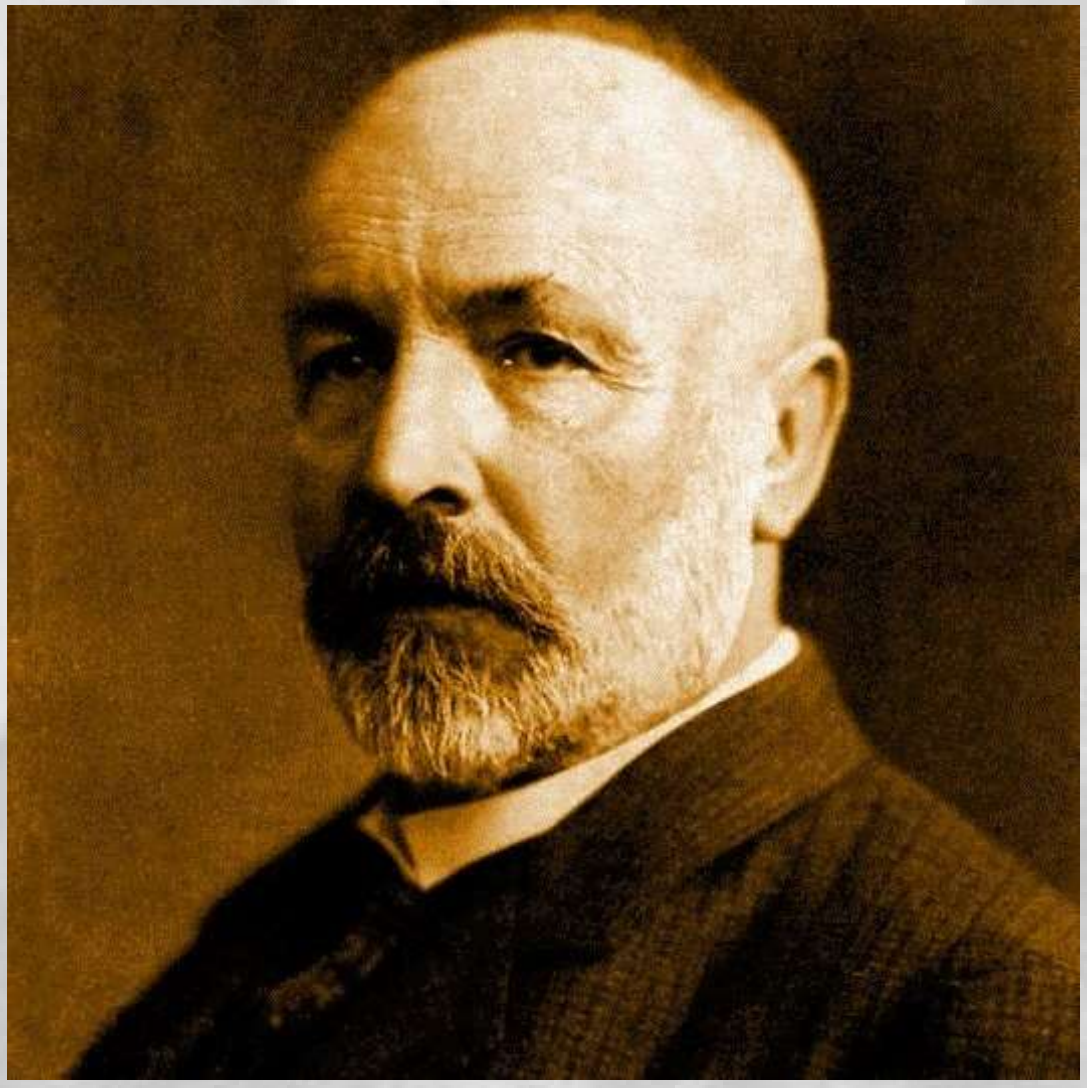
سریِ علمیِ دانش‌جویی پیشهاب

بینهایت، شماره‌یِ $\aleph_0$ (مسلسلِ 05)، بهارِ 1391

در این شماره می‌خوانید: به هتل بی‌نهایت خوش آمدید • درباره‌یِ ویژه‌گیي از مجموعه‌یِ همه‌یِ عددهایِ جبریِ حقیقی (گئورگ کانتور) • درآمدي بر نظریه‌یِ محاسبه‌پذیری • بعدِ هاسدورف، مجموعه‌هایِ تحلیلی و تعال • درباره‌یِ روشي در هوشِ مصنوعیِ بازی‌هایِ رایانه‌یی • یادداشتي بر نمایش‌نامه‌یِ «افسانه‌یِ پادشاه و ریاضی‌دان» • از نامساوی‌هایِ دبیرستانی تا نامساوی‌هایِ دانشگاهی • جدول •



بسم الله الرحمن الرحیم

پیش‌کش به
گئورگ فردیناند لودویگ فیلیپ کانتور
که یک سده زود زاده شد.

نشریه‌ی علمی-دانشجویی بینهایت
شماره‌ی $\aleph_0$ (مسلسل 5)

با سپاس از
دکتر مرتضا منیری
مدیرِ محترمِ گروهِ ریاضیِ دانشگاهِ شهید بهشتی،
دکتر مژگان محمودی
رئیسِ محترمِ دانشکده‌یِ علومِ ریاضیِ دانشگاهِ شهید بهشتی،
امید زهیری،
همه‌یِ دست‌اندرکارانِ چاپِ نشریه در چاپخانه‌یِ دانشگاهِ شهید بهشتی،
و خانواده‌ها و دوستان و استادانِ ما که ما را حمایت کردند و با وقت نداشتن‌هایِ ما در این مدت کنار آمدند.

* درج شدنِ نام این بزرگواران به عنوانِ مشاور تنها به پاسِ قدردانی از ایشان است برایِ زمانی که در اختیارِ این شماره گذاشتند. مسؤولیتِ خطاها و کژی‌ها و روش‌هایِ نامعمول در این شماره تنها بر عهده‌یِ سردبیر است.

— فهرستِ گنجانیده‌هایِ $\mathfrak{Z}_0$ —

پیش‌گفتار

سردبیر

اکنون جایِ بسي خوش‌وقتی است که سپسین شماره‌یِ *بینهایت*، پس از هشت سال، به همتِ دوستان، نیز با وجودِ همتِ دوستان، چاپ می‌شود و در دست‌رس دوست‌داران قرار می‌گیرد.

تاریخچه‌یِ نشریه

این نشریه در سالِ 1380 به همتِ زهرا علی‌بیگلو و چندي دیگر از دانشجویانِ دانشکده‌یِ علومِ ریاضیِ دانشگاهِ شهید بهشتی کلنگ خود، و شماره‌یِ یکمِ او بهارِ 1381 منتشر شد. شماره‌یِ دوم زمستانِ 1381، شماره‌یِ سوم پاییزِ 1382، و شماره‌یِ چهارم زمستانِ 1383. با پایان یافتنِ دوره‌یِ نخستِ انجمنِ علمیِ گروهِ ریاضی، نخستین دوره‌یِ این نشریه نیز پایان یافت. سپس در سال‌هایِ 1388 و 1389 دو ویژه‌نامه‌یِ دانشجویانِ ورودی توسطِ انجمنیانِ پس از نخستین دوره منتشر شد، که می‌توان آن دوره‌یِ *بینهایت* را دوره‌یِ میانی برشمرد. پس اکنون به همتِ دکتر مونا نبیعی، که از *بینهایتیانِ* دوره‌یِ نخست بودند، جرقه‌یِ شماره‌یِ نو زده شد، و اکنون امید داریم این شماره آغازي باشد بر دوره‌یِ دومِ انتشارِ *بینهایت*.

نامِ نشریه

نامِ این نشریه، *بینهایت*، در انگلیسی infinity معادل‌سازی شده بود و در رویِ جلدِ شماره‌هایِ پیشینِ این نشریه قرار می‌گرفت. ما اما به خلافِ پیشینیان عقیده داریم این دو واژه معادل نیستند. بی‌نهایت، در معنایِ بی‌پایان، معادل است با infinite در انگلیسی و unendlich در آلمانی. infinity اما، برابر با unendlichkeit در آلمانی، می‌باید در پارسی *بی‌پایانی* معادل‌سازی شود، هر چند بی‌نهایت را در آن معنا نیز به کار برند، مثلن هنگامي که گویند «x به بی‌نهایت می‌رود». به هر حال، دستِ بالا معنایِ بی‌نهایت بیش‌تر از infinity است؛ با هم برابر نیستند. ما نیز این تفاوت‌هایِ معنایي را بسیار احترام کردیم، و در ترجمه‌ها تا توانستیم آن‌چه در آلمانی end است را به پایان، و آن‌چه finite است را به نهایت برگرداندیم؛ پس مثلن بی‌پایان در برابرِ unendlich/endless (= infinite)، باپایان یا پایان‌مند در برابرِ endlich/finite، و ترامتناهی در برابرِ Transfiniten/transfinite. حتا همه جا نامِ نشریه را بی‌فاصله، *بینهایت*، نوشته‌ایم، و خودِ مفهوم را با نیم‌فاصله، *بی‌نهایت*. در این شماره‌یِ نشریه کوشیده‌ایم تعریفِ دقیقِ هر یک از این مفاهیم را روشن سازیم.

شماره‌گذاریِ نشریه

چنان که در بخشِ «تاریخچه‌یِ *بینهایت*» سخن‌ش رفت، امید داریم این شماره آغازي باشد بر دوره‌یِ دومِ انتشارِ نشریه. پس شیوه‌یي نوین برایِ شماره گذاردن ابداع کردیم — هر چند شماره‌گذاریِ مسلسل را نیز حفظ کرده‌ایم.

گئورگ کانتور ابداع‌کننده‌یِ عددِ اصلی [= کاردینال] برایِ مجموعه‌ها، توان یا عددِ اصلیِ مجموعه‌یِ اعدادِ طبیعی — که کوچک‌ترین مجموعه‌یِ نامتناهی (به اصلاحِ *کانتور* "ترامتناهی") است — را با $\aleph_0$ (بخوانید: آلِف-صفر) نمایش داد. $\aleph$ حرفِ نخستِ الفبایِ عبری است (و ربطي به $\mathbb{N}$ ندارد). نامِ آن از واژه‌یِ فنیقیِ آلِف به معنایِ گاوِ نر گرفته شده‌است (در حقیقت، تقریبن هر الفبایي که می‌شناسید از الفبایِ فنیقی گرفته شده‌است، پس تشابهِ نامِ حرف‌هایِ نخست در الفباهایِ مختلف به همین علت است: آلفا در یونانی و الف در عربی).

اکنون $\aleph_n$ را چنین تعریف می‌کنند که $\aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}}$، و $\aleph_0$ همان توانِ مجموعه‌یِ اعدادِ طبیعی است. سپس $\beth_0$ (بخوانید: بِت-صفر) را برابر یا $\aleph_0$ گیرند، و تعریف کنند $\beth_n$، nامین عددِ اصلی، به ترتیبِ بزرگی است (توجه کنید که $\beth$ دومین حرفِ الفبایِ عبری است). در نتیجه فرضیه‌یِ پیوستار می‌گوید برایِ هر $n \in \mathbb{N}$، داریم $\aleph_n = \beth_n$.

پس ما این شماره را با $\beth_0$ شماره گذاردیم، تا مگر شماره‌گذاری‌مان نیز کمي *بینهایتی* شود.

سپاس‌گزاری

اکنون می‌خواهم استاد هاشم میرزایی را سپاس گویم، که مردي است بزرگ؛ کسي که به هر آن‌چه اعتقاد دارد عمل کند و برایِ اعتقادِ خود بجنگد؛ کسي که تنها دغدغه‌اش میزانِ مطالعه‌یِ نسلِ ما است، و کسي که بسیار بر من تأثیر کرد. پس جا دارد این‌جا وی را سپاس گویم، که اگر نبود، به این راه نمی‌افتادم.

به هتل بینهایت خوش آمدید

فرناز ایرانی و محمدعلی اعرابی

همه‌یِ شخصیت‌هایِ این داستان ساخته‌یِ ذهن اند. نکوشید هیچ یک از شخصیت‌ها را به انسان‌هایِ واقعی شبیه بدانید!

داستانِ ورود

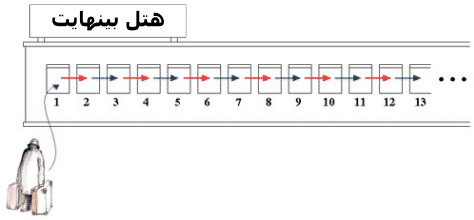
دو ماه پس از دخول به دانشگاه، *گئورگ* نزدِ *دکترْ مسؤول* رفت، و از سرویس و خوابگاه پرسید، و او پاسخ داده گفت متأسفانه یا خوشبختانه سرویس را برداشته‌اند، و گفت به علتِ مشکلاتِ فرهنگی چنین کرده‌اند، و سرویس تنها برایِ دانشجویانِ بومی است، و نیز خوابگاه برایِ دانشجویانِ شهرستان است، و وی مشمولِ هیچ یک نیست. پس *گئورگ* برافروخته به دانشکده فرودآمد، سپس به سایت رفت تا نامه‌یي به *داوید* بنویسد. پس نیمي از سیستم‌ها را خارج از سرویس یافت، و از نیمِ دیگر یکي ماؤس نداشت، یکي کیبورد، یکي کیس، و الباقی اشغال بودند، پس با آن که ماؤس نداشت نبشت،

> هم‌کارِ گرامی،
>
> من دیروز به *تهران* آمدم، و در مهمان‌سرایِ *لهررهم* خفتم. پس بامدادان برایِ پیاده‌روی به دانشگاه آمدم و از حالِ شاعرانه به گذشته‌یِ زیباترِ ریاضیانه برده شدم. سپس به کتابخانه رفتم و دلتنگی‌م آرامید.
>
> ظاهرن این‌جا مشکلاتِ فرهنگی شدیدن فرهخته‌گان را نشانه رفته‌است. پس من نتوانستم با مشکلِ رفت‌وآمد کنار بیایم.
>
> امروز سخني شنیدم که بسیار بر من گران آمد. استادي سرِ کلاسِ خود گفته بود هم‌توانی [داشتنِ عددِ کاردینالِ برابر] میانِ مجموعه‌ها *یک رابطه‌یِ هم‌ارزی* است! نظرِ شما در این باره چیست؟ آیا شایسته است پی گرفتنِ این چنین چیزها و گوشزدِ آن‌ها به دانشگاهیان؟
>
> بهترین آرزوها!

پس *گئورگ* آن را فرستاد و ساعت‌ش را نگریست و دانست که ده دقیقه از زمانِ کلاس گذشته‌است. به سویِ کلاس شتافت و *دکتر مسعودی* را پایِ تخته یافت که گچ از آن می‌زدود. پس آسود، زیرا *دکتر اسماعیلی* را انتظار می‌داشت و می‌هراسید که برایِ تأخیرش با او چه می‌کند. ولی بر جایِ او *دکتر مسعودی* به کلاس آمده بود. پس در کلاس داخل شد، و در ردیفِ همیشه‌تهیِ نخست نشست. در بحث‌ها با استاد می‌آویخت. نیز هنگامي به پایِ تخته رفت و نموداري نگاشت. بچه‌ها از آن پرسیدند و استاد توضیح داد. پس *گئورگ* هنگامِ نشستن ناگهان *حافظ* را دید که تند و تند می‌نوشت و هرگز سؤالي نمی‌پرسید. پس از کلاس به سایت رفت و آن را بسته یافت، پس لپ‌تاپي جست و پاسخِ *داوید* را خواند. آن‌گاه چندي از بچه‌ها را دید که گردِ هم آمده‌اند. یکي به دیگری می‌گفت او بچه‌ها را بدبخت کرده‌است. پس دیگری می‌گفت به یمنِ وجودِ وی کسي از دانشکده فارغ نشود. آن سِدیگر می‌گفت کلاس‌هایِ درس‌ش تشکیل نشوند یا اگر شوند در میانِ راه بچه‌ها در حذف کردن از هم سبقت گیرند و آن‌ها که توفیق نیابند در آتشِ وی بسوزند. پس اولینِ ایشان گفت راهي باید جست تا دستِ وی را از بچه‌ها کوتاه کنیم. *گئورگ* پیش رفت و پرسید. پس به وی پاسخ گفتند که سخن از *دکتر رسمیِ قطعی* است. پس به ایشان گفت چرا با وی سخن نمی‌کنید؟ گفتند کسي را تابِ آن نیست. پس بهتر آن است که بر وی آتش گشاییم. پس *گئورگ* گفت آتش را با آتش خاموش نکنند، پس خود را در آتشِ خود مسوزانید. گفت مشکلي نگشاید مگر به مهر. پس به نزدیکِ *دکتر رسمیِ قطعی* رفت و به وی گفت مقاله‌یي نبشته‌ام در سری‌هایِ مثلثاتی، خواستم به آن نگاهي بیفکنید. سپس گفت بچه‌ها از تدریسِ شما بسیار گویند، پس آیا توانم هر گاه که سؤالي داشتم به نزدیکِ شما بیایم؟ گفت باکي نیست. پس *گئورگ* هنگامِ شب به *هتل هیلبرت* رفت که نزدیکِ دانشگاه بود، چون *داوید* در نامه‌اش به او گفته بود از این پس می‌تواند در آن‌جا مقیم شود و تنها هزینه‌یِ ناهار و شامش را بپردازد.

شبِ نخست

پس آن‌جا بخفت و در خواب بدید شب است و سرد است و به هتلي رسیده‌است، او را *هتل بینهایت* نام. بر سردرِ آن نبشته‌اند «به *هتل بینهایت* خوش آمدید». پس هنگامِ ورود با رویي نه‌چندان خوش وی را پذیرفتند. پس *گئورگ* بدید در طبقه‌یِ نخست‌ش بی‌پایان تا اتاق هست. ولی به وی گفتند همه‌یِ اتاق‌ها پر اند. پس وی به ایشان گفت کافی است هر کس به اتاقِ کناریِ خود رود پس اتاقِ یکُم تهی خواهد شد. وی را از آن‌جا بیرون کردند و در را کوفتند. با صدایِ در از خواب بپرید. تعبیر رفت مجموعه‌یِ اعدادِ حسابی و طبیعی یک‌ریخت اند.



داستانِ دو نمره

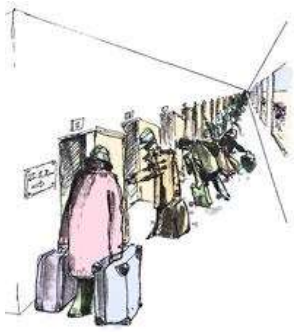
ماهي از ترم بگذشت. *گئورگ* شنبه به دانشکده رفت و یکي از بچه‌ها را بدید که در لابی نشسته ریاضی از بر می‌کرد. پس *گئورگ* را پرسید و از احوالِ وی جویا شد. از علتِ نرفتن‌ش به کلاس‌هایِ حلِ تمرین پرسید. *گئورگ* گفت به خاطرش نمی‌ماند. پس او گفت حضور در کلاس دو نمره دارد، شاید نمی‌دانی که به خاطرت نمی‌ماند. گفت پس بیا امروز با هم به کلاس‌ش برویم، حال که دیگر می‌دانی. پس رفتند. حلّالِ تمرین به حساب شاگرد-اول بود. به کلاس داخل شد. پس بگفت که تمرین‌هایِ فلان بخشِ کتاب را از برای‌تان حل کنم که در امتحان خواهد آمد. کسي گفت سؤالي از این درس دارم که در کتاب نیست. پس حلال بخندید و اعتنا نکرد. سپس حلال برآغازید که کوچک‌ترین مجموعه‌یِ X را خواهیم که $A \cup X = B \cup X$. پس بگفت آن X همانا $A \cup B$ است. *گئورگ* گفت چه‌گونه می‌گویی؟ حلال گفت مگر نه آن که در معادله صدق کند. گفت بلی. حلال گفت اگر X عضوي از A را نداشته باشد، پس آن عضو در $A \cup X$ هست، ولی در $B \cup X$ نیست. *گئورگ* گفت این چه‌گونه است؟ مگر شمول در A مانعِ شمول در B است؟ پس حلال گفت پس از کلاس بیرون باش، و دیگر پاسخ نگفت. سپس سؤالي دیگر برآغازید و با اصلِ خوش‌ترتیبی ثابت اش کرد. پس گفت آیا می‌دانستید اصلِ خوش‌ترتیبی معادلِ اصلِ انتخاب است؟ *گئورگ* پرسید چرا چنین گویی؟ گفت در کتاب است. *گئورگ* گفت چنان گویی که انگار سخن از کتابِ خدا است. اعتنا نکرد. سپس حلال گفت اکنون ثابت می‌کنیم وجودِ تناظرِ دوسویی میانِ مجموعه‌ها یک رابطه‌یِ هم‌ارزی است. *گئورگ* از جای بشد و از کلاس بیرون زد.

داستانِ آنالیز

پس *گئورگ* برافروخته رفت و به بُرد چشم دوخت. دید کلاسِ آنالیزِ ریاضیِ 1 با دکتر *رزومه‌گر* — که رزومه‌یي پرحجم داشت — تا دقایقي دیگر می‌آغازد. پس به کلاسِ ایشان رفت. سپس استاد آمد و آغازید به نبشتن بر تابلو. بچه‌ها نیز از میانِ نبشتن و فهمیدنِ درس، نبشتن را گزیدند. استاد هم بی‌وقفه می‌نبشت. سپس گفت سؤالي هست؟ کسي هیچ نگفت. پس گفت دهُم امتحان است، و تنها از قضیه‌ها و مثال‌ها و تمرین‌هایِ کتاب است. بچه‌ها زبان بگشودند. پس یکي گفت زود است. دیگری گفت هر چه امتحان زودتر، مطالبِ درس کم‌تر، پس حفظ کردنِ درس راحت‌تر. سدیگری گفت بگذارید دیر باشد، تا مگر مطالبِ بیش‌تري برایِ پایان‌ترم حذف شود. پس *گئورگ* بیرون شد.

شبِ دیگر

سپس بویي عجیب و آزاردهنده در دانشکده بپیچید. معلوم شد باز کارِ کیمیاگران است. دانشکده متروکه شد، *گئورگ* به هتل رفت و بخفت. پس در خواب بدید در طبقه‌یِ دومِ *هتل بینهایت* گازِ خردل آزاد شده. مسافران را دیگر جایي نیست، و اتاق‌هایِ طبقه‌یِ نخست همه پر اند. *گئورگ* به هتل داخل شد و وضع را بدید. پس نزدِ صاحبِ هتل رفت و بگفت باید چنین کنیم. ابتدا مسافرانِ طبقه‌یِ نخست جابه‌جا شوند، چنان که اتاق‌ها یک‌درمیان تهی شود. سپس مسافرانِ طبقه‌یِ دوم به اتاق‌هایِ تهی‌شده منتقل شوند. رئیسِ هتل بپرسید این کار چه‌گونه است؟ پس گفت هر کس در طبقه‌یِ نخست در اتاقِ nام ساکن است به اتاقِ $2n$ در همان طبقه برود، و هر کس در طبقه‌یِ دوم در اتاقِ nام است به اتاقِ $2n+1$ در طبقه‌یِ نخست برود. پس صاحبِ هتل بیندیشید و گفت پس اتاقِ یکُم که را است؟ *گئورگ* لبخندي بزد. بیرون اش کردند و در را کوفتند. با صدایِ در از خواب بپرید و پس بارِ دیگر چرت‌ش پاره شد. تعبیر رفت مجموعه‌یِ اعدادِ طبیعی و صحیح یک‌ریخت اند.



داستانِ تاریخ

گئورگ همچنان کلاسي را می‌جست تا در او آرام گیرد. پس روزِ دیگر به کلاسِ تاریخِ ریاضیات رفت. کلاس بگذشت. در پایان جماعتي از وی بپرسیدند خواهیم در تاریخِ ریاضیات بپژوهیم، کتابي پیش می‌نهی؟ بگفت کتابي است او را

Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts

نام. پرسیدند لاتینی است؟ گفت اگر منظورتان آن است که در آن به خطِ عربی ننوشته‌اند، چنین است. سپس پرسید ترمِ چند اید؟ گفتند ترمِ بیست و هفت. گفت پس چرا به کلاسِ تاریخِ ریاضیات روید؟ شما تاریخِ ریاضیات را به چشم دیده‌اید. گفتند چاره چیست؟ رویم تا فارغ شویم. پس *گئورگ* راهِ هتل بگرفت و برفت و بخفت.

سؤالِ ششم

روزها بسپَرد. روزِ آزمونِ مبانیِ ریاضی برسید. پس حلالِ درس در جلسه مراقب بود، که کسي سؤالي را که او نادرست حل کرده بود نادرست ننویسد. *گئورگ* بر سؤال‌ها نگریست. پس دید همه از کتاب اند، مگر سؤالِ ششم، که در کلاس به شیوه‌یِ حلِ آن اشاره‌يي کوتاه شده بود. سؤالِ ششم می‌گفت نشان دهید کاردینالیته‌یِ $\mathbb{R}$ برابر است با $2^{\aleph_0}$. *گئورگ* آغازید به نبشتن.

اگر توانِ مجموعه‌یِ A را با $\overline{\overline{A}}$ بنماییم، داریم $\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0$. اگر توانِ پیوستارِ خطی X (یعنی مجموعه‌یِ همه‌یِ xهای حقیقی که $x \geqq 0$ و $x \leqq 1$) را با $\mathfrak{o}$ بنماییم، می‌خواهیم نشان دهیم $\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0}$.

اگر مجموعه‌یِ پوشش‌هایِ مختلفِ N با M، $f(N)$ها را با $(N \mid M)$ بنماییم، پس می‌توانیم بنویسیم $(N \mid M) = \{f(N)\}$. اگر $N \sim N'$ و $M \sim M'$، به راحتی می‌توان دید $(N \mid M) \sim (N' \mid M')$. پس توانِ $(N \mid M)$ تنها به توانِ N و M بسته است. پس اگر $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{a}$ و $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{b}$، می‌توانیم تعریف کنیم $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \overline{\overline{(N \mid M)}}$.

پس اکنون $2^{\aleph_0}$ توانِ همه‌یِ نمایش‌هایِ $x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \cdots$ برایِ عددِ x در مبنایِ دو است، که $f(\nu) \in \{0,1\}$. با این شیوه هر عدد یک بار نموده شده‌است مگر $x = \frac{2\nu+1}{2^\mu} < 1$ها، که هر یک دو بار نموده شده‌اند. پس اگر مجموعه‌یِ شمارایِ این عددها را با $\{s_\nu\}$ بنماییم، داریم $2^{\aleph_0} = \overline{\overline{\{s_\nu\} \cup X}}$. اگر هر مجموعه‌یِ شمارایِ $\{t_\nu\}$ را از X برداریم و مانده را با X_1 بنماییم، داریم $X = \{t_\nu\} \cup X_1$ و نیز $\{t_\nu\} \cup X_1 = \{t_{2\nu}\} \cup \{t_{2\nu-1}\} \cup X_1$. از سویِ دیگر داریم $\{s_\nu\} \cup X = \{s_\nu\} \cup \{t_\nu\} \cup X_1$. $\{t_{2\nu-1}\} \sim \{s_\nu\}$، $\{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\}$، $X_1 \sim X_1$، پس $X \sim \{s_\nu\} \cup X$. یعنی $2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = \mathfrak{o}$.

اکنون می‌ماند اثباتِ $X \sim \mathbb{R}$. اگر Y مجموعه‌یِ همه‌یِ yها باشد که $y \geqq -1$ و $y \leqq 1$، پس از $y = 2x - 1$ می‌فهمیم $X \sim Y$. و اگر Ξ مجموعه‌یِ همه‌یِ ξها باشد که $\xi \geqq -1$ و $\xi \leqq 1$، با $g(y) = y/2$ اگر $y = 2^{-\nu+1}$ و $g(y) = y$ اگر $y \neq 2^{-\nu+1}$، خواهیم داشت $\Xi \sim Y$. اکنون با پوششِ $h(\xi) = \frac{1}{\xi} - 1$ برایِ $\xi \geqq 0$، $h(\xi) = \frac{1}{\xi} + 1$ برایِ $\xi \leqq 0$، و $h(0) = 0$، داریم $\Xi \sim \mathbb{R}$. ■

پس از فراغت از اثبات بدید یک ربع به پایانِ آزمون مانده‌است، پس با نگرانی هر چه توانست برایِ دیگر سؤال‌ها نبشت.

روزِ جزا

روزهايي چند بگذشت. *گئورگ* به دانشکده که داخل شد، یکي از بچه‌ها بر سرِ وی فرودآمد که چند شده‌یی؟ گفت چه؟ پس بگفت آزمونِ مبانیِ ریاضی را. گفت مگر اعلام شده‌است؟ گفت 5 دقیقه بیش‌تر است که شده، من 19.5 و *حافظ* 20. *گئورگ* گفت تنها سؤالِ ششم را نبشته‌ام، و کمي دیگرها را. پس دیگری گفت مگر حذف نشد؟ گفت چه؟ گفت سؤالِ ششم. گفت دانستم، چرا شد؟ گفت هیچ کس ننوشته بود. بگفت پس نمره‌اش چه شد؟ گفت به نمره‌یِ حلِ تمرین افزود. پس *گئورگ* گفت سپاس، دیگر نیاز نیست نمره‌ام را ببینم.

دیدار

پس به راهروِ استادان و به نزدیکِ *دکتر اسعدی* رفت. گفت می‌خواهد اندکي پیرامونِ شیوه‌یِ تدریس در دانشکده سخن کند، و بیش‌تر پیرامونِ شیوه‌یِ آزمون‌گیری، چه بسا شیوه‌یِ آزمون‌گیری است که شیوه‌یِ خواندن برایِ توفیق در آزمون را سبب شود. گفت می‌شنوم. پس *گئورگ* ادامه داده گفت شما از دانشجو طوطی بودن را انتظار کنید. پس وی پاسخ گفت گویی چه کنیم؟ هر کس را توانِ شناختن و درکِ ریاضیات نیست. پس آنان را چه کنیم؟ ادامه داد آنان که مدعيِ درک اند، چرا نتوانند از پسِ به خاطر سپردن برآیند؟ این سخن نزدِ *گئورگ* پسند نیامد، پس گفت اندوختن کجا پسند است اگر نتوان تحلیل اش کرد؟ طوطی‌پروری را حمل بر حمایت از طوطیان مکنید. گفت شما دانشجو را تشویق به وابسته‌گیِ فکری کنید، تشویق به از-خود-تهیگی. شما طوطیان را احترام کنید و بسترِ آفریننده‌گی آماده نکنید و لذت‌ش را به دانشجویان نچشانید، انگیزه از ایشان گرفته شود، و زاینده‌گی‌شان بخشکد. اگر خواهید به سودِ اکثریت عمل کنید، پس چرا هر سال سه نفر از دانشکده فارغ شود، ایشان نیز با شرطِ معدل بمانند؟ پس دکتر گفت دانشجویان تنبل شده‌اند، دانش و درک نجویند. پس *گئورگ* برآشوفت و بیرون شد.

شبِ فرجام

پس به هتل رفت و بخفت. در خواب دانشکده را بدید، نامِ وی *بینهایت هتل*. دید دانشکده را بی‌پایان طبقه است، هر یک به شماره‌یِ سالِ ورودِ دانشجویان مزیّن شده‌اند، و در هر یک بی‌پایان تا دانشجو است که نتوانند از دانشکده فارغ شوند. پس دید دانشکده در حالِ فروپاشی است و دارد از هم می‌گسلد. سپس فکري به ذهن‌ش رسید. گفت مگر بتوان این دانشجویان را در طبقه‌یِ دومِ *هتل بینهایت* جای داد، که تازه از گازِ خردل پاک شده‌است، و هنوز تهی از سکنه است. پس ولی این کار چه‌گونه ممکن است؟

آموزشِ فریفته‌گر
سهند حشمتی افشار*

آیا تا به حال به این اندیشیده‌اید چرا درسِ جبرِ 1 یا هندسه‌یِ دیفرانسیلِ موضعی را برمی‌داریم؟ آیا به این دقت کرده‌اید که چرا هیچ مشارکتي در انتخابِ محتوایِ آموزشی نداریم؟ و این که چرا معیارِ یادگیری نمره است و یادگیری را در حداکثر 3 ساعت **تعیین** می‌کنند؟ یا چرا اساسن به دانشگاه می‌آییم؟
به نظرم برایِ پاسخ دادن به این پرسش‌ها باید با نگاهي *انتقادی* آموزشِ عالی (دانشگاهی) را به عنوانِ قسمتی از آموزش دید. برایِ این کار، ابتدا به دورانِ مدرسه می‌رویم.

