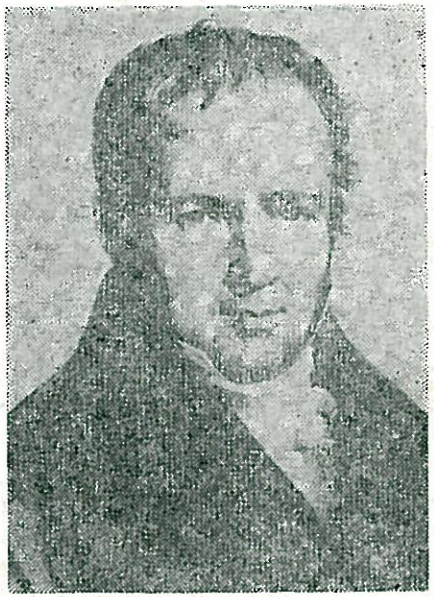
آشنائی با ریاضیات

جلد یازدهم



آذرماه ۱۳۶۵

آشنایی با ریاضیات (جلد یازدهم)
گردآورنده : پرویز شهریاری
صفحه‌آرا: حسن نیک‌بخت
ناشر: انتشارات فردوس
تیراژ: ۴۰۰۰ نسخه
چاپ اول، آذر ماه ۱۳۶۵

روی جلد:
سیمون دنی پواسون

حروفچینی: مهدی
چاپ : رامین

فهرست جلد یازدهم

۱۸۰ ریال

آشنایی با ریاضیات (جلد یازدهم)
گردآورنده : پرویز شهریاری
صفحه‌آرا: حسن نیک‌بخت
ناشر: انتشارات فردوس
تیراژ: ۴۰۰۰ نسخه
چاپ اول، آذر ماه ۱۳۶۵

روی جلد:
سیمون دنی پواسون

حروفچینی: مهدی
چاپ : رامین

فهرست جلد یازدهم

۱۸۰ ریال

ب. و. گنه دنکو

سیمون دنی پواسون
(۱۷۸۱-۱۸۴۰)

ترجمهٔ پرویز شهریاری

۲۱ ژوئن سال ۱۹۸۶، دویست وپنج سال از روز تولد پواسون، دانشمند نام‌دار فرانسوی، که نقش عظیمی درتکامل ریاضیات، مکانیك، اختر-شناسی وفیزیك داشت، گذشت. پواسون، اثرهای زیادی درشاخه‌های مختلف ریاضیات ـ فیزیك ریاضی، حل معادله‌های دیفرانسیلی با مشتق‌های جزئی، محاسبهٔ واریاسیونی، نظریهٔ انتگرال گیری، نظریهٔ احتمال و نظریهٔ رشته‌ها، ازخودباقی گذاشت. درزمینهٔ مکانیك، روی مسأله‌های مربوط به‌هیدرودینامیك (دانش بررسی نیروی جنبش آبگون‌ها)، نظریهٔ کشسانی، بالیستیك (پرتاب-شناسی) خارجی و مکانیك تحلیلی کلاسیك کارکرد. هرکسی که با دانش و پژوهش‌های علمی سروکار دارد، دائماً به‌نام پواسون برمی‌خورد، چرا که، بسیاری ازمفهوم‌ها، نتیجه‌گیری‌ها وحقیقت‌های موجود دردانش، به‌اومربوط می‌شود. پواسون، بیش‌از ۳۵۰ نوشته داردکه، بسیاری ازآن‌ها، درپایه‌ریزی وتکامل بعدی دانش‌های دقیق امروزی، نقشی بزرگ داشته‌اند.

پواسون در ۲۰ دسامبر ۱۸۲۶ ، به عضویت افتخاری فرهنگستان پترزبورگ انتخاب شدکه‌نشانه‌ای ازاحترام دانشمندان روس، به‌او وکارهای علمی اوبود.

پواسون، درشهرکوچك «پی‌تی‌ویو» واقع درمرکزفرانسه، متولدشد. پدرش که کارمند اداری کوچکی بود، در سال‌های انقلاب کبیر فرانسه، تا حدی، از پلکان ترقی بالا رفت؛ او آرزو داشت که پسرش محضردار بشود. ولی درخانواده بااین فکر مخالفت کردند، زیرا به‌تصور آن‌ها، این وظیفه «به‌عقل و درایت زیادی نیاز داشت». بعد از بحث‌های زیاد، تصمیم گرفتند او را برای آموزش نزد یك سلمانی بفرستند، به‌این امید که از او، یك «جراح» وحکیم روستایی بسازند. ولی، پواسون کوچك، هرگز نتوانست

خودرا باعمل نیشترزدن وفق دهد و، بعد از آن‌که خبرمرگ پسری را به‌او دادند، دیگر به‌طور قطع از ادامهٔ آموزش این حرفه، سرباز زد. در این زمان، موقعیت مالی خانواده کمی بهتر و، به‌جز آن، شوق درس‌خواندن هم، درکودك، ظاهرشده بود. در نتیجه، پسرك را به‌فونتن بلو و به مدرسهٔ «اکول نرمال» فرستادند.

این پیش‌آمدها، چرخش تندی درزندگی کودك به‌وجود آورد. درآن زمان، «مجلهٔ مدرسهٔ پلی تکنیك»، به طور مرتب ، برای موسسه‌های دولتی فرستاده می‌شد. پدر، بنا به وظیفهٔ خود، تمام شماره‌های مجله را می گرفت و به‌خانه می آورد؛ و پواسون کوچك، به‌این مجله، که به‌هیچ وجه برای بچه‌ها نبود، بی‌اندازه علاقه‌مند شد. او با علاقه‌مندی، مسأله‌هایی را که در مجله مطرح می‌شد، حل می کرد و، به‌این ترتیب، تحصیل خودرا، باآموزش‌پیش خود درخانه، تکمیل می کرد.

معلم پواسون، در مدرسه، «بیلی» بودکه نسبت به‌کار خود و به حرفهٔ معلمی عشق می‌ورزید. ولی، دانش ریاضی‌او، ازمحدودهٔ مقدمات این‌دانش، تجاوز نمی کرد. بیلی به‌فکر افتاد که سطح دانش خود را بالا ببرد. در این باره باید گفت‌که، برتری شاگرد، نه‌تنها موجب حسد او، نسبت به‌پواسون کوچك و استعداد فوق‌العادهٔ او نشد، بلکه او را واداشت تا، به‌طور جدی، به‌ریاضیات بپردازد تا بتواند موفقیت‌های شاگرد خود را دنبال‌کند. احترام شاگرد به‌معلم و معلم به‌شاگرد چنان بودکه آن‌ها را، به دو دوست واقعی تبدیل کرد، و این دوستی، هرگز قطع نشد. علاوه‌براین، وقتی‌که پواسون دانشمندی‌مشهور وعضو فرهنگستان‌بود، بیلی درنشست‌های فرهنگستان‌شرکت می‌کرد و، با احساس و علاقهٔ وافری، به سخنان شاگرد سابق خود گوش می‌داد.

پواسون: اغلب، پیش آمدهای دوران‌کودکی خودرا به‌یاد می‌آورد و، دربارهٔ آن‌ها، با همکاران خود صحبت می کرد. اوحتی، از موضوع‌های جالبی‌که به‌ماه‌های نخستین زندگی اومربوط می‌شد، یادمی کرد. درآن‌زمان، بسیاری از فرانسوی‌ها علاقه‌مند به‌اندیشه‌های روسو بودند. او می گفت که

باید، نسل جوان را، به‌منظور آشنایی با نیروهای زندهٔ خلق، در روستاها، جایی‌که نزدیك به طبیعت است، پرورش داد، مد روز بودکه بچه‌ها را به‌دایه‌های دهاتی می‌سپردند. پواسون هم ، به‌همین سرنوشت دچار شده بود. یك روز، پدر تصمیم گرفت به‌دیدن پسرش برود. دایه به‌مزرعه رفته بود و پسربچه تنها مانده بود: اورا با ریسمانی به‌یك میخ، آویزان‌کرده بودند تا، به‌این ترتیب،آزارخوك‌ها به‌اونرسد. خود پواسون، بعدها بامزاح یادآوری می‌کرد که ، همین وضع، باید موجب علاقه‌مندی او به‌مسألهٔ نوسان آونگ شده باشد.

پواسون، در سال ۱۷۹۸، به‌مدرسهٔ پلی تکنیك وارد شد. او بالاترین نمره را درامتحان‌های ورودی به‌دست آورد و درتمام سال‌های تحصیل، این موقعیت خودرا ازدست نداد. او به‌خصوص، به‌ریاضیات وادبیات علاقه‌مند وبا پشتکار به‌این دو زمینه می‌پرداخت. ولی رسم را نتوانست یاد بگیرد: او حتی یادنگرفت‌که قلم نقشه‌کشی راچگونه دردست‌نگه‌دارد. معلمان اوبه‌این نتیجه رسیدندکه، استعداد این جوان، نه درکارهای مهندسی وکشیدن رسم، بلکه در بررسی‌های نظری است و، به‌همین مناسبت ، او را ازکشیدن رسم، معاف‌کردند. **دومی‌نیك فرانسوا آراگو**، درکتاب مشهورخود «زندگی نامهٔ اخترشناسان، فیزیك دانان و هندسه شناسان مشهور» ، می‌نویسد: «باید این مطلب راهم یادآوری‌کنیم‌که، این‌تصمیم عاقلانه، بعد ازآن‌که ادارهٔ مدرسهٔ پلی‌تکنیك به‌دست سردوشی‌های کلفت افتاد، لغو شد» تردیدی نیست‌که به‌خصوص، ضمن آموزش دانشجویان با استعداد،که به کار منظم پیش خود عادت‌کرده‌اند، توجه به‌ظاهر وپیروی از رسم وقاعدهٔ سنتی، می‌تواند اثر نامطلوبی داشته باشد. وظیفهٔ یك معلم خوب این نیست‌که علاقهٔ به آموزش و استعداد خاص دانش آموزان را از یاد ببرد، بلکه در این است‌که، این استعدادها را تاحد ممکن شکوفاکند وشرایطی را ایجادکندکه موجب رشد دایمی علاقهٔ دانش آموزان به‌آموزش شود. و معلمان پواسون، دارای حد اعلای چنین خصلتی بودند. باید یادآوری‌کردکه استادان مدرسهٔ پلی‌تکنیك بادقت فوق‌العاده‌ای انتخاب می‌شدند و، در نتیجه، ریاضی‌دانان برجسته‌ای

همچون **لاگرانژ، فوریه و مونژ** در آن کار می‌کردند. البته، پواسون نتوانست از کلاس‌های درس مونژ و فوریه استفاده کند، زیرا او را به مصر فرستاده بودند تا در لشکرکشی مشهور، ولی ناموفق، ناپلئون شرکت کنند.

پواسون، درسال ۱۸۰۰، مدرسهٔ پلی‌تکنیك را تمام کرد و درهمان‌جا، به‌عنوان معلم خصوصی باقی ماند؛ بعد از دو سال به‌عنوان دستیار استاد و چهارسال بعد به‌عنوان استاد انتخاب شد. اکنون دیگر، پواسون، ریاضی‌دانی مشهور بود که روی مجموعهٔ گسترده‌ای از مسأله های نظری و عملی کار می‌کرد.

این سال‌ها، دوران شکوفایی ریاضیات فرانسوی بود، وقتی که، در کشور، جبهه گسترده‌ای برای بررسی در زمینه‌های مکانیك آسمانی، مکانیك تحلیلی، آنالیز ریاضی ونظریهٔ احتمال بازشده بود وپایه‌های فیزیك ریاضی بنیان گذاشته می‌شد. و پواسون هم، که استعدادی همه‌جانبه داشت، در همهٔ این شاخه‌های ریاضیات، پژوهش‌های خودرا آغاز کرده بود. در آن زمان، هنوز دانش‌ها، به‌صورتی کاملا تخصصی درنیامده بودند و ریاضی دانان، همراه باکارهایی که درزمینهٔ ریاضیات نظری وکار بسته انجام می‌دادند، به‌اخترشناسی وفیزیك وحتی جامعه شناسی هم، علاقه نشان می‌دادند.

نخستین اثر پواسون، درسال ۱۸۰۰، وقتی که هنوز دانشجوی مدرسهٔ پلی‌تکنیك بود، چاپ شد. دراین سال، در «مجلهٔ» مدرسه، مقاله‌ای با عنوان «دربارهٔ حذف مجهول‌ها» چاپ کرد که، به‌گفتهٔ آراگو، درچهارصفحه، تمام نتیجه‌گیری‌های **ا. به‌زو** در کتاب «نظریهٔ کلی معادله‌های جبری» را آورده بود (کتاب به‌زو، در ۴۶۰ صفحه متن، نوشته شده است)، در همان سال، **لاکروا و لژاندر**، اثر دیگری ازپواسون را به‌نام «دربارهٔ تعدادانتگرال‌های معادله‌های با تفاضل‌های محدود» برای چاپ فرستادند.

پواسون، تا پایان زندگی خود، کار درمدرسهٔ پلی‌تکنیك راترك نکرد، ولی گاه به‌گاه، به‌وظیفه‌های دیگری‌هم می‌پرداخت: درسال ۱۸۰۸، به‌عنوان اخترشناس در کمیسیون عرض‌های جغرافیائی و در سال ۱۸۱۲، به جای لژاندر، به عنوان ممتحن توپچی‌ها نامزد شد، در همین سال به عضویت

فرهنگستان هم انتخاب شد؛ در سال ۱۸۱۵، وظیفهٔ انتخاب مربیان مدرسهٔ سن‌سیرا یکی ازبهترین مدرسه‌های نظامی را به‌پواسون واگذاشتند، درسال ۱۸۲۰، مشاور دانشگاه شد ودرسال ۱۸۲۷، بعد ازمرگ **لاپلاس**، به‌عنوان هندسه‌دان در کمیسیون عرض‌های جغرافیایی برگزیده شد. همین عنوان‌های پواسون نشان می‌دهد که، درزمان خود، ازچه اعتبارعلمی واجتماعی والایی برخوردار بوده است.

پواسون در ۲۵ آوریل سال ۱۸۴۰ درگذشت، در حالی که ارثیهٔ علمی عظیمی برای جامعهٔ انسانی باقی گذاشت؛ بخش عمده‌ای ازنوشته‌های او، هنوزهم ارزش و اهمیت علمی خودرا حفظ کرده وتأثیر زیادی برتکامل بعدی دانش داشته‌است. بیلی، معلم دبیرستانی پواسون، همیشه باعلاقه تکرار می‌کرد که: «این ماهی کوچك[1]، در آینده، خیلی بزرگ خواهد شد»؛ و زندگی علمی پواسون، پیش‌بینی این معلم دوراندیش را، کاملا تأیید کرد.

پواسون، شاگرد وفادار وصادقی برای مدرسهٔ پلی تکنیك بود و آرمان‌های علمی معلمان خود را به خوبی درك می‌کرد: باروش‌های ریاضی، می‌توان به قانون مندی‌های جهان خارج پی‌برد و، بعد، براساس آن، خود دانش ریاضی راتکامل داد. او مضمون درس معلمان خود رابه خوبی درك کرد وخودکارآن‌ها را ادامه داد، نتیجه‌گیری‌های آن‌ها را تکمیل کرد وبا تلاش بسیار، درجست وجوی روش‌های تازه‌ای برای مطالعه وتحقیق دشواری‌های دانش بود.

علاقه‌ها واحساس‌های پواسون را، می‌توان تاحد زیادی، ازیادداشت‌ها وخاطرات او، فهمید. علاقهٔ اوبه اخترشناسی، به‌خاطرهمکاری طولانی اوبا دفترعرض‌های جغرافیایی (که یك موسسهٔ کاملاً علمی در زمینهٔ اخترشناسی بود)، پیداشد. کارهای اصلی پواسون، در زمینهٔ اخترشناسی، به مساله‌های مکانیکی آسمانی مربوط می‌شود: پایداری و توازن منظومه شمسی، حرکت ماه به دور زمین، نوسان‌های ماه وغیره.

بخش عمده‌ای ازفعالیت‌های پواسون را، بررسی مساله‌های مربوط به

۱ــ پواسون، به‌زبان فرانسوی، یعنی ماهی.

فیزیك تشکیل می‌داد: حرکت آبگون‌ها، انتشار موج درسطح آبگون‌ها، بررسی کشسانی جسم‌ها، نظریهٔ انتشار گرما (به خصوص، درمحیط آبگون)، مسالهٔ مربوط به‌لوله‌های‌موئی ودشواری‌های‌مربوط به‌الکتریسیته ومغناطیس. درنظریهٔ کشسانی، نام پواسون، روی «ضریب پواسون» یا «مدول پواسون» باقی مانده است. درنظریهٔ گازها، مفهوم «آدیابت پواسون» [«بی در رو پواسون»]، هنوز به‌کار می‌رود.

بررسی‌های پواسون دربارهٔ خاصیت مغناطیسی، اهمیت زیادی در دریانوردی دارد. **آ.ن. کریلوف**، یکی ازمتخصصان مشهور در زمینهٔ انحراف قطب‌نما، می‌نویسد:

درمثالی مشخصی می‌آورم که چگونه، یك کارکاملاً نظری، توانست بعداز قریب چهل سال، کاربرد عملی مهمی پیداکند و، تاحد زیادی خطرهای دریانوردی راکاهش دهد.

پواسون، ضمن کارهای گسترده‌ای که، درسال ۱۸۲۴، درنظریهٔ ریاضی مغناطیس انجام داده بود، معادله‌های عمومی تعادل عقربه‌های مغناطیس رادر کشتی، مطرح کرد: او درمحاسبه‌های خود، تأثیرنامطلوب فلزی را که در ساختمان کشتی وتجهیزات آن به‌کار رفته است، درنظر گرفته بود...

این معادله‌ها، برای فیزیك دانان جالب نبود و دریانوردان هم نمی‌توانستند ازآن‌ها سر دربیاورند و، به این ترتیب، درمیان ۴۰۰ مقالهٔ این‌مؤلف بااستعداد وپرکار، ازنظرهادورماندند. تنها **د. ب. اری** اخترشناس، با استفاده ازنظرهای پواسون، روش ساده‌ای را، برای ازبین بردن انحراف قطب‌نما پیشنهاد کرد: با قراردادن آهن‌ربا ومیله‌های آهنی درکنارقطب‌نما، به‌نحوی که درجهت عکس‌عمل آهن‌های کشتی‌عمل کنند، می‌توان ازانحراف قطب‌نما جلوگیری کرد. ولی بازهم، انحراف قطب‌نما، درجایی وضمن عبورکشتی ازمنطقه‌ای به‌منطقهٔ دیگر، موجب نابودی آن می‌شد.

درزمان پواسون (او در سال ۱۸۴۰، از دنیارفت)، کشتی‌ها ازچوب ساخته‌می‌شدند ومقدارآهنی که درساختمان آن‌ها مصرف می‌شد، نسبتاً کم بود؛ تاثیراین آهن‌ها برقطب‌نما ناچیز بود وخطای ناشی ازآن، به‌وسیلهٔ خطاهای دیگری که درکشتی‌های بادبانی به‌وجود می‌آمد، جبران می‌شد.

ولی درمیانهٔ سال‌های ۱۸۴۰، استفادهٔ از آهن درساختمان کشتی‌ها روبه افزایش گذاشت؛ کشتی‌های بخار ظاهرشدکه نیازبه ابزارهایی داشتند تابتوانند ازاوضاع اقیانوس‌ها، آگاهی‌های سریع به‌دست آورند. درسال ۱۸۶۲، درطول یك ماه، درساحل ایرلند، دوکشتی بزرگ مسافری، یکی بعداز دیگری، دچار سانحهٔ جدی شد و، علاوه‌بر نابود شدن کشتی‌ها، صدها مسافر هم، جان خود را ازدست دادند. بعداز بررسی‌های فراوان، معلوم شد که، یکی‌ازعلت‌های سانحه، خطای قطب‌نما بوده است که کشتی را به‌مسیری نادرست انداخته است.

این‌حادثه‌ها، جامعهٔ انگلستان راتکان داد، به دستور پارلمان، ازطرف وزارت دریاداری، کمیسیونی برای بررسی مسالهٔ قطب‌نما تشکیل شد؛ در این کمیسیون، **سمیت** ریاضی‌دان، **اری** اخترشناس وناخدا **اوانس** شرکت داشتند.

کمیسیون به‌معادله‌های پواسون مراجعه کرد و، با تغییرهای ناچیزی، آن‌هارا به‌صورت مناسبی برای‌کار درآورد ورساله‌ای عملی‌دربارهٔ انحراف قطب‌نما چاپ کردکه، استفادهٔ ازآن، برای هردریانوردی، ممکن بود.

«آدیابت پواسون»، در زمان ماهم، دربررسی ومحاسبهٔ روندهایی که درگازها، ضمن تغییرناگهانی حجم وفشار، به وجود می‌آید، به صورت گسترده‌ای، مورد استفاده قرارمی‌گیرد. چنین روندهایی، در دینامیك گازها، هیدرودینامیك، آئرودینامیك، آکوستیك و بسیاری ازپدیده‌های هواشناسی وبرخی از رشته‌های صنعت معاصر، پدیدمی‌آید.

پواسون، به‌خاطرتدریس در مدرسهٔ پلی‌تکنیك، دورهٔ درس مکانیك را درکتابی دوجلدی فراهم‌آورد، که درطول سال‌های متمادی، بهترین‌کتاب درسی دانشجویان به شمارمی‌رفت. او دربررسی‌های خود درزمینهٔ مکانیك، بدون‌تردید، تحت‌تأثیرپیشینیان خود، ودر درجهٔ اول **لاپلاس** و**لاگرانژ** بود. او درزمینهٔ مکانیك، هم به‌مساله‌های مشخص (مثل حرکت قرقره) وهم به مساله‌های کلی پرداخته است. اوبودکه مختصات تکان $p_i = \frac{\partial \tau}{\partial q_i}$ را، به جای مختصات سرعت q که لاگرانژبه‌کار می‌برد، به‌کاربرد وهمین امربه

۱. ازکتاب «ریاضیات کاربسته واهمیت‌آن برای صنعت»، نوشتهٔ آ.ن. کریلوف.

او امکان داد که معادله‌های مکانیك را، چه درتئوری وچه درعمل، مناسب‌تر وکارآمدتر کند.

پایان‌سدهٔ‌هیجدهم‌وآغازسدهٔ‌نوزدهم، ازنظر کشف‌های‌فیزیکی،دورانی درخشان‌واستثنائی‌است. درسال۱۸۰۸، **ا. ل. مالیوس**پدیدهٔ‌قطبی‌شدن نور را کشف کرد، **ا. ژ. فره‌نل** از سال۱۸۱۵ به‌بعد، به‌بسیاری ازویژگی‌های مهم درنورشناسی‌پی برد. عرضی بودن‌نوسان‌های نور ، انتشارنوردر بلورهای دو محوری، پدیدهٔ انحراف وغیره بعد از **ارستد**، پیشرفت سریع نظریهٔ‌الکترو-مغناطیسی و الکترودینامیکی ، آغاز شد. کارهای **فوریه** مـوجب شد تا راه روش‌های ریاضی درنظریهٔ انتشارگرما بازشود وغیره.

به‌قول **فلیکس کلین** «سیل جریان این‌کشف‌های فیزیکی، تأثیرعظیمی برخلاقیت ریاضی داشت، زیرا آشفتگی‌ها و بی نظمی‌هایی که در فرض‌ها و نظریه‌های تازه‌پدیدارشده‌بود، ازریاضی‌دانان می‌طلبیدتا، باروش‌های خاص خود،نظم‌وترتیبی ایجادکنند»[1]. نتیجهٔ این‌وضع این‌بود که‌اندیشه‌هاوروش‌های ریاضی، بیش از پیش، درفیزیك نفوذکرد. بیش‌ازهمه، فرانسویان بودندکه پایه‌های فیزیك ریاضی راگذاشتندکه جهتی تازه، و بی‌اندازه مهم، در تفکر علمی بود؛ وپواسون، نقش بزرگی دراین باره داشت.

نظریـهٔ پتانسیل، درآغـاز سدهٔ نـوزدهم و تحت تـأثیر مساله‌هـای هیدرودینامیك، نظریهٔ جاذبه، الکتروستاتیك، نظریهٔ‌کشسانی وغیره به وجود آمده بود. برای میدان جاذبه‌ای کـه نقطهٔ $A(a,b,c)$ بـه‌جرم m تشکیل می‌دهد، پتانسیل درنقطهٔ $M(x,y,z)$ برابراست با

$$v=\gamma\frac{m}{r}$$

که درآن، r فاصلهٔ بین نقطه‌های AوM، وγ، ثابت جاذبه است. ضمن قرار گرفتن میدان‌ها برهم، پتانسیل‌های آن‌ها، جمع می‌شوند. بنابراین، پتانسیل میدانی که بـه‌وسیلهٔ جسم باچگالی $\rho(x,y)z)$ وحجم V به‌وجود می‌آید، با این دستورمحاسبه می‌شود:

۱ــ ازسخن‌رانی فلیکس‌کلین دربارهٔ «تکامل ریاضیات درسدهٔ نوزدهم».

$$v(x,y,z)=\gamma\iiint_V\frac{\rho(a,b,c)\,dadbdc}{r}$$

برای نقطه‌هایی‌که بیرون جسم به حجم V قراردارند، مقدارپتانسیل، درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$

برای نقطه‌های درونی، مقدارپتانسیل به‌وسیلهٔ پواسون وبامعادلهٔ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-4\pi\gamma\rho$$

داده شدکه نام معادلهٔ پواسون را برخوددارد.

تابع‌هایی را،که درمعادلهٔ لاپلاس صدق‌کنند، تابع‌های همساز گویند؛ ودرنظریهٔ تابع‌های همساز، دستورمهم پواسون، معروف است:

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

که امکان‌می‌دهد، مقدار تابع همساز را درنقطه‌های درونی دایرهٔ به‌شعاعR، از روی مقدارهای آن در روی محیط دایـره، پیدا کنیم. ایـن دستور را، **انتگرال پواسون** می‌نامند.

درمکانیك ونظریهٔ معادله‌های با مشتق‌های جزئی‌مفهومی به‌کارمی‌رود، که‌متعلق به پواسون‌است وبه نام **پرانتزپواسون** معروف‌شده‌است. فرض‌کنید تابع‌های φ,ψ، نسبت بـه متغیرهای x_1، x_2، ... ، x_n وp_1، p_2، ... ، p_n دیفرانسیل پذیرباشند؛ آن وقت، عبارت

$$(\varphi\text{ و }\psi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)$$

را **پرانتزپواسون** گویند.

برای پرانتزپواسون، اتحاد زیرــ که آن را اتحاد **پواسون** گویند ــ برقراراست:

$$((\varphi,\psi),\omega)+((\psi,\omega),\varphi)+((\omega,\varphi),\psi)=0$$

معلوم شده است‌که حرکت دستگاهی ازنقطه‌های، به‌وسیلهٔ معادله‌های

دیفرانسیلی زیر، شرح داده می‌شود:

$$\frac{\partial x_k}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_k} \text{ و } \frac{\partial p_k}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial x_k}$$

که در آن‌ها، x_k مختصات نقطه‌های دستگاه، p_k تکان‌ها و $H(t,x,p)$ تابع‌های هامیلتون، یعنی انرژی کامل دستگاه، که برحسب مختصات و تکان بیان می‌شود، هستند. اگر $\varphi(t,x,p)=c$، انتگرال این دستگاه باشد، آن وقت

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+(H,\varphi)=0$$

پرانتز پواسون دو انتگرال این دستگاه، یا مقدار ثابتی است و یا انتگرال همین دستگاه است.

کاملا طبیعی بود که در زمینهٔ مکانیك وفیزیك ریاضی، ضرورت تکمیل محتوای آنالیز ریاضی را دربرابر پواسون قراردهد. و او، اثرهای زیادی درمحاسبهٔ واریاسیونی، نظریهٔ انتگرال‌های چندگانه ومنحنی‌الخط، انتگرال‌گیری درحوزهٔ مختلط ونظریهٔ بسط مجانبی، ازخود باقی گذشت.

هم زمان با **گوس**، پواسون هم شرط لازم وجود اکسترمم انتگرال دوگانه را پیداکرد. بعدها **م. و. اوستروگرادسکی**، این نتیجه‌گیری را دربارهٔ انتگرال‌های چندگانه، به‌طورکلی، تعمیم داد.

پواسون درسال ۱۸۳۱، برای نخستین بار، شرط بسط تابع‌های با دومتغیرمستقل را به رشته‌های با تابع کروی، پیداکرد.

پواسون، مطالعهٔ بسط به‌رشته‌های مجانبی را هم آغاز کرد. **اولر** روشن کرده بود که، این رشته‌ها، ممکن است متقارن نباشد، ولی اگر از مجموع تعداد محدودی ازجمله‌های آن استفاده کنیم، می‌توانیم به‌تقریب خوبی از آن برسیم. پواسون، دستوری را برای محاسبهٔ باقی ماندهٔ این گونه بسط‌ها، پیشنهادکرد.

