آشنائی با ریاضیات

جلد سیزدهم

فروردین ماه ۱۳۶۶

آشنایی با ریاضیات (جلد سیزدهم)

گردآورنده : پرویز شهریاری

صفحه‌آرا: حسن نیک‌بخت

ناشر: انتشارات فردوس

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

چاپ اول، فروردین ماه ۱۳۶۶

روی جلد:
کارل فردریک گوس

حروفچینی: مهدی

چاپ : رامین

فهرست جلد سیزدهم

۲۲۰ ریال

آشنایی با ریاضیات (جلد سیزدهم)
گردآورنده : پرویز شهریاری
صفحه‌آرا: حسن نیک‌بخت
ناشر: انتشارات فردوس
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
چاپ اول، فروردین ماه ۱۳۶۶

روی جلد:
کارل فردریک گوس

حروفچینی: مهدی
چاپ : رامین

فهرست جلد سیزدهم

۲۲۰ ریال

کارل فردریك گوس

۱۸۵۵-۱۷۷۷

(به مناسبت دویست و دهمین سال تولد او)

۳۰ آوریل سال ۱۹۸۷، دویست و ده‌سال ازروز تولد کارل فردریك گوس ریاضی‌دان بزرگ و اخترشناس نامی می‌گذرد. ارثیهٔ علمی که گوس، درسده‌های هیجده و نوزده، ازخود باقی گذاشت، در بسیاری جهت‌ها، مسیر تکاملی ریاضیات معاصررا تعیین کرد. پایه‌هایی که گوس درزمینهٔ حساب، جبروآنالیز گذاشت، تقریباً تمام اندیشه های اصلی این شاخه‌های ریاضیات را در بر می گیرد.

گوس درآلمان ودر شهرکوچك برانشویگ متولد شد. پدر بزرگش دهقان وپدرش کارگر لوله‌کش (یاآن طورکه، درآن‌زمان می گفتند، استاددر زمینهٔ کارفواره‌ها) بودو درشهرخودش، ازنظرکارهای‌محاسبه‌ای وحسابداری شهرت داشت واغلب، برای رسیدگی به‌حساب‌ها، ازاودعوت‌می کردند.

کارل کوچك، خیلی‌زود، استعداد حیرت‌انگیز خودرا، درزمینهٔ‌محاسبه نشان داد. بعدها برای دوستانش تعریف می کردکه، محاسبه‌را، قبل‌ازحرف‌زدن، توانست یادبگیرد. گوس هفت ساله را به مدرسهٔ ملی فرستادند. در آن‌جاهم، استعداد بی‌نظیر پسربچه، درریاضیات، نمایان‌شد. یك‌روز، معلم ازبچه‌ها خواست تاعددهای از ۱ تا ۴۰ را باهم جمع کنند. تقریباً بلافاصله، وقتی که شاگردان دیگر تازه می‌خواستند انجام این جمع طولانی را آغاز کنند، گوس جواب درست را روی لوح متعلق به‌خود نوشت وبه‌معلم‌ارائه داد. ظاهراً بایدکارل کوچك متوجه شده باشدکه، مجموع هردو عددی که از دوطرف به‌یك فاصله‌اند، مقدار ثابتی است:

$$۱+۴۰=۲+۳۹=\dots=۲۰+۲۱=۴۱$$

تعداد این‌زوج‌ها، برابر است با ۲۰و؛ بنابراین، مجموع همهٔ عددها، برابرمی‌شودبا ۲۰ × ۴۱ یعنی ۸۲۰. معلم‌متوجه‌شدکه،آموزش مدرسه‌ای، نمی‌تواند این پسرکوچك‌را اغناکند وکتاب کوچکی دربارهٔ حساب به اوهدیه کردکه کارل‌کوچك، روی‌آن نوشت: «کتاب دوست‌داشتنی». درهمین زمان مارتین بارتلس، مربی ومعلم جوان، به‌طرف گوس جلب شد. اوهمراه با گوس، آغاز به مطالعهٔ یك‌کتاب ریاضی کردکه، درآن ازرشته‌های نامتناهی صحبت شده بود. همین شخص بود که توانست دوك برانشویگ را قانع کند که، برای ادامهٔ آموزش‌گوس، او را ازنظر مالی کمك کند.

سرنوشت بعدی بارتلس جالب است: در ابتدای سدهٔ نوزدهم، به عنوان استاد ریاضیات دردانشگاه قازان، به‌روسیه دعوت شد. او در همین دانشگاه، افتخار استادی‌یك هندسه‌دان بزرگ دیگر، یعنی نیکلای ایوانویچ لباچوسکی را پیدا کرد. بارتلس، بعدها استاد دانشگاه تارتو شد.

گوس، بعدازتمام‌کردن دبیرستان و تسلط برچند زبان قدیمی و چند زبان اروپائی، درسال۱۷۹۵، به‌دانشگاه گوتینگن رفت. مدتی‌هم ریاضیات‌و هم فلسفه را دنبال‌کرد و در انتخاب یکی ازآنها، مردد بود! او نوشته‌های نیوتون و لاگرانژ و، به‌خصوص، نوشته‌های اولر را (که‌خیلی به‌آن‌هاعشق می‌ورزید)، پیش خود مطالعه‌کرد وخود، به نتیجه‌های تازه‌ای در ریاضیات رسید، ولی درمارس سال ۱۷۹۶ بودکه تصمیم گرفت خود را وقف‌ریاضیات کند: وقتی‌که امکان رسم ۱۷ضلعی منتظم را، به‌کمك خط‌کش وپرگار، ثابت کرد، رسم چند ضلعی‌های منتظم، از همان دوره‌های باستانی، مورد توجه و علاقهٔ مردم بود. اقلیدس، در «مقدمات» خود، روش رسم چندضلعی‌های منتظم را، وقتی که تعداد ضلع‌ها برابر ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵ باشد، داده بود. همچنین روشن شده بود که می‌توان چندضلعی‌های منتظمی را رسم کرد که، تعداد ضلع‌های آن‌ها، ازدوبرابرکردن‌های متوالی تعداد ضلع‌های چند-ضلعی‌های بالا به‌دست می‌آید. ولی، همهٔ تلاش‌ها، برای رسم ۷ ضلعی یا ۹ ضلعی منتظم (به کمك خط‌کش و پرگار)، باعدم موفقیت روبه‌رو شده بود.

به‌جز این، هنورروشن نشده بودکه‌آیا می‌توان دست‌کم، یك چندضلعی‌منتظم دیگر، به‌جز چندضلعی‌های اقلیدسی، رسم‌کرد یا نه! به‌همین مناسبت، کشف گوس ۱۹ ساله، موجب شور وهیجان زیادی شد. گوس، درهمین سال،حل کامل مساله‌ای را پیداکردکه می‌توان آن‌را به‌این صورت تنظیم‌کرد: درچه صورتی ریشهٔ معادلهٔ

$$x^n-۱=۰ \qquad (*)$$

را می‌توان با رادیکال‌هایی نشان دادکه فرجهٔ ۲ داشته‌باشند؟ راه‌حل‌گوس، چنان جالب است‌که هنوز، یکی ازبهترین روش‌ها در ریاضیات است.

فرض‌کنیم، درجهٔ معادلهٔ (*)، برابرعدد اول p باشد. دراین‌صورت، گوس ثابت‌کردکه معادلهٔ

$$\frac{x^p-۱}{x-۱}=x^{p-۱}+x^{p-۲}+\cdots+x+۱=۰ \qquad (**)$$

در حوزهٔ عددهای گویا قرار نمی‌گیرد و، همیشه، به کمك رادیکال‌ها، قابل حل است. اگر فرض‌کنیم: $p-۱=\alpha_۱\alpha_۲\cdots\alpha_s$، که در آن، α_i عددی است اول، آن‌وقت، حل‌معادلهٔ (**)، منجر به‌حل معادله‌هایی بادرجه‌های $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_s می‌شود؛ ضمناً، ضریب‌های نخستین معادله (یعنی‌معادلهٔ ازدرجهٔ $\alpha_۱$)، عددهایی گویا هستند وهر معادلهٔ بعدی، بستگی به ریشه‌های معادلهٔ قبلی دارد.

برای این‌که بتوان ریشهٔ معادلهٔ (**) را، باخط‌کش وپرگار،ساخت کافی است‌که، همهٔ این معادله‌ها ازدرجهٔ دوم باشند، یعنی

$$\alpha_۱=\alpha_۲=\dots=\alpha^s=۲ \quad \text{و} \quad p=۲^s+۱$$

ولی $۲^s+۱$، تنها وقتی می‌تواند عددی اول باشدکه، خود s ، قابل تبدیل به‌صورت ۲^k باشد بنابراین، اگرعدد اول p ، به‌صورت $۲۲^k+۱$ باشد، آن وقت، چندضلعی منتظم نظیرآن را می‌توان، به‌کمك خط‌کش وپرگار، ساخت به‌ازای $k=۰$ و $k=۱$ ، به سه‌ضلعی وپنج‌ضلعی می‌رسیم‌که، اقلیدس هم، روش رسم‌آن‌ها را داده است. به‌ازای $k=۲$ ، ۱۷ ضلعی، به‌ازای $k=۳$، ۲۵۷ضلعی وبه‌ازای $k=۴$، ۶۵۵۳۷ضلعی به‌دست می‌آید. به‌ازای $k=۵$

همان طورکه اولر ثابت‌کرده بود، $۲^{۲^{۵}}+۱$ ، عددی اول نمی‌شود. هنوز این مطلب روشن نشده است که‌آیا، در بین عددهای به صورت $۲^{۲^{k}}+۱$، بی‌نهایت عدد اول وجوددارد ویا، تعدادآن‌ها محدود است.

گوس تأکید می‌کردکه، این شرط، نه تنها کافی، بلکه لازم هم هست و از آن جا نتیجه گرفت که رسم ۷ ضلعی منتظم ممکن نیست، زیرا $۷-۱=۶=۲\times۳$ ، ولی اثبات لازم‌بودن این شرط را نداد.

نتیجه‌گیری گوس، در نظریهٔ معادله‌ها، اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد. همین نمونه‌ای‌که بااین عمق ودقت مورد تجزیه وتحلیل گوس قرارگرفت به نیل‌هنریك‌آبل(۱۸۰۲-۱۸۲۹) و اواریست‌گالوا (۱۸۱۱-۱۸۳۲) کمك‌کرد تا نظریهٔ معادله‌ها را بسازند.

پنج سال بعدی را، دوران قهرمانی گوس نام نهاده‌اند. بخش بزرگی ازکشف‌های مشهورگوس درزمینهٔ نظریهٔ عددها، جبر وحساب، مربوطبه‌این دوران است اندیشهٔ مربوط به‌هندسهٔ نااقلیدسی را هم، در همین دوران پیدا کرد. وقتی‌که گوس، این دوران را به یاد می‌آورد، می‌گفت: اندیشه‌های تازه‌ای‌که به‌مغز او می‌رسید، آن‌قدر زیاد بودندکه به زحمت می‌توانست از عهدهٔ یادداشت مختصر تنها بخشی ازآن‌ها برآید. عظمت‌کارها واندیشه‌های تازهٔ گوس را، ازروی دفتریادداشت‌های روزانه هم (که درآن ازکشف‌های خودش نام می‌برد) می‌توان فهمید. مثلاً، درتاریخ ۳۰ مارس سال ۱۷۹۶، به‌رسم ۱۷ضلعی منتظم و درتاریخ ۸ آوریل همان سال، به‌اثبات اول قانون تقابل مربعی (یکی ازقضیه‌های اصلی نظریهٔ عددها) اشاره شده است.

درسال ۱۷۹۷، اثبات تازه‌ای ازقضیهٔ اصلی جبر، به‌وسیلهٔ گوس داده شد: هرمعادلهٔ جبری با ضریب‌های حقیقی، حتماً دارای ریشه‌ای حقیقی یا موهومی است. به‌خاطرهمین‌کار او بودکه، درسال ۱۷۹۹، درجهٔ دکترابه‌او اعطا شد. اوبعدها، همین قضیه را، به‌سه‌طریق مختلف دیگرهم ثابت کرد.

گوس، همهٔ بررسی‌های خود را درزمینهٔ نظریهٔ عددها، درکتابی‌به‌نام «بررسی‌هایی در حساب»[1] جمع آوردکه در سال ۱۸۰۱ چاپ شد. این‌کتاب

1. Disquisitiones arithmeticae.

را باید آغازی، برای حساب وجبرعالی، دانست.

قبل ازهمه، رابطهٔ‌هم‌نهشتی را مطرح وهمهٔ عنصرهای‌نظریهٔ مقدماتی عدد را، به‌زبان هم‌نهشتی بیان می‌کند. او دو عدد درست a و b را، نسبت به مدول m، هم‌نهشت می‌نامید، وقتی‌که، تفاضل $a-b$، بر m بخش‌پذیر باشد (m، عددی است درست). برای رابطهٔ هم‌نهشتی ، علامت $\equiv$ را به‌کار برد:

$$a\equiv b \pmod m$$

این نماد خیلی خوب انتخاب شده بود، زیرا شباهت بین هم‌نهشتی و برابری را نشان می‌داد: گوس روشن کرد، وقتی با هم‌نهشتی‌هایی نسبت به‌یك مدول سر وکار داشته باشیم، می‌توان از همان قانون‌های معادله، در مورد آن‌ها هم استفاده کرد.

به‌سادگی دیده می‌شودکه، همهٔ عددهای درست را، نسبت به مدول m، می‌توان به m مجموعهٔ جدا از هم A_0، A_1، ...، A_{m-1} تقسیم کرد. هرعدد ازمجموعه A_i، نسبت به‌مدول m، با عدد i هم‌نهشت است. گوس، عددهای ۰ ، ۱ ، ... ، $m-1$ راکوچکترین مانده‌ها ، و A_i را؛ کلاس‌مانده‌ها نامید. او قانون جمع وضرب این‌کلاس‌ها را مشخص‌کرد و، سپس ، درواقع، یك‌حلقهٔ محدود را به دست‌آورد! ولی، اگر مدول، عدداول p باشد آن‌وقت، کلاس‌های مانده‌ها، یك‌میدان محدود تشکیل می‌دهند. درریاضیات، این، نخستین مثال ازمیدان محدود ونخستین مثال ازمیدان «غیرطبیعی» بود (یعنی، میدانی‌که بستگی به مسأله‌های اندازه‌گیری نداشت). گوس نظریهٔ هم‌نهشتی‌ها را تکامل می‌دهد وبه‌بررسی هم‌نهشتی‌های درجهٔ اول، دستگاه هم‌نهشتی‌های درجه اول و، بالاخره هم‌نهشتی‌های از مرتبه‌های بالاتر می‌پردازد. بدون هیچ مبالغه‌ای می‌توان‌گفت‌که، نقش هم‌نهشتی‌هادرنظریهٔ عددها، همچون نقش معادله‌ها درجبراست.

دراین‌جا نمی‌توانیم به‌همهٔ جنبه‌های پربارکتاب گوس بپردازیم. تنها به‌طورخلاصه، هم‌نهشتی‌های درجه دوم را مطرح می‌کنیم‌که می‌توان،آن‌ها را، به‌این صورت درآورد:

$$x^2 = a \pmod p$$

اگر این هم‌نهشتی جواب داشته باشد، یعنی a با یك مربع، نسبت به p ، هم‌نهشت باشد، a را «ماندهٔ‌مربعی» و، درغیر این‌صورت، «نامانده مربعی» می‌نامند. مثلاً ، نسبت به مدول ۷، عددهای ۱، ۲ و ۴ «مانده‌های مربعی» وعددهای ۳، ۵ و ۶ «نامانده‌های مربعی» هستند.

بـرای مشخص کردن وضع مانـده‌ها و نامانده‌ها بهتر است از نمـاد $\left(\frac{p}{q}\right)$ لژاندر استفاده کنیم که به‌این ترتیب، تعریف می‌شود:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} +1 & \text{وقتی‌که } p \text{ ماندهٔ مربعی، نسبت به } q \text{ ، باشد.} \\ -1 & \text{وقتی‌که } p \text{ نامانده‌ٔ مربعی، نسبت به } q \text{ باشد.} \end{cases}$$

اولر توانست معیارساده‌ای پیدا کندکه، به‌کمك آن، بتوان فهمید، آیا عدد a، ماندهٔ مربعی نسبت‌به مدول ثابت p هست یا نـه! دشواری کار در جای دیگری است: اگر عدد a داده شده‌باشد، معلوم کنید، نسبت بـه کدام عددهای اول p ، ماندهٔ مربعی است؟ ودر واقع، پاسخ دادن به همین پرسش اهمیت زیادی درنظریهٔ عددها دارد.

فرما کشف و اولرثابت کردکه، عدد $a = -1$ ، نسبت به‌همهٔ‌عددهای اول بـه‌صورت $4n+1$ ، مانـدهٔ مربعی و، نسبت به‌همهٔ عددهای اول بـه صورت $4n+3$ ، نامانده مربعی است، یعنی

$$\left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$$

خصلت عدد $a = 2$ را هم، در ایـن مورد، فرما کشف و لژاندر ثابت کـرد (این‌ها را، اضافه‌های اول ودوم، به‌قانون تقابل می‌نامند.)

درحالت کلی، تنها توانستند بستگی‌بین $\left(\frac{p}{q}\right)$ و $\left(\frac{q}{p}\right)$ را پیداکنندکه به صورت زیر است:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

واین همان «قانون تقابل مربعی» است. این‌قانون را اولر کشف کرد، ولـی نه خود اولر ونـه لژاندر نتوانستند، آن راثـابت کنند. گوس ، ابتدا آن را کشف‌کرد ونام «قضیهٔ اصلی» را به‌آن داد «زیرا ، تقریباً همهٔ‌آن چه دربارهٔ مانده‌های مربعی می‌توان گفت، باتکیه براین قضیه‌است»؛ وسپس، دواثبات مختلف، درکتاب خود، برای‌آن‌آورد. بعدهـا، شش اثبات دیگرهم، بـرای «قانون تقابل» پیداکرد.

بقیهٔ بخش‌های کتاب، به‌نظریهٔ زیبا وعمیق شکل‌های مربعی نسبت‌به دومتغیر، اختصاص دارد:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad a,b,c \in Z.$$

(منظور از Z، طبق معمول ، حلقهٔ عددهای درست‌است). گوس مجموعـهٔ شکل‌های مختلف مبین D $(D = b^2 - ac)$ رامورد بررسی‌قرارمی‌دهد، آن‌ـ ها را به‌کلاس‌هایی تقسیم‌می‌کند وحساب کلاس‌های شکل‌ها را طرح‌می‌ریزد. واین، برای نخستین‌بار بودکه عمل‌های معمولی حساب، درمـوردچیزهایی به‌کار می‌رفت که، به‌کلی، دور ازعدد بودند.

بخش‌آخـر کتاب، بـه معادلهٔ تقسیم دایره، یعنی معادلهٔ بـه صورت $x^n - 1 = 0$ اختصاص دارد.

کتاب «بررسی‌هایی درحساب»، گوس بیست‌وچهار ساله را، در ردیف ریاضی‌دانان بزرگی همچون فرما ، اولر و لاگرانژ قرار داد.

نظریهٔ عددها، برای‌همیشه ودرتمامی زندگی، ازبخش‌های موردعلاقهٔ گوس بود. او می‌گفت: « ریاضیات، سلطان همهٔ دانش‌ها، و نظریهٔ عددها، سلطان ریاضیات است». دراین‌جا، به‌یك‌دوره ازکارهای او دراین زمینه، که بـه سال‌های ۱۸۲۸ تا ۱۸۳۲ مربوط می‌شود، اشاره می‌کنیم. هدف گوس این بودکه «قانون تقابل دومجذوری» را پیدا واثبات‌کند، یعنی‌قانون‌تقابل را، برای مانده‌های درجهٔ چهارم. خود او می‌نویسدکه، برای پایه‌گـذاری این قانون، لازم بود «به‌مفهومی، حوزهٔ حساب عالـی، گسترش داده‌شود». گوس، به‌این نتیجه رسیدکه باید مفهوم عدد درست را تعمیم دهـد، مفهومی که، در طول هزاران سال، بدون هیچ‌تردیدی به مجموعهٔ عـددهای طبیعی

۱۸۱۳، روی تابع‌های بایك متغیر مختلط (انتگرال درحوزهٔ مختلط، بی‌ارتباطی انتگرال به‌مسیر انتگرال‌گیری، قضیهٔ مربوط بـه مانده‌ها)، تبدیل انتگرال‌های الیتیك وتابع‌های الیتیك کارمی‌کرد و ویژگی آن‌هارا، با عمق ودقت فراوان، مورد مطالعهٔ قرارداد، ولی، به‌جز یك اثر، کـه به رشته‌های فوق هندسی

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\dots$$

اختصاص داشت (ودرسال ۱۸۱۲ چاپ‌شد)، هیچ‌اثردیگری را به چاپ نداد به‌همین مناسبت، نظریهٔ تابع‌های الیتیك، دوباره، وبه‌وسیلهٔ آبل و یاکوبی کشف شد وافتخار ساختن نظریهٔ تابـع های با متغیر مختلط، نصیب کوشی شد.

گوس از سال ۱۸۲۰، مستقیماً سرپـرستی نقشه بـرداری از سرزمین پادشاهی هانوور را به عهده داشت. او، چه به‌طور نظری در زمینهٔ نقشه‌برداری وزمین‌سنجی وچه به‌طور عملی ودر زمینهٔ مثلث‌بندی، بـررسی‌های زیادی انجام داد.

اوهلیوتروپ را، که وسیله‌ای است برای‌اندازه‌گیری‌های‌نقشه‌برداری کشف‌کرد. احتمالا، همین اشتغال او به‌کارهای زمین سنجی، موجبی بـرای بررسی‌های او درزمینهٔ ساختن نظریهٔ‌کلی سطح‌ها باشد. کتاب اورا، به نـام «بررسی‌کلی‌سطح‌های‌خمیده»[1]، بایدنقطه عطفی درتکامل هندسهٔ‌دیفرانسیلی دانست.

تا قبل از گوس ، هندسه را تنهـا روی دوسطح، در فضای اقلیدسی، مورد مطالعه قرارمی‌دادند: ۱) روی صفحه(سطح مستوی معمولی‌اقلیدسی) و ۲) درفضا (هندسهٔ فضایی). ضمناً به‌نظر می‌آمدکه، این دوهندسه، به‌کلی باهم اختلاف دارند. روی سطح‌کره، نقش خطهای‌راست به‌عهدهٔ کمان‌هایی از دایره‌های عظیمه است، بنابراین در آن‌جا، خطهای راست موازی وجود ندارد ومجموع زاویه‌های مثلث، همیشه از $2d$ بیشتر است ودر مثلث‌های

1. Disquisitions generalis circa saperficies curvas, 1827.

مختلف، مقدارثابتی نیست (به‌نحوی‌که، مثلث‌کروی، نه‌تنها با معلوم‌بودن سه ضلع، بلکه با معلوم‌بودن سه زاویه هم، مشخص مـی‌شود؛ روشن است که، روی‌کره، شکل‌های متشابه وجود ندارد). ولـی، صفحه و سطح کره، تنها حالت‌های خاصی ازسطح‌ها، درفضای سه‌بعدی هستند. آیا برای انواع دیگر سطح‌ها، نمی‌توان هندسه‌ای درست‌کرد و، اگر پاسخ مثبت است، باچه روشی باید آن ها را مورد مطالعه قرار داد؟ گوس ، درکتاب خـود، روش ساختن‌هندسهٔ درونی سطح‌ها را به‌دست می‌دهد. فرض‌کنیم، سطحی، به‌وسیلهٔ معادلهٔ $F(x, y, z)=0$ داده شده باشد. گوس ، ابتدا، مختصات منحنی‌الخط راروی سطح (u, v) درنظر می‌گیرد ومعادلهٔ سطح را دراین دستگاه مختصات به‌دست می‌آورد:

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v),\quad z=z(u, v)$$

سپس به مطالعهٔ عنصرخطی می‌پردازد:

$$ds=\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

که فاصلهٔ بین دونقطهٔ نزدیك به‌هم، ازسطح را، به‌ما می‌دهد (درحالت‌صفحهٔ اقلیدسی: $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$) ودرآن ، E، F و G ، تابع‌های‌پیوسته‌ای از u و v هستندکه، دوبار، قابل دیفرانسیل‌گیری‌اند.

گوس ، ویژگی‌هایی ازسطح را مورد مطالعه قرار می‌دهدکه به‌عنصر خطی مربوط می‌شوند، ولی‌نه به‌آن عنصری‌کـه درفضای سه بعدی مطـرح است. این ویژگی‌های درونی (طول‌کمان درروی سطح، زاویهٔ بین‌دوکمان مساحت)، با تغییرشکل سطح، بی‌تغییر می‌مانند، به‌شرطی‌که آن را پاره و یا منقبض ومنبسط نکنیم. بین همهٔ خطهایی‌که دونقطهٔ‌نزدیك به‌هم ازصفحه را به‌هم وصل می‌کنند، یکی ازآن‌ها، کمترین طول را دارد چنین‌خطـی را ، خط ژئودزیك‌گویند. ازهرنقطهٔ سطح، درجهت مفروض، یك خط‌ژئودزیـك عبور می‌کند، تنها یك‌خط ژئودزیك مشخص وجود داردکه دونقطه ازسطح را به‌هم وصل می‌کند. بنابراین، نقش خط ژئودزیك برسطح، همان نقش‌خط راست برصفحهٔ معمولی است. خطهای ژئودزیك، ضمن ساختن هندسهٔ‌درونی سطح، همان‌نقش خطهای راست درصفحه را به‌عهده دارند.

گوس ، قضیهٔ اصلی هندسهٔ سطح‌ها را کشف وثابت‌کرد (خود او، آن‌را «قضیهٔ برجسته»[1] نامیده است): انحنای کامل سطح، $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ ($\frac{1}{R_1}$ و $\frac{1}{R_2}$ ، انحناهای اصلی سطح درنقطهٔ مورد بررسی است)، تنها به E ؛ F ، G ومشتق‌های اول ودوم آن‌ها بستگی دارد.

این‌قضیه، به‌معنای‌آن است‌که انحنای‌کامل را (که امروز، آن را ، انحنای‌گوسی می‌نامند)، می‌توان بااندازه‌گیری روی خود سطح، و بدون بررسی سطح درفضای سه‌بعدی، به‌دست‌آورد. همین ویژگی انحنای کامل، به ریمان امکان داد تا انحنای فضای متریك چندبعدی را پیدا کند. ازقضیهٔ گوس نتیجه می‌شودکه، انحنای کامل K، ضمن خم‌کردن سطح، بی‌تغییر می‌ماند.

هندسهٔ درونی سطح، در حالت‌کلی، نااقلیدسی است. به این ترتیب، گوس توانست دنیای نامتعارف تازه‌ای را دربرابر ریاضی‌دانان قراردهد: دنیایی ازسطح‌ها، که هرکدام ازآن‌ها، ویژگی‌های هندسی مخصوص به خود دارد.

در میانهٔ سدهٔ نوزدهم، برنهارد ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶)، توانست براساس نظریهٔ گوسی سطح ها، هندسهٔ متریك فضای n بعدی را بسازد (که هندسهٔ ریمانی نام گرفته است). همین هندسهٔ ریمانی است‌که پایه نظریهٔ نسبیت قراردارد، همان‌طورکه هندسهٔ اقلیدسی، پایه‌ای برای مکانیك کلاسیك نیوتون است. با همهٔ این‌ها، آلبرت اینشتاین می‌نویسد که، نظریهٔ نسبیت خود را، با راهنمائی نظریهٔ سطح‌های گوس ، تنظیم‌کرده است.

گوس ، درسال‌های ۱۸۳۳-۱۸۳۴ ، همراه با ویلهلم ویبر، به بررسی مغناطیس والکترومغناطیس زمین پرداخت. اویك دستگاه تلگراف مغناطیسی ساخت‌که دو رصدخانه را به‌هم مربوط می‌کرد. همچنین، دستگاه واحدهای مطلق ومفهوم پتانسیل میدان مغناطیسی، متعلق به گوس است. او بررسی

1. Theorema egregium

نظریهٔ پتانسیل را ، در اثر خودش به‌نام «قضیه‌هایی کلی دربارهٔ نیروهایی که به نسبت عکس مجذور فاصله، برهم اثر می‌کنند» (۱۸۳۹-۱۸۴۰)آغاز کرد.

فعالیت‌های گوس ، تا لحظهٔ مرگ او، باشدت ادامه داشت. نه تنها نوشته‌های فراوان او، بلکه نامه‌ها و یادداشت‌های او هم، گواه براین حقیقت‌اند.

هم‌عصران گوس، اورا مردی بشاش وزنده دل، باطبعی‌شوخ توصیف می‌کنند. گوس ، به‌ادبیات، فلسفه، سیاست و اقتصاد علاقه‌مند بود (او هر روز، روزنامه های دولت های اصلی اروپا را مطالعه می‌کرد). او با فرهنگستان علوم پترزبورگ رابطه داشت ودرسال ۱۸۲۴، به‌عنوان عضو خارجی این فرهنگستان انتخاب شد. در۶۲سالگی زبان روسی رایادگرفت و مثلا، دریکی ازنامه‌های خود، خواهش‌کرده است تاکتاب « دختر سروان» پوشکین را برای او بفرستند.

گوس ، درزمان زندگی خود، به سلطان ریاضی‌دانان مشهورشد. او شاگردان زیادی داشت، ولی درواقع، بایداورا معلم ریاضی‌دانان سراسر جهان دانست.

یك مسألهٔ منطقی

باسه‌نفرآشنا شوید: آرش، برزو وبهرام. یکی ازآن‌ها آهنگر است، دومی باغبان وسومی‌آموزگار. یکی درباختران زندگی می‌کند، دومی در بوشهر وسومی در آمل. می‌خواهیم بدانیم، چه‌کسی درکجا زندگی می‌کند وچه حرفه‌ای دارد!