مدرسه‌یِ کارخانه‌یی
یک روزِ مدرسه‌یی، روزي است که فرد ساعتِ 6 صبح از خواب بیدار می‌شود. پس از صرفِ صبحانه و به طورِ خوش‌بینانه کمي با اعضایِ خانواده — در صورتِ وجود — معاشرت می‌کند و بعد از رسیدن به مدرسه، در کلاسِ ساعتِ 8 صبح تا اولین زنگِ تفریح، یعنی ساعتي بینِ 9:30 و 10، حضور می‌یابد. بسته به شهریه‌یِ مدرسه، او 3 تا 5 بار در روز، این کار را تکرار می‌کند. دانش‌آموز به تناسبِ کم‌تر بودنِ نمره‌اش در مقابلِ رقبایش در کلاس، در برنامه‌هایِ تقویتی حاضر می‌شود. همان طور که بیش‌ترِ ما بارها شاهد بوده‌ایم، به ساده‌گی می‌توان مدرسه را با کارخانه، کلاس را با بخش، زنگِ تفریح را با استراحت، نمره را با کارآمدی، و برنامه‌یِ تقویتی را با اضافه‌کاری عوض کرد، تا یک روزِ کارخانه‌یی یا اداری را توصیف نمود. بنابراین، مدرسه‌ها دانش‌آموزان را عادت می‌دهند تا در آینده بتوانند زمانِ خود را با ساعاتِ کاریِ ازپیش‌تعیین‌شده منطبق کنند. در مدرسه، به دانش‌آموزان با تکرار و به طورِ غیرمستقیم می‌آموزانند که نمره‌هایِ بهتر را با دانش، مدرک را با قابلیت، و روانیِ بیان را با گفتنِ حرف‌هایِ تازه اشتباه بگیرند. به آن‌ها می‌آموزانند که فرآیند را با محتوا اشتباه بگیرند. و به طورِ کلی، این کار با اشتباه گرفتنِ تدریس با یادگیری عمیق‌تر می‌شود. این اتفاق موجب می‌شود که مدرسه این باور را نهادینه کند که هر فرآیندِ برنامه‌ریزی‌شده مانندِ تدریس، به ناگزیر چیزي باارزش به عنوانِ یادگیری به وجود می‌آورد. بنابراین، قابلِ توجیه است که افرادِ جامعه بپندارند که ارزشِ تحصیلاتِ هر فرد، تابعي از تعدادِ سال‌های تحصیلیِ او و گرانیِ شهریه‌یِ مدارسي است که در آن‌ها تحصیل کرده‌است. مثلن در جهتِ پاسخ‌گویی به نیازِ شهروندان به جابه‌جایی در شهر، با کشیدنِ بزرگراه، به افزایشِ تقاضا برایِ اتومبیلِ شخصی دامن می‌زنیم. به عنوانِ مثال، در تهران، جایي که ترافیک و آلوده‌گیِ هوا از مهم‌ترین مشکلات است، افتتاحِ بزرگراه‌ها را جشن می‌گیریم. در صورتي که حتا بهینه به نظر نمی‌آید که نیازِ به جابه‌جایی در این شهرِ شلوغ، با اتومبیلِ شخصی برطرف شود. به همین ترتیب، تداومِ وجودِ مدارسِ فعلی هم محصولِ منحرف شدنِ تمایلِ طبیعیِ دانش‌آموزان به یادگیری و خلاصه کردنِ آن در تقاضا از مدرسه برایِ ارائه‌یِ آموزش توسطِ مدارس از طرف جامعه، به خصوص والدینِ مدرسه‌زده است.
فرض کردنِ این که هر فرآیند چیزي باارزش به وجود می‌آورد، منجر به این می‌شود که افرادِ مدرسه‌زده بپندارند تولید الزامن تقاضا می‌آفریند، و مفهومِ «تولید برایِ تقاضا» را برعکس می‌کند. محصولِ این دیدگاه، تربیتِ کارگراني است که چیزي را تولید می‌کنند که نه تنها مالک آن نیستند، بل که نیاز به آن‌ها و تقاضایي اصیل برایشان ندارند. به راستی باور دارم که در چنین وضعیتي، کارگران ازخودبی‌گانه[1] می‌شوند.[2]

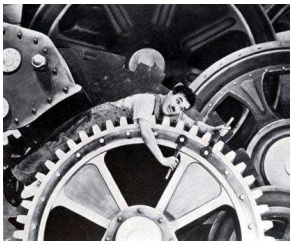
ایلیچ (1387) معتقد بود که هیچ نهادي بهتر از مدرسه نمی‌تواند اختلافِ عمیقِ میانِ اصولِ اجتماعی و واقعیتِ اجتماعیِ جهان امروز را از اعضایش پنهان نگه دارد؛ واقعیتي که دانش‌آموزان را مانندِ کارگراني ازخودبی‌گانه و در اختیارِ کارخانه‌ها یعنی مدارس می‌داند.
از طرفي دیگر، حتا اکنون بسیاري ازمردم — از نظرِ من به خطا — با مترادف گرفتنِ یادگیری با تدریس، می‌پندارند که مدرسه نیازِ رشد و تکاملِ فرزندان‌شان را با دست‌آوردهایِ آموزشی برطرف می‌کند و در نتیجه به مدرسه اعتماد می‌کنند. به علاوه، تدریس در انحصارِ مدرسه و دانشگاه است. بنابراین، اگر مدرسه دانش‌آموزان را به واگذاریِ مسؤولیتِ رشدِ خود به دیگران مجبور کند، بسیاري را به نوعي به خودکشیِ معنوی وامی‌دارد. هم‌چنین، افرادي که به مدرسه نرفته‌اند، اجازه می‌دهند مدرسه‌زده‌گان جایِ آن‌ها تصمیم‌گیری و برایِ زنده‌گیِ آنان برنامه‌ریزی کنند. معتقد ام که به این دلیل مدرسه‌نرفته‌گان این اجازه را می‌دهند، چون به اشتباه می‌پندارند آن‌هایي که به مدرسه رفته‌اند، بیش‌تر می‌دانند و تصمیمِ آن‌ها در قبال‌شان، منطقی‌تر و به‌صلاح‌تر است. به دلیلِ وجودِ این وابسته‌گیِ نهادینه‌شده، خلاقیت و نوآوری و اعتماد-به-نفسِ خود را در بررسی و نتیجه‌گیری از دست می‌دهند و برداشتِ افرادِ مدرسه‌زده، چه مدرسه‌رفته چه مدرسه‌نرفته از واقعیت، همان می‌شود که مدرسه به آن‌ها می‌دهد.

[1] Alienation
[2] برایِ مطالعاتِ بیش‌تر می‌توانید از کتابِ *سرشتِ راستینِ انسان* نوشته‌یِ اریک فروم، ترجمه‌یِ فیروز جاوید، نشر اختران استفاده کنید.

به علاوه، با وضعیتي که ایلیچ (1387) ترسیم کرده‌است، انتظار می‌رود که مدرسه در دانش‌آموزان این باور را ایجاد کند که همه چیز، حتا افکار و تصوراتِ انسان‌ها نیز قابلِ‌اندازه‌گیری اند، که این کار از طریقِ رده‌بندیِ افراد با توجه به سن یا نمره‌یِ موفقیتِ تحصیلیِ آن‌ها شدنی است. این در حالي است که در تجربه‌هایِ تحصیلیِ شخصی‌م شاهد بوده‌ام که از طرفي، برایِ خطاب کردنِ یک دانش‌آموز او را به کلاسِ چندمی کاهش می‌دهند، اما برایِ گرفتنِ حق‌ش در مقابلِ دانش‌آموزي دیگر که در پایه‌یي بالاتر است، به مشکل برخورده، و با لحني به اصطلاح مهربانانه به او می‌گویند که «او از تو بزرگ‌تر است و به او احترام بگذار و بگذر!» این کار باعث می‌شود که دانش‌آموزان، تفاوت داشتنِ خود با بقیه را خصوصن به صورتِ سلسله‌مراتبی و بر اساسِ معیارهایِ ازپیش‌تعیین‌شده تجربه و به تدریج باور کنند. وقتي مدرسه به مردم بقبولاند که می‌توان به اندازه‌گیریِ ارزش‌هایِ انسانی پرداخت، خودِ آن‌ها به پذیرش و ایجادِ هر نوع رده‌بندی گرایش نشان می‌دهند.

به طورِ خلاصه، اگر مدرسه شرایطِ اشتباه گرفتنِ فرآیند با محتوا را فراهم کند باعثِ فریفته‌گری[3] می‌شود، با مجبور کردنِ افراد به واگذاریِ مسؤولیتِ رشدِ خود به دیگران موجب استیلای فرهنگی[4] می‌شود، و با نهادینه کردنِ اندازه‌گیریِ ارزش‌هایِ انسانی تفرقه را در جامعه رواج می‌دهد.

پائلو فریره در کتابِ *آموزشِ ستم‌دیده‌گان* به نقد و تحلیلِ طرحي از آموزش می‌نشیند که آن را «آموزشِ بانکی» می‌خواند. او فریفته‌گری، استیلایِ فرهنگی، و تفرقه را در رابطه با آموزشِ بانکی توضیح می‌دهد.



آموزشِ بانکی[5]

آموزشِ بانکی شکلي از آموزش است که در آن "معلم در موردِ واقعیت چنان سخن می‌گوید که گویی واقعیت چیزي است بی‌حرکت، ایستا، حجره‌حجره‌شده، و قابلِ‌پیش‌بینی. یا آن که در بابِ موضوعي که نسبت به تجربه‌یِ زیستیِ دانش‌آموزان کاملن بی‌گانه است، دادِ سخن می‌دهد. وظیفه‌یِ او *انباشتنِ*[6] آن‌ها است از محتویاتِ نقل‌هایِ خود: محتویاتي که از واقعیت جدا شده‌است، یا از کلیتي که آن‌ها را به وجود آورده و می‌تواند به آن معنایي ببخشد قطعِ ارتباط کرده‌است." (فریره 1358، 57).

"نقل (با معلم که نقال است) دانش‌آموزان را به از بر کردنِ ماشین‌وارِ محتوایِ نقل وامی‌دارد. از این بدتر، آنان را به ظرف‌ها و *مخزن*‌هایي مبدل می‌کند که باید به وسیله‌یِ معلم پر شوند. هر قدر که او این ظرف‌ها را کامل‌تر پر کند، معلمِ بهتري است؛ هر قدر این ظرف‌ها با فروتنیِ بیش‌تري اجازه دهند که پر شان کنند، دانش‌آموزانِ بهتري خواهند بود. به این ترتیب، آموزش نوعي امانت‌سپاری می‌شود که در آن شاگردان امانت‌دار اند و معلم امانت‌گذار. او به جایِ برقرار نمودنِ ارتباط، ابلاغیه‌هایي صادر می‌کند و *امانت‌گذاری*‌هایي می‌کند که شاگردان آن‌ها را با حوصله دریافت می‌کنند، از بر می‌کنند و پس می‌دهند. این مفهومِ *بانکیِ* آموزش است که در آن میدانِ عملِ دانش‌آموزان منحصر است به دریافتِ امانت‌ها و تنظیمِ پرونده برایِ آن‌ها و ذخیره کردن‌شان." (فریره 1358، 59–58).

از نظرِ فریره، معلم امانت‌گذاري است که معرفتي را به کساني که به عقیده‌اش هیچ چیز نمی‌دانند به امانت می‌گذارد و دانش‌آموزان امانت‌سپار پنداشته می‌شوند. اطلاعات و بسته‌هایِ آموزشی که به امانت گذاشته می‌شوند، از واقعیتي که امانت‌داران در آن زنده‌گی می‌کنند جدا شده‌اند، و بنابراین، از آن‌ها بی‌گانه هستند. این بسته‌هایِ آموزشی از واقعیت جدا شده‌اند، به دلیلِ این که محتویات‌ش با نیازهایِ دانش‌آموزان منطبق نیست. زیرا شناختِ نیازهایِ دانش‌آموزان، تنها از راهِ مشارکت آن‌ها در انتخابِ محتویاتِ آموزشی ممکن است. هر چه دانش‌آموزان بیش‌تر در روندِ امانت‌سپاری مشغول باشند، به دلیلِ طبیعتِ بی‌گانه‌سازِ این روند، تفکرِ دانش‌آموزان از آنِ خود نیست، پس کم‌تر در روندِ رشد و یادگیری شرکت می‌کنند. لذا تفکرِ انتقادی، که هدف‌ش مداخله‌یِ شخص در جهان به قصدِ تغییر و دگرگون کردنِ روابطِ قدرت در آن است، رشد نمی‌کند. فریره (1358، 27) علت را چنین توضیح می‌دهد که "جهان و آدمی جدا از هم وجود ندارند، بل که در برهم‌کنشِ مستمر به سر می‌برند... واقعیتِ عینیِ اجتماعی همان طور که به صورتِ تصادفی به‌وجود نیامده‌است بل که حاصلِ کارِ آدمی است، به تصادف هم دگرگون نمی‌شود. اگر آدمیان واقعیتِ اجتماعی را می‌سازند، پس دگرگون کردنِ آن واقعیت، وظیفه‌یي تاریخی است و بر عهده‌یِ آدمیان." در حقیقت، هر چه امانت‌سپاران کامل‌تر نقشِ منفعلانه را که به آنان تحمیل می‌شود بپذیرند، خود را بهتر با جهان، به این گونه که **هست**[7]، مطابقت می‌دهند، و دیدِ امانت‌گرفته‌شده

[3] Manipulation
[4] Cultural Invasion
[5] Banking Education
[6] فعل نادرست استفاده شده‌است. باید می‌بود «انبارانده». — ویراستار
[7] تأکید از من است.

از واقعیت را قبول می‌کنند. "ظرفیتِ آموزشِ بانکی در به حداقلِ رسانیدن یا نابود کردنِ قدرتِ خلاقانه‌یِ دانش‌آموزان و در برانگیزاندنِ ساده‌لوحیِ آنان، به نفعِ ستمگران است، که نه می‌خواهند رازِ جهان برملا شود، و نه میل دارند که آن را دگرگونه ببینند." (فریره 1358، 61).

در آموزشِ بانکی اتفاقات زیر می‌افتد (فریره 1358، 60):

1. معلم می‌آموزاند و شاگردان آموزانده می‌شوند.
2. معلم همه چیز را می‌داند و شاگردان هیچ چیز نمی‌دانند.
3. معلم فکر می‌کند و شاگردان در موردش فکر می‌کنند.
4. معلم محتوایِ برنامه را انتخاب می‌کند و شاگردان (که طرفِ مشورت نبوده‌اند)، خود را با آن هم‌آهنگ می‌سازند.
5. معلم قدرتِ معرفت را با قدرتِ حرفه‌یيِ خود، که در مقابلِ آزادیِ شاگردان قرار اش می‌دهد، اشتباه می‌گیرد.

تضادِ نهفته بینِ معلم و دانش‌آموز، ذاتِ ضدِگفت‌وشنودیِ این آموزش را نشان می‌دهد که موافقِ شرکت کردنِ دانش‌آموزان در روندِ آموزش نیست، در صورتي که به حکمِ ضرورت چنین باید باشد. از میان بردنِ تضادِ معلم و دانش‌آموز و مبادله‌یِ نقش‌هایِ امانت‌گذار و امانت‌سپار با آموزش‌دهنده-آموزش‌گیرنده در آنِ واحد، در حکمِ تهدیدي برایِ قدرت‌هایِ ستمگر است. این که دانش‌آموزان در روندِ آموزش کاملن منفعل می‌شوند، باعث می‌شود که خود را در جهان — و نه با جهان یا با دیگران — تماشاگر می‌یابند تا آفریننده. "در این بینش، آدمی موجودي آگاه نیست، بل که مالکِ آگاهیِ دیگران است؛ مغزي خالی... که به شکلِ منفعل برایِ دریافتِ امانت‌هایي از واقعیتِ جهانِ خارج آماده است." (فریره 1358، 64).

این‌طور بر می‌آید که در آموزشِ بانکی وظیفه‌یِ معلم "سازمان دادن به جریاني است که هم‌اکنون خودبه‌خود روی می‌دهد و آن، *پر کردنِ* شاگردان است به وسیله‌یِ سپردنِ امانت‌هایي از اطلاعات که در نظرِ آن‌ها معرفت را تشکیل می‌دهند؛ و چون آدمیان به شکلِ موجودهایي منفعل جهان را *دریافت* می‌کنند، تربیت باید آنان را بیش‌تر منفعل کند و با جهان هم‌رنگ‌تر سازد. آدمی تربیت شده، آدمی همرنگ شده‌است، زیرا که چنین کسي بیش‌تر با دنیا *متناسب* است. اگر به زبانِ عملی ترجمه کنیم، این مفهوم به‌خوبی مناسب است با هدف‌هایِ ستمگراني که آسایش‌شان استوار است بر این که آدمیان تا چه حد متناسبِ جهاني شده‌اند که ستمگران آفریده‌اند و تا چه حد در آن تردید می‌کنند. هر چه اکثریت خود را بیش‌تر با هدف‌هایي که اقلیتِ حاکم برای آنان تجویز می‌کند (و به این وسیله آنان را از حقِ خود بر هدف‌هایِ خود محروم می‌سازد) منطبق سازند، این اقلیت آسان‌تر می‌تواند به حاکمیت ادامه دهد." (فریره 1358، 65).

فریفته‌گری

بعضي از انسان‌ها، به وسیله‌یِ افسانه‌هایي مثلِ این که نظام‌هایِ اجتماعی از جمله نظام‌هایِ سرمایه‌داری وجود دارند که در آن‌ها، همه مطلقن آزاد اند که هر نوع آموزشي که خواستند طلب کنند، هر مدرسه‌یي که دوست دارند بروند و بالاخره، هر جا دل‌شان خواست استخدام شوند و کار کنند، فریفته می‌شوند. نتیجه‌یِ بالقوه‌یي که از چنین آزادیي گرفته می‌شود این است که اگر انسان، نوعِ آموزش، مدرسه، کار، یا کارفرمایِ خود را دوست نداشته باشد، می‌تواند هر یک را تغییر دهد و به دنبالِ کار دیگري بگردد. افسانه‌هایِ دیگري هست که انسان‌هایِ خارج از نظام‌هایِ سرمایه‌داری را فریفته‌است؛ افسانه‌هایي مانندِ این که در این نظام‌ها، به «حقوقِ بشر» احترام می‌گذارند و همه دارایِ کار و اشتغال هستند؛ مالکیتِ خصوصی، پایه‌یِ اصلیِ رشدِ شخصیتِ انسانی است؛ ثروتِ پول‌داران بر اثرِ کوشنده‌گیِ آن‌ها و علتِ ناداریِ کارگران، تنبلیِ آن‌ها ست؛ و سرمایه‌داران به طورِ ذاتی و خلقتی، دارایِ برتری نسبت به دیگران هستند. در این نظام‌ها، طبقه‌یِ سرمایه‌دار و صاحبِ قدرت، می‌کوشد به وسیله‌یِ فریفته‌گری، عامه‌یِ مردم را با هدف‌هایِ خود منطبق سازد. طبیعی است که هر چه آگاهیِ سیاسیِ مردم کم‌تر باشد، آسان‌تر می‌توانند آلتِ دستِ کساني باشند که نمی‌خواهند سرمایه و قدرت را از دست بدهند.

استیلایِ فرهنگی

در پدیده‌یِ استیلایِ فرهنگی، "گروهِ مستولی در فرهنگِ گروهِ دیگرِ نفوذ می‌کند و با نادیده گرفتنِ استعدادهایِ گروهِ اخیر، بینشِ خود را از جهان بر آنان تحمیل می‌نماید و با جلوگیری از اظهارِ وجودشان، از آفریننده‌گیِ آن‌ها جلوگیری می‌کند." (فریره 1358، 182). فریره در ادامه می‌گوید "در استیلایِ فرهنگی، استیلاگران هم نویسنده و هم بازی‌کننده‌یِ نقش در جریانِ امور هستند و آنان که از زیرِ استیلا درآمده‌اند موضوعِ سخن می‌باشند. استیلاگران قالب‌ریزی می‌کنند، استیلاشده‌گان قالب‌ریزی می‌شوند. دسته‌یِ اول انتخاب می‌کنند، دسته‌یِ دوم از آن انتخاب پیروی می‌کنند، یا انتظار می‌رود که از آن پیروی کنند.

استیلاگران عمل می‌کنند، استیلاشده‌گان از طریقِ عملِ آنان، فقط توهمِ عمل کردن دارند."

در پایانِ این بحث، فریره به جمع‌بندیِ زیر می‌رسد: "برایِ آن که استیلایِ فرهنگی توفیق یابد، اساس آن است که آن کسان که استیلا یافته‌اند به پست‌تریِ ذاتیِ خود متقاعد شوند... اگر استیلایافته‌گان خود را پست‌تر بدانند، به ضرورت باید برتریِ مستولیان را بپذیرند. به این وسیله، ارزش‌هایِ دسته‌یِ دوم، الگویي برایِ دسته‌یِ اول می‌شود. هر چه بیش‌تر بر استیلا تأکید شود و استیلایافته‌گان از فرهنگِ روحِ خود و از خودشان بی‌گانه‌تر شوند، اینان بیش‌تر می‌خواهند شبیهِ استیلاگران شوند: مثلِ آن‌ها راه بروند، مثلِ آنان لباس بپوشند، و مثلِ آنان حرف بزنند." (فریره 1358، 184).

تفرقه

فریره معتقد است که "چون اقلیتِ ستمگر، اکثریتِ ستمکش را زیرِ سلطه‌یِ خود دارد، باید آن را قطعه‌قطعه کند و به آن صورت نگاه دارد تا بر اریکه‌یِ قدرت باقی بماند. اقلیت نمی‌تواند به خود اجازه‌یِ تحملِ یگانه‌گیِ مردم را بدهد، زیرا که بی‌شک، این کار به معنیِ تهدیدِ جدیِ برتریِ خودِ آن است. بنابراین، ستمگران به هر وسیله (از جمله خشونت)، هر اقدامي را که ممکن باشد، حتا به شکلِ ابتدایی، حسِ نیاز به وحدت را در ستمکشان بیدار کند، متوقف می‌سازد. مفهوم‌هایي مانندِ وحدت و سازمان و مبارزه در دم برچسبِ "خطرناک" می‌خورند. در واقع، این مفاهیم مسلمن — برای ستمگران — خطرناک اند، زیرا که درکِ آن مفهوم، برای اعمالِ آزادی ضروری است." (فریره 1358، 165). بنابراین، آموزشِ بانکی، منجر به بقایِ جامعه‌یِ ستمگر-ستمکش می‌شود.

مثلن یک ساختمانِ اجتماعیِ انعطاف‌ناپذیر و ستمگر، به حکمِ ضرورت، بر مؤسساتِ پرورش و آموزشِ کودک در آن ساختمان تأثیر می‌گذارد. این مؤسسات عملِ خود را بر اسلوبِ آن ساختمانِ اجتماعی طرح‌ریزی می‌کنند، افسانه‌هایِ آن را انتقال می‌دهند... آن‌ها در درونِ ساختمان‌هایِ سلطه به صورتِ عاملاني عمل می‌کنند که مهاجمانِ آینده را آماده می‌سازند.

رابطه‌یِ پدر و مادر و کودک در خانه معمولن بازتابِ اوضاعِ فرهنگیِ عینی است که ساختمانِ اجتماعیِ محیط است. اگر شرایطي که به خانه‌ها نفوذ می‌کنند قدرتمندانه و انعطاف‌ناپذیر و سلطه‌جویانه باشند، خانه نیز جوِ ستمگری را تقویت می‌کند. در حالي که این روابطِ قدرتمندانه بینِ پدر و مادر و فرزندان شدت یابد، بچه‌ها در دوره‌یِ بچه‌گی به نحوي فزاینده، اقتدارِ پدرانه را در درونِ خود می‌پذیرند و جا می‌دهند. (فریره 1358، 185 و 186).

نتیجه‌گیری

در دانشگاه نیز چنین آموزشي به ما داده می‌شود. به خصوص ریاضی می‌تواند شرایطي مناسب را برای این آموزش فراهم کند: فراوان دیده‌ام و تجربه کرده‌ام که ما —دانشجویانِ ریاضی— در برابرِ سؤال‌هایي مانند "خُب که چی؟" یا "آخرش که چی؟" به چالش کشیده می‌شویم و ارتباطِ بینِ درس‌هایِ گذرانده شده را با زنده‌گیِ روزمره‌یِ خود پیدا نمی‌کنیم. می‌توان به این سؤال‌ها خودخواهانه پاسخ دهیم: "از مطالعه یا حل کردنِ مسائلِ ریاضی لذت می‌برم و همین برایم کافی است". و آن‌گاه ارتباطِ رشته‌مان را به زندگیِ روزمره و واقعیاتي که در آن زنده‌گی می‌کنیم پیدا نمی‌کنیم و این موضوع را مشکلي نمی‌پنداریم. حتا در صورتي که ارتباطِ بینِ ریاضی و زنده‌گی را پیدا کنیم ممکن است دچارِ نوعي از بی‌گانه‌گی شویم. به عنوانِ دانش‌آموز باورهایي را از مدرسه تا دانشگاه حمل می‌کنیم که در دانشگاه ریشه‌دارتر می‌شوند. باورهایي مثلِ اینکه ریاضی‌دانان روابط را کشف می‌کنند. در واقع با این باور، ریاضی‌دان‌ها می‌پندارند که کارشان جز این نیست که گوهرِ ریاضیِ طبیعت را آشکار سازند و جهانِ بیرونی چیزي جز تحققِ نظمِ ریاضی نیست. هم‌چنین، می‌پندارند که "تحلیلِ ریاضیِ" طبیعت، یگانه روشِ درست است و پیشینیان هر وقت که با این تحلیل، به هر دلیل و به هر شکل، هم‌راه و هم‌نظر شدند، به نتایجي دست یافتند. هر جا هم که از آن روی برگرداندند، به ارائه‌یِ احکامي بی‌ارزش پرداختند. هم‌چنین به طورِ مثال، این بینش را می‌توان در حوزه‌یِ زبان در گفت‌وگوهایِ روزمره جست‌وجو کرد. جملاتي مثلِ "فلان چیز مثلِ حساب دو دو تا چهار تا ست"[8] یا "ریاضی برای درستیِ احکامِ خود از کسي سؤال نمی‌پرسد!" که فراوان شنیده می‌شوند و تحتِ تأثیرِ این بینش هستند. پس می‌توان این‌طور برداشت کرد که ریاضیِ موجود برایِ آن‌هایي که بر این باور اند، به بتي تبدیل شده که ساخته‌یِ انسان است ولی حالا از او جدا شده و در نقشي پدرمآبانه، به تفکرِ انسان حکم می‌راند. بنابراین، ریاضی از انسان بی‌گانه شده‌است. این وضعیت، شبیهِ تبیینی است که مارکس و انگلس (1976)، از نظامِ سرمایه‌داری داشتند که "تا به حال، یکي از عواملِ اصلیِ رشدِ تاریخی تحکیمِ این ویژه‌گی بوده‌است که آن‌چه ما خود تولید کردیم، ... به قدرتي بر فرازِ ما تبدیل می‌شود، خارج از کنترلِ ما رشد می‌کند، انتظارهایِ ما را خنثا می‌کند و بر ارزیابی‌هایِ ما خطِ بطلان می‌کشد" (ص. 53).

اگر ریاضی به عنوانِ واقعیتِ عینی و نه محصولِ کنشِ بینِ ذهنیت و عینیت مطرح شود آن‌گاه برایِ

[8] در واقع کسی که چنین چیزي را می‌گوید درستیِ حرفِ خودِ را از درستیِ **قطعیِ** دو ضرب در دو مساوی چهار قرض می‌گیرد.

امانت‌گذاران — به تعبیرِ فریره — که در این‌جا "ریاضی‌دون[9]"ها هستند، فرصتِ مناسبي فراهم می‌شود تا برتریِ خود را به امانت‌داران — دانش‌آموزان/دانشجویانِ ریاضی — تحمیل کنند. این فرآیند، وجودِ واقعیت‌هایِ عینیِ ایستا و قطعی را برایِ امانت‌داران، مشروع جلوه می‌دهد که ممکن است آنان را مطیع و منفعل سازد.

به نظرم جز اولین سؤال به سؤالاتِ دیگر پاسخ داده‌ام. در برابرِ سؤالِ اولِ مقاله که خودم با آن روبه‌رو می‌شدم، این چنین پاسخ می‌دهم:

جبرِ 1 و هندسه‌یِ دیفرانسیلِ موضعی را وقتي که بر می‌داشتم گویا به‌طورِ ناخودآگاهانه داشتم بسته‌هایِ آموزشيي که گروهِ ریاضی عرضه کرده بود "انتخاب"[10] می‌کردم تا به امانت‌سپاری‌هایم اضافه شود. این در حالي است که مطلقن برداشتنِ این دروس به خاطرِ داشتنِ مسأله‌يي در واقعیتِ زنده‌گی‌م، که احتمال می‌دادم جواب‌ش را از طریقِ محتویاتِ آن‌ها می‌توانم پیدا کنم، نبود. فقط می‌دانستم باید انتخاب می‌کردم تا فارغ‌التحصیل بشوم. حتا نمی‌دانستم که فارغ‌التحصیل شوم که چه؟ با این حال انتخاب کردم آن‌ها را مثلِ خیلي از انتخاب‌هایِ دیگر. انتخاب‌هایي که مرا از خودم بی‌گانه می‌کرد.

حال این که آموزشِ بانکی جایگزیني دارد یا نه، علاقه‌مندان را به خواندنِ کتاب‌هایِ *آموزشِ ستم‌دیده‌گان* و *مدرسه‌زدایی از جامعه* ارجاع می‌دهم.

منابع

Marx, Karl. *Capital.* Edited by Frederick Engels. Vol. I. New York: The Modern Library, 1906.

—. *Economic and Philosophic Manuscripts of 1844.* 5th Edistion. Moscow: Progress Publisher, 1977.

Marx, Karl, and Fredrick Engels. *The German Ideology.* Moscow: Progress Publisher, 1976.

Steen, Lynn Arthur, ed. *On the Shoulders of Giants.* Washington D.C.: National Academy, 1990.

ایلیچ، ایوان. *مدرسه‌زدایی از جامعه.* با ترجمه‌یِ الهه ضرغام. تهران: انتشارات رشد، 1387.

بیشاپ، آلن. "غلبه بر موانعِ دموکراتیزه کردنِ آموزشِ ریاضی." *مجله‌یِ رشدِ آموزشِ ریاضی. سازمانِ پرورش و برنامه‌ریزیِ آموزشی. وزارتِ آموزش و پرورش* (مجله‌یِ رشدِ آموزشِ ریاضی. سازمان پرورش و برنامه‌ریزیِ آموزشی. وزارتِ آموزش و پرورش)، 1380: 4-13.

روزدار، علی، و زهرا گویا. "تناسبِ محتوا و روش در برنامه‌یِ درسیِ ریاضیاتِ مدرسه." *مجله‌یِ رشدِ آموزشِ ریاضی. سازمانِ پرورش و برنامه‌ریزیِ آموزشی. وزارتِ آموزش و پرورش*، 1382: 4-12.

غلام آزاد، سهیلا، و زهرا گویا. "نقشِ اثبات در برنامه‌یِ درسیِ ریاضیِ مدرسه‌ای." *رشدِ آموزشِ ریاضی. سازمانِ پرورش و برنامه‌ریزیِ آموزشی. وزارتِ آموزش و پرورش* (سازمان پرورش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش)، 1385: 4-10.

فریره، پائلو. *آموزشِ ستمدیدگان.* با ترجمه‌یِ احمد بیرشک و سیف الله داد. تهران: شرکت سهامی انتشارات خوارزمی، 1358.

* سهند حشمتی افشار
دانشجویِ کارشناسیِ ریاضیِ محضِ دانشگاهِ شهید بهشتی
sahand.h.afshar@gmail.com

[9] همان طور که نمک‌دون از نمک انباشته شده‌است، ریاضیدون هم از قضایا و گزاره‌ها انباشته شده‌است.

[10] قابل توجه است که انتخاب نکردن دروس خود انتخابی نیست.

مسأله‌هایی زیبا

سردبیر

1. شترنجِ خدایان

دو فردِ مصون از خطا و گناه با هم شترنج بازی می‌کنند و هر کس در نوبتِ خود بهترین حرکت را می‌کند. ثابت کنید از آغازِ بازی می‌توان مشخص کرد نتیجه‌یِ بازی چه است. یعنی می‌توان مشخص کرد کدام یک از حالت‌هایِ تساوی یا بردِ سفید یا بردِ سیاه رخ می‌دهد.

راهنمایی. مقاله‌یِ «درباره‌یِ روشي در هوشِ مصنوعیِ بازی‌هایِ رایانه‌یی» را بخوانید.