حتی اگر بخواهیم به‌سرعت از روی کارهای ریاضی پواسون بگذریم، نمی‌توانیم ازکوشش‌های او درنظریهٔ احتمال، نام‌نبریم. او در این زمینه، به نتیجه‌گیری‌های مهمی رسیدکه، هنوزهم، ارزش خود را حفظ کرده‌اند. شاید بتوان اساسی‌ترین کار پواسون در زمینهٔ احتمال را، کتاب «بررسی‌هایی

دربارهٔ احتمال حکم درپرونده‌های جنائی ومدنی»[1] دانست که، درآن، به ادامه مطالعهٔ موضوع‌هایی که پرداخته شده است که لاپلاس آغاز کرده بود.

قبل‌از هرچیزیادآوری کنیم که مفهوم «قانون عددهای بزرگ»، به‌وسیلهٔ پواسون، وارد در ریاضیات شده است. درآن، ابتدا قضیهٔ معروف **برنولی** دربارهٔ نزدیك شدن بسامدبه احتمال، ضمن زیادکردن آزمایش‌های مستقلی که درهرکدام ازآن‌ها، حادثهٔ A بدون تغییراحتمال آن اتفاق‌می‌افتند، آمده است و، سپس، اثبات قضیهٔ خود پواسون دربارهٔ نزدیك شدن بسامد حادثهٔ A به متوسط حسابی احتمال p_k (p_k احتمال حادثهٔ A درآزمایش kام است) ذکرشده است. این دوقضیه، درهرکتابی که امروز دربارهٔ نظریهٔ احتمال نوشته شود ــ هرقدرهم که خلاصه باشد، می‌آید.

پواسون، درهمین کتاب، قضیهٔ **مواور- لاپلاس**، برای حالت رشتهٔ متباعد $\sum_{k=1}^{\infty} p_k(1-p_k)$ تعمیم داد. اوبرای اثبات، روش تحلیلی رابراساس اندیشه‌های مربوط به تابع‌های مفسر (که نظریهٔ کامل آن، درسدهٔ بیستم پایه گذاری شد) به‌کاربرد.

پواسون کوشید تاتعریفی برای مقدار تصادفی پیداکند ولی، آن را، تنها برای موردی‌که این مقدار، متناهی باشد، به‌دست آورد.

پواسون، کتاب دیگری به‌نام «دربارهٔ احتمال نتیجه‌های متوسط ناشی‌ازمشاهده» درسال ۱۸۲۹ نوشته بود، که درآن، کوشیده بود تعریفی برای مقدار تصادفی بدهد ودستوری مجانبی برای احتمال وقوع حادثهٔ A دربین‌آزمایش‌های بااحتمال ثابت، پیداکرد (به‌شرطی‌که این احتمال، برای هریك از آزمایش‌ها، کوچك باشد). این نتیجه‌گیری را، امروز، به این صورت تنظیم می‌کنند: اگرداشته باشیم $pn=\omega$، آن وقت، به‌شرطی‌که n، تعدادآزمایش‌های مستقل، بزرگ باشد، احتمال این‌که μ ــ تعداد وقوع حادثهٔ A ــ برابر m باشد، به‌تقریب برابراست. با $\frac{\omega^m}{m!}e^{-\omega}$، به شرط این

1. Recherches sur la probabilité des jugements en matière eriminelle et matière civile _ Paris, 1837.

که p کوچك باشد.

البته، پواسون، مطلب را بـه ایـن شکل تنظیم نکرده است، ولی از نتیجه گیری‌های او، می‌توان آن را به سادگی، به دست آورد. فرض کنیم، درجریان n آزمایش مستقل، که احتمال وقوع حادثهٔ A درهمهٔ آن‌ها یکی باشد، وقوع حادثهٔ A کمترازm بارباشد؛ پواسون می‌خواست این احتمال را تعریف وارزیابی کند. او، این احتمال را، به این صورت نوشته است.

$$p=p^m\left\{1+mq+\frac{m(m-1)}{1\times 2}q^2+\dots+\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)\dots(n-m-1)}{(n-m)!}q^{n-m}\right\}=\frac{\int_\alpha^\infty Xdx}{\int_0^\infty Xdx}$$

که درآن داریم:

$$X=\frac{x^m}{(1+x)^{1+m}}\ \text{و}\ \alpha=\frac{p}{q}\ \text{و}\ q=1-p$$

درحالتی کـه p کوچك باشد، بـه‌ازای مقدارهای بزرگ n داریم: $np=\omega$، که درآن، ω مقدارثابتی است پواسون برابری تقریبی زیر رابه دست آورد:

$$p\approx e^{-\omega}\left[1+\omega+\dots+\frac{\omega^m}{m!}\right]$$

این نتیجه، درزمان‌ماموقعی‌اهمیت پیداکردکه مسالهٔ‌مطالعهٔ اختلال‌های شبکه تلفنی (که دراثرسیل پرتوهای کیهانی به‌وجود می‌آید) مطرح شد.

یادآوری این‌مطلب هم جالب است‌که پواسون، دراین‌کتاب، به‌مسالهٔ داوری‌های قضایی وهمچنین قانون مندی تولد پسرها و دخترها هـم پرداخته ویك رشته ازمساله‌های مربوط به‌آمار ریاضی را ــ منتهی به‌صورت مقدماتی آن، حل‌کرده است.

بیش‌ازدویست سال ازروز تولد ریاضی‌دان مشهورمی‌گذرد، ریاضی‌دانان معاصر پواسون و آن‌هـاکه بعداز او زندگی کردند، بـرای کارها و پژوهش‌های او ارزش زیادی قایل بودند و، به‌همین مناسبت، پواسون هنوز هم به‌خاطر ادامهٔ کارهایش، زندگی خود را ادامه می‌دهد؛ وایـن، بهترین پاداش برای یك دانشمند است.

کارنامهٔ ریاضی‌دانان ایران

ابوالقاسم قربانی

کتاب اعمال هندسی بوزجانی

خلاصهٔ زندگینامهٔ بوزجانی[1]

ابوالوفا محمدبن محمد بوزجانی یکی از مفاخر علمی ایـران و از بزرگترین ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی است. وی در سال ۳۲۸ هجری قمری (۹۴۰ میلادی) درشهر بوزجان (یعنی تربت‌جام‌کنونی که دراستان خراسان نزدیك مرز افغانستان واقع است) تولد یافت. مقدمات ریاضی‌را نزد عمو و دائی خود آموخت و در سن بیست سالگی (در سال ۳۴۸ هـ. ق) به‌عـراق مهاجرت‌کرد و تا آخر عمر دربغداد می‌زیست و درحدود سال ۳۸۸ هـ. ق درگذشت. وی یکی از مشهورترین منجمان و ریاضی‌دانان زمان خود بوده و درکارهای علمی با ابوریحان بیرونی و دانشمندان دیگر زمان خود مکاتبه داشته است.

از آثار ریاضی بوزجانی دوکتاب‌که یکی دربارهٔ حساب و دیگری مربوط به‌هندسهٔ عملی‌است باقی مانده وقسمتی از کتاب نجومی مهم وی‌که موسوم به «المجسطی بوزجانی» است نیز در دست است.

اهمیت آثار ریاضی بوزجانی بیشتر به‌واسطهٔ سهم به‌سزایی است‌که وی در پیشرفت علـم مثلثات داشته است. کتاب «اعمال هندسی» وی نیز بدیعترین‌اثری است‌که‌در دورهٔ اسلامی دربارهٔ هندسهٔ عملی پدیدآمده‌است.

***

نگاهی به‌کتاب «اعمال هندسی» بوزجانی

نام‌کامل این‌کتاب به عربی «کتاب فیمایحتاج الیه الصانع من‌اعمال

۱ــ برای کسب اطلاع بیشتر در بـارهٔ احوال و آثار بوزجانی رجوع کنید به «قربانی، ریاضیدانان‌ایرانی، مقالهٔ دوازدهم» و یا به«آشنایی باریاضیات» جلد سوم، مرداد ۱۳۶۴ صفحات ۳۱۶ تا ۳۳۲.

الهندسیه» است. یعنی «کتاب دربارهٔ آنچه‌صنعتگران از اعمال هندسی به‌آن نیازمندند» و ما برای رعایت اختصار در مقالهٔ حاضر آن را «کتاب اعمال هندسی» می‌نامیم. این کتاب دوبار به‌زبان فارسی ترجمه شده و از هریك از دو ترجمهٔ آن نیز نسخه‌ای خطی موجود است.[1] از مقدمهٔ کتاب چنین برمی‌آید که بوزجانی آن‌را به‌فرمان یکی از سلاطین آل‌بویه و برای آنکه صنعتگران بتوانند در ضمن‌عمل به‌سادگی استفاده‌کنند تألیف کرده و به‌همین دلیل برای قضایای آن دلیل و برهان نیاورده است. منتخباتی از این کتاب به‌زبان فرانسوی ترجمه شده و این ترجمهٔ فرانسوی به‌زبان آلمانی مورد بحث و تکمیل قرار گرفته است. بر کتاب «اعمال‌هندسی» بوزجانی دوشرح نوشته‌اند که یکی از آنها به‌زبان عربی و دیگری به‌فارسی‌است. شرح‌فارسی را محمدباقربن زین‌العابدین یزدی با عنوان «فتوحات غیبیه» نوشته ونسخهٔ خطی‌آن درکتابخانهٔ آستان‌قدس رضوی موجود است.

نویسنده همهٔ کتاب هندسهٔ بوزجانی را مورد پژوهش قرار داده و انشاءالله درآینده آن‌را منتشر خواهد ساخت.

***

یوشکویچ دربارهٔ این‌کتاب نوشته است:

کتاب اعمال‌هندسی بوزجانی مشتمل بریك مقدمه و دوازده باب بوده[2] که درآن عدهٔ زیادی مسایل ترسیم هندسی‌که در مساحی و نقشه‌برداری و مهندسی مهم‌است حل‌شده. مطلب جالب توجه این است‌که در این کتاب در حدودهجده مسألهٔ ترسیم‌هندسی با به‌کار بردن خط‌کش‌وپرگاری‌که گشادگی دهانهٔ آن درضمن حل مسأله ثابت نگاهداشته می‌شود حل شده است. شرط

۱ــ عکس صفحاتی از هریك ازاین دونسخه را درکتاب «قربانی، ریاضیدانان ایرانی»، صفحات ۱۴۹ تا ۱۵۷ خواهید یافت. هیچیك از این دو ترجمه کامل نیست. از متن عربی کتاب «اعمال هندسی» یك نسخه در استانبول موجود است که‌برای‌کتابخانهٔ الغ‌بیك نوشته شده بود. اما آن‌نسخه هم‌کامل نیست و دوفصل ازفصولی‌که از فهرست آغازآن آمده است درمتن نیامده. این نسخهٔ عربی به‌زبان روسی هم ترجمه شده است.

۲ــ ولی هیچیك از نسخه‌های خطی آن همهٔ دوازده فصل را ندارد.

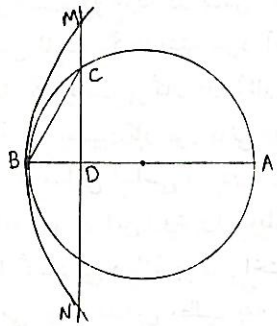
استفاده از پرگار با دهانهٔ ثابت‌گاهی در صورت مسأله قید شده گاهی هم درضمن حل مسأله پیش می‌آید. اهمیت عملی این‌نوع مسایل ترسیم هندسی در این است که غالباً در ضمن عمل، کار کردن با پرگاری که گشادگی دهانه‌اش ثابت نگاهداشته شود آسانتر است. حل مسایل ترسیم هندسی با یك‌گشادگی ثابت پرگار در آثار ریاضی هندی و یونانی نیز دیده شده اما شایستگی و اهمیت‌کار بوزجانی درکتاب «اعمال هندسی» این است‌که اولاً یك سلسله مسایل اساسی را در این زمینه با اسلوب منظم حل کرده و ثانیاً آگاهانه اهمیت این روش‌را خاطرنشان ساخته است. البته دربرخی ازمسایل اندازهٔ گشادگی دهانهٔ پرگار اختیاری نیست بلکه به‌وسیلهٔ پاره‌خط معلومی تعیین می‌شود. اما این مطلب به‌هیچوجه از اهمیت‌کار بوزجانی نمی‌کاهد. این مطلب‌را هم ناگفته نگذاریم که در قرنهای شانزدهم تا نوزدهم میلادی در اروپا نیز پژوهشهایی در این زمینه، به‌علت احتیاجی که درعمل به‌آنها پیداشده‌بودصورت گرفت‌ودانشمندانی‌چون‌ماشرونی(L. Mascheroni) و پونسله (J. V. Poncelet) و یاکوب‌اشتاینر (J. Steiner) تئوری عمومی این‌قبیل ترسیمات و نظایر آنهارا بیان کردند.

بوزجانی در مقدمهٔ‌کتاب پس‌از شرحی دربارهٔ خط‌کش و ستاره و گونیا مسألهٔ اخراج عمود بریك پاره خط (از وسط یا از انتهای آن) را به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگاری که گشادگی دهانهٔ آن ثابت نگاهداشته شود حل‌کرده است. درباب اول آن‌کتاب‌که مشتمل بر ترسیمات اساسی هندسی است با همین روش مسألهٔ تقسیم یك پاره خط به‌عده‌ای پاره خط متساوی و مسألهٔ تقسیم زاویه به‌دو قسمت متساوی حل شده‌است. درباب دوم که مربوط به‌چند ضلعیهای منتظم است، بوزجانی چند ضلعیهای منتظمی که عدهٔ اضلاع آنها ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۸ یا ۱۰ است به‌فرض معلوم بودن یك‌ضلع آنها حل کرده است. در باب سوم کتاب چند ضلعیهای منتظم محاطی که عدهٔ اضلاعشان ۳ یا ۵ یا ۶ یا ۸ باشد مورد بررسی قرار گرفته است.

در همین بابها بوزجانی روش ترسیم خطوط متوازی و خط مماس‌بر دایره و نیز هفت‌ضلعی منتظم[1] و تثلیث زاویه و تضعیف مکعب را شرح

۱ــ ضلع هفت‌ضلعی منتظم را تقریباً نصف ضلع مثلث متساوی الاضلاعی گرفته است‌که با هفت ضلعی در یك دایره محاط شده باشد

داده است. درباب اول دو روش برای ساختن آیینه‌های سوزان بیان کرده است. درروش اول شکل هندسی آیینه که سهمی است به وسیلهٔ دایره‌ای که شعاعش مساوی بادو برابر فاصلهٔ کانونی سهمی است به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب که روی عمودهایی که بر یك قطر دایره رسم‌شود پاره خطهای متساوی با وتر-هایی که یك سر قطر را به‌نقاط تقاطع این عمودها با دایره وصل‌می‌کند جدا باید کرد. انتهای دیگر پاره خطهایی که به‌این ترتیب رسم می‌شود روی سهمی مطلوب قرار دارد.



شکل ۱

توضیح- اگر طول قطر AB از دایره مساوی با $2p$ باشد درشکل ۱ می‌دانیم که:

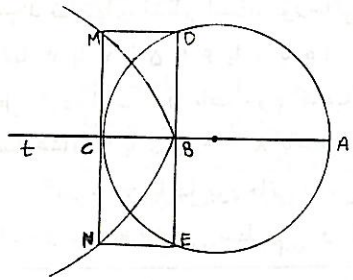
$$\overline{BC}^2 = AB.BD$$

و نظر به‌ترسیمی که برای یافتن نقطهٔ M انجام دادیم $DM = BC$ پس اگر طول BD را x و طول DM را y بنامیم داریم $y^2 = 2px$.

و نقطهٔ M روی یك سهمی واقع است.

در روش دوم بوزجانی یك دستگاه دایره‌که مراکز آنها روی یك نیم‌خط قرار دارد و همهٔ آنها از یك نقطه می‌گذرند اختیار می‌کند.

توضیح-روی نیم‌خط At نقطهٔ ثابت B را طوری می‌گیریم که طول AB مساوی با $2p$ باشد ونقطهٔ دلخواه C را نیز اختیار می‌کنیم (شکل ۲). سپس به قطر AC دایره‌ای رسم کرده از B عمودی بر At اخراج می‌کنیم تا دایره را در نقاط D و E قطع کند.



شکل ۲

سپس از C خطی به‌موازات DE رسم و مستطیل DENM را مطابق باشکل کامل می‌کنیم. نقاط M و N روی سهمی مطلوب واقع هستند. زیرا معلوم است که :

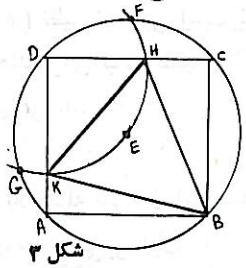
$$\overline{DB}^2 = CB.BA$$

پس اگر CB را x و CM را y بنامیم داریم : $y^2 = 2px$

یادداشت ــ باید خاطرنشان کرد که این ترسیمات اگرچه ساده هستند ولی در آثار ریاضی یونانی سابقه ندارند.

در فصل ششم مسألهٔ محاط‌کردن چندضلعیها در یکدیگر و یا در دایره مورد بررسی قرار می‌گیرد. به‌عنوان مثال یکی از پنج روشی راکه برای محاط‌کردن یك مثلث متساوی‌الاضلاع در یك مربع ذکر شده در اینجا نقل می‌کنیم :

ابتدا دایرهٔ محیطی مربع مفروض را رسم می‌کنیم و مرکز آن را E می‌نامیم. سپس مطابق با شکل ۳ به‌مرکز D و به‌شعاع DE دو کمان رسم می‌کنیم تا دایره را درنقاط F و G قطع کند. آنگاه پاره خطهای BF و BG را رسم‌می‌کنیم. نقاط تقاطع BF و BC به‌ترتیب با CD و AD که آنها را H و K می‌نامیم رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع BHK هستند.



شکل ۳

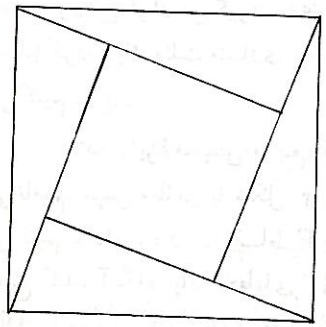
در فصلهای هشتم تا دهم از تقسیم دایره و چندضلعیها گفت‌وگو شده است. مثل مسألهٔ تقسیم سطح چهارضلعی به‌دوقسمت متساوی به‌وسیلهٔ خطی که از یك رأس چهار ضلعی بگذرد و همچنین مسأله یافتن $\frac{1}{n}$ سطح یك متوازی‌الاضلاع به‌وسیلهٔ خط راستی که از نقطهٔ معلومی واقع در داخل متوازی‌الاضلاع بگذرد.

یادداشت ــ اقلیدس یك‌کتاب دربارهٔ این مسأله نوشته بود.

بالاخره در فصل یازدهم بوزجانی مسایل مختلفی ، که درآنها باید سطح یك مربع‌را به‌مجموع چند مربع تقسیم‌کرد و یا مجموع چند مربع‌را

به‌وسیلهٔ یك مربع نشان داد، حل کرده است. وی خاطر نشان می‌کند که بسیاری از اهل صناعت به‌این مسایل احتیاج دارند اما همهٔ روشهایی که به‌کار می‌برند برهیچ اساس صحیحی تکیه ندارد و به‌همین دلیل مطمئن و صحیح نیستند. ابوالوفای بوزجانی می‌خواسته یك‌اصل کلی برای حل کردن این‌مسایل به‌دست‌آورد. وی ابتدا ترسیمات سادهٔ مربوط به‌ساختن یك‌مربع از روی n^2 مربع یا n^2+m^2 مربع را شرح می‌دهد. در حالت‌اخیرمسأله منجر به‌استفاده از اتحاد زیر می‌شود:

$$n^2+m^2=2mn+(n-m)^2$$



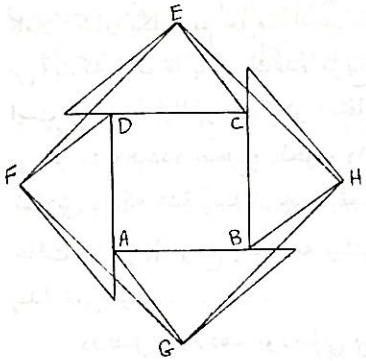
شکل ۴

در این حالت مربع مطلوب به‌وسیلهٔ رسم چهار مثلث قائم‌الزاویه به‌اضلاع m و n در اطراف مربع $(n-m)^2$ به‌دست می‌آید. این ترسیم که به‌آسانی می‌توان آن‌را انجام داد (شکل ۴) نظیر ترسیمی است که در چین وهند برای‌اثبات قضیهٔ فیثاغورث به‌کار می‌بردند.

بلافاصله پس از این مسایل بوزجانی به‌حل مسایل مربوط به‌تقسیم مساحت مربع می‌پردازد.

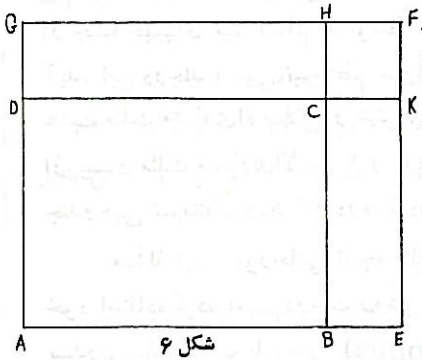
وی ابتدا مسألهٔ ترسیم یك مربع معادل با چندمربع مفروض‌را درنظر می‌گیرد. اما یك روش کلی در این مورد ذکر نمی‌کند و فقط حالت ترسیم مربعی راکه معادل با سه‌برابر مربع مفروض باشد حل‌می‌کند. مربع مطلوب به‌این‌طریق به‌دست می‌آید که وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای‌را رسم‌کنیم که‌اضلاع آن به‌ترتیب مساوی باضلع و قطر مربع مفروض باشد. بوزجانی در اینجا خاطرنشان می‌کندکه چنین ترسیمی برای یك مهندس کافی است اما عملاً امکان‌پذیر نیست. البته مقصود در اینجا این است که مربع مفروض را به‌قسمتهایی تقسیم کنیم که بتوان نظایر آنها را با هم ترکیب کرد و مربع جدیدی به‌دست‌آورد. شکل ۵ ترسیم بوزجانی را نشان می‌دهد: دومربع از

سه‌مربع مفروض‌را درطول قطرشان می‌بریم و قسمتهای حاصل را مطابق با شکل به‌مربع سومی اضافه می‌کنیم. آنگاه رأسهای E و F و G و H را به‌یکدیگر وصل می‌کنیم. به‌این‌ترتیب یك‌مربع حاصل می‌شود که مساحت آن مساوی با سه برابر مساحت مربع ABCD است. زیرا مثلثهای کوچکی که از مربع EFGH بیرون می‌افتند بامثلثهای کوچکی که درداخل آن قرار می‌گیرند مساوی هستند.



شکل ۵

سپس بوزجانی دومربع معلوم‌راکه اضلاعشان نامتساویند به‌یك مربع تبدیل می‌کند. برای این‌کار مربع کوچکتر ABCD را مطابق باشکل مقابل روی‌مربع بزرگتر AEFG قرارمی‌دهد (شکل ۶). مجموع دومربع به‌وسیلهٔ دومستطیل‌متعادل(هم‌مساحت) ABHG و AEKD و مربع CKFH تشکیل می‌شود. سپس باید این دو مستطیل را به‌چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ متعادل‌تجزیه کرد و آنهارا به‌طریقی که می‌دانیم در اطراف مربع CKFH قرار داد.



شکل ۶

به‌این ترتیب مربعی معادل با مجموع دو مربع مفروض به‌دست می‌آید. بوزجانی بعد از این‌مسأله به‌مسألهٔ تقسیم یك‌مربع به‌دو مربع که طول ضلع یکی ازآنها معلوم باشد می‌پردازد.

دربارهٔ مسألهٔ تبدیل k مربع متساوی به‌یك‌مربع معادل با مجموع آنها بوزجانی می‌گوید که می‌توان این مسأله‌را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث‌حل کرد. اما خاطرنشان می‌کندکه‌حل این‌مسأله بااین روش درعمل ممکن‌نیست. در واقع تجزیهٔ یك‌مربع به‌اجزای متساوی با کمك قضیهٔ فیثاغورث نسبتاً مشکل است، اگرچه عملاً از ترسیمی که برای حالت سه‌مربع متعادل لازم

است مشکلتر نیست. درهرصورت چون اگـر استفاده ازقضیهٔ فیثاغورث را کاملاً کنار بگذاریم حل‌مسأله غیرممکن است، این‌سئوال به‌طور طبیعی‌پیش می‌آیدکه چگونه باید یك‌عده مربع‌را ترکیب کرد به‌قسمی‌که هرچه ممکن است از قضیهٔ فیثاغورث‌کمتر استفاده شود. بنا به‌قضیهٔ فرما(Fermat) که می‌گوید: «هرعدد صحیح دلخواه را می‌توان به‌وسیلهٔ مجموع چند عددمربع نمایش دادکه عدهٔ آنها از چهار تجاوز نکند.» می‌توان ثابت کـرد که در حالت تبدیل k مربع یك دفعه بیشتر به‌استفاده از قضیهٔ فیثاغورث احتیاج پیدا نمی‌شود.

درفصل دوازدهم بوزجانی مسألهٔ تقسیم سطح کره را به‌چند ضلعیهای کروی بررسی کرده است. واضح است که زوایای این چند ضلعیها همـان زوایای چندوجهیهای نظیرشان‌هستند ولی بوزجانی دراین باره چیزی‌نگفته است. از ترسیمات ظریف و سادهٔ این‌فصل همهٔ چندوجهیهای منتظم و دوتا از چندوجهیهای نیم منتظم‌که توسط ارشمیدس‌کشف شده بود به‌دست می‌آید. این دوچند وجهی نیم‌منتظم عبارتند از اولاً چهارده وجهی (مرکب‌از هشت مثلث متساوی‌الاضلاع و شش‌مربع) و ثانیاً سی و دو وجهی (مرکب از بیست مثلث متساوی‌الاضلاع و دوازده پنج ضلعی منتظم). ساختمـان سه چندوجهی نیم‌منتظم دیگرکه درفصل‌دوازدهم آمده است‌کاملاً درست‌نیست.

مسألهٔ اینکه بوزجانی ازچه منابعی برای نوشتن‌کتاب اعمال هندسی خود استفاده‌کرده است درست روشن‌نیست. علاوه برکتاب «اصول‌اقلیدس» بـدون شك کتاب پاپوس[1] (Pappus) را می‌شناخته است. امـا چندین مسألهٔ ترسیمی درکتاب بوزجانی هست‌که درکتابهایی‌که پیش‌ازآن نوشته شده وجـود ندارد و ظاهراً اثر فکر خود بوزجانی است. بعـدها استون (S. Steuin) و کپلر (J. Kepler) ازنو به‌بررسی چند وجهیهای نیم‌منتظم پرداختند.

این نکته را هم ناگفته نگذریم‌که اخیراً معلـوم شده است که کتاب «اعمال هندسی» بوزجانی باکتابی که فارابی (متوفی به‌سال ۳۳۹ هـ . ق)

۱ــ پاپوس را ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی «بیوس‌الرومی» نـامیده‌اند. وی در نیمهٔ اول قرن چهارم میلادی می‌زیست.

دربارهٔ شکلهای هندسی[1] نوشته بوده فقط‌کمی اختلاف دارد. دو روشی که بوزجانی برای ساختن سهمی ذکر کرده درکتاب فارابی دیده می‌شود امـا بعضی ازمطالبی‌که درکتاب بوزجانی هست درکتاب فارابی نیست. (۲)

۱ــ عنوان عربی ایـن کتاب «الحیل الروحانیه و الاسرار الطبیعه فی دقایق الاشکال الهندسیه» است.

۲ــ و رجوع کنیدبه‌کتاب«Les mathematiques arales» تألیف‌یوشکویچ. چاپ پاریس ۱۹۷۶ م.

بخش‌پذیری بر ۱۱

عدد دورقمی سمت‌راست عددرا جدا وبه بخش سمت‌چپ‌آن اضافـه کنید وبرای عدد حاصل هم، همین عمل را انجام دهید... تا به یك عدد دو رقمی برسید. اگراین عدد دورقمی بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد عدد اصلی‌هم بر ۱۱ بخش‌پذیراست.

مثلا عدد ۲۳۰۸۰۷۵ را درنظرمی‌گیریم، به‌ترتیب داریم:

$$۲۳۰۸۰+۷۵=۲۳۱۵۵;\ ۲۳۱+۵۵=۲۸۶;\ ۲+۸۶=۸۸$$

۸۸ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، بنابراین عدد ۲۳۰۸۰۷۵ هم بر ۱۱ بخش پذیر است.

ولی درمورد عدد ۹۵۳۰۸ داریم:

$$۹۵۳+۰۸=۹۶۱;\ ۹+۶۱=۷۰$$

۷۰ بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست وبنابراین عدد ۹۵۳۰۸ هم بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست.

