دانشگاه آزاد ایران

آشتی با ریاضیات

۱۲

دی ۱۳۵۸

Reconciliation with Mathematics

آشتی با ریاضیات

سردبیر: پرویز شهریاری

زیر نظر هیئت تحریریه

از انتشارات جانبی دانشگاه آزاد ایران

صفحه‌آرائی، تصحیح، چاپ وصحافی: مرکز تولید انتشارات دانشگاه آزاد ایران

نشانی: تهران - خیابان کریم‌خان‌زند - اول آبان‌شمالی - دانشگاه آزادایران

سال سوم - شمارهٔ ۲ (۱۲)

فهرست مطالب

۵۰ ریال

نظریهٔ بازی در ریاضیات

برای حل بسیاری از مسائل اقتصادی، نظامی ، تولیدی وغیره باید به تحلیل وضعیتی پرداخت که میان دو یا چند حریف وجود دارد. چنین وضعیتی را «وضعیت برخوردی» می‌نامند. اگر به یکی از بازیهای ورق توجه کنیم ، این موضوع به‌روشنی ملاحظه می‌شود. بدیهی است دریك وضعیت برخوردی عمل هریك از حریفان (بهتر است آنها را بازیکنان بنامیم) بستگی به عمل حریفان دیگر دارد . در عمل ، حریفها یا بازیکنان رقیبان تجاری ، صاحبان کارخانه وسرمایه و طراحان نظامی هستند.

به منظور تحلیل ریاضی یك وضعیت برخوردی در سالهای اخیر فصلی بردفتر ریاضیات عملی به نام «نظریه بازی» افزوده شده است . هدف اصلی در این نظریه یافتن عاقلانه‌ترین راه برای هریك از بازیکنان در یك وضعیت برخوردی است. باید دانست که وضعیت برخوردی واقعی بسیار پیچیده است و تحلیل آن به لحاظ وجود عوامل ملازم متعدد نیاز به بررسی و تحقیق عمیق دارد . برای تحلیل ریاضی وضعیت برخوردی واقعی باید برخی از عوامل ثانوی را حذف کرد و مدل صوری ساده‌ای بنا نمود. چنین مدلی را «بازی Game» می‌نامند.

میان یك بازی و یك وضعیت برخوردی واقعی اختلاف بارزی وجود دارد. بازی همیشه براساس قواعد معین و غیرقابل تخطی هدایت می‌شود. در

حالی که در وضعیت برخوردی واقعی ممکن است عملیات از چارچوب یك سلسله قواعد مشخص خارج شود.

از زمانهای قدیم مردم از مدلهای صوری وضعیت برخوردی مانند بازیهای شطرنج، تخته‌نرد، بازیهای ورق و حتی بازیهای کودکان چون شیرو خط و دوز بازی، به عنوان بازی وسرگرمی استفاده می‌کرده‌اند. در تمام این بازیها قواعد ویژه‌ای وجود دارد و درانتها هریك ازآنها، «برنده»، «مساوی» یا «بازنده» می‌شود.

نظریهٔ بازی به معنی کلمه امروزی نخست توسط بورل (E. Borel) مطرح گردید[1]. بورل درکتاب خود از حالت خاصی از قضیهٔ اصلی بازی استفاده کرد، اما از عهدهٔ اثبات آن برنیامد. در سال ۱۹۲۸ جان ون نیومن (Jehn Ven Neumann) این قضیهٔ را ثابت کرد. اما تا سال ۱۹۴۴ کمتر نامی از نظریهٔ بازی شنیده می‌شد. در این سال اثر تاریخی نیومن و مورگنسترن(Morgenstren)انتشاریافت[2]. دراین‌کتاب اساس‌ریاضی‌نظریهٔ بازی ارائه گردید و طریق استفاده از آن در اقتصاد مطرح شد. کتاب نیومن ومورگنسترن به زودی مورد استقبال ریاضیدانان وپژوهشگران مسائل‌تولیدی، مدیریت و نظامی قرارگرفت و در مدت‌کوتاهی نظریهٔ بازی از جنبهٔ‌نظری و عملی گسترش و توسعه بسیار یافت. معلوم گردیدکه نظریهٔ بازی نه تنها قابل کارگیری دراقتصاد است، بلکه حتی در تحلیل استراتژی‌ها و نقشه‌های نظامی نیز بسیارسودمندمی‌باشد. دراین گفتاربه‌اصول‌نظریهٔ‌بازی اشاره‌کوتاهی‌می‌شود.

در یك بازی ممکن است دوبازیکن یا بیشتر شرکت نماید. درحالت اول آن را بازی دو حریفی و در حالت دوم n حریفی می‌نامند. در یك‌بازی n حریفی بازیکنان می‌توانند به طور موقت یا دائم با هم ائتلاف‌کنند. باید توجه داشت که همهٔ افرادی که با هم در یك بازی ائتلاف دائمی دارند در حکم یك بازیکن به شمار می‌آیند، زیرا همهٔ آنها دارای نفع مشترك هستند. بنابراین دریك بازی اگرتنها دوائتلاف موجود باشد، بازی دو حریفی‌خواهد بود. در این‌گفتار تنها بازیهای دو حریفی مورد مطالعه قرارمی‌گیرد.

فرض‌کنیم دو بازیکن A و B با دونفع متضاد در بازی شرکت‌جویند.

---

1. Sur les systemes de Ferms lineaires a determint symetrique gauche et théorie general de Jeu.
2. Theory of games and economic behavior

منظور ازبازی یك سلسله عملیات A و B می‌باشدکه به طور پی درپی انجام می‌شود، هنگامی بازی از نظر ریاضی قابل بررسی است که یك نظام قواعد فرموله معین در دست باشد. به‌گفتهٔ دیگر نظامی از شرطها موجود باشد که در هرمرحله از بازی عمل هریك از بازیکنان را مجاز سازد.

یکی از معیارهای مهم یك بازی «پی‌آف Payoff» می‌باشد. تصور کنید در آخر یك بازی‌مثلا پوکر دو نفره چه رخ می‌دهد؟ یکی از بازیکنان بازنده می‌شود و دیگری برنده. مثلا اگر A برنده شود و بازی برسر ۱۰ تومان باشد، برد A مساوی ۱۰ و باخت B مساوی ۱۰ خواهد بود. به گفتهٔ دیگر برد A مساوی (۱۰+) و برد B مساوی (۱۰−) است.

معیار عددی که به وسیلهٔ آن بتوان نتیجهٔ بازی را نشان داد، پی‌آف نامیده می‌شود. مثلا نتیجه بازی شطرنج را می‌توان با (۱+)، (۱−) و (۰) نشان‌داد (که به ترتیب می‌تواند معرف برد، باخت ومساوی باشد). باید توجه داشت که نتیجهٔ همهٔ بازیها را نمی‌توان به شکل عدد نشان داد، یعنی برای هربازی‌نمی‌توان پی‌اف قائل شد. دراینجا بازیهایی را مطالعه می‌کنیم که پی‌اف معین داشته باشند. دوباره به همان بازی پوکر میان A و B توجه کنید. مجموع پی‌اف بازیکنان مساوی صفر است:

پی‌اف A + پی‌اف B = ۱۰ − ۱۰ = ۰

چنین بازی را «صفر ـ جمع» (Zero-Sum) می‌نامند. بنابراین در یك بازی اگر جمع «پی‌آف‌ها» مساوی صفر باشد، یعنی یك طرف دقیقاً به میزانی که طرف مقابل می‌برد، ببازد، بازی را صفر ـ جمع می‌نامند. در بازی صفر ـ جمع بازیکنان کاملا منافع مختلف دارند.

حالاتصورکنیدکه یك‌تلکه‌بگیرکناردست A و B نشسته‌باشد وبازیکنان ۱۰ درصد برد خود را به او تلکه بدهند. اگر برد نفر اول ۱۰ تومان باشد درواقع پی‌آف او۹تومان خواهدبود، زیرایك تومان‌نصیب تلکه‌بگیرمی‌شود. دراین صورت داریم:

پی‌آف A + پی‌آف B = ۹ − ۱۰ = −۱ (تومان)

به چنین بازی «غیرصفر ـ جمع» می‌گویند. البته می‌توان با افزودن یك بازیکن‌فرضی(محسوب داشتن‌تلکه‌بگیر به عنوان یك بازیکن) بازی را تبدیل به صفر ـ جمع کرد.

پی‌آف A + پی‌آف B + پی‌آف C = ۹ − ۱۰ + ۱ = ۰

اما در این حالت بازی سه نفره می‌شود و تحلیل آن به مراتب مشکلتر از

بازی دو نفره است. بسیاری از بازیهای واقعی مانند پوکر، بریج وشطرنج، بازیهای صفر ـ جمع هستند. از آنجا که در بازی صفر ـ جمع دو نفره برد یك بازیکن مساوی برد بازیکن دیگر، منتهی با علامت مخالف، است، لذا ازنظرتحلیل ریاضی تنها پی‌آف یکی ازبازیکنان مثلا A را درنظرمی‌گیریم و برای سادگی فرض می‌کنیم که A «طرف ما» و B «حریف ما» باشد.

بازی با حرکات متوالی حریفان پیش می‌رود. هر حرکت انتخاب یکی از شق‌های ممکن است که قواعد بازی انجام آن را اجازه می‌دهد. یك حرکت ممکن است تصادفی یا شخصی باشد.

حرکت شخصی انتخابی آگاهانه است و توسط بازیکن از میان همهٔ حرکات ممکن، انتخاب می‌شود. هر حرکت در بازی شطرنج یك حرکت شخصی می‌باشد. در بازی شطرنج، بازیکن از میان همهٔ حرکات ممکن یکی را به میل خود انتخاب می‌کند. بدیهی است این انتخاب بستگی به وضع گسترش بازی و ترکیب مهره‌ها دارد.

حرکت تصادفی یك امکان حرکت برای بازیکن از میان امکانهای مختلف می‌باشد. لیکن این امکان براساس یك امر اتفاقی (انداختن سکه، انداختن تاس، کشیدن کارت یا مهره وغیره) در اختیار بازیکن قرارمی‌گیرد. به‌عنوان مثال تاس ریختن، یك بازی تصادفی است که تصمیم بازیکن درآمدن تاس دخیل نیست. یا کشیدن یك کارت از میان یك دستهٔ ۵۲ عددی ورق یك حرکت تصادفی است که می‌تواند ۵۲ نتیجه، با احتمال وقوع مساوی، داشته باشد. برای اینکه بازی به طور ریاضی تحلیل شود، قواعد بازی باید روشن سازد که توزیع احتمالات نتایج هر حرکت تصادفی چگونه است. برخی از بازیها مانند ریختن تاس (که مثلا همیشه، تاس بالاتر ببرد) تصادفی محض هستند. بعضی از بازیها مانند شطرنج و دوزبازی شخصی محض می‌باشند. دسته‌ای از بازیها نظیر تخته نرد و اکثر بازیهای ورق مختلط هستند، یعنی‌هم شامل حرکت شخصی و هم حرکت تصادفی می‌باشند. در تخته‌نرد وقتی تاس می‌ریزیم یك حرکت تصادفی و وقتی براساس تاس عمل‌می‌کنیم (ازامکانهای ممکن یکی را انتخاب می‌کنیم)، حرکت شخصی می‌باشد.

بازی با خبر کامل

بازیها برحسب نوع ومقدار خبرقابل دسترسی برای هربازیکن، نسبت به حرکت حریف طبقه‌بندی می‌شوند. یك بازی که در آن بازیکن، هنگامی که حرکتی را انجام می‌دهد، نتایج همهٔ حرکات قبلی خواه شخصی و خواه

تصادفی را بداند، بازی باخبر کامل می‌نامند.

از این نوع بازی شطرنج، تخته نرد و دوزبازی می‌باشد. دربرخی از بازیها بازیکنان چنین اطلاع کاملی از وضع بازی ندارند. مثلا در پوکر هر بازیکن نمی‌داند چه کارتی برای حریف آمده است.

اغلب وضعیتهای برخوردی که در عمل با آن مواجه می‌شویم، بازی با خبر کامل نیستند. چون پوشش عملیات حریف عموماً یك عنصر لازم در یك وضعیت برخوردی به شمار می‌آید.

استراتژی

استراتژی (Strategy) یکی از اساسی‌ترین مفاهیم نظریهٔ بازی می‌باشد، معمولا هر بازیکن حرکت خودرا براساس وضع بازی درآن مرحله انتخاب می‌کند. البته می‌تواند ازپیش انتخاب خود را بنماید. برای‌این‌کار بازیکن باید اوضاعی را که در جریان بازی پیش می‌آید تجسم کند و برای هرحرکت، حرکتی مناسب تعیین‌نماید. مجموعهٔ کاملی از قواعدکه انتخاب بازیکن را در جریان بازی معین کند، استراتژی نامیده می‌شود. اگر چنین نظامی ازانتخابها ساخته‌شود، می‌گویندکه بازیکن یك‌استراتژی ویژه‌انتخاب کرده است. در صورتی که بازیکنی چنین استراتژی ویژه‌ای برگزیند، دیگر نیازی نیست که شخصاً دربازی شرکت جوید، چون‌می‌تواند صورتی ازقواعد مورد نظرخودرا به دست شخص دیگری‌بدهد (یا برنامه‌ای به ماشین شمارگر بدهد) که در هرمرحله براساس‌آن، حرکت مناسب را انجام دهد.

هنگامی مفهوم استراتژی دربازی معنی داردکه‌آن بازی‌شامل حرکتهای شخصی باشد. برای بازیهایی نظیر رولت یا کرپ‌که مطلقاً تصادفی هستند، استراتژی وجود ندارد. یك بازی می‌تواند برحسب تعداد استراتژی‌های ممکن محدود یا نامحدود باشد. در یك بازی محدود هربازیکن می‌تواندفقط تعداد محدودی استراتژی برگزیند.

بازی $m \times n$

یك بازی دو نفره که درآن بازیکن A (طرف ما) m استراتژی ممکن وبازیکن B (حریف) n استراتژی ممکن‌دارد، بازی $m \times n$ نامیده می‌شود. می‌توانیم استراتژیهای خود را به A_1، A_2، ...، A_m و استراتژی‌های حریف را به B_1، B_2، ...، B_n نشان دهیم.

فرض‌کنیم هرطرف یك استراتژی معین اتخاذ نماید که آن را برای

طرف خود به A_i و برای حریف به B_j نشان می‌دهیم . اگر بازی تنها شامل حرکت شخصی باشد، استراتژی‌های A_i و B_j منتج به‌یك نتیجه واحدمی‌شود و بنابراین با اتخاذ این استراتژی پی‌آف معینی خواهیم داشت که آن را به a_{ij} نشان‌می‌دهیم.

اگربازی شامل‌حرکت تصادفی (شانسی) باشد، پی‌آف برای هرجفت استراتژی A_i و B_j یك‌کمیت تصادفی است و بستگی به نتیجهٔ همهٔ حرکتهای تصادفی دارد. دراین حالت طبیعی است به عنوان یك پی‌آف برای هرجفت استراتژی مقدار میانگین پی‌آفهای همهٔ نتایج ممکن از حرکت تصادفی را قراردهیم[1]. در هرمورد ازعلامت a_{ij} استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که مقدار a_{ij} (میانگین پی‌آفها) را برای هر جفت از استراتژی بدانیم. برای سهولت می‌توان این مقادیر را در یك جدول‌مستطیل شکل (مانند یك‌ماتریس) نوشت. چنین جدولی را ماتریس‌پی‌آف یا ماتریس بازی می‌نامند. ماتریس پی‌آف یا ماتریس بازی برای یك بازی $m \times n$ به شکل زیر خواهد بود.

این ماتریس را جهت سهولت می‌توان به $||a_{ij}||$ نشان داد. برای

A \ B	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

روشن شدن مطلب به ذکر چند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱ــ هریك از بازیکنان سکه‌ای برمی‌دارند و بدون آن‌که حریف

۱. میانگین پی‌آف، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید،

$$a_{ij}=m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_na_n$$

به طوری‌که m_k احتمال نتیجه k ام و a_k پی‌آف آن باشد.

متوجه شود، یك طرف آن را انتخاب می‌کنند و روی میز قرارداده، بادست روی آن را می‌پوشانند . اگر هردو سکه شیر یا هردو سکه خط باشد (مانند هم‌باشند)، A هردو را می‌برد. درغیراین‌صورت، B هردوسکه را برمی‌دارد. می‌خواهیم ماتریس این بازی را تشکیل دهیم.

حل ــ بازی فقط دو حرکت دارد: حرکت ما و حرکت حریف. و هر دوحرکت‌شخصی‌است، زیرا هردوطرف‌می‌توانندبه‌دلخواه شیر یا خطانتخاب کنند. بازی ما یك بازی با خبرکامل نیست ، زیرا بازیکنان نمی‌دانند کدام طرف سکهٔ حریف خوانده می‌شود.

چون هربازیکن‌فقط یك حرکت‌دارد، استراتژی برای هرطرف انتخاب یك طرف سکه است. ما دو استراتژی داریم:

A_1ــ اگر شیرخوانده شود

A_2ــ اگر خط خوانده شود

حریف هم دو استراتژی دارد که آنها را به B_1 و B_2 نشان می‌دهیم . بنابراین بازی سکه یك بازی ۲ × ۲ می‌باشد. وقتی ما برنده شویم پی‌آف مساوی ۱+ و اگر بازنده شویم پی‌آف ۱ــ خواهد بود. ماتریس پی‌آف به شکل این جدول تشکیل می‌شود.

A \ B	B_1 (شیر)	B_2 (خط)
A_1 (شیر)	۱	۱ــ
A_2 (شیر)	۱ــ	۱

اگربازی تنهایك مرتبه انجام شود، نمی‌توان گفت که کدام استراتژی بهتراست. چرا که هردو بااحتمالی یکسان،مارا به‌بردیاباخت‌می‌رساند. اما اگر بازی را ادامه دهیم، وضع تفاوت می‌کند. فرض کنیم یکی از استراتژیهارا انتخاب‌کنیم(مثلا A_1) وآن را ادامه دهیم . پس از مدتی حریف به استراتژی ما پی می‌برد وبرضد آن یعنی استراتژی B_2 عمل‌می‌کند و بدیهی است هر مرتبه خواهیم باخت . بنابراین اگر همواره یك استراتژی را تکرارکنیم ، به سود ما نخواهد بود. برای احتراز از هربار باختن باید گاهی شیر و گاهی خط را انتخاب‌کنیم . اگر انتخاب شیر یا خط را برطبق قاعده معینی انجام دهیم (مثلا به نوبت)، حریف دوباره به قاعده بازی ما پی می‌برد و مجدداً چنان استراتژی انتخاب می‌کندکه هر مرتبه به باخت مامنجر شود. روشن است روش قابل اعتمادی‌که حریف نتواند استراتژی ما راکشف

کند، روش انتخاب اتفاقی است. یعنی هربار باید استراتژی خود را به طریقی که خودمان هم ازپیش ندانیم، انتخاب کنیم. می‌توانیم به این مقصود با پرتاب سکه (به صورت شیر یا خط) پیش‌ازگذاشتن آن روی میز جامهٔ عمل بپوشیم.

بدین ترتیب به‌یکی ازمفاهیم اساسی نظریه بازی یعنی استراتژی‌مختلط می‌رسیم. منظور از یك استراتژی مختلط، ترکیب استراتژیهای قابل دسترسی (دراین حالت A_1 و B_1) به طوراتفاقی و به نسبت معین است. در مثال بازی با سکه روشن است که باید استراتژیهای A_1 و A_2 به نسبت مساوی مخلوط گردند، اما برای بازیهای پیچیده‌تر حل مسأله به این سادگی نیست.

مثال ۲ـ بازیکنان A و B هرکدام یك عدد از میان عددهای (۱ و ۲ و ۳) در یك زمان وپنهان از هم می‌نویسند اگر جمع دو عدد زوج باشد، B به A مجموع دو عدد را به تومان می‌پردازد و اگر جمع دوعدد فرد باشد A به B مجموع دو عدد را خواهد پرداخت. این بازی را تحلیل می‌کنیم و ماتریس آن را می‌نویسیم.

حل ـ هریك ازبازیکنان تنها یك حرکت دارند وهردو حرکت شخصی است. A (طرف ما) سه‌استراتژی می‌تواند اتخاذ نماید : A_1ـنوشتن (۱)، A_2ـ نوشتن (۲)، A_3ـ نوشتن (۳). حریف B نیز می‌تواند سه استراتژی اختیار کندکه به B_1 ، B_2 و B_3 نشان می‌دهیم. بنابراین یك بازی ۳×۳ با ماتریس مربع‌داریم. مانند مثال قبلی اگر B به استراتژی ماپی ببرد، می‌تواند استراتژی مناسبی برگزیند که ما هربار بازنده شویم . مثلا اگر بداند که ما استراتژی A_1 را اختیار می‌کنیم، استراتژی B_2 را اختیار خواهدکرد. البته نباید فراموش کردکه حریف نیز در وضعی مشابه ما قرار دارد.

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	۲	−۳	۴
A_2	−۳	۴	−۵
A_3	۴	−۵	۶

پاسخ این بازی‌که در واقع بهترین استراتژی برای هردو طرف است به‌کمك نظریهٔ برنامه‌ریزی خطی تعیین می‌شود که دراینجا دربارهٔ آن گفتگو نخواهیم کرد. A باید استراتژی مختلط زیر را اختیار کند.

$$A_1 \longrightarrow \frac{1}{4}$$

$$A_2 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$A_3 \longrightarrow \frac{1}{4}$$

یعنی به ازای هر چهار مرتبه بازی یك بار استراتژی A_1 ، دو بار استراتژی A_2 و یك‌بار A_3 را به‌کار بندد.

استراتژی بهینه (optimal)

هدف نظریهٔ بازی یافتن‌یك‌سلسله عملیات مناسب برای بازیکنان دریك‌وضعیت برخوردی است. اگریك بازی به دفعات تکرار شود، طبق تعریف، استراتژی تهیهٔ آن استراتژی است‌که برد متوسط درآن حداکثر باشد (یا برعکس‌باخت متوسط حداقل باشد). فرض اصلی مهم آن است‌که حریف ما نیز حداقل به اندازهٔ ماعاقل است وتا آنجاکه درقدرت دارد درراه شکست ماتلاش‌می‌کند. بنابراین در نظریهٔ بازی عامل ریسك دخالتی ندارد، گرچه در هر استراتژی واقعی کم‌وبیش ریسك وجود دارد. در نظریهٔ بازی فرض برآن است‌که هیچ یك از بازیکنان اشتباهی مرتکب نمی‌شوند.

نظریهٔ بازی نیز مانند هر مدل ریاضی یك واقعه مختلط، محدودیتهایی دارد. یکی ازمهمترین این محدودیتها آن است‌که پی‌آف باید به‌شکل‌یك‌عدد داده شود. دراکثر وضعیتهای برخوردی واقعی برای پی آف یك‌عددنخواهیم داشت. اینجاست‌که باانتخاب یکی ازآنها براساس قضاوت خودمان ماتریس بازی‌را تشکیل‌داده، استراتژی بهینه‌را تعیین می‌کنیم. ممکن است‌این‌استراتژی درست نباشد. بااین وجود می‌توانیم ازساختمان ریاضی مربوطه استفاده کنیم و اگر نتوانیم استراتژی بهینه‌را بیابیم لااقل چیزی قابل‌قبول دردست داریم. لذا باید بدانیم‌که دریك وضعیت برخوردی واقعی هرگز نبایدازیك‌استراتژی (گرچه به نظرتان بهینه است) کورکورانه تبعیت کرد و همیشه، مساله همراه بانایقینی است.

انتخاب‌استراتژی‌ـاصل‌مینی‌ماکس(the minimax principle)

یك‌بازی m×n باماتریس‌آن درنظر بگیرید. حرف c را برای نشان دادن یکی از استراتژی‌های خود و حرف ∂ را برای یکی از استراتژیهای حریف در نظر می‌گیریم. در برابر خود مسالهٔ تعیین استراتژی بهینه را قرار

می‌دهیم.

A \ B	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

برای این منظور نخست به‌طور پی‌درپی هریك ازاستراتژیها رامطالعه می‌کنیم . از A_1 شروع می‌کنیم. اگر استراتژی A_i را انتخاب کنیم ، باید انتظار داشته‌باشیم که حریف استراتژی B_j برمی‌گزیند، که پی آف (a_{ij}) تا آنجاکه ممکن است کم باشد. بنابراین به‌ازای عدد j داده‌شده، توجه خودرا به‌کمترین مقدار a_{ij} معطوف می‌داریم، یعنی بیان مقادیر

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}$$

که درسطر iام قرار دارند، کوچکترین‌را انتخاب کرده و آن را به α_i نشان می‌دهیم.

$$\alpha_i = \underset{j}{\mathrm{Min}}\, a_{ij}$$

منظور ازعلامت $\underset{j}{\mathrm{Min}}$ دراینجا، کمترین‌مقدار پی آف a_{ij} بازای هر مقدار j است، البته‌وقتی که i ثابت باشد. به‌این‌ترتیب برای هرسطر یك‌مقدار α_i به‌دست‌می‌آید. برای همه‌سطرها m مقدار α_i خواهیم‌داشت. اگربخواهیم مناسبترین حالت‌را برای‌خودمان باتوجه به‌آگاهی حریف انتخاب‌کنیم (بدون آن‌که ریسك نمائیم)، باید استراتژی A_i راکه α_i مربوط به‌آن حداکثراست برگزینیم. حداکثر مقدار α_i را به α نشان می‌دهیم، یعنی

$$\alpha = \underset{i}{\mathrm{Max}}\,\alpha_i = \underset{i}{\mathrm{Max}} \times \underset{j}{\mathrm{Min}}\,\alpha_{ij}$$

α را مقدار پایینی بازی یاماکسی‌مین می‌نامند. این حداکثر پی آف است‌که می‌توان‌تضمین‌کرد. آن‌استراتژی‌که پی‌آف‌آنα می‌باشد، استراتژی‌ماکسی‌مین نامیده می‌شود. استراتژی مزبور محتاطانه‌ترین استراتژی است. اهمیتی‌ندارد که حریف چه خواهد کرد. می‌توانیم نسبت به برد α اطمینان داشته باشیم.

درست به‌همین جهت است‌که آن‌را مقدار پایینی می‌نامند.

حریف‌ما نیز وضع مشابهی دارد. B مایل است وهمه‌کار می‌کندکه‌نفع ما حداقل باشد. باید نخست حداکثر پی‌آف را برای هریك از استراتژیهای خود پیدا کند. حداکثر پی‌آف برای استراتژی B_j رابه β_j نشان می‌دهیم.

$$\beta_j = \underset{i}{\mathrm{Max}}\,\alpha_{ij}$$

کوچکترین مقدار β_j را به β نشان می‌دهیم.

$$\beta = \underset{j}{\mathrm{Min}}\,\beta_j = \underset{j}{\mathrm{Min}}\,\underset{i}{\mathrm{Max}}\,\alpha_{ij}$$

β را مقدار بالایی بازی یا مقدار مینی ماکس می‌نامند. به استراتژی مربوطهٔ حریف، استراتژی مینی ماکس گفته می‌شود. برای حریف استراتژی مینی‌ماکس محتاطانه‌ترین استراتژیها است. اگرحریف برطبق آن عمل کند، می‌تواند مطمئن باشدکه پی‌آف ما هرگز از β بالاتر نخواهد رفت.

اصل گزینش محتاطانه‌ترین استراتژیها (استراتژی ماکسی‌مین برای A و مینی ماکس برای B) را «اصل مینی‌ماکس» و گاهی هردو استراتژی را استراتژیهای مینی‌ماکس می‌نامند. برای روشن‌شدن بیشتر مطلب مقادیر پایینی و بالایی و استراتژیهای مینی ماکس را برای مثالهای ۱ و ۲ تعیین می‌کنیم. درمثال‌اول $\alpha = -1$ و $\beta = 1$ است. هردواستراتژی بازیکن A ماکسی‌مین و هردو استراتژی B مینی‌ماکس محسوب می‌شود. نتیجه ساده است. با قبول هریك ازدو استراتژی بازیکنان مطمئن هستند که بیشتر از (۱) نمی‌بازند.

درمثال ۲ مقادیر پایینی وبالایی به ترتیب $\alpha = -3$ و $\beta = 4$ است. دراین مثال استراتژی ماکسی‌مین برای ما A_1 است. باپذیرش این‌استراتژی می‌توانیم مطمئن باشیم که برد ماکمتر از ۳− نخواهد بود (یا باخت‌مابیش از ۳ نیست) B_1 و B_2 استراتژی مینی‌ماکس حریف است. باقبول هریك از این دو استراتژی، حریف مطمئن است‌که بیشتر از ۴ نمی‌بازد.

مثال ۳ـ مادارای سه‌دستگاه دفاع‌ضدهوایی A_1 ، A_2 و A_3 هستیم‌که فقط‌ازیکی‌آنهامی‌توانیم‌استفاده‌نمائیم.دشمن‌دارای‌سه‌هواپیمایB_1 ، B_2 و B_3 است‌که می‌تواند فقط یکی از آنها را وارد عمل کند. هدف ما ساقط کردن هواپیما است، هدف دشمن عبور هواپیماها ازمنطقه ما و رسانیدن آنها به‌منطقه امن می‌باشد. اگر از دستگاه A_1 استفاده شود ، احتمال سقوط هواپیماهای B_1 ، B_2 و B_3 به‌ترتیب ۰/۹ ، ۰/۴ ، ۰/۶ است، اگر ازدستگاه A_2استفاده شود، احتمال سقوط B_1 ، B_2 ، B_3 به‌ترتیب ۰/۳ ، ۰/۶ ، ۰/۸ وبرای A_3 این احتمالها ۰/۵ ، ۰/۷ و ۰/۲ است.

اولا می‌خواهیم این وضعیت را به‌زبان نظریهٔ بازی توضیح دهیم. ثانیاً استراتژیهای مینی‌ماکس و ماکسی‌مین را تعیین کرده و بحث نمائیم.

حل- مثال ۳ نمایانگر یك بازی ۳×۳ با دو حرکت شخصی و یك حرکت تصادفی است. حرکت شخصی ما انتخاب دستگاه ضدهوایی و حرکت شخصی حریف انتخاب یکی‌از هواپیماها است. حرکت تصادفی، اثردستگاه ضدهوایی درسقوط هواپیما می‌باشد. احتمال دارد که هواپیما سقوط کند و نیز احتمال دارد که به منطقه امن برسد، پی آف را می‌توان به (۱) نشان داد - اگر هواپیما سقوط کند، و (۰) - اگر هواپیما ساقط نشود، ماسه استراتژی داریم: استفاده از هریك از دستگاههای ضدهوایی.

حریف نیز سه‌استراتژی دارد: عبور هریك از هواپیماها.

پی‌آف متوسط برای هرجفت استراتژی مساوی احتمال سقوط هواپیما توسط دستگاه ضدهوایی مزبور است. براین اساس ماتریس‌بازی به‌شکل‌زیر خواهد بود.

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	۰/۹	۰/۴	۰/۶
A_2	۰/۳	۰/۶	۰/۸
A_3	۰/۵	۰/۷	۰/۲

مقادیر پایینی وبالایی به ترتیب $\alpha = ۰/۳$ و $\beta = ۰/۷$ می‌باشد. A_2 محتاطانه‌ترین استراتژی ما (ماکسی‌مین) و B_2 محتاطانه‌ترین استراتژی‌دشمن است.

این مثال نمایانگر یکی از ویژگیهای مهم استراتژیهای مینی ماکس می‌باشد. فرض کنیم ما استراتژی‌ماکسی‌مین A_2 وحریف‌استراتژی‌مینی‌ماکس B_2 را اختیار کند. اگر مدتی بازی ادامه یابد، دشمن آگاه می‌شود که ما بر طبق استراتژی A_2 عمل‌می‌کنیم. دراین صورت ممکن است ناگهان‌استراتژی B_1 را انتخاب کند و پی آف را به ۰/۳ کاهش دهد. البته اگر بدانیم که دشمن B_1 را انتخاب کرده است، می‌توانیم بر طبق استراتژی A_1 به مقابله برخیزیم و پی آف را به ۰/۹ برسانیم. به این ترتیب اگر هر دو طرف به استراتژیهای مینی‌ماکس عمل کنند، وضعیت ناپایدار خواهد بود، ووقتی‌یکی

از حریفان خبری از استراتژی طرف دیگر دریافت دارد، می‌تواند وضعیت تغییر نماید.

نقطهٔ سدل و پاسخ بازی

به‌مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴ - A و B می‌توانند مستقلا یکی از مقادیر (۱-)، (۰)، (۱+) را اختیار کنند. مقدار انتخابی A را به S و B را به t نشان می‌دهیم. طبق قاعده این بازی B به A مبلغ $S(+-S)++(++S)$ تومان می‌پردازد. بدیهی‌است اگر این‌مبلغ مثبت باشد A برنده‌است و اگرمنفی‌باشد، بازنده.

حل- طرف‌ما (A) دارای سه‌استراتژی‌است (انتخاب (۱-)، (۰)و (۱+) که به ترتیب آنها را به A_1، A_2، A_3 نشان می‌دهیم). حریف نیز دارای سه‌استراتژی B_1، B_2 و B_3 است. ماتریس بازی را تشکیل می‌دهیم.

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	۲	-۱	۲
A_2	۱	۰	۱
A_3	-۲	-۱	۲

مقدار بالائی این بازی صفر است. بنابراین استراتژی A_2 ماکسی‌مین‌خواهد بود. مقدار پایینی این بازی نیز صفر می‌باشد و استراتژی B_2 مینی ماکس خواهد بود. دراین مثال داریم: $\alpha = \beta = ۰$.

چنین پی‌آفی را نقطهٔ سدل (Saddle) می‌نامند.

به‌طورکلی بازیهایی وجود دارند که مقادیر پایینی وبالایی آنهامساوی هستند. در این بازیها استراتژیهای مینی ماکس پایدار خواهند بود. مقدار مشترك مقادیر پایینی وبالایی‌را به D نشان داده و آن‌را نقطه سدل می‌نامیم.[1]

---

۱. درهندسه‌هم، نقطه‌ای از سطح راکه‌دریك‌سمت ماکزیمم و درسمت دیگر می‌نیمم باشد، نقطهٔ سدل (زین) گویند.

دراین حالت می‌گوئیم بازی دارای نقطهٔ سدل است. در یك بازی اگر چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد، متناظر بایك جفت استراتژی است (A_2 و B_2 در مثال فوق). این استراتژیها راکه پاسخ بازی است بهینه می‌خوانند.

در بازیهایی‌که استراتژیهای بهینه دارند خاصیت مهم زیرموجوداست:

اگر یکی ازبازیکنان استراتژی بهینهٔ خودرا برگزیند، دومی نیز حتماً باید با استراتژی بهینهٔ خود عمل کند.

آن دسته ازبازیها که دارای نقطهٔ سدل می‌باشند از نظر عملی و نظری بسیار موردتوجه هستند. به‌ویژه ثابت شده است‌که هربازی باخبرکامل دارای یك‌نقطهٔ سدل وبنابراین یك‌پاسخ می‌باشد. اگر یك‌بازی باخبرکامل فقط‌شامل حرکتهای شخصی باشد، می‌توان پاسخ نهایی بازی‌را یافت.

به‌عنوان مثالی ازبازی باخبرکامل، بازی زیررا مطرح می‌کنیم:

مثال ۵ - یك‌دایرهٔ بزرگ‌بکشید. دوبازیکن A و B به‌نوبت‌سکه‌های مشابهی را در هرجاکه بخواهند داخل دایره قرارمی‌دهند. بازیکنی‌که‌آخرین سکه را درداخل دایره‌بگذارد، برندهٔ همهٔ سکه‌ها خواهد بود. برای‌این‌بازی یك استراتژی بهینه وجود داردکه برد بازیکنی‌را که اولین سکه‌را می‌گذارد تضمین می‌کند. بازیکن اول باید سکه‌را در مرکز دایره قرار دهد. سپس به ازای هربازی حریف باید سکه‌را درمحلی که با سکه حریف تقارن مرکزی دارد قرار دهد.

هر بازی با خبر کامل، دارای استراتژی بهینه است و مشابه مثال بالا می‌باشد. برحسب این قضیهٔ عمومی، درشطرنج هم‌باید یك نقطهٔ سدل موجود باشد وبنابراین بازی شطرنج پاسخی داردکه استراتژی بهینهٔ دوطرف‌راکاملا مشخص می‌کند. اما در بازی شطرنج تعداد ترکیبهای حرکت آنقدر زیاد است‌که تاکنون نتوانسته‌اند برای آن ماتریس پی‌آف بسازند ونقطهٔ سدل را پیدا کنند.

