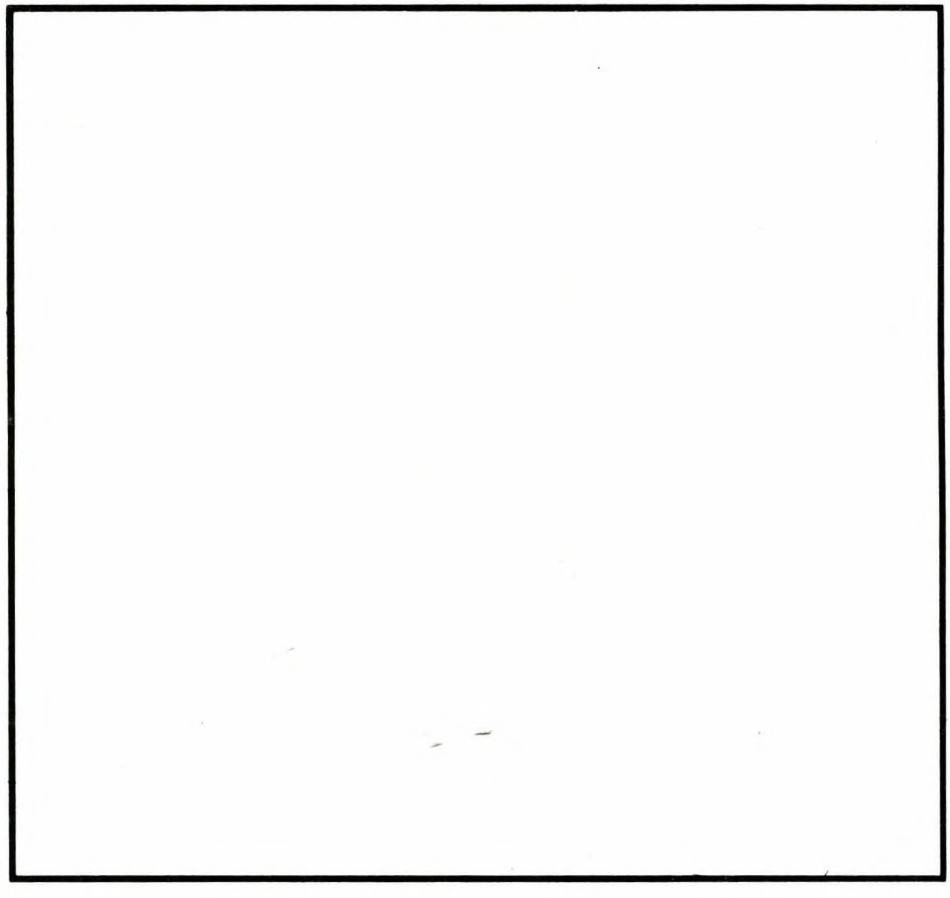
مجلهٔ ریاضی



دانشجویان دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

شمارهٔ هفتم، پاییز ۱۳۷۷

بسم الله الرحمن الرحیم

مجلهٔ ریاضی

دانشجویان دانشکدهٔ علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف
شمارهٔ ۷، پاییز ۱۳۷۷

مدیر مسئول: دکتر بهمن مهری

هیأت تحریریه:
هادی جرئتی (ویراستار)
خلیل جلیلی
بردیا حسام
محمدرضا رزوان
کیوان ملاحی
امید نقشینه‌ارجمند

حروفچینی: TEX-پارسی
(دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف)
لیتوگرافی، چاپ، صحافی: چاپخانهٔ دانشگاه صنعتی شریف

فهرست

نظریهٔ پایداری معادلات دیفرانسیل عادی ۱

از قضیهٔ مقدار میانی تا قضیهٔ شارکوفسکی ۱۳

مسأله‌ای در هندسهٔ ترکیبیاتی ۱۹

جهتهای نو در معادلات دیفرانسیل مقدماتی ۲۳

خمهای جبری و معادلات سیاله ۲۹

گفتگویی با ریچارد گای ۴۱

مسأله ۴۵

مسأله‌های کوتاه ۴۷

یادِ عزیزان

نازک آرای تن ساق گلی
که به جانش کشتم
و به‌جان دادمش آب
ای دریغا، به‌برم می‌شکند[1]!

در شهریور ۷۶ بچه‌ها به‌سرپرستی مهرآبادی برای شرکت در دومین کنفرانس آموزش ریاضی رفته بودند کرمانشاه، عصری را باآنها گذراندم که رفتیم پاوه و اورامانات. در مینی‌بوس چه جمع گرمی بود با رضا (صادقی) چه معماها که گفتیم و در قهوه‌خانه پاوه که چای آوردند یک جوری بغض گلویم را گرفته بود از شدتِ مِهرم به بچه‌ها، و در بازگشت تلألو چراغها در روستای شمشیر از پنجره‌های خانه‌های طبقه طبقه که در سراشیبی تپه‌ساری بنا شده‌اند، دلم را به عروج بیشتر مهر برد، مهر بچه‌ها، اما و هزار اما که نمی‌دانستم در شهریور ۷۷ سوگ جاودانهٔ عزیزانم، دلم را داغدارترین دل عالم کرده است. یاد عزیزانم علیرضا، مجتبی، آرمان، فرید، علی، و رضا که همیشه با من است گرامی باد.

ما هفت تن،
بریده ز پستی،
فریب و آز،
ببریده از دروغ.

ره می‌سپریم
تا بارگاه مهر
تا مهر پر فروغ
زی روشنی شدیم
تا روشنی شدیم[2].

ی. ت.
شهریور ۱۳۷۷

۱ـ نیما، از منظومهٔ مهتاب.

۲ـ آرمان بهرامیان، بخشی از یک منظومهٔ بلند.

نظریه پایداری معادلات دیفرانسیل عادی

روح‌الله جهانی‌پور •

۱. مقدمه

بحث خود را با بررسی کیفی یک معادلهٔ دیفرانسیل ساده که به‌راحتی می‌توان جواب آن را به‌دست آورد آغاز می‌کنیم. می‌خواهیم مسأله با شرط اولیهٔ

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = ax(t)$$
$$x(0) = c \qquad c > 0$$

را حل کنیم؛ یعنی می‌خواهیم تابع مجهول$x(t)$ را که در این معادلهٔ دیفرانسیل و شرط اولیه داده شده صدق می‌کند بیابیم. با جداسازی متغیرها به‌راحتی می‌توان دید که جواب این معادله عبارت است از

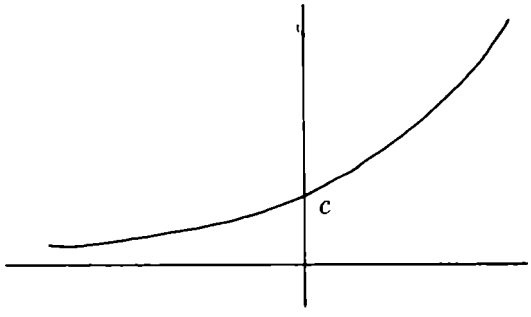
$$x(t) = ce^{at} .$$

سه حالت جداگانه برای ثابت a در نظر می‌گیریم و در هر حالت رفتار جواب را بررسی می‌کنیم :

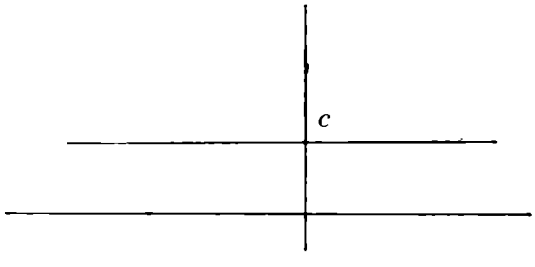
الف) $a > 0$: در این حالت نمودار جواب به صورتی است که در شکل ۱ نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنید که وقتی $t \to +\infty$، آنگاه $x(t) \to +\infty$.

ب) $a = 0$: در این حالت، نمودار جواب یک منحنی ثابت است یعنی $x(t) \equiv c$.
(شکل ۲).

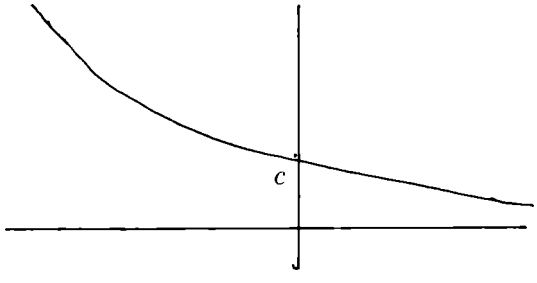
ج) $a < 0$: این بار نمودار جواب را در شکل ۳ نشان داده‌ایم. ملاحظه می‌شود که وقتی $t \to +\infty$ ، آنگاه $x(t) \to 0$.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

مجلهٔ ریاضی شمارهٔ ۷
(پاییز ۱۳۷۷) صص ۱۲ـ۱

در مورد این معادله، صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ را فضای حالت معادله می‌نامند. اگر محور x را روی یک خط راست منتقل کنیم، رخسارهٔ فاز این معادله را به‌دست می‌آوریم. اگر $a > 0$ ، مقادیر جواب به $\pm\infty$ میل می‌کنند و اگر $a < 0$ ، مقادیر جواب به صفر می‌گرایند.

در صورتی که $a = 0$ ، جواب در نقطهٔ c باقی می‌ماند و با گذشت زمان هیچ تغییری صورت نمی‌گیرد. اگر $a > 0$ گوییم جواب این معادله ناپایدار است و اگر $a \leq 0$ آن را پایدار گوییم. در حالت $a < 0$ جواب را پایدار مجانبی می‌نامیم.

حال قدری جلوتر می‌رویم و به جای یک معادله، به بررسی یک دستگاه معادلات با شرط اولیه می‌پردازیم. در این مورد می‌خواهیم دستگاه

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \qquad x_1(0) = c_1$$
$$\dot{x}_2(t) = cx_1(t) + dx_2(t) \qquad x_2(0) = c_2$$

را حل کنیم. اگر فرض کنیم

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

و A را ماتریس ضرایب این دستگاه بگیریم، یعنی ماتریس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، دستگاه را می‌توان به صورت فشردهٔ

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

نوشت که مشابه معادلهٔ قبلی است ولی به جای عدد a در اینجا ماتریس A قرار گرفته است. مقایسه با معادله پیشین چنین القا می‌کند که جواب این معادله هم باید شبیه معادلهٔ قبلی به‌صورت

$$x(t) = ce^{At}$$

باشد که در آن c بردار $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ است، ولی باید e^{At} را به‌گونه‌ای مناسب تعریف کرد. بهترین راه تعریف نمای یک ماتریس استفاده از بسط نمایی است. یعنی تعریف می‌کنیم

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

بدین ترتیب معنی این جواب روشن می‌شود. امّا اگر بخواهیم همان بررسی کیفی را که برای معادلهٔ قبل انجام دادیم، اینجا هم انجام دهیم باید معنی عباراتی همچون $A > 0$ ، $A < 0$ و $A = 0$ را معلوم کنیم. $A = 0$ را می‌توان صفر بودن ماتریس A تعریف کرد که در این حالت داریم

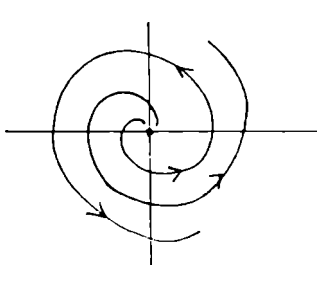
$$x(t) \equiv c$$

یعنی جواب، یک بردار ثابت است. امّا $A > 0$ یعنی چه؟ نکته این است که A ماتریس یک عملگر خطی روی $\mathbb{R}^2$ است، پس مثبت و منفی بودن A را به‌معنای مثبت یا منفی بودن عملگر خطی نظیر آن می‌گیریم: A را مثبت گوییم هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^2$

$$\langle Ax, x \rangle > 0$$

که در آن $\langle , \rangle$ ضرب داخلی اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ است. و این تعریف معادل است با این که قسمت حقیقی همهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس A مثبت باشد. $A < 0$ هم به همین ترتیب و تنها با یک تغییر علامت تعریف می‌شود.

در مورد این دستگاه فضای حالت $\mathbb{R}^3$ است زیرا جواب این دستگاه در واقع خمی در $\mathbb{R}^3$ است. فضای فاز یا رخسارهٔ فاز در $\mathbb{R}^2$ قرار می‌گیرد. مشابه معادلهٔ قبلی می‌توان اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ A مثبت باشند، دستگاه را ناپایدار و اگر همهٔ آنها نامثبت باشند، پایدار و اگر همگی منفی باشند، دستگاه را پایدار مجانبی نامید. در هر کدام از این حالتها جوابهای دستگاه شکل خاصی در فضای فاز به خود می‌گیرند، که شکلهای استاندارد شدهٔ نوعی آنها را در شکلهای ۴، ۵ و ۶ می‌بینید.



شکل ۴: ناپایدار

چون قصد ما در این قسمت بیان ایده‌های اساسی و تعمیم آنها به حالت کلی است زیاد روی انواع دستگاههای دو معادله

و شکلهای مختلف آنها تأکید نمی‌کنیم. هیچ نکتهٔ خاصی در استفاده از دستگاه دو معادلهٔ دیفرانسیل وجود ندارد، این مطلب را برای دستگاه n معادلهٔ دیفرانسیل خطی نیز می‌توان بیان کرد. یعنی

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

که در آن A یک ماتریس $n \times n$ و $x(t)$ بردار n-تایی $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ است. بدین ترتیب به کلیتی بیشتر دست پیدا می‌کنیم. در واقع در این حالت Aماتریس یک عملگر خطی روی $\mathbb{R}^n$ است.

ولی دستگاههای خطی که با آنها مواجه می‌شویم همگی دارای ماتریس ضرایب ثابت نیستند بلکه کاملاً ممکن است که عناصر ماتریس ضرایب دستگاه، توابعی از t باشند، یعنی

$$A = [a_{ij}(t)] \qquad 1 \le i, j \le n.$$

اینجا بررسی شرایط پایداری، پایداری مجانبی یا ناپایداری به سادگی حالتهای قبلی نیست و محتاج نظریه‌ای عمیقتر است که به قلمرو آنالیز تابعی یعنی فضاهای برداری با بعد نامتناهی مربوط می‌شود.

نکته این است که ما از بسیاری از خواص $\mathbb{R}^n$ استفاده نکرده‌ایم. ما تنها به‌فضایی خطی نیاز داشتیم و نیز به وسیله‌ای برای سنجش دوری و نزدیکی نقاط. پس مثلاً این بحثها در مورد فضاهای باناخ هم معتبرند.

یک نکتهٔ اساسی دیگر هم وجود دارد که به جوابهای معادلاتی که تا اینجا بررسی کرده‌ایم مربوط می‌شود و آن ویژگی‌های عملگر

$$x(t) = e^{At} \qquad t \ge 0$$

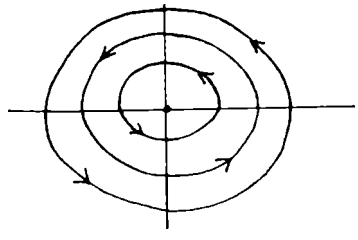
است. این ویژگیها عبارتند از:

الف) $x(0) = I$؛ که در آن I عملگر همانی است؛

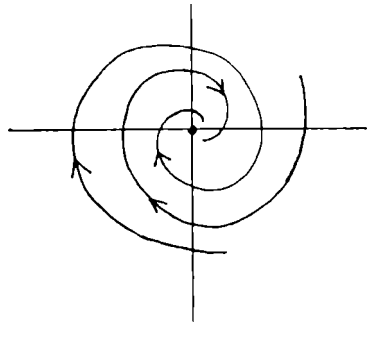
ب) $x(t+s) = e^{A(t+s)} = e^{At}.e^{As} = x(t).x(s)$؛

ج) به ازای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ تابع $x(t, x_0) = e^{At}x_0$ روی $[0, +\infty)$ پیوسته است.

اینها همهٔ آن چیزهایی هستند که ما را به سوی نیمگروههای روی فضاهای باناخ می‌کشانند.



شکل ۵: پایدار



شکل ۶: پایدار مجانبی

۲. نیمگروههای عملگرهای خطی کراندار

تعریف. *هر فضای برداری نرمدار کامل را یک فضای باناخ می‌نامند. کامل به این مفهوم که هر دنبالهٔ کشی همگرا باشد.*

تعریف. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. خانوادهٔ یک پارامتری $T(t)$ را $(\circ \le t < \infty)$ یک نیمگروه از عملگرهای خطی کراندار روی X می‌نامیم هرگاه*

الف) $T(\circ) = I$، که I عملگر همانی است؛

ب) برای هر $t, s \ge \circ$: $T(s+t) = T(t)T(s)$.

تعریف. *نیمگروه $T(t)$ را یکنواخت‌پیوسته گوییم هرگاه $\lim_{t\downarrow \circ} \|T(t) - I\| = \circ$ و آن را قویاً پیوسته می‌نامیم اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $\lim_{t\downarrow \circ} T(t)x = x$.*

تعریف. *عملگر خطی A را که به صورت*

$$D(A) = \{x \in X : \text{حد } \frac{T(t)x - x}{t} \text{ وقتی } t \downarrow \circ \text{ وجود دارد}\}$$

$$Ax = \lim_{t\downarrow \circ} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+T(t)x}{dt}\Big|_{t=\circ} \qquad x \in D(A)$$

تعریف می‌شود، مولد بی‌نهایت کوچک نیمگروه $T(t)$ می‌نامند. $D(A)$ دامنهٔ A نامیده می‌شود.

مثال. *فرض کنید X فضای باناخ توابع کراندار و به طور یکنواخت پیوسته روی $(-\infty, +\infty)$ باشد با نُرم سوپریمم. برای هر $f \in X$ تعریف می‌کنیم:*

$$(T(t)f)(s) = f(t+s).$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\{T(t); t \ge \circ\}$ یک نیمگروه قویاً پیوسته است که در شرط $\|T(t)\| \le ۱$ صدق می‌کند. مولد بینهایت کوچک $T(t)$ با

$$D(A) = \{f : f \in X \quad f' \text{ موجود است و}\}$$

و ضابطهٔ $(Af)(s) = f'(s)$ تعریف می‌شود.

در مورد نیمگروههای عملگرهای خطی قضیه‌های جالبی وجود دارند. در بحث پایداری جوابهای معادلات دیفرانسیل، هرجا قضیه‌ای در مورد نیمگروهها لازم باشد آن را بیان خواهیم کرد.

۳. نظریه پایداری

پایداری مفهومی آشناست، ولی بسته به کاربرد خاصی که مورد نظر است می‌تواند تعابیر گوناگونی داشته باشد. معمولاً منظور از پایداری این است که اختلالات کوچک اثر زیادی بر رفتار و عملکرد دستگاه نگذارند. ولی باید این تعریف را دقیق کرد و مشخص نمود که معنای اصطلاحات «کوچک»، «اختلال» و «اثر» چیست؟

تعریف. *فرض کنید S یک دستگاه و P مجموعهٔ اختلالات باشد و d تابعی از P در S. فرض کنید $\overline{S}$ زیر مجموعه‌ای از S متشکل از عناصری با یک ویژگیِ مشخص باشد. گوییم این ویژگی تحت زیرمجموعهٔ $\overline{P}$ از P پایدار است اگر d، $\bar{P}$ را به توی $\overline{S}$ بنگارد.*

تمام مفاهیم و تعریفهای مختلف پایداری را می‌توان در قالب این تعریف کلی در آورد. بهتر است پیش از بیان جزئیات بیشتر، مثالی را مطرح کنیم :

مثال. *معادله دیفرانسیل اسکالر*

$$\ddot{y} + ۲\alpha\dot{y} + y = \circ \quad ; \quad y(\circ) = y_\circ \quad , \quad \dot{y}(\circ) = y_۱$$

را در نظر می‌گیریم. با فرض $x_۲ = \dot{y}$ و $x_۱ = y$ داریم:

$$\dot{x}_۱ = x_۲$$
$$\dot{x}_۲ = -x_۱ - ۲\alpha x_۲$$

پس دستگاه $\dot{x} = Ax \quad ; \quad x(\circ) = \overline{x}$ را به دست می‌آوریم که در آن

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} y_\circ \\ y_۱ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ -۱ & -۲\alpha \end{pmatrix}$$

اگر $\overline{x} = \circ$، جواب عبارت است از $x(t) \equiv \circ$. این نقطه را نقطهٔ تعادل دستگاه می‌نامیم. اکنون در حالت اولیهٔ دستگاه یعنی $\overline{x} = \circ$ اختلال ایجاد می‌کنیم. فرض کنیم فضای دستگاه $l^۲_۵$ و فضای اختلالات $l^۲_p$ باشد و قرار می‌دهیم

$$\overline{P} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^۲ : \|\overline{x}\|_p \le \delta\}$$
$$\overline{S} = \{x(t) \in \mathbb{R}^۲ : \|x(t)\|_۵ \le \epsilon \quad ; t \ge \circ\}$$

می‌دانیم که جواب عبارت است از: $x(t) = e^{At}\overline{x}$ *.*
پس نگاشت d *به صورت*

$$d(\overline{x}) = e^{At}\overline{x}$$

تعریف می‌شود. حال داریم

$$\|x(t)\|_s \leq \|e^{At}\|\,\|\overline{x}\|_p$$

اگر A *عملگری خطی روی* $\mathbb{R}^n$ *باشد، و اگر برای هر مقدار ویژهٔ* λ_i *از* A *داشته باشیم* $\mathrm{Re}(\lambda_i) < \omega$ *، عددی مانند* M *موجود است که برای* $0 \leq t < \infty$ *:*

$$\|e^{At}\| \leq Me^{\omega t}$$

دستگاه پایدار خواهد بود اگر $\omega \leq 0$ *و* $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$ *.*
در دستگاه ما $\omega \leq 0$ *اگر و فقط اگر* $\alpha \geq 0$*، زیرا مقدار ویژهٔ* A *برابر است با* $-\alpha$

به راحتی می‌توان مفهوم پایداری را که در مثال فوق مطرح کردیم به نیمگروهها هم توسعه داد. در بسیاری از دستگاهها می‌خواهیم اثر اختلال در حالت اولیهٔ دستگاه با مرور زمان از بین برود، یعنی وقتی $t \to \infty$ داشته باشیم $\|x(t)\| \to 0$
از آنجا که

$$\|x(t)\| \leq Me^{\omega t}\|\overline{x}\|$$

اگر $\omega < 0$ این حالت اتفاق می‌افتد. به این نیمگروهها نام خاصی می‌دهیم.
تعریف. *یک نیمگروه قویاً پیوستهٔ* $T(t)$ *روی فضای باناخ* X *را یک نیمگروه پایدار مجانبی گوییم هرگاه ثابتهای* M *و* ω $(\omega < 0)$ *موجود باشند چنان که*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$$

در مثال بعد می‌خواهیم به یک مفهوم پایداری کاملاً متفاوت بنگریم. یعنی اختلالات در عملگرهای حاکم بر دینامیک دستگاه را به حساب آوریم. فرض کنیم A مولد بی‌نهایت کوچک نیمگروه قویاً پیوستهٔ پایدار مجانبی $T(t)$باشد، پس:
برای $t \geq 0$ و $\omega < 0$: $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$

می‌خواهیم بدانیم چه شرایطی را باید روی عملگر خطی B گذاشت تا $A + B$ مولد بی‌نهایت کوچک یک نیمگروه پایدار مجانبی شود. یعنی می‌خواهیم بدانیم آیا ویژگی «مولد یک نیمگروه پایدار مجانبی بودن»، پایدار است؟
مثال. *فرض کنید* $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *و معادلهٔ دیفرانسیل*

$$\dot{x} = Ax + Bx = (A + B)x$$

را در نظر بگیرید. داریم:

$$x(t) = \exp[(A + B)t]\overline{x}$$

با استفاده از فرمول تغییر پارامترها برای معادلات دیفرانسیل ناهمگن، جواب را به شکل دیگری هم می‌توان نشان داد:

$$x(t) = \exp(At)\overline{x} + \int_0^t \exp(A(t-s))Bx(s)ds$$

بنابراین با جایگذاری به جای $x(t)$ ***و*** $x(s)$ ***داریم***

$$\exp[(A + B)t] = \exp(At) + \int_0^t \exp(A(t-s))B\exp[(A + B)s]ds.$$

این معادله دارای جوابی به صورت سری است :

$$\exp[(A + B)t] = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)$$

که در آن

$$U_n(t) = \int_0^t \exp(A(t-s))BU_{n-1}(s)ds$$
$$U_0(t) = \exp(At)$$

بنابراین

$$\|\exp[(A + B)t]\| \leq \|\exp(At)\| + \int_0^t \|\exp(A(t-s))\|.\|B\|.\|\exp[(A + B)s]\|ds$$

از آنجا که فرض کرده بودیم A ***مولد یک نیمگروه پایدار مجانبی است،*** M ***و*** $\omega < 0$ ***موجودند که***
برای $t \geq 0$: $\|\exp(At)\| \leq Me^{\omega t}$

پس

$$\|\exp[(A+B)t]\| \le Me^{\omega t} + \int_0^t M\exp[\omega(t-s)]\|B\|.\|\exp[(A+B)s]\|ds$$

در نتیجه

$$\|e^{-\omega t}\exp[(A+B)t]\| \le M + M\int_0^t \|\exp(-\omega s).\exp[(A+B)s]\|ds$$

و بنابر نابرابری گرانوال:

$$\|e^{-\omega t}\exp[(A+B)t]\| \le M\exp(M\|B\|t)$$

و در پایان

$$\|\exp[(A+B)t]\| \le M\exp[(\omega + M\|B\|t)].$$

از این رو ویژگی «مولد نیمگروه پایدار مجانبی بودن» پایدار است اگر مجموعهٔ اختلالات شرط $\|B\| < -\frac{\omega}{M}$ را برآورده کند.

۴. پایداری به مفهوم لیاپانف

در این بند توجه خود را به معادلهٔ دیفرانسیل عادی خودگردان

$$\dot{x} = f(x) \;\; ; \;\; x(0) = \bar{x} \;\; , \;\; x \in \mathbb{R}^n \qquad (1)$$

معطوف می‌کنیم. خودگردان به این معنی که f مستقل از t است، یعنی فقط تابعی از x است. اگر فرض کنیم $f(0) = 0$ آنگاه نقطهٔ $x = 0$ یک نقطهٔ تعادل خواهد بود. فرض می‌کنیم f شرایط خوبی دارد که وجود و یگانگی جواب را برای معادلهٔ فوق تضمین می‌کند؛ مثلاً f لیپ شیتس است. جواب این معادله را به صورت $x(t,\bar{x})$ نشان می‌دهیم تا وابستگی آن را به شرط اولیهٔ $\bar{x}$ نیز نشان داده باشیم.

تعریف. *مبدأ را یک نقطهٔ پایدار لیاپانف برای دستگاه(۱) می‌گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ مفروض $\delta > 0$ ی موجود باشد چنان‌که از $\|\bar{x}\| < \delta$ نتیجه شود برای هر $t \ge 0$ ، $\|x(t,\bar{x})\| < \epsilon$.*

در این تعریف هر نرمی را برای $\mathbb{R}^n$ می‌توان منظور کرد و در ضمن نرمها می‌توانند متفاوت باشند.

تعریف. *مبدأ را پایدار مجانبی برای(۱) می‌نامیم اگر علاوه بر شرط فوق، وقتی $t \to \infty$، داشته باشیم $\|x(t,\bar{x})\| \to 0$.*

چون هنگام استفاده از تعریف پایداری یا پایداری مجانبی لیاپانف برای تعیین پایداری یک دستگاه محتاج داشتن جواب دستگاه به ازای $\bar{x}$ها یا شرایط اولیهٔ مختلف هستیم، عملاً این کار مشکل است، ولی قضیه‌ای منسوب به لیاپانف موجود است که در آن می‌توان تنها به کمک یک تابعک با ویژگیهایی مشخص به نام تابعک لیاپانف در این باره تصمیم گرفت. هر چند ساختن تابع لیاپانف برای دستگاههای گوناگون هم کار ساده‌ای نیست.

