گروه ادبیات و علوم انسانی

آشتی با ریاضیات

۱۶

اسفند ۱۳۵۹

Reconciliation with Mathematics

آشتی با ریاضیات

سردبیر: پرویز شهریاری
زیر نظر هیئت تحریریه

از انتشارات جانبی گروه ادبیات و علوم انسانی
صفحه آرایی، تصحیح، چاپ و صحافی: مرکز تولید انتشارات، گروه ادبیات و علوم انسانی

نشانی: تهران ـ خیابان کریم‌خان‌زند ـ اول آبان شمالی ـ گروه ادبیات و علوم انسانی

سال چهارم ـ شمارهٔ ۳ (۱۶)

فهرست مطالب

۵۰ ریال

تلاشی برای تنظیم فرهنگ ریاضی

درشماره‌ششم سال‌دوم «آشتی باریاضیات» (بهمن و اسفند ۱۳۵۷) مقاله‌ای داشتیم، زیرعنوان «گذشته، حال و آیندهٔ ریاضیات» بسیاری از خوانندگان مجله، از ما خواسته‌اند که این گونه مقاله‌ها را دنبال کنیم. «آشتی با ریاضیات» هم، پس از بحث ها و جدل‌ها، بر تردید و تزلزل خود فایق آمد و تصمیم گرفت به‌خواست‌خوانندگان گردن بگذارد. آرزو می کنیم که بتوانیم این ستون را ادامه‌دهیم و راهی، هر چند باریک و ناهموار، برای تنظیم یک فرهنگ ریاضی باز کنیم.

نظرها و انتقادهای‌شمامی‌توانند ما را در این راه یاری دهد و به‌هموارترشدن‌آن کمک کند.

پرویز شهریاری

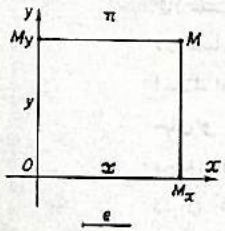
تحلیلی

۱. هندسهٔ تحلیلی

شاخه‌ای ازهندسه است که درآن شکل‌های هندسی، به یاری جبر و بر اساس روش مختصاتی مورد بررسی قرار می گیرد.

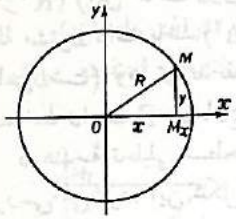
موضوع اصلی هندسهٔ تحلیلی عبارتست از ساده‌ترین شکل‌های هندسی (نقطه، خط‌راست، صفحه، خط و سطح درجهٔ دوم) محتوی اصلی بررسیها در هندسهٔ تحلیلی، عبارتست از روش مختصاتی و روش‌های جبر مقدماتی.

ماهیت روش مختصاتی در صفحه چنین است : روی صفحه‌ای مانند π دوخط راست‌عمود برهم Ox و Oy را درنظرمی گیریم (شکل ۱). این‌خط‌های راست، همراه باجهتی که روی آن‌ها انتخاب می کنیم، مبدأ مختصات O وواحد اندازه گیری e (که به‌دلخواه اختیارمی‌شود)، دستگاه مختصات‌دکارتی قائم Oxy رادرصفحهٔπ، تشکیل‌می‌دهد. خط‌های‌راست Ox و Oy، به‌ترتیب محور طول ومحور عرض نامیده می‌شود. جای هرنقطهٔ M درصفحه را،نسبت به‌این دستگاه مختصات Oxy، می‌توان به‌این ترتیب معین کرد: M_x و M_yرا، تصویرهای نقطهٔ M روی محورهای Ox و Oy وعددهای x و y را،مقدار پاره‌خط‌های OM_x و OM_y می گیریم (مثلا، مقدار x پاره خط OM_x برابر است باطول این پاره‌خط. درحالتی که جهت‌از O به M_x، منطبق برجهتی باشد که روی O_x انتخاب کرده‌ایم،علامت این‌مقدار مثبت ودرغیر این‌صورت، منفی‌است). عددهای x و y را،مختصات قائم‌دکارتی نقطهٔM، دردستگاه Oxy، گویند. برای اینکه نشان دهند که نقطهٔ M دارای طول x وعرض y است، می‌نویسند: $M(x , y)$ یا $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$. روشن است که‌مختصات نقطهٔ M، وضع آنرا، نسبت به‌دستگاه Oxy،مشخص‌می کند.



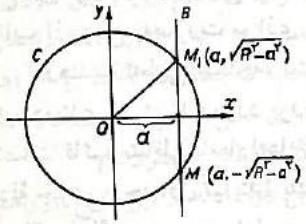
شکل۱

وقتی که در صفحهٔ دستگاه مختصات قائم دکارتی ، خطی (مستقیم یا منحنی) مانند L داده‌شده باشد، می‌توان با استفاده از مفهوم مختصات نقطه، به‌مفهوم معادلهٔ خط‌مفروض L، نسبت‌به‌دستگاه Oxy رسید. این‌معادله، رابطه‌ای به‌صورت $F(x , y) = 0$ است که باید: اولا مختصات هرنقطهٔ دلخواه‌از خط L درآن صدق کند، ثانیاً مختصات هرنقطه‌ای که براین خط نباشد، درآن صدق‌نکند. مثلا، اگرخط L، دایره‌ای به‌شعاع برابر R وبه‌مرکز مبدأمختصات باشد ، معادلهٔ $x^2+y^2-R^2=0$ ، معادلهٔ آن خواهد بود، که درستی آن، باتوجه به‌شکل ۲، روشن می‌شود. اگر M، نقطه‌ای واقع بر محیط این دایره باشد، روشن است که برای مختصات‌آن داریم: $x^2+y^2-R^2=0$؛ولی‌اگر نقطه‌ای برمحیط این دایره واقع نباشد، برای مختصات آن داریم: $x^2+y^2-R^2\neq 0$: به‌این ترتیب هر خط L را، که بر صفحه قرار دارد، می‌توان‌به‌وسیلهٔ معادله‌اش $F(x , y) = 0$، نسبت به‌دستگاه‌مختصات Oxy، بیان کرد.



شکل ۲

اندیشهٔ اصلی روش مختصاتی در صفحه، در این است که خاصیت‌های هندسی خط L، ازراه بررسی خاصیت‌های معادلهٔ $F(x , y) = 0$ این‌خط، و با روش‌های تحلیلی و جبری، مورد بحث قرار می گیرد. برای نمونه، روش مختصاتی را، به منظور روشن کردن تعداد نقطه‌های برخورد دایرهٔ C با خط راست B ، به‌کار می بریم (شکل ۳). فرض می کنیم ، مرکز دایره بر مبدأ مختصات‌منطبق،ومحورOxبرخط‌راست B عمود باشد. از آنجا که خط B بر محور Ox عمود است ، نقطه‌های آن دارای طول ثابتی مثل a می‌باشد ، و بنا براین معادلهٔ خط‌راست B، به‌صورت $x-a=0$ درمی‌آید. مختصات (x , y)، نقطهٔ برخورد دایرهٔ C (که‌معادلهٔ آن‌به‌صورت $x^2+y^2-R^2=0$ است) وخط‌راست B، باید درهردومعادلهٔ زیر صدق کند:



شکل ۳

$$x^2+R^2-R^2=0 \quad , \quad x-a=0 \qquad (1)$$

یعنی ، برای پیدا کردن این (x , y) باید جواب دستگاه (۱) را پیدا کرد. به‌این ترتیب، پرسش مربوط به‌تعداد نقطه‌های برخورد دایره با خط راست، منجر به‌پرسش‌تحلیلی مربوط به‌تعداد جواب‌های دستگاه جبری (۱) می‌شود. جوابهای این دستگاه چنین است:

$$x=a \ , \ y=\pm\sqrt{R^2-a^2}$$

بنابراین ، دایره با خط راست ، می‌تواند دو نقطهٔ برخورد داشته باشد $(R^2>a^2)$ (این حالت روی شکل ۳، نشان داده شده است)، می‌تواند تنها یك‌نقطهٔ مشترك داشته‌باشد $(R^2=a^2)$ (دراین حالت، خط راست B بردایرهٔ C مماس است)، ومی‌تواند نقطهٔ برخوردی نداشته باشد $(R^2<a^2)$ (دراین حالت، خط راست B درخارج دایرهٔ C قرار دارد).

درهندسهٔ تحلیلی مسطحه، خاصیت‌های هندسی بیضی، هذلولی وسهمی هم بررسی می‌شود. این شکل‌ها، ازبرخورد یك‌صفحه باسطح مخروطی دوار، وقتی‌که ازراس مخروط نگذشته باشد، به دست می‌آید و به همین مناسبت به آنها مقطع‌های مخروطی می گویند. دردانش‌های طبیعی و درصنعت، اغلب به این شکل‌ها برمی‌خوریم. مثلا، مسیر حرکت نقطهٔ مادی ، تحت تأثیر حوزهٔ مرکزی نیروی‌جاذبه، روی‌یکی‌ازاین خط‌هاست (سیاره‌های منظومهٔ‌خورشیدی روی یك‌مدار بیضی شکل به‌دور خورشید حرکت می کنند وخورشید در یکی ازکانون‌های این‌بیضی قرار دارد. سنگی که بازاویهٔ α $(0<\alpha<90^\circ)$ نسبت به‌صفحهٔ افق، پرتاب‌شود، روی یك‌سهمی حرکت می کند وغیره): برای‌ساختن نورافکن ، آنتن و تلسکوپ ، از این ویژگی سهمی استفاده می کنند که اگر شعاع‌های نور از نقطهٔ معینی (کانون سهمی) سرچشمه گرفته باشند ، بعد از بازتاب ازسهمی به‌صورت موازی درمی‌آیند.

درهندسهٔ تحلیلی مسطحه، بیش‌از همه، خط‌های جبری درجه اول ودرجه دوم، رده‌بندی می‌شوند ومورد بررسی قرار می گیرند (این خط‌ها، دردستگاه مختصات قائم، متناظر بامعادله‌های جبری درجه اول و درجه دوم هستند). هر معادلهٔ جبری درجه اول نمایندهٔ یك‌خط راست است و برعکس هرخط‌راست، به‌وسیلهٔ معادلهٔ جبری درجه اول $Ax+By+C=0$ بیان می‌شود. خط‌های درجه دوم، به‌وسیلهٔ معادله‌هایی به‌صورت

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

معین می‌شوند. روش اصلی، در بررسی و رده‌بندی این خط‌ها، در اینست که دستگاه مختصات قائم دکارتی‌را طوری انتخاب می کنند، که درآن معادلهٔ هر خط، به‌ساده‌ترین صورت خود درآید، وسپس این معادلهٔ ساده‌را موردبررسی

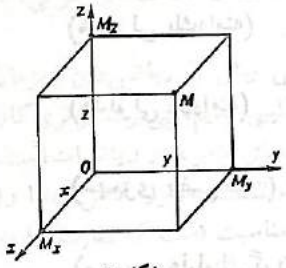
قرار می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که بااین روش، معادلهٔ هرخط حقیقی درجه دوم، به‌یکی ازصورت‌های سادهٔ زیر درمی‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ , \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ ,$$

$$y^2=2px \ , \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \ , \ x^2=a^2$$

که اولی، معادلهٔ بیضی، دومی هذلولی وسومی سهمی است؛ هر کدام از دو معادلهٔ آخر، نمایندهٔ دوخط راست هستند (متقاطع، متوازی یامنطبق).

در هندسهٔ تحلیلی فضایی هم ، از روش مختصاتی استفاده می‌شود و مختصات قائم x ، y و z (طول،عرض و ارتفاع) نقطهٔ M ، کاملا شبیه حالت مسطحه به‌دست می‌آید.(شکل ۴). هر سطح S را در فضا می‌توان به وسیلهٔ معادلهٔ متناظر آن $F(x , y , z)=0$، نسبت‌به‌دستگاه مختصات $Oxyz$ نشان داد (مثلا ، معادلهٔ کرهٔ به مرکز مبدأ مختصات وشعاع برابر R ، به‌صورت $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ درمی‌آید).



شکل ۴

ضمناً، ویژگی‌های هندسی سطح S، از راه بررسی معادلهٔ آن، و با روش‌های جبری و تحلیلی، مورد مطالعه قرار می گیرد. درفضا، خط L رابه‌عنوان محل برخورد دوسطح S_1 و S_2 ، درنظر می گیرند. اگر $F_1(x , y , z)=0$ و $F_2(x , y , z)=0$، معادله‌های S_1 و S_2 باشند، دراینصورت هردومعادله باهم، نمایندهٔ معادلهٔ‌خط L خواهد بود. مثلا، خط راست‌را درفضا، می‌توان به‌عنوان محل برخورد دوصفحه‌درنظر گرفت. ازآنجا که معادلهٔ یك‌صفحه در دستگاه فضائی به‌صورت: $Ax+By+Cz+D=0$ است، بنابراین دومعادله از این نوع روی‌هم، به‌عنوان معادلهٔ یك‌خط راست به‌حساب‌می‌آید. به‌این ترتیب ازروش‌مختصاتی برای بررسی ویژگی‌های خط در فضا هم ، می‌توان استفاده کرد. در هندسهٔ تحلیلی فضائی، بیش ازهمه، ویژگی‌های سطح‌های درجه اول ودرجه دوم، به صورت جبری بررسی می‌شود. ثابت می‌شود که سطح‌های جبری درجه اول، تنها نمایندهٔ صفحه هستند. سطح درجه دوم، بامعادله‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Mz+N=0$$

روش‌اصلی بررسی و رده‌بندی این سطح‌ها دراینست که دستگاه‌محور-های مختصات‌را طوری اختیار می‌کنند که معادلهٔ هرسطح، به‌ساده‌ترین‌صورت خود درآید، وسپس به‌مطالعهٔ آنها می‌پردازند.مهمترین سطح‌های حقیقی‌درجه دوم عبارتند از: بیضوی، هذلولی یك دامنه و دو دامنه، سهموی بیضی‌گون و سهموی هذلولی‌گون. این سطح‌ها، در دستگاه خاصی ازمحورهای مختصات قائم، معادله‌هایی به‌اینصورت دارند:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(بیضوی)}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(هذلولی یك‌دامنه)}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad \text{(هذلولی دودامنه)}$$

$$2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \qquad \text{(سهموی بیضی‌گون)}$$

$$2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \qquad \text{(سهموی هذلولی‌گون)}$$

در مساله‌های گوناگون مربوط به‌مکانیك، فیزیك جسم‌های صلب، فیزیك‌نظری و کارهای مهندسی، اغلب به این گونه سطح‌ها برخورد می‌کنیم. مثلا، برای مطالعهٔ تنش در جسم‌های صلب، از مفهوم به‌اصطلاح بیضوی تنش، استفاده می‌کنند و در وسیله‌های گوناگون مهندسی اغلب ساخته‌هایی به‌شکل سهموی وهذلولی را به‌کار می‌برند.

ازنظر تاریخی، نام مرکب «هندسهٔ تحلیلی»، اگرچه جای خودرا باز کرده است، نمی‌تواند به‌طور کامل به محتوی آن، پاسخ دهد. مشخصهٔ این دانش تنها این نیست‌که جبر به هندسه اضافه شده‌است، بلکه در عین استفاده از روش آنالیز، به‌همان اندازه، روش مختصاتی هم به کار گرفته می‌شود و به‌همین مناسبت، هندسهٔ مختصاتی هم نامیده می‌شود.

فکر مربوط به روش مختصاتی، مربوط به موفقیت‌های سده‌های جدید نیست و سرچشمهٔ آن‌را می‌توان درژرفای دنیای باستانی جستجو کرد. عنصر-های فکر مختصات را می‌توانیم درنوشته‌های ریاضی‌دانان باستانی پیدا کنیم: مصری‌های باستان، برای انجام کارهای ساختمانی خود، ازمختصات متوازی

(پاره خطها) استفاده می‌کردند : اخترشناسان یونانی ـ هیپارك (سدهٔ دوم پیش ازمیلاد) و بطلمیوس (سدهٔ دوم پس‌از میلاد) از مختصات فضائی (طول وعرض)، برای تعیین موقعیت نقطه‌های‌واقع برسطح کره، استفاده می‌کردند. ولی، ازآنجا که یونانی‌ها، نشانه‌ها و نمادهای حرفی را به‌کار نمی‌بردند و دربارهٔ عددهم تصور کلی نداشتند، نتوانستند روش مختصاتی‌را پیشرفت‌دهند، و درنتیجه این فکر، درهمان مرحله‌های نخستین رشد خود، متوقف شد.

ظهور دو بارهٔ روش مختصاتی و به وجود آمدن و شکل گرفتن هندسهٔ تحلیلی، بستگی جدی باپیشرفت‌های طوفانی اخترشناسی، مکانیك وصنعت در سدهٔ هفدهم دارد. بیان روشن روش مختصاتی، ومبانی هندسهٔ تحلیلی،به‌وسیلهٔ رنه دکارت و درکتاب «هندسهٔ» او داده شد (۱۶۳۷). فرما هم، هم‌زمان دکارت و بدون آگاهی از کارهای او ، ومثل او با استفاده از علامت‌های حرفی، به نتیجه‌های مشابهی دربارهٔ این روش رسیده بود.

دکارت، اندیشمند بزرگ فرانسوی، خیلی بیش از ریاضی‌دان همزمان خود، فرما، به‌خصلت محدود وخاص هندسهٔ ترکیبی قدیم، پی‌برد. برتری کار دکارت، نسبت‌به فرما، به‌خاطر داخل کردن کمیت‌های متغیر، در ریاضیات‌است، کشفی‌که خیلی مهمتر ازکشف علامت‌ها بود وتوانست به‌طور کامل، فضا را به‌عدد، وجبر را به‌هندسه، پیوند دهد. به همین مناسبت است که دکارت را به عنوان آفرینندهٔ هندسهٔ تحلیلی می‌شناسند. به قول انگلس ، کمیت‌های متغیر دکارت «نقطهٔ تحولی» در ریاضیات به وجود آورد، که در نتیجهٔ آن، امکان پیشرفت تند و همه جانبه‌ای برای ریاضیات، و همراه آن برای همهٔ رشته‌های مربوط به‌دانش بشری، به‌وجود آمد.

بانی هندسهٔ تحلیلی، یعنی دکارت ، نتوانست «محاسبه‌ای کردن» هندسه را، تا به‌آخر انجام بدهد. او، روش مختصاتی را درفضا تعمیم نداد وخودرا به‌بررسی خطهای واقع برصفحه، محدودکرد. دستگاه مختصاتی‌که او درست کرد، کامل نبود، تنها یك‌محور داشت و به‌جای محور عرض، ازپاره‌خطهای متوازی‌استفاده می‌کرد واختلاف روشنی بین‌نشانه‌های مختصات نمی‌گذاشت.

استفاده ازروش مختصاتی، درفضای سه‌بعدی، از آخرهای سدهٔهفدهم، و ادامهٔ آن در سدهٔ هجدهم در کارهای عده‌ای از دانشمندان و پیش از همه، کلرو و اولر دیده می‌شود . لاگرانژ، در ساختن مکانیك تحلیلی خود، و مؤثر در هندسهٔ دیفرانسیلی خود، از روش‌های هندسهٔ تحلیلی استفاده کرده‌اند.

درنیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم، به‌مناسبت پیشرفت برق‌آسا وهمه‌جانبهٔ فیزیك و صنعت، ریاضیات هم، دچار دگرگونی بزرگ شد. در هندسه، مفهوم‌های

تازه: بردار، تانسور و غیره به وجود آمد و برای مشخص کردن دستگاه‌های مادی، بیش‌از سه پارامتر لازم شد. فضای سه بعدی اقلیدسی، تنگ و محدود به‌نظر آمد و نمی‌توانست پدیده‌های تازه را، توضیح دهد. در نظریهٔ نسبیت، فضای چهار بعدی، موردبررسی قرار گرفت و درمکانیك کوانتائی،ازدستگاهی گفتگو شدکه باکمیتهای بی‌نهایت بعدی سروکار داشت. درنتیجه،درریاضیات فضاهای چهاربعدی، n بعدی و بی‌نهایت بعدی به‌وجود آمد.

۲. تابع تحلیلی

تابع تحلیلی ، به تابعی گفته می‌شود که بتواند به رشتهٔ توانی تبدیل شود. اهمیت فوق‌العادهٔ تابع‌های تحلیلی در اینست‌که: اولا شامل دستهٔ بسیار گسترده‌ای از تابع‌هاست: بسیاری ازتابع‌هایی که، در ریاضیات وکاربرد آن در دانش‌های طبیعی وصنعت، با آنها برخورد می‌کنیم، جزو این دسته هستند. تابع‌های مقدماتی ــ چند جمله‌ای‌ها و تابع‌های گویا ، تابع‌های نمائی و لگاریتمی، تابع‌های مثلثاتی و معکوس مثلثاتی، تابع‌های هذلولی و معکوس هذلولی، تابع‌های جبری، تابع‌های بیضوی و استوانه‌ای و غیره، همه تابع‌های تحلیلی هستند. ثانیاً دستهٔ تابعهای‌تحلیلی، نسبت به‌عمل‌های‌اصلی حساب، جبر وآنالیز به‌هم پیوسته‌اند: به‌کار بردن عمل‌های حساب در مورد تابع‌های تحلیلی، حل‌معادله‌های جبری باضریب‌های تحلیلی، دیفرانسیل گرفتن‌وانتگرال گرفتن از تابع‌های تحلیلی ، دو باره منجر به تابعی تحلیلی می‌شود . اگر $s=f_1(w)$ و $w=f_2(z)$ ، تابع‌هائی تحلیلی باشند ، تابع مرکب $s=f_1[f_2(z)]$ نیز تحلیلی است. بالاخره تابع تحلیلی دارای خاصیت مهم یگانگی است: هرتابع تحلیلی «ازلحاظ ساختمانی، یك واحد به‌هم پیوسته» را تشکیل می‌دهد، و در تمامی حوزهٔ تعریف خود، تابعی «واحد» است. این خاصیت، که درسدهٔ هفدهم، از خود مفهوم تابع جدا نشدنی به‌نظر می‌رسید، بعد ازآنکه درنیمهٔ نخست سدهٔ نوزدهم، تابع را بادیدی کلی‌تر و به عنوان یك‌بستگی دلخواه، مورد بررسی قراردادند، اهمیت اساسی کسب کرد.

نظریهٔ تابع‌های تحلیلی درسدهٔ نوزدهم، و درنوشته‌های کوشی، ریمان و وایراشتراس مطرح شد. مسألهٔ «گذار به حوزهٔ مختلط» یعنی گذار از متغیر حقیقی x به‌متغیرمختلط $z=x+iy$ ــ که‌می‌تواندرحوزهٔ دلخواهی‌ازصفحهٔ مختلط تغییر کند ــ درساختن این‌نظریه، نقشی اساسی داشته است. نظریهٔ تابع‌های تحلیلی، به‌عنوان نظریهٔ تابع‌های بامتغیر مختلط، به‌وجود آمد. به‌مفهومی،

تابع‌های بامتغیر مختلط z (ونه تابع‌های مختلط دلخواهی از دومتغیر حقیقی x و y) را به‌طورطبیعی، تحلیلی به‌حساب می‌آورند. نظریهٔ‌تابع‌های تحلیلی، محتوی اصلی نظریهٔ عمومی تابع‌های با متغیر مختلط را تشکیل می‌دهد . به همین‌مناسبت، اغلب، وقتی که ازنظریهٔ تابع‌های‌بامتغیر مختلط گفتگو می‌شود، به‌نظریهٔ تابع‌های تحلیلی توجه دارند.

روش‌های گوناگونی برای رسیدن به‌مفهوم «تحلیلی بودن» وجوددارد. یکی ازاین روش‌ها، که کوشی گام‌های نخستین آنرا برداشت و ریمان آنرا ادامه داد ، بر خاصیت ترکیبی ـ و ساختمانی تابع تکیه می‌کند : وجود مشتق نسبت به متغیر مختلط، یا قابلیت دیفرانسیل گیری مختلط. این روش، دقیقاً به درك هندسی این مفهوم وابسته است. روش دوم، که به‌وسیلهٔ وایرشتراس تنظیم شد، برامکان بسط تابع به‌صورت یك‌رشتهٔ توانی تکیه می‌کند. این روش، به دستگاه تحلیلی مربوط می‌شودکه به‌کمك آن، امکان تجسم تابع وجود دارد.

به تعریف‌های دقیق‌تر می‌پردازیم. در همهٔ موارد، z را به معنای عدد مختلط $x+iy$ می‌گیریم، که در آن x و y عددهای حقیقی هستند. از نظر هندسی ، عدد z ، نقطه‌ای از صفحه را نشان می‌دهد که مختصاتش x و y باشد. وقتی که صفحهٔ اقلیدسی، برای نشان دادن عددهای مختلط به‌کار رود، صفحهٔ مختلط نامیده می‌شود. D را حوزه‌ای درصفحهٔ مختلط می‌گیریم، اگر هرنقطهٔ z ازحوزهٔ D ، متناظر باعدد مختلطی مثل w باشد، گویند حوزهٔ D، تابع f ازمتغیر z را (به‌صورت یك ارزشی) تعریف می‌کند و می‌نویسند: $w=f(z)$ ، $z\in D$ تابع $w=f(z)=f(x+iy)$ ازمتغیر مختلط $z\in D$ را می‌توان به‌عنوان تابع مختلط از دو متغیر حقیقی x و y ، که در حوزهٔ D معین است، درنظر گرفت. اگر فرض‌کنیم $w=u+iv$ ، که در آن u و v عددهای‌حقیقی‌اند، تابع f متناظر بادوتابع حقیقی φ و ψ از متغیرهای‌حقیقی x و y (که درهمین حوزه معین‌اند) می‌شود:

$$U=\varphi(x,y)\ ,\ v=\psi(x,y)\ ,\ (x,y)\in D$$

z رانقطهٔ‌تابعی‌حوزهٔ D می‌گیریم به z، نمو دلخواه $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ را می‌دهیم (به نحوی که نقطهٔ $z+\Delta z$ در محدودهٔ حوزهٔ D باقی بماند) و نمومتناظر تابع مختلط f رابررسی‌می‌کنیم: $\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)$ اگرنسبت $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ ، وقتی که $\Delta z\to 0$ ، دارای حدی باشد، یعنی عدد مختلط A وجود داشته باشد، به‌نحوی که برای هر $\varepsilon>0$ ، وقتی‌که: $|\Delta z|<\delta|\delta=\delta(Q)>0$ ،داشته‌باشیم: $\left|\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}-A\right|<\varepsilon$. دراین صورت

گویند تابع درنقطهٔ z مونوژن، وعدد A، مشتق آن دراین نقطه است: $A=f(z)=\frac{df(z)}{dz}$. وقتی که تابعی درهمهٔ نقطه‌های حوزهٔ D، مونوژن باشد گویند درحوزهٔ D مونوژن است.

اگر تابع f، درنقطهٔ $z\in D$ مونوژن باشد، دراین صورت f وتابع‌های متناظر آن φ و ψ دارای مشتق‌های جزئی نسبت به x و y دراین نقطه‌هستند: ضمناً

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial x};\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+i\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

مشتق $f'(z)$ را می‌توان به‌وسیلهٔ مشتق‌های جزئی f نسبت به x و نسبت به y بیان کرد (کافی است حد نسبت $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ را به دو طریق محاسبه کنیم: به‌ازای $\Delta z=\Delta x\to 0$ و $\Delta z=i\Delta y\to 0$)؛ بامساوی قراردادن‌عبارت‌های متناظر به‌دست می‌آید. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$ ویا $\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

باتوجه به‌تابع‌های φ و ψ، این تساوی را می‌توان این‌طور نوشت: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}$ و $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$. اگر تابع f درحوزهٔ D مونوژن باشد، رابطه‌های اخیر برای هر نقطهٔ حوزهٔ D، درست است؛ این رابطه‌ها را، معادله‌های کوشی ـ ریمان گویند. ولی، باید یادآوری کنیم که درنوشته‌های دالامبر و اولر هم، که در سدهٔ هجدهم تابع‌های با متغیر مختلط را بررسی می‌کردند، می‌توان این معادله‌ها را پیدا کرد.

مفهوم مونوژن بودن تابع f، با مفهوم قابل دیفرانسیل‌گیری بودن آن در آنالیز مختلط، هم‌ارزاست. ضمناً، وقتی که می‌گوئیم تابع f درنقطهٔ $z\in D$ قابل دیفرانسیل‌گیری است. می‌توانیم نمو آنرا به‌صورت:

$$\Delta f(z)=A\Delta z+\alpha(\Delta z)\Delta z$$

مجسم کنیم، که‌درآن وقتی $\Delta z\to 0$، آنوقت $\alpha(\Delta z)\to 0$، دیفرانسیل $df(z)$ ازتابع f در نقطهٔ z، برابر است با قسمت بزرگتر $A\Delta z$ از نمو $\Delta f(z)$ آن، وبا توجه به اینکه دراین حالت $dx=\Delta z$، به‌صورت $f(z)dz$ درمی‌آید. خوب است که مفهوم قابل دیفرانسیل‌گیری تابع f را به مفهوم آنالیز حقیقی و به مفهوم آنالیز مختلط ـ با هم مقایسه کنیم. در حالت اول، دیفرانسیل df به‌صورت $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ است. به راحتی می‌توان این

عبارت را به‌شکل مختلط نوشت. برای این منظور، ازمتغیرهای مستقل x و y به‌متغیرهای z و $\bar{z}$ می‌رویم، که آنهارا می‌توان متغیرهای‌مستقل تازه‌ای درنظر گرفت که با متغیرهای قدیمی به‌این ترتیب وابسته‌اند: $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$ (باتوجه به‌این دیدگاه، اغلب تابع f را به‌صورت $f(z$ و $\bar{z})$ می‌نویسند). بنابر قاعدهٔ معمول دیفرانسیل گرفتن، dx و dy را برحسب dz و $d\bar{z}$ بیان می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

، که درآن $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ مشتق‌های تابع f به ترتیب نسبت به z و $\bar{z}$ هستند. از این‌جا، ضمناً به سادگی نتیجه می‌شود، که تابع f به‌مفهوم آنالیز مختلط، وقتی وتنها وقتی قابل دیفرانسیل گیری است که به مفهوم آنالیز حقیقی، قابل دیفرانسیل گیری و تساوی: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ برقرار باشد ($\frac{\partial f}{\partial z}=0$، عبارتست از بیان کوتاه شدهٔ معادلهٔ کوشی ـ ریمان): و ضمناً

$$\frac{\partial f}{\partial}=f'=\frac{df}{dz}$$

تساوی $\frac{\partial f}{\partial z}=0$ نشان می‌دهد که تنها آن تابع‌های f به مفهوم آنالیز مختلط قابل دیفرانسیل گیری است که به‌صورت تابعی ازمتغیرهای مختلط z و $\bar{z}$ نوشته شود؛ وقتی که می‌گوئیم «نه‌تنها به z مربوط است» به‌معنای «تابعی ازمتغیر مختلط z» است

انتگرال تابع $f=\varphi+i\psi$ در مسیر منحنی Γ را می‌توان به کمک مفهوم انتگرال منحنی‌الخط، تعریف کرد:

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma fdx+ifdy=$$
$$=\int_\Gamma \varphi dx-\psi dy+i\int_\Gamma \psi dx+\varphi dy$$

در نظریهٔ تابع‌های مونوژن، قضیهٔ انتگرالی کوشی، اساسی‌ترین نقش را به عهده دارد: اگر تابع درحوزهٔ همبند سادهٔ D، مونوژن باشد، درآن‌صورت برای هرمنحنی بستهٔ Γ که در این حوزه باشد داریم: $S_\Gamma f(z)dz=0$. با تکیهٔ برقضیهٔ انتگرالی کوشی به‌سادگی می‌توان فرمول انتگرالی کوشی را ثابت کرد: اگر تابع f درحوزهٔ D مونوژن باشد، و Γ منحنی سادهٔ بسته‌ای متعلق به‌حوزهٔ D همراه بادرون آن D_Γ باشد، برای هر نقطهٔ $z\in D_\Gamma$ داریم:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}$$

(جهت منحنی Γ نسبت به‌حوزهٔ D ، مثبت فرض شده است.)

فرض کنید که تابع f در حوزهٔ D مونوژن باشد. نقطه‌ای مانند z_0 از حوزهٔ D را ثابت می‌گیریم و دایرهٔ به‌مرکز z_0 وشعاع برابر $Q>0$ را به γ نشان می‌دهیم: که همراه با هر دایرهٔ $K: |z-z_0|<Q$ متعلق به حوزهٔ D باشد. دراینصورت:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}\ ,\quad z\in K$$

هستهٔ کوشی $\frac{1}{t-z}$ را برای $t\in\gamma$ و $z\in K$. به صورت مجموع بی‌نهایت جمله از تصاعد هندسی درنظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-z_0}+\frac{z-z_0}{(t-z_0)^2}+\dots+\frac{(z-z)^n}{(t-z_0)^{n-1}}+\dots$$

$\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{Q}<1$) ، بنابراین، رشته به‌ازای هر $z\in K$ ثابت، نسبت به $t\in\gamma$ به‌طور یکنواخت متقارب است): باانتگرال گرفتن ازاین‌رشته ـ بعدازآنکه دوطرف آنرا در $\frac{1}{2\pi i}f(t)$ ضرب کنیم ـ تبدیل تابع f به رشتهٔ توانی بدست می‌آید:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\dots+a_n(z-z_0)^n+\dots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

که درداخل دایرهٔ $K: |z-z_1|<Q$ ، متقارب است.

حال، مفهوم تحلیلی بودن را دقیق می‌کنیم . f را تابعی فرض می‌کنیم که در حوزهٔ D معین باشد؛ تابع f را ، در نقطهٔ z_0 از حوزهٔ ، تحلیلی (یاهولومورف) گویند، وقتی که دایره‌ای به مرکز z_0 وجود داشته باشد که درآن تابع f به‌تابع توانی تبدیل شود:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots+a_n(z-z_0)^n+\dots$$

اگر این خاصیت برای هرنقطهٔ z از حوزهٔ D وجود داشته باشد ، در این صورت تابع f در حوزهٔ D ، تحلیلی (یاهولومورف) نامیده می‌شود.

قبلا نشان دادیم که اگر تابع f درحوزهٔ D مونوژن باشد، دراین‌حوزه تحلیلی است. این حکم، دربارهٔ یك نقطهٔ جداگانه ، درست نیست؛ مثلا، تابع $f(z)=|z|^2=z\cdot z$ ، در نقطهٔ $z_0=0$ مونوژن است، ولی هیچ‌جا، تحلیلی

نیست. ازطرف دیگر، اگر تابع f ، در نقطهٔ z_0 ازحوزهٔ D تحلیلی باشد، در این نقطه مونوژن است . علاوه براین ، مجموع یك رشتهٔ توانی متقارب ، دارای مشتق‌های متوالی نسبت به متغیر مختلط z است (یعنی می‌توان ازآن‌تا هرمرتبه‌ای، دیفرانسیل گرفت) ، ضریب‌های رشته را می‌توان برحسب مشتق های تابع f درنقطهٔ z_0 ، بنابر دستور $a_n=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ بیان کرد. وقتی که رشتهٔ توانی به صورت

$$f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\dots$$

نوشته شود، رشتهٔ تیلور تابع f درنقطهٔ z_0 نامیده می‌شود. وقتی که تابع f در حوزهٔ D ، تحلیلی باشد، به‌معنای آنست‌که در هرنقطه از حوزه D ، می‌توان از تابع f تا هرمرتبه‌ای و تا مرتبه بی‌نهایت) دیفرانسیل گرفت و رشتهٔ تیلور در حومه‌ای از این نقطه ، به سمت تابع متقارب است.

بنابراین، دو مفهوم مونوژن بودن و تحلیلی بودن تابع در یك حوزه ، هم ارزند و هرکدام از خاصیت‌های زیر از تابع f در حوزهٔ D می‌تواند به عنوان تعریف‌تحلیلی بودن f دراین حوزه پذیرفته شود : مونوژن بودن، قابل دیفرانسیل‌گیری به مفهوم آنالیز مختلط ؛ قابل دیفرانسیل‌گیری به مفهوم آنالیز حقیقی همراه بابرقراری معادلهٔ کوشی ـ ریمان.

مهم‌ترین خاصیت تابع تحلیلی با قضیه یگانگی زیر بیان می‌شود: اگر دو تابعی که در حوزهٔ D تحلیلی ، و درمجموعه‌ای برهم منطبق‌اند ، یك نقطهٔ حدی در D داشته باشند، در تمام حوزهٔ D برهم منطبق‌اند (یعنی دو تابع‌در این حوزه متحدند). در حالت خاص، وقتی که یك تابع تحلیلی در حوزهٔ D متحد با صفر نباشد، در این حوزه می‌تواند تنها یك صفر منفرد داشته باشد.

اگر E ، مجموعهٔ دلخواهی باشد (روی صفحهٔ مختلط ، ویا در حالت خاص، روی خط راست حقیقی) ، در آن صورت تابع $f(z)$ $(z\in E)$ را روی مجموعهٔ E تحلیلی گویند، وقتی که هرنقطهٔ این مجموعه حومه‌ای داشته‌باشد که درتقاطع آن با مجموعهٔ E ، تابع f به‌صورت رشتهٔ توانی متقاربی‌درآید، و این در واقع ، به معنای آنست که f در مجموعهٔ بازی شامل E ، تحلیلی است. برای مجموعه‌های باز ، مفهوم تحلیلی بودن، برمفهوم امکان دیفرانسیل گرفتن در مجموعه (مونوژن بودن) منطبق‌است. با وجود این ، درحالت کلی، چنین نیست: به خصوص روی خط راست حقیقی، تابع‌هایی وجود داردکه‌نه تنها مشتق دارند، بلکه دیفرانسیل گرفتن در هرنقطه را تا بی‌نهایت هم‌می‌توان

ادامه داد ، در حالی که حتی در یکی از نقطه های خط راست هم ، تحلیلی نیستند $\left(\text{مثل } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3^n x)}{n!}\right)$. از طرف دیگر، برای درستی قضیهٔ یگانگی تابع‌های تحلیلی ، خاصیت همبندی مجموعهٔ E ، اساسی است. به همین دلیل تابع‌های تحلیلی را ، معمولا در حوزه‌ها ، یعنی مجموعه های باز و همبند ، بررسی می کنند.

