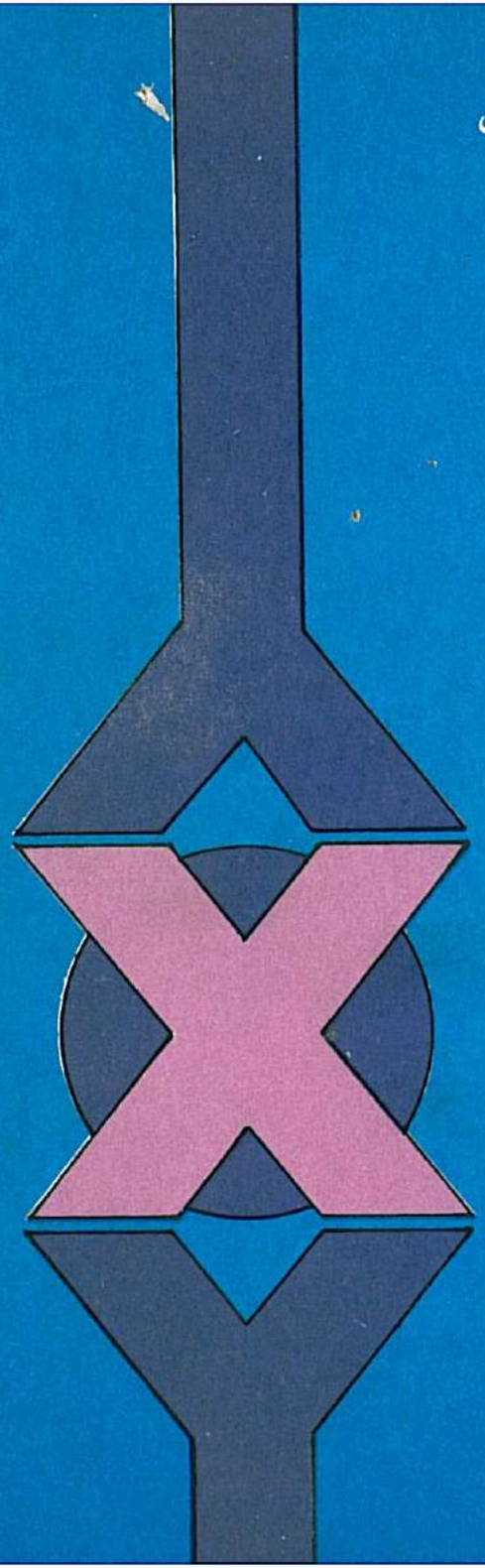
گروه ادبیات و علوم انسانی

آشتی با ریاضیات



۱۵

دی ۱۳۵۹

Reconciliation with Mathematics

آشتی با ریاضیات

سردبیر: پرویز شهریاری
زیر نظر هیئت تحریریه

از انتشارات جانبی گروه ادبیات و علوم انسانی
صفحه آرایی، تصحیح، چاپ و صحافی: مرکز تولید انتشارات، گروه ادبیات و علوم انسانی

نشانی: تهران ـ خیابان کریم‌خان زند ـ اول آبان شمالی ـ دانشگاه آزاد ایران

سال چهارم ـ شمارهٔ ۲ (۱۵)

فهرست مطالب

ریاضیات را چگونه درس بدهیم؟	ل. د. کودریاوتسف	پرویز شهریاری	۱
شگفتیهای عدد			۱۳
دانش ارشمیدس	علیرضا امیرمعز		۱۴
نگاهی بر نظریهٔ کنترل	شهریار شهریاری		۱۷
ساعت			۳۰
آفرینندگان ریاضیات عالی (۵)	لئون سه‌مه نوویچ فریمان	پرویز شهریاری	۳۴
حدّ	الکساندر الکساندروویچ کیریلوف	پرویز شهریاری	۴۳

۵۰ ریال

ل. د. کودریاوتسف
ترجمهٔ پرویز شهریاری

ریاضیات را چگونه درس بدهیم؟

مضمون درس‌های ریاضی

ویژگی‌های آموزش ریاضی، مربوط به ویژگی‌های خود این دانش است. برخلاف فیزیك، شیمی و زیست‌شناسی (که با پدیده‌ها و موضوع‌های عینی سروکار دارند)، سروکار ریاضیات با ساختمان‌های انتزاعی و منطقی است که در آنها بستگی‌های معین بین عنصرهای این ساختمان‌ها شرح داده می‌شود. به عنوان نمونهٔ ساختمان‌های ریاضی، می‌توان از معادله و قضیه نام برد که در اولی، یك ضابطهٔ فرمولی، بستگی بین عضوهای آن را نشان می‌دهد؛ و در دومی، تنظیم بستگی‌های منطقی، بازتابی از رابطه‌های متقابل مفهوم‌هائی بیان می‌شود که در آن وجود دارد.

اگر بستگی بین عنصرهای یك ساختمان ریاضی، با بستگی بین عنصرهای یك موضوع یا پدیدهٔ واقعی، تطبیق کند، گویند که این ساختمان، عبارتست از مدل ریاضی موضوع یا پدیدهٔ مفروض.

یك مدل ریاضی می‌تواند (با تقریب معینی) ویژگی‌های پدیده‌های متفاوتی از واقعیت را، که گاه از نظر محتوی به کلی دور از یکدیگرند، شرح دهد. مثلاً، تنها با یك فرمول می‌توان قانون نیوتونی جاذبهٔ جرم‌ها و قانون کولون مربوط به جاذبهٔ بارهای الکتریکی را بیان کرد. جرم و بار، که در این قانون‌ها شرکت کرده‌اند، با واحدهای مختلفی اندازه‌گیری می‌شوند و بعدهای متفاوتی دارند. ولی در فرمول ریاضی مربوط به این قانون‌ها عمل‌های مربوط، بدون توجه به اینکه مربوط به کدام کمیت فیزیکی هستند، تنها طبق قانون عمل روی عددها، انجام می‌گیرد.

ضمن توضیح و تفسیر یك مفهوم ریاضی در کلاس، همیشه بهتر است که از زمینه‌های کاربرد آن، گفتگو شود. مثلاً، وقتی که رابطهٔ قانون کولون، برای متخصص

برق آینده توضیح داده می شود، خوب است که برتاثیر متقابل بارهای الکتریکی استناد شود. ولی آیا آن طور که گاهی گمان می رود، این درست است که به طور کلی، به جای خود ریاضیات، کاربرد آن را به متخصصین آینده بیاموزیم؟ نه. اشکال این روش در این جاست که وقتی کسی، آموزش خود را تا به این حد اختصاصی تمام کرده باشد، اغلب در برابر مواردی که ضمن تحصیل به طور مشخص به آن‌ها برخورد نکرده است، در می ماند. هر متخصصی در کار خود به حالت‌هایی برمی خورد که باید با استفاده از خود ریاضیات، بتواند دشواری آن را برطرف کند، باید راه استفادهٔ از روش‌ها و فرمول‌های ریاضی را بداند تا بتواند مسالهٔ مشخص خود را حل کند. نارسایی این روش، به خصوص در زمان ما، که آهنگ تند پیشرفت دانش و صنعت دائماً رو به تزاید است و شرایط کار پژوهشگران و مهندسان، به سرعت تغییر می کند، بیشتر به چشم می خورد.

کاربرد ریاضیات را، بدون فراگیری خود ریاضیات، نمی توان یادگرفت.

یگانگی ریاضیات

وقتی که دربارهٔ فرمول قانون کولون صحبت می کنیم و می گوییم که می توانیم آن را با استناد به تاثیر متقابل بارهای الکتریکی بررسی کنیم و یا بدون آن، در واقع به تقسیم ریاضیات به دو نوع خالص و کاربسته ـ که امروزه مورد قبول است ـ اشاره کرده ایم.

در ریاضیات خالص، ساختمان‌های ریاضی مورد بررسی قرار می گیرد، بدون این که بحثی دربارهٔ پدیده‌های دنیای واقع (پدیده‌های فیزیکی، شیمیایی و مربوط به زیست‌شناسی یا اقتصاد) ـ که می توانند به یاری همین ساختمان‌های ریاضی مدل بندی شوند ـ به میان آید. در این بررسی‌ها، قانون‌های کاملاً کلی وروش‌ها و آلگوریتم‌های عمومی به دست می آید که می توانند برای حل گروه وسیعی از مساله‌ها به کار روند.

در ریاضیات کار بسته، ضمن مطالعهٔ مدل‌های ریاضی، بیشتر به بازتاب پدیده‌های دنیای واقع در آن‌ها، توجه می شود (مثلاً از بستگی بین عامل‌های جریانی که از راه تجربه به دست آمده است، استفاده می کنند).

از آن جا که تفسیر ریاضی پدیده‌های مشخص، اساساً خصلت عددی دارد، روش‌های عددی حل مساله‌ها در ریاضیات کار بسته، نقشی جدی به عهده دارد. به

همین مناسبت، هر روش عددی، بستگی با ریاضیات کار بسته پیدا می کند.

ولی، با این که ریاضیات را به دو نوع خالص و کار بسته، تقسیم می کنیم، نمی توانیم بین آن‌ها، خط فاصل روشنی رسم کنیم. ریاضیات، در هرحال ریاضیات است و یگانگی آن را نمی توان از بین برد. روش‌هایی که در ریاضیات خالص به کار می رود، همان است که در ریاضیات کار بسته هم مورد استفاده قرا می گیرد؛ و این هر دو قسمت ریاضیات، دائماً و همیشه، تاثیر عمیقی بریکدیگر دارند.

بنابراین، ریاضیات خالص و روش‌های عددی را، باید در آموزش به عنوان یك کل واحد، یك واحد جدایی ناپذیر، در نظر گرفت. به خصوص، روش‌های عددی را باید براساس درس نظری آموخت، و نه به جای آن‌ها و به عنوان نسخه‌ای برای حل عددی مساله‌ها.

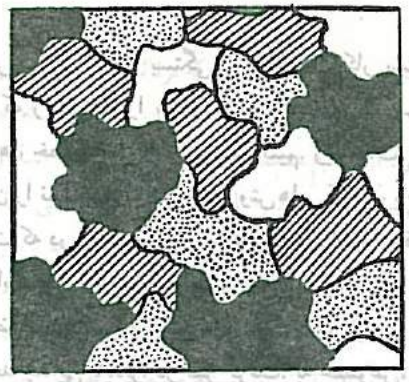
برای تاکید براین نکته که نباید مثال جداگانه را به جای اثبات گذاشت جریانی را که برای یکی از پروفسورهای دانشگاه دولتی مسکو پیش آمده است، در این جا می آورم.

چند سال قبل، او را به عنوان مشاور، به یکی از انستیتوها، دعوت کردند. نخستین مساله‌ای که در برابر او قرار گرفت، محاسبهٔ مقادیر یك انتگرال سه خطی از تابعی بود که به چند پارامتر بستگی داشت. برای محاسبهٔ جدول‌های مربوطه، برنامه‌هایی تنظیم شده بود، که انجام آن‌ها، قریب شش ماه از وقت کامپیوتری را که در آن انستیتو وجود داشت، می گرفت.

پروفسور به نظرش رسید که این انتگرال باید ارتباطی با نظریهٔ تابع‌های بسل داشته باشد، و بعد از دو یا سه روز موفق شد، با استفاده از تبدیل انتگرال‌ها در نظریهٔ نامبرده، این انتگرال سه خطی نحس را به یك انتگرال یك خطی تبدیل کند که برای محاسبهٔ آن، تنها کمتر از یك شبانه روز از کار کامپیوتر لازم بود. و روشن است که این وضع، چه تاثیر عظیمی در صرفه‌جویی وقت داشت.

این نمونه، به روشنی، اهمیت مهارت‌های ریاضی و به طور کلی، فرهنگ ریاضی و اهمیت آموزش ریاضی را، در زمان‌ما، نشان می‌دهد.

ولی، این بحث را، به هیچ وجه نباید به معنای تحقیر نقش کامپیوتر در پژوهش‌های ریاضی امروز گرفت. تاثیری که کامپیوتر در ریاضیات امروز داشته است، بسیار عظیم است. کامپیوتر، توانسته است، روش کاملاً تازه‌ای برای پژوهش و آزمایش‌های محاسبه‌ای، به وجود آورد. کامپیوتر، امکان‌های کاملاً تازه‌ای هم در زمینهٔ بررسی‌های نظری، در اختیار ریاضی‌دانان گذاشته است. نمونهٔ حل مسالهٔ چهار



مسالهٔ چهار رنگ عبارت است از پیدا کردن حداقل تعداد رنگ‌های مختلفی که برای رنگ کردن هر نقشهٔ جغرافیائی کافی باشد، به نحوی که هر دو کشور مجاور به رنگ‌های متفاوتی درآمده باشند. همین چندی پیش، کنت آپل و ولفانگ هیگن، ریاضی‌دانان آمریکایی، ثابت کردند که ۴ رنگ مختلف، برای این منظور کافی است [شمارهٔ ۵ سال دوم «آشتی با ریاضیات» را ببینید]. اثبات با استفاده اساسی از کامپیوتر به دست آمد. مساله را منجر به حالت‌های خاصی کرده بودند که کاملاً جنبه عددی داشت، و با محاسبه‌های عددی مشخص بر روی آن‌ها، می‌شد جواب را به دست آورد. ولی، محاسبه‌ها بسیار عظیم بود، و انجام آن‌ها، جز با استفاده از تکنیك محاسبه‌ای معاصر (یعنی کامپیوتر) میسر نبود.

رنگ، به کمك کامپیوتر، می تواند در این مورد کاملاً قانع کننده باشد (شکل را ببینید).

باید نقش عظیم کامپیوتر در مرحلهٔ کنونی تکامل ریاضیات را، ضمن تدریس ریاضیات، به حساب آورد. باید از همان ابتدا، وحتی ضمن تدریس مبانی نظری، شاگردان را برای حل عددی مساله‌ها آماده کرد و به تدریج در مرحله‌های بعدی به آموزش مدل‌های ریاضی برداخت و همراه با آن به او تلقین کرد که داشتن مهارت در تکنیك محاسبه برای او ضروری است: برای دانشجوی امروزی، باید استفادهٔ از کامپیوتر به همان اندازه طبیعی و ساده باشد که برای دانش آموز دبیرستانی، مراجعه به جدول‌های لگاریتمی وسینوسی، امری ساده و پیش پا افتاده است.

ضمن اثبات یك قضیه، باید توجه را به خصلت این اثبات جلب کرد و متذکر شد که در چه حالتی یك آلگوریتم است و در چه حالتی، می تواند در عمل به عنوان آلگوریتم مورد استفاده قرار گیرد.

چنین روشی در تدریس ریاضی، می تواند بستگی ناگسستنی روش‌های نظری را با محاسبهٔ عددی تامین کند، بدون این که آن‌ها را در مقابل یکدیگر قرار دهد.

منطق درونی ریاضیات

از آن جا که جنبه‌های کار بردی ریاضیات، از جنبه‌های نظری آن جدا نیست،

نمی توان محتوی درس عمومی ریاضیات را تنها از دیدگاه براگماتیستی تنظیم کرد و فقط به تخصص‌های متخصص‌های آینده توجه داشت.

هردانشی، ساختمان درونی خود و منطق درونی خود را دارد، هر دانشی دارای حلقه‌های پیوندی در درون خود است که اغلب از مرزهای خود آن دانش خارج نمی‌شود، ولی در درون آن نقشی اساسی دارد و برای درك و فراگیری و به کاربردن آن دانش، ضرورت دارد.

به این علت است که برای آموزش ریاضی، به گفتهٔ آ. ن. کریلوف «باید تا حد معینی، هم مرور زمان و هم دلبستگی رعایت شود: بسیاری از چیزها ممکن است بیهوده به نظر آیند و کاربرد مستقیمی نداشته باشند، ولی آن‌ها را باید برای کاربردهای آینده فراگرفت و نباید از آن‌ها، همچون فصل کسل کننده ای از یك رمان، صرفنظر کرد».

هدف از تحصیل ریاضیات

هدف از تدریس ریاضیات در مدرسه‌های عالی چیست؟ دادن یك رشته آگاهی به دانشجویان، یاد دادن راه استفاده از روش‌های ریاضی به آن‌ها، بالابردن درك ریاضی آن‌ها، به وجود آوردن فرهنگ ریاضی در آن‌ها ـ این هاست به طور خلاصه، هدف‌هایی که می توان معین کرد. کمی مشروح‌تر به آن‌ها بپردازیم.

معلم در عین حال که می خواهد بهترین آموزش ریاضی را به دانشجویان خود بدهد، همیشه به این وسوسه دچار می‌شود که موضوع را «با تمام زیروبم‌ها» و «درحجم کامل آن» شرح دهد. ولی باید به یاد داشت که نتیجهٔ آموزش را، نه با کمیت آگاهی‌هایی که داده شده است، بلکه با کیفیت فراگیری آن‌ها، با توانائی به کاربردن آن‌ها و با قدرت دانشجویان برای ادامهٔ کار به طور مستقل، ارزیابی می کنند. بهتر است کمتر، ولی بهتر بدانیم. آشنایی سطحی با موضوع‌های فراوان، هیچ مشکلی را حل نمی کند.

همیشه باید، حداقل آنچه که برای دانشجو لازم است، با دقت بیش بینی کرد و تنها بعد از تسلط برآن‌ها، می توان به فکر موضوع‌های دیگری برای یاد دادن افتاد. اگر دانشجو، پایهٔ محکمی در دانش خود داشته باشد، خودش می تواند به سادگی، در مسیری که لازم دارد، مستقلاً کار را ادامه دهد. و در چنین صورتی، همیشه، کیفیت برکمیت بیشی می گیرد.

در بین موضوع‌های فراوانی که در درس ریاضی وجود دارد، باید بدون تردید،

مقام اصلی را به آلگوریتم‌ها و راه حل‌های کلی داد، که دانشجو برای ادامهٔ مستقل آموزش خود، دائماً به آن‌ها برخورد می کند. متاسفانه (و یا شاید بهتر باشد که بگوییم- خوشبختانه) کاربرد ریاضیات، همیشه منجر به این نمی‌شود که آلگوریتم حاضر و آماده ای به طور کامل مورد استفاده قرار گیرد. اغلب، برای استفادهٔ موفقیت آمیز از ریاضیات برای حل مساله‌های تازه، باید تا حد معینی برای تبدیل‌های تحلیلی لازم، از خود تخیل و مهارت نشان داد، باید تا حد معینی کشف کرد. بنابراین، باید روش به دست آوردن این مهارت را هم، در جایی یاد گرفت، و تردیدی نیست که رسیدن به این سطح کار، خیلی دشوارتراز یادگرفتن و به کاربردن آلگوریتم‌های حاضر و آماده است. در درس آنالیز ریاضی، یکی از بهترین راه‌ها برای رسیدن به این هدف، عبارت است از حل معادله‌های دیفرانسیلی عادی و محاسبهٔ انتگرال‌های نامعین.

در این اواخر، این تمایل روز به روز شدت می گیرد که این بخش‌ها را، از دورهٔ سنتی ریاضیات حذف کنند: وقتی که راهنماهای خوبی دربارهٔ معادله‌های دیفرانسیلی و انتگرال‌های نامعین وجود دارد، و می توان از آن‌ها در موارد ضرور استفاده کرد، چه لزومی دارد که وقت دانشجویان را در این مورد بگیریم؟

باید به یادهواداران این پیشنهاد آورد که لودا ویدوویچ لاندو، از علاقمندانی که می‌خواستند شاگرد او بشوند، امتحانی می کرد و انتظار داشت که دست کم در این امتحان موفق شوند. جزو این امتحان، ریاضیات هم بود که در آن محاسبهٔ انتگرال‌های نامعین پیش بینی شده بود. بدون تردید، لاندو، این را می‌دانست که فیزیك دان آینده، نیازی ندارد که وقت خود را صرف محاسبه‌های انتگرالی کند، ولی به آن، به عنوان وسیله‌ای برای تربیت نیروی آفرینش و قدرت تجزیه و تحلیل، ارج می گذاشت. و هیچ معلوم نیست که آن را با چه چیزی می توان عوض کرد که به همین اندازه موثر و مفید باشد. ولی، در هر صورت نباید فراموش کرد که استفاده از هر نوع راهنمایی، تنها می تواند سطح معینی از آگاهی را پیش بینی کند: باید بدانیم که به دنبال چه چیزی هستیم و آن را در کجا می توانیم پیدا کنیم.

برای طرح درست مساله، برای ارزیابی مفروضات آن، برای جدا کردن اساسی‌ترین آن‌ها و برای انتخاب روش حل، باید درك، تخیل و احساس ریاضی داشت تا بتوان نتیجهٔ لازم را، پیش از آن که به دست آید، حدس زد. انتخاب روش درست، موفقیت را تضمین می کند و اغلب موجب می‌شود که در نتیجه‌گیری، به آگاهی‌های بیشتر از انتظار دست یابیم و از آنچه که در آغاز بررسی مورد نظر بوده است، فراتر برویم. دستگاه ریاضی، بسیار غنی است و آگاهی‌های پنهانی زیادی در

خود دارد، که در جریان سده‌های متوالی در آن انباشته شده است. و به برکت فرمول‌های آن، چنان نیرویی در کار برد خود پیدا کرده است که اغلب منجر به نتیجه‌گیری‌های غیر منتظره ای می شود (مثلاً به یاد بیاوریم که چگونه دیراك پوزیترون را پیش گوئی کرد).

ذخیره کردن هر چه بیشتر آگاهی‌های ریاضی، و تربیت و پرورش احساس درونی و فراست دانشجویان، همان چیزی است که به آن فرهنگ ریاضی گویند. باید سطح این فرهنگ ریاضی، بعد از پایان دانشکده چنان باشد که فارغ التحصیل بتواند از روش‌های ریاضی که برای کارهای تخصصی او لازم است، و در دانشکده با آن‌ها رو به رو نشده است، استفاده کند، بتواند آن چه را که برای این منظور خود لازم دارد، مطالعه کند، و بتواند آموزش ریاضی خود را، مستقلاً و بدون وجود کلاس ادامه دهد.

روش‌های آموزش ریاضیات

وقتی که هدف آموزش معین باشد، طبیعی ترین پرسشی که پیش می آید، این است که: چگونه می‌توان به این هدف رسید و روش آموزش چگونه باید باشد؟ تدریس ریاضی (مثل همهٔ دانش‌های دیگر)، باید تا حدامکان ساده، روشن و طبیعی باشد و در سطح معقولی از سخت گیری حفظ شود.

طرح سادهٔ درس، قبل از همه به این معناست که ساختمان درس در مجموع ساده باشد و در تنظیم آن، تکیه براندیشه‌های اصلی و مهم شده باشد و بیشترین وقت و توجه دانشجو، صرف چنان روش‌ها و حقایقی بشود که اساسی اند و تمامی درس به خاطر آن‌ها فراگرفته می‌شود.

ولی، در توجه به سادگی، نباید زیاده روی کرد. سخت گیری عاقلانه در تدریس ریاضی نه تنها آنتی تز پیچیدگی است، بلکه ضمناً نقش آنتی تز سهل اندیشی را هم به عهده دارد.

در این اواخر، معلمان ریاضی را متهم می کنند که بی جهت به شاگردان خود فشار روا می‌دارند و آن‌ها را مجبور می کنند تا برای استدلال‌ها و نتیجه‌گیری‌ها، از چنان دقت منطقی استفاده کنند که به کار هیچ کس نمی‌آید و تنها موجب برگشت به اسکولاستیك و پیروزی فرمالیسم برعقل سلیم می‌شود. گاهی، حتی اساس موضوع را مورد تردید قرار می‌دهند: آیا اصولاً، برای کسی که تنها با کار برد ریاضیات سروکار دارد و می‌خواهد در آینده، از نتیجه‌گیری‌های ریاضی، در رشتهٔ تخصصی خود

استفاده کند، لازم است که ضمن تحصیل، وقت خود را صرف یادگرفتن استدلال‌ها و اثبات‌ها بکند؟ آیا کافی نیست که دانشجو را با حکم‌های ریاضی، و تنها در سطح درك احساسی آن‌ها، آشنا کنیم، تا بتواند در موقع لازم، از آن‌ها استفاده کند؟

شاید، مهم‌ترین و اساسی‌ترین دلیل مخالفان استدلال‌های منطقی دقیق، این باشد که، تاکنون در خود ریاضیات هم، هیچ کشفی، از راه دقیق منطقی به دست نیامده است، بلکه همهٔ حکم‌های تازهٔ ریاضی، برملاحظه‌های شهودی و برقضاوت‌های شبه واقعی و بر تخیل پیش گویی یك نتیجه‌گیری مشخص از یك حکم کلی و یا مشخص دیگر بوده است.

این درست است. بی‌جهت نیست که ما هم، بر نقش شهود و احساس درونی در ابداع‌های ریاضی، تا این حد تکیه می‌کنیم. ولی نباید فراموش کرد که معرفت شهودی تنها وقتی می‌تواند ثمر بخش باشد که، نه برزمینهٔ تهی، بلکه برزمینه‌ای از دانش واقعی واستوار، قرار گیرد. و استواری دانش ریاضی هم، مبتنی براستدلال و دقت منطقی آن است.

ارزش استدلال‌های دقیق در این است که به دانشجو کمك می‌کند تا مفهوم‌های درونی ریاضیات را به خوبی درك کند و برآن‌ها مسلط شود، و در نتیجه بتواند، در عمل آن‌ها را به کار برد؛ همچنین به دانشجو کمك می‌کند تا ساختمان منطقی ریاضیات را درك کند و به رابطهٔ بین قسمت‌های مختلف این دانش پی ببرد، و این خود، یادگیری ریاضیات و به خاطر سپردن آن، و همچنین، به یادآوردن مفهوم‌های لازم آن را، تسهیل می‌کند. اغلب، شیوهٔ استدلال، می‌تواند مرز استفاده از دستگاه مورد نظر ریاضی را، بهتر مشخص کند، و در نتیجه، از اشتباه‌های احتمالی در کار برد آن، جلوگیری کند.

با وجود این، وقتی که از «استدلال دقیق» صحبت می‌کنیم، باید به یادداشته باشیم که مفهوم «دقت»، مفهومی نسبی است.

وقتی که می‌خواهیم بچه‌ای را با مفهوم «صندلی» آشنا کنیم، عاقلانه‌تر این است که به جای تعریف منطقی این مفهوم، خیلی ساده، صندلی را به او نشان دهیم. ولی، اگر بخواهیم، ساختن یك صندلی را به استادکاری سفارش دهیم، جزئیات دقیق و روشن قسمت‌های مختلف آن را مشخص می‌کنیم و توجه کارگاه نجاری را به جزئی‌ترین نکته‌ها جلب می‌کنیم تا صندلی مورد نظر، مطابق با خواست ما در آید.

در مورد مفهوم‌های ریاضی هم، وضع به همین ترتیب است. در مواردی که زبان ریاضی برای توضیح و تفسیر یك پدیده به کار می‌رود (مثل وقتی که کاردیوگراف،

منحنی قلب را رسم می‌کند)، فرو رفتن در استدلال‌های دقیق و ماهوی ریاضی، بیهوده است. مثلاً، وقتی که پزشك متخصص قلب، برای مطالعهٔ قلب بیمار، از کاردیوگرام استفاده می‌کند، هیچ نیازی به این نیست که با مفهوم تابع آشنا باشد، زیرا این موضوع، نمی‌تواند آگاهی بیشتری دربارهٔ وضع بیمار به او بدهد.

ولی، در مواردی که باید از یك مفهوم انتزاعی ریاضی استفاده کرد، تصور عینی آن و پیدا کردن یك مثال یا یك نمونهٔ مشخص برای آن، می‌تواند به بهتر فهمیدن تعریف آن کمك کند، ولی نمی‌تواند جای این تعریف را بگیرد.

قیاس واستقراء

روشن است که بعضی‌ها، مفهوم‌ها را به صورت تصفیه شده و در حالتی که به طور خلاصه و کوتاه تنظیم شده باشند، بهتر درك می‌کنند، و بعضی دیگر، وقتی که همراه با شرحی مفصل و همه جانبه باشد. برای بعضی بهتر است از پایین به بالا و از جزء به کل (استقراء) بروند و برای بعضی دیگر از بالا به پایین و از کل به جزء (قیاس).

در میان معلمان ریاضی هم، هم روش استقرائی و هم روش قیاسی، هواخواهانی دارد. حق با کدام یك از آن‌هاست؟

برای این که بتوانیم به این پرسش پاسخ دهیم، از این جا آغاز می‌کنیم که در تدریس ریاضیات، باید روشی را انتخاب کرد که درك مفهوم‌های اصلی را برای دانشجویان طبیعی‌تر جلوه دهد. برای این منظور، باید این مفهوم‌ها را، معمولاً، در موقعیتی که برای دانشجویان شناخته شده و آشناست، طرح کرد.

از این دیدگاه، شیوه‌های استقرائی بیان مطلب، که ناشی از تعمیم متوالی مفهوم است، برای تحلیل و فهم زندهٔ درس، مناسب‌تر است. به همین مناسبت، در مرحله‌های نخست آموزش، باید حق تقدم را به شیوهٔ استقرائی داد و به تدریج دانشجویان را برای استفاده از روش قیاسی آماده کرد.

روشن است که برای روش استقرایی آموزش، باید وقت بیشتری نسبت به روش قیاسی صرف کرد، زیرا در روش قیاسی، یکباره، بعضی حکم‌های اصلی بیرون می‌آید که سپس، منجر به نتیجه‌گیری‌های گوناگون می‌شود. با وجود این، اگر وقت را، نه بر معیار ساعت‌های درس، بلکه برمعیار ساعت‌هایی بگیریم که دانشجو برای یاد گرفتن مطلب باید صرف کند، آن وقت، احتمالاً زمان لازم یادگیری با روش قیاسی بیشتر از زمان لازم با روش استقرائی از آب در آید.

شیوهٔ قیاسی هم، به دلیل دیگری، می‌تواند در آموزش ریاضی ظاهر شود. وقتی که مفهوم‌هایی مطرح می‌شود که قبلا حالت عام و کلی ان، روشن شده است، حتما باید دانشجویان را به موقعیت آن‌ها متوجه کرد. مثلاً، وقتی که قضیه‌های مربوط به جبر خطی در فضای چند بعدی، ثابت می‌شود، باید یادآوری کرد که می‌توان از این قضیه‌های کلی، برای صفحه (حالت دو بعدی) و فضا (حالت سه بعدی) هم، به عنوان حالت‌های خاص، استفاده کرد. بسیار پیش آمده است که دانشجو، با وجودی که قضیهٔ کلی را می‌داند، نمی‌تواند از آن، برای حالت خاص و مشخصی که با آن مواجه است، استفاده کند.

ضمن طرح مفهوم‌هاو قضیه‌های کلی تازه، باید به اندازهٔ کافی وقت صرف کرد تا دانشجویان با موارد کاملاً مشخص آن آشنا شوند، نمونه‌های خاص آن را بشناسند و در تجزیه و تحلیل حالت‌های فرعی آن، تسلط پیدا کنند.

حل مساله‌های عملی

بعد از آن که دانشجو، مجموعهٔ لازمی از دانش ریاضی را به دست آورد، می‌توان به او یاد داد که چگونه برای پدیده‌های مربوط به رشتهٔ تخصصی خودش، مدل ریاضی بسازد. ولی، این پرسش پیش می‌آید: مدل‌بندی ریاضی را، ضمن چه درسی باید به دانشجو یاد داد؟ در درس ریاضی؟ یا در درس‌هایی که مربوط به رشتهٔ تخصصی اوست؟

به نظر می‌آید که نقش اصلی، در ساختن مدل‌های ریاضی، باید به عهدهٔ ویژه‌کاران باشد: آن‌ها هستند که بهتر از هرکس دیگری، ماهیت پدیده‌های مدل‌بندی شده را می‌فهمند. (البته، این مطلب، به هیچ وجه به معنای کنار گذاشتن ریاضی‌دانان در این مورد نیست. تجربه ثابت کرده است که شرکت ریاضی‌دانان در ساختن مدل‌های ریاضی، بسیار سودمند بوده است). و اگر دانشجویان روش مدل سازی را یاد گرفته‌اند، آن وقت باید آن را در درس‌های تخصصی آن‌ها، به سطح بالای حرفه‌ای رسانید.

در این جا باید حتماً این نکته را یادآوری کرد که: ابداً صحبت برسر تقسیم منطقه‌های نفوذ نیست، بلکه گفتگو از هم کاری ثمربخش‌تر در زمینه‌هایی است که نوعی برخورد مشترك در آن‌ها وجود دارد. در بسیاری از درس‌های اختصاصی علوم طبیعی، وجه مشترکی با درس ریاضی، پیدا می‌شود. منتهی، این وجه مشترك، در این

دو موقعیت، با دیدگاه‌های متفاوتی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثلاً معادلهٔ شره دینگر، می‌تواند هم در درس فیزیك نظری و هم در درس ریاضی مطرح شود. فیزیك‌دان، که روی جمله‌ای از معادله متوقف می‌شود، به معنای فیزیکی آن توجه دارد. ولی، در ریاضیات پرسش‌های دیگری وجود دارد: بحث دربارهٔ تأثیر تغییر جملهٔ مفروض در وجود جواب، بحث دربارهٔ یگانگی جواب، رفتار مجانبی آن، بحث دربارهٔ درستی طرح مساله، دربارهٔ دقت جواب‌ها و غیره. البته، یاد دادن این چیزها، کار ساده‌ای نیست. ولی وقتی که دانشجو برآن‌ها مسلط شود، آمادهٔ درك موارد مشخصی می‌شود که در کار تخصصی او لازم است و باید ضمن درس‌های تخصصی، برای او مطرح شود.

این درست است که در زمان ما، آماده کردن ویژه‌کاران برای مدل‌بندی‌های ریاضی، اساساً در دست ریاضی‌دانان است. ظاهراً، این وضع ناگزیر است، زیرا، به معنای کاملاً تخصصی آن، این مساله، تنها بر اساس یك آموزش خوب ریاضی قابل حل است. با وجود این، احتمالاً از آن روز دور نباشیم که دانشجویان رشته‌های فنی، زیست‌شناسی، پزشکی و اقتصاد هم، آموزش لازم ریاضی را داشته باشند و در نتیجه در همان کلاس‌های اختصاصی خود، به مدل‌بندی‌های ریاضی مشغول شوند.

موضوع آماده کردن چنین ویژه‌کارانی، از مهم‌ترین و جدی‌ترین مساله‌های آموزش امروزی به‌شمار می‌رود؛ و تنها هم‌آهنگی کامل نیروی ریاضی‌دانان و ویژه‌کاران رشته‌های مختلف، می‌تواند به موفقیت در این راه بیانجامد.

در زمینهٔ مدل‌بندی‌های ریاضی، بیش از همه باید به دانش‌هایی توجه کرد که در مورد آن‌ها، تنها مدل‌های ریاضی کلی و مبنائی برای موضوع‌های مورد مطالعه، درست شده است. از این دانش‌ها، مثلاً می‌توان، اقتصاد، زیست‌شناسی، پزشکی، برنامه‌ریزی، جامعه‌شناسی و زبان‌شناسی را بر شمرد.

تدارك درس ریاضی

همکاری ریاضی‌دانانی که در یك دانشکده درس می‌دهند، با کارمندان شاخه‌ای از دانش که به این دانشکده مربوط می‌شود، حتی از نظر مساله‌های روش شناسی هم، اهمیت دارد.

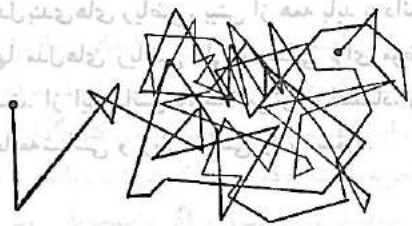
طبیعی است که وقتی ریاضیات را به دانشجویانی یاد می‌دهیم که تخصصی غیر از ریاضیات را برای خود انتخاب کرده‌اند، قبل از همه، باید به فایده‌ای که این

آموزش ریاضی، برای تخصص آیندهٔ آن‌ها دارد، توجه کنیم.

آنچه که در این مورد باید در نظر داشت، عبارتست از: حجم دانش ریاضی و میزان تسلط بر آن‌ها، تا جایی که برای متخصص آینده در رشتهٔ مورد نظر او، لازم است. این موضوع و همچنین مقدار وقتی که باید برای درس ریاضی در نظر گرفت، باید با تبادل نظر متخصصان آن رشته و ریاضی‌دانان، مشترکاً تعیین شود (البته، در تنظیم برنامه ریاضی، باید به این نکته هم توجه کرد که مطالب گسسته نباشد و ارتباط منطقی و درونی آن‌ها، حفظ شود). ولی از این جا به بعد، یعنی تنظیم ردیف برنامه ریاضی و طرح روش آموزش آن را، خود ریاضی‌دانان تهیه خواهند کرد.

در واقع، معمولاً در این مورد، کار خیلی ساده نیست، غالباً، ضمن درست کردن برنامه برای رفع نارسایی‌های ریاضی دانشجویان، متخصصان رشتهٔ خاص آن دانشکده کوشش می کنند در کار مداخله کنند. ولی معمولاً، چنین دخالت‌هایی، به هیچ وجه نمی‌تواند به کارآیی دانشجویان و آمادگی ریاضی آن‌ها، کمك موثری باشد. بررسی‌های من نشان داده است که هر وقت متخصصان غیر ریاضی، کار ریاضی دانشجویان را به دست گرفته‌اند، نتیجهٔ مثبتی به بار نیاورده است، که البته امری طبیعی است.

برای طرح درست آموزش ریاضی، باید بین ریاضی‌دانان و متخصصان تفاهم کامل وجود داشته باشد. هر جا که چنین تفاهمی وجود داشته باشد، موفقیت کار هم حتمی خواهد بود.



باید به آن‌هایی که به خاطر ساده کردن آموزش ریاضیات آموزش آن را بر پایهٔ عدم سخت گیری در استدلال و تنها در سطح «شهودی» توصیه می کنند، یادآوری کرد که شهود، متفق نامطمئنی برای پژوهشگر است. زمانی بود که همهٔ ریاضی‌دانان گمان می کردند که بر منحنی هر تابع پیوسته ای می توان مماس رسم کرد و تنها در اواخر سدهٔ گذشته معلوم شد این تصور نادرست است: نمونه هایی از تابع های پیوسته پیدا شد که حتی بر یك نقطه از منحنی آن‌ها هم، نمی‌شد مماسی رسم کرد. در ابتدا به نظر می‌رسید که این نمونه‌ها، استثناهایی عجیب و غریب‌اند، ولی خیلی زود معلوم شد که این تابع‌ها ارزش عملی فوق العاده ای دارند و به یاری آن‌ها می توان، مثلاً حرکت براونی و دیگر به اصطلاح روندهای تصادفی را شرح داد.

شگفتی‌های عدد

■ **نتیجهٔ جمع برابر است با نتیجهٔ ضرب**

این‌را همه می‌دانیم که ۲ × ۲ = ۲ + ۲، ولی احتمالا با این نمونه‌ها آشنا نباشید:

۱۱ + ۱/۱ = ۱۱ × ۱/۱ = ۱۲/۱

۳ + ۱/۵ = ۳ × ۱/۵ = ۴/۵

۶ + ۱/۲ = ۶ × ۱/۲ = ۷/۲

۲۱ + ۱/۰۵ = ۲۱ × ۱/۰۵ = ۲۲/۰۵

■ **اگر عددهای دو رقمی را به ضرب رقم‌های آن‌ها، تبدیل کنیم، تساوی به‌هم نمی‌خورد.**

۱) $\begin{cases} ۱۹ + ۳۷ = ۵۶ \\ ۱ \times ۹ + ۳ \times ۷ = ۵ \times ۶ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} ۱۸ + ۳۹ = ۵۷ \\ ۱ \times ۸ + ۳ \times ۹ = ۵ \times ۷ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} ۲۹ + ۳۸ = ۶۷ \\ ۲ \times ۹ + ۳ \times ۸ = ۶ \times ۷ \end{cases}$

■ **رقم‌ها درسمت چپ وسمت راست تساوی، یکی است.**

$$۳^۲ + ۲ = ۲^۳ + ۳$$

$$C_۸^۲ = ۲۸$$

$$۱۸۲۷ = ۲۱ \times ۸۷$$

$$۲۱۸۷ = ۲۷ \times ۸۱$$

صفحه ۲۹ را ببینید

دانش ارشمیدس

لایب‌نیتس (Leibniz) دربارهٔ ارشمیدس می‌گوید:

«آنان که به دانش ارشمیدس و آپولونیوس آگاهی دارند، اکتشافات دانشمندان تازه به نظرشان حقیر می‌آید».

این گفته حقیقت است، چون ارشمیدس سر آمد دانشمندان زمان خود بوده است که کاربرد ریاضی را در مکانیك بررسی کرده است. به علاوه آنچه را که نیوتون و همزمان‌های او بعدها کشف کرده‌اند، پیش‌بینی کرده بود.

موضوع انتگرال را مدیون ارشمیدس هستیم. او تجربه و فرضیهٔ انتگرال را تواماً به کار برده است و از آن دستورهائی برای سطح‌ها و حجم‌ها به دست آورده است. در این مختصر مثال‌هائی از آن را بررسی می‌کنیم.

۱ـ دایره: ارشمیدس می‌گوید که دایره‌ها همه متشابه‌اند. لذا نسبت محیط دایره به قطر آن مقداری است ثابت و آن را π می‌گیریم. با استفاده از این مطلب، سطح دایره را با انتگرال محاسبه می‌کنیم.

