ x_i برای x^+ محاسبه می‌کنند: تقریبِ x_{i+1} در تکرارِ iام محاسبه می‌شود و در i معادلهٔ اول صدق می‌کند. بدین ترتیب، ردهٔ روشهای ABS از دستهٔ روشهای تکراری است که پس از تعداد متناهی (حداکثر m) تکرار به جوابِ دستگاه می‌رسد. این‌گونه روشها برای حلِ

دستگاههای بزرگ (m و یا n بزرگ)، در مقایسه با روشهای مستقیمِ معمول، از کارایی بیشتری برخوردارند (برای مطالعهٔ روشهای مستقیمِ متداول و برخی از روشهای تکراری به [۱۰] رجوع کنید).

ایدهٔ حلِ دستگاههای خطی از طریق تولیدِ چنین تقریباتی تازه نیست. شاید قدیمیترین روشِ مبتنی بر این ایده، روش پله‌برقی[1] باشد ([۸]، [۷]). در این روش، با افرازِ A و x به‌صورتِ

$$x = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{n-i} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} A_{i,i} & A_{i,n-i} \\ A_{m-i,i} & A_{m-i,n-i} \end{pmatrix}$$

دستگاهِ شاملِ i معادلهٔ اول به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A_{ii}x_i + A_{i,n-i}x_{n-i} = b_i.$$

اگر m رتبهٔ A باشد و تمام زیرماتریسهای اصلیِ A نامنفرد باشند (که همواره با جایگشت مناسبی از سطرها یا ستونهای A چنین است)، آنگاه جوابِ x_i^+ برای i معادلهٔ اول را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$x_i^+ = A_{ii}^{-1}(b_i - A_{i,n-i}x_{n-i})$$

که در آن x_{n-i} اختیاری است. در روشِ پله‌برقی، x_{n-i} برابر صفر قرار می‌گیرد (لذا یک دنباله از جوابهای پایه‌ای تولید می‌شود) و A_{ii}^{-1} از $A_{i-1,i-1}^{-1}$ با بهنگام‌رسانیِ عواملِ مثلثی یا از فرمولهایی برای محاسبهٔ معکوس محاسبه می‌شود (مثلاً رجوع شود به [۹]). در عملْ روش پله‌برقی توصیه نمی‌شود زیرا هزینهٔ محاسباتیِ آن نسبت به دیگر روشها بیشتر است و فرمولهای بهنگام‌رسانیِ معکوس، ناپایدارند. (برای مطالعهٔ پایداریِ روشها در حل دستگاههای خطی به [۱۰] نگاه کنید. الگوریتمِ ۱ را نسبت به الگوریتمِ ۲ پایدارتر گویند هرگاه در محاسبهٔ جواب برای دستگاههای خطی، الگوریتم ۱ در مقایسه با الگوریتم ۲ دارای خطای کمتر بر روی تعداد مسائل بیشتر باشد.)

ساختار الگوریتم ABS همانند ساختار الگوریتمهای شبه‌نیوتن برای دستگاه معادلاتِ غیرخطی یا بهینه‌سازیِ غیرمقید است ([۵]). هر الگوریتم شبه‌نیوتن از قدمهای زیر تشکیل می‌شود.

ساختارِ کلّیِ الگوریتمهای شبه‌نیوتن

الف) یک تقریبِ اولیهٔ $x_1 \in \mathbb{R}^n$ دلخواه و یک ماتریس نامنفردِ دلخواهِ $H_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ در نظر بگیر و قرار ده $i = 1$.

ب) بردارِ جستجوی $p_i \in \mathbb{R}^n$ را با

$$p_i = H_i^T z_i \tag{1}$$

محاسبه کن [در خصوصِ $z_i \in \mathbb{R}^n$ بعداً بحث می‌شود].

1) escalator

پ) طولِ گامِ α_i در امتدادِ p_i از تقریبِ فعلیِ x_i را در نظر بگیر و تقریبِ جدید را با

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i p_i \cdot \tag{۲}$$

محاسبه کن [مقدارِ α_i بعداً تعیین می‌شود].

ت) اگر شرایطِ همگرایی برای جدیدترین تقریبِ x_{i+1} برقرار است توقف کن.

ث) ماتریسِ H_i را با

$$H_{i+1} = H_i + D_i \tag{۳}$$

بهنگام رسان [ماتریسِ D_i بعداً مشخص می‌شود]، و به قدمِ (ب) برو.

مقادیرِ z_i، α_i، و D_i را می‌توان طوری تعیین نمود که x_{i+1} یک جواب برای i معادلهٔ اول باشد. مشخصاً، شرایطِ زیر را برقرار می‌سازیم:

(الف) بردارِ z_i اساساً دلخواه است ولی نباید بر بردارِ خاصی عمود باشد.

(ب) اسکالرِ α_i توسط iامین معادله تعیین می‌شود.

(پ) اصلاحِ D_i را می‌توان به‌صورت یک ماتریسِ با رتبهٔ یک شامل یک بردارِ $w_i \in \mathbb{R}^n$ در نظر گرفت که w_i اساساً دلخواه است ولی ضربِ داخلیِ آن با بردارِ خاصی مساوی یک است.

بنابراین الگوریتمِ ارائه‌شده با سه پارامترِ دلخواهِ ماتریسِ اولیهٔ H_1 و پارامترهای z_i و w_i، $i = 1, 2, \ldots, r$، که در آن r رتبهٔ A است، معرّفِ یک رده از الگوریتمهای تکراری است. با انتخابِ برخی مقادیر برای این پارامترها، روشهای کلاسیک همچون روشِ حذفیِ گاوس، روشِ چولسکی، و روشهای گرام‌ـاشمیت حاصل می‌شوند.

برای برقرار کردنِ شرایطِ (الف) تا (پ) به استقراء عمل می‌کنیم. فرض کنیم که x_i طوری تعیین شده باشد که در $(i-1)$ معادلهٔ اول صدق کند؛ می‌خواهیم بردارِ z_i، اسکالرِ α_i، و ماتریسِ D_i را طوری تعیین کنیم که x_{i+1} یک جواب برای i معادلهٔ اول باشد. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که بنا بر رابطهٔ (۲)،

$$a_i^T x_{i+1} - b_i = a_i^T x_i - b_i - \alpha_i a_i^T p_i. \tag{۴}$$

از (۴) نتیجه می‌شود که x_{i+1} در معادلهٔ iام صدق می‌کند اگر $a_i^T p_i \neq 0$ و طولِ گامِ α_i به‌صورتِ

$$\alpha_i = \frac{a_i^T x_i - b_i}{a_i^T p_i} \tag{۵}$$

تعریف شود. چون $p_i = H_i^T z_i$، شرطِ $a_i^T p_i \neq 0$ معادل می‌شود با

$$a_i^T H_i^T z_i \neq 0. \tag{۶}$$

شرطِ (۶) برای هر z_i که بر $H_i a_i$ عمود نباشد برقرار است. چون H_1 نامنفرد اختیار می‌شود پس $H_1 a_1$ غیرصفر است. به ازای $i > 1$، اثباتِ اینکه $H_i a_i$ غیرصفر است به ساختارِ بهنگام‌رسانیِ H_i بستگی

می‌یابد. در واقع، نشان داده می‌شود که با فرمولِ بهنگام‌رسانیِ (۱۳) در زیر، بردارِ $H_i a_i$ غیرصفر است اگر و تنها اگر سطرِ iامِ ماتریسِ A یک ترکیب خطی از $(i-1)$ سطرِ اولِ آن نباشد.

حال برقراریِ $(i-1)$ معادلهٔ اول را در نظر می‌گیریم. از همانندیِ

$$a_j^T x_{i+1} - b_j = a_j^T x_i - b_j - \alpha_i a_j^T p_i, \qquad j \le i-1 \tag{۷}$$

و فرضِ استقراء نتیجه می‌شود که $a_j^T x_{i+1} - b_j = 0$ اگر و تنها اگر

$$\alpha_i a_j^T p_i = \alpha_i a_j^T H_i^T z_i = 0, \qquad j \le i-1. \tag{۸}$$

توجه داریم که اگر $\alpha_i \neq 0$، آنگاه شرطِ (۸) برقرار می‌شود هرگاه z_i بر $H_i a_j$، $j = 1, \cdots, i-1$، عمود باشد، یا H_i در $H_i a_j = 0$، $j = 1, \cdots, i-1$، صدق کند؛ حالتِ اخیر را در نظر می‌گیریم. بنا بر فرضِ استقراء، به ازای $j \le i-1$، $H_i a_j = 0$. می‌خواهیم اصلاحِ D_i را چنان تعیین کنیم که به ازای $j \le i$، $H_{i+1} a_j = 0$. به پیروی از روشهای شبه‌نیوتن به‌دنبالِ D_iای با کمترین رتبهٔ ممکن هستیم. اگر D_i ماتریسی با رتبهٔ یک باشد، آنگاه

$$H_{i+1} = H_i + c_i d_i^T. \tag{۹}$$

به ازای $j = i$،

$$H_i a_i + (d_i^T a_i) c_i = 0 \tag{۱۰}$$

که وقتی $H_i a_i$ غیرصفر باشد برقرار است اگر و تنها اگر به ازای یک اسکالرِ دلخواهِ $\delta \neq 0$، $d_i^T a_i = 1/\delta$ و $c_i = -\delta H_i a_i$. با قرار دادنِ $\delta = 1$ نتیجه می‌شود

$$H_{i+1} = H_i - H_i a_i d_i^T. \tag{۱۱}$$

برای برقراریِ $H_{i+1} a_j = 0$ به ازای $j < i$، از آنجا که $H_i a_j = 0$، $j < i$، و $H_i a_i \neq 0$، کافی است $d_i^T a_j = 0$. برقراریِ این معادلات با اختیارِ $d_i = H_i^T w_i$، که در آن $w_i \in \mathbb{R}^n$، امکان‌پذیر است. برای برقراریِ شرطِ $d_i^T a_i = 1$ کافی است که w_i در شرطِ

$$w_i^T H_i a_i = 1 \tag{۱۲}$$

صدق کند. شرطِ (۱۲) همواره می‌تواند برقرار گردد اگر w_i مضربِ مناسبی از یک بردارِ غیرمتعامد با $H_i a_i$ باشد.

بنابراین فرمولِ بهنگام‌رسانیِ نهایی برای H_i به‌صورتِ

$$H_{i+1} = H_i - H_i a_i w_i^T H_i \tag{۱۳}$$

درمی‌آید که w_i بردار دلخواهی صادق در (۱۲) است. برای پایهٔ استقراء به‌راحتی می‌توان بررسی نمود که $a_1^T x_2 - b_1 = 0$ و $H_2 a_1 = 0$ هرگاه x_2 و H_2 مطابق با (۲) و (۵) و (۱۳) با z_1 و w_1ای به‌ترتیب صادق در (۶) و (۱۲) بهنگام رسند.

پس الگوریتمِ ABS برای حل دستگاه معادلات خطیِ $Ax = b$ که در آن $A = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $a_i \in \mathbb{R}^n$، $m \le n$، به‌صورت زیر خلاصه می‌شود ([۲]، [۱]):

الگوریتمِ ABS برای حل دستگاه معادلات خطی

(۱) یک $x_1 \in \mathbb{R}^n$ دلخواه و یک $H_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ دلخواه و نامنفرد در نظر بگیر و قرار ده $i = 1$ و $\text{flag} = 0$.

(۲) $t_i = a_i^T x_i - b_i$ [یعنی مؤلفهٔ iامِ بردارِ باقی‌مانده در x_i] و بردارِ $s_i = H_i a_i$ را محاسبه کن.

(۳) اگر $s_i \neq 0$، به (۴) برو؛ اگر $s_i = 0$ و $t_i = 0$، قرار ده $x_{i+1} = x_i$، $H_{i+1} = H_i$، $\text{flag} = \text{flag} + 1$، و به (۷) برو؛ اگر $s_i = 0$ و $t_i \neq 0$، قرار ده $\text{flag} = -i$ و توقف کن.

(۴) بردارِ جستجوی p_i را توسطِ

$$p_i = H_i^T z_i \tag{۱۴}$$

محاسبه کن، که در آن $z_i \in \mathbb{R}^n$ بردار دلخواهی صادق در

$$z_i^T H_i a_i \neq 0 \tag{۱۵}$$

است.

(۵) تقریب برای جواب را توسطِ

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i p_i \,. \tag{۱۶}$$

بهنگام رسان، که در آن طولِ گامِ α_i به‌صورتِ

$$\alpha_i = \frac{t_i}{a_i^T p_i} \tag{۱۷}$$

تعیین می‌شود.

(۶) ماتریسِ H_i را توسطِ

$$H_{i+1} = H_i - H_i a_i w_i^T H_i \tag{۱۸}$$

بهنگام‌رسان، که در آن $w_i \in \mathbb{R}^n$ بردار دلخواهی صادق در شرطِ

$$w_i^T H_i a_i = 1 \tag{۱۹}$$

است.

(۷) اگر $i = m$، توقف کن؛ در غیراین صورت یک واحد به i بیفزا و به (۲) برو.

می‌یابد. در واقع، نشان داده می‌شود که با فرمولِ بهنگام‌رسانیِ (۱۳) در زیر، بردارِ $H_i a_i$ غیرصفر است اگر و تنها اگر سطرِ iامِ ماتریسِ A یک ترکیب خطی از $(i-1)$ سطرِ اولِ آن نباشد.

حال برقراریِ $(i-1)$ معادلهٔ اول را در نظر می‌گیریم. از همانندیِ

$$a_j^T x_{i+1} - b_j = a_j^T x_i - b_j - \alpha_i a_j^T p_i, \qquad j \le i-1 \tag{۷}$$

و فرضِ استقراء نتیجه می‌شود که $a_j^T x_{i+1} - b_j = 0$ اگر و تنها اگر

$$\alpha_i a_j^T p_i = \alpha_i a_j^T H_i^T z_i = 0, \qquad j \le i-1. \tag{۸}$$

توجه داریم که اگر $\alpha_i \neq 0$، آنگاه شرطِ (۸) برقرار می‌شود هرگاه z_i بر $H_i a_j$، $j = 1, \cdots, i-1$، عمود باشد، یا H_i در $H_i a_j = 0$، $j = 1, \cdots, i-1$، صدق کند؛ حالتِ اخیر را در نظر می‌گیریم. بنا بر فرضِ استقراء، به ازای $j \le i-1$، $H_i a_j = 0$. می‌خواهیم اصلاحِ D_i را چنان تعیین کنیم که به ازای $j \le i$، $H_{i+1} a_j = 0$. به پیروی از روشهای شبه‌نیوتن به‌دنبالِ D_iای با کمترین رتبهٔ ممکن هستیم. اگر D_i ماتریسی با رتبهٔ یک باشد، آنگاه

$$H_{i+1} = H_i + c_i d_i^T. \tag{۹}$$

به ازای $j = i$،

$$H_i a_i + (d_i^T a_i) c_i = 0 \tag{۱۰}$$

که وقتی $H_i a_i$ غیرصفر باشد برقرار است اگر و تنها اگر به ازای یک اسکالرِ دلخواهِ $\delta \neq 0$، $d_i^T a_i = 1/\delta$ و $c_i = -\delta H_i a_i$. با قرار دادنِ $\delta = 1$ نتیجه می‌شود

$$H_{i+1} = H_i - H_i a_i d_i^T. \tag{۱۱}$$

برای برقراریِ $H_{i+1} a_j = 0$ به ازای $j < i$، از آنجا که $H_i a_j = 0$، $j < i$، و $H_i a_i \neq 0$، کافی است $d_i^T a_j = 0$. برقراریِ این معادلات با اختیارِ $d_i = H_i^T w_i$، که در آن $w_i \in \mathbb{R}^n$، امکان‌پذیر است. برای برقراریِ شرطِ $d_i^T a_i = 1$ کافی است که w_i در شرطِ

$$w_i^T H_i a_i = 1 \tag{۱۲}$$

صدق کند. شرطِ (۱۲) همواره می‌تواند برقرار گردد اگر w_i مضربِ مناسبی از یک بردارِ غیرمتعامد با $H_i a_i$ باشد.

بنابراین فرمولِ بهنگام‌رسانیِ نهایی برای H_i به‌صورتِ

$$H_{i+1} = H_i - H_i a_i w_i^T H_i \tag{۱۳}$$

درمی‌آید که w_i بردار دلخواهی صادق در (۱۲) است. برای پایهٔ استقراء به‌راحتی می‌توان بررسی نمود که $a_1^T x_2 - b_1 = 0$ و $H_2 a_1 = 0$ هرگاه x_2 و H_2 مطابق با (۲) و (۵) و (۱۳) با z_1 و w_1ای به‌ترتیب صادق در (۶) و (۱۲) بهنگام رسند.

پس الگوریتمِ ABS برای حل دستگاه معادلات خطیِ $Ax = b$ که در آن $A = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $a_i \in \mathbb{R}^n$، $m \le n$، به‌صورت زیر خلاصه می‌شود ([۲]، [۱]):

الگوریتمِ ABS برای حل دستگاه معادلات خطی

(۱) یک $x_1 \in \mathbb{R}^n$ دلخواه و یک $H_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ دلخواه و نامنفرد در نظر بگیر و قرار ده $i = 1$ و $\text{flag} = 0$.

(۲) $t_i = a_i^T x_i - b_i$ [یعنی مؤلفهٔ iام بردارِ باقی‌مانده در x_i] و بردارِ $s_i = H_i a_i$ را محاسبه کن.

(۳) اگر $s_i \neq 0$، به (۴) برو؛ اگر $s_i = 0$ و $t_i = 0$، قرار ده $x_{i+1} = x_i$، $H_{i+1} = H_i$، $\text{flag} = \text{flag} + 1$، و به (۷) برو؛ اگر $s_i = 0$ و $t_i \neq 0$، قرار ده $\text{flag} = -i$ و توقف کن.

(۴) بردارِ جستجوی p_i را توسطِ

$$p_i = H_i^T z_i \tag{۱۴}$$

محاسبه کن، که در آن $z_i \in \mathbb{R}^n$ بردار دلخواهی صادق در

$$z_i^T H_i a_i \neq 0 \tag{۱۵}$$

است.

(۵) تقریب برای جواب را توسطِ

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i p_i \,. \tag{۱۶}$$

بهنگام رسان، که در آن طولِ گامِ α_i به‌صورتِ

$$\alpha_i = \frac{t_i}{a_i^T p_i} \tag{۱۷}$$

تعیین می‌شود.

(۶) ماتریسِ H_i را توسطِ

$$H_{i+1} = H_i - H_i a_i w_i^T H_i \tag{۱۸}$$

بهنگام‌رسان، که در آن $w_i \in \mathbb{R}^n$ بردار دلخواهی صادق در شرطِ

$$w_i^T H_i a_i = 1 \tag{۱۹}$$

است.

(۷) اگر $i = m$، توقف کن؛ در غیراین صورت یک واحد به i بیفزا و به (۲) برو.

غیرصفر بودنِ $H_i a_i$ در قدم (۳)ی الگوریتم بررسی می‌شود. نشان داده می‌شود که $H_i a_i = 0$ اگر و تنها اگر a_i به a_1، ...، a_{i-1} وابستهٔ خطی باشد. در چنین حالتی دو امکان وجود دارد: یا معادلهٔ iام یک ترکیب خطی از معادلاتِ قبلی است یا نیست. اگر نیست دستگاه ناسازگار است. چون x_i اولینْ $(i-1)$ معادله را صادق می‌کند، وجهِ تمایزِ دو امکانِ فوق‌الذکر با بررسیِ مقدارِ t_i تعیین می‌شود. اگر $t_i = 0$، معادلهٔ iام زائد و قابل حذف است؛ لذا $x_{i+1} = x_i$ و $H_{i+1} = H_i$. اگر $t_i \neq 0$، الگوریتم متوقف می‌شود. بنابراین رتبهٔ A برابر است با m منهای تعداد رخدادهای $H_i a_i = 0$.

پارامترِ خروجیِ flag اطلاعاتی در بارهٔ وضعیتِ دستگاه می‌دهد. در واقع مقادیرِ $\text{flag} \geq 0$ تعدادِ معادلاتِ زائد را مشخص می‌کند. اگر $\text{flag} < 0$، آنگاه دستگاه جواب ندارد زیرا معادلهٔ با اندیسِ $i = -flag$ ناسازگار است.

ردهٔ روشهای حاصل از الگوریتمِ ارائه‌شدهٔ ABS شامل سه پارامتر است: ماتریسِ اولیهٔ H_1 (پارامترِ اسپیدیکاتو[1])، بردارِ z_i (پارامترِ برویدن[2])، و بردارِ w_i (پارامترِ ابافی[3]). تخصیصِ مقادیرِ خاص به این پارامترها روشهای خاصی را به‌دست می‌دهد. به‌عنوان مثال، انتخابِ $H_1 = I$ و $w_i = z_i = a_i / a_i^T H_i a_i$ منجر به الگوریتمِ LQ ضمنی می‌شود که با روشِ متعامدسازیِ گرام‌ـاشمیت و روش برنت ([۳]) هم‌ارز است. اگر $H_1 = I$ و $w_i = z_i = e_i / e_i^T H_i a_i$، الگوریتمِ LU ضمنی به‌دست می‌آید که خوش‌تعریف است اگر و تنها اگر تمامِ کهادهای اصلیِ A غیرصفر باشند، و با روشِ براؤن ([۴]) هم‌ارز است.

پیاده‌سازی و نتایجِ عددی

اکنون به برخی ملاحظاتِ عددیِ روشهای ABS در مقایسه با روشهای استاندارد می‌پردازیم. این نتایج نشان می‌دهند که روشهای ABS نه‌تنها به لحاظِ نظری، بلکه از دیدگاه عددی نیز شایان توجه‌اند. در اینجا خلاصه‌ای از یک مقایسهٔ انجام‌شده میان الگوریتمهای مختلف در ردهٔ ABS و روشهای LU و QR بر روی یک‌صد مسأله عرضه می‌شود. برای اختصار، تنها روشِ LQ ضمنی (با $x_1 = a_1$) و روشِ QR از طریقِ تبدیلات هاؤس‌هولدر را در نظر می‌گیریم ([۲]).

ابتدا به بیان برخی از خواص روشِ LQ می‌پردازیم. برای سادگی فرض می‌کنیم رتبهٔ A مساویِ m باشد.

- در حالی که مجموعهٔ جهاتِ جستجوی $\{p_1, \ldots, p_m\}$ در تمام الگوریتمهای ABS مستقل خطی است، این مجموعه در الگوریتمِ LQ ضمنی متعامد نیز هست.
- برای تمام الگوریتمهای ABS تجزیهٔ $AP = L$ برقرار است، که $P = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ پایین‌مثلثی و نامنفرد است. در الگوریتم LQ ضمنی، اگر جهاتِ جستجوی p_i را طوری مقیاس‌بندی کنیم که دارای طولِ واحد باشند، آنگاه می‌توان نشان داد که $A = LP^T$.

1) Spedicato 2) Broyden 3) Abaffy

- در تمامِ الگوریتمهای ABS رابطهٔ $a_j^T x_{i+1} = b_j$ به ازای $j \leq i$ برقرار است؛ در الگوریتمِ LQی ضمنی اگر x_1 متناسب با a_1 باشد آنگاه x_{i+1} یک جواب با نُرمِ اقلیدسیِ کمینه برای i معادلهٔ اول نیز خواهد بود. الگوریتم LQی ضمنی با این انتخاب برای x_1، ابتدا توسطِ هوانگ معرفی شد ([۶]).
- در تمام الگوریتمهای ABS رابطهٔ $H_{i+1}a_j = 0$ به ازای $j \leq i$ برقرار است. در میان تمام انتخابها برای w_i، آن که نرمِ فروبینیوسِ $H_{i+1} - H_i$ را کمینه می‌کند عبارت است از $w_i = a_i/a_i^T H_i a_i$، که متناظر با الگوریتمِ LQی ضمنی است ([۱]).

در جدولِ ۱ تخمینی از عددِ حالت برای برخی مسائلِ آزمون آمده است. (برای مطالعهٔ حالتِ یک دستگاه و عددِ حالتِ وابسته به آن به [۱۰] نگاه کنید. در اینجا یادآوری می‌شود که هرچه عددِ حالتِ دستگاه بزرگتر باشد مسأله بدحالت‌تر است. هر چه مسأله بدحالت‌تر باشد، امکانِ وجودِ خطای فزاینده در جوابِ محاسبه‌شده، حتی توسط الگوریتمهای پایدار، بیشتر می‌شود.) برای هر یک از ماتریسهای ضرایب، پنج جواب دقیقِ x^+ در نظر گرفته شده، و بردارِ متناظرِ سمتِ راستِ b محاسبه شده است که در جداول با $B1$، ...، $B5$ نشان داده شده‌اند. تمام جوابها و تمام ماتریسهای ضرایب، به‌جز ماتریسهای هیلبرت، واندرموند، و لاتکین[1]، دارای درایه‌های صحیح هستند و در نتیجه در محاسبهٔ بردارِ متناظرِ سمتِ راست خطایی ایجاد نمی‌شود. کامپیوترِ مورد استفاده، Hewlett Packard 1000 با هفت رقم در دقتِ ساده است ([۲]). جداولِ ۲ و ۳ معرّفِ الگوریتمِ با خطای کوچکتر در جوابِ محاسبه‌شدهٔ $\hat{x}$ هستند (خطای مزبور، طولِ اقلیدسیِ بردارِ $x^+ - \hat{x}$ است). جدولِ ۴ شرحی از نتایج برای مسائلی با عددِ حالتِ بزرگ را نشان می‌دهد که شامل نرمِ اقلیدسیِ باقی‌ماندهٔ $A\hat{x} - b$ نیز هست.

از بررسی این جداول ملاحظات زیر به‌دست می‌آیند.

- در دقتِ معمولی، روشِ QR در اغلب موارد در ردیف دوم قرار می‌گیرد. (روشِ LQی ضمنی به ازای $n = 5$ در ۲۶ مورد از ۴۵ مورد، به ازای $n = 10$ در ۳۴ مورد، و به ازای $n = 20$ در ۳۵ مورد بهتر است.)
- در دقتِ مضاعف، روشِ QR برای مقادیرِ کوچکِ n بهتر است، ولی به ازای $n = 20$ روشِ LQی ضمنی بهتر است. (روشِ QR به ازای $n = 5$ در ۳۲ مورد، به ازای $n = 10$ در ۲۳ مورد، و به ازای $n = 20$ تنها در ۱۴ مورد بهتر است.)
- برای مسائلِ تقریباًبدحالت، اختلاف در جوابِ محاسبه‌شدهٔ $\hat{x}$ و باقی‌ماندهٔ $A\hat{x} - b$ بین روش QR و روش LQی ضمنی تقریباً کوچک (عموماً کمتر از مرتبهٔ یک) است.
- برای مسائلِ خیلی بدحالت (هیلبرت، پاسکال، واندرموند، لاتکین) خطای به‌دست‌آمده در $\hat{x}$ توسط روشِ QR دارای مرتبه‌ای خیلی بیشتر از خطای به‌دست‌آمده توسط روش LQی ضمنی است.

1) Lotkin

(مطابقِ جدولِ ۴، چنین خطایی در مسألهٔ هیلبرت چهاربرابر، در مسألهٔ پاسکال یازده‌برابر، در مسألهٔ واندرموند شش‌برابر، و در مسألهٔ لاتکین چهاربرابر است.) به هر حال اختلاف در باقی‌مانده‌ها تقریباً یک مرتبه کوچکتر است.