تنها می‌دانیم:

۱) بهرام به ندرت به باختران می‌رود ، اگرچه همهٔ نزدیکان او در آن‌جا زندگی می‌کنند؛

۲) درمورد دونفر از این افراد، نام حرفه وشهری‌که درآن زندگی می‌کنند، باهمان حرف اول نام‌آن‌هاآغاز می‌شود؛

۳) زن‌آهنگر خواهرکوچکتر بهرام است.

حل درصفحهٔ ۹۳

عددنویسی یونانی

احمد بیرشك

یونانیان درآغاز، به پیروی از مصریان وکرتیان، اعـداد را با چند علامت نشان می‌دادند. مثلاً خط‌کوتاه قائم‌برای ۱ ، خط‌کوتاه افقی برای ۱۰، دایره برای۱۰۰ ودایرهٔ با زوائد برای ۱۰۰۰. یکان ودهگان وسدگان و هزارگان با تکرارآن علامتها بیان مـی‌شد، نیاز به‌گفتن نیست که در آن روزگاران ازعددهـای بزرگ سخن نمـی‌رفت. با علامتهائی که گفتیم عـدد ۶۳۷۳ تقریباً بدین‌صورت نمایش داده می‌شد:

۶۰۰۰ ۳۰۰ ۷۰ ۳

ازاوایل سدهٔ ۱۳م ق‌ه کارساده‌ترشد وحروف اول شش واژهٔ یونانـی برای نمایش شش‌عدد درنظر گرفته‌شدند، بدین‌شرح:

| ، حرف اول ισο (ایسو) ، به‌معنی برابر ، برای نمایش ۱

Γ ، « « Γενταα (پنتا) ، « « پنج ، « « ۵

Δ ، « « Δεχας (دکاس) ، « « ده ، « « ۱۰

H ، « « Hχατογ (اکاتون) ، « « صد ، « « ۱۰۰

χ ، « « χιλιας(خیلیاس) ، « « هزار ، « « ۱۰۰۰

M ، « « Muρίοι(موریوی)، « « ده‌هزار، « « ۱۰۰۰۰

(موریوی مرادف میریاد است‌که واژه‌ای‌آشنا وبه معنی ده‌هزار است.)

هریك ازاین‌علامتها تاچهاربار قابل تکراربود؛ برای نمایش پنج‌برابر هریك ازآنها،آن را درداخل Γ (که‌صورت دیگری ازΠ است) می‌نوشتند: Δ = ۵۰ ؛ H = ۵۰۰ ؛ M = ۵۰۰۰ ؛ χ = ۵۰۰۰۰؛ اگر عددی را درداخل Δ می‌نوشتند به‌معنی ده برابرآن بود: M = ۱۰۰۰۰۰؛ اگر عدد داخل H نوشته‌می‌شد به‌معنی‌صدبرابرآن M = ۱۰۰۰۰۰۰ . اینك‌نمایش چند عدد:

|	۱	Δ	۱۰ H	۱۰۰ Fxxxx	۹۰۰۰
||	۲	ΔΔ	۲۰ HH	۲۰۰ M	۱۰۰۰۰
|||	۳	ΔΔΔ	۳۰ ...	F	۵۰۰۰۰
||||	۴	ΔΔΔΔ	۴۰ F	۵۰۰ A	۱۰۰۰۰۰
Γ	۵	F	۵۰ ...	AA	۲۰۰۰۰۰
Γ|	۶	FΔ	۶۰ FHHHH	۹۰۰ A	۵۰۰۰۰۰
Γ||	۷	FΔΔ	۷۰ χ	۱۰۰۰ H	۱۰۰۰۰۰۰
Γ|||	۸	FΔΔΔ	۸۰ ...	HHH	۳۰۰۰۰۰۰
Γ||||	۹	FΔΔΔΔ	۹۰ F	۵۰۰۰ F	۵۰۰۰۰۰۰
χ|||		FΔΓ	۱۳۶۵	HHΔ	۲۰۰۰۰۱۰
HHHFFMMFχFΔΔΔ|||				۳ ۵۸۶ ۰۸۳	

ملاحظه می‌فرمایید که «چنگی به‌دل نمی‌زند» ؛ اما درآن روزگاران پیشرفتی مغتنم شمرده می‌شد.

باردیگرگامی بزرگ به‌جلو برداشته شدو حروف الفبای یونانی بـه جای ارقام بکارگرفته شدند. اما برای این‌کار به۲۷ حرف نیازبود درحالـی که الفبای یونانی ۲۴ حرف‌دارد. پس سه حرف از الفبای فنیقی بـه عاریت گرفتند: داو یا ناو به‌این‌شکل «ϛ» برای نمایش ۶ ، کوپا یاگاف یاقاف به این‌شکل «ϟ»برای نمایش ۹۰ ؛ و حرفی به‌این‌شکل «ϡ»که امروز سامپی نامیده می‌شود، برای نمایش ۹۰۰. برای تمایز حروف الفبا برای کلمات و همان حروف برای رقم درگوشهٔ راست وبـالای حرفی‌که به‌جای رقـم بکار می‌رفت یك خط‌کوچك مورب مثل‌آپوستروف یا کشانهٔ پریم‌گذاشته می‌شد. بدین‌ترتیب از ۱ تا ۹۹۹ با این علامتها نشان داده می‌شدند:

یکان { α′ ، β′ ، γ′ ، δ′ ، ε′ ، ϛ′ ، ζ′ ، η′ ، θ′ ؛
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

دهگان { ι′ ، χ′ ، λ′ ، μ′ ، ν′ ، ξ′ ، ο′ ، π′ ، ϟ′ ؛
۱۰ ۲۰ ۳۰ ۴۰ ۵۰ ۶۰ ۷۰ ۸۰ ۹۰

سدگان { ρ′ ، σ′ ، τ′ ، υ′ ، φ′ ، χ′ ، ψ′ ، ω′ ، ϡ′ .
۱۰۰ ۲۰۰ ۳۰۰ ۴۰۰ ۵۰۰ ۶۰۰ ۷۰۰ ۸۰۰ ۹۰۰

هزارگان را باهمان نمادهاکه درطرف چپ وپائین آنها حرف ι (یوتا) نگاشته مـی شد نمایش می دادند : $\alpha' = ۱۰۰۰$ ، $\beta' = ۲۰۰۰$ ، ... ، $\theta' = ۹۰۰۰$. با این قرارداد تا ۹۹۹۹ را می‌نوشتند؛ بعد M ، حرف‌اول موریوی (یا میریاد) وارد میدان می‌شد و بالای‌آن شماره‌های دیگر را بکار می‌بردند؛ $\alpha'_M = ۱۰۰۰۰$ ، $\beta'_M = ۲۰۰۰۰$ ؛ ... $\lambda' \eta'$ به‌معنی ۳۸بودو $\lambda'_M \eta'$ به‌معنی ۳۸ میریاد یا ۳۸۰۰۰۰ ؛ $\delta' \tau'_M o' \beta'$ عدد ۴۳۷۲۰۰۰۰را نمایش می‌داد. درحقیقت نوشتن M درزیرهرعدد مانندآن بودکه با نمادهای امروزین چهارصفر درسمت راست عددی بنگاریـم، یعنی آن‌را در ۱۰۰۰۰ ضرب کنیم . دیوفانتوس وپاپوس کاررا ساده‌ترکردند وبرای نمایش مضربهای ۱۰۰۰۰ فقط یك نقطه درطـرف راست عدد قـرار می‌دادند. بدیـن ترتیب $\delta' \tau' o' \beta' . \eta' \chi' \varepsilon'$ مساوی بـود با ۴۳۷۲۰۰۰۰ + ۸۰۲۵ یعنـی بـا ۴۳۷۲۸۰۲۵. با این‌قرارداد تا ۹۹،۹۹۹،۹۹۹ قابل نوشتن بود وتا زمان ارشمیدس ۱۰۰،۰۰۰،۰۰۰ حدبالای عددی بودکه می‌شد بانمادهانوشت.

ارشمیدس برای مربع میریاد، یعنی ۱،۰۰۰۰،۰۰۰۰ نمادی قائل‌شد وتوانست هرعددی راکه بانمادگذاری امروزین ۱۷رقم داشته باشدبنویسد سپس عددی راکه ازگـذاشتن ۱۶صفر در طرف راست ۱ حـاصل می‌شود ، یعنی $۱۰^{۱۶}$ را، بانماد جـدیدی نمایش داد وبا این تدبیر نـوشتن اعداد تـا ۲۴رقمی (امروزین) میسر شد. آپولونیوس تدبیربهتری اندیشید وبـه‌جای مربع میریاد خودآن، یعنی ۱۰۰۰۰ را مبنای شمارقرارداد. بدین‌ترتیب در یك عدد بزرگ چهار رقم (حرف) دست‌راست نمایش یك‌ها، چهاررقم طرف چپ‌آنها نمایش میریادها (ده‌هزارها)، سومین قطعهٔ چهاررقمی ازطرف‌راست نمایش مربع میریادها بود، وبه‌همین قیاس تابینهایت. هرقطعه از قطعه‌دیگر به‌وسیلهٔ فاصلهٔ کوتاه یاخط‌کوتاهی جدا می‌شد. بدین نحوآپولونیوس قاعـدهٔ ارزش موضعی را درعددنویسی یونانی پدیدآورد.

آذرماه ۱۳۶۵

بررسی سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم درحوزهٔ عددهای مختلط

I. درریاضیات دبیرستانی، برخی از تابع‌های با متغیر حقیقی، مـورد مطالعه قرارمی‌گیردکه، تابع

$$y = ax^۲ + bx + c \qquad (۱)$$

حالت خاصی ازاین‌گونه تابع هاست (a، b و c، عـددهایـی حقیقی و ضمناً $a \neq ۰$).

در بررسی تابع (۱)، تنها مقدار های حقیقی متغیر x در نظـر گرفته می‌شود ($x \in R$، یعنی‌میدان تابع، یاحوزهٔ تغییر x ، عبارت است‌ازمجموعهٔ عددهای حقیقی).

اگر مبین سه‌جمله‌ای درجـه دوم $ax^۲ + bx + c$ غیرمنفـی باشد: $\Delta = b^۲ - ۴ac \geqslant ۰$ ، تابع (۱) به ازای $x = x_۱$ و $x = x_۲$ (ریشه‌های سه‌جمله‌ای) برابر صفر و ، بـه‌ازای سایـر مقدارهـای حقیقی x ، برابر با مقدارهایی حقیقی می‌شود.

درحالت $\Delta < ۰$، تابع (۱) مقدارهای حقیقی را قبول می‌کند و،ضمناً به‌ازای هیچ مقدار حقیقی x ، برابرصفر نمی‌شود.

در ایـن جا، پرسشی پیش‌مـی‌آید: آیـا درمجموعـهٔ عددهای مختلط $x = u + iv$ ($u \in R$ و $v \in R$)، می‌توان چنان مقدارهایی برای x پیداکرد که ، به‌ازای‌آن‌ها، تابع (۱) برابربا مقدارهایی حقیقی، وازآن جملـه صفر شود؟ تنها حالت اخیر است‌که دردبیرستان با آن برخورد می‌کنیم: وقتی‌که مبین یك سه‌جمله‌ای درجه‌دوم (باضریب‌های حقیقی) منفی باشد، ریشه‌های سه‌جمله‌ای عددهایی مختلط‌اندکه، به‌ازای‌آن‌ها، مقدارتابع (۱) برابر صفر می‌شود. همان طورکه مـی‌دانیم، دراین حالت، دو ریشهٔ مختلط بـه دست می‌آیدکه مزدوج یکدیگرند:

$$x_{۱,۲}, m + in \quad (n \neq ۰)$$

می‌خواهیم، چنان عددهای مختلطی را پیدا کنیم که تابع (۱)، به ازای هر کدام از آن‌ها، برابر عددی حقیقی شود و، سپس، نتیجه‌های حاصل را تعبیر هندسی کنیم.

تابع (۱) را، به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \qquad (2)$$

به ازای هرمقدار مختلط $x=u+iv$، خواهیم داشت:

$$y=a\left[\left(u+\frac{b}{2a}\right)+iv\right]^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

وقتی که داشته باشیم $v=0$، به‌ازای هرمقدار دلخواه u، برای y مقداری حقیقی به‌دست می‌آید:

$$y=a\left(u+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \qquad (2)$$

(و این همان حالتی است که، دردرس‌های دبیرستانی، به‌تفصیل موردبررسی قرار گرفته است.)

اگر داشته باشیم: $u=-\frac{b}{2a}$ و $v\neq 0$، آن‌وقت

$$y=a(iv)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=-av^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \qquad (3)$$

یعنی، دراین حالت هم، برای y، مقداری حقیقی حاصل می‌شود.

به‌این ترتیب، تابع

$$y=ax^2+bx+c$$

درمجموعهٔ عددهای مختلط $x=u+iv$، در دوحالت، مقدارهای حقیقی را قبول می‌کند:

۱) به‌ازای $x=u\ (-\infty<u<+\infty)$ و $(v=0)$ و

۲) به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}+iv\ (-\infty<v<+\infty)$

II. براساس این نتیجه گیری‌ها، می‌توان مکان هندسی نقطه هایی از

فضا را ساخت، که مختصات (u,v,y) آن‌ها، دررابطهٔ (۱)، یعنی نمودار تابع (۱)، صدق کنند.

نمودار می‌تواند تکیه گاهی عینی، برای بررسی‌های بعدی ما باشد.

ثابت می‌کنیم که، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دو سهمی هم‌نهشت (قابل انطباق)، که یکی ازآنها درصفحهٔ $v=0$ ودیگری درصفحهٔ $u=-\frac{b}{2a}$ قرار دارد.

درواقع، به ازای $v=0$ و $x=u$ به رابطهٔ (۲) می‌رسیم و، ضمناً، به ازای $u=-\frac{b}{2a}$ به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

نمودار این تابع، عبارت است از یک سهمی، واقع در صفحهٔ $uOy\ (v=0)$، که رأس آن درنقطهٔ $P\left(-\frac{b}{2a},0,\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ است و، درحالت $a>0$، تقعرآن (ویا امتداد شاخه‌های آن) به طرف مقدارهای مثبت y است.

بدون این‌که لطمه‌ای به‌کلی بودن بحث بخورد، از این‌جا به‌بعد، همیشه، مقدار a را مثبت می‌گیریم $(a>0)$.

در حالت $u=-\frac{b}{2a}$ و $-\infty<v<+\infty$، به رابطهٔ (۳) می‌رسیم و، ضمناً، به‌ازای $v=0$ به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

به روشنی دیده می‌شود که، نمودار تابع (۳)، یک سهمی است، هم‌نهشت با سهمی (۲)، که درصفحهٔ $u=-\frac{b}{2a}$ قراردارد و، رأس آن،

همان رأس سهمی قبلی است: $P\left(-\frac{b}{2a}, 0, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. امتداد شاخه‌های این سهمی، در جهت مقدارهای منفی y است.

از آن چه گفتیم، بلافاصله، نتیجه می‌شود:

الف) این سهمی‌ها، دردوصفحهٔ عمود برهم $u=-\frac{b}{2a}, v=0$ قرار دارند.

ب) این دوسهمی، رأس مشترکی درنقطهٔ

$$P\left(-\frac{b}{2a}, 0, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

دارند و معادله‌های محورتقارن مشترک آن‌ها، چنین‌است:

$$\begin{cases} u=-\frac{b}{2a} \\ v=0 \end{cases}$$

پ) این‌سهمی‌ها، دردوجهت‌متقابل، نسبت‌به‌صفحهٔ $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ امتداد دارند.

III. شبیه‌بررسی معمولی تابع درجه دوم، به ازای مقدارهای‌مختلف مبین‌آن، می‌توان تابع (۱) را ، به‌ازای $x=u$ و $x=-\frac{b}{2a}+iv$ هم، مورد بررسی قرار داد.

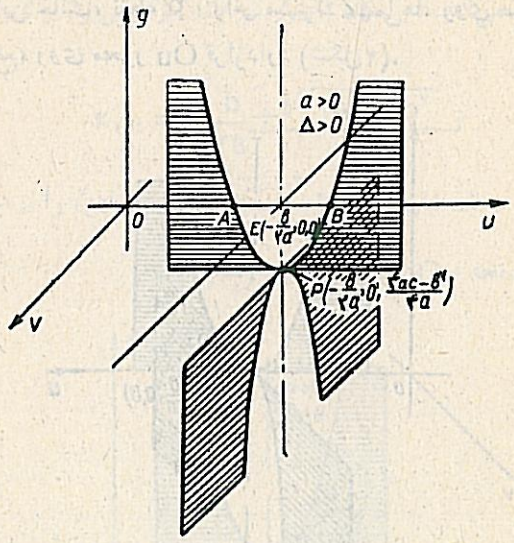
بررسی نشان می‌دهدکه، وقتی $\Delta>0$، $\Delta=0$ و $\Delta<0$ باشد، درهمهٔ حالت‌ها، تابع y می‌تواند هم‌مقدارهای مثبت وهم مقدارهای منفی‌را اختیار کند، وهم برابر صفرشود.

توجه‌کنیم: تابع درجه‌دوم درنقطه‌هایی برابر صفرمی‌شودکه، نمودار آن، صفحهٔ uOv را قطع می‌کند.

حالت‌های مختلف را درنظرمی‌گیریم:

۱) $\Delta>0$ ، دراین‌صورت $\frac{4ac-b^2}{4a}<0$.

بنابراین، نقطه P، رأس مشترک سهمی‌ها، زیرصفحهٔ uOv قرار دارد (شکل ۱).



شکل ۱

معلوم است‌که، در این حالت، تابع y ، به ازای مقدارهای حقیقی $x=u$ ، هم‌مقدارهای‌مثبت وهم‌مقدارهای منفی را قبول می‌کندکه‌متناظرند باسهمی بالایی، درنمودارما.

تابع y ، به ازای همهٔ مقدار های $x=-\frac{b}{2a}+iv$ ، منفی‌می‌شود زیرا درعبارت $y=-av^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ ، هر دو جمله، برای $-\infty<\infty<+\infty$ ، منفی است. سهمی متناظر با آن ، در صفحهٔ $u=-\frac{b}{2a}$ وزیرصفحهٔ uOv قراردارد ودرهیچ نقطه‌ای‌آن را قطع‌نمی‌کند

می‌شود:

اگر $|v|<\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$، آن وقت $y>0$؛

اگر $|v|>\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$، آن وقت $y<0$؛

اگر $|v|=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$، آن وقت $y=0$.

در واقع، در عبارت $y=-av^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$، جملهٔ دوم مثبت وجملهٔ اول، برای همهٔ مقدارهای $v\neq 0$، منفی است.

در حالت $|v|<\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ به‌دست می‌آید: $v^2<\frac{4ac-b^2}{4a^2}$

و بنابراین: $y=-av^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$.

در حالت $|v|>\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ داریم: $v^2>\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ و بنابراین $y<0$.

وبالاخره، درحالت $|v|=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ به‌دست‌می‌آید: $y=0$.

به‌این ترتیب، نمودار تابع (۱)، به ازای $x=-\frac{b}{2a}+iv$، متناظر با سهمی پایینی می‌شود که صفحهٔ uOv را در نقطهٔ A و B، واقع برخط راست

$$\begin{cases} u=-\frac{b}{2a} \\ y=0 \end{cases}$$

قطع می‌کند.

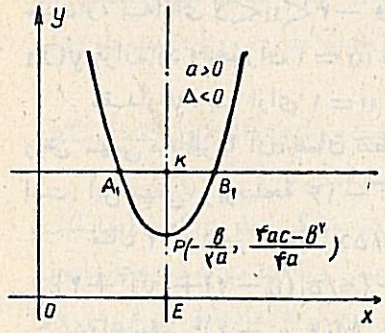
نقطه‌های A و B (نقطه‌های برخورد نمودار تابع باصفحه uOv)، به‌سهمی پایینی متعلق‌اند. واین، متناظر باحالتی است که، تابع مفروض، دارای دو ریشهٔ مزدوج موهومی x_1 و x_2 باشد.

IV. براساس‌آن‌چه گفته شد، می‌توان پاره‌خطی را به‌دست‌آورد که با قدرمطلق‌بخش موهومی ریشهٔ معادله، درحالت $\Delta<0$، برابرباشد.

باتوجه به‌هم‌نهشت‌بودن سهمی‌های‌نمودار تابع حقیقی (۱)، می‌توان پاره خطهای

$$AE=BE=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

(شکل۳) را، که‌برابربا قدرمطلق بخش موهومی ریشه‌های معادله هستند، در حالتی هم‌که تنها، سهمی بالایی، یعنی سهمی متناظر بامقدارهای حقیقی x را در اختیار داریم، به سادگی به دست آوریم (شکل۴).



شکل ۴

برای این منظور، روی خط راست $x=-\frac{b}{2a}$، از نقطهٔ P (راس سهمی) به‌طرف بالا، پاره‌خط

$$PK=PE=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

را جدا می‌کنیم. ازنقطهٔ K، خطراستی موازی محور Ox می‌کشیم تاسهمی را در نقطه‌های A و B قطع‌کند. به‌دست می‌آید.

$$A_1K=KB_1=AE=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

(شکل‌های۳و۴)، که طول‌آن‌ها، برابر است باقدرمطلق ضریب‌بخش‌موهومی ریشه‌های مختلط معادله (شکل‌های ۳ و۴ را ببینید).

V. چند مثال، برای پیداکردن مقدارهای مختلط x می‌آوریم که، به

ازای آن‌ها، سه جمله‌ای درجه دوم با ضریب‌های حقیقی، برابر با مقداری حقیقی بشود.

مثال ۱. $y=x^2-2x-15$.

$$y=(x-1)^2-16=[(u-1)+iv]^2-16$$

راس سهمی: $P(1,0,-16)$. نقطه‌های برخورد بامحور Ou:

$$A(-3,0,0),\ B(5,0,0)$$

مقدار y، به ازای $u<-3$ و $v=0$، همچنین به‌ازای $u>5$ و $v=0$، مثبت و، به‌ازای $-3<u<5$ و $v=0$ منفی است. سهمی در صفحه yOu قراردارد ومحورآن $u=1$، $v=0$ است.

مقدار y، به ازای $u=1$ و $-\infty<v<+\infty$، منفی است، راس سهمی متناظر با آن، همان نقطه P، و محور سهمی $u=1$، $v=0$ است. این سهمی، زیرصفحهٔ $y=-16$ و درصفحهٔ $u=1$ واقع است.

مثال ۲. $y=-0/5x^2+4x-10$.

$$y=-0/5(x-4)^2-2=-\{0/5[(u-4)+iv]^2+2\}$$

راس‌سهمی: $M(4,0,-2)$. بامحورOu، برخوردی‌ندارد. مقدارy، به‌ازای $-\infty<u<+\infty$ و $v=0$، منفی‌است. سهمی درصفحهyOu و زیرصفحه uOv قراردارد؛ محورآن عبارت است از: $u=4$، $v=0$.

اگر $u=4$ و $-2<v<2$، آن‌وقت $y<0$؛

اگر $u=4$ و $v=\pm 2$، آن‌وقت $y=0$(یعنی $4\pm 2i$، ریشه‌های موهومی سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم‌اند)؛

اگر $u=4$ و $v>2$ یا $v<-2$، آن‌وقت $y>0$.

راس سهمی همان نقطهٔ $M(4,0,-2)$ و محور سهمی، همان خط راست $u=4$ ؛ $v=0$ است. سهمی درصفحهٔ $u=4$ قرار دارد و صفحهٔ yOu را درنقطه‌های $(4,2,0)$ و $(4,-2,0)$ قطع می‌کند.

نگاهی گذرا به نقوش هندسی پوشاك ایرانیان دردورهٔ هخامنشی

جابر عناصری

ازمطالعهٔ اجمالی نقش ونگارهای جامهٔ مردان وزنان ایرانی دردورهٔ هخامنشی، چنین دانسته می‌شود که درآن زمان، بافت نقوش هندسی از: دایره و خطوط شکسته و مثلث ومربع وجزاین‌ها، برروی پارچه‌ها، رواج فراوان داشته است.

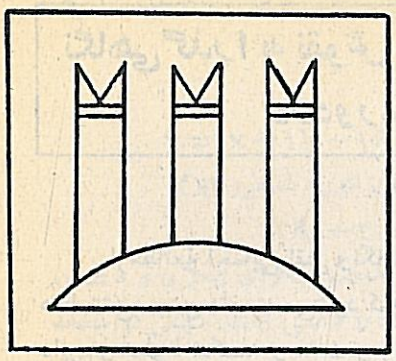
بسیاری ازاین نقوش، جنبهٔ سمبولیك ورمزی داشته وپرده‌های‌منقشی ازرازها ونمادها ونشانه‌ها به‌شمار می‌رفته است.

این سمبول‌ها وعلائم‌را ـ خودمردم به‌انگیزهٔ باوری‌که به‌آنهاداشتند برای بیان وفهماندن بسیاری ازرموزآفرینش وبا التفات به‌جنبه‌های‌جادوئی واخترشناسی مطرح می‌کردند. ازاین‌رو، این‌گونه نمادها و نقوش، برروی بخش‌هایی از ساختمان، ظروف سفالی وفلزی، مهرها، گورها وحتی‌بافته‌های دورهٔ هخامنشی دیده می‌شود. به خصوص پوشاك دورهٔ هخامنشی به نقوش هندسی‌آراسته شده است. مردم‌آن زمان قطعاتی ازطلا به‌شکل شیر، پرشده ستاره یاگل پنج‌پر ویا فلزاتی بانقوش هندسی، مانند مثلث و غیره برلباس‌ها می‌دوخته‌اند. بسیاری ازاین قطعات‌که به‌شکل نقوش هندسی است، امروزه درموزهٔ ایران‌باستان وموزه‌های دنیا نگهداری می‌گردد. یکی از نقش‌های شناخته شده‌که‌برروی پارچه‌های دورهٔ هخامنشی‌دیده می‌شود، نقش‌خورشید با هشت‌پرتو به‌شکل مثلث است‌که همه دردرون چنبری قرارگرفته‌اند.

نقش‌ونگارهای دیگری‌که برروی جامه‌های ایرانیان درآثار و مدارك مختلف مشاهده می‌شود، عبارتست از: نقش خطوط پهن متوازی ساده با دندانه‌ها ونقطه‌هاکه بیننده را به‌یادکنگره‌های ساختمان‌های تخت جمشید و آرایش ازاره‌های آنها می‌اندازد.

ازنقش ونگارهای هندسی دیگر، نقش‌شطرنجی، نقش راه راه و خطوط

متوازی عمودی بانقش‌های بادامی، نقش‌های نقطه نقطه که گاه یك نقطه وزمانی‌سه نقطه‌پهلوی‌هم بوده‌است.



نقش‌لوزی ومربع‌های‌تودرتو، نقش‌های مارپیچی و ستاره‌های چهار پر وچهارخانه‌های نقطه‌دار وجز آن نیزازنقوش هندسی‌شناخته شده منقش بر پوشاك ایرانیان دورهٔ هخامنشی است.

با اندکی تأمل می‌توان دریافت که نقوش روی پیراهن‌ها عموماً «هندسی ـ تزیینی» است. درروی پیراهن‌ها قوسی مانند نیمدایره درداخل‌یك مربع ودرقسمت پائین‌آن دوایری کوچك به چشم می‌خورد. روی نیمدایره، سه‌مستطیل بلند به‌رنگ‌های گوناگون، عمود برنیمدایره بوجودآورده‌اندکه روی هریك ازآنها دومثلث به‌رنگ زرد در امتداد ضلع طرفین مستطیل‌ها، نقش زده‌اند. به طوریکه مجموعاً هیئت برج‌های جنگی را دارند.

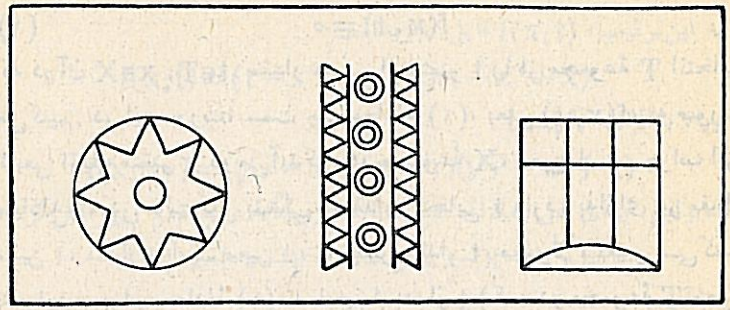
نقوش «هندسی ـ تزیینی» روی سپرجنگی جنگاوران آن دوره نیز چشمگیر است.

تیردان‌ها به‌شکل هرم ناقص ساخته شده ونقوش هندسی ودوایرزینتی برروی تیردان‌ها دیده می‌شود. بر روی پارچه‌های مکشوفه از «پازیریك» تصویری‌اززنان درحال‌عبادت دیده‌می‌شودکه درحاشیهٔ سرانداز ولباهایشان، نقوش هندسی نظیر مثلث‌های به‌هم پیوسته ـ در ردیف متوالی و جملگی محصور در دوخط متوازی ـ به‌چشم می‌خورد.

حاشیهٔ خود پارچه‌ها نیز بامثلث‌هائی که به‌رنگ سیاه و سفید است، نظیرقاب عکس پارچه را دربرگرفته است.

افزون برلباس زنان ومردان ـ در زیورآلات دوره هخامنشی نیز به کرات ناظر نقوش هندسی هستیم. سینه‌ریزهائی به‌صورت دوایر به‌هم‌چسبیده دریك ردیف ومحصور دردایره‌ای بزرگ، و گوشواره‌ها ودستبندهای طلائی به‌همین سیاق ازآن زمان بازمانده است. یکی از این گوشواره‌های مکشوفه

ازپاسارگاد، ازیك نوار دایره‌شکل تشکیل شده‌که در وسط دایرهٔ نوار، سه خط افقی‌با میله‌های‌تابیدهٔ موازی هم‌قراردارد‌که به هریك تعدادی پولك‌های مسطح ساده با اشکال هندسی متعددآویخته است. دراین گوشواره، آویزی به شکل کاج دیده می شودکه اشکال لوزی مانند در داخل آویز به چشم می‌خورد.