فرض کنیم که دایرهٔ (o) به مرکز o و شعاع r داده شده است. (شکل ۱). آن را به n پارهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم

و هر قطعه را به S_i $(i=1,2,\dots,n)$

نمایش می‌دهیم. اگر S_i بسیار کوچك باشد، می‌توان گفت که مثلثی به راس o و قاعده S_i داریم که ارتفاع ان برابر r است. بنابراین مساحت این مثلث عبارتست از

$$a_i=\frac{rS_i}{2}$$

از این‌رو مساحت دایره می‌شود

$$A=a_1+a_2+\dots+a_n=\frac{r}{2}(S_1+S_2+\dots+S_n)$$

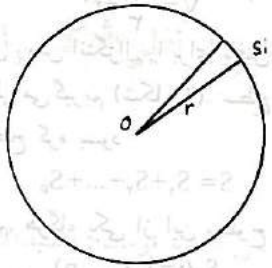
هرگاه n بسیار بزرگ شود، نتیجه می‌گیریم که

$$S_1+S_2+\dots+S_n=2\pi r$$

از این‌رو

$$A=\frac{r}{2}(2\pi r)=\pi r^2$$

(کشف این فرمول در حدود سال ۲۱۲ قبل از میلاد شگفت‌آور است).



شکل ۱

۲ـ استوانه: ارشمیدس با روشی شبیه بخش ۱ دستور حجم استوانه مدور قائم به شعاع r و ارتفاع h را چنین به دست می‌آورد:

$$V=\pi r^2 h$$

جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

اکنون کره‌ای به شعاع r را در نظر می‌گیریم (شکل ۲).

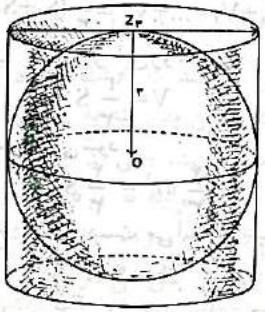
همچنین استوانهٔ مدور قائمی به شعاع r و ارتفاع 2r را در نظر می‌گیریم.

البته می‌دانیم که حجم کره عبارتست از

$$V_1=\frac{4}{3}\pi r^3$$

و حجم استوانه عبارتست از

$$V_2=\pi r^2(2r)=2\pi r^3$$



شکل ۲

ولی ارشمیدس، V_1 را با تجربهٔ مشهور در آب انداختن به دست می‌آورد. سپس متوجه می‌شود که

$$V_1 = \frac{2}{3} V_2$$

از این‌رو نتیجه می‌گیرد که دستور حجم کره عبارت از

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

۳ـ سطح کره: ارشمیدس روش انتگرال را برای یافتن مساحت کره به کار می‌برد. کره‌ای به شعاع r در نظر می‌گیریم (شکل ۳). سطح کره را به n قسمت تقسیم می‌کنیم. به قسمی که سطح کره بشود

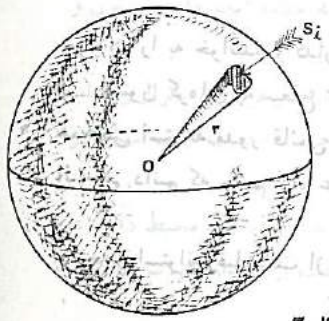
$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

البته n را بزرگ گرفته‌ایم. هرگاه یکی از این سطوح را در نظر بگیریم. مثلاً

$$S_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ملاحظه می‌شود که مخروطی داریم که قاعدهٔ آن S_i و ارتفاع آن r است. حجم این مخروط عبارت است از

$$V_i = \frac{r}{3} S_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$



شکل ۳

در نتیجه حجم کره می‌شود

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \frac{r}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)$$

البته n، عددی بسیار بزرگ است. از این‌رو

$$V = \frac{r}{3} S$$

چون $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ است، نتیجه می‌شود

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} S$$

از این تساوی دستور سطح کره به دست می‌آید که عبارت باشد از

$$S = 4\pi r^2$$

این نتیجه بسیار تعجب‌آور است که سطح کره چهار برابر دایره عظیمه آن باشد.

***

شهریار شهریاری

نگاهی بر نظریهٔ کنترل

مقدمه. این بخش از ریاضی عمدتاً توسط ریاضیدانان اتحادجماهیر شوروی به‌وجود آمده وتعمیم داده شده است. ازاین نظریه امروزه درصنعت وهمچنین برای برنامه‌ریزی اقتصادی استفاده می‌شود. حتی بعضی‌ها امکان استفاده‌اش‌در علوم اجتماعی را می‌دهند. هدف این مقاله آشنا کردن خواننده با مقدمات این نظریه است. کوشش شده است که مطالب به‌زبانی ساده وقابل فهم گفته شود، و ازپرداختن به‌نکات قابل اهمیت ولی نه‌چندان لازم مخصوصاً درقسمت مربوط به‌فرموله کردن این تئوری ازنظر ریاضی پرهیز کرده‌ایم. برای‌روشن شدن مطلب کار را بایك مثال شروع کرده‌ایم وبعد به‌مختصات ریاضی‌تئوری کنترل پرداخته‌ایم. درآخرسر به‌مثال اول برگشته و آن‌را حل کرده‌ایم.

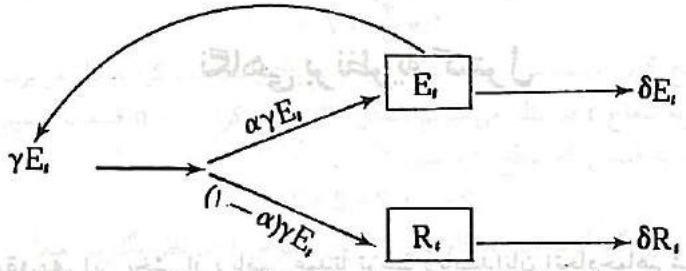
مثال. دولتی می‌خواهد روی تعداد مهندسینش برنامه‌ریزی کند واضح است که تعداد مهندسین شاغل در هرزمان تابعی ازاستادان مهندسی می‌باشد. پس دو متغیر انتخاب می‌کنیم:

$R(t) = t$ تعداد مهندسین مشغول به‌کار در زمان

$E(t) = t$ تعداد استادان مهندسی در زمان

در هرزمان $E(t)$ مشخص می‌کند که دولت چند دانشجوی مهندسی می‌تواند بگیرد. یعنی تعداد دانشجویان پذیرفته به نسبت استادان خواهد بود. فرض می‌کنیم که γ ضریب تناسب است. یعنی در هرزمان t دولت می‌تواند به‌تعداد $\gamma E(t)$ دانشجو بگیرد. حال باتوجه به برنامه‌ریزی دولت، تعدادی از این دانشجویان را تربیت می‌کنیم تا بروند مهندس بشوند، و بقیه را برای استاد مهندسی شدن تربیت می‌کنیم. پس می‌گوییم $\alpha(t)$ درصدی از دانشجویان هستند که ما برای استاد شدن انتخاب کرده‌ایم.

نام $\alpha(t)$ را متغیر کنترل کننده می گذاریم. همچنین درصدی ازاستادان و مهندسین در هرواحد زمان ازسیستم خارج می‌شوند. این می‌تواند به خاطر بازنشستگی ، مرگ و غیره باشد . مقدار این درصدرا با δ نشان می‌دهیم . رویهمرفته مدل بالارا می‌شود به‌صورت زیر نشان داد:



هدف ما اینست که باانتخاب صحیح متغیر کنترل کننده، $\alpha(t)$ ، در کوتاهترین مدت به تعدادی مشخص مهندس شاغل R_T و استاد مهندسی E_T برسیم. یعنی مثلا فعلا در کشور ۱۰۰۰ مهندس شاغل و ۱۰۰ استاد مهندسی است و ما می‌خواهیم درکمترین مدت ۲۰۰۰ مهندس شاغل و ۴۰۰ استاد مهندسی‌داشته باشیم. توجه داشته‌باشید که به‌خاطر محدودیتهای امکانات تغییرات $\alpha(t)$ شاید حدودی داشته باشد. مثلا $0<\alpha_0\leqslant\alpha(t)\leqslant\alpha_1<1$ یعنی‌مثلا بخاطر کمبود وسایل آزمایشگاهی نمی‌توانیم همهٔ دانشجویان را برای مهندس شدن تربیت کنیم ویا ازاین قبیل، باتوجه به مدل بالا تغییرات دو متغیر $E(t)$ و $R(t)$ را می‌شود با دومعادلهٔ دیفرانسیال نشان داد:

$$\begin{cases}\dfrac{dR}{dt}=[1-\alpha(t)]\gamma E_t-\delta R_t\\[2mm] \dfrac{dE}{dt}=\alpha\gamma E_t-\delta E_t\end{cases}$$

یعنی‌مثلا تعداد استادان مهندسی درواحد زمان به‌اندازهٔ $\alpha\gamma E_t$ زیاد می‌شود و به‌اندازهٔ δE_t کم می‌شود.

این صورت مساله، حال به بررسی ریاضی تئوری کنترل می‌پردازیم، وبعد مثال بالارا حل می کنیم.

نظریهٔ کنترل به‌طور انتزاعی ازنظر ریاضی

۱. سیستمی رادرنظر می گیریم که وضع آن در هرزمان توسط یك بردار

موقعیت n بعدی مشخص شده باشد.

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$$

x فضای برداری است که از تغییر متغیرها درزمان به‌دست می‌آید.

۲. حرکت سیستم را می‌توان توسط یك‌بردار کنترل‌کننده کنترل کرد

$$u=(u_1,u_2,\dots,u_r)\in u$$

u را منطقهٔ کنترل گوئیم.

چون در زمانهای مختلف می‌توانیم بردار کنترل کنندهٔ متفاوتی داشته باشیم، کنترل کننده را به‌صورت تابعی از زمان می‌نویسیم:

$$u(t)=(u_1(t),u_2(t),\dots,u_r(t))$$

کنترلهایی قابل قبولند که در هر زمان $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ تصویر در u باشد. t_0 زمان شروع حرکت سیستم و t_1 زمان پایان حرکت سیستم می‌باشد . منطقهٔ کنترل، u ، را منطقه‌ای بسته ومحدود می گیریم وکنترلهایی را قبول می کنیم که فقط تعدادی محدود ناپیوستگی ازنوع اول داشته باشند.

۳. فرض می کنیم که قانون حرکت این سیستم‌را می‌شود به‌صورت یك سیستم معادلات دیفرانسیال نوشت:

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_r)$$
$$=f_i(x_1,u)\qquad i=1,2,\dots,n$$

فرض می کنیم f_i و $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ هردو روی $x\times u$ تعریف شده وپیوسته اند. توجه: دراینجا f_i توابعی از t نمی‌باشند.

۴. فرض می کنیم که اگر یك کنترل قابل قبول $u(t)$ را انتخاب کنیم، آنوقت بااستفاده از $\dfrac{dx_i}{dt}=f_i$ وشرایط اولیه $x_i(t_0)=a_{i_0}$ می‌توانیم مسیر حرکت سیستم‌را به‌طور یگانه مشخص کنیم. این‌بدین معنی است که معادلات دیفرانسیال بالا برای‌زمان موردنظر دارای جواب می‌باشند، وهمچنین‌فاکتور-های غیرقابل پیش‌بینی درمدل ماوجود ندارد.

حال، درفضای X دونقطهٔ a_0 و a_1 داده شده‌اند. a_0 نقطهٔ اولیه یانقطهٔ شروع است و a_1 نقطه‌ای است که می‌خواهیم به‌آن برسیم. بین کنترلهای‌قابل قبول $u(t)$ تعدادی ازآنها هستند که اگر آنهارا انتخاب کنیم، مسیر حرکت از a_0 به a_1 خواهد بود (یعنی $x(t_0)=a_0$ و $x(t_1)=a_1$). حال بین‌این

کنترلها آن‌را انتخاب کنیم که برای آن

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t))dt$$

حداقل مقدار ممکن باشد. همچنین کنترلی اگروجود داشته‌باشد بهترین‌کنترل خوانده می‌شود.

امکان استفاده ازاین نظریه

شرایطی‌را که دربالا آوردیم، سیستمی را مشخص می کندکه برای آن می‌توانیم ازنظریهٔ کنترل استفاده کنیم. ببینیم که آیا مثال ماقابل تطبیق بااین شرایط می‌باشد؟

۱. بردار موقعیت‌عبارتست از $x=(R_t, E_t)$ و در هرزمان این‌بردار وضع سیستم را برای ما مشخص می کند.

۲. بردار کنترل کننده برداری یك‌بعدی است $u(t)=\alpha(t)$ و منطقهٔ کنترل عبارتست از $u=[\alpha_0, \alpha_1]$.

۳. حرکت سیستم به‌وسیلهٔ دومعادلهٔ دیفرانسیال تعیین می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{dR}{dt}=f_1=[1-\alpha(t)]\gamma E_t-\delta R_t \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{dE}{dt}=f_2=\alpha\gamma E_t-\delta E_t \end{cases}$$

۴. نقطهٔ‌شروع (R_0, E_0) ونقطهٔ پایانی (R_T, E_T) است، یعنی‌تعداد مهندسین شاغل ومربی درشروع برنامه به ترتیب R_0 و E_0 می‌باشد و هدف ما رسیدن به‌تعداد R_T و E_T می‌باشد.

همچنین $f_0(x(t), u(t))=1$ است که درنتیجه

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t))dt=t_1-t_0$$

یعنی به‌حداقل رساندن J همان رسیدن به‌هدف درکوتاهترین مدت می‌باشد.

توجه داشته باشید که مدل مثال ما مدلی نسبتاً ساده است ، و می‌شود آنرا پیچیده‌ترکرده وعوامل دیگری راهم دخالت داد. یکی ازتغییراتی راکه می‌شود داد تغییر هدف است بدین معنی که شاید رسیدن به تعداد معینی در کوتاهترین مدت هدف ما نباشد و به‌جای آن بخواهیم درمدت رسیدن‌به‌هدف

از کمترین تعداد استاد استفاده کرده باشیم، که دراینصورت : $f_0(x(t), u(t))=E_t$ می‌گیریم ، تا $J=\int_{t_0}^{t_1} E_t dt$ را حداقل مقدار ممکن بکنیم.

از تئوری کنترل درصنایع هم می‌شود استفاده کرد مثلا در کارخانه‌ای عوامل متعددی مانند درجهٔ حرارت ویا سرعت فلان ماشین در میزان تولید دخالت دارند. کنترلهائی هم‌ازنوع مقدار بنزین وارده ویا درجهٔ سرعت‌فلان ماشین دراختیار ما هست. میزان تولید وابسته به‌این عوامل و کنترلها است، و تغییرات آن نسبت به تغییرات فاکتورهای مختلف را می‌شود با معادلات دیفرانسیال نشان داد. به‌وسیلهٔ تئوری کنترل می‌توانیم حرکت سیستم‌راطوری کنترل کنیم تا به‌هدف معینی ازتولید درکوتاهترین مدت، ویا باصرف کمترین مقدار انرژی (نفت، گاز، برق وغیره) برسیم.

همچنین دراقتصاد یکی سری متغیرها مانند تورم، مقدار بیکاری، تولید ناخالص ملی، و غیره وضع اقتصاد را نشان می‌دهد. ازطرفی کنترلهایی از نوع مقدار سرمایه‌گذاری درصنایع مختلف، نرخ بهره، و غیره در اختیار ماست. تئوری کنترل می‌تواند برای رسیدن به‌هدفهای اقتصادی درکوتاهترین مدت به ما کمك کند. البته دراقتصاد وعلوم اجتماعی به‌خاطروجود فاکتورهای بسیار متعدد ودر بسیاری موارد غیرقابل پیش‌بینی از نظریهٔ کنترل فقط به‌طور تقریبی می‌شود استفاده کرد.

هم‌اکنون در اتحاد شوروی برای برنامه‌ریزی اقتصادی، و دربسیاری جاها برای برنامه‌ریزی در صنایع ازاین تئوری استفاده می‌شود.

روش‌حل:

اول یك‌متغیر جدید x_0 به‌بردار موقعیت اضافه می کنیم، تغییرات این متغیر جدید بامعادلهٔ دیفرانسیل زیر مشخص می‌شود:

$$\frac{dx_0}{dt}=f_0(x, u)$$

ودرنقطهٔ شروع $x_0=0$ می گیریم.

وتوجه‌کنید که $x_0=\int_{t_0}^{t} f_0(x, u)dt'$ ودرنتیجه در زمان t_1 داریم $x_0=J$

بدین ترتیب ما به‌نحوی اطلاعات مربوطه به J راهم وارد بردار موقعیت و معادلات دیفرانسیال مربوطه‌اش کرده‌ایم.

پس حال داریم:

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt}=f_i(x,u)\quad i=0,1,2,\dots,n$$

متغیرهای کمکی ψ_0 ، ψ_1 ، ... ، ψ_n را توسط معادلات زیر تعریف می‌کنیم:

$$(2)\qquad \frac{d\psi_i}{dt}=-\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial f_\alpha(x,u)}{\partial x_i}\psi_\alpha\quad i=0,1,\dots,n$$

اگر ما کنترل قابل‌قبول $u(t)$ را انتخاب کنیم و مسیر حرکت سیستم را پیدا کنیم آنگاه معادلات (۲) دارای جوابی یگانه می‌باشند.

حال تابع هامیلتونیان H را تعریف می‌کنیم:

$$H(\psi,x,u)=\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha f_\alpha(x,u)$$

توجه داشته باشید که سیستمهای معادلات (۱) و (۲) را می‌شود از روی هامیلتونیان به دست آورد:

$$(3)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \psi_i}\quad i=0,1,\dots,n$$

$$(4)\qquad \frac{d\psi_i}{dt}=\frac{-\partial H}{\partial x_i}\quad i=0,1,\dots,n$$

این تابع هامیلتونیان تمام اطلاعاتی را که ما درمورد سیستم داریم درخود جمع کرده است. قضیهٔ زیر که توسط پونتریاگن (Pontryagin) ریاضیدان مشهور اتحادشوروی ثابت‌شده است، نقطهٔ اوج نظریهٔ کنترل می‌باشد، چراکه راه‌حلی بسیار عملی برای پیداکردن بهترین کنترل به‌ما نشان می‌دهد.

قضیه (اصل ماکزیمم): کنترل قابل‌قبول $u(t)$ به‌شرطی بهترین کنترل است که بشود بادانستن $u(t)$ ، تابع‌برداری پیوسته غیرصفر $\psi(t)$ را به‌دست آورد $\psi(t)$ ، $x(t)$ ، و $u(t)$ باید در معادلات (۳) و (۴) صدق کنند) به‌نحوی که:

در هرزمان $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ تابع H به‌عنوان تابعی از متغیر u (یعنی برای مقادیر ثابت ψ ، x) ماکزیمم باشد. یعنی ψ ، x را ثابت نگه‌می‌داریم ، u را چنان تعیین می‌کنیم که H ماکزیمم شود.

حال از این‌قضیه استفاده کرده، ودومثال از تئوری کنترل حل‌می‌کنیم. مثال‌دوم همانست که صورتش را دراول مقاله‌دیدید.

مثال ۱: متحرکی را درنظر بگیرید که روی محور مختصات در حال حرکت است. در زمان شروع این متحرک در نقطه‌ای به‌طول x_0 می‌باشد و مقدار سرعتش نیز مشخص است. شتاب این متحرک بین ۱ − و ۱ + قابل تغییر، و در اختیار ماست. یعنی شتابش را ما تعیین می‌کنیم. می‌خواهیم شتابش را به‌عنوان تابعی از زمان طوری تعیین کنیم، که در کوتاهترین مدت متحرک مفروض‌هم به‌مبداء مختصات برسد وهم سرعتش صفر شود.

حل: دو متغیر x_1 و x_2 وضع متحرک را مشخص می‌کنند:

$x_1=x$ فاصلهٔ‌جبری از مبدأ مختصات در زمان t

$x_2=\frac{dx}{dt}$ سرعت در زمان t

پس بردار موقعیت عبارتست از (x_1,x_2)

$\frac{d^2x}{dt^2}=u\quad |u|\leqslant 1$ کنترل ما عبارتست از شتاب یعنی

حرکت سیستم به‌وسیلهٔ دومعادلهٔ دیفرانسیل زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=u\end{cases}$$

ما زمان شروع x_1 و x_2 را می‌دانیم، می‌خواهیم تابع $u(t)$ را چنان تعیین کنیم که در کوتاهترین مدت $x_1=x_2=0$. چون گفته‌ایم در کوتاه‌ترین مدت پس $f_0=1$ است تا $J=t_1-t_0$ باشد. حال به‌حل مساله می‌پردازیم:

$$H=\psi_1f_1+\psi_2f_2=\psi_1x_2+\psi_2u$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi_1}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=0\\[2mm] \dfrac{d\psi_2}{dt}=\dfrac{-\partial H}{\partial x_2}=-\psi_1\end{cases}$$

حال

$$\frac{d\psi_1}{dt}=0\Rightarrow\psi_1=c_1$$

$$\frac{d\psi_2}{dt}=-\psi_1=-c_1\Rightarrow\psi_2=-c_1t+c_2$$

پس $H = c_1 x_2 + (c_2 - c_1 t)u$

ψ و x را ثابت نگه می‌داریم و u را چنان تعیین می‌کنیم که H ماکزیمم شود. واضح است که اگر $c_2 - c_1 t$ مثبت باشد u باید بیشترین مقدار ممکن و اگر $c_2 - c_1 t$ منفی باشد u باید کمترین مقدار ممکن را داشته باشد پس

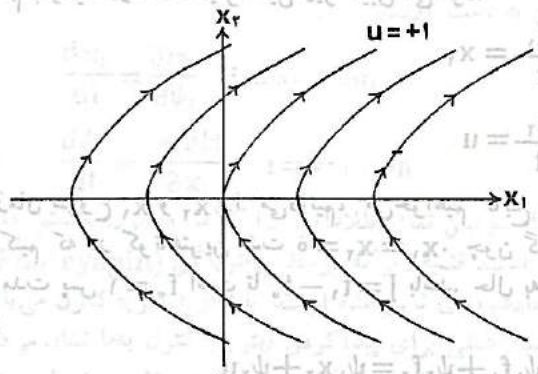
$$ut = \begin{cases} +1 & \text{اگر } c_2 - c_1 t > 0 \\ -1 & \text{اگر } c_2 - c_1 t < 0 \end{cases}$$

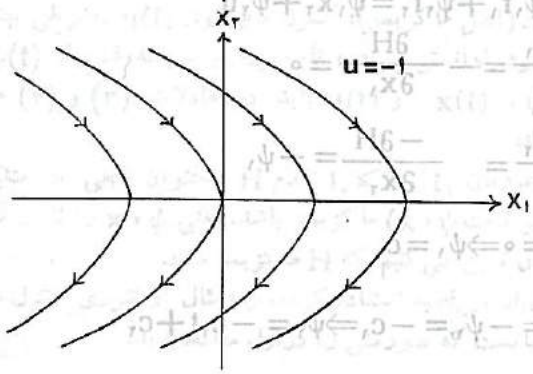
پس u یا $+1$ و یا -1 می‌باشد.

$$u = +1 \Rightarrow x_2 = t + s_2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(t + s_2)^2 + s$$

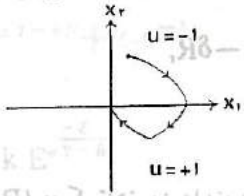
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + s$$

$$u = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + s'$$

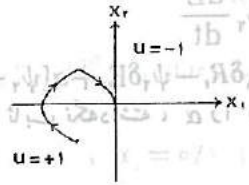




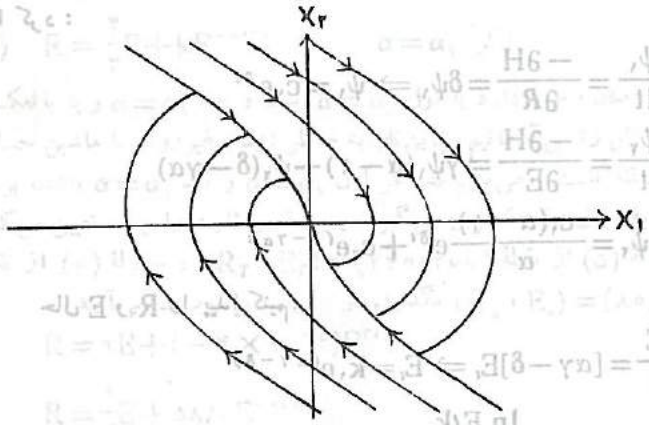
پس نسبت به اینکه در زمان شروع x_1 و x_2 چه بوده‌اند یا اول به مدتی $u = -1$ و بعد $u = +1$ باید باشد و یا برعکس. مثلا اگر درزمان شروع x_1 و x_2 هردو منفی باشند، مسیر حرکتی مطابق شکل خواهند داشت:



و اگر x_1 و x_2 هردو مثبت باشند مسیری این چنین خواهند داشت:



به‌طور کلی مسیرهائی راکه ما را به‌هدف در کوتاهترین‌مدت می‌رساند را می‌شود در شکل زیر نشان داد:



برای شیارهای رو به بالا $u = +1$ و برای شیارهای رو به پائین $u = -1$ است.

مثال ۲. صورت این مثال در اول مقاله آورده شده است اینجا به حل آن می‌پردازیم :

$$x_1 = R_t \qquad x_2 = E_t \qquad \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$$

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = [1-\alpha(t)]\gamma E_t - \delta R_t \\ \dfrac{dE}{dt} = [\alpha\gamma - \delta]E_t \end{cases}$$

هدف: به نقطهٔ (R_T , E_T) در کوتاهترین مدت برسیم:

$$H = \psi_1 \frac{dR}{dt} + \psi_2 \frac{dE}{dt}$$

$$H = \psi_1 \gamma E_t - \psi_1 \delta R_t - \psi_2 \delta E_t + \alpha[\psi_2 - \psi_1]\gamma E_t$$

ψ_1 و ψ_2 ، E_t و R_t را ثابت نگه‌داشته ، α را طوری پیدا می‌کنیم که H ماکزیمم شود. پس

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_0 & \text{اگر } \psi_1 > \psi_2 \\ \alpha_1 & \text{اگر } \psi_1 < \psi_2 \end{cases}$$

واضح است که ψ_1 و ψ_2 را می‌شود از روی معادلات دیفرانسیال مربوطه پیدا کرد :

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial R} = \delta\psi_1 \Rightarrow \psi_1 = c_1 e^{\delta t}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial E} = \gamma\psi_1(\alpha - 1) + \psi_2(\delta - \gamma\alpha)$$

$$\Rightarrow \psi_2 = \frac{c_1(\alpha-1)}{\alpha} e^{\delta t} + c_2 e^{(\delta - \gamma\alpha)t}$$

حال E و R را پیدا کنیم:

$$\frac{dE}{dt} = [\alpha\gamma - \delta]E_t \Rightarrow E_t = k_1 e^{(\alpha\gamma - \delta)t}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln E/k_1}{\alpha\gamma - \delta}$$

$$\frac{dR}{dt} = (1-\alpha)\gamma k_1 e^{(\alpha\gamma - \delta)t} - \delta R$$

$$\Rightarrow e^{\delta t} dR + e^{\delta t}\delta R dt = (1-\alpha)\gamma k_1 e^{\alpha\gamma t}$$

$$\Rightarrow d(e^{\delta t} R) = d\left(\frac{(1-\alpha)\gamma k_1 e^{\alpha\gamma t}}{\alpha\gamma}\right)$$

$$R_t = \frac{1-\alpha}{\alpha} k_1 e^{(\alpha\gamma - \delta)t} + k_2 e^{-\delta t}$$

پس

$$R_t = \frac{1-\alpha}{\alpha} E_t + k\, E^{\frac{-\delta}{\alpha\gamma - \delta}}$$

که در آن

$$k = \frac{k_2}{(k_1)^{\frac{-\delta}{\alpha\gamma - \delta}}}$$

حال به‌جای مقادیر ثابت اعدادی می‌گذاریم تا ببینیم جواب به‌چه‌صورت درمی‌آید :

$$\gamma = 0/14 \; ; \; \delta = 0/02 \; ; \; \alpha_0 = 0/1 \; ; \; \alpha_1 = 0/6$$

$$\begin{cases} R_0 = 80 \\ E_0 = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_T = 240 \\ E_T = 200 \end{cases}$$

$$(5) \quad R = 9E + kE^{3/3} \qquad \alpha = \alpha_0 \text{ اگر}$$

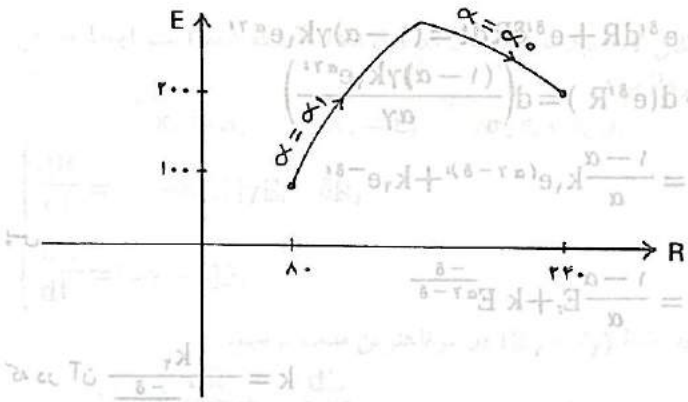
$$(6) \quad R = \frac{2}{3}E + kE^{-0/31} \qquad \alpha = \alpha_1 \text{ اگر}$$

حال دو امکان وجود دارد یا اول $\alpha = \alpha_0$ است و بعد $\alpha = \alpha_1$ و یا بالعکس. هر دو امکان را می‌آزمائیم (این‌کار به خاطر اعداد غیرروند با ماشین حساب انجام گرفته است) ومی‌بینیم که اگر اول $\alpha = \alpha_1$ و بعد $\alpha = \alpha_0$ باشد، برای رسیدن به هدف وقت کمتری می‌گیرد. پس مقادیر ثابت را چنان تعیین می‌کنیم که معادلهٔ (۵) از نقطهٔ $(R_T , E_T) = (240/200)$ و معادلهٔ (۶) از نقطهٔ $(R_0 , E_0) = (80/100)$ بگذرد. دو معادلهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$R = 9E + (-4 \times 10^{-5})E^{3/3}$$

$$R = \frac{2}{3}E + 58/3E^{-0/31}$$

اگر آنها را رسم کنیم به تقریب چنین بدست می‌آید :



با تعیین نقطهٔ برخورد دو منحنی معلوم می‌شود که باید برای ۱۱/۲ سال اول $\alpha = ۰/۶$ و برای ۴ سال بعد $\alpha = ۰/۱$ باشد. یعنی اول تمام نیرو متوجه تربیت استادان مهندسی شود، و بعد به یکدفعه نیرو را متوجه تربیت مهندسین شاغل کنیم.

برای اطلاعات بیشتر به منابع زیر مراجعه کنید.

Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko *The Mathematical theory of Optimal Processes* NewYork. Interscience, 1962 Young, L. C., *Loctures on the, Calculus of Variations and Optimal Control theory*, Philadelphia: Saunders / 1969

■ **عدد برابر است بامجموع فاکتوریل‌های رقم‌های آن**

(درمبنای ۱۰) ۱۴۵ = ۱! + ۴! + ۵!

(درمبنای ۵) ۱۲۴ = ۱! + ۲! + ۴!

■ **باهمان رقم‌ها**

۶ × ۵۵ + ۶۵ × ۵ = ۶۵۵

۱ × ۲۵۸ + ۱۲۵ × ۸ = ۱۲۵۸

۶ × ۲۰۸ + ۶۲۵ × ۸ = ۶۲۰۸

*

۱۳ × ۵۲ + ۱۳ × ۵۲ = ۱۳۵۲

*

۲ × ۴ + ۲ × ۴ + ۲ × ۴ = ۲۴

۱۷ × ۳۴ + ۱۷ × ۳۴ + ۱۷ × ۳۴ = ۱۷۳۴

۱۶۷ × ۳۳۴ + ۱۶۷ × ۳۳۴ + ۱۶۷ × ۳۳۴ = ۱۶۷۳۳۴

*

۶۳۹ = ۶ × ۳۹ + ۶۳ × ۹ − ۶ × ۳ × ۹

۶۸۸ = ۶ × ۸۸ + ۶۸ × ۸ − ۶ × ۸ × ۸

۳۶۹ = ۳ × ۶۹ + ۳۶ × ۹ − ۳ × ۶ × ۹

■ **پایه برابر است بامجموع رقم‌های حاصل**

۵ + ۱ + ۲ = ۸ ، $۸^۳ = ۵۱۲$

۴ + ۹ + ۱ + ۳ = ۱۷ ، $۱۷^۳ = ۴۹۱۳$

۵ + ۸ + ۳ + ۲ = ۱۸ ، $۱۸^۳ = ۵۸۳۲$

۱ + ۷ + ۵ + ۷ + ۶ = ۲۶ ، $۲۶^۳ = ۱۷۵۷۶$

۱ + ۹ + ۶ + ۸ + ۳ = ۲۷ ، $۲۷^۳ = ۱۹۶۸۳$

■ **واین شباهت‌های جالب**

$۴۵^۲ = ۲۰۲۵$ ، ۲۰ + ۲۵ = ۴۵

$۵۵^۲ = ۳۰۲۵$ ، ۳۰ + ۲۵ = ۵۵

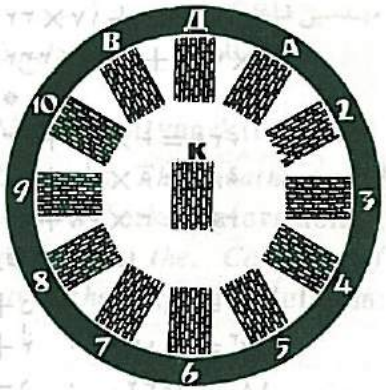
$۲۹۷^۲ = ۸۸۲۰۹$ ، ۸۸ + ۲۰۹ = ۲۹۷

***

ساعت

این یك فال ورق ساده قدیمی است که به عنوان نمونه در اولین ردیف از سلسله جدیدترین کتاب‌ها با نام «مهارت برنامه‌ریزی برای ماشین‌های حساب الکترونی» قرار گرفته است.

یك دسته ورق ۵۲ تائی را به سیزده گروه چهار ورقی تقسیم می‌کنیم و همه را رو به پایین در یك دایره می‌چینیم (به شکل ۱ نگاه کنید). این دایره به جای صفر ساعت در نظر گرفته می‌شود و هر گروه از ورق‌ها نسبت به عددی که جلو آن قرار دارد، به این ترتیب نام‌گذاری می‌شوند: ساعت ۱ـ آس (A)، ساعت ۲ـ دولو، ساعت ۳ـ سه‌لو و به همین ترتیب ساعت ۱۰ـ ده‌لو نامیده می‌شوند. گروهی که جلو عدد ۱۱ قرار دارد ـ گروه سرباز، و گروه ۱۲ـ بی‌بی نام می‌گیرند. گروه سیزدهم که در مرکز دایره قرار می‌گیرد ـ گروه شاه خواهد بود.



بازی را از مرکز شروع می‌کنند. ورق بالائی گروه سیزدهم را برداشته و رو می‌کنند و آن را به همان صورت در زیر گروهی که جای آن، با این ورق مطابقت دارد، قرار می‌دهند. مثلاً اگر این ورق هفت لو بود، آن را رو به بالا در زیر ورق‌های گروهی که در جلو عدد هفت قرار دارد می‌گذارند. اگر بی‌بی بود، زیر گروه ساعت ۱۲ و همین‌طور تا آخر. بعد ورق بالائی گروهی که هم اکنون ورق رو شده از مرکز، در زیر آن قرار گرفت، رو می‌شود و آن را هم در زیر گروهی که با آن مطابقت دارد، قرار می‌دهند. از گروه جدید نیز ورق بالائی را برداشته و رو می‌کنند و بازی به‌همین

ترتیب ادامه پیدا می‌کند.

اگر ورقی را رو کردید که با گروه خودش، یعنی گروهی که از آن برداشته شده مطابقت داشت، آن را به‌ترتیب قبلی زیر گروه خودش گذاشته ورق دیگری از همین گروه را بردارید. اگر ورقی را در زیر گروهی قرار دادید که در آن گروه دیگر ورق بازی، یعنی ورقی که روی آن به طرف پایین باشد وجود نداشت (تمام ورق‌های گروهی که با ورق دست شما مطابقت دارد، رو به بالا بودند)، آن‌وقت ورقی از گروه بعدی که در جهت گردش عقربه‌های ساعت قرار دارد، بردارید. فال وقتی خوب حساب می‌شود که همه ۵۲ ورق رو به بالا قرار گیرند. ورق آخری یعنی ورق پنجاه‌ـ و دوم باید شاه باشد. ولی اگر شما قبل از پایان فال، شاه چهارم را رو کردید، ورق‌ـ گذاری ادامه پیدا نمی‌کند و فال، بد محسوب می‌شود.

تقسیم‌بندی فال «ساعت، روندی صرفا» مکانیکی است که احتیاج به هیچ‌گونه مهارتی ندارد و فقط نیازمند دقت است. احتمال این که فال خوب درآید، دقیقاً برابر با $\frac{1}{13}$ است و بالاخره تعداد متوسط ورق‌هائی که در جریان بازی رو به بالا قرار می‌گیرند، $\frac{42}{4}$ است. حساب کردن این موضوع ساده است، اما در این فال چیز عجیب دیگری وجود دارد که طی ده‌ها سال به چشم نخورده بود.

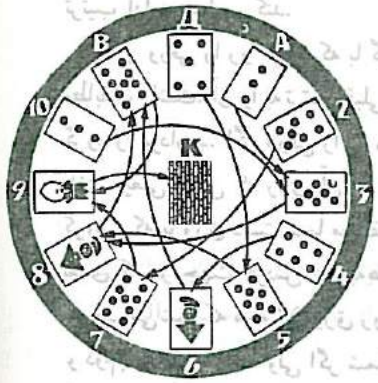
دونالدکنات، ریاضی‌دان دانشگاه کالیفرنیا و مؤلف کتاب «آلگوریتم‌های اساسی»، از میان رشته‌های یاد شدهٔ بالا، توجه خود را به این مطلب معطوف داشت که در این فال ورق، خیلی ساده و از قبل می‌شود فهمید که فال جواب خواهد داد، یا نه. ظاهر این امر فقط به طرز قرار گرفتن دوازده ورق زیرین در روی دایرهٔ ساعت بستگی دارد و اصلاً به تقسیم‌بندی چهل ورق بقیه (منجمله گروه شاه) مربوط نمی‌شود.

بیائید این موضوع را امتحان کنیم. ورق‌ها را روی دایره ساعت مطابق شکل ۲ بچینید. حالا آن‌ها را رو به پایین قرار دهید و به هر کدام به دلخواه ۳ ورق اضافه کنید و در مرکز هم چهار ورق بگذارید. فال باید حتما جواب خوب بدهد.

دونالدکنات اطمینان می‌دهد که جور آمدن فال را می‌توان با ساختن نمودار نوع «درخت» امتحان کرد ـ همان نموداری که ریاضی‌دانان نیز، آن را در زمینه‌های گوناگونی چون ساختمان‌های ماده، شبکه‌های برق، نظریهٔ احتمال، تطور بیولوژیکی، مطالعه جراحی‌ها و اشکال دیگر مساله‌های ترکیبی به‌کار می‌برند.

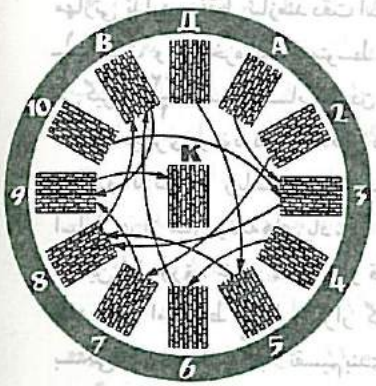
واقع همین است. به شکل شماره ۲ مراجعه می‌کنیم و چگونگی توزیع ورق‌هائی را که در جاهای خود قرار دارند، با پیکان نشان می‌دهیم. به این ترتیب که از پنج لو که

مسالهٔ ۱



شکل ۲

مسالهٔ ۲



شکل ۳

مسالهٔ ۳

شکل ۴

در جای بی بی قرار دارد (ساعت ۱۲)، باید پیکانی را به طرف عدد ۵ صفحهٔ ساعت کشید و از عدد ۵ (درآن‌جاهشت لو قرار دارد)، پیکانی به طرف عدد ۸ رسم کرد و همین طور ادامه داد. آخر کار تصویری که در شکلهای ۲ و ۳ نشان داده شده است، به‌دست خواهد آمد.

شکل ۳ را به صورت درخت (شکل ۴) که در آن تمام رابطه‌ها و جابه‌جایی ورق‌های زیرین صفحهٔ ساعت نمایان است، درمی‌آوریم.

در این حال اگر تمام ۱۳ گروه تشکیل یك درخت دادند، فال خوب درآمده است. و اگر شکلی با شاخه‌های جدا از هم درست شد، جواب فال خوب نیست.

شما می‌توانید با تشکیل دادن درخت برای سه تقسیم‌بندی ارائه شده ورق‌های زیرین فال، و بعد با امتحان کردن حدس‌های خود از طریق فال‌های مساله‌های ۱ و ۲ و ۳، از این موضوع مطمئن شوید.

اگر دو تکه کوچك اسفنج به دو انتهای چوب‌رختی بچسبانید، بانوی خانه را از خودتان متشکر کرده‌اید. او دیگر از شر «لوس بازی» لباس‌ها (به خصوص، اگر ابریشمی باشند)، که دوست دارند مرتباً از چوب‌رختی بلغزند و به روی کف کمد بیفتند، در امان است.

