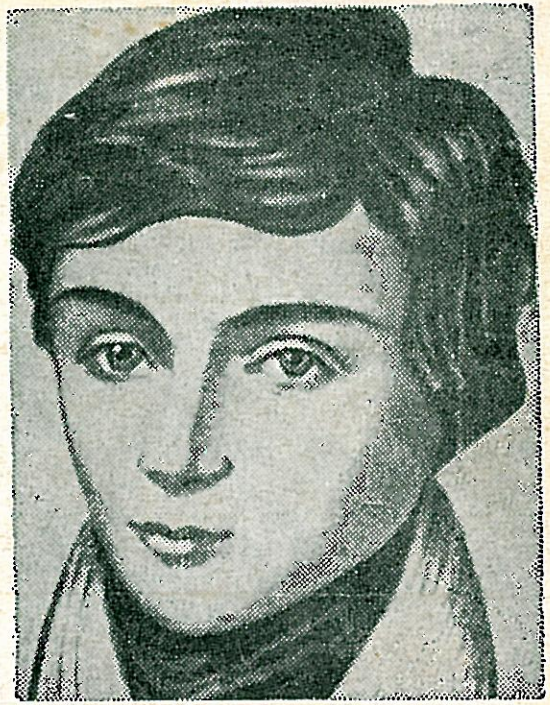
آشنائی با ریاضیات

جلد نهم



مردادماه ۱۳۵۸

آشنایی با ریاضیات (جلد نهم)

گردآورنده : پرویز شهریاری

صفحه‌آرا: حسن نیک‌بخت

ناشر: انتشارات فردوس

تیراژ ۴۰۰۰ نسخه

چاپ اول، مردادماه ۱۳۶۵

روی جلد:
اواریست گالوا

حروفچینی: مهدی

چاپ : رامین

فهرست جلد نهم

۱۸۰ ریال

آشنایی با ریاضیات (جلد نهم)
گردآورنده : پرویز شهریاری
صفحه‌آرا: حسن نیک‌بخت
ناشر: انتشارات فردوس
تیراژ ۴۰۰۰ نسخه
چاپ اول، مرداد ماه ۱۳۶۵

روی جلد:
اواریست گالوا

حروفچینی: مهدی
چاپ : رامین

فهرست جلد نهم

۱۸۰ ریال

اواریست گالوا
انقلابی و ریاضی‌دان فرانسوی

وقتی‌که چند سال پیش، زندگی‌نامهٔ گالوارا، که به‌قلم اینفلد فیزیك‌دان و نویسندهٔ بزرگ و انسان دوست لهستانی ترجمه و چاپ‌کردم (این زندگی‌نامه ابتدا در مجلهٔ هدهد و سپس به طور مستقل چاپ شد) گمان نمی کردم‌که تا این حد مورد استقبال‌قرارگیرد. دلیل‌این‌استقبال روشن بود. اواریست گالوا در بیست سال و شش ماهگی‌کشته شد، در دوران زندگی خود، بیشتر به یك انقلابی جمهوری‌خواه شهرت داشت تا یك ریاضی‌دان؛ولی دست خطی‌که‌از او باقی ماند، سر چشمهٔ تکامل شاخهٔ تازه‌ای ازریاضیات، یعنی‌نظریهٔ گروهها، شد. و طبیعی بود که چنین زندگی‌کوتاه و پرباری، نمی‌توانست مورد توجه قرار نگیرد.

این مقاله‌که به‌وسیلهٔ تونی روتمن (Tony Rotman)، فیزیك‌دان و نویسندهٔ جوان امریکایی (در سال ۱۹۸۲) نوشته شده است، شاید از نظر زندگی گالوا، متضمن چیز بیشتری نسبت به‌کتاب اینفلد نباشد، ولی درست دانستم‌که خوانندگان را با نظراین محقق امریکایی هم‌آشناکنم. به خصوص‌که درآن، دربارهٔ خود نظریهٔ گروه‌ها هم، در حد مقدماتی آن، صحبت شده است. دکتر روتمن در عنوان مقالهٔ خود نوشته است: «مشهور است‌که ریاضی‌دان جوان، نظریهٔ گروه‌ها را در یك شب ساخت، درآستانهٔ دوئلی‌که به خاطر زخم ناشی از آن، کشته شد. ولی بررسی‌های دقیق‌تر ثابت می‌کندکه‌گالوا، دورانی نسبتاً طولانی از زندگی‌کوتاه خود را، برای آماده‌کردن این اندیشهٔ فوق‌العاده جالب، صرف‌کرده است».

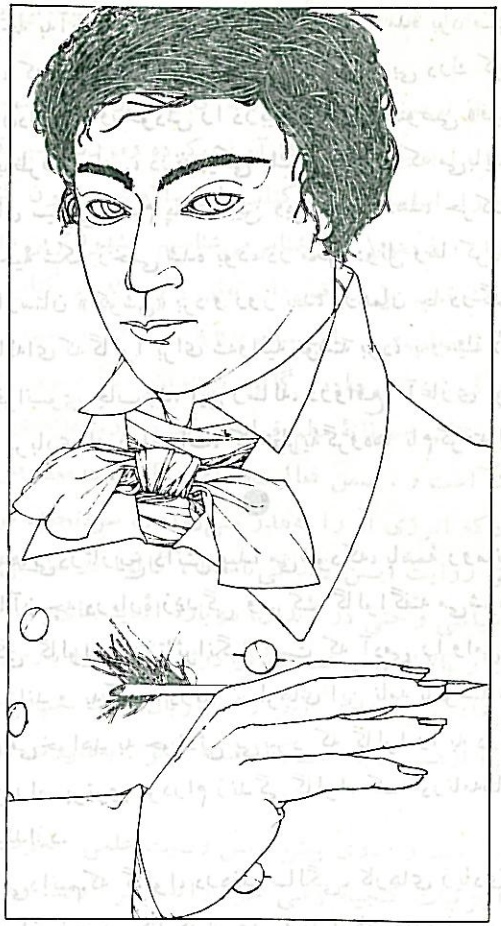
نویسندهٔ این مقاله، در سال۱۹۸۱ از دانشگاه اویستی در رشتهٔ فیزیك دکترشد و بعدها، درسال۱۹۸۳، برای‌کارآموزی در زمینهٔ اختر فیزیك، به دانشگاه‌آکسفورد رفت دکتر روتمن،

نه تنها یک دانشمند، بلکه نویسنده هم می‌باشد. تاکنون یک رمان و چند مقالهٔ علمی به زبان ساده از او منتشر شده است. او روی رمان دوم خود هم‌کارمی‌کند. دکتر روتمن می‌نویسد: «من به خاطر نمایش‌نامه‌ای‌که، چندی پیش، نوشتم، به‌گالوا و زندگی‌اوعلاقه‌مند شدم. دراین‌نمایشنامه، صحبت ازپوشکین، شاعرروسی، وگالوا، ریاضی‌دان فرانسوی است. در جریان نوشتن این نمایش‌نامه‌متوجه شدم‌که، دست‌کم درادبیات‌انگلیسی، خیلی‌کم و در عین‌حال غیردقیق، دربارهٔ زندگی گالوا نوشته شده است.

پرویزشهریاری

پیش‌ازسپیده دم سی‌ام ماه مه سال۱۸۳۲، اواریست‌گالوا، ریاضی‌دان نابغه، که تنها چند ماهی از بیست سالگی او می‌گذشت، به دوستانش له‌بن و ده‌لونه نوشت:«دو میهن پرست، مرا به‌دوئل فراخوانده‌اند... ومن نمی‌توانم آن را ردکنم. مرا ببخشیدکه هیچ‌کدام ازشما را در این باره مطلع نکردم. آن‌ها از من قول شرف گرفته بودندکه قبلاً هیچ میهن‌پرستی را از موضوع آگاه نکنم. تکلیف شما ساده است: شما باید باورکنید من‌علیه موج‌هامبارزه کردم. یعنی بعد ازآن‌که بی‌هیچ نتیجه‌ای، تمامی‌نیروی خود را برای پرهیز ازآن، از راه مسالمت‌آمیز به‌کار بردم و حتی، در چنین شرایط احمقانه‌ای نمی‌توانستم دروغ بگویم. مرا فراموش نکنیدا سرنوشت نگذاشت آن قدر زندگی‌کنم که‌میهن‌با نام‌من آشنا شود. با دوستی‌شما می‌میرم. اواریست گالوا».

گالوا، در همین شب، به‌دوستش اوگوست شه‌والیه نوشت:«در آنالیز، چیزی تازه‌کشف‌کرده‌ام. بعضی از این‌کشف‌ها، به نظریهٔ معادله‌ها و بعضی دیگر، به تابع‌هایی‌که قابل انتگرال‌گیری هستند، مربوط می‌شوند. در نظریهٔ معادله‌ها، تحقیق‌کرده‌ام‌که در چه حالت‌هایی می‌توان یک معادله را، به‌کمک رادیکال‌ها، حل‌کرد. و این، برای من بهانه‌ای بود برای عمیق‌ترکردن این نظریه و شرح همهٔ گونه‌های ممکن تبدیل‌هایی‌که حتی در مورد معادله‌های حل نشدنی، میسر است. امیدوارم‌که، بعد از این، کسانی پیدا شوندکه نظم دادن به این ابهام‌ها و سردرگمی‌ها را برای خود، مفید بدانند».



گالوای۱۷ساله، دانشجوی مدرسهٔ لوئی‌لوگران(نقاشی از د. جونسون). تنها دو سال بعد ازآن‌که‌گالوا مطالعهٔ ریاضیات را آغازکرد، مقاله‌ای دربارهٔ کسرهای مسلسل چاپ‌کرد و به بررسی نظریهٔ معادله‌ها پرداخت‌که او را به نظریهٔ جبری انتزاعی مجموعه‌ها رسانید، چیزی‌که خود او، آن راگروه نامید: خیلی از دیگر ریاضیدانان انتهای سدهٔ هیجدهم و ابتدای سدهٔ نوزدهم—مثل پاولوروفینی، نیلس هنریک آبل و ژوزف لوئی لاگرانژ—نیز روی نظریهٔ گروه‌هاکارکردند، ولی سهم اصلی بنیان‌گذاری این نظریه، به‌گالوا مربوط می‌شود. عکس بالا، بر اساس دو تصویرگالوا تهیه شده‌است: یکی‌ازآن‌ها مربوط به۱۵سالگی‌گالوا است‌ودیگری، تصویری‌که، آلفردبرادرگالوا، در سال۱۸۴۸، یعنی۱۶سال بعد ازمرگ‌اواریست، به یاد برادر خودکشیده است.

با توجه به‌آن چه که بـرای گالوا پیش آمده بود مـی‌توان حالت ناامیدی را ، که براین نامه حکومت می‌کند، به‌خوبی درك کرد. صبح زود به‌نوشتن پایان‌داد. اطاق خودش را دربیمارستان خصوصی «فولتریه» پاریس ترك کرد و به‌طرف جایی، درنزدیکی یك برکهٔ آب که می‌بایست دوئل‌خود را، بایك فعال سیاسی به‌نام پشه دربین ویل انجام دهد، حرکت‌کرد. گالوا را که از ناحیهٔ شکم زخمی شده بود، در محل دوئل رها کردند. رهگذری او را به بیمارستان «کوشن» برد و روز بعد، درهمان جا درگذشت. چهارده سال‌بعد، رساله‌ای که‌گالوا برای شه‌والیه نوشته بود، به‌وسیلهٔ ژوزف لیوویل، ریاضی‌دان فرانسوی چاپ‌شد. این رساله، درواقع، آغازی بود برای‌شاخهٔ فوق‌العاده و پرباری از ریاضیات، که نظریهٔ‌گروه‌ها نام‌گرفته است.

●

افسانه‌هایی‌درتاریخ دانش پیدا می‌شودکه، باهمهٔ رومانتیك‌بودنشان، نمی‌توانند باآن چه دربارهٔ زندگی ومرگ گالوا گفته می‌شود، قابل‌مقایسه باشند. زندگی گالوا چنان تاثرانگیز است که آدمی را وامی‌دارد تا بارها نامهٔ اورا بخواند و به‌آن‌چه دربین سطرهای این نامه نانوشته مـانده است، پی‌ببرد. آدم می‌خواهد به حوادثی پی‌ببرد که گالوا را به دوئل کشانید تا شاید، از این راه، پرتوی بردرام زندگی گالوا، کـه درنامه‌های او منعکس شده است، بیندازد.

مثلاً می‌دانیم‌که گالوا، درهفده سالگی، کارهای زیادی برای‌ساختن شاخه‌ای از ریاضیات می‌کندکه امروز به ما امکان داده است تا، بـه‌کمك آن، درماهیت زمینه‌های گـوناگونی همچـون نظریهٔ عددها، بلورشناسی، فیزیك ذره‌های بنیادی و گـونه‌های ممکن مکعب روبیك نفوذ کنیم. و باز می‌دانیم‌که گالوا، درهمین سن، برای بار دوم، به‌خاطـر امتحان ریاضی، از ورود به مدرسهٔ پلی‌تکنیك محروم شد. به «اکول نرمال» وارد شد، ولی در نوزده سالگی ازآن‌جا اخراج شد؛ دوبار به‌خاطـر فعالیت‌های سیاسی خود بازداشت شد و بـه زندان افتاد وکمی پیش‌از دوئل، درعشق، دچار ناکامی و یاس شد. او دریکی از آخـرین نامه‌های خود ، به‌روشنی، ایـن

موضوع را به دوئل مربوط می‌کند : «من می‌میرم و قـربانی یك عشوه‌گر رذل می‌شوم».

بسیاری از نویسندگان زندگی‌نامهٔ گالوا، درسدهٔ بیستم، این‌حقیقت‌های زندگی او را به‌میل خود رنگ‌آمیزی‌کرده ومورد تفسیر قرارداده‌اند. زندگی گالوا را، اساساً از روی‌کتاب‌های ساده‌ای همچون کتاب لئوپولد اینفلد فیزیك‌دان و فردهویل اخترشناس‌می‌شناسیم. مشهورترین روایت‌زندگی گالـوا به اریك تمپ بل ریاضی‌دان تعلق دارد که در کتاب خـود به‌نام «آفرینندگان ریاضیات» ـ چاپ سال ۱۹۳۷ ـ آورده است.

در زندگی‌نامه‌های ساده ، گالوا به‌عنوان نابغهٔ فـوق‌العاده‌ای معرفی می‌شودکه مورد ظلم احمقانهٔ معلم قرار می‌گیرد، درمحفل‌های ریاضی زمان خود ناشناخته است و ، ضمن فعالیت‌هـای سیاسی، درمعـرض دسیسه‌هایی واقع می‌شودکه انرژی او را به‌هدر مـی‌دهد و، سرانجام، موجب قتل او می‌شود . طبق روایت ایـن زندگی‌نامه‌ها ، گالوا درتمامـی دوران سیاه آشوب‌های سیاسی و حتی در زندان، دربارهٔ اندیشه‌های ریاضی خود فکر می‌کرده است و بالاخره، درشب قبل‌از دوئل، آن‌ها را به‌روی کاغذ آورده است. دراین‌جا: پیش‌آمد شب‌آخر را از زبان اریك تمپ‌بل نقل می‌کنیم، چرا که ظاهراً ازهمین راه است‌که افسانهٔ گالوا، به‌صورت گسترده‌ای‌پخش شده است.

«سراسر شب را روی پیش‌نویس وصیت علمی خـود کار می‌کرد و می‌کوشید تاجزئیات گنجینهٔ ذهنی خود رابه‌خاطر آورد؛ می‌کوشید قبل‌از آن‌که مرگ او فرا رسد، همه‌چیز رابنویسد. بارها و بارها درحاشیه‌نوشته است: «وقت ندارم، وقت ندارم»، و به مطلب بعدی پرداخته است. به‌این‌ترتیب، درآخرین ساعت‌های‌شوم قبل‌ازسپیده‌دم، نوشته‌ای‌از خود به‌یادگار گذاشت که بـرای نسل‌هایـی از ریاضی‌دانان سدهٔ بعد، زمینه‌ای بـرای اندیشیدن بود».

اخیراً به‌کمك م. انو و س. دویت (از دانشگاه اوستین) توانستم بعضی از دست‌نویس‌های گالوا و ، همچنین، آخرین کارهای علمی او را مطالعه کنم. برایم معلوم شد که حقیقت‌های اصلی زندگی او، دیر زمانی است که

روشن بوده است. تاریخ واقعی زندگی اواریست گالوا، به‌خودی‌خود، جالب و پرکشش است، به‌خصوص که سال ۱۹۸۲، صدوپنجاهمین سالگرد مرگ این نابغهٔ ریاضی‌هم می‌باشد.

●

علاوه برنامه‌ها، نوشته‌های رسمی ودیگر سندهای آن زمان، یعنی سرچشمهٔ اصلی آگاهی‌های مربوط به زندگی گالوا را می‌توان از کتاب پل دوپوئی، مورخ و ناظر ارشد اکول نرمال، که درسال ۱۸۹۶ نوشته است، به‌دست‌آورد. گالوا، درست۶۶ سال قبل، درهمین اکول‌نرمال، درس می‌خوانده است.

گالوا در ۲۵ اکتبر سال ۱۸۱۱، در شهر بورلارن نزدیك پاریس، به‌دنیا آمد. پدرش نیکلا گابریل گالوا، هوادار ناپلئون بود و شعبهٔ حزب لیبرال شهر خودش را رهبری می‌کرد؛ درسال ۱۸۱۵، درحکومت ناپلئون، به‌عنوان شهردار شهر بورلارن برگزیده شد.

آموزش گالوا را، تا ۱۲ سالگی، مادرش آدلائید ماری دهمانت گالوا به‌عهده داشت. او در زمینهٔ زبان‌های یونانی و لاتینی، به‌پسرش درس داد و تردید خود را نسبت به‌مذهب حاکم، به او تلقین کرد. احتمال کمی دارد که گالوا توانسته باشد با ریاضیات‌هم، بیشتر از درس‌های معمولی حساب، آشنا شود. درآن زمان، آموزش ریاضیات، خیلی مهم به‌حساب نمی‌آمد. معلوم نشده است‌که آیاکس دیگری‌هم، درخانوادهٔ گالوا، دارای استعداد ریاضی بوده است یا نه!

گالوا، آموزش اصلی خود را، از سال ۱۸۲۳ آغاز کرد، وقتی‌که به مدرسهٔ لوئی‌لوگران (مدرسهٔ لوئی‌کبیر) فرستاده شد. این، یك مدرسهٔ مقدماتی بودکه دوبسپیر و ویکتور هوگو هم، در زمان خود، درآن‌جا درس خوانده بودند (این مدرسه،امروزهم دایر است). دیدگاه‌های سیاسی گالوا، درهمین‌مدرسه شکل گرفت. دیدگاه‌های لیبرالی وضد سلطنتی او، که ازپدر و مادر خودگرفته بود، بانظر سیاسی بیشتر مدرسه‌ای‌ها تطبیق می‌کرد.

درسال اول تحصیل گالوا درمدرسه، رابطهٔ بین مدرسه‌ای‌ها و مدیر

آن‌ها، کاملاً وخیم بود. دانش‌آموزان نگران بودندکه مدیر تازه می‌خواهد مدرسه را به یسوعیان بسپارد (یسوعیان یا ژزوئیت‌ها، رهبری‌جناح راست ارتجاع رابه‌عهده داشتند،که برای تغییر دوران ناپلئونی تلاش‌می‌کردند). دانش‌آموزان باامکان‌هایی‌که دراختیار داشتند، صدای اعتراض خودرا بلند کردند؛ به‌کلیسا نمی‌رفتند، سرکلاس از پاسخ دادن امتناع می‌کردند و در ضیافت‌ها، جام خودرا به‌سلامتی لوئی هفدهم بلند نمی‌کردند. مدیر یکبار، ۴۰ نفر را به‌عنوان محرك ازمدرسه اخراج کرد. اگرچه گالوا را ازمدرسه اخراج نکردند (و به‌درستی معلوم نیست‌که آیا او درهمهٔ این کارهاشرکت داشته است یا نه)، ولی بی‌تردید، خودسری و زورگوئی مدیر، ناباوری او را نسبت به حاکمیت شدت بخشید.

●

دراین مورد تقریباً هیچ اطلاعی نداریم‌که، آیا گالوا شاگرد ضعیفی بود ویا، آن‌طورکه از بعضی کتاب‌های درجهٔ دوم برمی‌آید، سطح پایین آموزش مدرسه، مانع رشد فکری او می‌شد؟ درسال‌های اول تحصیل، چند جایزه به‌خاطر زبان‌های یونانی و لاتینی‌گرفت ویك دوجین کامل نظرهای تحسین‌آمیز دریافت‌کرد. رنه‌تاتون، مورخ‌دانش، پیشرفت‌های اورا درخشان می‌داند. در دورهٔ سوم‌مدرسه، نه‌چندان‌با علاقه، به‌علم بیان‌مشغول‌شد وهمین موجب شدکه درسال دوم باقی بماند. «بل» تاکید می‌کندکه‌گالوا، به‌خاطر وقت زیادی‌که صرف جبر می‌کرد، نسبت به‌علم بیان بی‌اعتنا بود؛ باوجود این، تنها وقتی درکلاس ریاضیات نام‌نویسی‌کردکه او را درسال دوم نگه داشتند. گالوا دراین موقع، ۱۵ سال داشت. شرکت دراین‌کلاس، که ایپولی ژان‌ورنیه آن را اداره می‌کرد، نبوغ ریاضی گالوا را بیدار کرد. بدون هیچ زحمتی، برنامهٔ درسی رافراگرفت وبه‌سراغ‌نوشته‌های‌دانشمندان مشهور آن‌زمان رفت. او با علاقهٔ فراوان، به‌مطالعهٔ‌کتاب لژاندر ونوشته‌های لاگرانژ پرداخت: «حل معادله‌های‌جبری»، «نظریهٔ تابع‌های تحلیلی» و «روش‌هایی دربارهٔ محاسبهٔ دیفرانسیلی». گالوا، بی‌تردید، به‌کمك نوشته‌های لاگرانژ، برای نخستین‌بار، با نظریهٔ معادله‌ها آشنا شدکه، درطول چهارسال بعد، ارثیهٔ پربار و اساسی خود را، در زمینهٔ آن، آماده‌کرد. ظاهراً، ورنیه،

به‌ارزش واقعی استعداد شاگرد خود پی برده بود: اودریکی ازنظرهای خود دربارهٔ گالـوا، از «پشت‌کار و موفقیت» و «پشت‌کار و پیشرفت فوق‌العاده درخشان» اوصحبت می‌کند.

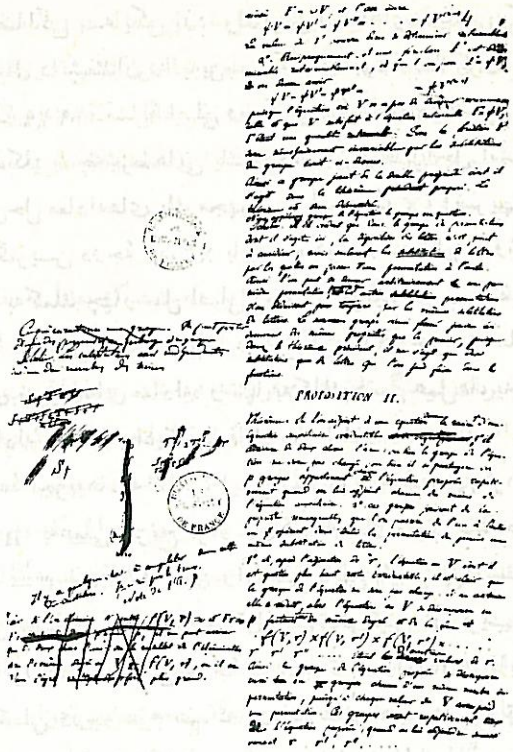
وقتی گالوا دنیای‌ریاضیات راکشف کرد، به‌کلی دگرگون شد.نسبت به سایردرس‌ها اعتنایی نمی‌کرد واعتراض‌معلمان علوم انسانی‌را برانگیخت. مربیان علم بیان، اورا «پریشان حـواس» می‌خوانند و درنظـرهای خود با واژه‌های «گوشه‌گیر و تودار»، «عجیب وغریب» و «مخصوص به خود» از اویاد می‌کنند. حتی ورینه، کـه نمی‌خواست شـور وشوق گالوا را نسبت به ریاضیات سردکند، به‌او توصیه‌می‌کند، درکارهای خود، منظم‌تر باشد. گالوا، توصیهٔ او را نپذیـرفت وتصمیم گرفت درامتحان ورودی انستیتوپلی‌تکنیك، بدون این‌که‌دردرس ریاضی‌آمادگی داشته‌باشد، شرکت‌کند. ولی درامتحان موفق نشد، زیرا برمبنای ریاضیات به اندازهٔ کافی تسلط نداشت.

●

گالوا تصورمی‌کردکه نسبت به‌اوبی‌اعتنایی‌شده است وهمین‌موضوع، اورا بیشتر علیه حاکمیت بـرانگیخت. با وجود این، موفقیت‌های بیشتری درریاضیات به‌دست‌آورد وگالوا، درکلاس بالاتری ازریاضیات نام‌نویسی کرد. این کلاس، به‌وسیلهٔ مربی باتجربه‌ای به‌نام لوئی‌پل امیل ریشارد اداره می‌شد. ریشارد، خیلی زود استعداد بالای گالوا را تشخیص داد و تلاش‌کرد تا اورا، بـدون‌گذراندن امتحان، به انستیتوی پلـی‌تکنیك بپذیرند. درست است که این تلاش به جایی نرسید، ولی تایید و تاکید ریشارد، اثر عمیقی درگالوای جوان‌گذاشت. درمارس‌سال ۱۸۲۹، وقتی که‌گالوا هنوزدانشجو بود، نخستین مقالهٔ خـودرا چاپ‌کـرد. عنوان مقاله چنین بود: «اثبات یك قضیه دربارهٔ کسرهای مسلسل متناوب». این مقاله درمجلهٔ «ریاضیات خالص وکاربسته»[1] متعلق به ژوزف دیاز ژرگون چاپ شد.

ولی زمینهٔ مقاله، خارج ازعلاقه‌های اصلی گالوا، دردانش بود. اودر این زمان روی نظریهٔ معادلـه‌ها و بـراساس نوشته‌های لاگرانژ کار می‌کرد.

1. Annales de mathématiques pures et apliquées.



یادداشت‌هایی برحاشیهٔ یکی ازمقاله‌هایی که‌گالـوا، پیش ازمرگ، ازخود باقی گذاشته است. این روشن‌ترین سند درتایید این روایت است که‌گالوا اندیشه‌های خود را، دربارهٔ نظریهٔ‌گروه‌ها، درشب قبل ازدوئل نوشته است. درسمت چپ‌ورقه نوشته شده است: «اثبات، به‌بعضی تکمیل‌ها نیازدارد. من وقت ندارم (یادداشت مولف)»:

Il y a quelque ehose à completer dane cetto démonstration.
Je M'est pas le temps (Nteo d'A)

بنابرروایت ا. بل، مشهورترین‌زندگی‌نامه‌نویس گالوا، در دست‌نویس‌های گالوا، غالباً به جملهٔ «من‌وقت ندارم» برخورد می‌کنیم. ولی درواقع، متنی‌که دراین‌جا آورده‌ایم، تنهاجایی است که‌این جمله، درآن، وجود دارد. خط‌تند وعجولانه‌ای که دراین‌جا به‌چشم می‌خورد، بامتن منظم ودقیق اصلی تفاوت دارد؛ همین‌مطلب می‌تواند مبنای این فرض‌باشدکه‌گالوا، درشب پیش ازدوئل، مقالـه را ننوشته است، بلکه‌تنها آن‌را اصلاح‌کرده است. درواقع‌مقاله‌به‌آکادمی علوم فرستاده شده بودو، سیمون دنیس پواسون، آن‌را برای‌گالوا پس فرستاده بود تا دوباره روی آن‌کارکند.

گالوا در۱۷ سالگی بـه یکی ازدشوارترین مساله‌های ریاضی، که در طول بیش ازصد سال دانشمندان را به‌بن‌بست کشانده بود، حمله کرد.

در سال ۱۹۲۹، مسالهٔ اصلی ومرکزی نظریهٔ معادله‌ها، به این پرسش مربوط می‌شدکه: با چه‌شرط‌هایی یك معادلهٔ جبری قابل حل است؟ به زبان دقیق‌تر: روش‌حل معادله‌های یك مجهولی (بامجهول x) وضریب‌های گویا، وقتی‌که بزرگتریـن درجهٔ آن x^n باشد، چگونه است؟ این روش بایدکلی باشد وبتوان به‌کمك چهارعمل اصلی (جمع، تفریق، ضرب وتقسیم) وعمل ریشه گرفتن، همهٔ این‌گونه معادله‌ها را حل کرد. اگر جواب معادلـه‌ای را بتوان ازروی ضریب‌های معادله، و تنها به‌کمك همین عمل‌ها، به‌دست‌آورد، می‌گویند، معادله به‌کمك رادیکال‌ها قابل حل است.

مجموعهٔ تجربه‌ها، به ظاهر، ایـن‌گمان را تقویت می‌کردکه حل یك معادلهٔ درجهٔ n، به‌عملی بغرنج تراز ریشهٔ nام نیاز دارد. راه حل‌کلی‌معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ را، حتی بابلی‌ها هم می‌دانستند. این راه حل، به‌گرفتن ریشهٔ دوم از b^2-4ac، یعنی ترکیبی ازضریب‌های معادله، نیازدارد. بنابراین، معادلهٔ کلی درجهٔ دوم، به‌کمك رادیکال‌ها قابل‌حل است. حل معادلهٔ کـلی درجه سوم هم، که درسدهٔ شانزدهم، به‌وسیلهٔ تسیپیون دان فدرو و نیکولو فونتانا تارتاگلیا ـ ریاضی دانان ایتالیایی ـ پیدا شد، منجر به ریشهٔ سوم تـرکیبی از ضریب‌های معادله می‌شود. بـه همین ترتیب، حل معادلهٔ‌کلـی درجه چهارم هم، کـه تقریباً درهمان زمان، به‌وسیلهٔ کودو ویکو فه‌راری‌ریاضی‌دان ایتالیایی‌ـ کشف شد، منجربه‌گرفتن ریشه چهارم می‌شود.