وجود نقطه‌های خاص، یعنی نقطه‌هایی که در آنها ، خاصیت تحلیلی بودن وجود ندارد، برای مطالعهٔ تابع‌های تحلیلی ، اهمیت جدی دارد . در اینجا، نقطه‌های خاص منفرد تابع‌های تحلیلی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم . f را تابعی تحلیلی در حوزهٔ به‌صورت $0<|z-z_0|<\rho$ درنظرمی گیریم. در این حوزه به رشتهٔ لوران بسط داده می‌شود.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

که شامل هم توانهای مثبت وهم توانهای منفی $(z-z_0)$ است. اگر دراین بسط ، جمله‌های با توان منفی وجود نداشته باشد ($a_n=0$ برای ... و ۲ — و ۱ — $(n=$)، z_0 را نقطهٔ منظم f گویند. در نقطهٔ منظم ، $\lim_{z\to z_0} f(z)=a_0$ وجوددارد، بافرض $f(z_0)=a_0$، تابعی‌تحلیلی درتمام دایرهٔ $|z-z_0|<Q$ به دست می‌آید . اگر رشتهٔ لوران از تابع f ، تنها شامل تعداد محدودی از جمله‌های باتوان منفی $(z-z_0)$ باشد:

$$f(z)=\sum_{n=\mu}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\ ,\ \mu<0\ ,\ a_n\neq 0$$

نقطهٔ z_0 را قطب تابع f (از مرتبهٔ μ) گویند، قطب z_0 به‌این ترتیب‌مشخص می‌شود که : $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ در حالتی که رشتهٔ لوران ، شامل بی نهایت جملهٔ با توان منفی از $(z-z_0)$ باشد ، نقطه z_0 را نقطهٔ خاص ممتازگویند؛ در چنین نقطه‌ای نه حد محدود و نه حد نامحدود تابع f وجود ندارد. وقتی که z_0 ، نقطهٔ خاص منفردی از تابع f باشد ، ضریب a_{-1} بسط آنرا به‌رشتهٔ لوران ، ماندهٔ تابع f در نقطهٔ z_0 گویند.

تابعی که به صورت نسبت دو تابع تحلیلی در حوزهٔ D نشان داده‌شده باشد ، تابع مرومورف در حوزهٔ D نامیده می‌شود . تابعی که در یك حوزهٔ مرومورف باشد ، در این حوزه تحلیلی است به استثنای مجموعهٔ محدود یا شمارایی از قطب‌ها ، مقدار تابع مرومورف در قطبها ، بی نهایت به حساب می‌آید. اگر این مقادیر را قبول کنیم، تابع مرومورف درحوزهٔ D را می‌توان

به عنوان تابعی که در حوالی هر نقطهٔ z_0 حوزهٔ D به صورت رشته‌ای از توانهای $z-z_0$ نشان داده می‌شود، تعریف کرد که در آن تعداد جمله‌های با توان منفی $(z-z_0)$ محدود باشد.

اغلب، تابع‌های‌تحلیلی درحوزهٔ D را ، هم تابع‌تحلیلی (هولومورف) وهم تابع مرومورف در این حوزه گویند. دراین حالت، تابع‌های هولومورف را تابع‌های تحلیلی مرتب و یا به طور ساده ، تابع‌های مرتب هم می گویند. ساده‌ترین‌دستهٔ تابع‌های تحلیلی، آن‌هایی هستند که درتمام صفحه تحلیلی‌اند، این‌گونه تابع‌ها را تام می‌نامند. تابع‌های تام، بارشته‌هایی به صورت

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

نشان داده می‌شود که در تمام صفحهٔ مختلط ، متقارب است . چند جمله‌ای‌های نسبت به z به این دسته تعلق دارند و همچنین تابع‌های

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n(2n+1)!}+\cdots,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{z}{(2n)!}+\cdots$$

تابع‌هایی که درتمام‌صفحه مرومورف باشند (یعنی به‌صورت نسبت دوتابع‌تام نشان داده شوند)، تابع‌های مرومورف نامیده می‌شوند. از آن قبیل‌اند تابع‌های گویا نسبت به z (نسبت چند جمله‌ای‌ها) ، :

$$\operatorname{cotg} z=\frac{\cos z}{\sin z}\ ,\ \operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$$

تابع‌های بیضوی وغیره .

برای بررسی تابع‌های تحلیلی، تصور هندسی مربوط به آن‌ها ، خیلی اهمیت دارد. تابع $w=f(z)$ $z\in D$ را می‌توان به عنوان نگاشت حوزهٔ D، بر صفحهٔ متغیر w ، مطالعه کرد . اگر f تابعی تحلیلی باشد ، نگارهٔ f(D) حوزهٔ D هم درحوزه است (اصل ثابت بودن‌حوزه). ازشرط قابل دیفرانسیل گیری تابع مختلط f در نقطهٔ $z\in D$ ، نتیجه می‌شود که برای $f'(z_0)\neq 0$ ، زاویه در z_0 ، در نگاشت متناظر، ثابت می‌ماند، هم از لحاظ قدر مطلق وهم از نظر علامت ، یعنی یك نگاشت همدیس (کنفورم) است . به این ترتیب بستگی‌کاملی بین مفهوم تحلیلی ، ومفهوم مهم هندسی نگاشت همدیس، وجود دارد . اگر f در D تحلیلی و برای $z'\neq z''$ داشته باشیم $f(z')\neq f(z'')$ (این تابع‌ها را یك ارزشی گویند) ، در آن صورت $f'(z)\neq 0$ در D، و f

یك نگاشت یك به یك و همدیس حوزهٔ D در حوزهٔ $G=f(D)$ را تعریف می‌کند. قضیهٔ ریمان ــ قضیهٔ اساسی نظریهٔ نگاشت‌های همدیس ــ ثابت می‌کند که در هر حوزهٔ همبند، که توان آن شامل بیش از یك نقطه باشد، یك تابع تحلیلی یك ارزشی وجود دارد که به صورت همدیس، این حوزه را به روی دایره یا نیم صفحه، می‌نگارد.

اگر از معادله‌های کوشی ــ ریمان دیفرانسیل بگیریم، به سادگی می‌بینیم که قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $f=\varphi+j\psi$، که در حوزهٔ D تحلیلی هستند، در این حوزه در معادله‌های لاپلاس صدق می‌کنند:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

یعنی، تابع‌هایی همساز هستند. دو تابع همساز را، که به وسیلهٔ معادله‌های کوشی ــ ریمان به هم مربوط باشند، مزدوج گویند. در حوزهٔ همبند D، هر تابع همساز φ، دارای تابع مزدوج ψ می‌باشد که عبارتست از قسمت حقیقی یك تابع تحلیلی f در D. بستگی بین نگاشت‌های همدیس و تابع‌های همساز مبنای بسیاری از بررسی‌های مربوط به نظریهٔ تابع‌های تحلیلی است.

همهٔ آنچه که تاکنون گفتیم، مربوط به تابع یك تحلیلی یك ارزشی f است که در حوزهٔ مفروضی مثل D از صفحهٔ مختلط، مورد بررسی قرار گیرد، با طرح پرسش مربوط به امکان امتداد تابع f به عنوان تابع تحلیلی، به حوزهٔ بزرگتر، به مفهومی از تابع تحلیلی می‌رسیم که به طور کامل مورد بررسی قرار می‌گیرد، یعنی در تمامی حوزهٔ طبیعی که وجود دارد. ضمن چنین امتدادی از تابع مفروض، حوزهٔ تحلیلی بودن آن، که توسعه می‌یابد، ممکن است برخودش قرار گیرد، درحالی که مقادیر تازه‌ای برای تابع درنقطه‌هایی از صفحه (که تابع درآنجا معین است)، به دست آورد. به این ترتیب، تابع تحلیلی، وقتی که به طور کامل مورد بررسی قرارمی‌گیرد، در حالت کلی چند ارزشی از آب درمی‌آید. در بسیاری از مسأله‌های مربوط به نظریهٔ تابع‌ها، آگاهی از تابع‌های تحلیلی چند ارزشی، لازم است (تبدیل تابع‌ها، پیدا کردن شکل نخستین و ساختمان تابع تحلیلی، حل جبری معادله‌های باضریب های تحلیلی و غیره)، ازاین گونه تابع‌ها، می‌توان از $\mathrm{Arcsin}z, \ln z, \sqrt[n]{z}$، $\mathrm{Arctg}z$، تابع‌های جبری و غیره نام برد. روند منظمی که منجر به تابع‌های تحلیلی کامل شود، به نحوی که در حوزهٔ طبیعی وجود خود مورد بررسی قرار گیرد، به‌وسیلهٔ ویراشتراس طرح شد و نام امتداد تحلیلی هم‌متعلق به اوست.

به عنوان نقطهٔ عزیمت، مفهوم عنصر تابع تحلیلی:

یعنی رشتهٔ توانی با شعاع تقارب غیرصفر قرار دارد. این عنصر w_0:

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$$

یك تابع تحلیلی f را در دایرهٔ تقارب خود K_0، تعریف می‌کند. z_0 را، نقطه‌ای از دایرهٔ k می‌گیریم که با z_0 تفاوت دارد. تابع f را به مرکز نقطهٔ z_1 به رشتهٔ تیلور بسط می‌دهیم، عنصر تازهٔ w_1 به دست می‌آید:

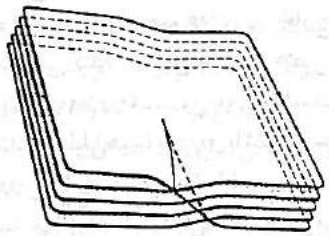
$$b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\cdots+b_n(z-z_0)^n+\cdots$$

که شعاع تقارب آن را k می‌نامیم. درقسمت مشترك دایره‌های k_0 و k_1 رشتهٔ w_1، به سمت همان تابعی متقارب می‌شود که رشتهٔ w_0، اگر دایرهٔ k_1 از مرزهای دایرهٔ k_0 خارج شود، در این صورت رشتهٔ w_1، تابعی را که به وسیلهٔ w_0 داده شده است، روی مجموعه‌ای در خارج k_0 (که در آنجا رشتهٔ w_0 متباعد است) معین می‌کند. در این حالت، عنصر w_1 را، امتداد تحلیلی همسایهٔ عنصر w_0 گویند. $w_0, w_1, \ldots, w_n$ را یك سلسله از عنصرهایی می‌گیریم که در آنها w_{i+1} امتداد تحلیلی همسایهٔ w_i باشد $(i=1,2,\ldots,N-1)$؛ در این صورت w_N را، امتداد تحلیلی عنصر w_0، به وسیلهٔ سلسله عنصرهای مفروض، می‌نامند. ممکن است، مرکز دایرهٔ k_N متعلق به دایرهٔ k باشد، ولی، عنصر w_N امتداد تحلیلی همسایهٔ عنصر w_0 نباشد. دراین حالت مجموع رشته‌های w_0 و w_N: در قسمت مشترك دایره‌های k_0 و k_N مقادیر متفاوتی دارند، با همین امتداد تحلیلی، می‌توان به مقدار تازه‌ای برای تابع در دایرهٔ k_0 رسد.

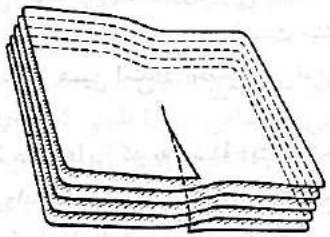
مجموعهٔ همهٔ عنصرهایی که به وسیلهٔ امتداد تحلیلی عنصر w_0 به‌دست آید، به مفهومی که وایراشتراس به‌کاربرده است، تابع تحلیلی کامل ناشی از عنصر w_0 نامیده می‌شود، از به هم‌پیوستن دایره‌های تقارب این عنصرها حوزهٔ تعریف این تابع به دست‌می‌آید. ازقضیهٔ یگانگی تابع تحلیلی نتیجه می‌شود که وقتی عنصر w_0 داده شده باشد، تابع تحلیلی، به مفهوم ویراشتراس، به طور کامل معین می‌شود. ضمناً می‌توان عنصر دلخواه دیگری را، که متعلق به این تابع است، به عنوان عنصر آغازی انتخاب کرد، که در اینصورت تابع تحلیلی کامل، تغییر نمی‌کند.

تابع تحلیلی کامل f، که به عنوان تابعی از نقطه‌های صفحه (که به حوزهٔ تعریف آن D، متعلق‌اند)، در حالت عمومی، چند ارزشی است. برای این‌که از این چند ارزشی بودن تابع f خلاص شویم، به جای اینکه f را، تابعی از نقطه‌های حوزهٔ مسطح D بگیریم، به عنوان تابعی از سطح چند

برگه‌ای R (واقع در بالای حوزهٔ R) می‌گیریم به‌نحوی که هر نقطهٔ حوزهٔ D، متناظر با تعدادی نقطه از سطح R باشد، (این تعداد برابر است با تعداد مقادیر مختلفی که تابع f ، در این نقطه ، اختیار می‌کند) در این صورت تابع f ، روی سطح R ، یك ارزشی می‌شود. فکر انتقال به چنین سطحی، که یکی از پربارترین و مهمترین اندیشه‌های ریاضی است، به وسیلهٔ ریمان مطرح شد و به همین مناسبت آنرا سطح ریمانی می‌گویند. شمای سطح ریمانی را برای تابع‌های $\sqrt[n]{z}$ و Lnz ، به ترتیب در شکلهای ۱ و ۲ داده‌ایم . تعریف انتزاعی مفهوم سطح ریمانی، اجازه می‌دهد که نظریهٔ تابع‌های تحلیلی چند ارزشی را ، به نظریهٔ تابع‌های یك ارزشی در سطح ریمانی، منجر کنیم.



شکل ۵



شکل ۶

حوزهٔ Δ ، متعلق به حوزهٔ تعریف D از تابع تحلیلی کامل f ، و عنصر w از تابع f ، به مرکز نقطه‌ای از حوزهٔ Δ را ، در نظر می‌گیریم . مجموعهٔ همهٔ عنصرهایی را که بتوان از امتداد تحلیلی عنصر w ، به وسیلهٔ زنجیری که مرکز آن‌ها متعلق به Δ باشد، به دست آورد، شاخهٔ تابع تحلیلی f گویند. شاخهٔ یك تابع تحلیلی چند ارزشی ، ممکن است در حوزهٔ Δ تابع تحلیلی یك ارزشی از آب درآید. مثلا، شاخه های دلخواهی از تابع‌های $\sqrt[n]{z}$ و Lnz که متناظر با هر حوزهٔ همبندی که شامل O نیست ، باشند، تابع‌هایی یك ارزشی هستند ، ضمناً ، در چنین حوزه‌ای ، $\sqrt[n]{z}$ درست n

و Lnz ، بی نهایت شاخهٔ مختلف ، دارد . جدا کردن شاخه‌های یك ارزشی (به یاری این و یا آن برش حوزهٔ تعریف) و مطالعهٔ آنها به وسیلهٔ نظریهٔ تابع‌های تحلیلی یك ارزشی، یکی از روش‌های اصلی برای بررسی تابع‌های تحلیلی چند ارزشی مشخص است.

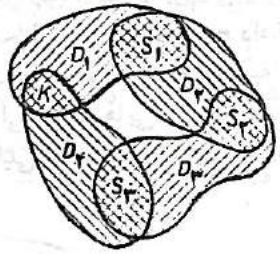
مفهوم تابع‌های تحلیلی چند متغیره را هم می‌توان به کمك رشته‌های توانی، کاملا شبیه تابع‌های تحلیلی یك متغیره، توضیح داد. تابع‌های تحلیلی با چند متغیر مختلط ، از نظر خاصیت‌های خود هم ، خیلی شبیه به تابع‌های تحلیلی با یك متغیر مختلط هستند، ولی ویژگی‌هایی هم دارند که مخصوص به آنهاست و به ویژگی‌های تابع‌های تحلیلی یك متغیره، شباهتی ندارد.

۳. امتداد تحلیلی

امتداد تحلیلی، عبارتست از گسترش تابعی که در حوزه‌ای تحلیلی است به حوزه‌ای وسیع‌تر. اگر $f_1(z)$ تابعی تحلیلی در حوزهٔ D_1 باشد و حوزهٔ D_2، قسمت مشترکی مثل S ، با حوزهٔ D_1 داشته باشد (شکل ۷)، ممکن است تنها یك تابع تحلیلی $f_2(z)$ در حوزهٔ D_2 وجود داشته باشد که در حوزهٔ S دارای همان مقادیر $f_1(z)$ باشد (یعنی برای هر نقطهٔ (z) از حوزهٔ S داشته باشیم $f_1(z)=f_2(z)$). تابع $f_2(z)$ را ، امتداد تحلیلی تابع $f_1(z)$ در حوزه D_2 گویند (برعکس ، $f_1(z)$ هم امتداد تحلیلی $f_2(z)$ در حوزهٔ D_1 است) . می‌توان تابع‌های $f_1(z)$ و $f_2(z)$ را قسمت‌هایی از یك تابع تحلیلی $f(z)$ در $D_1 \cup D_2$ به حساب آورد، که در حوزهٔ D_1 بر $f_1(z)$ و در حوزهٔ D_2 بر $f_2(z)$، منطبق است. این تابع $f(z)$ را امتداد تحلیلی تابع $f_1(z)$ در حوزهٔ گسترده‌تر $D_1 \cup D_2$ گویند و دوباره با علامت $f_1(z)$ نشان می‌دهند. اگر $f_2(z)$ ، امتداد تحلیلی $f_1(z)$ در حوزهٔ D_2 ، $f_3(z)$ امتداد تحلیلی $f_2(z)$ در حوزهٔ D_3 و

شکل ۷

$f_4(z)$ امتداد تحلیلی $f_3(z)$ در حوزهٔ D_4 باشد. در این صورت، این زنجیر امتدادهای تحلیلی تابع $f_1(z)$، در مجموع، امتداد تحلیلی $f_1(z)$ را در حوزهٔ گسترده‌تر $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ می‌دهد؛ حوزهٔ D_4 (و حتی D_3)، ممکن است با حوزهٔ D_1 قسمت مشترکی مثل K داشته باشد (شکل ۸)، ولی



شکل ۸

لزومی ندارد که مقادیر $f_1(z)$ در حوزهٔ K، برمقادیر $f_1(z)$ منطبق باشد، به این‌ترتیب، امتداد تحلیلی $f_1(z)$، منجر به‌مفهوم تابع‌های تحلیلی چندارزشی می‌شود، زیرا تابع امتداد یافتهٔ $f_1(z)$ ممکن است در حوزهٔ K، دو ارزشی باشد (و ضمن امتدادهای تحلیلی بعدی، حتی چند ارزشی)؛

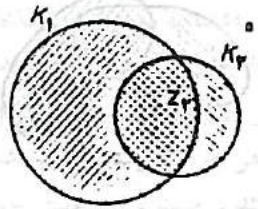
امتدادتحلیلی $f(z)$ را می‌توان به این‌ترتیب ساخت: فرض کنید، عنصر تابع تحلیلی $f(z)$ داده شده باشد، یعنی رشتهٔ توانی

$$a_0+a_1(z-z_1)+a_2(z-z_1)^2+\dots+a_n(z-z_1)^n+\dots$$

که عبارتست از $f(z)$ در دایرهٔ K_1، تابع $f(z)$ در حوالی نقطهٔ z_2، که‌در داخل دایرهٔ K_1 قراردارد، به صورت رشتهٔ توانی

$$b_0+b_1(z-z_2)+b_2(z-z_2)+\dots+b_n(z-z_2)^n+\dots$$

درمی‌آید که دایرهٔ تقارب آن K_2 است (و ممکن است K_2، به طورکامل بر K_1 منطبق نباشد) و عبارتست از امتداد تحلیلی $f(z)$ روی K_2 (شکل ۹)، این رشتهٔ توانی، امتداد تحلیلی رشتهٔ مفروض، نامیده می‌شود.



شکل ۹

به این‌ترتیب، عنصر اولیهٔ تابع $f(z)$، عنصرهای تازهٔ بی نهایت‌زیادی را (به مرکزی واقع در داخل K_1) معین‌می کندکه هرکدام از آنهامی‌تواند، به نوبهٔ خود مبنایی برای امتداد بعدی $f(z)$ باشد. اگر این روند امتداد، نامحدود باشد، تابع تحلیلی کامل (به مفهوم وایرشتراس) به دست می‌آید که در حالت کلی، چند ارزشی است و در حوزه‌ای مانند D، که حوزهٔ وجود تابع تحلیلی کامل $f(z)$ نامیده می‌شود، معین است.

مثال: ۱) به ازای امتداد تحلیلی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ از متغیر حقیقی، تابعی دو ارزشی $f(z)=\pm\sqrt{z}$ به دست می‌آید که حوزهٔ وجود آن‌تمامی صفحهٔ z به استثنای نقطهٔ بی نهایت دور و نقطهٔ $z=0$، است؛ ۲) به ازای امتداد تحلیلی تابع $f(x)=\ln x$، تابع بی نهایت ارزشی $f(z)=\mathrm{Ln}\,z$ به دست می‌آید.

مطلوب است محاسبهٔ حجم جسمی که ازدوران یک‌مکعب به‌ضلع a، دورقطرش به‌دست می‌آید.

پاسخ درصفحهٔ ۵۸

مثالی ازمعادلات تفاوتی

معادلات دیفرانسیلی در قلب آنالیز ریاضی جای دارند. کاربردهای فراوانی ازمعادلات دیفرانسیلی درعلوم مختلف وجود دارد به‌نحوی که مطالعه معادلات دیفرانسیلی جزئی جدا ناپذیر از مطالعه هر علم امروزی است. اما معادلات دیفرانسیلی کمبودهایی هم دارند. مثلا برای آنکه بشود برای تابعی معادلهٔ دیفرانسیلی نوشت، آن تابع حداقل در محدوده‌ای باید متصل باشد، درحالیکه دربسیاری موارد ما باتوابع منفصل سروکار داریم. معادلات تفاوتی رشته‌ای از ریاضی است که کوشش در از بین بردن این کمبودهای معادلات دیفرانسیلی می‌کند. دراین معادلات به جای آنکه از دیفرانسیل تابع صحبت شود ازتفاوت تابع به‌ازای مقادیر مختلف متغیر صحبت می‌شود. یعنی دراینجا سروکارما باتفاوتها است ونه بادیفرانسیل‌ها. دربارهٔ این بخش ریاضی مطالب بسیاری نوشته شده است. قضایا و کاربردهای بسیاری هم برایش پیدا شده است. هدف این مقاله پرداختن تفصیلی ویا تئوریك دربارهٔ معادلات تفاوتی نیست، بلکه ارائه مثالی بسیار ساده وحل آن می‌باشد. هدف ازاینکار فقط این است که خواننده از وجود این بخش ریاضی آگاه باشد. لازم به‌تذکر است که معادلات تفاوتی دراقتصاد وسایر علوم اجتماعی که باتوابع منفصل سروکار دارند، کاربردهای فراوانی دارد.

مثال: فرض کنید که یك دستگاه مخابراتی داریم، که می‌تواند دو علامت S_1 و S_2 را مخابره کند. (مثلا نقطه وخط درتلگراف). برای مخابرهٔ پیامی ازیك کانال مخابراتی، اول پیام را به یك ردیف از علائم S_1 و S_2 ترجمه کرده، آنگاه آنها را مخابره می‌کنیم (درست مثل تلگراف). همچنین فرض کنید که برای فرستادن علامت S_1، t_1 واحدزمان احتیاج‌داریم وبرای فرستادن علامت S_2، t_2 واحد زمان احتیاج داریم.

فرستادن هرپیام به‌نسبت اینکه چندعلامت S_1 و چند علامت S_2 داشته باشد مقداری وقت می‌گیرد. N_t تعداد پیام‌هایی است که برای فرستادن آنها t واحد زمان لازم است. مسأله ماهم پیدا کردن N_t می‌باشد.

اول، به‌پیام‌هایی توجه کنید که‌زمان فرستادنشان t می‌باشد، ولی‌درعین حال علامت آخر پیام S_1 است. چون برای فرستادن بقیه پیام $t-t_1$ واحد

زمان لازم است. تعداد پیام‌هایی که فرستادنشان $t-t_1$ واحد زمان وقت می‌گیرد برابر با N_{t-t_1} می‌باشد، و هرکدام ازاین پیام‌ها با افزودن یك S_1 به‌پیامی بازمان t تبدیل می‌شود. پس تعداد پیام‌هایی که زمان فرستادنشان t واحد است و به S_1 ختم می‌شوند برابر با N_{t-t_1} است. ازطرف دیگر، با همین استدلال تعداد پیام‌هایی بامدت زمان t که به S_2 ختم می‌شوند برابر با N_{t-t_2} است. پس رویهمرفته داریم:

$$N_t = N_{t-t_1} + N_{t-t_2}$$

حالا، فرض کنیم $t_1 = 1$ و $t_2 = 2$ است، یعنی برای فرستادن یکی‌از علائم دوبرابر دیگری وقت لازم است. در اینصورت پیدا کردن N_t منجر به حل معادلهٔ تفاوتی زیر می‌شود:

$$N_t = N_{t-1} + N_{t-2}$$

باتغییر متغیری ساده از t به $t+2$ این معادله را می‌شود به‌صورت:

$$N_{t+2} - N_{t+1} - N_t = 0 \qquad t = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

نوشت.

این مثالی ازیك معادلهٔ تفاوتی همگن، خطی، ازمرتبهٔ دوم وبا ضرایب ثابت است. توجه داشته باشید که تابع N_t تابعی متصل نیست وفقط به ازای مقادیر صحیح t، مقداری دارد. همچنین مقدار این تابع برای t، بستگی به مقدار تابع برای $t+1$ و $t+2$ دارد، و به‌اینجهت این معادله‌ای از مرتبهٔ دوم است. برای حل‌این معادلات راه‌حلی کلی وجود دارد، دراینجا ما به‌راه حل کلی کاری نداریم، بلکه به‌حل این معادلهٔ بخصوص می‌پردازیم.

حل: ببینیم آیا N_t می‌تواند یك توان باشد؟ یعنی $N_t = m^t$ را در معادله امتحان می‌کنیم.

$$N_t = m^t \Rightarrow N_{t+1} = m^{t+1} \Rightarrow N_{t+2} = m^{t+2}$$

و

$$m^{t+2} - m^{t+1} - m^t = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

پس $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$ و $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$ هردوجوابی برای معادلهٔ (۱) می‌باشند. ولی جواب کلی کدام است؟ توجه داشته باشید که به‌آسانی دیده می‌شود که اگر x_t و y_t هردوجوابی برای معادلهٔ (۱) باشند آنگاه $z_t = c_1 x_t + c_2 y_t$ هم درمعادله صدق می‌کند.

پس $c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t+c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$ هم درمعادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

حال ما ادعا می‌کنیم که هرجواب معادلهٔ (۱) را می‌شود به‌صورت بالا درآورد، یعنی جواب کلی معادلهٔ (۱) عبارتست از:

$$N_t=c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t+c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

برای اثبات این ادعا فرض کنید x_t درمعادلهٔ (۱) صدق می‌کند. توجه داشته باشید که اگر مقدار x_0 و x_1 را بدانیم تمام مقادیر x_t را می‌دانیم، چرا که x_2 ازمعادلهٔ

$$x_2=x_1+x_0$$

به‌دست می‌آید و بعد از به‌دست آمدن x_2، x_3 ازمعادلهٔ

$$x_3=x_1+x_2$$

به‌دست می‌آید و الاآخر.

درنتیجه اگر x_t و y_t هر دو درمعادلهٔ (۱) صدق کنند، وداشته باشیم $x_0=y_0$ و $x_1=y_1$ آنگاه $x_t=y_t$ خواهد بود، زیرا همانطور که نشان دادیم مقادیر تابع برای $t=0$ و $t=1$ تابع‌را کاملامشخص می‌کند. پس برای اینکه x_t را به صورت جواب کلی بالا درآوریم، کافی است کاری کنیم که مقدار x_t به‌ازای $t=0$ و $t=1$ برابر مقدار تابع

$$y_t=c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t+c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

به ازای همین مقادیر شود، و این کار ساده‌ای است. c_1 و c_2 را طوری می‌یابیم که در دومعادلهٔ زیر صدق کنند:

$$x_0=y_0=c_1+c_2$$

$$x_1=y_1=c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

واینکاریعنی حل یك‌دستگاه دومعادله دومجهولی ممکن‌است. بااینکار $x_t=y_t$ می‌شود، و درنتیجه x_t هم به‌صورت جواب کلی درمی‌آید.

پس، جواب کلی معادلهٔ (۱) عبارتست از:

$$N_t=c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t+c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

اگر مقادیر، N_0 و N_1 را بدانیم می‌توانیم c_1 و c_2 را پیدا کنیم. با توجه به‌معنی N_t، $N_0=0$ و $N_1=1$ می‌گیریم. که دراینصورت:

$c_1=\frac{-1}{\sqrt{5}}$ و $c_2=\frac{+1}{\sqrt{5}}$ می‌شود. یعنی:

$$N_t=\frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

توجه کنید که باتوجه به $N_0=0$ و $N_1=1$ و $N_{t+2}=N_{t+1}+N_t$ به‌آسانی می‌شود N_t را برای مقدارهای معین t پیدا کرد:

$$N_0=0 \text{ و } N_1=1\,,\ N_2=1\,,\ N_3=2\,,\ N_4=3\,,$$
$$N_5=5\cdot N_6=8\,,\ N_7=13\,,\ \dots$$

واین همان دنبالهٔ فیبوناچی است. ما با راه حل خود فرمولی برای به دست آوردن جمله‌های دنبالهٔ فیبوناچی هم به‌دست آورده‌ایم. به‌ازای مقادیرمختلف t، تابع

$$N_t=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

جمله‌های فیبوناچی را به دست می‌دهد. آیا می‌توانید مستقیماً ثابت کنید که به‌ازای مقادیر صحیح t، N_t مقداری صحیح است؟

ظرفیت یك‌کانال مخابراتی، c، طبق فرمول زیرتعریف شده است.

$$c=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{\log_2 N_t}{t}$$

برای محاسبهٔ ظرفیت این کانال مخابراتی

$$m_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ و } m_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

می‌گیریم. توجه کنید که $\left|\frac{m_2}{m_1}\right|<1$ و درنتیجه $\underset{t\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^t=0$ است. حال

$$c=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{\log_2(c_1m_1^t+c_2m_2^t)}{t}=$$

$$=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{\log_2 m_1^t\left[c_1+c_2\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^t\right]}{t}$$

$$=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}\left[\log_2 m_1+\frac{\log_2\left[c_1+c_2\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^t\right]}{t}\right]$$

$$=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}\ \log_2 m_1=\log_2 m_1$$

که اگر بجای m_1 مقدارش را بگذاریم بدست می‌آید

$$c=0/7$$

ظرفیت یك کانال مخابراتی به نحوی نشان دهندهٔ قابلیت یك کانال

مخابراتی در مخابرهٔ پیام‌های متنوع است. بحث راجع به‌معادلات تفاوتی و همچنین کانالهای مخابراتی بحثی طولانی و جالب است، برای اطلاعات کاملتر به‌منابع زیر مراجعه کنید:

برای معادله‌های تفاوتی

S. Goldberg, *Difference Equations*, John wiley & Sons, Inc; 1958.

وبرای نظریهٔ ریاضی مخابرات

C.E. Shannon & w.weaver, *The mathematical Theory of Communication*, Univ. of Illinois Press, 1949.

امروز شیمی داریم.

علیرضا امیرمعز

مربع‌های سحری

دراین مختصرصورتهای مختلف مربع‌های سحری را بررسی می کنیم. منظور به‌دست‌آوردن مربع‌ها نیست. فقط‌ازمربع‌هائی که دردست است انواع دیگری به دست می‌آوریم.

۱- مربع‌های سه درسه: اگر به روش تجربه بپردازیم، به آسانی می‌توان مربع سحری زیر را به دست‌آورد (شکل ۱).

۲	۹	۴
۷	۵	۳
۶	۱	۸

ش ۱

اکنون این مربع بخصوص را بررسی می کنیم. ملاحظه می‌شود که می‌توان صفر را درمرکز مربع قرارداد و اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را به ترتیب شکل ۲ نوشت.

۱	۲	۳
۴	۰	۴
۳	۲	۱

ش ۲

سپس‌بعضی از اعدادکه مقابل یکدیگرند به‌منفی بدل می کنیم(شکل۳)

۱	۲	—۳
—۴	۰	۴
۳	—۲	—۱

ش ۳

ملاحظه می‌شود که مجموع اعداد هر سطر یا هر ستون یا هرقطر صفر است . هرگاه عدد ثابتی به تمام اعداد شکل ۳ اضافه کنیم مربع سحری دیگری به دست می‌آید. مثلا، هرگاه ۵ به همه اعداد اضافه کنیم شکل ۱ با قدری تغییر بدست می‌آید (شکل ۴).

۶	۷	۲
۱	۵	۹
۸	۳	۴

ش ۴

هرگاه به‌اعداد شکل ۴ عدد ۵ را اضافه کنیم مربع سحری دیگری به دست می‌آید (شکل ۵).

۱۱	۱۲	۷
۶	۱۰	۱۴
۱۳	۸	۹

ش ۵

ملاحظه می‌شود که اعدادی که در مربع های سحری به‌کار رفته‌اند اعداد طبیعی پشت سرهم‌اند. نتیجه می‌شود که با هر مجموعهٔ نه عدد طبیعی پشت‌سرهم می‌توان مربع سحری ساخت. در واقع می‌توان گفت که با نه‌جمله هر تصاعد عددی که قدر نسبت آن، واحد باشد یك مربع سحری ساخته می‌شود .

اکنون این‌مربع سحری را ازنظر دیگر بررسی‌می‌کنیم. هرگاه اعداد شکل ۴ را در عدد ثابتی مانند d ضرب کنیم، مربع سحری دیگری به دست می‌آید. مثلا ، اگر $d = ۲$ باشد، مربع زیر به دست می‌آید (شکل ۶).

۱۲	۱۴	۴
۲	۱۰	۱۸
۱۶	۶	۸

این مربع سحری از نه عدد طبیعی جفت ساخته شده است.

از دو موضوع بالا نتیجه می‌شود که از هر نه جملهٔ یك تصاعد عددی می‌توان مربع سحری ساخت. فرض کنیم که

$$a+d\,,\ a+۲d\,,\ \dots\,,\ a+۹d$$

نه‌جملهٔ یك تصاعد عددی باشد . همه جمله‌ها را بر d تقسیم می کنیم . از اینرو تصاعد زیر بدست می‌آید.

$$۱+\frac{a}{d},\ ۲+\frac{a}{d},\ \dots,\ ۹+\frac{a}{d}.$$

روشن است که با اضافه‌کردن $\frac{a}{d}$ به اعداد مربع شکل ۴ یك مربع سحری ساخته می‌شود . سپس تمام اعداد این مربع را در d ضرب می کنیم تا مربع سحری مطلوب به دست آید.

۲- مربع سحری چهار در چهار : مشهورترین مربع‌های سحری چهار درچهار مربع زیر است (شکل ۷).

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

ش ۷

این مربع بخصوص، مالیخولیا (melancolia) نام دارد وآنرا به البرشت دورر (Albrecht Dürer)نسبت می‌دهند.

در واقع این مربع، ازچند جهت سحری است. علاوه براینکه مجموع اعدادهرستون‌یاهرسطریاهرقطر ۳۴ است، چهارعددمربع‌های‌مرکزی‌هم رویهم ۳۴ می‌شوند . درکنارمربع بعضی حاصل جمع‌ها ۱۷ می‌شود. کشف‌خواص دیگر این مربع را به‌خواننده واگذار می کنیم.

ملاحظه می‌شودکه هرگاه این مربع سحری را پایه قرار دهیم، از آن مربع‌های دیگری به دست می‌آید. بخصوص آنچه در بخش یك بررسی شد تکرارمی‌شود.

هرگاه شانزده جمله پشت سرهم یك تصاعد عددی را در نظربگیریم ، ازآن می‌توان یك مربع چهاردرچهار سحری ساخت. برهان کاملا شبیه بخش یك است.

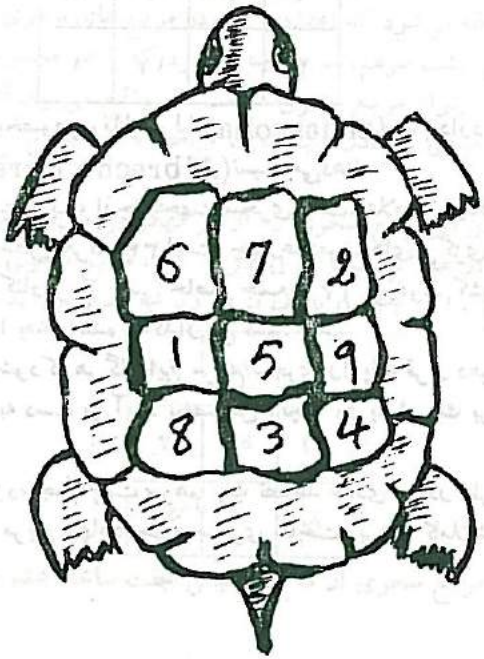
۳. مربع‌سحری رتبه ۵ : اکنون یك مربع سحری که از اولین بیست و پنج عدد طبیعی ساخته می‌شود می‌نویسیم (شکل ۸) .

۲۰	۸	۲۱	۱۴	۲
۱۱	۴	۱۷	۱۰	۲۳
۷	۲۵	۱۳	۱	۱۹
۳	۱۶	۹	۲۲	۱۵
۲۴	۱۲	۵	۱۸	۶

ش ۸

مربعهای سحری دیگر ۵ در ۵ وجود دارد . فقط خواننده به آسانی می‌تواند اعداداین جدول‌را با ۲۵ جمله پشت سرهم یك تصاعد عددی عوض کند. برهان مانند همان بخش یك است.

۴ـ تاریخچه مربعهای سحری : امپراطور چین بنام (Yu) در سال ۲۲۰۰ قبل ازمیلاد طرز به دست‌آوردن مربع‌های سحری را بر پشت‌لاك‌پشت مقدس نوشت. روشهای جدید همه از آسیا به اروپا رفته است. مثلا ، دلالوبر



(De la Loubere) که سفیر لوئی ۱۴ در سیام بود در سال ۱۶۸۸ موضوع مربع‌های سحری را با خود به اروپا برد.