لئون سه مه‌نوویچ فریمان
ترجمهٔ پرویز شهریاری

آفرینندگان ریاضیات عالی (۵)

روبروال

ژیل پرسون (فامیل واقعی روبروال، ژیل‌پرسون بود)، در حوالی «بووه» در ۶۰ـ۷۰ کیلومتری شمال پاریس، در ۸ اوت سال ۱۶۰۲، به دنیا آمد. پدر و مادر او، کشاورزان ساده‌ای بودند، ولی قادر بودند امکان تحصیل فرزند خود را فراهم کنند، چیزی که در آن زمان، خیلی مهم بود. ولی، او، این آموزش را پیش خود ادامه داد. در جوانی، خانهٔ پدر و مادری خود را، برای سفر و سیاحت در فرانسه، ترك کرد. مسیر مسافرت او معلوم نیست، ولی آنچه مسلم است در تولوز بوده و در آن‌جا با فرما آشنا شده است. او با قبول گاه‌به‌گاه معلمی سرخانه، زندگی خود را می‌گذراند. هیچ فرصتی را، برای تکمیل تحصیل خود از دست نمی‌داد، طوری که به بیان خودش، مسافرت می‌کرد و یاد می‌داد و یاد می‌گرفت[1]. به‌علت نامعلومی گذارش به دیوارهای «لاروشه‌لی» افتاد و در محاصرهٔ مشهور این قلعه شرکت داشت. این، در سال ۱۶۲۷ بود که ریشه لیوی مقتدر تصمیم گرفته بود هواداران کالون و پروتستان‌ها را قلع و قمع کند و برای آغاز کار، تصرف «لاروشه‌لی» پناه‌گاه و تکیه‌گاه اصلی آن‌ها را طرح ریخت. ولی پرسون جوان، خیلی در «لاروشه‌لی» معطل نشد و ما او را در تابستان سال بعد، دوباره در پاریس می‌بینیم. رفتن او به پاریس، تصادفی نبود. مرد جوان، به این علت، پاریس را انتخاب کرد که، همان‌طورکه چندی بعد برای توریچلی نوشت: «این شهر عظیم، برای طایفهٔ دانشمندان، جای بی‌نظیری است».

پرسون، حرفهٔ دانش را انتخاب کرد. بعد از ورود به پاریس، خیلی زود با مرسن آشنا شد و با پشت‌کار در جلسه‌های گروه او شرکت کرد. این مرسن و گروه او چه

1- discendo docendopue

بود؟ برای این که نقش این گروه را در تاریخ دانش، درست ارزیابی کنیم، باید وضع علوم طبیعی را در اروپا، در نیمهٔ اول سدهٔ هفدهم، به‌خاطر آوریم. اگر از آکادمی‌های خصوصی کم نیرو و بی‌دوام ایتالیا بگذریم، هیچ سازمان علمی وجود نداشت. شاید گمان رود که دانشگاه‌ها، مرکزی برای دانش بود، ولی، دانشگاه‌ها در این سال‌ها، زیر سلطهٔ اسکولاستیك قرون وسطایی قرار داشت. دانشمندان با تخصص‌های مختلف، واحدهایی به‌حساب می‌آمدند که کار سازمان‌های علمی را انجام می‌دادند. در جریان ۴۰ـ۵۰ سال، وضع به‌کلی تغییر کرد در بسیاری از کشورها، مثل انگلستان، فرانسه و پروس، آکادمی‌هایی به‌وجود آمد. برای سازمان دادن این آکادمی‌ها، از گروه‌های خصوصی استفاده شد که برای بحث دربارهٔ کار هم قطاران خود، مبادلهٔ آگاهی‌ها و غیر آن، دور هم جمع می‌شدند. یکی از این گروه‌ها، گروه مرسن بود. مرسن، که در فرقهٔ فرانسیسکان به مقام رسمی رهبانیت رسیده بود، عاشق پرشور علوم دقیقه و سازمان دهنده‌ای فوق‌العاده بود: او می‌توانست افراد با استعداد را دور خودش جمع کند و توانایی این را داشت که در میان سیلاب کارها و کشف‌ها، آن‌هایی را که به خصوص برای پیشرفت آیندهٔ دانش، اهمیت داشت، جدا کند. از سال ۱۶۲۵، در دیر فرقهٔ فرانسیسکان، که محل زندگی او بود، گروه دوستان دانشمند، مرتباً جمع می‌شدند. ژیل‌پرسون هم، عضو این گروه شد. استعداد درخشان و دانش عمیق این آشنای تازه، مرسن را به طرف او جلب کرد و با وجود اختلاف سن (مرسن ۱۴ سال از پرسون بزرگتر بود)، آشنایی آن‌ها به دوستی تبدیل شد، و این دوستی تا روز مرگ مرسن (۱۶۴۸) ادامه داشت. پرسون در گروه مرسن با بسیاری از ریاضی‌دانان و فیزیك‌دانان مشهور آشنا شد. و به این ترتیب، او به گروه‌های علمی پاریس راه یافت و بدون هیچ زحمتی، یك کرسی در کالج «مترژروه» به‌دست آورد. این کالج قدیمی، اگر به زبان امروز صحبت کنیم، جنبهٔ اخترشناسی داشت و به‌همین دلیل، ریاضیات از پایه‌های کار آن به‌شمار می‌رفت. پرسون، در سال ۱۶۳۴، کرسی دومی در یك کالج بهتر در «کولج‌دوفرانس» به‌دست آورد. در همین دوره است که نام خانوادگی «پرسون» تقریباً فراموش شد. صاحب آن، از نام «روبروال» استفاده کرد که نام آبادی محل زندگی پدر و مادرش بود، و برای این که اهمیت بیشتری به آن بدهد، جزء «de» را هم به آن اضافه کرد. به‌این ترتیب، نام این دانشمند «روبروال» شد که در تاریخ دانش هم، به‌همین شکل باقی ماند. همان‌طور که خواهیم دید، روبروال، دانشمند بزرگی بود، که نام او بیش از سیصد سالی که از مرگ او می‌گذرد، با افتخار برده شده است. متاسفانه، دانشمند مشهور ما، آدمی غیر اجتماعی، بداخم، تندخو، حسود،

خودستا و خیال‌پرداز بود و این خصلت‌ها، مانعی در راه بهتر شدن او بود. نامه‌های بعضی از هم‌عصران او، پر است از شرح خشونت‌ها، تندخویی‌ها و رفتارهای بی‌ادبانهٔ روبروال؛ با وجود این، روبروال یك عضو ضروری در همهٔ مجمع‌های ریاضی ، فیزیکی و دیگر گروه‌های علمی به‌حساب می‌آید.

در طول ده سال، چهرهٔ دانش در سراسر اروپا، و از آن‌جمله در فرانسه، تغییر کرد. و به قول پل تانری: «حاکمیت دولتی دیگر نمی‌توانست لاقید بماند». کولبر مرکانتیلیست، وزیر مشهور لوئی چهاردهم، بهتر از دیگران می‌فهمید که حکومت نمی‌تواند از دانش صرفنظر کند، و در سال ۱۶۶۶، فرهنگستان علوم را تاسیس کرد. او، برای این منظور، به گروهی مراجعه کرد که زمانی دورمرسن جمع شده بودند و امروز به وسیلهٔ پیرکارکاوی، کتاب دار سلطنتی و دوست و هم‌شهری فرما، اداره می‌شد. نخستین کسانی که به فرهنگستان علوم وارد شدند، این‌ها بودند: هویگنس، که اختصاصاً برای پست ریاست فرهنگستان تازه تاسیس، به فرانسه دعوت شده بود پیرکارکاوی (؟-۱۶۸۴)، ریاضی‌دان فره نیکل دو به‌سی (۱۶۰۰-۱۶۷۵)، ریاضی‌دان اسقف پیکار (۱۶۲۰-۱۶۸۲)، اخترشناس؛ روبروال؛ اوزو (۱۶۳۰-۱۶۹۱)، اخترشناس و چند تن دیگر. روبروال، نسبت به کار خودش در آکادمی، حرارت زیادی داشت. در بایگانی فرهنگستان، ده‌ها یادداشت از اظهار نظرهای روبروال، همراه با گزارش‌ها، شرح و تفسیرها، دیدگاه‌های انتقادی و غیر آن، نگهداری شده است. می‌گویند که در سال‌های آخر عمر خود، تنها وقتی که می‌خواست به فرهنگستان علوم برود، از منزل خارج می‌شد. هرچه سنش بالاتر می‌رفت، گوشه‌گیرتر و انزواجوتر می‌شد. مرگ او هیچ سر و صدائی به پا نکرد؛ در نامه‌های معاصران او، تنها یك یادداشت در این باره وجود دارد: هویگنس در حاشیهٔ یکی از نامه‌هایش، یادآوری کرده است: « دو روبروال مرد و دست‌نویس‌های خودش را، برای فرهنگستان باقی گذاشت». از روبروال، عکسی هم باقی نمانده است.

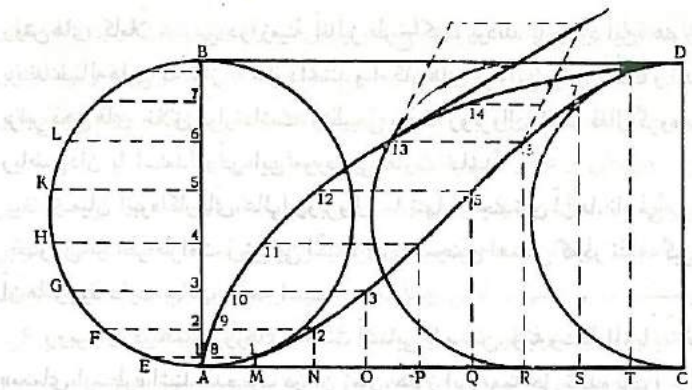
در میان نوشته‌های روبروال، به آثاری دربارهٔ فیزیك، اخترشناسی، مکانیك، و بیش از همه، ریاضیات، برخورد می‌کنیم. نخستین سال‌هایی که روبروال در پاریس زندگی می‌کرد، مواجه بود با پیشرفت طوفانی ریاضیات، در زمینه‌ای که می‌توان آن را، مقدمهٔ آنالیز دانست. مساله‌های جداگانهٔ زیادی دربارهٔ محاسبهٔ حجم‌ها و مساحت‌ها، حل راه رسم مماس بر بعضی از منحنی‌ها، پیدا شده بود. ولی، روش‌های کلی، هنوز در حال زایش بود. خواننده، با روش غیر قابل تقسیم‌های کاوالیری و با روش‌های فرما، آشنا شده است؛ دکارت و بعضی از ریاضی‌دانان دیگر هم، در همین سال‌ها،

روش‌های کاملاً عمومی در زمینهٔ آنالیز طرح کرده بودند. با وجود این، هنوز بسیار بودند مساله‌هایی که نیاز به حل داشتند و امکان‌های فراوانی برای کشف و ابداع، در برابر ذهن‌های خلاق قرار داشت. و طبیعی بود که روبروال، عضو فعال گروه مرسن و ریاضی‌دان با استعداد، در این مورد، بی‌تفاوت نباشد.

از میان انبوه کارهای عالی روبروال، ما تنها از چندتای آن‌ها، نام می‌بریم که به خصوص از نظر ظرافت و زیبایی استدلال، و همچنین اهمیتی که در نتیجه‌گیری‌های آن‌ها وجود دارد، جالب توجه است.

روبروال، در همان روزهای نخست آشنایی با مرسن، و به وسیلهٔ او، با به اصطلاح «معمای ارسطو» آشنا شده بود. در آن زمان، هنوز این معما حل نشده بود، و مرسن، به آشنای تازهٔ خود پیشنهاد کرد که راه‌حل آن را پیدا کند. اصل معما، ساده است. دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که بدون لغزش، بر خط راستی می‌غلطد. مرکز دایره را، O و نقطه‌ای را که دایره در **لحظهٔ مفروض** بر خط راست تکیه دارد (به زبان دیگر، نقطهٔ تماس دایره با خط راست را)، A می‌گیریم، به نحوی که شعاع دایره، برابر OA باشد. بعد از آن که، دایره، یك دور کامل بچرخد، دوباره همان نقطهٔ A از دایره، بر خط راست قرار می‌گیرد. نقطهٔ B را روی شعاع OA و بین O و A در نظر می‌گیریم، به نحوی که داشته باشیم $OB < OA$ معما این است: از یك طرف روشن است که محیط دایره به شعاع OA از محیط دایرهٔ به شعاع OB بزرگتر است؛ از طرف دیگر، نقطهٔ B، در لحظهٔ قبل از حرکت دایره، روی عمود OA است و پس از آن که دایره یك دور کامل می‌چرخد، باز هم روی همان عمود OA قرار دارد. باید راهی برای روشن کردن این پدیده پیدا کرد. روبروال با دقت به مساله آشنا شد و اعتراف کرد که به اندازهٔ کافی آمادگی حل آن را ندارد. کاملاً روشن بود که قبل از همه، می‌بایستی ویژگی‌های سیکلوئید مورد مطالعه قرار گیرد. روبروال به این منحنی مشغول شد و نتیجه‌های جالبی به دست آورد: او روشی ساده و کاملاً استدلالی، برای ساختن سیکلوئید پیدا کرد، مساحت محدود به منحنی را به دست آورد و حجم جسم‌هایی را که از دوران این سطح دور مماس بر راس منحنی و یا دور محور تقارن آن به دست می‌آید، محاسبه کرد. روبروال، برای محاسبهٔ مساحت سیکلوئید، با ظرافت خاصی، از روش غیرقابل تقسیم‌ها استفاده کرد. با حل این مسالهٔ روبروال، آشنا شویم.

تصویری را که در شکل می‌بینید، از کارهای روبروال بر داشته‌ایم. در این شکل، AGB، نیمی از دایرهٔ مفروض و AOC، پاره‌خطی است که طول آن برابر است با πR ($R = \frac{AB}{2}$، شعاع دایره است). بنابراین، طول AC (یا BD) برابر است



محاسبهٔ مساحت سیکلوئید (با روش روبروال).

با طول محیط نیم دایرهٔ AGB، کمان نیم دایرهٔ AGB را به قسمت‌های برابر

$AE=EF=FG=\cdots$

و نیم دایرهٔ مستقیم شدهٔ AOC را به قسمت‌های برابر

$AM=MN=NO=\cdots$

تقسیم می‌کنیم. ضمناً، کمان‌های نیم دایره با پاره‌خط های خط راست، برابرند، یعنی

$AE=AM, EF=MN, FG=NO, \cdots$

از نقطه‌های تقسیم G, F, E ....، عمودهایی بر قطر AB فرود می‌آوریم. خط های سینوسی G_3, F_2, E_1 و غیره به دست می‌آید، از نقطه‌های O, N, M ....، عمودهای O_3, N_2, M_1 ....، را بر پاره‌خط AC اخراج می‌کنیم طول M_1 برابر است با طول پاره‌خط A_1 از قطر، طول N_2 برابر است با طول A_2 و غیره. از ساختمان نتیجه می‌شود که منحنی که از نقطه‌های A_1، ۱۰، ۱۱،...، D می‌گذرد، یك سینوسوئید ـ یا دقیق‌تر نصف یك سینوسوئید ـ است. یادآوری می‌کنیم که روبروال، برای نخستین بار در این اثر خود، سینوسوئید را در دستگاه مختصات قائم، رسم کرد، همچنین در مورد رسم منحنی تابع‌های مثلثاتی، باید حق تقدم را متعلق به او دانست. آن‌طور که ثابت خواهیم کرد، سیکلوئید به کمك همین منحنی، رسم می‌شود. روبروال بر این اساس، آن را «هم‌سفر» یا «بدرقه‌کننده» می‌نامد (اصطلاح «منحنی سینوس‌ها» یا

«سینوسوئید» را برای نخستین بار، اونوره فابری، در سال ۱۶۵۹ به‌کار برده است).

به رسم سیکلوئید بر می‌گردیم. طول کمان AE، برابر است با طول پاره‌خط AM. بنابراین وقتی که دایره آنقدر بچرخد که تکیهٔ آن بر نقطهٔ M باشد، نقطهٔ A در موضع E از محیط دایره قرار می‌گیرد. حالا، اگر روی قطر قائم متکی بر نقطهٔ M، نقطهٔ ۱ را انتخاب کنیم و از این نقطه، پاره‌خط ۸ـ۱ را برابر پاره‌خط E_1 رسم کنیم، آن وقت نقطهٔ ۸، معرف نقطهٔ A بر دایره، در لحظه‌ای خواهد بود که این دایره بر خط AC در نقطهٔ M مماس است. اگر در مورد نقطه‌های ۲، ۳،... هم به همین ترتیب استدلال کنیم و پاره‌خط های ۹ـ۲، ۱۰ـ۳،... را به ترتیب برابر G_3F_2 ....، رسم کنیم، نقطه‌های ۸، ۹، ۱۰،..... واقع بر سیکلوئید به دست می‌آید. بنابراین، منحنی D ـ۱۰ـ A، نیمی از سیکلوئید به مرکز تقارن CD خواهد بود. اکنون باید مساحت شکلی را که به این منحنی، قاعدهٔ AC و پاره‌خط CD محدود است، محاسبه کرد. سینوسوئید (و به قول روبروال «هم‌سفر») D ـ۵ـ A، مستطیل ABDC را، به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. مساحت مستطیل برابر است با $2R \times \pi R = 2\pi R^2$. درنتیجه، مساحت محدود به «هم‌سفر» D ـ۵ـ A برابر با مساحت دایرهٔ مفروض می‌شود. اگر مساحت برگ مانند ۱۱ـ D ـ۵ـ A را، که بین «هم‌سفر» و خود سیکلوئید قرار دارد، اضافه کنیم، به جواب مساله رسیده‌ایم. به این ترتیب، مساله، منجر به محاسبهٔ مساحت این «برگ» می‌شود. روبروال، برای این منظور، از روش غیر قابل تقسیم‌ها، استفاده می‌کند. به یاد می‌آوریم که نقطه‌های ۸، ۹، ۱۰،... سیکلوئید را به این ترتیب به‌دست آوردیم که از نقطه‌های ۱، ۲، ۳،... سینوسوئید، پاره‌خط های ۸ـ۱، ۹ـ۲،... را به ترتیب برابر پاره‌خط های E ـ۱، F ـ۲، G ـ۳،..... انتخاب کردیم. ازاین جا نتیجه می‌شود که اگر این پاره‌خط ها را، به عنوان غیر قابل تقسیم‌های دو شکل AGB و AD در نظر بگیریم، غیر قابل تقسیم‌های دو شکل، دو به دو برابرند. یعنی بنا به قضیه‌های اساسی روش غیر قابل تقسیم‌ها، مساحت‌های دو شکل هم برابر می‌شوند. مساحت شکل AGB معلوم و برابر است با نصف مساحت دایره. یعنی، مساحت «برگ» AD هم برابر با نصف مساحت دایره می‌شود. اگر این مقدار را به مساحت معلوم - C - D ـ ۵ ـ A بیفزاییم، یك برابر و نیم مساحت دایره به دست می‌آید. در نتیجه، مساحت سیکلوئید کامل، برابر می‌شود با سه برابر مساحت دایره. مساله، حل شد. این راه حل، به خودی خود ارزش زیادی دارد؛ ولی، اگر توجه کنیم که روبروال خودش مستقلاً روش غیر قابل تقسیم‌ها را کشف کرد، اهمیت آن بیشتر می‌شود. دست‌کم، خود او، روی این موضوع تاکید می‌کرد. البته ممکن است که این مطلب

دقیقاً این طور نباشد و او اشاره‌هایی دربارهٔ کارهای کاوالیری شنیده باشد. ولی، به هر صورت، روبروال، نخستین کسی بود که مساحت سیکلوئید را به کمك روش غیر قابل تقسیم‌ها (بین سال‌های ۱۶۳۴ و ۱۶۳۶) به دست آورد. او همچنین، حجم جسم‌هایی را هم، که از دوران آن به دست می‌آید، معین کرد. این کار روبروال، موجب محاسبه‌های زیادی در زمینهٔ مساحت سیکلوئیدها شد. نخستین عکس‌العمل را، دکارت نشان داد. وقتی که مرسن ـ که با هر دوی آن‌ها دوست صمیمی بود ـ با عجله، این خبر تازه را با دکارت در میان گذاشت، دکارت، با روش خصمانه‌ای نسبت به روبروال، با این جمله‌ها به مرسن پاسخ گفت (نامهٔ به مرسن در ۲۷ مه سال ۱۶۳۸): «اعتراف می‌کنم که من تا حالا دربارهٔ آن، هرگز فکر نکرده بودم، اعتراف می‌کنم که نظریهٔ او [روبروال] بسیار زیباست؛ ولی من نمی‌دانم که چطور می‌توان این همه سروصدا، دربارهٔ چیزی به این سادگی، بلند کرد، چیزی که هر کسی، تنها اگر مختصری با هندسه آشنا باشد و اگر بخواهد به دنبال آن برود، می‌تواند آن را کشف کند».

دکارت، در همین نامه، طرح مقدماتی راه حل خود را، که بر اساس روش‌های کلاسیك بود شرح می‌دهد.

سیکلوئید، یکی از مشهورترین منحنی‌ها، در سدهٔ هفدهم بود. تنها مقطع‌های مخروطی را می‌شد، از لحاظ تلاشی که برای روشن کردن ویژگی‌های آن‌ها به کار می‌رفت، برتر از سیکلوئید دانست. از گالیله تا هویگنس، ریاضی‌دانی را در سدهٔ هفدهم نمی‌شد پیدا کرد که به سیکلوئید نپرداخته باشد.

روبروال، برجسته‌ترین کشف را روی سیکلوئید انجام داد: او، با روش سینماتیك، راهی برای رسم مماس بر منحنی، در هر نقطهٔ دلخواه آن، پیدا کرد. این روش، بر حکم‌های به ظاهر سادهٔ زیر، متکی است: ۱) بردار سرعت نقطهٔ متحرك، در هر لحظهٔ زمانی، در جهت مماس بر مسیر قرار دارد؛ ۲) سرعت برآیند لحظه‌ای، در جهت قطر متوازی الاضلاعی است که ضلع‌های آن عبارتست از مؤلفه‌های سرعت‌های لحظه‌ای. روبروال، بر اساس این حکم‌ها، قاعدهٔ زیر را، برای رسم مماس بر منحنی می‌دهد: «بنا به ویژگی‌های خاص منحنی [که به شما داده شده

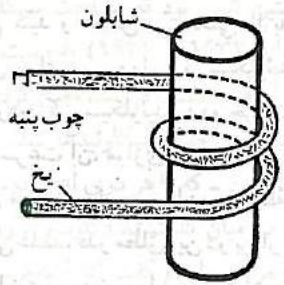
۱ـ نام «سیکلوئید» را گالیله برای این شکل انتخاب کرد. ریاضی‌دانان فرانسوی (فرما، دکارت، مرسن و دیگران)، این منحنی را «رولت» می‌نامیدند. خود روبروال، در سال‌های ۵۰، نام «تروخوئید» را برای آن در نظر گرفت که به یونانی به معنای «چرخ» است.

است]، حرکت‌های مختلف نقطه‌ای را مطالعه کنید که منحنی را می‌پیماید؛ در موضعی که می‌خواهید مماس را رسم کنید، همهٔ حرکت‌ها را، در یك حرکت، ترکیب کنید، امتداد این حرکت را رسم کنید و مماس بر منحنی را به دست آورید».

در شکل ۹، این روش، برای رسم مماس بر سیکلوئید در نقطهٔ ۱۳، به کار برده شده است. برای این منظور، حرکت سیکلوئید، به دو حرکت تجزیه شده است: حرکت انتقالی با مرکز (که بردار سرعت آن، موازی قاعدهٔ AC است) و دوران نسبی دور مرکز. (که بردار سرعت آن موازی مماس بر دایره در نقطهٔ L است). روشن است که وقتی دایره، بدون لغزش، می‌غلطد، قدر مطلق این دو بردار برابر می‌شود و تشکیل یك لوزی می‌دهند. قطر این لوزی، جهت مماس را نشان می‌دهد.

روشی که روبروال ارائه می‌دهد، هم کلی و هم ساده است. روبروال، با استفاده از این روش، مماس بر منحنی‌های مختلف را به دست می‌آورد که از مقطع‌های مخروطی آغاز و به منحنی‌های کاملاً پیچیده‌ای، مثل انواع کنکوئید، ختم می‌شود. رقیب همیشگی او دکارت، با رسم مماس بر سیکلوئید قبل از روبروال، و با استفاده از همان روش سینماتیك، بر او پیشی گرفت. ولی دکارت، از ویژگی‌هایی استفاده کرد، که مخصوص منحنی در حال غلطیدن بود، در حالی که روش روبروال، همان طور که دیدیم، ظاهراً کلی‌تر است و شمول بیشتری دارد. در این جا، به این مناسبت بر واژهٔ «ظاهراً» تکیه کردیم، که روش روبروال، با همهٔ سادگی و روشنی خود، در بعضی موارد، منجر به اشتباه می‌شود. با وجود این، در عمل، به ندرت، به چنین حالت‌هایی برخورد می‌کنیم. کشف این محدودیت و فرموله کردن آن، تنها در سدهٔ نوزدهم (و به وسیلهٔ دوهامل در سال ۱۸۳۱)، انجام شد. توریچلی هم، هم زمان با روبروال و بدون اطلاع از کارهای او، روش سینماتیك رسم مماس‌ها را، کشف کرد، و روبروال هم، در سرزنش او، هیچ کوتاهی نکرد. ولی، عکس‌العمل توریچلی، همراه با خویشتن‌داری و وقار فراوانی بود. اساس پاسخ توریچلی این بود: برای حقیقت، این موضوع اهمیت ندارد که در چه کشوری کشف شده است، در فرانسه یا ایتالیا، و یا آنچه که توریچلی منتشر کرده است و وجه تشابهی با اثبات فرانسوی خود پیدا کرده است، چگونه به دست آمده است، به‌طور مستقل یا ضمن بحث با دوستان.

روبروال، کارهای دیگری هم دارد که در تاریخ دانش باقی مانده است: «وزن‌های روبروال» دستگاه‌هایی برای اخترشناسی و غیره. در آن زمان، توجه زیادی به محاسبهٔ انتگرال‌های ناسره می‌شد. روبروال هم در این زمینه، به موفقیت‌هایی دست یافت. منتهی، از آن جا که، برای نخستین بار، توریچلی به محاسبهٔ انتگرال‌های



معمولاً برای خم کردن لوله‌های مسی، برنجی و دورالومینی، از گرم کردن آن‌ها استفاده می‌کنند. ولی، معمولاً در محلی که حرارت می‌بینند، پوسته‌هایی به وجود می‌آید. در زمستان، می‌توان از روش ساده‌تری برای خم کردن این گونه لوله‌ها استفاده کرد، که از پوسته شدن لوله‌هم جلوگیری می‌کند.

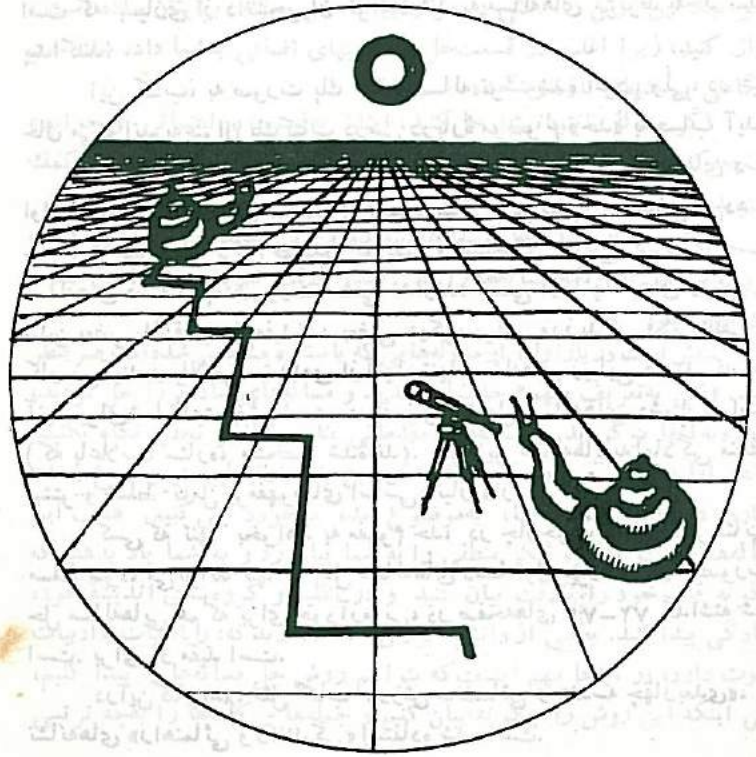
لوله را با آب پر کنید (یك طرف آن را با چوب‌پنبه ببندید تا آب در آن بماند) و در هوای یخ‌بندان بگذارید. آب درون لوله، تبدیل به ستونی از یخ می‌شود که به کمك آن، لوله بدون هیچ زحمتی، طبق شابلون خم می‌شود. این روش، مخصوصاً در مورد لوله‌های به قطر ۸ میلی‌متر، که کلفتی جدار آن بیش از یك میلی‌متر نباشد، کاملاً مناسب است.

ناسره پرداخت، ما هم بحث مربوط به آن را به بخش توریچلی موکول می‌کنیم.

در شمارهٔ بعد: اوانجلیستاتوریچلی

آلکساندر آلکساندروویچ کیریلوف
ترجمهٔ پرویز شهریاری

دربارهٔ حد



پیش گفتار

در این کتاب، دربارهٔ مفهوم‌حد گفتگو می‌شود، مفهومی که به‌حق، برای علاقمندان به‌ریاضیات، دشواریهایی دربر دارد. به‌خصوص، برای کسانی که دراین باره خودآموزی می‌کنند، این دشواری بیشتر می‌شود. باوجود این، تجربهٔ آموزش مکاتبه‌ای مدرسهٔ ریاضیات دانشگاه دولتی مسکو، نشان داده است که بسیاری از دانشجویان توانسته‌اند به مسأله‌های مربوط به‌حد تسلط پیدا کنند.

این کتاب، به صورت یك کتاب مساله نوشته‌شده است، ولی، در عین حال می‌تواند به‌عنوان یك‌کتاب درسی دربارهٔ موضوع «حد» به‌حساب آید.

مساله‌های این‌کتاب را، به‌سه‌دسته می‌توان تقسیم کرد. مساله‌های دستهٔ اول (که بادایره مشخص شده‌اند)، قسمت بنیانی این‌کتاب را تشکیل می‌دهند. حل این مساله‌ها، برای فهمیدن تعریفها و قضیه‌های اساسی، ضروری است. مساله‌های دستهٔ دوم، ضرورت حتمی ندارند: بعضی از آنها، برای روشن‌تر-شدن بعضی از قضیه‌ها مفیدند، بعضی دیگر، برای ورزیدگی فکر منطقی به کار می‌آیند و بالاخره، تعدادی ازآنها، تنها مساله‌های زیبایی هستند که حل آنها برای‌شما لذت‌بخش است. دستهٔ سوم، شامل مساله‌های دشوارتر است (که باعلامت ستاره، مشخص شده‌اند). حل این مساله‌ها، به‌آمادگی منطقی بیشتر و تسلط کامل برمفهومهای اساسی، نیاز دارد.

کسی‌که تنها بخواهد به مفهوم حد، در چارچوب برنامه دبیرستانی، مسلط شود، می‌تواند تنها به حل مساله‌های دستهٔ اول بپردازد. در اینصورت، حل مساله‌هایی هم‌که برای خودآزمایی، در صفحه‌های ۷۱–۷۲ گذاشته شده است. برای او مفید است.

دراین‌کتاب‌هم، مثل کتاب «روش مختصاتی و هندسه چهاربعدی»، از نشانه‌های «راهنمائی و رانندگی» استفاده شده است.

علامت «پارك» در جائی گذاشته شده است‌که شامل آگاهیهای لازم است: تعریفها، قضیه‌ها، دستورها،وغیره. در برابر این علامت، باید ایستاد و بادقت آنرا مطالعه کرد.

علامت«شیب‌تند»، درجائی گذاشته‌شده است‌که شامل موضوعهای دشوارتری است؛ و اگر بخواهید، می‌توانید در مطالعهٔ اول، ازآن بگذرید

دربرابر علامت «پیچ‌خطرناك»، باید بادقت توجه کرد. اغلب‌این علامت، جائی گذاشته شده است، که درنظر اول، خیلی ساده و راحت به‌نظر می‌رسد، ولی اگر توجه کافی نشود، ممکن است منجر به‌اشتباههای جدی بشود.

بهترین راه، برای خواندن این کتاب کدام است؟ از مساله‌های مقدماتی (بند۱)، شروع کنید. چندتاازآنهارا حل کنید و نتیجه‌ای‌راکه بدست می‌آورید باجوابی که داده شده است، مقایسه کنید. بعد، قسمت حل را بخوانید. این روش را، حتی در مواردی‌که حل مساله، برایتان ساده است، دنبال کنید، زیرا اغلب در قسمت‌حل، آگاهیهای اضافی به‌شما داده شده‌است و گاهی پرسشهای تازه‌ای آمده است.

اگر مسالهٔ رانتوانستید حل‌کنید، ابتدا به‌قسمت «راهنمائی و جواب» مراجعه‌کنید واگر، باوجوداین، درحل مساله درماندید، از قسمت «حل» کمك بگیرید.

وقتی که از عهدهٔ حل مساله‌های مقدماتی برآمدید، به‌بند بعدی کتاب بپردازید. پیش‌از آنکه مساله‌ها را حل کنید، بادقت تعریف حد را در صفحهٔ ۵۳ بخوانید.

بهتر است دربارا‌ول، از مساله‌هایی که باستاره مشخص شده‌اند، صرفنظر کنید. وقتی به‌تعریف مفهوم حدمسلط شدید و مساله‌های ساده‌تررا حل کردید، دوباره‌به‌آنها برگردید. به‌مساله‌های مقدماتی بند۱ ، بانظر تحقیر نگاه نکنید. درنظر اول، گمان می‌رود که مساله‌های این بند، ارتباطی به موضوع «حد» ندارد. در واقع‌هم، درآنها، به‌موضوع حد، برخورد نمی‌کنیم. هدف این مساله‌ها اینست که راه تفکر منطقی را به شما بیاموزد و به شما یاد بدهد که چگونه فکر خود را بادقت بیان کنید و در تنظیم و گروه‌بندی اندیشهٔ خود، آمادگی پیداکنید. بعضی از دانش‌آموزان اعتقاد دارندکه: ریاضیات باادبیات تفاوت دارد، در اینجا مهم اینست‌که بتوانیم روش حل مساله‌ها را پیدا کنیم، ولی اینکه این روش را چگونه بیان کنیم،و جمله‌ها و کلمه‌ها را به‌چه ترتیبی

منظم کنیم، خیلی مهم نیست. ولی، این اعتقاد، درست نیست. اغلب، ناتوانی در بیان اندیشهٔ خود، ناتوانی در حل مساله و حتی نفهمیدن فرضهای مساله را، به‌دنبال دارد.

بسیاری ازمساله‌های مقدماتی بند۱، و همینطور بقیهٔ‌مساله‌ها را به‌شرطی می‌توانید به‌سادگی حل کنید، که به‌روشنی بدانید، چه‌چیزهایی داده شده است و چه‌چیزهایی را باید ثابت کرد. و این، همان‌کاری است که بعضی از دانش‌آموزان ازعهدهٔ‌آن برنمی‌آیند. وقتی که روش حل مساله را یاد بگیرید، می‌توانید به‌خوبی وسادگی ازعهدهٔ آنها برآیید. آرزو می‌کنیم که‌موفق‌شوید.

ooo

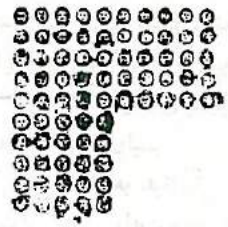
بند۱ ، مساله‌های مقدماتی

۱.° از دودانش‌آموز خواسته‌شد که ادارهٔ‌تقویم هوارا، به‌عهده بگیرند. آنها، باید روزی را که هوا خوب است، بانشانهٔ + و روزی را که هوا بد است به‌علامت — ، مشخص کنند. دانش‌آموز اول به‌این ترتیب عمل کرد: در هرشبانه‌روز، سه‌مرتبه به‌وضع هوا توجه می‌کرد. — صبح، ظهر و عصر. اگر، دست‌کم در یکی ازاین زمانها، باران می‌بارید، نشانهٔ — ودرغیر این‌صورت، نشانهٔ + می‌گذاشت. دانش‌آموز دوم هم، در همان زمانها، به‌وضع هوا توجه می‌کرد؛ منتهی، اگر دست‌کم در یکی ازمواردمشاهدهٔ خود، باران نمی‌بارید، نشانهٔ + و درغیر این‌صورت، نشانهٔ — می‌گذاشت. به‌این ترتیب، وضع هوای هرروز، بایکی از حالتهای + + ، — + ، + — ، — — ، مشخص می‌شد. ولی، آیا به‌همهٔ این حالتها، می‌توان برخورد کرد؟

۲.° دانش‌آموز سومی، به‌دو دانش‌آموزمسالهٔ۱، پیوست. اوهم، درهمان زمانهای صبح، ظهر وعصر، وضع هوارا بررسی می‌کرد، منتها نشانهٔ — را در حالتی قرار می‌داد که دست‌کم، در دومشاهدهٔ او، باران ببارد، و در حالتهای دیگر، نشانهٔ + را می‌گذاشت. از هشت حالت نشانه‌گذاری + + + ، + + — ، + — + ، — + + ، — + — ، — — + ، + — — ، — — — ، احتمال‌برخورد با کدامیك وجود دارد؟

۳.° الف) سیصد مرد، ۳۰ صف در ۱۰ ردیف ساخته‌اند. از هرصف، بلندترین مرد را برمی‌گزینیم، و از میان این ۳۰ مرد، کوتاهترین آنها را انتخاب می‌کنیم. سپس، از هرردیف، کوتاهترین مرد را برمی‌گزینیم و از میان این ۱۰ مرد، بلندترین‌آنهارا. کدام بلندترند: بلندترین مرد ازبین کوتاه

قدها، یا کوتاهترین مرد از بین بلندقدها؟
ب) آیا جواب فرق می‌کند، اگر به‌جای اینکه افراد را به‌صورت مستطیلی قرار دهیم، به‌شکل زاویه‌ای باشند، آنطور که در شکل ۱ دیده می‌شود (درهریك از پنج‌ردیف اول ۱۰ نفر و در هریك از پنج‌ردیف دوم، ۵ نفر، ایستاده‌اند).



شکل ۱

۴.° در حالتی که روی هرنیمکت دست‌کم یك دانش‌آموز وجود داشته‌باشد که همهٔ مساله‌ها را حل کرده باشد، بازرسی تکلیفها، به ساده‌ترین صورت انجام می‌گیرد. حالا شما، تعریف دشوارترین نوع بازرسی تکلیفها را، تنظیم کنید.

۵.° دوتعریف، برای بازرسی آسان تکلیفها در نظر می‌گیریم:
الف) در هرنوبت، هرمساله را دست‌کم یکی از دانش‌آموزان حل کرده باشد،
ب) درهرنوبت، دست‌کم یکی از دانش‌آموزان، همهٔ مساله‌ها را حل کرده باشد.
آیا ممکن است، بازرسی تکلیفها به مفهوم تعریف الف) دشوار و به مفهوم تعریف ب) آسان باشد؟

۶.° در بیان‌های زیر کدامشان یکدیگر را نفی می‌کنند؟
۱) درهر کلاس، دست‌کم یك‌دانش‌آموز، ممتاز است.
۲) حتی در کلاس‌هم، شاگردممتاز وجود ندارد.
۳) کلاسی وجود دارد، که درآن شاگردممتاز نیست.
۴) در یکی از کلاسها، شاگرد ممتاز وجود دارد.

۷.° کدامیك از قضیه‌های زیر درست است؟
۱) اگر هرکدام از جمله‌ها بر ۷ بخش پذیر باشد، مجموع آنهاهم بر۷ بخش پذیراست.
۲) اگر هرکدام از جمله‌ها بر ۷ بخش‌پذیر نباشد، مجموع آنها هم بر۷ بخش پذیر نیست.
۳) اگر دست‌کم، یکی از جمله‌ها بر۷ بخش پذیر باشد، مجموع آنها بر۷ بخش‌پذیر است.

۴) اگر مجموعی بر۷ بخش پذیر باشد، در آنصورت هریك از جمله‌های جمع بر۷ بخش پذیر است.
۵) اگر مجموعی بر۷ بخش پذیر نباشد، هریك ازجمله‌های‌جمع‌هم بر۷ بخش پذیر نیست.
۶) اگر مجموعی بر۷ بخش‌پذیز نباشد، دست‌کم یکی از جمله‌ها، بر۷ بخش‌پذیر نیست.