دلیل این‌عمل روشن است. عدد دورقمی سمت‌راست عدد مفروض را $\overline{ab}$ وبخش سمت‌چپ عددرا A مـی‌گیریم: $\overline{Aab}$ (A مـی‌تواند عدد دلخواهی باشد). داریم:

$$\overline{Aab}=۱۰۰A+\overline{ab}=۹۹A+(A+\overline{ab})$$

چون ۹۹A بر ۱۱ بخش‌پذیر است، بنابراین، باقی ماندهٔ تقسیم $\overline{Aab}$ بر ۱۱ برابراست با باقی‌ماندهٔ تقسیم $A+\overline{ab}$ بر ۱۱.

جابر عناصری

نقوش هندسی در کاشیکاری ایران

صنعت کاشی‌سازی و کاشی‌کاری که در تزیین معماری سرزمین ایران و به‌طور اخص در بناهای مذهبی به‌کار گرفته شده، دارای ویژگی‌های خاصی است.

کاشی‌سازی، هنرشکل بخشیدن به گل است که نقش‌های متصل شده به‌آن را پس از لعاب‌کاری، به‌وسیلهٔ حرارت، قابل دوام می‌سازند.

بیشتر بناهای قدیم ایران، به‌خصوص مساجد وزیارتگاها و... باکاشی‌های زیبا وغالباً به‌دست هنرمندان گمنام، تزیین یافته است.

این هنر وصنعت، از گذشتهٔ بسیار دور در نتیجهٔ مهارت، ذوق و سلیقهٔ کاشی‌ساز، نقش و مقام خاصی درمیان صنایع مستظرفهٔ ایران به دست آورده است.

هنرمندکاشی‌کار با کاربردوترکیب رنگ‌های گوناگون وبرطبق نقشه‌ای از قبل طرح شده ، به اشکالی متفاوت و موزون از تزیینات بنا دست یافته است.

طرح‌های‌سادهٔ هندسی، خط، منحنی، نیمدایره، مثلث، وخطوط متوازی که خط عمودی دیگری برروی‌آن‌هارسم‌شده، ازتصاویری هستندکه‌به‌کرات درکاشی‌کاری بناها، ملاحظه می‌شود.

این نقش‌های متنوع هندسی، مهارت هنرمند وصنعتکاررا درایجادنقش وطرح وبرقراری توازن درمیان‌آنها، نشان می‌دهد.

کاشی‌کاری ازمهمترین خصوصیات معماری بوده و بسیاری از محققان را عقیده بر اینست‌که ایران، اولین کشوری است‌که ازکاشی به عنوان عاملی برای تزیین وسپس استحکام بنا بهره‌گرفته است.

احتمال می‌رود که معماران ایرانی از اوایل دورهٔ اسلامی در پوشش

طرحی ازنقش هندسی مربوط به‌کاشیکاری مسجد جامع اصفهان

آجر با لعاب یکرنگ، پیشقدم ومبتکر بوده‌اند و دررنگ‌آمیزی‌کاشی، رنگ آبی فیروزه‌ای را برسایر رنگ‌ها برتر دانسته وهمراه با تلفیق آجر از کاشی‌های فیروزه‌ای‌رنگ استفاده کرده‌اند و به نحوی مانند نشانیدن نگین انگشتری، تکه‌های رنگین‌کاشی را به‌اشکال هندسی وشبه‌هندسی دراندازه‌های مختلف میان آجرها قالب‌زده ویا دربین آجرهای تزیینی به‌صورت کتیبه‌های کوفی قرار داده‌اند.

کاشی‌کاری دستاورد قرن‌ها ممارست و خلاقیت هنرمندان آشنا به‌رموز ریاضی است. هرکاشی، ورقی ازکتاب منقشی است‌که حدیث عمر انسان بر آن نقش بسته است. این‌کاشی‌ها به‌رنگ‌آبی وبه‌زلالی آب وبه‌شفافی‌آسمان آبی‌رنگ جلوه می‌نمایند.

هنرمندان‌توانمند، مسجدها، مدرسه‌ها، اماکن‌مقدسه،سردرکاروان‌سراها و... را ــ به هنر کاشیکاری ــ زینت بخشیده و چشم هر رهگذری را به نظاره می‌طلبند.

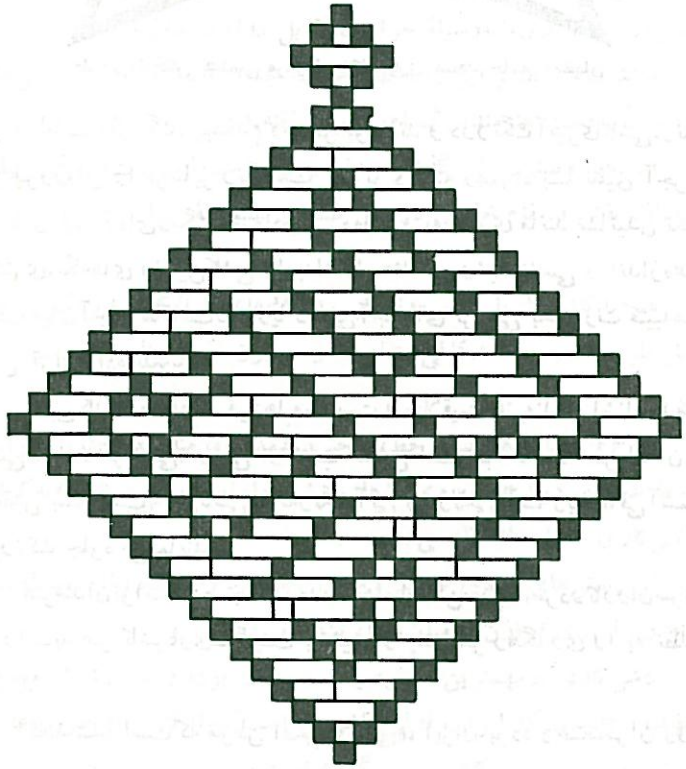
گفته شده است‌که موطن اصلی «کاشی»، ایران بوده و صنعتگران دورهٔ هخامنشی، مبتکر این هنر به‌شمار می‌روند.

تزیین‌کاشی برنقش و نگارهای هندسی و همچنین‌گل و بته‌ها و خطوط

مختلف هندسی استوار است.

انواع بیشمار اشکال هندسی، طرح‌های مختلف را به وجود می‌آورند ونقش ونگارهای هندسی، به‌طور منفردیا به‌صورت مرکب با نقش ونگارهای گیاهی، مانند گل وبته‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

درنقش ونگارهای هندسی، مسایل قابل‌توجهی نهفته‌اندکه بایدبه‌آنها التفات داشت وحل این مسایل، چه دراجرا وچه درساختمان آنها، محاسباتی مخصوص به خود دارد، که آن‌را می‌توان آهنگ‌های کارشی‌کاری نامید و حرکت این ریتم‌های گوناگون است‌که نقش و نگارهای متعدد را به وجود می‌آورد. در این نقش و نگارها، انواع مسایل هندسهٔ مسطحه مورد استفاده



طرحی از نقش هندسی‌کاشی فیروزه‌ای‌رنگ (مربوط به‌مسجد جامع اصفهان)

قرار می‌گیرند.

خواص اشکال چندضلعی، مسایل خطوط عمود وموازی، اشکال‌مختلف مساوی ومشابه، دراین شکل‌ها نیز مورد توجه بوده وبه‌طورکلی درسرچشمهٔ نقش ونگارهای هندسی، هر یك از این آثارهنری، یك اثر ریاضی‌هم نهفته است تا بتوان به‌کلیهٔ مسایل مربوط به همان اثر پی برد وترکیب اشکال در زمینه‌های مختلف را پی‌ریزی‌کرد. مثلاً یك شکل‌کوچك با قواعدی‌که چند بار در یك زمینه تکرار می‌شود ونقش زیبا بـه خود می‌گیرد، باید تناسب و شکل خود را حفظ‌کندواین نکات جملگی به‌سلیقهٔ‌استادی‌که نقش را به‌وجود می‌آورد، وابسته است.

در اکثر طرق تشکیل اشکال هندسی، یك تناسب معقول وجود دارد و کوچکترین خطای ترسیمی به‌زودی ابعادی قـابل ملاحظه به‌خود می‌گیرد و آرایش وتوازن را یکسره به‌هم می‌ریزد.

لازم به‌تذکر است‌که اکثر هنرمندان‌کاشیکار به‌دقایق ورموز ریاضی‌در هنرکاشیکاری آشنا ومسلط هستند ودر برخی ازکتب نفیس‌که به‌شیوهٔ‌عالمانه ـتوسط هنرمندان صنعت مذکورـ تدوین گشته است، نخست بـرای آشنائی خوانندگان ـمقدمه‌ای درشرح وتوضیح نکات هندسی مطرح شده است. کما اینکه استاد ماهرالنقش‌ـ این هنرمند چیره‌دست ونقاشی‌که هنر درنقش‌برسینهٔ کاشی‌ها رقم زده است‌در بخشی ازکتاب خود[1] اختصاصاً ازهندسه وپیشینهٔ مباحث مربوط به‌آن وحتی ازتعاریف وخواص نقطه وخط و زاویه ودایره و چندضلعی وهمچنین‌ترسیمات‌هندسی و... سخن‌گفته‌است تا بدین‌نحو خواننده را بـا دقایق هندسه آشنا نموده وسپس با اصطلاحات ویژه‌ای از نقشمایه‌ها به‌خبرگی‌ـ مطالبی مطرح نماید. ایشان‌ازطریق نظارهٔ نقوش کاشی، دفترهائی آراسته و هر نقشی را با زینتی و مسایل هندسی را عنوان نموده و به اثبات

۱. استاد ماهرالنقش پنج جلدکتاب در قلمروکارشیکاری وتحت عنوان طرح و اجرای نقش در کاشیکاری ایران (دورهٔ اسلامی)، (از انتشارات موزهٔ رضا عباسی) به‌چاپ رسانده وبسیاری از ریزه‌کاریهای مـربوط به‌بحث هندسه و کاربرد خطوط هندسی در تهیهٔ نقش‌ها را بیان فرموده‌اند. راقم این سطور در ضمن تحریر مقالهٔ حاضر به‌این مدارك ارزنده توجه داشته است.

بسیاری ازفرضیه‌ها پرداخته ومجهولات را معلوم ساخته‌اند[1].

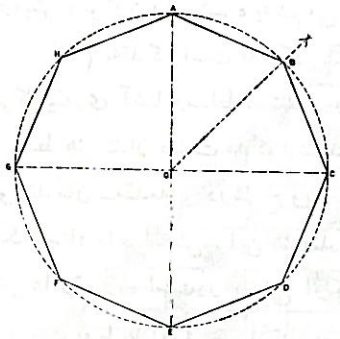
شاید زمانی ـ هنرمندان گمنام ـ بی‌آنکه شدیداً تحت تأثیر تعاریف هندسی قرارگرفته و یا ازمسایل هندسی آگاهی داشته باشند، صرفاً به‌قدرت دستانی که‌سال‌ها درکناراستادکاران به‌کار گرفته‌ونقوش‌را سینه به‌سینه‌آموخته بودند، نقش‌های هندسی وشبه‌هندسی قابل تأملی برکاشی‌ها آفریده بودند. اما امروزه با توسل بـه محاسبات هندسی، باید این نقش‌هـا را جان داد و این الگوهای نخستین را به محك دقت کشاند و اصول را دریافت و آنگاه برای احیاء این هنر ـ با معیارهای صحیح، نمونه‌های شکیل به‌وجود آورد.

اینك به‌عنوان مثال، نمونه‌هائی ازکاربرد نقوش هندسی در کاشیکاری را ذکر مـی‌کنیم. با توضیح این نکته که هر نقشی، به‌نام خاصی موسوم و شناخته می‌شود.

نمونهٔ اول: هشت ضلعی‌منتظم (طرح شماره ۱)

یکی‌ازنقوش‌کاشی دراصطلاح کاشی‌کاران، «هشت‌ضلعی منتظم» و نحـوهٔ ترسیم آن به‌این صورت است:

دایره‌ای به مرکز O و شعاع دلخواه، رسم می‌کنیم. دوقطـرعمود برهم GC وAE رارسم کرده،نیمساز زاویهٔ $\widehat{AOC}$ را می‌کشیم.این‌نیمساز درنقطهٔ B با دایره متقاطع می‌گردد وکمان $\widehat{AC}$ را نصف می‌کند. طول $\overline{AB}$ یا $\overline{BC}$ یك ضلع ازهشت‌ضلعی است.

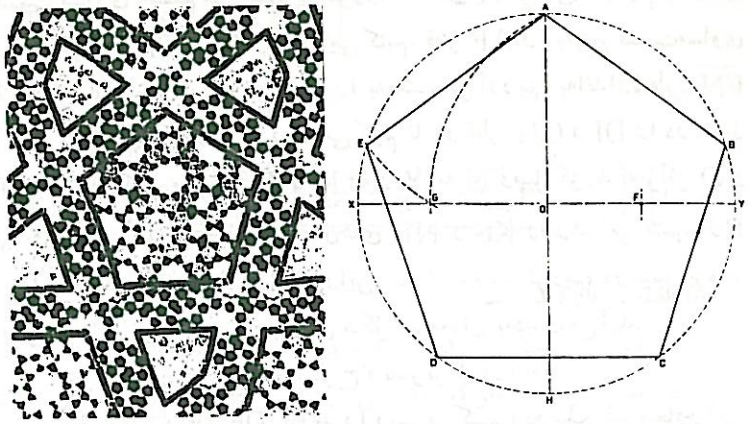


طرح شماره ۱

نمونهٔ دوم: پنج ضلعی منتظم (طرح وتصویر شماره ۲)

دایره‌ای به‌مرکز O وشعاع دلخواه رسم می‌کنیم. سپس دو قطر عمود

۱. لازم به‌تذکر است که‌کتاب: مقدمه‌ای برهنر کاشیگری ایران (تألیف م. ی. کیانی و ...)، (از انتشارات مـوزهٔ رضا عباسی) نیز به‌شیوهٔ علمی از هنر کاشیکاری ونقوش‌کاشی‌مطالب قابل‌توجهی مطرح ساخته است.کتاب مذکورنیز در تهیهٔ این مقاله مورد مطالعه قرارگرفته است.

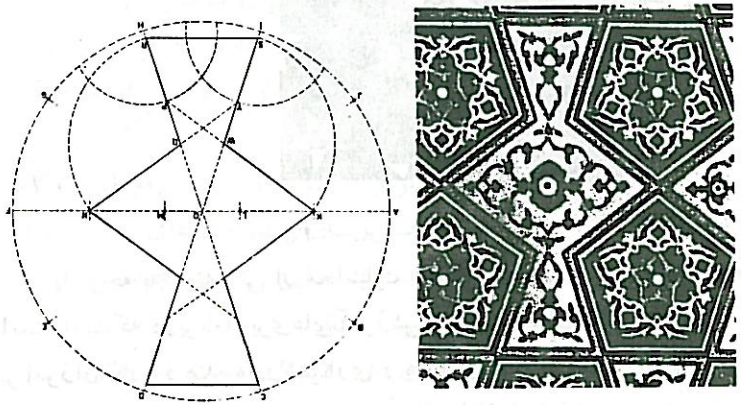


طرح و تصویر شماره ۲

برهم AH و XY را رسم‌کرده، به‌مرکزF، وسط OY، وشعاع $\overline{FA}$ کمانی رسم می‌کنیم تا قطر XY را درنقطهٔ G قطع‌کند. آنگاه به‌مرکز A وشعاع $\overline{AG}$ کمان دیگری رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع‌کند. $\overline{AE}$ یکی ازپنج ضلع شکل مورد نظر است.

نمونهٔ سوم: سرمه‌دان (طرح وتصویر شماره ۳)

دایره‌ای به‌مرکز O وشعاع $\overline{OA}$ رسم مـی‌کنیم. محیط آن را به ده

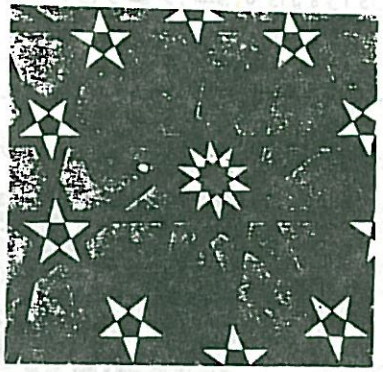


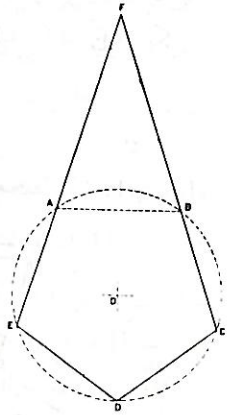
طرح و تصویر شماره ۳

قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، به طوری‌که نقاط A، B، C...I و J به دست آید. قطرهای CH و DI را رسم می‌کنیم. قطر AF را به‌پنج قسمت‌مساوی تقسیم‌کرده، نقاط K، L، M و N را به‌دست می‌آوریم. به‌اندازهٔ طول $\overline{FN}$ و به‌مرکز I و H کمان‌هائی رسم می‌کنیم تا دو قطر CH و DI را در نقاط P و Y قطع کند. سپس از P به K و از Y به N وصل کرده، به‌مرکز Q و W و به‌شعاع $\overline{ON}=\overline{KW}$ کمان‌های $\widehat{NR}$ و $\widehat{KS}$ را رسم می‌کنیم. از R به S وصل کرده، خطوطی را که دراین نیمدایره رسم کردیم، در نیمدایره‌ای دیگر نیز رسم می‌کنیم و بدین‌طریق شکل سرمه‌دان به‌دست می‌آید.

نمونهٔ چهارم: ترنج تند (طرح وتصویر شمارهٔ ۴)

پنج ضلعی منتظم ABCDE را رسم می‌کنیم ودوضلع غیرمجاورآنرا ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را قطع کنند. مثلاً امتدادهای AE و BC یکدیگر را در F قطع می‌کنند. خطوط پررنگی که درشکل مشخص شده‌اند، ترنج تند را تشکیل می‌دهند.





طرح و تصویر شمارهٔ ۴

با توجه به‌نمونه‌هائی از محاسبات هندسی، مربوط به هنر کاشیکاری، شایسته است که دربرنامه‌ریزی‌های آموزشی هنر ــ به‌عنوان فعالیت اساسی ــ هنرآموزان، کاربرد هندسه درکاشیکاری و هنرهای مشابه آنرا فراگرفته و با دقت نسبت به‌تعیین ابعاد هندسی منقش برکاشی‌ها اقدام نمایند.

ترکیب و نظریهٔ احتمال

I. چندکلمه دربارهٔ ترکیب

ریاضی‌دانان مشهور سدهٔ هفدهم، پاسکال ولایب‌نیتس، به طور جدی روی مساله‌های مربوط به‌ترکیب‌کار می‌کردند. خود واژهٔ«ترکیب»را، برای نخستین‌بار، لایب‌نیتس بیست‌ساله در «رسالهٔ هنر ترکیب» (سال ۱۶۶۶ میلادی) به‌کار برد.

توجه به‌آنالیز ترکیبی، درزمان ما، بیشتر به خاطر کاربردی است که در نظریهٔ احتمال، اقتصاد، فیزیک‌آماری، بلورشناسی، نظریهٔ کدگذاری، زیست‌شناسی ودیگر دانش‌ها، پیدا کرده‌است.

دراین‌جا، چند مساله، که خصلت ترکیبی دارند، داده شده‌است:

۱. می‌خواهیم از بین ۶ دانش‌آموز سال سوم و ۸ دانش‌آموز سال چهارم رشتهٔ ریاضی ــ فیزیک، یک گروه چهار نفری برای مشورت انتخاب کنیم. به‌چند طریق می‌توان این گروه مشورتی را تشکیل داد، به‌شرطی که: a) تنها یک نفر ازکلاس سوم درگروه شرکت داشته باشد؛ b) در گروه، بیش ازیک نفر ازکلاس سوم وجود نداشته باشد؛ c) دست‌کم، یک نفر ازکلاس سوم درگروه مشورتی وجود داشته باشد؟

۲. چند عدد پنج‌رقمی می‌توان تشکیل داد: a) از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵؛ b) از رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴؛ c)، از رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵؛ d) مجموع همهٔ عددها در هریک ازاین حالت‌ها، چقدر است؛ e) در حالت c)، چند عدد بر۴ بخش‌پذیر است؟

درتنظیم عددها، هیچ عددی نباید رقم‌های برابرداشته باشد.

۳. ۲۸ دانشجو، برای گردش علمی با قطارسفر می‌کنند. آن‌ها هفت

کوپه را اشغال کردند (به‌شماره‌های ۱ تا ۷). به‌چند طریق می‌توانند دراین کوپه‌ها جا بگیرند؟ ردیف قرارگرفتن دانشجویان، در هرکوپه، مهم نیست. درهرکوپه، ۴ جا وجود دارد.

۴. a) عدد ۵۰۰۰۰۰۰، چند مقسوم علیه (طبیعی) دارد (عدد ۱ و ۵۰۰۰۰۰۰را هم‌جزومقسوم‌علیه‌ها به‌حساب‌آورید)؟ b) مساله‌را تعمیم‌دهید.

۵. ۳ مرغ، ۴ مرغابی و۲ غاز داریم. به‌چند طریق می‌توان تعدادی پرنده انتخاب‌کرد، به‌نحوی‌که دربین‌آن‌ها، ازهرسه نوع وجود داشته‌باشد؟ گروه‌ها راوقتی مختلف به‌حساب می‌آوریم که‌درآن‌ها، تعدادپرندگان، دست کم یك نوع‌آن‌ها، باهم فرق داشته باشند.

۶. تعدادزیادی ازسه‌نوع‌گل دراختیار داریم: مینا، شب‌بو و گل‌سرخ. چند دسته‌گل مختلف می‌توان درست‌کرد که، در هرکدام ازآن‌ها، ۱۰ شاخه وجود داشته‌باشد؟ (دودسته‌گل را وقتی مختلف به‌حساب می‌آوریم که، لااقل درتعداد یکی از انواع گل‌ها، باهم فرق داشته باشد).

۷. به‌چندطریق می‌توان۵کتاب را: a) به‌دوخواننده؛ b) به‌سه‌خواننده داد؟ (هرخواننده باید، دست‌کم یك‌کتاب دریافت‌کند.)

۸. بین عددهای پنج رقمی، که ازرقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ تشکیل شده‌اند، چند عدد از ۲۳۰۰۰ بزرگترند؟

۹. چند عدد مختلف پنج رقمی می‌توان درست‌کرد: a) از چهار رقم برابر ۲ ویك رقم برابر ۳؟ b) از دورقم برابر۲ وسه رقم برابر ۵؟ c)چند عدد ده رقمی با ۳ رقم برابر۲، چهار رقم برابر۵ وسه رقم برابر ۷می‌توان درست‌کرد؟

۱۰. از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ چند عدد سه رقمی، می‌توان درست‌کرد؟ دوحالت را مطالعه‌کنید: a) رقم‌های هرعدد، باهم فرق داشته باشد؛ b) بین رقم‌هایی‌که عدد را تشکیل داده‌اند، رقم‌های برابر هم وجود داشته باشد.

۱۱. روی صفحهٔ شطرنج، چند مربع مختلف، می‌توان پیداکرد؟

۱۲. n گلوله‌داریم که، دربین آن‌ها، یکی قرمز است. به‌چند طریق می‌توان ازبین آن‌ها، k گلوله انتخاب‌کرد، به نحوی‌که: a) دربین آن‌ها،

گلولهٔ قرمزوجودنداشته باشد؛ b) دربین‌آن‌ها، گلولهٔ قرمزوجود داشته‌باشد.

۱۳. این اتحاد را ثابت‌کنید:

$$C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}=C_n^k$$

۱۴. n نقطهٔ غیرمشخص دریك صفحه واقع‌اند. مطلوب است تعداد نقطه‌های برخورد خط‌هایی‌که ازوصل دوبه‌دوی آن‌ها به‌دست می‌آیند(هیچ سه نقطه‌ای بریك خط راست واقع نیستند).

۱۵. ثابت‌کنید:

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+\dots+C_k^{k-1}+C_{k-1}^{k-1}$$

۱۶. این معادله را، نسبت‌به مجهول x، حل‌کنید:

$$C_{n+k}^x=C_n^x+k$$

(x، عددی است درست).

۱۷. x را پیداکنید، به‌شرطی‌که: a) $C_x^4=5$؛ b)

$$A_{x-4}^2+A_{x-3}^2+A_{x-2}^2=20$$

۱۸. m و n را طوری پیداکنیدکه داشته باشیم:

$$C_{n+2}^m : C_{n+2}^{m+1} : C_{n+2}^{m+2}=0/6 : 1 : 1$$

II. چندکلمه دربارهٔ دو جمله‌ای نیوتون

با اتحادهای زیر، درهمان ابتدای جبر مقدماتی آشنا شده‌ایم:

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

به‌همین ترتیب، می‌توان دستورهایی برای $(a+b)^4$، $(a+b)^5$ وغیره نوشت. ثابت شده است‌که، برای هرعدد طبیعی n و هردو عدد دلخواه a و b، اتحاد زیربرقراراست (که‌به‌نام «دوجمله‌ای نیوتون» معروف شده‌است):

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\dots+$$
$$+C_n^ka^{n-k}b^k+\dots+C_n^nb^n$$

ویا به‌صورت کوتاه‌تر

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k$$

(که‌در آن، C_n^k عبارت‌است ازتعداد ترکیب‌های n عنصر به‌صورت k به‌k).

یاد آوری می‌کنیم که، پیش از نیوتون هم، بسیاری از ریاضی‌دانان، بااین دستورآشنا بوده‌اند.

بلزپاسکال، دانشمند فرانسوی ـ که‌کم‌وبیش با نیوتون هم‌زمان بود ـ برای تنظیم ضریب‌هـای بسط این دوجمله‌ای، مثلثی درست‌کردکه امروز به «مثلث حسابی پـاسکال» معروف است و، بـرای‌نخستین‌بار، درسال ۱۶۶۵ میلادی، در «رسالهٔ مثلث حسابی» چاپ شد:

این مثلث، چنین است:

۱						
۱	۱					
۱	۲	۱				
۱	۳	۳	۱			
۱	۴	۶	۴	۱		
۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱	
۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱
.	.	.	.	.	.	.

دراین مثلث عددی، ازسطر سوم به‌بعد، هرعددی برابر است با مجموع عدد بالا وعدد سمت چپ‌آن درسطر قبل و، بنابراین، می‌توانید آن را، تا هرجا که لازم باشد، ادامه دهید.

هرسطراین مثلث، متناظر است باضریب‌های متوالی یکی ازحالت‌های بسط $(a+b)^n$:

سطردوم: ضریب‌های بسط $(a+b)^1$،

سطرسوم: ضریب‌های بسط $(a+b)^2$،

سطرچهارم: ضریب‌های بسط $(a+b)^3$

وبنابراین: مثلاً برای $n=5$، باید به‌سراغ سطر ششم مثلث برویم:

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

میخائیل شتفیل، ریاضی‌دان آلمانی، درسال ۱۵۴۶، درکتاب «حساب مخفی» خـود، از این دستور استفاده کرده است. همچنین نیکولو تارتاگلیا

(۱۴۹۶ ـ ۱۵۶۸) هم ازاین دستور اطلاع داشته است.

بسیاری از ریاضی‌دانان ایـرانی هم، درگذشته‌های دورتـر (وخیلی پیش از نیوتون) بااین دستورکار می‌کرده‌اند: غیاث‌الدین جمشیدکاشانی، درکتاب «مفتاح‌الحساب» خود (۱۴۲۷ میلادی) این دستوررا آورده است. دررساله از نوشته‌های خواجه نصیرالدین طوسی، ریـاضی‌دان بزرگ سدهٔ سیزدهم میلادی، دستور دوجمله‌ای وقانون تشکیل ضریب‌های آن شرح داده شده است.

چه غیاث‌الدین جمشیدکاشانی و چه خواجه نصیرالدین طوسی، ضمن بررسی قانون‌های مربوط به ریشه‌گرفتن، ازاین دستور یادکرده‌اند.

حکیم عمر خیام، ریـاضی‌دان، شاعـر و فیلسوف سده‌های یازدهم و دوازدهم میلادی هم، در رسالهٔ «صحت شیوهای هندی در جذروکعب» (که متاسفانه به‌ما نرسیده‌است)، ضمن تعمیم قانون‌های هندی دربارهٔ گرفتن جذر وکعب، ازضریب‌های بسط‌دوجمله‌ای (یعنی‌دستورنیوتون) استفاده‌کرده‌است.

بازهم‌می‌توان به‌عقب رفت. ابوبکر محمدبن‌الحسن الحاسب‌الکرجی، معروف به کرجی (تولـد او درشهرکرج، نزدیک تهران‌کنونی بوده است)، ریاضی‌دان ایرانی پایان سدهٔ دهـم وابتدای سدهٔ یازدهم میلادی، رساله‌ای داشته است‌که، خود آن، به‌ما نرسیده است، ولی ابونصرمغربی بخشی ازاین رسالهٔ کرجی رادرکتاب خود به‌نام «الباهرفی علم الحساب» نقل‌کرده‌است. واین بخش، همان دستور نیوتون برای بسط $(a+b)^n$ می‌باشد.

