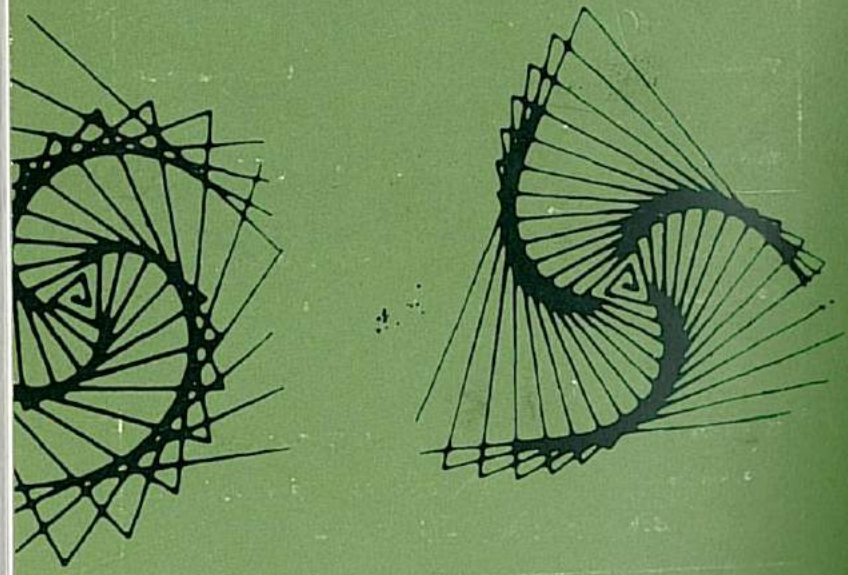
دانشگاه آزاد ایران

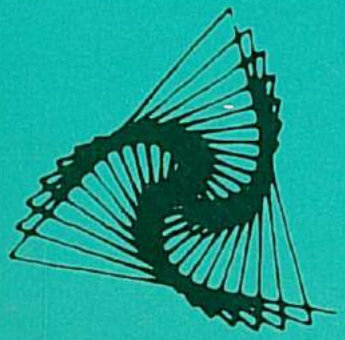
# آشتی با ریاضیات

۳

مرداد و شهریور ۲۵۳۷



# Reconciliation with Mathematics



# آشتی با ریاضیات

سردبیر: پرویز شهریاری
مدیر داخلی: محمد حسین احمدی
زیر نظر هیئت تحریریه
از انتشارات جانبی دانشگاه آزاد ایران
چاپ وصحافی: مرکز تولید انتشارات دانشگاه آزاد ایران
نشانی: تهران ـ خیابان کریم‌خان‌زند ـ اول آبان‌شمالی ـ دانشگاه آزادایران

**سال دوم ـ شمارهٔ ۳ (۷)**


## فهرست مطالب


۱ـ نگاهی به مسائل و مشکلات کتاب‌های ریاضی ایران ومعرفی و نقد چندکتاب — هوشنگ شکرانیان — درصفحه ۱

۲ـ ریاضیات و موسیقی — پرویز شهریاری — درصفحه ۲۴

۳ـ سرگذشت یک‌رابطه — جعفرقلی امیربیات — درصفحه ۵۷

۴ـ هندسه واسطه‌ها — دکترعلیرضا امیرمعز — درصفحه ۷۱

۵ـ طبیعت وترکیب‌های مارپیچی — مارتین‌گاردنر — درصفحه ۷۸

۶ـ توپ بیلیارد و ریاضیات — درصفحه ۸۷

۷ـ نکاتی‌چند درباره مسأله دیرین و غیرقابل حل «تثلیث زاویه» — دکتر مهندس ناصرکنعانی — درصفحه ۹۵

۸ـ منازعات اولیه تارتاگلیا — درصفحه ۹۶

۹ـ پروفسوری‌که نزدیک‌بود پشت و روشود — درصفحه ۱۰۰
مارتین گاردنر ـ ترجمهٔ پرویز شهریاری



۵۵ ریال


# نگاهی به مسائل و مشکلات کتاب‌های ریاضی ایران و معرفی و نقد چند کتاب


**هوشنگ شکرانیان**


چند سالی است که در امر کتاب‌های علمی ـ فنی و مخصوصاً ریاضی تحرکی ایجاد شده است و تعداد این گونه کتاب‌ها مخصوصاً کتاب‌های ریاضی افزایش چشمگیری یافته است. گرچه این امر باعث خوشحالی و سرافرازی است ولی همین پیشرفت سریع و چشمگیر خود مسائل و مشکلاتی به بار می‌آورد و لزوم نقد و بررسی کتاب‌های ریاضی ایران و مسائل و مشکلات آن را آشکار می‌سازد.

نگارنده به دشواری بررسی این مسائل واقف است و می‌داند که در این مقاله کم وکاست و خطاهائی وجود دارد. از خوانندگان تمنا داریم که مارا از خطاها و کم و کاست‌های این مقاله مطلع سازند.

عمده مسائلی که اکنون با آن روبرو هستیم به شرح زیر است: کتاب‌های درسی را چه‌گونه تهیه کنیم؟ اصطلاحات و واژه‌های ریاضی را چه‌گونه تهیه و یا انتخاب کنیم؟ کتاب‌های جنب درسی مناسب کدامند؟ کتاب‌های ریاضی همه فهم مناسب جامعه ما کدامند و چه‌گونه تهیه کنیم؟ به چه ترتیب دانش‌آموزان و دانش‌جویان را به مطالعه ریاضی تشویق کنیم؟ محتوی مناسب مجلات ریاضی را به چه طریق تهیه کنیم؟ مسلماً مسائل فوق از هم جدا نیستند ولی ما برای این که بتوانیم آن‌ها را مورد

بررسی قرار دهیم از هم جدا کرده ایم، ولی در ضمن بحث راجع به هر یك از این مسائل، از دیگر مسائل نیز سخنی به میان می‌آوریم و ضمناً چند کتاب را مورد بررسی و نقد قرار می‌دهیم.

ابتدا به بحث در بارهٔ کتاب‌های درسی می‌پردازیم. با توجه به اوضاع اقتصادی اجتماعی ایران و نگاهی به تاریخ ترویج تمدن و فرهنگ جدید و نقش آموزش رسمی مدارس و مسائلی چون کمبود معلم در می‌یابیم که کتاب‌های درسی یکی از ارکان اساسی فرهنگ ما است. کتاب‌های درسی در علاقه‌مند ساختن ـ و یا منصرف کردن ـ دانش‌آموزان و دانش‌جویان به مطالعه خارج از برنامه و مطالعه در زمان فراغت از تحصیل نقش فراوانی دارند.

در مورد کتاب‌های درسی دبیرستانی و دورهٔ راهنمائی به ذکر این دو نکته اکتفا می‌کنیم که اولاً باید «برنامه‌های آموزشی و در نتیجه کتاب‌های درسی» بر اساس احتیاجات و امکانات محیط تهیه شود تا بتواند مفید واقع شود و ثانیاً هر گاه بنا باشد (برنامه درسی و در نتیجه) کتاب‌های درسی تغییر کند، باید تغییر تدریجی باشد نه یك تحول عظیم و ناگهانی. همه می‌دانیم که تغییر نظام آموزشی ایران با چه مشکلاتی مخصوصاً از جهت آموزش ریاضی روبرو بود. اکثر معلمین به محتوی کتاب‌های ریاضی جدید مسلط نبودند و دانش آموزان نیز از پیچیدگی و سنگینی مطالب شکایت داشتند. به نظر ما اگر این تغییرات تدریجی بود و همراه با تغییر تدریجی، محتوی کتاب‌های درسی ریاضی و کتاب‌ها و نشریات جنب درسی مناسب برای معلمان ریاضی منتشر می‌شد، نه تنها با مشکلات کم‌تری مواجه بودیم بلکه برنامهٔ جا افتادهٔ مناسبی می‌داشتیم.

در این صورت است که نقش و اهمیت کتاب‌های جنب درسی ـ البته نه حل‌المسائل‌های مبتذل ـ بر همگان روشن می‌شود. به‌یاد دارم که در تابستان ۲۵۳۲ در کلاس باز آموزی دبیران ریاضی قرار بود منطق درس بدهند. استاد جوانی که خود در رشته‌ی جبر تحصیل کرده بود (جبر بیش از سایر رشته‌های ریاضی به منطق ارتباط دارد) ترجمهٔ قسمت‌های اساسی یك کتاب منطق[1] را به دبیران داد و استاد که در امر آموزش تجربه‌ای نداشت و از مشکلات و اوضاع کار و زندگی دبیران بی‌اطلاع بود تصور می‌کرد که به آنان خدمت می‌کند ولی وقتی از نتیجه ناچیز کار

۱: کتاب Introduction To Mathematical Logic نوشته Mendelson



خود و نارضایتی دبیران آگاه شد، به اشتباه انتخاب خود پی برد. در صورتی که اگر به آنان کتاب «ورودی به منطق ریاضی»[1] که مقدمات منطق را در ارتباط با درس‌های دبیرستان تشریح می‌کند، داده می‌شد و از آنان می‌خواستند که پیش از ورود به کلاس آن را مطالعه کنند با مشکلات کم‌تری مواجه می‌شدند.

مشکلات کتاب‌های درسی ریاضی دانشگاه‌ها تا اندازه‌ای با مشکلات کتاب‌های درسی دبیرستانی فرق دارد. یکی از مشکلات کتاب‌های درسی دانشگاهی وجود کلمات و اصطلاحات نامأنوس است. در این جا یك بند از کتاب «هندسه‌های گوناگون» نوشته دکتر اسداله آل‌بویه که در سال ۲۵۲۱ (۱۳۴۱) منتشر شده است می‌آوریم:

«اگر سروکار ما با یك انبوه درگرفته‌ها و داوری‌ها باشد که برخی ورجاوند گرفته بر پایه نهاده باشیم و برخی دیگر را از آن‌ها به خود برآورده باشیم گوییم یك «ساختمان هندسی» داریم.»

البته در سایر کتاب‌های ریاضی دانشگاهی تا این اندازه اصطلاحات و واژه‌های نامأنوس به کار رفته است. ولی یقیناً یکی از علل به فروش نرفتن کتاب‌های درسی دانشگاه تهران همین بی‌توجهی به اصطلاحات و کلمات علمی رایج بوده است. جالب است بدانید که تا سال ۲۵۳۱ در حدود نیم میلیون جلد کتاب فروش نرفته در انبار انتشارات دانشگاه تهران وجود داشته است. در مورد ترجمهٔ اصطلاحات و کلمات علمی خارجی و مسائل مربوط به آن در کتاب «پیام من به فرهنگستان» نوشته محمدعلی فروغی مطالب ارزنده‌ای ذکر شده است که ما توجه اهل فن را به این کتاب جلب می‌کنیم.

به تدریج که برنامه‌های ریاضی دانشگاه‌ها تغییر می‌یافت استادان در صدد نوشتن کتاب‌های جدید برای دانشگاه‌ها بودند. به نظر می‌رسد که اولین کتابی که در باب ریاضیات جدید نوشته شد کتاب «مقدمه برآنالیز نوین»[2] نوشتهٔ دکتر وازگن آونسیان است. ایشان در دانشگاه استراسبورگ (فرانسه) به تدریس ریاضی مشغول بوده و استاد مدعو دانشگاه ملی بودند. کتاب مورد بحث برخلاف انتظار چندان

۱: این کتاب ترجمه پرویز شهریاری است و در صفحات آینده به معرفی آن می‌پردازیم.

۲: گویا این کتاب در اوایل سال ۱۳۴۲ منتشر شده است. نگارندهٔ کتاب در مقدمه تاریخ ۱۳۴۱/۱۲/۲۰ را مرقوم کرده، ولی در کتاب تاریخ انتشار ذکر نشده است.

سودمند واقع نشد. به نظر می‌رسد که علت اساسی این امر همانا عدم توجه به امکانات و شرایط محیط بود. این کتاب به جای آن که به طور طبیعی و پویا به رشتهٔ تحریر در آید بر اساس سلیقهٔ شخص نگارنده تدوین شده است. به طوری که مؤلف در مقدمه کتاب می‌نویسد: «در تمام مباحثی که اشاره شد [منظور بسیاری از مباحث ریاضیات نوین است] ، اهمیت و نفوذ مکتب بورباکی[1] نمایان است و مؤلف در این کتاب اصطلاحات و روش این مکتب را اختیار نموده است.» کتاب‌های مکتب بورباکی ثقیل نوشته شده و در آن‌ها توضیحات مختصری ذکر شده است. دکتر آوانسیان که در نگارش کتاب خود تحت تاثیر مکتب بورباکی قرار گرفته است، کتابی ثقیل و مختصر تهیه می‌کند. از یك‌سو مختصر و ثقیل بودن کتاب و از سوی دیگر ناآگاهی دانش‌جویان و تا اندازه‌ای مدرسان باعث شد که این کتاب چندان مفید واقع نشود.

از سال ۲۵۳۵ برنامه‌های آموزشی ریاضی دانشگاه‌ها تغییر یافت. کتاب‌ها و جزوه‌های جدید ریاضی، که به طور عمده ترجمهٔ کتاب‌های خارجی بود، منتشر شد. البته بیش‌تر استادان به تدریس متن‌های خارجی می‌پرداختند.

کم‌تر مدرس و نویسنده‌ای سعی کرده است که با توجه به اوضاع ایران و در رابطه با برنامه‌های رایج دبیرستانی کتاب و جزوه بنویسد. من تنها یك نفر را می‌شناسم که به این امر توجه کرد. او خارجی است و در چند صفحه دیگر نام او را می‌آوریم و مختصری از کارهایش را شرح می‌دهیم.

در سال ۲۵۲۷ چند تن از اعضای کادر آموزشی دانشگاه تهران دست به تهیهٔ کتابی به نام «جبر» و سپس کتابی به نام «آنالیز» زدند. هر دو کتاب از متن فرانسوی ترجمه شده و مترجمین فقط چند تمرین به آن اضافه کرده‌اند.

در سال ۲۵۲۸ جلد اول کتاب آنالیز (در دو قسمت) نوشته دکتر غلامحسین مصاحب منتشر شد. چاپ این کتاب بسیار نفیس است و در آن به ندرت غلط چاپی دیده می‌شود. نویسنده برای نگارش و چاپ کتاب زحمات فراوان کشیده، هر خواننده‌ای با مطالعهٔ کتاب متوجه این امر می‌شود. در این کتاب منطق مقدماتی و مقدمات آنالیز آمده است. کتاب حاوی مقدمه‌ای طولانی است که پاره‌ای از مطالب آن قابل بحث است.

---

۱: N. Bourbaki، برای اطلاع از مکتب بورباکی به صفحهٔ ۸۵۸ کتاب «آنالیز ریاضی» (قسمت دوم) نوشتهٔ دکتر غلامحسین‌مصاحب مراجعه کنید.



آقای مصاحب در مورد پیدایش کتاب آنالیز خود می‌نویسد: «... از جمله دروسی که نگارنده برای محصلین دوره مدرسی [دوره‌ای برای لیسانسیه‌های ریاضی است که پس از ۲۴ ماه مطالعه و تحقیق به تدریس در دانشگاه‌ها و مدارس عالی بپردازند] ، ایراد می‌کرد، دروسی بود در مبانی آنالیز و تئوری اعداد حقیقی که در ضمن آن یادداشت‌هائی در این باب فراهم گردید، که سطح آن‌ها به مراتب از سطح کتاب حاضر بالاتر است... و تدوین آن‌ها به صورت کتاب بی حاصل بود، زیرا استفاده از چنین کتابی به عده‌ای قلیل محدود می‌شد.

«در همین زمان بود که دوست ارجمند آقای علی اصغر مهاجر، که ذکر خیر ایشان در آغاز مقدمه‌ی کتاب گذشت نگارنده را به تألیف دورهٔ کتابی در آنالیز ریاضی که مورد استفادهٔ همهٔ محصلین این علم باشد تشویق کردند، و نگارنده به این کار که از قدیم نیت آن‌را داشت اقدام نمود، و طرح اولیه کتاب حاضر را فراهم آورد، و سپس به تنقیح و تدوین آن و تکمیل و آماده ساختن آن برای چاپ پرداخت.»[1]

«... کتاب حاضر نوعی «خودآموز» است. سبك تألیف آن بسیار مساعد با «تحصیل پیش خود» می‌باشد، تا کسانی هم که دسترسی به معلم یا مدرسه ندارند از آن کاملاً بهره‌ور شوند [ ما این گفته را قبول نداریم. طرح کتاب از تجربیات تدریس استاد در دورهٔ مدرسی به‌دست آمده است. شاید بدین‌جهت باشد که این کتاب بیش‌تر مورد استفادهٔ کسانی قرار گرفته است که خود تحصیلات عالی داشته‌اند. اینان برای شکل بخشیدن به اطلاعات خود و دقت در نوشتن حل مسائل و اثبات قضایا از آن استفاده کرده‌اند.] درج امثله و تمرینات بسیار فراوان، در کتاب به‌همین نظر بوده است [به‌نظر ما با ارائهٔ مسائل و تمرینات فراوان کتاب خودآموز نمی‌شود. ارتباط مطالب کتاب با مطالب ریاضی دبیرستان است که به‌این امر کمك می‌کند.].»[2] گرچه چاپ کتاب مورد بحث به‌مراتب به‌تر از چاپ کتاب «اسپیوك»[3] است؛ ولی کتاب «اسپیوك» که مطالب فراوانی نیز عرضه کرده است از پاره‌ای جهات خودآموزتر است. روشی که «گرادشتین» در کتاب «ورودی به‌منطق ریاضی» برای بیان مقدمات منطق عرضه کرده است به‌مراتب خودآموزتر از روشی است که آقای دکتر مصاحب اختیار نموده است.

---

۱: صفحه ۷ کتاب مورد بحث.

۲: صفحهٔ ۱۱ کتاب مورد بحث

3: Calculus, by Michael Spivack

نویسنده در مقدمهٔ چاپ دوم کتاب می‌نویسد: «نسخه‌های چاپ اول این کتاب قریب دو ماه بعد از انتشار آن نایاب گردید. چنین حسن استقبالی از یك کتاب صرفاً نظری (که هیچ گونه «تبلیغی» هم در باب آن نشده) کم نظیر و مایهٔ سربلندی مباشرین چاپ کتاب و نویسندهٔ آن است...

«... از مدرسین فارغ‌التحصیل از موسسهٔ ریاضیات دانشسرای عالی... [ که] اینك در بسیاری از مدارس عالیه به‌تدریس و تبلیغ ریاضیات جدید به‌معنای واقعی اشتغال دارند به‌مناسبت استقبال خاص آنان از این کتاب [ و سهم آنان در تبلیغ این کتاب، که آن‌را به‌صورت کتاب درسی تدریس می‌کنند] ، تشکر می‌کند.»

آقای دکتر مصاحب در دیباچهٔ صفحهٔ ۴کتاب می‌نویسد: «... متفقاً تصمیم گرفتیم که اگر چنین کتابی چاپ می‌شود، باید برطبق استاندارد مطبوعات ریاضی خوب خارجی باشد. شاید این کار مقدمه‌ای شود برای این‌که کتاب‌های ریاضی چاپ ایران از صورت مبتذل کنونی خارج گردد [ بر ما روشن نیست که منظور، چاپ کتاب‌های ریاضی ایران است. یا کتاب‌های ریاضی چاپ ایران].» البته آقای دکتر مصاحب در نوشتن کتاب آنالیز زحمات زیادی کشیده‌اند و این کتاب از نظر دقت مطالب بسیار جالب است و چاپ آن بسیار نفیس است. ولی کوشش ایشان باعث نشده است که چاپ کتاب‌های ریاضی تغییر اساسی یابد، زیرا کم‌تر نویسنده و مترجمی از حمایت مؤسسات غیر انتفاعی برخوردار است. سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا لازم است کتاب‌های ریاضی به‌این صورت چاپ شوند، چاپ بسیاری از کتاب‌های خوب خارجی جالب توجه نیست. و این امر مشکلی ایجاد نکرده است. اگر منظور آقای دکتر مصاحب این است که کتاب‌های ریاضی چاپ ایران از صورت مبتذل کنونی خارج شود این ادعای قابل بحثی است، زیرا کتاب «مقدمه برآنالیزنوین» دکتر آوانسیان که سال‌ها قبل از کتاب ایشان چاپ شده را نمی‌توان مبتذل دانست.

تا آن‌جا که من می‌دانم تنها یك معلم ریاضی در صدد بود که جزوه‌های درسی را با توجه به‌شرایط کلاس و معلومات دانش‌جویان تهیه کند. در تابستان ۲۵۲۹مرد بلند قد و لاغر اندامی با قیافهٔ بیمارگونه که گاه گاه سرفه‌های خشك و ممتد می‌کرد در دانشگاه صنعتی آریامهر به‌کار مشغول شد. نام او دنیس راگان فلوید است اهل آمریکاست و از دانشگاه ایالتی واشنگتن دکترای ریاضی دارد. گر چه او در مقایسه با همکاران ایرانی خود سوابق درخشانی نداشت، در انجام وظایف خود و مخصوصاً تهیهٔ جزوات درسی اش جدیت و پشتکار فراوانی داشت. گرفتاری‌های فراوان زندگی



و بیماری ـ که من خود شاهد آن بودم ـ باعث نشد که در کار خود مسامحه و سهل انگاری کند. تدریس «جبر» و «آنالیز» سال دوم ریاضی را به‌او واگذار کردند و سفارش نمودند که کتاب درسی آنالیز آپوستل است. او نیز دریافته بود که سال تحصیلی گذشته استاد ایرانی کتاب آپوستل را مو به‌مو تدریس کرده بود. دکتر فلوید به‌این چیزها توجه نکرد. در تابستان آن سال از جزئیات مطالب درسی سال اول اطلاع یافت. می‌گفت: «جزوه‌های ـ فارسی ـ سال اول را به‌من بدهید، صورت تعاریف و قضایا را برایم ترجمه کنید و نحوهٔ اثبات آن‌ها را بگوئید. می‌پرسید که دانش‌جویان تا چه اندازه این مطالب را درك کرده‌اند. ضمن صحبت از معلومات دبیرستانی دانش‌جویان کسب اطلاع می‌کرد. در اواسط شهریور برنامه‌ای برای تدریس آنالیز تنظیم کرد، ولی به‌نوشتن جزوه نپرداخت. با سبك و سنگین کردن مطالب و مراجعه به‌کتاب‌های مختلف یادداشت‌هائی برای تدریس تهیه می‌کرد و پس از ختم کلاس (با توجه به‌عکس‌العمل دانش‌جویان) به‌نوشتن جزوه می‌پرداخت. برای کار کردن شب و روز نمی‌شناخت. بارها خارج از وقت اداری به‌اطاق کار من مراجعه می‌کرد و می‌گفت: «ببین این قضیهٔ آپوستل غلط است آیا من اشتباه نمی‌کنم؟ اگر این مطالب را حذف کنیم ایرادی ندارد؟ فلان مطلب فوق‌العاده سنگین است، برای تشریح آن از فلان کتاب استفاده می‌کنم؛ نظر شما چیست؟» انتخاب مطالب و شیوهٔ کار او براساس معیارهای عینی و تجربی بود نه ذهنی و تخیلی، برخی از نویسندگان و معلمان برای انتخاب مطالب و شیوهٔ کار وسواس به‌خرج می‌دهند ولی انتخاب آن‌ها و شیوهٔ کارشان براساس معیارهای ذهنی و تخیلی است. متأسفانه این روحیه در فرهنگ علمی ما ریشه دوانده است. مشکلات اصلی کتاب‌های نظام جدید آموزشی نتیجهٔ این روحیه است. کتابی که براساس معیارهای ذهنی و تخیلی نوشته شده باشد، به‌سان شخص ذهنی و خیال‌پرداز است. هر چند که این شخص ظاهری آراسته داشته باشد و جملات را درست ادا کند ولی گفته‌های او ارزش ندارد. کتابی که براساس چنین معیارهائی نوشته شده باشد، گر چه در ویرایش آن وسواس به‌خرج داده شود و چاپ آن فوق‌العاده نفیس و با رنگ‌های گوناگون باشد، دردی را دوا نخواهد کرد. ای کاش به‌همان سهولت که می‌توان از خارج کالا، خدمات و حتی مهارت فنی (از طریق اعزام دانش‌جو و کارآموز به‌خارج و دعوت متخصصان خارجی) خریداری کرد، می‌شد ایمان به‌کار و توجه به‌معیارهای تجربی و عینی را هم خرید.

حال که پاره‌ای از مشکلات کتاب‌های درسی را ذکر کردیم به‌بحث دربارهٔ

اهمیت کتاب‌های جنب درسی و همه فهم می‌پردازیم. برای ترجمه و نگارش این کتاب‌ها هیچ گونه اقدام سازمان یافته‌ای صورت نگرفته است. به‌همین دلیل بحث در تحلیل مشکلات و مسائل آن‌ها موردی ندارد. در صفحات آتی ضمن معرفی چند کتاب در مورد اهمیت و مسائل این قبیل کتاب‌ها، به‌ذکر چند نکته می‌پردازیم.

کارهائی که در این زمینه انجام شده است صورت ذوقی و فردی داشته است. مترجم کتابی را خوانده و از مطالعه آن لذت برده و بر محتوایش صحه گذاشته و این باعث شده که به‌ترجمه کتاب بپردازد. و سپس دربه‌در به‌دنبال ناشر بگردد و یا با هزینهٔ شخص خود به‌چاپ کتاب اقدام نماید. وقتی که به‌تاریخ چاپ اول این کتاب‌ها نگاه کنیم در خواهیم یافت که پاره‌ای از آن‌ها زودتر از موقع و پاره‌ای دیرتر از زمان مناسب انتشار یافته‌اند. مثلا کتاب «ورودی به‌منطق ریاضی» نوشته گرادشتین بسیار دیر منتشر شده است در حالی که کتاب «ریاضیات محتوی روش و اهمیت آن» خیلی زودتر از زمان مناسب انتشار یافته است. یکی از علل موفقیت کتاب «یك، دو، سه، بی‌نهایت» آن است که در زمانی مناسب انتشار یافته است. این کتاب بارها تجدید چاپ شد و بسیاری از دانش‌جویان و دانش‌آموزان و دیگرکسان آن را مطالعه کردند. البته زحمات نویسنده کتاب «زرزگاموف» و احمدبیرشك مترجم کتاب در موفقیت کتاب موثر بوده است. اگر کتاب «داستان مجموعه‌ها» نوشته «نااوم یا کوله‌ویچ ویلنکین» ترجمه پرویز شهریاری کمی زودتر و یا اقلاً همزمان با کتاب «مقدمه برآنالیز نوین» نوشته وازگن آوانسیان، منتشر می‌شد هم کتاب داستان مجموعه‌ها مورد استقبال فراوان قرار می‌گرفت و هم کتاب مقدمه بر آنالیز نوین سودمند واقع می‌شد.

نشریات (مجلات) ریاضی در بسط و گسترش دانش ریاضی و علاقه‌مند نمودن محصلین و عامه به‌ریاضیات اهمیت فراوانی دارد. تا آن‌جا که ما می‌دانیم از سال ۱۳۰۶ هجری شمسی نشریات ریاضی در ایران انتشار می‌یافت، ولی عمر این نشریات کوتاه بود. اکنون پاره‌ای از دانشکده‌ها نشریات ریاضی منتشر می‌کنند. انجمن ریاضی‌دانان ایران نیز گاه‌گاهی نشریه‌ای منتشر می‌کند. نشریهٔ آشتی با ریاضیات از پانزده ماه پیش انتشار یافته است.

مجلهٔ «یکان» نشریهٔ ماهانهٔ ریاضی است که از سال ۲۵۲۲ تا حدود ۲۵۳۲ منتشر می‌شد این نشریه مورد استقبال دانش‌آموزان و معلمین ریاضی قرار گرفت. در این مجله علاوه بر مسائل مختلف ریاضی (دبیرستان) مقالاتی در باب لزوم تغییر برنامه‌های درسی ریاضی نیز نوشته می‌شد و گاه نیز مقالاتی در مورد شاخه‌های



جدید ریاضی و مباحثی درباره مبانی ریاضی ذکر می‌شد.

علت اصلی استقبال دانش‌آموزان از این مجله، وجود مسائل مختلف ریاضی در سطوح مختلف بود. دانش‌آموزان برای شرکت در امتحانات و مخصوصاً امتحانات ورودی دانشگاه‌ها به‌مطالعه این مجله می پرداختند. همراه با حذف دروس ریاضی امتحانات ورودی دانشگاهی دانش‌آموزان نیز نسبت به این نشریه بی‌توجه شده و سرانجام پس از حدود ده سال عمر این نشریه پایان یافت.

به‌طوری که گفتیم در مجله یکان مقالاتی در باب لزوم تغییر برنامه‌های درسی و چگونگی تربیت ریاضی‌دان و کمی تعداد ریاضی‌دانان ایرانی نوشته می‌شد. نویسندگان این مقالات عموماً جهانگیر شمس‌آوری و غلامرضا عسجدی بودند. اینان می گفتند که چرا برنامه ریاضی فلان کشور و بهمان کشور چنین و چنان است و تعداد ریاضی‌دانانشان زیاد است ولی برنامهٔ ریاضی ما معیوب است و تعداد ریاضی‌دانان ایران کم است؟ اینان این مطالب را بدون توجه به‌شرایط و نیازهای ایران عنوان می کردند.

در مقاله‌ای تحت‌عنوان «پرورش ریاضی‌دان» ترجمه آقای جهانگیر شمس‌آوری که در یکان فروردین ماه ۱۳۴۴ آمده است، مطالبی پیرامون تربیت ریاضی‌دان در چند کشور پیشرفته صنعتی ذکر شده است. ایشان در پایان مقاله اظهار می‌دارند: «این بود ترجمهٔ مقاله‌ای که در ابتدای مقال به‌آن اشاره کردیم. تصور نمی‌کنید که اگر ما هم چنین کوشش وسیع و همه‌جانبه‌ای را آغاز کنیم به‌طور قطع دانشمندان طراز نوینی به‌جهان بشریت تقدیم خواهیم کرد؟» آیا به‌راستی این گفتهٔ آقای شمس‌آوری چیزی جز خیال‌پردازی است؟ اوضاع و احوال اقتصادی، اجتماعی ایران- مخصوصاً در آن زمان- با کشورهای پیشرفته صنعتی تفاوت بسیار دارد. کارهائی که آنان انجام می‌دهند اولاً در ایران عملی نیست و ثانیاً اگر هم انجام شود نتیجهٔ جالبی به‌بار نمی‌آورد.

در اولین کنفرانس ریاضی ایران که در فروردین ماه ۲۵۲۹ تشکیل شد یکی از شرکت کنندگان اظهار داشت:«برای چه تا این اندازه از تغییر برنامه‌های درسی حرف می‌زنید. گیریم که پیشرفته‌ترین برنامه‌های ریاضی را اجرا کنید، برای چه؟ آیا می‌خواهید مانند هند ریاضی‌دان تربیت کرده و آن‌ها را سوار کشتی کنید و برای کشورهای بزرگ صنعتی هدیه بفرستید؟» به‌نظر ما این مطلب دارای جنبه‌های مثبت و قابل ملاحظه‌ای است.

تلاش در راه استفادهٔ عملی از ریاضیات، تلاش در راه تفهیم ریاضیات

به‌محصلین رشته‌های فنی حائز اهمیت فراوان است، ولی متاسفانه به‌این امر توجه ناچیزی می‌شود. از این هم مهم‌تر تلاش در راه آشنا ساختن عامه مردم به‌دانش ریاضی ضروری است. اطلاع از (مقدمات) دانش ریاضی برای عامه لازم است. بدون دانستن آمار مقدماتی حتی خواندن روزنامه نیز مشکل است.

دریك کارخانه در حال نصب کارگر، تکنیسین و حتی مهندس ایرانی از آن قسمت از هندسه که در «ورق‌کاری» لازم است اطلاع کافی نداشتند، ولی آن کارگر سادهٔ آلمانی که می‌گفتند در حد سیکل هم سواد ندارد، در این مورد اطلاع کافی داشت. زیرا برای آنان کتاب‌های مفید و لازم را تهیه کرده بودند. بی‌شك ترجمه و نگارش چنین کتاب‌هایی برای پیشرفت صنعت و توسعه اقتصادی ایران ضروری است. در کارخانهٔ دیگری چون آقایان مهندسین از انجام پاره‌ای محاسبات (سادهٔ) ریاضی عاجز بودند می‌خواستند جرثقیل یك‌میلیون‌تومانی را بازنشست کنند و به‌انبار ماشین‌آلات فرسوده بفرستند.

بدون تلاش در راه گسترش دانش ریاضی در سطح جامعه و تلاش در راه استفادهٔ عملی از آن پیشرفت ریاضیات در کشور ما مقدور نیست.

**کتاب‌های کمك درسی.** اهمیت و نقش کتاب‌های درسی را شناختیم و مشکلات آن‌ها را بررسی کردیم. راستی مشکلات کتاب‌های درسی، کمبود معلم، و از همهٔ این‌ها مهم‌تر مشکلات برنامه‌های آموزشی، و از این هم مهم‌تر روحیهٔ مدرك‌گرائی چه مشکلاتی به‌بار می‌آورد؟ روحیهٔ مدرك‌گرائی باعث می‌شود که دانش‌آموز بیش از هر چیز فکر فارغ‌التحصیل شدن و مدرك گرفتن باشد. معلم که می‌بیند تجربه ارزشی ندارد و دانش اطلاعات وسیع و تسلط برمطالب برای او چیزی به‌بار نمی‌آورد یا به‌موجودی تك‌بعدی تبدیل می‌شود و یا این‌که دنبال گرفتن مدرك بالاتری می‌رود.

کتاب‌های حل‌المسائل مبتذل خود نتیجهٔ وجود این مشکلات هستند. بسیاری، این کتاب‌هارا «ویرانگر» و «گمراه کننده» می‌دانند. در هر صورت هر صفتی که بخواهند به‌این کتاب‌ها نسبت دهند چیزی را حل نمی‌کند. وجود کتاب‌های حل‌المسائل معلول است نه علت. دانش‌آموزی که امکانات درست آموزشی نداشته باشد و بیش‌تر در فکر گرفتن مدرك باشد تا درك عمیق مطالب کتاب‌های درسی، به‌ناچار به‌کتاب‌های حل‌المسائلی که مسائل کتاب‌های درسی را حل کرده باشد پناه می‌برد. ما عقیده داریم که تمایل به‌کتاب‌های حل‌المسائل مبتذل و وجود این‌گونه کتاب‌ها نشانگر مشکلات متعدد آموزشی است. باید دانست که کتاب‌های



حل‌المسائل منحصر به‌ایران نیست. در کشورهای خارج هم این‌گونه کتاب‌ها رایج است. کتاب‌های سری Schaums حل‌المسائل‌اند. ولی از آن جا که در دروس دانشگاهی کتاب معینی وجود ندارد در این کتاب‌ها رئوس مطالب درسی و اثبات قضایای اساسی بیان شده است.

صرف‌نظر از مشکلات فوق و به‌فرض که این مشکلات مرتفع شود آیا باز هم جائی برای کتاب‌های حل‌المسائل باقی می‌ماند؟ از آن جا که در دروس ریاضی مسئله و حل آن اهمیت فراوان دارند و چون با وقت معدود کلاس‌های درس نمی‌توان مسائل متعدد و مشکل را مطرح و حل کرد، کتاب‌های حل‌المسائل ضروری است. البته نه حل‌المسائل‌های مبتذل. به‌نظر ما کتاب‌های حل‌المسائل خوب نیز وجود دارند. منظور ما از کتاب‌های حل‌المسائل خوب آن کتاب‌هائی هستند که حاوی مسائل پیچیده و مسائل مطالب جنبی کتاب (مطالبی که در کتاب به‌آن‌ها چندان توجه نشده است.)باشد.

تا آن جا که ما می‌دانیم اولین نشریهٔ ریاضی ایران نش ه‌ایست به نام «حل‌المسائل» که شماره اول آن در ۱۵دی ماه ۱۳۰۶ هجری‌شمسی (۲۴۸۴ شاهنشاهی) تحت‌نظر و مراقبت ناصر، هورفر، ریاضی منتشر شده است[۱]. روی جلد آن هدف نشریه درج شده است:«مسائلی که در این مجموعه حل می‌گردد عموماً از مسابقه‌ها و امتحانات نهائی ایران و اروپا و غیر آن اتخاذ می‌شود ضمناً بعضی از مسائل که در یکی دو جلد مدخل می‌شود در جاهای قبل به عنوان سئوال طرح خواهد شد و اسامی مشترکینی که مسائل مندرجه را بعد از پانزده روز از نشر مجموعه صحیح کرده بفرستند در ذیل همان مسئله درج خواهد شد.» ظاهراً باید در این نشریه فقط مسائل ریاضی و حل آن‌ها ذکر شود ولی به‌ذکر و حل مسائل فیزیك نیز پرداخته است.

یکی دیگر از نشریات ریاضی مجلهٔ «ریاضیات عالی و مقدماتی» است که مدیر مسئول و مؤسس آن آقای غلامحسین مصاحب است[۲]. شماره ششم این نشریه که به‌دست ما رسیده است. حاوی مطالبی درباره چند ریاضی دان نامی و پاره‌ای از کارهای آن‌ها است. علاوه برآن به ذکر مطالبی از ریاضیات عالی پرداخته است، در آن چند مسئله برای حل ذکر شده و نیز حل مسائل شماره‌های قبل آمده است.