جدول ۱. (تخمینِ) عددِ حالتِ مسائلِ آزمون

عددِ حالت	n	مسأله	عددِ حالت	n	مسأله
۵۰	۵	فرانک	۷E۵	۵	هیلبرت
۲۰۰	۱۰		۷E۸	۱۰	
۸۰۰	۲۰		۸E۹	۲۰	
۱۰	۵	ارگرتر	۱E۴	۵	پاسکال
۵۰	۱۰		۲E۹	۱۰	
۲۰۰	۲۰		۷E۱۴	۲۰	
۱۰	۵	لیتزکه	۳E۳	۵	واندرموند
۵۰	۱۰		۱E۸	۱۰	
۲۰۰	۲۰		۲E۱۳	۲۰	
۲۰	۵	تاد	۶E۵	۵	لاتکین
۸۰	۱۰		۸E۸	۱۰	
۴۰۰	۲۰		۱E۱۰	۲۰	
			۳	۵	نیومن
			۶	۱۰	
			۵۰	۲۰	

جدول ۲. مقایسه بین روشهای QR و LQ‌ی ضمنی در دقتِ ساده

مسأله	n	$B۱$	$B۲$	$B۳$	$B۴$	$B۵$
هیلبرت	۵	LQ	QR	LQ	LQ	QR
	۱۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
پاسکال	۵	LQ	LQ	LQ	QR	QR
	۱۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
واندرموند	۵	LQ	QR	LQ	QR	QR
	۱۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
لاتکین	۵	LQ	LQ	LQ	QR	QR
	۱۰	LQ	LQ	LQ	LQ	QR
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
نیومن	۵	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
	۱۰	LQ	LQ	LQ	LQ	QR
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
فرانک	۵	QR	QR	QR	QR	QR
	۱۰	LQ	QR	LQ	QR	QR
	۲۰	QR	LQ	QR	QR	QR
ارگرتر	۵	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
	۱۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
لیتزکه	۵	QR	QR	QR	LQ	LQ
	۱۰	QR	QR	QR	LQ	LQ
	۲۰	QR	QR	QR	QR	LQ
تاد	۵	LQ	LQ	LQ	QR	QR
	۱۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
	۲۰	LQ	LQ	LQ	QR	QR

جدول ۳. مقایسه بین روشهای QR و LQ ضمنی در دقتِ مضاعف

مسأله	n	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	$B5$
هیلبرت	۵	QR	QR	QR	QR	QR
	۱۰	LQ	LQ	LQ	QR	QR
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
پاسکال	۵	QR	QR	QR	QR	QR
	۱۰	QR	QR	QR	QR	QR
	۲۰	LQ	QR	LQ	QR	QR
واندرموند	۵	LQ	QR	LQ	QR	QR
	۱۰	QR	LQ	QR	QR	QR
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
لاتکین	۵	LQ	QR	LQ	QR	QR
	۱۰	QR	LQ	QR	QR	QR
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
نیومن	۵	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
	۱۰	LQ	LQ	LQ	QR	LQ
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
فرانک	۵	QR	QR	QR	QR	QR
	۱۰	QR	QR	QR	QR	QR
	۲۰	QR	QR	QR	QR	QR
ارگرتر	۵	LQ	LQ	LQ	LQ	QR
	۱۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
	۲۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
لیتزکه	۵	QR	QR	QR	QR	QR
	۱۰	QR	QR	QR	QR	QR
	۲۰	QR	QR	QR	QR	QR
تاد	۵	QR	LQ	QR	QR	LQ
	۱۰	LQ	LQ	LQ	LQ	LQ
	۲۰	QR	LQ	QR	LQ	LQ

جدول ۴. نتایج عددی در دقت ساده روی مسألهٔ نوع $B۲$

مسأله	n	روش	خطا در جوابِ محاسبه‌شده	خطا در باقی‌مانده
هیلبرت	۵	QR	$۴E-۲$	$۳E-۶$
		LQ	$۱E-۱$	$۱E-۵$
	۱۰	QR	$۶E+۳$	$۳E-۴$
		LQ	$۲E-۱$	$۹E-۵$
	۲۰	QR	$۲E+۳$	$۱E-۴$
		LQ	$۲E+۰$	$۹E-۴$
پاسکال	۵	QR	$۴E-۴$	$۱E-۴$
		LQ	$۶E-۷$	$۸E-۶$
	۱۰	QR	$۲E+۳$	$۶E-۱$
		LQ	$۲E-۲$	$۱E-۱$
	۲۰	QR	$۲E+۹$	$۹E+۶$
		LQ	$۵E-۲$	$۶E+۴$
واندرموند	۵	QR	$۲E-۴$	$۵E-۶$
		LQ	$۳E-۴$	
	۱۰	QR	$۶E+۱$	$۳E-۴$
		LQ	$۱E-۲$	$۷E-۶$
	۲۰	QR	$۵E+۵$	$۵E-۲$
		LQ	$۴E-۱$	$۸E-۵$
لاتکین	۵	QR	$۸E-۲$	$۶E-۶$
		LQ	$۲E-۲$	$۱E-۵$
	۱۰	QR	$۸E+۱$	$۱E-۵$
		LQ	$۶E-۲$	$۲E-۵$
	۲۰	QR	$۱E+۳$	$۲E-۴$
		LQ	$۱E-۱$	$۱E-۴$
فرانک	۵	QR	$۵E-۶$	
		LQ	$۱E-۵$	$۸E-۶$
	۱۰	QR	$۸E-۵$	$۸E-۵$
		LQ	$۱E-۴$	$۷E-۵$
	۲۰	QR	$۲E-۳$	$۳E-۳$
		LQ	$۲E-۳$	$۲E-۳$

مراجع

[1] J. Abaffy, and E. Spedicato, A generalization of the ABS algorithm for linear systems, Istituto universitario di Bergamo, Dipartimento di Matematica, Quaderno no. 85/5.

[2] J. Abaffy, G.G. Broyden, and E. Spedicato, A class of direct methods for linear equations, *Numer. Math.*, **45** (1984) 361-376.

[3] R.P. Brent, Some efficient algorithms for solving systems of nonlinear equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10** (1973) 327-344.

[4] K.M. Brown, A quadratically convergent Newton-like method based upon Gaussian elimination, *SIAM J. Numer. Anal.*, **6** (1969) 560-569.

[5] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, 2nd edition, John Wiley, 1987.

[6] H.Y. Huang, A direct method for the general solution of a system of linear equations, *JOTA*, **16** (1975) 429-445.

[7] A.S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell, 1964.

[8] J. Morris, An escalator process for the solution of linear simultaneous equations, *Philos. Mag.*, **37** (1946) 106-120.

[9] J. Rosen, The gradient projection method for nonlinear programming I: linear equations, *SIAM. J. Appl. Math.*, **8** (1960) 181-217.

[10] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1980.

حمید اسمعیلی، نظام‌الدین مهدوی‌امیری
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
nezam@math.sharif.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۱۷ (بهار ۱۳۷۵)، صص. ۲۹ تا ۶۰

برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس

احمد پارسیان

در بررسیِ برآوردِ یک پارامترِ مجهول از یک توزیع، متداولترین محکی که در ارزیابیِ برآوردگرها به‌کار برده می‌شود میانگینِ مربعِ خطای برآوردگرهاست. فرض کنید بر اساسِ مشاهدهٔ $X = (X_1, \ldots, X_n)$ از توزیعِ $F_\theta(x)$ با چگالیِ $f_\theta(x)$ که در آن $\theta \in \Theta$، بخواهیم یک تابع از پارامتر مجهولِ θ، مانند $\gamma(\theta)$، را برآورد کنیم. یک برآوردگرِ نقطه‌ای برای $\gamma(\theta)$ را می‌توان به‌صورت تابعی از مشاهدهٔ X ، مانند $\delta(X)$، نمایش داد، و هنگامی که خطای برآورد بر حسب تابعِ زیانِ مربعِ خطا محاسبه شود، مقدار مخاطرهٔ برآوردگرِ $\delta(X)$ وقتی که مقدار واقعی اما نامعلوم پارامتر θ باشد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$R(\theta, \delta) = E[\delta(X) - \gamma(\theta))^2]$$

که همان میانگینِ مربعِ خطای $\delta(X)$ است.

طبیعتاً بهترین برآوردگر، آن برآوردگری است که به‌طور یکنواخت دارای کمترین مقدار مخاطره باشد. اما متأسفانه موقعیتی پیش نمی‌آید که تحت آن، بهترین برآوردگر وجود داشته باشد. یعنی برای یک مقدار ثابتِ θ، می‌توان برآوردی با کمترین مخاطره یافت، اما بهترین برآوردْ برای مقادیر مختلفِ θ تغییر می‌کند (به مثال ۱ رجوع کنید). بنابراین هیچ برآوردی را نمی‌توان به‌عنوان «بهترین برآوردگر» ارائه داد و به همین دلیل در آمار به یافتن یک برآوردِ بهینه اکتفا می‌شود. برای این منظور در آمار دو روش بیشتر متداول است.

۱. **قرار دادنِ محدودیتهای مناسبی بر روی برآوردگرها**، بدین معنی که رده‌ای از برآوردگرها را با شرایط خاصی در نظر گرفته در بین اعضای این رده، «بهترین» برآورد را بیابیم ــ مانند یافتنِ برآوردی با کمترین واریانس در بین برآوردگرهای نااریب (UMVUE [1])، و یا یافتنِ «بهترین» برآوردگرِ پایا در بین برآوردگرهای پایا.

۲. **مرتب کردنِ برآوردگرها تحت یک قانون معین**، بدین معنی که با اعمال یک قانونِ خاص، ابتدا

---

۱) از حروفِ عبارتِ Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator

برآوردگرها را مرتب کرده سپس برآوردگر مطلوب را انتخاب می‌کنیم، مانند اصلِ بیز یا اصلِ کمین‌بیشینه[1].

در این مقاله سعی خواهیم کرد بخشی از روشِ اول را به‌تفصیل مورد مطالعه قرار دهیم. در بخش اوّل برآوردگرهای نااریب را معرفی خواهیم کرد و نقاط ضعف و قوتِ ردهٔ محدودشده را بیان خواهیم نمود. در بخش دوم برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس (UMVUE) را به روش معمول بیان خواهیم کرد، و بالاخره در بخش سوم روش دیگری را به‌عنوان یک دستورالعمل، که بی‌ارتباط با روشهای قبل نیست، ارائه خواهیم کرد.

۱. برآوردگرهای نااریب

گفتیم که یک روش برای پیدا کردن برآوردگرهای بهینه، محدود کردنِ ردهٔ برآوردگرها و پیدا کردن «بهترین» برآوردگر در ردهٔ محدودشده می‌باشد.

یکی از راهها در محدود کردنِ مسألهٔ برآوردی، در نظر گرفتن ردهٔ برآوردگرهای نااریب است. در این روش اگر تابعِ زیانْ مربعِ خطا در نظر گرفته شود، در صورت وجودِ برآورگر، مسأله به پیدا کردن برآوردگرِ نااریب با کمترین واریانس (MVUE) منتهی می‌شود.

قبل از ارائهٔ تعریفِ برآوردگرهای نااریبِ مربوط به بحثِ ما، ذکر دو مثال زیر ضروری به‌نظر می‌رسد.

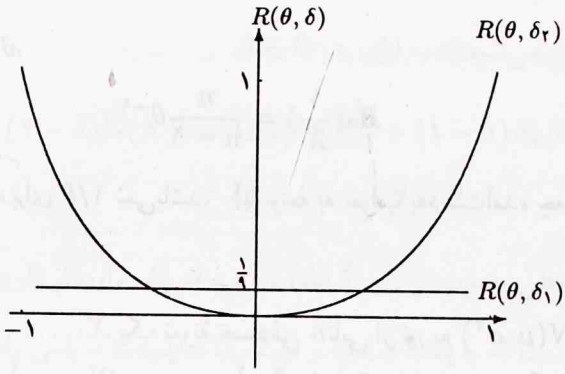
مثال ۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمالِ $f_\theta(x)$، $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$، باشد. همچنین فرض کنید $\gamma(\theta) \equiv \theta$، و تابع زیان برابرِ مربع خطا باشد، یعنی $L(\theta, \delta(x)) = (\delta(x) - \theta)^2$. اگر $\delta(X) \equiv \theta_0$، آنگاه $L(\theta_0, \delta(X)) = 0$، اما $L(\theta, \gamma(x))$ با دوریِ θ از θ_0 بزرگتر و بزرگتر می‌شود.

مثال ۲. فرض کنید $X = (X_1, \ldots, X_9)$ یک نمونهٔ تصادفیِ ۹تایی از توزیعِ $N(\theta, 1)$ باشد. اگر $\delta_1(X) = \bar{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i$ و $\delta_2(X) \equiv 0$ و تابع زیان را مربعِ خطا اختیار کنیم، آنگاه

$$R(\theta, \delta_1) = \frac{1}{9}, \quad R(\theta, \delta_2) = \theta^2.$$

شکل ۱ نمودارِ مخاطره‌ها می‌باشد. ملاحظه می‌شود که هیچ‌کدام از برآوردگرهای δ_1 یا δ_2 به‌طور یکنواخت بهتر از دیگری نیست.

1) minimax



شکل ۱.

تعریف ۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانوادهٔ توزیعهای $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. آمارهٔ $\theta(X)$ برای $\gamma(\theta)$ نااریب گفته می‌شود اگر به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[\delta(X)] = \gamma(\theta). \qquad (1.1)$$

توجه داشته باشید که اگر $\delta(X)$ یک برآوردگر نااریب برای $\gamma(\theta)$ باشد، آنگاه به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[\delta(X) - \gamma(\theta))^2] = V_\theta(\delta(X)).$$

مثال ۳. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیع $E(\theta)$ باشد. نشان دهید $\bar{X}$ یک برآوردگر نااریب برای θ است. آیا $1/\bar{X}$ یک برآوردگر نااریب برای $1/\theta$ است؟

حل. به‌سادگی تحقیق می‌شود که به ازای هر $\theta > 0$،

$$\begin{aligned} E_\theta(\bar{X}) &= E_\theta(X_1) \\ &= \int_0^\infty x \frac{1}{\theta} e^{0^{-x/\theta}} dx \\ &= \theta\Gamma(2) \\ &= \theta. \end{aligned}$$

بنابراین $\bar{X}$ یک برآوردگر نااریب برای θ است. □

برای جوابِ سؤال دوم کافی است $E_\theta(1/\bar{X})$ را محاسبه کنیم. به ازای هر $\theta > 0$،

$$E_\theta(\frac{1}{\bar{X}} = nE_\theta(\frac{1}{\sum X_i}).$$

از طرفی $Y = \sum X_i \sim \Gamma(n, \theta)$؛ بنابراین

$$E_\theta(\frac{1}{Y}) = \frac{1}{(n-1)\theta}.$$

در نتیجه، به ازای هر $\theta > 0$،

$$E_\theta(\frac{1}{\bar{X}}) = \frac{n}{n-1}\theta^{-1}$$

و $1/\bar{X}$ یک برآوردگر نااریب برای $1/\theta$ نمی‌باشد. (با توجه به جوابِ به‌دست‌آمده چه اظهار نظری می‌توان کرد؟)

مثال ۴. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیعِ $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. نشان دهید که $\bar{X}$ و $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$ به ترتیب برآوردگرهای نااریب برای μ و σ^2 هستند. آیا S یک برآوردگر نااریب برای σ است؟

حل. در اینجا $\theta = (\mu, \sigma^2) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$. به‌سادگی تحقیق می‌شود که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(\bar{X}) = \mu.$$

بنابراین $\bar{X}$ یک برآوردگرِ نااریب برای μ است.

از طرفی می‌دانیم که

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}.$$

بنابراین، به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = n-1$$

یا

$$E_\theta(S^2) = \sigma^2.$$

در نتیجه S^2 یک برآوردگر نااریب برای σ^2 است.

برای بررسیِ سؤالِ دوم کافی است $E_\theta(S)$ را محاسبه کنیم. به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$E_\theta(S) = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sigma.$$

در نتیجه آمارهٔ S یک برآوردگرِ نااریب برای σ نیست. (با توجه به جوابِ به‌دست‌آمده چه اظهار نظری می‌توان کرد؟) □

مثال ۵. اگر $\delta_1(X)$ و $\delta_2(X)$ برآوردگرهای نااریبی برای θ باشند، نشان دهید که به ازای هر $\lambda \in (0, 1)$، آمارهٔ $\lambda\delta_1(X) + (1-\lambda)\delta_2(X)$ یک برآوردگر نااریب برای θ است.

حل. به‌سادگی معلوم می‌شود که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[\lambda\delta_1(X) + (1-\lambda)\delta_2(X)] = \lambda E_\theta[\delta_1(X)] + (1-\lambda)E_\theta[\delta_2(X)]$$
$$= \lambda\theta + (1-\lambda)\theta = \theta.$$

بنابراین هر ترکیبِ خطیِ محدب از برآوردگرهای نااریبِ θ، یک برآوردگر نااریب برای θ است. □

در اینجا لازم است که به نقاط ضعف و قوت ردهٔ محدودشده، یعنی ردهٔ برآوردگرها نااریب، اشاره‌ای کنیم.

در بیشترِ مواقع، برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس وجود دارند، یعنی در داخل ردهٔ محدودشده از برآوردگرهای نااریب، اغلبْ برآوردگرهایی با کمترین میانگینِ مربعِ خطا برای همهٔ مقادیر پارامتر وجود دارند.

حال به‌اختصار نقاط ضعفِ برآوردگرهای نااریب را بیان می‌نماییم.

الف. برآوردگرهای نااریب ممکن است وجود نداشته باشند.

برای روشن شدن موضوع، فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیعِ $B(1,\theta)$، $\theta \in (0,1)$، باشد. همچنین فرض کنید $\gamma(\theta) = 1/\theta$. ادعا می‌کنیم که برآوردگر نااریب برای $\gamma(\theta)$ وجود ندارد.

برای اثباتِ این ادعا، فرض کنید $\gamma(X)$ یک برآوردگر نااریب برای θ^{-1} باشد. در این صورت به ازای هر $\theta \in (0,1)$،

$$E_\theta(\delta(X)) = \theta^{-1}$$

یعنی

$$\delta(0)(1-\theta) + \delta(1)\theta = \theta^{-1}$$

یا

$$(\theta(1) - \delta(0))\theta^2 + \delta(0)\theta - 1 = 0.$$

عبارت فوق یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسبِ θ است و تساوی حداکثر به ازای دو مقدار از θ برقرار است؛ این، با برقراریِ تساوی به ازای همه مقادیرِ $\theta \in (0,1)$ متناقض است. در نتیجه برآوردگر نااریبِ θ^{-1} وجود ندارد.

ب. برآوردگرهای نااریب ممکن است حافظِ دامنه نباشند.

برای نشان دادنِ موضوع، فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x/x!}{1-e^{-\theta}},\ x = 1,2,3,\ldots,\ \theta \in (0,\infty).$$

می‌خواهیم یک برآوردگر نااریب برای $\gamma(\theta) = 1 - e^{-\theta}$ به‌دست آوریم.

فرض کنید که $\delta(X)$ یک برآوردگر نااریب برای $\gamma(\theta)$ باشد، یعنی به ازای هر $\theta \in (0, \infty)$،

$$E_\theta(\delta(X)) = 1 - e^{-\theta}$$

یا

$$\sum_{x=1}^{\infty} \delta(x) \frac{e^{-\theta}\theta^x / x!}{1 - e^{-\theta}} = 1 - e^{-\theta}$$

یا

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} \delta(x) \frac{\theta^x}{x!} &= e^{\theta}(1 - e^{-\theta})^2 \\ &= e^{\theta} + e^{-\theta} - 2 \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} 2 \frac{\theta^{2x}}{(2x)!}. \end{aligned}$$

پس دو طرفِ رابطه سریهای توانی‌ای از θ هستند. با مساوی قرار دادنِ نظیر به نظیر ضرایب به‌دست می‌آید

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, 3, 5, \ldots \\ 2, & x = 2, 4, 6, \ldots . \end{cases}$$

در بخش دوم خواهیم دید که $\delta(X)$ برآوردگر نااریبِ منحصر به فردِ $\gamma(\theta) = 1 - e^{-\theta}$ است. اما $\gamma(\theta) \in (0, 1)$؛ بنابراین $\delta(X)$ یک برآوردگرِ نامناسب و بی‌معنی است چون حافظِ دامنهٔ پارامتر نمی‌باشد.

ج. ممکن است برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس برآوردگرهایی با کمترین میانگینِ مربعِ خطا نباشند.

برای روشن شدن موضوع، فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ $n(\geq 2)$تایی از توزیعِ $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. در مثال ۲ نشان دادیم که S^2 یک برآوردگرِ نااریب برای σ^2 است. در بخش دوم نشان خواهیم داد که S^2 برآوردگر یکتای نااریب با کمترین واریانس (UMVUE) برای δ^2 است. با وجود این، خارج از ردهٔ برآوردگرهای نااریب، S^2 به‌طور یکنواخت، تحت معیار مربع خطا، بدتر از برآوردگری به‌صورتِ cS^2 است که در آن c به‌صورت مناسبی انتخاب می‌شود. برای تعیین c، به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$R(\theta, cS^2) = E_{\sigma^2}[(cS^2 - \sigma^2)^2] = c^2 V_{\sigma^2}(S^2) + (c-1)^2\sigma^4$$

از طرفی

$$V_{\sigma^2}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

بنابراین

$$R(\theta, cS^2) = \sigma^4 g(c)$$

که در آن

$$g(c) = \frac{2c^2}{n-1} + (c-1)^2.$$

حال باید، در صورت امکان، cای انتخاب کنیم که $g(c)$ مینیموم شود. برای این منظور، توجه می‌کنیم که

$$g'(c) = \frac{4c}{n-1} + 2(c-1),$$

$$g''(c) = \frac{4}{n-1} + 2 > 0.$$

بنابراین $g'(c) = 0$ جواب مسأله است، یعنی

$$c = \frac{n-1}{n+1}.$$

در نتیجه برآوردگر σ^2 با کمترین میانگین مربع خطا در ردهٔ برآوردگرهای cS^2 عبارت است از

$$\frac{n-1}{n+1}S^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

یادآوری ۱. در اینجا بیان نکات زیر ضروری است. توجه داشته باشید که:

ــ اگر T یک برآوردگر نااریبِ θ باشد، آنگاه لزومی ندارد که $g(T)$ برآوردگر نااریبِ $g(\theta)$ باشد (به مثالهای ۳ و ۴ مراجعه کنید). برای روشن شدن موضوع، فرض کنید X دارای توزیع $N(\theta, 1)$ باشد. می‌دانیم که $T \equiv T(X) = X$ یک برآوردگر نااریبِ θ است؛ اما X^2 یک برآوردگر نااریبِ θ^2 نیست، چون

$$E_\theta(X^2) = V_\theta(X) + E_\theta^2(X)$$
$$= 1 + \theta^2 > \theta^2.$$

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود، این است که چه زمانی $E_\theta(T^2) = \theta^2$؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، توجه کنید که

$$0 \le V_\theta(T) = E_\theta(T^2) - E_\theta^2(T)$$
$$= E_\theta(T^2) - \theta^2.$$

بنابراین به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(T^2) \ge \theta^2.$$

در نتیجه در عبارت فوق تساوی برقرار است اگر و فقط اگر با احتمال یک، $T = E_\theta(T)$. بنابراین به ازای هر آمارهٔ T با توزیعِ ناتباهیده،

$$E_\theta(T) = \theta \Longrightarrow E_\theta(T^2) > \theta^2.$$

ــلزومی ندارد نااریبی، حتی تحت تبدیلهای یکنوا، حفظ شود. برای روشن شدن موضوع، فرض کنید X دارای توزیعِ $N(\theta, ۱)$ باشد. می‌دانیم $T(X) = X$ یک برآوردگر نااریبِ θ است. فرض کنید $g(x) = x^۳$؛ پس g یک تابعِ اکیداً صعودی است. ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} E_\theta[g(T)] &= E_\theta(X^۳) \\ &= E_\theta(X - \theta + \theta)^۳ \\ &= E_\theta(X-\theta)^۳ + ۳\theta E_\theta(X-\theta)^۲ + ۳\theta^۲ E_\theta(X-\theta) + \theta^۳ \\ &= ۰ + ۳\theta + ۰ + \theta^۳ \\ &= \theta^۳ + ۳\theta. \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $\theta \neq ۰$،

$$E_\theta(g(T)) = \theta^۳ + ۳\theta \neq \theta^۳.$$

یعنی نااریبی تحت تبدیلهای یکنوا پایا نیست.

تعریف ۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانوادهٔ توزیعهای $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. آمارهٔ $\delta(X)$ برای $\gamma(\theta)$ اریب گفته می‌شود اگر به ازای یک $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[\delta(X)] \neq \gamma(\theta).$$

$E_\theta[\delta(X)] - \gamma(\theta)$ را اریبیِ برآوردگر $\delta(X)$ در برآورد $\gamma(\theta)$ نامیده آن را با نمادِ $b(\theta)$ نمایش می‌دهند.

ــاگر به ازای هر $\theta \in \Theta$، $b(\theta) > ۰$، گوییم $\delta(X)$ مثبتْاریب است.

ــاگر به ازای هر $\theta \in \Theta$، $b(\theta) < ۰$، گوییم $\delta(X)$ منفیْاریب است.

به خاطر داشته باشید که به ازای هر برآوردگرِ $\delta(X)$ در برآورد $\gamma(\theta)$،

$$R(\theta, \delta) = E_\theta[(\delta(X) - \gamma(\theta))^۲] = V_\theta(\delta(X)) + b^۲(\theta).$$

در پایانِ این بخش تذکر چند نکته ضروری است.

ــبرآوردگرهای نااریب لزوماً یکتا نیستند. برای روشن شدن موضوع، فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیعِ $U(۰, \theta)$، $\theta > ۰$، باشد. می‌دانیم که $X_{(n)}$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ است و $E_\theta(X_۱) = \theta/۲$. به‌سادگی معلوم می‌شود که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(\bar{X}) = \frac{\theta}{۲}, \; E_\theta(X_{(n)}) = \frac{n}{n+۱}\theta.$$

بنابراین $۲\bar{X}$ و $\frac{n+۱}{n}X_{(n)}$ دو برآوردگرِ نااریبِ θ هستند. اینکه کدام‌یک را انتخاب کنیم سؤال اساسی و مهمی است که با آن روبه‌رو هستیم و جواب آن با توجه به معیاری که انتخاب می‌شود ساده است.

مثال دیگر، مربوط به نمونهٔ تصادفیِ اختیارشده از توزیع پواسون با پارامترِ λ است. می‌دانیم که توزیعِ پواسونِ میانگین و واریانسش هر دو برابر λ هستند. از طرفی $\bar{X}$ یک برآوردگر نااریب برای میانگینِ توزیع و $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$ یک برآوردگر نااریب برای واریانس توزیع است. بنابراین در این حالت $\bar{X}$ و S^2 هر دو برآوردگرهای نااریبِ λ هستند.

یک نکته قابل توجه در موردِ برآوردگرهای نااریب و یکتایی آنها می‌تواند به‌صورت زیر مطرح شود.

فرض کنید آمارهٔ بسنده مینیمالِ T بر اساس یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی اختیار شده باشد. برای برآوردِ پارامتر مورد نظر بر اساس T در بررسیِ یکتاییِ برآوردگرِ نااریبِ پارامترِ مورد نظر دو حالت زیر ممکن است رخ دهد:

الف. آمارهٔ T کامل است؛ در این صورت برآوردگر نااریبِ اختیارشده یکتا خواهد بود.

ب. آمارهٔ T کامل نیست؛ در این صورت رده‌ای از برآوردهای صفر وجود دارد، که آن را $U(T)$ می‌نامیم. حال اگر $g(T)$ یک برآوردگرِ نااریب برای پارامترِ مورد نظر باشد آنگاه $g(T) + U(T)$ نیز یک برآوردگرِ نااریب برای پارامتر مورد نظر است. بنابراین در این حالت برآوردگرهای نااریب یکتا نیستند.

۲. برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس

گفتیم که یک روشِ مناسب برای دستیابی به برآوردگرهای بهینه، محدود کردن ردهٔ برآوردگرها و انتخابِ «بهترین» برآوردگر در ردهٔ محدودشده است. اگر ملاکِ تحدید را نااریب بودن، و تابع زیان را مربعِ خطا اختیارکنیم آنگاه مسأله، انتخاب برآوردگر نااریب با کمترین واریانس (MVUE) خواهد بود. در این بخش سعی خواهیم کرد موضوع را به زبان ساده بیان کنیم.

لم زیر می‌تواند مفید باشد.