باآگاهی‌هایی‌که تـا امروز دراختیار داریم، ظاهراً برای پیداکردن نشانه‌هایی‌ازوجوددستورنیوتون، ازمرزکارهای‌کرجی، نمی‌توان‌عقب‌تررفت.

با تمام این احوال، این دستور را، بـه‌حق، به نام نیوتون نامیده‌اند. علت‌این امرآن‌است‌که نیوتون (درسال۱۶۷۶ میلادی)، توانست، این‌دستور را، برای حالتی که n عدد گویای دلخواهی باشد، تعمیم دهد، درحالی‌که قبل او، تنها برای حالتی‌که n عدد طبیعی باشد، به‌کار می‌رفت.

دستوردوجمله‌ای،کاربردهای زیادی در ریاضیات دارد. مثلاً یاکوب برنولی (سویسی؛ ۱۶۵۴ ـ ۱۷۰۵)، ریـاضی‌دان هـم عصر نیوتون، ازاین دستور، برای حل مساله‌های مهمی از نظریهٔ احتمال، استفاده‌کرد.

کارل مارکس، که به‌اندازهٔ کافی با ریاضیات زمان خود آشنا بود، کشف دستور دوجمله‌ای را «یک چرخش انقلابی در تمامی جبر» می‌داند، «به‌خصوص، به این علت که امکان تنظیم نظریهٔ عمومی معادله‌ها را فراهم ساخت» [رسالهٔ ریاضیات].

اکنون، چند مساله، در زمینهٔ بسط دو جمله‌ای:

۱۹. اگر بدانیم: $log\,۲ = ۰/۳۰۱۰۳...$، ببینید، عدد زیر چند رقم دارد:

$$۱+۱۰^{۴}=\frac{۱۰^{۴}(۱۰^{۴}-۱)}{۱\times ۲}+\frac{۱۰^{۴}(۱۰^{۴}-۱)(۱۰^{۴}-۲)}{۱\times ۲\times ۳}+$$

$$+\dots+\frac{۱۰^{۴}(۱۰^{۴}-۱)}{۱\times ۲}+۱۰^{۴}+۱$$

۲۰. جمله‌های گویا را در بسط زیر، پیدا کنید:

$$(\sqrt[۷]{۷}+\sqrt[۱۳]{۱۳})^{۱۰۰}$$

۲۱. A را مجموع جمله‌های ردیف زوج، و B، را مجموع جمله‌های ردیف فرد از بسط $(۱+a)^{m}$ می‌گیریم. $B^{۲}-A^{۲}$ را برحسب m و a بیان کنید.

۲۲. ریشه‌های حقیقی معادلهٔ زیر را پیدا کنید:

$$\frac{x^{۷}+۲۱x^{۵}+۲۵x^{۳}+۷x}{۷x^{۶}+۳۵x^{۴}+۲۱x^{۲}+۱}=\frac{۱۰۹۴}{۱۰۹۳}$$

۲۳. اگر n، عددی طبیعی باشد، در بسط $(a+b+c)^{n}$، چند جمله وجود دارد؟

۲۴. همان مسأله را درمورد $(a+b+c+d)^{n}$ حل کنید.

۲۵. عدد $۱۲۳^{۴۵۶}$ به‌چهار رقمی‌هائی ختم می‌شود؟ دو رقم آخر این عدد را پیدا کنید.

۲۶. کدام بزرگترند: $۱۰۰^{۱۰۱}$ یا $۱۰۱^{۱۰۰}$؟

۲۷. «قضیهٔ کوچک فرما» را ثابت کنید: اگر n عددی طبیعی و r عددی اول باشد، عدد $n^{p}-n$ همیشه بر p بخش‌پذیر است.

۲۸. درعبارت $\left(x\sqrt{x}-\frac{۱}{x^{۴}}\right)^{n}$ می‌دانیم؛ ضریب جملهٔ سوم، ۴۴ واحد ازضریب جملهٔ دوم بیشتر است. جملهٔ مستقل از x را در بسط دوجمله‌ای مفروض پیدا کنید.

۲۹. مطلوب است شمارهٔ سه جملهٔ متوالی در بسط $(a+b)^{۲۳}$، که ضریب‌های آن‌ها به‌تصاعد حسابی باشند.

۳۰. درعبارت $\left(x+۱+\frac{۲}{x}\right)^{۶}$، جملهٔ مستقل از x را پیدا کنید.

۳۱. مطلوب است محاسبهٔ این مجموع:

$$(C_{n}^{۰})^{۲}+(C_{n}^{۱})^{۲}+(C_{n}^{۲})^{۲}+\dots+(C_{n}^{n})^{۲}$$

۳۲. این مجموع را محاسبه کنید:

$$S=(C_{n}^{۱})^{۲}+۲(C_{n}^{۲})^{۲}+۳(C_{n}^{۳})^{۲}+\dots+(C_{n}^{n})^{۲}$$

۳۳. بزرگترین جمله را در بسط عبارت $(۱+\sqrt{۲})^{۵۰}$ پیدا کنید.

۳۴. مطلوب است جمله‌هایی از بسط دوجمله‌ای

$$\left(\sqrt[۳]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[۳]{a}}}\right)^{۲۱}$$

که در آن‌ها، توان‌های a و b برابر باشند.

III. نظریهٔ احتمال

۱. در زندگی روزانه، وقتی که می‌خواهیم پدیده‌ای را پیش‌بینی کنیم، اغلب از جمله‌های «احتمال دارد» یا «احتمال آن نمی‌رود» استفاده می‌کنیم. مثلاً می‌گوییم: «او احتمالاً، همهٔ عصرها پای تلویزیون می‌نشیند»، یا «احتمالاً، تیم فوتبال A، دوباره، درصدرجدول قرار گیرد». گاهی، اظهار نظر می‌کنیم که «احتمال» فلان مورد «زیاد»، و «احتمال» مورد دیگر «کم» است. مثلاً وقتی که تعمیرکار رادیو، لامپ سوختهٔ رادیوی شما را عوض می‌کند و احساس نگرانی را در چهرهٔ شما می‌بیند، می‌گوید: «احتمال کمی دارد که این لامپ بسوزد، به‌احتمال زیاد، دست‌کم، ۲۰۰ ساعت کار می‌کند».

در زندگی، اغلب به‌پیش‌آمدهای تصادفی (یا پدیده‌ها) برمی‌خوریم؛ این‌ها، موردهایی هستند که، در آزمایش و درعمل، ممکن است اتفاق بیفتد و

یا اتفاق نیفتند. چند مثال بیاوریم.

شما یکی از بلیت‌های قرعه‌کشی را برمی‌دارید؛ این، یک آزمایش است. بلیت‌شما، شمارهٔ ۱۳ است؛ این، یک‌حادثهٔ تصادفی است. به‌دیگری، شمارهٔ ۴ افتاده است؛ این، یک حادثهٔ تصادفی دیگر دراین آزمایش است.

شلیک ضد هوایی به‌طرف هواپیما، یک آزمایش است؛ ولی، برخورد گلوله به‌هواپیما، یک حادثهٔ تصادفی است؛ عدم برخورد گلوله به‌هواپیماهم، یک حادثهٔ تصادفی دیگر است.

کتابی را باز می‌کنید، این یک آزمایش است. ولی این‌که، نخستین حرف این صفحه «م» باشد، یک حادثهٔ تصادفی است.

کار نظریهٔ احتمال این‌است که قانون‌مندی‌های حاکم براین حادثه‌های تصادفی را، مورد مطالعه قرار دهد.

ریاضی‌دانان سدهٔ هفدهم، متوجه شدند که «احتمال یک پیش‌آمد» را می‌توان اندازه‌گرفت (یعنی احتمال وقوع حادثه را، به‌کمک عدد، بیان کرد)، درست همان طور که طول، سطح، حجم وجرم را اندازه می‌گیریم. آن‌ها، درهمان ابتدا، توانستند نخستین مسأله‌های سادهٔ احتمال را، به یاری محاسبه، حل کنند.

یاکوب برنولی، ریاضی‌دان نام‌دار سویسی، نخستین کتاب کلاسیک را در زمینهٔ «حساب احتمال‌ها» تالیف کرد. این کتاب «هنر حدس زدن» نام داشت و درسال ۱۷۱۳ چاپ شد. از این زمان بود که، نظریهٔ احتمال، پیشرفت تند وپرشتاب خودراآغاز وکاربرد خود را دربسیاری از زمینه‌های عملی، پیدا کرد. ریاضی‌دانان بزرگی همچون پ. لاپلاس (فرانسه، ۱۷۴۹–۱۸۲۷)، ك. ف. گوس (آلمان ۱۷۷۷–۱۸۵۵)، س. پواسون (فرانسه، ۱۷۸۱–۱۸۴۰)، پ. ل. چبیشف (روسیه ۱۸۲۱–۱۸۹۴)، آ. آ. مارکوف (روسیه، ۱۸۵۶–۱۹۲۲)، آ. م. لیاپونوف (روسیه، ۱۸۵۷–۱۹۱۸)، ج. و. گیبس (امریکا، ۱۸۳۹–۱۹۰۳)، آ. یا خین‌چین (اتحاد شوروی، ۱۸۹۴–۱۹۵۹)، س. ن. برنشین (اتحاد شوروی، ۱۸۸۰–۱۹۶۸)، آ. ن. کولموگوروف (اتحاد شوروی، متولد ۱۹۰۳) و بسیاری دیگر، روی نظریهٔ احتمال کارکرده‌اند.

نظریهٔ احتمال، اساس آمار ریاضی را تشکیل می‌دهند که کاربردهای زیادی در عمل دارد. همچنین، نظریهٔ احتمال، کاربردگسترده‌ای در فیزیک هسته‌ای، اخترشناسی، ترمودینامیک، بالیستیک، نظریهٔ ارتباط‌ها، زیست‌شناسی و خیلی از دانش‌های دیگر، پیدا کرده است. بسیاری از شاخه‌های تازه ریاضی، ازقبیل نظریهٔ بازی‌ها، نظریهٔ انفورماسیون، نظریهٔ اطمینان بخشی‌هم، متکی برنظریهٔ احتمال هستند.

۲. اکنون ببینیم که منظور ریاضی‌دانان از «معیار احتمال» یا، به‌طور ساده، «احتمال» یک‌حادثه‌چیست. دراین‌حال، تنها به‌ساده‌ترین(و درعین‌حال، مهم‌ترین) حالت می‌پردازیم: حالتی که، درآن، تعداد امکان‌های حادثه، محدود باشد.

آزمایشی را پیش خود تصور می‌کنیم. مثلاً فرض کنید، ۱۰۰ گلولهٔ سفید، ۱۰ گلولهٔ آبی و ۱ گلولهٔ قرمز را در جعبه‌ای، با دقت، به‌هم مخلوط کرده باشیم. گلوله‌ها، تنها ازجهت رنگ باهم اختلاف دارند و، از نظرهای دیگر، کاملاً شبیه یکدیگرند. آزمایش این است که، اگر به‌تصادف، گلوله‌ای را ازجعبه برداریم، دربارهٔ رنگ آن، چه قضاوتی می‌توانیم داشته باشیم؟

نتیجهٔ هرآزمایش، عبارت است از یک حادثه یا حالت. درمثال بالا، حادثه‌ها عبارتند از:

A– گلوله‌ای که برداشته‌شده، سفید باشد؛

B– گلولهٔ برداشته شده، آبی باشد؛

C– گلوله‌ای که برداشته‌ایم، قرمز از آب درآید.

ممکن‌است درمورد یک‌آزمایش، تنها وقوع حادثه‌های A، B، C، ...، L ممکن باشد، یعنی درنتیجهٔ آزمایش‌مفروض، حتماً یکی ازاین‌حادثه‌ها پیش‌آید.

در مثال ما، حادثه‌های A، B و C، تنها حالت‌های ممکن هستند، درحالی که، مثلاً، حادثه‌های B و C، تنها حالت‌های ممکن نیستند.

گاهی، بعضی ازحادثه‌های مختلف – که درنتیجهٔ آزمایش مفروض‌پیش می‌آیند – دارای امکان برابر هستند، یعنی، هیچ مبنائی برای این فرض وجود ندارد که، ضمن تکرار آزمایش، یکی ازحادثه‌ها، بیش از دیگری اتفاق بیفتد. درمثال بالا، اگر گلوله‌های‌داخل جعبه را شماره‌گذاری کنیم‌وآن‌هارا

A_1، A_2، ... ، A_{100}، B_1، B_2، ... ، B_{10}، C_1 بنامیم، آن وقت، استخراج A_{77} یا B_9 از جعبه، دو حادثه‌ای هستند که امکان برابر دارند.

بالاخره، دو حادثه را ناسازگار گویند، وقتی که وجود یکی از آن‌ها، وجود دیگری را نفی کند درمثال ما، پیدایش گلوله سفید، حادثه‌ای است که با حادثهٔ پیدایش گلولهٔ رنگی ناسازگار است. پیدایش گلولهٔ A_{77} و گلولهٔ A_{38} هم، دو حادثهٔ ناسازگارند. درهمین مثال، پیدایش گلولهٔ رنگی و پیدایش گلولهٔ قرمز، دو حادثهٔ سازگار هستند.

فرض کنید، درنتیجهٔ آزمایش مفروض، یکی از n حالت پیش‌آید و، این حالت‌ها، تنها حالت‌های ممکن (در این آزمایش‌ها) باشند و، ضمناً، با امکان برابر و ناسازگار؛ فرض کنید که در m حالت از این n حالت ممکن، حادثهٔ A بتواند اتفاق بیفتد. در این صورت، $\frac{m}{n}$ را احتمال حادثهٔ A دراین آزمایش‌ها می‌نامند و به‌این صورت نشان می‌دهند:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

درمثال ما، ضمن آزمایش (برداشتن گلوله)، روی هم، ۱۱۱ حالت مختلف (۱+۱۰+۱۰۰) وجود دارد؛ این حالت، تنها حالت‌های ممکن، با امکان برابر و با یکدیگر ناسازگارند. از این ۱۱۱ حالت، ۱۰۰ حالت متعلق به گلولهٔ سفید است. یعنی $p(A) = \frac{100}{111}$ و به‌همین‌ترتیب:

$$p(B) = \frac{10}{111} \quad \text{و} \quad p(C) = \frac{1}{111}.$$

روشن است که، احتمال وقوع هرحادثه، عددی است بین دو عدد ۰ و ۱ (و یا برابر با یکی از آن‌ها).

اکنون وقت آن رسیده است که دربارهٔ این پرسش‌ها و مسأله‌ها، فکر کنید.

۳۵. a) اگر وقوع حادثه‌ای موثق باشد (یعنی، حادثه‌ای که حتماً ضمن آزمایش، اتفاق می‌افتد)، احتمال آن چقدر است؟

b) احتمال یک‌حادثهٔ ناممکن چقدراست (یعنی حادثه‌ای که‌نمی‌تواند

ضمن آزمایش مفروض، پیش‌آید)؟

۳۶. سکه را n بار به‌بالا انداخته‌ایم تا به‌زمین بیفتد. احتمال این که، دست‌کم یک بار، شیر بیاید [یعنی طرف شیر سکه، رو به‌بالا باشد]، چقدر است؟ حالت‌های $n = 1, 2, 3$ را بررسی کنید [مسألهٔ دالامبر، ریاضی‌دان مشهور سدهٔ هیجدهم فرانسه].

۳۷. تاس بازی، مکعبی است که روی وجه‌های آن، به‌ترتیب، از ۱ تا ۶ خال وجود دارد. a) تاس را یک بار انداخته‌ایم، احتمال آمدن خال ۴ چقدراست؟ b) احتمال این که، خال ۴، ضمن دوبار انداختن تاس، پشت‌سرهم بیاید، چقدر است؟ c) اگر دوتاس را باهم بیندازیم، احتمال این که‌مجموع خال‌های دو تاس برابر ۸ شود چقدر است؟ d) و اگر یک تاس را دوبار بیندازیم، چطور؟

۳۸. دو تاس بازی را سه‌بار انداختیم. احتمال این که، دست‌کم، در یکی از این دو حالت، a) مجموع خال‌ها برابر ۱۲ باشد، b) جفت بیاید (یعنی خال‌های هردو تاس، یکی باشد) چقدر است؟

۳۹. سه تاس را با هم انداخته‌ایم. احتمال کدام بیشتر است: این که مجموع خال‌های سه‌تاس ۱۰ باشد یااین که مجموع خال‌ها برابر ۹ شود؟ [این مسأله، یکی ازنخستین مسأله‌های نظریهٔ احتمال است، که گالیله آن را، برای یکی ازکسانی که با تاس بازی می‌کرد مطرح نمود. خود گالیله جواب درست آن را پیدا کرد].

۴۰. می‌دانید که بازی‌لوتو[1]، هیچ ارتباطی به مهارت بازی‌کن ندارد و، نتیجه به‌طورکامل به‌تصادف مربوط است دو نفر از بازی‌کنان به‌مقدار مساوی، پول روی هم گذاشتند و توافق کردند که هرکدام از آن‌ها که زودتر به‌تعداد معینی برد، و مثلاً n بار، رسید، پول را بردارد. ولی به‌دلیلی، بازی را، وقتی قطع کردند که یکی از آن‌ها تنها یک برد دیگر لازم داشت تا پول

۱. دربازی لوتو، هرکسی کارتی در دست دارد که، روی آن، عددهایی نوشته شده است. اداره‌کنندهٔ بازی، به ترتیب، مهره‌هایی را از داخل کیسه‌ای خارج می‌کند و شمارهٔ آن را می‌خواند. وقتی که کسی توانست یک ردیف، مثلاً پنج‌تایی ازکارت خود را علامت بگذارد، برنده است.

را صاحب شود و دیگری، برای دراختیار گرفتن پول، دو برد دیگر لازم داشت. پول را به چه ترتیب، باید بین خود تقسیم کنند؟ [این مسأله را، پاسکال، ریاضی دان فرانسوی درسال ۱۶۵۴ برای دوست خود مطرح کرد. خود پاسکال، مسأله را درحالت کلی‌تری حل کرد و آن را، برای فرما، یکی از بزرگترین ریاضی دانان آن زمان، فرستاد. فرما هم، آن‌را درحالت کلی‌تر حل کرد. ما درمتن مسأله، جزئی تغییری داده‌ایم.]

۴۱. کارخانه‌ای، نوعی‌معین‌ازلامپ رادیوتولیدمی‌کند. هربسته، شامل ۱۰ لامپ مشابه است. دربخش بازبینی فنی، برای بررسی کیفیت محصول، به‌این ترتیب، عمل می‌کنند: بازبین، از هربسته فقط پنج لامپ را به تصادف انتخاب و آن‌ها را موردآزمایش قرار می‌دهد؛ اگر هرپنج لامپ سالم بود، تمام بستهٔ ۱۰ لامپی را به‌بازار می‌فرستد، ولی اگر حتی یکی از این پنج لامپ ناقص باشد، بسته را برای بازبینی‌کامل نگه می‌دارد، چه‌احتمالی‌وجود دارد، برای این‌که بازبین، متوجه بسته‌ای که شامل ۵ لامپ ناسالم است، بشود (یعنی هر ۵ لامپ ناسالم درآزمایش‌های او وارد شوند)؟

۴۲. درجعبه‌ای m وسیلهٔ سالم و n وسیلهٔ‌ناقص‌وجود دارد ($m \geqslant ۲$، $n \geqslant ۲$). وسیله‌ها، هم شکل و هم اندازه‌اند و با هم کاملاً قاطی شده‌اند. دو وسیله به‌تصادف، از جعبه برداشته‌ایم. احتمال این‌که هردوی آن‌ها سالم باشند، چقدر است؟

۴۳. درجعبه‌ای ۲۰ گلولهٔ هم شکل و هم اندازهٔ گذاشته شده است: ۴ قرمز، ۵ سفید و ۱۱ آبی. گلوله‌ای ازجعبه برمی‌داریم، رنگ آن‌را یادداشت می‌کنیم و دوباره به جعبه می‌اندازیم. این عمل را دوبار انجام می‌دهیم. مطلوب است احتمال این‌که: a) هردوبار گلولهٔ قرمز را برداشته باشیم؛ b) تنها یك بار گلولهٔ قرمز درآمده باشد؛ c) گلوله اول قرمز درآمده باشد؛ d) دست‌کم، یکی از آن‌ها قرمز باشد؛ e) هیچ کدام از آن‌ها، قرمز نباشند؛ f) حداکثر، یکی از آن‌ها قرمز باشد.

۴۴. به همان پرسش‌های مسألهٔ ۴۳ پاسخ دهید، به شرطی که وقتی گلوله‌ای را برمی‌داریم، آن را دوباره به‌جعبه برنگردانیم.

۴۵. هریك از سه هم‌شهری، تنها دریك مورد از سه مورد صحبت

خود، راست می‌گویند. دربارهٔ مطلبی ازآن‌ها سئوال شد وآن‌ها پاسخ خود را دادند. احتمال این‌که، هرسه پاسخ یکی باشد، چقدر است؟ پرسش‌هایی شبیه پرسش‌های مسأله ۴۳ طرح کنید و به‌آن‌ها پاسخ بدهید.

۴۶. درکارتونی که شامل ۲۰۰ وسیله است، ۸ وسیلهٔ ناقص وجود دارد. ظاهر وسیله‌های ناقص، هیچ تفاوتی با وسیله‌های سالم ندارد. در مرکز بازبینی، به‌تصادف، ۳ وسیله را برمی‌دارند. احتمال این‌که دربین آن‌ها، تنها یك وسیلهٔ ناقص وجود داشته باشد، چقدر است؟

*

۳. حادثه‌ها را می‌توان باهم جمع و درهم ضرب کرد؛ علاوه براین، آن‌ها، ازقاعدهٔ جبر بول پیروی می‌کنند. قبل ازاین دنبالهٔ مطلب را بخوانید، معنای $A+B+C$ ، $\bar{A}\cdot A$ و $A\cdot B$ را به خاطر بیاورید (A ، B و C ، سه حادثه‌اند).

۴۷. در جعبه‌ای گلوله‌های قرمز، سبز و سفید وجود دارد، که به جز رنگ، درهیچ چیز دیگری، باهم اختلاف ندارند. آزمایش عبارت است از انتخاب تصادفی یك گلوله و یادداشت رنگ آن. احتمال آمدن گلولهٔ به‌رنگ قرمز برابر است با $\frac{۱}{۲}$ و احتمال آمدن گلولهٔ سبز، برابر است با $\frac{۱}{۳}$. احتمال آمدن گلولهٔ رنگی (غیرسفید) چقدر است؟

۴۸. استدلالی راکه برای حل مسألهٔ قبل به‌کار برده‌اید، تعمیم دهید و قضیهٔ زیر را، دربارهٔ جمع احتمال‌ها، ثابت کنید:

اگر دریك آزمایش، دو حادثهٔ A و B ناسازگار باشند، داریم

$$p(A+B)=p(A)+p(B)$$

این قضیه را، برای هرتعداد محدود حادثه‌های ناسازگار، تعمیم دهید.

۴۹. ثابت کنید.

اگرحادثهٔ $\bar{A}$ ، متناقض (یا نفی) حادثهٔ A باشد، داریم:

$$p(\bar{A})=۱-p(A)$$

*

احتمال مشروط. از بررسی دو موقعیت آغاز می‌کنیم

موقعیت شمارهٔ ۱ : فرض کنید، در جعبه‌ای، ۹ گلولهٔ سفید و ۱ گلولهٔ قرمز وجود داشته باشد؛ گلوله‌ها، تنها در رنگ باهم اختلاف دارند آزمایش چنین است: گلوله‌ای را، به‌تصادف، از جعبه خارج، رنگ آن را یادداشت می‌کنیم و دوباره به‌جعبه برمی‌گردانیم. این آزمایش، دوبار تکرار می‌شود.

حادثهٔ A ، عبارت است از آمدن گلولهٔ قرمز در آزمایش اول؛ وحادثهٔ B ، آمدن گلولهٔ قرمز در آزمایش دوم. روشن است که

$$p(B)=\frac{1}{10}$$

بدون ارتباط به‌این مطلب که آیا، در آزمایش اول، گلوله قرمز آمده است یا گلولهٔ سفید.

موقعیت شمارهٔ ۲ : آزمایش چنین است : گلوله‌ای را از همان جعبه برمی‌داریم و رنگ آن‌را یادداشت‌می‌کنیم، ولی آن‌را به‌جعبه برنمی‌گردانیم. این آزمایش را هم، دوبار انجام می‌دهیم.

حادثهٔ A را، آمدن گلولهٔ قرمز در آزمایش اول، وحادثهٔ B را، آمدن گلولهٔ قرمز در آزمایش دوم، می‌گیریم.

اگر در آزمایش اول، گلولهٔ قرمز آمده باشد، از آن جاکه از این رنگ، تنها یك گلوله وجود دارد، در آزمایش دوم نمی‌تواند ظاهر شود و $p(B)=0$.

ولی، اگر در آزمایش اول، گلولهٔ سفید درآمده باشد، آن‌وقت، روشن است که خواهیم داشت:

$$p(B)=\frac{1}{9}$$

به‌این ترتیب، احتمال حادثهٔ B ، دقیقاً به‌این مطلب بستگی دارد که آیا حادثهٔ A اتفاق افتاده‌است یا نه. ازاین‌جا، به‌تعریف زیر راهنمائی می‌شویم:

حادثهٔ B را وقتی مستقل از حادثهٔ A می‌نامند که ، احتمال حادثهٔ B، ارتباطی به‌وقوع یاعدم وقوع حادثهٔ A نداشته باشد. درغیراین‌صورت، حادثهٔ B را وابسته می‌گویند. به‌زبان دیگر، میان «حادثهٔ B وابسته به حادثهٔ A است»، به‌معنای آن است که به‌احتمال حادثهٔ B بستگی به‌وجود یا عدم

وجود حادثهٔ A دارد.

احتمال حادثهٔ B را ، به شرط این‌که حادثهٔ A اتفاق افتاده باشد، «احتمال مشروط حادثهٔ B به‌ازای A» گویند و به‌این ترتیب نشان می‌دهند:

$$p\left(\frac{B}{A}\right) \quad \text{یا} \quad p_A(B)$$

مثلاً، درموقعیت شمارهٔ ۲ ، داریم:

$$p\left(\frac{B}{A}\right)=0 \quad \text{و} \quad p\left(\frac{B}{\bar{A}}\right)=\frac{1}{9}$$

۵۰. درجعبه‌ای، ۲۰ گلولهٔ سفید و ۳۰ گلولهٔ سیاه وجود دارد. در بین گلوله‌های‌سفید، ۵ گلوله استخوانی و ۱۵ گلوله چوبی است؛ وبین گلوله‌های سیاه، ۱۲ عدد استخوانی و ۱۸ عدد چوبی‌است. یك گلوله ازجعبه برمی‌داریم و رنگ و جنس آن را یادداشت می‌کنیم. A را ، و حادثهٔ «درآمدن گلولهٔ سفید» و B را، حادثهٔ «درآمدن گلولهٔ چوبی» می‌گیریم. منظور از حادثه‌های $A\cdot B$ و $\frac{B}{A}$ چیست؟ این احتمال‌ها را محاسبه کنید:

$$p(A)\ ,\quad p\left(\frac{B}{A}\right)\ ,\quad p(A\cdot B)$$

۵۱. باهمان‌روش‌مسألهٔ‌قبل، قضیهٔ‌زیر را، که‌مربوط به‌ضرب‌احتمال‌هاست، ثابت کنید:

احتمال حاصل‌ضرب دو حادثه (یعنی احتمال سازگاری وقوع این حادثه‌ها)، برابر است با حاصل ضرب احتمال یکی از آن‌ها، در احتمال مشروط دیگری بااین فرض که حادثهٔ اول اتفاق افتاده باشد:

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p\left(\frac{B}{A}\right)$$

*

یادآوری کنیم که ، از قضیهٔ ضرب احتمال‌ها، می‌توان دو نتیجهٔ مفید زیر را به‌دست آورد:

I. اگر حادثهٔ B مستقل از حادثهٔ A باشد، آن وقت

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B)$$

یعنی ، احتمال وقوع هم زمان دو حادثهٔ بی‌ارتباط به یکدیگر، برابر است با حاصل‌ضرب احتمال‌های این دو حادثه.

II. اگرحادثهٔ B بستگی به‌حادثهٔ A نداشته باشد، عکس‌آن‌هم درست است، یعنی حادثهٔ A هم به‌حادثهٔ B بستگی ندارد.

در واقع اگر داشته باشیم: $p\left(\frac{B}{A}\right)=p(B)$ ، آن وقت

$$p(A.B)=p(A)\cdot p(B)$$

ازطرف دیگر، می‌دانیم

$$p(A\cdot B)=p(B)\cdot p\left(\frac{A}{B}\right)$$

بنابراین $p\left(\frac{A}{B}\right)=p(A)$ ، یعنی حادثهٔ A ، بستگی به‌حادثهٔ B ندارد.

با توجه به‌ویژگی II ، می‌توان از استقلال دو حادثهٔ A و B نسبت به‌هم، صحبت کرد. «قضیهٔ ضرب» محاسبهٔ احتمال‌ها را، بی‌اندازه ساده‌می‌کند. چند مسأله می‌آوریم.