در زمان قدیم مربع‌های سحری‌را بعنوان طلسم به‌کار می‌برده‌اند. هنوز این طلسم‌ها در موزه‌ها موجود است.

انواع دیگری از مربع‌ها موجود است که مربع یونان و لاتینی (Greco–Latin) نام دارد. امروزه این مربع‌ها در ریاضیات کاربسته‌قابل استفاده‌اند و تنها موضوع تفریحی نیستند.

ایزومرفیسم روی مربع‌های سحری

تا این جا ، به توضیح بعضی از انواع مربع‌های سحری پرداختیم ، اکنون ازموضوع **ایزومرفیسم** استفاده می‌کنیم و مربع‌های سحری‌دیگری به دست می‌آوریم .

۱ـ مثال : مربع‌سحری نه‌عددی مشهور را درنظرمی‌گیریم (شکل ۴). آنگاه جدول زیر را می‌نویسیم:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
f(x)	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲

ملاحظه می‌شود که این جدول را از تابع

$$f(x)=2^x$$

ساخته‌ایم. این تابع ایزومرف است. ملاحظه می‌شود که

$$f(x_1+x_2)=2^{x_1+x_2}=(2^{x_1})(2^{x_2})=f(x_1)f(x_2)\,.$$

جمع در میدان (Domain) تابع با ضرب در دامنه (Range) آن رابطه یك به یك دارد. هرگاه به جای اعداد شکل ۱ ایزومرفهای آنها را بگذاریم، یك مربع سحری ضربی به دست می‌آید (شکل ۹).

۶۴	۱۲۸	۴
۲	۱۲	۵۱۲
۲۵۶	۸	۱۶

ش ۹

در این مربع حاصل ضرب اعداد هر سطر یا هرستون یا هر قطر برابر ۳۲۷۶۸ می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شود که

$$32768=2^{15}$$

۲ـ ایزومرفیسم: دو مجموعه S و T از اعداد حقیقی را در نظر می‌گیریم به قسمی که هریك دارای عمل دوتائی خودش باشد. ایزومرفیسم میان S و T رابطه‌ای یك‌به‌یك است که عمل دوتایی را حفظ کند. هرگاه S و T مجموعه‌های محدود باشند، عده اعضای آنها برابر باید باشد.

مثال۱: فرض کنیم که S مجموعه همه اعداد حقیقی بین ۳ و ۶ وخود ۳ و ۶ باشد و T مجموعه تمام اعدادحقیقی میان 2^3 و 2^6 و خود 2^3 و 2^6. عمل دوتائی S را به دست آوردن میانگین عددی می‌گیریم؛ به این معنی که اگر a و b در S باشند، داریم

$$a*b=\frac{a+b}{2}\,.$$

عمل دوتائی S را به‌دست‌آوردن واسطه هندسی می‌گیریم؛ یعنی برای p و q که در T باشند، داریم

$$p\circ q=\sqrt{pq}$$

تابع f را روی S به T بقرار زیر تعریف می‌کنیم

$$f(a)=2^a$$

از اینرو

$$f(a*b)=f\left[\frac{a+b}{2}\right]=2^{\frac{a+b}{2}}$$

$$=\sqrt{2^{a+b}}=\sqrt{2^a}\,\sqrt{2^b}=f(a)\circ f(b)\,.$$

از طرف دیگر

$$f^{-1}(p)=\log_2 p\,.$$

بنابراین

$$f^{-1}(p\circ q)=\log_2(\sqrt{pq})$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log_2 p+\log_2 q\right]=\frac{f^{-1}(p)+f^{-1}(q)}{2}\,.$$

درنتیجه f یك ایزومرفیسم روی S به T است.

باید ملاحظه کرد عمل‌های دوتایی روی عدد T شرکت‌پذیر نیستند. مثلا، هرگاه a، b و c در S باشند، نتیجه می‌شود که

$$a*(b*c)=\frac{1}{2}\left[a+\frac{b+c}{2}\right]=\frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{c}{4}\,,$$

همچنین

$$(a*b)*c=\frac{1}{2}\left[\frac{a+b}{2}+c\right]=\frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2}\,.$$

همچنین اگر p، q، r در T باشند، داریم

$$p\circ(q\circ r)=\sqrt{p\sqrt{qr}}$$

و

$$(p\circ q)\circ r=\sqrt{\sqrt{pq}\,r}$$

با اینکه به دست آوردن واسطه عددی یا واسطه هندسی شرکت پذیر نیست، باز می‌توان مربع‌های سحری با این عمل‌های دوتائی ساخت.

مثال۲: فرض کنیم که S و T هردو مجموعهٔ اعداد حقیقی باشند. عمل دوتائی S را جمع معمولی می‌گیریم. هرگاه p و q در T باشند، عمل دوتائی را بقرار زیر تعریف می‌کنیم.

$$p*q=p+q-r\,,$$

که در آن r **عددی است ثابت.**

تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$f(x)=ax+r=y\,.$$

این تابع روی S به T است، $a\neq 0$ و r عددی است ثابت. ملاحظه می‌شود که

$$f^{-1}(y)=\frac{y-r}{a}=x\,.$$

بنابراین تابع یك‌به‌یك است.

از طرف دیگر

$$f(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)+r\,.$$

$$f(x_1)*f(x_2)=[ax_1+r]+[ax_2+r]-r$$
$$=a(x_1+x_2)+r=f(x_1+x_2)\,.$$

از این‌رو f ایزومرفیسم است.

۳ـ کاربرد: هرگاه‌مربع‌سحری در دست‌باشد، می‌توان‌عناصر آن‌را با ایزومرفهایشان عوض‌کرد. با این روش مربع تازه‌ای به دست می‌آید که تحت عمل دوتائی تازه سحری است. ساده‌ترین مثال $f(x)=kx$ است که درآن $k\neq 0$ می‌باشد. واضح است‌که این تابع حالت خاص مثال ۲ بخش۲ می‌باشد. به این ترتیب از شکل یك مربع زیر بدست می‌آید (شکل ۱۰).

۶k	۷k	۲k
k	۵k	۹k
۸k	۳k	۴k

ش ۱۰

خواننده‌می‌تواند مربع سحری دیگری در نظر بگیرد و ایزومرفهای آنها را بنویسد.

عددی چهار رقمی پیدا کنید که بامجذور عددی که از دورقم آخر آن درست شده است، برابر باشد.

پاسخ درصفحهٔ ۴۷

بوریس ولادیمیروویچ بولگارسکی
ترجمهٔ پرویز شهریاری

پیشرفت ریاضیات در هند در سده‌های میانه

مدرك‌های موجود و گواهی‌های تاریخ، دربارهٔ بستگی‌های بین یونان و هند، اشاره‌های کمی دارد و به سختی می‌توان داوری کرد که این بستگی‌ها، تا چه اندازه، در مبادلهٔ آگاهی‌های علمی بین ملت‌های این دو کشور، مؤثر بوده است. در بعضی موارد، می‌توان، اثری را که دانش یونانی، برپیشرفت آگاهی‌های علمی هند داشته است، پیدا کرد، ولی، بدون تردید، تأثیر متقابل آنهم وجود داشته است. با وجود این، روشن است که این تأثیر متقابل، در روند کلی پیشرفت آگاهی‌های ریاضی، به هیچ‌وجه مانعی برای بروز استعدادهای خلاقهٔ هیچ کدام از این دو ملت نشد و هرکدام از آنها، مسیر اختصاصی خود را ادامه دادند. و همانطور که خواهیم دید، مسیر یونانی‌ها و هندی‌ها، به کلی با هم متفاوت بود. اگر، یونانی‌ها، بیش از همه به هندسه پرداختند، هندی‌ها، برعکس، تکیهٔ کارشان را برحساب و جبر و مثلثات گذاشتند. این احتمال وجود دارد که هندی‌ها، آگاهی‌های هندسی خود را، از مؤلفین یونانی و به خصوص هرون و بعضی دیگر از دانشمندان مکتب اسکندریه، گرفته باشند. از طرف دیگر، این احتمال وجود دارد که دیوفانت در تنظیم اثر اساسی خود، که مربوط به جبر است، تحت‌تأثیر کار هندی‌ها بوده است. ولی، این تأثیر متقابل هرچه باشد، این نکته مسلم است که یونانی‌ها، در کارهای ریاضی خود، از بیان منطقی دقیق، پیروی می‌کردند و به ندرت متوجه کاربرد عملی نتیجه‌هایی که از نظریه‌های قیاسی هندسه به دست می‌آورند، بودند، در حالی که هندی‌ها برعکس، به اثبات دقیق نمی‌پرداختند و بیش از همه، به پیشرفت محاسبه‌های عمومی چشم داشتند.

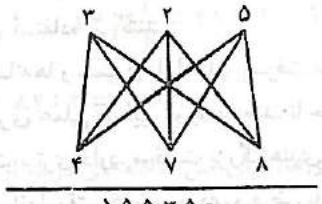
هندی‌ها به خصوص در زمینهٔ حساب، خیلی کار کردند. ریاضیات به خصوص از بابت تعیین نمادهایی برای رقم‌های دستگاه دهدهی عدد نویسی و به وجود آوردن اصل موضعی بودن رقم‌ها (یعنی این که، مقدار واحد هررقم، بستگی به جای آن داشته باشد) به هندی‌ها مدیون است. به جز این، در هند، برای صفر، نمادی در نظر گرفتند و کاربرد گستردهٔ آن را، برای نشان دادن جای خالی رقم‌ها، معین کردند، که اهمیت بسیار زیادی در پیشرفت عددنویسی و ساده کردن عمل‌های محاسبه‌ای دارد.

از این که، در چه شرایطی و کی، رقم‌های نوشتنی، در هند به طور گسترده معمول شده است، اطلاعی نداریم، ولی می‌توان با اطمینان کامل گفت که نمادهای عددی و کاربرد صفر، برای اخترشناسان هندی در سده‌های پنجم و ششم میلادی کاملاً معلوم و شناخته بوده است. آریابهاتا (متولد ۴۷۶ـ سال مرگش معلوم نیست)، ریاضی‌دان و اخترشناس هندی، اثری دارد به نام «آریابهاتیا». آریابهاتا، دربخش نخست کتاب خودنمادهای عددها را به کار می‌برد، اگرچه، این نشانه‌ها از نظر شکل خود، با رقم‌های امروزی تفاوت دارد، ولی، به هرحال می‌توان شباهتهای زیادی بین آنها پیدا کرد. مثلاً بین نمادهای هندی که برای واحد، هفت و صفر به کار می‌رفته است، با نمادهای امروزی، شباهت زیادی وجود دارد. بقیهٔ نشانه‌ها، در جریان سده‌های بسیاری، که ما را از خاستگاه آنها جدا می‌کند، به کلی تغییر شکل داده‌اند، با وجود این، در خود هند هم، در جاهای مختلف، طرز نوشتن رقم‌ها متفاوت بوده است. بعضی مدرک‌ها نشان می‌دهد که نشانه‌های رقم‌ها، پیش از کشف صفر و پیش از به وجود آمدن اصل موضعی بودن رقم‌ها، پیدا شده است. مثلاً این وضع که در سیلان، از همان رقم‌های هندی استفاده می‌شده است، بدون اینکه نشانه‌ای برای صفر داشته باشند و بدون اینکه اصل موضعی بودن رقم‌ها را رعایت کنند، یکی از دلایلی است که ما را در این مورد قانع می‌کند.

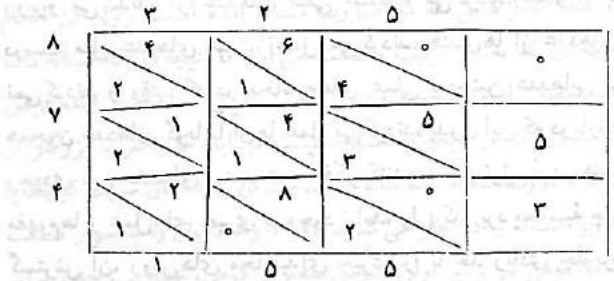
به کار بردن صفر، رقم‌ها واصل موضعی بودن مقدار آنها، به ساده کردن عمل‌های مربوط به عددها خیلی کمك کرد، و به همین مناسبت، محاسبهٔ حسابی در هند، پیشرفت فوق‌العاده‌ای کرد. امتیاز بزرگ روش عدد نویسی هندی در این است که تعداد رقم‌ها را خیلی کاهش می‌دهد و این، به خاطر به کاربردن دستگاه موضعی در عدد شماری دهدهی و استفاده از علامت صفر است در حالی که یونانی‌ها، یهودی‌ها، سوری‌ها و غیره از ۲۷ نشانهٔ مختلف برای نوشتن عددها استفاده می‌کردند. هندی‌ها تعداد این علامت‌ها را تا ۱۰ عدد پایین آوردند، که ضمناً شامل علامت صفر هم بود. البته بابلی‌ها هم از دستگاه موضعی استفاده می‌کردند، منتهی، در آنجا این دستگاه را برای عدد شماری شصت شصتی به کار می‌بردند، در حالی که هندی‌ها، آن را وارد در عدد شماری دهدهی کردند. بالاخره، استفاده از علامتی برای صفر در دستگاه موضعی، عدد نویسی هندی را به مراتب ساده‌تر از عدد نویسی بابلی کرد. مثلاً، برای بابلی‌ها، علامتی که برای ۱ به کار برده می‌شد، می‌توانست هم نمایندهٔ واحد و هم نمایندهٔ $\frac{1}{60}$ و هم به طور کلی، نمایندهٔ هر عدد به صورت ۶۰ باشد، در حالی که در عدد نویسی هندی، علامت ۱، تنها نمایندهٔ واحد بود، زیرا برای نشان دادن ده، صد و

غیره، بعداز واحد، هر تعداد صفر که لازم بود، قرار می‌دادند.

هندی‌ها، عدد نویسی و عمل‌های حسابی را روی تختهٔ سفیدی که پر از شن قرمز بود، انجام می‌دادند و از یك تکه چوب، برای نوشتن استفاده می‌کردند. این تکه چوب را روی سطح قرمز تخته می‌کشیدند و علامت‌ها به رنگ سفید ظاهر می‌شد. روش‌های هندی نوشتن، خیلی پیچیده‌تر از امروز بود، با وجود این، هندی‌ها تقریباً برای هر عملی چند روش مختلف، داشتند که بعضی از آنها بسیار جالب و عملی است. به خصوص، بعضی از روش‌های ضرب آن‌ها، جالب و آموزنده است. از این روش‌ها امروز هم می‌توان به عنوان روشن کردن روند محاسبه، در مدرسه استفاده کرد. برای نمونه، دو روش ضرب را می‌آوریم. روش اول، به «ضرب چلیپایی» مشهور است، خود هندی‌ها، آنرا «ضرب برق آسا» می‌نامیدند، زیرا به کمك آن، ضرب‌ها را خیلی سریع، انجام می‌دادند. این روش براین اساس است که در حاصل ضرب دو عدد، واحد تنها از ضرب واحدهای دو عدد به دست می‌آید، دهگان حاصل ضرب از ضرب دهگان در واحد، سدگان از ضرب دهگان در دهگان و سدگان در واحد، هزارگان، از ضرب سدگان در دهگان و هزارگان در واحد به دست می‌آید و غیره. این روش اجازه می‌داد که بدون نوشتن حاصل ضربهای جزیی، یکباره حاصل ضرب کل را بنویسند. و البته، ضمن محاسبه، می‌بایست واحدها، دهها، سدها و هزارها و غیره را در ذهن خود با هم جمع کنند. مثلاً برای ضرب ۳۲۵ در ۴۷۸ به این ترتیب می‌نوشتند (شکل ۱).



شکل ۱



شکل ۲

روش دومی که هندی‌ها برای ضرب به کار می‌بردند، به «ضرب در خانه‌ها» معروف است، این روش چنین است: شبکه‌ای از خانه‌های مستطیلی رسم می‌کردند که تعداد ستونهای آنها به اندازهٔ تعداد رقم‌های یکی از عامل‌های ضرب و تعداد سطرهای آن، به اندازهٔ تعداد رقم‌های عامل دوم ضرب باشد. عامل ضرب اول را روی شبکه و از چپ به راست و عامل دوم را در سمت چپ شبکه و از پایین به بالا می‌نوشتند، به نحوی که هر رقم درست برابر یکی از خانه‌های شبکه باشد. بعد، یکی از قطرهای هر مستطیل را (از گوشهٔ چپ بالا به گوشهٔ راست پایین) رسم می‌کردند. هر رقم عامل اول ضرب را در هر کدام از رقم‌های عامل دوم، ضرب می‌کردند، حاصل ضربی را که به دست می‌آمد، در خانهٔ محل برخورد سطر و ستون مربوط به این دو رقم، می‌نوشتند، ضمناً اگر این حاصل ضرب جزیی، دو رقمی بود، یکان را بالای قطر و دهگان را در زیر قطر مستطیل، یاداشت می‌کردند. حاصل ضرب کل، از این جا به دست می‌آمد که رقم‌هایی را که به صورت قطری و در خانه‌های مثلثی قرار گرفته‌اند با هم جمع کنیم و نتیجهٔ این جمع را در سمت راست و پایین شبکه بنویسیم. به عنوان مثال، ضرب ۳۲۵ در ۴۷۸ را در شکل ۲ دیده می‌شود.

در هند، همراه با پیشرفت عمل‌های حسابی، روش استفاده از نشانه‌ها هم شکل می‌گرفت، و مرحلهٔ نخستین تنظیم رابطه‌ها و فرمول‌ها به وجود می‌آمد. البته، در این مرحله، هنوز به نشانه‌های جبری به مفهومی که امروز می‌شناسیم، برخورد نمی‌کنیم، ولی، می‌بینیم که هندی‌ها، جبر را تا مرحلهٔ بالایی جلو برده‌اند و در نوشته‌های خود از نشانه‌های اختصاری استفاده می‌کنند.

به وجود آمدن نشانه‌ها و سمبول‌ها، امکان پیشرفت مقدمات جبر را در هند فراهم کرد. محاسبه‌های جبری عملی در این دوره، در هند، تا حد زیادی بر جبر یونانی و از آن جمله جبر دیوفانت برتری دارد. موفقیت بزرگ هندی‌ها این بود که عددهای منفی را در جبر وارد کردند. آنها، وقتی که با موجودی و قرض یا حرکت در دو جهت مختلف روبرو می‌شدند، از عددهای منفی استفاده می‌کردند. هندی‌ها با عددهای منفی درست مثل عددهای مثبت، عمل می‌کردند. هندی‌ها از عددهای گنگ هم فرار نمی‌کردند و وقتی که در محاسبه‌های عملی به چنین عددهایی برخورد می‌کردند همچون عددهای گویا با آن‌ها عمل می‌کردند، بدون این که دربارهٔ طبیعت و واقعیت وجودی این عددهای جدید عمیقاً فکر کنند. به این ترتیب، در هند، پایه‌های نظری مفهوم‌ها و عمل‌های جبری به وجود نیامد، ولی کار برد محاسبهٔ جبری و پیشرفت و گسترش آن، روش‌های محاسبه‌ای جبری را تا حد زیادی جلو برد.

دانشمندان هندی، معادله‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم را حل می‌کردند. یکی از

روشهایی که آن‌ها برای حل مسأله‌های حسابی و معادله‌های درجهٔ اول به کار می‌بردند، روش معکوس بود. این روش چنین است: مسأله را از آخر یعنی از عدد معلومی آغاز می‌کنیم که در نتیجهٔ انجام عمل‌هایی روی عدد مجهول به دست آمده است. در روش معکوس باید عمل‌هایی را که در مسأله توصیه شده است، از آخر و در جهت عکس ادامه دهیم تا به عدد مجهول برسیم. آریا بهاتا، روش معکوس را در کتاب خود شرح می‌دهد، ولی این شرح به قدری کوتاه است که برای افراد ناوارد به کلی نامفهوم است.

آریا بهاتا می‌گوید: «ضرب را به تقسیم و تقسیم را به ضرب تبدیل کن، افزایش را به کاهش و کاهش را به افزایش تبدیل کن» مثال مربوط به حل یا روش معکوس را در نوشتهٔ بهاسکارا (۱۱۱۴ـ مرگ بعد از ۱۱۷۸) می‌توان پیدا کرد. مسأله چنین است:

«دختر زیبا، تو که چشمهای درخشانی داری، تو که می‌دانی چگونه از روش معکوس استفاده کنی، به‌من بگو، کدام عدد است که اگر آنرا در ۳ ضرب کنیم، بعد $\frac{3}{4}$ این حاصل ضرب را به‌حاصل ضرب قبلی اضافه کنیم، نتیجه را به۷ تقسیم کنیم، از خارج قسمت $\frac{1}{3}$ آن را کم کنیم، نتیجه را در خودش ضرب کنیم، ۵۲ را از آن کم کنیم، جذر آن را پیدا کنیم، ۸ را به‌آن اضافه کنیم و بر ۱۰ تقسیم کنیم، عدد ۲ به‌دست آید؟»حل این مساله با روش معکوس، منجر به‌این ردیف عمل‌ها می‌شود.

$$۲\times۱۰=۲۰ \;؛\; ۲۰-۸=۱۲ \;؛\; ۱۲^۲=۱۴۴+۵۲=۱۹۶$$

$$\sqrt{۱۹۶}=۱۴ \;؛\; ۱۴\times\frac{۳}{۲}=۲۱ \;؛\; ۲۱\times۷=۱۴۷ \;؛$$

$$۱۴۷\times\frac{۴}{۷}=۸۴ \;؛\; ۸۴:۳=۲۸$$

روش دیگری که هندی‌ها، برای حل معادله‌های درجه اول یك مجهولی، از آن استفاده می‌کردند «روش فرضی» است. در این روش برای مجهول، عددی در نظر می‌گیرند و بعد، همهٔ عمل‌هایی که در صورت مسأله آمده است، روی آن انجام می‌دهند. اگر نتیجه‌ای که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، با نتیجه‌ای که مسأله داده است، یکی باشد، به‌معنای آنست که عدد مجهول همان عددی است که در ابتدا فرض کرده‌ایم، ولی اگر عددی که در نتیجهٔ محاسبه به‌دست می‌آید، کوچکتر یا بزرگتر از نتیجه‌ای باشد که در صورت مساله داده شده است، باید آن را به‌همان نسبت کوچك یا بزرگ کرد. مثلاً، این مساله را در نظر می‌گیریم «۲۶۴ واحد پول را به‌چهار قسمت چنان تقسیم کنید که دومی دو برابر اولی، سومی سه برابر دومی، چهارمی، چهار برابر

سومی داشته باشد». برای حل این مساله، می توان سهم اولی را، مقدار دلخواهی، و مثلاً ۲ واحد، فرض کرد، در این صورت، سهم دومی ۴ واحد، سهم سومی ۱۲ واحد و سهم چهارمی ۴۸ واحد می‌شود.

در این حالت، کل مبلغ به‌جای ۲۶۴، برابر ۶۶ می‌شود، یعنی مبلغ واقعی ۴ برابر مبلغی است که ما به‌دست آورده ایم و بنابراین سهم اولی هم، ۴ برابر مبلغی است که ما فرض کرده ایم، یعنی $۴ \times ۲ = ۸$.

در حل معادله‌های درجهٔ دوم، هندی‌ها، این برتری را نسبت به‌دیوفانت داشتند که از وجود دو ریشه، برای این معادله‌ها آگاه بودند. مثلاً بهاسکارا، درحل معادلهٔ $x^۲ - ۴۵x = ۲۵۰$ ، جواب‌های ۵۰ و ۵- را به‌دست می آورد، منتهی برای جواب منفی، اضافه می کند: «مقدار دوم را نباید انتخاب کرد، این جواب، مناسب نیست، زیرا، هیچ کس، ریشهٔ منفی را تأیید نمی کند».

در نوشته‌های بهاسکارا، ملاحظه‌هایی در بارهٔ عددهای منفی پیدا می‌شود. مثلاً مجذور یك عدد منفی، همیشه عددی مثبت است و برای عدد منفی، هرگز ریشهٔ دوم وجود ندارد. ضمناً بهاسکارا تایید می کند که برای ریشهٔ دوم یك عدد مثبت، دو مقدار به‌دست می آید. حتی خیلی پیش از بهاسکارا، در نوشته‌های براهماگوپتا (حدود ۵۹۸ - ۶۶۰ میلادی) ریاضی‌دان و اختر شناس هندی، به‌انجام عمل‌های جمع و تفریق در مورد عددهای منفی برخورد می کنیم. توضیح براهماگوپتا چنین است: «مجموع دو «موجودی» برابر است با «موجودی»، مجموع دو «قرض» برابر است با «قرض»، مجموع «موجودی» و «قرض» برابر است با تفاضل آن‌ها و اگر برابر باشند، برابر است با صفر. مجموع صفر با «قرض» برابر است با «قرض» و مجموع صفر با «موجودی» برابر است با «موجودی» و مجموع دو صفر برابر صفر می‌شود. اگر «قرض» را از صفر کم کنیم «موجودی» به‌دست می آید و اگر «موجودی» را از صفر کم کنیم «قرض» پیدا می‌شود. اگر بخواهیم «موجودی» را از «قرض» یا «قرض» را از «موجودی» کم کنیم، باید مجموع آن‌ها را به‌دست آوریم. برای این که عددهای مثبت و منفی، از هم تشخیص داده شود، روی آنها پیکان‌هایی با جهت‌های مخالف قرار می‌دادند. در مورد عددهای گنگ، ضمن این که با آن‌ها مثل عددهای گویا عمل می کردند، هندی‌ها می توانستند رابطه‌های پیچیده ای را به‌دست آورند. مثلاً، آنها از رابطه‌هایی که به‌زبان امروزی به‌صورت زیر هستند، آگاه بودند:

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^۲ - b}}{۲}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^۲ - b}}{۲}},$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm ۲\sqrt{ab}}$$

هندی‌ها، برای به‌دست آوردن جذر و کعب عددها، از رابطه‌های مربوط به‌مجذور و مکعب مجموع دو مقدار استفاده می کردند.

مساله‌های مربوط به‌معادله‌های درجهٔ دوم، اغلب به‌هندسه مربوط می شد و لازم بود از قضیهٔ فیثاغورث استفاده کنند. همهٔ مساله‌ها را معمولاً به‌صورت شعر بیان می کردند (گمان می کردند که به‌این ترتیب، بیشتر قابل فهم است). یکی از این مساله‌ها را، از نوشتهٔ بهاسکارا، نقل می کنیم.

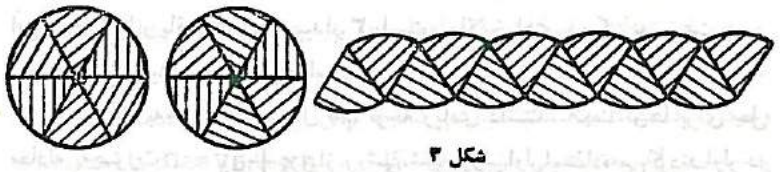
مساله‌ای در بارهٔ سپیدار. در ساحل رودخانه‌ای، سپیداری، راست و مستقیم برپاست. ناگهان باد تندی وزید و سپیدار را شکست. قسمت بالای سپیدار، به‌طرف پایین خم شد و سر آن درست در کنار دیگر رودخانه، قرار گرفت. عرض رودخانه، در این نقطه ۴ پا و باقیماندهٔ تنهٔ سپیدار ۳ پاست. حالا خواهش می کنم به‌سرعت به‌من بگو، ارتفاع سپیدار چقدر بوده است؟

هندی‌ها، به‌معادله‌های سیال هم، توجه زیادی داشتند. ضمناً آن‌ها برای حل معادلهٔ به‌صورت $ax + ay = c$ از روشی،شبیه روش‌اولر استفاده می کردند.اولر در این حالت‌ها از تبدیل عدد $\frac{a}{b}$ به‌کسر مسلسل استفاده می کند و هندی‌ها تقسیم‌های متوالی را به‌کار می گرفتند. هندی‌ها، حالت‌های پیچیده تر معادله‌های سیال را هم حل می کردند. مثلاً، در نوشته‌های هندی‌ها، به‌حل معادله‌هایی به‌صورت $xy = ax + by + c$ و $y^۲ = ax^۲ + b$ برخورد می کنیم.

مهمترین کارها را در رشتهٔ هندسه، باید به‌حساب براهماگوپتا گذاشت. منتهی در این جا هم، با سخت‌گیری کافی، روبرو نمی شویم. مسأله‌های اصلی که براهماگوپتا حل کرده است، چنین است: تعیین مساحت مثلث، با معلوم بودن ضلع و شعاع دایرهٔ محیطی، رسم مثلثی که در آن ضلع‌ها، شعاع دایره محیطی و مساحت، با عددهای گویا بیان می‌شوند، تعیین قطرهای یك چهار ضلعی محاطی از روی ضلع‌های آن، همچنین محاسبهٔ مساحت، ارتفاع و بعضی پاره خط های دیگر در این چهار ضلعی برحسب ضلع‌ها. براهماگوپتا در محاسبه‌های خود، نسبت محیط دایره برقطر آن را، برابر $\sqrt{۱۰}$ می گیرد.

کارهای بعدی هندی‌ها در هندسه و مثلاً نوشته‌های بهاسکارا (سدهٔ دوازدهم میلادی)، بیشتر اقتباس از کارهای براهماگوپتا است. بهاسکارا، روشنی موضوع از روی شکل را براثبات دقیق ترجیح می‌دهد، به‌همین جهت بسیاری از استدلال‌های

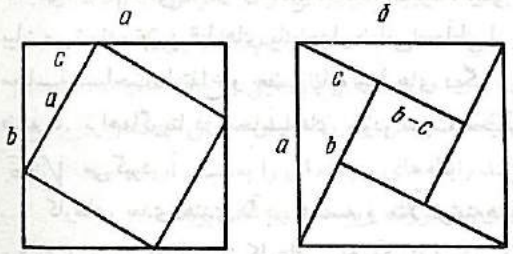
بهاسکارا و دیگر مؤلفین هندی ـ که از روشن بودن موضوع از روی شکل به‌جای اثبات دقیق استفاده می‌کردند ـ تنها این فایده را برای ما دارد که می‌توانیم از آن‌ها برای بهتر فهمیدن رابطه‌های هندسی، در دبیرستان‌ها، استفاده کنیم. هنوز هم، در بعضی موارد، در بعضی کتاب‌ها، به‌جای اثبات دقیق، از به‌اصطلاح «دایرهٔ هندی» استفاده می‌کنند. این روش مربوط به‌محاسبهٔ مساحت دایره است، وقتی که طول محیط آن معلوم باشد. برای این منظور، دو دایرهٔ مساوی را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را به‌تعداد مساوی به قطاع‌های مساوی تقسیم می‌کنیم. سپس دایره‌ها را روی شعاع‌هایی که قطاع‌ها را محدود کرده است می‌بریم. قطاع‌هایی را که به این ترتیب به‌دست می‌آید، در امتداد یك خط مستقیم، یکی پس از دیگری، کنار هم قرار می‌دهیم (شکل ۳ را ببینید). شکلی به‌دست می‌آید که خیلی نزدیك به متوازی‌الاضلاع است



شکل ۳

(هرچه تعداد قطاع‌های هر دایره بیشتر باشد، شباهت این شکل به متوازی‌الاضلاع بیشتر می‌شود). قاعدهٔ این متوازی‌الاضلاع، برابر است با طول محیط یکی از دایره‌ها و ارتفاع آن، برابر است با شعاع دایره. چون مساحت متوازی‌الاضلاع، برابر است با حاصل‌ضرب طول قاعده در طول ارتفاع. بنابراین، مساحت یك دایره برابر با نصف حاصل‌ضرب طول محیط در طول شعاع آن می‌شود. اگر شعاع دایره را برابر r بگیریم، محیط آن برابر $2\pi r$ و مساحتش برابر πr^2 می‌شود.

هندی‌ها، قضیهٔ فیثاغورث را هم، با روش جالبی اثبات می‌کردند. برای این اثبات تنها، شکل را می‌کشیدند و می‌نوشتند «دیده می‌شود» (شکل ۴ را ببینید، که در آن دو



شکل ۴

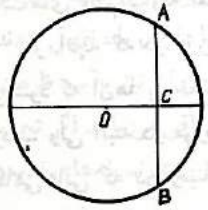
روش مختلف، برای اثبات قضیهٔ فیثاغورث، داده شده است).

باید به این نکته توجه کنیم که وقتی از دانشمندان هندی: آریابهاتا، براهماگوپتا و بهاسکارا صحبت می‌کنیم، ریاضیات کار اصلی و اختصاصی آن‌ها نبوده است. آن‌ها بیش از همه، به اخترشناسی توجه داشته‌اند و از ریاضیات، و منجمله رابطه‌های مثلثاتی، تنها به عنوان ابزاری که می‌تواند در خدمت اخترشناسی قرار گیرد، استفاده می‌کرده‌اند.

این وضع، اهمیت زیادی برای پیشرفت مثلثات در هند دارد و از این بابت، هندی‌ها خیلی از یونانی‌ها، پیشی گرفتند. در خود تقسیم‌بندی محیط و قطر دایره هم هندی‌ها، نسبت به بطلمیوس، موفقیت‌های خیلی بیشتری به‌دست آوردند. هندی‌ها هم مثل بطلمیوس، محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت اصلی، تقسیم می‌کردند، ولی هندی‌ها از اینجا نتیجه می‌گرفتند که قطر دایره برابر با ۶۸۷۶ می‌شود. این عدد، به این ترتیب به‌دست می‌آید: محیط دایره را به ۳۶۰×۶۰، یعنی ۲۱۶۰۰ قسمت می‌کردند و قطر دایره را ۳/۱۴۱۶ مرتبه، کوچکتر از محیط دایره به‌حساب می‌آوردند و بنابراین شامل $\frac{21600}{3/1416}$ قسمت می‌شد، که تقریباً برابر است با ۶۸۷۶. درواقع، چنین تقسیمی، این امکان را به هندی‌ها داده بود که بتوانند طول کمان را با پاره خط‌های راست، مقایسه کنند. ضمناً هندی‌ها، خیلی دقیق‌تر از بابلی‌ها و بطلمیوس، نسبت محیط به قطر دایره را پیدا کرده بودند.

علاوه بر این، هندی‌ها در نوشته‌های خود از سه مقدار (ویا درست بگوییم ـ سه خط) مثلثاتی، استفاده می‌کردند: اولی متناظر است با سینوس، دومی ـ کسینوس و سومی که امروز به‌کار نمی‌رود سینوس ورس (Sinus Versus) که برابر است با $1-\cos\alpha$.[1]

به این ترتیب، به‌جای تمام وتر، نیم آن، یعنی طول سینوس را به کار می‌بردند. آنها، وتر کمان AB را «جیوا» می‌نامیدند که به‌معنای «چلهٔ کمان» بود. نیم وتر AC (یعنی همان سینوس) را «آرها جیوا» می‌گفتند.



در نوشته‌های عربی، کلمه «جیوا» را «جیبا» نوشتند که بعداً به‌صورت «جیب» درآمد. واژهٔ «جیب» در عربی، معنای به‌کلی متفاوتی دارد و به معنای «گریبان» است،

۱ـ کد بعدها «Sinvors α» نامیده شد.

همین واژه، بعدها به‌زبان لاتینی به سینوس، ترجمه شد و تا امروز برای ما باقی مانده است.

هندی‌ها، برای نیم وترهای زاویه‌ها ـ برای هر ۳ درجه و ۴۵ دقیقه ـ جدول‌هایی درست کرده بودند. آن‌ها برای محاسبهٔ نیم وترها از چند ضلعی‌های منتظم استفاده می‌کردند که می‌شد محیط آن‌ها را بر حسب شعاع دایرهٔ محیطی به‌دست آورد. ضمناً شعاع را هم مساوی ۳۴۳۸ می‌گرفتند. به این ترتیب، سینوس ۹۰ درجه مساوی ۳۴۳۸ و سینوس ۳۰ درجه برابر نصف وتر کمان ۶۰ درجه، یعنی ۱۷۱۹ می‌شد و غیره. هندی‌ها، از بعضی از رابطه‌های مثلثاتی هم اطلاع داشتند و از آن‌ها، برای ساده‌تر کردن محاسبه‌ها استفاده می‌کردند. مثلاً آن‌ها، رابطه‌های

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=r^2 ، \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha ، 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$$

را می‌شناختند و از رابطه‌های مربوط به سینوس مجموع و تفاضل دو کمان آگاه بودند. از رابطهٔ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=r^2$ به‌دست آورده بودند:

$$\sin 45^\circ=\sqrt{\frac{r^2}{2}}=2431 \quad , \quad \cos 60^\circ=\sin(90^\circ-30^\circ)=\frac{1}{2} ,$$

$$\sqrt{3r^2}\,2978$$

هندی‌ها، با استفاده از سینوس قوس‌های ۹۰ درجه، ۶۰ درجه، ۳۰ درجه و به کار گرفتن رابطهٔ مربوط به نصف قوس، توانستند سینوس زاویه‌های ۲۲/۵ درجه، ۱۵ درجه، $11\frac{1}{4}$ درجه، ۷/۵ درجه، $3\frac{3}{4}$ درجه و غیره را پیدا کنند.

بهاسکارا، در یکی از نوشته‌های خود، روش دیگری برای تنظیم جدول‌های مثلثاتی، پیدا می‌کند. او، از رابطهٔ مربوط به سینوس مجموع و تفاضل دو کمان استفاده می‌کند و رابطه‌ای برای عبور از کمان n به کمان n+1 به‌دست می‌آورد.

هندی‌ها، محاسبه‌های مثلثاتی خود را همیشه روی مثلث قائم‌الزاویه انجام می‌دادند و بنابراین، وقتی که به مثلث غیر مشخص برخورد می‌کردند، آن را به مثلث‌های قائم‌الزاویه تقسیم می‌کردند.

از آنچه که در مورد پیشرفت ریاضیات هند، در سده‌های میانه گفتیم، معلوم می‌شود که آن‌ها به خصوص در زمینه‌های جبر و مثلثات پیشرفت‌های زیادی کرده بودند، ولی البته در مورد هندسه، نتوانستند به موفقیت‌های چشمگیر برسند. حتی آگاهی‌هایی که در زمینهٔ هندسه از نوشته‌های آریابهاتا (که مربوط به سدهٔ پنجم میلادی است) به‌دست می‌آوریم، برتری زیادی نسبت به هندسهٔ هرون اسکندرانی و یا پاپیروس آهمس مصری ندارد.