---

۱: اولین نشریهٔ «حل‌المسائل» شامل ۶ برگ (به قطع $A^4$) و به بهای ۵۰ دینار است.
۲: این نشریه شامل ۱۴ برگ (به قطع کوچك) و به‌بهای یك ریال است.

یکی از کتاب‌های جالب حل المسائل، حل المسائل هندسه ترسیمی و رقومی نوشتهٔ آقای حسین مجذوب است. این کتاب ابتدا در سال ۱۳۱۳ (۲۴۸۷ شاهنشاهی) چاپ شد و در سال ۱۳۴۱ (۲۵۲۱ شاهنشاهی) تجدید چاپ شده است. می بینیم کتاب‌های حل المسائل خوب همیشه وجود داشته و خواهد داشت. اگر دانش آموز فرصت‌طلبی که فقط به اخذ مدرك و گرفتن نمره می اندیشد به حل المسائل مبتذل رو می‌آورد، دانش‌آموز فعال که علاقه‌مند به ورزیدگی بیش‌تر است به ناچار به کتاب‌های حل المسائل خوب پناه می‌آورد. تا چند سال پیش که در مسابقات ورودی دانشگاه‌ها و مدارس عالی مسائل ریاضی داده می‌شد گرایش دانش آموزان به حل المسائل جالب بیش‌تر بود و از این رو حل المسائل‌های خوب خریدار داشت، ولی متأسفانه از سال ۲۵۳۳ که معیار ورود به دانشگاه معدل امتحانات نهائی و آزمون زبان، ادبیات، هوش و فرهنگ ملی بود گرایش به این گونه حل المسائل‌ها کاهش یافته است در حالی که حل المسائل‌های مبتذل مانند گذشته مورد توجه‌اند.

کتاب‌های حل المسائلی وجود دارند که نه تنها به ذکر مسائلی نظیر آنچه که در کتاب‌های معمولی می‌آید پرداخته‌اند بلکه مسائل جالب ریاضی که به اطلاعات ریاضی بستگی نداشته است و یا مسائلی که خواننده را برای درك مباحث جدید ریاضی آماده می‌سازد نیز وجود دارد. کتاب «مسائل ریاضی آسان ولی ...»[1] از این قبیل است. در این کتاب ۲۴۲ مسئله در زمینه‌های مختلف ریاضی و مسائل گوناگون که به اطلاعات ریاضی دبیرستانی بستگی ندارد آمده است. ما چند نمونه از مسائل این کتاب که به اطلاعات ریاضی دبیرستانی بستگی ندارد ذکر می‌کنیم.

فاصله بین دو دهکدهٔ A و B مساوی ۳ کیلومتر است. ۱۰۰ دانش آموز در دهکدهٔ A و ۵۰ دانش‌آموز در دهکدهٔ B وجود دارد. در چه فاصله‌ای از دهکدهٔ A یك دبستان ساخته شود تا مجموع راهی که ۱۵۰ دانش آموز رویهم می‌پیمایند کم‌ترین مقدار ممکن باشد؟[2]

این تمرین را به چند دانش جو و دانش آموز دادم. دانش جویان سعی کردند مسئله را از طریق مرکز ثقل حل کنند. چون تعداد دانش‌آموزان دهکدهٔ A دو برابر تعداد دانش آموزان دهکدهٔ B است پس باید مدرسه به فاصله $۳\times ۱/۲$ کیلومتر (یعنی ۱

۱: این کتاب توسط آ. ای استروسکی و چهار نفر دیگر نوشته شده و آقای پرویز شهریاری آن را به فارسی ترجمه کرده‌اند.

۲: تمرین ۳ صفحه ۱۰ کتاب مورد بحث.



کیلومتر) از دهکدهٔ A باشد، البته این راه حل اشتباه است. جالب است که دانش آموز ۱۳ ساله‌ای که به ریاضی علاقه مند نیست این مسئله را درست حل کرد. محل مناسب، خود دهکدهٔ A است.

تمرین ۲۳۰ (صفحهٔ ۶۳) مساله جالبی است در زمینه حمل و نقل. تمرین ۱۲۸ (صفحه ۳۲) تمرین جالبی است که برای حل آن از اطلاعات ناچیزی استفاده می‌شود.

تاکنون از دو نوع حل المسائل صحبت کردیم. کتاب‌های دیگری وجود دارند که ظاهراً شبیه حل المسائل اند، در آنان مسائل فراوانی ذکر و حل شده است، و در ضمن مطالب تازه‌ای عنوان شده و در خواننده روحیه تحقیق و مطالعه را تقویت می‌کند. کتاب تقارن در جبر نوشته و. گ. بالتیانکی ـ ن. یا. ویلنکین ترجمهٔ پرویز شهریاری از این گونه کتاب‌ها است. مطالب کتاب دربارهٔ چند جمله‌ای‌های متقارن است[1]. «حل بسیاری از مسائل مربوط به جبر مقدماتی، با استفاده از تقارن کثیرالجمله‌ها [چند ـ جمله‌ای‌ها]، فوق‌العاده ساده می‌شود. و در این کتاب از طریقه‌های استفاده از تقارن برای حل دستگاه معادلات، معادلات گنگ، نامساوی‌ها و غیره گفت و گو شده است. همهٔ این مسائل با روش واحده به کمك عبارت‌های متقارن حل می‌شوند. (کتاب می‌تواند مورد استفادهٔ همهٔ کسانی که خود را برای مسابقات آماده می‌کنند، همه دانش جویان و همهٔ علاقه مندان به مطالب ریاضی قرار گیرد.)[2] در مقدمهٔ کتاب توضیحاتی در مورد اهمیت چند جمله‌ای های متقارن ذکر شده است. در صفحهٔ ۱۱ کتاب دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی آمده است ـ که با روش حذف، به معادلهٔ درجهٔ ششم می‌رسد: «ولی این معادله از درجهٔ ششم است و رابطه‌ای برای حل معادلهٔ درجه ششم در دبیرستان وجود ندارد[3]. به این ترتیب روش حذف مجهول ما را به بن بست می‌کشاند.

به همین علت است که روش حذف (برای حل دستگاه معادلات از درجه‌های بالا) به ندرت در دبیرستان مورد استفاده قرار می‌گیرد و معمولا کوشش می‌کنند که برای حل دستگاه مورد نظر راه حل ابتکاری جست و جو کنند.»[4]

۱: چند جمله‌ای از x و y را متقارن نامند که اگر x را به y و y را به x تبدیل کنیم تغییر نکند.

۲: یادداشت مولفین کتاب تقارن در جبر.

۳: نیلس آبل ثابت کرد که رابطه‌ای وجود ندارد که به کمك آن بتوان اعمال معمولی روی اعداد (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ریشه گرفتن) معادله‌ای بالاتر از درجهٔ چهار را در حالت کلی حل کرد.

۴: صفحات ۱۱ و ۱۲ کتاب مورد بحث.

«هدف این کتاب این است که خواننده را با یکی از روش های کلی حل دستگاه های درجهٔ بالا آشنا کنند ...»[1]

شیوهٔ کتاب «روش های جبر» نوشتهٔ پرویز شهریاری تا حدودی شبیه کتاب تقارن در جبر است. خواننده با مطالعهٔ آن روش های جالبی برای حل بسیاری از مسائل جبر فرا می گیرد.

به طوری که گفتیم خواننده با مطالعهٔ این گونه کتاب ها نه تنها در حل مسائل ورزیده می شود، بلکه مطالب تازه ای هم نیز می آموزد. با کمی اغراق می توان گفت که مطالعهٔ این گونه کتاب ها برای دانش آموزان علاقه مند همان قدر مفید است که مطالعه مقالات علمی برای دانش جویان.

کتاب «اشتباه استدلال های هندسی» نوشته «یاکوف اسمنویچ دوینوف» ترجمهٔ پرویز شهریاری از جالب ترین کتاب هائی است که در مورد حل مسائل هندسه نوشته شده است. در این کتاب مطالب هندسی درست و نادرستی را به غلط ثابت کرده و سپس در مورد چگونگی بروز این اشتباهات توضیح داده شده است. در مقدمه کتاب توضیحات ارزنده ای دربارهٔ علت بروز اشتباه استدلال های هندسی ذکر شده است که ما چند بند از آن را می آوریم: «همه به نقش شکل ضمن اثبات قضیه ها آگاهی داریم، زیرا شکل هم محتوی قضیه و هم روش اثبات آن را روشن می کند. گاهی لازم می شود برای اثبات یك قضیه چند شکل مختلف رسم کنیم (مثل قضیه زاویهٔ محاطی که هنگام اثبات آن معمولاً سه حالت در نظر می گیرند: مرکز دایره یا روی یك ضلع زاویه یا در داخل و یا در خارج زاویه قرار دارد). نادیده گرفتن یکی از حالت ها که نتوان استدلال را عیناً برای آن تکرار کرد، قدرت استدلال را از بین می برد، زیرا گاهی در چنین حالتی ممکن است قضیه با روش غلطی ثابت شود.»[2]

«ضمن اثبات قضیه ها نباید نقش شکل را خیلی بالا برده و یا خیلی پائین بیاوریم. بالابردن ارزش شکل، ممکن است شکل را جزئی از اثبات قضیه جلوه گر سازد. از لحاظ نظری هرگونه اثبات هندسی بدون توسل به شکل می تواند انجام گیرد و این روش جنبه مثبتی هم دارد که همان بی نیازی از توسل به «واضح بودن مطلب» است که اغلب گمراه کننده و علت اشتباه های فراوان می باشد. مع هذا خودداری از

۱: صفحه ۱۲ کتاب مورد بحث.
۲: صفحه ۴ کتاب مورد بحث.



رسم شکل هم ممکن است ما را دچار مشکلاتی کند...»[1]

## کتاب های جنب درسی

منظور ما از کتاب های جنب درسی کتاب هائی است که دربارهٔ مطالبی به بحث می پردازند که دانستن آن برای محصل ضروری است و در کتاب های درسی یا به آن ها اشاره نشده و یا مختصر اشاره ای شده است. همچنین کتاب هائی که در آن ها روابط شاخه های مختلف ریاضی را تشریح می کنند جزء این دسته از کتاب ها می دانیم.

یکی از بهترین کتاب های جنب درسی کتاب «ورودی به منطق ریاضی» نوشته «ایزابل سالامونوویچ گرادشتین» ترجمه پرویز شهریاری است. کسانی که در سال های اخیر در دانشگاه ها به تدریس ریاضی اشتغال داشتند متوجه این امر شده اند که بسیاری از دانش جویان- با وجود این که در دروس هندسهٔ دبیرستان نمرات بالا گرفته اند- قدرت استدلال ضعیفی داشتند و از این لحاظ دچار دردسر می شدند. دانش جویان با مطالعه این کتاب می توانند به درك به تر روش های استدلال در ریاضی نایل آیند. مؤلف در مقدمه کتاب می نویسد: «... بیش تر روش های استدلال ریاضی، برای دانش آموزان ناروشن است: دربارهٔ روش برهان خلف، دربارهٔ مفهوم هایی مثل «همه» و «هر»، در این باره که برای اثبات نادرستی یك قضیه کافی است که تنها یك مورد مشخص پیدا شود که قضیه مورد نظر در آن صدق نکند، دربارهٔ تعمیم قضیه ها و مفهوم ها، دربارهٔ روش استقرا ریاضی و غیره و غیره. کتاب های درسی به این گونه مفهوم ها، توجه کمی می کنند. بعضی از کتاب های درسی ریاضیات عالی کوتاه شده ای از دستورها و قضیه های ریاضیات مقدماتی را آورده اند در این کوتاه شده، مثلاً دستور محاسبهٔ محیط دایره یا $\sin 2\alpha$ و غیر آن داده شده است، ولی در هیچ کدام از آن ها گفته نشده است که قضیهٔ عکس یا قضیهٔ نقیض چیست. به همین مناسبت به خصوص در سال های اول دانشکده، موضوع هایی که به روش های استدلال ریاضی مربوط می شود، برای دانش جویان دشواری هایی به وجود می آورد. وقتی که دانش جویان وارد دانشگاه می شوند، یکباره به تعریف ها و قضیه هایی برخورد می کنند که در آن ها مرتب از کلمه هایی مثل «لازم و کافی است»، «همه»،

۱: صفحه ۴ کتاب مورد بحث.

«هر»، «بعضی» و «وجود دارد» و غیره استفاده می‌شود و در نتیجه آن‌ها را با دشواری‌هایی روبرو می‌کند. نقش اصلی این کتاب این است که (از این لحاظ) فاصلهٔ بین آموزش دبیرستانی و دانشگاهی‌را پر کند.»[1] مطالعهٔ این کتاب برای دانش‌آموزان (نظام جدید آموزشی) نیز بسیار مفید است. مترجم که در امر تدریس تجربهٔ فراوانی دارد در مقدمه‌ای که براین کتاب نوشته است چنین می‌گوید: «باید بستگی‌هایی که بین مفهوم‌ها، قضیه‌ها و تعریف‌های گوناگون و در رشته‌های به ظاهر متفاوت ریاضیات وجود دارد، کاملاً روشن باشد و در واقع ریاضیات از همان نخستین سال‌های آموزش به صورت به هم پیوسته و در ارتباط منطقی با یکدیگر، قرار گرفته شود. ریاضیات به عنوان یك دستگاه منطقی شناخته شود که از واقعیات دنیای دوروبر ما سرچشمه گرفته است و تنها به خاطر دقت بیش‌تر در شناسایی قانون‌هایی که بر طبیعت حکومت می‌کند، موقتاً و این‌جا و آن‌جا از بعضی ویژگی‌ها صرفنظر شده است و تنها به ویژگی خاصی که مورد بررسی است، توجه شده است. ولی، اگر بخواهیم موضوعی را به عنوان یك موضوع واقعی و موجود بررسی کنیم، نمی‌توانیم این ویژگی‌ها را از هم جدا کنیم و جبر را جدا از منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها را جدا از هندسه و غیرآن بدانیم.

به عنوان نمونه باید گفت که آموزش ریاضی دبیرستانی ما تا حد زیادی این هدف را دنبال نمی‌کند [به عقیدهٔ ما طرح برنامهٔ آموزشی‌ای که ارتباط بین درس‌های مختلف را به خوبی نشان دهد به آسانی امکان‌پذیر نیست. همین امر خود اهمیت کتاب‌های جنب درسی را نشان می‌دهد] و مثلا دانش‌آموز، درسی به عنوان جبر یا حساب یا هندسه می‌خواند و در کنار آن‌ها درس دیگری هم دارد به نام «ریاضیات عمومی» که از نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق ریاضی گفت و گو می‌کند. و این احتمالا نوعی پریشانی در ذهن دانش‌آموز به وجود می‌آورد که نمی‌تواند به خودی خود بستگی بین این بحث‌های متفاوت را دریابد ...»[1] یکی از ویژگی‌های جالب این کتاب آن است که مقدمات منطق را در رابطه با دروس دبیرستانی، مخصوصا هندسه، تشریح کرده است.

یکی دیگر از کتاب‌های خوب جنب درسی کتاب «دستگاه‌های محدود ریاضیات» نوشتهٔ «م. نورتون» ترجمهٔ پرویز شهریاری است. دراین کتاب با

۱: صفحه ۱۲ کتاب مورد بحث.
۲: صفحه ۵ کتاب مورد بحث.



مثال‌های ساده ای از آنچه که در زندگی روزمره با آن‌ها سرو کار داریم قانون ترکیب را شرح می‌دهد و سپس به ذکر و تشریح پاره‌ای از اصول هیلبرت در مورد هندسه اقلیدسی می‌پردازد. دریغ که این دو کتاب اخیر خیلی دیر ترجمه شده‌اند. لازم بود که این کتاب‌ها در حدود سال ۲۵۲۵ ترجمه می‌شدند.

حال کتابی را معرفی می‌کنیم که نتیجهٔ تلاش ریاضی‌دانان شوروی جهت گسترش آموزش ریاضی است. کتاب «ریاضیات، محتوی، روش و اهمیت آن» اول بار در سال ۱۹۵۶ منتشر شده است: «این کتاب که فصول جداگانه آن به وسیلهٔ مؤلفین مختلف نوشته شده است، با وجود این مجموعه کتاب نتیجهٔ یك کوشش دسته جمعی است. طرح کلی آن و انتخاب مطالب فصول مختلف در معرض قضاوت دسته‌جمعی قرار گرفته و بر اساس تبادل زندهٔ افکار تکمیل شده است. ریاضی‌دانان بسیاری از شهرهای اتحاد شوروی در بحثی که به وسیلهٔ انستیتو ریاضی ترتیب داده شده بود شرکت کرده و در اطراف متن مقدماتی آن تذکرات ذی‌قیمتی دادند. این تذکرات و پیشنهادات هم از طرف مؤلفین در نظر گرفته شده است»[1]. این کتاب را نمی‌توان صرفاً یك کتاب جنب درسی به حساب آورد. دراین کتاب با روشی ساده بسیاری از مطالب و چگونگی پیدایش نظریات ریاضی را شرح می‌دهد. دراین کتاب پلی عریض و مستحکم بین ریاضیات به اصطلاح قدیم و جدید احداث شده است. این کتاب به وسیلهٔ انجمن ریاضی‌دانان آمریکائی ترجمه شده و متن انگلیسی آن که با قطع وزیری و حروف ریز چاپ شده است در حدود ۱۳۰۰ صفحه است. مطالعهٔ این کتاب برای دانش‌جویان، مهندسین، معلمین ریاضی و حتی استادان ریاضی جالب و سودمند است.

پرویز شهریاری در سال ۱۳۳۷ به فکر ترجمه این کتاب افتاد. دو بخش از کتاب را ترجمه کرد و درصدد چاپ آن برآمد ولی هیچ ناشری به او پاسخ مثبت نداد و بالاخره این کتاب را با سرمایه شخصی به چاپ رسانید[2]. ولی متاسفانه به جای این که نکات جالب آموزشی کتاب مورد توجه قرار گیرد، کتاب مورد توجه کتاب خوانان سهل‌اندیش که به مطالب فلسفی و ذهن پرکن توجه بسیار دارند و از نوشته‌هایی که خواننده را درگیر جزئیات امر می‌کند به شدت هراس دارند، قرار گرفت. در حالی که

۱: صفحه ۶ چاپ اول ترجمهٔ فارسی کتاب مورد بحث.
۲: چاپ دوم این کتاب که شامل چهار فصل است اخیراً منتشر شده و قرار است ترجمهٔ کامل این کتاب به‌زودی منتشر شود.

هدف اصلی نویسندگان کتاب آن است که خواننده را درگیر جزئیات مطالب ریاضی کنند.

دراین مقاله نام پرویز شهریاری را مرتباً تکرار کرده ایم. حقیقت این است که در ایران تنها یك مترجم ریاضی وجود دارد که در مباحث مختلف ریاضی ـ در حد دبیرستان و کمی بالاتر ـ به ترجمه و گاه تألیف پرداخته است. او گرچه از پشتیبانی مؤسسات دولتی و یا شرکت‌های انتشاراتی غیر انتفاعی برخوردار نبوده است، به پرفروش نبودن کتاب‌هایش توجه نکرده و با ترجمهٔ کتاب‌های ذهن پرکن روشنفکر پسند در پی کسب مال و شهرت نبوده است. یکی از دوستانم که به خواندن کتاب‌های ذهن پرکن علاقه بسیار دارد می‌گفت: «پرویز شهریاری یکی دو کتاب خوب ترجمه کرده است (منظورش همان کتاب ریاضیات محتوی ...) بود ولی بقیه مثل سرگرمی‌های ریاضی و تقارن در جبر ... کتاب‌های مبتذلی هستند.» دوست من نمی‌دانست (یعنی نمی‌توانست بداند) که دو کتابی که نام‌برده از شاهکارهای نویسندگان کتاب‌های ریاضی است.

یکی از معروف‌ترین کتاب‌های ریاضی کتاب «ریاضیات چیست» نوشتهٔ «کورانت» و «روبین» است (کورانت یکی ازریاضی‌دانان برجسته آلمان بود که با هیلبرت، پایه‌گذار ریاضیات قرن بیستم، همکاری نزدیك داشت.) این کتاب در سطح جهانی کتابی موفق به شمار می‌آید و نسخهٔ انگلیسی آن بین سال‌های ۱۹۴۱ و ۱۹۶۰ ده بار تجدید چاپ شده. «اینشتاین» و دیگر دانشمندان نامی این کتاب را به جهت کوششی که در تفهیم مفاهیم اساسی ریاضی به عموم و به ویژه دانش جویان و دانش‌آموزان به عمل آورده، ستوده اند.

این کتاب سعی می کند که اطلاعات ریاضی و قدرت درك خواننده را ضمن مباحثاتی نسبتاً دقیق افزایش دهد و او را با جوانب ریاضیات و مطالب بنیادی آن آشنا سازد (البته نه با شرح سادهٔ مطالب و بدون درگیر کردن خواننده با جزئیات و مشکلات کار). این کتاب با ترجمهٔ آقای حسن صفاری در سال ۲۵۲۹ با چاپی نفیس منتشر شد ولی از آن استقبال چندانی نشد. بی شك یك علت عدم استقبال از این کتاب گرانی آن است (این دردگریبانگیر اکثر کتاب های علمی است.)؛ ولی علت اصلی نیست زیرا نه آن هایی که توانائی خرید این گونه کتاب ها را دارند و نه آنان که می توانند آن را از کتابخانه عاریت بگیرند به سراغ آن نرفته اند. به عقیده ما علت اصلی عدم استقبال از آن، نداشتن عنوان دهان پر کن و عدم وجود مسائل مبتذل و نداشتن مطالب روشنفکر پسند است.



این یکی از بیماری های خطرناك فرهنگ ریاضی کشور ما است که به کتاب های جالبی که خواننده را درگیر جزئیات امر می کند و به او اجازهٔ آسان طلبی و سهل اندیشی نمی‌دهد، مورد توجه قرار نمی‌گیرد.

یکی دیگر از کتاب های جالب جنب درسی کتاب «داستان مجموعه‌ها» نوشتهٔ «نااوم یاکوله‌ویچ ویلنکین» است. در این کتاب بازبانی ساده راجع به مجموعه‌ها، مجموعه‌های بی‌نهایت و منحنی های عجیب بحث می‌شود. نگارنده کتاب را براساس خاطراتش از زمانی که تازه با نظریهٔ مجموعه ها آشنا شده است، نگاشته است.

«... آشنائی (من) با نظریهٔ مجموعه‌ها، در سال های تحصیل من در دانشکدهٔ مکانیك ریاضی ادامه داشت. بعد از هر درس (و باید اعتراف کرد که گاهی حتی ضمن سخنرانی هائی که جالب نبودند)، دانش جویان در کریدورها جمع می شدند و دربارهٔ مسأله‌های جالب و نمونه‌های عجیبی که مربوط به مجموعه ها بود با هم بحث می کردند، به خصوص دانش جویان تازه کار، قدیمی ترها را سؤال پیچ می کردند که چه گونه می توان منحنی ای ساخت که از تمام نقطه های یك مربع بگذرد و یا چه گونه ممکن است تابعی ساخت که برای هیچ نقطهٔ آن مشتق وجود نداشته باشد و غیره.

«من هم می خواهم، نظریهٔ مجموعه ها را با همان شیوه ای که خودم آموخته ام و بیش‌تر مربوط به بحث‌های «کریدوری» است برای شما باز گو کنم. به همین مناسبت، تکیهٔ کار در طرح مسأله‌های روشن و گفت و گو دربارهٔ مثال های عجیب و غیر قابل انتظار است، و به خصوص کوشش شده است که نظریهٔ تابع های با متغیر حقیقی بیش‌تر و روشن تر مورد بررسی قرار گیرد.»

در این کتاب مطالب جالبی دربارهٔ رابطهٔ انالیز و نظریهٔ مجموعه ها ذکر شده است. به طوری که گفتیم، جای تأسف است که این کتاب دیر ترجمه شده است. مطالعهٔ این کتاب نه تنها برای دانش‌جویان سال های اول و دوم ریاضی سودمند است، بلکه برای آنان که بخواهند از چگونگی پیدایش نظریهٔ مجموعه‌ها و آنالیز مطلع شوند، نیز جالب و آموزنده است.

**سرگرمی ها و بازی های ریاضی.** کتاب های سرگرمی ها و بازی های ریاضی در پیشبرد دانش نوجوانان و علاقمندان ریاضی به همان اندازه با اهمیت اند که

مطالعهٔ کتاب های داستان برای علاقه‌مندان به ادبیات و مطالعات اجتماعی. برخی از مطالب این کتاب ها، مطالب کتاب های درسی است که به طور شیرین و دلپذیری عنوان شده‌اند. از این روی می‌توانند برای علاقه‌مندی نوجوانان به مطالعه، سودمند باشند. آن ها را به مطالعات عمیق تشویق کنند. مشکلات استدلال‌های ریاضی را دریابند، حس عددی آن ها تقویت شود و خلاصه با بلند نظری بیش‌تری به ریاضیات توجه کنند.

پاره‌ای از مطالب این کتاب ها ربطی به مطالب کتاب های درسی ندارد، در مورد پدیده‌هائی است که به کتاب های درسی راه نیافته‌اند. در این کتاب ها مطالب و مسائل ساده‌ای در مورد حمل و نقل، بررسی عملیات، بازی ها و مطالب پراکندهٔ دیگری آمده است که به تقویت اندیشهٔ ریاضی خواننده کمک می‌کند. اکنون ضرورت مطالعهٔ این قبیل مطالب را توضیح می‌دهیم. محتوی ریاضیات ثابت نیست. ریاضیات با زندگی ما، با مسائل تولیدی، مدیریت، حمل و نقل و با علوم دیگر ارتباط دارد، از اینان مایه می‌گیرد و خود موجب پیشرفت شاخه‌های مختلف علوم، شیوه‌های تولید و ... می‌شود. همراه با تغییر شیوه‌های تولید و پیشرفت علوم و فنون محتوی ریاضیات نیز تغییر می‌کند. از این رو برای تربیت جوانانی که بتوانند در زمان اشتغال به کار معلومات خود را با مقتضیات زمان هماهنگ کنند، وجود این کتاب ها، به جهت اهمیت آن ها در تقویت اندیشهٔ ریاضی بسیار مهم است.

بی شك یکی از به‌ترین و احتمالاً به‌ترین نویسندهٔ کتاب های سرگرمی های ریاضی «یا. ای. پرلمان» است. مهارت او در عنوان کردن سرگرمی‌های ریاضی فوق‌العاده است. لازم به تذکر است که برای نوشتن سرگرمی های ریاضی نیاز به مهارت و ظرافت فراوان است و پرلمان در این مورد استاد مسلم بود. ما برای معرفی پرلمان فقط چند بند از مطالب صفحات ۱۷۷ و ۱۷۸ کتاب سرگرمی های ریاضی را می‌آوریم. آنچه که در زیر می‌آید قسمتی از مطالبی است که پرلمان برای تشریح «احتمال» نوشته است.

«ولی بالاخره یك شانس برای من وجود دارد؛ یك قطره در تمام اقیانوس ها، در ده ها اقیانوس این شانس شماست. ولی برای من ده ها اقیانوس در مقابل یك قطره و بنابراین برد من به همان اندازه مسلم است که دو دو تا چهار تا است.

«صدای پیر مردی که در تمام مدت ساکت بود بلند شد: «فریب خوردی مرد جوان، فریب خوردی.»



«... خود حقیقت اشتباه شما را روشن می‌کند، صدای موزیك نظامی را می‌شنوید؟»

بالاخره جوان ریاضی‌دان می‌بازد و مرد عامی برنده می‌شود.

ما از زندگی پرلمان خبری نداریم همین‌قدر می‌دانیم که درزمان جنگ دوم بین‌المللی در محاصرهٔ لنین‌گراد در گذشته است. از شغل و حرفهٔ او اطلاعی نداریم و در دایرة‌المعارف سی جلدی روسی نیز نامی از او نبرده‌اند. کتاب های پرلمان در روسیهٔ شوروی بارها تجدید چاپ شده است. از او سه کتاب به زبان فارسی به نام‌های سرگرمی‌های ریاضی، سرگرمی‌های جبر و سرگرمی‌های هندسه چاپ شده است.

کتاب های «اندیشهٔ ریاضی» تألیف ب. ز. آزکوردمسکی و «در پی فیثاغورث» تالیف شه پان ـ النسکی دربارهٔ بازی ها و سرگرمی های ریاضیات هستند. مطالعه این دو کتاب نه تنها آموزنده و سرگرم کننده است، بلکه باعث تقویت اندیشهٔ ریاضی خواننده نیز می‌شود.

این سوال برای ما مطرح است که آیا ترجمهٔ این کتاب‌ها ضرورت داشته یا صرفاً نتیجهٔ علاقهٔ مترجم (پرویز شهریاری) به ترجمهٔ این قبیل کتاب‌ها بوده است. حقیقت این است که زمینه برای پذیرش چنین کتاب‌هائی چندان مساعد نیست. ولی هر گاه سؤالات کنکور و امتحانات از محدودهٔ برنامهٔ درسی خارج شود می‌توان امیدوار بود که این قبیل کتاب‌ها نیز مورد توجه قرار گیرد.

کتاب «در قلمرو ریاضیات» نوشته دو موریاد کتابی است تکمیلی در زمینه بازی‌ها و سرگرمی‌های ریاضی. تئوری بازی پانزده را دقیقاً تشریح می‌کند و متعرّض مطالب مقدماتی از تئوری بازی‌ها می‌شود. زهی تاسف که در ایران، به جهت فراهم نبودن زمینه برای مطالعات ریاضی این کتاب با ارزش بی‌توجه مانده است. کتاب مورد بحث درست به سان آدمی می‌ماند که از کشور خارجی به ایران بیاید و زبان فارسی را به‌درستی فراگیرد ولی نه خود را با طرز فکر مردم ایران آشنا سازد و نه مردم ایران بخواهند طرز فکر او را درك کنند. آیا به‌تر نبود که مترجم محترم به‌جای این که وقت خود را صرف ترجمهٔ این کتاب می‌کرد، به ترجمهٔ کتابی که بیش‌تر مورد پسند مردم است همت می‌گماشت؟ آقای شهریاری در این مورد اظهار می‌دارند که من وظیفه‌ای که برای خود قائل بوده‌ام انجام داده‌ام. بالاخره روزی این کتاب مورد توجه قرار می‌گیرد.

**کتاب‌های تاریخ ریاضی.** «بین کتاب‌های غیر درسی ریاضی کتاب‌هائی که

در زمینه تاریخ ریاضی نوشته شده است بیش از سایر کتاب‌ها مورد توجه قرار گرفته است. عمده کتاب‌های ریاضی سری «چه می‌دانم؟» در بارهٔ تاریخ ریاضی است. مزیت این کتاب‌ها بر دیگر کتاب‌های غیر درسی آن است که خواننده به راحتی آن‌ها را می‌خواند. درگیر محاسبات و اشتباه‌های طولانی و خسته کننده نمی‌شود و از همهٔ این‌ها مهم‌تر، با مطالعه این کتاب‌ها می‌تواند فخر فروشی کند. اگر کتاب‌خوانان سهل اندیش نمی‌توانند ارزش کتابی چون «سرگرمی‌های ریاضی» را دریابند براین گونه کتاب‌ها ارج بسیار می‌نهند.

البته مطالعهٔ کتاب‌های تاریخ برای کسانی که علاقمند به ریاضی باشند، واجب است و کسی می‌تواند از این کتاب‌ها به خوبی بهره گیرد که در زمینه‌های دیگر ریاضی نیز به مطالعه بپردازد. تاسف ما از این است که این کتاب‌ها مورد سوء استفاده قرار می‌گیرند و اغلب خوانندگان این کتاب‌ها از مطالعهٔ در زمینه‌های دیگر ریاضی سرباز می‌زنند.

یکی از به‌ترین کتاب‌های تاریخ ریاضی (که به فارسی ترجمه شده است) کتاب «ریاضی‌دانان نامی» اثر «اریك تمپل بل» ترجمهٔ حسن صفاری است. این کتاب در مقایسه با کتاب «ریاضیات چیست؟» پرفروش بوده است. گرچه در این کتاب سعی شده که علاوه بر آوردن مطالب تاریخی و مطالب سرگرم کننده، خواننده را با مطالب ریاضی نیز آشنا سازد ولی تا آن‌جا که ما می‌دانیم این کتاب از لحاظ مطالب تاریخی و سرگرم کننده مورد توجه قرار گرفته است.

**مقالات تاریخی ریاضی.** منظور ما آن مقالات و کتاب‌هائی است که در زمان تحولات ریاضی به وسیله کسانی که در این تحولات رهبری را در دست داشته‌اند، نوشته شده است. با مطالعهٔ این قبیل کتاب‌ها نه تنها خواننده در زمینهٔ تاریخ ریاضی مطالبی می‌آموزد بلکه روحیه پژوهشی او نیز تقویت می‌شود. متأسفانه از این قبیل کتاب‌ها به‌ندرت چاپ می‌شود. در این زمینه می‌توان از کتاب‌های «جبر خیّام» نوشتهٔ «عمرخیّام» ترجمهٔ «غلامحسین مصاحب» و کتاب «حساب»۲۵۰ مسئلهٔ تألیف سرپینسکی (با ترجمهٔ پرویز شهریاری) نام برد.

در آمریکا که از سال‌های ۱۹۳۰ به بعد به امر تربیت ریاضی‌دانان توجه بسیار کردند و به ترجمهٔ چنین کتاب‌هائی همت گماشتند. بسیاری از این قبیل کتاب‌ها به وسیلهٔ شرکت دور[1] طبع و نشر یافته است.

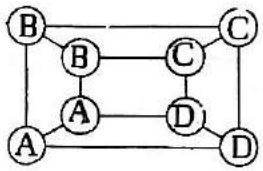
تا این‌جا از کتاب‌های فراوانی نام بردیم. ما می‌توانیم به جهت افزایش

1: Dover

کتاب‌های ریاضی، چه از لحاظ تعداد و چه از نظر تیراژ کتاب‌ها به خود ببالیم. من و هر کس دیگر که این کتاب‌ها را خوانده باشد باید از مترجمین و مؤلفینی که وقت خود را صرف ترجمه و تألیف این کتاب‌ها کرده‌اند سپاس گذاری کنیم. گرچه وجود این کتاب‌ها لازم است ولی کافی نیست. عمدهٔ این کتاب‌ها خوانندهٔ واقعی ندارند. بیش‌تر این کتاب‌ها به خاطر علاقهٔ شخصی مترجم، ترجمه شده‌اند نه به خاطر ضرورت اقتصادی ـ اجتماعی. فرهنگ ریاضی ما در صورتی واقعاً غنی می‌شود که آقایان ریاضی‌دانان تلاش خود را متوجه بسط و گسترش ریاضی در بین اقشار و طبقات مختلف مردم ایران کنند. سعی کنند که علم ریاضی را به درون کارخانه‌ها، معادن، مزارع و یا هر جای دیگری که لازم است ببرند. از این طریق است که دانش ریاضی درجامعهٔ ما پایگاهی مستحکم خواهد یافت. به خدمت امور تولیدی و اجتماعی در خواهد آمد و اجتماع نیز با آغوش باز آن را پذیرا خواهد بود. در این صورت دیگر مترجم و مؤلف کتاب ریاضی برای چاپ کتابش از این شرکت به آن شرکت نمی‌دود، بلکه این ناشران خواهند بود که به دنبال مترجم و مؤلف راستین خواهند گشت.

## رمز و راز عددها و شکل‌ها

■ **کدام‌عددرا کجا بگذاریم؟**




در دایره‌های این شکل ، عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و۸را طوری بگذارید که مجموع رقم‌ها در راه‌های هر یك از مستطیل‌های ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ وهریك از دوذنقه‌های $ABB_1A_1$ ، $BCC_1B_1$ ، $CDD_1C_1$ و $DAA_1P_1$ ، برابر ۱۸ بشود.

■ **زاویه و خط‌راست**

روی صفحه ، یك زاویه و نقطهٔ M داده شده است . از M خط راستی چنان رسم کنیدکه از برخورد با ضلع‌های زاویه ، مثلثی با محیط معلوم P بسازد .

پاسخ درصفحه ۷۵

# ریاضیات و موسیقی

پرویز شهریاری

گهی اقسام موسیقی که هرمس
پدید آورد برالحان دیگر
گهی اقلیدس و منطق که بنهاد
سقاطالیس استاد سکندر
ناصر خسرو

«بدان، که علم موسیقی یکی از اصول حکمت ریاضی است که علم به احوال نغم و اختلاف آن و حال ابعاد و انتقالات و ارتفاع و کیفیت تألیف الحان است. و این علم، از تالیف و وضع حکماست که روح را از آن لذتی و فرحی است نه جسم را. و موضوع آن سمع است و نفس را به واسطهٔ آن حرکتی و جنبشی حاصل شود و از آن لذت یابد....»