لم ۱. فرض کنید X و Y دارای توزیع توأم باشند. اگر Y برای θ نااریب باشد و $g(X) = E(Y/X)$، آنگاه $E_\theta[g(X)] = \theta$ و $V_\theta[g(X)] \leq V_\theta(Y)$. تساوی برقرار است اگر و فقط اگر با احتمالِ یک، $Y = g(X)$.

علی‌رغمِ اینکه لم ۱ روشی برای دستیابی به برآوردگرهای نااریب با واریانسِ کمتر ارائه می‌دهد، باید توجه داشته باشیم که لزومی ندارد $E(Y/X)$ آماره باشد: برای مثال فرض کنید $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$؛ در این صورت

$$E(Y) = \mu_2,$$

$$E(Y/X) = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X - \mu_1) = g(X).$$

ملاحظه می‌شود که

$$E[g(X)] = \mu_2$$

و

$$V[g(X)] = \rho^2\sigma_2^2 < \sigma_2^2 = V(Y).$$

حال اگر حداقل یکی از پنج پارامتر μ_1، μ_2، σ_1^2، σ_2^2، و ρ مجهول باشد، $g(X)$ دیگر آماره نیست. بنابراین $g(X)$ نمی‌تواند به‌عنوان یک برآوردگر μ_2 در نظر گرفته شود.

با وجود این، با توجه به آنچه که از بسندگی و بسندگیِ مینیمال می‌دانیم (رجوع کنید به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، سال دهم، شمارهٔ دوم (اسفند ۱۳۷۰) صص ۱۷۱ـ۱۲۸)، لم ۱ با به‌کارگیریِ آماره‌های بسنده راهگشا بوده مفید ارزیابی می‌شود. برای توضیح بیشتر، فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانوادهٔ توزیعهای $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. همچنین فرض کنید $h(X)$ یک برآوردگرِ نااریبِ $\gamma(\theta)$، و T یک آمارهٔ بسنده برای θ باشد. با توجه به بسندگیِ آمارهٔ T واضح است که

$$g(T) = E[h(X)|T]$$

یک آماره است چون بستگی به پارامترِ مجهولِ θ ندارد. از طرفی به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[g(T)] = \gamma(\theta).$$

بنابراین $g(T)$ یک برآوردگرِ نااریبِ $\gamma(\theta)$ است و با توجه به لم ۱، به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta[g(T)] \leq V_\theta[h(X)]$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر با احتمالِ یک، $g(T) = h(X)$.

بنابراین هر برآوردگرِ نااریبِ $\gamma(\theta)$ را می‌توان با امیدِ شرطی نسبت به یک آمارهٔ بسنده بهبود بخشید، بدین مفهوم که می‌توان از روی برآوردگرِ نااریبِ موجود، برآوردگری بر حسب تابعی از آماره‌ای بسنده به‌وجود آورد که علاوه بر خاصیت نااریبی، به‌طور یکنواخت دارای واریانسی کمتر از واریانسِ برآوردگرِ نااریبِ اولیه باشد.

سؤال اساسی که مطرح می‌شود این است که آیا به ازای هر برآوردگر نااریبِ اولیه، برآوردگرِ حاصل یکتاست؟ جوابْ ساده است: خواهیم دید که اگر آمارهٔ T بسندهٔ کامل باشد، برآوردگرِ به‌دست‌آمده یکتاست، اما در صورتی که آمارهٔ T کامل نباشد، لزومی ندارد برآوردگرِ به‌دست‌آمده یکتا باشد. مثال زیر این مسأله را روشن می‌کند.

مثال ۶. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی، $n \geq 2$، از توزیع $N(\theta, \theta^2)$، $\theta > 0$، باشد. می‌دانیم $T = (\sum X_i, \sum X_i^2)$ یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای θ است، اما کامل نیست. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\bar{X}$ و c_nS، که در آن $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$ و $c_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$، هر دو برآوردگرهای نااریبِ θ هستند، اما واضح است که

$$E(\bar{X}|T) = \bar{X} \neq c_nS = E(c_nS/T).$$

یک نکتهٔ اساسیِ دیگر این است که امکان دارد برای آماره‌های بسندهٔ مختلف، برآوردگرهای حاصل از امید شرطیْ متفاوت باشند. مثال زیر این موضوع را روشن می‌کند.

مثال ۷. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی، $n \geq 2$، از توزیعِ $B(1, \theta)$ باشد. می‌دانیم که $T_1 = (X_1, X_2 + \cdots + X_n)$ و $T_2 = \sum_{i=1}^{n} X_i$ هر دو برای θ بسنده هستند. از طرفی $h(X) = X_1$ یک برآوردگرِ نااریبِ θ است و

$$U_1 = E[h(X)|T_1] = X_1 = h(X)$$

و

$$U_2 = E[h(X)|T_2] = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

ملاحظه می‌شود که برآوردگرهای نااریبِ حاصل از امیدهای شرطی روی آماره‌های بسنده متفاوت است.

توجه کنید که در این مثال، T_2 یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال هم هست و به‌سادگی معلوم می‌شود که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta(U_2) \leq V_\theta(U_1).$$

این موضوع در حالت کلّی نیز درست است، یعنی اگر T_1 یک آمارهٔ بسنده برای θ و T_2 یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای θ باشد و $h(X)$ یک برآوردگر نااریبِ $\gamma(\theta)$ باشد، آنگاه برآوردگرهای حاصل از امید شرطی، یعنی $U_1 = E[h(X)|T_1]$ و $U_2 = E[h(X)|T_2]$، به ازای هر $\theta \in \Theta$ در رابطهٔ

$$V_\theta(U_2) \leq V_\theta(U_1)$$

صدق می‌کنند. برای نشان دادن این موضوع، توجه کنید که چون T_2 یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال است، T_2 تابعی از T_1 است، یعنی $T_2 = g(T_1)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} U_2 &= E\{E\{h(X)|T_2\}|T_1\} \\ &= E\{E\{h(X)|T_1\}|T_2\} \\ &= E\{U_1|T_2\} \end{aligned}$$

و با استفاده از لم ۱، نتیجه به‌سادگی حاصل می‌شود. اما اگر T_1 و T_2 هر دو بسندهٔ مینیمال باشند، در این صورت یک رابطهٔ یک به یک بین T_1 و T_2 وجود دارد و نتیجه می‌شود که $U_1 = U_2$.

قبل از ارائهٔ مهمترین قضیهٔ این بخش، یک سؤال اساسی را مورد توجه و بررسی قرار می‌دهیم: اگر T یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال (اما غیرکامل) و $h_1(X)$ و $h_2(X)$ دو برآوردگر نااریبِ $\gamma(\theta)$ باشند که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta(h_2(X)) \leq V_\theta(h_1(X))$$

آیا برآوردگرهای حاصل از امید شرطی نیز این خصوصیت را حفظ می‌کنند؟ یعنی آیا اگر

$$U_1 = E[h_1(X)|T],\ U_2 = E[h_2(X)|T]$$

آنگاه به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta(U_2) \leq V_\theta(U_1)?$$

به‌نظر می‌رسد جواب مثبت باشد، اما مثالِ زیر نشان می‌دهد لزومی ندارد این‌طور باشد.

مثال ۸. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیع $U(\theta, \theta+1)$، $\theta \in (-\infty, \infty)$، باشد. می‌دانیم که $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$ یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای θ است، اما کامل نیست. به‌سادگی تحقیق می‌شود که $h_1(X) = \bar{X} - \frac{1}{2}$ و $h_2(X) = X_{(n)} - \frac{n}{n+1}$ هر دو برآوردگرهای نااریبِ θ هستند و به ازای $n \geq 8$ و هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta(h_2(X)) \leq V_\theta(h_1(X)).$$

از طرفی

$$U_1 = E[h_1(X)|T] = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)} - 1)$$

و

$$U_2 = E[h_2(X)|T] = h_2(X).$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که، به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta(U_1) \leq V_\theta(U_2).$$

همان‌طور که گفته شد، در این قسمت مهمترین قضیهٔ این بخش، یعنی قضیهٔ رائو-بلَکوِل، را بدون اثبات بیان می‌کنیم. قبل از بیان قضیه، ارائهٔ تعاریفِ زیر ضروری است.

تعریف ۳. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانوادهٔ توزیعهای $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. تابعِ حقیقیِ $\gamma(\theta)$ یک پارامترِ برآوردپذیر گفته می‌شود اگر آمارهٔ $h(X)$ای وجود داشته باشد که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[h(X)] = \gamma(\theta).$$

آمارهٔ $T(X)$ یک برآوردگرِ نااریب با کمترین واریانس (MVUE) برای $\gamma(\theta)$ گفته می‌شود اگر به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(T(X)) = \gamma(\theta)$$

و به‌علاوه به ازای هر برآوردگرِ نااریبِ $h(X)$ برای پارامترِ $\gamma(\theta)$،

$$V_\theta(T(X)) \leq V_\theta(h(X)).$$

به‌خاطر داشته باشید که لزومی ندارد MVUEها یکتا باشند.

قضیهٔ ۱. *فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانوادهٔ توزیعهای $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. اگر $T \equiv T(X)$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ باشد، آنگاه به ازای هر پارامترِ برآوردپذیرِ $\gamma(\theta)$، برآوردگرِ نااریبِ یکتایی (با احتمالِ یک) با کمترین واریانس یکنواخت (UMVUE) بر پایهٔ T وجود دارد.*

برای اثبات به یکی از کتابهای استاندارد آمار ریاضی رجوع شود. □

امتیازِ بسیار مهمِ قضیهٔ رائو- بلکول نه‌تنها تضمینِ وجودِ MVUEها، بلکه ارائهٔ روشی برای دستیابی به MVUEهاست. به محض اینکه بتوان یک برآوردگر نااریبِ $\gamma(\theta)$ را به‌دست آورد، می‌توان با به‌کارگیریِ امید شرطی نسبت به آمارهٔ بسنده، واریانسِ برآوردگرِ حاصل را نسبت به واریانس برآوردگر نااریبِ اولیه بهبود بخشید. یک روشِ میانه نیز از اثباتِ قضیهٔ ۱ حاصل می‌شود، بدین معنی که اگر بتوانیم مستقیماً تابعی از آمارهٔ بسندهٔ کامل پیدا کنیم که برای $\gamma(\theta)$ نااریب باشد، در این صورت برآوردگرِ حاصلْ یک UMVUE برای $\gamma(\theta)$ است. (در بخش سوم دستورالعملِ دیگری برای دستیابی به UMVUEها ارائه خواهیم داد.)

برای فهم بیشتر موضوع، به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۹. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیع $B(1, \theta)$، $\theta \in [0, 1]$، باشد. می‌دانیم که $T = \sum X_i$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل و $\bar{X} = T/n$ یک برآوردگر نااریبِ θ است. بنابراین $\bar{X}$ برآوردگرِ UMVUE برای پارامتر θ است.

مثال ۱۰. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیع $P(\theta)$، $\theta > 0$، باشد. می‌دانیم که $T = \sum X_i$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل و $\bar{X} = T/n$ یک برآوردگر نااریبِ θ است. بنابراین $\bar{X}$ برآوردگرِ UMVUEی پارامتر θ است.

مثال ۱۱. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$، $\mu \in (-\infty, \infty)$ و $\sigma > 0$، باشد. می‌دانیم که $T = (\bar{X}, \sum(X_i - \bar{X})^2)$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای $\theta = (\mu, \sigma^2)$ است. از طرفی،

ــ چون $\bar{X}$ یک برآوردگر نااریبِ μ و تابعی از T است، UMVUEی پارامترِ μ است؛

ــ چون $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$ یک برآوردگر نااریبِ σ^2 و تابعی از T است، UMVUEی پارامترِ σ^2 است.

مثال ۱۲. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی nتایی، $n \geq 2$، از توزیع $B(1, \theta)$، $\theta \in (0, 1)$، باشد. UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta) = \theta^2$ را به‌دست آورید.

حل. می‌دانیم که

ــ $T = \sum_{i=1}^n X_i$ آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ است؛

آیا برآوردگرهای حاصل از امید شرطی نیز این خصوصیت را حفظ می‌کنند؟ یعنی آیا اگر

$$U_1 = E[h_1(X)|T],\ U_2 = E[h_2(X)|T]$$

آنگاه به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta(U_2) \leq V_\theta(U_1)?$$

به‌نظر می‌رسد جواب مثبت باشد، اما مثالِ زیر نشان می‌دهد لزومی ندارد این‌طور باشد.

مثال ۸. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیعِ $U(\theta, \theta+1)$، $\theta \in (-\infty, \infty)$، باشد. می‌دانیم که $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$ یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای θ است، اما کامل نیست. به‌سادگی تحقیق می‌شود که $h_1(X) = \bar{X} - \frac{1}{2}$ و $h_2(X) = X_{(n)} - \frac{n}{n+1}$ هر دو برآوردگرهای نااریبِ θ هستند و به ازای $n \geq 8$ و هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta(h_2(X)) \leq V_\theta(h_1(X)).$$

از طرفی

$$U_1 = E[h_1(X)|T] = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)} - 1)$$

و

$$U_2 = E[h_2(X)|T] \doteq h_2(X).$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که، به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta(U_1) \leq V_\theta(U_2).$$

همان‌طور که گفته شد، در این قسمت مهمترین قضیهٔ این بخش، یعنی قضیهٔ رائو-بلَکوِل، را بدون اثبات بیان می‌کنیم. قبل از بیان قضیه، ارائهٔ تعاریفِ زیر ضروری است.

تعریف ۳. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانوادهٔ توزیعهای $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. تابعِ حقیقیِ $\gamma(\theta)$ یک پارامترِ برآوردپذیر گفته می‌شود اگر آمارهٔ $h(X)$ای وجود داشته باشد که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[h(X)] = \gamma(\theta).$$

آمارهٔ $T(X)$ یک برآوردگرِ نااریب با کمترین واریانس (MVUE) برای $\gamma(\theta)$ گفته می‌شود اگر به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(T(X)) = \gamma(\theta)$$

و به‌علاوه به ازای هر برآوردگرِ نااریبِ $h(X)$ برای پارامترِ $\gamma(\theta)$،

$$V_\theta(T(X)) \leq V_\theta(h(X)).$$

به‌خاطر داشته باشید که لزومی ندارد MVUEها یکتا باشند.

قضیهٔ ۱. *فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانوادهٔ توزیعهای $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. اگر $T \equiv T(X)$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ باشد، آنگاه به ازای هر پارامترِ برآوردپذیرِ $\gamma(\theta)$، برآوردگرِ نااریبِ یکتایی (با احتمالِ یک) با کمترین واریانس یکنواخت (UMVUE) بر پایهٔ T وجود دارد.*

برای اثبات به یکی از کتابهای استاندارد آمار ریاضی رجوع شود. □

امتیازِ بسیار مهمِ قضیهٔ رائو- بلکول نه‌تنها تضمینِ وجودِ MVUEها، بلکه ارائهٔ روشی برای دستیابی به MVUEهاست. به محض اینکه بتوان یک برآوردگر نااریبِ $\gamma(\theta)$ را به‌دست آورد، می‌توان با به‌کارگیریِ امید شرطی نسبت به آمارهٔ بسنده، واریانسِ برآوردگرِ حاصل را نسبت به واریانس برآوردگر نااریبِ اولیه بهبود بخشید. یک روشِ میانه نیز از اثباتِ قضیهٔ ۱ حاصل می‌شود، بدین معنی که اگر بتوانیم مستقیماً تابعی از آمارهٔ بسندهٔ کامل پیدا کنیم که برای $\gamma(\theta)$ نااریب باشد، در این صورت برآوردگرِ حاصلْ یک UMVUE برای $\gamma(\theta)$ است. (در بخش سوم دستورالعملِ دیگری برای دستیابی به UMVUEها ارائه خواهیم داد.)

برای فهم بیشتر موضوع، به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۹. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیعِ $B(1, \theta)$، $\theta \in [0, 1]$، باشد. می‌دانیم که $T = \sum X_i$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل و $\bar{X} = T/n$ یک برآوردگر نااریبِ θ است. بنابراین $\bar{X}$ برآوردگر UMVUE برای پارامتر θ است.

مثال ۱۰. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیعِ $P(\theta)$، $\theta > 0$، باشد. می‌دانیم که $T = \sum X_i$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل و $\bar{X} = T/n$ یک برآوردگر نااریبِ θ است. بنابراین $\bar{X}$ برآوردگرِ UMVUEی پارامتر θ است.

مثال ۱۱. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیعِ $N(\mu, \sigma^2)$، $\mu \in (-\infty, \infty)$ و $\sigma > 0$، باشد. می‌دانیم که $T = (\bar{X}, \sum(X_i - \bar{X})^2)$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای $\theta = (\mu, \sigma^2)$ است. از طرفی،

ــ چون $\bar{X}$ یک برآوردگر نااریبِ μ و تابعی از T است، UMVUEی پارامترِ μ است؛

ــ چون $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$ یک برآوردگر نااریبِ σ^2 و تابعی از T است، UMVUEی پارامترِ σ^2 است.

مثال ۱۲. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی nتایی، $n \geq 2$، از توزیعِ $B(1, \theta)$، $\theta \in (0, 1)$، باشد. UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta) = \theta^2$ را به‌دست آورید.

حل. می‌دانیم که

ــ $T = \sum_{i=1}^n X_i$ آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ است؛

ـ آمارهٔ $h(X) = X_1X_2$ یک برآوردگر نااریبِ $\gamma(\theta) = \theta^2$ است، زیرا به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[h(X)] = E_\theta(X_1X_2) = E_\theta(X_1)E_\theta(X_2) = \theta \cdot \theta = \theta^2.$$

حال بنا بر قضیهٔ ۱، UMVUEی پارامترِ $\gamma(\theta)$ برابر است با

$$\begin{aligned} g(T) &= E(X_1X_2|T) \\ &= P(X_1 = 1, X_2 = 1|T) \\ &= \frac{T(T-1)}{n(n-1)}. \square \end{aligned}$$

مثال ۱۳. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیعِ $P(\theta)$، $\theta > 0$، باشد. UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta) = \theta^2$ را به‌دست آورید.

حل. می‌دانیم که

ـ $T = \sum X_i$ آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ است؛

ـ آمارهٔ $h(X) = X_1X_2$ یک برآوردگر نااریبِ $\gamma(\theta) = \theta^2$ است. حال بنا بر قضیهٔ ۱، UMVUEی پارامترِ θ^2 برابر است با

$$g(T) = E(X_1X_2|T).$$

اما محاسبهٔ $g(T)$ در این حالت کار ساده‌ای نیست (امتحان کنید). بنابراین برای دستیابی به $g(T)$ به دو روشِ زیر عمل می‌کنیم.

روشِ اول. می‌دانیم که

$$T = \sum X_i \sim P(n\theta).$$

تلاش می‌کنیم تا تابعی از T، یعنی $g(T)$، پیدا کنیم که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta[g(T)] = \theta^2$$

یعنی

$$\sum_{t=0}^{\infty} g(t)\frac{e^{-n\theta}(n\theta^t)}{t!} = \theta^2$$

یا

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)n^t}{t!} = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{n^{t-2}\theta^t}{(t-2)!}.$$

با مساوی قرار دادنِ ضرایبِ متناظرِ سریهای توانی به‌دست می‌آید

$$\frac{g(t)n^t}{t!} = \begin{cases} 0, & t = 0, 1 \\ \frac{n^{t-2}}{(t-2)!}, & t = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

یا

$$g(t) = \frac{t(t-1)}{n^2}, \quad t \geq 0.$$

بنابراین $g(T) = \frac{T(T-1)}{n^2}$ UMVUEی پارامتر θ^2 است.

روشِ دوم. می‌دانیم که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(T) = n\theta$$

$$E_\theta(T^2) = n\theta + n^2\theta^2$$

$$= E_\theta(T) + n^2\theta^2.$$

یعنی به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(T^2) - E_\theta(T) = n^2\theta^2$$

یا

$$E(\frac{T^2 - T}{n^2}) = \theta^2.$$

پس $g(T) = \frac{T^2-T}{n^2}$، که همان برآوردگرِ به‌دست‌آمده در قبل است، UMVUEی پارامتر θ^2 است.

مثال ۱۴. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیعِ $N(\theta, 1)$، $\theta \in (-\infty, \infty)$، باشد. UMVUEی پارامتر θ^2 را به‌دست آورید.

حل. می‌دانیم که

ــ $T = \sum X_i$ آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ است؛

ــ T دارای توزیعِ $N(n\theta, n)$ است. بنابراین، به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(T) = n\theta, E_\theta(T^2) = n + n^2\theta^2.$$

پس به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(\frac{T^2 - n}{n^2}) = \theta^2.$$

در نتیجه UMVUEی پارامترِ θ^2 برابر است با

$$g(T) = \frac{T^2 - n}{n^2}.$$

تذکرِ یک نکته در این مثال ضروری است: علی‌رغم آنکه $g(T)$ UMVUEی پارامتر θ^2 است، حافظِ دامنهٔ θ^2، یعنی $(0, \infty)$، نیست. چون $g(T)$ با احتمالِ مثبتْ مقادیر منفی را اختیار می‌کند، به‌سادگی می‌توان نشان داد که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta(g(T)) = \frac{4\theta^2}{n} + \frac{2}{n^2}.$$

از طرفی اگر $g^*(T)$ را به‌صورتِ

$$g^*(t) = \begin{cases} g(T), & T^{۲} > n \\ ۰, & T^{۲} \leq n \end{cases}$$

تعریف کنیم، آنگاه می‌توان نشان داد که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$R(\theta, g^*(T)) \leq R(\theta, g(T)).\square$$

مثال ۱۵. فرض کنید که $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی، $n \geq ۲$، از توزیعِ $E(\theta)$، $\theta > ۰$، باشد. UMVUEهای پارامترهای θ و $\theta^{-۱}$ را به‌دست آورید.

حل. می‌دانیم که

— $T = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ است؛

— T دارای توزیعِ گاما با پارامترهای n و θ است. به‌سادگی معلوم می‌شود که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(T) = n\theta, \ E_\theta(\frac{۱}{T}) = \frac{۱}{(n-۱)\theta}.$$

بنابراین $\bar{X} = T/n$ UMVUEی پارامتر θ، و $(n-۱)/T$ UMVUEی پارامتر $\theta^{-۱}$ هستند. $\square$

مثال ۱۶. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی، $n \geq ۲$، از توزیعی با چگالیِ

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-۱}, \quad ۰ < x < ۱, \quad \theta > ۰$$

باشد. UMVUEهای پارامترهای θ و $\theta^{-۱}$ و $\theta/(۱+\theta)$ را به‌دست آورید.

حل. می‌دانیم که

— $T = -\sum \ln X_i$ آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ است؛

— $۲\theta T$ دارای توزیع مربعِ خی با $۲n$ درجهٔ آزادی است. به‌سادگی معلوم می‌شود که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(۲\theta T) = ۲n, \ E_\theta(\frac{۱}{۲\theta T}) = \frac{۱}{۲(n-۱)}.$$

بنابراین $g_۱(T) = (n-۱)/T$ و $g_۲(T) = T/n$ به ترتیب UMVUEهای پارامترهای θ و $\theta^{-۱}$ هستند. برای دستیابی به UMVUEی پارامترِ $\theta/(۱+\theta)$، توجه می‌کنیم که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(X_۱) = \frac{\theta}{۱+\theta}.$$

بنابراین با توجه به قضیهٔ ۱ معلوم می‌شود که

$$g(T) = E(X_1|T)$$

UMVUEی پارامترِ $\theta/(1+\theta)$ است. برای محاسبهٔ $g(t)$ ابتدا به چگالیِ شرطیِ X_1 به شرطِ $T = t$ نیاز داریم. برای به‌دست آوردنِ چگالیِ شرطی توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
f_{X_1|T=t}(x_1)dx_1 &= \frac{f_{X_1,T}(x_1,t)dx_1}{f_T(t)} \\
&= \frac{f_{X_1,T}(x_1,t)dx_1dt}{f_T(t)dt} \\
&\approx \frac{P_\theta(x_1 < X_1 < x_1 + dx_1, t < T < t + dt)}{f_T(t)dt} \\
&= \frac{P_\theta(x_1 < X_1 < x_1 + dx_1, t + \ln x_1 < -\sum_{i=2}^n \ln X_i < t + \ln x_1 + dt)}{f_T(t)dt} \\
&= \frac{P_\theta(x_1 < X_1 < x_1 + dx_1)P_\theta(t + \ln x_1 < -\sum_{i=2}^n \ln X_i < t + \ln x_1 + dt)}{f_T(t)dt} \quad \text{(بنا به استقلال)} \\
&= \frac{\theta x_1^{\theta-1}dx_1 \frac{\theta^{n-1}}{\Gamma(n-1)}(t+\ln x_1)^{n-2}e^{-\theta(t+\ln x_1)}dt}{\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\theta t}dt} \\
&= (n-1)\frac{(t+\ln x_1)^{n-2}}{x_1 t^{n-1}}dx_1.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$f_{X_1|T=t}(x_1) = (n-1)\frac{(t+\ln x_1)^{n-2}}{x_1 t^{n-1}}, \qquad e^{-t} < x_1 < 1.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
g(t) &= E(X_1|T=t) \\
&= \int_{e^{-t}}^1 x_1 f_{X_1|T=t}(x_1)dx_1 \\
&= \frac{(n-1)e^{-t}}{t^{n-1}}\int_0^t u^{n-2}e^u du.
\end{aligned}$$

انتگرالِ اخیر قابل محاسبه است و می‌توان آن را به‌صورت مجموعیِ متناهی بر حسب t نوشت. بنابراین

$$g(T) = \frac{(n-1)e^{-T}}{T^{n-1}}\int_0^T u^{n-2}e^u du$$

UMVUEی پارامترِ $\theta/(1+\theta)$ است. □

برآوردِ نااریبِ احتمال

در بسیاری از مسائلِ UMVUE، معمولاً پارامترِ مورد نظرْ مقدارِ تابعِ توزیع یا مقدارِ تابعِ احتمال در یک نقطه است. در این قسمت با استفاده از قضیهٔ ۱ دو حالت فوق را در وضعیتِ کلّی شرح می‌دهیم و به‌دنبالِ آن چند مثال برای روشن شدن مطلب ارائه می‌دهیم.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانوادهٔ توزیعهای $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. همچنین فرض کنید T یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ باشد. برای به‌دست آوردنِ UMVUEی پارامترِ $\gamma(\theta) = F_\theta(x)$ به ازای یک مقدار ثابتِ x، توجه می‌کنیم که

$$E_\theta[u(x - X)] = F_\theta(x)$$

که در آن

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

بنابراین $u(x - X)$ یک برآوردگرِ نااریبِ $\gamma(\theta) = F_\theta(x)$ است. حال بنا بر قضیهٔ ۱،

$$\begin{aligned} g(T) &= E[u(x - X)|T] \\ &= P(X \leq x|T) \end{aligned}$$

UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta) = F_\theta(x)$ است. در حقیقت UMVUE در این حالت تابعِ توزیعِ شرطیِ X به شرطِ آمارهٔ بسندهٔ کامل T است.

مثال ۱۷. در مثال ۱۵، UMVUEی پارامترِ $\gamma(\theta) = e^{-x/\theta}$ را به‌دست آورید.