شرح حال جوهر

نخستین جوهرها را در همه جای دنیا از دوده می‌ساختند: دوده را با روغن مخلوط می‌کردند و با خمیری که از این طریق به‌دست می‌آمد، روی پاپیروس می‌نوشتند. این جوهرها کاملاً بی‌ثبات بودند، خیلی زود پاك می‌شدند و تند نوشتن با آن‌ها امکان نداشت. بعدها با پیدایش کاغذ پوستی، جوهرهای به اصطلاح آبی که از آب، مواد دبّاغی و نمك آهن ساخته می‌شدند، به‌وجود آمدند. این جوهرها از عهدهٔ آزمایش زمان بر آمدند: دست نوشته‌های باستانی نوشته شده با این جوهرها تا دوران ما دوام آورده‌اند.

مخترع جوهرهای آبی (کسی که برای ما ناشناخته است) جوشاندهٔ شفاف مازوهای جوهر را (راستش در آنوقتها هنوز کسی آن را جوهر نمی‌نامید) با زاج سبز مخلوط کرد و جوهر را به‌دست آورد. امّا این جوهرها بسیار کم رنگ بودند. به‌نظر می‌آید که مخترع می‌خواست از آن‌ها دست بر دارد. امّا بعد از چند روز مُعجزه‌ای اتفاق افتاد: سطرهای کمرنگ سیاه شدند. علم شیمی این مُعجزه را خیلی ساده شرح می‌دهد. مواد دبّاغی، مثلاً تانین در تاثیر متقابل با اکسید اول آهن تشکیل یك محلول کمرنگ می‌دهد. ضمن واکنش با طبقات اکسید آهن لِردی سیاه رنگ ته‌نشین می‌شود. زاج سبز نمك اکسید اول آهن است. لیکن آهن دو ظرفیّتی در هوا به سه ظرفیّتی تبدیل شده و نوشته‌ها آشکارا سیاه می‌شوند. چنین جوهرهائی همه جا مورد قبول واقع شدند. بعدها تغییرات جزئی بی‌اندازه گوناگونی به‌همان نسبت که گیاهان دارای مواد دباغی وجود دارند، در نسخه‌ها پیدا شد. ثبات جوهرها فوق‌العاده بود: آنها به‌طور عمیق در کاغذ نفوذ می‌کردند. بدبختانه این جوهرها دارای یك نقص بودند: آهن دو ظرفیتی نه فقط در روی کاغذ، بلکه در داخل جوهردان نیز به سه ظرفیتی تبدیل می‌شد. تمام رنگ ته‌نشین می‌شد و در بالا آب زلال باقی می‌ماند. اگر تجربه پدران شما مورد توجه‌تان واقع شده است شما هم می‌توانید از روی نسخه‌های قدیمی جوهر تهیه کنید.

موادّ دبّاغی را ما از میوه‌های درخت به‌دست می‌آوریم. اول آنها را می‌کوبیم و با

گذراندن از صافی شیره‌شان را می‌گیریم. به هر ۱۰۰ گرم میوه ۲ گرم زاج سفید و ۵ گرم سرکه اضافه می‌کنیم: اسید تانیك فقط در محیط اسیدی نمك محلول با آهن دو ظرفیتی می‌دهد. این مخلوط را یکبار دیگر به‌خوبی می‌پالائیم و بعد ۵ گرم زاج سبز به‌آن می‌افزائیم. جوهر حاضر است. درست است که این جوهر کاملاً سیاه نیست و بیشتر به بنفش تیره می‌زند، اما ثبات آنرا می‌شود تضمین کرد.

راستی من و شما امروز با چی می‌نویسیم؟ جوهرهای امروزی ما محلول آبی رنگهای مصنوعی با مواد غلیظ‌کننده، مثلاً گلیسیرین هستند. نسخه جوهرهای گوناگون رنگی خیلی به‌هم شبیه‌اند، فقط رنگها، گوناگون انتخاب می‌شوند. جوهرهای آبی رنگ خودنویس را از متیل آبی (بلودومتیل)، جوهرهای سرخ از فوکسین، و بنفش‌ها را از متیل بنفش می‌سازند. این نوع جوهرها ارزان و مناسب‌اند ولی خیلی زود رنگ می‌بازند. بهمین علت برای پر کردن مثلاً گذرنامه (یا شناسنامه)، به‌هر حال لازم می‌آید که از جوهرهای عصارهٔ گیاهی استفاده شود...

ضمناً اگر جوهرهای معمولی به‌تدریج بی‌رنگ می‌شوند، باید گفت جوهرهائی هم وجود دارند که از همان اوّل بیرنگ‌اند. چهار صدسال پیش از این **پاراتسلز** دانشمند نامی تابلوی کوچکی کشید که بر روی آن منظره‌ای زمستانی نقش شده بود. ولی کافی بود که تابلو را کمی گرم کرد تا درختان و بوته‌ها از برگهای سبز و خُرم پوشیده شوند و تابلو در چشم به‌هم زدنی تبدیل به منظره‌ای تابستانی شود. تابلو را دوباره سرد می‌کردند و باز درختان از برف سفید پوشیده می‌شدند. پاراتسلز در این تابلو کار اسرارآمیزی نمی‌کرد و توضیح می‌داد که برگها با محلول رقیقی از کبالت کلُردار رنگ شده‌اند. نمك هنگام گرم شدن آب خود را از دست می‌دهد و آبی رنگ می‌شود و هنگام سرد شدن دوباره آب می‌گیرد و بی‌رنگ می‌شود.

شما حکایت **ادگار** «خزوك طلائی» را به‌خاطر می‌آورید؟ قهرمان او نوشته اسرارآمیزی پیدا کرده بود که متن آن با گرم شدن آشکار می‌شد، اما بر خلاف تابلوی پاراتسلز حروف آن هنگام سرد شدن محو نمی‌شدند. شما می‌توانید هر طور دلتان بخواهد اینگونه یادداشت بنویسید، بشرطی که دم دستتان محلول رقیق مس کلردار و یا بُرم‌دار پیدا شود. ولی اگر آن را ندارید، ناراحت نشوید: سر قلم خود را به آب لیمو یا کلم و یا پیاز بزنید و بنویسید، بعد ورقه را بالای آتش نگاه دارید. می‌توان جوهرهای گیرا با متنوع‌ترین رنگ‌ها ساخت. سیاه از همان زاج سبز، و دوای ظهور از مواد دبّاغی ساخته می‌شود. برای به‌دست آوردن جوهر سبز، به کُبالت کلردار آمونیاك و یا آهن کلردار بیافزائید. اگر مخلوط سولفات رُوی یا آهن کلردار را ترکیب کنیم پس از

گرم کردن کاغذ نوشته‌های بنفش رنگ به‌دست خواهد آمد. اگر این تجربه‌ها مورد توجه شما واقع شده‌اند، آنها را انجام دهید. محلول‌ها را باید با غلظت کم انتخاب کنید.

پاسخ مسألهٔ صفحهٔ ۳۴

بنابر فرض مساله، باید داشته باشیم:

$$\overline{abcd} = (\overline{cd})^{۲}$$

از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$۱۰۰(۱۰a+b)+(۱۰c+d)=(۱۰c+d)^{۲}$$

و یا

$$۱۰۰(۱۰a+b)=(۱۰c+d)(۱۰c+d-۱)$$

$۱۰c+d=k$ می‌گیریم. روشن است که $c\neq ۰$، بنابراین، k عددی است دورقمی و داریم:

$$۱۰۰(۱۰a+b)=k(k-۱)$$

حاصل‌ضرب $k(k-۱)$ بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است، بنابراین بایدیکی از دوعدد k و $k-۱$ بر ۴ ودیگری بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد. به سادگی معلوم می‌شود که $k=۲۵$ و $k-۱=۲۴$ یا $k=۷۶$ و $k-۱=۷۵$. ولی در حالت اول، به‌دست می‌آید

$$۱۰a+b=۶$$

و $a=۰$ باشرط چهار رقمی بودن مساله نمی‌سازد.

درحالت دوم

$$۱۰a+b=۱۹\times ۳=۵۷$$

یعنی $a=۵$ و $b=۷$. ازطرف دیگر داشتیم:

$$k=۱۰c+d=۷۶ \Rightarrow c=۷ ، d=۶$$

به‌این ترتیب، عدد موردنظر برابر است‌با ۵۷۷۶.

ن . س . فریمان

آفرینندگان ریاضیات عالی (۶)

ترجمهٔ پرویز شهریاری

اوانجلیستاتوریچلی

اوانجلیستاتوریچلی در سال ۱۶۰۸ ، درشهر فائنتس واقع در شمال ایتالیا به‌دنیا آمد. خیلی زود پدرش را از دست داد. عموی او، پدریاکوپو، پسرك را به‌مدرسهٔ یسوعیان (ژزوئیت‌ها)، که چندی‌قبل در فائنتس باز شده بود ، سپرد. اوانجلیستای جوان استعداد درخشان خود را در مدرسه نشان داد. و عمو تصمیم گرفت که راهی برای ادامهٔ آموزش برادرزاده‌اش پیدا کند.

بولونی و دانشگاه مشهورآن، تنها ۴۷ کیلومتر بافائنتس فاصله‌داشت. شهرت این دانشگاه درتمام اروپای کاتولیك پیچیده بود. از فلورانس‌هم، بیش‌از صدکیلومترراه نبود، جایی‌که دانشگاه آن‌هم، شهرت‌کمتری نداشت. ولی یاکوپو، برادرزادهٔ خود را به‌رم، به‌دانشگاه Sapiensa (حکمت) فرستاد. البته، در زندگی‌نامه‌های توریچلی، شرح داده نشده است که قیم او، چه ملاحظه‌هایی را ملاك کارخود قرار داده است، ولی، به‌سادگی می‌توان دلیل آن را پیدا کرد. وقتی که در بارهٔ بوناونتوراکاوالیری صحبت می‌کردیم، از بنه‌دتوکاسته‌لی ، معلم کاوالیری در دانشگاه پیزا، نام بردیم . در همان زمانی که در جستجوی محل تحصیل، برای توریچلی جوان بودند (۱۶۲۶)، پاپ اوربان‌هشتم از کاسته‌لی خواست تا از پیزا به‌رم برود و در دانشگاه Sapienza به‌تدریس بپردازد. کاسته‌لی و پدر یاکوپو، هردو از راهبان سلك‌سنت بندیکت بودند. هردوی آن‌ها، آدم‌های مشهوری بودند: یکی، رئیس دیر بود و دیگری، استاد دانشگاه و مشاور خصوصی پاپ. به جرات می‌توان گفت که آن‌ها، حتی پیش‌از آن که مسألهٔ انتخاب دانشگاه برای اوانجلیستا مطرح شود، باهم آشنا بودند. آشنایی پدر یاکوپو با کاسته‌لی، وشهرت کاسته‌لی به‌عنوان ریاضی‌دان، مهندس و شاگرد گالیله، تکلیف محل تحصیل‌را روشن می‌کرد. می‌توان‌گمان بردکه عموی اوانجلیستا، این‌جوان ۱۸ساله را به‌رم فرستاد و از استاد خواهش کردکه مراقب اوباشد. درست است که توریچلی جوان، باخصلت‌های خوب و استعدادهای استثنائی خود، می‌توانست خودش‌هم، علاقهٔ مربیش‌را جلب‌کند. به‌هرحال، به‌دلیل اول

اوانجلیستا توریچلی
(۱۶۰۸ـ۱۶۴۷)

یا به‌مناسبت دوم، معلم میان سال (کاسته‌لی در حدود ۵۰سال داشت) وشاگرد جوان، باهم دوست شدند: توریچلی، منشی کاسته‌لی شد.

توریچلی، در این زمان، مقام نخست را دربین شاگردان بااستعداد کاسته‌لی (ماجیوتی، ریچی، و یویانی و دیگران) داشت. کاسته‌لی، سمینار مانندی تشکیل داد که درآن، بابهترین شاگردان خود، ماجیوتی و توریچلی، کار تازهٔ گالیله به‌نام «گفتگوئی دربارهٔ دو دستگاه اصلی جهان» را، مورد مطالعه قرار داد. این اثر به‌تازگی منتشر شده بودـدرژانویهٔ سال ۱۶۳۲ـ و علاقهٔ شاگردان گالیله به‌آن، قابل‌درك است. کاسته‌لی، از این درس‌های گالیله‌یادکرده‌است ودربارهٔ شاگردان‌خودش، نظری‌عالی داده‌است. نامه‌هایی که دراین‌سال ۱۶۳۲ ردوبدل شده است، برای زندگی‌نامهٔ توریچلی، اهمیت زیادی دارد. وقتی که «گفتگو» منتشر شد، مخالفان گالیله، بانیروی تازه‌ای به او هجوم آوردند. گالیله می‌دیدکه خطر، از هرطرف اورا احاطه کرده‌است. اوبه‌کاسته‌لی نامه‌نوشت، بدون تردید، او تشویش وهراس خودرا باکاسته‌لی درمیان گذاشته‌بود. این نامه باقی نمانده است، ولی پاسخ بسیار جالب توریچلی به‌ما رسیده است. تاریخ این نامه ۱۱ سپتامبر سال ۱۶۳۲ است. توریچلی، نامه را بااین توضیح آغاز می‌کندکه چرا او به گالیله پاسخ داده است، توریچلی ونه خودکاسته‌لی. کاسته‌لی دستور داده است در غیاب او،

منشی باید نامه‌های پستی را بازکند و به‌آن‌ها پاسخ بدهد. توریچلی، بعد از مطلب‌های اصلی، بحث‌را به‌خودش می‌کشاند. این قسمت نامه، شامل آگاهی‌های بسیار باارزشی دربارهٔ توریچلی است. او می‌نویسد که یك ریاضی‌دان است. «و البته، هنوز در سنین جوانی است». ولی این‌ریاضی‌دان جوان، آثار باستانی، وازآن جمله، نوشته‌های آپولونیوس، ارشمیدس، تئودوسیوس ودیگر هندسه‌دانان را، مطالعه کرده است. او، اگرچه باجدیتی کمتر، ولی به‌هرحال به‌اخترشناسی‌هم پرداخته است و آثار بطلمیوس، همهٔ کارهای تیکوبراهه و کپلررا فراگرفته است. ازهمین توضیح‌ها به‌سادگی نتیجه می‌شودکه سال‌های آموزش، بیهوده نگذشته است. توریچلی باآمادگی کامل، وارد زندگی شد. او ازاین آمادگی خود چگونه استفاده کرد وموفقیت‌های بعدی اوچه‌بود؟

متاسفانه، درموردسال‌های ۱۶۳۲ تا ۱۶۴۰ ، هیچ اطلاعی وجود ندارد که بتوانیم براساس‌آن، زندگی توریچلی‌را دراین دوره، به‌اندازهٔ کافی روشن کنیم. حدس‌هایی وجود داردکه توریچلی دراین سال‌ها درکجا به‌سر می‌برده است. قانع‌کننده‌ترین این‌حدس‌ها، این سال‌های زندگی دانشمند را باآقای چیامپولی مربوط می‌کند. ما، وقتی‌که دربارهٔ کاوالیری صحبت می‌کردیم، با این نام آشنا شدیم. جیووانی چیامپولی، نماینده نجیب‌زادگان دربار پاپ، دارای مرتبهٔ اسقفی بود و یکی از اداره‌های دبیرخانهٔ پاپ را اداره می‌کرد. او وقتی در فلورانس‌باگالیله‌آشنا شد،که تنها ۱۸سالش بود. باوجود جوانی، اوبه‌درستی به‌ارزش این خوشبختی پی‌برد وبرای تمامی عمر هواخواه گالیله شد. بعدها، وقتی‌که اعتبار و نفوذی در دربار کسب کرد. از «گروه گالیله» که هوادار این دانشمند بزرگ بودند، پشتیبانی می‌کرد. (توریچلی، گروه هوادار گالیله را «سکت گالیله» می‌نامید). علاقهٔ به گالیله، موجب شد که گامی بی‌احتیاط بردارد: مأمور سانسور پاپ را واداشت تااجازهٔ چاپ گفتگوی گالیله‌را بدهد. او برای قانع‌کردن مامور از راه پرخطر وشجاعانه‌ای استفاده کرد، یعنی اورافریب داد: او استناد به‌اختیاری کرد که گویا پاپ به‌او داده است، درحالی‌که پاپ چنین اختیاری به‌او نداده‌بود. دروغ‌او فاش شد، وباخطاهای دیگری‌هم که به‌او نسبت داده بودند، چیامپولی ناچار شد رم را ترك کند. وقتی‌که چیامپولی از رم می‌رفت، توریچلی را به‌عنوان منشی خود، به‌همراه برد. او درسال ۱۶۴۳ مرد، ولی توریچلی در سال ۱۶۴۱ به رم برگشت.

سال‌هایی‌که دربارهٔ آن‌ها، آگاهی‌های موثقی نداریم، بیهوده نگذشته بود. توریچلی، کتاب مشهور خودرا دربارهٔ تاریخ مکانیك، زیرعنوان کوتاه

«دربارهٔ حرکت» (Sul moto)، آماده کرده‌بود. در این اثر، بعضی از حکم‌های مکانیك گالیله تکمیل، ومساله‌های تازه‌ای از بالیستیك خارجی، حل شده است. کاسته‌لی، نسخه‌ای از دست‌نویس این‌کتاب را برای گالیله برد. در آن‌زمان، گالیله در «آرچتری» نزدیك فلورانس دوست‌داشتنی، زندگی می‌کرد. کاسته‌لی وظیفهٔ خود می‌دانست‌که برای گالیله، که دیگر امیدی به نیروی خودش نداشت، همکار و کمکی پیداکند. او، کتاب «دربارهٔ حرکت» را، درواقع، به‌عنوان معرفی کسی که به‌این منظور نامزد کرده بود، برای گالیله فرستاد. گالیله، کتاب‌را پسندید و نویسندهٔ آن‌را، پیش خودش دعوت کرد. توریچلی این دعوت دل‌پذیر را باخوشحالی پذیرفت و دراکتبر سال ۱۶۴۱ دیگر در «آرچتری» بود و باورود خود، کار مربوط به یادداشت‌هایی را آغاز کردکه بعدها در «روز پنجم» و «روز ششم» کتاب مشهور او به‌نام «مذاکره‌ها» منتشر شد. ولی گالیلهٔ پیر، روزبه‌روز نیروهای خود را از دست می‌داد و سرانجام، در ۸ ژانویهٔ ۱۶۴۲ ، زندگی را بدرود گفت. توریچلی تصمیم گرفت به‌رم برگردد، ولی فردیناندومدیچی، حکمران توسکانی اورا درفلورانس نگه‌داشت و پست‌گالیله را به‌او سپرد؛ «فیلسوف وریاضی‌دان اول دوك‌نشین بزرگ توسکانی»؛ وتوریچلی تازمان مرگ خود، درهمین‌مقام باقی ماند. او در جوانی مرد، در۲۵ اکتبر سال ۱۶۴۷ ، وقتی که تنها ۳۹ سال داشت. او آرزو داشت که در کلیسای لاورنتی مقدس، در فلورانس، دفن شود، ولی آیا این تمایل او برآورده شد یانه، به درستی معلوم نیست. ولی، باهمهٔ جستجوهای طولانی، هیچ نشانه‌ای ازقبر یاکتیبهٔ روی‌قبر او پیدا نشده است و حتی هیچ اثری یا اشاره‌ای هم از مراسم تدفین او دردست نداریم. فائنتس، زادگاه توریچلی، بعدها، یادهم‌شهری بزرگ خودرا گرامی داشت. مجموعهٔ آثار توریچلی را، چه آن‌ها که قبلا چاپ شده بود وچه آن‌ها که هنوز دست‌نویس بود، چاپ کردند . نام این مجموعه چنین است : «آثار اوانجلیستاتوریچلی،که به‌مناسبت سیصدمین‌سال تولداو وزیرنظر جینولورتس و جوزپ و اسورو چاپ شده است «جلدهای اول، دوم و سوم این مجموعه درسال ۱۹۱۹ وجلد چهارم‌آن، درسال ۱۹۴۴ ،منتشر شد.

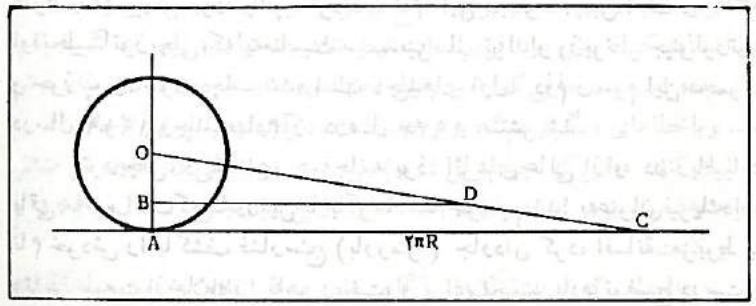
توریچلی، دانشمندی همه‌جانبه بود. اثرهای عالی ازاو در ریاضیات باقی مانده است‌که ما دراین‌جا باآن‌هاآشنا خواهیم شد؛ به‌عنوان فیزیك‌دان، نام خودش را باکشف فشارسنج (بارومتر) جاودان کرد، افسانهٔ مربوط به «ترس طبیعت ازخلاء» را به‌هم ریخت، و برای نخستین‌بار، توضیح درست و روشنی از کار تلمبهٔ مکنده به‌دست داد. در اپتیك، بااستادی شگفت‌انگیزی،

عدسی‌ها را صیقل داد؛ درمکانیك بعضی از حکم‌های دینامیك گالیله را تکامل داد؛ در مکانیك مایعات، فرمولی برای محاسبهٔ سرعت جریان‌آب، از سوراخ ظرف، پیدا کرد؛ در هواشناسی، سرچشمهٔ واقعی باد رانشان داد (که درضمن دیدگاه‌های نادرست هواداران ارسطو را از میدان بدرکرد). مادراین‌جا، تنها به‌بعضی از کارهای توریچلی می‌پردازیم، که برای ریاضیات، اهمیتی اساسی دارد.

خواننده می‌داند که توریچلی چه ارزش فوق‌العاده‌ای برای روش غیر قابل تقسیم‌ها قایل بود.

تردیدی نیست که روش غیرقابل تقسیم‌ها، درواقع‌هم، شایستگی چنین ارزش‌گذاری فوق‌العاده‌ای‌را دارد. ولی خدمت اصلی توریچلی دراین است که‌این روش را، به‌صورتی عالی، تکامل بخشید. مولف‌روش، غیرقابل‌تقسیم‌ها را برای شکل‌های مسطحه، تنها پاره‌خطها و برای جسم‌ها، تنها صفحه‌ها در نظر می‌گرفت. توریچلی، روش را دراین جهت تعمیم داد که مثلا، برای شکل‌های مسطحه می‌توان کمان‌های منحنی را به‌عنوان غیرقابل تقسیم‌ها، و برای جسم‌ها، سطح‌های منحنی‌را، به‌عنوان غیرقابل تقسیم‌ها، به‌حساب آورد. درپایین، دونتیجه‌گیری را که توریچلی به‌کمك تعمیم روش غیرقابل تقسیم‌ها به‌دست آورده است، می‌آوریم.

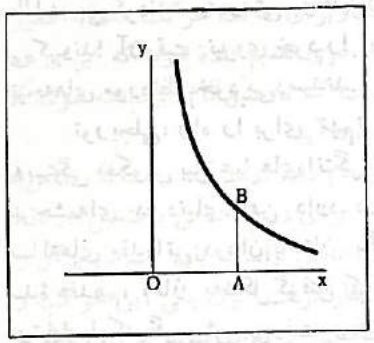
مسالهٔ کپلر. درمقالهٔ مربوط به‌کپلر، مسالهٔ مربوط به مساحت دایره را حل کردیم. توریچلی‌هم، همین مساله را، به‌کمك روش تعمیم‌یافتهٔ غیرقابل تقسیم‌ها، حل‌کرد. دایره‌ای به‌شعاع R درنظر می‌گیریم. مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که یك‌ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ آن برابر R، وضلع دیگرآن برابر طول محیط دایره، یعنی $2\pi R$ باشد (شکل ۱). باید ثابت کرد که مساحت دایره، برابراست با مساحت این مثلث. توریچلی، شعاع $oB<oA$



شکل ۱. محاسبهٔ مساحت دایره باروش توریچلی

را انتخاب‌و، باتوجه‌به‌تشابه‌مثلث‌ها، تساوی‌محیط دایرهٔ‌به‌شعاع oB را با BD پیدا می‌کند. اگر محیط‌های دایره‌ها را به‌عنوان غیرقابل تقسیم‌های دایره، و ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ AC ، . . . ، BD ، . . . را به‌عنوان غیرقابل تقسیم‌های مثلث درنظر بگیریم، تساوی مساحت‌ها، بلافاصله وبراساس قضیهٔ اصلی این‌روش (که درمقالهٔ کاوالیری ازآن یادکردیم)، نتیجه می‌شود.

مثال‌دوم مربوط به‌یك‌مسالهٔ فضایی‌ـیاآن‌طور که درآن‌زمان می‌گفتند، مسالهٔ «جسمانی»ـاست. هذلولی $xy=2k^2$ ، دورمحور y ـ مجانب آن ـ می‌چرخد. توریچلی جسم دواری را که از این راه به‌دست می‌آید، «هیپر-بولوئید حاده» می‌نامد، و مسالهٔ او این است‌که حجم چنین هیپربولوئیدی را به‌دست‌آورد (شکل ۲). توریچلی، سطح استوانه‌ای دوار به‌شعاع x و ارتفاع



شکل ۲.
محاسبهٔ حجم هیپر بولوئید بی‌انتها
طبق‌روش توریچلی

y را، به‌عنوان غیرقابل تقسیم، انتخاب می‌کند. مساحت این سطح برابر است با:

$$2\pi xy=2\pi\cdot 2k^2=\pi(2k)^2$$

معلوم می‌شود که مساحت این عنصر غیرقابل تقسیم، به‌شعاع این سطح بستگی ندارد، و بنابراین، ضمن جمع کردن «همهٔ غیرقابل تقسیم‌ها»، نیازی به جمع پیدا نمی‌شود. فرض کنید که بخواهیم درشکل ۲، حجم جسمی راکه محدود به‌سطح AB است پیدا کنیم. دراین‌صورت جمع‌بندی (ضمن خارج‌شدن از علامت جمع سطح $\pi(2k)^2$)، حجم را به‌دست می‌دهد: $\pi(2k)^2\cdot oA$. این نتیجه‌گیری، تنها از این جهت مهم نبودکه مساله‌ای به غایت دشوار برای آن زمان را، دربارهٔ محاسبهٔ حجم جسم دوار حل‌کرد. هیجان‌انگیز این است که دراین مساله، برای نخستین‌بار، انتگرال ناسره محاسبه شده است. این پیروزی، موجب واکنش‌های سرورآمیز بسیاری شد. وزین‌ترین آن‌ها، یعنی نظر خود مولف روش‌را، می‌آوریم. کاوالیری در۷ ژانویهٔ سال ۱۶۴۲ ، به توریچلی نوشت: «از شما، به‌خاطر اثباتی‌که دربارهٔ جسم هیپربولوئید حاده

انجام داده‌اید، متشکرم، اثباتی که به‌راستی عالی و آسمانی است. من نمی‌توانم بفهمم که شما چگونه جرات کردید «چوب‌خط» خودرا تااعماق‌نامتناهی این جسم فرو ببرید، زیرا درواقع، به‌نظرمن بی‌نهایت طولانی می‌رسید». توریچلی، نه‌تنها انتگرال‌های ناسره را، درمختصات قائم ودر مختصات‌قطبی، محاسبه کرد، بلکه شرطهای تقارب این انتگرال‌ها را هم پیدا کرد.

پیش‌از این گفته‌ایم که روش غیرقابل تقسیم‌ها، در طول ده‌هاسال، اساسی‌ترین وسیله برای حل مساله‌های مربوط به‌محاسبه‌های انتگرالی بود (تاکشف موضوع اخیر). به‌این مطلب باید اضافه کردکه کارهای توریچلی، که درآن‌ها ازاین روش استفاده می‌شد، سهم زیادی در ساده‌کردن و ترویج این‌روش داشته است. ریاضی‌دانان کم‌قدرت‌تری که کارهای توریچلی را مطالعه می‌کردند، به‌درستی و قابل‌استفاده بودن این روش اطمینان پیدا می‌کردند؛ آن‌وقت نیروی خود را به‌آزمایش می‌گذاشتند و اغلب هم به نتیجه‌های موردنظر خود می‌رسیدند.

توریچلی، راه را برای مهم‌ترین قضیهٔ آنالیز بازکرد: قضیهٔ مربوط به‌بستگی معکوس بین عمل‌های انتگرالی ودیفرانسیلی. محاسبهٔ انتگرال معین، سرچشمه‌ای در دنیای کهن دارد. درحالی که مسالهٔ رسم مماس، اگر از مساله‌های مقدماتی دوران باستان بگذریم، تنها در دوره‌های اخیر، یعنی از سدهٔ هفدهم، آغاز به‌شکل‌گرفتن کرد. این دوقسمت ریاضیات کاملا بدون ارتباط بایکدیگر پیش می‌رفت و هیچ‌کس، حتی گمانی‌هم دربارهٔ بستگی عمیقی که بین آن‌ها وجود دارد، نداشت. توریچلی کاملا در «بحث‌ها»ی گالیله خبره بود و برای «روز پنجم» و «روزششم»، از زبان خود گالیله یادداشت برداشته بود. وقتی که دربارهٔ آن‌قسمت «روزسوم» فکر می‌کرد که اصول‌سینماتیک‌حرکت شتاب‌دار ($g=\text{const.}$) را مطرح کرده بود، کشف کردکه بستگی بین‌سرعت نقطه ومسیرآن را می‌توان‌هم به‌صورت کوادراتور سرعت نسبت به زمان ــ همان‌طور که گالیله مطرح کرده بود ــ وهم به‌صورت عکس‌آن: نشان داد. روی محورهای طول، درهر دور دستگاه، باید زمان را قرار داد؛ وروی محورهای عرض، در یك دستگاه ــ سرعت، ودر دیگری، راه پیموده شده (یاآن‌طور که درسدهٔ هفدهم می‌گفتند: «مکان»). وقتی که شتاب ثابت‌باشد، نمایش سرعت به‌صورت خط‌راست $v=gt$ و نمایش راه پیموده شده، به‌صورت سهمی درجه دوم $s=g\frac{t^2}{2}$ درمی‌آید. همهٔ این‌ها را، گالیله در «روزسوم» «بحث‌ها»، آورده بود. توریچلی متوجه شد و ثابت کرد که عرض

نمایش سرعت، متناسب است باتانژانت زاویهٔ شیب مماس برمنحنی راه طی شده. وچون تانژانت زاویهٔ شیب، از لحاظ عددی برابر است بامشتق درنقطهٔ تماس بنابراین، توریچلی در واقع، این تساوی را به دست آورد $v=k\frac{ds}{dt}$ (k، ضریب نسبت است). اگر این تساوی را باتساوی گالیله

$$s=\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که توریچلی توانست بستگی متقابل عمل‌های انتگرالی ودیفرانسیلی را به‌دست آورد. حقیقت این است که این قضیه درآن زمان، تنها بااصطلاح‌های مکانیك، وبرای حالت حرکت متشابه‌التغییر، شرح داده شده‌بود. هنوز لازم بود به‌نحوی تعمیم داده شود که برای همهٔ تابع‌ها، درست باشد[1]. ولی مهم این است که نخستین‌گام برداشته شود، که اندیشهٔ بستگی متقابل این عمل‌ها، به‌وجود آید.

توریچلی، کار مهم دیگری هم انجام داده است که به‌مسالهٔ مماس‌ها مربوط می‌شود. او روش سینماتیك را برای رسم مماس برمنحنی در نقطهٔ مفروض، طرح کرد. او برای این‌منظور، منحنی را ــ که باید مماس برآن را رسم کرد ــ به‌عنوان اثر حرکت نقطه، درنظر گرفت. توریچلی این حرکت را مرکب درنظر می‌گیرد، یعنی به‌عنوان نتیجه‌ای از دوحرکت، که این نقطه در آن‌ها شرکت می‌کند. در رساله‌ای که به‌روبروال منسوب است، به‌تفصیل از آن سخن رفته است.

همان‌طور که قبلاهم گفتیم، توریچلی بعضی از حکم‌های گالیله را تکامل بخشید، و برای این‌منظور، به‌حل بسیاری از مساله‌های ریاضی، نیاز داشت. یکی از این مساله‌ها، منجر به‌مفهوم ریاضی تازه‌ای شد. توریچلی خودش را دربرابر این موضوع قرار داد. فرض کنید، از یك‌نقطهٔ صفحه، نقطه‌های مادی را به‌نحوی پرتاب کنیم که همهٔ آن‌ها، تحت یك‌زاویه، ولی در همهٔ جهت‌های ممکن (وباسرعت اولیه‌های مختلف) باشند.

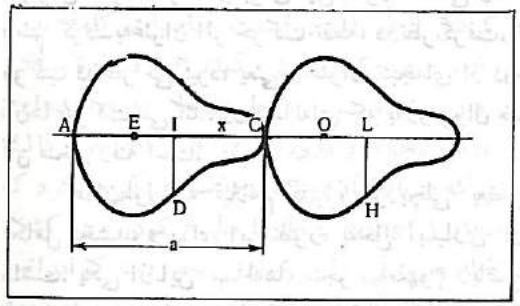
پرسش این است: مکان هندسی راس‌های سهمی‌های مسیر این نقطه‌ها، چه‌سطحی را تشکیل می‌دهد؟ معلوم شد که مکان هندسی راس‌ها، یك سهموی (پارابولوئید) دوار است. ازآن‌جا، به‌عنوان نتیجه، به‌سادگی معلوم می‌شود

۱ــ روشن است‌که این‌گونه‌تابع‌ها، باید باشرط‌های معینی، سازگار باشند.

که مکان هندسی راس‌های سهمی‌هائی از مسیرها، که بروی یك صفحه واقع باشند، یك‌سهمی است. این‌سهمی، چیزی نیست، جزپوش خانوادهٔ سهمی‌های مفروض. به‌این‌ترتیب، مساله منجر به‌مفهومی‌شد که تاآن زمان درهندسه وجود نداشت. البته، آپولونیوس نشان داده بود که هرمقطع مخروطی را می‌توان به‌عنوان پوش مماس‌های آن درنظر گرفت، ولی پوش‌یك‌خانوادهٔ منحنی را، توریچلی برای نخستین‌بار کشف کرد. صدسال طول کشید تاآ. کلرو توانست تعبیر تحلیلی پوش‌را، به‌عنوان جواب خاص معادلهٔ دیفرانسیلی، پیدا کند.

درست است که مسالهٔ مربوط به‌تعریف مختصات مرکزثقل، در واقع به‌مکانیك مربوط است، ولی از آن‌جا که بدون هیچ استفاده‌ای از اصل‌ها و قضیه‌های مکانیك، و تنها باروش‌های ریاضی حل می‌شود، عیبی ندارد که آن را درعداد کارهای ریاضی توریچلی به‌حساب آوریم.

شکلی مسطحه درنظر بگیرید که تراکم سطحی ثابتی برابر ρ داشته باشد. برای‌سهولت استدلال فرض می‌کنیم که شکل دارای محور تقارن باشد، اگرچه فرمول توریچلی برای حالت کاملا کلی است. روشن است که مرکز ثقل شکل، روی محور تقارن آن است وتنها باید یکی از مختصات‌آن‌را پیدا کرد. جالب‌ترین قسمت حل جالب توریچلی در این است که شکل دومی



شکل ۳

محاسبهٔ مختصات مرکز ثقل (باروش توریچلی).

به‌شکل اصلی اضافه می‌کند، به‌نحوی که درست تکراری از همان اولی باشد (شکل ۳) و شکل دوگانه تازه را روی نقطهٔ میانهٔ‌آن، آویزان می‌کند. دنبالهٔ نتیجه‌گیری، کاملا ساده است. طول کامل محور تقارن را برابر a و مبداء محاسبه را منطبق برنقطهٔ تعلیق و طول مرکز ثقل مجهول را x می‌گیریم. فرض می‌کنیم که مرکز ثقل شکل سمت چپ، برنقطهٔ E به‌طول x، واقع باشد. دراین‌صورت، مرکز ثقل شکل سمت راست، که در نقطهٔ o قرار دارد، طولی برابر $a-x$ خواهد داشت.چون وزن دوشکل برابر است، گشتاورهای

آن‌ها به‌نسبت x و $a-x$ می‌شود. ازطرف دیگر، گشتاور شکل سمت چپ‌را، می‌توان به‌عنوان مجموع گشتاورهای جزئی از نوع $DI \cdot IC$ حساب کرد، یعنی $\sum \rho f(x)\Delta x \cdot x$. در مورد شکل سمت راست، گشتاور جزئی به صورت $HL \cdot LC$ بیان می‌شود؛ می‌توان LC را باپاره‌خط IA، یعنی با-طول $a-x$ عوض کرد؛ به‌این ترتیب، گشتاور سمت‌راست برابر $\sum \rho f(x)\Delta x \cdot (a-x)$ می‌شود؛ این‌مجموع‌ها، درحد، به‌سمت‌انتگرال‌های معینی، متقارب می‌شوند. تناسب را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x}{a-x}=\frac{\int_0^a xf(x)dx}{\int_0^a (a-x)f(x)dx}$$

این عبارت، بعداز تبدیل‌های ساده‌ای، به‌یك فرمول کلی منجر می‌شود که مختصات مرکز ثقل ازآن به‌دست می‌آید.

باعث تاسف است که درهیچ کدام از کتاب‌های درسی، ضمن محاسبه ونتیجه‌گیری از این فرمول‌ها، یادی از توریچلی نکرده‌اند. هرجاکه ازتاریخ قدیمی‌تر آنالیز بی‌نهایت کوچك‌ها گفتگو می‌شود، نام پیرفرما، بلزپاسکال وایزاك باروی (و البته به‌حق) به‌میان می‌آید، ولی یادی از اوانجلیستا توریچلی‌ـ که کارهای بسیاری درجهت راه‌گشایی‌آنالیز بی‌نهایت کوچك‌ها، انجام داده است‌ـ نمی‌شود.

