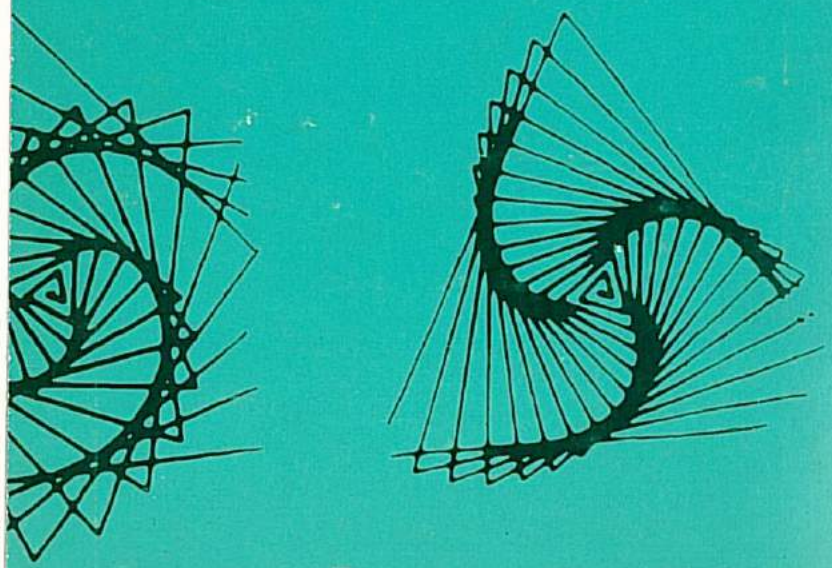
دانشگاه آزاد ایران

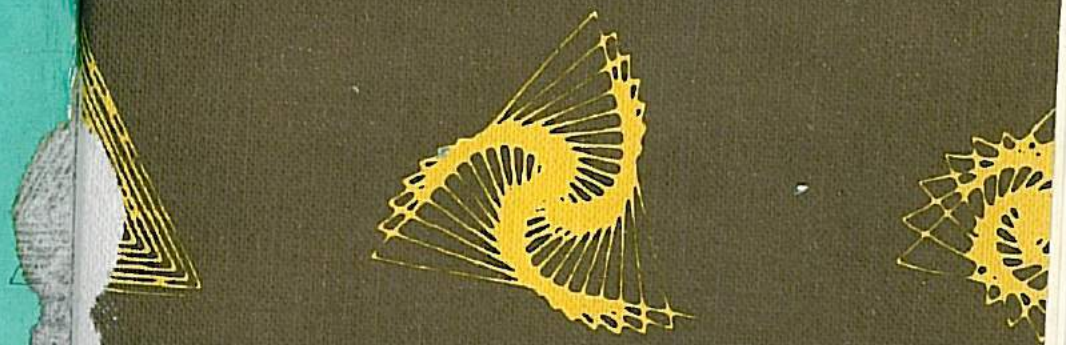
آشتی با ریاضیات

۲

خرداد و تیر ۲۵۳۷



Reconciliation with Mathematics



آشتی با ریاضیات

سردبیر: پرویز شهریاری
مدیر داخلی: محمد حسین احمدی
زیر نظر هیئت تحریریه
از انتشارات جانبی دانشگاه آزاد ایران
چاپ وصحافی: مرکز تولید انتشارات دانشگاه آزاد ایران
نشانی: تهران - خیابان کریم‌خان‌زند - اول آبان‌شمالی - دانشگاه آزادایران

سال دوم - شمارهٔ ۲ (۶)

فهرست مطالب

۵۰ ریال

ریاضیات در زیست‌شناسی[1]

ادوارد مور

زیست‌شناسها از دستگاه‌ریاضی استفاده‌می کنند، مگروقتی که دستگاههای پیچیده‌ای که مورد بررسی آنهاست، دربرابر تـوضیح ریاضی مقاومت کند. ازلحاظ نظری، حتی تحلیل مکانیزم تولید خود به‌خودی‌هم می‌تواند درآینده منجر به‌چنین توضیحی بشود.

دکارت، موجودات زنده و انسان‌را، بـه استثنای جان و روان او، مثل یك ماشین می‌دانست. یك‌روز، وقتی که به ملکهٔ مسیحی سوئد درس مـی‌داد، ملکه از او پرسید: «ولی چگونه ماشین می‌تواند خودش را تولیدکند؟» همین پرسش، امروزهم، ریاضی‌دانانی راکه‌مرزهای ممکنهٔ‌ماشین را بررسی می کنند برآشفته کرده است. آنها درتلاشهای خود برای ساختن نظریهٔ ریاضی تـولید مثل، از روشهای ریاضی بـرای مطالعهٔ جریانهایی کـه تا امروز صرفاً زیستی به‌حساب می‌آیند، استفاده می کنند.

1. *Edward moor mathematics in the biological scienses. Scientific American, No 9. 1964*

اما، این‌کار، آنقدرهاهم ساده نیست. باوجودی که ازحدود ۳۰۰ سال پیش به‌این طرف، فیزیك و ریاضیات به‌طور سریعی پیش‌رفته‌اند و هـر کدام باعث غنی‌تـر شدن دیگری شده است، اندیشهٔ پیشگام ریاضی، راه اندکی را به‌طرف زیست‌شناسی پیموده است. من چند استثنا را به‌خاطر می‌آورم. **توماس مالتوس** مدل ریاضی‌درست کرد که بنا بر آن، جمعیت بشر باتصاعد هندسی رو به افزایش است، درحالی که تولید خواروبار به‌نسبت‌تصاعد عددی رشدمی کند، واین سبب «مبارزه به‌خاطر هستی» می‌شود. **چارلز داروین و آلفردیولس** که با آثار **مالتوس** آشنا بودند، دراین‌مبارزه، تأثیرقانون‌انتخاب طبیعی رامی‌دیدند. به‌عبارت دیگر، درك خالص ریاضی بـه‌پیشرفت فکر اصلی تکامل تـدریجی موجودات زنده، کمك کرد.

زیست‌شناسی به‌ندرت تـوانسته است وسیلهٔ پیشرفت ریاضیات بـاشد. به‌این مفهوم باید به‌مطالعهٔ **ژنتیك** جنس تـوجه کرد. **ر.آ. فیشر** درانگلستان و **سیوئل‌رایت** درامـریکا، مدلهای ریاضی ساختند که بنا بـر آن، عمل مشترك قوانین وراثت و عوامل تصادفی که حالت انتظار یا نابودی یك ژن معین را در جنس تامین مـی‌کرد، نمایش می‌داد. مدل بسیار پیچیدهٔ **رایت**، بـر نظریهٔ پراکندگی (دیفوریون) متکی است. ایـن مطلب باعث شد کـه **ویلیام‌فلراز** دانشگاه پرینستون، رشته‌های تازه‌ای از ریاضیات را مورد بررسی قرار دهد.

البته، زیست‌شناسان، درکارهای‌روزانهٔ‌خود، از ریاضیات استفاده‌می‌کنند. مثلاً برای هر بررسی که انجام می‌شود، زیست‌شناسها باید نتیجه‌هایی راکـه به‌دست می‌آورند درمعرض آزمونهای آماری معینی قرار دهند (بعضی از این آزمـونها به‌وسیلهٔ **فیشر** انجام شده است). گاهـی‌هم از هندسهٔ تحلیلی استفاده می‌کنند، تا به‌کمك آن بستگی‌های مشاهده‌ای را به‌صورت منحنی درآورنـد. زیست‌شناسان، با معادله‌های ترمودینامیك هم‌آشنا هستند. آمار، درکشف رموز قوانین (کدهای) ژنتیك و دربررسی ساختن ژنها، نقش فوق‌العاده‌اساسی‌دارد. ولی همهٔ اینها ریاضیات سنتی هستند. تلاشهای نومیدانهٔ زیادی‌هم برای‌ساختن «بیولوژی ریاضی»، انجام گرفته که قسمت بزرگی از آنها، حتی انتظارهای اولیه راهم برآورده نکرده است. باهمهٔ اینها، ایـن احتمال وجود دارد کـه تازه‌ترین بررسیهای ریاضی بااستفاده از ماشینهای محاسبه، بیش‌ازپیش، ما را به مدلهایی از جریانهای زیست‌شناسی برساندکـه به مرزهای سادگی نزدیك شده باشد.

ارزش اساسی ریاضیات برای زیست‌شناسی، دراین نیست کـه به‌عنوان ابزاری مـورد استفاده قرار گیرد، بلکه درنیروی انتزاعی بودن آنست: کـه

موضوعهای اساسی را برملا و بستگی بین ماهیتها و جریانهای گوناگون را قابل لمس می‌کند. ارگانیزم، یك ماشین است، اگرچه بسیارپیچیده و بغرنج باشد، به‌نظرمن، همکاری اصلی ریاضیات با زیست‌شناسی، از راه پیدا کردن یك رشته مساله‌های منطقی درنظریه‌های مربوط به‌ماشین، به‌وجود می‌آید،زیرا معلوم‌شده است که بین این نظریه‌ها و مهمترین مساله‌های زیست‌شناسی، بستگی عمیقی وجود دارد، وهمین موضوع، زمینهٔ اصلی بحث مارا دراین‌مقاله تشکیل می‌دهد.

کلود شه‌نون (انستیتوی صنعتی ماساچوست) **وجون ماکارتی**(دانشگاه استانفورد)، متوجه شدندکه‌آدمی، ارگانیزم انسانی را باماشین مقایسه‌می‌کند، و همیشه نوع ماشینی را کـه برای این منظور انتخاب می‌کند، منعکس کنندهٔ دورانی است که درآن زندگی می‌کند. **دکارت**، ارگانیزم را با ساعتهای‌پیچیدهٔ آبی، مقایسه می‌کرد، درابتدای سدهٔ بیستم، مغز را شبیه دستگاه مـرکزی تلفن خودکار می‌دانستند. سپس، در زمان‌ما، ارگانیزم موجودات زنده‌را یك‌کامپیوتر به‌حساب می‌آورند. شاید، به‌همین علت باشدکه بسیاری از دانشمندانی که به بررسی مقایسهٔ موجودات زنده و ماشین مشغولند، توجه خـودرا روی دستگاه مرکزی اعصاب متمرکزکرده‌اند و به‌این مناسبت دوپرسش را دربرابر خـود قرار داده‌اند: آیا می‌توان مغز را به‌عنوان یك دستگاه محاسبه‌ای، کامپیوتـر، مورد بررسی قرارداد؟ آیا می‌توان ماشین محاسبه‌ای ساخت که بتواند مثل‌مغز «فکر کند»؟

دراین مورد، جهتهای گوناگونی برای بررسی پیدا شد، ولـی اساس بیشتر آنها بـرتصور یك ماشین «خودکار» واقعی ویا قسمتی ازآن بود. وقتی که لازم است تناظـری بین‌کار ماشین وکار اعصاب بشود، یکی از انـدامهای کامل ویـا قسمتی از آن ومثلا یك‌سلول آنرا، انتخاب می‌کنند.

درنظریهٔ خودکار، ساختمان درونی آنها مورد بررسی قـرار نمی‌گیرد، بلکه به‌خاصیتهای مشخصهٔ بیرونی‌آنها توجه می‌شود. به‌قول **جون فون نیمان** فقید، عناصرماشینها یا اندامها «.... به عنوان خودکارهایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که لازم نیست ساختمان درونی آنها معین شود، بلکه عکس‌العملهای کاملا معینی که دربرابر محرکهای کاملا مشخص نشان می‌دهند، مورد تـوجه قرار می‌گیرد».

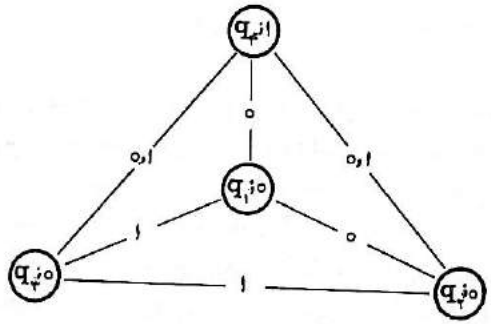
به‌این مفهوم انتزاعی، یکی از مفیدترین چیزها «خودکار محدود»است. این «جعبهٔ سیاه»، دارای تعداد محدودی تشکیلات درونی جـدا ازهم می‌باشد و معمولا تعداد محدودی راه ورود و خروج دارد. وضع خودکار و خروج‌آن،

درهر لحظهٔ زمانی T بستگی معینی با وضع و ورود آن درلحظهٔ زمانـی قبلی، یعنی ۱ — T دارد. با دردست داشتن یـك خودکار محدود و مجموعـه‌ای از قانونهایی که انتقال آنرا از وضعی به‌وضع دیگر معین کند، می‌توان بااطلاع از وضع اولیه و تسلسل ورودی، وضع و خروج خودکار را درهر لحظهٔ زمانی پیدا کرد. قانونهای انتقال را می‌توان به‌صورت جدول یا طرح تصویری‌نشان داد (شکل ۱).

وقتی که با خودکار محدود کار می کنیم، مهم اینست که وقتی از وضع و

خروج جاری	وضع جاری
q_1	۰
q_2	۰
q_3	۰
q_4	۱

وضع قبلی	وضع جاری ۰	وضع جاری ۱
q_1	q_4	q_3
q_2	q_1	q_3
q_3	q_4	q_4
q_4	q_2	q_2



شکل ۱. خودکار محدود عبارتست ازیك ماشین یاقسمتی ازاین ماشین تکامل یافته: در نظریهٔ خودکارها ، این قسمت اساسی از دستگاههایی است که ساده‌ترین آنها دستگاه اعصاب و ماشینهای محاسبه است و به ماشینهایی که تولید مثل می‌کنند، ختم می‌شود. خودکار را می‌توان با دوجدول شرح داد: جدول اول (بالا و سمت چپ)، تغییر وضع را درواحد زمان و در ارتباط با ورود می‌دهـد. جدول دوم (بالا وسمت راست)، خروج از هـر وضع را نشان می‌دهد. این شرح را با طرح تصویری هم می‌توان داد (پایین). در راسها، وضعها و خروجها نشان داده شده است، و تنها انتقال را برای هرورود می‌دهند.

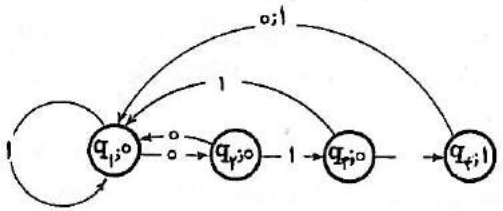
چگونگی آن گفتگو می کنیم، بتوانیم معنای این چگونگی را پیش‌خودتصور کنیم. وضع یك خودکار محدود، که برای کار طرح‌ریزی شده است، مثلا یك ماشین حروفچینی، خیلی ساده «باز» یا «بسته» نمی‌شود. این وضع را، اجزاء مختلفی، مثل چرخ دنده‌ها و هرمها به‌وجود می‌آورد که ازبیرون دیده‌نمی‌شود وبا انتقال شستیهای حروف که دربیرون قرار دارد، انجام می گیرد (شکل۲).

او. ماکالوك و **او. پیتس**، درسال۱۹۴۳درانستیتوی‌صنعتی‌ماساچوست، نمونهٔ انتزاعی و کاملا ساده شده‌ای از عضو اصلی دستگاه عصبی، یعنی سلول عصبی را، ساختند. در واقع، این یك خودکار محدود بادو وضع ممکن بـود: تحریك شده و آرام. آنها، با ترکیب این عضوها، یا سلولهای عصبی‌صوری، نخستین نمونـهٔ دستگاه عـصبی را ساختند. بعد، **س.ك.کلینی** (از دانشگـاه ویسکانسین) یك قضیهٔ کلی ثابت کردکه بـه‌کمك آن می‌شد، ویژگی رفتاری راکه می‌توان از شبکهٔ عصبی **ماکالوك پیتس** انتظار داشت، پیش‌بینی کرد.

قضیهٔ **کلینی**، برای هرساخت ونظامی که تعداد حالتهای آن محدودباشد، درست است، بدون اینکه ناچار باشدکه از سلولهای عصبی ساخته شده باشد.

خروج جاری	وضع جاری
۰	q^1
۰	q_2
۰	q_3
۱	q_4

وضع قبلی	وضع جاری ۰	وضع جاری ۱
q_1	q_2	q_1
q_2	q_1	q_3
q_3	q_4	q_1
q_4	q_1	q_1



شکل ۲. ماشین حروفچینی را می‌توان به زبان خودکار محدود ، شرح داد. توالی‌ورود، عبارتست ازترکیبهای حرفها. دراین مثال‌ساده، این ترکیب، عبارتست از : ۰ ، ۱، ۰ . خروج ۱ به‌معنای «باز» است.

وسیله‌ای که برای تحلیل روندهای دستگاه عصبی آماده شد، منجر به‌نتیجه‌های نظری تازه‌ای درمنطق ومهندسی برق، شد.

آ.م.تیورینگ، منطقی انگلیسی، درطرح مسالهٔ «ماشین متفکر» از راه دیگری وارد شده است. او بدون اینکه دربارهٔ فیزیولوژی مغز، فرضی بکند، این‌مساله را دربرابرخود قرار می‌دهد: درست کردن خودکاری بااصطلاحهای منطق ریاضی، به‌نحوی که اساساً بتواند از عهدهٔ هرگونه محاسبهٔ کاملامفصل برآید. ماشین **تیورینگ** کار می‌کند و تعداد بسیار زیادی از عملهای ساده را انجام‌می‌دهد. اینهم، یك‌خودکار باتعداد محدودی حالت است، منتهی«نواری» به‌طول نامحدودبرای آن تدارك شده است. برنامهٔ آن، روی تکه‌نوارمحدودی ثبت می‌شود. وقتی‌که ماشین، به‌اندازهٔ کافی کارکند، «سر» او فرمانی راکه نوشته شده است، می‌خواند ونتیجه را درجای‌آزاد همان نوار، چاپ می‌کند. **تیورینگ** نشان دادکه حتی می‌توان ماشین «همه‌کاره‌ای» برای انجام هرگونه محاسبه‌ای‌که ممکن باشد، ساخت. اگر آنرا باشرح دستور و ماشینی که‌بتواند این‌دستور را انجام‌دهد، مجهز کنیم،آنوقت، ماشین «همه‌کاره» به‌کارمی‌پردازد، مثل‌اینکه دستوررا انجام بدهد و درواقع‌هم، انجام می‌دهد.

چه مدل شبکهٔ عصبی **ماکالوك‌ـپیتس** و چه مفهوم انتزاعی‌تر ماشین **تیورینگ**، باعث پیدایش فرضیه‌های جالبی دربارهٔ طبیعت ماشین و دربارهٔ امکانهای عظیم‌ماشینها، شده است. متخصصین نظریهٔ خودکارها، مثلامی کوشند استعداد و توانایی دستگاههای زیستی را دربارهٔ بازیابی و اصلاح خود، و دربارهٔ اطمینان به ادامهٔ‌کار آن ـ علیرغم عدم اطمینانی‌که نسبت به اجزاء ترکیبی آن وجود دارد ـ مدل‌بندی و طرح‌ریزی کنند. **فون‌نیمان**، نشان داد که چگونه می‌توان ماشینی را ساخت که به‌شکل موردنظر ما کارکند و حتی، وقتی‌که ضمن‌کار، بعضی از اجزاء آن ازکار بیفتد، کار آن قطع نشود. مثلا از راه زیاد کردن مقدار عناصر منطقی و تعداد اتصالهای بین آنها درکامپیوترها، می‌توان به‌این مقصود رسید. بازسازی خود و تکثیر، که اهمیت فوق‌العاده‌ای ازنظر طراحان‌کامپیوتر و دیگر دستگاههای خودکار دارد، در زمان ماعدهٔ‌زیادی را به‌خود مشغول داشته است.

بدون تردید، سلول عصبی، کلید ساده‌ای نیست‌که درهرلحظهٔ زمانی دوحالت «قطع» و «وصل» را داشته باشد. دراین موضوع‌هم شکی نیست که کامپیوتر، «ماشین متفکر» نیست. ممکن است بشود ماشینهای بهتری ساخت‌که مغز را، به‌صورتی‌که ما امروز می‌شناسیم، مورد تقلید قراردهند، ممکن‌هم‌هست راههای کوتاه‌تری وجود داشته باشدکه بهتر وکاملتر از ساختمان نمونهٔ‌پیچیدهٔ

سلولهای عصبی، قابل درك باشد. من‌گاهی فکر می‌کنم نیروهایی که برای طرح‌ریزی این مدلها، به‌عنوان گامهای نخستین در راه «ماشین متفکر» صرف می‌شود، شبیه‌تلاشی است‌که پیشینیان مابرای ساختن بالهای مصنوعی‌می‌کردند تا راهی برای پرواز کردن آدمی بیابند: بررسی پروازپرندگان موجب‌کشف تعدادی از قانونهای آئرودینامیك شد، قانونهایی‌که برای دستگاههای ساختهٔ دست انسان‌هم درست است، اگرچه اجزاء مشخص آنها با اجزاء بالهای پرندگان، به‌کلی متفاوت است. اما، آنچه‌که مربوط به توضیح کارهای مغز، به‌مفهوم دقیق منطقی‌آنست، بایدگفت‌که.از امکانهای امروزی ما به دوراست. بنابر اعتقاد **فون‌نیمان**، ممکن است با شرح ساده‌ای از فعالیت مشخص مغز، طرح‌کاملی از همهٔ رابطه‌های عصبی به‌دست آید. ویا ممکن است بتوان‌مغز را با اصطلاحهای منطق ریاضی‌هم شرح داد، ولی آنچه‌که مسلم است، این‌مساله از جهتهای بسیاری، ازهمهٔ دستگاههای ریاضی‌که تاکنون شناخته شده است، پیچیده‌تر است.

ولی، آیا خاصیتهایی از سازوارهٔ (ارگانیزم) موجود زنده وجودندارد که بتواند به‌سادگی‌مورد تجزیه‌وتحلیل منطقی قرارگیرد؟ یکی ازاین‌خاصیتها، تولید مثل است. واحتمالا، این، پدیده‌ای از زندگی باشدکه کمترازدیگران، جنبهٔ «معنوی» دارد. بسیاری از سازواره‌ها «فکر نمی‌کنند»، و بسیاری ازآنها به‌طورکلی فاقددستگاه عصبی هستند، ولی همهٔ سازواره‌ها، تولیدمثل می‌کنند. بنابراین، امید می‌رودکه تولیدمثل، از دیدگاه منطقی، خیلی ساده‌تراز تفکر باشد. برای اینکه نمونهٔ منطقی تولیدمثل را بسازیم، دست کم باید بتوانیم مساله‌های اصلی مربوط به مطالعهٔ خصلتهای این روند را، تنظیم کنیم، و حتی تاجایی‌که ممکن است، بعضی از روشهایی راکه به‌وسیلهٔ آنها می‌توان این مساله‌ها را حل‌کرد، پیش‌بینی کنیم، این موضوع، به‌نوبهٔ خود، ممکن است راههای‌بررسی را به‌زیست‌شناس تلقین‌کند، وحتی‌احتمالا بربعضی‌ازمساله‌هایی که، به‌طور روزافزون دربرابر زیست‌شناسان قرارداد، پرتوی بیندازد.

فون نیمان، نخستین‌کسی بودکه به‌بررسی‌تفصیلی این موضوع پرداخت که چگونه باید روند تولیدمثل را درماشین، طرح ریخت. این مساله، به‌زبان خود او، شامل این پرسش است: «آیا می‌توان ماشینی به‌کمك اجزاء ساده‌ای ساخت، به‌نحوی که اگر درمخزن آن قطعه‌های همین اجزاء به‌اندازهٔ کافی وجود داشته باشد، بتواند ماشینهای دیگری بسازد که دقیقاً عین همان ماشین اصلی باشد؟» وچنین نمونه‌ای را می‌توان طرح‌ریخت: به ماشین برنامه‌ای‌داده شودکه وقتی درمحیط «تغذیه» قرارگیرد، اجزایی راکه برای ساختن ماشینی

مشابه خودش لازم است، جمع‌وجور کند و به مرور زمان، دوتا، سپس‌چهارتا، بعد هشت‌تا، شانزده‌تا، از این ماشینها بسازد. و این «تولیدمثل» تاآنجا که اجزاء لازم وجود داشته باشد وفضای‌کافی برای ماشینهایی که «تولید»می‌شود، باقی مانده باشد، ادامه پیداکند.

دربرخورد اول، به‌نظر می‌رسد که این طرح به‌کلی غیرواقعی است و نمی‌تواند جدی باشد. اگر نطفهٔ متبلوری راکه تنها ازچند ملکول ساده‌تشکیل شده است، درمحیطی قرار دهیم که از همین ملکولها و درحرارت و فشار مناسب، اشباع شده‌باشد، ملکولهای آزاد به‌صورت متبلور ته‌نشین می‌شود و درست به‌همان صورت لازم درمی‌آید. از این دیدگاه، ازدیاد بلور، همان «تولیدمثل» است. چفت‌وبست «زیپ»، مثال دیگری است: دراینجا، اتصال‌یك جفت دندانه اتفاق می‌افتد، این جفت دندانه درمحیطی واقع شده است که شامل متصل‌کننده ومجموعه‌ای از دندانه‌هاست که به دنبال‌هم قرار گرفته‌اند. بقیهٔ دندانه‌هاهم به‌نوبت وارد دراتصال می‌شوند و دنباله‌ای از «ماشینهای» دو دندانه‌ای را تشکیل می‌دهند،

البته، اینها، مثالهای پیش‌پا افتاده‌ای است‌که برمبنای استفاده از ساده‌ترین‌نوع تغییرچگونگی ساختمان دستگاه قراردارد: ازحالت بی‌شکلی به‌حالت بلوری ویا از حالت بازبه‌حالت بسته. اینهم مثالی باصفحه‌های مشبك:هرکدام از آنها، یك «ماشین» است و می‌تواند خودش‌را ـ البته به‌یاری وسیلهٔ پیچیدهٔ سوراخ کن تکراری (که خودش دریك دستگاه تنظیم، وارد شده است)ـ «تولید» کند. ضمناً یادآوری می‌کنیم که بعضی از سازواره‌های تك یاخته‌ای ممکن‌است‌درمحیط «تغذیهٔ»ساده‌ای، ازنو تولید شوند، درحالی که‌سازواره‌های عالیتر ممکن است به‌محیط کاملتری‌که مثلا شامل مواد بغرنجی همچون‌ویتامینها باشد، نیاز داشته باشند. بنابراین، روند تشکیل یك ماشین پیچیده از اجزاء ساده موردتوجه قرار می‌گیرد که تاچه اندازه می‌توان تعداد این اجزاء را بیشتر درنظر گرفت. ولی تعداد نوعهای مختلف اجزاء (یا حالتهای آنها) باید خیلی زیاد نباشد. و این درست همان چیزی است‌که **فون‌نیمان** درنمونهٔ خود برای «تولیدمثل»، به‌آن رسیده است.