تعریف. *تابع $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابعک لیاپانف گوییم اگر*

الف) $V(0) = 0$ و برای $x \neq 0$ داشته باشیم: $V(x) > 0$؛

ب) $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$ یعنی V روی $\mathbb{R}^n$ مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته داشته باشد؛

ج) مشتق V نسبت به t در امتداد جواب $x(t,\bar{x})$ مثبت نباشد، یعنی

$$\dot{V} = \langle \mathrm{grad}V, f\rangle \le 0$$

که $\mathrm{grad}V$ برداری است در $\mathbb{R}^n$ به صورت

$$\mathrm{grad}V = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}V, \frac{\partial}{\partial x_2}V, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}V\right).$$

دراستفاده از تابعک لیاپانف برای بررسی پایداری و پایداری مجانبی دو قضیهٔ زیر نقش اساسی دارند که آنها را ثابت می‌کنیم.

قضیه. (پایداری) *اگر در یک همسایگی مبدأ یک تابعک لیاپانف موجود باشد، مبدا پایدار است.*

قضیه. (پایداری مجانبی) *اگر در یک همسایگی مبدأ یک تابعک لیاپانف موجود باشد که $\dot{V} < 0$ جز در مبدأ، آنگاه مبدأ پایدار مجانبی است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که شرایط موجود در این قضیه‌ها وجود یک تابع حقیقی اکیداً صعودی β را نتیجه می‌دهد که $\beta(0) = 0$ و $\beta(\|x\|) \le V(x)$

فرض کنید کرهٔ $\|x\| = a$ در آن همسایگی از مبدأ که تابع

پس

$$\|\exp[(A+B)t]\| \le Me^{\omega t} + \int_0^t M\exp[\omega(t-s)]\|B\|.\|\exp[(A+B)s]\|ds$$

در نتیجه

$$\|e^{-\omega t}\exp[(A+B)t]\| \le M + M\int_0^t \|\exp(-\omega s).\exp[(A+B)s]\|ds$$

و بنابر نابرابری گرانوال:

$$\|e^{-\omega t}\exp[(A+B)t]\| \le M\exp(M\|B\|t)$$

و در پایان

$$\|\exp[(A+B)t]\| \le M\exp[(\omega + M\|B\|t)].$$

از این رو ویژگی «مولد نیمگروه پایدار مجانبی بودن» پایدار است اگر مجموعهٔ اختلالات شرط $\|B\| < -\frac{\omega}{M}$ را برآورده کند.

۴. پایداری به مفهوم لیاپانف

در این بند توجه خود را به معادلهٔ دیفرانسیل عادی خودگردان

$$\dot{x} = f(x) \;;\; x(0) = \bar{x} \;,\; x \in \mathbb{R}^n \qquad (1)$$

معطوف می‌کنیم. خودگردان به این معنی که f مستقل از t است، یعنی فقط تابعی از x است. اگر فرض کنیم $f(0) = 0$ آنگاه نقطهٔ $x = 0$ یک نقطهٔ تعادل خواهد بود. فرض می‌کنیم f شرایط خوبی دارد که وجود و یگانگی جواب را برای معادلهٔ فوق تضمین می‌کند؛ مثلاً f لیپ شیتس است. جواب این معادله را به صورت $x(t,\bar{x})$ نشان می‌دهیم تا وابستگی آن را به شرط اولیهٔ $\bar{x}$ نیز نشان داده باشیم.

تعریف. *مبدأ را یک نقطهٔ پایدار لیاپانف برای دستگاه(۱) می‌گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ مفروض $\delta > 0$ ی موجود باشد چنان‌که از $\|\bar{x}\| < \delta$ نتیجه شود برای هر $t \ge 0$ ، $\|x(t,\bar{x})\| < \epsilon$.*

در این تعریف هر نرمی را برای $\mathbb{R}^n$ می‌توان منظور کرد و در ضمن نرمها می‌توانند متفاوت باشند.

تعریف. *مبدأ را پایدار مجانبی برای(۱) می‌نامیم اگر علاوه بر شرط فوق، وقتی $t \to \infty$، داشته باشیم $\|x(t,\bar{x})\| \to 0$.*

چون هنگام استفاده از تعریف پایداری یا پایداری مجانبی لیاپانف برای تعیین پایداری یک دستگاه محتاج داشتن جواب دستگاه به ازای $\bar{x}$ها یا شرایط اولیهٔ مختلف هستیم، عملاً این کار مشکل است، ولی قضیه‌ای منسوب به لیاپانف موجود است که در آن می‌توان تنها به کمک یک تابعک با ویژگیهایی مشخص به نام تابعک لیاپانف در این باره تصمیم گرفت. هر چند ساختن تابع لیاپانف برای دستگاههای گوناگون هم کار ساده‌ای نیست.

تعریف. *تابع $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابعک لیاپانف گوییم اگر*

الف) $V(0) = 0$ و برای $x \neq 0$ داشته باشیم: $V(x) > 0$؛

ب) $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$ یعنی V روی $\mathbb{R}^n$ مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته داشته باشد؛

ج) مشتق V نسبت به t در امتداد جواب $x(t,\bar{x})$ مثبت نباشد، یعنی

$$\dot{V} = \langle \mathrm{grad}V, f\rangle \le 0$$

که $\mathrm{grad}V$ برداری است در $\mathbb{R}^n$ به صورت

$$\mathrm{grad}V = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}V, \frac{\partial}{\partial x_2}V, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}V\right).$$

دراستفاده از تابعک لیاپانف برای بررسی پایداری و پایداری مجانبی دو قضیهٔ زیر نقش اساسی دارند که آنها را ثابت می‌کنیم.

قضیه. (پایداری) *اگر در یک همسایگی مبدأ یک تابعک لیاپانف موجود باشد، مبدا پایدار است.*

قضیه. (پایداری مجانبی) *اگر در یک همسایگی مبدأ یک تابعک لیاپانف موجود باشد که $\dot{V} < 0$ جز در مبدأ، آنگاه مبدأ پایدار مجانبی است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که شرایط موجود در این قضیه‌ها وجود یک تابع حقیقی اکیداً صعودی β را نتیجه می‌دهد که $\beta(0) = 0$ و $\beta(\|x\|) \le V(x)$

فرض کنید کرهٔ $\|x\| = a$ در آن همسایگی از مبدأ که تابع

لیاپانف در آن وجود دارد قرار گیرد. تابع ψ را به این صورت تعریف می‌کنیم

$$\psi(r) = \min_{\|x\|=r} V(x) \qquad r \le a$$

به ازای هر r این مینیمم موجود است، زیرا تابعک لیاپانف پیوسته است و هر تابع پیوسته مینیمم خود را روی هر مجموعهٔ فشرده اختیار می‌کند و می‌دانیم کرهٔ $\|x\| = r$ مجموعه‌ای فشرده است. تابع $\psi(r)$ روی بازهٔ $[0, a]$ پیوسته است، زیرا

$$\psi(r + \Delta r) - \psi(r) \le V(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - V(\bar{x}) \quad (۲)$$

که $\bar{x} + \Delta\bar{x}$ برداری است که طول آن $r + \Delta r$ است و $\bar{x}$ هم برداری است که $\|\bar{x}\| = r$ و $V(x)$ مینیمم خود را در $\bar{x}$ کسب می‌کند، یعنی $V(\bar{x}) = \psi(r)$. چون $V(\cdot)$ تابعی پیوسته است، اگر $\Delta r \to 0$ ، آنگاه $\Delta\bar{x} \to 0$ و طرف راست (۲) به صفر میل می‌کند، در نتیجه ψ پیوسته است. نیز

$$\psi(0) = V(0) = 0$$

حال تابع β را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\beta(r) = \min \frac{r}{y}\psi(y); \qquad y \in [r, a]$$

نشان می‌دهیم β خواص مورد نظر را دارد، اولاً

$$\beta(0) = \min_{r \le y \le a} \frac{\circ}{y}\psi(y) = 0$$

فرض کنید $r_1 < r_2$. آنگاه

$$A = \{\frac{r_2}{y}\psi(y) : r_2 \le y \le a\} \subset \{\frac{r_2}{y}\psi(y) : r_1 \le y \le a$$

بنابراین

$$\beta(r_1) < \min_{r_1 \le y \le a} \frac{r_2}{y}\psi(y) < \min_{r_2 \le y \le a} \frac{r_2}{y}\psi(y) = \beta(r_2)$$

حال قرار می‌دهیم

$$\alpha(r) = \max_{\|x\| \le r} V(x) \qquad r \le a$$

مجدداً واضح است که $\alpha(r)$ موجود است و $\alpha(0) = 0$ و α تابعی پیوسته روی $[0, a]$ است. چون $\alpha(\cdot)$ در صفر پیوسته است، برای هر $\epsilon' > 0$ ، $\delta' > 0$ی موجود است که

$$0 < r < \delta' \Longrightarrow \qquad \alpha(r) < \epsilon'$$

چون به ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\beta(\epsilon) > 0$، می‌توان به جای ϵ' ، قرار داد $0 < \min\{\beta(\epsilon), \beta(a)\}$. در این صورت به ازای هر $0 < \delta < \delta'$ ، داریم

$$\alpha(\delta) < \min\{\beta(\epsilon), \beta(a)\}$$

یکی از این δها را که در این شرط صدق می‌کند برمی‌داریم. چون، طبق فرض، V در امتداد جوابها صعودی نیست داریم

$$V(x(t, \bar{x})) \le V(x(0, \bar{x})) = V(\bar{x}); \qquad t \ge 0$$

از طرفی اگر $\|\bar{x}\| \le \delta$ آنگاه از آنجا که β اکیداً صعودی است

$$\beta(\epsilon) \ge \min\{\beta(\epsilon), \beta(a)\} \ge \alpha(\delta) \ge$$
$$V(\bar{x}) \ge V(x(t, \bar{x})) \ge \beta(\|x(t, \bar{x})\|)$$

پس $\|x(t, \bar{x})\| \le \epsilon$.

این اثبات قضیهٔ اوّل را تمام می‌کند. حال اگر قرار دهیم $V(t) = V(x(t, \bar{x}))$، آنگاه V تابعی مثبت است که مشتقش برای هر $t \ge 0$ ، منفی است. از این رو وقتی $t \to \infty$ دارای حد است. اگر این حد ناصفر باشد، آنگاه $\dot{V}$ در خارج مبدأ به سمت صفر میل می‌کند در حالی‌که اگر $x \ne 0$ ، داریم $\dot{V}(x) < 0$. از نابرابری $\beta(\|x\|) \le V(x)$، نتیجه می‌شود که وقتی $t \to \infty$، آنگاه $\|x(t, \bar{x})\|$ به صفر میل می‌کند.

مثال. *معادلهٔ اسکالر* $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + y = 0$ *را در نظر می‌گیریم، مبدأ پایدار است زیرا می‌توان تابع* $V = \frac{1}{2}(\dot{y}^2 + y^2)$ *را به عنوان تابع لیاپانف در همسایگی مبدأ به کار برد. امّا پایداری مجانبی را نمی‌توان از آن نتیجه گرفت زیرا*

$$\dot{V} = \dot{y}(\ddot{y} + y) \qquad \text{و} \qquad \dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{y} = 0$$

امّا تابع

$$\dot{V} = \dot{y}^2 + 2\alpha y\dot{y} + 2\alpha^2 y^2 + y^2$$

می‌تواند برای بررسی پایداری مجانبی به‌کار رود زیرا

$$\dot{V} = -2\alpha(y^2 + \dot{y}^2)$$

و $\dot{V} = 0$ *اگر و تنها اگر* $y = \dot{y} = 0$. *علاوه‌بر آن*

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + y^2 + \frac{1}{2}(\dot{y} + 2\alpha y)^2 \ge 0$$

مثال. *معادلهٔ واندرپل را در نظر می‌گیریم:*

$$\ddot{y} + \epsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0 \qquad \epsilon > 0$$

تابع لیاپانفی برای این معادله چنین است:

$$V = \frac{1}{2}(y^2 + \dot{y}^2)$$

زیرا $\dot{V} = -\epsilon(1 - y^2)\dot{y}^2$ *و در همسایگی* $y^2 + \dot{y}^2 < 1$ *از مبدأ داریم* $\dot{V} \leq 0$ *. پس مبدأ پایدار است.*

۵ . پایداری دستگاههای خطی

در این قسمت می‌خواهیم به کمک روش تابعک لیاپانف، پایداری دستگاههای معادلات خطی را بررسی کنیم. فرض کنید دستگاه خطی

$$\dot{x} = Ax \quad ; \quad x(0) = \bar{x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

را که $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ در اختیار داریم. تابعک

$$V := \langle x, Px \rangle$$

را در نظر می‌گیریم که P یک ماتریس متقارن و $\langle , \rangle$هم، ضرب داخلی معمولی $\mathbb{R}^n$ است. داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \langle Ax, Px \rangle + \langle x, PAx \rangle \\ &= \langle x, (A^tP + PA)x \rangle \end{aligned}$$

فرض کنید

$$\dot{V} = -\langle x, Cx \rangle$$

که C یک ماتریس متقارن است. آنگاه

$$\langle x, (A^tP + PA)x \rangle = -\langle x, Cx \rangle$$

یا $\forall x \in \mathbb{R}^n : \langle x, (A^tP + PA + C)x \rangle = 0$

اگر بتوان یک P را چنان یافت که C و P هر دو مثبت معین باشند، داریم

$$V \geq m\|x\|^2$$
$$\dot{V} \leq -M\|x\|^2$$

که mو Mاعداد ثابت هستند و بدین ترتیب می‌توان به قضیهٔ پایداری مجانبی متوسل شد و پایداری مجانبی را ثابت کرد. امّا در قضیهٔ بعد می‌خواهیم مطلب کلیتری را ثابت کنیم:

قضیه. *اگر* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *یک نیمگروه پایدار مجانبی را تولید کند آنگاه برای هر* $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *مثبت معین مفروض یک* P *مثبت معین موجود است که*

$$PA + A^tP + C = 0$$

اثبات. *قرار دهید:*

$$P = \int_0^\infty e^{A^t t} C e^{At} dt$$

A *مولد یک نیمگروه پایدار مجانبی است، پس ثابتهای* M *و* $\omega > 0$ *موجودند که*

$$\|e^{At}\| = \|e^{A^t t}\| \leq Me^{-\omega t}$$

از این رو

$$\|P\| \leq \|C\| \int_0^\infty M^2 e^{-2\omega t} dt \leq \|C\| \frac{M^2}{2\omega}.$$

پس P *خوشتعریف است، یعنی انتگرال داده شده همگراست. حال ملاحظه می‌کنیم که:*

$$\begin{aligned} A^tP + PA &= \int_0^\infty (A^t e^{A^t t} C e^{At} + e^{A^t t} C e^{At} A) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{A^t t} C e^{At}) dt = -C \end{aligned}$$

این قضیه روش سرراستی برای بررسی پایداری مبدأ در دستگاههای خطی ارائه می‌دهد.

مثال. دستگاه

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$C = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اگر $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ ، با پیاده کردن شرط برای P و C داریم:
$p_1 = 1, p_2 = \frac{2}{3}, p_3 = \frac{7}{6}$ یعنی:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

چون $p_1, p_2 > 0$ و نیز $\det P > 0$ ، P مثبت معین است.
پس مبداء پایدار مجانبی است.

مثال. فرض کنید $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ مولد یک نیمگروه پایدار مجانبی باشد به طوری که

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\omega t} \quad \omega > 0, t \geq 0$$

آنگاه، بنابر قضیهٔ آغازین این بخش، به ازای هر $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ مثبت معین می‌توانیم $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ اکیداً مثبت بیابیم که $PA + A^tP + C = 0$
اکنون نیمگروه تولید شده توسط $A + B$ را که $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ در نظر می‌گیریم. واضح است که جواب معادله با شرط اولیهٔ

$$\dot{x} = (A + B)x; x(0) = \bar{x}$$

عبارت است از: $x(t) = e^{(A+B)t}\bar{x}$. حال اگر قرار دهیم $V = \langle x, Px \rangle$ داریم:

$$\dot{V} = \langle \dot{x}, Px \rangle + \langle x, P\dot{x} \rangle = \langle (A + B)x, Px \rangle + \langle x, P(A + B)x \rangle = \langle x, (PA + A^tP)x \rangle + \langle x, (PB + B^tP)x \rangle.$$

پس:

$$\dot{V} = -\langle x, Cx \rangle + \langle x, (PB + B^tP)x \rangle$$

اگر بتوانیم C را چنان بیابیم که

$$PB + B^tP - C < 0$$

آنگاه $A + B$ نیز مولد یک نیمگروه پایدار مجانبی می‌شود. این انتخاب C به ساختار عملگر B بستگی دارد . مثلاً اگر فقط بدانیم که $\|B\| \leq K$ و $C = I$ ، آنگاه

$$P = \int_0^\infty e^{A^t t} e^{At} dt$$

و لذا با توجه به $\|e^{At}\| \leq Me^{-\omega t}$، به دست می‌آوریم

$$\|P\| \leq \frac{M^2}{2\omega}.$$

در نتیجه بنابر نابرابری کشی

$$\dot{V} = -\langle x, x \rangle + \langle x, (PB + B^tP)x \rangle$$
$$\leq -\|x\|^2 + \|PB + B^tP\| \|x\|^2$$
$$\leq -\|x\|^2 (1 - \frac{KM^2}{\omega})$$

پس برای $\dot{V} < 0$ باید $1 - \frac{KM^2}{\omega} > 0$ یا $\omega > KM^2$.

۶. دستگاههای غیر خطی

حال می‌پردازیم به بررسی پایداری دستگاههای غیرخطی. به‌این ترتیب که سعی می‌کنیم آنها را به دستگاههای خطی مربوط کنیم.
دستگاه غیرخطی

$$\dot{x} = Ax + h(x), \; x(0) = \bar{x}; \; x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

را که در آن $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ مولد یک نیمگروه پایدار مجانبی است، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم برای هر $\epsilon > 0$ مفروض، $\delta > 0$ موجود باشد که اگر $\|x\| < \delta$ آنگاه $\|h(x)\| < \epsilon \|x\|$.

قضیه. مبدأ یک نقطهٔ تعادل پایدار مجانبی برای (۳) است.

اثبات. A مولد یک نیمگروه پایدار مجانبی است. پس ماتریس مثبت معین P موجود است که

$$PA + A^tP + I = 0$$

اکنون قرار می‌دهیم: $V = \langle x, Px \rangle$.
داریم:

$$\dot{V} = \langle x, (PA + A^tP)x \rangle + \langle x, Ph \rangle + \langle h, Px \rangle$$

پس:

$$\dot{V} \leq -\|x\|^2 + 2\|x\| \|P\| \|h\| \quad (4)$$

برای هر $\rho > 0$ به اندازه کافی کوچک($\rho < 1$) $\delta > 0$ ی موجود است که اگر $\|x\| < \delta$ آنگاه $\|h\| \leq \frac{(1-\rho)}{2\|P\|}\|x\|$.
پس با جایگذاری در (۴) داریم:

$$\|x\| < \delta \Longrightarrow \dot{V}(x) \leq -\rho\|x\|^2.$$

پس، بنابر قضیهٔ پایداری مجانبی، مبدأ پایدار مجانبی است.
تعریف پایداری که تا اینجا داده شد، یک تعریف موضعی است که در آن می‌توان δ را هر اندازهٔ دلخواه کوچک نمود. در بسیاری از دستگاهها بویژه دستگاههای غیر خطی به دست آوردن همسایگی‌ای که در آن مبدأ پایدار مجانبی باشد اهمیت دارد، یعنی همسایگی‌ای که جواب $x(t,\bar{x})$ در آن باقی بماند و به سمت صفر میل کند. قضیه‌ای که این مطلب را برای ما فراهم می‌آورد، قضیه لاسال است. امّا قبل از بیان قضیه باید مفهوم باقی‌ماندن جواب در یک مجموعه را روشن کنیم.

تعریف. گوییم نقطهٔ P در مجموعهٔ حدی مثبت معادلهٔ خودگردان

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = \bar{x} \qquad (5)$$

قرار دارد اگر دنبالهٔ $\{t_n\}$ موجود باشد که به بی‌نهایت می‌گراید و

$$\lim_{n\to\infty} \|x(t_n,\bar{x}) - P\| = 0$$

تعریف. مجموعهٔ Ω را نسبت به دستگاه فوق ناوردا گوییم اگر برای هر$\bar{x} \in \Omega$ و هر $t \geq 0$ داشته باشیم:

$$x(t,\bar{x}) \in \Omega$$

یعنی جوابی که از نقطهٔ $\bar{x}$ در Ω آغاز می‌شود در آن باقی بماند.

در مورد مجموعهٔ حدی مثبت قضیهٔ زیر را داریم که از اهمیت زیادی برخوردار است.

قضیه. اگر $\{x(t,\bar{x})|t \geq 0\}$ کراندار باشد مجموعهٔ حدی مثبت آن یعنی γ^+ ، فشرده، ناتهی و ناوردا است.

اثبات. برای دنبالهٔ دلخواه$t_n \to \infty$ ، دنبالهٔ $x(t_n,\bar{x})$ که کراندار است دارای زیردنباله‌ای همگرا است. حد این زیردنباله در γ^+ است پس γ^+ ناتهی و البته کراندار است.
حال ثابت می‌کنیم γ^+ بسته است. گیریم $\{P_n\}$ دنباله‌ای از نقاط γ^+ باشد که $P_n \to P$. نشان می‌دهیم $P \in \gamma^+$.

$\epsilon > 0$را مفروض می‌گیریم، چون $P_n \to P$، $\bar{n}$ی موجود است که

$$\|P_{\bar{n}} - P\| < \frac{\epsilon}{2}$$

ولی $P_{\bar{n}} \in \gamma^+$، پس دنبالهٔ $\{t_n\}$موجود است که $t_n \to \infty$ و

$$\|x(t_n,\bar{x}) - P_{\bar{n}}\| < \frac{\epsilon}{2}$$

لذا برای همین دنبالهٔ $\{t_n\}$ داریم:

$$\|x(t_n,\bar{x}) - P\| \leq$$
$$\|x(t_n,\bar{x}) - P_{\bar{n}}\| + \|P_{\bar{n}} - P\| <$$
$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

از این رو $P \in \gamma^+$. هر مجموعهٔ بسته و کراندار در$\mathbb{R}^n$ فشرده است پس γ^+ هم فشرده است. اکنون می‌رسیم به اثبات ناوردایی. $P \in \gamma^+$ را مفروض می‌گیریم . دنبالهٔ $t_n \to \infty$ وجود دارد که: $\lim_{n\to\infty} x(t_n,\bar{x}) = P$. اگر جوابی را که از نقطهٔ P می‌گذرد با $x(t,P)$ نشان دهیم بنابر یکتایی جواب داریم:

$$x(t,x(t_n,\bar{x})) = x(t+t_n,\bar{x})$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} x(t+t_n,\bar{x}) = x(t,P)$ یعنی برای هر $t \geq 0$ ، $x(t,P) \in \gamma^+$، پس γ^+ ناوردا است.

قضیه (لاسال). فرض کنید$V(\cdot)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد و ناحیه‌ای را کهl با $V(x) < l$ Ω_l نشان دهید. فرض کنیدΩ_l کراندار است و در درون Ω_l داریم:

الف) $V(0) = 0$ و برای هر $x \neq 0$ ، $V(x) > 0$ ؛

ب) $\dot{V}(x) \leq 0$.

تعریف کنید $U := \{x \in \Omega_l | \dot{V}(x) = 0\}$ و فرض کنید Mبزرگترین زیر مجموعهٔ ناوردای U باشد. آنگاه

$$\forall \bar{x} \in \Omega_l : \quad \lim_{t\to\infty} d(x(t,\bar{x}),M) = 0$$

اثبات. چون V در امتداد جوابها ناصعودی است و $\bar{x} \in \Omega_l$،

ملاحظه می‌کنیم که برای هر $t \geq 0$ ، $x(t,\bar{x})$ درون Ω_l باقی می‌ماند. بنابراین تابع

$$V(t) = V(x(t,\bar{x}))$$

وقتی $t \to \infty$ به حدی مثل $l.$ میل می‌کند که در ضمن $l. < l$ در نتیجه روی γ^+ داریم

$$V(x) = l.$$

زیرا اگر $p \in \gamma^+$ آنگاه $p = \lim_{n\to\infty} x(t_n,\bar{x})$، در نتیجه

$$\begin{aligned} V(p) &= V(\lim_{n\to\infty} x(t_n,\bar{x})) \\ &= \lim_{n\to\infty} V(x(t_n,\bar{x})) \\ &= \lim_{n\to\infty} V(t_n) = l. \end{aligned}$$

پس روی γ^+ داریم: $\dot{V}(x) = 0$ و از اینجا $\gamma^+ \subset U$. امّا چون γ^+ ناوردا است و M بزرگترین زیرمجموعهٔ ناوردای U است، $\gamma^+ \subset M$. حال چون $x(t,\bar{x})$ کراندار است، γ^+ ناتهی است. توجه کنید که $p \in \gamma^+$. طبق تعریف فاصلهٔ دو مجموعه داریم:

$$d(x(t), M) = \inf_{p\in M} d(x(t), p)$$

از آنجا که $p \in \gamma^+$، $p \in M$ و $p = \lim_{n\to\infty} x(t_n,\bar{x})$ یعنی $\lim_{n\to\infty} d(x(t_n,\bar{x}), p) = 0$ داریم:

$$\lim_{t\to\infty} d(x(t), M) \leq \lim_{n\to\infty} d(x(t_n,\bar{x}), p) = 0$$

بنابراین $x(t) \to M$.

مثال. مجدداً معادلهٔ $\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + y = 0$ را همراه با $V = \frac{1}{2}(\dot{y}^2 + y^2)$ در نظر می‌گیریم. داریم $\dot{V} = -2\alpha\dot{y}^2$ پس، از $\dot{y} = 0$ نتیجه می‌شود $\dot{V} = 0$. تنها زیر مجموعهٔ ناوردای U در اینجا مبدأ است و لذا مبدأ طبق قضیهٔ فوق پایدار مجانبی است.

مثال. اگر بار دیگر به معادلهٔ واندرپل نگاه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که

$$V = \frac{1}{2}(\dot{y}^2 + y^2)$$

تابعک لیاپانف بود که

$$\dot{V} = -\epsilon(1 - y^2)\dot{y}^2$$

اگر $V < \frac{1}{2}$ ، داریم $|y| < 1$ و لذا در این ناحیه مجموعهٔ U که برای آن $\dot{V} = 0$ عبارت است از $\dot{y} = 0$ که به راحتی می‌توان دید تنها مجموعهٔ ناوردا در $\dot{y} = 0$ ، مبدأ است و لذا $S := \{y^2 + \dot{y}^2 < 1\}$ ناحیهٔ پایداری مجانبی است.

• دانشجوی دورهٔ دکتری ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

یک کتاب مستطاب در معادلات دیفرانسیل

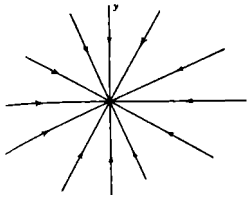
Lectures on Ordinary Differential Equations

W. Hurewicz, 1958, MIT Press

پیشگامی در مکتوب‌سازی آنچه که روزگاری در مرزهای دانش قرار داشته است چالشی در خور تعمق است. کتاب آقای هرویتس از جمله این کتابها در زمینهٔ نظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل است که ابتدا درسنامهٔ درسی بود که در سال ۱۹۴۳ در دانشگاه براون ارائه شده بود که پس از مرگ زودهنگام وی توسط مؤسسهٔ انتشاراتی ام‌آی‌تی به‌صورت کتاب منتشر شد.