توریچلی، قاعدهٔ کاوالیری را تعمیم داد و به‌صورت درخشانی از آن استفاده کرد؛ در زمینهٔ محاسبهٔ انتگرالی، به‌موفقیتی رسید که اهمیت درجهٔ اول دارد: ثابت کرد که انتگرال‌ناسره می‌تواند متقارب باشد. روش‌سینماتیك رسم مماس‌هارا به‌اختصار شرح داد، و این گام بزرگی بودکه ریاضیات را به‌سینماتیك مربوط می‌کرد.

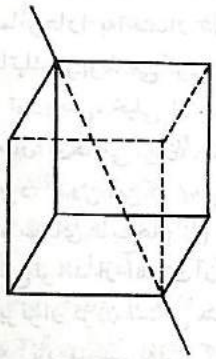
توریچلی، خیلی از مساحت‌ها، حجم‌ها و طول کمان‌ها را محاسبه کرد، که ازمیان آن‌ها می‌توان، مثلا کار پراهمیت محاسبهٔ طول کمان پیچ لگاریتمی را نام‌برد. بدون این‌که بخواهیم ازمجموعهٔ کارهای زیاد او (ومثلا جستجوی اکستره مم‌های تابع‌ها) نام ببریم، تنها از یکی ازآن‌ها یادمی‌کنیم که هیچ-کس نمی‌تواند از اهمیت‌آن به‌عنوان زمینهٔ آماده‌شدن آنالیز، چشم بپوشد: مسالهٔ برقرارکردن بستگی متقابل بین انتگرال ودیفرانسیل. ظاهراً باید وجود این‌همه آثار منحصربه‌فرد کافی باشد تامولف آن‌ها ازیاد نرود. ولی باکمال تاسف، نام توریچلی را، به‌عنوان ریاضی‌دان، تنها می‌توان در کتاب‌های

تاریخ دانش پیدا کرد. ولی حق این است که توریچلی جای شایسته خود را در کتاب‌های ریاضیات‌عالی، همان طور که در کتاب‌های درسی وفیزیک وجود دارد، به‌دست آورد.

در شمارهٔ بعد: بلز پاسکال

حل مسالهٔ صفحهٔ ۲۱

مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را دورقطرش BD_1 دوران داده‌ایم (شکل را ببینید). روشن است، جسمی که در اثر این دوران به دست می‌آید، همان جسمی است که محدود به سطح حاصل از دوران خط شکستهٔ $BB_1A_1D_1$ دورهمان‌قطر باشد. ازآن‌جا که پاره‌خط های این خط شکسته برابرند و تمایل آن‌ها نسبت به‌قطر، یکی است، تصویر هر کدام از آن‌ها برقطر برابر $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ می‌شود(a، ضلع مکعب است). از این جا نتیجه‌می‌شود که راس‌های A_1 و B_1 به فاصلهٔ $\sqrt{\frac{2}{3}}a$ ازقطر قرار گرفته‌اند.



به‌این‌ترتیب، جسم‌دوار موردنظر، از دومخروط‌مساوی‌ویک‌هیپربولوئید دوار، تشکیل شده است. ارتفاع‌این سه‌جسم برابر است $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ و شعاع‌های قاعده‌ها، برابر $\sqrt{\frac{2}{3}}a$ است.

حجم مخروط‌ها، با رابطهٔ معمولی و معلوم خود محاسبه می‌شود؛ حجم هیپربولوئید را هم می‌توان‌طبق فرمول سیمپسون محاسبه کرد، زیرا مساحت مقطع‌های موازی‌باقاعده، تابع‌های درجه‌دومی ازفاصلهٔ صفحهٔ مقطع تا قاعده است.

به‌این ترتیب، حجم V_2 هیپربولوئید، به‌این ترتیب محاسبه می‌شود:

$$V_2=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4M)$$

که درآن S_1 و S_2، مساحت قاعده‌های‌آن، و M مساحت مقطع‌متوسط‌است. درمورد مسالهٔ خود داریم:

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{3}\ ,\ S_1=S_2=\frac{2}{3}\pi a^2\ ,\ M=\frac{\pi}{2}a^2$$

به این ترتیب

$$V=V_1+V_2+V_3=2V_1+V_2=$$
$$=2\times\frac{1}{3}\pi\times\frac{a\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}a^2+\frac{a\sqrt{3}}{18}\pi\left(\frac{4}{3}a^2+2a^2\right)=$$
$$=\frac{4\pi a^3}{9\sqrt{3}}+\frac{5\pi a^3}{9\sqrt{3}}=\frac{\pi a^3}{\sqrt{3}}$$

از این‌جا و آن‌جا

اگر شنیدید که کسی می‌گوید، من ریاضیات را دوست ندارم، باور نکنید. ریاضیات را نمی‌شود دوست نداشت. ریاضیات هم در بیرون و هم در درون ما وجود دارد. تنها می‌توان ریاضیات را شناخت یا نشناخت.

ك. له‌وی‌تین در کتاب «حماسهٔ هندسه»

هندسه، کهن سال‌ترین دانش‌هاست. سرچشمهٔ پیدایش دانش هندسه را باید در جهان باستان و به عنوان دانش اندازه‌گیری طول، سطح و حجم، جستجو کرد. ولی در زمان ما، این دانش، چنان در سطح و در عمق گسترش یافته است که حتی ویژهٔ کارانی که در زمینه‌های اختصاصی هندسه کار می‌کنند، به سختی می‌توانند حرف‌های یکدیگر را بفهمند.

آ. خالامایزر

در باغ بزرگ هندسه، هر کسی می‌تواند دسته گلی را که با سلیقه و طبیعتش سازگار است، انتخاب کند.

داوید هیلبرت

طرحی از م. ك. اچر، نقاش هلندی

زیبائی، نخستین نیاز است. در جهان، هیچ جایی برای ریاضیات نازیبا وجود ندارد

هاردی، ریاضی‌دان انگلیسی

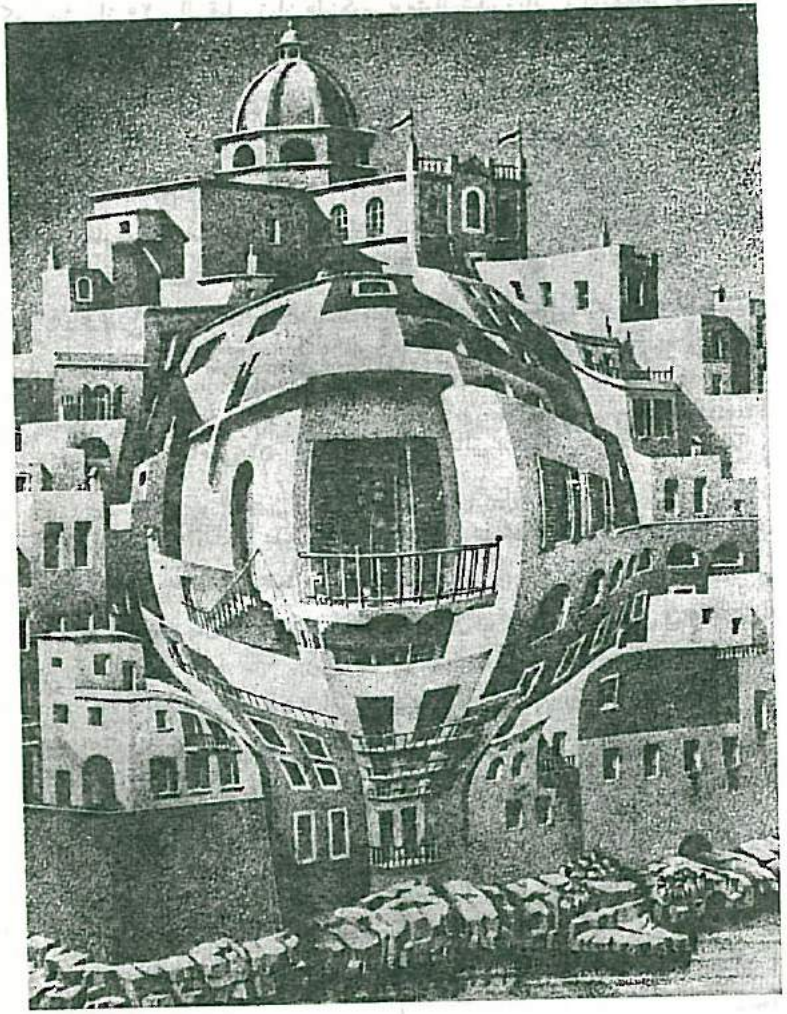
یادگیری هر دانشی، و حتی انتزاعی‌ترین آن‌ها، باید همراه با کاربرد آن در مساله‌های عملی باشد.

واسیلی پروخوروویچ گوریاچکین

مگر این چیزی جز مزخرف گوئی است که چند خط روی کاغذ رسم کنیم و بگوییم: «این خانه است»؟ تصویر فضایی خانه‌ها، یك خیال‌بافی محض است. کاغذ، چیزی جز یك صفحه نیست...

نقاش باید تمامی هنرش را روی یك سطح هموار بریزد.... ولی، کاغذ همچنان یك صفحه باقی می‌ماند.

م. ك. اچر نقاش هلندی



طرحی از م. ك. اچر، نقاش هلندی

به چه مناسبت باید ریاضیات را یاد گرفت؟ می‌گویند که ریاضیات، به ذهن نظم می‌بخشد و آن را تکامل می‌دهد. البته این، تا حدی مبالغه است.، ولی، حقیقتی نیز در آن وجود دارد. کسی که تجربهٔ ریاضی دارد، معمولاً ـ و حتی ناخودآگاه ـ در هر گام و هر اقدام خود، از روش‌های اندیشهٔ ریاضی، استفاده می‌کند.

گ. فری‌دنتال، ریاضی‌دان هلندی

کمی بیش از ۲۰ سال قبل، زبان «لینکوس» متولد شد، زبانی برای تماس با ساکنان سیاره‌های دیگر، این زبان امکان می‌دهد که «مکالمه‌ای» یك جانبه، با موجودات متفکر احتمالی، که طبعاً به هیچ کدام از زبان‌های زمینی آشنایی ندارند، و یا اصلاً چیزی دربارهٔ زندگی زمینی نمی‌دانند، انجام شود. برای آنان پیام فرستاده می‌شود، بدون این که انتظار پاسخی یا پرسشی در بین باشد. آخر، برای این که نشانه‌های رادیویی ما، به «هم صحبت» احتمالیمان برسد و یا پاسخ او بر گردد، دست کم، هزار سالی وقت لازم است.

آدم باید منطقی فوق‌العاده داشته باشد و از تخیلی غنی برخوردار و دارای شخصیتی خارق‌العاده باشد، تا بتواند چنین مساله‌ای را در برابر خود قرار دهد و از عهدهٔ حل آن بر آید.

گ. فری دنتال، ریاضی‌دان نام‌دار هلندی و خالق «لینکوس»، چنین آدمی بود.

* * *

هر کشف تازه‌ای که در علوم طبیعی و صنعت می‌شود، تنها از راه به کار بردن نتیجه‌گیری‌های جدید در عمل، و یا زنده کردن نظریه‌های «فراموش شدهٔ» ریاضی است. به این ترتیب، نظریه‌های ریاضی، از قبل، راه پیشرفت دانش و صنعت را، پیش‌بینی می‌کند.

ب. فلدلیوم

پیش از آن که بخواهید به قله‌های دانش دست یابید، الفبای آن را بیاموزید. تا وقتی، مطالب قبلی را فرا نگرفته‌اید، به مطالب بعدی نپردازید.

ای. پ. پاولوف

رمز و راز عددها وشکل‌ها

فراوانی جواب

می‌دانیم که معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ وقتی که n عددی درست و بزرگتر از ۲ باشد، دارای جواب درست برای x و y و z نیست (یادقیق‌تر بگوئیم: تاکنون برای بسیاری از مقادیر درست n ثابت شده است که معادله جواب ندارد. درحالت کلی‌هم، مساله حل نشده است).

ولی معادلهٔ $x^n+y^n=z^{n+1}$، دارای بی‌نهایت جواب است.

یکی از راه‌هایی را که منجر به پیدا کردن جواب می‌شود، می‌آوریم (اگر دقت کنید، می‌توانید راه‌های دیگری‌هم پیدا کنید).

n را عددی طبیعی ومفروض می‌گیریم. دو عدد درست دلخواه a و b را انتخاب و $a^n+b^n=c$ را محاسبه می‌کنیم. دراین صورت جواب چنین است:

$$x=a\cdot c \;,\; y=b\cdot c \;,\; z=c$$

در واقع داریم:

$$a^nc^n+b^nc^n=c^n(a^n+b^n)=c^n\cdot c=c^{n+1}$$

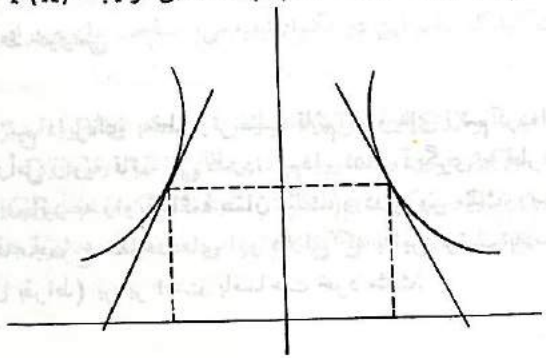
مثلا، فرض کنیم: $x^2+y^2=z^3$. اگر به‌دلخواه $a=4$ و $b=7$ بگیریم، $c=4^2+7^2=65$ می‌شود و دراین صورت:

$$x=4\times 65=260 \;,\; y=7\times 65=455 \;,\; z=65$$

اثباتی ازروی شکل

تابع $f(x)$ را زوج و قابل مشتق‌گیری فرض می‌کنیم. ثابت کنید که $f'(x)$ یك‌تابع فرد است.

ازآنجا که $f(x)$ بنابر فرض، تابعی زوج است، نسبت به محور yy' متقارن می‌شود. بالا به‌شکل مراجعه کنید. داریم $\alpha+\beta=\pi$، یعنی: $tg\alpha=-tg\beta$ یا $f'(x)=-f'(-x)$. به‌این ترتیب، $f'(x)$ تابعی فرد است.



و. د. چیستیاکوف

مساله‌های قدیمی (۳)

ترجمهٔ پرویز شهریاری

مساله‌های یونانی

I. صورت مساله‌ها

مساله‌های فیثاغورث

۱. ثابت کنید، مربعی که روی وتر یك مثلث‌قائم‌الزاویه ساخته‌می‌شود، برابر است بامجموع مربع‌هایی که روی دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه ساخته شده‌اند:

۲. همهٔ عددهای فیثاغوری را پیدا کنید، یعنی همهٔ سه‌تایی‌های درست ومثبت x ، y و z ، که درمعادلهٔ $x^2+y^2=z^2$، صدق می‌کنند.

۳. مجموع جمله‌های هردنباله‌ای‌ازعددهای فردمتوالی، که از ۱ آغاز شده باشد، مجذورکامل است.

۴. هرعدد فرد، به‌جز واحد، تفاضلی از دومجذورکامل است.

درمکتب فیثاغوری، این‌حکم، برای نمونه‌های خاصی وبه‌طور هندسی، ثابت‌کرده بودند. ولی، چگونه؟

کوشش کنید درستی این حکم، بدون استفادهٔ از شکل‌های هندسی و درحالت‌کلی، ثابت‌کنید.

مساله بقراط خیوسی

۵. نیم دایره‌ای به‌قطر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کرده‌ایم. این نیم دایره از رأس زاویهٔ قائمه می‌گذرد. نیم‌دایره‌های دیگری به قطر هرکدام از ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ همان مثلث، و دربیرون مثلث، رسم کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع مساحت‌های دو هلالی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید (هلال‌های بقراط) برابر است بامساحت خود مثلث.

مساله‌های اقلیدس

۶. روی پاره خط مفروض AB، مثلث متساوی‌الاضلاعی بسازید.

۷. زاویهٔ مفروضی را به‌دوقسمت برابر تقسیم کنید.

۸. متوازی‌الاضلاعی بسازید که زاویهٔ بین ضلع‌های آن معلوم، ومساحت آن، برابر بامساحت مثلث مفروضی باشد.

۹. دردایرهٔ مفروض، مثلثی محاط کنید که بامثلث مفروض متشابه باشد.

۱۰. پاره‌خطی را به‌دوقسمت چنان تقسیم کنید که مستطیل باضلع‌های تمام پاره‌خط ویکی از قطعه‌های آن، هم‌ارز مربع به‌ضلع قطعهٔ دیگر باشد (مسالهٔ تقسیم طلائی).

۱۱. ثابت کنید که عددهای اول، مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

مساله آپولونیوس

۱۲. دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایرهٔ مفروض مماس باشد.

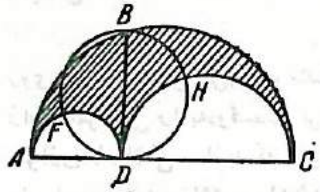
مساله‌های ارشمیدس

۱۳. ثابت کنید مساحت دایرهٔ محیطی یك مربع، دوبرابر مساحت‌دایرهٔ محاطی آن است.

۱۴. ارشمیدس ثابت کرد: ۱) هردایره هم‌ارز است بامثلث‌قائم‌الزاویه‌ای که یك ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه آن برابر شعاع دایره، وضلع دیگرمجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ مثلث برابر محیط بازشدهٔ دایره باشد؛ ۲) نسبت مساحت دایره به‌مجذور قطرآن، مثل نسبت ۱۱ به ۱۴ است.

ثابت کنید که بنابراین دوحکم ارشمیدس، مساحت دایره برابربا $\frac{22}{7}r^2$ می‌شود.

۱۵. نیم‌دایرهٔ ABC به‌قطر AC مفروض است. از نقطهٔ B واقع برمحیط آن، عمود BD را بر AC فرودآورده‌ایم ونیم دایره‌های AFD و DHC را به‌ترتیب به‌قطرهای AD و DC رسم کرده‌ایم (شکل ۱). ثابت کنید که مساحت $AFDHCB$، شکلی که به‌این ترتیب به‌دست‌می‌آید، برابراست بامساحت دایرهٔ به‌قطر BD.



شکل ۱

۱۶. مساحت قطعهٔ کروی برابر است با مساحت دایره‌ای که شعاع آن برابر باشد با پاره‌خطی که رأس قطعه را به‌یکی از نقطه‌های محیط قاعدهٔ این قطعه وصل می‌کند.

۱۷. کره‌ای پیدا کنید که حجمی برابر باحجم یك‌مخروط یایك‌استوانهٔ مفروض، داشته باشد.

۱۸. استوانه‌ای که قاعده‌اش، دایرهٔ عظیمهٔ یك کره، و ارتفاعش برابر قطر همین کره باشد، حجمی برابر $\frac{۳}{۲}$ حجم کره، وسطح کلی برابر $\frac{۳}{۲}$ سطح کره خواهد داشت.

۱۹. مطلوب است مجموع بی‌نهایت جمله از تصاعد هندسی نزولی

$$۱+\frac{۱}{۴}+\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}+\dots$$

۲۰. مطلوبست مجموع مجذورهای n عدد طبیعی نخستین.

۲۱. عددی رانام ببرید که نه‌تنها از تعداد شن‌های داخل کره‌ای برابر کرهٔ زمین، بلکه از تعداد شن‌های همهٔ جهان بیشتر باشد، به‌شرطی که همهٔ جهان را برابر کره‌ای بگیریم که مرکز آن درمرکز زمین وشعاع آن برابر فاصله بین مرکز زمین و مرکز خورشید باشد.

۲۲. به‌کمك پرگار وخط‌کش، یك‌هفت ضلعی منتظم تقریبی رسم کنید.

۲۳. مسالهٔ گاوها (باجزئی تغییر درمیان مساله)

چند گاو درسرزمین آفتاب است، برای‌من حساب کن ای‌بیگانه.
(اگر از خردبیگانه نباشی، تر آن‌ها را، بااندیشهٔ خود، حساب کن.)
آن‌ها دردشت‌های جزیرهٔ پرعلف‌سیسیل
زمانی درچهار گلهٔ بزرگ، به‌چرا مشغول بودند.
گله‌ها را بارنگ‌می‌شدتمیزداد: یکی به‌رنگ‌سفید، همچو کهکشان، می‌درخشید،
رنگ گلهٔ دیگر، به‌رنگ موج‌های تیرهٔ دریایی بود،

گلهٔ سوم کرند، وآخری رنگارنگ،
و درهر کدام
مجموعه‌ای از گاوهای‌نر بانیرویی فوق‌العاده.
که بین آن‌ها این تناسب حفظ می‌شود: وتو باید
درنظر بگیری ای‌بیگانه،
تعداد گاوهای نر سفید، دقیقاً برابر است‌با
نصف و ثلث گاوهای نر تیره وتمام کرندها؛
تعداد گاوهای نر تیره، برابر است بایك‌چهارم
گاوهای نر چند رنگ به‌اضافهٔ یك‌پنجم آن‌ها و
تمام کرندها؛
گاوهای با پشم چندرنگ‌هم به‌این تعدادند:
به‌اندازهٔ یك‌ششم ویك‌هفتم گلهٔ گاوهای نقره‌ای.
وتمامی گلهٔ گاوهای‌نر کرند.
وحالا می‌رسیم به گله‌های گاوهای ماده:
تعداد سفید پشم‌ها
برابر است باتمامی گاوهای نر و ماده تیره
به‌شرطی که یك‌چهارم ویك‌سوم آن‌ها را روی‌هم بریزی
تعداد گاوهای مادهٔ سیاه‌هم درست
یك‌چهارم تمام گاوهای چندرنگ است، به‌شرطی که
دوباره یك پنجم آن‌ها را به‌آن اضافه کنی
و اگر درآن جمله از تمام گاوهای کرند،
یك‌پنجم ویك ششم را بگیری و روی‌هم بریزی،
به‌اندازهٔ گاوهای مادهٔ چندرنگ می‌شود.
برای گاوهای مادهٔ کرندهم، باید
از تمامی گلهٔ سفید، یك‌ششم ویك‌هفتم
را جدا کنی
تو می گویی که چند گاونر درسرزمین آفتاب
وجود دارد
تعداد گاوهای نر را به‌طور جداگانه نام ببر،
همین‌طور تعداد گاوهای ماده را در رنگ‌های جداگانه،
دراین صورت، هیچکس تورا، از جاهلان نخواهد دانست،
برای تعداد گاوهای نر سرزمین آفتاب بازهم حرف‌هایی داریم،

اگر گاوهای بر سفید و قهوه را دریک جا جمع کنی،
طوری که هم درطول وهم درعرض تنگ هم قرار گیرند،
آن‌وقت سرزمین وسیعی از سیسیل را
خواهند پوشاند
که مربع کاملی بامساحتی بزرگ خواهد بود.
اگرهم گاوهای نر کرند وچندرنگ را به‌صورت
یك گله درآوری،
می‌توانی آن‌ها را درزمینی به‌شکل مثلث
تنگ‌هم جادهی
لزومی ندارد که رنگ‌های دیگر را به‌هم اضافه کنیم.

مساله‌های مشهور وقدیمی هندسه

مساله تضعیف (دوبرابرکردن) مکعب

۲۴. می‌خواهیم یال مکعبی را رسم کنیم که حجم آن برابر با دو برابر حجم مکعب مفروض باشد.

مساله تثلیث زاویه

۲۵. می‌خواهیم زاویهٔ غیرمشخصی را به‌سه‌قسمت برابر تقسیم کنیم.

مساله تربیع دایره

۲۶. مربعی رسم کنید که مساحت آن برابر بامساحت دایرهٔ مفروض باشد.

مساله هیپسیکلس اسکندرانی

۲۷. ثابت کنید که اگر تعداد جمله‌های یك تصاعد حسابی زوج باشد، مجموع جمله‌های نیمهٔ دوم آن، به‌اندازهٔ مضربی ازمجذور نصف تعداد جمله‌ها، از مجموع نیمهٔ نخست آن بیشتر است.

مساله‌های هرون

۲۸. مطلوب است مساحت مثلثی که طول ضلع آن $a=۱۳$ ، $b=۱۴$ و $c=۱۵$

۲۹. مطلوب است مثلث‌هایی که مساحت آن‌ها باعدد درست بیان شود (مثلث‌های هرون) وضمناً طول ضلع‌های آن‌ها، عددهای پشت‌سرهم باشد.

مساله نیکوماخوس

۳۰. ثابت کنید، اگر رشتهٔ عددهای فرد را به‌گروه‌هایی چنان تقسیم کنیم که تعداد جمله‌های آن‌ها، رشتهٔ طبیعی عددها را تشکیل دهند [یعنی در گروه اول، یك‌جمله؛ در گروه‌دوم دوجمله؛...؛ و در گروه nام n جمله وجود داشته باشد]، مجموع جمله‌های هرگروه برابر بامکعب تعداد جمله‌های آن می‌شود.

مساله بطلمیوس

۳۱. ثابت کنید که‌درهرچهارضلعی محاطی، حاصل‌ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل ضرب های دوبه‌دوی ضلع‌های روبه‌رو.

مساله‌های دیوفانت (از رسالهٔ «حساب»)

۳۲. سه‌عدد طوری پیدا کنید که عدد بزرگتر به‌اندازهٔ $\frac{1}{3}$ عدد کوچکتر از عدد متوسط بیشتر باشد، همچنین عدد متوسط به‌اندازهٔ $\frac{1}{3}$ عدد بزرگتر از عدد کوچکتر بیشتر باشد، و بالاخره عدد کوچکتر به‌اندازهٔ ۱۰ واحد از $\frac{1}{3}$ عددمتوسط بیشتر باشد.

۳۳. این دستگاه را حل کنید:

$$x+y=۱۰ \,،\, x^۲+y^۲=۶۸$$

۳۴. یکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، مکعب کامل است. ضلع دیگر پهلوی زاویهٔ قائمه این مثلث برابر است با تفاضل همان ضلع و مکعب آن، و تر مثلث برابر است با مجموع آن ضلع با مکعب آن. مطلوب است ضلع‌ها.

۳۵. می‌خواهیم عدد ۱۰۰ را دوبار طوری تقسیم کنیم که قسمت بزرگتر تقسیم اول، دوبرابر قسمت کوچکتر تقسیم دوم و قسمت بزرگتر تقسیم دوم سه‌برابر قسمت کوچکتر تقسیم اول باشد.

۳۶. دوعدد پیدا کنید که مجموع آن‌ها ۲۰ و حاصل ضرب‌شان ۹۶ باشد.

۳۷. دوعدد پیدا کنید که نسبت آن‌ها برابر ۳، و نسبت مجموع مجذورهای آن‌ها به‌مجموع آن‌ها برابر ۵ باشد.

۳۸. سه‌عدد پیدا کنید، به‌نحوی که حاصل‌ضرب مجموع دوعدد اول در عدد سوم برابر ۳۵، حاصل‌ضرب مجموع دوعدد اول و سوم در دومی برابر ۲۷ و حاصل‌ضرب مجموع دومی و سومی در اولی برابر ۳۲ باشد.

۳۹. دوعدد پیدا کنید که اگر حاصل‌ضرب آن‌ها را به‌هر کدام از دوعدد اضافه کنیم، درهرحال یک‌مکعب به‌دست آید.

۴۰. سه‌عدد طوری پیدا کنید که‌هم مجموع سه‌عدد و هم هرکدام از مجموع‌های دوبه‌دوی آن‌ها، مجذور کامل باشد.

مساله‌های پاپوس اسکندرانی (از رسالهٔ «مجموعهٔ ریاضیات»)

۴۱. نقطهٔ p برنیمساز زاویه‌ای داده شده‌است. ازاین نقطه، خط‌راستی چنان رسم کنید که پاره‌خط محدود به دوضلع زاویه از آن، برابر باطول مفروضی باشد.

۴۲. ثابت کنید نسبت مساحت‌های دوقطعهٔ متشابه در دودایره برابر با نسبت مربع وترهایی است که قاعدهٔ این دوقطعه را تشکیل می‌دهند.

۴۳. روی یکی از ضلع‌های یک‌مثلث غیرمشخص متوازی‌الاضلاعی ساخته‌ایم، به‌نحوی که قسمتی ازآن در داخل مثلث قرار گیرد و دورأس آن در دوطرف ضلع‌های دیگر مثلث و در بیرون‌آن واقع باشند. سپس روی هرکدام از دوضلع دیگر متوازی‌الاضلاع‌هایی می‌سازیم که در خارج مثلث واقع شوند وضلع‌هایی ازآن‌ها که موازی ضلع‌های مثلث‌اند، از رأس‌های متوازی‌الاضلاع قبلی بگذرند. ثابت کنید که مساحت متوازی‌الاضلاع اول

برابر است بامجموع مساحت‌های دومتوازی‌الاضلاع دیگر.

مساله‌هایی از «جنگ یونانی»

۴۴. به‌من بگو، فیثاغورث مشهور، چند شاگرد به‌مکتب تومی‌آید و به‌بحث‌های تو گوش می‌دهد؟

– وفیثاغورث پاسخ داد

– تعدادآن‌ها چنان است که نیمی از آن‌ها ریاضیات می‌خوانند، یک‌چهارم آن‌ها به‌موسیقی مشغول‌اند، یک‌هفتم آن‌ها درحال تفکرند و به‌جز آن‌ها، سه‌زن‌هم وجود دارد.

۴۵. الاق وقاطر، بابار سنگینی که برپشت‌خود داشتند، پهلو به‌پهلوهم راه می‌رفتند. الاغ ازبار بی‌اندازه سنگین خود شکایت می‌کرد. قاطر به‌او پاسخ داد: «تو چرا شکایت داری؟ اگرمن یک کیسه از توبگیرم، بارمن‌درست دوبرابر تو خواهد شد. در حالی که اگر تو یک‌کیسه ازمن بگیری، آن‌وقت بارهایمان یکی خواهد شد.» الاغ و قاطر، هرکدام چندکیسه بار برپشت خود دارند؟

۴۶. – ای‌الههٔ زمان، چه‌قسمتی از روز گذشته است؟

–دوبرابر دوسوم آنچه‌که گذشته، باقی مانده است. (دریونان‌باستان، روز را ۱۲ ساعت به‌حساب می‌آوردند).

مسالهٔ مترودور

۴۷. این‌جا دیوفانت آرمیده است و این، سنگ‌مزار اوست
باحسابی هنرمندانه، برای‌ما حکایت می‌کند،
که چقدر زندگی‌او طولانی بوده است.
به‌فرمان یزدان، کودکی او، یک‌ششم زندگی او بود،
جوانی‌او، دریک دوازدهم زندگی او بود.
بعد، یک هفتم زندگیش را در زندگی زناشوئی وبدون فرزند گذراند.
پنج‌سال که گذشت، پسراو به‌دنیا آمد
ولی چه‌بدبختی! پسر، به‌اندازهٔ نیمی از زندگی پدر عمرکرد.
دیوفانت، چهارسال آخرعمرش، درغم از دست دادن فرزندش

به‌سر آورد

واو، که برای دانش زندگی می‌کرد، مرد، به‌من بگو،
دیوفانت چندسال زیسته است؟

II. یادداشت تاریخی

نخستین معلمان یونانی‌های باستان، مصری‌ها بودند. درسدهٔ هفتم پیش ازمیلاد، راه ورود آزاد به‌مصر، برای مسافران خارجی بازشد. دانشمندان یونانی، ازاین‌موضوع به‌خوبی، وباسفر به«سرزمین هرم‌ها»، استفاده کردند. یونانی‌ها، تقریباً ازسدهٔ چهارم پیش‌از میلاد، جستجوهای مستقل خود را در ریاضیات آغاز کردند و در این‌زمینه، و به‌خصوص در هندسه، به موفقیت‌های زیادی دست‌یافتند. هندسهٔ یونان‌باستان، درسدهٔ سوم پیش‌از میلاد، به‌اوج خود رسید. دراین‌سده بود که اقلیدس سیزده کتاب، زیر نام کلی «مقدمات» دربارهٔ هندسه نوشت.

در آثار اقلیدس، اجبهٔ منطقی هندسه، در چنان سطح بالایی قرارداشت، که تنها درسده‌های نوزدهم و بیستم، در کارهای هیلبرت، ریاضی‌دان آلمانی، ومکتب او، تلاشی برای بهتر کردن آن‌ها انجام گرفت.

یونانی‌ها، تنها به‌مساله‌های هندسه مقدماتی علاقمند نبودند (ضمناً، اصطلاح «هندسهٔ مقدماتی»درآن‌زمان وجود نداشت)، بلکه مبانی استواری‌هم برای هندسهٔ عالی، پی‌ریختند (کارهای آپولونیوس، ارشمیدس ودیگران).

درنظریهٔ عددها، فیثاغورث و شاگردان‌او، موفقیت‌هایی جدی به‌دست آوردند.

در زمینهٔ جبر، وبه خصوص معادله‌های سیال، باید از دیوفانت نام‌برد، که درسده‌های دوم و سوم بعدازمیلاد دراسکندریه‌می‌زیست وبه‌همین مناسبت، گاهی اورا دیوفانت اسکندرانی می‌نامند. او، برای نخستین‌بار، در روش‌های جبری خود، اولین علامت‌های حرفی را وارد کرد و معادله‌های جبری را، بارمز علامت‌ها نشان داد.

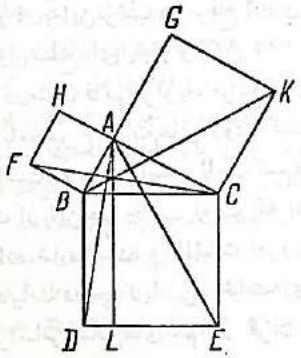
مهم‌ترین تالیف دیوفانت، «حساب» اوست که درشش کتاب به‌مارسیده است(و احتمال می‌دهند که دراصل ۱۳ کتاب بوده‌است). از روی همین کتاب دیوفانت، می‌توان دربارهٔ موقعیت جبر در یونان‌باستان داوری کرد.

III. حل مساله‌ها

۱. این‌مساله، به«قضیه فیثاغورث» مشهورشده‌است و درهر کتاب‌هندسهٔ مقدماتی، به‌عنوان یکی‌از اساسی‌ترین قضیه‌ها، آمده است. تقریباً در همهٔ کتاب های درسی هندسه، که برای دبیرستان‌ها نوشته شده است، قضیه فیثاغورث بااثبات اقلیدس داده شده است. باوجودی که اثبات اقلیدس، بابیان دقیق شوپنهاور، ازنوع «اثبات تله‌موشی» است، که به‌کلی فاقد عینیت است وباید بااستدلال‌های پیچیده‌ای، کورکورانه به‌دنبال اقلیدس رفت، بنابه اعتقاد پروفسور و. لیتسمان، اگر در چارچوب دستگاه هندسی مورد بررسی قرار گیرد، اثباتی را که اقلیدس در «مقدمات»خود داده است، می‌توان به‌عنوان طرح‌بسیار ساده‌ای قبول کرد. در واقع، عینی‌بودن مطلب، هدف اصلی اقلیدس نیست، وآن‌را درردیف اول اهمیت قرارنمی‌دهد. برای اقلیدس، بهترین‌اثبات این است که حداقل استفاده‌را از قضیه‌های قبلی کرده باشد. از این دیدگاه، اثباتی که اقلیدس از قضیه فیثاغورث داده است، اثباتی ساده است. اقلیدس، برای اثبات این قضیه، یکبار از قضیه مربوط به‌حالت اول تساوی مثلث‌ها، و دوبار از این قضیه استفاده می‌کند که: اگر یك متوازی‌الاضلاع و یك مثلث، دارای قاعده‌ها وارتفاع‌های برابر باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع دوبرابر مساحت مثلث است.

مادراین‌جا، اثبات قضیهٔ فیثاغورث را، آن‌طور که اقلیدس در کتاب «مقدمات» خود داده است (حکم ۴۷)، می‌آوریم. ضمناً، این اثبات، بنابه گواهی پروکلیوس (۴۱۰–۴۸۵ میلادی)، متعلق به‌خود اقلیدس است.

«فرض کنید ABC ، مثلث قائم‌الزاویه‌ای بازاویهٔ قائمهٔ BAC باشد؛ من حکم‌می‌کنم که مربع روی BC برابر است بامربع‌های روی BA و AC روی‌هم (شکل۲).



شکل ۲

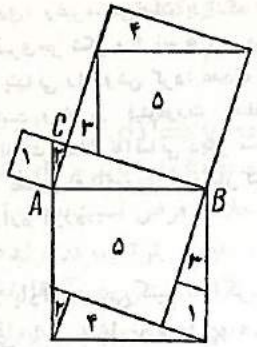
اثبات. مربع BDEC را روی BC و مربع‌های HB و GC را روی BA و AC می‌سازیم (حکم ۴۶). از نقطهٔ A ، خط AL را موازی BD و CE می‌کشیم (حکم ۳۱)؛ AD و FC را وصل می‌کنیم. چون هرکدام از زاویه‌های BAC و BAH قائمه‌اند (تعریف ۱۰)، یعنی از نقطهٔ A روی خطی مثل BA ، دوخط راست AC را در دوجهت، طوری رسم کرده‌ایم که زاویه‌های مجانبی به‌مجموع دوقائمه تشکیل داده‌اند، درنتیجه CA روی‌همان خط‌راست AH قراردارد (حکم ۱۴). به‌همین‌ترتیب، AB هم در امتداد AG قرارمی‌گیرد. وچون زاویهٔ DBC بازاویهٔ FBA برابر است (اصل ۱)، زیرا هرکدام ازآن‌ها قائمه‌اند، اگر زاویهٔ مشترك ABC را اضافه کنیم، به‌معنای این می‌شودکه زاویهٔ DBA بازاویهٔ FBC برابر است (اصل ۲). اگر به‌دو مقدار مساوی، یك‌مقدار اضافه‌کنیم، دومقدار مساوی به‌دست می‌آید. و چون DB برابر BC ، و FB برابر BA است (تعریف ۲۲)، پس دوضلع DB و BA ، نظیر به‌نظیر بادوضلع BC و FB برابرند؛ و زاویهٔ DBA بازاویهٔ FBC برابر است؛ یعنی قاعدهٔ AD باقاعدهٔ FC و مثلث ABD بامثلث FBC برابر می‌شود (حکم ۴). دوبرابر مثلث ABD ، متوازی‌الاضلاع BL است (حکم ۴۱)، زیرا آن‌ها درقاعدهٔ BD مشترك‌اند و بین دوخط موازی BD و AL قرار گرفته‌اند (حکم ۴۱). دوبرابر مثلث FBC هم (حکم ۴۱)، مربع HB می‌شود، زیرا قاعدهٔ هردوی آن‌ها FB است و بین دوخط موازی FB و HC قرار دارند. ولی دوبرابر دومقدار برابر، باهم برابرند (اصل۵)؛ یعنی مستطیل BL بامربع HB برابر می‌شود. به‌همین ترتیب، باوصل AE و BK ، ثابت می‌شودکه مستطیل CL برابر است بامربع GC ؛ یعنی تمامی مربع BDEC برابر است بادومربع HB و GC روی‌هم. اما BDEC مربعی است که روی BC ساخته شده است و HB و GC ، مربع‌های روی BA و AC ؛ به‌این‌ترتیب، مربع روی ضلع BC برابراست بامجموع مربع‌های روی ضلع‌های BA و AC .