از انواع گوشواره‌های سادهٔ دورهٔ هخامنشی، در برخی از کتب تصاویری‌وجود دارد. این گوشواره‌ها به‌شکل دایره‌وشبیه هلال ماه‌می‌باشد.

در الگوهای زنانه وبازوبندهای مزدان‌آن زمان نیز نقوش «هندسی ـ تزیینی» گوناگون یافت می‌شود. استفاده ازنقوش هندسی درمورد پوشاك ـ درکنار سایرآثارهنری دورهٔ هخامنشی ـ وقوف هنرمندان‌آن زمان به رموز هندسی را بیان نموده وذوق زیبائی دوستی‌آنان را در قلمرو نقوش تزیینی نشان می‌دهد.

رمز و راز عددها

این ضرب را کامل کنید:

A B C D E ×
A B C D E

* * * * * *
* * * * * *
* * * * * *
* * * * * *

* * * * * A B C D E

حل در صفحهٔ ۹۴

آیا درس ریاضی خود را می‌دانید؟

حل بعضی از معادله‌ها، با واردکردن پارامتر

این معادله را درنظر می‌گیریم:

$$f(x, t)=0 \qquad (1)$$

که درآن $x\in X$ ، $t\in T$. مقدار معینی از متغیر t را از مجموعهٔ T انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت، سمت چپ معادلهٔ (۱)، یعنی $f(x, t)$، به صورت تابعی ازیك متغیر x در می‌آیدکه، در مجموعهٔ X، معین است. جواب این معادله، که در حالت‌کلی بستگی به‌مقدار انتخابی t دارد، به‌ازای هر مقدار معین t، مقداری است معین و، با تغییر مقدار t، معمولاً، تغییر می‌کند. بنابراین، جواب معادلهٔ (۱)، تابعی است از t (که در مجموعهٔ T معین است). اگر این جواب را $x_0(t)$ فرض‌کنیم. داریم:

$$f[x_0(t), t]=0, \ t\in T \qquad (2)$$

$f(x, t)$، درحالت‌کلی، تابعی است ازدومتغیرx و t، ولی وقتی‌که، برای محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ (۱)، t را مقدار ثابتی می‌گیریم، آن وقت، t را **پارامتر** گویند. مقدار ریشهٔ $x_0(t)$ از معادلهٔ (۱)، بستگی به‌مقداری داردکه برای پارامتر t، انتخاب می‌کنیم.

ممکن است، سمت چپ معادله

$$f(n, t_1, t_2, \cdots, t_n)=0 \qquad (3)$$

تابعی ازچند پارامتر t_1، t_2،...، t_n باشد. دراین‌صورت، جواب معادلهٔ (۳)، یعنی $x_0(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ ، تابعی است ازمجموعهٔ همهٔ این‌پارامترها.

گاهی پیش می‌آیدکه، معادله‌ای، شامل پارامترنیست، ولی برای حل آن، بهتر است‌که، معادله را، درارتباط بایك یاچند پارامتر درنظربگیریم‌و، سپس، باحل معادلهٔ اخیر، جواب‌های معادلهٔ اصلی را پیدا کنیم.

مثال مطلوب است حل معادلهٔ

$$x^4-2\sqrt{2}x^2-x+2-\sqrt{2}=0$$

حل. حل این معادله باروش‌های عادی (ومثلاً تجزیهٔ سمت‌چپ‌آن) بسیار دشوار و مستلزم صرف وقت زیادی است ولی اگر $t=\sqrt{2}$ بگیریم،

سمت چپ معادله، به‌صورت تابعی از دومتغیر x و t درمی‌آید:

$$f(x,t)=x^4-2tx^2-x+t^2-t$$

معادلهٔ $f(x,t)=0$ ، نسبت به پارامتر t ، از درجهٔ دوم است ریشه‌های‌آن، چنین می‌شود:

$$t_1=x^2+x+1 \ , \ t_2=x^2-x$$

به این‌ترتیب، $f(x,t)$ قابل تجزیه‌است:

$$f(x,t)=(t-x^2-x-1)(t-x^2+x)$$

ویا، به‌ازای $t=\sqrt{2}$

$$f(x,\sqrt{2})=(\sqrt{2}-x^2-x-1)(\sqrt{2}-x^2+x)$$

بنابراین، برای حل معادلهٔ اصلی، باید دومعادلهٔ درجه‌دوم زیرراحل‌کرد:

$$x^2+x+1-\sqrt{2}=0 \ , \ x^2-x-\sqrt{2}=0$$

وازآن‌جا

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$$

$$x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}$$

از روش واردکردن پارامتر، می‌توان درنامعادله‌ها هم استفاده کرد.

چند تمرین

این معادله‌ها را حل‌کنید:

۱. $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0$

۲. $2x^3+x+\sqrt{2}=0$

(دراین معادله، تنها، ریشهٔ حقیقی را به‌دست‌آورید.)

۳. $x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$

۴. $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=x$

۵. $\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{\sqrt{5+x}}}=x$

۶. $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\cdot\sin^2 3x$

حل این تمرین‌ها را درصفحهٔ ۹۵ ببینید

مرتضی هندی‌نژاد

یك مسالهٔ جالب

تابع $f(x)$، به‌این صورت تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{tg\,x} & (x\neq 0,\ \pm\frac{\pi}{2})\\ 1 & (x=0)\\ 0 & (x=\pm\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

ثابت کنید، $f(x)$، درنقطهٔ $x=0$، مشتق‌پذیر است.

حل. با توجه به‌تعریف مشتق، دربارهٔ مشتق تابع $\cos x$ داریم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=(\cos x)'_0=\sin 0=0$$

پس، اگر فرض کنیم: $\varepsilon(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$، داریم:

$$\cos x=1+x\cdot\varepsilon(x)$$

به‌نحوی‌که $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. اکنون می‌نویسیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{tg\,x}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$$

به‌جای $\cos x$، مقدار آن $1+x\varepsilon(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2\varepsilon(x)-\sin x}{x\sin x}$$

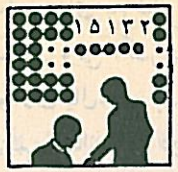
از طرف دیگر، باتوجه به نابرابری روشن $|x-\sin x|\leqslant|x^3|$، می‌توان نوشت:

$$\left|\frac{(x-\sin x)+x^2\cdot\varepsilon(x)}{x\cdot\sin x}\right|\leqslant\frac{|x^3|+|x^2\varepsilon(x)|}{|x\cdot\sin x|}\leqslant$$

$$\leqslant|x|\cdot\left|\frac{x}{\sin x}\right|+\left|\frac{x}{\sin x}\right|\varepsilon(x)$$

که حدآن، وقتی x به‌سمت صفر میل کند، برابر صفر می‌شود؛ یعنی

$$f'(0)=0$$



مسأله‌های مسابقه‌ای

درهیجدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضیات، که درسال ۱۹۷۶ دراطریش برگزار شد، ۱۸ کشور شرکت‌داشتند: اطریش، امریکا، انگلستان، بلغارستان، جمهوری دموکراتیك آلمان، چکوسلواکی، رومانی، سوئد، شوروی، فرانسه، فنلاند، کوبا، لهستان، مجارستان، ویتنام، هلند، یوگسلاوی و یونان. جمهوری فدرال آلمان، برای نخستین‌بار، به‌عنوان ناظر در المپیاد شرکت کرد: دو دانش‌آموز و دو راهنما اعزام داشته بود. هرکشور، مثل سال‌های قبل، هشت دانش‌آموز به‌المپیاد فرستاده بود، به‌جز کوبا، که‌گروه شرکت‌کنندهٔ آن، تنها از سه دانش‌آموز تشکیل می‌شد.

مسابقه در روزهای ۱۲ و ۱۳ ژوئیه سال ۱۹۷۶ جریان داشت. درهریك‌ازاین روزها، سه مساله با ۴ ساعت وقت به‌دانش‌آموزان داده شد. حداکثر امتیازی که هر دانش‌آموزان می‌توانست کسب کند، برابر با ۴۰ بود.

اینك صورت مساله‌های هیجدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضیات:

۱. مساحت چهارضلعی مسطح و محدبی برابر ۳۲ سانتی‌متر مربع و مجموع طول‌های دوضلع روبه‌رو و یکی از قطرها برابر ۱۶ سانتی‌متر است. مطلوب است همهٔ مقدارهایی‌که قطر دیگر چهارضلعی، می‌تواند داشته باشد.
(چکوسلواکی ـ ۵ امتیاز)

۲. فرض کنید:

$$P_1(x)=x^2-2,\quad P_k(x)=P_1(P_{k-1}(x))$$

$(k=2,3,\ldots)$. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $P_n(x)=x$، حقیقی و مختلف‌اند.
(فنلاند ـ ۷ امتیاز)

۳. جعبهٔ مکعب مستطیل شکلی را می‌توان، به طور کامل، با

AB ، M_6 روی‌ضلع BC و M_4 روی‌ضلع AC قرار دارند. طول ضلع‌های دومربع، چه رابطه‌ای باهم داشته باشند تامجموع مساحت‌های آن‌ها، حداقل مقدار ممکن شود؟

۱۱. مطلوب است حد دنبالهٔ (x_n)، به شرطی که

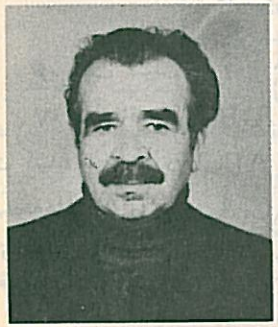
$$x_1=\sqrt{2}, \qquad x_{n+1}=(\sqrt{2})^{x_n}$$

۱۲. آیا تابع زیر متناوب است؟

$$y=\frac{\sin x}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

حل این مساله‌ها در صفحهٔ **۹۷** ببینید

مصطفی رنگچی ازمیان ما رفت



مصطفی رنگچی
(۱۳۶۵-۱۳۰۸)

مصطفی رنگچی، معلم با-سابقهٔ ریاضیات ومؤلف ومحقق در ریاضیات دبیرستانی، روز هفتم بهمن‌ماه ۱۳۶۵، بعداز قریب یکسال مبارزه با بیماری جهان را بدرود گفت.

زندگی رنگچی، نمونهٔ زندگی یک‌معلم زحمت‌کش‌در روزگار ماست. اوکه بافقر و سختی تحصیلات‌خودرا تا فوق-لیسانس ریاضی انجام‌داده بود حتی تا چندماه قبل از مرگ خود،ودرحالی‌که به‌خاطر لرزش دست‌های خود (که ناشی از بیماری بود)گچ را با دودست خود می‌گرفت، برای تأمین زندگی خود به‌کلاس می‌رفت ودرس می‌داد. و چقدر غم‌انگیز است‌که معلمی چنین‌آزموده و پرکار، نتواند تاپایان عمر، به‌روزهای آرامش‌واستراحت برسد. ولی بی‌تردید، دانش‌آموزان فراوان او، که ازدانش اواستفاده کرده‌اند، یاد اورا زنده نگه خواهند داشت.

یادش گرامی باد

درازای کانونی مقاطع مخروطی

علیرضا امیرمعز

والتر و.راوس بال (Walter W. Rouse Ball) درکتابی به‌نام تفریحات‌ومقالات ریاضی[۱]،درزیرعنوان سفسطه،شماره نه، می‌نویسد: «تمام بیضی‌ها دایره‌اند.» این مطلب بسیارجالب است وبستگی به‌ماکزیموم‌ومینیمم روی مرزدارد.دراین‌نوشتهٔ کوتاه درازای‌کانونی مقاطع مخروطی وماکزیموم و می‌نیموم آن‌را بررسی می‌کنیم.

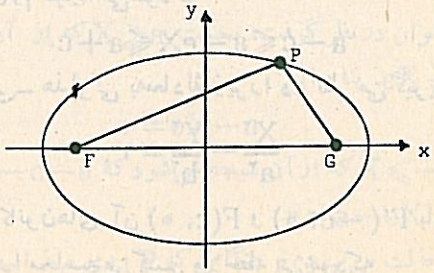
۱- بیضی- بیضی به‌معادلهٔ

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1, \quad a>0, \quad b>0$$

را در نظر می‌گیریم. فرض‌کنیم‌که کانون‌های این بیضی $F(-c, 0)$ و $G(c, 0)$ باشند (شکل۱). نقطهٔ P را روی بیضی درنظرمی‌گیریم و $PF=r$ راکه درازای کانونی P می‌گویند حساب می‌کنیم، ملاحظه می‌شود

$$r^2=(X+c)^2+Y^2$$

از طرف دیگر



شکل ۱

$$Y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-X^2)=\frac{a^2-c^2}{a^2}(a^2-X^2)=(1-e^2)(a^2-x^2).$$

واضح است که $e=\frac{c}{a}$ خروج از مرکز است. از این‌رو

$$r^2=X^2+2cX+c^2+(1-e^2)(a^2-X^2)=$$
$$=e^2X^2+2cX+a^2. \qquad (1)$$

چون $c=ae$ است (۱) را می‌توان به‌قرار زیر نوشت

$$r^2=(a+eX)^2.$$

درنتیجه $r=|a+eX|.$

ملاحظه می‌شودکه دومین تابع $r=r(X)$ عبارتست از

$$D=\{X:|X|\leqslant a\}.$$

بنابراین $a-c\leqslant a+eX\leqslant a+c.$

در نتیجه $r=a+eX>0.$

و ماکزیموم ومی‌نیموم n به‌ترتیب عبارتند از $a+c$ و $a-c$.

در[۱] پروفسور راوس می‌نویسد: «چون $\frac{dr}{dX}=e$ است و مقداری ثابت می‌باشد، r ماکزیموم ومی‌نیموم ندارد. از این‌رو بیضی باید دایره باشد. به‌حقیقت پروفسور راوس شوخی می‌کند.

به‌روشی هم‌سنگ مشاهده می‌شودکه

$$PG=L=a-eX$$

دوباره از $|X|\leqslant a$ نتیجه می‌شودکه

$$a-c\leqslant a-eX\leqslant a+c.$$

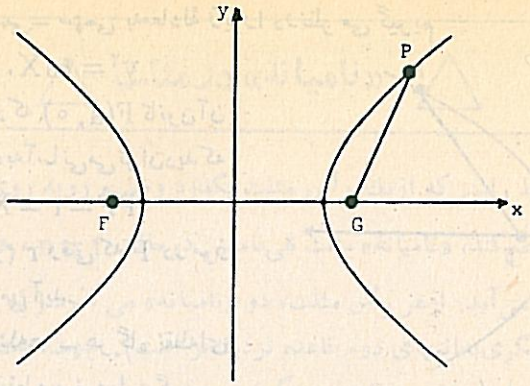
۲ـ هذلولی ـ هذلولی به‌معادلهٔ زیررا در نظر می‌گیریم

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1,$$

فرض کنیم کـه کانون‌های آن $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ باشند (شکل ۲).

دوباره $PF=r$ را محاسبه می‌کنیم. ملاحظه می‌شودکه

$$r^2=(X-c)^2+Y^2$$



شکل ۲

و

$$Y^2=\frac{b^2}{a^2}(X^2-a^2)=\frac{c^2-a^2}{a^2}(X^2-a^2)=(e^2-1)(X^2-a^2).$$

از اینرو

$$r^2=X^2-2cX+c^2+(e^2-1)(X^2-a^2)=$$
$$=e^2X^2-2cX+a^2. \qquad (2)$$

دوباره، چون $c=ae$ است تساوی (۲) می‌شود

$$r^2=(eX-a)^2 \quad \text{یا} \quad r=|eX-a|.$$

دوسن $r=r(X)$ عبارتست از:

$$D=\{X:|X|\geqslant a\}.$$

دو حالت می‌توان درنظر گرفت، نخست $X\geqslant a$ که از آن نتیجه می‌شود که $eX-a\geqslant c-a$. بنابراین

$$r=eX-a,$$

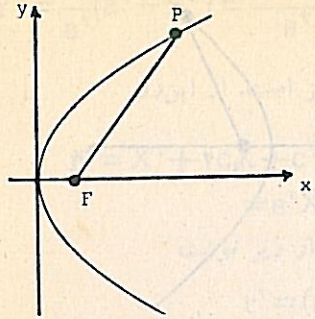
دوم آنکه $X\leqslant -a$ که ازآن نتیجه می‌شود که $eX-a\leqslant -c-a$ وباید نتیجه بگیریم $r=a-eX$.

در هرحالت می‌نیموم r هنگامی که P روی مرز است به‌دست می‌آید.

خواننده می‌تواند PF' را حساب کندونتایج بالارا دوباره به‌دست آورد.

۳ـ سهمی ـ سهمی به‌معادلهٔ زیررا درنظر می گیریم

$$y^2 = 4aX,\ a > 0.$$



شکل ۳

ملاحظه می‌شود که $F(a, 0)$ کانون آن است(شکل۳)، به‌آسانی می‌توان دید که

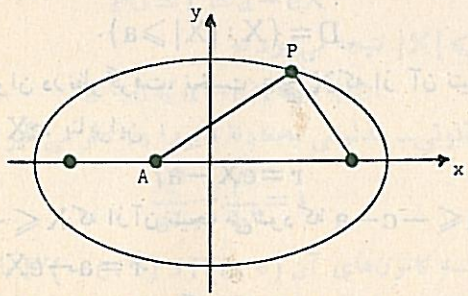
$$PF = r = X + a.$$

دوباره می‌نیموم r وقتی که P در مرز است به‌دست می‌آید.

۴ـ مسئله‌ها ـ هر گاه نقطه‌ای روی‌محور یك‌مقطع مخروطی بگیریم، و درازای شعاعی آن‌را در نظر بگیریم، ماکزیموم یا می‌نیموم این درازا ممکن است برای مرز به‌دست آید یا نه. بحث این مسئله بسیار جالب است. نمونه‌ای ازاین مسئله‌ها به‌عرض می‌رسد:

(i) بیضی بخش۱ را درنظر بگیریم وفرض کنیم $A(p, 0)$ و P نقطه‌ای روی بیضی باشد(شکل۴)، مقادیرماکزیموم ومی‌نیموم AP رابه‌دست آورید. قابل‌ملاحظه است که‌شرط‌لازم‌وکافی به‌دست آورد که‌ماکزیموم ومی‌نیموم روی مرز به دست نیامد. خواننده حالتهای $|p| < \frac{c^2}{a}$ و $|p| = \frac{c^2}{a}$ را می‌تواند بخصوص بررسی کند.

(ii) مسئله (i) را برای هذلولی وسهمی بررسی کنید.



شکل ۴

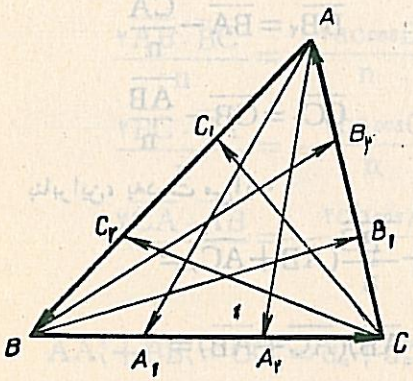
[1]. Ball, Walter W. Rouse, *Mathematical Recreations and Essays*, Toronto: University of Toronto Press, 1974.

«نامیانه» درمثلث

خط راستی‌که ازیك رأس مثلث بگذرد وضلع روبه روی آن را، در نقطه $\frac{1}{n}$ قطع کند، «نامیانهٔ» مثلث می‌نامیم. درحالت $n = 2$، «میانهٔ» مثلث به دست می‌آید. ازهر رأس مثلث، دو «نامیانه» می‌گذرد (که یکی به یك انتها ودیگری به‌انتهای دوم قاعده نزدیك‌تر است). جهت‌مثبت هر«نامیانهٔ» یك رأس را، از راس به‌قاعده می‌گیریم. به‌این ترتیب، شش بردار به دست می‌آید: $\overline{AA_1}$، $\overline{AA_2}$، $\overline{BB_1}$، $\overline{BB_2}$، $\overline{CC_1}$، $\overline{CC_2}$ (شکل۱).

مثلث ABC را، به ترتیبی توجه‌می‌کنیم (یعنی، جهت روی‌ضلع‌های آن‌را، طوری انتخاب می‌کنیم)که داشته‌باشیم: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$. $\overline{AA_1}$، $\overline{BB_1}$ و $\overline{CC_1}$ را «نامیانه‌های» گروه اول و $\overline{AA_2}$، $\overline{BB_2}$ و $\overline{CC_2}$ را، «نامیانه‌های» گروه دوم نام‌گذاری می‌کنیم (در حالت $n = 2$، هردو نامیانهٔ یك راس، برمیانهٔ همان راس منطبق می‌شود).

با استفاده از رابطه های برداری، چهار قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:



شکل ۱

۱) از نامیانه‌های هرگروه، می‌توان یك مثلث رسم‌کرد.

۲)مجموع‌مربع‌های نامیانه‌های هرگروه، برابر است با مجموع مربع‌های نامیانه‌های‌گروه دیگر.

۳)مجموع‌مربع‌های نامیانه‌های هرگروه برابراست با

$$\frac{n^2 - n + 1}{n^2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

که درآن، a، b و c عبارتند ازطول ضلع‌های مثلث.

۴) نسبت مساحت مثلثی‌که با نامیانه‌ها ساخته می‌شود، به مساحت

مثلث اصلی، برابراست با $\frac{n^2-n+1}{n^2}$.

اثبات قضیهٔ ۱. داریم:

$$\overline{AA_1}=\overline{AB}+\frac{\overline{BC}}{n}$$

$$\overline{BB_1}=\overline{BC}+\frac{\overline{CA}}{n}$$

$$\overline{CC_1}=\overline{CA}+\frac{\overline{AB}}{n}$$

ازآن‌جا

$$\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\frac{n+1}{n}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})=0$$

اثبات قضیه۲. داریم:

$$\overline{AA_1}=\overline{AB}+\frac{\overline{BC}}{n};\qquad \overline{AA_2}=\overline{AC}-\frac{\overline{BC}}{n}$$

$$\overline{BB_1}=\overline{BC}+\frac{\overline{CA}}{n};\qquad \overline{BB_2}=\overline{BA}-\frac{\overline{CA}}{n}$$

$$\overline{CC_1}=\overline{CA}+\frac{\overline{AB}}{n};\qquad \overline{CC_2}=\overline{CB}-\frac{\overline{AB}}{n}$$

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$AA_1^2-AA_2^2=AB^2-AC^2+\frac{2\overline{BC}}{n}(\overline{AB}+\overline{AC})=$$

$$=AB^2-AC^2+\frac{2}{n}(\overline{AC}-\overline{AB})(\overline{AC}+\overline{AB})=$$

$$=AB^2-AC^2+\frac{2}{n}(AC^2-AC^2)=$$

$$=\frac{n-2}{n}(AB^2-AC^2)$$

(درحالت $n=2$ داریم: $AA_1=AA_2=m_a$).

بنابراین اگرفرض‌کنیم: $AA_1=d_a$ و $AA_2=d'_a$ (وشبیه همین نام‌گذاری‌ها، برای نامیانه‌های دیگر)، خواهیم داشت:

$$d_a^2-d_a^2+d_b^2-d_a'^2+d_a^2-d_a'^2=$$

$$=\frac{n-2}{n}(c^2-b^2+a^2-c^2+b^2-a^2)=0$$

یعنی

$$d_a^2+d_b^2+d_c^2=d_a'^2+d_b'^2+d_c'^2$$

اثبات قضیهٔ۳. مجموع $d_a^2+d_b^2+d_c^2$ را محاسبه می‌کنیم

$$AA_1^2=d_a^2=AB^2+\frac{BC^2}{n^2}+2\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{n},$$

$$BB_1^2=d_b^2=BC^2+\frac{CA^2}{n^2}=2\frac{\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{n},$$

$$CC_1^2=d_c^2=CA^2+\frac{AB^2}{n^2}+2\frac{\overline{CA}\cdot\overline{AB}}{n}$$

وچون داریم:

$$\frac{2\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{n}=-\frac{2ac\cos B}{n},$$

$$\frac{2\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{n}=-\frac{2ba\cos C}{n},$$

$$\frac{2\overline{CA}\cdot\overline{AB}}{n}=-\frac{2cb\cos A}{n}$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$AA_1^2+BB_1^2=CC_1^2=d_a^2+d_b^2+d_c^2=$$

$$=c^2+\frac{a^2}{n^2}+a^2+\frac{b^2}{n^2}+b^2+\frac{c^2}{n^2}+$$

$$+\frac{1}{n}(b^2-a^2-c^2+c^2-b^2-a^2+a^2-c^2-b^2)=$$

$$=\frac{n^2-n+1}{n^2}(a^2+b^2+c^2)$$

اثبات قضیهٔ ۴. داریم:

$$\overline{AA_1}\times\overline{BB_1}=\overline{AB}\times\overline{BC}+\frac{\overline{AB}\times\overline{CA}}{n}+$$

$$+\frac{\overline{BC}\times\overline{CA}}{n^2}=\frac{n^2(\overline{AB}\times\overline{BC})-n(\overline{AB}\times\overline{AC})+(\overline{BC}\times\overline{CA})}{n^2}$$

چون همهٔ حاصل‌ضرب‌های برداری، دارای یك علامت‌اند، بنابراین

$$|AA_1\times BB_1|=\frac{n^2-n+1}{n^2}\cdot 2S$$

که درآن، S عبارت است ازمساحت مثلث ABC.

اگر مساحت مثلثی را، که از نامیانه‌ها به وجود می‌آید، S_n فرض کنیم، بالاخره، به‌دست می‌آید:

$$\frac{S_n}{S}=\frac{n^2-n+1}{n^2}$$

ازقضیه‌های ۳ و ۴ نتیجه می‌شود:

$$\frac{S_n}{S}=\frac{d_a^2+d_b^2+d_c^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{n^2-n+1}{n^2}$$

در حالت‌های خاص:

$$1)\ n=2;\ \frac{S_2}{S}=\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{4}$$

$$2)\ n=3;\ \frac{S_3}{S}=\frac{7}{9}$$

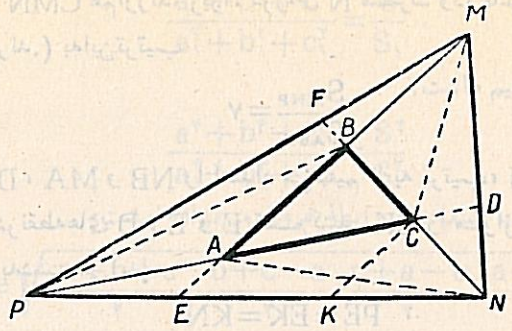
*

ابتدا، به‌این مساله توجه کنید:

روی امتداد ضلع‌های AB ، BC و CA ازمثلث ABC، نقطه‌های M و N و P را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $BM=AB$ ، $CN=BC$ و $AP=CA$ ، مطلوب است نسبت مجموع مربع های

ضلع‌های مثلث PMN به مجموع مربع‌های ضلع‌های مثلث ABC.

حل: بردارها را به صورتی که در شکل ۲ نشان داده شده است ، در نظر می گیریم:



شکل ۲

روشن است که $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$ ، از آن‌جا

$$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2=a^2+b^2+c^2+2\bar{a}\bar{b}+2\bar{a}\bar{c}+2\bar{b}\bar{c}=0$$

یعنی

$$a^2+b^2+c^2+-2(\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}) \qquad (1)$$

برای مثلث MNP:

$$\bar{m}=2\bar{b}-\bar{a},\quad \bar{n}=2\bar{c}-\bar{b},\quad \bar{p}=2\bar{a}-\bar{c}$$

سپس

$$m^2+n^2+p^2=(2\bar{b}-\bar{a})^2+(2\bar{c}-b)^2+(2\bar{a}-\bar{c})^2=$$

$$=4b^2-4\bar{a}\bar{b}+a^2+4c^2-4\bar{b}\bar{c}+b^2+4a^2-4\bar{a}\bar{c}+c^2=$$

$$=5(a^2+b^2+c^2)-4(\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c})$$

که باتوجه به (۱) حاصل می‌شود:

$$m^2+n^2+p^2=5(a^2+b^2+c^2)=2(a^2+b^2+c^2)=$$

$$=7(a^2+b^2+c^2)$$

وبنابراین

$$\frac{m^2+n^2+p^2}{a^2+b^2+c^2}=7$$

اکنون به‌شکل ۲ توجه کنید، اگرراس‌های مثلث MNP رابه‌ترتیب به راس‌های مثلث ABC وصل کنیم، مثلث MNP ، به‌هفت مثلث هم‌ارز ABC ، PAB ، PBM ، MBC ، MCN ، NCA و NAP تقسیم

می‌شود. (مثلا، دو مثلث ABC و BMC هم‌ارزند، زیرا در راس C مشترک‌اند ودوقاعدهٔ آن‌ها ، AB و BM باهم برابرند. همچنین، دو مثلث BMC و CMN هم‌ارزند، زیرا، درراس N مشترک ودر قاعده‌های BC و CN برابرند.) به‌این‌ترتیب

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=۷$$

DC ، MA و NB را امتداد می‌دهیم تا به ترتیب، MN، NP و PM را درنقطه‌های D ، E و F قطع کنند. CK را موازی ME رسم می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$PE=EK=KN$$

بنابراین

$$PE=\frac{PN}{۳}=\frac{m}{۳}$$

و به‌همین ترتیب

$$ND=\frac{p}{۳}\ ,\quad MF=\frac{n}{۳}$$

یعنی پاره‌خطهای ME ، PD و NF «نامیانه‌ها»یی هستند که از $\frac{۱}{۳}$ ضلع گذشته‌اند.

درنتیجه، با توجه به مساله‌ای که حل کردیم، ثابت می‌شود که:

نسبت مساحت مثلثی که از برخورد خطهای یك سوم[1] مثلث به‌دست می‌آید، به مساحت مثلث اصلی، برابر است با $\frac{۱}{۷}$.