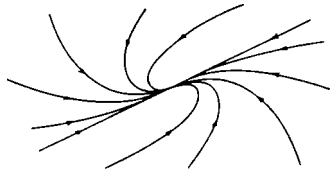
هرویتس در سال ۱۹۰۴ در لهستان متولد شد، درجهٔ دکترای خود را در سال ۱۹۲۶ در وین گرفت سپس به ایالات متحده رفت و در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته مشغول شد و بعد به استادی ام‌آی‌تی رسید. هرویتس در سال ۱۹۵۶ بر اثر سانحهٔ سقوط از کوه درگذشت.

کتاب هرویتس برای اهل معنی هنوز هم پس از گذشت سالیان دراز خواندنی و در خور تعمق است.



Lectures
on Ordinary
Differential Equations

WITOLD HUREWICZ



از قضیهٔ مقدار میانی تا قضیهٔ شارکوفسکی

مریم میرزاخانی •

توابع پیوسته از یک متغیر حقیقی سالها مورد مطالعهٔ ریاضیدانان بزرگی مانند نیوتن (۱۷۲۷-۱۶۴۲)، لایب‌نیتس (۱۷۱۶-۱۶۴۶) و اویلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷) بوده‌اند که کارهای اینان سبب ایجاد «حساب دیفرانسیل و انتگرال» شده است که امروز مورد استفادهٔ بسیاری از افراد قرار گرفته است، یکی از اساسی‌ترین و ساده‌ترین قضایا در این زمینه قضیهٔ مقدار میانی است که همهٔ ما با آن آشنایی داریم.

قضیهٔ مقدار میانی: *اگر f تابعی پیوسته و حقیقی روی $[a,b]$ باشد و r عددی حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$، آنگاه عدد x_0 بین a و b وجود دارد به نحوی که $f(x_0)=r$.*

این قضیهٔ ساده کاربردهای فراوانی دارد که به‌عنوان مثال می‌توان از گزارهٔ زیر نام برد.

گزاره ۱. *اگر f تابعی حقیقی و پیوسته روی $[a,b]$ باشد که برد آن شامل $[a,b]$ شود آنگاه f دست‌کم یک نقطهٔ ثابت دارد (به عبارت دیگر $\exists x\in[a,b]\ ,\ f(x)=x$).*

یک تعمیم طبیعی از مفهوم نقطهٔ ثابت که در گزاره ۱ مطرح شد مفهوم نقطهٔ تناوبی تابع است بدین ترتیب که اگر برد f زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ f باشد، تعریف می‌کنیم

$$f^0(x)=x$$

$$f^1(x)=f(x)$$

$$f^{i+1}(x)=f(f^i(x))$$

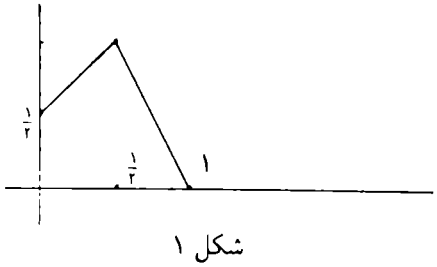
حال اگر x_0 چنان باشد که $f^n(x_0)=x_0$ ولی برای هر $k<n$ داشته باشیم $f^k(x_0)\neq x_0$ آنگاه x_0 را یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ n برای f می‌نامیم. بنابراین یک نقطهٔ ثابت تابع f، چیزی نیست جز یک نقطهٔ تناوبی f از مرتبهٔ ۱.

اگر x_0 یک نقطهٔ تناوبی مرتبهٔ n برای f باشد آنگاه $x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)$ متمایزند و $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$ را مدار تناوبی x_0 می‌نامیم.

مسألهٔ وجود نقطهٔ ثابت عموماً به‌سادگی با بررسی نمودار تابع قابل حل است ولی بررسی وجود یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ n برای تابع f، حتی اگر n کوچک باشد، ممکن است چندان ساده نباشد. به عنوان مثال تابع

$$\psi(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 2-2x & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

را که نمودار آن در شکل ۱ رسم شده است در نظر بگیرید:



شکل ۱

داریم:

$$\psi(0)=\frac{1}{2},\ \psi^2(0)=\psi(\frac{1}{2})=1,\ \psi^3(0)=\psi(1)=0$$

مجلهٔ ریاضی شمارهٔ ۲
(پاییز ۱۳۷۷) صص ۱۸-۱۳

پس ψ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۳ دارد ولی آیا ψ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۵ هم دارد؟ از مرتبهٔ ۷ چطور؟

می‌بینید که جواب دادن به این سؤالها تنها با توجه به شکل نمودار چندان ساده نیست و برای پاسخ دادن به این سؤالها و سؤالهای مشابه دیگر به بررسی عمیق‌تری از توابع پیوسته نیاز داریم. در اینجا از تعمیمی از گزارهٔ ۱ استفاده می‌کنیم.

گزاره ۲. *اگر f تابعی حقیقی و پیوسته روی $[a,b]$ باشد و $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ زیربازه‌های بسته‌ای از $[a,b]$ باشند چنان‌که $f(I_k) \supset I_{k+1}$، آنگاه معادلهٔ $f^n(x) = x$ جوابی دارد مثل x_0 که $x_0 \in I_0$ و $f^k(x_0) \in I_k$.* [از این پس همواره $I_n = I_0$]

اثبات. قرارداد می‌کنیم که $I_i \to I_j$ یعنی $f(I_i) \supset I_j$. اگر $n = 1$ باشد حکم معادل گزارهٔ ۱ است. برای $n \geq 2$ توجه کنید که اگر $I_1 \to I_2$ آنگاه بازهٔ بستهٔ I_1^* وجود دارد به گونه‌ای که $I_1^* \subset I_1$ و $f(I_1^*) = I_2$ زیرا اگر $I_2 = [c,d]$ بنابر قضیهٔ مقدار میانی داریم

$$\exists x_1, x_2 \in I_1 : f(x_1) = c,\ f(x_2) = d$$

بدون کاستن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که $x_1 < x_2$.

قرار دهید:

$$I = [x_1, x_2]$$
$$y_1 = \sup\{y \mid y \in I\ ,\ f(y) = c\}$$
$$y_2 = \inf\{y \mid y \in I\ ,\ y > y_1\ ,\ f(y) = d\}$$

بنابر پیوستگی f و قضیهٔ مقدار میانی داریم که اگر $I_1^* = [y_1, y_2]$ آنگاه $f(I_1^*) = I_2$.

شرط گزاره را می‌توان چنین نوشت:

$$I_0 \to I_1 \to I_2 \to \ldots \to I_{n-1} \to I_0$$

بنابر آنچه که گفتیم و بنا بر صورت مسأله، بازه‌های $I_0^*, I_1^*, \ldots, I_{n-1}^*$ وجود دارند که:

$$I_{n-1}^* \subset I_{n-1}, f(I_{n-1}^*) = I_0$$
$$I_{n-2}^* \subset I_{n-2}, f(I_{n-2}^*) = I_{n-1}^*,$$

$$I_0^* \subset I_0, f(I_0^*) = I_1^*$$

به عبارتی دیگر وجود دارند $I_k^* \subset I_k$ که داشته باشیم: $f(I_k^*) = I_{k+1}^*$. پس بنابرگزارهٔ ۱ معادلهٔ $f^n(x) = x$ جوابی مثل x_0 دارد که $x_0 \in I_0^* \subset I_0$ که $f^k(x_0) \in I_k^* \subset I_k$.

گزارهٔ ۲ خود نکتهٔ قابل توجهی ندارد اما می‌تواند برای اثبات قضیهٔ جالب زیر به‌کار رود.

قضیه ۱. *اگر f تابعی پیوسته روی $[a,b]$ باشد به نحوی که برد آن در $[a,b]$ باشد و یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۳ داشته باشد، آنگاه به ازای هر عدد طبیعی m، f نقطه‌ای تناوبی از مرتبهٔ n دارد.*

اثبات. اگر $x_0 < x_1 < x_2$ یک مدار تناوبی از مرتبهٔ ۳ باشد آنگاه یا $f(x_1) = x_0$ یا $f(x_1) = x_2$. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $f(x_1) = x_0$ پس $f(x_0) = x_1$, $f(x_2) = x_0$. اگر قرار دهیم

$$\bar{I}_1 = [x_1, x_2], \qquad \bar{I}_0 = [x_0, x_1]$$

با توجه به قضیهٔ مقدار میانی داریم $\bar{I}_1 \rightleftarrows \bar{I}_0$ حال اگر قرار دهیم

$$I_{n-1} = \bar{I}_1\ ,\ I_0 = I_1 = \cdots = I_{n-2} = \bar{I}_0$$

آنگاه با توجه به گزارهٔ ۲ داریم:

$$\exists x_0^* \in \bar{I}_0 : f^n(x_0^*) = x_0^*$$
$$\forall k : 0 \leq k \leq n-1 \qquad f^k(x_0^*) \in \bar{I}_0 \quad \text{و}$$

و $f^{n-1}(x_0^*) \in \bar{I}_1$ پس $f^n(x_0^*) = x_0^*$ حال اگر $k < n$ وجود داشته باشد که

$$f^k(x_0^*) = x_0^*$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\exists i : 0 \le i \le n-2 \,,\, f^{n-1}(x_0^*) = f^i(x_0^*)$$
$$f^i(x_0^*) \in \bar{I}_0 \,,\, f^{n-1}(x_0^*) \in \bar{I}_1 \quad \text{و}$$

پس

$$f^{n-1}(x_0^*) \in \bar{I}_0 \cap \bar{I}_1 = x_1 \Rightarrow x_0^* = f^n(x_0^*) = x_0$$
$$f(x_0^*) = f(x_0) = x_2 \notin \bar{I}_0 \quad \text{و}$$

که متناقض با $f(x_0^*) \in \bar{I}_0$ است.

پس با توجه به این قضیه، تابعی که نمودارش را در شکل ۱ رسم کرده‌ایم به ازای هر n یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ n دارد. در صورتی که در نگاه اول تابعی بسیار ساده به نظر می‌آید.

حال طرح این سؤال به نظر منطقی می‌آید که اگر تابعی یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ n داشته باشد به ازای چه مقدارهایی از m لزوماً نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ m هم دارد؟

ترتیب زیر را روی اعداد طبیعی در نظر بگیرید.

$$3 \lhd 5 \lhd 7 \ldots \lhd 2\cdot 3 \lhd 2\cdot 5 \lhd 2\cdot 7 \ldots$$
$$\lhd 2^2\cdot 3 \lhd 2^2\cdot 5 \lhd \ldots \lhd 8 \lhd 4 \lhd 2 \lhd 1$$

با استفاده از این ترتیب می‌توانیم به سؤال فوق پاسخ دهیم

قضیه ۲ (شارکوفسکی، ۱۹۶۴): اگر $f : I \to I$ تابعی پیوسته باشد و f یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ l داشته باشد و $l \lhd m$ آنگاه f نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ m هم دارد.

اثبات. *ابتدا فرض می‌کنیم f یک نقطهٔ تناوبی اولیه از مرتبهٔ n دارد مثل x که n عددی است فرد و بزرگتر از ۱ و هیچ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ فرد کمتر از n و بزرگتر از ۱ ندارد و فرض کنید $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ نقاط مدار تناوبی x باشند. معلوم است که f روی $x_1, \ldots, x_n$ یک جایگشت اعمال می‌کند و به وضوح $f(x_n) < x_n$ و $f(x_1) > x_1$ حال اگر i بزرگترین عددی باشد که $f(x_i) > x_i$ و $I_1 = [x_i, x_{i+1}]$ از آنجا که $f(x_{i+1}) < x_i$ پس $f(I_1) \supset I_1$ یا به عبارتی $I_1 \to I_1$ از آنجا که n فرد است نمی‌توانیم داشته باشیم $f(x_i) = x_{i+1}$ و $f(x_{i+1}) = x_i$ پس $f(I_1)$ شامل دست‌کم یکی دیگر از بازه‌های $[x_j, x_{j+1}]$ هم هست (که بعد می‌بینیم تنها شامل یکی دیگر از بازه‌هاست) حال اگر O_2 را اجتماع بازه‌های $[x_j, x_{j+1}]$ بگیریم که $f(I_1) \supset [x_j, x_{j+1}]$ داریم $O_2 \supset I_1$ ولی $O_2 \neq I_1$ و اگر I_2 زیربازهٔ بسته‌ای در O_2 به شکل $[x_j, x_{j+1}]$ باشد آنگاه $I_1 \to I_2$.*

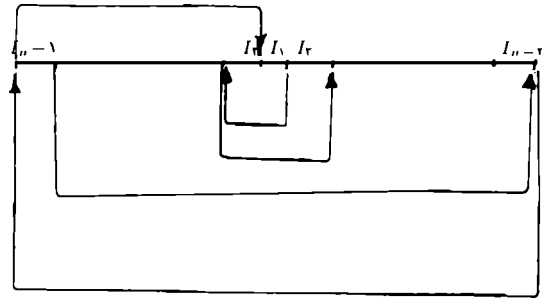
حال O_2 را اجتماع بازه‌های بسته به شکل $[x_j, x_{j+1}]$ بگیرید که توسط تصویر بعضی از بازه‌های درون O_2 پوشانده می‌شوند و به همین ترتیب O_{l+1} را اجتماع بازه‌های بسته‌ای بگیرید که هرکدام آنها توسط تصویر برخی از اعضای O_l پوشانده می‌شوند. توجه کنید اگر I_{l+1} را بازه‌ای از O_{l+1} بگیریم آنگاه دسته‌ای از بازه‌های بسته مثل $I_2, \ldots, I_l$ وجود دارند که $I_j \subset O_j$ و در شرط

$$I_1 \to I_2 \ldots \to I_l \to I_{l+1}$$

صدق می‌کنند. ولی از آنجا که x_jها متناهی هستند ای وجود دارد که $O_{l+1} = O_l$ پس می‌بینیم که تمام بازه‌های به شکل $[x_j, x_{j+1}]$ در O_l هستند زیرا در غیر این صورت x نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ کمتر از n می‌داشت.

حال از آنجا که n عددی فرد است دست کم یک بازهٔ $[x_j, x_{j+1}]$ متفاوت با I_1 وجود دارد که در یکی از O_kها قرار دارد به نحوی که تصویرش تحت f، I_1 را می‌پوشاند زیرا به‌خاطر فرد بودن n، تعداد x_iها در یک طرف I_1 از طرف دیگر اکیداً بیشتر است پس تعدادی از x_iها باید تحت اثر f از یک طرف I_1 به طرف دیگر بیایند و تعدادی دیگر نیاید. حال دنبالهٔ $I_1 \to I_2 \ldots I_k \to I_1$ را در نظر می‌گیریم که هر I_l به شکل $[x_j, x_{j+1}]$ است و $I_2 \neq I_1$. بنابراین دست‌کم یک دنبالهٔ $I_1 \to I_2 \ldots I_k \to I_1$ داریم. اگر دنبالهٔ $I_1 \to I_2 \ldots I_k \to I_1$ کوتاهترین دنباله از این نوع جز $I_1 \to I_1$ باشد و $k < n-1$ در این صورت یکی از دو دنبالهٔ $I_1 \to I_2 \to I_3 \to \ldots \to I_k \to I_1$ یا $I_1 \to I_2 \to \ldots I_k \to I_1 \to I_1$ یک نقطهٔ ثابت از f^m دارد که m فرد است و $m < k$. پس، از آنجا که $I_1 \cap I_2$ تنها از یک نقطه تشکیل شده است و این نقطه دورهٔ تناوبی بزرگتر از m دارد، این حالت امکان‌پذیر نیست و $k = n-1$.

از طرفی، از آنجا که k کوچکترین عدد طبیعی است که برای آن دنبالهٔ $I_1 \to I_2 \to \dots I_k \to I_1$ وجود دارد، اگر $j > l+1$، داریم $I_l \not\to I_j$ (زیرا $I_l \to I_j$ با مینیمم بودن k متناقض است) بنابراین درمی‌یابیم که نحوهٔ قرارگرفتن بازه‌های $I_1, \dots, I_{n-1}$ باید مثل شکل ۲ یا تصویر آینه‌ای آن باشد. به عبارتی اگر y_0 نقطهٔ وسطی بین $2m+1$ نقطه باشد و $f(y_0) = y_i$، نحوهٔ قرارگرفتن نقاط مثل شکل ۲ یا تصویر آینه‌ای آن است.



شکل ۲

حال برای اثبات قضیه حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر f یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ 2^m داشته باشد ثابت می‌کنیم f، نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ 2^l هم دارد ($l < m$). اگر $m = 1$ در آن صورت f یک نقطهٔ تناوبی مرتبهٔ ۲ دارد. اگر x_1 و x_2 ($x_1 < x_2$) مدار نقطهٔ تناوبی باشد داریم: $f(x_1) = x_2$ و $f(x_2) = x_1$ یا $f([x_1, x_2]) \supset [x_1, x_2]$ پس f بنابرگزارهٔ ۱ نقطهٔ ثابت دارد.

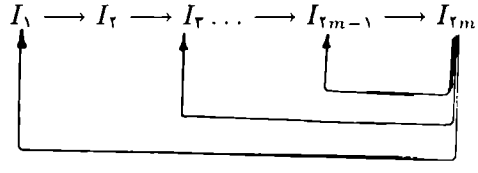
حالا این حالت را با استقرا روی m ثابت می‌کنیم. برای $m = 1$ حکم درست بود. اگر حکم برای $m = k$ درست باشد باید ثابت کنیم برای $m = k+1$ هم درست است. قرار دهید $g = f^2$ پس اگر f یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ 2^{k+1} داشته باشد g نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ 2^k دارد. بنابر فرض استقرا g نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ 2^{k-1} دارد پس عنصری مثل x_0 داریم که $x_0 \in I$ و $g^{2^{k-1}}(x_0) = x_0$ و $g^t(x_0) \neq x_0$ ($1 \le t \le 2^{k-1}$) پس

$$f^{2^k}(x_0) = x_0$$
$$f^{2t}(x_0) \neq x_0\,,\ 1 \le t \le 2^{k-1}$$

ولی، چون $f^{2^k}(x_0) = x_0$، به ازای هر عدد فرد t داریم: $f^t(x_0) \neq x_0$.

پس x_0 یک نقطهٔ تناوبی مرتبهٔ 2^k است که حکم را ثابت می‌کند.

حالت دوم: اگر f یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2m+1$ داشته باشد برای $k > 2m+1$، f نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ k هم دارد. می‌توان فرض کرد که f نقطهٔ تناوبی مرتبهٔ $2n+1$ که $1 \le n < m$ ندارد پس بنابر آنچه قبلاً گفتیم می‌توان گفت مثل شکل ۳ داریم:



شکل ۳

در این صورت برای هر $k > 2m+1$ دنبالهٔ

$$\underbrace{I_1 \to \dots \to I_1}_{\text{بار } k-(2m-1)} \to I_2 \to \dots \to I_{2m} \to I_1$$

موجود است که در شرط گزارهٔ ۲ صدق می‌کند پس بنابر همین گزاره f یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ k دارد.

حالت سوم: اگر f نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2m+1$ داشته باشد آنگاه f نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2k$ دارد. بنابر حالت ۲ کافی است تنها حالت $2k \le 2m$ را در نظر بگیریم که بنابر شکل ۳ می‌توانیم دنبالهٔ

$$I_{2(m-k)+1} \to I_{2(m-k)+2} \to \dots \to I_{2m} \to I_{2(m-k)+1}$$

را در نظر بگیریم. با بحث حالت ۲، f یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2k$ خواهد داشت.

حالت چهارم: اگر n که $m \lhd n$ و $m = 2^k p$ و $n = 2^t q$ (p و q اعدادی فرد هستند که $p > 1$ و $k \ge 1$) می‌خواهیم ثابت کنیم اگر f یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ m داشته باشد آنگاه نقطه‌ای تناوبی از مرتبهٔ n هم دارد. می‌توان فرض کرد که برای $l \lhd m$ هیچ نقطهٔ تناوبی با مرتبهٔ l نداریم. بنابر $m \lhd n$ دو حالت داریم:

الف) $t > k$ و $q \ge 1$

ب) $t = k$ و $q > p$

اگر $g(x) = f^{۲^k}(x)$ آنگاه f یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $۲^k p$ دارد پس g نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ p دارد. با استفاده از حالت ۳، g نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $۲^{t-k}q$ دارد که $t > k$ و $q \geq ۱$ پس f نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $m = ۲^t q$ دارد. در حالت (ب) با استفاده از حالت ۲، g نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ p دارد پس g نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ q دارد که $q > p$ پس f نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $۲^t q$ دارد پس در حالت الف و ب، f نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ m خواهد داشت.

اما قضیهٔ شارکوفسکی نکتهٔ جالب دیگری هم دارد: عکس آن هم درست است. یعنی اگر $l \lhd m$ آنگاه تابعی پیوسته مثل $f : I \to I$ وجود دارد که f نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ m دارد ولی نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ l ندارد.

ما اینجا تابعی می‌سازیم که نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۵ دارد ولی نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۳ ندارد. ($۵ \lhd ۳$) برای این کار f را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f : [۱,۵] \to [۱,۵]$$
$$f(۱) = ۳,\ f(۳) = ۴,\ f(۴) = ۲$$
$$f(۲) = ۵,\ f(۵) = ۱$$

پس ۱ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۵ برای تابع f است و برای مقادیر بین $i+۱$ و i تابع را خطی تعریف می‌کنیم ۴ حال به راحتی می‌توانید ببینید که

$$f^۲[۱,۲] = [۲,۵]$$
$$f^۲[۲,۳] = [۳,۵]$$
$$f^۲[۴,۵] = [۱,۴]$$

پس $f^۲$ هیچ نقطهٔ ثابتی در $[۱,۲]$ و $[۲,۳]$ و $[۴,۵]$ ندارد ولی $f^۲[۳,۴] = [۱,۵]$ پس $f^۲$ در بازهٔ $[۳,۴]$ یک نقطهٔ ثابت دارد ولی توابع $f : [۳,۴] \to [۲,۴]$ و $f : [۲,۵] \to [۱,۵]$ و $f : [۲,۴] \to [۲,۵]$ توابعی اکیداً نزولی هستند پس $f^۲[۳,۴] \to [۱,۵]$ تابعی اکیداً نزولی

شکل ۴

است پس تنها یک نقطهٔ ثابت دارد و این نقطهٔ ثابت همان نقطهٔ $f(x) = x$ است پس تابع f نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۳ ندارد.

با همین روش برای $l \lhd m$ می‌توان تابعی ساخت که نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ m دارد ولی نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ l ندارد ولی متأسفانه قضیهٔ شارکوفسکی تنها در حالت ۱ بعدی صادق است، این قضیه حتی برای دایره هم صادق نیست چون مثلاً در دوران ۱۲۰ درجه حول مرکز دایره، تمام نقاط دایره نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۳ هستند و نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ دیگر وجود ندارد.

در هر صورت قضیهٔ شارکوفسکی بحث دربارهٔ نقاط تناوبی توابع را به پایان نمی‌برد. در پاسخ این سؤال که چرا ریاضیدانان بزرگ پیشین که در آنالیز کلاسیک کار می‌کردند به چنین قضیهٔ مهمی دست نیافته‌اند می‌توان گفت دلیل شاید این باشد که در آنالیز کلاسیک خواص «موضعی» توابع بررسی می‌شدند؛ خواصی مثل پیوستگی و مشتقپذیری و انتگرالپذیری در آنالیز کلاسیک اهمیت بسیار دارند و خواص سرتاسری توابع مثل پیوستگی یکنواخت که در آنالیز کلاسیک مورد توجه بودند غالباً از خواص موضعی توابع نتیجه‌گیری می‌شدند ولی اکنون بررسی خواص «سرتاسری» توابع شاخهٔ جدیدی از ریاضی را به نام «آنالیز فراگیر» به وجود آورده است که شامل مباحث جالب و متنوعی می‌شود.

مراجع

[1] R.L. Devaney, "*An Introduction to chaotic Dynamical systems*", 1986.

[2] Xun Cheng Huang, "*From intermediate value theorem to chaos*", Math. Magazine.

vol 65. No. 2. April 1992. pp. 91-103.

[3] T. Li, A.J. Yorke, *"Period three implies chaos"*, Amer. Math. Monthly 82(1975), 985-992.

• دانشجوی دورهٔ کارشناسی ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

این مقاله به‌طور عمده براساس مرجع [2] تدوین شده است.