۸.° برای مثلث باضلعهای، ۵، ۱۲ و ۱۳:
الف) آیا درست است‌که قائم‌الزاویه است؟
ب) آیا این‌حکم، از قضیهٔ فیثاغورث نتیجه می‌شود؟

۹.° فرض کنید A و B به‌معنای دوگزاره باشند. اگر خط کوتاهی روی حرف‌گذاشته شود، به‌معنای نفی آن حکم است (شکل۲). مثلا، اگر A این گزاره باشد که: «در مثلث ABC، همهٔ ضلعها برابرند»، در آنصورت گزارهٔ $\bar{A}$ چنین خواهد بود: «در مثلث ABC، همهٔ ضلعها برابر نیستند». هشت قضیه درنظر می‌گیریم:

۱. اگر A، آنگاه، B،
۲. اگر $\bar{A}$، آنگاه B،
۳. اگر A، آنگاه $\bar{B}$،
۴. اگر $\bar{A}$، آنگاه $\bar{B}$
۵. اگر B، آنگاه A،
۶. اگر $\bar{B}$، آنگاه A،
۷. اگر B، آنگاه $\bar{A}$،
۸. اگر $\bar{B}$، آنگاه $\bar{A}$،

میدانیم که قضیهٔ ۱، درست است. می‌خواهیم بقیهٔ قضیه‌ها را به سه گروه تقسیم کنیم: درگروه اول قضیه‌هایی که درست‌اند؛ در گروه دوم، قضیه‌هایی که نادرست‌اند؛ و درگروه سوم، قضیه‌هایی که ممکن است‌درست وممکن‌است نادرست باشند. ضمناً، شرط می‌کنیم که A و B، گزاره‌های همیشه درست، یا همیشه نادرست نباشند (گزارهٔ «در مثلث ABC همه زاویه‌ها قائمه‌اند» همیشه نادرست و گزارهٔ «مثلث ABC میانه‌ها در یك نقطه به هم می‌رسند» همیشه درست‌است).

درمساله‌های زیر، از $|x|$ (به‌خوانید «قدر مطلق ایکس») استفاده‌شده‌است. مقدار $|x|$، به‌این ترتیب معین می‌شود:

حادثه‌ها

A — باران می‌بارد
$\bar{A}$ — باران نمی‌بارد
B — خورشید می‌درخشد
$\bar{B}$ — خورشید نمی‌درخشد

قضیه‌ها

اگر A، آنگاه B

اگر A، آنگاه B

اگر $\bar{A}$، آنگاه B

اگر $\bar{A}$، آنگاه $\bar{B}$

شکل ۲

$$|x| = \begin{cases} x, & (\text{برای } x>0) \\ 0, & (\text{برای } x=0) \\ -x, & (\text{برای } x<0) \end{cases}$$

۱۰.° عبارت $\frac{|x|}{x}$، مساوی چه مقادیری می‌تواند باشد؟

۱۱.° عبارتهای زیر را، بدون علامت قدر مطلق بنویسید:

الف) $|a^2|$؛

ب) $|a-b|$، باشرط $a>b$؛

ج) $|a-b|$، باشرط $a<b$؛

د) $|-a|$، به‌شرط منفی‌بودن a.

۱۲.° این معادله‌ها را حل کنید:

الف) $x+2|x|=3$؛

ب) $x^2+3|x|-2=0$؛

ج) $|2x+1|+|2x-1|=2$.

۱۳.° این نامساویها را ثابت کنید:

الف) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$؛

ب) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$؛

ج) $|x-y|\geqslant||x|-|y||$

روشن کنید که درهر کدام از این‌حالتها، چه‌موقع، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

۱۴.°. آیادرست است که: عدد طبیعی n وجود دارد، که به‌ازای آن داشته باشیم:

الف) $\sqrt[n]{1000}<1/001$؟

ب)* $\sqrt[n]{n}<1/001$؟

ج) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<0/1$؟

د) $\sqrt{n^2+n}-n<0/1$؟

۱۵. الف) آیا درست است که عددی مثل C وجود دارد، به‌نحوی که به‌ازای همهٔ مقادیر درست k، نامساوی زیر، برقرار باشد؟

$$\left|\frac{k^3-2k+1}{k^4-3}\right|<C$$

ب)* آیا درست است که برای هرعدد C، مجموعهٔ نامتناهی از عددهای درست k وجود دارد، به‌نحوی که نامساوی زیر برقرار باشد؟

$$k\sin k>C$$

۱۶. الف) ضلعهای یک‌مستطیل را بادقت تا یک‌سانتیمتر، اندازه گرفته‌ایم. باچه‌دقتی می‌توان محیط و مساحت مستطیل را محاسبه کرد؟

ب) ضلعهای یک مستطیل را بادقت تا ۱٪ اندازه گرفته‌ایم. باچه دقتی، می‌توان محیط و مساحت این مستطیل را پیدا کرد؟

می‌گوئیم که دنبالهٔ عددهای

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

داده شده است، وقتی که هرعدد طبیعی[1] n، متناظر باعددی مثل x_n باشد.

مثلا، دنبالهٔ

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

را می‌توان بادستور $x_n=n^2$ مشخص کرد؛ یادنبالهٔ

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

با دستور $x_n=(-1)^n$ یا دستور $x_n=\cos n\pi$، مشخص می‌شود. البته، هر دنباله‌ای را نمی‌توان بایک‌دستور جبری بیان کرد به‌عنوان نمونه، دنبالهٔ

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, \ldots$$

را می‌آوریم که جملهٔ x_n آن برابر است بارقم n ام قسمت دهدهی عدد π.

۱۷.° بزرگترین‌جملهٔ دنباله‌های زیر را پیدا کنید:

الف) $x_n=\frac{n^2}{2^n}$؛

ب) $x_n=\frac{n}{100+n^2}$؛

ج) $x_n=\frac{1000^n}{n!}$.[2]

---

۱) عدد طبیعی، یعنی عدد درست ومثبت.

۲) $n!$ نشانهٔ کوتاه حاصضرب $1\times2\times3\times\ldots\times n$ است وبنابرتعریف $1!=1$

۱۸° کوچکترین جملهٔ دنباله‌های زیر را پیدا کنید:

الف) $x_n = n^2 - 5n + 1$ ؛

ب) $x_n = n + \frac{100}{n}$ ؛

ج) $x_n = n + 5\sin\frac{n\pi}{2}$ ،

دنبالهٔ $\{x_n\}$[1] را کرانه‌دار گویند، وقتی که عددی مانند C وجود داشته باشد، که برای هر اندیس n، نامساوی $|x_n| \leqslant C$ برقرار باشد (شکل۳).

شکل ۳

۱۹° تعریف دنبالهٔ بی‌کرانه را منظم کنید.

۲۰° دربارهٔ دنبالهٔ کرانه‌داری فکر کنید که:

الف) بزرگترین و کوچکترین جمله داشته باشد؛

ب) بزرگترین جمله داشته باشد، ولی کوچکترین جمله نداشته باشد؛

ج) کوچکترین جمله داشته باشد، ولی بزرگترین جمله نداشته باشد؛

د) نه بزرگترین جمله و نه کوچکترین جمله نداشته باشد.

فرض کنید، دنبالهٔ نامتناهی $\{x_n\}$ داده شده باشد. جمله‌های این دنباله را، به کمک نقطه‌هایی، روی محور عددها، نشان می‌دهیم (ضمناً ممکن است، بعضی از جمله‌های دنباله، در یک نقطه قرار بگیرند؛ مثلا در دنبالهٔ

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots$$

شکل ۴

همهٔ جمله‌های ردیف زوج، روی نقطهٔ ۱ ، قرار می‌گیرند). فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ روی محور عددی را برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، تله می‌نامیم، وقتی که یا درخارج این فاصله، جمله‌ای از دنباله وجود نداشته باشد و یا تعداد چنین جمله‌هایی محدود باشد.

فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ روی محور عددی را برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، ظرف می‌نامیم، وقتی که دراین فاصله، مجموعهٔ نامتناهی از جمله‌های دنباله وجود

---

۱) نشانهٔ $\{x_n\}$، نشانه کوتاه دنبالهٔ $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ است.

داشته باشد (شکل ۴).

۲۱° الف) ثابت کنید که هر تله‌ای، ظرف هم هست؛

ب) دنباله‌ای فکر کنید، و فاصلهٔ بسته‌ای پیدا کنید که برای این دنباله ظرف باشد، ولی تله نباشد.

۲۲° این دنباله‌ها

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$

b) $1, 2, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 1\frac{1}{n}, \ldots,$

c) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots, 2n-1, \frac{1}{2n}, \ldots,$

وفاصله‌های بستهٔ

A) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,

B) $[-1, 1]$

C) $[-2, 2]$,

داده شده است. ببینید کدام فاصله برای کدام دنباله، تله یاظرف است؟

۲۳° آیا دنباله‌ای وجود دارد که برای آن، هریک از فاصله‌های $[0, 1]$ و $[2, 3]$: الف) ظرف؛ ب) تله باشند؟

۲۴° می‌دانیم که برای دنباله‌ای، هرکدام از فاصله‌های $[0, 1]$ و $[9, 10]$ ، ظرف است. آیا برای این دنباله

الف) تله‌ای به‌طول ۱ وجود دارد؟

ب) تله‌ای به‌طول ۹ وجود دارد؟

۲۵° الف) آیا دنباله‌ای وجود دارد که برای آن هیچ ظرفی وجود نداشته باشد؟

ب) * آیا دنباله‌ای وجود دارد که برای آن، هرفاصله‌ای، ظرف باشد؟

بند۲ . مساله‌های مربوط به تعریف حد

عدد a را حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ گویند، وقتی که برای هرعدد مثبت ε، عددی مثل k وجود داشته باشد، که به‌ازای

همهٔ جمله‌هایی از دنباله، که در آنها اندیس n از k بزرگتر است، داشته باشیم:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

این حقیقت را، که عدد a، حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ است، به‌این ترتیب می‌نویسند:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = a$$

(بخوانید: حد x_n، وقتی که n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، برابر است با a)، یا به‌این ترتیب:

$$x_n \to a \quad \text{وقتی که} \quad n \to \infty$$

(بخوانید: x_n به‌سمت a میل می‌کند، وقتی که n به‌سمت بی‌نهایت میل کند). بعضی نتیجه‌گیریهای مهمی که از تعریف حد بدست می‌آید، در اینجا می‌آوریم:

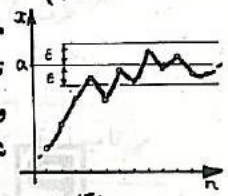
۱) گزارهٔ $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = a$، چه مفهوم محسوسی دارد؟

عدد کوچکی مثل ۰/۰۰۱ درنظر می‌گیریم، وفرض می‌کنیم که نتوانیم دوعددی را که اختلافی کمتر از ۰/۰۰۱ دارند، ازهم تمیز بدهیم (می‌توان فرض کرد که جمله‌های دنبالهٔ ما، مقادیری فیزیکی هستند که اندازه‌های آنها را تنها با تقریب ۰/۰۰۱ می‌توانیم اندازه بگیریم). در اینصورت، دنبالهٔ $\{x_n\}$ وقتی به‌سمت a میل می‌کند که در آن از جایی به‌بعد، نتوانیم جمله‌ها را بادنبالهٔ ثابت a ، a ، a ، ... ، تمیز دهیم.

شرط $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = a$، به‌این معناست که برای هرتقریبی در اندازه‌گیری، دنبالهٔ $\{x_n\}$، از جمله‌ای به‌بعد، برابر مقدار ثابت شود.

به کلمه‌های «برای هر» و «از جمله‌ای به‌بعد» دقت کنید. اگر این کلمه‌ها را حذف یا جابجا کنید، این تعریف به کلی مفهوم خود را از دست می‌دهد.

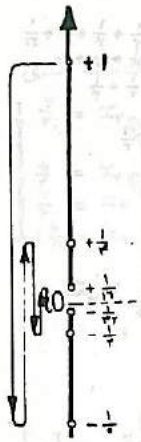
۲) گاهی راحت‌تر است که دنبالهٔ $\{x_n\}$ را به این ترتیب، پیش خود مجسم کنیم. روی صفحه، نقطه‌های به‌مختصات $\{n , x_n\}$ را در نظر می‌گیریم و این نقطه‌ها را به وسیلهٔ خط شکسته‌ای به‌هم وصل می‌کنیم (که‌طبعاً «منحنی نمایش» دنباله نامیده می‌شود). شرط $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = a$، به‌این معناست که این خط شکسته، به‌سمت خط



شکل ۵

$x = a$ نزدیک می‌شود. دقیق‌تر، برای هر $\varepsilon > 0$، خط شکسته‌ما، ازجایی به‌بعد، به‌طور کامل در داخل نواری به عرض 2ε، که شامل خط $x = a$ است، قرار می‌گیرد (شکل ۵). مثلاً، این طرح هندسی برای حل مساله‌های ۳۱، ۳۵ و ۳۶، سودمند است.

۳) عدد k را، که در تعریف مفهوم حد به‌کار رفته است، معمولاً عددی طبیعی درنظر می‌گیرند. ماچنین شرطی‌را در تعریف حد، وارد نکردیم. برای ما، عدد k می‌تواند هر عدد حقیقی باشد؛ این وضع، برای اثبات وجود حد راحت‌تر است (تبصرهٔ مربوط به حل مسالهٔ ۳۰ را ببینید) و درعین‌حال، مفهوم تعریف را تغییر نمی‌دهد.



شکل ۶

۲۶. این دنباله‌ها داده شده است:

الف) $x_n = \frac{1}{n}$ ؛

ب) $x_n = \frac{1}{n^2+1}$ ؛

ج) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (شکل ۶) ؛

د) $x_n = \log_n 2$.

برای هرکدام از این‌دنباله‌ها، عدد k را طوری پیدا کنید که به‌ازای $n > k$، داشته باشیم:

a) $|x_n| < 1$ ؛

b) $|x_n| < 0/001$ ؛

c) $|x_n| < 0/000001$.

۲۷. الف) ثابت کنید که اگر $x_n \to a$، وقتی که $n \to \infty$؛ دراینصورت هرفاصلهٔ بستهٔ به‌مرکز نقطهٔ a، تله‌ای برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ است.

ب) آیا عکس این حکم درست است؟

۲۸. الف) اگر $x_n \to a$، وقتی که $n \to \infty$، ثابت کنید که هر فاصلهٔ بسته‌ای به‌مرکز نقطهٔ a، ظرفی برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ است، ولی هیچ فاصلهٔ بسته‌ای که شامل نقطهٔ a نباشد، برای دنبالهٔ $\{x_n\}$، ظرف نیست.

ب) می‌دانیم که برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، هرفاصلهٔ بسته‌ای به‌مرکز نقطهٔ a ، یك‌ظرف است، ولی هیچ فاصلهٔ بسته‌ای که شامل نقطهٔ a نباشد، برای‌این دنباله، ظرف‌نیست. آیا می‌توان حکم کردکه $x_n \to a$ ، وقتی که $n \to \infty$ ؟

۲۹. اگر فاصلهٔ بسته‌ای، برای یك دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، ظرف باشد، ثابت کنید که هیچ عددی واقع در خارج این فاصله وجود ندارد که بتواند حددنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد.

۳۰°. کدامیك از دنباله‌های زیر، دارای حد هستند؟

الف) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots$

ب) $\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \ldots, \frac{3^n-1}{3^n}, \ldots$

ج) $1, 1+\frac{1}{2}, \ldots, 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ (شکل۷).

د) $1, 2, 3, 4, \ldots$

ه) $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$

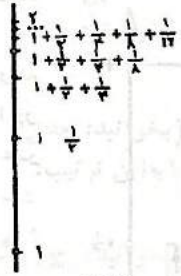
و) $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots, 0, \frac{1}{n}, \ldots$

ز) $0/2, 0/22, 0/222, \ldots, \underbrace{0/22\ldots2}_{n\text{مرتبه}}, \ldots$

ح) $\sin 1^\circ, \sin 2^\circ, \sin 3^\circ, \ldots, \sin n^\circ, \ldots$

ط) $\frac{\cos 1^\circ}{1}, \frac{\cos 2^\circ}{2}, \frac{\cos 3^\circ}{3}, \ldots, \frac{\cos n^\circ}{n}, \ldots$

ی) $0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \ldots, (-1)^n+\frac{1}{n}, \ldots$ (شکل ۸).



شکل ۷

۳۱°. آیا ممکن است، دوعدد مختلف، حد یك‌دنباله باشند؟

۳۲°. عدد a را، نقطهٔ حدی دنبالهٔ $\{x_n\}$ گویند، وقتی که برای هرعدد مثبت ε و هرعدد k ، اندیس $n > k$ پیدا شود که برای آن داشته‌باشیم:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

الف) ثابت کنید که اگر a ، نقطه حدی دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد، هر-فاصلهٔ بستهٔ به‌مرکز نقطهٔ a ، برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، ظرف است.

ب) عکس این قضیه را ثابت کنید.

۳۳°. ثابت‌کنیدکه حد دنباله (اگر وجود داشته باشد)، یك‌نقطهٔ حدی است.

۳۴°. برای هرکدام از دنباله‌های زیر ، همهٔ نقطه‌های حدی را پیداکنید:

الف) $x_n = \frac{n+1}{n}$;

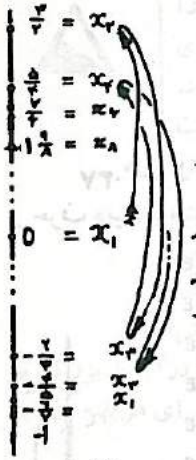
ب) $x_n = (-1)^n$;

ج) $x_n = \sin n^\circ$

د) $x_n = n^{(-1)^n}$;

ه) $x_n = n$;

و) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$



شکل ۸

۳۵°. الف) ثابت‌کنیدکه اگر دنباله‌ای دارای حد باشد، کرانه‌دارهم هست. کرانه‌دار بودن یك‌دنباله به‌معنای این است که جملهٔ عمومی‌آن، از اندیسی به‌بعد، همیشه از عدد ثابتی کوچکتر باشد.

ب) آیا عکس این حکم درست است؟

۳۶°. می‌گویندکه دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند (این گزاره را به‌این ترتیب می‌نویسند: «$x_n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$»)، وقتی‌که برای هرعدد C ، عددی مثل k پیدا شود، به‌نحوی که برای همهٔ اندیسهای $n > k$ ، این نامساوی برقرار باشد (شکل۹):

$$|x_n| > C$$

توجه کنیم؛ دنباله‌ای که به سمت بی‌نهایت میل کند، به مفهوم تعریفی که در ابتدای این بندآوردیم، دارای حد نیست.

کدامیك از دنباله‌های زیر به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند و کدامیك کرانه‌دار نیست:

الف) $x_n = n$;

ب) $x_n = n \cdot (-1)^n$,

ج) $x_n = n^{(-1)^n}$;

د) $x_n = \begin{cases} n & \text{(وقتی که } n \text{ زوج باشد)} \\ \sqrt{n} & \text{(وقتی که } n \text{ فرد باشد)} \end{cases}$,

ه) $x_n = \dfrac{100n}{100+n^2}$

۳۷.* شرط زیر را درنظر می‌گیریم (حرف «ه» به‌معنای «برای‌هر»، و حرف «پ» به‌معنای «پیدا می‌شود. . . به‌نحوی که» ، می‌باشد):

۱)	$\varepsilon>0$ پ	k پ	$n>k$ پ	$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$
۲)	$\varepsilon>0$ پ	k پ	$n>k$ پ	$\lvert x_n-a\rvert\geqslant\varepsilon$
۳)	$\varepsilon>0$ پ	k پ	$n>k$ ه	$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$
۴)	$\varepsilon>0$ پ	k پ	$n>k$ ه	$\lvert x_n-a\rvert\geqslant\varepsilon$
۵)	$\varepsilon>0$ پ	k ه	$n>k$ پ	$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$
۶)	$\varepsilon>0$ پ	k ه	$n>k$ پ	$\lvert x_n-a\rvert\geqslant\varepsilon$
۷)	$\varepsilon>0$ پ	k ه	$n>k$ ه	$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$
۸)	$\varepsilon>0$ پ	k ه	$n>k$ ه	$\lvert x_n-a\rvert\geqslant\varepsilon$
۹)	$\varepsilon>0$ ه	k پ	$n>k$ پ	$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$
۱۰)	$\varepsilon>0$ ه	k پ	$n>k$ پ	$\lvert x_n-a\rvert\geqslant\varepsilon$
۱۱)	$\varepsilon>0$ ه	k پ	$n>k$ ه	$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$
۱۲)	$\varepsilon>0$ ه	k پ	$n>k$ ه	$\lvert x_n-a\rvert\geqslant\varepsilon$
۱۳)	$\varepsilon<0$ ه	k ه	$n>k$ پ	$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$
۱۴)	$\varepsilon>0$ ه	k ه	$n>k$ پ	$\lvert x_n-a\rvert\geqslant\varepsilon$
۱۵)	$\varepsilon>0$ ه	k ه	$n>k$ ه	$\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$
۱۶)	$\varepsilon>0$ ه	k ه	$n>k$ ه	$\lvert x_n-a\rvert\geqslant\varepsilon$

شکل ۹

کدامیك از این شرطها، خاصیتی از دنباله را بیان می‌کند (کرانه‌دار است، عدد a حد آنست، دارای عدد a به‌عنوان نقطهٔ حدی است، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند) و یا این خاصیتها را نفی می‌کند؟

۳۸.* پنج‌ویژگی دنباله‌را درنظر می‌گیریم: ۱) به‌طور اتحادی با a برابر است، ۲) عدد a حد آنست، ۳) عدد a به‌عنوان نقطهٔ حدی آنست، ۴) کرانه‌دار است، ۵) به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

هردنباله را می‌توان باانتخاب پنج علامت مثبت و منفی، مشخص کرد. مثلا «$-++++-$» (علامتها را ازچپ به‌راست بخوانید)، به‌معنای آنست که دنباله دارای ویژگی‌های ۲ ، ۳ و ۴ است و ویژگی‌های او ۵ را ندارد. بعضی از ترکیب‌های علامتها، بی‌معنی است (مثل ترکیب «$+++++$» : اگردنباله‌ای ویژگی ۱ را داشته باشد، نمی‌تواند ویژگی ۵ راهم داشته‌باشد).

الف) همهٔ ترکیب علامت‌ها را که دارای معنی هستند، ذکر کنید و برای هرکدام ازآنها، دنباله‌ای بسازید.

ب) ثابت‌کنیدکه بقیهٔ ترکیب علامتها، بدون معنی‌اند.

۳۹. ثابت‌کنید که اگر دنباله‌ای دارای‌حد باشد، درآن یا بزرگترین جمله، یاکوچکترین جمله، ویا هردوی‌آنها وجود دارد. برای هریك از این سه‌حالت، نمونه‌ای بیاورید.

۴۰. ثابت‌کنیدکه از هردنبالهٔ نامتناهی، می‌توان یك دنبالهٔ نامتناهی یکنوا، بیرون آورد (دنبالهٔ $\{x_n\}$ را یکنوا گویند، وقتی که یکی از دوشرط زیر، درموردآن صدق کند:

۱) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$

۲) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$

درحالت اول، دنباله را غیرنزولی ودرحالت دوم غیرصعودی گویند).

در نظریه حد، یکی ازخاصیتهای عددهای حقیقی، که معمولا به صورت یك‌اصل بیان می‌شود، بسیار مهم است.

اصل بولتسانو-وایرشتراس. هردنبالهٔ نامتناهی یکنوا و کرانه‌دار،دارای حد است.

(ذکر کلمهٔ «نامتناهی» برای دنباله، به‌خاطر تاکید است، و الا هر دنباله‌ای، نامتناهی است).

این اصل، خاصیت تمامیت مجموعهٔ عددهای حقیقی‌را منعکس می‌کند.

به‌زبان ریاضی می‌توان گفت که این اصل نشان می‌دهد که روی محور عددها «رخنه» و «شکافی» وجود ندارد.

در آنالیز ریاضی ثابت می‌کنند که اصل بولتسانو-وایرشتراس با هر کدام از دو حکم زیر هم‌ارز است:

۱. اگر روی محور عددها دنبالهٔ نامتناهی از پاره خطهایی را به‌وجود آوریم، به‌نحوی که هر پاره‌خط داخل پاره‌خط قبلی قرار گرفته باشد، درآنصورت، همهٔ این پاره‌خطها دست‌کم یك‌نقطه مشترك دارند.

۲. هرعدد حقیقی را می‌توان به‌صورت یك کسر اعشاری نامتناهی (متناوب یا نامتناوب) نوشت؛ و برعکس هر کسری ازاین‌نوع، متناظر بایك‌عدد حقیقی است.

اگر یکی ازاین دوحکم را، به‌عنوان یك‌اصل بپذیریم، آنوقت هم حکم دوم و هم اصل بولتسانو-وایرشتراس را می‌توان به‌صورت قضیه ثابت کرد.

۴۱.* ثابت کنید که اصل بولتسانو-وایرشتراس، برای عددهای گویا، قابل‌اجرا نیست، یعنی دنباله‌های نامتناهی کرانه‌دار و یکنوا از عددهای گویا وجود دارد، که دارای حد گویا نیستند.

۴۲. ثابت کنید که‌هردنبالهٔ کرانه‌دار، دست‌کم یك‌نقطهٔ حدی دارد.

۴۳. می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد a، و دنبالهٔ $\{y_n\}$ دارای حد b می‌باشد. آیا درست است که بگوئیم، دنباله‌های زیر دارای حدند:

a) $\{x_n+y_n\}$; b) $\{x_n-y_n\}$;

c) $\{x_n\cdot y_n\}$; d) $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$?

۴۴.° می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد است، ولی دنبالهٔ $\{y_n\}$، حدی ندارد. آیا دنباله‌های زیر، حد دارند:

a) $\{x_n+y_n\}$; b) $\{x_n\cdot y_n\}$?

۴۵.° می‌دانیم که دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$، دارای حدنیستند. آیا ممکن است دنباله‌های زیر، دارای حدباشند:

e) $\{x_n+y_n\}$, b) $\{x_n\cdot y_n\}$?

۴۶.° (قضیهٔ دو نگهبان). می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ بین دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{z\}$ قرار گرفته است، یعنی به‌ازای همهٔ مقادیر n، نامساوی $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ برقرار است (شکل ۱۰). ثابت کنید که اگر دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ دارای یك‌حد مساوی a باشند، دنبالهٔ $\{x_n\}$ هم به‌سمت a میل می‌کند.

شکل ۱۰

مجموع یك‌رشتهٔ نامتناهی از عددها، به‌این ترتیب تعریف می‌شود. فرض کنید، رشتهٔ

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

داده شده باشد. S_n رامجموع n جملهٔ اول این‌رشته می‌نامیم (که آنرا n امین مجموع جزئی رشته گویند). اگر دنبالهٔ $\{S_n\}$ دارای حد s باشد، عدد S را مجموع رشتهٔ مفروض گویند. خود رشته، دراین حالت، متقارب گفته می‌شود. اگر دنبالهٔ $\{S_n\}$ حدی نداشته باشد، آنرا رشتهٔ متباعد گویند، در این‌حالت، رشته‌دارای مجموعی نیست.

۴۷. ثابت کنید که رشته‌های زیر متقارب‌اند:

الف) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$;

ب) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$;

ج) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots$;

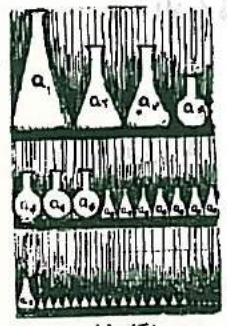
۴۸. ثابت کنید که اگر رشتهٔ

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

متقارب باشد، داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

۴۹.* فرض کنید $\{a_n\}$، یك دنبالهٔ نزولی‌از عددهای مثبت باشد، ثابت کنید که رشتهٔ

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$


شکل ۱۱

وقتی، وتنها وقتی، متقارب است که رشتهٔ زیر متقارب باشد. (شکل ۱۱):

$$a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\dots+2^n a_{2^n}+\dots$$

۵۰.° به‌ازای کدام مقادیر حقیقی p رشتهٔ زیر متقارب است:

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots+\frac{1}{n^p}+\dots?$$

بند ۳. مساله‌هایی برای محاسبه حد

برای محاسبهٔ حد دنباله. اغلب از دستورهای زیر استفاده می‌کنند (برای اثبات آنها، حل مسالهٔ ۴۳ را ببینید):

اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ ، داریم:

۱) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$;

۲) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=a-b$;

۳) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$;

۴) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{a}{b}\ (b\neq 0)$

متوجه باشید که این دستورها را تنها وقتی می‌توان قبول کرد که برای دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ ، حدی وجود داشته باشد.

۵۱.° اشتباه را در استدلالهای زیر پیدا کنید:

الف) دنبالهٔ $x_n=\frac{2n-1}{n}$ را درنظر می‌گیریم، از یکطرف

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$$

و ازطرف دیگر

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}(n)}=\frac{\infty}{\infty}=1$$

از آنجا $1=2$ ؟!

ب) دنبالهٔ $x_n=1$ را درنظر می‌گیریم. از یك طرف روشن است

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1$$

ازطرف دیگر می‌توان نوشت: $1=(n+1)-n$ و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)-\lim_{n\to\infty} n=\infty-\infty=0$$

و برای ما بدست می‌آید $1=0$ ؟!

ج) دنبالهٔ $x_n=\frac{n-1}{n}$ را درنظر می‌گیریم. از یك طرف

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

از طرف دیگر

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}(n-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)\times 0=0$$

و ازآنجا $1=0$ ؟!

۵۲. می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند و دنبالهٔ $\{y_n\}$ دارای حدی مساوی a است، ثابت کنید:

الف) دنبالهٔ $\{x_n+y_n\}$ به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند؛

ب) دنبالهٔ $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$ به‌سمت صفر میل می‌کند،

ج) دربارهٔ دنبالهٔ $\{x_n\cdot y_n\}$ چه‌می‌توان گفت؟

۵۳.° دودنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ پیدا کنید، که برای آنها

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0\ ;\ \lim_{n\to\infty} x_n=0$$

و ضمنا داشته باشیم:

الف) $\frac{x_n}{y_n}\to 0$ ، وقتی $n\to\infty$ ؛

ب) $\frac{x_n}{y_n}\to 1$ ، وقتی $n\to\infty$ ؛

ج) $\frac{x_n}{y_n}\to\infty$ ، وقتی $n\to\infty$ ؛

د) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ وجود نداشته باشد.

۵۴.° حد این دنباله‌ها را پیدا کنید:

الف) $x_n=\frac{2n+1}{3n-5}$ ؛ ب) $x_n=\frac{10n}{n^2+1}$ ،

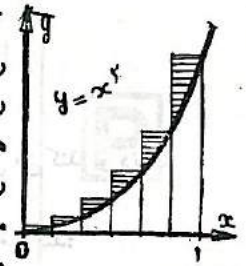
ج) $x_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}$ ؛ د) $x_n=\frac{2^n-1}{2^n+1}$.

۵۵. حد این‌دنباله را پیدا کنید:

$$x_n=\frac{1}{n^{k+1}}(1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k)$$

(k ، عدد ثابت طبیعی است).

این دنباله، تعبیر هندسی جالبی دارد، قسمتی از صفحه را، که محدود به نمایش تابع $y=x^k$ ، محور ox و خط راست $x=1$ است، درنظر می‌گیریم. فاصلهٔ بستهٔ [۰ ، ۱] را روی محور ox به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم وروی هریك ازاین قسمتها، مستطیلی می‌سازیم که راس بالا وسمت راست‌آن، برمنحنی نمایش‌ما، قرارگرفته باشد (شکل ۱۲). مجموع مساحتهای همهٔ مستطیلهایی را که ساخته‌ایم، برابر می‌شود با



شکل ۱۲

$$x_n=\frac{1}{n^{k+1}}(1^k+2^k+\cdots+n^k)$$

بنابرتعریف، حد این مقدار را، وقتی که $n\to\infty$ ، مساحت شکل منحنی‌الخط مفروض‌می‌گویند.

۵۶.° ثابت کنید $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=0$.

۵۷. ثابت‌کنید: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

۵۸. ثابت‌کنید: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ (به‌ازای $a>1$).

۵۹.° ثابت‌کنید: $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{n}=0$.

۶۰.° $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ را پیدا کنید.

۶۱.° الف) ثابت کنید که برای هرمقدار مثبت و حقیقی a ، دنبالهٔ $x_n=n(\sqrt[n]{a}-1)$ ، دارای حد است.

ب) $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)$ را به $l(a)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید که

$$l(ab)=l(a)+l(b)\ ;\ l(a^p)=P\cdot l(a)$$

برای هر a و l مثبت وهر P حقیقی.

مسالهٔ «۶۱ — ب» نشان می‌دهد که بیان $l(a)$، ویژگیهایی شبیه لگاریتم عدد a دارد. درواقع، برای هرمبنای c ، این اتحادها درست است:

$$\log_c(ab)=\log_c(a)+\log_c(b)\ ,\ \log_c(a^P)=P\log_c(a)$$

روشن شده است که این شباهت، اتفاقی نیست.

۶۲. الف) ثابت‌کنید که نسبت $\frac{l(a)}{\lg a}$، به a بستگی ندارد و برابر بامقدار ثابتی مثل M است.

ب) ثابت کنیدکه مقدار ثابت M ، غیراز صفر است.

ج) ثابت‌کنیدکه عددمثبت e وجود دارد، بنحوی که $l(a)=\log_e(a)$. به‌عدد e ، که درمسالهٔ ۶۲ از آن صحبت‌کردیم، تقریباً درهمهٔ رشته‌های ریاضیات، برخورد می‌کنیم. دربارهٔ این عدد، می‌توان یك‌کتاب کامل نوشت (وچنین کتابهایی نوشته شده است). در اینجا، ما به‌بحث تفصیلی آن نمی‌پردازیم. تنها متذکر می‌شویم که برای نخستین‌بار در تاریخ ریاضیات، به‌عنوان مبنای لگاریتم ــ که به‌وسیلهٔ نپر و جدا از او بورگی کشف شد ــ همین عدد e را انتخاب‌کردند. این لگاریتم را لگاریتم طبیعی عدد a گویند و به صورت $\ln a$ نشان می‌دهند. عدد ثابت M، که دربالا ازآن صحبت‌کردیم، برابر است با

$$\ln 10=2/302585\cdots$$

و خود عدد e برابر است با

$$e = ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸\ldots$$

در اینجا، دو بیان دیگر از عدد e را می‌آوریم، که به‌کمك آنها می‌توان مقدار e را باهر تقریب دلخواه پیدا کرد:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n,$$

$$e = ۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\ldots+\frac{۱}{n!}+\ldots$$

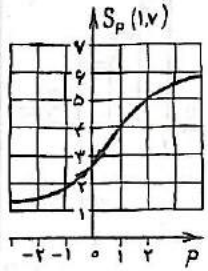
۶۳. P را عدد حقیقی دلخواهی، غیر از صفر، فرض کنید. واسطهٔ مرتبهٔ P ام دو عدد مثبت a و b را به‌عبارت $\sqrt[P]{\frac{a^P+b^P}{۲}}$ گویند. ما این واسطه را به $S_P(a, b)$ نشان می‌دهیم.

در حالتهای خاص، بدست می‌آید:

$$S_۱(a, b) = \frac{a+b}{۲} \quad \text{(واسطهٔ عددی)}$$

$$S_۲(a, b) = \sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}} \quad \text{(واسطهٔ مربعی)}$$

$$S_{-۱}(a, b) = \left(\frac{a^{-۱}+b^{-۱}}{۲}\right)^{-۱} = \frac{۲ab}{a+b} \quad \text{(واسطهٔ توافقی)}$$



شکل ۱۳

در شکل ۱۳، منحنی نمایش $S_P(a, b)$ را به ازای $a = ۱$ و $b = ۷$ نشان داده‌ایم.

الف) ثابت کنید که مقدار واسطهٔ $S_P(a, b)$، ازهر مرتبه‌ای که باشد بین دوعدد a و b قرار دارد؛

ب) این نامساویها را ثابت کنید.

$$S_۲(a, b) \geqslant S_۱(a, b) \geqslant S_{-۱}(a, b) \geqslant S_{-۲}(a, b)$$

۶۴. حد این دنباله‌ها را پیدا کنید:

الف) $x_n = S_n(a, b)$،

ب) $x_n = S_{-n}(a, b)$

ج)* $x_n = S_{\frac{۱}{n}}(a, b)$

(عددهای a و b، مقادیری ثابت هستند).

۶۵*. در n پاکت، باآدرسهایی که دارند، n نامه را شانسی گذاشته‌ایم:

الف) احتمال اینکه حتی یکی از نامه‌ها، باآدرس پاکت تطبیق نکند، چقدر است؟

ب) ثابت کنید که وقتی $n \to \infty$، این احتمال دارای حدی‌است.

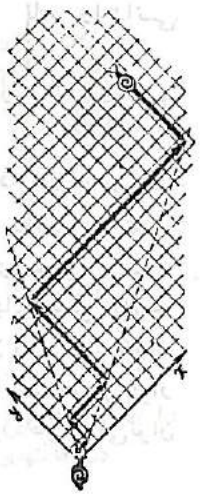
(احتمال یك‌حادثه عبارتست از نسبت تعداد حالتهای مساعد (یعنی تعداد حالتهایی که برای حادثه پیش می‌آید) به‌تعداد همهٔ حالتهای ممکن. درمسالهٔ ما، تعداد همهٔ حالتهای ممکن برابر است باتعداد همهٔ روشهای ممکن جابه‌جا کردن نامه‌ها در پاکتها که برابر است با $n! = ۱ \times ۲ \times \ldots \times n$. تعداد همهٔ حالتهایی را، که بنابرآن حتی یکی ازنامه‌هاهم در پاکت خودش قرار نگرفته باشد، به a_n نشان می‌دهیم. دراینصورت، احتمال موردنظر را می‌توان به‌صورت $\frac{a_n}{n!}$ نوشت.)

تااینجا، دربارهٔ حد دنباله‌های عددی، صحبت کردیم. ولی، به‌یاری‌عددها می‌توان به‌موضوع‌های گوناگون‌هندسی رسید. مثلا، جهت خط‌راست را روی‌صفحه، می‌توان باضریب زاویهٔ آن نشان داد؛ نقطه‌ای‌را که بریك خط‌راست و یا دریك صفحه واقع باشد، می‌توان بامختصات آن مشخص کرد و غیره. بنابراین، در همهٔ حالتهایی که برای دنباله‌ای از موضوعهای هندسی، از اصطلاح‌های «حد» یا «میل می‌کند» استفاده می‌کنیم، درواقع، بایك‌دنبالهٔ عددی (که معرف‌این موضوعهای هندسی است)سروکار داریم. مثلا عبارت«دنبالهٔ نقطه‌های M_n روی صفحه، به سمت نقطهٔ M میل می‌کند» را باید به‌این مفهوم گرفت که مختصات نقطهٔ M_n به‌سمت مختصات نقطهٔ M میل می‌کند.

۶۶*. حلزونی روی خطهای‌یك کاغذ شطرنجی، به‌این‌ترتیب حرکت‌می‌کند: درگام‌نخست، یك‌خانه به‌سمت‌راست می‌رود درگام‌دوم، یك‌خانه به‌طرف بالا؛ درگام‌سوم، یك‌خانه به‌سمت راست‌ودرگام چهارم، یك‌خانه به‌طرف‌بالا وغیره(شکل ۱۴).

شکل ۱۴

حلزون‌دوم، درجای‌خودنشسته است و اولی را با دوربین‌نگاه می‌کند. اگرحلزون‌نخست، به‌ترتیبی که گفتیم به حرکت خود ادامه دهد،آیا لولهٔ دوربین،به‌سمت حدی میل می‌کند؟



۶۷. اگر، حلزون مسالهٔقبل به‌ترتیب‌زیرحرکت کند، در پاسخ آن‌چه تغییری حاصل می‌شود:

a) یك خانه‌به‌طرف راست و دوخانه‌به‌طرف‌بالا، یك خانه به‌طرف راست و دوخانه به‌طرف بالا و غیره.

b) ۱ خانه به‌طرف‌راست‌و ۲ خانه‌به‌طرف‌بالا، ۳ خانه به طرف راست و چهارخانه به طرف بالا، ۵ خانه به‌طرف راست و ۶ خانه به‌طرف بالا وغیره.

c) ۱ خانه به‌طرف راست و ۲ خانه به‌طرف بالا، ۴ خانه به طرف راست و ۸ خانه به طرف بالا، ۱۶ خانه‌به‌طرف راست و۳۲ خانه‌به‌طرف‌بالا وغیره(شکل ۱۵).

شکل ۱۵

۶۸°. روی سهمی‌نمایش تغییرات تابع $y=x^2$ ، نقطهٔ A_0 را به‌طول a ، و دنبالهٔ نقطه‌های A_n را باطولهای $a+\frac{1}{n}$ انتخاب می‌کنیم. M_n رانقطهٔ برخورد محور ox باامتداد خط A_0A_n می‌گیریم. ثابت کنید، وقتی که $n\to\infty$ ، دنبالهٔ نقطه‌های M_n دارای حدی است و این حد را پیدا کنید.

اگر M_0 ، حد دنبالهٔ نقطه‌های M_n باشد، خط راست A_0M_0 را مماس برسهمی درنقطهٔ A_0 گویند.

۶۹. توکا ازمنزل بیرون آمد و به‌طرف مدرسه رفت. وقتی که نصف راه را رفت، تصمیم گرفت‌فیلم تماشا کند و به طرف سینما رفت. وقتی که‌نیمی از راه‌سینماراطی کرد، فکر کرد که اگر یخ‌بازی‌کند بهتراست وبه‌طرف قصریخ حرکت کرد. ولی، بعداز آنکه به‌نیمهٔ راه رسید تصمیم خودرا عوض کرد و به طرف مدرسه رفت. درنیمهٔراه مدرسه، دوباره به‌طرف سینما برگشت (شکل ۱۶). اگرتوکا، به‌همین‌ترتیب، تصمیم خود را عوض کند، بالاخره به‌کجا خواهد رسید؟

شکل ۱۶

۷۰. دنبالهٔ نقطه‌های M_n را روی یك‌خط راست، به‌این ترتیب درست کرده‌ایم. دونقطهٔ اول M_1 و M_2 را به‌دلخواه وسپس هرنقطهٔ بعدی‌را، وسط دونقطهٔ قبل ازآن گرفته‌ایم. ثابت کنید که دنبالهٔ M_n حدی دارد واین حدرا پیدا کنید.