استراتژیهای مختلط

قضیهٔ اصلی

تعداد بازیهایی که دارای نقطه سدل هستند، در مقایسه بابازیهایی که مقادیر پایینی وبالایی نامساوی‌دارند بسیارکم است. دریك بازی‌که نقطهٔ‌سدل ندارد، اگر یك استراتژی «محض» برگزینیم، با توجه به آن که حریف ما عاقلانه عمل می‌کند، باید حتماً این استراتژی به‌کمك اصل مینی‌ماکس‌انجام شود. (میزان پی‌آف رابرابر α تضمین می‌کند) طبیعی است‌بپرسیم:

آیا راهی وجود نداردکه میانگین پی‌آف بیش‌از α شود؟

با ترکیب استراتژیها (اتخاذ استراتژی مختلط) به‌طور اتفاقی (راندم Random) می‌توان‌پی‌آف متوسط بازی‌را به‌بالاتر ازα رسانید.

برطبق قضیهٔ‌اساسی نظریهٔ بازی‌که ازاثبات آن‌دراینجا صرفنظرمی‌شود، در صورت استفاده از استراتژی مختلط (ترکیبی از استراتژیهای محض) میانگین پی‌آف که به D نشان می‌دهیم، میان مقدار بالایی وپایینی بازی‌قرار می‌گیرد.

$$\alpha \leqslant D \leqslant \beta$$

بدیهی‌است، دربازی‌بانقطهٔ سدل، α و β و D برهم منطبق‌خواهندبود.

استفاده از استراتژی مختلط

فرض‌می‌کنیم که‌استراتژی‌مختلط ماشامل‌استراتژیهای A_1 ، A_2 و A_3 به‌نسبت P_1 ، P_2 و P_3 باشد، به‌طوری که

$$P_1+P_2+P_3=1$$

دراین‌صورت یك‌استراتژی مختلط برای A راکه به S_A نشان‌می‌دهیم چنین است.

$$S_A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}$$

حریف ازچهار استراتژی محض B_1 ، B_2 ، B_3 ، B_4 با نسبتهای q_1 ، q_2 ، q_3 ، q_4 استفاده می‌کند، به‌طوری‌که $q_1+q_2+q_3+q_4=1$.

برای بازی، استراتژیهای بهینهٔ مختلطی می‌توان تعیین کردکه به S_A^* و S_B^* نشان می‌دهیم. منظور یافتن نسبتهای P_i و q_i و مقدار پی آف بازی D است.

باید توجه داشت‌که همهٔ‌استراتژیهای محض‌دریك‌بازی وارداستراتژی مختلط نمی‌شود و فقط تعدادی از استراتژیها، که اصطلاحاً «ارزش دار» نام دارند، درساختمان استراتژی بهینهٔ مختلط وارد می‌شود.

برطبق‌قضیهٔ دیگری‌درنظریهٔ‌بازی، اگریك‌طرف بااستراتژی بهینهٔ‌مختلط خود بازی کند و حریف با هر استراتژی محض یا ترکیبی از استراتژیهای ارزش‌دار خود بازی نماید، پی‌آف D دربازی تضمین می‌شود.

حل یك‌بازی

اگریك بازی $m \times n$، نقطهٔ سدل نداشته باشد، یافتن پاسخ آن‌معمولا

دشوار است و کم و بیش نیاز به محاسبه دارد. بدیهی است هر چه m و n بزرگتر باشند محاسبه مفصلتر خواهد بود. اما قواعدی وجود دارد که‌می‌توان تعداد استراتژیها را کاهش داد (به استراتژی‌های ارزش‌دار رسید). در یك ماتریس دو دسته از استراتژی‌ها ممکن است حذف شود.

الف- آنهایی که تکراری هستند.

ب- آنهایی که پایین‌تر هستند.

اگر دو استراتژی داشته باشیم که پی‌آفهای آنها جزء به جزء مساوی باشند، آنها را استراتژیهای مکرر می‌خوانیم و می‌توان فقط یکی از آنها را نوشته، بقیه‌را حذف کرد. همچنین اگر دواستراتژی داشته باشیم که هر جزء یکی‌از جزء متناظردیگری بزرگتر باشد، آن‌را که پایین‌تراست می‌توان حذف کرد. بدین‌ترتیب پیش ازاقدام به‌حل‌یك‌بازی بایدماتریس بازی راباتوجه به دوقاعده بالا، تا آنجاکه ممکن است، ساده نمود.

حل بازیهای ۲×۲ و ۲×n

ساده‌ترین بازیها، بازی ۲×۲ و ۲×n و m×۲ است که با روش ساده‌ای می‌توان پاسخ‌آن را به‌دست‌آورد. نخست یك‌بازی ۲×۲ باماتریس عمومی‌زیردرنظرمی گیریم. اگراین بازی دارای نقطهٔ سدل باشد، چنان که دیدیم پاسخ آن استراتژیهای محض مربوط به نقطهٔ سدل هستند. اما اگر بازی‌دارای نقطهٔ سدل‌نباشد، یعنی‌مقادیرپایینی وبالایی بازی‌برهم منطبق‌نباشد $\alpha \neq \beta$ باید برای‌بازی استراتژی بهینهٔ مختلطی‌مانند S_A^* برگزید که دراینجا طریق یافتن آن را نشان می‌دهیم

A \ B	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix}$$

دریك‌بازی ۲×۲ بدون نقطهٔ سدل هردو استراتژی طرفین ارزش‌دار به‌شمار می‌آید. وهمان‌گونه که گفته‌شد اگرما بااستراتژی بهینهٔ خود عمل کنیم و حریف ازاستراتژیهای محض خود استفاده نماید، پی‌آف D تغییر نمی‌کند. ازاین‌مطلب دومعادله زیر بدست می‌آید:

$$a_{11}P_1 + a_{21}P_2 = D$$
$$a_{12}P_1 + a_{22}P_2 = D$$

چون $P_1 + P_2 = 1$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$P_2 = 1 - P_1 \ , \ P_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

مقدارD باجایگزینی‌مقادیر P_1 و P_2 درهریك ازدومعادله بالا به‌دست‌می‌آید.

$$D = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

که مساوی‌نسبت تفاضل‌ضرب‌عناصر قطرهای اصلی‌وفرعی بر تفاضل‌جمع‌عناصر قطرهای اصلی‌وفرعی ماتریس می‌باشد. اکنون که مقداربازی (D) را می‌دانیم می‌توانیم استراتژی بهینهٔ S_B^* را هم‌تعیین کنیم.

برای حریف‌نیزچنین است: $a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = D$ و $q_1 + q_2 = 1$. ازحل این معادله‌ها داریم: $q_1 = \frac{D - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$ و $q_2 = 1 - q_1$

مثال

درمثال ۱ (بازی سکه) به‌یك‌بازی ۲×۲ رسیدیم. این‌بازی دارای‌نقطهٔ سدل‌نیست ($\alpha = -1$ و $\beta = +1$). بنابراین‌برای آن‌بایدیك‌جفت‌استراتژی بهینهٔ مختلط وجود داشته باشد:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} \quad و \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

برطبق معادلاتی که ملاحظه گردید، داریم:

$$q_1 = q_2 = \frac{1}{2} \ , \ P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$$

بنابراین استراتژی بهینه برای هریك از بازیکنان استفاده از هر دواستراتژی محض به‌طور اتفاقی وهم باتکرارمساوی است. پی‌آف میانه‌بازی مساوی‌صفر خواهدبود و بازی‌منصفانه می‌باشد.

بلوف و پاسخ‌بازی

دربعضی ازبازیها مانندپوکروبریج، بلوف نقش بسیار مهمی در تعیین پی‌آف بازیکنان دارد. منظور ازبلوف آن است که‌یکی از بازیکنان باوجود داشتن دست ضعیف‌پیشنهاد بالایی می‌دهد وحریف‌را معتقد می‌کند که دست او قوی است و او را از میدان بیرون می‌کند. دریك‌بازی همراه بابلوف، یافتن پاسخ بازی بدین سادگی نیست. برای تفهیم مطلب مثالی از یك بازی همراه بابلوف می‌آوریم:

مثال ۶ـ

A و B بادوکارت (آس‌ودولو) بازی می‌کنند. بازیکن A یکی‌ازکارتها را به‌طور اتفاقی برمی‌دارد، اما آن را به‌بازیکن B نشان نمی‌دهد. اگر کارت آس باشد، می‌تواند به B بگوید من‌آس دارم ویك تومان بخواهد. اگرکارت دولو باشد، می‌تواند دوراه پیش‌گیرد.

الف‌ـ بگوید من دولودارم ویك‌تومان به B بدهد.

ب‌ـ بلوف بزندوبگوید من آس دارم وازA یك‌تومان بخواهد.

اگرB یك‌تومان بدهد، A می‌تواندبگیرد. اما اگرقبول نکندوبخواهد که کارت خودرا روکند، درصورتی که A آس داشته باشد، B بایددوتومان بدهد ودرصورتی‌که دست A دولوباشد، B دوتومان می‌برد.

اکنون این‌بازی را تحلیل‌کرده و استراتژی بهینه را برای‌هر دو طرف پیدا می‌کنیم.

حل‌ـ

ساختمان بازی نسبتاً پیچیده است. شامل یك حرکت تصادفی‌اجباری‌ـ انتخاب یك کارت به‌وسیلهٔ A ـ ودوحرکت شخصی است‌که هیچیك از آنها ضروری نیست. اگر A آس داشته باشد ، وضعش معلوم است: می‌تواند فقط ازB یك‌تومان بخواهد. B انتخاب شخصی دارد ـ پیشنهاد A را بپذیرد یانه (یعنی یك تومان را بپردازد ، یا بخواهد دستش را روکند). اگر در حرکت تصادفی A دولورا بردارد او دارای یك حرکت شخصی است ـ بلوف بزند یا نه. اگر بلوف بزند، B یك‌حرکت شخصی دارد‌ـ پیشنهاد اورا بپذیرد یانه.

حرکتهای شخصی بازیکنان استراتژیهای آنها را تعیین می‌کند. مشهود است‌که A فقط دو استراتژی دارد:

A_1 بلوف بزند؛ A_2 بلوف نزند

B هم دواستراتژی دارد

B_1 پیشنهادA را بپذیرد، B_2 پیشنهاد A را نپذیرد

برای ساختن ماتریس بازی، باید میانگین پی‌آف را برای هرگونه ترکیبی از استراتژیهای‌مزبوربیابیم.

الف‌ـ (A_1 و B_1) (A بلوف می‌زند وB باورمی‌کند)، میانگین‌پی‌آف را به a_{11} نشان می‌دهیم.

احتمال آن‌که آس داشته باشد $\frac{1}{2}$ است، دراین‌وضع A حرکت شخصی‌ندارد وباید به B یك‌تومان پیشنهادکندکه B آن‌را پذیرفته ویك‌تومان به‌A می‌دهد.

اگر A دولو بیاورد (احتمال آن هم $\frac{1}{2}$ است) بلوف زده ویك‌تومان پیشنهاد می‌کند، B می‌پذیرد. میانگین پی‌اف چنین است:

$$a_{11}=\left(\frac{1}{2}\right)(1)+\left(\frac{1}{2}\right)(1)=1$$

ب‌ـ (A_1 و B_2)

دراین وضع A بلوف می‌زند، اما B نمی‌پذیرد ومی‌خواهد دستش را ببیند، پی‌آف را دراین‌وضع به a_{12} نشان داده وآن‌را حساب می‌کنیم. اگرAآس‌را بکشد، حرکت‌شخصی ندارد وبایدبه B یك تومان پیشنهادکند. B پاسخ‌می‌دهد که دستش را روکند ودرنتیجه ۲ تومان به A می‌بازد.

اگر A دولوبیاورد، بلوف‌زده ویك‌تومان‌به B پیشنهادمی‌کند. B پاسخ‌می‌دهد که دستش را روکند ودرنتیجه ۲ تومان از A می‌برد (پی‌آف A دراین‌مورد ۲ ـ است). پی‌آف متوسط چنین خواهدبود:

$$a_{12}=\left(\frac{1}{2}\right)(+2)+\left(\frac{1}{2}\right)(-2)=0$$

ج‌ـ (A_2 و B_1)

در این وضع A بلوف نمی‌زند و B درگیر نمی‌شود. مقدار a_{21} را محاسبه می‌کنیم. اگر A آس بیاورد، یك تومان پیشنهاد می‌کند، B آن‌را می‌پردازدو پی‌آف A مساوی ۱ است. اگرA دولوبیاورد، یك تومان می‌پردازد وB فقط می‌تواند آن‌را بپذیرد (پی‌آف A در این حالت ۱ ـ است). پی‌آف متوسط چنین خواهد بود:

$$a_{21}=\left(\frac{1}{2}\right)(+1)+\left(\frac{1}{2}\right)(-1)=0$$

د ـ استراتژی (A_2 و B_2)

دراین‌حالت A بلوف نمی‌زند، اما B درگیرمی‌شود. مقدارمتوسط پی‌آف را به a_{22} نشان می‌دهیم. اگرA آس بیاورد، یك تومان پیشنهاد می‌کند، Bپاسخ می‌دهدکه دستش راروکند وبنابراین‌برد A برابر۲ تومان خواهدبود(پی‌آف مساوی ۲+ است) . اگر A دولو بیاورد ، یك تومان می‌پردازد و B ناچار است که بپذیرد (پی‌آف‌مساوی ۱ ـ است). پی‌آف متوسط چنین است:

$$a_{22}=\left(\frac{1}{2}\right)(+2)+\left(\frac{1}{2}\right)(-1)=\frac{1}{2}$$

ماتریس‌بازی چنین‌خواهدبود:

A \ B	B_1 (باور می‌کند)	B_2 (باور نمی‌کند)
A_1 (بلوف می‌زند)	۱	۰
A_2 (بلوف نمی‌زند)	۰	۱ ۲

مقادیر پایینی و بالایی بازی به‌ترتیب $\alpha=0$ و $\beta=\frac{1}{2}$ است و بازی دارای نقطهٔ سدل نمی‌باشد. بنابراین پاسخ، یك استراتژی مختلط می‌باشد، و برطبق آنچه گفته شد، چنین خواهد بود:

$$P_1=\frac{1}{3}\ ,\ P_2=\frac{2}{3}\ ,\quad S_A^*=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

یعنی A باید هرسه مرتبه یك‌بار بلوف بزند و دو مرتبه بلوف نزند. میانگین پی‌آف چنین‌خواهد بود.

$$D=\frac{1}{3}$$

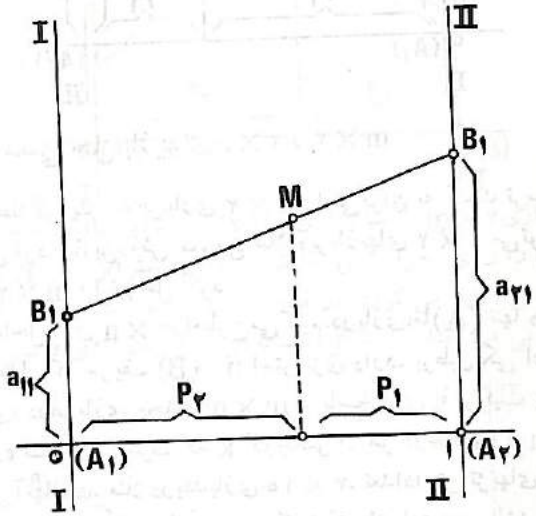
چون میانگین پی‌آف بزرگتر ازصفراست، لذا بازی برای B منصفانه نیست. چون باکاربرد استراتژی بهینهٔ مختلط A می‌تواند مطمئن باشد که حتماً یك پی‌آف‌میانگین $\frac{1}{3}$ را به‌دست می‌آورد.

روش هندسی برای حل بازی ۲×۲

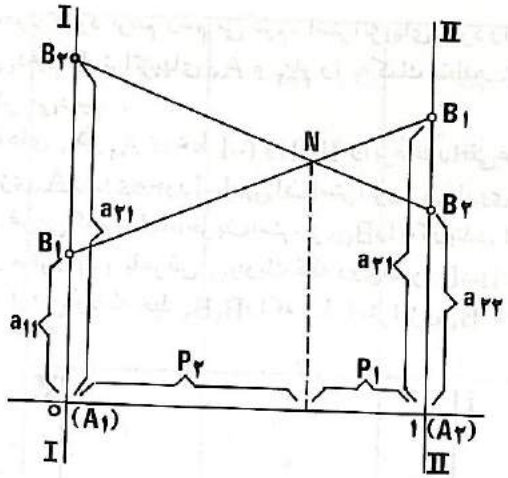
پاسخ بازی ۲×۲ را می‌توان به‌روش‌سادهٔ هندسی به‌دست‌آورد. فرض می‌کنیم یك‌بازی ۲×۲ عمومی با پی‌آفهای a_{11} ، a_{12} ، a_{21} ، a_{22} داریم، دریك

صفحه، دو محور عمود برهم رسم می‌کنیم. استراتژیهای خود را روی محور افقی نشان می‌دهیم. استراتژیهای A_1 و A_2 را به‌کمك نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ نمایش می‌دهیم.

از نقطه‌های A_1 و A_2 دوخط I–I و II–II را برمحور افقی عمود می‌کنیم. پی‌آف استراتژی A_1 را روی محور I–I و پی‌آف استراتژی A_2 را روی محور II–II نقل می‌کنیم. فرض می‌کنیم که ابتدا حریف استراتژی B_1 را به‌کار بندد. این استراتژی یك نقطه روی محور I–I باعرض a_{11} و یك نقطه روی محور II–II باعرض a_{21} معین می‌سازد. ازاین‌دو نقطه خط B_1B_1 را که خط استراتژی B_1 نامیده‌می‌شود، می‌گذرانیم.



اگر استراتژی مختلط $S_A:=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ P_1 & P_2\end{pmatrix}$ را برعلیه استراتژی محض B_1 مورد استفاده قرار دهیم، پی‌آف متوسط چنین است: $a_{11}P_1+a_{21}P_2$ ، که نقطه‌ای مانند M را روی خط B_1B_1 باطول P_2 معین‌می‌کند (اثبات‌آن‌باتوجه به‌روابطی که برای محاسبهٔ P_1 ، P_2 و D به دست آمد، بسیار ساده است). سپس به ترتیب مشابه، خط استراتژی B_2 را نیز رسم می‌کنیم. بدیهی است استراتژی بهینه روی هر دوخط B_1B_1 و B_2B_2 (نقطهٔ ماکزیمم خط شکسته)، یعنی محل تقاطع آنها که به N نشان داده‌ایم، قراردارد. اگر از N خطی بر محورافقی عمودکنیم P_1 و P_2 (که فاصله پای عمود از II–II و I–I است) به‌دست‌می‌آید. D پی‌آف میانگین‌بازی‌مساوی فاصلهٔ نقطهٔ N تامحورافقی‌است.



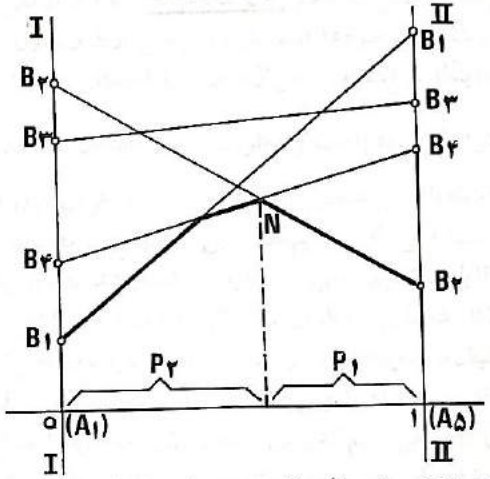
روش هندسی حل بازیهای n × ۲ و ۲ × m

ملاحظه گردید که هر بازی ۲ × ۲ را می‌توان به کمك ترسیم دیاگرام ساده‌ای حل کرد. با این روش عمومی علاوه بر بازیهای ۲ × ۲ می‌توان بازیهای n × ۲ و ۲ × m را نیز حل کرد.

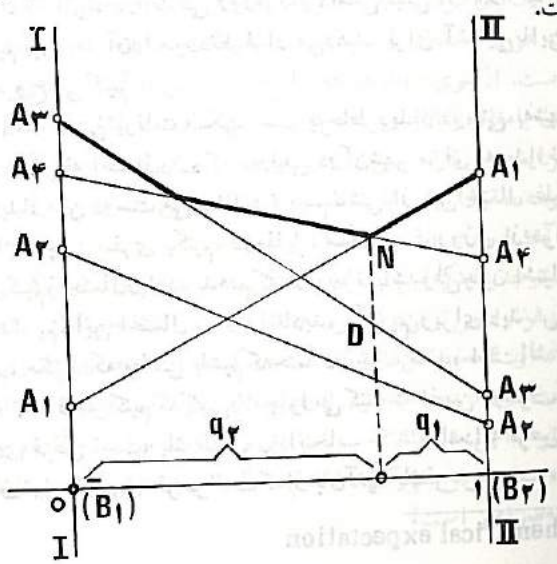
ابتدا حل بازی n × ۲ را مطرح می‌کنیم. در بازی، ما (A) تنها دو استراتژی داریم. درحالی که حریف (B)، n استراتژی دارد. برطبق یکی از قضایای مهم نظریهٔ بازی، درهر بازی محدود m × n، پاسخ بازی از ترکیب k استراتژی «ارزش‌دار» تشکیل می‌شود، که k کوچکتر از هر دوعدد m و n، یا مساوی کوچکترین آنهاست. مثلا در یك بازی ۱۰ × ۳، تعداد استراتژیهای ارزش‌دار که در استراتژی بهینهٔ مختلط شرکت دارند، کوچکتر یا مساوی ۳ می‌باشد. از این قضیه نتیجه می‌شود که فقط دو استراتژی ارزش‌دار در پاسخ بازیهای n × ۲ و ۲ × m برای طرفین وجود دارد (بهتر است بگوئیم، دو استراتژی که از بقیه ارزش‌دارتر است).

برای حل بازی n × ۲ مسأله را به صورت بازیهای ۲ × ۲ (به ازای هر استراتژی ارزش‌دار B) ترسیم می‌کنیم. n خط مطابق شکل ترسیم می‌شود (درشکل ۴ = n فرض شده است). پایین‌ترین مرز خطوط را که یك خط شکسته است (درشکل، خط شکسته B_1MNB) تعیین می‌کنیم. نقطهٔ N که نقطهٔ ماکزیمم روی این خط است، پاسخ بازی می‌باشد و استراتژی بهینهٔ مختلط $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix}$ را برای ما تعیین می‌کند. ارتفاع N از خط افقی مساوی D مقدار بازی است.

در این حالت استراتژی بهینهٔ حریف از ترکیب استراتژیهای ارزش‌دار B_2 و B_4 که نقطهٔ N محل تقاطع آنهاست، تشکیل می‌شود.



حل بازی ۲ × m نیز مشابه بازی n × ۲ است. با این تفاوت که هر استراتژی B (حریف) را روی محور افقی نمایش می‌دهیم و استراتژیهای A (طرف ما) به شکل خطوطی ترسیم می‌گردد. در این حالت N پاسخ مسأله است که بالاترین نقطهٔ مرز بالایی می‌باشد. در شکل، مسأله برای ۴ استراتژی فرضی A ترسیم شده است.



«امیدریاضی»* درداستان ملانصرالدین

محمد باقری

درحساب احتمالات مفهومی به‌نام «امیدریاضی» وجود دارد که دارای کاربردهای‌عملی گسترده‌ای‌است و پیش‌از آنکه تعریفی دقیق و کمی ازاین‌مفهوم عرضه شود، عملاً افراد درزندگی روزمره برداشتی کیفی ازآن‌دارند و به‌طور حسی درتصمیم گیری‌ها آن‌را موردنظرقرار می‌دهند. برای آشنایی بااین‌مفهوم، ازچندمثال شروع می کنیم:

مثال ۱ــ گاهی اوقات ممکن است به‌خاطردیدار دوستی به‌شهر دوری مسافرت‌کنیم. اگرچه احتمال‌دارد که به‌دلیلی درآن‌شهر موفق به‌دیدارش‌نشویم اما اهمیت دیدار آن دوست می‌تواندبرتردید ناشی از این‌احتمال غلبه کند و درنتیجه اقدام به‌چنین سفری بکنیم. درمقابل، ممکن‌است روزی ازحوالی‌خانهٔ آشنایی‌عبور کنیم‌واحتمال‌زیادهم بدهیم که اودرخانه‌باشدولی‌چون اشتیاق‌زیادی به‌دیدارش نداریم، این احتمال زیاد را نادیده بگیریم وبرای دیدنش‌راه خود را دور نکنیم، مگرآنکه مطمئن باشیم که‌حتماً در خانه مانده است.

مثال ۲ــ فرض کنیم که کسی‌رامجبورمی کنند که ازبین دوظرف که‌هریك حاوی تعدادی قرص است، یك ظرف را انتخاب کند ویك‌دانه قرص‌ازآن را بخورد، ظرف‌اول‌حاوی ۱۰ قرص‌است که‌ازمیان‌آنها یك‌قرص‌موجب مسمومیت

* mathematical expectation

خفیف می‌شو دودرظرف دیگر ۱۰۰۰ قرص موجوداست که یك‌دانه‌ازقرص‌های آن کشنده است. ضمناً، همهٔ قرص‌های هرظرف‌کاملا بایکدیگر مشابه ویکسان هستند. بی‌شك شخصی که مجبور به انتخاب است، اگرازعقل‌کافی برخوردار و به‌زندگی وتندرستی خودعلاقمند باشد، قرصی ازظرف اول برخواهد داشت. چرا؟مگرنه‌اینکه درانتخاب‌قرص‌ازظرف اول‌احتمال برداشتن قرص نامطلوب صدبار بیشتر ازظرف‌دوم‌است؟(درظرف‌اول این‌احتمال $\frac{1}{10}$ ودرظرف دوم $\frac{1}{1000}$ است.) دراینکه‌بایدآن شخص قرص‌اجباری را ازظرف اول انتخاب کند جای تردیدی نیست، ولی‌اگربتوانیم‌علت این انتخاب را به‌روشنی‌ودقت بیان‌کنیم، آنچنان‌که قابلیت تعمیم به‌موارد مشابه‌را داشته‌باشد، به‌درك‌ریاضی‌مفهوم «امید ریاضی» نائل شده‌ایم. درظرف‌اول اگرچه احتمال برداشتن قرصی‌که موجب مسمومیت‌خفیف‌می‌شودخیلی بیشتراست‌ولی‌درعوض‌ضررحاصل‌ازآن‌بسیارکمتراز وقتی‌است که‌درظرف دوم‌قرصی‌راکه انتخاب کرده‌ایم، همان‌قرص کشنده‌باشد.

مثال ۳ــ می‌دانیم که‌برای بیمه کردن‌یك‌مغازه‌یاساختمان که‌درمجاورت پمپ‌بنزین‌باشد، باید حق بیمهٔ نسبتاًزیادی درسال پرداخت شود. دراین مورد اگرچه احتمال آنکه درطول‌سال آتش‌سوزی رخ ندهد ــ که درواقع‌ازدست‌رفتن حق بیمه‌ای است که پرداخت می‌شود ــ بیش از۵۰ درصد است، ولی ازآنجاکه درصورت وقوع چنین حادثه‌ای ضررحاصله به‌مراتب بیشتر از حق بیمه است، بیمه‌کردن آن مغازه یاساختمان به‌صرفه ومعقول خواهد بودوبدیهی است‌که هرچه احتمال آتش‌سوزی بیشترباشد، پرداخت‌حق بیمه بیشتری‌قابل‌قبول است. ازسوی دیگرهرچه مبلغ‌ضرر ناشی ازآتش‌سوزی ــ که به قیمت ساختمان یامغازه‌وکالاهای داخل‌آن بستگی دارد ــ بیشترباشد، بازهم میزان‌حق بیمه افزایش می‌یابد. پس درچنین موردی برای آنکه ببینیم پرداخت چه‌مبلغی برای بیمه معقول است باید هم مبلغ ضرر ناشی از آتش‌سوزی و هم احتمال وقوع آتش‌سوزی را ملاك عمل قرار دهیم.

باتوجه‌به‌اینکه‌این‌مفهوم‌درزندگی‌روزمره‌درموارد گوناگونی‌ظاهرمی‌شود مثالهای فراوان‌می‌توان‌ذکر کرد. به‌عنوان‌آخرین‌مثال،مسئله‌ای راعنوان‌می کنیم:

مثال ۴ــ فرض کنید که ازدرون کیسه‌ای که حاوی ۵ توپ‌قرمزو۸توپ آبی است، یك‌توپ‌را به‌طور تصادفی‌خارج‌می کنیم. جایزهٔ توپ‌قرمز ۵ ریال و جایزه توپ‌آبی ۳ ریال است. برای بردن جایزه بایدرنگ توپی‌راکه خارج می‌شود درست‌پیش بینی کرده باشیم. حال باتوجه‌به شرایط مسئله، انتخاب کدام رنگ به‌صرفه‌تر است؟

برای یافتن جواب نیاز به‌محاسبه‌ای داریم که مستقیماً به‌مفهوم امیدریاضی مربوط می‌شود. اگر رنگ قرمز را انتخاب کنیم، احتمال آنکه توپی به‌همین رنگ از کیسه خارج شود $\frac{5}{13}$ و این احتمال در مورد خارج‌شدن توپ آبی $\frac{8}{13}$ است. اگر ارزش جایزهٔ هردو رنگ یکسان بود، بلافاصله رنگ آبی را انتخاب می‌کردیم. ولی باتوجه به‌صورت مسئله باید تفاوت ارزش این دوحالت را نیز درمحاسبه منظور کنیم. برای اینکار ملاک مقایسه باید حاصل‌ضرب هر احتمال در ارزش حادثه مربوط به آن باشد. این ملاک مقایسه همان کمیتی است که در حساب احتمالات امیدریاضی خوانده می‌شود:

امیدریاضی برای خارج‌شدن توپ قرمز $= \frac{5}{13} \times 5 = \frac{25}{13}$

« « « « « « آبی $= \frac{8}{13} \times 3 = \frac{24}{13}$

می‌بینیم که امیدریاضی برای انتخاب رنگ قرمز بیشتر از رنگ آبی است و بنابراین انتخاب رنگ قرمز به‌صرفه‌تر خواهد بود. باتوجه به این توضیحات اکنون می‌توانیم امیدریاضی را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

«امیدریاضی عبارت است از ارزش یك حادثه ضرب دراحتمال وقوع آن»

تاجری که مبلغ معینی پول برای معامله‌ای به‌جریان می‌اندازد، راننده‌ای که برای نزدیك‌تر کردن مسیرش خطر جریمه پلیس را می‌پذیرد وازخیابان یکطرفه درجهت خلاف حرکت می‌کند، شاگرد مدرسه‌ای که درسر امتحان یك درس سخت، خطر لورفتن را به‌جان می‌خرد ودست به تقلب می‌زند و بالاخره آنکه سیلی نقد را به حلوای نسیه ترجیح می‌دهد، همهٔ اینها به‌طور ناخودآگاه مفهوم امید ریاضی را به‌کار می‌گیرند. یك ضرب‌المثل عربی می‌گوید: **«یك گنجشك دردست بهتر ازده گنجشك در هواست»**. بهرحال امروزه مفهوم امیدریاضی به‌طور آگاهانه ودقیق وروشن دراقتصاد، برنامه‌ریزی، مدیریت صنعتی، مسائل ایمنی، انبارداری، بازی‌ها وموارد متعدد دیگر مورد استعمال یافته است.

داستانی ازملانصرالدین وجود دارد که تا حدی ــ اگر نگوییم دقیقاً ــ به بحث ما مربوط می‌شود. می‌گویند یك روز ملا کناردریا نشسته بودوقاشقی پر ازماست را درآب فروبرده وآرام تکان می‌داد. پرسیدند که: «علت این کارچیست»؟ جواب داد که: «می‌خواهم آب دریا را ماست بزنم». گفتند: «آخر این که نمی‌شود». گفت: «قبول دارم ولی فکرش را بکنید که اگر می‌شد چه ماست فراوانی به‌دست می‌آمد»!

دراین داستان که منطق آن ازنظر عقل متعارف مبالغه‌آمیز و همان درخور لطیفه است نکتهٔ اصلی، برداشت حسی و کیفی از مفهوم امید ریاضی درذهن سازندهٔ داستان است.

***

رمز و راز عددها و شکل‌ها

۱. دراین ضرب، هرحرف نمایندهٔ یك رقم، حرف‌های مساوی نمایندهٔ رقم‌های مساوی و حرف‌های مختلف نمایندهٔ رقم‌های مختلف است. رقم‌ها را مشخص کنید:

$$AB \times CD = BBB$$

۲. اگر هرکدام از دوتصاعد حسابی

۲ ۷ ۱۲ ۱۷ ۲۲ ۲۷ ...

۲ ۵ ۸ ۱۱ ۱۴ ۱۷ ...

را تا ۶۰ جمله بنویسیم، چندجملهٔ مساوی در دوتصاعد وجود خواهد داشت؟

۳. تعداد سکه‌های هم‌اندازه داریم. وقتی که خواستیم آنهارا به‌صورت یك‌مربع درآوریم، ۵ سکه زیاد آمد. بدون دست‌زدن به‌مربع اول، خواستیم، مربعی بسازیم که‌ضلع آن یك‌واحد بزرگتر باشد، ۸سکه کم آوردیم. چند سکه داشته‌ایم؟

۴. چه ساعتی است؟

ــ اگر یك‌چهارم زمانی را که ازظهر گذشته‌است، به‌نصف فاصلهٔ زمانی ازحالا تاظهر فردا اضافه کنیم، پاسخ خودرا به‌دست می‌آورید.

۵. برای به‌دست آوردن عدد ۷، پنج‌بار ازعدد ۲ استفاده کنید.

۶. آیا می‌توانید بااستفاده از تمامی ده رقم از ۰ تا ۹ ، عدد «۹» را به‌دست آورید؟

۷. نیمدایره‌ای به‌شعاع واحدرا دوریکی از دوانتهای قطر آن، به‌اندازهٔ ۳۰ درجه دوران داده‌ایم . مطلوبست مساحت شکلی که ضمن‌این دوران، محیط بر نیمدایرهٔ اصلی می‌شود.

پاسخ‌ها را در صفحه ۷۱ ببینید

مارتین گاردنر
ترجمهٔ پرویز شهریاری

ریاضیات و ورق‌های بازی

ورقهای بازی باردیف منظمی که دارند وباتوجه به‌اینکه چهار نوع و دورنگ هستند، زمینهٔ بسیار جالبی برای سرگرمیهای ریاضی هستند. دراین مقاله چندمسالهٔ تازه را درزمینهٔ ترکیب، مورد بررسی قرار می‌دهیم که‌ورقهای بازی، می‌تواند به‌عنوان بهترین مدل برای آنها باشد.

قرمز وسیاه

نورمان هیلبرت جوان، که عاشق تردستی است، قانون جالبی‌را کشف کرده است. این قانون را بامثالی روشن می‌کنیم. ورقها را طوری مرتب کنید که یك‌درمیان قرمز وسیاه باشد. دستهٔ ورق را به‌دوقسمت تقسیم کنید ومواظب باشید که ورقهای رویی دردوقسمت، رنگ متفاوت داشته‌باشند. حالا، یکی‌از قسمتها را با دیگری «جفت» کنید و ورقها را از بالا دوبه‌دو تاآخر بردارید. هیچ شگفتی ندارد که هرزوج دوباره از یك‌ورق قرمز ویك ورق سیاه، تشکیل شده است.

هیلبرت توضیح می‌دهد که این‌قانون، حالت خاصی از یك اصل کلی‌تر است که به‌نام **اصل کلی هیلبرت** مشهور شده است.

این قانون را می‌توان درهررشتهٔ تکراری نشانه‌ها به‌کاربرد. این‌مطلب

را روی چندمثال نشان می‌دهیم.

ورقها را به‌این‌ترتیب دسته می‌کنیم که به‌ترتیب یك پیك، یك دل، یك خاج ویك خشت، دوباره، پیك، دل، خاج، خشت وبه‌همین‌ترتیب، قرار گرفته باشند. حالا ورق‌ها را یکی‌یکی از بالا بر می‌داریم و آنهارا روی‌هم‌می‌چینیم. کافی است ۲۰ تا ۳۰ ورق انتخاب کنیم (تعداد دقیق‌آنها اهمیتی ندارد). این ورق‌ها را دربقیهٔ دسته ورق «برمی‌زنیم». حالا از بالا، گروه‌های چهار ورقی رابردارید، می‌خواهید امتحان کنید ومی‌خواهید بدون‌امتحان قبول کنید: درهر گروه چهار ورقی از هرچهار رنگ ورق وجود خواهد داشت.

هرچهار رنگ

اصل هیلبرت، مبنای بسیاری از تردستی‌های مربوط به ورق‌های بازی است. واین یکی از ساده‌ترین‌آنهاست. دسته ورقی راکه ازقبل‌آماده کرده‌اید، به‌کسی می‌دهید. از او بخواهید که از بالا، یکی‌یکی، بیست ورق بردارد و سپس آنها را دربقیه ورق‌ها «بر بزند». بعد دسته ورق مخلوط شده رابگیرید وطوری روی میز بگذارید که روی ورق‌ها دیده نشود (بایدطرف مقابل‌مطمئن شود که شما نمی‌توانید نوع ورق‌ها را ببینید). آن وقت ادعا کنید که شما این قدرت را دارید که با لمس کردن ورق، رنگ آن را تشخیص دهید. حالتی به‌خود بگیرید که‌دارید بادقت تمام، باانتهای انگشتان‌خود، ورق‌ها راآزمایش می‌کنید وآنها را در گروه‌های چهارتایی، روی میز بچینید. آن وقت درمیان شگفتی همگان، نشان خواهید داد که در هر گروه، از هر چهار رنگ ورق وجود دارد. برای اینکه دراین تردستی موفق‌شوید، تنها لازم است که قبل‌از «برزدن»، ردیف‌رنگ‌ها دریکی از دوقسمت دسته ورق، عکس دیگری باشد. واین‌وضع، بابرداشتن یکی‌یکی ورق‌ها وگذاشتن‌آنها به‌روی‌هم، خودبه‌خود، پیش می‌آید.