۵۲. دو دانش آموز ناآشنا ، در قطاری نشسته‌اندکه ۸ واگون دارد. هریك از دانش‌آموزان، واگنی را به‌تصادف انتخاب کرده‌اند. مطلوب‌است احتمال این‌که : a) دو دانش‌آموز دریك واگون جاگرفته باشند؛ b) هردو در واگون شمارهٔ ۱ باشند ؛ c) در واگون‌های متفاوت باشند؟ مسأله را با استفاده ازقضیه‌های جمع و ضرب احتمال‌ها، حل‌کنید.

۵۳. در رادیوهایی‌که در یك کارخانه ساخته شده‌اند، یك نوع لامپ رادیوئی وجود داردکه با احتمال ۰/۸ در زمانی‌که‌کمتر از ۲۰۰ ساعت نیست،کار می‌کند. گاهی، برای بالابردن میزان اطمینان گیرنده، لامپ دیگری از همان نوع، به‌لامپ رادیو به‌طور موازی وصل می‌کنند. احتمال این‌که گیرنده، به‌خاطر خرابی این لامپ‌ها، ازکار نیفتد، چقدر است؟ اگر لامپ‌ها را، به‌صورت زنجیری، قرار دهیم، این احتمال چقدراست؟

۵۴. احتمال این‌که یك سرباز باشلیك به طرف دشمن خود بتواند او را بزند، برابراست‌با ۰/۰۰۱. اگرهزارسرباز، باهم به‌طرف‌دشمن‌تیراندازی

کنند، احتمال زدن آنها چقدر است؟

۵۵. درجعبه‌ای، ۱۱ وسیلهٔ سالم و ۳ وسیلهٔ ناقص وجود دارد. دوبار و هربار یك وسیله را از جعبه برمی‌داریم ، ضمناً هربارکه وسیله‌ای را برداشته‌ایم، دوباره‌آن را به‌جعبه برمی‌گردانیم. احتمال‌این‌که، درست یکبار، به‌وسیلهٔ سالم برخوردکنیم، چقدر است؟

۵۶. سکه‌ای را ۵ بار انداخته‌اید. احتمال این‌که ۳ بار شیر و ۲ بار خط بیابد، چقدر است؟

*

۵. قانون عددهای بزرگ. درعمل پیش می‌آیدکه نمی‌توان، از قبل ، معلوم‌کردکه حادثهٔ مفروض با چه احتمالی به‌وقوع می‌پیوندد. درچنین موردهایی، با تکرار یك آزمایش، می‌توان بسامد وقوع حادثه را معین‌کرد. بسامد (یا دقیق‌تر : بسامد نسبی) حادثه ، به نسبت تعداد وقوع حادثه در رشته آزمایش‌های تکراری به تعدادکل آزمایش‌ها ،گفته می‌شود ، مثلاً اگر ضمن ۱۰۰۰ بار انداختن سکه ، ۴۵۰ بار شیر بیاید، بسامد آمدن شیر در رشته آزمایش‌ها، برابر است با

$$\frac{۴۵۰}{۱۰۰۰}=۰/۴۵$$

حتی یاکوب برنولی هم این موقعیت مهم راکه به نام «قانون عددهای بزرگ» معروف است ،کشف‌کرده بود : هرچه تعداد آزمایش‌های مشابه زیادتر باشد، بسامد وقوع حادثه به‌احتمال حادثه نزدیك‌ترخواهد بود. قضیهٔ برنولی را، به‌صورت دقیق‌تر، این طور می‌توان بیان‌کرد: اگراحتمال حادثهٔ A در هریك از رشته آزمایش‌های مستقل از هم برابر p باشد، و اگر n، یعنی تعداد آزمایش‌ها، به‌طور نامتناهی زیاد شود، آن وقت، بااحتمالی به‌دلخواه نزدیك به‌واحد، می‌توان حکم کردکه بسامد نسبی $\frac{m}{n}$ ازحادثهٔ A، به‌دلخواه، به‌احتمال وقوع آن، نزدیك می‌شود. با توجه به این قضیه، می‌توان نوشت :

$$p\approx\frac{m}{n}$$

ضمناً، هرچه n بزرگتر باشد، این برابری تقریبی، دقیق‌تر (محتمل‌تر) است. این نتیجه را می‌توان به صورت دقیق‌تری تنظیم کرد: می‌توان احتمال را به نحوی ارزیابی کرد که اختلاف آن با $\frac{m}{n}$ کوچکتر ازعدد دلخواهی که از قبل معین شده است (و مثلاً ۰/۰۰۱) باشد.

دقیق کردن قانون‌عددهای بزرگ، به چبیشف، لیاپونوف، مارکوف، کولموگوروف و سایر ریاضی‌دانان روس تعلق دارد.

قانون عددهای بزرگ، امکان می‌دهد تا براساس تعداد زیادی مشاهده، احتمال یك حادثه را، با دقت زیاد به‌دست آورد.

§ ۴. آگاهی‌ها را چگونه اندازه‌گیری می‌کنند؟

۱. ضمن عمل، اغلب آگاهی‌هایی دربارهٔ یك پدیده به‌دست می‌آید. به‌عنوان ساده‌ترین آگاهی‌ها؛ می‌توان ازنتیجهٔ یك مسابقه، یا تاریخ انجام یك عمل و یا درجه حرارت شهر درساعت ۶ صبح امروز نام برد. همهٔ کتاب‌ها، مجله‌ها، روزنامه‌ها، رادیو و تلویزیون، نامه‌ها، تلگراف‌ها ومکالمه‌های تلفنی، آگاهی‌هایی با خود دارند.

آگاهی، ممکن است دارای مضمونی بیشتر یا کمتر باشد. مثلاً، مضمون این اطلاع که «عمل در زمستان پیش آمده است» کمتر از مضمون آگاهی «عمل درساعت ۱۰ صبح بیست و پنجم دی ماه پیش آمده است». و یا مثلاً، این آگاهی که «زاینده رود از اصفهان می‌گذرد» (برای کسی که جغرافیای دبستانی را خوانده است)، شامل هیچ آگاهی (تازه‌ای) نیست.

از سال‌های ۲۰ سدهٔ بیستم، تلاش‌های فراوانی در این جهت انجام گرفته است که راهی برای اندازه‌گیری آگاهی‌ها پیدا کنند تا بتوانند آگاهی را هم، مثل حجم یك جسم و یا احتمال یك حادثه، با عدد بیان کنند.

کلود شه‌نون، ریاضی‌دان و مهندس آمریکایی، موفق شد درسال‌های ۱۹۴۷–۱۹۴۸، به این امر تحقق بخشد: او توانست، آگاهی‌ها را، با عدد ارزیابی کند، چیزی که می‌تواند برای خیلی ازمسأله‌های عملی، بسیارسودمند باشد. به‌این ترتیب، پایه‌های شاخهٔ تازه‌ای از دانش ریاضی ریخته شدکه به

نظریهٔ آگاهی‌ها (تئوری انفورماسیون) معروف شده است. اکنون ببینیم چگونه میزان آگاهی را، دراین نظریهٔ، معین می‌کنند.

*

۲. همان طورکه گفتیم، آگاهی‌های مختلف (و روشن است که بحث‌ما دربارهٔ آگاهی‌های درست‌است)، ارزش‌های متفاوتی‌دارند. یکی‌ازروش‌های ممکن ارزیابی آگاهی‌ها، براساس میزان نامنتظر بودن آن‌ها قرار دارد. مثلاً، اطلاع براین مطلب که دوست شما در قرعه‌کشی برنده شده است و می‌تواند یك پیکان بخرد، نامنتظرتر از این آگاهی است که او در قرعه‌کشی برنده نشده است.

به چه مناسبت، یك آگاهی را، نامنتظر از دیگری می‌دانند؟ این‌داوری بیش از هرچیز، براساس احتمال حادثه‌ای است که درآگاهی، ازآن صحبت می‌شود. اگر احتمال (p)، برای این حادثه، خیلی کم، ولی به‌هرحال قابل وقوع باشد، اطلاع از آن، هیجان‌آور است (حادثهٔ غیرقابل انتظار). ولی، اگراحتمال‌حادثه، قریب‌به یقین‌باشد وحادثه‌هم اتفاق بیفتد، آن وقت، اطلاع از آن، هیچ گونه شگفتی به‌وجود نمی‌آورد وعلاقه و توجه‌کسی را به‌طرف خود جلب نمی‌کند. این آگاهی که «یك خرگوش، حیله‌گرتر از شیر جوان درآمده است» (اگردرست باشد) هیجان‌آور است، درحالی‌که اطلاع «شیر جوان، حلیه‌گرتر از خرگوش است»، کسی را متعجب نمی‌کند.

فرض کنید، درآگاهی S گفته شده باشدکه، در نتیجهٔ آزمایش (یامشاهدهٔ) α، حادثهٔ A اتفاق‌افتاده است. هرآگاهی ازاین‌نوع را می‌توان با عددی‌ارزیابی کردکه‌معرف میزان‌نامنتظربودن وهیجان‌آوربودن این حادثهٔ است. این عدد را، معیار لگاریتمی آگاهی‌ها و یا آگاهی جزئی موجود درآگاهی‌ها، می‌نامند.

معیارآگاهی‌هایی که دراطلاع‌ها وجوددارد، بایددارای‌این ویژگی‌ها باشد:

۱. اطلاع ازاین مطلب که، یك حادثه قریب‌الوقوع (یعنی‌عادی) اتفاق افتاده است، هیچ حادثهٔ نامنتظری نیست. معیار آگاهی، در این اطلاع، باید صفر به‌حساب آید.

۲. هرچه احتمال یك حادثه کمتر باشد، اطلاع ازوقوع آن، نامنتظرتر وهیجان آورتر است. به‌زبان دیگر، هرچه احتمال حادثه کمتر باشد، معیار آگاهی دراطلاع مربوط به‌وقوع آن بیشتراست.

۳. اگر اطلاعی، شامل دوآگاهی مستقل ازیکدیگر باشد، آن وقت، معیارآگاهی درچنین اطلاعی، همان است که از دو اطلاع جداگانه به‌دست می‌آید، به‌نحوی که یکی ازآن‌ها شامل آگاهی اول ودیگری شامل آگاهی دوم باشد.

به‌سادگی می‌توان دستوری درست کرد که همهٔ شرط‌های ۱ تا ۳ رادر خود داشته باشد. برای این‌منظور، کافی است معیارآگاهی را، که دراطلاع S وجود دارد، با $log\frac{1}{p}$ نشان دهیم، که درآن، p عبارت است ازاحتمال حادثهٔ A، که دراطلاع S ازآن صحبت رفته است (معمولاً، لگاریتم را در مبنای ۲ می‌گیرند). ضمناً، روشن‌است که، درهرحالت، باید به‌روشنی بدانیم، صحبت برسرچه حادثه‌ای‌است ودرکدام آزمایش‌یامشاهده قابل تحقیق‌است.

به‌چند مثال می‌پردازیم.

۵۷. برای این تصمیم گرفته شده، از دوقهرمان بازی شطرنج ـ A و B ـ ،کدامیك با مهرهٔ سفید، نخستین مسابقه را بازی کند، باید قرعه کشی کنند. به‌ما اطلاع داده‌اند که A بامهرهٔ سفیدبازی راآغازکرده است. دراین اطلاع، چند واحد آگاهی وجود دارد؟

۵۸. تعداد حرف‌های الفبا را ۳۲ می‌گیریم. این حرف‌ها روی کارت‌های جداگانه‌ای نوشته شده است. یکی ازکارت‌ها راما به‌تصادف، انتخاب‌می‌کنیم‌وآن‌رانام‌می‌بریم. چندواحدآگاهی، دراین‌اطلاع‌وجوددارد؟

*

۳. اکنون فرض می‌کنیم، تعداد زیادی (N) اطلاع دربارهٔ انجام آزمایش‌های یکسانی دراختیار داشته باشیم‌ـمثلاً ۱۰۰۰۰۰ اطلاع دربارهٔ ۱۰۰۰۰۰ آزمایش دربارهٔ بیرون آوردن گلوله از جعبه‌ای که شامل یك گلولهٔ قرمز و۷ گلولهٔ سفید است و هراطلاع مربوط به‌رنگ گلوله باشد (گلوله را، بعد از بیرون آوردن از جعبه، دوباره به‌آن برگردانده‌ایم.)

فرض کنید که به‌معیارآگاهی (مقدارواحدهای آگاهی) درهراطلاع جداگانه کاری‌نداشته‌باشیم، بلکه‌بخواهیم بدانیم که، به‌طور‌متوسط، چندواحدآگاهی، درهراطلاع وجود دارد.

ابتدا، این «آگاهی متوسط» را درمثال مشخص خود، پیدا می‌کنیم.

احتمال آمدن گلولهٔ قرمز برابر $\frac{1}{8}$ واحتمال آمدن گلولهٔ سفید برابر $\frac{7}{8}$ است.

اطلاع، به‌دو صورت می‌تواند باشد:

S_1 «گلولهٔ قرمز درآمده است» $\left(\text{با احتمال } p_1=\frac{1}{8}\right)$؛

S_2: «گلولهٔ سفید در آمده است» $\left(\text{با احتمال } p_2=\frac{7}{8}\right)$.

معیارآگاهی در هریك ازاین دواطلاع برابراست با

$$log_2\frac{1}{p_1}=log_2 8=3;\quad log_2\frac{1}{p_2}=3-log_2 7=3-\frac{lg7}{lg2}\approx$$

$$\approx 3-\frac{0/845}{0/301}\approx 0/2$$

اگر اطلاع S_1 را n_1 بار و اطلاع S_2 را n_2 بار داده باشند $(n_1+n_2=N=100000)$، آن‌وقت، مقدارآگاهی‌دریك اطلاع، به‌طور متوسط، برابراست با

$$\frac{n_1.log\frac{1}{p_1}+n_2.log\frac{1}{p_2}}{N}=\frac{n_1}{N}log\frac{1}{p_1}+\frac{n_2}{N}log\frac{1}{p_2}$$

ولی، وقتی که N عددی بزرگ باشد، به‌تقریب داریم:

$$\frac{n_1}{N}\approx p_1=\frac{1}{8};\quad \frac{n_2}{N}\approx p_2=\frac{7}{8}$$

بنابراین، در هراطلاع، به‌طور متوسط، به‌تقریب

$$\frac{1}{8}log 8+\frac{7}{8}log\frac{8}{7}\approx 0/55$$

واحدآگاهی وجود دارد (هرچه N بزرگتر باشد، این نتیجه، دقیق‌تر است).

درحالت کلی هم، می‌توان بـه‌همین‌ترتیب، استدلال کرد. فرض کنید، آزمایش α، بتوانـد چند(k) نتیجهٔ مستقل A_1، A_2،...، A_k، بـه‌ترتیب، با احتمال‌های p_1، p_2،...، p_k داشته‌باشد. فرض کنید، N اطلاع دربارهٔ نتیجهٔ این آزمایش‌ها، داده باشند:

n_1 بار، اطلاع

S_1: «نتیجهٔ A_1 به‌دست آمده است»؛

n_2 بار اطلاع

S_2: «نتیجهٔ A_2 به‌دست آمده است»؛

وبالاخره، n_k بار اطلاع

S_k: «نتیجهٔ A_k به‌دست‌آمده است».

«آگاهی جزئی»، درهریك ازاین اطلاع‌ها، به‌ترتیب، چنین‌اند:

$$\log\frac{1}{p_1},\ \log\frac{1}{p_2},\ldots,\log\frac{1}{p_k}$$

وبه‌طورمتوسط، درهراطلاع، به‌اندازهٔ

$$\frac{n_1\log\frac{1}{p_1}+n_2\log\frac{1}{p_2}+\ldots+n_k\log\frac{1}{p_k}}{N}=$$

$$=\frac{n_1}{N}\log\frac{1}{p_1}+\frac{n_2}{N}\log\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{n_k}{N}\log\frac{1}{p_k}$$

واحد آگاهی وجود دارد.

عدد $H(\alpha)$، که با دستور

$$H(\alpha)=p_1\log\frac{1}{p_1}+\ldots+p_k\log\frac{1}{p_k}=\sum_{i=1}^{k}p_i\log\frac{1}{p_i} \qquad (1)$$

معین می‌شود، آنتروپی (کهولت) آزمایش α نامیده می‌شود. این عدد، نشان می‌دهد که در هر اطلاع مربوط بـه نتیجهٔ آزمایش α، به‌طور متوسط، چند واحد آگاهی وجود دارد، به شرطی کـه، این اطلاع‌ها، خیلی زیاد باشند. به‌جای واژهٔ «آنتروپی»، «آگاهی متوسط» یا به‌طورخلاصه «آگاهی» ناشی از تجربه هم می‌گویند. وهمین مقدار، ونـه آگاهی جزئی مربوط به تجربه

است که، درعمل، اهمیت زیادی دارد.

۴. آنتروپی، خصلت «نامعین بودن» تجربه را مشخص می‌کند. مطلب را روشن‌تر کنیم.

فرض کنید، کسی باید نتیجهٔ تجربه‌ای را به دیگری اطلاع دهد. مثلاً، باید سکه‌ای را پرتاب، ونتیجه را اعلام کند. این آزمایش، تا قبل ازانجام آن، نوعی ابهام دارد (مفهوم‌نیست: چه‌حالتی پیش‌می‌آید). درموردآزمایشی هم که بیش ازدوحالت دارد (وماآن را، آزمایش α می‌نامیم)، وضع به‌همین گونه است. چه درموردی که نتیجه‌ها، احتمالی برابرداشته باشند وچه وقتی که نتیجه‌های A_1، A_2،...، A_k، به ترتیب، با احتمال‌های p_1، p_2،...، p_k تحقق یابند. این ابهام یا «نامعین بودن» را باید، به‌کمك یك عدد، مشخص کرد: این‌عدد را می‌توان معیار نامعین بودن نامید.

شرطهایی را، که بـه طور طبیعی، برای بیان معیار نامعین بودن لازم است، مورد توجه قراردهیم.

۱) اگر نتیجهٔ تجربه معلوم باشد (بـه‌زبان دیگر، احتمال این نتیجه، برابرواحـد باشد)، هیچ گونـه ابهامی درآزمایش وجود ندارد؛ دراین‌جا، معیار نامعین بودن یا میزان ابهام برابراست بـا صفر. اگر احتمال یکی از نتیجه‌های آزمایش، اختلاف کمی بـا واحد داشته باشد(که در این صورت، احتمال بقیهٔ نتیجه‌ها، نزدیك به‌صفر است)، آن‌وقت ابهام (یا نامعین بودن) تجربه، باید اختلاف کمی با صفر داشته باشد. مثلاً میزان ابهام این مشاهده که «اسب، جو می‌خورد»، برابر است با صفر.

۲) دوآزمایش درنظر می‌گیریم.

آزمایش شمارهٔ ۱. از مجموعه‌ای لامپ، که درآن، ۹۹ لامپ سالم و ۱ لامپ سوخته وجود دارد، یکی را به تصادف انتخاب و به سرپیچ برق وصل می‌کنیم (سرپیچ سالم است). نتیجه: اطلاع داده می‌شود: لامپ روشن می‌شود یا سوخته است.

آزمایش شمارهٔ ۲. ازمجموعهٔ دیگری، که شامل ۵۰ لامپ سالم و ۵۰ لامپ سوخته است، یکی‌را انتخاب می‌کنیم وبه برق وصل می‌کنیم. اطلاع داده می‌شود که لامپ روشن می‌شود یانه.

درحالت اول، «ابهام» زیاد نیست: تقریباً می‌توان اطمینان داشت که لامپ‌روشن می‌شود[1]؛ درحالی‌که، درحالت دوم، ابهام (یعنی میزان نامعینی) بیشتر است.

همین وضع برای موردهایی هم‌که باسه نوع نتیجه، چهار نوع نتیجه یا بیشتر سروکار داریم، درست است: ازقبل می‌توان متوجه شدکه، بیشترین ابهام، درجایی وجود داردکه، از قبل نمی‌توانیم، برای نتیجه‌ای دربرابر نتیجهٔ دیگر، رجحانی قایل شویم (همهٔ نتیجه‌ها، احتمالی برابردارند).

۳) گاهی پیش می‌آیدکه در آزمایش α، دوآزمایش مستقل[2] β و α وجوددارد. مثلاً، آزمایش α، چنین است: «از ۲ فروردین (شنبه) تا ۹خرداد (جمعه) ۱۳۶۵ شمسی، یك روز را انتخاب‌کنید». این آزمایش را، می‌توان همچون آزمایش «مرکبی» درنظر گرفت‌که منجر به دو آزمایش مشترك زیر می‌شود:

آزمایش β: «از ۱۰ هفتهٔ اول سال ۱۳۶۵، یکی را انتخاب‌کنید» (از دوم فروردین تا نهم خرداد، درست ۱۰ هفته می‌شود).

آزمایش α: «یکی ازروزهای هفته (شنبه، یکشنبه وغیره) را انتخاب کنید».

درچنین موردهایی، معمولاً، می‌نویسد.

$$\alpha=\beta\cdot\gamma$$

طبیعی است‌که، میزان ابهام تمامی‌آزمایش مرکب α را، «مجموع» ابهام‌های دوآزمایش β و α، به‌حساب می‌آورند.

می‌توان ثابت‌کردکه، همهٔ این شرط‌ها، با مفهوم‌آنتروپی، سازگارند. به‌همین مناسبت، می‌توان‌آنتروپی را، به‌عنوان میزان ابهام (یامعیار نامعین بودن) تجربه حساب آورد.

توجه‌کنیم: درحالتی‌که‌همهٔ نتیجه‌های A_1، A_2،...،A_k، امکانی برابر

---

۱. به‌زبان دقیق‌تر: اگر آزمایش را، بارها وبارها، تکرارکنیم، لامپ در حالت‌های بسیار زیادی روشن می‌شود.

۲. مستقل بودن دوآزمایش، به‌معنای‌آن است‌که‌نتیجهٔ آزمایش اول، براحتمال نتیجهٔ آزمایش دوم، تأثیر نگذارد.

داشته باشند($p_1=p_2=\dots=p_k=\frac{1}{k}$)، آن وقت، آنتروپی آزمایش و آگاهی جزئی‌که از یك نتیجهٔ A_i به‌دست می‌آید، باهم برابرند (هردو، با عدد $\log k$ بیان می‌شوند).

دردستور آنتروپی (۱)، مبنای لگاریتم‌ها را، می‌توان، هرعدد ثابتی گرفت. شه‌نون، این لگاریتم‌ها را، درمبنای ۲، درنظر گرفت.

۵. نمونهٔ ساده‌ای از محاسبهٔ آنتروپی، می‌آوریم.

فرض‌کنیم، آزمایش α، عبارت باشد ازانداختن سکه ویادداشت این نتیجه‌که: شیرآمده‌است‌یاخط. احتمال‌هریك‌ازاین‌نتیجه‌ها، برابر است با $\frac{1}{2}$.

بنابراین

$$H(\alpha)=\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2 2=1$$

به‌زبان‌دیگر، این‌تجربه، ابهامی به‌اندازه۱واحد، درخوددارد.روشن‌است‌که، در مورد هرآزمایشی‌که شامل دوامکان بااحتمال‌های برابر باشد، می‌توان به همین نتیجه رسید.

واحدآنتروپی را بیت می‌نامند (bit، ازحرف‌های اول وآخرعبارت انگلیسی «binory unit» به‌معنای «واحد دودویی» انتخاب شده است). می‌توان گفت‌که: ۱ بیت عبارت است ازآنتروپی آزمایشی‌که تشکیل شده است ازانتخاب یکی ازدوحالت با احتمال برابر.

به‌چند مساله بپردازیم:

۵۹. a) بچه‌های متولد سال‌های ۱۳۵۰ تا ۱۳۵۲ را در یك اردوی بزرگ ورزشی جمع‌کرده‌اند. ازدوبچه، که به‌تصادف باآن‌ها برخورده‌اند، می‌پرسند: آیا در اول اردیبهشت به‌دنیا آمده‌اند؟ یکی پاسخ می‌دهد «بله» و دیگری «نه». هریك ازاین پاسخ‌ها، شامل چند واحد آگاهی است؟

b) آزمایش چنین است: به‌نخستین دانش‌آموزی‌که برمی‌خوریم، می‌پرسیم‌که: آیا دراول اردیبهشت متولد شده است؟ آنتروپی این آزمایش چیست؟

۶۰. بادوستتان قرارمی گذارید که، به‌تصادف از کتاب الفبای شمارهٔ ۱، حرفی‌را انتخاب کنیدو، بعد، حرف‌دیگری را، بازهم به‌تصادف، از کتاب الفبای شمارهٔ ۲ انتخاب کند. او، نتیجه را روی‌کاغذ می‌نویسد ــ اول حرف کتاب شمارهٔ ۱ وسپس حرف کتاب شمارهٔ ۲ ــ و به شما می‌دهد. نوشتهٔ او، چنین بود: آن. دراین اطلاع، چند «بیت» وجوددارد؟ (تعداد حرف‌های الفبا را، ۳۲ بگیرید).

۶۱. به‌وسیلهٔ تلگراف، باید ۱۰ حرف مخابره‌کرد. احتمال وجود هر یك از حرفهای الفبا، درجای اول، باهم برابراست؛ به همین ترتیب، برای جای دوم، سوم وغیره. وقتی تلگراف مخابره‌شد، چند «بیت» آگاهی به‌دست می‌آید؟

۶۲. با دوستتان قرار می‌گذارید، سکه‌های ۱۰ ریالی و ۵ ریالی را بیندازد ونتیجه را بنویسید: «دوبارشیر»، «دوبار خط»، «یك‌بار شیر، یك‌بار خط». چند «بیت» آگاهی درهریك ازنوشته‌ها وجود دارد؟ آگاهی متوسط، دراین تجربه، چقدر است؟

۶۳. با انداختن ده ریالی وپنج ریالی، یکی ازچهاربیان را خواهید داشت:

«ش‌خ» (به‌این معناکه: «ده‌ریالی، شیر و۵ ریالی، خط‌آمده است»)؛ «خ‌ش» (ده‌ریالی، خط وپنج ریالی، شیر)؛ «ش‌ش» («شیر و شیر»)؛ «خ‌خ» (در هردوحالت، خط). هرکدام ازاین اطلاع‌ها، شامل چند «بیت» است؟ آنتروپی آزمایش مفروض، چقدراست؟

۶۴. از۱۶ مهرهٔ سفید شطرنج، یکی‌را به‌تصادف انتخاب‌کنید ونتیجه را اطلاع دهید. چند واحد آگاهی، در این اطلاع‌ها وجود دارد: «مهرهٔ انتخابی،سربازاست»؛ «مهرهٔ انتخابی، شاه‌است»؛ «مهرهٔ انتخابی، رخ‌است»؟ آگاهی متوسط (آنتروپی) این آزمایش چقدر است؟

*

وسیله یا محیطی که برای اطلاع آگاهی مورد استفاده قرار می گیرد، کانال ارتباطی نامیده می‌شود. مثلاً تلفن، تلگراف، عصب، نامهٔ‌پستی، هوا (برای رساندن سخن شفاهی) وغیره،کانال ارتباطی هستند.

آگاهی، همیشه به‌صورت نوعی علامت، به وسیلهٔ کانال ارتباطی، داده‌می‌شود: به‌صورت خط‌ونقطه (درتلگراف)، به‌صورت‌حرف‌ها (درنامه)، به‌صورت نوعی موج‌های صوتی هوا (در مکالمهٔ شفاهی). ضمن دادن خبر به وسیلهٔ کانال ارتباطی، آگاهی‌ها قبلاً کدبندی می‌شوند، یعنی به‌کمك علامت‌هایی که مناسب این‌کانال است، نشان داده می‌شوند. مثلاً، برای دادن یك‌اطلاع، به‌وسیلهٔ‌تلگراف، ابتدا باید حرف‌های‌آگاهی مربوط‌را، به‌صورت زنجیری از تحریك‌های‌الکتریکی، کدبندی‌کرد. نمی‌توان، شرط را براین گذاشت که، هرتحریك الکتریکی، معنای۱ وعدم وجودآن، به‌معنای ۰ باشد. بنابراین،کد هرحرف، به صورت دنباله‌ای از چند واحد و صفر در می‌آید: ۱۰۰۰۱، ۱۱۱۱۱ وغیره. معمولاً، همهٔ حرف‌ها را، باتعداد مشخصی رقم (پنج رقم) نشان می‌دهند. ولی، می‌توان کدهایی را در نظر گرفت که، برای حرف‌های مختلف، ازتعداد مختلفی رقم استفاده شود، مثلاً برای «آ» ۱۱ و برای «ی» ۱۰۰۰۱. حداکثر مقدارآگاهی راکه بتوان، در واحد زمان، از کانالی عبور داد، توانائی عبور کانال ارتباطی می‌نامند. مثلاً، توانائی عبور خط تلگراف، عبارت از حداکثر تعداد حرف‌هایی‌که بتوان، در واحد زمان (یعنی: دریك ساعت)، به‌وسیلهٔ این خط، مخابره‌کرد.