حل. به‌سادگی تحقیق می‌شود که

$$e^{-x/\theta} = P_\theta(X_1 \geq x).$$

بنابراین با توجه به آنچه که گفته شد، UMVUEی پارامتر $e^{-x/\theta}$ برابر است با

$$g(T) = P(X_1 \geq x/T).$$

پس برای به‌دست آوردن $g(T)$ نیاز به محاسبهٔ تابع چگالیِ شرطیِ X_1 به شرطِ T داریم. با به‌کارگیریِ روشی مشابهِ مثال ۱۶، به‌دست می‌آید

$$f_{X_1|T=t}(x_1) = (n-1)\frac{(t - x_1)^{n-2}}{t^{n-1}}, \quad 0 < x_1 < t.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} g(t) &= P(X_1 \geq x | T = t) \\ &= \int_x^t f_{X_1|T}(x_1) dx_1 \\ &= (\frac{t-x}{t})^{n-1}, \quad x < t. \end{aligned}$$

بنابراین

$$g(T) = (1 - \frac{x}{T})^{n-1}$$

UMVUEی پارامتر $e^{-x/\theta}$ است. □

حال فرض کنید X یک متغیر تصادفیِ گسسته با توزیعی از خانوادهٔ توابعِ احتمالِ $\{p_\theta(x) : \theta \in \Theta\}$، و T یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ باشد. برای به‌دست آوردنِ UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta) = p_\theta(x)$ به ازای یک مقدار ثابت x، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} E_\theta[c(x - X)] &= P_\theta(X = x) \\ &= p_\theta(x) \end{aligned}$$

که در آن

$$c(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

بنابراین $c(x - X)$ یک برآوردگر نااریبِ $\gamma(\theta) = p_\theta(x)$ است. حال بنا بر قضیهٔ ۱،

$$\begin{aligned} g(T) &= E[c(x - X)|T] \\ &= P(X = x|T) \end{aligned}$$

UMVUEی پارامترِ $\gamma(\theta) = p_\theta(x)$ است. در حقیقت UMVUE در این حالت تابع احتمال شرطیِ X به شرطِ آمارهٔ بسندهٔ کاملِ T است.

مثال ۱۸. در مثال ۱۳، UMVUEی پارامترِ $e^{-\theta}$ را به‌دست آورید.

حل. به‌سادگی تحقیق می‌شود که

$$e^{-\theta} = P_\theta(X_1 = 0).$$

بنابراین با توجه به آنچه که گفته شد، UMVUEی پارامتر $e^{-\theta}$ برابر است با

$$g(T) = P(X_1 = 0|T).$$

با یک محاسبهٔ ساده معلوم می‌شود که

$$g(T) = (1 - \frac{1}{n})^T$$

UMVUEی پارامتر $e^{-\theta}$ است. □

مثال ۱۹. در مثال ۱۳، UMVUEی پارامترِ $e^{-\theta}\theta^k/k!$ را به‌دست آورید.

حل. به‌سادگی تحقیق می‌شود که

$$\gamma(\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!} = P_\theta(X_1 = k).$$

بنابراین با توجه به آنچه که گفته شد، UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta)$ برابر است با

$$g(T) = P(X_1 = k|T).$$

برای محاسبهٔ $g(T)$، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} g(t) &= P(X_1 = k|T = t) \\ &= \frac{P_\theta(X_1 = k, T = t)}{P_\theta(T = t)} \\ &= \begin{cases} 0, & t < k \\ \binom{t}{k}(\frac{n-1}{n})^t \frac{1}{(n-1)^k}, & t \geq k. \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه به ازای $a < b$، $\binom{a}{b} = 0$، معلوم می‌شود که

$$g(T) = \binom{T}{k}(\frac{1}{n})^k(1 - \frac{1}{n})^{T-k}$$

UMVUEی پارامترِ $\gamma(\theta) = e^{-\theta}\theta^k/k!$ است. □

روشِ مورد استفاده در مثال ۱۷ برای دستیابی به UMVUE چندان ساده به‌نظر نمی‌رسد. در مثالِ زیر روش دیگری را که در آن از قضیهٔ باسو استفاده می‌شود ارائه می‌کنیم. به هر حال استفاده از هر روش مستلزمِ آگاهیِ لازم در مورد مسائلِ مورد نظر است.

مثال ۲۰. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی، $n \geq 5$، از توزیعِ $N(\mu, \sigma^2)$، $\mu \in (-\infty, \infty)$ و $\delta > 0$، باشد. UMVUEی پارامترِ $\gamma(\mu, \sigma^2) = P_{\mu,\sigma^2}(X_1 \leq x)$ را به‌دست آورید.

حل. می‌دانیم که $(\bar{X}, S^2)$، که $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ و $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_1 - \bar{X})^2$، یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای $\theta = (\mu, \sigma^2)$ است. با توجه به آنچه گفته شد، UMVUEی پارامترِ $\gamma(\theta) = P_\theta(X_1 \leq x)$ برابر است با

$$g(T) = P(X_1 \leq x|T) = P(\frac{X_1 - \bar{X}}{S} \leq \frac{x - \bar{X}}{S}|T).$$

چون توزیعِ $\frac{X_1-\bar{X}}{S}$ بستگی به پارامتر مجهولِ θ ندارد، بنا به قضیهٔ باسو $\frac{X_1-\bar{X}}{S}$ دارای توزیعی مستقل از توزیعِ T است، یعنی

$$g(T) = P(\frac{X_1 - \bar{X}}{S} \geq \frac{x - \bar{X}}{S}).$$

حال اگر تعریف کنیم

$$U = \frac{\sqrt{n}(X_1 - \bar{X})}{(n-1)S}$$

آنگاه U دارای تابع چگالی احتمالی به شکلِ

$$f_U(u) = k(1 - u^2)^{\frac{n-4}{2}}, \ |u| \leq 1.$$

است (چرا؟). در نتیجه UMVUEی پارامترِ $\gamma(\theta)$ برابر است با

$$g(T) = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{n}}{n-1}\frac{x-\bar{X}}{S}} f_U(u)du. \ \square$$

برای دستیابی به برآوردگرهای UMVUE، کامل بودنِ آمارهٔ بسنده جزء لاینفکِ مثالهای ارائه‌شده بود. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که در صورتِ کامل نبودنِ آمارهٔ بسنده، آیا می‌توان برآوردگرِ MVUE برای پارامترِ مورد نظر به‌دست آورد؟ قضیهٔ زیر، که به قضیهٔ لِهمان-شِفه معروف است، به این سؤال پاسخ می‌دهد.

قضیهٔ ۲. *فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانوادهٔ توزیعهای $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشد. آمارهٔ T یک MVUE برای امیدِ T، یعنی برای $E_\theta(T)$، است اگر و فقط اگر به ازای هر $\theta \in \Theta$ و تمامِ آماره‌های $g(x)$ که $E_\theta[g(X)] = 0$،*

$$\mathrm{cov}_\theta(T(X), g(X)) = 0$$

(فرض می‌کنیم گشتاورهای دومِ $T(X)$ و $g(X)$ وجود دارند.)

اثبات (کفایت). نشان می‌دهیم که به ازای هر $\theta \in \Theta$ و تمامِ $g(X)$هایی که برآوردگرِ نااریبِ صفر هستند، اگر

$$\mathrm{cov}_\theta(T(X), g(X)) = 0$$

آنگاه به ازای هر $T^*(X)$ که برآوردگرِ نااریبِ $E_\theta(T(X))$ باشد،

$$V_\theta(T(X)) \leq V_\theta(T^*(X)).$$

بدین منظور، فرض کنید به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(T^*(X)) = E_\theta(T(X)).$$

در این صورت

$$E_\theta(T^*(X) - T(X)) = 0.$$

در نتیجه، بنا به فرضِ قضیه،

$$\mathrm{cov}_\theta(T(X), T^*(X)) - T(X)) = 0$$

یا

$$\mathrm{cov}_\theta(T(X), T^*(X)) - \mathrm{cov}_\theta(T(X), T(X)) = 0$$

یا

$$\begin{aligned} V_\theta(T) &= \mathrm{cov}_\theta(T(X), T^*(X)) \\ &\leq [V_\theta(T(X))]^{\frac{1}{2}} [V_\theta(T^*(X))]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(نابرابریِ شوارتس)} \end{aligned}$$

یا

$$[V_\theta(T(X))]^{\frac{1}{2}} \leq [V_\theta(T^*(X))]^{\frac{1}{2}}$$

یا

$$V_\theta(T) \leq V_\theta(T^*(X)).$$

(لزوم).

با فرض اینکه $T(X)$ یک MVUE برای امیدِ $T(X)$ است، نشان می‌دهیم که به ازای هر برآوردگرِ نااریبِ صفر، مثل $g(X)$، و به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$\mathrm{cov}_\theta(T(X), g(X)) = 0$$

واضح است که به ازای هر λی ثابت و معلوم و هر $\theta \in \Theta$،

$$E_\theta(T(X) + \lambda(g(X)) = E_\theta(T(X)).$$

از طرفی $T(X)$ یک MVUE برای امیدِ $T(X)$ است؛ پس به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$V_\theta(T(X)) \le V_\theta(T(X) + \lambda g(X))$$
$$= V_\theta(T(X)) + \lambda^2 V_\theta(g(X)) + 2\lambda \mathrm{cov}_\theta(T(X), g(X)).$$

بنابراین، به ازای هر λی ثابت و معلوم و هر $\theta \in \Theta$،

$$\lambda^2 V_\theta(g(X)) + 2\lambda \mathrm{cov}_\theta(T(X), g(X)) \ge 0 \qquad (2.1)$$

نشان می‌دهیم که رابطهٔ (۲.۱) نتیجه می‌دهد که به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$\mathrm{cov}_\theta(T(X), g(X)) = 0$$

برای اثباتِ این موضوع از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

ــ اگر به ازای یک θ_0 متعلق به Θ، $\mathrm{cov}_\theta(T(X), g(X))$ مثبت باشد، آنگاه با انتخابِ λ در فاصلهٔ $(-2\mathrm{cov}_{\theta_0}(T(X), g(X))/V_{\theta_0}(g(X)), 0)$، مقدار سمت چپِ رابطهٔ (۲.۱) منفی می‌شود؛

ــ اگر به ازای یک θ_1 متعلق به Θ، $\mathrm{cov}_{\theta_1}(T(X), g(X))$ منفی باشد، آنگاه با انتخابِ λ در فاصلهٔ $(0, -2\mathrm{cov}_{\theta_1}(T(X), g(X))/V_{\theta_1}(g(X)))$، مقدار سمت چپِ رابطهٔ (۲.۱) منفی می‌شود. که هر دو حالت با رابطهٔ (۲.۱) متناقض است. بنابراین به ازای هیچ مقدار از θ، $\mathrm{cov}_\theta(T(X), g(X))$ نمی‌تواند مثبت یا منفی باشد. پس به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$\mathrm{cov}_\theta(T(X), g(X)) = 0. \square$$

قبل از ارائهٔ چند مثال در به‌کارگیریِ قضیهٔ ۲، تذکر چند نکته ضروری است:

ــ کارایی و مفید بودنِ این قضیه در مشخص نمودنِ ردهٔ تمام برآوردگرهای صفر است.

ــ این قضیه در اثباتِ وجود نداشتنِ MVUEی برآوردگرها می‌تواند مفید باشد (به مثالهای ۲۱ و ۲۲ توجه کنید).

ــ این قضیه برای اثباتِ وجودِ MVUEها در حالتِ کلّی مفید است؛ در این باره چند نتیجهٔ مهم را بیان خواهیم نمود.

همچنین توجه داشته باشید که شرطِ $\mathrm{cov}_\theta(T(X), g(X)) = 0$ معادلِ $E_\theta(T(X)g(X)) = 0$ است.

مثال ۲۱. نشان دهید که در مثال ۶، $\bar{X}$ و $c_n S$ هیچ‌کدام MVUEی پارامترِ θ نیستند.

حل. می‌دانیم که $(\bar{X}, S^2)$ یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای θ است. از طرفی $\bar{X} - c_n S$ یک برآوردگرِ نااریبِ صفر است. به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$\mathrm{cov}_\theta(\bar{X}, \bar{X} - c_n S) = V_\theta(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{n} \ne 0$$

و

$$\mathrm{cov}_\theta(c_nS, \bar{X} - c_nS) = -V_\theta(c_nS) = -c_n^2 V_\theta(S) \neq 0.$$

پس بنا بر قضیهٔ ۲، $\bar{X}$ و c_nS هیچ‌کدام MVUEی پارامترِ θ نیستند. □

مثال ۲۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیع $B(\theta, \frac{1}{2})$، $\theta \in \Theta = \{1, 2, 3, \ldots\}$، باشد. MVUEی پارامتر θ را، در صورتِ وجود، به‌دست آورید.

حل. می‌دانیم که توزیعهای به‌وجودآمده توسط X کامل نیستند اما بسندهٔ مینیمال می‌باشند. ردهٔ برآوردگرهای نااریبِ صفر به‌صورتِ $g(X) = (-1)^{X+1}a$ است، که $a \neq 0$. یک برآوردگرِ نااریبِ θ بر حسب X به‌صورتِ $h(X) = 2X$ است. بنابراین ردهٔ برآوردگرهای نااریبِ θ به‌صورتِ

$$T(X) = 2X + (-1)^{X+1}b, \qquad b \neq 0$$

است. حال، به ازای هر $\theta \in \Theta$،

$$\begin{aligned} E_\theta(T(X), g(X)) &= ab + 2aE_\theta[X(-1)^{X+1}] = ab - 2aE_\theta[X(-1)^X] \\ &= ab - 2a\sum_{x=0}^{\theta} x(-1)^x \binom{\theta}{x} 2^{-\theta} \end{aligned}$$

اما، به ازای $\theta = 1$،

$$E_1[X(-1)^X] = -\frac{1}{2}$$

و به ازای $\theta \geq 2$،

$$E_\theta[X(-1)^X] = 0.$$

بنابراین

$$E_\theta[T(X)g(X)] = \begin{cases} a(b+1), & \theta = 1 \\ ab, & \theta \geq 2 \end{cases}$$

در نتیجه به ازای هر $\theta \in \Theta$، bی ناصفری وجود ندارد که، وقتی $a \neq 0$،

$$E_\theta(T(X)g(X)) = 0.$$

یعنی MVUEی پارامتر θ وجود ندارد. □

در نتایجِ زیر کاربرد قضیهٔ ۲ را ملاحظه می‌کنیم.

نتیجهٔ ۱. اگر $T_1, \ldots, T_k$، MVUEهای امیدهای خود باشند، آنگاه هر ترکیب خطی از T_iها، یعنی هر $\sum a_iT_i$ که در آن a_iها مقادیر ثابت و معلوم هستند، نیز MVUEی امید خود می‌باشد.

نتیجهٔ ۲. اگر T یک MVUE برای امیدِ خود باشد، آنگاه T^2 نیز MVUEی امید خود است.

به استقراء و با به‌کارگیریِ نتایج ۱ و ۲ می‌توان نشان داد که اگر T یک MVUE برای امیدِ خود باشد، آنگاه $\sum a_i T^i$ نیز، که در آن a_iها مقادیر ثابت و معلومی هستند، یک MVUE برای امیدِ خود می‌باشد.

۳. دستورالعملی برای دستیابی به برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس

در بخشِ قبل گفتیم که برای دستیابی به UMVUEها دو روش زیر، که نتیجه‌ای مستقیم از قضیهٔ ۱ هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ــ حدس زدن یا پیدا کردنِ یک برآوردگرِ نااریبِ $\gamma(\theta)$، و به دنبالِ آن بهبود بخشیدنِ برآوردگر با استفاده از امید شرطی نسبت به یک آمارهٔ بسنده کاملِ T.

ــ پیدا کردن تابعی از آمارهٔ بسندهٔ کامل T، مثلاً $g(T)$، که برای $\gamma(\theta)$ نااریب باشد.

در بخش ۲ به‌تفصیل و با ذکر مثالهای مختلف از دو روشِ فوق صحبت کردیم. در این بخش روش دیگری را که در ارتباط با روش دوم است با ارائهٔ مثالهای متنوع مطرح کرده نشان خواهیم داد که در بسیاری از مواردْ استفاده از این روش مناسبتر است. در این روش، اگر آمارهٔ T پیوسته باشد هدفْ حلِ معادلهٔ انتگرالیِ زیر برای دستیابی به $g(T)$ است:

$$E_\theta(g(T)) = \int g(t) f_\theta(t) dt = \gamma(\theta). \qquad (۳.۱)$$

در صورتی که آمارهٔ T گسسته باشد، انتگرال به جمع تبدیل می‌شود. دو راه‌حلِ اصلی برای معادلهٔ انتگرالیِ (۳.۱) را با مثالهای مختلف ارائه خواهیم کرد.

الف. به‌کارگیریِ رابطهٔ (۳.۱) با استفاده از مشتق‌گیری

با ارائهٔ مثالهای زیر این روش را شرح می‌دهیم. بیشترِ مثالها شکلِ کلّی دارند و می‌توانند در برگیرندهٔ بسیاری از حالتهای خاص باشند و بیشتر برای توزیعهای پیوسته کارایی دارند.

مثال ۲۳. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از خانوادهٔ توزیعهایی با چگالیِ به شکلِ

$$p_\theta(x) = Q_1(\theta) M_1(x), \quad a < x < \theta$$

باشد. به سادگی تحقیق می‌شود که $T = X_{(n)}$ آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ و دارای تابع چگالی احتمالِ

$$f_\theta(t) = n M_1(t) \{Q_1^n(\theta)/Q_1^{n-1}(t)\}, \quad a < t < \theta$$

است. از روابطِ

$$\int_a^\theta p_\theta(x) dx = 1, \qquad \int_a^\theta g(t) f_\theta(t) dt = \gamma(\theta)$$

با مشتق‌گیری نسبت به θ نتیجه می‌شود که

$$M_1(\theta) = -\{Q_1'(\theta)/Q_1^2(\theta)\}$$

و

$$g(\theta) = \{Q_1(\theta)\gamma'(\theta) - n\gamma(\theta)Q_1'(\theta)\}/\{nM_1(\theta)Q_1^2(\theta)\}.$$

بنابراین UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta)$ عبارت است از

$$g(T) = \gamma(T) + \{\gamma'(T)/nQ_1(T)M_1(T)\}.$$

برای حالت خاصی از مثال ۲۳، فرض کنیا

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta$$

یعنی $Q_1(\theta) = 1/\theta$، $M_1(x) \equiv 1$، و $T = X_{(n)}$. حال اگر $\gamma(\theta) = \theta^r$، $r \in R$، آنگاه UMVUEی پارامترِ $\gamma(\theta)$ برابر است با

$$g(T) = T^r(1 + \frac{r}{n})$$

و اگر $\gamma(\theta) = P_\theta(X \leq c) = c/\theta$، که در آن c مقدار ثابت و معلومِ مثبتی است، آنگاه UMVUEی پارامترِ $\gamma(\theta)$ برابر است با

$$g(T) = \frac{c}{T}(1 - \frac{1}{n}).$$

مثال ۲۴. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از خانوادهٔ توزیعهای با چگالی به شکلِ

$$p_\theta(x) = Q_2(\theta)M_2(x), \quad \theta < x < b$$

باشد. به‌سادگی تحقیق می‌شود که $T + X_{(1)}$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل برای θ و دارای تابع چگالی احتمالِ

$$f_\theta(t) = nM_2(t)\{Q_2^n(\theta)/Q_2^{n-1}(t)\}, \quad \theta < t < b$$

است. با مشتق‌گیری نسبت به θ، از روابطِ

$$\int_\theta^b p_\theta(x)dx = 1, \quad \int_\theta^b g(t)f_\theta(t)dt = \gamma(\theta)$$

نتیجه می‌شود که

$$M_2(\theta) = -Q_2'(\theta)/Q_2^2(\theta)$$

و

$$g(\theta) = \gamma(\theta) - \{\gamma'(\theta)/nQ_2(\theta)M_2(\theta)\}.$$

بنابراین UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta)$ برابر است با

$$g(T) = \gamma(T) - \{\gamma'(T)/nQ_2(T)M_2(T)\}.$$

برای حالت خاصی از مثال ۲۴ فرض کنید

$$p_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta$$

یعنی $Q_2(\theta) = e^\theta$، $M_2(x) = e^{-x}$، و $T = X_{(1)}$. حال اگر $\gamma(\theta) = \theta^r$، $r \in \mathbb{R}$، آنگاه UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta)$ برابر است با

$$g(T) = T^{r-1}(T - \frac{r}{n})$$

و اگر $\gamma(\theta) = P_\theta(X \geq c) = e^{-(c-\theta)}$، آنگاه UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta)$ برابر است با

$$g(T) = (1 - \frac{1}{n})e^{-(c-T)}.$$

ب. به‌کارگیری رابطهٔ (۳.۱) با امتحان کردن

روش دیگر در حلِ معادلهٔ انتگرالیِ (۳.۱) امتحان کردن است. برای انجام این روش از خاصیتِ کامل بودن و اینکه انتگرالِ تابعِ چگالیِ احتمال (یا جمعِ تابع احتمال) روی تکیه‌گاه برابرِ یک است استفاده می‌کنیم. این روش به‌سادگی هر دو حالتِ پیوسته و گسسته را شامل می‌شود. برای این کار، ابتدا رابطهٔ (۳.۱) را به‌صورتِ

$$\int g(t)\{f_\theta(t)/\gamma(\theta)\}dt = 1. \qquad (3.2)$$

می‌نویسیم. اگر رابطهٔ (۳.۲) را بتوانیم به شکلِ

$$\int g(t)\nu(t)f^*_{\theta_0}(t)dt = 1 \qquad (3.3)$$

بنویسیم که در آن $f^*_{\theta_0}(\cdot)$ چگالیِ دیگری از همان خانوادهٔ چگالیِ $f_\theta(\cdot)$ اما احتمالاً با پارامترِ دیگری است، آنگاه از رابطهٔ (۳.۳) به‌دست می‌آید

$$\int \{g(t)\nu(t) - 1\}f^*_{\theta_0}(t)dt = 0$$

که با استفاده از کامل بودنِ آمارهٔ T نتیجه می‌شود که، با احتمالِ یک،

$$g(t)\nu(t) - ۱ = ۰$$

یعنی

$$g(T) = \frac{۱}{\nu(T)}.$$

مثالهای زیر روش فوق را روشن می‌کنند.

مثال ۲۵. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفیِ nتایی از توزیعِ $P(\theta)$، $\theta > ۰$، باشد. می‌دانیم که $T = \sum X_i$ یک آمارهٔ بسندهٔ کامل با توزیعِ $P(n\theta)$ است. برای به‌دست آوردنِ UMVUEی پارامترِ $\gamma(\theta) = e^{-k\theta}\theta^r$، که در آن r یک عدد صحیح غیرمنفی است و $k < n$، روابطِ (۳.۳)ـ(۳.۱) به‌ترتیب به‌صورتِ زیر در می‌آیند:

$$\sum_{t=۰}^{\infty} g(t)\frac{e^{-n\theta}(n\theta)^t}{t!} = e^{-k\theta}\theta^r,$$

$$\sum_{t=۰}^{\infty} g(t) = \frac{e^{-(n-k)\theta}(n\theta)^t\theta^{-r}}{t!} = ۱,$$

و

$$\sum_{t=r}^{\infty} g(t)\frac{(t-r)!n^t}{t!(n-k)^{t-r}}\frac{e^{-(n-k)\theta}[(n-k)\theta]^{t-r}}{(t-r)!} = ۱.$$

حال اگر به ازای $t < r$، مقادیرِ $g(t)$ را برابر صفر اختیار کنیم، نتیجه می‌شود که

$$g(t) = \begin{cases} ۰, & t < r \\ \frac{t!}{(t-r)!}\frac{(n-k)^{t-r}}{n^t}, & t \geq r \end{cases}$$

یعنی به ازای $t \geq r$،

$$g(T) = r!\binom{T}{r}(\frac{۱}{n})^r(۱ - \frac{k}{n})^{T-r}.$$

و اگر $\gamma\theta = P_\theta(X \leq c) = \sum_{x=۰}^{[c]} \frac{e^\theta\theta^x}{x!}$، آنگاه به ازای $t \geq [c]$،

$$g(T) = \sum_{x=۰}^{[c]}\binom{T}{x}(\frac{۱}{n})^x(۱ - \frac{۱}{n})^{T-x}.$$

مثال ۲۶. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی nتایی از توزیع یکنواخت روی $\{1, 2, \ldots, \theta\}$، $\theta \in \Theta = \mathbb{N}$، باشد. می‌دانیم که یک $T = X_{(n)}$ آمارهٔ بسندهٔ کامل با تابع احتمالِ

$$f_\theta(t) = (\frac{t}{\theta})^n - (\frac{t-1}{\theta})^n, \qquad t = 1, 2, \ldots, \theta$$

است. برای به‌دست آوردنِ UMVUEی پارامتر $\gamma(\theta) = \theta^r$، که در آن $r > -n$، روابطِ (۳.۳)ـ(۳.۱) به‌ترتیب به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$\sum_{t=1}^{\theta} g(t)\{(\frac{t}{\theta})^n - (\frac{t-1}{\theta})^n\} = \theta^r,$$

$$\sum_{t=1}^{\theta} g(t)\{(\frac{t}{\theta})^n - (\frac{t-1}{\theta})^n\}\frac{1}{\theta^r} = 1,$$

و

$$\sum_{t-1}^{\theta} g(t)\frac{t^n - (t-1)^n}{t^{n+r} - (t-1)^{n+r}}\{(\frac{t}{\theta})^{n+r} - (\frac{t-1}{\theta})^{n+r}\} = 1.$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$g(T) = \frac{T^{n+r} - (T-1)^{n+r}}{T^n - (T-1)^n}.$$

حال اگر $\gamma(\theta) = \theta$، یعنی $r = 1$، آنگاه

$$g(T) = \frac{T^{n+1} - (T-1)^{n+1}}{T^n - (T-1)^n}$$

و اگر $\gamma(\theta) = P(X \leq c) = [c]/\theta$، آنگاه

$$g(T) = [c]\frac{T^{n-1} - (T-1)^{n-1}}{T^n - (T-1)^n}.$$

ترکیبی از دو روشِ یادشده در حل معادلهٔ انتگرالیِ (۳.۱) می‌تواند در دستیابی به UMVUEی تابعی از دو پارامترِ مجهول مفید باشد. برای روشن شدنِ موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۷. فرض کنید که $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی nتایی از توزیع $E(\mu, \sigma)$ با تابع چگالیِ احتمالِ

$$p_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}e^{-(x-\mu)/\sigma}, \quad x \geq \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0$$

باشد. می‌دانیم که $(T = X_{(1)}, S = \bar{X} - X_{(1)})$ یک آمارهٔ بسندهٔ توأم برای (μ, σ) است. از طرفی T و S مستقل از هم با توزیعهای

$$T \sim E(\mu, \frac{\sigma}{n}), \qquad S \sim \Gamma(n-1, \frac{\sigma}{n})$$

هستند. بنابراین تابع چگالی احتمال توأمِ (T,S) به شکلِ

$$f_{\mu,\sigma}(t,s) = f_T(t)f_S(s), \quad t \geq \mu, \quad s > 0$$

است. برای به‌دست آوردنِ MVUEی پارامترِ $\gamma(\mu)$، می‌خواهیم تابعی از (T,S)، مثلاً $g(T,S)$، داشته باشیم که به ازای هر $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma > 0$،

$$E_{\mu,\sigma}\{g(T,S)\} = \gamma(\mu)$$

یعنی به ازای هر $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma > 0$،

$$\int_0^\infty \int_\mu^\infty g(t,s)f_{\mu\sigma}(t,s)dtds = \gamma(\mu).$$

رابطهٔ اخیر را می‌توانیم به‌صورت زیر دوباره‌نویسی کنیم:

$$\int_0^\infty \int_\mu^\infty g(t,s)e^{-nt/\sigma}f_S(s)dtds = \frac{\sigma}{n}\gamma(\mu)e^{-n\mu/\sigma}.$$

با مشتق‌گیری نسبت به μ از رابطهٔ فوق و جایگزینیِ مجددِ μ با t به دست می‌آید

$$\int_0^\infty g(t,s)f_S(s)ds = \gamma(t) - \frac{\sigma}{n}\gamma'(t).$$

از طرفی می‌دانیم که یک برآوردگرِ نااریبِ σ بر حسب S عبارت است از $\frac{n}{n-1}S$؛ پس

$$g(T,S) = \gamma(T) - S\gamma'(T)/(n-1).$$

حال اگر $\gamma(\mu) = \mu^r$، آنگاه

$$g(T,S) = T^r - rST^{r-1}/(n-1)$$

یک MVUEی پارامترِ $\gamma(\mu) = \mu^r$ است.