۷۱. این مجموع‌ها را پیدا کنید:

الف) $1+a+a^2+\dots+a^n+\dots$

ب) $a+2a^2+3a^3+\dots+na^n+\dots$

ج) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots$

د) $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\dots$

ه) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$

۷۲°. بینهایت آجریکجور، به‌شکل‌مکعب‌مستطیل دراختیار داریم. آجرها را یکی‌پس‌ازدیگری با کمی انحراف رویهم می‌گذاریم، به‌نحوی که هیچکدام از آنها سقوط نکنند (شکل ۱۷). به این ترتیب، تاچه طولی می‌توان آجرهارا رویهم گذاشت؟

شکل ۱۷

۷۳. ثابت کنید که دنبالهٔ

$$2\ ;\ 2+\frac{1}{2}\ ;\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}\ ;\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}\ ;\ \dots$$

دارای حدی است. این حدرا پیدا کنید.

۷۴. برای محاسبهٔ ریشهٔ دوم عدد مثبت a، می‌توان از روش تقریبهای متوالی زیراستفاده کرد: عدد دلخواه x_0 را انتخاب کنید و دنباله را بااین قانون بسازید:

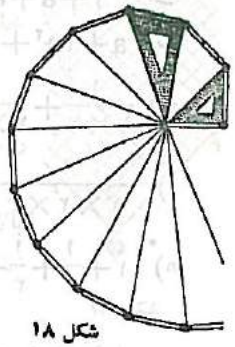
$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

الف) ثابت کنید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = \begin{cases} \sqrt{a} & (x_0 > 0) \\ -\sqrt{a} & (x_0 < 0) \end{cases}$$

(منظور ما از $\sqrt{a}$، مقدار حسابی جذر a است).

ب) اگر مقدار اولیه $\sqrt{10}$ را $x_0 = 3$ بگیریم، چند تقریب متوالی لازم است (یعنی چند جملهٔ متوالی از دنبالهٔ $\{x_n\}$ را باید حساب کرد) تا مقدار $\sqrt{10}$ تا ۰/۰۰۰۰۱ تقریب به‌دست آید؟



شکل ۱۸

۷۵. روی میزی چوب کبریتها را به این نحو به‌دنبال‌هم می‌چینیم: چوب کبریت دوم بر چوب کبریت اول عمود است، از آن به بعد، هر چوب کبریت بر خطی عمود است که ابتدای این چوب کبریت را به ابتدای چوب کبریت اول وصل می‌کند (شکل ۱۸). یک مارپیچ بدست می‌آید.

الف) این پیچ چندمرتبه، دور نقطهٔ مبدأ می‌چرخد؟

ب) فاصلهٔ بین دو حلقهٔ متوالی پیچ چقدر است؟

ooo

مسأله‌هایی برای آزمایش خودتان

۱. اگر زمین را، یک کرهٔ کامل به حساب آوریم طول استوا را باچه دقتی باید اندازه گرفت، تا حجم زمین با دقت تا ۱ کیلومتر مکعب محاسبه شود؟

۲. می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به سمت صفر میل می‌کند.

الف) آیا ممکن است در این دنباله، جمله‌ای بزرگتر از ۱۰۰۰۰۰۰ وجود داشته باشد؟

ب) آیا ممکن است همهٔ جمله‌های دنباله، منفی باشند؟

ج) آیا ممکن است همهٔ جمله‌های دنباله، از ۰/۰۰۰۰۰۱ بزرگتر باشند؟

۳. ثابت کنید که عدد ۱، حد دنبالهٔ $\bar{x}_n = (-1)^n + n^{-1}$ نیست.

۴. می‌دانیم که $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = 1$. مطلوبست حد هر کدام از دنباله‌های زیر.

الف) $y_n = \dfrac{2x_n - 1}{x_n + 1}$؛ ب) $y_n = \dfrac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1}$؛

ج) $y_n = \dfrac{x_n^m - 1}{x_n - 1}$؛ د) $y_n = \sqrt{x_n}$؛

۵. مطلوبست محاسبهٔ هر کدام از حدهای زیر:

الف) $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, \dfrac{n^2 + 3n - 2}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$؛

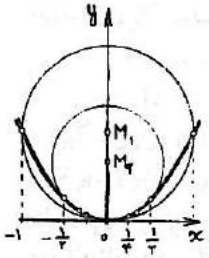
ب) $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})$؛

ج) $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, \dfrac{n^2}{4^n}$؛ د) $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, \dfrac{3^n + 4^n + 5^n}{2^n + 6^n}$

۶. دنبالهٔ $\{x_n\}$ به این ترتیب، ساخته شده است: جملهٔ نخست، به

دلخواه اختیار شده است واز جملهٔ دوم به بعد، با رابطهٔ $x_{n+1} = ax_n + 1$ به دست‌آمده است. به ازای چه‌مقادیر حقیقی a، دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حداست.

۷. روی‌منحنی‌تابع $y = x^2$، نقطه‌های A_n و B_n را به‌ترتیب‌به‌طولهای $-\frac{1}{n}$ و $+\frac{1}{n}$ در نظر می‌گیریم. فرض‌کنید M_n مرکز دایره‌ای باشد که از نقطه‌های A_n و B_n و مبداء مختصات گذشته است (شکل ۱۹). ثابت‌کنید که دنبالهٔ نقطه های $\{M_n\}$ دارای حدی است. این حد را پیدا کنید.



شکل ۱۹

۸. می‌دانیم که‌دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دارای‌حد هستند. دنبالهٔ تازه‌ای به این ترتیب، تشکیل می‌دهیم:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$$

آیا این دنباله دارای حد است؟

۹. الف) می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد است. ثابت کنید که دنبالهٔ $y_n = x_{n+1} - x_n$ به سمت صفر میل می‌کند.

ب) آیا عکس حکم الف) درست است؟

۱۰. این مجموعها را محاسبه‌کنید:

الف) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$

ب) $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{19}{216} + \dots + \frac{3^n - 2^n}{6^n} + \dots$

ooo

حل مسأله‌ها

۱. اگر در تمام شبانه روز باران نبارد، هردو دانش‌آموز، نشانهٔ + را می‌گذارند. در حالتی هم که مرتباً باران بیاید، هر دو، نشانهٔ — را می‌گذارند. اگر صبح باران بیاید و ظهر وعصر هوا خشك باشد، دانش‌آموز اول نشانهٔ — و دانش‌آموز دوم نشانه + را می‌گذارد.

نشانهٔ «— +» پیش نمی‌آید، زیرا دانش‌آموز اول، نشانهٔ + راتنها در حالتی می‌گذارد که اصلا باران نبارد. ولی، در اینصورت دانش‌آموز دوم هم، نشانهٔ + را خواهد گذاشت.

۲. روش اول. وقتی که دانش‌آموز اول، نشانهٔ + را می‌گذارد، به این معناست که اصلا باران نمی‌آید. درچنین صورتی، دو دانش‌آموز دیگرهم همان نشانهٔ + را می‌گذارند و نشانه‌گذاری به صورت «+ + +» درمی‌آید. اگر دانش‌آموز اول، نشانهٔ — و دانش‌آموز سوم نشانهٔ + بگذارد، به این معناست که تنها در یکی از سه نوبت، باران می‌بارد؛ و بنابراین، در چنین حالتی دانش آموز دوم باید نشانهٔ + را بگذارد و نشانه گذاری به صورت «+ + —» درمی‌آید. درحالتی که دو دانش‌آموز اول وسوم، نشانهٔ — بگذارند، به معنای آنست که باران در دو نوبت از روز و یا هرسه نوبت می‌بارد. در حالت اول دانش‌آموز دوم نشانهٔ + و در حالت دوم، نشانهٔ — رامی‌گذارد؛ ونشانه‌گذاری به‌یکی ازدو صورت «— + —» یا «— — —» درمی‌آید. از آنجا که همه حالتهای ممکن را به حساب آورده‌ایم، حالتهای دیگر نشانه‌گذاری هرگز پیش نمی‌آید.

روش دوم. باران‌ممکن‌است در ۰، ۱، ۲، یا ۳ نوبت ببارد. پاسخ مسأله، از این جدول به دست می‌آید:

در چند نوبت باران آمده است؟ / نشانه‌گذاری	۰	۱	۲	۳
دانش‌آموز اول	+	−	−	−
دانش‌آموز دوم	+	+	+	−
دانش‌آموز سوم	+	+	−	−

۳. الف) A را کوتاهترین مرد از بین بلند قدها و B را بلندترین مرد از بین کوتاه قدها می‌گیریم. C را مردی می‌گیریم که درصف A و درردیف B قرارگرفته است. A و B را با C مقایسه می‌کنیم. A بلندترین مرد در صف خود است، بنابراین از C بلندتر است؛ B کوتاهترین مرد در ردیف خود است، بنابراین از C کوتاهتر است، در نتیجه، A از B بلندتر است.

ب) دو وضع را در نظرمی‌گیریم (شکل ۲۰).

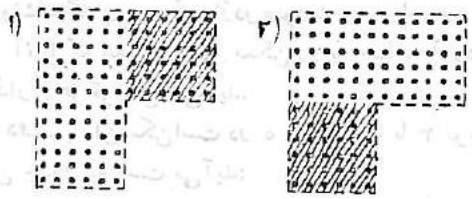
اگر در قسمت هاشور خورده، بلندترین مردها، نسبت به بقیه ایستاده باشند، در اینصورت، کوتاهترین مرد از بین بلند قدها، در حالت اول بلندتر ازبلند قدترین مرد از بین کوتاه قدها است و درحالت دوم کوتاهتر ازاوست (امتحان کنید!).

فکر کنید که چرا در حالت اول از این دو حالت، نمی‌توان از همان استدلالی که در قسمت الف) به‌کار بردیم، استفاده کرد.

۵. فرض کنیم که هردانش‌آموز تنها یك‌مسأله را حل کرده باشد، منتهی هرمسأله به وسیلهٔ کسی حل‌شده باشد (یعنی حتی یك‌مسأله را دونفر حل‌نکرده باشند). در این حالت، بازرسی تکلیفها به مفهوم الف) دشوار، و به مفهوم ب) آسان می‌شود.

۷. مثالهای ۷ = ۴ + ۳ و ۹ = ۷ + ۲، نشان می‌دهند که قضیه‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ نادرست‌اند. قضیهٔ ۱ روشن‌است وقضیهٔ ۶ به سادگی به‌طریق برهان خلف ثابت می‌شود.

۸. الف زاویهٔ روبه‌روی به ضلع ۱۳ را در نظرمی‌گیریم. اگر این



شکل ۲۰

زاویه حاده باشد، بنابه قضیهٔ مربوط به ضلع روبه‌روی زاویهٔ حاده بایدداشته باشیم:

$$۱۳^۲ < ۱۲^۲ + ۵^۲$$

اگراین زاویه منفرجه باشد، بنابرقضیهٔ مربوط به‌ضلع روبه‌روی زاویهٔ منفرجه باید داشته باشیم:

$$۱۳^۲ > ۱۲^۲ + ۵^۲$$

ولی، هردوی این نامساوی نادرستند، زیرا

$$۱۳^۲ = ۱۶۹ = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۲^۲ + ۵^۲$$

بنابراین، زاویهٔ روبه‌روی ضلع ۱۳، نه حاده است و نه منفرجه. یعنی قائمه است.

ب) قضیهٔ فیثاغورث موبوط به مثلث قائم‌الزاویه است، ولی ما از قائم‌الزاویه بودن مثلث اطلاعی‌نداریم، بنابراین، نمی‌توان ازقضیهٔ فیثاغورث استفاده کرد.

بعضی از دانش‌آموزان اینطوراستدلال می‌کنند: از برهان خلف‌استفاده می‌کنیم. اگر مثلث ما قائم الزاویه نباشد، دراینصورت بایدحکم قضیهٔ فیثاغورث سازگار نباشد و باید رابطهٔ $۱۳^۲ \neq ۱۲^۲ + ۵^۲$ برقرار باشد. ولی این رابطه درست نیست و بنابراین، مثلث قائم‌الزاویه است.

ولی، در واقع، استدلالی که به وسیله «حروف‌خوابیده» بیان‌شده است، ناشی ازقضیهٔ فیثاغورث نیست، زیرا قضیهٔ فیثاغورث‌مربوط به‌مثلث‌قائم‌الزایه است و هیچ حکمی دربارهٔ مثلثهای دیگرنمی‌کند. به این ترتیب، این‌استدلال از قضیهٔ فیثاغورث استفاده نمی‌کند، بلکه مربوط به قضیه‌های دیگری است که دربارهٔ مثلثهای غیر قائم‌الزاویه وجود دارد.

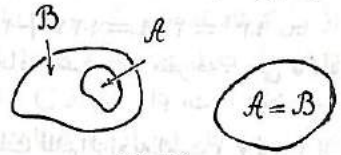
۹. قضیهٔ ۸ به سادگی، و از طریق برهان خلف، ثابت می‌شود (البته، باشرط درستی قضیهٔ ۱). در واقع، اگرقضیهٔ ۸ نادرست باشد، به‌معنای‌آنست که از $\bar{B}$، نمی‌توان $\bar{A}$ را نتیجه گرفت؛ بنابراین، باید حالتی وجود داشته باشد که در آن $\bar{B}$ درست و $\bar{A}$ نادرست باشد. ولی، این به‌معنای آنست که A درست و B نادرست است، که بنابرقضیهٔ ۱، ممکن نیست.

برای قضیه‌های ۴ و ۵، می‌توان مثالهایی برای A و B انتخاب کرد که در مورد آنها این دوقضیه درست باشند، و هم می‌توان مثالهایی پیداکرد که برای آنها این دو قضیه نادرست باشند، ساده‌ترین مثالها را می‌توان این طور ساخت. $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ را، دو مجموعهٔ نقطه‌ها در صفحه فرض کنید. گزارهٔ A را اینطور انتخاب می‌کنیم: «نقطهٔ M متعلق است به مجموعهٔ $\mathcal{A}$» و گزارهٔ B

را به این ترتیب: *نقطهٔ* M متعلق است به مجموعهٔ $\mathcal{B}$». دراینصورت، قضیهٔ ۱ به این معناست که مجموعهٔ $\mathcal{A}$ به طور کامل در داخل مجموعهٔ $\mathcal{B}$ است. قضیهٔ ۲ یعنی که مجموعهٔ $\mathcal{B}$ عبارتست از متمم* مجموعهٔ $\mathcal{A}$؛ قضیهٔ ۳ یعنی که مجموعهٔ $\mathcal{A}$ عبارتست از متمم مجموعهٔ $\mathcal{B}$ و غیره.

خودتان بقیهٔ قضیه‌ها را تنظیم کنید و نمونه‌هایی برای مجموعه های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رسم کنید که برای آنها این قضیه‌ها درست باشد و نمونه‌هایی که برای آنها این قضیه‌ها نادرست باشد.

مثالهای زیر را، با توجه به شکل ۲۱ به دست آورده‌ایم. خودتان به آن رسیدگی کنید و نتیجه بگیرید که قضیه‌های ۴ و ۵، ممکن است درست و ممکن است نادرست باشد.



شکل ۲۱

روشن است که می‌توان مثالهای دیگری هم پیدا کرد (مثلا، قضیه‌های ۱ و ۶ ازمسألهٔ ۷، و یا قضیه‌های درست دیگری که از هندسه وجبرمی‌دانیم).

حالا نادرستی قضیه‌های ۲، ۳، ۶ و ۷ را ثابت می کنیم.

اگر قضیهٔ ۲ درست باشد، طرح زیر را داریم:

$$A \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۱}} B \xleftarrow{\text{قضیهٔ ۲}} \bar{A}$$

(بنا بر قضیهٔ ۱: اگر A درست باشد، آنگاه B درست است و بنا بر قضیهٔ ۲: اگر A نادرست باشد، آنگاه B درست است). بنابراین، حکم B باید همیشه درست باشد، در حالیکه چنین گزاره‌هایی مورد نظر ما نیست.

اگر قضیهٔ ۳ درست باشد داریم:

$$B \xleftarrow{\text{قضیهٔ ۱}} A \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۳}} \bar{B}$$

یعنی، اگر در حالتی، حکم A درست باشد، درآنصورت دو گزارهٔ B و $\bar{B}$، که متناقض یکدیگرند، درست است و این ممکن نیست. بنابراین، A باید همیشه نادرست باشد، گزاره‌ای که مورد بحث ما نیست.

اگر قضیهٔ ۶ درست باشد، آنگاه

$$\bar{B} \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۶}} A \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۱}} B$$

می بینیم، از این حکم که گزارهٔ B نادرست است، نتیجه می‌شود که B درست

---

* متمم مجموعه‌ای مانند $\mathcal{A}$ در صفحه، به مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی از صفحه گویندکه در $\mathcal{A}$ نیست. مثلامتمم نیم‌صفحهٔ بالا (با به‌حساب آوردن خود محور ox)، عبارتست از نیم صفحهٔ پایین (بدون در نظرگرفتن نقطه‌های محور ox).

است. و این تنها وقتی ممکن است که B همیشه درست باشد.

اگر قضیهٔ ۷ درست باشد، آنگاه $A \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۱}} B \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۷}} A$

به‌زبان دیگر، ازاینکه A درست‌است، نتیجه می‌شود که A نادرست‌است، یعنی A باید همیشه نادرست باشد.

۱۲. الف) ابتدا فرض می کنیم $x \geqslant 0$. در اینصورت $|x| = x$ و به معادلهٔ $3x = 3$ می‌رسیم که ازآنجا $x = 1$. حالا فرض می کنیم $x \leqslant 0$. در اینصورت $|x| = -x$ و به‌دست می‌آید $-x = 3$ که ازآنجا $x = -3$. به‌این ترتیب $x_1 = 1$ و $x_2 = -3$.

ب) به ازای $x \geqslant 0$، به معادلهٔ $x^2 + 3x - 4 = 0$ می‌رسیم که دارای دو ریشهٔ $x_1 = 1$، $x_2 = -4$ است. شرط $x \geqslant 0$، تنها برای ریشهٔ اول صدق می کند.

به ازای $x \leqslant 0$ به دست می‌آید $x^2 - 3x - 4 = 0$ که از آنجا $x_1 = -1$ و $x_2 = 4$ پیدا می‌شود. شرط $x \leqslant 0$ تنهابا ریشهٔ اول می‌سازد.

به این ترتیب، دو جواب معادله عبارتند از $x_1 = 1$ و $x_2 = -1$.

ج) فرض می کنیم $x < -\frac{1}{2}$. دراینصورت $|2x+1| = -(2x+1)$ و $|2x-1| = -(2x-1)$ و به دست می‌آید:

$-(2x+1) - (2x-1) = 2$ و ازآنجا $x = -\frac{1}{2}$.

حالافرض‌می کنیم $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ دراینصورت $|2x+1| = 2x+1$ و $|2x-1| = -(2x-1)$. به‌دست‌می‌آید: $2x+1-(2x-1) = 2$ که یك اتحاد است. یعنی، همهٔ عددهای واقع درفاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2}\right]$ در معادلهٔ ما صدق می کنند.

بالاخره فرض‌می کنیم $x > \frac{1}{2}$، در اینصورت $|2x+1| = 2x+1$ و $|2x-1| = 2x-1$. به دست می‌آید: $(2x+1)+(2x-1) = 2$ و از آنجا $x = \frac{1}{2}$.

به این ترتیب، همهٔ عددهای واقع درفاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2}\right]$، ریشه

های معادله ما را تشکیل می‌دهند.

۱۳. الف) ابتدا x و y را مثبت می‌گیریم، در اینصورت داریم: $|x|=x$ ، $|y|=y$ و $|x+y|=x+y$. در این‌حالت، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

اگر x مثبت و y منفی باشد، بایددوحالت $x+y\geqslant 0$ و $x+y<0$ را به طور جداگانه بررسی کرد. در حالت اول داریم: $|x|=x$ ، $|y|=-y$ و $|x+y|=x+y$. نامساوی به‌صورت $x+y\leqslant x-y$ درمی‌آید که به دلیل منفی بودن y ؛ درست است.

درحالت‌دوم‌داریم: $|x|=x$ ، $|y|=-y$ و $|x+y|=-(x+y)$ و نامساوی به این صورت در می‌آید: $-x-y\leqslant x-y$ که با توجه به مثبت بودن x درست است.

حالتهای دیگر را می‌توان با تغییر علامتهای هر دو عدد x و y به حالتهایی تبدیل کرد که تا اینجا بررسی کردیم. علامتهای هردو عدد x و y را می‌توان تغییر داد، زیرا در اینصورت، نه $|x|$ ، نه $|y|$ و نه $|x+y|$ تغییر نمی‌کنند.

ب) دراینجا هم می‌توان، مثل مسأله الف)، همهٔ حالتهای ممکن را، برای‌وضعی که x و y و $x-y$: روی‌محور عددی‌قرار دارند، بررسی کرد، ولی ما، این‌نامساوی را بااستفاده ازنامساوی $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ ثابت می‌کنیم. $x-y$ را به z نشان می‌دهیم، در اینصوورت $x=y+z$. چون داریم، $|y+z|\leqslant|y|+|z|$ ، بنابراین به روشنی معلوم می‌شود که $|x|\leqslant|y|+|x-y|$.

ج) دراینجا هم می‌توان نامساوی را، با توجه به حالتهای مختلفی که پیش می‌آید، ثابت کرد، ولی ساده‌ترآنست که از نامساوی ب) استفاده کنیم. اگرداشته‌باشیم: $|x|\geqslant|y|$، نامساوی ما به‌همان نامساوی ب) تبدیل‌می‌شود. ولی اگر داشته باشیم: $|x|<|y|$ ، نامساوی ما به اینصورت درمی‌آید: $|x-y|\geqslant|y|-|x|$ و یا $|y-x|\geqslant|y|-|x|$ و این دوباره، همان نامساوی ب) است که درآن تنها نقش x و y با هم عوض شده است.

تبصره. این نامساوی را به طریق عینی‌تری هم می‌توان ثابت کرد. برای این منظور، از این مطلب استفاده‌کنیدکه مقدار $|x|$ برابر است با فاصلهٔ بین x و 0 روی محور عددی، و مقدار $|x-y|$ برابر است با فاصلهٔ بین نقطه‌های x و y [به کتاب «روش مختصاتی و هندسهٔ چهار بعدی» مراجعه‌کنید].

۱۴. الف) نامساوی $\sqrt[n]{1000}<1/001$ را می‌توان به صورت $1000<(1+0/001)^n$ نوشت. طرف راست را،بنا بر دوجمله‌ای نیوتون

بازمی‌کنیم. به دست می‌آید:

$$(1+0/001)^n=1+\frac{n}{1000}+\frac{n(n-1)}{2\times 1000^2}+\cdots+\frac{1}{1000^n}$$

از اینجا دیده می‌شودکه برای $n>1$ ، مقدار $(1+0/001)^n$ ، در هرحال از $1+\frac{n}{1000}$ بیشتر است. بنابراین، وقتی n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، و مثلا $n=1000000$ داریم: $(1+0/001)^n>1000$ ، یعنی، به ازای $n=1000000$ ، نامساوی موردنظر برقرار است.

ب) شبیه حل مسألهٔ الف)، نامساوی را به صورت $n<(1/001)^n$ می‌نویسیم و سمت‌راست تساوی را، بنابر رابطهٔ نیوتون، بازمی‌کنیم. ازآنجا نتیجه می‌شودکه به ازای $n>2$ ، نامساوی زیر برقرار است:

$$(1+0/001)^n>1+\frac{n}{1000}+\frac{n(n-1)}{2\times 1000^2}$$

ولی، وقتی‌که n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، این عبارت از n بیشترمی‌شود. در واقع، اگر داشته باشیم: $n-1>2\times 1000^2$ ، جملهٔ آخر سمت راست نامساوی بالا، از n بزرگتر می‌شود.

بنابراین به‌ازای $n=2\times 1000^2+2$ ، نامساوی $(1/001)^n>n$ برقرار خواهد بودکه از آنجا، نامساوی اصلی هم برقرار خواهد بود:

$$\sqrt[n]{n}<1/001$$

ج) این اتحاد را در نظرمی‌گیریم:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

از اینجا دیده می‌شودکه مقدار $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ، همیشه از $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ کوچکتر است. بنابراین، به ازای $n>25$ ، خواهیم داشت:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{10}$$

د) چنین‌عددی برای n وجود ندارد. زیرا در واقع، از نامساوی $\sqrt{n^2+n}-n<0/1$ به دست می‌آید $\sqrt{n^2+n}<n+0/1$ و

$$n^2+n<(n+0/1)^2=n^2+0/2n+0/01$$

و روشن است که این نامساوی درست نیست، زیرا، برای هر عدد طبیعی n داریم: $n>0/2n+0/01$.

۱۵. الف) ببینیم، وقتی که k از لحاظ قدر مطلق به اندازهٔ کافی بزرگ شود، عبارت $\left|\frac{k^3-2k+1}{k^4-3}\right|$، چه وضعی پیدا می‌کند؟ روشن است که نقش اصلی در صورت کسر با k^3 و در مخرج کسر با k^4 است. بنابراین، به‌ازای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ k، این عبارت تقریباً برابر با $\left|\frac{k^3}{k^4}\right|=\frac{1}{|k|}$ است.

حالا ببینیم که مقدار دقیق عبارت ما، چقدر با مقدار تقریبی آن اختلاف دارد؟ این تبدیلها را انجام می‌دهیم:

$$\left|\frac{k^3-2k+1}{k^4-3}\right|=\left|\frac{k^3\left(1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right)}{k^4\left(1-\frac{3}{k^4}\right)}\right|=$$

$$=\frac{1}{|k|}\cdot\frac{\left|1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right|}{\left|1-\frac{3}{k^4}\right|}$$

$|k|\geqslant 2$ می‌گیریم، در اینصورت

$$\left|1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right|\leqslant 1+\frac{2}{k^2}+\frac{1}{|k|^3}\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}<2$$

$$\left|1-\frac{3}{k^4}\right|\geqslant 1-\frac{3}{k^4}\geqslant 1-\frac{3}{16}>\frac{1}{2}$$

به این ترتیب وقتی که $|k|\geqslant 2$ باشد، داریم:

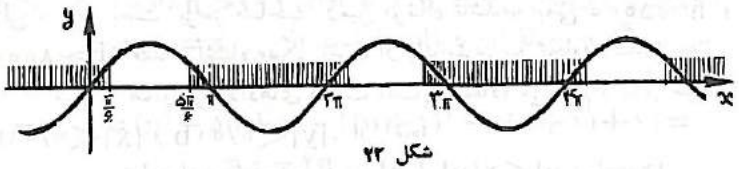
$$\frac{1}{|k|}\cdot\frac{\left|1-\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right|}{\left|1-\frac{3}{k^4}\right|}<\frac{1}{2}\times\frac{2}{\frac{1}{2}}=2$$

بنابراین، به ازای $|k|\geqslant 2$، عبارت ما از ۲ تجاوز نمی‌کند. این می‌ماند که مقدار عبارت را برای ۱ و ۰ و $k=-1$ محاسبه کنیم. در این حالتها، عبارت ما به‌ترتیب برابر با ۱، $\frac{1}{3}$ و ۰ می‌شود. به این ترتیب، عدد مجهول C وجود دارد و مثلا می‌توان فرض کرد:

$$C=2$$

تبصره. با همین روش می‌توان برآورد دقیقتری از عبارت کرد و به‌این نتیجه رسید که حداکثر مقدار آن برابر است با ۱، که به ازای $k=-1$ به دست می‌آید. خودتان این نتیجه‌گیری را به دست آورید.

ب) عبارت ما، از حاصلضرب دو عدد k و $\sin k$ تشکیل شده است، که از آنها، k را می‌توان به دلخواه بزرگ اختیار کرد. بنابراین، اگر عدد دوم (یعنی $\sin k$)، خیلی کوچك نباشد، همهٔ حاصلضربها، عددهایی بزرگ خواهند بود. مثلا، اگر $\sin k$ بزرگتر از $\frac{1}{2}$ باشد، مجموعهٔ نقطه‌های x که



شکل ۲۲

دارای این خاصیت هستند (یعنی برای آنها $\sin x>\frac{1}{2}$)، شامل بینهایت فاصله به‌صورت زیرند:

$$2\pi n+\frac{\pi}{6}<x<2\pi n+\frac{5\pi}{6}$$

که در آنها، n عددی دلخواه و درست است (شکل ۲۲). طول هر فاصله برابر با $\frac{2\pi}{3}$ است. چون این طول از واحد بزرگتر است، در داخل هر کدام از این فاصله‌ها، دست‌کم یك عدد درست وجود دارد. از اینجا نتیجه می‌شود که برای هر عدد C، مجموعهٔ نامتناهی از عددها وجود دارد که برای آنها داریم: $k\sin k>C$. در واقع، برای هر عدد k، که در فاصلهٔ مذکور وجود دارد، نامساوی $\sin k>\frac{1}{2}$ برقرار است. بنابراین، اگر عدد طبیعی k از $2C$ بزرگتر باشد، وضمناً در داخل یکی از فاصله‌های مذکور باشد، خواهیم داشت: $k\sin k>C$ و روشن است که تعداد چنین عددهایی بینهایت است.

۱۶. الف) فرض کنید طول واقعی یکی از ضلعهای مستطیل (برحسب سانتیمتر) برابر a و دیگری برابر b باشد؛ نتیجهٔ اندازه‌گیری خود را به $a+x$ و $b+y$ نشان می‌دهیم. بنابرشرط، مقادیر $|x|$ و $|y|$، از ۱ تجاوز نمی‌کند. در اینصورت، اشتباه در محاسبهٔ محیط برابر است با

$$2(a+x)+2(b+y)-(2a+2b)=2x+2y$$

با توجه به نامساوی مسألهٔ ۱۳ـ الف) می‌توان نوشت:

$$|2x+2y|\leqslant 2|x|+2|y|\leqslant 4$$

اشتباه در محاسبهٔ مساحت برابر است با

$$(a+x)(b+y)-ab=xy+ay+bx$$

از اینجا دیده می‌شود که اشتباه در محاسبهٔ مساحت، به اندازهٔ ضلعها مربوط می‌شود. مثلا، اگر گفتگو ازصفحه‌کاغذی باشد که درآن $a\approx 15$ و $b\approx 20$، مقدار اشتباه از ۳۶ سانتیمتر مربع تجاوز نمی‌کند.

$$|ay+bx+xy|\leqslant a|y|+b|x|+|x|\cdot|y|\leqslant 15+20+1=36$$

ولی، اگر بحث برسر مساحت زمین فوتبال باشد، یعنی $a\approx 5000$ و $b\approx 8000$، مقدار اشتباه ممکن است از یك مترمربع تجاوز کند.

ب) از همان قراردادهای قسمت الف) استفاده می‌کنیم. بنابر شرط، $|x|<0/01a$ و $|y|<0/01b$. از آنجا

$$|2x+2y|\leqslant 2|x|+2|y|\leqslant 0/01(2a+2b)$$

یعنی، اشتباه در محاسبهٔ محیط، از ۱٪ تجاوز نمی‌کند. سپس

$$|ay+bx+xy|\leqslant a|y|+b|x|+|xy|\leqslant$$
$$\leqslant 0/01ab+0/01ba+0/0001ab=0/0201ab$$

یعنی، اشتباه در محاسبهٔ مساحت از ۲/۰۱ درصد و یا در عمل، از ۲٪ تجاوز نمی‌کند.

۱۷. الف) دو جملهٔ مجاور دنباله را مقایسه می‌کنیم.

$$x_n-x_{n+1}=\frac{n^2}{2^n}-\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}=\frac{n^2-2n-1}{2^{n+1}}=\frac{(n-1)^2-2}{2^{n+1}}$$

وقتی‌که $(n-1)^2<2$ باشد (یعنی به‌ازای $n=1, 2$)، این عبارت منفی است، یعنی $x_n<x_{n+1}$. وقتی که $(n-1)^2>2$ باشد (یعنی به ازای $n\geqslant 3$)، این‌عبارت مثبت است، یعنی $x_n>x_{n+1}$. از اینجا x_3 بزرگترین عدد، دراین دنباله است.

ب) این‌مسأله را هم می‌توان، مثل‌مسألهٔ قبل وبا بررسی x_n-x_{n+1}، حل کرد. خودتان این راه را عمل کنید. ما، مسأله را با روش دیگری حل می‌کنیم.

$$x_n=\frac{n}{100+n^2}=\frac{n}{(10-n)^2+20n}=\frac{1}{20+\left(\frac{10}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)^2}$$

مخرج کسراخیر، به‌ازای‌هرمقدار دلخواه n، از ۲۰ کمترنیست، وتنهادرحالتی

که داشته باشیم $\frac{10}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}=0$، برابر ۲۰ می‌شود، (یعنی بـه ازای $n=10$)، $x_{10}=\frac{1}{20}$ بزرگترین عدد دراین دنباله است.

ج) دوجملهٔ متوالی دنباله را مقایسه می‌کنیم:

$$x_n-x_{n+1}=\frac{1000^n}{n!}-\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1000^n}{(n+1)!}(n+1-1000)$$

از اینجا دیده می‌شود که به ازای $n<999$ داریم $x_n<x_{n+1}$، به ازای $x=999$ داریم: $x_n=x_{n+1}$ و به ازای $n>999$ داریم: $x_n>x_{n+1}$. یعنی بزرگترین جملهٔ این دنباله عبارتست از $x_{999}=x_{1000}$.

۱۸. روش اول. داریم:

$$x_n-x_{n+1}=(n^2-5n+1)-[(n+1)^2-5(n+1)+1]=$$
$$=4-2n$$

ازآنجا

به ازای $n<2$ داریم: $x_n-x_{n+1}>0$

به ازای $n=2$ داریم: $x_n=x_{n+1}$

به ازای $n>2$ داریم: $x_n-x_{n+1}<0$

یعنی کوچکترین جملهٔ دنباله عبارتست از $x_2=x_3$.

روش دوم. داریم:

$$x_n=n^2-5n+1=(n-2/5)^2-5/25$$

چون، n عددی است درست، کمترین مقدار $(n-2/5)^2$ به ازای $n=2$ و $n=3$ به دست می‌آید.

ب) هرجمله از این دنباله، برابر است با عکس جملهٔ متناظر آن در مسألهٔ ۱۷ـب). به حل آن مسأله مراجعه‌کنید.

ج) روش اول. چند جملهٔ دنباله را می‌نویسیم:

$$6, 2, -2, 4, 15, 6, 2, 8, \ldots$$

تا همین جا می‌توان گمان برد که کوچکترین جمله، همان $x_3=-2$ است. برای اثبات، x_n را با -2، برای $n>3$ مقایسه می‌کنیم:

$$x_n-(-2)=n+2+5\sin\frac{\pi n}{2}>5+5\sin\frac{\pi n}{2}\geqslant 0$$

روش دوم. دنبالهٔ خود را به سه دنباله تقسیم می‌کنیم و هرکدام را به طور جداگانه، مورد بررسی قرارمی‌دهیم. دنبالهٔ نخست، از جمله‌های‌ردیف زوج تشکیل شده است:

$$x_{2k} = 2k + 5\sin \pi k = 2k$$

دنبالهٔ دوم، از جمله‌های با شماره‌های $n = 4k + 1$ تشکیل شده است:

$$x_{4k+1} = 4k + 1 + 5\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 4k + 6$$

دنبالهٔ سوم، از جمله‌های با شماره‌های $n = 4k - 1$ تشکیل شده است:

$$x_{4k-1} = 4k - 1 + 5\sin\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}\right) = 4k - 6$$

هرسه‌دنباله، تصاعدهای حسابی‌صعودی‌اند و کوچکترین جملهٔ هر کدام ازآنها، نخستین‌جملهٔ آنهاست؛ وکوچکترین عدد از بین این سه جملهٔ نخست، عبارتست از $x_3 = -2$.

۲۱. الف) فاصلهٔ بسته $[a, b]$ را یك تله فرض کنید. این فرض، به معنای آنست که درخارج این‌فاصله، تعداد محدودی از جمله‌های دنباله وجود دارد. اگر این فاصله. ظرف نباشد، باید در داخل این فاصله هم، به تعداد محدودی ازجمله‌های دنباله وجود داشته باشد. ولی، رویهم در تمامی دنباله، تعداد جمله‌ها، نامحدود است. این‌تناقض ثابت‌می‌کند که فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ باید ظرف هم باشد.

ب) مثلا، دنبالهٔ b وفاصلهٔ بستهٔ B ازمسألهٔ ۲۲، جمله‌های اول، سوم، پنجم، ... این دنباله در داخل فاصله و جمله‌های دوم، چهارم، ششم، ... در خارج این فاصله است، بنابراین، این فاصله ظرف هست، ولی تله نیست.

۲۳. الف) مثلا این دنباله

$$1, 3, \frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 2\frac{1}{n}, \ldots$$

ب) چنین دنباله‌ای وجود ندارد. فرض کنیم که برای دنباله‌ای، فاصلهٔ بستهٔ $[0, 1]$، تله باشد. در اینصورت، در خارج این فاصله، تنها تعداد محدودی ازجمله‌های دنباله، می‌تواند وجود داشته باشد. واین به‌معنای آنست که در داخل‌فاصلهٔ بستهٔ $[2, 3]$ هم تعداد محدودی از جمله‌های دنباله، باقی می‌ماند. بنابراین، فاصلهٔ بستهٔ $[2, 3]$ ظرف نیست و به طور بدیهی (مسألهٔ ۲۱ـ الف) را ببینید) تله هم نیست.

۲۴. الف) فاصلهٔ بستهٔ به طول ۱، به هرنحوی که باشد، با یکی از فاصله‌های بستهٔ $[0, 1]$ یا $[9, 10]$ برخورد نخواهد داشت. مثلا، فرض کنید که فاصلهٔ ما، با فاصلهٔ بستهٔ $[0, 1]$، نقطه‌های مشترکی‌نداشته‌باشد. اگر فاصلهٔ ما، یك تله باشد، باید درخارج آن، تعداد محدودی از جمله‌های‌دنباله وجود داشته باشد، و منجمله در فاصلهٔ $[0, 1]$. و این نتیجه، با فرض‌ما، که

فاصلهٔ بستهٔ $[0, 1]$ یك ظرف است، متناقض است.

ب) این دو دنباله را درنظر بگیرید:

$$1)\ 1, 9, \frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 9\frac{2}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 9\frac{n-1}{n}, \ldots$$

$$2)\ 0, 10, \frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 9\frac{1}{n}, \ldots$$

برای دنبالهٔ اول، تله‌ای به‌طول ۹ وجود ندارد (تحقیق کنید که فاصله‌های بستهٔ $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ و $\left[9\frac{2}{3}, 10\right]$ برای این دنباله، ظرف هستند. ازآنجا، با توجه به مسالهٔ الف) ثابت می‌شود که تله‌ای به طول ۹، وجود ندارد).

برای دنبالهٔ دوم، فاصلهٔ بسته $\left[\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}\right]$، یك تله است، زیرا همهٔ جمله‌های این دنباله ـ از جملهٔ سوم به بعد ـ دراین فاصله قراردارد.

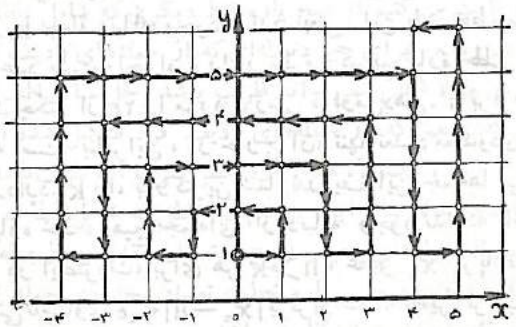
۲۵. الف) دنبالهٔ

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

حتی یك ظرف هم ندارد، زیرا در هرفاصله‌ای به طول I از آن، بیش از $I + 1$ جمله از دنباله وجود ندارد.

ب) ما دنباله‌ای خواهیم ساخت که در بین جمله‌های آن، همهٔ عددهای گویا وجود داشته باشد. چون در هرفاصلهٔ دلخواهی از این دنباله، بینهایت عدد گویا وجود دارد، بنابراین برای چنین دنباله‌ای، هرفاصلهٔ بستهٔ دلخواه، یك‌ظرف است. برای ساختن این دنباله، باید روی‌خانه‌های یك‌کاغذشطرنجی، به ترتیبی که در شکل ۲۳ نشان داده شده است، حرکت کرد.

هربارکه از رأس یك خانه عبور می‌کنیم، یکی از جمله‌های دنباله را



شکل ۲۳

می‌نویسیم . اگر مختصات این رأس (x , y) باشد (از شکل ۲۳ دیده می‌شود که x و y ، عددهایی درست و ضمناً $y>0$ است) ، جملهٔ متناظر دنبالهٔ ما برابر با $\frac{x}{y}$ است. به این ترتیب، به‌چنین دنباله‌ای می‌رسیم.

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{2}{2}, -\frac{2}{3}, \ldots$$

ثابت می‌کنیم که در این دنباله، همهٔ عددهای گویا وجود دارد.

هرعددگویا را می‌توان به صورت $\frac{p}{q}$ نوشت ، که در آن p و q ، عددهایی درست و $q>0$ است. وقتی که روی صفحه، به ترتیبی که در شکل می‌بینیم، حرکت کنیم، به هرحال به نقطه‌ای با مختصات (p , q) می‌رسیم ، که جملهٔ متناظر آن در دنبالهٔ ما، برابر $\frac{p}{q}$ است.