با رسم خطهای یك‌سوم، هر مثلث به ۷ مثلث هم‌ارز تبدیل می‌شود و، اگر درهریك از این هفت مثلث، دوباره خطهای یك‌سوم را رسم کنیم، مثلث اصلی، به $۷^۲=۴۹$ مثلث هم‌ارز تبدیل می‌شود. به‌طورکلی، اگر این روند را k مرتبه‌ادامه دهیم،مثلث مفروض به ۷^k مثلث‌هم‌ارزتبدیل‌می‌شود.

اکنون، این قضیه را ثابت می‌کنیم:

اگر مجموع مربع‌های ضلع دومثلث، متناسب بامساحت‌های دومثلث

۱. منظورمان ازخط یك‌سوم، نامیانه‌ای است که از $\frac{۱}{۳}$ قاعده می‌گذرد.

باشند، آن‌وقت، مجموع توان‌های چهارم ضلع‌ها، متناسب بامربع مساحت‌ها خواهند بود. به‌زبان ساده‌تر، اگر داشته باشیم:

$$\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{a_۱^۲+b_۱^۲+c_۱^۲}=\frac{S}{S_۱}$$

آن‌وقت، خواهیم داشت.

$$\frac{a^۴+b^۴+c^۴}{a_۱^۴+b_۱^۴+c_۱^۴}=\frac{S^۲}{S_۱^۲}$$

اثبات. با استفاده از رابطهٔ هرون می‌توان نوشت:

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{۲}\cdot\frac{b+c-a}{۲}\cdot\frac{c+a-b}{۲}\cdot\frac{a+b+c}{۲}}\ ,$$

$$۱۶S^۲=[(b+c)^۲-a^۲][a^۲-(c-b)^۲]=$$
$$=۲b^۲c^۲+۲c^۲a^۲+۲a^۲b^۲-a^۴-b^۴-c^۴$$

اگر (I) دوطرف رابطهٔ فرض مساله را مجذور کنیم، با استفاده از رابطهٔ (I) و خاصیت نسبت‌های مساوی (از $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ نتیجه می‌شود: $\frac{x-a}{y-b}=\frac{a}{b}$)، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\frac{a^۴+b^۴+c^۴}{a_۱^۴+b_۱^۴+c_۱^۴}=\frac{S_۲}{S_۱^۲}$$

برای دوحالت خاص داریم:

۱) دریك مثلث، و مثلثی که از میانه‌های آن ساخته می‌شود:

$$\frac{m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}=\frac{۳}{۴}\ ;\ \frac{m_a^۴+m_b^۴+m_c^۴}{a^۴+b^۴+c^۴}=\frac{۹}{۱۶}$$

۲) دریك مثلث، و مثلثی که با خطهای یك‌سوم آن ساخته می‌شود (این خطهای یك‌سوم را t_a ، t_b و t_c می‌نامیم):

$$\frac{t_a^۲+t_b^۲+t_c^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}=\frac{۷}{۹}\ ;\ \frac{t_a^۴+t_b^۴+t_c^۴}{a^۴+b^۴+c^۴}=\frac{۴۹}{۸۱}$$

۳) برای دومثلثی که، یکی به کمك میانه‌ها و دیگری به‌کمك خطهای

برای شروع کار به‌حل مسأله برای مقادیر دوچك m بپردازیم. واضح است که اگر $m = ۱$ باشد ، فقط یك‌راه برای رنگ‌زدن مکعب وجود دارد. پس به $m = ۲$ بپردازیم. فرض‌کنیم {سفید، قرمز} رنگهای موجود باشند. امکانهای مختلف را در جدولی گرد می‌آوریم. تعداد وجه‌هائی را که رنگ قرمز می‌زنیم i می‌نامیم، واضح‌است که تعداد وجه‌های‌سفید $۶ - i$ می‌باشد. ببینیم برای هرمقدار i چند امکان وجود دارد:

$i = ۰$		یك‌امکان
$i = ۱$		یك‌امکان
$i = ۲$		دوامکان
$i = ۳$		دوامکان
$i = ۴$	با تقارن مانند $i = ۲$ خواهد بود	دوامکان
$i = ۵$	با تقارن مانند $i = ۱$ خواهد بود	یك‌امکان
$i = ۶$	با تقارن مانند $i = ۰$ خواهد بود	یك امکان
مجموع		ده امکان

توضیح: برای $i = ۲$، یا دووجه قرمز شده مقابل هم هستند و یا کنار هم و حالتی دیگر هم وجود ندارد.

برای $i = ۳$، یا دووجه در مقابل هم‌هستند وسومی یکی‌ازوجه‌های دیگر است ویا هرسه وجه قرمز شده دریك‌کنج مکعب قراردارند.

برای $i = ۴$، چهار وجه قرمز می‌باشند، یعنی ۲ وجه سفیدشده‌اند، وچون برای $i = ۲$، دوامکان گذاشته بودیم پس برای $i = ۴$ هم دوامکان وجود دارد. به‌همین‌ترتیب برای $i = ۵$ و $i = ۶$.

پس وقتی‌که ۲ رنگ در اختیار داشته‌باشیم از $۲^۶$ حالت ممکن فقط ۱۰ تای آنها واقعاً با هم فرق دارند.

حال اگر $m = ۳$ باشد چه‌کنیم ؟ البته می‌شود با شمردن حالتهای مختلف مسأله را برای $m = ۳$ هم ، البته با دشواری، حل‌کرد ولی واضح است‌که این‌راه برای مقادیر بالای m عملی نیست. البته می‌شود بااستفاده ازکامپیوتر مسأله را برای مقادیر بالاتری از m هم حل‌کرد. اما این کار دواشکال دارد: اول اینکه مسأله درحالت‌کلی حل نمی‌شود. دوم‌آنکه همچو

حلی به‌شناخت وفهم‌ماازمسأله کمکی نمی‌کند. درنهایت فقط حالتهای‌خاصی از همین یك‌مسأله را به‌وسیلهٔ کامپیوتر می‌توانیم حل‌کنیم ، در حالی‌که یك راه‌حل ریاضی با شناخت همراه است. اگر با روشهای ریاضی مسأله را حل کنیم‌آنگاه شاید مسائلی شبیه را هم بتوانیم حل‌کنیم.

به‌قول شاعر:

چو در طاس لغزنده افتاد مور رهاننده را چاره باید نه زور

۲. روش عمل. روش زیر را برای حل مسأله انتخاب می‌کنیم. Ω را مجموعه‌ای بگیریدکه شامل همهٔ $m^۶$ نحوهٔ مختلف رنگ‌کردن وجوه‌مکعب باشد. البته از نظر ما بسیاری از اعضای Ω «واقعاً» با هم فرقی ندارد، ولی برای شروع کار همهٔ آنها را در یك مجموعه قرار می‌دهیم . پس این مجموعه $m^۶$ عضودارد. برای مثال یك‌عضوآن مکعبی‌است‌که هرشش‌وجه آن سفیدرنگ شده است. عضو دیگری ازاین مجموعه مکعبی است‌که رویهٔ بالای‌آن قرمز و سایر وجوه سفید هستند. بالاخره عضو سومی از Ω مکعبی است‌که وجه زیرین‌آن قرمز و سایر وجوه سفیدند، و به‌همین‌ترتیب. حال می‌کوشیم‌که مکعبهای عضو Ω را به‌دسته‌های مختلف‌تقسیم‌کنیم. درهریك از این دسته‌ها مکعبهائی را قرار می‌دهیم‌که از نظر ما رنگشان با هم یکی است. بعد از اتمام این دسته‌بندی تعداد دسته‌ها را می‌شماریم. این عدد جواب مسأله است.

در به‌کارگیری این روش دو مشکل وجود دارد . اولی دسته‌بندی عضوهای Ω به‌نحو مطلوب ، و دومی شمارش دسته‌هاست. به‌مشکل اول بپردازیم:

چگونه عضوهای Ω را به‌دسته‌های دلخواه تقسیم‌کنیم ؟ یادآوری کنیم‌که می‌خواهیم هردسته شامل مکعب‌هائی باشدکه از نظر رنگ‌آمیزی باهم فرقی ندارند. یعنی اگر یکی ازعضوهای دستهٔ خاصی را انتخاب‌کنیم، بعد از انجام چرخش مناسبی از مکعب ، می‌توانیم هرکدام از عضوهای دیگر آن‌دسته را به‌دست‌آوریم. حال اگر لیست‌کاملی از چرخشهای ممکن مکعب دردست می‌داشتیم‌کار ساده می‌شد. درآنصورت، یکی ازعضوهای Ω را انتخاب می‌کردیم، به‌ترتیب تمام چرخشهای مکعب‌را روی‌آن انجام

می‌دادیم، وتمام نتایج حاصله را دریك‌دسته می گذاشتیم، بعد سراغ عضوی خارج ازاین‌دسته می‌رفتیم واین کاررا ادامه می‌دادیم. سرآخر تمام‌عضوهای Ω به‌دسته‌های مختلف موردنظر ما تقسیم شده‌اند. پس برای شروع احتیاج به‌لیستی کامل از تمام دورانهای ممکن یك مکعب داریم.

۳. لیستی از دورانهای یك‌مکعب. مکعب خاصی را درنظر بگیرید، سؤال این است که به‌چه راههای مختلفی می‌شودآن‌را چرخاند، تا درآخر کار دوباره فضای اولیه‌را پرکرده باشد. برای مثال می‌شودآن‌را نود درجه حول محوری که از مرکز دووجه مقابل می گذرد، چرخاند. این دوران با دوران ۴۵۰ درجه حول همان محور فرقی‌ندارد چراکه نتیجهٔ کار یکی‌است. از همین دورانهای ۹۰ درجه حول محوری از نوعی که تعریف شد چندتا داریم؟ مکعب ۶ وجه دارد ولذا ۳ جفت وجه مقابل هم دارد ، پس تعداد محورها ۳ عدد است. برای هرمحور دو دوران ۹۰ درجه داریم : یکی به‌جلو و یکی به‌عقب. پس تعدادکل دورانهای ۹۰ درجه از این‌نوع ۶ است. توجه کنیدکه هیچ دوتائی ازاینهاباهم‌یکی‌نیستند. قبل‌ازاینکه به‌تشریح بقیه دورانهای مکعب بپردازیم ، خوب است‌که تعدادکل را حساب‌کنیم. تعدادکل دورانهای یك‌مکعب ۲۴است. پیداکردن این‌عدد بسیار ساده‌است. توجه خود را جلب یکی از وجه‌های مکعب بکنید. یك‌دوران مکعب،این وجه را به‌کجا می‌تواند منتقل‌کند؟ واضح است‌که بعد از هردوران مکعب، وجه موردنظر ما به‌جای یکی از ۶ وجه مکعب منتقل خواهد شد. بعد از اینکه جای این‌یك‌وجه مشخص شد ، نظر خود را متوجه یکی از وجه‌های مجاورآن بکنید. با توجه به‌اینکه جای وجه قبلی مشخص است ، این‌وجه دومی در چهار محل مختلف می‌تواند قرارگیرد. پس برای هر ۶ انتخاب اولی ۴ انتخاب دیگر وجود دارد و لذاکلاً ۶×۴ دوران مکعب وجود دارد. ما ازخواننده می‌خواهیم‌که خود به‌جستجوی این ۲۴ دوران مکعب بپردازد. ما لیستی از این دورانها را درزیر ارائه می‌دهیم:

دورانهای یك‌مکعب (تقارن‌های مکعب)

نوع	شرح	تعداد محورهای از این نوع	تعداددورانهای ازاین‌نوع
۱.	مکان اولیه ـ اصلاً مکعب‌را دوران نمی‌دهیم	۰	۱
۲.	دوران ۹۰ درجه ـ محور از مرکز دووجه مقابل می گذرد	۳	۶
۳.	دوران ۱۸۰ درجه ـ محور از مرکز دووجه مقابل می گذرد	۳	۳
۴.	دوران ۱۲۰ درجه ـ محور یکی ازقطرهای مکعب	۴	۸
۵.	دوران ۱۸۰ درجه ـ محور از مرکز دوضلع مقابل می گذرد	۶	۶
	مجموع		۲۴

جدول ۱

ازآنجاکه هرکدام از این‌دورانها باقبلی‌ها فرق دارند، وتعدادکل‌آنها ۲۴ می‌باشد، نتیجه می گیریم که لیست‌کاملی از دورانهای یك‌مکعب در دست داریم.

۴. گروهها . مکعب خود را در نظر بگیرید. اول آن‌را یك دوران ۹۰ درجه و بعد یك‌دوران ۱۲۰ درجه بدهید. ترکیب این‌دوچرخش خود یك‌دوران مکعب است. پس چرا ما آن‌را درلیست خود نیاوردیم؟ جواب این است‌که این‌دوران در لیست ما می‌باشد، فقط نامش چیز دیگری است. اصولاً ترکیب هردو دوران،خود دوران دیگری خواهد بود. مجموعهٔ‌تمام دوران‌های‌مکعب را G می‌خوانیم. G همانطورکه دیدیم ۲۴ عضو دارد. همچنین عملی به نام ترکیب داریم که به‌وسیلهٔ آن می‌توانیم دوعضو G را ترکیب‌کرده وعضو سومی به‌دست‌آوریم. اگر x یکی ازدورانها و y یکی دیگرازدورانها باشد، می‌نویسیم $z = x \circ y$. z هم خود دورانی ازمکعب

می‌باشد. برای به‌دست‌آوردن z اول y و بعد x را انجام دهید. توجه‌کنید که $x \circ y$ لزوماً با $y \circ x$ برابر نیست. (مثالی از این نابرابری را خود پیداکنید). این عمل o چند خاصیت دارد. آنها را برشماریم:

۱. اگر a و b عضوهای G باشند، $a \circ b$ هم‌عضو G است.

۲. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

۳. یکی از عضوهای G خاصیت غریبی دارد. این‌همان دوران‌اولی مکعب است (همان‌که مکعب را اصلاً حرکت نمی‌دهد). آن‌را e (عضو خنثی) می‌نامیم. خاصیت e این‌است‌که برای هرعضو G مثلاً a داریم:

$$e \circ a = a = a \circ e$$

۴. اگر a عضو G باشد، آنگاه عضو دیگری، b (وارون a) وجود دارد به‌نحوی‌که $a \circ b = b \circ a = e$. مثلاً وارون هریك از دورانهای ۹۰ درجه، یك‌دوران ۹۰ درجه دیگر می‌باشد. در عوض وارون هرکدام ازچرخشهای ۱۸۰ درجه‌خودآن‌دوران می‌باشد، چراکه بادودفعه‌انجام‌دادن دورانی از این‌گونه به‌جای اول برمی‌گردیم.

پس ما مجموعه‌ای ـ G ـ داریم به‌اضافه عمل o روی عضوهای این مجموعه. برای مطالعه همچو موقعیتی مفیدتر خواهد بود اگر به‌مسأله کلی‌تر بپردازیم. به‌جای مطالعه مجموعهٔ دورانهای یك‌مکعب ما به‌بررسی یك‌مجموعهٔ انتزاعی می‌پردازیم. مجموعه‌ای که از قبل اطلاعی راجع به‌عضوهای‌آن نداریم. تنها فرض ما این‌خواهد بودکه این‌مجموعه مجهز به‌عملی‌است‌که از همان ۴ خاصیت‌بالا پیروی می‌کند. همچو مجموعه‌ای را یك‌**گروه** می‌نامیم. مثالهای فراوانی‌ازگروهها می‌توان‌آورد: الف) عددهای حقیقی با عمل جمع، ب) عددهای حقیقی غیرصفر با عمل ضرب، ج) تمام ماتریسهای $n \times n$ وارون‌داربا‌عمل ضرب ماتریسها، د) تمام‌توابع یك‌به‌یك و به روی مجموعهٔ خاصی با عمل ترکیب توابع. همانطور که می‌بینید گروهها همه‌جا یافت می‌شوند ولذا مطالعهٔ‌آنها کاری سودمند است. اصولاً یکی‌ازخصایص ریاضیات پیداکردن‌ومطالعهٔ‌مفاهیم‌انتزاعی مانندگروههاست. منظورمان از تحقیق راجع به‌گروهها این است‌که مثالهای خاص‌گروهها را فراموش‌کنیم و به‌مطالعهٔ یك‌گروه انتزاعی، یعنی‌گروهی که نمی‌دانیم

عضوهایش ویا عمل‌آن چه است، بپردازیم. تنها می‌دانیم‌که این‌مجموعه و عمل روی‌آن ازچهار خاصیت بالا پیروی می‌کنند.

مطالعهٔ چنین موجود انتزاعی چه‌فایده‌ای می‌تواند داشته‌باشد؟ آیا بهتر نیست‌که به‌مطالعهٔ مسائل مشخص‌تر بپردازیم؟ تحقیق دربارهٔ مفاهیم انتزاعی مثل‌گروهها دوبرتری دارد. یکی اینکه اگر موفق بشویم قضیه‌ای دربارهٔ‌گروهها‌ثابت‌کنیم، آنگاه درآن‌واحد قضیه‌ای برای تقارن‌های‌مکعب، عددهای حقیقی، ماتریسها، توابع، وغیره داریم. یعنی با یك‌تیر نشانهای بیشماری زده‌ایم. دلیل‌دوم (وشاید مهمتر) این‌است‌که در هرمسأله‌مشخص اطلاعات جانبی وغیرلازم زیاد است. این‌اطلاعات نه‌تنهاکمکی به‌حل‌مسأله نمی‌کنند بلکه عموماً موجب‌گمراهی می‌شوند. انتخاب شیئی‌انتزاعی‌مناسب به‌ماامکان‌می‌دهدکه نظرخودرا متوجه‌آن اطلاعاتی‌بکنیم که‌به‌حل‌مسأله کمك می‌رسانند. مثلاً درمسأله‌مافعل‌وانفعال‌بین‌عضوهای گروه‌وعضوهای‌مجموعهٔ Ω مهم است، وهرگونه اطلاع دیگری راجع به‌مکعب زیادی، و موجب سردرگمی است. نمونهٔ مفاهیم انتزاعی در ریاضیات فراوان است، عدد ۵ را درنظر بگیرید، این خود مفهومی انتزاعی است. در دنیای مادی چیزی به‌نام ۵ وجود ندارد. ۵ گاو، ۵ سیب، و ۵ صندلی داریم، لاکن ۵ تنها نداریم. اما مفهوم ۵ به‌ماکمك می‌کندکه هم درآن واحد بدانیم‌که ۵ گاو و ۲ گاو رویهم ۷ گاو می‌شوند وهم ۵ سیب و ۲سیب رویهم۷ سیب‌می‌شوند. درضمن بامطالعهٔ ۵ ما تمام اطلاعات زیادی دربارهٔ‌گاو که به‌درد جمع‌کردن ۵ گاو و ۲ گاو نمی‌خوردرا بیرون ریخته‌ایم وحواس خود را متوجهٔ‌آنچه‌که با اهمیت است‌کرده‌ایم.

البته برای اینکه مطالعهٔ یك‌مفهوم انتزاعی بازده داشته‌باشد باید از یکطرف مثالهای فراوانی برای آن داشته‌باشیم و از طرف دیگر بتوانیم قضایای جالبی درباره‌اش ثابت‌کنیم. در مورد مفهوم‌گروه این هردو صادق است. چندمثال ازگروهها قبلاً آوردیم، بگذارید نمونه‌ای ازقضایای جالب را هم بیاورم. همانطورکه مثال دورانهای مکعب نشان داد، عضوهای یك گروه لزوماً خاصیت جابه‌جائی ندارند. یعنی $a \circ b$ و $b \circ a$ لزوماً برابر نیستند. البته بعضی گروهها (مثل گروه عددهای حقیقی با عمل جمع)

خاصیت جابه‌جائی هم‌دارند، لاکن این گروهها استثنا هستند و نه قاعده. برای خواننده‌ای که با مجموعه‌هائی غیر از عددها سروکار نداشته است این شاید به‌نظر عجیب بیاید. ولی در واقع اینطور نیست. در زندگی روزمرهٔ ما مدام سر وکار با عمل‌هائی داریم که از خاصیت جابه‌جائی پیروی نمی‌کنند. در لباس‌پوشیدن فرق زیادی بین پوشیدن جوراب وبعدکفش باپوشیدن کفش وبعد جوراب است.

در هرصورت مثال‌های بی‌شماری از گروههائی که خاصیت جابه‌جائی ندارند وجود دارد. اما قضیهٔ جالبی درنظریهٔ گروهها ثابت می‌کندکه اگر گروهی با ۱۶۹ عضو داشته‌باشیم، این گروه حتماً ازخاصیت جابه‌جائی پیروی می‌کند! در واقع همین‌قضیه برای هرگروهی که تعداد عضوهای آن مجذور یك‌عدد اول باشد صادق است. همانطورکه می‌بینید قضایائی در بارهٔ گروهها صادق است که با نگاهی سطحی به‌اصول تعریف‌کنندهٔ گروه بسیار عجیب به‌نظر می‌آیند. این‌هم البته یکی از وظایف ریاضی است که روابط پنهانی بین پدیده‌ها را بیابد، وبه‌ما شناختی تازه و درکی عمیق‌تر ازمباحث موردمطالعه بدهد.

۵. عمل گروه روی یك‌مجموعه. به‌مسأله خود بازگردیم. ماگروهی با ۲۴ عضو داریم (گروه دورانهای مکعب). این گروه روی مجموعهٔ Ω، که m^6 عضو دارد، **عمل** می‌کند. البته این‌لفظ‌عمل کردن تعریف‌دقیق‌ریاضی دارد، ولی برای درك‌آن خوب است مثال همین گروه خودمان ومجموعهٔ Ω را درنظر بگیریم. هرعضو گروه روی هرعضو مجموعه عمل می‌کند ونتیجه عضو دیگری از مجموعه می‌شود. مثلاً عضوی از مجموعهٔ Ω را در نظر بگیریدکه رویهٔ بالای‌آن قرمز و بقیهٔ رویه‌های‌آن سفید است. حال هرعضو گروه، و مثلاً یکی ازدورانهای ۹۰ درجه، این‌عضو را تبدیل به‌عضوی دیگر از Ω می‌کند (این‌عضو دیگر هم یك‌رویهٔ قرمز وبقیهٔ رویه‌هایش سفید خواهد بود).

در حالت‌کلی گوئیم‌که گروه G روی مجموعهٔ Ω عمل می‌کند اگر برای هرانتخاب دلخواه $\alpha\in\Omega$ و $g\in G$ بتوانیم عضوی از Ω به‌نام $g(\alpha)$ انتخاب‌کنیم به‌نحوی که

۱. برای هر $\alpha\in\Omega$ داشته‌باشیم $e(\alpha)=\alpha$

۲. برای‌هر $g, h\in G$ و $\alpha\in\Omega$ داشته‌باشیم $g(h(\alpha))=(g\circ h)(\alpha)$

توجه داشته‌باشیدکه e همان عضو خنثی گروه است. نکتهٔ دیگرآنکه بعضی عضوهای گروه بعضی از عضوهای Ω را ثابت نگه می‌دارند، یعنی بعضی وقتها داریم $g(\alpha)=\alpha$. مثلاً عضو خنثی گروه، همهٔ عضوهای Ω را ثابت نگه‌می‌دارد. همچنین مکعبی‌که همهٔ رویه‌های آن سفید است، تحت عمل همهٔ عضوهای گروه ثابت می‌ماند.

خوب، حل مسأله مابه‌کجا کشید؟ می‌خواستیم تعدادنحوه‌های‌مختلفی را که می‌شود یك‌مکعب را با m رنگ مختلف رنگ زد بشماریم. تصمیم گرفته بودیم که تمام امکانات مختلف رنگ‌زدن مکعب (باوجودیکه بعضی از آنها در واقع با هم فرقی نداشتند) را در مجموعهٔ Ω گردآوریم؛ و بعد عضوهای Ω را به‌دسته‌های مختلف تقسیم‌کنیم به‌نحوی‌که در هردسته، آن عضوهائی از Ω قرارگیرندکه ازنظر ما رنگ‌آمیزی یکسانی دارند. جواب مسأله ما تعداد دسته‌های مختلف می‌باشد. یکی از این دسته‌ها را در نظر بگیرید وعضوی دلخواه ازآن‌را انتخاب‌کنید. حال تمام عضوهای این‌دسته دقیقاً نتایج عمل عضوهای گروه‌دورانهای مکعب روی‌آن یك‌عضو این‌دسته هستند. یعنی اگر یك‌عضو Ω را انتخاب‌کنیم وبعد بگذاریم تمام عضوهای گروه روی‌آن عمل‌کنند، آنگاه نتایج این عمل‌ها (که همه عضوهائی از Ω هستند) دقیقاً یکی ازدسته‌های موردنظر ما می‌باشد. توجه داشته باشیدکه این‌کار را هروقت‌که گروهی روی مجموعه‌ای عمل‌کند می‌توان انجام‌داد. به‌دسته‌های‌پیداشده هم‌دراصطلاح ریاضی **مدارهای** عمل‌گروه روی‌مجموعه گویند. کمی دقیق‌تر مجموعهٔ $O_\alpha=\{g(\alpha)|g\in G\}$ که زیرمجموعه‌ای از Ω است را مدار α می‌گویند.

پس، در مسأله ماگروهی روی مجموعه‌ای عمل می‌کند و ما تعداد مدارها را می‌خواهیم. برای حل این‌مسألهٔ انتزاعی دیگر احتیاجی به‌بررسی مکعب‌ها و رنگ‌ها وغیره نداریم. این مسأله‌ای خاص نظریه گروههاست و آن‌را می‌شود به‌طورانتزاعی حل‌کرد. قضیهٔ زیر دقیقاً تعداد مدارها درعمل یك‌گروه روی یك‌مجموعه را معین می‌کند. اثبات این‌قضیه مشکل نیست و

در اکثر کتابهای درسی نظریهٔ گروهها آمده است. این قضیه اول بار در کتاب نظریهٔ گروههای متناهی نوشتهٔ ریاضیدان برجستهٔ انگلیسی برنساید (W. Burnside) در سالهای اول قرن حاضر آمده است و بدین جهت تا اخیراً این قضیه به‌نام «هم‌شمارش برنساید» معروف بود. لاکن تحقیقات پروفسور پیترنویمن (Peter Neumann) از دانشگاه آکسفورد نشان داده است که از این قضیه قبل از برنساید دیگران هم با اطلاع بودند. لذا اکنون این قضیه به «هم‌شمارشی که متعلق به برنسایدنیست» مشهور شده است!

قضیه: G گروهی با تعداد متناهی عضو است. فرض کنید G روی مجموعه Ω عمل می‌کند. Ω هم تعداد عضوهایش متناهی است. n را تعداد مدارهای این عمل بگیرید. آنگاه

$$n=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)$$

که در این فرمول $|G|$ تعداد عضوهای گروه G است، و χ تابعی از G به مجموعهٔ عددهای صحیح غیرمنفی است، به‌نحوی که $\chi(g)$ تعداد عضوهای Ω است که به‌وسیله g ثابت نگه‌داشته شده‌اند.

لذا برای پیداکردن تعداد مدارها لازم است بدانیم که هرعضو گروه چندتا ازعضوهای مجموعهٔ Ω را ثابت نگه‌می‌دارد. این کار مشکلی نیست. در مسأله، ما برای نوعهای مختلف دورانهای مکعب (جدول ۱) تعداد عضوهای Ω را که ثابت نگه‌می‌دارند در زیر آورده‌ایم:

نوع	تعداد دورانهای از این نوع	$\chi(g)$
۱	۱	m^6
۲	۶	m^3
۳	۳	m^4
۴	۸	m^2
۵	۶	m^3

جدول ۲

برای مثال ببینیم که چگونه برای دورانهای نوع ۳ عدد m^4

به‌دست آمده است. دورانهای نوع ۳ دورانهای ۱۸۰ درجه حول محوری که ازمرکزدورویه مقابل می‌گذرد می‌باشند. یکی ازاین دورانهای ۱۸۰ درجه را درنظر بگیریم و ببینیم که از m^6 عضو Ω چندتا را ثابت نگه‌می‌دارد. فرض کنید که محور دوران از وسط دورویهٔ چپ و راست می‌گذرد. یک عضو Ω چگونه ممکن است بعد از یک دوران ۱۸۰ درجه ثابت بماند و به عضو دیگری تبدیل نشده باشد. جواب ساده است باید رویه‌های بالا وپائین همرنگ باشند تا بعد از دوران جا با هم عوض کنند. همچنین باید رویه‌های جلو و عقب هم همرنگ باشند. دورویه چپ وراست هم هررنگی می‌توانند باشند. پس از بین m رنگ یک انتخاب برای رویه‌های بالا و پائین، یک انتخاب برای رویه‌های جلو وعقب ودوانتخاب برای رویه‌های چپ‌وراست می‌کنیم. لذا رویهم m^4 امکان وجود دارد. یعنی m^4 عضو Ω به‌نحوی رنگ‌آمیزی شده‌اند که یک دوران ۱۸۰ درجه حول محور تعیین‌شده هیچگونه تغییری در رنگ‌آمیزی آنها نمی‌دهد. بقیه عددهای ستون $\chi(g)$ هم به‌همین‌ترتیب به‌دست آمده‌اند. خواننده بهتر است که بکوشد تادرستی بقیه را خودبسنجد.

۶. جواب مسأله. حال می‌توانیم جواب مسأله‌را بنویسیم. طبق قضیه تعداد مدارهای عمل گروه دورانهای مکعب روی Ω برابر است با:

$$n=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)=\frac{1}{24}(m^6+6m^3+3m^4+8m^2+6m^3)=$$

$$=\frac{1}{24}m^2(m^4+3m^2+12m+8)$$

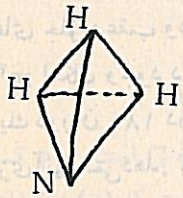
توجه کنید که ضرایب توانهای m به‌خاطر تعداد دورانهای از نوعهای مختلف است. مثلاً سه‌دوران از نوع ۳ هرکدام m^4 نقطهٔ ثابت دارند ولذاکلاً $3m^4$ نقطهٔ ثابت دارند.