یعنی درمثلث قائم‌الزاویه، مربع روی‌ضلع مقابل به‌زاویهٔ قائمه (وتر)، برابر است بامجموع مربع‌های روی ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه؛ و این، همان‌چیزی است‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم».

اثبات از این‌نظر جالب است که به‌وسیلهٔ اقلیدس، ودر بیش‌از دوهزار سال پیش داده شده است، و بااثبات امروزی‌آن، تفاوت ناچیزی دارد.

در ادبیات درسی ریاضی، اثبات‌های فراوانی ازقضیهٔ فیثاغورث وجود دارد، که براساس شکل‌های هم‌ارز قرار دارند. تفاوت اصلی این‌اثبات‌ها،

بااثبات اقلیدس در عینی‌بودن آن‌هاست، ولی از لحاظ سادگی، به‌مفهومی که قبلا گفتیم، از اثبات اقلیدس پایین‌ترند. مثلا در سدهٔ نهم میلادی، آناریتسی، اثبات خودش براساس شکل ۳ قرار داد.



شکل ۳

قضیهٔ فیثاغورث، تاریخی غنی‌دارد. ضمناً روشن‌شده است‌که مصری‌ها، بابلی‌ها، چینی‌ها و هندی‌ها، مدت‌ها پیش‌از فیثاغورث، از این‌قضیه آگاهی داشته‌اند.

هندی‌ها، از سدهٔ هفتم پیش از میلاد، زیرنام «قاعدهٔ طناب‌ها» باقضیهٔ فیثاغورث آشنا بودند و ازآن در ساختن مهراب‌های خود استفاده می‌کردند. طبق احکام مقدس هندی‌ها، این مهراب‌ها می‌بایستی شکل دقیق هندسی داشته باشند ونسبت به‌چهارجهت اصلی توجیه شده‌باشند.

اثبات خود فیثاغورث به‌ما نرسیده است. در زمان‌ما، بیش‌از صداثبات مختلف برای قضیهٔ فیثاغورث وجود دارد. چه‌بسا که یکی از آن‌ها، متعلق به فیثاغورث ویا یکی ازشاگردان او باشد (بنابه‌عادت آن‌روزگار، هرچیزی را که شاگردان کشف می‌کردند، به‌نام معلم خود ثبت می‌کردند).

فیثاغورث (حدود سال‌های ۵۸۰ تا ۵۰۰ پیش‌از میلاد)، ریاضی‌دان و فیلسوف یونان‌باستان، درساموس متولدشد. درجوانی، برای مطالعهٔ دانش کاهنان‌مصری، به‌آن سرزمین سفر کرد. او دربابل‌هم بود و درآن‌جا، در جریان ۱۲ سال، توانست اخترشماری واخترشناسی کاهنان بابلی را فراگیرد. بعداز بابل، به‌جنوب ایتالیا وسپس به‌سیسیل‌رفت ودرآن‌جا مکتب فیثاغوری را بنیان گذاشت که سهم پرارزشی درپیشرفت ریاضیات و اخترشناسی داشت. فیثاغورث و شاگردان او، به‌هندسه، چهره علمی دادند. به‌جز قضیه‌ای که به‌نام او مشهور است، اثبات قضیهٔ مربوط به‌مجموع زاویه‌های مثلث مسالهٔ مربوط به پوشش‌ها، یعنی تقسیم صفحه به‌چندضلعی‌های منتظم، حل هندسی معادلهٔ دوجه‌دوم و طریق ساختن شکلی که بایك‌شکل مفروض متشابه وباشکل مفروض دیگر هم‌ارز باشد، نیز به فیثاغورث مربوط است.

درمکتب فیثاغوری، عرفان عددی، رشد زیادی کرد. قبول نسبت‌های کمی، به عنوان اهمیت همهٔ چیزها، وجداشدن از واقعیت‌های مادی، این‌مکتب را به‌سمت ذهن‌گرائی سوق داد. فیثاغورث می‌آموخت که معیار هرچیز مادی و غیرمادی، عدد و بستگی بین عددهاست. به‌اعتقادفیثاغورث، حتی‌مفهوم‌های به‌کلی دور از ریاضیات را، همچون«دوستی» «درستی»، «شادی» وغیره، می‌توان به‌یاری بستگی‌های عددی روشن‌کرد. او معتقد بودکه این مفهوم‌ها، چیزی‌جز شکل ویا نمونهٔ این بستگی‌های عددی نیستند. به‌یاری عدد می‌توان همهٔ خصلت‌های بنیانی را روشن کرد: عددی نمایندهٔ نیکی، دیگری معرف بدی و سومی مظهر کامیابی است و غیره. فیثاغورث اعتقاد داشت که روح‌هم چیزی جز عدد نیست، جاودان است وازیك انسان به‌انسانی دیگر منتقل می‌شود.

عرفان عددی فیثاغورث و دنبال‌کنندگان راه او، لطمه‌های زیادی به‌پیشرفت دانش ریاضی وارد آورد.

۳. قبلا یادآوری می‌کنیم که اگر x_1 ، y_1 و z_1 ، یك‌سه‌تایی فیثاغوری باشد، عددهای x_1k ، x_2k و x_3k هم یك‌سه‌تایی فیثاغوری را تشکیل می‌دهند(k،عددی‌است‌درست‌ومثبت).درواقع، اگردوطرف‌رابطهٔ $x_1^2+y_1^2=z_1^2$ را در k^2 ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x_1k)^2+(y_1k)^2=(z_1k)^2$$

بنابراین، اگر یك‌سه‌تایی فیثاغوری در اختیار داشته‌باشیم، می‌توان، بااستفاده از یادآوری فوق، مجموعه‌ای نامتناهی از سه‌تایی‌های فیثاغوری به دست آورد. ولی، البته، این مطلب به‌معنای آن نیست که از این راه، همهٔ عددهای فیثاغوری به‌دست می‌آید. برای پیداکردن این سه‌تایی‌ها، به‌استدلال بیشتری نیاز داریم.

سه‌تایی فیثاغوری x ، y و z را ساده می‌گوییم، وقتی که هر دوعدد دلخواه از x ، y و z ، نسبت به‌هم اول باشند. در غیر این‌صورت، به‌آن «سه‌تایی مشتق» گوییم خود به‌خود روشن است‌که برای به‌دست‌آوردن همهٔ سه‌تایی‌های فیثاغوری، باید مجموعهٔ همهٔ سه‌تایی‌های ساده را شناخت تاازراه ضرب آن‌ها در عددهای مثبت ۲ ، ۳ ، .. بتوان همهٔ دیگر سه‌تایی‌ها را پیدا کرد. از این به‌بعد، تنها باسه‌تایی‌های ساده سروکار خواهیم داشت. سپس توجه می‌کنیم که اگر از سه‌عدد فیثاغوری x ، y و z ، دوتای آن‌ها نسبت به‌هم اول باشند، سه‌تایی x ، y و z ، یك‌سه‌تایی ساده می‌شود، یعنی هردوعدد دلخواه آن، نسبت‌به‌هم اول خواهند بود. این حکم را ثابت می‌کنیم.

x و y را نسبت‌به‌هم اول می‌گیریم، ثابت می‌کنیم که x و z ، همچنین y و z نسبت به‌هم اول‌اند. از برهان‌خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که x و z نسبت به‌هم اول نباشند (هراستدلالی که برای x و z به

کار ببریم، درمورد دوعدد y و z هم صادق است). دراین‌صورت داریم:

$$x=x_1d\,;\,z=z_1d$$

که درآن، عدد $d\neq 1$ ، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد x و z است. سه‌عدد فیثاغوری باید، دراین معادله صدق کنند:

$$z^2+y^2=z^2 \qquad (1)$$

و بنابراین

$$(x_1d)^2+y^2=(z_1d)^2\Rightarrow y^2=z_1^2d^2-x_1^2d^2=(z_1^2-x_1^2)d^2$$

از این‌جا دیده می‌شود که عدد y به‌ناچار باید بر d بخش‌پذیر باشد، ودراین صورت، دوعدد x و y ، برخلاف فرض نسبت‌به‌هم اول نمی‌شوند. درنتیجه ، x و z نسبت‌به‌هم اول‌اند. و به‌همین ترتیب، درمورد دوعدد y و z .

ازآن‌جا که x و y نسبت به‌هم اول‌اند، هردوی آن‌ها نمی‌توانند زوج باشند. ولی این‌دوعدد، هردو، فردهم نمی‌توانند باشند. در واقع، اگر هردو فردباشند،می‌توانیم‌آن رابه‌صورت $x=2p+1$ و $y=2q+1$ بنویسیم، که درآن‌ها، p و q ، عددهایی درست و مثبت‌اند. اگر مقادیر x و y را در معادلهٔ (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$(2p+1)^2+(2q+1)^2=z^2\,,$$

$$z^2=4(p^2+p+q^2+q)+2$$

ازاین‌جا، z^2 عددی زوج می‌شود، واین ممکن نیست، مگر آن‌که z عددی زوج باشد. ولی، اگر z عددی زوج باشد، z^2 باید بر ۴ بخش‌پذیر شود، درحالی که از مقدار z^2 دیده می‌شودکه در تقسیم بر۴ به‌باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسد و این یك‌تضاد منطقی است.

به‌این ترتیب، xوy نمی‌توانند هردو زوج و یاهردو فردباشند، یعنی حتماً یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد است. از این به‌بعد، x را فرد y را زوج می‌گیریم. روشن است که z عددی فرد می‌شود. حالا، معادلهٔ (۱) را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)$$

وفرض می‌کنیم

$$z+y=m\,,\ z-y=n$$

دراین صورت

$$x^2=m\cdot n\,,\quad y=\frac{m-n}{2}\,,\quad z=\frac{m+n}{2}$$

وضمناً $m>n$

چون x ، و در نتیجه x^2 ، عددی فرد است، بنابراین هردوعدد m و n ، فرد خواهند بود. ثابت می‌کنیم که m و n ، نسبت به‌هم، اول‌اند. استدلال

را با برهان خلف انجام می‌دهیم. m و n را عددهایی می‌گیریم که نسبت به‌هم، اول‌نیستند. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها را $d \neq 1$ فرض می‌کنیم. دراین‌صورت.

$$m = m_1 d \,,\; n = n_1 d$$

و ازآن‌جا

$$z = \frac{m+n}{2} = \frac{m_1+n_1}{2} d \,,\; y = \frac{m-n}{2} = \frac{m_1-n_1}{2} d$$

یعنی y و z نسبت به‌هم، اول نیستند، چیزی که ممکن نیست. به‌این ترتیب، عددهای m و n ، نسبت‌به‌هم، اول‌اند.

از رابطهٔ $x^2 = m \cdot n$ ، و ازاین‌حکم که m و n نسبت به‌هم‌اول‌اند، نتیجه می‌شود

$$m = u^2 \,,\; n = v^2$$

که درآن u و v نسبت‌به‌هم اول و ضمناً $u > v$.

به‌این ترتیب، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$x = u \cdot v \,,\; y = \frac{u^2 - v^2}{2} \,,\; z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

واین همان رابطه‌هایی است که سه‌تایی‌های سادهٔ فیثاغوری را به‌دست می‌دهد و مستقیماً تحقیق کنید و ببینید که این مقادیر در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند).

برای این‌که مطلب روشن‌تر باشد، چندسه‌تایی فیثاغوری ساده را به یاری این سه‌رابطه، پیدا می‌کنیم.

u	v	x	y	z
۳	۱	۳	۴	۵
۵	۱	۵	۱۲	۱۳
۵	۳	۱۵	۸	۱۷
۷	۱	۷	۲۴	۲۵
۷	۳	۲۱	۲۰	۲۹
۷	۵	۳۵	۱۲	۳۷
۹	۱	۹	۴۰	۴۱
۹	۵	۴۵	۱۸	۵۳
۹	۷	۶۳	۱۶	۶۵

یادآوری‌ها. ۱. سه‌تایی فیثاغوری ۳، ۴ و ۵ ، خیلی پیش‌از فیثاغورث، برای مصری‌ها شناخته بوده است و ازآن برای رسم خط‌های عمودبرهم در روی زمین استفاده می‌کرده‌اند مثلث باضلع‌های ۳ ، ۴ و ۵ را، مثلث مصری گویند.

۲. باعددهای فیثاغوری می‌توان، هرقدر که لازم باشد، مثلث هرونی بسازیم. مثلث هرونی به‌مثلثی گویند که سه‌ضلع و مساحت‌آن، باعددهای درست و مثبت بیان شده باشد، درواقع، هرسه‌تایی فیثاغوری، متناظر با یک‌مثلث قائم‌الزاویه است، که وتر وضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه‌آن، بااین عددها بیان شده‌است. اگر دومثلث فیثاغوری درنظر بگیریم که دریکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمهٔ باهم برابر باشند. و آن‌وقت این دوضلع برابر را طوری روی‌هم قرار دهیم‌که دوضلع دیگر پهلوی زاویهٔ قائمه از دومثلث، در امتدادهم قرار گیرند، یک‌مثلث هرونی به‌دست می‌آید. مثلاً، از دومثلث فیثاغوری باضلع‌های ۵ ، ۱۲ ، ۱۳ و ۲۵ ، ۱۲ ، ۳۷ ، یک‌مثلث هرونی باضلع‌های ۴۰ ، ۱۳ ، ۳۷ به‌دست می‌آید، که ارتفاعش برابر ۱۲ و بنابراین، مساحتش برابر $\frac{40 \times 12}{2}$ ، یعنی ۲۴۰ واحد مربع می‌شود.

۳. وجود مجموعه‌ای نامتناهی از سه‌تایی‌های فیثاغوری، وسیله‌ای است برای درست‌کردن مساله‌هایی بسیار جالب. ریاضی‌دانان، به‌خصوص به‌این سه‌مساله علاقمندند:

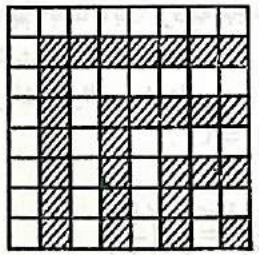
مساله ۱. از میان سه‌تایی‌های فیثاغوری، همهٔ آن‌هایی را پیدا کنید که در هر کدام آن‌ها، دوعدد متوالی وجود داشته باشد (مثل سه‌تایی ۲۰ ، ۲۱ ، ۲۹).

مساله ۲. از بین سه‌تایی‌های فیثاغوری، همهٔ آن‌هایی را پیداکنید که در هرکدام آن‌ها، یک‌مجذور کامل وجود داشته‌باشد (مثل سه‌تایی ۳ ، ۴ ، ۵ یا ۷ ، ۲۴ ، ۲۵ یا ۹ ، ۴۰ ، ۴۱ و غیره).

مسالهٔ ۳. (مسالهٔ فرما). سه‌تایی‌های فیثاغوری $(x \,,\, y \,,\, z)$ را طوری پیدا کنید که درآن‌ها $x+y$ و z ، مجذورهای کامل باشند.

معلوم شده است که این‌گونه سه‌تایی‌ها، یک‌مجموعهٔ نامتناهی را تشکیل می‌دهند، ولی همهٔ آن‌ها، شامل عددهایی بسیار بزرگ‌اند.

۳. ظاهراً در مکتب فیثاغوری، این‌مساله را به‌طریق هندسی حل می‌کردند. در شکل ۴ . اثبات مساله، به‌سادگی دیده می‌شود. ۱ را به‌صورت



شکل ۴

مربعی نشان می‌دهیم و بعد، عددهای فرد متوالی، به شکل Γ درمی‌آیند و از روی شکل دیده می‌شود که

$$۱+۳=۴=۲^۲ ,$$
$$۱+۳+۵=۹=۳^۲ ,$$
$$۱+۳+۵+۷=۱۶=۴^۲ , \ldots$$

حل این مساله، باروش جبری‌هم خیلی ساده است. عددهای فردمتوالی، باشروع از ۱ ، یك‌تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند:

$$۱ , ۳ , ۵ , ۷ , \ldots , (۲n+۱)$$

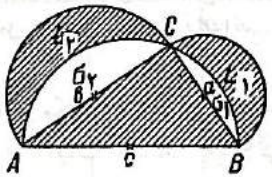
تعداد جمله‌های این تصاعد، برابر است با $(n+۱)$. مجموع همهٔ جمله‌های این تصاعد، چنین می‌شود.

$$S=\frac{(۱+۲n+۱)(n+۱)}{۲}=(n+۱)^۲$$

۴. فیثاغوریان، این مساله را به‌طریق هندسی، حل می‌کردند. اگر در شکل ۴ (که یك‌مربع است)، بزرگترین علامت Γ را (که یك‌عدد فرد است)، برداریم، بازهم یك‌مربع باقی می‌ماند، یعنی

$$۲n+۱=(n+۱)^۲-n^۲$$

۵. مثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظرمی‌گیریم، که a و b، ضلع‌های پهلوی‌زاویهٔ‌قائمه و C ، وتر آن باشد. نیم‌دایره‌هایی به‌قطرضلع‌های‌مثلث، رسم می‌کنیم(شکل۵). برای روشن‌تر بودن‌شکل،مثلث ABC وهلال‌های $L_۱$ و $L_۲$ را



شکل ۵

ها شور زده‌ایم. باید ثابت کرد که مجموع مساحت‌های $L_۱$ و $L_۲$ ، برابراست بامساحت مثلث ABC .

بنا بر قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$a^۲+b^۲=C^۲$$

یا

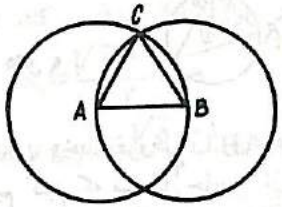
$$\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{a}{۲}\right)^۲+\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{b}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{C}{۲}\right)^۲$$

یعنی، مجموع مساحت‌های دونیم‌دایره‌ای که روی‌ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه ساخته شده‌اند، برابر است بامساحت نیم‌دایرهٔ روی وتر.

حالا اگر مساحت قطعه‌هایی را که بین نیم‌دایرهٔ بزرگ و ضلع‌های a و b قرار دارند، به‌ترتیب $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ بنامیم، و مجموع آن‌ها را از دوطرف تساوی بالا کم کنیم، به‌همان نتیجهٔ موردنظر، می‌رسیم.

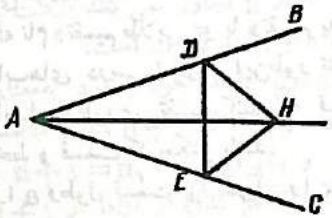
بقراط خیوسی (سدهٔ‌پنجم پیش‌از میلاد)، ریاضی‌دان یونان‌باستان، مولف کتابی دربارهٔ هندسه است که به‌ما نرسیده، ولی بنا به‌گمان تاریخ‌نویسان؛ شامل مطالبی بوده است که در چهار کتاب‌اول «مقدمات» اقلیدس وجود دارد. خیلی‌ها بودند که دربارهٔ مساله‌های تضعیف مکعب و تربیع دایره، کار می‌کردند، و تلاش برای‌حل مسالهٔ دوم بود که بقراط را به‌بررسی مساحت هلال‌ها واداشت.

۶. به‌مرکز نقطهٔ A وبه شعاع مساوی پاره‌خط مفروض، دایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل۶). سپس، به‌مرکز B وباهمان شعاع، دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم. یکی از نقطه‌های برخورد دودایره را C می‌نامیم و آن‌را به‌نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم تا مثلث ABC به‌دست‌آید؛ به‌سادگی ثابت می‌شود که این مثلث، متساوی‌الاضلاع است.



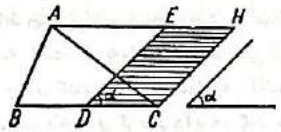
شکل ۶

۷. BAC را، زاویهٔ مفروض می‌گیریم. نقطهٔ D را، به‌دلخواه، روی ضلع AB انتخاب می‌کنیم (شکل۷). بعد روی‌ضلع AC ، پاره‌خط AE را برابر AD جدا می‌کنیم. D را به E وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الساقین DEH را روی DE می‌سازیم اگر A را به H وصل کنیم، خط راست AH ، زاویهٔ مفروض را به‌دوقسمت برابر تقسیم می‌کند، زیرا دومثلث ADH و AEH برابرند.



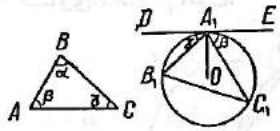
شکل ۷

۸. ABC را مثلث و α را زاویهٔ مفروض می‌گیریم. از نقطهٔ D، وسط ضلع BC، زاویهٔ α را می‌سازیم (شکل ۸). بعد از نقطهٔ C، خطی موازی DE و از نقطهٔ A، خطی موازی BC رسم می‌کنیم تایکدیگر را در نقطهٔ H قطع کنند. چهار ضلعی DEHC، که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، متوازی‌الاضلاع موردنظر است (ثابت کنید).



شکل ۸

۹. از نقطهٔ دلخواه A_1 واقع بردایرهٔ مفروض، مماس DE را برآن رسم می‌کنیم (شکل ۹). بعد زاویهٔ BA_1C_1 را برابر زاویهٔ β و زاویهٔ DA_1B_1 را برابر زاویهٔ γ رسم می‌کنیم. اگر B_1 و C_1 را به‌هم وصل کنیم، مثلث $A_1B_1C_1$، که همان مثلث موردنظر است به‌دست می‌آید.



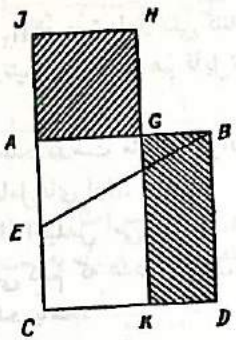
شکل ۹

۱۰. استدلال اقلیدس. «خط مفروض را AB فرض کنید (شکل ۱۰) باید AB را طوری تقسیم کنیم که مستطیل حاصل از تمامی پاره‌خط و یکی از قطعه‌های آن، بامربع روی قطعهٔ دیگر برابر باشد.

مربع ABCD را روی AB می‌سازیم (حکم ۴۶ از کتاب اول)، از نقطهٔ E، وسط AC به B وصل می‌کنیم، CA را امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ j برسد، به‌نحوی که Ej برابر با BE باشد، روی Aj مربع jG را می‌سازیم و HG را تانقطهٔ K ادامه می‌دهیم؛ من حکم می‌کنم که AB در نقطهٔ G طوری تقسیم شده است که مستطیل حاصل از AB و BG، برابر است بامربعی که روی AG ساخته می‌شود».

مسالهٔ اقلیدس، که نام «تقسیم طلایی» و یا «تقسیم به‌ذات وسط و طرفین» را برخود دارد، درکتاب‌های درسی امروز، این‌طور تنظیم شده است: پاره خط را به‌دوقسمت نامساوی طوری تقسیم کنید که قسمت بزرگتر، واسطهٔ هندسی بین تمام پاره‌خط و قسمت کوچکتر باشد.

طول پاره‌خط را a وطول قسمت بزرگترآن را x می‌گیریم، درنتیجه،



شکل ۱۰

طول قسمت کوچکتر برابر $a-x$ می‌شود (روی‌شکل ۱۰ داریم: $AB=a$، $AG=x$، $GB=a-x$). در این‌صورت، x ازاین معادله به‌دست می‌آید:

$$x^2=a(a-x)\Rightarrow x^2+ax-a^2=0$$

که باحل‌آن، مقدار x چنین می‌شود:

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\ ;\quad x_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$

شرط مساله، تنها در جواب اول صدق می‌کند. بنابراین

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

که در آن $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0/61804000$ (کسری نامتناهی و نامتناوب).

بنابراین $x\simeq 0/62a$.

تقسیم طلایی، به‌طور آگاهانه در ساختمان‌های مذهبی و در مجسمه‌سازی، مورد استفادهٔ خود را پیدا کرده است. به‌خصوص، در یونان‌باستان، ضمن ساختن بناهای تاریخی، به «تقسیم طلایی» توجه بسیار داشتند.

۱۱. ابتدا ثابت می‌کنیم که هرعدد درست مثبت، یاواحد است، یاعددی است اول ویا می‌تواند به‌صورت ضرب عددهای اول تبدیل شود.

حکم برای عدد ۱ درست است. فرض‌می‌کنیم که این حکم برای همهٔ عددهای درست و مثبتی که از n تجاوز نمی‌کنند درست باشد، ثابت می‌کنیم که دراین‌صورت، برای $n+1$ هم درست است.

اگر $n+1$ عددی اول باشد، خود به‌خود به‌معنای آن‌است که حکم برای $n+1$ درست است. ولی، اگر $n+1$، اول نباشد، به‌معنای آن است که عددی است مرکب و بنابراین $n+1=n_1\cdot n_2$، ضمناً n_1 و n_2، عددهای درست مثبتی هستند که هرکدام از آن‌ها از $n+1$ کوچکترند. طبق

فرض، ازآن‌جا که n_1 و n_2 از n تجاوز نمی‌کنند، می‌توانند به‌ضرب‌عامل‌های اول تجزیه شوند و در نتیجه، $n+1$ هم قابل‌تجزیه به ضرب عامل‌های اول است.

به‌این‌ترتیب، هرعدد درست مثبت، غیراز واحد، یاعددی است اول و یاقابل‌تجزیه به‌ضرب عامل‌های اول.

حالا به‌حل مسالهٔ اقلیدس می‌پردازیم. اثبات را به‌طریق برهان خلف انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم که عددهای اول، مجموعه‌ای متناهی را تشکیل دهند و مثلا شامل n عدد باشد:

$$p_1 , p_2 , \dots , p_n$$

این عددهای اول‌رادرهم ضرب ویك واحدبه‌حاصل ضرب‌اضافه‌می‌کنیم، به‌این عدد می‌رسیم:

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$$

این‌عدد از هرکدام از عددهای p_1 ، p_2 ، ... ، p_n بزرگتر است و بنابراین عددی است غیراول. ولی، بنابرآنچه گفتیم، هرعدد غیراول، قابل تجزیه به‌عامل‌های اول است، یعنی

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1 = q_1 \cdot q_2 \cdots q_m$$

که درآن q_1 ، q_2 ، ... ، q_m ، عددهایی اول‌اند.

هیچ‌کدام از عددهای اول q_1 ، q_2 ، ... ، q_m ، نمی‌توانند بایکی از عددهای اول p_1 ، p_2 ، ... ، p_n برابر باشند درواقع، اگر مثلا $q_i = p_k$ باشد، باید سمت‌چپ تساوی

$$p_1 \cdot p_2 \cdots P_n - q_1 \cdot q_2 \cdots q_m = 1$$

بر q_i بخش‌پذیر باشد، که در نتیجه باید سمت‌راست تساوی‌هم به‌این عدد بخش‌پذیرشود، چیزی که ممکن نیست، زیرا واحد بر q_i $(P_i \neq 1)$ بخش‌پذیر نیست. بنابراین، به‌جز عددهای اول p_1 ، p_2 ، ... ، p_n ، عددهای اول دیگری هم پیدا شد $(q_1 , q_2 , \dots , q_m)$. این تناقض، درستی حکم اقلیدس را ثابت می‌کند، یعنی، عددهای اول، یك‌مجموعهٔ نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

اولر، راه‌حل بکر و جالبی از مسالهٔ اقلیدس دارد. ما ماهیت این‌استدلال را دراین‌جا می‌آوریم (اثبات، بازهم بااستفاده از برهان خلف است).

فرض‌می‌کنیم که مجموعهٔ عددهای اول، مجموعه‌ای متناهی باشد. تعداد عددهای اول را n می‌گیریم و آن‌ها را p_1 ، p_2 ، ... ، p_n فرض می‌کنیم. این تصاعدهای هندسی را، تشکیل می‌دهیم:

$$1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^m} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} ;$$

$$1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^m} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} ;$$

.....

$$1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \dots + \frac{1}{p_n^m} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$$

این رشته‌ها را درهم ضرب می‌کنیم (مثل موردضرب رشته‌های متقارب، می‌توان تعداد محدودی از جمله‌ها را گرفت)، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_3}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}}$$

که در مجموع سمت راست آن ، همهٔ ترکیب‌های مختلف و ممکن نماهای α_1 ، α_2 ، ... ، α_n وجود دارد. روشن است که هر عدد درست مثبت m به ضرب توان‌هایی از عددهای اول قابل تجزیه است : $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ ، وضمناً تنها به‌یك طریق (ثابت کنید). از آن‌جا

$$\sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}} = \sum \frac{1}{m}$$

یعنی، مجموعی که درسمت چپ‌تساوی قراردارد، شامل همهٔ کسرهای به‌صورت $\frac{1}{m}$ ، به‌ازای هرعدد درست ومثبت m ، است. مجموعی‌را که درسمت راست تساوی قرار دارد، می‌توان برحسب ردیف تصاعدی مخرج‌ها نوشت:

$$\sum \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

به‌این ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_n}{p_n - 1}$$

حاصل‌ضربی که درسمت راست تساوی بالا قراردارد، بی‌نهایت‌نیست، زیرا عددهای p_1 ، p_2 ، ... ، p_n ، مجموعه‌ای متناهی را تشکیل می‌دهند. ولی، رشتهٔ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

رشتهٔ توافقی است و همانطور که می‌دانیم، رشته‌ای متباعد است. این تناقض منطقی، به‌معنای آن است که فرض اولیهٔ ما دربارهٔ محدود بودن تعداد عددهای اول درست نیست وعددهای اول، مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

۱۲. راه‌حلی که خود آپولونیوس ازاین مساله داده، به‌ما نرسیده‌است باوجود این، بعضی ازمولفان باستانی ازآن یادکرده‌اند. ظاهراً، آپولونیوس برای این‌که مساله‌را در حالت کلی حل‌کند، ابتدا حالت‌های خاص و حدی آن‌را، مورد بررسی قرار می‌دهد:

۱) دایره‌ای رسم کنیدکه ازسه نقطهٔ مفروض بگذرد؛

۲) دایره‌ای رسم کنیدکه برسه خط‌راست مفروض مماس باشد؛

۳) دایره‌ای رسم کنیدکه ازنقطهٔ مفروضی بگذرد و بر دو خط موازی مفروض مماس باشد؛

۴) دایره‌ای رسم کنیدکه ازنقطهٔ مفروضی بگذرد و بر دوخط مفروض متقاطع مماس باشد؛

۵) دایره‌ای رسم کنیدکه از دونقطهٔ مفروض بگذرد وبر خط مفروضی مماس باشد؛

۶) دایره‌ای رسم کنیدکه بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد و از دو نقطهٔ مفروض بگذرد؛

۷) دایره‌ای رسم کنیدکه برسه‌دایرهٔ مفروضی که ازیك نقطه‌می گذرند، مماس باشد.

بررسی نشان می‌دهدکه اگر مسالهٔ آپولونیوس، تعداد محدودی‌جواب داشته باشد، این جواب‌ها از ۸ تجاوز نمی‌کند.

آپولونیوس برغه‌ای، مولف این مساله، یکی ازمشهورترین دانشمندان یونانی در سدهٔ سوم پیش‌ازمیلاد است. کتاب او، شامل قسمت عمده‌ای ازادبیات ریاضی آن زمان‌است. باهمهٔ این‌ها، شهرت آپولونیوس، به‌خاطر رساله‌ای است‌که در ۸ مقاله در بارهٔ مقطع‌های مخروطی نوشته است (یکی ازاین ۸ مقاله گم شدهٔ است).

۱۳. اگر ضلع مربع را برابر a بگیریم، شعاع دایره محاطی $r=\frac{a}{2}$ و شعاع دایرهٔ محیطی $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ می‌شود. از آن‌جا، اگر مساحت دایره محاطی را s ومساحت دایره محیطی را S بگیریم، داریم:

$$s=\pi r^2=\frac{\pi a^2}{4}\ ,\ S=\pi R^2=\frac{\pi a^2}{2}$$

و بنابراین $S=2s$

مولف این‌مساله. ارشمیدش سیراکوزی (۲۸۷–۲۱۲ پیش‌از میلاد)، بزرگترین ریاضی‌دان و فیزیك‌دان همهٔ زمان‌هاست. زندگی او آمیخته به افسانه‌هاست. طبق این افسانه‌ها، او درجریان دوسال، به‌کمك ماشین‌هایی که اختراع کرده‌بود، قلب دفاع از

سیراکوز را دربرابر ارتش بزرگ‌روم، که از خشکی ودریا شهررا محاصره‌کرده بود، تشکیل می‌داد. او «پروانهٔ ارشمیدس» و «اهرم‌های ارشمیدس» را اختراع و قانون هیدروستاتیك را، که به«قانون ارشمیدس» مشهور است، کشف کرد.

ارشمیدس، در محاسبه‌های خود، از روش‌هایی استفاده می‌کردکه به روش‌های ریاضیات عالی امروزی‌که براساس نظریهٔ حدها بنیان‌گذاشته شده است، بسیار نزدیك‌است. (مساله، از رسالهٔ «لم‌ها»ی ارشمیدس برداشته شده است).

۱۴. ۱) $\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2$.

۲) $\frac{\pi r^2}{4r^2}=\frac{11}{14}$، ازآن‌جا

$$\frac{\pi}{4}=\frac{11}{14},\ \pi=\frac{44}{14}=\frac{22}{7}$$

به‌این ترتیب، مساحت دایره طبق محاسبهٔ ارشمیدس، و مثل محاسبهٔ امروزی، برابر است با $\frac{22}{7}r^2$.

(این مساله، از رسالهٔ «اندازه‌گیری دایره» متعلق به‌ارشمیدس، برداشته شده است).

۱۵. باتوجه به‌شکل ۱ داریم:

$$S_{AFDHCB}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{DC}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{\pi}{8}(AC^2-AD^2-DC^2)=\frac{\pi}{8}[(AD+DC)^2-AD^2-DC^2]=$$

$$=\frac{\pi}{8}\times 2AD\cdot DC=\frac{\pi}{4}BD^2=\pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2$$

واین همان‌چیزی‌است‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

۱۶. مساحت قطعهٔ کروی، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$S=2\pi Rh$$

که درآن R، شعاع کره و h، ارتفاع قطعه است.

اگر l طول خط‌راستی باشدکه راس قطعه را به‌یکی از نقطه‌های محیط دایرهٔ قاعده، وصل می‌کند، داریم: $l^2=2Rh$ و ازآن‌جا

$$S=\pi l^2$$

(مساله از رسالهٔ ارشمیدس به‌نام «دربارهٔ کره و استوانه» برداشته شده است).

۱۷. حجم کره برابر $\frac{4}{3}\pi R^3$ و حجم مخروط برابر $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ است.

برای برابر بودن این دوحجم، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{r^2 h}{4}}$$

حجم استوانه برابر است با $\pi r^2 h$، بنابراین، برای این‌که حجم کره برابر باحجم استوانه باشد، داریم:

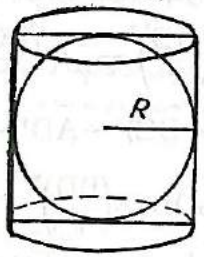
$$\frac{4}{3}\pi R^3=\pi r^2 h \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{3}{4}r^2 h}$$

(مساله،از رسالهٔ «دربارهٔ کره و استوانه» برداشته شده است).

۱۸. باتوجه به‌شرایط مساله، برای حجم استوانه داریم (شکل ۱۱):

$$V_1=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)=\frac{3}{2}V_2$$

V_1 را حجم‌استوانه و V_2 را حجم کره گرفته‌ایم).



شکل ۱۱

به‌همین ترتیب (اگر سطح کل استوانه را S_1 وسطح کره را S_2 بگیریم)، داریم:

$$S_1=2\pi R\cdot 2R+2\pi R^2=6\pi R^2=\frac{3}{2}(4\pi R^2)=\frac{3}{2}S_2$$

(مساله، از رسالهٔ «دربارهٔ کره و استوانه» گرفته شده است. خود ارشمیدس، علاقه و مهر خاصی به‌این مساله داشت. بنابر افسانه‌ای، ارشمیدس وصیت کرده بود که برسنگ‌مزاراو، کره‌ای که محاط در استوانه‌ای باشد، حک‌کنند، و این وصیت‌هم، به‌وسیلهٔ نزدیکان او اجرا شد).

۱۹. راه‌حل ارشمیدس را، از روی رسالهٔ «دربارهٔ تربیع سهمی»، به زبان نشانه‌های امروزی، می‌آوریم.

مساله این‌است: مطلوب‌است مجموع جمله‌های تصاعدنامتناهی نزولی

$$a+b+c+d+\cdots$$

باقدر نسبت برابر $\frac{1}{4}$. بنابر تعریف تصاعد باقدر نسبت $q=\frac{1}{4}$، داریم:

$$b=\frac{a}{4},\quad c=\frac{b}{4},\quad d=\frac{c}{4},\ \ldots$$

ویا:

$$a=4b,\ b=4c,\ c=4d,\ \ldots$$

سپس

$$b+c+d+\cdots+\frac{1}{3}(b+c+d+\cdots)=\left(b+\frac{b}{3}\right)+$$

$$+\left(c+\frac{c}{3}\right)+\left(d+\frac{d}{3}\right)+\cdots=\frac{4}{3}b+\frac{4}{3}c+\frac{4}{3}d+\cdots=$$

$$=\frac{1}{3}(4b+4c+4d+\cdots)=\frac{1}{3}(a+b+c+\cdots)$$

ازآن‌جا

$$b+c+d+\cdots=\frac{1}{3}a$$

که اگر به دوطرف این تساوی a را اضافه‌کنیم، به‌دست می‌آید.

$$a+b+c+d+\cdots=\frac{4}{3}a$$

وبنابراین

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{4}{3}$$

(این مساله‌را باروش عادی و استفاده از رابطه حاصل جمع درتصاعد هندسی نزولی، پیداکنید).