در واقع، دراین دنباله، به هرعددگویا، بینهایت بار برخورد می‌کنیم، زیرا هر عددگویا را، به بینهایت طریق به‌صورت $\frac{p}{q}$ می‌توان نوشت (مثلا $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{6}$ ، $\frac{6}{9}$ ، ...)، با وجود این، نشان دادن راهی برای تعیین شماره ردیف هر عددگویا، در این دنباله، کار ساده‌ای نیست. خودتان آزمایش کنید وشمارهٔ ردیف عددهای $1\frac{1}{3}$ و $-\frac{5}{7}$ را پیدا کنید. صدمین جملهٔ این دنباله، چه عددی است؟

۲۷. الف) پاره خطی به مرکز نقطهٔ a در نظرمی‌گیریم و طول آنرا 2ε می‌نامیم. بنابرتعریف حد، عددی مانند k وجود دارد، به نحوی که برای هر $n>k$ ، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشد . این نامساوی به معنای آنست که نقطهٔ x_n برپاره خط ما قرار دارد. به‌این‌ترتیب، در خارج پاره‌خط ما ، بیش از k جملهٔ دنباله، وجود ندارد. یعنی، این پاره خط، یك تله است .

ب) عدد مثبت دلخواه ε را در نظرمی‌گیریم. پاره خطی به مرکز a و با طولی کوچکتر از 2ε را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. بنابرفرض، این پاره خط، یك تله است. بنابراین ، در خارج آن، تنها تعداد محدودی از جمله‌های دنباله، قراردارد. k را، بزرگترین شمارهٔ ردیف این جمله‌ها می‌گیریم (اگر در خارج پاره خط ، هیچ جمله‌ای از دنباله وجود نداشته باشد ، $k=0$ می‌شود) . در اینصورت، برای هر $n>k$ ، عضو x_n برپاره خط ما قرار می‌گیرد، یعنی نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقراراست: به‌این ترتیب ثابت کردیم که a، حدنبالهٔ $\{x_n\}$ است.

۲۸. الف) پاره خطی به مرکز نقطهٔ a در نظرمی‌گیریم وطول آنرا 2ε نشان می‌دهیم. بنابر تعریف حد، عددی مانند k وجود دارد، به نحوی که به ازای $n>k$ ، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرارباشد. این، به معنای آنست که همهٔ جمله‌های دنباله که شمارهٔ ردیفی بیشتر از k دارند، برپاره خط‌مفروض ما قراردارند.

حالا، پاره‌خطی‌را درنظرمی‌گیریم که شامل‌نقطهٔ a نباشد. فاصلهٔ نقطهٔ a تا نزدیکترین‌انتهای‌پاره خط را ، ε می‌نامیم . بنابر تعریف حد ، عددی مانند k وجود دارد ، به نحوی‌که برای $n>k$ ، نامساوی $|x-a|<\varepsilon$ برقرار باشد. و این به‌معنای آنست‌که به‌ازای $n>k$، عضو x_n ، به‌نقطهٔ a نزدیکتر است تا به‌نزدیکترین‌انتهای پاره خط مفروض، به این ترتیب، همهٔ عضوهائی که شمارهٔ ردیفی بیشتراز k داشته باشند، در خارج این پاره خط قراردارند؛ یعنی ، برپاره خط ما ، نمی‌تواند مجموعه‌ای نامتناهی از جمله‌های دنباله قرارگیرد.

ب) برای دنبالهٔ

$$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots, n^{(-1)^{n-1}}, \ldots$$

هرپاره خط به‌مرکز 0 ، یك ظرف‌است. در واقع، جمله‌های ردیف زوج این دنباله عبارتند از

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2n}$$

و روشن است‌که به سمت صفرمیل می‌کند. به این ترتیب، درهر پاره خط به مرکز نقطهٔ 0 ، مجموعهٔ بینهایت جمله از این دنباله وجود دارد (حل مسألهٔ الف) ببینید). و این ، به معنای آنست که این پاره خط، ظرفی برای دنبالهٔ ماست. حالا: ثابت می‌کنیم که هیچ پاره خط دیگری‌که شامل نقطهٔ 0 نباشد ، ظرف‌نیست. در واقع، برای زیر دنباله‌ای‌که از جمله‌های ردیف زوج تشکیل شده‌است، چنین پاره خطی نمی‌تواند ظرف باشد (حل‌مسألهٔ الف) را ببینید)؛ برای زیر دنباله‌ای هم که از جمله‌های ردیف فرد تشکیل شده است (یعنی ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ...)، اصولا، هیچ پاره خطی‌نمی‌تواند ظرف‌باشد (این‌حکم را خودتان ثابت‌کنید). بنابراین، برهرپاره خطی‌که شامل‌نقطهٔ 0 نباشد، تنها تعداد محدودی از جمله‌های ردیف زوج و تعداد محدودی ازجمله‌های ردیف فرد، وجود دارد ، یعنی برچنین پاره خطی، تعداد محدودی جمله از دنبالهٔ ما قراردارد و در نتیجه، نمی‌تواند ظرف باشد.

به‌این ترتیب، دنبالهٔ $x_n = n^{(-1)^{n-1}}$ و عدد ۰ ، با شرطهای مسالهٔ ۲۸ — ب)می‌سازد. ولی، عدد ۰ ، حداین‌دنباله‌نیست: زیرا، درغیراینصورت می‌بایست برای همهٔ جمله‌های دنباله ، از ردیفی به بعد ، نامساوی $|x_n|<\varepsilon$ برقرار باشد، ولی ، این نامساوی برای هیچکدام از جمله های ردیف فرد صدق نمی کند.

تبصره . دنبالهٔ

$$n^{(-1)^{n-1}}$$

را ، می‌توان ترکیبی از دو دنبالهٔ ساده‌تر دانست:

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$$

این روش ساختن دنباله‌ها، اغلب سودمند است. مثلا ، برای موردی‌که بخواهیم دنباله‌ای بسازیم‌که برای آن، هرکدام از دو فاصلهٔ بستهٔ مفروض ، ظرف باشد (مساله ۲۳— ب) را ببینید)، می‌توان دو دنباله را به هم ترکیب‌کرد‌که برای یکی ازآنها، فاصلهٔ اول و برای دیگری، فاصلهٔ دوم، ظرف باشد.

۲۹. در حل مسالهٔ ۲۸— الف) ثابت‌کردیم که اگر $x_n \longrightarrow a$ ، برای $n \longrightarrow \infty$ ، هیچ فاصلهٔ بسته‌ای که شامل a نباشد، نمی‌تواند ظرف باشد . بنابراین، حکم ما به سادگی، و از طریق برهان خلف ثابت می‌شود. خودتان اثبات را تنظیم کنید.

۳۰. برای اینکه ثابت کنیم دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، دارای حدی برابر عدد a است، باید نشان دهیم که برای هر عدد مثبت ε ، می‌توان عددی مانند k پیدا کرد که‌به‌ازای $n>k$، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرارباشد. اغلب؛ می‌توان دستوری به دست‌آورد‌که k را برحسب ε بیان کند.

الف) $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ؛ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. از آنجا که $|x_n| = \frac{1}{n}$ ، به عنوان k می‌توان $\frac{1}{\varepsilon}$ را انتخاب کرد. در واقع، به ازای $n>\frac{1}{\varepsilon}$ ، نامساوی $|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ برقرار است.

تبصرهٔ ۱ . عدد k، برحسب ε ، به‌صورت یك‌ارزشی به دست‌نمی آید. مثلا دراین مسأله، می‌توان k را برابر $\frac{2}{\varepsilon}$ یا $\frac{1}{\varepsilon}+1$ گرفت (و به‌طورکلی هرعددی‌که بزرگتر از $\frac{1}{\varepsilon}$ باشد). گاهی بهتراست‌که k راخیلی «اقتصادی»

انتخاب نکنیم (که ممکن است با عبارت بسیار پیچیده‌ای برحسب ε بیان شود) و به دنبال عبارت ساده‌تری برویم. مثلا برای اینکه ثابت کنیم $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+0/6n+3/2} = 0$ ، می‌توان از این مطلب استفاده کرد که $x_n < \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n}$ و درنتیجه، k را برابر $\frac{1}{\varepsilon}$ گرفت. و این ، خیلی ساده‌تر از آنست‌که «اقتصادی‌ترین» مقدار را برای k در نظربگیریم که برابراست با

$$k = \sqrt[3]{1/6+\sqrt{2/552-\frac{1/6}{\varepsilon}+\frac{1}{4\varepsilon^2}}} + \sqrt[3]{1/6-\sqrt{2/552-\frac{1/6}{\varepsilon}+\frac{1}{4\varepsilon^2}}}$$

و از حل معادلهٔ درجه سوم زیر به دست‌آمده است:

$$n^3+0/6n+3/2 = \frac{1}{\varepsilon}$$

حالتهایی هم وجود دارد که برای «اقتصادی‌ترین» مقدار k ، اصلا نمی‌توان دستوری پیدا کرد، درحالیکه «با مقداری اضافی» به‌سادگی به‌دست می‌آید

تبصره ۲. روشن‌است‌که اگربرای‌یك‌ε مفروض، بتوان مقدارk راپیدا کرد، برای عددهای بزرگتر k هم می‌توان استدلال را دنبال‌کرد. بنابراین، در تعریف حد، می‌توان k را عددی درست به حساب‌آورد.

ب) $x_n = \frac{3^n-1}{3^n} = 1-\frac{1}{3^n}$ ؛ $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

چون $|x_n-1| = \frac{1}{3^n}$، بنابراین به‌عنوان k می‌توان $\log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ را انتخاب کرد.

ج) اگر از دستور مربوط به مجموع جمله‌های تصاعد هندسی استفاده کنیم، داریم:

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}$$

از اینجا معلوم می‌شود که : $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$ وبه عنوان k هم می‌توان، عدد $\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ را انتخاب کرد.

د) این دنباله حدی ندارد، زیرا، برای هر a و هر ε، نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$، تنها برای تعداد محدودی از ردیفهای n، برقرار است.

ه) $x_n = 1$ حد $n\to\infty$، زیرا $|x_n - 1|$، در اینحالت متحد با صفر و نامساوی $|x_n - 1| < \varepsilon$ برای هر عدد مثبت ε و برای همهٔ مقادیر n برقرار است.

و) جمله‌های ردیف زوج وجمله‌های ردیف فرد را، جدا ازهم بررسی می‌کنیم. برای‌حالت $n = 2m$ داریم: $x_n = \frac{1}{m}$. بنابراین، به‌ازای $m > \frac{1}{\varepsilon}$ (یعنی $n > \frac{2}{\varepsilon}$)، نامساوی $|x_n| < \varepsilon$ برقراراست، وقتی هم که n عددی‌فرد باشد، x_n برابرصفر می‌شود. درنتیجه، نامساوی $|x_n| < \varepsilon$ برای همهٔ جمله‌های ردیف‌فردهم صدق می‌کند. به این ترتیب؛ $x_n = 0$ حد $n\to 0$، و برای k می‌توان عدد $\frac{2}{\varepsilon}$ را انتخاب کرد.

ز) بنابر دستور مجموع جمله‌های تصاعد هندسی داریم:

$$\overbrace{0/22000 2}^{n \text{ مرتبه}} = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{2}{10^n} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

ازآنجا $x_n = \frac{2}{9}$ حد $n\to\infty$، و به‌عنوان k می‌توان $\log\left(\frac{2}{9\varepsilon}\right)$ را انتخاب کرد (و یا به‌طور ساده $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$؛ تبصرهٔ مربوط به حل مسالهٔ الف)را ببینید).

ح) حدی وجود ندارد. در واقع، وقتی که n برابر $(180m)$ درجه باشد، $x_n = 0$ می‌شود واگر $n = 90^\circ + 360^\circ m$، درآنصورت $x_n = 1$، اگر این دنباله بخواهد، حدی مساوی a داشته باشد، باید با آغاز از ردیفی مثل n_0، مثلا نامساوی $|x_n - a| < \frac{1}{4}$ برقرار باشد. از آنجا باید به نوبهٔ خود، برای $n_1 > n_0$ و $n_2 > n_0$ هم، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| \leqslant |x_{n_1} - a| + |a - x_{n_2}| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ولی، در دنبالهٔ ما، جمله‌هایی وجود دارد (هر قدر که در دنباله جلو برویم)، که مقدار آنها از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است.

ط) چون $|\cos n^\circ| \leqslant 1$، بنابراین $|x_n| \leqslant \frac{1}{n}$. از آنجا، معلوم می‌شود که، $x_n = 0$ حد $n\to\infty$ و برای هم می‌توان $\frac{1}{\varepsilon}$ را انتخاب کرد.

ی) حد وجود ندارد. اگر a، حد دنباله باشد، باید ازجمله‌ای به‌بعد، مثلا نامساوی $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ برقرار باشد. دراینصورت باید داشته باشیم:

$$|x_n - x_{n+1}| \leqslant |x_n - a| + |a - x_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

درحالیکه، تفاضل هردو جملهٔ متوالی از دنبالهٔ ما، بزرگتر از واحد است.

۳۱. فرض می‌کنیم، دوعدد متفاوت a و b، حدیك دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشند. فاصلهٔ بین این دو نقطه را 2ε می‌نامیم. اگر a، حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد، باید عددی‌مثل k_1 پیداشود، به‌نحوی که‌به‌ازای $n > k_1$، نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ برقرار باشد. به همین ترتیب، اگر b حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد، عددی مثل k_2 وجود دارد، به نحوی که به ازای $n > k_2$ داشته باشیم: $|x_n - b| < \varepsilon$. بنابراین، اگرشمارهٔ ردیف n، از k_1 و k_2 بزرگتر باشد، باید هردونامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ و $|x_n - b| < \varepsilon$ درست باشد. و این ممکن نیست، زیرا $|a - b| = 2\varepsilon$.

۳۲. الف) ثابت می‌کنیم که هرپاره خط به مرکز نقطهٔ a، یك ظرف است. طول پاره خط را برابر 2ε می‌گیریم. باید ثابت کنیم که بینهایت‌جمله، از دنبالهٔ ما، در این پاره خط افتاده است، یعنی، نامساوی $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$ برقرار است. اگراینطور نباشد، به معنای آنست‌که برپاره خط ما، تنهاتعداد محدودی، ازجمله‌های دنباله قرارگرفته است.

k را، بزرگترین شمارهٔ ردیف این جمله‌ها فرض‌می‌کنیم (اگر برپاره خط ما، هیچ‌جمله‌ای ازدنباله نباشد، درآنصورت $k = 0$). دراینصورت، همهٔ جمله‌هائی که اندیس بزرگتر از k دارند، درخارج پاره خط قرارمی‌گیرند. ولی، این‌مطلب: تعریف نقطهٔ حدی را نقض می‌کندکه: برای هر k، اندیسی مانند $n > k$ پیدا می‌شود، به‌نحوی که‌برای آن داشته‌باشیم: $|x_n - a| < \varepsilon$، یعنی x_n در داخل‌پاره خط واقع‌است.

ب) حالا، عکس قضیه را در نظرمی‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که a نقطهٔ حدی دنباله نباشد. این به معنای آنست‌که برای عددی مانند ε و عددی مانند k، اندیسی‌مثل $n > k$ پیدانمی‌شود که‌برای‌آن‌نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ برقرارباشد. به‌زبان دیگر، برپاره خطی به‌مرکز نقطهٔ a، تنها تعدادمحدودی

(که از k تجاوز نمی‌کند) ازجمله‌های دنباله قراردارد. به این ترتیب، نقض فرض را به‌دست آوردیم که بنابر آن، هر پاره خطی به مرکز نقطهٔ a، برای $\{x_n\}$ ظرف است، یعنی شامل بینهایت جمله از دنبالهٔ ماست.

۳۳. روش اول. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. برای عدد مثبت و مفروض ε، عددی‌مثل k وجود دارد، به‌نحوی که به ازای هر $n>k$، این‌نامساوی برقرار باشد.

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

حال، عدد دلخواه k را در نظربگیرید. اندیس n را طوری انتخاب می‌کنیم که از k_0 و k_1 بزرگترین باشد. می‌بینیم که نامساویهای مورد نظرما برقرار است:

$$n>k \text{ و } |x_n - a| < \varepsilon$$

روش دوم. این‌مسأله، نتیجه‌ای ازحل‌مسأله‌های ۲۷ـ الف)، ۲۱ـ الف) و ۳۲ـ ب) است.

۳۴. الف) دنبالهٔ $x_n = \frac{n+1}{n}$: حدی برابر ۱ دارد. یعنی، عدد ۱، نقطهٔ حدی برای این دنباله است (مسألهٔ ۳۳ را ببینید)، و دنباله، نقطه‌های حدی دیگری ندارد (مسأله‌های ۲۸ـ الف) و ۳۲ـ الف) را ببینید).

ب) روشن‌است که نقطه‌های $+1$ و -1، نقطه‌های حدی برای‌دنبالهٔ $x_n = (-1)^n$ هستند. برای هرنقطهٔ دیگر a، می‌توان چنان پاره خطی به مرکز a ساخت، که درآن، حتی یکی از جمله‌های دنباله، وجود نداشته‌باشد. به این ترتیب، دنبالهٔ ما، نقطهٔ حدی دیگری ندارد.

ج) چون تابع $\sin x^\circ$، دورهٔ تناوبی برابر ۳۶۰ درجه دارد، دراین دنباله، به‌هرکدام ازعددهای ۰، $\pm\sin 1^\circ$، $\pm\sin 2^\circ$، ...، $\pm\sin 89^\circ$ و ± 1، بینهایت مرتبه برخورد می‌کنیم. بنابراین، هرکدام از این نقطه‌ها، یك نقطهٔ حدی برای دنباله‌اند. اگرعدد a، برهیچکدام از این ۱۸۱ عدد منطبق نباشد، می‌توان پاره خطی به‌مرکز a، چنان ساخت که شامل حتی یکی از جمله‌های دنباله نباشد. (برای این منظور، کافی است طول پاره خط را کوچکتر از فاصلهٔ نقطهٔ a تا نزدیکترین عدد به ازآن ـ از این ۱۸۱ عدد ـ بگیریم.) بنابراین، نقطه‌های حدی دیگری دراین دنباله وجود ندارد.

د) بهتر است که این دنباله را، به صورت ترکیبی از دو دنبالهٔ $y_n = \frac{1}{2n-1}$ و $z_n = 2n$ درنظربگیریم. دنبالهٔ اول، دارای‌یك‌نقطه حدی،

یعنی ۰، است، و دنبالهٔ دوم، نقطهٔ حدی ندارد. (این دو حکم را خودتان ثابت‌کنید.) وحالا ثابت‌می‌کنیم که نقطهٔ a، وقتی وتنها وقتی، نقطهٔ حدی‌برای دنباله اصلی است که دست‌کم، برای یکی از دو دنبالهٔ $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$، نقطه حدی باشد. در واقع، اگر از نتیجه مسألهٔ ۳۲ استفاده کنیم، این باقی‌می‌ماند که حکم کاملا روشن زیر را ثابت‌کنیم، هرپاره خط، وقتی وتنها وقتی، برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ ظرف است که دست‌کم برای یکی از دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ ظرف باشد.

تبصره. به همین‌ترتیب، می‌توان قضیهٔ کلی‌تری را هم ثابت‌کرد: اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ از ترکیب تعداد محدودی دنباله‌های $\{y_n\}$، $\{z_n\}$، ...، $\{l_n\}$ تشکیل شده باشد، در اینصورت "مجموعهٔ نقطه‌های حدی برای $\{x_n\}$، از اجتماع" مجموعه‌های نقطه‌های حدی برای $\{y_n\}$، $\{z_n\}$، ...، $\{l_n\}$ بدست‌می‌آید.

و) اگرعدد a درشرط $0 \leqslant a \leqslant 1$ صدق کند، روی هرپاره‌خطی به‌مرکز a، بینهایت جمله از دنبالهٔ ما قراردارد. در واقع، اگرطول پاره خط مساوی 2ε باشد، برای هر $n > \frac{1}{\varepsilon}$، بین گروه‌جمله‌های $\frac{1}{n}$، $\frac{2}{n}$، ...، $\frac{n-1}{n}$، دست‌کم یکی، برپاره خط ما قرار دارد. اگرهم $a<0$ یا $a>1$ باشد، می‌توان پاره خطی به مرکز نقطهٔ a ساخت، به نحوی که شامل حتی یکی ازجمله‌های‌دنباله نباشد.

بنابراین، همهٔ نقطه‌های واقع در فاصلهٔ بستهٔ $[0, 1]$، نقطه‌های حدی هستند، و به جزآنها، نقطهٔ حدی دیگری وجود ندارد.

۳۵. الف) فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حدی مساوی x_0 باشد. فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ را به مرکز نقطهٔ x_0 در نظرمی‌گیریم. بنابر تعریف حد، و با آغاز از ردیفی به بعد، نامساوی $|x_n - x_0| < \frac{b-a}{2}$ برقرار است. یعنی، در بیرون پاره خط، تنها تعداد محدودی از جمله‌های دنباله وجود دارد. x_k را بزرگترین این‌جمله‌ها، ازلحاظ قدر مطلق، می‌گیریم. C را بزرگترین، از عددهای $|a|$، $|b|$ و $|x_k|$ در نظرمی‌گیریم. در این صورت، برای هر عضوی ازدنباله، نامساوی $|x_n| \leqslant C$ درست‌است. در واقع، اگر x_n برپاره خط $[a, b]$ قرارگرفته باشد، $|x_n|$ نمی‌تواند بزرگتر از عددهای $|a|$ یا $|b|$ (هرکدام که بزرگترند) باشد. و اگر x_n برپاره خط $[a, b]$ واقع نباشد، در این صورت داریم: $|x_n| \leqslant |x_k|$ (زیرا x_k در بین جمله‌هائی از دنباله، که بر $[a, b]$ واقع نباشند، ازلحاظ قدر مطلق از همه بزرگتربود). در نتیجه $|x_n| \leqslant C$.

ب) دنباله‌ای که در مسألهٔ ۲۲ـ b داده شده است ، کرانه‌دار است ، زیرا $|x_n| \leqslant ۲$. ثابت می‌کنیم که این دنباله‌دارای حد نیست . به سادگی معلوم می‌شود که پاره خطهای $\left[۰ , \frac{۱}{۴}\right]$ و $\left[۱ , ۱\frac{۱}{۴}\right]$ برای‌دنبالهٔ $\{x_n\}$ ظرف هستند. فاصلهٔ بین‌این پاره خطها ، برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

از اینجا نتیجه می‌شود (حل مسألهٔ ۲۴ـ الف) را ببینید) ، که برای این دنباله، تله‌ای کوچکتر از $\frac{۳}{۴}$ وجود ندارد . ولی اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد بود، می‌بایستی بتوان تله‌ای که طول‌آن به دلخواه کوچك باشد، پیدا کرد. بنابراین حد وجود ندارد.

روشن است که می‌توان طرح حل این مساله را ، بدون استفاده از اصطلاح‌های «تله» و «ظرف» ریخت (حل . مساله‌های ۳۰ـ ح) و ۳۰ـ ی) را با هم مقایسه کنید)، که آن را به عهدهٔ خودتان می‌گذاریم .

۳۶. الف) C را عددی دلخواه می‌گیریم. برای‌هر $n > C$، نامساوی $|x_n| > C$ برقراراست. بنابراین دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌سمت بی نهایت میل‌می‌کند.

ب) شبیه حالت الف) حل می‌شود.

ج) دنباله کرانه‌دار نیست، زیرا برای هرعدد مثبت C، اندیسی مثل n وجود دارد، به‌نحوی که $|x_n| > C$ باشد (کافی است عدد زوجی بزرگتراز C را انتخاب کنیم). ولی این دنباله به سمت بی‌نهایت میل نمی‌کند، زیرا نامساوی $|x_n| > ۱$ ، برای هیچ کدام از جمله‌های ردیف فرد دنباله صادق نیست.

د) C راعدد دلخواهی‌می گیریم. برای‌هر $n > C^۲$، نامساوی $|x_n| > C$ برقرار است. درنتیجه به‌ازای $n \to \infty$ داریم $x_n \to \infty$.

ه) ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ کرانه‌دار است. به‌طور دقیق‌تر، ثابت می‌کنیم $|x_n| \leqslant ۵$. چون $x_n > ۰$ ، پس $|x_n| = x_n$، و ما باید ثابت کنیم که $x_n \leqslant ۵$. تساوی‌های زیر این مطلب را روشن می‌کند:

$$۵ - x_n = ۵ - \frac{۱۰۰n}{۱۰۰ + n^۲} = \frac{۵}{۱۰۰ + n^۲}(۱۰۰ + n^۲ - ۲۰n) = \frac{۵(۱۰ - n)^۲}{۱۰۰ + n^۲} \geqslant ۰$$

۳۷. تنها دونمونه را برای بحث انتخاب می‌کنیم.

۱) ثابت می‌کنیم که شرطهای ۱) در هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ صدق می‌کند.

درواقع باید ثابت کنیم که عدد مثبتی مثل ε، عدد k و اندیس $n > k$ پیدا می‌شود، به‌نحوی‌داشته‌باشیم: $|x_n - a| < \varepsilon$. به‌عنوان ε، عدد $|x_۱ - a| + ۱$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $k = ۰$ ، $n = ۱$. دراین صورت، شرط موردنظر برقرار است.

۶) ثابت می‌کنیم که شرطهای ۶) به‌معنای آنست که عدد a، حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ نیست. در واقع، گزارهٔ «a عبارتست‌ازحد دنبالهٔ $\{x_n\}$» به‌این‌معناست که برای هر $\varepsilon > ۰$، عددی مثل k می‌توان پیدا کرد که برای هر $n > k$، نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ برقرار باشد. نفی این حکم را می‌توان اینطور بیان کرد: «نه برای هر $\varepsilon > ۰$ ، عددی مثل k پیدا می‌شود که برای هر $n > k$ ، نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ برقرار باشد».

این‌عبارت رامی‌توان اینطور تنظیم کرد: «برای بعضی از مقادیر $\varepsilon > ۰$، عددی‌مثل k پیدانمی‌شود که به‌ازای‌هر $n > k$، نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ برقرار باشد». و این عبارت را هم‌می‌توان به‌این صورت درآورد: «عدد $\varepsilon > ۰$ پیدا می‌شود که برای هر k ، و نه برای هر $n > k$ ، نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ برقرار است». بالاخره این عبارت را می‌توان چنین بیان کرد: «عدد $\varepsilon > ۰$ پیدا می‌شود، که برای هر k ، می‌توان $n > k$ را پیداکرد به‌نحوی که داشته باشیم: $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$ ».

وبه‌این‌ترتیب، درست به شرطهای ۶) می‌رسیم. به‌این نکته توجه‌کنید که این شرطها را می‌توان از تعریف حد ، به‌ترتیب زیر ، به دست آورد:

۱) به‌جای «پیدا می‌شود ... به‌نحوی که» ، جملهٔ «برای هر» را قرار دهید ؛

۲) به‌جای «برای هر»، جملهٔ «پیدا می‌شود ... به‌نحوی که» را قرار دهید ؛

نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ را به‌نامساوی متضاد آن $|x - a| \geqslant \varepsilon$ تبدیل کنید.

این قاعده را می‌توان برای همهٔ شرطهای دیگرهم به‌کار برد. تحقیق کنید که برای هرشرط، نفی آن‌را می‌دهد.

۳۸. اگر علامت‌ها با + آغاز شود، به‌معنای آنست‌که همهٔ جمله‌های دنباله برابر است با a. بنابراین، ترکیب بقیهٔ علامت‌ها معین می‌شود: a حد دنباله است و a نقطهٔ حدی آنست، دنباله کرانه‌دار است وبه‌سمت بی‌نهایت میل نمی‌کند.

حالا ترکیبی از علامت‌ها درنظر می‌گیریم که با «+ ـ» آغاز شده باشد؛ و این به‌معنای آنست که دنباله به سمت a میل می‌کند. دراین صورت علامت‌های دیگر ترکیب معلوم است: a، نقطهٔ حدی دنباله است (مسألهٔ ۳۳): دنباله کرانه‌دار است (مسالهٔ ۳۵ـ الف) وبه‌سمت بی‌نهایت میل‌نمی‌کند.

همچنین ترکیبی را انتخاب می‌کنیم که به $+$ ختم شده باشد. دراین حالت، دنباله به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و همین موضوع تکلیف سایر علامت‌ها را روشن می‌کند: به‌طور اتحادی با a برابر نیست، به سمت a میل نمی‌کند، a نقطهٔ حدی آن نیست و کرانه‌دارهم نیست.

بقیهٔ ترکیب‌ها دارای جمله اول و دوم و پنجم منفی هستند. دراین‌حالت، برای جمله‌های سوم وچهارم هرعلامتی را می‌توان قرارداد. مثال‌های مربوطه دربخش «پاسخ و راهنمائی» داده شده است.

۳۹. دربخش «پاسخ و راهنمائی»، نمونهٔ دنباله‌هائی داده شده است که حد دارند و درآنها یا بزرگترین‌جمله، یاکوچکترین جمله‌ویا هردوی‌آنها وجود دارد. این‌باقی می‌ماند که ثابت‌کنیم دنباله‌ای وجود ندارد که حد داشته باشد، ولی نه‌بزرگترین ونه‌کوچکترین جمله نداشته باشد.

فرض کنیددنبالهٔ $\{x_n\}$، دارای‌جملهٔ بزرگتر نباشد. ثابت می‌کنیم که‌در اینصورت می‌توان‌ازدنبالهٔ $\{x_n\}$، یك زیردنبالهٔ صعودی‌جداکرد. x_1 ، جملهٔ اول دنباله را درنظر می‌گیریم. چون x_1 ، بزرگترین جمله نیست ، جمله‌ای مثل x_{n_1} وجود داردکه ازآن بزرگتر باشد: $x_{n_1} > x_1$. این جملهٔ x_{n_1} نمی‌تواند از همهٔ جمله‌های بعداز خود در دنبالهٔ بزرگتر باشد (زیرا درغیر اینصورت، بزرگترین جمله از n_1 جملهٔ اول دنباله، بزرگترین جمله درتمام‌دنباله خواهد بود)، بنابراین اندیسی مثل $n_2 > n_1$ پیدا می‌شود به‌نحوی که داشته باشیم: $x_{n_2} > x_{n_1}$. به‌همین‌ترتیب، جملهٔ x_{n_2} هم نمی‌تواند ازهمهٔ جمله‌های بعداز خودش، بزرگتر باشد وغیره. یك زیر دنبالهٔ صعودی نامتناهی به‌دست‌می‌آید:

$$x_1 < x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$$

همچنین، اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای کوچکترین جمله نباشد، می‌توان یك زیر دنبالهٔ نزولی نامتناهی ازآن بیرون‌کشید:

$$x_1 > x_{m_1} > x_{m_2} > \cdots > x_{m_k} > \cdots$$

اختلاف x_{n_1} و x_{m_1} را ε می‌گیریم. دراینصورت برای هر $k > 1$ داریم:

$$x_{n_k} - x_{m_k} > x_{n_1} - x_{m_1} = \varepsilon$$

از اینجا نتیجه می‌شود (مسالهٔ ۳۰ـ ح) یا ۳۶ـ ب) را ببینید) ، که دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد نیست.

۴۰. اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ ویا زیر دنباله‌ای ازآن، دارای بزرگترین جمله نباشند ، همانطورکه درحل مسالهٔ ۳۹ ثابت کردیم ، می‌توان یك زیر دنبالهٔ صعودی نامتناهی از $\{x_n\}$ جدا کرد . بنابراین حالتی را در نظرمی‌گیریم که

درآن هرزیر دنباله دارای بزرگترین‌جمله باشد . x_{n_1} را بزرگترین جملهٔ دنباله؛ x_{n_2} را بزرگترین، دربین همهٔ جمله‌هائی که بعد از x_{n_1} قرارگرفته‌اند، x_{n_3} رابزرگترین،دربین همهٔ جمله‌های بعداز x_{n_2} وغیره فرض‌می‌کنیم. درستی نامساوی‌زیر روشن‌است:

$$x_{n_1} > x_{n_2} > \cdots > x_{n_k} > \cdots$$

به‌این ترتیب، دراین حالت هم می‌توان از دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، زیردنباله‌ای یکنوا جداکرد.

۴۱. این دنباله را درنظرمی‌گیریم:

$$1/4 \; ; \; 1/41 \; ; \; 1/414 \; ; \; 1/4142 \; ; \; \cdots$$

دراین دنباله، جملهٔ x_n عبارتست ازمقدارتقریبی (نقصانی) عدد $\sqrt{2}$ بادقت‌تا $\frac{1}{10^n}$.

از تعریف دنبالهٔ $\{x_n\}$ نتیجه می‌شودکه

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$$

(به ازای $n > \log\frac{1}{\varepsilon}$ ، نامساوی $|x_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$ برقراراست). چون‌عدد $\sqrt{2}$ گنگ است و چون دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌تواند تنها یك حد داشته باشد ، بنابراین هیچ عددگویائی، حد این دنباله نیست.

تبصره دراین اثبات از این مطلب استفاده‌کردیم‌که عددی حقیقی وجود دارد که مجذور آن برابر ۲ باشد و ضمناً می‌توان آن را به صورت یك کسر دهدهی نامتناهی نوشت. می‌توان استدلال را تغییر داد، به نحوی‌که در آن تنها عددهای حقیقی نقش‌داشته باشند. برای این منظور باید x_n را به عنوان بزرگترین عددی تعریف کردکه بتوان آن را به صورت‌کسر دهدهی با n رقم بعد از ممیز نوشت و مجذور آن از ۲ کوچکتر باشد. بعد ازآن باید ثابت‌کرد که اگر عدد x_n به سمت عددی مثل a میل‌کند، خواهیم داشت:

$$a^2 = 2$$

اندیشهٔ اصلی این اثبات چنین است:

عدد x_n دارای این خاصیت است‌که x_n^2 از ۲کوچکتر، ولی $\left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ از۲ بزرگتر است. بنابراین به ازای اندیس‌های بزرگ n ، عدد x_n^2 به۲خیلی‌نزدیك می‌شود. یعنی x_n^2 و a^2 هم به یکدیگر نزدیك می‌شوند. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که اختلاف a^2 و۲، به‌دلخواه کوچك می‌شود. ولی‌این‌اختلاف، مقدار ثابتی است و به n بستگی ندارد. بنابراین $a^2 = 2$. این باقی می‌ماندکه ثابت‌کنیم، عددگویای a وجود ندارد، به نحوی‌که مجذور آن‌برابر ۲ باشد. سعی‌کنید خودتان از روی طرحی‌که در اینجا برای اثبات‌داده

شد، اثبات دقیق حکم را پیدا کنید.

۴۲. دنبالهٔ کرانه‌داری را درنظرمی گیریم. ازآن یك‌زیردنبالهٔ نامتناهی یکنوا جدا می کنیم (حل مسألهٔ ۴۰ را ببینید). این‌زیر دنباله کرانه‌دار و بنا بر اصل بولتانو ـ وایرشتراس دارای حد است. ثابت می کنیم که این حد، عبارتست ازنقطهٔ حدی برای دنبالهٔ اصلی.

در واقع، هرپاره خط به مرکز این نقطه، یك تله برای زیر دنبالهٔ انتخابی است. بنابراین روی آن بی نهایت جمله از دنبالهٔ اصلی وجوددارد، یعنی این پاره خط، برای دنبالهٔ اصلی یك ظرف است. حالا دیگرحکم مورد نظر از قضیه ۳۲، نتیجه می‌شود.

۴۳. a) ثابت می کنیم که $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(x_n+y_n)=a+b$. باید تحقیق کنیم که به ازای هرعدد مثبت ε، عددی مثل k پیدا می‌شود که برای همهٔ مقادیر $n>k$ داشته‌باشیم: $|x_n+y_n-a-b|<\varepsilon$.

چون بنابرشرط داریم: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}x_n=a$، عددی مثل k_1 وجود دارد که برای $n>k_1$ داشته‌باشیم: $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. به‌همین‌ترتیب از $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}y_n=b$، نتیجه می گیریم که عددی مثل k_2 وجود دارد که برای $n>k_2$ داشته باشیم: $|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$. فرض کنیم که k بزرگترین عدد از بین دوعدد k_1 و k_2 باشد. دراین صورت برای $n>k$ خواهیم داشت:

$$|x_n+y_n-a-b|\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|<\varepsilon$$

b) اثبات شبیه حالت a) است.

c) ثابت می کنیم که: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$. برای این منظور از این اتحاد، استفاده می کنیم:

$$x_ny_n-ab=x_ny_n-bx_n+bx_n-ab=x_n(y_n-b)+b(x_n-a)$$

چون دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد است، بنابراین کرانه‌دار است (مسالهٔ ۳۵ـ الف) را ببینید)، یعنی عددی مثل C پیدا می‌شود که برای هر n داشته باشیم: $|x_n|\leqslant C$. عدد مثبتی مثل ε را درنظرمی گیریم. چون $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}n=a$، عددی مثل k_1 وجود دارد به نحوی که برای $n>k_1$، نامساوی $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2|b|}$ برقرار باشد. به همین ترتیب، عددی هم مثل k_2 پیدا می‌شود که برای $n>k_n$، نامساوی $|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2C}$ برقرار باشد.

بزرگترین عدد از بین k_1 و k_2 را k می نامیم. روشن است که برای $n>k$، خواهیم داشت:

$$|x_ny_n-ab|=|x_n(y_n-b)+b(x_n-a)|\leqslant$$
$$\leqslant|x_n|\cdot|y_n-b|+|b|\cdot|x_n-a|<C\cdot\frac{\varepsilon}{2C}+|b|\cdot\frac{\varepsilon}{2|b|}=\varepsilon$$

d) ابتدا فرض می کنیم $b\neq 0$ باشد. ثابت می کنیم که در این حالت $\text{حد}\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ برابر $\frac{1}{b}$ است. برای‌مشخص بودن وضع‌فرض می کنیم: $b>0$. چون $y_n\longrightarrow b$، عددی مثل k_1 پیدا می‌شود که برای $n>C_1$، نامساوی $|y_n-b|<\frac{b}{2}$ برقرار باشد. از آنجا

$$y_n-b>-\frac{b}{2} \text{ یا } y_n>\frac{b}{2} \text{ و یا } \frac{1}{y_n}<\frac{2}{b}$$

عدد مثبت ε را در نظرمی گیریم. عددی مثل k_2 وجود دارد که برای $n>k_2$، نامساوی $|y_n-b|<\frac{\varepsilon b^2}{2}$ برقرار باشد. بزرگترین عدد از بین دوعدد k_1 و k_2 را، k می نامیم. دراین‌صورت برای $n>k$ به‌دست‌می‌آید.

$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|y_n-b|}{|y_n|\cdot|b|}<\frac{2}{b}\cdot\frac{\varepsilon b^2}{2}\cdot\frac{1}{b}=\varepsilon$$

ثابت کردیم که $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{b}$. حالا ازحکم‌مسالهٔ ۳۵ـc) استفاده‌می کنیم.

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{x_n}{y_n}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}x_n\cdot\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{1}{y_n}=\frac{a}{b}$$

تبصره ممکن است بعضی از جمله‌های دنبالهٔ $\{y_n\}$ به‌سمت صفر میل‌کنند. در چنین‌صورتی، بیان $\frac{1}{y_n}$ معنا ندارد. با وجود این، چنین وضعی می‌تواند برای تعداد محدودی از جمله‌ها پیش آید. درواقع، از اندیسی به‌بعد، نامساوی $|y_n-b|<|b|$ برقرار است که از آنجا $y_n\neq 0$ می‌شود.

اکنون به‌حالت $b=0$ می‌پردازیم ممکن است پیش آید که تعداد نامحدودی از جمله‌های دنبالهٔ $\{y_n\}$ (ویا حتی همهٔ جمله‌های آن از ردیفی به‌بعد)، به‌سمت صفرمیل کنند. در چنین صورتی بیان $\frac{x_n}{y_n}$، معنای خود را از دست می‌دهد و ما نمی‌توانیم به‌بررسی دنبالهٔ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ بپردازیم.

ثابت می‌کنیم که اگر $a\neq 0$ باشد، حتی در حالتی که که همهٔ y_n-ها مخالف صفر باشند، دنبالهٔ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ دارای حد نیست. درواقع، اگر c را عددی دلخواه فرض کنیم، عددی مثل k_1 پیدا می‌شود که برای $n>k_1$ داشته باشیم: $|y_n|<\frac{|a|}{2(|c|+1)}$ (زیرا به‌ازای $n\to\infty$ داریم: $y_n\to 0$)؛ همچنین عددی مثل k_2 پیدا می‌شود که برای $n>k_2$ داشته‌باشیم: $|x_n-a|<\frac{|a|}{2}$. k را بزرگترین عدد از دوعدد k_1 و k_2 می‌گیریم. در این صورت برای $n>k$ به‌دست می‌آید.

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right|>\frac{|a|}{2}\cdot\frac{2(|c|+1)}{|a|}=|c|+1$$

به این ترتیب، عدد c، حد دنبالهٔ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ نیست.

بالاخره درحالت $a=b=0$، دنبالهٔ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$، ممکن است دارای حد باشد یا نباشد (مسألهٔ ۵۳ را ببینید).