برای به‌دست آوردنِ UMVUEی تابعی از μ و σ در حالت خاص، مثلاً به ازای

$$\begin{aligned}\gamma(\mu,\sigma) &= \{P(X_1 > c)\}^m \\ &= e^{-m(c-\mu)/\sigma}, \qquad m < n\end{aligned}$$

می‌خواهیم تابعی از (T,S)، مثلاً $g(T,S)$، داشته باشیم که به ازای هر $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma > 0$،

$$E_{\mu,\sigma}\{g(T,S)\} = \gamma(\mu,\sigma)$$

یعنی

$$\int_{\circ}^{\infty}\int_{\mu}^{\infty} g(t,s)f_{\mu,\sigma}(t,s)dtds = e^{-m(c-\mu)/\sigma}$$

رابطهٔ اخیر را می‌توانیم به‌صورت زیر دوباره‌نویسی کنیم:

$$\int_{\mu}^{\infty}\int_{\frac{m(c-\mu)}{\sigma}}^{\infty} g(t,s)\nu(t,s)f_T^*(t)gs(s-\frac{m(c-t)}{n})dsdt = ۱ \qquad (۳\cdot۴)$$

که در آن f_T^* تابع چگالیِ احتمالِ توزیع $E(\mu, \frac{\sigma}{n-m})$ است و

$$\nu(t,s) = \{(۱-\frac{m}{n})[۱-\frac{m(c-t)}{ns}]^{n-۲}\}^{-۱}$$

حال اگر $g(t,s)$ به ازای $s < m(c-t)/\sigma$ مساوی صفر باشد، آنگاه با فرض $t' = t$ و

$$s' = s - m(c-t)/n$$

در رابطهٔ (۳.۴)، ملاحظه می‌شود که، اگر $s > m(c-t)/n$، آنگاه

$$g(T,S) = \frac{۱}{\nu(T,S)}$$

یعنی

$$g(T,S) = (۱-\frac{m}{n})[۱-m(c-T)/nS]^{n-۲}$$

مراجع

[1] E.J. Dudewicz, and S.N. Mishra, *Modern Mathematical Statistics*, John Wiley, New York, 1988.

[2] T.S. Ferguson, *Mathematical Statistics*, Academic Press, New York, 1967.

[3] W.C. Guenther, Some easily found minimum variance unbiased estimators, *The American Statistician*, vol. 32, no. 1 (1978) 29-34.

[4] K.X. Karakostas, On minimum variance unbiased estimators. *The Americam Statistician*, vol. 39, no. 4 (1985) 303-305.

[5] E.L. Lehmann, and H. Scheffe, Completeness, similar regions, and unbiased estimation - part I, *Sankhaya*, vol. 10, no. 4 (1950) 305-340.

[6] E.L. Lehmann, and H. Scheffe, Completenss, similar regions, and unbiased estimation - part II, *Sankhaya*, vol. 15, no. 3 (1955) 219-236.

[7] E.L. Lehmann, *Theory of Point Estimation*, John Wiley, New York, 1983.

[8] A.M. Mood, F.A. Graybill, and D. Boes, *Introduction to the Theory of Statistics*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1974.

[9] E.A. Pena, and V. Rohatgi, Some comments about sufficiency and unbiased estimation. *The American Statistician*, vol. 48, no. 3 (1994) 242-243.

[10] S.M. Stigler, Completeness and unbiased estimation, *The American Statistician*, vol. 26, no. 2 (1972) 28-29.

[11] D.D. Wackerly, On deriving a complete sufficient statistics, *The American Statistician*, vol. 30, no. 1 (1976) 37-38.

احمد پارسیان
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکدهٔ ریاضی
ahmad_p@rose.ipm.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۱۷ (بهار ۱۳۷۵)، صص. ۶۱ تا ۶۸

جبر خطی و نظریهٔ عملگرها *

کریم صدیقی

اکثرِ دانشجویانِ دورهٔ کارشناسی با درس جبر خطی آشنا هستند. در این درس ابتدا به حل معادلاتِ چندمجهولی پرداخته می‌شود و سپس فضاهای متناهی‌بعد و عملگرهای آنها بررسی می‌گردد. در نظریهٔ عملگرها فضاهای نامتناهی‌بعد و عملگرهای آنها مطالعه می‌شود. مسلم است که این دو رشته وجوهِ تشابهِ فراوانی داشته همچنین وجوه تمایزی نیز دارند. در این مقاله می‌خواهیم وجوه تمایزِ این دو رشتهٔ ریاضیات را مورد توجه قرار دهیم. برای این کار مفاهیم اساسیِ جبر خطی را بیان کرده سپس ضرورت تکمیلِ آن با نظریهٔ عملگرها را توضیح می‌دهیم. چون این مفاهیم گسترده‌اند و بررسیِ همهٔ آنها در این مختصر ممکن نبود، دست به انتخاب زده از میانِ آنها به مطالعهٔ مفاهیمی چون توپولوژی، بُعد، طیف، کرانداری، و در آخر همریختی‌های جبرهای باناخ می‌پردازیم.

توپولوژی

در فضاهای متناهی‌بعد تمامِ توپولوژیها با یکدیگر معادل‌اند؛ بنابراین فقط یک توپولوژی وجود دارد و آن هم توپولوژیِ اقلیدسی است. این توپولوژیها زمانی متمایز می‌شوند که فضا نامتناهی‌بعد باشد. اینک به ذکرِ یک مثال از یک فضای نامتناهی‌بعد با دو توپولوژیِ متمایز می‌پردازیم.

مثال. فرض کنید $C[0,1]$ مجموعه تمام توابعِ پیوستهٔ حقیقی‌مقدار روی $[0,1]$ با نُرمِ سوپریمم باشد، یعنی

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}, \quad f \in C[0,1].$$

حال فضای $C'[0,1]$ را که به‌صورتِ

$$C'[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, \ \ f' \in C[0,1]\}$$

*) این مقاله متنِ سخنرانیِ مؤلف در سمینارِ جبر خطی در دانشگاه ولی عصرِ رفسنجان (۲۶ و ۲۷ دی ۱۳۷۴) است.

تعریف می‌شود در نظر بگیرید. این فضا از تمام توابع حقیقی‌مقداری روی $[\circ, 1]$ که مشتقِ آنها پیوسته است تشکیل گردیده است. روی این فضا نرم را به‌صورتِ

$$\|f\|_1 = \|f\| + \|f'\|, \quad f \in C'[\circ, 1]$$

تعریف می‌کنیم، که نرمِ سمتِ راستِ همان نرمِ سوپریمِ فضای $C[\circ, 1]$ می‌باشد.

در اینجا توجه کنید که فضای $C'[\circ, 1]$ دو نرم دارد: یکی نرمِ سوپریمم که از فضای $C[\circ, 1]$ به‌ارث می‌برد، و دیگری $\|\cdot\|_1$. این دو نرم دو توپولوژی روی این فضا القا می‌کنند که از یکدیگر متمایزند، زیرا، مثلاً، فرض کنید دنبالهٔ $\{f_n\}$ چنین تعریف شده باشد:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \quad x \in [\circ, 1], \quad n = 1, 2, \ldots.$$

در این صورت

$$f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx.$$

بنابراین $f_n \in C'[\circ, 1]$. در ضمن به‌طور یکنواختْ $f_n \to \circ$، لیکن $\{f_n'\}$ همگرا به صفر نیست. مثالهای دیگر را می‌توان در [۳] ملاحظه کرد.

تمرین. فرض کنید $M = \{f \in C'[\circ, 1] : f'(\circ) = \circ\}$. این فضا در کدام‌یک از توپولوژیهای $C'[\circ, 1]$ بسته است؟

توجه کنید که در فضاهای متناهی‌بعد اگر M و N دو زیرفضای بسته باشند، آنگاه $M + N$ نیز بسته است، در صورتی که در فضاهای نامتناهی‌بعد مجموعِ دو زیرفضای بسته لزوماً بسته نیست.

برای ارائهٔ مثالی از دو زیرفضای بسته که مجموعِ آنها بسته نیست فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ مجموعِ مستقیمِ آن با خودش باشد؛ پس

$$\mathcal{K} = \{(x, y) : x, y \in \mathcal{H}\}.$$

ضرب داخلیِ $\mathcal{K}$ نیز بدین صورت است:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$$

که در اینجا $x_i, y_i \in \mathcal{H}$، $i = 1, 2$. به‌وضوح دیده می‌شود که $\mathcal{K}$ خود یک فضای هیلبرت است.

حال قرار دهید $\mathcal{M} = \mathcal{H} \oplus \{\circ\}$، و فرض کنید T یک عملگر روی $\mathcal{H}$، و $\mathcal{N}$ نمودارِ T باشد، یعنی $\mathcal{N} = \{(x, Tx) : x \in \mathcal{H}\}$. واضح است که $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو زیرفضای بستهٔ $\mathcal{K}$ می‌باشند. اعضای $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ به شکلِ

$$(x, \circ) + (y, Ty) = (x + y, Ty)$$

می‌باشند، که x و y در $\mathcal{H}$ تغییر می‌کنند. دیده می‌شود که $\mathcal{M}+\mathcal{N}=\mathcal{H}\oplus R$، که در اینجا R بردِ T می‌باشد. زیرفضای $\mathcal{H}\oplus R$ وقتی و تنها وقتی بسته است که R بسته باشد. می‌توان T را طوری انتخاب کرد که R بسته نباشد و به نتیجهٔ دلخواه رسید.

موضوع دیگری را که در اینجا شایان ذکر است در لمِ بَعد می‌آوریم.

لم. *هر فضای هیلبرتِ موضعاًفشرده متناهی‌بعد است.*

اثبات. در فضای متناهی‌بعد، گویِ یکهٔ بسته کراندار و در نتیجه فشرده است. هر گویِ دیگر نیز فشرده می‌باشد؛ بنابراین چنین فضایی موضعاًفشرده است. حال یک فضای هیلبرتِ موضعاًفشرده را در نظر بگیرید. در اینجا نیز گویهای بسته، و از جمله گویِ یکهٔ بسته، فشرده است. توجه کنید که اگر a و b دو بردارِ متعامد باشند، آنگاه $\|a-b\|=\sqrt{۲}$. بنابراین هرگویِ باز به شعاعِ نابیشتر از $\sqrt{۲}$ می‌تواند فقط یک عضوِ یک پایهٔ یکامتعامد را در برداشته باشد. گردایهٔ گویهای باز به شعاعِ $\sqrt{۲}$ یک پوششِ بازِ گویِ یکهٔ بسته می‌باشد و در نتیجه تعدادی متناهی از این گویهای باز آن را می‌پوشانند. در نتیجه هر پایهٔ یکامتعامد متناهی است.

تذکر. یادآور می‌شویم که لمِ قبل در هر فضای برداریِ نرم‌دار صادق است.

بُعد

در مطالعهٔ هر فضای هیلبرتِ $\mathcal{H}$ وقتی صحبت از «بعد» می‌شود دو نوع بعد مورد نظر است: چون $\mathcal{H}$ یک فضای برداری است، یک بعدِ خطی دارد؛ چون $\mathcal{H}$ یک ساختار ضربِ داخلی هم دارد، یک بعدِ متعامد هم دارد. توجه کنید که اگر یکی از دو بعدِ خطی یا بعدِ متعامدِ یک فضای هیلبرتْ متناهی باشد، دیگری نیز همین‌طور بوده دو بعد با یکدیگر برابرند؛ بنابراین در فضاهای متناهی‌بعد تمایزی بین این دو مفهوم وجود ندارد. در حالت کلّی روش یکپارچه‌ای برای بررسی این مفاهیم وجود دارد و آن اینکه نشان دهیم پایه‌های $\mathcal{H}$ دارای عددِ اصلیِ واحدی هستند، که این عدد اصلیِ مشترک را بعدِ $\mathcal{H}$ می‌نامیم. اما تعریفِ این دو نوع پایه متفارت می‌باشد. یک پایهٔ هَمِل (پایهٔ خطی) یک زیرمجموعهٔ مستقلِ خطیِ ماکسیمال در $\mathcal{H}$ می‌باشد. در اینجا یادآور می‌شویم که مجموعهٔ نامتناهیِ $E\subseteq\mathcal{H}$ را مستقل خطی گویند هرگاه هر زیرمجموعهٔ متناهیِ E مستقلِ خطی باشد. از خواصِ پایهٔ خطیْ این است که هر بردارْ یک ترکیبِ خطیِ متناهی از بردارهای این پایه می‌باشد.

زیرمجموعهٔ $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ از $\mathcal{H}$ را یک مجموعهٔ یکامتعامد گوییم هرگاه

$$(e_\alpha,e_\beta)=\begin{cases}۱, & \alpha=\beta,\\ ۰, & \alpha\neq\beta.\end{cases}$$

هر مجموعهٔ ماکسیمالِ یکامتعامد را یک پایهٔ یکامتعامد گویند.

در اینجا لم زیر را ثابت می‌کنیم. این لم بُعدِ متعامد و بعدِ خطی را با یکدیگر مقایسه می‌کند.

لم. *اگر بعدِ متعامدِ یک فضای هیلبرتْ نامتناهی باشد، آنگاه بعدِ خطیِ آن ناشماراست.*

اثبات. فرض کنید بعد خطیِ این فضا شمارا باشد. با استفاده از فرایندِ گرام-اشمیت می‌توانیم بدون کاستن از کلّیتِ مسأله فرض کنیم که یک پایهٔ خطیِ متعامدِ $\{e_1, e_2, \ldots\}$ وجود دارد. قرار دهید

$$x_n = e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \cdots + \frac{1}{n}e_n.$$

در این صورت اگر $n > m$،

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|^2 &= \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\\ &= \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i^2}.\end{aligned}$$

چون سریِ $\sum 1/n^2$ همگراست، نتیجه می‌گیریم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ کوشی است. در نتیجه $x = \lim x_n$ موجود است و یک ترکیبِ خطیِ متناهی از $e_1, e_2, \ldots$ می‌باشد. بنابراین عدد طبیعیِ jای وجود دارد که $\langle x, e_j\rangle = 0$. حال چون $\langle x, e_j\rangle = \lim\langle x_n, e_j\rangle$ و این حد ناصفر است به تناقض می‌رسیم. □

طیف

برای هر عملگرِ هیلبرتِ A طیفِ آن را، که با $\sigma(A)$ نمایش داده می‌شود، چنین تعریف می‌کنیم

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{وارونپذیر است} \quad A - \lambda I\}.$$

در حالتی که فضای زمینه متناهی‌بعد است طیفِ A فقط از مقادیرِ ویژه تشکیل شده است، در صورتی که در حالتِ نامتناهی‌بعد طیف می‌تواند غیر از مقادیرِ ویژه را نیز در برداشته باشد. نکتهٔ جالبی که در اینجا ذکرش لازم است ناتهی بودنِ $\sigma(A)$ است زمانی که فضای هیلبرتِ مورد نظر مختلط باشد. در حالتِ متناهی‌بعد اثباتِ وجودِ مقدارِ ویژه در اکثر کتبِ جبر خطی داده شده است، و لیکن اثبات زیر که از اَکسلِر است خیلی کوتاه و قابل فهم است.

به‌یاد آورید که عدد مختلطِ λ را یک مقدارِ ویژه‌ی عملگرِ T گویند هرگاه $T - \lambda I$ یک به یک نباشد، و بردار ناصفرِ x را یک بردارِ ویژه گوییم هرگاه به ازای یک مقدارِ ویژهٔ λ، $Tx = \lambda x$.

قضیهٔ ۱. *هر تبدیلِ خطی روی یک فضای برداریِ مختلطِ nبعدیِ V یک مقدار ویژه دارد.*

اثبات. فرض کنید $x \neq 0$ در V باشد. در فضای nبعدیِ V، $n+1$ بردارِ x، Tx، ...، $T^n x$ وابستهٔ خطی هستند؛ بنابراین اعدادِ مختلطِ a_0، a_1، ...، a_n که همگی صفر نیستند وجود دارند که

$$a_0 x + a_1 Tx + \cdots + a_n T^n x = 0.$$

حال چندجمله‌ایِ $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ را به‌صورتِ

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a(z - z_1)\cdots(z - z_m)$$

تجزیه می‌کنیم که در آن $a \neq 0$، و z_1، ...، z_n اعداد مختلط هستند. می‌نویسیم

$$\sum_{k=0}^{n} a_k T^k = a(T - z_1 I)\cdots(T - z_m I).$$

بنابراین حداقل یک j وجود دارد که $T - z_j I$ یک به یک نیست. در نتیجه z_j یک مقدار ویژه می‌باشد. □

اینک مثالی از یک عملگر روی فضای نامتناهی‌بعد می‌آوریم که مقدار ویژه ندارد. فضای ℓ^2 از تمام دنباله‌های $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ای تشکیل شده که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. به ازای هر $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ در ℓ^2 ضرب داخلی چنین تعریف می‌شود:

$$\langle x, y\rangle = \sum x_n \overline{y_n}.$$

با چنین تعریفی ℓ^2 یک فضای هیلبرت می‌باشد.

عملگرِ $S : \ell^2 \to \ell^2$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

این عملگر را انتقالِ یک‌جانبه گویند. به‌راحتی دیده می‌شود که

$$\langle Sx, Sy\rangle = \langle x, y\rangle, \ x, y \in \ell^2$$

یعنی S طولپاست؛ بنابراین $\|S\| = 1$. همچنین

$$S^*(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

در حقیقت

$$\begin{aligned}\langle S^*\{x_n\}, \{y_n\}\rangle &= \langle \{x_n\}, S\{y_n\}\rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, \ldots), (0, y, y_2, \ldots)\rangle \\ &= x_2\overline{y_1} + x_3\overline{y_2} + \cdots \\ &= \langle (x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)\rangle.\end{aligned}$$

قضیه. فرض کنید $S : \ell^2 \to \ell^2$ عملگر انتقالِ یک‌جانبه باشد. در این صورت $\sigma(S) = \bar{D}$، که $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$، و مجموعهٔ تمام مقادیر ویژهٔ S، که با $\sigma_p(S)$ نمایش داده می‌شود، تهی است.

اثبات. از خواصِ طیف نتیجه می‌شود که چون $\|S\| = 1$، پس $\sigma(S) \subseteq \bar{D}$. حال فرض کنید $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$ و $\lambda \neq 0$. اگر $Sx = \lambda x$، آنگاه $\lambda x = 0$، $\lambda x_2 = x_1$، ...؛ در نتیجه $x_1 = x_2 = \dots = 0$. در ضمن، چون S طولپاست یک به یک است و بنابراین $\sigma_p(S) = \varnothing$.

به ازای $|\lambda| < 1$ قرار می‌دهیم $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$. در این صورت $\|x_\lambda\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} < \infty$، و همچنین $S^* x_\lambda = \lambda x_\lambda$. درنتیجه $\lambda \in \sigma_p(S^*)$، یعنی $D \subseteq \sigma(S^*) = \sigma(S)$. پس $\bar{D} \subseteq \sigma(S)$، که از آن نتیجه می‌شود $\sigma(S) = \bar{D}$. □

کرانداری

فرض کنید $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایهٔ یکامتعامدِ فضای هیلبرتِ $\mathcal{H}$ باشد. یک پایهٔ خطی برای $\mathcal{H}$ پیدا می‌کنیم که شاملِ هر e_n باشد. فرض کنید f_0 بردارِ دلخواهِ ثابتی از پایهٔ خطیِ $\mathcal{H}$ باشد که از هر e_n متمایز است. عملگرِ A را روی $\mathcal{H}$ چنین تعریف می‌کنیم: $Af_0 = f_0$، و به ازای اعضای دیگرِ پایه، $Af = 0$. در نتیجه به ازای هر n، $Ae_n = 0$. اگر A کراندار باشد آنگاه $A = 0$، زیرا A روی هر e_n صفر است. این مثالی است از یک عملگرِ بیکران که روی یک پایه کراندار است، و همچنین مثالی است از عملگرِ بیکرانی که یک پایه را پوچ می‌کند. به‌طور کلّی به ازای هر تبدیل خطیِ A روی $\mathcal{H}$، یک پایهٔ یکامتعامدِ $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ برای $\mathcal{H}$ وجود دارد که $\sup_n \|Ae_n\| < \infty$. اگر یک عملگر روی هر پایهٔ یکامتعامدْ کراندار باشد آنگاه خود نیز کراندار است.

اینک به ذکرِ مقدمه‌ای در زمینهٔ جبرهای باناخ و همریختی‌های آنها می‌پردازیم. فضای برداریِ مختلطِ A را یک جبرِ مختلط گوییم هرگاه روی آن ضربی با این خواص تعریف شده باشد: به ازای هر $x, y, z \in A$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$،

$$x(yz) = (xy)z,\ (x+y)z = xz + yz,\ x(y+z) = xy + xz,$$
$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y).$$

اگر A یک فضای باناخ با نرمِ $\|\cdot\|$ بوده در نابرابریِ $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ به ازای هر $x, y \in A$ صدق کند، گوییم که A یک جبرِ باناخِ مختلط می‌باشد.

مثال. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. در این صورت $\mathcal{L}(X)$، جبرِ تمام عملگرهای خطیِ کراندار روی X، یک جبرِ باناخِ یک‌دار با نرم معمولیِ عملگرها می‌باشد. اگر X متناهی‌بعد باشد، مثلاً $\dim X = n$، آنگاه $\mathcal{L}(X)$ را می‌توانیم با $M_n(\mathbb{C})$، مجموعهٔ تمام ماتریسهای مختلطِ $n \times n$، یکی بگیریم.

فرض کنید A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر باشد. تابعکِ خطیِ $\varphi : A \to \mathbb{C}$ را یک همریختی‌ی A گویند هرگاه ناصفر باشد و به ازای هر $x, y \in A$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. شرط اخیر، که ضربی بودن خوانده می‌شود، معادل است با $\varphi(۱) = ۱$، زیرا $\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(۱)$.

همریختی‌های جبری

یادآور می‌شویم که بسیاری از جبرها فاقدِ همریختی هستند. در اینجا به ذکر یک مثال اکتفا می‌کنیم. فرض کنید $n \geq ۱$ و $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ فضای ماتریسهای مختلطِ $n \times n$ باشد. به ازای هر $i, j = ۱, \ldots, n$، ماتریسِ E_{ij} را ماتریسی در نظر می‌گیریم که در آن درایهٔ (i, j) یک، و بقیه درایه‌ها صفرند. می‌دانیم که مجموعهٔ

$$\{E_{ij} : i, j = ۱, \ldots, n\}$$

یک پایه برای $\mathcal{A}$ تشکیل می‌دهد. توجه کنید که تساویِ $E_{ij}E_{jk} = E_{ik}$ برقرار است. حال اگر φ یک همریختی روی $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\varphi(E_{ik}) = \varphi(E_{ij}E_{jk}) &= \varphi(E_{ij})\varphi(E_{jk})\\ &= \varphi(E_{jk})\varphi(E_{ij})\\ &= \varphi(E_{jk}E_{ij}).\end{aligned}$$

اگر $k \neq i$، آنگاه $\varphi(E_{ik}) = ۰$. برای پیدا کردنِ $\varphi(E_{ii})$ می‌نویسیم

$$\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{ij}E_{ji}) = \varphi(E_{ij})\varphi(E_{ji}) = ۰$$

که در اینجا $j \neq i$.

بنابراین همریختی‌ها نقش چندانی در جبر خطی پیدا نمی‌کنند و حیطهٔ عملِ آنها فقط در ابعادِ نامتناهی می‌باشد. در اینجا تذکرِ این نکته لازم است که اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ مجموعهٔ عملگرهای کراندار روی $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه تنها همریختیِ $\mathcal{L}(H)$ صفر است، و لیکن به اندازهٔ کافی فضاهای نامتناهی‌بعد وجود دارد که همریختی‌های آنها ناصفر می‌باشد.

اینک به ذکرِ یک مثال از همریختی‌های فضاهای نامتناهی‌بعد می‌پردازیم.

مثال. فرض کنید K یک فضای هاؤسدُرفِ فشرده، و $C(K)$ جبرِباناخِ توابعِ پیوستهٔ با مقادیرِ مختلط روی K با نرمِ سوپریمم باشد. به ازای هر $x \in K$، تابعِ $\varphi_x : C(K) \to \mathbb{C}$ که با $\varphi_x(f) = f(x)$ تعریف می‌شود یک همریختیِ فضای $C(K)$ می‌باشد. در حقیقت هر همریختیِ فضای $C(K)$ به همین صورت تعریف می‌شود. □

مراجع

[1] S. Axler, Down with determinants!, *Amer. Math. Monthly*, vol. 102, no.2 (1995) 139-154.

[2] P. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1982.

[3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1964.

کریم صدیقی
دانشگاه شیراز، بخش ریاضی
seddigi@rose.ipm.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۱۷ (بهار ۱۳۷۵)، صص. ۶۹ تا ۷۸

کرانِ گشتاوری برای احتمالاتِ دُمِ مثبت کوچکتر از کرانِ چرنُف است*

تامِس ک. فیلیپس و رَندُلف نلسن

وقتی کرانِ کوچکی برای احتمالهای دُم لازم باشد، تقریباً همه‌جا از کرانِ چرنُف برای $P[X \geq t]$ استفاده می‌شود. در این مقاله نشان می‌دهیم که به ازای کلّیهٔ مقادیر مثبتِ t و برای همهٔ توزیعها، کرانِ گشتاوری کوچکتر از کرانِ چرنف است. با استفاده از مثال نشان می‌دهیم که این بهبود اغلب قابل توجه است.

واژه‌های کلیدی: *کرانِ چرنُف، کرانِ بالای نمایی، کران گشتاوری، احتمالِ دُم.*

۱. مقدمه

متغیر تصادفیِ X را با توزیعِ $F_X(x)$ و محملی روی (احتمالاً) کلِّ خطِ اعدادِ حقیقی در نظر بگیرید. بسیاری اوقات نیازمندیم که احتمالِ بقای X را حساب کنیم که عبارت است از

$$P[X \geq t] = \int_t^\infty dF_X(x). \tag{۱}$$

برای سهولتِ نمادگذاری، احتمالها و امیدهای ریاضی را به‌صورتِ انتگرال می‌نویسیم، هرچند که ممکن است توزیعِ مربوطْ گسسته یا آمیخته باشد. نتایجِ ما در حالت کلّی صادق‌اند، و می‌توان آنها را برای

*) Thomas K. Philips and Randolph Nelson, The moment bound is tighter than Chernoff's bound for positive tail probabilities, *The American Statistician*, vol. 49, no. 2 (1995), 175–178

توزیعهای گسسته یا آمیخته نیز به‌آسانی سازوار کرد. در بسیاری از حالاتِ مورد نظر محاسبهٔ (۱) به شکلِ بسته ممکن نیست، لیکن برای تدارکِ کران بالای این انتگرال شیوه‌های زیادی وجود دارد. ساده‌ترینِ این روشها نابرابریِ مارکُف است. اگر h تابعی نامنفی و غیرنزولی باشد و اگر امید ریاضیِ $h(X)$ موجود باشد، آنگاه

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(z)dF_X(z)dz. \tag{۲}$$

از مفروضاتِ مربوط به h نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(z)dF_X(z)dz \geq \int_{t}^{\infty} h(z)dF_X(z)d_z \geq h(t)\int_{t}^{\infty} dF_X(z)dz. \tag{۳}$$

از تلفیقِ روابطِ (۲) و (۳)، نابرابری مارکف، یعنی

$$P[X \geq t] \leq \frac{E[h(X)]}{h(t)} \tag{۴}$$

حاصل می‌شود. یک صورتِ بسیار سادهٔ این نابرابری وقتی حاصل می‌شود که $h(x) = x^+ \equiv \max\{x, \circ\}$. در این حالتْ نابرابریِ مارکف نتیجه می‌دهد که

$$P[X \geq t] \leq \frac{E[X^+]}{t}, \qquad t > \circ$$

و اگر X نامنفی باشد، آنگاه

$$P[X \geq t] \leq \frac{E[X]}{t}, \qquad t > \circ. \tag{۵}$$

اغلب به این صورت اخیرِ رابطهٔ (۴) نیز نابرابریِ مارکف گفته می‌شود.