قبل از گالوا ، در طول قریب سیصد سال، کسی نتوانسته بود معادله کامل درجه پنجم و یا درجهٔ بالاتر از آن را، به کمك رادیکال‌ها حل کند. بسیاری از ریاضی‌دانـان، معتقد شده بودند کـه، برای این گونه معادله‌ها، نمی‌توان راه حلی به‌کمك رادیکال‌ها پیدا کرد. ولو این‌که بعضی ازآن‌ها، ومثلاً $x^7-2=0$، را بتوان ازاین راه به‌نتیجه رسانید (یکی ازریشه‌های این معادله $x=\sqrt[7]{2}$ است). گالوا، تفسیرنهائی را پیدا کردکه امکان می‌داد معلوم کنیم: آیا برای معادلهٔ مفروض، راه حلی به کمك رادیکال وجود دارد

یا نه؟ ولـی روشی‌که گالوا، برای حل ایـن مساله مورد استفاده قرارداد، خیلی مهم‌ترازآن است‌که، آن را بـه‌طور خاص، کشفی درنظریهٔ معادله‌هـا بدانیم. بررسی‌های گالوا، منجربه‌کشف نظریه‌ای شدکه امروزآن را نظریهٔ گروه‌ها می‌نامیم وکاربرد آن، به‌کلی پا را از محدودهٔ نظریهٔ معادله‌ها فراتر گذاشته است.

●

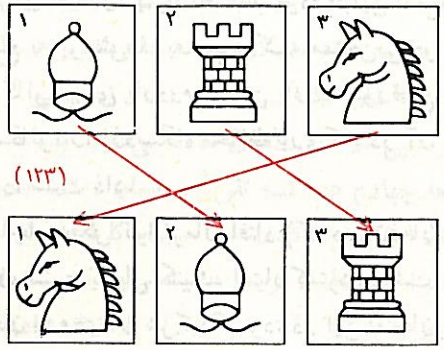
گالوا نخستین مقالهٔ خود را دراین زمینه ـ‌که بعداً به نظریهٔ گروه‌ها تبدیل شدـ درد۲۵ مه سال ۱۸۲۹، کمی قبل از آن‌که مدرسهٔ لوئی‌لوگران را تمام‌کند، برای فرهنگستان علوم فرانسه فرستاد. بعد ازقریب دوماه، برای بار دوم، درامتحان ورودی انستیتوی پلـی‌تکنیك شرکت‌کرد، ولی باز هم بخت به او یـاری نکـرد. دوم ژوئیه، یعنی چند هفته پیش از امتحان، پدر اواریست‌خودکشی‌کرد: اونتوانسته بود در برابرجنجالی‌که دربارهٔ اوبه راه انداخته بودند، طاقت بیاورد. (کشیش عیسوی بورلارن، به‌گالوای بزرگ تهمت زده بود، وهجویه‌های زشتی بین‌خویشان وآشنایانش پخش شده بود.) موقعیت‌گالوا برای امتحان، بسیارنامساعد بود؛ ازاین‌گذشته، ظاهراً درجلسهٔ امتحان، از پاسخ به پرسش‌ها، به نحوی‌کـه ممتحن‌می‌خواست، سر باززده بود؛ در نتیجه: گالوا برای باردوم، و این بار به طورقطع، رفوزه شد. این پیش‌آمد، نفرت‌گالوا را ازدستگاه محافظه‌کاری‌که، در آن زمان، بر فرانسه حکومت می‌کرد، شدت داد.

گالوا، ناچاربه‌فکراکول‌نرمال افتاد (که درآن‌زمان، مدرسهٔ مقدماتی نـامیده می‌شد و، نسبت به پلی‌تکنیك، اعتبارکمتری داشت). در نوامبر سال ۱۹۲۹، درامتحان ورودی‌آن شرکت‌کـرد. در این امتحان، امتیازیادی در ریاضیات به‌دست‌آورد وتقریباًدرهمان زمانی‌که مقالهٔ خود را، دربارهٔ نظریهٔ گروه‌ها، به فرهنگستان فرستاده بود، دانشجو شـد. ولی مقالهٔ او، درنشست فرهنگستان مطرح نشد.

درواقع،کاربررسی مقاله رابه اوگوست‌کوشی، مشهورترین ریاضی‌دان آن زمان فرانسه، سپردنـدکه یکی از جدی‌ترین هوادارن تجدید حکومت محافظه‌کاران بود. کـوشی مشغول بررسی ترکیب‌هایی بودکـه، در واقع،

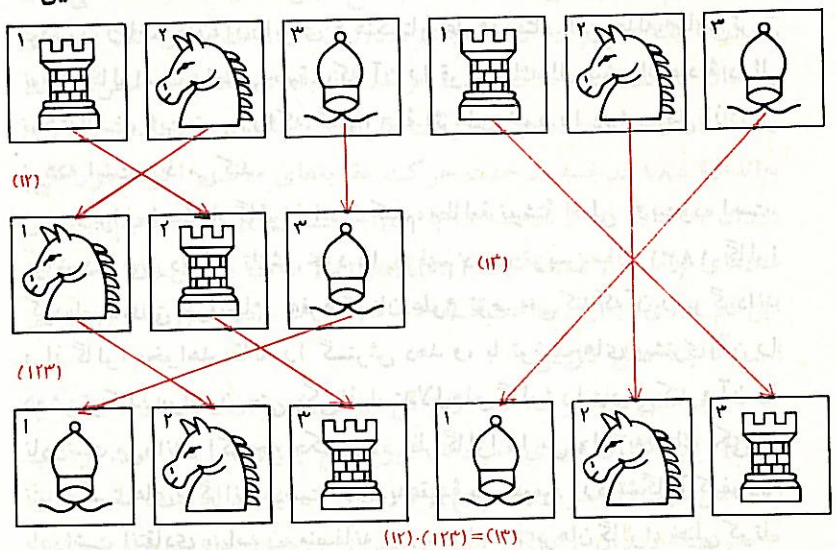
مقدمه‌ای برنظریهٔ گروه‌هاست. اوبعدها، رساله‌های زیادی دربارهٔ نظریهٔ گروه‌ها نوشت. روایت‌هایی وجود دارد که کوشی، دست‌نویس گالوا را گم کرد، یا به دورانداخت ویا به‌دست فراموشی سپرد. ولی احتمال بیشتر این است که کوشی، مضمون رساله را درك کرده، ولی باآن با احتیاط برخورد کرده است. «نه‌تاتون، درسال ۱۹۷۱، دربایگانی فرهنگستان علوم، نامه‌ای را پیدا کرد که گواهی می‌داد، کوشی قصد داشته است در ۱۸ ژانویهٔ سال ۱۸۳۰، نتیجه‌گیری‌های گالوا را، درنشست فرهنگستان مطرح کند. کوشی نوشته است: «امروز می‌خواستم گزارش کارهای گالوا را در فرهنگستان مطرح کنم... من بیمارم ودرمنزل ماندم. متاسفم که نمی‌توانم درنشست امروز شرکت کنم. خواهش می‌کنم، در برنامهٔ نشست آینده، جایی برای سخنان من دربارهٔ موضوعی که ذکر کردم، درنظر بگیرید».

ولی وقتی که کوشی، هفتهٔ بعد، دربارهٔ کارهای شخصی خودش صحبت کرد، نامی ازکارهای گالوا نبرد. چرا کوشی چنین کرد؟ موضوعی است که هنوزروشن نشده است. عقیدهٔ تاتون این است که کوشی پافشاری می‌کرد،



اندیشهٔ گروه ازمثال گروه S(۳) روشن می‌شود که عبارت است ازگروه تبدیل‌های مختلف سه شیء هر عضو گروه S(۳) به معنای عملی است که روی این سه شیء انجام می‌شود وآن‌هارا تبدیل می‌کند. ترتیب (۱۲۳) می‌تواند با جابه‌جاکردن خانهٔ ۱ به خانهٔ ۲، خانهٔ ۲ به خانهٔ ۳ و خانهٔ ۳ به‌خانهٔ ۱، به‌ترتیب به‌دیگری تبدیل شود. چون سه شیء را با ۶ ترتیب می‌توان نوشت، بنابراین، گروه S(۳) ازشش عضوتشکیل شده است.

گالوا رسالهٔ خودرا گسترش دهد تا بتواند جایزهٔ بزرگ فرهنگستان را، در ریاضیات، دریافت کند، اگرچه اعتقاد تاتون متکی برهیچ سندی نیست. گالوا، کارخود را درفوریه فرستاده‌بود که درست یك ماه پیش اززمان‌مسابقه بود. رساله، برای ژان باتیست فوریه فرستاده شد که دبیرثابت فرهنگستان و خود، یك‌ریاضی‌دان بود. فوریه روی روشی ازآنالیزم کار می‌کرد که امروز به‌آنالیز فوریه معروف است. ولی فوریه درماه مه مرد و رسالهٔ گالوا را در بین‌کاغذهای اوپیدا نکردند. بعدها، گالوا از بدبیاری‌خود به‌خاطردسیسه‌های فرهنگستان علوم صحبت می‌کند وکمیسیون مسابقه را به‌خودسری و استبداد متهم می‌کند: گالوا گمان می‌کرد به‌این خاطربه اوپاسخ رد داده‌اند که نام او گالوا و خودش یك دانشجو است. بسیاری ازداوری‌های اشتباه، از همین



ضرب یك عضوگروه S(۳) درعضودیگر آن. برای «ضرب» باید وضع عنصرها را به‌یاری‌نخستین‌تبدیل معین کرد و،سپس تبدیل دوم را درمورد وضع جدیدعنصرها به‌کاربرد. حاصل‌ضرب دوتبدیل، به‌تبدیلی گفته‌می‌شود که موجب همان وضع عنصرها بشود. معمولاً، ضرب گروه‌ها، دارای ویژگی جا به جایی نیست: حاصل‌ضرب دو عضو، بستگی به تقدم و تأخر آن‌ها دارد. مثلاً (۱۳)=(۱۲۳)*(۱۲)، در حالی که (۲۳)=(۱۲)*(۱۲۳).

اعتقاد گالوا سرچشمه گرفته است، ولی باید توجه داشت که موقعیت او نسبت به حاکمیت روز، تاحدی غیرطبیعی بود.

●

با وجود عدم‌موفقیت، گالوا کار ثمربخش خود را ادامه داد و آغاز به انتشار آن‌ها در «بولتن علوم ریاضی، اخترشناسی، فیزیك و شیمی»[1] کرد، به وسیلهٔ باردن فه‌روساك چاپ می‌شد و، البته، نسبت به نشریه‌های فرهنگستان علوم، کمترشهرت داشت. ازمقالهٔ او روشن می‌شود که، درسال ۱۹۳۰، گالوا توانسته بود، دربررسی شرط‌هایی که برای قابل حل بودن معادله لازم است، جلوتر برود؛ اگرچه هنوز، خود این مساله، به طورکامل، حل نشده بود. او درسال ۱۹۳۱، کار را به‌انجام رسانیده وبنا بر توصیه وپافشاری سیمون دنی پواسون ریاضی‌دان، آن‌رابرای فرهنگستان علوم‌فرستاد. این مقاله، اساسی‌ترین نوشتهٔ گالواست واین حقیقت که آن را قریب یك‌سال پیش ازحادثهٔ دوئل نوشته‌است، این تصوررا که، گالوا همهٔ اثرهای خود را درشب قبل ازدوئل نوشته است، رد می‌کند.

برای اینکه‌کارگالوا را درك کنیم، مطالعهٔ نوشتهٔ اصلی او بیهوده است. پواسون، بی‌تردید، تلاش خود را درفهم دست نویس سال ۱۸۳۱ گالوا کرده‌است، ولی سرانجام، به‌فرهنگستان علوم توصیه‌می‌کند که‌آن رابرگرداند و ازگالوا بخواهد مقاله را گسترش دهد و، با توضیح‌های بیشتری، آن را روشن‌ترکند. پواسون حتی یکی‌از استدلال‌های گالوا را رد می‌کند وآن را نادرست می‌داند، اگر چه حکم مورد نظر گالوا را می‌توان به‌کمك یکی از نتیجه‌گیری‌های لاگرانژ به‌دست آورد. به‌عقیدهٔ پ. نیومن ازدانشگاه آکسفورد، یادداشت انتقادی پواسون، منصفانه ودرست است. برهان گالوا، خیلی کوتاه وفشرده است ودرك آن را بسیار دشوارمی‌کند. علاوه برآن، کمبودهایی هم درآن وجود دارد. حالا، بعد ازصد وپنجاه سال، می‌توان پایه‌های نظریه را به‌صورتی قابل فهم تنظیم کرد. برای این منظور، از آ. اوت ویل، دانشمند فیزیك نجومی ازآکسفورد کمك می‌گیریم.

1. Bouletin det sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques.

گروه یعنی چه؟ درواقع امر، نظریهٔ گروه‌ها، به تقارن‌هایی مربوط می‌شود که‌درماهیت وذات یك دستگاه وجوددارد. دانهٔ برفی را درنظربگیرید که راس‌های آن، نسبت به‌یکدیگر، با زاویهٔ ۶۰ درجه قرارگرفته‌اند. اگر این دانهٔ برف را، دورمحوری که ازمرکزآن می‌گذرد و برصفحهٔ آن عمود است، به‌اندازهٔ ۶۰ درجه یا مضربی از ۶۰ درجه دوران دهیم، باوجودی که راس‌های آن تغییرجا می‌دهند، در شکل آن، هیچ گونه تغییری حاصل نمی‌شود. عملی که موجب تغییر درشکل کلی یك تصویر نشود، عمل تقارنی نامیده می‌شود.

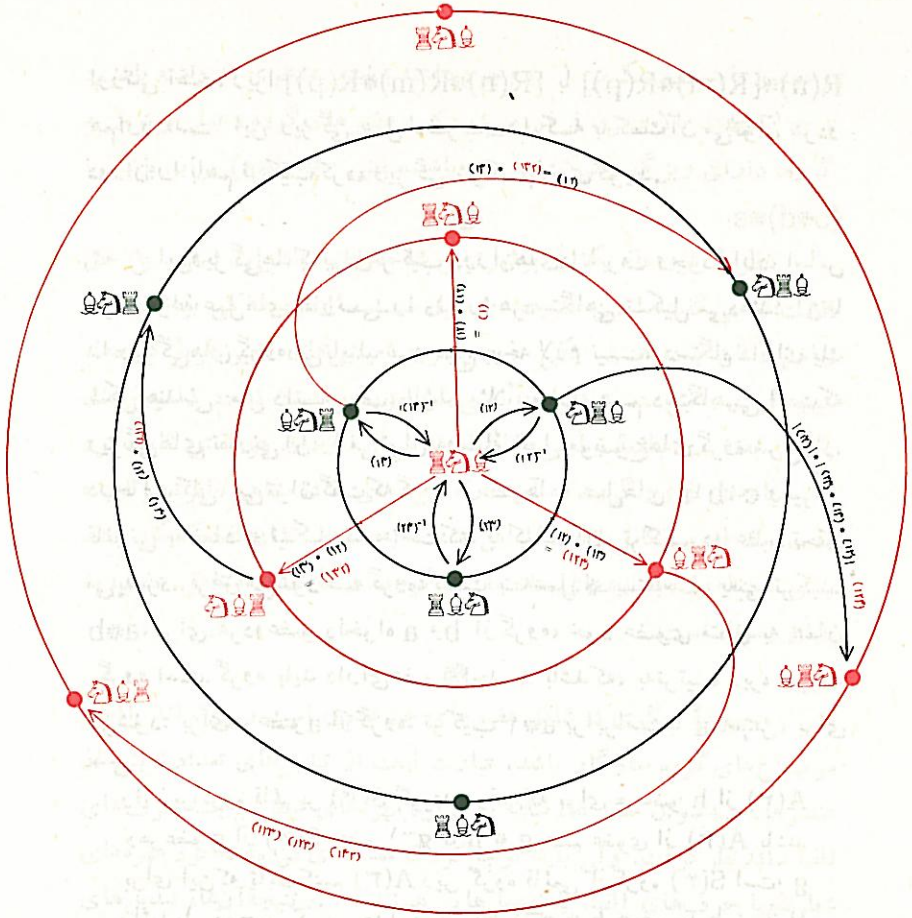
اگردانهٔ برف را دوبارمتوالی، وهربار به‌اندازهٔ مضربی از ۶۰ درجه دوران دهیم، تغییر نمی‌کند و، ضمناً، وضع راس‌ها طوری است که می‌توان آن را با یك عمل (دوران)، به‌جای دودوران، به دست‌آورد. مثلاً، دوران به‌اندازهٔ ۶۰درجه درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و، سپس، دوران به‌اندازهٔ ۲۴۰ درجه درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، معادل‌است بادوران به‌اندازهٔ ۱۸۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت. اگربه طورکلی، دوران به‌اندازهٔ ۶۰n درجه را با $R(n)=R(m)$ نشان دهیم، به‌ازای عددهای درست n و m، نتیجهٔ $R(n)*R(m)$ معادل با عمل $R(n+m)$. این هم ارزی، به‌این معناست که: «حاصل ضرب» دو عمل تقارنی، برابر است با یك عمل تقارنی.

چرخش دانهٔ برف، سه ویژگی مهم دارد. اول، دوران ۰ درجه یا $R(0)$، درشکل‌آن تغییری نمی‌دهد، زیرا هیچ چیزعوض نمی‌شود. ترکیب («حاصل‌ضرب») هردوران $R(n)$ و دوران $R(0)$، برابراست با $R(n)$، به‌نحوی که دوران $R(0)$، همان نقشی را دردوران‌های دانهٔ برف بازی می‌کند، که عدد ۱، درضرب معمولی، به‌عهده دارد. به همین مناسبت $R(0)$ را دوران واحدنامیده‌اند. دوم، اگرابتدا دوران $R(n)$ وسپس، به‌دنبال‌آن، دورانی درجهت مخالف وبه اندازهٔ آن ـ که می‌توان‌آن را با $R(n)$ نشان داد ـ انجام دهیم، دانهٔ برف به‌موضوع نخستین خود برمی‌گردد. بنابراین، حاصل‌ضرب $R(n)*R(-n)$ هم‌ارزاست با $R(0)$. دوران $R(-n)$ را، عکس دوران $R(n)$ گویند. سوم، عمل $R(n)*R(m)*R(p)$ همیشه یك

عضو دوم

عضو اول	(۱)	(۱۲۳)	(۱۳۲)	(۱۲)	(۱۳)	(۲۳)
(۱)	(۱)	(۱۲۳)	(۱۳۲)	(۱۲)	(۱۳)	(۲۳)
(۱۲۳)	(۱۲۳)	(۱۳۲)	(۱)	(۲۳)	(۱۲)	(۱۳)
(۱۳۲)	(۱۳۲)	(۱)	(۱۲۳)	(۱۳)	(۲۳)	(۱۲)
(۱۲)	(۱۲)	(۱۳)	(۲۳)	(۱)	(۱۲۳)	(۱۳۲)
(۱۳)	(۱۳)	(۲۳)	(۱۲)	(۱۳۲)	(۱)	(۱۲۳)
(۲۳)	(۲۳)	(۱۲)	(۱۳)	(۱۲۳)	(۱۳۲)	(۱)

جدول ضرب، برای شش تبدیل از سه عنصر، تایید می‌کند که تبدیل‌ها، با اصل موضوع‌های گروه سازگارند. جدول روشن می‌کند که حاصل‌ضرب a*b از هر دو تبدیل a و b، به‌نوبهٔ خود، یك تبدیل است. عضو واحد (۱) وجود دارد ودارای این ویژگی است که (۱)*a برابر است با a. برای هر عضو، عضو معکوس a^{-1} وجود داردکه برای آن داریم $a*a^{-1}=1$. مثلاً، عکس عضو (۱۲۳) عبارت است از(۱۳۲). بالاخره‌درستی، ویژگی شرکت‌پذیری را هم که‌می‌گوید، برای هرسه عضودلخواه a، b و c، حاصل ضرب a*(b*c) برابراست باحاصل ضرب (a*b)*c، می‌توان دراین جدول تحقیق کرد. بخش رنگی، زیرمجموعه‌ای ازشش تبدیل‌است. جدول‌ضرب آن‌ها (که به‌صورت رنگی متمایزشده است)، نشان می‌دهد که این زیر مجموعه، خود یك گروه است. چنین گروهی، که درون گروه دیگر قرار گرفته باشد، زیرگروه خاص نامیده می‌شود.



تبدیل‌های گروه S(۳)رامی‌توان، همیشه، به‌صورت‌حاصل‌ضرب تبدیل‌هایی نوشت که تنهاجای دوعنصر را عوض‌می‌کند. تبدیلی راکه بتوان به‌صورت حاصل‌ضرب تعدادی‌زوج‌ازاین‌گونه تبدیل‌ها نوشت، تبدیل‌زوج‌و، درحالت عکس، تبدیل فرد می‌نامند. اگریك تبدیل زوج (دایره‌های‌رنگی) رادر تبدیلی زوج ضرب‌کنیم (پیکان‌های‌رنگی)، حاصل‌ضرب، یك تبدیل زوج خواهد بود. اگر تبدیل‌زوج‌را درتبدیل فردضرب‌کنیم (پیکان‌های سیاه)، حاصل‌ضرب تبدیلی‌فردمی‌شود. به‌همین ترتیب، اگرتبدیل فرد (دایره‌های سیاه) را درتبدیل زوج ضرب‌کنیم، حاصل‌ضرب فرد، واگر تبدیل فردرا درتبدیل فردضرب‌کنیم، تبدیل‌زوج به‌دست می‌آید. تبدیل‌های زوج، یك زیرگروه تشکیل‌می‌دهند(زیرگروهی که درشکل‌صفحهٔ ۲۲۴ به‌صورت‌رنگی نشان داده شد). این زیرگروه را A(۳) گویند. زیرگروهی مثل A(۳) ←

ارزشی است، زیرا $[R(n)*R(m)*R(p)]$ با $R(n)*[R(m)*R(p)]$ هم‌ارز است. این ویژگی عمل «ضرب» را، که به‌کمك آن می‌توان هردو دوران را باهم ترکیب کرد، ویژگی شرکت‌پذیری گویند.

●

این‌ویژگی‌ها، که‌برای‌ترکیب دوران‌های‌دانهٔ‌برف وجود دارد، اساس هرمجموعهٔ عمل‌های تقارنی را دربارهٔ هردستگاهی تشکیل می‌دهند؛ آن‌ها را ویژگی‌های گروه می‌نامند. به هیچ وجه لازم نیست، دستگاه دارای یك شکل هندسی، مثل دانهٔ برف، باشد. مثلاً، معادله هم دستگاهی است که ویژگی‌های تقارنی آن را می‌توان به‌وسیلهٔ اصل موضوع‌های گروه شرح‌داد. درحالت کلی، می‌توان گفت که گروه ازعضوها یا عمل‌های a، b، c وغیره و قانونی با نماد * تشکیل شده است که، به‌کمك آن، ترکیب دو عضو تحقق می‌پذیرد. فرض می‌شود که گروه، نسبت به‌عمل * بسته‌است، یعنی ترکیب a*b، برای هردوعضو دلخواه a و b ازگروه، خود عضوی متعلق به همان گروه است. گروه باید دارای‌عضو واحد ۱ باشد که، به‌ترتیب زیر، تعریف می‌شود: برای‌هرعضو a ازگروه، ترکیب a*۱ برابراست‌با a. سپس، برای

→

را، زیرگروه قائم بر $S(۳)$ گویند، وقتی‌که برای هرعضو h از $A(۳)$ وهرعضو g از $S(۳)$، عضو $g * h * g^{-۱}$ هم عضوی از $A(۳)$ باشد. برای این‌که ثابت‌کنیم $A(۳)$ زیر گروه قائمی ازگروه $S(۳)$ است، g راتبدیلی زوج می‌گیریم. دراین صورت، $g * h * g^{-۱}$، حاصل‌ضربی‌از سه‌تبدیل زوج می‌شود و، بنابراین، خود یك تبدیل زوج ومتعلق‌به $A(۳)$ است. اگر g تبدیلی فرد باشد، تبدیل $g * h * g^{-۱}$ عبارت است ازضرب یك تبدیل فرد درتبدیل زوج و سپس در تبدیلی فرد و، بنابراین، به‌یك تبدیل زوج منجرمی‌شود. به این ترتیب، $A(۳)$ یك زیرگروه قائم است. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت‌کرد که (برای هرعدد n)، $A(n)$ زیرگروه قائم‌گروه $S(n)$ است. تعداد عضوهای زیرگروه‌ها باید مقسوم علیهی از تعدادعضوهای‌گروه اصلی باشد. چون در $A(n)$، تعداد عضوها نصف‌تعداد عضوهای $S(n)$ است، $A(n)$ دارای حداکثر تعداد عضوهایی است که می‌توانددریك‌زیرگروه خاص‌گروه $S(n)$ وجودداشته باشد. به‌این‌ترتیب، $A(n)$، بزرگترین زیرگروه قائم است.

هرعضو a بایدعضومعکوس $a^{-۱}$ وجود داشته باشد، به‌نحوی‌که داشته باشیم: $a*a^{-۱} = ۱$. بالاخره، فرض می‌شودکه عضوهای گروه وعمل مربوط به گروه، دارای ویژگی شرکت پذیری باشد، یعنی $(a*b)*c$ برابر باشد با $a*(b*c)$.

نظریهٔ گروه‌ها، یکی ازپرثمرترین شاخه‌های ریاضیات است. بل حق داشت‌که می‌گفت، این نظریه، در طول صد سال، خوراکی برای مطالعهٔ ریاضی‌دانان بوده است. یکی ازمهم‌ترین‌کامیابی‌های اخیرنظریهٔ گروه‌ها، نتیجه‌گیری دانیل هورنستن، ریاضی‌دان امریکایی است‌که در ژانویهٔ سال ۱۹۸۱ به‌نشست جامعهٔ ریاضی‌دانان امریکایی ارائه داد. هورنستن ثابت‌کرد که، سیاهه‌ای از ۲۶ گروه، که آن‌ها را گروه‌های سادهٔ متناهی نامرتب نامیده است، یك فهرست‌کامل است. با این‌کشف، به مفهومی‌توان گفت‌که، کار رده‌بندی اجزاء یا «بلوك‌های ساختمانی» گروه‌های با تعداد متناهی عضو، به پایان رسیده است.

●

مجموعهٔ دیگری‌که شامل عضوهای غیرعددی است و می‌تواند بااصل موضوع‌های گروه سازگار باشد، عبارت است از تبدیل‌های تعداد ثابتی از عنصرها. به‌عنوان عنصرها، مثلاً می‌توان، مهره‌های شطرنج یا حرف‌های الفبا رادرنظرگرفت. ولی باید توجه‌کردکه‌عضوهای‌گروه، نه‌خود مهره‌های شطرنج‌یا حرف‌های الفبا، بلکه‌عمل‌هایی هستندکه، درنتیجهٔ‌آن‌ها، تبدیل‌های مختلف عنصرها به‌دست می‌آید. برای پیداکردن حاصل‌ضرب دوعضو a و b از گروه (یعنی پیداکردن a*b)، باید نخستین تبدیل مجموعهٔ عنصرها را پیداکرد و، سپس، تبدیل دوم را درمورد این نتیجه به‌کاربرد.

فرض‌کنیم سه مهرهٔ شطرنج، به‌این‌ترتیب قرارگرفته باشندکه رخ‌خانهٔ شمارهٔ ۱، اسب خانهٔ شمارهٔ ۲ وفیل خانهٔ شمارهٔ ۳ راگرفته باشند. یك‌عضو گروه‌های‌تبدیل، برای این عنصرها را، می‌توان (۱۲) گرفت. این عمل، عنصرخانهٔ ۱ را به‌خانهٔ ۲، وعنصرخانهٔ ۲ را به‌خانهٔ ۱ می‌برد. درنتیجهٔ عمل (۱۲)، رخ واسب دروضع استقرار

فیل اسب رخ

a، b، c و d چنانند که گروه گالوای معادلهٔ

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

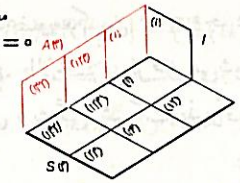
عبارت است از $S(3)$. بزرگترین گروه قائم $S(3)$ عبارت است از $A(3)$. بزرگترین زیرگروه، قائم گروه $A(3)$ عبارت است از ۱.

$$[S(3):A(3)]=\frac{3!}{3}=\frac{6}{3}=2;[A(3):1]=\frac{3}{1}=3$$

چون ۲ و ۳، عددهایی اولند، $S(3)$ گروهی قابل حل است. معادلهٔ $ax^3+bx^2+cdxd=0$ قابل حل است، زیرا گروه گالوای آن قابل حل است.

معادلهٔ درجهٔ سوم

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$



a، b، c، d، e و f چنانند که گروه گالوای معادلهٔ

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

عبارت است از $S(5)$. بزرگترین زیرگروه قائم $S(5)$، عبارت است از $A(5)$. بزرگترین زیرگروه قائم $A(5)$ عبارت است از ۱.

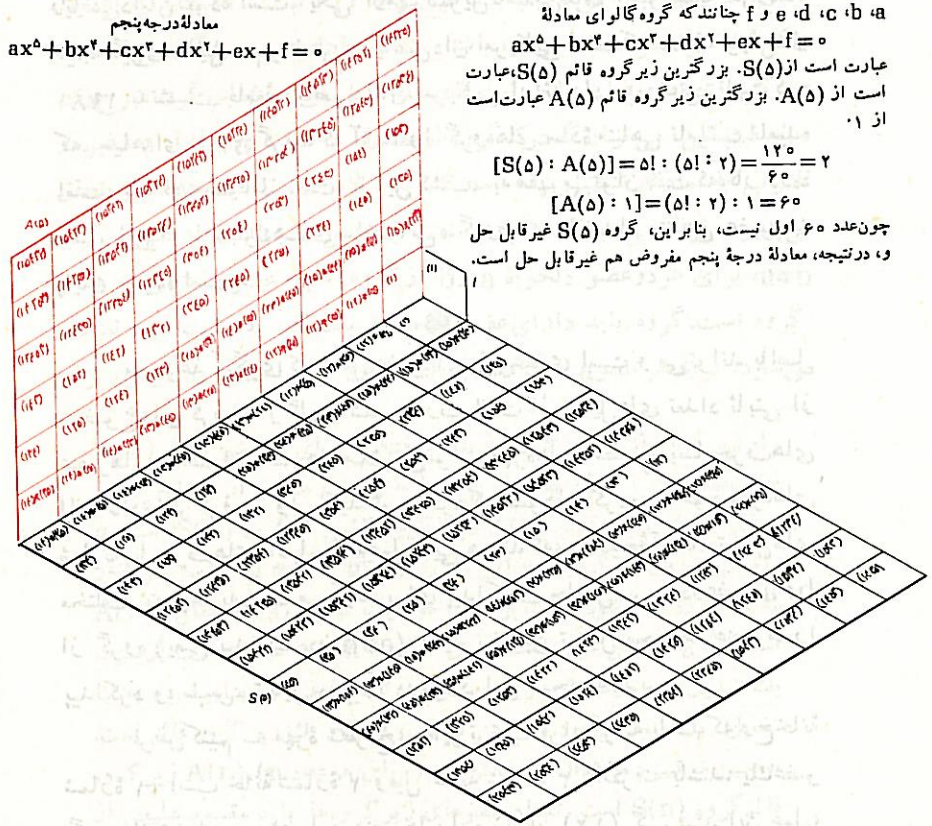
$$[S(5):A(5)]=5!:(5!:2)=\frac{120}{60}=2$$

$$[A(5):1]=(5!:2):1=60$$

چون عدد ۶۰ اول نیست، بنابراین، گروه $S(5)$ غیرقابل حل و، درنتیجه، معادلهٔ درجهٔ پنجم مفروض هم غیرقابل حل است.