مسأله حل شد! مثلاً اگر ۱۰ رنگ داشته‌باشیم $n=43450$ حالت مختلف برای رنگ‌آمیزی مکعب داریم. حل این‌مسأله قدرت و زیبائی استفاده ازگروهها برای شمارش را نشان می‌دهد چرا که پیداکردن جواب از راههای دیگر بسیار مشکل می‌باشد.

یک نکتهٔ جالب: جواب مسأله به‌ما می‌گوید که به‌ازای اعداد صحیح

m عدد $m^2(m^4+3m^2+12m+8)$ همیشه بر ۲۴ قابل‌قسمت است! این‌خودش هم مسأله جالبی است که حل مستقیم وحسابی آن خیلی هم‌ساده نیست. اصولاً خود قضیه هم می‌گوید که تعداد مدارهای عمل یك گروه روی یك‌مجموعه برابر با میانگین تعداد نقطه‌های ثابت می‌باشد. به‌بیان دیگر این‌میانگین همیشه یك عدد صحیح است، که خود تعجب‌انگیز است.

۷. کاربرد. خوانندهٔ‌مشکل‌پسند شایدبگوید که من‌چکارم به‌رنگ‌کردن مکعب! آیا دانستن تعداد روشهای ممکن رنگ‌کردن شیئی درجائی کاربرد هم دارد؟ با مثال می‌کوشیم که شما را قانع کنیم که جواب بلی است. مثال را ازشیمی انتخاب‌کرده‌ایم:

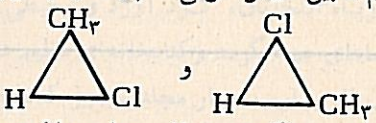


مولکول‌آمونیاك NH_3 شکل یك‌هرم مثلثی را دارد که پایهٔ آن مثلثی متساوی‌الاضلاع وکناره‌های آن‌مثلثهای متساوی‌الساقین می‌باشد. حال به‌وسیلهٔ فعل‌وانفعالات‌شیمیائی می‌توان یك تاسه‌تا از هیدروژنها را باکلر (Cl) ویا CH_3 جابه‌جاکرد. سؤال این است که چند مولکول مختلف می‌توان بدینوسیله به‌دست آورد؟ این‌دقیقاً همان رنگ‌کردن می‌باشد. یعنی می‌شود پرسیدکه با سه‌رنگ $\{H, Cl, CH_3\}$ به‌چندنوع می‌توان سه‌رأس مثلث متساوی‌الاضلاع را رنگ‌زد. برای حل مسأله شبیه مسأله قبلی عمل می‌کنیم. اول بایدگروه تقارن‌های‌مولکول‌را بیابیم. این گروه سه‌عضودارد $\{e_1, 120^\circ, 240^\circ\}$. e که عضو خنثی است ودوعضو دیگر دورانهای 120° و 240° می‌باشند. Ω مجموعه‌ای با $27=3^3$ امکان است. البته ازنظر مابعضی ازمولکولهای در Ω باهم فرقی ندارند. تعداد مولکولهای «متفاوت» دقیقاً تعدادمدارهای عمل گروه روی Ω می‌باشد. برای پیداکردن این‌عدد باتوجه به‌قضیه‌احتیاج به‌دانستن تعدادنقاط‌ثابت‌درعمل هرعضو گروه‌داریم. به‌سادگی به‌دست‌می‌آید که $\chi(e)=27$، و $\chi(120^\circ)=\chi(240^\circ)=3$. پس

$$n=\text{تعداد مولکولها}=\frac{1}{3}[27+3+3]=11$$

لذا تعداد مولکولهای مختلف ۱۱ می‌باشد. البته دلیلی نداردکه همهٔ این ۱۱ مولکول در طبیعت وجود داشته باشند. مافقط می‌دانیم که امکان‌وجود ۱۱ مولکول مختلف (ونه بیشتر) هست. این‌دیگر وظیفهٔ شیمیدانهاست که باآزمایش معلوم‌کنند چندتا از این ۱۱ مولکول واقعاً وجود دارند.

می‌توانیم این بحث راکمی بیشترادامه دهیم. بین یازده مولکول متفاوتی‌که شمردیم مابین دومولکولی‌که پایهٔ‌آنها به‌ترتیب



هستند فرق‌گذاردیم، چراکه نمی‌توانیم با دوران هرم از یکی به‌دیگری برسیم. به‌این دو مولکول ایزومر اپتیکی می‌گویند. حال‌شاید نخواهیم‌بین این‌دو فرق بگذاریم، یعنی بخواهیم تعداد مولکول‌های غیرایزومر را پیداکنیم. تنها فرق این‌مسأله بامسأله قبلی‌در گروه‌تقارن‌هاست. دراین‌حالت جدید، سه‌تقارن جدید (یعنی انعکاس حول ارتفاع‌های‌مثلث‌متساوی‌الاضلاع) هم به گروهمان اضافه می‌شود.

گروه تقارن این‌دفعه ۶ عضو دارد و هرکدام از سه‌انعکاس $3^2=9$ عدد از عضوهای Ω را ثابت نگه‌می‌دارند لذا

$$\text{تعداد مدرها}=\frac{1}{6}[27+3+3+9+9+9]=10$$

نتیجه می‌گیریم که دومولکول بالا تنها ایزومرهای ممکن هستند.

البته این‌مسأله خاص را می‌شود با ردیف‌کردن تمام حالتهای ممکن حل‌کرد، ولی وقتی با مولکول‌های بغرنج‌تر سروکار داشته‌باشیم این کار سخت‌تر خواهد شد، در حالیکه روش شمارش باگروهها سادگی خود را حفظ خواهد کرد.

۸. سخن‌آخر. حل مسألهٔ بالا بهانه‌ای بود برای نشان‌دادن قدرت و زیبائی انتزاع در ریاضی. انتزاع هم به‌ما امکان می‌دهد که با تمرکز توجه خود روی خواص اصلی وکلیدی مسأله را حل‌کنیم، و هم با نشان‌دادن رابطهٔ مسائل در ظاهر نامرتبط (رنگ‌کردن مکعب و تعداد مولکولها) از حل یکی درحل دیگری استفاده‌کنیم.

جهانی یافته و مورد احترام جوامع بشری قرار گرفته‌اند. او مردی کریم و بخشنده و بردبار وخوش معاشرت و بسیاردان وفروتن وخوش برخورد بود وهیچگاه سخن زشت برزبان نمی‌آورد.

تألیفات ریاضی نصیرالدین

ملاحظات کلی - بروکلمان فهرست پنجاه ونه جلد ازآثار نصیرالدین را آورده و آنها را برحسب مواد مختلف به‌ده رشته (فقه - اصول عقاید - فلسفه - ریاضی - فیزیك - نجوم - طب - رمل - معدنشناسی - موسیقی) تقسیم کرده است. البته این فهرست فقط شامل آثاری است که نسخه یا نسخه‌هایی ازآنها درکتابخانه‌های مختلف موجود بوده وبروکلمان ازوجود آنها اطلاع داشته است.

سارتن اسامی وعنوانهای شصت‌وچهارکتاب یارساله ازآثارنصیرالدین طوسی را ذکرکرده وآنها را به‌چند دسته تقسیم نموده است که عبارتند از: حساب وجبر- هندسه -آلات نجومی - زیج - نجوم - تقویم - معدنشناسی- جغرافیا - طب - منطق و طبقه بندی علوم - فلسفه - الهیات - اخلاق - شعر.

تقسیم‌بندی آثار ریاضی نصیرالدین- در این کتاب منحصراً از آثار ریاضی خالص نصیرالدین، یعنی از آنچه از تألیفات وی‌که مربوط به‌حساب وجبر و هندسه ومثلثات است بحث می‌شود. بنابراین ذکری از آثار نجومی او به‌میان نخواهد آمد به‌استثنای «تحریر مجسطی» و «زیج ایلخانی» که بخشهایی ازآنها مربوط به‌مثلثات است.

آثار ریاضی نصیرالدین طوسی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

الف - یك دسته کتابهایی است که خواجه نصیر خود آنها را تألیف کرده است.

ب - دستهٔ دیگر تحریرهایی است‌که وی ازآثار ریاضی یونانی به‌عمل آورده است.

الف - کتابهای ریاضی که نصیرالدین طوسی خود تألیف کرده است:

۱- کتاب کشف‌القناع عن اسرار شکل‌القطاع[1] - این کتاب که دربارهٔ مثلثات است و گاهی برای رعایت اختصار آن را «کشف‌القناع» و گاهی «کتاب دعاوی‌الشکل‌المعروف بالقطاع» نامیده‌اند یکی از تألیفات بسیار مهم طوسی در ریاضیات و از جهت تاریخ ریاضیات جالب توجه است.

نصیرالدین طوسی خود درمقدمهٔ این‌کتاب گفته است[2] که قبلاً کتاب جامعی دربارهٔ ضبط دعاوی شکل قطاع و اثبات آن به‌زبان فارسی نوشته بوده و بعضی از دوستانش که از طالبان علم بوده‌اند از او خواسته‌اند که آن را به‌عربی برگرداند و او خواهش آنها را پذیرفته و بعضی از زواید کتاب فارسی را حذف‌کرده و آن را ازنو به‌عربی نوشته است.

کتاب «کشف‌القناع» را الکساندر پاشاکاراتئودری در سال ۱۸۹۱ میلادی به‌زبان فرانسوی برگردانده ومتن عربی‌کتاب را باترجمهٔ فرانسوی آن به‌چاپ رسانیده است (← طوسی: شکل‌القطاع).

این ترجمه را کارادوو (Carra de Vaux) بررسی‌کرده و خلاصهٔ فشرده‌ای ازآن را درضمن مقاله‌ای به‌زبان فرانسوی در ژورنال آزیاتیك (جلد بیستم سال ۱۸۹۲ ص ۱۷۶-۱۸۱) منتشر ساخته است.

ونیز سوتر کتاب «کشف‌القناع» را درضمن مقاله‌ای به‌زبان آلمانی معرفی‌کرده است[3].

۱- دربارهٔ معنی «شکل قطاع» و قضایای مربوط به‌آن رجوع کنید به «قربانی، نسوی نامه»، بخش چهارم صفحات ۱۴۷ به‌بعد.

۲- «فقدکنت عملت فیمامضی من الزمان کتاباً جامعاً لضبط دعاوی الشکل المعروف بالقطاع وبراهینه... وکان ذلك الکتاب باللسان الفارسی فسألنی بعض الاصدقاء من طلبة العلم ان انقله الی اللسان العربی فاجبته الی ذلك و حذفت عنه بعض الزوائد» (نقل از نسخهٔ خطی «کشف‌القناع» متعلق به کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران).

۳- SUTER, H. : «Zur Geschichte der Trigonometrie» (Bibl. Math. N.F. 7/1893/1-8)

کتاب «کشف‌القناع» درسال ۱۹۵۱ میلادی دربادکوبه به‌زبان روسی ترجمه شده است. یوشکویچ نیز در کتاب «ریاضیات عرب» دربارهٔ آن‌کتاب بحث نموده است (←یوشکویچ M، ص ۱۴۱-۱۴۵)

دکتر غلامحسین مصاحب مقاله‌ای به زبان فارسی در بارهٔ کتاب «کشف‌القناع» نوشته است[1].

در کتاب «قربانی: بیرونی‌نامه» (ص ۴۰۵ - ۴۱۰) بحثی در بارهٔ «کشف‌القناع» و مقایسه مطالب آن با کتاب «مقالید علم‌الهیئه» تألیف بیرونی* صورت گرفته است.

* * *

از متن عربی کتاب «کشف‌القناع» چند نسخهٔ خطی در برلین و ایران موجود است که ازآن جمله است نسخهٔ خطی شمارهٔ ۲۴۳۲/۵ درکتابخانهٔ مرکزی‌دانشگاه‌تهران‌وسه‌نسخه درکتابخانه سپهسالار ویك نسخه‌دردانشکدهٔ ادبیات دانشگاه تهران (فهرست سوم ادبیات) وسه نسخه درکتابخانهٔ مجلس (ج۱ص۴۸ و ج ۲ ص ۱۱۸ و ج ۱۹ ص ۴۲۶) وفیلم آن به‌شمارهٔ ۳۵۹۹ در دانشگاه تهران موجود است.

نسخه‌های خطی ازکتابی موسوم به «کشف‌القناع» که به‌زبان فارسی است موجود می‌باشد (استواری P، ج ۲ ص ۷ ش ۳- فهرست فارسی، ج۱ ص ۱۸۹) و باید تحقیق شودکه از نصیرالدین طوسی است یانه.

فهرست مقالات کتاب «کشف‌القناع»

کتاب «کشف‌القناع» در پنج مقاله است که هرمقالهٔ آن از یك عده قضیه با چند فصل تشکیل شده است. ترجمهٔ فارسی عنوانهای مقالات آن به‌این شرح است:

۱ــ مصاحب (دکتر غلامحسین): «کشف‌القناع یا اولین کتاب در علم مثلثات» (مجلهٔ آموزش وپرورش شمارهٔ ۱۴، سال ۱۳۲۳ ه‍.ش، ص ۲۳۳ــ۲۳۴).

مقالهٔ اول- دربارهٔ نسبتهای مؤلف[1] و احکام‌آن ودرآن چهارده قضیه است.

مقالهٔ دوم- شکل قطاع سطحی ونسبتهای واقع درآن مشتمل‌بریازده فصل.

مقالهٔ سوم- در مقدمات مربوط به‌شکل موسوم به قطاع کروی و در آنچه فایدهٔ این شکل جز با آن تمام نمی‌شود مشتمل برسه فصل.

مقالهٔ چهارم- درشکل قطاع کروی و نسبتهایی‌که درآن واقع‌می‌شود در پنج فصل.

مقالهٔ پنجم- در بیان اصولی که در معرفت دایره‌های عظیمه واقع بر کره جای شکل قطاع را می‌گیرد مشتمل برهفت فصل.

۲- جوامع‌الحساب بالتخت والتراب[2] (به‌عربی)- این‌کتاب که گاهی آن را «جامع‌الحساب» نیزنامیده‌اند یکی دیگر ازآثارریاضی مهم نصیرالدین طوسی است و سه باب دارد. بابهای اول و دوم آن هرکدام در چند فصل و باب سوم آن در دو مسلك است‌که هرمسلك آن چند فصل دارد. ترجمهٔ فارسی عنوانهای بابها وفصلهای آن به‌این شرح است:

باب اول: در حساب اعداد صحیح در دوازده فصل (صور اعداد و مراتب‌آنها - تضعیف - تنصیف - جمع - تفریق - ضرب - تقسیم-شناسایی قوای دوم و سوم ومنازل دیگر- استخراج جذر- استخراج‌کعب- استخراج ریشه از قوای دیگر- امتحان اعمال).

باب دوم: درحساب کسرها به‌طریق محاسبان (= کسرهای متعارفی) در چهارده فصل (در ابتدای گفت‌وگو دربارهٔ کسرها - اشتراك و تباین اعداد - مقدمات لازم برای اعمال کسرها و تجنیس و رفع - یکی کردن کسرهای منکسر- یکی‌کردن کسرهای مضاف - تضعیف - تنصیف - جمع - تفریق - ضرب - تقسیم - جذر-کعب و بعد ازآن - استخراج منازل اصم

۱ــ دربارهٔ معنی «نسبت مؤلف» رجوع کنید به «قربانی؛ نسوی نامه، ص۱۵۲ ش ۷۳».

۲ــ دربارهٔ معنی حساب با تخت وتراب رجوع کنید به «قربانی، نسوی نامه» ص ۳۴ــ۳۶.

به‌تقریب دقیق).

باب سوم: درحساب کسرها به‌طریق منجمان در دومسلك.

مسلك اول: در طریق منجمان به‌حساب هند در ده فصل (تعریف کسر و روش نوشتن آن ـ تضعیف ـ تنصیف ـ جمع ـ تفریق ـ ضرب ـ تقسیم ـ جذر ـ کعب و بعد ازآن ـ استخراج ریشه‌های اصم با صفر).

مسلك دوم: در طریق منجمان به‌حساب جمل در نه فصل (در تمهید این روش ـ تضعیف ـ تنصیف ـ جمع ـ تفریق ـ ضرب ـ تقسیم ـ جذر ـ کعب و ریشه‌های دیگر).

* * *

این کتاب رانصیرالدین طوسی درماه رجب سال ۶۶۳ به‌پایان‌رسانیده و چنین شروع می‌شود: «... وبعد فهذا مختصر فی‌ذکر اعمال التی یحتاج الیهاالحساب موسوم بجوامع‌الحساب بالتخت والتراب...»

متن عربی کتاب «جوامع‌الحساب» طوسی در مجلهٔ «الابحاث» (ج۲۰ شمارهٔ ۲ ژوئن ۱۹۶۷، ص ۹۱-۱۶۳ و شمارهٔ ۳ سپتامبر ۱۹۶۷ م، ص ۲۱۳-۲۹۳) به‌چاپ رسیده است. اما این چاپ ناقص است یعنی قسمتی از فصل نهم و همهٔ فصل دهم و قسمتی ازفصل یازدهم باب اول را ندارد. این نقص و افتادگی مطالب را می‌توان در صفحهٔ ۱۴۲ آن چاپ مشاهده کرد: عبارت «مثاله اردنا ان ناخذ جذرهذا» متعلق به‌باب نهم و ازسطر دوازدهم به‌بعد که با عبارت «فاذا اردنا ان نعرف مابین ...» شروع می‌شود متعلق به‌فصل یازدهم کتاب است.

کتاب «جوامع‌الحساب» درسال ۱۹۶۳ به‌زبان روسی ترجمه شده‌است (← یوشکویچ M، ص ۸۰).

ازکتاب «جوامع‌الحساب» چند نسخه خطی موجود است. از آن‌جمله است یك نسخه درکتابخانه «سرای» در استانبول‌که در ماه محرم ۶۶۴ ه.ق از روی نسخه اصل آن استنساخ شده (← کراوزه S) یك نسخهٔ دیگر در کتابخانهٔ‌آستان قدس رضوی موجود است‌که ظاهراً مدتی دراختیاربهاءالدین عاملی* بوده است.

دو فیلم از این کتاب نیز درکتابخانه مرکزی دانشگاه تهران هست.

تبصرهٔ ۱ ـ یك نسخه خطی از یك کتاب که ظاهراً در بارهٔ کتاب «جامع‌الحساب» تألیف شده در برلین موجود است که عنوان بخشهای‌آن عبارتند از: فی‌الجذر ـ فی‌الکعب ـ فی‌استخراج‌المنازل‌الاصم بتقریب‌ادق (اینها عنوانهای فصلهای ۱۲ تا ۱۴ باب دوم جوامع‌الحساب هستند). در آخر این نسخه آمده است: «وذلك ماوعدناه فی‌المقدمه من‌جامع‌الحساب لمحمد بن محمدالطوسی».

تبصرهٔ ۲ـ نسخهٔ خطی‌کتابی با عنوان «جامع‌الحساب» به‌زبان فارسی موجود است‌که در سه‌مقاله است ولی‌گویا باکتاب «جوامع‌الحساب»طوسی یکسان نیست (فهرست فارسی، ج۱ ص ۱۵۵ ـ استوری P ج۲ ص۶).

۳ـ الرسالة‌الشافیه عن‌الشك فی‌الخطوط‌المتوازیه

این‌کتاب‌که گاهی آن‌را «رسالهٔ فی‌مصادرات اقلیدس» نیز نامیده‌اند یکی دیگر ازآثار مهم ریاضی نصیرالدین طوسی است‌که به‌خصوص ازلحاظ تاریخ ریاضیات اهمیت دارد. موضوع‌آن بحث در بارهٔ اصل موضوع پنجم ازکتاب «اصول اقلیدس» است و عنوان آن در بعضی از نسخه‌های خطی «قواعدالهندسه»نوشته شده‌است. این‌رساله درسال۱۳۵۹ ه. ق درحیدرآباد دکن در جزو رسایل طوسی به چاپ رسیده است (رسالهٔ هشتم از «طوسی: نه‌رساله»). درپایان‌همین‌چاپ (صفحات ۳۶ تا۴۰) مکاتباتی‌که بین‌علم‌الدین قیصربن‌ابی‌القاسم حنفی ازشام ونصیرالدین طوسی دربارهٔ این‌رساله صورت گرفته نیز به‌طبع رسیده است.

رسالهٔ شافیه در صفحات ۱۲۳-۱۳۷کتاب «همایی: خیامی‌نامه» موردبحث قرارگرفته است.

رسالهٔ شافیه در سال ۱۹۶۰ توسط رزنفلد به‌زبان روسی ترجمه شده (←یوشکویچM، ص۱۸۲ش۹۵) وخلاصهٔ مطالب‌آن‌را یوشکویچ‌درکتاب «ریاضیات عرب» آورده است (← یوشکویچ M، ص۱۲۰-۱۲۲).

دکتر محسن هشترودی مقالهٔ مختصری دربارهٔ این‌رساله نوشته است (یادنامهٔ خواجه‌نصیرالدین، ج۱ ص ۱۳۳-۱۳۶).

ازرسالهٔ شافیه چندنسخهٔ خطی نیز موجوداست (بروکلمان ـ کراوزه ـ سزگین).

۴ـ رساله فی انه لایمکن ان یجتمع من عددین مربعین نردین عدد مربع[1] ـ اثبات این مطلب است که ممکن نیست مجموع دو عدد مربع فرد عدد مربع باشد. از این رساله چندنسخه موجود است (بروکلمان ـ کراوزه).

۵ـ حساب الضرب والقسمةـ این کتاب به‌زبان فارسی‌است وچنین‌شروع می‌شود: «این مختصری است درحساب هند وغیرآن‌که تعلیق کرده می‌شود بنای‌آن برسه مقالت». این‌سه مقاله عبارتند از: مقالهٔ اول درحساب‌صحاح وشرح اعمال‌آن ـ مقالهٔ دوم درحساب‌کسور ـ مقالهٔ سوم درحساب درج و دقائق. نسخهٔ خطی این رساله موجود است (فهرست فارسی، ج۱ ص۱۶۸ ـ کراوزه S، ص۴۹۷ ش ۱۲).

۶ـ رساله در علم مثلثـ نام این رساله در کتاب «تذکرةالنوادر» آمده است.

۷ـ مائة مسأله وخمسه من اصول اقلیدسـ موجود درکتابخانهٔ خدیویهٔ مصر.

۸ـ رساله فی الجبر والمقابله (عربی) ـ نیمهٔ نخستین متن عربی این رسالهٔ مختصر در سال ۱۳۳۵ ه.ش توسط دانشگاه تهران به چاپ رسیده است. این‌رساله توسط قاسمعلی قاینی به‌فارسی ترجمه وگزارش شده است (فهرست فارسی، ص۱۴۸).

۹ـ زیج ایلخانی (به‌فارسی) ـ همانگونه‌که پیش ازین نوشتم، نتیجهٔ کار نصیرالدین طوسی وهمکارانش در مرکز علمی مراغه، یعنی رصدخانه و کتابخانه و حوزهٔ تعلیم‌آن، تهیه و تنظیم زیج مشهور ایلخانی است‌که از جملهٔ زیجهای معروف دورهٔ اسلامی وازآثار مهم نصیرالدین طوسی‌است.

ظاهراً نصیرالدین طوسی عقیده داشته‌که برای تهیهٔ زیج مدت‌سی‌سال که‌کوتاهترین دوره‌ای است‌که سیرکواکب یک‌بار در آن‌کامل می‌گردد لازم است. اما هلاکو فقط دوازده سال به‌او مهلت داده بود تا زیج را فراهم

---

۱. رساله‌ای با همین عنوان به‌کمال‌الدین‌ابن‌یونس منسوب است.

آورد. خواجهٔ طوسی رصد مراغه را در سال ۶۵۷ شروع کرد وتألیف زیج ایلخانی درحدود سال ۶۷۰ به‌پایان رسید.

این‌زیج در چهار مقاله است: مقالهٔ اول در تواریخ ـ مقالهٔ دوم در سیرکواکب و مواضع‌آنها ـ مقالهٔ سوم در اوقات مطالع ـ مقالهٔ چهارم در باقی اعمال نجومی.

از زیج ایلخانی سه‌نسخه در کتابخانه آستان رضوی و یک‌نسخه در مدرسهٔ سپهسالار و چندنسخه در کتابخانه‌های دیگر موجود است (فهرست فارسی، ج ۱ ص ۳۰۰ ـ کراوزه).

خلاصه‌ها ـ از زیج ایلخانی خلاصه‌های زیر فراهم‌آمده است:

الف ـ علاءالدین علیشاه‌بن قاسم‌بخاری معروف به‌علاء منجم‌منتخبی از زیج ایلخانی را به‌فارسی فراهم‌آورده موسوم به«عمدةالخاقانیه» (یا زیج شاهی) که نسخهٔ‌آن موجود است (استوری، ج۲ ص ۵۹).

ب ـ دکترکندی خلاصه‌ای فشرده ولی مفید و جامع از زیج ایلخانی تهیه‌کرد (← کندی Z) و ظاهراً قرار است‌که همهٔ آن‌کتاب را به‌انگلیسی ترجمه‌کند.

شرحها ـ برزیج ایلخانی شرحهای زیر نوشته شده است:

الف ـ شرحی موسوم به«کشف حقایق زیج ایلخانی» به‌فارسی‌تألیف نظام اعرج نیشابوری* که نسخهٔ خطی آن موجود است (فهرست فارسی، ج۱ ص ۳۳۹).

ب ـ شرحی به‌فارسی‌توسط ابواسحاق‌کوبنانی‌یزدی* (فهرست‌فارسی، ج۱ ص ۳۱۸).

ج ـ «توضیح زیج ایلخانی» تألیف کمال‌الدین حسن‌بن حسین‌بن‌حسن شاهنشاه سمنانی که در سال ۷۹۵ دربغداد نوشته شده و نسخه آن موجود است (فهرست فارسی، ج۱ ص ۲۷۷).

د ـ «زیج جامع‌سعیدی در تنقیح زیج ایلخانی» که در سال ۸۶۰ توسط رکن‌الدین‌بن شرف‌الدین آملی نوشته شده است (فهرست فارسی، ج ۱ ص ۳۰۰ ـ فهرست مجلس ج۲ ص ۱۰۰).

ترجمه‌ها ـ زیج ایلخانی دوبار به‌زبان عربی ترجمه شده است :

الف ـ با عنوان «العقدالیمانی فی‌حل‌الزیج‌الایلخانی» توسط احمدبن ابراهیم‌بن‌خلیل حلبی متوفی به‌سال ۸۵۹ (استوری P ، ج۲ ص ۵۹-۶۰).

ب ـ با عنوان «حل‌الزیج» در سال ۹۳۴ توسط علی‌بن رفاعی حسینی شافعی (استوری P، ج۲ ص ۶۰).

ب ـ تحریرات ریاضی نصیرالدین طوسی

ملاحظات‌کلی : آقای دکتر ذبیح‌الله صفا به‌حق دربارهٔ این‌تحریرات نوشته است[1]: «همهٔ کتابهای معتبر یونانیان در ریاضیات ونجوم به‌وسیله مترجمان قرنهای دوم وسوم هجری به‌عربی نقل شد و ترجمه‌هایی ترتیب یافت که مواردی از آنها با صعوبت درفهم همراه بود وحاجت به‌شرح و ایضاح وتحریر روشن وقابل‌تعلیم وتعلم‌داشت. بزرگترین کار خواجه‌نصیر[2] آنست که بسیاری از این ترجمه‌ها را با دقت وافر موردمطالعه قرار داد و آنها را تصحیح وتنقیح‌کرد وبار دیگر تألیفی منظم وخالی ازنقص از هریك به‌وجودآورد وتحریرات مشهور خودرا ازکتب ریاضی یونانی از این‌طریق ایجادکرد» .

«اهمیت این‌تحریرات درآنست‌که یك دسته ازکتب ریاضی یونانی‌که برای طالبان این علم در مراحل مختلف تحصیل لازم بود بابیانی روشن و ترتیب و نظمی خاص در دسترس‌آنان قرارگرفت . در این تحریرات خلاف آنچه در ترجمه‌ها دیده می‌شد ابهامی دربیان ونقصی در کلام یا پراکندگی وبی‌نظمی در مطالب دیده نمی‌شود . خواجه در این تحریرات ناقلی نیست که برعمیاء، کلمه‌ای عربی را جایگزین لغتی یونانی‌کند یا نایافت مطالب غامض ریاضی هنگام نوشتن مفاهیم و مقاصد مؤلفان یونانی او را از راه

۱. تاریخ ادبیات دکترصفا، ج۳ ص ۲۶۱-۲۶۲.

۲. البته این‌مطلب دربارهٔ کتابهای ریاضی یونانی صحیح است ـ اماخواجه‌نصیر خود مصنف چندائر ریاضی مهم است‌که تصنیف آنها ازتحریرکتابهای‌ریاضی یونانی مهمتر است واز همهٔ این‌تصنیفات مهمترکتاب «کشف‌القناع عن‌اسرار شکل‌القطاع» است‌که ذکرش گذشت.

راست بیرون بـرد و دربیراههٔ خطا و اشتباه افکند . وی هنگام نوشتن این تحریرات در حقیقت استادی مـاهر و مؤلفی قادر است‌که مقاصد و مفاهیم دریافته را به‌آسانی وبی‌صعوبت واشکال به زیور عبارات درست می‌آراید».

فهرست این‌تحریرات: (همهٔ این‌تحرات به‌طبع رسیده ونسخه‌های‌خطی متعدد ازآنها موجود است)[1].