صورتی از نابرابریِ مارکف که در (۵) داده شده غالباً بسیار کم‌دقت‌تر از آن است که بتوان در عمل از آن استفاده کرد، و با استفاده از صورتِ کلّیِ (۴) کرانهای بسیار کوچکتری به‌دست آمده است. شاید مشهورترینِ این کرانها، کرانِ چرنف [۲] باشد. این کران از رابطهٔ (۴) با استفاده‌از تابعِ $h(x) = \exp\{\theta x\}$ حاصل می‌شود و عبارت است از

$$P[X \geq r] \leq C(t) \tag{۶}$$

که در آن

$$C(t) = \inf_{\theta \geq \circ} \mathcal{M}_X(\theta)e^{-\theta t} \tag{۷}$$

و $\mathcal{M}_X(\theta)$ تابع مولد گشتاورِ X است که با

$$\mathcal{M}_x(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x}dF_X(x) \tag{۸}$$

تعریف می‌شود. کرانِ کمترشناخته‌شده‌ای نیز از نابرابریِ مارکف حاصل می‌شود که برای مقادیر مثبتِ t صادق است و آن را کرانِ گشتاوری می‌نامیم. این کران از رابطهٔ (۴)، با قرار دادنِ $h(x) = (x^+)^n$ به ازای nهای صحیحِ مثبت، حاصل می‌شود و می‌توان آن را به‌صورتِ

$$P[X \geq t] \leq M(t) \tag{۹}$$

نوشت، که

$$M(t) = \inf_{n \geq ۰} \int_۰^\infty (\frac{x}{t})^n dF_X(x). \tag{۱۰}$$

توجه کنید که حتی اگر متغیر تصادفیِ X مقادیر منفی را هم اختیار کند، انتگرالِ رابطهٔ (۱۰) فقط روی خطِ اعدادِ حقیقیِ نامنفی محاسبه می‌شود. در (۱۰) و کلّیهٔ روابطی که به دنبال خواهند آمد فرض شده است که متغیرِ n عددی صحیح و نامنفی است. دلیلِ اینکه این کران را «کران گشتاوری» نامیده‌اند وقتی روشن می‌شود که کران را برای متغیرهای تصادفیِ نامنفی حساب کنیم. در این حالتها، (۱۰) را می‌توان به‌صورتِ

$$M(t) = \inf_{n \geq ۰} \frac{M_X^n}{t^n} \tag{۱۱}$$

بازنویسی کرد، که در آن M_X^n گشتاورِ nامِ X است، یعنی

$$M_X^n = \int_۰^\infty x^n dF_X(x).$$

در این مقاله ثابت می‌کنیم که به ازای هر توزیعِ F_X و به ازای کلّیهٔ مقادیرِ $t > ۰$، $M(t) \leq C(t)$. این نتیجه به دو دلیل تا حدی تعجب‌آور است:

۱. دومین و سومین عضوِ دنبالهٔ انتگرالهای تعریفِ $M(t)$ که در (۱۰) داده شده است با نابرابری‌های مارکف و چبیشف ارتباط نزدیکی دارند. این کرانها تقریباً در همهٔ مواردی که در عملْ مورد نظرند به کوچکیِ کرانِ چرنف نیستند.

۲. این، مطلبِ شناخته‌شده‌ای است [۱] که وقتی X مجموعی از متغیرهای تصادفیِ مستقل و هم‌توزیع باشد، کرانِ چرنف به‌طور مجانبی (بر حسب t) کوچک است، یعنی

$$P[X \geq t] = \exp\{\inf_\theta[\theta - \log \mathcal{M}_X(\theta) - o(۱)]t\}.$$

بقیهٔ این مقاله به‌شرح زیر تنظیم شده است. در بخشِ ۲ ثابت می‌کنیم که برای کلّیهٔ توزیعها، به شرطِ آنکه $t > ۰$، کرانِ گشتاوری از کرانِ چرنف بزرگتر نیست. در بخشِ ۳ کران گشتاوری را برای تعدادی از توزیعهای گسسته و پیوسته محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که کران گشتاوری می‌تواند به‌طور قابل توجهی کوچکتر از کران چرنف باشد. در بسیاری از حالتهای مورد نظر، رابطهٔ ترتیبیِ کرانِ گشتاوری و کران چرنفْ عبارت است از $C(t)/M(t) = O(\sqrt{t})$. سرانجام در بخش ۴ یافته‌هایمان را خلاصه می‌کنیم.

۲. کرانِ گشتاوری

ابتدا یک لمِ ساده را ثابت می‌کنیم.

لم ۲.۱. *دو دنبالهٔ مثبتِ a_i و b_i به ازای $i = ۰, ۱, \ldots$ را در نظر بگیرید، و فرض کنید که $\sum_{i=۰}^{\infty} a_i$ و $\sum_{i=۰}^{\infty} b_i$ موجودند. گیریم $c \leq a_i/b_i$، $i = ۰, ۱, \ldots$. در این صورت*

$$c \leq \frac{\sum_{i=۰}^{\infty} a_i}{\sum_{i=۰}^{\infty} b_i}. \tag{۱۲}$$

به علاوه، اگر به ازای i و زای، $a_i/b_i \neq a_j/b_j$، آنگاه

$$c < \frac{\sum_{i=۰}^{\infty} a_i}{\sum_{j=۰}^{\infty} b_j}. \tag{۱۳}$$

اثبات. بنا به فرض،

$$cb_i \leq a_i, \quad i = ۰, ۱, \ldots. \tag{۱۴}$$

رابطهٔ (۱۲) با جمع بستنِ طرفینِ رابطهٔ (۱۴) به ازای مقادیرِ $i = ۰, ۱, \ldots$ حاصل می‌شود (بنا به فرضْ این مجموعها موجودند). نابرابریِ (۱۳) نتیجه می‌شود، زیرا اگر به ازای i و زای $a_i/b_i \neq a_j/b_j$، آنگاه برخی از نابرابری‌های (۱۴) باید اکید باشند. □

قضیهٔ ۲.۲. *به ازای هر متغیر تصادفیِ X و به ازای کلّیهٔ مقادیرِ $t > ۰$، $M(t) \leq C(t)$.*

اثبات. در حالتی که X یک متغیر تصادفیِ منفی باشد قضیه به‌طور بدیهی درست است. بنابراین فرض کنید که X نامنفی است. اگر $C(t) = ۱$، آنگاه قضیه به‌طور بدیهی صادق است، بنابراین فرض کنید که $C(t) < ۱$. از تعریفِ $C(t)$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{M}_X(\theta)$ باید به ازای یک $\theta > ۰$ موجود باشد. برای هر مقداری از θ که به ازای آن $\mathcal{M}_X(\theta)$ موجود باشد می‌توان قضیهٔ همگراییِ یکنوا [۳] را به‌کاربرد و نوشت

$$\mathcal{M}_X(\theta)e^{-\theta t} = \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} M_X^i \Big/ \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{(\theta t)^i}{i!}. \tag{۱۵}$$

به ازای $i = ۰, ۱, \ldots$ قرار دهید $a_i \equiv \theta^i M_X^i/i!$ و $b_i \equiv \theta^i t^i/i!$. در این صورت (۱۵) نشان می‌دهد که می‌توانیم بنویسیم

$$\mathcal{M}_X(\theta)e^{-\theta t} = \frac{\sum_{i=۰}^{\infty} a_i}{\sum_{i=۰}^{\infty} b_i}$$

که در آن هر دو مجموع همگرا هستند. تعریف می‌کنیم

$$c = \inf_{n \geq ۰} \frac{M_X^n}{t^n}.$$

واضح است که به ازای $i = ۰, ۱, \ldots$، $c \leq a_i/b_i$، و به علاوه همهٔ نسبتهای a_i/b_i مساوی نیستند. کاربردی از لمِ ۲.۱ نشان می‌دهد که به ازای هر مقدارِ $\theta \geq ۰$،

$$M(t) = \inf n \geq ۰ \frac{M_X^n}{t^n} < \mathcal{M}_X(\theta)e^{-\theta t}. \tag{۱۶}$$

مقدارِ $C(t)$ که در (۷) تعریف شده، بزرگترین کرانِ پایینِ مقدارِ $\mathcal{M}_X(\theta)e^{-\theta t}$ است. از آنجا که (۱۶) به ازای همهٔ مقادیرِ θ برقرار است، نتیجه می‌شود که $M(t)$ باید کمتر از یا مساوی با بزرگترین کرانِ پایینِ $C(t)$ باشد. بنابراین

$$M(t) \leq \inf_{\theta \geq ۰} \mathcal{M}_X(\theta)e^{-\theta t} = C(t) \tag{۱۷}$$

که قضیه را برای متغیرهای تصادفیِ نامنفی ثابت می‌کند.

به منظور تعمیمِ اثبات به کلّیهٔ متغیرهای تصادفی، فرض کنید $\widehat{X}$ متغیر تصادفیِ X باشد به شرطِ غیرمنفی بودنِ آن. توزیعِ $\widehat{X}$ از

$$F_{\widehat{X}}(x) = \frac{F_X(x) - (۱ - F_X(۰))}{P[X \geq ۰]}, \qquad x \geq ۰$$

به‌دست می‌آید، لذا

$$dF_{\widehat{X}}(x) = \frac{dF_X(x)}{P[X \geq ۰]}.$$

از آنجا که $\widehat{X}$ یک متغیر تصادفیِ نامنفی است ($\widehat{X}$ می‌تواند در صفر یک تپش داشته باشد)، از (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
M(t) &= \inf_{n \geq ۰} \int_۰^\infty (\frac{x}{t})^n dF_X(x) \\
&= P[X \geq ۰] \inf_{n \geq ۰} \int_۰^\infty (\frac{x}{t})^n dF_{\widehat{X}}(x) \\
&\leq P[X \geq ۰] \inf_{\theta \geq ۰} \int_۰^\infty e^{\theta(x-t)} dF_{\widehat{X}}(x) \\
&= \inf_{\theta \geq ۰} \int_۰^\infty e^{\theta(x-t)} dF_X(x) \\
&= \inf_{\theta \geq ۰} \int_{-\infty}^\infty e^{\theta(x-t)} dF_X(x) = C(t)
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

که آخرین نابرابری در (۱۸) از نامنفی بودنِ تابعِ نمایی و این امر که F_X غیرنزولی است نتیجه می‌شود. این، اثباتِ قضیه را کامل می‌کند. □

کرانِ گشتاوری نیازمندِ کمینه‌سازی روی اعداد صحیح است، در حالی که در موردِ کران چرنف می‌توان کمینه‌سازی را روی اعدادِ حقیقی انجام داد. گاهی این ویژگیْ محاسبهٔ کرانِ چرنف را در مقایسه با کرانِ

گشتاوری آسانتر می‌سازد، زیرا می‌توان فنونِ کمینه‌سازیِ ریاضیات عمومی را برای حل مسأله به کار گرفت. کرانِ گشتاوری را می‌توان به‌آسانی برای همهٔ گشتاورهای حقیقی تعمیم داد، چنانکه در این نتیجهٔ قضیهٔ اصلی نشان داده شده است:

نتیجهٔ ۲.۳.

$$P[X \geq t] \geq \inf_{\alpha \geq 0} \int_0^\infty (\frac{x}{t})^\alpha dF_X(x) \leq C(t), \quad t > 0. \ \square$$

به‌طور گذرا تذکر می‌دهیم که کران گشتاوریِ تعریف‌شده در رابطهٔ (۹) حالت خاصی از کرانِ گشتاوریِ جابه‌جاشده[1] است که به‌صورتِ زیر تعریف می‌شود

$$(۱۹)\ P[X \geq t] = P[X - \alpha > t - \alpha] \leq \inf_{n \geq 0, \alpha < t} \int_\alpha^\infty (\frac{x-\alpha}{t-\alpha})^n dF_X(x) \equiv S(t).$$

با قرار دادنِ $\alpha = 0$ در (۱۹) کرانِ گشتاوری حاصل می‌شود. متأسفانه کرانِ گشتاوریِ جابه‌جاشده در عمل خیلی مفید نیست زیرا نیازمندِ تعیینِ کلّیهٔ گشتاورها تا با گشتاورِ nام، و تعیینِ احتمالِ $P[X \geq \alpha]$ است. ممکن است گاهی اوقات بتوان $P[X \geq \alpha]$ را با استفاده از نوعی تقارن در توزیع یا با کوچکترین کرانِ پایینِ $P[X \geq \alpha]$ ارزیابی کرد. نتیجهٔ زیر از قضیهٔ ۲.۲ از تعریفِ کرانِ گشتاوریِ جابه‌جاشده و با ملاحظهٔ این واقعیت حاصل شده است که کران چرنف نسبت به جابه‌جایی پایاست.

نتیجهٔ ۲.۴. به ازای هر توزیعِ F_X و به ازای همهٔ مقادیرِ t، $S(t) \leq C(t)$، که در اینجا $S(t)$ کران گشتاوریِ جابه‌جاشده است که در رابطهٔ (۹) تعریف شده است. $\square$

۳. مثالها

حال پنج مثال ارائه می‌دهیم که کاربستِ کرانِ گشتاوری را توضیح می‌دهند. سه توزیع از این توزیعها پیوسته‌اند و دو توزیعِ دیگر گسسته‌اند.

مثال ۳.۱ (توزیعِ برنویی[2]). فرض کنید X دارای چگالیِ $f_X(x) = (1-p)z_0 + pz_1$ باشد که در آن z_t اتمی در t است. واضح است که به ازای هر $t \in (0, 1)$، $P[x \geq t] = p$. کرانِ چرنف عبارت است از

$$\begin{aligned} P[X \geq t] &\leq 1, \qquad t \leq p, \\ &\leq (p/t)^t((1-p)/(1-t))^{1-t}, \qquad p < t < 1. \end{aligned}$$

به‌آسانی ملاحظه می‌شود که کرانِ گشتاوری به ازای $t \leq p$ برابرِ ۱ و به ازای $p < t < 1$ برابرِ p/t است. به‌علاوه، این مقدارِ کمینه با قرار دادنِ $n = 1$ حاصل می‌شود. نتیجهٔ ۲.۳ را می‌توان به‌کار بست تا

1) shifted moment bound 2) Bernoulli

کران گشتاوری را به ازای همهٔ مقادیرِ $t \in (\circ, ۱)$ به $۱ - p$، که دقیق است، کاهش داد. در این حالت α را از طرف راست به صفر میل می‌دهیم، و از این مطلب استفاده می‌کنیم که به ازای هر $t > \circ$، $\lim_{\alpha \to \circ} t^{-\alpha} = ۱$.

مثال ۳.۲ (توزیعِ نمایی). فرض کنید X دارای چگالیِ $f_X(x) = e^{-x}$، $x \geq \circ$، باشد. بنابراین $P[X \geq t] = e^{-t}$ و $t \geq \circ$. کرانِ چرنف برای $P[X \geq t]$ عبارت است از

$$\begin{aligned} C(t) &= ۱, \qquad \circ \leq t \leq ۱ \\ &= te^{۱-t}, \quad ۱ < t. \end{aligned}$$

کران گشتاوری عبارت است از

$$\begin{aligned} M(t) &= \inf_{n \geq \circ} \int_{\circ}^{\infty} (\frac{x}{t})^n dF_X(x) \\ &= \inf_{n \geq \circ} \int_{\circ}^{\infty} (\frac{x}{t})^n e^{-x} dx \\ &= \inf_{n \geq \circ} \frac{n!}{t^n} \\ &= \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{\lfloor t \rfloor}} \end{aligned} \tag{۲۰}$$

که در آن $\lfloor t \rfloor$ بزرگترین عدد صحیحی است که از t بیشتر نیست، و بنا به قرارداد $\circ! = ۱$. اگر t یک عددِ صحیح باشد می‌توان تقریب استرلینگِ $t!$ را برای ساده کردنِ فاکتوریل به‌کاربرد، که در این صورت $M(t) \approx \sqrt{۲\pi t} e^{-t}$. کران گشتاوری نسبت به کران چرنف تقریباً به نسبتِ $\sqrt{t}$ بهتر است.

مثال ۳.۳ (توزیعِ گاما). گیریم X دارای چگالیِ $f_X(x) = e^{-\lambda x} \lambda^\alpha x^{\alpha - ۱} / \Gamma(\alpha)$، $\alpha > \circ$، باشد. تابع گامای $\Gamma(\alpha)$ به‌صورتِ

$$\Gamma(\alpha) = \int_{\circ}^{\infty} x^{\alpha - ۱} e^{-x} dx$$

تعریف می‌شود. در حالت خاصی که α یک عدد صحیحِ k باشد $\Gamma(k) = (k - ۱)!$، و بسیاری اوقات این توزیع را توزیعِ اِرلانگ[1] k می‌نامند. می‌توان نشان داد که به ازای $t > \alpha/\lambda$، کرانِ چرنف برای $P[X \geq t]$ عبارت است از $(\lambda t/\alpha)^\alpha e^{\alpha - \lambda t}$ و به ازای $t \leq \alpha/\lambda$ برابرِ ۱ است. برای محاسبهٔ کرانِ گشتاوری، توجه می‌کنیم که گشتاورِ nامِ توزیعِ گاما عبارت است از $\alpha(\alpha + ۱) \ldots (\alpha + n - ۱)/(\lambda t)$،

1) Erlang

بنابراین

$$M(t) = \inf_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{(\lambda t)^n}$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\lfloor\lambda t-\alpha\rfloor)}{(\lambda t)^{\lfloor\lambda t-\alpha+1\rfloor}}$$
$$\prod_{i=0}^{\lfloor\lambda t-\alpha\rfloor} \frac{\alpha+i}{\lambda t}.$$

وقتی α عدد صحیحی مانند k باشد، این کران به‌صورت سادهٔ زیر در می‌آید

$$M(t) = \frac{\lfloor\lambda t\rfloor!}{(k-1)!(\lambda t)^{\lfloor\lambda t-k+1\rfloor}}.$$

اگر به‌علاوه فرض کنیم که حاصل‌ضربِ λt هم عدد صحیحی است، آنگاه می‌توان تقریبِ استرلینگ برای فاکتوریل را به‌کاربرد و نشان داد که $M(t) \approx C(t)\sqrt{k/(\lambda t)}$.

مثال ۳.۴ (توزیع دوجمله‌ای). گیریم X به‌صورتِ دوجمله‌ای با پارامترهای N و p توزیع شده باشد، یعنی $P[X=i] = \binom{N}{i}p^i(1-p)^{N-i}$، $0 \leq i \leq N$. کران چرنف برای $P[x \geq t]$ عبارت است از

$$C(t) = \frac{(1+p(e^{\theta^*}-1))^N}{e^{\theta^* t}}$$

که در آن $\theta^* = \max\{0, \ln(t(1-p)/p(N-t))\}$. کران گشتاوری را نمی‌توان به‌آسانی محاسبه کرد، زیرا بیانِ ساده‌ای برای گشتاورهای X وجود ندارد. بسیاری اوقات وقتی با توزیعهای گسسته سر و کار داریم با این مشکل مواجه می‌شویم. با این حال برای بسیاری از متغیرهای تصادفیِ صحیح‌مقدارِ نامنفی، گشتاورهای فاکتوریل به‌آسانی قابل محاسبه‌اند و می‌توانیم یک کرانِ گشتاوریِ فاکتوریل برای $P[X \geq t]$ محاسبه کنیم. این کران با قرار دادنِ $h(x) = x(x-1)\cdots(x-n)$ در رابطهٔ (۴) به‌دست می‌آید (در اینجا x یک عدد صحیحِ نامنفی است):

$$P[X \geq t] \leq \inf_{0\leq n<t} \frac{E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-n)]}{t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)}$$

برای ملاحظهٔ اینکه این، کران بالایی برای $P[x \geq t]$ است توجه کنید که $x(x-1)\cdots(x-n)$ به ازای مقادیرِ صحیحِ کمتر از n برای x صفر، و به ازای مقادیرِ $x > n$ صعودی و مثبت است. علت آنکه این کران فقط برای متغیرهای تصادفیِ صحیح‌مقدار صادق است آن است که حاصل‌ضربِ $x(x-1)\cdots(x-n)$ به ازای $x < n$ هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را اختیار می‌کند، و فقط به ازای مقادیر صحیحِ x صفر می‌شود.

برای توزیعِ دوجمله‌ای،

$$\begin{aligned} &E[X(X-1)(X-2)\dots(X-n)] \\ &= p^{n+1}N(N-1)\cdots(N-n) \\ &= \mu(\mu-p)\cdots(\mu-np) \end{aligned}$$

که در آن $\mu = Np$ امید ریاضیِ X است. به ازای $t \le \mu$، کران گشتاوریِ فاکتوریل به مقدارِ بدیهیِ ۱ تبدیل می‌شود، در حالی که به ازای مقادیرِ $t > \mu$، کران گشتاوریِ فاکتوریل عبارت است از

$$P[X \ge t] \le \inf_{0 \le n < t} \frac{\mu(\mu-p)\cdots(\mu-np)}{t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)}.$$

این عبارت با قراردادنِ $n = \lfloor (t-\mu)/(1-p) \rfloor$ کمینه می‌شود. اگرچه نتوانسته‌ایم برتریِ کران گشتاوریِ فاکتوریل بر کران چرنف را نشان دهیم،آزمونهای گسترده‌ای که روی دامنهٔ وسیعی از مقادیرِ N و p انجام گرفتند نتوانستند هیچ مجموعه‌ای از پارامترها را مشخص کنند که به ازای آنها کران گشتاوریِ فاکتوریل بزرگتر ازکران چرنف باشد. وقتی p به ۰٫۵ نزدیک باشد و $t \approx N/2$، بهبود کوچک است. اما وقتی p کوچک باشد یا وقتی $t \gg Np$، بهبودِ این کران بر کرانِ چرنف قابل ملاحظه است. در این حالات کرانِ گشتاوریِ فاکتوریل با ضریبِ تقریباً $\sqrt{\mu/t}$ بهتر ازکران چرنف است. بیشتر اوقات برای توزیعهای گسسته، محاسبهٔ کران گشتاوریِ فاکتوریل بسیار آسانتر از محاسبهٔ کران گشتاوری است.

مثال ۳.۵ (توزیع پواسون). گیریم X متغیری تصادفی با توزیع پواسون با پارامترِ λ باشد. در این صورت $P[X = i] = (\lambda^i/i!)e^{-\lambda}$، و به ازای $t > \lambda$، $C(t) = (\lambda_e/t)^t e^{-\lambda}$. مانند توزیعِ دوجمله‌ای، محاسبهٔ کرانِ گشتاوریِ فاکتوریل آسانتر از محاسبهٔ کران گشتاوری است. برای توزیع پواسون، $E[x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)] = \lambda^{n+1}$، لذا به ازای هر عدد صحیحِ $t > \lambda$،

$$\begin{aligned} P[X \ge t] \le \inf_{0 \le n < t} &= \frac{\lambda^{n+1}}{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)} \\ &= \frac{\lambda^{\lfloor t-\lambda+1 \rfloor}(\lceil \lambda - 1 \rceil)!}{t!} \end{aligned}$$

که در آن $\lceil x \rceil$ کوچکترین عدد صحیحی است که کوچکتر از x نیست. به ازای $t < \lambda$، کران گشتاوریِ فاکتوریل ۱ است. اگر λ عددی صحیح باشد، می‌توان تقریب استرلینگ برای فاکتوریل را به‌کار برد و نشان داد که کران گشتاوریِ فاکتوریل را می‌توان به‌خوبی با $\sqrt{\lambda/t}C(t)$ تقریب زد.

در جدولِ ۱ یافته‌هایمان را خلاصه می‌کنیم.

۴. نتایج

در این مقاله نشان داده‌ایم که کرانِ گشتاوری همواره کوچکتر ازکرانِ چرنف است. در هر وضعیتِ خاص، استفاده‌کننده باید از میانِ کرانِ گشتاوری، کران گشتاوریِ جابه‌جاشده، و کران گشتاوریِ فاکتوریل، یکی را

توزیع	کرانِ چرنف	کرانِ گشتاوری
برنویی	$(p/t)^t((1-p)/(1-t))^{1-t}$	p/t
نمایی	te^{1-t}	$\frac{\lfloor t \rfloor!}{t^{\lfloor t \rfloor}}$
گاما	$(\lambda t/\alpha)^\alpha e^{\alpha-\lambda t}$	$\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i/\lambda t), n=\lfloor \lambda t-\alpha \rfloor$
دوجمله‌ای	$(1+p(e^{\theta^*}-1))^N/e^{\theta^* t}$	$\prod_{i=0}^{n}(\mu-ip/t-i), n=\lfloor (t-\mu)/(1-p) \rfloor$
	$\theta^*=\max\{0, \ln(t(1-p)/p(N-t))\}$	
پواسون	$(\lambda e/t)^t e^{-\lambda}$	$\lambda^{\lfloor t-\lambda+1 \rfloor}(\lceil \lambda-1 \rceil)!/t!$

جدول ۱. خلاصهٔ کرانها

انتخاب کند. در بیشتر موارد، کران گشتاوریِ جابه‌جاشده قابل استفاده نخواهد بود زیرا مستلزم محاسبهٔ $P[X \geq \alpha]$ به ازای یک یا چند مقدارِ $\alpha < t$ است. در موارد معدودی که می‌توان این کران را به‌کار برد، پیشنهاد می‌کنیم که از $n = 1$ استفاده شود زیرا محاسبهٔ انتگرال را خیلی آسان می‌سازد. هنگام کار با متغیرهای تصادفیِ صحیح‌مقدار، به‌نظر می‌رسد که کران گشتاوری و کران گشتاوری فاکتوریل در عمل به یک اندازه خوب باشند و استفاده از آن کرانی را پیشنهاد می‌کنیم که به ساده‌ترین صورت برای کران منتهی گردد.

مراجع

[1] J.A. Bucklew, *Large Deviation Techniques in Decision, Simulation, and Estimation*, John Wiley, New York, 1990.

[2] H. Chernoff, A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations, *Annals of Mathematical Statistics*, 23 (1952) 493-507.

[3] R.L. Wheeden, and A. Zygmund, *Measure and Integral*, Marcel Dekker Inc., New York, 1977, pp. 66-70.

Thomas K. Philips
Advanced Research, Rogers, Casey and Associates, Darien. CT 06820, USA
Randolph Nelson
Investment Research, OTA Limited Partnership, Purchase, NY 10577, USA
ترجمهٔ مسعود نخکوب
دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ ریاضی

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۱۷ (بهار ۱۳۷۵)، صص. ۷۹ تا ۹۲

یکصد سال نظریهٔ گروههای متناهی*

پیتر م. نویمان

مقدمه

ؤیلیام برنساید در دیباچهٔ نخستین چاپِ کتابش (۱۸۹۷) در نظریهٔ گروههای متناهی [۱] نوشت: «این موضوع، موضوعی است که پیش از این در این کشور توجه کمی به آن شده است؛ اگر توسط این کتاب موفق به برانگیختنِ علاقه در بین ریاضیدانانِ انگلیسی در شاخه‌ای از ریاضیاتِ محض شوم که هر چه بیشتر مطالعه شود مجذوب‌کننده‌تر است، رضایتِ خاطر زیادی خواهم یافت.» او در نطقِ آغازِ دورهٔ ریاستش که در انجمن ریاضی لندن در ۱۲ نوامبر ۱۹۰۸ ایراد کرد باز به این نکته اشاره نمود. متن منتشرشدهٔ آن [2] چنین شروع می‌شود:

«به من پیشنهاد شده است که از این موقعیت برای ارائهٔ گزارشی از پیشرفتهای اخیرِ نظریهٔ گروههای از مرتبهٔ متناهی استفاده کنم. بدون تردید، پیشرفتِ بسیار قابل ملاحظه‌ای در بیست سالِ اخیر، و بالاخص در ده سالِ اخیر، حاصل شده است. اما این پیشرفت در جهتهای بسیار متفاوتی بوده است، و شاید اکنون بسیار زود باشد که بخشهای متفاوتِ آن در تناسب و چشم‌اندازِ شایستهٔ خودشان معرفی شوند. فکر می‌کنم آنچه که پروفسور هیلبرت در ۱۸۹۷ در گزارشِ خود برای نظریهٔ یکپارچهٔ اعداد جبری با توانایی بسیار انجام داد در حال حاضر برای نظریهٔ گروههای متناهی امکان‌پذیر نباشد. اما در وضعیت فعلی، اعتراضِ جدیتر برای هر تلاشی از طرف من جهتِ ارائهٔ گزارشی از پیشرفتهای اخیر در این نظریه این است که چنین گزارشی مسلماً برای عدهٔ قابل توجهی از مستمعان جالب

*) Peter M. Neumann, A hundred years of finite group theory, bound for positive tail probabilities, *The Mathematical Gazette*, vol. 80, no. 487 (1995), 106–118

نخواهد بود. بی‌شک، واقعیت این است که نظریهٔ گروههای از مرتبهٔ متناهی تا کنون در برانگیختنِ علاقهٔ ریاضیدانانِ انگلیسی، به استثنای تعداد خیلی کمی از آنها، وامانده است؛ و این فقدان علاقه در انگلستان در مقایسه با میزان توجهِ وقف‌شده به این موضوع، هم در بقیهٔ اروپا و هم در امریکا، برای من بسیار جالب توجه است. من قصد دارم نطق خویش را به بررسیِ اختلاف بارز در میزان توجهِ وقف‌شده به این موضوع در اینجا و جاهای دیگر، و به سعی برای توضیحِ این اختلاف اختصاص دهم.»