معادلهٔ درجه پنجم

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$



گالوا، نظریهٔ گروه‌ها را، به‌خاطر حل مسالهٔ مربوط به‌حل معادله‌ها ساخت. درروش کلی حل، تنها باید از جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ریشه گرفتن استفاده شود. این قاعده باید درمورد هر معادلهٔ درجه n برقرار باشد که، درآن، n عبارت است از بزرگترین درجهٔ مجهول معادله. گالوا ثابت کرد که، چنین روشی، برای $n \geqslant 5$ درحالت کلی وجود ندارد، هرمعادلهٔ درجهٔ

←

جای خود را باهم عوض می‌کنند و به‌این وضع درمی‌آیند:

فیل رخ اسب

اگرهمین عمل را دوباره انجام دهیم، عنصرهای همین دوخانه، باردیگر، جای خود را باهم عوض می‌کنند و به‌همان وضع نخستین

فیل اسب رخ

می‌رسیم. بنابراین، عضو(۱۲) معکوس خودش می‌باشد.

عضودیگری از گروه به نام (۱۲۳)، عنصرخانهٔ ۱را به‌خانهٔ ۲، عنصر خانهٔ ۲ را به خانهٔ ۳ وعنصر خانهٔ ۳را به‌خانهٔ ۱ می‌برد. اگروضع نخستین عنصرها، یعنی

فیل اسب رخ

را، به‌کمك عضو(۱۲)، به‌صورت

فیل رخ اسب

تغییردهیم وسپس، عضو (۱۲۳) را به‌کار ببریم، به‌این وضع استقرار برای عنصرها می‌رسیم:

رخ اسب فیل

→

n را می‌توان به‌گروه $S(n)$ وزیرگروهی از آن مربوط کرد. گروهی که به یك معادلهٔ مفروض مربوط است، گروه گالوای این معادله نامیده می‌شود. گالوا ثابت کرد که معادله را تنها وقتی به کمك چهارعمل اصلی حساب وریشه گرفتن، حل کرد که گروه گالوای مربوط به آن قابل حل باشد. گروه وقتی قابل حل به حساب می‌آید که یك رشته زیرگروه قائم حداکثرداشته باشد که شاخص‌های آن، عددهایی اول باشند (شاخص‌ها، به‌کمك تعدادجعبه‌های گروه اصلی وزیرگروه‌ها معین می‌شوند). شاخص‌های ناشی ازگروه $S(3)$ وردیف زیرگروه‌های قائم حداکثرآن، عددهایی اول‌اند. بنابراین، هرمعادلهٔ دلخواه درجه سوم قابل حل است. درحالت $n \geqslant 5$، می‌توان ثابت کرد که بزرگترین زیرگروه قائم $A(n)$ عبارت است از گروه واحد ۱، که تنها ازیك جمله تشکیل شده است: از آن جا که $A(n)$، بزرگترین زیرگروه قائم $S(n)$ است، درحالت $n \geqslant 5$: همهٔ شاخص‌های $S(n)$، عددهایی اول نمی‌شوند. بنابراین، معادله‌هایی از درجهٔ پنجم و درجه‌های بالاتر وجود دارد که قابل حل نیستند.

این وضع را با یك گام هم می‌توان به‌دست آورد، به‌شرطی که درهمان وضع اولیهٔ عنصرها، تبدیل (۱۳) را به‌کار ببریم، که در نتیجهٔ آن، جای عنصرها دو خانهٔ ۱ و ۳، باهم‌عوض می‌شوند. به‌این ترتیب، نتیجهٔ تبدیل (۱۲) که دربارهٔ آن، تبدیل (۱۲۳) به‌کاررفته باشد، به‌همان وضعی ازاستقرارعنصرها می‌رسد که، ازهمان ابتدا، تنها تبدیل (۱۳) را به‌کار بردیم. به‌زبان نمادها:

(۱۳) = (۱۲۳)*(۱۲).

●

تعداد تبدیل‌های n عنصربرابر است با !n. فاکتوریل عدد n عبارت است ازحاصل‌ضرب همهٔ عددهای از ۱ تا خود n؛ مثلاً !۵ برابر است با ۵×۴×۳×۲×۱ یا ۱۲۰. بنابراین، تعداد عضوها در گروه S(n)، گروه تبدیل‌های n عنصر، برابراست با !n. تعداد عضوهای هر گروه را، «مرتبهٔ» آن می‌نامند. گروه تبدیل‌های سه عنصر، یعنی S(۳)، شامل !۳ یا ۶ عضو است: (۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۲۳)، (۱۲۳)، (۱۳۲). دراین‌جا (۱) عبارت است ازتبدیل واحد، که هروضعی ازعنصرها را بی‌تغییرنگه می‌دارد.

معلوم می‌شود که، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ عضوهای گروه S(۳) می‌تواند با همهٔ ویژگی‌های یك گروه سازگار باشد، که دراین صورت، آن را زیرگروه می‌نامند. وقتی که تعداد عضوهای زیرگروه، کمتر از تعداد عضوهای خودگروه باشد، آن را خاص می‌نامند. مثلاً، به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که [(۱۲) , (۱)] یك گروه را تشکیل می‌دهد که، درواقع، زیرگروه خاصی ازگروه S(۳) است.

برای هرزیرگروه خاص H ازگروه G، می‌توان عددی به‌نام شاخص تعریف کرد که عبارت است ازمرتبهٔ گروه اصلی برمرتبهٔ زیرگروه. شاخص را معمولاً به‌صورت $\left[\frac{G}{H}\right]$ می‌نویسند. شاخص‌زیر مجموعهٔ [(۱۲) , (۱)] درگروه S(۳)، برابراست با $\frac{۶}{۲}$، یعنی ۳. بنابرقضیهٔ مقدماتی نظریهٔ گروه‌ها، که‌ما دراین‌جا به‌اثبات آن نمی‌پردازیم، مرتبهٔ هرزیرگروه، باید مقسوم‌علیهی ازمرتبهٔ گروه اصلی باشد، به نحوی که شاخص، همیشه عددی درست است.

گالوا سه مفهوم مهم را وارد کرد که، به‌کمك ارتباط متقابل آن‌ها، توانست ثابت کند که روشی کلی برای حل معادلهٔ درجه پنجم وبالاتر ازآن، به‌کمك رادیکال‌ها، پیدا نمی شود.[۱] گالوا، قبل ازهرچیز، یادآوری می کند که هرمعادله‌ای می‌تواند با یك گروه تبدیل‌ها، مربوط باشد. این گروه، ویژگی‌های تقارنی معادله را منعکس می‌کند که، امروز، آن را، گروه گالوا می‌نامند.

برای این که نقش ویژگی‌های گروه گالوا را بفهمیم، معادلهٔ دلخواه درجه سوم را، باضریب‌های درست در نظر می گیریم. می‌توان ثابت کرد که این معادله سه‌ریشه دارد، ولی این اثبات به‌ما نمی گوید: آیا می‌توان ریشه‌ها را به‌کمك رادیکال‌ها، بیان کرد؟ اگرریشه‌های معادله را با u، v و w نشان دهیم، تابع چندجمله‌ای مثل u − v یا u + v + w − ۱ راتشکیل‌می‌دهیم. هرتابعی ازاین‌گونه را می‌توان، با تبدیل ریشه‌های u و v و w، به صورت تابع دیگری نوشت. مثلاً، تبدیل (۱۲)، جای ریشه‌های u و v را عوض می کند و، بنابراین، تابع u − v را به‌صورت v − u درمی‌آورد. درنتیجهٔ این تبدیل‌ها، بسیاری ازتابع‌های ریشه‌ها، مقدارشان تغییرمی‌کند، ولی مقدار بعضی‌ها، بی‌تغییرمی‌ماند. مثلاً، مقدار تابع u + v + w، با هرتبدیل u و v و w، تغییرنمی‌کند. ازآن جاکه گروه S(۳) شامل همهٔ تبدیل‌های ممکن u و v و w می‌شود، گویند که u + v + w نسبت به S(۳) بی‌تغییراست.

می‌توان ثابت کرد که مقدار u + v + w، برای هرمعادلهٔ درجه سوم با ضریب‌های گویا، عددی است گویا. تابع‌های چند جمله‌ای دیگری از ریشه‌ها وجود دارد که، بسته به‌ضریب‌های معادله‌ها گویا و برای بعضی دیگر گنگ است. اگرمقدار چنین تابعی گویا باشد، گروهی ازتبدیل‌ها u، v و w وجود دارد که مقدارتابع‌را تغییرنمی‌دهد. گروه گالوای معادله، عبارت است ازبزرگترین گروه تبدیل‌هایی که با این تقاضا، برای هر تابع چند جمله‌ای

۱. دقیق‌تربگوییم: این ارتباط‌متقابل به‌گالوا امکان داد تا نظریهٔ قابل حل‌بودن معادله‌ها را، به‌کمك رادیکال‌ها، درست‌کند. قابل حل نبودن معادلهٔ درجه پنجم، به‌کمك رادیکال‌ها را، ن. ه. آبل، ریاضی‌دان نروژی، قبل ازگالوا ثابت کرده بود. م.

گویا ازریشه‌ها، سازگارباشد. بـه زبان دیگر، برای هرتابع چند جمله‌ای ریشه‌ها، که مقداری گویا داشته باشد، هرتبدیل ازگروه گالوا، مقدارتابع را بی‌تغییرنگه می‌دارد. وقتی که‌تبدیل ریشه‌ها، مقداریك تابع چند جمله‌ای گویا ازاین ریشه‌هـا را تغییرندهد، درایـن صورت، ریشه‌ها نسبت بـه‌این تبدیل بی‌تفاوت‌اند. بنابراین، هرچه‌تعدادعضوهای گروه گالوا بیشترباشد، تبدیل‌های بیشتری درآن وجود داردکـه، برای آن‌ها، ریشه‌ها بـی‌تفاوت‌اند. به این علت، گروه گالوا، وسیلهٔ نیرومندی است، بـرای نشان دادن ویژگی‌های تقارن‌های معادله.

محاسبهٔ گروه گالـوا، برای یك معادلهٔ مفروض، معمولاً دشواراست، اگرچه، همیشه می‌توان براساس این نظام عمل‌کرد، حتی اگرمقداررریشه‌های معادله معلوم نباشد. ولی، بـرای هدف گالـوا، نیازی به محاسبه نیست. او می‌خواهد تنها این را ثابت‌کندکه همیشه معادلهٔ درجهٔ n پیدا می‌شود، که‌در موردآن، گروه گالوا، بزرگترین گروه‌ممکنهٔ تبدیل ریشه‌ها: یعنی $S(n)$ است.

●

گالوا، زیرگروه قائم را هم تعریف‌کرد؛ زیرگروه H ازگروه G را، وقتی وتنها وقتی، قائم بر G گویندکه شرط زیر برقرار باشد: اگر هرعضو h اززیرگروه H را ازطرف چپ، درهرعضو g ازگروه اصلی G «ضرب» و، سپس، ازطرف‌راست در g^{-1} (عضومعکوس g) «ضرب» کنند، عضوزیر-مجموعهٔ H به‌دست‌آید. می‌توان‌گفت، اگرH قائم برG باشد، آن وقت عضو h' درH وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم: $h' = g * h * g^{-1}$. مثلاً، می‌توان متوجه شدکه [(۱۳۲) , (۱۲۳) , (۱۱)] زیرگروهی قائم برگروه $S(3)$ است.

اگرگروه متناهی G، چند زیرگروه قائم داشته باشد، باید زیرگروهی پیدا شودکه‌مرتبه‌ای بیشترازمرتبهٔ همهٔ زیرگروه‌های قائم گروه G داشته‌باشد؛ این زیرگروه را زیرگروه قائم ماکزیمم ازگروه G می‌نامند. این زیرگروه قائم ماکزیمم هم، به‌نوبهٔ خود، می‌تواند زیرگروه قائم ماکزیمم خودش را داشته باشد؛ واین روند ادامـه پیدا می‌کند تا به‌کوچکترین زیر گروه قائم ممکن برسیم. بنابراین، هرگروه G، دنباله‌ای از زیرگروه‌های قائم ماکزیمم

به‌وجود می‌آورد. اگراین دنباله‌را

$$G, H, I, j, \ldots$$

بنامیم، می‌توان دنباله‌ای ازشاخص‌های زیرگروه‌های قائم ماکزیمم به‌دست آورد:

$$\left[\frac{G}{H}\right], \left[\frac{H}{I}\right], \left[\frac{I}{J}\right], \ldots$$

مفهوم مهم سوم نظریهٔ گالـوا عبارت است ازمفهوم گـروه قابل حل. گالوا، گروهی را قابل حل می‌داندکـه هریك از شاخص‌های زیرگروه‌های قائم ماکزیمم که ازگروه به وجودآمده‌اند، عددی اول باشد. مثلاً زیرگروه قائم ماکزیمم $S(3)$ عبارت است از

[(۱۱), (۱۲۳), (۱۳۲)]

وبه نوبهٔ خود، زیرگروه قائم ماکزیمم گروه اخیر، عبارت است از [(۱۱)]. شاخص زیرگروه [(۱۳۲) , (۱۲۳) , (۱۱)] نسبت بـه گروه $S(3)$ برابر است با $\frac{6}{3}$ یعنی ۲ وشاخص زیرگروه [(۱۱)] نسبت به‌گروه

[(۱۱), (۱۲۳), (۱۳۲)]

برابراست با $\frac{3}{1}$ یا ۳. چون ۲ و۳ عددهایی‌اول هستند، $S(3)$ گروهی‌قابل حل است.

اصطلاح گـروه قابل حل، نظریهٔ گالوا را بـه‌خوبی توضیح می‌دهد. گالوا ثابت‌کردکه یك معادله، وقتی وتنها وقتی، به‌کمك رادیکال‌ها قابل‌حل است‌که گروه گالوای این معادله قابل حل باشد. بـرای این‌که ثابت‌کنیم‌که معادلهٔ‌درجه پنجم ویا معادله‌های‌ازدرجهٔ بالاتررا نمی‌توان به‌کمك‌رادیکال‌ها حل‌کرد، باید ثابت‌کنیم که‌معادله‌هایی ازاین‌نوع وجود داردکه، برای‌آنها، گروه گالوا قابل‌حل نیست گروه $S(n)$ وقتی غیر قابل حل است‌که n برابر یا بزرگتراز۵باشد (شکل‌های صفحه‌های ۲۲۵و۲۲۸ رابببینید). ازآن‌جاکه، برای‌این‌مقدارهای n، معادله‌هایی‌ازدرجهٔ n پیدامی‌شودکه، برای‌آن‌ها، $S(n)$

یك گروه گالوا است، بنابراین، معادلهٔ کلی درجهٔ پنجم یا درجهٔ بالاتر، قابل حل نیست.

●

وقتی که گالوا، کارمربوط به نظریهٔ گروه‌ها را تمام کرد، پیش آمدهای سیاسی وارد زندگی اوشد. در ژوئیه سال ۱۸۳۰، جمهوری خواهان و مخالفان تجدیدسلطنت. به‌خیابان‌ها ریختند. درهمان لحظه‌هایی که‌دانشجویان انقلابی انستیتوی پلی‌تکنیك در جریان‌های خیابانی شرکت داشتند، گالوا و دوستانش را، به دستورمدیر مدرسهٔ مقدماتی، درمدرسه نگه‌داشته ودرهای خروجی را به‌روی آنها بسته بودند. گالوای خشمگین، تصمیم به‌فرار گرفت، ولی موفق نشد و، درنتیجه، ازپیش‌آمدهای انقلاب ژوئیه برکنار ماند.

ترك سلطنت ازطرف شارل دهم، یك پیروزی برای جمهوری خواهان بود ولی، برتخت نشستن لوئی فیلیپ، موجب دلسردی عمیق گالوا و دیگر آزادی خواهان شد. گالوا درماه‌های بعد از انقلاب، دراجتماع جمهوری‌خواهان شرکت کرد و با رهبران آن‌ها (و به خصوص، با فرانسوا ونسان راسپای) آشناشدو، ظاهراً، همراه‌باآن‌ها درشورش‌ها ونمایش‌های‌اعتراضی، که پاریس را به‌تب‌وتاب انداخته بود، شرکت داشت‌وارد تویخانهٔ گاردملی ـ واحد شهربانی ـ شدکه منحصراً ازجمهوری خواهان تشکیل شده بود. در ماه دسامبر، گالوا نامه‌ای به‌یکی ازروزنامه‌های پاریس نوشت و درآن، مدیر مدرسهٔ مقدماتی را، باتوجه به رفتار اودردوران انقلاب ژوئیه، خائن‌نامید. ونباید تعجب کردکه، به‌این‌دلیل، گالوارا ازمدرسه اخراج کردند. برخلاف آن چه شهرت دارد، گالوا را نباید قربانی پیش‌آمدها دانست. اوظاهراً، بی‌باك وپرتحرك بود وبارها خود را دچار گرفتاری کرده بود. ازنامهٔ سوفی ژرمن ریاضی‌دان برمی‌آیدکه گالوا، به‌طور مرتب، درنشست‌های فرهنگستان علوم حاضر می‌شد وهرطوری که می‌خواست به سخن رانان حمله می‌کرد. وقتی که گالوارا ازمدرسهٔ مقدماتی بیرون کردند، به‌خانهٔ مادریش درپاریس رفت، ولی چون با اوسازش نداشت، مادرش ازآن‌جا رفت.

اوج تلاطم‌وخشم گالوا، دربهارسال ۱۸۳۱، درجریان‌ضیافت جمهوری‌خواهان درنهم ماه مه پیش آمد. جمهوری خواهان، به‌مناسبت تبرئه نوزده

افسر توپخانه، که به توطئه‌علیه حکومت متهم شده بودند جشن گرفته‌بودند. الکساندر دوماى پدر، که در ضیافت حضور داشت، در خاطرات خود می‌نویسدکه، اوایستاد وپیشنهادکردبه‌نام لوئی فیلیپ بنوشند. اوضمناً، همراه با جام خود، کاردی راهم بلندکرده بود.

وکیل مدافع گالوا در دادگاه ادعاکردکه اودر واقع این‌طور شعار داده است: «برای لوئی فیلیپ، اگرخیانت کند». ولی قسمت آخرجمله، در سروصدای وهیاهوی جمعیت شنیده نشده است. دادگاه یا دفاع را باورکرد ویا جوانی گالوا را درنظر گرفت و، به هرحال، او را تبرئه‌کرد. با وجود این، روز تسخیر باستیل، ۱۴ ژوئیهٔ سال ۱۸۳۱، وقتی که هنوزیك ماه از زمان دادگاه نگذشته‌بود، گالوا رادوباره بازداشت کردند و، این‌بار، به‌خاطر پوشیدن غیرقانونی لباس رسمی گارد توپخانه. گارد منحل‌شده‌بود و، بنابراین، عمل گالوا، گستاخی ونقض قانون بود. این‌بار به‌زندان افتاد وهشت ماه‌در آن‌جا بود.

زندان، گالوا را درهم شکست. گاهی دچارخشم شدید می‌شد وگاه به افسردگی می‌افتاد. راسپای، که‌درآن زمان درهمان‌زندان بود، بعدهابه‌خاطر آوردکه یك روز، گالوا درحالت مستی می‌خواست خودکشی کند. به‌روایت راسپای، گالوا می‌گفت‌که، شبح مرگ واقعی اورا تعقیب می‌کند: «من در دوئل به‌خاطریك زن عشوه‌گر وازطبقهٔ پایین می‌میرم. چرا؟ برای این‌که مرا وا می‌دارد تا ازشرف او، که مورد تحقیردیگری قرارمی‌گیرد، دفاع کنم». وقتی که یکی اززندانیان کشته می‌شود، ظاهراً، گالوا نگهبان زندان را متهم به‌قتل می‌کندکه، به‌همین دلیل، گالوا را به‌زندان انفرادی انداختند.

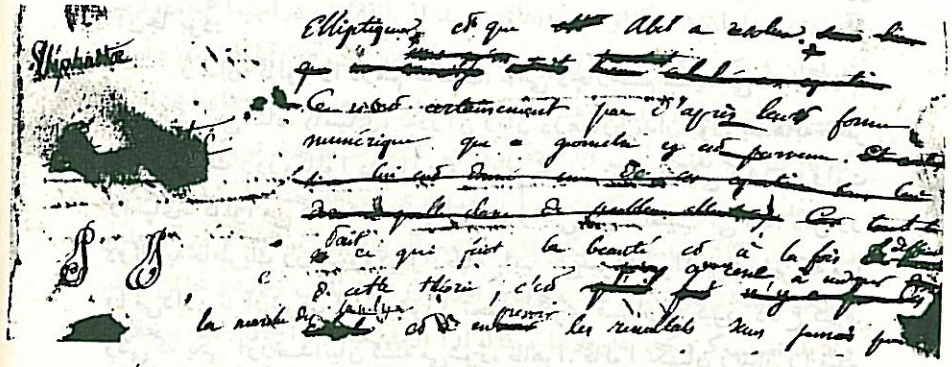
ناگوارتر ازهمه این بودکه‌مقاله‌های گالوا را، که درطول سال ۱۸۳۱ نوشته بود، چاپ نکردند. درمقدمه‌ای که روی یادداشت‌های زندان نوشته است، با تلخی تمام تاکید می‌کند: «از هیچ کس، نه‌به‌خاطراندرز ونه‌به‌خاطر نگهداری تشکرنمی‌کنم. سپاس‌گذاری وتشکر، دروغی بیش نیست».

●

دوران آخر زندگی گالوا، به‌خصوص، همیشه مورداستفادهٔ زندگینامه‌نویسان اوبوده است. آن‌ها نخواسته‌اندحرف خودگالوا را باورکنندکه‌دلیل

دوئل، یك نزاع شخصی بوده است. آن‌ها کوشیده‌اند تا زنان خود فروخته، دسیسه‌گران پلیس و دشمنان سیاسی اورا، متهم به‌قتل او کنند. ولی‌هیچ کدام ازاین روایت‌ها تایید نشده است.

درمیانه‌های مارس سال ۱۸۳۲، به‌خاطر شیوع بیماری وبا، که درآن زمان درپاریس بیداد می‌کرد، گالوا را از زندان به بیمارستان خصوصی فولتریه بردند. ظاهراً درهمین جا بودکه با آن «زن عشوه‌گر پست» آشنا شد. داستان خیلی کوتاه است، ولی به‌صورتی بی‌معنی تلاش شده است تا اورا زنی خود فروخته ویا جاسوس حقوق‌بگیر معرفی کنند که، عمداً، مقدمات قتل گالوا را فراهم کرده است. صفت «پست» به‌واژه‌های «زن عشوه‌گری از طبقهٔ پایین» مربوط می‌شود و از آن جا، روایت مربوط به زن خود فروخته پدید می‌آید. بنا به اطلاع راسپای، جملهٔ مربوط به زن عشوه‌گر ازطبقهٔ پایین را، یك‌سال قبل‌ازدوئل به زبان می‌آورد و، چه‌بسا، این واژه ازخود راسپای



نام زنی که‌گالوا اورا درنامهٔ خود (که شب قبل از دوئل نوشته است)، موجب بدبختی‌های خود می‌داند، غالباً درحاشیه‌های مقالهٔ گالوا هم‌آمده است. درجای امضا، زیرنام اواریست، می‌توان نام ستفانیا را خواند. در ضمن، گالوا، حرف‌های «S» و «E» را (که حرف‌های اول «ستفانیا» و «اواریست» است)، به صورت نوعی امضا، باهم ترکیب‌کرده است. از نامه و دیگردست نویس‌های گالوا برمی‌آیدکه صفت «عشوه‌گریست» را در حالتی به‌قلم‌آورده است‌که درعشق نسبت به‌زن، دچار ناامیدی شده است، واین ناامیدی مربوط به‌چند ماه پیش از دوئل است، نام این زن روشن شده است: ستفانیا فه‌لیسیا یوته‌رن دوموتل، دختریك پزشك پاریسی.

باشد. علاوه براین، در۲۵ مه، یعنی شش روزپیش ازمرگ، درنامه‌ای که گالوا به اوگوست شه‌والیه می‌نویسد، اشاره می‌کندکه داستان اوبه پایان رسیده است: «ولی آثارطوفان عشقی راکه‌ازسر گذرانده‌ام، چگونه می‌توانم ازبین ببرم؟ چگونه می‌توان آرام گرفت، وقتی که در ظرف یك‌ماه، سرچشمهٔ شیرین‌ترین‌لذت‌ها خشکیده باشد، وقتی که راهی‌برای‌شادی‌وامیدباقی نمانده باشد و وقتی که بدانی آرامش زندگی، برای همیشه، تورا ترك‌کرده است؟». این زن چه‌کسی‌بوده است؟ قبل‌ازدوئل دونامه‌به‌گالوا می‌رسدو، ضمن‌آن‌ها، ازمشاجره‌ای‌صحبت‌شده است که‌گالوا رابیش ازآن‌چه خودش قبول داشت، متهم به تقصیرمی‌کرد. نامهٔ‌اول، این‌طورآغازمی‌شود: «خواهش می‌کنم‌اجازه دهیدمناسبات خودرا قطع‌کنیم. من نمی‌توانم مکاتبهٔ‌خودرا با شماادامه دهم، ولی تلاش می‌کنم دربارهٔ شما، به‌همان گونه‌ای‌که قبل ازهمهٔ این پیش‌آمدها بود، قضاوت‌کنم...». نامهٔ دوم هم، همین برداشت را دارد و هردوی‌آن‌ها را «ستفانیا. د.» امضاکرده است. ك. اینفان توتسی از دانشگاه جمهوری اروگوئه، در دست‌نویس‌های گالوا، نامی را خوانده است‌که به‌وسیلهٔ خود گالوا پاك شده بود: استفانیا دوموتل. اینفان توتسی روشن می‌کند که‌این، ستفانیا فه‌لیسیه یوته‌رن دوموتل، دختر پزشك بیمارستان فولتریه است که، بعداً، بایك معلم ادبیات ازدواج کرده است.

آلفرد، برادر گالوا، اعتقاد داشت که‌اواریست را عمداً کشته‌اند، ولی احتمال‌کمی وجود داردکه قاتل ازطرف دشمنان جمهوری خواهان، تطمیع شده باشند. به‌روایت آلکساندردوما، مخالف گالوا، یعنی پشه دربین‌ویل، یك جمهوری‌خواه پرحرارت بود. در واقع، دربین ویل، یکی ازنوزده افسری بودکه‌تبرئهٔ‌آن‌ها، بهانه‌ای برای شعار معروف‌گالوا شد. علاوه برآن، وقتی، درانقلاب سال ۱۸۴۸، نام جاسوسان شاه را فاش‌کردند، از نام دربین ویل خبری نبود. در مقاله‌ای‌که چندی پیش، رنه‌تاتون برای من فرستاده است، معلوم می‌شودکه، دوئل‌بین دوستان انجام گرفت وچیزی‌شبیه «رولت روسی» بودکه، درآن، تنها یکی ازتپانچه‌ها را پرمی‌کنند.

گالوا، درشب پیش ازدوئل، تنها دودست‌نویس را تصحیح کرده‌است ومحتوای‌آن‌ها وهمچنین محتوای مقاله‌ای راکه درنامهٔ طولانی خود به

شه‌والیه آورده بود، شرح داده است. یکی از دست‌نویس‌ها، همان مقاله‌ای بود که پواسون آن را پس فرستاد ودیگری، تکه‌ای ازمقاله‌ای که قبلاً در «بولتن فدروساك» چاپ شده بود. رسالهٔ سوم پیدا نشده است و مضمون آن را، تنها از شرح کوتاهی که درنامهٔ خود داده است، می‌توان حدس زد. ظاهراً، این رساله به انتگرال‌گیری ازتابع‌های جبری، مربوط می‌شده‌است.

اما درمورد جملهٔ معروف «من وقت ندارم» که‌گویا گالوا بارها در حاشیهٔ نوشته‌های ناتمام خود آورده است؟ این جمله، در واقع، درحاشیهٔ نخستین مقاله‌آمده است وتنها یك بارنوشته شده است. درکنار آن ودرداخل پرانتز آمده است: «یادداشت مؤلف».

●

تصورنمی‌کنم، آن‌چه ازحقایق زندگی گالوا آورده‌ام، چیزی ازاعتبار او به عنوان یك ریاضی‌دان، کم کند بازماندهٔ دست نویس‌های گالوا، گواه‌بر آن است که‌او، حتی دردوران زندان خود هم، بررسی‌های ریاضی را ادامه می‌داد وتالحظهٔ مرگ، ازاین‌بررسی دست برنداشت. این‌که گالوا توانست، درچنین شرایطی، کار ثمربخش خود را ادامه دهد، نشانه‌ای است از نیروی غیرعادی‌ذهن ودرك او. اوضاع و احوال زندگی شخصی گالوا هرچه باشد، در این مطلب نمی‌توان تردید کرد که او، یکی ازاصیل‌ترین وپربارترین اندیشه‌های جهان ریاضیات بوده است.

اعتباراو، مثل تمامی تاریخ دانش به‌طورکلی، به‌معنای این تصور عامیانه نیست که هرنابغهٔ دانش باید در زندگی خصوصی هم، بی‌نقص باشد ویا، مثلاً کسانی ازمعاصران او، که نمی‌توانند نبوغ اورا درك کنند، احتمالاً مردمانی ابله، قاتل وزنانی خود فروخته وازاین قبیل باشند. اعتقاد بی‌معنی «عامی بودن، نبوغ را تحمل‌نمی‌کند»، نمی‌تواند مبنای تجزیه وتحلیل‌حقایق تاریخی باشد. برعکس، موردهایی پیش می‌آید که باید دربارهٔ نابغهٔ خود، از روی رفتار عجیب و غریبی از نوع دست به‌کارد بردن، ضمن شعار دادن داوری کرد.