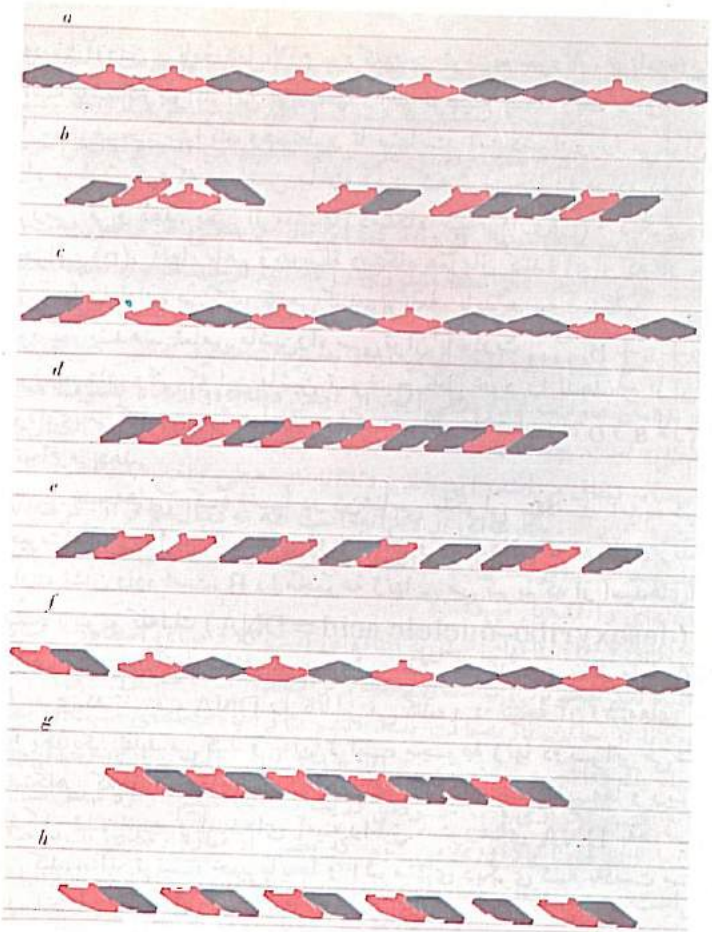
با همهٔ اینها، ممکن است پرسشی پیش آید: این‌نمونه، تا چه اندازه می‌تواند مختصات و ویژگیهای روند زیستی مربوطه را منعکس‌کند. یکی‌از نخستین مشکلاتی‌که بایدبرای برطرف‌کردن آن، چاره‌ای می‌اندیشیدند،وجود نمونهٔ خوبی دربارهٔ زیست‌شناسی بود. **فون نیمان**، خیلی زود به‌این‌نتیجه‌رسید که برنامهٔ ساختن ماشینی‌که پیشنهادکرده بود، نمی‌توانست کامل باشد. برای

به‌دست‌آوردن برنامهٔ کامل،لازم بودکه‌به‌جز توضیح خودکار، برنامه‌هایی‌وجود داشته باشدکه بتواند این توضیحها راهم توضیح بدهد وبعد برای‌توضیحهای تازه، توضیحی پیداکند وهمینطور تا بینهایت. این دشواری را می‌توان ازاین راه برطرف‌کردکه دوماشین ساخته شود که توضیحها را در دو زمینه مورد بررسی قرار دهد. یکی از ماشینها، دستگاه کپیه‌برداری(c) و دیگری، دستگاه اجرائی (o). آنها، باهم وبه‌وسیلهٔ دستگاه همزمان کنندهٔ (s)، که کار هرکدام از آنها را اداره می‌کند، کارمی‌کنند. برنامه، باید هرسه دستگاه(B_{c+o+s}) را توضیح بدهد. تمامی ماشین‌را، می‌توان باعبارت $c+o+s+B_{c+o+s}$، توضیح داد. وقتی‌که این ماشین توضیح کامل خود را بدهد، c ازآن نسخه‌برداری می‌کند، o همهٔ عملهائی راکه برای ساختمان c ، o و s لازم است، انجام می‌دهد.

نتیجه‌هایی که اخیراً در ژن‌شناسی ملکولی به‌دست آمده، شباهتهای حیرت‌انگیزی را بین‌عنصرهای **فون نیمان** و روندهایی‌که درسلول زنده‌وجود دارد، نشان داده است. B را مجموعهٔ ژنهایی می‌گیریم‌که از اسیدهای‌اکسیده نشدهٔ ریبونوکله‌ئیك (desoxyribo–nucleic acid = DNA) تشکیل شده است و درآنها نشانه‌های موروثی، نقش می‌بندد. c–خمیرمایهٔ DNA–پلی‌مری‌که تضعیف DNA را کاتالیز می‌کند، و درنتیجهٔ آن رشته‌های DNA از یکدیگر تقلید می‌کنند و به‌این‌ترتیب، مجموعهٔ ژنها دوبرابر می‌شود o–دستگاهی‌که از اسیدهای ریبونوکله‌ئیك(RNA)، خمیرمایه‌ها و ریبوسومها تشکیل شده است و اسیدهای آمینه راطبق دستورهای DNA به‌هم مربوط می‌کند. به‌این‌ترتیب، خمیرمایه‌ها و آلبومینهای دیگری‌که به‌دست می‌آید، درساختمان یاخته‌های جدید، شرکت می‌کنند.

نخستین مدلهای **فون‌نیمان** «مکانیکی» بود. این‌مدلها، عملا ساخته‌نشد، ولی مدلهای دیگری‌که تاحدکمتر کلی بودند، نمایش داده‌شد. دریکی‌ازآنها، که به‌وسیلهٔ **ژاکوبسون** از کالج بروکلین ساخته شده است، «ماشین تولیدمثل» عبارتست‌از قطاری با واگونهای اسباب بازی[1]. واگونها، اجزاء خودمختار دستگاه هستند و ادارهٔ آنها به‌وسیلهٔ دستگاههایی‌که درهرواگون قرار داده‌شده است،انجام‌می‌گیرد. وقتی قطار،که ازواگونهای بانوعهای مختلف (وبه‌ردیف

1. *H. Jacobson. on models of reproduction, Amer Sei. 46, No 3, 255-268*



شکل ۳. «خودسازی» و «تولید مثل»، یکی از روندهای زیست‌شناسی است که مورد تجزیه وتحلیل ریاضی قرار گرفته‌است. «وجودهای» کوچك هاشور خورده وهاشور نخورده، دو نوع از اجزاء تشکیل دهندهٔ «ماشین» «خودساز» ساده‌ای است که به‌وسیلهٔ پن‌روز ژن‌شناس ساخته شده است. اگر این اجزاء درمجموعهٔ (a) قرار گرفته باشند وآغاز به‌حرکت به‌جلووعقب بکنند، اجزاء، بدون‌اینکه درگیری پیدا کنند، به هم برخورد می‌کنند (b) ولی، اگر در مجموعه، جنین «سیاه و سفید» یا «ماشین» را قرار دهیم (c) و دوباره آنرا تکان دهیم، جنین، بقیهٔ اجزا را به وضع معینی در می‌آورد وآنها را در ردیفی قرار می‌دهد که دوباره ترکیبهای «سیاه وسفید» به‌وجودآید (d). برای روشنی موضوع، این ماشینها را به طور جداگانه نشان داده‌ایم (e). حال، اگر، به‌عنوان جنین اولیه، وضع «سفید و سیاه» را برگزینیم، در نتیجهٔ تکان دادن، تنها ماشینهای «سفید وسیاه» به وجود می‌آید (g و h) ماشینها، دقیقاً «بچه‌های خویشاوند» تولیدمی‌کنند. پن‌روز «وجودهای» خود را از تختهٔ سه‌لالی درست کرد وآنچه که در این شکل می‌بینید از آلومینیوم و در آزمایشگاه بل، ساخته شده است.

معینی) تشکیل شده است، در راه قرار می‌گیرد، آغاز به حرکت می‌کند و واگونهایی راکه به‌هم بسته نیستند، هل می‌دهد. هرجا لازم می‌شد، ردیف واگونها را با استفاده از راههای فرعی، تغییر می‌داد و از آنها قطاری «کاملا شبیه خودش» درست می‌کرد. **ژاکوبسون** مدل مشابهی ساخت که درآن،امکان قطاری باطول دلخواه و دنبالهٔدلخواهی از واگونها رامی‌داد. او مدل‌نمایشی نسبتاً ساده‌ای ساخت که درآن، می‌شد قطار را از دو واگون «تولید» کرد.

پن‌روز، ژن‌شناس انگلیسی، مدل دیگری را پیشنهادکرده است[1]، که بنابرآن باید دقیقاً براساس اصول «خودسازی» مواد ژنتیکی، ساخته شود. در ساده‌ترین حالت، درماشین **پن‌روز**، عنصرهایی از دونوع a وb وارد می‌شود، و درنتیجه می‌توانند به‌یکی از دو روش‌ممکن، بایکدیگر متحد شوند. اگر درمجموعه، ماشین ab وعنصرهای بدون ارتباط باهم a وb قرارگرفته باشد، و سپس مجموعه، آغاز به حرکت‌کند (ماشین اولیهٔ a، نقش نطفه وجنین را به عهده دارد)، آنوقت ترکیبهای جدید ab به وجود می‌آید (شکل ۳). اگر به عنوان جنین، ماشین ba را قرار داده باشیم، آنوقت، جفتهای ba «تولید» خواهند شد.

روشنی مدلهای مکانیکی و قانع‌کننده بودنشان، به آنها ارزش‌می‌دهد، ولی، توضیح ریاضی آنها، بسیار دشوار است. **فون‌نیمان**، درکارهای بعدتر خود، به مدلهای انتزاعی گرایش پیداکرد، وبه‌این‌ترتیب، ازهمهٔ دشواریهایی که به‌تهیه، حرکت و ادارهٔ آنها مربوط می‌شود، خلاص‌شد. او با تنظیم‌مسالهٔ خودش، به‌جای مکانیك و الکترونیك، به‌سرعت به‌سمت منطق و ریاضیات، کشیده شد وبه‌جای «محیط تغذیه» با شبکهٔ دوبعدی ریاضی ویا صفحه‌ای که به‌مربعهاتقسیم شده‌است، سروکار پیدا کرد. درهرمربع یك‌عنصر قرارمی‌گیرد: ماشینی با تعداد محدودی حالت (خودکار محدود). ماشینهای **فون‌نیمان**، نه ورودی دارند ونه‌خروجی، برای آنها، تنها تعدادی حالت مجاز درنظر گرفته شده است. جدول این حالتها و قانونها ــ انتقال معین ازیك حالت به حالت دیگرــ برای همهٔ عنصرها قابل اجراست، ضمناً درهرلحظهٔ زمانی، عنصرهای مختلف، می‌توانند درحالتهای مختلف قرارگیرند: هرماشینی، عبارتست‌از یك خودکارجزمی متساوی‌الزمان؛ درهرلحظهٔ جداگانهٔ T (به‌استثنای‌حالت‌آغازی،

1. *L. Penrose, Automatic mechanical selb-reproduction, New-Biology, No 28, England, p. 92 (1959)*

به‌ازای $T = 0$)، حالت‌هرعنصرتنها به‌حالت خاص‌خودش وحالتهای‌نزدیکترین عنصرهـای مجاور آن درلحظهٔ $T - 1$ بستگی دارد. حالت خاصی‌هم وجـود دارد که حالت «سکون» نامیده می‌شود. به‌جز تعداد محدودی ازعنصرها، همهٔ آنها دراین حالت قرار می‌گیرند. اگر یك‌عنصر و همهٔ نزدیکترین عنصرهای مجاور آن، درلحظهٔ $T - 1$ در «سکون» باشند، درایـن صورت، ایـن عنصر درلحظهٔ T هم به‌حالت «سکون» خواهد بود. تمامی این دستگاه را (صفحه‌ای که به مربعها تقسیم شده است، ماشینهای مقدماتی، حالتهای مجاز و قانونهای انتقال)، «سازمان موزائیکی» می‌نامیم (شکل۴). مجموعهٔ محـدود عنصرها را «هیات» می‌نامیم، به‌شرطی که حالتهای همهٔ عنصرهایی که درآن واردشده‌است تعریف شده باشد.

چه رابطه‌ای بین تعریفها، ماشینها و خـودسازی وجود دارد؟ سازمـان موزائیکی را به‌عنوان محیط مجردی درنظر می‌گیریم که درآن فضا و زمـان به صورت کمیت درآمده‌اند، و حرکت و دیگر تغییرهای هموار به دنبال هم حالتهای ناپیوسته‌ای را به‌وجود می‌آورند: عبور ازیك حالت به‌حالت‌دیگر که به وسیله قانونهایی شرح داده می‌شود. دراین محیط، هیاتهایی وجود دارد که

X	Y	Z	O	X	Y	Z	O
X	Z	Y	X	X	Z	Y	X
O	O	O	O	O	O	O	O
X	Y	Z	X	Y	Z	O	O
X	Z	Y	X	Z	Y	X	O

شکل ۴. «سازمان موزائیکی» عبارتست از قسمتی از صفحه،که به‌خانه‌های مربعی شکل تقسیم‌شده است. میدان مورد بررسی، عبارتست از هیاتهایی از ۴۰ خانه، که حالتهای آنهارا X ، Y ، Z و O (تحریك نشده) نامیده‌ایم هرهیاتی ازسه نمونهٔ هیاتهای هفت خانـه‌ای (که هاشور خورده است)، تشکیل شده است. بقیهٔ نمونه‌ها باید، زیر مجموعه‌هایی غیرمتقاطع باشند. مجموعهٔ چهارم (که محیط آن سیاه شده است)، اگرچه هیات دیگران را تکرار می‌کند، به علت اینکه با بقیه متقاطع است، مستقل نیست.

از عنصرها تشکیل شده‌اند (اینها «ماشینهای» ما هستند). این ماشینها، استعداد خودسازی‌راهم دارند. عنصرهای‌جداگانه، اجزاء ساده ومثلا مولکولهاهستند. تغییر حالتهای آنهارا، می‌توان پیش خود به‌صورت انتقال انرژی، تغییرمیزان فعالیت شیمیایی ویا تغییر موقعیت هندسی درنظر گـرفت. قانونهای انتقال از یك حالت‌به‌حالت دیگر، به‌معنای قانونهای فیزیکی و شیمیایی محیط است‌که تغییرها را معین می‌کند وناشی از خود عنصرها و ارتباطی که با دیگرعنصرها دارند، می‌باشد. وقتی‌که می‌گوییم عنصرها درحالت «سکون» هستند، به‌معنای مواد خامی است‌که مورد استفاده قرار نگرفته‌اند، و قانونی‌که حالت سکون را معین می‌کند، درواقع به‌معنای آنست‌که هیچکدام از عنصرهایـی که وارد درهیاتی نشده‌اند، نمی‌تواند به‌طور ناگهانی فعال شود، و ماشین، تنها از راه عملهای محدود، به دور و بر مواد خام «نزدیك می‌شود».

به‌این‌ترتیب، باید سازمانی موزائیکی ساخت‌که از عنصرهایی باتعداد حالتهای نه‌چندان زیاد (به‌زبان دیگر، عنصرهای‌کاملا ساده)، تشکیل شده‌باشد، قانون انتقالها را منظم‌کرد و سپس چنان هیاتی را طرح ریخت کـه استعداد «خودسازی» داشته‌باشد، واین، تاحدی. روندنوشتن برنامه برای ماشین‌حساب را، به‌خاطر می‌آورد. **فون‌نیمان**، خواست بعدی را پیش‌کشید: هر هیات باید درخودش، شامل ماشین **تیورینگ** باشد. سپس، او به‌تفصیل، خودسازی‌هیاتی راکه شامل قریب ۲۰۰۰۰۰ عنصر با ۲۰ حالت درونی است، شرح می‌دهد. بعداز مرگ **فون‌نیمان** درسال ۱۹۵۷، کار با سازمانهای موزائیکی ادامه‌پیدا کرد، ویژگیهای ساختمانی آنها موردبررسی قرارگرفت، کوشش شد تاروند خودسازی آنها به‌صورت کاملا منطقی نـوشته شود و نتیجه‌گیریها، به‌صورت قضیه‌های قابل اثبات درآید.

حالا، پرسش جالبی دربرابر مـا قرار می‌گیرد: با چه سرعتی می‌توان «جمعیت» تولیدمثل هیات را، رشد داد؟ درواقع، این هیات نمی‌تواند به‌طور نهائی زیاد شود و مثلا در هـر «نسل» دوبرابر مـی‌شود. تعداد «جمعیت» یك سازمان موزائیکی دوبعدی، درهرلحظهٔ زمانی، نمی‌تواند از مربع زمان خود سازی آن، تجاوز کند.

این حکم را به‌صورت قضیه‌ای منظم می‌کنیم: **اگـر هیات خودسازی، در زمان T به‌اندازهٔ $f(T)$هیات مشابه‌خودش‌به‌وجود آورد، عددثابت‌ومثبت k وجود دارد، به‌نحوی‌که داشته‌باشیم:**

$$f(T) \leqslant kT^2$$

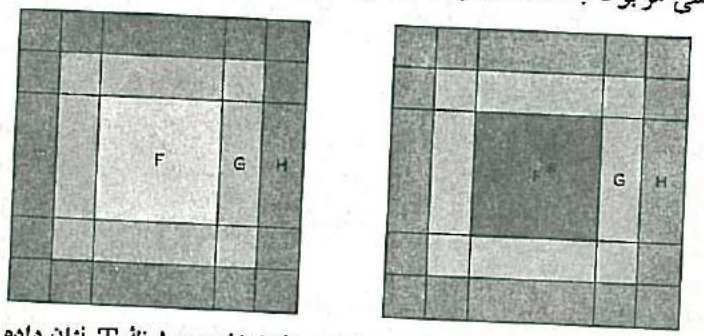
اثبات. c را هیات خودسازی می‌گیریم کـه درمربعی به‌اندازهٔ $d \times d$

جا گرفته باشد. دراین صورت، درهر لحظهٔ زمانی مقدار کلی عنصرهای تحریك شده نمی‌تواند از $(2T+d)^2$ تجاوز کند، زیرا مجموعهٔ عنصرهای تحریك شده، که شکل مربعی دارد، می‌تواند اندازه‌های خودرا تنها دریك عنصر از هرطرف به‌اندازهٔ واحد زمان، افزایش دهد. اگر تعداد عنصرهای c برابر r باشد، داریم:

$$f(T) \leqslant \frac{(2T+d)^2}{r}$$

اگر این نامساوی را کمی ساده‌تر کنیم، به‌اثبات قضیهٔ خود می‌رسیم. این موقعیت، قانون **مالتوس** را به‌خاطر می‌آورد که بنا بر آن، فضای موجود، رشدجمعیت رامحدود می‌کند، زیرا سرعت گسترش مرزهای تحریك، نمی‌تواند ازیك مقدارثابت تجاوز کند.

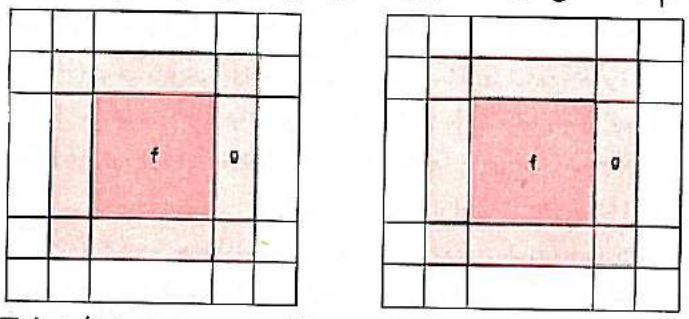
بازهم یك پرسش: آیا هرهیاتی، مستعد خودسازی است؟ به‌نظرمی‌رسد هیاتهایی وجود دارند که اگر درآغازکار وبه‌ازای $T=0$ وجود نداشته‌باشند، نمی‌توانند به‌وجود آیند. مفهوم این مطلب اینست که چنان‌هیات قبلی و مقدمی وجود ندارد که براساس آن وبه‌کمك انجام‌قانونهای انتقال، بتوان‌هیات‌مفروض را به‌دست‌آورد. **جون‌تیوکی** (از دانشگاه‌پرینستون) پیشنهاد می‌کند که‌اینگونه هیاتها را (که مسبوق به‌سابقه نیستند) «باغ‌عدن» بنامند. ازآنجا که این‌هیاتها را نمی‌توان ازهیاتهای دیگری به‌دست‌آورد، دارای استعداد خودسازی‌نیستند. به‌این‌ترتیب، بررسی‌شرطهای‌مربوط به‌پیدایش‌ماشینها، امکان تعیین‌محدودیتهای اساسی مربوط به‌استعداد آنهارا درخودسازی، به‌وجود می‌آورد.



شکل ۵. هیاتهایی که متناظر با دو حوزهٔ هم اندازه‌اند، درلحظهٔ T نشان داده شده است. هیاتهای حوزه‌های درونی باهم فرق دارند. در شکل، حوزه‌های درونی، اندازه‌های معینی دارند، ولی در حالت کلی می‌توانند دلخواه باشند. هیاتهای بینابینی G وهیاتهای بیرونی H، یکی هستند.

این شرطها، شامل‌چیزی هستند که می‌توان‌آنرا، امکان «پاك‌شدن» نامید. وقتی که روی تختهٔ سیاه، اثر گچ ازبین‌برود، نمی‌توان دربارهٔ آنچه که تااینجا نوشته شده است، صحبت کرد. ازنظر تکنیك محاسبه‌ای، اصطلاح «پاك شدن» مربوط به‌عملهایی می‌شود که روی‌عنصرهای‌حافظه انجام‌می‌گیرد و درنتیجهٔ آن، این عنصرهای حافظه‌ای به‌حالت آغازی خود برمی‌گردند و از آگاهیهایی که قبلا درخود نگه داشته بودند «پاك» می‌شوند. درحالت کلی، «پاك شدن» روندی برگشت‌ناپذیر است، زیرا بعداز اجرای آن نمی‌توان حالت قبلی‌را، که ازآن به‌حالت مفروض رسیده‌ایم، برقرار کرد. دراینجا باید دست‌کم دو حالت قبلی وجود داشته باشد که با انتقالهای معینی، منجر به‌یك‌حالت‌بشوند. دروضع سازمان موزائیکی، مفهوم «پاك‌شدن» را باید تاحدی دقیق‌تر تعریف کرد، به‌نحوی که بتواند «پاك‌شدن» را تضمین کند. دراین‌وضع، مفهوم «شسته شدن»، به‌معنای یك انتقال‌ساده به‌وضع تازه‌نیست.

برای‌اینکه این‌تعریف را تنظیم کنیم، دوهیات‌شکل۵ را درنظرمی‌گیریم، دراینجا، هیاتهای حوزه‌های داخلی، که ازنه عنصر تشکیل شده‌اند، درلحظهٔ مفروض باهم‌اختلاف دارند، آنهارا F و F′ می‌نامیم. ضمناً هیاتهای حوزه‌های بینابینی G، درهردوحالت یکی‌هستند، یعنی این حوزه‌ها، دقیقاً شبیه یکدیگرند. همین وضع، درمورد هیاتهای حوزه‌های بیرونی‌هم درست است: هر دو را H می‌نامیم. حال، به وضع هیاتها، درلحظهٔ بعد توجه می‌کنیم (شکل۶). اگر هیاتهای f و g که به‌ترتیب برای حوزه‌های درونی وبینابینی درنظر گرفته‌ایم، شبیه‌هم باشند، می‌گویند که دوهیات اولیه «یکدیگر را پاك کرده‌اند»، زیرا با



شکل ۶. هیاتهای جدید حوزه‌هایی که در شکل ۵ دیدیم، در لحظهٔ T+1 حوزه‌های داخلی به هیاتهای تازه‌ای تبدیل شده‌اند که قابل انطباق بریکدیگرند. حوزه‌های بینابینی هم قابل انطباق‌اند. حالت حوزه‌های بیرونی معلوم نیست. اگر دوحوزه‌ای که درابتدا، مثل‌شکل ۵، بایکدیگر اختلاف داشته‌اند، منجر به هیاتهای یگانه ومتحدی بشوند، می‌گویند که آنها «یکدیگر را پاك کرده‌اند».

وجودی که باهم اختلاف داشته‌اند، به‌یك‌نتیجه منجر شده‌اند. توجه کنیم که دراین حالت نمی‌توان هیات محدود حوزهٔ داخلی را مشخص کرد، زیرا چنان تاثیری درعنصرهای آن انجام گرفته است که از مقایسهٔ عنصرهای بیرونی آن، قابل شناختن نیست. وظیفهٔ حوزهٔ بیرونی، تنها حفاظت حوزهٔ بینابینی است. به‌این‌ترتیب، هیاتی را **پاك‌کننده** می‌نامیم که هیات دیگری وجود داشته‌باشد، به‌نحوی که هردوی آنها متقابلا یکدیگر را پاك‌کنند. بالاخره، از این تعریف نتیجه می‌شود که اگرهیات پاك‌کننده درداخل حوزهٔ مستطیلی باشد، این حوزهٔ مستطیلی‌هم پاك کننده خواهد بود. بنابراین، این ملاحظات را می‌توان در حوزه‌های مربعی‌شکل مورد بررسی قرارداد که‌کارکردن درآنها، راحت‌تر از حوزه‌های به‌شکلهای دلخواه است.

حال‌می‌توان این‌قضیه را منظم کرد: **اگر درسازمان‌موزائیکی، هیاتهای پاك‌کننده وجود داشته‌باشد، درآن «باغ‌عدن»هم وجود دارد.**(ولی،می‌توان سازمان موزائیکی ساخت که درآن هیاتهای پاك‌کننده وجود نداشته‌باشد، چنین سازمانی به‌کلی بی‌معنی ومبتذل است).

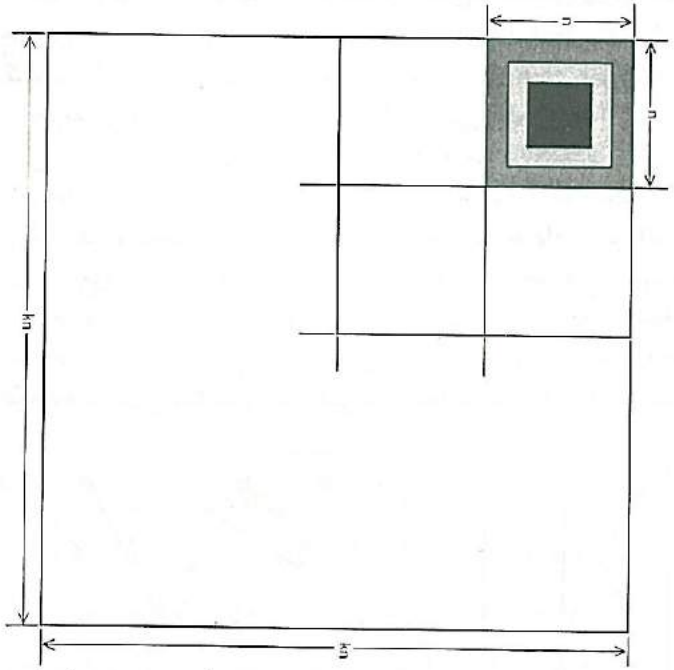
ما به اثبات تفصیلی این‌قضیه نمی‌پردازیم وتنها بعضی ملاحظه‌های کلی را می‌آوریم. n را عدد درستی می‌گیریم که درحوزهٔ بااندازهٔ $n \times n$ دارای هیات پاك‌کننده باشد. حوزهٔ بزرگ $kn \times kn$ را درنظرمی‌گیریم (شکل۹). هریك از k^2 حوزهٔ‌بااندازهٔ $n \times n$ چنان اندازه‌های کافی دارد که بتوان‌هیات پاك‌کننده‌ای را درآن بررسی کرد.k را به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که درحوزهٔ بزرگ،امکان وجود هیاتهای پاك‌کنندهٔ زیادی باشد. اگر هرعنصر بتواند دریکی‌از A حالت قرار بگیرد، درآن صورت درتمام حوزه، امکان $A^{(kn)^2}$ هیات‌وجود دارد. ببینیم درکدام حالت، تمامی حوزهٔ ما به‌لحظهٔ بعدی منتقل می‌شود. به‌یاد بیاوریم که درلحظهٔ $T+1$، نمی‌توانیم حالتهای عنصرهای مرزی حوزهٔ خودرا. دقیقاً نشان دهیم. بنابراین، درلحظهٔ $T+1$، درواقع، حوزه‌ای را بررسی می‌کنیم که تنها دارای $A^{(kn-2)^2}$ حالت‌است.