2. تعمیمِ لیوویل

می‌دانیم به ازایِ هر عددِ طبیعیِ n، داریم

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

یعنی اگر $\langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle$ را $\langle n\rangle$ بنامیم، مجموعِ مکعباتِ اعضایِ $\langle n\rangle$ برابر است با مربعِ مجموعِ آن‌ها. دنباله‌هایِ متناهیِ $\langle a_n\rangle \subseteq \mathbb{N}$ را می‌جوییم که دارایِ همین خاصیت اند.

اکنون عددي طبیعیِ m، مثلن 6، را در نظر گیرید، و همه‌یِ مقسوم‌علیه‌هایش را بنویسید؛ برایِ 6:

$$\langle 1, 2, 3, 6\rangle.$$

حال تعدادِ مقسوم‌علیه‌هایِ هر یک از این عددها را بنویسید:

$$\langle 1, 2, 2, 4\rangle.$$

ثابت کنید این دنباله‌یِ متناهی دارایِ ویژه‌گیِ بالا است. مثلن برایِ 6:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 &= 1 + 8 + 8 + 64 \\ &= 81 \\ &= 9^2 \\ &= (1 + 2 + 2 + 4)^2. \end{aligned}$$

راهنمایی. چنین استقرا کنید که فرض کنید حکم برایِ $m = k$ درست است، سپس برایِ $m = p^n k$ درستیِ حکم را نشان دهید، که $p \nmid k$.

3. مسأله‌یِ شیخ بهایی (؟)

نشان دهید شرکت‌هایِ آب و گاز و برق نمی‌توانند به بیش از 2 خانه خدمات برسانند، اگر بخواهند خطوطِ لوله یا سیم‌کشی‌شان از رویِ هم نگذرد. به زبانِ نظریه‌یِ گراف‌ها، نشان دهید $K_{3,3}$ هامونی نیست. (دقت کنید که ما فرض کرده‌ایم همه‌یِ لوله‌ها و نیز سیم‌هایِ برق از سطحِ زمین می‌گذرند.) سپس بگویید دستِ کم چند پُل نیاز است تا خدمات‌رسانیِ این سه شرکت به 3 خانه ممکن شود.

راهنمایی. برایِ بخشِ دوم، نگاهي بیفکنید به مقاله‌یِ «درباره‌یِ گونایِ گراف».

4. رنگ‌آمیزیِ فضا

هر نقطه از فضا را به یکي از سه رنگِ قرمز یا سبز یا آبی رنگ می‌کنیم. پس مجموعه‌هایِ R و G و B به ترتیب برابر اند با مجموعه‌یِ فواصلِ هر دو نقطه‌یِ قرمز و سبز و آبی. یعنی $x \in R$، اگر و تنها اگر دو نقطه‌یِ قرمز با فاصله‌یِ x بتوانیم یافت. ثابت کنید به ازایِ هر چنین رنگ‌آمیزی، دستِ کم یکي از مجموعه‌هایِ R یا G یا B شاملِ همه‌یِ اعدادِ حقیقیِ مثبت است.

5. تعمیمِ مسأله‌یِ 4

تابعِ $\chi : \mathbb{R}^m \to n$ را یک n-رنگ‌آمیزیِ $\mathbb{R}^m$ می‌نامیم. توجه کنید که $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. پس تعریف می‌کنیم $D_i = \{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \mid \chi(\mathbf{a}) = \chi(\mathbf{b}) = i\}$، برایِ هر $i \in n$. مسأله این است که برایِ کدام مقادیرِ m و n دستِ کم یک $i \in n$ هست که $D_i = \mathbb{R}^+$.

6. حلقه‌یِ یکدار

فرض کنید R حلقه‌یي متناهی باشد که هر عضوِ آن خودتوان است، یعنی برایِ هر $a \in R$ داریم $a^2 = a$. ثابت کنید R یکدار است.

حل. فرض کنیم $R = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$، پس تعریف می‌کنیم

$$b = 1 - (1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3) \cdots (1 - a_n).$$

توجه کنید که در تعریفِ b، از حکم استفاده نکرده‌ایم؛ این 1ها ظاهری اند. در حقیقت، اگر ضربِ بالا را بسط دهیم، خواهیم دید که همه‌یِ 1ها حذف شده‌اند؛ پس در حقیقت، تساویِ بالا یک نمایشِ نااستاندارد (و نه نادرست) است، تا راحت‌تر حلِ مسأله را پیش ببریم.

حال اگر هر عضوِ a_i را در b ضرب کنیم، داریم

$$\begin{aligned} a_i b &= a_i\big(1 - (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)\big) \\ &= a_i - a_i(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n). \end{aligned}$$

از طرفي، چون هر عضوِ حلقه خودتوان است، پس حلقه فاقدِ عضوِ پوچتوانِ ناصفر است، پس هر عضوِ آن مرکزی است؛ به بیانِ دیگر حلقه جابه‌جایی‌پذیر است. پس داریم

$$\begin{aligned} a_i b &= a_i - (1 - a_1) \cdots (a_i - a_i^2) \cdots (1 - a_n) \\ &= a_i. \end{aligned}$$

پس برایِ هر عضوِ $a \in R$ داریم $ab = ba = a$. یعنی b یکِ حلقه‌یِ R است، پس R یکدار است. ■

پیش‌نهادِ گنجاندنِ این مسأله و حلِ زیبایش در *بینهایت* از محمدرضا رضاییان است، که خود حلِ آن را نوشت و برایِ ما فرستاد.

بعدِ هاسدورف، مجموعه‌هایِ تحلیلی و تعال

گ. ا. ادگار* و کریس میلر†
ترجمه‌یِ فرناز ایرانی‡

چکیده. هر زیرمیدانِ محضِ بسته‌یِ-حقیقیِ تحلیلیِ $\mathbb{R}$ دارایِ بعدِ *هاسدورفِ* صفر است. به طورِ معادل، هر مجموعه‌یِ تحلیلی از اعدادِ حقیقی که دارایِ بعدِ *هاسدورفِ* مثبت باشد، شاملِ یک پایه‌یِ تعال برایِ $\mathbb{R}$ است.

یک زیرمیدانِ محضِ اعدادِ حقیقی چه‌قدر می‌تواند بزرگ باشد؟ البته، پیش از کوشش برایِ پاسخ دادن به این سؤال، باید روشن سازیم که منظورمان از "بزرگ" باید چه باشد — کاردینال، اندازه، رسته‌یِ *بئر*، و غیره — اما سؤالِ ضروریِ دیگری نیز وجود دارد: چه زیرمیدان‌هایي از $\mathbb{R}$ را ما باید بررسی کنیم؟ اگر تمرکزمان را جمع نکنیم، پی‌آمدهایِ مستقلِ نظریه-مجموعه‌یی به سرعت برمی‌خیزند. در این یادداشت نشان می‌دهیم که زیرمیدان‌هایِ محضِ $\mathbb{R}$ که در درک‌هایِ جبریِ معین و نظریه-مجموعه‌یِ توصیفی خوش‌رفتار اند، (با کاستن از دقت) کاملن کوچک هستند، وقتي که اندازه‌شان به طورِ تئوری نگریسته شود. گرچه هر میدانِ ناشمارایِ این‌چنینی دارایِ کاردینالِ پیوستار (حقیقی) است.

$E \subseteq \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ داده شده‌اند، می‌نویسیم E^n برایِ حاصلِ ضربِ دکارتیِ n-تاییِ $E \times E \times \cdots \times E$.

یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ **تحلیلی** (یا **souslin**) است اگر تصویرِ پیوسته‌یِ یک زیرمجموعه‌یِ *برلِ* $\mathbb{R}$ باشد. (چند تعریفِ معادلِ دیگر نیز وجود دارد، این‌یکي شاید ساده‌ترین راهِ بیانِ آن باشد.) گردآیه‌یِ همه‌یِ زیرمجموعه‌هایِ تحلیلیِ $\mathbb{R}^n$ به طورِ محض شاملِ گردآیه‌یِ همه‌یِ زیرمجموعه هایِ *برلِ* $\mathbb{R}^n$ است. مجموعه‌هایِ تحلیلی اندازه‌پذیرِ *لبگ* بوده و دارایِ ویژه‌گیِ *بئر* هستند. هر مجموعه‌یِ تحلیلیِ ناشمارا شاملِ یک مجموعه‌یِ تامِ ناتهی است، بنابراین دارایِ کاردینالِ پیوستار است. برایِ یافتنِ اطلاعاتِ پایه‌یِ مجموعه‌هایِ تحلیلی می‌توانید به [11] یا [2, Ch. 8] مراجعه کنید؛ برایِ پیشرفتِ نوینِ گسترده‌یي نگاه بیندازید به [8].

فرض کنید G یک زیرگروهِ جمعیِ محضِ $\mathbb{R}$ باشد، بلافاصله از نتایجِ مقدماتی (برایِ نمونه نگاه بیندازید به [10, 4.8]) استنباط می‌شود که اگر G اندازه‌پذیرِ *لبگ* باشد، دارایِ اندازه‌یِ صفر است، و اگر G ویژه‌گیِ *بئر* را بدارد، جزوِ اولین رسته‌یِ *بئر* است. بنابراین زیرگروه‌هایِ محضِ تحلیلیِ $(\mathbb{R}, +)$ کوچک خواهند بود، اگر که ما توجه‌مان را به اندازه‌یِ *لبگ* و رسته‌یِ *بئر* محدود کنیم. از سویِ دیگر، هر زیرگروهِ تحلیلیِ ناشمارایِ $\mathbb{R}$ دارایِ کاردینالِ $\mathbb{R}$ می‌باشد. برایِ درک کردنِ بهترِ وضعیت، ابزارِ بهتري نیاز است.

برایِ $s \geq 0$، s–**اندازه‌یِ *هاسدورفِ*** $A \subseteq \mathbb{R}^n$، که با $\mathcal{H}^s(A)$ نمایش داده می‌شود، به این صورت تعریف می‌شود: برایِ $\delta > 0$، بگذارید $\mathcal{H}^s_\delta(A) \in [0, \infty]$ کمینه‌یِ تمامِ جمع‌هایِ به صورتِ $\sum_{j\in\mathbb{N}}[\text{diameter}(A_j)]^s$ باشد، به طوري که $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ گردآیه‌یي از زیرمجموعه‌هایِ $\mathbb{R}^n$ است که $A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ و $\text{diameter}(A_j) \leq \delta$ برایِ همه‌یِ $j \in \mathbb{N}$ها. حال بگذارید $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A)$. **بعدِ *هاسدورفِ*** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ که با $\dim_{\mathcal{H}} A$ نمایش داده می‌شود، کمینه‌یِ تمامِ $s \geq 0$هایي است که $\mathcal{H}^s(A) = 0$. (برایِ جزئیات نگاه بیندازید به هر کدام از [5]، [7]، [9]، یا [11]).

از این پس، منظور از "بعد" همان "بعدِ *هاسدورف*" است.

میدانِ مرتبِ K **بسته‌یِ-حقیقی** است اگر هر عضوِ آن دارایِ جذري در K بوده و هر تابعِ چندجمله‌یيِ درجه‌یِ فرد با ضرایبِ از K دارایِ ریشه در K باشد. (به طورِ معادل، اگر حلقه‌یِ $K[X]/(X^2+1)$ یک میدانِ بسته‌یِ جبری باشد.) میدان‌هایِ بسته‌یِ-حقیقی در نظریه‌یِ میدان‌هایِ مرتب نقشي شبیه به میدان‌هایِ بسته‌یِ جبری در نظریه‌یِ میدان‌هایِ با مشخصه‌یِ صفر بازی می‌کنند.

نتیجه‌یِ اصلیِ این یادداشت:

قضیه. هر زیرمیدانِ محضِ بسته‌یِ-حقیقیِ تحلیلیِ $\mathbb{R}$ دارایِ بعدِ صفر است.

در حقیقت ما باید ثابت کنیم که هیچ مجموعه‌یِ تحلیلیِ $E \subseteq \mathbb{R}$ که $\dim_{\mathcal{H}} E > 0$، مشمولِ هیچ زیرمیدانِ بسته‌یِ-حقیقیِ محضِ $\mathbb{R}$ نیست. (راهِ بیانِ دیگر این است که E شاملِ یک **پایه‌یِ تعال** برایِ $\mathbb{R}$ است، که پایه‌یِ تعال یک زیرمجموعه‌یِ ماکسیمالِ مستقلِ جبریِ $\mathbb{R}$ است.) عکسِ آن برقرار نیست: زیرمجموعه‌هایي تحلیلی با بعدِ صفر از $\mathbb{R}$ وجود دارند که مشمولِ هیچ زیرمیدانِ بسته‌یِ-حقیقیِ محضِ $\mathbb{R}$ نیستند. در واقع، مجموعه‌هایِ فشرده‌یِ با بعدِ صفرِ $C \subseteq \mathbb{R}$ وجود دارند که مجموعه‌یِ جمعیِ $\{x + y : x, y \in C\}$ دارایِ درون است، بنابراین C حتا مشمولِ هیچ زیرگروهِ جمعیِ محضِ $\mathbb{R}$ نیست. (برایِ مثال، قرار دهید $C = E \cup F$ که E و F مانندِ [7, Example 7.8] هستند.)

به قضیه برمی‌گردیم و در عینِ حال سؤالِ بازي را درباره‌یِ بعدهایِ *هاسدورفِ* ممکنِ زیرحلقه‌هایي از $\mathbb{R}$ که *برل* هستند، بررسی می‌کنیم. به خوبی دانسته است که هر زیرگروهِ جمعیِ محضِ $\mathbb{R}$ یا دوری است، (یعنی به فرمِ $r\mathbb{Z}$ برایِ یک $r \in \mathbb{R}$)، یا چگال و همچگال در $\mathbb{R}$ است. همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد، اگر یک چنین زیرگروهي *برل* باشد، آنگاه

دارایِ اندازه‌یِ *لبگِ* صفر و جزوِ رسته‌یِ نخستِ *بئر* است. بعدِ *هاسدورفِ* آن چه مقادیري می‌تواند باشد؟ پیدا است که وضعیت کاملن خودسرانه است: برایِ هر $d \in [0,1]$ یک زیرگروهِ G از $(\mathbb{R},+)$ وجود دارد به طوري که G *برل* است و $\dim_{\mathcal{H}} G = d$؛ نگاه کنید به [6] یا [7, §12.4].

یک گونه‌یِ طبیعیِ این سؤال این است که: چه بعدهایِ *هاسدورفي* برایِ زیرحلقه‌هایي از $\mathbb{R}$ که *برل* هستند ممکن است؟ در حالِ حاضر تنها یک پاسخِ مختصر شناخته شده‌است: بعدِ چنین حلقه‌یي یا مساوی است با 1 و یا حداکثر $1/2$ است. اما هیچ مثال‌هایِ دیگري به غیر از بعدهایِ 0 و 1 شناخته نشده‌اند. سؤالِ مشابهِ دیگري برایِ زیرمیدان‌هایي از $\mathbb{R}$ که *برل* هستند باز است. سؤال‌هایِ بازِ یکساني وجود دارد، حتا برایِ هنگامي که زیرحلقه یا زیرمیدان لزومن *برل* نیست اما صرفن تحلیلی است. (برایِ اطلاعاتِ بیشتر مثلن نگاه کنید به [9, pp. 166-7].)

بنابراین، برمی‌گردیم به سؤالي که در این یادداشت پاسخ داده شد: یک زیرمیدانِ بسته‌یِ-حقیقیِ $\mathbb{R}$ که یک مجموعه‌یِ *برل* است (یا حتا یک مجموعه‌یِ تحلیلی) دارایِ بعدِ *هاسدورفِ* 0 یا 1 است. به‌علاوه بعدِ 1 تنها برایِ خودِ $\mathbb{R}$ اتفاق می‌افتد.

قضیه بی‌درنگ از چهار لمِ زیر نتیجه می‌شود (از هر نتیجه‌یِ مستقل).

لم 1. فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}$ فشرده بوده و $\dim_{\mathcal{H}} E > 0$. آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ و یک تابعِ $\mathbb{R}$–خطیِ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $T(E^n)$ دارایِ درون (در $\mathbb{R}$) است.

برهان. قرار دهید $\dim_{\mathcal{H}} E = d > 0$. $k \in \mathbb{N}$ را طوري بگزینید که $kd > 1$؛ بنابراین $\dim_{\mathcal{H}}(E^k) \geq kd > 1$ (نگاه کنید [9, 8.10]). از این رو تصویرسازیِ متعامدِ $\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ موجود است به طوري که تصویر πE دارایِ اندازه‌یِ *لبگِ* مثبت است [9, Ch. 9]. (در $\mathbb{R}$، 1–اندازه‌یِ *هاسدورف* مانندِ اندازه‌یِ *لبگ* است.) بنابراین مجموعه‌یِ تفاضلیِ $\{a - b : a, b \in \pi E\}$ دارایِ درون است؛ نگاه کنید به [10, 4.8]. قرار دهید $n = 2k$ و $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را اینطور تعریف کنید: $T(x_1, \dots, x_n) = \pi(x_1, \dots, x_k) - \pi(x_{k+1}, \dots, x_n)$. ■

لم 2. فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}$ تحلیلی بوده و $\dim_{\mathcal{H}} E > 0$. آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ و یک تابعِ $\mathbb{R}$–خطیِ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $T(E^n)$ دارایِ درون (در $\mathbb{R}$) است.

برهان. از آن‌جا که E تحلیلی است، شاملِ یک مجموعه‌یِ با بعدِ مثبت است [5, (1.7.11)]. لمِ پیش را به کار برید. ■

تذکر. فرض کنید در لم 2، E به‌علاوه یک زیرگروهِ جمعیِ $\mathbb{R}$ باشد. آن‌گاه $T(E^n)$ یک زیرگروهِ جمعیِ $\mathbb{R}$ است که دارایِ درون در $\mathbb{R}$ است. پس، $T(E^n) = \mathbb{R}$، از این رو وجود دارند $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$ به طوري که $\mathbb{R}$ مساویِ مجموعه‌یِ تمامِ مجموع‌هایِ $\sum_{i=1}^n s_i e_i$ است که $e_1, \dots, e_n \in E$. (به طورِ خاص، اگر E یک زیرحلقه‌یِ $\mathbb{R}$ نیز باشد، آن‌گاه $\mathbb{R}$ به طورِ متناهی به عنوانِ یک E–مدول تولید شده‌است.) این نشان می‌دهد که زیرگروه‌هایِ تحلیلیِ محضِ $\mathbb{R}$ که دارایِ بعدِ مثبت هستند، در یک درکِ جبری تقریبن تمامِ $\mathbb{R}$ هستند.

پیش از پیش‌رویِ بیش‌تر، ما به چند تعریف و حقایقِ مقدماتیِ هندسه‌یِ جبریِ حقیقی نیازمندیم. (نگاه کنید به [1, Chs. 1,2] یا [4, Chs. 2,3] برایِ حقایقي که در زیر استفاده شده‌اند.)

یک مجموعه‌یِ **نیمه‌جبریِ** $S \subseteq \mathbb{R}^n$ برابر است با اجتماعِ متناهیِ مجموعه‌هایي به فرمِ

$$\{x \subseteq \mathbb{R}^n : p(x) = 0, q_1(x) < 0, \dots, q_l(x) < 0\}$$

که $p, q_1, \dots, q_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع‌هایِ چندجمله‌یِ حقیقی هستند. گوییم S **تعریف‌شده-بر** یک زیرمیدانِ $K \subseteq \mathbb{R}$ است اگر هر ضریبي که در توصیفِ S می‌آید، متعلقِ به K باشد (بنابراین "نیمه‌جبری و تعریف‌شده-بر $\mathbb{R}$" معنایِ همان "نیمه‌جبری" را دارا است.) اگر $A \subseteq \mathbb{R}^m$ در این صورت یک نگاشتِ $f : A \to \mathbb{R}^n$ نیمه‌جبری (و تعریف‌شده-بر K) خوانده می‌شود اگر گرافِ آن $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ یک زیرمجموعه‌یِ نیمه‌جبری (و تعریف‌شده-بر K)یِ $\mathbb{R}^{m+n}$ باشد.

مجموعه‌هایِ نیمه‌جبری در هندسه‌یِ جبریِ حقیقی، نقشي شبیه به مجموعه‌هایِ ساخت‌پذیر در هندسه‌یِ جبریِ مختلط ایفا می‌کنند.

لمِ 3. فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}$ تحلیلی بوده و K کوچک‌ترین زیرمیدانِ بسته‌یِ-حقیقیِ $\mathbb{R}$ شاملِ E باشد. در این صورت K تحلیلی است.

برهان. میدانِ K برابر است با اجتماعِ تمامِ مجموعه‌هایِ به فرمِ $f(E^n)$ که $n \in \mathbb{N}$ و $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نیمه‌جبری و تعریف‌شده-بر $\mathbb{Q}$ است. (راه‌هایِ ساده‌یِ بسیاری برایِ ساختنِ K از E وجود دارد اما در این‌جا به آن‌ها نیازي نداریم.) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نیمه‌جبری باشد. از قضیه‌یِ تجزیه‌یِ حجره‌یی، یک افرازِ متناهی برایِ $\mathbb{R}^n$ به مجموعه‌هایِ موضعن بسته‌یِ $C_1, \dots, C_k$ وجود دارد به طوري که هر تحدیدِ $f|C_i : C_i \to \mathbb{R}$ پیوسته است. فصلِ مشترکِ مجموعه‌هایِ تحلیلی نیز، تحلیلی است، بنابراین هر $C_i \cap E^n$ تحلیلی است. تصاویرِ پیوسته‌یِ مجموعه‌هایِ تحلیلی، تحلیلی اند، پس هر $f(C_i \cap E^n)$ نیز تحلیلی است. برایِ هر $n \in \mathbb{N}$ تنها تعدادِ شمارش‌پذیري تابعِ نیمه‌جبریِ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ وجود دارد که تعریف‌شده-بر $\mathbb{Q}$ است.

اجتماعِ شمارایِ مجموعه‌هایِ تحلیلی، تحلیلی است، پس K تحلیلی است. ■

تذکر: در لمِ 3 اگر به جایِ "تحلیلی"، "*برل*" بگذاریم، برقرار نخواهد بود حتا اگر E زیرحلقه‌یِ $\mathbb{R}$ نیز باشد. هر چند، اگر E یک زیرمیدانِ *برلِ* $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه K نیز *برل* است. (این نتایج حاصلِ تبادلِ اطلاعاتِ شخصیِ میانِ *ر. دائرتی* و نویسنده‌یِ دوم است.)

تذکر بر نظریه‌پردازانِ مدل. یک اصلاحِ ساده‌یِ برهانِ لمِ 3 نشان می‌دهد که اگر $\Re$ یک بسطِ ت-کمینِ ساختارِ $(\mathbb{R},<,+,1)$ در یک زبانِ شمارا بوده و $E \subseteq \mathbb{R}$ تحلیلی باشد آنگاه بستارِ تعریف‌پذیرِ E — بر حسبِ $\mathrm{Th}(\Re)$ — نیز تحلیلی است.

در نهایت، ما بدونِ اثباتِ حالتِ خاصي از یک نتیجه‌یِ نظریه‌یِ-مدلی را شرح دادیم؛ نگاه کنید به [3, Lemma 4.1].

لم 4. فرض کنید K و L زیرمیدان‌هایِ بسته‌یِ-حقیقیِ $\mathbb{R}$ باشند به طوری که K محضن مشمولِ L است. بگیرید $n \in \mathbb{N}$ و $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نیمه‌جبری و تعریف‌شده-بر L باشد. آنگاه $f(K^n)$ دارایِ درونِ تهی در L است.

نکته این است که ضرایبِ از L در تعریفِ f مجاز اند. اگر f تعریف‌شده-بر K باشد، نتیجه نسبتن بدیهی است، زیرا آنگاه داریم $f(K^n) \subseteq K$، و K در L درون ندارد.

برهانِ قضیه. فرض $E \subseteq \mathbb{R}$ تحلیلی با $\dim_{\mathcal{H}} E > 0$ باشد. فرض کنید K کوچک‌ترین زیرمیدانِ بسته‌یِ-حقیقیِ $\mathbb{R}$ شاملِ E باشد؛ آنگاه (طبقِ لم 3) K تحلیلی بوده و $\dim_{\mathcal{H}} K > 0$. از لم 2 وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ و تابعِ $\mathbb{R}$–خطیِ (بنابراین نیمه-جبریِ) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ به طوری که $T(K^n)$ دارایِ درون است. بنابراین (طبقِ لم 4) داریم $K = \mathbb{R}$. ■

ما نمی‌دانیم چه‌قدر این قضیه بهینه است. لم 4 می‌گوید که تمامِ زیرمیدان‌هایِ بسته‌یِ-حقیقیِ محضِ $\mathbb{R}$ در یک درکِ نظریه‌یِ-مدلی کوچک اند. لمِ 3 می‌تواند کلی‌تر نگاه شود که بگوید کوچک‌ترین زیرمیدانِ بسته‌یِ-حقیقیِ $\mathbb{R}$ شاملِ مجموعه‌یِ داده‌شده‌یِ $E \subseteq \mathbb{R}$ نه خیلی بزرگ‌تر و نه خیلی پیچیده‌تر از E است. اما ابزارهایي که در شیوه‌یِ به دست آوردنِ لم 2 نیاز اند، به طورِ کلی قابلِ توسعه به مجموعه‌هایِ ناتحلیلی نیستند.

مراجع

[1] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 36, Springer, 1998, translated from the 1987 original, revised by the Authors.

[2] D. Cohn, *Measure theoty*, Birkhauser, 1980.

[3] L. van den Dries, *Dense pairs of o-minimal structures*, Fund. Math. **157** (1998), 61-78.

[4] —, *Tame topology and o-minimal structures*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 248, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[5] G. Edgar, *Integral, probability and fractal measure*, Springer, 1998.

[6] P. Erdős and B. Volkmann, *Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorffscher Dimension*, J. Reine Angew. Math. **221** (1966), 203-208.

[7] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, 1990.

[8] A. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., vol. 156, Springer-Verlag, 1995.

[9] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in euclidean spaces*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 44, Cambridge Univ. Press, 1995.

[10] J. Oxtoby, *Measure and category*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., vol. 2, Springer, 1980.

[11] C. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge Univ. Press, 1970.

* G. A. Edgar
Department of Math., the Ohio State University, Ohio 43210.
edgar@math.ohio-state.edu

† Chris Miller
Department of Math., the Ohio State University, Ohio 43210.
miller@math.ohio-state.edu

‡ فرناز ایرانی
دانشجویِ کارشناسیِ ریاضیِ محضِ دانشگاهِ شهید بهشتی.
f_irani777@yahoo.com

دربارهٔ گونایِ گراف

سهند حشمتی افشار*

سطوح به دو دسته تقسیم می‌شوند: جهت‌پذیر و جهت‌ناپذیر. سطحِ S را جهت‌پذیر گوییم هرگاه شکلِ ↺ را نتوان طوریِ رویِ S حرکت داد که وقتی به مکانِ شروع برمی‌گردیم، تصویرِ آینه‌اش یعنی ↻ به‌دست آید و اگر جهت‌پذیر نباشد جهت‌ناپذیر است.

سطحِ کره را در نظر بگیرید، دو گویِ بازِ مجزا رویِ آن را از سطح حذف کنید و یک استوانه را چنان به سطح اضافه کنید که دو سرِ آن مرزِ آن دو گوی باشند؛ اگر از این به بعد این استوانه‌یِ خم‌شده را دست‌گیره بنامیم، سطحِ به وجود آمده را S_1 گوییم. سطحی که $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ دست‌گیره داشته باشد را با S_n نمایش می‌دهیم.

می‌توان نشان داد S_nها جهت‌پذیراند و هر سطحِ جهت‌پذیر با S_nی مانندسان[1] است.

اگر X یک فضایِ توپولوژیک باشد آن‌گاه یک خم، یک تابعِ پیوسته‌یِ $f : [0,1] \to X$ است. خمِ ساده خمی است که یک‌به‌یک باشد، و خمِ ساده‌یِ بسته خمی است که $f(0) = f(1)$ و f رویِ $(0,1)$ یک‌به‌یک باشد. می‌گوییم x و y در رابطه‌یِ R هستند، هرگاه خمی بینِ آن‌ها وجود داشته باشد. اگر $\forall x, y : xRy$ آن‌گاه گوییم X همبندِ مسیری است. این رابطه یک رابطه‌یِ هم‌ارزی است؛ پس X را افراز می‌کند. هر کلاسِ این افراز را ناحیه گوییم. ناحیه‌یِ C را یک‌پارچه گوییم هرگاه هر خمِ ساده‌یِ بسته در C را بتوان در C به طورِ پیوسته به نقطه تبدیل کرد.

می‌گوییم گرافِ G رویِ سطحِ S نشسته‌است هرگاه تابعی وجود داشته باشد که رؤوسِ G را به نقاطِ مجزا رویِ S ببرد و یال‌ها را به خم‌هایِ ساده‌یی ببرد که:

I. تصویرِ یالِ uv خمِ ساده‌یی باشد که نقاطِ انتهایش نقاطی باشند که متناظر به u و v باشند.

II. خم‌ها جز در نقاطِ انتهایی اشتراک نداشته باشند.

از آن جایی که هر گراف با $|E|$ تا یال را می‌توان رویِ $S_{|E|}$ نشاند، پس کوچک‌ترین nی را که گرافِ G رویِ S_n می‌نشیند، گونایِ G می‌نامیم و با $\mathrm{gen}(G)$ نشان می‌دهیم.

نشستن $K_{3,3}$ رویِ S_1

نشستن K_5 رویِ S_1

اگر گرافِ G رویِ سطحِ S نشسته باشد و ناحیه‌هایی که به وسیله‌یِ این نشستن به وجود آمده‌است همه‌گی یکپارچه باشند، می‌گوییم G رویِ S یکپارچه نشسته است.

قضیه 1. اگر گرافِ همبندِ G رویِ S_n چنان نشسته باشد که S_n را به f ناحیه افراز کرده باشد، آن‌گاه $|V| - |E| + f \geq 2 - 2n$؛ که اگر G به صورتِ یک‌پارچه نشسته باشد، نامساویِ فوق به تساوی تبدیل می‌شود.

قضیه 2. اگر G یک گرافِ همبندِ ساده باشد آن‌گاه

$$\mathrm{gen}(G) \geq \frac{|E|}{6} - \frac{|V|}{2} + 1.$$

نتیجه. داریم

$$\mathrm{gen}(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

قضیه 3. اگر G گرافِ همبندِ ساده با کمرِ K باشد آن‌گاه

$$\mathrm{gen}(G) \geq \frac{|E|}{2}\left(1 - \frac{2}{k}\right) - \frac{|V|}{2} + 1.$$

نتیجه. داریم

$$\mathrm{gen}(K_{r,s}) \geq \frac{(r-2)(s-2)}{4}.$$

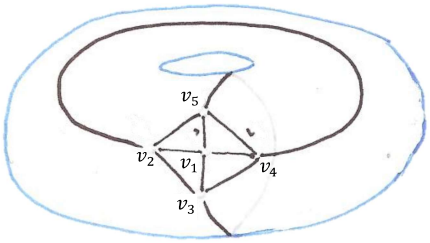
نشاندنِ گراف‌ها با گونایِ کم رویِ سطوح شاید با "ترسیم" امکان‌پذیر باشد ولی برایِ گراف‌هایِ با گونایِ بالا کارآمد نیست. پس در ادامه با ابزاری جبری به نامِ سیستمِ دوران آشنا می‌شویم که این کار را برایِ ما انجام می‌دهد.

فرض $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ رؤوس گرافِ G باشند؛ اگر $V(i) := \{j \mid v_j \in N(v_i)\}$ و $\pi_i : V(i) \to V(i)$ یک جای‌گشتِ دوری باشند، n-تاییِ $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ را یک سیستمِ دوران می‌نامیم.

قضیه 4. اگر G گرافِ همبندِ نابدیهی با رؤوس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ باشد، آن‌گاه برایِ هر نشستنِ یک‌پارچه‌یِ G رویِ یک سطحِ جهت‌پذیر، n-تاییِ یکتایِ $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ وجود دارد که به ازایِ هر i $(1 \leq i \leq n)$، $\pi_i : V(i) \to V(i)$ یک جای‌گشتِ دوری است که jها $(j \in \{1, \dots, n\} - \{i\})$ به صورتِ پادساعت‌گرد مرتب شده‌اند و به ازایِ هر n-تاییِ $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ یک نشستنِ یک‌پارچه‌یِ G رویِ سطحی وجود دارد که رأس‌هایِ متصل به v_i $(1 \leq i \leq n)$ به صورتِ پادساعت‌گرد مرتب می‌شوند.