اعداد سعد (نیك)

ایرج ادیبی

مساله: مجموع مربعات ارقام هر عددی، عدد دیگررا تشکیل می‌دهد، مجموع مربعات این عدد نیزعدد دیگری را درست می‌کند. اگرمجموع مربعات ارقام این اعداد را تکراراً حساب کنیم به‌عدد «یك» یا عدد چهار می‌رسیم، آیا ممکن است به‌عدد دیگری برسیم؟

مثال ۱: عدد ۳۲ را درنظرمی‌گیریم

$$۳۲ \to ۳^۲+۲^۲=۱۳ \to ۱^۲+۳^۲=۱۰ \to ۱^۲+۰^۲=۱$$

مثال ۲: عدد ۱۶ را درنظرمی‌گیریم

$$۱۶ \to ۱^۲+۶^۲=۳۷ \to ۳^۲+۷^۲=۵۸ \to ۵^۲+۸^۲=$$
$$=۸۹ \to ۸^۲+۹^۲=۱۴۵ \to ۱^۲+۴^۲+۵^۲=۴۲ \to ۴^۲+۲^۲=$$
$$=۲۰ \to ۲^۲+۰^۲=۴$$

تعریف: اعدادی که پس ازچندین بارمحاسبه مجموع مربعات ارقامشان به یك ختم می‌شوند را اعداد سعد یا نیك «Happy Numbers یا Lucky Numbers» می‌نامند

قرارداد: محاسبه مجموع مربعات ارقام را با (⟶) نشان میدهیم برای اولین‌بار محاسبه مجموع مربعات ارقام عدد ۱ وبرای دومین وسومین ... بار بهمین ترتیب اعداد ۲ و۳ و۴ و... را بالای (⟶) قرارمیدهیم.

مثال ۳: عدد ۵۱ را درنظرمی‌گیریم.

$$۵۱ \xrightarrow{۱} ۲۶ \text{ و } ۵۱ \xrightarrow{۲} ۴۰ \text{ و } ۵۱ \xrightarrow{۳} ۱۶$$

وبا توجه به‌مثال ۲ خواهیم داشت: $۵۱ \xrightarrow{۱۰} ۴$

ثابت می‌کنیم که مجموع مربعات ارقام کلیه اعداد پس از چندین بار محاسبه جز به ۴ و ۱ ختم نمی‌شوند.

ابتدا ثابت می‌کنیم که‌مجموع مربعات ارقام اعداد بزرگتر از ۹۹ از

خود عدد کوچکتر است.

برای اثبات این موضوع کافی است ثابت کنیم:

اگر $a \neq 0$ $\quad 100a+10b+c>a^2+b^2+c^2 \quad (1)$

طرف چپ نامساوی فوق را می‌توان به‌صورت زیر تبدیل کرد.

$$10a+10b+90a=c$$

چون a و b و c رقم هستند بنابراین داریم $a<10$ و $b<10$ و $c<10$ است

و از آنجا $90a+c>c^2$ و $10b>b^2$ و $10a>a^2$

ازجمع این نامساویها نامساوی فوق ثابت است.

حال بسهولت ثابت می‌شود که هرعدد بزرگتر از سه رقم از مجموع مربعات ارقامش بزرگتر است.

$$(2) \quad a+10b+10^2c+\dots 10^n x>a^2+b^2+c^2+\dots x^2$$

چون a، b، c، d، ... x رقم هستند بنابراین بازاء $n \geqslant 2$ داریم $10^n>x^2$

حال بازاء $n=3, 4, 5, \dots$ نامساویهائی بدست می‌آید که با جمع نظیر به‌نظیر نامساوی‌های (۱) نامساوی (۲) ثابت می‌شود.

ازاین مطلب نتیجه می‌گیریم که مجموع مربعات ارقام هرعدد پس از چند بار تکرار به‌عدد دو رقمی میرسد و با مختصر تاملی می‌توان دریافت که مجموع مربعات ارقام اعداد یك و دورقمی به ۴ یا یك ختم می‌شود.

نکته ۱ـ همانطور که در مثال ۲ ملاحظه کردید هشت عدد ۱۶ و ۳۷ و ۵۸ و ۸۹ و ۱۴۵ و ۴۲ و ۲۰ و ۴ تشکیل حلقه‌ای را میدهند که کلیه اعداد که مجموع مربعات ارقامشان به‌چهار ختم می‌شود حتماً به‌یکی ازاین اعداد حلقه برخورد نموده به‌طرف ۴ میروند.

مانند مثال ۳ که $16 \xrightarrow{3} 51$ بود.

این خاصیت برای اعدادی که مجموع مربعات ارقامشان به‌یك ختم می‌شود وجود ندارد آنها بدون برخورد به حلقه‌ای مستقیماً به طرف واحد میل می‌کنند.

نکته ۲ـ اعداد ۱ و ۵ و ۷ و ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۷ و ۱۹

و ۲۱ و ۲۳ و ۲۸ و ۳۱ اعدادسعد کمتر از ۳۲ هستند.

ملاحظه می‌کنیم عدد ۱۳ که اغلب برحسب خرافات عدد نحس می‌دانند بموجب تعریف فوق عددی است سعد.

نکته ۳ـ دربین اعداد یك رقمی ودورقمی ۱۸ عدد آنها اعدادسعدهستند.

نکته ۴ـ عدد ۷ عدد ایست تاریخی و مقالات بسیاری دربارهٔ آن نوشته‌اند واغلب آنرا عدد خوب و باعث خوشبختی می‌دانند فرنگی‌ها آنرا «Lucky Seven» می‌نامند دراین تعریف نیز عددیست سعد.

نکته ۵ـ فیثاغورث دنیا را عدد می‌دانست. اگرحلقهٔ مذکور در نکته ۱ را گردابی بدانیم و عدد یك را رستگاری، آیا انسانها مثل این اعداد نیستند؟

اعداد سعد در مبناهای مختلف

۱ـ درمبنای ۲: کلیه اعداد درمبنای ۲ سعد هستند.

$$1 \xrightarrow{1} 1 \text{ و } 2=(10)_2 \xrightarrow{1} 1 \text{ و } 3=(11)_2 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} (10) \to 1$$

ملاحظه می‌کنیم مجموع مربعات ارقام کلیه اعداد یك رقمی ودورقمی پس ازچندبار تکرار به یك ختم می‌شوند بنابراین با توجه به اثبات مطالب فوق کلیه اعداد پس از $\to$ به یك ختم می‌شوند. یعنی همهٔ اعداد در مبنای ۲ سعد هستند.

۲ـ درمبنای ۴: کلیه اعداد درمبنای ۴ نیزسعد هستند.

$$1 \xrightarrow{1} 1,2 \xrightarrow{2} 1,3 \xrightarrow{4} 1,4=(10)_4 \xrightarrow{1} 1,$$

$$5=(11)_4 \xrightarrow{2} 1,6=(12)_4 \xrightarrow{3} 1,$$

$$7=(13)_4 \xrightarrow{4} 1,8=(20)_4 \xrightarrow{2} 1,9=(21)_4 \xrightarrow{3} 1,$$

$$10=(22)_4 \xrightarrow{3} 1,11=(23)_4 \xrightarrow{5} 1,$$

$$12=(30)_4 \xrightarrow{4} 1,13=(31) \xrightarrow{4} 1,14=(32) \xrightarrow{5} 1,$$

$$15=(33) \xrightarrow{4} 1$$

تمرین:

۱ــ ثابت کنید مجموع مربعات ارقام کلیهٔ اعداد سه رقمی به بالا در هر مبنا کوچکتر از خود عدد است (با استفاده از این تمرین مطالب درمبنا واضح می‌شود).

۲ــ به‌کمك لگاریتم ثابت کنید مجموع مربعات ارقام اعداد بزرگتر از ۹۹ ازخود عدد کوچکتراست.

۳ــ به‌کمك رسم منحنی ثابت کنید که مجموع مربعات ارقام اعداد بزرگتر از ۹۹ ازخود عدد کوچکتر است (این تمرین به رسم منحنی‌های نقطه‌ای منجرمی‌شود).

۴ــ اعداد سعد کوچکتر از ۳۶۵ (تعداد روزهای سال) را بدست آورید، آیا بین این اعداد وروزهای خوش سال رابطه‌ای وجود دارد؟؟! مبداء را روزتولد خودتان حساب کنید یا ۲۸۰ روز قبل ازتولد.

۵ــ اعداد سعد درمبنای ۸ و ۱۶ را بیابید.

۶ــ آیا رابطه‌ای بین اعداد سعد ومبنا وجود دارد؟

تابع‌ها را پیداکنید

تابع‌های f و g را طوری پیدا کنید که در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=\sin x+\cos y$$

محاسبه کنید

اگر $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}\ (x\in R)$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ

$$f\left(\frac{1}{1365}\right)+f\left(\frac{2}{1365}\right)+\dots+f\left(\frac{1364}{1365}\right)$$

حل در صفحهٔ ۲۸۵

چه مسأله‌هایی را می‌توان با روش استقراءِ ریاضی حل کرد؟

مردی که عینکی به‌چشم وعصایی به‌دست دارد، درپارك قدم می‌زند. کودکی ۲ یا ۳ ساله، خودرا ازدست مادرش رها می‌کند وبه‌طرف مرد می‌دود و روبه‌روی او، به‌حالت انتظار، می‌ایستید.

ــ چیه دخترم، چیزی می‌خواهی؟

ولی، دخترك تنها انتظار می‌کشد.

مرد بستهٔ بیسکویت خود را باز می‌کند وجلو دختربچه می‌گیرد، ولی او روی برمی‌گرداند و، با حالت بغض، خود را در آغوش مادرش، که به دنبال اوآمده بود، می‌اندازد.

مادر که نشانهٔ پرسش را در چهرهٔ مرد می‌خواند، به‌او توضیح می‌دهد که، چند روزپیش، دخترم دراین پارك با مردی عصا به‌دست وعینك به چشم برخورده است و ازدست او«آب نبات» گرفته است. ازآن روز به‌بعد، خیال می‌کندکه، هرآدم عینکی وعصایی، باید به اوآب‌نبات بدهد.

کودك، برای عمل خود، استدلالی دارد. او این «استدلال» را برپایهٔ «تجربهٔ» خود به دست‌آورده است. منتهی، ذهن کودکانهٔ او، بدون این‌که خودش آگاه‌باشد، بنای «استدلال» خودرا، تنها بر یك تجربهٔ منحصر گذاشته است. او درواقع، به‌دنبال نمونه‌ای می‌گرددکه درذهن اونقش بسته است. وجود یك مرد، همراه با عصا و عینك، برای اوکافی است تا خاطرهٔ خوش آب‌نبات را به‌یادآورد و، به‌همین مناسبت، به‌دنبال نمونه‌های مشابه می‌رود.

این گونه«استدلال» رامی‌توان «استدلال کودکانه» نامید، که نام‌علمی‌تر آن «تمثیل» یا «استدلال تمثیلی» است.

ولی «استدلال تمثیلی» خاص کودکان نیست. کسی که اساس داوری خود را درمورد یك قوم یا یك جریان تاریخی، بررفتار یکی از افرادآن قوم و یا وجود یك حادثهٔ تاریخی می‌گذارد، از«استدلال تمثیلی» استفاده کرده است. دانش‌آموزی هم که، معمولاً، با مثلث‌های با زاویه‌های حاده سروکار داشته است و «دیده است» که ارتفاع مثلث در درون آن قرار می گیرد و، آن وقت، درحالت مثلث با زاویهٔ منفرجه‌هم سعی می کند ارتفاع وارد بریکی از ضلع‌های‌مجاوربه زاویهٔ منفرجه رادردرون مثلث رسم کند، «استدلال تمثیلی» را به‌کار می‌برد

ولی، اگر «تمثیل» می‌تواند هنر را بارور کند، وبه‌آن زیبایی ببخشد و دست شاعر ونقاش و موسیقی‌دان را برای تلقین لطایف ذهنی خود بازنگه دارد، ازنظر دانش، هیچ ارزشی ندارد.

●

تکیه‌بر«عقل سلیم» واستدلال‌های «معقول» ذهنی‌هم، به‌تنهایی‌نمی‌تواند موجب کشف حقیقت شود. هزاران سال‌مردم (وهمراه باآنان، دانشمندان)، با تکیه‌بر «عقل سلیم»، می‌پنداشتندکه خورشید وهمهٔ ستارگان وسیاره‌ها به دور زمین می‌چرخند و، در نتیجه، زمین را مرکز تمامی عالم می‌دانستند؛ حتی کسانی چون جیوردانو برونوو گالیله که جرات کرده بودند «عقل‌سلیم» را (که البته، معیار آن را، رهبران کلیسا تعیین می کردند) نادیده بگیرند، یا درآتش سوختند و یا تاآخرعمر خانه‌نشین شدند. ارسطو، با تکیه بر «عقل سلیم» حکم کردکه، درسقوط آزاد، جسمی که سنگین‌تر است، زودتر ازجسم سبك‌تر به‌زمین می‌رسدو، تا زمانی که مشاهده وتجربه اساس استنباط‌های‌علمی قرارنگرفت، حتی دانشمندان هم، ازنظر نادرست ارسطو پیروی می کردند.

«عقل سلیم»، «استدلال ذهنی» و «منطق درونی» تنها زمانی می‌تواند منجربه کشف‌حقیقت شودکه‌متکی برمشاهده وتجربه باشد. باید ابتدا مشاهده کرد،سپس حالت‌های مختلف را به محك تجربه‌زد وآن‌گاه، بانیروی عقل و استدلال ذهنی، رابطه‌های پنهانی راکشف کرد وحقیقت را حدس زد. این حدس، دردانش‌های طبیعی، به‌کمك باز هم مشاهده وآزمایش، ودر دانش

ریاضی با استدلال منطقی مورد تایید قرار می گیرد.

●

به‌ریاضیات بر گردیم.

به قول جرج پولیا: «استقراء عبارت است ازتلاش برای پیداکردن نظم وارتباط نهفته درموردهای مشاهده شده».

به‌این ردیف مجموع‌ها توجه کنید:

۱۷+۲=۱۹
۱۹+۴=۲۳
۲۳+۶=۲۹
۲۹+۸=۳۷
۳۷+۱۰=۴۷

از ۱۷ آغازکردیم. مجموع آن بانخستین عدد زوج، عددی اول شد. عدد اول حاصل (یعنی ۱۹) را با دومین عددزوج جمع کردیم، نتیجه بازهم عدد اول است درستون دوم، ردیف عددهای زوج متوالی قرارگرفته‌اند و عدد اول هرسطر، نتیجهٔ جمع سطرقبلی است. آیا این‌یك قانون است؟ آیا، به‌این ترتیب، همیشه عددی اول به‌دست می‌آید؟ به‌آزمایش خود ادامه می‌دهیم:

۴۷+۱۲=۵۹
۵۹+۱۴=۷۳
۷۳+۱۶=۸۹
۸۹+۱۸=۱۰۷
۱۰۷+۲۰=۱۲۷

رفتارعمل تغییر نکرده است. تا این‌جا، حدس ما مورد تایید قرارمی گیرد. درپنج مورد بعد هم، اشکالی پیش نمی آید:

۱۲۷+۲۲=۱۴۹
۱۴۹+۲۴=۱۷۳
۱۷۳+۲۶=۱۹۹
۱۹۹+۲۸=۲۲۷

$$۲۲۷+۳۰=۲۵۷$$

ولی آزمایش بعد (شانزدهمین آزمایش)، ما را ناکام می‌کند:

$$۲۵۷+۳۲=۲۸۹$$

۲۸۹ عددی اول نیست و برابر است با ۱۷×۱۷.

یك استثنا کافی است که دیگر با قانون سروکار نداشته باشیم. حدس ما درست نبود. دراین‌جا، قانونی کلی حکومت نمی‌کند.

مثال دیگری می‌آوریم. سه‌جمله‌ای زیر را، برای مقدارهای درست n، درنظر می‌گیریم:

$$f(n)=n^{۲}+n+۴۱$$

اگر عددهای متوالی ۰، ۱، ۲، ۳، ... را به‌جای n قرار دهیم، «همه‌جا» عددی اول به‌دست می‌آید:

$$f(۰)=۴۱\ ،\ f(۱)=۴۳\ ،\ f(۲)=۴۷\ ،\ f(۳)=۵۳\ ،$$
$$f(۴)=۶۱\ ،\ f(۵)=۷۱\ ،\ldots،\ f(۳۹)=۱۶۰۱$$

ودر مورد مقدارهای منفی n:

$$f(-۱)=۴۱\ ،\ f(-۲)=۴۳\ ،\ f(-۳)=۴۷\ ،$$
$$f(-۴)=۵۳\ ،\ f(-۵)=۶۱\ ،\ldots،\ f(-۴۰)=۱۶۰۱$$

آیا این همه آزمایش، کافی است تا حکم کنیم که، سه جمله $n^{۲}+n+۴۱$، به‌ازای همهٔ مقدارهای درست n، برابراست با عددی اول. درآزمایش‌های خود یك گام دیگر برمی‌داریم:

$$f(۴۰)=۴۰^{۲}+۴۰+۴۱=۴۰\times۴۱+۴۱=۴۱\times۴۱$$
$$f(-۴۱)=(-۴۱)^{۲}-۴۱+۴۱=۴۱\times۴۰+۴۱=۴۱\times۴۱$$

از هردوطرف، تیرما به سنگ خورد. $n^{۲}+n+۴۱$، همیشه عدد اول نیست.

فرما، ریاضی‌دان فرانسوی، گمان می‌کرد، عدد $۲^{۲^{n}}+۱$، به‌ازای همهٔ عددهای طبیعی n، عدد اول است. او احتمالاً، حدس خود را، برای چهار حالت نخستین، یعنی وقتی که n برابر ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد، آزمایش کرده است. درهمهٔ این چهار حالت، عددی اول به‌دست می‌آید. ولی اگر آن را برای n=۵ آزمایش کنیم، به‌عددی می‌رسیم که بر ۶۴۱ بخش پذیراست.

آیا همیشه می‌توان، با آزمایش، درستی یا نادرستی حکمی را ثابت کرد؟ درمثال‌هایی که آوردیم، «قانون» حدسی ما، ضمن آزمایش، ردشد. ولی تاکجا می‌توان آزمایش را ادامه داد؟ درمثال اول، درآزمایش شانزدهم ودر مثال دوم، درآزمایش چهل ویکم، استثنا پیدا شد و «قانون» را نقض کرد. ولی، وقتی که با بی‌نهایت عدد سروکار داریم، مگرمی‌شود، همه حالت‌ها را آزمایش کرد؟ به‌این مثال توجه کنید:

آیا به‌ازای هیچ مقداری ازعددطبیعی n، عدد $۹۹۱n^{۲}+۱$، می‌تواند مجذورکامل باشد؟

شما می‌توانید سال‌ها و سال‌ها محاسبه کنید وعددهای متوالی را به آزمایش بگذارید، هرگز به یك مجذورکامل نمی‌رسید. آیا واقعاً این عدد، به‌ازای هیچ کدام ازعددهای طبیعی n، مجذورکامل نیست؟ درواقع، تنها در عصر کامپیوترها و به‌کمك این ماشین‌های محاسبهٔ الکترونی بود که توانستند یك عدد ۲۹ رقمی برای n پیدا کنند که: به ازای آن، عدد $۹۹۱n^{۲}+۱$ مجذورکامل باشد.

به‌این ترتیب، روشن می‌شود که اگرحتی ملیون‌ها آزمایش حکمی را تاییدکند، بازهم نمی‌توان آن‌را، ازنظرریاضی، درست واثبات‌شده دانست.

شما درمورد هرعدد زوج بزرگتر از ۲ آزمایش کنید، می‌بینید که می‌توان آن را، به‌یك یا چند طریق، به‌صورت مجموع دوعدد اول نوشت.

$$۴=۲+۲،\ ۶=۳+۳\ ،\ ۸=۵+۳\ ،$$
$$۱۰=۵+۵=۷+۳\ ،\ ۱۲=۷+۵\ ،$$
$$۱۴=۷+۷=۱۱+۳\ ،$$
$$۱۶=۱۱+۵=۱۳+۳\ ،\ldots،$$
$$۹۶=۸۹+۷=۸۳+۱۳=۷۹+۱۷\ldots،$$
$$۹۸=۹۳+۵=۸۷+۱۱=۷۹+۱۹=\ldots\ ،$$
$$۱۰۰=۹۷+۳=۹۳+۷=۸۹+۱۱=\ldots.$$

ولی تاکنون، نه استثنائی برای این حکم پیدا شده ونه، درستی آن، درحالت کلی ثابت شده‌است.

ریاضیات، دانشی استنتاجی و به‌اصطلاح «قیاسی» است؛ ولی سرچشمهٔ پیدایش مفهوم‌ها وقانـون‌های آن، بـر تجربه واستقرا استواراست. مشاهده و تجربه، احساسی را به‌وجود می‌آورد که براساس آن، می‌توانیم دربارهٔ قانون کلی حدس بزنیم. ولی آن چه راکه حدس زده‌ایم باید ثابت کنیم تا بتواند مورد قبول همگان قرار گیرد.

یکی از راه‌های اثبات، «استـدلال پلـه‌ای» است. اگرشما با پلکانی سروکار داشته باشید وبدانیدکه ارتفاع هر پله چنان است که اگربه یکی از آن‌ها رسیده باشید، می‌توانید خود را به پلهٔ بالاتر ازآن برسانید. آن وقت، کافی است، شمارا درنخستین پله قرادهند تا مطمئن شویدکه می‌توانید تمامی پلکان را تا آخرطی کنید.

اثبات این مطلب که می‌توان ازپلکان بالا رفت، برپایهٔ دوفرض است: اول این‌که به پلـهٔ اول دسترسی داشته باشید، ودوم این‌که مطمئن باشید، با رسیدن به هرپلهٔ دلخواه، می‌توانید به‌پلهٔ بعدی قدم بگذارید.

به‌زبان ریاضی، اگـرشمارهٔ ردیف پله‌ها را بـا n نشان دهیم: اولاً $n=1$ در دسترس باشد؛ ثانیاً بـا در دسترس بودن n، بتوانید به $n+1$ دسترسی پیدا کنید.

به‌همین‌مناسبت، این‌روش‌اثبات‌را «عبوراز n به $n+1$» هم‌می‌نامند. «روش‌پله‌ای» یا «روش عبورازn به $n+1$» چیزی جز همان«استقراء ریاضی» نیست. این روش، همان طورکه دیدم، بردو مرحله متکی است:

۱. با آزمـایش، روشن‌کنیم‌که حکم مـورد نظر، درگام اول، یعنی به‌ازای $n=1$، درست است،

۲. با فرض درستی حکم برای n، ثابت‌کنیم کـه حتماً برای $n+1$ هم درست است.

مثال ۱. باشرط $x>-1$، ثابت‌کنید، برای هرعددطبیعیn، نابرابری $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ برقرار است. ایـن نابرابری، به‌نام یاکوب برنولی (۱۶۵۴ – ۱۷۰۵)، ریاضی‌دان سویسی، نابرابری برنولی نامیده می‌شود.

حل. ۱) آیا به پلهٔ اول دسترسی داریم؟ ایـن را می‌توان به سادگی

آزمایش‌کرد. به‌ازای $n=1$ به‌دست می‌آید: $1+x=1+x$، یعنی یکی از دو رابطهٔ $>$ یا $=$ برقراراست.

۲) فرض می‌کنیم به پلهٔ kام رسیده‌ایم (k، عددطبیعی دلخواه است)، ببینیم‌آیا، در این‌صورت، می‌توانیم به‌پلهٔ $(k+1)$ ام بالا برویم.

به زبان ریاضی، فرض می‌کنیم، نابرابری مفروض به ازای $n=k$ درست باشد:

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx \qquad (1)$$

وثابت می‌کنیم‌که، دراین‌صورت، به‌ازای $n=k+1$ هم برقراراست:

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x \qquad (2)$$

دوطرف نابرابری(۱) را در $1+x$ ضرب می‌کنیم. بااین عمل‌جهت نابرابری تغییرنمی‌کند، زیرا باتوجه به‌شرط $x>-1$ داریم $1+x>0$. به دست می‌آید:

$$(1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)(1+x) = \\ = 1+kx+x+kx^2$$

kx^2 عددی مثبت است و، بنابـراین، اگـرآن را ازطرف دوم حذف‌کنیم، نابرابری تغییرنمی‌کند (بلکه قوی‌تر هم می‌شود). درنتیجه، حاصل می‌شود:

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$$

واین همان نابرابری (۲) است. با فرض درستی نابـرابـری (۱)، درستی (۲) را ثابت کردیم. قبلاً، درستی نابـرابری را به‌ازای $n=1$ آزمایش کردیم: وقتی‌نابرابری به‌ازای $n=1$ برقرارباشد، بنابه‌اثبات فوق، به‌ازای $n=2$ هم درست‌است و وقتی به ازای $n=2$ درست‌باشد، به‌ازای $n=3$ برقرارمی‌شود و، به همین ترتیب، می‌توانیم پلکان را یك به یك وتا آخـر طی‌کنیم.

حکم مساله، با روش استقراء ریاضی ثابت شد.

مثال ۲. ثابت‌کنید عـدد $A_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$، به ازای همهٔ عددهای صحیح وغیرمنفی n بر۱۳۳ بخش‌پذیر است.

حل. دراین‌جا، گام نخست $n=0$ است. داریم:

$$A_0=11^2+12=121+12=133$$

حکم: برای $n=0$ درست است.

اکنون فرض می‌کنیم A_n بر ۱۳۳ بخش‌پذیر باشد، ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، A_{n+1} هم بر ۱۳۳ بخش‌پذیراست. داریم:

$$A_{n+1}=11^{n+3}+12^{2n+3}=11\times 11^{n+2}+12^{2}\times 12^{2n+1}=$$
$$=11\times 11^{n+2}+144\times 12^{2n+1}=$$
$$=11(11^{n+2}+12^{2n+1})+133\times 12^{2n+1}$$

ویا سرانجام

$$A_{n+1}=11A_n+133\times 12^{2n+1}$$

مجموع طرف‌دوم بر ۱۳۳ بخش‌پذیراست (درجملهٔ اول، عامل A_n طبق‌فرض بر ۱۳۳ بخش‌پذیـراست وجملهٔ دوم، شامـل عامل ۱۳۳ می‌باشد)، بنابراین سمت چپ تساوی، یعنی A_{n+1} هم باید بر ۱۳۳ بخش‌پذیرباشد.

●

برای استفاده ازروش‌استقراء ریاضی، باید به‌نکته‌های زیرتوجه‌کرد:

۱) مساله‌هایی با روش استقراء ریاضی قابل حل هستند که، درآن‌ها، کمیت مطرح باشد نه‌کیفیت. مثلاً، نمی‌تـوان «دروغ‌گوبودن» یك شخص را (که یك صفت یـا رفتارکیفی است) به‌کمك استقراء ریاضی ثابت‌کرد. به‌این استدلال توجه‌کنید:

اگرکسی تنها یك بار درزندگی خود دروغ‌گفته باشد، نمی‌توان او را شخصی «دروغ‌گو» نامید (به‌ازای $n=1$، کسی دروغ‌گو نمی‌شود).

اکنون فرض می‌کنیم، کسی کـه در زندگی خود، k مرتبه دروغ‌گفته باشد، نتوان اورا دروغ‌گو نامید، در این‌صورت، روشن است که اگریك‌بار بیشتردروغ بگوید (یعنی $k+1$ بار)، به سختی می‌توان اورا دروغ‌گونامید (عبوراز k به $k+1$) بنابراین، با تکیه بر روش استقراء ریاضی، می‌توان نتیجه‌گرفت که هیچ‌کس دروغ‌گونیست

ریاضیات، باکمیت‌ها سروکار دارد نه‌کیفیت‌ها.

۲) وقتی می‌توان ازروش استقراء ریاضی استفاده‌کردکه با عددهای طبیعی (یا دست‌کم، عددهای درست) سـروکار داشته باشیم. مثلاً نابرابری

مثال ۱را نمی‌توان، برای هرعدد حقیقی n، به‌کمك استقراءریاضی ثابت‌کرد.

۳) باید درانتخاب حلقهٔ نخستین دقت‌کنیم. گاهی ممکن است‌که حکم نه‌از $n=1$، بلکه مثلاً از $n=3$ به‌بعد درست باشد. به‌این مثال توجه‌کنید:

مثال ۳. به ازای چه مقدارهایی از عدد درست ونامنفی n، نابرابری $2^n>2n+1$ برقراراست؟

حل. به‌ازای $n=0$ به برابری $1=1$ و به ازای $n=1, 2$، به ترتیب، به نابرابری‌ها $2<3$ و $4<5$ مـی‌رسیم. یعنی نابرابری مفروض به‌ازای $n=0, 1, 2$، برقرارنیست.

به‌ازای $n=3$، نابرابری مفروض برقراراست:

$$n=3 \Rightarrow 2^3>7$$

اکنون، فـرض می‌کنیم، نابرابـری مفروض، بـرای $n=k$ درست باشد ($k\geqslant 3$)، یعنی داشته باشیم:

$$2^{k+1}>4k+2=[2(k+1)+1]+(2k-1)$$

چون داریم $k\geqslant 3$، بنابرایـن خواهیم داشت $2k-1>0$، که اگرآن را ازطرف دوم نابرابری حذف‌کنیم، نابرابری تقویت می‌شود. یعنی

$$2^k>2k+1 \qquad (1)$$

اگر دوطرف نابرابری (۱) را درعدد مثبت ۲ ضرب‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$2^{k+1}>2(k+1)+1$$

یعنی با فرض درستی نابرابری برای $n=k$، درستی آن برای $n=k+1$ هم ثابت می‌شود.

نابرابری $2^n>2n+1$، به‌ازای همهٔ عددهای طبیعی $n\geqslant 3$ برقرار است.

به‌اثبات این قضیه هم توجه‌کنید:

قضیه. ثابت‌کنیدکـه درهـر مجموعهٔ متناهی از عددهای طبیعی، همهٔ جمله‌های مجموعه با هم‌برابرند.

اثبات. روش استقراء ریاضی را در مورد تعداد عضوهای مجموعه به کارمی‌بریم. به‌ازای $n=1$، درستـی حکم واضح است: هرعدد با خودش برابر است. اکنون فرض می‌کنیم، حکم قضیه بـرای مجموعه‌ای که دارای

n عضو a_1، a_2،...، a_k است، صحیح باشد، یعنی داشته‌باشیم:

$$a_1=a_2=\dots=a_k$$

دراین‌صورت، اگر از مجموعهٔ شامل $k+1$ عضو a_1، a_2،...، a_k، a_{k+1}، زیر مجموعهٔ

$$\{a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}\}$$

را، که دارای k عضواست، جداکنیم، بنا به‌فرض باید عضوهایی برابرداشته باشد واین، به‌معنای آن است که همهٔ $k+1$ عضو a_1، a_2،...، a_k، a_{k+1} با هم برابرند. قضیه ثابت شد.

اشتباه استدلال دراین جاست که عبور از k به $k+1$، تنها به ازای $k\geqslant 2$ ممکن است، زیرا با استدلال بالا نمی‌توان از $n=1$ به $n=2$ عبور کرد، دراین‌جا، بحث برسرمقایسهٔ عددهاست ووقتی که از $n=1$ صحبت می‌کنیم، تنها بایك‌عددسروکارداریم و، درنتیجه، مفهوم مقایسه بی‌معنامی‌شود.