می‌توان تردستی را به‌این طریق‌هم انجام داد: قسمتی از دستهٔ ورق را بردارید، آن‌را برگردانید، به‌نحوی که روی ورق‌ها به‌طرف پایین قرارگیرد، سپس همانطور درقسمت باقی مانده (که درآنجا روی ورق‌ها به‌طرف بالا است) «بر بزنید».

راه سومی‌هم وجود دارد: ورق‌ها را یکی‌یکی از بالا بردارید ودردستهٔ ورق جا بدهید: اولی را درجایی نزدیك پایین دسته ورق، دومی را بالاتراز آن (اگر روی دومی‌هم جا بگیرد مانعی ندارد)، سومی را بازهم بالاتر و به‌همین‌ترتیب. این‌روش، هم‌ارز آن است که قسمتی از دسته ورق را باردیف

عکس روی‌هم بگذارید وسپس در باقی‌ماندهٔ دسته ورق «بر بزنید». البته، ردیف اولیهٔ رنگ‌ها به‌هم می‌خورد، ولی به‌هرحال درهر گروه چهار ورقی، ازچهار رنگ وجود دارد.

با دو دسته ورق

براساس اصل **هیلبرت**، تردستی دیگری راهم می‌توان باورق‌های بازی انجام داد. دودسته ورق انتخاب کنید. آنهارا باید پیش‌از نمایش تردستی، به این‌ترتیب آماده کرد: دریکی از دسته‌ها، ورق‌ها را به‌ترتیبی از بالا به‌پائین منظم کنید (نوع ترتیب‌مهم نیست) و دردستهٔ دوم، ورق‌ها را به‌همان‌ترتیب، ولی از پایین به‌بالا (یعنی به‌طور خلاصه، درجهت عکس ردیف ورق‌های دستهٔ‌اول) قرار دهید. حالا اگر یکی از دسته ورق‌ها را در دیگری «بر بزنید». و سپس آنچه‌را که‌از دودسته‌ورق به‌دست‌آورده‌اید دقیقاً نصف کنید، درهر کدام ازدونیمه، انتخاب کاملی از ۵۲ ورق مختلف بازی، به‌دست خواهد آمد.

ماشین تردستی می‌کند

ژوزف زیبرتس ازکالج بوستون، براساس‌همین اصل هیلبرت، برنامه‌ای برای کامپیوتر ریخت. طبق این برنامه، کامپیوتر می‌توانست نمایش‌تردستی را با ورق‌های بازی انجام دهد. برنامه راهمراه با ۵۲ کارت مشبك، که‌روی آنها نام ورق‌های مختلف بازی کدبندی شده است (یعنی درواقع، یك دسته ورق) به‌ماشین می‌دهند. آن‌وقت، ماشین این‌دستورها را به‌تماشاچی‌می‌دهد:

۱. از دسته، چند ورق یکی‌یکی بردارید و قسمتی را که برداشته‌اید، در بقیه «بر بزنید».

۲. دسته ورق را به‌دوقسمت تقسیم کنید.

۳. ورق بالایی یکی از دوقسمت را نگاه کنید وآن‌را به‌خاطر بسپرید.

۴. ورقی راکه به‌خاطرسپرده‌اید، داخل یکی از دوقسمت بکنید وسپس دوقسمت ورق‌ها را درهم «بر بزنید».

۵. قسمتی از دسته ورق را بردارید و زیر آن قرار دهید. این کار را، اگر می‌خواهید، چندمرتبه تکرار کنید.

۶. حالا دسته ورق را به‌من برگردانید، من به‌شما می‌گویم کدام ورق را به‌خاطر سپرده بودید.

اگر مثلا ورق به‌خاطر سپرده شده «پنج لوی‌دل» باشد، کامپیوتر پاسخ می‌دهد: «ورق شما، پنج لوی‌دل است، این رانپرسید، چون من آن‌رامی‌دانستم،

تردست‌هیچ‌وقت رازهای‌خودرا آشکار نمی‌کند. ورق دیگری به‌خاطر بسپارید، من دوباره آن‌را کشف خواهم کرد».

اگر تماشاچی، دستورها را بادقت انجام ندهد، با وجودی که ماشین اغلب ورق را پیدا می‌کند، معهذا این پاسخ اضافی را می‌دهد: «من بازحمت رنگ ورق شما را پیدا کردم. خواهش می‌کنم به من کمك کنید. اگر رنگ ورق شما سیاه است، کلید B را بچرخانید، ولی اگر رنگ ورق شما قرمز است، کلید C را بچرخانید».

اینکه ماشین چگونه ورق به خاطرسپرده را پیدا می‌کند، دشوارنیست. دوبار «برزدن» تکراری قسمت‌های دسته ورق، ردیف اولیهٔ ورق‌های دسته را به چهار دنباله تقسیم می‌کند که یکی بعد از دیگری قرارگرفته است. اگر دستورها درست انجام شود، ورقی که به خاطر سپرده شده است، درجایی که در دنبالهٔ مربوطه‌اش باید باشد، قرار نمی‌گیرد. کامپیوتر، با توجه به همین نشانه، بلافاصله آن را پیدا می‌کند و نام می‌برد.

خواننده می‌تواند این تردستی را خودش هم انجام دهد. برای این منظور باید قبلا ردیف ورق‌ها را در دسته، یادداشت کنید. بعد از آن که تماشاچی شما، کارهایی را که در دستورها آمده است، انجام داد، باید دسته ورق را بردارید وبه اطاق مجاور بروید. در آنجا می‌توانید بدون هیچ مانعی ردیف موجود ورق‌ها را با ردیفی که یادداشت کرده‌اید، مطابقه کنید و ورقی را که در جای خود نیست، پیدا کنید.

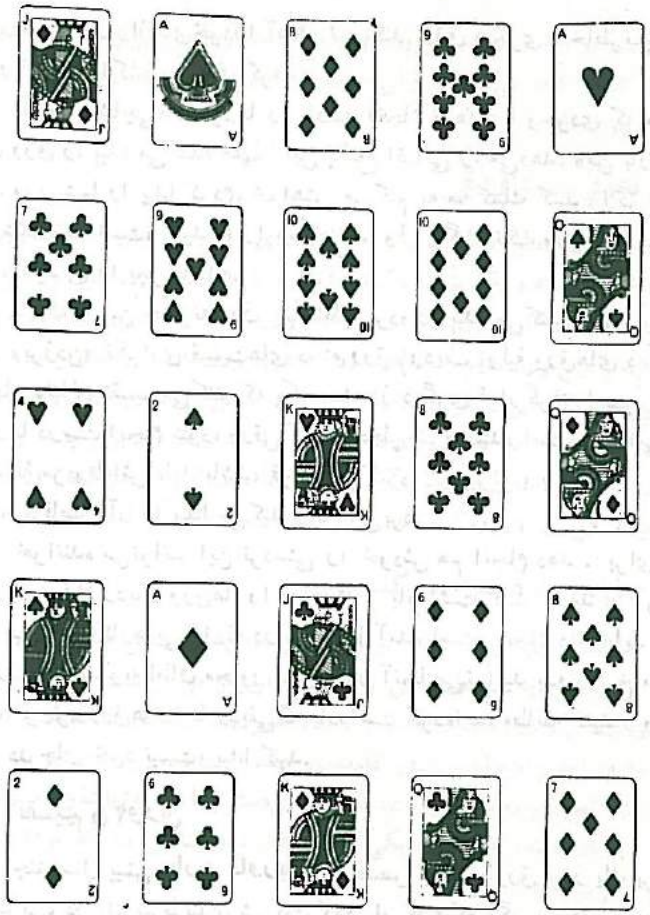
تقسیم ۲۵ورق

چند سال پیش، **بارت ماوریك**، متخصص بازی باورق، در یك برنامهٔ تلویزیونی، در یك شرط‌بندی شرکت کرد. او گفت‌که اگر بیست وپنج‌ورق، به دلخواه از دسته ورق بردارند و به او بدهند، می‌تواند آنها را در پنج ردیف (و در هرردیف پنج ورق) طوری منظم کندکه در هرردیف، یکی ازدو وضع زیر وجود داشته باشد.

یا دقیقاً ورق‌ها، بدون توجه به رنگ آنها، به ردیف بزرگی خال‌های خود (مثلا، دولو، سه‌لو، چهارلو، پنج‌لو و شش‌لو) باشند:

یا چهار ورق هم ارزش و پنجمی دلخواه یا سه‌کارت هم ارزش با دو کارت هم ارزش دیگر (مثلا، سه‌تا ده‌لو و دوتا هفت‌لو).

اگر خواننده ۲۵ ورق را به تصادف انتخاب کند، با تعجب متوجه می‌شود که چقدر ساده می‌تواند آنها را در پنج ردیف، با توجه به همین



شرطها ، قراردهد . ابتدا ردیف‌های هم رنگ را به ترتیب پهلوی هم قرار دهید (دست‌کم دو ردیف خواهید داشت) . سپس به تنظیم ردیف‌هایی می‌پردازیم، که در آنها ورق‌های با رنگ‌های مختلف دقیقاً به ترتیب ارزش خود قرار گرفته‌باشند، وهمچنین ردیف‌هایی از ورق‌ها، که دارای‌دوارزش‌اند. من تصوری دربارهٔ میزان احتمالی موفقیت ندارم؛ تنها می‌توانم بگویم که‌این احتمال بسیار زیاد است. ولی، به هرحال صددرصد نیست . می‌توان ترکیبی از ۲۵ ورق را انتخاب‌کرد که قابل تبدیل به پنج ردیف مشروط ما ، نباشد.

بعد ازاین مقدمه، ازخواننده دعوت می‌کنم که ۲۵ ورق را، به‌صورتی که در شکل ۱ نشان داده شده است، انتخاب‌کند . آیا در مورد این انتخاب

می‌توان به نتیجه رسید؟ اگر پاسخ مثبت است ، پنج ردیف مورد نظر را (با توجه به شرط‌ها) درست‌کنید. ولی، اگر پاسخ منفی‌است، دلیل ناممکن بودن آن را پیداکنید. حل این مسأله، کمی تیزهوشی می‌خواهد، واگر راه درست آن راپیدا کنید ، به سرعت حل می‌شود . کلید حل مسأله ، تنها در یکی از ورق‌هاست.

مسأله

اینهم یك مسألهٔ دیگر. سه ورق بازی را کنار هم بچینید ، به نحوی‌که خال‌های آنها دیده نشود. مسأله این است که ضمن پشت و رو کردن متوالی ورق‌ها درجای خود، با هفت حرکت ، همهٔ $۸=۲^۳$ تبدیل مختلف ورق‌ها را به‌دست آوریم. در تبدیل آخر، باید خال‌های هرسه ورق دیده‌شود. شش راه حل مختلف برای این مسأله وجود دارد ، اگر روی ورق را به «P» و پشت آن را به «K» نشان دهیم، یکی از این راه حل‌ها را می‌توان به این ترتیب نوشت:

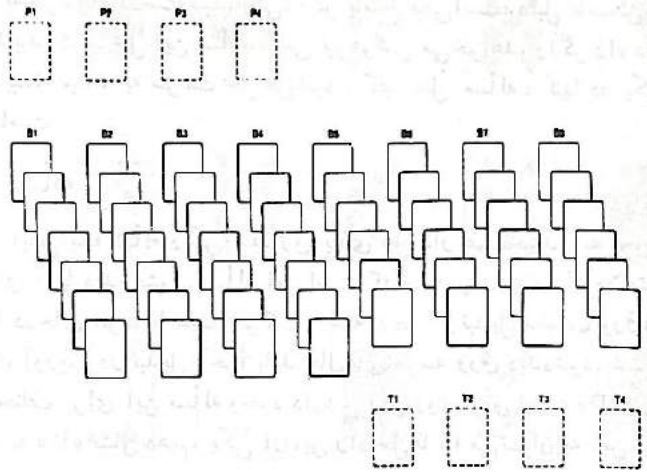
PPP ، PPK ، PKK ، PKP ، KKP ، KPP ، KPK ، KKK

آیا چنین راه حلی برای چهار ورق وجود دارد ؟ $۱۶=۲^۴$ ترکیب مختلف برای چهار ورق پیدا می‌شود. آیا می‌شود باشروع از چهار ورقی‌که پشت آنها دیده می‌شود، با ۱۵ حرکت ، همهٔ ترکیب‌های مختلف را به دست آورد، به نحوی‌که در ترکیب آخر، خال‌های هرچهار ورق دیده شود؟ معلوم شده است‌که این مسأله قابل حل نیست. آن را اثبات کنید . اثبات را وقتی می‌توانید به‌سرعت پیداکنید که‌مسأله‌را برای‌حالت‌کلی، یعنی‌ردیفی‌از n ورق، در نظر بگیرید.

خلوت نشین

در پایان از بازی «خلوت نشین» صحبت می‌کنم که کمتر مشهور شده است و در خودش انواع نامحدودی از مسأله‌های جالب مربوط به ترکیب‌را پنهان‌کرده است. این بازی، همان طورکه از نامش پیداست، یك نفری است و اگر مایل باشید ، می‌توانید نامش را بازی «صبر وحوصله» بگذارید . در اینجا هم، مثل‌بازی شطرنج باید بتوان حرکت‌های ممکن زیادی را پیش‌بینی کرد . اگر از روی بی‌فکری ، حرکت اشتباهی پیش آید، امکان اصلاح آن در حرکت‌های بعدی ممکن نیست. در صورت وجود مهارت، احتمال انجام موفقیت‌آمیز بازی خیلی زیاد است، ولی برای‌به دست آوردن مهارت، راهی

جز تجربه نیست.



برای بازی، یك دستهٔ کامل ۵۲ تایی از ورق های بازی لازم است. ورق‌ها را خوب درهم بریزنید. وسپس به تقسیم آنها بپردازید. ورق‌ها رادر هشت ردیف، به‌نحوی که خال‌های آنها دیده شود، بچینید (شکل ۲). ردیف‌ها را از چپ به راست بچینید و ضمناً در هر ردیف، هر ورق را روی دیگری بگذارید. بعد از پایان چیدن، در هرکدام از چهار ردیف اول، هفت ورق و در هرکدام از سه چهار ردیف آخر، شش ورق خواهد بود.

چهار مربع مستطیل نقطه چین P_1، P_2، P_3 و P_4، که در بالای شکل می‌بینید، جای چیدن ورق‌هاست و درابتدا خالی هستند. هدف بازی این‌است که درهرکدام ازاین مستطیل‌ها، تمام ورق‌های یك رنگ، به ترتیب وباشروع از تك خال، گذاشته شود (تك‌خال، دولو، سه‌لو، ... و آخرکار، شاه). بازی وقتی باموفقیت تمام می‌شودکه هرچهار رنگ ورق‌ها در جای خود، به‌ترتیبی که گفتیم، قرارگیرند.

چهار مستطیل نقطه چین T_1، T_2، T_3 و T_4، که در پایین شکل‌دیده می‌شود، جای «گذاشتن موقتی» ورق‌هاست. ضمن بازی، درهرخانهٔ موقتی‌تنها یك ورق می‌تواند قرارگیرد. بنابراین، حداکثرظرفیت خانه‌های موقتی‌رویهم، چهار ورق است.

قانون‌های بازی چنین است:

۱. در هر حرکت، تنها یك ورق را می‌توان جابه‌جا کرد.

۲. ازهرردیف، تنها ورق رویی را (که خال‌آن معلوم است) .می‌توان برداشت.

۳. هرتك خال را می‌توان در هرکدام از مستطیل‌های بالایی قرارداد. روی تك خال باید دولو و بعد روی آن سه‌لو را قرارداد و به همین ترتیب تا به شاه برسد. همهٔ این ورق‌ها را یا باید از ورق رویی ردیف‌ها برداشت و یا از یکی از خانه‌های موقتی T.

۴. ورق‌رویی‌یك‌ردیف راتنهاوقتی‌می‌توان روی‌ورق‌رویی‌ردیف‌دیگری قرار داد که بتواند روی ورق بلافاصله بزرگتر، و ضمناً هم رنگ خودش قرارگیرد. مثلا نه لوی پیك را می‌توان روی ده لوی پیك قرارداد.

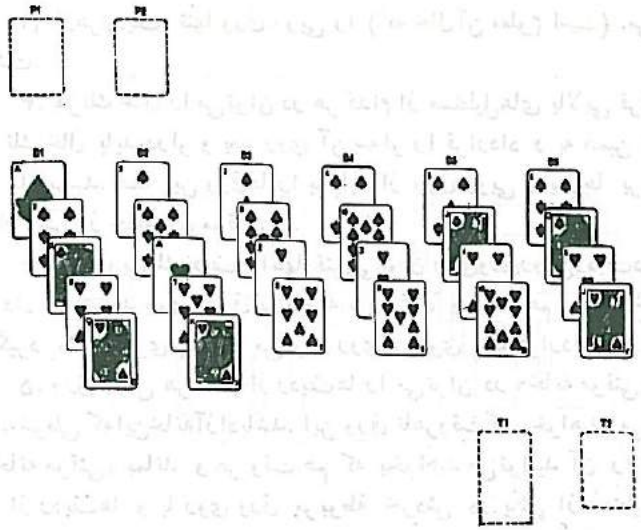
۵. ورق رویی هرکدام از ردیف‌ها را می‌توان در «خانه موقتی» قرار داد، به‌شرطی که‌این‌خانه‌آزادباشد. این ورق تاهروقت‌که بخواهید، می‌تواند در «خانه موقتی» بماند و هر وقت هم که بخواهید می‌توانید آن را، روی یکی از ردیف‌ها و یا روی ورق مربوطهٔ خودش در یکی از مستطیل های بالایی قرار دهید.

۶. اگر از یك ردیفی، همهٔ ورق‌ها برداشته شود، می‌توان هر ورقی را (از آنهایی که می‌توان جا به‌جا کرد)، در ردیف آزاد شده، قرارداد. ولی، بعد از آن که یك ورق در این ردیف گذاشته شد، ورق‌های دیگر را، تنها طبق قانون ۴ می‌توان روی آن قرارداد.

می‌توان از دسته ورق، یك، دو یا سه رنگ را انتخاب کرد و بازی «خلوت نشین» را با ردیف‌های کمتری انجام داد. اگر از سه رنگ استفاده کنیم، باید آنها را درهفت ردیف چیدوسه «خانهٔ موقتی» در نظرگرفت. اگر بازی رابا دو رنگ انجام‌می‌دهید، آنهارا درشش ردیف قراردهید و دو «خانه موقتی» در نظر بگیرید. بازی با یك رنگ (پنج ردیف و یك «خانهٔ موقتی») خیلی جالب نیست، زیرا در هر وضعی، مسأله دارای جواب است که بدون زحمت به دست می‌آید.

بازی با دو رنگ (۲۶ ورق)، بهترین حالت برای آشنایی برنازك‌بینی‌های لازم است. بهتر است، وضع اولیهٔ ردیف ورق‌ها را یادداشت‌کنید و اگرنتوانستید بازی را با موفقیت به پایان برسانید: دوباره ورق را طبق‌همان ردیف‌های اول بچینید و با طرح دیگری بازی را آغاز کنید. البته، هر وضع اولیه‌ای قابل حل‌نیست، ولی‌اغلب، بن‌بستی که دربرخورد اول به نظرمی‌رسد، راه حل ظریفی را هم در خودش پنهان‌کرده است.

درپایان مقاله، یك مسألهٔ دیگر هم برای خواننده مطرح می‌کنم. بخت



خود را در حل بازی «خلوت‌نشین» با دو رنگ. امتحان کنید. تا جایی که من توانسته‌ام امتحان کنم، کوتاه‌ترین راه برای رسیدن به موفقیت، با ۴۵ حرکت به پایان می‌رسد. ممکن‌است شما راه حل کوتاه‌تری هم پیدا کنید.

«خلوت نشین» برای تفکر ریاضی هم، امکان‌های زیادی را به وجود می‌آورد. هنوز به این پرسشها، پاسخ داده نشده است: آیا با زیاد کردن ردیف‌های «خلوت نشین» (به عبارت دیگر، با زیاد کردن تعداد رنگ‌ها در دسته ورق)، احتمال پیدا شدن جواب کمتر می‌شود؟ اگر پاسخ مثبت است، آیا برای تعداد معین n از رنگ‌ها، این احتمال به صفر می‌رسد، یا در حد معینی‌مخالف صفر، متوقف می‌شود؟ حداکثر تعداد حرکت‌ها، برای کوتاه‌ترین راه حل (در موردی که با تعداد مشخصی ردیف، در بازی «خلوت نشین» سروکار داریم) چقدر است؟ آیا می‌توان برای کامپیوتر برنامه‌ای ریخت که بتواند کوتاه‌ترین راه حل‌بازی را (ولو برای دورنگ) پیدا کند و یا دست‌کم به این پرسش پاسخ دهد که آیا مسأله جواب دارد یا نه؟

* * *

بدون اینکه ازمحاسبهٔ تقریبی استفاده کنید، درستی این نامساوی‌راثابت کنید:

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$$

پاسخ درصفحهٔ ۵۴

مربع جادویی یامربع وفقی

بهروز مشیری

در شمارهٔ اول سال اول این مجله بحث جالبی بود از «ای. چیستیاکوف» تحت عنوان «عدد در بند خرافات» با ترجمهٔ خوب آقای پرویز شهریاری. درصفحهٔ ۹۹ در آن مقاله می‌خوانیم:

«مسلمانان، به مربعهای جادویی (وفقی) هم بانظر خرافاتی نگاه می‌کردند. می‌دانیم که مربع وفقی عبارت است از مربعی که آن را به ۹ یا ۱۶ یا ۲۵ یا . . . خانه تقسیم کرده باشند و در خانه‌های آن عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، . . . . را طوری قرار داده باشند که مجموع این عددها در هرسطر، هر ستون و هرقطر مربع یکی شود.»

دراین مقاله سعی داریم نگاهی گذرا به‌تاریخچهٔ مربع جادویی(وفقی) بیافکنیم وراه حلی که چکیدهٔ اندیشهٔ دانشمندان صاحب‌نام است ارائه دهیم.

بشر از گذشته‌های دور مجذوب نیروی شگفت‌آور اعداد بوده است به‌طوری که یکی از سرگرمیهای او بازی بااعداد بود. اعداد بعدها ازحالت بازی خارج شد وجنبهٔ سحر و جادو به‌خود گرفت ومشتی عوام‌فریب به‌عنوان رمال و دعانویس برای پیش‌برد کار خود از اعداد استفاده می‌کردند.

درمیان بازی باعدد ــ اعداد جادویی همواره مقام والایی داشته است چنانچه امام‌محمد غزالی فیلسوف و دانشمند بزرگ ایرانی رساله‌ای در این باب به زبان فارسی‌دارد. دیگردانشمندان وریاضیدانان ایرانی نیزرسالات وکتابهایی

درباره اعداد وفقی نوشته‌اندکه نام تعدادی از آنهارا در اینجا نقل می کنیم.

۱ـ محمدبن‌سلیمان تنکابنی رسالهٔ خطی به‌نام اعداد واوفاق. قرن ۱۳ هجری قمری

۲ـ عزالدین زنجانی رسالهٔ خطی به‌نام الوفق التام که یحیی‌بن‌احمد کاشانی آن‌را به‌فارسی ترجمه کرده است.

۳ـ رساله‌ای از ریاضیدانی ناشناس در کتابخانهٔ ملك است به نام اعداد وفق ـ قرن ۱۳ هجری قمری

۴ـ عبدالقادر بغدادی در شرح لغز شمه‌ای به‌اعداد وفق اختصاص داده‌است ـ کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات. دانشگاه تهران ـ قرن ۱۱ هجری‌قمری

۵ـ کمال صوفی‌شوشتری ـ غایت‌المرادفی وفق‌العداد در کتابخانهٔ مجلس ۱۱۵۳ هجری‌قمری

۶ـ جلال‌الدین‌طاووسی ـ رساله دراعدادوفق کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه قرن ۹ هجری‌قمری

۷ـ عبدالله خراسانی ـ شرحی براعداد وفق در کتابخانهٔ قاهره

۸ـ از نویسندهٔ ناشناس قرن ۸ هجری قمری رساله‌ای‌است به‌نام خواص اشکال و اوفاق در کتابخانهٔ کورپرلوی استانبول

۹ـ شرف‌الدین علی‌یزدی قرن ۹ هجری‌قمری ـ کندالمرادفی وفق‌الاعداد

***

از اسناد و مدارك موجود می‌باید کشور چین را زادگاه مربع جادویی جهان دانست، زیرا قدیمیترین جایی که ازآن نام‌برده شده است، کتابیست چینی که حدود چهار تا پنج هزارسال پیش‌از میلاد مسیح نوشته شده است. این مربع جادویی ۹ خانه‌ای است واعداد فرد به‌صورت دایره‌های سفید و اعداد زوج به‌صورت‌دایره‌های سیاه‌ترسیم شده‌است قدیمیترین‌مربع‌جادویی اروپا در تابلوی «افسردگی» اثر «آلبرشت دیورر» نقاش آلمانی نقش شده است که سال ترسیم آن ۱۵۱۴ میلادی است این مربع شبیه مربع جادوی هندیهاست که دوهزارسال از عمر آن می گذرد.

گوته شاعربزرگ آلمانی در شاهکار فناناپذیر خود «فاوست» صحنه‌ای را مختص ساختن اکسیر جوانی می کندآنهم بافرمول مربع وفقی. او می‌نویسد:

تو باید بفهمی
یك را ۱۰ کن
و از ۲ بگذر
و همچنین از ۳

تا آنجا که
حذف کنی ۴ را
جادوگر چنین گوید
۵ و ۶ را
۷ و ۸ کن (و برعکس)
و ۹، ۱
و ۱۰ هیچ است
یك در یك جادوگر اینست.

با کمی دقت‌معلوم می‌شود که‌مربع جادویی او کامل نیست‌چرا؟ قدرمسلم او با مربعهای وفقی آشنایی داشت، زیرا بارها از تابلوی «افسردگی» دیورر سخن گفته و به نکات علمی آن اشاره کرده است ولی در قطعهٔ بالا خواسته است بغض و کینهٔ دیرینه خود را نسبت به ریاضیدانان زمان خود ظاهر سازد بااین وجود نمی‌توان منکر این‌حقیقت شد که گوته مجذوب مربع وفقی بود درغیر این صورت هرگز آن را به شعر در نمی‌آورد و در شاهکار خود جاودانی نمی کرد.

در کتاب «حلیة المتقین» مرحوم ملا محمد باقر مجلسی چاپ سنگی سنهٔ ۱۳۶۸ در صفحهٔ ۱۰۱ به نقل از کتاب «مکارم الاخلاق» مربع وفقی ۱۶ خانه‌ای کشیده و چنین آورده است که :

«این شکل برای دفع آبله است...»

چگونه مربع جادویی بسازیم

n تعداد خانه‌های هر سطر یا هر ستون است نوع مربع بستگی به n داردکه مرتبهٔ مربع را نشان می‌دهد مثلا اگر $n=3$ باشد دراینحال مربع مرتبهٔ سوم ویا اگر $n=4$ باشد مربع نوع چهارم است.

مربعهای جادویی به طور کلی از سه حالت تجاوز نمی کند

I ـ مربع جادویی با مرتبهٔ فرد، مانند: ۳، ۵، ۷، ۹، ...

II ـ مربع جادویی زوج زوج یا آنکه مرتبهٔ آن مضربی از چهار باشد $(n=4k)$ مانند: ۴، ۸، ۱۲

III ـ مربع جادویی زوج یا بخش ناپذیر بر ۴ $(n=4k+2)$ مانند، ۶، ۱۰، ....

پیش‌از آنکه بـه نحوهٔ ساختن مربع جادویی بپردازیم به ذکر چند نکته می‌پردازیم.

۱ـ اگر مربع جادویی «M» را داشته باشیم آنرا با عدد ثابت k جمع کنیم

مربع جادویی دیگری به دست می‌آید $M+k=M_1$

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

۱۰	۳	۸
۵	۷	۹
۶	۱۱	۴

شکل ۱

۲ـ اگر مربع جادویی M را در عدد ثابتی ضرب کنیم باز مربع جادویی دیگری به دست می‌آید مانند $M\cdot a=M_2$

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

۱۶	۲	۱۲
۶	۱۰	۱۴
۸	۱۸	۴

شکل ۲

۳ـ حاصل جمع دو مربع جادویی مربع جادویی M_3 است

$$M_1+M_2=M_3$$

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

+

۱۶	۲	۱۲
۶	۱۰	۱۴
۸	۱۸	۴

=

۲۴	۳	۱۸
۹	۱۵	۲۱
۱۲	۲۷	۶

شکل ۳

پس با در دست داشتن یك مربع جادویی می‌توان به مربعهای جادویی دیگر دست یافت.

I ـ اکنون می‌پردازیم به نحوهٔ ساختن مربع جادویی مرتبهٔ فرد

$(n=3, 5, 7, 9, \ldots)$

مثال را با $n=5$ آغاز می‌کنیم

مربع ۲۵ خانه‌ای $(n^2=25)$ را رسم می‌کنیم. حال اعداد ۱ تا ۵ را باید در این ۲۵ خانه بگنجانیم به طوری که در یکی از قطرهای مربع مرتباً یك عدد تکرار شود و برای یافتن آن عدد که آن را S می‌نامیم. از فرمول زیر

استفاده می‌کنیم $S=\frac{n+1}{2}=\frac{5+1}{2}=3$ پس عددی که در قطر مربع می‌آید عدد ۳ است مابقی اعداد را به طور دلخواه در ستون اول می‌نویسیم اعداد ۱ تا ۵ را درخانه‌های بعدی طبق شکل ۵ تقسیم می‌کنیم، پس‌از پرشدن

۳	۱	۲	۴	
	۳			
		۳		
				۳

شکل ۴

۳	۱	۲	۴	۵
۵	۳	۱	۲	۴
۴	۵	۳	۱	۲
۲	۴	۵	۳	۱
۱	۲	۴	۵	۳

شکل ۵

تمام خانه‌ها مربع جادویی B به دست می‌آید. حال این‌مربع جادویی را ۹۰ درجه می‌چرخانیم یا بعبارت دیگر اعداد را از پایین به ترتیب به خانه‌های بالایی منتقل می‌کنیم (شکل ۶) در این حالت عدد ۳ از یك قطر به قطر دیگر منتقل می‌شود باز مربع جادویی C به دست می‌آید

۱	۲	۴	۵	۳
۲	۴	۵	۳	۱
۴	۵	۳	۱	۲
۵	۳	۱	۲	۴
۳	۱	۲	۴	۵

شکل ۶

۰	۱	۳	۴	۲
۱	۳	۴	۲	۰
۳	۴	۲	۰	۱
۴	۲	۰	۱	۳
۲	۰	۱	۳	۴

شکل ۷

اکنون با در دست داشتن (B) و (C) می‌توانیم مربع جادویی موردنظر خود یعنی مربع جادویی (A) را طبق فرمول زیر به دست آوریم

$$(B)+[(c)-1]n=(A)$$

شکلهای ۷ تا ۹ به‌ما،بقیهٔ عملیات را تا مرحلهٔ نهایی نشان می‌دهند.

چنانچه گفته‌شد روشهای زیادی جهت ساختن مربع جادویی وجود دارد که

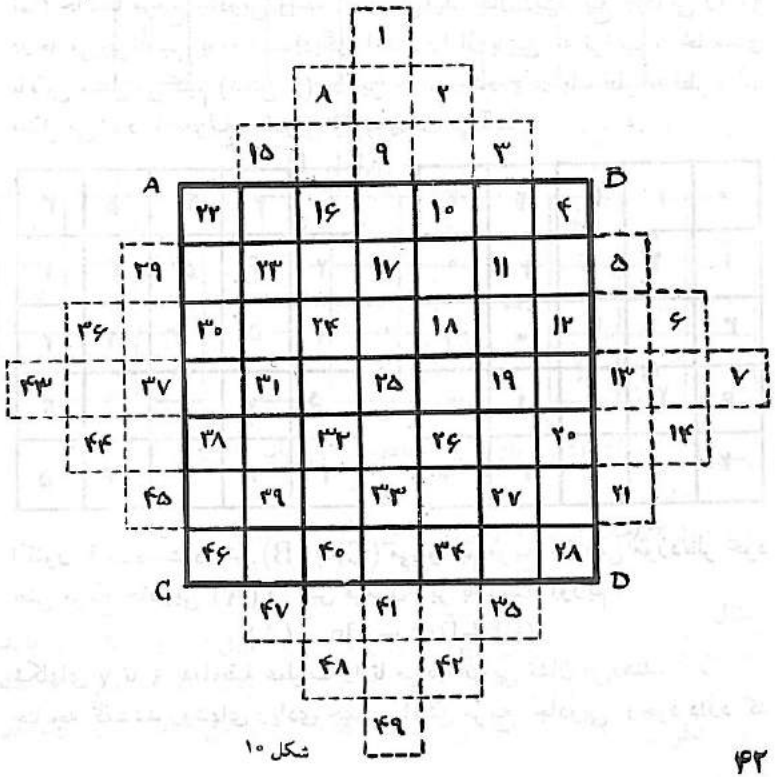
۰	۵	۱۵	۲۰	۱۰
۵	۱۵	۲۰	۱۰	۰
۱۵	۲۰	۱۰	۰	۵
۲۰	۱۰	۰	۵	۱۵
۱۰	۰	۵	۱۵	۲۰

شکل ۸

۳	۶	۱۷	۲۴	۱۵
۱۰	۱۸	۲۱	۱۲	۴
۱۹	۲۵	۱۳	۱	۷
۲۲	۱۴	۵	۸	۱۶
۱۱	۲	۹	۲۰	۲۳

شکل ۹

یکی از ساده‌ترین آنها و در ضمن زیباترین روشها روش باش است در این روش باز n برابر عددی فرد است. هرمی به‌هرطرف مربع می‌افزایم برای نمونه $n=۷$ انتخاب شده است. اعداد از ۱ تا ۴۹ را به‌ترتیب از راس یکی از هرمها شروع کرده و پله مانند ادامه می‌دهیم تا ۴۹



شکل ۱۰

عدد در شکلی که ساخته‌ایم مانند شکل ۱۰ توزیع شود سپس اعدادی که در خارج مربع قرار گرفته‌اند داخل مربع می‌کنیم به‌طوری که اعداد به طریق افقی یاعمودی وارد مربع می‌شوند ودیگر اینکه اعداد بالایی به‌پایین و اعداد پایینی به‌بالا یااعداد سمت‌راست به سمت‌چپ و برعکس برده می‌شوند. نکتهٔ دیگر اینکه باید توجه داشت که خارجی‌ترین عدد به همان نسبت که ازمربع دور است به‌همان نسبت داخل مربع می‌شود. مثلا در شکل ۱۰ عدد ۱ که در رأس هرم قرار دارد از خط AB سه‌خانه فاصله داردبرای داخل کردن این‌عدد می‌باید همین فاصلهٔ سه‌خانه را منظور کرد، یعنی ۱ در محلی قرار می‌گیرد که باخط CD سه‌خانه فاصله داشته‌باشد.

A B

۴۲	۴۷	۱۶	۴۱	۱۰	۳۵	۴
۵	۲۳	۴۸	۱۷	۴۲	۱۱	۲۹
۳۰	۶	۲۴	۴۹	۱۸	۳۶	۱۲
۱۳	۳۱	۷	۲۵	۴۳	۱۹	۳۷
۳۸	۱۴	۳۲	۱	۲۶	۴۴	۲۰
۲۱	۳۹	۸	۳۳	۲	۲۷	۴۵
۴۶	۱۵	۴۰	۹	۳۴	۳	۲۸

C D

شکل ۱۱

II– مربع‌جادویی زوج زوج. جهت ساختن این‌نوع مربع جادویی از روش سادهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

۱– برای‌مثال $n=۸$ انتخاب شده است در مربع کشیده شده اعداد یك تا ۶۴ را به‌ترتیب صعودی قرار می‌دهیم.

۲– در چهارگوشهٔ مربع چهارمربع کوچك باضلع $\frac{n}{۴}$ و درمرکز، یك مربع به‌ضلع $\frac{n}{۲}$ درنظر می‌گیریم (شکل ۱۲).