تجربهٔ کامپیوتری

در بررسی دینامیک توابع تجربهٔ کامپیوتری احساس «شهودی» مؤثری پدید می‌آورد. برنامهٔ ضمیمه که به زبان متمتیکا نوشته شده است به‌بررسی دینامیک نگاشت $۳/۵x(۱-x)$ می‌پردازد.

```
Clear[h];
h[x_] := 3.5x (1-x)

StartingValue = .1;
FirstIt = 0;
LastIt = 20;

xmin =  0;
xmax =  1;

     (*  Finding the Points  *)

i = 0;
y = N[StartingValue];

While[i < FirstIt, y = h[y]; i = i + 1];

DataTable = {{y,y},{y,h[y]}};

While[i < LastIt,
      y = h[y];
      AppendTo[DataTable,{y,y}];
      AppendTo[DataTable,{y,h[y]}];
      i = i + 1];

AppendTo[DataTable,{h[y],h[y]}];

     (*  Drawing the Cobweb  *)

Cobweb = ListPlot[DataTable,PlotJoined -> True,
     PlotRange -> {{xmin,xmax},{xmin,xmax}},
     AspectRatio -> 1,PlotStyle->GrayLevel[.3],
     DisplayFunction -> Identity];

     (*  Drawing the graphs of h and y=x  *)

Graph = Plot[{h[t],t},{t,xmin,xmax},
     PlotRange -> {xmin,xmax},AspectRatio -> 1,
     DisplayFunction -> Identity];

     (*  Displaying the result  *)

Show[Cobweb,Graph,DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

مسأله‌ای در هندسهٔ ترکیبیاتی

هادی سلماسیان‌ـکسری علیشاهی •

شکل ساده و همه فهم مسائل هندسه ترکیبی، جذابیت خاصی به آنها می‌بخشد، ولی گهگاه این سادگی تنها در نگاه اول است و بسیاری از مسأله‌های دل‌انگیز، «باز» مانده‌اند. از جمله مسایل هندسه ترکیبیاتی، مسائل «رمزی» گونه‌اند، که عموماً بیانگر وجود زیرساختار خاصی در یک ساختار معین هستند، و از این نظر جالبند که به مسائل رمزی گونه در ساختارهای مجردتر ربط دارند. نوشتهٔ حاضر قصد دارد، با طرح قضیهٔ معروفی، به نتایجی هندسی دست یابد و پرسشهایی طبیعی در هندسه ترکیبیاتی را جواب دهد.

در سال ۱۹۲۷ لودویگ وان در واردن قضیهٔ جالب زیر را ثابت کرد. البته اثبات آن چندان دشوار نیست؛ مثلاً اثباتی نسبتاً کوتاه در [1] یا [2] یافت می‌شود:

قضیه. برای هر k و r طبیعی، عدد طبیعی $\omega(k,r)$ یافت می‌شود که برای هر $m \geq \omega(k,r)$، اگر عددهای طبیعی مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,m\}$ را به k زیر مجموعهٔ $I_k,\ldots,I_2,I_1$ افراز کنیم، دست‌کم در یکی از آنها، مثلاً I_s حکم زیر برقرار است.

$$\exists a,d \in \mathbb{N} : \forall t \in \{0,\ldots,r-1\} \quad a+td \in I_s$$

به زبان ساده‌تر، برای هر رنگ آمیزی اعضای $\{1,\ldots,m\}$ $m \geq \omega(k,r)$ به k رنگ، یک تصاعد حسابی تکرنگ به طول r یافت می‌شود(I_tها مجموعه رنگها هستند). حال اجازه دهید سعی کنیم مشابه «پیوسته»ای برای این قضیه بسازیم. طبیعی‌ترین روش، چنین است:

گزاره ۱. در هر رنگ آمیزی اعداد حقیقی به k رنگ، برای هر r طبیعی تصاعد حسابی تکرنگی به طول r در اعداد موجود است.

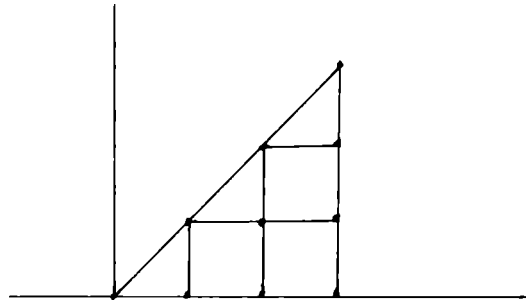
گزاره ۱ به سادگی از قضیه گفته شده نتیجه می‌شود زیرا اعداد طبیعی، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی هستند. در حقیقت، با کمی دقت، می‌توان دید که حکم کلی‌تر زیر صحیح است:

گزاره ۲. برای هر دنباله از نقطه‌های $A = \{a_1 < \cdots < a_n\}$ در اعداد حقیقی، اگر $\frac{a_i-a_j}{a_k-a_s} \in \mathbb{Q}$ برای هر $k \neq s$ برقرار باشد، آنگاه برای هر رنگ آمیزی $\mathbb{R}$ به r رنگ، مجموعه‌ای تکرنگ و متشابه با A (یعنی مجموعه‌ای که اعضایش از تجانس و انتقالهای معین از اعضای A به‌دست آمده‌اند) پیدا می‌شود.

به‌ویژه، متشابهی با مجموعهٔ $\{0,1,q\}$ که $1 < q \in \mathbb{Q}$ هم پیدا می‌شود. حال سوال طبیعی این است که آیا برای مجموعه‌های $\{0,1,\lambda\}$ هم که $1 < \lambda \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$، حکم برقرار است؟ پاسخ این سوال مثبت است. اثباتی که در زیر ارائه می‌شود از قضیه آغازین این نوشته بهره می‌گیرد: مجموعه همه نقطه‌های حقیقی را که به‌صورت $(a,b,\in \mathbb{N})a+b\lambda$ هستند در نظر بگیرید: واضح است که $a+b\lambda = c+d\lambda \Rightarrow a=c, b=d$ حال به هر عدد $a+b\lambda$، نقطه‌ای به مختصات (a,b) در $\mathbb{R}^2$ را نسبت می‌دهیم؛ یک شبکه مثلثی به ضلع n را زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{Z}^2$ (نقاط $\mathbb{R}^2$ با مختصات صحیح) تعریف می‌کنیم که شامل درون و روی مرز مثلثی قائم الزاویه و متساوی الساقین به ضلع n، که رئوس آن در نقاط $(n,n),(n,0),(0,0)$ قرار دارند، باشد.

اکنون، آنچه برای اثبات گزاره نیاز داریم سه نقطهٔ $a+b\lambda$ و $(m+a)+b\lambda$ و $(m+a)+(m+b)\lambda$ است که $a,b,m \in \mathbb{N}$ حال، گزاره زیر را ثابت می‌کنیم:

مجلهٔ ریاضی شمارهٔ ۷
(پاییز ۱۳۷۷) صص ۲۲ـ۱۹



یک شبکه مثلثی به ضلع ۳

گزاره ۳. برای هر $k \in \mathbb{N}$، عدد $n(k)$ یافت می‌شود که برای هر شبکهٔ مثلثی به ضلع p که $p \geq n(k)$، اگر نقاط شبکه را به k رنگ رنگ‌آمیزی کنیم، سه نقطهٔ همرنگ روی شبکه موجودند.

اثبات. استقرا روی k. می‌توان $n(1) = 2$ گرفت. حال فرض کنید حکم برای مقداری از k برقرار باشد: قرار دهید $n(k+1) = \omega(k+1, n(k)+2)$؛ کافی است حکم را تنها در حالت $p = n(k)$، و حالتی که شبکه، شامل نقطه‌های $\underset{1 \leq j \leq i \leq n(k+1)+1}{(i,j)}$ از $\mathbb{Z}^2$ است بررسی کنیم. تابع

$$f : C_{n(k+1)} \mapsto \mathbb{N}$$
$$f((x,x)) = x$$

که $C_{n(k+1)}$ همان شبکه مثلثی به ضلع $n(k+1)$ است، تناظری یک به یک است، که اگر رنگ‌آمیزی نقاط روی وتر $C_{n(k+1)}$ توسط f به $\mathbb{N}$ القا شود، بنا به فرض در مورد $n(k+1)$، تصاعدی تکرنگ به طول $v = n(k)+2$ در برد f یافت می‌شود؛ اگر این تصاعد، مجموعهٔ $\{a+tb|_{b=0}^{v-1}\}$ باشد، مجموعهٔ نقاطی در $\mathbb{Z}^2$ که شامل $(a+tb, a+sb)$ برای $0 \leq s < t \leq v-2$ باشد زیرشبکه‌ای به ضلع $n(k)$ در شبکهٔ اولیه است: اگر یکی از این نقطه‌ها با نقاط تصاعد همرنگ باشد، نقطه‌های $(a+bt, a+bt)$، $(a+bs, a+bs)$، $(a+bt, a+bs)$ نقطه‌های مطلوب هستند. در غیر این صورت هم شبکه مذکور شامل نقاطی است که حداکثر به یکی از k رنگ باقیمانده درآمده‌اند و بنا به فرض استقرا سه نقطه با شرایط مورد نظر در این شبکه یافت می‌شود.

با قدری دقت، می‌توان نتیجهٔ هندسی-رمزی گونهٔ زیر را هم به‌دست آورد:

گزاره ۴. برای هر k طبیعی، اگر صفحه اقلیدسی با k رنگ رنگ‌آمیزی شود، برای هر مثلث دلخواه $\triangle$، مثلثی متشابه با $\triangle$ و با رؤوس تکرنگ وجود دارد.

اثبات را به خواننده واگذار می‌کنیم و تنها یادآور می‌شویم که کافی است یک شبکه مثلثی بزرگ از مثلثهای متشابه با $\triangle$ در صفحه اقلیدسی را در نظر گرفت؛ اثبات قبلی هم، متشابه مثلثی قائم الزاویه و متساوی الساقین را در شبکه می‌یافت.

حال فرض کنید محدودیت تعداد رنگها به کنار گذاشته شود. یعنی فرض کنید نقاط خط حقیقی با تعدادی نامتناهی ولی شمارا رنگ، رنگ‌آمیزی شوند. آیا باز هم حکم گزارهٔ ۱ صحیح باقی می‌ماند؟ به وضوح، به علت ناشمارا بودن $\mathbb{R}$، برای $r = 2$، حکم گزارهٔ ۲ برقرار می‌ماند. ولی برای $r \geq 3$ چنین نخواهد بود:

گزاره ۵. رنگ‌آمیزیی از $\mathbb{R}$ به شمارا رنگ یافت می‌شود که تصاعد حسابی تکرنگ به طول ۳، وجود نداشته باشد.

برای ساختن این مثال، به جبر خطی و استفاده از اصل انتخاب نیاز داریم: پایه‌ای از فضای برداری $\mathbb{R}$ روی میدان $\mathbb{Q}$ یافت می‌شود؛ این پایه را $\mathfrak{B}$ بنامید. برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} q_i \beta_i \qquad \underset{\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_m}{\beta_i \in \mathfrak{B}} \ , \ q_i \in \mathbb{Q} - \{0\} \tag{1}$$

حال به نقطهٔ α رنگِ $\langle q_1, q_2, \ldots, q_m \rangle$ را نسبت می‌دهیم. این رنگ، عنصری از مجموعهٔ S (:= همهٔ متناهی تایی‌های مرتب از اعضای $\mathbb{Q}$) است، که مجموعه‌ای شماراست: زیرا S همان $\cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ است و می‌دانیم که هر $\mathbb{Q}^n$ شماراست. حال نشان می‌دهیم این رنگ‌آمیزی خاصیت ذکر شده را دارد:

اگر γ, β, α همرنگ و به تصاعد حسابی باشند، آنگاه داریم (مثلاً:) $\alpha + \beta = 2\gamma$

ولی فرض کنید: $\alpha = \sum_{i=1}^{m} q_i \alpha_i \qquad \alpha_i < \alpha_{i+1} \ \alpha_i \in \mathfrak{B}$

پس: $\beta = \sum_{i=1}^{m} q_i \beta_i \qquad q_i \in \mathbb{Q} \qquad \beta_i < \beta_{i+1} \ \beta_i \in \mathfrak{B}$

حال اگر $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$، داریم:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

پس تصاعدی با جملات نامتمایز داریم که بی‌ارزش است.

پس $\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\} \neq \{\beta_1 \cdots \beta_m\}$. حال $\min(\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\} \triangle \{\beta_1 \cdots \beta_m\})$ را در نظر بگیرید: بدون آن که در کلیت خللی وارد شود می‌توان فرض کرد که این مقدار، یک α_j است. در اینصورت، درایهٔ iـام در رنگ عدد α، برابر با q_i، ولی در γ برابر $\frac{q_i}{2}$ است، بنا به همرنگی α و γ، $q_i = \frac{q_i}{2}$ پس $q_i = 0$ در حالی‌که، بنا به فرض، همه q_iها ناصفرند. تناقض به‌دست آمده حکم را ثابت می‌کند.

با در نظر گرفتن $\mathbb{R}^2$ روی $\mathbb{Q}$ به‌عنوان فضای برداری، به روشی مشابه می‌توان نشان داد:

گزاره ۶. می‌توان نقاط $\mathbb{R}^2$ را با شمارا رنگ چنان رنگ‌آمیزی کرد که هیچ سه نقطهٔ همرنگ دو سر یک پاره‌خط و نقطهٔ میانی آن نباشد.

حتی حکم قویتری برقرار است:

گزاره ۷. رنگ آمیزی از نقاط $\mathbb{C}$ (صفحه دو بعدی) به شمارا رنگ موجودست که مثلثی تکرنگ متشابه با مثلث مفروض $\triangle$ در آن یافت نمی‌شود.

(توجه کنید که برای هر مثلث $\triangle A^*B^*C^*$ که با $\triangle ABC$ متشابه باشد، $z \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $B^* - A^* = z(C^* - A^*)$. از سویی $\mathbb{C}$ روی میدان $\mathbb{Q}(z)$ فضایی برداری است و می‌توان روی پایهٔ دلخواهی از آن ترتیب قرار داد.)

ولی هنوز چند پرسش جالب و حل نشده باقی‌ست:

۱) با در نظر گرفتن $\mathbb{R}^n$ روی $\mathbb{Q}$ به‌عنوان فضای برداری، می‌توان ثابت کرد که برای هر شکل با دست کم $n+2$ نقطه در $\mathbb{R}^n$، رنگ آمیزی شمارایی از $\mathbb{R}^n$ هست که شامل هیچ شکلی متشابه با شکل ذکر شده نباشد. آیا این حکم برای مجموعه نقطه‌های با تعداد کمتری نقطه هم درست است؟

۲) از آنجا که میدان $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ برای تعداد شمارایی عدد حقیقی، شماراست، نتیجه می‌شود (مشابه اثبات گزاره ۷) که برای تعداد شمارایی از چند ضلعیهای صفحه، یک رنگ آمیزی صفحه به شمارا رنگ یافت می‌شود که متشابه هیچیک از آنها را ندارد. حکم را به چه خانواده‌های ناشمارایی می‌توان تعمیم داد؟

۳) آیا برای زاویهٔ θ، رنگ‌آمیزی از صفحه به شمارا رنگ موجودست که هیچ سه نقطهٔ A, B, C در آن پیدا نشوند که $A\hat{B}C = \theta$؟

مراجع

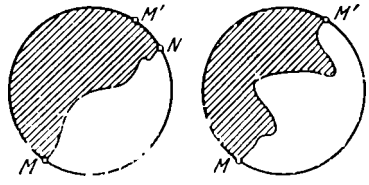
[1] R.L. Graham etal., "*Ramsey tehory*", 2nd ed., New York, Wily, 1990.

[2] R.L. Graham, "*Rudiments of Ramsey theory*", Conference board on math., no. 45, Published by AMS.

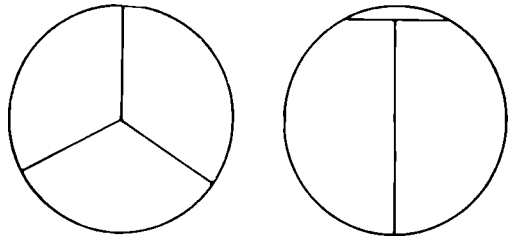
• دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

مسأله‌ای در افراز شکل‌ها

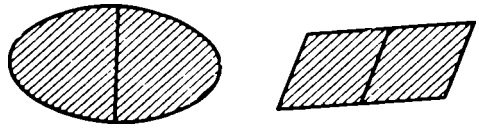
به سادگی دیده می‌شود که اگر دیسکی با قطر d توسط خمی مانند MN به دو بخش تقسیم شود، آنگاه دست‌کم یکی از این دو بخش قطر d دارد. در حقیقت اگر نقطهٔ روبروی M را M' بنامیم نقطهٔ M' باید به یکی از دو بخش متعلق باشد و این بخش (که M', M را در بردارد) قطر d دارد.



گذشته از این، روشن است که دیسک را می‌توان به سه بخش چنان تقسیم کرد که قطر کمتر از d داشته باشند.



پس دیسکی با قطر d را نمی‌توان به دو بخش با قطر کمتر از d افراز کرد، ولی به سه بخشِ این چنینی ممکن است تقسیم شود. همین حکم درباره مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع d هم برقرار است (زیرا اگر به دو بخش تقسیم شود، یکی از دو بخش دست‌کم دو رأس از مثلث را در بر خواهد داشت و این بخش قطر d خواهد داشت). اگرچه مجموعه‌هایی وجود دارند که می‌توان آنها را به دو بخش چنان تقسیم کرد که قطرشان کمتر باشد.



اگر مجموعه‌ای چون F داده شده باشد می‌توان مسأله تقسیم آن به بخش‌های با قطر کمتر را مطرح کرد. $a(F)$ را کمترین تعداد چنین مجموعه‌هایی بگیرید. اگر F یک دیسک یا یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد $a(F) = ۳$ و برای بیضی یا متوازی‌الاضلاع $a(F) = ۲$.

مسأله افراز یک مجموعه به مجموعه‌های با قطر کمتر را می‌توان از مجموعه‌های مسطح به اجسام سه بعدی هم تعمیم داد. (یا اگر خواننده با این مفاهیم آشناست، به فضای n بعدی)

مسأله یافتن مقادیر ممکن $a(F)$ را در سال ۱۹۳۳ ریاضی‌دان شهیر لهستانی ک. برسوک مطرح کرد و از آن زمان مقالات تحقیقاتی زیادی به این مسأله پرداخته‌اند.

جهت‌های نو در معادلات دیفرانسیل مقدماتی

ن. ا. بویس
ترجمه: مهدی مجیدی‌ذوالبنین •

بخش زیادی از درس معادلات دیفرانسیلی که به‌صورت سنتی تا چند سال اخیر تدریس می‌شد، به یافتن دستورهایی برای جوابهای معادلات دیفرانسیل مختلف اختصاص می‌یافت. زمانی که صرف انجام محاسبات لازم برای به‌دست آوردن چنین دستورهایی می‌شد، فرصت اندکی برای کسب مهارت در زمینهٔ صورتبندی مسائل به زبان ریاضی یا نتیجه‌گیری از جوابهای آنها باقی می‌گذاشت. امروزه بیشتر محاسبات جبری درس سنتی معادلات دیفرانسیل را می‌توان بر عهدهٔ کامپیوتر گذاشت. مثلاً با استفاده از Maple یا Mathematica می‌توان بیشتر مسائل کتابهای معادلات دیفرانسیل مقدماتی را تنها با یک یا دو فرمان حل کرد. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که چه مقدار از مطالب این درس ارزش نگهداشتن دارند و چه مقدار از آنها را باید به کامپیوتر واگذارکرد. پاسخ به این سؤال آسان نیست و افراد مختلف ممکن است به آن پاسخهای متفاوتی بدهند، اما به هر حال مقدار قابل ملاحظه‌ای از این مطالب سنتی را می‌توان با تجربه‌های باارزش برای دانشجو جایگزین کرد. این تجربه‌های باارزش‌تر کدامند؟ در اینجا سه نوع از این تجربه‌ها را به‌عنوان پیشنهاد مطرح می‌کنیم. این سه مورد را تحت عنوانهای مفهوم‌سازی، کاوش و حل مسائل پیشرفته بررسی خواهیم کرد. اگر چه مرز بین این مفاهیم چندان آشکار نیست، در هر مورد استفاده از مثالهای مناسب منظور ما را روشنتر خواهد کرد.

مفهوم‌سازی

کاستن از زمانی که صرف انجام محاسبات دستی می‌شود، فرصتی برای تأکید بیشتر بر درک مفهومی (به‌جای کسب مهارتهای صرفاً محاسباتی) فراهم می‌آورد. جزئیات روشها و الگوریتم‌های ریاضی به زودی فراموش می‌شوند، مگر به‌صورت مداوم به‌کار برده شوند. اما مفاهیم و ایده‌های زیربنایی، جزئی از فکر شخص می‌شوند و همواره در دسترس هستند و به اندازهٔ جزئیات دستخوش فراموشی نمی‌شوند. مثال زیر می‌تواند روشنگر باشد:

«مسائل غیرخطی، دشوارتر از مسائل خطی هستند. به همین دلیل، بسیاری از روشهای حل مسائل غیرخطی بر این پایه استوارند که مسأله به گونه‌ای خطی شود. بهایی که برای ساده کردن مسأله باید پرداخت آن است که نتایج به‌دست آمده تنها دارای اعتبار موضعی هستند.»

اگر ایدهٔ بالا در ذهن دانشجویی که یک درس معادلات دیفرانسیل مقدماتی را به پایان رسانیده جای گرفته باشد، می‌توان گفت که نتیجهٔ خوبی به‌دست آمده است. مقداری کار در زمینهٔ پیدا کردن و استفاده از تقریبات خطی، به تحکیم جایگاه این مفهوم در ذهن کمک می‌کند. جزئیات را می‌توان به هنگام ضرورت دوباره خواند.

کاوش

به‌خاطر بیاورید که حرکت یک آونگ آرمانی توسط معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

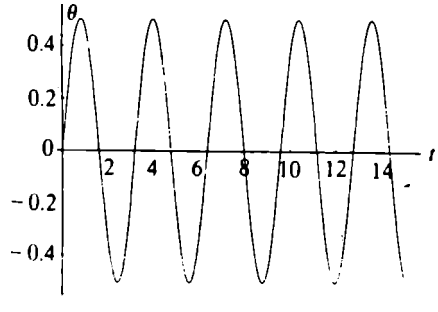
مجلهٔ ریاضی شمارهٔ ۷
(پاییز ۱۳۷۷) صص ۲۸ـ۲۳

با شرایط اولیهٔ

$$\theta(\circ) = \circ \ , \ \theta'(\circ) = v$$

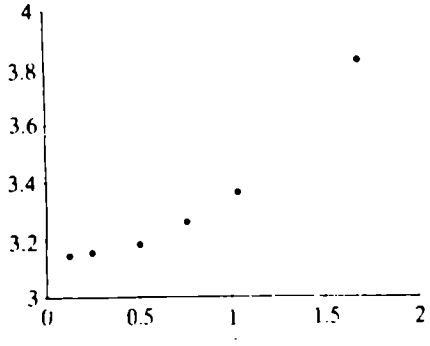
بیان می‌شود که $\theta(t)$ مکان زاویه‌ای آونگ، L طول، v سرعت زاویه‌ای اولیه و g شتاب ناشی از جاذبه هستند. این معادله جواب مقدماتی ندارد، ولی برای مقادیر داده شده از L و v، دانشجو می‌تواند به‌راحتی تقریبی برای جواب آن ترسیم نموده، ملاحظه کند که این تقریب به نظر تناوبی می‌آید. شکل ۱ چنین تقریبی را به ازای $\frac{g}{L} = ۴$ و $v = ۱$ نشان می‌دهد. دانشجو می‌تواند، از روی نمودار، دامنه A و دورهٔ تناوب T را برآورد کند. ترسیم جوابهای دیگر به ازای مقادیر متفاوتی از v به تخمین‌های دیگری از دامنه و دورهٔ تناوب می‌انجامد. پس از چند بار تکرار این کار، دانشجو ممکن است دریابد که میان دامنه و دورهٔ تناوب نوعی رابطه وجود دارد و این ارتباط را می‌توان با ترسیم چند تا از مقادیر برآورد شده ۲ از روی نمودار پیدا کرد. از سوی دیگر، تقریب خطی معادلهٔ فوق برای مقادیر کوچک θ، می‌گوید که دورهٔ تناوب و دامنه از یکدیگر مستقل هستند.

$$\frac{d^۲\theta}{dt^۲} + \frac{g}{L}\theta = \circ \ .$$



شکل ۱

می‌توان دانشجویان را به سمت کشف این نکته سوق داد که دورهٔ تناوبی که از اینجا به‌دست می‌آید، حد همان دورهٔ تناوب مربوط به معادلهٔ غیرخطی است، هنگامی که دامنه به صفر می‌گراید. بدین ترتیب آنها ارتباط میان یک معادلهٔ غیرخطی و تقریب خطی آن را خواهند فهمید و همزمان یک تفاوت مهم میان معادلات خطی و غیرخطی را نیز مشاهده خواهند نمود.



شکل ۲

در واقع برای رابطهٔ میان دامنه و دورهٔ تناوب یک آونگ غیرخطی، یک دستور صریح وجود دارد. از آنجایی که این رابطه دربردارندهٔ یک انتگرال بیضوی است، معمولاً در یک درس مقدماتی حرفی از آن زده نمی‌شود. می‌توان این رابطه را به دانشجویان داد و از آنها خواست تا مقادیری را که از راه مشاهده به‌دست آورده‌اند با مقادیر دقیقی که از این دستور به‌دست می‌آید، مقایسه کنند؛ اما مهم آن است که دانشجو بتواند چگونگی ارتباط دامنه و دورهٔ تناوب یک آونگ غیرخطی را پیدا کند، بی‌آنکه به دستوری پیچیده برخورد کند یا حتی از وجود آن آگاه باشد.

بسیاری از مسائل در ریاضیات کاربردی مستلزم تعیین یک مقدار بحرانی هستند که در آن نقطه نوع جواب عوض می‌شود. این را هم می‌توان به کمک مسألهٔ آونگ شرح داد. اگر سرعت اولیه v کوچک باشد آنگاه جواب، نشان‌دهندهٔ یک نوسان کوچک حول وضعیت تعادل $\theta = \circ$ خواهد بود. اما برای v بزرگ یک حرکت دورانی خواهیم داشت. یک سرعت اولیه معین بحرانی وجود دارد که در آن نوع حرکت تغییر می‌یابد. با ترسیم نمودار θ نسبت به t و افزایش دادن v می‌توان این مقدار بحرانی را برآورد کرد.

در یک درس معادلات دیفرانسیل امکانات زیادی برای کاوشهایی از این دست وجود دارد. ممکن است بعضی از مسائل دشوار با روشهای ابتدایی قابل حل نباشند، اما اکنون دانشجویان ابزار عددی و ترسیمی لازم برای بررسی و شناخت جوابها، بدون در دست داشتن دستوری برای آنها را در اختیار دارند. در واقع، وجود داشتن یا نداشتن یک دستور صریح برای جواب و توانایی یا ناتوانی دانشجو در به‌دست آوردن آن، نکاتی

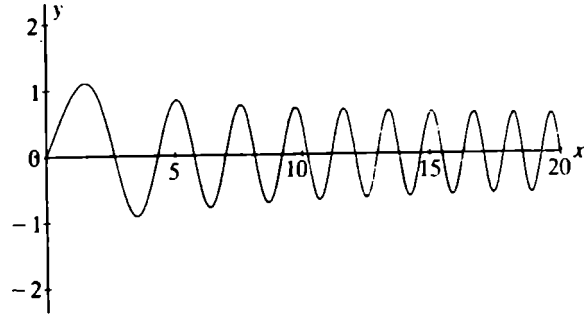
هستند که در درجه دوم اهمیت قرار دارند. این بدان معنی نیست که عبارتها و دستورهای صریح دیگر اهمیت ندارند، بلکه در صورت در دسترس و قابل درک بودن، در درجه اول اهمیت قرار دارند. اینها پایه‌های نوعی کاوش هستند که می‌توان آن را کاوش نمادین نامید. اطلاعات و تجربه‌های بسیاری در نرم‌افزارهایی مانند Maple و Mathematica قرار داده شده است و چگونگی بهره‌گیری از این ابزار کمکی را می‌توان به دانشجویان نشان داد. برای مثال، جوابهای بسیاری از معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب چندجمله‌ای را، که اغلب در مسائل کاربردی به آنها برمی‌خوریم، می‌توان برحسب تابعهای غیر جبری بیان کرد. مثلاً جواب مسألهٔ مقدار اولیه