چند تمرین

درستی برابری‌های زیر را ثابت کنید:

۱. $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$

۲. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$

۳. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$

۴. $1\times 1!+2\times 2!+\dots+n.n!=(n+1)!-1$

۵. $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$

این مجموع‌ها را محاسبه کنید:

۶. $S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$

۷. $S_n=1\times 4+2\times 7+3\times 10+\dots+n(3n+1)$

۸. رابطه‌ای برای این مجموع پیدا کنید:

$$S_n=1-2+3-4+5-6+\dots+(-1)^{n-1}n$$

۹. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$$

۱۰. ثابت کنید عدد $3^{2k+1}+40k-67$، به‌ازای همهٔ عددهای طبیعی k، بر ۶۴ بخش‌پذیراست.

۱۱. برای چه‌مقدارهایی ازعدد طبیعی n، نابرابری $2^n>n^2$ برقرار است؟

۱۲. دنبالهٔ زوج عددهای زیرداده شده است:

$$(a, b);(a_1, b_1);(a_2, b_2);\dots;(a_n, b_n)$$

این زوج عددها، طبق قانون زیرساخته شده‌اند:

$$a_1=\frac{a+b}{2}, b_1=\frac{a_1+b}{2},$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2}$$

ثابت کنید:

$$a_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

$$b_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^n}\right)$$

۱۳. ثابت کنید:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\dots+\frac{1}{100}$$

ثابت کنید که برای رشتهٔ فیبوناچی داریم:

۱۴. $a_{2n+2}=a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2n+1}+1$

۱۵. $a_n^2-a_{n-1}.a_{n+1}=(-1)^n$

حل این تمرین‌ها را درصفحهٔ ۲۸۶ ببینید

هندسهٔ برداری کره‌ها

علیرضا امیرمعز

در صفحهٔ اقلیدسی، دایره مکان هندسی نقطه‌هایی است که تعریف‌های مختلف دارند. مثلاً رأس زاویهٔ قائمه‌ای که دو ضلع آن از دونقطهٔ ثابت A و B می‌گذرند دایره‌ای به‌قطر AB است.

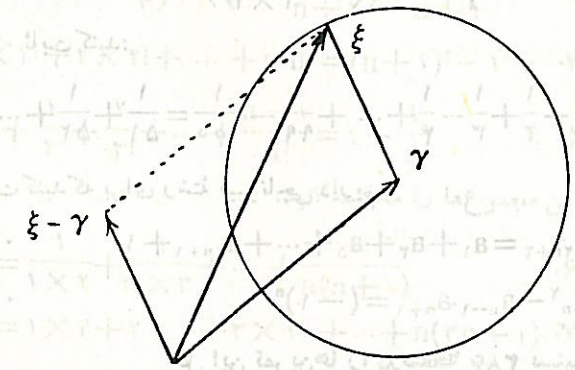
این مقاله شامل مطالعهٔ بعضی از مکان‌ها بـه روش برداریست که بتوان تعمیم آنها را درفضاهای چند بعدی بررسی کرد.

۱ـ اصطلاحات: فضای اقلیدسی بـه‌بعد n را با R_n نمایش‌می‌دهیم. بردارهارا با حروف یونانی‌واعداد راباحروف‌لاتینی می‌نمائیم. حاصلضرب داخلـی ξ و ζ را با (ξ,ζ) نمایش مـی‌دهیم. ازاینرو اندازهٔ (norm) ξ می‌شود $\|\xi\|=(\xi,\xi)^{\frac{1}{2}}$.

۲ـ کره: کـره‌ای به مرکـز C وشعاع r درنظرمی‌گیریم (شکل ۱). (شکل ۱ نمایش حالت‌خاص‌درصفحه‌است). معادلهٔ برداری‌این کره‌عبارتست‌از

$$\|\xi-\gamma\|=r, \qquad (۱)$$

که درآن C پایان γ است و بـردار متغیر ξ روی‌کره پایان می‌یابد. معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:



شکل ۱

$$\|\xi-\gamma\|^2=r^2$$

که بصورت زیر درمی‌آید

$$\|\xi\|^2-2(\xi,\gamma)+\|\gamma\|^2-r^2=0 \qquad (۲)$$

اگردستگاه‌مختصات قائمی درنظربگیریم معادلهٔ (۲) به‌صورت‌معادلهٔ معمولی کره‌درمی‌آید. خواننده می‌تواندبرای $n=2$ ، $n=3$ آنرابه‌دست بیاورد.

۳ـ کامل‌کردن مربع: هرگاه‌معادلهٔ برداری به‌صورت (۲) داشته‌باشیم، می‌توان‌آنرا بـه‌صورت (۱) برگرداند. البته این همان‌کامل‌کردن مربع در حالات‌خاص با مختصات است. فرض‌کنیم که

$$\|\xi\|^2+a(\xi,\alpha)+b=0$$

این معادلهٔ را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$\left(\xi+\frac{a}{2}\alpha,\ \xi+\frac{a}{2}\alpha\right)-\frac{a^2}{4}\|\alpha\|^2+b=0$$

یا

$$\left\|\xi+\frac{a}{2}\alpha\right\|=\frac{a^2}{4}\|\alpha\|^2-b$$

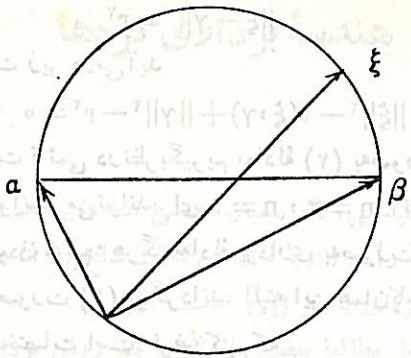
با مقایسه با (۱)، ملاحظه می‌شودکه پایان بردار $\frac{-a}{2}\alpha$ مرکز کره‌است و $\left[\frac{a^2}{4}\|\alpha\|^2-b\right]^{\frac{1}{2}}$ شعاع آن است. البته حالت‌های مختلف را باید بحث کرد، چون‌کره ممکن است حقیقی یا مجازی یا یك نقطه بشود.

۴ـ نمایش دایره با زاویه‌ها: دونقطهٔ A و B ثابت‌اند. نقطه P راس زاویهٔ قائمه‌ای است کـه دوضلع آن از A و B می‌گذرند. مکان P دائره‌ای به قطرAB است. (ایـن قضیه بسیار مشهوراست و برهان‌های زیاد دارد). اکنون به برهان برداری آن می‌پردازیم.

فرض‌کنیم‌که A و B پایان‌های α و β باشند (شکل ۲). اکنون ξرا چنان می‌گیریم‌که به P پایان یابد. از اینرو

$$(\xi-\alpha,\xi-\beta)=0 \qquad (۳)$$

بدین‌معنی که دوبردار $\xi-\alpha$ و $\xi-\beta$ متعامدند. معادلهٔ (۳) رامی‌توان



شکل ۲

بسط داد

$$\|\xi\|^2-(\xi,\alpha+\beta)+(\alpha,\beta)=0 \qquad (۴)$$

که به‌صورت (۲) است. هرگاه مربع را کامل کنیم، نتیجه می‌شود که

$$\left\|\xi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right\|^2-\frac{1}{4}\|\alpha+\beta\|^2+(\alpha,\beta)0$$

درنتیجه مرکز دایره پایان بردار $\frac{\alpha+\beta}{2}$ است. به آسانی می‌توان نشان داد که شعاع دایره عبارتست از

$$r=\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|$$

بدین معنی که شعاع دایره به‌اندازهٔ نصف پاره خط AB است.

هرگاه $\{\alpha,\beta\}$ را بطور خطی مستقل وقائم انتخاب کنیم، معادلهٔ (۴) ساده می‌شود. دراین‌صورت (۴) می‌شود

$$\begin{cases}\|\xi\|^2-(\xi,\alpha+\beta)=0\\ r=\left\|\frac{\alpha+\beta}{2}\right\|=\left\|\frac{\alpha-\beta}{2}\right\|\end{cases}$$

این‌انتخاب بخصوص، برای تعمیم بسیارمفید است. خواننده می‌تواند این مسأله را تعمیم دهدوبجای زاویهٔ قائمه زاویهٔ ثابت دیگری را به‌کاربرد.

۵ـ نمایش‌کره با زاویه‌ها: بخش۴ را به‌فضای سه‌بعدی تعمیم می‌دهیم

چون مطالب تازه‌ای روشن می‌شود، فرض کنیم که $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ بطور خطی مستقل وقائم‌در R_3 باشد. بردارمتغیر ξ را چنان می‌گیریم که

$$\begin{cases}(\xi-\alpha_1,\xi-\alpha_2)=0\\ (\xi-\alpha_1,\xi-\alpha_3)=0\\ (\xi-\alpha_2,\xi-\alpha_3)=0\end{cases} \qquad (۵)$$

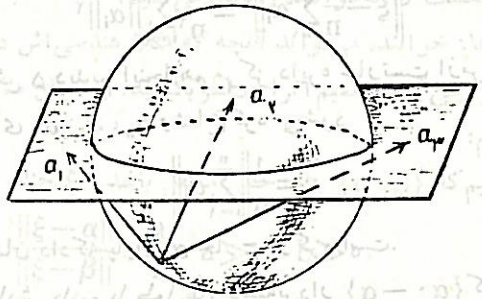
بدین معنی که پایان ξ رأس هرمی است که زاویه‌های راس آن همه قائمه‌اند (شکل ۳). از (۵) نتیجه می‌شود که

$$\|\xi\|^2-\frac{2}{3}(\xi,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0$$

مربع راکامل کنیم، بدست می‌آید که

$$\left\|\xi-\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\right\|^2=\frac{1}{9}\|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\|^2 \qquad (۶)$$

ملاحظه می‌شود که مرکز کره همان مرکز ثقل مثلثی است که ازپایانهای α_1، α_2 و α_3 درست شده است شعاع کره هم عبارتست از



شکل ۳

$$r=\frac{1}{3}\|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\|.$$

تفاوت مهمی که بین این حالت و دایره در R_2 اینست که انتهاهای α_1، α_2 و α_3 روی کره‌نیستند، برعکس، همه خارج کره‌اند. خواننده به‌آسانی می‌تواندآنرا ثابت کند.

۶ـ تعمیم به R_n. فرض کنیم که $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ بطورخطی‌مستقل‌وقائم

باشند بردار ξ در R_n را چنان می‌گیریم که

$$(\xi-\alpha_i, \xi-\alpha_j)=0 \quad , \quad i<j, i, j=1, \dots, n \qquad (7)$$

آنگاه مکان پایان ξ کره‌ای در R_n است.

برهان بسیارشبیه بخش ۵ است. از (۷) می‌توان $\binom{n}{2}$ معادله‌ای بصورت زیر را بدست آورد:

$$\|\xi\|^2-(\xi, \alpha_i\times\alpha_j)=0, i<j, i, j=1, \dots, n.$$

ازجمع این معادلات نتیجه می‌شود

$$\frac{n(n-1)}{2}\left\{\|\xi\|^2-(n-1)\left(\xi, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right\}=0$$

که به‌صورت زیرمی‌توان نوشت

$$\|\xi\|^2-\frac{2}{n}\left(\xi, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)=0$$

باکامل کردن مربع نتیجه می‌شود

$$\left\|\xi-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right\|^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i\|^2$$

چنانچه دربخش ۵ دیدیم اینجا هم مرکز دایره عبارتست ازمرکز ثقل پوشه محدب پایانهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وشعاع کره می‌شود

$$r=\frac{1}{n}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right\|$$

باز می‌شود نشان دادکه پایان α_i خارج ازکره است.

۷ـ نمایش دایره با طول‌ها: دسته‌بردار $\{\alpha, -\alpha\}$ که $\alpha\neq 0$است در R_2 درنظر می‌گیریم. بردار متغیر ξ را چنان می‌گیریم که

$$\|\xi-\alpha\|^2+\|\xi+\alpha\|^2=k^2. \qquad (8)$$

سپس ξ یك دایره را بسط می‌دهد. ایـن قضیه درهندسه اقلیدسی به‌این معنی است که مجموع مربعات فواصل یك نقطه ازدونقطه ثابت k^2 است.

برهان بسیارساده است. ملاحظه می‌شودکه (۸) معادل معادلهٔ زیراست

$$\|\xi\|^2+\|\alpha\|^2-\frac{1}{2}k^2=0$$

همچنین ملاحظه می‌شودکه مبدأ، مرکزدایره است. باید بحث کردکه مقادیر مختلف k دایرهٔ حقیقی یا مجازی یا نقطه می‌دهد. آنرا به خواننده واگذار می‌کنیم.

۸ـ نمایش‌کره‌با مسافتها: این بخش درحقیقت تعمیم بخش ۷ است. فرض‌کنیم که$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ بطورخطی مستقل درR_n باشد ومی‌گیریم که

$$\alpha_n=-(\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1})$$

باشد. به‌این معنی که مبدأ را مرکزثقل پوشه محدب پایان‌های $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ گرفته‌ایم. بردار متغیر α را چنان می‌گیریم که

$$\sum_{i=1}^{n}\|\xi-\alpha_i\|^2=k^2 \qquad (9)$$

باشد. ازاین‌رو ξکره‌ای در R_n را بسط می‌دهد.

برهان: ازمعادله (۹) نتیجه می‌شود که

$$\|\xi\|^2=\frac{1}{n}\left\{k^2-\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i\|^2\right\}.$$

بحث حالات مختلف را به‌خواننده واگذارمی‌کنیم.

پیشنهادها: خواننده می‌تواند آنچه که مکان هندسی‌اش دایره است به روش برداری بررسی کند وتعمیم آنرا درنظربگیرید. به‌عنوان مثال‌مسئله زیررا پیشنهاد می‌کنیم:

فرض‌کنیم که $\{\alpha, \beta\}$ بطورخطی مستقل باشد و ξ چنان تغییرکندکه

$$\frac{\|\xi-\alpha\|}{\|\xi-\beta\|}=\frac{a}{b}, \quad a>0, b>0.$$

مکان هندسی پایان ξ دایره است.

این قضیه در R_n به‌قرار زیراست. مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را بطور خطی مستقل می‌گیریم و ξ متغیراست به‌قسمی که

$$\frac{\|\xi-\alpha_1\|}{a_1}=\dots=\frac{\|\xi-\alpha_n\|}{a_n},$$

$$a_i>0, i=1, \dots, n.$$

مکان انتهای ξ دایره یا خط مستقیم است.

مساله‌های مسابقه‌ای

نهمین المپیاد بین‌المللی ریاضیات، از دوم تا سیزدهم ژوئیه سال ۱۹۶۷ با شرکت ۱۳ کشور در یوگسلاوی جریان داشت. کشورهای شرکت کننده: عبارت بودند از: اتحاد شوروی، انگلستان، ایتالیا، بلغارستان، جمهوری دموکراتیک آلمان، چکسلواکی، رومانی، سوئد، فرانسه، لهستان، مجارستان، مغولستان و یوگسلاوی. تعداد شرکت‌کنندگان از هر کشور، به جز ایتالیا و فرانسه، ۸ نفر بود. از ایتالیا ۶ نفر و از فرانسه ۵ نفر شرکت کرده بودند. تعداد امتیازهای هر کشور، در جدول صفحهٔ ۲۶۰ مشخص شده است (دیپلم درجهٔ اول به کسانی داده شد که ۳۸ تا ۴۲ امتیاز به دست آورده بودند؛ دیپلم درجه دوم برای ۳۰ تا ۳۷ امتیاز و دیپلم درجه سوم برای ۲۲ تا ۲۹ امتیاز). به دانش‌آموزان ۶ مساله داده شده بود که روی هم ۴۲ امتیاز داشتند.

نام کشور	تعداد امتیازها	دیپلم درجه اول	دیپلم درجه دوم	دیپلم درجه سوم
اتحاد شوروی	۲۷۵	۳	۳	۲
انگلستان	۲۳۱	۱	۲	۴
ایتالیا	۱۱۰	۰	۱	۱
بلغارستان	۱۵۹	۱	۰	۱
جمهوری دموکراتیک آلمان	۲۵۷	۳	۳	۱
چکوسلواکی	۱۵۹	۰	۱	۳
رومانی	۲۱۴	۱	۱	۴
سوئد	۱۳۵	۰	۰	۲
فرانسه	۴۱	۰	۰	۰
لهستان	۱۰۱	۰	۰	۱
مجارستان	۲۵۱	۲	۳	۳
مغولستان	۸۷	۰	۰	۱
یوگسلاوی	۱۳۶	۰	۰	۳

اینک صورت مساله‌ها (نام کشور طرح کنندهٔ مساله و تعداد امتیازها، زیر هر مساله آمده است):

۱. در متوازی الاضلاع ABCD، مثلث ABC با زاویه‌های حاده است و داریم: $|AB|=a$، $|AD|=1$ و $\widehat{BAD}=\alpha$. ثابت کنید، چهار دایرهٔ K_A، K_B، K_C و K_D به شعاع واحد، که مرکزهای آن‌ها به ترتیب راس‌های A، B، C و D باشند، وقتی و تنها وقتی، متوازی الاضلاع را می‌پوشانند که داشته باشیم: $a \leqslant \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.

(لهستان، ۶ امتیاز)

۲. در یک چهاروجهی، طول یکی و تنها یکی از یال‌ها از واحد بزرگتر است. ثابت کنید که حجم آن از $\frac{1}{8}$ تجاوز نمی‌کند.

(چکسلواکی، ۷ امتیاز)

۳. k، m و n، عددهای مثبت و درست و $m+k+1$، عددی اول و بزرگتر از $n+1$ می‌باشند. فرض کنید: $C_s=s(s+1)$. ثابت کنید، حاصل ضرب

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}=C_k)$$

بر حاصل ضرب $(C_1C_2\cdots C_n)$ بخش‌پذیر است.

(انگلستان، ۸ امتیاز)

۴. دو مثلث $A_0B_0C_0$ و $A_1B_1C_1$، با زاویه‌های حاده، داده‌شده‌اند. مثلث ABC را متشابه با مثلث $A_1B_1C_1$ (A متناظر A_1، B متناظر B_1 و C متناظر C_1) رسم کنید، به‌نحوی که بر مثلث $A_0B_0C_0$ محیط باشد و داشته باشیم: C_0EAC، A_0EBC و B_0ECA. مثلث ABC را طوری انتخاب

کنید که مساحت آن، حداکثر مقدار ممکن باشد.

(ایتالیا، ۶ امتیاز)

۵. دنبالهٔ $\{C_n\}$ را درنظر می‌گیریم:

$$C_1=a_1+a_2+\dots+a_8,$$
$$C_2=a_1^2+a_2^2+\dots+a_8^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$C_n=a_1^n+a_2^n+\dots+a_8^n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

که درآن‌ها، a_1، ...، a_8، عددهایی حقیقی‌اند و همهٔ آن‌ها با هم، برابرصفر نیستند. می‌دانیم. بین جمله‌های دنباله، بی‌نهایت جملهٔ برابر صفر وجوددارد. همهٔ مقدارهای n را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $C_n=0$.

(اتحاد شوروی، ۷ امتیاز)

۶. دریک جشن ورزشی که n روز طول کشید، m مدال تقسیم کردند. روز اول، ۱ مدال و $\frac{1}{7}$ بقیهٔ $m-1$ مدال پخش شد. روز دوم، ۲ مدال و $\frac{1}{7}$ بقیهٔ مدال‌های باقی مانده داده شد و غیره. بالاخره درروز nام، بقیه nمدال تقسیم شد. جشن، چند روز ادامه داشته است و روی هم چند مدال بین ورزشکاران تقسیم شده است؟

(مجارستان، ۸ امتیاز)

چند مسالهٔ گوناگون

۱. ثابت کنید که اگرعددهای

$$x+y+z,\quad xy+yz+zx,\quad xyz$$

مثبت باشند، x و y و z هم عددهایی مثبت‌اند.

۲. جواب‌های صحیح دستگاه معادله‌های زیررا پیدا کنید.

$$\begin{cases} 2x^3-7x^2+8x-2=y \\ 2y^3-7y^2+8y-2=z \\ 2z^3-7z^2+8z-2=x \end{cases}$$

۳. اگر A، B و C، اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC باشند، ثابت کنید:

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2\leqslant\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$$

۴. نقطهٔ I، مرکزدایرهٔ محاطی مثلث ABC است. درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید.

$$\frac{|IA|^2}{bc}+\frac{|IB|^2}{ca}+\frac{|IC|^2}{ab}=1$$

که درآن، a، b و c، طول ضلع‌های مثلث‌اند. مساله را ازدو راه حل کنید: ۱) به‌کمک مثلثات، ۲) به‌کمک بردارها.

۵. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\dots+\sqrt{1+x_{100}}=100\sqrt{1+\frac{1}{100}} \\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\dots+\sqrt{1-x_{100}}=100\sqrt{1-\frac{1}{100}} \end{cases}$$

۶. دایرهٔ ω را درمثلث متساوی الاضلاع ABC محاط کرده‌ایم. از نقطهٔ دلخواه M واقع بر محیط دایرهٔ ω، خط‌های راستی موازی باضلع‌های مثلث رسم کرده‌ایم. این خط‌های راست، مثلث ABC را به سه مثلث و سه متوازی الاضلاع تقسیم می‌کنند؛ ثابت کنید مجموع مساحت‌های سه مثلث حاصل، برابر است با مجموع مساحت‌های متوازی الاضلاع‌ها.

حل را درصفحه ۲۹۵ ببینید

«... انسان، درمیان جانوران به نیرویی بالاتر متمایز است، یعنی می‌تواند بیرون ازذات خودرا به‌اندیشه‌ای‌که برتر ازحس اوست دریابد و آن نیرویی است‌که در بطون دماغ او قرار داده شده است. بدان، صور محسوس را انتزاع می‌کند وذهن خود را درآنها به جنبش درمی‌آورد و، سپس، ازآنها صورت های دیگری تجرید می‌کند. پس اندیشه عبارت از نیرویی است‌که در ماورای حس، در این صورت های انتزاع شده تصرف می‌کند وذهن را درآنها جولان می‌دهد وآنها را انتزاع وترکیب می‌کند.»

مقدمهٔ ابن خلدون

معرفی کتاب

نگاهی گذرا به کتاب:

خلاصة الحساب شیخ بهائی

جابر عناصری

«... از جملهٔ علوم شریفه‌ای که خاص و عام، عالی و دانی، وضیع و شریف، محتاج به‌دانستن آن می‌باشند، علم‌ریاضی خصوصاً، قسمت محاسبات عدد آن، از قبیل چهار عمل اصلی و نظیر آن می‌باشد.

... و از مفیدترین و مرغوب‌ترین کتبی که در این باب ازخانهٔ پرفیض علما ماضین به‌رشتهٔ تحریر در آمده است، کتاب شریف خلاصة الحساب، تألیف مرحوم شیخ محمد بهاءالدین عاملی می‌باشد.»[1]

پیش از این در شمارهٔ نهم از جلد اول مجلهٔ فرهنگ جهان، مطالب سودمند استاد مرتضی مدرسی چهاردهی را در باب معرفی «شرح و حاشیهٔ» مرحوم آقامیرزا محمدعلی مدرس چهاردهی بر کتاب: «خلاصة الحساب» زنده‌یاد شیخ بهائی، مطالعه کرده و ارزش مندرجات کتاب مذکور ـ درقلمرو ریاضیات ـ را دریافته بودم.

اخیراً فاضل‌دیگری، شرح‌وترجمهٔ خلاصة الحساب را به‌ضمیمهٔ «شرح تشریح الافلاك»، مرحوم شیخ بهائی به شیوهٔ پسندیده وباکنجکاوی و دقت به چاپ رسانده وخدمات شیخ بهائی را به‌نیکی عیان ساخته است.

شارح، فاضل محترم سید محمد جواد ذهنی تهرانی است و ناشر، انتشارات کتبی نجفی (قم ـ گذرخان)، اختتام کتاب روز پنجشنبه بیست ونهم

جمادی‌الاولی سنهٔ ۱۴۰۵ هجری قمری است. بااین توضیح که:

«... این کتاب درعین اختصار و ایجاز، حاوی امهات واصول مسائل ریاضی بوده و می‌توان گفت که در نوع خود، گوی سبقت را از کتب دیگر ربوده است و چون فهم غالب معانی آن و انتقال به‌مراد مصنف ـ خالی از اشکال و غموض نیست، لذا متبحرین دراین فن، شروحی برای کتاب شریف نگاشته و در دسترس محصلین این علم گذارده‌اند».

هرچند شرح بخش‌خلاصة الحساب را زودتر ازتاریخ یاد شده به‌رشتهٔ تحریر درآورده و در ۳۹۱ صفحه و در شهر صفر المظفر سنهٔ ۱۴۰۰ هجری قمری نگارش آن اتمام یافته است، معذلك کل کتاب خلاصة الحساب وشرح فارسی تشریح افلاك ـ دریك مجلد ـ تنظیم وهرمبحثی بامتن عربی آغاز و با شرح فارسی توضیح داده شده است.

مرحوم شیخ بهائی هرجا به‌آوردن شاهدی از ریاضیات قدیم نیاز یافته ـ درکمال صداقت از علما پیشین یادکرده و به‌نوشته‌ها و آراء آنان اشاره‌ها نموده است.[2]

شارح کتاب شیخ بهائی نیز این اشارات را درنهایت امانت حفظ نموده و ضمناً به ریاضی‌دانان قدیم و آثار آنان التفات کرده است. از شیخ‌الرئیس ابوعلی سینا وکتابش: شفا و مندرجات آن تا مفتاح‌الحساب مرحوم غیاث‌الدین توجه‌ها شده است. ضمناً به‌نوشته‌های احمد بن محمد معروف به‌آذری (صاحب کتاب منتخب‌الاسرار) و سید نعمت‌الله جزایری (نویسندهٔ زهرالربیع) وحاشیهٔ فرهاد میرزا درکتاب کنزالحساب برریاضیات قدیم اشاره‌ها دارد.

بجاست که به‌موقع کتاب فوق‌الذکر نیز به‌مناسبت‌هائی مورد بررسی و معرفی اجمالی قرار گیرد.

مرحوم شیخ بهائی در سرآغاز مطالب خود در باب علم حساب می‌نویسد:

«... حساب عبارتست ازعلمی که به‌واسطهٔ آن چگونگی بدست‌آوردن مجهولات عددی از معلومات عددی دانسته می‌شود وموضوع علم حساب «عدد» است».

دو قسمت اساسی کتاب خلاصة الحساب به «محاسبات» و «مساحت» مختص و دربخش مربوط به‌جبر و مقابله سخن به‌میان آمده و مسائل اساسی جمع وتفریق و تضعیف وتنصیف مطرح گشته است:

تضعیف عبارتست از اینکه عددی را یکمرتبه تکرار کنند و به عبارت دیگر هرعددی راکه در خصوص عدد ۲ ضرب کنند، این عمل را تضعیف گویند. مانند تکرار عدد ۷ که حاصلش ۱۴ می‌شود. (تضعیف از باب اضافه است).

تنصیف عبارتست از تجزیه‌کردن عددی به‌دوقسمت برابر مانند تجزیهٔ عدد ۱۰ که حاصلش ۵ می‌شود. ضمناً شیخ بهائی از ضرب و تجذیر و سایر مسائل‌ریاضی گفتگو کرده وبرای تشخیص صحت عمل یا فساد آن ــ درجمع وتفریق وبخش و... ــ قواعدی پیشنهاد نموده است.

شیخ بهائی از حروف‌ابجد و معادل عددی هرحرف درحروف ابجد، استفادهٔ شایانی دربخش «ضرب» بعمل آورده است. چراکه هرحرفی معادل عددی است ویادآوری «اعداد» باالتفات به‌حروف ابجد به‌شرح زیر انتقال وسرعت عمل درجمع وضرب و... آسانتر می‌سازد.

حروف ابجد با اعداد:

ابجد	هوز	حطی	کلمن	سعفص
۴ ۳ ۲ ۱	۷ ۶ ۵	۱۰ ۹ ۸	۵۰ ۴۰ ۳۰ ۲۰	۹۰۸۰۷۰۶۰

قرشت	ثخذ	ضظغ
۴۰۰ ۳۰۰ ۲۰۰ ۱۰۰	۷۰۰ ۶۰۰ ۵۰۰	۱۰۰۰ ۹۰۰ ۸۰۰

شیخ بهائی درمبحث مساحت به‌شرح زیر سخن می‌گوید:

۱ــ تعریف مساحت. ۲ــ تعریف خط. ۳ــ تقسیم خط. ۴ــ اقسام‌خط. ۵ــ تعریف سطح. ۶ــ اقسام سطح. ۷ــ شرح اجزا سطوح. ۸ــ بیان اشکال هندسی. ۹ــ تعریف جسم. ۱۰ــ بیان اقسام جسم. ۱۱ــ شرح اجزا اجسام. ۱۲ــ بیان اشکال اجسام و...

یکی از محاسن‌آرا و عقاید مربوط به ریاضیات در چهارچوب کتاب شیخ بهائی کاربرد ریاضیات در زندگی عملی و روزمره را نشان می‌دهد، این است که درقسمت «مساحت»، شیخ بهائی از اندازه‌گیری سطوح وسایر

موارد بحث می‌نماید. از جمله، موزون‌کردن زمین به‌جهت اجراء قنات و کاریز، و طریق بدست آوردن بلندی‌کوه‌ها و قله‌ها و تپه‌ها وطریق تحصیل مقدار عرض و پهنای رودخانه‌ها مورد توجه خاص واقع می‌شود. و ازطریق بدست آوردن عمق و گودی چاه‌ها سخن به‌میان می‌آید. و آلات و ابزاری که به‌شکل اشکال ریاضی ساخته شده است در این نوع آزمایش بکارگرفته می‌شوند. ضمن اینکه مصنف محترم به‌عملیات جبری‌که اهل ریاضی آنرا ابداع نموده‌اند مراجعه نموده وعمل تقسیم و تجذیر را درکتاب دیگر خود نیزیعنی «بحرالحساب» به‌تفصیل یادکرده‌است. باتوضیح اینکه درهرمبحث ازمباحث مربوط به‌محاسبات و مساحت، شیخ بهائی ازمثال‌های ملموس بهره گرفته وفهم وآشنائی به‌مسائل ریاضی را آسانتر ساخته است. نخست‌مسائلی طرح و پس از آوردن مثال‌ها، حل مسائل را نیز قید نموده و آسانترین راه حل را پیشنهاد داده است. هرچند برای خوانندهٔ کتاب درزمان حاضر، فهم بسیاری از لغات بکارگرفته شده دراین‌کتاب مشکل بنظر می‌رسد ولی اهل فن به‌وضوح ازمنظور ومقصود شیخ بهائی آگاه بوده‌واز طریق مطالعهٔ متون قدیمه، آشنائی کافی به تورق این کتاب می‌یابند. شارح کتاب نیز هرجاکه ضرورتی برای توضیح لازم بنظرآمده ــ الحق در رفع ابهام‌کوشیده است.