دراین مورد، مسالهٔ عملی مهمی پیش می‌آید: کد را برای حرف‌های جداگانه، چگونه باید انتخاب کرد تا مخابرهٔ صدها حرف، وقت‌کمتری را بگیرد؟ آیا بهتراست، به‌جای‌حرف‌ها، هجاها راکدبندی‌کنیم؟ آیا نمی‌شود، اطلاع را مخابره‌کرد، بدون این‌که از بعضی حرف‌ها استفاده‌کنیم؟

نظریهٔ آگاهی‌ها (یا تئوری انفورماسیون)، با موفقیت، به چنین پرسش‌هایی، پاسخ می‌دهد.

پاسخ تمرین‌های متن را، در صفحهٔ ۴۸۶ ببینید

> اگر می‌خواهید شنا یادبگیرید، با شجاعت واردآب شوید واگر می‌خواهید روش حل مساله‌ها را یاد بگیرید، آن‌ها را حل کنید
>
> ژرژ پولیا

چند قاعده، برای محاسبهٔ ذهنی

۱. ضرب دوعددی که بین ۱۰ و ۲۰ قرار دارند.

یکی‌از عددها را بایکان عدد دیگر جمع کنید، سپس یك صفر درسمت راست آن قرار دهید و حاصل‌ضرب یکان‌های دوعدد را به‌آن اضافه کنید.

مثال‌اول. می‌خواهیم حاصل‌ضرب ۱۷ × ۱۳ رامحاسبه کنیم. در ذهن خود، به‌ترتیب، حساب می‌کنیم:

۱۳ + ۷ = ۲۰ ،

۳ × ۷ = ۲۱ ،

۲۰۰ + ۲۱ = ۲۲۱ = ده‌برابر ۲۰ + ۲۱

مثال دوم. ۱۹ × ۱۴ :

۱۹ + ۴ = ۲۳ ،

۴ × ۹ = ۳۶ ،

۲۳۰ + ۳۶ = ۲۶۶ = ده‌برابر ۲۳ + ۳۶

دلیل این عمل‌ها را می‌توان به‌سادگی روشن کرد. اگر عددهای بین ۱۰ و ۲۰ را $10+a$ و $10+b$ بگیریم، داریم:

$$(10+a)(10+b)=100+10(a+b)+ab=$$
$$=10[(10+a)+b]+ab$$

۲. مجذور یك عدد دو رقمی که به ۵ ختم شده است.

رقم دهگان را درعددی که یك واحد ازآن بیشتر است ضرب کنید و درسمت راست آن، ۲۵ را قرار دهید.

مثال. ضرب ۸۵ × ۸۵.

اگر ۸ (یعنی رقم دهگان) را در ۹ (عددی که یك واحد از ۸ بیشتر است) ضرب کنیم، به‌دست می‌آید: ۷۲. اکنون خواهیم داشت:

۸۵ × ۸۵ = ۷۲۲۵

این قاعده، برای عددهای سه‌رقمی ویا بزرگتراز آن‌هم درست است. مثلاً،

برای محاسبهٔ ۱۵۵ × ۱۵۵ داریم:

۱۵ × ۱۶ = ۲۴۰

(برای ضرب هرعدد در ۱۵ ، ابتدا آن‌را بانصف خودش جمع کنید وسپس ده‌برابر کنید). بنابراین

۱۵۵ × ۱۵۵ = ۲۴۰۲۵

دلیل این ضرب، از اتحاد زیر روشن است:

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=$$
$$=100[a(a+1)]+25$$

۳. ضرب دوعددی‌که دهگان آن‌ها برابر ۹ باشد.

اگرتفاوت هریك از دوعدد را تا ۱۰۰، متمم آن‌عددبنامیم، آن‌وقت، دو رقم سمت راست حاصل‌ضرب، عبارت است از حاصل‌ضرب دو متمم. برای پیداکردن دورقم سمت چپ حاصل‌ضرب، کافی است متمم یك‌عدد را از عدد دیگر کم کنیم.

مثال. می‌خواهیم حاصل‌ضرب‌دوعدد ۹۸ و ۹۶ راپیداکنیم. متمم‌های دوعدد عبارتنداز ۲ و ۴ و حاصل‌ضرب آن ۸. بنابراین، دو رقم سمت‌راست حاصل‌ضرب برابر است‌با ۰۸ . اگرمتمم را از دیگری کم کنیم ۹۴ به‌دست می‌آید، درنتیجه

۹۸ × ۹۶ = ۹۴۰۸

استدلال. اگر متمم‌های دوعدد (یعنی اختلاف آن‌ها را با ۱۰۰) a و b بنامیم (a و b، یك رقمی‌اند)، می‌توان دوعدد رابه‌صورت $100-a$ و $100-b$ درنظرگرفت. دراین‌صورت، داریم:

$$(100-a)(100-b)=10000-100(a+b)+ab=$$
$$=100[(100-a)-b]+ab$$

۴. ضرب دوعدد دورقمی‌که به ۵ ختم شده باشند.

حالت اول، وقتی که مجموع رقم‌های دهگان، عددی زوج باشد. دراین‌حالت، نصف مجموع رقم‌های دهگان را به حاصل‌ضرب آن‌ها اضافه کنید و درسمت راست حاصل، ۲۵ را قرار دهید.

مثال. ۷۵ × ۹۵. به‌ترتیب داریم:

$$۹ \times ۷ = ۶۳ ،$$

$$\frac{۱}{۲}(۹+۷) = ۸ ، \qquad ۶۳+۸ = ۷۱$$

و بنابراین

$$۹۵ \times ۷۵ = ۷۱۲۵$$

حالت دوم، وقتی که مجموع دورقم دهگان، عددی فرد باشد. دراین حالت، ابتدا از مجموع رقم‌های دهگان یك واحد کم کنید و، سپس، نصف آن‌را بـه حاصل‌ضرب دورقم دهگان اضافه کنید و درسمت راست آن ۷۵ بگذارید.

مثال. ۳۵ × ۸۵ . به‌ترتیب داریم:

$$۸ \times ۳ = ۲۴ ،$$

$$\frac{۱}{۲}[(۸+۳)-۱] = ۵ ، \qquad ۲۴+۵ = ۲۹$$

و بنابراین

$$۸۵ \times ۳۵ = ۲۹۷۵$$

دلیل این عمل‌ها را خودتان پیدا کنید.

۵. چند قاعدهٔ ساده برای ضرب‌های ذهنی:

ـ برای این‌که عـددی را در ۲۵ ضرب کنید، صدبرابر آن‌را بر ۴ تقسیم کنید.

ـ برای این‌که عددی را در ۱۲۵ ضرب کنید، هزار برابر آن‌را بر ۸ تقسیم کنید.

روشن است که عکس این دوعمل‌هم درست است، یعنی

ـ برای تقسیم یـك عدد بر ۲۵ ، چهار برابر آن‌را بر ۱۰۰ تقسیم کنید.

ـ برای تقسیم یك عدد بر ۱۲۵ ، هشت برابر آن‌را بر ۱۰۰۰ تقسیم کنید.

ـ برای ضرب عددی در۱۵، ابتدا آن‌را ده‌برابر کنید وسپس بانصف آن جمع کنید.

برای تقسیم یك عدد بر ۱۵ ، $\frac{۲}{۳}$ آن‌را بر ۱۰ تقسیم کنید.

ـ برای ضرب دوعددی که از یك عدد ساده (کـه می‌توانید مجذور آن‌را پیدا کنید) هم‌فاصله باشند، از اتحاد معروف زیر استفاده کنید:

$$(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$$

مثلاً ، برای ضرب دوعدد ۵۳ و ۴۷ ، ازآن‌جا که یکی ۳ واحد از ۵۰ بیشتر و دیگری ۳ واحد از ۵۰ کمتراست، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$۵۳ \times ۴۷ = ۵۰^۲ - ۳^۲ = ۲۵۰۰ - ۹ = ۲۴۹۱$$

ویا مثلاً

$$۱۰۶ \times ۱۰۴ = ۱۰۵^۲ - ۱^۲ = ۱۱۰۲۵ - ۱ = ۱۱۰۲۴$$

ـ برای‌محاسبهٔ ذهنی مجذور عددها (به‌خصوص، اگر دورقمی‌باشند)، می‌توانید از این دواتحاد استفاده کنید:

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ ،$$

$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

مثال ۱. محاسبهٔ ۷۸ × ۷۸.

$$۷۸ + ۷۸ = ۸۰^۲ - ۲ \times ۸۰ \times ۲ + ۲^۲ =$$

$$= ۶۴۰۰ - ۳۲۰ + ۴ = ۶۰۸۴$$

مثال ۲. محاسبهٔ ۶۲ × ۶۲.

$$۶۲ \times ۶۲ = ۶۰^۲ + ۲ \times ۶۰ \times ۲ + ۲^۲ =$$

$$= ۳۶۰۰ + ۲۴۰ + ۴ = ۳۸۴۴$$

> ریاضیات هم‌دوره‌های پیشرفت وهم دوره‌های سکـون داشته است: «بدون هیچ‌دلیل روشنی، بعضی ازدوره‌ها از نظر ریاضیات بی‌ثمربوده است؛ که ازآن جملـه می‌توان ده‌سالـهٔ ۱۷۸۵–۱۷۹۵ را دانست، وقتی که لاگرانژهم به این اندیشه رسیده بودکه دوران تعالی ریاضیات به‌سرآمده است.»
>
> ژ. دیودونه مقالهٔ دربارهٔ روند ریاضیات

ارشمیدس از زبان دیگران

با آنکه مقدار زیادی از نوشته‌های ارشمیدس به‌دست ما رسیده ولی از زندگی او اطلاعات جامعی نداریم. هراکلیدهم شرح‌حالی از ارشمیدس نوشته بود که آن‌هم متاسفانه مفقود گردیده. بنابراین برای مطالعه در زندگی ارشمیدس باید ازمنابع بسیار قدیم که اکثراً به‌علت قدمت آنها دراصالتشان تردید هست استفاده نمود.

آنچه از نوشته چت‌ذس اهل بیزانس برمی‌آید، مرگ ارشمیدس درپائیز درسیراکیوس درسن ۷۵ سالگی اتفاق‌افتاده و تولد او در ۲۸۷ قبل‌از میلاد حدس زده شده است.

به‌موجب نظر دیودودوس مورخ یونانی، ارشمیدس ریاضیات را در الکساندریا آموخت.

بنابرنظر پاپوس، ارشمیدس کتابی دربارهٔ مکانیك و ساختن کره نوشته است.

سی‌سرو نظر داشت که ارشمیدس دستگاهی ساخته بود که حرکت زمین، ماه و خورشید را نشان می‌داد. (و او اظهار داشته که آن، ماکت منظومهٔ شمسی بوده است).

لوسیان اظهار داشته‌که ارشمیدس با ابداع آئینه‌های مقعر و تنظیم آنها روی‌کشتی‌های رومیان آنها را به‌آتش‌کشیده است و این آئینه‌ها را آتش‌افروز نامیده.

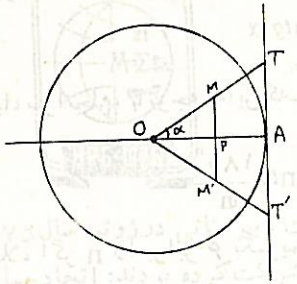
بطلمیوس نوشته است‌که ارشمیدس دستگاه‌های رصدیابی بسیاری اختراع نموده است.

ماکروبیوس فیلسوف رومی می‌گوید که ارشمیدس فاصلهٔ ستارگان وکرات بسیاری را محاسبه نموده است.

در کتاب تاریخ معماری نوشتهٔ وتیرودیوس آمده است که ارشمیدس برهنه درخیابان می‌دوید و فریاد می‌زد «EUREKA» «یافتم». این«یافتم»

محاسبه عدد π

با توجه به‌شکل روشن است:



$$|MM'| = 2\sin a, |TT'| = 2tg\,\alpha$$

(شعاع دایره را واحد گرفته‌ایم). اگر $|MM'|$ ضلع n ضلعی‌منتظم‌محاطی باشد، $|TT'|$ ضلع n ضلعی‌منتظم محیطی‌خواهد شد ودرنتیجه داریم:

$$p_n = 2n\sin\alpha, \quad p'_n = 2n\,tg\,\alpha$$

(p'_n, p_n به‌ترتیب محیط n ضلعی‌های منتظم محاطی ومحیطی است).

همان یافتن قوانین اجسام غوطه‌ور درمایعات است این مطلب را اغلب شاگردان مدرسه می‌دانند.

پاپوس درجای دیگری‌داستان مشهورارشمیدس را چنین بیان‌می‌کند، «پس‌ازآنکه ارشمیدس مساله جابجاکردن اجسام را به‌کمك نیرو حل نمود (قوانین اهرم)، پیروزمندانه گفت «نقطهٔ اتکائی بدهیدکه روی آن بایستم تا زمین را ازجایش حرکت دهم»

پلوتارخ داستان غم‌انگیز مرگ ارشمیدس را اینگونه شرح می‌دهد.

«پایان‌ناخوش‌آیند برزندگی‌دانشمندی بزرگ بوسیله فردی‌کوچك»

این داستان درضمن شرح‌حال مارسلوس آمده، مارسلوس ارتشبد رومی بودکه قصد تصرف سیراکیوس را داشت، مدت دوسال محاصرهٔ این شهر طول‌کشیده بود، مقاومت شهر بیش‌از حد انتظار بود، زیرا ارشمیدس برای دفاع شهر ماشین‌های جنگی و اسلحه‌هائی طراحی کرده بود. که این محاصره را به‌درازا کشانید. باتوجه به‌علاقهٔ وافری‌که پلوتارخ نسبت به مارسلوس داشت: برسخنان او صحه می‌گذاشت.

از قول مارسلوس می‌گویدکه او به‌طور مبهم و کلی بخاطر می‌آورد که ارشمیدس بوسیله یکی‌از سربازانش کشته شده است.

ایرج ادیبی

ازطرف دیگرروشن است که

$$\sin\alpha < \widehat{AM} < tg\alpha$$

اگر همهٔ جمله‌های این نابرابری‌ها را درمقدارمثبت $2n$ ضرب کنیم:

$$2n\sin\alpha < 2\pi < 2n\,tg\,\alpha$$

ویا، سرانجام، باتوجه به‌این که $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ ، خواهیم داشت :

$$n\sin\frac{180^\circ}{n} < \pi < n\,tg\frac{180^\circ}{n}$$

مثلا، اگر n را برابر ۶ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3/46$$

یعنی، مقدار درست عدد π، برابر است با ۳.

روشن است که اگر n را عددهای بزرگتری بگیریم، به‌همین ترتیب، می‌توانیم، باتوجه به‌رقم‌های مشترك دو طرف نابرابری‌ها، مقدار π را تا هرچند رقم دلخواه به‌دست آوریم:

مثلا به ازای $n = 60$ به‌دست می‌آید:

$$60\sin 3^\circ < \pi < 60\,tg\,3^\circ$$

ویا

$$3/1404\ldots < \pi < 3/144\ldots$$

وبنابراین

$$\pi = 3/14\ldots$$

این شیوهٔ محاسبهٔ عدد π ــ یعنی انتخاب چندضلعی‌های منتظم محاطی ومحیطی به‌جای دایره وافزایش تعداد ضلع‌های آن‌ها ــ همان شیوه‌ای است که غیاث‌الدین جمشیدکاشانی‌هم، مورد استفاده قرارداد وبه‌کمك آن‌توانست برای نخستین‌بار، عدد π را تا ۱۹رقم اعشار محاسبه‌کند. ارشمیدس‌هم با محاسبهٔ محیط ۹۶ضلعی‌های منتظم محاطی ومحیطی به‌دست‌آورد:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

مسأله‌های مسابقه‌ای

هفدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضیات دبیرستانی درژوئیه سال۱۹۷۵ در بلغارستان برگزار شد. ۱۷ کشوردرآن شرکت‌کرده بودند: اتحادجماهیر شوروی، اطریش، امریکا ، انگلستان، بلغارستان، جمهوری دمکراتیك آلمان، چکوسلواکی، رومانی، سوئد، فرانسه، لهستان، مجارستان، مغولستان، ویتنام، هلند، یوگسلاوی، یونان. طبق معمول ازهرکشور ۸نفرآمده بودند (درگروه ویتنامی‌ها، یکی ازدانش‌آموزان، به‌خاطربیماری، شرکت نکرده بود)یونان، برای نخستین‌بار در المپیاد شرکت می‌کرد. پرتقال، ترکیه، فنلاند وکوبا، با وجود موافقت، نتوانستند گروه‌های خود را بفرستند.

مسأله‌های هفدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضیات

۱. x_i، y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ را عددهایی‌حقیقی فرض کنید، به‌نحوی که داشته باشیم

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n; \qquad y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$$

ثابت‌کنیدکه اگر z_1، z_2، ...، z_n، تبدیل‌های دلخواهی از عددهای y_1، y_2، ...، y_n باشند، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$$

(چکوسلواکی ــ ۶ امتیاز)

۲. a_1، a_2، a_3، ... را دنبالهٔ نامتناهی دلخواهی از عددهای درست و مثبت فرض کنید، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$a_k < a_{k+1} \quad (k \geqslant 1)$$

ثابت کنید که بی‌نهایت جملهٔ a_m از این دنباله را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$a_m = xa_p + ya_q$$

که در آن، x و y، عددهایی درست و مثبت‌اند و ضمناً $p \neq q$.

(انگلستان ــ ۷ امتیاز)

۳. روی ضلع‌های مثلث غیرمشخص ABC و در خارج آن (در صفحهٔ ABC)، مثلث‌های BPC، CQA و ARB را ساخته‌ایم، به‌نحوی که

$$\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = ۴۵^\circ,$$

$$\widehat{BCP} = \widehat{QCA} = ۳۰^\circ,$$

$$\widehat{ABR} = \widehat{BAR} = ۱۵^\circ$$

ثابت کنید:

$$\widehat{QRP} = ۹۰^\circ \text{ و } |QR| = |RP|$$

(هلند ــ ۷ امتیاز)

۴. مجموع رقم‌های عدد ۴۴۴۴۴۴۴۴ را، در دستگاه عددنویسی دهدهی، برابر A و مجموع رقم‌های عدد A را برابر B می‌گیریم (A و B هم، در دستگاه عددنویسی دهدهی نوشته شده‌اند). مطلوب است مجموع رقم‌های عدد B. (اتحاد جماهیر شوروی ــ ۶ امتیاز)

۵. آیا می‌توان روی محیط دایرهٔ به‌شعاع واحد، ۱۹۷۵ نقطه طوری قرار داد که طول وترهایی که دو به دوی این نقطه‌ها را به‌هم وصل می‌کنند، با عددهای گویا بیان شوند؟ (اتحاد جماهیر شوروی ــ ۶ امتیاز)

۶. همهٔ چندجمله‌ای‌های P را، نسبت به دو متغیر، طوری پیدا کنید که با ویژگی‌های زیر سازگار باشند:

۱) P، یك چندجمله‌ای همگن درجهٔ n است، یعنی برای همهٔ عددهای حقیقی t، x و y داشته باشیم:

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y)$$

۲) برای همهٔ عددهای حقیقی a، b و c و m داشته باشیم:

$$P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0$$

۳) $P(1, 0) = 1$.

(انگلستان ــ ۸ امتیاز)

چند مسألهٔ گوناگون

۱. عدد ۹۸۷۶۵۴۳۲۱۰ را بر ۸۶۴۲۰ تقسیم کرده‌ایم، باقی‌ماندهٔ تقسیم را بر ۶۴۲۰ و باقی‌ماندهٔ جدید را بر ۴۲۰ و بالاخره، باقی‌ماندهٔ تقسیم اخیر را بر ۲۰ تقسیم کرده‌ایم. باقی‌ماندهٔ آخرین تقسیم چقدر است؟

۲. به‌ازای چه مقداری از a، معادله‌های

$$6\sin x = a(7 + \cos 2x),$$

$$3a\sin x - 8 = a(4 + \sin 3x)$$

دارای ریشهٔ مشترك هستند؟

۳. ثابت کنید:

$$\log_{17} 71 > \sqrt[7]{17}$$

۴. در جمع زیر، مقدارهای a، b، c و d را پیدا کنید:

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d\ + \\ a\ b\ c \\ a\ b \\ a \\ \hline 4\ 3\ 2\ 1 \end{array}$$

۵. رقم‌های x، y و z را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\frac{1}{x+y+z} = 0/xyz$$

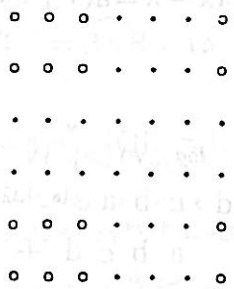
۶. ثابت کنید: $tg\,55^\circ > 1/4$.

حل این مساله‌ها را در صفحهٔ ۴۹۷ ببینید

روش ماتریسی برای حل مسأله‌های منطقی

منظور، طرح چنان مسأله‌هایی از منطق است که حل آن‌ها، برای هر دانش‌آموزی، در هر سن، ممکن باشد. روشی راکه، برای حل، در این‌جا شرح می‌دهیم، موجب‌افزایش‌علاقهٔ دانش‌آموزان به‌استدلال می‌شودو کشش آن‌هارا به‌سمت آشنایی با دیگرشیوه‌های‌کاربرد ماتریس زیادتر می‌کند.

ماتریسی شامل n سطر و n ستون در نظر می‌گیریم:

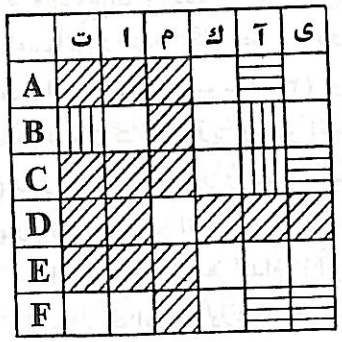


هر امتدادی روی سطر یا ستون را «ورودی» می‌نامیم. برای ماتریس‌مفروض ما، ۴ ورودی وجود دارد: از بالا، از پایین، ازچپ و ازراست. عضوی از ماتریس راکه بتوان ازهر ورودی به‌آن رسید، مشترك، و درغیر این‌صورت، غیرمشترك می‌نامیم. کاربرد روش ماتریسی را، روی مثال مشخصی نشان می‌دهیم. عضوها یا عنصرهای غیرمشترك را با هاشور نشان داده‌ایم.

مسألهٔ ۱. در اتوبوسی‌که ازتهران به‌طرف کرمان حرکت می‌کرد، ۶ نفرکه حرف اول نام‌های فامیل آن‌ها را A، B، C، D، E و F می‌نامیم حرکت‌کردند. این‌ها اهل شهرهای تهران، اصفهان، مشهد، کرمان، آبادان و یزد بودند. می‌دانیم: ۱) A وتهرانی پزشك، E واصفهانی‌معلم، C ومشهدی مهندس‌اند؛ ۲) کرمانی، B و F خدمت سربازی را انجام داده‌اند، ولی مشهدی هرگزدر ارتش نبوده است؛ ۳) آبادانی از A ویزدی از C بزرگتر است وF جوان‌ترین‌افراد می‌باشد؛ ۴) B وتهرانی دراصفهان، وC وآبادانی دریزد از اتوبوس پیاده شدند.

مطلوب است حرف اول فامیل هرمسافر وشغل او.

حل. ماتریسی با دو ورودی می‌سازیم. در یکی ازورودی‌ها، حرف اول محل تولد و در ورودی دیگر حرف اول نام فامیل را می‌گذاریم (شکل ۱).



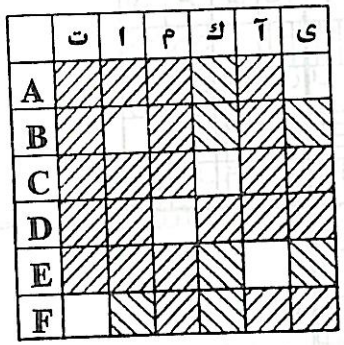
شکل ۱

بنا به شرط ۱)، عنصرهای A ت، E ا، C م، A ا، A م، E ت، E م، C ا و C ت غیرمشترك‌اند.

بنا بر شرط ۲)، عنصرهای غیرمشترك ماتریس عبارت‌اند ازB م و F م.

درستون م، تنهایکی ازخانه‌ها باقی‌مانده است، بنابراین، درسطرD، به‌جز D م، بقیه‌خانه‌ها(عنصرها) غیرمشترك‌اند.

بنا به شرط ۳)، عنصرهای غیرمشترك چنین‌اند: A آ، C ی، F آ، F ی؛ و بنا به‌شرط ۴): B ت، C آ، B آ.



شکل ۲

با توجه به ماتریس ا معلوم می‌شود که همهٔ عنصرهای سطر F، به جز F ت، غیرمشترك‌اند؛ همچنین همهٔ عنصرهای سطر E، به جز E آ، همهٔ عنصرهای سطر B، به جز B ا و همهٔ عنصرهای سطر ۸، به‌جز A ی غیرمشترك‌اند، سرانجام به ماتریس ۲ (شکل ۲) می‌رسیم‌که پاسخ مسأله‌را را به ما می‌دهد.

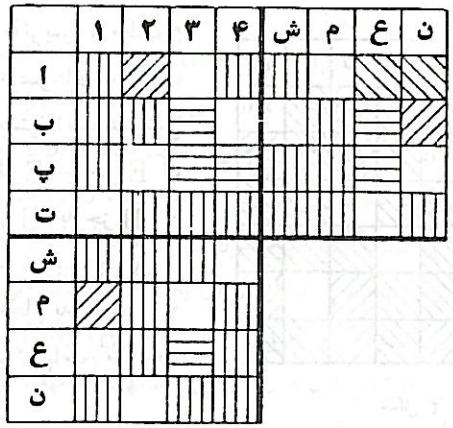
اکنون به‌حل مسأله‌ای می‌پردازیم‌که دارای سه ورودی است.

مسألهٔ ۲. دریك‌اردوی پیشاهنگی، دریکی ازچادرها، اسفندیار، برزو، پرویز و توفیق زندگی می‌کنند. ضمن آشنایی با هم، معلوم شدکه آن‌ها در کلاس مختلف‌دبستان، درس می‌خوانندوهرکدام ازآن‌ها دریکی‌ازانجمن‌های

شطرنج، موسیقی، عکاسی و نقاشی مدرسهٔ خود عضو هستند. ضمناً مـی‌دانیم:
۱) اسفندیار وشاگردکلاس دوم دریك مـدرسه‌اند؛ عضو انجمن موسیقی و شاگردکلاس اول در یك شهر زندگی می‌کنند؛ برزو و عضو انجمن عکاسی دیرتر ازدیگران به‌اردو آمده‌اند. ۲) پرویز وشاگردکلاس چهارم صبح‌زود به‌راه‌پیمائی رفتندوهنگام عصر، برزو وشاگردکلاس چهارم، درشهربه‌پرویز وعضو انجمن نقاشی پیوستند. ۳) توفیق جـوان‌تر از عضو انجمن عکاسی، اسفندیار بزرگتر ازپرویز وعضو انجمن شطرنج بزرگتر از اسفندیار است. ۴) روز جمعه، اسفندیار و عضو انجمن نقاشی مسابقه دادند، شاگـرد کلاس چهارم داور وعضو انجمن عکاسی بیمار بود.

انجمن وکلاس هرکدام ازاین چهار نفررا پیداکنید.

حل. جواب را درشکل ۳ داده‌ایم. درآن‌جا، اسفندیار، برزو، پرویز وتوفیق را، بـه ترتیب، با حـرف‌های ا، ب، پ، ت، عضوهای انجمن‌های شطرنج، موسیقی، عکاسی ونقاشی را، به‌ترتیب، با ش، م، ع، ن وکلاس‌های اول، دوم، سوم وچهارم را، به‌ترتیب، با ۱، ۲، ۳، ۴ نشان داده‌ایم.



شکل ۳

توضیح تفصیلی آن را خودتان پیداکنید.

مثلثات کروی (روش برداری)

علیرضا امیرمعز

دراین مختصر ازحاصلضرب داخلی وبرداری بردارها بهره‌ورمی‌شویم که دو فرمول اصلی مثلث‌های کروی را به‌دست آوریم.

۱ــ زاویه‌ها واضلاع ــ کره‌ای به‌شعاع یك درنظرمی‌گیریم (شکل را ببینید)، اضلاع را a، b و c وزوایا را A، B، C می‌گیریم. ملاحظه‌می‌شود که، مثلا، زاویه A عبارتست‌اززاویهٔ بین دوصفحه OAB و OAC؛ همچنین زوایای دیگررا می‌توان بررسی کرد، دوعمود BM و CN را بر OA فرود می‌آوریم. از این‌رو زاویهٔ A برابر است با زاویهٔ بین دو خط متنافر BM و CN. فرض‌کنیم α، β و γ بردارهائی بـه آغاز O و انجام A، B و C باشد. از این‌رو

$$\mu=\beta-(\beta\cdot\alpha)\alpha \quad \text{و} \quad \nu=\gamma-(\gamma\cdot\alpha)\alpha$$

بردارهائی به‌موازات BM و CN می‌باشند.