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲
۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸
۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶
۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴

شکل ۱۲

پس مربعهای $\frac{n}{۴}$ ما عبارتند از ۱ ، ۲ ، ۹ و ۱۰ که با ۶۴ ، ۶۳ ، ۵۶ و ۵۵ متقارن‌اند و در سمت دیگر اعداد ۸ ، ۷ ، ۱۶ و ۱۵ بااعداد ۵۷ ، ۵۸ ، ۴۹ و ۵۰ متقارن‌اند. جای این اعداد را بایکدیگرعوض می‌کنیم و مربع بزرگ $\frac{n}{۲}$خود از چهارمربع تشکیل شده‌که اعدادآن ۴ به۴ باهم متقارن‌اند جای آنها را نیز بایکدیگر عوض می‌کنیم. اعدادی‌که خارج این ۵ مربع قرار دارند به‌همان شکل باقی می‌مانند

III- مربع جادویی زوجی که بخش‌پذیر بر ۴ نباشد. برای مثال $n=۱۰$ راانتخاب کرده‌ایم. برای ساختن این‌گونه مربعهای جادویی نخست قابی در نظرمی‌گیریم که درون‌قاب مربع جادویی زوج زوج است بااین تفاوت به‌این مربع که داخل قاب قرار می‌دهیم $۲n-۲$ اضافه‌کنیم تااینجا که اشکالی پیش‌نمی‌آید. مسئله اینجاست‌که بتوانیم قاب دور مربع‌زوج زوج را بااعداد $۲n-۲$ و متممهای آن نسبت به $n^۲+۱$ پر کنیم.

بی‌گمان خوانندهٔ پرتحمل که تااینجا مقاله را دنبال کرده است به‌این نکته پی‌برده که برای یافتن مجموع ثابت (جمع افقی یاعمودی اعداد یك مربع وفقی پیش‌از آنکه اصولا عددی در مربع گذاشته شود می‌توان بافرمول سادهٔ

زیر بدست آورد

۶۴	۶۳	۳	۴	۵	۶	۵۸	۵۷
۵۶	۵۵	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۵۰	۴۹
۱۷	۱۸	۴۶	۴۵	۴۴	۴۳	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۳۸	۳۷	۳۶	۳۵	۳۱	۳۲
۳۳	۳۴	۳۰	۲۹	۲۸	۲۷	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۴۷	۴۸
۱۶	۱۵	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۱۰	۹
۸	۷	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۲	۱

شکل ۱۳

$$S=\frac{(۱+n^۲)n}{۲}$$

پس S برای‌مثال‌ما خواهدبود $S=\frac{(۱+۱۰۰)۱۰}{۲}=۵۰۵$

حال برای اینکه بتوانیم اعداد دورقاب را به‌دست آوریم از روش «بیبر باخ» در دورابطه مسئله را حل می‌کنیم.

رابطهٔ یك

$$a+b+\left(\frac{n-۴}{۲}\right)_{\text{بالا}}=\left(\frac{n}{۲}\right)_{\text{پایین}}$$

رابطه دو

$$a-b+\left(\frac{n-۲}{۲}\right)_{\text{چپ}}=\left(\frac{n-۲}{۲}\right)'_{\text{راست}}$$

در این دورابطه a و b دوعدد دلخواهند به‌طوری‌که $a<b$ و مجموع $a+b$ به ۲ قابل‌بخش نیست که ما $a=۱$ و $b=۲$ قرار داده‌ایم و داخل پرانتز باقی اعداد می‌باشند.

بامشخصات بالا می‌پردازیم به‌حل‌مسئله

$$۱+۲+\left(\frac{۱۰-۴}{۲}\right)_{\text{بالا}}=\left(\frac{۱۰}{۲}\right)_{\text{پایین}}$$

$$۱-۲+\left(\frac{۱۰-۲}{۲}\right)_{\text{چپ}}=\left(\frac{۱۰-۲}{۲}\right)'_{\text{راست}}$$

$$۳+\left(\overline{۳}\right)_{\text{بالا}}=\left(\overline{۵}\right)_{\text{پایین}}$$

$$-۱+\left(\overline{۴}\right)_{\text{چپ}}=\left(\overline{۴}\right)'_{\text{راست}}$$

اکنون a و b (۱ و ۲) را در دو گوشهٔ بالای قاب قرار داده طرف متقارن‌قاب اعداد ۱۰۰ و ۹۹ که متممهای ۱ و ۲ می‌باشند قرارمی‌دهیم. رابطه‌ها به‌ما نشان می‌دهند که در قسمت بالا ۳+۳ عددی از ۲ — ۲n باید در مجموع

۱	۶	۱۱	۱۵	۹۷	۹۶	۹۴	۹۲	۹۱	۲
۳									۹۸
۱۳									۸۸
۱۷									۸۴
۱۸									۸۳
۹۳									۸
۸۹									۱۲
۸۷									۱۴
۸۵									۱۶
۹۹	۹۵	۹۰	۸۶	۴	۵	۷	۹	۱۰	۱۰۰

شکل ۱۴

برابر باپنج‌عدد از پایین باشد یابه‌عبارت دیگر ۲ — ۲n به‌چهار گروه تقسیم می‌شودکه تعداد آنها در داخل پرانتزها آمده است. ۲ — ۲n برابر است‌با ۱۸ یعنی اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، . . . . . ۱۸ ، ازمیان این اعداد ۱ و ۲ را قبلا آوردیم اکنون باید اعداد ۳ ، ۴ ، ۵ ، . . . ۱۸ را بادرنظر گرفتن بالا، پایین،

راست و چپ به‌دست آورد و در قاب گذارد

$$۳+(۶+۱۱+۱۵)_{\text{بالا}}=(۴+۵+۷+۹+۱۰)_{\text{پایین}}$$

و از رابطهٔ دوم اعداد چپ و راست را به‌دست می‌آوریم:

$$-۱+(۳+۱۳+۱۷+۱۸)_{\text{چپ}}=(۸+۱۲+۱۴+۱۶)$$

۱	۶	۱۱	۱۵	۹۷	۹۶	۹۴	۹۲	۹۱	۲
۳	۸۲	۸۱	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۷۶	۷۵	۹۸
۱۳	۷۴	۷۳	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۶۸	۶۷	۸۸
۱۷	۳۵	۳۶	۶۴	۶۳	۶۲	۶۱	۴۱	۴۲	۸۴
۱۸	۴۳	۴۴	۵۶	۵۵	۵۴	۵۳	۴۹	۵۰	۸۳
۹۳	۵۱	۵۲	۴۸	۴۷	۴۶	۴۵	۵۷	۵۸	۸
۸۹	۵۹	۶۰	۴۰	۳۹	۳۸	۳۷	۶۵	۶۶	۱۲
۸۷	۳۴	۳۳	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۲۸	۲۷	۱۴
۸۵	۲۶	۲۵	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۲۰	۱۹	۱۶
۹۹	۹۵	۹۰	۸۶	۴	۵	۷	۹	۱۰	۱۰۰

شکل ۱۵

بادردست‌داشتن این اعداد متممهای آنهارا در مقابلشان می گذاریم و قاب‌کامل می‌شود. حال‌مربع ۸ مرتبهٔ تهیه‌کرده وبه تك‌تك خانه عدد ۱۸ را می‌افزاییم و این مربع‌جادویی را داخل قاب قرار می‌دهیم. باقراردادن این مربع—مربع جادویی زوج فردما کامل است.

در تهیهٔ این‌مقاله از منابع زیر استفاده شده است

۱— درپی فیثاغورث ترجمهٔ آقای شهریاری

۲— اندیشهٔ ریاضی « « «

۳— مجلهٔ تصویرعلم شمارهٔ۷ سال ۱۹۷۵

۴— تاریخ ریاضیات اثر و—مولر

۵— مسائل حل‌شده و حل‌نشدهٔ ریاضی اثر تیتزه

عبدالحسین مصحفی

کاربردی از ریاضیات درعلوم انسانی

لگاریتم وقانون وبر[1]

۱ــ شاخه‌های مختلف ریاضی غالباً به منظور حل مسئله‌های خاص پدید آمده‌اند. اما ازوجوه جالب ریاضیات آن است که هرشاخهٔ تازه پدید آمده، انواع کاربردهایی غیرمنتظره درسایرزمینه‌ها پیدا کرده است. شاخهٔ لگاریتم نیز ازاین‌مواردا‌ست. لگاریتم درابتدا، درحدود ۱۶۰۰ میلادی، به‌منظورساده کردن محاسبات وضع شد و بالغ بر سیصد سال، این کاربرد آن بس ارزشمند بود. امروزه، هرچندکه ماشینهای‌حساب الکتریکی‌وکامپیوترها نتایج محاسبات‌حتی بسیارپیچیده را به سادگی و به‌سرعت بدست می‌دهند، اما اگرتصور کنیم که لگاریتم‌دیگرموردی نداردا‌شتباه کرده‌ایم. لگاریتم دربسیاری ازجهات درجهان ماودرخودماکاربرددارد. یك‌کاربردآن دراین مقاله یادآوری می‌شود.درصورتی که کاربردهای دیگری‌هم دارد.

۲ــ نخستین‌بار جان نپیر (John Napier) لگاریتم را وضع کرد

۱ــ بااستفاده ازمقالهٔ مندرج درشمارهٔ آوریل ۱۹۷۸ مجلهٔ «Mathematical Log» بقلم «B. Kostner».

وازترکیب دو کلمهٔ یونانی «logos» به‌معنی نسبت و «arithma» به معنی عدد، اصطلاح «logarithme» را بکاربرد.

اساس لگاریتم براین‌نکته مبتنی است که درهر تصاعدهندسی:

$$\ldots ، \frac{1}{a^2} ، \frac{1}{a} ، 1 ، a ، a^2 ، a^3 ، \ldots$$

نماها تصاعدحسابی تشکیل می‌دهند:

$$\ldots ، -2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، \ldots$$

درتناظری یك‌به‌یك که بین این دوتصاعد برقرار است، هرجمله‌ازتصاعد حسابی را لگاریتم جملهٔ نظیر از تصاعد هندسی در پایهٔ a می‌نامند (a مثبت اختیار می‌شود).

هرعددحقیقی مثبت دلخواه یا بایکی ازجمله‌های تصاعد هندسی برابر است، یااینکه بین دوجملهٔ متوالی ازآن قراردارد. اگراین عددحقیقی مثبت را x بگیریم می‌توانیم بنویسیم:

$$a^n \leqslant x < a^{n+1}$$

باتوجه به تناظر یك‌به‌یك موجود بین دو تصاعد هندسی و حسابی نتیجه می‌شود که نظیرعددحقیقی مثبت x ، عددحقیقی y وجود دارد به‌قسمی که:

$$n \leqslant y < n+1$$

این‌عدد حقیقی y رالگاریتم عددحقیقی مثبت x درپایهٔ a می‌نامیم‌ومی‌نویسیم:

$$y = \log_a x$$

در محاسبات عددی $a = 10$ اختیار می‌شود. دراین‌صورت لگاریتم را دهگانی می گویند ومی‌نویسند:

$$y = \log x$$

باتوجه به‌ویژگیهایی که برای لگاریتم وجود دارد نتیجه می‌شود که در هرتصاعد هندسی دلخواه:

$$\ldots ، \frac{a}{r^2} ، \frac{a}{r} ، a \cdot ar ، ar^2 ، \ldots$$

لگاریتم جمله‌ها، تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند:

$$\ldots ، \log a - 2\log r ، \log a - \log r ، \log a ، \log a + \log r ، \log a + 2\log r ، \ldots$$

برعکس، نظیرهرتصاعدحسابی، تصاعدی‌هندسی وجود دارد به‌قسمی که هرجملهٔ تصاعد حسابی لگاریتم جملهٔ نظیر ازتصاعد هندسی می‌باشد.

بنا برآنچه گفته شد می‌توانیم چنین‌نتیجه گیری کنیم:

هر گاه دومتغیر متناظر چنان باشد که تغییرات یکی از آنها به‌صورت تصاعد هندسی وتغییرات دیگری به‌صورت تصاعدحسابی باشد، بین‌هردومقدار نظیراز این دومتغیر رابطه‌ای لگاریتمی برقراراست.

۳ـ بدن‌آدمی توسط حواس خود اثرات محرکهای خارجی رادریافت می‌دارد و در برابر آنها از خود واکنش نشان می‌دهد. گاهی به علت خطای حواس، واکنش بدن دربرابر دومحرك ازیك‌نوع اما باشدتهای متفاوت‌یکسان است، برای آنکه دو محرك ازیك‌نوع و با شدتهای متفاوت، اثرات متفاوت برحواس داشته باشندلازم است که تفاوت بین شدتهای دو محرك ازحد معینی بیشتر باشد. نخستین‌تحقیقات‌دراین زمینه توسط فیزیولوژیست آلمانی‌ارنست‌ـ هانری‌وبر (E. H. Weber) انجام‌گرفت. وبر دربررسیهای خود دریافت‌که بسیاری ازاشخاص برای آنکه وزنه‌ای‌را سنگینتر ازوزنهٔ ۲۰ گرمی حس‌کنند لازم‌است‌که وزنهٔ مزبور حداقل ۲۱ گرم باشد. این‌حداقل برای وزنهٔ ۴۰ گرمی ۴۲ گرم وبرای وزنهٔ ۶۰ گرمی ۶۳ گرم می‌باشد. ملاحظه می‌شود که:

$$\frac{۲۱-۲۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲۰}\ ,\ \frac{۴۲-۴۰}{۴۰}=\frac{۱}{۲۰}\ ,\ \frac{۶۳-۶۰}{۶۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

وبر دراین‌باره بررسیهای‌دیگری‌انجام‌داد وبالاخره در ۱۸۴۶ ملاحظات خودرا به‌صورت‌کلی زیر، که فعلا به‌نام قانون وبر معروف است، بیان‌کرد:

«بروز اختلافات دریك احساس‌وقتی‌روی‌می‌دهد که نسبت مقدارافزایش محرك آن احساس به‌مقدار خودآن محرك برابر با درصد ثابتی باشد».

بنا به قانون وبر، در درك یك احساس که محرك آن افزاینده است، اختلافات در فواصل معین ظاهر می‌شوند به قسمی که مقادیرمحرك نظیر این فواصل به تصاعدهندسی‌می‌باشند. زیراهر گاه نظیرمقادیر $S_۱$ ، $S_۲$ ، $S_۳$ ، $S_۴$ ازمحرك اختلافات حسی بروزکرده‌باشند، بنا به قانون‌وبرداریم:

$$\frac{S_۲-S_۱}{S_۱}=\frac{S_۳-S_۲}{S_۲}=\frac{S_۴-S_۳}{S_۳}\ ,$$

$$\frac{S_۲}{S_۱}-۱=\frac{S_۳}{S_۲}-۱=\frac{S_۴}{S_۳}-۱\ ,$$

$$\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{S_۳}{S_۲}=\frac{S_۴}{S_۳}$$

ملاحظه می‌شود که $S_۱$ ، $S_۲$ ، $S_۳$ ، $S_۴$ به تصاعد هندسی می‌باشند.

در تأثیریك محرك بریکی ازحواس انسان، هر گاه محرك تشدید شودو میزان افزایش آن به تصاعدهندسی صورت‌گیرد، واکنش بدن‌نیز تشدیدمی‌شود

اما میزان افزایش آن به‌تصاعدحسابی است. بنابراین، رابطهٔ بین مقادیرمحرك واحساس یك رابطهٔ لگاریتمی است. به‌عبارت دیگر، میزان واکنش بین‌انسان دربرابر یك محرك خارجی بالگاریتم مقدار آن‌محرك متناسب است.

معلوم شده است که قانون وبر و نتایج آن در مواردی برای حواس: چشائی، بویائی، شنوایی ودید روشنائی نیزصادق است. همچنین‌بنظر می‌رسد که درتأثیر دارو، به‌ویژه داروهای‌آرام‌بخش، برانسان و واکنش‌بدن دربرابر آن نیزقانون‌وبرمصداق دارد؛ هرچند امکان اندازه‌گیری واثبات صحت‌این‌نظر همواره میسر نیست.

۴ـ به‌عنوان دومثال ازنتایج قانون وبر می‌توان ترازلگاریتمی ارتفاع صوت و رابطهٔ لگاریتمی بین نورظاهری ستارگان وشدت نورآنها را نام‌برد.

تراز ارتفاع صوت برحسب واحد دسی‌بل چنین تعریف‌می‌شود:

$$B=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$$

که B تراز ارتفاع صوت برحسب دسی‌بل، I شدت فیزیکی صوت $I_۰$ آستانهٔ شنوایی برای‌گوش طبیعی، یعنی شدت فیزیکی صوتی‌است‌که توسط‌یك‌شخص متوسط به‌زحمت می‌تواندشنیده شود.

درجدول زیرتراز دسی‌بل ارتفاع بعضی ازصوتهای معمولی درج شده است:

صوت	دسی‌بل
آستانهٔ شنوایی	۰
خش‌خش برگها	۱۰
نجوای آرام	۲۰
همهمهٔ خیابان آرام	۳۰
همهمهٔ متوسط خانه	۴۰
صدای‌آرام‌اتومبیل‌ازفاصلهٔ هفت‌متری	۵۰
گفتگوی معمولی	۶۰
همهمهٔ اداره	۷۰
صدای بلند ارکستر	۸۰
صدای دسته راك جوانان	۹۰
صدای ماشین کارخانه	۱۰۰
صدای متهٔ بادی	۱۱۰
آستانهٔ دردناکی	۱۲۰

هر گاه دومتغیر متناظر چنان باشد که تغییرات یکی از آنها به‌صورت تصاعد هندسی و تغییرات دیگری به‌صورت تصاعدحسابی باشد، بین هر دومقدار نظیر از این دومتغیر رابطه‌ای لگاریتمی برقرار است.

۳ـ بدن آدمی توسط حواس خود اثرات محرکهای خارجی رادریافت می‌دارد و در برابر آنها از خود واکنش نشان می‌دهد. گاهی به علت خطای حواس، واکنش بدن دربرابر دومحرك ازیك نوع اما باشدتهای متفاوت یکسان است، برای آنکه دو محرك ازیك نوع و با شدتهای متفاوت، اثرات متفاوت برحواس داشته باشندلازم است که تفاوت بین شدتهای دو محرك ازحد معینی بیشتر باشد. نخستین تحقیقات دراین زمینه توسط فیزیولوژیست آلمانی ارنست‌ـ هانری وبر (E. H. Weber) انجام گرفت. وبر در بررسیهای خود دریافت که بسیاری ازاشخاص برای آنکه وزنه‌ای را سنگینتر ازوزنهٔ ۲۰ گرمی حس کنند لازم است که وزنهٔ مزبور حداقل ۲۱ گرم باشد. این حداقل برای وزنهٔ ۴۰ گرمی ۴۲ گرم و برای وزنهٔ ۶۰ گرمی ۶۳ گرم می‌باشد. ملاحظه می‌شود که:

$$\frac{۲۱-۲۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲۰}\ ,\ \frac{۴۲-۴۰}{۴۰}=\frac{۱}{۲۰}\ ,\ \frac{۶۳-۶۰}{۶۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

وبر دراین باره بررسیهای دیگری انجام داد وبالاخره در ۱۸۴۶ ملاحظات خودرا به‌صورت کلی زیر، که فعلا به‌نام قانون وبر معروف است، بیان کرد:

«بروز اختلافات دریك احساس وقتی روی می‌دهد که نسبت مقدارافزایش محرك آن احساس به‌مقدار خودآن محرك برابر با درصد ثابتی باشد».

بنا به قانون وبر، در درك یك احساس که محرك آن افزاینده است، اختلافات در فواصل معین ظاهر می‌شوند به قسمی که مقادیرمحرك نظیر این فواصل به تصاعدهندسی می‌باشند. زیرا هرگاه نظیرمقادیر $S_۱$ ، $S_۲$ ، $S_۳$ ، $S_۴$ ازمحرك اختلافات حسی بروز کرده باشند، بنا به قانون وبر داریم:

$$\frac{S_۲-S_۱}{S_۱}=\frac{S_۳-S_۲}{S_۲}=\frac{S_۴-S_۳}{S_۳}\ ,$$

$$\frac{S_۲}{S_۱}-۱=\frac{S_۳}{S_۲}-۱=\frac{S_۴}{S_۳}-۱\ ,$$

$$\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{S_۳}{S_۲}=\frac{S_۴}{S_۳}$$

ملاحظه می‌شود که $S_۱$ ، $S_۲$ ، $S_۳$ ، $S_۴$ به تصاعد هندسی می‌باشند.

در تأثیریك محرك بریکی ازحواس انسان، هرگاه محرك تشدید شودو میزان افزایش آن به تصاعدهندسی صورت گیرد، واکنش بدن نیز تشدید می‌شود

اما میزان افزایش آن به‌تصاعدحسابی است. بنابراین، رابطهٔ بین مقادیرمحرك واحساس یك رابطهٔ لگاریتمی است. به‌عبارت دیگر، میزان واکنش بین انسان دربرابر یك محرك خارجی بالگاریتم مقدار آن محرك متناسب است.

معلوم شده است که قانون وبر و نتایج آن در مواردی برای حواس: چشائی، بویائی، شنوایی ودید روشنائی نیزصادق است. همچنین بنظر می‌رسد که درتأثیر دارو، به‌ویژه داروهای آرام‌بخش، برانسان و واکنش بدن دربرابر آن نیز قانون وبر مصداق دارد؛ هرچند امکان اندازه‌گیری واثبات صحت این نظر همواره میسر نیست.

۴ـ به‌عنوان دومثال ازنتایج قانون وبر می‌توان ترازلگاریتمی ارتفاع صوت و رابطهٔ لگاریتمی بین نورظاهری ستارگان وشدت نورآنها را نام‌برد.

تراز ارتفاع صوت برحسب واحد دسی‌بل چنین تعریف می‌شود:

$$B=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$$

که B تراز ارتفاع صوت برحسب دسی‌بل، I شدت فیزیکی صوت $I_۰$ آستانهٔ شنوایی برای گوش طبیعی، یعنی شدت فیزیکی صوتی است که توسط یك شخص متوسط به‌زحمت می‌تواندشنیده شود.

درجدول زیر تراز دسی‌بل ارتفاع بعضی ازصوتهای معمولی درج شده است:

صوت	دسی‌بل
آستانهٔ شنوایی	۰
خش‌خش برگها	۱۰
نجوای آرام	۲۰
همهمهٔ خیابان آرام	۳۰
همهمهٔ متوسط خانه	۴۰
صدای آرام اتومبیل ازفاصلهٔ هفت‌متری	۵۰
گفتگوی معمولی	۶۰
همهمهٔ اداره	۷۰
صدای بلند ارکستر	۸۰
صدای دسته راك جوانان	۹۰
صدای ماشین کارخانه	۱۰۰
صدای متهٔ بادی	۱۱۰
آستانهٔ دردناکی	۱۲۰

هرچند ترازارتفاع صوت بعد ازبیان قانون وبرتنظیم‌شده است، اما بسط ترازشدت نور ستارگان برحسب‌قدرآنها در۲۰۰۰ سال پیش از وبر، توسط منجمان یونانی پایه‌گذاری شده است.

یونانیان ستارگان قابل‌رؤیت را برحسب نورظاهری آنها به شش طبقه تقسیم کرده و آنهارا، ازپرنورترین تاکم‌نورترین به‌ترتیب ستارگان قدراول، ستارگان‌قدردوم، ... ستارگان‌قدرششم نامگذاری کرده بودند. ازاندازه‌گیریهای نجومی‌امروزه معلوم شده‌است‌که بین ستارگان بایك قدرمعین اختلافاتی ازنظر نورظاهری وجود دارد، اما نسبت شدت نورستارگان متوسط هرقدر به شدت نورستارگان‌متوسط قدرمتوالی‌آن مقداری‌ثابت است. ستارگان قدراول تقریباً ۱۰۰ برابر روشنتر از ستارگان قدر ششم می‌باشند. هرگاه m و n قدرهای دوستاره و b_m و b_n به‌ترتیب شدت نورآنها باشد، داریم:

$$\frac{b_m}{b_n}=r^{n-m} \qquad r=\sqrt[5]{100}=10^{\frac{2}{5}}$$

چون ازدوطرف این‌رابطه لگاریتم بگیریم خواهیم داشت:

$$n-m=2/5(\log b_m-\log b_n)$$

امروزه قدر ۱را برای ستاره‌ای انتخاب می‌کنندکه‌نصف ستارگانی که توسط یونانیان درقدریك‌قرارداده شده‌اند، دارای نوری‌قویتر ازآن ونصف‌دیگرآنهادارای نوری‌ضعیفترازآن باشند. دراین‌صورت، پرنورترین ستارگان آسمان یعنی شعرای یمانی (sirius) دارای قدر ۱/۶- می‌باشد. ستارهٔαاز صورت فلکی‌قنطورس (Centauri) قدر ۰/۱ دارد. سیاره زهره دارای‌قدر ۴- وخورشید دارای قدر درحدود ۲۷- می‌باشد.

۵- طرح چند مسئله

۱) هرگاه یك شخصی پس‌ازوزنهٔ ۴۰ گرمی وزنهٔ حداقل ۴۲ گرمی‌را سنگینتر از آن حس کند، این شخص وزنهٔ حداقل چندگرمی را سنگینتراز۴۲ گرمی حس خواهدکرد؟

(پاسخ: ۴۴/۱ گرم)

۲) احساس گامهای موسیقی باقانون وبر مطابقت دارد. اگرگام‌مربوط به‌یك نت دارای فرکانسی برابر با ۴۴۰ هرتز باشد، نت با یك‌اکتاوشدیدتر فرکانس ۸۸۰ هرتز ونت بایك اکتاو ضعیفتر فرکانس ۲۲۰ هرتز دارد. بنابه استانداردهای متداول درکوك‌کردن پیانو، بم‌ترین نت می درپیانو بافرکانس ۳۳ هرتزاست و یك مضراب پیانو شامل ۸ نت می می‌باشد. هرگاه پیانویی دقیقاً کوك‌شده‌باشد، فرکانس هریك از۸نت می درآن چقدر است؟

(پاسخ: ۳۳، ۶۶، ۱۳۲، ... ، ۴۲۲۴ هرتز)

۳) باتوجه‌به‌اینکه‌میزان‌واکنش‌بدن انسان دربرابر داروهای آرام‌بخش تابع قانون وبراست، می‌خواهیم با انجام آزمایشهایی میزان واکنش بدن را دربرابرداروی آرام‌بخش تعیین کنیم.

الف: هرگاه دراین آزمایشها دفعهٔ اول ۵ میکروگرم ودفعهٔ دوم ۱۵- میکروگرم ازدارو مصرف شده باشد، مقدارمصرف آن در هر یك ازسه‌نوبت بعدی چقدر بایدباشد؟

ب: هرگاه دریك‌دوره آزمایش، نوبت‌اول ۴ میکروگرم ونوبت‌چهارم ۵۰۰ میکروگرم از دارو مصرف شده باشد، مقدار مصرف دارو در هریك از نوبتهای دوم وسوم چقدر بوده است؟

(پاسخ: الف ــ ۴۵، ۱۳۵ و ۴۰۵، ب: ۲۰ و ۱۰۰ میکروگرم)

۴) دربررسیهای روی جانوران آزمایشگاهی، گروههای سنی‌جانوران را بارعایت قانون‌وبرانتخاب می‌کنند.

الف: هرگاه دریك‌چنین‌آزمایشی، درنوبت‌اول گروهی ازموشهای با۳- هفته سن ودرنوبت دوم یك گروه ازموشهای با۵هفته سن انتخاب شده باشند، هریك ازدوگروه بعدی باچه سنی باید انتخاب شوند؟

ب: هرگاه دربررسی یك ویژگی در ۵ نوبت روی ۵ گروه از موشها آزمایش بعمل‌آمده‌باشدکه‌سن گروه‌موشهای‌نوبت‌اول۳هفته وسن موشهای گروه پنجم ۱۵ هفته باشد، سن موشهای هریك‌ازسه‌گروه دیگر چقدربوده است؟

(پاسخ- الف: $8\frac{1}{3}$ و $13\frac{8}{9}$هفته ، ب: $4\frac{1}{2}$ و $6\frac{3}{4}$ و $10\frac{1}{8}$ هفته)

۵) ثابت کنید که اگردوصوت به‌شدتهای I_1 و I_2 به ترتیب ترازهای دسی‌بلB_1 و B_2 را داشته باشید، داریم:

$$B_1-B_2=10\log\frac{I_1}{I_2}$$

۶) باتوجه به تراز دسی‌بل صوتها، ازدوصوت زیرشدت‌اولی‌چندبرابر دومی‌است:

الف: گفتگوی معمولی ازنجوای آرام؟

ب : صدای ماشین‌کارخانه ازهمهمهٔ خیابان آرام؟

(پاسخ ــ الف: ۱۰،۰۰۰ برابر، ب: ۱۰،۰۰۰،۰۰۰ برابر)

۷) دوآهنگ بافرکانسهای برابر روی یك مقیاس دسی‌بل به‌ترتیب ۴۵ دسی‌بل و۶۰ دسی‌بل‌را نشان می‌دهند، نسبت‌شدتهای فیزیکی واقعی آنهاچقدر

است؟

(پاسخ: $\frac{1}{31/6}$)

۸) هرگاه شدت فیزیکی صوتی ۵۰۰ برابرشدت فیزیکی صوت‌دیگر باشد، بین ترازهای دسی‌بل آنها چه تفاوتی موجود است؟

(پاسخ: درحدود ۲۷)

۹) ستاره الدبران دارای قدر ۱/۰ است. معلوم کنید که ستاره شعرای یمانی درحدود ۱۰ برابر روشنتر ازستاره الدبران است.

۱۰) وقتی قدرزهره ۴ — است چند برابر روشنتر ازیك ستارهٔ قدرششم است؟

(پاسخ: ۱۰،۰۰۰ برابر)

***

پاسخ اثبات نامساوی (صفحهٔ ۳۶ را ببینید)

این تابع‌را درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x} \quad (-1<x<1)$$

مشتق این تابع چنین می‌شود:

$$f'(x)=\frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2}-\frac{1}{(\sqrt[3]{1-x})^2}$$

این مشتق تنها درنقطهٔ $x=0$ برابر صفر می‌شود وضمناً دراین نقطه، از مثبت به‌منفی، تغییر علامت می‌دهد. بنابراین $f(x)$ درنقطهٔ $x=0$ ماکزیمم است. بنابراین

$$f(0)>f\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}<2$$

که بعد ازضرب‌دوطرف نامساوی در $\sqrt[3]{3}$، به‌همان نامساوی‌مورد نظرمی‌رسیم.

I. سه‌جمله‌ای اولر

۱. فرض کنید $f(x)=x^2+x+41$، درآنصورت: $f(2)=47$، $f(3)=53$، $f(7)=97$، $f(12)=197$. مجموع $f(2)+f(3)+f(7)$ را با $f(12)$ مقایسه می‌کنیم، معلوم می‌شود:

$$f(2)+f(3)+f(7)=f(2+3+7)$$

همچنین، این رابطه‌هم درست است:

$$f(-2)+f(-3)+f(-7)=f(-2-3-7)$$

۲. می‌دانیم که $f(x)=x^2+x+41$، به‌ازای عددهای درست‌پشت سرهم از $x=0$ تا $x=39$، همواره برابر باعددی اول می‌شود:

$$f(0)=41,\ f(1)=43,\ f(2)=47,\ \dots,\ f(39)=1601$$

ولی $f(40)=41^2$، عددی مرکب است. حال روند به وجود آمدن عددهای اول را برای مقادیر $x>40$ بررسی می‌کنیم. داریم:

عددهای مرکب	عددهای اول
$f(41)$	$f(42)$، $f(43)$;
$f(44)$	$f(45)$، $f(46)$، $f(47)$، $f(48)$;
$f(49)$	$f(50)$، $f(51)$، $f(52)$، $f(53)$، $f(54)$، $f(55)$;
$f(56)$	$f(57)$، $f(58)$، ...، $f(64)$;
$f(65)$	$f(66)$، $f(67)$، ...، $f(75)$;
$f(76)$	

آهنگ توالی عددهای مرکب وعددهای اول، چنین است:

یك‌عدد مرکب، بعد ۲ عدد اول

» » ۴ » » »

» » ۶ » » »

» » ۸ » » »

» » ۱۰ » » »

به‌این ترتیب، بین $f(۴۱)$ و $f(۷۶)$ ، ۳۰ عدد اول وجود دارد که طبق قانون معینی به دست می‌آیند . ولی این قانون، برای مقادیر بعد از $f(۷۶)$ صدق نمی‌کند.

II. عددهای اول فرما

۱. می‌دانیم که تصور فرما دراین باره، که عبارت $۲^{۲^n}+۱$ برای هر عدد درست وغیرمنفی n، یك‌عدد اول است، درست ازآب درنیامد. اولرنشان داد که عدد فرما به ازای $n=۵$ برابر $F_۵=۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷$ و بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

دو راه‌عجیب برای‌پیدا کردن این‌مقسوم علیه ، از روی رقم‌های عدد $F_۵$ ارائه می‌دهیم.

چهار رقم‌اول $F_۵$ عبارتست ازعدد چهاررقمی ۴۲۹۴، وچهاررقم آخر $F_۵$ عبارتست از عددچهار رقمی ۷۲۹۷. مجموع رقم‌ها دراین دو عدد چهار رقمی به‌ترتیب برابر است با ۱۹ و ۲۵. تفاضل این دوعدد می‌شود:

$۲۵-۱۹=۶$ (واین همان رقم اول مقسوم‌علیه است).

a) درعدد $F_۵$، رویهم ۱۰ رقم وجود دارد که مجموع آنها برابر ۵۹ می‌شود وداریم:

$$۱۰^۲-۵۹=۴۱$$

که همان دورقم آخر مقسوم‌علیه است. درنتیجه ۶۴۱ پیدا می‌شود.

b) ازعدد $F_۵$، تنها رقم‌های فردرا درنظر می‌گیریم:

۹ ، ۹ ، ۷ ، ۹ ، ۷

مجموع این رقم‌ها برابر ۴۱ می‌شود و دوباره عدد ۶۴۱ به‌دست می‌آید.

۲. سه‌ویژگی یکی ازعددهای اول فرما را بررسی می‌کنیم:

$$F_۴=۲^{۲^۴}+۱=۶۵۵۳۷$$

a) مجموع دورقم دوطرف برابر است بامجموع دیگر رقم‌ها:

$$۶+۷=۵+۵+۳$$

b) مجموع مجذورهای رقم‌های این عدد، خود مجذورکامل است:

$$۶^۲+۵^۲+۵^۲+۳^۲+۷^۲=۱۲^۲$$

c) اگرمجموع‌مجذورهای‌سه‌رقم وسطرا ازمجموع مجذورهای‌دورقم کنارکم کنیم، برابربا مجموع رقم‌های خود عدد می‌شود:

$$(۶^۲+۷^۲)-(۵^۲+۵^۲+۳^۲)=۶+۵+۵+۳+۷$$

۳. عدد فرمای $F_۴$ را می‌توان به‌یاری عددهای اول به‌دست آورد.

مجموع عددهای اول کوچکتر از ۵۰ می‌شود: $S_A=۳۲۸$. مجموع عددهای اول بین ۵۰ و ۱۰۰ می‌شود: $S_B=۷۳۲$. دراینصورت:

$$F_۴=\frac{S_B-S_A}{۲}\cdot S_A-(S_B-۱۳)$$

در واقع داریم:

$$\frac{۷۳۲-۳۲۸}{۲}\times ۳۲۸-(۷۳۲-۱۳)=۶۵۵۳۷$$

۴. عدد فرمای

$$F_۳=۲^{۲^۳}+۱=۲۵۷$$

را می‌توان به‌این ترتیب به دست آورد: عددهای اول ۱۳ ، ۱۷ و ۴۱ را از میان عددهای اول کوچکتر از ۵۰ کنار می‌گذاریم. مجموع بقیهٔ این‌عددهای اول برابر با عدد فرما به‌ازای $n=۳$ می‌شود.