۴۴. a) استدلال را با برهان خلف انجام می‌دهیم. اگر: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(x_n+y_n)$ وجود داشته باشد، بنابرمسالهٔ ۴۳–b)، باید دنبالهٔ $\{y_n\}$ هم دارای حدی باشد، زیرا داریم: $y_n=(x_n+y_n)-x_n$؛ درحالی که بنابر شرط مساله $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, y_n$ وجود ندارد. تناقضی که به‌دست می‌آید، به‌معنای آن است که $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(x_n+y_n)$ وجود ندارد.

b) نمونه‌های

$$x_n=\frac{n-1}{n},\ y_n=(-1)^n;\ x_n=\frac{1}{n},\ y_n=(-1)^n$$

نشان می‌دهند که به هردو حالت می‌توان برخورد کرد.

۴۵. هر دو حالت ممکن است. این مطلب از نمونه‌های زیر روشن می‌شود:

۱) $x_n=(-1)^n,\ y_n=(-1)^n$;

۲) $x_n=(-1)^n,\ y_n=n$

۴۶. عدد مثبت ε را درنظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم که از ردیفی به

بعد، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار است. $|y_n-a|<\varepsilon$ بنا بر فرض، عددهای k_1 و k_2 وجود دارند که برای $n>k_1$ و $n>k_2$، به ترتیب نامساوی‌های $|y_n-a|<\varepsilon$ و $|z_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشند. k را بزرگترین عدد ازمیان دوعدد k_1 و k_2 می‌گیریم. در این صورت برای $n>k$، هر دو نامساوی بر قرار می‌شود. حالا به یاد می‌آوریم که بنابر شرط مسأله داریم: $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$. از نامساوی‌های $|y_n-a|<\varepsilon$، $|z_n-a|<\varepsilon$ و $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ نتیجه می‌شود که $|x_n-a|<\varepsilon$ (این حکم‌را خودتان درسه حالت جداگانه $a<y_n$، $y_n\leqslant a\leqslant z_n$ و $a>z_n$ ثابت کنید).

به‌این ترتیب، به‌ازای همهٔ مقادیر $n>k$، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ به دست می‌آید، یعنی $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n=a$

۴۷. الف) بنا به رابطهٔ مجموع درتصاعد هندسی داریم.

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

که ازآنجا به‌دست می‌آید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, S_n=2$$

ب) روشن است که دنبالهٔ

$$S_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{n^2}$$

دنباله‌ای صعودی است. ثابت می‌کنیم که کرانه‌دار است.

از نامساوی $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ نتیجه می‌گیریم:

$$S_n<1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{n(n-1)}=$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$$

به‌این ترتیب به‌ازای همهٔ مقادیر n داریم: $S_n<2$ بنابراین، طبق‌اصل بولتانو – وایرشتراس، نتیجه می‌شود که $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, S_n$ وجود دارد.

بااستفاده از روش‌های ریاضیات عالی، می‌توان ثابت کرد که این حد برابر با $\frac{\pi^2}{6}$ است.

ج) S_{2n} صعودی است، زیرا

$$S_{2(n+1)}-S_{2n}=\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}>0$$

ضمناً S_{2n} کرانه‌دار است، زیرا

$$S_{2n}=1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)-\dots-\left(\frac{1}{4n-5}-\frac{1}{4n-3}\right)-\frac{1}{4n-1}<1$$

به‌این ترتیب $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} S_{2n}$ وجود دارد. این حدرا به a نشان می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که‌عدد a، حددنباله $\{S_n\}$ است. عددمثبت ε را درنظرمی‌گیریم. در این صورت عددی مثل k پیدا می‌شود که برای $2n>k$ نامساوی $|S_{2n}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ برقرار باشد. علاوه برآن برای $2n+1>\frac{1}{\varepsilon}$ ، نامساوی

$$|S_{2n+1}-S_{2n+2}|=\frac{1}{4n+3}<\frac{\varepsilon}{2}$$

برقراراست. بنابراین، اگر n را بزرگترین عدد ازبین دوعدد k و $\frac{1}{\varepsilon}$ بگیریم، خواهیم داشت: $|S_n-a|<\varepsilon$.

ثابت کنید که $a=\frac{\pi}{4}$.

۴۸. دنباله‌های $\{S_n\}$ و $\{S_{n-1}\}$ را درنظر می‌گیریم که درآن داریم:

$$S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$$

اگر رشتهٔ $a_1+a_2+\dots+a_n\dots$ متقارب باشد، هردو دنباله دارای یك حد S خواهند بود. بنابراین (مسألهٔ ۴۳-b را ببینید):

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} a_n=\underset{n\to\infty}{\text{حد}} S_n-\underset{n\to\infty}{\text{حد}} S_{n-1}=S-S=0$$

یادآوری می‌کنیم که شرط $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} a_n=0$ ، برای متقارب بودن رشتهٔ $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$ لازم است، ولی کافی نیست. مثلا اگرداشته‌باشیم $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ ، داریم: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} a_n=0$ (مسالهٔ ۵۶ را ببینید). از طرف دیگر داریم:

$$S_n=(1-0)+(\sqrt{2}-1)+\dots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\sqrt{n}$$

و درنتیجه $S_n\to\infty$ و رشته متباعد است.

۴۹. چون دنبالهٔ a_n نزولی است، می‌توان این نامساوی‌ها را نوشت:

$$a_2\leqslant a_2\leqslant a_1$$

$$2a_4\leqslant a_3+a_4\leqslant 2a_2$$

$$4a_8\leqslant a_5+a_6+a_7+a_8\leqslant 4a_4$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$2^n a_{2^n+1}\leqslant a_{2^n+1}+a_{2^n+2}+\dots+a_{2^{n+1}}\leqslant 2^n a_{2^n}$$

ازمجموع این نامساوی به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}(c_n-a_1)\leqslant S_{2^{n+1}}-a_1\leqslant c_n$$

که درآن، S_n عبارتست ازمجموع n جمله اول از رشتهٔ

$$a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$$

و c_n، مجموع n جملهٔ اول از رشتهٔ

$$a_1+2a_2+4a_4+\dots+2^n a_{2^n}+\dots$$

چون دنباله‌های $\{S_n\}$ و $\{c_n\}$ صعودی هستند، بنابر اصل بولتانو ـ وایرشتراس، برای آن‌که دارای‌حد باشند، کافی است ثابت کنیم که کرانه‌دار هستند. ولی ازنامساوی‌هایی که به‌دست آوردیم، نتیجه می‌شود که اگر یکی از این دو دنباله کرانه‌دار باشد، دیگری هم کرانه‌دار است. در واقع، اگر $|S_n|\leqslant M$ (برای همه‌مقادیر n)، دراین صورت داریم:

$|c_n|\leqslant 2S_{2^{n+1}}-a\leqslant 2M$ واگر داشته باشیم $|c|\leqslant M$ (برای همهٔ مقادیر n)، درآن‌صورت داریم:

$$|S_n|\leqslant S_{2^{n+1}}\leqslant c_n+a_1\leqslant M+a_1$$

۵۰. ازنتیجهٔ مسالهٔ ۴۹ استفاده می‌کنیم و به‌جای رشتهٔ

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots+\frac{1}{n^p}+\dots$$

رشتهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\dots+\frac{2^n}{2^{np}}+\dots$$

جمله‌های این رشته، یك تصاعد هندسی باقدر نسبت $q=\frac{1}{2^{p-1}}$ تشکیل می‌دهند، بنابر رابطهٔ مجموع درتصاعدهندسی داریم: $S_n=\frac{1-q^n}{1-q}$. اگر $0<q<1$، دنبالهٔ $\{S_n\}$ به‌سمت $\frac{1}{1-q}$ میل می‌کند، واگر $q>1$، در آن صورت $S_n\to\infty$ (این حکم را خودتان ثابت کنید). بالاخره در حالت $q=1$ ، رابطهٔ مجموع، معنای خودرا ازدست می‌دهد: صورت و مخرج آن برابر صفر می‌شود. ولی دراین حالت، می‌توان مجموع را، بدون استفاده از

رابطه به‌دست‌آورد، زیرا به‌ازای $q=1$، همهٔ جمله‌های دنباله برابر ۱ می‌شود وازآنجا $S_n=n$ و رشته متباعد است. حالاکافی است به‌یاد بیاوریم که:

$$q=\frac{1}{2^{p-1}}$$

جواب: رشته ۲ درحالت $p>1$ متقارب ودرحالت $p\leqslant 1$ متباعداست.

۵۱. اشتباه درهمهٔ این حالت‌ها، مربوط به‌آن است‌که از رابطه‌های

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(x_n-y_n)=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}x_n-\underset{n\to\infty}{\text{حد}}y_n\,,$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}x_n}{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}y_n}\,,\quad \underset{n\to\infty}{\text{حد}}(x_n\,.\,y_n)=\text{حد}\,x_n\,.\,\text{حد}\,y_n$$

درمواردی استفاده شده است‌که دنبالهٔ $\{x_n\}$ ویا $\{y_n\}$ دارای حدنیست. نماد $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}x_n=\infty$، بیان سادهٔ این‌مطلب است که: دنبالهٔ $\{x_n\}$ از لحاظ قدر مطلق به‌طور نامحدود صعودی است. به‌این ترتیب، بانشانهٔ ∞ نباید، مثل یك عدد معمولی برخورد کرد. مثلا هرگز نمی‌توان نوشت:

$$\infty-\infty=0\,,\ \text{یا}\ \frac{\infty}{\infty}=1\,,\ \text{یا}\ \infty\times 0=0$$

۵۲. الف) باید ثابت کنیم‌که برای هرعدد c، اندیسی مثل k می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی‌که برای $n>k$، نامساوی $|x_n+y_n|>c$ برقرار باشد ابتدا عددی مثل k_1 پیدا می‌کنیم‌که برای $n>k_1$، نامساوی: $|x_n|>c+|a|+1$ برقرار باشد، و این ممکن است، زیرا می‌دانیم که $x_n\to\infty$ (به ازای $n\to\infty$). بعد عدد k_2 را پیدا می‌کنیم به نحوی که برای $n>k_2$، نامساوی $|y_n-a|<1$ برقرار باشد. این هم ممکن است زیرا y_n به‌ای $n\to\infty$، به‌سمت a میل می‌کند. از بین دو عدد k_1 و k_2، عدد بزرگتر را k می‌نامیم. برای $n>k$ داریم:

$$|x_n+y_n|>|x_n|-|y_n|>c+|a|+1-(|a|+1)=c$$

ب) عدد مثبت ε را درنظر می‌گیریم. عدد k_1 را پیدا می‌کنیم، به‌نحوی که‌برای $n>k_2$، نامساوی $|y_n-a|<1$ برقرار باشد. بعد، عدد k_2 راطوری پیدامی‌کنیم که‌برای $n>k_2$ نامساوی $|x_n|>\frac{|a|H}{\varepsilon}$ برقرار باشد. بزرگترین k_1 و k_2 را k می‌نامیم. دراین صورت برای $n>k$ به‌دست می‌آید:

$$\left|\frac{y_n}{x_n}\right|=\frac{|y_n|}{|x_n|}<\frac{|a|+1}{\frac{|a|+1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

۵۴. بااستفاده از قانون‌های ابتدای بند، می‌توان نوشت:

الف) $$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{2n+1}{3n-5}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}}=\frac{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(3-\frac{5}{n}\right)}=\frac{2}{3}\,,$$

ب) $$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{10n}{n^2+1}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{\frac{10}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{10}{n}}{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1}=0\,,$$

ج) $$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\frac{1}{1\times 1}=1\,,$$

د) $$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{2^n-1}{2^n+1}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}=\frac{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

۵۵. به‌کمك استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم که مجموع

$$1^k+2^k+\dots+n^k$$

چند جمله‌ای از n با درجهٔ $k+1$ است، که جملهٔ بزرگتر آن عبارتست از $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$ به‌ازای $k=1$، عبارت مفروض برابر با $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌شود، که‌یك‌چندجمله‌ای‌نسبت به n وازدرجهٔ $k+1=2$ است وضریب‌جملهٔ بزرگتر آن برابر $\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}$ می‌شود.

فرض می‌کنیم که حکم ما برای هرعدد درست $k<k_0$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که این حکم، برای k_0 هم برقرار است. این رابطه‌ها را که ناشی ازفرمول دوجمله‌ای است، درنظر می‌گیریم:

$$(n+1)^{k_0+1}=n^{k_0+1}+(k_0+1)n^{k_0}+\dots+1\,,$$
$$n^{k_0+1}=(n-1)^{k_0+1}+(k_0+1)(n-1)^{k_0}+\dots+1\,,$$

$$(n-1)^{k_0+1}=(n-2)^{k_0+1}+(k_0+1)(n-2)^{k_0}+\dots+1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$2^{k_0}=1^{k_0+1}+(k_0+1)1^{k_0}+\dots+1$$

اگر همهٔ این تساوی‌ها را باهم جمع کنیم و توجه کنیم همهٔ جمله‌های سمت‌چپ تساوی‌ها، به‌جز $(n+1)^{k_0+1}$، باجملهٔ نظیرش درسمت راست حذف‌می‌شود، به‌دست می‌آید:

$$(n+1)^{k_0+1}=1+(k_0+1)[n^{k_0}+(n-1)^{k_0}+\dots+1^{k_0}]+\dots+n$$

طبق فرض استقراء، همهٔ جمله‌هائی که با چند نقطه نشان داده شده است، یك‌چند جمله‌ای‌را تشکیل می‌دهند که درجه‌ای کوچکتر یا مساوی k_0 دارند. ازاینجا می‌توان نوشت:

$$1^{k_0}+2^{k_0}+\dots+n^{k_0}=\frac{(n+1)^{k_0+1}}{k_0+1}+P(n)$$

که درآن $P(n)$، یك‌چند جمله‌ای نسبت به n است که درجهٔ آن از k_0 تجاوز نمی‌کند. اگر $(n+1)^{k_0+1}$ را بنا بر فرمول دو جمله‌ای باز کنیم، سر آخر خواهیم داشت:

$$1^{k_0}+2^{k_0}+\dots+n^{k_0}=\frac{n^{k_0+1}}{k_0+1}+Q(n)$$

که درآن $Q(n)$، چند جمله‌ای است که درجهٔ آن بالاتر از k_0 نیست. حکم ثابت شد.

به‌عنوان مثال چندنمونه ازمجموع

$$S_k(n)=1^k+2^k+\dots+n^k$$

را برای بعضی ازمقادیر k می‌آوریم:

$$S_0(n)=n$$

$$S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

$$S_3(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

برای رابطهٔ کلی مجموع $S_k(n)$، باید قبلا با «عددهای برنولی» آشناشد.

حالا می‌توانیم حد موردنظر را به‌دست آوریم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{k+1}}{k+1}+a_1n^k+\dots+a_{k+1}}{n^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\dots+\frac{a_{k+1}}{n^{k+1}}\right)=\frac{1}{k+1}$$

۵۶. داریم:

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{2}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n-1}}$$ بنابراین

$$|x_n|=\frac{2}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n-1}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

ازاینجا نتیجه می‌شودکه برای $n>1+\frac{1}{\varepsilon^2}$، نامساوی $|x_n|<\varepsilon$ برقرار است.

۵۷. داریم:

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\dots>n+\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n^2}{2}$$

بنابراین

$$|x_n|=\frac{n}{2^n}<\frac{n}{\frac{n^2}{2}}=\frac{2}{n}$$

و درنتیجه به‌ازای $n>\frac{2}{\varepsilon}$، نامساوی $|x_n|<\varepsilon$ برقرار است.

۵۸. داریم:

$$a^n=[1+(a-1)]^n=$$

$$=1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2+\dots>$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot(a-1)^2$$

بنابراین

$$|x_n|=\frac{n}{a^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\cdot(a-1)^2}=\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}$$

برای هرعدد مثبت ε، به‌ازای $n>1+\frac{2}{\varepsilon(a-1)^2}$، خواهیم‌داشت:

$$|x_n|<\varepsilon$$

۵۹. اگر n عددی‌بین 2^{m-1} و 2^m باشد، مقدار $\log_2 n$، بین $m-1$ و m خواهد بود. بنابراین، عبارت $\frac{\log_2 n}{n}$ از $\frac{m}{2^{m-1}}$ تجاوز نمی‌کند.

ولی می‌دانیم (مسالهٔ ۵۷ را ببینید) که برای هر $\varepsilon>0$، عددی مثل k پیدا می‌شود به‌نحوی که برای $m>k$، نامساوی $\frac{m}{2^m}<\frac{\varepsilon}{2}$ یا $\frac{m}{2^{m-1}}<\varepsilon$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که برای $n>2^k$، نامساوی $\frac{\log_2 n}{n}<\varepsilon$ برقرار است. در واقع، اگر داشته باشیم: $n>2^k$، مقدار n بین 2^{m-1} و 2^m $(m>k)$ خواهد بود و ازآنجا: $\frac{\log_2 n}{n}<\frac{m}{2^{m-1}}<\varepsilon$

۶۰. ثابت می‌کنیم که برای هرعدد مثبت ε، عددی مثل k پیدامی‌شود به‌نحوی که برای $n>k$، نامساوی $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ برقرار باشد. چون $\sqrt[n]{n}>1$، پس $|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1$. ببینیم نامساوی $\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$ به‌ازای‌چه‌مقادیری از n برقرار نیست. به زبان دیگر، به ازای چه مقادیری از n، نامساوی $\sqrt[n]{n}-1\geqslant\varepsilon$، یا $\sqrt[n]{n}\geqslant 1+\varepsilon$ ویا $n>(1+\varepsilon)^n$ برقرار است. داریم:

$$(1+\varepsilon)^n=1+n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2+\dots>\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

بنابراین، از نامساوی $n\geqslant(1+\varepsilon)^n$ نتیجه می‌شود: $n>\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$، و از آنجا $n<1+\frac{2}{\delta^2}$. به‌این ترتیب، برای‌هر $n>1+\frac{2}{\varepsilon^2}$، نامساوی $\sqrt[n]{n}-1\geqslant\varepsilon$ برقرار نیست، یعنی نامساوی $\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$ برقرار است.

۶۱. الف) دوجملهٔ‌مجاور دنباله‌را باهم‌مقایسه‌می‌کنیم. ریشهٔ $n(n+1)$ ام a را b می‌نامیم. دراین صورت داریم:

$$x_n=n(\sqrt[n]{a}-1)=n(b^{n+1}-1)=n(b-1)(b^n+b^{n-1}+\dots+1)$$

$$x_{n+1}=(n+1)(\sqrt[n+1]{a}-1)=(n+1)(b^n-1)=$$
$$=(n+1)(b-1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\dots+1)$$

که ازآنجا خواهیم داشت:

$$x_n-x_{n+1}=(b-1)(nb^n-b^{n-1}-b^{n-2}+\dots+1)$$

درحالت $b>1$ هردو عامل مثبت، (زیرا دراین حالت داریم: $b^n>b^{n-1}>b^{n-2}>\dots>1$) و در حالت $b<1$ هر دو عامل منفی‌اند. درحالت $b=1$ هم، هردوعامل برابرصفرمی‌شود. درنتیجه برای همهٔ‌حالت‌ها

داریم: $x_n-x_{n+1}\geqslant 0$. از طرف دیگر، اگر داشته باشیم $a\geqslant 1$، خواهیم داشت $x_n\geqslant 0$، یعنی دنبالهٔ مفروض از طرف پایین کرانه‌دار است، و بنابر اصل بولتسانو-وایراشتراس، دارای حد خواهد بود.

وقتی $a<1$ باشد، $a=\frac{1}{b}$ می‌گیریم، داریم:

$$x_n=n(\sqrt[n]{a}-1)=n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{b}}-1\right)=-\frac{1}{\sqrt[n]{b}}n(\sqrt[n]{b}-1)$$

چون $\left(-\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\right)$ $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}$ و $n(\sqrt[n]{b}-1)$ $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}$ وجود دارد، x_n $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}$ هم وجود خواهد داشت.

متذکر می‌شویم که ضمناً ثابت کردیم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(\sqrt[n]{a}-1)=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(\sqrt[n]{b}-1)$$

ب) تساوی نخست، ازاین رابطه، نتیجه می‌شود:

$$f(ab)=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,n(\sqrt[n]{ab}-1)=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,n(\sqrt[n]{ab}-\sqrt[n]{b})$$
$$+\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,n(\sqrt[n]{b}-1)=l(a)\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\sqrt[n]{b}+l(b)=l(a)+l(b)$$

دراینجا ازتساوی $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\sqrt[n]{b}=1$ استفاده کرده‌ایم. خودتان آن را ثابت کنید.

تساوی دوم‌را، ابتدا برای عددهای طبیعی p، بعد برای عددهای‌درست p، بعد برای عددهای گویای p، و سر آخر برای عددهای گنگ p، ثابت می‌کنیم. برای عددهای طبیعی p، تساوی $l(a^p)=pl(a)$ را به‌کمک‌استقراء ریاضی و ازتساوی $l(ab)=l(a)+l(b)$، به‌دست می‌آید.

برای عددهای درست ومنفی p، تساوی مورد نظر به کمک رابطهٔ: $l(a^{-1})=-l(a)$ که درحل قسمت الف) ثابت شد ـ به‌دست می‌آید. در حالت گویا بودن‌عدد $p=\frac{m}{n}$، تساوی $l(a^p)=pl(a)$، به‌این ترتیب‌ثابت می‌شود: $b=\sqrt[n]{a}$ می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت: $a=b^n$، $a^p=b^m$. ثابت کردیم که

$$l(b^m)=ml(b)\ ,\ l(b^n)=nl(b)$$

از آنجا $l(b^m)=\frac{m}{n}(b^n)$. واین‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

حالا به حالتی می‌پردازیم که p عددی گنگ باشد. روشن است که برای $b>a$ داریم: $l(b)>l(a)$ (زیرا $n(\sqrt[n]{b}-1)>n(\sqrt[n]{a}-1)$). ببینیم درچه موردی‌تساوی $l(b)=l(a)$ برقرار است. اگر این تساوی‌بتواند برای $b\neq a$ ممکن باشد. بافرض $c=\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید:

$l(c)=l(b)-l(a)=0$. چون $c\neq 1$، برای هرعدد x می‌توان عددهای درستی مثل m و n پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم: $c^m<x<c^n$ (مثلا، اگر $c>1$، کافی است فرض کنیم: $m<\log_c x$ و $n>\log_c x$). ازآنجا

$$0=ml(c)\leqslant l(x)\leqslant nl(c)=0$$

می‌بینیم که برای همهٔ مقادیر x داریم: $l(x)=0$، بعد، درمسالهٔ ۶۲ـب) نشان می‌دهیم که اینطور نیست. دراینجا فقط یادآوری می‌کنیم که رابطه $l(a^p)=pl(a)$ دراین حالت به‌روشنی درست است.

حالا به‌حالتی می‌پردازیم که تابع $l(x)$، متحد با صفر نباشد. دراین صورت، تساوی $l(a)=l(b)$، تنها برای $a=b$ می‌توان ممکن باشد. به‌خصوص برای $a>1$ باید داشته باشیم: $l(a)>l(1)=0$، فرض می‌کنیم که تساوی $l(a^p)=pl(a)$ برقرار نباشد؛ مثلا، برای مقداری از $a>1$ داشته باشیم: $l(a^p)>pl(a)$ (حالت‌های دیگر، یا به‌این‌حالت منجرمی‌شوند و یا با روشنی مشابه این حالت قابل بررسی هستند). روی پاره خط $\left[p\,,\,\frac{l(a^p)}{l(a)}\right]$، عدد گویای $\frac{m}{n}$ را انتخاب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$p<\frac{m}{n}<\frac{l(a^p)}{l(a)}$$

که‌ازآنجا به‌دست می‌آید: $l(a^p)>\frac{m}{n}l(a)=l(a^{\frac{m}{n}})$. از طرف دیگر، چون $p<\frac{m}{n}$، بنابراین $a^p<a^{\frac{m}{n}}$ و درنتیجه $l(a^p)<l(a^{\frac{m}{n}})$. نتیجه‌گیری‌های متناقض، به‌این معناست که فرض ما درست نیست. به این ترتیب، رابطهٔ $l(a^p)=pl(a)$، برای همهٔ حالت‌ها، ثابت شد.

۶۲. الف) از رابطه $l(a^p)=pl(a)$، که درمسالهٔ ۶۱ـب) به‌دست

آوردیم، استفاده می‌کنیم. داریم:

$$l(a)=l(10^{\lg a})=\lg a\cdot l(10)$$

ازآنجا $\frac{l(a)}{\lg a}=l(10)$، وبنابراین، به a بستگی ندارد.

ب) از برهان خلف استفاده می‌کنیم وفرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$M=l(10)=0$$

در چنین صورتی باید تابع $l(a)$ متحد با صفر باشد. ولی به سادگی می‌توان نشان داد که برای $a<1$ داریم: $l(a)<0$. در واقع دنبالهٔ $x_n=n(\sqrt[n]{a}-1)$، نزولی است (حل مسالهٔ ۶۱ـالف) را ببینید). و $x_1=a-1$. ازآنجا نتیجه می‌شود که $l(a)<a-1$ (به‌ازای همهٔ مقادیر a)؛ و درحالت خاص $a<1$ داریم: $l(a)<0$.

با استفاده از تساوی $l(a^{-1})=-l(a)$، می‌توان مقدار $l(a)$ را از پایین، محدود کرد:

$$l(a)=-l(a^{-1})>1-\frac{1}{a}$$

ج) فرض می‌کنیم $e=10^{\frac{1}{l(10)}}$، دراین صورت خواهیم داشت:

$l(a)=l(10)\lg a=\frac{\lg a}{\lg e}=\log_e a$ و $\lg e=\frac{1}{l(10)}$ چون $l(10)>0$

بنابراین $e>1$.

۶۳. الف) برای‌مشخص بودن وضع $a<b$ می‌گیریم. دراین صورت داریم:

$$\sqrt[p]{\frac{a^p+b^p}{2}}>\sqrt[p]{\frac{2b^p}{2}}=b$$

ازطرف دیگر داریم:

$$\sqrt[p]{\frac{a^p+b^p}{2}}>\sqrt[p]{\frac{2a^p}{2}}=a$$

یعنی $S_p(a,b)$، بین دوعدد a و b قرار دارد.

ب) مجذور عددهای $S_1(a,b)$ و $S_2(a,b)$ را مقایسه می‌کنیم:

$$[S_1(a,b)]^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4},$$

$$(S_2(a,b)]^2=\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{2a^2+2b^2}{4}$$

از آنجا

$$[S_2(a,b)]^2-[S_1(a,b)]^2=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geqslant$$

چون $S_2(a,b)$ و $S_1(a,b)$ مثبت‌اند، بنابراین داریم:

$$S_2(a,b)\geqslant S_1(a,b)$$

نامساوی $S_{-2}(a,b)\leqslant S_{-1}(a,b)$ هم به‌همین ترتیب ثابت می‌شود.

حالا، این تفاضل را درنظر می‌گیریم:

$$S_1(a,b)-S_{-1}(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\geqslant 0$$

نامساوی‌هائی راکه ثابت کردیم، حالت خاصی ازاین قضیهٔ کلی است:

$$p>q\Rightarrow S_p(a,b)\geqslant S_q(a,b)$$

که ضمناً حالت تساوی تنها به‌ازای $a=b$ ممکن است.

۶۴. الف) ابتدا فرض می‌کنیم: $a\geqslant b$. دراین صورت:

$$S_n(a,b)=\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}=a\sqrt[n]{\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{2}}$$

چون داریم $\frac{b}{a}\leqslant 1$، خواهیم داشت: $1<1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\leqslant 2$ و ازآنجا

$$a\sqrt[n]{\frac{1}{2}}<S_n(a,b)\leqslant a$$

ولی $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ a\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=a$ بنابه «قضیهٔ دو نگهبان» (مسالهٔ ۴۶ را ببینید) بایدداشته باشیم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ S_n(a,b)=a$$

به‌همین ترتیب، برای حالت $b>a$ ثابت می‌شود:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ S_n(a,b)=b$$

به‌این ترتیب، در هر حالتی، مقدار حد برابر است با بزرگترین عدد از بین دوعدد a و b:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ S_n(a,b)=\mathrm{Max}(a,b)$$

ب) داریم:

$$S_{-1}(a,b)=\left(\frac{a^{-n}+b^{-n}}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}=[S_n(a^{-1},b^{-1})]^{-1}$$

از آنجا:

$$\underset{n\to-\infty}{\text{حد}}\ S_{-n}(a,b)=\frac{1}{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ S_n(a^{-1},b^{-1})}=$$

$$\frac{1}{\mathrm{Max}(a^{-1},b^{-1})}=\mathrm{Min}(a,b)$$

(یعنی دراین حالت، مقدار حد برابر است با کوچکترین عدد از بین دو عدد a و b)

ج) ابتدا یادآوری می‌کنیم که $\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\geqslant\sqrt{a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}}$،

زیرا

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}-\sqrt{a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2n}}-b^{\frac{1}{2n}}\right)^2}{2}\geqslant 0$$

از آنجا

$$S_{\frac{1}{n}}(a,b)=\frac{\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}\right)^n}{2}\geqslant\left(\sqrt{a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}}\right)^n=\sqrt{ab}$$

حالا ثابت می‌کنیم که وقتی $n\to\infty$، مقدار $S_{\frac{1}{n}}(a,b)$ به‌سمت $\sqrt{ab}$ میل می‌کند. برای‌این منظور، ازنامساوی $\ln a<a-1$، که درحل مسالهٔ ۶۲ـ ب) ثابت کردیم، استفاده می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$\ln S_{\frac{1}{n}}(a,b)=n\cdot\ln\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\leqslant n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}[n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)]$$

درمجموع آخر، جملهٔ اول به‌طرف $\ln a$ و جملهٔ‌دوم به‌طرف $\ln b$ میل‌می‌کند.

بنابراین، برای هرعدد مثبت ε، اندیسی مثل k پیدا می‌شود، که برای $n>k$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\ln S_{\frac{1}{n}}(a,b)<\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)+\varepsilon$$

ویا

$$S_{\frac{1}{n}}(a,b)<e^{\varepsilon}\cdot\sqrt{ab}$$

حالاعدد مثبت ε_1 را درنظرمی گیریم. فرض می کنیم: $\varepsilon=\ln\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{ab}}\right)$، و عدد k را به‌اندازهٔ کافی بزرگ، انتخاب‌می کنیم. برای $n>k$، خواهیم‌داشت:

$$S_{\frac{1}{n}}(a,b)<e^{\varepsilon}\cdot\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+\varepsilon_1$$

ثابت کردیم که

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ S_{\frac{1}{n}}(a,b)=\sqrt{ab}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که طبیعی است که به‌جای واسطهٔ مرتبهٔ صفر، یعنی $S_0(a,b)$، همان واسطهٔ هندسی دوعدد a و b را بگیریم.

یادآوری می کنیم که‌واسطهٔ مرتبهٔ p وواسطهٔ مرتبهٔ $-p$، به‌وسیلهٔ رابطهٔ‌ساده‌ای به‌هم مربوط‌اند:

$$S_p(a,b)\cdot S_{-p}(a,b)=a\cdot b$$

(این تساوی را خودتان ثابت کنید).

اگر $S_0(a,b)=\sqrt{ab}$ بگیریم، این‌رابطه به‌ازای $p=0$ هم‌درست است.

۶۵. a_n را تعداد حالت‌هایی می گیریم که درآن‌ها، حتی یکی ازنامه‌ها در پاکت خود قرار نگرفته باشند. ببینیم چند حالت وجود داردکه در مورد آن‌ها، درست k نامه در پاکت‌های خودشان‌قرار گیرند. روشن‌است که k نامه‌از n نامه‌را به C_n^k طریق، می‌توان انتخاب کرد. k نامهٔ‌انتخابی‌را درپاکت‌های خودشان قرارمی‌دهیم، وبقیهٔ $n-k$ نامه‌را، به‌نحوی می گذاریم که هیچ‌کدام از آن‌ها درپاکت خودشان نباشند. این کار را به a_{n-k} طریق می‌توان انجام داد. به‌این ترتیب، تعداد همهٔ حالت‌هائی که درمورد آن‌ها، درست k نامه در پاکت‌های خودشان قرار گرفته‌اند، برابر است‌با $C_n^k\cdot a_{n-k}$. یادآوری می کنیم که برای $k=n$، استدلال ما نیروی خودرا ازدست می‌دهد، زیرا دراین حالت a_n معین نیست.

برای اینکه این عبارت درحالت $k=n$ هم‌معنا داشته باشد، بایدفرض کرد: $a_0=1$. ازطرف دیگر، کل تعداد حالت‌ها برابر است با $n!$. به این تساوی می‌رسیم:

$$a_n+na_{n-1}+C_n^2a_{n-2}+\cdots+na_1+a_0=n!$$

دوطرف تساوی را بر $n!$ تقسیم می کنیم و $\frac{a_n}{n!}$ را p_n می نامیم. به‌دست‌می‌آید:

$$p_n+p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}+\frac{1}{3!}p_{n-3}+\cdots+\frac{1}{n!}p_0=1$$

این رابطه امکان می‌دهدکه بتوانیم عددهای p_1، p_2، ...، p_n را پشت‌سر هم، پیدا کنیم.

در واقع، چون داریم: $a_0=1$، خواهیم داشت: $p_0=1$. به ازای $n=1$، رابطهٔ ما به‌صورت $p_1+p_0=1$ درمی‌آید که ازآن‌جا $p_1=0$. (این تساوی‌را مستقیماً هم می‌توان به‌دست آورد. درنظر بگیرید که a_1 عبارت است ازتعدادروش‌هائی که می‌توان یك‌نامه را دریك‌پاکت قرارداد، به‌نحوی که درپاکت مربوط به‌خودش قرار بگیرد.)

به‌ازای $n=2$ به‌دست می‌آید:

$$p_2+p_1+\frac{1}{2}p_0=1\Rightarrow p_2=\frac{1}{2}$$

به‌ازای $n=3$:

$$p_3+p_2+\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{3!}p_0=1\Rightarrow p_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}$$

به‌ازای $n=4$:

$$p_4+p_3+\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{3!}p_1+\frac{1}{4!}p_0=1$$

وازآنجا

$$p_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

وغیره.

این محاسبه، به‌طور طبیعی، مارا به‌اینجا می‌رساند که برای p_n داشته باشیم:

$$p_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}$$

خودتان این رابطه‌را، بااستفاده ازروش استقراء ریاضی، ثابت کنید.

این باقی می‌ماندکه ثابت کنیم، دنبالهٔ $\{p_n\}$ دارای حد است. و این اثبات را می‌توان دقیقاً مثل‌حل مسالهٔ ۴۷-ج) انجام داد.

$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ p_n$ را به p نشان می‌دهیم. حال می‌توانیم این احتمال حدی را که در آن درست k نامه در پاکت‌های خودشان قرار گیرند، پیدا کنیم. در واقع، کمی بالاتر دیدیم که تعداد این روش‌ها برابر است‌با $C_n^k\cdot a_{n-k}$. نسبت این عدد به $n!$، برابر است با $\frac{a_{n-k}}{(n-k)!k!}$. و وقتی که $n\to\infty$، حد این نسبت چنین می‌شود:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!k!} = \frac{1}{k!} \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{p}{k!}$$

اگر همهٔ احتمال‌های پیدا شده‌را باهم جمع کنیم، در مجموع باید به واحد برسیم. ازآنجا

$$p+\frac{p}{1!}+\frac{p}{2!}+\dots+\frac{p}{n!}=1$$

ویا

$$p\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)=1$$

درمسالهٔ ۶۲ گفتیم که مجموع رشته‌ای که در داخل پرانتز قرار دارد، برابر است باعدد e.

به این ترتیب، وقتی که $n \to \infty$ ، احتمال اینکه درست k نامه در پاکت‌های خودشان قرار گیرند، برابر است با $\frac{1}{k!e}$.

۶۶. حلزون بعد از گام نخست، در نقطه‌ای به‌مختصات $(a+1, b)$ قرار می‌گیرد. (شکل ۱۴ را ببینید) ، بعد از گام دوم، در نقطهٔ به مختصات $(a+1, b+1)$ و غیره. او ، بعداز آن که $2n$ گام بردارد ، به نقطهٔ $(a+n, b+n)$ و بعدازگام $(2n+1)$ام، به‌نقطهٔ $(a+n+1, b+n)$ می‌رسد. به‌این ترتیب:

$$k_{2n}=\frac{b+n}{a+n}\ ;\ k_{2n+1}=\frac{b+n}{a+n+1}$$

این می‌ماندکه حد دنبالهٔ k_n را پیدا کنیم . k_{2n} را به k'_n و k_{2n+1} را به k''_n نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان تحقیق کرد (حل مسالهٔ ۵۴ را ببینید) که دنباله‌های $\{k'_n\}$ و $\{k''_n\}$ به سمت واحد میل می‌کنند. بنابراین، برای هر n، عددی مثل l_1 پیدا می‌شود، به‌نحوی که برای $n>l_1$ ، نامساوی $|k'_n-1|<\varepsilon$ برقرار باشد. به همین ترتیب، عددی مثل l_2 وجود دارد که برای $n>l_2$ ، نامساوی $|k''_n-1|<\varepsilon$ برقرار باشد . بزرگترین عدد از بین‌دوعدد $2l_1$ و $2l_2+1$ را، l می‌نامیم. بنابراین، برای $n>l$ ، نامساوی $|k_n-1|<\varepsilon$ برقرار است.

۶۷. همان نشانه‌های مسالهٔ قبل‌را نگه می‌داریم.

a) دراین حالت داریم:

$$k'_n=k_{2n}=\frac{b+2n}{a+n}\ ;\ k''_n=k_{2n+1}=\frac{b+2n}{a+n+1}$$

به‌دست می‌آید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} k'_n = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} k''_n = 2$$

ازآنجا، ومثل بالا، نتیجه می‌شود که $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} k_n$ وجوددارد وبرابراست با ۲.

b) دراین حالت داریم:

$$k'_n=k_{2n}=\frac{b+2+4+\dots+2n}{a+1+3+\dots+(2n-1)}=\frac{b+n^2+n}{a+n^2}\ ;$$

$$k''_n=k_{2n+1}=\frac{b+2+4+\dots+2n}{a+1+3+\dots+(2n+1)}=\frac{b+n^2+n}{a+n^2+2n+1}$$

از آنجا

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} k'_n = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} k''_n = 1$$

ومثل قبل ، ثابت می‌شود که $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} k_n$ وجود دارد وبرابر است با ۱.

ج) دراین حالت

$$k'_n=k_{2n}=\frac{b+2+8+\dots+2^{2n-1}}{a+1+4+\dots+2^{2n-2}}=\frac{b+2\times\frac{4^n-1}{4-1}}{a+\frac{4^n-1}{4-1}}\ ;$$

$$k''_n=k_{2n+1}=\frac{b+2+8+\dots+2^{2n-1}}{a+1+4+\dots+2^{2n}}=\frac{b+2\times\frac{4^n-1}{4-1}}{a+\frac{4^{n+1}-1}{4-1}}$$

ازآنجا روشن است که

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} k'_n = 2\ ;\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}} k''_n = \frac{1}{2}$$

ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ $\{k_n\}$ در این حالت، حدی ندارد. در واقع، اگر دنباله‌ای دارای حدی برابر a باشد، هردنباله‌ای از آن هم دارای همان حد خواهد بود. خودتان این حکم‌را، مثلا بااستفاده از مساله‌های ۲۷ـالف) و ۲۷ـب) ، ثابت کنید. ولی در حالت مورد نظر ما ، دنباله‌های $\{k_{2n}\}$ و $\{k_{2n+1}\}$ ، حدهای متفاوتی دارند.

۶۸. از تشابه مثلث‌های $A_0M_nP_0$ و $A_nM_nP_n$ (شکل ۲۴)، به‌دست می‌آید:

$$M_nP_0 : M_nP_n = P_0A_0 : P_nA_n$$

طول نقطهٔ M_n را x_n می‌گیریم. در این صورت، تناسبی را که به‌دست‌آوردیم، می‌توان‌چنین‌نوشت:

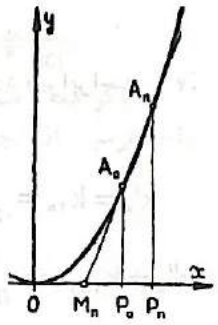
$$(a-x_n):\left(a+\frac{1}{n}-x_n\right)=a^2:\left(a+\frac{1}{n}\right)^2$$

که ازآن‌جا. مقدار x_n به‌دست می‌آید:

$$x_n=\frac{a(an+1)}{2an+1}=\frac{a\left(a+\frac{1}{n}\right)}{2a+\frac{1}{n}}$$

و بنابراین

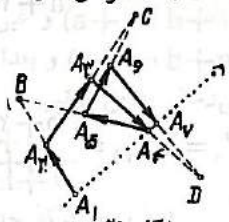
$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{\lim_{n\to\infty} a\left(a+\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2a+\frac{1}{n}\right)}=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}$$



شکل ۲۴

این جواب را از نظر هندسی، می‌توان به این ترتیب، تنظیم کرد: هر مماسی که بریک‌نقطهٔ سهمی رسم‌شود: پاره خطی‌راکه راس سهمی رابه‌تصویر نقطهٔ تماس برمحور ox وصل می‌کند، نصف خواهد کرد.

۶۹. فرض کنید توکا ازنقطهٔ A_1 خارج شده‌باشد. B ، C و D را به ترتیب محل مدرسه، سینما وقصریخ می‌گیریم (شکل ۲۵).