۲۰. نتیجه‌ای راکه ارشمیدس به‌دست‌آورده است، بانشانه‌های‌امروزی، می‌توان این‌طور نشان‌داد:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

این رابطه، از اتحاد واضح زیر به‌دست می‌آید:

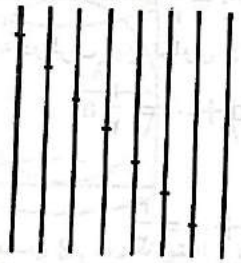
$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$

درواقع، اگر به‌جای n، مقادیر ۱، ۲، ۳، ...، n را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$1^3-0^3=3\times1^2-3\times1+1$$
$$2^3-1^3=3\times2^2-3\times2+1$$
$$3^3-2^3=3\times3^2-3\times3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$

که از جمع کردن آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)-3(1+2+3+\dots+n)+n,$$
$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)-\frac{3(n+1)n}{2}+n,$$
$$3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)=n^3-n+\frac{3(n+1)n}{2},$$
$$(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6},$$
$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$



شکل ۱۲

ارشمیدس، با بیانی هندسی و به‌طریق زیر، نتیجه را به‌دست می‌آورد (شکل ۱۲): «اگر طول‌هایی را به‌تعداد دلخواه درنظربگیریم، به‌نحوی که هرکدای ازآن‌ها نسبت‌به قبلی به‌اندازهٔ کوچکترین‌این طول‌ها، بزرگتر باشد، واگر طول‌های دیگری را به‌همین‌تعداد در نظر بگیریم، به‌نحوی که هرکدام از آن‌ها برابر بزرگترین طول رشتهٔ اول باشد، در این صورت، مجموع همهٔ مربع‌هایی که روی‌طول‌های مساوی بزرگترین طول ساخته می‌شود، به‌اضافهٔ

مربعی که روی طول بزرگترساخته می‌شود، به‌اضاه مساحتی که بین کوچکترین طول‌ها، و طولی که برابر بامجموع همهٔ طول‌های نامساوی است، قرار دارد، برابر است باسه‌برابر مجموع مربع‌هایی که روی همهٔ طول‌های نامساوی ساخته می‌شود».

بانشانه‌های امروزی، آنچه‌را که گفتیم می‌توان این‌طور نوشت:

$$nn^2+n^2+(1+2+3+\dots+n)=3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)$$

که از آن‌جا بعداز بعضی ساده‌کردن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$n^2(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}=3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)$$

ویا سرانجام

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(مساله ازرسالهٔ ارشمیدس به‌نام «دربارهٔ مارپیچ» برداشته شده است).

۲۱. حل ارشمیدس. ارشمیدس خطاب به‌پادشاه هه‌لونا می‌گوید: «تو می‌دانی که بسیاری از اخترشناسان گمان می‌کنندکه همهٔ دنیا، کره‌ای است که مرکزآن در مرکز زمین و شعاع‌آن به‌اندازهٔ فاصلهٔ از مرکز زمین تا خورشید باشد. برخلاف اخترشناسان، آریستارك ساموسی، درآثار خود، می‌کوشد این نظررا ردکند و ثابت‌کندکه همهٔ دنیا، مضربی از این مقداراست. اوبه‌این نتیجه می‌رسد که ستارگان و خورشید بی‌حرکت‌اند، زمین روی دایره‌ای به‌دور خورشید می‌چرخد و خورشید درمرکز این دایره قرار دارد. قبول‌می‌کنیم که قطر کرهٔ ستارگان بی‌حرکت نسبت به‌قطر همهٔ دنیا ـ به‌مفهومی که بیشر اخترشناسان می‌فهمند (یعنی دستگاه خورشیدی) ـ مثل نسبت آخری باشد به‌قطرزمین من ادعا می‌کنم که اگر توده‌ای از شن حتی به‌بزرگی کره ستاره‌ای آریستارك، داشته‌باشیم، بازهم من می‌توانم عددی را نام ببرم‌که از تعداد شن‌های چنین‌کرهٔ فرضی‌هم بیشتر باشد. پیشنهادمن این است.

۱) محیط دایرهٔ زمین کمتراز ۳ملیون «ستادی» است [هرستادی برابر ۱۸۵متر است].

همان‌طورکه تو می‌دانی کوشش شده‌است ثابت کنند که محیط دایرهٔ زمین، قریب ۳۰۰۰۰۰ ستادی است، ولی من گذشتگان را ترجیح می‌دهم و آن‌را ده‌برابر بزرگتر می‌گیرم.

۲) خورشید اززمین وزمین از ماه بزرگتر است. در این مورد، من با

اکثریت اخترشناسان موافقم.

۳) قطر خورشید از ۳۰ برابر قطر ماه بزرگتر نیست. [در واقع قطر خورشید تقریباً ۴۰۰ برابر قطرماه است.]

۴) قطر خورشید بیشتر ازضلع هزار ضلعی محاط در دایرهٔ عظیمهٔ کره سماوی است.

من این اعتقاد آریستارك را قبول دارم که اندازه‌های ظاهری خورشید را $\frac{1}{720}$ اندازه‌های دایرهٔ منطقةالبروج می‌داند. من خودم زاویه‌ای را، که خورشید تحت آن دیده می‌شود، اندازه گرفته‌ام، ولی اندازهٔ دقیق این زاویه به‌سادگی به‌دست نمی‌آید، زیرا، نه‌چشم‌ها، نه‌دست‌ها و نه‌وسیله‌های اندازه‌گیری، قابل اطمینان نیستند. ولی این‌جا، جای باز کردن این مطلب نیست. همین‌قدر کافی است بدانیم که‌این زاویه‌از $\frac{1}{164}$ زاویهٔ قائمه کوچکترواز $\frac{1}{300}$ آن بزرگتر است.

براساس فرض ۲ و ۳، قطر خورشید از ۳۰ قطرزمین کوچکتر است. بنابراین (طبق فرض ۴)، محیط هزارضلعی محاط دریکی از دایره‌های عظیمهٔ کرهٔ سماوی، کمتراز ۳۰۰۰۰۰ قطرزمین است. ولی، اگراین مطلب درست باشد، دراین صورت قطرهمهٔ جهان (یعنی بنابراعتقاد آریستارك، قطر دستگاه خورشیدی)، کمتراز ۱۰۰۰۰ قطرزمین‌است، زیرا تنها برای شش‌ضلعی‌منتظم، قطر برابر است‌با $\frac{1}{3}$ محیط، وبرای هرچند ضلعی دیگر، قطر از $\frac{1}{3}$ محیط کمتر است.

بنابر فرض نخست، محیط دایرهٔ زمین، از ۳ ملیون ستادی کمتر است؛ درنتیجه، قطر آن کمتر ازیك ملیون ستادی می‌شود، زیرا طول‌قطر دایره؛ از $\frac{1}{3}$ محیط آن کمتر است. بنابراین، قطر همهٔ دنیا هم، از ۱۰۰۰۰ ملیون ستادی کمتر است.

حالا فرض می‌کنیم که دانهٔ‌شن چنان کوچك باشد که ۱۰۰۰۰ ازآن‌ها به‌اندازهٔ یك‌دانهٔ خشخاش بشود. من‌قطردانهٔ خشخاش‌را $\frac{1}{40}$ اینچ می‌گیرم. دریکی از آزمایش‌ها، وقتی که ۲۵ دانهٔ خشخاش را در امتداد هم، روی خط راست قراردادم، یك‌اینچ شد، ولی من می‌خواهم اثباتی را داشته باشم که دربرابر هراعتراضی، تضمین شده باشد.

برای ما [یونانی‌ها]، تنها نام عددها تا میریاد ($10^4 = 10000$) وجود دارد. با وجود این، ما تا ۱۰۰۰۰ میریاد ($10^8 = 10^4 . 10^4$) هم حساب می‌کنیم. برای این که جلوتر برویم، ۱۰۰۰۰ میریاد (10^8) را به عنوان واحد مرتبهٔ دوم می‌گیریم و دو باره ۱۰۰۰۰ برابر آن را انتخاب می‌کنیم، به‌دست‌می‌آید: $10^8 . 10^8 = 10^{8\times2}$، یاواحد مرتبهٔ سوم. به‌همین ترتیب، می‌توان ۱۰۰۰۰ میریاد بار از واحد مرتبهٔ سوم را انتخاب کرد و واحد مرتبهٔ چهارم‌را به‌دست آورد ($10^{8\times3}$) وغیره. $10^{56} = 10^{8\times7}$، واحد مرتبهٔ هفتم می‌شود، اهم واحد مرتبهٔ اول است.

حالا حساب کنیم که چند دانهٔ شن، که یك میریاد آن حجم یك دانهٔ خشخاش را پرمی‌کند، درکره‌ای به‌قطر یك‌اینچ جا می‌گیرد. بنابر فرض ما، قطر یك‌دانهٔ خشخاش برابر $\frac{1}{40}$ اینچ است، ولی بنابر حکم معلوم هندسی، حجم کره‌ها برنسبت مکعب قطرهای آن‌هاست، یعنی برنسبت: $1 : 40^3 = 64000 : 1^3$. به‌این ترتیب، کرهٔ به‌قطریك‌اینچ، حاوی ۶۴۰۰۰ دانهٔ خشخاش، یا ۶۴۰۰۰ میریاد، یعنی 64×10^7، کمتر از 10^9 دانهٔ شن، می‌باشد. نسبت حجم کرهٔ به قطر ۱۰۰ اینچ به کرهٔ به‌قطر یك اینچ، مثل $100^3 : 1$ یا $10^6 : 1$ است. به‌این‌ترتیب، روشن است که درکرهٔ به‌قطر ۱۰۰ اینچ کمتراز $10^6 \times 10^9$ دانهٔ شن است.

کرهٔ به‌قطر ۱۰۰۰ اینچ، دارای کمتراز $10 \times 10^4 \times 10^{16} = 10^{21}$ یعنی ده‌میریاد واحد مرتبهٔ سوم‌ما، دانهٔ شن می‌باشد.

ولی، چون «ستادی» از ۱۰۰۰۰ «اینچ» کمتر است، روشن است که درکرهٔ به‌قطر یك ستادی، کمتر از ۱۰ میریاد واحد مرتبهٔ سوم، دانه‌های شن وجود دارد. به‌همین ترتیب پیدا می‌کنیم که درکرهٔ

به قطر 10^2 ستادی، کمتر از $1000 \times 10^{8\times3}$ دانهٔ شن،

به قطر 10^4 ستادی، کمتر از $10 \times 10^{8\times4}$ دانهٔ شن،

به قطر 10^6 ستادی، کمتر از $10^6 \times 10 \times 10^{8\times4}$ دانهٔ شن،

به قطر 10^8 ستادی، کمتر از $10 \times 10^4 \times 10^{8\times5}$ دانهٔ شن،

به قطر 10^{10} ستادی، کمتراز $1000 \times 10^{8\times6}$ دانهٔ شن، جامی‌گیرد.

ولی 10^{10}، یعنی ۱۰۰۰۰ ملیون ستادی، و چون، قطرهمهٔ دنیا، از ۱۰۰۰۰ ملیون‌ستادی کمتراست، پس، درهمهٔ‌دنیا، کمتر از $1000 \times 10^{8\times6}$ دانهٔ شن جامی‌گیرد. سپس، قطر کرهٔ آریستارك از ستارگان بی حرکت، آن قدر برابرقطرهمهٔ دنیا (۱۰۰۰۰ ملیون ستادی) است، که همهٔ دنیا، همان‌قدر برابر قطر زمین (۱ ملیون ستادی) است. بنابراین، معلوم می‌شود که کرهٔ

آریستارك (ستارگان بی حرکت)، به کرهٔ همه دنیا، نسبتی مساوی $10^{12}:1$ دارد، و در نتیجه، می‌تواند کمتر از ۱۰۰۰ میریاد واحد مرتبهٔ هفتم ($1000 \times 10^4 \times 10^{8\times7} = 10^{63}$) دانهٔ شن در خود جا بدهد.

و پادشاه هه‌لونا می‌تواند، آن‌را به همه نشان دهد؛ ازومی ندارد که این‌ها خبرگان ریاضیات باشند، بلکه کافی است درك ریاضی داشته باشند و بتوانند دربارهٔ فاصله‌ها و اندازه‌های زمین، خورشید، ما و تمامی جهان بیندیشند، آن‌وقت خواهی دیدکه همهٔ آن‌ها، آنچه را که گفته‌ام، می‌پذیرند. به همین جهت است‌که این بررسی را نامناسب نمی‌دانم».

(مسأله، از رسالهٔ ارشمیدس، به نام «محاسبهٔ دانه‌های شن»، برداشته شده است).

۲۲. این مسألهٔ ارشمیدس، یعنی رسم یك هفت ضلعی منتظم، چهارمین مسألهٔ مشهور دنیای قدیم، نامیده می‌شود. به جز این، سه مسالهٔ مشهور دیگر هم‌وجود دارد: تضعیف مکعب (مسألهٔ ۲۴)، تثلیث زاویه (مسألهٔ ۲۵) وتربیع دایره (مسألهٔ ۲۶).

ارشمیدس توانست هفت ضلعی منتظم را، به‌کمك پرگار و خط‌کش، رسم‌کند. او از لمی استفاده کرد، که اجرای آن، منجر به حل معادلهٔ درجهٔ سومی می‌شود، که در محدودهٔ ریشه‌های دوم قابل حل نیست، و بنابراین، نمی‌توان ریشه‌های آن را به یاری خط‌کش و پرگار رسم‌کرد.

به این‌ترتیب، ارشمیدس هم می‌دانست‌که مسألهٔ رسم هفت ضلعی‌منتظم را نمی‌توان، به طورکامل، تنها به‌کمك پرگار و خط‌کش، و بدون استفاده از وسیله‌های دیگر، حل‌کرد.

به‌این حکم‌که، هفت ضلعی منتظم را نمی‌توان به‌کمك پرگاروخط‌کش رسم‌کرد، می‌توان به یاری سنگ محك گوس، قانع شد. طبق این سنگ‌محك اگر n عددی اول باشد، برای این‌که بتوان n ضلعی منتظم را به‌کمك پرگار و خط‌کش رسم‌کرد، لازم وکافی است‌که عدد n به صورت $2^{2^k}+1$ باشد.

عدد ۷ را نمی‌توان به صورت $2^{2^k}+1$ درآورد: و بنابراین، رسم هفت ضلعی منتظم، به یاری تنها پرگار وخط‌کش، ممکن نیست.

در واقع، هفت منتظم را می‌توان به تقریب و با هر اندازه دقت لازم رسم‌کرد (به کمك پرگار و خط‌کش) و یا این‌که، با استفاده از وسیله‌های دیگری، علاوه برپرگار و خط‌کش، برای رسم (مثل، زاویه دو قائمه)، آن با دقت تمام رسم‌کرد.

برای رسم تقریبی هفت ضلعی منتظم، می‌توان، مثلا، به این ترتیب عمل کرد: ضلع هفت ضلعی منتظم محاط در دایره را، برابر با نصف ضلع سه ضلعی منتظم محاط در همین دایره بگیریم. در واقع، به ازای $r=1$ داریم:

$$a_7 = 2\sin\frac{360^\circ}{14} \approx 0/868;$$

ازطرف دیگر

$$\frac{a_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0/867$$

وهمانطور که دیده می‌شود، خطای این تقریب، از ۰/۳٪ تجاوز نمی‌کند.

مسالهٔ رسم هفت‌ضلعی منتظم، منجر به‌حل این معادله می‌شود:

$$x^7 - 1 = 0$$

که همان‌طورکه درزیر نشان می‌دهیم، به‌کمك ریشه‌های دوم، قابل حل نیست.

ریشه‌های هفتم واحد (به‌جز ۱)، دراین معادله صدق می‌کنند:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = -1 \qquad (1)$$

که درآن: $x = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$

چون $x^{7-k} = x^{-k}$، بنابراین، معادلهٔ (۱) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$x + x^{-1} + x^2 + x^{-2} + x^3 + x^{-3} = -1 \qquad (2)$$

فرض می‌کنیم

$$x + x^{-1} = y \qquad (3)$$

آن وقت

$$x^2 + x^{-2} = y^2 - 2 \qquad (4)$$

و

$$x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y \qquad (5)$$

معادلهٔ (۲)، به‌کمك‌رابطه‌های (۳)،(۴) و(۵)، به‌این‌صورت‌درمی‌آید:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \qquad (6)$$

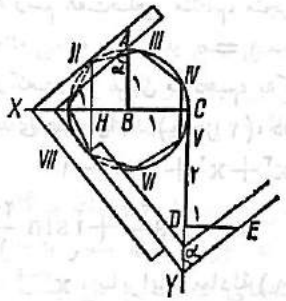
به این ترتیب، مسالهٔ منجر به حل این معادلهٔ درجه سوم می‌شود که می‌دانیم، به‌کمك ریشه‌های دوم قابل‌حل نیست. بنابراین، مسالهٔ مربوط به‌رسم هفت‌ضلعی منتظم را، نمی‌توان به‌یاری پرگار و خط‌کش حل‌کرد.

باوجود این، معادلهٔ (۶) به‌کمك زاویهٔ دو قائمه قابل حل است، یعنی مسالهٔ رسم هفت‌ضلعی منتظم هم، قابل حل می‌شود. یادآوری می‌کنیم که

$$y = x + x^{-1} = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right) +$$
$$+\left(\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{7}$$

بنابراین، اگر دورأس هفت‌ضلعی منتظم‌را یك درمیان به‌هم وصل کنیم، فاصلهٔ مرکز ازاین وتر $\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{y}{2}$ می‌شود.

حالا، معادلهٔ (۶) را به‌کمك رسم، حل می‌کنیم. برای این منظور،خط شکستهٔ ABCDE را می‌کشیم (شکل ۱۳)، به نحوی که $AB \perp BC$، $BC \perp CD$ و $CD \perp DE$، وضمناً $AB = 1$، $BC = 1$، $CD = 2$ و $DE = 1$ باشد (۱، ۱، ۲، ۱، قدرمطلق ضریب‌های معادلهٔ (۶) هستند).



شکل ۱۳

اکنون زاویهٔ‌دوقائمه را، آن‌طورکه درشکل ۱۳ می‌بینید، قرارمی‌دهیم، و به اصطلاح خط شکستهٔ مقعر AXYE را رسم می‌کنیم. با محاسبه، معلوم می‌شودکه $XB = y$ (جواب مورد نظر)، آزمایش می‌کنیم. زاویهٔ XAB را α می‌نامیم، دراین صورت داریم:

$$XB = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$CY = XC\operatorname{tg}\alpha = (XB+1)\operatorname{tg}\alpha =$$
$$= (\operatorname{tg}\alpha + 1)\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha,$$
$$CY = 2 + DY = 2 + \operatorname{cotg}\alpha = 2 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha},$$
$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$$

دیده می‌شودکه $\operatorname{tg}\alpha = XB$، درمعادلهٔ (۶) صدق می‌کند.

بنابراین، پاره‌خط XB را می‌توان به‌جای y درنظر گرفت. می‌دانیم

که $\frac{y}{2} = \frac{XB}{2}$، عبارت است‌ازفاصلهٔ مرکز B تا وتری‌که دو راس هفت‌ضلعی منتظم را، یك در میان به هم وصل کرده است. نقطهٔ H، وسط XB را پیدا می‌کنیم و ازآن‌جا، عمودی بر XB اخراج می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های II و VII قطع کند. درنتیجه، دو رأس ازراس‌های هفت‌ضلعی منتظم به‌دست می‌آید و به‌کمك آن‌ها، بقیهٔ رأس‌ها به‌سادگی پیدا می‌شود.

۲۳. تعداد گاوهای نر سفید، سیاه، کرند و چند رنگ را به ترتیب X، Y، Z و T وتعداد گاوهای ماده ازهمین رنگ‌هارا به‌ترتیب x، y، z و t می‌گیریم. مساله، منجر به‌حل دستگاه معادله‌های زیر می‌شود:

$$X = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)Y + Z,$$
$$Y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)T + Z,$$
$$T = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)X + Z,$$
$$x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(Y + y),$$
$$y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(T + t),$$
$$t = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Z + z),$$
$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(X + x)$$

به‌این معادله‌ها، باید دوشرط دیگر را اضافه کرد:

$X + Y$ برابر یك‌عدد مربعی است،

$T + Z$ برابر یك‌عدد مثلثی است.

به‌عبارت دیگر

$$X + Y = p^2$$
$$T + Z = \frac{q(q+1)}{2}$$

ارشمیدس، حل این مساله‌را به‌تفصیل داده است. در آن‌جا، برای X، تعداد گاوهای نر سفید، این جواب به‌دست آمده است:

$$X = 1598 \times 10^{206541}$$

و تعداد کل گاوهای نر

$$۷۷۶۶ \times ۱۰^{۲۰۶۵۴۱}$$

ای. ن. وسه‌لوسکی، در تفسیر این مساله می‌نویسد که برای نوشتن جواب «به یك کتاب ۶۰۰ صفحه‌ای نیاز داریم، به شرطی که در هر صفحه، ۲۵۰۰ رقم، جابدهیم».

۲۴. سرچشمهٔ مسالهٔ دو برابر کردن مکعب را باید، ظاهراً، در تمایل دانشمندان باستانی، به‌تعمیم مسالهٔ‌سادهٔ دوبرابر کردن مربع، دانست. دوبرابر کردن مربع، یعنی رسم مربعی که مساحت آن دوبرابر مساحت مربع مفروض باشد.

دشواری‌هایی که در مسیر حل مسالهٔ تضعیف مکعب وجود داشت، موجب پیدایش افسانه‌هایی در بارهٔ سرچشمهٔ این مساله بوده است. برای نمونه، یکی از این افسانه‌ها را می‌آوریم. این افسانه، به اراتوستن (۲۷۶ ـ ۱۹۴ پیش ازمیلاد)، ریاضی‌دان، اخترشناس و فیلسوف مشهور یونانی، منسوب است. او در بارهٔ ملت‌هایی که، دانشمندان باستانی را، وادار به‌بررسی مسالهٔ تضعیف مکعب کرده است، این‌طور حکایت می‌کند.

زمانی، در جزیرهٔ دیلوس واقع در دریای اژه، بیماری طاعون شیوع پیدا کرد. اهالی این جزیره، برای کمك و مشورت، به کاهن بزرگ دلفی، که در معبد آپولون در دلفی زندگی می‌کرد، مراجعه کردند (دلفی ـ مرکز عام مذهبی یونانیان در فوکید، در دامنهٔ کوه پارناس).

کاهن بزرگ، برای تسکین درد و رنج مردم، پاسخ داد که باید لطف خدایان را جلب کرد، و برای این منظور، باید محراب طلائی آپولون (خدای خورشید) را، که به شکل مکعب است، دوبرابر کرد.

اهالی دیلوس، باعجله دو محراب طلائی، به اندازه‌ای که در معبد آپولون بود، ساختند وآن‌ها را روی‌هم گذاشتند، به‌این گمان که مسالهٔ دوبرابر کردن قربان‌گاه‌مکعبی را، حل کرده‌اند.

ولی طاعون تمام نشد. مردم دو باره به کاهن بزرگ مراجعه کردند و با حیرت پرسیدند: «چرا، باوجودی‌که محراب طلایی آپولون بزرگ‌را دوبرابر کرده‌ایم، طاعون ازبین نمی‌رود؟» ولی، کاهن بزرگ پاسخ داد: «نه، شما مسالهٔ موردنظر را حل نکرده‌اید! شما باید قربان‌گاه را طوری دوبرابر کنید که شکل مکعبی آن تغییر نکند».

وچون، از حل مساله، آن‌طور که کاهن دیلوس خواسته بود، عاجز ماندند، از افلاطون، فیلسوف و ریاضی‌دان، تقاضای یاری کردند. ولی او، به طور مبهم، پاسخ داد: «احتمالا، خدایان به‌این خاطر ازشما ناراضی‌اند که به‌هندسه، کم می‌پردازید». با وجود این، خود افلاطون هم نتوانست این مساله‌را، به‌کمك پرگار و خط‌کش، حل کند. ازهمان زمان‌ها این مساله را «مسالهٔ دیلوسی» هم گفته‌اند.

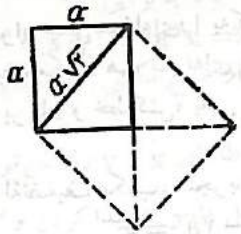
یونانیان باستان، مسالهٔ مربوط به دوبرابر کردن مربع را، نسبتاً ساده

حل می‌کردند. برای این منظور، باید بتوان ریشهٔ دوم ۲ را، به کمك پرگار و خط‌کش، رسم کرد. در واقع، اگرضلع مربع مفروض برابر a باشد، ضلع مربع موردنظر x باید دراین شرط صدق کند:

$$x^۲ = ۲a^۲$$

و از آنجا

$$x = a\sqrt{۲}$$



شکل ۱۴

بنابراین، x را باید برابرقطر مربع مفروض گرفت، که بنابرقضیهٔ فیثاغورث، برابر با $a\sqrt{۲}$ می‌شود. (شکل ۱۴).

یونیان، با تعمیم مسالهٔ مربوط به دو برابر کردن مربع، می‌خواستند مسالهٔ مربوط به دوبرابر کردن مکعب‌را هم، به کمك پرگار و خط‌کش، حل کنند. حل مسالهٔ دو برابر کردن مکعب، منجر به‌رسم ریشهٔ سوم ۲، به کمك پرگار و خط‌کش، می‌شود. در واقع، اگر یال مکعب مفروض را برابر a بگیریم، یال x ازمکعب موردنظر، بنا به‌شرط مساله، باید درمعادلهٔ زیر صدق کند:

$$x^۳ = ۲a^۳$$

و از آن جا

$$x = a\sqrt[۳]{۲}$$

ولی، تمام کوشش‌ها، برای رسم $\sqrt[۳]{۲}$ به کمك پرگار و خط‌کش، به نتیجه‌ای نرسید. این تلاش‌های بی‌نتیجه، همچنان ادامه داشت، تا این که در نیمهٔ اول سدهٔ نوزدهم، ثابت شدکه رسم $\sqrt[۳]{۲}$ به کمك پرگار و خط‌کش، ممکن نیست.

برای این‌که تصوری دربارهٔ قابل حل‌بودن ویا غیرقابل‌حل بودن‌مسالهٔ ساختمان‌های هندسی داشته باشیم، به یادآوری کوتاه زیر، اکتفا می‌کنیم. قبل‌ازهرچیز، به‌یاد می‌آوریم که عبارت‌های زیررا می‌توان به‌سادگی، به‌کمك پرگار و خط‌کش، رسم کرد:

$$a+b\ ،\ a-b\ ،\ \frac{ab}{c}\ ،\ \sqrt{ab}\ ،\ \sqrt{a^2+b^2}\ ،\ \sqrt{a^2-b^2}$$

که در آن‌ها، a ، b و c پاره‌خط‌هایی مفروض‌اند.

اگر حل مساله‌ای، منجر به‌انجام تعداد محدودی عمل‌های پشت‌هم، از این نوع باشد، آن وقت، مساله به کمك پرگار و خط‌کش، قابل حل است. ولی اگر حل مساله، محدود به انجام متوالی تعداد محدودی از این عمل‌ها نشود، آن‌وقت نمی‌توان چنین مساله‌ای‌را به‌کمك پرگار و خط‌کش حل کرد. مسالهٔ مربوط به‌تضعیف مکعب هم، نمونه‌ای از همین مساله‌هاست و نمی‌توان آن‌را تنها به یاری پرگار و خط‌کش، یعنی تنها با رسم دایره و خط راست، حل کرد.

گفتیم که مسالهٔ تضعیف مکعب، منجر به‌حل این معادلهٔ درجهٔ‌سوم‌می‌شود:

$$x^3-2a^3=0$$

که در آن ، a و x به ترتیب عبارت‌اند از یال‌های مکعب مفروض و مکعب موردنظر.

اگر برای سادگی کار، یال مکعب مفروض را برابر ۱ بگیریم، به‌معادلهٔ $x^3-2=0$ می‌رسیم. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که این معادله باضریب‌های گویا ، دارای ریشهٔ گویا نیست . بنابراین ، طبق آنچه که قبلا گفتیم، نمی‌توان آن‌را به‌کمك پرگار و خط‌کش، حل کرد.

نخستین دانشمندی که به‌روشنی اعتقاد خودرا، مبنی‌برناممکن بودن‌رسم پاره‌خطی برابر $\sqrt[3]{2}$، به‌کمك پرگار و خط‌کش ، اظهار کرد، رنه دکارت، دانشمند فرانسوی بود. او در سال ۱۶۳۷ ، این حکم‌را ارائه داد که ریشهٔ سوم عددی که کعب درست ندارد، عددی گنگ است که محاسبهٔ آن منجر به تعداد محدود عمل جذر گرفتن نمی‌شود.

اثبات دقیق قابل حل نبودن مسالهٔ تضعیف مکعب ، به کمك پرگار و خط‌کش را، پ. ونتسل، ریاضی‌دان فرانسوی، درسال ۱۸۳۷، به‌دست داد.

یکی از نخستین هندسه‌دانان یونان قدیم، که با استفاده از وسیله‌های دیگری ، علاوه بر پرگار و خط‌کش ، گام مهمی ، برای حل مسالهٔ تضعیف مکعب برداشت، بقراط خیوسی (سدهٔ پنجم پیش ازمیلاد) بود.

بقراط خیوسی، حل‌مسالهٔ فضایی تضعیف مکعب‌را، منجر به‌بررسی یك مسالهٔ مسطحه کرد. این مسالهٔ، عبارت بود ازجستجوی دو واسطهٔ هندسی، بین دو پاره‌خطی، که از بین آن‌ها، دومی دو برابر اولی باشد. به زبان دیگر، او می‌خواست دوپاره‌خط x و y را طوری پیدا کند، که اگر آن‌هارا بین‌دوعدد

مفروض a و ۲a قرار دهد، یك‌تصاعد هندسی به‌دست آید:

$$a\ ،\ x\ ،\ y\ ،\ 2a$$

برای این‌که این چهار مقدار به‌تصاعد هندسی باشد، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

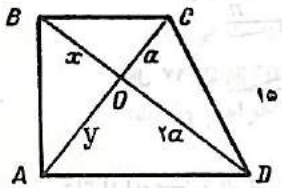
از آن‌جا: $x^2=ay$ و $y^2=2ax$. بنابراین

$$x^4=a^2y^2=2a^3x \Rightarrow x^3=2a^3$$

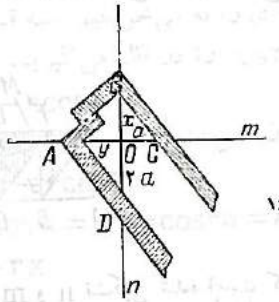
روشن است که x عبارت است از ضلع مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروض به‌ضلع a می‌شود.

معلوم است که «درج» واسطه‌های x و y را نمی‌توان به‌کمك پرگارو خط‌کش انجام داد، زیرا، این عمل منجر به پیداکردن $x=\sqrt[3]{2}$ ، به کمك پرگار و خط‌کش می‌شود، که می‌دانیم، ممکن نیست.

به نظر می‌رسد که «درج» واسطه‌های x و y را می‌توان انجام داد، به‌شرطی که از وسیله‌های اضافی و تکمیلی که به‌همین منظور آماده می‌شود، استفاده شود، افلاطون واراتوستن، برای پیداکردن واسطه‌های x و y (وقتی که بین پاره‌خط‌های معلوم a و ۲a قرار گیرند وبا آن‌ها یك تصاعد هندسی تشکیل دهند) وسیله‌های ساده و بکری پیشنهاد کردند. وسیلهٔ افلاطون، از دو گونیای معمولی نجاری، تشکیل می‌شد. خود ساختمان هندسی، بر مبنای



شکل ۱۵



شکل ۱۶

این‌لم بود: در هر ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه (شکل ۱۵) ، که قطرهای عمود برهم داشته باشد، قطعه‌های قطرها، تشکیل یك‌تصاعد هندسی می‌دهند:

$$\frac{OC}{OB}=\frac{OB}{OA}=\frac{OA}{OD}$$

(ثابت کنید)

رسم «واسطه‌ها»ی x و y ، که برای حل مسالهٔ تضعیف مکعب لازم است، منجر به عمل‌های زیر می‌شود. دو خط راست m و n درنظر می‌گیریم که برهم عمود و درنقطهٔ O متقاطع باشند (شکل ۱۶). روی m و درطرف راست O، پاره‌خط $OC=a$ را جدا می‌کنیم (a ، ضلع مکعبی است که می‌خواهیم دو - برابر آن‌را پیدا کنیم). روی‌خط راست n و درپایین O ، پاره‌خط $OD=2a$ را جدا می‌کنیم. حالا ، دو گونیا برمی‌داریم (گونیاها را، هاشور زده‌ایم) و آن‌ها را طوری قرار می‌دهیم (شکل ۱۶ را ببینید) که یك‌ضلع گونیای اول از نقطهٔ C ــ که نقطه‌ای معلوم است ــ بگذرد و رأس آن بر خط راست n واقع باشد؛ همین‌طور یك‌ضلع گونیای دوم، از نقطهٔ D ــ که معلوم است ــ بگذرد و رأس آن برخط راست m قرارگیرد؛ دو ضلع دیگر گونیاها، باید در امتداد هم باشند.

وقتی که دو گونیا را به این ترتیب قرار دهیم، روی خط‌های m و n ، نقطه‌های A و B به‌دست می‌آید. بنابراین $OB=x$ و $OA=y$ و طبق لم

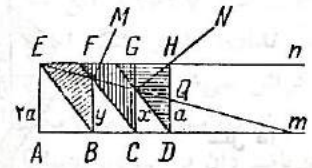
$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

و ازآن‌جا

$$x^3=2a^3$$

$x=OB$ ، همان یال مکعب موردنظر است.

وسیلهٔ اراتوستن را «مه‌زولاب» (mesolabe) می‌نامند که به معنای «دام» است، یعنی وسیله‌ای که دومقدار واسطه را، که یکی ازآن‌ها ضلع‌مکعب موردنظر است، به‌دام می‌اندازد.



شکل ۱۷

دام اراتوستن ، از دو میلهٔ موازی m و n تشکیل شده است که فاصلهٔ بین آن‌ها، دوبرابر ضلع مکعب مفروض، یعنی 2a ، می‌باشد. بین این دومیله، سه‌مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی قرار گرفته است، به‌نحوی که یکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه آن‌ها، برمیلهٔ بالایی و راس مقابل این ضلع برمیلهٔ پایینی واقع باشد . ضمناً نخستین مثلث سمت چپ ، ثابت است و دو مثلث دیگر می‌توانند درطول میله‌ها، حرکت کنند (شکل ۱۷).

روی ضلع پهلوی زاویهٔ قائمهٔ HD ، ازمثلث متحرك سمت راست، پاره

خط $OQ=a$ را جدا می‌کنیم. حالا ، مثلث‌های متحرك را آن‌قدر جا به جا می‌کنیم تانقطه‌های برخورد وتر هرمثلث باضلع پهلوی زاویهٔ قائمهٔ مثلث‌دیگر (M و N) ، بانقطه‌های E و Q، درامتداد یك‌خط راست قرار گیرند. دراین صورت، ازمثلث‌های متشابه متناظر، به‌دست می‌آید:

$$\frac{a}{AC}=\frac{AC}{MB}=\frac{MB}{2a}$$

اگر NC رابه x و MB را به y نشان دهیم، به‌دست می‌آید،

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

بنابراین $x=NC$، عبارت است ازهمان مقدار موردنظر یال مکعب دوبرابر مساله دیلوسی حل شد.

۲۵. دانشمندان یونان باستان، بدون هیچ‌اشکالی، می‌توانستند، به‌کمك وسیله‌های خاصی، هرزاویهٔ دلخواه را، به‌سه قسمت برابر تقسیم کنند. ولی، این مساله، همیشه دربرابر آن‌ها قرارداشت که چرا تثلیث زاویه، که اینطور به‌آسانی وبه‌یاری‌مکانیسم‌های خاص، قابل اجراست، به‌کمك پرگاروخط‌کش تن به‌حل نمی‌دهد. آیا در واقع، می‌توان این مساله را، به‌کمك این ابزار - های رسمی ساختمان‌های هندسی، درحالت کلی حل کرد؟

برای این‌که به‌این پرسش پاسخ بدهیم، ذکر بعضی مطلب‌هالازم‌است. زاویه‌ای راکه می‌خواهیم به‌سه قسمت برابر تقسیم کنیم، به 3α نشان‌می‌دهیم و $\cos 3\alpha$ را در نظر می‌گیریم. باتوجه به‌رابطه‌های مثلثاتی، معلوم است که

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

دوطرف این رابطه را در ۲ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$2\cos 3\alpha=8\cos^3\alpha-6\cos\alpha$$

اگر $2\cos 3\alpha=a$ و $2\cos\alpha=x$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$a=x^3-3x$$

یا

$$x^3-3x-a=0 \qquad (1)$$

برای این‌که ثابت کنیم که مسالهٔ تثلیث زاویه به‌کمك پرگار وخط‌کش درحالت کلی قابل حل نیست، کافی است نشان دهیم که دست‌کم یك زاویه وجود دارد که نمی‌شود آن را به کمك پرگار و خط‌کش، به سه قسمت‌برابر تقسیم کرد. با استدلال ساده‌ای، می‌توان نتیجه گرفت که زاویهٔ ۶۰ درجه ، درچنین وضعی است. درواقع، اگر فرض کنیم: $3\alpha=60^\circ$، به‌دست می‌آید:

$\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$ ومعادلهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$x^3 - 3x - 1 = 0 \qquad (2)$$

درجبر ثابت می‌شود که ریشه‌های گویای این معادله، اگر چنین ریشه‌هایی وجود داشته باشد، می‌تواند ۱+ یا ۱− باشد و لاغیر. ولی، هیچ کدام ازاین دو عدد، در معادلهٔ (۲) صدق نمی‌کنند، یعنی، معادلهٔ (۲) دارای ریشهٔ گویا نیست و بنابراین، طبق «قضیه غیر قابل حل»، نمی‌توان زاویهٔ ۶۰ درجه را، به‌کمك پرگار و خط‌کش، به سه قسمت برابر تقسیم کرد. از این مطلب، که زاویهٔ ۶۰ درجه‌را نمی‌توان به‌کمك پرگار وخط‌کش به سه‌قسمت برابر تقسیم کرد، نتیجه می‌شود که نه زاویهٔ ۲۰ درجهٔ و نه زاویهٔ ۴۰ درجه، قابل رسم به کمك پرگار و خط‌کش هستند. از این‌جا، نتیجهٔ مهمی حاصل می‌شود: نه‌ضلعی منتظم، ۱۸ ضلعی منتظم وغیره را، نمی‌توان به کمك پرگار و خط‌کش رسم کرد.