۱۰ـ تحریر اصول اقلیدسـ برای مزید فـایده ابتدا متذکر می‌شوم که اقلیدس ریاضی‌دانی بود که احیـاناً در ایام سلطنت بطلمیوس اول‌که از ۳۲۳ تا ۲۵۸ پیش ازمیلاد پـادشاه مصر بود در اسکندریه می‌زیست. وی معلومـات ریـاضی عصر خود را در کتاب «اصول» که دارای سیزده مقاله است مدون ساخت . این‌کتاب‌که از دیرباز تـا عصر حاضر مبنای آموزش هندسه مقدمـاتی بوده است و مقدار معتنـابهی ازآن اثر خود اقلیدس است تـألیفی است از پیشرفته‌ترین درجهٔ معلومات ریاضی آن‌زمان‌که اقلیدس در فراهم‌آوردن‌آن نبوغ زیادی ازخود نشان داده است.

کتاب «اصول اقلیدس» که‌گاهی آن را به‌نام مؤلفش «کتاب اقلیدس» نیز می‌نامند ودر تألیفات ریاضی دورهٔ اسلامی آن‌را به‌علت شهرت فراوانش «کتاب اصول» نیز خوانده‌اند ازکتب‌مهم دورهٔ اسلامی بوده است. درآغاز کارکه هنوز مسلمانان باریاضیات یونانی‌کاملاً آشنا نبودند ترجمه این‌کتاب از یونانی به‌عربی‌کار دشواری بود وبه‌همین‌علت چندبارآن‌را ترجمه وچند بارآن ترجمه‌ها را اصلاح‌کردند . ابتدا حجاج‌بن یوسف مطر* که در اواخر سدهٔ دوم واوایل سدهٔ سوم هجری می‌زیست دوبارآن‌را به‌زبان عربی‌ترجمه کرد. نخستین‌بار درزمان‌هارون‌الرشیدکه‌آن‌را«هارونی»نامیده‌اند، وباردیگر بادقت‌بیشتری درایام مأمون خلیفه‌که‌آن‌را «مأمونی» خوانده‌اند. بعداً کتاب «اصول» از نو به‌وسیله اسحاق بن‌حنین* به‌عـربی ترجمه‌شد و این‌ترجمه را ثابت‌بن‌قره* اصلاح‌کرد. با این‌حال بازهم تا زمان نصیرالدین طوسی ترجمهٔ کتاب «اصول» چنانکه باید سلیس وروشن نبود وبسیاری ازابهامات‌آن‌هنوز

۱. نشانی این نسخه‌هـای خطی را بخصوص در کتاب «سزگین G_5» خـواهید یافت.

باقی‌مانده بود . خـواجه‌نصیر «تحریر اصول اقلیدس» راکه معمولا «تحریر اقلیدس»نامیده می‌شود ازروی دوترجمهٔ‌حجاج واسحاق واصلاح ثابت‌بن‌قره در سیزده مقاله تدوین‌کرد وخود توضیحـات مهم و مفیدی برآن افزودکه مهمترین آنها شرحی است‌که دربارهٔ اصل موضوع پنجم یعنی اصل موضوع مربـوط به‌خطوط متوازی نـوشته است[1] . چنانکه پیش از این نیز نوشتم نصیرالدین رساله‌ای جداگانه نیز در این بـاره تألیف‌کرده است موسوم به «الـرساله‌الشافیه عن‌الشك فی‌الخطوط‌المتوازیه»[2] . البته پیش ازنصیرالدین طوسی عده‌ای دیگر از ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی دربارهٔ همین اصل موضوع وبه‌طورکلی دربارهٔ‌مواضع مشکل‌کتاب «اصول اقلیدس» به‌بحث پرداخته‌اند وبعد از خواجه‌نصیر هم این‌کار ادامه داشت. به‌طوری‌که در حدود شصت نفر ازریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی‌را می‌شناسیم‌که دربارهٔ شرح ونقدقسمتهایی ازکتاب «اصول اقلیدس» یا همهٔ‌آن، رساله‌هـا ومقاله‌ها وکتابها نوشته‌اند[3] که ازآن‌جمله است «تحریر اصول اقلیدس» تألیف محی‌الدین مغربی* (و این غیر ازتحریر طوسی است).

اصل‌کتاب «اصول» درسیزده مقاله بوده‌که همانهاست‌که خواجه نصیر تحریرکرده است. ولی بعداً دومقاله توسط اشخاص دیگر به‌آن‌کتاب‌افزوده شده است[4]. تحریر این‌دومقاله نیز در«تحریر اقلیدس» طوسی هست.

ازتحریر اقلیدس چه در ایران وچه درخارج از ایران نسخه‌های خطی متعدد وجود دارد (← سزگین G_5) وعلاوه براین چندبار وازجمله درسال ۱۲۹۸ ه.ق درتهران به‌چاپ (سنگی) رسیده است.

غیر از «تحریر اقلیدس» که درتهران به‌طبع رسیده و بدون تردید اثر نصیرالدین طوسی‌است‌یك‌تحریردیگرنیزازکتاب «اصول اقلیدس» به‌نصیرالدین

۱. رجوع کنید به «تحریر اقلیدس» صفحات ۴ و ۱۶ تا ۲۱ — «هیث E» ، ج۱ صفحات ۲۰۸ به‌بعد.

۲. رجوع‌کنید به‌شمارهٔ ۳ از تألیفات نصیرالدین‌طوسی‌که ذکرش‌گذشت.

۳. رجوع‌کنید به «سزگین G_5» ج۵ ص۱۰۵ تا۱۱۵ — ونیز به«هیث E»، ج۱ صفحات ۸۵ تا ۹۰.

۴. رجوع‌کنید به«هیث H» ج۱ص۴۱۹—۴۲۱ ونیز به«بویرH»ص۱۳۰—۱۳۱.

منسوب است‌که متن عربی‌آن در سال ۱۹۵۴ میلادی وترجمهٔ لاتینی‌آن در سال ۱۶۵۷ میلادی در رم به‌چاپ رسیده است ومتن‌آن با متن چاپی تهران تفاوت دارد. اگر چه تقریباً همهٔ پژوهشهایی‌که تاکنون به‌زبانهای اروپایی دربارهٔ «تحریر اقلیدس» نصیرالدین طوسی صورت‌گرفته ازروی همین‌دوچاپ بوده است ولی به‌احتمال قوی نسخهٔ چاپی رم تألیف شخص دیگری است و در هرصورت انتساب آن بـه‌طوسی مورد تـردید است . نصیرالدین طوسی «تحریر اقلیدس»را درسال ۶۴۶ یعنی ۲۶سال پیش ازدرگذشت خود به‌پایان رسانیده امـا اصل نسخه‌ای از «تحریر اقلیدس» که از روی آن در رم چاپ شده در سال ۶۹۸ یعنی ۲۶ سـال بعد از درگـذشت خواجه‌نصیر کتابت شده است.

ترجمه‌ها:

«تحریر اقلیدس» نصیرالدین طوسی یك‌بار توسط‌شاگردش قطب‌الدین شیرازی* به‌فارسی ترجمه شدکه سه‌نسخهٔ خطی ازآن موجود است[1]. یك‌بار دیگر هم توسط خیرالله‌خان فرزند لطف‌الله مهندس با عنوان «تقریرالتحریر» در زمان محمدشاه قاجار به‌فارسی ترجمه شد ونسخهٔ خطی‌آن نیز در دست است[2]. ترجمهٔ فـارسی شش مقاله از «تحریر اقلیدس» نیز در کلکته در سال ۱۸۲۴ میلادی به‌چاپ رسیده است‌که نـام مترجم ندارد. به‌این ترجمه‌هـا باید افزود: ترجمهٔ تحریر اقلیدس توسط محمدمهدی فرزند محمدحسن منجم از سدهٔ سیزدهم (فهرست فارسی، ج۱ ص۱۴۸).

شرحها:

به‌کتاب «تحریر اقلیدس» چندشرح وحاشیه نوشته‌اند ازاین‌قرار[3]:

۱. استوری P، ج۲ ص۱ــ کراوزه S، ص ۵۰۸ (ش ۶) ـ انشریهٔ دانشگاه،ج۶ ص ۴۸۵.

۲. استوری P، ج۲ ص ۱ــ فهرست فـارسی، ج۱ ص۱۵۳ (درآنجاکتابی نیز با نام «تقریرالتحریر» از تقی‌الدین ابوالخیر محمد فرزند محمد ثبت‌شده است) ــ این «تقریرالتحریر» را نبـاید بـا «تقریب‌التحریر» کـه شرح «المجسطی» است (خواهدآمد) اشتباه‌کرد.

۳. رجوع‌کنید به«سزگین G_5» ص ۱۱۳.

یك ـ حاشیه توسط علی‌بن‌محمد سیدشریف جرجانی[1] (متولد ۷۴۰ و متوفی ۸۱۶) موجود درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران ـ به‌شمارهٔ ۱۰۸۶.

دو ـ توسط موسی‌بن محمدبن‌محمود قاضی‌زادهٔ رومی*.

سه ـ تعلیقه علی‌التحریراقلیدس توسط شمس‌الدین محمدبن‌احمدخفری (فاضل خفری)[2] متوفی به‌سال ۹۵۸ موجود در کتابخانهٔ مجلس به‌شمارهٔ ۱۸۰۵ (فهرست مجلس، ج۹ ص ۳۵۳).

چهار ـ ملخص تحریراقلیدس توسط امیرزین‌العابدین‌بن‌محمد حسینی معاصر میردامادموجود درآستان‌قدس‌رضوی (فهرست رضوی، ج۸ص۴۴۴).

پنج ـ «شرح تحریر کتاب اقلیدس» به‌عربی موجود در رامپور توسط میرمحمد هاشم علوی متوفی به‌سال ۱۰۶۱ ه.ق.

شش ـ «حاشیه برتحریراقلیدس» توسط میبدی* (کمال‌الدین حسین‌بن معین‌الدین) موجود درآستان‌رضوی (فهرست رضوی، ج۸ص۱۳۱) ومدرسهٔ سپهسالار (فهرست سپهسالار، بخش ۴ ص۱۵۱).

هفت ـ شرح توسط مولوی محمد برکتب موجود در رامپور.

هشت ـ شرح توسط محمدعلی کشمیری که به‌چاپ رسیده است.

نه ـ حاشیه بدون نام نویسنده (فهرست دانشگاه، ج ۸ ص۳۲۲۸).

ده ـ شرح تحریر اقلیدس (یا توضیح‌الاشکال) توسط ملامهدی فرزند ابی‌ذر نراقی (فهرست فارسی، ج ۱ ص ۱۵۴) و حاشیهٔ آن (فهرست‌فارسی، ج ۱ ص ۱۶۰).

یازده ـ رسالهٔ حل‌اشکال شکل پانزدهم ازمقالهٔ سوم نوشته ابوالحسن محمدبن احمد کاشی متوفی به‌سال ۹۲۸ [سزگین G_5، ص ۱۵ (ش ۵۷) ـ فهرست مجلس، ج ۹ ص ۳۵۲ و ج ۱۴ ص ۷۱ (با عنوان رساله فی‌الهندسه])

---

۱. رجوع کنید به «دایرةالمعارف فارسی» مقالهٔ جرجانی یا شریف جرجانی ـ سارتن I، ج۳ ص ۱۴۶۱.

۲. دربارهٔ وی رجوع کنید به «ریحانةالادب» ج ۱ ص ۴۰۵ (ش ۹۲۴) ـ لغت‌نامه، خفری، شمس‌الدین‌محمد ـ فهرست سوم ادبیات، ص ۸۰.

۱۱ـ تحریرالمجسطی ـ بطلیموس (یا بطلمیوس) قلوزی[1] در مصر به‌دنیا آمد و در ربع دوم سدهٔ دوم میلادی دراسکندریهٔ پرورش یافت وبعد از سال ۱۶۱ میلادی درگذشت[2]. وی ریاضی‌دان وجغرافی‌دان وفیزیك‌دان و گاهشناس بود. مهمترین اثر او کتابی است موسوم به «مجموعهٔ ریاضی» که بعداً آن را از بابت اهمیتش «مگیسته»[3] یعنی «کبیر» نامیدند و این اسم هنگام تعریب با افزودن الف و لام عربی به‌صورت «المجسطی» درآمد و همین ترکیب بعد ازنقل علوم اسلامی دراروپا به‌شکل Almagest پذیرفته شد.

المجسطی درسیزده* مقاله و ۱۹۶ شکل (یعنی قضیه یامسأله) است. در بابهای نهم ویازدهم ازمقاله اول‌آن علم مثلثات مسطحه وکروی به‌وجه بسیار جالبی تدوین وبیان شده است[4].

المجسطی دوبار از زبان یونانی به‌زبان عربی ترجمه شد. بار اول یحیی‌بن خالدبن برمك وزیر مشهور و فاضل ایرانی در دستگاه دولت‌عباسی جماعتی را به‌ترجمه این کتاب گماشت. ترجمهٔ بار دوم را به‌اسحاق بن حنین* نسبت داده‌اند و ثابت‌بن قره* آن را اصلاح کرده است.

«تحریرالمجسطی» را خواجهٔ طوسی در دژ الموت در تاریخ پنجم شوال سال ۶۴۴ به‌پایان رسانیده وچند نسخه خطی ازآن در ایران موجود است که از آن‌جمله است دو نسخه درکتابخانهٔ مجلس و دو نسخه خطی در دانشگاه تهران[5] به شماره‌های ۱۳۵۲ و ۱۸۸۶ و یك نسخه در دانشکدهٔ حقوق[6] تهران و یك نسخه در دانشکدهٔ ادبیات تهران[7] و چهار نسخه در

۱ـ Cladius Ptolemy.

۲ـ سارتن I، ج ۱ ص ۲۷۲.

۳ـ Megiste.

۴ـ برای کسب اطلاع از محتویات بخش ریاضی «المجسطی» رجوع کنید به«هیث H»، ج ۲ ص ۲۷۵ـ۲۷۶.

۵ـ فهرست دانشگاه، ج ۸ ص ۴۵ و۴۹۰.

۶ـ فهرست دانشکدهٔ حقوق، ص ۲۸۵.

۷ـ فهرست دوم ادبیات، ص۷۵.

مدرسهٔ سپهسالار[1]. فیلم آن نیز به‌شمارهٔ ۲۸۸۵/۴ در دانشگاه تهران هست[2]. یك نسخه هم به‌خط قطب‌الدین شیرازی* در کتابخانه نور عثمانیه استانبول به‌شمارهٔ ۲۹۴۱ موجود است.

* * *

به کتاب «تحریر المجسطی» چند نفر شرح نوشته‌اند[3]:

یك ـ حسام‌الدین حسن‌بن محمد سیواسی.

دو ـ نظام اعرج نیشابوری*. یك نسخه از این شرح باعنوان «تفسیر تجریر المجسطی» به‌شمارهٔ ۳۳۴۰ در کتابخانه ملك و یك نسخه در کتابخانهٔ مجلس موجود است. قاضی‌زادهٔ رومی* براین شرح حاشیه نوشته است.

سه ـ عبدالعلی بیرجندی*. یك نسخه از این شرح در کتابخانهٔ ملی تهران به‌شمارهٔ ۱۶۳۴ موجود است.

چهار ـ عصمت‌الله‌بن نظام‌بن عبدالرسول شارنپوری.

پنج ـ شمس‌الدین محمدبن احمد خفری.

شش ـ شرحی بدون نام که ممکن است از شمس‌الدین سمرقندی* باشد.

هفت ـ به‌قول استوری (استوری P، ج ۲ ص ۳۷) خیرالله مهندس پسر لطف‌الله درسال ۱۱۶۰ هـ. ق شرحی به‌فارسی بر «تحریر المجسطی» نوشته موسوم به «تقریب التحریر».

تبصرهـ عبدالملك شیرازی کتاب «مجسطی» را به‌عربی خلاصه کرده و آن را «تلخیص المجسطی» نامیده و قطب‌الدین شیرازی* این ملخص را به‌فارسی ترجمه کرده و این ترجمه را به‌عنوان فن دوم ازجملهٔ چهارم کتاب

۱ـ فهرست سپهسالار، بخش سوم ص ۳۴۳.

۲ـ فهرست میکروفیلمها، ص۷۳۹.

۳ـ نشانی نسخه‌های خطی این شرحها را در کتاب «سزگین G_6»، ص ۹۳ـ۹۴ خواهید یافت.

«درة‌التاج» آورده است[1].

۱۲ـ تحریر کتاب معرفة مساحة‌الاشکال‌الکریه والبسیطهـ اصل کتاب «معرفة مساحة‌الاشکال» از بنوموسی* است. نصیرالدین طوسی این کتاب را تحریر کرده و در انتهای آن برهانی برای قضیه هفتم کتاب (دستور محاسبه مساحت مثلث برحسب اضلاع آن) آورده وآن را ازخازن (ابوجعفرخازن؟) دانسته است[2]. همچنین خواجهٔ طوسی بعد از شکل هجدهم کتاب «مساحة‌ـ الاشکال» مطلبی دربارهٔ محاسبهٔ تقریبی کعب در دستگاه شمار شصتگانی آورده[3] که چنین شروع می‌شود: «ینبغی لنا ان نصف بعد ذلك تقریب ضلع‌ـ المکعب لینطبق به‌عندالحاجه». کارادوو این قسمت را نظر به‌اهمیتی که در تاریخ ریاضیات داشته به زبان فرانسوی ترجمه کرده است[4]. ترجمهٔ فارسی این مطلب وبحثی را دربارهٔ آن درکتاب «قربانی: کاشانی‌نامه» (بخش‌ششم شمارهٔ ۲۷۸) خواهید یافت.

از «تحریرمساحة‌الاشکال» چند نسخه خطی موجود است (سزگین G_5، ص ۲۵۱) و ازآن‌جمله است یك نسخهٔ خطی درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه[5] و یك نسخه در کتابخانه مجلس[6]. علاوه براین «تحریر مساحة‌الاشکال» در سال ۱۳۵۹ هـ.ق در حیدرآباد دکن به‌چاپ رسیده است (طوسی: نه رساله، رسالهٔ اول).

۱۳ـ تحریر کتاب المفروضات ـ کتاب مفروضات از تألیفات ثابت‌ـ

۱ـ «درة‌التاج لغرة‌الدباج» بخش دوم چاپ وزارت فرهنگ، سال ۱۳۲۴ هـ.ش صفحات ۴ تا ۲۳۸.

۲ـ «طوسی: نه رساله» رسالهٔ اول صفحات ۲۶ و ۲۷.

۳ـ «طوسی: نه رساله» رسالهٔ اول صفحهٔ ۲۵.

۴ـ CARRA DE VAUX: «Une Proposition du Livre des Fils de Mousa sur les calculs approchés» (Bibliotheca Mathematica, Nouvelle série, 12, PP.1–2).

۵ـ فهرست دانشگاه، ج ۹ ص ۱۱۰۱.

۶ـ فهرست مجلس، ج ۲ ص ۱۱۷ (ش ۲۰۹٫۳).

بن قره* است و یك نسخه از اصل آن در کتابخانهٔ ایاصوفیا در استانبول موجود است[1]. فیلم‌آن نیزدردانشگاه تهران هست[2]. اینکه بعضی‌نوشته‌اند که اصل کتاب مفروضات که خواجه نصیر طوسی آن‌را تحریر کرده از ارشمیدس است درست نیست[3].

از «تحریر کتاب مفروضات» نسخه‌های متعدد موجود است[4] که از آن‌جمله است یك نسخه دردانشگاه تهران[5] وچهارنسخه درکتابخانهٔ مدرسهٔ سپهسالار[6]. علاوه‌براین «تحریرالمفروضات» درسال ۱۳۵۹ه.ق درحیدرآباد دکن به‌طبع رسیده است (طوسی: نه‌رساله، رسالهٔ دوم).

۱۴- تحریر کتاب مأخوذات - اصل کتاب مأخوذات منسوب به‌ارشمیدس است[7]. ثابت‌بن قره* آن را به‌عربی ترجمه کرده و این ترجمه را علی نسوی* تفسیر نموده و خواجهٔ طوسی این تفسیر را تحریر کرده است. دربارهٔ معنی «مأخوذات» و ترجمهٔ لاتینی کتاب مأخوذات و ترجمهٔ فارسی مقدمهٔ تفسیر مأخوذات رجوع کنید به «قربانی: نسوی نامه» (ص ۲۶-۲۷). خلاصهٔ کتاب مأخوذات را در صفحات ۱۶۵ تا ۱۷۶ همان‌کتاب خواهید یافت.

از «تحریر مأخوذات» نسخه‌های خطی متعدد موجود است[8] که ازآن جمله است یك‌نسخه در دانشگاه تهران[9] وپنج نسخه درمدرسهٔ سپهسالار[10] این‌کتاب درسال ۱۳۵۹ ه.ق درحیدرآباد دکن به‌طبع رسیده است (طوسی:

۱- کراوزه S ص ۴۵۳ (ش ۱).
۲- فهرست میکروفیلمها، ج ۱ ص ۴۶۸ (ش ۴).
۳- فهرست سپهسالار، بخش ۳ ص ۳۴۸.
۴- سزگین G_5 ، ص ۲۷۱ (ش ۱۹).
۵- فهرست دانشگاه، ج ۱۵ ص ۲۰.
۶- فهرست سپهسالار، بخش ۳ ص ۳۴۸-۳۴۹.
۷- هیث: آثار ارشمیدس، ص *XXXII* - سزگین G_5، ص ۱۳۱ (ش ۴).
۸- سزگین G_5 ، صفحات ۱۳۱ و ۱۳۲.
۹- فهرست دانشگاه ، ج ۱۵ ص ۲۰.
۱۰- فهرست سپهسالار، بخش ۳ ص۳۴۲-۳۴۳.

نه‌رساله، رسالهٔ سوم).

۱۵- تحریرالکرة و الاسطوانه - نصیرالدین طوسی در مقدمهٔ این تحریر نوشته است: «مدتی بودکه در جست‌وجوی وقوف به‌بعضی ازمسایل بودم‌که درکتاب «الکرة والاسطوانه» ارشمیدس آمده است واین ازآن‌جهت بودکه به‌بعض مسایل عالی هندسه‌که درآن‌کتاب آمده است احتیاج داشتم. تا اینکه به‌نسخهٔ مشهوری از آن‌کتاب که توسط ثابت بن قره اصلاح شده دست یافتم و دیدم که در آن‌کتاب بعضی از مصادرات به‌علت اینکه ناقل آن کتاب به‌زبان عربی آنها را نفهمیده و نتوانسته ترجمه کند حذف شده است وگذشته از این نسخه‌ای‌که به‌دستم رسیده بود ناقص بود. تا آنجا که میسر بود آن را تصحیح کردم و به‌تحقیق مسایل مذکور در آن پرداختم. تا اینکه به‌آخر مقالهٔ دوم آن رسیدم و درآنجا چیزهایی یافتم‌که ارشمیدس با وجود آنکه بنای بعض مطالب را برآنها نهاده بود دربارهٔ آنها اهمال کرده بود و درآن حیران ماندم وبه‌تحصیل آن حریص‌ترشدم تااینکه‌به‌نسخهٔ کهنه‌ای از آن دست یافتم‌که درآن شرح اوطوقیوس عسقلانی[1] برمشکلات این کتاب که اسحاق‌بن حنین از روی بصیرت به‌عربی نقل کرده بود یافت می‌شد و علاوه بر این، نسخهٔ مذکور شامل متن ترجمهٔ اسحاق بن حنین از آغاز تا آخر شکل چهاردهم از مقالهٔ اول نیز بود و آنچه اوطوقیوس در اثنای شرح از متن کتاب آورده بود مطابق با این نسخه بود وچیزی را که در جست‌وجوی آن بودم در این دفتر یافتم و مصمم شدم که کتاب را با همان ترتیب تحریر کنم و معانی آن را خلاصه کردم و مصادرات آن را براساس اصول هندسی بیان کردم و مقدماتی را که محتاج الیه بود بر آن افزودم ومشکلات آن را از روی آنچه اوطوقیوس درشرح خود آورده بود یا درکتابهای دیگر از اهل این فن یافتم شرح دادم... ومقالهٔ ارشمیدس را در تکسیر دایره برآن افزودم.

کتاب «تحریرالکرةوالاسطوانه» دارای دومقاله و۹۸ شکل(= قضیه

۱- Eutocios ریاضی‌دان بیزانطینی‌که درحدود ۴۸۰میلادی متولدشد وآثار ارشمیدس و آپولونیوس را شرح کرد.

یا مسأله) است و در سال ۱۳۵۹ ه.ق درحیدرآباد دکن به‌چاپ رسیده است (طوسی: نه رساله ، رسالهٔ پنجم). از این تحریر نسخه‌های خطی متعدد موجود است[1]، که از آن جمله است چهار نسخه در مدرسهٔ عالی سپهسالار تهران[2] و یك نسخه درکتابخانهٔ مجلس[3].

برای کسب اطلاع از محتویات کتاب «الکرة والاسطوانه» رجوع کنید به‌کتاب «هیث H»، (ج ۲ صفحات ۳۴ تا ۵۰).

۱۶- تحریرالمقاله فی تکسیرالدایره - اصل این مقاله ازارشمیدس است. نصیرالدین طوسی آن را تحریر کرده و به‌پایان کتاب «تحریرالکرة والاسطوانه» افزوده است. موضوع این مقاله یافتن اندازهٔ تقریبی عدد π (پی) یعنی نسبت محیط دایره به‌قطر آن است. محتوی این مقاله رادرکتاب «هیث H» (ج ۲ ص ۵۰-۵۶) و یا درکتاب « هیث: آثار ارشمیدس» (ص ۹۱-۹۸) خواهید یافت.

نصیرالدین طوسی در پایان این تحریر مطلب جالب توجهی در بارهٔ روش محاسبهٔ عدد پی به‌وسیلهٔ منجمان افزوده است[4].

۱۷- تحریر کتاب مانالاوس فی‌الاشکال الکریه- این تحریر را گاهی «تحریراکر مانالاوس» نیز می‌نامند. نصیرالدین طوسی در مقدمهٔ این تحریر چنین نوشته‌است: «می‌خواستم کتابهایی راکه به«متوسطات» موسوم هستند یعنی کتابهایی را که باید بین کتاب «اصول اقلیدس» و کتاب «المجسطی» بطلمیوس تحصیل کرد تحریرکنم. چون به‌کتاب مانالاوس در اشکال کریه رسیدم نسخه‌های زیادی از آن به دستم آمد که با هم اختلاف داشتند و اصلاحاتی که از آن به‌عمل آمده بود بعضیها نادرست بود مانند اصلاح ماهانی (ابوعبدالله) واصلاح ابوالفضل احمدبن ابی‌سعد هروی و درایضاح مسایل کتاب حیران مانده بودم تا اینکه به‌اصلاح امیر منصور بن علی‌بن

۱- سزگین G_5، ص ۱۲۹-۱۳۰.
۲- فهرست سپهسالار، بخش سوم ص ۳۴۲.
۳- فهرست مجلس، ص ۱۱۵.
۴- طوسی: نه رساله، رسالهٔ پنجم. صفحات ۱۳۱-۱۳۳.

عراق (ابونصر عراق) رحمةالله علیه دست یافتم وآنچه را درجست‌وجوی آن بودم از روی آن برایم حاصل شد. پس کتاب را به‌قدر استطاعت خود تحریر کردم...»

خلاصهٔ کتاب «فی‌اشکال‌الکریه» (Sphaerica) را درکتاب «هیث H»، (ج ۲ ص ۲۶۱-۲۷۳) خواهید یافت.

«تحریر مانالاوس» در سال ۱۳۵۹ ه. ق در حیدرآباد دکن به‌چاپ رسیده (طوسی: نه رساله، رسالهٔ نهم) و نسخه‌های خطی متعدد از آن در دست است[1] که از آن جمله است دونسخه در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران[2] وهفت نسخه درکتابخانهٔ مدرسهٔ سپهسالار تهران[3] و دو نسخه در کتابخانهٔ مجلس (فهرست مجلس، ج ۱۹ ص ۱۱۴ و ۱۲۴).

۱۸- تحریرالمخروطات - یکی ازکتابهای مهم ریاضی یونانی کتاب مخروطات است‌که اصل آن از ابلونیوس (Apollonios) است‌که در نیمهٔ دوم سدهٔ سوم پیش از میلاد در اسکندریه می‌زیست[4].

اصل این‌کتاب در هشت مقاله (۳۸۷ شکل) بوده است‌که چهارمقالهٔ اول آن را هلال‌بن ابی هلال حمصی[5] و سه مقالهٔ دیگر را ثابت‌بن قره* به‌عربی ترجمه کردند . از مقالهٔ هشتم آن فقط چهار شکل اولش به‌عربی ترجمه شده است. نصیرالدین طوسی این‌کتاب را تحریر کرده و تحریر او هنوز به‌چاپ نرسیده ولی دونسخهٔ خطی ازآن موجود است[6].

برای کسب اطلاع از محتویات کتاب مخروطات ابلونیوس رجوع کنید به «هیث H»، ج ۲ صفحات ۱۳۳-۱۷۵.

۱- سزگین G_5، ص ۱۶۲ و ۱۶۳ (ش ۵).
۲- فهرست دانشگاه، ج ۱۵ ص ۲۰.
۳- فهرست سپهسالار، بخش سوم ص ۳۳۳.
۴- برای کسب اطلاع از احوال و آثارش مثلاً رجوع کنید به «سارتن I»، ج۱ ص ۱۷۳-۱۷۵.
۵- از اهل حمص (Emessa) واقع درسوریه بود و ترجمه‌هایی صحیح ولی فاقد فصاحت داشت. در حدود سال ۲۷۰ درگذشت.
۶- سزگین G_5، ص۱۴۱.

۱۹- تحریر کتاب‌المعطیات- اصل این کتاب را که درزبانهای اروپایی Data یعنی «معلومات» نامیده می‌شود اقلیدس در رابطه با کتاب «اصول» خود که مقالات اول تا ششم آن مربوط به هندسه مسطحه است نوشته و دارای نود وپنج شکل (یعنی قضیه یا مسئله) راجع به‌هندسهٔ مسطحه‌است. نخستین بار اسحاق بن حنین* آن را به عربی ترجمه کرد و ثابت‌بن قره* ترجمهٔ او را اصلاح نمود. بعداً خواجه نصیرطوسی از روی این ترجمه و اصلاح، آن را تحریرکرد.