اگر از علامت‌گذاری قسمت قبل استفاده کنیم، داریم:

$$F_۳=S_A-(۱۳+۱۷+۴۱)$$

۵. باتوجه‌به‌شکل‌عدد $۲^{۲^n}+۱$، به‌سادگی معلوم‌می‌شود که همهٔ‌رقم‌های عدد فرما (یعنی F_n) را می‌توان به‌عنوان مجموعی از سه رقم ۱ ، ۲ و n به‌دست آورد: مثلا درمورد $F_۴$ داریم:

$$F_۴=۲^{۲^۴}+۱=۶۵۵۳۷$$

$$۲+۴=۶$$

$$۲+۲+۱=۵$$

$$۲+۱=۳$$

$$۲+۴+۱=۷$$

آفرینندگان ریاضیات عالی (۲)

ل. س. فریمان

یوهان کپلر

درانتهای جنوب باختری آلمان، قطعه‌زمینی قرار دارد که بین فرانسه‌از باختر و سویس از جنوب، قرار گرفته است. در سیصد ـ چهارصدسال قبل، این محل را شوابی می گفتند و حالا ویورتنبرگ نام دارد. و همین‌جا، در ناحیهٔ کوچك ماگشتاد، نزدیك شهر ویل، در ۲۷ دسامبر سال ۱۵۷۱، یوهان‌کپلر به‌دنیا آمد: مردی که فکراو، تأثیر عمیقی در دانش باقی گذاشت. پدر یوهان، هنریخ‌کپلر از دودمان یك‌خانوادهٔ اشرافی قدیمی، ولی بی‌چیز و ورشکسته، و مردی کم‌سواد بود. او، به‌عنوان سرباز ساده، در جنگهای دوك‌ویوتنبرگ، شرکت کرده بود. مادر دانشمند آیندهٔ ما،کاترین، دختر یك‌صاحب مهمانخانهٔ کوچك، نه می‌توانست بنویسد ونه بخواند. دوران کودکی یوهان، درشرایط بسیار نامساعدی گذشت. باوجود این، مدرسه را زود ووقتی که هنوز شش‌سال نداشت شروع کرد. در دوازده‌سالگی به مدرسه‌ای رفت که در آنجا زبان لاتینی‌هم می‌آموختند، در پانزده‌سالگی به‌مدرسه «عالی» در صومعهٔ مولبرون رفت و درسال ۱۵۸۹ باتمام کردن آن، وارد مدرسهٔ مذهبی توبینگن شد. کپلر جوان، در همهٔ مدرسه‌ها، بسیارخوب درس خوانده بود. رئیس مدرسه،

یوهان‌کپلر (۱۵۷۱ـ۱۶۳۰)

اورا نامزد حرفهٔ کشیشی کرد. همین موضوع‌هم، مسالهٔ ورود اورا به مدرسهٔ مذهبی حل کرد. در سال ۱۵۹۱، پس‌از تمام‌کردن مدرسهٔ مذهبی، فوراً وارد آکادمی توبینگن شد. این آکادمی‌هم، مثل همهٔ موسسه‌های عالی درسی آنزمان، جهت مذهبی داشت. ولی کشیشهای پروتستان می‌بایستی آموزش‌همه جانبه داشته باشند، و در آکادمی‌هم، بنیانهای علوم دقیقه، و قبل از همه ریاضیات و نجوم را می‌آموختند.

خوشبختی کپلر این بودکه این دانشهارا در آکادمی، میخائیل‌مستلین درس می‌داد که روح تازه‌ای به‌محیط خفقان‌آور آکادمی اسکولاستیکی داده بود. خود مستلین دانشمند بزرگی نبود: او کارهایی در مثلثات و شرحی دربارهٔ ستارهٔ دنباله‌دار دارد. خدمت پرارج او به‌جهان دانش، در این بودکه شوق به‌نجوم را در کپلر بیدار کرد و اورا به‌سمت پرسشهای مهمی که در آنزمان مطرح بود، راهنما شد.

جدی‌ترین مساله‌ای که درآن‌زمان مطرح بود، مسألهٔ دستگاه جهان بود. کلیسای پرقدرت، دستگاه «زمین مرکزی» بطلمیوس‌را تحمیل می کرد، وعده‌ای از دانشمندان باکوشش‌های ناقص خود، به‌وسیلهٔ دستگاه «خورشید مرکزی»

کوپرنیك، به‌مقابلهٔ باآن برخاسته بودند. مستلین، ازهواداران کوپرنیك بود. او ضمن اطمینانی که به‌ارادت خود نسبت به‌کلیسا می‌داد، از هرامکانی برای جلب هواداران تازهٔ آموزش کوپرنیك، استفاده می‌کرد. کپلر، همینکه با-موقعیت مسأله آشنا شد، بی‌درنگ و برای تمام عمر، به هواداران دستگاه خورشید مرکزی پیوست. و این‌زمانی بودکه دیگر مقامات روحانی، ازکپلر ناامید شده بودند. درواقع، استعداد، پشت‌کار و آموزش‌او، بالاتر ازهر تحسینی بود، ولی اولیای امور از این متأسف بودند که کپلر جوان، تمایلات سرکشی به‌طرف بررسی انتقادی حقایق مذهبی داشت، و این خصوصیت، شایستهٔ خادمین حقیقی کلیسا نبود، وقتی‌که به‌کپلر فهماندند که راه مقامهای روحانی به‌روی‌او بسته است، تصمیم گرفت خودش را وقف نجوم کند. هنوز شاگرد آکادمی بود، که بااستفاده از همهٔ وقت آزاد خود، به‌تکمیل دانش خود پرداخت. روش آموزش در این‌زمان، ساده بود. کتابهای درسی وجود نداشت. کسی که می‌خواست دربارهٔ مطلبی اطلاع پیدا کند، مستقیماً به‌کتابهای اصلی‌دانشمندان(اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس ، پاپوس‌وغیره...)مراجعه‌می-کرد. مستلین‌هم، کپلر را بااثر پربار کپرنیك «شش‌کتاب دربارهٔ حرکت جسمهای آسمانی-چاپ نورنبرگ-۱۵۴۳»[1] آشنا کرد.

کپلر، آکادمی توبینگن را در سال ۱۵۹۳ تمام کرد. از این به‌بعد، کپلر فعالیت «جهانی» خود را آغاز کرد. او به‌عنوان معلم ریاضی و اخلاق، پستی در گراتس (در جنوب اطریش)بدست آورد. او چهره‌ای جذاب، جسمی ضعیف و پشتکاری غیرعادی داشت. همینکه در گراتس مقیم شد، بی‌درنگ به فعالیتهای ادبی و علمی پرداخت و در سال ۱۵۹۴ ، گاهنامهٔ سال ۱۵۹۵ را منتشر کرد، واین‌نخستین اثرچاپی اوبود. گاهنامهٔ‌کپلرهم، مثل همهٔ‌گاهنامه‌های آن‌زمان، شامل پیشگویی‌هایی بود. نامه‌های کپلر نشان می‌دهد که خود او برای‌این‌پیشگویی‌ها، اهمیت جدی قایل نبود. وباطرح‌آنها، تنها از رسم‌زمانه پیروی می‌کرد. اوازکارهای نجومی‌خود، هدف‌دیگری داشت. اونمی‌توانست خود را به‌این راضی کند که تنها دنباله‌روی از کوپرنیك باشد و آرزوداشت در پیشبرد آموزش کوپرنیك، نقش اساسی داشته باشد. او در کتاب «ورودی به‌بررسی کیهان یا راز کیهان» (گراتس ، ۱۵۹۷) کوشش می‌کند به قانون استقرار سیاره‌ها به‌دور خورشید دست یابد(که البته این‌بار موفق نمی‌شود). تیکوبراهه، که کپلر کتاب خود را برای او فرستاده بود، به‌مؤلف-این استاد

1. De revolutionibus orbium coelestium libri VI.

ناآشنای شهرستانی-به‌نظر یك‌محاسب خوب و یك‌مشتاق علاقمند به نجوم، نگاه می‌کرد. براهه اورا دعوت به‌همکاری باخود در رصدخانهٔ اورانین‌بورگ کرد. ولی، این دعوت، کپلر را اغوا نکرد، او می‌دانست که تیکوبراهه، دستگاه‌کوپرنیك را قبول ندارد وکپلرنمی‌خواست خود را در موقعیت‌مخالف کوپرنیك قرار دهد.

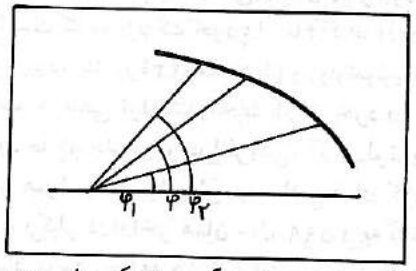
۱۵۹۷، سال جالبی برای کپلر بود، او علاوه‌بر آنکه در این سال توانست‌کتاب بزرگ خود را تمام کند، ازدواج‌هم کرد. همسری‌که انتخاب کرده‌بود، یك‌بیوهٔ۲۳ساله به‌نام واروارامولر‌بود. بدبختانه، زن وشوهر جوان، مدت کوتاهی توانستند محیط آرام خود را حفظ کنند. در سال ۱۵۹۹، با ورود حاکم جدیدجنوب اطریشی، آزار لوتریها تجدید شد. وبه‌همین‌مناسبت، کپلر همراه با خانواده‌اش به خارج فرار کرد. ولی، وحشت به‌زودی ازبین رفت وکپلر دراواخر همان سال ۱۵۹۹ به‌گراتس برگشت. در همین‌سال، در زندگی تیکو براهه هم تغییرات بزرگی به‌وجود آمد. او دانمارك را ترك کرد و به‌پراگ رفت و در آنجا، دوباره از کپلر دعوت به همکاری کرد. این‌بار، کپلر به‌امید رهایی از گرفتاریها، دعوت اورا قبول کرد. او، بعد از گفتگوهای بسیار، در سال ۱۶۰۱ به‌عنوان دستیار براهه، به‌رصدخانه او در پراگ وارد شد.

در این سالها، تیکوبراهه روی حرکتهای مریخ مطالعه می‌کرد و عقیده داشت که همهٔ سیاره‌ها، به‌جز زمین، دور خورشید می‌چرخند، و خورشید هم همراه باآنها، به‌دور زمین حرکت می‌کند. کپلرهم، در خود، این استعداد را می‌دیدکه به‌اصطلاح خود «نجوم جدید» را استوار کند. براهه باملاطفتی نه چندان زیاد، می‌دید که در رصدخانهٔ او کارهایی جریان دارد که در واقع، درجهت خراب‌کردن نظریهٔ اوحرکت می‌کند. معلوم نیست‌که اگر تیکوبراهه درسال ۱۶۰۱ نمی‌مرد، سرنوشت روابط دودانشمند به کجا می‌کشید. عنوان منجم امپراطوری، به‌کپلر رسید. دیگر هیچ‌مانعی در سرراه او نبود و او به کارهای موردعلاقه‌اش پرداخت. در سال ۱۶۰۹ ، کتاب کپلر، تحت عنوان «نجوم جدید، یا فیزیك آسمانی همراه باتفسیر حرکت‌های مریخ براساس مشاهده‌های تیکوبراهه»، در پراگ منتشر شد.

قانون‌اول کپلر، محتوی اساسی این‌کتاب‌را تشکیل می‌داد، این‌قانون، همان‌طورکه‌معلوم‌است، چنین بود:همهٔ سیاره‌ها، روی یك‌بیضی به‌دورخورشید حرکت می‌کنند، به‌نحوی که خورشید در یکی از کانون‌های این بیضی قرار دارد. قانون، ابتدا برای مریخ ثابت و سپس برای دیگر سیاره‌ها، تعمیم داده

شده است.

قانون‌دوم در کتاب «خلاصه‌ای از نجوم کوپرنیکی» (۱۶۱۸–۱۶۲۱)، تنظیم شده است. مضمون این قانون‌را یادآوری کنیم: سطحی که شعاع حامل سیاره جاروب می‌کند، متناسب بازمان است. کپلر، ضمن کار دربارهٔ این قانون، به‌مسأله‌ای برخورد کرد که تاآن‌موقع در ریاضیات حل‌نشده بود. این مسأله، عبارت بود از محاسبهٔ مساحت یك قطاع بیضوی. اگر معادلهٔ بیضی‌را

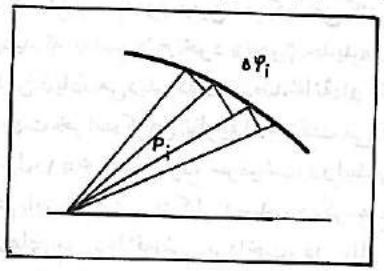


شکل ۱.
محاسبهٔ مساحت قطاع

درمختصات قطبی، وبه صورت $\rho=\rho(\varphi)$ درنظر بگیریم (شکل ۱) — ρ شعاع حامل و φ ، زاویهٔ قطبی—مساحت قطاع، بااین رابطه بیان می‌شود:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\rho$$

مسیری که کپلرطی کرد تاتوانست‌مساحت قطاع رابه‌دست‌آورد، می‌توان به‌ترتیب زیر، بااین رابطه مربوط‌کرد. انتگرال معین (شکل ۲) که به‌تقریب برابر است بامجموع حاصل ضرب‌های $\rho_i \cdot \Delta\varphi_i$ ، چیزی جز این نیست که



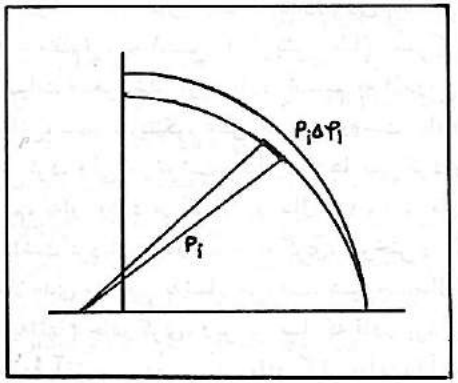
شکل ۲.
محاسبه تقریبی مساحت

روی قطاع اولیه، عنصر قوس دایره‌ای، جانشین قوس منحنی مفروض شده باشد. اگر منحنی رابه‌قوس‌های مقدماتی برابر تقسیم کنیم، قوس‌های $\rho_i \cdot \Delta\varphi_i$ نظیر آنها، برابر نخواهند شد. ولی، اگر منحنی مفروض، تفاوت کمی، با دایره داشته‌باشد، و اگر قطب در نزدیکی مرکز دایره انتخاب شده باشد(در مدار سیاره‌هاهم، درست همین‌وضع وجود دارد)، آنوقت اختلاف بین قوس‌های $\rho_i \cdot \Delta\varphi_i$ بامقادیری که پایین‌تر از مرتبهٔ دوم کوچکی نیستند، بیان

خواهد شد (شکل ۳). و این‌مقادیر، در محاسبه‌های کپلر، به‌حق، ناچیزشمرده شده است. در این‌حالت، مجموع‌بعدی را می‌توان اینطور نوشت:

$$\sum \rho_i^2 \cdot \Delta\varphi_i = \sum \rho_i(\rho_i\Delta\varphi_i) = (\rho\Delta\varphi)\sum \rho_i$$

و مساحت، متناسب با مجموع شعاع‌ها، درمی‌آید. و مؤلف‌هم از همین‌جا قانون دوم را تنظیم می‌کند: «نسبت زمانی که سیاره برای انتقال از انتهای محور بزرگتر تاوضع دلخواه دیگری صرف می‌کند، به‌زمان یك



شکل۳.
محاسبه تقریبی مساحت

دورکامل، برابر است بانسبت مجموع شعاع‌های حامل همهٔ نقطه‌های قوس، به‌مجموع شعاع‌های حامل تمامی بیضی». در زمان‌ما، بیانی از نوع «مجموع شعاع‌های حامل» عجیب‌وغریب به‌نظر می‌رسد، زیرا به‌مفهوم امروزی، تعداد این کمیت‌ها بی‌نهایت زیاد است، ولی در زمان کپلر، این بیان را به‌صورت مشروط، و به‌نحوی که در بالا روشن کردیم، می‌فهمیدند و قبول می‌کردند.

محاسبهٔ مساحت، به‌نحوی که کپلر به‌آن پرداخت، نخستین گامی بود که بعد از محاسبهٔ ارشمیدس برداشته می‌شد. کپلر به‌هیچوجه، روش خاص ریاضی‌دانان قدیم را، که به «دقت بی‌نقص» علاقمند بودند، دنبال نکرد. برای او، این مهم بود که نتیجه‌های به‌دست آمده، موجبی برای تردید در حقایق نشود، ولو اینکه لازم باشد «از راه خاردار مطالعهٔ کتاب ارشمیدس» (بیان کپلر) عبور کند. همانطورکه خواهیم دید، کپلر همیشه علاقمند بود که نتیجه‌های خود را ازراه‌های ساده‌تر وکوتاه‌تر به‌دست آورد، البته بدون‌اینکه ضرری به‌اعتماد او بزند. او دستگاه عظیم روش‌های رسمی اثبات را نمی‌پذیرفت، مثل اینکه احساس می‌کردکه برای مسأله‌های تازه، به‌روش‌های تازهٔ اثبات نیاز دارد.

سالهای بین ۱۶۰۹ (سال چاپ «نجوم جدید») و ۱۶۱۵، برای کپلر،

سالهای سختی و ناآرامی بود. در سال ۱۶۱۰ ، همسر او، بعد از یك بیماری سخت در گذشت و او و دوبچه‌اش‌را تنها گذاشت. موقعیت مادی کپلر، هرگز درخشان نبود، ولی حالا دیگر بافقر و عسرت واقعی مواجه شده بود. حقوق منجم امپراطوری، اسماً بد نبود—۱۵۰۰ فلورین درسال— ولی مدتها بود که این پول را به‌او نداده بودند. و کپلر، برای اینکه خانواده را اداره کند، به‌پیشگوئی و طالع‌بینی و زایچه‌نویسی، رو آورد. البته، زایچه‌نویسی، درآن عصر روشنفکری، ازوظایف منجم درباری به‌شمار می‌رفت. کپلر، درجستجوی درآمد منظم‌تر، به لینتس (اطریش علیا) سفرکرد و درآنجا به‌کار معلمی ریاضیات مشغول‌شد. او دوباره تصمیم به ازدواج گرفت، و در وجود همسر تازه‌اش، سوسانه‌ریتنگر، عشق خود، و دوست باوفای تمام زندگی خود را، پیدا کرد. ولی سرنوشت، کپلر را رها نمی‌کرد و ضربه‌های خود را، پشت‌سرهم، به‌او وارد می‌کرد. در سال ۱۶۱۵ ، مادرش را به‌اتهام جادوگری، بازداشت کردند. مجازات جادوگری، سوختن درکومهٔ آتش بود. و این‌خطری کاملاجدی وواقعی به‌شمار می‌رفت. همین‌چندسال‌قبل بودکه خالهٔ‌مادری کپلر را، به‌اتهام جادوگری، وبراین مبنا که قادر بود بیماران خود را معالجه‌کند، به‌کومهٔ آتش سپرده بودند. مادر کپلر به‌این‌دلیل متهم به‌جادوگری شده بود، که وقتی‌باکسی صحبت می‌کرد، به‌چشمان‌او نگاه نمی‌کرد... جریان پنج‌سال طول‌کشید ودراین مدت،کپلر دردسرهای فراوانی‌را متحمل شد و وقت زیادی را صرف آن‌کرد. مادرش تبرئه شد، البته بعداز آن‌که توانست به‌کمك افراد بانفوذ، متوسل شود. این جریان در وضع خود کپلرهم بی‌اثر نبود. وقتی که به‌لینتس برگشت، مواجه بابرخوردهای غیردوستانه و حتی خصمانه، شد. کم مانده‌بودکه اورا، نوه و فرزند یك‌جادوگر بخوانند. کپلر ناچارشد لینتس را ترك کند. خانوادهٔ پرجمعیت خود را در لینتس باقی‌گذاشت (کپلر ازسوسانه، هشت بچه داشت،) وخود برای پیداکردن کار در محل مناسب‌تری، از آنجا خارج شد. درسال ۱۶۲۶ ، جمعیت جاهل و متعصب: ساختمان اورا محاصره کردند و می‌خواستند کتابخانهٔ اورا که پرازکتابهای «کفرآمیز و سیاه» بود، ویران‌کنند. کتابخانهٔ کپلر، تنها به‌این‌دلیل سالم‌ماندکه‌دوستان او—ژزوئیت‌های اهل دانش—به‌بهانهٔ رسیدگی بعدی، آن‌را مهرموم کردند.

کپلر، درسال ۱۶۱۵ ، کتاب فوق‌العاده‌ای منتشرکرد، که در پیدایش ریاضیات‌جدید، نقشی اساسی داشت. این، همان‌کتاب مشهور «هندسهٔ‌بشکه‌های شراب» است که نام کامل‌آن، چنین بود: «هندسهٔ جدیدبشکه‌های شراب، و در درجهٔ اول، بشکه‌های اطریشی، که مناسب‌ترین شکل را دارند». کتاب

شامل دوبخش است. بخش‌اول «هندسهٔ اجسام منحنی‌الشکل منتظم» نامیده شده‌است. دراین بخش قضیه‌هایی جمع‌آوری شده است، که متعلق به‌پیشینیان او و مخصوصاً ارشمیدس است. قسمت‌دوم همین بخش، به‌نام «تکمله‌ای بر ارشمیدس»، کاملا متعلق به‌خود کپلر است. دراین قسمت محاسبه‌حجم اجسام مختلف دواری شرح داده شده است، که تاقبل‌از کپلر، کسی به بررسی آنها نپرداخته بود: اجسامی‌که از دوران یك‌قطاع دایره به‌دست می‌آیند، چه‌قطاعی که بزرگتر از نیم‌دایره باشد وچه قطاعی که کوچکتر از نیم‌دایره است. همچنین، حجم اجسامی‌هم که از دوران قطاع سهمی، هذلولی و غیره به‌دست می‌آید، محاسبه شده است. به‌هرکدام ازاین‌حجم‌ها نامی داده بود. این‌نام‌ها نشان می‌دهد که در برخورد اول باآنها، چه‌چیزی به‌یاد آدم می‌آید: لیمو، دوك هذلولی‌وار، سیب، زیتون و غیره. دربخش دوم «هندسهٔ مخصوص بشکهٔ اطریشی»، بشکه را، به‌عنوان حجم متقارنی درنظر می‌گیردکه از به‌هم‌پیوستن دولیموی ناقص یادودوك ناقص و غیر آن به‌دست آمده باشد. وچون مؤلف، حجم این‌اجسام را قبلا به‌دست آورده است، بلافاصله و به‌سادگی حجم بشکه را محاسبه می‌کند. باوجود این، کپلر در اینجا متوقف نمی‌شود و بعداز این نتیجه‌گیری، که به‌جای خود اهمیت زیادی دارد (به‌یاد بیاوریم که اوتوانست حجم ده‌ها جسم دوار را، که پیش‌از او به‌آنها نپرداخته بودند، محاسبه‌کند)، به‌حل مساله‌ای می‌پردازد، که درآن زمان تازگی داشته است. اوثابت می‌کند که بشکهٔ اطریشی، بهترین و باصرفه‌ترین شکل‌هاست. یعنی باصرف مواد اولیهٔ معین و مفروض، حداکثر گنجایش را دارد. به‌این‌ترتیب، کپلر توانست، مساله‌ای را در زمینهٔ جستجوی ماکزیمم تابع‌ها، حل‌کند.

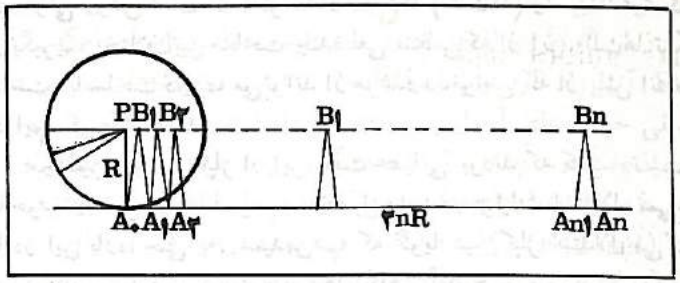
البته، کپلر برای‌حل‌مسالهٔ مربوط به‌جستجوی اکسترمم، از روش‌هندسهٔ رسمی استفاده‌کرده است. او مساحت‌های دنباله‌ای ازمستطیل‌ها را باهم‌مقایسه می‌کند که قاعده و ارتفاع آنها، مرتباً و درجهت مخالف‌هم، تغییر می‌کند. باوجود این جمله‌ای از زبانش دررفته است، که به‌مفهوم معینی، باید آن را تولد اولیهٔ آنالیز بی‌نهایت‌کوچك‌ها دانست. او درضمیمهٔ۲ برقضیهٔ V بخش دوم کتاب خود، نوشته است: «شکل‌هایی که از هردوطرف، درنزدیکی نقطهٔ G ختم می‌شوند، خیلی‌کم گنجایش خود را تغییر می‌دهند. زیرا حجم شکل AGC حداکثر است، و از جای مقدار حداکثر، به‌هردوطرف، کاهشی دارد که در ابتدا نامحسوس است». جمله‌ای که روی‌آن تاکید کرده‌ایم، همان‌طرح عملی است که منجر به‌جستجوی ماکزیمم ومی‌نیمم می‌شود. به‌زودی خواهیم دید که فرما، این‌طرح را تحقق بخشید و برهمین مبنا، دانش مربوط به‌بررسی

تابع‌هارا پی‌ریزی کرد. چنین است اساسی‌ترین ومهم‌ترین محتوی این کتاب.

اهمیت آن درچیست؟ اگر به‌طورسطحی قضاوت کنیم، باید بگوییم که در این کتاب، برای نخستین‌بار، حجم بیش‌از ۸۰ جسم دوار، محاسبه شده‌است. ولی مهم‌تر از این‌محاسبه، روش‌های تازه‌ای است که برای محاسبهٔ این حجم ها به‌کار رفته است، روش‌هائی که باروش پیشینیان، به‌کلی فرق دارد. کپلر، ابتدا این‌روش‌ها را درمورد نتیجه‌هایی که از زمان ارشمیدس شناخته شده‌بود، موردآزمایش قرار داد وسپس ازآنها، برای حل‌مساله‌های تازه، استفاده‌کرد. ولی این‌کتاب ارزش سومی‌هم دارد، که عمین‌ترین و مهم‌ترین‌آنها به‌شمار می‌رود. واقع‌امر، از این قرار است. حیثیت و اعتبار پیشینیان، به‌خصوص در زمینهٔ روش‌های استدلال‌های هندسی، پایدار وخلل‌ناپذیر بود. هرگونه‌استدلالی که به‌صورتی دیگر عرضه می‌شد، نارسا و غیرکافی به‌حساب می‌آمد. خدمت کپلر دراین بود که این رسم را شکست و توانست خود را از این باتلاق نجات دهد.

انتظاراو از هرروش‌این‌بودکه اورا ساده‌تر و سریع‌تر به‌نتیجه برساند. در عین‌حال، به‌خاطر باریک‌بینی ودقت‌زیاد، باید اورا «آپولون» زمان خودش دانست، انتشار کتاب‌او، موجب‌بحث‌های پرسرصدایی‌شد. بلافاصله، مدافعان و پاسداران سنت در هندسه، قلم به‌دست گرفتند. کپلر را سرزنش می‌کردند و می‌گفتند که استدلال‌های او چیزی‌را ثابت نمی‌کند،واینکه‌او به‌حاطرهٔ‌مقدس ارشمیدس توهین کرده است وغیره. ولی صداهایی که البته در ابتدا خیلی‌هم رسا نبود، به‌دفاع ازکپلر برخاست، به‌خصوص، پاول‌گولدن (P. Guldin) مشهور، در میان این مدافعان بود. ولی، به‌هرحال، کپلر موجب «حرکتی در اندیشه‌ها»شد، وبرای نخستین‌بارنشان‌داد که‌می‌توان پارا ازمرز منطق‌پیشینیان فراتر گذاشت. درواقع باید گفت که کپلر، دراین‌موردهم، راه ارشمیدس‌هم، را دنبال می‌کرد.ارشمیدس‌بسیاری از نتیجه‌ها را، باهمین روش‌ها، به‌دست‌آورده بود. اختلاف‌آنها دراین‌بودکه ارشمیدس، وقتی که‌نتیجه‌ای را باروشی‌غیردقیق به‌دست می‌آورد، لازم می‌دانست که تبعیت این نتیجه گیری‌را از همهٔ قانون‌های دقیق‌هندسی، ثابت کند، درحالی که‌کپلر مرحلهٔ اخیررا لازم نمی‌دانست، زیرا هیچ‌مطلب‌تازه‌ای به‌آدم‌نمی‌داد. دربحث‌های کپلر با «هندسه‌دان‌های ارتدوکس»، نطفه‌های اولیهٔ موضوع‌هایی دیده می‌شود که در فاصلهٔ هشتاد تاصدسال بعد، موجب درگیری بین هواداران لایب‌نیتس و مخالفانشان شد.

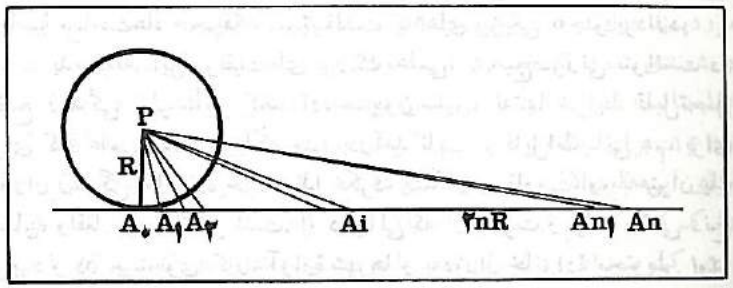
بامثال ساده‌ای، ماهیت روشی را نشان می‌دهیم که کپلر به‌کمک‌آن، از عهدهٔ حل‌مساله‌های مربوط به‌محاسبهٔ حجم اجسام دوار برمی‌آمد، کپلر، مسالهٔ



شکل ۴.

تقسیم دایره به‌قطاع‌های کوچك

سادهٔ‌مربوط به‌مساحت دایره را حل می‌کند. او دایره را، مجموعه‌ای از تعداد زیادی قطاع‌های کوچك می‌گیرد، که رأس مشترك همهٔ آنها، در نقطهٔ P ، مرکز دایره است (شکل۴). سپس محیط دایره را روی پاره‌خط A_0A_n باز می‌کند. قطاع‌ها، در روی پاره‌خط به صورت مثلث‌های متساوی‌الساقین $A_0B_1A_1$ ، $A_1B_2A_2$ ، . . . ، $A_{n-1}B_nA_n$ درمی‌آیند. هرکدام از این مثلث‌ها را، به‌مثلث دیگری تبدیل می‌کنیم که قاعده‌اش همان قاعدهٔ مثلث قبلی ولی‌رأسش در نقطهٔ P باشد (شکل ۵). هرمثلث جدید، بامثلث متناظر قبلی هم‌ارز است، زیرا قاعدهٔ مشترکی دارند و ارتفاع همهٔ آنها هم، برابر $A_0P=R$ است. مجموعهٔ‌این‌مثلث‌های‌جدید، مثلث A_0PA_n رامی‌پوشانند، که مساحت آن برابر است با πR^2 .



شکل ۵.

تعویض قطاع‌ها بامثلث‌های هم‌ارزشان

این استدلال، هم عصران کپلر را راضی نمی‌کرد. در واقع، مجموع مثلث‌های $A_0B_1A_1$ وغیره، هم ارز بامساحت دایره نیست، زیرا مثلث با قاعدهٔ مستقیم‌الخط، ومثلا مثلث $A_0B_1A_1$ ، باقطاع متناظر خودش هم‌ارز

نیست. ولی روشن است که اگر تعداد قطاع‌ها (مثلث‌ها) را به‌اندازهٔ کافی زیاد بگیریم، اختلاف بین مساحت چندضلعی منتظمی که از این مثلث‌ها تشکیل شده‌است، بامساحت دایره، می‌تواند از هرعدد دلخواهی که از پیش انتخاب کرده‌ایم، کوچکتر باشد.

مخالفین عقیدتی کپلر از این بابت عصبانی بودند که کپلر «نسبت به سلیقهٔ‌خوب ریاضی بی‌اعتنا بود» و به‌تفصیل وارد درجزئیات استدلال نمی‌شد، آنها در این باره، حتی به‌ارشمیدس‌هم، که گویا شبیه کپلر استدلال می‌کرده است، استناد می‌کردند. این مخالفت‌ها، گاهی به‌اوج خود می‌رسید. یکی از آنها گفته بود: «این شایستهٔ کپلر نیست‌که نام و خاطرهٔ پیرمرد خردمند را خراب کند»، و خراب‌کردن ارشمیدس را دراین می‌دید که کپلر، بااستناد به این‌دانشمند بزرگ، دایره را به‌مثلث‌هم‌ارز آن تبدیل کرده است. عنصر اصلی نتیجه‌گیری کپلر، مفهومی بودکه بعدها نام«بی‌نهایت کوچك»را به‌خودگرفت. مثلا دومساله‌ای که قبلا آوردیم، این عنصر، همان مساحت قطاع است. درك شهودی کپلر، توجه اورا به‌روشی جلب‌کرد، که بعدها در تکامل خود، به حساب انتگرالی رسید: تقسیم به‌عنصرهای بی‌نهایت کوچك و تبدیل مساله به‌مجموعی که با بی‌نهایت زیادکردن تعداد جمله‌های آن، به سمت حدی میل کند. باهمین‌روش‌بودکه کپلر توانست در«هندسهٔ‌جدید بشکه‌ها»ی خود. دشوار-ترین مساله‌های مربوط به‌حجم اجسام دوار را حل کند، مساله‌هایی که با روش‌های رسمی، حتی آرزوی حل‌آنها را هم نمی‌شد داشت. کپلر، باکتاب «هندسه جدید بشکه‌ها»ی خود، چنان تکانی به‌ریاضی‌دانان دادکه بعداز آن، محاسبهٔ مساحت‌ها، حجم‌ها، ... توانست گام‌های سریعی به‌جلو بردارد.

بدبختانه: این موفقیت‌های بزرگ علمی، به هیچ‌صورتی نتوانست در وضع زندگی کپلر تأثیر کند. او، همچون سابق، نه‌تنها شرایط قابل‌تحمل برای کار علمی نداشت، بلکه حتی درآمد ثابت و قابل‌اطمینانی هم، برای گذران زندگی خانواده خود، پیدا نکرد. پشتکار و مقاومت او، به‌عنوان یك انسان، واقعاً حیرت‌انگیز است. او درحالی‌که از عسرت و نیاز دائمی رنج می‌برد و در جستجوی کار، آوارهٔ شهرها و به‌دوراز خانوادهٔ محبوبش بود، نه تنها نجوم را رها نمی‌کرد، بلکه برعکس، تنها باکار و فعالیت بود که نیروی لازم‌را برای مقابلهٔ باهمهٔ بدبختی‌ها، به‌دست می‌آورد. درسال ۱۶۱۹، محصول کار عظیم محاسبه‌ای و پژوهشی خودرا، که در لینتس چاپ شده بود، باعنوان «هم‌آهنگی جهانی از نظر هندسی، معماری، توافق و همسازی، روانشناسی و نجومی، با ضمیمه‌ای شامل راز کیهان‌نگاری، در پنج کتاب»،

منتشر کرد. این کتاب به‌خاطر طرح و اثبات قانون سوم کپلر، جاودانی شد: مربع زمان گردش سیاره‌ها به‌دور خورشید، متناسب است بامکعب فاصلهٔ متوسط آنها (از خورشید). بقیهٔ کتاب‌هم پراست ازاندیشه‌های زیبایی دربارهٔ موسیقی حرکت‌های آسمانی، سرچشمهٔ یزدانی هندسه وغیره. این، نمونه‌ای است ازبخت او. «در موسیقی اجسام آسمانی، زحل و مشتری بم می‌نوازند، مریخ-زیر مردانه (tenor) زمین و زهره-بم زنانه (contralto) و عطارد فوسه (Fausséت) (کپلر، صداها را، همچون مجموعهٔ آواهائی در نظر می‌گیرد، که خورشید رهبر آن‌است). سپس به‌خواننده، آگاهی‌هائی دربارهٔ ستاره‌های دنباله‌دار، اتر و غیره داده می‌شود. کپلر در همین‌سال ۱۶۱۹، نظریه‌هایی داده است که نسبت به‌فراست وباریك‌بینی او، بسیار حیرت‌انگیز است. کافی است نمونه‌ای از این موارد را بیاوریم: ستاره‌های دنباله‌دار از ماده‌ای درست شده‌اند که پرتوهای خورشید می‌تواند آنرا به‌فاصله‌ای دور ببرد.

درسال ۱۶۲۸، کپلر در خدمت فرمانروا والنشتین معروف، به ستاره شماری (تنجیم) مشغول شد. کپلر امیدوار بود که بتواند بالاخره حقوقی را که سالها به‌اونپرداخته بودند، وصول کنند. امپراطور رودولف دوم، ضمن انتقال دوك‌نشینی مکلن‌بورگ به والنشتین، از او خواست که قرض امپراطوری به کپلر را بپردازد. افسوس که درواقع، کپلر را فریب داده بودند. کارهای علمی کپلر، برای والنشتین، حرف مفت بود، و زایچه‌ها و جدول‌های طالع-بینی هم که به‌وسیلهٔ کپلر تنظیم شده بود، پیش‌بینی‌هایی می‌کردند که مطلقاً موردپسند دوك نبود. زیستن در جوار والنشتین، به‌هیچوجه باب طبع پیرمرد دانشمندی نبود که تمامی عمر خود را وقف دانش کرده بود. او دربار عالیجناب را ترك کرد و به‌لینتس نزد خانواده‌اش برگشت. در پائیز سال ۱۶۳۰، برای چندمین‌بار برای گرفتن پول‌های خود، تلاشی را آغاز کرد. برای این‌منظور لازم بود به رگنسبورگ سفر کند. کپلر برای اینکه خرج خود را کم‌کند، تصمیم گرفت از راه بالا برود (از لینتس تارگنسبورگ، قریب ۱۵۰ کیلومترراه بود.). درراه سرماخورد، یك‌هفته‌ای دررگنسبورگ ناخوش بود، و در ۵(۱۵) نوامبر سال ۱۶۳۰، از دنیا رفت. چندنفر از دوستانش مدیرمدرسه وکشیش، اورا به‌خاك سپردند. تمامی ارثیهٔ کپلر (اگر بشود چنین واژه‌ای برای‌آن به‌کار برد). عبارت‌بود از ۲۳ اکو (کمتر از ۵ریال)، لباسی که برتن داشت و چند نسخه ازنوشته‌های او، که برای فروش آماده شده‌بود. خود کپلر، نوشتهٔ روی آرامگاهش را تهیه کرده بود!