فرض کنید نشستنِ زیر داده شده است. همان‌طور که پیدا است این نشستن یک‌پارچه است. یال‌هایِ متصل به v_1 را در نظر بگیرید: v_1v_2 و v_1v_4 و v_1v_3 و v_1v_5. حال آن‌ها را در سیکلی به صورتِ پادساعت‌گرد قرار دهید $\pi_1 = (2\ 3\ 4\ 5)$. همین کار را برایِ رؤوسِ دیگر هم انجام دهید و خواهیم داشت:

[1] homeomorph



$$\pi_2 = (1\ 5\ 4\ 3),$$
$$\pi_3 = (1\ 2\ 5\ 4),$$
$$\pi_4 = (1\ 3\ 2\ 5),$$
$$\pi_5 = (1\ 4\ 3\ 2).$$

فرض کنید برای گرافِ G، 5-تاییِ $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ به صورتِ زیر داده شده‌است:

$\pi_1 = (2\ 3\ 4\ 5)$، $\pi_2 = (1\ 3\ 4\ 5)$، $\pi_3 = (1\ 2\ 4\ 5)$، $\pi_4 = (1\ 2\ 3\ 5)$، $\pi_5 = (1\ 2\ 3\ 4)$. اگر به جایِ هر یالِ G مانندِ $\{u, v\}$ در یالِ vu، uv را بگذاریم، گرافی به وجود می‌آید که آن را D می‌نامیم.

تابعِ $\Pi : E(D) \to E(D)$ را چنان تعریف می‌کنیم که $\Pi(v_i v_j) = v_j v_{\pi_j(i)}$ باشد. بنابراین Π یک جای‌گشتِ دوری است. طبقِ قضیه‌ی 4، 5-تاییِ فوق یک نشستنِ یک‌پارچه‌ی K_5 را روی سطحی نشان می‌دهد. می‌خواهیم توسطِ Π نواحیِ به وجود آمده، پس از نشستنِ G روی سطح، را مشخص کنیم.

از $v_1 v_2$ شروع می‌کنیم:

$$\Pi(v_1 v_2) = v_2 v_3,$$
$$\Pi(v_2 v_3) = v_3 v_4,$$
$$\Pi(v_3 v_4) = v_4 v_5,$$
$$\Pi(v_4 v_5) = v_5 v_1.$$

پس مرزِ ناحیه‌یی به صورتِ $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ است. اگر همین کار را برای $v_1 v_3$ و $v_1 v_4$ انجام دهیم، خواهیم داشت $v_1 v_3 v_2 v_4 v_3 v_5 v_4 v_1 v_5 v_2$ و $v_1 v_4 v_2 v_5 v_3$. می‌توان دید که از تمامِ یال‌هایِ D استفاده شده‌است. پس اگر از یالی به جز $v_1 v_2$ و $v_1 v_3$ و $v_1 v_4$ شروع کنیم، یکی از سه مرزِ بالا تکرار خواهد شد، پس طبقِ قضیه‌ی 1:

$$5 - 10 + 3 = 2 - 2n \Rightarrow n = 2$$

پس این 5-تایی نشاندنِ یک‌پارچه‌ی K_5 روی S_2 را نشان می‌دهد.

قضیه 5. گونای یک گرافِ همبند برابر با مجموعِ گوناهایِ بلوک‌هایِ آن است.

قضیه 6. داریم

$$\mathrm{gen}(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$$

و

$$\mathrm{gen}(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{(r-2)(s-2)}{4} \right\rceil.$$

قضیه 7. اگر گرافِ همبندِ G روی S_n نشسته باشد آن‌گاه

$$\chi(G) \le \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \right\rceil.$$

برهان. فرض کنید درجه‌ی هر رأسِ G حداقل $\chi(G) - 1$ باشد، چون اگر رأسی مانندِ v باشد که $\deg v < \chi(G) - 1$ آن‌گاه $\chi(G - v) = \chi(G)$ و قضیه به $G - v$ کاهش می‌یابد. پس خواهیم داشت $\sum_{v \in V} \deg v = 2|E| \ge (\chi - 1)|V|$. از قضیه‌ی 2 داریم $2|E| - 6|V| + 12 - 12n \le 0$، و طبقِ بالا داریم $|V|(\chi - 7) \le 2|E| - 6|V|$.

اگر $\chi(G) \ge 7$ باشد از آن‌جایی که $|V| \ge \chi(G)$ خواهیم داشت $\chi(\chi - 7) \le 2|E| - 6|V|$ بنابراین

$$[\chi(G)]^2 - 7\chi(G) + 12 - 12n \le 0$$
$$\Rightarrow \chi(G) \le \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \right\rceil. \blacksquare$$

کم‌ترین تعدادِ زیرگراف‌هایِ مسطحِ فراگیرِ G که یال‌هایِ G را افراز می‌کنند را پهنایِ گرافِ G می‌نامیم و با $\theta(G)$ نشان می‌دهیم. واضح است که تعریفِ فوق خوش‌تعریف است، زیرا هر گراف با $|E|$ یال $(|E| \ne 0)$، $|E|$ تا زیرگرافِ فراگیر دارد که اندازه‌ی آن‌ها یک است و همه‌گیِ آن‌ها هامونی [= مسطح] هستند و یال‌هایِ G را افراز می‌کنند.

آسانو [3] ثابت کرده‌است که اگر G مثلث نداشته باشد آن‌گاه $\theta(G) \le \mathrm{gen}(G) + 1$.

قضیه 8. اگر G یک گرافِ ساده باشد آن‌گاه $\theta(G) \le 6 + \sqrt{2\mathrm{gen}(G) - 2}$.

قضیه 9. اگر G یک گرافِ ساده باشد آن‌گاه $\mathrm{gen}(G) \le (\theta(G) - 1)(|V| - 1)$.

مراجع

[1] M. Behzad, G. Chartrand, and L. Lesniak, *Graphs & Digraphs.*

[2] B. Mohar and C. Thomassen, *Graphs on Surfaces.*

[3] K. Asano, *On genus and thickness of graphs*, J. Combinatorial Theory Ser. B **43** (1987), 287-292.

[4] A.M. Dean and J.P. Hutchinson, *Relations among Embedding Parameters for Graphs.*

* سهند حشمتی افشار
دانشجوی کارشناسی ریاضی محض دانشگاهِ شهید بهشتی
sahand.h.afshar@gmail.com

درآمدي بر نظریه‌ي محاسبه‌پذیری

مرتضا منیری*

1. پیش‌گفتار

در یکي از شماره‌هاي اخیرِ مجله‌يِ فرهنگ و اندیشه‌يِ ریاضی، مقاله‌يي از سر مایکل اتیا چاپ شده که به بررسيِ ریاضیات در قرنِ بیستم پرداخته‌است [7]. در همین مقاله، اتیا اشاره می‌کند که به برخي موضوعات نپرداخته و به طورِ مشخص به دستاوردهاي دو ریاضیدان و منطقدانِ مهمِ قرنِ بیستم، *آلن تورینگ*[1] و *کورت گودل*[2] اشاره می‌کند.

با خواندنِ (صفحات اولیه‌يِ!) آن مقاله تصمیم گرفتم که این نقص را جبران کنم (!) و مقاله‌يي توصیفی در زمینه‌يِ نظریه‌يِ محاسبه-پذیری[3] و علومِ نظریِ کامپیوتر بنویسم و در آن به دستاوردهاي *تورینگ* و *گودل* که نقشِ مهم و اساسی در این زمینه دارند، اشاره کنم. آن‌چه می‌آید، حاصلِ کار است. عمده‌يِ اطلاعاتِ تاریخیِ ارائه‌شده از مراجعِ [4] و [6] اقتباس شده‌اند. مراجعِ دیگر عمدتن متوني استاندارد در زمینه‌يِ نظریه‌يِ محاسبه‌پذیری هستند.

2. مقدمه

نظریه‌يِ محاسبه‌پذیری (یا آن‌چنان که قبلن نامیده می‌شد، نظریه‌يِ بازگشت[4]) شاخه‌يي از منطقِ ریاضی محسوب می‌شود که موضوعِ عمده‌يِ موردِ بحثِ آن مطالعه‌ی توابعِ تعریف‌شده رویِ مجموعه‌يِ اعدادِ طبیعی از حیثِ به طورِ مؤثر محاسبه‌پذیر بودن یا نبودن است.

به طورِ مؤثر محاسبه‌پذیر بودنِ یک تابع (ـِ تام)، مثلن تابعِ جمع، به این معنی است که الگوریتمي موجود است که به ازایِ هر دو عددِ طبیعيِ داده‌شده‌يِ m و n به عنوانِ ورودی، عددِ $m+n$ را به عنوانِ خروجی تولید می‌کند. این که توابعي موجود اند که به طورِ مؤثر محاسبه‌پذیر نیستند، با یک استدلالِ شمارشی به آسانی ثابت می‌شود: مجموعه‌يِ همه‌يِ توابعِ تعریف‌شده رویِ مجموعه‌يِ اعدادِ طبیعی، مجموعه‌يي ناشمارا است، در حالي که مجموعه‌يِ الگوریتم‌هايِ موجود (که مثلن زیرمجموعه‌يي از مجموعه‌يِ همه‌يِ دنباله‌هايِ متناهی از حروفِ الفبايِ فارسی است) شمارا است.

مبحثِ توابعِ به طورِ مؤثر محاسبه‌پذیر زیرمجموعه‌يي از نظریه‌يِ علومِ کامپیوتر است (برايِ مثال مرجعِ استانداردِ [3] در زمینه‌يِ مباني نظریه‌يِ علومِ کامپیوتر را ببینید). در موردِ محاسبه‌ناپذیرها، حرفِ آخر محاسبه‌ناپذیر بودن نیست! برايِ مثال، بعضي از محاسبه-ناپذیرها از بعضي دیگر محاسبه‌ناپذیرتر اند و بنابراین درجاتِ محاسبه‌ناپذیری مطرح می‌شوند. بخشِ عمده‌يِ نظریه‌يِ محاسبه-پذیری در واقع مطالعه‌يِ محاسبه‌ناپذیرها است. در موردِ محاسبه-پذیرها هم، مهم پیچیده‌گيِ محاسبه‌يِ آن‌ها است، یعنی زمان یا حافظه‌يِ موردِ نیاز برای محاسبه. و در این‌جا است که نظریه‌يِ پیچیده‌گيِ محاسبات مطرح می‌شود که می‌توان آن را جزئي از نظریه‌يِ محاسبه‌پذیری دانست (جلدِ دومِ کتابِ معروفِ [5] در زمینه‌يِ نظریه‌يِ محاسبه‌پذیری که چند سالي است منتشر شده، شاملِ بحثِ مفصلي در زمینه‌يِ نظریه‌يِ پیچیده‌گيِ محاسبات است).

در موردِ ارتباطِ منطق و محاسبه‌پذیری، در این‌جا تنها اشاره کنم که علاقه‌يِ منطق دانان به این سؤال که «آیا استنتاج و استدلالِ ریاضی را می‌توان مکانیکی کرد؟» یا «آیا الگوریتمي موجود است که در موردِ درستی یا نادرستيِ گزاره‌هايِ ریاضی تصمیم بگیرد؟»، عاملِ مهمي برايِ جلبِ آنان به نظریه‌يِ محاسبه‌پذیری بوده‌است (این سؤال‌ها را از طریقِ کد کردن می‌توان به سؤال‌هايي راجع به اعدادِ طبیعی تبدیل کرد). در واقع، منطق‌دانانِ بزرگي نظیرِ *گودل*، *چرچ*[5]، *تورینگ*، *کلینی*[6]، و *پست*[7]، نقشِ اساسی در ایجادِ نظریه‌يِ محاسبه‌پذیری در دهه‌يِ سومِ قرنِ بیستم میلادی دارند. مفهومِ محاسبه‌پذیری یکي از مهم‌ترین مفاهیمي است که منطق‌دانان به حوزه‌يِ معارفِ بشری وارد کردند.

3. محاسبه‌پذیری و تصمیم‌پذیری

یک تابعِ $f:\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ (تام یا جزئی) را به طورِ مؤثر محاسبه‌پذیر[8] گویند، هرگاه الگوریتمي موجود باشد به طوري که به ازایِ هر $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^k$ به عنوانِ ورودی، به صورتِ زیر عمل کند:

A. اگر $f(\mathbf{n})$ تعریف شده باشد، آن‌گاه پس از انجامِ تعدادي متناهی مرحله الگوریتم سرانجام متوقف شود و $f(\mathbf{n})$ را به عنوانِ خروجی تولید کند.

B. اگر $f(\mathbf{n})$ تعریف نشده باشد، الگوریتم هرگز متوقف نشود.

از این‌جا به بعد برايِ ساده‌گی توابعِ به طورِ مؤثر محاسبه‌پذیر را *محاسبه‌پذیر* می‌نامیم.

برايِ مثال، تابعِ

$$f(m,n) = \begin{cases} m-n & m \geq n \\ \infty & m < n \end{cases}$$

---

[1] Alan Turing
[2] Kurt Gödel
[3] computability theory
[4] recursion theory
[5] Alonzo Church
[6] Stephen C. Kleene
[7] Emil Post
[8] efficiently computable

یک تابعِ محاسبه‌پذیر است.
یک زیرمجموعه از اعدادِ طبیعی را *تصمیم پذیر*[9] گویند هر گاه تابعِ مشخصه‌ی آن محاسبه‌پذیر باشد. برایِ مثال، مجموعه‌ی اعدادِ اول یک مجموعه‌یِ تصمیم‌پذیر است. یک مجموعه‌یِ A را به طورِ مؤثر شمارا (یا .c.e) گویند، هر گاه الگوریتمي موجود باشد که اعضایِ A را لیست کند. به ساده‌گی می‌توان دید که هر مجموعه‌یِ تصمیم-پذیر .c.e است. ولی عکسِ این مطلب صحیح نیست.
برایِ نشان دادنِ آن که تابعي محاسبه‌پذیر است کافی است الگوریتمي برایِ محاسبه‌یِ آن ارائه کرد، کاري که در صورتِ محاسبه‌پذیر بودنِ تابع علی‌الاصول ممکن است. با دیدنِ مجموعه-یي از دستورالعمل‌ها برایِ انجامِ منظوري خاص می‌توان تشخیص داد که آیا با یک الگوریتم مواجه ایم یا نه؟ ولی برایِ آن که ثابت کنیم تابعي خاص محاسبه‌پذیر نیست، چه باید کرد؟ برایِ ارائه‌یِ اثباتي ریاضی برایِ این مطلب، می‌بایست ابتدا تعریفي دقیق و ریاضی از مفاهیمِ الگوریتم و محاسبه‌پذیر بودن ارائه کرد.

4. پیش‌زمینه‌یِ تاریخی

یکي از 23 مسأله‌یِ معروفِ *هیلبرت*[10] ریاضی‌دانِ بزرگِ آلمانی که در سالِ 1900 در کنگره‌یِ بین‌المللیِ ریاضیدانان ارائه کرد، سؤال در موردِ الگوریتمی بودن یا نبودنِ مجموعه‌یي خاص بود.
مسأله‌یِ دهمِ *هیلبرت*. آیا الگوریتمي موجود است که به ازایِ هر معادله‌یِ دیوفانتیِ داده‌شده، تعیین کند که آیا آن معادله دارایِ جواب است یا نه؟
معادلاتِ دیوفانتی را می‌توان به‌راحتی به وسیله‌یِ اعدادِ طبیعی کد کرد و مسأله‌یِ دهمِ *هیلبرت* را می‌توان به سؤالي در موردِ تصمیم‌پذیر بودن یا نبودنِ زیرمجموعه‌یي خاص از اعدادِ طبیعی تبدیل کرد. در سالِ 1970، *ماتیاسویچ*[11] با تکمیلِ کارهایِ منطق‌دانانِ دیگر و با اثباتِ آن که هر مجموعه‌یِ .c.e یک مجموعه‌یِ دیوفانتی است، به سؤالِ *هیلبرت* جوابِ منفی داد. *هیلبرت* از جهتِ دیگري نیز در جلبِ توجهِ ریاضی‌دانان (به خصوص منطق‌دانان) به تجزیه و تحلیلِ مفهومِ الگوریتم مؤثر بوده‌است.
در زیر به این موضوع می‌پردازیم.
در آغازِ قرنِ بیستم و با شیوعِ روش‌هایِ مجرد از نوعِ *کانتوری* در ریاضیات و هم‌چنین کشفِ پارادوکس‌هایي که استفاده از این روش‌ها به وجود می‌آورد (توسطِ خود *کانتور* و همین‌طور *راسل*)، مسئله‌یِ مبانیِ ریاضیات و تلاش در راهِ استوار نمودنِ آن توجه بسیاري را به خود معطوف کرد. در این میان، *هیلبرت* به عنوانِ یک چهره‌یِ ممتاز و رهبری‌کننده در جامعه‌یِ ریاضیدانان، علاقه‌یِ وافري به حلِ این معضل داشت. در اوایلِ دهه‌یِ سومِ قرن، *هیلبرت* برنامه‌یي را برایِ این منظور ارائه کرد. ایده‌یِ اصلی او اصلِ‌موضوعی کردنِ ریاضیات و نمایشِ استدلال‌هایِ ریاضیِ مجرد به وسیله‌یِ دستگاه‌هایِ صوری استنتاجی، و سپس اثباتِ سازگاریِ این دستگاه‌هایِ صوری به کمکِ روش‌های «متناهی» بود. البته سازگاری تنها موضوعِ مهم برای *هیلبرت* نبود. به اعتقادِ او یک دستگاهِ اصلِ‌موضوعی برایِ یک ساختارِ ریاضی مانندِ اعدادِ طبیعی، می‌بایست قادر به اثباتِ همه‌یِ گزاره‌هایِ درست راجع به اعدادِ طبیعی باشد. به عبارتِ دیگر، دستگاهِ موردِ نظر می‌بایست کامل باشد، یعنی هر گزاره‌یِ ریاضی راجع به اعدادِ طبیعی را اثبات یا رد کند.
در سالِ 1931، *گودل* منطق‌دانِ جوان، نشان داد که چنین چیزي ممکن نیست. قضیه‌یِ اولِ ناتمامیتِ *گودل* نشان داد که هیچ دستگاهِ اصلِ‌موضوعیِ کامل، سازگار، و *به طورِ مؤثر اصل‌پذیر* موجود نیست. قضیه‌یِ دومِ ناتمامیتِ *گودل* ثابت کرد که هیچ دستگاهِ اصلِ‌موضوعیِ معقول قادر به اثباتِ سازگاریِ خود نیست.
گودل برایِ تعریفِ دقیقِ مفهومِ دستگاهِ صوریِ به طورِ مؤثر اصل‌پذیر نیاز داشت تا از نظریه‌یِ محاسبه‌پذیری استفاده کند. در واقع *گودل* یکي از بنیان‌گذارانِ نظریه‌یِ نوینِ محاسبه‌پذیری محسوب می‌شود. تعریفِ توابعِ بازگشتيِ اولیه که یکي از رویکردهایِ موجود در تعریفِ دقیقِ توابعِ محاسبه‌پذیر است، به *گودل* تعلق دارد. *کلینی* در سالِ 1931 با تکمیلِ تعریفِ *گودل* از توابعِ بازگشتيِ اولیه، توابعِ بازگشتی را تعریف کرد که به عنوانِ یک صوری‌سازی از مفهومِ توابعِ محاسبه‌پذیر جایگاهِ ویژه‌یي دارد. یک تابع بازگشتی است، هرگاه از توابعِ ثابتِ صفر، تالی، و توابعِ تصویری، و با کاربردِ متناهی بار قواعدِ ترکیب، بازگشت، و کمینه سازی، به دست آید. از طرفِ دیگر، به کمکِ قضایایِ مقدماتيِ نظریه‌یِ محاسبه‌پذیری می‌توان اثباتِ ساده‌یي از قضیه‌یِ اولِ ناتمامیتِ *گودل* ارائه کرد. *چرچ* در سالِ 1936 نشان داد که مجموعه‌یِ اعدادِ *گودل* (کدهایِ) همه‌یِ جملاتِ منطقن معتبر در یک زبانِ مرتبه‌یِ اولِ دارایِ حداقل یک نمادِ محمولیِ دوموضعی، مجموعه‌یي تصمیم‌ناپذیر است. می‌توان نشان داد که درموردِ زبان‌هایي که نمادهایِ محمولیِ آن‌ها همه‌گی یک‌موضعی هستند، مجموعه‌یِ فوق تصمیم‌پذیر است.
یک رویکردِ مهمِ دیگر به نظریه‌یِ محاسبه‌پذیری، بوسیله‌یِ *آلن تورینگ* اتخاذ شد. در اوایلِ سالِ 1935، *تورینگ* یک دانشجویِ دوره‌یِ تحصیلاتِ تکمیلی در دانشگاهِ *کمبریج* بود و تحتِ راهنماییِ

[9] decidable
[10] David Hilbert
[11] Yuri Matiyasevich (Ю́рий Матия́севич)

ماکس نیومن[12]، روی مسأله‌ی صوری کردنِ مفهومِ محاسبه‌پذیری کار می‌کرد. در سالِ بعد، *تورینگ* از کارهایِ چرچ در دانشگاهِ *پرینستون* در همین زمینه آگاه شد. چرچ نیز این مسأله را در نظر داشت و در مقاله‌یي در سال 1936، تعریفِ زیر را ارائه کرد: رده‌یِ توابعِ به طورِ مؤثر محاسبه‌پذیر عبارت است از رده‌یِ توابعي که در حسابِ λ تعریف‌پذیر اند. حسابِ λ یک زبانِ صوری است که برایِ مشخص‌سازیِ ساختمانِ توابع به کار می‌رود و تاریخچه‌یِ آن به کارهایِ *راسل* در مبانیِ ریاضیات و نظریه‌یِ انواع برمی‌گردد.

در این زمان تورینگ تعریف خود از توابعِ محاسبه‌پذیر را ارائه کرد. ایده‌یِ او صوری‌سازیِ روندِ تفکرِ آدمی بود و منجر به تعریفِ ماشین‌هایِ محاسبي شد که اکنون به *ماشینِ تورینگ* موسوم اند. به زعمِ او، یک تابع محاسبه‌پذیر است هر گاه به وسیله‌یِ یک چنین ماشیني بتوان آن را محاسبه کرد. ایده‌یِ *تورینگ* نقشِ مهمي در طراحیِ کامپیوترهایِ امروزی داشته‌است. با تشویقِ *نیومن*، *تورینگ* برایِ دو سال به دانشگاهِ *پرینستون* رفت و رساله‌یِ دکتریِ خود را در این زمینه تحتِ راهنماییِ چرچ نوشت. *تورینگ* کار در این زمینه را ادامه داد و در سالِ 1945 در *لندن* به گروهي پیوست که هدف‌شان طراحیِ یک کامپیوترِ دیجیتالِ الکترونیکی بود که توانایيِ ذخیره‌یِ برنامه داشته باشد. گزارشِ *تورینگ* در این زمینه، اولینِ توصیفِ کامل از چنین ماشیني محسوب می‌شود. رویکردهایِ مختلفِ دیگري در خصوصِ صوری‌سازیِ مفهومِ به طورِ مؤثر محاسبه‌پذیری موجود است. یک مرجعِ عالی برایِ اطلاع در خصوصِ آن‌ها کتابِ [5] است. ثابت شده‌است که همه‌یِ این رویکردهایِ متفاوت در نهایت به یک کلاسِ یکسان از توابع منجر می‌شوند. به همین سبب، این فرضیه عمومن پذیرفته شده‌است که کلاسِ توابعِ به طور مؤثر محاسبه‌پذیر دقیقن مساوی با هر یک از این کلاس‌ها است. این فرضیه به فرضیه‌یِ *تورینگ*-چرچ معروف است.

5. درجاتِ حل‌ناپذیری

در این قسمت اشاره‌یي به درجاتِ حل‌ناپذیری[13] و مقایسه‌یِ مجموعه‌هایِ محاسبه‌ناپذیر می‌کنم. این موضوعي پایه‌یی در نظریه‌یِ محاسبه‌پذیری محسوب می‌شود. به علاوه، ایده‌هایِ به‌کاررفته در آن در نظریه‌یِ پیچیده‌گیِ محاسبات و تعریفِ سلسله-مراتبِ پیچیده‌گیِ محاسبات تأثیرِ فراواني داشته‌اند.

فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌یِ اعدادِ طبیعی باشند. گوییم A *تورینگ*–تحویل‌پذیر[14] به B است هر گاه تابعِ مشخصه‌یِ A، B–محاسبه‌پذیر باشد. این بدان معنی است که تابعِ مشخصه‌یِ A نسبت به تابعِ مشخصه‌یِ B محاسبه‌پذیر باشد، یعنی ماشینِ *تورینگي* (الگوریتمي) که اطلاعاتِ مربوط به عضویت در B را به صورتِ یک جعبه‌یِ سیاه (اراکل) در اختیار دارد موجود باشد که تابعِ مشخصه‌یِ A را محاسبه کند. به طور نمادی در این حالت می‌نویسیم $A \leq_T B$. روشن است که اگر $A \leq_T B$ آن‌گاه مسأله‌یِ تصمیم‌گیری در موردِ عضویت در A از موردِ نظیر در موردِ B، سخت‌تر نیست. روشن است که $\leq_T$ یک رابطه‌یِ انعکاسی و متعدی رویِ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ است. بنابراین رابطه‌یِ متقارنِ

$$A \equiv_T B \Leftrightarrow A \leq_T B \wedge B \leq_T A$$

یک رابطه‌یِ هم‌ارزی است و $\leq_T$ یک ترتیبِ جزئی رویِ مجموعه‌یِ همه‌یِ رده‌هایِ رابطه‌یِ $\equiv_T$، القاء می‌کند. این رده‌هایِ هم‌ارزی را «درجاتِ حل‌ناپذیری» گویند.

رده‌یِ 0 کوچک‌ترین درجه است و شاملِ همه‌یِ مجموعه‌هایِ تصمیم‌پذیر است. توجه کنید که هر خانواده شمارا است، زیرا تعدادِ برنامه‌ها شمارا است. بنابراین تعدادِ رده‌ها ناشمارا است. هر دو درجه، دارایِ یک کوچک‌ترین کرانِ بالا هستند، رده‌یِ جمعِ مستقیمِ A و B، $A \oplus B$. به علاوه، با نسبی کردنِ مسأله‌یِ معروفِ توقف که می‌دانیم تصمیم‌ناپذیر است، می‌توان نشان داد که به ازایِ هر مجموعه‌یِ B، مجموعه‌یِ B' موجود است که درجه‌یِ آن اکیدن از درجه‌یِ B بزرگ‌تر است: مجموعه‌یِ همه‌یِ ماشین‌هایِ *تورینگ* با اراکلِ B را کد کنید. فرض کنید φ_x^B، به ازایِ هر x، تابعِ یک‌متغیره‌یِ محاسبه‌شده توسطِ x–اُمین ماشینِ *تورینگ* با اراکلِ B باشد. حال فرض کنید B' به صورتِ زیر تعریف شده باشد:

$$x \in B' \Leftrightarrow \varphi_x^B(x) \downarrow$$

در این‌جا $\varphi_x^B(x) \downarrow$ به معنیِ آن است که φ_x^B به ازایِ x تعریف شده-است. می‌توان دید که B' توسطِ ماشین‌هایِ تورینگ با اراکلِ B محاسبه‌پذیر نیست: در غیرِ این صورت متممِ B' نیز توسطِ چنین ماشین‌هایي محاسبه‌پذیر خواهد بود. این ماشین کدي چون b خواهد داشت. حال داریم:

$$\varphi_b^B(x) \downarrow \Leftrightarrow x \notin B' \Leftrightarrow \varphi_x^B(x) \uparrow$$

که تناقض است. با تکرارِ عملِ فوق به دنباله‌یِ زیر می‌رسیم:

$$B <_T B' <_T B'' <_T \ldots$$

ثابت شده‌است که درجاتِ حل‌ناپذیری به طورِ خطی مرتب نیستند، درجاتِ غیرقابلِ‌مقایسه موجودند. یک درجه را c.e. گوییم هر گاه شاملِ یک مجموعه‌یِ c.e. باشد. در سالِ 1944 *امیل پست* این سؤال را مطرح کرد که آیا درجاتِ c.e. به جز 0 و $0'$ موجود اند؟ در سالِ 1956 (دو سال بعد از وفاتِ

[12] Max Newman
[13] degrees of unsolvability
[14] Turing reducible

پست)، *فریدبرگ*[15] در آمریکا و *موچنیک*[16] در شورویِ سابق، به طورِ مستقل، به این سؤال پاسخِ مثبت دادند. بعدها *جرالد سکس*[17] نشان داد که هر ترتیبِ جزئیِ شمارا را می‌توان در ترتیبِ جزئیِ درجات c.e. نشاند. هم‌چنین *ففرمن*[18] نشان داده‌است که هر درجه‌یِ c.e. شاملِ مجموعه‌یِ کدهایِ قضایایِ حداقل یک نظریه‌یِ اصل‌پذیر است.

6. سلسله‌مراتبِ پیچیده‌گیِ محاسبات

فرض کنید f یک تابعِ محاسبه‌پذیر باشد. گوییم f در زمانِ چند-جمله‌یی محاسبه‌پذیر[19] است هر گاه ماشینِ *تورینگي* چون M و یک تابعِ چندجمله‌یی چون $P(x)$ موجود باشد به قسمي که به ازایِ هر x، M مقدارِ $f(x)$ را در حدِاکثر $P(|x|)$ مرحله محاسبه کند. در این‌جا $|x|$ طولِ x، برابر است با تعدادِ ارقامِ x در مبنایِ دو که تقریبن $\log_2 x$ است. هر تابعِ چندجمله‌یی در زمانِ چند جمله‌یی محاسبه‌پذیر است، ولی عکسِ این مطلب درست نیست. برایِ مثال، تابعِ $x^{\lfloor \log_2 x \rfloor}$ که سرعتِ رشدِ آن بیش از چندجمله‌یی است، در زمانِ چندجمله‌یی محاسبه‌پذیر است.

ثابت شده‌است که محاسبه‌پذیر بودن در زمانِ چندجمله‌یی مفهومي مطلق است، انتخابِ هر یک از صوری‌سازی‌هایِ شناخته-شده برایِ مفهومِ الگوریتم، تغییري در کلاسِ این توابع ایجاد نمی-کند. مطالعه‌یِ نظام‌مندِ کلاسِ توابعِ محاسبه‌پذیر در زمانِ چندجمله‌یی در اواخرِ دهه‌یِ شصتِ میلادی و به وسیله‌یِ افرادي چون *استفن کوک*[20] و *ریچارد کارپ*[21] آغاز شد.

کلاسِ P از زیرمجموعه‌هایِ تصمیم‌پذیر در زمانِ چندجمله‌یِ $\mathbb{N}$ به طریقِ مشابه تعریف می‌شود. یک زیرمجموعه‌یِ اعدادِ طبیعی چون A به P تعلق دارد، هر گاه ماشینِ *تورینگي* چون M و تابعي چندجمله‌یی چون $P(x)$ موجود باشد که به سؤالِ $x \in A$ در زمانِ حداکثر $P(|a|)$ جواب دهد. برای مثال مجموعه‌یِ همه‌یِ اعدادِ مربعِ کامل به P تعلق دارد. اخیرن ثابت شده‌است که مجموعه‌یِ اعداد اول در P است.

یک توسیعِ طبیعیِ P، کلاسِ مجموعه‌هایِ NP است. اگر کلاسِ P را با کلاسِ مجموعه‌هایِ تصمیم‌پذیر نظیر کنیم، آن‌گاه کلاسِ NP نظیرِ مجموعه‌هایِ c.e. خواهد بود. یکي از تعاریفِ معادل برایِ c.e. بودنِ یک مجموعه‌یِ A آن است که محمولِ $x \in A$ معادلِ با یک فرمولِ وجودیِ $\exists y\, B(x,y)$ باشد، جایي که $B(x,y)$ یک محمولِ تصمیم‌پذیر است. به طورِ مشابه یک مجموعه‌یِ B، NP است، هر گاه محمولِ $x \in B$ معادل با فرمولِ وجودیِ محدودي از نوعِ $\exists y, |y| < P(x)\, C(x,y)$ باشد، جایي که $C(x,y)$ یک محمولِ تصمیم‌پذیر در زمانِ چندجمله‌یی و $P(x)$ یک چندجمله‌یی است. البته تعاریفِ معادلِ دیگري برایِ مجموعه‌هایِ NP وجود دارد. تعریفِ فوق این حسن را دارد که توصیفِ زیر از مسائل از نوعِ P و NP را که معمول است، توجیه می‌کند:

مسائل از نوعِ P مسائلي هستند که به دنبالِ جواب می‌گردند و از نوعِ NP آن‌هایي هستند که یک جوابِ حدس‌زده‌شده را از جهتِ درست بودن یا نبودن، بررسی می‌کنند. آیا این دو معادل اند؟ این سؤالي است که بیش از 30 سال است که بی‌پاسخ مانده و حل کننده‌یِ آن بسیار مشهور (و احتمالن پولدار) خواهد شد.