در قلمرو «جذر»، طریق معمولی بدست آوردن نتیجه با طرق غیر-معمولی، مقایسه وگزیده‌ترین راه حل پیشنهادگشته است. افزون برباب هشتم که مختص جبر ومقابله می‌باشد، در باب نهم ازکتاب، قواعد شریفه و فوائد لطیفه مطرح و درباب دهم از مسائل متفرقهٔ ریاضی گفتگو شده و بالاخره در خاتمهٔ‌کتاب، مسائل لاینحل مورد بررسی و نظرخواهی قرارگرفته است.

کتاب خلاصة الحساب شیخ بهائی، ازکتب معتبر ریاضی قرنها پیش ومورد استفاده در زمان حاضر نیز می‌باشد. اندکی صرف وقت وهوشیاری، می‌تواند ما را به‌مسائل ریاضی قابل توجهی هدایت نماید و درکنار مباحث ریاضی جدید، ارزش ریاضیات قدیم را عیان سازد.

بخصوص اینکه فرزانهٔ ارجمند آقای سید محمد جواد ذهنی تهرانی شارح خلاصة‌الحساب به خط زیبا و به شیوهٔ پسندیده، مطالب را مورد

تفکیک قرارداده وازتداخل مباحث پرهیز نموده و براعتبار کتاب خلاصة الحساب افزوده است.

توصیف نکات ارزنده این کتاب در این مجمل که نگاهی شتابزده به کتاب را مدنظر قرارداده‌ایم مقدور نیست، اما دانش‌پژوهان ارجمند با آشنائی به این کتاب، ذوق و هوشمندی و دقت ریاضی‌دانان صاحب قدر و منزلت ایران را بیشتر درخواهند یافت.

---

۱ و ۲ــ این مطالب از مقدمه شارح محترم ــ سید محمد جواد ذهنی تهرانی برگرفته شده و زیرنویس شماره ۲ نیز به‌شارح مذکور برمی‌گردد.

کشف کنید

دوعدد دو رقمی را درهم ضرب کرده‌ایم، حاصل‌ضرب را با عددی سه‌رقمی، که‌رقم‌سمت‌چپ آن واحداست، جمع کرده‌ایم، حاصل جمع، عددی‌پنج رقمی شده است:

```
  * * ×
  * *
  -----
  * * *
 * * *
 -------
 * * * * +
   1 * *
 -------
 * * * * *
```

همهٔ رقم‌ها راکشف کنید.

حل درصفحه ۳۱۲

شکل مغنی و ریاضیدانان ایرانی مخترع آن

ابوالقاسم قربانی

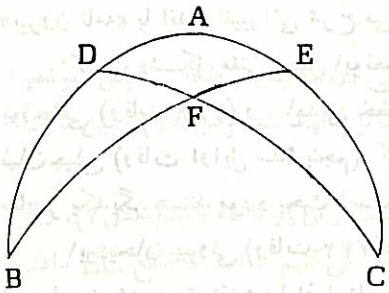
درریاضیات دورهٔ اسلامی، هروقت سخن از «شکل مغنی» به میان می‌آید مقصود قضیهٔ زیر درمثلثات کروی وهمچنین درمثلثات مسطحه است:

اگرزوایای مثلث‌کروی (یا مسطحهٔ) ABC را A و A و C واضلاع روبه روی آنها را به ترتیب a و b و c بنامیم داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \qquad (۱)$$

با درنظر گرفتن اینکه اصطلاح «شکل» در ریاضیات دورهٔ اسلامی به معنی قضیه یا مسأله نیز به کار می‌رود وجه تسمیهٔ این قضیه به «شکل مغنی» یعنی «قضیهٔ بی‌نیازکننده» این است که این قضیه ریاضی دانان را از «شکل قطاع» یعنی‌قضیهٔ منلاوس، که به‌کاربردنش درمثلثات کروی مشکل‌است بی‌نیاز می‌دارد.

در واقع «شکل قطاع» (یعنی قضیه‌منلاوس) درمثلثات کروی چنین‌بیان می‌شود[۲]:



(شکل ۱)

اگر روی‌کره دربین دو کمان ADB و AEC متعلق به دایره‌های عظیمه، دو کمان DFC و BFE که نیزمتعلق به دایره‌های عظیمه هستند، مطابق با شکل واقع باشند و همهٔ کمانها از نیمدایره کوچکتر باشند داریم:

۱ــ امروزه رابطه‌های (۱) را قضیهٔ سینوسها می‌نامیم.

۲ــ کسانی‌که مایل به‌کسب اطلاعات بیشتری دربارهٔ شکل قطاع باشند می‌توانند به‌کتاب «قربانی: نسوی نامه» رجوع کنند.

$$\frac{\sin\widehat{CE}}{\sin\widehat{EA}}=\frac{\sin\widehat{CF}}{\sin\widehat{FD}}\times\frac{\sin\widehat{DB}}{\sin\widehat{BA}}$$

وپیداست که به‌کاربردن این قضیه درمثلثات کروی ازجهت انتخاب کمانهایی که باید دردوطرف رابطهٔ فوق نوشت ساده نیست ودقت ومهارت لازم دارد.

ریاضیدانان دورهٔ اسلامی رابطهٔ فوق را «ستهٔ متناسبه» یا قانون«شش مقدار» می‌نامیدند وتا حدود اواخر سدهٔ چهارم هجری این‌قضیه را به‌کار می‌بردند ونظر به اهمیتی که در نجوم داشت دربارهٔ آن رساله‌های متعدد نوشته‌اند.

دراوایل سدهٔ پنجم هجری چند ریاضیدان ایرانی (اسامی آنها خواهد آمد) «شکل مغنی» راکه زیبا وبه‌کار بردنش آسان است ابداع کردند و از شکل دشوار قطاع بی‌نیاز شدند. با این حال باز «شکل قطاع» همیشه مورد توجه و بحث آنان بود. تاآنجاکه نصیرالدین طوسی وفات ۶۷۲ درحدود اواسط سدهٔ هفتم هجری بازکتاب «کشف‌القناع عن اسرار شکل‌القطاع» را دربارهٔ آن نوشت.

اینك درضمن اشاره به تاریخچهٔ اختراع و ابداع «شکل مغنی» برهان آن شکل را، هم درمثلثات مسطحه وهم درمثلثات کروی، به نقل ازکتاب «بیرون نامه» با اندك تغییراتی شرح می‌دهم.

کشف «شکل مغنی» بین ابونصر عراق (وفات ۴۲۷) و ابوالوفای بوزجانی (وفات ۳۸۸) و حامدبن خضر خجندی (وفات ۳۹۰) وکوشیاربن لبان‌جیلی (وفات اوایل سدهٔ پنجم) که همه از ریاضیدانان ایرانی [1] و معاصر یکدیگر هستند مورد بحث است.

ابوریحان بیرونی (وفات ۴۴۲)درکتاب «مقالید علم‌الهیئه» شرحی در این باره نوشته وحق تقدم را از استاد خود ابونصرعراق دانسته است. بااین حال شواهدی دردست است که نشان می‌دهد که ابونصرعراق وابوالوفای بوزجانی مستقل از یکدیگر به «شکل مغنی» دست یافته اند.

۱ــ زندگینامهٔ این‌ریاضیدانان را درکتاب «قربانی: ریاضیدانان ایرانی» یا در شماره‌های مختلف مجلهٔ « آشتی با ریاضیات» خواهید یافت.

مدارك موجود نشان می‌دهدکه بیرونی از استاد خود ابونصر عراق پرسیده بوده‌که آیا «شکل مغنی»که درمثلثات کروی ثابت شده است درمورد مثلثهای مسطح هم صحت دارد یا نه. و ابونصر عراق دررسالهٔ «المسائل الهندسیه» [1] جواب اورا داده ونوشته‌است‌که جواب این سؤال مثبت است وآن را ثابت‌کرده وبرای اثبات‌آن دوحالت تمیز داده. اول‌آنکه یکی از از زوایای مثلث قائمه باشد و دوم حالت‌کلی. سپس بیرونی خود درکتاب «قانون مسعودی»قضیه را به‌وجه بسیارجالب‌توجهی به ثبوت رسانیده است.

دراینجا ابتداترجمهٔ فارسی جواب ابونصرعراق را به‌بیرونی وهمچنین استدلال ابونصر را برقضیهٔفوق از رسالهٔ «المسائل‌الهندسیه» وسپس استدلال بیرونی را ازکتاب «قانون مسعودی» نقل می‌کنم.

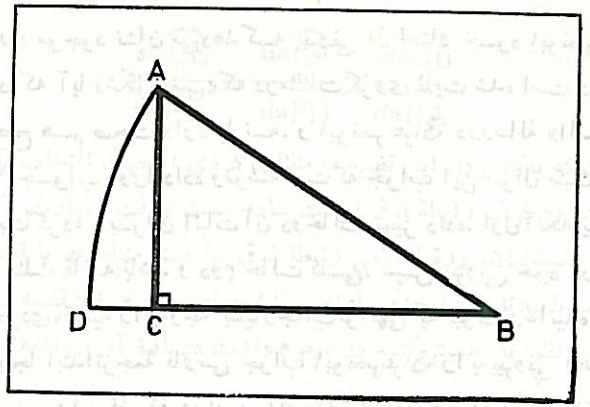
ابونصر عراق* رسالهٔ دوازدهم از رسالهٔ «المسائل الهندسیه» (ص ۱۵) را چنین شروع کرده است:

«پس ازآنکه ثابت‌کردم‌که، درمثلثهایی که برسطح‌کره از دایره‌های عظیمه پدید می‌آیند، نسبت جیب هریك از اضلاع به‌جیب ضلع دوم مساوی است با نسبت جیب زاویهٔ رو به روی ضلع اول به جیب زاویهٔ روبه روی ضلع دوم، سؤال‌کردی‌که‌آیا این حکم برای همهٔ مثلثها اعم ازمثلثهای کروی ومثلثهایی که اضلاع آنها خطوط راست هستند درست است یا نه. جواب ما به این سؤال مثبت است.»

برهان ابونصر عراق برشکل مغنی درمثلثات مسطحه ــ سپس ابونصر عراق قضیهٔ مذکور را در رسالهٔ «المسائل الهندسیه» (ص ۱۶) چنین ثابت کرده است:

اولاً فرض‌می‌کنیم که‌زاویهٔ C ازمثلث ABC قائمه باشد(شکل ۲). وبه مرکزB وبه‌شعاع AB قوسی ازدایره رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC رادر نقطهٔ D قطع کند. دراین‌صورت‌واضح‌است‌که AC جیب‌قوس AD ازدایرهٔ

۱ــ «رسالهٔ المسائل الهندسیه» رسالهٔ دهم از مجموعهٔ «رسائل‌ابی‌نصر... الی‌ــ البیرونی» است‌که درسال ۱۳۶۶ هجری قمری درحیدرآباد دکن به چاپ رسیده ودارای ۲۱ صفحه ومشتمل بر ۱۵ مسألهٔ هندسی است.



(شکل ۲)

مرسوم است. وازطرف دیگراندازهٔ زاویهٔ مرکزی B مساوی است با اندازهٔ قوس AD. پس در دایرهٔ مذکور:

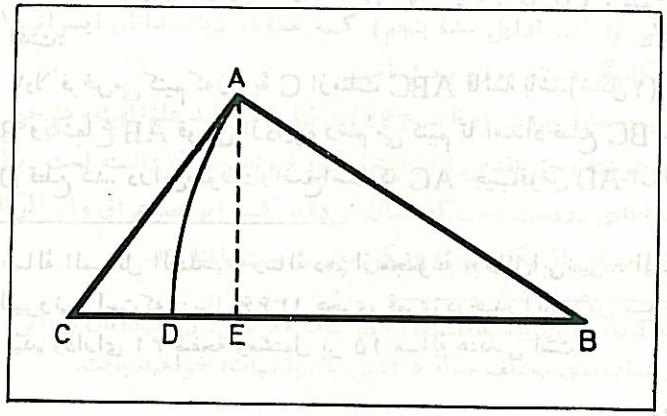
$$AC = \text{جیب } \hat{B}$$

ازطرف دیگردرهمان دایرهٔ مرسوم جیب زاویهٔ قائمهٔ C مساوی است با شعاع AB بنابراین داریم:

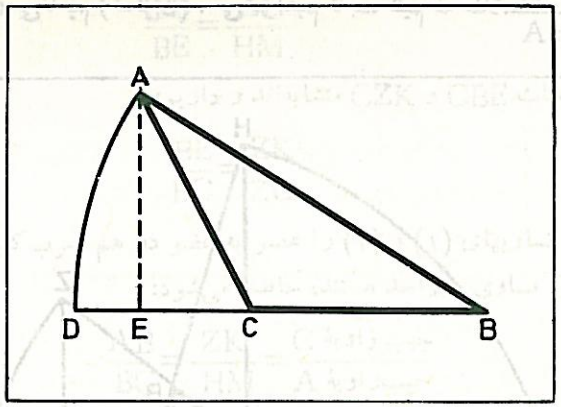
$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{جیب زاویهٔ قائمه } C}{\text{جیب زاویهٔ } B}$$

وقضیه ثابت است.

ثانیاً فرض می‌کنیم که زاویهٔ C قائمه نباشد (شکل ۳). باز به مرکز B و به شعاع BA



(شکل ۳)



(شکل ۴)

قوسی ازدایره رسم می‌کنیم تا BC یا امتداد آن را درنقطهٔ D قطع کند واز نقطهٔ A عمود AE را برخط BC فرود می‌آوریم. دراین صورت بنا به‌حالت اول درمثلث قائم‌الزاویهٔ AEB داریم:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{\text{جیب زاویهٔ قائمه } E}{\text{جیب زاویهٔ } B}$$

ونیز درمثلث قائم‌الزاویهٔ ACE بنا به حالت اول داریم:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{\text{جیب زاویهٔ } ACE = \text{جیب زاویهٔ } ACB}{\text{جیب زاویهٔ قائمه } E}$$

وچون این دوتساوی را عضو به عضو درهم ضرب کنیم حاصل می‌شود:

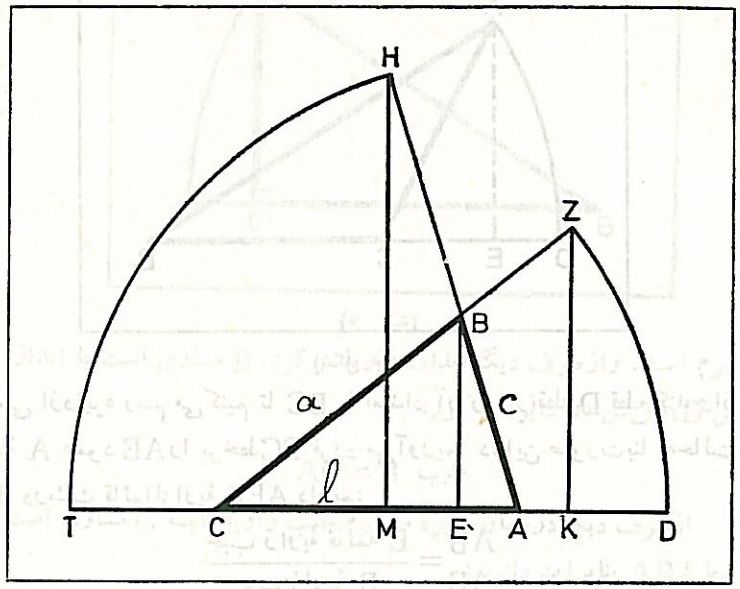
$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{جیب زاویهٔ } C}{\text{جیب زاویهٔ } B}$$

وقضیه در این حالت نیز ثابت است.

برهان بیرونی برشکل مغنی درمثلثات مسطحه ـ بیرونی این قضیه را درباب هشتم از مقالهٔ سوم «قانون مسعودی» بـه ثبوت رسانیده وروش وی چنانکـه دیـده می‌شـود بسیار بدیـع و ساده است. همین روش را خواجه نصیرالدین طوسی درکتاب «کشف‌القناع» آورده ولی از مخترع آن سخن نگفته است.

مثلث ABC را درنظرگرفته اضلاع BC و CA و AB را به‌ترتیب

a و b و c می‌نامیم (شکل۵) ؛ می‌خواهیم ثابت کنیم که مثلا: $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}$



(شکل ۵)

اضلاع مثلث را امتداد داده به مرکز A و به شعاع واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم تا امتدادهای AB و AC را بـه ترتیب درنقاط H و T قطع کند. همچنین به مرکز C وبـه شعاع واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم تـا امتدادهای CB و CA را به ترتیب درنقاط Z و D قطع کند. و از Z و H عمودهای ZK و HM را برخط راست AC فرود می‌آوریم. واضح است که:

اندازهٔ قوس HT = اندازهٔ زاویهٔ A ازمثلث ABC

و جیب زاویهٔ BAC = HM

و اندازهٔ قوس DZ = اندازهٔ زاویهٔ C ازمثلث ABC

و جیب زاویهٔ ACB = ZK

اکنون‌عمود BE را ازنقطهٔ B برAC فرود می‌آوریم. دومثلث ABE و AHM متشابه‌اند وداریم:

$$\frac{AB}{BE}=\frac{AH}{HM} \qquad (۱)$$

همچنین دومثلث CBE و CZK متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{BE}{BC}=\frac{ZK}{ZC} \qquad (۲)$$

اگر تساویهای (۱) و (۲) را عضو به عضو در هم ضرب کنیم، چون AH و CZ مساوی با واحد هستند، حاصل می‌شود:

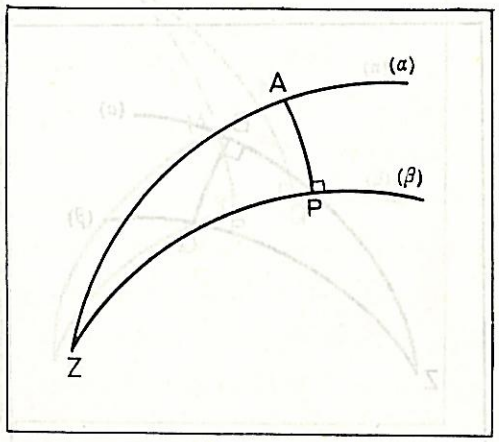
$$\frac{AB}{BC}=\frac{ZK}{HM}=\frac{\text{جیب زاویهٔ } C}{\text{جیب زاویهٔ } A}$$

و قضیه ثابت است.

تعریف میل اول و میل دوم- قضیهٔ «مغنی» را درمثلثات مسطحه بیان و ثابت کردیم. اینك برای بیان قضیهٔ «مغنی» درمثلثات کروی ابتدا باید «میل» را تعریف وسپس یك قضیهٔ مقدماتی را ثابت کنیم.

تعریف میل اول- از آنچه بیرونـی درکتاب «مقالید» آورده تعریف میل اول چنین استنباط می‌شود:

دو دایرهٔ عظیمهٔ (α) و (β) واقع برسطح کره را درنظر گرفته (شکل



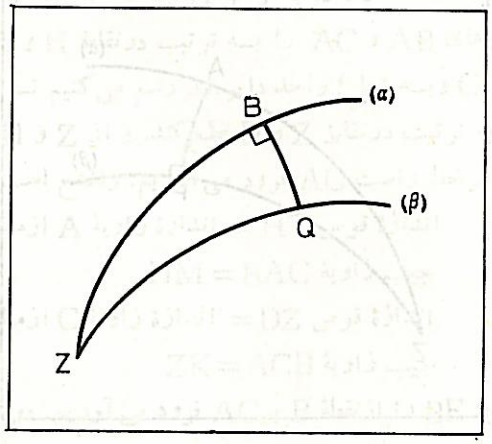
(شکل ۶)

۶) نقطهٔ تقاطع آنها را Z می‌نامیم. سپس روی دایرهٔ (α) نقطهٔ دلخواه A را اختیار کرده از آن دایرهٔ عظیمه‌ای می‌گذرانیم که دایرهٔ (β) را در نقطهٔ P به‌زاویهٔ قائمه قطع کند. در این صورت قوس AP را میل اول (یا به‌طور خلاصه میل) قوس ZA نسبت به‌دایرهٔ (β) می‌نامند. هر جا اصطلاح «میل» به‌طور مطلق استعمال شود مقصود میل اول خواهد بود:

میل اول قوس ZA نسبت به‌دایرهٔ (β) =
قوس AP (که بر دایرهٔ β عمود است)

تعریف میل ثانی ـ اگر دایره‌های عظیمهٔ (α) و (β) از سطح کره را که در نقطهٔ Z متقاطع هستند در نظر بگیریم (شکل ۷) و از نقطهٔ اختیاری B واقع بر دایرهٔ (α) دایرهٔ عظیمه‌ای بگذرانیم که بر همان دایرهٔ (α) عمود بوده دایرهٔ (β) را در نقطهٔ Q قطع کند، در این صورت قوس BQ را میل ثانی یا عرض قوس ZB نسبت به‌دایرهٔ (β) می‌نامند:

میل ثانی قوس ZB نسبت به‌دایرهٔ (β) =
قوس BQ (که بر دایرهٔ α عمود است)



(شکل ۷)

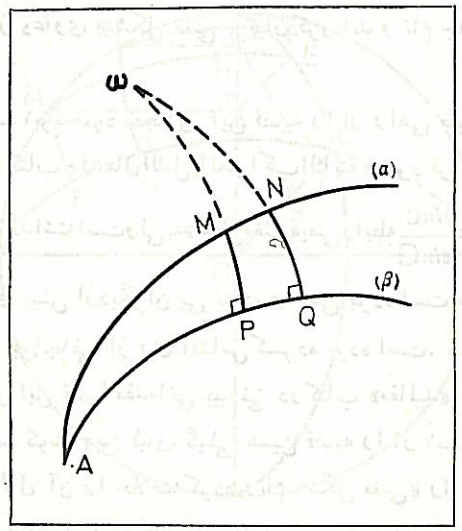
باید متوجه بود که هردو میل را نسبت به دایرهٔ (β) تعریف کردیم. اما در مورد «میل اول» دایرهٔ AP بر دایرهٔ (β) عمود است و درمورد «میل ثانی» دایرهٔ BQ بر همان دایرهٔ (α) عمود می‌باشد.

اصطلاح «میل ثانی» را ابوالوفای بوزجانی به‌کار برده و اصطلاح «عرض» را به‌جای «میل ثانی» بیرونی وضع کرده است.

حکم قضیهٔ مقدماتی یا «قانون هیأت» ـ پیش از ذکر قضیهٔ «مغنی» در مثلثات کروی احتیاج به‌یك قضیهٔ مقدماتی داریم. این قضیه را ابومحمود خجندی «قانون‌هیأت» نامیده وبعضی‌ازریاضی‌دانان دیگرهمین قضیهٔ‌مقدماتی را جزوی از «شکل‌مغنی» دانسته آن‌را با «شکل مغنی» یك‌جا ثابت کرده‌اند. عنوان این قضیه این است:

در سطح‌کره نسبت جیبهای دو قوس AM و AN که روی یك دایرهٔ عظیمه اختیارشوند مساوی است با نسبت جیبهای میلهای (اول) آنها نسبت به‌یك دایرهٔ عظیمهٔ دیگر.

به‌عبارت دیگر:



(شکل ۸)

در سطح کره نسبت هر قوس از دایرهٔ عظیمه به‌میل آن قوس نسبت به دایرهٔ عظیمهٔ دیگر مقداری است ثابت.

توضیح ــ دو دایرهٔ عظیمهٔ (α) و (β) از سطح کره راکه در نقطهٔ A متقاطع هستنددر نظر گرفته (شکل ۸) روی یکی ازآنها، مثلا روی دایرهٔ(α)، دونقطهٔ دلخواه M و N را اختیارمی‌کنیم. و ازاین دو نقطه دو دایرهٔ عظیمه می‌گذرانیم که دایرهٔ (β) را بـه زاویهٔ قـائمه قطع کنند. مطابق تعریف قبل قوسهای MP و NQ بـه ترتیب میل قوسهای AM و AN نسبت به‌دایرهٔ (β) هستند و حکم قضیه این است:

$$\frac{\sin\widehat{AM}}{\sin\widehat{AN}}=\frac{\sin\widehat{MP}}{\sin\widehat{NQ}}$$

باید متوجه بود که دایره‌های عظیمهٔ MP و NQ کـه هر دو بر دایرهٔ (β) عمود هستند یکدیگر را درنقطهٔ ω که قطب دایرهٔ (β) است قطع می‌کنند.

مبتکران قضیهٔ مقدماتی ــ بنابر آنچه ازگفتهٔ بیرونی برمی‌آید:

اولا ــ ابونصر عراق و هم ابوالوفای بوزجانی هر دو این قضیه را به عنوان یکی از دعاوی « شکل مغنی » بیان‌کرده‌اند و نام جداگانه‌ای بر آن ننهاده‌اند.

ثانیاً ــ ابومحمود خجندی این قضیه را از راهی طولانی ثابت‌کرده وآن را مبنای کتاب «اعمال‌اللیل بالکواکب‌الثابتة» خود قرارداده ونام آن‌را «قانون‌الهیئة» گذاشته‌است‌ولی به«شکل‌مغنی»یعنی‌رابطه $\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$ در مثلث‌کروی پیش ازدیگران پی نبرده ومدعی بوده است‌که «قانون هیأت» را ابوالوفای بوزجانی از وی اقتباس کـرده بوده است. بـرهان ابومحمود خجندی را بر این قضیهٔ مقدماتی بیرونی درکتاب «مقالید» آورده است.

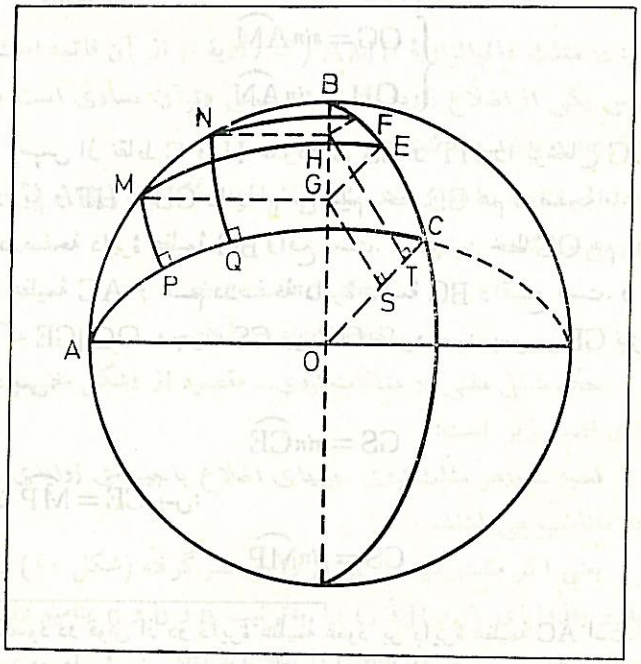
ثالثاً ــ کوشیاربن لبان گیلی همین قضیه را از ابـومحمود خجندی گرفته و استدلال آن را خلاصه‌کرده ونام «شکل مغنی» را برآن نهاده‌است، وجه تسمیهٔ این قضیه به «شکل مغنی» این بوده کـه این قضیه منجمان را از به کار بردن «شکل قطاع» بی‌نیاز می‌دارد. بـرهان کوشیار را بر شکل فوق

بیرونی درکتاب «مقالید» آورده است.

کوشیار خود نزد بیرونی اقرارکرده‌که این قضیه را از خجندی گرفته وفقط آن را تهذیب وتنقیح‌کرده است.

رابعاً ــ ابوالعباس نیریزی و ابوجعفر خازن در«زیج صفائح»به‌قضیه‌ای شبیه به‌این قضیه پی برده‌اند. ولی مقصودآنها محاسبهٔ میلها بدون استفاده از «شکل قطاع» بوده و بـه اصل دعوی «شکل مغنی» نرسیده‌اند. بیرونـی این قضیه و برهان آن‌را از نیریزی و ابوجعفر خازن در کتاب «مقالید» آورده است.

برهـان قضیهٔ مقدماتی از بیرونـی ــ گفتم که عده‌ای از ریاضی‌دانان ایرانی‌هریك به‌نحوی قضیهٔ مقدماتی را ثابت‌کرده‌اند. دراینجا برهان‌بیرونی را ازکتاب «مقالید» ذکر می‌کنم ومتذکر می‌شوم‌که بیرونی برهان ساده‌تری دریك حالت خاص نیز برای این قضیه درکتاب «قانون مسعودی» ذکرکرده است.



(شکل۹)

اینك برهان بیرونی در حالت‌کلی

فرض می‌کنیم که قوسهای AB و AC هـریك ربع دایـره‌ای عظیمه باشند (شکل ۹) و روی AB دونقطهٔ دلخـواه M و N را اختیارکرده از آنها دوقوس عظیمهٔ[1] MP و NQ را برقوس AC عمودمی‌کنیم. می‌خواهیم ثابت‌کنیم که:

$$\frac{\sin\widehat{AM}}{\sin\widehat{MP}}=\frac{\sin\widehat{AN}}{\sin\widehat{NQ}}$$

مرکز کره را O می‌نامیم و ازنقاط M و N دو دایره صغیره به‌موازات دایرهٔ عظیمهٔ AC رسم کرده[2] فصل‌مشترك‌هـای آنها را با دایرهٔ عظیمهٔ BC به‌ترتیب نقاط E و F می‌نامیم. و ازنقاط M و N عمودهای MG و NH را بر OB فرود می‌آوریم.

واضح است که:

$$\begin{cases} OG=\sin\widehat{AM} \\ OH=\sin\widehat{AN} \end{cases}$$

سپس از نقاط G و H عمودهای GS و HT را برشعاع OC فرود می‌آوریم و HF و GE را رسم می‌کنیم. خط GE هم درصفحهٔ مدار ME وهم درصفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ BC واقع است. وهمچنین خط OC هم درصفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ AC و هـم درصفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ BC واقـع است. و واضح است که $OC \| GE$. وچون GS بر OC عمود است پس بر GE نیز عمود است. پس:

$$GS=\sin\widehat{CE}$$

وچون $\widehat{CE}=\widehat{MP}$ پس:

$$GS=\sin\widehat{MP}$$

۱ــ مقصود دو قوس از دو دایرهٔ عظیمهٔ عمود بر دایرهٔ عظیمهٔ AC است.

۲ــ این دو دایرهٔ صغیره را مدارهای موازی با دایرهٔ عظیمهٔ AC می‌نامند.