بعد از حدوداً یکصد سال، وضعیتْ بسیار متفاوت است. تقریباً همهٔ رشته‌های ریاضیاتِ دانشگاهی مقداری از نظریهٔ گروهها را شامل می‌شوند، و در بسیاری از دانشگاهها بخشهای عمیقترِ این موضوع به‌عنوان دروس اختیاری پیشرفته ارائه می‌شوند. متجاوز از سی سال است که مقدماتِ نظریهٔ گروهها حتی در برنامهٔ درسیِ برخی مدارس موجود است. در حالی که در ۱۸۹۷ (و در ۱۹۰۸ نیز) ؤیلیام بِرنساید تنها ریاضیدانِ انگلیسی بود که به‌طور جدی در نظریهٔ گروهها کار می‌کرد، اکنون باید متجاوز از پنجاه نفر باشند که علاقهٔ تحقیقاتیِ اصلیِ آنها در همین زمینه است (و در اوجِ آن در دههٔ ۱۹۶۰ و دههٔ ۱۹۷۰ تعداد می‌بایست بیش از این بوده باشد). هدف من در این یادداشت شرحِ مختصرِ این پیشرفت است. این گزارشْ بسیار شخصی خواهد بود، اما اگر موجبِ توجه به زمینه‌ای از تاریخِ ریاضیات شود که در آن تحقیقاتِ جالبی ممکن است به‌وقوع پیوندد، آنگاه این گزارش موفق خواهد بود.

امروزه نظریهٔ گروهها چندین رشتهٔ اصلی دارد: نظریهٔ گروههای متناهی، نظریهٔ سرشت[1]ها و نمایش، نظریهٔ گروههای نامتناهی، نظریهٔ گروههای لی و گروههای جبری، نظریهٔ محاسباتیِ گروهها. حتی پیش از ۱۸۹۷ هم نظریهٔ گروههای متناهی یک مبحثِ پیشرفته بود؛ نظریهٔ سرشتها اندکی پیش در برخی مقالاتِ فروبینیوس[2] ظاهر شده بود؛ نظریهٔ گروههای نامتناهی در مرحلهٔ اولیهٔ رشدِ خود بود؛ نظریهٔ گروههای لی نیز همین‌طور بود؛ گروههای جبری و نظریهٔ محاسباتیِ گروهها نیم‌قرن از زمان شروعِ خود در آینده فاصله داشت. اگر نظرِ خود را روی گروههای متناهی متمرکز می‌کنم فقط برای نگاه داشتنِ [اندازهٔ] این گزارش در حدودِ معقول است. مرورِ پیشرفتهای سایر بخشهای نظریهٔ گروهها در طی یکصدسالِ گذشته جذابیتِ زیادی خواهد داشت، اما باید تا فرصتی دیگر منتظر ماند.

قدری نظریهٔ گروههای متناهی

اگرچه مقصود از این مقاله ارائهٔ یک گزارشِ فنّی نیست، اما باید فرض کنم که خواننده می‌داند که گروه چیست (دستگاهی جبری متشکل از مجموعه‌ای مجهز به یک عملِ دوتایی که این عملْ شرکت‌پذیر است، و چنان است که یک عضو همانیِ e وجود دارد، و هر عضوِ g دارای یک معکوسِ g^{-1} است) و مفهومِ زیرگروه چیست (زیرمجموعه‌ای که تحت عملِ دوتایی بسته است، شاملِ عضوِ همانی است، و شاملِ

1) character 2) Frobenius

معکوسِ هر یک از اعضای خود است). گروهِ G جابه‌جایی، یا آبلیْ، است هرگاه به ازای هر $g, h \in G$، $gh = hg$. به‌یاد آورید که کلمهٔ «مرتبه» به دو معنای فنّیِ متفاوت، اما مربوط به هم، به‌کار می‌رود. مرتبهٔ $|G|$ی یک گروهِ G تعداد اعضای آن است؛ مرتبهٔ یک عضوِ g، $\mathrm{ord}(g)$، کوچکترین عدد صحیح مثبتِ nای است که $g^n = e$؛ این مفاهیم با این امر که $\mathrm{ord}(g)$ مرتبهٔ گروه دوریِ $\langle g \rangle$ی تولیدشده توسط g است به هم مرتبط هستند. نظریهٔ گروههای متناهی با دو قضیهٔ مشهور شروع می‌شود. اولینِ اینها قضیهٔ لاگرانژ است، که بیان می‌دارد که مرتبهٔ هر زیرگروه مرتبهٔ تمامیِ گروه را عاد می‌کند (و یک صورتِ دیگرِ آن، که ممکن است به‌عنوان حالت خیلی خاصی از آن به‌نظر آید، بیان می‌دارد که مرتبهٔ هر عضوِ گروهْ مرتبهٔ گروه را عاد می‌کند). دومی قضیهٔ کوشی است با این مضمون که اگر یک عدد اولِ p مرتبهٔ یک گروه متناهیِ G را عاد کند، آنگاه G باید شامل عضوی از مرتبهٔ p باشد. اگر می‌گویم که این جایی است که نظریهٔ گروههای متناهی آغاز می‌شود، مقصودم بی‌اهمیت جلوه دادنِ این قضایا نیست. چندین دهه طول کشید تا قضیهٔ لاگرانژ[1] به شکلِ نهایی‌ای که اکنون دارد فهمیده شود. قضیهٔ کوشی، که در اواخرِ ۱۸۴۵ اثبات و منتشر شد، در آن زمان موفقیتِ بزرگی بود. مقاله‌ای که در آن کوشی این قضیه را منتشر کرد متجاوز از ۱۰۰ صفحه است، که بیشترِ این صفحات برای وضعِ ابزارهای مورد نیاز برای اثباتش اختصاص داده شده است. به دلیلِ فهمِ عمیقتر و پیشرفت عظیم در نمادگذاری و روشهای بیان است که اکنون می‌توانیم این قضایا را به‌طور نسبتاً ساده‌ای ثابت کنیم، و دانش‌آموزان را در مدرسه یا دانشجویان را در سالهای اولیهٔ دانشگاه نه‌فقط به صحتِ این قضایا بلکه به قابل فهم بودنِ آنها متقاعد سازیم.

این قضایا به نظریهٔ گروههای متناهی حال و هوایی حسابی می‌بخشند. قضایای سیلو، که در سال ۱۸۷۲ منتشر شدند، شدیداً این حال و هوا را تقویت می‌کنند. قضایای سیلو نظریهٔ گروهها را یک گامِ مهم به پیش برد؛ دروس دانشگاهی که در آنها این قضایا ظاهر می‌شوند، معمولاً دروس اختیاریِ پیشرفتهِ دورهٔ کارشناسی‌اند. این قضایا در موردِ گروههای از مرتبهٔ توانهای اعدادِ اول‌اند. به ازای هر عددِ اولِ p، گروهی چون P که در آن $\mathrm{ord}(x)$ به ازای هر x در P توانی از p است به pـگروهْ مشهور است. نتیجه‌ای از قضیهٔ لاگرانژ و قضیهٔ کوشی آن است که گروهِ متناهیِ P یک pـگروه به این مفهوم است اگر و تنها اگر $|P|$ توانی از p باشد. حال فرض کنید G یک گروه متناهیِ دلخواه باشد و فرض کنید p یک عددِ اول باشد. زیرگروههایی از G که pـگروه باشند به pـزیرگروه مشهورند؛ اگر b بزرگترین عدد صحیحی باشد که p^b، $|G|$ را عاد می‌کند آنگاه زیرگروههای از مرتبهٔ p^b به pـزیرگروهِ سیلوی G مشهورند. حکمِ اولِ قضایای سیلو آن

---

۱) 'Lagrange's Theorem' [«قضیهٔ لاگرانژ»] را با حرفِ بزرگِ 'T' می‌نویسم زیرا یک نام[ـِ خاص] است و نه نشان‌دهندهٔ انتساب. ژوزف‌لویی لاگرانژ در مقاله‌ای در ۱۷۷۱ـ۱۷۷۰، بسیار قبل از آنکه نظریهٔ قابل تشخیصی برای گروهها موجود باشد، به چیزی حکم کرد که می‌توان آن را حالتِ بسیار خاصی از این قضیه تعبیر کرد، اما اثباتی که او ارائه کرد متأسفانه اشتباه بود. گرچه می‌توان شکل گرفتنِ آنچه را که حالا قضیهٔ لاگرانژ نامیده می‌شود پی‌آمدِ مستقیمِ آن مطلب دانست، مطالبِ مفصلی وجود دارد که آنها را به هیچ وجه نمی‌توان به او نسبت داد. از طرف دیگر، کوشی واقعاً قضیهٔ کوشی را کشف و اثبات نمود ('Cauchy's theorem' [«قضیهٔ کوشی»] با حرفِ کوچکِ 't'، زیرا این یک کاربردِ عادیِ کلمهٔ 'theorem' [«قضیه»] به‌صورتِ اسم است) که حاملِ نامِ اوست، و اگرچه مفادِ آن از گروههای جایگشتی به گروههای مجرد تغییر یافته است، به‌نظر می‌رسد که انتسابِ این نام بجاست.

است که p-زیرگروههای سیلو موجودند. لذا، برای مثال، در هر گروه از مرتبهٔ ۱۰,۰۰۰ (تعداد زیادی از این گروهها موجود است) همواره حد اقل یک زیرگروه از مرتبهٔ ۱۶ و حد اقل یک زیرگروه از مرتبهٔ ۶۲۵ موجود خواهد بود. یک شکلِ تقویت‌شدهٔ بسیار مفیدِ اولین قضیهٔ سیلو، که خودِ سیلو توجه صریحی به آن معطوف نداشت گرچه در اثباتِ او به‌طور ضمنی وجود دارد، آن است که هر p-زیرگروهٔ مشمول در یک p-زیرگروهِ سیلوی G است. حکم دومِ قضایای سیلو آن است که هر دو p-زیرگروهِ سیلوی G با یکدیگر مزدوج‌اند. این بدان معنی است که اگر P_1 و P_2، p-زیرگروههای سیلو باشند آنگاه یک عضوِ g در G موجود است که $P_2 = g^{-1}P_1g$. در این صورت نگاشتِ $P_1 \to P_2$ که با $h \longmapsto g^{-1}hg$ داده می‌شود یک یکریختی است. بنابراین، به‌ویژه، تمامیِ p-زیرگروههای سیلوی هر گروهِ مفروضِ G یکریخت‌اند: اگر یکی از آنها دوری باشد آنگاه همهٔ آنها دوری هستند؛ اگر یکی از آنها آبلی باشد آنگاه همهٔ آنها آبلی‌اند. حکم سومِ قضایای سیلو آن است که تعدادِ p-زیرگروههای سیلوی متفاوت در G برابر است با ۱ به پیمانه p ــ اما این مطلب به مقالهٔ حاضر مربوط نخواهد بود. هر قدر در بارهٔ p-گروههای متناهی بیشتر بدانیم این قضایا مفیدتر واقع می‌شوند. سیلو در صدد برآمد ثابت کند که هر چنین گروهی، به یک مفهومِ بسیار قوی، به آبلی بودنْ نزدیک است. نکتهٔ مهم آن است که اگر G یک p-گروهِ متناهیِ غیربدیهی باشد آنگاه مرکزِ آن غیربدیهی است، یعنی اعضایی غیرهمانی در G وجود دارند که با هر عضوِ G جابه‌جا می‌شوند.

هر هم‌مجموعهٔ راستِ زیرگروهِ H در یک گروهِ G، زیرمجموعه‌ای است به شکلِ Hx (یعنی $\{hx|h \in H\}$)، که در آن $x \in G$؛ به‌طور مشابه، هر هم‌مجموعهٔ چپْ زیرمجموعه‌ای است به شکلِ xH (یعنی $\{xh|h \in H\}$). زیرگروهِ H نرمالْ تعریف می‌شود (این مفهوم ریشه در آنچه که گالوای جوان در ۱۸۳۲ نوشت دارد) اگر هر هم‌مجموعهٔ راستِ Hx یک هم‌مجموعهٔ چپ باشد (و لذا لزوماً $Hx = xH$)؛ به‌طور معادل، H نرمال است اگر خودْمزدوج باشد به این معنی که به ازای هر x در G، $x^{-1}Hx = H$. وقتی این حالت واقع شود، به خودِ گردایهٔ $\{Hx|x \in G\}$ از هم‌مجموعه‌ها می‌توان به طریقی بسیار طبیعی ساختارِ گروه داد. این گروه را، که در شکلِ جدیدِ خود در مقاله‌ای از هولدِر در ۱۸۸۹ پدیدار شد (به [۱۳] مراجعه کنید)، معمولاً با G/H نشان می‌دهند و گروهِ خارج‌قسمتِ G بر H می‌نامند. به معنایی بسیار قوی می‌توان G را به‌صورتِ نوعی «حاصل‌ضرب» از زیرگروهِ نرمالِ H و گروهِ خارج‌قسمتِ G/H انگاشت، به همان طریقی که یک عدد صحیح مثل ۲۰ را می‌توان به‌صورتِ حاصل‌ضربِ ۲ و ۱۰ انگاشت.

روند معکوس، شروع با گروههای X و Y و یافتنِ گروههای Gای که دارای زیرگروهِ نرمال Hای باشند که H یکریخت با X و گروهِ خارج‌قسمتِ G/H یکریخت با Y باشد، موضوعِ نظریهٔ توسیع است. یک چنین گروه G، به توسیعی از X با Y مشهور است. در اینجا مقایسه با اعدادِ طبیعی فایدهٔ خود را از دست می‌دهد زیرا معمولاً بیش از یک توسیعِ X با Y موجود خواهد بود. برای مثال، هم چهارگروهِ کلاینِ V_4 و هم گروهِ دوریِ $\mathbb{Z}_4$ توسیعهایی از $\mathbb{Z}_2$ با $\mathbb{Z}_2$ هستند؛ یا علاوه بر این، هم گروهِ دوریِ $\mathbb{Z}_6$ و هم گروه غیرآبلی از مرتبهٔ ۶ (که می‌توان آن را به‌صورتِ گروهِ متقارنِ S_3 یا به‌صورت گروهِ دووجهیِ تمامی تقارنهای یک مثلثِ متساوی‌الاضلاع در نظر گرفت)، توسیعهایی از $\mathbb{Z}_3$ با $\mathbb{Z}_2$ هستند. در زمانِ برنساید در بارهٔ نظریهٔ توسیع

مطالبِ کمی می‌دانستند. امروزه این نظریه بخشی پیشرفته از نظریهٔ گروههاست که قویاً به دو بخش از جبر، یعنی نظریهٔ نمایش و نظریهٔ همانستگی، که هر دو خارج از حیطهٔ این مقاله‌اند، وابسته است.

زیرگروه بدیهیِ $\{e\}$ و تمامِ گروهِ G همواره زیرگروههای نرمالی از G هستند. اگر زیرگروهِ نرمالِ دیگری وجود نداشته باشد، یعنی اگر هیچ زیرگروه نرمالِ سرهٔ غیربدیهی‌ای از G موجود نباشد، آنگاه G را یک گروهِ ساده نامند. به ازای هر عدد اولِ p، گروه دوریِ $\mathbb{Z}_p$ مسلماً ساده است زیرا بنا بر قضیهٔ لاگرانژْ این گروه هیچ زیرگروه سرهٔ غیربدیهی ندارد؛ مثالهای مشهورِ دیگر گروههای متناوبِ A_n متشکل از تمامیِ جایگشتهای زوجِ مجموعه‌ای از اندازهٔ n(به ازای $n \geq 5$)اند. درست همان‌طور که هر عددِ صحیحِ مثبت به‌صورتِ حاصل‌ضربی از اعدادِ اولْ قابل بیان است، هر گروه متناهیِ G را نیز می‌توان به‌صورتِ ترکیبی از گروههای ساده انگاشت: اگر G ساده باشد، آنگاه چیزی برای اثبات نداریم؛ در غیر این صورت، بنا بر تعریف، این گروه دارای یک زیرگروهِ نرمالِ سرهٔ غیربدیهیِ H است؛ اگر H و G/H هر دو ساده باشند آنگاه چیزِ دیگری برای اثبات نداریم؛ در غیر این صورت یکی یا هر دوی آنها را می‌توان بیشتر تجزیه کرد؛ این روندْ زمانی متوقف می‌شود که گروههایی که به‌دست آمده‌اند دارای هیچ زیرگروهِ نرمالِ سرهٔ غیربدیهی نباشند، یعنی ساده باشند. گروههای ساده‌ای را که در انتهای این روندِ تجزیهٔ یک گروهِ متناهی پدیدار می‌شوند عاملهای ترکیبِ آن گروه می‌نامند. قضیهٔ ژوردان-هولدر (هولدر ۱۸۸۹) بیان می‌کند که هر طریقی که برای تجزیهٔ G اختیار کنیم، یعنی هر زیرگروهِ نرمالِ سرهٔ غیربدیهی را در هر گام از این تجزیه اختیار کنیم، همواره در پایان به گردایهٔ واحدی از گروههای ساده خواهیم رسید. ترتیبی که آنها در این گردایه ظاهر می‌شوند ممکن است متفاوت باشد، اما گروههای ساده، و چندگانگیِ آنها، تنها به G بستگی دارند و به روندِ ویژه‌ای که با آن به‌دست آمده‌اند بستگی ندارند. بنابراین این قضیه را می‌توان مشابهِ قضیهٔ اساسیِ حساب انگاشت که بیان می‌دارد که تجزیهٔ هر عددِ صحیحِ مثبت به‌صورت حاصل‌ضربی از اعدادِ اول، با تقریبِ ترتیبی که عوامل در آن مرتب شده‌اند، یکتاست.

آنچه که از این ملاحظات پدیدار می‌شود آن است که اگر بتوانیم تمامیِ گروههای سادهٔ متناهی را بشناسیم و اگر راه‌حلِ رضایت‌بخشی برای مسألهٔ توسیع داشته باشیم آنگاه در موقعیتِ مستحکمی برای دانستنِ مطالبِ بسیار زیادی در بارهٔ تمامیِ گروههای متناهی قرار می‌گیریم.

گروههای حل‌پذیر

برای توضیحِ این استراتژی بگذارید موقتاً فرض کنیم که هیچ گروهِ ساده‌ای به‌جز گروههای دوریِ $\mathbb{Z}_p$ از مرتبهٔ اول وجود ندارد ــ یا، در واقع، توجهِ خود را بر زیرردهٔ تمامیِ گروههای متناهی‌ای متمرکز کنیم که می‌توان آنها را از این گروهها، با روندِ توسیع، ساخت. گروهی متناهی حل‌پذیر نامیده می‌شود اگر تمامی عاملهای ترکیبِ آن گروههای دوری از مرتبهٔ اول باشند.[1] از تعریف نتیجه می‌شود که هر توسیعِ G از گروهِ حل‌پذیر

۱) کاربردِ این اصطلاحْ با وقوف به کشفِ جالب توجهِ گالوا است که حل‌پذیر بودنِ معادله‌ای چندجمله‌ای به‌وسیلهٔ رادیکالها چنین مشخص می‌شود که گروهِ خاصی، که حالا به گروهِ گالوای معادله معروف است، دارای این خاصیت باشد یا نباشد.

X با گروهِ حل‌پذیرِ Y، خود حل‌پذیر است؛ نیز آنکه هر گروهِ آبلیِ متناهیْ حل‌پذیر است. از قضیهٔ سیلو که هر p-گروهِ متناهیِ غیربدیهیْ دارای مرکزِ غیربدیهی است می‌توان (با استفاده از استقراء روی مرتبهٔ گروه) نتیجه گرفت که هر گروهِ متناهیِ از مرتبهٔ توانِ عددی اولْ حل‌پذیر است. لذا مثالهای فراوانی از گروههای حل‌پذیرِ متناهی وجود دارد؛ و، اساساً چون کار با عاملهای ترکیبِ آنها نسبتاً ساده است، چیزهای زیادی در بارهٔ ساختار آنها معلوم می‌شود.

در ۱۹۲۸، یک سال بعد از مرگِ برنساید، ریاضیدانی جوان به نامِ فیلیپ هال، که بعدها اعتبارِ جهانیِ عمده‌ای به‌دست آورد، اولین مقالهٔ خود را در نظریهٔ گروهها انتشار داد ([۴]، صص. ۵۶ـ۴۹ را ملاحظه کنید). هال، که وقتی هنوز یک دانشجوی دورهٔ لیسانس در کِیمبریج بود شیفتهٔ کتابِ برنساید شده بود [۵]، تعدادی قضایای جالب توجه در بارهٔ ساختارِ گروههای حل‌پذیرِ متناهی اثبات کرد.

امروزه، برای قدردانی از کارِ هال، زیرگروهِ H از گروهِ متناهیِ G را یک زیرگروهِ هال می‌خوانند اگر مرتبهٔ آن، $|H|$، و شاخصِ آن، $|G : H|$، نسبت به هم اول باشند. (به‌یاد آورید که شاخصِ $|G : H|$ عبارت است از تعدادِ هم‌مجموعه‌های راستِ H در G، و این، اساساً بنا بر قضیهٔ لاگرانژ، برابر است با $|G|/|H|$.) به‌ویژه، زیرگروههای سیلو زیرگروههای هال هستند. اما معمولاً تعدادِ زیرگروههای هال از زیرگروههای سیلو بسیار زیادتر است. برای مثال، در گروهی از مرتبهٔ ۶۰، زیرگروههای سیلو دارای مرتبهٔ ۳ یا ۴ یا ۵ هستند، در حالی که مرتبه‌های ممکن برای زیرگروههای هال عبارت‌اند از ۱، ۳، ۴، ۵، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۶۰. با این حال، لزومی ندارد که همگیِ اینها ظاهر شوند: اثباتِ این مطلب که گروهِ متناوبِ A_5 دارای هیچ زیرگروهی از مرتبهٔ ۱۵ و هیچ زیرگروهی از مرتبهٔ ۲۰ نیست تمرینِ جالبی است. مقالهٔ ۱۹۲۸ـِ هال شامل این قضیه است که اگر G حل‌پذیر باشد و $|G| = mn$ که در آن m و n نسبت به هم اول هستند، آنگاه G باید شامل زیرگروههایی از مرتبهٔ m باشد، و به‌علاوه هر دو زیرگروه از مرتبهٔ m با یکدیگر مزدوج‌اند. برای گروههای حل‌پذیر، این تعمیمِ بسیار مفیدی از قضایای سیلو است. این قضیه سنگِ بنای عمارتی عظیم و زیباست. به خواننده‌ای که علاقه‌مند به کاوشِ بیشتر در آن است توصیه می‌شود که به رسالهٔ دورک و هاکس [۶] مراجعه کند.

در ۱۹۳۷ هال عکسِ مطلب را انتشار داد (به [۴]، صص. ۲۰۱ـ۱۹۹ نگاه کنید): اگر گروهِ متناهیِ G به ازای هر مقسوم‌علیهِ m از $|G|$ که m و $|G|/m$ نسبت به هم اول‌اند شامل زیرگروههایی از مرتبهٔ m باشد، آنگاه G باید حل‌پذیر باشد. البته این مطلب به اندازه‌ای که قضیه‌ای در مورد گروههای حل‌ناپذیر است قضیه‌ای در مورد گروههای حل‌پذیر نیست. این دو قضیه به‌سرعت به دو جزءِ اساسیِ نظریهٔ گروههای متناهی تبدیل شدند و، به‌ویژه، نقشی تقریباً به همان بزرگیِ نقش قضایای سیلو در جستجو برای گروههای ساده بازی کرده‌اند.

گروههای ساده

یک استراتژیِ طبیعی برای رده‌بندیِ تمامیِ گروههای سادهٔ متناهی وجود دارد. از یک طرف، لازم است که به هر تعداد که می‌توان، کشف کرد؛ سپس باید ثابت کرد که بیش از آن موجود نیست. البته تا زمانی که این فهرست واقعاً کامل شود قسمتِ دومِ چنین برنامه‌ای محتوم به شکست است. با وجود این، تلاشهای شکست‌خورده جاهایی را نشان می‌دهند که ممکن است گروههای جدیدی یافت. این آن چیزی است که اتفاق افتاد.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، گروههای دوریِ $\mathbb{Z}_p$ از مراتبِ اعدادِ اولْ مثالهای طبیعیِ گروههای ساده هستند، و گروههای متناوبِ A_n (به ازای $n \geq ۵$)، تقریباً به همان اندازه مشهورند، هرچند که به آن اندازه آسان نیستند. تقریباً تمامیِ گروههای سادهٔ متناهیِ شناخته‌شدهٔ دیگر از گونه‌هایی از روشِ ساختِ زیر حاصل می‌شوند. از یک عددِ اولِ p و مجموعهٔ $\mathbb{Z}_p$ از اعداد صحیح به پیمانهٔ p (که به حسابِ آشنای خود مجهز شده است) شروع کنید؛ مجموعهٔ $\mathrm{SL}(۲,p)$ از تمامیِ ماتریسهای (۲×۲)ی $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را که در آن $a,b,c,d \in \mathbb{Z}_p$ و $ad - bc = ۱$ تشکیل دهید؛ این، تحتِ ضربِ ماتریسها یک گروه است، و دارای زیرگروه نرمالِ $\{I, -I\}$ است، که در آن I ماتریس همانیِ (۲×۲)ی $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ است؛ گروهِ خارج‌قسمتِ $\mathrm{SL}(۲,p)/\{\pm I\}$ را تشکیل دهید. این گروه به $\mathrm{PSL}(۲,p)$ مشهور است. لذا $\mathrm{PSL}(۲,p)$ عبارت است از گروهِ تمامیِ ماتریسهای ۲×۲ با دترمینانِ ۱ روی $\mathbb{Z}_p$ که در آن هر ماتریس با قرینه‌اش یکی گرفته شده است. اگر $p \geq ۵$ آنگاه (همان‌طور که در ۱۸۳۲ هم برگالوا معلوم بود) این گروه ساده است و مرتبهٔ آن $\frac{۱}{۲}p(p^۲ - ۱)$ است.