بحرالالحان ـ فرصت شیرازی
(۱۲۷۱ـ۱۳۳۹ هجری قمری)

«.... ریاضیات دانشی است که کمیت‌های انتزاعی را بررسی می‌کند.... این دانش، به شاخه‌های زیر تقسیم شده است: حساب، موسیقی، هندسه و نجوم. حساب عبارتست از دانش کمیت‌هایی که به وسیلهٔ عدد بیان می‌شوند. موسیقی هم، دانشی است که کارش بررسی عدد است، منتهی در بستگی‌هایی که این عدد، با پدیدهٔ صوت دارد....»

کاسیودور، دانشمند رومی
(سدهٔ ششم میلادی)

## ۱. ورود به مطلب

سخن کاسیودور، مربوط به سدهٔ ششم میلادی است؛ دوران درخشانی که هنوز زیست‌شناسی از فیزیك جدا نشده بود و دانش شیمی اصلاً به‌وجود نیامده بود. کمی بعد، ابونصر فارابی، در «احصاء العلوم» خود، ریاضیات را به هفت شاخه تقسیم کرد:



حساب، هندسه، نور، اخترشناسی، موسیقی، زیبایی‌شناسی و بالاخره دانش مربوط به استادی و مهارت؛ و ابن سینا (۳۷۰ـ۴۲۸ هجری قمری) موسیقی را قسمت اصلی از اقسام چهارگانهٔ حکمت ریاضی می‌دانسته است. به اعتقاد ابن سینا، ریاضیات عبارت بوده است از دانش موسیقی، دانش عدد، دانش هندسه و دانش اخترشناسی.

«..... موسیقی، یکی از علوم ریاضی است که منظور آن، مطالعهٔ صداهای موسیقی، بحث در ملایمت و همچنین کشش آن‌ها و قواعد ساختن قطعات موسیقی است. بنابراین، علم موسیقی شامل دوقسمت است: علم ترکیب نغمات مربوط به صداهای موسیقی و علم اوزان مربوط به زمان‌هایی که صداهای یك نغمه را از یکدیگر جدا می‌سازد. پایه‌های این دو، بر اصولی استوار است که از علوم خارج از موسیقی اخذ می‌شود؛ بعضی از این اصول از ریاضی و برخی از فیزیك و علوم طبیعی و بعضی دیگر از هندسه گرفته می‌شود....»

امروز، کم‌تر کسی است که بتواند این گمان را به خود راه دهد که بتوان موسیقی را به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات توضیح داد. زیرا، در طول زمان، و باگذشت سده‌های بسیار، نوعی روبه‌رویی و تقابل، بین دانش و هنر، پدید آمده است.

ولی، دوران ما را، علاوه بر نام‌ها و عنوان‌های دیگری که به خود اختصاص داده است، می‌توان بیش از هرچیز، دوران به هم پیوستن دانش‌های مختلف، و ضمناً، دوران به‌هم پیوستن دانش و هنر دانست. و نمونهٔ این وضع را، در زمان ما، می‌توان به‌طور روشن در مورد ریاضیات و موسیقی درك کرد.

و این، نه شگفتی آورونه غیر طبیعی است. دانش و هنر، هر دو زاییدهٔ خلاقیت فکری و عملی انسان در طول زمان و دربستگی با نیازهای روحی و جسمی اوست. دانشمند و هنرمند، هر دو انسانند و آفریده‌های آن‌ها هم جز برای انسان و به خاطر انسان نیست. این است که در بادی امر، و برای نیاکان دورما، آنچه که آفریدهٔ روح و ذهن و کار آدمی بود، محصول واحدی به‌شمار می‌آمد و زیر هر عنوان ـ مذهب یا جادوگری و یا بعدتر فلسفه ـ شامل همهٔ دانش‌ها و هنرها می‌شد وبعد، همین که ذهن جست‌وجوگر آدمی، به خاطر زندگی پیچیده تری که پیدا شده بود، نمی‌توانست همه چیز را با هم و به صورت یکپارچه مورد تحلیل قرار دهد، و به‌خاطر ساده‌تر کردن بررسی‌ها و بهتر شناختن قانون‌های طبیعت و جامعه و انسان، رشته‌ها و تخصص‌ها را به‌وجود آورد و دانش‌های مختلف و هنرهای گوناگون را با نام‌های قراردادی

متفاوت بنیان گذاشت و امروز، که به خاطر دگرگونی‌های عمیق در رابطهٔ انسان با طبیعت و افراد و جامعه‌های انسانی با یکدیگر، ضرورت شناخت همهٔ آنچه که «انسانی» است و یا مربوط به انسان است، پدید آمده؛ دوباره سیلاب‌های متعدد تخصص‌ها و پراکندگی‌ها به‌هم می‌پیوندند و با بینشی بالاتر و امکانی گسترده‌تر، یکپارچگی طبیعت، جامعه و روح آدمی احیا می‌شود و ناسازگاری‌ها و پراکندگی‌ها و تابرابری‌ها نابود می‌شود.

امروز دیگر نمی‌توان هنر را جدا از دانش و یا دانش را جدا از هنر تکامل داد؛ همان‌طور که خلوت‌نشینی و ذهن‌گرایی هم ـ که در زمانی هم میسر و هم مترقی بود ـ کار انسان پیشرو امروزی نیست و بدون یاری گرفتن از یکدیگر و بدون بهره جستن از تمامی تجلیات فکر و عمل آدمی، نمی‌توان راهی به‌جهان بهتر فردا پیدا کرد.

هنر، کاملاً انسانی است و هیچ جنبهٔ «غیر انسانی»، چه والاتر و چه فروتر، ندارد. به قول مرحوم محسن هشترودی، هنرمند ریاضیدان:

«..... مایهٔ هنر، احساس هنرمند است. احساسی که با سیر وقفه ناپذیر زمان به هم آمیخته، گویی با گذشت مدام عمر در جدال است و می‌کوشد به هر قسم که باشد، عمر کوتاه آدمی را جاویدان ساخته و در آغوش ابدیت زمان پایدار سازد. موسیقی، بهترین نمایندهٔ این کوشش و کشش است. آهنگ‌های گریزندهٔ آن، نمایندهٔ آنات زودگذر زمان و توالی ناله‌های لرزنده‌اش، نمودار پیوستگی لحظات پیاپی زمان است. می‌توان این کوشش هنرمند را، در اعماق هر اثر هنری یافت..... چرا موسیقی و معماری، نسبت به سایر هنرها زودتر تکامل یافته و تجدد و تنوع در آن‌ها، فی‌المثل از ادبیات و نقاشی کم‌تر است. نویسندهٔ این سطور چنین می‌پندارد که در این دو هنر، گرایش علمی بیش از سایر هنرهاست؛ در موسیقی، از دیرباز، نسبت گام‌های موزون شناخته شده و در معماری به‌کار بستن قواعد هندسی در نسب و ابعاد، قوانین متبع به‌دست داده بود. در حالی که، فی‌المثل در نقاشی، هنر مجرد باقی می‌ماند و هنرمند از اشکال و صور و رنگ‌ها مدد می‌گیرد.....»

تنها نکته‌ای که باید به سخنان استاد اضافه کرد، این است که امروز این «گرایش علمی» هنرها پیدا شده است و این به هم پیوستگی «دانش و هنر»، که در زبان ما به مرحلهٔ «جبری» خود رسیده است، تنها ضامن پیشرفت هم این و هم آن



است و به روزگاری رسیده‌ایم که «هنر مجرد»، با حفظ همهٔ جنبه‌های اختصاصی و انسانی خود، چاره‌ای جز بیرون آمدن از مخفی‌گاه راز گونهٔ خود ندارد. ولی، در این باره، نباید تند رفت و همه چیز را یکباره با معیار «ماشین» و «اندازه‌گیری» سنجید و نه کورکورانه از «سنتها» و تصورات ذهن‌گرایانه پیروی کرد. دانش و هنر، هنوز جایگاه‌هایی جدا از هم دارند و هر کدام از موضع خود به انسان خدمت می‌کنند. آنچه که تازگی دارد و باید از مشخصات زمانهٔ ما شمرده شود، هماهنگی آن‌ها با هم و سودجستن این از آن و یا آن از این است. روش داوری را از ابن‌سینا بیاموزیم که در «شفا» گفته است:

«همچنین از جست‌وجوی رابطه‌ای بین اوضاع و احوال آسمان، خواص روح و ابعاد موسیقی خودداری می‌کنیم، وگرنه روش کسانی را که از حقیقت علم آگاهی ندارند پیروی کرده باشیم. اینان وارث فلسفه‌ای مندرس و سست می‌باشند و صفات اصلی و کیفیات اتفاقی را به جای هم گرفته‌اند و خلاصه کنندگان نیز از آن‌ها تقلید کرده‌اند. ولی، اشخاصی که فلسفهٔ حقیقی را فهمیده و مشخصات صحیح اشیاء را درک کرده‌اند، اشتباهاتی را که در اثر تقلید رخ می‌دهد، تصحیح نموده و غلط هایی را که زیبایی‌های اندیشه‌های کهنه را می‌پوشاند، پاک کرده‌اند. اینان سزاوار تحسینند...»

## ۲. اندکی تاریخ

«اهمیت دشواری‌هایی که در راه شناسائی دانش موسیقی و حل مساله‌های گوناگون آن وجود دارد، چه برای سدهٔ شانزدهم پیش از میلاد و چه برای سدهٔ شانزدهم بعد از میلاد، به یك اندازه است».

**ف . کونتر ـ موسیقی‌شناس و مورخ امریکایی**

«... صدا دارای تمام صفاتی است که به‌عنوان رابطه بین حیوانات، برای درك حضور یکدیگر به‌کار می‌رود و تنها خاصیتی از اجسام مادی است که در همهٔ استعدادها ظهور می‌کند»

**ابن‌سینا**

در این مقاله، نه می‌خواهیم به نظریهٔ زیبایی شناسی بپردازیم و نه از مکتب‌ها و یا روش‌های موسیقی گفت‌وگو کنیم. ما تنها می‌خواهیم به رابطه‌ای که موسیقی با ریاضیات دارد بپردازیم و این که این هر دو، بازتابی از ذهن سنجیده و نظم پذیر آدمی است و طبعاً باید سر آخر به هم بپیوندند و دانش واحدی را تشکیل دهند.

ریاضیات قدیمی‌ترین دانش‌ها و موسیقی کهن‌ترین هنرهاست و قدمت هر دو،

به دورترین دوره‌های پیش از تاریخ می‌رسد. آدمی به هر دوی این‌ها نیاز داشت و همان گونه که آتش را احترام می گذاشت و از اجاقی به اجاق دیگر و از نسلی به نسل دیگر منتقل می کرد، به «روش‌های محاسبه‌ای» و «الحان موسیقی» هم ارج می گذاشت و از خاطره‌ای به خاطرهٔ دیگر می‌رساند و «سنت» آنها را زنده نگه می‌داشت.

به قول ب . **سمولیاکوف**، متخصص سرشناس تاریخ موسیقی «.....چه‌قدر خوب بود اگر در منطقه‌های همیشه یخبندان و یا در آرامگاه‌های شاهان باستانی، در کنار چیزهای دیگر، آثاری هم از صدا و موسیقی پیدا می‌شد.»

ولی، چنین نیست. «صوت» را نمی‌شد مثل سایر چیزها نگه داشت و به‌همین مناسبت تلاش برای احیای موسیقی گذشته و شناخت آن، کاری بسیار دشوار است و با وجودی که امروز، برای شناسایی موسیقی گذشته، پیچیده‌ترین امکان‌های علمی موجود به یاری گرفته شده است، بازسازی موسیقی گذشته، تقریباً در گام‌های نخستین خود قرار دارد.

شکل ۱: نقش برجسته از آرامگاه «تی». مصریان باستان، به کمك چنین حالت‌هایی، تلاش می کردند صداهای معینی را نشان دهند (مصر ـ سلطنت کهن).



باستان‌شناسی کمك می‌کند تا اساسی‌ترین مدرك‌ها جمع‌آوری شود: یادداشت‌های مربوط به موسیقی در روی سنگ‌ها، گل‌های پخته، پوست، پاپیروس؛ و نیز آلت‌های موسیقی گذشته‌های دورو رساله‌های نظری مربوط به موسیقی. در این زمینه، نقش‌های برجسته و مجسمه‌های نوازندگانی که در حال نواختن و یا خواندن هستند و نوشته‌های تاریخی و شاعرانهٔ نویسندگان باستان دربارهٔ جشن‌ها و مراسمی که موسیقی در آن‌ها نقش مهمی داشته است، همه به یك اندازه دارای ارزش‌اند.

اما، موسیقی نسل‌های گذشته چه‌گونه زندگی دوباره می‌یابند؟

یك آلت موسیقی را که مربوط به زمان گذشته است، به‌شرطی که خوب مانده باشد، مورد مطالعه قرار می‌دهند، دیاپازون صدا دهی و امکان‌های فنی آن‌را معین می‌کنند. اگر این وسیله، در اثر گذشت زمان دچار خرابی‌هایی شده باشد، آن را مرمت می‌کنند و یا ساز دیگری را با همان خصوصیت‌ها می‌سازند. بعد از روی رساله‌هایی که دربارهٔ موسیقی زمان گذشته، نوشته شده است، آگاهی‌هایی دربارهٔ ردیف‌های صوتی و فاصله‌هایی که به‌کار می‌رفته، به‌دست می‌آورند. بالاخره اگر یادداشت کشف رمز شده‌ای هم در دست باشد، با بازخوانی آن، قطعهٔ کوچکی از موسیقی اصلی باستانی را آماده می‌کنند.

ولی، مطلب همیشه به این سادگی نیست. کم‌تر پیش می‌آید که در یك مورد، به همهٔ مدرك‌های مورد نیاز دسترسی پیدا شود. مثلاً، آلت موسیقی در دست است، ولی یادداشت‌های مربوط به آن موجود نیست (و یا هنوز خوانده نشده است)؛ یا روش نواختن سازی که پیدا شده است، معلوم است، ولی هیچ گونه آگاهی‌های نظری در دست نیست و...

تا آن جا که به موسیقی جهان کهن مربوط می‌شود، ما تعداد زیادی آلت‌های موسیقی و مقدار ناچیزی اثرهای خطی موسیقی در دست داریم. تنها از آغاز نخستین هزارهٔ بعد از میلاد، تعداد دستخط های مربوط به موسیقی، فزونی می‌گیرد، به‌نحوی که در سدهٔ هیجدهم تعداد آن‌ها به هزارها می‌رسد. ولی، در این جا هم ناامیدی در انتظار ماست، زیرا قسمت عمدهٔ این دستخط ها، کشف رمز نشده‌اند.

یادگارهای خطی موسیقی، به‌اندازهٔ شاهکارهای ادبی، هنرهای تجسمی و معماری سده‌های گذشته، ارزش دارند. ولی متاسفانه در حال حاضر، افراد بسیار کمی در جست‌وجوی این یادداشت‌ها هستند. تعداد این افراد کم است و یاری به آن‌ها ضروری.

**ابونصر فارابی** در بیش از هزار سال پیش در کتاب «موسیقی الکبیر» خود

شکل ۲: کتیبهٔ کوچك سومری، باخط میخی و روی گل پخته. در ستون وسط، متن سرود «در بارهٔ خلقت انسان» و در ستون راست، ترجمهٔ آسوری آن داده شده است. در ستون چپ، حدس می‌زنند که یادداشتی در بارهٔ موسیقی مربوط به‌دوران سومری باشد (هزارهٔ سوم پیش از میلاد).

نوشت: «...انسان نباید به قضاوت شخصی خود قناعت ورزد و باید عقاید دیگران را نیز مورد دقت قرار دهد... در موسیقی، مانند نجوم، اصولی قابل قبول است که متکی به شهادت عموم باشد». و این «شهادت عموم»، برای پژوهشگر امروزی، عبارتست از بهره‌گیری از همهٔ امکان‌هایی که از گذشته به یادگار مانده است.

یادداشت کردن موسیقی، به مراتب دشوارتر از یادداشت اندیشه و سخن است. صوت موسیقی، دارای ارتفاع، طول و نیرو است، یعنی دارای سه بعد است و به‌همین مناسبت ثبت و ترسیم آنها، با دشواری‌های زیادی همراه می‌شود.

بشر، تا مدت‌ها نمی‌توانست از عهدهٔ این دشواری برآید. بگذریم از این که حتی نت‌های امروزی هم، بعد از پیمودن راه دشوار هزار سالهٔ تکامل خود، هنوز قادر نیستند تمامی غنای صوت موسیقی را بیان کنند. به قول ل. ستوکووسکی، نوازندهٔ سرشناس «آنچه را که می‌توان یادداشت و چاپ کرد،تنها قسمتی از همهٔ آن چیزی است که در اصل موسیقی نواخته می‌شود.»

با همهٔ این‌ها، آیا نیاکان ما هم تلاش می‌کردند تا راهی برای نگهداری صوت‌ها



و ملودی‌ها پیدا می‌کنند و آنها را با نشانه‌های ترسیمی به ما برسانند؟ بله، تلاش می‌کردند. به نظر می‌رسد که نخستین یادداشت‌ها در این مورد، شبیه نخستین علامت‌های خطی قدیمی، به صورت خط تصویری (پیکتوگراف) بوده است. متاسفانه، تصویرهای مربوط به موسیقی دوران پیش از تاریخ، به ما نرسیده است. ولی، تصویرهای جالبی از بومیان امریکای شمالی در پایان سدهٔ گذشته، پیدا شده است که در آن‌ها، تلاشی برای ثبت زبان موسیقی دیده می‌شود: خط های موج‌دار و یار است که از دهان یك شکارچی و یا جادوگر بیرون آمده است؛ یا انسانی با یك «ستارهٔ نیك بختی» که از لب‌های او به پرواز درآمده است و به معنای یك ترانهٔ کامل شکارچی است.

شکل ۳: تصویری بریك صخره در کوه‌های مالوتی در پاسوتولند (درلوتو). نوازنده‌ای در حال نواختن.

سده‌ها گذشت. تصویرهای نخستین، که وسیله‌ای برای نوشتن بود، کم‌کم ساده‌تر شد، خط های هیروگلیف، میخی و بالاخره حرف‌های الفبا پیدا شد و جالب این‌جاست که تمام این‌ها، به‌عنوان نشانه‌های موسیقی هم به‌کار گرفته می‌شدند. مدت‌ها بود که با وجود گسترش خط هیروگلیف مصری، هیچ‌گونه ردپایی از

موسیقی به‌دست نمی‌آمد و به همین مناسبت، بسیاری از دانشمندان، وجود خط موسیقی را در مصر باستان نفی می‌کردند. ولی، به هر حال، چنین وضعی عجیب بود. در مصر باستان، هنر موسیقی، شکوفا شده بود و به گواهی تاریخ، نوازندگان از احترام زیادی برخوردار بودند و حتی در میان کاهنان، متخصصین مشهوری در زمینهٔ نظریهٔ موسیقی وجود داشته است. و به این ترتیب، قبول این فکر دشوار بود که مصری‌ها، با

شکل ۴: نوازندگان سومری (هزارهٔ سوم پیش از میلاد).

شکل ۵: نقش برجسته از آرامگاه پتاخوتپ. خیلی احتمال دارد که حالت نگه‌داشتن دو دست به‌این صورت،نشانه‌ای از وجود دو صدا باشد که باید در یك لحظه و با هم اجرا شود (مصر ـ سلطنت کهن).



وجود داشتن خط پیشرفته‌ای چون هیروگلیف، نتوانسته‌اند خط موسیقی را به‌وجود آورند.

هیکمن، دانشمند آلمانی که شخصیت برجسته‌ای در شناسایی موسیقی باستانی مصر دارد، ثابت کرد که مصریان با همان خط هیروگلیفی، حتی تداوم صوت‌های موسیقی را، ثبت می‌کرده‌اند. در صحنه‌های موسیقی، که روی دیوارهای بناهای عصر سلطنت کهن (سه هزار سال پیش از میلاد) کنده شده است، همراه با نوازنده‌های اجرا کننده، «رهبران ارکستر» هم نقش شده است: دستی که از آرنج خم شده است، با حالت معین پنجه و انگشتان، معرف صدای معینی است. و هیکمن سعی می‌کند معلوم کند که کدام حالت، معرف کدام صدا است.

تا آن‌جا که می‌دانیم، این تصویرها، قدیمی‌ترین یادداشت‌های مربوط به موسیقی هستند که به ما رسیده است. ولی از «حالت دست» نقش‌های مصر باستان تا «نت‌های امروزی» راه درازی پیموده شده است.

شکل ۶: نوازندگان زن. نقش دیواری (مصر باستان ـ سدهٔ پانزدهم پیش از میلاد).

یك یادداشت موسیقی هم، که مربوط به هزارهٔ سوم پیش از میلاد است، از بین‌النهرین باستانی به ما رسیده است و رمز آن را ك . زاکس، موسیقی شناس آلمانی، کشف کرد.

این یادداشت بر روی لوحهٔ گلی نوشته شده و متن آن، از روایت سومری «خلقت انسان» گرفته شده است. در این یادداشت، به جز خط میخی متن، نشانه‌های دیگری هم وجود دارد که آن‌ها را هم نشانه‌های مربوط به موسیقی می‌دانند. به نظر زاکس

این یادداشت‌ها، برای اجرای موسیقی با چنگ به‌همراه ملودی آوازی بوده است.

همهٔ عنوان‌های کتاب س . کرامر، سومرشناس امریکایی، به نام «تاریخ از سومر آغاز می‌شود»، و با واژهٔ «نخستین» آغاز می‌شود: «نخستین مکتب»، «نخستین تاریخ‌نویس»، «نخستین بحث ادبی» و ... کتاب، بخش‌هایی با این عنوان‌ها دارد: «نخستین سرودهای تدفین»، «نخستین ترانهٔ عشقی». در بخش اخیر، نویسنده دربارهٔ مراسم سالانهٔ شاه، که در روز سال نو برگزار می‌شود، حکایت می‌کند. پیش از برگزاری این مراسم «جشن‌ها و مهمانی‌هایی که با موسیقی و آواز و رقص همراه بود، اجرا می‌شد. در یکی از همین جشن‌ها، شعرهایی که بر روی لوحه‌های کوچکی نوشته شده بود، به وسیلهٔ همسر برگزیدهٔ شاه، خوانده می‌شد.»

همهٔ موسیقی‌شناسان با نشانه‌هایی که سومریان برای «نت‌های» موسیقی، در هزارهٔ سوم پیش از میلاد، داشتند، آشنا هستند و احتمالاً همین نشانه‌ها از طرف کرامر برای بخش «نخستین ثبت موسیقی» مورد استفاده قرار گرفته باشد.

شکل۷: صفحهٔ سنگی که سرود اپولون بران نوشته شده است. در بالای متن، نشانه‌های نت مانند ثبت شده است. این بلندترین قطعه‌ای است که از یونان سدهٔ دوم پیش از میلاد به‌دست آمده است.

ولی، نشانه‌هایی را که در یادگارهای خطی، چه از مصری‌ها و چه از سومری‌ها پیدا شده است، هنوز نمی‌توان با مفهومی که ما امروز از «نت» داریم، پیوند داد. این‌ها، تنها ردهای ترسیمی صداهای جداگانه هستند. این نشانه‌ها، هنوز نمی‌توانند تصوری زنده، از موسیقی ملت‌های باستانی به ما ببخشند. ما هنوز ملودی‌های آن‌ها را نمی‌شناسیم.



همسایگان سومری‌ها، یعنی فنیقی‌های باستان، این افتخار را دارند که خط صوتی «الفبا» را به‌وجود آوردند. بسیاری از ملت‌هایی که با سومری‌ها داد و ستد داشتند، با این خط ساده و راحت، آشنا شدند، آن‌را پذیرفتند و بر اساس آن، الفبای خاص خود را به‌وجود آوردند. یونانی‌های باستان نیز جزو این ملت‌ها بودند.

ما نمی‌دانیم که آیا فنیقی‌ها برای ثبت موسیقی، تلاشی داشته‌اند یا نه، ولی یونانی‌ها این کار را با موفقیت انجام دادند: اگر حرف می‌تواند صدای جداگانهٔ کلام را بیان کند، پس حتماً می‌توان صداهای جداگانهٔ موسیقی را هم، به‌وسیلهٔ حروف ثبت کرد.

پیدایش «نت‌نویسی» یونانیان را می‌توان در حدود سدهٔ هفتم پیش از میلاد دانست. «نت‌های» یونان باستان، از دو گروه «سازی» و «آوازی» تشکیل می‌شد و در گروه اول از حروف فنیقی و در گروه دوم از حروف یونانی استفاده می‌کردند.

تا کنون، نزدیک به یک دوجین خط موسیقی مربوط به یونان باستان، شناخته شده است. البته، این مقدار، در مقایسه با «نت‌های» دیگر کشورهای آن زمان، زیاد است، ولی، اگر این مقدار را با آنچه که گمان می‌رود در یونان باستان وجود داشته است، مقایسه کنیم، بسیار ناچیز است: قسمت‌های کوتاه لطمه‌دیده‌ای از کر، سرودهای رسمی، نوشته‌های روی آرامگاه‌ها و یادداشت‌هایی شبیه به تمرین‌های موسیقی؛ این‌ها همهٔ چیزهایی هستند که تا کنون به‌دست ما رسیده است.

به نظر اهل فن، قدیمی‌ترین قطعهٔ موجود، کری است از تراژدی «اورست[1]»، اثر «اوریپید[2]»، که روی پاپیروس نوشته شده است که تاریخ ثبت آن را مربوط به سال ۴۰۸ پیش از میلاد می‌دانند. ملودی‌هایی که روی لوحه‌های سنگی حک شده‌اند، دارای ارزش زیادی هستند. این‌ها عبارتند از دو سرود برای «آپولون و یک نوشته روی آرامگاه سیکیل[3]». سرودها مربوط به سدهٔ دوم و نوشته روی آرامگاه مربوط به سدهٔ اول پیش از میلاد است. طولانی‌ترین قسمت ملودی‌های باقی‌مانده از یونان باستان را، که بر روی مرمر کنده شده است، سرود اول آپولون می‌نامند (صفحهٔ سنگی، آسیب دیده و آغاز سرود از بین رفته است). نشانه‌های موسیقی در این سرود، بر بالای هجاهای متن، قرار دارند.

1: oreste.
2: Euripide.
3: Saikaille.

شکل ۸: کتیبهٔ روی آرامگاه سیکیل (سدهٔ نخست پیش از میلاد).

اما نوشته‌های «نت‌دار» سنگی که شخصی به نام سیکیل، برای آرامگاه همسرش تهیه کرده است، معروف‌ترین یادگار خطی موسیقی است: «زندگی کن دوست من، غم چیزی را به‌دل راه نده، لحظه‌های شادی را دریاب...». سیکیل در این جمله‌ها، به رهگذر خطاب کرده است و در ضمن ملودی این ترانهٔ کوچك را هم داده است.

رومی‌ها، خط موسیقی را از یونانیان به ارث بردند. با نابودی امپراطوری روم «نت‌نویسی» حرفی هم فراموش شد، تا این‌که در ابتدای سده‌های میانه، دوباره کاربرد محدودی در اروپای غربی و در بیزانس پیدا کرد. در پایان هزارهٔ نخست بعد از میلاد، شکل دیگری از «نت‌نویسی» حرفی به‌وجود آمد که این بار بر اساس استفاده از الفبای لاتینی ساخته شده بود.

کشورهای مسلمان عرب‌زبان، هندی‌ها و بعضی دیگر از ملت‌های شرق نیز دارای «نت‌های» حرفی مستقلی بوده‌اند، که نشانه‌های بعضی از آن‌ها تا به امروز هم باقی مانده است. به این ترتیب «نت‌نویسی» حرفی در طول سده‌های بسیار و در

شکل ۹: مجسمهٔ سنگی چنگ نواز (یونان-سده‌های دوم تا اول پیش از میلاد).

کشورهای گوناگون به‌وجود آمد و همه جا با سطح فرهنگ موسیقی موجود مطابقت داشته و کاملاً پاسخگوی زمان خود بوده است.

ر . سادوکوف، نژادشناس شوروی می‌نویسد: «در برابر من قطعهٔ بزرگی از یك قرابهٔ سرامیکی خوارزم باستان قرار دارد، که در روی آن آثار شکل یك بدن و خط های مبهم سه گوشه، به سختی تشخیص داده می‌شود. این قطعهٔ سرامیکی ۲۴۰۰ سال قدمت دارد. و تنها به کمك یك ذره‌بین بزرگ می‌توان یکی از جالب‌ترین صحنه‌های یك بزم شاهانه را در روی آن تشخیص داد. شاه خوارزم با قدحی در دست، به سه بالش پرنقش و نگار تکیه داده است. به‌نظر می‌آید که شاه، ضمن نوشیدن شراب، به آرامی صحبت می‌کند. پشت سر او، طرح سه گوش یك آلت بزرگ

موسیقی به وضوح دیده می‌شود. پنجهٔ نوازنده روی سیم قرار دارد. صحنهٔ بزم شاهی، چنان به استادی مجسم شده است که انسان آشکارا همهمهٔ بزم و صدای شاه را می‌شنود و طنین ملایم ملودی‌های زیبا و افسانه‌ای به گوش می‌رسد. من با احتیاط و در حالی که می‌کوشم تا خیال‌هایم به‌هم نخورد، به‌آرامی تصویر آلت موسیقی را به‌طرف روشنایی می‌گیرم. بله، این یك چنگ بزرگ زاویه‌ای است که در جهان باستان بسیار متداول بوده است. چنگ، از نخستین سده‌های پیش از میلاد تا سده هجدهم بعد از میلاد، به فراوانی در آسیای میانه وجود داشته است. و اینك، تصویر یك چنگ زاویه‌ای بزرگ، از کم‌یاب‌ترین نوع آن، بر روی سفال پاره، اجازه داد تا تاریخ آغاز گسترش آلت‌های چنگی در آسیای میانه، معین شود: سدهٔ چهارم تا سوم پیش از میلاد.

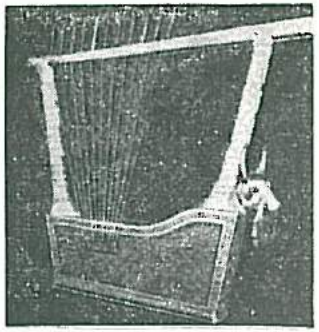
ولی، چنگ، تاریخی بسیار کهن‌تر دارد.

شکل ۱۰: نقش چنگ (خوارزم ـ سده‌های چهارم تا سوم پیش از میلاد).

گلدان سومری مربوط به پایان هزارهٔ چهارم و آغاز هزارهٔ سوم پیش از میلاد، در شهر قدیمی «آداب» پیدا شده است که بسیار جالب است. روی گلدان، دستهٔ نوازندگان نقش شده است: در جلو دو چنگ نواز در حال نواختن چنگ‌هایی که شکلی پیچیده دارند، دیده می‌شود. یکی از چنگ‌ها هفت و دیگری پنج سیم دارد... و این قدیمی‌ترین تصویری است که از چنگ به‌دست آمده است.

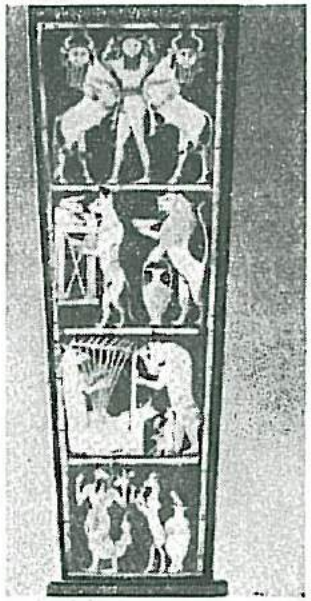
در کاوش‌هایی که ل . وولی، باستان‌شناس انگلیسی، در سال‌های ۲۰ـ۳۰ سدهٔ





شکل ۱۲: همان چنگ بعد از بازسازی.

شکل ۱۱: چنگ‌هایی از آرامگاه شاه‌آبارگی (اور ـ هزارهٔ سوم پیش از میلاد).



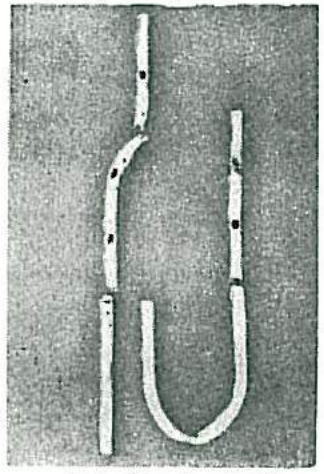
شکل ۱۳: زینت‌های صدفی چنگ.

بیستم در شهر «اور» بزرگ‌ترین شهر بین‌النهرین انجام داد، در آرامگاه سلطنتی شهر، از درون یکی از مقبره‌ها، که متعلق به سلطان «آبارگی» و ملکه «شوباد» بود، سه چنگ و از مقبرهٔ دیگر، چهار چنگ پیدا کرد. قدمت هر دو مقبره، به هزارهٔ سوم پیش از میلاد می‌رسد. دوتا از چنگ‌ها از نقرهٔ خالص بود. ل . وولی، یکی از چنگ‌های دیگر را این‌طور توصیف می‌کند: «در انتهای ردیف کناری [ ردیف ده زن قربانی شده] ، باقی‌مانده‌های شگفت‌انگیز یك چنگ دیده می‌شد. قسمت‌های چرمی آن

پوسیده بود، لیکن زینت‌های آن باقی مانده بود... تیرك چوبی بالای چنگ با طلا پوشانده شده بود که به آن میخ‌های زرین کوبیده و سیم‌ها را به آن‌ها بسته بودند... در کنار باقی‌ماندهٔ چنگ، اسکلت چنگ نواز با تاجی زرین آرمیده بود.»

شکل ۱۴: یك آلت موسیقی ضربی از «اور».

از مصر باستان هم، تعداد زیادی سندها و تصویرهای مربوط به موسیقی پیدا شده است. در این جاست که ما برای نخستین بار، با گروه‌های موسیقی، که اغلب از تعداد زیادی نوازنده، خواننده و رقاصه تشکیل می‌شده است، برخورد می‌کنیم. چنگ زاویه‌ای در مصر باستان به تکامل نهایی خود می‌رسد. این چنگ در آغاز هزارهٔ اول



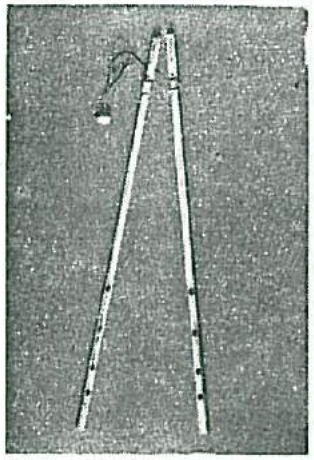
شکل ۱۵: سرنای دوگانه از «اور».



پیش از میلاد، چنان گسترش یافته بود که آن را به حق می‌توان یك ساز «همگانی» نامید. این ساز در قسمت عظیمی از کرهٔ زمین از اسپانیا تا کره شناخته شده بود. در آشور، فرمانده‌های نظامی پیروز را با یك ارکستر کامل، مرکب از چنگ‌های زاویه‌ای، استقبال می‌کردند و در مجالس درباری آسیای میانه، ساز همیشگی، چه برای موسیقی گروهی و چه تك‌نوازی بود.

تصور ما از انسان گذشته‌های دور، تصوری نادرست است. وقتی که ما دربارهٔ آن‌ها می‌اندیشیم، در دل خود دچار هراس بسیار می‌شویم. تصویری را که از انسان نخستین در ذهن ما گذاشته‌اند، تصویری ناخوشایند است: پوست جانور درنده‌ای برتن دارد، موهایش کثیف ژولیده و بلند است، سنگ‌های بزرگ را پرتاب می‌کند و جانوران را از پا می‌اندازد، عاطفه و احساس ندارد، زیبائی را نمی‌شناسد. و این گمان‌های نادرست از این جاست که کم‌تر از طراحی‌های دقیقی که از این انسان، بر صخره‌ها باقی مانده است آگاهیم، به این علت است که تنها ویژه‌کاران می‌دانند که این انسان، در پرداخت سنگ‌ها چه ریزه‌کاری‌هایی کرده است، به این مناسبت است که ما نمی‌دانیم، همین انسان نخستین، موسیقی را دوست می‌داشته است و سازهای کاملی داشته است و آن‌هائی که از این چیزها آگاهند، تعدادشان بسیار کم است.

شکل ۱۷: لیتوفون از «بوتون پیورده».



شکل ۱۶: همان سرنای دوگانه (اور) بعد از دوباره‌سازی.