سپس، اگر درحوزهٔ اولیهٔ $kn \times kn$، حوزهٔ $n+n$ وجود داشته‌باشد، که شامل هیات پاك‌کننده باشد، دراینصورت دو حالت ممکنی که متناظر با دو هیات پاك‌کنندهٔ متقابل‌اند، تنها منجر به‌یك حالت می‌شوند. اگر دو هیات‌پاك کننده وجود داشته باشد، چهار حالت ممکن، به‌یك حالت تبدیل می‌شوند. به‌طورکلی اگر درلحظهٔ T ، s هیات پاك‌کننده وجود داشته باشد، درلحظهٔ $T+1$، 2^s حالت منجر به‌یك حالت می‌شود (شکل۸). حال، تنها لازم است

نشان دهیم تلفات تعداد حالتها به‌علت پاك‌شدن، باید بیشتراز تلفات مربوط به خلاصه کردن مرز بیرونی حوزه (یعنی تلفاتی که به‌وسیلهٔ اختلاف $A^{(kn)^2}$ و $A^{(kn-2)^2}$ بیان می‌شود) باشد.

بهتر است که به جای تعداد حالتها، لگاریتم آنها را در نظر بگیریم. لگاریتم رابطه‌ای که تلفات را درقشر مرزی مشخص می‌کند، تقریباً به‌صورت خطی به k مربوط می‌شود. ولی لگاریتم تعداد حالتهایی که به‌علت پاك شدن ازبین می‌روند، همچون تعداد هیاتهای پاك‌کننده، وبنابراین مثل مساحت‌تمامی حوزه رشد می‌کند، یعنی به‌تقریب متناسب بامجذور k است.

به‌این‌ترتیب، برای مقادیر بزرگk، بیشترین تعداد حالتهایی که از دست می‌رود، مربوط به پاك شدنهاست تا خلاصه‌کردن حوزهٔ مرزی. درلحظهٔ

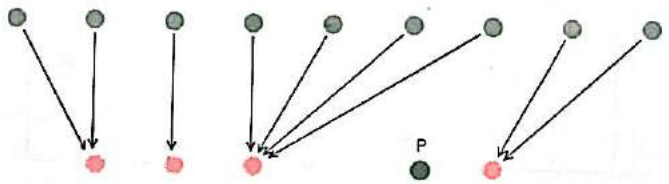


شکل۷. قضیهٔ مربوط به «باغ‌عدن» به‌کمك این‌شکل ثابت می‌شود. هیات نه‌چندان بزرگ پاك‌کننده،دارای‌اندازهٔ $n \times n$ است. حوزهٔ بزرگتر به‌اندازهٔ $kn \times kn$ است (اینجا، عدد طبیعی k برابر ۴ گرفته شده است، ولی در واقع به‌اندازهٔ کافی بزرگ است). این حوزه در لحظهٔ T ، نشان داده شده است. در لحظهٔ $T+1$ اندازه‌های آن تا $(kn-2)(kn-2)$ پایین می‌آید.

$T+1$، باید حالتی مثل P وجود داشته باشد که نتواند مبتنی برهیچ حالتی از لحظهٔ T باشد. همین حالت P، هیات «باغ‌عدن» است، که دربارهٔ آن در قضیهٔ قبل صحبت کردیم. این حالت را باید ازجملهٔ امکانات دانست، ولی نمی‌شود آن را از هیچ حالت قبلی به‌دست آورد. این حالت، به‌ماشینی‌شباهت دارد که می‌توان آن‌را به‌عنوان مجموعه‌ای از یك رشته عنصرها توضیح داد، ولی نمی‌شود آن‌را به‌کمك این‌عنصرها ساخت. از آنجا که این‌ماشین‌نمی‌تواند از راه «نوسازی» به‌دست‌آید، درحالت «خودسازی»هم نمی‌تواند باشد.

احتمالا، همین دوقضیه‌ای که دراینجا آوردیم، برای فهمیدن‌این‌موضوع کافی باشد که چگونه می‌توان روند بازسازی را به‌صورت انتزاعی شرح داد وبه تجزیه‌وتحلیل ریاضی دسترسی پیداکرد. من‌نمی‌خواهم با این دستاویزحکم کنم که حتماً بین سازمان موزائیکی و بازسازی زیستی، رابطه‌ای وجود دارد، شك نیست که این خود نیاز به اثبات دارد. باوجود این، همانطورکه قبلاهم تاکیدکردم، کاملا محتمل است که بررسی مدلهای مجردی از این‌قبیل، بتواند دست‌کم جنبه‌هایی ازبعضی معیارهای روندهای زیستی را روشن‌کند.

این نمونه را درنظر می‌گیریم. همانطورکه فرض می‌کنند، زندگی در روی زمین، درنتیجهٔ ترکیب تصادفی مواد غیرآلی، به‌وجود آمده است. این فرضیه، تاچه‌اندازه به‌حقیقت نزدیك است؟ از بررسی سازمانهای موزائیکی می‌توان دراین‌مورد نتیجه‌گرفت که دستگاه عنصرها باید تاچه‌حد پیچیده‌باشد که ضمن‌اینکه درحالتهایی ویژگی خودسازی را ازخود بروز می‌دهد، استعداد این راهم داشته باشد که درمسیر تکامل تدریجی قرارگیرد و شکل خودراکامل کند. **جکوبسون**، ضمن مطالعهٔ رفتار ماشین مربوط به قطارهای باری، ضمن



شکل ۸. تعداد حالتها برای حوزه‌ای‌که در شکل۷ نشان داده شده است، در فاصلهٔ زمانی از T تا $T+1$ کم می‌شود. واین وضع به‌علت پاك‌شدنها وخلاصه کردن حوزهٔ مرزی پیش می‌آید. می‌توان ثابت کرد که به‌علت پاك شدنها، تلفات بیشتری پیش می‌آید تا به خاطر خلاصه کردن. بنا براین، در لحظهٔ $T+1$ حالت اضافی P پیدا می‌شود که به‌آن هیات «باغ عدن» گویند.

تشریح مفهوم پیچیدگی درضربه‌های آگاهیها، قدمهایی دراین جهت برداشته است.

حتی، اگر سرآخر معلوم شودکه مدلهای خودساز ماشینی در زیست‌شناسی، کاربردی ندارند، بازهم به‌خودی‌خود دارای اهمیت فوق‌العاده‌ای هستند. برای چندلحظه به مدل خودساز **فون‌نیمان** توجه‌کنیم. چه خواهد شد، اگر ماشین مشابهی، نه‌برای یك محیط انتزاعی، بلکه برای تحقق درجهان فیزیکی واقعی، ساخته‌شود؟ چنین ماشینی، همچون‌گیاه زندهٔ معمولی،عنصرهای خودرا از مواد دور و بر تامین می‌کند و ازآنها ترکیبهای لازمی‌را، که قادر به‌خودسازی هستند، به‌وجود آورد. این ماشین می‌تواند مواد لازم را ازمحیط دور وبر خود جداکند، به تصفیهٔ آنها بپردازد و ذخیره‌کند. مثلا، اگر چنین دستگاهی دراقیانوس‌گذاشته شود، خواهد توانست به‌عنوان مادهٔ اصلی خود، از منیزیومی که‌درآب وجود دارد استفاده‌کند وبه‌این‌ترتیب، امکان جمع‌آوری «محصول» منیزیوم را برای بشر به وجود آورد. تا امروزکسی نتوانسته است راهی‌راکه برای ساختن چنین‌ماشینی لازم است پیداکند، ولی من‌فکر می‌کنم سرانجام روزی ساخته خواهد شد.

ترجمهٔ پرویز شهریاری

> **اگرعقیده‌های سیاسی بر توده‌های مردم مؤثر می‌افتد برای این است‌که ظاهراً برابر بادرك و فهم آنان است، ولی اگر اندیشهٔ علمی رشد می‌کند به‌خاطر درستی آنهاست.**
>
> **هایزنبرگ**

معرفی کتاب

هوشنگ شکرانیان

CALCULUS (ریاضیات عمومی)

Mishel Spivach میشل اسپیوک

هفت، هشت سال پیش در یکی از روزهـای سرد زمستان بـه دفترکار دوستی که مسافرت کوتاهی به‌خارج کرده بوده، رفتم. وقتی که از او پرسیدم برای من چه‌سوقات آوردی خندید و گفت: «من اهل این چیزها نیستم. یکـی از استادان دانشگاه برکلی[1] این کتاب را به‌من هدیه‌کرده است» فکر می‌کنم کتاب جالبی باشد. وقتی کتاب را ورق زدم فکر کردم کتابی است سرسری مثل دیگر کتابهای ریاضیات عمومی که غالباً کپیه یکدیگرند، اواخر کتاب را ورق زدم که چشمم به تشریح منحنی وایرشتراس[2] افتاد (منحنی وایـراشتراس منحنی است که در تمام نقاط پیوسته است ولی در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد). در آخرین صفحات کتاب قضیه یگانگی اعداد حقیقی[3] را دیـدم. حتی

1. *Berekley* 2. *Weirstrass*

۳. اعداد حقیقی را به‌صورت میدان مرتب کامل تعریف می‌کنند. دراین‌قضیه ثابت می‌شودکه هردو میدان مرتب‌کامل باهم ایـزومورف هستند یعنی از لحاظ ریاضی یکی می‌باشند.

در کتاب مرجعی چون آنالیز ردین[1] از قضیه یـگانگی اعـداد حقیقی سخنی بمیان نیآمده است.

دوستم متوجه رضایت من شد و گفت: «اگر فرصت مطالعه آنـرا پیدا کردی مراهم درجریان بگذار.»

وقتی که به مطالعه کتاب پرداختم ابتدا نام نویسنده تـوجهم را جلب کرد، این بداست که آدم اول کتاب را ورق بزند، وقت صرف کند بعد نـام نویسنده کتاب‌را بخواند. میشل اسپیوك مردگمنامی نیست. او از ریاضیدانان بنام معاصر واستاد مسلم هندسه دیفرانسیل‌هاست. او در نهایت فـروتنی وقت خود را صرف نوشتن کتاب ریاضیات عمومی کرده است.

کتاب را به‌دقت مطالعه کردم، روشهای نو و جالبی درآن ارائـه شده است. درکتاب مسائل متعددی که پاره‌ای از آنها را می‌توان مسائـل مشکلی دانست آمده‌است. درنظرم این کتاب کلیدی است برای حل مشکلات فراوانی که در تدریس ریاضیات عمومی وجود دارد. علاوه براین کتاب خوبی است برای کسانی که بخواهند مقدمات آنالیز را از دیدگاه نوین فراگیرند. اینك دراین دومورد توضیح می‌دهم.

سالهاست که درس ریـاضیات عمومـی در دانشگاههای سراسر جهان تدریس می‌شود. تقریباً ازیك قرن پیش به‌این طرف همه ساله کتابهای متعدد ریاضیات عمومی منتشر می‌شود. اکثر دانشجویان این درس را می‌گـذرانند. این درس برای دانشجویان رشته‌های مهندسی و علوم فیزیك و ریاضی درسی است اساسی. همه‌ساله تعداد زیادی کتاب دراین زمینه طبع ونشر می‌شود که شبیه هم هستند. از ۱۹۶۰ به‌این طرف، دراکثر دانشگاهها ومدارس به‌تدریس ریاضیات جدید توجه شده است.

شیوه بیان مطالب ریاضیات عمومی کمی عوض شده است. از آنجاکه تدریس این‌درس خود بامشکلاتی همراه بوده است، این مشکلات درکتابهای ریاضیات عمومی بازتاب شده است. در اکثر دانشگاهها ایـن مسأله وجـود داشته است که‌چگونه می‌توان ریاضیات عمومی‌را بادیدگاهی نو به‌دانشجویانی که از ریاضیات جدید بی‌اطلاعند تدریس کرد. استادان ازیکسو ناچاربودند که مطالب سنتی ریاضیات عمومی‌را تدریس کنند و ازسوی دیگر برای‌اثبات دقیق قضایا وحفظ تسلسل‌منطقی مطالب فراوان وپراکنده‌ای دربارهٔ مجموعه‌ها

1. *Principle of Mathematic analysis* (*Walter Roudin* نوشتهٔ)

و مجموعهٔ نقاط بیان کنند. این حجم زیاد مطالب پراکنده باعث می‌شد که هدف، یعنی حفظ تسلسل منطقی، درلابلای مطالب پراکنده گم شود، یعنی هدف فدای وسیله شود.

پراکندگی مطالب ریاضیات عمومی سنتی چیزی نیست که بتوان ازآن انتقاد کرد. باید دردرس ریاضیات عمومی پاره‌ای مطالب ریاضیات سنتی که درفیزیك ومهندسی کاربرد فراوان دارد ذکر شود. ولی بیان مطالب پراکنده نظریهٔ مجموعه‌ها و مجموعهٔ نقاط ضرورتی ندارد، اینها فقط ابزاری هستند برای اثبات دقیق قضایا باحفظ تسلسل منطقی.

به‌نظر می‌رسد که مشکل اخیرناشی ازاین باشد که پیش از تدریس این مطالب در سالهای اول دانشگاهها اثبات دقیق قضایای ریاضیات عمومی برای کسانی صورت می‌گرفت که در ریاضیات تجربه کسب کرده و وقت کافی برای مطالعه داشته‌اند.

عده‌ای از معلمین معتقد بودند که اگرحجم کتاب را زیادکنیم ومطالب فراوان ومفصلی درمورد نظریهٔ مجموعه‌ها و مجموعهٔ نقاط ذکر شود مشکل برطرف می‌شود. این عقیده‌هم درست نبودزیرا دانشجوی ناآشنا را سردرگم می‌کرد. ولی میشل اسپیوك این مشکل‌را تاحدودی برطرف کرد. او درکتاب خودبه‌این امر توجه کرده است که برای اثبات قضایای اساسی ریاضیات عمومی واقعاً به‌چه مطالبی از نظریهٔ مجموعه‌ها و مجموعهٔ نقاط احتیاج است، او نشان داده است که نیاز چندانی به‌ذکر این مطالب نیست، مجموعه‌ها را تا آنجا معرفی کرده است که بتوان دسته‌ای ازنقاط‌را نشان داد. ازمجموعه‌نقاط نیز مطالب اندکی ذکرشده ومثلا فاصلهٔ باز را به صورت زیر تعریف کرده است:

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

بدون اینکه به‌تعریف مجموعه باز بپردازد. فاصلهٔ بسته‌را نیز به‌صورت زیر تعریف کرده است:

$$[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$$

این روش را در مورد مفاهیم آنالیز نیز به‌کار برده است. از ذکر پیوستگی یکنواخت، که درآن برای کسی که تازه مفهوم پیوستگی را فرا گرفته مشکل است، خودداری کرده و خواص اساسی توابع پیوسته و قضیهٔ اساسی حساب انتگرال و دیفرانسیل را بدون استفاده از پیوستگی یکنواخت ثابت کرده است، لازم به تذکر است که درکتاب ریاضیات عمومی آپوستل[1]

1. *Calculus by Tom Apostol*

نیز پیوستگی یکنوا ذکر نشده است ولی نویسنده فقط ثابت کرده است که توابع یکنوا درفاصله بسته انتگرال پذیرند. قضایای اساسی دنباله‌ها و سری‌های عددی را بدون اینکه مطالب زیادی گفته باشد، ثابت کرده است. همچنین قضایای‌اساسی دنباله‌ها وسری‌های تابعی‌را به‌دقت ثابت کرده است وسرانجام منحنی وایرشتراس‌راکه ازآن‌یاد شد به‌دقت بررسی کرده است.

براستی یکی‌از اشکالات اساسی کتابهای ریاضیات عمومی وبسیاری از دیگرکتابهای ریاضی این است که مطالبی پراکنده بدون‌اینکه به‌نتیجه محسوس و ملموس برسند ذکرمی‌کنند. وقتی که دانشجوی مصمم و پرکار به استاد خود اعتراض می‌کندکه چرا برای اثبات گسستگی فلان تابع این‌همه وقت صرف می‌کنید، این واضح است که تابع گسسته است، چگونه می‌توان لزوم اثبات دقیق را به این‌چنین دانشجویانی فهماند. بحث دقیق درمورد پیوستگی (ویا گسستگی) توابع‌وقتی معنی داردکه توابع‌پیوسته غیرعادی‌چون منحنی وایرشتراس‌موردبحث قرارگیرد. باارائه چنین‌مثالهائی اهمیت‌تعاریف دقیق حد وپیوستگی و مشتق درك می‌شود.

کتاب شامل ضمایم جالب توجهی است. اثبات متعالی[1] بودن اعداد e و π به‌دقت ذکرشده‌است.

درآخرکتاب به‌معرفی ۵۴ کتاب می‌پردازد ومطالعه آنهارا بخواننده توصیه می‌کند. این‌کتابها در زمینه‌های مختلف‌اند. پاره‌ای از کتابها برای اثبات برخی از قضایای اثبات نشده، درکتاب موردبحث است[2]. برخی از کتابهارا برای‌کسب دید بیشترواحاطه به‌مطالب‌کتاب، معرفی می‌کند. مثلا به معرفی‌کتاب «ضد مثالهای[3] آنالیز»[4] می‌پردازد. برای ملاحظه تابعی گسسته که

1. عدد متعالی، عددیست حقیقی وغیرجبری. عدد a را درصورتی جبری گویند که معادله درجه m امی باضرایب صحیح موجود باشدکه a ریشه‌آن باشد.
2. مثلاقضیه، «تجزیه اعداد طبیعی به‌حاصلضرب عوامل اول‌یگانی‌است.» درکتاب ثابت نشده است.
3. وقتی بخواهیم نشان دهیم‌که وجود فلان فرض درقضیه‌ای لازم است، مفهوم ریاضی‌ای را مثال می‌آوریم‌که تمام مفروضات قضیه به‌غیرازفرض موردبحث دارا باشد ونتیجه قضیه درموردآن صدق‌نکند. این‌گونه مثالهارا «ضد مثال» می‌گویند. ضدمثال ترجمه *Counter example* است.
4. *Counter example in Analysis;* نویسندگان *B. Gelbaum* و *J. Olmested*

در رابطه زیرصدق کند:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

به‌معرفی کتاب «نظریه مجموعه‌ها نوشته کمکه[1] می‌پردازد. چند کتاب در مورد محاسبه انتگرال نامعین توابع و جدول‌های انتگرال را معرفی می‌کند. سپس به‌معرفی کتابهائی درزمینه تاریخ وفلسفه ریاضی و ریاضیات همه فهم مانند کتاب «طرزتفکر ریاضیدانان بزرگ»[2] می‌پردازد. بالاخره کتاب «ریاضیات مقدماتی از دیدگاهی عالی»[3] را معرفی می‌کند. این‌نکته جالب‌توجه است که اکثرنویسندگان این‌کتابها آلمانی هستند.

میشل اسپیوك می‌داند که مطالعه این‌کتابها برای دانشجوئی که فقط یکسال ریاضیات عمومی (البته با این‌کتاب نه‌کتابهای معمول) را گذرانده باشد چند سال‌وقت می‌گیرد. درهرصورت‌مطالعه این‌کتابها برای فارغ‌التحصیلان‌ریاضی بخصوص کسانی که‌به‌تدریس ریاضیات عمومی وآنالیز مقدماتی اشتغال دارند بسیار جالب وسودمند است و خواننده برجوانب مطالب‌مسلط خواهدشد.

البته‌کتاب اشکالاتی نیز دارد. بطوری که نویسنده در مقدمهٔ کتاب متذکر شده‌است که «دراین‌کتاب‌ریاضیات عمومی ازنظر بسط وتکامل‌تدریجی ریاضیات موردبحث قرارگرفته است‌نه [مانند سایر کتابهای ریاضیات‌عمومی] به‌صورت نمونه‌هائی از مطالب [پراکنده].». بدین‌جهت این کتاب برای تدریس ریاضیات عمومی درهرکلاسی سودمند نیست. میشل اسپیوك درسال تحصیلی ۱۹۶۵–۱۹۶۶ درکلاسی ازدانشجویان برجسته دانشگاه براندیس[4] به‌تدریس پرداخته واین‌کتاب براساس تجربیات حاصل ازاین تدریس است، گرچه آنچه تدریس‌کرده است بامطالب این‌کتاب مطابقت ندارد.

این کتاب بالغ بر ۵۸۰ صفحه است و آدرس ناشر آن

W. A. Benjamin, Inc

و نشانی آن Memlo Park, California است.

---

1. *Theory of sets* نوشتهٔ *E. E. Kamke*
2. *Ways of Thought of Great Mathematicians* نوشته *O. Toeplitz*
3. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* نوشته *F. Klein*
4. *Brandeis University*

شطرنج و کامپیوتر

جعفرقلی امیربیات

اولین ماشین شطرنج باز (اگر بتوان آنرا ماشین نامید) دستگاهی بود که درحدود ۲۰۰ سال پیش توسط دونفر اطریشی ساخته شد ونام آنرا «ترك» (TURK) گذاشتند. ماشین شطرنج‌باز جعبه مکعب مستطیلی بود با تعدادی دریچه که برروی سطح بالائی آن مجسمه‌ای شبیه انسان و یك صفحه شطرنج قرار داشت. قبل ازشروع بازی دریچه‌های جعبه‌را یکی یکی باز می‌کردند ومقادیر زیاد چرخ و زنجیر وسیم ودنده وقرقره داخل‌آنرا بوضوح به‌حاضران نشان می‌دادند. بدینوسیله مردم اطمینان حاصل می‌کردند که بغیراز یك دستگاه مکانیکی چیزدیگری درمقابل‌آنها قرارندارد. بعد ازبستن دریچه‌ها، دستگاه بوسیله دستی که به مجسمه متصل بود مهره‌ها را حرکت داده و با یکی از حاضران بازی می‌کرد.این ماشین در سال ۱۷۷۰ درحضور ماریاترز ملکه اطریش شطرنج‌بازی کرد، سالهای سال دراغلب شهرهای اروپا وآمریکا بنمایش گذاشته شد، درمقابل بنیامین فرانکلین هنرنمائی نمود وحتی در سال ۱۸۰۹ (بنا به نوشته BUCK در شماره ژانویه ۱۹۴۷ مجله Chess Review) در مسابقه‌ای توانست ناپلئون را شکست دهد. بنا به‌نوشته مزبور ناپلئون از اینکه جعبه‌ای او را شکست داده است بقدری عصبانی می‌شود که

صفحه و مهره‌ها را بهم میریزد!!

راز جعبه شطرنج‌باز بالاخره درسال ۱۸۷۲ توسط دوپسر بچه که مردی را هنگام خروج از جاسازی آن دیدند فاش گردید.

***

ازسالهای نخستین تکامل کامپیوترهای‌شمارگر (Digital Computer) فکر بسیاری از محققین متوجه امکان استفاده از کامپیوتر برای حل‌مسائل غیر محاسباتی گردید. درمورد استفاده ازکامپیوتر برای ترجمه زبانها به‌یکدیگر- کمك به‌اثبات قضایای ریاضی- تجزیه وتحلیل سیستمهای اقتصادی- تشخیص امراض - پیش‌بینی وضع هوا وحتی تنظیم قطعات موسیقی ونوشتن داستان و غیره، تحقیقاتی بعمل آمد. یکی ازموارد بسیار جالب که مورد توجه قرار گرفت استفاده ازکامپیوتر برای بازی شطرنج است*. با درنظر گرفتن ماهیت بازی، نقش تفکر وتجربه درآن وبا توجه باینکه بخت (یا باصطلاح شانس آوردن) نقشی درآن ندارد، مطالعه درموردامکان استفاده ازکامپیوتر برای‌بازی شطرنج می‌تواند راه را برای استفاده‌های بیشماری از کامپیوتر روشن نماید.

دراینجا قبل از پرداختن به‌اصل موضوع مناسب است به‌چند اظهارنظر درمورد شطرنج کامپیوتری توجه کنیم:

بابی فیشر در سال ۱۹۷۲ دریك برنامه تلویزیونی اظهار داشته است:

«مطمئناً امکان دارد که روزی من (نوعی) مغلوب کامپیوتر شطرنج باز بشوم ولی مطمئناً زمان زیادی لازم دارد... برنامه‌های کنونی درسطح پائین بازی‌می کنند وعلت آن این است‌که در طراحی آنها فقط متخصصین کامپیوتر شرکت دارند و از شطرنج بازها کمك گرفته نشده است*.»

نوبرت وینر درکتاب خود «سایبرناتیك» درمورد شطرنج کامپیوتری چنین اظهار عقیده می کند:

«ماشین برای اینکار باید سریع کارکند، حرکات قانونی خود و حریفش را تا دو یا سه‌حرکت بررسی‌نموده وبنحوی سلسله حرکات را ارزیابی نماید. برای مات کردن حریف باید بالاترین ارزش و برای مات شدن پائین‌ترین ارزش را درنظر بگیرد. در مورد گرفتن ویا از دست دادن سوارها و پیاده‌ها باید ارزشهائی بکار برد که با ارزیابی‌های مشابه توسط بازیکنان ماهر موافقت داشته باشد.»

در سال ۱۹۴۴ که مقارن با سالهای اولیه تکامل ماشینهای محاسباتی الکترونی است جان فون نیومن و اسکار مورگن اشترن الگوریتم مینی ماکس

را (که بعداً مورد بحث قرار می گیرد) ارائه دادند و نحوه استفاده از آنرا برای بازی شطرنج کامپیوتری متذکر شدند. بنا به‌اظهار آنها :

یك بازی شطرنج بدلیل قانون بازی که: چنانچه درطول ۵۰حرکت هیچ پیاده‌ای حرکت نکند ویا هیچ سواری معاوضه نشود مساوی است - نمیتواند تا ابد ادامه پیدا کند. باین دلیل در هر مرحله‌ای از بازی چنانچه یك بازیکن بتواند تاآخر بازی (که شامل تعداد زیادی حرکت ولی در هر صورت محدود است) را در ذهن خود بررسی نماید قادر خواهد بود که بداند بازی را می‌برد، می‌بازد یا مساوی می‌کند.

این موضوع درشروع بازی نیز صادق است، باین معنی که بازیکن در صورت قادربودن به‌بررسی تمام حرکات ممکنه‌می‌تواند تشخیص دهدکه پس‌از اولین حرکت (حتی بفرض اینکه حریف همیشه بهترین جواب ممکنه را خواهد داد) در پایان بازی برنده یا بازنده ویا مساوی کننده است.