همانندِ بحثي که در بالا در خصوصِ درجاتِ حل‌ناپذیری داشتیم، می‌توان در خصوصِ درجاتِ پیچیده‌گیِ محاسبه، بحث کرد.

گوییم مجموعه‌یِ A، P–تحویل‌پذیر به مجموعه‌یِ B است هر گاه تابعي محاسبه‌پذیر در زمانِ چندجمله‌یی چون f موجود باشد به طوري که به ازایِ هر x،

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

یک مجموعه‌یِ A از نوعِ NP را NP–کامل گویند، هر گاه هر مجموعه‌یِ NP چون B، P–تحویل‌پذیر به A باشد. به عبارتِ دیگر، مجموعه‌هایِ NP–کامل، سخت‌ترین مجموعه‌هایِ NP هستند.

در همان اوایلِ پیدایشِ نظریه‌یِ پیچیده‌گیِ محاسبات، کوک ثابت کرد که مسأله‌یِ SAT یک مسأله‌یِ NP–کامل است. مسأله‌یِ SAT، عبارت است از تعیینِ آن که آیا یک فرمولِ گزاره‌ییِ داده‌شده در صورتِ نرمالِ فصلی، ارضاءپذیر است یا نه؟ به عبارتِ دیگر مسأله‌یِ SAT آن است که، آیا مجموعه‌یِ همه‌یِ کدهایِ چنین فرمول‌هایي یک مجموعه‌یِ NP است یا نه؟

اگر یک مجموعه‌یِ NP–کاملِ A به یک مجموعه‌یِ B از نوعِ NP، P–تحویل‌پذیر باشد، آن‌گاه B نیز NP–کامل خواهد بود. از این طریق، NP–کامل بودنِ بسیاري از مسائلِ الگوریتمیِ مشهور ثابت شده‌است.

برایِ اطلاع از برخي ارتباطاتِ عمیق‌تر و جدیدترِ منطق و نظریه‌یِ پیچیده‌گیِ محاسبات، مرجعِ [8] را ببینید.

اکنون، نظریه‌یِ پیچیده‌گیِ محاسبات شاخه‌یي مهم و جذاب از نظریه‌یِ علومِ کامپیوتر است.

---

[15] Richard Friedberg
[16] Albert Muchnik
[17] Gerald Sacks
[18] Solomon Feferman
[19] polynomial-time computable
[20] Stephen Cook
[21] Richard Karp

منابع

[1] B. Cooper, *Computability Theory,* Chapman & Hall/CRS, 2004.

[2] N. J. Cutland, *Computability: An Introduction to Recursive Function Theory*, Cambridge University Press, 1980.

[3] M. D. Davis, R. Sigal, and E.J. Weyuker, *Computability, Complexi ty and Languages: Fundamentals of Theoretical Computer Science*, 2nd ed,. Academic Press, 1994.

[4] H. B. Enderton, "Computability theory", *Encyclopedia of Philosophy*, nd2 ed,. edited by D. Borchert , ,Thomson Gale, 2006 Vol. II, pp. -372 .390

[5] P. Odifreddi, *Classical Recursion Theory*, Vol. I and II, North Holland/Elsevier, 1989 and 1999.

[6] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *Alan Mathison Turing*, available at http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Turing .html.

[7] مایکل اتیا، ترجمهیِ قربانعلی حقیقتدوست بناب، "ریاضیاتِ قرنِ بیستم"، *فرهنگ و اندیشهیِ ریاضی*، شمارهیِ 36 (بهارِ 1385)، صص. 69–64.

[8] مرتضی منیری، "حساب مرتبهی اول پئانو و زیر نظریههای آن همراه با چند مسئلهی مرتبط در نظریهی پیچیدگی"، *فرهنگ و اندیشهیِ ریاضی*، شمارهیِ 35 (پاییزِ 1384)، صص. 33–54.

* مرتضا منیری
دانشگاهِ شهید بهشتی، دانشکدهی علومِ ریاضی، گروهِ ریاضی
m-moniri@sbu.ac.ir

دربارهٔ روشي در هوشِ مصنوعيِ بازی‌هایِ رایانه‌یی

محسن علیجانپور*

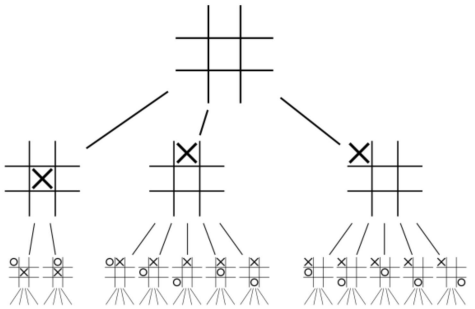
مقدمه

Ghost نامِ یک بازیِ چندنفره است. روشِ بازی این‌گونه است که برایِ شروعِ بازی، یک بازیکن تصادفن انتخاب می‌شود. این بازیکن یکي از حروفِ الفبا را می‌گزیند و آن را اعلام می‌کند. بازیکنِ بعدی باید یک حرفِ دیگر از الفبا را بگزیند و آن را به حرفِ گزیده‌یِ پیشین اضافه کند. بازیکن‌هایِ بعدی نیز هر کدام یک حرفِ جدید به انتهایِ ترکیبِ ساخته‌شده اضافه می‌کنند. البته باید ترکیب‌های ساخته‌شده، بخشِ آغازینِ یکِ کلمه‌یِ معنادار باشد؛ اما بازیکن‌ها باید بکوشند یک کلمه‌یِ کامل نسازند. بازیکني که یک کلمه‌یِ کامل بسازد، از دورِ بازی کنار می‌رود.

مثلن بازیکنِ اول حرفِ "پ" را می‌گزیند. بازیکنِ دوم حرفِ "ت" را اضافه می‌کند و ترکیبِ "پت" ساخته می‌شود که بی‌معنی است؛ ولی کلماتي هستند که با "پت" شروع می‌شوند. نفرِ سوم حرفِ "و" را می‌گزیند تا با افزودنش به "پت" ترکیبِ جدید را بسازد که اتفاقن کلمه‌یِ "پتو" ساخته می‌شود، و چون کلمه‌یي معنادار است بازیکنِ سوم از دورِ بازی کنار می‌رود.

یک سؤال

آیا می‌توان با داشتنِ یک لغت‌نامه که معیارِ معنادار بودن است، بفهمیم کدام بازیکن اولین کلمه‌یِ معنادار را می‌سازد، در صورتي که هر بازیکن در نوبتِ خود بهترین بازی را بکند؟



نمودارِ 1. درختِ بازیِ Tic-Tac-Toe

درختِ بازی[1]

در نظریه‌یِ بازی‌ها[2]، با ساختاري به نامِ درختِ بازی برمی‌خوریم. درختِ بازی چیزي نیست جز یک گرافِ جهت‌دارِ بدونِ دور[3] که رؤوسِ آن موقعیت‌هایِ بازی است و یال‌هایش نیز حرکت‌هایِ بازیکنان است.

همان طور یک حرکت در بازی باعثِ تغییرِ موقعیتِ بازی می‌شود، و یال‌هایِ درختِ بازی نیز گذر از یک موقعیت به موقعیتي دیگر را نشان می‌دهد.

در نمودارِ 1 می‌توانید یک نمونه از درختِ بازیِ رسم‌شده برایِ بازیِ Tic-Tac-Toe را ببینید. توجه داشته باشید که رؤوسِ این درخت برای سهولت به صورتِ گرافیکی موقعیتِ بازی را نشان می‌دهد، و برایِ کاهشِ پیچیده‌گی موقعیت‌هایي که بازتابش یا چرخشِ یکدیگر هستند، یکی فرض شده‌اند.

همان طور که می‌بینید ریشه‌یِ درختِ بازی حالتِ آغازینِ بازی است، و در این مثال حالتِ آغازین حالتي است که هنوز هیچ علامتي توسطِ بازیکنان در صفحه‌یِ بازی زده نشده‌است. این حالتِ صفحه‌یِ بازی یک موقعیتِ بازی محسوب می‌شود. از این حالت با توجه به حرکتِ بازیکن اول، سه موقعیت ممکن است پیش بیاید: آن که بازیکنِ اول خانه‌یي در گوشه، وسط، و یا در کناره‌ها بگزیند. اما هر کدام از این موقعیت‌ها که گزیده شود، موقعیت‌هایِ دیگري پیش می‌آید که گزینه‌هایِ ممکن برایِ بازیکنِ بعدی را فراهم می‌کند.

موقعیت‌هایِ پیش‌آمده ممکن است وابسته به موقعیتِ پیشین باشد. مثلن اگر بازیکنِ اول، خانه‌یِ وسطی را به عنوانِ حرکت اول بگزیند، برایِ بازیکنِ دوم پنج گزینه ایجاد می‌شود. اما در برخي بازی‌ها ممکن است حرکت‌ها مستقل از موقعیتِ فعلیِ بازی باشد.

اگر همه‌یِ رؤوس و یال‌هایِ درختِ بازی را رسم کنیم، به یک درختِ بازی کامل[4] دست می‌یابیم. ثابت می‌کنیم با داشتنِ درختِ بازیِ کامل می‌توان بازی را حل کرد؛ یعنی می‌توان ترتیبي از حرکت‌ها را معرفی کرد که بازیکنِ اول یا دوم با پیروی از آن‌ها می‌تواند برنده‌یِ بازی باشد، یا آن که بازی به تساوی بینجامد.

تمام رؤوس هم‌ارتفاع (آن‌ها که از ریشه فاصله‌یي برابر دارند) متعلق به یک بازیکن هستند. مثلن در شکلِ بالا، رأس با ارتفاعِ صفر (ریشه)، حالتِ آغازین است و متعلق به هیچ یک از دو بازیکن نیست. رؤوس با ارتفاعِ یک، موقعیتي است که بازیکنِ اول می‌تواند از میانِ آن‌ها بگزیند و رؤوس با ارتفاعِ دو، موقعیت‌هایي است که بازیکنِ دوم می‌تواند یکي‌شان را بگزیند. واضح است که اگر ترتیبِ انجامِ حرکت در طول بازی تغییري نکند، برایِ یک بازیِ دو نفره، رؤوس با ارتفاعِ فرد برای بازیکنِ اول، و رؤوس با ارتفاعِ زوج (به جز صفر که حالت آغازین است) برای بازیکن دوم است. همچنین برایِ یک بازیِ سه‌نفره رؤوس با ارتفاع $1, 4, 7, \ldots$ برایِ بازیکنِ اول، رؤوس با ارتفاعِ $2, 5, 8, \ldots$ برایِ بازیکنِ دوم، و رئوس با ارتفاعِ $3, 6, 9, \ldots$ برایِ بازیکنِ سوم است.

---

[1] Game Tree
[2] Game Theory
[3] DAG
[4] Complete Game Tree

تعمیمِ این اصل ساده است: اگر ارتفاعِ رؤوس را h در نظر بگیریم، برایِ یک بازیِ n–نفره، حاصلِ $(h \bmod n) + 1$ مشخص می‌کند رؤوسِ ارتفاعِ h برایِ کدام بازیکن است.

یک راهِ حل

همان طور که گفته شد، با داشتنِ درختِ بازیِ کامل می‌توان روشی برایِ برد یا حدِ اکثر تساوی در بازی یافت. اما چه‌گونه دنباله‌یِ حرکت‌هایی که منجر به این نتیجه می‌شوند را برگزینم؟

برایِ انجامِ این برگزینش الگوریتمی به نامِ استقرایِ پس‌رو[5] یا تحلیلِ قهقرایی[6]، روشی رایج محسوب می‌شود. در این‌جا قصد داریم به صورتِ مقدماتی و بدونِ دقتِ ریاضیِ زیاد، به این الگوریتم نگاهی بیندازیم.

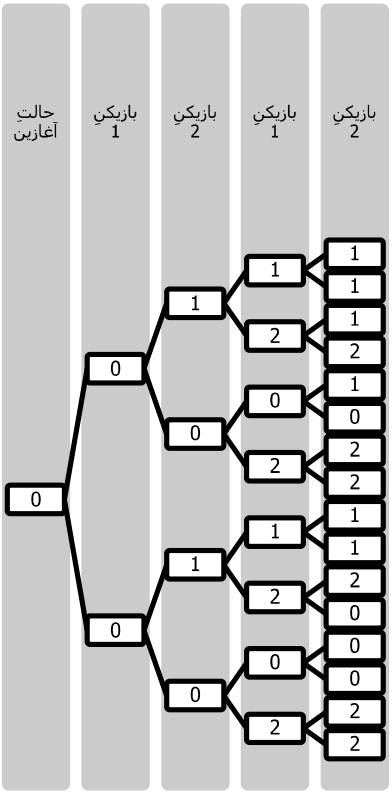
فرض کنید بازیِ موردِ نظر یک بازیِ دونفره است. همچنین فرض کنید درختِ کاملِ بازیِ را در اختیار دارید.

A. در اولین قدم به سراغِ برگ‌ها (رؤوسِ فاقدِ فرزند در درختِ بازی) بروید و موقعیت‌هایِ بردِ بازیکنِ اول را با نمادِ 1 برچسب بزنید، موقعیت‌هایِ بردِ بازیکنِ دوم را با 2، و موقعیت‌هایِ تساوی را با 0.

B. تمامِ والدهایِ رؤوسی که در مرحله‌یِ A برچسب زدید را بررسی کنید. به یاد بیاورید که رؤوس با ارتفاعِ فرد برای بازیکنِ اول و رؤوس با ارتفاعِ زوج برای بازیکنِ دوم است. حالا با در نظر داشتنِ این نکته، به ازایِ هر والد:
   - اگر تمام فرزندانش با عددی برچسب زده شده اند که برابر شماره بازیکن مالک آن والد است (با توجه به ارتفاع رأس والد)، والد را هم با آن عدد برچسب بزنید.
   - اگر دستِ کم یکی از رؤوسِ فرزند با شماره‌یِ بازیکنِ دیگر برچسب خورده بود، آن را با بر-چسبِ بازیکنِ دیگر برچسب بزنید.
   - و اگر نه، رأسِ والد را با 0 بر چسب بزنید.

C. مرحله‌یِ B را تکرار کنید تا این که تمامِ رؤوس برچسب بخورند. در نهایت برچسبِ ریشه نشان می‌دهد که اگر هر بازیکن بهترین حرکت را انجام دهد، نتیجه چه خواهد شد. اگر 0 باشد، نتیجه مساوی خواهد شد، اگر 1 باشد بازیکنِ اول و اگر 2 باشد بازیکنِ دوم برنده خواهند بود.

برایِ مثال به نمودارِ 2 نگاه کنید و چه‌گونه‌گیِ انجامِ الگوریتمِ بالا برایِ برچسب زدنِ این درختِ بازی را مشاهده کنید.



نمودارِ 2. برچسب‌زنی درختِ بازی

گاهی بررسیِ همه‌یِ موقعیت‌هایِ ممکن برایِ بازی بسیار زمان‌بر است، و به همین علت در طراحیِ هوشِ مصنوعیِ بازی‌ها تنها زیرمجموعه‌یی از حرکت‌هایِ هر بازیکن بررسی می‌شود. مثلن برایِ بازیی ساده مانندِ Tic-Tac-Toe، درختِ کاملِ بازی 26830 عدد برگ دارد. به عبارتی دیگر 26830 پایان برایِ این بازی وجود دارد. حالا تصور کنید برای بازی‌هایِ پیچیده حالاتِ مختلفِ پایانِ بازی چه اندازه بزرگ می‌تواند باشد!

برایِ حلِ این مشکل راه‌هایی وجود دارد. ایده‌یِ اصلیِ برخی از این راه‌ها بر این اساس شکل گرفته‌است که لازم نیست تمامِ حرکت‌هایِ ممکن برایِ یک بازیکن را بررسی کنیم؛ چرا که بازیکن‌ها تنها حرکاتی که از نظرِ آن‌ها بهتر است را می‌گزینند و انجام برخی حرکت‌ها غیرمحتمل است. برای مثال می‌توان از روشی موسوم به Alpha-Beta Prunning نام برد که با این نگرش، در فضایِ کوچک‌تری اقدام به یافتنِ بهترین دنباله‌یِ حرکت‌ها می‌کنند. زیردرختی از درختِ بازی که برایِ ما کافی است تا با آن بتوانیم بازی را حل کنیم، درختِ تصمیم[7] نامیده می‌شود. اندازه‌یِ درختِ تصمیم برایِ محاسبه‌یِ پیچیده‌گیِ[8] بازی موردِ استفاده قرار می‌گیرد.

[5] Backward Induction
[6] Retrograde Analysis
[7] Decision Tree
[8] Game Complexity

بازیِ Ghost

حال برمی‌گردیم به بازیِ Ghost و می‌کوشیم درخت‌ش را بسازیم. ریشه را موقعیتِ آغازین در نظر می‌گیریم که در آن هنوز هیچ ترکیبي ساخته نشده‌است. هر رأسِ دیگرِ گراف می‌تواند ترکیبِ ساخته‌شده در موقعیتي از بازی باشد. هر بازیکن به تعداد گزینه‌هایش برایِ افزودنِ حرف جدید به ترکیبِ فعلی حقِ انتخاب دارد. برگ‌ها نیز وضعیت‌هایي اند که کلمه‌یي معنادار ساخته شده‌است. اکنون می‌توانیم به سراغِ الگوریتمِ معرفی‌شده برویم و با برچسب‌زنيِ درخت بفهمیم نتیجه‌یِ بازی چه خواهد شد.

* محسن علیجانپور
دانشجویِ کارشناسيِ ریاضيِ محض، دانشگاهِ شهید بهشتی
m.alijanpour@mail.sbu.ac.ir

یادداشتِ سردبیر

درباره‌یِ شترنجِ خدایان

مسأله

دو فردِ مصون از خطا و گناه با هم شترنج بازی می‌کنند و هر کس در نوبتِ خود بهترین حرکت را می‌کند. ثابت کنید از آغازِ بازی می‌توان مشخص کرد نتیجه‌یِ بازی چه است. یعنی می‌توان مشخص کرد کدام یک از حالت‌هایِ تساوی یا بردِ سفید یا بردِ سیاه رخ می‌دهد.

پاسخ

با توجه به مقاله‌یي که خواندید، پاسخ بس کوتاه است: کافی ست درختِ بازی را بسازیم، تا مشخص شود ریشه چه برچسبي خواهد خورد.
نکته این‌جا ست که مسأله از ما نمی‌خواهد مشخص کنیم این نتیجه چه است. تنها اثبات می‌کنیم می‌توان پاسخ را یافت: درختِ بازيِ شترنج را می‌توان ساخت. تعدادِ رأس‌هایِ این درخت از تعدادِ ذره‌هایِ کائنات بیش‌تر است، درست، اما بالاخره این تعداد *متناهی* است. (این قضیه را قوانینِ حاکم بر بازی ایجاب می‌کند.) پس شاید هنوز نتوان نتیجه را مشخص کرد، اما شیوه را می‌دانیم. رایانه‌ها را هنوز توانِ رایانیدنِ این حجمِ داده نیست. ولی این در تئوریِ ماجرا خللي ایجاد نمی‌کند.

ستاره‌ی ریاضیِ ایران در شرقِ تهران غروب کرد — در سوگِ «استاد پرویز شهریاری»

عباس حیدری هایی*

شرقِ تهران. استاد پرویز شهریاری از ستاره‌گانِ علمِ ریاضیِ ایران، غروبِ جمعه 22 اردیبهشت، در حالي که صدها تن از دوستان و شاگردان‌ش او را مشایعت می‌کردند، به خانه‌ی ابدی رفت؛ خانه‌يي که در آن برایِ همیشه آرام خواهد گرفت.

این چهره‌ی ماندگارِ ریاضیِ کشور، بامدادِ جمعه در بیمارستانِ جمِ تهران دچارِ حمله‌ی قلبی شد و تلاشِ پزشکان برایِ برگرداندن‌ش نتیجه نداد. مراسمِ تدفین، در آرامگاهِ قصرِ فیروزه درشرقِ تهران و با آداب و سننِ زرتشتیان برگزار شد و در حالي که استاتید، دانشجویان و اقوامِ استاد گرداگردش را گرفته بودند، یک روحانیِ زرتشتی برایش دعا کرد تا همه چیز برایِ عزیمتِ استاد به منزلِ جاویدش مهیا شده باشد.

استاد از زبانِ دوستان‌ش

بعد از آن که مراسمِ تدفین و خاک‌سپاری انجام شد، تشییع‌کننده‌گان به سالني در مقابلِ آرامگاهِ قصرِ فیروزه رفته تا مراسمِ بزرگ‌داشتِ استاد را در همان اولین ساعاتِ عزیمتِ وی به دیارِ باقی برگزار کنند.

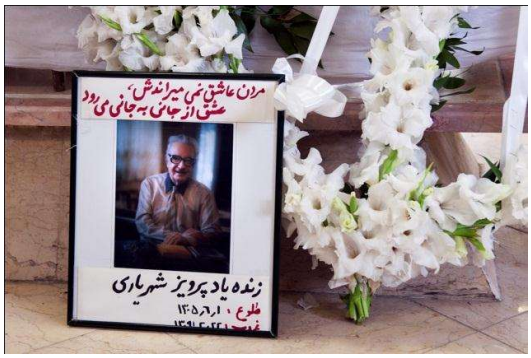
در این مراسمِ بزرگداشت، جمعي ازدوستان، شاگردان و همراهانِ دکتر شهریاری درباره‌یِ فضایل و ویژه‌گی‌هایِ شخصیتی‌ش سخناني ایراد کردند.

نماینده‌یِ زرتشتیان در مجلسِ شورایِ اسلامی از جمله سخنرانانِ این جلسه بود که به تعدادِ مقاله‌هایِ استاد شهریاری اشاره کرد و از تالیف و انتشارِ هزار مقاله‌یِ علمی به عنوانِ یک کارِ بزرگ و ارزنده یاد کرد.

توران بهرامی از اقوامِ دکتر شهریاری نیز که در مراسم از وی به عنوانِ شاعرِ معاصر یاد شد، با قرائتِ قطعه-شعري از سعدی درباره‌یِ جاودانه‌گیِ انسان، استاد شهریاری را زنده‌یِ همیشه‌یِ تاریخ توصیف کرد و گفت استاد زنده است، تا آثار او هست.

از دیگر سخنرانانِ این جلسه‌یِ یادبود و بزرگداشت، دکتر رسول مهربانی بود که آخرین مقاله‌یِ دکتر شهریاری را که در تازه‌ترین شماره‌یِ مجله‌یِ "چیستا" منتشر شده‌است و به عقیده‌یِ وی این مقاله همان وصیت‌نامه‌یِ دکتر شهریاری است، برایِ حضار قرائت کرد.

رییسِ انجمنِ زرتشتیانِ ایران، در سخناني در این مراسم، ضمن تجلیل از خصوصیاتِ اخلاقی و انسانیِ مرحوم شهریاری، به این نکته اشاره کرد که استاد تصمیم داشت کتابخانه‌يي داشته باشد که بتواند کتاب‌هایش را در اختیارِ عمومِ مردم قرار دهد.



* عباس حیدری هایی
دانشجویِ کارشناسیِ ریاضیِ محضِ دانشگاهِ شهید بهشتی
isolate_point@yahoo.com

† عکس‌ها از مؤید نبیعی

Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen

Georg Cantor

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgrösse ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

(1.) $$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

wo $n, a_0, a_1, \ldots a_n$ ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_0 positiv, die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ ohne gemeinschaftlichen Theiler und die Gleichung (1.) irreductibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, dass nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1.), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1.) höchstens soviel reelle algebraische Zahlen ω, welche ihr genügen, als ihr Grad n angiebt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesammthiet einen Inbegriff von Zahlgrössen, welcher mit (ω) beyeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, dass in jeder Nähe irgend einer gedachten Zahl α unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, dass man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν, welcher durch das Zeichen (ν) angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so dass zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, dass also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen gesetzmässigen Reihe:

(2.) $$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$$

Gedacht werden kann, in welcher sämmtliche Individuen von (ω) vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2.), welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet. Sobald man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, lässt sich dasselbe nach Willkür modificiren; es wird daher genügen, wenn ich in §. 1 denjenigen Anordnungsmodus mittheile, welcher, wie mir scheint, die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt.

Um von dieser Eigenscaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen eine Anwendung zu geben, füge ich zu dem §. 1 den §. 2 hinzu, in welchem ich ziege, dass, wenn eine beklibige Reihe reeller Zahlgrössen von der Form (2.) vorliegt, man in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ Zahlen η bestimmen

دربارهِ ویژهگیي از کودهِ [≈ مجموعهِ] همهِ عددهایِ جبریِ حقیقی

گئورگ کانتور

ترجمهِ محمدعلی اعرابی

از عددِ جبریِ حقیقی، منظور عدديِ حقیقی مانندِ ω است، که در معادلهيي ناثابت به شکلِ زیر صدق میکند:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad (1)$$

که n، a_0، a_1، ...، a_n عددهایِ صحیح اند. ما میتوانیم اینجا عددهایِ n و a_0 را مثبت، ضریبهایِ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ را بدونِ عاملِ مشترک، و معادلهِ (1) را نافروکاستنی [= تحویلناپذیر] بگیریم؛ با این قراردادها، با استفاده از قضیهِ نیکشناختهشدهِ بنیادینِ جبر و حساب، درمییابیم معادلهِ (1)، که عدديِ جبریِ حقیقی در آن صدق میکند، کاملن معین است؛ به عکس اگر درجهِ معادلهيي به صورتِ (1) n باشد، دستِ بالا n عددِ جبریِ حقیقیِ ω در آن معادله صدق میکند. عددهایِ جبریِ حقیقی همهگی یک کوده از اعداد میسازند، که میتواند با (ω) نموده شود. چنان که با اندکي توجه میتوان دید، (ω) دارایِ این ویژهگی است که در هر همسایهگی از عددِ دلخواهِ α، بیپایان تا [= بیشمار] عدد از آن خوابیدهاست [یعنی میتوان دید که (ω) در $\mathbb{R}$ چگال است]؛ پس ظاهرن این بسیار جالب است که بدانید میتوان کودهِ (ω) را به کودهِ همهِ عددهایِ صحیحِ مثبتِ ν، که با نمادِ (ν) مینماییم، به طورِ یکبهیک نگاراند، چنان که هر عددِ جبریِ ω به یک عددِ صحیحِ مثبتِ معینِ ν متناظر شود و به عکس هر عددِ صحیحِ مثبتِ ν به یک عددِ جبریِ حقیقیِ معینِ ω متناظر شود، به بیانِ دیگر، کودهِ (ω) مجاز است به صورتِ دنبالهِ بیپایانِ زیر نوشته شود:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \qquad (2)$$

که در آن، همهِ عنصرهایِ (ω) پوشیده شوند، و هر یک از ایشان در یک جایِ معین از (2)، با اندیسِ همراهش مشخص میشود [یعنی (ω) شمارا است]. به محضِ این که شما شیوهيي بیابید، که یک چنین نگاشتي را شدنی کند، میتوان آن را به دلخواه پیراست؛ پس این کافی است، که من در §1 شیوهيي به دست دادهام، که، چنان که من میسَهَم [= به نظرم میآید]، دشواریهایش کمینه است.

برایِ به دست دادنِ کاربردي از این ویژهگیِ کودهِ همهِ عددهایِ جبریِ حقیقی، من §2 را بر §1 افزودهام، و در آن نشان دادهام، که، هنگامي که دنبالهيي از اعدادِ حقیقیِ دلخواه به فرمِ (2) داده شود، میتوان در هر بازهِ $(\alpha \cdots \beta)$ عدديِ چون η

یافت، که در آن نخوابیده باشد. با به هم آمیزاندنِ این دو فرگرد [= پاراگراف]، اثباتي به دست داده‌ایم از قضیه‌یي که نخست بار *لیوویل* اثبات اش کرد، که در هر بازه‌ی داده‌شده‌ی $(\alpha \cdots \beta)$ بی‌پایان تا عددِ ترافرازنده [= متعالی]، یعنی عددي که جبریِ حقیقی نیست، یافته می‌شود. گذشته از این، قضیه‌یي در §2 آورده‌ایم که بیان می‌کند چرا کوده‌ی عددهای حقیقی، که ساختاري پیوستاری تشکیل می‌دهد (یعنی ساختاري همانندِ همه‌ی عددهای حقیقی، که از 0 بزرگ‌تر اند و از 1 کوچک‌تر)، نمی‌تواند به طورِ یک‌به‌یک به کوده‌ی (ν) بنگارد؛ پس من میانِ آن چه پیوستار خواندیم اش و کوده‌یي با سرشتي هم‌سان با کوده‌ی عددهای حقیقیِ جبری تفاوتي بنیادین یافته‌ام.

§1

به معادله‌ی (1) بازمی‌گردیم، که با یک عددِ جبریِ ω برقرار می‌شود و که با قراردادهای یادشده کاملن معین است. پس می‌توان حاصلِ جمعِ قدرِ مطلقِ ضریب‌هایش، به اضافه‌ی $n-1$، که n درجه‌ی ω است، را *بلندای* عددِ ω خواند و با نمادِ N نمود؛ که، اگر بخواهیم با نمادگذاریِ رواگ‌مند [= رایج] بیان اش کنیم، چنین است:

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|. \quad (3)$$

پس بلندای N برای هر عددِ جبریِ حقیقیِ ω یک عددِ صحیحِ مثبتِ معین است؛ به عکس به ازای هر مقدارِ صحیحِ مثبت برای N تنها شماري پایان‌مند عددِ جبریِ حقیقی با بلندای N هست؛ این شمار را با $\varphi(N)$ می‌نماییم؛ پس برای نمونه $\varphi(1) = 1$؛ $\varphi(2) = 2$؛ $\varphi(3) = 4$. عددهای کوده‌ی (ω)، یعنی همه‌ی عددهای جبریِ حقیقی، را می‌توان به این شیوه‌یي که خواهیم گفت آراست [= مرتب کرد]: ما به عنوانِ نخستین عدد ω_1 عددي را برمی‌گزینیم که بلندایش $N = 1$ است؛ سپس $\varphi(2) = 2$ عددي که بلندایشان $N = 2$ است، به ترتیبِ اندازه ω_2 و ω_3؛ سپس‌تر در ادامه‌ی ایشان $\varphi(3) = 4$ عددي که بلندایشان $N = 3$ است، به ترتیبِ اندازه؛ و در حالتِ کلی، پس از آن که به این شیوه همه‌ی عددهای (ω) که بلندایشان کم‌تر از $N = N_1$ است برشمرده شدند و به هر یک جایگاهي معین اختصاص داده شد، سپس عددهای جبریِ حقیقی با بلندای $N = N_1 + 1$، به ترتیبِ اندازه، به دنباله‌ی ایشان خواهند آمد؛ پس ما کوده‌ی (ω) از همه‌ی عددهای جبریِ حقیقی را این چنین شماردیم:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

و اکنون دیگر بر حسبِ شمارش‌مان می‌توانیم از νاُمین عددِ جبریِ حقیقی سخن بگوییم، بدونِ این که حتا یک عنصر از (ω) را جا انداخته باشیم. —

kann, welche nicht in (2.) enthalten sind; combinirt man die Inhalte dieser beiden Paragraphen, so ist damit ein neuer Beweis des zuerst von *Liouville* bewiesenen Satzes gegeben, dass es in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ unendlich viele transcendente, d. h. Nicht algebraische reelle Zahlen giebt. Ferner stellt sich der Satz in §. 2 als der Grund dar, warum Inbegriffe reeller Zahlgrössen, die ein sogenanntes Continuum bilden (etwa die sämmtlichen reellen Zahlen, welche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind) sich nicht eindeutig auf den Inbegriff (ν) beziehen lassen; so fand ich den deutlichen Unterschied zwischen einem sogenannten Continuum und einem Inbegriffe von der Art der Gesammtheit aller reellen algebraischen Zahlen.

§. 1.

Gehen wir auf die Gleichung (1.), welcher eine algebraische Zahl ω genügt und welche nach den gedachten Festsetzungen eine völlig bestimmte ist, zurück, so möge die Summe der absoluten Beträge ihrer Coefficienten, vermehrt um die Zahl $n-1$, wo n den Grad von ω angiebt, die *Höhe* der Zahl ω genannt und mit N bezeichnet werden; es ist also, unter Anwendung einer üblich gewordenen Bezeichnungsweise:

(3.) $N = n - 1 + [a_0] + [a_1] + \cdots + [a_n]$.