انسان، حتی در دورهٔ پارینه سنگی از آلت‌های بادی موسیقی استفاده می‌کرده است، از سنگ و استخوان، ساز می‌ساخته است و گاهی حتی از چوب، از شاخ

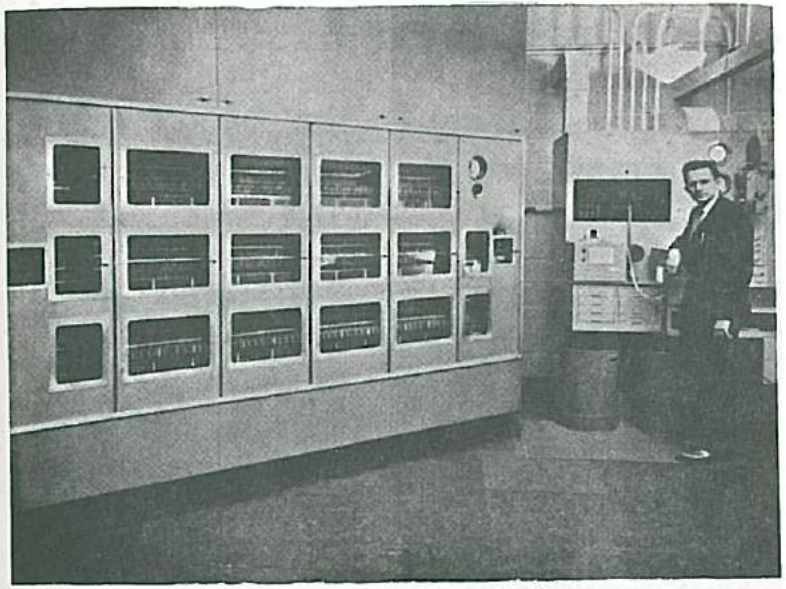
جانوران ونی، فلوت درست می‌کرده است. فلوت‌هایی پیدا شده است که بین ۱۲ تا ۱۵ هزار سال پیش مورد استفادهٔ انسان بوده است.

و به هر حال باید به‌خاطر داشته باشیم که انسان در گذشته‌های دور، با همه دشواری‌هایی که داشته است، همیشه انسان بوده است.

### ۳. ریاضیات و موسیقی

روز نهم اوت سال ۱۹۵۶ در اوربانا[1] از ایالت ایلینوی[2] امریکا، چهار موسیقی‌دان، یك کوارتت زهی را برای عموم اجرا کردند. آهنگ این موسیقی را انسان نساخته بود، بلکه به‌وسیلهٔ یك مغز الکترونیکی به نام ماشین ایلیاك[3] پدید آمده بود.

عده‌ای تنها شگفت زده شدند و عده‌ای دیگر آن را پیروزی مسلم علم می‌دانستند، چرا که یك اثر هنری به‌وسیلهٔ یك دستگاه مکانیکی خلق شده بود.

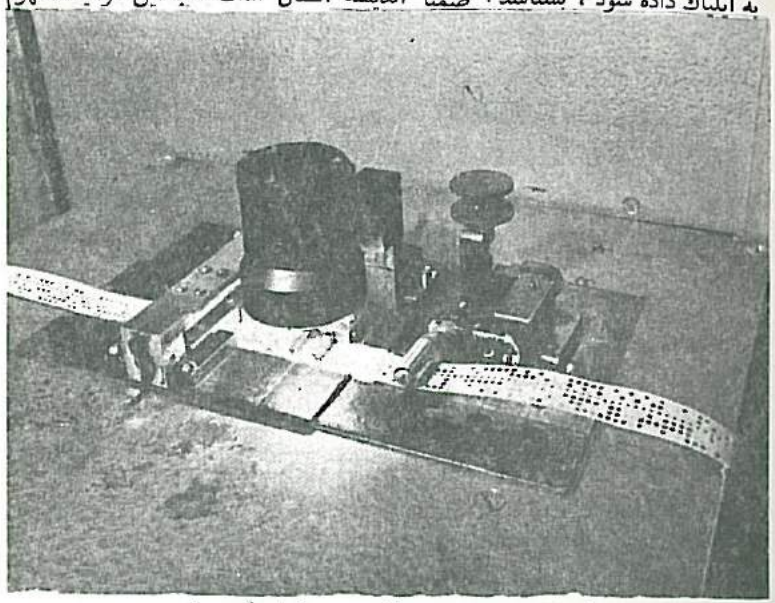


شکل ۱۸: «ایلیاك» ـ کامپیوتری که در دانشگاه ایلینوی برای ساختن آهنگ، مورد استفاده قرار گرفت. این کامپیوتر، صدها ملودی ساده و بعضی آهنگ‌های پیچیده‌تر را تصنیف کرده است.

1: Orbana.
2: Illinois.
3: Illiac.

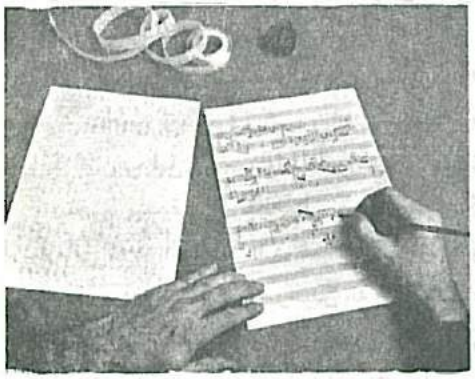


از طرف دیگر عده‌ای نسبت به این اثر هنری معترض بودند و می گفتند که این ماشین نیست که اثر هنری را ساخته است، بلکه این بشر است که برنامهٔ کار ماشین را تنظیم کرده است. این تنها انسان است که توانسته است برنامه‌ای را که می بایست به ایلیاك داده شود ، بشناسد . ضمناً اندیشهٔ انسان است که به این اثر، یك مفهوم



شکل ۱۹: محصول موسیقی کامپیوتری را اجرا منگنه می کنند ...

... بعد به‌دستگاه تله‌تایپ می‌برند، تا به‌صورت صفحه‌ای شامل حرف‌ها و عددها درآید...



...سرآخر، آن‌ها را با دست به‌صورت نت‌های حقیقی می‌نویسند چه بسا که در آینده بتوان روشی به‌دست آورد که تبدیل «حرف‌ها و عددها» به‌صورت «نت‌ها» هم، به‌وسیلهٔ ماشین انجام شود.

موسیقی داده است. با همهٔ این‌ها، این پرسش پیش می‌آید که آیا واقعاً اثر ایلیاك می‌تواند یك اثر موسیقی به حساب آید؟ در حالی که هیچ نوع هیجان و ایده آلی را بیان نمی‌کند، شاید تنها مجموعه‌ای از اصولی باشد که به‌طور صحیح ترکیب شده‌اند و در این صورت نمی‌توان به آن، به‌عنوان یك اثر هنری نگاه کرد.

بستگی موسیقی به فیزیك و ریاضیات از دیرباز شناخته شده است. حتی فارابی در فصل آخر «صحبت دوم» از کتاب «موسیقی الکبیر» خود، آن جا که از «نسبت‌های ساده» گفت‌وگو می‌کند، توضیح می‌دهد که برای ضرب و تقسیم نسبت‌هایی که متناظر با طول تارهاست باید فاصله‌های صوتی را با هم جمع و یا از هم کم کرد و در واقع، برای نخستین بار، جمع و تفریق فاصله‌ها را با اصول لگاریتم حل می‌کند.

در سال‌های اخیر «فیزیك موسیقی» چنان پیشرفت کرده است که می‌توان موسیقی را به «محاسبه» درآورد. فیزیك روشن می‌کند که چه گونه موج‌های صوتی تشکیل و منتشر می‌شود، چه گونه تارها به ارتعاش در می‌آید و چه گونه طنین صوت‌ها به ساختمان پیچیدهٔ موجی مربوط می‌شود. قوانین کلی بسامد و شدت و دلیل اصلی گام‌های موسیقی شناخته شده است. ولی، صداشناسی، اصولاً مربوط به عامل‌های تجزیه شدهٔ موسیقی است و دربارهٔ این که چه گونه ممکن است این عامل‌ها را در یك آهنگ ترکیب کرد، خیلی کم گفته شده است. در این جاست که ریاضیات به یاری گرفته می‌شود و ما هم در این مقاله می‌خواهیم همین جنبهٔ کار را روشن کنیم.

## تجزیه و ترکیب ریاضی موسیقی

با طرح و حل دو مسئلهٔ اساسی، بستگی ریاضیات با موسیقی روشن می‌شود: تجزیهٔ ریاضی و سپس ترکیب ریاضی موسیقی. محتوی این مسئله‌ها چیست؟ چه رابطه‌ای بین این دو مسئله، با آموزش غیر ریاضی موسیقی سنتی وجود دارد؟

تجزیهٔ موسیقی، از نقطه نظر نغمه‌ها، هم آهنگی‌ها، وزن‌ها، شکل‌ها، و بالاخره سازمانی که در آن وجود دارد، همیشه یکی از جدی‌ترین مسئله‌ها، در بررسی دانش موسیقی بوده است. برای رسیدن به این هدف، می‌توان از شاخه‌های مختلف ریاضیات، مثل آمار، نظریهٔ انفورماسیون و نظریهٔ گروه‌ها، استفاده کرد. تاکید می‌کنیم که تحلیل ریاضی موسیقی و تحلیل سنتی آثار موسیقی، به هیچ‌وجه یکدیگر را نفی نمی‌کنند. بر عکس، برای تحلیل ریاضی موسیقی، همیشه تا حدی به تحلیل «غیر ریاضی» موسیقی نیاز داریم. نتیجه‌هایی هم که از راه تحلیل ریاضی موسیقی به‌دست



می‌آید، به‌هیچ‌وجه متناقض با نتیجه‌های تحلیل سنتی موسیقی نیست، بلکه آن‌ها را دقیق‌تر می‌کند.

مسئلهٔ اساسی دیگری، که از مدت‌ها پیش، در برابر نظریهٔ موسیقی قرار دارد، عبارتست از نقش آموزشی آن. آهنگ‌ساز آینده، برای این که نظریهٔ موسیقی را بیاموزد، از یادگیری «نت‌ها» آغاز می‌کند، که برای آن باید دربارهٔ هم آهنگی‌ها و شکل‌های مختلف موسیقی و غیر آن، آموزش ببیند. موضوع تحلیل ریاضی موسیقی، کاملاً شبیه این مسئله است، «تنها» با این تفاوت که ساخته‌ها را باید ماشین یاد بگیرد، نه انسان. خواننده حدس می‌زند که واژهٔ «تنها» را، در جملهٔ قبل، به معنای طنزآمیز آن به‌کار برده‌ایم. اصل مطلب اینست که انسان ماشین نیست. (به‌طور دقیق‌تر باید گفت: ماشین‌های امروزی انسان نیستند)

آهنگ‌ساز آینده که دارای روحیهٔ انسانی است، پیچیده‌ترین محصول ماده است. و به‌همین مناسبت است که اولی می‌تواند «در طول سال‌ها» آگاهی‌ها و قانون‌ها را، حتی در حالتی که با هیچ دقتی منظم نشده باشند، فرا گیرد. شاگرد، با استفاده از ذوق و سلیقهٔ شخصی می‌تواند به ارزیابی بپردازد، خوب یا بد به موسیقی گوش کند، با وجودی که معمولاً، مطلقاً در پی این نیست که روشن کند از چه نشانه‌ها و یا معیارهایی استفاده کرده است. بالاخره، باید گفت که در تخیلات او، سرچشمهٔ پایان ناپذیری از اندیشه‌های تازهٔ موسیقی وجود دارد. در واقع هم، هیچ تعجبی ندارد که از چنین مادهٔ با شکوهی، آهنگ ساز به‌وجود آید. حال بیائیم و یك آهنگ ساز از شمارگر الکترونی بسازیم، ماشینی که البته این قدرت را دارد که هر چیزی را «بیاموزد»، ولی خودش، هیچ چیز نمی‌داند. حتی ابتدائی‌ترین چیزها را باید با دقت و به تفصیل، به اطلاع ماشین رساند، هیچ چیز برای آن، به‌خودی خود روشن و قابل درك نیست؛ هیچ ذوق و سلیقه‌ای از خودش ندارد، زیرا هیچ گونه تجربهٔ موسیقی ندارد. با همهٔ این‌ها، کار با ماشین، اجتناب ناپذیر به‌نظر می‌رسد. این چاره ناپذیری کار با ماشین، از کجاست؟

بعد از آنچه که گفتیم، طبعاً باید پرسشی برای خواننده پیش آید: اصلاً چرا کوشش می‌شود با به کار گرفتن ماشین «نان آهنگ سازان را آجر کنند». به‌نظر می‌رسد که این کار ممکن نیست، ضمن این که لازم هم نیست، به این پرسش با روشنی تمام پاسخ می‌دهیم: هیچ کس خیال ندارد به یاری «موسیقی ماشینی»، آهنگ سازان را بی‌کار کند. هدف آزمایش‌های جدی که روی آثار ماشینی انجام می‌شود، چیز دیگری است و دشواری‌هایی که در بالا از آن‌ها یاد کردیم، نه تنها این هدف را

از بین نمی برد، بلکه جالب بودن آن را بیش‌تر می کند و ما دربارهٔ این مطلب، کمی بعدتر، گفت‌وگو خواهیم کرد. حالا. بدون این که بیش از این به تردیدها و ابهام‌هائی که در مفهوم «تجزیه» وجود دارد، فرو رویم، کمی مفصل‌تر، به موضوع مربوط به ترکیب ریاضی موسیقی می‌پردازیم.

ولی، پیش از همه، باید به موقعیتی توجه کنیم که غیر متخصصین اغلب آن را فراموش می کنند. در مسئلهٔ ما، گفت‌وگو از این نیست که ماشینی را طرح بریزیم که امکان کمك به آثار موسیقی را داشته باشد و نوع آن تا امروز برای ما ناشناخته است. چنین ماشین‌هایی ساخته شده است و هزاران نمونه از آن‌ها وجود دارد. در واقع هر کامپیوتر عمومی، برای این منظور مناسب است. همهٔ مطلب این است که ردیف دستورها را چه گونه تنظیم کنیم، به زبان دیگر، برنامه‌ریزی را چه گونه انجام دهیم که بنابر آن، ماشین از عهدهٔ تنظیم موسیقی برآید. به این ترتیب، عبارت‌های «ماشین می تواند» و «ماشین نمی تواند» را باید به معنای «برنامه می تواند» و «برنامه نمی تواند» گرفت. ولی، برنامه را انسان می‌ریزد نه ماشین و بنابراین، موفقیت یا عدم موفقیت ماشین، سرآخر به انسان مربوط می‌شود. با همهٔ این‌ها، خواننده نباید گمان کند که برنامه‌ریز، ملودی‌های مختلف را در ماشین قرار می‌دهد و سپس، ماشین را وامی‌دارد تا این ملودی‌ها را «تألیف کند». در واقع، خود برنامه‌ریز هم نمی‌داند که ماشین چه چیزی را تألیف می کند. پرسش اصلی این است که روند کار در این مورد چه‌گونه است؟ و چه‌گونه می‌توان دشواری‌های موجود را از سر راه برداشت؟

## قانون‌های دقیق و غیر دقیق

ابتدا، به قاعده‌های دقیق و قاطعی می‌پردازیم که هر آهنگ‌سازی باید به آن‌ها توجه داشته باشد. دادن این قانون‌ها به ماشین، کارسخت و پر زحمتی است، با وجود این، هیچ‌گونه دشواری اصولی در مورد آن وجود ندارد. ضمن آزمایش معلوم می‌شود که چنین قانون‌هایی در موسیقی، خیلی کم‌تر از آن است که معمولاً گمان می‌رود. بنابراین داخل کردن این قانون‌ها به برنامه، به هیچ وجه، مساله را حل نمی‌کند. احتمالاً تنها استثنای نسبی در این مفهوم، وجود موقعیت‌های خاص باشد. به عنوان نمونه، می‌توان از به اصطلاح «سبك دقیقی» نام برد که ویژگی موسیقی چند صدائی (و در بیش‌تر موارد آواز خوانی) دوران رنسانس را مشخص می کند. این، قدیمی‌ترین موسیقی است که به ندرت می‌توان در کنسرت‌ها به آن برخورد کرد. نمونهٔ دوم را



می‌توان از سدهٔ بیستم انتخاب کرد و آن موسیقی دوازده صدایی[1] در اجرای مستمر آن است. با توجه به این دو سبك، تا حد زیادی می‌توان نقش قانون‌های دقیق را در توصیف موسیقی روشن کرد. چنین روند تالیفی را در موسیقی می‌توان به سادگی برنامه‌ریزی کرد. شاید، به همین دلیل باشد که سویت «ایلیاك» برای کوارتت (ارکستر چهار نفری) سازهای سیمی، که به وسیلهٔ کامپیوتر دانشگاه ایلینوی تنظیم شده است، از «سبك دقیق» دوران رنسانس آغاز می کند و با موسیقی دوازده صدائی پایان می‌پذیرد. هیچ «راه میانه‌ای» وجود ندارد. با وجود این، برای قسمت عمدهٔ موسیقی، و مثلاً آنچه را که ما از رادیو یا نوار گوش می کنیم، به همین «راه میانه» و به اصطلاح «موسیقی تن‌دار» بستگی پیدا می‌کند. موسیقی باخ[2] (۱۶۸۵ـ۱۷۵۰)، هایدن[3] (۱۷۳۲ـ۱۸۰۹)، موتسارت[4] (۱۷۵۶ـ ۱۷۹۱)، بتهوون[5] (۱۷۷۰ـ۱۸۲۷)، شوبرت[6] (۱۷۹۷ـ۱۸۲۸)، گلینکا[7] (۱۸۰۴ـ۱۸۵۷)، چایکوسکی[8] (۱۸۴۰ـ۱۸۹۳)، راخمانینوف[9] (۱۸۷۳ـ۱۹۴۳)، سکریابین[10] (۱۸۷۲ـ۱۹۱۵) و پروکوفیو[11] (۱۸۹۱ـ۱۹۵۳)، همه تن‌دار بود. اکثریت موسیقی‌دانان معاصر هم، موسیقی تن‌دار می‌نویسند. ولی اثر موسیقی تن‌دار، خیلی دشوارتر تسلیم برنامه‌ریزی می‌شود. ر.زاربیوف، ریاضی‌دان شوروی (در مسکو)، تلاش‌های منظمی را در این جهت آغاز کرده است. کارهایی هم ازبوخاره یو، ریتوینسکی و شاروتوف هم در غازان چاپ شده است. آزمایش‌های ریاضی‌دانان ریکاهم، به همین امر مربوط می‌شود. دشواری به قانون درآوردن و آلگوریتمی کردن آثار موسیقی تن‌دار، در کجاست؟ موضوع این است که قانون‌های موسیقی تن‌دار، در بیش‌تر موارد خود، دستورهایی قطعی نیستند و تنها می‌توان آن‌ها را به عنوان توصیه‌هایی در نظر گرفت. مثلاً، چه در آهنگ‌ها و چه در وزن‌ها، تمایل به‌مرحلهٔ اصلی و اولیهٔ کوك وجود دارد. این وضع، دست‌کم، به‌این صورت ظاهر می‌شود که در بسیاری موارد، آهنگ‌ها در پایان خود به همان مرحلهٔ نخست خود می‌رسند. ولی، این قانون را خیلی‌ها رعایت نمی‌کنند، به

---

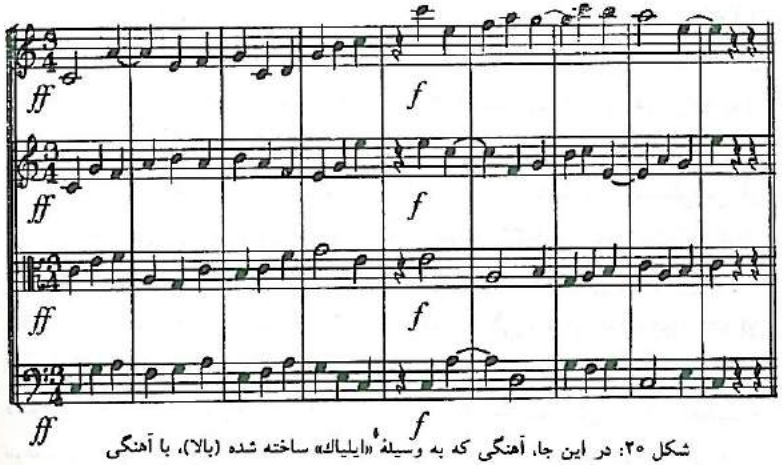
۱ ـ موسیقی دوازده صدایی (Dodecaphonicmusic)ـ از ریشهٔ یونانی Dodeka به معنی دوازده و phôné به معنی صدا) در نتیجه روند تکاملی موسیقی بدون کلید (Atonality) به وجود آمد و به طور اساسی به وسیلهٔ آرنولدشنبرگ(Arnold schoenberg) (۱۸۷۴ ـ ۱۹۵۱) و در سال‌های بین ۱۹۲۱ تا ۱۹۲۳ بانه‌گذاری سه (schoenberg's serenade Opus,23) این موسیقی، در موقع خود، مورد توجه بسیار جوانان قرار گرفت، ولی با وجود گذشت زمان، هنوز نتوانسته است جای خود را در موسیقی عام پیدا کند.

2: Bach 4: Mozart 6: Schubert 8: Tchaikovsky 10: Scriabin
3: Haydn 5: Beethoven 7: Glinka 9: Rachmaninoff 11: Prokofieu

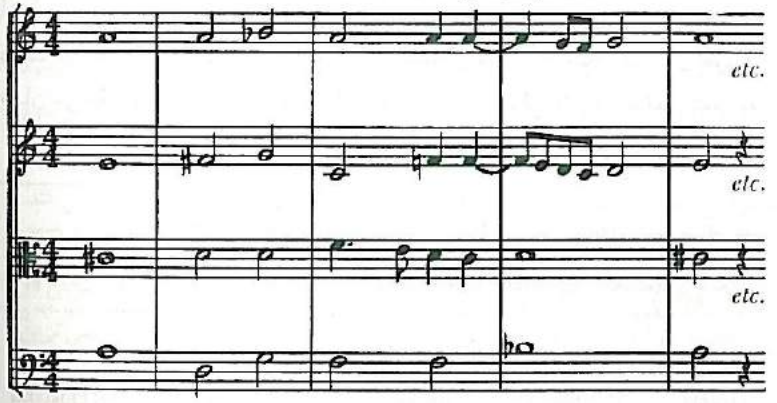
نحوی که حتی نمی‌توان از آن به عنوان یك قانون به مفهوم واقعی کلمه ـ نام برد: تنها باید آن‌را به عنوان یك گرایش جدی (و نه قطعی) به‌حساب آورد.

چنین گرایش‌هایی در موسیقی تن‌دار، به فراوانی دیده می‌شود و این بستگی به تجربه‌های قبلی آهنگ‌ساز دارد که با یك نوع احساس الهامی با این گرایش‌ها روبه رو می‌شود، در یك مورد مشخص، ترجیح می‌دهد جهتی را برای پیشرفت موسیقی انتخاب کند و بسیاری از توصیه‌ها را کنار می‌گذارد و در موقعیت دیگری، بر عکس عمل می‌کند. آیا می‌توان از ماشین، چیزی شبیه این الهام اشراقی به دست آورد؟

حالا، حل این مسئله را کنار می‌گذاریم و به مسالهٔ تخیل می‌پردازیم که برای




شکل ۲۰: در این جا، آهنگی که به وسیلهٔ «ایلیاك» ساخته شده (بالا)، با آهنگی که به وسیلهٔ "Palestrina" به نام "Adoramus The Christe"، و با همان روش، ساخته شده است (پایین)، می‌توان مقایسه کرد.






خلق هر اثر هنری، نقش اساسی دارد. خواهیم دید که این هر دو مساله، با یك روش حل خواهند شد.

### احتمال‌های توجیه شده

مقوله‌های کلی فلسفی به ضرورت و به تصادف در هر نوعی از هنر ظاهر می‌شوند. اثر هنری وجود ندارد که از نوعی قانون بندی و نوعی قاعده که «روش‌های مجاز» آن را مشخص می‌کند، پیروی نکند.

با وجود این، اگر نیروی تخیل هنرمند اصالت و تازگی نداشته باشد، و نتواند عنصرهای عادی و طبیعی را با عامل‌هائی که غیر منتظره‌اند، توأم کند، اثر هنری امکان زندگی پیدا نمی‌کند و می‌میرد. بسیار ممکن است که خود هنرمند، از قانون‌هایی که نیروی تخیلش از آن‌ها پیروی می‌کند، آگاه نباشد؛ او حتی نمی‌تواند از پیش حدس بزند که تخیلش در لحظه‌های بعد، به کجاها خواهد رفت. به این مناسبت، مسئله اصلی اینست که نیرو و کار تخیل را، نه به صورت جبری و جزمی، بلکه به صورت روندی تصادفی باید به حساب آورد. و روشن است که همهٔ این‌ها، در مورد موسیقی هم درست است.

پس، این ماشین محاسبهٔ بی نوای ما، از کجا می‌تواند نیروی تخیل را فراهم کند؟ مگر نه اینست که تمامی تلاش طراحان ماشین در اینست که ماشین، از هر گونه بوالهوسی به دور باشد و متین و استوار و دقیق، برنامه را بپذیرد و مو به مو آن را اجرا کند. اصولاً کار ماشین برای ما، تجسم و نمونه‌ای است از کار دقیق و بدون خدشه.

در واقع هم، وضع به همین شکل است، البته به شرطی که اشتباه‌های نامطلوب را هم در کار ماشین در نظر داشته باشیم. با وجود این، حتی در مورد انجام دستورهای ریاضی هم، گاهی به عمد، ماشین را وادار می‌کنند که به طور تصادفی و به صورتی که از قبل پیش بینی نشده است، کارکند. البته، این وضع، مربوط به موقعیت‌هایی است که برنامه‌ریز بخواهد. روش مونت کارلو هم، در ریاضیات امروزی، به همین طریق عمل می‌کند و شایستگی خود را هم، در بسیاری از مسئله‌های محاسبه‌ای نشان داده است. به مناسبت این وضع، روش‌هایی ابداع شده است که به ماشین اجازه می‌دهد، عددهایی را ـ و مثلاً عددهای بین صفر و واحد را ـ به طور تصادفی انتخاب کند.

به این ترتیب، می‌توان باواردکردن تصادف در کار ماشین، به نحوی تخیل هنرمند را تقلید کرد. با همهٔ این‌ها، این تخیل نباید کورکورانه باشد. وقتی که آهنگ‌ساز به تألیف ملودی خود مشغول است، نت‌ها را با حدس و گمان بر نمی‌دارد، بلکه بعضی

صداها را به کرات و بعضی دیگر را به ندرت انتخاب می‌کند، بارها و بارها روی ملودی کار می‌کند و آن را تغییر می‌دهد تا مسیر هموار آن را پیدا کند و غیره. و حقیقت اینست که برای ماشین هم، چنین روش توجیه شده‌ای قابل دسترس است. این مطلب را روی نمونه بسیار ساده‌ای روشن می‌کنیم.

فرض کنیم که ماشین باید با انتخاب طول نت‌ها، شکلی موزون (ریتمیك) بسازد. وفرض کنیم که خصلت موسیقی این باشد که یك هشتم‌ها بر یك‌چهارم‌ها برتری داشته باشد و مثلاً، به طور متوسط، سه بار بیش‌تر. به این نتیجه می‌توان به کمك عددهای تصادفی، رسید. روش کار را به این ترتیب در نظر می‌گیریم: شرط می‌کنیم که وقتی ماشین کسری را بین ۰ و ۰/۷۵ انتخاب کند به معنای یك هشتم و وقتی کسری را بین ۰/۷۵ تا ۱ انتخاب کند، به معنای یك چهارم باشد. حالا فرض کنید که کسر تصادفی برابر ۰/۳۱ باشد. این پیش‌آمد را می‌توان به عنوان «رفتار الهامی» اولیه در نظر گرفت، که درنتیجهٔ آن، نتی به طول یك‌هشتم نوشته می‌شود. عدد ۰/۷۶ هم، به معنای انتخاب یك چهارم است و غیره. روشن است که به طور متوسط، یك هشتم ها سه بار بیش‌تر از یك چهارم‌ها به دست می‌آید، ولی ضمناً هرنت جداگانه را از قبل نمی‌توان پیش‌بینی کرد، و به «الهام ماشین» یعنی به مقدار تصادفی کسری که از قبل قابل پیش‌بینی نیست، مربوط می‌شود.

از همین روش می‌توان برای انتخاب ارتفاع نت‌ها (و یا برای فاصله‌های متوالی که ملودی از آن‌ها ساخته می‌شود)، برای ترکیب آهنگ‌ها، برای حل مسالهٔ مربوط به شکل اثر و غیر آن هم استفاده کرد.

توزیع احتمالی که برای ماشین معین می‌کنیم، بستگی به خصلت کلی موسیقی ترکیب شده دارد، ولی در عین حال هر گز نمی‌توانیم به طور دقیق، «قطعهٔ» بعدی ماشین را از قبل حدس بزنیم؛ عنصرهای نا منتظر، در این‌جا به همان اندازه‌ای که برای انسان آهنگ‌ساز وجود دارد، ظاهر می‌شوه.

پرسشی داشتیم که تا این‌جا بدون پاسخ مانده بود: چه‌گونه می‌توان به کمك ریاضیات ترکیب موسیقی را بر اساس تجربه‌های قبلی آهنگ‌ساز و بر اساس ذوق او (یعنی این‌که در بیان مطلب، روشی را به روش دیگر، ترجیح می‌دهد)، تنظیم کرد؟ این مسئله هم به کمك انتخاب متناظر احتمال‌ها، حل می‌شود. نقش قانون‌های توصیه مانند را هم به همین ترتیب می‌توان در روند ترکیب وارد کرد: ماشین قرعه می‌اندازد و بستگی به نتیجهٔ کار، تصمیم می‌گیرد که آیا در این حالت مشخص، باید به فلان توصیه عمل کند یا نه.



به این ترتیب، «آهنگ‌ساز خودکار» این امکان بالقوه را دارد که صاحب تخیل بشود؛ او یاد می‌گیرد تا از احتمال‌ها، نه تنها از احتمال‌های کور، بلکه حتی از احتمال‌های توجیه شده هم به یاری انتخاب‌های مناسب، استفاده کند.

ضمناً این اعتراض هم در بارهٔ «ماشین‌های آهنگ‌ساز» بر طرف می‌شود که: نتیجه کار این ماشین‌ها، یا اثری بی‌روح، جامد و غیر جالب است، زیرا «کاملاً طبق قانون‌های مشخصی» تنظیم شده‌اند و بنابراین فاقد اصالت و تازگی هستند، و یا به صورت غیر قابل تصوری در هم و برهم می‌شوند، زیرا تنها از طریق احتمال‌های کور و توجیه نشده‌ای به دست آمده‌اند.

## دشواری‌های تازه‌ای پیش می‌آید

ولی امکان بالقوهٔ برنامه‌های ترکیبی، به این معنا نیست که چنین برنامه‌ای (که پاسخگوی همهٔ خواست‌های ماست)، امروز و شاید فردا، در دسترس ما قرار دارد. در عمل برای تنظیم برنامه باید: اولاً بر قانون‌هایی آشنایی داشت که باید به طور قطع و کامل مورد استفاده قرار گیرد، ثانیاً عامل‌هایی را نشان کرد که باید به تصادف انتخاب شوند، ثالثاً باید توزیع احتمال‌ها را برای این عامل‌ها معلوم کرد. به جز این‌ها، باید خود آلگوریتم ترکیب هم مشخص شود، یعنی باید معلوم شود که از نظر اهمیت، پارامترهای لازم را به چه ردیفی باید انتخاب کرد؛ و این موضوع، اهمیت اساسی دارد، زیرا احتمال انتخاب یك عامل، ممکن است به انتخاب عامل دیگری مربوط باشد.

حل این مسئله‌ها، دشواری‌های غیر عادی و تازه‌ای را در برابر نظریهٔ موسیقی قرار می‌دهد. دانش موسیقی سنتی، معمولاً، پاسخی برای این پرسشها ندارد. و حقیقت این است که طرح این مسئله‌ها، مربوط به ترکیب ماشینی موسیقی است و برای حل آن‌ها لازم است هم از نتیجه‌های دانش موسیقی سنتی، و هم از روش‌های تحلیل ریاضی موسیقی استفاده کرد. موضوع را به یاری یك مثال روشن می‌کنیم.

در موسیقی آهنگین، یکی از طریقه‌های کاملاً معمول برای ساختن ملودی‌ها، روش تکرار است، مثل تکرار آهنگ یا مقامی با حرکت معلوم به طرف بالا و پایین. آ. مازل، موسیقی شناس شوروی در اثر خود به نام «در بارهٔ ملودی‌ها»، اندیشه‌های جالبی در این باره که چه‌گونه تکرارهایی، به عنوان خصلت موسیقی این یا آن سبك وجود دارد، بیان می‌کند. از طرف دیگر تحلیل خالص آماری و کمیتی تکرارها، به

وسیلهٔ ت. کارلینا و و. دتلوس، دانشمندان ریاضی ـ فیزیک، تهیه شده است. پیش درآمدها و دنباله خوانی‌های باخ، سمفونی‌های هایدن و اثرهای چایکوفسکی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. با نتیجه‌هایی که از این راه به دست می‌آید می‌توان تزهای دانش موسیقی سنتی را دقیق‌تر کرد. علاوه بر آن، از این نتیجه‌گیری‌ها می‌توان در ترکیب موسیقی استفاده کرد. به این ترتیب، تحلیل ریاضی موسیقی، آگاهی‌هایی را به ما می‌دهد که برای ترکیب موسیقی لازم است.

ولی بر عکس ـ نتیجه‌گیری‌هایی هم که از ترکیب به دست می‌آید اجازه می‌دهد تا در باره عمق و پیشرفت تجزیهٔ موسیقی، داوری کنیم و ضمناً بعد از قرن‌ها تاریخ علم در بارهٔ موسیقی، بتوانیم نتیجهٔ کارهای موسیقی شناسان را به محک آزمایش بزنیم؛ و سپس، با برطرف کردن نواقص آن‌ها، بهترین برنامه ترکیب را پیدا کنیم و غیره.

همان‌طور که گفته شد، ضمن تشکیل آلگوریتم ترکیب، باید پیشرفت‌ها و موفقیت‌های دانش سنتی موسیقی، و از آن‌جمله روانشناسی اثرهای موسیقی، هم مورد توجه قرار گیرد. گمان می‌رود که دشواری‌های ترکیب موسیقی، نیروی محرکهٔ محسوسی از درون موسیقی، برای پیشرفت بعدی این دانش باشد. ماشین، دست کم به مفهوم نتیجه، کار آهنگ‌ساز را مدل‌بندی می‌کند. موفقیت یا عدم موفقیت مدل‌ها، امکان می‌دهد تا در بارهٔ روش‌هایی که در اساس ساختمان مدل‌ها قرار دارد، مورد ارزیابی قرار گیرد. اگر این روش‌ها همراه با موفقیت باشند. می‌توان امید داشت که بین آن‌ها با روندی که در روحیهٔ آهنگ‌ساز اثر می‌گذارد، نوعی بستگی وجود دارد.

این واقعیت که هنوز چیز زیادی در بارهٔ «وضعیت روحی» و کار آن نمی‌دانیم، نباید ما را از آزمایش‌های مربوط به ترکیب موسیقی باز دارد. برعکس، موفقیت‌هایی که به تدریج در مسئله ترکیب به دست می‌آید، ممکن است زمینه را برای بررسی اوضاع و احوال روحی ـ و یا دقیق‌تر تکامل روانشناسی آثار هنری آماده کند.

## دیکتهٔ موسیقی برای ماشین

حال، مختصری هم در این باره گفتگو می‌کنیم که چه‌گونه نت‌های معمولی را می‌توان به «زبان ماشین» درآورد.

دستگاه حافظهٔ ماشین محاسبه به چشم‌ها یا حوزه‌های جداگانه‌ای تقسیم شده است. در یك حوزه می‌توان یا یك عدد و یا یك فرمان را ثبت کرد. معمولاً برای نوشتن



یك نت هم، یکی از همین حوزه‌های حافظه مورد استفاده قرار می‌گیرد. حوزه شامل چند ده تا از مرتبه‌های دو دویی (عدد نویسی در مبنای ۲) است و بنابراین چه آگاهی مربوط به ارتفاع نت و چه طول آن را می‌توان در آن جا داد.

ارتفاع را می‌توان به کمك شمارهٔ اکتاوها (و مثلاً، با در نظر گرفتن از پایین‌ترین اکتاو) و نام نت‌ها را با قرار گذاشتن عددهایی برای هر یك از آن‌ها (دو=۱، ر=۲،...،سی=۷) نشان داد. در صورت لزوم، برای بالا بردن (دیز) یا پایین آوردن (بمل) صداها هم می‌توان عددهایی در نظر گرفت.

برای نشان دادن طول، کوتاه‌ترین نت مجاز را متناظر با واحد می‌گیریم. مثلاً، اگر یك شانزدهم را به عنوان واحد بپذیریم، در این صورت، طول یك هشتم متناظر با عدد ۲ می‌شود.

در چشم حافظه، به جز ارتفاع و طول، بعضی «مفروضات عددی» دیگر هم، مثل شمارهٔ جاری نت در ملودی، شماره ضرب و غیر آن‌هم نوشته می‌شود. همچنین به کمك نشانه‌های خاصی، می‌توان مشخص کرد که طول یادداشت شده، مربوط به مکث است نه نت.

ترجمهٔ چنین کد عددی، که به وسیلهٔ ماشین چاپ شده است، به زبان نت‌های معمولی، به هیچ‌وجه کار پیچیده‌ای نیست. چنین کاری نه تخصص در ریاضی را لازم دارد و نه مهارت در موسیقی را.