Mensus eram coelos, nune terrae metior umbras,
Mens coelestis erat, corporis umbra jacet

که آن‌را می‌توان به‌این ترتیب ترجمه کرد:

من آسمان را اندازه گرفتم؛ حالا سایهٔ زمین را اندازه می‌گیرم:
روحم. درآسمان زندگی می‌کرد، اینجاهم سایهٔ به‌جسمم آرمیده‌است.

مدتها، هیچ‌توجهی به‌آرامگاه‌کپلر نشد. تنها در سال ۱۸۵۸ ، درچند قدمی آرامگاه، مجسمهٔ نیم‌تنهٔ این دانشمند بزرگ گذاشته شد. در فرهنگستان علوم اتحاد جماهیرشوروی سوسیالیستی، ۱۸ صفحه از دستنویس‌های کپلر، که در سال ۱۷۷۵ خریداری شده است، نگاهداری می‌شود. در سال‌های ۱۸۵۸ تا ۱۸۷۱ ، مجموعهٔ آثار کپلر (که شامل قریب ۴۵ اثر است)، در هشت‌جلدبزرگ، چاپ شد.

همچون بسیاری از مردان بزرگ، درموردکپلرهم می‌توان به‌رابطهٔ دوگانه او بازمان خودش، توجه کرد. از یك‌طرف از زمان خودش بسیار جلوتر بود- ونبوغ‌او هم در همین‌جاست-و از طرف‌دیگر به بسیاری از اعتقادهای واهی زمان خود، باور داشت. درنجوم، اپتیك و فیزیك، اظهار-نظرهایی کرده است،که باتوجه به‌تیزهوشی و باریك‌بینی کپلر، عجیب‌است کپلر جزرومد دریاها را نتیجهٔ عمل ماه می‌دانست، حکمی که حتی به‌نظرمرد بزرگی چون گالیله، بی‌معنی و پوچ به‌حساب می‌آمد: می‌توان گفت که کپلر در آستانهٔ کشف قانون جاذبهٔ عمومی بود، نظریهٔ هندسی لولهٔ توپ را او پیدا کرد: اوچنان شجاع بودکه تاکید می‌کردکه آدمی، تصویر را به‌خط مستقیم می‌بیند، ولو اینکه چشم‌آن را به‌طریق دیگری گرفته باشد. خیلی طول کشید تاصحت پیش‌گوئی‌های علمی کپلر روشن شد و قانون‌ها و کاربردهای آنها، به‌دست آمد. همهٔ اینها گواه براین است که او نه‌تنها از مردم زمانهٔ خود، بلکه حتی از دانشمندان آن زمان‌هم، یك سروگردن بالاتر بوده است. وچقدرشگفتی‌آور است‌که چنین شخصی به‌ضدعلمی‌ترین فرضیه‌های‌پیشگوئی و طالع‌بینی، باور داشته‌باشد. کپلر، به‌مذهب خود اعتقاد عمیقی داشت وتلاش درکشف قانون‌های طبیعت را به‌عنوان راهی به‌سوی شناخت پروردگار می-دانست؛ او به‌طور جدی، همهٔ افسانه‌های مسیحیت را پذیرفته بود و در تمامی مراسم کلیسایی شرکت می‌کرد. او به‌عرفان عددی ونیروی عددها معتقد بود و درکتاب خود به‌نام «Harmonices mundi» (هم‌آهنگی جهان). در بارهٔ آن صحبت کرده است.

درعین‌حال، اونسبت به‌همهٔ آنچه که به‌دانش مربوط می‌شد، اعتقادی

بی‌پایان داشت. در سخت‌ترین شرایط زندگی، و وقتی‌که از تأمین معاش روزانهٔ خانوادهٔ خود درمانده بود، بارها برای سفر به‌خارج از او دعوت شد و او هربار، بدون هیچ تردیدی، آن را ردکرد. او برای دوستش می‌نویسد: «برای چه به‌ایتالیا بروم؟ شاید به‌این‌خاطر که بتوانم بازندان‌های آن آشنا شوم؟» ازاین جمله‌ها به‌خوبی برمی‌آیدکه او نمی‌خواست اعتقادهای خودش را به‌قیمت راحتی شخصی از دست بدهد (همانطورکه می‌دانیم در آن زمان، در ایتالیا هواداری از آموزش کوپرنیك و نشر عقاید او، ممنوع بود).

کپلر، به‌حق به‌عنوان یك‌منجم، سزاوار شهرت جهانی و حق‌شناسی نسل‌های بعد از خود است. ولی: همانطورکه دیدیم، خدمت او به ریاضیات هم کم‌نبود. او برای نخستین‌بار، بعد از ده‌هاسده سکوت، مسالهٔ مربوط به حجم جسم‌های دوار را طرح کرد که نقطهٔ آغازی است برای حرکت بعدی ریاضیات.

ترجمهٔ پرویز شهریاری

درشمارهٔ‌بعد: بوناونتوراکاوالیری

***

پاسخ رمز و راز عددها وشکل‌ها (صفحهٔ ۲۷ را ببینید)

۱. حاصل‌ضرب این ضرب‌را می‌توان اینطور نوشت:

$$BBB = B \times ۱۱۱ = B \times ۳ \times ۳۷$$

چون ۳۷ عددی است اول ، بنابراین یکی از دو عامل ضرب (AB یا CD) می‌تواند ۳۷ یا ۷۴ باشد. دراینصورت، عامل‌دیگر به‌ترتیب برابر $B \times ۳$ یا $\frac{B \times ۳}{۲}$ خواهد شد. در حالت دوم ، B باید رقمی زوج باشد و چون داریم $\frac{B \times ۳}{۲} > ۱۰$ بنابراین تنها $B = ۸$ ممکن است. ولی جوابی‌که ازاین‌راه به‌دست می‌آید:

$$۷۴ \times ۱۲ = ۸۸۸$$

بایکی ازشرط‌های مساله نمی‌سازد (باید هررقم حاصل‌ضرب برابر رقم یکان یکی از دوعامل‌ضرب باشد). درنتیجه، یکی ازدوعامل‌ضرب تنها ۳۷می‌تواند

بقیه پاسخ درصفحه بعد

باشد. اگر عامل اول ضرب‌را ۳۷ بگیریم، حاصل‌ضرب، باید ۷۷۷ شود که دراین‌صورت‌عامل‌دوم‌ضرب برابر ۲۱ می‌شود. ولی‌اگرعامل دوم‌ضرب‌را ۳۷ فرض کنیم، باید داشته باشیم

$$10A+B=3B \Rightarrow 5A=B$$

که ازآنجا $A=1$ و $B=5$ به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، برای مساله دو جواب پیدا می‌شود:

$$37\times 21=777$$
$$15\times 37=555$$

۲. فرض می‌کنیم که $(n+1)$ امین جملهٔ تصاعد اول با $(m+1)$ امین‌جملهٔ تصاعد دوم برابر باشد. $(n+1)$ امین‌جملهٔ تصاعد اول برابر است با $2+5n$ و $(m+1)$ امین جملهٔ تصاعد دوم برابر است‌با $2+3m$ و بنابر فرض باید داشته باشیم:

$$2+5n=2+3m \Rightarrow n=\frac{3m}{5}$$

اگر m برابربا ۵ ، ۱۰ ، ۱۵ و غیره باشد، برای n به ترتیب عددهای ۳ ، ۶ ، ۹ وغیره به‌دست می‌آید.

از آنجا می‌بینیم که جمله‌های برابر عبارتند از هر سه جمله یکبار در تصاعد اول و هرپنج جمله یکبار درتصاعد دوم.

بنابراین، تعداد جمله‌های مساوی، در ۶۰ جملهٔ تصاعدها برابر است‌با

$$60:5=12$$

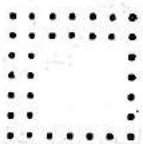
۳. مساله را به دوصورت می‌توان فهمید:

اول. باسکه‌هاتمامی سطح یك‌مربع‌را بپوشانیم. دراینصورت اگرتعداد سکه‌ها را x وضلع مربع‌را درحالت اول n بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} x-5=n^2 \\ x+8=(n+1)^2=n^2+2n+1 \end{cases}$$

از این دستگاه به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$n=6 \ , \ x=41$$



دوم. باسکه‌ها،تنها محیط‌یك‌مربع‌را بپوشانیم.

با توجه به شکل معلوم می‌شود که در این حالت ، اگر ضلع مربع اول را n بگیریم، باید داشته باشیم:

بقیه پاسخ درصفحه بعد

$$2n+2(n-2)=x-5 \Rightarrow 4n=x-1$$

و وقتی که بخواهیم بدون دست زدن به مربع اول، مربعی با ضلع یك واحد بزرگتر بسازیم ، باید به اندازهٔ $n+(n+1)$، یعنی $(2n+1)$ سکهٔ دیگر داشته باشیم، بنابراین

$$(4n-4)+(2n+1)=x+8 \Rightarrow 6n=x+11$$

و از دومعادلهٔ

$$\begin{cases} 4n=x-1 \\ 6n=x+11 \end{cases}$$

به‌دست می‌آید:

$$n=6 \ , \ x=25$$

به‌این ترتیب، بسته به‌اینکه صورت مساله را چگونه بفهمیم، به عنوان پاسخ یکی ازدوعدد ۴۱ یا ۲۵ به‌دست می‌آید:

۴. فرض می‌کنیم که x ساعت از ظهر گذشته باشد، طبق فرض باید داشته باشیم:

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{2}(24-x)=x \Rightarrow 5x=48$$

و ازآنجا به‌دست می‌آید:

دقیقه ساعت

$$x=9 \ , \ 36$$

۵. دراینجا دوراه‌حل داده‌شده است. شماهم احتمالا می‌توانیدراه حل های دیگری پیدا کنید:

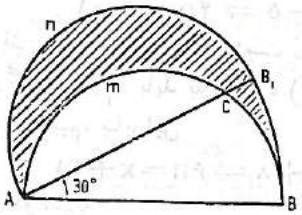
$$2\times 2\times 2-2:2=7$$
$$22:2-2^2=7$$

۶. از راه‌حل‌های ممکن، چندتا را دراینجا آورده‌ایم:

$$97524:10836=9$$
$$95823:10647=9$$
$$95742:10638=9$$
$$0\times 123456789+9=9$$
$$1^{23456790}+8=9$$

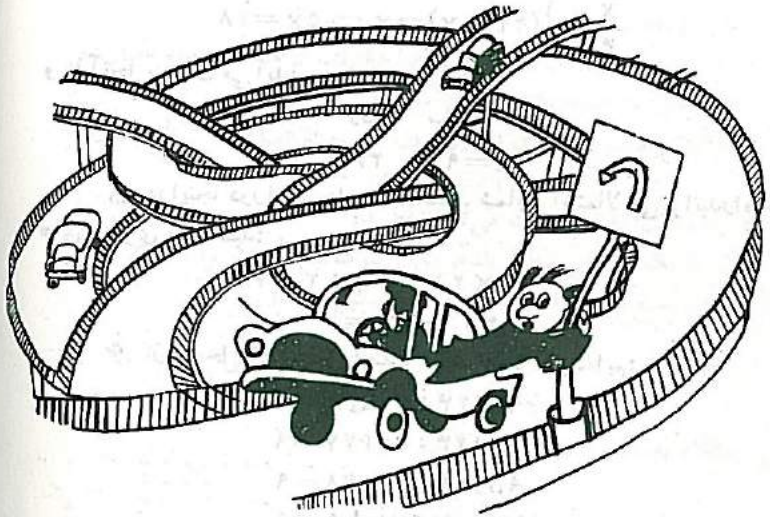
۷. باید مساحت شکل $A\pi B_1BCmA$ را به دست آوریم (شکل را

بقیه پاسخ درصفحه بعد



ببینید). این شکل تشکیل شده است از شکل $A\pi B_1CmA$ و B_1CBB_1. ولی مساحت شکل $A\pi B_1CmA$ با مساحت شکل ACBA برابر است زیرا وقتی به هر کدام از آنها، شکل AmCA را اضافه کنیم، همان نیم دایره به دست می‌آید. بنابراین مساحت شکل $A\pi B_1BCmA$ برابر است با مساحت قطاع B_1AB با شعاع ۲ و زاویهٔ مرکزی ۳۰ درجه؛ و روشن است که مساحت این قطاع هم برابر است با $\frac{4}{3}\pi$.

***



صبر کن ببینم، تو متخصص توپولوژی نیستی؟

اسرار باد

در فصل تابستان، در آسمانی بی‌ابر خورشید بطور خیره کننده‌ای می‌درخشد. هوای سوزان بی‌جنبش است. دود از دودکشها مانند ستونی شفاف به آسمان بالا می‌رود و هوا خفقان آور است.

ناگهان نسیم خنکی آغاز بوزیدن می‌کند. درختانی که تاکنون بی‌جنبش و بی‌صدا بودند، شروع به حرکت می‌نمایند. به آهستگی هوای راکد جای خود را به توده‌های هوای متحرك می‌دهد.

کم کم جریان هوا رو به افزایش است و بر روی صورت انسان باد بسیار خنکی احساس می‌گردد و شاخه‌های درختان به جنبش در می‌آیند. سپس باد شدت می‌یابد بطوری که گاهی باد می‌خواهد آدم را ببرد. باد می‌وزد و باز هم می‌وزد و گاهی ایجاد اسراری را نیز می‌کند.

سکون در جهان وجود ندارد. اقیانوس کبود (آبی) رنگی که در پیرامون سیاره ما قرار گرفته است نیز از این قاعده مستثنی نیست. یك روز و یك ساعت هم حتی آرامش ندارد. وایسپهر (جو) همیشه در جنبش است. در هر لحظه، جریان‌های هوا ـ بادها و نسیم[1] ها ـ در آن پدیدار و ناپدید می‌گردند، نخستین علت آن پخش نامنظم فشار اسپهری (جوی) در رویهٔ زمین و تغییرهای زیاد آن می‌باشد. هواشناسان می‌گویند که هوا بوسیلهٔ رویهٔ زمین بطور نامنظم گرم می‌شود.

گرمائی که از خورشید انتشار می‌یابد بسیار کم بطور مستقیم بوسیلهٔ هوا جذب می‌شود گرما از هوا بی‌آنکه عملاً چیزی از گرما کاسته شود عبور می‌کند و رویهٔ خاك یا آب‌ها را گرم می‌نماید. پرتو افکنی (تشعشع) رویهٔ زمین است که موجب افزایش گرمای هوا می‌گردد، ولی این پرتو افکنی برحسب جنس رویهٔ زمین: جنگل یا استپ[2]، آب یا ماسه، تغییر می‌کند.

1- Brise 2- steppe

دلیل تغییرهای فشار وایسپهری چنین است: درجایی که هوا بشدت گرم شده است، هوا به طرف بالا می‌رود و بوسیلهٔ هوای بسیار سرد سنگینی که پیرامون آن را فرا گرفته است فشرده و متراکم می‌گردد. در این موقع است که می‌گوئیم باد می‌وزد.

هواشناسان، واژهٔ «توده‌های هوا» را برای نشان دادن گنج‌های (حجم‌های) بزرگی از هوا که منشاء ویژگیهای آنها فرق دارد، بکار می‌برند. این توده‌های هوا هستند که موجب ریزش باران و ایجاد هوای خوب می‌شوند. با جا به جا شدن بر روی خشکادها[1]، برخی موجب هوای خوب و روزهای آفتابی شده و برخی دیگر تولید ابرها و باران را می‌کنند.

هر تودهٔ تازهٔ هوایی که می‌رسد، بخش پیشرو نوعی از هوای تازه است که جانشین هوای پیشین می‌گردد و گاهی تنها در مدت چند ساعت، هوای سرد و صاف را جانشین هوای گرم و مه‌آلود می‌کند. این موضوع می‌رساند که در بالای سرما دو توده هوا با یکدیگر برخورد کرده و هوای تازه وارد، جای هوای نخستین را گرفته است.

بدیهی است که یك توده هوا چیز تغییر ناپذیری نیست و با جابجا شدن در لایه‌های وایسپهر اندك اندك تغییر شکل پیدا می‌کند. مثلاً پس از تولید، در شمالگان[2] یا در بالای یخچالهای[3] گرانلند، «زندگی» خود را بصورت یك جریان سرد و خشك و خالص آغاز می‌کند. ولی این گنج (حجم) بزرگ هوا در راه یك سرنوشت نامعلوم، با جریان گرم گلف استریم[4] تلاقی می‌کند. لایه‌های زیرین آن گرم و نمدار (مرطوب) می‌شوند. ولی در لایه‌های زیرین (بالایی) آن همیشه سرمای شمالگان حکمفرما است. این وضع موجب می‌شود که هوا حالت ناپایدار پیدا کند و در آن جریان‌های بالا رونده و پائین رونده ایجاد گردد. و هنگامی که این تودهٔ هوای ناپایدار به کرانه‌های شبه جزیرهٔ اسکاندیناوی برسد، تولید هوای بدی که همراه با باد و بوران و برف و توفان‌های زمستانی است می‌کند.

تودهٔ هوای نامبرده به جابجا شدن خود بطرف جنوب ادامه می‌دهد و کم کم نم (رطوبت) خود را از دست داده ولی هنوز بسیار سرد می‌باشد. هنگامی که به اتحاد جماهیر شوروی می‌رسد گرمایش بطور محسوسی کاهش پیدا می‌کند. آنچه شرح داده شد فرگشت[5] یکی از جابجا کنندگان آب و هوا است.

حال توده‌ای از هوا را که ویژگیهای کاملاً متفاوتی با توده هوای نامبرده در بالا دارد، در نظر بگیریم. این توده هوا از آسیای مرکزی می‌آید و ناحیه‌های ولگا و اوکرائین را مورد تاخت و تاز قرار می‌دهد و آب و هوای خشك و گرم و گرد و غبار بسیار همراه خود می‌آورد.

محلی که در آنجا توده‌های هوا با گرمای مختلف با یکدیگر تلاقی می‌کنند، پیشانی[7] (جبهه) نامیده می‌شود. در پیشانی هرگز آرامش وجود ندارد. و مانند همه جبهه‌ها، در آنها نبرد که گاهی خیلی شدید است، جریان دارد.

هنگامی که توده‌های هوا با سرعت مختلف یا در راستاهای مختلف جابجا می‌شوند، بیکدیگر برخورد کرده موجب می‌گردد که خط پیشانی تغییر شکل پیدا کند و موجهای هوایی را پدید آورد. هوای سرد با نیروی افزایش یابنده‌ای بطرف جنوب ریزش کرده و از زیر هوای گرم می‌گذرد و آنرا

1- continents 2- Arctiqve 3- Glaciers 4- Gulf Stream 5- Evolution
6- Temps 7- Front

بطرف بالا می‌راند. توده‌های گرم بطرف شمال منحرف گشته و هوای سرد، آنها را بطرف جلو می‌راند. در این موقع گردبادی[1] در بخش زیرین (بالایی) محلی که در آنجا هوا از مرکز بطرف حاشیه رانده شده است، بوجود می‌آید. در این محل فشار افزایش می‌یابد. فشار در جایی که توده‌های هوای گرم در جنبش هستند کاهش می‌یابد و در جایی که توده‌های سرد جایگزین شده‌اند افزایش پیدا می‌کنند. بدین ترتیب منطقه‌ای به نام چرخه[2] تولید می‌گردد که در مرکز آن یك فرو بار[3] تشکیل می‌شود. به علت جنبش چرخشی زمین[4] بادها به طرف مرکز چرخه نمی‌وزند، بلکه بطرف راست (در نیم اسپهر شمالی[5]) متمایل می‌گردند. و تشکیل بادهای چرخنده[6] را می‌دهند که در جهت مخالف عقربه‌های ساعت حرکت می‌کنند.

چرخه پس از تشکیل در محل خود باقی نمی‌ماند و جنبش توده‌های هوای گرم را پیروی می‌نماید. در ۲۴ ساعت گاهی تا هزار کیلومتر تغییر جا می‌دهد و نشانه وقوع بادهای شدید و آب و هوای بد می‌باشد.

یکی از چرخه‌ها که اتحاد شوروی را از کریمیه تا Velikiy Oustioug (تقریباً ۱۸۰۰ کیلومتر) پیمود، بر روی زمین نزدیك ۴ میلیارد متر مکعب آب بارید که از آن دریاچهٔ Ilmen پر شد.

بسیاری از وقت‌ها چرخه‌های دیگری جانشین یك چرخه می‌شوند. و میان منطقه‌های فرو بار منطقه‌های فرابار[7] یا واچرخه[8] تشکیل می‌شود.

در همهٔ زبان‌ها واژه‌هایی برای نامیدن بادهای گوناگون وجود دارد. شمار آنها به اندازه‌ای زیاد است که در این جا نمی‌توان همه آنها را شرح داد.

«برف خوره[9]» در بسیاری از منطقه‌ها شناخته شده است. این باد هنگام پائین آمدن از کوه‌های برف دار گرمای سوزانی را همراه می‌آورد و بوسیلهٔ تند بادهای[10] خشك و سوزان، در دره‌ها ریزش کرده و در مدت چند ساعت همهٔ برف‌ها را از میان می‌برد.

در ناحیه‌های آلپ به این گونه باد «خورنده برف» می‌گویند[11]. بر اثر وزیدن این باد گرمای هوا بطور ناگهانی افزایش می‌یابد و بر اثر آن نخستین علف‌های بهاری پدیدار می‌شوند و جوانهٔ درختان متورم می‌گردد. «برف خوره‌های» زمستانی اغلب گرما را به ۱۵ تا ۲۰ زینه در روز بالا می‌برند.

برف خوره‌های آلپی بر روی شیب‌های آلپها تولید می‌شوند. مثلاً هنگامی که در باختر یا شمال باختری رشته آلپ منطقه‌های فروبار (فشار کم) بیشتر از شیب‌های جنوبی باشند، بادها از منطقه‌های اخیر آغاز بوزیدن می‌کنند. ولی کوه‌ها راه را برتوده هوایی که از جنوب می‌آید می‌بندند. بنابراین، جریان‌های هوا به تندی شروع بپائین آمدن از قله‌ها به طرف دره‌ها می‌کنند.

بدین ترتیب بادهای کوهستانی تولید می‌شوند، ولی چرا همراه خود گرما می‌آورند و نه سرما؟

1- Tourbillon 2- Cyclon 3- Dépression 4- Mouvement de rotation 5- Hémisphére boréal 6- Vent tournant 7- Haute pression 8- Anticyclone
9- Fochn 10- Rafale

۱۱- در گرگان و آشتیان نیز به بادهائی که در پایان زمستان می‌وزند و برف‌ها را آب می‌کنند و اغلب با بوران همراه هستند، برف خوره می‌گویند.

برای این است که هوای رقیق قله‌ها به نسبتی که بطرف دره پائین می‌آیند متراکم و فشرده‌تر می‌شوند و هوا براثر متراکم شدن گرم می‌شود (براثر هر صد متر اختلاف سطح یك زینه گرم‌تر می‌شود) آلپها کوه‌هایی بلند هستند و بنابراین می‌توان درك نمود که چگونه باد هنگامی که به دره‌ها وارد می‌شود، ممکن است خیلی گرم و سوزان گردد.

برف خوره‌ها در همه سرزمین‌های کوهستانی چیزی عادی هستند. در قفقاز، در کریمه، در آلتایی و در آسیای مرکزی زیاد دیده می‌شوند. این بادها در پیرامون تاشکند از کوه‌هایی که در شمال خاوری قرار دارند می‌وزند. برف خوره‌های زمستانی آسیای مرکزی به اندازه‌ای گرم هستند که گاهی موجب می‌شوند که گندم‌های زمستانی در ماه دسامبر یا ماه ژانویه برویند.

باد گرمی که بر روی شیب‌های کوه‌های روشوز[1] می‌وزد از خویشان نزدیك برف خوره‌ها است و به اندازه‌ای خشك است که براثر وزیدن آن برف آب نشده بخار می‌شود.

ماهیگیران در سیبری در ناحیه‌های پیشکوهستانی بایکال سارما را خوب می‌شناسند. (نام آن از رودخانه سارما که از بلندیهای شمال باختری وارد دریاچه بایکال می‌شود آمده است). سارما با شتاب زیاد و همیشه بطور ناگهانی می‌وزد و به اندازه‌ای نیرومند است که سنگهای بزرگ و جانوران را به دریاچه می‌ریزد. سارما چگونه تولید می‌شود؟ در آغاز زمستان، هنگامی که در سیبری یخبندان شدیدی حکم فرما است، دریاچه بایکال هنوز یخ نبسته است و در نتیجه در بالای دریاچه فشار بسیار کمتری از ناحیه‌های اطراف دریاچه وجود دارد. در این موقع توده‌های هوایی که فشار آنها زیاد است و از باختر می‌آیند می‌توانند بطرف بایکال جریان یافته و تولید بادی نمایند که از تنگه‌های دره‌ها با تندی خیلی زیاد بوزد.

ترجمه: دکتر عبدالکریم قریب

1- Rocheuses

تدریس ریاضیات
و تلاشی برای بهتر کردن آن

مقاله‌ای که در زیر ترجمهٔ آن را می‌بینید، مقاله‌ای است که گروهی از عضوهای انجمن ریاضی امریکا نوشته‌اند. هدف این مقاله پخش تجربیات استادان ریاضی در سطح وسیعی بوده است.

در این مقاله رهنمودهائی مشخص دربارهٔ طرز ادارهٔ یك کلاس داده شده است.

این مقاله از آنجا می‌تواند مفید باشد که کلی بافی نکرده بلکه به بحث‌های خیلی مشخص راجع به حتی کوچکترین نکاتی که در کلاس پیش می‌آید پرداخته است. از طرف دیگر این مقالهٔ کمبودهای اساسی دارد. مهمترین آن برای ما خوانندگان ایرانی، اینست که مقاله برای سیستم آموزشی امریکا و با در نظر گرفتن روابط موجود در جامعهٔ امریکا نوشته شده است. نظام آموزشی ما مشکلات و کمبودهایی خاص خود دارد که باید در رابطهٔ مستقیم با جامعه مورد بررسی قرار گرفته و در بسیاری موارد از بیخ و بن دگرگون شود. این مقاله در این رابطه هیچ مفید نیست و فقط می‌تواند با ارائه بعضی راه حلها افق دید معلمان ریاضی را گسترش داده تا آنها با توجه به شرایط خود و کلاسهایشان و جامعه‌شان بعضی از آنها را به کار گیرند.

شهریار شهریاری

اول - کلاس

برنامه ریزی

«واو با خوشحالی یاد می‌گرفت، و با خوشحالی می‌آموخت»

چاوسر،

قصه‌های کانتربوری

معلم، برای اینکه بتواند در کلاس درس موفق باشد، معمولاً باید از خیلی پیش از آغاز کلاسها، به

محتوای درس فکر کند، با هدفهای درس آشنا شود و در جهت امکان رسیدن به این هدف‌ها تصمیم‌های لازم را بگیرد.

این مهم است که به جای درس‌های جداگانه، به کل برنامهٔ آموزشی توجه شود. اگر مثلاً درسی برای درس‌های دیگر و یا درس‌های بعدی این کلاس لازم است، معلم باید به طور کامل به آنها بپردازد، تا وقتی دانشجویان جلوتر می‌روند به گرفتاری برخورد نکنند. معلم باید از اول راجع به روش و سطح تدریس مطالب مهم کلاس تصمیم بگیرد. این بدان معناست که معلم باید از آمادگی و نیازها و علاقه‌های دانشجویانی که به کلاسش می‌آیند اطلاع داشته باشد. کلاسی که همهٔ شاگردان آن دانشجویان رشتهٔ ریاضی‌اند با کلاسی که بیشتر شاگردان آن از رشتهٔ بازرگانی آمده‌اند، بسیار فرق دارد.

خوب است که برنامه‌ی کلی برای کلاس در نظر بگیریم، و کتاب درسی را هم با همین فکر انتخاب کنیم و مورد مطالعه قرار دهیم. قبل از اینکه کلاسها شروع شود، معلم باید بداند کدام بخشها احتیاج به تأکید دارند، و کدام بخشها را می‌شود در صورت کمی وقت، حذف کرد. مخصوصاً، برای درسهائی که در کلاس‌های مشابه، افراد مختلف درس می‌دهند، بهتر است که برنامهٔ روز به روز را، همراه با مسائل مربوط به تکلیف شب قبل از شروع کلاس‌ها آماده کنیم. برای چنین درسهائی بهتر است معلوم کنیم که چه مقدار حداقلی را باید در طول ترم درس داد.

برای آماده کردن مطالب اضافی، بهتر است از کتابهای جنب درسی و کتابهای مرجع استفاده کنیم و آنها را قبل از شروع کلاس انتخاب کنیم. شما به عنوان یك معلم، بهتر است آگاهی‌هایی اضافی، هم دربارهٔ محتوای ریاضی درس و هم دربارهٔ بعضی نکته‌های تاریخی و کاربردهای جالب آن به دست آورید. دانشجویان از شنیدن این مطالب خوشحال می‌شوند، ولی کمتر استادی است که بتواند بدون آمادگی قبلی از عهدهٔ این کار برآید.

اگر کتابهای مرجع در دسترس دانشجویان است، بهتر است لیستی از آنها را تهیه کنید و به دانشجویان بدهید. در بعضی موارد ممکن است چند تا از کتابها را در کتابخانه دانشگاه بگذارید و یا به کتابفروشیهای محل اطلاع دهید که چنین کتابهایی را به دانشجویان پیشنهاد کرده‌اید.

وقتی را که قبل از شروع کلاس برای آماده کردن مطالب صرف می‌کنید، به هدر نخواهد رفت، زیرا کلاستان با نظم بیشتر و با سرعت منظم‌تری به پیش می‌رود، و دانشجویان هم به جدی‌تر بودن برنامه اعتقاد پیدا می‌کنند. از طرف دیگر برنامه‌ریزی نباید خیلی جامد و غیر قابل تغییر باشد و یا بیش از حد به نکته‌های کوچك پرداخته باشد. کلاسها، همانند افراد، با هم فرق می‌کنند، و رفتارمان با هر کلاس باید متناسب با وضع همان کلاس باشد.

شروع خوب

«هیچ تخیلی به سرسختی و پایداری تخیلی نیست که به‌وسیلهٔ یك معلم تلقین شده باشد».

سر ویلیام اوسلر

نقل از هارری کوشینگ در جلد دوم

زندگی ویلیام اوسلر

نکته‌هائی وجود دارد که باید در همان جلسه اول کلاس، به آنها پرداخت.

۱. عنوان و موضوع درس را اعلام کنید.

این موجب خواهد شد که همهٔ دانشجویان بتوانند خود را برای فراگیری آن آماده کنند.

۲. یادآوری کنید که برای یاد گرفتن این درس، به چه آگاهی‌هائی نیاز دارند.

تأکید کنید که فقط دانشجویانی می‌توانند از عهدهٔ این کلاس برآیند که این آگاهی‌ها را داشته باشند. اگر آگاهی‌های مشخصی برای درس شما وجود ندارد، ولی دانشجویان به بعضی مهارتهای محاسبه‌ای نیازمند هستند. بهتر است از آنها آزمایشی بکنید و تصحیح آن را هم به‌عهدهٔ خودشان بگذارید: می‌توانید اعلام کنید که نمره‌هائی پایین‌تر از حد معینی به این معناست که آنها کمبودهائی دارند و بعداً گرفتاریهایی پیدا می‌کنند، و نمره‌هائی که پائین‌تر از حد معین دیگری می‌باشند به این معناست که باید قبل از شروع این درس کمی به درسهای قبلی مراجعه کنید.

۳. روی تخته سیاه اسم خودتان، شمارهٔ دفتر کارتان، ساعاتی را که در دفتر خواهید بود، و احیاناً شمارهٔ تلفنتان را بنویسید.

ساعت‌هایی را که در دفترتان خواهید بود خیلی اهمیت دارد. اغلب مهمترین و ثمربخش‌ترین ساعت‌های کار شما، ساعت‌هایی است که در دفترتان با دانشجویان کار می‌کنید. اگر این برخوردها را به شانس محول کنید، در حالتی که دانشجویان شما را پیدا نکنند، موجب ناراحتی آنها می‌شوید و وقتی که شما را پیدا کنند آنها موجب دلخوری شما می‌شوند. ساعت‌هائی را که در دفتر کارتان هستند، متناوب و با فاصله بگذارید، تا دانشجویان بیشتری بتوانند از آن استفاده کنند. همچنین لازم است بگوئید که اگر این ساعت‌ها کافی نیست، و یا با برنامهٔ درسی آنها متضاد است، می‌توانند با گرفتن وقت قبلی شما را در ساعت دیگری ببینند. خوب است که مدام دانشجویان را دعوت به‌دیدن خودتان در خارج از کلاس بکنید. اینکار حداقل این فایده را دارد که دانشجویان از تصمیم شما برای کمك کردن آنها به‌یاد گرفتن اطمینان حاصل خواهند کرد.

۴. روشتان را در مورد تکلیف شب، امتحانات، و نمره دادن توضیح دهید.

برای اینکه از سوء تفاهم جلوگیری کنید. می‌توانید روش کارتان را بنویسید و به‌صورت پلی کپی، به دانشجویان بدهید: دانشجویان حق دارند بدانند که چگونه مورد امتحان قرار می‌گیرند، و اگر بدانند که انتظار شما از آنها چیست، امکان اینکه بتوانند این انتظار را برآورند، بیشتر می‌شود.

۵. روی تخته اسم نویسنده (ها) و اسم کتاب (های) درسی را بنویسید.

اگر کتابی چند چاپ مختلف دارد، مشخص کنید که کدام چاپ مورد نظر شماست. همچنین اگر کتابهای مرجعی وجود دارد که فکر می‌کنید بهتر است دانشجویان آنها را داشته باشند و یا در کتابخانه به آنها مراجعه کنند، آنها را نیز اعلام کنید.

۶. هدفهای کلاس را تشریح کنید.

اگر کمی وقت صرف توضیح بخشهای مختلف درس بکنید، دانشجویان بهتر می‌توانند به نقش و هدف کلاس پی ببرند. به طور خلاصه یادآوری کنید که این درس چطور به درسهای دیگر در ریاضی و در رشته‌های دیگر مربوط است. روش جالبی برای اینکار وجود دارد. در جلسه اول مساله‌هایی را طرح کنید که دانشجویان قادر به حل آنها نباشند، ولی تا آخر سال بتوانند آنها را حل کنند. صورت چند تا از این مساله‌ها ـ که مثلاً می‌شود آنها را از کتاب درسی پیدا کرد ـ می‌توانند توجه دانشجویان را از همان اول، به کلاس جلب کند.

۷. راجع به یادداشت برداشتن در کلاس، دانشجویان را روشن کنید.

دانشجویان معمولاً نمی‌دانند که آیا باید کوشش کنند تمام سخنان و نوشته‌های شما را یادداشت کنند، ولو اینکه این خطر را داشته باشد که چیزی نفهمند، یا اصلاً چیزی ننویسند و فقط گوش کنند، یا شاید باید از روشی بین این دو مرز استفاده کنند. دانشجویان معمولاً از پیشنهادی که با روش تدریس شما هماهنگ باشد استقبال می‌کنند.

۸. وقت کافی برای ایجاد شوق در دانشجویان نسبت به درس ذخیره کنید.

بیشتر از ۱۰ دقیقه، صرف خرده‌کاریهای بالا (یعنی نکته‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷،) نکنید. مثلاً می‌شود بحث مربوط به ۴ را با یك قول به یکی از جلسه‌های بعد موکول کرد. مهم این است که از توجه و علاقهٔ روز اول، تا آنجا که می‌شود برای به شوق آوردن دانشجویان، استفاده کرد. همیشه در روز اول، از تمام وقت استفاده کنید، از زود مرخص کردن دانشجویان در روز اول خودداری کنید که آغاز خوبی نیست. یکی از راه‌هایی که علاقهٔ شما را به دانشجویان نشان خواهد داد اینست که اسامی آنها را زود یاد بگیرید. این پیشنهادها می‌تواند به این امر کمك کند:

الف) در چند دفعهٔ اول حاضر غایب کنید، و توجه کنید که دانشجویان کجای کلاس نشسته‌اند. بیشتر دانشجویان معمولاً جای خود را در طول کلاس، عوض نمی‌کنند.

ب) تکلیف‌های شب را شخصاً و یکی‌یکی به دانشجویان باز گردانید.

ج) در حین امتحان‌ها، اسامی کسانی را که هنوز نمی‌شناسید، از روی ورقهٔ آنها ببینید. از دانشجویان بخواهید که بعد از امتحان، شخصاً ورقهٔ خود را به شما بدهند.