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1 \quad (1)$$

چنین است:

$$y = \frac{2}{9}\frac{(3)^{\frac{5}{6}}\pi}{\Gamma(\frac{2}{3})}\sqrt{x}\,BesselJ(\frac{1}{3}, \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}) \quad (2)$$

این دستور به تنهایی برای دانشجویی که در مورد تابعهای بسل چیزی نمی‌داند، چندان روشنگر نیست. اما همان دانشجو (به کمک Maple یا Mathematica) می‌تواند مقادیر جواب را محاسبه کند یا نمودار آن را در یک بازه ترسیم کند (شکل ۳) و بدون دانستن معنی نمادهای به‌کار رفته در ۲ رفتار جواب را تعیین نماید. در شکل ۳ مشاهده می‌شود که دامنه و دورهٔ تناوب نوسان با افزایش مقدار متغیر مستقل x کاهش می‌یابند و مشاهده‌ای دقیقتر امکان برآورد نحوهٔ وابستگی این مقادیر به x را میسر می‌کند.



شکل ۳

برای دانشجویان کنجکاو فرمانهایی وجود دارند که مقدارهای $BesselJ$ را محاسبه و نمودار آن را رسم می‌کنند یا آن را به‌صورت یک سری توانی بسط می‌دهند یا صورت مجانبی آن را وقتی $x \to \infty$ مشخص می‌کنند. مقدار $\Gamma(\frac{2}{3})$ یا اطلاعاتی دیگر در مورد تابع گاما نیز در دسترس هستند. بدین ترتیب دانشجو می‌تواند از کامپیوتر به‌عنوان مرجعی برای آشنایی با تابعهای ناآشنایی در جوابهای معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شوند استفاده کند. از طریق ترسیم یک تقریب عددی جواب مسألهٔ مقدار اولیهٔ ۱ نیز می‌توان نموداری مانند نمودار شکل ۳ به‌دست آورد. این فرصتی است برای بحث در مورد مزایای نسبی جوابهای نمادین و عددی.

حل مسائل پیشرفته

منظور از حل مسائل پیشرفته در یک درس ریاضی سال اول یا دوم چه می‌تواند باشد؟ بدون شک باید ویژگیهای زیر را شامل باشد.

صورتبندی مسأله یا الگوسازی ریاضی

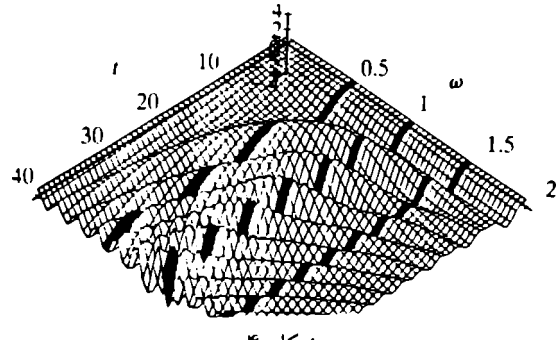
در یک درس مقدماتی معادلات دیفرانسیل موقعیتهای زیادی پیش می‌آید تا مسائل از کلمات به نمادهای ریاضی ترجمه شده، برای به‌کارگیری عملها و روشهای ریاضی آماده شوند. این کار برای برخی از دانشجویان بسیار دشوار است، زیرا از سویی این کار واقعاً پیکارجوست و از سوی دیگر، آنها موقعیتهای کمی برای تمرین الگوسازی داشته‌اند (درسهای قبلی آنها بر مهارتهای جبری متمرکز بوده‌اند). آموختن و آموزش دادن الگوسازی ریاضی هر دو مشکل هستند، اما اگر کسی بخواهد ابزارهای ریاضی را برای حل مسأله به‌کار ببرد، این کار اجتناب‌ناپذیر است.

دیدگاهها و روشهای گوناگون

می‌توان از میان روشهای عددی، ترسیمی، تحلیلی، و یا ترکیبی از آنها، یکی را برگزید. باید دانشجویان را پیوسته برای توجه به روشها و دیدگاههای هم‌ارز و راههای هم‌ارز نمایش نتایج به‌صورت فرمول، نمودار، اعداد یا جدولهای اعداد تشویق کرد. مثلاً یک بخش اساسی از درس سنتی معادلات دیفرانسیل به بررسی معادلهٔ مرتبهٔ دوم خطی با ضرایب ثابت اختصاص می‌یابد که یک دستگاه فنر-جرم، یا یک آونگ یا یک مدار سری ساده را که به‌صورت تناوبی تقویت می‌شود، توصیف می‌کند. مثالی از این نوع، چنین است

$$u'' + ۰٫۲۵u' + u = \cos \omega t \qquad u(۰) = ۱\,,\ u'(۰) = ۰ \qquad (۳)$$

با در نظر گرفتن بسامد نیروی تقویت کننده، ω، به‌عنوان یک پارامتر، می‌توان دنباله‌ای از نمودارها را به‌دست آورد که نشان دهندهٔ جواب به ازای مقدارهای مختلف ω هستند. با نمایش نمودارها به‌صورت پشت سر هم، می‌توان فیلمی ساخت که تغییرات نمودارها را نسبت به تغییرات ω به‌روشنی نشان دهد. یا معادلاً می‌توان یک نمودار ۳ بعدی (شکل ۴) رسم کرد که در آن جواب به‌عنوان تابعی از ω و زمان t نشان داده شده است. این روشهای معادل که خود دانشجویان می‌توانند به آسانی آنها را به‌کار ببرند، کمک مهمی در فهم رفتار دستگاه هستند.



شکل ۴

مسائل متنوع‌تر

اثر دستکاری‌های ممکن در مسأله، باید بخشی از مباحث و تکلیفهای دانشجویان باشد. یک راه برای انجام این کار، وارد کردن یک یا چند پارامتر در مسأله و بررسی چگونگی تغییر جواب در اثر تغییر پارامتر است، مانند مسألهٔ آونگ. یک مثال دیگر که در آن می‌توان بررسی نمادین را با نمودارها همراه کرد، دستگاه خودگردان زیر است

$$\frac{dX}{dt} = X(۳ - X - Y),$$
$$\frac{dY}{dt} = Y(۱ + ۲\alpha - Y - \alpha X),\ \alpha > ۰ \qquad (۴)$$

که الگویی است برای دو نژاد رقیب از جانداران. به آسانی می‌توان نشان داد که $X \equiv ۲\,,\ Y \equiv ۱$ به ازای همه مقدارهای α یک جواب تعادلی این دستگاه است. به‌علاوه، دستگاه خطی تقریب زننده، که در نزدیکی نقطهٔ $(۲,۱)$ معتبر است، عبارت است از

$$\frac{du}{dt} = -u - v\,,\ \frac{dv}{dt} = -\alpha u - v \qquad (۵)$$

که $u = X - ۲$ و $v = Y - ۱$، و مقدارهای ویژهٔ این دستگاه خطی، $\lambda = -۱ \pm \sqrt{\alpha}$ هستند. پس $\alpha = ۱$ یک نقطهٔ انشعاب است که در آن، وقتی مقدار ویژهٔ ماتریس ضرایب از صفر می‌گذرد، جواب تعادلی $(۲,۱)$ از یک گرهٔ پایدار مجانبی به یک نقطهٔ زینی ناپایدار تغییر می‌یابد. این را می‌توان با ترسیم رخساره‌های فاز دستگاه ۴ برای چند مقدار α نزدیک ۱ نیز مشاهده نمود (شکل ۵) معادلاً، می‌توان به ازای مقدارهای مختلف α، X و Y را برحسب t رسم کرد. حتی می‌توان با نمایش یک یا هر دوی این مجموعه از نمودارها، به‌صورت پشت سر هم، تغییرات سریع جواب را وقتی α به ۱ نزدیک شده، از آن می‌گذرد، نشان داد.

سایر فعالیتهای ممکن، مستلزم در نظرگرفتن الگوهای پیچیده‌تر، و شاید واقعی‌تر برای پدیدهٔ تحت بررسی است. در مورد آونگ، مسألهٔ خطی شده نیاز به فرضهای کوچک بودن جابجایی و مقاومت شارهٔ در برگیرندهٔ محیط دارد که ممکن است هیچکدام برقرار نباشد. اکنون شخص می‌تواند اثر انواع مختلف غیرخطی بودن‌ها را بررسی کند و محدودهٔ اعتبار تقریبهای خطی را نیز به‌صورتی دقیقتر مورد بررسی قرار دهد. یک راه مؤثر برای انجام این کار، روی هم قرار دادن رخساره‌های فاز دستگاههای خطی و غیرخطی است تا ناحیه‌ای از فضای حالت که در آن این رخساره‌ها تا حدودی با هم همخوانی دارند معین شود.

تخمین‌های عددی بیشتر

سادگی نسبی به‌دست آوردن جوابهای عددی، این امکان را فراهم می‌آورد تا از دانشجویان انتظار داشته باشیم بیش از پیش نتایج عددی تولید کنند.

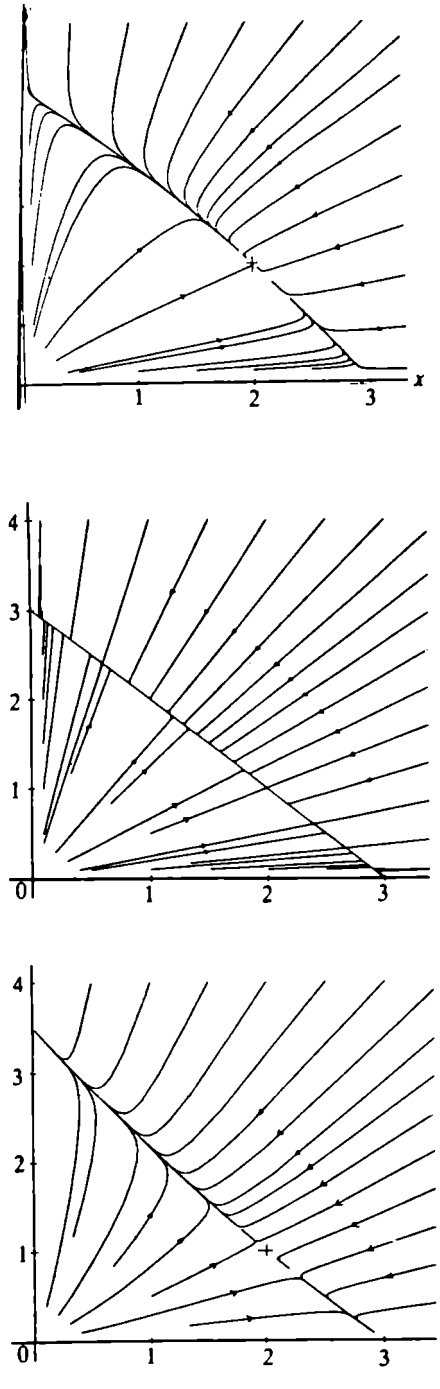
همچنین فرصتی ایجاد می‌شود تا به دانشجویان نشان دهیم که نباید تنها کورکورانه محاسبات عددی را انجام دهند. آنها باید، هرگاه که ممکن باشد، برآورد هم بکنند تا هم راهنمایی باشد برای محاسبه‌های گسترده‌تر و هم به‌عنوان ملاک سنجش درستی نتایج به‌کار برود.

نتیجه‌گیری در قالب مسائل

در مسائلی که از قالبهای فیزیکی، زیست‌شناسی یا علوم اجتماعی بیرون می‌آیند، جواب نهایی نباید به‌صورت یک دستور، یک نمودار یا یک عدد تنها باشد، بلکه باید شامل گزاره‌ای باشد که نتیجه را به همان زبانی که مسأله با آن طرح شده است تعبیر کند. دستورها، نمودارها و اعداد پایان کار نیستند، بلکه تنها ابزاری هستند که می‌خواهیم با آنها به ادراک و شهود دست بیابیم. همانطور که بیشتر دانشجویان با صورتبندی مسائل ناآشنا هستند، بیشتر آنها عادت به نتیجه‌گیری از کارشان را هم ندارند. باید مرتب به آنها یادآوری کرد که این کار را انجام دهند، زیرا این دلیل واقعی انجام کارهاست.

اجرا

ما چندین دیدگاه نو را که می‌تواند در یک درس مقدماتی معادلات دیفرانسیل به‌کار رود، تشریح کردیم. اما این به شرطی است که مدرس بخواهد از وقتی که پیش از این صرف محاسبات جبری سنتی مداد وکاغذی می‌شد چشم بپوشد. این‌که چه مقدار در این جهت باید پیش رفت تصمیمی است که در نهایت باید هر مدرس، یا دست‌کم هر دانشکده بگیرد. چند نکته هست که هنگام این تصمیم‌گیری باید در نظر گرفته شوند. اولین نکته آن است که از این طریق ممکن است درس مبارزطلب‌تر شود. محاسبات معمولی با مسائلی پیچیده‌تر و نوپدید جایگزین خواهند شد. البته دانشجویان نیز ابزارهای بسیار قویتری در اختیار خواهند داشت. به هر حال، برای این‌که درس به‌گونه‌ای محسوس مشکل‌تر نشود، تلاشی آگاهانه لازم است.



شکل ۵

سطح تکنولوژی قابل دسترس، چندان مهم نیست. بیشتر آنچه را که تشریح شد می‌توان حتی با ماشین‌های حسابگر جیبی هم انجام داد. هر چه دستگاهها پیچیده‌تر باشند، نیاز به حمایت تدارکاتی و متخصص نیز بیشتر خواهد بود. بنابر این هر چند امکانات سطح بالا برای محاسبه دارای مزایایی است دستگاههای ساده‌تر و کوچکتر نیز برتری‌هایی دارند.

انتخاب محتوای درس باید با دقت انجام شود. علاقه‌های شخصی، ارتباط میان این درس و سایر درسهای یک دانشکده و خیلی عوامل دیگر در این انتخاب مؤثرند.

سرانجام، یک پرسش مهم که باید به آن پاسخ گفت، آن است که چگونه آزمونها و روشهای سنجش را بازنگری کنیم، چرا که تا جایی که به دانشجویان مربوط می‌شود، این یک عامل تعیین کننده در درس است. یکی از کارهایی که می‌توان برای تغییر نحوه آزمون و روش نمره‌دهی انجام داد آن است که دانشجویان را موظف کنیم به‌طور هفتگی تمرینهایی را که می‌توانند آمیخته‌ای از کار با کاغذ و مداد و نتایج کامپیوتری باشند ارائه دهند، و این تمرینها، برای مثال یک‌سوم نمرهٔ درس را به خود اختصاص دهند. همچنین می‌توان تعداد سؤالهای مفهومی را در آزمونها و امتحانات پایانی افزایش داد. ممکن است برخی از مدرسین قسمتی از امتحان را در کلاس و قسمتی از آن را در یک آزمایشگاه کامپیوتر، که در آن هر دانشجویی یک کامپیوتر در اختیار دارد، برگزار کنند. در نتیجه، کار دانشجو، که نمره‌های درس بر پایهٔ آن تعیین می‌شود، به مقدار قابل ملاحظه‌ای با آنچه تاکنون رایج بوده است، تفاوت خواهد کرد.

چند نکته در پایان

با وجود تغییرات اساسی که پیشرفت تکنولوژی در چند سال گذشته به وجود آورده است، به ندرت از امکاناتی که اکنون وجود دارند یا به زودی وجود خواهند داشت بهره برده‌ایم. بی‌شک تنها چند سال دیگر، هر دانشجوی یک رشتهٔ فنّی به یک دستگاهِ جبریِ کامپیوتریِ توانا مانند Maple، Mathematica یا نسلهای بعدی آنها دسترسی فوری و مداوم خواهد داشت. این دانشجویان همچنین به بانکهای اطلاعاتی عظیم دسترسی آسان خواهند داشت چیزی که معادل کتابخانه‌های خیلی بزرگ است و در صورت تمایل، خواهند توانست آنها را با خود حمل کنند. تدریس درسهای ریاضی و خیلی از درسهای دیگر، با شرایط نوین هماهنگ خواهد شد. قضاوت در مورد میزان تغییرات لازم برای این هماهنگی، مشکل است. از آنجا که دسترسی به حجم زیادی از اطلاعات، از آنچه اکنون هست ساده‌تر خواهد شد، نقش مدرسین به‌صورت فزاینده‌ای از منتقل کنندگان اطلاعات به کمک کنندگان به دانشجویان برای یافتن راه خود در میان توده اطلاعاتی که آنها را در بر گرفته است، تغییر خواهد یافت. روابط میان دانشکده و دانشجویان بیشتر بر روی موارد زیر متمرکز خواهد شد: کمک به دانشجویان برای آموختن ناوبری در دریای اطلاعاتِ قابل دسترس، یافتن اطلاعات ویژه‌ای که در یک زمان خاص مورد نیاز هستند و ساختن چارچوبهای ذهنی مناسب برای تعبیر اطلاعات.

چیزی که تغییر نخواهد یافت نیاز به انسانهایی است که بتوانند به روشنی، منتقدانه، سازنده و خلاق در مورد مسائل روز، که بدون شک با گذشت زمان ساده‌تر نخواهند شد، فکر کنند. آنان الگوها و روشهای ریاضیی را که مناسب و مفید به‌نظر برسند به‌کار خواهند گرفت. درسهای ریاضی همراه با کامپیوتر، که بر ادراک مفهومی، کاوش و حل مسائل پیشرفته متمرکز هستند، بخش مهمی از آموزش این افراد خواهند بود.

[*] N.E. Boyce. *"New Directions In Elementary Differential Equation"*, The College Math. J., Vol. 25, No. 5, 1994.

• دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی
دانشگاه شهید بهشتی

خمهای جبری و معادلات سیاله

بهرنگ نوحی •

هر یک از ما بارها با مسألهٔ حل یک دستگاه معادلات جبری مواجه شده‌ایم. مثلاً حل معادلهٔ $x^n + y^n = 1$ یا $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ در $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Z}_p$. با وجود طبیعتِ نظریه اعدادیِ نمونه‌های بالا دامنهٔ نیاز ما به حل دستگاههای جبری منحصر به حل دستگاههای معادلات سیاله نمی‌شود. چنانکه معادلات جبری روی میدانهای دیگر به‌ویژه $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ نیز به کرات در حل مسائل ریاضی ظاهر می‌شوند. به همین دلیل، یافتن روشی واحد برای بررسی چنین دستگاههایی روی یک میدان داده شده می‌تواند مشکل‌گشای بسیاری از مسائل ریاضی باشد. چندان دور از انتظار نیست که حل دستگاههای جبری روی میدانهای بستهٔ جبری به‌مراتب ساده‌تر از حل چنین معادلاتی روی میدانهای کاملاً اختیاری باشد زیرا در چنین وضعیتی مجموعهٔ جواب دستگاه به اندازهٔ کافی غنی بوده، استخراج اطلاعات از آن به‌مراتب ساده‌تر از حالتی است که میدان بستهٔ جبری نیست. در حقیقت وقتی میدان بستهٔ جبری نیست ما مجموعهٔ بزرگی از جوابهایی را که وجود دارند ولی در قلمرو دید ما نیستند نادیده می‌گیریم و به این ترتیب اطلاعات فراوانی را از دست می‌دهیم. در آنچه می‌آید فقط حالتی را بررسی خواهیم کرد که میدان، بستهٔ جبری باشد. پس بهترین نقطه برای آغاز کار ما میدان $\mathbb{C}$ خواهد بود.

خمهای جبری مختلط

یک خم جبری در $\mathbb{C}^2$ عبارت است از مجموعهٔ صفرهای یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $f(x,y)$. از آنجایی که نقاط چنین خمی با یک قید مشخص می‌شوند انتظار می‌رود که آنچه به‌دست می‌آید دارای بعد مختلط ۱ باشد. این مطلب را می‌توان به‌طور دقیق‌تر هم بیان کرد اما نیاز به تعریف مفهوم تکینگی داریم.

تعریف ۱. *برای خم جبری C، نقطهٔ $p \in C$ را یک نقطهٔ تکینه می‌گوییم اگر*

$$\nabla f(p) = [\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)] = [0, 0]$$

در غیر این صورت نقطهٔ p را یک نقطهٔ هموار می‌گوییم. برای نقاط $p \in C$ می‌توانیم به‌طور طبیعی فضای مماس هم تعریف کنیم. به این صورت:

$$T_pC = \{v \in \mathbb{C}^2 \mid \nabla f(p)(v - p) = 0\}$$

بنابر این نقطهٔ $p \in C$ هموار است اگر و تنها اگر فضای مماس در p، یک‌بعدی باشد. هموار بودن نقطهٔ $p \in C$ را به این صورت هم می‌توان تعبیر کرد: نمودار تابع $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}^2$ در نظر بگیرید و آن را Γ بنامید.

هموار بودن C در نقطهٔ p یعنی Γ صفحهٔ $z = 0$ را در نقطهٔ $(p, 0)$ «*قطع می‌کند*»[1] و تکینه بودن p نیز به این معناست که صفحهٔ $z = 0$ در نقطهٔ $(p, 0)$ بر Γ مماس است.

بنابر این در حالتی که C در نقطهٔ p هموار باشد، C در یک همسایگی از p یک زیرخمینهٔ تحلیلی $\mathbb{C}^2$ خواهد بود. پس اگر نقاط تکینهٔ C را، که به‌وضوح تعداد آنها متناهی است، از C کنار بگذاریم یک زیرخمینهٔ تحلیلی یک‌بعدی از $\mathbb{C}^2$ خواهیم داشت.

۱) i.e. transversaly

مجلهٔ ریاضی شمارهٔ ۷
(پاییز ۱۳۷۷) صص ۳۰ـ۲۹

به‌طور کلی فرض کنید $f_1, \ldots, f_m$، چندجمله‌ای‌های n متغیرهٔ مختلط باشند. مجموعهٔ صفرهای مشترک این چندجمله‌ایها یک زیرمجموعهٔ X از $\mathbb{C}^n$ خواهد بود. چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های جبری می‌نامیم. یک مجموعهٔ جبری می‌تواند اجتماع دو زیرمجموعهٔ جبری کوچکتر باشد. مثلاً چندجمله‌ای $f(x,y) = x(y-x^2)$ زیرمجموعه‌ای جبری از $\mathbb{C}^2$ را مشخص می‌کند که اجتماع دو خم جبری $C_1 : x = 0$ و $C_2 : y - x^2 = 0$ است.

مجموعهٔ جبری $X \subseteq \mathbb{C}^n$ را یک *واریتهٔ جبری*[1] می‌گوییم هرگاه اجتماع دو زیرمجموعهٔ جبری کوچکتر از خودش نباشد. در حالت $n = 2$ واریته‌های جبری همان خمهای جبری هستند.

مشابهاً می‌توان برای واریته‌های جبری هم مفهوم فضای مماس را مطرح کرد. فرض کنید $X \subseteq \mathbb{C}^n$ یک واریتهٔ جبری باشد. تعریف می‌کنیم

$$T_pX = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \nabla F(v-p) = 0\}$$
$$F = (f_1, \ldots, f_m)$$

نقطهٔ $p \in X$ را هموار می‌گوییم هرگاه بعد T_pX کمینه مقدار ممکن باشد. در غیر این صورت آن را تکینه می‌گوییم. می‌توان نشان داد که مجموعهٔ نقاط هموار X، یک زیرمجموعهٔ باز و چگال از X است و در چنین نقاطی X موضعاً زیرخمینه‌ای تحلیلی با بعد (مختلط) d از $\mathbb{C}^n$ است. بنابر این اگر مجموعه نقاط تکینه X، را که یک زیرمجموعهٔ بسته و درون تهی از X است، کنار بگذاریم آنچه باقی می‌ماند زیرخمینه‌ای تحلیلی $\mathbb{C}^n$ از بعد d خواهد بود. این d می‌تواند ۱ هم باشد. در این حالت نیز به X یک خم جبری می‌گوییم. لزومی ندارد که چنین خمی را بتوان در $\mathbb{C}^2$ نشاند بنابر این بهتر است تعریف قبلی خود از خم جبری را کمی اصلاح کنیم:

تعریف. *خم جبری عبارت است از واریتهٔ جبری با بعد ۱.*

چنان‌که دیدیم اگر مجموعه‌ای متناهی از نقاط خم جبری $\mathbb{C}^2$، یعنی نقاط تکینه را کنار بگذاریم یک رویهٔ ریمانی خواهیم داشت.

خمهای جبری در فضای تصویری $\mathbb{C}P^n$

فرض کنید $f(x,y)$ یک چندجمله‌ای از دو متغیر و با درجهٔ n باشد. چندجمله‌ای سه‌متغیرهٔ $\hat{f}(x,y,z)$ را چنین تعریف می‌کنیم $\hat{f}(x,y,z) = z^n f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. مثلاً اگر

$$f(x,y) = x^4y^2 + x^3 + y$$

خواهیم داشت:

$$\hat{f}(x,y,z) = x^4y^2 + x^3z^3 + yz^5$$

اگر $f(x,y,z)$ یک چندجمله‌ای دلخواه از درجه n باشد $\hat{f}(x,y,z)$ یک چندجمله‌ای همگن از درجهٔ n خواهد بود. بنابر این معادلهٔ $\hat{f}(x,y,z) = 0$ به‌طور خوشتعریف زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{CP}^2$ را مشخص می‌کند. به‌طور کلی زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{CP}^2$ را که توسط یک چندجمله‌ای همگن تحویل‌ناپذیر به‌دست می‌آید یک *خم جبری تصویری* می‌نامیم. با این روش می‌توان یک خم جبری $C \subseteq \mathbb{C}^2$ را به یک خم جبری تصویری در $\mathbb{CP}^2$ گسترش داد به این صورت که فرض کنید C توسط چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر f داده شده باشد در این صورت $\hat{f}$ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری خواهد بود که خم جبری $\bar{C}$ را، که آن را تصویری شدهٔ C می‌نامیم، در $\mathbb{CP}^2$ به‌دست می‌دهد. قابل توجه است که اگر $\mathbb{C}$ را با قسمت آفین $\mathbb{CP}^2$ که به صورت $\{(x,y,z) \in \mathbb{CP}^2 \mid z \neq 0\}$ تعریف می‌شود یکی کنیم، $\bar{C}$، تصویری شده C، همان بستار توپولوژیک C خواهد بود و به‌علاوه $\bar{C} \cap \mathbb{C}^2 = C$. بنابر این، تناظر یک به یکی بین خمهای جبری $\mathbb{C}^2$ و خمهای جبری تصویری $\mathbb{CP}^2$ که قسمت آفین مذکور را قطع می‌کنند وجود دارد:

$$\{\text{خمهای جبری } \mathbb{C}^2\} \overset{\text{بستارگیری}}{\underset{\text{آفین}}{\rightleftarrows}} \{\text{خمهای جبری‌تصویری در } \mathbb{CP}^2\}$$

به‌علاوه چون می‌توان $\mathbb{CP}^2$ را با سه نسخه از $\mathbb{C}^2$ پوشاند برای نقاط یک خم جبری تصویری نیز می‌توان مفاهیم هموار بودن و تکینه بودن را مطرح کرد زیرا کافی است، با گرفتن اشتراک با $\mathbb{C}^2$ مناسب، مسأله را به حالت خم جبری معمولی تبدیل کنیم.

به‌طور کلی می‌توان فرآیند بالا را برای هر واریتهٔ جبری انجام داد و به این ترتیب به هر واریتهٔ جبری یک واریتهٔ جبری تصویری

---

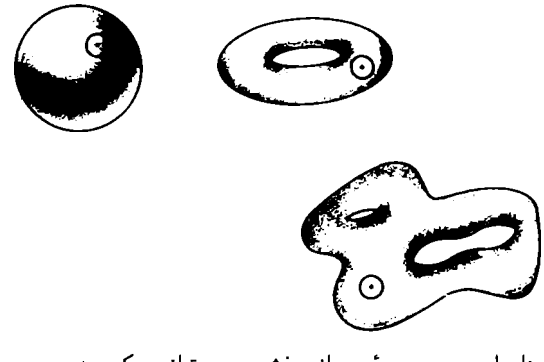
۱) algebraic variety

نسبت می‌دهیم. برتری واریتهٔ جبری تصویری بر واریتهٔ جبری معمولی در این است که هر واریتهٔ جبری تصویری فشرده است زیرا زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $\mathbb{CP}^n$ است اما یک واریتهٔ جبری معمولی هیچگاه فشرده نیست مگر در حالتی که نقطه باشد.