ازاین تحریر نسخه‌های متعدد موجود است[1] که ازآن جمله است یك نسخه درکتابخانهٔ آستان رضوی[2] و یك نسخه درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران[3] به‌شمارهٔ ۲۴۳۲، علاوه‌براین در سال ۱۳۵۸ ه.ق درحیدرآباد دکن در ۴۴ صفحه به‌چاپ رسیده است (طوسی: هفت رسالهٔ، رساله اول).

برای کسب اطلاع از محتویات کتاب « المعطیت » رجوع کنید به «هیثH»، ج ۱ ص ۴۲۱-۴۲۵.

۲۰- تحریر کتاب‌الاکر- اصل این کتاب از ثاوذوسیوس[4] ریاضی‌دان ومهندس سدهٔ اول پیش از میلاد وموضوع آن هندسه درسطح کره است. این کتاب در سه مقاله است و پنجاه و نه شکل (یعنی قضیه یا مسئله) دارد. قسطابن لوقابعلبکی* تاشکل پنجم از مقالهٔ سوم وبقیهٔ آن راشخص دیگری به عربی ترجمه کرد و ثابت‌بن قره* همهٔ این ترجمه را اصلاح نمود و نصیرالدین طوسی ازنو آن را در سال ۶۵۱ تحریر کرد.

از این تحریر نسخه‌های خطی متعدد موجود است[5] که از آن جمله است سه نسخه درکتابخانه مرکزی دانشگاه تهران[6] و نه نسخه در مدرسه

۱- سزگین G_5، ص ۱۱۶.
۲- فهرست رضوی، ج ۳ فصل ۷ ص ۱۰ (ش ۳۰)/ج ۸ ص ۷۲.
۳- فهرست دانشگاه، ج ۹ ص ۱۱۰۰.
۴- Theodosios (رجوع کنید به«سارتن I»، ج ۱ ص ۲۱۱).
۵- سزگین G_5، ص ۱۵۵.
۶- فهرست دانشگاه، ج ۱۵ ص ۲۰.

سپهسالار[1] ویك نسخه درکتابخانه مجلس (فهرست مجلس، ج۱۹ ص۱۴۴). علاوه‌براین درسال ۱۳۵۸ه.ق درحیدرآباد دکن به‌چاپ رسیده‌است(طوسی: هفت رساله، رسالهٔ دوم).

ظاهراً ملامهدی فرزند ابی‌ذر نراقی متوفی به سال ۱۲۰۹ ه.ق ترجمه‌ای فارسی از «تحریرالاکر» به‌عمل آورده است[2].

سارتن این‌کتاب را درجزو کتابهای نجومی خواجه نصیر طبقه‌بندی کرده[3] در صورتی‌که مربوط به‌هندسه است.

برای‌کسب اطلاع ازمحتویات «کتاب‌الاکر» رجوع‌کنید به «هیثH» ج ۲ ص ۲۶۴ تا ۲۵۲.

۲۱- تحریرالکرة المتحرکه- اصل این‌کتاب ازاطولوقس[4]ریاضی‌دان سدهٔ چهارم پیش ازمیلاد است‌که معاصر بااقلیدس بوده. موضوع‌آن بررسی اوضاع دوایر مختلفی است‌که برسطح یك‌کره واقع‌اند و دارای دوازده شکل (= قضیه یا مسأله) است. ثابت‌بن قره* آن را به‌عربی ترجمه کرده بود و نصیرالدین طوسی آن را تحریر کرده است.

از این تحریر نسخه‌های خطی متعدد در دست است[5] که از آن جمله است دو نسخه در دانشگاه تهران[6] وپنج نسخه در مدرسهٔ سپهسالار[7] و یك نسخه درکتابخانهٔ آستان رضوی[8] ویك نسخه درکتابخانهٔ مجلس[9].

سارتن این کتاب را در جزو تحریرات نجومی نصیرالدین طوسی طبقه‌بندی کرده[10] وحال آنکه موضوع آن بررسی دوایری است که برسطح

۱- فهرست سپهسالار، بخش سوم ص ۳۳۱ به‌بعد.
۲- فهرست فارسی، ج ۱ ص ۱۳۷.
۳- سارتن I، ج ۲ ص ۱۰۰۸ (ش ۳۱).
۴- Autolycus of Pitane (رجوع‌کنید به «سارتن I» ج ۱ ص ۱۴۱).
۵- سزگین G_5، ص ۸۲.
۶- فهرست دانشگاه، ج ۱۵ ص ۲۰.
۷- فهرست سپهسالار، بخش سوم ص ۳۴۱.
۸- فهرست رضوی، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۱۱ (ش ۳۲).
۹- فهرست مجلس، ج ۱۱ ص ۱۶۸.
۱۰- سارتن I، ج ۲ ص ۱۰۰۸ (ش ۲۷)،

تمریناتی با روش استقراء

دربارهٔ $tg(n\theta)$

در این باره بعضی ازمسائل نامتعارف وجود داردکه برای هرکلاسی می‌تواند مفید باشد.

فرض‌کنید a_0 , a_1 , ... و b_0 , b_1 , b_2 , ... بصورت زیرتعریف شده باشد.

$$b_{n+1}=b_n-a_n\,tg\theta \text{ و } a_{n+1}=a_n+b_n tg\theta \text{ و } b_0=1 \text{ و } a_0=1 \quad (n\geqslant 0)$$

سپس باروش استقراء بطور جداگانه ثابت می‌کنم که:

$$tg(n\theta)=\frac{a_n}{b_n}$$

$$a_n^2+b_n^2=(1+tg^2\theta)^n$$

$$a_n=\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n\theta}\ ,\quad b_n=\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n\theta} \quad \text{و}$$

$$a_n=\binom{n}{1}t-\binom{n}{3}t^3+\binom{n}{5}t^5-\dots$$

$$b_n=\binom{n}{0}-\binom{n}{2}t^2+\binom{n}{4}t^4-\dots \quad \text{که} \quad (t=tg\theta)$$

کره واقع‌اند و البته مورد استعمال آن درنجوم است.

برای کسب اطلاع از محتویات کتاب «الکرةالمتحرکه» رجوع کنید به «هیث H»، ج ۱ ص ۳۴۸-۳۵۲.

تحریر کتابهای نجومی نصیرالدین

علاوه بر تحریر کتابهای ریاضی که ذکرش گذشت نصیرالدین طوسی تعدادی ازکتابهای نجومی یونانی را نیز تحریر کرده است‌که هفت جلد از آنها درجزو نه رساله وهفت رسالهٔ طوسی در حیدرآباد دکن به‌چاپ رسیده. درتمام حالات روابط به‌ازاء $n=0$ بدیهی‌است با فرض برقراری به‌ازاء n حکم‌را به‌ازاء $n+1$ بررسی می‌کنیم:

$$tg(n+1)\theta=\frac{tg\,n\theta+tg\theta}{1-tg\,n\theta\,tg\,\theta}=\frac{\dfrac{a_n}{b_n}+tg\,\theta}{1-\dfrac{a_n}{b_n}tg\theta}=$$

$$=\frac{a_n+b_n tg\,\theta}{b_n-a_n tg\,\theta}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

$$a_{n+1}^2+b_{n+1}^2=(a_n+b_n tg\theta)^2+(b_n+a_n tg\theta)^2=$$

$$=(a_n^2+b_n^2)(1+tg^2\theta)=(1+tg^2\theta)^{n+1}$$

$$a_{n+1}=\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n\theta}+\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\cos^{n+1}\theta}\ ,$$

$$b_{n+1}=\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n\theta}-\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos(n+1)\theta}{\cos^{n+1}\theta} \quad \text{و}$$

$$a_{n+1}=\binom{n}{1}t-\binom{n}{3}t^3+\binom{n}{5}t^5-\dots$$

$$+t\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{2}t^2+\binom{n}{4}t^4-\dots\right]$$

$$=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]t-\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right]t^3+$$

$$+\left[\binom{n}{4}+\binom{n}{5}\right]t^5-\dots$$

$$=\binom{n+1}{1}t-\binom{n+1}{1}t^3+\binom{n+1}{1}t^5-\dots$$

وهمانطور

$$b_{n+1}=\binom{n}{0}-\binom{n}{2}t^2+\binom{n}{4}t^4-\dots$$

$$-t\left[\binom{n}{1}t-\binom{n}{3}t^3+\binom{n}{5}t^5-\dots\right]$$

$$=\binom{n}{0}-\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]t^2+\left[\binom{n}{3}+\binom{n}{4}\right]t^4-\dots$$

$$=\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{2}t^2+\binom{n+1}{4}t^4-\dots$$

درحالی‌که هریك از استدلال‌های فوق برقرار می‌باشد، نتیجهٔ ترکیب آنها بین

$$\left(\binom{n}{1}t-\binom{n}{3}t^3+\binom{n}{5}t^5-\dots\right)^2+$$
$$+\left(\binom{n}{0}-\binom{n}{2}t^2+\binom{n}{4}t^4-\dots\right)^2=(1+t^2)^n$$

نه‌فقط بسیار جالب بوده بلکه به‌نظر نمی‌رسد که جانشین مناسبی برای استدلال استقرائی فوق باشد گرچه بدون‌شك بعضی ازخوانندگان فوراً به‌این نتیجه می‌رسند. بااستفاده از اعداد مختلط تمام‌نتایج فوق تا حدی واضح و روشن می‌شود. زیرا

$$tg(n\theta)=\frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)}=\frac{\mathrm{Im}(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))}{\mathrm{Re}(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))}$$
$$=\frac{\mathrm{Im}(\cos\theta+i\cos\theta)^n}{\mathrm{Re}(\cos\theta+i\sin\theta)^n}=\frac{\mathrm{Im}(1+itg\theta)^n}{\mathrm{Re}(1+itg\theta)^n}$$

با توجه به‌اینکه $\mathrm{Im}(1+itg\theta)^n=0$ و $\mathrm{Re}(1+itg\theta)^n=1$ خواهیم داشت

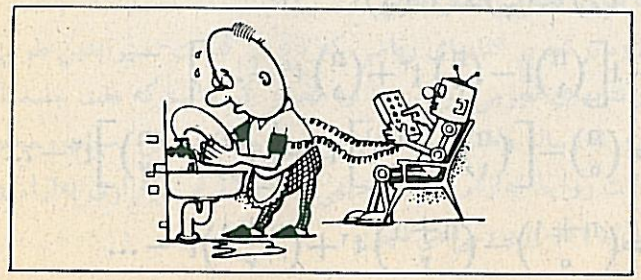
$$a_n=\mathrm{Im}(1+itg\theta)^n=\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n\theta}$$

$$b_n=\mathrm{Re}(1+itg\theta)^n=\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n\theta}$$

وتمام‌نتایج به‌همین‌ترتیب مشخص می‌شوند.

از مجلهٔ The Mathematical Gazette

ترجمه: ابراهیم عادل



نقش اشکال هندسی درصنایع چوب

محسن نیك‌بخت

چوب، از نخستین موادی است که انسان برای ساختن بسیاری از وسایل موردنیاز زندگی از آن بهره گرفته است. شاید درکنار حجاری، نجاری وکنده‌کاری ازصنایع چشمگیری بودکه هنرمندان وصنعتگران ـ ازتنهٔ درختان ـ اشیاء فراوان ساختند: اول برای رفع احتیاجات روزمره و سپس جهت تزیین، آثار هنری قابل‌توجهی بوجودآوردند وقطعات زمخت چوب را به‌ریزه‌کاری تمام در منظر بینندگان قرار دارند. کاربرد اشکال هندسی در صنایع چوب همواره موجب جلب‌نظر می‌گردد.

این صنایع مدیون هندسه و اشکال هندسی است، چراکه حتی برای ساختن یك درچوبی و شیشه‌خور وسط آن باید از قواعد و محاسبات ریاضی استفاده‌کرد. باید توجه داشت‌که‌کوچکترین شیء راکه یك هنرمند می‌سازد به‌شرط آن‌که از دقت هندسی به‌حدکافی استفاده کرده باشد شکیل‌تر و زیباتر خواهد شد.

نمونهٔ ساده وآشکار، پایه‌های خراطی‌شدهٔ میزاست. این‌پایه‌ها به‌خاطر آن‌که از شکل‌های فضایی هندسی درآن استفاده شده زیبائی خاصی به‌میز می‌دهند، همین‌طور اگربه‌یك عصای مزین بادقت نگاه‌کنیم متوجه می‌شویم که قسمتهای‌مختلف عصا ازشکلهای‌هندسی‌منظمی (دایره، بیضی، مستطیل، لوزی، مربع و ...) تشکیل شده و همین‌نظم زیبائی فوق‌العاده‌ای به‌عصا داده است.

صنایع چوب از قسمت‌های متنوعی تشکیل شده که در اینجا به‌شرح مختصری ازهرکدام پرداخته می‌شود.

روکش‌کاری:

از نظر معنی یعنی پوشاندن شیء به‌وسیلهٔ ورقه‌ای‌نازك. روکش‌کاری که به‌آن «گلبادکاری» هم می‌گویند مقدمه‌ای ازکار نجاری است برای‌کنار

هم‌گذشتن اشکال هندسی. دقت از مهم‌ترین عوامل است و هنرمند باید توجه کند که چگونه از این اشکال هندسی استفاده کند تا بهترین بهره را از آن‌ها بگیرد. شکل‌های مختلف گلبادکاری را می‌توان روی کمدها، میزها، بوفه‌ها و . . . مشاهده کرد. (شکل ۱).

(شکل ۱)

۲ـ منبت‌کاری:

منبت‌کاری از نظر لغوی به‌معنی نقش برجسته به‌شکل گل و گیاه و جز آن است که روی چوب ایجاد می‌کنند. کار پرمشغلهٔ منبت کاری اکثراً در قاب‌عکس‌ها و میزهای چوبی دیده می‌شود.

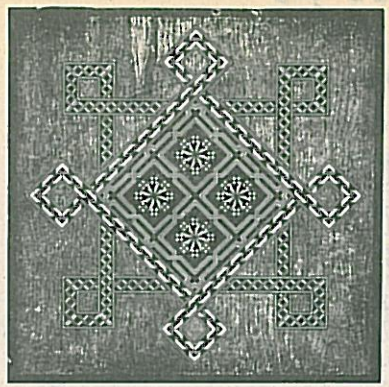
بعد از روکش‌کاری شکیل‌ترین و زیباترین کار با چوب منبت‌کاری است و بیشترین دقت و هنر را همراه خود دارد و در آن از اشکال هندسی استفاده شده است (شکل ۲).

(شکل ۲)

۳ـ ریزه‌کاری:

ترسیم دقیق اشکال و نقش‌های ظریف با ارائهٔ کوچک‌ترین اجزاءشیء دریک‌اثرهنری را ریزه‌کاری‌می گویند. ریزه‌کاری‌همان منبت‌کاری‌است بااین

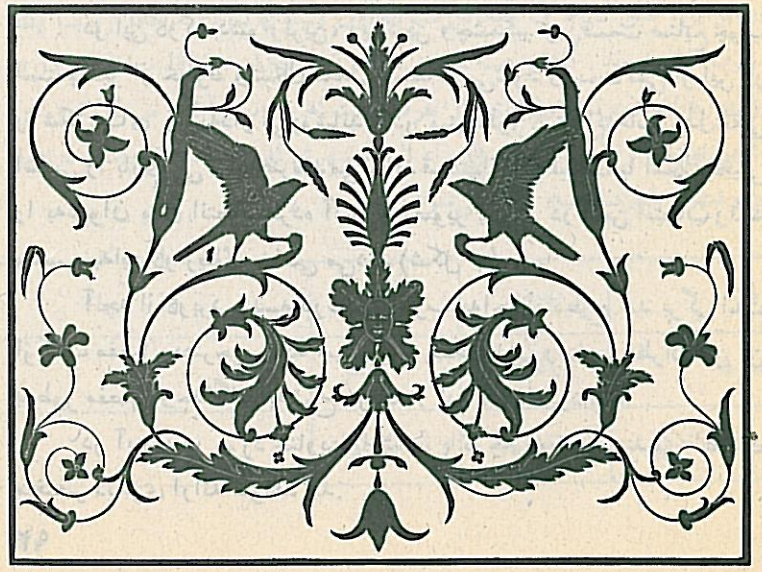
تفاوت که استاد از قطعه‌های رنگارنگ کوچک‌تر وسخت‌تر چوب استفاده می‌کند چون قسمت‌های سخت چوب خوش‌رنگ‌تر و شکل‌پذیرترند و شکنندگی کمتری نسبت به‌بقیهٔ اجزاء چوب دارند. درضمن قابل‌تذکراست که ریزه‌کاری مثل منبت‌کاری برجسته‌نیست بلکه کارآماده شدهٔ آن صاف و هم‌سطح می‌باشد. اصولاً در ریزه‌کاری از حاشیه‌ای که به‌وسیلهٔ چوب واکثراً ازمثلث‌ولوزی یا ازچوبهای غیرهمرنگ زمینه تشکیل شده استفاده می‌شود ودر داخل‌آن حاشیه شکل اصلی را پیاده می‌کنند (شکل ۳).



(شکل ۳)

۴ـ مینیاتورکاری:

از نظر معنی به‌تصویری کوچک‌که در آن ریزه‌کاری انجام شده باشد مینیاتور گویند. بعضی‌ها فکرمی‌کنندکه مینیاتورکاری فقط منحصر به‌نقاشی ←



(شکل ۴)

رمز وراز عددها

مرتضی جامی

*I*ـ هرعددی را می‌توان به‌صورت تفاضل دومربع کامل بعلاوهٔ تفاضل دومکعب کامل نوشت. اثبات این‌قضیه بلافاصله ازاتحاد زیر نتیجه‌می‌شود:

$$n=[(2n+1)^2-n^2]+[n^3-(n+1)^3]$$

*II*ـ الف ـ عدد یك‌را به بینهایت طریق می‌توان به‌صورت مجموع دومربع کامل منهای تفاضل دومربع کامل‌نوشت.

اثبات این‌قضیه بلافاصله از اتحاد زیر نتیجه می‌شود:

$$1=[(n+1)^2+(n-1)^2]-[(n^2+1)^2-(n^2)^2]$$

بـ ـ عدد یك را به بینهـایت طریق می‌توان به‌صورت مجموع چهار مربع کامل منهای مجموع چهار مربع کامل دیگر نوشت.

اثبات این‌قضیه بلافاصله از اتحاد زیر نتیجه می‌شود:

$$1=[(n^2)^2+(2m^2)^2+(m+1)^2+(m-1)^2]-$$
$$-[(m^2+1)^2+(n^2-m^2)^2+(m^2+nm)^2+$$
$$+(m^2-nm)^2]$$

است ولی این هنر در صنایع چوب رخنه‌کرده و به‌جـای قلم از ابزار تیز و بران وبه‌جای رنگ ازچوب‌های الوان استفاده می‌شود.

در این کارکه دشوارترین، زیباترین وچشمگیرترین‌قسمت صنایع چوب است بیشتر از خطوط واشکال منحنی استفاده می‌شود وقسمت‌کمی از این‌کار را شکل‌هـای زاویه‌دار می‌پوشاند. در مینیـاتورکاری انتخاب مدل نقش اساسی را بازی می‌کند وهنرمند می‌تواند قسمتهائی ازطبیعت یا اشکال تخیلی را به‌عنوان مدل انتخاب‌کرده آن‌را به‌تصویر بکشد. در ضمن انتخاب رنگ مناسب به‌این‌کار زیبائی خاصی می‌دهد (شکل ۴).

آنچه ازکاربرد هندسه درصنعت چوب به‌اجمال مطرح شد برگی است ازکتاب مفصل «هنرچوب» که امیدواریم متخصصان وصاحب‌نظران این فن به‌طور مفصل وجداگانه به‌شرح هریك از این هنرها بپردازند.

در آینده، در مورد عناوین یادشده، با توجه به‌نقوش هندسی، مطالب مختصر دیگری ارائه خواهد شد.

حل مسائله‌ها

یك‌مسألهٔ منطقی (صفحهٔ **۱۳** را ببینید)

بنابرشرط ۱، بهرام در باختران زندگی نمی‌کند (اگرچه همهٔ نزدیکان او ، ساکن این شهرند). بنـابرشرط ۳ ، آهنگر (که یکی از نزدیکان بهرام است)، درباختران زندگی می‌کند. بنابراین، بهرام،آهنگر نیست. تااین‌جا، می‌توان جدول‌را به‌این اندازه پرکرد:

نام	بهرام		
حرفه		آهنگر	
محل زندگی		باختران	

در ستون وسط، حرفه ومحل زندگی ، بـا یك حرف‌آغاز نمی‌شوند. بنابراین، طبق شرط ۲، باید در ستون اول وستون سوم، هرسه‌واژه بـا یك حرف‌آغاز شوند. از این‌جـا نتیجه می‌شودکه بهرام ، حرفهٔ بـاغبانی دارد (زیرا «باغبان» تنها واژه‌ای از حرفه‌هاست‌که با «ب» آغاز می‌شود) و در شهر بوشهر زندگی می‌کند (زیرا، از دوشهری‌که باقی مـانده است ، تنها «بوشهر» باحرف «ب» آغاز می‌شود):

نام	بهرام		
حرفه	باغبان	آهنگر	
محل زندگی	بوشهر	باختران	

از شهرها، تنها «آمل» برای ستون سوم باقی‌مانده است . بنابراین، هرسه واژهٔ ستون سوم، باید با حرف «آ» آغاز شوند. تنها یك‌امکان برای پرکردن ستون سوم وجود دارد:

نام	بهرام		آرش
حرفه	باغبان	آهنگر	آموزگار
محل زندگی	بوشهر	باختران	آمل

تنها یك‌خانهٔ آزاد باقی مانده است که باید بانام فرد باقی‌مانده، یعنی «برزو» پرشود. به‌این ترتیب، مسأله، یك‌جواب منحصر دارد:

نام	بهرام	برزو	آرش
حرفه	باغبان	آهنگر	آموزگار
محل زندگی	بوشهر	باختران	آمل

با تحقیق وبه‌سادگی روشن می‌شودکه، این جواب، با همهٔ شرطهای مسأله سازگار است.

رمز و راز عددها (صفحهٔ **۲۹** را ببینید)

اگر عدد پنج رقمی $\overline{ABCDE}$ را a فرض کنیم ، بنا بر صورت مسأله، باید a^2-a، یعنی $a(a-1)$ به‌پنج‌صفر ختم شده‌باشد، یعنی بر $2^5\times 5^5$ بخش‌پذیرباشد. چون a و $a-1$ نسبت به‌هم اول‌اند، بنابراین، یکی ازآن‌ها بر $5^5=3125$ ودیگری بر $2^5=32$ بخش‌پذیر خواهد بود.

ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که a بر ۳۱۲۵ و $a-1$ بر ۳۲ بخش‌پذیر باشند. از صورت مسأله پیداست که $B=0$. عددهای $\overline{A0CDE}$

و $\overline{A0000}$ هردو بر ۶۲۵ بخش‌پذیرند، بنابراین تفاضل‌آن‌ها هم بر ۶۲۵ بخش‌پذیر خواهد بود وداریم:

$$\overline{CDE}=625$$

عدد $\overline{A0625}$ برابر است با $10000A+625$، که اگر بر ۶۲۵ تقسیم‌شود، خارج‌قسمتی برابر $16A+1$ می‌دهد. برای این‌که $16A+1$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باید A برابر ۴ یا ۹ بشود . به‌ازای $A=4$ به‌عدد ۴۰۶۲۵ می‌رسیم که با شرط مسأله سازگار نیست ، زیرا ۴۰۶۲۴ بر ۳۲ بخش‌پذیر نیست. به‌ازای $A=9$، عدد۹۰۶۲۵ به‌دست می‌آیدکه‌باشرطهای مسأله سازگار است.

حالت‌دوم‌را هم، می‌توان به‌همین‌ترتیب بررسی‌کردکه منجر به‌جواب جدیدی نمی‌شود.

آیا درس ریاضی خودرا می‌دانید؟ (صفحه **۳۱** را ببینید).

۱. $t=\sqrt{2}$ بگیرید، به‌معادلهٔ‌درجهٔ‌دوم زیر، نسبت به t، می‌رسید:

$$t^2-x^2t+(x^3-x^2)=0$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$t_1=x,\ t_2=x^2-x$$

اگر $t=\sqrt{2}$ فرض‌کنید، سه‌ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم اصلی به‌دست خواهدآمد :

$$x_1=\sqrt{2},\ x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}$$

۲. معادلهٔ مفروض را، می‌توان چنین نوشت:

$$x^3+\left(1-\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

که اگر $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ بگیریم، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$x^3-1(1-t^2)x+t=0$$

و یا

$$xt^2-t-(x^3+x)=0$$

این‌معادلهٔ درجه دوم، نسبت به t، دوجواب دارد:

$$t_1=-x,\quad t_2=\frac{x^2+1}{x}$$

در نتیجه، معادلهٔ مفروض، با قراردادن $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، به‌دو معادله زیر ، که هم‌ارزآن است، تبدیل می‌شود :

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 2x^2-\sqrt{2}x+2=0$$

معادلهٔ درجه‌دوم اخیر، ریشه‌های موهومی‌دارد، بنابراین، تنها ریشهٔ‌حقیقی معادله، عبارت است از $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

۳. $t=\sqrt{3}$ بگیرید، به‌معادلهٔ درجه‌دوم‌زیر، نسبت به t، می‌رسید:

$$t^2-(2x+1)t+(x^4+x)=0$$

ادامهٔ کار روشن است.

پاسخ :

$$\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2},\quad \frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{3}+1}}{2}$$

۴. اگر $t=3$ بگیرید، به‌این‌معادله می‌رسید، که نسبت به t ازدرجهٔ دوم است:

$$t^2-(2x+1)t+(x^2-\sqrt{x})=0$$

که ازآن‌جا، به‌دومعادلهٔ زیر، هم‌ارز معادلهٔ اصلی، می‌رسیم:

$$x-\sqrt{x}-3=0\ ,\quad x+\sqrt{x}-2=0$$

(دوباره به‌جای t، عدد ۳ را گذاشتیم).

فراموش نکنیدکه باید، جواب‌های حاصل، موردآزمایش قرارگیرند. معادلهٔ اصلی، تنها یك‌جواب دارد.

پاسخ: $x=\frac{7+\sqrt{31}}{2}$

۵. بافرض $t=\sqrt{5}$، بعد ازتبدیل‌های لازم، به‌این‌معادلهٔ درجه‌دوم،

نسبت به t می‌رسیم:

$$t^2-(2x^2+1)t+(x^4-x)=0$$

پاسخ: $\frac{1+\sqrt{4\sqrt{5}+1}}{2}$.

۶. راهنمائی: $t=\sin x$ بگیرید.

پاسخ: $k\pi$ و $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. (k و n، عددهای درست‌دلخواهی هستند.)

مسأله‌های مسابقه‌ای (صفحهٔ ۳۶ را ببینید)

۱. بیشتر راه حل‌های این‌مسأله، براساس ویژگی‌های ماکزیمم و می‌نیمم در چهارضلعی ABCD به‌دست می‌آیدکه مساحت آن ، S، برابر ۳۲ سانتی‌متر مربع وخط‌شکستهٔ ABDC ازآن ، l ، برابر ۱۶ سانتی متر باشد. فرض می‌کنیم:

$$|AB|=a,\quad |BD|=b,\quad |DC|=C$$

چون داریم: $S=S_{ABD}+S_{BCD}$، بنابراین

$$32\leqslant\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc \qquad (1)$$

از طرف دیگر $a+b+c=16$، بنابراین

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}b(16-b)=32-\frac{1}{2}(8-b)^2\leqslant 32$$

یعنی

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}bc\leqslant 32 \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

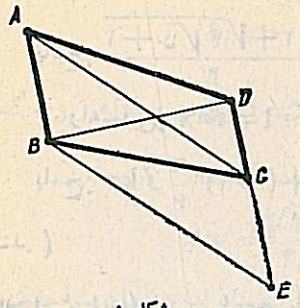
$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc=32$$

یعنی

$$\widehat{ABD}=\widehat{BDC}=90^\circ$$

وچون $۳۲ = (۸-b)^۲ - ۳۲$، بنابراین $b = ۸$.

اکنون به سادگی می‌توان متوجه‌شدکه، طول‌قطر AD، بستگی به‌رابطهٔ بین‌طول‌ضلع‌های AB وCD ندارد. درواقع، اگر DC را به‌اندازهٔ $|CE| = |AB|$ امتداد دهیم (شکل ۱)، متوازی‌الاضلاع ABEC به‌دست می‌آید وداریم:



شکل ۱

$|BE| = |AC|$. ولی چون‌داریم:

$$|DE| = a + c = ۱۶ - b = ۸ \text{ و } |BD| = ۸$$

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$|BE| = ۸\sqrt{۲}$$

طول قطر AC، تنها برابر $۸\sqrt{۲}$ می‌تواند باشد.