***

گرچه در وحله اول بنظر می‌رسد که بتوان با استفاده از کامپیوتر ترکیبات تمام حرکات‌را تاپایان بازی بررسی نمود وبهترین حرکت‌راانتخاب کرد، این موضوع، چنانچه بزودی خواهیم دید بعلت تعداد بسیار زیاد ترکیبات موجود عملی نیست.

برای انتخاب بهترین حرکت توسط کامپیوتر باید:

۱- بکمك معیارهائی همه‌چیز را بزبان عدد درآورد و به هر وضعیت نمره‌ای داد.

۲- درهروضعیت حرکتی راکه منجر به‌وضعیتی بابهترین نمره‌می گردد جستجو نمود.

۳- حتی‌المقدور سعی کردکه از بررسی حرکات و وضعیات غیر لازم و بالطبع ادامه شاخه‌های منشعب از آنها جلوگیری نمود.

در سطور آینده بترتیب در مورد هریك باختصار بحث خواهیم کرد.

بعضی از روشهای ارزیابی

از حدود بیست و اند سال پیش برنامه‌های متعددی برای بازی شطرنج بکمك کامپیوتر نوشته شده و معیارهای مختلفی برای انتخاب حرکات بکار رفته است*.

از نخستین کسانی که برای برنامه‌ریزی شطرنج کامپیوتری و تعیین معیارها عملا قدمی برداشته‌اند باید کلاد - شانون را نام برد شانون با قبول

اظهارنظر فون نیومن و مورگن اشترن در مورد محدود بودن تعداد حرکات یك بازی شطرنج، محاسبه کردکه حداکثر تعداد حرکات یك‌بازی ۶۳۵۰ بوده ودرحالت شروع بازی امکان تعقیب 10^{120} روند مختلف‌سلسله حرکات‌موجود است. باین حساب حتی سریع‌ترین کامپیوترها قادر نخواهند بود که در طی کمتر از 10^{90} سال، تمام امکانات را ازآغاز تا پایان بازی محاسبه نمایند*. چون‌این موضوع امری محال می‌باشد شانون پیشنهاد می‌کندکه بهتر است از عقیده وینر درمورد ارزش‌گذاری روی مهره‌ها و موقعیت آنها برای انتخاب یك حرکت استفاده نموده و به‌جنگ بی‌نهایت رفت! (یا نرفت؟)

عوامل مورد نظر شانون عبارت‌اند از:

۱ـ ارزش کمی:

وزیر = ۹ ، رخ = ۵ ، فیل = ۳ ، اسب = ۳ ، پیاده = ۱ ، شاه = ۲۰۰ (بیشترازمجموع ارزش بقیه مهره‌ها بمنظور اینکه در وحله اول حفاظت ازشاه مورد نظر باشد.)

۲ـ وضعیت پیاده‌ها:

برای پیاده‌ها پشت‌هم (دوبله)، پیاده عقب‌مانده (که توسط پیاده‌ای محافظت نشود) و پیاده‌های غیرقابل دفاع هریك ۰/۵ نمره منفی.

۳ـ تحرك:

برای‌هرحرکت قانونی موجودکه سوارها یاپیاده‌ها می‌توانندانجام دهند ۰/۱ نمره مثبت.

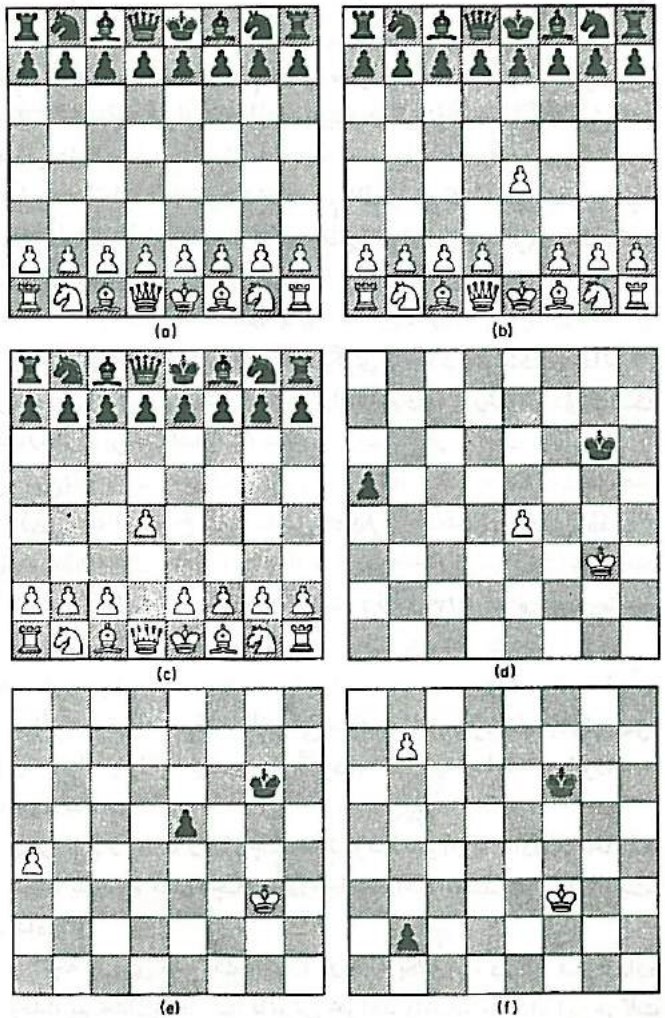
بنابراین ارزش کلی وضعیت بازی (از نقطه‌نظرکامپیوتر یا کسی که بررسی می‌کند) باین نحوه محاسبه می‌شود:

$$S = 200(R_1 - R_2) + 9(D_1 - D_2) + 5(T_1 - T_2) + 3(F_1 + C_1 - F_2 - C_2) + (P_1 - P_2) - 0/5(X_1 - X_2) + 0/1(M_1 - M_2)$$

که درآن X–P–C–F–T–D–R به ترتیب: شاه–وزیر–فیل–اسب–پیاده مجموع پیاده‌های دوبله، عقب مانده یا غیر قابل دفاع و M تعداد حرکات قانونی ممکنه است. مهره‌های کامپیوتر با (۱) ومهره‌های حریف با (۲) مشخص شده‌اند. شکل (۱) شش وضعیت مختلف را نشان می‌دهد که ارزش آنها با استفاده از معیار شانون ذیلا محاسبه می‌شود:

شکل (۱a) ـ چون وضعیت کاملا قرینه است ارزش وضعیت‌صفراست.

شکل (۱b) ـ ارزش وضعیت (۱+) بسود سفید است. علت این‌است که سفید اکنون ۵ حرکت فیل، ۴ حرکت وزیر، یك حرکت شاه ویك‌حرکت



شکل ۱

اسب بیشتر ازسیاه دارد که مجموعاً یازده حرکت می‌شود از آنجائیکه پیاده شاه قبلا دوحرکت قانونی داشته (یك خانه یا دو خانه به‌پیش) و اکنون فقط یك‌حرکت دارد مجموعاً ۱۰ حرکت اضافه شده است که (۱+) نمره مثبت دارد.

شکل (۱c) ـ (۰/۸) به‌سود سفید (برمبنای محاسبات قبلی).

شکل (۱d) و شکل (۱e) ـ در هر دو شکل ارزش صفر است. در حالیکه (۱d) موقعیت برنده برای سیاه بوده و (۱e) موقعیت برنده برای

سفید است.

شکل (1f) ـ دراینحالت هم‌ارزش صفر است در حالیکه اگـر نوبت حرکت سفید باشد سفید می‌تواند بازی‌را ببرد واگر نوبت حرکت سیاه باشد سیاه برنده خواهد شد.

بنابراین همانطور که خود شائون هم اظهار می‌کند ایـن نحوه امتیاز دادن فقط یك‌ارزیابی آماری است که در بعضی موارد بخصوص در حـرکات آخر بازی می‌تواند گمراه‌کننده باشد.

***

تقریباً همزمان با شائون پژوهشگر دیگری بنام آلن ترنینگ در دانشگاه منچستر سیستم ارزش‌گزاری نسبتاً کاملتری را ارائه داد. ارزش‌گذاری ترنینگ بر مبنای معیارهای زیر می‌باشد:

۱ـ ارزش کمی:

وزیر = ۱۰ ، رخ = ۵ ، فیل = ۳/۵ ، اسب = ۳ ، پیاده = ۱

۲ـ وضعیت پیاده‌ها:

۰/۲ نمره‌مثبت برای‌هرخانه به‌پیش رفته و ۰/۳ نمره مثبت چنانچه بوسیله سواری محافظت شود.

۳ـ تحرك:

ریشه دوم تعداد حرکات قانـونی سوارهـا و مهره شاه بعنوان نمره مثبت (چنانچه سوار بتواند سواری را بگیرد ۲ حرکت محاسبه می‌شود.)

۴ـ امنیت سوارها:

برای رخ و اسب و فیل چنانچه تـوسط سوار یا پیاده‌ای محافظت شوند یك‌نمره مثبت‌وچنانچه دومحافظ داشته باشند ۱/۵ نمره مثبت.

۵ـ امنیت شاه:

چنانچه وزیری همرنگ شاه را درخانه‌ایکـه شاه در آن قـراردارد بگذاریم تعدادی حرکت قانونی خواهد داشت، به‌تعداد این‌حرکات از ارزش وضعیت نمره کم خواهد شد.

۶ـ ارزش قلعه رفتن:

به‌تعداد حرکاتیکه بعد از وضع موجود شاه بتواند هنوز بقلعه برود نمره مثبت اضافه می‌شود. پس‌ازقلعه رفتن یك‌نمره مثبت دیگراضافه خواهد شد.

۷ـ کیش و مات:

نمره مثبت برای هرکیش‌که بتوان به‌شاه حریف داد ویك نمره‌مثبت

چنانچه تهدید مات میسر باشد.

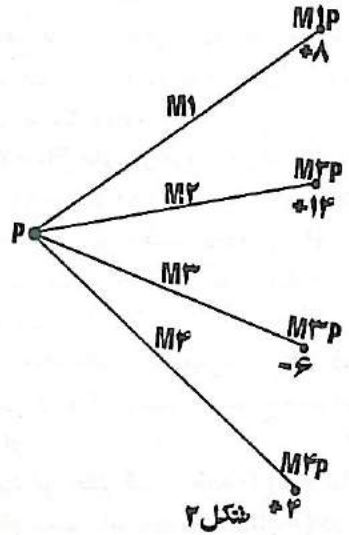
جستجو برای یافتن بهترین حرکت (درخت تجسس)

تعداد حرکات قانونی درمرحله آغاز شطرنج را برای سفید (یـا سیاه) حساب کنیم:

۱۶ حرکت پیاده‌ها (یك‌خانه یا دوخانه) و ۴ حرکت اسبها کـه جمعاً به۲۰ حرکت بالغ می‌شود. این‌رقم پس از بجلو رانـدن پیاده شاه بـه ۳۰ می‌رسد ودرجریان بازی بطور متوسط درحدود ۳۰ تـا ۳۵ حرکت قانونـی وجود دارد.

برای سادگی‌فرض می‌کنیم که درحالتی بخصوص فقط۴ حرکت‌قانونی (M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4) ممکن بـاشد (شکل ۲) نقطه P کـه نشان دهنده وضعیت درحالت مزبـور است را ریشه درخت تجسس وخطوطی که نقطه P را به M_1P ، M_2P ... وصل‌می‌کندرا شاخه‌می‌نامیم. نقاط M_1P ، M_2P... وضعیت بازی‌را پس‌ازانجام حرکات قانونی وممکن M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 مشخص‌می‌سازند.

با بکار بردن معیارهای ارزیابی (روش شائون، ترنینگ یـا هـر روش دیگر) می‌توان برای هر وضعیت ارزش عددی محاسبه کرد. فرض می‌کنیم که برای وضعیت‌هائی که پس‌ازحرکات قانونی‌وممکن ما بوجود می‌آید ارزش‌های



شکل۲

(+۸) ، (+۱۴) ، (−۶) و (+۴) محاسبه شود. چون حرکت M_2 باعث می‌شود که وضعیت بوجود آمده ارزش بیشتر از وضعیت‌های بوجود آمده توسط سه‌حرکت قانونی ممکن دیگر داشته باشد باید آنرا بعنوان بهترین حرکت بشناسیم. همینطور هم هست، ولی تا اینجا شطرنج بازی‌هستیم که فقط نیم‌قدم جلوتر را نگاه می‌کند وفراموش کرده است که حریف هم حق بازی دارد.

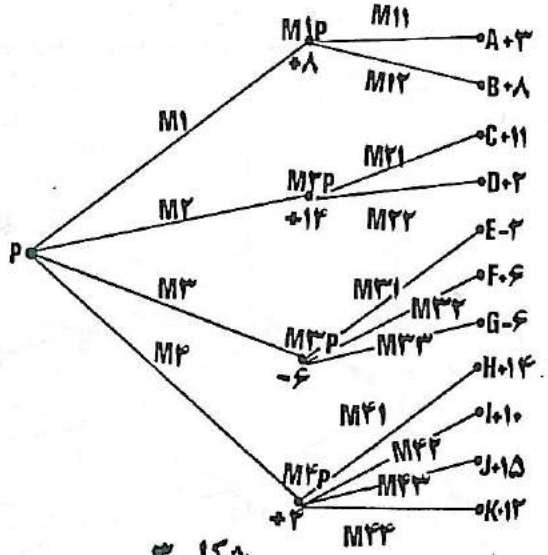
حالا به ۲ حرکت جلوتر فکر کنیم (حرکت ما و جواب حریف) (شکل ۳). فرض میکنیم در جواب حرکات M_1 ، M_2 و ... ما حریف به ترتیب دارای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ حرکت قانونی باشد (M_{11} ، M_{12} ، M_{21} ، M_{22} و ...) که مجموعاً ۱۱ وضعیت مختلف (A تا K) را بوجود میآورند.

اکنون وضعیت‌های یازده‌گانه که پس ازحرکت اول ما، و جوابهای ممکنه حریف پیش‌آمده است را ارزش‌یابی کنیم وفرض کنیم‌ارقامی‌که در کنار نقاط نوشته شده‌است بدست بیاید. آیا هنوزحرکت M_2 بهترین‌حرکت ما در وضعیت P است؟ مسلماً خیر! باید قبول کنیم که در جواب حرکت M_2 ما حریف بهترین جواب‌را خواهد داد و وضعیت D را بوجود میاورد که امتیاز مارا به (+۲) تقلیل می‌دهد. چون دربازی شطرنج باید همیشه منتظر بهترین‌جواب حریف بوده وبه‌امید اشتباه اونباشیم، باید حرکتی‌را دروضعیت P انجام دهیم که پس از بهترین حرکت حریف (بدترین حرکت ازنظر ما) وضعیت دارای بالاترین ارزش ممکنه باشد (فراموش نشود که ارزش وضعیت همیشه ازنقطه نظرمنافع ما محاسبه می‌شود.) بعبارت دیگر پس‌از حرکت ما و بهترین جواب حریف ارزش وضعیت مقداری باشد که بین حداقل‌های هر گروه بالاترین مقدار را بدست آورد.

در شکل (۳) حداقل‌های هرگروه به‌ترتیب ازبالا به‌پایین عبارتند از: (+۳) ، (+۲) ، (−۹) و (+۱۰) ، که بزرگترین آنها (+۱۰) مربوط به‌حالت I میباشد. یعنی اگر در وضعیت P حرکت M_4 را انجام دهیم، حریف حتی با بهترین جواب خود نمیتواند ارزش وضعیت را از (+۱۰) پائین‌تر بیاورد.

این الگوریتم بنام الگوریتم مینی‌ماکس معروف است وچنانچه ذکر شد توسط فون نیومن و مورگن اشترن ابداع شده است. (شکل ۴) درخت تجسس چهار مرحله‌ای را نشان میدهد.

برای یافتن بهترین حرکت درنقطه P ابتدا تمام وضعیت‌های نهائی ارزیابی میشود (ارقام سمت راست درخت شکل ۶) در وضعیت‌های فردمقادیر



شکل ۳

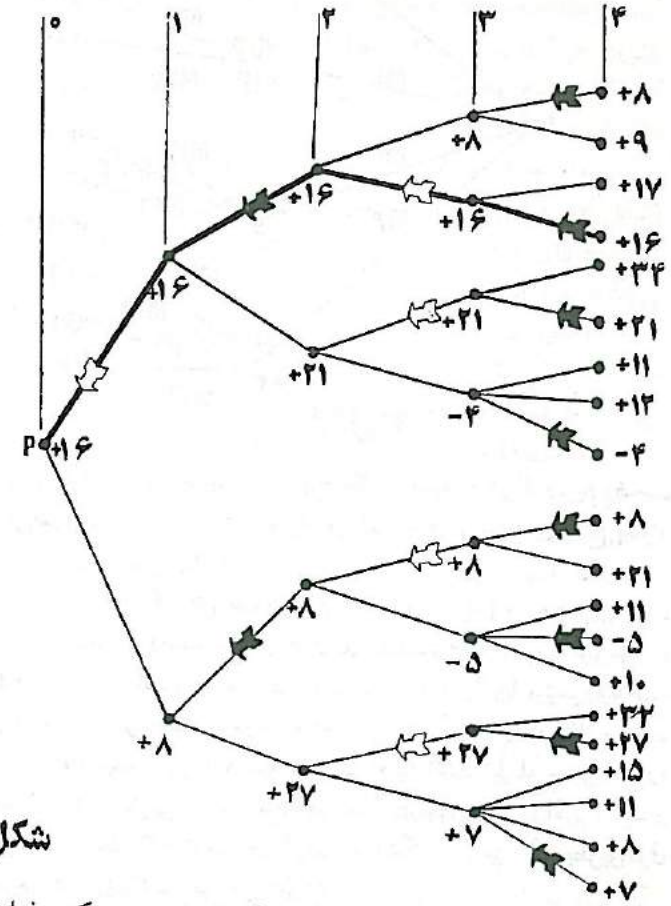
ماکسیموم هرگروه و در وضعیت‌های زوج مقادیر مینیموم هرگروه به وضعیت قبل منتقل‌می‌شود. (وضعیت‌های فرد پس‌ازحرکت ما ووضعیت‌های زوج پس‌از حرکت حریف بوجودمی‌آیند.)

در وضعیت ۴ (شکل ۶) مقادیر (+۸) ، (+۱۶) ، (+۲۰) و ... که مینیموم‌ها هستند به وضعیت‌های ۳ و در وضعیت ۳ مقادیر-(+۱۶) ، (+۲۰) و ... که ماکسیموم‌ها هستند به‌وضعیت ۲ و از آنجا مینیموم‌ها به وضعیت (۱) وبالاخره ماکسیموم (+۱۶) به‌وضعیت صفر منتقل میشود. راهی که منجر به‌رسیدن این عدد به وضعیت اولیه است سلسله حرکاتی را مشخص میکند که به‌بهترین وضع ممکنه در حرکت چهارم خواهیم رسید و بهترین حرکت درنقطه P مشخص می‌گردد. در (شکل ۳) نیز اگر بطریق‌فوق عمل کنیم حرکت M_4 انتخاب خواهد شد.

هرس کردن شاخه‌های اضافی

باتوجه باینکه در موقعیت‌های مختلف بازی شطرنج در حدود ۳۰ تا ۳۵ حرکت قانونی وجود دارد، اگر بخواهیم دوبازی جلوتر را بررسی کنیم (حرکت ما ـ حرکت حریف ـ حرکت ما ـ حرکت حریف) در حدود 10^6 نقطه پایانی شبیه نقاط دست راست شاخه‌های (شکل ۴) خواهیم داشت که باید تمام این نقاط ارزش‌یابی شده و الگوریتم مینی‌ماکس بکارگرفته

شود. برای اینکار انتخاب هرحرکت درحدود ۴۰ ثانیه وقت خواهد گرفت که زمان قابل توجهی نیست.

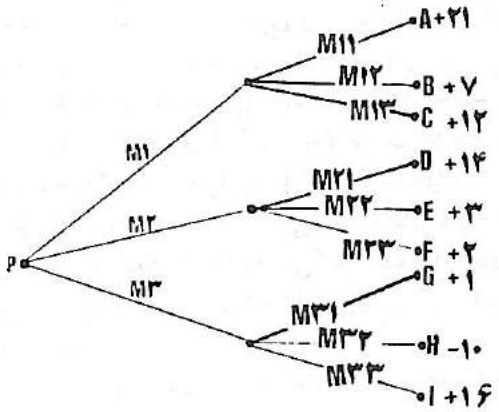


شکل ۴

چنانچه بخواهیم تا ۳ بازی (۶حرکت) را بررسی کنیم زمان مورد نیازکامپیوتر برای انتخاب بهترین حرکت به‌چندین ساعت بالغ خواهد شد. چون بررسی فقط ۴ حرکت سطح بازی را در مرحله‌ای کاملا ابتدایی نگهمیدارد وبررسی ۳ بازی یا بیشتر عملا غیر ممکن است باید راهی پیدا کرد که حتی‌المقدور از تعداد شاخه‌های درخت کم نموده و به ارتفاع آن (عمق پیشروی) افزود.

نقطه‌ضعف دیگری که‌بررسی تمام حرکات قانونی موجود تاعمق محدود

داردامکان گمراه‌کنندگی الگوریتم مینی‌ماکس درموارد تعویض سوارهاست. به (شکل ۳) مراجعه کنیم. الگوریتم مینی ماکس حرکت M_1 را مردود شناخته است چون این حرکت بازاء یکی ازجوابهای حریف (که بزعم ما بهترین جواب اوست) وضعیت‌را به‌نقطه A می‌رساندکه ارزشی معادل(۳+) داشته واین ارزش از (۱۰+) که حداقل ادامه حرکت M_4 میباشد کمتر است. چون محدود بودن عمق تجسس اجازه بررسی و ارزیابی جوابهای قانونی ما را پس ازحرکت M_{11} حریف نمی‌دهد ما به‌هیچوجه قادرنخواهیم بود. مثلا می‌دانیم آیا امکان گرفتن بلافاصله وزیر حریف پس ازانجام‌حرکت M_{11} وجود دارد یانه؟! به‌عبارت دیگرآیا واقعاً حرکت M_{11} بهترین حرکت



شکل ۵

حریف بوده است یا مابعلت محدود بودن امکانات تجسس خود آنرا بهترین حرکت او به حساب آورده‌ایم؟

برای رفع این نقطه‌ضعف، شانون استراتژی دیگری پیشنهاد می‌کند که درموارد ویژه ازقبیل تعویض سوارها ـ دادن کیش و غیره‌شاخه مربوطه را تا عمق بیشتری تجسس نموده وبقیه شاخه‌ها متوقف می‌گردند. تجسس در شاخه‌های ویژه تا برخورد به‌وضعیت «معمولی» که درآن تعویض سوارها و حالت کیش مطرح نباشد ادامه پیدا می‌کند.

الگوریتم دیگری که از ادامه شاخه‌های غیرلازم جلوگیری وبالنتیجه دروقت تجسس صرفه‌جوئی می‌نماید الگوریتم «آلفا ـ بتا» نام داردکه بشرح طرزکارآن می‌پردازیم. درخت تجسس (شکل ۵) را درنظر بگیریم و فرض کنیم باکمك الگوریتم مینی‌ماکس می‌خواهیم بهترین حرکت را پیدا

نمائیم. کامپیوتر اول حرکت M_1 را آزمایش می‌نماید و باین نتیجه می‌رسد که حریف بازاء جوابها M_{11} ، M_{12} و M_{13} وضعیت‌های A ، B و C با ارزشهای (+۲۱) ، (+۷) ، (+۱۲) را بوجود خواهدآورد. چون‌فرض براین است که حریف همیشه بهترین حرکت را انجام می‌دهد، بدترین نتیجه (ازنظر ما) وضعیتی با ارزش (+۷) خواهد بود. در مرحله بعدی برمبنای الگوریتم مینی‌ماکس کامپیوتر باید حرکت M_2 را بررسی کرده و جوابهای حریف (M_{21} ، M_{22} و M_{23}) را ارزیابی بنماید. الگوریتم آلفا - بتا نشان می‌دهد که پس‌از ارزیابی نقاط D و E دیگر احتیاجی به‌ارزیابی وضعیت F نیست، چون بادرنظر گرفتن‌ارزش (+۳) که از (+۷) کمتراست، کامپیوتر مطمئن خواهد بود که در هرصورت حرکت M_2 (که به‌حریف امکان حرکت M_{22} را می‌دهد) مردود بوده ولازم نیست به جستجوی بیشتر درشاخه‌های آن بپردازد. بهمین نحو وقتی سه‌جواب ممکن حریف را در مقابل M_3 بررسی می‌کندپس ازارزیابی نقطه G که بازای جواب M_{31} بدست می‌آید احتیاجی به‌بررسی‌جوابهای M_{32} و M_{33} ندارد. چون‌مقدار (+۱) که پس ازجواب M_{31} درمقابل حرکت M_3 بوجود می‌آید کمتراز(+۷) دروضعیت B است.

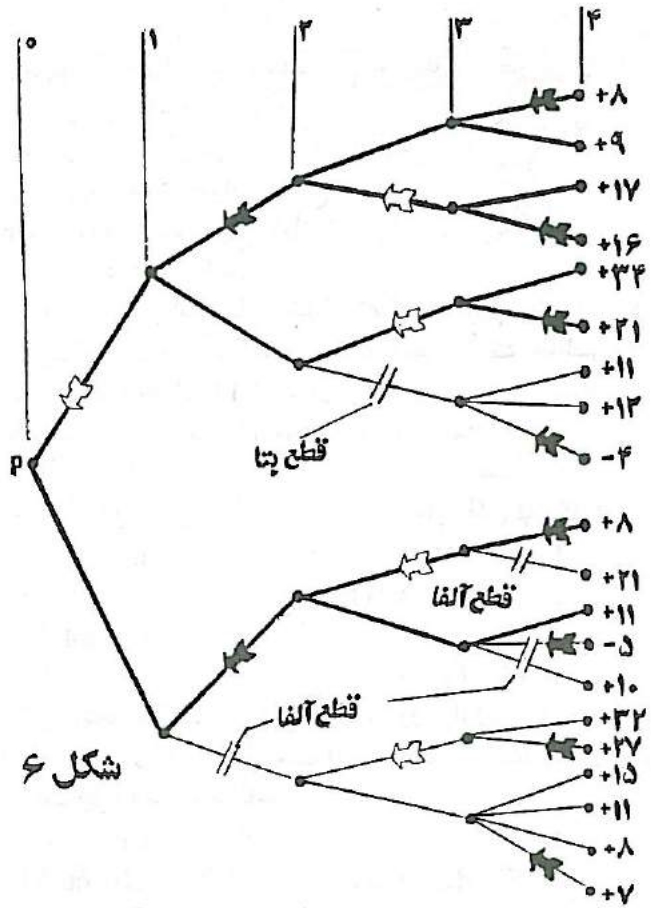
با بکاربردن این روش کامپیوتر بعوض ۹ ارزیابی فقط ۶ تای آنها را انجام می‌دهد و ازجستجوهای بی‌ثمر دیگر خودداری می‌کند. قطع شاخه‌های زوج را «قطع آلفا» وقطع شاخه‌های فرد را «قطع بتا» می‌نامند. که اسم الگوریتم از آن گرفته شده است.