برای زاویهٔ α ازمعادلهٔ (۱)، می‌توان بی نهایت مقدار پیدا کرد که به‌ازای آن‌ها، معادلهٔ (۱) درمحدودهٔ ریشه‌های دوم قابل‌حل نباشد، وبنابراین مجموعه‌ای نامتناهی از زاویه‌ها وجود دارد که تثلیث آن‌ها به کمك پرگار و خط‌کش، ممکن نیست.

به این ترتیب، اگر بخواهیم تنها از پرگار و خط‌کش استفاده کنیم، مسالهٔ تثلیث زاویه، قابل‌حل نیست.

دانشمندان باستانی، می‌توانستند، زاویهٔ قائمه را به کمك پرگار و خط‌کش، به سه قسمت برابر، تقسیم کنند. این امکان را، می‌توان به صورت نظری ثابت کرد. وقتی که داشته باشیم: $3\alpha = 90^\circ$ به‌دست می‌آید: $a = 0$ و معادلهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$x^3 - 3x = 0 \qquad (3)$$

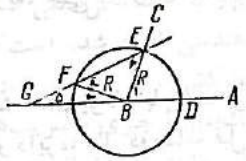
ریشه‌های معادلهٔ (۳) عبارت است از ۰، $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ به‌این‌ترتیب، ریشه‌های غیر صفر این معادله، با ریشهٔ دوم بیان می‌شوند. این نتیجه گیری، به‌معنای آن است که زاویهٔ ۹۰ درجه‌را می‌توان، به کمك پرگار و خط‌کش، به‌سه قسمت برابر تقسیم کرد.

با استدلال مشابهی، می‌توان ثابت کرد که زاویهٔ ۴۵ درجه را هم، به کمك همان وسیله‌ها، قابل تقسیم به‌سه قسمت برابر است.

باید یادآوری کنیم که تثلیث زاویه به کمك پرگار و خط کش، برای مجموعه‌ای نامتناهی از زاویه‌ها، ممکن است. مثلا، همهٔ زاویه‌های به‌صورت $\frac{\pi}{2^n}$ (n عددی است درست ومثبت) را، می‌توان باهمین وسیله‌ها، به‌سه‌قسمت

برابر تقسیم کرد (خودتان، این حکم‌را، ثابت کنید).

ارشمیدش، راه‌حل بسیار ساده و بکری برای حل مسالهٔ تثلیث زاویه، به‌کمك پرگار و خط‌کشی که دو نشانهٔ متحرك داشته باشد، ارائه داده است. روش کار را، روی نمونهٔ مشخصی، نشان می‌دهیم. فرض کنید که بخواهیم زاویهٔ حاده و دلخواه ABC را، به سه قسمت برابر، تقسیم کنیم. برای این



شکل ۱۸

منظور، به‌مرکز B و به شعاع دلخواه R، دایره‌ای رسم می کنیم (شکل ۱۸). نقطه‌های برخورد این دایره‌را، با ضلع‌های زاویه، به D و E نشان می‌دهیم. حالا، خط‌کش متحرك با دو نشانهٔ F و G را برمی‌داریم و FG را برابر R می گیریم. خط‌کش را درنقطهٔ E، طوری قرار می‌دهیم که F و G بانقطهٔ E دریك امتداد قرارگیرند و ضمناً F بر محیط دایره و G بر امتداد ضلع BA واقع‌شود. دراین‌صورت، زاویهٔ EGD، برابر یك‌سوم زاویهٔ مفروض ABC می‌شود. این‌را ثابت می کنیم.

برای سادگی کار، زاویه‌هارا روی شکل با ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، نشان داده‌ایم. باید ثابت کنیم که زاویهٔ ۵ برابر یك‌سوم زاویهٔ ۱ می باشد.

داریم: $\widehat{1} = \widehat{2} + \widehat{5}$ (خاصیت زاویهٔ بیرونی مثلث)، ولی $\widehat{3} = \widehat{5} + \widehat{4}$ (همان خاصیت). ازطرف دیگر $\widehat{5} = \widehat{4}$ (خاصیت مثلث متساوی‌الساقین)، بنابراین $\widehat{3} = 2 \times \widehat{5}$ درمثلث متساوی‌الساقین BEF داریم: $\widehat{2} = \widehat{3}$ ودرنتیجه

$$\widehat{1} = \widehat{3} + \widehat{5} = 2 \times \widehat{5} + \widehat{5} = 3 \times \widehat{5}$$

یعنی زاویهٔ ۵ برابر است بایك سوم زاویهٔ ۱.

هر چه راه حل‌های بیشتر و تازه‌تری، برای مسالهٔ تثلیث زاویه پیدا می‌شد، بیشتر معلوم می‌شد که این مساله به طور جدی به مساله‌های جبر و مثلثات بستگی دارد. مثلا، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، در سدهٔ پانزدهم، از تثلیث زاویه، برای‌تنظیم جدول‌های مثلثاتی بسیار دقیق، که برای محاسبه‌های ریاضی و اخترشناسی لازم بود، استفاده کرد. او با استفاده از روش تقریبی حل عددی معادلهٔ درجهٔ سوم، بامعلوم بودن $\sin 3^\circ$، توانست $\sin 1^\circ$ را به دست‌آورد. سپس، ویت، ریاضی‌دان فرانسوی، درسدهٔ‌شانزدهم، براساس‌تثلیث

زاویه، توانست راه‌حل مثلثاتی معادلهٔ درجه سوم را پیدا کند.

دکارت، نیوتون، کلرو، شال وبسیاری ازدانشمندان دیگرهم، راه حل‌های تازه‌وبکری برای‌تثلیث زاویه داده‌اند،که البته نسبت به راه‌حل‌ارشمیدس بغرنج‌اند. همهٔ این راه‌حل‌ها، معمولا براساس جستجوی نقطه‌های برخوردیك مقطع مخروطی بادایره قرار دارد، تلاش برای پیداکردن راه‌حل‌های تازه‌ای برای مسالهٔ تثلیث زاویه، حتی در زمان ما هم ادامه دارد. (مثلا، به کمك نومو گرافی).

۲۶. تلاش دانشمندان یونان باستان، برای حل‌مسالهٔ تربیع دایره، از راه رسم خط راست و دایره، مثل دومسالهٔ قبل، باعدم موفقیت رو به رو بود. در واقع، مسالهٔ تربیع دایره هم، همچون مساله‌های تضعیف مکعب و تثلیث زاویه، به‌کمك پرگار وخط‌کش، غیرقابل حل است.

هنوز درسال ۱۷۵۵، فرهنگستان علوم پاریس، به‌خاطر تلاش‌بیهوده‌ای که ریاضی‌دانان، وحتی بسیاری از ناآشنایان به‌ریاضیات، در راه حل مسالهٔ تربیع دایره می‌کردند، تصمیم گرفت که دیگر هیچ اثری را که مربوط به بررسی تربیع‌دایره (وهمچنین تثلیث‌زاویه وتضعیف مکعب) باشد، قبول‌نکند. واین، تاحدی حرارت «تربیع کنندگان دایره» را فرونشاند.

درنیمهٔ دوم سده نوزدهم بود که سرانجام ف. لیندمان، ریاضی‌دان آلمانی، ثابت کردکه مسالهٔ تربیع دایره، به‌کمك پرگار وخط‌کش، قابل‌حل نیست. اثبات لیندمان دشوار است و از محدودهٔ درس دبیرستانی ریاضیات، بیرون می‌رود. با توجه به استدلال‌های لیندمان، به یادآوری‌های کوتاه زیر قناعت می‌کنیم.

دایره‌ای به‌شعاع R درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم مربعی بسازیم که‌هم ارز بااین دایره باشد. ضلع مربع مورد نظر را x می‌گیریم، دراین صورت باید داشته باشیم:

$$x^2 = \pi R^2$$

و از آن‌جا

$$x = R\sqrt{\pi}$$

به این ترتیب، مسالهٔ ساختن مربعی هم ارز با دایرهٔ مفروض، منجر می‌شود به رسم پاره‌خطی برابر با حاصل‌ضرب پاره خط مفروض R درعدد مفروض $\sqrt{\pi}$، ضمناً، این ترسیم‌را باید به‌کمك پرگار وخط‌کش انجام داد، یعنی ازراه رسم تعداد محدودی دایره وخط راست.

به‌کمك پرگار وخط‌کش، همیشه می‌توان حاصل‌ضرب پاره‌خط‌مفروض R را درعدد مفروض گویا (درست یاکسری) رسم کرد، ولی همیشه‌نمی‌توان

باکمك وسیله‌های یاد شده، حاصل‌ضرب پاره‌خط مفروض درعددی گنگ‌رسم کرد. این امکان، در بعضی حالت‌ها، ومثلا وقتی که عدد گنگ برابر $\sqrt{2}$ یا $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ باشد، میسر است. $R\sqrt{2}$ را می‌توان به عنوان ضلع مربع محاط دردایرهٔ به‌شعاع R و $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ را می‌توان به عنوان ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط دردایرهٔ به‌شعاع R درنظر گرفت، ضمناً می‌دانیم که دوازده ضلعی منتظم را می‌توان به‌طور دقیق، و به‌کمك شش‌ضلعی منتظم محاطی، رسم کرد.

درنظریهٔ ساختمان‌های هندسی ثابت شده است که پاره‌خط مفروض R را می‌توان به‌کمك پرگار وخط‌کش، وقتی در یك عدد حقیقی ضرب‌کرد، که این عدد حقیقی بتواند ریشهٔ یك‌معادلهٔ جبری باضریب‌های درست، وقابل حل به کمك ریشه‌های دوم، باشد. عددی که نتواند ریشهٔ یك معادلهٔ جبری با ضریب‌های‌درست باشد،عدد غیرجبری (ترانساندان) نامیده می‌شود. بنابراین به‌کمك پرگار وخط‌کش، نمی‌توان حاصل‌ضرب پاره‌خط مفروض R در عدد غیرجبری را رسم کرد.

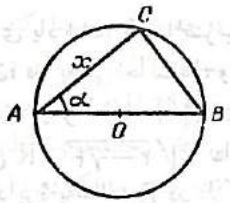
بنابراین؛ برای اثبات قابل‌حل نبودن مسالهٔ تربیع دایره به‌کمك‌پرگار و خط‌کش، باید عدم امکان رسم حاصل ضرب پاره خط مفروض R در عدد $\sqrt{\pi}$ به‌کمك این وسیله‌ها را ثابت‌کرد وبرای این منظور، باید ثابت کرد که $\sqrt{\pi}$، یا π، عددی است غیرجبری.

خدمت لیندمان هم‌همین بودکه برای نخستین‌بار درجهان دانش، ثابت کردکه π، عددی غیرجبری است و ازاین راه به طور قطع نتیجه گرفت که حل مسالهٔ تربیع دایره به کمك پرگار و خط‌کش، ممکن نیست. به این علت است‌که لیندمان را «فاتح عدد π» گفته‌اند.[1]

به‌این ترتیب، ثابت می‌شودکه مسالهٔ تربیع دایره، تنها به‌یاری‌پرگار و خط‌کش، قابل‌حل نیست، باوجود این، این مساله‌را می‌توان با استفاده از ابزارهای اضافی وبااستفاده از بعضی منحنی‌های خاص (مثل کوادراتریس) بادقت حل کرد. بااستفاده از پرگار و خط‌کش، مساله تربیع دایره را، تنها به‌تقریب می‌توان حل کرد.

دراین جا، یکی از راه‌حل‌های تقریبی مسالهٔ تربیع دایره را، براساس استفاده ازمثلث بینگ، می‌آوریم. این روش را، بینگ، مهندس روسی در سال ۱۸۳۶ پیشنهادکرد ده‌برای استفاده درموارد عملی، روش بسیار ساده‌ای‌است.

۱. برای آشنایی با اثبات کامل غیر جبری بودن عدد π، به شمارهٔ ۱۳ مجلهٔ «آشتی با ریاضیات»، صفحه‌های ۶۱ تا ۱۲۸ مراجعه‌کنید.



شکل ۱۹

مثلث ABC را (شکل ۱۹)، محاط دردایره‌ای که تربیع آن می‌خواهیم،چنان محاط می‌کنیم که ضلع بزرگتر آن، منطبق برقطردایره‌باشد. زاویهٔ CAB را به α و وتر AC را به x نشان می‌دهیم. زاویهٔ α راطوری انتخاب می‌کنیم که پاره خط x برابر ضلع مربع هم ارز دایرهٔ مفروض باشد. برای این منظور، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{x}{2R}$$

که درآن، R برابر است باشعاع دایره.

چون‌مساحت مربع به‌ضلع x، باید بامساحت دایره برابر باشد،داریم:

$$x^2=\pi R^2 \Rightarrow 4R^2\cos^2\alpha=\pi R^2 \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{\pi}{4}$$

که درنتیجه، به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\approx 0/886$$

و ازجدول، معلوم می‌شود: $\alpha=27^\circ 36'$

بنابراین، بارسم وتری دردایره، که باقطرآن، زاویه‌ای برابر $27^\circ 36'$ بسازد، ضلع مجهول مربع موردنظر به‌دست می‌آید، مربعی که هم‌ارز بادایره است. به‌سادگی ثابت می‌شودکه مثلث ABC ، همان مثلث بینگ است.

۲۷. تصاعد هندسی باتعداد زوج جمله‌ها را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}$$

ابتدا مجموع نیمهٔ اول همهٔ جمله‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$S_1=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

و مجموع نیمهٔ دوم

$$S_2=\frac{a_{n+1}+a_{2n}}{2}\cdot n$$

حالا، تفاضل این دومجموع را به‌دست می‌آوریم:

$$S_2-S_1=\frac{a_{n+1}+a_{2n}-a_1-a_n}{2}\cdot n$$

ازطرف دیگر داریم:

$$a_n=a_1+dn-d\ ;\ a_{n+1}=a_1+dn\ ;\ a_{2n}=a_1+2dn-d$$

(که درآن d عبارت است ازقدر نسبت تصاعد حسابی)، درنتیجه

$$S_2-S_1=\frac{a_1+dn+a_1+2dn-d-a_1-a_1-dn+d}{2}\cdot n=$$

$$=\frac{2dn}{2}\cdot n=dn^2$$

به‌این ترتیب: $S_2-S_1=dn^2$ واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این مساله،متعلق به هیپسیکلیس اسکندرانی است که درسدهٔ دوم‌پیش‌از میلاد، می‌زیسته است. کتاب چهاردهم «مقدمات» اقلیدس هم، منسوب به‌اوست از این دانشمند، مساله‌های جالب زیادی، باقی‌مانده است.

۲۸. هرون این مساله‌را بارابطه‌ای که به‌نام خودش مشهور شده است، حل می‌کرد:

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$$

$$S=84 \quad \text{(واحد مربع)}$$

هرون اسکندرانی ، دانشمند یونان باستان در حوالی سدهٔ اول زندگی می‌کرد. دربارهٔ زندگی او، تنها آگاهی‌های پراکنده‌ای به‌ما رسیده است. او یکی ازدانشمندان و مهندسان مشهور زمان خود بوده و درزمینهٔ مساله‌های نقشه برداری (ژئودزی) کار می‌کرده است. یک‌رسالهٔ ریاضی به‌نام «متریک» به هرون منسوب است‌که در آن، قاعده‌هایی برای حل عددی معادله‌های درجه دوم و روش‌هایی برای محاسبهٔ تقریبی جذروکعب آمده‌است. درقسمت هندسی این رساله، رابطه‌هایی برای محاسبهٔ شکل‌های مختلف هندسی (سطح‌وحجم) داده شده است و درهمان حالت‌که رابطهٔ مشهور محاسبهٔ مساحت مثلث، از روی سه‌ضلع آن آمده است.

۲۹. ضلع‌های چنین مثلثی را $x-1$ ، x و $x+1$ می‌گیریم. برای چنین مثلثی، اگر p، نصف محیط و a ، b و c ، ضلع‌های آن باشد، داریم:

$$p=\frac{3x}{2},\ p-a=\frac{x}{2}+1,\ p-b=\frac{x}{2},\ p-c=\frac{x}{2}-1$$

و بنابراین، برای مساحت مثلث (S):

$$S=\sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)}=\frac{x}{2}\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}$$

که اگر $\frac{x}{2}=m$ و m را عددی درست فرض کنیم:

$$S=m\sqrt{3(m^2-1)}$$

m^2-1 را برابر $3n^2$ و n را عددی درست می‌گیریم، در این صورت $S=3mn$، عددی درست می‌شود. ولی باید داشته باشیم:

$$m^2-3n^2=1 \Rightarrow (m+n\sqrt{3})(m-n\sqrt{3})=1 \quad (1)$$

تساوی اخیر به‌ازای $m=2$ و $n=1$ برقرار است:

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$$

از آن‌جا

$$(2+\sqrt{3})^p(2-\sqrt{3})^p=1 \quad (p=1, 2, \dots) \quad (2)$$

ازتساوی‌های(۱) و (۲)، نتیجه می‌شود:

$$m_p+n_p\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^p,$$
$$m_p-n_p\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^p$$

و از آن‌جا

$$x_p=2m_p=(2+\sqrt{3})^p+(2-\sqrt{3})^p$$

از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$p=1,\ x_1=4,\ S_1=6;$$
$$p=2,\ x_2=14,\ S_2=84;$$
$$p=3,\ x_3=52,\ S_3=1170;$$
$$p=4,\ x_4=194,\ S_4=16296$$

وغیره.

۳۰. مستقیماً می‌توان تحقیق کرد که اگر رشته عددهای فردرا، به‌همان نحوی که درصورت مساله خواسته شده است، به‌گروه‌هایی تقسیم کنیم، یعنی

$$1, 3+5, 7+9+11, 13+15+17+29, \dots$$

درآن صورت

$$1=1^3,$$
$$3+5=8=2^3,$$
$$7+9+11=27=3^3,$$
$$13+15+17+19=64=4^3, \dots$$

حال به‌اثبات کلی مساله می‌پردازیم.

تعداد جمله‌ها، در $(n-1)$ گروه نخست چنین است:

$$1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

آخرین جمله درگروه $(n-1)$ ام، برابر است با $n(n-1)-1$. در این صورت، نخستین جمله ازگروه nام، چنین می‌شود:

$$n(n-1)-1+2=n(n-1)+1=n^2-n+1$$

و آخرین جمله ازگروه nام:

$$n^2-n+1+2(n-1)=n^2+n-1$$

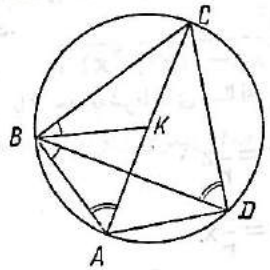
بنابراین، مجموع جمله‌ها درگروه nام، برابر است با

$$\frac{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)}{2}\cdot n=n^3$$

نویسندهٔ این مساله، نیکوماخوس جیراسی، از دانشمندان سدهٔ اول یونان باستان است. رسالهٔ «ورودی به‌حساب»، منسوب به‌اوست‌که مدت‌ها به‌عنوان کتاب درسی ریاضیات مقدماتی، مورد استفاده قرار می‌گرفت.

۳۱. باید ثابت کرد (شکل ۲۰):

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$



شکل ۲۰

زاویهٔ KBC را برابر زاویهٔ ABD می‌سازیم. دو مثلث ABK و BCD متشابه می‌شوند، زیرا دو زاویهٔ ABK و DBC باهم و دو زاویهٔ BAC و BDC باهم برابرند. درنتیجه

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AK}{CD}$$

یا

$$AB\cdot CD=AK\cdot BD \quad (1)$$

دومثلث ABD و KBC هم به‌علت تساوی دو زاویهٔ ABD و KBC

و تساوی دو زاویهٔ ADB و BCK باهم متشابه‌اند و بنابراین

$$\frac{AD}{KC}=\frac{BD}{BC}$$

یا

$$AD\cdot BC=KC\cdot BD \qquad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را باهم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=(AK+KC)BD$$

یا

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

کلود بطلمیوس (مرگ درحدود سال ۱۶۸ میلادی)، یکی ازدانشمندان یونان‌باستان است که بررسی‌های او اهمیت زیادی برای پیشرفت رشته‌های مختلف دانش (ریاضیات، فیزیك ، هندسه و به خصوص اخترشناسی) داشته است. بطلمیوس، در تالیف اساسی خود «ساختمان بزرگ ریاضی اخترشناسی درسیزده کتاب» (المجسطی): کوشیده است تا برای دستگاه زمین مرکزی، که طبق آن، زمین درمرکز و بدون حرکت قرارگرفته است‌وخورشید و سیارات به‌دورآن می‌چرخند، مبانی ریاضی محکمی بریزد. دستگاه بطلمیوسی، درجریان قریب ۱۴سده، برجهان دانش حکومت می‌کرد تااین‌که نیکلای کوپرنیك (۱۴۷۳ - ۱۵۴۳)، اخترشناس ایستانی، دستگاه خورشید مرکزی‌را، که منعکس‌کنندهٔ واقعیت جهان بود، پایه‌گذاری کرد. در دستگاه کوپرنیکی، زمین، نه‌تنها به دور محور خود ، بلکه ضمناً در فضا و به‌دور خورشید هم می‌چرخد.

در «المجسطی» دستگاه ریاضی اخترشناسی(مثلثات خطی وکروی، جدول‌سینوس‌ها) داده شده است.

۳۲. باتوجه به‌شرطهای مساله، به این دستگاه می‌رسیم:

$$x-y=\frac{1}{3}z\ ,$$

$$y-z=\frac{1}{3}x\ ,$$

$$z-10=\frac{1}{3}y\ ,$$

که باحل آن به‌دست می‌آید:

$$x=45\ ,\quad y=37\frac{1}{2}\ ,\quad z=22\frac{1}{2}$$

(همهٔ مساله‌های دیوفانت را با علامت‌گذاری‌های امروزی حل کرده‌ایم).

۳۳. ازمعادلهٔ $x+y=10$ ، داریم:

$$\frac{x+y}{2}=5$$

حالا فرض می‌کنیم:

$$\frac{x-y}{2}=z$$

باجمع این دورابطه، به‌دست می‌آید:

$$x=5+z$$

و ازتفاضل دورابطه:

$$y=5-z$$

دراین صورت داریم:

$$x^2+y^2=(5+z)^2+(5-z)^2=50+2z^2$$

که باتوجه به‌معادلهٔ دوم دستگاه

$$2z^2=18 \Rightarrow z=3$$

و دیگر به‌سادگی، مقادیر x و y به‌دست می‌آید:

$$x=5+z=8\ ,\quad y=5-z=2$$

۳۴. اگر ضلع‌پهلوی زاویه قائمه‌راکه مکعب کامل است x^3 بگیریم، ضلع دیگر مجاور به زاویهٔ قائمه برابر x^3-x و وتر مثلث برابر x^3+x می‌شود و درنتیجه، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{(x^3+x)^2-(x^3-x)^2}=x^3$$

که از آن‌جا

$$2x^2=x^3$$

درنتیجه $x=2$. یعنی وتر برابر ۱۰ وضلع پهلوی زاویهٔ قائمه به‌ترتیب‌برابر ۶ و ۸ می‌شود.

۳۵. قسمت کوچکتر تقسیم دوم‌را x می‌گیریم، دراین صورت،قسمت بزرگترقسمت اول‌برابر $2x$ می‌شود. قسمت‌کوچکتر تقسیم اول $100-2x$ و در نتیجه، قسمت بزرگتر تقسیم دوم $300-6x$ خواهد شد. ولی مجموع دوقسمت تقسیم دوم، برابر است با ۱۰۰:

$$x+(300-6x)=100$$

و ازآن‌جا $x=40$.

پاسخ: درتقسیم اول، قسمت کوچکتر برابر ۲۰ وقسمت بزرگتر برابر ۸۰ است؛ درتقسیم دوم، قسمت‌کوچکتر ۴۰ وقسمت بزرگتر ۶۰ است.

۳۶. تفاضل دو عدد را $2x$ می‌گیریم. بنابراین، عدد بزرگتر برابر $10+x$ وعدد کوچکتر برابر $10-x$ می‌شود. ازطرف دیگر، بنابر فرض داریم:

$$(10+x)(10-x)=96 ,$$
$$100-x^2=96 ,$$
$$x^2=4$$

ازآن $x=2$ و دوعدد برابر ۱۲ و ۸ می‌شود.

۳۷. مساله منجر به‌حل این دستگاه می‌شود:

$$\frac{x}{y}=3 ,$$
$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=5$$

اگر دوطرف معادلهٔ اول‌را مجذور، وسپس به‌دوطرف تساوی حاصل، یك‌واحد اضافه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^2+y^2}{y^2}=10\Rightarrow x^2+y^2=10y^2$$

در نتیجه، معادلهٔ‌دوم دستگاه، چنین می‌شود:

$$\frac{10y^2}{x+y}=5\Rightarrow 10y^2=5(x+y)$$

که اگر به جای x، مقدار آن $3y$ را قرار دهیم، به دست می‌آید

$$10y^2=5(3y+y)\Rightarrow 10y^2=20y^2$$

از آن جا $y=2$ و بنابراین $x=6$ می‌شود.

۳۸. مسأله، منجر به حل این دستگاه می‌شود:

$$(x+y)z=35 ,$$
$$(x+z)y=27 ,$$
$$(y+z)x=32 ,$$

اگر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم کنیم، به دست می‌آید:

$$xz-xy=8$$

تساوی اخیر را با معادلهٔ سوم جمع می‌کنیم، می‌شود

$$xz=20$$

که از آن جا به سادگی پیدا می‌شود: $xy=12$ و $yz=15$. از ضرب $xz=20$ و $yz=15$ در یکدیگر، به دست می‌آید

$$xyz^2=20\times 15\Rightarrow 12z^2=20\times 15$$

از این جا $z=5$ و بنابراین $x=4$ و $y=3$ می‌شود.

۳۹. عدد نخست را به صورت حاصل ضرب x در مکعب یك عدد، و مثلا ۲، در نظرمی‌گیریم، یعنی‌عدد نخست برابر $8x$ باشد. عدد دوم رابرابر x^2-1 فرض می‌کنیم. روشن است که در این صورت، یکی از شرطهای مسأله برقرار است: حاصل ضرب دو عدد به اضافه عدد نخست، یك مکعب می‌شود. در واقع، داریم:

$$8x(x^2-1)+8x=8x^3$$

سپس، بنابر شرط دوم، باید حاصل ضرب دو عدد به اضافه عدد دوم، برابر با مکعب یك عدد بشود، یعنی باید

$$8x(x^2-1)+(x^2-1)$$

برابر با مکعب یك عدد باشد.

فرض‌می‌کنیم که این عدد برابر $(2x-1)^3$ باشد، دراین صورت، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$8x(x^2-1)+(x^2-1)=(2x-1)^3$$

و از آن جا: $x=\frac{14}{13}$،

به این ترتیب، عدد نخست برابر $8\times\frac{14}{13}$، یعنی $\frac{112}{12}$ و عدد دوم برابر $\left(\frac{14}{13}\right)^2-1$، یعنی $\frac{27}{169}$ می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که این مسأله، در عداد معادله‌های سیال به حساب می‌آید، با وجود این، دیوفانت، معادلهٔ دوم را طوری در نظر می‌گیرد که جمله‌های درجهٔ سوم آن، حذف شود.

۴۰. فرض‌می‌کنیم که مجموع هرسه عدد چنین باشد:

$$x+y+z=u^2+2u+1=(u+1)^2$$

سپس فرض می‌کنیم: $x+y=u^2$، ازآن جا: $z=2u+1$. حالا

فرض می‌کنیم: $y+z=u^2-2u+1=(u-1)^2$. از این جا به‌دست می‌آید: $x=4u$ و $y=u^2-4u$. $x+z=6u+1$ هم باید مجذور کامل باشد، مثلا $11^2=121$. بنابراین، برای پیدا کردن x، به این‌معادله می‌رسیم:

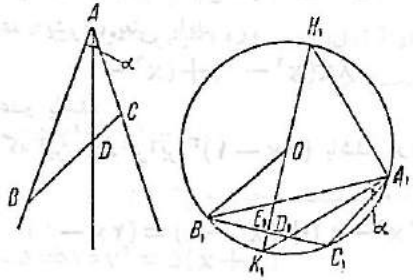
$$6u+1=121$$

و از آن جا $u=20$.

سه عدد مورد نظر چنین‌اند:

$$x=80,\ y=320,\ z=41$$

۴۱. بنابر فرض مسأله، یك زاویه، نیمساز آن و نقطه‌ای واقع براین نیمساز داده شده است. باید پاره خط BC را طوری رسم کرد (شکل ۲۱)، که طولی به اندازهٔ مقدار مفروض داشته باشد.



شکل ۲۱

برای این منظور، ابتدا مثلث ABC را می‌سازیم، به نحوی که زاویهٔ A و قاعدهٔ BC ونیمساز AD ازآن، که به‌ترتیب برابر بازاویه و طول‌های مفروض باشد. برای این منظور، پاره‌خط B_1C_1 را برابر با پاره خط BC رسم‌می‌کنیم. سپس از دو نقطهٔ B_1 و C_1 دایره‌ای می‌گذرانیم که کمان B_1C_1 آن، کمان در خور α (برابر زاویهٔ A) باشد. اگر از نقطهٔ E_1، وسط وتر B_1C_1، عمودی براین وتراخراج کنیم، قطر K_1H_1 از دایره به‌دست‌می‌آید. مسأله به این جا منجر می‌شود که بتوانیم وتر K_1A_1 را (که ضمناً نیمساز زاویهٔ A_1 می‌شود) طوری رسم کنیم که D_1A_1 برابر با DA بشود. دومثلث $E_1K_1D_1$ و $A_1K_1H_1$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی معلوم می‌شود که‌این دو مثلث متشابه‌اند و بنابراین داریم:

$$\frac{K_1D_1}{H_1K_1}=\frac{K_1E_1}{K_1A_1}$$

یا

$$K_1D_1\times K_1A_1=H_1K_1\times E_1K_1$$

که اگر به $K_1A_1=K_1D_1+D_1A_1$ توجه کنیم، داریم:

$$(K_1D_1)^2+K_1D_1\times D_1A_1=H_1K_1\times E_1K_1$$

چون C_1K_1، وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ $H_1C_1K_1$ است، خواهیم داشت:

$$H_1K_1\times E_1K_1=(C_1K_1)^2$$

بنابراین، به دست می‌آید:

$$(K_1D_1)^2+K_1D_1\times D_1A_1=(C_1K_1)^2$$

که اگر فرض کنیم: $k_1D_1=x$، $A_1D_1=p$ و $C_1k_1=q$، خواهیم داشت:

$$x^2+px=q^2$$

اگر x را، از روی این معادله، بسازیم، مثلث $A_1B_1C_1$، بدون هیچ زحمتی، باهمان نیمساز خود، A_1D_1، به دست می‌آید. در واقع، به‌کمك پرگاری که به‌اندازهٔ $k_1D_1=x$ باز شده‌باشد، نقطهٔ D_1 را به‌دست‌می‌آوریم. آن وقت، k_1D_1 را وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ A_1 قطع کند. به این ترتیب، مثلث $A_1B_1C_1$ به دست می‌آید. حالا، کافی است روی‌ضلع‌زاویهٔ‌مفروض‌A، طول‌AB رابرابر A_1B_1 جدا وBD راوصل کنیم.

پاپوس اسکندرانی، هندسه‌دان یونان قدیم، در نیمهٔ دوم سدهٔ سوم میلادی می‌زیست. پاپوس، مولف اثر مشهور «مجموعهٔ ریاضیات»، در ۸ کتاب است، که از آن‌ها، ۶ کتاب آخر و قسمتی ازکتاب دوم، به ما رسیده است.

در «مجموعهٔ ریاضیات»، مجموعهٔ جالب دیگری ازکشف‌های ریاضی‌دانان یونان باستان دربارهٔ هندسه و حساب گرد آمده است. در این اثر، از بسیاری رساله‌های ریاضی‌دانان یونان باستان نام برده شده است که به ما نرسیده‌اند.

۴۲. مساحت قطعه‌ها را به σ و σ_1، مساحت قطاع‌ها را به S و S_1 و مساحت مثلث‌ها را به Σ و Σ_1 نشان می‌دهیم (شکل ۲۲). a و a_1 را

شکل ۲۲

قاعده‌های دو قطعه و r و r_1 را شعاع‌های دو دایره می‌گیریم. دراین‌صورت:

$$\sigma = S - \sum \ , \ \sigma_1 = S_1 - \sum_1$$

با توجه به تشابه مثلث‌ها ، خواهیم داشت:

$$\frac{\sum}{\sum_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}$$

سپس

$$\frac{S}{S_1} = \frac{r^2}{r_1^2}$$

و ازآن جا

$$\frac{\sum}{\sum_1} = \frac{S}{S_1}$$

یا

$$\frac{\sum}{S} = \frac{\sum_1}{S_1} \ , \ \frac{S}{\sum} = \frac{S_1}{\sum_1}$$

بنابراین

$$\frac{S - \sum}{\sum} = \frac{S_1 - \sum_1}{\sum_1}$$

یا

$$\frac{\sigma}{\sum} = \frac{\sigma_1}{\sum_1}$$

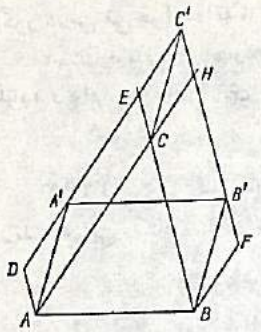
یا

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{\sum}{\sum_1}$$

براساس همهٔ این‌ها ، سرانجام به دست می‌آید :

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{a^2}{a_1^2}$$

۴۳. مثلث دلخواه ABC را در نظرمی گیریم و روی ضلع AB و در داخل مثلث، متوازی‌الاضلاع $ABB'A'$ را می‌سازیم، به نحوی که رأس‌های A' و B' آن در خارج مثلث واقع شوند (شکل ۲۳) . سپس ، روی دو ضلع دیگر مثلث ، دو متوازی‌الاضلاع ACED و BFHC را طوری می‌سازیم که ضلع‌های آن‌ها از رأس‌های متوازی‌الاضلاع اول بگذرند. باید ثابت کنیم که مساحت متوازی‌الاضلاع $ABB'A'$ برابر است با مجموع مساحت‌های دو



شکل ۲۳

متوازی‌الاضلاع ACED و BEHC . برای این منظور ، ضلع‌های DE و EH را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C' قطع کنند و بعد C' را به C وصل می کنیم. قبلا یادآوری می کنیم که دو مثلث $A'B'C'$ و ABC برابرند، زیرا یك ضلع $(AB = A'B')$ و دو زاویهٔ برابر دارند $C\widehat{A}B = C'\widehat{A'}B'$ و $(C\widehat{B}A = C'\widehat{B'}A')$. مساحت‌متوازی‌الاضلاع $ACC'A'$ بامساحت‌متوازی‌الاضلاع ABED و مساحت متوازی‌الاضلاع $BB'C'C$ با مساحت متوازی‌الاضلاع BFHC برابر است، زیرا در هر دو مورد ، قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر دارند.

حالا ، اگر از شکل $ABB'C'A'A$ ، مثلث $A'B'C'$ را برداریم ، متوازی‌الاضلاع $ABB'A'$ باقی می‌ماند . همین طور ، اگر از همان شکل $ABB'C'A'A$، مثلث ABC را ، که بامثلث $A'B'C'$ برابراست، برداریم، مجموع متوازی‌الاضلاع‌های $ACC'A'$ و $BB'C'C$ ، و یا هم ارز آن ، مجموع‌متوازی‌الاضلاع‌های ACED و BFHC باقی‌می‌ماند. مسأله، حل‌شد.

(این مسأله ، در «نیکوماکوس» ارشمیدس وجود ندارد و آن را برای نخستین بار ، در «مجموعهٔ ریاضیات» پاپوس اسکندرانی، پیدا کردند. مسألهٔ پاپوس ، تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورث است. در واقع ، اگر در مسألهٔ پاپوس ، مثلث اصلی را یك مثلث قائم‌الزاویه بگیریم، به حالت خاص قضیهٔ فیثاغورث می‌رسیم) .

۴۴. مسأله ، منجر به حل این معادله می‌شود :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$$

که با حل آن $x = 28$ به دست می‌آید. بنابراین ، در مکتب فیثاغورث، ۲۸

Reconciliation With Mathematics
Editor: Parviz Shahryari
Under the supervision of the editorial board
A supplementary Publication of the Free University of Iran
Address: *The Free University of Iran*
P. O, *Box* 11 - 1962
Aban Shomali St. Karim-Khan Zand
Boulevard Tehran - 15 Iran
Vol. IV, No. 3, 1981

شاگرد درس می‌خوانده‌اند.

«جنگ یونانی» ـ مجموعه‌ای از مسأله‌هاست که به صورت شعر وعموماً، همچون «ایلیاد» و «اودیسه» هم، شش بخشی است.

۴۵. فرض می‌کنیم که الاغ x کیسه و قاطر y کیسه بار برپشت خود دارند. به این دستگاه با دو معادله و دو مجهول می‌رسیم:

$$y+1=2(x-1)$$
$$y-1=x+1$$

یا

$$2x-y=3$$
$$y-x=2$$

با حل این دستگاه به دست می‌آید:

$$x=5\ ,\ y=7$$

۴۶. مسأله، منجر به حل این‌معادله می‌شود:

$$\frac{4}{3}x+x=12$$

و از آن جا

$$x=5\frac{1}{7}\quad (\text{روز})$$

۴۷. شرطهای مسأله، به این معادله منجر می‌شود:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$$

که باحل آن به‌دست می‌آید: $x=84$. دیوفانت در ۸۴ سالگی مرده‌است.

دربارهٔ زندگی «مترودور» چیزی نمی‌دانیم، حتی نمی‌دانیم کی به دنیا آمده و کی مرده است. او در تاریخ ریاضی، به عنوان مؤلف مسأله‌هایی که به شعر تنظیم کرده، شناخته شده است. مسأله‌های مترودور، در مجموعه‌های دست نویس وارد شده است و در زمان خود، صاحب شهرت فراوانی بوده است.

Reconciliation with Mathematics