Die Höle N ist darnach für jede reelle algebraische Zahl ω eine bestimmte positive ganze Zahl; umgekehrt giebt es zu jedem positiven ganzzahligen Werthe von N nur eine endlich Anzahl algebraischer reeller Zahlen mit der Höhe N; die Anzahl derselben sei $\varphi(N)$; es ist beispielsweise $\varphi(1) = 1$; $\varphi(2) = 2$; $\varphi(3) = 4$. Es lassen sich alsdann die Zahlen des Inbegriffes (ω), d. h. sämmtliche algebraischen reellen Zahlen folgendermassen anordnen; man nehme als erste Zahl ω_1 die eine Zahl mit der Höhe $N = 1$; lesse auf sie, der Grösse nach steigend, die $\varphi(2) = 2$ algebraischen reellen Zahlen mit der Höhe $N = 2$ folgen, bezeichne sie mit ω_2, ω_3; an diese mögen sich die $\varphi(3) = 4$ Zahlen mit der Höhe $N = 3$, ihrer Grösse nach aufsteigend, anschliessen; allgemein mögen, nachdem in dieser Weise sämmtliche Zahlen aus (ω) bis zu einer gewissen Höhe $N = N_1$ abgezählt und an einen bestimmten Platz gewiesen sind, die reellen algebraischen Zahlen mit der Höhe $N = N_1 + 1$ auf sie folgen und zwar der Grösse nach aufsteigend; so erhält man den Inbegriff (ω) aller reellen algebraischen Zahlen in der Form:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$$

und kann mit Rücksicht auf diese Anordnung von der νten reellen algebraischen Zahl reden, wobei keine einzige aus dem Inbegriffe (ω) vergessen ist. —

§2

دنباله‌ی زیر را دنباله‌یی بی‌پایان از اعدادِ حقیقیِ متمایز بگیرید:

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots \qquad (4)$$

می‌توان در هر بازه‌ی داده‌شده‌ی $(\alpha \cdots \beta)$ یک عددِ η یافت، که در دنباله‌ی (4) برشمرده نشده باشد (پس بی‌پایان تا از چنین عددهایی می‌توان یافت)؛ این را اکنون ثابت می‌کنیم.

ما به نهایت در بازه‌ی $(\alpha \cdots \beta)$ فرومی‌رویم، که این بازه دل‌خواه است، و نیز که $\alpha < \beta$؛ نخستین دو عدد از دنباله‌ی (4)، که در درونِ این بازه خوابیده است (یا یکی از دو مرزِ بازه است) را، با α' و β' می‌نماییم، و می‌پنداریم $\alpha' < \beta'$؛ به شیوه‌ی مشابه ما نخستین دو عدد از دنباله‌مان، که در درونِ بازه‌ی $(\alpha' \cdots \beta')$ خوابیده‌اند را، با α'' و β'' می‌نماییم، و نیز می‌پنداریم $\alpha'' < \beta''$؛ و سپس با بارِ دیگر عمل به این شیوه بازه‌ی $(\alpha''' \cdots \beta''')$ را می‌سازیم؛ و به این سان دیگرها را. اکنون با استناد به تعریف $\alpha', \alpha'', \dots$ عددهایی از دنباله‌ی ما (4) اند، که اندیس‌هایشان یکی پس از دیگری افزایند، و چنین اند عددهای $\beta', \beta'', \dots$؛ نیز عددهای $\alpha', \alpha'', \dots$ در اندازه می‌افزایند [= صعود می‌کنند]، و عددهای $\beta', \beta'', \dots$ در اندازه می‌کاهند [= نزول می‌کنند]؛ پس بازه‌های $(\alpha \cdots \beta)$، $(\alpha' \cdots \beta')$، $(\alpha'' \cdots \beta'')$، ... هر یک همه‌ی بازه‌های سپسین‌ش را در خود می‌گنجاند. — اکنون تنها دو حالت توانستنی است.

یا شمارِ بازه‌هایی که ساخته‌ایم باپایان است؛ در آن حالت بگذارید $(\alpha^{(\nu)} \cdots \beta^{(\nu)})$ فرجامینِ آن‌ها باشد؛ زیرا در درونِ آن بازه دستِ بالا یک عدد از (4) می‌تواند بگنجد، پس می‌توان در درون‌ش عددی چون η یافت که در (4) حضور نداشته باشد، و در نتیجه قضیه برای این حالت اثبات می‌شود. —

یا شمارِ بازه‌هایی که ساخته‌ایم بی‌پایان است؛ سپس عددهای $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$، در اندازه افزاینده [= صعودی] اند، بی آن که به بی‌نهایت بروند، پس به یک مقدارِ حدیِ α^∞ می‌گرایند؛ نیز عددهای $\beta, \beta', \beta'', \dots$، در اندازه کاهنده [= نزولی] اند، بی آن که به بی‌نهایت بروند، پس به یک مقدارِ حدیِ β^∞ می‌گرایند؛ اگر $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (حالتی که اغلب برای کوده‌ی (ω) از همه‌ی عددهای جبریِ حقیقی رخ می‌دهد)، پس می‌توان دانست که عددِ $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ نمی‌تواند در دنباله‌مان حضور بدارد[1]؛ نیز اگر $\alpha^\infty < \beta^\infty$، پس کافی است هر عددِ η از درونِ بازه‌ی $(\alpha^\infty \cdots \beta^\infty)$ یا یکی از دو مرزِ این بازه برگزینیم، و بدانیم در دنباله‌ی (4) حضور ندارد. —

§. 2.

Wenn eine nach irgend einem Gesetze gegebene unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrössen:

(4.) $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\nu, \dots$

vorliegt, so lässt sich in jedem vorgegeben Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4.) nicht vorkommt; dies soll nun bewiesen werden.

Wir gehen zu dem Ende von dem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ aus, welches uns beliebig vorgegeben sei, und es sei $\alpha < \beta$; die ersten beiden Zahlen unserer Reihe (4.), welche im Innern diese Intervalles (mit Ausschluss der Grenzen) liegen, mögen mit α', β' bezeichnet werden, und es sei $\alpha' < \beta'$; ebenso bezeichne man in unserer Reihe die ersten beiden Zahlen, welche im Innern von $(\alpha' \cdots \beta')$ liegen, mit α'', β'', und es sei $\alpha'' < \beta''$, und nach demselben Gesetze bilde man ein folgendes Intervall $(\alpha''' \cdots \beta''')$ u. s. w. Hier sind also $\alpha', \alpha'', \dots$ der Definition nach bestimmte Zahlen unserer Reihe (4.), deren Indices im fortwährenden Steigen sich befindeb, und das Gleiche gilt von Zahlen $\beta', \beta'', \dots$; ferner nehmen Zahlen $\alpha', \alpha'', \dots$ ihrer Grösse nach fortwährend zu, die $\beta', \beta'', \dots$ nehmen ihrer Grösse nach fortwährend ab; von den Intervallen $(\alpha \cdots \beta)$, $(\alpha' \cdots \beta')$, $(\alpha'' \cdots \beta'')$, ... schliesst ein jedes alle auf desselbe folgenden ein. — Hierbei sind nun zwei Fälle denkbar.

Entweder die Anzahl der so gebildeten ist endlich; das letzte von ihnen sei $(\alpha^{(\nu)} \cdots \beta^{(\nu)})$; da im Innern desselben höchstens eine Zahl der Reihe (4.) liegen kann, so kann eine Zahl η in diesem Intervalle angenommen werden, welche nicht in (4.) enthalten ist, und es ist somit der Satz für diesen Fall bewiesen. —

Oder die Anzahl der gebildeten Intervalle ist unendlich gross; dann haben die Grössen $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$, weil sie fortwährend ihrer Grösse nach zunehmen, ohne ins Unendliche zu wachsen, einen bestimmten Grenzwerth α^∞; ein gleiches gilt für die Grössen $\beta, \beta', \beta'', \dots$, weil sie fortwährend ihrer Grösse nach abnehmen, ihr Grenzwerth sei β^∞; ist $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (ein Fall, der bei dem Inbegriffe (ω) aller reellen algebraischen Zahlen stets eintritt), so überzeugt man sich die Zahl $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ nicht in unserer Reihe enthalten sein kann[1]; ist aber $\alpha^\infty < \beta^\infty$, so genügt jede Zahl η im Innern des Intervalles $(\alpha^\infty \cdots \beta^\infty)$ oder auch an den Grenzen desselben der gestellten Forderung, nicht in der Reihe (4.) enthalten zu sein. —

قضیه‌یی که در این جستار ثابت شد می‌تواند در جهاتِ گوناگون گسترانده شود و به کار رود، که ما این‌جا یکی از آن‌ها را آورده‌ایم:

"اگر $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ دنباله‌یی باپایان یا بی‌پایان از عددهایی دوبه‌دو مستقلِ خطی باشد (یعنی هیچ برابریِ $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n = 0$ با ضریب‌هایِ صحیح، که دستِ کم یکی از ایشان ناصفر است، استوار [= برقرار، درست] نیست) و اگر (Ω) را کوده‌یِ همه‌یِ عددهایِ Ω بپنداریم، که می‌توانند چونان تابعی گویا با ضریب‌هایِ صحیح از عددهایِ داده‌شده‌یِ ω نمایش داده شوند، پس در هر بازه‌یِ $(\alpha \cdots \beta)$ بی‌پایان شمار عدد یافته می‌شود، که در (Ω) نیست."

در حقیقت می‌توان استدلالی همسان با استدلالِ ارائه‌شده در §2 را پی گرفت، که کوده‌یِ (Ω) می‌تواند به شکلِ دنباله‌یی

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu, \dots$$

نوشته شود، در نتیجه، با استناد به §2، درستیِ قضیه به اثبات می‌رسد.

حالتی بسیار خاص از قضیه‌یِ گفته‌شده (که در آن دنباله‌یِ باپایانِ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ درجه‌هایِ تابع‌هایِ گویا است، و می‌گوید کوده‌یِ (Ω) از پیش تعیین شده‌است) هست، که با فروکاهش به اصل‌هایِ *گالوا*یی، توسطِ آقایِ *ب. مینینگرود* ثابت شده‌است. نک (Mathematische Annalen, Vol. 4, 497).

برلین، سه‌شنبه 23 دسامبر 1873.

[1] اگر عددِ η در دنباله‌مان حضور بدارد، خواهیم داشت $\eta = \omega_p$، که p اندیسی معین است؛ اما این نتوانستنی است، زیرا ω_p در بازه‌یِ $(\alpha^{(p)} \cdots \beta^{(p)})$ نیست، در حالی که طبقِ تعریف η درونِ این بازه خوابیده‌است.

Die in diesem Aufsatze bewiesenen Sätze lassen Erweiterungen nach verschiedenen Richtungen zu, von welchen hier nur eine erwähnt sei:

„Ist $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n, \dots$ eine endliche oder unendliche Reihe von einander linear unabhängiger Zahlen (so dass keine Gleichung von der Form $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n = 0$ mit ganzzahligen Coefficienten, die nicht sämmtlich verschwinden, möglich ist) und denkt man sich den Inbegriff (Ω) aller derjenigen Zahlen Ω, welche sich als rationale Functionen mit ganzzahligen Coefficienten aus den gegebenen Zahlen ω darstellen lassen, so giebt es in jedem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ unendlich viele Zahlen, die nicht in (Ω) enthalten sind."

In der That überzeugt man sich durch eine ähnliche Schlussweise, wie in §. 1, dass der Inbegriff (Ω) sich in der Reihenform:

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_\nu, \dots$$

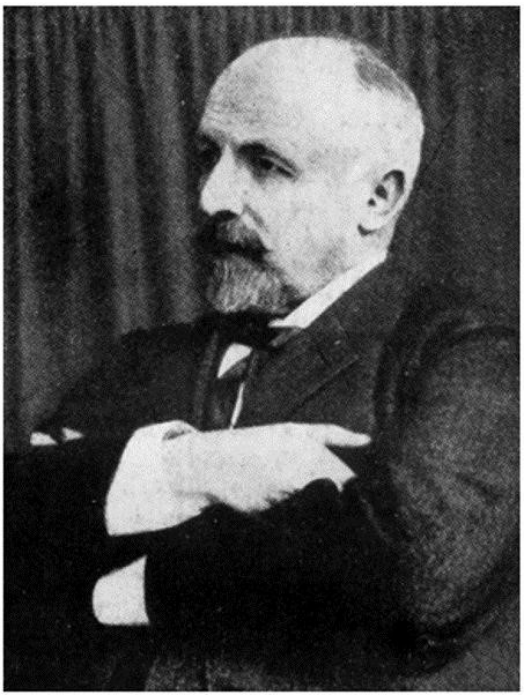
auffassen lässt, woraus, mit Rücksicht auf diesen §. 2, die Richtigkeit des Satzes folgt.

Ein ganz specieller Fall des hier angeführten Satzes (in welchem die Reihe $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n, \dots$ eine endliche und der Grad der rationalen Functionen, welche den Inbegriff (Ω) liefern, ein vorgegebener ist) ist, unter Zurückführung auf *Galois*sche Principien, von Herrn *B. Minnigerode* bewiesen worden (Siehe Math. Annalen von *Clebsch* und *Neumann*, Bd. IV. S. 497.)

Berlin, den 23. December 1873.

[1] Wäre die Zahl η in unserer Reihe enthalten, so hätte man $\eta = \omega_p$, wo p ein bestimmter Index ist; dies ist aber nicht möglich, denn ω_p liegt nich im Innern des Intervalles $(\alpha^{(p)} \cdots \beta^{(p)})$, während die Zahl η ihrer Definition nach im Innern dieses Intervalles liegt.

نامه‌یِ کانتور به هیلبرت
در 26 سپتامبر
گئورگ کانتور
ترجمه‌یِ محمدعلی اعرابی



گئورگ فردیناند لودویگ فیلیپ کانتور
(3 مارس 1845 — 6 ژانویه 1918)

هم‌کارِ گرامی،

ما دیروز بسیار زود *برونسویک* را ترک کردیم و به *ولفنبوتل* رفتیم، که من سه ساعت‌م را در آن کتاب‌خانه‌یِ مجلل گذراندم در حالي که هم‌سرم در شهر کاوش می‌کرد. آن جا، ناگهان، از حالِ ریاضیانه به گذشته‌یِ زیباترِ شاعرانه در سده‌هایِ شانزده و هفده برده شدم. بعد از ظهر به *هارتسبورگ* سفر کردیم، در *هتل بلفو* مستقر شدیم، و مستقیمن برایِ پیاده‌روی به *بوربرگ* رفتیم، ساعتِ 5:15 رسیدیم و با ددکیند و هم‌کارمان *شوبرت* ملاقات کردیم و قهوه نوشیدیم... ما قصد نداریم تا عصرِ سه‌شنبه‌یِ آینده *هارتسبورگ* را به مقصدِ خانه ترک کنیم.

از هنگامي که شما به من گفته‌اید که شما دبیرِ نشریه‌یِ *Mathematische Annalen* هستید، می‌خواهم از شما نظرتان را در باره‌یِ نشرِ سومین مقاله از رساله‌یِ دنباله‌دارم درباره‌یِ "سهم‌هایي در بنیانِ نگره‌یِ مجموعه‌هایِ ترامتناهی" بپرسم. امیدوار ام بتوانم دست‌نویس‌ش را در این مرخصی تمام کنم؛ اما می‌ترسم این بخش به اندازه‌یِ دو بخشِ پیشین دارایِ نتایجِ مهم نباشد.

نخستین دیدارِ شما با جامعه‌یِ علمی (که من بیست سال است عضوش ام) چه زمان خواهد بود؟

متأسفانه، به این علت که پریروز بعد از ظهرم بسیار طاقت‌فرسا بود، مجبور شدم مکالمه‌مان در باره‌یِ نگره‌یِ مجموعه‌ها را در *دانشگاهِ پلی‌تکنیکِ برونسویک* قطع کنم — و دقیقن هم‌آن جا که شک داشتید آیا کاردینالیته یا توانِ همه‌یِ مجموعه‌ها یکي از الف‌ها باشد؛ به بیانِ دیگر، آیا هر توانِ $\mathfrak{a}$ یا $\mathfrak{b}$ِ مشخص یک الف نیز هست؟

من می‌توانم به دقت ثابت کنم که پاسخ *بله* است. به این علت که کوده‌یِ همه‌یِ الف‌ها نمی‌تواند یک مجموعه‌یِ خوش‌تعریفِ تمام‌شده‌یِ معین دانسته شود. اگر چنین کوده‌یي [با تواني که هیچ الفي نیست] یافته شود، پس باید در اندازه از یک الفِ معین بزرگ‌تر باشد، که در نتیجه [این الف] هم‌هنگام در این کوده هم *گنجیده‌است*، و هم *نگنجیده‌است*، که این یک پادگویی [= تناقض] است. با این مشاهده، می‌توانم به دقت ثابت کنم: "اگر یک مجموعه‌یِ خوش‌تعریفِ تمام‌شده‌یِ معین دارایِ تواني متفاوت از هر الف باشد، پس باید زیرمجموعه‌هایي بدارد که توان‌شان *هر* الف است — به بیانِ دیگر، باید کوده‌یِ همه‌یِ الف‌ها را در خود گنجانده باشد." از این جا، به ساده‌گی اثبات می‌شود که، این فرض (که توانِ یک *مجموعه‌یِ معین* هیچ الفي نباشد)، ایجاب می‌کند، که کوده‌یِ همه‌یِ الف‌ها می‌تواند یک مجموعه‌یِ خوش‌تعریفِ تمام‌شده‌یِ معین پنداشته شود. اما من نشان دادم که این درست نیست. بنا بر این، هر توانِ $\mathfrak{a}$ همیشه یک الف است. به ویژه، توانِ $\mathfrak{o}$ از خطِ پیوستار همیشه یک الفِ معین است (و امید دارم بتوانم نشان دهم $\mathfrak{o} = \aleph_1$). اما ما پیش از این هم می‌توانیم ببینیم که خطِ پیوستارِ، *در معنایي والاتر*، شمردنی است، زیرا می‌تواند چونان یک *مجموعه‌یِ خوش‌ترتیب* نمایش داده شود.

کوده‌هایي را که نمی‌توانند "مجموعه" پنداشته شوند (برایِ نمونه، کوده‌یِ همه‌یِ الف‌ها، که برشمردم) من سال‌ها پیش "بی‌نهایتِ مطلق" خوانده‌ام، و سرسختانه از *مجموعه‌هایِ ترامتناهی* تمییز شان داده‌ام.

بهترین آرزوها از سویِ هم‌سرم و من.

از نامساوی‌هایِ دبیرستانی تا نامساوی‌هایِ دانشگاهی

فربد فرازنده‌مهر*

تفاوتي ظريف وجود دارد، بينِ مفهومِ *معادله*[1] و *تساوی*[2]؛ به عبارتي، تساوی اخص از معادله است: رابطه‌يِ زير را در $\mathbb{R}$ در نظر بگيريد:

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1,$$

با كمي دقتِ جبری متوجه می‌شويم كه اين رابطه به ازايِ هر $x \in \mathbb{R}$ برقرار است؛ زيرا برايِ هر عددِ حقيقی داريم

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

اما در موردِ رابطه‌يِ زير چنين نيست:

$$(x+1)^2 - x^2 = 3x + 1,$$

زيرا اين رابطه هم‌ارز است با $2x = 3x$ كه فقط برايِ $x = 0$ برقرار است: *تساوی معادله‌يي است كه برايِ همه‌يِ مقاديرِ مجموعه‌يي مفروض (معمولن $\mathbb{R}$) برقرار است.*

همين تفاوتِ مفهومی در موردِ *نامساوی*[3] و *نامعادله*[4] نيز وجود دارد؛ $x^2 + 1 \geq 2x$ برايِ هر عددِ حقيقيِ x، اما $x^2 + 1 \geq 3x$ فقط برايِ xهايي كه از نصفِ مجموعِ 3 و جذرِ 5 بيشتر اند، يا كه از نصفِ تفاضلِ جذرِ 5 از 3 كمتر اند، اتفاق می‌افتد: *نامساوی نامعادله‌يي است كه برايِ همه‌ی مقاديرِ مجموعه‌يي مفروض (معمولن $\mathbb{R}$ و در اكثرِ مواقع $\mathbb{R}^+$) برقرار است.*

نامساوی‌ها به واسطه‌يِ فراگير بودنِ برقراری‌شان، كاربردِ گسترده‌يي در شاخه‌هايِ مختلفِ رياضی دارند؛ خيلی‌ها علاوه بر اين كه به اين امر معتقد اند، هم‌چنين عقيده به *زيباييِ* نامساوی‌ها نيز دارند — شاهدِ اين مدعا نگارشِ كتاب‌هايِ *Inequalities* توسطِ *جورج پوليا* و كتابِ *Cauchy's Master Class* صرفن درباره‌يِ نامساوی‌ها،و كم‌اهميت‌تر، حضورِ مسائلي مستقيمن يا غيرِمستقيمن مرتبط با نامساوی‌ها، در مسابقاتِ رياضيِ مختلف به خصوص المپيادِ بين‌المللیِ رياضی (IMO) است.

هدف از اين سلسله از مقالات، سهيم كردنِ مخاطب در بهره‌گيری از كاربردِ مبحثِ نامساوی‌ها در حلِ مسائل و هم‌چنين در لذت بردن از زيباييِ آن‌ها می‌باشد.

در اين شماره، دو مثال از كاربردهايِ نامساوی‌ها در حلِ مسائل را ذكر می‌كنيم، به معرفيِ اولين نامساوی (كه قراردادن به آن *نامساويِ اصلی* می‌گوييم) يعنی $x^2 \geq 0$ می‌پردازيم، نظريِ اجمالی می‌اندازيم به حالتِ خاصِ نامساويِ واسطه‌ها، و هم‌چنين به چند ايده برايِ اثباتِ نامساوی‌ها اشاره می‌كنيم. در انتها نيز، مسائلي مرتبط با مطالبِ عنوان‌شده می‌آوريم؛ مسائلي كه قرار است در شماره‌يِ بعدی راهنمايی‌هايي برايِ حلِ آن‌ها آورده شود.

روندِ اين سری از مقالات مشابهِ هم است: معرفيِ نامساوی‌ها و ايده‌هايِ مربوط به آن‌ها در هر شماره، حل كردنِ مسائلي مستقيم و غيرِمستقيم از آن‌ها، تقويتِ حل مسأله در اين مبحث و پرداختن به چه‌گونه‌گيِ اثباتِ نامساوی‌ها، و در اثنايِ تماميِ اين‌ها، حركت از نامساوی‌هايي كه با مفاهيمِ ساده‌ترِ دبيرستانی سر-و-كار دارند، به نامساوی‌هايِ دانشگاهی كه مفاهيمي عميق‌تر (مانند مفاهيمِ مطرح در آناليزِ رياضی) در آن‌ها حضورِ رياضی دارد.

مثالِ 1. توابعِ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعريف شده‌اند. ثابت كنيد اعدادِ x و y در بازه‌يِ $[0,1]$ وجود دارند به طوري كه

$$|f(x) + g(y) - xy| \geq ¼.$$

(Putnam – 1959)

حل.

فرض كنيم چنين نباشد؛ يعنی به ازايِ هر x و y در $[0,1]$ داشته باشيم

$$|f(x) + g(y) - xy| < ¼,$$

در اين صورت داريم

$$|f(0) + g(0)| < ¼,$$
$$|f(0) + g(1)| < ¼,$$
$$|f(1) + g(0)| < ¼,$$

حال بنا بر نامساويِ مثلثی خواهيم داشت

$$\begin{aligned}|1 - f(1) - g(1)| &\geq 1 - |f(1) + g(1)| \\ &\geq 1 - |f(1) + g(0) - f(0) - g(0) + f(0) \\ &\qquad + g(1)| \\ &\geq 1 - |f(1) + g(0)| - |f(0) + g(0)| \\ &\qquad - |f(0) + g(1)| \\ &\geq 1 - ¼ - ¼ - ¼ = ¼.\end{aligned}$$

اما از فرضِ خلف داريم

$$|1 - f(1) - g(1)| < ¼,$$

و اين يک تناقض است. ■

مثالِ 2. همه‌يِ اعدادِ صحيح و مثبتِ a و b و c را بيابيد به طوري كه داشته باشيم

$$a + b + c + ab + ac + bc = abc.$$

حل.

با تقسيمِ طرفينِ معادله بر عددِ ناصفرِ abc داريم

$$1/a + 1/b + 1/c + 1/ab + 1/ac + 1/bc = 1.$$

حال فرض كنيم $a \leq b \leq c$؛ واضح است كه اين فرض از كليتِ مسأله نمی‌كاهد.

حال فرض كنيم $a \geq 4$. از خواصِ اوليه‌يِ نامساوی‌ها داريم

$$1/c \leq 1/b \leq 1/a \leq 1/4,$$

---

[1] equation
[2] equality
[3] inequality
[4] inequation

$$ab \le ac \le bc$$
$$\Rightarrow 1/bc \le 1/ac \le 1/ab \le 1/16.$$

پس خواهیم داشت

$$1/a + 1/b + 1/c + 1/ab + 1/ac + 1/bc \le 15/16 < 1$$

که تناقض است؛ پس حتمن $a < 4$. پس a متعلق است به مجموعه‌یِ $\{1,2,3\}$. به این ترتیب معادله‌یِ سیاله‌یِ ما از سه متغیره به دو متغیره تبدیل شد؛ و با اندکي بررسيِ نظریه‌ی‌مقدماتیِ‌اعدادانانه مشخص می‌شود که فرضِ $a = 1,3$ به تناقض می‌انجامد. پس داریم

$$\begin{aligned}
&2 + b + c + 2b + 2c + bc = 2bc\\
&\Rightarrow 2 + 3b + 3c = bc\\
&\Rightarrow b(c-3) = 2 + 3c\\
&\Rightarrow c - 3 \mid 3c + 2\\
&\Rightarrow c - 3 \mid -3c + 20\\
&\Rightarrow c - 3 \mid 22\\
&\Rightarrow c \in \{4, 14\}\\
&\Rightarrow (c, b) \in \{(4,14), (14,4)\}
\end{aligned}$$

از آن‌جایي که c بزرگ‌ترین عددِ بینِ این سه عدد فرض شده بود، تنها جوابِ مسأله چیزي نیست جز $(a,b,c) = (2,4,14)$. ■

نامساویِ اصلی. به ازایِ هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$x^2 \ge 0.$$

برهان.

این نامساوی به ظاهر آن‌قدر بدیهی است که شاید آوردنِ اثبات برای آن، برایِ خواننده عجیب به نظر آید. اما به عقیده‌یِ نگارنده «چیزِ بدیهی وجود ندارد»؛ و خواهیم دید که برقراریِ این نامساوی بر اساسِ (و *مرهونِ*) ویژه‌گی‌هایي است که $\mathbb{R}$ به عنوانِ یک میدانِ مرتب دارد:

فرض کنیم $x > 0$؛ در این صورت بنا بر تعریفِ مثبت بودن در اعدادِ حقیقی و بسته بودنِ مجوعه‌یِ اعداد مثبتِ ناصفر نسبت به ضرب $x^2 = x \times x > 0$.

فرض کنیم $x = 0$؛ خواهیم داشت $x^2 = x \times x = 0 \times x = 0$؛ که این از وجود ویژه‌گیِ توزیع‌پذیری — میدان بودنِ مجوعه‌یِ اعدادِ حقیقی، نتیجه می‌شود.

و نهایتن اگر $x < 0$، پس $(-x) > 0$، و مانندِ حالتِ اول خواهیم داشت $x^2 = (-x) \times (-x) > 0$. که این امر نیز از این حقیقتِ مبتنی بر ترتیبِ تعریف‌شده بر $\mathbb{R}$نتیجه می‌شود که $1 = (-1) \times (-1)$. ■

حالتِ دیگري وجود ندارد: *اصلِ تثلیث*، البته، این را تضمین می‌کند.

هدف از آوردنِ این اصطلاحن "پیچاندن"هایِ مطالب در این اثبات، دفاع از این عقیده‌یِ نگارنده بود که: چیزي را بدیهی می‌انگارید؟ دوباره به آن فکر کنید... به بدیهیَتِ قبل نخواهد بود.

مثالِ 3. ثابت کنید مجذورِ هر عدد به اضافه‌یِ یک، از دو برابرِ آن عدد *بزرگ‌ترمساوی* است (بزرگ‌تر است، یا مساوی با آن است).

حل.

باید نشان دهیم برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$x^2 + 1 \ge 2x.$$

داریم

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 \ge 2x &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0\\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

اما نامساویِ آخر — که با نامساویي که می‌خواستیم ثابت کنیم هم‌ارز است — از نامساویِ اصلی نتیجه می‌شود. ■

مثالِ 4. نشان دهید مجموعِ هر عددِ مثبت با معکوس‌ش از 2 کم‌تر نمی‌شود.

حل.

باید نشان دهیم برایِ هر $a > 0$ داریم

$$a + 1/a \ge 2$$

توجه می‌کنیم که

$$a + 1/a \ge 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \ge 2a$$

چیزي که درست در مثالِ قبل ثابت کردیم! ■

مثالِ 5 (نامساویِ میانگینِ حسابی-هندسی برایِ 2 عدد).

ثابت کنید میانگینِ حسابیِ هر دو عددِ مثبت، از میانگینِ هندسیِ آن‌ها بزرگ‌تر است.

حل.

هدف نشان دادنِ نامساویِ زیر است:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}.$$

باز هم از اثباتِ بازگشتی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} &\Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab\\
&\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

پس این نامساوی نیز، چیزي به جز هم‌آن حقیقتِ ظاهرن دست‌کاری‌شده‌یي که ذکرِ آن تحتِ عنوانِ نامساویِ اصلی آمد نیست. ■

مثالِ 6. درستیِ رابطه‌یِ زیبایِ زیر را برایِ هر سه عددِ حقیقیِ دل‌خواه تضمین کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc.$$

حل.

با ضربِ عددِ حقیقیِ 2 در طرفینِ نامساوی (که فقط کمي نبوغِ کلیشه‌یيِ ریاضی می‌خواهد) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + ac + 2bc\\
&\Leftrightarrow\\
&a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \ge 0\\
&\Leftrightarrow\\
&(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

و به این ترتیب چیزِ بیشتري براي تضمین کردن باقی نمی‌ماند. توجه کنید که استراتژیِ حلِ این نامساوی نیز عملن چیزي به جز اثباتِ بازگشتی نبود. ■

مثالِ 7. نشان دهید براي هر دو عددِ طبیعیِ m و n،

$$n!\,m! \le (n+m)!.$$

حل.

در نظریه‌یِ مقدماتیِ اعداد آموخته‌ایم (یا قرار است بیاموزیم) که

$$a \mid b \implies a \le b,$$

با فرضِ مثبت بودنِ a و b.

ترکیبِ n از m را به یاد آورید:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} := \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

حال تعدادِ انتخاب‌هایِ n شیء از $m+n$ شیء را در نظر بگیرید:

$$C(m+n,n) = \binom{m+n}{n} := \frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

از آنجایي که بحثِ *تعداد* است، و قبلن ثابت شده‌است که این تعداد برابر است با $C(n+m,n)$ لزومن باید داشته باشیم

$$n!\,m! \mid (n+m)!$$

در نتیجه $n!\,m! \le (n+m)!$. ■

چه‌گونه یک نامساوی را اثبات کنیم؟

در این شماره، به صورتِ ضمنی، سه پاسخ براي این سؤال آورده‌ایم:

1. با استفاده از اثباتِ بازگشتی: نامساوی را به هم‌ارز یا هم‌ارزهایي براي آن‌ها تبدیل کنید؛ این کار باعث می‌شود که شاید حقایقي را که در شکلِ اولیه‌یِ آنها نهفته‌است، ببینید.
2. با استفاده از نامساوی‌هایِ از-پیش-دانسته: *ارزشِ هر کس در دنیایِ نامساوی‌ها، به تعدادِ نامساوی‌هایي است که می‌شناسد*: نامساوی را به نامساوی‌هایي که می‌شناسید تبدیل کنید، یا به عبارتِ کلی‌تر، از نامساوی‌هایي که می‌دانید کمک بگیرید.
3. در موردِ اعدادِ طبیعی، با استفاده از لمِ نظریه‌اعدادیِ ذکرشده: نشان دهید طرفی، بر طرفِ دیگر بخش‌پذیر است.

در شماره‌یِ بعدی، ضمنِ معرفیِ کاملِ نامساویِ واسطه‌ها و آوردنِ برهان‌هایِ هندسی و جبری (و حتی کمی آنالیزی) براي آن، پاسخ‌هایِ دیگري نیز براي این سؤال می‌آوریم.

در نهایت، اشاره‌یِ کوتاهي می‌کنیم به یک قراردادِ نانوشته در دنیایِ نامساوی‌ها، و هم‌چنین یک اصطلاح در همین دنیا.

در خارج از این دنیا، وقتي می‌نویسیم:

$$|\sin x + \cos x| \le 2,$$

منظورمان، ریاضی‌وارانه، این است که اندازه‌یِ (= قدرِ مطلقِ) مجموعِ این دو نسبتِ مثلثاتی همیشه *یا* کوچک‌تر از 2 است، *یا* مساویِ 2؛ بی این که تصریح کنیم کدام؛ و مهم‌تر، بی این که حتا امکانِ وقوع هر کدام از دو حالت را تضمین کنیم. آن‌چه که مشخص می‌کنیم *صرفن* این است: *حداقل یکي از این دو حالت حتمن اتفاق می‌افتد.*

واقعیت این است که اندازه‌یِ مجموعِ این دو تابع هیچ وقت *مساوی با 2* نمی‌شود؛ این مجموع *همواره از نصفِ مجذورِ 2 کوچک‌تر است*؛ این را در شماره‌هایِ بعدی اثبات می‌کنیم.