وبه‌دلیلی شبیه به‌این داریم: $HT=\sin\widehat{NQ}$

اکنون درمثلث OHT کـه خط GS به‌موازات ضلع HT از آن رسم شده است داریم:

$$\frac{OG}{GS}=\frac{OH}{HT}$$

یعنی:

$$\frac{\sin\widehat{AM}}{\sin\widehat{MP}}=\frac{\sin\widehat{NA}}{\sin\widehat{NQ}}$$

وحکم ثابت است.

تبصره ــ اگر قوس AN ربع دایره باشد اندازهٔ قوس NQ مساوی با اندازهٔ زاویهٔ A خواهد بود وداریم:

$$\frac{\sin\widehat{MP}}{\sin\widehat{AM}}=\hat{A} \quad \text{ویا} \quad \frac{\sin\widehat{AM}}{\sin\widehat{MP}}=\frac{1}{\sin A}$$

یعنی: در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMP (که زاویهٔ P از آن قائمه است) نسبت سینوس یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه به‌سینوس وترآن مساوی است باسینوس زاویهٔ روبه‌رو به‌ضلع مذکور.

این رابطه را امروز در مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی ABC ($\hat{C}=90^\circ$) چنین می‌نویسند:

$$\sin a=\sin c \ \sin A$$

و

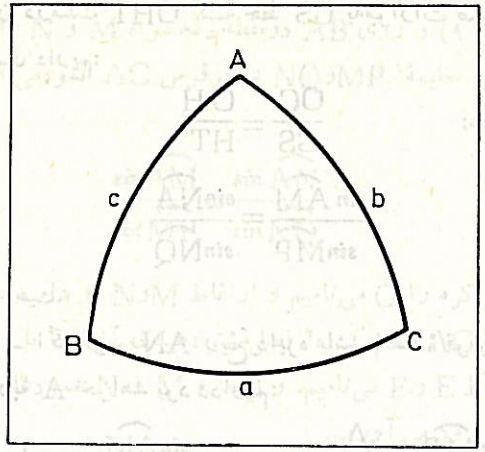
$$\sin b=\sin c \ \sin B$$

حکم شکل مغنی در مثلثات‌کروی ــ مقصود از «شکل مغنی» درمثلثات کروی قضیهٔ زیر است:

قضیه ــ درهر مثلث‌کروی جیبهای اضلاع باجیبهای زوایای روبه‌روی آنها متناسب می‌باشند.

یعنی اگر مثلث کروی ABC را در نظر گرفته (شکل ۱۰) و اضلاع روبه‌رو به‌زوایای A و B و C را به‌ترتیب a و b و c بنامیم داریم:

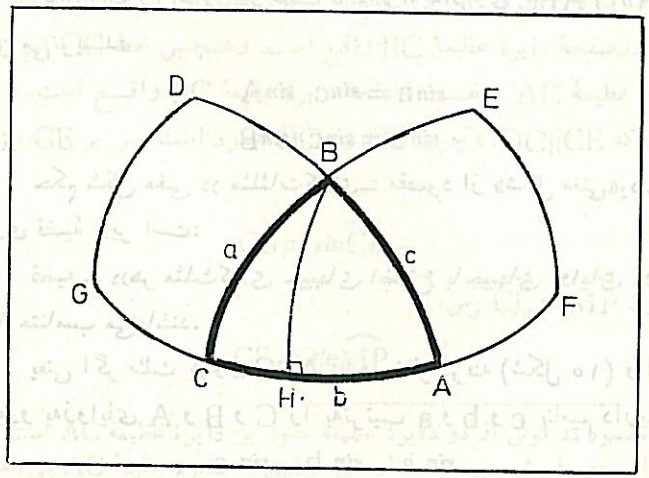
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$



(شکل ۱۰)

برهان بیرونی برشکل مغنی ـ بیرونی قضیهٔ فوق را در کتاب «قانون مسعودی» با روشی شبیه آنچه در مورد مثلث مسطح گفتم ثابت کرده است: و اینك برهان او:

مثلث کروی ABC را در نظر گرفته (شکل ۱۱) اضلاع آن‌را که



(شکل ۱۱)

قوسهای دایرهٔ عظیمه‌هستند a و b و c می‌نامیم (مطابق باشکل) می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

قوس AB را از طرف B تا نقطهٔ D ادامه می‌دهیم تا قوس AD ربع دایره شود. به‌همین قسم قوس CB را از طرف B تا نقطهٔ E ادامه می‌دهیم تا CE ربع دایره شود.

همچنین قوس AC را از دوطرف ادامه می‌دهیم تاقوسهای BAF و ACG ربع دایره شوند. و از نقاط E و F یك‌قوس از دایرهٔ عظیمه و همچنین از نقاط D و G یك‌قوس از دایرهٔ عظیمه می‌گذرانیم. واضح است که:

$$\text{اندازهٔ } \widehat{A} = \text{اندازهٔ } \widehat{GD}$$

$$\text{اندازهٔ } \widehat{C} = \text{اندازهٔ } \widehat{EF}$$

از نقطهٔ B قوس دایرهٔ عظیمهٔ BH را بر AC عمود می‌کنیم. نظر به‌قضیهٔ مقدماتی شمارهٔ ۷/۸۵ داریم:

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BH}}=\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DG}}$$

و همچنین:

$$\frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{BC}}=\frac{\sin \widehat{EF}}{\sin \widehat{EC}}$$

چون دوتساوی فوق را عضو به‌عضو درهم‌ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BC}}=\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DG}}\times\frac{\sin \widehat{EF}}{\sin \widehat{EC}}$$

اما چون قوسهای AD و EC ربع دایره هستند سینوس آنها مساوی

با واحد است. و از طرف دیگر واضح است که $\sin\widehat{EF} = \sin\hat{C}$ و $\sin\widehat{DG} = \sin\hat{A}$ پس تساوی فوق چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\sin\widehat{AB}}{\sin\widehat{BC}} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

یعنی:

$$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin c}{\sin A}$$

و یا

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$$

عجیب است که در پایان سدهٔ هجدهم، ریاضی‌دانان بزرگی همچون اولر، لاگرانژو دالامبر تصور می‌کردند که ریاضیات به پایان خود رسیده است. ولی حق با آنها نبود. همچون حیوان افسانه‌ای نه سری که با قطع هرسرش دوسر به‌جای آن می‌روید، در ریاضیات هم، هروقت مسأله‌ای حل می‌شود، دو مسألهٔ تازه به‌جای آن می‌نشیند.

موریس کلین (کتاب «ریاضیات»)

درزمان ما سالی نمی‌گذرد که ریاضی‌دانی با اندیشه‌های بکرظهور نکند؛ وکلیدی برای حل مسأله‌هائی که پیش از آن غیر قابل‌حل به‌نظر می‌آمدند، به‌دست ندهد.

دیودونه (مقالهٔ «دربارهٔ روند ریاضیات»)

حل مسأله‌ها

تابع‌ها را پیداکنید (صفحه ۲۴۲ را ببینید)

اگر فرض کنیم $x = y$، به‌دست می‌آید:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$$

و اتحاد، به‌این صورت درمی‌آید:

$$g(x) - g(y) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}(\sin y - \cos y)$$

از این‌جا، نتیجه می‌شود که

$$g(x) - \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

باید مقدار ثابتی باشد. بنابراین

$$g(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

که در آن، c عبارت است ازهرعدد حقیقی دلخواه. به‌سادگی تحقیق می‌شود که مقدارهای پیداشده $f(x)$ و $g(x)$ باشرط مسأله سازگار است.

محاسبه‌کنید (صفحهٔ ۲۴۲ را ببینید)

اگر داشته‌باشیم $x + y = 1$، خواهیم داشت:

$$f(x) + f(y) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^y}{4^y + 2} =$$

$$= \frac{4 + 2 \times 4^x + 4 + 2 \times 4^y}{4 + 4 + 2(4^x + 4^y)} = 1$$

بنابراین، مجموع مفروض برابر است با ۶۸۲.

آیا درس ریاضی خود را می‌دانید؟ (صفحهٔ ۲۵۳ را ببینید).

۱. در واقع، باید ثابت کنیم:

$$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

برابری به‌ازای $n=1$ برقراراست و به‌تساوی روشن $1=1$ منجر می‌شود. برابری‌را برای $n=k$ درست‌می گیریم وثابت می کنیم که، درآن‌صورت، برای $n=k+1$ هم درست است. داریم:

$$1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3=$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2[k^2+4(k+1)]=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

۲. راهنمائی. اگر حاصل‌ضرب سمت‌چپ را P_n بگیریم، داریم:

$$P_{n+1}=P_n\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}=$$

$$=\frac{n+3}{2(n+2)}$$

۳. داریم (حاصل‌ضرب سمت‌چپ را، p_n بگیرید):

$$p_{n+1}=p_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}$$

یادداشت . اگر حاصل‌ضرب سمت چپ را به‌صورت زیر بنویسیم ، نتیجه خودبه‌خود واضح می‌شود:

$$p_n=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\dots\times\frac{n}{n+1}$$

۴. راهنمائی. اگر مجموع سمت‌چپ را S_n بگیریم، داریم:

$$S_{n+1}=S_n+(n+1)(n+1)!=[(n+1)!-1]+$$
$$+(n+1)(n+1)!=(n+1)![1+(n+1)]-1=$$
$$=(n+2)!-1$$

۵. از اتحاد واضح زیر استفاده کنید:

$$\left(1-\frac{1}{n!}\right)+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

۶. به‌ترتیب، داریم:

$$S_1=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3},$$

$$S_3=S_2+\frac{1}{12}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=1-\frac{1}{4}$$

و بنابراین، می‌توان حدس زد: $S_n=1-\frac{1}{n+1}$. اثبات درستی این‌حدس با روش عبور از k به $k+1$ مشکل نیست.

یادداشت. اگر از اتحاد زیر استفاده کنیم:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

مجموع مفروض به‌این صورت درمی‌آید.

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

۷. به‌ترتیب داریم:

$$S_1=1\times4=1\times2^2,$$
$$S_2=1\times4+2\times7=2(2+7)=2\times3^2$$
$$S_3=2\times3^2+3\times10=(6+10)=3\times4^2$$

و بنابراین، می‌توان حدس زد: $S_n=n(n+1)^2$، که درستی آن با«عبور از $n+$» ثابت می‌شود.

۸. قبلاً یادآوری می کنیم که منظور از $[x]$، نزدیک‌ترین عدددرست کوچکتر از x است. مثلاً

$$[3/7]=3,\quad [\pi]=3,\quad [-4/2]=-5$$

ضمناً، برابری زیر، همیشه درست است (n عددی است طبیعی):

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n \qquad (1)$$

در واقع، در حالت $n=2m$ داریم:

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=[m]+\left[m+\frac{1}{2}\right]=2m=n$$

ودر حالت $n=2m+1$:

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[m+\frac{1}{2}\right]+[m+1]=2m+1=n$$

اکنون به‌حل مسأله می‌پردازیم. داریم:

$$S_1=1,\ S_2=-1,\ S_3=2,\ S_4=-2,\ S_5=3,\ S_6=-3$$

و ما به‌این دنباله می‌رسیم:

$$1,-1 \qquad 2,-2, \qquad 3,-3,\ldots$$

ولی داریم:

$$1=\left[\frac{1+1}{2}\right]=\left[\frac{1+2}{2}\right],$$

$$2=\left[\frac{3+1}{2}\right]=\left[\frac{4+1}{2}\right],$$

$$3=\left[\frac{5+1}{2}\right]=\left[\frac{6+1}{2}\right]$$

بنابراین، می‌توان حدس زد:

$$S_n=(-1)^{n-1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

فرض می‌کنیم، این برابری، به‌ازای $n=k$ درست باشد:

$$S_k=(-1)^{k-1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

در این‌صورت داریم:

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^k(k+1)=(-1)^k\left(k+1-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)$$

ولی، بنابر رابطهٔ (۱):

$$\left[\frac{k+1}{2}\right]+\left[\frac{k+2}{2}\right]=k+1$$

بنابراین

$$S_{k+1}=(-1)^k\left[\frac{k+2}{2}\right]$$

۹. در سمت چپ نابرابری، کسرهایی با صورت واحد قراردارندکه مخرج‌های آن، ازواحد آغاز وبه 2^n-1 ختم می‌شود. سمت‌چپ، به‌ازای $n=1$، برابر ۱ می‌شود و روشن است که $1>\frac{1}{2}$؛ بنابراین، نابرابری به‌ازای $n=1$ درست است. فرض می‌کنیم:

$$S_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}$$

و ثابت می‌کنیم:

$$S_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k+1}{2}$$

داریم:

$$S_{k+1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)=S_k+A$$

که در آن: $A=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$.

عبارت A عبارت است از مجموع 2^k کسر که هرکدام از آن‌ها از $\frac{1}{2^{k+1}}$ بزرگتر است. یعنی

$$A>2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

به‌این ترتیب $S_k>\frac{k}{2}$ و $A>\frac{1}{2}$ و

$$S_{k+1}=S_k+A>\frac{k+1}{2}$$

۱۰. به‌ازای $k=1$ داریم: $3^3+40-67=0$، یعنی بر ۶۴ بخش‌پذیر است. حالا فرض می‌کنیم که عبارت به‌ازای $k=n$ بر ۶۴ بخش‌پذیر باشد و ثابت می‌کنیم که، در آن‌صورت، عبارت

$$3^{2n+3}+40(n+1)-67$$

هم بر ۶۴ بخش‌پذیر است.

در واقع، داریم:

$$3^{2n+3}+40(n+1)-67=9\times 3^{2n+1}+40n-27=$$
$$=9(3^{2n+1}+40n-67)-64(5n-9)$$

که به‌روشنی بر ۶۴ بخش‌پذیر است.

۱۱. نابرابری به‌ازای $n=1$ برقرار است، ولی به‌ازای $n=2,3,4$، به‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$2^2=2^2,\quad 2^3<3^2,\quad 2^4=4^2$$

ثابت می‌کنیم که، این نابرابری، به‌ازای هرمقدار n بزرگتر از ۴، برقرار است.

در حالت $n=5$ داریم: $2^5>5^2$.

ثابت می‌کنیم، به‌ازای $k\geqslant 5$، می‌توان از نابرابری $2^k>k^2$ نتیجه گرفت: $2^{k+1}>(k+1)^2$.

چون $k\geqslant 5$، پس $k>1$ و $k-2>1$. ازضرب این‌دونابرابری در یکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$k(k-2)>1 \Longrightarrow k^2-2k>1 \Longrightarrow k^2>2k+1$$

بنابراین

$$2^{k+1}=2\times 2^k>2k^2=k^2+k^2>k^2+2k+1=(k+1)^2$$

۱۲. اتحاد زیر واضح است:

$$\frac{a+b}{2}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

بنابراین، به‌ازای $n=1$ داریم:

$$a_1=\frac{a+b}{2}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^1}\right)$$

سپس داریم:

$$b_1=\frac{a_1+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+b\right)=\frac{a+3b}{4}$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{2\times 4^1}\right)=$$
$$=a+\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}(b-a)=\frac{a+3b}{4}$$

درنتیجه

$$b_1=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^1}\right)$$

و این به معنای آن است که برابرهای مورد نظر مساله، به ازای $n=1$ برقرارند.

اکنون فرض می‌کنیم:

$$a_k=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^k}\right)$$
$$(1)$$
$$b_k=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^k}\right)$$

وثابت می‌کنیم:

$$a_{k+1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^{k+1}}\right)$$
$$b_{k+1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^{k+1}}\right)$$

بنابرفرض مساله داریم:

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+b_k\right)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱) به‌دست می‌آید:

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left[a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^k}\right)+a+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^{k+1}}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[2a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^k}+1+\frac{2}{4^{k+1}}\right)\right]=$$

$$=a+\frac{1}{3}(b-a).\frac{2\times 4^{k+1}-2}{4^{k+1}}=$$

$$=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^{k+1}}\right)$$

سپس، با توجه به‌رابطهٔ $b_{k+1}=\frac{1}{2}(a_{k+1}+b_k)$ خواهیم داشت

$$b_{k+1}=\frac{1}{2}\left[a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^{k+1}}\right)+a+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^{k}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[2a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{2}{2\times 4^{k+1}}+1+\frac{1}{2+4^{k}}\right)\right]=$$

$$=a+\frac{1}{3}(b-a).\frac{2\times 2\times 4^{k+1}+2}{2\times 4^{k+1}}=$$

$$=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^{k+1}}\right)$$

و به این ترتیب، رابطه‌های مورد نظر ثابت شد.

۱۳. مساله را، به‌صورت کلی تنظیم و ثابت می‌کنیم (برای همهٔ مقدار-های طبیعی n):

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} \qquad (1)$$

به ازای $n=1$، سمت چپ برابری (۲۲) به $1-\frac{1}{2}$ و سمت راست آن به $-\frac{1}{2}$ تبدیل می‌شود و، بنابراین به‌ازای $n=1$، اتحاد (۱) برقرار است.

فرض می‌کنیم:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{2k}$$

و ثابت می‌کنیم که در آن صورت:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{2k+2}$$

درواقع داریم:

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=$$

$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

۱۴. فیبوناچی، ریاضی دادن ایتالیایی دریکی ازنوشته‌های خود، این مساله را مورد بررسی قرارداده است:

یك جفت خرگوش، هر ماه صاحب یك جفت بچهٔ نروماده می‌شوند. ضمناً بچه‌های متولد شده، دوماه بعدازتولد می‌توانند صاحب بچه بشوند. اگر درابتدای سال‌دوخرگوش‌نرو مادهٔ تازه متولدشده داشته‌باشیم، بعد ازگذشت یك سال، چندجفت خرگوش خواهیم داشت.

بنابرشرط بر شرط مساله درپایان ماه اول یك زوج و درپایان ماه دوم، ۲ زوج خرگوش خواهیم داشت. در پایان ماه سوم، تنها زوج اول صاحب بچه می‌شوند و، بنابراین، روی هم ۳ زوج خرگوش خواهدبود یك ماه بعد، اولین بچه‌ها هم خود صاحب بچه می‌شوند و، درنتیجه، در پایان ماه چهارم، ۵ زوج خرگوش وجود خواهد داشت.

اگر تعداد زوج خرگوش‌ها را، n ماه بعد ازآغاز سال، برابر $F(n)$ بگیریم، تعداد زوج خرگوش‌ها درپایان ماه $(n+1)$ ام برابر خواهد بودبا همین $F(n)$ زوج به اضافه تعداد زوج خرگوش‌های پایان ماه $(n-1)$ ام، یعنی $F(n-1)$. به زبان دیگر، رابطهٔ بازگشتی زیر برقرار است:

$$F(n+1)=F(n)+F(n-1)$$

چون بنابر شرط داریم: $f(0)=1$، $f(1)=1$ و $f(2)=2$، به ترتیب به دست خواهد آمد:

$$f(3)=3,\ f(4)=5,\ f(5)=8,\dots,\ F(12)=233$$

عددهای $F(n)$ را، عددهای فیبوناچی و دنبالهٔ عددهای

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,\dots$$

را رشتهٔ فیبوناچی گویند. همان طور که دیدیم، این دنباله، با شرطهای $a_0=1$، $a_1=1$ و $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ مشخص می‌شود.

حالا به حل مساله می‌پردازیم.

به ازای $n=1$ داریم:

$$a_{2n+2}=a_4=5=1+3+1=a_1+a_3+1$$

یعنی، رابطهٔ مفروض، به‌ازای $n=1$ درست است.

اکنون فرض می‌کنیم، این رابطهٔ، برای $n=k$ درست باشد، یعنی

$$a_{2k+2}=a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2k+1}+1 \qquad (1)$$

و ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، برای $n=k+1$ هم درست است، یعنی داریم:

$$a_{2k+4}=a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1$$

طبق تعریف، رشتهٔ فیبوناچی داریم: $a_{2k+4}=a_{2k+2}+a_{2k+3}$. از آن‌جا، با توجه به رابطهٔ (۱) به دست می‌آید:

$$a_{2k+4}=a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1$$

وحکم ثابت می‌شود.

۱۵. برابری به ازای $n=1$ درست است. فرض می‌کنیم

$$a_k^2-a_{k-1}\cdot a_{k+1}=(-1)^k$$

$$a_{k+1}^2-a_k\cdot a_{k+2}=(-1)^{k+1}$$

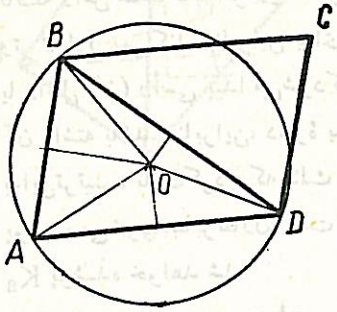
وثابت می‌کنیم:

درواقع، داریم:

$$a_{k+1}^2-a_k\cdot a_{k+2}=a_{k+1}^2-a_k(a_{k+1}+a_k)=$$
$$=a_{k+1}(a_{k+1}-a_k)-a_k^2=a_{k+1}\cdot a_{k-1}-a_k^2=$$
$$=-(a_k^2-a_{k-1}a_{k+1})=-(-1)^k=(-1)^{k+1}$$

مسأله‌های المپیاد نهم (صفحهٔ ۲۳۴ را ببینید)

۱. دایرهٔ محیطی مثلث حاده‌الزاویهٔ ABD را رسم می‌کنیم. نقطهٔ O، مرکز این‌دایره، در داخل مثلث ABD قرار می‌گیرد (شکل ۱ را ببینید).



شکل ۱

رأس چهارم C از متوازی‌الاضلاع ABCD، در بیرون دایرهٔ محیطی مثلث ABD واقع می‌شود. در واقع، اگر فرض کنیم، راس چهارم C' در بیرون دایره نباشد، باید روی محیط و یا در داخل دایره (و در طرف دیگر ضلع BD نسبت به A) قرار گیرد، که دراین صورت، مقدار زاویهٔ $BC'D$ یابرابر با نصف کمان BAD و یا بزرگتر از آن، خواهد بود. ولی کمان BAD از نصف دایره بزرگتر است، زیرا کمان DB که رو به‌روی زاویهٔ محاطی و حادهٔ BAD قرار دارد، باید از نصف دایره کمتر باشد. به‌این‌ترتیب، زاویهٔ $BC'D$ (که‌باید بازاویهٔ حادهٔ BAD برابرباشد)، زاویه‌ای منفرجه‌می‌شود. این تناقض، به معنای آن است که رأس C از متوازی‌الاضلاع ABCD در بیرون دایرهٔ محیطی مثلث ABD قرار دارد.

اکنون تأکید می‌کنیم که، اگر دایره‌های K_A، K_B، K_C و K_D، متوازی‌الاضلاع را بپوشانند، شعاع R دایرهٔ محیطی مثلث ABD، از واحد تجاوز نخواهد کرد. از برهان خلف استفاده و فرض می‌کنیم داشته باشیم: $R=OA=OB=OD>1$. دراین‌صورت، دایره‌های K_A، K_B و K_D، نمی‌توانند شامل نقطهٔ O باشند. دایرهٔ K_C هم‌نمی‌تواند نقطه O را بپوشاند، زیرا بنابرآن چه ثابت کردیم داریم: $OC>R>1$. به‌این ترتیب، شرط $R\geqslant 1$ لازم است.

ولی همین شرط، کافی است. فرض می‌کنیم $R\leqslant 1$. از نقطهٔ O عمودهایی برضلع‌های مثلث ABD فرو می‌آوریم، و روشن است که این

عمودها، ضلع‌های مثلث را نصف می‌کنند. این عمودها، همراه با شعاع‌های OA، OB، OC، مثلث ABD را به‌شش مثلث‌قائم‌الزاویه تقسیم می‌کنند که، در هر کدام از آن‌ها، شعاع دایره، وتر مثلث خواهد بود. روشن است که فاصلهٔ رأس مثلث قائم‌الزاویه تاهرنقطهٔ دلخواه محیط یا درون آن، از طول وتر تجاوز نمی‌کند. بنابراین برای هرنقطهٔ M از مثلث ABD (روی محیط یا داخل آن) رأسی پیدا می‌شود که از این نقطه، فاصله‌ای کمتر از R یامساوی آن داشته باشد. بنابراین، دایرهٔ به مرکز این رأس، نقطهٔ M را می‌پوشاند. به‌این‌ترتیب، ثابت کردیم که مثلث ABD، به‌وسیلهٔ دایره‌های K_A، K_B و K_D پوشیده می‌شود. بنابرتقارن، مثلث CDB هم به‌وسیلهٔ دایره‌های K_C ، K_D و K_B پوشیده خواهد شد.

اکنون از رابطهٔ $R=\frac{abc}{4S}$ استفاده می‌کنیم، که در آن ، a، b و c ضلع‌های‌مثلث و S مساحت آن است. با توجه به فرض مسأله و استفاده از رابطهٔ کسینوس‌ها، داریم:

$$|BD|=\sqrt{1+a^2-2a\cdot\cos\alpha}$$

درنتیجه

$$R=\frac{a\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2a\sin\alpha}\leqslant 1$$

جواب‌های این نامعادله، نسبت به‌مجهول a، چنین است:

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

ولی نابرابری سمت چپ برقرار است، زیرا به ازای $|AD|=1$ و با توجه به‌حاده بودن زاویه‌های مثلث ABD داریم:

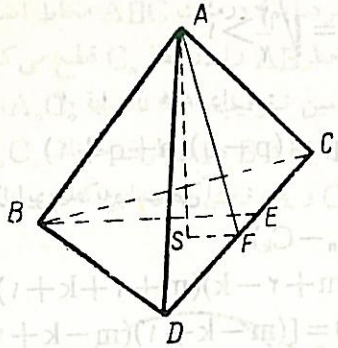
$$a=|AB|>|AD|\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که مثلث ABD، وقتی و تنها وقتی، به‌وسیلهٔ دایره‌های K_A ، K_B و K_D پوشیده می‌شود که داشته باشیم:

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

۲. AB را بزرگترین یال می‌گیریم. در این صورت، در مثلث‌های

ACD و BCD (شکل۲ را ببینید) ، هیچ کدام از ضلع‌ها، طولی بزرگتر از واحد ندارند و، به‌سادگی می‌توان ثابت کرد، ارتفاع BE ازمثلث BCD و ارتفاع AF از مثلث ACD ، از $\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$ تجاوز نمی‌کنند. $(|CD|=a<1)$.



شکل ۲

برای ارتفاع چهاروجهی، یعنی AS داریم:

$$AS\leqslant AF\leqslant\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

و برای حجم چهاروجهی

$$V=\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot|AS|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\left(1-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{1}{24}a(4-a^2)$$

حداکثر حجم چهاروجهی را، به‌ازای $a\leqslant 1$ ، پیدا می‌کنیم. برای این‌منظور، تابع $y=x(4-x^2)$ را، به‌ازای $0\leqslant x\leqslant 1$ بررسی‌می‌کنیم. داریم:

$$y=x(4-x^2)=3-(1-x)-2(1-x)^2-x(1-x)^2\leqslant 3$$

یعنی‌حداکثر y برابراست با ۳ وبه‌ازای $x=1$ بدست‌می‌آید، دراین‌صورت

$$V_{max}=\max\frac{1}{24}a(4-a^2)=\frac{1}{8}\qquad(0\leqslant a\leqslant 1)$$

اکنون، باید ثابت کنیم، چهاروجهی به حجم $\frac{1}{8}$ که باشرط‌های مسأله سازگار باشد، وجود دارد. یك چهاروجهی درنظرمی‌گیریم که درآن داشته باشیم:

$$|AC|=|CD|=|AD|=|BC|=|BD|=1$$

وضمناً صفحهٔ ACD برصفحهٔ BCD عمود باشد. برای طول AB هم فرض می‌کنیم:

$$|AB|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}>1$$

۳. قبل از همه، داریم:

$$C_p-C_q=p^2+p-(q^2+q)=(p-q)(p+q+1)$$

از این‌جا، به‌دست می‌آید:

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\dots(C_{m+n}-C_k)=$$
$$=(m+1-k)(m+1+k+1)\cdot(m+2-k)(m+2+k+1)\times$$
$$\times\dots(m+n-k)(m+n+k+1)=[(m-k+1)(m-k+2)\dots$$
$$\dots(m-k+n)]\cdot[(m+k+2)(m+k+3)\dots(m+k+n+1)]$$

ازطرف دیگر داریم:

$$C_1\cdot C_2\dots C_n=1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\dots n(n+1)=n!(n+1)!$$

به‌این‌ترتیب، باید ثابت کنیم، عدد زیر، عددی درست است:

$$\frac{(m-k+1)\dots(m-k+n)}{n!}\cdot\frac{(m+k+2)\dots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

صورت کسر اول، حاصل ضرب n عدد متوالی است و، بنابراین، بر $n!$ بخش‌پذیر است. اکنون ثابت می‌کنیم که صورت کسردوم بر $(n+1)!$ بخش‌پذیر است. می‌دانیم:

$$C_{m+k+n+1}^{n+1}=\frac{(m+k+1)(m+k+2)\dots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

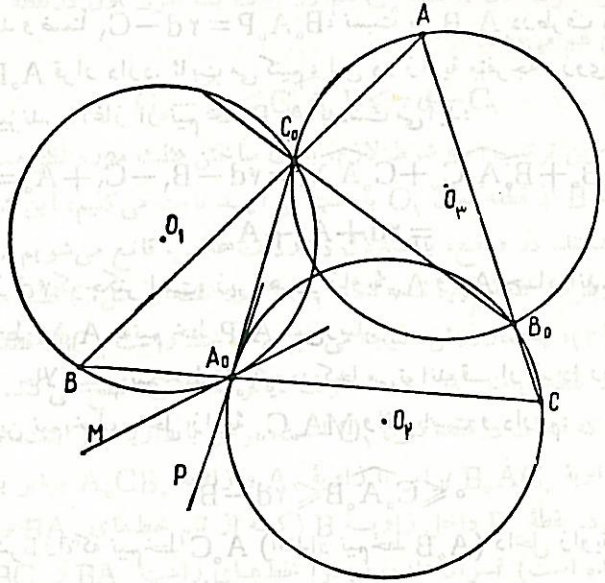
این عدد، یک عدد درست است. ولی طبق فرض $m+k+1$ عددی است اول و بزرگتر از $n+1$؛ بنابراین، $m+k+1$ نمی‌تواند برهیچ‌کدام از عامل‌های $(n+1)!$ بخش‌پذیر باشد. و این به‌معنای آن است که

$$(m+k+2)\dots(m+k+n+1)$$

بر $(n+1)!$ بخش‌پذیر است.

۴. فرض کنید مثلث ABC باشرط‌های مسأله سازگار باشد(شکل۳را ببینید). دراین صورت، رأس B، روی کمانی قرار داردکه روی پاره خط A_0C_0 و درخور زاویهٔ B_1 ساخته شده باشد. ضمناً، مثلث $A_0B_0C_0$ و این کمان، در دو طرف مختلف A_0C_0 قرار دارند. در واقع، مثلث $A_0B_0C_0$

(روی شکل، ضلع A_0B_0 را رسم نکرده‌ایم) درمثلث ABC محاط است. بنابراین، خط راست A_0C_0، که پاره خط AB را درنقطهٔ C_0 قطع می‌کند، نقطهٔ B را از نقطهٔ A جدا می‌کند. به‌همین ترتیب، خط راست A_0C_0، B را از C هم جدامی‌کند. یعنی، راس‌های B_0 و B در دوطرف مختلف A_0C_0 قرار دارند. به‌همین ترتیب، رأس‌های C و A، روی کمان‌هایی که‌روی پاره.