شکل ۲۵

توکا ـ خط شکستهٔ $A_1A_2A_3\ldots$ را طی می‌کند، که درآن نقطهٔ A_2 وسط پاره‌خط A_1B ، نقطهٔ A_3 وسط پاره‌خط A_2C ، نقطهٔ A_4 وسط پاره‌خط A_3D است و غیره. ثابت می‌کنیم که نقطه‌های A_1 ، A_4 ، A_7 ، ... ، A_{3n+1} ، ... ، روی یك خط راست قرار دارند. پاره‌خط A_2A_5، وسط دوضلع ازمثلث A_1BA_4 رابه‌هم وصل کرده است وبنابراین با A_1A_4 موازی و مساوی بانصف آن است. به همین ترتیب ، با در نظرگرفتن مثلث A_2CA_5 ، معلوم می‌شود که پاره خط A_3A_6 موازی‌با A_2A_5 ومساوی‌بانصف‌آن‌است. بالاخره، ازمثلث A_3DA_6 معلوم می‌شودکه پاره‌خط A_4A_7 موازی A_3A_6 ومساوی بانصف آن است. اگراین نتیجه‌هارا باهم مقایسه‌کنیم. می‌بینیم که پاره‌خطهای A_1A_4 و A_4A_7 در امتداد یکدیگر قرار می‌گیرند وضمناً طول A_4A_7 برابر با $\frac{1}{8}$ طول A_1A_4 است.

به همین ترتیب ، می‌توان ثابت کرد که پاره خط A_7A_{10} در امتداد A_4A_7 ، پاره‌خط $A_{10}A_{13}$ درامتدادپاره‌خط A_7A_{10} وغیره، قرارمی‌گیرد.

به این ترتیب ، نقطه‌های A_1 ، A_4 ، A_7 ، ... ، A_{3n+1} ، بر یك امتدادند. همچنین ثابت کردیم که فاصلهٔ بین این نقطه‌ها، یك‌تصاعد هندسی باقدرنسبت $\frac{1}{8}$ تشکیل می‌دهند. حالا دیگر به‌سادگی می‌توان ثابت کردکه دنبالهٔ

$$A_1, A_4, A_7, \ldots, A_{3n+1}, \ldots$$

دارای حدی است. نقطهٔ A_1 را روی خطی‌که ازنقطه‌های دنبالهٔ ما می‌گذرد، به‌عنوان مبدأوطول پاره‌خط A_1A_4 را به‌عنوان واحد انتخاب می‌کنیم. دراین صورت، مختص نقطهٔ A_{3n+1} ، چنین می‌شود:

$$x_n=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{8^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}}$$

و بنابراین داریم: $\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{8}{7}$

به‌این ترتیب ثابت کردیم که دنبالهٔ نقطه‌های A_1 ، A_4 ، A_7 ، ... ، A_{3n+1} ، ... ، به‌طرف نقطه‌ای مثل M میل می‌کند. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کردکه دنبالهٔ

$$A_2, A_5, A_8, \ldots, A_{3n+2}, \ldots$$

به‌سمت نقطه‌ای مثل N ، و دنبالهٔ

$$A_3, A_6, A_9, \ldots, A_{3n}, \ldots$$

به‌سمت نقطه‌ای مثل P ، میل می‌کند. بنابراین مسیر توکا، به‌سرعت به‌حرکت درروی محیط مثلث MNP نزدیك می‌شود. خودتان ثابت‌کنید که جای نقطه‌های M ، N وP تنها به‌جای‌نقطه‌های B ، C و D بستگی‌دارد و به‌نقطهٔ A_1، مبداء حرکت، مربوط نیست.

۷۰ . روش اول. محوری را درنظر می‌گیریم از M_1 و M_2 بگذرد. مبداء مختصات را روی این‌محور، نقطهٔ M_1 و واحد را، پاره‌خط M_1M_2 به حساب می‌آوریم. در این صورت مختص x_n از نقطهٔ M_n ، بارابطهٔ زیر به مختصات دونقطهٔ قبل‌ازآن، مربوط می‌شود:

$$x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$$

(این رابطه را خودتان ثابت‌کنید). ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌سمت $\frac{2}{3}$ میل می‌کند.

برای این منظور، باروش استقراء ریاضی، ثابت می‌کنیم که

$$x_n=\frac{2}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

به‌ازای $n=1$ داریم:

$$x_1=\frac{2}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=0$$

و به‌ازای $n=2$:

$$x_2=\frac{2}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]=1$$

حالا فرض می‌کنیم که رابطهٔ مربوط به x_n برای همهٔ مقادیر $n\leqslant k$ برقرار باشد، ثابت می‌کنیم که دراین صورت برای $n=k+1$ هم برقرار است. اگر مقادیر x_k و x_{k-1} را در رابطهٔ

$$x_{k+1}=\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$$

قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$x_{k+1}=\frac{\frac{2}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]+\frac{2}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]}{2}=$$

$$=\frac{2}{3}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^k+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^k\left(1-2\right)\right]=\frac{2}{3}+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big]$$

روش دوم. نقطهٔ M را درنظر می‌گیریم که پاره خط M_1M_2 را به نسبت $2:1$ تقسیم کند. ثابت کنید که همین‌نقطهٔ M ، همهٔ پاره‌خط‌های M_2M_3 ، M_3M_4 ، . . . ، M_nM_{n+1} را به‌همان‌نسبت $2:1$ تقسیم می‌کند. از این‌جا بلافاصله نتیجه می‌شود که طول پاره‌خط M_nM به‌اندازهٔ 2^{n-1} مرتبه، از طول پاره‌خط M_1M کوچکتر است. از اینجا معلوم می‌شود که دنبالهٔ نقطه‌های

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

به‌سمت نقطهٔ M میل می‌کند.

۷۱. الف) بنابر رابطهٔ مجموع در تصاعد هندسی، داریم:

$$S_n=\frac{1-a^n}{1-a}$$

اگر $|a|<1$ باشد خواهیم داشت:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}S_n=\frac{1-\underset{n\to\infty}{\text{حد}}a^n}{1-a}=\frac{1}{1-a}$$

درحالت $|a|>1$. به‌ازای $n\to\infty$ داریم $S_n\to\infty$. بالاخره در حالت $|a|=1$ یا به‌دنبالهٔ $S_n=n$ (به‌ازای $a=1$) می‌رسیم و یا به $S_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$. هیچ‌کدام ازاین دوذنباله، حدی ندارند وبنابراین در حالت $|a|\geqslant 1$ ، این رشته متباعد است.

ب) S_n را به‌این‌صورت می‌نویسم:

$$S_n=(a+a^2+\ldots+a^n)+(a^2+a^3+\ldots+a^n)+\ldots+(a^{n-1}+a^n)+a^n$$

بااستفاده از رابطهٔ مجموع در تصاعد هندسی، برای هرکدام از پرانتزها، به‌دست می‌آید:

$$S_n=\frac{a-a^{n+1}}{1-a}+\frac{a^2-a^{n+1}}{1-a}+\ldots+\frac{a^n-a^{n+1}}{1-a}=$$

$$=\frac{a+a^2+\ldots+a^n-na^{n+1}}{1-a}=$$

$$=\frac{\frac{a-a^{n+1}}{1-a}-na^{n+1}}{1-a}=\frac{a-(n+1-na)a^{n+1}}{(1-a)^2}$$

از این رابطه به‌سادگی نتیجه می‌شود (مسالهٔ ۵۸ را ببینید)، که برای $|a|<1$ داریم: $S_n\to\frac{a}{(1-a)^2}$ ، و برای $|a|\geqslant 1$ ، رشتهٔ مفروض متباعد است.

ج) باتوجه به‌تساوی $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ داریم:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1};$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}S_n=1$$

د) باتوجه به‌تساوی

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$ ، داریم:

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{3\times 4}\right)+\left(\frac{1}{3\times 4}-\frac{1}{4\times 5}\right)+\cdots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right];$$
$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} S_n=\frac{1}{4}$$

ه) ثابت می‌کنیم که

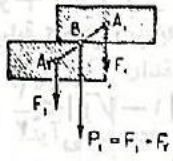
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

درواقع، دراین مجموع، n جمله داریم که کوچکترین آن‌ها برابربا $\frac{1}{2n}$ است. حال می‌توان نوشت:

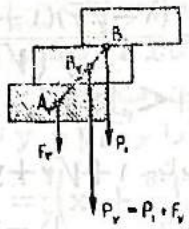
$$S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)>1+\frac{n}{2}$$

(زیرا هریك از پرانتزها، از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است). از این‌جا معلوم می‌شود که برای $n\to\infty$ داریم: $S_n\to\infty$. یعنی رشتهٔ مفروض متباعد است.

۷۲. دوآجر را می‌توان روی یکدیگر باانحراف $\frac{1}{2}$ قرار داد (طول آجر را واحد گرفته‌ایم). P_1 ، منتجهٔ‌نیروهای F_1 و F_2 ، از فاصلهٔ $\frac{1}{4}$ مرز آجردوم می‌گذرد (شکل ۲۶). بنابراین، آجر سوم رامی‌توان نسبت به‌دومی به‌اندازهٔ $\frac{1}{4}$ جلو برد. حالا باید منتجهٔ دونیروی P_1 و F_3 را پیداکرد. چون نیروی P_1 ، دو برابر نیروی F_3 است، نقطهٔ اثر منتجه، پاره‌خط بین نقطه‌های اثر نیروهای F_3 و P_1 را به‌نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند (شکل۲۷). از این‌جا نتیجه می‌شودکه آجر چهارم‌را می‌توان به‌اندازهٔ $\frac{1}{8}$ نسبت به‌آجر سوم، جلو برد. استدلال‌را می‌توان به‌همین ترتیب ادامه داد (خودتان بااستفاده از روش



شکل ۲۶



شکل ۲۷

استقراء ریاضی ثابت کنیدکه آجر $(n+1)$ام را می‌توان نسبت به‌آجر nام به‌اندازه $\frac{1}{2n}$ جلو برد).

بنابراین، از n آجر می‌توان مجموعه‌ای ساخت به‌طول

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}$$

وچون رشتهٔ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ متباعد است(مسالهٔ ۷۱ — ه رابینید)، بنابراین، ساختمان مفروض را می‌توان تاهرجا ادامه‌داد.

۷۳. روشن است‌که دنبالهٔ $\{x_n\}$ دررابطهٔ $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$ صدق می‌کند. فرض‌کنیم که حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ برابر a باشد. در این صورت، سمت چپ تساوی، به‌سمت a ، و سمت راست آن به‌سمت $2+\frac{1}{a}$ میل می‌کند. از آنجا $a=1\pm\sqrt{2}$. چون همهٔ x_nها از ۲ بزرگترند، عدد $1-\sqrt{2}$، نمی‌تواند حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد.

به‌این‌ترتیب، ثابت‌کردیم که $\{x_n\}$دارای حداست و این‌حد برابراست با $1+\sqrt{2}$.

حالاثابت می‌کنیم که حدموردنظر، واقعاً وجود دارد. تفاضل x_n و $1+\sqrt{2}$ را به y_n نشان می‌دهیم. باید ثابت‌کنیم که: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} y_n=0$. درتساوی $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$، مقدار x_n را برحسب y_n قرار می‌دهیم، به‌دست‌می‌آید:

$$1+\sqrt{2}+y_{n+1}=2+\frac{1}{1+\sqrt{2}+y_n}$$

ازآن‌جا

$$y_{n+1}=\frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}+y_n)+1}{1+\sqrt{2}+y_n}=\frac{(1-\sqrt{2})\,y_n}{1+\sqrt{2}+y_n}$$

از این رابطه، تخمین زیر به‌دست می‌آید. $|y_{n+1}|<\frac{1}{4}|y_n|$

در واقع $|1-\sqrt{2}|<\frac{1}{2}$ و $1+\sqrt{2}+y_n=x_n>2$. بنابراین

$$|y_{n+1}|=\frac{|1-\sqrt{2}|\cdot|y_n|}{1+\sqrt{2}+y_n}<\frac{1}{4}|y_n|$$

و از این جا بلافاصله به دست می‌آید :

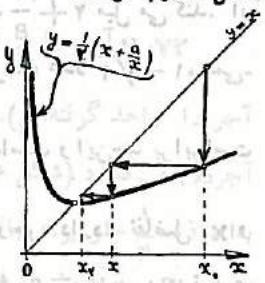
$$|y_n|<\frac{|y_1|}{4^{n-1}}<\frac{1}{2^{2n-1}}$$

به این ترتیب، دنبالهٔ $\{y_n\}$ به سمت صفرمیل می‌کند.

تبصره. می‌توان ثابت کرد که دنبالهٔ

$$n_1\,,\ n_1+\frac{1}{n_2}\,;\ n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3}}\,;\ n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\frac{1}{n_4}}}\,;\ \ldots$$

که درآن n_1 ، n_2 ، n_3 ، ... ، عددهای طبیعی دلخواه هستند، همیشه دارای حدی‌است، واین حد عددی‌گنگ است. اگر دنبالهٔ عددهای n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . ، متناوب باشند، این‌حد به‌صورت $r_1+\sqrt{r_2}$ است که درآن r_1 و r_2 ، عددهایی گویا هستند. عکس این مطلب‌هم درست است، یعنی هرعدد گنگ به‌صورت $r_1+\sqrt{r_2}$ را می‌توان به‌صورت کسر مسلسل متناوب نوشت.



شکل ۲۸

۷۴. الف) ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر حد $\{x_n\}$ وجود داشته‌باشد، این‌حد برابر است با $\pm\sqrt{a}$ فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty}x_n=b$. دراین صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$$

از این جا تساوی $b=\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$ به دست می‌آید که منجر به $b^2=a$ یعنی $b=\pm\sqrt{a}$ می‌شود.

اگر $x_0>0$ باشد، همهٔ جمله‌های دنباله مثبت، و اگر $x_0<0$ باشد، همهٔ جمله‌های دنباله منفی می‌شود. بنابراین، درحالت اول $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$ و در

حالت دوم $\lim_{n\to\infty}x_n=-\sqrt{a}$.

این ماند که ثابت کنیم، دنبالهٔ $\{x_n\}$ در واقع، دارای حد است. برای مشخص بودن وضع ، $x_0>0$ می‌گیریم (شکل ۲۸) . خارج قسمت تفاضل x_n و $\sqrt{a}$ را بر $\sqrt{a}$ به y_n نشان می‌دهیم. اگرمقدار $x_n=(1+y_n)\sqrt{a}$ را درتساوی $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$(1+y_{n+1})\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left[(1+y_n)\sqrt{a}+\frac{a}{(1+y_n)\sqrt{a}}\right]$$

و از آنجا

$$y_{n+1}=\frac{y_n^2}{2(1+y_n)}$$

بایدثابت کنیم که دنبالهٔ $\{y_n\}$ به سمت صفرمیل‌می کند. ابتدا یادآوری‌می کنیم که چون داریم:

$$1+y_n=1+\frac{x_0-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{x_0}{\sqrt{a}}>0$$

بنابراین، همهٔ جمله‌های y_n برای $n>1$ ، مثبت‌اند. به این ترتیب

$$|y_{n+1}|=y_{n+1}=\frac{y_n^2}{2(1+y_n)}<\frac{y_n}{2}$$

ازاین جا نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty}y_n=0$.

ب) مثال مشخصی می‌آوریم : $a=10$ ، $x_0=3$. دراین حالت

$$y_0=\frac{3-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

چون $(3/2)^2=10/24>10$ ، پس $\sqrt{10}<3/2$ ، به این ترتیب

$$|y_0|=\frac{|3-\sqrt{10}|}{\sqrt{10}}<\frac{0/2}{3}=\frac{1}{15}$$

یعنی

$$|y_1|=\frac{y_0^2}{2(1+y_0)}<\frac{\left(\frac{1}{15}\right)^2}{2\left(1-\frac{1}{15}\right)}=\frac{1}{420}<\frac{1}{400}$$

و سپس

$$|y_2|=\frac{y_1^2}{2(1+y_1)}<\frac{\left(\frac{1}{400}\right)^2}{2}=\frac{1}{320000}$$

بنابراین

$$|x_2-\sqrt{10}|=y_2\sqrt{10}<\frac{\sqrt{10}}{320000}<0/00001$$

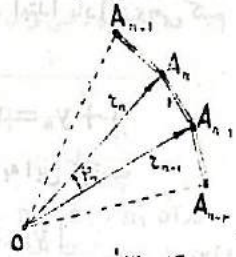
به این ترتیب برای پیدا کردن $\sqrt{10}$ تا ۰/۰۰۰۰۱ تقریب، کافی است جملهٔ x_2 را محاسبه کنیم. داریم:

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{10}{x_0}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\frac{10}{3}\right)=3\frac{1}{6}=3/16666\ldots;$$

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{10}{x_1}\right)=\frac{1}{2}\left(3\frac{1}{6}+\frac{10}{3\frac{1}{6}}\right)=3\frac{37}{228}=3/162280\ldots$$

مقدار واقعی $\sqrt{10}$ چنین است: $\sqrt{10}=3/16227766\ldots$.

همان طور که دیده می‌شود، مقدار به دست‌آمده با روش ما، از مقدار واقعی $\sqrt{10}$، کمتر از ۰/۰۰۰۰۱ اختلاف دارد.



شکل ۲۹

۷۵. الف) طول چوب کبریت را واحد می‌گیریم و فاصلهٔ نقطهٔ اولیه را تا انتهای کبریت nام به r_n نشان می‌دهیم (شکل ۲۹). از مثلث OA_nA_{n-1} به دست می‌آید:

$$r_n^2=r_{n-1}^2+1$$

چون $r_1=1$، بنابراین از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$r_n^2=n\Rightarrow r_n=\sqrt{n}$$

ببینیم چوب کبریت nام تحت چه زاویه‌ای، از نقطهٔ مبداء، دیده می‌شود.

از مثلث OA_nA_{n-1} داریم:

$$\sin\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ \operatorname{tg}\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

و روشن است که مقدار دوران مارپیچ، بعد از n چوب کبریت، برابر است با

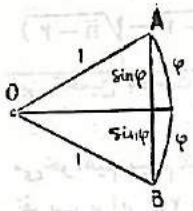
$$\frac{1}{2\pi}\left(\varphi_2+\varphi_3+\ldots+\varphi_n\right)$$

حالا ثابت می‌کنیم که رشتهٔ

$$\varphi_2+\varphi_3+\ldots+\varphi_n+\ldots$$

متباعد است و درنتیجه، تمام مارپیچ، بی‌نهایت دور می‌زند. برای این منظور، ابتدا ثابت می‌کنیم که به ازای $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$، این نامساوی برقرار است.

$$\sin\varphi<\varphi<\operatorname{tg}\varphi$$



شکل ۳۰

نامساوی اول، باتوجه به‌شکل ۳۰ به دست می‌آید: طول کمان AB ازطول‌وتر آن، بزرگتر است. ازآنجا

$$2\varphi=\widehat{AB}>AB=2\sin\varphi$$

برای اثبات نامساوی دوم، به شکل ۳۱ توجه می‌کنیم. کمان AB ازخط شکستهٔ ACB کوچکتر است. در نتیجه

$$2\varphi=AB<AC+CB=2\operatorname{tg}\varphi$$

بااستفاده ازاین نامساوی‌ها و مقادیری که قبلا برای $\sin\varphi_n$ و $\operatorname{tg}\varphi_n$ به‌دست آوردیم، می‌توانیم تخمین دقیقی برای زاویهٔ φ_n پیدا کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\varphi_n<\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

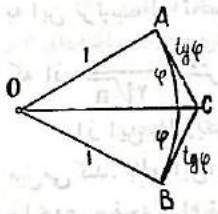
با استفاده از این نامساوی‌ها، می‌توانیم به هر دو پرسش مساله پاسخ دهیم. مقدار این مجموع را بررسی می‌کنیم:

$$\Phi_n=\varphi_2+\varphi_3+\ldots+\varphi_n$$

داریم:

$$\varphi_n>\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

در نتیجه داریم:



شکل ۳۱

$$\varphi_2>2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$\varphi_3>2(\sqrt{4}-\sqrt{3})$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_n>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

که از مجموع آن‌ها به دست می‌آید:

$$\Phi_n>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

از این‌جا دیده می‌شود که دنبالهٔ $\{\Phi_n\}$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

ب) برای این که به پرسش دوم مساله پاسخ دهیم، باید رفتار مجموع زیر را بررسی کنیم:

$$\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2}+\ldots+\varphi_{n+k}=\Phi_{n+k}-\Phi_n$$

با همان روش فوق می‌توان این تخمین را به دست‌آورد:

$$\Phi_{n+k}-\Phi_n>2(\sqrt{n+k+1}-\sqrt{n+1})$$

از طرف دیگر، با استفاده از نامساوی

$$\varphi_n < \frac{1}{\sqrt{n-1}} < \frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}} = 2(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2})$$

این تخمین به‌دست می‌آید:

$$\Phi_{n+k+1}-\Phi_n < 2(\sqrt{n+k}-\sqrt{n-1})$$

می‌خواهیم ببینیم که به ازای چه مقداری از k، اختلاف $\Phi_{n+k+1}-\Phi_n$ به تقریب برابر 2π می‌شود. به زبان دیگر، چند چوب کبریت باید به n چوب کبریت قبلی اضافه کرد، تا یك دور زده شده باشد؟ فرض کنید k به‌نحوی انتخاب شده باشد که داشته باشیم:

$$\Phi_{n+k}-\Phi_n \leqslant 2\pi \,,\; \Phi_{n+k+1}-\Phi_n \geqslant 2\pi$$

با استفاده از نامساوی‌های قبلی، می‌توان نوشت:

$$2\pi \geqslant \Phi_{n+k}-\Phi_n > 2(\sqrt{n+k+1}-\sqrt{n+1}) = 2(r_{n+k+1}-r_{n+1}) \,,$$

$$2\pi \leqslant \Phi_{n+k+1}-\Phi_n < 2(\sqrt{n+k}-\sqrt{n-1}) = 2(r_{n+k}-r_{n-1})$$

به عنوان فاصلهٔ d، بین دو حلقهٔ متوالی، می‌توان مقدار $r_{n+k}-r_n$ یا $r_{n+k+1}-r_n$ را درنظر گرفت. یادآوری می‌کنیم که به ازای مقادیر بزرگ m، مقادیر r_m و r_{m+1} خیلی کم با هم اختلاف دارند. در واقع

$$r_{m+1}-r_m = \sqrt{m+1}-\sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} < \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

به این ترتیب، از تخمین‌های بالا نتیجه می‌شود که مقدار $2d$، به اندازه‌ای که از $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ بیشتر نیست، با 2π اختلاف دارد.

از این جا دیده می‌شود که فاصله بین دو حلقهٔ متوالی پیچ، به سمت π میل می‌کند. بنابراین، به‌ازای مقادیر بزرگ n، شبیه به‌خطی می‌شود که مسیر صوتی را روی صفحه گرام تشکیل می‌دهد.

ooo

۱. حالت $-+$ ممکن نیست. بقیهٔ حالت‌ها ممکن است.

۲. این حالت‌ها ممکن است: $+++$ ؛ $++-$ ؛ $+-+$ ؛ $---$.

۳. الف) همیشه کوتاه‌ترین مرد از بین بلندقدها، بلندتر است از بلندترین مرد از کوتاه قدها. ب) بله، نتیجه تغییر می‌کند. دراین وضعیت، هردوحالت ممکن است پیش آید.

۴. بازرسی تکلیف‌ها وقتی وضع دشواری خواهد داشت که دست‌کم روی یکی از نیمکت‌ها، هردانش‌آموز، دست‌کم یکی ازمساله‌هارا حل نکرده باشد.

۵: ممکن است.

۶. بیان اول و بیان سوم؛ بیان دوم و بیان چهارم.

۷. قضیه‌های ۱ و ۶ درست و بقیه نادرست‌اند.

۸. الف) بله درست است. ب) نه، ازقضیهٔ فیثاغورث نتیجه نمی‌شود.

۹. قضیه ۸ درگروه اول، قضیه‌های ۲، ۳، ۶ و ۷ درگروه دوم و قضیه‌های ۴ و ۵ درگروه سوم قرار دارند.

۱۰. $+1$ و -1. به‌ازای $x=0$، عبارت $\frac{|x|}{x}$ معنا ندارد.

۱۱. الف) a^2 ؛ ب) $a-b$ ؛ ج) $b-a$ ؛ د) $-a$

۱۲. در معادله‌های الف) و ب)، دو حالت $x \geqslant 0$ و $x < 0$ و در معادلهٔ ج) حالت‌های $x < -\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ و $x > \frac{1}{2}$ را بررسی کنید.

جواب: الف) $x_1 = 1$ ، $x_2 = -3$ ؛ ب) $x_1 = 1$ ، $x_2 = -1$ ؛ ج) فاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

۱۳. حالت‌های مختلف استقرار نقطه‌های x ، y و 0 را روی محور عددی بررسی می‌کنیم. درحالت الف) تساوی تنهاوقتی‌ممکن‌است‌که $x \geqslant 0$ ، $y \geqslant 0$ یا $x \leqslant 0$ ، $y \leqslant 0$ باشد. درحالت ب) تساوی با شرط $x \geqslant y \geqslant 0$ یا $x \leqslant y \leqslant 0$ به دست می‌آید. بالاخره در حالت ج) حالت تساوی وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم: $x \geqslant 0$ ، $y \geqslant 0$ یا $x \leqslant 0$ ، $y \leqslant 0$

۱۴. حکم‌های الف) ، ب) و ج) درست وحکم د) نادرست است.

۱۵. هر دوحکم الف) و ب) درست است.

۱۶. الف) محیط بادقت ۴ سانتیمتر. دقت‌مساحت مستطیل، بستگی به‌طول ضلع‌های آن دارد. ب) محیط را بادقت تا ۱٪ ومساحت را بادقت تا ۲٪.

۱۷. الف) $x_3=\frac{9}{8}$ ؛ ب) $x_{10}=5\%$ ؛ ج) $x_{999}=x_{1000}$.

۱۸. الف) $x_2=x_3=-5$ ؛ ب) $x_{10}=20$ ؛ $x_3=-2$.

۱۹. دنبالهٔ $\{x_n\}$ را بی‌کرانه گویند، وقتی که برای هر عدد c بتوان اندیسی برای n پیدا کرد، به‌نحوی‌که داشته باشیم: $|x_n|>c$.

۲۰. مثال : الف) $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ ب) $x_n=\frac{1}{n}$ ؛ ج) $x_n=\frac{n-1}{n}$ ؛ د) $x_n=(-1)^n\cdot\frac{n-1}{n}$.

۲۱. ب) مسالهٔ ۲۲ را ببینید.

۲۲. برای دنبالهٔ a) همهٔ فاصله‌های بستهٔ مساله ، تله است. برای دنبالهٔ b) ، فاصله‌های بستهٔ A) و B) ظرف و فاصلهٔ بستهٔ C) تله است. برای دنبالهٔ c) هر سه فاصلهٔ بسته، ظرف است.

۲۳. الف) وجود دارد. ب) وجود ندارد.

۲۴. الف) وجود ندارد. ب) معلوم نیست، ممکن است وجود داشته باشد و ممکن است وجود نداشته باشد.

۲۵. الف) وجود دارد. ب) وجود دارد.

۲۶. مقادیر متناظر k ، دراین جدول داده شده است:

	(a	(b	(c
الف)	۱	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰
ب)	۰	$\sqrt{999}$	$\sqrt{999999}$
ج)	۰	$\frac{3}{\lg 2}$	$\frac{6}{\lg 2}$
د)	۲	2^{1000}	$2^{1000000}$

۲۷. ب) درست است.

۲۸. ب) نمی‌توان. دنبالهٔ c) ازمسالهٔ ۲۲ را ببینید.

۲۹. ازمساله ۲۳-ب) استفاده کنید.

۳۰. الف) ۰ . ب) ۱ . ج) ۲ . د) دارای حدی نیست. ه) ۱ . و) ۰ . ز) $\frac{2}{9}$ ح) حد ندارد. ط) ۰ . ی) دارای حد نیست.

۳۱. ممکن نیست (راهنمائی: مسالهٔ ۲۹ را ببینید).

۳۲. ب) این مطلب را تنظیم کنیدکه: اگر عدد a ، نقطهٔ حدی دنباله نباشد، چه معنایی دارد؟

۳۳. تعریف حدرا باتعریف نقطهٔ حدی مقایسه کنید.

۳۴. الف) ۱ . ب) ۱ ، ۱− . ج) ۰ ، $\pm\sin 1^\circ$ ، $\pm\sin 2^\circ$ ، ... ، $\pm\sin 89^\circ$ ، ± 1 . د) ۰ . ه) نقطهٔ حدی ندارد . و) نقطه‌های حدی ، فاصلهٔ بستهٔ [۰ ، ۱] را پرمی‌کنند.

۳۵. حکم درست نیست. مسالهٔ ۲۲-b) را ببینید.

۳۶. الف) $x_n\to\infty$. ب) $x_n\to\infty$. ج) $\{x_n\}$ ، کرانه‌دار نیست. د) $x_n\to\infty$. ه) کرانه‌دار است.

۳۷. ۱) شرط برای هر دنباله‌ای درست است. ۲) همهٔ جمله‌های دنباله، برابر a نیستند. ۳) دنباله کرانه‌دار است . ۴) a ، نقطهٔ حدی دنباله نیست . ۵) دنباله به سمت بی‌نهایت میل نمی‌کند. ۶) عدد a ، حددنباله نیست. ۷) دنباله کرانه‌دار است. ۹) عدد a، یا یکی ازجمله‌های دنباله است ویا نقطهٔ حدی آن است*.

بقیهٔ شرط‌ها، نفی شرط‌های قبلی است، به‌این ترتیب که شرط شمارهٔ k به معنای آن‌است‌که شرط (k − ۱۷) برقرار نیست. مثلاشرط شمارهٔ ۱۰ به‌این معناست‌که شرط‌شمارهٔ ۷ برقرار نیست، یعنی دنباله کرانه‌دار نیست. شرط ۱۵ به معنای برقرار نبودن شرط ۲ است، یعنی همهٔ جمله‌های دنباله، برابر است‌با a و غیره.

۳۸. الف)

$+++++$ ؛ $x_n=a$ ؛

$-++++$ ؛ $x_n=a+\frac{1}{n}$ ؛

$--+++$ ؛ $x_n=a+1+(-1)^n$ ؛

$--++-$ ؛ $x_n=a+n[1+(-1)^n]$ ؛

$---+-$ ؛ $x_n=a+(-1)^n$ ؛

$----+$ ؛ $x_n=n$ ؛

$-----$ ؛ $x_n=n+1+n[1+(-1)^n]$ ؛

۳۹. ۱) $x_n=\frac{1}{n}$. ۲) $x_n=\frac{n-1}{n}$. ۳) $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

۴۰. ثابت کنیدکه اگر دنبالهٔ نامتناهی، دارای بزرگترین جمله نباشد،می‌توان یک‌دنبالهٔ نامتناهی صعودی، ازآن جدا کرد.

۴۱. ثابت کنیدکه دنبالهٔ

۱/۴ ، ۱/۴۱ ، ۱/۴۱۴ ، ۱/۴۱۴۲ ، ۱/۴۱۴۲۲ ، ...

که جمله‌های آن مقادیر تقریبی نقصانی $\sqrt{2}$ را می‌دهند، یکنوا وکرانه‌دار است ودارای

*) وقتی که شرط ۹) برقرار شد، نقطه a را نقطه بوسان برای دنبالهٔ (x_n) گویند.

حدی گویا نیست.

۴۲. از نتیجهٔ مسالهٔ ۴۰ واصل بولتسانو ـ وایراشتراس، استفاده کنید.

۴۳. a) ، b) و c) درست است و حد آن‌ها به ترتیب برابر است با $a+b$ ، $a-b$ و d.ab) به‌شرطی درست است‌که داشته باشیم $b\neq 0$ ، و دراین صورت، حد آن برابر است با $\frac{a}{b}$. در حالت $b=0$ و $a\neq 0$ ، حکم d) نادرست است. در حالت $a=b=0$، ممکن است حکم d) درست وممکن است نادرست باشد.

۴۴. a) دارای حد نیست. b) ممکن است حدداشته باشد وممکن است دارای حد نباشد.

۴۵. a و b) ممکن است دارای حد باشند وممکن است‌حد نداشته باشند.

۴۷. ب) ازنامساوی $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ استفاده کنید و ثابت کنیدکه‌دنبالهٔ S_n کرانه‌دار است. ج) به طور جداگانه، دو دنباله‌ای را که از جمله‌های ردیف زوج و جمله‌های ردیف فرد تشکیل شده است، بررسی کنید.

۴۹. S_n را مجموع جزئی از n جملهٔ رشتهٔ

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

و C_n را مجموع جزئی از n جملهٔ رشتهٔ

$$a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n}+\cdots$$

بگیرید. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}(C_n-a_1)\leqslant S_{2^n+1}-a_1\leqslant C_n$$

۵۰. از مسالهٔ ۴۹ استفاده کنید.

۵۲. ج) به‌این نمونه‌ها توجه کنید: $x_n=n$ و $\{y_n\}$ یکی ازدنباله‌های زیر

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\},\ \left\{\frac{1}{n}\right\},\ \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\},\ \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$$

۵۳. الف) $x_n=\frac{1}{n^2}$ ، $y_n=\frac{1}{n}$. ب) $x_n=\frac{1}{n}$ ، $y_n=\frac{1}{n}$. ج) $x_n=\frac{1}{n}$ ، $y_n=\frac{1}{n^2}$. د) $x_n=\frac{1}{n}$ ، $y_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

۵۴. الف) $\frac{2}{3}$. ب) ۰ . ج) ۱ . د) ۱ .

۵۵. ثابت کنید:

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+Q(n)\leqslant k$$

که درآن $Q(n)$ عبارت است ازیك چند جمله‌ای از درجهٔ n.

۵۶. ازاین اتحاد استفاده کنید:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

۵۷. 2^n را به‌صورت $(1+1)^n$ درنظر بگیرید و از دوجمله‌ای نیوتون استفاده کنید.

۵۸. a^n را به صورت $[1+(a-1)]^n$ در نظر بگیرید و از بسط دو جمله‌ای استفاده کنید.

۵۹. ازنتیجهٔ مسالهٔ ۵۷ استفاده کنید.

۶۱. الف) ثابت کنیدکه دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌طور نزولی یکنوا است. ب) ابتداحالت عدد درست p را بررسی کنید، بعد حالت گویا و سرانجام حالت گنگ آن‌را، در حالت اخیر ازنامساوی $l(a)>l(b)$ به‌ازای $a>b$ استفاده کنید.

۶۲. الف) ازفرمول $l(a^p)=pl(a)$ استفاده‌کنید. ب) ثابت‌کنید $l(a)<a-1$.
ج) به‌عنوان e باید عدد $10^{\frac{1}{l(10)}}$ راگرفت.

۶۳. ب) تفاضل‌های:

$$[S_2(a,b)]^2-[S_1(a,b)]^2\ ،\ [S_{-2}(a,b)]^2-[S_{-1}(a,b)]^2$$

و

$$[S_1(a,b)]^2-[S_{-1}(a,b)]^2$$

را بررسی کنید.

۶۴. الف) ثابت کنیدکه به‌ازای $a\geqslant b$ داریم:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\leqslant S_n(a,b)\leqslant a$$

ب) $S_{-n}(a,b)$ را برحسب $S_n(a^{-1},b^{-1})$ بیان کنید:

ج) ثابت کنیدکه $S_{\frac{1}{n}}(a,b)\geqslant\sqrt{ab}$ وبا استفاده ازنامساوی $\ln a<a-1$، حد بالای $\ln S_{\frac{1}{n}}(a,b)$ را تخمین بزنید. پاسخ:

$$S_{\frac{1}{n}}(a,b)=\sqrt{ab}\xrightarrow[n\to\infty]{}$$

۶۵. این تساوی را ثابت کنید:

$$a_n+na_{n-1}+C_n^2a_{n-2}+C_n^3a_{n-3}+\cdots+na_1+a_0=n!$$

و تعداد روش‌هایی را پیدا کنیدکه به‌ازای آن‌ها، درست k نامه در پاکت خودشان قرار می‌گیرند. ازاین فرمول، برای محاسبهٔ دنبالهٔ مورد نظر $p_n=\frac{a_n}{n!}$ استفاده کنید.

۶۶. مبداء مختصات را در نقطه‌ای که حلزون دوم قرار گرفته است، انتخاب می‌کنیم. محورهای مختصات‌را، درجهت خط‌های کاغذ شطرنجی و واحد را، طول یکی از خانه‌ها می‌گیریم. فرض می‌کنیم‌که حلزون اول درلحظهٔ نخست، در نقطهٔ به‌مختصات (a,b) باشد. آن‌وقت، مختصات (a_n,b_n) نقطه‌ای را پیدا می‌کنیم‌که حلزون بعداز n گام به‌آن رسیده است. ضریب زاویهٔ خطی که در امتداد لولهٔ دوربین قرار گرفته، برابر است با : $k_n=\frac{b_n}{a_n}$. ثابت کنیدکه $k_n=1\xrightarrow[n\to\infty]{}$

۶۷. a) $\lim_{n\to\infty} k_n = 2$. b) $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$. c) دنبالهٔ $\{k_n\}$ دارای حدی نیست.

۶۸. از نقطه‌های A_0 و A_n، عمودهایی بر محور Ox فرود می‌آوردیم. P_0 و P_n را، پای این عمودها می‌گیریم. ثابت کنید که مثلث‌های $M_nA_0P_0$ و $M_nA_nP_n$ متشابه‌اند و از آن‌جا طول پاره‌خط M_nP_0 را محاسبه کنید.

پاسخ: نقطهٔ M، وسط پاره‌خط OP_0 است.

۶۹. سه نقطه، روی کاغذ، به عنوان جای مدرسه، سینما و قصر یخ، انتخاب کنید. نقطهٔ چهارم دلخواهی در نظر بگیرید و خط شکستهٔ $A_1A_2A_3A_4\ldots$ را، که مسیر حرکت توکاست، رسم کنید.

پاره‌خط‌های A_1A_4، A_2A_5، A_3A_6 وغیره را باهم مقایسه کنید.

۷۰. نقطهٔ M_n $\lim_{n\to\infty} M_n = M$، پاره‌خط M_1M_2 را به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند.

۷۱. الف) $S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$ ؛ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}$ به ازای $|a|<1$، در حالتی که داشته باشیم $|a|\geqslant 1$، این رشته متباعد است.

ب) S_n را به‌صورت مجموع n تصاعد هندسی درآورید:

$$S_n = \frac{a-(n+1-na)a^{n+1}}{(1-a)^2}$$

برای $|a|<1$ داریم: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{(1-a)^2}$ و برای $|a|\geqslant 1$، رشتهٔ مفروض متباعد است.

ج) $S_n = 1-\frac{1}{n+1}$. $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

د) $S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$. $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$

ه) ثابت کنید که

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

و از آن‌جا نتیجه بگیرید که این رشته، متباعد است.

۷۲. می‌توان آجرها را تا هر ارتفاعی، روی‌هم چید. طول هر آجر را مساوی ۱ بگیرید و با روش استقراء ریاضی ثابت کنید که اگر آجر $(n+1)$ ام به اندازهٔ $\frac{1}{2n}$ نسبت به آجر nام جلو بیاید. آجرها نخواهند افتاد. بعد، از نتیجهٔ مسألهٔ ۷۱-ه) استفاده کنید.

۷۳. $1+\sqrt{2}$.

۷۴. ب) کافی است x_2 را محاسبه کنید.

۷۵. الف) بی‌نهایت مرتبه، دور مبداء می‌چرخد.

ثابت کنید که زاویهٔ φ_n، که تحت آن چوب کبریت nام را از نقطهٔ مبداء می‌بینیم،

از $\frac{1}{\sqrt{n}}$ کوچکتر نیست.

ب) فاصلهٔ بین پیچ‌های متوالی به‌سمت π میل می‌کند (طول چوب کبریت را واحد می‌گیریم).

ثابت کنید که برای زاویهٔ φ واقع در ربع اول، نامساوی $\sin\varphi<\varphi<\operatorname{tg}\varphi$ برقرار است و از آن‌جا به نامساوی $\frac{1}{\sqrt{1}}<\varphi_n<\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ برسید. از این تخمین نتیجه بگیرید که

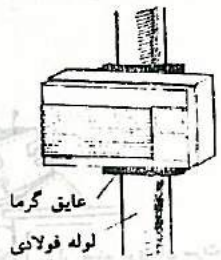
$$2(\sqrt{a+k+1}-\sqrt{n+1})<\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2}+\ldots+\varphi_{n+k}<2(\sqrt{n+k-1}-\sqrt{n-1})$$

برای مقدار مفروض n، مقدار k را طوری انتخاب کنید که مقدار

$$\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2}+\ldots+\varphi_{n+k}$$

هرقدر که ممکن است به 2π نزدیک باشد.

ooo



اگر دیدید باطری رادیوی ترانزیستوری شما «ته نشسته» شده، دلتنگ نشوید. هیچ لزومی ندارد که فوراً، برای خرید باطری، به طرف مغازه بدوید. رادیو را در نزدیکی لولهٔ فولادی عمودی حرارت مرکزی یا لولهٔ گاز قرار دهید، دوباره جان خواهد گرفت و صدای آن بلندتر خواهد شد. لوله در این جا نقش آنتن خارجی را دارد. اگر دیدید لوله زیاد داغ است، بهتر است بین آن و رادیو، عایقی از قبیل مجله کهنه و یا روزنامه‌ای که چند بار تا شده باشد، قرار دهید.

Reconciliation with Mathematics
Editor : Parviz Shahryari
Under the supervision of the editorial board
A supplementary publication of the Faculty of Humanities and Literature
Address : The Free University of Iran
P. *O. Box* 11–1962
Aban Shomali St. Karim-Khan Zand Boulevard
Tehran – 15 *Iran*

Vol. IV, No. 2, 1981