ازطرف دیگر می‌توان زاویهٔ A را زاویهٔ بین دوبردار

$$\rho=\alpha\times\beta \quad \text{و} \quad \sigma=\alpha\times\gamma$$

گرفت‌که به‌ترتیب عمود برصفحات OAB و OAC می‌باشند.

۲ــ دستور جیب‌تمام (کسینوس)ــبرای به‌دست‌آوردن $\cos A$، ملاحظه می‌شودکه

$$|\mu|\,|\nu|\cos A=\mu\cdot\nu,$$
$$|\mu|=\sin c \quad \text{و} \quad |\nu|=\sin b.$$

از این‌رو

$$\sin c\sin b\cos A=[\beta-(\beta\cdot\alpha)\alpha]\cdot[\gamma-(\gamma\cdot\alpha)\alpha]=$$
$$=(\beta\cdot\gamma)-۲(\beta\cdot\alpha)(\gamma\cdot\alpha)+(\beta\cdot\alpha)(\gamma\cdot\alpha)(\alpha\cdot\alpha)=$$
$$=(\beta\cdot\gamma)-(\beta\cdot\alpha)(\gamma\cdot\alpha)=\cos a-\cos c\cos b.$$

روش دیگرکاربرد بردارهای ρ و σ است؛ بدین‌معنی که

$$|\rho|\ |\sigma| \cos A = \rho \cdot \sigma.$$

ملاحظه می‌شود که

$$|\rho| = \sin c \quad و \quad |\sigma| = \sin b.$$

در نتیجه

$$\sin c \sin b \cos A = (\alpha \times \beta) \cdot (\alpha \times \gamma) =$$
$$= (\alpha \cdot \alpha)(\beta \cdot \gamma) - (\alpha \cdot \gamma)(\beta \cdot \alpha)$$
$$= \cos a - \cos b \cos c.$$

۳ـ دستور جیب (سینوس) ـ ملاحظه می‌شود که

$$\rho \times \sigma = (\alpha \times \beta) \times (\alpha \times \gamma)$$
$$= [\alpha \cdot (\beta \times \gamma)]\alpha - [\alpha \cdot (\beta \times \alpha)]\gamma =$$
$$= [\alpha \cdot (\beta \times \gamma)]\alpha.$$

چون $\rho \times \sigma$ برداری در امتداد α است، تساوی بالا را می‌توان چنین نوشت

$$[|\rho|\ |\sigma| \sin A]\alpha = [\alpha \cdot (\beta \times \gamma)]\alpha.$$

در نتیجه

$$\sin c \sin b \sin A = \alpha \cdot (\beta \times \gamma)$$

حاصلضرب $\alpha \cdot (\beta \times \gamma)$ را حاصلضرب سه‌لا گویند، قدر مطلق آن برابر حجم چهاروجهی OABC است و

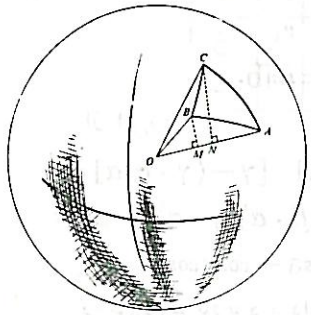
$$\alpha \cdot (\beta \times \gamma) = \beta \cdot (\gamma \times \alpha) = \gamma \cdot (\alpha \times \beta).$$

بنابراین

$$\sin c \sin b \sin A = \sin a \sin c \sin B = \sin b \sin a \sin C.$$

از این تساوی‌ها نتیجه می‌شود که

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$



شگفتی‌های عدد

۱. یك رابطهٔ جالب برگشتی

مثلث‌های زیادی را می‌شناسیم که ضلع‌های آن‌ها، سه‌عدد طبیعی‌متوالی را تشکیل می‌دهند ومساحت‌مثلث هم، عـددی درست است. اگر نخستین این مثلث‌ها را، مثلث به‌ضلع‌های ۱، ۲، و ۳ وبـه مساحت $S = ۰$ بگیریم، بـرای مثلث‌های بعدی، به‌ردیف بزرگ‌شدن ضلع‌ها، این جدول راخواهیم داشت:

ضلع‌های مثلث $a<b<c$	مساحت مثلث S	ضلع‌متوسط‌مثلث b
۱, ۲, ۳	$S_۱ = ۰$	$b_۱ = ۲$
۳, ۴, ۵	$S_۲ = ۶$	$b_۲ = ۴$
۱۳, ۱۴, ۱۵	$S_۳ = ۸۴$	$b_۳ = ۱۴$
...	...	...

یادآوری‌می‌کنیم که‌عددهای $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n، ... و $S_۱$، $S_۲$، ...، S_n، دررابطه‌های برگشتی زیرصدق می‌کنند:

$$\frac{b_n + b_{n+۲}}{b_{n+۱}} = ۴ \quad (n \in N) \qquad (۱)$$

$$\frac{S_n + S_{n+۲}}{S_{n+۱}} = ۱۴ \quad (n \in n) \qquad (۲)$$

باکمك‌این‌دورابطه، وبدون نیاز به محاسبه‌های دشوار، می‌توان‌جدول فوق را، تاهرجاکه بخواهیم، ادامه داد:

$$b_۴ = ۴b_۳ - b_۲ = ۴ \times ۱۴ - ۴ = ۵۲$$

(ضلع‌های مثلث: ۵۱، ۵۲ و ۵۳).

$$S_۴ = ۱۴S_۳ - S_۲ = ۱۴ \times ۸۴ - ۶ = ۱۱۷۰$$

(خیلی ساده‌تر از رابطهٔ هرون).

$$b_۵ = ۴b_۴ - b_۳ = ۱۹۴$$

(ضلع‌های مثلث: ۱۹۳ ، ۱۹۴ ، ۱۹۵).

$$S_۵ = ۱۴S_۴ - S_۳ = ۱۶۲۹۶$$

وغیره.

دنبالهٔ جدول فوق، در زیر داده شده است

...	...	...
$b_۴ = ۵۲$	$S_۴ = ۱۱۷۰$	۵۱ , ۵۲ , ۵۳
$b_۵ = ۱۹۴$	$S_۵ = ۱۶۲۹۶$	۱۹۳ , ۱۹۴ , ۱۹۵
$b_۶ = ۷۲۴$	$S_۶ = ۲۲۶۹۷۴$	۲۷۳ , ۲۷۴ , ۲۷۵
$b_۷ = ۲۷۰۲$	$S_۷ = ۳۱۶۱۳۴۰$	۲۷۰۱,۲۷۰۲,۲۷۰۳
$b_۸ = ۱۰۰۸۴$	$S_۸ = ۴۴۰۳۱۷۸۶$	۱۰۰۸۳,۱۰۰۸۴,۱۰۰۸۵
...	...	...

*

به برابری $۱۲^۲ = ۱۴۴$ توجه کنید. اگر عددهای ۱۲ و ۱۱۴ را، در دوطرف برابری، مقلوب کنیم، یعنی ازجهت عکس بنویسیم، باز هم برابری برقرارخواهدبود: $۲۱^۲ = ۴۴۱$. اگر بازهم، ازاین‌گونه عددها، می‌خواهید چند نمونه می‌آوریم:

$$۳۱^۲ = ۹۶۱; \qquad ۱۳^۲ = ۱۶۹,$$
$$۲۰۱^۲ = ۴۰۱۰۱ \qquad ۱۰۲^۲ = ۱۰۴۰۴,$$
$$۲۱۱^۲ = ۴۴۵۲۱; \qquad ۱۱۲^۲ = ۱۲۵۴۴,$$

$$۲۲۱^۲ = ۴۸۸۴۱; \qquad ۱۲۲^۲ = ۱۴۸۸۴,$$
$$۳۱۱^۲ = ۹۶۷۲۱ \qquad ۱۱۳^۲ = ۱۲۷۶۹,$$

تعداد این‌گونه‌عددها بی‌نهایت‌است. به‌عنوان نمونه، عدد $۱\underbrace{۰...۰}_{n}۲$ را در نظر می‌گیریم که بین رقم‌های ۱ و ۲، تعداد صفرها برابر است با n. داریم:

$$۱\underbrace{۰...۰}_{n}۲^۲ = (۱۰^{n+۱} + ۲)^۲ = ۱۰^{۲n+۲} + ۴ \times ۱۰^{n+۱} + ۴ =$$

$$= ۱\underbrace{۰...۰}_{n}\ ۴\underbrace{۰...۰}_{n}۴$$

حالا، مجذور عکس عدد را درنظر می‌گیریم:

$$۲\underbrace{۰...۰}_{n}۱^۲ = (۲ \times ۱۰^{n+۱} + ۱)^۲ = ۴ \times ۱۰^{۲n+۲} + ۴ \times ۱۰^{n+۱} + ۱ =$$

$$= ۴\underbrace{۰...۰}_{n}\ ۴\underbrace{۰...۰}_{۱^n}۱$$

به‌همین‌ترتیب، می‌توانید به‌سادگی ثابت کنید:

$$۱\underbrace{۰...۰}_{۲}۳^۲ = ۱\underbrace{۰...۰}_{n}۶\underbrace{۰...۰}_{n}۹,$$

$$۳\underbrace{۰...۰}_{n}۱^۲ = ۹\underbrace{۰...۰}_{n}۶\underbrace{۰...۰}_{n}۱$$

بازهم، یك تعمیم دیگر:

$$۱۱\underbrace{۰...۰}_{n}۲^۲ = (۱۱ \times ۱۰^{n+۱} + ۲)^۲ =$$

$$= ۱۲۱ \times ۱۰^{۲n+۲} + ۴۴ \times ۱۰^{n+۱} + ۴ = ۱۲۱\underbrace{۰...۰}_{n-۱}۴۴\underbrace{۰...۰}_{n}۴,$$

$$۲\underbrace{۰...۰}_{n}۱۱^۲ = (۲ \times ۱۰^{n+۲} + ۱۱)^۲ =$$

$$= ۴ \times ۱۰^{۲n+۴} + ۴۴ \times ۱۰^{n+۲} + ۱۲۱ - ۴\underbrace{۰...۰}_{n}۴۴\underbrace{۰...۰}_{n-۱}۱۲۱$$

آیا می‌توانید حالت‌های کلی دیگری هم پیدا کنید؟

تصاعد عددی از عددهای اول

کامپیوتر، درهرثانیه، یك‌ملیون عمل انجام می‌دهد. وقتی‌که کامپیوتر درجریان‌چاپ نتیجه‌گیری‌های خود است، زمان‌آزادی داردکه چندان کوتاه‌نیست [«زمان ماشینی آزاد»]. این زمان، ازفاصله‌های‌کوتاهی (درحد چنددهم ثانیه) تشکیل می‌شودکه برای‌جریان چاپ لازم‌است. **پریتچارد** از دانشگاه کورنل، تصمیم گرفت، این‌فاصلهٔ زمانی‌آزاد کامپیوتررا، بایك کار محاسبه‌ای پرکند. برنامه‌ای تنظیم شدکه، طبق‌آن، کامپیوتربتواند در «وقت آزاد» خود، به‌جست وجوی یك‌تصاعد عددی بپردازدکه جمله‌های‌آن، عددهای اول‌باشند. به‌یاد بیاوریم، به عددی اول گوییم که مقسوم علیهی، جزواحد وخودش، نداشته‌باشد؛ تصاعد عددی هم به‌دنباله‌ای ازعددها گویند که‌تفاضل هردوجمله پشت‌سرهم آن، مقدارثابتی باشد.

مثلاً، دنبالهٔ پنج‌عدد اول

۵،۱۱،۱۷،۲۳،۲۹

ویا دنبالهٔ ۶عدد اول

۷،۳۷،۶۷،۹۷،۱۲۷،۱۵۷

به‌تصاعد عددی هستند. درتصاعد اول، قدرنسبت برابر۶ ودر تصاعد دوم، قدرنسبت برابر ۳۰می‌باشد.

دربرنامه‌ای‌که به‌کامپیوتر داده شد، تعداد جمله‌های تصاعد را، ۱۸ درنظرگرفتند. پریتچارد، به‌این مناسبت، تعداد جمله‌های تصاعد را ۱۸ انتخاب‌کردکه، درمسألهٔ مشابهی‌که درسال۱۹۷۷ حل‌شده‌بود، تعدادجمله‌ها برابر۱۷ بود. بااستفاده ازفاصله‌های کوتاه زمان «آزاد» ماشین‌ـ که در واقع، ۲۴ساعت درشبانه‌روز کارمی‌کردـ درکمتر ازیك‌ماه، دنباله‌ای از۱۸ عدد اول به‌دست آمدکه، جمله‌های‌آن، به‌تصاعد عددی بودند.

درواقع، کامپیوتر، به‌طورمتوسط، درهرشبانه‌روز ۱۰ساعت روی این‌مساله کارمی‌کرد. درتصاعد عددی‌که به‌دست‌آمد، جملهٔ اول برابر

۱۰۷ ۹۲۸ ۲۷۸ ۳۱۷

قدرنسبت برابر

۹ ۹۲۲ ۷۸۲ ۸۷۰

وجملهٔ آخربرابر

۲۷۶ ۶۱۵ ۵۸۷ ۱۰۷

بود. عدد پیش‌از جملهٔ اول وعدد بعدازجملهٔ آخر (باتوجه به‌همین قدر نسبت)، عددهایی اول‌نیستند.

طرح جست وجوی عددها، براین اساس بودکه: درهرتصاعد عددی، که شامل n عدد اول‌باشد، باید قدرنسبت، برهمهٔ عددهای اول‌کوچکتر یا مساوی n، بخش‌پذیر باشد، به‌جز حالت‌های نادری‌که، درآن‌ها، جملهٔ اول تصاعد، برابر خود n است [نخستین مثال ابتدای بحث رابینید، که درآن، تصاعد ۵جمله‌ای ازجملهٔ برابر۵ آغازمی‌شود]. درمسألهٔ پریتچارد $n = ۱۸$ و، بنابراین، قدرنسبت تصاعد، باید برعددهای ۲،۳،۵،۷،۱۱،۱۳و۱۷ بخش‌پذیرباشد. پریتچارد، به‌درستی، عدد۱۹ راهم داخل‌کرد تا کامپیوتر بتواند تصاعدی باتعداد جمله‌های بیشتر از۱۸، به‌دست‌آورد. درحالت موردنظرما، قدرنسبت باید برابرمضربی ازحاصل‌ضرب این عددها، یعنی ۹ ۶۹۹ ۶۹۰ باشد. به‌این‌ترتیب، طبق برنامهٔ پریتچارد، کامپیوتر، عدد اولی را انتخاب می‌کرد وتصاعد حسابی‌را، پشت‌سرهم، با بزرگ‌ترکردن قدر نسبت، می‌ساخت ومقدارهای حاصل را، مورد آزمایش قرارمی‌داد تا اول بودن آن‌ها مشخص شود.

دربارهٔ عدد e

می‌دانیم :
$$e=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

برای اثبات یکنوا و محدود بودن دنبالهٔ $\{u_n\}$، که در آن $u_n=1+\left(\frac{1}{n}\right)^n$ ، به‌طورسنتی، ازرابطهٔ مربوط به‌دوجمله‌ای نیوتون استفاده می‌کنند که، صورت کلی آن، در برنامهٔ دبیرستانی وجود ندارد، به‌همین‌مناسبت، این اثبات موکول به‌درس‌های دانشگاهی می‌شود.

دراین‌جا اثبات مقدماتی دیگری برای یکنوا ومحدود بودن دنبالهٔ $\{u_n\}$ (وبنابراین، وجود حدبرای آن) آورده می‌شود، که دانش آموزان دبیرستانی‌هم، می‌توانند آن رافرابگیرند.

اثبات، براساس نابرابری دوگانه

$$(a-b)(n+1)b^n<a^{n+1}-b^{n+1}<(a-b)(n+1)a^n \qquad (1)$$

انجام‌می‌گیرد که‌برای $a>b>0$ وطبیعی بودن‌عدد n درست است. درستی نابرابری‌های (۱) را می‌توان ازاتحاد معروف زیر نتیجه گرفت:

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\dots+ab^{n-1}+b^n) \qquad (2)$$

خود اتحاد (۲) راهم می‌توان، مثلا، ازرابطهٔ مجموع $n+1$ جملهٔ تصاعد هندسی، باجملهٔ اول a^n وقدر نسبت $\frac{b}{a}$ ، به‌دست‌آورد:

$$a^n+a^{n-1}b+\dots+ab^{n-1}+b^n=$$
$$=a^n+a^n\left(\frac{b}{a}\right)+\dots+a^n\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+a^n\left(\frac{b}{a}\right)^n=$$
$$=a^n.\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{b}{a}}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

دو دنباله باجمله‌های مشترك زیررا، باهم، درنظر می‌گیریم:

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{و} \quad v_n+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

به سادگی دیده می‌شود که

$$v_n-u_n=u_n\left(1+\frac{1}{n}\right)-u_n=\frac{u_n}{n} \qquad (3)$$

بنابراین روشن‌است که

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1} \qquad (4)$$

درنابرابری‌های (۱) قرارمی‌دهیم:

$$a=1+\frac{1}{n} \quad \text{و} \quad b=1+\frac{1}{n+1}$$

به دونابرابری می‌رسیم، که آن‌ها را به‌ترتیب، نابرابری چپ و نابرابری راست می‌نامیم:

$$\frac{u_{n+1}}{n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}<v_n-u_{n+1}<\frac{u_n}{n} \qquad (5)$$

برابری (۳) ونابرابری راست (۵)، بلافاصله، صعودی بودن دنبالهٔ $\{u_n\}$ راثابت می‌کنند:

$$u_{n+1}>u_n \qquad (6)$$

برابری(۴)ونابرابری چپ(۵)، نزولی بودن‌دنبالهٔ $\{v_n\}$ را نتیجه می‌دهند. درواقع، از (۵) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$(v_n-u_{n+1})-(v_{n+1}-u_{n+1})>$$
$$>\frac{u_{n+1}}{n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}-\frac{u_{n+1}}{n+1},$$
$$v_n-v_{n+1}>u_{n+1}\left[\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}-\frac{1}{n+1}\right]>0$$

(در داخل کروشه، مخرج کسراول ازمخرج کسردوم، کوچکتر است). به این ترتیب: $v_n>v_{n+1}$.

چون $u_n<v_n$ ودنبالهٔ $\{v_n\}$ نزولی است، بنابراین

$$u_n<v_1=4 \qquad (7)$$

(به‌ازای همهٔ مقدارهای طبیعی n).

به‌این ترتیب، صعودی بودن $\{u_n\}$ به‌کمك (۶) ومحدودبودن‌آن به کمك(۷) ثابت‌شد، یعنی برای $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$، وقتی $n\to\infty$ ، حدی وجود دارد. ومی‌دانیم که این حدرا با e نمایش می‌دهند:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

حل مساله‌ها

آیا درس ریاضی خود را می‌دانید (صفحهٔ ۴۶۳ را ببینید)

۱. a) $C_{8}^{3}=236$؛ b) $6C_{8}^{3}+C_{8}^{4}=406$؛ c) $C_{14}^{4}-C_{8}^{4}=931$.

برای این حالت، راه حل دیگری هم وجود دارد که، البته، مفصل‌تر است:

$$C_{6}^{1}\cdot C_{8}^{3}+C_{6}^{2}\cdot C_{8}^{2}+C_{6}^{3}\cdot C_{8}^{1}+C_{6}^{4}=931$$

۲. a) $P_5=120$؛ b) $P_5-P_4=96$؛ c) $A_6^5-A_6^4=600$؛ d) مجموع عددها را درحالت a) پیدا می‌کنیم. از ۱۲۰ عدد حاصل، ۲۴ عدد با رقم ۱، ۲۴ عدد با رقم ۲،... و ۲۴ عدد با رقم ۵ آغاز می‌شوند. به این ترتیب، مجموع رقم‌هایی که در سمت چپ عددها قرار دارند، برابر است با $24(1+2+3+4+5)=360$

به‌همین ترتیب، مجموع رقم درهریك ازمرتبه‌های دیگر عددها هم، برابر با ۳۶۰ می‌شود. اکنون‌دیگرروشن است که،مجموع همهٔ عددها، چنین‌می‌شود:

$$360(10^4+10^3+10^2+10+1)=360\times 11111$$

e) باید عددهایی را انتخاب کرد که به۲۰، ۴۰، ۱۲، ۳۲، ۵۲ و۲۴ ختم می‌شوند.

۳. اول باید ببینیم از ۲۸ نفر، به‌چند طریق می‌توان ۴ نفر را برای کوپهٔ اول انتخاب کرد؛ سپس از۲۴ نفر باقی‌مانده، به‌چندطریق ۴ نفربرای کوپهٔ دوم انتخاب می‌شوند وغیره. به‌این ترتیب، تعداد کل روش‌های تقسیم دانشجویان چنین می‌شود:

$$C_{28}^{4}\cdot C_{24}^{4}\cdot C_{20}^{4}\cdots C_{4}^{4}=\frac{28!}{(4!)^7}$$

۴. a) داریم $5000000=2^6\times 5^7$. بنابراین، هر مقسوم‌علیه باید به صورت $2^{\alpha}\times 5^{\beta}$ باشد ($0\leqslant\alpha\leqslant 6$، $0\leqslant\beta\leqslant 7$). در نتیجه، تعداد کل مقسوم‌علیه‌ها، برابر است با $7\times 8=56$ b) در واقع، باید تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد $a^{\alpha}.b^{\beta}...c^{\gamma}$ را پیدا کنیم (a، b، ....، c، عددهایی اول‌اند).

پاسخ: $(\alpha+1)(\beta+1)...(\gamma+1)$.

۵. پاسخ: ۲۴.

۶. راهنمائی. ابتدا مسأله را برای حالتی که با دو نوع گل سر و کار داریم، حل کنید. پاسخ. ۶۶.

۷. پاسخ: a) $C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4=(1+1)^2-1-1=30$

b) ۲۲.

۸. راهنمائی: عددهای کوچکتراز۲۳۰۰۰ یا با رقم ۱ آغاز می‌شوند و یا با یکی ازعددهای دورقمی ۲۱ و ۲۲. پاسخ: ۶۰.

۹. پاسخ: a) ۵؛ b) $C_5^2=10$؛ c)

$$C_{10}^{3}\cdot C_{7}^{4}=\frac{10!}{3!4!3!}=4200$$

۱۰. پاسخ: a) $A_9^3=504$؛ b) $9^3=729$.

۱۱. راهنمائی. صفحهٔ شطرنج را به‌چند طریق می‌توان به‌نوارهایی با عرض k خانه تقسیم کرد؟ درهریك از این نوارها، چند مربع به‌ضلع k خانه وجود دارد؟ پاسخ: ۲۰۴.

۱۲. پاسخ: a) C_{n-1}^{k}؛ b) C_{n-1}^{k-1}.

۱۳. راهنمائی: از مسألهٔ ۱۲ استفاده کنید.

۱۴. تعداد همهٔ خطهای راستی که از وصل دو به دوی این n نقطه به‌دست‌می‌آیند، برابراست با C_n^2 وتعداد خطهای راستی که ازوصل‌دو به‌دوی $(n-2)$ نقطه به‌دست می‌آیند، برابر است با C_{n-2}^2. هر خط راستی که دو نقطه را به‌هم وصل کرده باشد، همهٔ بقیهٔ خطهای راست را قطع می‌کند، بنابراین، روی هر خط راست به تعداد C_{n-2}^2 نقطهٔ برخورد وجود دارد و، با توجه به‌این‌که هرنقطه‌روی دوخط راست قرار دارد، برای تعدادنقطه‌های برخورد، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}C_n^2\cdot C_{n-2}^2=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

۱۵. راهنمائی: ازدستور مسألهٔ ۱۳ استفاده کنید.

۱۶. با توجه به‌مسألهٔ ۱۵، سمت چپ معادله را، می‌توان‌چنین‌نوشت:

$$C_{n+k}^{x}=C_{n+k-1}^{x-1}+C_{n+k-2}^{x-1}+\dots+C_{n}^{x-1}+C_{n}^{x}$$

درنتیجه، معادلهٔ مفروض، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$C_{n+k-1}^{x-1}+C_{n+k-2}^{x-1}+\dots+C_{n}^{x-1}=k$$

مجموع k عدد درست، برابر k شده است، بنابراین باید، هرکدام از آن‌ها، برابر واحد باشد، که از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $x=1$.

۱۷. a) معادلهٔ مفروض، به‌سادگی، به‌معادلهٔ زیر منجر می‌شود:

$$(x^2-3x)^2+2(x^2-3x)-120=0$$

که تنها جواب مثبت ودرست آن $x=5$ است.

b) داریم:

$$\frac{(x-4)!}{(x-6)!}+\frac{(x-3)!}{(x-5)!}+\frac{(x-2)!}{(x-4)!}=20$$

و از آن‌جا

$$(x-4)(x-5)+(x-3)(x-4)+(x-2)+(x-3)=20$$

پاسخ: $x=6$.

۱۸. راهنمائی. از رابطهٔ کمکی زیر استفاده کنید:

$$C_x^l=\frac{k-l+1}{l}C_k^{l-1}$$

آن‌وقت، به‌دستگاه زیر می‌رسید:

$$\begin{cases}\dfrac{m+1}{n-m+2}=\dfrac{3}{5}\\[2ex]\dfrac{m+2}{n-m+1}=1\end{cases}$$

پاسخ: $m=2$، $n=5$.

۱۹. راهنمائی: این‌مجموع برابر است با 2^{10^4}. لگاریتم این عددو، سپس، مفسر آن‌را پیدا کنید. پاسخ: ۳۰۱۱.

۲۰. جملهٔ عمومی بسط به‌این صورت است:

$$C_{100}^{k}7^{\frac{100-k}{7}}\times 13^{\frac{k}{13}}$$

برای این‌که این عدد گویا باشد، باید $\frac{k}{13}$ و $\frac{100-k}{7}$، با هم، عددهایی درست باشند. $\frac{k}{13}$ وقتی عدد درست‌است که k برابر یکی ازعددهای ۰، ۱۳، ۲۶، ۳۹، ۵۲، ۶۵، ۷۸، ۹۱ باشد؛ که تنها به‌ازای $k=65$، عدد $100-k$ مضربی از ۷ می‌شود بنابراین، تنها جملهٔ گویای این بسط، جملهٔ شصت‌وپنجم آن است:

$$C_{100}^{65}7^5\times 13^5$$

این مسأله را، با روش دیگری هم می‌توانستیم حل کنیم: مسأله، منجر به‌پیدا کردن عددهای درست u و v می‌شود، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$x=13u,\ 100-k=7v$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$13u+7u=100$$

و یا

$$v=14-2u+\frac{2+u}{7}$$

و در نتیجه: $u=5$.

۲۱. راهنمائی: داریم:

$$B+A=(1+a)^m,\ B-A=(1-a)^m$$

پاسخ: $(1-a^2)^m$.

۲۲. اگر درتناسب مفروض، ترکیب نسبت در صورت وتفضیل نسبت درمخرج انجام دهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{(x+1)^7}{(x-1)^7}=2187=2^7\Longrightarrow x=2$$

۲۳. راهنمائی: عبارت

$$(a+b=c)^n=[(a+b)+c]^n$$

را طبق‌دستور دوجمله‌ای‌بسط دهید؛ هرجمله به‌صورت $A=(a+b)^kc^{n-k}$ را می‌توان همچون $(k+1)$جملهٔ به‌صورت $A\cdot a^p\cdot b^{k-p}\cdot c^{n-k}$ درنظر

گرفت. سپس، از این اتحاد استفاده کنید:

$$1+2+\dots+m=\frac{m(m+1)}{2}$$

پاسخ: C_{n+2}^{2}.

۲۴. راهنمائی: بسط $[(a+b+c)+d]^n$ را، طبق دستور دوجمله‌ای بنویسید وسپس، ازمسألهٔ قبل استفاده کنید.

پاسخ: C_{n+3}^{3}.

۲۵. داریم:

$$123^{465}=41^{465}\times 3^{456}=(40+1)^{456}\cdot(80+1)^{114}$$

طبق دستور دوجمله‌ای بسط دهید وثابت کنید که این عدد، به همان دو رقمی ختم می‌شود که هریك ازعددهای

$$(456\times 40+1)\cdot(114\times 80+1);$$
$$(6\times 40+1)\cdot(4\times 80+1);$$
$$(40+1)\cdot(20+1)$$

به آن‌ها ختم می‌شوند.

پاسخ: ۶۱.