(شکل ۶) درخت ۴ حرکتی (حرکت ما ـ جواب حریف ـ حرکت ما ـ جواب حریف) را نشان میدهد که درآن شاخه‌های زاید در حرکات مختلف قطع شده است.

دراین مثال بجای ۲۰ ارزش‌یابی درمرحله آخر فقط ۸ ارزش‌یابی لازم بوده و ازادامه ۱۲ شاخه دیگر(خطوط نازك) خودداری بعمل آمده‌است.

نخستین بازی شطرنج با معیارهای عددی

درسال ۱۹۵۱ ترنینگ با درنظر گرفتن معیارهای پیشنهادی خود و استفاده از درخت تجسس ۲ مرحله‌ای (بازی ما ـ جواب حریف) نخستین بازی را درمقابل یك‌حریف مبتدی انجام داد. جالب اینجاست که دراین‌بازی از دستگاه کامپیوتر استفاده نشد و ترنینگ ارزش حرکات را بادست محاسبه کرده وبدون دخالت سلیقه خود بهترین حرکت را انتخاب نموده است. برای بهبود بازی باکمك معیارهای عددی ترنینگ درموارد ویژه (شبیه استراتژی



شکل ۶

چنانچه وضعیتها را درمرحله ۴ ازبالا به‌پائین ارزشیابی‌کنیم پس از بدست‌آوردن (+۲۱) برای وضعیت ششم احتیاجی بارزشیابی گروهی‌که شاخه‌های هفتم وهشتم ونهم را دربر دارد نیست. چون اگر مینیموم این گروه‌از (+۲۱) بزرگتر باشد و بتواند پس‌از شکست (+۲۱) در مرحله ۳ (که ماکزیموم‌ها انتخاب میشوند) به مرحله ۲ (که مینیموم‌ها انتخاب میشوند) برسدآنجا بعلت بزرگتربودن از(+۱۶) حذف خواهد شد. اگراز (+۲۱) کوچکتر باشدکه درهرصورت درمرحله ۳ مغلوب آن خواهد شد. همینطور پس‌از بدست‌آوردن (+۸) برای وضعیت دهم ارزشیابی شاخه دیگر بی‌مورد است چون‌اگر از(+۸)کمتر بوده وحتی بتواند بمرحله ۱ برسد درمقابل(+۶) حذف خواهد شد. پس‌از یافتن‌ارزش (+۱۱) برای وضعیت دوازدهم احتیاجی به ارزشیابی شاخه‌های دیگر نیست. چون اگر مینیموم‌آنها از (+۸)کمتر باشد و بتواند به مرحله ۱ برسد از (+۱۶) شکست خواهد خورد و اگراز (+۸) بزرگتر باشد در مرحله ۲ مقابل (+۸) متعلق به وضعیت ۱۰ حذف خواهد شد.

پیشنهادی شانون) که ذیلا نامبرده شده است شاخه‌های بخصوصی را تااعماق بیشتری بررسی کرده است:

۱ـ درمورد پس‌گرفتن سوار ازدست رفته.
۲ـ درمورد گرفتن سوار بی‌دفاع حریف.
۳ـ درمورد تعویض سوار کم‌ارزش‌تر باسوار حریف.
۴ـ درمورد کیش ومات.

قبل ازمطالعه حرکات دقت نمائیدکه اعداد داخل پرانتز نشان دهنده ارزش وضعیت پس از هرحرکت است و در ضمن ترنینگ بخاطر سهولت محاسبات، ریشه دوم اعداد را (که برای امتیاز دادن به تحرك سوارها بکار میرود) باتقریب وتا یك‌رقم اعشار محاسبه کرده است.

سفید معیارهای ترنینگ	سیاه بازیکن مبتدی
1. e4 (۴/۲)	e3
2. C—c3 (۳/۱)	C—f6
3. d4 (۲/۶)	F—b4
4. C—f3 (۲/۰)	.....

اینجا باوجود اینکه حرکت دادن فیل بخانه‌دوم وزیر ارزش بیشتری به‌وضعیت میدهد معهذا جستجوی ۲ حرکتی بعلت اینکه سیاه میتواند پیاده وزیر را بگیرد حرکت فیل را مردود میشناسد.

4.	d6
5. F—d2 (۳/۵)	C—c6
6. d5 (۰/۲)	C—d4
7. h4 (۱/۱)	.....

دراینجا معیار ارزش‌یابی فقط بخاطر اینکه حرکت پیاده تحرك بیشتری به‌رخ می‌دهد این حرکت‌را پیشنهادمی‌نماید. اینگونه حرکات دربیشتر بازیهای‌انجام شده توسط کامپیوتر دیده می‌شود.

7.	F—g4
8. a4 (۱/۰)	.....

دوباره حرکت بیهوده‌ای بخاطر ازدیاد تحرك رخ!!

8.	C×C+
9. g2×C	F—h5
10. F—b5	.....

شکل ۷

(شکل ۷) صحنه بازی‌را پس‌از حرکت دهم سفید نشان می‌دهد. اگر چه‌کیش‌دادن‌به‌شاه سیاه دراین وضعیت‌حرکت‌بدی نیست ولی‌باید درنظرداشت که امتیاز اضافی برای هرکیش‌که درمعیارهای ارزیابی گنجانده شده است باعث انتخاب این حرکت بوده است.

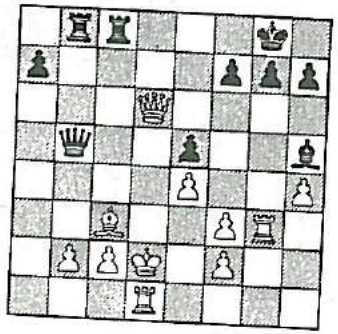
10.	c6
11. d5×c6	0—0
12. c6×b7	S—b8
13. F—a6 (—۱/۵)	D—a5
14. D—e2 (۰/۶)	C—d7
15. T—g1 (۱/۲)	C—c5
16. T—g5	F—g6
17. F—b5 (۰/۴)	C×b7
18. 0—0—0 (۳/۲)	C—c5
19. F—c6	T(f8)—c8
20. F—d5	F×C
21. F×F (۰/۷)	D×a4
22. R—d2	C—e6
23. T—g4 (—۰/۳)	C—d4
24. D—d3	C—b5
25. F—b3	D—a6
26. F—c4	F—h5
27. T—g3	D—a4
28. F×C	D×F

29. D×d6

(شکل ۸) صحنه بازی را پس‌ازحرکت ۲۹ سفید نشان می‌دهد. برنامه چون یك‌حرکت سیاه‌را بیشتر بررسی نمی‌کند ازعاقبت‌آچمزشدن وزیر خودبی‌خبر است و دنبال پیاده گرفتن می‌رود!

29. ..... T—d8

سفید بازی‌را واگذار می‌کند.



شکل ۸

از زمان بازی فوق تاکنون خیلی چیزها تغییرکرده است که مهمترین آنها درمورد شطرنج کامپیوتری سرعت ماشین‌های امروزی است. سرعت محاسبات درکامپیوترهای بعد ازدهه هفتم قرن بیست متجاوز ازصد برابر کامپیوترهایی است‌که دردهه پنجم بکار میرفته است واین موضوع‌امکان‌می‌دهد که حتی برنامه‌های آنزمان را بکمك جستجو تا اعماق بیشتر بهبود بخشید. نکته دیگری که باید بآن اشاره کرد تجربیاتی است‌که دراین مدت جمع‌آوری شده وبا بررسی حرکات ضعیف برنامه‌های کامپیوتری توسط اساتید شطرنج ازقبیل میخائیل بوتوینیك (کسی‌که سالهای سال عنوان قهرمانی‌جهان را داشته است) وهانس برلینر (قهرمان اسبق شطرنج مکاتبه‌ای جهان)، برنامه نویسان توانسته‌اند بقدرت بازیگری برنامه‌های خود بیافزایند.

الگوریتم‌های اضافی ـ مجهزکردن برنامه‌ها به پرونده‌ای که شروع بازیهای مختلف‌را ضبط کرده است وخیلی عوامل دیگرنیز درپیشرفت‌شطرنج کامپیوتری مؤثر بوده است. در سال ۱۹۷۴ نخستین مسابقه جهانی شطرنج کامپیوتری با شرکت سیزده «برنامه» ازهشت کشور درشهر استکهلم برگزار شد. دراین مسابقه چهار برنامه از ایالات متحده آمریکا ـ سه برنامه از انگلستان ـ یك برنامه از اطریش ـ یك برنامه از کانادا ـ یك‌برنامه از

مجارستان ـ یك‌برنامه از نروژ ـ یك برنامه ازکشور سویس ویك برنامه از اتحاد جماهیر شوروی شرکت داده شد. درپایان مسابقات که بطریق سویسی در چهار دوره انجام می‌گرفت، برنامه KAISSA از کشور شوروی مقام اول ـ برنامه CHESS از ایالات متحده مقام دوم و برنامه RIBBIT از کانادا مقام سوم را بدست آوردند.

برنامه قهرمان قبلا درسال ۱۹۷۲ دو مسابقه همزمان با خوانندگان روزنامه Komsomolskia Pravda انجام داده بود.

ترتیب بازی باین‌نحو بودکه هرصبح یکشنبه حرکت انجام شده‌توسط کامپیوترباطلاع خوانندگان می‌رسید و خوانندگان جوابهای خودرا روز بعد با پست ارسال می‌داشتند. حرکتی که ازطرف اکثریت انتخاب شده بود بعنوان جواب خوانندگان به‌کامپیوتر تغذیه می‌گردید ودرضمن به صد نفر از کسانیکه بیشتر ازبقیه جوابهائی مطابق جواب اکثریت داده بودند جوائزی داده میشد. این مسابقه با نتیجه ۱/۵ به ۰/۵ بنفع خوانندگان بپایان رسید. لازم بتذکر است که درمسابقه مشابهی بوریس اسپاسکی توانسته بود بانتیجه ۱/۵ به ۰/۵ خوانندگان را شکست دهد. در برنامه KAISSA درخت تجسس تا ۷ حرکت را بررسی نموده و درحالات «ویژه» تا اعماق بیشتری به‌جستجو می‌پردازد. درپایان برای‌اطلاع ازاینکه سطح بازی برنامه درچه‌حد است یکی از بازیهای مسابقه فوق‌الذکررا شرح می‌دهیم. اعداد داخل‌پرانتز ارزش وضعیت‌ها را ازنظرکامپیوتر نشان می‌دهد.

سفید (KAISSA)	سیاه (خوانندگان)
1. e4 (+۲۵)	c5
2. C—c3 (+۴۰)	.....

برای انتخاب این حرکت کامپیوتر ۴۵ دقیقه وقت صرف کرده است و ۵۴۰،۰۰۰ وضعیت را بررسی نموده است.

2.	C—c6
3. C—f3 (+۴۷)	d6
4. F—b5 (+۱۱)	.....

برای انتخاب این حرکت ۶۳۱،۰۰۰ وضعیت بررسی شده است.

4.	F—d7
5. 0—0(+۶۰)	g6
6. d4 (+۱۰۱)	C5×d4

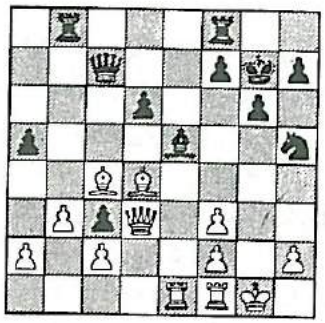
7. F×C (+۱۶۰) d4×C
8. F×b7 T−b8
9. F−d5(+۱۲) F−g7
10. b2−b3 (+۴۰) C−f6
11. F−e3 (+۵۷) .....

برای انتخاب این حرکت ۱،۵۰۰،۰۰۰ وضعیت بررسی شده است.

11. ..... D−c7
12. D−d4 (+۸۵) a7−a5
13. F−c4 0−0
14. T(a1)−e1 F−c6
15. e4−e5 (−۱۴) F×C

ازحرکات دیگری که تعداد زیادی ازخوانندگان انتخاب کرده بودندحرکت اسب سیاه به‌خانه شاه وحرکت اسب به‌خانه پنجم شاه سیاه است.

16. e5×d6 (−۲۵) e7×d6



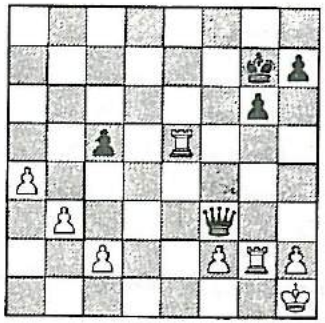
شکل ۹

17. g2×F C−h5
18. D−d3 F−e5
19. F−d4 R−g7

(شکل ۹) صحنه بازی را پس از حرکت ۱۹ سیاه نشان می‌دهد. در اینمورد حرکات رفتن فیل به f4 ، تعویض فیل‌ها وحمله اسب سیاه به‌وزیر سفید هم توسط خوانندگان زیادی پیشنهاد شده بود.

20. T−e3 (+۱۴) f7−f6
21. T(f1)−e1 C−f4

22. D×c3 T(b8)−c8
23. a2−a4 (+۴۱) D−d7
24. F×F f6×F
25. R−h1 (+۹) D−h3
26. T−g1 C−d5
27. D×a5 T−c5
28. D−a7+ T−c7
29. D−a5 T−c5
30. D−a7+ T−f7
31. D×T(c5) (−۱۶۲) d6×D
32. F×C T−f4
33. T×e5 T×f3
34. F×T D×F+
35. T−g2



شکل ۱۰

بازی دراین حالت مساوی اعلام گردید.

* نخستین کسی‌که فکر بازی شطرنج بسبك مُاشین را مطرح می‌کند چارلز بابیج استاد ریاضی دانشگاه کمبریج وسازنده یکی از نخستین ماشینهای محاسباتی بودکه متأسفانه باوجود مطرح‌کردن موضوع، نظریه‌ای درموردچگونگی استفاده از ماشین را ذکر نمی‌کند.

* متأسفانه باید گفت‌که فیشر اشتباه کرده است و در طراحی برنامه‌های شطرنج‌باز اساتید بین‌المللی شطرنج آمریکا وحتی قهرمان اسبق جهان میخائیل بوتوینیك همکاری داشته‌اند.

میخائیل بوتوینیك حتی نظرات خود را درکتابی بنام کامپیوتر ـ شطرنج و برنامه‌ریزیهای دراز مدت انتشار داده است.

* حتی اخیراً ماشین کوچکی بحجم تقریبی ۵×۲۰×۴۰ سانتیمتر به بازار آمده است که درسه سطح مبتدی، متوسط وپیشرفته بازی می‌کند. سطح بازی پیشرفته آن درحدود سطح بازی متوسط یك‌شطرنج‌باز دبیرستانی است.

* باکامپیوترهای امروزی زمان لازم یکصدم این مقداراست‌که هنوززمان قابل توجهی است!

رمز و راز عددها

۱. پانزده مرتبه دو

در اینجا عددهای نامعلوم (که با ستاره مشخص شده است) می‌توانند هر رقمی به‌جز ۲ باشند. ضمناً در ده رقم مقسوم علیه و خارج قسمت، تمام رقمهای از ۰ تا ۹ وجوددارد. رقمهای نامعلوم را پیدا کنید.

```
*****|*********2*2
2****|    ****3*
-----------------
          ******
          *****3*
-----------------
          2*****3
          222****
-----------------
          3******
          ******
-----------------
          2*****2
          2*****2
-----------------
```

۲. یازده مرتبه یك

دراینجا هم، هرستاره نمایندهٔ یك‌رقم است، ولی این رقم هرچیزی می‌تواند باشد به‌جز ۱. ضمناً در ده رقم مقسوم‌علیه و خارج قسمت، تمام رقمهای از ۰ تا ۹ وجود دارد. رقمهای نامعلوم را پیدا کنید.

```
*****|*********1*1
*****|    ****1*
-----------------
          ****11
          *****
-----------------
          1******
          ******
-----------------
          ******1
          *****1
-----------------
```

پاسخ در صفحه ۵۱

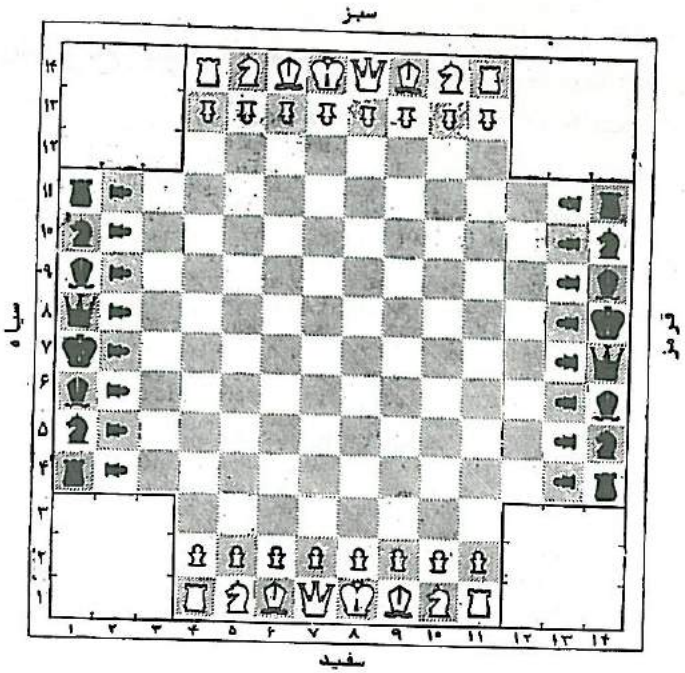
شطرنج چهار نفره

به‌جز بازی معمولی شطرنج در ۶۴ خانه‌که همه با آن آشناهستند، دست‌کم بیست نوع بازی دیگر شطرنج وجود دارد که کمتر شناخته شده است. از میان اینها یك بازی که به‌اصطلاح چهارنفره نامیده می‌شود، بیش از همه جالب است. دراین بازی‌که در ۱۶۰ خانه انجام می‌شود،چهار نفر شرکت می‌کنند. بازی شطرنج چهار نفره، خیلی جدید نیست و مثلا آ. د. پتروف، یکی از بزرگترین استادان شطرنج، در سال ۱۸۶۲ ، اصول این بازی‌را شرح داده است.

اصول بازی شطرنج چهار نفره

قاعدهٔ اصلی در بازی چهارنفره همان قاعدهٔ معمولی بازی در ۶۴ خانه است.

۱ـ در بازی چهار نفره، دو به‌دو باهم یار هستند. بازیکنانی که روبروی هم نشسته‌اند، یارهم به‌حساب می‌آیند. هربازیکن فقط با ۱۶مهره



خود بازی می‌کند. آغاز حرکت به‌نوبت ومطابق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. مهره‌های بازیکنان یار، بایکدیگر همکاری می‌کنند. یارها، فقط وقتی اجازه مشورت کردن دارند که شاه یکی از آنها مات شده باشد.

۲ـ وزیرها طرف چپ شاه قرار می‌گیرند.

۳ـ با مات شدن یکی از شاهها بازی با شرکت سه بازیکن ادامه پیدا می‌کند. بازیکنی که یکتنه با دو حریف نبرد می‌کند. (آنها در مقابل یك‌حرکت او دو حرکت دارند) حق دارد شاه بازیکن متحد خودرا از مات بودن برهاند (از راه گرفتن مهره کیش‌دهنده ویا از راه دفاع). پس از رفع ماتی از شاه، بازیکنی که از بازی خارج شده بود، دوباره وارد بازی می‌شود.

۴ـ مهره‌های «مات شده» (پات شده) درتمام مدت حالت ماتی (پاتی)، یعنی از لحظه اولین اجازه حرکت تا لحظه انجام اولین حرکت پس از ماتی، در برابر حریف‌ها مصون، هستند.

۵ـ مهره‌های «مات شده» (پات شده) قدرت ضربه‌ای خود را در برابر شاههای حریفها حفظ می‌کنند، یعنی شاهها حق ندارند درخانه‌های زیر ضربه این مهره‌ها قرار گیرند.

حمله و عقب‌نشینی در استقرا

دکتر علیرضا امیرمعز

گاهی دراستقراء ریاضی موضوعی را برای اعداد بصورت 2^n ثابت می‌کنند وسپس‌استقراء را بعقب برمی‌گردانندکه برای همهٔ اعداد طبیعی‌ثابت شود. از آنجمله قضیه معروف مقایسه میانگین عددی و هندسی اعداد مثبت است. دراین یادداشت سعی می‌کنیم که اثبات به‌روش حمله و عقب‌نشینی در استقراء را بکاربریم.

۱ـ قضیه: اگر a_1 و a_2 دوعدد مثبت باشند، داریم:

$$\frac{1}{2}(a_1+a_2) \geqslant \sqrt{a_1 a_2} \qquad (1)$$

اثبات این قضیه بسیار ساده است و از بسط $|a_1-a_2|^2 \geqslant 0$ بدست می‌آید. از اینرو ازآن صرفنظر می‌کنیم.

۲ـ قضیه: اگر که x_1، x_2، x_3 و x_4 اعداد مثبت باشند، داریم:

$$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) \geqslant (x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{4}} \qquad (2)$$

برهان: درنامساوی (۱) فرض می‌کنیم که

$$a_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2) \quad و \quad a_2=\frac{1}{2}(x_3+x_4)$$

باشد، لذا

$$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) \geqslant \sqrt{\frac{(x_1+x_2)(x_3+x_4)}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}\ \sqrt{\frac{x_3+x_4}{2}} \geqslant \sqrt{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{2}}$$

درنتیجه قضیه برای ۱، ۲ و ۴ درست است؛ می‌توان گفت که استقراء از 2^1 به 2^2 انجام شده است. ملاحظه می‌شود که این روش را می‌توان ادامه داد. قضیه زیرحالت استقراء از 2^k به 2^{k+1} می‌باشد.

۳ـ تشریح شمردن: هرگاه قضیه نامساوی بین میانگین عددی ومیانگین هندسی‌را برای 2^k قبول کنیم وبخواهیم آنرا برای 2^{k+1} ثابت کنیم، لازم‌است که‌عدهٔ اعداد را درست بشمریم. بنابراین اعداد را به‌ترتیب ازیك تا 2^{k+1} می‌نویسیم که موضوع روشن شود:

۱ و ۲ و ۳ و ... و 2^k و 2^k+1 و 2^k+2 و 2^k+3 و ... و 2^k+2^k

ملاحظه می‌شود که

$$2^k+2^k=2^{k+1}$$

بنابراین شمار جمله‌های رشته:

$$\{2^k+1 \text{ و } 2^k+2 \text{ و } \dots \text{ و } 2^{k+1}\}$$

برابر 2^k می‌باشد.

۴ـ قضیه: فرض کنیم که برای اعداد مثبت x_1 ، x_2 ، ... ، x_{2^k} رابطه زیر صدق کند.

$$\frac{1}{2^k}(x_1+x_2+\dots x_{2^k}) \geqslant \sqrt[2^k]{x_1\cdot\dots\cdot x_{2^k}} \qquad (3)$$

سپس برای اعداد مثبت

y_1 و y_2 و ... و y_{2^k} و y_{2^k+1} و y_{2^k+2} و ... و $y_{2^{k+1}}$ نیز، رابطهٔ

$$\frac{1}{2^{k+1}}(y_1+\dots+y_{2^{k+1}}) \geqslant \sqrt[2^{k+1}]{y_1\cdot\dots\cdot y_{2^{k+1}}}$$

درست است.

برهان: برای نامساوی (۱) فرض می‌کنیم که:

$$a_1=\frac{1}{2^k}(y_1+\dots+y_{2^k}) \text{ و } a_2=\frac{1}{2^k}(y_{2^k+1}+\dots+y_{2^{k+1}})$$

از اینرو

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y_1+\dots+y_{2^k}}{2^k}+\frac{y_{2^k+1}+\dots+y_{2^{k+1}}}{2^k}\right)=$$

$$\frac{y_1+\dots+y_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geqslant$$

$$\sqrt{\left(\frac{y_1+\dots+y_{2^k}}{2^k}\right)\left(\frac{y_{2^k+1}+\dots+y_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}$$

اکنون از نامساوی (۳) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{y_1+\dots+y_{2^k}}{2^k} \geqslant \sqrt[2^k]{y_1\cdot\dots\cdot y_{2^k}}$$

و

$$\frac{y_{2^k+1}+\dots+y_{2^{k+1}}}{2^k} \geqslant \sqrt[2^k]{y_{2^k+1}\cdot\dots\cdot y_{2^{k+1}}}$$

از اینرو

$$\frac{1}{2^{k+1}}(y_1+\dots+y_{2^{k+1}}) \geqslant$$

$$\sqrt{\sqrt[2^k]{y_1\cdot\dots\cdot y_{2^k}}\ \sqrt[2^k]{y_{2^k+1}\cdot\dots\cdot y_{2^{k+1}}}}$$

$$=\sqrt[2^{k+1}]{y_1\cdot\dots\cdot y_{2^{k+1}}}$$

در نتیجه میانگین عددی اعداد مثبت بزرگتر یا مساوی میانگین هندسی آنهاست‌وقتیکه عده آنها

$$2^p \text{ و } p=0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } \dots$$

باشد

اکنون برای اثبات قضیه بـرای تمام اعداد طبیعی روش عقب‌نشینی در استقراء را بکار می‌بریم.

۵ـ قضیه: فرض می‌کنیم که a_1 ، ... ، a_n اعداد مثبت باشند و

$$\frac{1}{n}(a_1+\dots+a_n) \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot\dots\cdot a_n}$$

باشد. سپس برای اعداد مثبت x_1 ، x_2 ، ... ، x_{n-1} نیز

$$\frac{1}{n-1}(x_1+\dots+x_{n-1}) \geqslant \sqrt[n-1]{x_1\cdot\dots\cdot x_{n-1}}$$

صدق می‌کند.

برهان: هرگاه قرار دهیم:

$$x_1=a_1 \text{ و } x_2=a_2 \text{ و } \dots x_{n-1}=a_{n-1} \text{ و}$$

$$\frac{1}{n-1}(x_1+\dots+x_{n-1})=a_n$$

نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{n}(a_1+\dots+a_n)=$$

$$\frac{1}{n}\left(x_1+\dots+x_{n-1}+\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right) \geqslant$$

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\dots\cdot x_{n-1}\cdot\left(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)}$$

ملاحظه می‌شود که

$$\frac{1}{n}\left(x_1+\dots+x_{n-1}+\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)=\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{n-1}(x_1+\dots+x_{n-1}) \geqslant$$

$$(x_1\cdot\dots\cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n}}\left(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

هرگاه طرفین تساوی را بر

$$\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}$$

تقسیم کنیم نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \geqslant (x_1\cdot\dots\cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n}}$$

هرگاه طرفین را به‌توان $\frac{n}{n-1}$ برسانیم، نتیجه کلی بدست می‌آید:

$$\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{x_1\cdot\dots\cdot p_{n-1}}$$

درنتیجه برای تمام اعداد طبیعی n و اعداد مثبت a_1 ، ... ، a_n میانگین عددی بزرگتر یا مساوی میانگین هندسی آنهاست.

برای سرگرمی خواننده قضیه زیر را که از کی‌فان (KY FAN) است بدون اثبات می‌آوریم.