## ملودی یا هم‌آهنگی کدام یك قبلاً ساخته می‌شود؟

وقتی که در ذهن آهنگ‌ساز،زمینهٔ تازه‌ای پیدا می‌شود، اغلب نمی‌تواند به این پرسش پاسخ دهد که آیا اول ملودی به وجود آمده است یا هم‌آهنگی! و خیلی دشوار است گفته شود که آیا آهنگ‌ساز از قبل تصمیم می‌گیرد که نت بعدی با کدام ارتفاع است، و آیا از قبل طول نت‌ها را انتخاب می‌کند؟ یك موسیقی‌دان، احتمالاً، چنین پرسشی را بی‌معنی و احمقانه می‌داند. پیدایش و ظهور یك فکر موسیقی، معمولاً یك روند پیوسته است و به سختی می‌توان آن را به مرحله‌های مختلف تقسیم کرد. حتی، تقسیم موسیقی به سازهای مختلف و یا تنظیم گروه ارکستر، در بسیاری موارد، همزمان با به وجود آمدن خود متن موسیقی انجام می‌گیرد. چایکوفسکی، به بهانه سمفونی چهارم خودش می‌نویسد: «من هر گز چیزی به طور مجرد نساخته‌ام، یعنی برای من، اندیشهٔ موسیقی، هر گز چیزی جدا از شکل متناظر خارجی آن نبوده است. به این ترتیب، برای من، اندیشهٔ موسیقی با تنظیم آن برای ارکستر، در یك زمان، پیدا می‌شود».

ولی، در ماشین، موقعیت دیگری وجود دارد.

ماشین، عنصرهای مختلف موسیقی را تنها به صورت یك توالی کاملاً منطقی تألیف می‌کند. پرسشی پیش می‌آید: این توالی منطقی چه‌گونه باید باشد؟ ظاهراً پاسخ یکنواخت و عمومی برای این پرسش، وجود ندارد. در موقعیتی، اندیشهٔ آغازی مربوط به شکل ملودی است و در موقعیت دیگر، مربوط به پیداکردن ریتم و غیره.

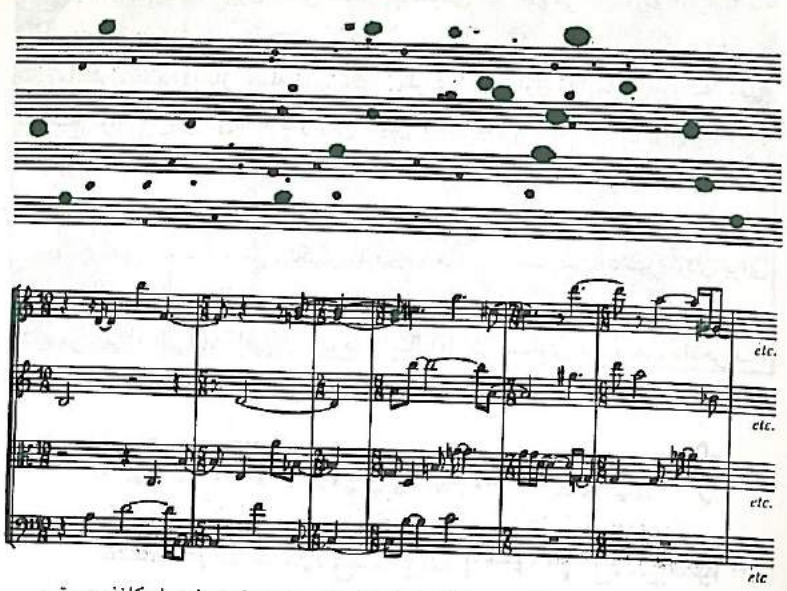
موضوع از این بابت هم پیچیده‌تر می‌شود که عنصرهای متفاوت و جنبه‌های متفاوت موسیقی، بی ارتباط با یکدیگر نیستند. این عنصرها و جنبه‌ها در یکدیگر فرو می‌روند و یکی بردیگری اثر می‌گذارد، ضمناً نوع این تاثیر متقابل در حالت‌های متفاوت با یکدیگر فرق دارد و به هدفی که آهنگ‌ساز دنبال می‌کند، مربوط می‌شود. وقتی که موسیقی، به وسیلهٔ انسان به وجود می‌آید، این تاثیر متقابل، تا حد زیادی ناخودآگاه و به صورت الهامی انجام می‌گیرد. ولی، در مورد ماشین، باید به صورت قانون، به روشنی معلوم کنیم که بین چه عامل‌هایی باید این تاثیر متقابل وجود داشته باشد، و کم و بیش، خصلت این تاثیرها را، دقیق کنیم.

برای تألیف موسیقی کلاسیك (مثلاً آثار پیانوئی **هایدن**، **موتزارت** و **بتهوون**) نقش اصلی را، توالی آهنگ‌ها و هم‌آهنگی آن‌ها به عهده دارد. در این جا، هماهنگی حتی می‌تواند، عنصر پایه‌ای و اولیه‌ای به حساب آید که بر اساس آن، ملودی به عنوان یك عنصر رو بنائی که ناشی از این پایه و موافق با آن است، به وجود آمده است. ولی این، ظاهراً به معنای وجود یك موقعیت معمائی است: آکومپان‌یمان و همراهی، پیش از ملودی تألیف می‌شود. ولی، تاریخ موسیقی، نمونهٔ جالبی را ارائه می‌دهد، که ضمناً فاصلهٔ بین دو مرحلهٔ آن، بیش از صدسال است. منظور ما، اثر «آوه ماریا» از **باخ**ـ هوتو است، که آکومپان‌یمان آن‌را، **باخ** در سال ۱۷۲۲ تالیف کرد و هوتو، آهنگ‌ساز فرانسوی، در سدهٔ نوزدهم، بدون این‌که هیچ‌گونه تغییری در پیش درآمد **باخ** بدهد، ملودی آن‌را نوشت.

## نخستین «آثار» کامپیوتری

نخستین گام‌های مربوط به آهنگ‌سازی را کامپیوتر مرکز ریگا در دانشگاه دولتی لتونی به نام پترستوچکا، خیلی با احتیاط و لرزان برداشت. او، ملودی‌های هشت ضربی یك صدایی را به شکل به اصطلاح دوره‌ای، شامل دو نیمه، تنظیم کرد. در این حالت، توالی «ترکیب» عنصرهای جداگانه چه‌گونه بوده است؟






شکل ۲۱: موسیقی تصادفی ـ می‌توان با پاشیدن جوهر روی صفحه سفید یك کاغذ موسیقی، آهنگی را تصنیف کرد. در تصویر پایین، لکه‌ها را به‌صورت نت درآورده‌اند. فاصلهٔ زمانی نت‌ها را از روی فاصلهٔ افقی بین لکه‌ها معلوم کرده‌اند، ولی میزان‌ها با قرعه معین شده است.

قبل از همه، توالی آکوردها ساخته شده است (با محاسبهٔ یك آکورد در ضرب). آکوردها، ولو این که نتیجه‌ای از کار ماشین باشد، باید به صورت ملودی تك صدایی و بدون آکومپان‌یمان باشد. آکورد، حتی اگر در صحنه هم ظاهر شود، چیزی جز یك رهبر نامرئی ملودی نیست.

برای انتخاب هر آکورد، این وضع در نظر گرفته می‌شود که چه آکوردی در ضرب قبلی واقع شده است. مثلاً، آکورد مرحلهٔ پنجم، به احتمال قوی بعد از آکورد مرحلهٔ دوم می‌آید و نه آکورد مرحلهٔ اول. به این ترتیب، نوعی عمل متقابل در داخل یك عنصر موسیقی (و مثلاً در این‌جا هارمونی) مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

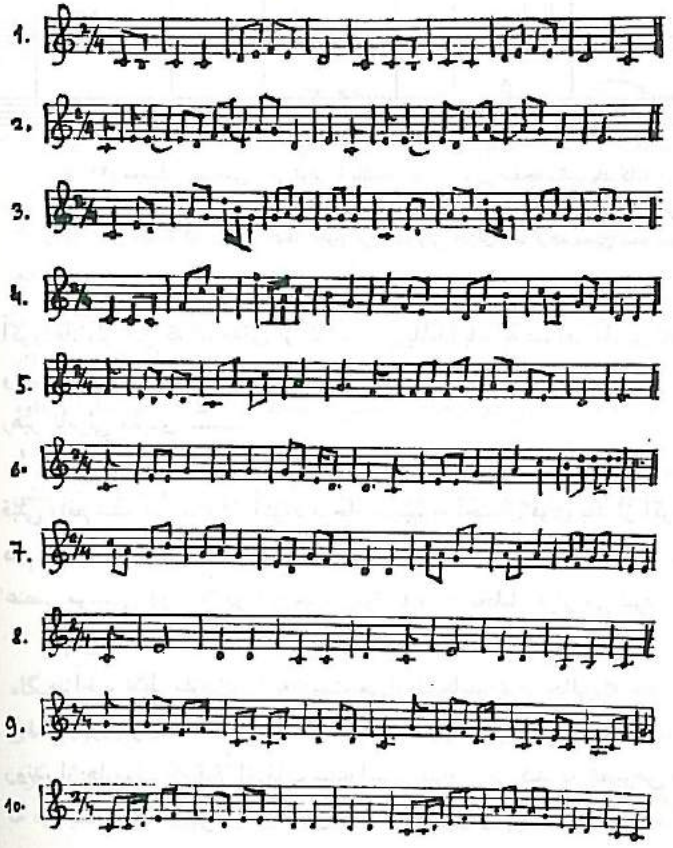
سپس، ماشین برای هر جمله‌ای، شکل ریتمیك به خود می‌گیرد.

سرآخر، خط ملودیك را به دست می‌آورد. ماشین، در حالی‌که جهت و مقدار فاصلهٔ جاری را انتخاب می‌کند، ارتفاع نت بعدی را پیدا می‌کند. با وجود این، این روند، از هارمونی که قبلاً انتخاب شده است، پیروی می‌کند. به خصوص لازم است که در ابتدا و میانهٔ ضربه نت ملودی با صدای آکوردی باشد، یعنی با هارمونی توافق

داشته باشد. اگر این قانون نقض شود، نت ملودی کنار زده می‌شود و دوباره «ساخته می‌شود».

ماشین، ضمن آغاز جملهٔ دوم، تکرار ملودی جملهٔ اول را آزمایش می‌کند. وقتی که هیچ‌گونه «برخوردی» با هارمونی تعیین شده پیدا نکند، این آزمایش منجر به انطباق کامل هر دو جمله می‌شود (همان طور که در موسیقی «زنده» هم گاهی به آن برخورد می‌کنیم). این مطلب، با نخستین سه مثال نت‌ها روشن می‌شود.

ولی وقتی که معلوم شود تکرار ملودی با هارمونی متناقض است، ملودی برای ادامهٔ جملهٔ دوم، از نو تالیف می‌شود. گاهی این وضع، از همان نخستین نت جملهٔ دوم پیش می‌آید (مثال ۴)، گاهی از نت دوم (مثال۵). در بسیاری موارد هم، «انحراف» ازملودی پیشین، جائی در وسط های جملهٔ دوم، اتفاق می‌افتد (مثالهای ۶تا۱۰).



برای محاسبه تنش[1] درتیرها رابطه‌ای به‌کار می‌بریم که نه‌اسمی دارد ونه‌لقبی. این رابطه‌که برای هیچ مهندس مکانیك، مهندس ساختمان، محاسب ساختمانی و ... ناآشنا نیست، $M$ گشتاور خمشی[2]، $I$ لنگرلختی[3]، $\sigma$ تنش، $y$ فاصله هرنقطه مقطع تا تارخنثی[4]، $E$ ضریب ارتجاعی[5] و $\rho$ شعاع انحناء[6] را به‌صورت زیر به‌هم مربوط می‌سازد:

$$\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y}=\frac{E}{\rho} \qquad (۱)$$

در زمان دانشجویی از ژست‌هایی که استاد هنگام اثبات آن می‌گرفت باورم شده بود که این رابطه کشف شخص ایشان است و در زمان تدریس ( چون متأسفانه دانشجویان‌همگی به‌کتابی به‌زبان انگلیسی‌مسلح بودند و نمی‌توانستم رابطه را به عنوان یکی‌ازکشفیات خودم معرفی‌کنم)کشف رابطه را به‌حساب

1: *Stress.*
2: *Bending Moment.*
3: *Moment of Inertia.*
4: *Neutral axis.*
5: *Modulus of Elasticity.*
6: *Radius of curvature.*

دانشمندان قرن نوزدهم می‌گذاشتم. اکنون که سال‌هائی از دوران «به‌شاگردی استاد شدن» و «زاستادی خود شاد شدن» می‌گذرد ضمن مطالعه تاریخ مقاومت مصالح نوشته تیموشنکو[1] متوجه شدم که این رابطه تاریخچه‌ای سیصدوپنجاه‌ساله دارد و درحقیقت نتیجه تلاش بزرگ‌ترین دانشمندان تاریخ علوم است. آنچه درسطور بعد می‌خوانید شرح مختصری از این تلاش است.

نخستین کسی که ازاو نوشته‌ای درمورد خمش دردست است نابغه‌بزرگ دوره رنسانس لئوناردو داوینچی[2] است[3].

این نابغه که خیلی‌ها او را فقط خالق «لبخند ژوکوند» می‌شناسند از عالیقدرترین مهندسان دوره رنسانس است که درمورد بسیاری از مسائل‌مربوط به‌مقاومت مصالح تفکر نموده وآزمایش‌هایی انجام داده است.

داوینچی با نتیجه‌گیری ازنتایج تجربی خود می‌نویسد «درتیرهائی که دوسرآن‌ها روی تکیه‌گاه قرار دارد، قدرت تیر با پهنای مقطع متناسب بوده و با طول دهانه نسبت عکس دارد». این یك نتیجه‌گیری کاملا صحیح بوده و از آن‌جاکه از اظهارنظر در مورد اثر ارتفاع مقطع خودداری می‌نماید باید تصور نمودکه تعداد ودقت‌آزمایش‌ها به اندازه‌ای نبوده است‌که بتواند رابطهٔ درجهٔ دوم راکشف نماید. کشفیات‌داوینچی متأسفانه سال‌ها درلابلای یادداشت هایش مدفون ماند و تا زمان گالیله[4] از هیچ‌گونه تحقیقی درمورد تیرها اثری دردست نیست.

گالیله، استادی که در سن سی‌سالگی تعداد دانشجویانش از سراسر اروپا به ۲۰۰۰ نفر بالغ می‌شد با انتشار کتابی به‌نام «دوعلم جدید» تولد علم مقاومت مصالح را رسماً اعلام نمود. شکل۱ پشت جلد این کتاب راکه درسال ۱۶۳۸ منتشر شده است نشان می‌دهد.

آزمایش‌های مکانیکی گالیله باآزمایش کشش اجسام شروع می‌شود

---

۱: *S. Timoshenko*، استاد بزرگ مکانیك معاصر.

۲: *Leonardo da Vinci* سال‌های ۱۵۱۹-۱۴۵۲ میلادی.

۳: به‌طورقطع ملل باستانی برای به‌وجودآوردن آثارباعظمت خود ازرابطه‌هایی (به‌احتمال زیاد تجربی) استفاده می‌کرده‌اند که امروز نشانه‌ای ازآن‌ها در دست نیست. یکی ازعلل از دست رفتن این مدرك‌ها را باید دوران خفقان‌آور قرون وسطی دانست که درمدامت پیشرفت علم وقفه ایجاد نمود.

۴: *Ga'ileo* سال‌های ۱۶۴۲.۱۵۶۴ میلادی.

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
*intorno à due nuoue scienze*
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
*del Signor*
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
*Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.*

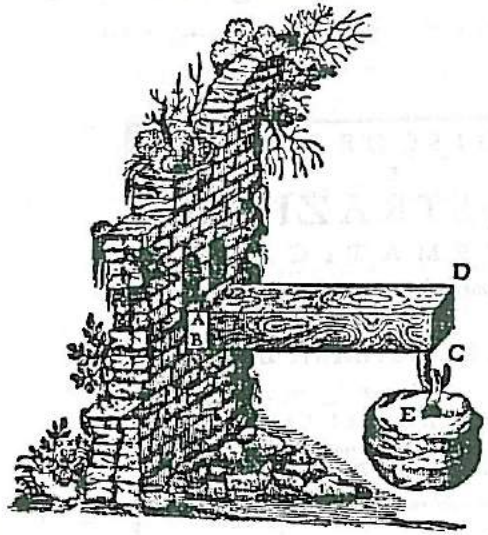
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſeuirii. M. D. C. XXXVIII.

## شکل ۱

(شکل۲). نتیجه‌گیری از آزمایش‌های کششی‌اش را به‌این‌نحو بیان می‌کند: «مقاومت درمقابل‌کشش باسطح مقطع مناسب بوده وباطول رابطه‌ای ندارد». این مقاومت را برای یك قطعه «مقاومت مطلق در برابر شکست» می‌نامد که تابع جنس جسم وابعاد مقطع آن است.

درموردخمش‌که موضوع‌بحث‌ماست پس‌ازمطرح‌کردن سؤالی درمورد مقاومت‌های مطلق دوتیر باسطح مقطع مساوی مستطیل شکل،که یکی از آن‌ها عمود برپهنا و دیگری عمود بر ارتفاع بار شده‌اند به نتیجه صحیح رسیده و اظهار می‌دارد «حالت اول قوی‌تربوده ونسبت مقاومت‌های مطلق تیرها مساوی نسبت ارتفاع به‌پهنا است».

شکل ۲




شکل ۳

گالیله برای محاسبه مقاومت تیرطره[1] باکمك شکل ۳ این‌طور بررسی می‌نماید:

«چنانچه بار C تا حدی ازدیاد پیدا کند که باعث شکستن تیر شود، شکست درAB اتفاق خواهد افتاد. دراین مقطع فصل مشترك سطح پائین تیر و دیوار به‌صورت تکیه‌گاه اهرمی عمل خواهد کرد که دوبازوی آن AB و BC می‌باشد.

نیروهای وارده به اهرم وزنه C در نقطه A و نیروهای مقاوم در طول BC می‌باشد که به طور یکنواخت پخش شده‌اند. تعادل گشتاورها حول تکیه‌گاه نشان می‌دهد که نسبت نیروی C به‌نیروهای مقاوم مساوی نسبت $\frac{AB}{AC}$ است». چنانچه می‌دانیم گالیله دریکنواخت فرض‌کردن نیروهای مقاوم درطول BC اشتباه نموده و محاسباتش درمورد بار نهائی به‌نتیجه صحیحی نمی‌رسد. محاسبه مقاومت تیر با استفاده از فرض گالیله قدرتی سه‌برابر قدرت واقعی محاسبه می‌کند.

درمورد تیرهایی که مقاطع‌دایره‌ای دارند نتیجه‌گیری صحیحی می‌نماید

1: *Cantilever.*

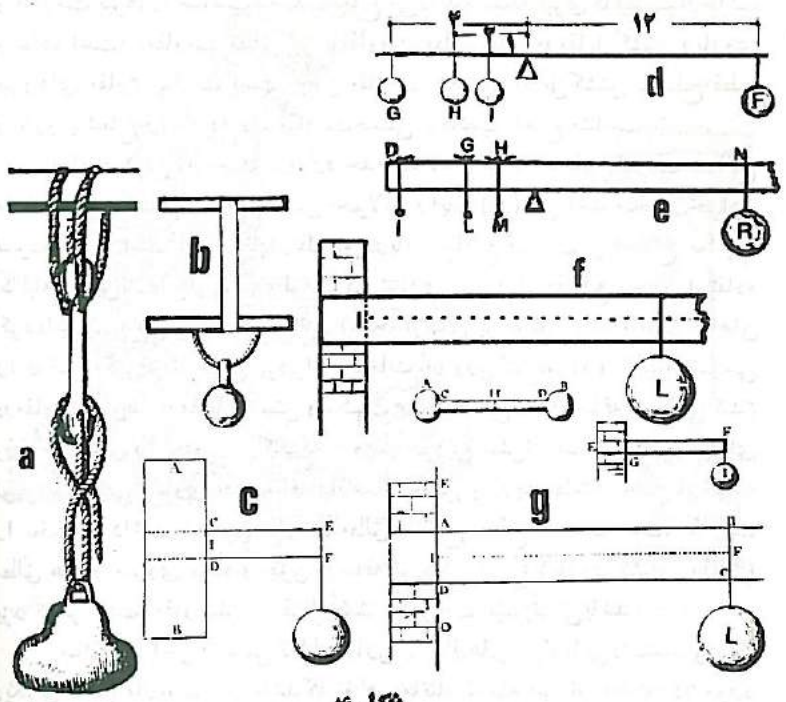


و مقاومت تیرهارا متناسب‌بامکعب‌شعاع می‌داند. نتیجه‌گیری گالیله‌بسیارجالب و ساده است: «مقاومت مطلق تیر بامقاومت مطلق قطعه درمقابل کشش و بازوی نیروهای مقاوم متناسب است. چون مقاومت مطلق درمقابل کشش باسطح‌مقطع و بازو باشعاع رابطه دارد، مقاومت‌خمشی بامکعب شعاع متناسب‌است».

باوجوداین‌که بحث درمورد خدمات دیگر گالیله به‌علم مقاومت مصالح مارا ازهدف اصلی‌که تعقیب مسیر تحولات رابطه (۱) می‌باشد منحرف‌خواهد نمود، حیف است‌که از اظهارنظر او درباره مقاطع مجوف بی‌اطلاع بمانیم. گالیله دراین‌باره‌می‌نویسد: «طبیعت دربسیاری موارد از مقاطع مجوف‌استفاده کرده‌است. به‌عنوان‌مثال می‌توانیم استخوان‌های پرندگان وساقه‌بعضی گیاهان را درنظر بگیریم. توخالی بودن‌این قطعات از وزن‌کم نموده و تغییرمحسوسی درمقاومت آن‌ها درمقابل خمش وشکست بوجود نمی‌آورد. ساقه توخالی گندم وزن خوشه‌ای را تحمل می‌کندکه ازوزن خودش بیش‌تراست وچنانچه میله‌ای توپر با مقطعی مساوی‌مقطع ساقه وازهمان جنس بسازیم مطمئناً تحمل‌بارخوشه را نخواهد داشت. چـون مقاومت مطلق باسطح مقطع متناسب است، مقاومت مطلق هر دو مساوی بوده و چون درساقه توخالی شعاع (بازوی گشتاور مقاوم) بزرگ‌تر است، مقاومتش درمقابل‌خمش به‌مراتب بیش‌ترمی‌باشد».

سال‌های آخر زندگی گالیله مقارن با سال‌های شکوفایی‌دانشمندبزرگ دیگری به‌نام ماریوت[1] می‌باشدکه او هم مانند گالیله قبل از مطالعه در مورد خمش درباره کشش مطالعاتی‌انجام‌داد (شکل ۴a). ماریوت گذشته ازبدست آوردن مقاومت نهائی اجسام متوجه شدکـه بین نیرو و ازدیاد طول رابطهٔ خطی وجود دارد. آزمایش‌های خمشی ماریوت که به‌روی تیرهای چوبی و شیشه‌ای انجام‌گرفت مقاومت‌هایی‌کم‌تر ازمقاومت‌های محاسبه شده ازراه‌حل گالیله را نشان می‌داد. ماریوت قبل‌از اقدام به‌تجزیه وتحلیل خمش بررسی جالبی به کمك اهرم شکل ۴d انجام داد. در بازوی چپ اهرم سه وزنه G، H و I هریك به وزن ۱۲ واحد قرار دارند و فاصله آن‌ها تا تکیه‌گاه به ترتیب چهار ــ دو و یك واحد طول است. برای متعادل نگهداشتن اهرم می‌توان‌وزنه هفت واحدی را درفاصله دوازده واحد طول از تکیه‌گاه به‌بازوی راست واردکرد. چنانچه این وزنه از هفت واحد تجاوز نماید اهرم از تعادل خارج شده و درجهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. حالا فرض کنیم‌که به‌جای

۱، *Mariotte* سال‌های ۱۶۸۴ـ۱۶۲۰ میلادی.




شکل ۴

وارد کردن وزنه‌های G و H و I اهرم به‌کمك سه‌سیم که مقاومت آن‌ها درمقابل کشش ۱۲ واحد است مهار شده باشد. محاسبه جهت پیداکردن وزنه بازوی راست که باعث نامتعادل شدن اهرم وچرخش آن خواهدشد نشان می‌دهدکه به‌جای ۷ فقط ۵/۲۵ واحد وزن مورد احتیاج است.

دلیل این‌موضوع این‌است‌که وقتی‌نیروی وارده به‌سیم DI به۱۲واحد می‌رسد و آن‌را پاره می‌نماید سیم‌های GL و HM متناسب با فاصله‌شان از تکیه‌گاه ازدیاد طول پیدا نموده وکشش درآن‌ها ۶ و ۳ واحد می‌باشد[۱].

۱: بحث ماریوت بشرطی صحیح‌است‌که درلحظه پاره شدن سیم *DI* دوسیم دیگر هنوز ارتجاعی باشند. به طوری که بعداً خواهیم دید محدود بودن خاصیت ارتجاعی مدت‌ها ازنظر دانشمندان مخفی مانده بود.



ماریوت از این بررسی نتیجه می‌گیردکه در تیرطره شکل ۴f چنانچه بار وارده قادر به‌شکستن تیرباشد مقدار نیروهای کششی وارد برنقاط‌مختلف AD متناسب با فاصله هر نقطه تا تکیه‌گاه D خواهد بود. این نیروها را می‌توان با نیروی $\frac{S}{۲}$ (نصف‌حداکثر) که درفاصله $\frac{۲h}{۳}$از D قرار دارد جایگزین نمود (h عمیق‌تر است). چنانچه حول نقطه D گشتاور کشش‌ها را با گشتاور نیروی خارجی مساوی قرار دهیم‌خواهیم داشت:

$$\frac{۲h}{۳}\times\frac{S}{۲}=L\times l$$

و ازآن‌جا

$$L=\frac{Sh}{۳h} \qquad (۲)$$

مقداری‌که برای بارنهائی L ازاین معادله بدست‌می‌آید معادل $\frac{۲}{۳}$مقداریست‌که از روش گالیله محاسبه می‌شود و درحقیقت به‌نتایج آزمایش‌های تجربی‌نزدیك‌تر شده است. ماریوت بعداً مشاهده‌کردکه لایه‌های پائین تحت فشار قرار دارند و درنظرگرفتن‌کشش «صفر» درنقطه D صحیح نیست. برای جواب‌به‌این‌مسأله ماریوت استدلال می‌کندکه «چون مقاومت درمقابل شکست درمورد کشش و فشار مساوی می‌باشد بنابراین رابطه(۲) درهرصورت رابطه صحیحی است».

توزیع نایکنواخت‌کشش‌هاکه ماریوت به‌کمك مثال اهرم‌بدست آورد نقطه عطفی درجهت بدست‌آوردن رابطه خمش‌است. چنانچه ماریوت پس از توجه به تحت‌فشار بودن‌لایه‌های پائین گشتاور را حول نقطه I وبه‌صورت‌زیر محاسبه می‌کرد:

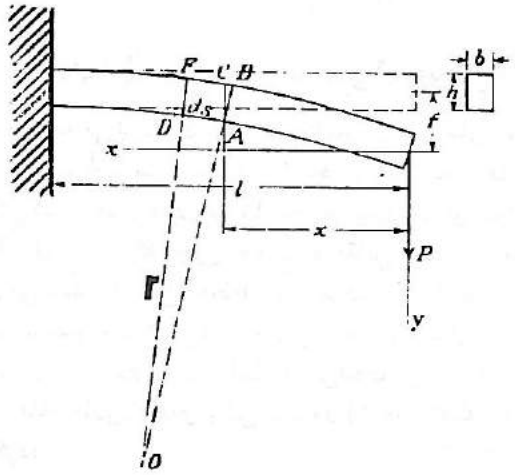
$$۲(\frac{S}{۴}\times\frac{۲}{۳}\cdot\frac{h}{۲})=\frac{Sh}{۶}$$

به‌نتیجه $L=\frac{Sh}{۶l}$ می‌رسید و به‌طور قطع بدست آوردن رابطه خمش‌آن‌قدرها به درازا نمی‌کشد.

ماریوت برای توجیه معادله خود آزمایش‌های گشتی متعددی به‌روی نمونه‌های‌چوبی به‌قطر $\frac{۱}{۸}$ اینچ‌انجام داد وبارنهائی کششی‌آن‌هارا S = ۳۳ پوند محاسبه‌نمود. پس‌ازانجام‌آزمایش‌های خمش به‌روی‌میله‌های مشابه‌که به‌صورت

تیرطره به‌طول ۴ اینچ به‌کاررفته بودند مقاومت خمشی آن‌هارا $L = ۶$ پوند به‌دست‌آورد. نسبت $\frac{S}{L}$ که ازطریق آزمایش به‌دست‌آمده است ۵۵ و با استفاده‌از روش ماریوت و گالیله به‌ترتیب ۴۸ و ۳۲ می‌باشد.

اواخر قرن هفدهم دوران گسترش‌علم «حساب بی‌نهایت‌کوچک‌ها»ست. دراین ایام ژاکوب برنولی[1] درصدد برآمدکه از معلومات ریاضی‌خوداستفاده نموده و تغییرشکل تیرها را به‌نحوی‌که شرح آن خواهد آمد محاسبه نماید. درتیرطره شکل ۵ قطعه ABFD به‌طول ds را درنظربگیریم. چنانچه پس‌از خمش مقطع AB حول محوری‌که عمود برصفحه‌کاغذ درنقطه B وارد آمده است بچرخد، ازدیاد طول لایه‌هائی‌که بین AB و DF قراردارند با فاصله آن‌ها ازمحور چرخش متناسب است. بنابه‌قانون‌هوک[2] نیروهای وارده به‌لایه‌ها




**شکل ۵**

۱: *Jacob Bernoulli* سال‌های ۱۷۰۵ - ۱۶۵۴ میلادی ــ ژان‌برنولی برادر ژاکوب از ریاضی‌دانان بزرگ قرن هفدهم و دانیل برنولی پسر ژاکوب از دانشمندان بزرگ قرن هجدهم است. اولر ریاضی‌دان و عالم مشهور از شاگردان دانیل برنولی بوده است.

۲: *Robert Hook* سال‌های ۱۷۰۳-۱۶۳۵. هوک رابطه نیرو وازدیاد طول را به‌طورکامل مورد بحث قرار می‌دهد. این تناسب‌قبلا توسط ماریوت هم عنوان شده.



متناسب فاصله‌شان تا محور چرخش است. برآیند این نیروها را می‌توان با نیرویی مساوی:

$$\frac{۱}{۲} \cdot m \cdot \frac{\Delta ds}{ds} bh \qquad (۳)$$

جایگزین‌کرد که درآن m ضریب تناسب بین نیرو و ازدیاد طول (ضریب ارتجاعی) و $\Delta ds$ ازدیاد طول بالاترین لایه می‌باشد. باتوجه به‌توزیع‌خطی کشش‌ها نیروی برآیند در نقطه $\frac{۲h}{۳}$ از محور چرخش وارد می‌آید (نکته‌ای‌که قبلا توسط ماریوت عنوان شده‌بود). از مساوی قراردادن گشتاور این نیروها با گشتاور نیروی خارجی خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲} \cdot m \cdot \frac{\Delta ds}{ds} bh \cdot \frac{۲h}{۳} = Px \qquad (۴)$$

از تشابه دومثلث ABC و OFB داریم:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{h}{r} \qquad (۵)$$

از (۴) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{C}{r} = Px \qquad (۶)$$

مقدار C بستگی به‌جنس و ابعاد تیر داشته و مساوی:

$$\frac{mbh^۳}{۳}$$

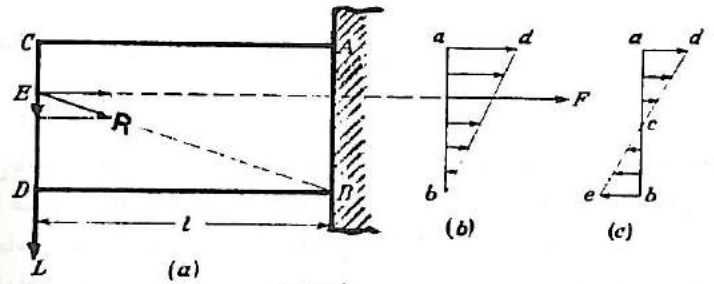
می‌باشد. ازآن‌جاکه برنولی‌هم اشتباه گالیله را تکرارنموده و محور چرخش را عمود بر B گرفته است مقدار ضریب C چهار برابر مقدار حقیقی آن محاسبه شده است. صرفنظر از تفاوتی‌که C بامقدار واقعی دارد شکل کلی معادله (۶) کاملا صحیح است. شعاع انحناء همیشه با گشتاور وارده نسبت معکوس دارد.

پس‌ازبرنولی دانشمندانی چون اولر و لاگرانژ تحقیقات باارزشی در علم مقاومت‌مصالح بعمل‌آوردندکه بیش‌تردرباره‌نحوه تغییرشکل‌های‌ارتجاعی و حل معادله نمایش ستون‌ها بحث‌می‌کرد. خمش تیرهاتوسط دانشمندی‌به‌نام پارنت[1] موردبحث قرار گرفت.

۱: *Parent* سال‌های ۱۷۱۶-۱۶۶۶ میلادی.

نحوه بررسی پارنت بسیار جالب است و ذیلا شرح داده خواهدشد.
تیرطره شکل ۶ را درنظر بگیریم. بهزعم ماریوت نحوه توزیع کشش‌ها بهصورت (F) درنقطه‌ای به‌ارتفاع $\frac{2h}{3}$ واردمی‌آید. امتداد نیروی R که برآیند بارخارجی L ونیروی F است باید ازنقطه B بگذرد چون درغیر این‌صورت حول‌آن نقطه گشتاوری پیدانموده وجمع‌جبری گشتاورهای مؤلفه‌های آن‌حول B مساوی صفرنخواهد بود.

چون نقطه B (یاخطی عمود برصفحه کاغذ درنقطه B و به‌طول پهنای تیر) قادر نخواهد بودکه نیروی R را تحمل نماید. باید این نیرو توسط قسمتی از سطح مقطع تیر تحمل‌شود. بادرنظرگرفتن تحت فشار بودن لایه‌های پائینی، توزیع کشش‌ها و فشارها به طریق C می‌تواند راه حل مناسبی باشد که گشتاوری معادل نصف گشتاور تولیدشده توسط نحوه توزیع b خواهد داد[1]. پارنت (بدون داشتن آنچه‌ما امروزمی‌دانیم) سعی کرد که نتایج آزمایش‌های ماریوت را توجیه نماید. آزمایش‌های ماریوت بارهای نهایی را کم‌تر از آنچه ازفرمول خودش بدست می‌آید وبیش‌تراز آنچه از توزیع C می‌توان محاسبه نمود، نشان می‌دهد. برای این منظورپارنت‌نحوه توزیع کشش وفشار را مطابق شکل ۷ پیشنهاد می‌کند. این‌نحوه توزیع با فرض ارتجاعی بودن

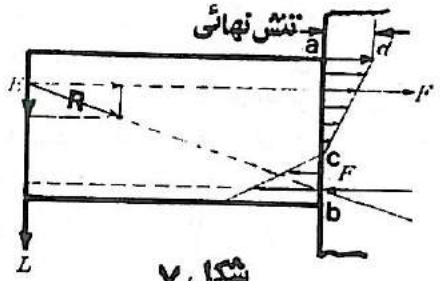


شکل ۶

۱: ما امروز می‌دانیم که قانون هوك فقط تا حد ارتجاعی جسم اعتبار دارد و نحوه توزیع C فقط درحالتی‌است که جسم هنوزارتجاعی باشد. چون درنقطه شکست جسم ازحالت ارتجاعی خارج شده است بالطبع این نحوه توزیع را برای حالت بارنهایی نمی‌توان به‌کار برد.



جسم وتفاوت‌بین ضرائب ارتجاعی کششی وفشاری نتایج آزمایشی ماریوت‌را توجیه می‌کند. دراین‌حالت تارخنثی در وضعیتی است که $\frac{ac}{ab}=\frac{9}{11}$



شکل ۷

بررسی‌ها و مقاله‌های پارنت که برای اولین‌بار وجودتارخنثی‌راعنوان کرده و گام بلندی درجهت بهبود محاسبات مربوط به خمش برداشته است ازنظر دانشمندان قرن هجدهم دور ماند و تکمیل رابطه مورد بحث تا زمان کولمب[1] (شصت سال بعد) به‌تعویق‌افتاد. یکی‌از علل پوشیده‌ماندن‌بررسی‌های پارنت این است که مقاله‌های او از طریق فرهنگستان انتشار نیافته بود. در فاصله زمانی بین پارنت وکشفیات کولمب مهندسین هنوز از راه حل‌ماریوت استفاده می‌نمودند.

کولمب دانشمندی است که به‌گفته تیموشنکو بیش از هرفرد دیگری درقرن هجدهم به‌علم مکانیك اجسام ارتجاعی خدمت نموده است. شکل ۸ که‌عیناً درمقاله کولمب(۱۷۷۳) آمده است انواع آزمایش‌های‌مصالح منجمله آزمایش‌خمشی شکل۸ را نشان می‌دهد. درشکل ۸ نحوه توزیع کشش وفشار پیشنهادی کولمب دیده می‌شود کولمب که ظاهراً ازکارهای پارنت بی‌اطلاع بوده است توزیع کشش و فشار را به‌صورت دوقوس فرض می‌کند وبادرنظر گرفتن شرایط کامل[2] تعادل استاتیکی نتیجه می‌گیرد:

ـ برآیند مؤلفه‌های افقی نیروهای داخلی باید مساوی صفر باشد.