اما، در عالمِ نامساوی‌ها، وقتي *نامساویِ نِسبیت* را می‌نویسیم:

$$a/(b+c) + b/(c+a) + c/(a+b) \ge 3/2$$

منظورمان مشخص این است که، عبارتِ سمتِ چپ به ازایِ a، b و cهایِ مختلف، نه تنها بزرگترمساویِ $3/2$ است، بل که خودِ مقدارِ $3/2$ را هم به خود می‌گیرد، و این، مقتدرَن، به این معنا است که: مینیممِ عبارتِ سمتِ چپ برابرِ با $3/2$ است.

(اثباتِ نامساویِ نِسبیت تا معرفیِ *نامساویِ کوشی-شوارتز* در شماره‌هایِ بعدی به تأخیر می‌افتد.)

و اما اصطلاح: می‌گویند "*نامساویِ شور*[5] را قوی‌تر می‌کنیم". منظورشان را با مثالِ زیر توضیح می‌دهیم:

مثالِ 8. ثابت کنید که حاصلِ‌جمعِ مجموعِ مجذوراتِ سه عدد و مجموعِ آن سه عدد (منفی یا مثبت) از -3 کمتر نمی‌شود:

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c > -3$$

حل.

معادلِ حکمِ مسأله، می‌نویسیم:

$$(a^2+a+1) + (b^2+b+1) + (c^2+c+1) > 0$$

کافی است نشان دهیم که براي هر عددِ حقیقیِ a، a^2+a+1 *همواره‌مثبت* است، تا مسأله حل شود:

دلتایِ این چند جمله‌یِ درجه‌یِ 2، برابر است با -3، و از ریاضیاتِ دبیرستان می‌دانیم که این به این معنا است که مقدارِ این چند جمله‌یی همواره بزرگتر از 0 است. ■

مثالِ 9 (مثالِ آخر). نامساویِ مثالِ قبل را قوی‌تر کنید.

می‌توانستیم در ادامه‌یِ حلِ مثالِ قبلی، چندجمله‌یی‌هایِ درجه‌یِ 2 را *مربعِ کامل* کنیم:

$$a^2 + a = (a + ½)^2 - ¼.$$

از نامساویِ اصلیِ این شماره می‌دانیم

[5] Schur Inequality

$$(a+½)^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow (a+½)^2 - ¼ \geq -¼,$$

پس

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c$$
$$= (a+½)^2 - ¼ + (b+½)^2$$
$$- ¼ + (c-½)^2 - ¼ \geq -¾,$$

نهایتن

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c \geq -¾.$$

ما نه تنها این نامساوی را *دقیق‌تر*، یا به اصطلاحِ این سرزمین *قوی‌تر* کردیم، بل که مینیممِ جمعِ مجموع و مجموعِ مجذورات هر سه عددِ دلخواه را نیز یافتیم.

دنیایِ نامساوی‌ها، زیبا، جذاب و هیجان‌انگیز است؛ و نه فقط مفید. مفید بودن را می‌شود با ایما و اشاره و استدلال و شاهدآوری اثبات کرد، اما *زیبایی* چیزي نیست که با این‌ها بتوان از آن دفاع کرد، تلاش‌هایي فراتر می‌طلبد انتقالِ *احساسات*. نگارنده امیدوار است که در موردِ دومی، در این شماره، موفق بوده باشد؛ دستِ کم می‌تواند این امیدواری را در شماره‌هایِ بعدی حفظ کند.

مسائلي مربوط، برایِ حل

1. نشان دهید:
$$a^4+2a^3b+2ab^3+b^4 \geq 6a^2b^2.$$
2. در مجموعه‌ی اعدادِ مثبت ثابت کنید:
$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc.$$
3. نامساویِ مهمِ زیر را ثابت کنید:
$$a^n + b^n \geq a^{n-1}b + ab^{n-1}.$$
4. نشان دهید که برایِ اعدادِ مثبت داریم:
$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$
5. [شاید اندکي دشوار] نامساویِ میانگینِ حسابی-هندسی را برایِ 3 متغیرِ مثبت ثابت کنید:
$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$
راهنمایی. یادي از *رابطه‌یِ اویلر* کنید.
6. [شاید اندکي دشوار] ثابت کنید بین تمامیِ مثلث‌هایِ دنیا با محیط‌هایِ برابر، مثلثِ متساوی‌الضلاع بیش‌ترین مساحت را دارد.
راهنمایی. به *رابطه‌یِ هرون* توجه کنید. شرطي برایِ تبدیل شدنِ نامساویِ واسطه‌ها به تساوی بیابید. (*حالاتِ تساوی در نامساوی‌ها* در شماره‌یِ بعدی به طورِ کامل بحث می‌شود.)
7. اگر $a^2+b^2+c^2=1$، بیش‌ترین و کم‌ترین مقدارِ عبارتِ $ab+bc+ab$ را بیابید.
8. کم‌ترین مقدارِ $\tan(x)+\cot(x)$ برایِ xهایِ مثبت چیست؟
9. نشان دهید که برایِ $a,b \in \mathbb{N}$، $a^b b! \leq (ab)!$.
10. همه‌یِ مقادیرِ حقیقیِ x را بیابید به طوري که همواره برایِ هر دو عددِ a و b داشته باشیم:
$$a^2+xab+b^2 > 0.$$
11. بیش‌ترین مقدارِ xy را بیابید، که $ax+by=c$.
12. ثابت کنید که در هر مثلثِ قائم‌الزاویه، حاصلِ ضربِ دو ضلعِ زاویه‌یِ قائمه هرگز از نصفِ مجذورِ وتر تجاوز نمی‌کند.
راهنمایی. قضیه‌یِ فیثاغورث!
13. [شاید اندکي دشوار] معادله‌یِ دو مجهولیِ زیر را در مجموعه‌یِ اعدادِ حقیقیِ مثبت حل کنید:
$$\frac{4x^2}{y}+\frac{9y}{x^2}=6.$$

منابع (به شیوه‌یِ نگارنده)

1. ذهن، درک، و تجربیاتِ نگارنده
2. جزوه‌هایِ المپیادِ دبیرستانیِ ریاضی، آموزش و پرورش
3. جبر در المپیادِ ریاضی – مهدی صفا – انتشاراتِ خوش‌خوان
4. نابرابری‌هایِ هندسی – مهدی صفا – انتشاراتِ خوش‌خوان
5. Cauchy's Master Class
6. Inequalities – George Polya
7. ترکیبیات – جلدِ اول – عباسِ ثروتی – انتشاراتِ خوش‌خوان
8. سوال‌هایِ مسابقاتِ مختلفِ ریاضی

* فربد فرازنده‌مهر
دانشجویِ سال چهارمِ کارشناسیِ ریاضیِ محضِ دانشگاهِ شهید بهشتی
farbod_mp2002@yahoo.com

آبي که به یک جوی نمی‌رود!
یادداشتي بر نمایشنامه‌یِ «افسانه‌یِ پادشاه و ریاضی‌دان»

پوریا طباطبایی*

پیش‌نویس. من در اندازه‌يي نیستم که اثرِ دو تن از بزرگان، یکي استادِ مسلّمِ ریاضیات و دیگری بزرگِ عرصه‌یِ تئاتر را، نقد به تعبیرِ حرفه‌یِ آن کنم. آن‌چه در ادامه می‌خوانید نظرِ شخصیِ کسی است که هم نوشتن و داستان را دوست دارد و هم ریاضی می‌خواند و به ویژه گراف و ریاضیاتِ گسسته را دوست دارد. نمایشنامه‌یِ «افسانه‌یِ پادشاه و ریاضی‌دان» را خواندم و این‌ها به نظرم رسید.

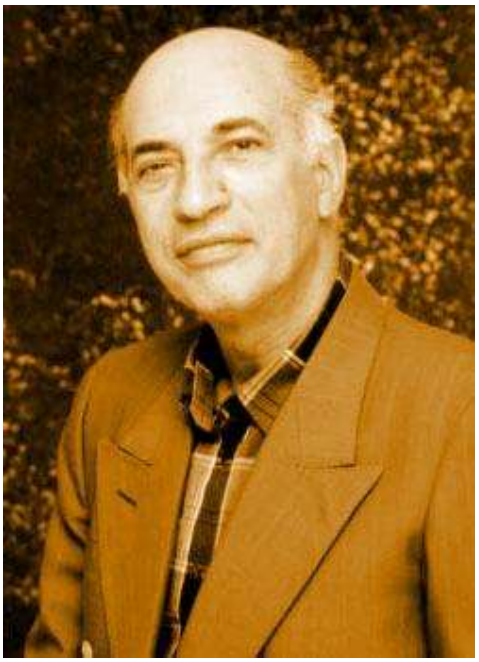
یک. ریاضیات با واسطه‌یِ کاري که از ذهن می‌کشد و به اصطلاحِ خودمانی سخت است، میانِ خیلی‌ها محبوب نیست و تلاشِ بسیاري بر این است تا آن را آن‌طور که می‌خواهند شیرین بیان کنند. اختلاطِ ریاضی و هنرِ نمایش به خودیِ خود پسندیده و ستودنی است و چاره‌يي براي شیرین و دلپذیر شدنِ ریاضیات. نمایشنامه در فضایي کاملن جداي از ریاضی و کاملن داستانی آغاز می‌شود و خواننده را بیش از پیش به خود جذب می‌کند و ترسِ رو به رو شدن با یک جزوه‌یِ ریاضی را از بین می‌برد.

دو. زبانِ روایت و طنزِ جاری در نمایشنامه دلچسب و خواندنی است امّا شتابي در گذرِ داستان احساس می‌شود. شخصیّت‌ها ساده و کلیشه‌يي هستند؛ یعنی چیزِ جدیدي خلق نشده. شخصیّت‌هایِ کهنه‌یِ همیشه‌گیِ داستان‌هایِ افسانه‌يي قدیمی؛ پادشاهِ بی‌فکر و خودکامه، صدراعظمِ فرومایه‌يي که چیزي از خود ندارد و «چاکر ام» «مخلص ام» را نثارِ پادشاه می‌کند و همسرِ پادشاه که خردمند و آگاه است، و البتّه باز هم آن‌قدر شتاب هست که مشخّص نمی‌شود با این فراست چرا همسرِ چنین شاهی است؟! ناگهان «بحرالعلوم» و پنج دانشجو هم واردِ قصّه می‌شوند و روندِ سریع قصّه هم به نحوي نیست که بازیگرِ احتمالیِ این نقش‌ها بتواند قالبِ خاصّي به نقش بدهند و این شتاب هم‌چنان ادامه دارد تا کلاس‌هایِ درس تشکیل می‌شوند.

سه. با مطرح شدنِ مسأله‌یِ موردِ نظرِ پادشاه برای انتقالِ حکومت به شهري دیگر و تشکیلِ کلاسِ درسِ بحرالعلوم انگار به آن‌جا که می‌خواستیم رسیدیم و بحثِ ریاضیات پیش آمده. منتظر بودم که بارها و بارها نمودِ مسأله‌یِ گراف در زنده‌گیِ روزمره را ببینم، امّا ناگهان فضایِ رسمیِ ریاضیات بر نمایشنامه حاکم شد. اگر از آن دسته‌يي باشید که هنگامِ کتاب‌خوانی تصویرسازی کنید و به ویژه از نمایشنامه انتظارِ تصویرگری داشته باشید، تا این‌جا می‌شد صحنه‌هایي پویا را تصوّر کرد، امّا به یک‌باره تنها تصویرِ موجود می‌شود کلاسِ درسي که در آن گراف درس می‌دهند! در جایي از ماجرا تنها عنصرِ ادبیات چند واژه از بحرالعلوم است که به نوبت از شاگردان‌ش می‌خواهد گزارشِ کار بدهند و آن‌ها در صحبتي مفصّل هر کدام نوعي گراف را معرّفی می‌کنند. و البته یک ارتباطِ عاطفيِ واضح و بدونِ پرورش هم میانِ دختران و پسرانِ قصّه پیاپی عنوان می‌شود تا شاید فضایِ ادبیِ کلاسِ درسِ گراف بیش‌تر شود. با عباراتي طنزآمیز، استفاده از حروفِ زبانِ انگلیسی در بررسیِ مسائل توجیه می‌شود و در ادامه باز هم با شوخی و خنده مسائلي چون «آسپرین» یا «ویتامین ث» بیان می‌شوند و کاملن از فضایِ کهنِ ماجرا دور می‌شویم و مشخّص نیست چرا در چنین شرایطي به جایِ گراف از عبارتِ نگار استفاده شده؟!

چهار. بعد از این که تمامِ آن‌چه از گراف مدِّ نظر بود درس داده شد، دوباره واردِ فضایِ قصّه می‌شویم و پایان‌بندیِ آن. دوباره تمامِ آن ریاضیات کنار می‌رود و داستان را پی می‌گیریم. بیش‌تر این‌ها که از جنسِ ایراد بر نمایشنامه نوشتم، نه این که مشکلِ نگارش و اشتباه در کارِ نوشتنِ نمایشنامه بوده باشد، که به نظرم مشکل ماهیتِ کار است. اگر هدف آموزشِ مفاهیمِ گراف تا این اندازه که در کتاب گفته شده باشد، به سختی می‌توان آن را به آرامی و لطافت با هنرِ نمایش ادغام کرد. نمایشِ خوب و تحسین‌شده تماشاگر را در بارِ معنا و مفهومِ خود غرق می‌کند و مفاهیمِ پیچیده‌یِ ریاضی هم ذهن را درگیر؛ حالا توقع بالایي است که یک نوشته در آنِ واحد از پسِ القایِ هر دو مفهوم برآید. اگر اصرار بر بیانِ این حجم از مطلبِ ریاضی باشد، نمایش فدا می‌شود و اگر ارزشِ نمایشی مهم باشد، مجبور خواهیم بود از بارِ ریاضی متن کم کنیم. اینکه حروفِ انگلیسیِ رایج در ریاضی واردِ قصّه می‌شوند مشکلِ نگارش نیست؛ مشکل این‌جا است که نمی‌توان تکنیک‌هایِ حلِ مسأله را آموزش داد بدونِ استفاده از حروف؛ بنابراین، یا باید به همین شکلِ دل‌ناچسب حروف را واردِ قصّه کنیم یا از بارِ تکنیکی ماجرا کم کنیم و به دادنِ یک دیدِ کلّی از فضایِ گرافیک بسنده کنیم. حتّا اگر قرار بر بیانِ همین حجم از مفاهیمِ ریاضی باشد، می‌توان تغییراتي در ساختارِ قصّه داد که چیزي مثلِ حروفِ انگلیسی تا این اندازه غریب به چشم نیایند؛ برایِ مثال چه نیازي است قصّه در فضایِ کهن و سنّتیِ ایرانی روایت شود؟ اگر ماجرا را به یک محیطِ امروزی بیاوریم، شاید پذیرفتنِ نظریه‌یِ گراف در بسترِ آن راحت‌تر باشد. برایِ شخصِ من به واسطه‌یِ نگارشِ دلپذیرِ بخشِ داستانی، خواندنِ کتاب لذّت‌بخش بود، امّا به همین دلایل که نوشتم بخش‌هایِ ریاضیاتی را مروری رد کردم تا به پایانِ قصّه برسم! به هر حال فکر می‌کنم اگر بنا بر ارزشِ نمایشی بود، یا باید از بارِ درسِ گراف کم می‌شد یا دستِ‌کم در فضایی امروزی‌تر مطرح می‌شد تا نمایش آسیب نبیند، و اگر هدف آموزشِ گراف بود باید از پر و بالِ داستانی کم می‌شد و ماجرا با کمي تکنیکِ آموزشِ مهیّج تحتِ عنوانِ «روش‌هایي برایِ آموزشِ دلچسبِ گراف» منتشر می‌شد!

* پوریا طباطبایی
دانشجویِ کارشناسیِ علومِ کامپیوترِ دانشگاهِ شهید بهشتی
poorya.tabatabaee@gmail.com



مهدی بهزاد
(زاده‌یِ 2 اردیبهشت 1315)

گزیده‌یِ کتاب‌شناسیِ مهدی بهزاد

نویسنده

Graphs & Digraphs. Mehdi Behzad, Gary Chartrand, and Linda Lesniak. Prindle, Weber & Schmidt: 1979.

Introduction to the theory of graphs. Mehdi Behzad and Gary Chartrand. Allyn and Bacon: 1972.

ریاضیاتِ گسسته، دوره‌یِ پیش‌دانشگاهی: رشته‌یِ علومِ ریاضی. مدرسه: 1385.

نمایشنامه‌یِ افسانه‌یِ پادشاه و ریاضی‌دان. مهدی بهزاد، نغمه ثمینی. دیباچه: 1390.

مترجم

حسابِ دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌یِ تحلیلی. جرج پرینتن توماس. ترجمه‌یِ علی کافی، سیامک کاظمی، مهدی بهزاد. مرکز نشر دانشگاهی: 1362.

کمک کنیم کودکان ریاضی یاد بگیرند. جرمی کیل پاتریک و جین سوافورد. ترجمه‌یِ زهرا گویا و مهدی بهزاد.

ویراستار

واژه‌نامه‌یِ ریاضی و آمار. گردآوریِ انجمنِ ریاضیِ ایران و مرکزِ آمارِ نشرِ دانشگاهی. ویرایشِ علی عمیدی، سیامک کاظمی، محمدهادی شفیعیها، مهدی بهزاد، علی‌اکبر جعفریان، منوچهر وصال، طاهر قاسمی. مرکزِ نشرِ دانشگاهی: 1370.

جدولِ الف0

محمدعلی اعرابی

	8	7	6	5	4	3	2	1
1							■	
2		■		■				
3					■		■	
4		■						■
5			■			■		
6	■							■
7					■		■	
8			■					

توضیح‌ها

در جدول دنباله‌ی متناهیِ پیوسته‌یِ حرف‌ها با طولِ بیش از یک را "کلمه" می‌دانیم، و برایِ هر کلمه معنا (یا معناها)یي آورده‌ایم و هر یک را با ردیفي جدا برنوشته‌ایم. هر گاه برایِ یک کلمه بیش از یک معنا آورده‌ایم، ایشان را با نقطه‌ویرگول جدا کرده‌ایم. برایِ بعضي از معناها منبعي آورده‌ایم که مثلن می‌گوید کلمه‌یي که می‌خواهیم به اصطلاحِ آن کتاب چه است یا مثلن در فلان کتاب چه‌گونه معنا شده‌است. گاهي در پایانِ معنایِ آورده نوشته ایم «[وارونه]» که یعني آن چه را یافته‌اید سروته در جدول بنویسید. در معناها برایِ آن که زبانِ یک واژه را مشخص کنیم، نامِ آن زبان را پیش از آن واژه — و بدونِ اداتِ اضافت — می‌نویسیم؛ مانندِ «لاتینی *vel*» که یعنی کلمه‌ی خواسته‌شده هم‌ارز است با واژه‌یِ *vel* در زبانِ لاتینی. پیروز باشید.

سطرها

1. مصدرِ «فَرهَنج-»؛ ادب آموختن، تربیت کردن (دهخدا).
2. 0.9144 متر.
3. کریستال.
4. مجموعه‌یِ A که $A \subseteq B$ است را گویند، هر گاه $\exists b \in B$ که $b \in A$.
5. (WWWF) (ویتگنشتاین 1388، گزاره‌یِ 5.101)؛ لاتینی *vel*؛ با فرضِ $\mathbb{B} = \{0,1\} \subseteq \mathbb{Z}$، تابعِ $\mathrm{v}(p,q) = \max\{p,q\}$ رویِ $\mathbb{B}$.
5. ریاضی‌دان و فیلسوفِ انگلیسی (1923—1834)؛ نامِ یک نمودار که در نظریه‌یِ مجموعه‌ها، احتمال، منطق، آمار، و علومِ کامپیوتر کاربرد دارد.
5. مهستان جایِ او است.
6. زادگاهِ ریاضی‌دان و ستاره‌شناسِ ایرانی (998—940) و نویسنده‌یِ «فیما یحتاج إلیه الصانع من الأعمال الهندسه» و «فیما یحتاج إلیه الکُتّاب و العُمّال من علم الحساب» که در اثرِ دوم برایِ بارِ نخست از عددهایِ منفی استفاده شده‌است.
7. عرض (ابوریحان بیرونی 1353) [وارونه].
8. آن که می‌بَرَد.
8. آن c که $\int_1^c dx/x = 1$؛ $\sum_{k=0}^{\infty}((2k+2)/(2k)!)$.

ستون‌ها

1. لاتینی -*semi*.
1. x در مکالمه‌یِ «"یک". "دو". "سه". "چهار". "x"!».
2. آن ریاضی که من می‌خوانم بی‌آلایش است، عمل او را نیالوده (کانت 1383، 1003)؛ بی‌غش، بی‌آمیزش (دهخدا).
3. حقوق‌دانِ فرانسوی (1665—1601) که بزرگ‌ترین ریاضی‌دانِ قرنِ هفدهم دانسته می‌شود.
3. بنِ مضارعِ «وشتن»؛ این فعل صورتِ پارسیِ میانه‌یِ فعلِ «گشتن» است، که مشتق‌هایش نزدِ واژه‌گزینانِ دانشِ ریاضی در برابرِ مشتق‌هایِ بنِ لاتینی -*var* در انگلیسی، بسیار به کار گرفته می‌شود.
4. نپذیرفتن؛ آوردنِ شاهدي برایِ نادرستيِ یک قضیه.
4. بنِ مضارعِ «توختن»؛ گزاردن و واپس دادنِ چیزي به صاحب اعم از آن که قرض و وام باشد یا امانت، پرداختن، ادا کردن؛ جمع کردن و اندوختن و حاصل کردن (دهخدا).
5. در نظریه‌یِ گروه‌ها، زیرگروهِ N از G را گویند هر گاه $\forall x \in G$ بداریم $x^{-1}Nx \subseteq N$ (فرهنگستانِ زبان و ادبِ فارسی)؛ در منطقِ گزاره‌ها، یک عبارت را گویند، هر گاه فقط اداتِ‌هایِ پیوندیِ «∨» و «∧» و «¬» را در بر داشته باشد، و افزون بر آن، در دامنه‌یِ پرانتزیِ «¬» هیچ یک از اداتِ‌هایِ «∨» و «∧» و «¬» واقع نشود، و در دامنه‌یِ پرانتزیِ «∨» («∧») اداتِ «∧» («∨») واقع نشود (هیلبرت و آکرمان 1380، 26).
6. تهی.
6. پیش‌وندِ نفی در پارسیِ میانه و پارسیِ باستان و اوستایی و سنسکریت و یونانی (حسن‌دوست 1383، 122)؛ پس‌وندِ جمع و قیدساز در پارسیِ نو (ادیب‌سلطانی 1378، 199).
7. از آن.
8. در منطق، مجموعه‌یي از عبارت‌ها را گویند هر گاه تحتِ استلزام بسته باشد، به بیانِ دیگر، برایِ هر عبارتِ σ در زبان‌مان بداریم $T \vDash \sigma \Leftrightarrow \sigma \in T$.
8. شانزدهمین حرفِ الفبایِ یونانی؛ $\sqrt[8]{9450 \times \zeta(8)}$.

مرجع‌ها

ابوریحان بیرونی، محمد بن احمد. *التفهیم لأوائل صناعه التنجیم*. تصحیحِ جلال‌الدین همایی. تهران: انجمن آثار ملی، 1353.

ادیب‌سلطانی، میر شمس‌الدین. *درآمدي بر چگونگیِ شیوه‌یِ خطِ فارسی*. سوم. تهران: مؤسسه‌یِ انتشاراتِ امیرکبیر، 1378.

انجمنِ ریاضیِ ایران. *واژه‌نامه‌یِ ریاضی و آمار*. تهران: مرکزِ نشرِ دانشگاهی، 1370.

حسن‌دوست، محمد. *فرهنگِ ریشه‌شناختیِ زبانِ فارسی*. تهران: فرهنگستانِ زبان و ادبِ فارسی، 1383.

دهخدا، علی‌اکبر. *لغت‌نامه*. تهران: دانشگاه تهران، 1377.

فرهنگستانِ زبان و ادبِ فارسی. *فرهنگستانِ زبان و ادبِ فارسی*. http://www.persianacademy.ir (دستیابی در 14 آوریل 2012).

کانت، ایمانوئل. *سنجشِ خردِ ناب*. ترجمه‌یِ میر شمس‌الدین ادیب‌سلطانی. تهران: مؤسسه‌یِ انتشاراتِ امیرکبیر، 1383.

هیلبرت، داوید، و ویلهلم آکرمان. *بنیادهایِ منطقِ نگریک*. ترجمه‌یِ میر شمس‌الدین ادیب‌سلطانی. تهران: مؤسسه‌یِ انتشاراتِ امیرکبیر، 1380.

ویتگنشتاین، لودویگ. *رساله‌یِ منطقی-فلسفی*. ترجمه‌یِ میر شمس‌الدین ادیب‌سلطانی. تهران: مؤسسه‌یِ انتشاراتِ امیرکبیر، 1388.

شیوه‌یِ خط

محمدعلی اعرابی

آن چه این‌جا می‌آید، همه تجویز است، تا کسي که می‌خواهد به این شیوه برود، درگیرِ علت‌ها و برهان‌ها نشود. ما برایِ پرسنده‌گان و پژوهنده‌گان، جداگانه دلیل و برهان خواهیم آورد.

قاعده‌هایِ کلی

0. اصلِ رعایتِ ویژه‌گی‌هایِ ساختاریِ خطِ کنونیِ پارسی.
1. اصلِ پای‌بندی به قاعده.
2. اصلِ رعایتِ حد و استقلالِ کلمات.
3. اصلِ برگزینشِ صورتِ آشنا.
4. اصلِ پرهیز از التباس و اشتباه.
5. اصلِ برگزینشِ درست‌ترین صورت از نظرِ ریشه‌شناسی.

ویژه‌گی‌هایِ زنجیری

1. حرف‌هایي که تنها هم‌خوان‌ها [= صامت‌ها] را می‌نمایند، تنها یک هم‌خوان را می‌نمایند:

	آغاز	میان	پایان	تنها	آوا
1	بـ	ـبـ	ـب	ب	[b]
2	پـ	ـپـ	ـپ	پ	[p]
3	تـ	ـتـ	ـت	ت	[t]
4	ثـ	ـثـ	ـث	ث	[s]
5	جـ	ـجـ	ـج	ج	[ʤ]
6	چـ	ـچـ	ـچ	چ	[ʧ]
7	حـ	ـحـ	ـح	ح	[h]
8	خـ	ـخـ	ـخ	خ	[x]
9			ـد	د	[d]
10			ـذ	ذ	[z]
11			ـر	ر	[r]
12			ـز	ز	[z]
13			ـژ	ژ	[ʒ]
14	سـ	ـسـ	ـس	س	[s]
15	شـ	ـشـ	ـش	ش	[ʃ]
16	صـ	ـصـ	ـص	ص	[s]
17	ضـ	ـضـ	ـض	ض	[z]
18	طـ	ـطـ	ـط	ط	[t]
19	ظـ	ـظـ	ـظ	ظ	[z]
20	عـ	ـعـ	ـع	ع	[ʔ]
21	غـ	ـغـ	ـغ	غ	[ɣ]
22	فـ	ـفـ	ـف	ف	[f]
23	قـ	ـقـ	ـق	ق	[ɣ]
24	کـ	ـکـ	ـک	ک	[k]
25	گـ	ـگـ	ـگ	گ	[g]
26	لـ	ـلـ	ـل	ل	[l]
27	مـ	ـمـ	ـم	م	[m]
28	نـ	ـنـ	ـن	ن	[n]
29	هـ	ـهـ	ـه	ه	[h]

جدولِ 1. هم‌خوان‌نماها

2. چند حرف جز هم‌خوان‌ها را نیز می‌نمایند:

	آغاز	میان	پایان	تنها	نام
1			اٱ	ا	همزه‌یِ وصل
2			ا	ا	الفِ نرم
3			آ	آ	الف با مد
4			أ	أ	همزه رویِ الف
5			ؤ	ؤ	همزه رویِ واو
6	ئـ	ـئـ	ـئ	ئ	همزه رویِ یاء
7				ء	همزه رویِ سطر
8			ـه	ه	هایِ نرم
9			ـو	و	واو
10	ـیـ	ـیـ	ـی	ی	یاء
11			ـي	ي	یاءِ وحدت

جدولِ 2. همزه‌ها و واکه‌نماها

3. [ɒ] همواره با الفِ نرم نموده می‌شود.
4. همزه‌یِ وصل برایِ نمودنِ واکه در آغازِ واژه یا پس‌وند است.
5. هنگامي که الفِ نرم پس از همزه‌یِ وصل آید، هر دو را حذف می‌کنیم، و به جایِ آن‌ها الف با مد می‌نگاریم.
6. هایِ نرم [e] را می‌نماید، و تنها در پایانِ واژه‌ها می‌آید.
7. همزه رویِ الف، همزه رویِ واو، همزه رویِ یاء، و همزه رویِ سطر، که همه‌گی را همزه‌یِ سخت می‌خوانیم، برایِ نمودنِ توالیِ واکه‌ها یا برایِ نمودنِ [ʔ] در عربی است. برایِ نمودنِ توالیِ واکه‌ها، گاهي از یاء سود می‌جوییم.
8. واو نماینده‌یِ [v] و [u] است. و نیز گاهي در پایانِ واژه نماینده‌یِ [o]. واو گاهي نماینده‌یِ هیچ آوایي نیست. واوِ نماینده‌یِ [u] یا [o] را واوِ نرم می‌خوانیم.
9. یاء نماینده‌یِ [i] و [j] است، و نماینده‌یِ نیز توالیِ واکه‌ها.

ویژه‌گی‌هایِ زبرزنجیری

0. همواره باید طوري فاصله گذارد، که هر هجایِ پیش از فاصله، هجایي باشد که تکیه‌یِ کلام رویِ آن است؛ مگر شاید در موردهایي که در هم این بخش برشمرده‌ایم.
1. فعل‌ها. همواره گروهِ فعلی با فاصله‌یِ کامل از دیگر واژه‌ها جدا می‌شود، حتا صورت‌هایِ فعلِ «*ایدن»:

ام، ای، اه، ایم، اید، اند.

اجزایِ درونِ گروهِ فعلی همواره با نیم‌فاصله جدا می‌شوند، مگر هنگامي که گروه چند

ستاکِ فعلی دارد، که هر یک چونان یک فعلِ مستقل نوشته خواهند شد. نمونه:

نوشته خواهند شد.

توجه کنید که «است» گاهي فعل است و گاهي شناسه:

هوا سرد است؛ هوا سرد شده‌است.

نیز توجه کنید که در گروه‌هایِ فعلی، شناسه‌ها، نونِ نفی، نون و میمِ نهی، میِ استمرار، بایِ تأکید، و دیگر وندها، همه چون واژه‌هایِ مستقل تلفظ می‌شوند. پس در

او من را آلوده؛

تکیه‌یِ «آلوده» رویِ دومین هجا است، ولی در

او من را آلوده کرد؛

تکیه‌یِ «آلوده» رویِ هجایِ پایانی است، چون «آلوده» در این‌جا یک واژه‌یِ مستقل است، و نه یک گروهِ فعلی. هنگامي که در خواندن چنین دشواريي توانستنی باشد، رویِ واکه‌یِ هجایِ تکیه‌دار، یا اگر نگاشته نمی‌شد، رویِ هم‌خوانِ پیشین‌ش، الفِ کوچک می‌نگاریم:

او من را آلوٰده.

در گفتار، تفاوتِ ماضیِ ساده و ماضیِ نقلی، تنها در تکیه‌یِ هجایی است. به این نکته نیز نیک توجه می‌کنیم:

اومدٰم درِ خونه‌تون.

2. اضافه. کسره‌یِ اضافه همه جا نوشته می‌شود. اگر واژه‌یِ پیش‌ش به واکه‌يي نرم (الفِ نرم، هایِ نرم، واوِ نرم) پایان پذیرفته باشد، پیش از کسره‌یِ اضافه یاءِ میانجی می‌آید:

ویلایِ من، خانه‌یِ تو، رادیویِ من، زنده‌گیِ تو.

3. یایِ نکره و وحدت. این دو جزءِ دستوری را همواره با نمادِ یاءِ وحدت (جدولِ 2، شم 11) می‌نماییم، و با نیم‌فاصله از واژه‌یِ پیش از خود جدا می‌کنیم. اگر واژه‌یِ پیش از یاءِ وحدت به واکه‌يي نرم پایان پذیرفته باشد، پیش از یاءِ وحدت یاءِ میانجی می‌آوریم:

ویلایي، خانه‌يي، رادیویي، زنده‌گيي.