۶ـ قضیه: فرض کنیم که x_1 ، ... ، x_n اعدادی باشند که در رابطه‌زیر صدق می‌کنند.

$$0<x_i\leqslant\frac{1}{2} \text{ و } i=1 \text{ و } \dots \text{ و } n$$

سپس

$$\frac{x_1\cdot\dots\cdot x_n}{(x_1+\dots+x_n)^n}\leqslant\frac{(1-x_1)\cdot\dots\cdot(1-x_n)}{[(1-x_1)+\dots+(1-x_n)]^n}$$

این قضیه نیز با روش حمله و عقب‌نشینی دراستقراء ثابت می‌شود.

پاسخ رمز و راز عددها (صفحه ۴۶)

باکمی دقت می‌توانید هر دوتقسیم را پیدا کنید. در اینجا فقط جوابها داده شده است.

۱۰۹۷۷۶۱۲۱۲	۳۷۰۱۴
− ۷۴۰۲۸	۲۹۶۵۸
۳۵۷۴۸۱	
− ۳۳۳۱۲۶	
۲۴۳۵۵۲	
− ۲۲۲۰۸۴	
۲۱۴۶۸۱	
− ۱۸۵۰۷۰	
۲۹۶۱۱۲	
− ۲۹۶۱۱۲	
۰	

۱۳۳۸۸۷۱۴۰۱	۱۵۹۲۷
− ۱۲۷۴۱۶	۸۴۰۶۳
۶۴۷۱۱	
− ۶۳۷۰۸	
۱۰۰۳۴۰	
− ۹۵۵۶۳	
۴۷۷۸۱	
− ۴۷۷۸۱	
۰	

مقاطع مخروطی ـ سطوح آرایش‌پذیر بهره‌برداری از هذلولی در صنعت

مارتین گاردنر

از مقاطع مختلف مخروطی، منحنیهای بسیاری بـه دست می‌آید که به چهار گروه تقسیم می‌شوند: دایره، بیضی، سهمی و هذلولی. این چهارمنحنی خانوادهٔ مقاطع مخروطی را تشکیل می‌دهند و دارای پیوندها و همبستگیهایی بین خودشان هستند. روش تجربی سایه ـ که در اینجا به‌آن اشاره می‌شود، ـ این همبستگیها را به‌خوبی آشکار می‌کند.

میز صاف سفیدرنگـی را به داخل اطاق خـود ببرید و جسم کـروی بزرگی ـ مثل توپ باسکتبال ـ روی‌آن بگذارید واطاق را تاریك کنید.

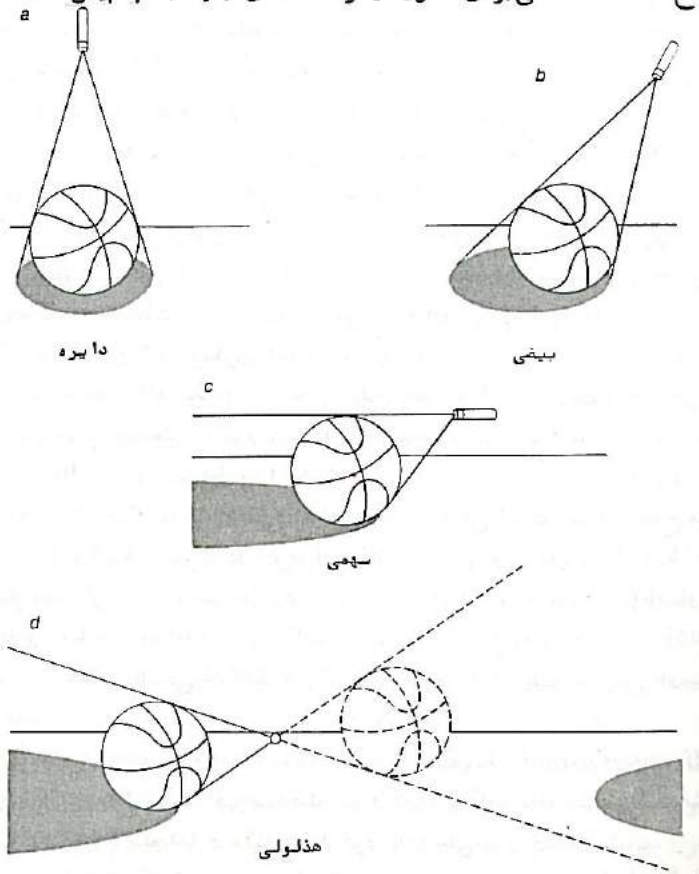
مثل شکل a–۱، با چراغ قوه یك رشته نور ازبالا، مستقیماًروی توپ بتابانید.سایهٔ توپ را روی سطح میز به‌صورت‌دایره خواهید دید. مرکزدایره نیزمحل اتکای توپ روی میز خواهد بود.

چراغ قوه را، مثل شکل b–۱، به‌آرامی به‌سمت راست حرکت دهید، خواهید دیدکه سایهٔ‌توپ به‌سمت چپ‌کشانیده می‌شود ودرعین‌حال نقطهٔ دومی ازنقطهٔ‌اتکای توپ‌جدا وبه‌سمت چپ‌رانده می‌شود. هردوعمل پا به‌پای حرکت چراغ قوه انجام می‌گیرد. هرچه منبع نور را بیشتر بـه سمت راست ببرید، سایه درازتر وفاصلهٔ دونقطه بیشتر می‌شود. در تمام مراحل، سایه، شکل بیضی

به‌خود می‌گیرد وکانونهای آن، یکی عبارتست از نقطهٔ اتکای تـوپ به‌میز ودومی نقطه‌ای است غیرقابل رؤیت که از کانون اولی کنده شده و دائم از آن دورتر می‌شود.

مثل شکل c–۱، چـراغ‌قوه را پایین بیاوریـد وآن را بابالای توپ همتراز کنید، هنوزهم کانون سمت‌راست و زیرتوپ قرار گرفته است، ولی کانون سمت‌چپ خیلی زیاد دور می‌شود وبه‌سمت بینهایت فـرار می‌کند. در این حالت سایه، شکل سهمی به‌خود گرفته است.

منبع نور را ـ مثل شکل d–۱ ـ بازهم پایین‌تر بیاورید، سایه، به‌شکل هذلولی درمی‌آید. نقطهٔ اتکای توپ هنوز روی یکـی ازکانونهای هذلولی واقع شده است، ولی برای کانون دیگر، حادثه‌ای بسیارجالب پیش‌آمده‌است.



شکل ۱ ـ روش تجربی سایه، برای نمایش چهار منحنی مقاطع مخروطی

توپی دیگر فرض کنید که نظیر توپ اصلی بوده ودرست درسمت دیگر چشمهٔ نور و به‌همان فاصله از آن قرار گرفته باشد. این توپ‌فرضی یامجازی در شکل d-۱ به‌صورت خط چین کشیده شده است. اگر نور چراغ‌قوه به سمت توپ مجازی تابانده شود، می‌تواند سایه‌ای مخروطی‌شکل- مثل‌توپ اصلی ولی در جهت مخالف آن، به‌وجود آورد. راسهای هر دو مخروط سایه در چشمهٔ نور به‌هم برخورد می‌کند.

درسه حالت a و b و c، سایهٔ توپ مجازی، بالاو خارج از میز اصلی واقع می‌شود، ولی در وضعیت d که چشمهٔ نور را پایین‌تر از نوك توپ‌قرار داده‌اید، سایهٔ مجازی، روی سطح میز قرار می‌گیرد. این سایهٔ مجازی را می‌توان دنبالهٔ همان سایهٔ اصلی به حساب آورد، به‌این معنی که سایهٔ اصلی از سمت‌چپ تابینهایت کشیده شده و سرانجام از سمت راست سردرآورده و منحنی متقابل هذلولی را تشکیل داده است.

در شکلهای a و b و c، به‌تدریج که چشمهٔ نور را حرکت می‌دادید، کانون دوم نیز به‌سمت‌چپ رانده می‌شد. وبالاخره در شکل c به‌فاصلهٔ بسیار دوری فراری داده شد. از شکل c به‌بعد که چشمهٔ نورانی را به‌سمت پایین‌تر حرکت دادید، نقطهٔ فراری نیز از سمت دیگر به‌سوی شما بازگشت نمود.

مسیر کانون فراری را می‌توانید یك حلقهٔ بینهایت بزرگ در نظر آورید که بی‌شباهت به‌استعارهٔ هندسی که *Henry Vaughan* در بیت مشهور خود به‌آن اشاره کرده است نیست:

«شب‌بعد حلقهٔ ابدیت‌را به‌چشم دیدم، حلقه‌ای از نور زلال ونامتناهی».

درشکل d، چنین تصور کنید که توپ مجازی از چشمه نور دورتر شود ودر عین‌حال طوری انبساط پیدا کند که ضمن حرکت، همیشه تماس خود را با مخروط سایه حفظ نماید وزمانی که توپ به‌حد کافی منبسط شد وبه‌سطح میز برخورد کرد متوقف شود، در این‌موقع نقطهٔ تماس توپ ومیز، کانون شاخهٔ متقابل هذلولی را به‌دست می‌دهد. نتیجهٔ حاصله از دو کره (توپ)نامساوی محاط در مخروط (سایه) که در کانونها برسطح مقطع (میز) مماس‌می‌باشند، منطبق با همان نتایجی خواهد بود که در قدیم نیز ازتعریف هذلولی به‌دست می‌آمد.

در صفحه‌های ۸ و ۹ کتاب «هندسه وتصور» (*Geometry and the Imagination*) تألیف دیویدهیلبرت وکنوسن (ازانتشارات شرکت نشر چلسی-۱۹۵۲) نتیجه‌ها و دلیلهای مذکور به‌روشنی بیان شده است.

در صورتی که توپ و چشمهٔ نور ومیز طوری نسبت به‌هم قرارگرفته

باشند که مخروط سایهٔ مجازی نتواند میز را قطع کند، در اینحالت فرض کنید که توپ مجازی را در همان مخروط سایهٔ اصلی قرار داده و آنرا حرکت می‌دهید وضمن حرکت بازهم دائماً آنرا باز می‌کنید تاتماس خود را باجدار مخروط از دست ندهد. به‌جایی می‌رسد که توپ - از طرف بالا- برسطح مقطع (میز) مماس خواهد شد، به‌همان‌روش مشابه به‌اثبات می‌رسد که در این حالت منحنی شما بیضی می‌شود.

چهارمنحنی که به‌وسیلهٔ سایه وبه‌صورت‌آزمایش‌نمایش داده شد، مقاطع مخروطی نام دارند و در آزمایش مذکور، رویهٔ میز، سطحی است که قاطع مخروط به‌حساب می‌آید. مسلم است که دایره، حدبیضی است و سهمی حد بیضی وهذلولی هر دو. گرچه دایره‌های بیشماری می‌توان از مقاطع مختلف یك مخروط به‌دست آورد، ولی همهٔ آنها از یك‌گروه و مشابهند و همچنین است برای سهمیها. ولی بیضیها ازیك‌گروه نیستند، بلکه تشکیل تعدادبیشماری از این گروهها را می‌دهند، گروههای هذلولیها نیز نامحدود است، هرگروه تعداد بیشماری هذلولی متشابه را شامل می‌شود.

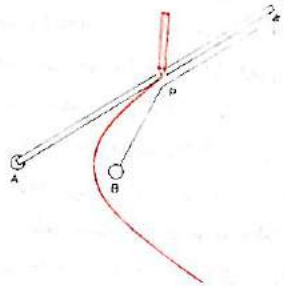
ستاره‌شناسان اغلب درمورد تشخیص مداربعضی ازستاره‌های دنباله‌دار وشهابها که‌آیا بیضی است‌یا سهمی ویاهذلولی دچار زحمت می‌شوند وعلت آنهم اکنون برای‌ما روشن است. سهمی را به‌آرامی از یك‌جهت تغییر دهید بیضی می‌شود و درجهت مخالف هذلولی. ستاره‌های دنباله‌دار هم اغلب در گردش دائمی خود به دور خورشید در مدارهای بیضی‌شکل حرکت‌می‌کنند ولی آنهایی که گاهی وارد منظومهٔ شمسی می‌شوند وپس از خارج‌شدن از دیدما، دیگر خبری از آنها نمی‌شود، روی مدارهای سهمی ویاهذلولی حرکت می‌کنند.

چون هذلولی خود یکنوع بیضی است که در بینهایت از کمر به‌دونیم شده است، جای تعجب نیست اگر اغلب نوعی شباهت وارونه‌گون، بین این دو منحنی دیده می‌شود. بیضی مکان هندسی نقطه‌هایی است که مجموع فواصل آنها ازدو نقطه ثابت مقداری است ثابت و هذلولی مکان هندسی نقطه‌هایی است که تفاضل فواصل‌آنها ازدو نقطهٔ ثابت مقداری است ثابت.

از زمانهای بسیار دور، برای کشیدن بیضی، از یك‌حلقهٔ نخ ودوسنجاق ویك مداد، استفاده می‌کردند. دوسنجاق را در دوکانون بیضی فرو می‌بردند ونوك مداد را به‌نخ تکیه می‌دادند، در حالیکه حلقهٔ نخ دائماً به‌پایهٔ سنجاقها ونوك مداد تکیه داشت، مداد را داخل‌حلقهٔ نخ به‌دور سنجاقها می‌چرخاندند.

شکل ۲ هم طرزکشیدن یك‌شاخهٔ هذلولی‌را به‌وسیلهٔ نخ نشان می‌دهد.

A و B دوکانون هذلولی می‌باشد. خط‌کش AC ونخ BC در نقطهٔ C به‌هم بسته شده‌اند، سردیگر خط‌کش ونخ هرکدام در یکی از کانونهای هذلولی سنجاق شده‌اند و می‌توانند به‌دور کانونها بچرخند. نوك مدادP،



شکل ۲ــ رسم هذلولی به‌وسیلهٔ نخ

درحالیکه نخ را محکم می‌کشند ودر عین‌حال به‌خط‌کش‌هم تکیه دارد، ضمن حرکت، شاخه هذلولی را رسم می‌کند.

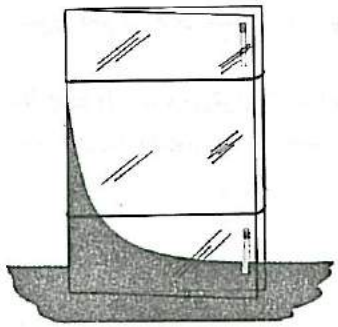
طول خط‌کش و همچنین طول‌نخ مقادیر ثابتی هستند، پس تفاضل‌آنها باید مقداری ثابت باشد. ازطرف دیگر طول تفاضل خط‌کش (AP+PC) وطول نخ (BP+PC) برابراست با AP−BP، که این خود تفاضل فاصلهٔ نقطهٔ P از دوکانون است وگفتیم باید مقداری ثابت باشد. پس نوك مداد P که همیشه تفاضل فاصله‌اش ازدوکانون A و B ثابت می‌ماند، ضمن حرکت، یك‌هذلولی رسم خواهدکرد.

بیضی وهذلولی را می‌توان باروش تاکردن کاغذ نیز رسم کرد و چنانکه خواهید دید در اینجا نیز می‌توان به شباهت وارونه‌گون این دو منحنی پی‌برد.

برای انجام عمل، یك‌صفحهٔ کاغذ شفاف انتخاب کنید و دایره‌ای روی آن رسم کنید، در داخل دایره نیز بایك‌نقطه در محلی دلخواه، علامت بگذارید. کاغذ را طوری تاکنید که نقطه روی پیرامون دایره قرار گیرد و سپس کاغذ را خوب تاکنید. خط تای کاغذ، خطی است مماس بریك بیضی. نقطهٔ انتخابی را برنقطه‌های مختلف پیرامون دایره منطبق کنید و به همان ترتیب بالا، چندین‌خط تای کاغذ (که همان خطهای مماس خواهند بود) به‌دست آورید. اگر این خطهای مماس را به‌اندازهٔ کافی ایجادکنید، بیضی خودش را نمایان می‌سازد. به‌طور صحیحتر بیضی را می‌توانید از پوش خطهای مماس به‌دست آورید. کانونهای بیضی نیز یکی همان‌نقطهٔ انتخابی ودیگری مرکز دایره خواهد بود.

حال اگر همان عملها را بانقطه‌ای خارج از دایره انجام دهید، یك هذلولی باهردوشاخهٔ خود، نمایان می‌شود که بازهم نقطهٔ انتخابی و مرکز دایره، دوکانون هذلولی را تشکیل می‌دهند (شکل۳).

شاید فکر می‌کنید که اگر نقطهٔ انتخابی‌را روی دایره انتخاب‌کنید، سهمی به‌دست خواهید آورد. ولی اینطور نیست، و اگر به‌چنین آزمایشی دست بزنید خواهید دید که کلیهٔ خطهای مماس از مرکز دایره خواهند گذشت و درنتیجه، منحنی‌ای‌که پوش این خطها باشد، دایره‌ای است‌بینهایت کوچك یعنی یك‌نقطه. ولی علت را درجای دیگر باید جستجوکرد وآن اینست که دیدیم کانونهای هرمنحنی، یکی مرکز دایره است و دیگری‌نقطهٔ انتخابی، ولی کانون دوم سهمی در دسترس نیست وبه بینهایت فراری شده است. از همینجا متوجه می‌شویم که یانقطهٔ انتخابی را باید در بینهایت‌فرض



شکل۳ ــ رسم هذلولی، باروش تاکردن‌کاغذ

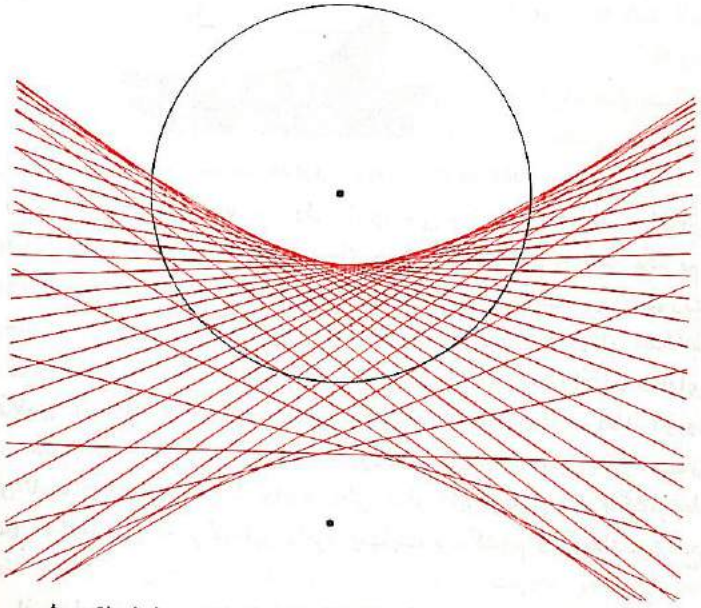
کرد ویا در مرکز دایره. بافرض اول کاری نمی‌توانیم انجام دهیم وبافرض دوم به این نتیجه می‌رسیم که باید به جای دایره خط مستقیم در نظر بگیریم، چه خطّ مستقیم خود دایره‌ای است بامرکزی واقع در بینهایت. در اینصورت اگر خط راستی روی کاغذ بکشید و نقطه‌ای دلخواه خارج از آن انتخاب کنید وبامنطبق‌کردنِ نقطهٔ دلخواه روی نقطه‌های مختلف خط‌راست، خطهای تای زیادی از کاغذ تولیدکنید، سهمی‌ای بسیار زیبا به‌دست خواهید آورد. کانون سهمی همان‌نقطهٔ انتخابی خواهد بود وکانون دوم سهمی یعنی همان کانون ناپیدای فراری، مرکز دایره، یعنی همان دایرهٔ بینهایت بزرگ (خط راست) خواهد بود که مرکز این دایرهٔ بینهایت بزرگ‌هم در بینهایت واقع است.

از چهارمنحنی موردبحث که مقاطع مخروطی نامیده می‌شوند، در

زندگی روزانه، به‌دوتای آنها، یعنی دایره وبیضی زیاد برخورد می‌کنیم، سهمی نیز گاهگاهی خود را نشان می‌دهد، مثلا وقتی که باشیلنگ به‌باغچه آب می‌دهیم ویاتوپ فوتبال را شوت می‌کنیم، می‌توانیم قیافهٔ سهمی را از مسیر آب ویاحرکت توپ مشاهده کنیم. ولی شکل هذلولی کمتر به‌چشم می‌خورد. یکی از مواقع نادری که می‌توانیم هذلولی کامل را به‌چشم ببینیم، وقتی است که آباژوری استوانه‌ای و یامخروطی داشته‌باشیم و هردو سر آباژور باز باشد، سایهٔ آباژور روی دیواری نزدیك به‌آن به‌شکل هذلولی خواهد بود. همچنین اگر شمعی را در یك شمعدان استوانه‌ای روشن کنیم، سایهٔ لبهٔ شمعدان روی دیوار نیز یك‌شاخهٔ هذلولی به‌وجود خواهد آورد.

از نظر دانشمندان وریاضیدانان، هذلولی نمودار هندسی معادله‌های مختلف درجهٔدوم است، حتی نمودار معادلهٔ ساده‌ای مثل $a \cdot b = c$ ، که در آن c مقداری ثابت فرض‌شود، به‌شکل هذلولی درمی‌آید. همین معادلهٔ ساده، صدها قانون فیزیکی (مثل قانون اهم وقانون بویل) و بسیاری از تابعهای اقتصادی را بیان می‌کند.

برای نمایش‌دادن معادلهٔ $a \cdot b = c$ ، می‌توان آزمایش سادهٔ زیر را انجام داد. دوصفحه مستطیلی شیشه‌ای را رویهم قرار دهید، بطوریکه از یك

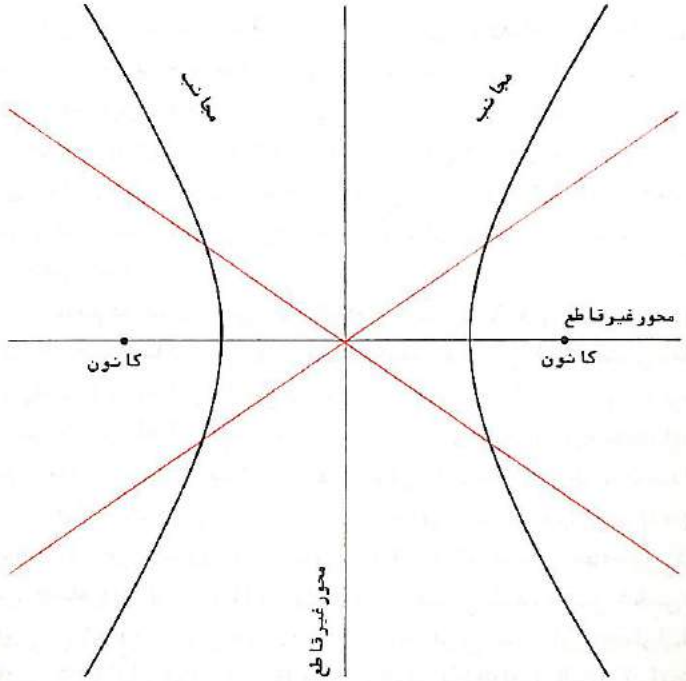


شکل ۴ــ نمایش منحنی هذلولی بااستفاده از خاصیت لوله‌های موئین

سمت لبه‌های آن رویهم قرارگیرند واز سمت مقابل لبه‌ها اندکی ازهم فاصله داشته‌باشند. باقراردادن یك‌نوار مقوا ویا دوچوب‌کبریت بین‌دوصفحهٔ شیشه‌ای، می‌توانید این فاصله را ثابت نگهدارید. باچندحلقه لاستیکی این دوصفحه را محکم به‌هم ببندید ــ مثل شکل ۴ آنهارا در یك طشتك پراز آب رنگین قرار دهید، طبق قانون لوله‌های موئین، آب از لای دوشیشه بالا می‌رود، ولی چون فاصلهٔ دوشیشه، درهمه‌جا مساوی نیست، ارتفاع بالارفتن آبهم مساوی نخواهد بود وخط ارتفاع‌آب درلای شیشه‌ها به‌شکل هذلولی درخواهدآمد.

نمودار کلی هذلولی در شکل ۵ نمایش داده شده است. دوخط ضربدری، مجانبهای منحنی را نشان می‌دهد. هرچه شاخه‌های منحنی گسترش می‌یابد، مجانبها به‌آن نزدیکتر می‌شوند تادر بینهایت باآنها تلاقی‌کنند. اگر مجانبها دوخط متعامد باشند، هذلولی را قائمه گویند (توجه‌شود که هذلولی شکل ۵ قائمه نیست)

بازوهای سهمی را ــ پس از اندکی ــ به‌سختی می‌توان بادوخط موازی اشتباه نکرد، در صورتیکه بازوهای هذلولی در راه خود به‌سوی



شکل ۵ ــ نمودار هذلولی

بینهایت به‌سرعت ازهم بازمی‌شوند. ازاین حالت موزون هذلولی برداشتهای شاعرانهٔ بسیاری کرده‌اند. ازجمله، فیلسوف اسپانیائی اونامون Miguel de Unamuno هذلولی را یك‌منحنی دلگیرکننده و غم‌افزا شناخته است و می‌نویسد:

«تلاش بیهودهٔ هذلولی در راه وصال به‌مجانب خود چه غم‌انگیز است وچقدر شبیه به‌زندگی موجودات زنده.»

برعکس ژوزف آدیسون Joseph Addison ، در مقالهٔ «جاودانگی روح» از هذلولی و مجانبش تشبیهی عارفانه به‌عمل آورده است و عقیده دارد که روح‌نیز پس‌از مرگ، هرچه بیشتر به‌سوی خدا، نزدیك ونزدیکتر می‌شود، بدون اینکه هرگز به‌او بپیوندد و می‌نویسد:

«ما هنوز ازآیندهٔ خود در بی‌خبری بسرمی‌بریم، قلب بشر از عظمت و شکوهی که در انتظار اوست ناآگاه است، خالق ومخلوق به آن خطهای هندسی‌ای می‌مانند که در راه ابدیت دائماً به‌هم نزدیکتر می‌شوند. بدون اینکه پیوند کاملی بین آنها ایجاد شود.»

یکی از کاربردهای شگفت‌انگیز هذلولی در ردیابی و مسافت‌یابی است. در زیر به‌ذکر چندنمونه از آن می‌پردازیم.

در یك‌زمین مسطح، شخصی در نقطهٔ A ایستاده است وباتفنگ، زنگی را که در نقطهٔ B قرار دارد، هدف گلوله قرار می‌دهد. می‌خواهیم بدانیم که شخص دیگری مثل C در چه نقطه‌ای از زمین بایستد تاصدای گلولهٔ تفنگ و صدای زنگ را ــ که در اثر برخورد گلوله به‌آن ایجاد شده است ــ دریك زمان وباهم بشنود.