۱: *Coulomb* سال‌های ۱۸۰۶-۱۷۳۶ میلادی.

۲: درهیچ‌یك ازبررسی‌های‌قبلی درموردتیرها به‌این حقیقت‌که به‌علت عدم‌نیروی خارجی‌محوری باید جمع مولفه‌های افقی نیروهای داخلی صفرباشد توجهی نشده است.

ـ برآیند مؤلفه‌های عمودی نیروهای داخلی باید مساوی بار خارجی باشد.

ـ شدت ونحوه توزیع نیروهای داخلی به‌نحوی باشدکه گشتاورشدن حول محور c مساوی ودر جهت عکس گشتاور بار خارجی باشد.

بادرنظرگرفتن تعادل قطعه ofhm (شکل ۸d) که پس از تغییر شکل به‌صورت ogmn درمی‌آید و به‌فرض ارتجاعی ماندن نیز تا نقطه شکست، بارنهایی طبق محاسبات کولمب برای تیری به پهنای واحد و ارتفاع h از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi = \frac{Sh}{6l} \qquad (۷)$$

که درآن S قدرت کشتی تیر است[۲]. چنانچه S را حاصل‌ضرب سطح مقطع در «تنش نهایی» بدانیم رابطه (۷) بافرض ارتجاعی ماندن تیر کاملاً صحیح است.

کولمب برای اجسام صلب[۳] که تغییر شکل آن‌ها تالحظه شکست قابل صرفنظرکردن است توزیع کشش را یکنواخت فرض نموده وبه‌رابطه:

$$\varphi = \frac{Sh}{2l} \qquad (۸)$$

می‌رسد که قبلا توسط گالیله به‌دست آمده بود.

پس از کولمب باوجود این‌که مسائلی از قبیل نحوه محاسبه طاق‌های قوسی و دیوارهای سیل‌بند وغیره موردبحث دانشمندان قرار گرفت، تا زمان ناویه[۱] به‌تحقیقی درمورد خمش تیرها برنمی‌خوریم.

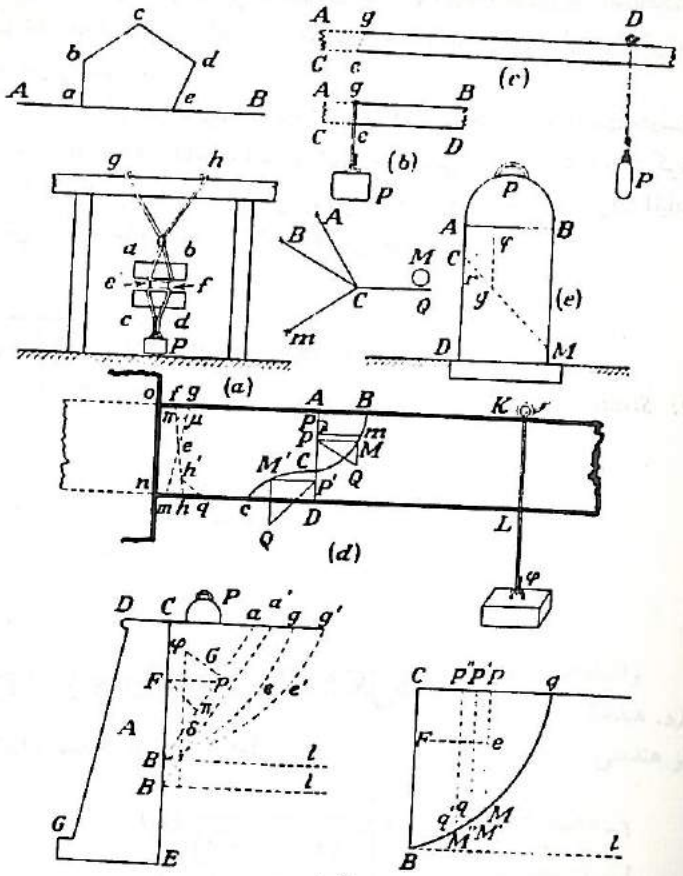
از مقاله‌های اولیه ناویه چنین به‌نظر می‌رسد که از تحقیقات پارنت و کولمب بی‌اطلاع بوده است و نظریات ماریوت و برنولی را در موردمحور چرخش صحیح می‌دانسته. بعدها در سال ۱۸۲۶ میلادی نظریه کاملاصحیحی

۱، با درنظرگرفتن این‌که‌کولمب بازوی گشتاورنیروهای‌کششی وفشاری داخلی را $\frac{h}{3}$ گرفته است مطمئناً باید درنحوه توزیع خود تجدیدنظرنموده وتوزیع خطی را به‌کار برده باشد.

2: *Rigid*

۳: *Navier* سال‌های ۱۸۳۶ ـ ۱۷۸۵ میلادی.






**شکل ۸**

در مورد کار خنثی عنوان کرده و می‌نویسد: «تارخنثی از مرکز سطح مقطع عبور می‌نماید». باکشف محل صحیح تارخنثی و با فرض این‌که سطح مقطع پس از تغییر شکل تیر مسطح باقی می‌ماند رابطه:

$$\frac{EI}{6} = m \qquad (۹)$$

توسط ناویر اثبات می‌شود که رابطه صحیح بین ضریب ارتجاعی ـ لنگر لختی ـ شعاع انحناء وگشتاور نیروهای خارجی است.

لازم به توضیح است که ضریب ارتجاعی به‌صورتی‌که ناویه آن‌را

به‌کاربرده است وما امروز می‌شناسیم در سال ۱۸۰۷ میلادی توسط یانگ تعریف شد. محدودبودن خاصیت ارتجاعی اجسام نیز برای اولین‌مرتبه‌توسط یانگ عنوان شده است.

با درنظرگرفتن نحوه صحیح توزیع کشش و فشار که پارنت به‌دست آورد ــ رابطه (۹) و تناسب تنش و تغییر بعد نسبی[2] که یانگ عنوان کرد، سرانجام رابطه مورد بحث ، شکل نهایی خود را پیدا نمود و امروز اثبات آن بیش از یك ساعت وقت کلاس را نمی‌گیرد.

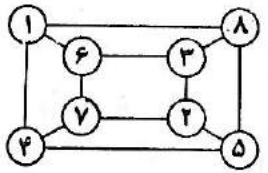
---

۱: *Thomas Young* سال‌های ۱۸۲۹ـ۱۷۷۳ میلادی.

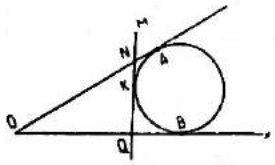
*2: Strain.*

## پاسخ رمز و راز عددها وشکل‌ها

■ **کدام عددرا کجا بگذاریم؟**




■ **زاویه و خطراست**



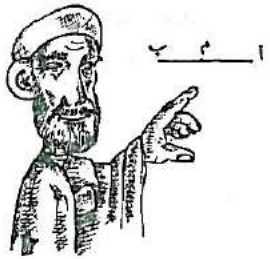

روی دو ضلع زاویه ، پاره خط‌های $OA=OB=\frac{P}{۲}$ را جدامی کنیم.

اگردایره‌ای‌رسم کنیم که‌درنقطه‌های A و B برضلع‌های زاویه مماس باشد ، و بعد از M مماسی براین‌دایره‌رسم کنیم، خط موردنظر به‌دست می‌آید. استدلال ساده است.



# هندسهٔ واسطه‌ها

دکتر علیرضا امیرمعز




**از ملانصرالدین پرسیدند:**
**«فایده میانه‌ها و واسطه‌ها به‌چیست؟»**
**ملاجواب داد: «خیرالامور اوسطها.»**

واسطه‌ها یا میانه‌های عددهای مثبت کاربرد زیادی در صنعت و آمار دارد. هندسهٔ مربوط به‌آن بسیار جالب است. در این مختصر ، میانه‌ها را از نظر هندسی بررسی می‌کنیم وآنچه ساده است تعمیم می‌دهیم.

**۱ـ واسطه‌ها:** فرض کنیم که a و b دوعدد حقیقی و مثبت باشند.

I ــ واسطهٔ عددی a و b عبارتست از:

$$m=\frac{۱}{۲}(a+b)$$

II ــ واسطهٔ هندسی a و b عبارتست از :

$$g=\sqrt{ab}$$

III ــ هرگاه‌واسطهٔ موزون[1] a و b را با h نمایش‌دهیم، نتیجه می‌شود که:

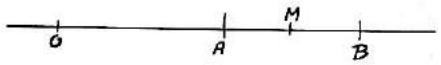
---

*1: Harmonicmean*

$$\frac{۲}{h}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

(در زبان فارسی واسطه و میانه دوکلمهٔ متعادلند). ملاحظه می‌شود که واسطهٔ عددی بر دوعدد همیشه تعریف می‌شود. ولی واسطه‌های دیگر را باید برای عددهای مثبت تعریف کرد مگر آن‌که منظور بازی بیش‌تری باشد که از عددهای مجازی هم می‌توان استفاده کرد.

**۲ـ ساختمان هندسی واسطه‌ها:** محوری درنظر می‌گیریم ونقاط A وB را روی‌آن چنان انتخاب می‌کنیم که $OA=a$ و $OB=b$ شود (شکل ۱).



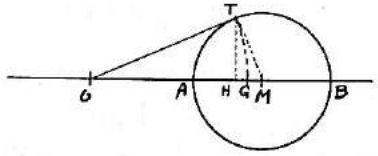

**شکل ۱**

هرگاه M میان پاره‌خط AB باشد، ملاحظه می‌شود که:

$$OM=m=\frac{۱}{۲}(a+b)$$

اکنون شکل‌را تکرار می‌کنیم وآنرا «شکل ۲» می‌نامیم. دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم ومماس OT را بردایره نیز می‌کشیم. سپس OG را برابر OT می‌گیریم. به‌آسانی ثابت می‌شود که $OG=g$. واضح است که مثلث OTM قائم‌الزاویه است و OM وتر آنست. بنابراین:

$$OT^۲=OM^۲-MT^۲$$




**شکل ۲**

ولی ملاحظه می‌شود که:



$$OM=\frac{۱}{۲}(a+b) \quad و \quad MT=\frac{۱}{۲}|b-a|$$

در نتیجه:

$$OT^۲=\frac{۱}{۴}[(a+b)^۲-(a-b)^۲]=ab$$

بنابراین:

$$OG=OT=g=\sqrt{ab}$$

هرگاه عمود TH را برخط AB رسم کنیم، $OH=h$ ( شکل ۲ ).
برای اثبات ملاحظه می‌کنیم‌که TH ارتفاع وارد بر وتر است. لذا:

$$OT^۲=(OM)(OH)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که:

$$OH=\frac{OT^۲}{OM}=\frac{ab}{\frac{۱}{۲}(a+b)}=\frac{۲ab}{a+b}$$

بنابراین:

$$\frac{۲}{OH}=\frac{a+b}{ab}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

در نتیجه:

$$OH=h$$

**۳ـ خواص میانه‌ها:** هرگاه شکل ۲ را به‌دقت بررسی کنیم ، ملاحظه می‌شود که:

$$h\leqslant g\leqslant m$$

تساوی وقتی برقرار است‌که $a=b$ باشد. دراین‌صورت دایره به یك نقطه بدل می‌شود و نقاط A ، B ، M ، G و H همه برهم منطبق می‌شوند. البته نامساوی بالا را باید اثبات کرد. چون OM وتر مثلث OTM است $OM>OT$ و چون OT وتر مثلث قائم‌الزاویه OHT است $OT>OH$ و در نتیجه:

$$OH<OG<OM$$

اکنون مثلث OTM را بیش‌تر بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که :

$$OT^۲=(OM)(OH)$$

لذا:

$$g^۲=mh$$

به‌این‌معنی‌که واسطهٔ‌هندسی a و b نیز واسطهٔ‌هندسی m و hمی‌باشد.

**۴ـ روش جبری:** رابطه‌های‌بخش(۳) را به‌روش‌جبری‌بررسی‌می‌کنیم.

ملاحظه می‌شود که از

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$

نتیجه می‌شود که:

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab$$

از آن‌جا:

$$a^2+b^2+2ab \geqslant 4ab$$

و در نتیجه:

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab$$

که ازآن رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

یعنی:

$$m \geqslant g$$

اکنون از رابطهٔ

$$\frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

نتیجه می‌شود که:

$$h=\frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{g^2}{m}$$

لذا:

$$g^2=mh$$

اگر طرفین $m \geqslant g$ را مجذور کنیم، نتیجه می‌شود که:

$$m^2 \geqslant g^2=mh$$

که از آن نامساوی

$$m \geqslant h$$

به‌دست می‌آید. طرفین این نامساوی را در h ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که:

$$g^2=mh \geqslant h^2$$

بنابراین:

$$h \leqslant g \leqslant m$$

**۵ـ تعمیم میانه‌ها:** فرض کنیم که $a_1$ ، ... ، $a_n$ عددهای حقیقی و مثبت باشند؛ n عددیست طبیعی. واسطه‌ها را چنین تعریف می‌کنیم:



I ـ میانهٔ عددی عددهای بالا عبارتست از:

$$m=\frac{1}{n}(a_1+\dots+a_n)$$

II ـ میانهٔ هندسی عددهای بالا عبارتست از:

$$g=\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}=(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$$

III ـ هرگاه h میانهٔ موزون عددهای فوق باشد، داریم:

$$\frac{n}{h}=\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}$$

چون ریشهٔ سوم یك عدد را نمی‌توان باخط‌کش وپرگار رسم‌کرد این میانه‌ها را باید به‌طریق جبری مطالعه کرد.

اثبات رابطهٔ

$$h \leqslant g \leqslant m$$

قدری طولانی است و آن را در مقاله‌ای دیگر می‌آوریم . ولی میانه‌های زیرموزون[1] برای عددها موجودندکه سعی می‌کنیم بعضی ازآن‌ها را تعریف کنیم. مثلاً درحالت $n=4$، تعریف آن‌را بیان می‌کنیم:

فرض کنیم که $a_1$ ، $a_2$ ، $a_3$ و $a_4$ عددهای مثبت باشند. سپس میانهٔ زیرموزون آن‌ها را به $h_1$ ، $h_2$ و $h_3$ می‌نمائیم.

I ـ $h=h_1$ که قبلاً تعریف شده است:

$$\frac{4}{h_1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a^4}$$

II ـ میانهٔ زیرموزون رتبهٔ۲ عددهای بالا $h_2$ است که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$\frac{4}{h_2}=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_1a_4}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_4}$$

III ـ میانهٔ زیرموزون رتبهٔ۳ عددهای فوق $h_3$ است که در رابطهٔزیر صدق می‌کند.

$$\frac{4}{h_3}=\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_1a_2a_4}+\frac{1}{a_2a_3a_4}$$

1: *Subharmonic*

صدق می‌کند.

$$\frac{۴}{h_۳}=\frac{۱}{a_۱a_۲a_۳}+\frac{۱}{a_۱a_۲a_۴}+\frac{۱}{a_۲a_۳a_۴}$$

ملاحظه می‌شود که:

$$h_۳=\frac{a_۱a_۲a_۳a_۴}{\frac{۱}{۴}(a_۱+a_۲+a_۳+a_۴)}=\frac{g^۴}{m}$$

که درآن $m$ و $g$ به‌ترتیب واسطه‌های عددی و هندسی عددهای بالامی‌باشند. خواننده می‌تواند میانه‌های زیرموزون را برای $n$ عدد مثبت تعریف کند.

**۶ـ انحراف ارزی**[1]: فرض کنیم که $a_۱$ ، ... ، $a_n$ عددهای حقیقی مثبت باشند (گاهی صفر را هم می‌توان درنظر گرفت). انحراف ارزی این عددها عبارتست از:

$$s=\sqrt{\frac{(a_۱-m)^۲+\cdots+(a_n-m)^۲}{n}}$$

که‌درآن $m$ واسطهٔ عددی‌یا میانهٔعددهای بالاست. درحالت $n=۲$، انحراف ارزی را با میانه‌های دیگر مقایسه می‌کنیم. دراینصورت:

$$s=\sqrt{\frac{\left[a-\left(\frac{a+b}{۲}\right)\right]^۲+\left[b-\left(\frac{a+b}{۲}\right)\right]^۲}{۲}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a-b)^۲+(a-b)^۲}{۸}}=\frac{|a-b|}{۲}$$

فرض کنیم که روی محوری $OA=a$ و $OB=b$ باشد ( شکل ۳ ).
ملاحظه می‌شود که اگر OS را برابر s بگیریم ، OS به‌اندازهٔ نصف طول

شکل ۳

1: *Standard Diviation*



ملاحظه می‌شود که هرگاه $a>۰$ و $b>۰$ باشد،

$$۲ab>-۲ab$$

از آن‌جا:

$$a^۲+b^۲+۲ab>a^۲+b^۲-۲ab$$

و

$$(a+b)^۲>(a-b)^۲$$

لذا:

$$a+b>|a-b|$$

یا

$$m>s$$

در حالت‌های دیگر مسئله مقایسه را به خواننده واگذار می‌کنیم.

## رمز وراز عددها و شکل‌ها

### ■ تعداد گلوله‌ها

چند گلولهٔ مساوی داریم که می‌توانیم آن‌ها را هم به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع وهم به‌شکل مربع پهلوی هم بچینیم. درحالتی که به‌صورت مثلث در می‌آیند، درهر ضلع‌مثلث دوگلوله بیش‌تر از تعدادگلوله‌ها در ضلع مربع در می‌آید. تعداد گلوله‌ها را پیدا کنید.

پاسخ در صفحه ۸۶

# طبیعت و ترکیب‌های مارپیچی

مارتین گاردنر

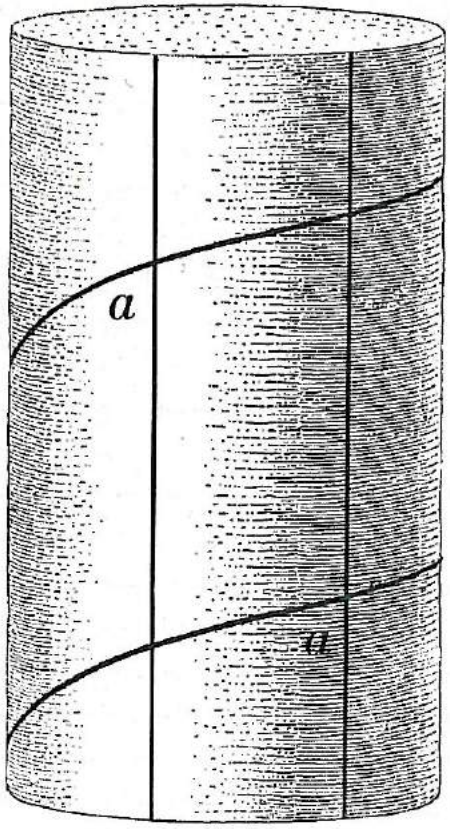
شمشیر مستقیم را به‌راحتی می‌توان داخل غلافش جا داد. همین امکان در مورد شمشیری که انحناء آن به صورت قوسی از دایره باشد، نیز وجود دارد. ریاضی‌دانان گاهی این خاصیت خطّ های مستقیم و منحنی را «خود همنهشت» انحناها می‌نامند. هر بندی از این انحناء از ابتدا تا انتها در داخل قوس قرار می‌گیرد و این جای گیری همیشه می‌تواند درست باشد.

آیا می‌توان شمشیری ساخت که نه راست باشد و نه به صورت کمانی از یك دایره وبتواند در غلاف خود جای گیرد؟ پس از بررسی دقیق، اکثر مردم جواب منفی خواهند داد، در حالی که اشتباه می‌کنند، زیرا یك انحناء سوم «خود همنهشتی»، به نام مارپیچ مدور وجود دارد. این انحنا به طور مارپیچ مولّدهای یك استوانهٔ مدور را در زاویه ثابتی قطع می‌کند. شکل ۱ این مسئله را روشن می‌کند.

مولّدها خطوط قائمی روی سطح استوانه و موازی محور آن هستند.a زاویهٔ ثابتی است که از برخورد مارپیچ با هر مولد پیدا می‌شود. به علت انحنای ثابت مارپیچ، شمشیر مارپیچی که به این شکل باشد، به آسانی می‌تواند در غلاف خود بپیچد.

در واقع خط های مستقیم و دایره ای را می‌توان به عنوان حد مارپیچ‌های مدور به






شکل ۱: مارپیچ مدور بر روی استوانه.

شمار آورد. منحنی‌ها را به هم فشار دهید تا حلقه‌ها به یکدیگر نزدیك شوند، آن‌قدر نزدیك که مارپیچی با حلقه‌های به‌هم چسبیده مثل یك فنر به‌دست آید.

اگر زاویهٔ a به ۹۰ درجه افزایش یابد، مارپیچ به یك دایره تبدیل می‌شود. از طرفی دیگر اگر زاویهٔ a را طوری بکشیم که به صفر درجه برسد، مارپیچ به صورت خط مستقیم در می‌آید. اگر شعاع‌های نور را موازی با محور مارپیچ و عمود بر دیوار بتابانیم، وقتی که مارپیچ را به صورت قائم در آوریم، سایهٔ آن بر دیوار به صورت مارپیچ خواهد بود. هر مارپیچی (مدوّر یا غیر آن) یك منحنی فضائی نامتقارن است که با تصویرش در آینه تفاوت دارد.

ما اصطلاح «راست پیچ» را برای مارپیچی به کار می‌بریم که پیچ‌هایش (مانند

میخ یا چوب‌پنبه‌کش) مطابق با گردش عقربه‌های ساعت بپیچد. به گفتهٔ لوئیز کارول آلیس اگر این چوب‌پنبه‌کش را جلو آینه بگیرید، خواهید دید که جهت پیچ آن در تصویر بر خلاف جهت اصل خود خواهد بود. چنین پیچی را به اصطلاح «چپ‌پیچ» گویند. چنین چوب‌پنبه‌کشی را می‌توان برای یك شوخی به کار برد؛ به این طریق که اگر پیچ را به طرف چپ بپیچیم و به دست شخصی بدهیم مدتی طول می‌کشد تا متوجه شود که پیچ را باید در جهت عقربه‌های ساعت بپیچاند.

گذشته از پیچ‌ها و پیچ و مهره‌ها که آن‌ها را (به غیر از مصارف به‌خصوص) به عنوان مارپیچ‌های راست‌پیچ می‌شناسند، بیش‌تر مارپیچ‌های ساخت بشر مانند پلکان‌های مدور، طناب‌ها و کابل‌های ساخته شده از رشته‌های به هم پیچیده و غیره در هر دو نوع راست‌پیچ و چپ‌پیچ تهیه می‌شوند. همان تنوع در پیچیدگی مارپیچ‌های مخروطی (منحنی‌هائی که به دور مخروط پیچیده می‌شوند)، مارپیچ‌ها و مارپیچ‌های گرد، و مارپیچ مخروطی وارونهٔ موزهٔ فرانك لوید رایتز گاگینهیم[2] در نیویورك وجود دارد.

همچنین در طبیعت موجودات زنده، ترکیب‌های مارپیچی فراوان، دیده می‌شود. از ساده‌ترین ویروس‌ها گرفته تا قسمت‌هائی در بدن انسان و تقریباً در قوانین پیدایشی، همه نشان می‌دهند که هر مارپیچ به کدام طرف پیچ خورده است.

در حقیقت، قانون پیدایشی مولکول‌های بزرگ اسید نوکلیك (چنان‌که امروزه اکثر بیوشیمیست‌ها معتقدند)، پیچشی راست‌پیچ دارند. علاوه بر این‌ها از زمانی که کار لاینوس پولینگ[3] روی ترکیب مارپیچی مولکول‌های پروتئین شروع شد، همین مسئله پیش‌کشیده شد که مولکول‌های بزرگ پروتئین موجود در طبیعت تکیه‌گاهی هستند با مارپیچ‌هائی که به صورت راست پیچ دور آن‌ها پیچیده شده‌اند.

در هر دو حالت اسید نوکلیك و پروتئین، مولکول‌های تکیه‌گاه، به صورت رشته‌ای هستند که از واحدها ساخته شده است. هر واحد، ترکیب نا متقارنی از همان پیچ خوردگی‌هاست، درست شبیه پله‌های یك پلکان مدور که به این رشته، یك پیچ اضافی در همان جهت می‌دهد.

ترکیب‌های مارپیچی بزرگ‌تر در جانورانی که تقارن دوجانبه دارند، معمولاً

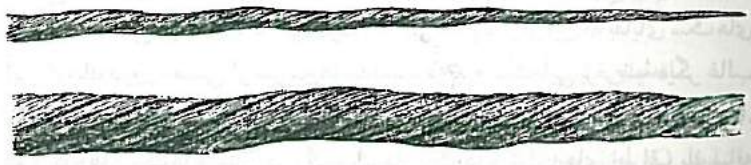
1: Lewis Carroll's *Alice*
2: Frank Lloyd Wright's Guggenheim
3: Linus Pauling



به‌صورت تصویر آینه‌ای است. شاخ‌های قوچ، بز، بزکوهی و سایر پستان‌داران نمونه‌هائی از این نوع تقارن آینه‌ای هستند (شکل۲). لالهٔ گوش انسان، مارپیچ مدوری است که در گوش چپ، چپ‌پیچ و در گوش راست، راست‌پیچ است.

شکل ۲: شاخ‌های مارپیچ گوسفند پامیر با پیچیدگی متقابل.

دندان‌های کرگدن دریائی، وال کوچکی که در آب‌های قطب شمال زندگی می‌کند استثنای عجیبی است. این موجود غریب با دو دندان در آروارهٔ بالا متولّد می‌شود. در کرگدن نر، دندان راست و در کرگدن ماده هر دو دندان به‌طور دائم در آرواره باقی می‌ماند. اما دندان‌های چپ کرگدن نر مانند یك زوبین به‌طور مضحکی به‌طول ۲۴۰ تا ۲۷۰ سانتی‌متر رشد می‌کند (یعنی بیش از نصف طول حیوان، از پوزه تا دم او). در اطراف این دندان‌های بزرگ شیارهای مارپیچی شکلی وجود دارد که در جهت چپ به‌طرف جلو پیچ خورده است (شکل۳).



شکل ۳: شیارهای مارپیچی دندان‌های کرگدن دریایی همیشه به‌چپ پیچیده است.

در مواقع نادر زمانی که این دندان‌ها درازتر می‌شوند شخص انتظار دارد که دندان سمت راست در جهت راست بپیچد. اما این‌طور نیست زیرا که این دندان همواره به‌طرف چپ می‌پیچد. جانورشناسان در این‌مورد اختلاف نظر دارند. آرکی

تامپسون[1] در کتاب «در بارهٔ رشد و فرم گرفتن» از نظریهٔ خودش که وال با مختصر پیچی به‌سمت راست شنا می‌کند، دفاع می‌کند. پایداری دندان بزرگ در بیخ دندان، طوق چنبره‌ای تولید می‌کند که ممکن است به‌هنگام رشد، باعث چرخیدن آن به‌جهت چپ بشود. اگر یك مارپیچ قسمت عمده‌ای از ساختمان یك گیاه و یا یك حیوان زنده را تشکیل دهد، گونه‌های دیگر آن حیوان یا گیاه هم به‌وسیلهٔ همین نوع مارپیچ مشخص می‌شود. این موضوع در انواع بی‌شمار باکتری‌های مارپیچی و اسپرماتوزوئیدهای تمام جانوران تکامل یافته صادق است. بند ناف انسان یك مارپیچ سه‌گانه از یك سیاه‌رگ و دو سرخ‌رگ می‌باشد که همواره به‌طرف چپ پیچیده است. نمونه‌های قابل ملاحظه‌ای از مارپیچ‌های مخروطی شکل که در صدف‌های حلزونی و سایر نرم‌تنان دیده می‌شود. تمام صدف‌های مارپیچی، پیچیدگی ندارند. برای مثال حلزون‌هایی که در دریاهای گرم هستند، مانند لکه‌ای درهم، به‌دور یك سطح پیچیده‌اند که می‌توان آن‌ها را به‌دو قطعهٔ یکسان چپ و راست تقسیم کرد. اما هزاران جانور نرم‌تن زیبای به‌چپ و راست پیچیده، وجود دارد. بعضی از این نرم‌تنان همیشه به‌چپ و یا همیشه به‌راست می‌پیچند (شکل ۴). برخی دیگر نیز در یك مکان جغرافیائی به‌راست و یا به‌چپ می‌پیچند. بعضی جانوران دریائی غیر معمولی، که برخلاف جهت پیچ خورده‌اند از نظر صدف جمع‌کن‌ها ارزش بیش‌تری دارند.

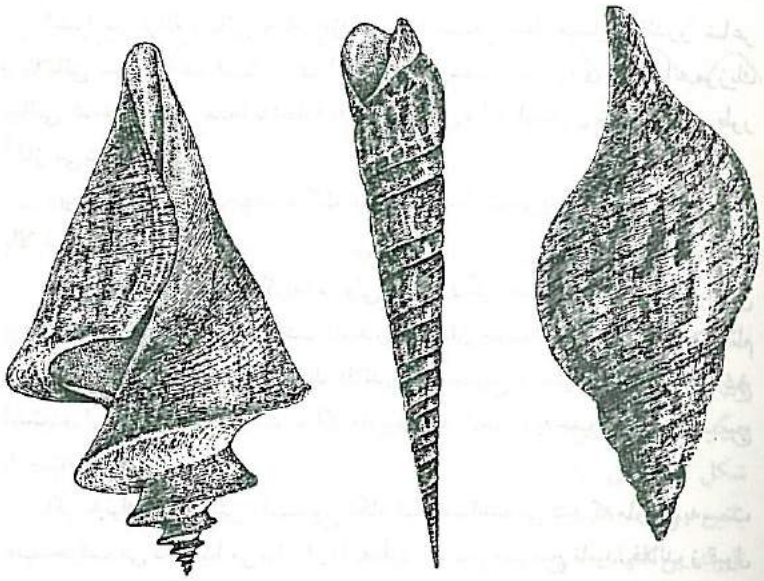
یك نوع فسیل عجیب مارپیچی که آن‌را چوب‌پنبه‌کش جهنمی می‌نامند[2] در نبراسکا و وایومینگ پیدا شده است. این مارپیچ عظیم که طول آن به‌بیش از ۱۸۰ سانتی‌متر می‌رسد گاهی به‌راست و گاهی به‌چپ می‌پیچد.

بیش از ده سال، جانورشناسان در بارهٔ این نوع فسیل بحث می‌کردند که آیا این مارپیچ‌ها فسیل‌های گیاهان از بین رفته می‌باشند و یا این که مارپیچ‌هائی هستند که اجداد سگ آبی آن‌ها را لانهٔ خود کرده‌اند. سرانجام پس از این که بقایای سگ‌های آبی کوچك درون بعضی از مارپیچ‌ها پیدا شد، فرضیهٔ سگ آبی برفرضیهٔ دیگر غالب شد. در دنیای نباتات، در ترکیب ساقه‌ها، تنه‌ها، ریشه‌های پیچیده، دانه‌ها، گل‌ها، میوهٔ کاج‌ها، برگ‌ها و حتی در رگ برگ‌ها، برگ‌ها و شاخه‌های اطراف یك ساقه شکل‌های مارپیچی بسیار معمول است. تعداد پیچ‌های ساخته شده در طول مسیر یك

1: Arcy thompson
2: Daemonelix



مارپیچ، همچنان‌که از یك برگ از پائین به‌بالا نگاه کنید، عددی از سری عددهای فیبوناچی[1] خواهد بود: ۱، ۲، ۳، ۵، ۸ و ۱۳ (هر عدد مجموع دو عدد قبلی خود می‌باشد). در زمینهٔ شناخته شده‌ای مانند وضع قرار گرفتن برگ‌ها در رابطه با اعداد فیبوناچی مطالب زیادی نوشته شده است (برای خوانندگان مجله جالب خواهد بود، اگر بدانند که مجلهٔ تازه‌ای به‌اسم Fibonacci Quarterly از طرف کالج سنت ماری منتشر می‌شود که این مجله شامل نوشته‌هائی است که از جنبه‌های فنی و تفریحی رشتهٔ فیبوناچی استفاده می‌کند).



شکل ۴: سه صدف جانور نرم‌تن که مارپیچ‌های مدور آن‌ها به‌راست است.

ساقه‌های مارپیچ گیاهان بالا رونده معمولاً به‌سمت راست پیچیده‌اند اما هزاران نوع گیاهان دیگر به‌سمت چپ می‌پیچند. برای مثال پیچك معمولاً چپ پیچ است. نیلوفر (که به‌نام «شکوه صبحگاهی» معروف است) به‌طرف راست پیچ می‌خورد. زمانی که دو گیاه درهم پیچ می‌خورند پیچ‌های درهم و زیبائی به‌وجود می‌آورند که اثر زیادی روی شاعران انگلیسی داشته است. «نیلوفر آبی» در سال ۱۶۱۷ توسط

1: Fibonacci

بن جانسون نوشته شد. شکسپیر در داستان «خواب نیمه‌شب تابستان» از ملکه تاتیانا و آرزوی او برای در آغوش گرفتن معشوقش صحبت می‌کند که گفته است: تو بخواب و من تو را در بازوانم خواهم پیچید، همان‌طور که پیچك و نیلوفر آبی به‌هم پیچیده‌اند. در زمان شکسپیر، نیلوفر آبی اصطلاحی برای پیچك بود، زیرا که این نام بعدها منحصراً برای پیچك به‌کار برده شد. مفسرین قطعهٔ بالا مدت‌ها از همنام بودن این دو گیاه در تردید بودند و عاقبت یکی بودن این دو گیاه و نام مجازی تاتیانا برای این دو، برایشان مسلم شد.

اخیراً نیز ترانهٔ زیبائی به‌نام «ازدواج نامناسب» توسط میشل فلاندرز[1] شاعر بریتانیائی سروده شده است. و دونالدسوان[2]، دوست میشل روی این ترانه موزیك جالبی گذاشته است. بعدها با اجازهٔ فلاندرز تمامی ترانه بازسازی شد. ترانه این‌طور آغاز می‌شود:

«پیچك خوش‌بو در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیچد و به‌سوی خورشید بالا می‌رود.»

دیگر پیچك‌ها هم همین‌گونه‌اند. ولی بعضی دیگر، همچون نیلوفر آبی، پیچشی برخلاف حرکت عقربه‌های ساعت دارند و این بدان جهت است که نیلوفر پیچی، نام مناسب خود را داشته باشد. پیچك فلاندرز راست‌پیچ و نیلوفر آبی‌اش چپ‌پیچ است. و این یك قرار داد است که اگر مارپیچی به‌راست یا به‌چپ بپیچد، راست پیچ یا چپ‌پیچ نامیده می‌شود.

اگر به نوك پیچ گوشتی راست‌پیچ نگاه کنید، مشاهده می‌کنید که مارپیچ به‌سمت چپ حرکت می‌کند، لذا می‌توان آن‌را به‌طور صحیح چپ‌پیچ نامید. فلاندرز قبول می‌کند که این‌جا برخلاف آئین قراردادی عمل شده است. همچنین در یك اسباب‌بازی چشمی عجیب که ۳۰ سال قبل ساخته شده است، به‌هم پیچیدن دو مارپیچ مدور را می‌توان دید. به‌این طریق که از پیچیدن یك جزء از دو سیم حلقه‌ای درست شده است.

برای ساختن ترکیبی محکم بایستی سیم‌ها در چند نقطه به‌یکدیگر لحیم شوند. از فشار دادن سیم بین دو انگشت شست و انگشت سبابه در کناره‌های مرکزی دست چپ و راست که برروی یکدیگر می‌افتند، خطای باصره به‌وجود می‌آید. هنگامی که

1: Michel Flanders
2: Donald Swann



دست‌ها از هم جدا می‌شوند انگشت شست و سبابه در طول سیم سرخورده و باعث چرخیدن آن می‌شود. این، مانند اشتباه بینائی است که از چرخیدن یك ریش‌تراش در دوقطب مختلف ایجاد می‌شود. زمانی که این چرخیدن پیوسته تکرار شود، به‌نظر می‌رسد که سیم به‌طرز شگفت‌آوری از منبع پایان‌ناپذیری بیرون می‌آید. از آن جایی که نوترینو و آنتی‌نوترینو برای حرکت پیچشی عکس یکدیگر می‌چرخند، تقریباً می‌توان گفت که این اسباب‌بازی محصولی از پیچش‌های بی‌انتهای نوترونو است.

خصلت مارپیچی مسیر نوترونو منتجه‌ای از ترکیب دو حرکت است (شکل ۵).

شکل ۵: سرگرمی مارپیچی که محصول فوترونو را پیشنهاد می‌کند.