چنان‌که می‌دانیم اگر از یک خم جبری تصویری مجموعه نقاط تکینهٔ آن را حذف کنیم یک رویهٔ ریمانی خواهیم داشت. بالاخص اگر خم تصویری ما هموار باشد، یعنی هیچ نقطهٔ تکینه نداشته باشد، خود یک رویهٔ ریمانی فشرده خواهد بود. برای کسی که با نظریهٔ رویه‌های ریمانی آشنایی دارد این مطلب نویدبخش پیشرفتی قابل ملاحظه در بررسی خمهای جبری است زیرا چنان‌که خواهید دید نظریهٔ رویه‌های ریمانی فشرده، علاوه بر زیبایی، ابزارهای کارآمدی را برای بررسی خمهای جبری در اختیار ما قرار می‌دهد. از این پس ما خود را درگیر مفهوم تکینگی نمی‌کنیم و توجه خود را معطوف به خمهای جبری هموار می‌کنیم و به این ترتیب قدم به نظریهٔ رویه‌های ریمانی فشرده گذاریم.

مقدمات در مورد رویه‌های ریمانی فشرده

هر رویهٔ ریمانی فشرده را می‌توان به‌عنوان یک خمینهٔ حقیقی ۲بعدی فشرده و جهت‌دار در نظر گرفت. بنابر این با توجه به رده‌بندی ۲-خمینه‌های فشردهٔ جهت‌دار نتیجه می‌شود که از نظر توپولوژیک یک رویهٔ ریمانی فشرده باید به یکی از صورتهای زیر باشد:



بنابر این به هر رویهٔ ریمانی فشرده می‌توانیم یک عدد صحیح به نام گونه[۱] نسبت دهیم که آن را از نظر توپولوژیک دقیقاً مشخص می‌کند. آن را با g نشان خواهیم داد. گونه، رویه‌های ریمانی فشرده را در حد توپولوژی دقیقاً مشخص می‌کند ولی این به آن معنا نیست که تمامی رویه‌های ریمانی فشرده را شناخته‌ایم. در واقع چنان‌که در آینده خواهیم دید ممکن است دو رویهٔ ریمانی از نظر توپولوژیک یکسان باشند ولی از دیدگاه مختلط با هم تفاوت داشته باشند. یادآوری می‌کنیم که به تابع $f : X \to Y$ بین رویه‌های ریمانی یک تابع تحلیلی گفته می‌شود اگر هر نمایش موضعی آن تحلیلی باشد. همین طور X و Y را هم‌ارز تحلیلی می‌گوییم اگر توابع تحلیلی $f : X \to Y$ و $g : Y \to X$ وجود داشته باشند که وارون یکدیگر باشند. هم‌ارزی تحلیلی را با $X \cong Y$ نشان می‌دهیم.

گزاره. *اگر برای رویهٔ ریمانی فشردهٔ X داشته باشیم $g = 0$ آنگاه $X \cong S$ که در آن S کرهٔ ریمان است.*

این حکم نتیجهٔ فوری قضیهٔ یکنواخت‌سازی است که بیان می‌دارد هر رویهٔ ریمانی همبند ساده با $\mathbb{C}$، $\mathbb{D}$ و یا S، هم‌ارز تحلیلی است. بنابر این برای $g = 0$ تنها یک نوع رویهٔ ریمانی فشرده داریم.

اگر $g = 1$ از نظر توپولوژیک رویهٔ ریمانی ما یک چنبره است ولی نشان می‌دهیم که چنبره می‌تواند ساختارهای مختلط گوناگونی را بپذیرد که با یکدیگر هم‌ارز تحلیلی نیستند.

خوشبختانه می‌توان کلیه ساختارهای مختلط روی چنبره را شناسایی کرد. فرض کنید $\Lambda = \{m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ یک شبکه در $\mathbb{C}$ باشد که در آن w_1 و w_2 بردارهایی مستقل خطی (روی $\mathbb{R}$) هستند. $\mathbb{C}/\Lambda$ یک رویهٔ ریمانی همانریخت با چنبره است. از سوی دیگر می‌توان ثابت مرد هر رویهٔ ریمانی همانریخت با چنبره مانند X نیز همین‌گونه به‌دست می‌آید. در حقیقت می‌توان نشان داد که پوشش جهانی[۲] X برابر است با $\mathbb{C}$. بنابر این فضای پوششی منظم $\mathbb{C} \xrightarrow{p} X$ را داریم. گروه تبدیلات[۳] این پوشش، یک زیرگروه گسسته از $\mathbb{C}$ است. از طرفی تنها زیرگروههای گسسته $\mathbb{C}$ عبارتند از $\{0\}$ و $\mathbb{Z}w$ و شبکه‌ها. $\mathbb{C}/\mathbb{Z}w$ یک استوانه است بنابر این تنها حالت ممکن این است که این گروه، تبدیلات یک شبکه $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ باشد. بنابر این X به‌طور طبیعی با $\mathbb{C}/\Lambda$ هم‌ارز تحلیلی است. حال که روش ساخت تمام رویه‌های ریمانی با $g = 1$ را می‌دانیم

۱) genus

۲) universal covering

۳) deck group

سؤال این است که چگونه می‌توانیم تشخیص دهیم که چه هنگام $\mathbb{C}/\Lambda_1$ و $\mathbb{C}/\Lambda_2$ هم‌ارز تحلیلی هستند. اگر دو شبکه چنین باشند آنها را هم‌ارز می‌گوییم.

گزاره. *$\mathbb{C}/\Lambda_1 \cong \mathbb{C}/\Lambda_2$ اگر و تنها اگر $\mu \neq 0$ در $\mathbb{C}$ وجود داشته باشد چنان‌که $\mu\Lambda_1 = \Lambda_2$.*

اثبات. هم‌ارزی تحلیلی $f : \mathbb{C}/\Lambda_1 \to \mathbb{C}/\Lambda_2$ را می‌توان چنان به $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ گسترش داد که نمودار زیر جابجایی شود. این کار ممکن است زیرا $\mathbb{C}$ پوشش جهانی $\mathbb{C}/\Lambda_1$ و $\mathbb{C}/\Lambda_2$ است.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \mathbb{C}/\Lambda_2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Lambda_1 \end{array}$$

F یک هم‌ارزی تحلیلی است و $F(\Lambda_1) = \Lambda_2$ در حقیقت برای هر $w \in \Lambda_1$ داریم:

$$h(z) = F(z+w) - F(z) \in \Lambda_2$$

اما توجه کنید که $h : \mathbb{C} \to \Lambda_2$ تابعی پیوسته است پس باید ثابت باشد. بنابر این $h'(z) \equiv 0$ یا معادلاً $F'(z+w) = F'(z)$. از اینجا به‌دست می‌آید که F' تابع تحلیلی خوشتعریفی روی $\mathbb{C}/\Lambda_1$ القا می‌کند. اما بعدها خواهیم دید که تنها توابع تحلیلی روی یک رویه ریمانی فشرده توابع ثابت هستند بنابر این F' ثابت است یعنی μ, λ در $\mathbb{C}$ وجود دارند که: $F(z) = \mu z + \lambda$ پس $\mu\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$، استدلال مشابه برای F^{-1} نشان می‌دهد که $\mu^{-1}\Lambda_2 \subseteq \Lambda_1$ بنابر این $\mu\Lambda_1 = \Lambda_2$. طرف دیگر حکم بدیهی است.

در اینجا بد نیست کمی به جنبهٔ جبری مسأله بازگردیم. قبلاً دیدیم که هر خم جبری هموار یک رویهٔ ریمانی فشرده است. حال این سؤال مطرح است که برای چه خمهایی گونهٔ رویه ریمانی نظیر آن برابر یک است و چگونه می‌توان یک رویه ریمانی با گونهٔ یک را به‌صورت یک خم جبری هموار در $\mathbb{CP}^n$ مناسبی نشان داد.

گزاره. *فرض کنید F یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر همگن با سه متغیر باشد که یک خم جبری هموار در $\mathbb{CP}^2$ تعریف می‌کند. در این صورت $g = 1$ اگر و تنها اگر $\deg F = 3$.*

توجه کنید که همیشه می‌توان با تغییر متغیر مناسبی F را به‌صورت

$$F(x,y,z) = y^2 z - a_3 x^3 - a_2 x^2 z - a_1 x z^2 - a_0 z^3$$

درآورد که در مختصات آفین $Z = 1$ به‌صورت $Y^2 - a_3X^3 - a_2X^2 - a_1X - a_0$ در می‌آید. به عبارت دیگر معادلهٔ خم به‌دست آمده توسط F را می‌توان به این صورت نوشت

$$y^2 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

و از شرط هموار بودن به‌دست می‌آید که چندجمله‌ای سمت راست ریشهٔ تکراری ندارد. پس گزارهٔ اخیر را می‌توان به این صورت ترجمه کرد:

خم جبری هموار $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ گونه ۱ دارد اگر و تنها اگر یک خم بیضوی باشد.

حال این حکم را ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض کنید C به‌عنوان رویهٔ ریمانی با $\mathbb{C}/\Lambda$ هم‌ارز تحلیلی باشد که Λ شبکه‌ای در $\mathbb{C}$ است. تابع $\mathfrak{P}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{P} : \mathbb{C} - \mathbb{C} \quad \text{مرومورف}$$
$$\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{w \in \Lambda \\ w \neq 0}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

با استفاده از آزمون وایرشتراس می‌توان نشان داد که سری بالا روی هر مجموعهٔ فشرده از جایی به بعد همگرای یکنواخت است بنابر این روی هر مجموعهٔ فشرده $\mathfrak{P}$ مجموع تعدادی متناهی تابع مرومورف و یک تابع تحلیلی خواهد بود. از اینجا نتیجه می‌شود که $\mathfrak{P}$ یک تابع مرومورف روی $\mathbb{C}$ است. $\mathfrak{P}$ تابعی زوج است که در نقاط Λ قطب مرتبهٔ دو دارد و در سایر نقاط قطبی ندارد. به‌علاوه برای هر $w \in \Lambda$ داریم $\mathfrak{P}(z+w) = \mathfrak{P}(z)$. بنابر این $\mathfrak{P}$ تابعی از $\mathbb{C}/\Lambda$ به کرهٔ ریمان القا می‌کند. بنابر قضیهٔ نگاشت باز تصویر تابع القایی زیرمجموعه‌ای باز از کره ریمان است و بنابر فشردگی $\mathbb{C}/\Lambda$ زیرمجموعه‌ای فشرده است. پس تصویر تابع القایی کل کره ریمان است. پس $\mathfrak{P} : \mathbb{C}/\Lambda \to S$ تابعی پوشاست و چنانکه بعداً خواهیم دید این تابع دو به یک است.

از آنجا که $\wp$ تابعی زوج است بسط لوران آن حول صفر چنین است:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots$$

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که $a_4 = 5\sum_{w\in\Lambda,\, w\neq 0} \frac{1}{w^6}$ و $a_2 = 3\sum_{w\in\Lambda,\, w\neq 0} \frac{1}{w^4}$ و $a_0 = 0$. تابع $\wp'(z) = -2\sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$ را در نظر بگیرید. $\wp'$ تابعی فرد است که در نقاط Λ قطب مرتبهٔ ۳ دارد و در سایر نقاط تحلیلی است. همچنین $\wp'$ دارای دورهٔ تناوب Λ است. مشابه حالت $\wp$ می‌توان نشان داد $\wp'$ تابعی پوشا و سه به یک از $\mathbb{C}/\Lambda$ به S القا می‌کند. و داریم:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \cdots$$

به‌سادگی می‌توان دید که $\wp'^2 - 4\wp^3 + 20a_2\wp + 28a_4$ در صفر قطب ندارد یعنی تابعی تحلیلی است. این تابع هم دارای دورهٔ تناوب Λ است پس تابعی تحلیلی روی $\mathbb{C}/\Lambda$ القا می‌کند. اما تنها تابع تحلیلی روی چنبره، تابع ثابت است پس تابع اخیر نیز ثابت است. با مقدارگذاری $z = 0$ دیده می‌شود که در حقیقت این مقدار ثابت صفر است. به عبارت دیگر ثابت کرده‌ایم که

$$\wp'^2 \equiv 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \qquad (*)$$
$$(g_2 = 20a_2 \quad g_3 = 28a_4)$$

اکنون تابع $(\wp, \wp') : \mathbb{C}/\Lambda - \{0\} \to \mathbb{C}^2$ را در نظر بگیرید. اتحاد اخیر نشان می‌دهد که تصویر این تابع زیرمجموعه‌ای است از خم بیضوی $C : y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$. این تابع در حقیقت پوشا نیز هست. فرض کنید $(x_0, y_0) \in C$. از پوشا بودن $\wp$ نتیجه می‌شود که $u \in \mathbb{C}/\Lambda - \{0\}$ وجود دارد به نحوی که $\wp(u) = x_0$. از اتحاد $(*)$ نتیجه می‌شود که $\wp'(u) = \pm y_0$. اگر $\wp'(u) = y_0$ حکم واضح است وگرنه از $-u$ به‌جای u استفاده می‌کنیم. چون $\wp$ زوج و $\wp'$ فرد است تصویر u تحت $(\wp, \wp')$ نقطهٔ (x_0, y_0) خواهد بود. از طرفی $(\wp, \wp')$ یک به یک نیز هست. زیرا فرض کنید $u, u' \in \mathbb{C}/\Lambda - \{0\}$ وجود داشته باشد که تصویر آنها تحت $(\wp, \wp')$ یکی باشد. ابتدا فرض کنید $u \notin \frac{1}{2}\Lambda$. در این صورت از شرط دو به یک بودن $\wp$ و زوج بودن آن به‌دست می‌آید که $u' = -u$ اما $\wp'$ تابعی فرد است و $\wp'(u) = \wp'(-u)$ پس $\wp'(u) = 0$. اما $\wp'$ تابعی سه به یک است که در نقاط $\frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ و $\frac{1}{2}w_2$ و $\frac{1}{2}w_1$، و w_2 و w_1 مولدهای شبکه Λ، صفر می‌شود (چون فرد است) بنابر این u باید با یکی از این سه نقطه برابر باشد که با شرط $u \notin \frac{1}{2}\Lambda$ متناقض است. حال فرض کنید $u \in \frac{1}{2}\Lambda$. پس u یکی از $\frac{1}{2}(w_1 + w_2)$، $\frac{1}{2}w_2$ و $\frac{1}{2}w_1$ است. مثلاً بگیرید $u = \frac{1}{2}w_1$. از آنجایی که مشتق $\wp$ در u صفر است $\wp$ در u دارای تکرر دست کم ۲ است.

از طرفی $\wp$ تابعی دو به یک است. از این بحث نتیجه می‌شود که تکرر $\wp$ در u دقیقاً دو است، برای هر نقطه $u' \in \mathbb{C}/\Lambda$ نیز داریم $\wp(u) \neq \wp(u')$ و یک به یک بودن تابع $(\wp, \wp')$ در این حالت ثابت می‌شود. پس تا به حال نشان داده‌ایم که $(\wp, \wp')$ تابعی یک به یک و پوشاست. از آنجایی که $\wp'$ ریشهٔ تکراری ندارد $\wp''$ و $\wp'$ هر دو همزمان نمی‌توانند صفر شوند پس مشتق تابع $(\wp, \wp')$ همیشه ناصفر است پس این تابع یک نشاندن از $\mathbb{C}/\Lambda - \{0\}$ در $\mathbb{C}^2$ است. تا به حال موفق شده‌ایم $\mathbb{C}/\Lambda - \{0\}$ را به‌صورت خمی بیضوی با معادلهٔ $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ در $\mathbb{C}^2$ بنشانیم. به عبارت دیگر

$$(\wp, \wp') : \mathbb{C}/\Lambda - \{0\} \to C$$

یک هم‌ارزی تحلیلی است. بنا بر قضیه تکینه برداشتنی دیده می‌شود که

$$\overline{(\wp, \wp')} : \mathbb{C}/\Lambda \to C \cup \{\infty\} = \bar{C} \subseteq \mathbb{CP}^2$$

نیز یک هم‌ارزی تحلیلی بین رویه‌های ریمانی است. به این ترتیب $\mathbb{C}/\Lambda$ به‌صورت یک خم جبری در $\mathbb{CP}^2$ نشانده می‌شود.[۱]

نکته قابل توجهی در مورد این نشاندن وجود دارد. می‌دانیم که برای هر خم بیضوی می‌توان یک عمل جمع جابجایی که عضو خنثای آن نقطه $\{\infty\}$ است تعریف کرد. از طرفی $\mathbb{C}/\Lambda$ نیز به عنوان گروه خارج قسمتی، عمل جمعی را از $\mathbb{C}$ به ارث می‌برد که عضو خنثای آن $\{0\}$ است. حال سؤال این است که هم‌ارزی تحلیلی به‌دست آمده در بالا بین $\mathbb{C}/\Lambda$ و خم بیضوی $\bar{C}$ چه بلایی بر سر عمل جمع می‌آورد. حقیقتی جالب ولی نابدیهی این است که هم‌ارزی تحلیلی بالا در حقیقت یک یکریختی گروهها نیز

۱) اگر از این اثبات گیج‌کننده خوشتان نیامد توضیح بعد از گزارهٔ (۲) قسمت بعد را ببینید!

هست. اثبات این مطلب چندان دشوار نیست ولی در اینجا به آن نمی‌پردازیم. در مثال ۴ تعبیر دیگری برای عمل جمع خمهای بیضوی ارائه خواهیم کرد.

در بالا ثابت کردیم که خم بیضوی $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ را می‌توان از نشاندن رویهٔ ریمانی $\mathbb{C}/\Lambda$ در $\mathbb{CP}^2$ به‌دست آورد. حال سؤال این است که آیا هر خم بیضوی را می‌توان همانند بالا از نشاندن $\mathbb{C}/\Lambda$ به ازای شبکه مناسب Λ به‌دست آورد؟ پاسخ: آری! تنها باید نشان داد که اگر چندجمله‌ای $4x^3 - ax - b$ ریشهٔ تکراری نداشته باشد یا معادلاً $a^3 - 27b^2 \neq 0$، همیشه شبکه Λ وجود دارد چنان‌که $g_2(\Lambda) = b$ و $g_3(\Lambda) = a$.

توابع مرومورف روی رویه‌های ریمانی فشرده

در این قسمت هدف ما این است که توابع مرومورف روی یک رویهٔ ریمانی را مورد بررسی قرار دهیم. مسأله‌ای که بیشتر مورد توجه خواهد بود این است که قطبها و صفرها چگونه توزیع می‌شوند. نکاتی هم در مورد توابع تحلیلی بین رویه‌های ریمانی مطرح خواهیم کرد. از این پس هر رویه ریمانی را همبند فرض می‌کنیم.

گزاره ۱. *هر تابع مرومورف ناثابت روی یک رویه ریمانی فشرده حتماً قطب دارد.*

اثبات. *بنا بر قضیهٔ نگاشت باز تصویر یک تابع مرومورف غیر ثابت یک زیرمجموعه باز از S، کرهٔ ریمان، است. به‌علاوه بنا بر فشردگی این تصویر بسته نیز هست لذا تصویر تابع کل S را می‌پوشاند، بالاخص ∞ را.*

یادآوری: به خاطر بیاورید که قضیهٔ نگاشت باز نتیجه‌ای از حکم بسیار مهم زیر است:

* هر نگاشت غیر ثابت تحلیلی از باز U به باز V، در هر نقطهٔ $p \in U$ دارای نمایش موضعی $z \to z^n$ است.

حکم اخیر به خودی خود دارای اهمیت فراوانی است زیرا رفتار موضعی یک تابع مرومورف روی یک رویه ریمانی را به‌خوبی مشخص می‌کند. کاربردی از این حکم را در گزارهٔ بالا دیدیم. حال کاربرد دیگری از آن را بررسی می‌کنیم. به این منظور نیاز به تعریف زیر داریم.

تعریف. *فرض‌کنید X و Y رویه‌های ریمانی و $f : X \to Y$ تابعی تحلیلی باشد. می‌گوییم (X, f, Y) یک فضای پوششی شاخه‌دار است اگر به ازای هر $y \in Y$ بتوان همسایگی U حول y را طوری پیدا کرد که $f^{-1}(U) = \cup V_\alpha$ و $f|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ در مختصات مناسب به‌صورت $z \to z^n$ باشد. در چنین شرایطی نقطهٔ $x \in V_\alpha$ را که در $f^{-1}(y)$ قرار دارد شاخه‌دار[1] می‌گوییم هرگاه $n \geq 2$ و n را عدد شاخه‌ای[2] می‌نامیم. در غیر این صورت نقطه را بی‌شاخه می‌گوییم.*

یک فضای پوششی در حقیقت عبارت است از یک فضای پوششی شاخه‌دار که نقطهٔ شاخه‌دار ندارد.

توضیح. *عدد شاخه‌ای نقطهٔ $x \in X$ را با $e_f(x)$ نمایش می‌دهیم. $e_f(x) = n$ مانند این است که نقطهٔ x با تعدد n به y نگاشته شود. به‌علاوه اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ توابعی تحلیلی باشند خواهیم داشت:*

$$e_{g\circ f}(x) = e_f(x)e_g(f(x))$$

مثال. *فرض کنید f یک چندجمله‌ای از درجهٔ m با ضرایب مختلط باشد. در این صورت تابع $f : S \to S$ را خواهیم داشت. خواهیم دید که (S, f, S) یک فضای پوششی شاخه‌دار است. تصویر وارون نقطهٔ $y_0 \in S$ عبارت است از جوابهای معادلهٔ $f(x) = y_0$. به‌علاوه نقطهٔ $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ شاخه‌دار است اگر و تنها اگر ریشهٔ مکرر معادلهٔ اخیر باشد. به‌طور دقیقتر $e_f(x_0)$ برابر است با بستایی $x - x_0$ در تجزیهٔ چندجمله‌ای $f(x) - y_0$.*

توضیح. *اگر $P : X \to Y$ یک فضای پوششی شاخه‌دار باشد در این صورت $\#f^{-1}(y)$ برای کلیه $y \in Y$ها ثابت است به شرطی که هر نقطهٔ $x \in f^{-1}(y)$ را به اندازهٔ تکرر آن، $e_f(x)$، بشماریم. اثبات ساده است. از تعریف فضای پوششی شاخه‌دار روشن است که $\#f^{-1}(y)$ موضعاً ثابت است پس بنا بر همبندی Y همه جا ثابت است.*

گزاره ۲. *اگر $f : X \to Y$ یک تابع تحلیلی و X و Y فشرده باشند آنگاه (X, P, Y) یک فضای پوششی شاخه‌دار است با تعدادی متناهی لایه. به‌ویژه $\#f^{-1}(y)$ با احتساب تکرر، ثابت است. این مقدار ثابت، درجهٔ f نامیده می‌شود.*

اثبات. *$y \in Y$ را دلخواه در نظر بگیرید. در این صورت*

۱) ramified

۲) ramification number

بنابر اصل ادامه تحلیلی، $f^{-1}(y)$ یک زیرمجموعهٔ گسسته از X خواهد بود. از طرفی چون X فشرده است $f^{-1}(y)$ نیز فشرده خواهد شد پس $f^{-1}(y)$ متناهی است. قرار می‌دهیم $f^{-1}(y)=\{x_1,\dots,x_k\}$. چون f دارای نمایش موضعی $z\to z^n$ است، برای $j=1,2,\dots,k$ همسایگی W_j حول x_j و همسایگی U_j حول x وجود دارند چنان‌که $f:W_j\to U_j$ به‌صورت $z\to z^n$ باشد. می‌توان فرض کرد W_jها دو به دو مجزا هستند. حال کافی است قرار دهیم.

$$U=U_1\cap U_2\dots U_k-f(X-W_1-W_2-\dots-W_k)$$

U همان همسایگی مورد نظر در تعریف فضای پوششی شاخه‌دار خواهد بود.

نتیجه. اگر $f:X\to Y$ یک نگاشت تحلیلی بین رویه‌های ریمانی فشرده باشد آنگاه یا f ثابت است و یا پوشاست.

این مطلب تعمیم گزاره زیر است که البته می‌توان مشابه گزارهٔ ۱ آن را ثابت کرد.

گزاره ۳. اگر $f:X\to Y$ تابعی تحلیلی از درجهٔ ۱ باشد آنگاه یک هم‌ارزی تحلیلی است.

اثبات. می‌دانیم f یک پوشش شاخه‌دار است. از طرفی $\#f^{-1}(y)=1$ پس هیچ نقطهٔ شاخه‌دار وجود ندارد بنابراین f یک فضای پوششی یک لایه‌ای است پس یک هم‌ارزی تحلیلی است.

در قسمت قبل هنگام نشاندن چنبره $\mathbb{C}/\Lambda$ در $\mathbb{CP}^2$ تابع تحلیلی $(\mathfrak{P},\mathfrak{P}'):\mathbb{C}/\Lambda-\{0\}\to C$ را که در آن C خم جبری $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ بود معرفی کردیم. همانطورکه دیدیم این تابع به تابعی تحلیلی بین رویه‌های ریمانی فشرده $\mathbb{C}/\Lambda$ و $C\cup\{\infty\}$ گسترش می‌یابد و با دردسر فراوانی نشان دادیم که یک هم‌ارزی تحلیلی است. با توجه به گزارهٔ ۳ اثبات هم‌ارزی تحلیلی بسیار ساده می‌شود. کافی است نقطهٔ $x\notin\frac{1}{2}\Lambda$ را طوری بگیریم که بی‌شاخه باشد (گزاره ۴ را ببینید). در این صورت از زوج بودن $\mathfrak{P}$ نتیجه می‌شود که تصویر هیچ نقطه‌ای از $\mathbb{C}/\Lambda$ با تصویر x برابر نیست و به‌علاوه $e_f(x)=1$ لذا درجهٔ f، برابر ۱ است و بنابر گزارهٔ ۳ تابع ما یک هم‌ارزی تحلیلی است.

گزاره ۴. اگر X یک رویه ریمانی فشرده با گونهٔ مثبت و $f:X\to S$ یک تابع تحلیلی باشد در این صورت مجموعهٔ نقاط شاخه‌دار متناهی و ناتهی است.

اثبات. از آنجا که مجموعه نقاط شاخه‌دار یک زیرمجموعه گسسته و بسته از X است، متناهی بودن بدیهی است. برای اثبات ناتهی بودن توجه می‌کنیم که اگر چنین نباشد $f:X\to S$ یک فضای پوششی خواهد بود. اما S همبند ساده است بنابراین از قضایای توپولوژی جبری نتیجه می‌شود که $X\cong S$ و f یک همسانریختی است که با شرط $g>0$ تناقض دارد.