این ساختمان را از طرق زیادی می‌توان تغییر داد. نخست، می‌توان درایه‌ها را از هر میدانِ متناهی‌ای اختیار کرد. میدانی با q عضو وجود دارد اگر و تنها اگر q توانی از یک عددِ اول باشد و در این صورت این میدان با تقریبِ یکریختی یکتاست (بیشترِ این مطالب را گالوا می‌دانست). این میدان گروههای $\mathrm{PSL}(۲,q)$ را می‌سازد. بعد، می‌توانیم ماتریسهای $d \times d$ را به‌کار بریم ــ گرچه در آن صورت باید نه فقط هر ماتریس و قرینهٔ آن، بلکه همهٔ ماتریسهایی را که مضاربِ اسکالرِ یکدیگرند یکی بگیریم. این طریق به گروههای $\mathrm{PSL}(d,q)$ منجر می‌شود. این گروهها ساده‌اند اگر $d \geq ۳$ یا اگر $d = ۲$ و $q \geq ۴$. سایر گونه‌ها از تعیینِ انواع خاصی از ماتریسها ــ ماتریسهای متعامد، یکانی، یا سیمپلکتیک[1] ــ به‌دست می‌آیند. این گروهها ــ گروههای خطی، متعامد، یکانی و سیمپلکتیک ــ به «گروههای کلاسیک» مشهورند. اگر درایه‌ها اعدادِ حقیقی یا مختلط اختیار شوند آنگاه مثالهایی نوعی از آنچه که گروههای لیِ ساده نامیده می‌شوند به‌دست می‌آید. حال، گروههای لیِ سادهٔ دیگری نیز موجودند و، با تعمیمِ بیشتر، می‌توان مشابهِ گروههای لیِ سادهٔ تعریف‌شده روی میدانِ اعدادِ مختلط را روی میدانهای متناهی ساخت و نیز می‌توان

1) symplectic

نسخه‌های «پیچیده»[1]ی خاصی از اینها را به‌دست آورد. نکته آن است که این ساختمانها تعدادی متناهی از خانواده‌های نامتناهیِ به‌صراحتْ شناخته‌شده و خوبْ‌درک‌شده از گروههای سادهٔ متناهی به‌دست می‌دهند. در کلّ ۱۶ خانواده از آنها موجودند. برخی، یعنی گروههای کلاسیک، خانواده‌های ۲پارامتری‌اند ــ خانوادهٔ $\mathrm{PSL}(d,q)$، که در آن هم بُعدِ d و هم اندازهٔ qی میدانِ درایه‌ها در اختیارِ ماست، مثالی نوعی است. در موردِ بقیه، بُعد ثابت است و تنها اندازهٔ qی میدان می‌تواند تغییر کند. امروزه این گروهها، به علت ارتباط با نظریهٔ گروههای لی، عموماً به گروههای ساده از نوعِ لی موسوم‌اند.

به غیر از گروههای دوریِ $\mathbb{Z}_p$ و گروههای متناوبِ A_n (به ازای $n \geq 5$) و گروههای ساده از نوع لی، دقیقاً ۲۶ گروهِ سادهٔ متناهیِ دیگر شناخته شده‌اند. اینها را گروههای پراکنده می‌نامند. پنج تا از آنها را امیل ماتیو[2] در ۱۸۶۱ کشف کرد؛ ۲۱ گروهِ دیگر بین ۱۹۶۴ و ۱۹۸۱ پدیدار شدند.

قبلاً، در ۱۸۷۰، کامی ژوردان در پیشگفتارِ رسالهٔ عظیمِ خویش [۷]، توجهِ همه را به اهمیتِ گروههای سادهٔ متناهی جلب کرده بود. در این کتاب او گروههای سادهٔ بسیاری را مشخص کرد: گروههای متناوبِ A_n به ازای $n \geq 5$ (اگرچه اثبات او برای سادگیِ آنها ناقص بود)، گروههای $\mathrm{PSL}(d,p)$، و گروههای سیمپلکتیک و متعامد روی میدانهای $\mathbb{Z}_p$. (برای ارزیابیِ کاملتری از اهمیتِ این کتاب به [۸] مراجعه کنید.) در طول سالها سیاههٔ او به‌تدریج گسترش یافت. تا ۱۹۰۰ تمامیِ گروههای کلاسیکْ مشخص شده بودند ([۹] را ملاحظه کنید). چند سال بعد دیکسن دو تا از خانواده‌های ۱پارامتری را کشف کرد. در ۱۹۵۴ شِواله[3] ارتباطِ بین آنها و گروههای لی را مشاهده کرد و توانست این سیاههٔ خانواده‌ها را نظام‌مند کند و گسترش دهد. مدت زمان زیادی نگذشت که تعدادی از ریاضیدانانْ ساختمانِ شواله را برای ارائهٔ به‌اصطلاحْ «انواعِ پیچیده»ی گروههای شواله تغییر دادند. تا ۱۹۶۲ فهرستِ گروههای از نوع لی به شکلِ نهاییِ خود رسیده بود.

بخشِ دیگرِ این استراتژی با مقاله‌ای از اُتو هولدر که در ۱۸۹۲ انتشار یافت آغاز شد. او تمامیِ مرتبه‌های ممکن تا ۲۰۰ را بررسی کرد و نشان داد که اگر G یک گروهِ سادهٔ غیردوری باشد که $|G| \leq 200$، آنگاه یا $|G| = 60$ و G با گروهِ متناوبِ A_5 یکریخت است، یا $|G| = 168$ و G با $\mathrm{PSL}(2,7)$ یکریخت است. در زمانِ نگارشِ کتابِ برنساید در ۱۸۹۷، تعدادی از مردم در نقاط مختلفِ جهان روی این جنبه از جستجو برای گروههای ساده کار می‌کردند. تمامیِ گروههای ساده از مرتبه‌های تا ۱۰۹۲ فهرست شده بودند ([۱]، ص. ۳۷۰ را ملاحظه کنید). قضایای واقعاً مشکلی اثبات شده بودند: برای مثال، معلوم شده بود که اگر G یک گروه ساده از مرتبهٔ مرکب باشد و p کوچکترین عددِ اولی باشد که $|G|$ را عاد می‌کند آنگاه p-زیرگروههای سیلوی G نمی‌توانند دوری باشند؛ بنابراین، به‌ویژه p^2 باید $|G|$ را عاد کند. قضیهٔ بسیار عمیقتری که وِیلیام برنساید در ۱۹۰۴ ثابت کرد اوجِ تلاشهای صورت‌گرفته توسط چندین ریاضیدان بود. این قضیه که اغلب آن را قضیهٔ $p^\alpha q^\beta$ی برنساید می‌نامند، حکم می‌کند که اگر مرتبهٔ گروهِ متناهیِ G دقیقاً بر دو عددِ اولْ بخش‌پذیر باشد آنگاه G نمی‌تواند ساده باشد. به‌طور معادل، هر گروهی که مرتبهٔ آن

1) twisted 2) Émil Mathieu 3) Chevalley

حاصل‌ضربِ توانهایی از حد اکثر دو عددِ اول باشد حل‌پذیر است. لذا، مثلاً هر گروه از مرتبهٔ ۱۰,۰۰۰ حل‌پذیر است. اثباتِ برنساید از ابزاری به نامِ نظریهٔ سرشتها که در آن موقع تازه شکل گرفته بود، و نیز از قدری نظریهٔ جبریِ اعداد استفاده می‌کرد. این اثبات، یکی از گوهرهای ریاضیات است. اکنون اثباتهایی که شامل استدلالهای نظریهٔ گروهیِ محض هستند شناخته شده‌اند، اما بسیار طولانی‌تر، کمتر چشم‌گیر، و کمتر زیبا هستند.

برنساید گرچه در زمان خود، تنها ریاضیدانِ بریتانیایی بود که در نظریهٔ گروهها سهم داشت، یکی از مؤثرترین افرادِ سهیم در این رشته در سراسر جهان بود. با وجود این، او نتوانست همهٔ کارها را انجام دهد. او تا ۱۹۰۰ دریافته بود که گروههای از مرتبهٔ فرد دارای خواص ویژه‌ای هستند، و اینکه به احتمالِ زیاد هر گروهِ سادهٔ از مرتبهٔ فرد باید گروهی دوری از مرتبهٔ اول باشد؛ به‌طور معادل، شاید گروههای از مرتبهٔ فرد همگی حل‌پذیر باشند. اما او نتوانست این را ثابت کند، و این مطلب به حدسِ برنساید مشهور شد.

قضیهٔ رده‌بندی

هنگامی که من در ۱۹۶۳ یک دانشجوی پژوهشگر در آکسفرد شدم، نظریهٔ گروههای متناهی به مرحلهٔ بسیار هیجان‌انگیزی رسیده بود. ؤالتر فایت و جان. ج. تامپسن تازه اثباتِ قضیهٔ مرتبهٔ فردِ معروفِ خود را، یعنی اثباتِ حدسِ برنساید را که هر گروه از مرتبهٔ فرد حل‌پذیر است، منتشر کرده بودند. این اثبات در یک مقالهٔ تحقیقی [۱۰] منتشر شد که ۲۵۵ صفحه طولِ آن بود، و گراهام هیگمن[1] سمیناری داشت که به‌طور هفتگی به مدت بیش از یک سال برگذار می‌شد و روی بیشترِ این اثبات کار کرد. شیوهٔ بیان، حتی با معیارهای مرسومِ مقالاتِ تحقیقی، فشرده است، حال آنکه مقالاتِ تحقیقی به شیوه‌ای بسیار فشرده‌تر از شیوهٔ مورد استفاده در کتابهای درسی نوشته می‌شوند. ممکن است کسی این انتظار را داشته باشد که با گذشتِ زمان احتمالاً ساده‌سازی‌های قابلِ توجهی انجام شده باشد و این قضیه را اکنون بتوان به‌طور بسیار ساده‌تر و قابل فهم‌تری اثبات کرد. اما این اتفاق رخ نداده است. اکنون برخی از قسمتهای اثبات را می‌توان کمی بهتر انجام داد ([۱۱] را ملاحظه کنید)، و سایر بخشها در داخل نظریهٔ کلّی گنجانده شده‌اند. با وجود این، هنوز اثباتِ کامل فقط برای ریاضیدانانِ متهور قابل دسترسی است.

اثباتهایی بدین طویلی و پیچیدگی در آن دوران پدیده‌ای جدید در ریاضیات بود، اما این استدلالِ دشوارِ ۲۵۵ صفحه‌ای تنها اولین گام از برنامه‌ای برای تکمیلِ رده‌بندیِ تمام گروههای سادهٔ متناهی را فراهم آورد، و مقالهٔ فایت-تامپسن فقط نخستین مقاله از مجموعه‌ای از مقالاتِ تحقیقیِ پیچیده و طولانی بود. در سراسرِ دنیا، و با شدتِ بیشتری در ایالاتِ متحدهٔ امریکا و آلمان و بریتانیا، فعالیتِ شدیدی در جریان بود. قضایای بیشتر و بیشتری برای رده‌بندیِ گروههای سادهٔ متناهی‌ای که دارای خواصِ ویژه‌ای بودند فراهم آمد. برای مثال، گروههایی که ۲-زیرگروههای سیلوی آنها آبلی‌اند؛ گروههایی که ۲-زیرگروههای سیلوی آنها

1) Graham Higman

دووجهی‌اند؛ گروههایی که در آنها عضوی از مرتبهٔ ۲ هست که مرکزسازِ آن (یعنی زیرگروهی از تمامیِ اعضای G که با آن عضو جابه‌جا می‌شوند) دارای ساختارِ بخصوصی است؛ گروههایی که تمامی زیرگروههای سرهٔ آنها حل‌پذیرند. جوّ فوق‌العاده‌ای از خوش‌بینی در فضا حاکم بود، و اگرچه خودِ جان تامپسن، آن‌طور که به‌خاطر دارم، نسبتاً محتاط بود، سایرین امیدوار بودند که فنونِ جدیدی که او (به‌طور اخص) و همکارانِ او عرضه کرده بودند برای فراهم آوردنِ اثباتی از این مطلب که سیاههٔ شناخته‌شدهٔ گروههای ساده کامل است کفایت کند.

اما بعداً، در اواخر ۱۹۶۴، زْوَنیمیر جانکو[1] خبری در استرالیا منتشر کرد مبنی بر این که او یک گروهِ سادهٔ جدید یافته است. مرتبهٔ این گروه ۱۷۵,۵۶۰ بود، یعنی $۲۳ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۹$. اینکه چنین گروهی بتواند موجود باشد در ابتدا بسیار نامحتمل به‌نظر می‌رسید. ۲-زیرگروههای سیلوی آن آبلی بودند، و گرچه رده‌بندیِ گروههای ساده با ۲-زیرگروههای سیلوی آبلی تا آن زمان منتشر نشده بود، با این حال این در زمانی بود که شایع شده بود که برنامه در حالِ اتمام است. به‌علاوه، آن‌قدر مطالبِ زیادی در بارهٔ گروههایی که دارای یک یا چند زیرگروهِ سیلو از مرتبهٔ اول هستند شناخته شده بود که کاملاً نامعقول به‌نظر می‌رسید که هنوز گروهِ جدیدی موجود باشد که همهٔ زیرگروههای سیلوی آن، به‌جز یکی، از مرتبهٔ اول باشد.

اما چنین گروهی وجود داشت. و سپسِ گروههای سادهٔ متناهیِ دیگری، یکی‌یکی، یا گاه‌گاهی دو تا یا بیشتر در یک زمان، کشف شدند، که برای مثال در میان آنها، گروههای مشهورِ کاتْوِی بود که تقارنِ مشبکهٔ خاصی از فضای ۲۴بُعدی را اندازه می‌گیرد (برای مطالعهٔ مجملْ [۱۲] را ملاحظه کنید). جوّ حاکمِ مقارنِ پایانِ دههٔ شصت، یک یا دو سال بعد از آنکه من دورهٔ دکترای خود را تمام کردم، بسیار هیجان‌انگیز بود: از یک طرف تعداد عظیمی از جبردانها با پشتکار سعی می‌کردند تا ثابت کنند که تمامیِ گروههای سادهٔ متناهیْ شناخته شده‌اند؛ از طرف دیگر، گروههای سادهٔ جدیدِ عجیبی هر از گاهی پیدا می‌شدند. گویی مسابقه‌ای بر پا شده بود. انتظاراتْ تغییر و تحول پیدا کردند. در اوایلِ دههٔ ۱۹۷۰ کارهای زیادی انجام شده بود، اما بسیاری از جبردانها بدبین شدند: هرچه مسائلِ بیشتری حل می‌شد، جستجو مشکلتر می‌شد، و به‌نظر می‌آمد کارِ بیشتری باقی مانده است. با این حال در ۱۹۷۳، دنی گورنشتاینِ فقید از دانشگاه راتگِرز در نیوجرزی، مردی با جذبهٔ روحانی و خوش‌بینیِ زیاد، در بارهٔ استراتژیِ ۱۰قسمتیِ خود برای تکمیلِ این کاوش سخنرانی کرد و آن را منتشر کرد [۱۳]. اعتماد به نفسِ مُسریِ او فکرهای جدید و انرژیِ تازه‌ای در این شاخه از نظریهٔ گروهها به بار آورد، که در میان آنها مایکل اشباخِر[2] در کالیفرنیا پیشرو بود.

در ۱۹۸۰ ریزه‌کاری‌های نهایی برای طرحِ گورنشتاین به‌انجام رسید و پایان یافتنِ قضیهٔ رده‌بندی، به‌جز بخشِ نسبتاً کوچکی، اعلام شد. این جزء مربوط به آخرین گروهِ پراکنده، مشهور به «هیولا»[3]، بود. این گروه تقریباً از مرتبهٔ ۷×۱۰^{۵۳} است، که در ۱۹۷۳ بسیاری از خواصِ آن کشف شده بود و وجودِ آن پیش‌بینی شده بود. در ۱۹۸۰ این مطلب که آیا چنین گروهی واقعاً وجود دارد یا نه و آیا یکتاست هنوز به‌طور نهایی اثبات نشده بود. این مطلب برای رده‌بندیْ اهمیتِ چندانی نداشت، و در هر صورتْ این نکته

1) Zvonimir Janko 2) Micheal Aschbacher 3) Monster

یک سال بعد وقتی که گرایس[1] ساختارِ آن را انتشار داد و نورتن یکتاییِ آن را به‌اثبات رساند حل و فصل شد. بدین ترتیب سیاههٔ گروههای سادهٔ متناهی کامل بود: اینها عبارت‌اند از گروههای دوریِ $\mathbb{Z}_p$ از مرتبهٔ اول، گروههای متناوبِ A_n به ازای $n \geq ۵$، گروههای ساده از نوعِ لی، و ۲۶ گروهِ پراکنده که چند تای اولِ آنها گروههای ماتیو، و آخرینِ آنها هیولا بود که بعداً کشف شد ([۱۲] را ملاحظه کنید).

این، پیشرفتِ شگرفی در جبر بود. آیا چنین بود؟ این ادعا که تمامیِ گروههای سادهٔ متناهی مشخص شده‌اند و اینکه اثباتِ کاملی از قضیهٔ رده‌بندی موجود است بحث‌انگیز بود (و هنوز هم هست). اثبات در صدها مقالهٔ تحقیقی پخش شده بود و در چیزی بین ۵,۰۰۰ تا ۱۰,۰۰۰ صفحهٔ چاپ‌شده گسترده شده بود؛ علاوه بر این، برخی از این مقالات هنوز به شکلِ «پیش‌چاپ» بودند. چطور ممکن بود که در چنین حجمِ عظیمی از استدلالهای فشرده خطایی موجود نباشد؟ و چطورکسی، حتی دنی گورنشتاین یا مایکل اشباخر، می‌توانست مطمئن باشد که اثباتْ شاملِ همهٔ نکات است و تمامیِ استدلال به‌پایان رسیده است؟

خوب، البته هیچ‌کس نمی‌توانست مطمئن باشد. از طرف دیگر، قطعاتِ پیچیدهٔ این اثبات به‌صورتِ خیلی راحتی با هم جور در می‌آمدند. و اگرچه، همان‌طور که انتظار می‌رفت، گاه‌گاهی خطاهایی از انواعِ گوناگون پدیدار شده‌اند، خودِ برهان نشان داده است که آن‌قدر استوار است که هر خطای کوچکی که کشف شده است به‌آسانی قابل تصحیح بوده است. در ۱۹۹۱ دریافتند که جزءِ خاصی از اثبات (رده‌بندیِ گروههای مشهور به شبه‌نازک[2]) هرگز کامل نشده است. گرچه این مطلبْ کشفی مزاحم بود که شاید نمی‌توانست به‌عنوانِ یک «خطای کوچک» توصیف شود، واقعیت آن است که این شکاف می‌توانست با کاربردِ فنونِ تثبیت‌شده به‌سرعت پُر شود (و توسط اشباخر پر شد). شاید این حادثه، به‌نحوی متناقض‌نما، گواهِ دیگری برای استحکامِ کلّ عمارت باشد.

در هر حال، شاید این مطلب زیاد مهم نباشد. در پانزده سالِ اخیر بخشِ عظیمی از ریاضیات بر پایهٔ این فرض بوده که گروههای سادهٔ متناهی شناخته شده‌اند. اگر شخصی، در مقامِ یک شکاک، به قضیهٔ رده‌بندی اعتماد نداشته باشد، لازم نیست در بارهٔ صحبت از حدسِ رده‌بندی و استفاده از آن به‌صورتِ یک فرضیه، و نه یک امرِ اثبات‌شده، تردیدی داشته باشد.

از اوایلِ دههٔ هشتاد پروژه‌ای، معروف به «کارِ بازبینی»، کلّ این اثبات را بررسیِ مجدد، اصطلاح، منزه، ساده، و تجدیدِ سازمان کرده است. نسخهٔ جدیدی از اثبات، که انتظار می‌رود فقط ۳,۰۰۰ صفحه طول داشته باشد، در حدوداً ۱۲ جلد توسط انجمن ریاضی امریکا در دستِ انتشار است [۱۴]. اکنون در بسیاری از ما نوعی اعتقادِ عمومی پیدا شده است که هیچ چیزِ اساساً غلطی وجود ندارد و ما حقیقتاً صاحبِ یک قضیهٔ رده‌بندی هستیم.

1) Griess 2) quasi-thin

نتیجه

نطقِ سالِ ۱۹۰۸ـ برنساید [۲] به این صورتِ به‌پایان می‌رسد: «در پایان، خواهشِ من از کسانی که آموزشِ ریاضیدانانِ محضِ جوانترِ ما را به‌عهده دارند آن است که کاری برای ایجاد انگیزه در مطالعهٔ نظریهٔ گروهها در این کشور انجام دهند. اگر، با پی‌گیریِ این پند برای مطالعهٔ این رشته، بر اهمیتِ داشتنِ اطلاعاتی در موردِ نظریهٔ گروهها برای ریاضیدانانِ محض (که عموماً در جاهای دیگر تشخیص داده شده است) تأکید شود، تردیدِ کمی وجود دارد که به‌زودی تقاضا برای آموزشِ جدیِ این موضوع به‌وجود خواهد آمد.» علی‌رغم این درخواست، نظریهٔ گروههای متناهی در انگلستان در باقیِ عمرِ او رو به افول نهاد. در واقع، این علم در هر جای دیگر، و نه فقط در انگلستان، رو به زوال نهاد.

برنساید در اوتِ ۱۹۲۷ درگذشت. بعد از آن وضعیت به‌سرعت تغییر کرد و در اواسطِ این قرن تصویر با آنچه که برنساید شناخته بود بسیار متفاوت بود. اولاً، همان‌طور که در بالا اشاره شد، فیلیپ هال در ۱۹۲۸ شروع به انتشار مقالاتی در نظریهٔ گروهها کرد. دو قضیه از او که نقل کردم تنها بخشی کوچک (هرچند بخشی مهم و نمونه) از سهمِ بزرگِ او را نشان می‌دهد. تأثیر او در خارج، به‌ویژه در آلمان و امریکا، به همین اندازه بود؛ در این کشور تعداد زیادی از دانشجویانِ او مدرّسِ دانشگاه شدند و به رشدِ سریعِ نظریهٔ گروهها، هم به‌عنوان یک موضوع تحقیقی و هم به‌عنوان یک مبحثِ برنامهٔ دورهٔ کارشناسی، کمک کردند. ثانیاً دانشجویانی که جبر را از سخنرانی‌های ایسائی شور[1] در برلین آموخته بودند، از جمله کورت هیرش[2]، وَالتر لِدِرمَن، و والدینِ من، در سالهای ۱۹۳۰ از آلمان به بریتانیا آمدند. بعدها، در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰، مکتبهای تحقیقاتیِ بزرگ و نیرومندی در نقاط متعددی از این کشور توسعه به‌وجود آمدند؛ برای مثال، در آکسفرد گراهام هیگمن در بین سالهای ۱۹۵۵ و ۱۹۸۴ متجاوز از ۴۰ دانشجوی دکترا را سرپرستی کرد که بیشترِ آنان پایان‌نامه‌های خود را در یکی از جنبه‌های نظریهٔ گروهها نوشتند. بعداً وقتی که فیلیپ هال در ۱۹۶۷ بازنشسته شد، جان تامپسن از شیکاگو برای ادامهٔ سنّتِ کِیمبریج به آنجا رفت؛ در آنجا، در کنار ادامهٔ اثباتِ قضایای رده‌بندیِ خود، او به جان کانوِی و شاگردانش که در برای کشف و تحلیلِ بسیاری از گروههای پراکنده سهمِ عمده‌ای داشتند پیوست ([12] را ملاحظه کنید). مقدار زیادی از تحقیقات و بسیاری از اکتشافاتِ هیجان‌انگیز در چند دههٔ اخیر در نظریه نمایش و در نظریهٔ گروههای نامتناهی و سایر شاخه‌های وابستهٔ جبر کارِ اعضای این مکاتب بوده است. با این حال، نظریهٔ گروههای متناهی قویاً در این تحقیقات حضور داشته است.

ممکن است قصدِ برنساید از نطقِ خویش منحصراً نظریهٔ گروههای از مرتبهٔ متناهی بوده است و او خواستارِ توسعهٔ تمامی نظریهٔ گروهها نبوده است. این ممکن است، اما احتمالِ آن بسیار ضعیف است: احتمالاً تمرکز او بر گروههای متناهی بازتابی از تمرکزِ علائق شخصی او، و نیز این واقعیت بوده باشد که در ۱۹۰۸ نظریهٔ گروههای نامتناهی هنوز پیشرفت زیادی نکرده بود. در آن روزها نظریهٔ گروهها اساساً به معنای نظریهٔ گروههای متناهی بود. با وجودِ این، به اعتقاد من، حتی با تفسیرِ انحصاریِ محدودِ سخنرانیِ

1) Issai Schur 2) Kurt Hirsch

او، آنچه که اکنون داریم درست آن چیزی است که او خواستارش بود.

مراجع

[1] W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order,* Cambridge, 1897, (second, much changed edition 1911; reprinted by Dover, New York, 1955).

[2] W. Burnside, On the theory of groups of finite order, *Proc. London Math. Soc.*, (Ser. 2) **7** (1908) p. 17.

[3] Julia Nicholson, The development and understanding of the concept of quotient group, *Historia Math.*, **20** (1993) 68-88.

[4] *Collected works of Philip Hall,* (edited by K.W. Gruenberg and J. E. Roseblade) Clarendon Press, Oxford, 1988.

[5] J.E. Roseblade, Philip Hall, *Bull. London Math. Soc.* 16 (1984) 603-626; reprinted in [4], pp. 3-26.

[6] Klaus Doerk, and Trevor Hawkes, *Finite Soluble Groups,* Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[7] Camille Jordan, *Traité algébriques*, des Substitutions et des équations Gauthier-Villars, Paris, 1870.

[8] Peter M. Neumann, Jordan's Traité des Substitutions (review), *Math. Reviews* (1994) MR94c 01039.

[9] L.E. Dickson, *Linear Groups*, Teubner-Verlag, Leipzig, 1900; reprinted by Dover, New York, 1958.

[10] Walter Feit and John G. Thompson, Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Maths.*, **13** (1963) 775-1029.

[11] Helmut Bender and George Glauberman, *Local Analysis for the Odd Order Theorem,* London Math. Soc. Lect. Note Ser., 188, Cambridge, 1994.

[12] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, and R.A. Wilson, *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, 1985.

[13] Daniel Gorenstein, Finite simple groups and their classification, *Israel J. Math.*, **19** (1974) 5-66.

[14] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

Peter M. Neumann
The Queen's College, Oxford OX1 4AW, England

ترجمهٔ کریم احمدی‌دلیر
دانشگاه تربیت معلم تبریز، گروه ریاضی

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. حلِ مسائلِ عنوان‌شده در این بخش و یا مسائلِ پیشنهادیِ خود را به نشانیِ محمدرضا درفشه، گروه ریاضیِ دانشگاه تهران، بفرستید.

۱. فرض کنید G گروهی حل‌پذیر باشد که شرطهای زنجیرِ فزاینده و کاهنده در مورد زیرگروههایش صادق است. ثابت کنید که G باید گروهی متناهی باشد.

۲. یک Rـمدولِ A با تولید متناهی مثال بزنید که دارای زیرمدولی مانند B باشد که B با تولیدِ متناهی نباشد.

۳. فرض کنید G گروهی متناهی باشد و اشتراکِ تمام زیرگروههای pـسیلوی آن زیرگروهِ همانی باشد و یکی از pـسیلوهای آن آبلی باشد. ثابت کنید

الف) اگر P_1، P_2، ...، P_n زیرگروههای pـسیلویی از G باشند که $H=P_1\cap P_2\cap\cdots\cap P_n\neq\{e\}$، آنگاه $N(H)$ (نرمال‌سازِ H) شامل تمام زیرگروههای pـسیلوی G نیست.

ب) دو زیرگروهِ pـسیلو مانند R و Q از G وجود دارند که $R\cap Q=\{e\}$.

(یکی از سؤالهای مسابقهٔ ریاضیِ داخلیِ دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه صنعتی شریف در سال ۷۴)

۴. فرض کنید M یک σـجبرِ نامتناهی روی X باشد. نشان دهید M شامل یک دنبالهٔ نامتناهی از مجموعه‌های غیرتهیِ جدا از هم است. (مسعود صباغان، دانشگاه تهران)

۵. فرض کنید m اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ باشد و $A\subseteq\mathbb{R}^n$ اندازه‌پذیر باشد و $m(A)>0$. ثابت کنید اگر $0<k<m(A)$، زیرمجموعهٔ فشردهٔ Kای از A وجود دارد.که $m(K)=k$. (مسعود صباغان، دانشگاه تهران)

۶. فرض کنید $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq L^+$ و دنباله $\{f_n\}$ در اندازه به f میل کند. نشان دهید $\int f d\mu\leq\liminf\int f_n d\mu$. (مسعود صباغان، دانشگاه تهران)

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 15, No. 1 & 2, Spring and Fall 1996

P.O. Box 13145-418
Tehran – Iran

e-mail: iranmath@rose.ipm.ac.ir

فهرست مطالب