یکی حرکت به‌جلو (باسرعت نور) و دیگری چرخش آن. مسیرهای مارپیچ به‌وسیلهٔ تعدادی اشیاء جاندار و بی‌جان معلوم می‌شوند: نقطه‌ای در ملخ کشتی یا هواپیمای در حال حرکت، بالا و پائین رفتن سنجاب از یك درخت، چرخیدن شب‌پره‌های دم‌دراز مکزیکی به‌چپ به‌هنگام بیرون آمدن از غارها، مسیرهای مارپیچی مخروطی شکل N.M به‌وسیلهٔ مرداب‌ها، پائین رفتن از آبگذر، گردبادها و هزاران حوادث طبیعی دیگر از همین نوع مارپیچ هستند. پیشرفت علم، اغلب به‌مارپیچ وارونهٔ مخروطی شکل تشبیه می‌شود. به‌این معنی که آزمایش‌های مکرر علمی و حل مجهولات، از پائین مخروط شروع شده و به‌طرف بالا می‌پیچد و باز می‌شود. یا مانند گرداب تاریك بی‌انتهای مارپیچی است که شخصی به‌درون آن می‌افتد و در واقع معنای مجازی یأس و ناامیدی را تشبیه می‌کند.

این است که نویسندگان مثال‌های مجازی مارپیچی را زیاد به‌کار می‌برند. چنانچه نورمن میلر[1] در کتاب «تبلیغات برای خودم»، این مسئله را عنوان کرده است. او می‌پرسد: «آیا همیشه در خارج راه قرار دارم؟» برای میلر زمان، همانند جریان مخروطی شکل آب است که او را به‌سوی پائین آبگذر عالم هستی و به‌درون مارپیچ بی‌نور آب‌ها فرو می‌برد.

در زیر مسئله‌ای مارپیچی را عنوان می‌کنیم.

1: Norman Mailer

یك قطب چرخندهٔ ریش‌تراشی شامل یك استوانه است که مارپیچ‌های آن قرمز، سفید و آبی رنگ هستند. استوانه ۱۲۱ سانتی‌متر بلندی دارد. خطوط قرمز با یك زاویهٔ ثابت ۶۰درجه مولدهای استوانه را قطع می‌کنند (خطوط عمودی). طول خط قرمز چه‌قدر است؟

ترجمه رحیم رحیم‌زاده

## پاسخ رمز و راز عددها و شکل‌ها

### ■ تعداد گلوله‌ها

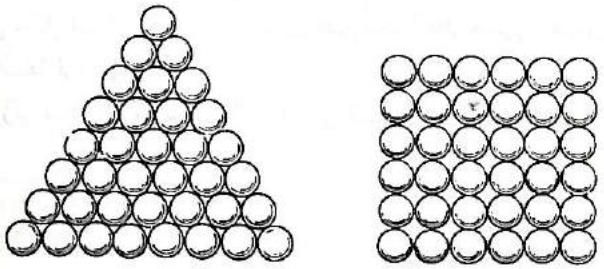
اگر در ضلع مثلث n گلوله وجود داشته باشد، در ردیف روی این ضلع $(n-1)$ گلوله، بود $(n-2)$ گلوله و غیره قراردارد. بنابراین تعداد کل گلوله‌هایی که مثلث را ساخته‌اند، برابر است با :

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

بنابر فرض، اگر در ضلع مثلث n گلوله وجود داشته باشد، در ضلع مربع $(n-2)$ وجود دارد وبنابراین، تعدادکل گلوله‌ها برابر با $(n-2)^2$ می‌شود. از آن‌جا باید داشته باشیم :

$$\frac{n(n+1)}{2}=(n-2)^2 \Rightarrow n^2-9n+8=0$$

که باحل این معادله $n=8$ به‌دست می‌آید، یعنی تعداد همهٔ گلوله‌ها برابر ۳۶ است.





# توپ بیلیارد و ریاضیات

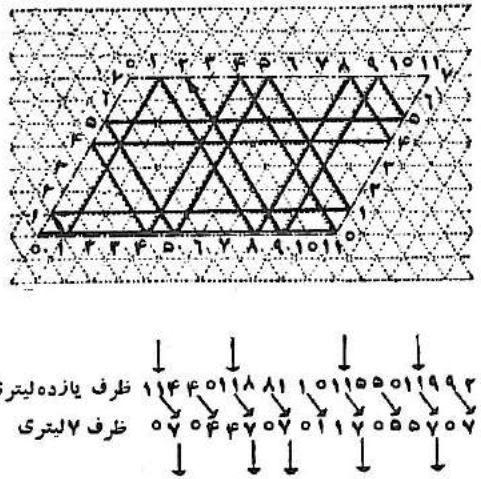
ریاضیات گاهی چنان ناگهانی وبدون انتظار وبادقت (محاسبه، هرگز دروغ نمی‌گوید) وارد میدان می‌شود که به‌هیچ‌وجه دست‌کمی از شکل‌های شاعرانه ندارد.

یك مسئلهٔ قدیمی را درنظر می‌گیریم. دوظرف یکی به‌گنجایش ۷ لیتر و دیگری باگنجایش ۱۱ لیتر و یك بشکه بزرگ پراز آب داریم. با استفاده از همین دوظرف، می‌خواهیم دقیقاً ۲ لیتر آب برداریم.

البته این مسئله را با استفاده ازروش‌های معمولی جبر می‌توان‌حل‌کرد. ولی ما، راه به کلی دیگری را عرضه می‌کنیم. ما این مسئله را به کمك توپ بیلیاردی‌که بین‌کناره‌های میزلوزی شکلی حرکت می‌کند، حل‌می‌کنیم! آیا این غیرمنتظره نیست؟

جریان از این قرار است. شبکه‌ای از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع رسم می‌کنیم و متوازی‌الاضلاعی با ضلع‌های ۷ و ۱۱ واحد می‌سازیم (شکل۱).

عددهایی که در طول یك ضلع متوازی‌الاضلاع نوشته شده، متناظر با مقدار لیتر آبی است که در ظرف ۱۱ لیتری وجود دارد و در طول ضلع دیگر، مقدار لیتر آبی که در ظرف ۷ لیتری وجود دارد.




شکل ۱

متوازی‌الاضلاعی که رسم شده است، یك میز بیلیارد است (والبته افقی است). توپ بیلیارد را در گوشهٔ چپ وپایین میز می‌گذاریم، یعنی درنقطه‌ای که به معنای خالی بودن هردوظرف است ؛ توپ راباتمام نیرو درجهت کنارهٔ پایین میز به‌طرف راست به‌حرکت درمی‌آوریم. توپ به‌گوشهٔ راست‌وپایین‌میز می‌خورد (نقطهٔ ۱۱). این به‌معنای آن است که ظرف ۱۱ لیتری پر و ظرف ۷ لیتری خالی است . توپ ، بعد از برخورد ، روی نیمساز زاویه حرکت می‌کند ودر ضلع بالا، به‌نقطهٔ بامختصات ۴ و ۷ می‌رسد. بااطاعت از فرمان توپ، باید ظرف ۷ لیتری را از آب ظرف ۱۱ لیتری پر کنیم، که طبعاً در خود آن ظرف ۴ لیتر می‌ماند.

اگر حرکت توپ را دنبال کنیم درست ۱۸ حرکت برای توپ لازم است تا به‌نقطهٔ ۲ برسد (این‌حرکت‌ها به‌صورت دیگری ودرارتباط باظرف‌های ۱۱ لیتری و ۷ لیتری درپایین شکل ۱ نشان داده شده است. پیکان‌های مایل به‌این معناست‌که باید آب را از ظرفی به‌ظرف دیگر بریزیم. پیکان‌های قائم یا به‌این معناست که باید آب را از ظرف ۷ لیتری به داخل بشکه ریخت و یاظرف ۱۱ لیتری را به‌طور کامل پراز آب کنیم).

ولی آیا این کوتاه‌ترین راه حل است؟ نه! اگر فرض کنیم که توپ حرکت خود را درطول ضلع کوچك‌تر میز آغاز می‌کرد (به‌زبان دیگر، اگر باپرکردن ظرف ۷ لیتری‌آغاز کنیم)، مسئله خیلی سریع‌تر، و تنها در ۱۴ گام،

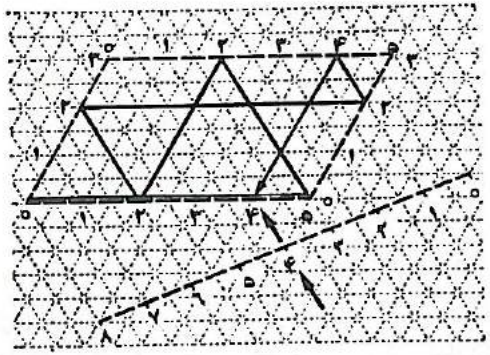


حل می‌شود. و این کوتاه‌ترین راه حلی است‌که برای به دست‌آوردن ۲ لیتر آب، به‌کمك ظرف‌های ۱۱ لیتری و ۷ لیتری است.

توپ بیلیارد می‌تواند به عنوان وسیلهٔ محاسبه ، برای حل مسئله‌های مربوط به جابه‌جائی آب به‌کمك ۲ یاحتی ۳ ظرف، به‌کار رود.

مسئله‌ای را در نظر می‌گیریم‌که به وسیلهٔ نیکولوتارتاگلیا، ریاضیدان مشهور ایتالیائی طرح شده است :

« ظرفی‌که ۸ لیتر گنجایش دارد پراز آب است:
می‌خواهیم به‌کمك دوظرف ۵ لیتری و ۳ لیتری،
فقط ۴ لیترآب برداریم ».



شکل ۲

در شکل ۲، راه‌حل مسئله نشان داده شده است . ظرف ۸ لیتری را به وسیلهٔ خطی که موازی با قطر متوازی‌الاضلاع است ، نشان داده‌ایم . توپ ، حرکت خود را، مثل حالت قبل، از گوشه (نقطهٔ ۰) آغاز می‌کند. به سادگی می‌توان مسیر حرکت توپ را تعقیب‌کرد تا به نقطهٔ ۴ برسیم . معلوم می‌شود که برای به‌دست‌آوردن این نتیجه باید ۷ بار آب را جابه‌جا کرد.

اگر گنجایش دوظرف کوچك‌تر، مقسوم‌علیه مشترکی نداشته باشند و گنجایش ظرف بزرگ‌تر ، مساوی یا بیش‌تر از مجموع گنجایش دوظرف دیگر باشد، می‌توان هرچندلیتر آب را، از ۱ لیتر تاگنجایش ظرف متوسط، جدا کرد. مثلا ، به‌کمك ظرف‌های ۱۵، ۱۶ و ۳۱ لیتری ، می‌توان هرمقدار آب، از ۱ لیتر تا ۱۶لیتر را ، جدا کرد . در حالتی که گنجایش دوظرف کوچك‌تر، مقسوم‌علیه مشترکی داشته باشند، نمی‌توانیم مسئلهٔ مربوط به‌آن را حل‌کنیم.

# نکاتی چند درباره مسأله دیرین و غیرقابل حل «تثلیث زاویه»[1]

دکترمهندس ناصرکنعانی

مسأله «تثلیث زاویه» از جمله مسائل مشهور هندسی و ریاضی می‌باشد که درطی‌قرون‌متمادی فکر واندیشه ریاضی‌دانان‌بزرگ جهان‌را به‌خودمشغول داشته است. درطول بیش‌تر از دوهزار سال راه‌حل‌های گوناگونی از طرف دانشمندان ارائه شده است، بی‌آن‌که تاکنون کسی موفق به‌حل واقعی آن‌شده باشد. باید اذعان داشت‌که مسألهٔ مزبور درواقع حل‌ناشدنی است. حکم این قضیه بسیار ساده وسهل به‌نظر می‌آید زیرا که منظور از «تثلیث زاویه» چیزی جز تقسیم‌یك زاویهٔ دلخواه به سه‌قسمت کاملا مساوی نیست واین امریست که به ظاهر باید به سهولت عملی باشد. لیکن مشکلات موجود و غیرقابل رفع، ناشی ازیك شرط اساسی می‌باشندکه برای حل این مشکل در نظرگرفته شده است وآن این‌که برای تقسیم یك زاویهٔ دلخواه به سه‌قسمت‌کاملا مساوی، باید فقط وفقط ازخط‌کش وپرگار استفاده شود. همین شرط ساده وبه‌ظاهر بی‌آزار

۱: به‌زبان‌آلمانی *Dreiteilung des Winkels* وبه‌زبان انگلیسی *Trisection of an angle* می‌شود.



است که مسألهٔ « تثلیث زاویه » را غیرقابل حل می‌نماید . در این‌جا کوشش می‌شودکه ازبین راه‌حل‌های بی‌شماری که تاکنون ارائه شده‌اند، معروف‌ترین و قدیمی‌ترین آن‌ها مورد بحث قرار گیرد.

اولین کسی‌که موفق به‌ارائهٔ راه‌حلی نبوغ‌آمیز شد، ریاضی‌دان یونانی بنام **نیکومدس**[1] بود که متأسفانه در بارهٔ وی و دوران حیاتش اطلاعاتی در دست نیست. از قرائن موجود برمی‌آید که نام‌برده درحدود سال ۱۸۰ قبل‌از میلاد مسیح دریونان به‌دنیا آمده و درحدود سال ۱۵۰ قبل ازمیلاد برای‌اولین بار موفق به‌حل مشکل «تثلیث زاویه» شد. مطلبی‌که راه‌حل وی را فوق‌العاده جالب می‌نماید، استفاده از یك نوع منحنی ویژه‌ای به نام «منحنی صدفی» یا «کونکوئید»[2] می‌باشد که از کشفیات وی به‌شمار می‌رود. منحنی کونکوئید از جمله منحنی‌هائی‌است‌که درجهٔ آن‌ها از توان دوم نیز بالاتر بوده و دارای معادله‌ای به‌شکل زیر می‌باشند:

$$(x^2+y^2)(x-a)^2=b^2x^2$$

**نیکومدس** نه‌تنها موفق شدکه به کمك منحنی مزبور ، کم یا بیش راه حلی برای مشکل ومعمای «تثلیث زاویه» ارائه دهد، بلکه درعین‌حال از عهدهٔ حل یکی دیگر ازمسائل جاودانی به‌نام «تشدید مکعب»[3] نیز برآمد.

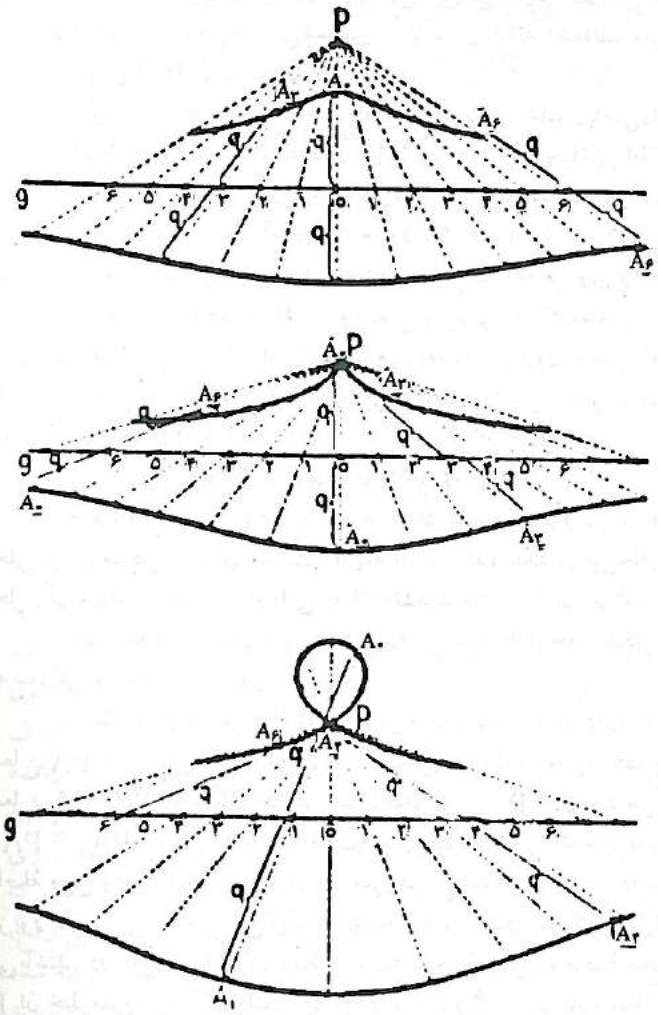
نحوهٔ به‌وجود آمدن چنین منحنی را می‌توان با توجه به‌شکل شمارهٔ ۱ به سادگی و به‌طرز زیر بیان نمود:

در خارج ازخط g نقطهٔ P به‌عنوان محور ثابتی قرار داردکه حول آن شعاع PA به گردش آورده می‌شود. در شکل شمارهٔ ۱ به‌طور نقطه‌چین آثار شعاع PA را که به هنگام گردش حول محور ثابت P به وجود می‌آیند ، با $PA_1$ تا $PA_6$ نمایش داده شده است. حال چنانچه روی اشعهٔ مزبور همواره فاصلهٔ معین وتغییرناپذیر q را ازخط مفروض g جدا سازیم، در دوطرف خط مزبور دو منحنی به‌وجود می‌آیندکه به‌منحنی‌های صدفی یا کونکوئید موسوم می‌باشند. در این‌جا سه‌حالت ممکن است؛ برحسب این‌که فاصلهٔ محور ثابت P از خط مفروض g کوچك‌تر، یا برابر ویا بزرگ‌تر از پاره خط q باشد.

1: *Nikomedes*

2: *Conchoide*

۳: به‌زبان‌آلمانی *Verdopplung des Wuerfels* وبه‌زبان‌انگلیسی *Doubling of a cube* می‌شود.




شکل ۱

یعنی داشته باشیم:

$$q < OP$$
$$q = OP$$
$$q > OP$$

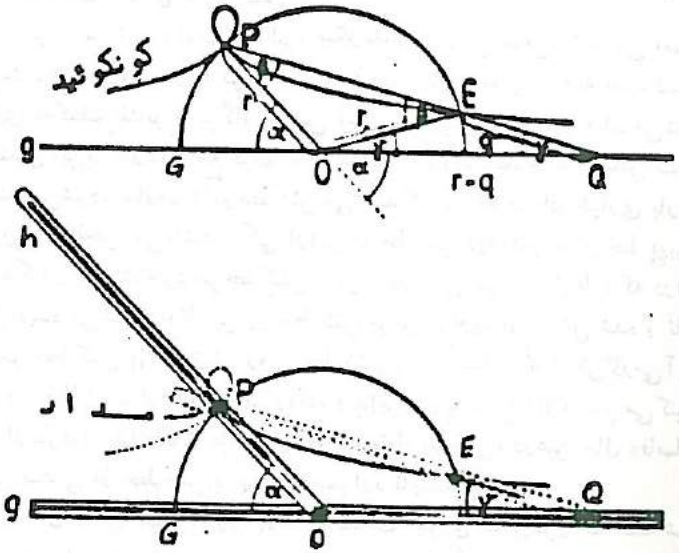
چگونگی وشکل منحنی صدفی، به‌ویژه درقسمت فوقانی، کاملا متفاوت‌خواهد



بود. درشکل شمارهٔ ۱ هرسه‌حالت ترسیم شده است.

**نیکومدس** پس ازکشف منحنی‌های صدفی، با استفاده ازخواص آن‌ها موفق به‌ارائهٔ راه حلی برای مسألهٔ « تثلیث زاویه » گردید، که در زیر سعی می‌شود راه حل مزبور را باتوجه به‌شکل شمارهٔ ۲ معرفی نمود.

فرض‌کنیم زاویهٔ موردنظر $\alpha = COP$ باشدکه‌بایدبه‌سه قسمت متساوی تقسیم گردد. قطب منحنی صدفی‌را درنقطهٔ P اختیار کرده و دایره‌ای به مرکز




شکل ۲

P و شعاع OP رسم می‌کنیم. دایرهٔ مزبور منحنی صدفی را در نقطه E قطع می‌کند. حال چنانچه نقاط P و E را به یکدیگر وصل کرده و نقطهٔ تقاطع امتداد خط حاصل‌را با خط مفروض g، با Q نمایان سازیم، بدیهی است‌که شعاع دایره ( یعنی r ) با فاصلهٔ $EQ = q$ برابر خواهد بود (یعنی خواهیم داشت: $r = q$) و q طبق تعاریف قبلی وبا توجه به‌شکل شمارهٔ ۱ عبارت از « فاصلهٔ » منحنی صدفی از خط مفروض g می‌باشد. به این ترتیب دو مثلث متساوی‌الاضلاع POE و OEQ به وجود می‌آیند و زاویه $\beta = OEP$ که زاویهٔ خارجی مثلث OEQ محسوب می‌شود، دوبرابر زاویهٔ $\gamma$ می‌باشد. حال می‌توان روابط زیررا بیان کرد:

$$\beta = ۲\gamma \qquad (۱)$$

$$2\beta+(180^\circ-\alpha-\gamma)=180^\circ \qquad (2)$$

$$\alpha+\gamma=2\beta \qquad (3)$$

از دومعادله (۱) و (۲) بلافاصله حاصل می‌شود که

$$\alpha=3\gamma$$

به‌عبارت دیگر زاویهٔ $\gamma$ یك‌سوم زاویهٔ $\alpha$ بوده وبدین ترتیب حکم قضیه ثابت شده است. حال می‌توان باکمك پرگار وخط‌کش زاویهٔ $\alpha$ را باتوجه‌به‌مقدار $\gamma$ به سه‌قسمت مساوی تقسیم نمود.

براساس این راه‌حل آنالیز، **نیکومدس** راه‌حل عملی وترسیمی معمای «تثلیث زاویه» را نیزارائه‌کرده است، وآن عبارت ازتقسیم زاویه به‌سه قسمت مساوی به‌کمك یك‌نوع پرگار خاصی است که پرگار صدفی نامیده می‌شود. ساختمان این‌پرگار درواقع فوق‌العاده ساده بوده وهمانطورکه درشکل شمارهٔ ۲دیده می‌شود، عبارت ازدوخط‌کش می‌باشدکه هر یك دارای شیاری باریك در روی بدنهٔ‌خود می‌باشند. یکی ازاین دوخط‌کش درواقع همان خط g‌بوده و درشکاف باریك خود سرخط‌کش دیگررا دربرمی‌گیرد. همان‌طورکه دراین شکل دیده می‌شود، اولا بین دو خط‌کش مزبور زاویه $\alpha$ تشکیل شده و ثانیاً یك سر خط‌کش h در شیار روی خط‌کش g به آسانی به لغزش درمی‌آید. حال در نقطهٔ P نوك مداد را قرارداده و دایره‌ای به‌شعاع OP رسم می‌کنیم. باید ازنظردور نداشت‌که فاصلهٔ OP، طبق تعاریف‌قبلی، درعین حال «فاصلهٔ» منحنی صدفی از خط‌کش g بوده و همواره ثابت می‌باشد.

حال برای تقسیم زاویه $\alpha$ به سه‌قسمت مساوی همان‌طور که گفته شده ابتدا دایره‌ای به شعاع $r=q$ ترسیم کرده و آن‌گاه خط‌کش h را طوری روی خط‌کش g لغزش می‌دهیم تامنحنی صدفی که دراین شکل به‌طور نقطه‌چین رسم شده به‌وجود آید. منحنی مزبور دایره را در نقطهٔ E قطع نموده و نقطهٔ تقاطع امتداد خط PE روی خط‌کش g عبارت از Q می‌باشد. دو پاره خط PQ و QO زاویهٔ $\gamma$ را تشکیل می‌دهند که طبق راه حل تحلیلی قبلی، برابر با یك سوم زاویه $\alpha$ می‌باشد. حال می‌توان با انتقال زاویه $\gamma$ به وسیله پرگار وخط‌کش روی زاویه $\alpha$، این زاویه را به‌سه قسمت متساوی‌تقسیم‌نمود.

همان‌طور که درابتدا گفته‌شد، راه حل مزبور، قدیمی‌ترین و یکی از جالب‌توجه‌ترین‌طرقی است‌که درطی قرون متمادی، دانشمندان وریاضی‌دانان برای حل مسألهٔ «تثلیث زاویه» ابراز نموده‌اند و نمایانگر این واقعیت است که‌بینش ریاضی حتی دردوران حیات **نیکومدس** یعنی قریب دوهزارسال‌پیش مرتبه‌ای والا دارا بوده است.

**برلن ـ تابستان ۱۹۷۸**




منابع:

1. E. Colerus: Von Pythagoras bis Hilbert rororo 1969
2. E. Colerus: Vom Punkt zur vierten Dimension rororo 1969
3. H. Menschkowski: Mathematiker-Lexikon B. I. 1964


## شگفتیهای عدد

$۱۲^۲=۴۴۰$ $\qquad$ $۲۱^۲=۴۴۱$

$۱۳^۲=۱۶۹۰$ $\qquad$ $۳۱^۲=۹۶۱$

$۱۱۳^۲=۱۲۷۶۹۰$ $\qquad$ $۳۱۱^۲=۹۶۷۲۱$

$۱۱۳^۲=۱۲۷۶۹۰$ $\qquad$ $۳۱۱^۲=۹۶۷۲۱$

$۱۲۲^۲=۱۴۸۸۴۰$ $\qquad$ $۳۳۱^۲=۴۸۸۴۱$

$۱۳\times۹۳=۳۱\times۳۹$

$۱۴\times۸۲=۴۱\times۲۸$

$۲۳\times۶۴=۳۲\times۴۶$

$۳۴\times۸۶=۴۳\times۶۸$

# منازعات اولیهٔ تارتاگلیا

**تارتاگلیا** از ریاضیون بزرگ ایتالیاست. در سال ۱۵۱۰ در **برسیا**[1] متولد شده و درسال ۱۵۵۷ دارفانی را بدرود گفته. مثلث حسابی که امروز به‌اسم **پاسکال**[2] معروف است از آثار اوست. یکی از تألیفات عمدهٔ اوکتابی است به‌اسم Orresiti et inventioni diverse که اول دفعه درسال ۱۵۴۶ طبع شده. این کتاب شامل نه قسمت است که هشت قسمت اول آن راجع به جراثقال و فنون نظامی و توپ‌اندازی وغیره می‌باشد. قسمت نهم شامل چهل‌ودو مطلب است که اشخاص مختلف برای او فرستاده و جواب آن‌ها را طلب نموده‌اند. مطلب چهاردهم شامل دو مسئله است که **زوان دوترینی داکوا**[3] ــ که در برسیا معلم حساب بوده ــ درسال ۱۴۳۰ طرح نموده وحل آن را از تارتاگلیا خواسته. فرض مسئله تعیین عددی است که چون به‌مجذورش سه واحد افزوده حاصل را درآن‌عدد ضرب کنیم، عدد ۵ حاصل گردد. ونیز تعیین سه‌عدد چنان‌که فضل دومی بر اولی ۲ و فضل سومی بردومی نیز ۲ و حاصل‌ضربشان

1: Berscia  2: Pascal  3: Zuane de Torrini de Coi



۱۰۰۰ باشد. به‌عبارات معمولهٔ امروزمسئلهٔ اول به‌حل معادلهٔ: $x^3+3x^2=5$، و مسئلهٔ دوم به‌حل معادلهٔ $x^3+x^2+8x=1000$ راجع می‌گردد.

لازم به‌تذکر نیست که درآن موقع معادلات وعلائم اعمال، معمول‌نبوده، بلکه برای‌هریك ازجمل اصطلاحات مخصوص قرار می‌گذاشتند. مثلاتارتاگلیا معادله را Capitoli، مجهول را Cosa، قوهٔ دوم‌آن‌را Censi و قوهٔ سوم آن‌را Cubo می‌خواند وهکذا. مثلا معادلهٔ $x^3+mx^2=n$ را چنین بیان می‌کند:

«Cubo et censi egual a numero»

خلاصه تارتاگلیا درجواب زوان می‌نویسد برای حل مسئلهٔ Cubo et censi egual a numero (یعنی معادلهٔ $x^3+mx^2=n$) قاعدهٔ کلی پیدا کرده ولی به‌علتی از انتشار آن خودداری می‌کند. ولی ازحل مسئلهٔ دوم عاجز است و ضمناً می‌نویسد: «من‌می‌دانم که معلمین برسیا ازشما خوف‌دارند؛ زیرا شما مسائلی برای آن‌ها طرح می‌کنید که خودتان‌هم ازحل آن‌ها عاجزید و شرط می‌کنم که دوسئوال فوق‌الذکر شما هم‌چنین‌اند. این‌رویه باید شما را ازخجلت سرخ کند.»

**مطلب ۲۵:** درمطلب ۲۵ تارتاگلیا می‌نویسد: حل معادلهٔ Cubo et numero egual a censi را فردای آن روزی که به حل معادلهٔ $x^3+mx^2=n$ فایق آمده حل کرده است.

(درجبرامروز دومعادلهٔ فوق تفاوتی ندارند؛ ولی چون درآن‌زمان هنوز اعداد منفی داخل ریاضیات نشده بود، دومعادلهٔ فوق‌را متمایز می‌دانستند.)

**مطلب ۳۱:** در سال ۱۵۳۵ تارتاگلیا شنید که **آنتونیاماریادل فیور** برای تحقیر او و آنچه به وی نسبت می‌دهند، به سمت **ونیز** که در آن موقع تارتاگلیا درآن‌جا معلم ریاضیات بود می‌آید. تارتاگلیا چون می‌دانست که فیورهیچ‌گونه معلومات نظری درریاضیات ندارد، اهمیتی به‌این‌موضوع نداد؛ ولی بعد که شنید **فیور** دستوری برای حل مسئلهٔ: ( $x^3+mx=n$ Cubo et censi egual a numero دردست دارد، قدری بهراسید ودر بحر فکر فرو رفته در ۱۴ و ۱۵ فوریهٔ ۱۵۳۵ راه‌حل‌معادلات $x^3=mx+n$ و $x^3+mx^2=n$ و $x^3+n=mx^2$ را یافت. هشت‌روز بعد فیور به‌ونیز وارد شد و قرار گذاشتند تا هریك، سی‌مسئله طرح کنند و مبلغی‌پول بگذارند. هرکس پس‌از سی تا چهل روز عدهٔ بیش‌تری از آن مسائل را حل کرد، مبلغی که طرف گذاشته ازآن او باشد. سی مسئله راکه فیور طرح نموده، تارتاگلیا در مطلب ۳۱ کتاب مذکور ذکر کرده. و حل تمام آن‌ها به حل معادلهٔ

$x^3+mx=n$ راجع می‌شود و تارتاگلیا درکم‌تر از دو ساعت تمام آن‌ها را حل نمود؛ ولی فیور به‌خل هیچ‌یك از مسائل تارتاگلیا موفق‌نگردید وپول و افتخار هردونصیب تارتاگلیا شد. از سی‌مسئلهٔ تارتاگلیا فقط چهارمسئلهٔ‌اول معلوم است وحل آن‌ها به‌حل معادلات درجهٔ سوم راجع می‌گردد.

دهم دسامبر ۱۵۳۶ زوان برای گرفتن سی‌مسئلهٔ تارتاگلیا، به‌ونیز نزد وی رفت. تارتاگلیا بهوی اظهارداشت‌که فقط صورت چهارمسئلهٔ اول‌را درنظر دارد؛ ولی ازگفتن اجوبهٔ مسائل خودداری خواهد نمود.

صحبت‌آن‌ها به‌طول‌انجامید وچون مقداری ازشب‌گذشته بود، تارتاگلیا به‌زوان تکلیف کردکه شب را نزد وی بماند. زوان اظهار داشت نزد یکی‌از اقوام خود مدعو است. تارتاگلیا در جواب گفت: «پس منتظر باشید مجدداً من میل‌کنم‌که شما نزدم بمانید.»

۱۶ دسامبر مجدداً زوان نزد تارتاگلیا آمد. در فاصلهٔ این دو موقع در یافتن جواب چهار مسئله‌که تارتاگلیا بهوی گفته بود، فکر می‌کرد. چون موفق نشده بود بیش‌ازپیش از تارتاگلیا درخواست‌کرد والتماس نمود؛ ولی تارتاگلیا بهوی اظهار داشت اکتشافاتش برای او خیلی‌گران تمام شده وبرای یافتن حل معادلهٔ درجهٔ سوم رنج زیادی برده وبه‌این‌جهت اظهار نخواهد کرد. به‌علاوه‌خودش خیال دارد پس‌از ختم کتبی‌که مشغول ترجمهٔ آن‌هاست (درآن موقع مشغول ترجمهٔ هندسهٔ اقلیدس بود.)، اکتشافات خود را منتشر سازد. و فقط حاضر است درازای هر مسئله که زوان طرح نموده و او ازعهدهٔ حل آن بر نیامد، یکی از دستورات کلی خود را به وی عطا کند. زوان خوشوقت شد و فوراً دو مسئلهٔ هندسی طرح کرده به تارتاگلیا داد. تارتاگلیا پس از مطالعهٔ صورت دو مسئله گفت: «این مسائل آن‌قدر ساده است که اگر یك ساعت به‌من وقت بدهید، جواب آن‌ها را به‌شما می‌دهم.» ضمناً اظهار داشت:«در این موقع به شما تذکر می‌دهم که سال قبل سه‌مسئله از طرف شما نزد من آوردندکه صورت یکی از آن‌ها چنین بود: سه‌نفر روی‌هم ۲۰ لیور گوشت خریده‌اند. مقدار متوسط مساویست باحاصل ضرب دومقدار دیگر و حاصل ضرب دومقدار کم‌تر۸ است.ــ وموافق معمول‌شما خودتان نیزحل‌آن را نمی‌دانید: زیرا مسئله ممتنع است.» (حل این‌مسئله به حل معادلهٔ درجه چهارم راجع می‌شود). بالاخره در اثر درخواست از تارتاگلیا راجع به مسئله اولی که به‌فیور گفته بود و به حل معادلهٔ $x^3+40x^2=2888$ راجع می‌شد به زوان گفت جوابش از رابطهٔ $x^2=78-\sqrt{308}$ به‌دست می‌آید. زوان پس از مراجعت به (پرسیا) مشغول فکر شد و برای حل معادلات مخصوصه،

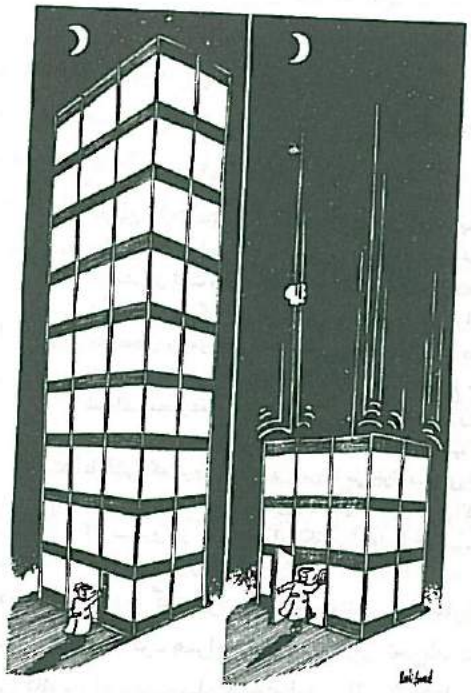


دستوراتی به‌دست آورد، مثلا برای $x^3+8x^2=72$، چنین یافت: $x^2=14+\sqrt{52}$ و برای $x^3+72=8x^2$، چنین: $x^2=14-\sqrt{52}$.

و به مقیاس این دستورات به خیال خود دستوری کلی یافته و در ۸ ژانویه ۱۵۳۷ مراسله‌ای بالحنی شدید وتحقیرآمیز به‌تارتاگلیا نوشت. ولی‌تارتاگلیا جوابی نداد. مجدداً زوان در۱۷ فوریه ۱۵۳۷ مراسله‌ای به تارتاگلیانوشت. تارتاگلیا در جواب اظهار داشت که به‌کلی از جواب دادن به مراسلات او خودداری خواهد نمود و اگرکاری دارد، به‌ونیز آمده او را ملاقات‌کند.

از مجلهٔ ریاضیات شماره‌های ۷، ۸ و ۹

بهمن و اسفند ۱۳۰۹ هجری شمسی



## اختراع تازه

# پروفسوری که نزدیک بود پشت وروشود

**مارتین گاردنر**

**( داستان تخیلی علمی )**

مارتین گاردنر[1]، یکی از مشهورترین چهره‌های آمریکایی است که کارش ساده کردن موضوع‌های علمی و به‌خصوص ریاضی است. او که از نویسندگان ثابت مجلهٔ ماهیانهٔ Scientific American است، با چیره‌دستی شگفتی‌آوری، گوناگون‌ترین موضوع‌های ریاضی را برای خوانندگان غیر متخصص و به‌زبانی ساده و شیرین طرح می‌کند. در شماره‌های گذشتهٔ نشریهٔ «آشتی با ریاضیات»، خوانندگان ما، با بعضی از مقاله‌های گاردنر آشنا شده‌اند. مجموعه‌ای از مقاله‌های این نویسنده هم، زیر عنوان «تفریحات ریاضی»، سال‌ها پیش به‌زبان فارسی ترجمه و چاپ شده است.

داستانی که ترجمهٔ آن را در این‌جا می‌خوانید، برای نخستین‌بار در سال ۱۹۴۶ چاپ شده است. محتوی داستان، شامل بعضی آگاهی‌های علمی است که بسیاری از کالج‌های آمریکایی آن‌ها را در فهرست درسی ریاضی دانش‌جویان قرار داده‌اند.