دانشجویان معمولاً در اول ترم علاقهٔ بیشتری نشان می‌دهند. دو هفتهٔ اول را می‌شود به موضوعی اختصاص داد که برای بیشترشان یا تازه و یا دارای کاربرد است. معمولاً آنچه که اول یاد گرفته می‌شود بیشتر در ذهن می‌ماند. در نتیجه مبحثی را که مرتب در کلاس مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌شود در اول ترم درس داد.

بعضی معلمان فکر می‌کنند که در آغاز کار، باید آرام شروع کرد. اما، هفته‌های اول باید نشان دهندهٔ سرعت و محتوای کار کلاس باشد. دانشجویان از روی کاری که در این هفته‌ها انجام داده اند باید بتوانند برای ماندن در کلاس و یا ترك آن تصمیم بگیرند، این دانشجویان را به‌خاطر سرعت بی‌تناسب کار در هفته‌های اول نباید گمراه کرد.

کلاس درس

«موقعیت ایده‌آل من قبول دارم!

چه خوب که هر کسی از روی غریزه‌اش، راه درست را انتخاب کند.

اما از آنجا که امکان زیاد دارد که اشتباه کنیم، عاقلانه اینست که از آنها که می‌توانند یاد بدهند یاد بگیریم».

سوفوکل، آنتیگون، اد

آمادگی

قبل از هر کلاس درس خود را آماده کنید این به‌معنای آن نیست که شما باید برنامه‌ای کامل و یا

لیستی از همهٔ نکته‌های کوچك آماده کنید، ولی به این معنا است که قبل از هر برخورد با کلاس، بدانید که چه چیزهائی را و به چه نحوی می‌خواهید درس دهید. کوشش نکنید که بدون آمادگی و فی‌البداهه در کلاس درس صحبت کنید. چه بسا که نتیجه، بسیار بد از آب درآید. البته، بردهٔ نقشه و برنامهٔ خود نباشید. اگر نکتهٔ جالبی که پیش‌بینی نمی‌کردید پیش آمد، باید بتوانید زمان کوتاهی را به آن اختصاص دهید.

وقتی که مطلب برای کلاس آماده می‌کنید، برای اینکه دوراندیشی داشته باشید، به چند بخش بعدی هم نگاهی بیندازید. همیشه بیشتر از آنچه که احتیاج دارید، مطلب آماده کنید، ولی خود را مجبور نکنید که به تمام آنها بپردازید.

کوشش کنید که هر کلاس را با مطالبی شروع کنید که دانشجویان با آنها آشنائی دارند، و یکمرتبه داخل مطالب تازه نشوید. مراجعه مختصری به مبحث قبل، موجب به وجود آمدن پیوستگی بین مباحث مختلف می‌شود. وقتی که مطالب تازه را شروع می‌کنید، اول به هدفهای آن بپردازید، یعنی قبل از اینکه به جزئیات بپردازید مشخص کنید که کلاس چکار می‌خواهد بکند. با سئوال کردن از مباحث گذشته، ممکن است بتوانید راهی طبیعی برای ورود به مطالب تازه بیابید. ربط دادن مطالب تازه به مطالب گذشته، موجب می‌شود که دانشجویان با اطمینان بیشتری وارد مباحث جدید شوند. بعضی وقتها دانشجویان سئوالی می‌کنند که جواب دادن آن فقط برای معدودی از دانشجویان جالب است. برای اینکه از گیر این جور سئوالها درآیید می‌توانید از کلاس بپرسید که چند نفر مایل به حل آن مسئله و یا جواب آن سئوال هستند. اگر تعداد کم بود، از علاقمندان دعوت کنید که سئوال خود را در خارج از کلاس طرح کنند.

کوشش کنید که ساختمان کلی درس را برنامه‌ریزی کرده باشید. مثلاً اگر فکر می‌کنید حدود ۳۵ دقیقه برای بحث دربارهٔ مطالب درسی جدید لازم است، کوشش کنید که ۳۵ دقیقه برای اینکار کنار بگذارید.

وقتی که مطلب تازه ای را درس می‌دهید، توضیح بدهید که این مطلب چه جائی در کل درس دارد. خیلی دانشجویان معترض اند که: با وجود درك، قسمت‌های جداگانه یك مبحث، از درك مفهوم عام و کلی آن عاجزند. گاهی لازم است که برای ورود به یك مبحث، دربارهٔ اهمیت، کاربرد، و جای آن در نظریهٔ عمومی، توضیحی داده شود. البته گاهی پیش می‌آید که ناچاریم از دانشجویان بخواهیم که فقط ایمان داشته باشند که بعدها به کاربرد و اهمیت این مبحث پی خواهند برد، اما این روش نباید روش همیشگی ما باشد.

معمولاً بی‌فایده نیست، اگر قسمتهائی از وقت را برای بحث دربارهٔ مفاهیم بنیادی درس کنار بگذاریم. در همین اوقات است که می‌توانیم به رابطهٔ مفاهیم مختلف و کاربرد آنها در رشته‌های دیگر هم بپردازیم. این کار در کلاسهایی که بیشتر دانشجویان، دانشجویان رشتهٔ ریاضی نیستند، از اهمیت بیشتری برخوردار است.

زیاد بپرسید و از دانشجویان مختلف بپرسید. یکی از فواید این روش اینست که به دانشجویان فرصت شرکت در روند ساختن مفاهیم تازه را می‌دهد. وقتی که سئوالها راجع به مطالبی است که قبلاً درس داده شده، این فایده را هم دارد که به دانشجویان گوشزد می‌کند، چه مطالبی را باید بدانند.

سئوال کردن به معلم این فرصت را هم می‌دهد که بحث مربوط به مفاهیم مهم را تکرار کند. وقتی که از این طریق اشکالهایی برای دانشجویان وجود داشته باشد، معمولاً به معنای آن است که دانشجویان متعددی به آن گرفتارند، و در نتیجه وقتی را که صرف می‌کنید به‌هدر نمی‌رود. فایده دیگر سئوال اینست که دانشجویان بیدار می‌مانند. شما، از تجربهٔ خود ممکن است بیاد داشته باشید که چقدر مشکل بود سر کلاس زبان خارجه به خواب رفت چون معلم هر آن ممکن بود از شما سئوال کند. از همهٔ دانشجویان سئوال کنید. اگر فقط از شاگردان خوب سئوال کنید، آنوقت شاگردان ضعیف‌تر نسبت به یاد گرفتن مطالب کم امیدتر می‌شوند و اگر فقط از دانشجویان ضعیف سئوال کنید، شاگردان قوی‌تر خسته می‌شوند و اطمینان خاطر بی‌دلیلی به‌دست می‌آورند. اما، این نوع سئوال کردن باید خیلی ظریف صورت گیرد، و نباید به صورت تفتیش عقاید درآید. دانشجویان نباید از برخوردها در کلاس ترسی پیدا کنند.

اگر ممکن است از سخنرانی کردن طولانی خودداری کنید. دانشجویان به سخنرانیهای دراز زیادی باید گوش دهند، اما به ندرت قدرت تمرکز و یا شوق شنیدن آنها را دارند. اگر شما بتوانید، به جای سخنرانی، با سئوال و جواب، مطالب تازه را به کلاس بفهمانید، کلاسی زنده خواهید داشت. پیدا کردن مرز متعادل بین این دو روش، تا حد زیادی بستگی به شرایط کلاس دارد، ولی در هر صورت هیچوقت این فکر را به دانشجویان تلقین نکنید که دارید با آنها طوری صحبت می‌کنید که گویا از آنها مهم‌تر و یا بالاتر هستید. اگر قرار بود معلم کار خود را با یك سخنرانی تمام کند دیگر هیچ لزومی به تشکیل کلاسهای کوچك پیدا نمی‌شد.

فن تدریس

حالا چند پیشنهاد مشخص، برای ادارهٔ کلاس داریم.

۱. به موقع سر کلاس بیائید. بهتر است یك یا دو دقیقه زودتر از وقت اعلام شده به کلاس برسید، تا امکان داشته باشید مقدمات کار را، از نوع پس دادن تکلیف شب و غیره فراهم کنید.

۲. به چشم دانشجویان نگاه کنید

هر معلم خوبی می‌خواهد با دانشجویانش رابطهٔ روحی داشته باشد، اما واقعاً شگفت‌انگیز است که تعداد بسیاری از معلمان، توضیحات خوب و جالبشان را به تختهٔ سیاه، دیوارها، پنجره و یا نقطه‌ای حدود نیم متر بالای سر دانشجویان می‌دهند.

۳. روشن و شمرده و با صدایی به اندازهٔ کافی بلند، صحبت کنید.

می‌توانید، برای کمك، یك یا دو دانشجو را پیش خود انتخاب کنید و مستقیماً طرف صحبت خود قرار دهید و مواظب تغییر چهرهٔ آنها باشید که آیا مطلب شما را می‌فهمند یا نه. البته همیشه برای این نقش از چند دانشجوی بخصوص استفاده نکنید.

۴. صدایتان را بالا و پائین ببرید.

صحبت‌کردن یکنواخت این خاصیت را دارد که شنونده را خواب کند. برای جلوگیری از این پیش‌آمد، گاهی با صدای بالا و گاهی با صدای پایین، گاهی با صدای بلند و گاهی با صدای کوتاه،گاهی تند و گاهی به‌آرامی صحبت کنید.

۵. لازم نیست که در هر ثانیه کلاس کسی مشغول صحبت باشد.

مکث بعد از یك جمله به کلاس این اجازه را می‌دهد که به آنچه گفته‌اید فکر کنند، و از به‌وجود آمدن سردرگمی‌هایی که به خاطر یك بیان تند و بی فاصله به‌وجود می‌آید، جلوگیری کند. همیشه وقت کافی برای فکرکردن به سؤالهایتان بدهید. در غیر اینصورت، دانشجویان سؤال‌کردن شما را جدی نمی‌گیرند.

۶. دانشجویان را تشویق به پرسیدن بکنید.

در شروع کلاس خوب است که از کلاس بپرسیم که آیا سؤالی راجع به تکلیف شب دارند. بعد از این سؤال، در حالیکه به کلاس نگاه می‌کنید، صبر کنید، تا آنها وقت سرهم‌کردن سؤالهای خود را پیدا کنند.

۷. وقتی که سؤالی می‌شود، اول اطمینان حاصل کنید که همهٔ آن را شنیده‌اند و بعد به آن جواب بدهید.

اگر مشکوك هستید، سؤال را تکرار کنید. این مخصوصاً مهم است، اگر شخصی در جلوی کلاس سؤال کند. ابداً به بحث خصوصی با شاگردی در ردیف اول و یا دوم نپردازید، طوری که شاگردان دیگر نه تنها آن را نفهمند بلکه حتی نتوانند آن را بشنوند. اگر فکر می‌کنید که سؤال به اندازهٔ کافی واضح و یا دقیق نیست، آن را اصلاح و خود تکرار کنید. حتی آماده‌ترین دانشجویان هم به سختی سؤالشان را مطرح می‌کنند، زیرا می‌ترسند که جلو هم‌کلاسیهایشان آبرویشان برود. این شما نیستید که موجب ناراحتی آنهائید، مشکل وجود هم‌کلاسیهای آنهاست. و این مشکل، مشکلی جدیست و برای رفع آن خیلی کارها می‌شود کرد.

۸. با سؤال فراوان کردن و از تعداد زیادی جواب خواستن، دانشجویان را به حرف‌زدن تشویق کنید. به این ترتیب دانشجویان کمرو متوجه می‌شوند که سؤالهای آنها هم کمی توجه برمی‌انگیزد.

۹. حدس‌زدن را تشویق کنید و سؤالهای بد و جوابهای نادرست را به مسخره نگیرید.

در شاگردان این فکر را رسوخ دهید که همهٔ آنها برای شما یك ارزش دارند. شما می‌توانید از اشتباهات آنها چیز یاد بگیرید. از همه مهمتر، از نیش‌زدن خودداری کنید. هیچ چیز بیشتر از نیش‌زدن نمی‌تواند روابط شما و یك کلاس را بهم زند، هرچقدر هم به‌جا باشد.

بعضی وقتها موقعیت ناراحت‌کننده‌ای پیش می‌آید، بدین ترتیب که دانشجوئی به‌خاطر اینکه معتقد است سؤال دیگری مسخره و یا بی‌معنی است می‌خندد. در این صورت چیزی شبیه این به کلاس بگوئید: «من مطمئن هستم که تعداد زیادی از شما همین سؤال را داشتید. باید از فلان آقا یا خانم متشکر باشیم که جرأت پرسیدن این سؤال را داشت و به ما اجازهٔ بحث آنرا داد. همیشه بهتر است که سؤال را بکنیم، تا از سؤال‌کردن ترس داشته باشیم.» و بعد به جواب سؤال بپردازید.

۱۰. به دانشجویان خود با دقت گوش دهید.

وقتی که شخصی به جواب‌دادن سؤالی می‌پردازد، ممکن است از همان اول متوجه شوید که راهش اشتباه است. با اینحال از واردشدن در وسط حرفش بپرهیزید. درعوض اینکار، کوشش کنید بفهمید چه می‌گوید. اگر مطلب درستی در حرف هایش وجود دارد، آنرا اعلام کنید، و با ظرافت اشتباهاتش را متذکر شوید. آنوقت بگذارید که دانشجو دوباره کوشش به جواب‌دادن کند و یا این امکان را به شخص دیگری بدهید. خیلی از معلمان قبل از اینکه سؤالی به طور کامل مطرح شده

باشد، شروع به جواب‌دادن آن می‌کنند. بعد از اینکه سؤالی را جواب دادید، از دانشجو بپرسید که آیا جواب راضی‌کننده و کافی بود یا نه.

۱۱. هروقت که مناسب بود از شاگردان بخواهید که جواب یك مسئله را قبل از حل آن حدس بزنند. با حدس‌زدن جواب، دانشجو به حل مسئله علاقمند می‌شود، و در حل مسئله شرکت بیشتری می‌کند.

۱۲. در کلاس به اندازه‌ای که شخصیت‌تان و شرایط اجازه می‌دهد خودمانی باشید.

تحقیق نشان داده است که به نظر دانشجویان معمولاً معلمانی که خودمانی‌ترند، درواقع دانش و شعور بیشتری دارند تا معلمانی که کلاسشان خیلی رسمی و خشك است. این نظر خیلی وقتها غلط است ولی باید به آن توجه داشته باشیم. در هر صورت، گفتگوی خودمانی بین شما و دانشجویان، هم برای شما و هم برای آنها جالب‌تر است و راه را بر خستگی می‌بندد. البته، رفتار و گفتار و لباس پوشیدن خیلی غیررسمی و خودمانی هم، باعث توجه دانشجویان نمی‌شود، و محیط بهتری را برای درس‌خواندن به‌وجود نمی‌آورد.

۱۳. خود را به‌مطلب درس علاقمند نشان دهید.

هیچوقت بی‌علاقگی و خستگی خود را راجع به مطلب درس نشان ندهید. علاقه و بی‌علاقگی هر دو خیلی زود انتقال می‌یابند.

۱۴. کمی خوشمزگی داخل صحبتتان بکنید.

نکته‌های خوشمزه مربوط به یك مبحث معمولاً موجب می‌شود که دانشجو آن مبحث را بهتر به‌خاطر نگاه دارد.

۱۵. هرچند وقت یکبار لبخندی بزنید.

یك لبخند، بلافاصله موجب به وجودآمدن نظری مثبت بین دانشجویان نسبت به شما و هم نسبت به‌مطلب درس می‌شود. روی خوش و هرچند وقت یکبار لبخندزدن به وجودآمدن رابطه‌ای خوب بین معلم و شاگرد کمك می‌کند.

۱۶. هیچوقت در کلاس عصبانی نشوید.

اگر در بین دانشجویان خود فردی مزاحم، ناراحت و یا بدخو دارید، از او بخواهید که شما را در دفترتان ببیند. همیشه با چنین موضوع‌هایی به‌طور فردبه‌فرد مقابله کنید و هرگز کوشش نکنید این موضوع‌ها را در کلاس حل کنید.؟

۱۷. با دانشجویان خود مودب باشید و کوشش کنید از راههای دیگر هم موجب برانگیختن احترام آنها بشوید.

ادب همیشگی در گفتار و رفتار نسبت به دانشجویان موجب رفتار مودب و احترام‌انگیز دانشجویان می‌شود و این موجب به‌وجودآمدن شرایط بهتری برای درس‌خواندن است.

چند قدم سادهٔ دیگر هم برای جلب احترام دانشجویان بردارید، مثلاً آنها را به‌خاطر حرفشان و یا نوع لباس‌پوشیدنشان نرنجانید، و یا با لحن نامناسب صحبت خود، همچنین با نوع لباس‌پوشیدن خود کدورت و رنجشی ایجاد نکنید.

۱۸. در صحبت‌های خود نکته‌های جالب تاریخی را هم بگنجانید.

استفاده از نکته‌های جالب دربارهٔ تاریخ و تکامل مفاهیم ریاضی، می‌تواند به علاقهٔ دانشجویان شما به‌مقدار زیادی بیفزاید. وقتی که راجع به تصاعدهای عددی و یا هرکدام از کشفیات متعدد گوس صحبت می‌کنید، می‌توانید داستان کلاس اول او را بگوئید، که چگونه او توانست مجموع ۱۰۰ + ۰۰۰ + ۳ + ۲ + ۱ را قبل از تمام‌شدن سؤال معلم پیدا کند.

۱۹. اگر اشتباهی کردید، حالت دفاعی به‌خود نگیرید.

هیچکس بی‌عیب و کامل نیست، و احساس صداقت به‌مراتب مهمتر از احساس همه‌چیزدانی است. از دانشجویان کمك بخواهید و باهم به‌تصحیح اشتباه بپردازید. اگر کسی سؤالی می‌کند که جوابش را نمی‌دانید، کوشش نکنید که به‌نحوی ندانستن خود را بپوشانید. کوشش کنید که جواب را با کمك کلاس به‌دست آورید، و یا قول دهید که جواب را پیدا می‌کنید، در جلسه بعد می‌آورید.

۲۰. کلاستان را تا آنجا که می‌شود نزدیك به‌وقت مقرر تمام کنید.

کوشش کنید که دانشجویان را بیش از وقت کلاس نگاه ندارید. خیلی از آنها ممکن است کلاسی بلافاصله بعد از کلاس شما داشته باشند، و آنها نمی‌خواهند به آن کلاس‌ها دیر برسند، مخصوصاً اگر امتحانی در کلاس بعدی داشته باشند، در هر صورت، تقریباً غیرممکن است که توجه دانشجویان را بعد از وقت کلاس به‌مطلب جلب کرد.

۲۱. هرکار که می‌کنید، آنرا خوب، به دقت و کامل انجام دهید.

خیلی بهتر است که موضوعی را حذف کنید، تا اینکه تندوتند مطالبی را بگویید، مخصوصاً در آخر کلاس که حوصله و توجه دانشجویان دیگر تقریباً تمام شده است.

یك نکته واضح ولی مهم: نوع کار شما در کلاس باید مطابق شرایط و کلاسی باشد که درس می‌دهید. کلاس آنالیز ۳۰۰ نفری برای مهندسان، کلاس آنالیز ویژه برای دانشجویان خیلی خوب، کلاس دورهٔ ریاضی دبیرستانی، و یك کلاس سطح بالا برای دانشجویان رشتهٔ ریاضی، همه باهم فرق دارند و باید به‌طور متفاوت با آنها برخورد کرد. خیلی، ولی نه همهٔ پیشنهادات بالا به‌درد کلاس‌های کوچکتر، شاگردان کم‌سن‌تر، و یا دانشجویانی که کمتر درس می‌خوانند، هم می‌خورد.

درس دادن به کلاسهای بزرگ

کلاسهای سخنرانی بزرگ مسائل بخصوصی دارند. به خاطر اینکه بشود تعداد بیشتری دانشجو از استادان با تجربه استفاده کنند، خیلی دانشگاهها کلاسهای بزرگ ریاضی ترتیب می‌دهند. در اینصورت بعضی از تکنیك‌های درس دادن باید کمی تغییر کند، ولی با این تغییرها درس دادن در کلاسی بزرگ می‌تواند تجربه‌ای رضایت‌بخش باشد. با اینکه کلاسهای کوچکتر مزایائی بر کلاسهای بزرگ دارند، ولی با اینحال شرایطی هست که وجود کلاسهای بزرگ را لازم می‌کند.

وقتی که در کلاسهای بزرگ درس می‌دهید، نمی‌توانید اسم همهٔ دانشجویانتان را یاد بگیرید، و کمك استادها بسیاری از وظایف شما را در کار کردن با دانشجویان خارج از کلاس به‌عهده می‌گیرند، و در نتیجه بسیار مهم است که شما از اشکالات دانشجویان با خبر باشید، و آنها را در کلاسهای درس انعکاس دهید. کمك استادها می‌توانند در پیدا کردن قسمتهائی که مخصوصاً موجب گرفتاری دانشجویان شده است، به شما کمك کنند، پس حتماً به‌طور مرتب با آنها تبادل نظر کنید.

در این کلاس شما باید کوشش بیشتری در مراجعه به مطالب کلاس‌های قبل، طرح مثالهای کامل، و مربوط کردن مطلب درس به چیزهای دیگر، بکنید.

برای یك کلاس ۷۵ نفری شما هنوز می‌توانید از یك تختهٔ سیاه استفاده کنید، فقط باید کمی بزرگتر نوشت و از قسمت پایین آن استفاده نکرد. کمی هم بلندتر صحبت کنید. در کلاسهای بزرگتر خیلی وقتها یك پروژکتور مناسب‌تر است. در این حالت باید قبل از کلاس اول کمی وقت صرف تمرین با آن بکنید. با وجودیکه احتمال ندارد که دانشجویان به‌نوعی مرتب به‌پای تخته بیایند، ولی دانشجویان در یك کلاس بزرگ هم باید به‌طور مشخص در گرداندن کلاس سهیم باشند، و معلم باید کوشش کند که همه را به نوعی به‌شرکت در کلاس درس تشویق کند.

بعضی معلمان خیلی خوب در کلاسهای بزرگ راحت نیستند، و شاید فکر خوبی باشد، اگر قبل از تصمیم به‌درس دادن در چنین کلاسی، به‌عنوان تجربه سخنرانی ای در یکی از کلاسهای بزرگ بکنید.

آنچه که به‌تخته سیاه مربوط می‌شود

۱. واضح، با دقت و یواش بنویسید.

گچ را محکم به‌تخته‌سیاه بفشارید. هیچوقت گچ را عمود به‌تخته نگیرید. به‌هر ترتیبی از صدای ناهنجار گچ جلوگیری کنید. معمولاً، اگر گچ را نصف کنید با این به‌دونیم کردن گچ صدا کم می‌شود. یواش نوشتن نه تنها به‌روشن‌تر شدن مطلب کمك می‌کند، بلکه از نظر روانی و جلوگیری از صدا هم مناسب‌تر است.

۲. آنچه را که می‌نویسید، با صدائی بلند و رسا تکرار کنید، همیشه اینطور فکر کنید که ممکن است آنچه را که بر تخته نوشته‌اید، بعضی از شاگردان نبینند.

۳. از بالا و طرف چپ تخته سیاه شروع کنید و پائین بیایید و بعد به قسمت بعدی در طرف راست آن بپردازید. قسمت اول را تا وقتی که تخته سیاه تمام نشده است پاك نکنید. به اینور و آنور نپرید و مطالب را نامرتب و در جاهای مختلف تخته‌سیاه ننویسید. اگر اطاق شما به‌تخته‌سیاه سه‌لایه‌ای مجهز است، اول از لایهٔ میانی استفاده کنید. بعد آنرا بالا زده و از تخته رویی استفاده کنید، تا آنچه را که قبلاً نوشته بودید بشود دید. بعد از استفاده از تخته‌رویی آن را بالا زده و از تختهٔ زیری استفاده کنید.

اگر بیشتر از دو ردیف دانشجو دارید و اطاق دارای شیب کافی نیست، در قسمت پائین تخته ننویسید، تا آنها که عقب‌ترند نوشتهٔ شما را ببینند. اگر میزی در جلوی کلاس است، چیزهای بزرگی مانند کیف و یا سکوی سخنرانی را از روی آن بردارید.

۴. تا آنجا که ممکن است وقتی چیزی می‌نویسید جلوی آن نایستید. بعد از پایان هر نوشته، قدمی از تخته‌سیاه دور نشوید تا همه بتوانند آن‌چه را که نوشته‌اید، بخوانند.

۵. از قبل پیش‌بینی کنید، تا بتوانید نوشته‌هایتان را بطور تقریب به‌یك اندازه نگه دارید (به‌جز مواقعی که احتیاج به تأکید دارید).

بعضی معلمان تخته پاك‌کن در دست درس می‌دهند، و از آن برای ساده کردن و تصحیح استفاده می‌کنند. این کار موجب عصبانیت دانشجویانی می‌شود که یادداشت بر می‌دارند. به‌جای پاك کردن،

خط مشخصی روی جمله‌های لازم بکشید و تصحیح شده‌اش را بالایش بنویسید.

۶. به‌طور کامل و دقیق، متن آنچه را که می‌خواهید ثابت کنید و یا درباره‌اش صحبت کنید، بنویسید.

با نوشتن، هر نشانهٔ مخصوص را تعریف کنید. یادداشت‌های دانشجویان شما تقریباً به‌طور کامل فقط از چیزهایی تشکیل شده که شما روی تخته نوشته‌اید. اگر شما چند «اگر» و «آنوقت» اساسی را حذف کرده باشید؛ آنوقت، دانشجو هم به‌احتمال زیاد متن ناقص را یاد می‌گیرد.

یادداشت‌های دانشجویان، باید کمبودهائی را که ناشی از حافظهٔ آنهاست برطرف کند، نه اینکه به ادامهٔ آنها کمك کند.

۷. هر مساله را روی تخته‌سیاه، به همان نحوی بنویسید که از دانشجویان خود انتظار دارید. نوشتهٔ شما بر تخته‌سیاه، باید نمونه‌ای باشد، که شاگردان بتوانند از آن استفاده کنند. این به‌آن معنی است که شما باید همه چیز را به شکل درست خود بنویسید.

۸. وقتی مساله‌ای را حل می‌کنید، صورت کامل مساله را بنویسید، و یا به‌طور دقیق مرجع آن را بدهید.

اگر مساله از کتاب درسی برداشته شده است، صفحه و شمارهٔ مساله را قبل ازحل، آن بنویسید. قبل از حل تعریف مشخص هر متغیری را که انتخاب می‌کنید بنویسید. به‌جز در مورد محاسبه‌های معمولی، مساله را تا آخر حل کنید، تا دانشجویان عادت کنند که جواب مساله را بشناسند و خود را به آن برسانند، و اگر لازم است امکان بحث یا تحلیل و یا آزمایش جواب را یاد بگیرند.

۹. برای تأکید نکته‌های مهم، خلاصه آنها را روی تخته بنویسید.

این را مخصوصاً برای نکاتی که می‌خواهید دانشجویان به‌خاطر داشته باشند انجام دهید، مثلاً برای فرمولهای مشتقهای توابع مثلثاتی (با اینکه بعضی چیزها باید مستقیماً حفظ شوند ـ مثلاً تعریف‌ها ـ ولی دانشجویان را باید تشویق کرد که تا آنجا که می‌شود مسائل را به‌وسیلهٔ اصلها و نتایج ساده حل کنند، و به‌حفظ کردن نتیجه‌های پیچیده نپردازند)

۱۰. هیچوقت مطلب نادرستی را روی تخته ننویسید، حتی اگر می‌خواهید بعداً نادرستی آنرا متذکر شوید.

دانشجویان احتمالاً نکتهٔ نادرست را در دفترشان می‌نویسند ولی متوجه تذکر شما راجع به نادرست بودن آن نمی‌شوند.

۱۱. بعد از کلاس، به سرعت از کلاس بیرون نروید.

چند دقیقه‌ای بمانید، تا دانشجویان فرصت سؤال کردن داشته باشند. وقتی که همهٔ دانشجویان از یادداشت‌های خود فارغ شدند، تخته سیاه را به‌عنوان محبتی به معلم بعدی پاك کنید.

کتابهای درسی

با اینکه کتاب درسی قسمت لازم درس‌دادن است، می‌تواند مانع گرفتاری هم بشود. نباید موجب این وسوسه بشوید که می‌شود کتاب درسی را کنار گذاشت و به‌جای آن از یادداشت‌های خود استفاده کنند. کتاب را می‌شود برای کلاسهای بعدی عوض کرد، ولی وقتی برای یك ترم انتخاب شده است بهتر است با آن ساخت و کمبودهایش را با یادآوری جبران کرد. انتقاد از کتاب در برابر کلاس،

اعتماد دانشجویان را سلب کرده و موجب می‌شود که آنها به‌خاطر خرید کتاب، خود را مغبون احساس کنند، و به‌طور کلی از نظر روانی اثر خوبی ندارد. البته، اشتباهات مشخص کتاب باید گفته شود، ولی از انتقاد کلی پرهیز کنید.

این امکان هم وجود دارد که کتاب آنچنان خوب نوشته شده باشد که در نظر اول کاری برای معلم باقی نمانده باشد. معلم همیشه می‌تواند با دادن مثالهای اضافی، اثبات‌ها، محاسبه‌های مختلف و کاربردهای دیگر به‌فهمیدن مطلب کمك کند. معلم باید از کامل‌بودن کتاب استفاده کند و وقت بیشتری را به رفع مشکلات انفرادی دانشجویان اختصاص دهد. وقت اضافه‌ای که به این ترتیب به دست می‌آید واقعا فرصت خوبی است. شما می‌توانید کلاس را به گروههای کوچك تقسیم کنید و آنها را مثلاً وادار به حل مساله‌های تازه‌ای بکنید.

دانشجویان، مخصوصاً در کلاسهای مقدماتی، معمولاً به‌سختی می‌توانند ریاضی بخوانند، حتی اگر مطلب ریاضی به‌خوبی نوشته شده باشد. خواندن چند صفحهٔ ریاضی در کلاس که همراه با گفتن نکته‌هائی راجع به قسمتهای مهم، کمبودها و ساختمان استدلال باشد، می‌تواند برای دانشجویان بسیار مفید باشد. این راهی است برای یاددادن مطالعهٔ کتاب‌های ریاضی و یکی از مهمترین و باارزش‌ترین کارهائی است که یك معلم ریاضی می‌تواند انجام دهد.

در هر صورت کتاب درسی و برنامه موجب انسجام می‌شود، و جداشدن زیاد از آنها عاقلانه نیست.

کمك‌های بصری

حتی معلمی که بیشتر اوقات از تخته‌سیاه استفاده می‌کند می‌تواند گاهی یك پروژکتور را هم به‌کار گیرد.

شکلهای بغرنج را می‌شود قبل از کلاس کشید، حتی برای بعضی کلاسهای مقدماتی اسلایدهای حرفه‌ای موجود است.

لوازم مدرن برای پلی‌کپی نسبتاً ارزان می‌تواند امکانات زیادی به‌شما بدهد. مطالب مکمل کتاب، جوابهای نمونه به‌تکلیف شب و یا امتحانات، فهرست کتابهای مرجع، و جدولهای مخصوص را می‌توان به سرعت، نسبتاً تمیز، و با خرج کمی در اختیار دانشجویان گذاشت. در زمان ما دیگر دلیلی برای از دست دادن وقت با ارزش کلاس برای یادداشت برداشتن از این نوع چیزها وجود ندارد.

تعداد زیادی فیلم راجع به مطالب ریاضی وجود دارد، از اینها می‌توانید برای کامل کردن سخنرانی‌هایتان استفاده کنید. برای مثال، فیلم «استقراء ریاضی» ساخته لئون هنکین را می‌شود برای دانشجویانی که احتیاج به دورهٔ این اصل ریاضی را دارند نشان داد. فیلمهائی از این نوع مرتبا در مجلهٔ ماهانه ریاضیات امریکائی American mathematical monthly مورد بررسی قرار می‌گیرد. تعداد زیادی از فیلم‌های ساخت انجمن ریاضی امریکا Mathematical association of america را می‌شود از بنگاه‌های مختلف اجاره کرد و یا خرید. برای اطلاعات بیشتر می‌توانید با آدرس، زیر

مکاتبه کنید:

Mathematical association of america
1529 eighteenth street, n. w.
washington, d. c. 20036

اگر قسمتی برای کارهای سمعی و بصری در دانشگاهتان وجود دارد، از آنها می‌توانید برای نشان دادن فیلمها کمك بگیرید.

تکلیف شب

«راه شاهانه‌ای در هندسه وجود ندارد»

اقلیدس

دلیل

بعضی معلمان تکلیف شب نمی‌دهند، به این دلیل که دانشجویان خودشان کار می‌کنند، و در مورد مطالبی که اشکال داشته باشند سئوال می‌کنند، چنین معلمانی حتماً سالهای دانشجوئی خود را فراموش کرده‌اند. درسها با هم برای وقت دانشجو رقابت می‌کنند، و درسهائی که در آنها تکالیفی به‌طور مرتب داده نمی‌شود، به‌احتمال زیاد تاثیر بد می‌بینند. بعد از مدتی دانشجویان آنقدر عقب می‌مانند که حتی بنیادی‌ترین سئوالها را هم نمی‌توانند بکنند، و دیگر جبران عقب‌ماندگی غیرممکن می‌شود.

۰۱ تعداد تکلیفهائی که می‌دهید نسبتاً زیاد باشد، و در هر کدام آنها مجموعه‌ای منطقی از تمرین‌های ساده و مساله‌های مشکلتر وجود داشته باشد.

راههای بسیار وجود دارد. می‌توانید بخواهید که حل همهٔ مساله‌هایی را که معین کرده‌اید، به‌شما تحویل دهند، و شما یك یا دو مساله را تصحیح کنید، بدون آنکه قبلاً به آنها بگویید کدام مساله را تصحیح خواهید کرد. امکان دیگر، اینست که نخواهید همه چیز را به شما بدهند و تنها هفته‌ای یکبار، دو یا سه مساله جدی را تصحیح کنید و بر گردانید. بعضی معلمان از دانشجویان می‌خواهند که مساله‌ها را در دفتری بنویسند، و هر چند وقت یکبار برای بازبینی به او تحویل دهند.

۰۲ مساله‌های تکلیف شب را با دقت انتخاب کنید.

برای بسیاری دانشجویان، اینها تنها مساله‌هایی هستند که حل خواهند کرد. کوشش کنید مساله‌های مربوط به یك مبحث را ضمن دو و یا سه تکلیف شب تکرار کنید. نگذارید که دانشجویان روی یك موضوع مشخص فقط یکبار کار کنند.

۰۳ همان وقت که وارد کلاس می‌شوید، تکلیف‌ها را جمع کنید و به آخر وقت موکول نکنید. همچنین تکلیف شب را، بعد از موقع، مگر در صورت مریضی و یا موقعیت استثنائی دانشجو، قبول نکنید.

۰۴ تکلیف شب را به عنوان قسمتی از نمرهٔ کلاس به‌حساب آورید، تا محرکی برای جدی گرفتن آن باشد.

۵. تجربه نشان داده است که تکالیف روزانه بهترین نتیجه را می‌دهند.

شما باید اینها را در جلسه بعد برگردانید. این روش چند فایده دارد.

I. شما به طور مرتب می‌توانید ببینید که دانشجویانتان چطور کار می‌کنند.

II. تکالیف کوتاه را می‌شود سریع تصحیح کرد و دانشجو را به خواندن درس ترغیب کرد.

III. فکرهای درست دانشجویان، بلافاصله و وقتی که هنوز تازگی خود را حفظ کرده‌اند، تقویت می‌شود، و اشتباهات آنها، قبل از اینکه عادت بشود، مورد تصحیح قرار می‌گیرد.

IV. دانشجو عادت می‌کند درس را مرتب و منظم بخواند، نه اینکه تا روز امتحان صبر کند.

V. برگرداندن تکالیف در دفعات زیاد به یادگیری نام دانشجویان و حفظ رابطهٔ فرد با فرد کمك می‌کند.

VI. دانشجویان به طور مشخص خواهند دانست که حل چگونه مساله‌هایی از آنها انتظار می‌رود. و همچنین مجموعه‌ای از مساله‌های حل شده را در اختیار خواهند داشت.

۶. گاهی وقتها تکالیف شب هفتگی ترجیح دارد.

شما شاید بعضی وقتها بخواهید مساله‌هایی بدهید که یا وقت بیشتری برای حل می‌گیرند و یا نوع مساله‌هایی هستند که می‌خواهید دانشجویان وقت زیادی برای فکر دربارهٔ آنها بگذارند. در چنین اوقاتی شما می‌توانید اعلام کنید که مساله‌ها یك هفته بعد باید به شما داده شود.

دادن پلی کپی، که شامل لیستی از مساله‌های خواسته شده است، این امکان را به دانشجو می‌دهد که با علامت زدن مساله‌های مختلف بداند کدام مساله را حل کرده و کدام برایش گرفتاری به وجود آورده است. بعضی از دانشجویان دوست دارند که به جای اینکه هر روز مدت کوتاهی درس بخوانند، هر چند روز یکبار، ولی به مدت درازی درس بخوانند. وجود پلی کپی به این دانشجویان امکان می‌دهد که از کلاس جلوتر بیفتند، و بتوانند وقتشان را آنطور که می‌خواهند تقسیم کنند.