می‌دانیم در طول زمانی که گلوله مسافت بین A و B را می‌پیماید، صدای گلوله نیز مسافتی مثل x را خواهد پیمود ودر این لحظه صدای زنگ بلند می‌شود. اگر مسافتی را که صدای زنگ می‌پیماید تا به‌شخص C برسد y بنامیم، صدای گلوله نیز علاوه بر مسافت قبلی x باید همین مسافت y را بازهم به‌پیماید تاهمزمان باصدای زنگ به‌گوش C برسد. پس طول‌راه صدای گلوله مساوی است با x+y وطول راه صدای زنگ مساوی است با x. تفاوت این دو طول مساوی x می‌شود. بنابراین مکان هندسی نقطه‌هایی که تفاضل فاصلهٔ آنها از A و B مساوی مقدار ثابت x باشد، محل شخص C را تعیین می‌کند واین مکان هندسی چیزی جزهذلولی نیست. ازبین‌هذلولیهای بیشماری که به‌کانونهای A و B وجود دارند، فقط تفاوت فاصلهٔ کانونی یکی از آنها مساوی x است و از بین دو شاخهٔ همین یك هذلولی، آن

شاخه‌ای که به‌هدف ــ یعنی زنگ ــ نزدیکتر است، همان مکان نقطه‌هایی است که صدای گلوله وزنگ همزمان بگوش می‌رسد. پس شخص C می‌تواند در نقطه‌های بیشمار، ولی محدود به‌یك شاخهٔ هذلولی، بایستد.

اکنون موضوع جدی‌تری را مطرح می‌کنیم و آن ردیابی است. یعنی می‌خواهیم مثلا محل استقرار توپخانه، نقطهٔ پرواز هواپیما، مرکز یك‌فرستنده و بالاخره محل یك‌منبع صوت را تعیین کنیم. برای این‌کار در دونقطهٔ A و B ــ که آنرا پست A–B می‌نامیم ــ دوشنونده (یا گیرندهٔ صوت) قرار می‌گیرند. هریك از شنوندگان‌جداگانه زمان شنیدن صدارا یادداشت‌می‌کنند، ساعتهای آنها دقیق وهمزمان کار می‌کند و می‌توانند بادقت اختلاف زمان شنیدن صدا را ازروی یادداشتهای خود به‌دست‌آورند. اگر این اختلاف زمان را x فرض‌کنیم، صدا روی یك هذلولی به‌کانونهای A و B، واختلاف فاصله کانونی x قرار خواهد داشت البته یکی ازکانونهای A یا B صدارا جلوتر دریافت کرده است. از بین دوشاخهٔ هذلولی، شاخه‌ای که مجاور همین کانون می‌باشد، محل منبع صوت خواهد بود. شاخه مشخص‌شدهٔ هذلولی را روی نقشه رسم می‌کنند.

پست‌دیگری بادوشنوندهٔ دیگر به‌نام C–D، در دونقطهٔ دیگر مستقر شده‌اند وهمان عملهارا باشنیدن همان صدا انجام می‌دهند ویك‌شاخهٔ هذلولی دیگر روی همان‌نقشه رسم می‌کنند. شاخه هذلولی‌پست A–B وشاخهٔ‌هذلولی پست C–D ، دریك یاچندنقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. از میان نقطه‌های تقاطع، نقطهٔ نزدیکتر به‌پستی‌که صدا را زودتر شنیده است انتخاب می‌کنند، نقطهٔ انتخابی دقیقاً مرکز تولید صدارا به دست می‌دهد.

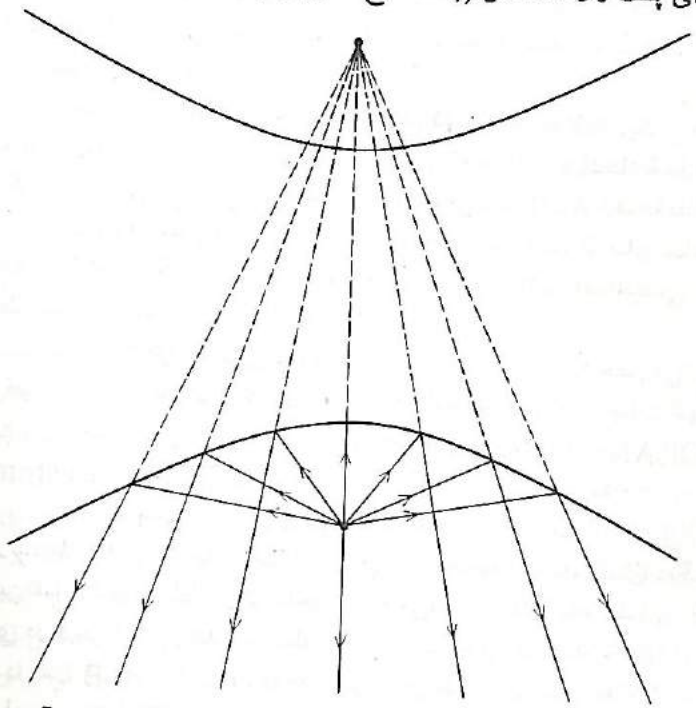
بابکارگرفتن هذلولی‌ــ باروشی معکوس روش بالاــ شخص می‌تواند موقعیت خودرا شناسائی کند. دستگاه مکان‌یاب **لوران** که در جنگ جهانی دوم پدیدآمد به‌همین روش عمل می‌کرد. (LORAN = LOng RAnge Navigation system)

یك‌جفت پست رادیوئی A–B ، که به‌فاصله‌ای از هم در ساحل قرار دارند، علامتهایی همزمان ومشابه می‌فرستند. یك‌جفت پست C–D دیگر، همین عمل را در دونقطهٔ دیگر ساحل انجام می‌دهند. کشتی یاهواپیمائی که روی دریا حرکت می‌کند، بااستفاده از اختلاف زمانی دریافت علامتها از دو جفت پست A–B و C–D ، دوهذلولی روی نقشه رسم می‌کند و از محل تقاطع این دوهذلولی موقعیت ومکان خود را تشخیص می‌دهد.

استفاده از هذلولی در سایر صنایع نیزکم‌وبیش به‌چشم می‌خورد، مثلا

بعضی ازتلسکوپها ویا دوربینهای‌مخصوص عکاسی مجهز به‌آئینه‌های‌هذلولوی شکل هستند. همچنین کاسهٔ اغلب نورافکنها را آئینه‌های هذلولوی تشکیل می‌دهند.

اگر یك‌چشمهٔ نور درکانون یك‌آئینه بیضوی قرارگیرد، همهٔ نورها پس از برخورد به آئینه، بازتاب کرده و در کانون دیگر بیضوی متمرکز می‌شوند. واگر چشمهٔ نور درکانون آئینه سهموی واقع شود، اشعهٔ منعکس شده به‌طور موازی، از آئینه خارج می‌شوند وچنانست که گوئی همه نورها به‌سمتی پیش می‌روند تا به‌کانون دیگر سهموی ـ کانون فراری به‌بینهایت‌ـ ملحق شوند. ولی‌آئینه‌های هذلولوی باعث می‌شوندکه اشعهٔ منعکس شده از هم باز شوند. اگر امتداد اشعه را در پشت آئینه رسم کنیم، همهٔ آنها در نقطه‌ای که همان کانون دوم هذلولوی است، جمع می‌شوند، می‌توان چنین تصور کردکه اشعه راه را تا بینهایت پیموده و سرانجام کانون گمشده را در نقطه‌ای پشت زادگاهشان (پشت منبع اصلی‌نور) پیداکرده‌اند. درشکل ۶،

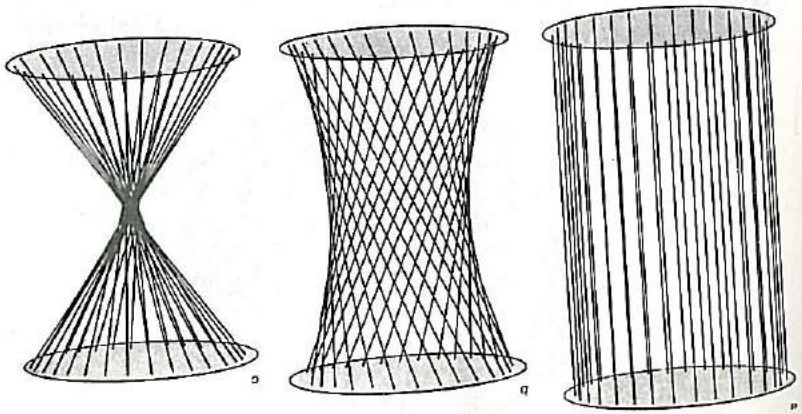


شکل۶ ـ باقراردادن چشمه نور درکانون یك قانون هذلولوی شکل و به‌دست‌آوردن تقاطع‌امتداد اشعهٔ بازتابنده،کانون دوم هذلولوی به‌دست می‌آید

اشعه باخط‌پر، وامتداد آنها باخط‌چین نشان داده شده است.

«سطح‌هذلولوی یکپارچه» ـ که نخستین‌بارتوسط ارشمیدس بیان شد ـ دارای ویژگیهای‌چشمگیری است. شکل b–۷، چنین سطحی راکه به‌وسیلهٔ نخ درست شده است، نشان می‌دهد. هرنوع برش عمودی از این سطح، هذلولی وبرش افقی، بیضی به‌دست می‌دهد. در حالتی‌که برشهای افقی دایره باشند آنرا «هذلولوی دوار‌ـیکپارچه» نامند. هذلولوی دوار یکپارچه از دوران هذلولی حول محور غیرقاطع آن به‌دست می‌آید. در صورتی‌که هذلولی را حول، محور قاطع آن دوران دهیم «هذلولوی دوار دوپارچه» خواهم داشت. هذلولوی اخیر شبیه یکجفت سطح گنبد مانندی است که در فاصلهٔ معینی از یکدیگر قرار دارند.

درسال ۱۶۶۹ **کریستفرورن**، معمار مشهور و طراح کلیسای سنت‌پاول به‌رازی‌عجیب‌پی‌برد واعلام داشت‌که هذلولوی‌یکپارچه، سطحی است متشکل ازبینهایت خط کاملا مستقیم، چنین سطحهایی اکنون در بین ریاضیدانان به به‌نام «سطحهای آرایش‌پذیر» (ruled surface) مشهور شده‌اند. مثلا استوانه یك‌سطح آرایش‌پذیر است که از خطهای مستقیم موازی درست شده است ویا مخروط سطح آرایش‌پذیری است که کلیهٔ خطهای مستقیم آن در رأس مخروط به‌هم‌رسیده‌اند. وبالاخره هذلولوی‌نیز سطح‌آرایش‌پذیری‌است که از دوگروه خطهای مستقیم درست شده، تعدادی از عنصرهای گروه اول

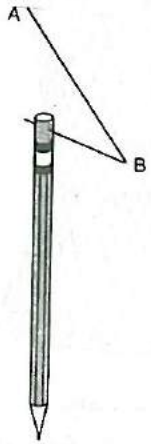


شکل۷ ـ اگر یك‌قفس استوانه‌ای درست‌کنیم‌که میله‌های‌آن ازمادهٔ نرمی مثل نخ باشد(a) وآنرا اندکی تاب دهیم هذلولی (b) واگر بیشتر بتابانیم دومخروط (c) به‌دست می‌آوریم.

در شکل b–۷ مشاهده می‌شود. کلیهٔ این‌خطها مستقیم و به‌یك سمت مایل بوده، بدون اینکه بایکدیگر متقاطع باشند. گروه دیگر خطهای مستقیم، که در شکل نمایش داده نشده است، شبیه گروه اول می‌باشند ولی به سمت دیگر تمایل دارند.

هرخط ازگروه اول باخطی از گروه دوم متقاطع است. و چون کلیهٔ خطهای هردوگروه برسطح هذلولوی منطبق‌اند، بنابراین صفحه‌ای که بریك جفت ازاین خطهای متقاطع عبورکند، صفحهٔ مماس برهذلولی درنقطهٔ تقاطع دوخط خواهد بود.

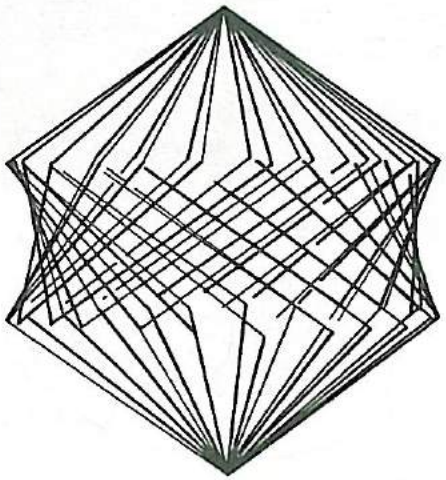
از نمونه‌های شکل ۷ که از نخ درست شده است، به‌سادگی می‌توان پی بردکه هذلولوی یکپارچه، از دوران یك‌پاره خط مستقیم حول محوری متناظر باپاره‌خط به‌دست می‌آید، البته اگر پاره‌خط بامحور دوران موازی باشد، استوانه به دست می‌آید و اگر امتداد پاره‌خط بتواند محور را قطع کند، مخروط ناقص درست می‌شود. از این موضوع می‌شود برای نمایش هذلولی استفاده نمود. مطابق شکل ۸، از سوزن طویلی یك‌زاویهٔ حاده درست می‌کنیم وآنرا به‌انتهای مدادی فرومی‌بریم. ضلع AB سوزن را به سمت محور عمودی مداد به طور متناظر قرار می‌دهیم. نوك مداد را روی‌میز می‌گذاریم وخود مداد را عمود برمسیر و بین دوکف‌دست نگه می‌داریم. با مالش‌دادن دوکف دست به هم، مداد را به سرعت حول محورش می‌چرخانیم (گاهی به‌راست و گاهی به‌چپ) ضلع AB سوزن درهوا، یك‌شکل هذلولی تولید خواهدکرد.



شکل۸ ــ نمایش هذلولوی بادوران دادن یك سوزن راست

اگرمکعبی را از دو رأس متقابل آن گرفته و بچرخانیم، شش‌ضلع‌متناظر ازاین مکعب، تولید هذلولوی خواهندکرد. باکمی تمرین می‌توانید طاس تخته نرد را بین دوانگشت شست ونشانهٔ خود بگیرید وباانگشت دست‌دیگر ضربه‌هائی به‌آن بزنید وبه‌سرعت آنرا بچرخانید. اگر از پهلو به‌دقت به‌آن نگاه‌کنید ــ مثل شکل ۹ ــ یك‌هذلولوی که بین دومخروط قرارگرفته است، مشاهده خواهیدکرد.

همانطورکه درشکل ۷ دیده می‌شود، به‌راحتی می‌توان نمونه‌هائی از نخ درست‌کرد وروی آنها به‌مطالعه پرداخت. ازمقوا دودایره ببرید، درحاشیهٔ دایره‌ها، به‌فاصله‌های تقریباً مساوی، سوراخهای کوچکی باسوزن ایجاد کنید. سوراخهای دومقوا را رویهم قرار دهید. بانخ وسوزن دومقوا را ازمحل سوراخها به‌هم بدوزید. نخهای دوخته را به‌یك‌اندازه شل‌کنید و مقواها را ازهم بازکنید وبالاخره نخها را خوب منظم کنید، بطوریکه همهٔ آنها کشیده وبه‌یك‌اندازه شوند. نخهارا در محل سوراخهای مقوا باچسب مایع بچسبانید تادیگر نتوانند لیز بخورند. حال یك‌نمونه استوانه‌ای، مثل شکل a–۷ در اختیار خواهید داشت. اگریکی ازصفحه‌های مقوا را ۱۸۰ درجه بچرخانید، نمونهٔ شکل c–۷ را به دست خواهید آوردکه به‌شکل دومخروط خواهدبود. اگرصفحه را که‌کمتر از ۱۸۰ درجه بچرخانید یك‌هذلولوی خواهید داشت. در نتیجه باچرخاندن مقوا بین صفر تا ۱۸۰ درجه می‌توانید هذلولویهای بیشماری به‌دست آورید. یك‌نمونه ازاین هذلولویها، شکل b–۷ می‌باشد که

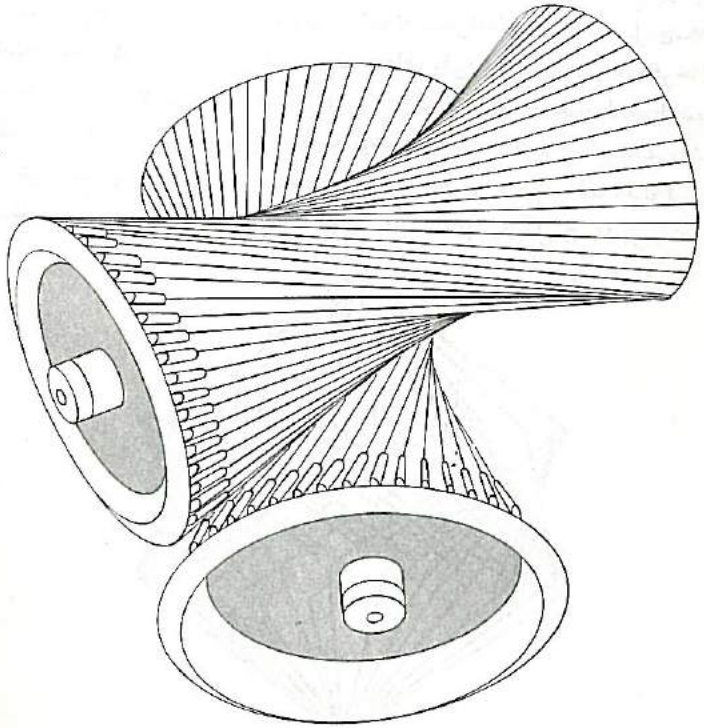


شکل۹ ــ ازچرخاندن مکعب، دومخروط و یك هذلولوی بین‌آنها، پدیدار می‌شود

بانخهای راست آرایش یافته وهمهٔ نخها به یك‌سمت مایلند. اگر صفحهٔ مقوا را درجهت عکس بچرخانید، هذلولوی‌ای به دست خواهید آورد که میل نخهای آن درجهت عکس حالت قبل خواهد بود.

در کتاب هندسه وتصویر مدلهائی شرح داده شده است که به‌جای نخ ازسیم فلزی استفاده شده‌است و درنتیجه ساختن آنها اندکی مشکل است. شکل ۱۰ نیز از همین‌کتاب کپیه شده و یکجفت چرخ‌دنده را نشان می‌دهد. ازشکل فهمیده می‌شود که می‌توان از هذلولوی دوار، برای انتقال نیرو بین دومحور متنافر استفاده‌کرد. دنده‌های هریك ازچرخ‌دنده‌ها، یکی ازگروههای خطهای مولد هذلولوی را تشکیل می‌دهند.

یکی ازشاهکارهای معماری، بنای آسمان‌نمای (Planetarium) مك‌دونل، درپارك‌جنگلی سنت لوئیز است،که به‌شکل هذلولوی دوار یکپارچه ساخته شده است. تصویر ۱۱ عکسی از همین ساختمان است. طراح آن

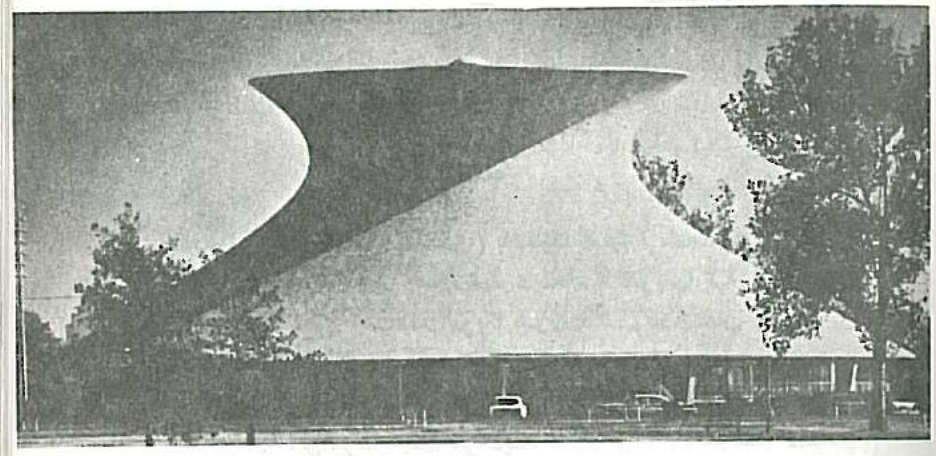


شکل۱۰ ــ انتقال نیرو بین دو محور متنافر به‌وسیلهٔ چرخ‌دنده‌های هذلولوی

Gyo Obata از مسیر هذلولی‌گون بعضی از ستاره‌های دنباله‌دار الهام گرفته وطبق توضیح خودش انگیزهٔ چنین‌طرحی «هیجان راه‌گشائی به‌فضا» بوده است.

اگر به‌تصویر توجه شود دیده‌می‌شود که سقف مدورآسمان‌نما، سایه‌ای روی بدنهٔ ساختمان انداخته است لبهٔ این‌سایه یك‌خط مستقیم مایل است. آیا این‌خط خود منطبق بریکی از خطهای مولد هذلولوی است، ویاشاید اصلا خط مستقیمی وجود ندارد، بلکه از دیدخاصی که از ساختمان عکس گرفته شده، این خط خود را مستقیم نشان می‌دهد؟

البته حدس اول صحیح است، در آن مواقعی که امتداد خط‌لبه سایه از مرکز خورشید بگذرد، لبهٔ سایه روی بدنهٔ آسمان‌نما، باخط مولد سطح هذلولوی منطبق خواهد بود. باید توجه داشت که در چنین موقعیتهائی، این خط، سایه یك‌نقطه است، یعنی تصویر یکی ازنقطه‌های پیرامون سقف دوار آسمان‌نماست نه‌تصویر تمام پیرامون آن.



شکل۱۱ــ ساختمان‌آسمان‌نمای مك‌دونل واقع درسنت لوئیز به‌شکل هذلولوی دواریکپارچه

وقتی‌که خورشید درموقعیتهای دیگری قرار می‌گیرد، لبهٔ سایه، شکل منحنی به‌خود می‌گیرد که دیگر مولدسطح به‌حساب نخواهد آمد.

ترجمهٔ هرمزشهریاری

پژوهشهای نجومی ابوریحان بیرونی

جعفر آقایانی چاوشی

«درسال گذشته (۱۹۷۳ میلادی) به‌وسیلهٔ کامپیوتر، محاسباتی برمبنای اعداد نجومی، وکسوف خورشید و محاسبهٔ تقویمها که درکارهای ابوریحان مندرج است، درآمریکا صورت گرفت‌وشتاب زمین‌را از روی‌اعدادی که او داده‌بود اندازه گرفتند.

از حاصل کارهای علمی و نجومی در این باب همین‌قدر آشکار شدکه آنچه این‌مرد باچشم سر دید و درگوشهٔ ده از راه تفکر و تعمق به‌آن دست یافت، از میزان حقیقی سیروشتاب این کره‌خاکی زیاد دور نبود.

آدمی به این دقت اگروسایل امروزی رادراختیارداشت دردل کهکشانها فرو می‌رفت و برماه و مشتری خیمه می‌افکند...»[1]

۱ـ پروفسورفضل‌اله رضا: «نکاتی چند دربارهٔ مقام علمی ابوریحان بیرونی». **یادنامهٔ بیرونی**. جلد اول صفحهٔ ۲۴۶ـ۲۴۷

از ویژگیهای روش ابوریحان بیرونی که اورا از دیگرعلمای اسلامی ممتاز می‌کند، استقلال فکری اوست. او در پژوهشهای علمی خود، درنظام ارسطویی هنگامی که باموانعی مواجه می‌شود، و درمی‌یابدکه قیاسات منطقی ازحل بسیاری از مسائل و معضلات‌عالم هستی عاجز و ناتوان است، اصول ارسطویی را بیک‌سو می‌نهد و راهی دیگر مبتنی برتجربه ومشاهده وبراهین هندسی برمی‌گزیند.

بیرونی تقلید را درمسائل‌علمی‌ابدا جایز نمی‌داند واز اینکه ابن‌سینا با وجود نبوغ‌ذاتی و هوش سرشاری که دارد، یکسره و دربست دراختیارارسطو قرارگرفته است وکلمات اورا به‌عنوان وحی منزل تلقی‌می‌کند، سخت ناراحت است. وی ارسطو را دانایی می‌داند که افکار و اندیشه‌های بشری را از جولان بازداشته، دهنه می‌زند و کنترل می‌کند، آنچه‌هست تثبیت‌می‌کند وبرای وضع‌موجودحصاروقلعهٔ استوار می‌سازد و این همان قلعه‌ای است که ابن‌سینا خواسته یا ناخواسته درآن‌واقع‌می‌شود و عنکبوت‌آسا به دورخودمی‌تند.لاجرم حقایق را آن‌طورکه هست درنمی‌یابد.

درمواردی برروش فکری و منطق ارسطو طعن می‌زند و آن را برای رسیدن به‌حقیقت کافی نمی‌داند[2].

بنابراین اگرنظر برتراند راسل‌را بپذیریم که گفت: علم از آن‌روزپیشرفت کردکه جهان افکار ارسطو را کنار گذاشت، باید بیرونی را از بزرگترین منقدان ارسطویی بدانیم که باانتقادهای خود از فلسفه ارسطویی افقهای تازه‌ای به روی محققان بعداز خود گشود. به‌همین جهت است‌که می‌بینیم آثار و نظرهای بیرونی، پس‌از گذشت هزار سال هنوز تازگی خودرا حفظ کرده است.

ما دراین مقاله سعی می‌کنیم که به‌بررسی آثار نجومی‌بیرونی بپردازیم ونکات دقیق و ابتکارات شگفت‌انگیز این متفکرایرانی را خاطرنشان‌کنیم.

ماهیت کهکشان

درشبهای صاف و تاریک، رده‌ای نورانی‌که مانند قوسی ضخیم ازیک‌سو تا سوی دیگر سپهرکشیده شده است، جلب‌توجه می‌کند. این همان است که آن‌را به‌عربی مجره و به‌فارسی کهکشان می‌گویند.

ارسطودرکتاب Meteorlogica یا **کائنات‌جو** خود، کهکشان را به‌عالم تحت‌القمر مربوط می‌داند و اظهار می‌کندکه‌آن نمودی از آثارجوی‌است

۲ـ سید جعفر شهیدی، «بیرونی قلعهٔ فولادین منطق ارسطو را درهم می‌ریزد» **یادنامهٔ بیرونی**، جلد اول. صفحهٔ ۲۳۷

که از مواد متصاعد شدهٔ خشك و گرم تشکیل شده وماده‌آن شبیه به‌همان‌چیزی است که شهابها رامی‌سازد.

بیرونی در **القانون المسعودی** خود نظر ارسطو را دراین‌باره رد کرده و می‌نویسد که: اولا کهکشان درفلك ثوابت است، زیرا ما می‌بینیم که ماه و دیگر ستارگان سرگردان وقتی که از پیش کهکشان می‌گذرند درآنها تغییری پیدا نمی‌شود، تا نتیجه بگیریم که کهکشان متعلق به‌جهان زیرماه است. بلکه برعکس درچنین‌وضعیتی کهکشان پوشیده‌می‌شود. بنابراین بایستی کهکشان را بالاتر از همه و بافلك ثوابت یکی دانست. ثانیاً کهکشان برخلاف پندار ارسطو، از مواد صادره از ستارگان دیگر به‌وجود نیامده، بلکه مجموعه‌ای است عظیم از کواکب خرد که چشم‌آنهارا تشخیص نمی‌دهد.[۳]

همین‌نظریهٔ بیرونی بعدها بارصدهای عدیده منجمان برجستهٔ اروپایی به‌ثبوت رسید. ویلیام‌هرشل W. Hershel که پژوهشهای منظمی دربارهٔ کهکشان انجام داد، با تلسکوپ خود موفق شد ستارگان تشکیل‌دهندهٔ کهکشان را رصد کند. کپلر نیز ثابت کرده نظر ارسطو صحیح نیست و کهکشان بر روی سطح داخلی کرهٔ ثوابت و متحدالمرکز با آفتاب است[۴].