۲. اگر فرض‌کنیم $x = ۲\cos\alpha$، داریم:

$$P_۱(x) = ۲\cos ۲\alpha,\ P_۲(x) = ۲\cos ۲^۲\alpha, \ldots$$
$$\ldots,\ P_n(x) = ۲\cos ۲^n\alpha$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$۲\cos ۲^n\alpha = ۲\cos\alpha \Rightarrow \sin\frac{(۲^n-۱)\alpha}{۲}.\sin\frac{(۲^n+۱)\alpha}{۲} = ۰$$

که ریشه‌های آن چنین‌اند:

$$\alpha_۱ = \frac{۲k\pi}{۲^n-۱},\ \alpha_۲ = \frac{۲l\pi}{۲^n+۱}$$

اکنون می‌توان ۲^n ریشهٔ مختلف معادله‌را به‌دست‌آورد. این‌ریشه‌ها چنین‌اند:

$$x_۱ = ۲\cos\frac{۲k\pi}{۲^n-۱},\ k = ۰, ۱, \ldots, ۲^{n-۱}-۱;$$

$$x_۲ = ۲\cos\frac{۲l\pi}{۲^n+۱},\ l = ۱, ۲, \ldots, ۲^{n-۱}$$

به‌ازای این‌مقدارهای k و l ، کمان‌کسینوس‌ها ، بین ۰ و π قرار می‌گیرد. تابع $x = \cos\alpha$، در این فاصله، یکنوا ونزولی است و، بنابراین، همهٔ مقدارهای x ، در هررشته ازجواب‌ها، مختلف‌اند. ثابت می‌کنیم، مقدارهای‌حاصل، دردورشته جواب‌هم، بایکدیگر فرق‌دارند. اگرفرض‌کنیم:

$$\frac{۲k\pi}{۲^n-۱} = \frac{۲l\pi}{۲^n+۱}$$

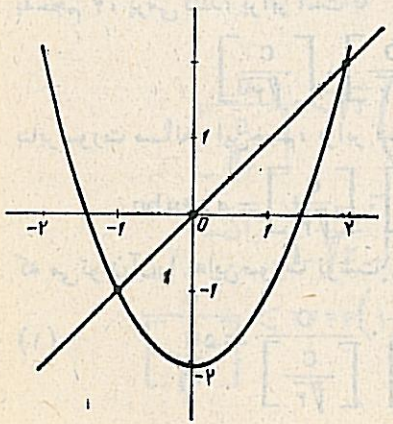
باید داشته‌باشیم:

$$k(۲^n+۱) = l(۲^n-۱)$$

ولی، عددهای $۲^n-۱$ و $۲^n+۱$ نسبت به‌هم اول‌اند ، زیرا عددهائی فرد هستند واگرمقسوم‌علیه مشترکی داشته‌باشند، بایدمقسوم‌علیه مشترک‌تفاضل آن‌ها،یعنی۲هم باشد. بنابراین، باید k بر $۲^n-۱$ و l بر $۲^n+۱$ بخش‌پذیر باشند،که با مقدارهای انتخابی k و l متناقض است .

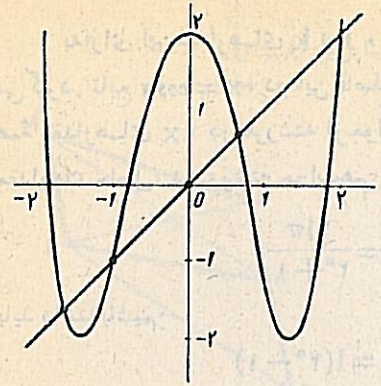
به‌این‌ترتیب، ۲^n ریشهٔ‌حقیقی‌برای‌معادلهٔ $P_n(x) = x$ به‌دست‌می‌آید. ازطرف دیگر، به‌سادگی، ثابت می‌شودکه چندجمله‌ای $P_n(x) - x$، به‌ازای $n \geqslant ۱$، از درجهٔ ۲^n است، یعنی همهٔ ریشه‌های معادله، عددهایی حقیقی ومختلف‌اند.

راه‌حل دوم: وقتی که x ، فاصلهٔ [۲ ، ۲ −] را طی می‌کند ، $P_۱(x)$ همین‌فاصله‌را دوبارطی‌می‌کند: ابتدا یکنوای‌نزولی و،سپس،یکنوای صعودی (شکل ۲) . از این‌جا نتیجه می‌شودکه، وقتی x از ۲ − تا ۲ تغییر می‌کند ، $P_۲(x)$، چهاربار پاره‌خط [۲ ، ۲ −] را می‌پیماید (شکل ۳) . اگر همین استدلال را ادامه‌دهیم،معلوم‌می‌شودکه $P_n(x)$، پاره‌خط [۲ ، ۲ −] را ۲^n بار طی می‌کند (و ضمناً، هربار، به‌طور یکنوا).



شکل ۲

از این‌جا، می‌توان نتیجه گرفت که، نمودارهای دوتابع $y=P_n(x)$ و $y=x$، درست در 2^n نقطهٔ مختلف یکدیگررا قطع می‌کنند (این نقطه‌ها، روی شکل‌های ۲ و ۳، نشان داده شده است). اگر این استدلال را هم اضافه کنیم که، معادلهٔ $P_n(x)=x$، از درجهٔ 2^n است، حل کامل مسأله به‌دست می‌آید.



شکل ۳

۳. این‌شرط که جعبه‌را می‌توان با مکعب‌های به‌ضلع واحد پر کرد، به‌این معناست که طول یال‌های جعبه، عددهایی درست‌اند. این طول‌ها را، a، b و c می‌نامیم وفرض می‌کنیم: $a\leqslant b\leqslant c$.

چون، روی پاره‌خط به‌طول n، بیش از $\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$ پاره‌خط به‌طول $\sqrt[3]{2}$ نمی‌توان جاداد، بنابراین، حداکثر حجمی از جعبه راکه مکعب‌های به‌حجم ۲، پرمی‌کنند، برابر است با

$$\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\cdot\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\cdot\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]$$

بنابرصورت مسأله، این‌حجم، برابر است با ۴۰٪ حجم‌جعبه، یعنی

$$2\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\cdot\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\cdot\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]=0/4abc$$

که می‌توان‌آن‌را به‌این‌صورت نوشت:

$$\frac{a}{\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]}\cdot\frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]}\cdot\frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]}=5 \qquad (1)$$

ببینیم، وقتی‌که n تغییرکند، مقدارهای $\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$ و $\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}$

چه‌تغییری می‌کنند (جدول را ببینید).

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$	۰	۱	۲	۳	۳	۴	۵	۶	۷	۷
$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}$	—	۲	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$

ثابت می‌کنیم‌که، به‌ازای $n\geqslant 7$ داریم:

$$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}<\frac{3}{2}$$

به‌ازای $n=7$، این‌نابرابری مستقیماً، قابل‌تحقیق است. ازرابطهٔ روشن

$$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]>\frac{n}{\sqrt[3]{2}}-1$$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}<\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}\right)$$

ولی به‌ازای $n\geqslant 8$ داریم: $\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]\geqslant 6$. ازآن‌جا

$$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}<1/26\left(1+\frac{1}{6}\right)=1/47<1/5$$

حکم ثابت شد.

از جدول بالا و حکمی‌که هم‌اکنون ثابت‌کردیم، نتیجه می‌شودکه،

برای $n>1$ حداکثر مقدار $\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[n]{2}}\right]}$ برابر است با ۲ که به‌ازای $n=2$ به‌دست می‌آید؛ مقدار بعدی برابر است با $\frac{5}{3}$ (به‌ازای $n=5$). بقیهٔ مقدارها از $\frac{3}{2}$ تجاوز نمی‌کنند.

به‌عددهای a ، b و c برمی‌گردیم . روشن است که $a\geqslant 2$. ثابت می‌کنیم که $a=2$. در واقع، برای $a>2$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{a}{\left[\frac{a}{\sqrt[a]{2}}\right]}\cdot\frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[b]{2}}\right]}\cdot\frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[c]{2}}\right]}\leqslant\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{125}{27}<5$$

که رابطهٔ (۱) را نقض می‌کند . بنابراین $a=2$. در این‌صورت ، خواهیم داشت:

$$\frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[b]{2}}\right]}\cdot\frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[c]{2}}\right]}=\frac{5}{2}$$

دوحالت ممکن است: $\frac{5}{2}=2\times\frac{5}{4}$ یا $\frac{5}{2}=\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}$ $\left(\text{یا } \frac{5}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}\right)$ ،

زیرا اگر b و c، هردو، از $\frac{3}{2}$ تجاوز نکنند، به‌دست می‌آید:

$$\frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[b]{2}}\right]}\cdot\frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[c]{2}}\right]}\leqslant\frac{9}{4}<\frac{5}{2}$$

ثابت می‌کنیم که، حالت اول، ممکن نیست. درواقع، اگرداشته باشیم:

$\frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[c]{2}}\right]}=\frac{5}{4}$ به‌دست می‌آید $4c=5\left[\frac{c}{\sqrt[c]{2}}\right]$، ازآنجا

$$64c^3=125\left[\frac{c}{\sqrt[c]{2}}\right]^3\leqslant 1250\frac{c^3}{2}=62/5c^3$$

که ممکن نیست. حالت دوم، به‌ازای $b=5$ ، $c=6$ یا به‌ازای $b=3$، $c=5$ تحقق می‌یابد. به‌این‌ترتیب، جواب مسأله عبارت است از جعبه‌ای با اندازه‌های (۵ ، ۳ ، ۲) یا (۶ ، ۵ ، ۲).

۴. فرض کنیم، حداکثر حاصل‌ضرب موقعی به‌دست می‌آید که ۱۹۷۶ را، به‌صورت

$$1976=a_1+a_2+\dots+a_n$$

نوشته باشیم . ثابت می‌کنیم که، همهٔ a_iها، از ۱ بزرگترند. در واقع، اگر یکی ازآن‌ها برابر ۱ باشد، می‌توان آن‌را با یکی ازجمله‌های دیگرجمع کرد وبه‌صورت یك‌جمله درآورد و، در نتیجه ، به‌حاصلضرب بزرگتری رسید، زیرا $1+a>1\times a$. از طرف دیگر ، هرجمله باید از ۵ کوچکتر باشد، زیرا، برای $a\geqslant 5$ داریم:

$$a_k<3(a_k-3)$$

یعنی، اگر به‌جای جملهٔ a_k ، دوجملهٔ ۳ و a_k-3 را درنظر بگیریم ، به‌حاصل‌ضرب بیشتری می‌رسیم . بالاخره ، یادآور می‌شویم که، اگر ۴ را به‌مجموع $2+2$ تبدیل کنیم ، در حاصل‌ضرب تغییری حاصل نمی‌شود . به‌این‌ترتیب، می‌توان همهٔ a_kها را ۲ و ۳ درنظر گرفت. می‌توان ثابت کرد که، تعداد جمله‌های برابر ۲، ازدوتا تجاوز نمی‌کند. درواقع

$$2+2+2=3+3 \text{ و } 2\times2\times2<3\times3$$

وچون داریم: $1976=658\times3+2$، حداکثر حاصل‌ضرب، برابر است با 2×3^{658} .

۵. این‌مسأله، که درظاهر خود مسأله‌ای جبری است، خصلتی‌ترکیبی دارد وبراساس «اصل دیریکله» حل می‌شود:

«اگر در n جعبه m سیب قرار داده باشیم، و m بزرگتر از n باشد، دست‌کم در یکی ازجعبه‌ها، لااقل دوسیب وجود دارد».

ابتدا ببینیم ، چندانتخاب برای عددهای درست $(y_1, y_2, \dots, y_q)$ وجوددارد، به‌نحوی که، برای‌همهٔ مقدارهای $i\in\{1,2,\dots,q\}$، داشته باشیم $0\leqslant y_i\leqslant q$. چون هرعدد می‌تواند $q+1$ مقداررا قبول کند وتعدادعددها برابر است با q، بنابراین، $(q+1)^q$ انتخاب وجوددارد. اکنون انتخاب

عددهـای $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ را در نظر می‌گیریم ، کـه در آن ، $b_j = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jq}y_q$ وتعداداین گونه انتخاب‌های مختلف را، به‌ازای $0 \leqslant y_i \leqslant q$، محاسبه می‌کنیم.

فرض‌کنیم r_j، تعداد $(+1)$ها دربین عددهای a_{ij} در j امین معادله باشد. در این‌صورت، تعداد (-1)ها در بین آن‌ها از $q - r_j$ بیشترنخواهد بود. بنابراین $(r_j - q)q \leqslant b_j \leqslant r_j q$ و هر b_j می‌تواند، حداکثر q^2+1 مقدار مختلف‌اختیار کند، درنتیجه،تعداد این گونه‌انتخاب‌ها از $(q^2+1)^p$، بیشتر نمی‌شود. ولی

$$(q+1)^q = (2p+1)^{2p} = (4p^2+4p+1)^p >$$
$$> (4p^2+1)^p = (q^2+1)^p$$

بنابراین، هرکدام ازانتخاب‌های

$$(y_1, y_2, \ldots, y_q) \text{ و } (y'_1, y'_2, \ldots, y'_q)$$

متناظر است با انتخاب یکی از عددهای

$$(b_1, b_2, \ldots, b_p)$$

(و این، همان «اصل دیریکله» است).

به‌عبارت دیگر، برابری زیر برقرار است:

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{iq}y_q = a_{i1}y'_1 + a_{i2}y'_2 + \ldots +$$
$$+ a_{iq}y'_q = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

اکنون، انتخابی از عددهای $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ در نظر می‌گیریم، که درآن ، $x_j = y_j - y'_j$ روشن است که این انتخاب، با شرطهای دستگاه متجـانس سازگار است؛ همهٔ عددهای x_j برابر صفر نیستند، علاوه برآن، همهٔ x_jها در نابرابری $|x_j| \leqslant q$ صدق می‌کنند.

۶. قانون ساختن دنباله‌را، می‌توان به‌سادگی به‌دست‌آورد:

$$u_0 = 2 = 1 + 1 = 2^{\frac{2^0-(-1)^0}{3}} + 2^{\frac{-[2^0-(-1)^0]}{3}}$$

و

$$u_1 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2^{\frac{2^1-(-1)^1}{3}} + 2^{-\frac{2^1-(-1)^1}{3}}$$

و

$$u_2 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2^{\frac{2^2-(-1)^2}{3}} + 2^{-\frac{2^2-(-1)^2}{3}}$$

و

$$u_3 = \frac{65}{8} = 8 + \frac{1}{8} = 2^{\frac{2^3-(-1)^3}{3}} + 2^{-\frac{2^3-(-1)^3}{3}}$$

وبنابراین، می‌توان حدس‌زدکه، برای هرمقدار n، داریم:

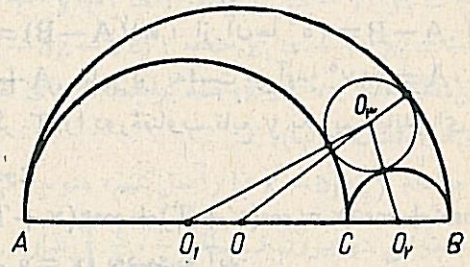
$$u^n = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$

درستی این‌حدس را می‌توان، به‌کمك استقرای ریاضی، ثابت‌کرد.

چند مسألهٔ گوناگون

۱. O، O_1 و O_2 را، به‌ترتیب، مرکزنیم‌دایره‌های به‌قطرهای AB، AC و CB می‌گیریم (شکل ۴). اگرازقضیهٔ‌ستووارت درمثلث $O_1O_2O_3$ استفاده‌کنیم ، داریم:

$$O_3O^2 \cdot O_1O_2 = O_1O_3^2 \cdot OO_2 + O_2O_3^2 \cdot OO_1 -$$
$$- OO_1 \cdot OO_2 \cdot O_1O_2$$



شکل ۴

از طرف دیگر داریم:

$$O_3O = x + y - R, \quad O_1O_2 = x + y, \quad O_1O_3 = x + R,$$
$$O_2O_3 = y + R$$

بنابراین

$$(x + y - R)^2(x + y) = (x + R)^2 x +$$

$$+(y+R)^2y-xy(x+y)$$

وازآن‌جا

$$R=\frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2}$$

می‌دانیم که: $x^2+y^2\geqslant 2xy$. در نتیجه

$$R\leqslant\frac{xy(x+y)}{3xy}=\frac{x+y}{3}$$

وبالاخره

$$R\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{|AB|}{2};\ R\leqslant\frac{1}{6}|AB|$$

۲. از رابطهٔ $a^2-b^2=2cR$ ، با توجه به‌قضیهٔ سینوس‌ها به‌دست می‌آید:

$$\sin^2A-\sin^2B=\sin C$$

ازطرف دیگر

$$\sin^2A-\sin^2B=\sin(A+B).\sin(A-B)=$$
$$=\sin C.\ \sin(A-B)$$

بنابراین: $\sin C.\ \sin(A-B)=\sin C$. ولی $\sin C\neq 0$ ، در نتیجه $\sin(A-B)=1$ ؛ از آن‌جا $A-B=90^\circ$. از طرف دیگر: $A+B=144^\circ$. بنابراین به‌دست می‌آید: $A=117^\circ$، $B=27^\circ$.

۳. اگر T را دورهٔ تناوب تابع y بگیریم، بایدبرای هرمقداردلخواه x داشته‌باشیم:

$$\cos x+\cos ax=\cos(x+T)+\cos a(x+T)$$

اگرفرض کنیم $x=0$، به‌دست‌می‌آید:

$$\cos T+\cos aT=2$$

وازآن‌جا: $\cos T=\cos aT=1$ و

$$\begin{cases}T=2k\pi\\ aT=2l\pi\end{cases}$$

بنابراین $a=\frac{l}{k}$، عددی است گویا.

۴. فرض می‌کنیم:

$$x^2-x-5=k$$
$$y^2+3y+3=k$$
$$-z^2-5z-5=k$$

روشن است که، اگر k وجود داشته‌باشد، معادلهٔ

$$x^2-x-(k+5)=0$$

دارای ریشه‌های حقیقی است وباید داشته‌باشیم:

$$\Delta_1=1+4(k+5)\geqslant 0\Longrightarrow k\geqslant-\frac{21}{4}$$

به‌همین‌ترتیب، ازدو معادلهٔ دیگر به‌دست می‌آید:

$$k\geqslant\frac{3}{4},\ k\leqslant\frac{5}{4}$$

بنابراین، تنها $k=1$ ممکن است (ازآن‌جاکه x، y و z، عددهایی‌درست‌اند، k هم عددی درست است). به‌این‌ترتیب، می‌توان مقدارهای x ، y و z را محاسبه‌کرد:

$$x^2-x-5=1\Longrightarrow x_1=3,\ x_2=-2;$$
$$y^3+3y+3=1\Longrightarrow y_1=-1,\ y_2=-2;$$
$$-z^2-5z-5=1\Longrightarrow z_1=-2,\ z_2=-3$$

به‌ازای این‌مقدارهای x، y و z، همهٔ سه‌جمله‌ای‌های مفروض،برابر ۱ می‌شوند (روی‌هم، هشت‌جواب).

۵. اگر نامعادلهٔ $|6x-5|\leqslant 4$ را حل‌کنیم، متوجه می‌شویم که، معادلهٔ مفروض ، جوابی در بیرون فاصلهٔ $\left[\frac{1}{6},\frac{3}{2}\right]$ ندارد . در فاصلهٔ $\left[\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right]$ ، تابع $x\to|6x-5|$ یا $x'\to-6x+5$ نزولی و تابع $x\to 4\sin\frac{\pi x}{3}$ صعودی است، یعنی معادلهٔ مفروض، دراین‌فاصله، بیش‌از یك جواب ندارد. با آزمایش، معلوم می‌شود که ، $\frac{1}{2}$، تنها جواب معادله ، دراین‌فاصله است .

معادلهٔ مفروض، در فاصلهٔ $\left[\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right]$ ، دارای جواب $\frac{3}{2}$ است.

برای این‌که ثابت کنیم، جواب دیگری، در این فاصله، وجود ندارد، تفاضل $x \to 6x - 5 - 4\sin\frac{\pi x}{3}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق تابع $6x - 5 - 4\sin\frac{\pi x}{3}$ چنین است:

$$6 - \frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi x}{3}$$

که به‌ازای همهٔ مقدارهای x مثبت است و، بنابراین، درفاصلهٔ $\left[\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right]$ صعودی است. یعنی $\frac{3}{2}$، تنها نقطه‌ای است که، درآن‌جا، برابر صفر می‌شود.

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، تنها دوریشه دارد: $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$.

۶. به‌ترتیب داریم:

$$288! = (1 \times \ldots \times 16)(17 \times \ldots \times 32)(32 \times \ldots \times 48) \times$$
$$\times \ldots \times (273 \times \ldots \times 288) =$$
$$= 16!A_{32}^{16}A_{48}^{16}\ldots A_{288}^{16} = (16!)^{18}C_{32}^{16}C_{48}^{16}\ldots C_{288}^{16}$$

بخش دوم مسأله هم، به‌همین‌ترتیب، ثابت می‌شود.

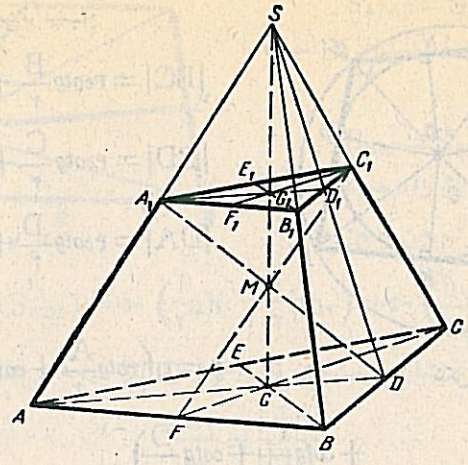
۷. G و G_1 را، به‌ترتیب، مرکزثقل‌های دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ می‌گیریم: AD، BE، CF و A_1D_1 ، B_1E_1 ، C_1F_1 ، میانه‌های این‌دو مثلث‌اند (شکل ۵).

از ترکیب تجانس‌های $H_G^{-\frac{1}{2}}OH_S^k$، که در آن $k = \overrightarrow{SA} : \overrightarrow{SA_1}$ $(k > 0)$ ، تجانس $H_M^{-\frac{1}{2}k}$ به‌دست می‌آید که مرکزآن، M، روی خط راست GS است. برای $H_M^{-\frac{k}{2}} = H_G^{-\frac{1}{2}} H_S^k$ داریم:

$$A_1 \to D;\ B_1 \to E;\ G_1 \to F$$

بنابراین

$$(A_1D) \cap (B_1E) \cap (C_1F) = M$$



شکل ۵

ولی‌چون A_1D روی‌صفحهٔ BCA_1، B_1E روی صفحهٔ ACE_1 و C_1F روی صفحهٔ ABC_1 است ، بنابراین ، M ، همان محل برخورد این صفحه‌هاست.

به‌همین‌ترتیب، با بررسی تجانس $H_G^{-\frac{1}{2}} oH_S^{\frac{1}{k}} = H_N^{-\frac{1}{2k}}$ ، معلوم می‌شودکه N، نقطهٔ برخورد صفحه‌های A_1B_1C، B_1C_1A و C_1A_1B ، روی خط‌راست SG_1 واقع است.

ولی‌نقطه‌های S، G و G_1 روی‌یک‌خط‌راست‌اند، زیرا $H_S^k(G_1) = G$.

بنابراین، نقطه‌های M و N هم، متعلق به‌همان خط راست‌اند.

۸. دایرهٔ ω به‌مرکز O_1 وشعاع r را، محاط درچهارضلعی $ABCD$ می‌گیریم (شکل ۶) . روشن است‌که ، مرکز این‌دایره ، در محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی این‌چهار ضلعی واقع است. شعاع‌های O_1K، O_1M، O_1N و O_1P را، که ازنقطه‌های تماس می‌گذرند، رسم می‌کنیم. روشن است‌که

$$S = pr \qquad (1)$$

که درآن:

$$2p = |AB| + |BC| + |CD| + |DA|.$$ ولی

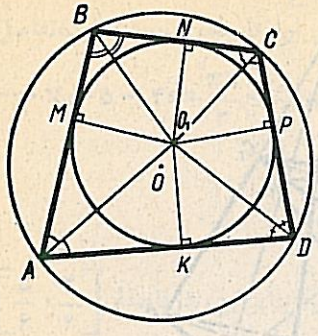
$$|AB| = |AM| + |MB| = r\,cotg\frac{A}{2} + r\,cotg\frac{B}{2}$$

به‌همین‌ترتیب:

$$|BC| = r\,cotg\frac{B}{2} + r\,cotg\frac{C}{2},$$

$$|CD| = r\,cotg\frac{C}{2} + r\,cotg\frac{D}{2},$$

$$|DA| = r\,cotg\frac{D}{2} + r\,cotg\frac{A}{2}$$



شکل ۶

بنابراین

$$r = p\left(cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} + cotg\frac{D}{2}\right)^{-1} \qquad (۲)$$

ازآن‌جاکه چهارضلعی قابل‌محاط دریك دایره است، بنابراین

$$A = 180^\circ - C,\quad B = 180^\circ - D$$

وبنابراین

$$cotg\frac{A}{2} = tg\frac{C}{2},\quad cotg\frac{B}{2} = tg\frac{D}{2},$$

$$cotg\frac{C}{2} = tg\frac{A}{2},\quad cotg\frac{D}{2} = tg\frac{B}{2}$$

درنتیجه، رابطهٔ(۲) به‌این‌صورت درمی‌آید :

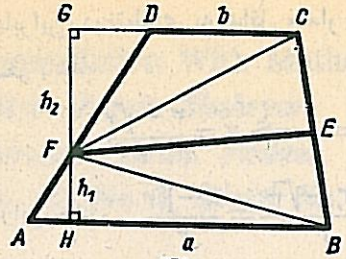
$$r = p\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} + tg\frac{D}{2}\right)^{-1} \qquad (۳)$$

که اگر (۳) را در (۱) قراردهیم:

$$S = p^2\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} + tg\frac{D}{2}\right)^{-1}$$

۹. فرض کنید: $|CE| = |BE|$ ، $|AB| = a$ ، $|DC| = b$ ، $|FH| = h_1$ (ارتفاع مثلث AFB) ، $|FG| = h_2$ (ارتفاع مثلث FDC) (شکل ۷).

اگر EF، خط راست موردنظر مسأله باشد، آن‌وقت



شکل ۷

$$S_{ABEF} = S_{CDFE} \qquad (۱)$$

چون $|FE|$ میانهٔ مثلث BCF است،

بنابراین

$$S_{BEF} = S_{CFE} \qquad (۲)$$

برابری(۲) را، جمله‌به‌جمله، از برابری(۱) کم می‌کنیم:

$$(S_{ABF} = S_{CDF}) \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2\right) \Longrightarrow \left(\frac{h_1}{h_2} = \frac{b}{a}\right) \qquad (۳)$$

ازطرف دیگر، ازتشابه مثلث‌های FAH و FGD نتیجه می‌شود:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{|AF|}{|FD|} \qquad (۴)$$

از مقایسه برابری‌های (۳) و(۴) به‌دست می‌آید:

$$\frac{|AF|}{|FD|} = \frac{b}{a}$$

چون b و a مفروض‌اند، بنابراین نقطهٔ F از تقسیم پاره‌خط AD به‌نسبت b:a به‌دست می‌آید.

۱۰. $|AB| = 1$ و $|M_1M_2| = x$ می‌گیریم (شکل ۸). از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AM_1M_4 و BM_5M_6 به‌دست می‌آید:

$$|M_1M_2| : |AM_1| = |M_2M_5| : |M_5B| = \sqrt{3}$$

بنابراین

$$|AM_1| = \frac{x}{\sqrt{3}},\quad M_2B = 1 - \frac{x(\sqrt{3}+3)}{3},$$

$$|M_2M_5| = -x + \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

اگر مجموع مساحت‌های دومربع موردنظر را $S(x)$ بنامیم،داریم:

$$S(x) = x^2 + |M_2M_5|^2 =$$

$$= 2x^2 - x(3-\sqrt{3}) + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

تابع S ، نسبت به x از درجهٔ دوم با ضریب درجهٔ دوم مثبت است و،

Reconciliation With Mathematics
Editor: Parviz Shahryari
Address: Tehran, Firdaus
Vol. X, No 1, *Serial No. 45, 1987*

بنابراین، درنقطه‌ای به‌حداقل مقدار خود می‌رسدکه $S'(x)$، درآن‌جا، برابر صفر باشد:

$$S'(x)=۴x+\sqrt{۳}-۳=۰ \Longrightarrow x=\frac{۳-\sqrt{۳}}{۴}$$

دراین حالت $|M_۲M_۵|=-x+\frac{-۳+\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳-\sqrt{۳}}{۴}$

یعنی، مجموع مساحت‌های دو مربع، وقتی به‌حداقل مقدار خود می‌رسدکه طول ضلع‌های دومربع، باهم برابر باشند.

۱۱. به‌سادگی می‌توان‌ثابت‌کرد (به‌کمك استقرای ریاضی) که، دنبالهٔ مفروض، صعودی و، از طرف بالا، به‌عدد ۲ محدود است. بنابراین، بنابرقضیهٔ وایرشتراس، این‌دنباله دارای حدی است‌کوچکتر یا مساوی ۲. این‌حد را a می‌نامیم. اگر دربرابری $a=(\sqrt{۲})^{x_n}$ به‌سمت حد برویم، به‌برابری $a=(\sqrt{۲})^{a}$ می‌رسیم‌که می‌توان‌آن‌را به‌صورت $a^{\frac{۱}{a}}=\sqrt{۲}$ نوشت. این‌معادله دوجواب دارد: $a_۱=۲$ و $a_۲=۴$ (بررسی تابع $y=x^{\frac{۱}{x}}$ نشان می‌دهدکه، معادلهٔ $x^{\frac{۱}{x}}=\sqrt{۲}$ بیش ازدو جواب ندارد). ولی، چون عدد a بزرگتر از ۲ نیست، بنابراین $a=۲$.

حد دنبالهٔ مفروض، برابر است با ۲.

۱۲. تابع را $f(x)$ می‌نامیم و دورهٔ تناوب آن‌را T می‌گیریم؛ در این‌صورت $f(T)=f(۰)=۰$

ازآن‌جا $T=k\pi$. چون $\sin(x+k\pi)=(-۱)^k\sin x$

بنابراین k عددی است زوج. بنابراین، T دورهٔ تناوب مشترك $\sin x$ و $f(x)$ است، در نتیجه، خارج‌قسمت‌آن‌ها

$$\frac{\sin x}{f(x)}=۱+\sin^۲(x\sqrt{۲})$$

باید دورهٔ تناوبی برابر $k\pi$ داشته‌باشد. ولی به‌سادگی می‌توان تحقیق‌کرد که، این‌نتیجه‌گیری، درست نیست.

تابع مفروض، متناوب نیست.