۷. بحث میان دانشجویان را تشویق کنید.

قسمتی از کار معلم اینست که دانشجویان را علاوه بر شنیدن و خواندن ریاضیات تشویق به گفتگو دربارهٔ آن بکند. یك راه برای اینکار اینست که اجازه دهیم و حتی تشویق کنیم که دانشجویان با هم روی تکلیفهای شب کار کنند. یك قانون کلی خوب اینست که هر مقدار بحث و گفتگو مجاز است، ولی هر دانشجو موظف است که جوابهای خود را مستقلاً بنویسد. بعضی دپارتمانهای ریاضی اطاقهای مخصوص بحث دارند، که در آنها دانشجویان می‌توانند به کار روی مساله‌های مشکل بپردازند.

دربارهٔ تصحیح ورقه

وقتی که دانشجو، با تلاش و جدیت روی تکلیف خود کار کرده است، شما وظیفه دارید که آن را با دقت بخوانید، و دربارهٔ آن به طور مناسب، یا شفاهاً و یا به وسیلهٔ نکته‌هائی که روی ورقه می‌نویسید، اظهار نظر کنید. حق شاگردی که با جدیت کار می‌کند، و جوابی درست می‌یابد بیشتر از یك علامت صحیح خشك و خالی است. به طور مختصر، نشان دهید که کجای کار خوب است. اگر درست حل نشده است، اشتباه را مشخص کنید و یا دانشجو را در راه درست بیندازید. بعضی وقتها

شاید بخواهید که حل را دوباره به شما بدهند. البته، شما نخواهید توانست همیشه و با همهٔ دانشجویان به این طریق ایده‌آل رفتار کنید، ولی می‌توانید در این راه بکوشید.

می‌دانیم که خیلی مساله‌ها را می‌شود به راههای گوناگون حل کرد. اگر دانشجو راهی جز آنکه شما در نظر داشتید انتخاب کرده باشد، مطمئن شوید که یك «جواب صحیح» اشتباهاتی را نپوشانده باشد. حتی وقتی که راه حل دانشجو درست باشد، بی جا نیست اگر او را به وجود راه حلهای ساده‌تر و یا بهتر واقف کنیم. البته، نباید این فکر را به وجود آوریم که راه حل غلط است فقط به این دلیل که راه حل بهتری وجود دارد.

بعضی وقتها می‌شود مساله‌ها را حل کرد و با پلی کپی یا وسیلهٔ دیگری در اختیار دانشجویان گذاشت، ولی این وضع، با همهٔ کمك‌هایی که می‌کند، نمی‌تواند جای اظهار نظرهای به جای شما را روی ورقه‌های دانشجویان بگیرد.

اگر دانشجو را وادار نکنید که به موقع به طور مرتب، کار خود را تحویل دهد، اثر بدی در او خواهد گذاشت و جلوی رشد حس مسئولیت و اعتماد به نفس او را خواهد گرفت و از احترام او نسبت به درس خواهد کاست. از دانشجویان بخواهید که جمله‌ها و نوشته‌هایشان کامل باشد، و توجه به خصوصی به رابط های منطقی داشته باشند. به طور کلی نوشته‌های دانشجو باید نشان دهندهٔ پیشرفت او به سوی روشی قابل قبول از نظر نوشته‌های ریاضی باشد. این شامل منظم نوشتن، به کار بردن درست علامتهای مساوی و خطهای کسری و غیرهٔ می‌شود. مثلاً وقتی که مشتق $y=x^2$ را می‌خواهیم، به هیچ وجه نباید بگذاریم که دانشجو مثلاً بنویسد: $y=x^2=2x$ و یا چیزی شبیه این.

برای دانشجویان باید روشن باشد که آنها تکلیف‌ها را تمام نکرده‌اند، مگر وقتی که همه مساله‌های آن را خوب فهمیده باشند. برای کمك به این کار، مثلاً می‌توان گفت که قسمتی از مساله‌های امتحانی را از بین همین تکلیف‌ها انتخاب می‌کنید.

امتحانات

«تمام هنر معلمی، بیدار کردن کنجکاوی طبیعی مغزهای جوان است تا بعداً این کنجکاوی سیر شود»

آناتول فرانس

طرز تلقی‌ها و هدفها

از نقطه نظر رابطهٔ استاد- دانشجو و کوشش در به وجود آوردن فضائی مناسب برای همکاری گروهی، شکل معمولی امتحانات می‌تواند ایجاد اشکال کند. درست وقتی که شما توانسته‌اید دست دانشجو را به عنوان همکاری مطمئن در دست بگیرید، ناگهان مجبور می‌شوید در نقش قاضی، هیئت منصفه و شاید، جوخهٔ اعدام در آئید. در این موقعیت، شما باید راهی پیدا کنید تا در نظر دانشجو به صورت یك جلاد جلوه نکنید.

واقعاً مهم است که هم شما و هم دانشجویان به طور کامل از هدفهای امتحان و طرز تلقی نتایج

آن آگاهی داشته باشید. امتحان، تنها یك مشاهدهٔ کمی از روند یادگرفتن است. در اینجا هر دو طرف، هم شما و هم دانشجویان مطرح هستید. امتحان، یعنی بررسی پیشرفت این دو طرف به صورت یك گروه.

هدفهای اصلی امتحان از این قرار است:

۱. ارزیابی کار هر دانشجو

۲. ارزیابی درس دادن استاد

۳. به وجود آوردن محیطی برای یادگرفتن هم در خود امتحان و هم در دورهٔ لازم برای آن.

اگر بخواهیم که امتحان، هم کار دانشجو و هم کار استاد را، به خوبی ارزیابی کند، باید به دقت فراهم شده باشد.

بد نیست اگر بعضی از سئوالهای امتحان از تکلیفهای شب و از سئوالهایی که باعث گرفتاری در امتحانات قبلی شده است انتخاب شود. این وضع، دانشجویان را تشویق می کند که مطالبی را که خوانده اند مرور کنند و به خاطر بسپارند. البته، اگر می خواهیم به این طریق عمل کنیم باید قبلاً به دانشجویان اطلاع بدهیم.

در بعضی موقعیت‌ها می توانید از یکی از همکارانتان بخواهید که امتحان کننده باشد. این روش، این فایده را دارد که اتحاد گروهی استاد ـ دانشجو را حفظ می کند، ولی این ضرر را دارد که مسئولیت سنگینی روی امتحان کنندهٔ ناآشنائی می گذارد که نقطه نظرش، سوادش، و اهمیتی که به مساله های مختلف می‌دهد، می تواند به طور مشخص با شما فرق داشته باشد.

امتحان، ضمن ارزیابی آنچه دانشجویان یاد گرفته اند، می تواند وسیله ای برای یادگرفتن هم باشد. اگر سئوال‌ها خوب، سنجیده و با روح انتخاب شده باشد، می تواند دانشجویان را به طور جدی به فکر وادارد: حتی اگر آنها نتوانند جواب را با موفقیت به دست آورند، مشتاق خواهند بود که حل مساله را، وقتی که در کلاس مورد بحث قرار می گیرد، ببینند.

اگر ممکن باشد، و به خصوص در کلاس های بالاتر، می شود امتحان را در خارج از مدرسه انجام داد، به این معنی که از دانشجویان خواسته شود تا مساله های امتحانی را در خارج از محیط مدرسه، حل کنند. با این روش خیلی چیزها، که از عهدهٔ روش‌های دیگر ساخته نیست، می توان به دانشجویان یاد داد. منجمله از این راه می توان آموزش قسمتهائی از درس را از خود دانشجویان خواست که بدون تردید جزو چیزهایی خواهد شد که هرگز از یاد دانشجویان نمی رود.

راه های امتحان

انواع امتحانات را می شود به دوگروه وسیع و روشن تقسیم کرد: امتحان با استفاده از کتاب، و امتحان بدون استفاده از کتاب. وقتی که به دانشجویان اجازه دهیم که از کتاب، یادداشتهای خود، و منابع مرجع استفاده کنند، آنوقت سئوالها می توانند بیشتر شبیه مساله هایی باشند که در زندگی واقعی به آنها برخورد می کنیم. حافظه برای نکات کوچك ـ و قدرت سریع به یادآوردن ـ نقش کوچکتری در اینگونه امتحانات بازی می کند. سئوال اینست که آیا می توانند با استفاده ازمنابعی که در شرایط عادی در اختیارشان هست، به حل مساله‌ها بپردازند و یا نه. این نه تنها مربوط به امتحان با استفاده

از کتاب ولی با وقت محدود است، بلکه به امتحان خارج از مدرسه هم مربوط می شود. امتحانی خارج از مدرسه، که برای آن یك هفته یا بیشتر وقت دارند، قدرت دانشجو را در رسیدن به حل مساله با سرعت خودش معین می کند. اما، امتحان با استفاده از کتاب، همیشه نشانگر آنچه که در واقعیت اتفاق می افتد نیست. موقعیت‌های حرفه ای فراوانی وجود دارند که در آنها، مهندس، دانشمند، اقتصاددان، و یا ریاضی‌دان باید بدون استفاده از کتابخانه کار کند. امتحانات بدون کتاب بیشتر برای کلاسهای مقدماتی خوب است، چون مطالب این کلاسها بیشتر مربوط به مهارتهای بنیانی است، که باید به خوبی فرا گرفته شود تا بتوان به راحتی به مفهومها و تکنیك‌های بغرنج تر پرداخت.

برنامهٔ امتحان

با انجام تعداد زیادی امتحان کوتاه، یا تعداد کمتری امتحان بلند، می توان به خیلی نتیجه‌ها رسید. اگر درس را به قسمت‌های کوچکی تقسیم کنید و دربارهٔ هر قسمت طرحی برای امتحان داشته باشید، هم آگاهی بیشتری از وضع دانشجویان پیدا می کنید، و هم موجب رغبت بیشتر دانشجویان به کار می‌شوید. این روش، موجبی هم برای زمان بندی کار برای دانشجویان می شود و (همچون کار مرتب مربوط به تکلیف‌های شبانه)، به آنها امکان می‌دهد تا طبق یك برنامهٔ زمانی مشخصی، درس‌ها را فراگیرند. البته این روش این نارسائی ظاهری را دارد که رشتهٔ ارتباطی مطالب مختلف درس را پاره کند و به همین مناسبت، دانشجو نمی تواند آنچه را که به صورت جداگانه و مستقل یادگرفته است، برای مدتی طولانی در حافظهٔ خود نگه دارد، در حالیکه امتحانات طولانی علاوه بر نداشتن این نارسائیها می تواند موجبی برای خودکاری دانشجو و ضمناً به وجود آمدن استقلال فکری او باشد. در این مورد، چه بهتر که از خود کلاس بخواهیم تا برنامهٔ امتحان‌ها را تنظیم کند. تجربه نشان داده است، که در این صورت، روشی بین این دو مرز انتخاب خواهد شد.

در هر صورت، باید روشی در پیش گرفته شود که سرنوشت دانشجو تنها با یك امتحان معلوم نشود، به خصوص، اگر این امتحان را بد داده باشد. ساده ترین روشی که می تواند جلو چنین وضعی را بگیرد، وجود امتحان‌های زیاد است. یکی از راههای دیگر این است که از دانشجو، مثلاً چهار بار امتحان کنیم، ولی تنها نمرهٔ سه امتحان او را در نظر بگیریم، منتهی نمره ای را که کنار می گذاریم باید حتماً بدترین نمرهٔ او باشد. یك راه دیگر این است که نمرهٔ امتحان نهائی را به جای بدترین نمرهٔ قبلی دانشجو هم به حساب آورند.

دست کم یك امتحان را در اوایل ترم بگذارید، تا شاگردانی که در کلاس شما به مشکلات جدی برخورده اند، بتوانند از وضع خود با خبر شوند، و قبل از آنکه دیر شود کاری درباره اش بکنند. امتحانات مهم را باید حداقل یك هفته قبل اعلام کرد.

دو فایدهٔ امتحان نهائی اینست که به دانشجو اجازه می‌دهد، که مطالب تمام کلاس را به هم مربوط کند و به استاد اجازه می‌دهد که از توانائی دانشجو دربارهٔ مطالب درس در آخر کلاس باخبر شود.

طرح سوال های امتحان

اینجا چند پیشنهاد داریم تا هر وقت که می خواهید سوال‌های امتحانی را بنویسید، آنها را به یاد بیاورید.

۱. اول، آنچه را که دانشجو باید بداند ـ مفهوم‌ها، قضیه‌ها، روش‌های اساسی ـ فهرست کنید تا موقع طرح سوال چیز مهمی را از قلم نیندازید. منظور این نیست که باید همهٔ مطالب این فهرست را در سوال‌های خود جا دهید، بلکه باید کوشش کنید که تنها روی یك یا چند قسمت تکیه نکنید، چون در این صورت به بعضی از دانشجویان فشاری وارد آورده ایم که ضرورت ندارد. به امکان دانشجو برای دوره کردن و یادگیری ضمن آن هم، باید به اندازهٔ ارزشیابی قوهٔ دانشجو، اهمیت داد.

۲. کوشش کنید بین مساله‌هایی که برای حل آنها تنها از فرمول استفاده می‌شود و سوال‌هایی که جنبهٔ نظری یا کار بسته را دارند، تناسب معتدلی به‌وجود آورد.

با یك یا دو پرسش ساده تر آغاز کنید تا دانشجویانی که اعتماد به نفس کمتری دارند نیرو بگیرند. اگر در همان چند پرسش اول، حداقلی را جا دهید که به نظر شما برای قبول شدن لازم است، در واقع، می‌توانید از آنها برای مشخص کردن رد شده‌ها استفاده کنید.

مساله‌ها را به‌طور یکنواخت و از آسان به‌مشکل تهیه کنید، در غیر اینصورت ـ به جز بهترین‌ها و بدترین‌ها ـ همهٔ دانشجویان نمره‌هایی در حد هم خواهند آورد. وقتی که یك مساله مشکل تر است، لازم نیست که نمره‌اش را بیشتر بگیرید. اگر می‌خواهید به‌مساله‌های مختلف، نمره‌های مختلف بدهید، بهتر است که میزان آن را در روی ورقه‌های امتحانی معین کنید.

مثلاً می‌توان سوال‌ها را طوری مطرح کرد.که ۴۰٪ آن را، هر کسی که تنها به‌درس کلاس گوش داده است بتواند حل کند، ۲۰٪ دیگر در حد توان کسانی باشد که تکلیف‌های معمولی شب را به‌طور مرتب حل کرده‌اند، ۲۰ ٪ هم از نوع و یا شبیه تکلیف‌های شب و کمی مشکل‌تر از آنها باشد، و بالاخره ۲۰٪ هم می‌تواند شامل مساله‌های تازه (و یا ترکیبی از مطالب مختلف که دانشجویان شبیه آن را ندیده‌اند) باشد تا دانشجویان ممتاز مشخص شوند.

۳. برای دانشجو مشکل ایجاد نکنید و بهانه به‌او ندهید.

اطمینان حاصل کنید که صورت امتحان را می‌شود خواند، و مساله‌ها به‌طور روشنی بیان شده‌اند. در طول امتحان دانشجویان را تشویق به‌پرسیدن سئوال در بارهٔ برداشتهایشان از مساله‌ها بکنید ولی این حق را برای خود نگهدارید که بعضی از این سئوالها را جواب ندهید. از مساله‌هایی بپرهیزید که حل آنها به‌طور جدی وابسته به‌توانائی در انجام عملیاتی باشد که جزو مطالب اساسی به‌حساب نمی‌آیند.

۴. از به‌هم ربط دادن سئوالات مختلف بپرهیزید.

این هم برای راحتی تصحیح کننده و هم رعایت دانشجو لازم است. برای مثال اگر مساله ۱ تابعی را به خواص معین خواسته است، لزومی نداشته باشد که برای حل مساله ۲ از تابع مساله ۱ استفاده کنیم، مثلاً نباید خواسته شود که مشتق و یا انتگرال تابع جواب مساله ۱ را پیدا کنیم. اگر دانشجوئی برای مساله ۱ جواب غلطی پیدا کند، آنگاه به مشکلات زیادی برای حل مساله ۲ برمی‌خورد. این تعیین نمرهٔ جزء را مشکل می‌کند و ممکن است به‌خاطر محدودیت وقت روی کل کار دانشجو، تأثیر منفی بگذارد. همچنین، از تکرار خودداری کنید. هر مساله باید هدف خود را داشته باشد، و هیچ موجبی وجود ندارد که یك مفهوم را دوبار امتحان کنیم.

۵. تا آنجا که ممکن است از دادن امتحانات تستی خودداری کنید با اینکه تصحیح این مساله‌ها

آسان و سریع خواهد بود، ولی طرح امتحان تستی، که پیشرفت دانشجو را حقیقتاً امتحان کند بسیار مشکل است. دانشجویان از آنها خوششان نمی‌آید چون به آنها اجازهٔ نشان دادن وسعت سوادشان را نمی‌دهد. همچنین یك اشتباه کوچك موجب از دست دادن کل نمره‌های مربوط به‌مساله‌ای می‌شود که در حال عادی دانشجو می‌توانست مقدار زیادی نمره از آن بگیرد. گذشته از آن چنین سئوالهائی معرف واقعی مساله‌های ریاضی عملی نیستند.

اگر معلم ببیند که از امتحان تستی گریزی نیست، خوب است که به‌دانشجویان این حق را بدهیم که برای یك یا دو مساله حل خود را برای گرفتن نمرهٔ جزء به‌ما بدهند. این کار کمی از خشم دانشجویان نسبت به‌امتحانات تستی می‌کاهد، و روند را کمی عادلانه‌تر می‌کند.

۶. از دانشجویان اثبات نخواهید، مگر وقتی که آنها بدانند، دقیقاً چه چیزهایی را می‌توانند فرض کنند. «مساله‌های داستانی» بدهید. دانشجویان را مجبور کنید تعریف‌ها را به‌کار بزنند: و مثال بزنید: از پرسیدن تعریف‌ها و قضیه‌های کلی که فقط نیروی حافظهٔ آنها را، و نه پیشرفت ریاضیاتشان را، می‌سنجد، بپرهیزید. مهم اینست که آیا شاگردان مفهومهای کلی را می‌فهمند و آیا می‌توانند آنها را به‌کار برند و نه‌اینکه این مفهومها را به‌زور حافظه در مغز خود کلیشه کرده باشند. از دانشجویان انتظار داشته باشید که کار خود را نشان دهند و برای هر کاری که می‌کنند دلیلی بیاورند. به‌جوابهای بدون دلیل، مگر وقتی که کاملاً واضح است، نمرهٔ کامل ندهید.

۷. قبل از اینکه از یك امتحان استفاده کنید، خودتان با استفاده از همان ورقه‌ای که دانشجو باید استفاده کند، مساله‌های امتحان را حل کنید (یا، حتی بهتر است اگر کس دیگری اینکار را بکند).

پیدا کردن اشتباهی در یك مساله بعد از امتحان ناخوشایند است، و موجب ناراحتی دانشجو و مشکل شدن کار شما در نمره دادن منصفانه می‌شود.

وقتی که وقت و مقدار یك امتحان را معین می‌کنید توجه داشته باشید که شما نسبت به دانشجویان چند برتری دارید: تجربه به طور کلی، مساله‌ها را قبلاً دیده‌اید، و احتمالاً برخود بیشتر مسلطید. امتحانی که برای شما بیشتر از ۱۵ دقیقه وقت بگیرد حتماً برای یك امتحان ۵۰ دقیقه‌ای زیادی طولانی است.

ساعتی که ورقه‌های امتحانی را باید پس داد به وضوح اعلام کنید. و بعد روی آن پافشاری کنید. انصاف نیست که اجازه دهیم بعضی دانشجویان به کارکردن ادامه دهند در حالی که بعضی دیگر از دانشجویان مجبور به ترك امتحان باشند، و مثلاً برای رفتن به کلاس دیگر.

تصحیح امتحانات

۱. ورقه‌ها را بلافاصله تصحیح کنید و به دانشجویان برگردانید. اگر یك یا دو کلاس بگذرد و ورقه‌های دانشجویان پس داده نشود آنها به این نتیجه می‌رسند که کلاس آنها در بین کارهای شما از اهمیت ویژه‌ای برخوردار نیست. اگر خاطرهٔ دانشجو از امتحان و نظراتش راجع به آن تازه باشد، نمره‌ها، نکاتی که شما روی ورقه‌ها نوشته‌اید، و بحثی که در کلاس می‌شود همه معنای بیشتری خواهند داشت.

۲. تا آنجا که ممکن است ورقه‌ها را یکنواخت تصحیح کنید.

از دانشجویان بخواهید اسمشان را در جائی بنویسند، که هر دفعه که ورقه‌ها را برمی‌دارید مجبور به دیدن آن نشوید.

۳. قبل از شروع به تصحیح تصمیم بگیرید که نمره‌های جزء را چگونه و چقدر و برای چه مقدار کار خواهید داد.

بعضی اشتباهات رایج را می‌توان از قبل حدس زد، و اگر نمرهٔ کم شده برای این اشتباهات را از قبل معین کنیم، به یکنواختی تصحیح کمك می‌کنیم. اگر اشتباهات ۵ یا ۶ ورقه را پیدا کنید امکان پیش‌بینی اشتباهات دیگران به مراتب بیشتر می‌شود.

۴. مساله‌ها را یکی یکی تصحیح کنید، یعنی اول مساله ۱ را در همهٔ ورقه‌ها تصحیح کنید بعد به مساله دوم بپردازید، و همینطور جلو روید.

بعد از تصحیح هر مساله ورقه‌ها را بر بزنید تا این امکان که ورقه‌های اول نسبت به ورقه‌های آخر به طور مختلفی تصحیح می‌شود به کسی ضرر زیاد نزند.

۵. فقط به جواب مسئله توجه نداشته باشید، راه حل را با دقت بازبینی کنید.

فقط در جاهائی علامت اشتباه بزنید که در واقع اشتباهی صورت گرفته باشد. مواظب راه حلهای غیرعادی و نابغانه باشید. جواب غلط همیشه به معنای راه حل غلط نیست.

۶. وقتی که ورقه‌های امتحانی را برمی‌گردانید حدود و میانهٔ نمرات را روی تخته سیاه بنویسید.

بدون این اطلاعات، شاگردی با نمرهٔ پائین ممکن است فکر کند که دیگران هم نمره‌هایی در همان حد گرفته‌اند. اگر کلاس کوچك باشد، می‌توانید تمام نمره‌ها را فهرست کنید. شاید بهتر باشد که نمره‌های حرفی را که، معادل تقریبی نمره‌های عددی هستند، گوشزد کنیم تا جایی برای گلهٔ بعدی نباشد.

۷. یك امتحان معمولاً شما را متوجهٔ مفاهیمی می‌کند که هنوز برای عده‌ی زیادی از دانشجویان گنگ است.

شانس آخر شما برای تشریح یك نکتهٔ نامفهوم وقتی است که امتحانات را برمی‌گردانید، و این موقعیت را نباید از دست بدهید. در این موقع، همچنین می‌توانید راه حلهای جالب و زیبای بعضی دانشجویان را به کلاس نشان دهید. اگر امتحان دربارهٔ چند مفهوم واقعاً مهم باشد و یا چند نکتهٔ مهم را به هم مربوط کرده باشد، از این موقعیت می‌توانید برای تأکید دربارهٔ این مطالب استفاده کنید.

۸. اگر وقت اجازهٔ بحث طولانی راجع به امتحان را نمی‌دهد، حداقل در یك پلی کپی، حل مساله‌ها را، موقع برگرداندن امتحان، به دانشجو بدهید.

حل مساله‌ها را، البته، نباید بلافاصله بعد از امتحان به دانشجویان داد، چون این کار بحث‌های مفیدی را که بین دانشجویان دربارهٔ سئوالات امتحان در خواهد گرفت، کوتاه خواهد کرد.

پایان خوب

«درس دادن یعنی دوباره یاد گرفتن»

جوزف ژوبرت

باید قبل از شروع کلاس، طوری کارها را برنامه‌ریزی کرد که مجبور نباشیم در هفتهٔ آخر، با عجله درس را تمام کنیم. وقتی که مطالب درس، با سرعتی گیج کننده مطرح شود، خیلی کم می‌تواند مورد استفادهٔ دانشجویان قرار گیرد. اگر یك کلاس پایان خوشی نداشته باشد، به احتمال زیاد، بسیاری از شاگردان برای شروع کلاس بعدی ریاضیات، شوق لازم را از خودنشان نخواهند داد.

اگر از دانشجویان بپرسیم: مهمترین قضیه یا مفهومی را که یاد گرفته‌اند، کدام است، اغلب موجب شرمندگی دانشجو می‌شویم. حتی شاگردان رشتهٔ ریاضی هم، در بیشتر موارد، جوابهای ناامید کننده‌ای می‌دهند. نباید تمام مسئولیت این جوابها و قضاوتهای نادرست را در مورد اهمیت نسبی مفهوم‌ها، بردوش دانشجو بگذاریم. هفتهٔ آخر کلاس، بهترین وقتی است که معلم می‌تواند به تمامی مطالب ترم، نگاهی کلی بیندازد و دورنمائی زیبا از آنچه خوانده شده است در برابر دانشجویان ترسیم کند و برایشان روشن سازد که چرا بعضی مطالب قله‌ها و بعضی دیگر تپه‌ها و یا دشت‌های این دورنما را تشکیل می‌دهند.

نمره دادن

«معلم تأثیری جاودانه دارد. او هرگز نخواهد فهمید که اثرش کی و کجا تمام می‌شود»

هنری آدامز

دادن نمره در آخر ترم کاری است که باید با جدیت و توجه کامل انجام شود. نمره‌های آخر ترم معمولاً وارد پروندهٔ همیشگی دانشجویان می‌شود و ممکن است اثرات مهمی در سرنوشت دانشجو داشته باشد.

معلم می‌تواند با دقت در طرح سئوال‌ها و تصحیح درست ورقه‌های امتحانی، همچنین با نگهداشتن کارنامهٔ منظم کار دانشجو، برای این جنبهٔ مهم کار، خود را آماده کند. نتایج هر امتحان و هر تکلیف شب باید به طور مرتب، همراه با اطلاعاتی از قبیل تاریخ، نمرهٔ متوسط کلاس، اهمیت این امتحان، و شاید یك جملهٔ کوتاه که نشان دهد چه مطالبی در این امتحان مطرح شده بود، نگاه داشته شود. دفترچه‌های نمره مخصوصاً برای این کار درست شده‌اند. توجه در منظم نگهداشتن اطلاعات راجع به کار دانشجو نه تنها ما را در دادن نمرهٔ آخر سال کمك می‌کند، بلکه به ما این امکان را هم می‌دهد که مشکلات دانشجویان را در طول سال بفهمیم. علاوه برآن، به همکاران ما هم این امکان را می‌دهد که در غیاب ما دلیل دادن نمرهٔ فلان دانشجو را به او بگویند. اگر هم در آینده از شما بخواهند که توصیه نامه‌ای برای دانشجویتان بنویسید، می‌توانید از این اطلاعات به خوبی استفاده کنید و ناچار نباشید که تنها به حافظهٔ خودتان تکیه کنید.

وقتی که بتوانید کار هر دانشجو را به کمك آگاهی‌هایی که در اختیار دارید، برای تمامی سال ارزیابی کنید، به جز در موارد استثنائی، معمولاً به عددهایی می‌رسید که می‌توانید به کمك آنها دانشجویان را به نحو درستی گروه بندی کنید. بعد از آنکه دربارهٔ گروههای مختلف تصمیم گرفتید، با مراجعه به کار دانشجویان مشخصی، می‌توانید راهی برای کشیدن خط فاصل بین گروههای متفاوت پیدا کنید. از جمله چیزهائی که می‌تواند در این راه به شما کمك کند اینست که: کار دانشجو در

کلاس چگونه بوده است؟ آیا در طول ترم یا سال رو به جلو بوده یا بدتر شده است؟ آیا مطالب را در ك کرده است یا تنها از حافظهٔ خود یاری جسته است؟ و غیره. مطمئن شوید که شاگردان از نکات غیر متداول روش نمره دادن شما آگاه هستند، و نمره‌ها را با استفاده از روشهایی که توضیح نداده اید تغییر ندهید. برای مثال، شما ممکن است این قانون را انتخاب کنید که هیچ دانشجوئی نمره ای پائین‌تر از یك نمره پائین‌تر از نمرهٔ امتحان نهائی نخواهد گرفت (یعنی اگر دانشجوئی در امتحان نهائی الف بگیرد آنگاه در کل ترم کمتر از ب نمی گیرد). بعد از اینکه حد فاصل بین نمره های مختلف را معین کردید تا آنجا که می‌شود از تغییرات دیگر خودداری کنید چون اینکار مانعی برای متقاعد کردن دانشجو خواهد شد و او در عدالت و انصاف شما دچار تردید خواهد شد.

اگر کلاسهای دیگری از درس شما در دانشگاه تدریس می‌شود. مطمئن شوید که روش نمره دادن شما با کلاسهای دیگر نسبتاً یکنواخت است. از روشی در نمره دادن استفاده کنید که برای درس انتخاب شده است. اگر فقط یك قسمت از کلاس شما وجود دارد کوشش کنید که نمره دادن شما با روش نمره دادن قبلی این درس نمره‌دادن دپارتمان به طور کلی سازگار باشد.

وقتی که یك دانشجو دربارهٔ نمره اش از شما می‌پرسد، حق دارد که جواب قانع کننده بشنود و به‌طور دوستانه با او برخورد شود. اگر روش ارزیابی شما از کار او دقیق باشد، دانشجو معمولاً راضی می‌شود. دانشجو را بدون صحبت و قبل از آنکه قانع بشود، جواب نکنید. همیشه این احتمال وجود دارد که واقعاً نمره‌ای کمتر از حق او به او داده باشید.

بعضی وقتها دانشجویان تکرار می کنند که آنها مطالب را می‌دانند. ولی به‌دلائلی نتوانسته‌اند آنرا نشان دهند، در این شرایط به آنها گوشزد کنید که نمره نشان‌دهندهٔ کاری است که انجام داده اند، نه نشان دهندهٔ کاری که شاید انجام می‌دادند اگر...

ارزشیابی و نظرخواهی

«معلم خوب چرت نمی‌زند
او با چابکی درس می‌دهد
آنوقت شاگردانش هم چرت نمی‌زنند - و کاری انجام می‌دهند.
درس دادن همین است و همین خواهد بود»

دیوید مك کورد

چه خوشمان بیاید و چه نیاید، همه ما به وسیلهٔ شاگردانمان ارزیابی می‌شویم. سئوال اینست که این ارزیابیها را چطور به موقع و به‌طور سازنده منتقل کنیم. رابطهٔ باز بین استاد و دانشجو نه تنها موجب می‌شود که استاد بفهمد که آیا دانشجویان از کلاس او خوششان می‌آید و یا نه، بلکه موجب می‌شود دانشجویان دلیل روش تدریس استاد را هم بفهمند. مهمتر از آن، موجب می‌شود که معلم بداند در چه قسمتهایی محتاج کار بیشتر است.

ارزیابی کتبی در آخر ترم می‌تواند برای استاد و دانشجو در کلاس های بعدی مفید باشد، ولی نفعی برای کلاس فعلی ندارد. کم و بیش ارزیابی شفاهی مثلاً به صورت سئوال و جواب می‌تواند فایده بیشتری داشته باشد. ارزیابیهای لحظه ای حتی لازم نیست شفاهی باشند، معلم تیزبینی که وقت درس دادن به شاگردان نگاه می کند نمی‌تواند علایم گیجی، خستگی، و یا لذت را در صورتهای آنها نبیند. در یك کلاس ایده‌آل، همهٔ دانشجویان، همهٔ آنچه را که انجام می‌دهیم، همیشه می‌فهمند. کلاسهای ایده‌آل وجود ندارند، ولی یك معلم خوب کوشش می کند تا آنجا که می‌شود به این ایده‌آل نزدیك شود.

اگر، با وجود اینکه از دانشجویان خواسته بودید که هر وقت سئوالی پیش آمد بپرسند، حس کردید که شاگردی را گیج کرده اید، صبر کنید و از او بپرسید که آیا مطلبی وجود دارد که احتیاج به دوباره گفتن داشته باشد. اما یك نکته برای احتیاط: اگر نسبت به جوابی که می گیرید بی صبری کنید، به این نتیجه می‌رسید که دانشجو برای تمامی بقیهٔ ترم سرد و بی‌تفاوت خواهد ماند.

نوعی دیگر از ارزیابی که ممکن است بیشتر برای معلمان کم تجربه مفید باشد اینست که چند دقیقهٔ آخر هر کلاس را به این بحث اختصاص دهید که در آن ساعت چه چیزهائی به خوبی و چه چیزهائی به بدی برگذار شده است. با دقت به آنچه شاگردان می گویند توجه کنید حتی اگر به نظر بی‌فکرانه آید. خود را آزاد حس کنید که به دانشجویان نظر خود را راجع به کلاس بگویید. اگر کلاس مرده بود، این را به آنها بگویید. مشخص کنید که اگر کلاس خسته کننده است مقداری از مسئولیت هم با آنهاست.

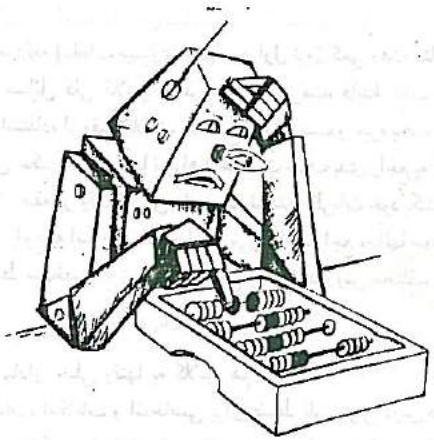
در هر ترم چند دفعه (دفعات بیشتری نزدیك به اول ترم) کمی وقت کنار بگذارید که در آن از دانشجویان دربارهٔ مسائل کلی کلاس مانند سرعت پیشرفت، فایدهٔ کتاب درسی، کمیت و کیفیت تکالیف شب، نوع استفاده از وقت کلاس، تصحیح تکلیف شب و غیره بحث کنند. از آنجائیکه خیلی از شاگردان از ترس عکس‌العمل شما نخواهند خواست حرف بدی راجع به کلاستان بزنند می‌توانید از آنها بخواهید ۱۰ دقیقه از وقت کلاس را صرف نوشتن نظریات خود بکنند. شما می‌توانید کلاس بعد را با بحثی کوتاه راجع به انتقادات آنها و اینکه می خواهید راجع به آنها چه کنید، شروع کنید.

نسبت به شرایط مشخص، ارزیابیهای رسمی‌تر به چند روش مختلف می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

۱. استادیاران و استادان خیلی وقتها به کلاس هم می‌روند.
۲. در بعضی موسسات، امکانات و اشخاصی برای ضبط تلویزیونی درس دادن وجود دارد. اینکار وسیله‌ای عالی برای پیدا کردن ضعفهائی است که در روش بیان و حرکت شما در کلاس وجود دارد.
۳. خوب است که از همکار یا سابقه‌تری که به عنوان معلمی عالی مورد احترام است. بخواهید که به کلاس شما بیاید و بعد از کلاس صادقانه نظراتش را با شما در میان بگذارد و یا آنها را روی فرمی که برای اینکار درست شده است بنویسد.
۴. اگر شما در کلاسی بزرگ درس می‌دهید، می‌توانید در آخر ترم با همکارانتان جلسه‌ای تشکیل دهید و راجع به کلاس بحث کنید و کارتان را ارزیابی کنید.
۵. خوب است اگر در آخر ترم از دانشجویان بخواهید که یك پرسشنامه را پر کنند. البته، در خیلی از

موسسات و دانشگاهها این کار به صورت روندی عادی در آمده است. در هر صورت، با وجود اینکه شاگردان به عنوان قاضی در مورد کیفیت درس دادن حد معینی دارند، نتایج این پرسشنامه‌ها را باید جدی گرفت و دربارهٔ آنها فکر کرد. اگر پرسشنامه از دانشجویان می‌خواهد که بطور کلی و با استفاده از واحدهای عددی کار شما را بسنجد، آنوقت ارزش پرسشنامه به مراتب بیشتر می‌شود اگر بخواهیم که در جنب این نمرات، نظرات خود را در چند جمله بنویسند. بهتر است که راههائی برای محفوظ نگهداشتن هویت دانشجویان داشته باشیم تا آنها از عکس‌العمل شما به خاطر انتقاداتشان نگران نباشند.

* * *



اما چطور با این وسیله کار می‌کردند؟

Reconciliation with Mathematics
Editor : Parviz Shahryari
Under the supervision of the editorial board
A supplementary publication of the Free University of Iran
Address : The Free University of Iran
P. *O. Box* 11–1962
Aban Shomali St. Karim-Khan Zand Boulevard
Tehran – 15 *Iran*

Vol. III, No. 2, 1980