۲۶. داریم:

$$101^{100}=(100+1)^{100}=100^{100}+100\times 100^{99}+$$
$$+\frac{100\times 99}{1\times 2}\times 100^{98}+\dots+C_{100}^{98}100^{2}+(100\times 100+1)$$

از این ۱۰۰ جمله، هیچ کدام از 100^{100} تجاوز نمی‌کنند. بنابراین

$$101^{100}<100\times 100^{100}=100^{101}$$

۲۷. اثبات‌را با روش استقرای ریاضی انجام می‌دهیم. قضیه، به‌ازای $n=1$، درست‌است. اکنون فرض می‌کنیم، k عددی‌طبیعی باشد که، به‌ازای آن، k^p-k بر p بخش‌پذیر شود. داریم:

$$(k+1)^p-(k+1)=$$
$$=(k^{10}-k)+C_p^1k^{p-1}+C_p^2k^{p-2}+\dots+C_p^mk^{p-m}+\dots+C_p^{p-1}k$$

چون C_p^m عددی‌درست‌است $(m<p)$، بنابراین، عدد $p(p-1)\dots(p-m+1)$

بر عدد $1\times 2\times 3\times\dots\times m$ بخش‌پذیر است. ولی p، عددی است‌اول و $p>m$، بنابراین، p و حاصل ضرب $1\times 2\times 3\times\dots\times m$، نسبت به هم اول‌اند؛ به‌نحوی که عدد

$$(p-1)(p-2)\dots(p-m+1)$$

برعدد $(1\times 2\times 3\times\dots\times m)$ بخش‌پذیر می‌شود. به این ترتیب: C_p^m بر p بخش‌پذیراست $(m=1,2,\dots,p-1)$. به‌جزاین، k^p-k هم، طبق‌فرض استقرا، بر p بخش‌پذیر است واین، به‌معنای آن‌است که $(k+1)^p-(k+1)$ بر p بخش‌پذیر می‌شود؛ ودر این‌صورت، روشن است که درستی قضیه ثابت شده است.

۲۸. بنابرفرض مسأله، باید داشته باشیم:

$$C_n^2-C_n^1=44$$

که منجر به‌معادلهٔ زیر می‌شود:

$$n^2-3n-88=0\Longrightarrow n=11$$

برای پیداکردن‌جملهٔ‌مستقل از x در بسط دوجمله‌ای‌مفروض (به‌ازای $n=11$) جملهٔ عمومی بسط را می‌نویسیم:

$$T_{k+1}=C_{11}^k(x\sqrt{x})^{11-k}\cdot\left(-\frac{1}{x^4}\right)^k=(-1)^kC_{11}^kx^{\frac{33-11k}{2}}$$

برای این که، این جمله مستقل از x باشد، باید توان x در آن، برابر صفر شود:

$$\frac{33-11k}{2}=0\Longrightarrow k=3$$

یعنی، جملهٔ مستقل از x برابر است با

$$-C_{11}^3=-165$$

۲۹. اگر ضریب جمله‌های ردیف k، $k+1$ و $k+2$ تشکیل یك تصاعد حسابی بدهند، باید داشته باشیم:

$$2C_{23}^k=C_{23}^{k-1}+C_{23}^{k+1}$$

که منجر به‌معادلهٔ درجه دوم زیر می‌شود:

$$k^2-23k+126=0$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $k_1 = 9$ و $k_2 = 14$؛ یعنی ضریب‌های سه‌جملهٔ نهم، دهم و یازدهم، همچنین ضریب‌های سه‌جملهٔ چهاردهم، پانزدهم و شانزدهم، تصاعد حسابی هستند.

۳۰. عبارت مفروض را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\left[1+\left(x+\frac{2}{x}\right)\right]^6$$

جملهٔ عمومی بسط این عبارت چنین است:

$$T_{k+1}=C_6^k\left(x+\frac{2}{x}\right)^k$$

اکنون، جملهٔ عمومی بسط دوجمله‌ای $\left(x+\frac{2}{x}\right)^k$ را می‌نویسیم (که در آن: $k=0,1,\dots,6$).

$$T'_{m+1}=C_k^m\cdot x^{k-m}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^m=C_k^m\cdot 2^m\cdot x^{k-2m}$$

بنابراین، جملهٔ عمومی در عبارت $\left(x+1+\frac{2}{x}\right)^6$ چنین می‌شود:

$$C_6^k\cdot C_k^m\cdot x^{k-2m}$$

$(m=0,1,\dots,k)$. از جملهٔ عمومی روشن است که، جملهٔ مستقل از x، به‌ازای $m=\frac{k}{2}$ به دست می‌آید. به‌این ترتیب، k می‌تواند همهٔ مقدارهای زوج ۰، ۲، ۴ و ۶ را اختیار کند که، برای m، به‌ترتیب، ۰، ۱، ۲ و ۳ به‌دست می‌آید. در نتیجه، جملهٔ مستقل از x، در عبارت مفروض، چنین است:

$$1+C_6^2\cdot C_2^1\times 2+C_6^4\cdot C_4^2\times 2^2+C_2^6\cdot C_6^3\times 2^3=$$
$$=1+60+360+160=581$$

۳۱. این دو رابطهٔ واضح را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\dots+C_n^nx^n\\(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\dots+C_n^n\end{cases}$$

این دو رابطه را درهم ضرب می‌کنیم. ضریب x^n درسمت چپ حاصل‌ضرب، یعنی در $(1+x)^{2n}$، برابر است با C_{2n}^n و درسمت راست حاصل‌ضرب برابر

است با

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\dots+(C_n^n)^2$$

پاسخ: C_{2n}^n.

۳۲. با توجه به‌مسألهٔ ۳۱ داریم:

$$(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\dots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n-(C_n^0)^2,$$
$$(C_n^2)^2+(C_n^3)^2+\dots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n-(C_n^0)^2-(C_n^1)^2,$$
$$(C_n^n)^2=C_{2n}^n-(C_n^0)^2-(C_n^1)^2-\dots-(C_n^n)^2$$

که ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$S=nC_{2n}^n-S\Longrightarrow S=\frac{n}{2}C_{2n}^n=nC_{2n-1}^{n-1}$$

۳۳. جملهٔ عمومی در بسط $(1+\sqrt{2})^{50}$ را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$T_{k+1}=C_{50}^n(\sqrt{2})^n$$

ضریب C_{50}^n، وقتی n از ۰ تا ۲۶ ترقی کند، صعودی و، سپس، نزولی است. عامل $(\sqrt{2})^n$ همیشه، از $n=0$ تا $n=50$، صعودی است. بنابراین، وقتی n از ۰ تا ۲۶ ترقی می‌کند، مقدارجمله‌ها، رو به‌افزایش می‌رود. ولی وقتی n از ۲۶ بزرگ‌تر باشد، با بزرگ‌شدن n، ضریب C_{50}^n کوچک و عامل $(\sqrt{2})^n$ بزرگ می‌شود و، بنابراین، معلوم نیست که جمله‌های بسط صعودی هستند یا نزولی. نسبت جملهٔ $(n+1)$ام را به‌جملهٔ nام پیدا می‌کنیم:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{C_{50}^n(\sqrt{2})^n}{C_{50}^{n-1}(\sqrt{2})^{n-1}}=\frac{51-n}{n}\sqrt{2}$$

اگر نامعادلهٔ $\frac{51-n}{n}\sqrt{2}<1$ را حل کنیم، به دست می‌آید:

$$n>51(2-\sqrt{2})$$

به‌سادگی می‌توان روشن کرد که

$$29/835<51(2-\sqrt{2})<29/886$$

به‌این ترتیب، کوچکترین عدد درست بزرگ‌تر از $51(2-\sqrt{2})$، برابر است با ۳۰ و برای $n<30$ داریم:

$$T_{30}>T_{29}>T_{28}>\dots>T_1$$

و برای $n \geqslant ۳۱$، مقدار نسبت $\frac{T_{n+۳}}{T_n}$ کوچکتر از واحد می‌شود و خواهیم داشت: $T_{n+۱} < T_n$. یعنی بزرگترین جملهٔ بسط دوجمله‌ای مفروض، چنین است:

$$T_{۳۰} = C_{۵۰}^{۲۹}(\sqrt{۲})^{۲۹} = C_{۵۰}^{۲۱}(\sqrt{۲})^{۲۹}$$

۳۴. داریم:

$$T_{n+۱} = C_{۲۱}^{n}\left(\sqrt{\frac{۹}{\sqrt[۳]{b}}}\right)^{n}\left(\sqrt[۳]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{۲۱-n} = C_{۲۱}^{n} a^{\frac{۲۱-n}{۳}-\frac{n}{۶}} b^{\frac{n}{۲}-\frac{۲۱-n}{۶}}$$

که بنابرفرض، باید داشته باشیم:

$$\frac{۲۱-n}{۲}-\frac{n}{۶}=\frac{n}{۲}-\frac{۲۱-n}{۶} \Longrightarrow n=۹$$

پاسخ: جملهٔ دهم.

۳۵. پاسخ: a) ۱؛ b) ۰.

۳۶. پاسخ: $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۷}{۸}$.

۳۷. پاسخ: a) $\frac{۱}{۶}$؛ b) $\frac{۱}{۳۶}$؛ c) $\frac{۵}{۳۶}$؛ d) $\frac{۵}{۳۶}$.

۳۸. پاسخ: a) $\frac{۱}{۱۲} \approx \frac{۳۶^۳-۳۵^۳}{۳۶^۳}$؛ b) $\frac{۹۱}{۲۱۶}$.

۳۹. پاسخ: احتمال این که مجموع خال‌ها برابر ۹ یا ۱۰ باشد، به‌ترتیب، برابر است با $\frac{۲۵}{۲۱۶}$ و $\frac{۲۷}{۲۱۶}$.

۴۰. احتمال این که دومی بازی را ببرد، برابر است با $\frac{۱}{۴}$. بنابراین، احتمال برد بازی‌کن اول، برابر $\frac{۳}{۴}$ می‌شود. طبیعی است که باید پول را به نسبت $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ بین خود تقسیم کنند.

۴۱. پاسخ: $\frac{۱}{۲۵۲} = \frac{۱}{C_{۱۰}^{۵}}$.

۴۲. پاسخ: $\frac{m(m-۱)}{(m+n)(m+n-۱)}$

۴۳. پاسخ: a) $\frac{۱}{۲۵}$؛ b) $\frac{۸}{۲۵}$؛ c) $\frac{۱}{۵}$؛ d) $\frac{۲}{۵}$؛ e) $\frac{۱۶}{۲۵}$؛ f) $\frac{۲۴}{۲۵}$.

۴۵. پاسخ: $\frac{۸}{۲۷}$.

۴۶. راهنمائی: اگر از تعداد کل n حالتی که امکان برابر دارند، برای حادثهٔ A، a حالت مساعد و برای حادثهٔ B، b حالت مساعد (دیگر) وجود داشته باشد، آن‌وقت، برای حادثهٔ A+B، a+b حالت مساعد وجود خواهد داشت. بنابراین

$$p(A+B)=\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=p(A)+p(B)$$

پاسخ: $\frac{۸C_{۹۲}^{۳}}{C_{۲۰۰}^{۳}}$

۴۷. پاسخ: $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۶}$.

۵۰. پاسخ: $p(A)=\frac{۲}{۵}$ ؛ $p\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{۱}{۴}$ ؛ $p(A \cdot B)=\frac{۱}{۱۰}$

۵۱. فرض کنید، از n حالت با امکان برابر، حادثهٔ A، شانس a حالت و از بین آن‌ها، حادثهٔ B، شانس c حالت را داشته باشد. در این صورت

$$p(A)=\frac{a}{n}\ ,\ p(A \cdot B)=\frac{c}{n}\ ,\ p\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{c}{a}$$

بنابراین

$$p(A \cdot B)=p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right)$$

۵۲. پاسخ: a) $\frac{۱}{۸}$؛ b) $\frac{۱}{۶۴}$؛ c) $\frac{۷}{۸}$.

۵۳. پاسخ: $1-(0/2)^2=0/96$ ؛ $(0/8)^2=0/64$.

۵۴. پاسخ: $1-0/999^{1000}\approx 0/63$.

۵۵. پاسخ: $2\times\frac{3}{14}\times\frac{11}{14}=\frac{33}{98}$.

۵۶. پاسخ: $C_5^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$.

۵۷. پاسخ: $log_2 2=1$.

۵۸. پاسخ: $log_2 32=5$.

۵۹. پاسخ: a) $log_2 365\approx 8/65$؛ $log_2\frac{365}{364}\approx 0/004$؛

b) $\frac{1}{365}log_2 365+\frac{364}{365}log_2\frac{365}{364}=0/03$.

۶۰. پاسخ: $2log_2 32=10$.

۶۱. پاسخ: $10log_2 32=50$.

۶۲. پاسخ: $log_2 4=2$؛ $log_2 4=2$؛ $log_2 2=1$؛

$\frac{1}{4}log_2 4+\frac{1}{4}log_2 4+\frac{1}{2}log_2 2=1/5$.

۶۳. پاسخ: $log_2 4=2$.

۶۴. ضمن آزمایش، ممکن است یکی از مهره‌های زیر درآید: شاه (با احتمال $\frac{1}{16}$)؛ وزیر $\left(\frac{1}{16}\right)$؛ رخ $\left(\frac{1}{8}\right)$؛ فیل $\left(\frac{1}{8}\right)$؛ اسب $\left(\frac{1}{8}\right)$؛ پیاده $\left(\frac{1}{2}\right)$. بنابراین، طبق دستور (۱)، آنتروپی تجربه مفروض

$$H(\alpha)=2\times\frac{1}{16}log_2 16+3\times\frac{1}{8}log_2 8+\frac{1}{2}log_2 2=2\frac{1}{8}$$

پاسخ: $log_2 2=1$؛ $log_2 16=4$؛ $log_3 8=3$؛ $2\frac{1}{8}$.

هفدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضیات (صفحهٔ ۴۷۳ را ببینید)

۱. اگر پرانتزها را درنابرابری مورد نظر باز کنیم، به‌نابرابری زیر که هم‌ارز آن است، می‌رسیم:

$$\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

درستی این نابرابری را، بااستقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n=1$، نابرابری واضح است. فرض می‌کنیم که، این نابرابری، به‌ازای $n=k$ درست باشد وثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت، به‌ازای $n=k+1$ هم درست است. اگر داشته باشیم: $x_1=y_1$، بنابر فرض استقرا، خواهیم داشت: $\sum_{i=1}^{k+1}x_iy_i\leqslant\sum_{i=2}^{k+1}x_iy_i$ ؛ بااضافه‌کردن x_1y_1 به دو طرف نابرابری، نابرابری مطلوب به‌دست می‌آید.

اکنون فرض‌می‌کنیم: $z_1=y_m$ $(m\neq 1)$ و $y_1=z_l$ $(l\neq 1)$. چون $x_1\geqslant x_l$ و $y_1\geqslant y_m$ ، بنابراین

$$(x_1-x_l)(y_1-y_m)\geqslant 0$$

و از آن جا

$$x_1y_1+x_ly_m\geqslant x_1y_m+x_ly_1$$

در نتیجه، اگر در مجموع $\sum_{i=1}^{k+1}x_iz_i$ ، به جای جمله‌های $x_1z_1=x_1y_m$ و $x_lz_l=x_ly_1$ ، جمله‌های x_1y_1 و x_ly_m را قرار دهیم، مجموع کاهش نمی‌یابد. مجموع جدید را می‌توان به‌صورت

$$x_1y_1+=\sum_{i=2}^{k+1}x_iz'_i$$

نوشت که، درآن، به‌ازای $i\geqslant 2$ داریم:

$$z'_i=\begin{cases}z_i & (i\neq l)\\ y_m & (i=l)\end{cases}$$

بنابراین، z'_2 ، z'_3 ، ... ، z'_{k+1} ، تبدیلی از عددهای y_2 ، y_3 ، ... ، y_{k+1}

خواهند بود. به‌این ترتیب، طبق فرض استقرا داریم:

$$\sum_{i=2}^{k+1} x_i z'_i \leqslant \sum_{i=2}^{k+1} x_i y_i$$

یعنی

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i z_i \leqslant x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_i z'_i \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} x_i y_i$$

۲. A_r را دنباله‌ای از عددهای a_k $(k>1)$ می‌گیریم که ضمن تقسیم بر a_1، باقی‌مانده‌ای برابر r بدهند (یعنی، عددهای به‌صورت $a_k = p_k a_1 + r$). از آن‌جا که، وقتی r از ۰ تا $a_1 - 1$ تغییر کند، هریك از عددهای a_k در یکی از زیردنباله‌های A_r قرار می‌گیرد، بنابراین دست‌کم یکی از این زیردنباله‌ها نامتناهی است. این زیر دنباله را

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_i}, \ldots$$

می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که جمله‌های آن، با آغاز از a_{k_2}، همان عددهای a_m را تشکیل می‌دهند. در واقع، این جمله‌ها را، می‌توان این‌طور نشان داد:

$$a_{k_i} = p_{k_i} a_1 + r$$

بنابراین، به‌ازای $i \geqslant 2$ داریم:

$$a_{k_i} - a_{k_1} = (p_{k_i} - p_{k_1}) a_1$$

از آن‌جا

$$a_{k_i} = x a_{k_1} + y a_1$$

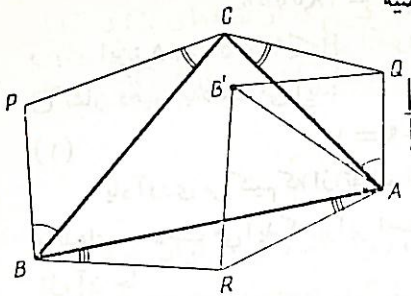
ضمناً $x = 1$ و $y = p_{k_i} - p_{k_1} > 0$ (زیرا، بنابرفرض داریم: $a_{k_i} > a_{k_1}$) و $k_1 \neq 1$ (زیرا $k_1 > 1$).

۳. زاویه‌های رأس‌های A، B و C از مثلث ABC را، به ترتیب، α، β و γ می‌نامیم. نقطهٔ B' را در داخل زاویهٔ ARB $(\widehat{ARB} = 150^\circ)$ طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\widehat{BRB'} = 90^\circ \quad \text{و} \quad |B'R| = |BR| \qquad (1)$$

دراین صورت داریم: $\widehat{B'RA} = 60^\circ$ و $|B'R| = |AR|$، از آن‌جا، مثلث ARB' متساوی‌الاضلاع است. B' را به Q وصل می‌کنیم و مثلث $AB'Q$

را درنظر می‌گیریم که، در آن، به‌سادگی ثابت می‌شود: $\widehat{B'AQ} = \alpha$. از مثلث‌های ACQ و ABR، بنابر قضیهٔ سینوس‌ها، به‌ترتیب، داریم:



$$\frac{|AQ|}{|AC|} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{1}{2\cos 15^\circ};$$

$$\frac{|AR|}{|AB|} = \frac{1}{2\cos 15^\circ}$$

از آن جا

$$|AQ| = \frac{|AC|}{2\cos 15^\circ}; \qquad |AR| = \frac{|AB|}{2\cos 15^\circ}$$

چون $|AR| = |AB'|$، پس $\frac{|AQ|}{|AB'|} = \frac{|AC|}{|AB|}$، یعنی دو مثلث $AB'Q$ و ABC متشابه‌اند. یعنی

$$\widehat{AB'Q} = \beta \quad \text{و} \quad \widehat{RBQ} = \widehat{RB'Q} \qquad (2)$$

از تشابه دو مثلث BCP و ACQ و دو مثلث $AB'Q$ و ABC، به‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|AQ|} \quad \text{و} \quad \frac{|AC|}{|AQ|} = \frac{|BC|}{|B'Q|}$$

و از آن‌جا

$$|B'Q| = |BP|$$

از (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که اگر خط شکسته RBP را به اندازهٔ ۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، دور نقطهٔ R دوران دهیم، بر خط شکستهٔ $RB'Q$ قرار می‌گیرد، ضمناً، نقطهٔ P بر نقطهٔ Q واقع می‌شود که، از آن‌جا، نتیجه می‌شود:

$$|PR| = |QR| \quad \text{و} \quad \widehat{PRQ} = 90^\circ$$

۴. چون $4444^{4444} > 10000^{4444}$، بنابراین، تعداد رقم‌های عدد 4444^{4444}، در دستگاه عددنویسی دهدهی، کمتر است از

$$4444 \times 4 + 1 < 20000$$

از آن جا

$$A<۹\times ۲۰۰۰۰=۱۸۰۰۰۰$$

و بنابراین: $B<۹\times ۵=۴۵$. اکنون، اگر مجموع رقم‌های عدد B را با C نشان دهیم، به‌دست می‌آید:

$$C<۴+۹=۱۳ \qquad (۱)$$

یادآوری می‌کنیم که از تقسیم مجموع رقم‌های یك عدد بر ۹، باقی‌مانده‌ای به دست می‌آید که برابر است با باقی ماندهٔ تقسیم خود عدد بر ۹.

از آن جا

$$۴۴۴۴^{۴۴۴۴}\equiv C(\mathrm{mod}\,۹) \qquad (۲)$$

ازطرف دیگر داریم:

$$۴۴۴۴\equiv ۷(\mathrm{mod}\,۹)$$

و بنابراین

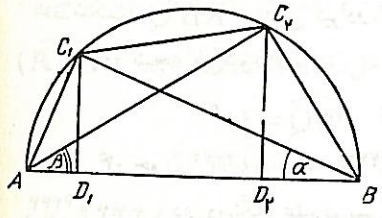
$$۴۴۴۴^{۴۴۴۴}\equiv ۷^{۴۴۴۴}(\mathrm{mod}\,۹)$$

از آن جا

$$۴۴۴۴^{۴۴۴۴}\equiv(-۲)^{۳\times ۱۴۸۱}\times ۷\equiv(-۸)^{۱۴۸۱}\times ۷\equiv ۷(\mathrm{mod}\,۹)$$

(از قاعدهٔ ضرب هم‌نهشتی‌ها استفاده کردیم). با درنظر گرفتن (۱) و (۲) به‌دست می‌آید: $C=۷$.

۵. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که بی‌نهایت مثلث قائم‌الزاویه با وتر برابر ۲ و ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ گویا وجود دارد (مثلاً، مثلث‌های با ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ $\frac{۴n}{n^۲+۱}$ و $\frac{۲n^۲-۲}{n^۲+۱}$ از این قبیل‌اند؛ n، عددی طبیعی است).



قطر AB از دایرهٔ مفروض به شعاع واحد را تثبیت می‌کنیم و روی آن، ۱۹۷۵ عدد ازاین‌گونه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC را می‌سازیم. فرض کنید، همهٔ C_iها $(i=۱,۲,\dots,۱۹۷۵)$ روی‌یکی ازنیم‌دایره‌ها واقع باشند. ثابت‌می‌کنیم که نقطه‌های C_i، نقطه‌های

مجهول‌اند. دو تا از این نقطه‌ها را درنظر می‌گیریم: $C_۱$ و $C_۲$ (شکل را ببینید). $D_۱$ و $D_۲$ را پای عمودهایی می‌گیریم که از نقطه‌های $C_۱$ و $C_۲$ بر قطر فرود آمده‌اند و فرض می‌کنیم: $\widehat{C_۱BA}=\alpha$ و $\widehat{C_۲AB}=\beta$؛ در این صورت

$$|C_۱C_۲|=\frac{|D_۱D_۲|}{\cos(\alpha-\beta)}$$

طول پاره‌خط $D_۱D_۲$، عددی گویاست، زیرا به‌سادگی می‌توان گویا بودن طول پاره‌خط‌های $AD_۱$ و $D_۲B$ را تحقیق کرد. به‌جز این، $\sin\alpha$، $\cos\alpha$، $\sin\beta$ و $\cos\beta$ هم گویا هستند، بنابراین $\cos(\alpha-\beta)$ عددی گویاست.

به‌این‌ترتیب $|C_۱C_۲|$، با عددی گویا بیان می‌شود.

۶. از ویژگی ۲) استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم:

$$a=b=c=y$$

برای هر y دلخواه به‌دست می‌آید:

$$P(۲y,y)=۰$$

ازاین‌جا نتیجه‌می‌شود که‌چند جمله‌ای $P(x,y)$ بر $x-۲y$ بخش‌پذیراست.

اکنون بافرض

$$a=b=x,\ c=-۲x$$

واستفاده از ویژگی‌های ۲) و ۱) به‌دست می‌آید:

$$۲^nP(x,-x)+۲P(-x,x)=۰ \qquad (۱)$$

اگر $a=x$، $b=-x$ و $c=۰$ بگیریم، حاصل می‌شود:

$$P(۰,۰)+P(-x,x)P(x,-x)=۰$$

ولی روشن است که $P(۰,۰)=۰$، بنابراین

$$P(-x,x)=-P(x,-x)$$

که با استفاده از (۱) به‌دست می‌آید:

$$(۲^n-۲).P(x,-x)=۰$$

(برای هرمقدار دلخواه x). بنابراین، به‌ازای $n>۱$ باید داشته باشیم:

$$P(x,-x)=۰$$

یعنی چند جمله‌ای $P(x,y)$: بر $x+y$ بخش‌پذیراست.

فرض می‌کنیم: $P_1(x,y)=\frac{p(x,y)}{x+y}$. ثابت می‌کنیم که چندجمله‌ای $P_1(x,y)$ از درجهٔ $(n-1)$، بازهم باویژگی‌های ۱)و۲) و۳)سازگاراست.

درواقع، داریم:

$$P_1(tx,ty)=\frac{t^n.P(x,y)}{t(x+y)}=t^{n-1}.P_1(x,y);$$

$$P_1(a+b,c)+P_1(b+c,a)+P_1(c+a,b)=$$

$$=\frac{P(a+b,c)+P(b+c,a)+P(c+a,b)}{a+b+c}=0$$

یعنی، ویژگی ۲)، برای $a+b+c\neq 0$، برقراراست. درحالتی که داشته باشیم: $a+b+c=0$، ویژگی ۲) ازپیوستگی چند جمله‌ای نتیجه‌می‌شود.

به‌این ترتیب، $P_1(x,y)$ بر $(x-2y)$ و $(x+y)$ بخش‌پذیراست.

اکنون، اگر از روش استقرای ریاضی استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$P(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}$$

چند مسالهٔ گوناگون

۱. همهٔ باقی‌مانده‌ها، دراین تقسیم‌ها، به‌صفر ختم می‌شوند و، ضمناً، تعداد رقم‌های آن‌ها، عددی زوج است. ازآن جاکه آخرین باقی مانده، از ۲۰ کوچکتر است، برابر با ۱۰ می‌شود.

۲. چون برای هرمقدار x داریم:

$$6\sin x\geqslant -7-\cos 2x$$

بنابراین، ازمعادلهٔ اول، نتیجه می‌شود:

$$a=\frac{6\sin x}{7+\cos 2x}\geqslant -1$$

از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید:

$$3a\sin x-8=a(4+3\sin x-4\sin^3 x)$$

ازآن جا

$$\sin^3 x=\frac{a+2}{a}$$

از نابرابری $-1\leqslant\frac{a+2}{a}\leqslant 1$ نتیجه می‌شود: $a\leqslant -1$.

بنابراین، a تنها می‌تواند برابر ۱− باشد. آزمایش نشان می‌دهدکه، این‌دو معادله، به‌ازای $a=-1$، دارای جواب مشترك زیر هستند:

$$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

۳. ثابت می‌کنیم که

$$\sqrt[7]{17}<\frac{3}{2}<\log_{17}71$$

درواقع، نابرابری اول، با نابرابری زیرهم‌ارز است:

$$17<\left(\frac{3}{2}\right)^7\Longrightarrow 2^7\times 17<3^7\Longrightarrow 2176<2187$$

ونابرابری دوم:

$$17^{\frac{3}{2}}<71\Longrightarrow 17^3<71^2\Longrightarrow 4913<5041$$

۴. بنابر فرض مساله به‌دست می‌آید:

$$(1000a+100b+10c+d)+(100a+10b+c)+$$
$$+(10a+b)+a=1111a+111b+11c+d=4321$$

ازاین برابری روشن می‌شود $2<a<4$، یعنی $a=3$ و درنتیجه

$$111b+11c+d=988$$

ازآن جا $7<b<9$، یعنی $b=8$ و

$$11c+d=100$$

که به‌دست می‌آید: $c=9$، $d=1$.

پاسخ: $a=3$، $b=8$، $c=9$، $d=1$.

۵. چون x، y و z نمی‌توانند از ۹ بزرگتر باشند، بنابراین

$$0<x+y+z\leqslant 27$$

ضمناً باید داشته باشیم:

$$\overline{xyz}(x+y+z)=1000$$

بنابراین $x+y+z$ مقسوم‌علیهی از ۱۰۰۰ است. این مقسوم‌علیه‌هاعبارتند

Reconciliation With Mathematics
Editor: Parviz Shahryari
Address: Tehran, Firdaus
Vol. IX, No 5, *Serial No. 43, 1986*

۲، ۴، ۵، ۸، ۱۰، ۲۰، ۲۵. آزمایش نشان می‌دهد که تنها ۸ قابل قبول است:

$$\frac{۱}{۱+۲+۵}=۰٫۱۲۵$$

یعنی $x=۱$، $y=۲$، $z=۵$.

۶. داریم:

$$tg۵۵^\circ=\frac{۱+tg۱۰^\circ}{۱-tg۱۰^\circ}$$

ضمناً، تابع $y=\frac{۱+x}{۱-x}$ به‌ازای $x>۰$، صعودی است. بنابراین برای اثبات، باید $tg۱۰^\circ$ را از طرف پایین، تخمین بزنیم؛ داریم:

$$tg۱۰^\circ=tg\frac{\pi}{۱۸}>\frac{\pi}{۱۸}>\frac{۱}{۶}$$

و بنابراین

$$tg۵۵^\circ>\frac{۱+\frac{۱}{۶}}{۱-\frac{۱}{۶}}=۱/۴$$