توضیح. گزارهٔ ۴ را می‌توان از قضیهٔ ریمان-هورویتس[1] نیز نتیجه گرفت. این قضیه بیان می‌کند که اگر $f:X\to Y$ تابعی تحلیلی بین رویه‌های ریمانی فشرده باشد و g_1 و g_2 نیز به ترتیب گونهٔ X وگونهٔ Y باشند داریم:

$$2g_1-2=(\deg f)(2g_2-2)+\sum_{x\in X}(e_f(x)-1)$$

از مهمترین ابزارهایی که در مطالعهٔ رویه‌های ریمانی فشرده به‌کار می‌آید مفهوم شمارنده[2] است که در ادامه به آن می‌پردازیم.

تعریف. گروه آبلی آزاد تولید شده توسط نقاط $p\in X$ را گروه شمارنده‌های X و عناصر این گروه را شمارنده می‌نامیم. به عبارت دیگر هر شمارنده عبارت است از یک مجموع صوری به‌صورت $\sum_{p\in X}n(p)p$ که در آن $n(p)\in\mathbb{Z}$ مگر در تعداد متناهی نقطه برابر صفر است. گروه شمارنده‌ها را با $Div(x)$ نمایش می‌دهیم. $Div(x)$ را می‌توان به‌طور طبیعی به یک گروه توپولوژیک تبدیل کرد.[3]

مثال ۱. فرض کنید f یک تابع مرومورف روی X باشد. قرار می‌دهیم $(f)=\sum_{p\in X}(ord_pf)p$ طبق تعریف اگر p صفر f باشد $ord_pf=e_f(p)$ و اگر p قطب f باشد $ord_pf=-e_f(p)$. در غیر این صورت $ord_pf=0$. شمارنده بودن (f) نتیجهٔ گزارهٔ ۲ است. چنین شمارنده‌ای را یک شمارندهٔ اصلی می‌گوییم.

تمرین ۱: ثابت کنید $(fg)=(f)+(g)$ و $(\frac{1}{f})=-(f)$.

تمرین ۲: نشان دهید $(f)=0$ اگر و تنها اگر f تابعی ثابت باشد.

---

۱) Riemann-Hurwitz

۲) divisor

۳) همسایگی پایه‌ای U_ϵ حول $D=\sum p_i$ را (تکرار مجاز است) متشکل از تمام $D'=\sum p_i'$هایی می‌گیریم که $d(p_i,p_i')<\epsilon$.

تمرین ۳: روی خم $y^2=(x-p)(x-q)(x-r)$ ثابت کنید:

$$(x-p)=2p-2O$$
$$(y)=P+Q+R-3O \quad \text{و}$$
$$R=(r,0) \quad \text{و} \quad O \text{ نقطهٔ بینهایت}$$
$$\text{و} \quad Q=(q,0) \quad \text{و} \quad P=(p,0) \text{ هستند.}$$

مثال ۲. پیش از پرداختن به این مثال مفهوم یک فرم دیفرانسیل مرومورف روی یک رویه ریمانی را یادآوری می‌کنیم. یک فرم دیفرانسیل روی X در مختصات موضعی (U_α,z_α) به‌صورت $f_\alpha dz_\alpha$ داده می‌شود که در آن f_α یک تابع مرومورف است و $f_\alpha dz_\alpha$ها به این صورت به هم می‌چسبند:

$$f_\beta(z_\beta)=f_\alpha(\varphi_{\alpha\beta}(z_\beta))\frac{d\varphi_{\alpha\beta}(z_\beta)}{dz_\beta}$$

که در آن

$\varphi_{\alpha\beta}=z_\alpha\circ z_\beta^{-1}:z_\beta(u_\alpha\cap u_\beta)\to z_\alpha(u_\alpha\cap u_\beta)$ عبارت است از تابع تغییر مختصات. همین تعریف را به زبان کلاف‌های خطی می‌توان به این صورت بیان کرد:

فرض کنید $\pi^*:T^*_{\mathbb{C}}X\to X$ کلاف کتانژانت رویه ریمانی فشرده X، یعنی کلاف مزدوج $\pi:T_{\mathbb{C}}X\to X$ باشد که با دوره‌های

$$g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(1,\mathbb{C})$$
$$g_{\alpha\beta}(x)=\frac{1}{\varphi'_{\alpha\beta}(x)}$$

داده شده است. در این صورت یک فرم دیفرانسیل روی X دقیقاً عبارت است از یک مقطع مرومورف از کلاف کتانژانت.

اکنون فرض کنید w یک فرم دیفرانسیل مرومورف روی X باشد. اگر w در دستگاه (U_α,z_α) حول p به‌صورت $f_\alpha dz_\alpha$ نمایش داده شود تعریف می‌کنیم $ord_p^w:=ord_p^{f_\alpha}$. به‌وضوح ord_p^w خوشتعریف است و به‌جز در یک مجموعه گسسته از نقاط P داریم $ord_p^w=0$. بنابراین می‌توانیم تعریف کنیم

$$(w):=\sum_{p\in X}(ord_p^w)p$$

به چنین شمارنده‌ای یک شمارنده طبیعی می‌گوییم. توجه کنید که اگر w' و w دو فرم دیفرانسیل مرومورف، یا معادلاً دو مقطع مرومورف $T^*_{\mathbb{C}}X$ باشند. می‌توان f مرومورف را روی X چنان یافت که $fw=w'$ بنابراین $(w)+(f)=(w')$، به عبارت دیگر اختلاف هر دو شمارنده طبیعی یک شمارنده اصلی است.

تمرین ۴:

الف) اگر z مختصات معمولی $\mathbb{C}$ باشد نشان دهید dz به‌عنوان یک فرم دیفرانسیل روی S دارای قطب مرتبه دو در ∞ است. به‌طور دقیقتر $(dz)=-2\infty$

ب) روی خم $y^2=(x-p)(x-q)(x-r)$ نشان دهید

$$(dx)=P+Q+R-3O$$
$$(\frac{dx}{y})=0 \quad \text{و}$$

به‌طور کلی فرض کنید $\pi:E\to X$ یک کلاف خطی[1] تحلیلی روی رویه ریمانی فشرده X باشد. در این صورت برای مقطع دلخواه S از E می‌توانیم مشابه مثال ۲ با استفاده از مختصات موضعی حول نقطه P، ord_pS را تعریف کنیم. به این ترتیب می‌توانیم شمارنده‌ای به‌صورت $(S)=\sum_{p\in X}(ord_pS)p$ تعریف کنیم. توجه کنید که مشابه مثال ۲ اختلاف هر دو شمارنده متناظر با این کلاف خطی یک شمارنده اصلی است.

تمرین ۵: نشان دهید اگر شمارنده متناظر با $\pi:E\to X$، اصلی باشد این کلاف بدیهی است.

تمرین ۶: فرض کنید $\pi:E\to X$ یک کلاف خطی و $\pi^*:E^*\to X$، کلاف مزدوج آن باشد. S را یک مقطع E و S' را یک مقطع E^* بگیرید. ثابت کنید $(S)+(S')$ اصلی است.

یادآوری: اگر $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(1,\mathbb{C})$ یک پاد-دور[2] برای E باشد، طبق تعریف $\frac{1}{g_{\alpha\beta}}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(1,\mathbb{C})$ یک پاد-دور برای E^* است.

تمرین ۷: فرض کنید $\pi:E\to X$ و $\pi':E'\to X$ دو کلاف خطی روی X باشند و $\pi_\otimes:E\otimes E'\to X$، کلاف تانسوری آنها باشد. ثابت کنید اگر S و S' و S'' به ترتیب مقطع‌هایی از این سه کلاف باشند آنگاه $(S)+(S')-(S'')$ اصلی است.

---

۱) line bundle

۲) cocycle

توضیح. اگر D یک شمارنده دلخواه X باشد می‌توان به‌سادگی نشان داد که کلاف خطی $\pi : E \to X$ و مقطع S از آن یافت می‌شوند چنان‌که $D = (S)$. برای دیدن جزئیات اثبات می‌توانید به [۳] مراجعه کنید.

دو شمارنده D و D' را هم‌ارز می‌گوییم هرگاه $D - D'$، اصلی باشد. گروه رده‌ای شمارنده[۱] یا گروه پیکار[۲] عبارت است از گروه خارج قسمتی $Div(X)$ نسبت به این رابطه هم‌ارزی یا معادلاً $Div(X)/Pr$ که Pr مجموعهٔ شمارنده‌های اصلی است. این گروه را با $Pic(X)$ نمایش می‌دهیم. $Pic(X)$ با ساختار القایی از $Div(X)$ یک گروه توپولوژیک است.

فرض کنید $\mathcal{E}$ مجموعه تمام کلاف‌های خطی روی X باشد. $\mathcal{E}$ تحت عمل $\otimes$ یک گروه جابجایی است که وارون هر کلاف خطی کلاف مزدوج آن است. با توجه به آنچه در مثال دیدیم، یکریختی گروهی بین $\mathcal{E}$ و $Pic(X)$ وجود دارد.

تعریف. برای $D = \sum_{p \in X} n(p)p \in Div(X)$ درجه یک هومومورفیسم بین $Div(X)$ و $\mathbb{Z}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\deg D = \sum n(p)$$

توجه کنید که اگر $D = (f)$ یک شمارنده اصلی باشد بنا بر گزارهٔ ۲ تعداد نقاط تصویر وارون $S \ni 0$ با تعداد نقاط تصویر وارون $S \ni \infty$، با احتساب تکرر، برابر است.

بنابراین درجه هر شمارنده اصلی صفر است. لذا تابع درجه به‌طور خوشتعریف روی $Pic(X)$ تعریف می‌شود. عناصر درجه صفر در $Pic(X)$ را با $Pic^0(X)$ نمایش می‌دهیم.

$$0 \to Pic^0(X) \to Pic \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

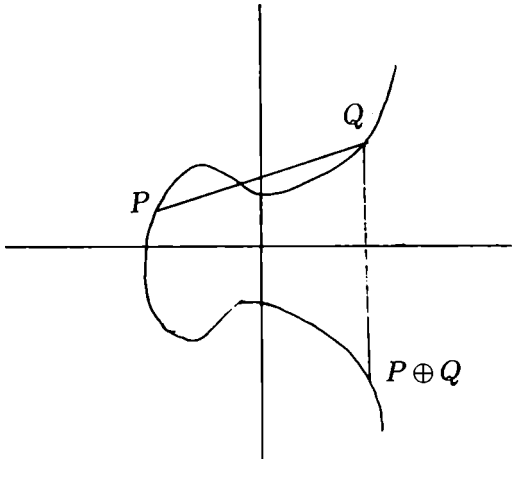
رشته دقیق فوق نشان می‌دهد که برای شناختن $Pic(X)$ کافی است $Pic^0(X)$ را مورد بررسی قرار دهیم. این انتظار که $Pic^0(X)$ گروه بدیهی باشد، یا معادلاً هر شمارنده با درجه صفر اصلی باشد، دور از واقعیت است. خواهیم دید که تقریباً در همه موارد این حکم نادرست است.

تمرین ۸: نشان دهید درجه یک شمارنده اصلی برابر $2g - 2$ است. (راهنمایی: قضیهٔ پوانکاره‌ـهوپف)

مثال ۳. فرض کنید S کرهٔ ریمان باشد. اگر $P, Q \in S$ دو نقطهٔ متمایز باشند، می‌خواهیم نشان دهیم $P - Q$ یک شمارنده اصلی است. تابع $f(z) = \frac{z-P}{z-Q}$ را در نظر بگیرید. اگر P و Q هیچکدام ∞ نباشند تابع f خوشتعریف است و داریم $(f) = P - Q$. اگر P یا Q مساوی ∞ باشند می‌توانیم f را به ترتیب به‌صورت $\frac{1}{z-Q}$ یا $z - P$ بگیریم. بنابر این هر شمارنده به‌صورت $P - Q$، اصلی است. از اینجا فوراً نتیجه می‌شود که هر شمارنده از درجه صفر هم اصلی است یعنی $Pic^0(X) = 0$ و $Pic(S) \cong \mathbb{Z}$.

تمرین ۹: نشان دهید اگر $Pic^0(X) = 0$ آنگاه $X \cong S$. (راهنمایی: نشان دهید تابعی تحلیلی با درجه ۱ از X به S وجود دارد.)

مثال ۴. فرض کنید X یک خم بیضوی هموار باشد. می‌خواهیم $Pic^0(X)$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم X به‌عنوان یک خم بیضوی دارای عمل جمع $\oplus$ است که نقطه‌ای واقع در بینهایت، با علامت O، عضو خنثای آن است (مطابق شکل).



طبق تعریف، $P \oplus Q \oplus R = 0$ اگر و تنها اگر P, Q, R روی خط یک راست باشد. حال ادعا می‌کنیم P, Q, R روی یک خط راستند اگر و تنها اگر $P + Q + R - 3O$ اصلی باشد. ابتدا فرض کنید P, Q, R روی خطی به معادلهٔ L باشند. می‌توانیم فرض کنیم P, Q, R هر سه با هم صفر نیستند. L تابعی تحلیلی روی $X - \{0\}$ القا می‌کند که در O تکینه اساسی ندارد پس به تابعی مرومورف روی کل X گسترش پیدا می‌کند.

۱) divisor class group
۲) Picard group

بنابرگزارهٔ ۱ O باید قطب باشد. حالا با توجه به این‌که درجه (L) باید صفر باشد خواهیم داشت $(L) = P + Q + R - ۳O$. برعکس فرض کنید $P + Q + R - ۳O$ اصلی باشد. محل تقاطع خط گذرا از Q و P با X را R' می‌نامیم. دیدیم که $P + Q + R' - ۳O$ باید اصلی باشد بنابراین $R - R'$ هم اصلی است. حال چون $X \not\cong S$ باید داشته باشیم $R = R'$. به این ترتیب ادعا ثابت می‌شود. پس نشان دادیم که $(P - Q) + (Q - O) + (R - O) = ۰$ (عمل جمع شمارنده) اگر و تنها اگر $P \oplus Q \oplus R = ۰$ (عمل جمع روی خم بیضوی). بنابراین تابع $\varphi : X \to Pic.(X)$ به‌صورت $\varphi(P) = P - O$ یک همریختی گروهی یک به یک است. ادعا می‌کنیم φ پوشا نیز هست. فرض کنید $D \in Pic.(X)$. از آنجا که $\deg D = ۰$ می‌توانیم بنویسیم $D = \sum n_i(P_i - O)$. روشن است که D تصویر نقطه $\sum n_i P_i$ (عمل جمع خمهای بیضوی) است. به این ترتیب نشان دادیم که φ یک یکریختی بین X و $Pic^{\circ}(X)$ است. از آنجا که هر رویه ریمانی فشرده با $g = ۱$ را می‌توان به‌صورت یک خم بیضوی هموار در نظر گرفت، برای هر چنین رویه ریمانی، $Pic^{\circ}(X)$ به‌طور طبیعی با X به‌عنوان گروه جمعی یکریخت است. به این ترتیب می‌توانیم $Pic^{\circ}(X)$ را به‌صورت یک چنبره تصور کنیم که دارای ساختار مختلطی مانند X است. در عین حال توانستیم تعبیری ذاتی‌تر از عمل جمع خمهای بیضوی به‌دست آوریم. بنابراین ساختار جمع یک رویه ریمانی با $g = ۱$ را به سه گونه می‌توانیم تصور کنیم: به‌عنوان گروه خارج قسمتی $\mathbb{C}$، به‌عنوان عمل جمع خمهای بیضوی و به‌عنوان جمع شمارنده‌ها.

مثال. در اینجا به‌طور اجمالی و بدون وارد شدن به جزئیات اثباتها ژاکوبیِ یک رویه ریمانی فشرده را معرفی و خواص آن را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $g > ۰$ باشد. $\{a_۱, \ldots, a_g, b_۱, \ldots, b_g\}$ را مولدهای گروه همولوژی اول M فرض می‌کنیم. $H^۱(M)$ را نیز فضای برداری فرمهای تحلیلی بگیرید. اگر $H_۱(M)$ نیز فضای برداری تولید شده توسط $\{a_۱, \ldots, a_g\}$ باشد می‌توان نشان داد که تابع دوخطی

$$\forall \zeta \in H^۱(M),\ \alpha \in H_۱(M),\ <\alpha, \zeta> = \int_{\alpha} \zeta$$

ناتبهگون است لذا می‌توان پایه دوگان متناظر با $\{a_۱, \ldots, a_g\}$ را در $H^۱(M)$ پیدا کرد. این پایه را $\{\zeta_۱, \zeta_۲ \ldots, \zeta_g\}$ می‌نامیم. بنابراین

$$\int_{a_j} \zeta_k = \delta_{ik} \qquad j, k = ۱, ۲, \ldots, g$$

ماتریس Π با درایه‌های $\Pi_{jk} = \int b_j \zeta_k$ را در نظر بگیرید. ستونهای ماتریس Π یک شبکه $L(M)$ در $\mathbb{C}^g$ تولید می‌کنند. به عبارت دیگر نقاط $L(M)$ عبارتند از مجموعهایی به این صورت: $\sum_{j=۱}^{g} m_j e^{(j)} + \sum_{j=۱}^{g} n_j \Pi^{(j)}$.

تمرین ۱۰: تحقیق کنید که ستونهای Π روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند.

$J(M) = \mathbb{C}^g / L(M)$ را واریتهٔ ژاکوبی M می‌نامیم. $J(M)$ یک چنبره فشرده با بعد حقیقی $۲g$ است که ساختار جمع تحلیلی القایی از $\mathbb{C}^g$ را دارد. حال تعریف می‌کنیم:

$$\Phi : M \to J(M)$$
$$\Phi(p) = (\int_{p_۰}^{p} \zeta_۱, \ldots, \int_{p_۰}^{p} \zeta_g)$$

که $p_۰$ نقطه‌ای تثبیت شده در M است. با توجه به تعریف $L(M)$ به‌سادگی دیده می‌شود که Φ خوشتعریف است. به‌علاوه Φ دارای رتبه ثابت یک است. به عبارت دیگر Φ یک غوطه‌ورسازی[۱] است. توجه کنید که وابستگی Φ به نقطه $p_۰$ به این صورت است که با تغییر $p_۰$ نگاشت Φ در حد یک انتقال در $J(M)$ تغییر می‌کند. تابع Φ را می‌توان به $Div(M)$ نیز گسترش داد

$$\Phi(D) = \sum n_i \Phi(p_i)\ ,\ D = \sum n_i p_i$$

نکته ساده ولی مهم این است که تصویر گسترش Φ به $Div^{\circ}(M)$ مستقل از p_i از آب در می‌آید.

قضیه (آبل). شرط لازم و کافی برای این‌که $D \in Div^{\circ}(M)$، اصلی باشد این است که $\Phi(D) = ۰$.

نتیجه فوری قضیهٔ آبل این است که $\Phi : M \to J(M)$ یک به یک است زیرا اگر $\Phi(P) = \Phi(Q)$ داریم $\Phi(P - Q) = ۰$ یعنی $P - Q$، اصلی است و، از آنجا که $g > ۰$ است، خواهیم داشت $P = Q$. حال با توجه به این‌که Φ یک غوطه‌ورسازی

۱) immersion

و M فشرده است دیده می‌شود که Φ در حقیقت یک نشاندن تحلیلی است. به عبارت دیگر M را می‌توان به صورت طبیعی با یک زیرخمینه یک بعدی $J(M)$ یکی گرفت. البته این زیرخمینه یکتا نیست.

نتیجه: اگر $g = 1$ آنگاه $\Phi : M \to J(M)$ یک هم‌ارزی تحلیلی است. بنابراین در حالت $g = 1$، ژاکوبی چیزی نیست جز خود رویه ریمانی.

قضیه. (قضیه برگردان ژاکوبی)
تابع $\Phi : Div^{\circ}(M) \to J(M)$ پوشاست.

از دو قضیهٔ اخیر نتیجه می‌شود که $\Phi : Div_{\circ}(M) \to J(M)$ یکریختی‌ای چون $\tilde{\Phi} : Pic_{\circ}(M) \to J(M)$ القا می‌کند. بنابر این $J(M)$ چیزی نیست جز $Pic^{\circ}(M)$ ولی با چهره‌ای جدید! به عبارت دیگر می‌توانیم $Pic^{\circ}(M)$ را به‌عنوان یک گروه لی مختلط g بعدی که از نظر توپولوژیک چنبره‌ای با بعد حقیقی $2g$ است در نظر بگیریم که M را به‌عنوان یک زیرخمینه مختلط در بر دارد.

پیشتر به این مطلب اشاره کردیم که $Pic^{\circ}(M)$ را می‌توان به‌طور طبیعی به یک گروه توپولوژیک تبدیل کرد. این ساختار توپولوژیک با ساختار توپولوژیکی که از بالا به‌دست آوردیم مطابقت دارد پس نتیجهٔ زیر را داریم:

نتیجه. اگر $Pic^{\circ}(X) \cong Pic^{\circ}(Y)$ (به‌عنوان گروه توپولوژیک) آنگاه $X \cong Y$ (به‌عنوان فضای توپولوژیک).

مشابه نتیجهٔ بالا با ملحوظ داشتن ساختار مختلط نیز درست است و به قضیهٔ تورلی[۱] معروف است.

قضیه (تورلی). اگر $Pic^{\circ}(X) \cong Pic^{\circ}(Y)$ (به‌عنوان قطبیده[۲] مختلط) آنگاه $X \cong Y$ (به‌عنوان رویه ریمانی) یعنی Y و X، هم‌ارز تحلیلی هستند.

در آخر بد نیست به نکته‌ای در مورد کلاف‌های خطی یک رویه ریمانی فشرده X اشاره کنیم. پیشتر دیدیم که تناظر یک به یک

$$\delta : Pic(X) \to \mathcal{E} = \{\text{مجموعه کلاف‌های خطی مختلط } X\}$$

وجود دارد. $Pic(X)$ خود یک توسیع $Pic^{\circ}(X)$ توسط $\mathbb{Z}$ است. بنابراین فضای تمام کلاف‌های خطی روی X توسط دو پارامتر که یکی گسسته است و در $\mathbb{Z}$ تغییر می‌کند و دیگری پیوسته است و در یک گروه لی فشرده با بعد مختلط g تغییر می‌کند پارامتریزه می‌شود. پارامتر گسسته متناظر با یک کلاف خطی را درجه آن کلاف خطی می‌گویند که در حقیقت با درجه شمارنده متناظر با آن کلاف خطی یکی است.

اگر $\mathcal{E}$ را تحت عمل تانسور کردن کلاف‌ها به یک گروه تبدیل کنیم δ در حقیقت یک ایزومورفیسم گروهی بین $Pic(X)$ و $\mathcal{E}$ نیز خواهد بود.

مراجع

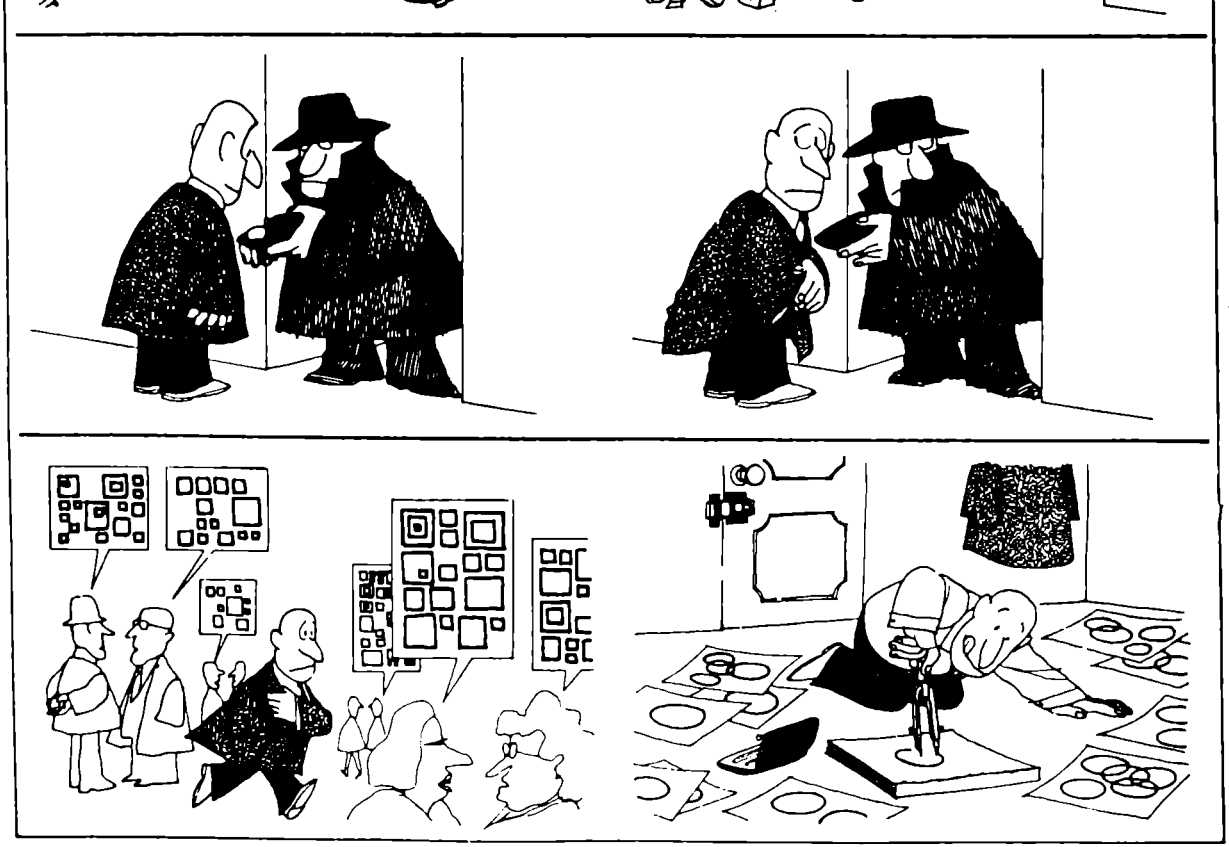
[1] H.M. Farkas & Irwin Kra, "Riemann Surfaces.", Springer Verlag.

[2] Phillip Grifiths, "Introduction to algebraic curves", New York, Willey, 1978.

[3] Raghavan Narasimhan, "Compact Riemann Surfaces", Birkhäuser.

• دانشجوی دورهٔ دکتری ریاضی
MIT (آمریکا)

۱) Torelli
۲) Polarized



کینو / آرژانتین
QUINO/ ARGENTINA
Editions Glenat, 1981, Paris.

نقل از کیهان کاریکاتور، اردیبهشت ۱۳۷۳

گفتگویی با ریچارد گای

ترجمهٔ: حسین شاه‌محمدی •

ریچارد ک. گای یک شخصیت برجستهٔ ریاضی است. تاکنون ۲۰۰ مقاله و ۹ کتاب از وی به چاپ رسیده که بعضی بالغ بر چند مجلد هستند و برخی از آنها به زبانهای دیگر ترجمه شده‌اند. گای یک کلکسیونر مسائل حل نشده است. تاکنون دو کتاب را به این مطلب اختصاص داده و نتایج شگفت‌انگیزی به دست آورده است. راز موفقیت گای در رسیدن به نتایج شگفت‌انگیز در ریاضیات را می‌توان نتیجهٔ تلاش وی در خواب و بیداری دانست. در واقع، بیشتر افکارش، به عقیدهٔ وی، در خواب به سراغش می‌روند. اوقات او را کوهنوردی بر روی کوههای پوشیده از برف و حتی یخچالها، شطرنج و بازیهای دیگر پر می‌کند. مصاحبهٔ زیر در بهار ۱۹۸۸ در منلوپارک کالیفرنیا انجام گرفته است.

• شما بسیاری از نقاط دنیا را زیر پا گذاشته‌اید، ولی گویا در انگلستان به دنیا آمده‌اید.

ـ بله، من در نونیتن[1] در واریک‌شایر[2] به دنیا آمده‌ام. پدرم یک دبیر جوان بود. از سال ۱۹۱۲ برای تدریس در مدرسهٔ پسرانهٔ پرت به استرالیای غربی سفر کرد؛ اما جنگ جهانی اول و موج نهضت ملی‌گرایی سبب شد که در جنگ شرکت کند. او پس از برداشتن جراحات سطحی در فرانسه به وطن بازگشت و با مادرم که مدیر یک مدرسهٔ دخترانه در اکاکس گرین[3]، در جنوب بیرمنگام بود ازدواج کرد. والدین من دیگر هیچگاه به‌جایی مهاجرت نکردند.

• آیا والدین شما استعداد خاصی در ریاضیات داشتند؟

ـ خیر، مادرم یک متخصص همه‌کاره بود که مثبت‌کاری و کار با چوب را خوب می‌دانست و بسیاری از آثار شکسپیر را حفظ بود. در اصل، پدر و مادرم هر دو هنرمندان خوبی بودند.

• چندمین فرزند خانواده بودید؟

ـ من اولین و آخرین فرزند خانه بودم و این مزایا و معایب خود را دارد. انسان را خودخواه و مغرور می‌کند و بیشتر اوقات نمی‌توانید خود را با دیگران وفق دهید.

• چرا شما رشته‌ای خیالی و فرضی مانند ریاضیات را انتخاب کردید؟

ـ من ریاضیات را انتخاب نکردم. ریاضیات برای من انتخاب شده بود.

• توسط چه کسی؟

ـ داستان درازی دارد. می‌دانید من بچهٔ نسبتاً باهوشی بودم و در سه‌سالگی نشانه‌هایی از نبوغ در جدول ضرب و انجام عملیات ریاضی در من پیدا شد. چیزی فراتر از کودکان هم سن و سالم. وقتی پا به کلاس ششم گذاشتم اگر کسی از من می‌پرسید که چه رشته‌ای را انتخاب خواهم کرد می‌گفتم شیمی. من به شیمی خیلی علاقه داشتم و معلم شیمی ما مردی بود که برای عشق خود به شیمی، درس می‌داد. از طرفی معلم ریاضیات ما هم یک آدم زنده و فعال بود و اگر در کسی استعدادی می‌دید، گریبان او را می‌گرفت و می‌گفت «تو باید ریاضیات بخوانی». او به من گفت که باید ریاضیات بخوانم.

اسمش سیریل کاتون[4] بود. او معلم برجسته‌ای در ریاضیات بود

۱) Nuneaton
۲) Warwick shire
۳) Acocks Green
۴) Cyril Caton

مجلهٔ ریاضی شمارهٔ ۷
(پاییز ۱۳۷۷) صص ۴۴ـ۴۱

و پس از مدتی رئیس مدرسهٔ زبان الکستر[۱] شد. پس از او کنت لنسدیل[۲] معلم ما شد که ریاضیدان خوبی بود و من درس ضرایب لاگرانژ را از او یاد گرفتم. در آن زمان من می‌توانستم هر معادلهٔ دیفرانسیل را به روشهای آن روز حل کنم. وقتی وارد کیمبریج شدم، به کالج کِر[۳] که آقای واردل[۴] در آن بود رفتم و در حین تحصیل به تدریس هم مشغول شدم. تدریس در جاهایی نظیر دانشگاه بیرمنگام[۵] و مدرسهٔ زبان شتاک‌پرت[۶]. سرانجام تصمیم گرفتم که به مرحلهٔ بعدی زندگی‌ام گام بگذارم؛ یعنی وارد بازار کار شوم. بنابر این، در کالج گلدسمیت[۷] در دانشگاه لندن تقاضای کار کردم.

• **می‌بینم که شما به بالاترین درجات افتخاری امتحانات دانشگاه کیمبریج دست یافته‌اید.**

ـ بله ولی آن فقط یکی از «هفت‌خان» بود و تنها به درد فخر فروشی هم می‌خورد. من در مرحلهٔ دوم این امتحان بسیار مهم، فقط نمرهٔ رتبه دوم را به‌دست آوردم.