دولورس، دختری با چهرهٔ گندمگون و اندامی متناسب ـ ستارهٔ «حباب سرخ» کلوپ استریپ تیز شبانهٔ شیکاگو ـ همراه با آهنگ مصری تحریک کننده‌ای که کمی ملایم‌تر از «رقص کلئوپاترا» بود، به‌میان صحنه آمد. سالن کاملاً تاریک بود، تنها نور

1: Martin Gardner



خیره کنندهٔ پروژکتور روی ران‌های عالی دولورس و لباس مصری او، بازی می‌کرد.

آهان، الان باید پارچه‌ای که سر و شانه‌هایش را پوشانده است، بیفتد. دولورس با حرکتی آرام، آن را به‌کف اطاق انداخت، ولی ناگهان از جائی در بالا، صدای تندی، مثل شلیك تپانچه، بلند شد. بدن برهنهٔ مرد تنومندی از طرف سقف به‌روی صحنه افتاد. ضمن سقوط، روپوش را قاپ زد و محکم به‌کف اطاق افتاد.

هرج و مرجی به‌پا شد.

**جك باورس** مدیر، فریاد می‌زد که چراغ را روشن کنند و کوشش می‌کرد مردم را سر جایشان نگه دارد. مدیر هتل، که پهلوی ارکستر بود و رقص را تماشا می‌کرد، رومیزی را از روی میز برداشت و روی بدن مچاله شده انداخت و آن را به‌پشت برگرداند.

مرد، به‌سختی نفس می‌کشید. ظاهراً، به‌خاطر ضربهٔ سقوط از هوش رفته بود. در حدود پنجاه سال داشت. کوتاه قد بود. ریش و سبیلش را از ته تراشیده بود. سرش طاس بود و قیافهٔ کشتی‌گیران حرفه‌ای را داشت.

سه مستخدم، با زحمت زیاد، بدن سنگین و نیمه‌جان مرد را بلند کردند و به‌دفتر مدیر هتل بردند. در سالن، زنان و مردان گیج و تحریك شده، گاهی به‌یکدیگر نگاه می‌کردند و گاهی به‌سقف، و بحث گرمی درگرفته بود که این مرد چه‌گونه و از کجا به‌زمین افتاده است. می‌شد فرض کرد که وقتی سالن کاملاً تاریك بود، کسی او را به‌صحنه پرت کرده است؛ ولی چه کسی؟ چنین چیزی را هیچ‌کس ندیده است.

پلیس را خبر کردند.

در این ضمن، در اطاق مدیر هتل، مرد صدمه دیده به‌هوش آمد. او تأکید کرد که نامش **ستانیسلاوسلاپه نارسکی**، استاد دریاضی دانشگاه ورشو است و برای ایراد یك سخنرانی به‌دانشگاه شیکاگو آمده است.

قبل از آن‌که این داستان عجیب را ادامه بدهم، باید اعتراف کنم که من خود شاهد این ماجراها نبوده‌ام و از زبان مستخدمین و مدیر هتل برای شما حکایت می‌کنم. ولی من در همهٔ سلسلهٔ حوادث پرمعنی که مربوط به‌پدیدهٔ بی‌سابقهٔ استاد در سالن بود، شرکت داشتم.

این ماجراها، از چند ساعتی قبل از آن، آغاز شد. اعضای موبیوس در گردهم‌آیی سالانهٔ خود، در یکی از اطاق‌ها، در طبقهٔ دوم کلوپ «حباب سرخ» جمع شده بودند. انجمن موبیوس عبارت است از گروه کم شهرت و کوچکی از ریاضی‌دانان شیکاگو که در بارهٔ توپولوژی کار می‌کنند، یعنی یکی از جوان‌ترین و

جالب‌ترین شاخه‌های ریاضیات معاصر، که کارش بررسی تبدیل شکل‌های هندسی است. برای این که حادثهٔ این عصر را بهتر بفهمیم، به صورت ساده و کوتاه شده ای، ویژگی موضوع توپولوژی را شرح می‌دهیم.

توپولوژی را، بدون این‌که وارد اصطلاحات اختصاصی بشویم، به سختی می‌توان تعریف کرد. ولی، مثلاً می‌توان گفت که: توپولوژی خاصیت‌هایی از شکل را بررسی می‌کند که با هرگونه تغییر فرم آن، پا برجا باشد.

فرض کنید قطعه‌ای حلقه مانند را از یك لاستیك نرم جدا کرده باشیم. این حلقه را می‌توانیم به هر اندازه که بخواهیم بپیچانیم و یا در هر جهتی که می خواهیم بکشیم. هر قدر که تغییر شکل (یـا آن طور که ریاضی‌دانـان ترجیـح می‌دهنـد: «ترانسفورماسیون») سطح این حلقه زیاد باشد، باز هم بعضی از ویژگی‌های شکل آن بی تغییر می‌ماند. مثلاً، همیشه سوراخ آن حفظ می‌شود. جسمی را که به صورت حلقه باشد، در توپولوژی «چنبره» یا «تور» می‌نامند. یك تکه از ساقهٔ تو خالی گندم را هم می‌توان همچون چنبره‌ای در نظر گرفت که در امتداد محور مرکزی آن، کشیده شده باشد. بنابراین از دیدگاه توپولوژی، حلقه و ساقهٔ گندم، دو شکل یکسان هستند.

توپولوژی، مطلقاً به رابطه‌های کمیتی، کاری ندارد. برای توپولوژی، تنها آن ویژگی‌های اساسی سطح، اهمیت دارد، که با هر گونه تغییر شکل سطح جسم ـ به جز جدا کردن قطعه‌ها و دوباره به هم چسباندن آن‌ها ـ محفوظ بمانند. اگر جسم را تکه تکه کنیم و پاره‌های آن را دوباره و به نحو دیگری به هم بچسبانیم، جسم کاملاً متفاوتی به دست می‌آید که همه ویژگی‌های توپولوژی نخستین خود را از دست داده است. به این ترتیب موضوع توپولوژی عبارت است از مطالعهٔ اساسی‌ترین خاصیت‌های ریاضی جسم حقیقی.

به عنوان نمونه، یکی از مسئله‌های توپولوژی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چنبره‌ای را در نظر بگیرید که از لاستیك نازکی درست شده و به صورت لولهٔ بسته‌ای در آمده باشد. همچنین فرض کنید که در سطح چنبره، سوراخ نه چندان بزرگی وجود داشته باشد. آیا می‌توان چنبره را از درون این سوراخ پشت‌ورو کرد، همان‌طور که مثلاً می‌توانیم یك بادکنك کره‌ای را پشت‌ورو کنیم؟ حل این مسئله در ذهن، خیلی ساده نیست.

گر چه حتی در سدهٔ هیجدهم هم، بسیاری از ریاضی‌دانان مسئله‌های پراکنده‌ای از توپولوژی را بررسی کرده بودند، یکی از نخستین کسانی که به طور منظم به این شاخهٔ ریاضیات پرداخت، اوگوست فردیناندموبیوس، هندسه‌دان آلمانی و



استاد دانشگاه لایپزیك در نیمه اول سدهٔ گذشته بود. تا قبل از موبیوس، همه می‌پنداشتند که هر سطحی، مثلاً یك صفحهٔ کاغذ، باید دارای دورویه باشد. ولی موبیوس، کشف عجیبی کرد؛ او ثابت کرد که اگر نواری از کاغذ را دور محور طولی آن، نیم دور بپیچانیم و سپس دو انتهای آن را به هم وصل کنیم، می‌توان یك سطح «یك‌رویه» به دست آورد. سطحی که تنها دارای یك طرف است.

اگر شما تنبلی نکنید و این شکل را بسازید (در توپولوژی به آن «نوار موبیوس» یا «صفحهٔ موبیوس» می‌گویند) و با دقت آن را مطالعه کنید، خیلی زود متوجه می‌شوید که در چنین سطحی تنها یك رویهٔ بسته و تنها یك کنارهٔ بسته وجود دارد.[1]

در ابتدا، حتی به سختی می‌توان تصور کرد که چنین شکلی می‌تواند وجود داشته باشد؛ ولی این شکل وجود دارد و خیلی ساده می‌توان آن را به‌دست آورد. ویژگی یك رویه بودن این شکل، انکارناپذیر است، ویژگی‌ای که با کشیدن و یا پیچاندن آن، از بین نمی‌رود.

حالا به سرگذشت خود بر گردیم. برای من باعث افتخار است که به عنوان معلم ریاضی دانشگاه شیکاگو، که ازتزهای توپولوژی دفاع می‌کنم، بدون هیچ زحمتی به عضویت انجمن موبیوس پذیرفته شده‌ام. تعداد عضوهای این انجمن زیاد نیست: رویهم ۲۶ نفر، که بیش‌تر آن‌ها از متخصصین توپولوژی دانشگاه شیکاگو انتخاب شده‌اند و در بین آن‌ها، نمایندگانی از دانشگاه‌های شهرهای مجاور هم وجود دارد.

ما به‌طور منظم ماهی یك‌بار جمع می‌شویم و جلسه‌های ما، اساساً جنبهٔ آکادمیك دارد، با وجود این، سالی یك‌بار در ۱۷ نوامبر (روز تولد موبیوس)، یك سمپوزیوم تشکیل می‌دهیم و در آن، به‌عنوان مهمان و سخنران افتخاری، از یك متخصص مشهور توپولوژی هم دعوت می‌کنیم.

در سمپوزیوم‌ها ضمناً به کارهایی هم که کم‌تر جدی است و جنبهٔ سرگرم کننده دارد، می‌پردازیم. ولی امسال پولمان کم بود و به‌همین مناسبت تصمیم گرفتیم جشن

۱: نوار موبیوس، خاصیت‌های عجیب زیادی دارد. مثلاً اگر آن را روی خط وسط نوار ببریم، آن‌طور که انتظار می‌رود، به دو نوار تبدیل نمی‌شود، بلکه نوار بزرگ‌تری به دست می‌آید. ولی، اگر آن را در فاصلهٔ یك‌سوم از کناره ببریم و بریدن را دو دور ادامه دهیم دو نوار به‌دست می‌آید که به‌هم حلقه شده‌اند و یکی بزرگ‌تر و دیگری کوچك‌تر است. اگر نوار کوچك‌تر را از وسط ببریم، باز هم یك نوار بزرگ‌تر به‌دست می‌آید که همچنان به نوار بزرگ قبلی حلقه شده است. جالب این است که شعبده‌بازهایی که از قدیم روی نوار کار می‌کرده‌اند و کارهایشان با نام «نوارهای افغانی» مشهور است، هیچ‌کدام از این خاصیت‌های نوار موبیوس استفاده نمی‌کرده‌اند.

سالانهٔ خود را در کلوپ «حباب سرخ» برگزار کنیم، که هم ناهارش خیلی گران نیست و هم برای سرگرمی بعد از ناهار می‌شود از برنامه واریتهٔ آن استفاده کرد. در این سمپوزیوم، از سلاپه نارسکی، مشهورترین متخصص توپولوژی در جهان و یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان سدهٔ اخیر دعوت کرده بودیم.

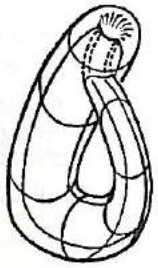
دکتر سلاپه نارسکی چند هفته‌ای در شهر ماند و چند سخنرانی در زمینهٔ «نظریهٔ فضای آینشتین» از دیدگاه توپولوژی در دانشگاه شیکاگو ایراد کرد. برخوردی که در دانشگاه با او داشتم ما را به دو دوست واقعی تبدیل کرد و من ماموریت پیدا کردم که او را به ناهار دعوت کنم.

ما با تاکسی به «حباب سرخ» آمدیم. در بین راه از او پرسیدم که خیال دارد دربارهٔ چه موضوعی صحبت کند. ولی او در پاسخ من، تنها لبخند اسرارآمیزی زد و بالهجهٔ غلیظ لهستانی گفت که انتظار من خیلی طول نمی‌کشد. موضوع سخنرانی او ـ «سطحی که رویه ندارد» ـ علاقه عضوهای انجمن را چنان جلب کرد که دکتر روبرت سیمپسون از دانشگاه ویسکانسین، ضمن قبول دعوت، نوشته بود که این نخستین دانشمندی است که او به دیدنش می‌آید[1].

دکتر سیمپسون، یکی از مشهورترین متخصصان توپولوژی در غرب میانه بود و آثار مهمی در زمینهٔ توپولوژی و فیزیک هسته‌ای دارد که در آن‌ها با تعدادی از نظریه‌های اساسی سلاپه نارسکی، مخالفت قطعی کرده است.

استاد لهستانی و من، با تاخیر زیادی رسیدیم. بعد از تشریفات کوتاه آشنائی پشت میز نشستیم و من توجه سلاپه نارسکی را به‌روشی که در سفره چینی داشتیم و اشاره‌ای به‌توپولوژی بود، جلب کردم. مثلاً، حلقه‌هائی که به‌رومیزی‌ها وصل بود، نوارهای نقره‌ای موبیوس بودند. همراه باقهوه، نان شیرینی می‌دادند که به‌شکل چنبره بود و فنجان‌های قهوه را هم بنا به‌سفارش ما به‌شکل بطری کلین ساخته بودند[2].

۱: دکتر سیمپسون بعدها به‌من گفت که او به‌این خاطر به‌ضیافت نیامده بود که سخنرانی سلاپه نارسکی را بشنود، بلکه علت اصلی تصمیم او این بود که می‌خواست نمایش دولورس را تماشا کند.

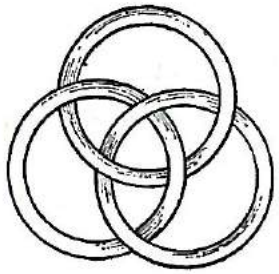


۲: بطری کلین، که به‌افتخار فلیکس کلین، ریاضی‌دان آلمانی، نامگذاری شده است، سطح کاملاً بسته‌ای دارد؛ با وجود این، برای آن نمی‌توان رویهٔ داخلی یا خارجی معلوم کرد. این شکل هم، مثل نوار موبیوس، دارای یك رویه است، ولی برخلاف آن، هیچ کناره‌ای ندارد. می‌توان مقطعی از آن را به‌دست آورد که هر نیمهٔ آن یك نوار موبیوس تشکیل دهد. مایع را در بطری کلین می‌توان ریخت، بدون این که هیچ اتفاقی برای مایع بیفتد.

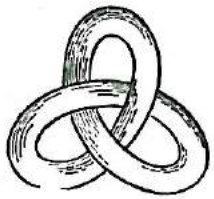
بعد از غذا آبجو «بالانتاین» دادند، زیرا علامت تجاری جالبی[1] روی آن بود و بعد بیسکویت‌هایی که به‌شکل دو گره «سه‌گانه» بودند[2]. سلاپه نارسکی چنان مفتون این ابتکارها شد که خودش پیشنهادهای جالب دیگری در بارهٔ شکل میزها و دیگر چیزها کرد. ولی پیشنهادهای او، از نظر توپولوژی، پیچیده‌تر از آن بود که بشود دراین‌جادر بارهٔ آن‌ها گفت‌وگو کرد.

بعد از نطق افتتاحیهٔ کوتاه من، سلاپه نارسکی به‌پاخاست، به‌کف زدن‌های تهنیت‌آمیز، با لبخند پاسخ داد و سینه‌اش را صاف کرد. در یك چشم به‌هم زدن، سکوت تمامی سالن را فراگرفت. خوانندهٔ ما، با چهرهٔ استاد ما آشناست. قیافه‌ای جدی و استوار، صورتی تراشیده و سری طاس و براق. چهرهٔ او گواهی می‌داد که می‌خواهد ما را باپدیده‌ای بسیار مهم آشنا کند.

زبان من از بیان کامل هنرنمائی سلاپه نارسکی که بسیار درخشان، ولی، تنها برای متخصصان قابل فهم بود، عاجز است. باوجود این، سعی می‌کنم ماجرا را شرح دهم. او گفت که ده سال پیش، یکی از دشواری‌های بیان موبیوس ـ که کم‌تر هم شهرت پیدا کرده است ـ مرا به‌خود مشغول کرد. دشواری مربوط به‌این بود که



۱: علامت تجاری آبجو «والانتاین» از سه حلقهٔ داخل هم درست شده است که از نظر توپولوژی بسیار جالب است. باوجودی که سه حلقه، به‌هم وصل شده‌اند، هیچ دو حلقه‌ای به‌هم وصل نیست. به‌زبان دیگر، اگر یکی از حلقه‌ها را جدا کنیم، دو حلقهٔ دیگر به‌طور آزاد باقی می‌مانند! ولی هر سه حلقه را نمی‌توان یکباره از هم جدا کرد.



۲: گره سه‌گانه، ساده‌ترین گرهی است که یك منحنی بسته می‌تواند تشکیل بدهد. دو شکل مختلف از این نوع گره وجود دارد که شباهت آنها به‌هم، مثل شباهت یك جسم با تصویر آن در آینه است. با وجودی که دو شکل مختلف این گره از نظر توپولوژی، یکی است! نمی‌توان بدون پاره کردن، آن‌ها را به‌یکدیگر تبدیل کرد. خاصیت‌های عجیبی که گره‌ها دارند، متخصصان توپولوژی را به‌هیجان می‌آورد. بررسی گره‌ها، یکی از بخش‌های اساسی توپولوژی را تشکیل می‌دهد، ولی هنوز حتی ساده‌ترین گره‌ها هم، مورد بررسی کافی قرار نگرفته‌اند.

نمی‌توان به‌طور نظری با این حکم مخالفت کرد که سطح، نه تنها می‌تواند یکی از رویه‌های خود را از دست بدهد، بلکه هر دو رویهٔ آن را هم می‌توان حذف کرد. به‌زبان دیگر، از لحاظ نظری، وجود «سطح صفر» یا «سطح بدون رویه» امکان دارد.

استاد ادامه داد: طبیعی است که تصور چنین سطحی بسیار دشوار است ولی مگر تصور جذر عدد منفی و یا وجود «فوق مکعب» در فضای چهار بعدی، آسان است؟ مدت‌هاست این حکم را پذیرفته‌ایم که عدم درك محسوس و قابل تصور نبودن یك چیز، نمی‌تواند به‌معنای نفی آن باشد و یا از ارزش کاربرد آن، در ریاضیات و فیزیك معاصر بکاهد.

او اضافه کرد: باید به‌یادداشت که حتی سطح یك رویه هم، برای کسانی که آن را ندیده‌اند و نوار موبیوس را در اختیار ندارند، قابل فهم نیست. کم نیستند کسانی که با وجود داشتن تصور ریاضی خوب، حتی وقتی که نوار موبیوس را در اختیار دارند، استعداد باور کردن وجود آن را ندارند.

وقتی که به دکتر سیمپسون نگاه کردم، متوجه شدم که لبخند تردید آمیزی بر گوشهٔ لب‌هایش ظاهر شده است.

ولی سلاپه نارسکی ادامه داد: سال‌های زیادی است که من به طور خستگی ناپذیر در جست‌وجوی سطحی هستم که رویه نداشته باشد و از این راه به سطح‌های مشابهی از این نوع برخورده‌ام که می‌توان بسیاری از ویژگی‌های آن‌ها را بررسی کرد، در این جا او سخنش را قطع کرد تا خود را برای بیان جالب‌ترین قسمت نظریه‌اش آماده کند، چشمان درخشانش را مستقیماً به صورت شنوندگان دوخت و گفت: «من موفق شده‌ام سطحی را بسازم که هیچ رویه‌ای نداشته باشد.»

حرف او چنان عجیب بود که همچون ضربهٔ برق گرفتگی، همهٔ حاضران را تکان داد. همه به خود لرزیدند، در صندلی خود جا به جا شدند و با شگفتی به یکدیگر نگاه کردند. من می‌دیدم که سیمپسون از روی نا باوری سرش را تکان می‌دهد. وقتی که سخنران به گوشه‌ای از اطاق رفت، که تخته سیاه در آنجا آویزان بود، سیمپسون به طرف همسایهٔ طرف چپ خود خم شد و خیلی یواش گفت: «چرندترین چیزی است که تا کنون شنیده‌ام. این مرد یا دیوانه است و یا ما را دست انداخته است».

من خیال می‌کنم که دیگران هم گمان می‌کردند که این یك شعبده بازی است و وقتی که استاد، گچ را به سرعت روی تخته به حرکت در آورد و طرح پیچیده ای رسم کرد، همهٔ حاضران لبخند زدند.

بعد از توضیح کوتاهی که در بارهٔ طرح خودش داد، ( که خیلی بالاتر از میزان



درك من بود)، پروفسور گفت که بر اساس آگاهی‌هایی که دارد، توانسته است یکی از ساده‌ترین نمونهٔ سطح‌هایی را که رویه ندارد، بسازد، حالا دیگر همه به هم نگاه می‌کردند و خندهٔ خود را پنهان نمی‌کردند. سیمپسون نمی‌خندید، او پوزخند می‌زد. سلاپه نارسکی از جیبش یك نوار کاغذی به رنگ آبی کم رنگ، یك قیچی کوچك و یك لولهٔ چسب، بیرون آورد. سپس از کاغذ، شکلی در آورد که به نظر من خیلی شبیه به یك آدمك کاغذی بود. این شکل، پنج زائده داشت که می‌شد یکی را به جای سروچهارتای دیگر را به جای دست‌ها و پاها قبول کرد. او مقداری چسب روی آن ریخت و با دقت شکل را به هم وصل کرد. نوارهای کاغذ، به عجیب‌ترین شکلی روی هم قرار می‌گرفتند، تا جایی که آخرسر، به جز دو انتهای آزاد، چیزی دیگری باقی نماند. دکتر سلاپه نارسکی، یك قطره چسب روی یکی از این دو انتها قرار داد.او، همان‌طور که ساختمان آبی شکل بغرنج خود را به ما نشان می‌داد و برای این که همهٔ ما به خوبی ببینیم، آن را به این طرف و آن طرف می‌چرخاند، گفت:

ـ آقایان، شما الان شاهد نخستین نمایش عمومی از سطح سلاپه نارسکی هستید

این را گفت و یکی از دو انتهای آزاد را به دیگری فشار داد. صدای شدیدی بلند شد،درست مثل اینکه لامپ چراغی بترکد ـ و ساختمان کاغذی در دست‌های او ناپدید شد.

در یك لحظه، همه از تعجب خاموش شدند، سپس با صدای بلند و همصدا خندیدند و دوباره شروع به کف‌زدن کردند.

طبیعی است که همگی اعتقاد داشتند که ناظر شعبده بازی پیچیده ای بوده اند که خیلی عالی تنظیم شده بود. من هم مثل دیگران، تصور کردم که این یك تردستی حیله گرانهٔ شیمیایی با کاغذ بود. ظاهراً، او طوری عمل کرد که کاغذ در اثر اصطکاك یا چیز دیگری، در یك لحظه منفجر شد و چیزی هم از آن باقی نماند.

ولی متوجه شدم که خندهٔ ما، پروفسور را ناراحت کرد و چهرهٔ او به شدت سرخ شد. او که دست و پای خود را گم کرده بود، لبخندی زد و نشست. دست‌زدن حاضران، کم‌کم خاموش شد.

همه، حالت شوخی و خوشمزگی پیدا کرده بودند. ما دور پروفسور جمع شدیم و با همهمه و سروصدا، به خاطر این کشف عجیب، به او تبریك گفتیم. سپس مدیر یادآوری کرد که در پایین، میزی برای ما آماده کرده‌اند و هر کس مایل باشد، می‌تواند به سالن برود، چیزی بنوشد و برنامه را تماشا کند.

اطاق به تدریج خالی شد و تنها سلاپه نارسکی، سیمپسون و من، باقی ماندیم. دو متخصص مشهور توپولوژی، رو به روی هم، نزدیك تخته سیاه ایستادند. سیمپسون، همانطور که لبخندی بر لب داشت، یکی از طرح‌ها را نشان داد و گفت:

ـ دکتر، اشتباهی که در استدلال‌های شما بود، آن‌قدر خوب مخفی شده بود که من فکر نمی‌کنم که هیچ کدام از حاضران توانسته باشند متوجه آن بشوند.

ریاضی‌دان لهستانی، این تعریف را قبول نکرد و با هیجان اعتراض کرد:

ـ من اشتباهی نکرده‌ام.

سیمپسون گفت:

ـ آرام باشید دکتر، ولی، دراین‌جا اشتباه کردید ـ او با انگشت کوچك خود، گوشهٔ طرح را نشان داد ـ این خط‌ها، به سادگی نمی‌توانند در این گره، یکدیگر را قطع کنند. برخورد باید در جائی مثل این جا باشد. ـ او با دستش طرف راست را نشان داد.

چهره سلاپه نارسکی دوباره قرمز شد و با صدای بلند تکرار کرد:

ـ من می‌گویم که در این‌جا هیچ اشتباهی وجود ندارد.

و بعد، آرام، با دقت و شمرده شمرده، دوباره اثبات خود را تکرار کرد و با هر تاکیدی که می‌کرد، ضربه‌ای هم به تختهٔ سیاه می‌زد.

سیمپسون با افسردگی گوش می‌کرد و بالاخره حرف او را با اعتراض خود قطع کرد. ولی، فوری به او پاسخ داده شد. سیمپسون تقریباً بلافاصله، دوباره اعتراض کرد. دوباره پاسخ داده شد. من ساکت، کنار آن‌ها ایستاده بودم. بحث آن‌ها در حدی نبود که برای من قابل فهم باشد.

هر دو، صدای خود را بلند کرده بودند، من پیش از این هم گفتم که سیمپسون از مدت‌ها پیش، در زمینهٔ اصلی موضوع‌های توپولوژی، با سلاپه نارسکی موافق نبود و حالا، در بحثی که بین آن‌ها در گرفته بود، هر کدام استدلال خودش را می‌کرد. سیمپسون تقریباً نعره می‌زد:

ـ من می‌گویم که این تبدیل نمی‌تواند پیوسته باشد و در نتیجهٔ، این عنصرها را نمی‌شود همانندیسه به حساب آورد[1]

رگ‌های گردن ریاضی‌دان لهستانی بالا آمد و در پاسخ فریاد کشید:

---

۱: در توپولوژی، دو شکل را وقتی همانندیسه گویند که بتوان بدون پاره کردن، یکی را به دیگری تبدیل کرد. مثلاً، دایره با مربع همانندیسه است، زیرا، بدون این که بسته بودن این شکل‌ها را پاره کنیم، می‌توان یکی را به دیگری تبدیل کرد.



ـ شما که دیدید، این مطلب قابل آزمایش است، چرا چیزی را که من ساختم در نظر نمی‌گیرید؟

و سیمپسون پاسخ داد:

ـ این، یك شعبده‌بازی پیش پا افتاده بود. من اصلاً به آنچه که شما انجام دادید اهمیتی نمی‌دهم. کاغذ به این علت از بین نرفت که مادیت خود را از دست داد.

سلاپه نارسکی، خیلی آهسته و کشدار گفت:

ـ خوب، پس این‌طور!

و پیش از آن که من بتوانم مداخله کنم، با دست سنگین خودش به شدت به دهان دکتر سیمپسون کوبید. استاد ویسکانسین، ناله‌ای کشید و به زمین افتاد. سلاپه نارسکی برگشت وبا عصبانیت زیادی به من نگاه کرد و گفت:

ـ برو بیرون بچه!

او دست کم صد پوند از من سنگین‌تر بود و من صلاح دیدم که عقب‌نشینی کنم.

من با وحشت، به آنچه که پیش آمده بود نگاه می‌کردم. سلاپه نارسکی روی زانوهایش در نزدیکی مردی که روی زمین افتاده بود، نشست و با حرکت تندی، دست‌ها و پاهای او را با گرهی افسانه‌ای به هم بست. او، استاد توپولوژی ویسکانسین را، درست مثل همان تکه کاغذ، تاکرد ناگهان صدای انفجار ضعیفی بلند شد، شبیه صدای اگزوز اتوموبیل، و زیر دست‌های ریاضی‌دان لهستانی، تنها کپه‌ای از لباس‌های دکتر سیمپسون باقی ماند.

سیمپسون به سطحی از مرتبهٔ صفر، یعنی سطحی بدون رویه، تبدیل شده بود. سلاپه نارسکی ایستاد، نفس عمیقی کشید و کت پشمی، جلیقه، پیراهن و لباس‌های زیر را در دست‌هایش فشرد ، همهٔ این‌ها پشت‌ورو شده بودند. او به آرامی دست‌هایش را باز کرد و لباس‌ها از روی سینه‌اش به کف اطاق ریخت. دانه‌های درشت عرق، روی صورتش جاری بود. او چیزی به لهستانی زیر لب گفت و مشت‌های گره کرده‌اش را در هوا تکان داد.

من با صدای ضعیفی پرسیدم:

ـ او ممکن است....یعنی می‌شود او را برگرداند؟

و سلاپه نارسکی گفت:

ـ نمی‌دانم، نمی‌دانم، من تازه شروع کرده‌ام. من نمی‌توانم تصور کنم که او در این لحظه کجاست. البته، او در یکی از فضاهای چند بعدی است، ولی خدا می‌داند در کدام فضا!

آن وقت آستین کت مرا گرفت و چنان به سختی کشید که نزدیك بود پل دندانم بیفتد.

ـ من باید پیش او بروم.ـ او فریاد زد ـ این تنها راهی است که من می‌توانم آنچه از دستم برمی‌آید انجام دهم.

کف اطاق دراز کشید و با حرکت‌های تندی، دست‌ها و پاهای خود را تا کرد و روی هم گذاشت و در همان‌حال با صدای بلند گفت:

ـ احمق آن جا نایست! بیا این‌جا به من کمك کن!

من به صورت پل زانو زدم و به او کمك کردم تا دست راستش را زیر پای چپش قرار دهم و سر او را طوری خم کردم که بتواند گوش راست خود را بگیرد. همین کار را هم، می‌بایست با دست چپ او بکنم. «از بالا، نه از پایین» ـ او فریاد می‌زد.ـ با زحمت بسیار توانستم دست او را خم کنم که او بتواند دماغ خود را بگیرد.

دوباره صدای انفجار بلند شد، خیلی قوی‌تر از صدایی که در باره نامرئی شدن سیمپسون، شنیده بودم. باد تند خنکی به صورتم خورد.وقتی که چشم‌هایم را باز کردم در کف اطاق، تنها توده‌ای از لباس‌های مچاله شده را دیدم.

وقتی که من سراسیمه و هیجان‌زده به دو کوپهٔ لباس نگاه می‌کردم، پشت سر من، کسی به تندی نفس می‌کشید. من برگشتم و سیمپسون را کنار دیوار دیدم کاملاً برهنه بود، می‌لرزید و رنگش مثل گچ سفید شده بود. بعد پاهایش سست شد و به زمین افتاد. روی دست‌ها و پاهایش، آن‌جاهاکه آن‌ها را چند دقیقه پیش رویهم گذاشته بودند، لکه‌های قرمز دیده می‌شد.

من خودم را به طرف در انداختم، آن را باز کردم و به پایین دویدم.

بعد از این همه ماجراهای عجیب و غریب که دیده بودم، احساس می‌کردم که باید چیزی بنوشم. ولی، سالن آشفته بود.ـ دقیقه‌ای پیش، حادثهٔ سلاپه نارسکی در صحنه اتفاق افتاده بود.

در دفتر مدیر هتل، سایر عضوهای انجمن موبیوس و تعدادی از کارمندان «حباب سرخ» جمع شده بودند و با حرف‌های بی‌ربط خود شلوغ می‌کردند. سلاپه نارسکی روی صندلی نشسته بود، رومیزی را به خودش پیچیده بود و دستمالی که یخ‌های مکعبی در آن بود، زیر چانه‌اش گرفته بود. من گفتم:

ـ سیمپسون برگشت. او بی‌هوش است، ولی گمان می‌کنم که اشکالی در کار نباشد.

سلاپه نارسکی زمزمه کرد:



ـ خدا را شکر.

کارمندان و صاحب «حباب سرخ» نمی‌توانستند از آنچه که پیش آمده است، سر درآورند و توضیح‌های ما هم، فقط کار را خراب‌تر کرد. ورود پلیس هم، آشفتگی را بیش‌تر کرد.

بالاخره، هردو استاد را پوشاندیم، سوگند خوردیم که روز بعد با وکیل‌هایمان برگردیم و به سرعت حرکت کردیم. مدیر هتل مطمئن بود که قربانی توطئه وحشتناکی شده است و تهدید کرد که علیه ما، به خاطر لطمه‌ای که به «حسن شهرت» کلوپ وارد کرده‌ایم، ادعای خسارت خواهد کرد. با وجود این، همان‌طور که پیش بینی می‌شد، شایعهٔ مربوط به ماجراهای آن شب، به صورت تبلیغ بسیار با ارزشی برای کلوپ درآمد. طبیعی است که روزنامه‌ها هم چیزهایی در این باره شنیدند، ولی اهمیتی به آن ندادند و تصور کردند که همهٔ این‌ها به خاطر تبلیغ برای «حباب سرخ» است.

به سلامتی سیمپسون، لطمه‌ای نخورده بود، ولی سلاپه نارسکی از شکستگی چانه‌اش رنج می‌برد. من او را به بیمارستان بلینگا، در نزدیکی دانشگاه، بردم و عصر فردای آن، ماجرای خود را برای من شرح داد. آن طور که او تصورمی‌کرد،سیمپسون به بعد بالائی از فضا (و احتمالاً بعد پنجم) رفته بود: ولی وقتی که به خود آمده است و دست وپای خود را باز کرده است، دوباره مثل هر چنبرهٔ سه بعدی، سطح بیرونی و درونی خود را باز یافته است. ولی، شانس سلاپه نارسکی کم‌تر بوده است. او وارد یك سراشیبی شده است. هیچ چیز دیده نمی‌شد، همه جا ظلمت محض بود و به نظرش می‌رسید که دارد از تپه‌ای به زیر می‌غلتد.

او سعی کرده بود، دماغش را با مشتش نگه دارد، ولی موفق نشده بود. دست راست او، قبل از آن که به عمق سقوط کند، می‌لغزد. او باز می‌شود و دوباره به فضای سه بعدی می‌افتد، و این همان وقتی است که رقص دولورس راخراب می‌کند.

سلاپه نارسکی، سرگذشت خودش را،به این ترتیب برای من شرح داد.

او چند هفته‌ای در بیمارستان بود و تا روز مرخصی از پذیرفتن هر کسی سر باز زد. روز مرخصی، من با او بودم و او را به ایستگاه بردم. او در قطار نیویورك نشست و من دیگر هر گز او را ندیدم.

چند ماه بعد، او در ورشو دچار سکته شد و از جهان رفت. و حالا دکتر سیمپسون با بیوهٔ او مکاتبه دارد و کوشش می‌کند مقاله‌هایی را که سلاپه نارسکی در بارهٔ فضاهای بدون رویه نوشته است. به دست آورد.

آیا ممکن است که متخصصان توپولوژی امریکا، بتوانند از این نوشته‌ها استفاده

Reconciliation with Mathematics
*Editor : Parviz Shahryari*
*Under the supervision of the editorial board*
*A supplementary publication of the Free University of Iran*
*Address : The Free University of Iran*
P. O. Box 11–1962
*Aban Shomali St. Karim-Khan Zand Boulevard*
*Tehran – 15 Iran*

Vol. II, No. 3, 1978

Contents

1 - A criticism of Iranian mathematics books.
2 - Mathematics and music.
3 - History of a relation.
4 - Geometry of means.
5 - Nature and helical structures.
6 - Billiards and mathematics.
7 - A professor who was almost reversed!!!
8 - Trichotomy of angles.

کنند (اگر بتوانند آن‌ها را به دست آورند)، آینده نشان خواهد داد. ما هم، هر چه با نوارهای کاغذ ور رفتیم، جز سطح‌های معمولی دو رویه و یك رویه، چیز دیگری دستگیرمان نشد. باوجودی که من به سلاپه نارسکی کمك کرده بودم تا او را به شکل لازم پیچ بدهم، چیز جالبی به خاطرم نمانده است.

ولی هرگز چیزی که متخصص بزرگ توپولوژی، در آن عصری که در راه بیمارستان بودیم به من گفت، فراموش نمی‌کنم. او گفت:

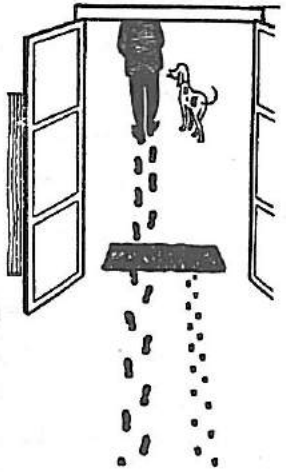
ـ چه شانس آوردیم، هم من و هم سیمپسون که من دست چپ را روی دست راست قرار دادم.

و من پرسیدم.

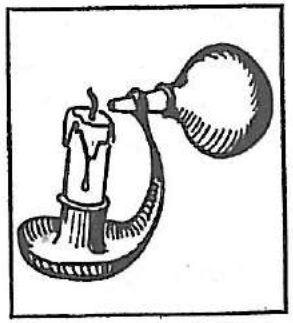
ـ اگر این طور نبود، چه پیش می‌آمد سلاپه نارسکی که به خود می‌لرزید گفت:

ـ در آن صورت، هر دوی ما، پشت و رو می‌شدیم.

ترجمهٔ پرویز شهریاری



تربیت



انرژی جدید