4. ضمیرهایِ مفعولی. این ضمیرها، «ام، ات، اش، مان، تان، شان»، همه جا با فاصله‌یِ کامل نوشته می‌شوند:

می‌گویم ات.

این کار، به ویژه در جداشناختِ ضمیرِ مفعولی از شناسه‌یِ فعل سودمند است:

دید ام [= او من را دید].

5. ضمیرهایِ ملکی. این ضمیرها، «م، ت، ش، مان، تان، شان»، همه جا با نیم‌فاصله از حرفِ پیش از خود جدا می‌شوند، مگر از یاءِ میانجی.

6. واژه‌هایِ مؤکدِ جمله. آن‌ها را گاه ایتالیک می‌نویسیم.

همزه

1. همزه‌یِ وصل. فعلي که به همزه‌یِ وصل آغاز شده باشد، اگر نونِ نفی، نون و میمِ نهی، یا بایِ تأکید بپذیرد، همزه‌اش می‌افتد، و یاءِ میانجی جایش را می‌گیرد؛ مگر واکه‌یِ آغازینِ فعل [i] باشد:

بیفتد، میندیش، نینداخت، بأیست.

2. همزه‌یِ وامواژه‌هایِ عربی: همزه‌یِ مکسورِ پس از الف. اگر همزه‌یِ آن‌ها اصلی باشد، به صورتِ همزه رویِ یاء، و اگر همزه‌شان اصلی نباشد، یعنی بدل از یاء یا واو یا بدل از مدِ زاید باشد، آن را با یاء می‌نویسیم:

سائل، مسائل؛ مایل، شمایل، زاید، دلایل، رسایل.

3. همزه‌یِ آغازِ وامواژه‌هایِ عربی. همزه‌یِ آغازِ واژه را، چه در عربی همزه‌یِ وصل باشد و چه همزه‌یِ قطع، با همزه‌یِ وصل می‌نویسیم.

4. همزه‌یِ میانِ وامواژه‌هایِ عربی: همزه‌یِ ساکن. این همزه را به صورتِ حرکتِ پیش از خود می‌نویسیم. پس از ضمه، بسته به تلفظش، به صورتِ واو یا همزه رویِ واو می‌نویسیم:

موجر، موذی، شوم؛ مؤمن، رؤیت، لؤلؤ.

پس از فتحه، به صورتِ الف یا همزه رویِ الف می‌نویسیم:

تاریخ، ماتم، فال؛ رأس، دأب، تفأل.

پس از کسره، به صورتِ یاء یا همزه رویِ یاء می‌نویسیم:

ایذا، استیجار، استیذان؛ ذئب، بئر، ظئر.

5. همزه‌یِ میانِ وامواژه‌هایِ عربی: همزه‌یِ متحرک. این همزه را به صورتِ حرکتِ خودش می‌نویسیم، مگر در حالت‌هايي که در بخش‌هایِ 2 یا 6 یا 7 یا 8 شمرده‌ایم:

رؤوس، رؤوف، مسؤول؛

توأم، متأسف، متأثر؛

ائمه، رئیس، مرئی.

6. همزه‌یِ میانِ وامواژه‌هایِ عربی: همزه‌یِ میانِ الفِ نرم و تاءِ زاید. این همزه را با آن که مفتوح است، به صورتِ همزه رویِ یاء می‌نویسیم:

قرائت، دنائت، اسائت.

7. همزه‌یِ میانِ وامواژه‌هایِ عربی: همزه‌یِ مفتوح پس از کسره. این همزه، با آن که مفتوح است، بسته به تلفظ، به صورتِ یاء یا همزه رویِ یاء نوشته می‌شود:

تعبیه، تجزیه، تهنیت، ریاست، ریا، ریه؛

تبرئه، تخطئه، سیئه، ذئاب، فئه.

8. همزه‌یِ میانِ وامواژه‌هایِ عربی: همزه‌یِ مفتوح پس از ضمه. این همزه، با آن که مفتوح است، به صورتِ همزه رویِ واو نوشته می‌شود:

رؤسا، سؤال، مؤثر، مؤلف، مؤانست.

9. همزه‌یِ پایانِ واموازه‌هایِ عربی. این همزه را نمی‌نویسیم؛ مگر شاید در واژه‌هایي که همزه پس از حرفِ ساکن است، یا هنگامي که ننوشتن‌ش سببِ اشتباه می‌شود:

انقضا، بنا، انبیا؛ شیءگرایی، یاءِ وحدت.

10. همزه‌یِ واموازه‌هایِ عبری: همزه‌یِ مکسورِ پس از الف. این همزه را با همزه رویِ یاء می‌نویسیم:

جبرائیل، میکائیل.

11. همزه‌یِ واموازه‌ها و نام‌هایِ باختری: در این واژه‌ها، توالیِ واکه‌ها را با همزه رویِ یاء می‌نویسیم:

تئاتر، سوئد، سئول.

واموازه‌هایِ عربی

1. تاءِ مربوطه (ة). این جزء را همیشه با تاءِ می‌نویسیم:

جهت، رحمت، صلات، مشکات، زکات.

2. الفِ مقصوره. این جزء را همیشه با الفِ نرم می‌نویسیم؛ مگر در «الله» و «اله»:

حیات، حتا، عیسا، مرتضا، مصطفا، اسماعیل، اعلاحضرت.

3. تنوین. تنوینِ منصوبِ قیدساز را با نون می‌نویسیم:

واقعن، کاملن، جزئن، گاهن.

دیگر تنوین‌ها را نمی‌نویسیم:

سلام علیکم، مضاف‌علیه.

نام‌هایِ بیگانه

1. نام‌هایِ بیگانه‌یِ یونانی. برایِ نوشتنِ این نام‌ها 3 شیوه رایج است، که به ترتیبِ رجحان‌مان می‌نویسیم:
   A. نوشتنِ همه با تلفظِ اصلیِ یونانی؛ مثلن: پلاتون و آریستوتلیس (به جایِ افلاطون و ارسطو).
   B. نوشتنِ همه با تلفظِ عربی؛ مثلن: افلاطون و ابیقور (به جایِ افلاطون و اپیکور).
   C. نوشتنِ نام‌هایِ معروف با تلفظِ عربی، و باقیِ آن‌ها با تلفظِ یونانی؛ مثلن: سقراط و آلکیبیادس.
2. در دیگر زبان‌ها، همواره برایِ نوشتنِ نام‌هایِ بیگانه، تلفظِ نام در زبانِ اصلی را برمی‌نویسیم:

داوید هیلبرت (و نه دیوید یا داوود)؛

گئورگ کانتور (و نه جورج یا ژرژ)؛

اشتیلتیش (و نه استیلتیس یا استیلتجس)؛

3. هرگز در میانِ نامِ بیگانه، که در زبانِ مبدأ واژه‌یي جامد است، فاصله یا نیم‌فاصله جایز نیست، هر چند واژه بلند شود:

اشتیلتیس (و نه اشتلیت‌یس).

کتاب‌نامه

ادیب‌سلطانی، میر شمس‌الدین. *درآمدی بر چگونگیِ شیوه‌یِ خطِ فارسی*. تهران: مؤسسه‌یِ انتشاراتِ امیرکبیر، 1354.

—. *راهنمایِ آماده ساختنِ کتاب*. سوم. تهران: شرکتِ انتشاراتِ علمی و فرهنگی، 1381.

آشوری، داریوش. *بازاندیشیِ زبانِ فارسی*. دوم. تهران: نشرِ مرکز، 1375.

بهمنیار، احمد. *املایِ فارسی*. در *لغت‌نامه*، اثرِ علی‌اکبر دهخدا، جلدِ مقدمه، 148-177. تهران: دانشگاه تهران، موسسه انتشارات و چاپ، روزنه، 1325.

فرهنگستانِ زبان و ادبِ فارسی. *دستورِ خطِ فارسی*. تهران: فرهنگستانِ زبان و ادبِ فارسی (نشرِ آثار)، 1381.

مرکزِ نشرِ دانشگاهی. *شیوه‌نامه*. تهران: مرکزِ نشرِ دانشگاهی، 1372.

دربارهِ‌ي چندي از نکته‌هايِ شيوهِ‌ي خط

محمدعلی اعرابی

در اين‌جا چندي از نکته‌هايي را که در بخشِ پيشين تجويز کرديم، خواهيم شکافت.

اصل‌هايِ راهنمايِ درست‌نويسی (آنان که برشمرده‌ايم)

0. *اصلِ رعايتِ ويژه‌گی‌هايي ساختاريِ خطِ کنونيِ پارسی.* اين اصلي است که همواره در همه‌يِ شيوه‌نامه‌ها و آيين‌نامه‌ها پيش از هر اصلِ ديگر نقش‌آفرين بوده‌است. ما اصولن قواعدي براي *خطِ کنونيِ فارسی* وضع می‌کنيم تا ديگران بهتر بخوانند اش، و اگر نه، به کلی خودمان را از چنگِ دبيره‌يِ عربی رها می‌کرديم. اين نکته‌يي است که معمولن کسي به آن توجه نمی‌کند، ولی دستورِ خطِ فرهنگستان خوب به آن توجه کرده، و آن را با عنوانِ «حفظِ چهره‌يِ خطِ فارسی» چونان ارزنده‌ترين اصل برشمرده (فرهنگستان 1381، 9).
1. *اصلِ پای‌بندی به قاعده.* در دستورِ خطِ فرهنگستان با عنوانِ «فراگير بودنِ قاعده» آمده‌است (فرهنگستان 1381، 10)، با اين تفاوت که ما با ديدي عميق‌تر به آن عمل می‌کنيم. شايد نخستين کسي که به اين اصل نيک توجه کرد، مرحوم بهمنيار بود. (نک «هاءِ ناملفوظ و گافِ ميانجی»)
2. *اصلِ رعايتِ حد و استقلالِ کلمات.* اين اصل در دستورِ خطِ فرهنگستان با عنوانِ «فاصله‌گذاری و مرزبنديِ کلمات براي حفظِ استقلالِ کلمه و درست‌خوانی» کم‌اولويت‌ترين است (فرهنگستان 1381، 10). ولی با اين همه، اين اصل به نگرِ ما بسيار باارزش است، چه فاصله‌گذاريِ واژه‌ها در زبانِ پارسی همزمان به شيوه‌يِ گفتار و معنا مرتبط است.
برهان. با برشمردنِ ضميرهايِ ملکی و ضميرهايِ مفعولی و ياي نکره و نقش‌نماي اضافه به عنوانِ واژه‌هايِ مستقل، در پارسيِ ما، تکيه‌يِ کلام در هر واژه رويِ هجايِ پاياني آن است، مگر در واژه‌ها هنگامي که تأکيدِ جمله رويِ آن است و در فعل‌ها (Mace 2003). اين ويژه‌گيِ زبان و نقشِ اساسی‌ش در فهمِ گفتار، سبب می‌شود ما بکوشيم اين ويژه‌گيِ معروف به زبرزنجيری را در زبان‌نگار بگنجانيم.
3. *اصلِ برگزينشِ صورتِ آشنا.* همآن «اصلِ اختيارِ اشهر». يعنی بهتر آن است که از ميانِ چند صورتِ ممکنِ واژه، آن را برگزينيم که نزدِ اهلِ زبان از ديگران آشناتر است.
4. *اصلِ پرهيز از اشتباه و التباس.* يعنی به گونه‌يي بنويسيم که واژه‌هايِ متفاوت داراي صورتي يکسان نباشند. هر چند از اين اصل بسيار در تاريخِ دستورِ خطِ پارسی سوءاستفاده شده‌است، هدفِ ما از آوردنِ آن نه تأييدِ کارِ پيشينيان است.
5. *اصلِ برگزينشِ درست‌ترين صورت از نظرِ ريشه‌شناسی.* همآن «اصلِ رعايتِ اصل». يعنی آن که بکوشيم طوري بنويسيم که اجزايِ واژه‌ها در کلِ آن مشخص باشند.

اصل‌هايِ راهنمايِ درست‌نويسی (آنان که برنشمرده‌ايم)

6. *اصلِ همخوانیِ نوشتار و گفتار.* در دستورِ خطِ فرهنگستان «اصلِ تطابقِ مکتوب و ملفوظ» (فرهنگستان 1381، 9)، در کنارِ «اصلِ رعايتِ موازينِ کليِ خطِ کنونيِ پارسی»، نه تنها ناشدنی است، که برشمردن‌ش چه بسا مضحک است. شايد بهتر بود مانندِ شادروان دکتر سليمِ نيساری تنها می‌نوشتند «اصلِ توجيهِ صوتيِ املا» (نيساری 1374). ما نيز آن اندازه دستگاهِ نوشتاريِ کنونی را دور از گفتار يافتيم که اين اصل را در شيوه‌يِ خطِ خود نياورديم.
7. *اصلِ تابعيتِ وامواژه‌ها.* همرای با دستورِ خطِ فرهنگستان «حفظِ استقلالِ خط» (فرهنگستان 1381، 9). با توضيحاتي که به طورِ مفصل دربارهِ‌يِ شيوه‌يِ نوشتنِ نام‌ها و واژه‌هايِ بيگانه آورده‌ايم، برشمرشِ اين اصل را لازم ندانستيم.

هاءِ ناملفوظ و گافِ ميانجی

در برخورد با مصوت‌هايِ آخرِ واژه‌هايِ پارسی در خط، همواره هاءِ نرم (که آن را هاءِ بيانِ حرکت و هاءِ ناملفوظ نيز می‌خوانند) از ديگر حرف‌هايِ بيانِ حرکت در خط جدا نگريسته شده‌است. چنان که مثلن در افزودنِ ياءِ نکره به پايانِ واژه‌هايي که به الف يا واو پايان پذيرفته‌اند، ياءِ ديگري به عنوانِ ميانجی آورده می‌شود: «آشنايي، راديويي». ولی در واژه‌هايي که به هاءِ نرم پايان پذيرفته‌اند، در دستورهايِ خط، تجويز کرده‌اند که بايد به عنوانِ ميانجی الف آورده شود. همچنين است در آوردنِ الف-نونِ جمع يا ياءِ نسبت که در باقيِ جاها ياء آورده می‌شود و در اين‌جا گاف، و اين‌جا می‌گويند که هاء به گاف بدل شده‌است، که اين نادرست است. آوردنِ گاف هر چند ريشه‌يِ تاريخی دارد، ولی هاءِ نرم که مصوت را می‌نمايد به چيزي بدل نشده‌است. نک (بهمنيار 1325).

اضافت

گفتیم نقش‌نمایِ اضافه واژه‌یي مستقل است و چونان واژه‌یي مستقل تلفظ می‌شود. گذشته از این‌ها، ننوشتنِ این جزءِ ضروریِ خط، گرفتاری‌هایِ بسیاري در خواندن ایجاد می‌کند. تا چندي پیش ننوشتنِ این جزء در نوشته‌هایِ چاپی، به علتِ دشواری در حروف‌چینی پذیرفتنی بود. ولی اکنون که حروف-چینی با رایانه انجام می‌شود، ننوشتنِ این جزء منطقی نیست. نک (نیچه 1352).

یاءِ نکره و وحدت

گفتیم این یاء واژه‌یي مستقل است و چونان واژه‌یي مستقل تلفظ می‌شود، به خلافِ یاءِ نسبت و دیگر گونه‌هایِ یاء (که در ترکیب با واژه‌ها خواص آن‌ها را دیگرگون می‌کنند). نکته‌یي بس باارزش‌تر آن است که این دیگرگونی در تلفظ، در گفتار براي جداشناختِ معنا استفاده می‌شود، و جدا نکردنِ این دو گونه‌یِ یاء، سببِ گرفتاری در خواندن می‌شود. نخست بار داریوشِ آشوری به این نکته‌یِ ژرف توجه کرد (آشوری 1375). هر چند او در بیانِ تفاوتِ تلفظِ این دو گونه اندکي خطا رفت، این توجهِ او و راهي که براي گشایش‌ش پیش نهید، به حقیقت ناب‌ترین و ضروری‌ترین اصلاحي بود که خطِ کنونی نیاز داشت. به پیش‌نهادِ آشوری، یايِ نکره و وحدت را با نمادِ «-ي» بنویسیم، یعنی با دو نقطه زیرِ آن، براي جداشناختِ این دو گونه از دیگر گونه‌ها. نکته‌یي که به زیباییِ این پیش‌نهاد می‌افزاید، این است که هرگز پس از یايِ نکره و وحدت نقش‌نمایِ اضافه نمی‌آید، پس هیچ گاه آن دو نقطه با کسره‌یِ اضافه متلاقی نمی‌شود. این ویژه‌گی، هم به زیباییِ ظاهریِ پیش‌نهاد می‌افزاید، و هم راحتیِ تجهیزِ فونت‌هایِ کنونیِ پارسی به این نماد را سبب می‌شود.

کتاب‌نامه

Mace, John. *Persian Grammar: for Reference and Revision.* London: RoutledgeCurzon, 2003.

ادیب‌سلطانی، میر شمس‌الدین. *درآمدي بر چگونگیِ شیوه‌یِ خطِ فارسی.* تهران: مؤسسه‌یِ انتشاراتِ امیرکبیر، 1354.

آشوری، داریوش. *بازاندیشیِ زبانِ فارسی.* دوم. تهران: نشرِ مرکز، 1375.

بهمنیار، احمد. *املایِ فارسی.* در مقدمه‌یِ *لغت نامه*، اثرِ علی‌اکبر دهخدا، 148-177. تهران: دانشگاه تهران، موسسه انتشارات و چاپ، روزنه، 1325.

فرهنگستانِ زبان و ادبِ فارسی. *دستورِ خطِ فارسی.* تهران: فرهنگستانِ زبان و ادبِ فارسی (نشرِ آثار)، 1381.

مرکزِ نشرِ دانشگاهی. *شیوه‌نامه.* تهران: مرکزِ نشرِ دانشگاهی، 1372.

نیچه، فریدریش. *چنین گفت زرتشت.* با ترجمه داریوش آشوری. تهران: مؤسسه‌یِ انتشاراتِ آگاه، 1352.

نیساری، سلیم. *دستورِ خطِ فارسی.* تهران: وزارتِ فرهنگ و ارشادِ اسلامی، سازمانِ چاپ و انتشارات، 1374.

فعل‌نامه‌یِ $\mathfrak{Z}_0$

سردبیر

در زبانِ پارسیِ گفتار، چون غالبن هر فعل را انساني انجام می‌دهد، چندان به لازم یا متعدی بودنِ فعل‌ها توجه نمی‌شود، چون معمولن این بی‌توجهی مشکلي نمی‌آفریند. در زبانِ علمِ ریاضی اما، چون اشیاء و مفاهیم هم گویی جان دارند و کار انجام می‌دهند، این بی‌توجهی مشکل‌زا ست. مهم‌ترین انگیزه‌یِ تنظیمِ این فعل‌نامه شاید همین بوده‌است.

1. **آموختن، آموز-**؛ لازم
to learn
مصدرِ مضارع: آموزش
آموزنده: learner
دانش‌آموز (مصدرِ فاعلیِ بریده): student

2. **آموزاندن، آموزان-**؛ متعدی
to teach
مصدرِ مضارع: آموزانش
آموزانشِ ریاضی: math teaching

3. **افزودن، افزا-**؛ لازم
to increase
مصدرِ مضارع: افزایش
افزاینده: increasing

4. **پنداشتن، پندار-**؛ لازم
to suppose
مصدرِ مضارع: پندارش

5. **خوابیدن، خواب-**؛ لازم
to lay
مصدرِ مضارع: خوابش
به معنایِ واقع بودن، مثلن واقع بودنِ یک عدد بر نقطه‌یي از خطِ حقیقی، یا واقع بودنِ یک نقطه بر دایره
در آلمانی: liegen

6. **دانستن، دان-**؛ لازم
to know
مصدرِ مضارع: دانش

7. **کاستن، کاه-**؛ لازم
to decrease
مصدرِ مضارع: کاهش
کاهنده: decreasing

8. **گنجیدن، گنج-**؛ لازم
to be contained
مصدرِ مضارع: گنجش
به معنایِ مشمول بودن، مثلن مشمول بودنِ مجموعه‌یي در مجوعه‌یِ دیگر
در ریاضی: $\subseteq$

9. **گنجاندن، گنجان-**؛ متعدی
to contain
مصدرِ مضارع: گنجانش
به معنایِ شامل بودن، مثلن شامل بودنِ مجموعه‌یي از مجوعه‌یِ دیگر
در ریاضی: $\supseteq$

10. **نگاشتن، نگار-**؛ لازم
to map; to draw
مصدرِ مضارع: نگارش
نگاشت: mapping

11. **نمودن، نما-**؛ متعدی
to show, to represent
مصدرِ مضارع: نمایش

12. **نوشتن، نویس-**؛ متعدی
to write
مصدرِ مضارع: نویسش
نویسنده: writer

$\beth_0$ English-German-Persian Lexicon

Farnaz Irani and Muhammad Ali A'rabi

1. **algebraic**
   algebraischen
   جبری
2. **algebraically closed**
   بسته‌یِ جبری
3. **analytic**
   تحلیلی
4. ***Bair* category**
   رسته‌یِ *بئر*
5. **border**
   Grenze
   مرز
6. **cardinal**
   Kardinal
   کاردینال
7. **cardinal number**
   Kardinalzahl
   کاردینالیته، عددِ کاردینال
8. **cell decomposition theorem**
   قضیه‌یِ تجزیه‌یِ حجره‌یی
9. **co-dense**
   هم‌چگال
10. **collection**
    گردآیه
11. **compact**
    فشرده
12. **constructible set**
    مجموعه‌یِ ساخت‌پذیر
13. **continuum**
    Continuum
    پیوستار
14. **countable**
    zählbar
    شمارا، شمارش‌پذیر
15. **dense**
    چگال
16. **determinate**
    bestimmt
    معین
17. **E-module**
    مدول-E
18. **endless**
    unendlich
    بی‌پایان
19. ***Hausdorff* dimension**
    بعدِ *هاسدورف*
20. ***Hausdorff* s-measure**
    اندازه‌یِ *هاسدورف*-s
21. **irreducible**
    irreduktibel
    نافروکاستنی، تحویل‌ناپذیر
22. ***Lebesgue* measurable**
    اندازه‌پذیرِ *لبِگ*
23. **linear independence**
    linear unabhängiger
    مستقلِ خطی
24. **map**
    نگاشت
25. **o-minimal**
    ت-کمین
26. **ordered field**
    میدانِ مرتب
27. **orthogonal**
    متعامد
28. **perfect**
    تام
29. **projection**
    تصویر (تصویرسازی)
30. **proper**
    سره، محض
31. **real closed**
    بسته‌یِ-حقیقی
32. **$\mathbb{R}$-linear function**
    تابعِ $\mathbb{R}$-خطی
33. **semialgebraic**
    نیمه‌جبری
34. **set**
    Menge
    مجموعه
35. **set theory**
    Mengenlehre
    نظریه‌یِ مجموعه‌ها، نگره‌یِ مجموعه‌ها
36. **totality**
    Inbegriff
    کوده
37. **transcendence**
    Transzendenz
    ترافرازش، تَعال
38. **transcendence base**
    Transzendenz Basis
    پایه‌یِ ترافرازش، پایه‌یِ تعال
39. **transcendental**
    transcendente
    ترافرازنده، متعالی
40. **transfinite**
    transfiniten
    ترامتناهی
41. **uncountable**
    unzählbar
    ناشمارا، شمارش‌ناپذیر
42. **well-defined**
    wohldefinierte
    خوش‌تعریف

فرمِ نظرسنجی و همکاری

برایِ پیش‌نهادِ همکاری نیاز است بخشِ نظرسنجی را هم پر کنید.

مشخصاتِ آکادمیک

1. رده‌یِ علمی:
   - ○ دانشجویِ کارشناسی
   - ○ دانشجویِ کارشناسیِ ارشد
   - ○ دانشجویِ دکتری
   - ○ استادیار
   - ○ دانشیار
   - ○ استاد
2. گروهِ آموزشی:
   - ○ ریاضی
   - ○ علومِ کامپیوتر
   - ○ آمار
   - ○ فیزیک
   - ○ شیمی
   - ○ دیگر

سنجش

1. کدامِ مطلب را بیش از بقیه پسندید؟ (نامِ مطلب را بنویسید.)

2. کیفیتِ نشریه را چه‌گونه دیدید؟
   - ○ بسیار ضعیف
   - ○ در حدِ یک نشریه‌یِ دانش‌آموزی
   - ○ در حدِ یک نشریه‌یِ دانشجویی
   - ○ فراتر از یک نشریه‌یِ دانشجویی
   - ○ در حدِ یک نشریه‌یِ علمیِ معتبر

3. اگر نظري مشروح درباره‌یِ این شماره‌یِ نشریه دارید، بنویسید.

مشخصاتِ شخصی

1. نام

2. نامِ خانواده‌گی

3. نشانیِ ایمیل

4. شماره‌یِ همراه

مشخصاتِ حرفه‌یی

1. برایِ چه بخش‌هایي به همکاری با نشریه علاقه‌مند اید؟
   - □ ویرایشِ علمی
   - □ ویرایشِ زبانی
   - □ ویرایشِ شیوه‌یِ خط
   - □ گزارش
   - □ آرایشِ صفحه‌ها
   - □ آرایشِ جلد
   - □ تایپ
   - □ دیگر:

2. اندکي از سوابقِ کاريِ خود بنویسید.

فرم را از نشریه ببُرید، و به ترتیبِ ارجحیت به سردبیر، مدیرِ مسؤول، یا اعضایِ انجمنِ علمی برسانید.

با سپاسِ فراوان، از کوشش‌تان برایِ بهبودِ نشریه.

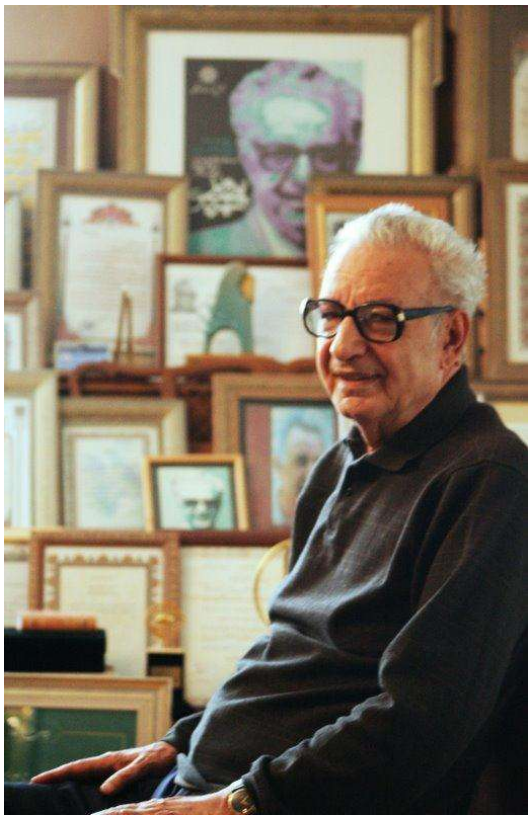
پیشگفتار

نشریه‌ی علمی دانش‌جویی

نشریه‌ی علمی دانش‌جویی بی‌نهایت شما را می‌جوید
شما هراسنده‌گان از نادانی و شما جوینده‌گان دانش و شما پژوهنده‌گان‌ش
شما بیرازان از نهایت و شما بیرازان از بیهوده‌گی

برای همکاری با این نشریه کافی است به اتاق انجمن علمی ریاضی بروید
جامعه‌ی علمی ریاضی تشنه‌ی پژوهش‌ها و ایده‌های شما است

دربارهٔ استاد پرویزِ شهریاری



- نخستین کتابِ پرویز شهریاری، ریاضی‌دانِ برجسته‌ی ایران در سال 1327 به چاپ رسید. وی در فروردینِ سالِ بعد برای نخستین بار به اتهامِ فعالیت‌های سیاسی و ضدسلطنتی برای مدتِ سه ماه روانه‌ی بازداشتگاه شد و از شرکت در امتحانِ نهایی باز ماند.

- پرویزِ شهریاری در دورانِ زندان، زبانِ روسی را، که یکی از مهم‌ترین زبان‌های علمیِ روزگار بود، به طورِ کامل فراگرفت.

- شهریاری، در خردادماهِ سالِ 1332 لیسانسِ ریاضی دانشکده‌ی علوم و لیسانسِ دانش‌سرایِ عالی را دریافت کرد.

- در اردیبهشت‌ماهِ 1381 در مراسمی ویژه با حضورِ وزیرِ وقتِ علوم، تحقیقات و فناوری، دکترایِ افتخاریِ ریاضی به استاد اعطا شد.

- از استاد پرویزِ شهریاری در آبان‌ماهِ 1384 در پنجمین همایشِ «چهره‌های ماندگار» به عنوانِ چهره‌ی ماندگارِ آموزشِ ریاضیاتِ ایران تقدیر شد.

- راه‌اندازیِ نخستین کلاسِ کنکور در ایران، گروهِ فرهنگیِ خوارزمی، تاسیسِ دبیرستانِ پسرانه و انتشاراتِ خوارزمی، تاسیسِ دبیرستانِ دخترانه‌ی مرجان، تدریس در دانشکده‌ی فنیِ دانشگاهِ تهران و دانش‌سرایِ عالی از جمله اقداماتِ استاد تا سالِ 1342 بود.

- سردبیریِ نشریه‌ی "چیستا" از جمله‌ی دیگر فعالیت‌هایِ علمی و فرهنگیِ استاد است که از شهریور ماهِ 1360 تا پایانِ عمرِ ایشان تداوم داشت.

- از این استادِ بزرگ بالغ بر 60 عنوان کتابِ درسیِ ریاضیات — از جمله دوره‌ی کتاب‌هایِ درسیِ ریاضیِ سه سالِ اولِ دبیرستانِ نظام قدیم، دوره‌ی کاملِ ریاضیاتِ دبیرستانی و کتاب‌هایِ مسائلِ مربوط به آن و جبرِ سالِ سومِ رشته‌ی ریاضی-فیزیک و سه جلد کتابِ آنالیزِ ریاضی — بیش از 97 کتابِ کمک‌درسی — به صورتِ ترجمه و تالیف — حدودِ 20 کتاب در زمینه‌هایِ مختلفِ تاریخ، فلسفه، کاربرد و آموزشِ ریاضایات و 9 جلد کتابِ سرگرمی در ریاضیات به دانش‌آموزان و دانش‌پژوهانِ ریاضیِ کشور ارائه شده‌است.

- این ریاضی‌دانِ پرتلاش همچنین از سالِ 1325 تا پایانِ عمرش حدودِ یک هزار مقاله در نشریاتِ مختلف به ویژه نشریه‌هایِ علمی و ریاضی به چاپ رساند.

دو ماه پس از دخول به دانشگاه، *گئورگ* نزدِ *دکترْ مسؤول* رفت، و از سرویس و خوابگاه پرسید، و او پاسخ داده گفت متأسفانه یا خوشبختانه سرویس را برداشته‌اند، و گفت به علتِ مشکلاتِ فرهنگی چنین کرده‌اند، و سرویس تنها برایِ دانشجویانِ بومی است، و نیز خوابگاه برایِ دانشجویانِ شهرستان است، و وی مشمولِ هیچ یک نیست. پس *گئورگ* برافروخته به دانشکده فرودآمد، سپس به سایت رفت تا نامه‌یي به *داوید* بنویسد. پس نیمي از سیستم‌ها را خارج از سرویس یافت، و از نیمِ دیگر یکي ماؤس نداشت، یکي کیبورد، یکي کیس، و الباقی اشغال بودند، پس با آن که ماؤس نداشت نبشت،

> هم‌کارِ گرامی،
>
> من دیروز به *تهران* آمدم، و در مهمان‌سرایِ *لهررهم* خفتم. پس بامدادان برایِ پیاده‌روی به دانشگاه آمدم و از حالِ شاعرانه به گذشته‌یِ زیباترِ ریاضیانه برده شدم. سپس به کتابخانه رفتم و دلتنگی‌م آرامید.
>
> ظاهرن این‌جا مشکلاتِ فرهنگی شدیدن فرهخته‌گان را نشانه رفته‌است. پس من نتوانستم با مشکلِ رفت‌وآمد کنار بیایم.
>
> امروز سخني شنیدم که بسیار بر من گران آمد. استادي سرِ کلاسِ خود گفته بود هم‌توانیِ میانِ مجموعه‌ها یک *رابطه‌یِ هم‌ارزی* است! نظرِ شما در این باره چیست؟ آیا شایسته است پی گرفتنِ این چنین چیزها و گوشزدِ آن‌ها به دانشگاهیان؟
>
> بهترین آرزوها!

ص 2، به هتل بینهایت خوش آمدید