• **ولی در سال ۱۹۴۱ شما فوق‌لیسانس خود را از کیمبریج گرفتید.**

ـ بله ولی آن هم قلابی بود! باید بگویم که وضع علمی دانشگاه کیمبریج چنان بود که هرکس دو سه سالی آن طرفها پرسه می‌زد می‌توانست یک فوق‌لیسانس هم بگیرد.

• **شما به‌عنوان ریاضی‌دان چه مسألهٔ مهمی راحل کرده‌اید؟**

ـ من هیچگاه فکر نکرده‌ام که یک ریاضیدان هستم.

• **فکر نکرده‌اید؟ شما که تقریباً ۲۰۰ مقاله چاپ کرده‌اید؟**

ـ ببینید، می‌توان بعضی از مردم را همیشه فریب داد و همهٔ مردم را گاهی! من هیچ قضیهٔ بزرگی را ثابت نکرده‌ام. ولی اولین قضیهٔ من بسیار جالب است. می‌توانید در نشریهٔ Mathematical Gazet، مقالهٔ «A Single Scale Nomogram» را پیدا کنید. من فقط دیدم که در یک معادلهٔ درجهٔ سوم بدون x^2، جمع تمام ریشه‌ها صفر است. اگر منحنی $y = x^3 + ax + b$ و خط مستقیم $y = mx + c$ را رسم کنید، جمع مؤلفه‌های x نقاط اشتراک صفر می‌شود و اگر منحنی نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد، b، صفر خواهد شد.

• **شما با شور و هیجان گفتید که ریاضیدان نیستید. اگر ریاضیدان نیستید، پس چکاره هستید؟**

ـ یک آماتور، یعنی یک ریاضیدان حرفه‌ای نیستم. به این معنی که من فقط عاشق ریاضیات هستم و میل دارم همه مثل من عاشق ریاضیات باشند.

• **می‌گویید که آماتور هستید، اگر عقیده دارید که ریاضیدان نیستید، همکاران شما مثل برلکامپ[۸]، کانوی[۹] و اردوش[۱۰] چطور؟ آیا آنها ریاضیدان هستند؟**

ـ البته که هستند. در واقع این ثابت می‌کند که من ریاضیدان نیستم. من فقط دنبالهٔ رشته‌ای هستم که به این افراد بزرگ وصل است. من به‌قدری عاشق ریاضیات هستم و ریاضیدانان را دوست دارم که دست به هرکاری می‌زنم تا مثل آنان بشوم؛ هر چند که با تمام تلاشم نمی‌توانم در محفل آنان وارد شوم.

• **دربارهٔ آنها برایمان صحبت کنید.**

ـ کانوی یک دانشجوی جوان بود که از طریق پسرم مایک با او آشنا شدم. فکر می‌کنم مایک از پیش به او گفته بود که من به چیزهایی از قبیل نظریهٔ بازی‌ها علاقه دارم. خود مایک هم به نظریهٔ بازی‌ها علاقه داشت. بنابر این وقتی که من کانوی را ملاقات کردم، قبلاً به‌وسیلهٔ مایک، با نظریهٔ بازیها و ریاضیات ترکیبی شستشوی مغزی داده شده بود: او احترام زیادی برای مایک به‌عنوان یک ریاضیدان واقعی قائل بود و طبیعتاً به‌طور غیر مستقیم برای پدر و مادرش هم ارزش قائل بود و به‌این ترتیب ما کار مشترکمان را شروع کردیم. او مملو از ایده بود و من مجبور می‌شدم آنها را با سرعت و خلاصه بنویسم و بگویم «نگاه کن چه مقالهٔ جالبی از این به‌دست می‌آید» در مورد الوین برلکامپ باید بگویم که رابطهٔ ما بیشتر ناشی از احترام بود تا هر چیز دیگر. احترامی که از نظریهٔ بازیها سرچشمه گرفت. او می‌گفت که ما باید یک کتاب دربارهٔ بازیها بنویسیم و من گفتم البته، اشکالی

۱) Alcester
۲) Kenneth Lansdill
۳) Cairs
۴) Wardle
۵) Birmangham
۶) Stockport
۸) Berlekamp
۹) Conway
۱۰) Erdös

ندارد. با کانوی تماس گرفتم و نوشتن کتاب را شروع کردیم.

• **چرا نوشتن کتاب Winning Ways این همه طول کشید؟**

ـ نوشتن آن در سال ۱۹۶۶ آغاز شد و پس از ۱۶ سال در سال ۱۹۸۲ به چاپ رسید. چون ما به‌طور مداوم به آن نمی‌پرداختیم. ما سه شخصیت متفاوت بودیم و نقش اصلی من حفظ تعادل و ایجاد تفاهم بین کانوی و برلکامپ بود؛ زیرا اغلب اوقات با هم دعوایشان می‌شد. کانوی سریع‌الانتقال بود و به طرزی ظریف و با روشی مناسب آنقدر روی سنگ می‌کوبید تا آن را نرم کند ولی برلکامپ به‌طور ناگهانی ایده‌های انقلابی پیدا می‌کرد. او فی‌البداهه قضایایی را می‌گفت که درست از آب درمی‌آمدند. اما صبر نمی‌کرد که آنها را اثبات کند. کانوی بیشتر محافظه‌کار بود و می‌گفت «صبرکن ببینیم این درست است؟» و برلکامپ می‌گفت «خوب این خیلی ساده است» و اغلب بین آنها مشاجره‌ای پیش می‌آمد که مدتی طول می‌کشید تا معلوم شود که در طرح برلکامپ اشکالی وجود دارد ولی مشکلات همیشه قابل اصلاح بود و همین همکاری آنها را جالب توجه می‌کرد.

• **شما در خیلی از رشته‌ها کار کرده‌اید، نظریهٔ اعداد، ترکیبیات، نظریهٔ گراف، هندسه، نظریهٔ بازیها.**

ـ بله در حقیقت همه کاره و هیچ کاره!

• **با وجود این با اشخاص برجسته‌ای همکاری داشته‌اید. آیا همکارانتان را برای رشته‌های مقالات انتخاب می‌کردید یا مقالات را از روی همکارانتان؟**

ـ علاقهٔ شخصی من در زمینهٔ ترکیبیات، نظریه بازیها و نظریه اعداد بوده است و من برای کسانی که در این رشته‌ها فعالیت دارند بسیار احترام قائل هستم. آقای اردوش با همه کسی همکاری می‌کند و صرف همکاری با ایشان چیزی را نشان نمی‌دهد.

• **چند سال پیش در مجلّهٔ مردان ریاضیات[۱]، اردوش گفته بود که او در رشتهٔ نظریهٔ اعداد دیگر فعالیتی ندارد، زیرا هر چه در این رشته باقی مانده بسیار مشکل است. آیا شما با این نظر موافقید؟**

ـ بله، فکر می‌کنم. قدمت نظریهٔ اعداد ۴۰۰۰ سال است سومری‌ها بایست از این علم اطلاع می‌داشتند تا می‌توانستند جدول سه‌تایی‌های فیثاغورسی را بنویسند و $\sqrt{2}$ را تقریباً پیدا کنند. بنابر این نظریه اعداد قدیمی‌ترین رشتهٔ ریاضیات است. نظریه اعداد شاید سخت‌ترین رشته‌ای باشد که حتی می‌شود به مرزهای آن نزدیک شد.

• **بیایید به بحث ترکیبیات برگردیم. متأسفانه به نظر می‌رسد با تمام سعی و کوشش بیست سال گذشته در ریاضیات ترکیبی هنوز نشان فیلدز به کسی در این رشته‌ها اعطا نشده و دنیای ریاضیات هنوز در انحصار توپولوژی جبری و هندسهٔ جبری و این جور چیزها است.**

ـ بله اشکال همین جا است. خیلیها ترکیبیات را یک کیسهٔ پر از وصله‌های ناجور تصور می‌کنند؛ صندوقچه‌ای پر از کلک‌هایی که فقط نوع ویژه‌ای از مسایل را حل می‌کند. خیلی از اصولی را که در ترکیبیات انتخاب می‌کنیم به رشته‌های دیگر هم وصل می‌شود ولی دیدن یک مبنای مستقل حقیقی سخت است.

• **گویا از مسیر بحث دور شدیم. شنیده‌ام شما به نقاط بسیار جالبی سفر کرده‌اید همین طور است؟**

ـ خوب، متأسفانه دلایل منفی همیشه باعث تغییرات زندگی من بوده‌اند. قبلاً گفتم که به مدرسهٔ زبان ستاک‌پرت در لندن رفتم. در آنجا من ۴ بار حساب و ۲ بار «هندسه و بازی» درس دادم. هندسهٔ ما مطالعهٔ چندضلعی‌ها بود و «بازی‌ها» بیشتر شطرنج و گاهی هم بازی «کشتی جنگی» می‌کردیم که دستگاه مختصات و استراتژی را یاد می‌داد. به هر حال، شتاک‌پرت را ترک کردم چون در آنجا آیندهٔ روشنی انتظارم را نمی‌کشید. سپس به گلدسمیت رفتم که جای بسیار جالبی بود. در هفته، ۲۲ ساعت درس می‌دادم و وقت اندکی برای خانواده‌ام داشتم. بعد اتفاقاتی افتاد که دانشگاه دیگر نمی‌توانست مثل سابق به کار خود ادامه دهد و در نتیجه گلدسمیت را ترک گفتم و تقاضای کار کردم و اولین پیشنهاد از دانشگاه مالایا در سنگاپور بود.

• **ولی این از انگلستان خیلی دور است.**

ـ بله، البته می‌بایست زنده می‌ماندم! دانشگاههای بریتانیا هرکه را می‌خواستند می‌پذیرفتند و امیدی نبود که بتوانم در آنجا شغلی بیابم و تنها راه یافتن شغل، رفتن به مستعمرات بود. در این زمان من زن و سه فرزند داشتم که با خودم آنها را به سنگاپور بردم.

• **بعد از سنگاپور مدتی هم در هندوستان بودید. چه عاملی شما را به دهلی‌نو کشاند؟**

۱) Mathematical People

ـ یک روز در حال خواندن Mathematical Gazette یک آگهی استخدام دیدم: «نیاز به یک نفر برای راه‌اندازی یک مؤسسهٔ علمی در دهلی». من تقاضا کردم و در پاسخ نامه‌ای آمد که آیا حاضر به مصاحبه کردن هستید؟ خلاصه یک قرارداد ۵ ساله امضا کردم ولی فقط سه سال و نیم در دهلی ماندم. زیرا اگر چه دلپذیر و زیبا بود سرپرست آن دانشگاه نسبت به انگلیسی‌ها حساسیت داشت؛ چون آن زمان هند زیر استعمار انگلیس بود و او به هر ایدهٔ جالبی که برمی‌خوردیم پاسخ «نه» می‌داد؛ اگر چه خرجی هم در پی نداشت. او رئیس پرقدرتی بود و خیلی‌ها به‌خاطر همین مطلب قراردادشان را نیمه تمام گذاشتند. خلاصه من تصمیم گرفتم بروم که لوییز همسر من به ادنا همسر پترلنکستر[1] نامه‌ای نوشت که من اینجا خسته شده‌ام و ادنا در جواب گفت که چرا به کالگری[2] نمی‌آیید؟ و ما برای یک سال به کالگری رفتیم.

• **از چه زمانی علاقمند به حل مسائل حل نشده که امروزه با آن سُر و کار دارید شدید و شروع به جمع‌آوری آنها کردید؟**

ـ من همیشه به این موضوع علاقمند بوده‌ام و مرتباً به مسائلی که از اشخاصی مانند اردوش و دیگران دریافت می‌کردم، می‌اندیشیدم. اوایل زندگی‌ام در لندن یعنی زمانی که به کالج گلدسمیت می‌رفتم در همسایگی شطرنج‌باز معروف توماس رووینر داوسن[3] زندگی می‌کردم. او مسؤول صفحهٔ شطرنج مجلهٔ شطرنج بریتانیا بود و چون من «آخر بازی» شطرنج طرح می‌کردم و در این کار شهرتی به‌دست آورده بودم پیشنهاد کرد که مسؤول طراحی این بخش مجله بشوم. داوسن یک مسألهٔ جالب داشت که امروز ما به آن شطرنج داوسن می‌گوییم. من این بازی را تجربه و درک کردم. بعدها وقتی که تئوری گراندی[4] را بررسی می‌کردم گراندی خودش چند مثال غیر بدیهی بیشتر نداشت که نظریه‌اش را بر آن بنا کند، در حالی که من یک خانوادهٔ نامتناهی را بر اساس شطرنج داوسن یافتم. در نتیجه مقالهٔ معروف گای‌ـاسمیت را منتشر کردیم که برلکامپ از آن بسیار استفاده کرد.

• **چگونه ریاضیات انجام می‌دهید؟**

ـ اگر چیزی انجام دهم در حال خواب است.

• **فکر می‌کنید که دیگران هم اینگونه ریاضیات کار می‌کنند؟**

ـ بله، مغز انسان پدیدهٔ خارق‌العاده‌ای است که ما هنوز از درک آن عاجز هستیم. برای بیشتر مسائل ریاضی فقط یک کاغذ و قلم و یک ایده کافی نیست. اول باید مسأله را درک کرد. چند علامت بر روی کاغذ کشید و نگاهشان کرد. بیشتر ماها برخلاف اردوش که بلافاصله پاسخ هر پرسشی را می‌دهد باید شبی را سپری کنیم و اگر خوش‌اقبال باشیم فردای آن روز به یک جواب برسیم.

• **به‌عنوان آخرین پرسش آیا به نظر شما نظریه اعدادانان با بقیهٔ ریاضیدانان فرق دارند؟**

ـ این پرسش سختی است و من فکر می‌کنم که پاسخ من کمی مبهم خواهد بود. یعنی اگر پاسخ مرا به‌عنوان شخصی با علایق دیگر نیز بخواهید خواهم گفت: نه. ولی به‌عنوان یک نظریه اعدادان صرف باید بگویم که بلی ما اشخاص منحصر به فردی هستیم.

(صورت کامل این گفتگو در مرجع زیر آمده است)

"a conversation with Richard K. Guy", the college mathematics Journal, Vol. 24, No. 2, March 1993. pp. 123-148.

• دانشجوی دورهٔ دکتری ریاضی
دانشگاه پیتسبورگ

۱) Peter Lancaster
۲) Calgary
۳) Thomas Ruyner Dowson
۴) Grundy

مسأله

امید نقشینه‌ارجمند

۱) **(محسن بهرامگیری)**

فرض کنید $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ دارای این خاصیت باشد که: برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$، داشته باشیم $f(AB) = f(A)f(B)$ و f متحداً برابر صفر یا یک نباشد. نشان دهید ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $f(A) \neq 0$.

۲) **(امید نقشینه‌ارجمند)**

الف) همهٔ توابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا از اعداد حقیقی مثبت باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ نیز همگرا شود.

ب) همهٔ توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ نیز همگرا شود.

۳) **(کیوان ملاحی)**

آیا توپولوژی T روی مجموعهٔ اعداد مختلط وجود دارد که مجموعهٔ همه توابع پیوستهٔ از $\mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ با این توپولوژی، همان مجموعهٔ توابع تام روی $\mathbb{C}$ شود؟

۴) **(علیرضا صالحی‌گلسفیدی)**

فرض کنید $\{a_n\}_{n\geq 0}$، $\{b_n\}_{n\geq 0}$ دو دنباله باشند که در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند.

$$x_{n+k} = c_1 x_{n+1} + \ldots + c_{k-1} x_{n+k-1}$$

و در ضمن،

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-2} = 0,\ a_{k-1} = 1$$

الف) ثابت کنید که دنباله‌های $\{a_n\}_{n\geq 0}$، $\{b_n\}_{n\geq 0}$ به پیمانه عدد صحیح دلخواه m متناوب هستند.

ب) اگر α_m, β_m دورهٔ تناوب دنباله‌های فوق را نشان دهند، ثابت کنید $\beta_m | \alpha_m$.

۵) **(امید نقشینه‌ارجمند)**

فرض کنید M یک خمینهٔ هموار و همبند باشد و $p_1, \ldots, p_n \in M$ نقاطی دلخواه باشند. ثابت کنید مجموعهٔ باز $U \subseteq M$ وجود دارد که با گوی باز همسانریخت است و در ضمن شامل $p_1, \ldots, p_n$ هم است.

۶) **(کیوان ملاحی)**

فرض کنید S^2 کره دو بعدی و A یک زیرمجموعهٔ متناهی از S^2 باشد. نشان دهید:

الف) اگر $|A| = 1$ یا ۲، آنگاه می‌توان $S^2 - A$ را به یک گروه توپولوژیک تبدیل کرد.

ب) اگر $A = \phi$ و یا $|A| \geq 3$، آنگاه نمی‌توان $S^2 - A$ را به یک گروه توپولوژیک تبدیل کرد.

۷) **(سیدعلی تقوی)**

فرض کنید $C^\omega(0,1)$ حوزهٔ صحیح توابع تحلیلی از $(0,1)$ به $\mathbb{R}$ باشد و $C^\omega[0,1]$ نیز حوزهٔ صحیح

مجلهٔ ریاضی شمارهٔ ۷
(پاییز ۱۳۷۷) صص ۴۶ـ۴۵

توابع تحلیلی از $[\circ, 1]$ به $\mathbb{R}$ باشد. (تابع $f : [\circ, 1] \to \mathbb{R}$ تحلیلی است اگر تحدید تابع تحلیلی $\tilde{f} : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ باشد.) کدام یک از این دو حلقه، حوزهٔ ایده‌آل اصلی (PID) هستند؟

۸) (هادی سلماسیان)

فرض کنید $\leq_k, \ldots, \leq_1, \leq$، رابطه‌های ترتیب روی $\mathbb{N}$ باشند که $(\mathbb{N}, \leq_i)$ خوش‌ترتیب است. $(i = 1, 2, \ldots, k)$. نشان دهید $x, y \in \mathbb{N}$ موجودند که برای هر $1 \leq i \leq k$، داریم، $x \leq_i y$.

۹) (کسری علیشاهی)

فرض کنید F یک میدان با مشخصهٔ صفر و $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ اعضایی ناصفر از F باشند. ثابت کنید که می‌توان $n+1$ تا از آنها را انتخاب کرد که هیچ زیرمجموعه‌ای از این $n+1$ عضو، جمعی برابر صفر نداشته باشد.

۱۰) (امید نقشینه‌ارجمند)

اگر M یک فضای متری فشرده باشد، حداکثر تعداد اعضای یک زیرمجموعهٔ M را که فاصله هر دو عضو آن کمتر از ۱ باشد با $\sigma(M)$ نشان می‌دهیم. حال اگر $(N, d_N), (M, d_M)$ دو فضای متری باشند و $d_{M\times N} = Max(d_M, d_N)$، آیا درست است که؟

$$\sigma(M \times N) = \sigma(M).\sigma(N)$$

۱۱) (کیوان ملاحی)

فرض کنید گروه G توسط «مولد و رابطه» به‌صورت زیر نمایش داده شده است:

$$G = < x_1, x_2, \ldots, x_n | R_1 = 1, \ldots, R_k = 1 >$$

اگر $k < n$، ثابت کنید که G نامتناهی است.

۱۲) (مریم میرزاخانی)

در فضای توپولوژیک X، D چگال و S گسسته است و $|D| = m, |S| > 2^m$. نشان دهید که X منتظم نیست.

۱۳) (مریم میرزاخانی)

ثابت کنید چندجمله‌ای

$$p(x) = x^n - x^{n-1} - \ldots - x - 1$$

در $\mathbb{Z}[x]$ تحویل‌ناپذیر است.

۱۴) (مریم میرزاخانی)

شرط لازم و کافی برای m بیابید که هر حلقه‌ای که در آن اتحاد $x^m = x$ برقرار باشد، یک حلقه بولی باشد.

مسأله‌های کوتاه

کیوان ملاحی

۱) (سیدعلی تقوی)
می‌دانیم که هر زیر مجموعهٔ گسسته از $\mathbb{R}$ شماراست. (زیر مجموعهٔ گسسته یعنی زیرمجموعه‌ای که هر عضوش دارای یک همسایگی است که هیچیک از اعضای دیگر آن مجموعه را در بر ندارد.) آیا درست است که بستار هر زیرمجموعهٔ گسسته از $\mathbb{R}$ نیز شماراست؟

۲) (کیوان ملاحی)
اگر A و B دو ماتریس باشند که $AB = A + B$، نشان دهید $AB = BA$!

۳) (کیوان ملاحی)
فرض کنید F و K دو میدان مرتب باشند که هم به‌عنوان دو میدان و هم به‌عنوان دو مجموعهٔ مرتب یکریخت هستند. آیا F و K به‌عنوان دو میدان مرتب نیز یکریخت هستند؟ (یعنی آیا یک یکریختی حافظ ترتیب بین F و K وجود دارد؟)

۴) (کسری علیشاهی)
اعداد ۱۳۷۷ , ... ,۲ ,۱ روی تخته نوشته شده‌اند. دو نفر بازی، زیر را انجام می‌دهند: هر بازیکن در نوبت خود یکی از اعداد را خط می‌زند. این کار تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که تنها دو عدد روی تخته باقی بماند. اگر دو عدد باقی مانده نسبت به‌هم اول باشند، نفر اول و در غیر این صورت نفر دوم برنده است. کدام بازیکن می‌تواند برنده بازی شود؟

۵) (کیوان ملاحی)
فرض کنید R یک حلقه بولی متناهی باشد (یعنی برای هر $x \in R$ داریم $x^2 = x$). ثابت کنید R یکدا است.

۶) (امید نقشینه ارجمند)
فرض کنید $M := [0, a] \times [0, b]$. متریک d را روی M به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$l((x, y), (x', y')) = Max\{|x-x'|, |y-y'|\}$$

حداکثر تعداد نقاط M را پیدا کنید که فاصله دوبه‌دوی آنها بزرگ‌تر و یا مساوی ۱ شود!

حل مسأله‌های کوتاه

کیوان ملاحی

۱) خیر! می‌دانیم که متمم مجموعهٔ کانتور در $[۰,۱]$ به‌صورت اجتماع بازه‌های باز مجزا، $\bigcup_{n=۱}^{\infty} I_n$ است. از هر I_n یک نقطه به‌دلخواه انتخاب کنید و S را مجموعه این نقاط بگیرید. در این صورت بستار S شامل مجموعهٔ کانتور است!

۲) فرض مسأله را می‌توان به‌صورت $(I-A)(I-B)=I$ نوشت، پس $(I-B)(I-A)=I$ و از آنجا:

$$BA = A + B = AB!$$

۳) خیر! مثلاً فرض کنید که α, β دو عدد حقیقی وابسته جبری باشند و $F=\mathbb{Q}(\alpha), K=\mathbb{Q}(\beta)$. روشن است که K, F به‌عنوان دو میدان یکریخت هستند. یکریخت بودن K, F به‌عنوان دو مجموعه مرتب نیز نتیجه‌ای از این واقعیت است که K, F دو مجموعهٔ مرتب شمارا، چگال و بدون نقاط انتهایی هستند و در نتیجه هر دو با $(\mathbb{Q}, <)$ یکریختند. فرض کنید $f: F \to K$ یک یکریختی حافظ ترتیب باشد، عدد گویای q را بین α و $f(\alpha)$ بگیرید و از این که تحدید f به $\mathbb{Q}$ همانی است به تناقض برسید!

۴) نفر اول می‌تواند برنده شود! توجه کنید که:

$$\{۱,۲,\dots,۱۳۷۷\} = \{۱\} \cup \{۲,۳\} \cup \dots \cup \{۱۳۷۶,۱۳۷۷\}$$

نفر اول با خط زدن ۲ بازی را شروع می‌کند. به‌سادگی می‌توان دید که نفر اول می‌تواند به‌گونه‌ای بازی کند که در پایان بازی به یک زوج $(۱,n)$ یا زوج $(۲n, ۲n+۱)$ برسیم که در هر حال نفر اول برنده است!

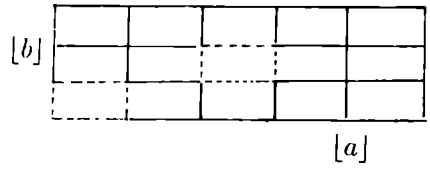
۵) فرض کنید $R=\{x_۱,\dots,x_n\}$، می‌دانیم R جابجایی است. R را در حلقه یکدار $\hat{R}$ می‌نشانیم و تعریف می‌کنیم:

$$e = ۱ - (۱-x_۱)\dots(۱-x_n)$$

دقت کنید که $e \in R$ و مثلاً،

$$x_۱ e = x_۱ - x_۱(۱-x_۱)\dots$$
$$= x_۱ - (x_۱ - x_۱^۲)\dots = x_۱$$

۶) جواب $N=(\lfloor a \rfloor + ۱)(\lfloor b \rfloor + ۱)$ است! توجه کنید که می‌توان M را به N مستطیل افراز کرد که در هر کدام از آنها حداکثر یک نقطه می‌تواند قرار داشته باشد پس حداکثر N نقطه با این خاصیت می‌توان پیدا کرد. پیدا کردن N نقطه از این هم ساده‌تر است، به‌شکل نگاه کنید!



باسمه‌تعالی

تقاضانامهٔ شرکت در دومین سمینار دانشجویی ریاضی

۹ تا ۱۱ فروردین ۱۳۷۸

نام و نام‌خانوادگی: ..... دانشجوی دورهٔ: کارشناسی ☐ کارشناسی‌ارشد ☐ دکتری ☐

گرایش تحصیلی: ..... دانشگاه: .....

نشانی پستی: .....

.....

.....

تلفن تماس: ..... دورنگار: ..... پست الکترونیکی: .....

آیا متقاضی ارائه مقاله هستید؟ بلی ☐ خیر ☐

عنوان مقاله (در صورت مثبت بودن پاسخ): .....

.....

هزینه‌ها:

حق ثبت نام	۵۰۰۰ ریال ☐
فقط ناهار	۱۰۰۰۰ ریال ☐
غذای کامل و اقامت	۲۵۰۰۰ ریال ☐
جمع	ریال

شمارهٔ فیش بانکی ..... تاریخ فیش بانکی .....

امضاء .....

تاریخ .....

قابل توجه دانشجویان محترم

انتشارات دانشکدهٔ علوم ریاضی، به دنبال نیاز دانشجویان به نرم‌افزارهای کاربردی، مجموعه‌ای از نرم‌افزارها به شرح ذیل را در یک CD جمع آوری کرده است. دانشجویان می‌توانند جهت تهیه این مجموعه به انتشارات دانشکدهٔ علوم ریاضی مراجعه فرمایند.

1. Acrobat Reader 3.01
2. Borland C 3.1
3. Borland Pascal 7.0
4. Delphi 3.0 (Clint / Server)
5. DOS 6.20
6. emTEX
7. FarsiTEX
8. Findviru 7.87
9. Maple V
10. Mathematica 2.0(For DOS)
11. Mathematica 3.0 (For Windows 95)
12. Matlab 4.20
13. Mathematica 2.0 (For Windows 3.1)
14. Matlab 5.0 (Student Version)
15. Nc 50
16. Nu 80
17. Photoshop 4.0
18. Toolkit 7.77
19. Windows 3.1
20. Windows 98 (Full Version)