شکل ۳

خط‌های A_0B_0 و B_0C_0، در خارج مثلث $A_0B_0C_0$ و، به‌ترتیب در خور زاویه‌های C_1 و A_1 قرار دارند. مرکز این کمان‌ها را به‌ترتیب، O_1، O_2 و O_3 می‌نامیم. چون هرسه زاویهٔ A_1، B_1 و C_1 حاده‌اند، بنابراین، هرسه مرکز در داخل کمان‌های خود، یعنی درخارج مثلث $A_0B_0C_0$ واقع‌اند.

جای خط راست BC را بررسی می‌کنیم. ازنقطهٔ A_0، مماس A_0M را بر دایرهٔ O_1 رسم می‌کنیم و از این مماس، نیم خط A_0M را طوری انتخاب می‌کنیم که با قطعه‌کمان دایرهٔ O_1، دریك طرف خط راست A_0C_0 قرارگیرند. در این صورت، تمام قطعه‌کمان دایرهٔ O_1 در داخل زاویهٔ بین نیم خط‌های A_0M و A_0C_0 واقع می‌شود و داریم:

$$\widehat{MA_0C_0} = 2d - \hat{B}_1$$

به‌سادگی دیده می‌شود که هر نیم خط به‌راس A_0 که در داخل زاویهٔ منفرجهٔ MA_0C_0 واقع باشد، قطعه‌کمان ما را قطع می‌کند و همهٔ نیم‌خط‌های دیگر، با این قطعه‌کمان، برخوردی ندارند. به همین ترتیب، نیم‌خط A_0C باید در داخل زاویهٔ منفرجه‌ای باشد که نیم خط‌های A_0B_0 و A_0P تشکیل داده‌اند و ضمناً $B_0A_0P = 2d - \hat{C}_1$، نسبت به A_0B_0 درطرف دیگرمثلث $A_0B_0C_0$ قرار دارد. ثابت می‌کنیم، این دو زاویهٔ منفرجه، روی هم قرار نمی‌گیزند. باآغاز از نیم خط A_0P به‌دست می‌آید:

$$\widehat{PA_0B_0} + \widehat{B_0A_0C_0} + \widehat{C_0A_0M} = 4d - \hat{B}_1 - \hat{C}_1 + \hat{A}_0 =$$
$$= 2d + \hat{A}_1 + \hat{A}_0$$

که از $4d$ کوچکتر است، زیرا هردو زاویهٔ A_1 و A_0 حاده‌اند. بنابراین، نیم خط A_0M به‌نیم خط A_0P نمی‌رسد.

حالا ببینیم نیم خط A_0B، درکجا می‌تواند قرارگیرد؟ روشن است که این نیم خط، داخل زاویهٔ MA_0C_0 واقع است و داریم:

$$0 \leqslant \widehat{C_0A_0B} \leqslant 2d - \hat{B}_1 \qquad (1)$$

این شرط‌را، که نیم‌خط A_0C (امتداد نیم‌خط A_0B) داخل زاویهٔ PA_0B_0 قرار دارد، می‌توان این طور نوشت:

$$0 \leqslant \widehat{CA_0B_0} \leqslant \widehat{PA_0B_0}$$

و یا

$$2d \geqslant 2d - \widehat{CA_0B_0} \geqslant 2d - \widehat{PA_0B_0}$$

که می‌دهد

$$C_1 \leqslant \widehat{C_0A_0B} + \hat{A}_0 \leqslant 2d$$

زیرا

$$\widehat{CA_0B_0} + \widehat{B_0A_0C_0} + \widehat{C_0A_0B} = 2d$$

و یا سرانجام

$$\hat{C}_1 - \hat{A}_0 \leqslant \widehat{C_0A_0B} \leqslant 2d - \hat{A}_0 \qquad (2)$$

که درآن، تفاضل $\hat{C}_1 - \hat{A}_0$، می‌تواند مثبت یا منفی باشد. به همین ترتیب،

باآغاز ازنقطهٔ C_0، به‌دست می‌آید:

$$0 \leqslant \widehat{BC_0A_0} \leqslant 2d - \hat{B}_1,$$
$$\hat{A}_1 - \hat{C}_0 \leqslant \widehat{BC_0A_0} \leqslant 2d - \hat{C}_1,$$
$$\widehat{C_0A_0B} + \widehat{BC_0A_0} = 2d - \hat{B}_1$$

بنابراین، شرط اول درنقطهٔ C_0 هم‌ارز است با شرط اول درنقطهٔ A_0؛ و شرط دوم هم می‌دهد:

$$\hat{C}_0 - \hat{B}_1 \leqslant \widehat{C_0A_0B} \leqslant 2d - \hat{C}_1 \qquad (3)$$

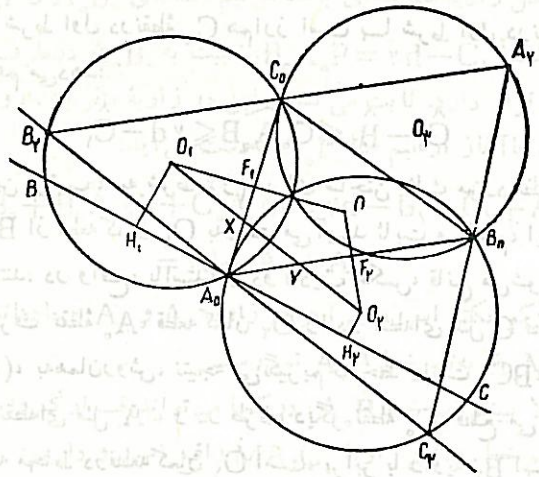
به این ترتیب، سه شرط لازم، برای ساختن مثلث مورد نظر مسأله، به رأس نقطهٔ B از قطعه‌کمان O_1 به‌دست می‌آید ثابت می‌کنیم، این شرط‌ها، کافی‌هم هستند. در واقع، بااستدلال دو ردیف عکس، قانع می‌شویم که ادامهٔ A_0B، ازطرف نقطهٔ A_0، قطعه‌کمان O_2 را در نقطه‌ای مثل C قطع می‌کند. ازشرط (۳)، به‌همان‌روش، نتیجه می‌گیریم که خط راست BC_0، قطعه‌کمان O_3 را در نقطه‌ای مثل A، و در طرف دیگر نقطهٔ C_0، قطع می‌کند. زاویهٔ A_0BC_0 که محاط درقطعه‌کمان O_1 است، برابر با زاویهٔ B_1 است. به‌همین ترتیب، زاویهٔ B_0AC_0 برابر با زاویهٔ A_1 و زاویهٔ A_0CB_0 برابر بازاویهٔ C_1 می‌شود. نقطهٔ B_0 داخل زاویهٔ B (که از نیم خط‌های BA_0 و BC_0 تشکیل شده است) قرار دارد، زیرا خط‌های راست BA_0 و BC_0 مثلث $A_0B_0C_0$ را قطع نمی‌کنند و، بنابرشرط‌های (۱) و (۲) و (۳)، تنها از رأس‌های آن می‌گذرند. یعنی درچهارضلعی $ABCB_0$، زاویه‌های B_0AB، ABC و BCB_0، زاویه‌های داخلی‌اند ومجموعی برابر $2d$ دارند، از آن جا، زاویهٔ AB_0C برابر $2d$ می‌شود و سه نقطهٔ A، B_0 و C روی یك خط راست واقع‌اند.

شرط‌های (۱) و (۲) و (۳) را می‌توان به‌صورت یك شرط نوشت:

$$\max(0, \hat{C}_1 - \hat{A}_0, \hat{C}_0 - \hat{B}_1) \leqslant \widehat{C_0A_0B} \leqslant 2d - \max(\hat{B}_1, \hat{A}_0, \hat{C}_1)$$

از این‌جا دیده می‌شود که، این شرط، همیشه برقرار است. مثلاً، برای $\widehat{C_0A_0B} = d$، مثلث‌های محیطی، به‌روشنی وجود دارند.

اکنون باید، بین این مثلث‌ها، آن را پیدا کنیم که مساحت حداکثر داشته باشد. روشن است که، برای این منظور، باید مثلثی را پیدا کرد که طول ضلع‌های آن بیشترین مقدار باشد، زیرا همهٔ این مثلث‌ها، متشابه‌اند و زاویه‌هایی برابر با زاویه‌های مثلث $A_1B_1C_1$ دارند.



شکل ۴

یکی از این مثلث‌های محیطی را در نظر می‌گیریم. تصویر مرکزهای O_1 و O_2 را روی وترهای A_0B و A_0C، به ترتیب، H_1 و H_2 می‌نامیم. (شکل۴ را ببینید). پاره خط H_1H_2، تصویر پاره خط O_1O_2 است؛ طول آن از طول O_1O_2 تجاوز نمی‌کند و تنها وقتی می‌تواند برابر با آن باشد که BC و O_1O_2 موازی باشند.

به‌سادگی می‌توان محاسبه کرد:

$$O_2\widehat{A_0}O_1 = O_2\widehat{A_0}B_0 + B_0\widehat{A_0}C_0 + C_0\widehat{A_0}O_1 =$$
$$= 2d - \hat{C}_1 - \hat{B}_1 + \hat{A}_0 = \hat{A}_1 + \hat{A}_0 < 2d$$

بنابراین، پاره خط O_2O_1، نیم خط‌های A_0C_0 و A_0B_0 را قطع و مثلثی مثل A_0XY را جدا می‌کند.

از نقطهٔ A_0، خط راست B_2C_2 را موازی O_2O_1 رسم می‌کنیم. این

خط راست، در بیرون مثلث $A_0B_0C_0$ واقع است (درغیر این صورت، پاره خط XY را قطع می‌کند)، و نقطه‌های O_2 و O_1، نسبت به آن، در همان طرف مثلث $A_0B_0C_0$ قرار دارند. فرض کنید، نیم خط A_0C_2، درهمان طرف خط راست A_0C_0 باشد که نقطهٔ O_1 قرار دارد. عمودهای از نقطه‌های O_1 و O_2 بر وترهای A_0C_0 و A_0B_0، از نقطه‌های F_1 و F_2، وسط این وترها می‌گذرند و در نقطهٔ O — مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A_0B_0C_0$، به‌هم می‌رسند. وچون، این مثلث، زاویه‌هایی حاده دارد، نقطهٔ O در داخل مثلث $A_0B_0C_0$ واقع است.

روشن است $O_2\widehat{O}A_0 = O_2\widehat{O}B_0 = C_0$. به همین ترتیب: $O_1\widehat{O}A_0 = \hat{B}_0$ و

$$O_1\widehat{O}O_2 = O_1\widehat{O}A_0 + A_0\widehat{O}O_2 = \hat{B}_0 + \hat{C}_0 < 2d$$

بنابراین، خط راست O_2O_1، نقطه‌های O و A_0 را از هم جدا می‌کند. از آن‌جا

$$d - \hat{B}_1 = C_0\widehat{A_0}O_1 < C_0\widehat{X}O_1 < d$$

به‌همین ترتیب

$$d - \hat{C}_1 = B_0\widehat{A_0}O_2 < B_0\widehat{Y}O_2 < d$$

از نقطهٔ A_0، خط راستی رسم می‌کنیم که با A_0C_0، زاویه‌ای برابر با زاویهٔ C_0XO_1 بسازد، همهٔ محدودیت از بالا تأمین می‌شود. محدودیت (۳) هم برقرار است، زیرا $\hat{C}_0 - \hat{B}_1 < d - \hat{B}_1$. بالاخره، با توجه به زاویه‌های B_0YO_2 و C_0XO_1، شرط (۲) هم برقرار است. بنابراین، مثلث متشابهی محیط کرد که ضلع آن، B_2C_2، موازی O_2O_1 باشد. و همین مثلث است که مساحت حداکثر را دارد.

۵. روشن است که مجموع توان‌های زوج $a_1, \ldots, a_8$، تنها وقتی می‌تواند برابر صفر شود که همهٔ این جمله‌ها برابر صفر باشند، ولی بنابر فرض، این عددها، باهم، برابر صفر نیستند. بنابراین، تنها بعضی از مجموع‌ها، در حالت توان‌های فرد، می‌توانند برابر صفر باشند. ثابت می‌کنیم که،

اگر بین مجموع توان‌های فرد، بی‌نهایت جملهٔ برابر صفر وجود داشته‌باشد، همهٔ مجموع‌هـای ردیف فرد ، برابر صفر خواهند بود . برای این‌منظور ، به‌کمك استقرا، ثابت می‌کنیم‌که اگربین مجموع‌های توان‌های متوالی $2m$ عدد حقیقی، بی‌نهایت صفر وجود داشته باشد، این عددها را می‌توان به m زوج تقسیم‌کرد، به‌نحوی‌که هرزوج شامل دوعدد قرینهٔ هم‌باشد.

حداکثر قدرمطلق مقدار a_k را b می‌گیریم، ضمناً ، فرض می‌کنیم ، p عدد مثبت و q عدد منفی بااین حداکثر قدرمطلق وجود داشته‌باشد بدون این‌که به‌کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض‌کرد:

$$a_1=a_2=\cdots=a_p=b;$$

$$a_{p+1}=a_{p+2}=\cdots=a_{p+q}=-b$$

و بقیهٔ عددها (اگر چنین عددهایی وجود داشته‌باشند) کوچکتر ، و حداکثر قدرمطلق‌آن‌ها برابر d باشد: $0\leqslant d<b$. در این صورت

$$c_{2k+1}=(p-q)b^{2k+1}+(a_{p+q+1})^{2k+1}+\cdots+(a_{2m})^{2k+1}$$

اگر $p\neq q$ ، یعنی $|p-q|\geqslant 1$ باشد ، به‌ازای مقدارهـای بزرگ k ، دقیق‌تر، به‌ازای $2k+1>\frac{\log 4m}{\log b-\log d}$ داریم:

$$|c_{2k+1}|>|p-q|b^{2k+1}-2md^{2k+1}>\frac{1}{2}b^{2k+1}$$

یعنی با شروع از $2k+1=\left[\frac{\log 4m}{\log b-\log d}\right]+1$ ، همهٔ توان‌هـای فرد مخالف صفر می‌شوند ، کـه مخالف بـا فرض مسأله است[1]. به‌این ترتیب $p=q$، ومجموع توان‌هـای فرد نخستین $p+q$ جمله، همیشه برابر صفر است.درنتیجه، بین‌مجموع‌های توان‌های فرد بقیهٔ‌عددهای $a_{2m},\ldots,a_{p+q+1}$ (اگر این عددها وجود داشته‌باشند)، بی‌نهایت صفر باید وجود داشته‌باشد. درآن‌صورت، برای این‌عددها هم، بایدزوج عددهای قرینه وجودداشته‌باشد که،سرانجام، ثابت‌می‌شود همهٔ عددهای a_k باید دوبه‌دوقرینهٔ یکدیگرباشند.

۱، درواقع، باید ببینیم‌که، به‌ازای چه‌مقدارهایی از $2k+1$، داریم:

←

از این‌جا نتیجه می‌شود که همهٔ توان‌های فرد، دوبه‌دو ، با هم حذف می‌شوند.

۶. $(n-k)$ امین روز را در نظر می‌گیریم؛ وفرض می‌کنیم‌که، در این روز، x_{n-k} مدال برای تقسیم ، بـاقی‌مانده باشد. برای روز بعد، یعنی $(n-k+1)$امین روز، تعداد مدال‌های باقی‌مانده، چنین است:

$$x_{n-k+1}=x_{n-k}-n+k-\frac{1}{7}(x_{n-k}-n+k)=\frac{6}{7}(x_{n-k}-n+k)$$

از آن‌جا

$$x_{n-k}=\frac{7}{6}x_{n-k+1}-k+n \qquad (1)$$

اگر در رابطهٔ(۱) قراردهیم $k=0$، به‌دست می‌آید: $x_n=n$ زیرا داریم:

→

$$c_{2k+1}>|p-q|b^{2k+1}-(2m-p-q)d^{2k+1}>\frac{1}{2}b^{2k+1} \quad (1)$$

(همهٔ جمله‌های از a_{p+q+1} به‌بعد را برابر بزرگترین مقدار خود از لحاظ قدرمطلق ، یعنی d گـرفته‌ایم) . حداقل $|p-q|$ برابر واحد است و $2m-p-q$ از $2m$ کوچکتر است، بنابراین،کافی است داشته‌باشیم:

$$b^{2k+1}-2md^{2k+1}>\frac{1}{2}b^{2k+1}$$

که بعد از ساده‌کردن، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$b^{2k+1}>4md^{2k+1} \Longrightarrow \left(\frac{b}{d}\right)^{2k+1}>4m$$

(b و d، مقدارهایی مثبت هستند). در نتیجه

$$(2k+1)\log\left(\frac{b}{d}\right)>\log 4m$$

ویا سرانجام

$$2k+1>\frac{\log 4m}{\log b-\log d} \qquad (2)$$

یعنی، اگر شرط (۲) برقرار باشد، حتماً شرط (۱) برقرار است. م.

$x_{n+1}=0$. با استفاده از همین رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید:

$$x_{n-1}=\frac{7}{6}n-1+n=\frac{7}{6}n+(n-1),$$

$$x_{n-2}=\left(\frac{7}{6}\right)^2 n+\frac{7}{6}(n-1)+(n-2),$$

. . . . . .

فرض می‌کنیم:

$$x_{n-l}=\left(\frac{7}{6}\right)^l n+\left(\frac{7}{6}\right)^{l-1}(n-1)+\cdots+$$

$$+\frac{7}{6}(n-l+1)+(n-l) \qquad (2)$$

وبا روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم، رابطهٔ (۲) درست است. یعنی با فرض درستی رابطهٔ

$$x_{n-l+1}=\left(\frac{7}{6}\right)^{l-1} n+\cdots+\frac{7}{6}(n-l+2)+(n-l+1) \qquad (3)$$

ثابت‌می‌کنیم که رابطهٔ (۲) هم درست‌است. اگردوطرف رابطهٔ (۳) رادر $\frac{7}{6}$ ضرب و، سپس، به‌هردوطرف $(n-l)$ را اضافه‌کنیم، با توجه به‌رابطهٔ (۱)، به‌رابطهٔ (۲) خواهیم رسید.

بنا به‌شرط مسأله، m مدال برای تقسیم موجود است، یعنی $x_1=m$، بنابراین

$$m=\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}.n+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}(n-1)+\cdots+2\times\frac{7}{6}+1=$$

$$=n\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}+\cdots+1\right]-\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}+\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{7}{6}\right)^{n-3}+\cdots+(n-1)\right]=6n\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n}-1\right]-$$

$$\left.-42\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}+42+6(n-1)\right]=6(n-6)\left(\frac{7}{6}\right)^{n}+36$$

ولی، چون ۷ و ۶ نسبت به‌هم اول‌اند، بنابراین باید $\frac{n-6}{6^{n-1}}$ عددی درست باشد. از این‌جا نتیجه می‌شود که n بر ۶ بخش‌پذیر است. ثابت می‌کنیم که، برای هر $n\geqslant 6$ داریم: $n-6<6^{n-1}$. به‌ترتیب داریم:

$$n-6<n=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}<2^{n-1}<6^{n-1}$$

بنابراین، کسر $\frac{n-6}{6^{n-1}}$، برای هر $n\geqslant 6$، از واحد کوچکتر می‌شود. از این جا می‌توان نتیجه گرفت که $n-6$ تنها می‌تواند برابر صفر باشد؛ و از آن‌جا به‌دست می‌آید: $n=6$ و $m=36$.

به‌سادگی می‌توان تحقیق‌کرد که $n=6$ و $m=36$ با شرط‌های مسأله سازگارند.

چند مسألهٔ گوناگون (صفحهٔ **۲۶۲** را ببینید)

۱. اثبات را با برهان خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم $x<0$، در این صورت، بایدداشته‌باشیم: $yz<0$ و $y+z>0$. درنتیجه، خواهیم‌داشت: $x(y+z)+yz<0$، که متناقض با شرط است. به‌ازای $x=0$ هم، به‌تناقض برخورد می‌کنیم. به‌این ترتیب، x عددی مثبت است. از آن‌جاکه عبارت‌ها، نسبت به x و y و z متقارن‌اند، همین نتیجه‌گیری برای y و z درست است.

۲. (a, b, c) را یکی از جواب‌های دستگاه می‌گیریم وابتدا فرض می‌کنیم که این سه عدد مختلف باشند.

اگر فرض‌کنیم $f(t)=2t^3-7t^2+8t-2$، به‌دست می‌آید:

$$f(a)=b,\quad f(b)=c,\quad f(c)=a$$

روشن‌است‌که، اگر u و v عددهایی درست‌باشند $f(u)-f(v)$ بر $u-v$ بخش‌پذیراست. باتوجه به‌این‌مطلب، معلوم می‌شود که $f(a)-f(b)$، یعنی $b-c$ بر $a-b$ بخش‌پذیر است؛ همچنین $c-a$ بر $b-e$ و $a-b$ بر $c-a$ بخش‌پذیرند. اگر k, l, m را به‌ترتیب، خارج‌قسمت‌ها بگیریم، باید داشته‌باشیم:

$$a-b=k(c-a)=kl(b-c)=klm(a-b) \quad (k, l, m\in Z)$$

واز آن‌جا: $klm=1$.

اگر k یا l یا m برابر -1 باشند، به‌دست می‌آید: $a=b=c$ و اگر $k=l=m=1$ باشد، به‌دست می‌آید:

$$2a=b+c, \quad 2c=a+b, \quad 2b=a+c$$

که بازهم به‌نتیجهٔ $a=b=c$ منجر می‌شود. بنابراین، a و b و c نمی‌توانند سه‌عدد مختلف باشند.

بنابراین، کافی است این‌معادله را حل کنیم:

$$2x^3-7x^2+8x-2=x$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که یکی از ریشه‌های این معادله برابر واحد است. با در دست داشتن یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم، می‌توان دو ریشهٔ دیگر آن‌راهم به دست‌آورد: این‌دوریشه 2 و $\frac{1}{2}$ است. بنابراین، جواب‌های صحیح دستگاه عبارتند از $(1,1,1)$ و $(2,2,2)$.

۳. اثبات رابطه‌های زیر به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$1)\quad 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\sqrt{tg\frac{A}{2}\sin B\, tg\frac{B}{2}\sin A}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(tg\frac{A}{2}\sin B+tg\frac{B}{2}\sin A\right)$$

(واسطهٔ هندسی دوعدد مثبت، از واسطهٔ عددی آن‌ها تجاوز نمی‌کند).

$$2)\quad tg\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)=2\cot g\frac{B+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=$$

$$=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\cos B+\cos C$$

با استفاده از رابطه‌های (۱ و (۲ و رابطه‌های مشابه آن‌ها، می‌توان نوشت:

$$(\sin A+\sin B+\sin C)^2=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+$$

$$+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leqslant$$

$$\leqslant\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\left(tg\frac{B}{2}\sin A+tg\frac{A}{2}\sin B+\right.$$

$$\left.+tg\frac{C}{2}\sin B+tg\frac{B}{7}\sin C+tg\frac{A}{2}\sin C+tg\frac{C}{2}\sin A\right)=$$

$$=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{2}tg\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)+$$

$$+\frac{1}{2}tg\frac{B}{2}(\sin A+\sin C)+\frac{1}{2}tg\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)=$$

$$=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+\cos A+\cos B+\cos C=$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$$

۴. ۱) اگر r، شعاع دایرهٔ محاطی باشد داریم:

$$|IA|=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \qquad b=r\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right),$$

$$C=r\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}\right)$$

بنابراین

$$\frac{|IA|^2}{bc}=\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A+B}{2}}=tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$$

اگر دو رابطهٔ دیگر شبیه رابطهٔ بالا راهم، درنظر بگیریم، اثبات رابطهٔ مساله، به‌اثبات رابطهٔ مثلثاتی زیر منجر می‌شود:

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1$$

$$(A+B+C=\pi)$$

اثبات این اتحادهم، به‌سادگی انجام می‌گیرد:

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=$$

$$=tg\frac{A}{2}(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2})+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=$$

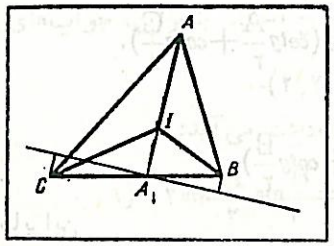
$$=\frac{1}{tg\frac{B+C}{2}}(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2})+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=$$

$$=1-tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=1$$

۲) ابتدا، درستی برابری برداری زیر را ثابت می‌کنیم:

$$a\overline{IA}+d\overline{IB}+c\overline{IC}=0$$

نقطهٔ برخورد IA با ضلع BC را A_1 می‌گیریم (شکل۵را ببینید). IB و IC را روی خط راست عمود بر AA_1، تصویر می‌کنیم. روشن است که‌این‌تصویرها، در دوجهت‌مخالف‌هم قرار دارند ونسبت طول آن‌ها، برابر است‌بانسبت $|A_1B|:|A_1C|=c:b$.



شکل ۵

بنابراین، طول تصویرهای دوبردار $b\overline{IB}$ و $c\overline{IC}$ روی خط راست عمودبر IA، باهم برابر و درخلاف جهت یکدیگرند. ازاین‌جا، نتیجه می‌گیریم که تصویر بردار

$$a\overline{IA}+b\overline{IB}+c\overline{IC}$$

برهریك از سه‌خط راستی‌که، به‌ترتیب، بر IA، IB و IC عمودند، برابر صفر می‌شود، یعنی

$$a\overline{IA}+b\overline{IB}+c\overline{IC}=0$$

از آن‌جا

$$(a\overline{IA}+b\overline{IB}+c\overline{IC})^2=a^2|IA|^2+b^2|IB|^2+c^2|IC|^2+$$
$$+2ab\overline{IA}\cdot\overline{IB}+2bc\,\overline{IB}\cdot\overline{IC}+2ca\overline{IC}\cdot\overline{IA}=0$$

ولی $(\overline{IA}-\overline{IB})^2=c^2$ و $\overline{IA}-\overline{IB}=\overline{BA}$. از آن‌جا

$$2\overline{IA}\cdot\overline{IB}=|IA|^2+|IB|^2-c^2$$

اگر دورابطهٔ دیگر شبیه این‌رابطه را درنظر بگیریم و در رابطهٔ بالا قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$a^2|IA|^2+b^2|IB|^2+c^2|IC|^2+ab(|IA|^2+|IB|^2-c^2)+$$
$$+bc(|IB|^2+|IC|^2-a^2)+ca(|IC|^2+|IA|^2-b^2)=0$$

ویا

$$(a+b+c)(a|IA|^2+b|IB|^2+c|IC|^2)=abc(a+b+c)$$

و ازآن‌جا

$$\frac{|IA|^2}{bc}+\frac{|IB|^2}{ca}+\frac{|IC|^2}{ab}=1$$

۵. بردار با مختصات $(\sqrt{1+x_i}$ و $\sqrt{1-x_i})$ را a_i می‌نامیم. دستگاه مفروض، به‌این معناست که:

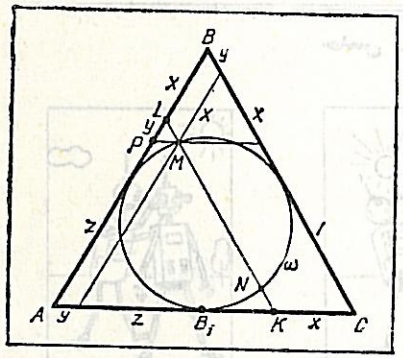
$$\sum_{i=1}^{100}\bar{a}_i=\left(100\sqrt{1+\frac{1}{100}}\ \text{و}\ 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}\right),$$

$$\left|\sum_{i=1}^{100}\bar{a}_i\right|=100\sqrt{2}=\sum_{i=1}^{100}|\bar{a}_i|$$

بنابراین، همهٔ بردارهای a_i هم‌جهت و، چون طولی برابر دارند، برهم منطبق‌اند. به‌این ترتیب، دستگاه، تنها یك جواب دارد:

$$x_1=x_2=\cdots=x_{100}=\frac{1}{100}$$

۶. فرض می‌کنیم: $BL=x$، $LP=y$، $PA=z$ (شکل۶را ببینید). سه مثلث متساوی‌الاضلاع به ترتیب با ضلع‌های به‌طول x، y و z و سه متوازی‌الاضلاع به ترتیب با ضلع‌های x و y، y و z، z و x تشکیل می‌شود. با توجه به‌تقارن مثلث و دایرهٔ ω نسبت به‌نیمساز زاویهٔ A داریم: $NK=LM=y$ بنابراین:



شکل ۶

Reconciliation With Mathematics
Editor: Parviz Shahryari
Address: Tehran, Firdaus
Vol. IX, No 3, *Serial No. 41, 1986*

$$NK=y,\ MK=z,$$

$$B_1K=B_1C-KC=\frac{x+y+z}{2}-x=\frac{-x+y+z}{2}$$

ولی $B_1K^2=MK\cdot NK$، یعنی $\left(\frac{-x+y+z}{2}\right)^2=yz$. ازآن‌جا

$$x^2+y^2+z^2=2xy+2yz+2zx$$

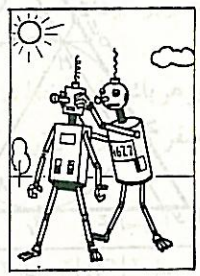
که معادل با حکمی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

کشف کنید (صفحهٔ **۲۶۸** را ببینید)

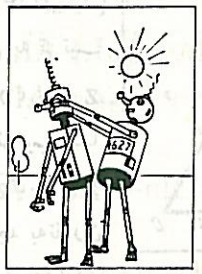
۹۹ ×
۹۹
———
۸۹۱
۸۹۱
———
۹۸۰۱ +
۱۹۹
———
۱۰۰۰۰

رمز کار در پنج‌رقمی بودن نتیجه است؛ در دو سطر اول، هر دوعدد دیگری به‌جز ۹۹، در نظر بگیریم نمی‌توانیم به نتیجهٔ پنج‌رقمی در پایان‌کار برسیم.

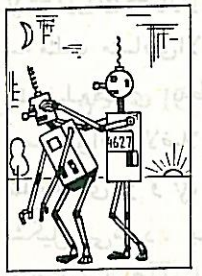
حدس بزن کیستم؟



اولی؟ نه...



هزاروچهارصدوهشتاد وچهارمی؟ نه...



دوهزار وششصدوچهل ودومی؟نه...