ستارگان دنباله‌دار

گهگاه در پهنه بیکران سپهر، ستارگان دنباله‌دار با نور خیره کننده ظهور می‌کنند وبا ابهت خاص خود نظرها را به‌سوی خودجلب‌می‌نمایند.

این ستارگان از دوقسمت: سر و دم تشکیل شده‌اند. سرستارهٔ دنباله‌دار (یعنی قسمت جامد آن) قطعهٔ بزرگی‌از یخ است که قطر آن ازچند صدمتر تا چندین کیلومتر بزرگی دارد. دراندرون این یخ هسته‌های اصلی ذرات مادی به میزان زیادی همچون قطعات سنگهای آسمانی متراکم‌شده است و دراطراف آن قشر نازکی از بخارات سماوی همچون غبار پراکنده و دریخ محصور شده‌اند، به‌قسمی که سرستارهٔ دنباله‌دار به‌جز آب‌یخ‌زدهٔ جامد، حاوی گازهای متان و آمونیاك وسایر گازهای دیگر است، که همه در درجات پایین‌حرارت و در قسمت قشرهای زیاد یخ زده و فشرده‌اند. وقتی ستارهٔ دنباله‌دار به آفتاب نزدیك می‌شود هستهٔ گرم شده و گازهای محتوی خودرا تا میلیونها کیلومتر به‌خارج پرتاب می‌کند. منظرهٔ اعجاب‌انگیزستارهٔ دنباله‌دار بادم‌کشیده و دراز خود (البته درنزدیکی‌آفتاب)از

۳ـ اکبر دانا سرشت «عبدالرحمن‌صوفی» **مجلهٔ فضا**، شمارهٔ ۹۲

۴ـ جورج سارتون، **تاریخ‌علم**، ترجمهٔ احمدآرام. صفحهٔ ۵۵۶

این مطلب ناشی می‌شود.

گازهایی که‌این‌سان ازقسمت‌جامد ستاره رانده شده‌اند، غشاء نازك غبار مانند هسته‌های مادی را باخود به دم ستاره می‌برند.

به‌همین‌جهت یونانیان‌این‌ستارگان را کومت Comet به‌معنی دراز گیسو نامیده‌اند. ارسطو ستارگان‌دنباله‌دار را ازمواد متصاعدشده‌ستارگان‌می‌دانست.

ابوریحان، مقاله‌ای در ۶۵ برگ دربارهٔ این ستارگان تحت عنوان **مقالة فی‌الکلام‌علی‌الکواکب ذوات‌الاذناب‌والذوائب** نوشته بوده، که‌متأسفانه مانند بسیاری از ذخائر علمی ما به وادی عدم سپرده‌شده است.

درقرون گذشته به‌هنگام ظهورستارهٔ دنباله‌دار، ترس و وحشت عجیبی مردم را فرا می‌گرفت، زیرا آنها امراض مهلك وحوادث ناگوار را نتیجهٔ طلوع این ستارگان دنباله‌دارمی‌پنداشتند.

از این‌رو استاد، با ژرف‌نگری خاص خود مقاله‌ای درابطال این عقیده سخیف عامیانه تحت‌عنوان: **مقالة‌فی ابطال‌ظنون فاسده خطرت علی‌قلوب بعض الاطباء فی‌امرالکواکب الحادثة فی‌جو** درهفتادورق به‌رشته تحریرآورده و عقیده برخی از اطبا را درارتباط این ستارگان باامراض، خیالات‌فاسددانسته و چنین افکار ناهنجاری را دربارهٔ این ستارگان باطل شمرده است.

برای پی‌بردن به‌ارزش علمی و وسعت‌نظر استادکافی است توصیف‌یك ستاره دنباله‌دار راکه درمتون تاریخی قرن یازدهم روسیه (به‌سال۱۰۶۶)ذکر شده است نقل‌کنیم:

«دراین ایام نشانه بدبختی، ستاره عظیمی که اشعه‌آن خون‌آلود بود، در مغرب‌ظاهرشد. شامگاهان پس‌ازغروب آفتاب ازافق بیرون می‌آمد، وهفت‌روز تمام درآسمان باقی‌می‌ماند که ناگاه جنگ‌وخونریزی پدیدآمد و پولوستی Polosty به‌روسیه حمله‌کرد. ستارهٔ خونین‌بیشتراز کشتاروخونریزی‌حکایت می‌کند...»[۵]

حتی چند قرن‌بعد، درسال ۱۸۱۱ هنگامیکه ستاره دنباله‌دار درخشانی در آسمان روسیه‌دیده شد. مردم‌می‌پنداشتند که ظهور این‌ستاره وقوع جنگی راخبر می‌دهد، و تصادفا یك‌سال بعد ارتش ناپلئون به‌روسیه حمله‌کرد واین عقیدهٔ عامیانه باردیگر قوت‌گرفت[۶].

حرکات سیارات

بیرونی‌درکتاب **القانون‌المسعودی** خود، از حرکت سیارات، به روش بطلیموس‌سخن‌گفته وافلاك خارج‌مرکز و تدویر رابه‌همان صورت پیچیده‌ای که درقرون وسطی معروف بودآورده‌است.

۵و۶ـ «ستاره دنباله‌دار» **فضا** شماره ۱۶ آذرماه ۱۳۴۷. صفحهٔ ۱۸

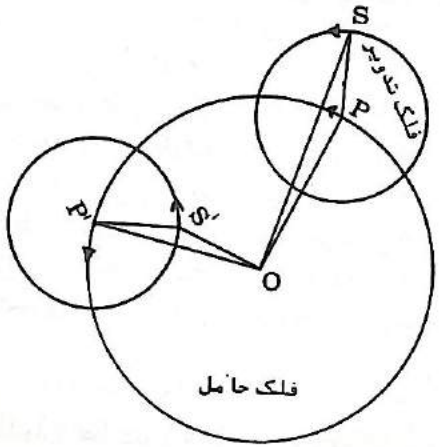
این دایرةالمعارف نجومی که درآن استاد، کوشیده است تا حرکات پیچیدهٔ سیارات را بنا برافلاك فیثاغورثی توصیف کند، بهترین شاهد پیشرفت عقلی دانشمندان اسلامی است.

دراین کتاب ازیك سو اشکال مجرد هندسی یونانی به‌افلاك مجسم تبدیل شده و از دیگرسو، اندیشهٔ هماهنگی فلکی که سخت در روحیهٔ یونانیان و به‌ویژه فیثاغوریان، نفوذ کرده بود، محفوظ مانده است. دراینجا حرکت سیارهٔ عطارد را بدان‌صورت که بیرونی در کتاب **القانون المسعودی** خود نقل کرده می‌آوریم. ولی قبلا اشاره به‌دونکته ضروری است. نخست آنکه درنجوم بطلیموسی هر سیاره‌ای مانند P دایره‌ای درحول مرکز O می‌پیماید در حالی که مرکز P خود دایره‌هایی درحول مرکز عالم یعنی زمین طی می‌کند. دایرهٔ به مرکز P را فلك تدویر Epicycle و دایرهٔ به مرکز زمین را فلك حامل Deperent می‌نامند.

تمام سیارات: فلك تدویر رادرمدت یك سال طی می‌کنند ولی مدت دوران نقطهٔ P روی فلك حامل برای سیارات مختلف متفاوت است.

ملاحظه‌می‌کنیم هروقت طول شعاع متحرك OS از طول OP زیادتر باشد سرعت زاویه‌ای OS از سرعت OP زیادتر خواهد بود، بالعکس هرگاه اندازهٔ آن‌شعاع از طول متوسط خود یعنی OP کمتر باشد (مثلا در وضعیت OS′) سرعت زاویه‌ای OS′ از سرعت OP کمتر خواهد بود.

حتی اگر سرعت S دور P به اندازهٔ کافی تند باشدممکن است اثر S آنقدر زیاد باشد که برای مدتی جهت دوران OS را عوض کندودرجهت‌عکس برگرداند. یعنی اگرچه اغلب اوقات حرکت OS مخالف حرکت عقربهٔ

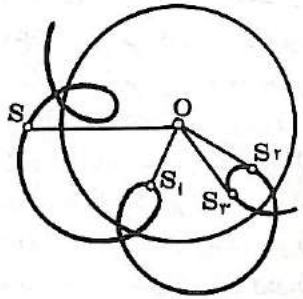


ساعت است، اما گاهی هم حرکتش موافق آن می‌شود.

پس مکان هندسی S توالی حلقه‌ها حول مرکز O می‌باشد.

هرگاه شعاع متحرك درموضعی مانند OS باشد می‌توان گفت OS مستقیم‌السیر است و در OS_1 راجع است و درنقاط OS_2 و OS_3 مقیم می‌ایستد.

بطلیموس درمورد خورشید نظریهٔ فلك خارج‌ازمرکز Excentrique را بیان می‌کند. به‌این‌معنی که مدارآفتاب را دایره وحرکت آن‌را روی دایرهٔ متشابه می‌داند ولی می‌گوید زمین در مرکز این دایره‌نیست.



مطلب دومی که ذکرآن لازم‌است، این‌است که تنظیم حرکات عطارد ازهمهٔ سیارات‌مشکلتر است‌وغیرازتدویر، افلاك دیگری برای آن فرض شده‌است. بعداز بطلیموس یوهانز کپلر قوانین اساسی حاکم برحرکات سیارات به‌دورخورشید را کشف کرد و مدارات را بیضوی دانست، ولی بازهم مشکل عطارد حل نشد وباآنکه مدارش بیضی بود، هرسال مقداری ازمسیرخود انحراف‌می‌جست‌و حرکت‌این‌سیاره که‌خروج ازمرکزش‌از دیگرسیارات بیشتر بود ($e = 0/206$) واستطالهٔ مدارش نیز زیادتر، مدتها از شگفتیهای توضیح‌ناپذیر طبیعت به‌شمار رفت و از دیرباز توجه ریاضیدانان و منجمان را به‌خود معطوف کرده بود. سرانجام توضیح آن به انقلابی درعلم منجرشد واین انقلاب را دانشمند بلند پایهٔ آلمانی آلبرت اینشتین برپا کرد، وباارائهٔ تئوری‌نسبیت وجاذبهٔ‌نسبی‌خود، این‌گره ناگشوده را باز کرد. عجب این است که از تئوری‌های جاذبه عمومی نیوتن‌هم دراین‌باره‌کاری ساخته نشد.

مطلب درخور ذکر این است که بطلیموس نیز به‌نارسا بودن فرضیه‌های خود درموردعطاردواقف بود وازاین‌رو یك فرضیهٔ دیگرمنحصراً درمورد عطارد اضافه می‌کند ومی‌گوید که مرکز فلك حامل‌این سیاره، خود دارای‌یك‌حرکت دورانی است. وهمین فرض را بیرونی نیز دربارهٔ این‌سیاره بیان‌کرده‌است.

باهمهٔ این پیچیدگیها اگر هیئت بطلیموسی را بطور کلی‌غیرمنطقی بدانیم بی‌انصافی کرده‌ایم. چه‌ماحرکت را از دونقطه‌نظر مطالعه می‌کنیم یکی‌از نقطهٔ نظر دینامیك، یا علم‌القوا، یعنی باتوجه به‌نیروهایی که آن حرکت را ایجاد می‌کنند، دراین‌صورت ما باید حرکت را با یك دستگاه مطلق مقایسه کنیم: دستگاهی که خودشتابی نداشته باشد.

نوع دیگر مطالعه از نقطهٔ‌نظر سینماتیك است، یعنی‌مطالعهٔ نفس حرکت بدون توجه به‌نیروها. دراین‌حالت‌مامی‌توانیم حرکت راکه یك‌امر نسبی است نسبت به‌دستگاه ثابت یا متحرك بررسی کنیم. در زمان بطلیموس هنوز علم دینامیك پایه‌گذاری نشده بود و بطلیموس و دانشمندان قدیم خواسته‌اند حرکت سیارات را نسبت به‌زمین یعنی به فرض ساکن‌بودن‌زمین تعبیر کنند وبخوبی‌هم ازعهدهٔ این‌کار برآمده‌اند.

حرکت سیارهٔ عطارد از نظر بیرونی.

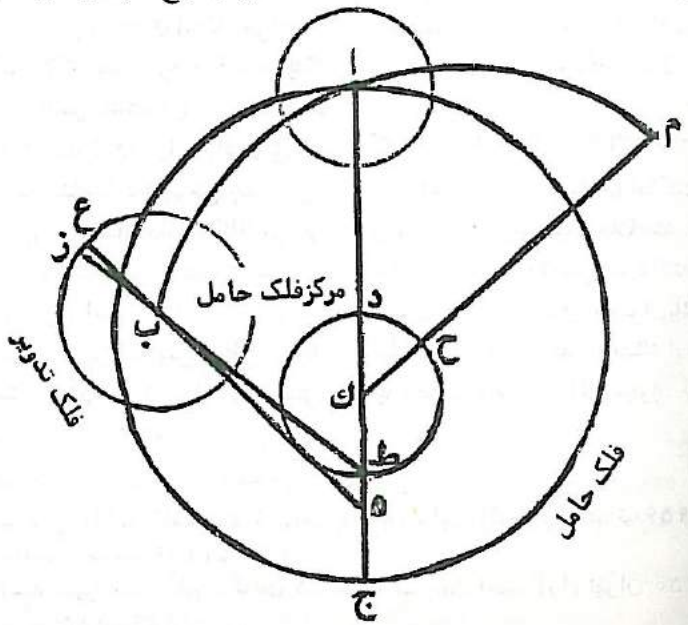
«برای‌مجسم‌ساختن‌حرکت‌عطارد، فلك‌حامل را برگردمرکز»رسم می کنیم و قطر ا د ه ح را می کشیم و ده را با دونقطهٔ ك وط به‌سه‌قسمت متساوی‌تقسیم می کنیم: سپس برمرکز ك وشعاع كط دایره‌ای رسم‌می کنیم که‌حامل‌مرکزفلك حامل است، ومی گوییم که امر عطارد درحرکات شبیه به‌امرقمر است، چه‌فلك حامل وضع ثابت‌ندارد وبه‌علت‌حرکت مرکزش‌برمحیط دایرهٔ د ح ط، برخلاف جهت توالی بروج حرکت می کند، و پس از یك‌سال تمام به‌وضع نخستین بازمی گردد.

فرض کنیم که‌درآن هنگام که مرکز فلك حامل بر د است، مرکز فلك‌تدویر بر ا باشد. چون د حرکت کند وبه ح برسد،فلك حامل به‌وضع م ب درمی آید؛ ولی مرکز فلك تدویر برفلك حامل، درجهت توالی، حرکتی مساوی‌حرکت آن‌دارد، بدان‌سان‌که بازگشت آنها در زمان واحدصورت‌می گیرد. پس‌درمدتی که مرکز فلك حامل قوس د ح را می‌پیماید، مرکز فلك تدویر به نقطهٔ ب از فلك حامل می‌رسد. واین امرپوشیده نیست‌که مرکز فلك تدویر وقتی به‌اوج م می‌رسد که‌خط ك م برخط ك ح منطبق شود، واین درنیمی از سال است، پس رسیدن آن به‌حضیض درنصف هریك‌از دونیمهٔ ا ج و ج ا خواهد بود، واین درست به‌همان صورتی است‌که مرکز تدویر ماه نیز درسال دومرتبه به اوج حامل خود می‌رسد. ولی حرکت‌تدویر وسطحی، درعطارد، برمرکزحامل‌نیست بلکه برنقطهٔ ط است که وسط ك و ه قرار گرفته. پس دوخط ذروهٔ ط ب ز و ه ب ع را رسم می کنیم، که ذروهٔ‌وسطی ز است و ذروهٔ مرئی‌ع. و در حرکت مذکور، به‌علت مساوی بودن زوایای دك‌ح و اطب، که دو زاویهٔ طول اوسطند، بایکدیگر برابرند و زاویهٔ ا ه ب زاویهٔ طول‌معدل است، پس‌زاویهٔ طبه، به‌جهت اشتراك میان‌آن‌دو،زاویهٔ تعدیل خاصه است. ونقطهٔ ط، که برای استوای مسیر در عطارد است، درمیان مرکز فلك‌البروج، یعنی ه و مرکز دایرهٔ حامل مرکز فلك حامل، یعنی‌ك، واقع است، همان‌گونه که مرکز حامل درکواکب چهارگانه در وسط فاصلهٔ میان مرکز فلك‌البروج ونقطهٔ استواری مسیر قرار دارد.

وازآنچه‌دربارهٔ خصوصیت‌حرکات

کواکب باحرکت‌خورشید گفتیم، چنین برمی‌آید که مرکزتدویر، درهریك از کواکب سفلی، در حرکت با جرم خورشید هماهنگ است، وبه‌همین‌جهت سیاره نمی‌تواند بیش ازآنچه گشادگی تدویر از دوطرف اجازه می‌دهد از خورشید دورشود. ونیز، حرکت هریك از سه‌سیارهٔ علوی برمحیط‌فلك‌تدویرش مساوی مجموع حرکت مرکز تدویر و حرکت خورشید است، تا به‌این‌ترتیب پیوسته احتراق آن سیاره در ذروه امکانپذیر شود، وامکان آن فراهم آید که سیاره، به‌علت قصور حرکت مرکز تدویر از حرکت خورشید، بر جمیع ابعادکروی قرارگیرد، و درنتیجه به‌آن برسد وازآن پیشی گیرد وبار دیگر به‌آن بازگردد.

واین‌حرکات حرکات وسطی است، وهمان است که درافلاك است، ونظام به‌آن است، نه‌آن حرکات مرئی تعدیل شده که درحقیقت‌عرضی‌است واز رؤیت حاصل می‌شود. وبه‌همین‌جهت اگرچنان اتفاق بیفتدکه مرکز فلك اوج‌خورشید، یعنی ز ، برخط ماربره که مرکز فلك البروج است و ط که نقطهٔ استواری مسیر است‌واقع‌باشد، سپس‌مرکزتدویر نقطهٔ اوج ا یا حضیض ج باشد،کوکب در ذروهٔ ك، ازآن جهت که به خطی می‌رسدکه موضوع خورشید متوسط را نسبت به‌آن محدود می کند، محترق می‌شود؛ ونیز درسفل م هنگامی محترق می‌شودکه یکی از سیارات‌سفلی باشد، واگر علوی‌باشد هنگامی‌محترق‌می‌شود که مقابل‌موضوع خورشیدمتوسط باشد،



چیزی که هست اوج خورشید با اوج هیچ‌یك از سیارات مطابق درنمی‌آید[7].

شکل مدار سیارات

قدما برای هریك از هفت ستاره سیار، فلکی‌درنظر می‌گرفتند وستارگان ثابت را نیز دریك‌فلك فرض می‌کردند و معتقد بودند، تمام این هشت فلك در درون فلك نهم است که **فلك‌اقصی** (دورترین فلك) یا مجددالجهات یا **فلك‌اعظم** می‌نامیدند.

استاد با ژرف‌نگری خاص خود اولین نظریهٔ‌صحیح را دربارهٔ‌شکل فلك اعظم یا به‌بیان دیگر مدار سیارات، ابراز داشته و در سؤال ششم خود از ابن‌سینا آن‌را عنوان کرده وازآن چنین دفاع می‌کند:

«...ومن از روی اعتقاد می‌گویم که شکل فلك‌اعظم، کروی نیست، بلکه بیضی و عدسی است، زیرا که اجتهاد کرده‌ام‌در رد این‌قول‌اجتهاد بلیغی...»

تنها مشاهدات نجومی چند قرن بس‌از بیرونی نشان دادکه کار بیرونی دراین‌باره چه اجتهاد بلیغ و شایان تحسینی بوده است.

زیرا کوپرنیك پس‌از طی قرنها، مدارستارگان‌را دایره‌می‌دانست‌نه‌بیضی. وهمچنان به دایره‌وشبه‌دایره‌چسبیده‌بود، تاحرکات دستگاه مفروضش با امور مشهود سازگار باشد، و تا آن زمان نه‌کوپرنیك ونه‌دیگران جرأت مقابله با حکم ارسطو را، که می‌گفت که مدار ستارگان باید به‌کاملترین‌صورت، یعنی دایره‌ای شکل باشد، نداشتند. و تنها کپلر پس‌از شکستها و ناکامیهای بسیار دریافت‌که حرکات رصدشده مریخ را تنها می‌توان به‌یك صورت توضیح داد وآن‌اینکه مریخ بریك‌مدار بیضی شکل که‌خورشیددریکی‌ازکانونهای‌آن‌است، حرکت می‌کند. وهمین امر موجب شد که وی به‌جای دوایر کپرنیکی بیضی قرارداده و حرکات ستارگان را توجیه کند. البته زرقالی دانشمند مسلمان اندلسی، نیز پیش‌ازکپلر، نظریهٔ بیضی بودن مدار سیارات را پیش‌کشیده‌بود. ولی دلایلش نارسا وناقص بود.

حرکت زمین‌و نقض‌سیستم‌مرکزیت‌زمین

استاد به‌مسئله احتمال حرکت‌زمین برگرد خورشید بسیار علاقه‌مند بود، حتی رساله‌ای دراین‌باب داشته که ازمیان رفته است، وی به‌عنوان‌یك‌منجم چنین عقیده داشت‌که این‌مسئله ازمسائل فیزیك است نه ازمسائل نجوم. به‌همین

۷- بیرونی، القانون‌المسعودی (حیدرآباد، چاپ‌دایرة‌المعارف‌العثمانیه ۱۹۵۶)، جلدسوم. صفحهٔ ۱۱۶۶-۱۱۶۳
(سیدحسین نصر، **علم و تمدن دراسلام**، ترجمهٔ احمد آرام تهران ۱۳۵۰، صفحهٔ ۱۸۵-۱۸۶)

جهت توجه محققان درفیزیك‌را به‌این مسئله جلب می‌کرد. وخود نیز درنتایج ولوازم‌فیزیکی منظومهٔ خورشیدمرکزی به‌تحقیق می‌پرداخت. او ازطریق‌مطالعهٔ آثار منجمان یونانی و نیز تعلیمات بعضی از حکمای هند این نظام را می‌شناخت و سالها بین فرضیهٔ زمین مرکزی، که به‌عنوان اصل‌مسلم و تثبیت شده بود، وفرضیهٔ خورشیدمرکزی‌مردد بود وسرانجام بی‌آنکه به‌طور قاطع یکی‌از آنها را بپذیرد دیده از جهان فروبست.

اما یادآوری این نکته لازم است که او همواره ازاین‌نظر دفاع می‌کرد که فرضیهٔ خورشیدبه‌عنوان مرکز عالم به‌هیچ‌وجه باقوانین اخترشناسی‌منافات ندارد. باآنکه‌استاد در**قانون‌المسعودی** خود علتی راکه زمین نمی‌تواند متحرك باشد شرح می‌دهد ومی‌گوید اگرزمین متحرك باشد، این حرکت باید خیلی سریع باشدوحتی‌سرعت وشتاب‌محاسبه شده اوبسیارنزدیك بامحاسبات‌امروزی است، مع‌الوصف‌هیچگاه به‌ساکن‌بودن زمین ایمان‌نیاورده‌است. وی‌حتی به‌طور روشن و بدون هیچ ابهامی به حداکثر و حداقل سرعت‌زمین اشاره‌کرد وچنین می‌نویسد:

«... پس‌اگر امر برچنین منوال باشد معلوم‌می‌گردد که‌کندی دردوطرف اوج ایجاد می‌شود وحداکثرآن سرعت درحضیض می‌باشد وسپس به‌سمت‌کندی می‌گراید.»

استاد در رسالهٔ دیگر خود تحت عنوان **استیاب‌الوجوه الممکنه فی‌صنعة الاسطرلاب**دوفرضیه‌حرکت‌زمین‌ومنظومهٔ خورشید مرکزی را درلفافهٔ تمجید از اسطرلاب ابوسعید سنجری‌که مبتنی بر حرکت زمین است، چنین‌عنوان کرده است: «از ابوسعید سنجری، اسطرلابی از نوع واحد وبسیط دیدم‌که ازشمالی وجنوبی مرکب نبود و آن‌را اسطرلاب زورقی نامید و اورا به‌جهت اختراع‌آن اسطرلاب‌تحسین بسیارکردم.چه‌اختراع آن متکی براصلی است‌قایم به‌ذات‌خود و مبنی برعقیدهٔ مردمی است‌که زمین‌را متحرك دانسته وحرکت یومی‌را به‌زمین نسبت می‌دهند ونه‌به‌کرهٔ سماوی. بدون شك این شبهه‌ای است‌که تحلیلش در نهایت دشواری وقولی است‌که رفع و ابطالش‌درکمال صعوبت‌است.مهندسان وعلمای هیئت‌که اعتماد و استناد ایشان برخطوط‌مساحیه (= مدارات و نصف‌النهارات واستوای‌فلکی‌ودایرة‌البروج) است، درنقض آن شبهه و رد آن عقیده بسی‌ناچیز وتهی‌دست باشند، و هرگز دفع‌آن شبهه را اقامت برهان و تقریر دلیلی نتوانند نمود. زیرا چه حرکت یومی را از زمین بدانند وچه آن‌را به کرهٔ سماوی نسبت دهند درهردوحالت به‌صناعت آنان زیانی نمی‌رسد و اگر نقض این اعتماد و تحلیل این شبهه امکانپذیر باشد موکول به رأی فلاسفهٔ

طبیعی‌دان است[8]».

با این‌همه این‌نظر بیرونی چه در زمان وی وچه قرنها پس‌از وی مورد قبول عموم قرار نگرفت. زیرا زمینهٔ علمی برای پذیرفتن این فرضیه هنوز پیدا نشده‌بود. من‌باب‌مثال ابوعلی‌حسن بن‌علی مراکشی که از علمای قرن هفتم هجری است درکتاب **جامع‌المبادی و الغایات** درضمن توصیف اسطرلاب‌زورقی نوشته است:

«ابوریحان بیرونی گفته است که طراح این اسطرلاب ابوسعید سنجری است، و اساس‌آن براین است که زمین متحرك باشد وفلك با همهٔ آنچه درآن است، جز سبعهٔ سیاره، ثابت. بیرونی گفته است‌که این شبهه‌ای است‌که حل آن‌دشوار است. واز وی‌عجیب‌می‌نماید که چگونه چیزی را دشوار پنداشته است‌که بطلان آن بسیار آشکار است، واین‌چیزی است‌که‌بطلان آن‌را ابوعلی بن‌سینا درکتاب **الشفا** و رازی درکتاب **ملخص** و دیگر کتابهایش، و دیگران اثبات‌کرده‌اند[9]».

چرا زمین کروی است!

استاد در **القانون‌المسعودی** خود دلایلی برای کرویت زمین اقامه کرده است‌وما تنها به‌یکی‌ازآنها اشاره‌می‌کنیم. استاد دراین برهان کرویت زمین را به وسیلهٔ‌سایهٔ زمین به‌روی کره ماه مدلل کرده است وچنین می‌نویسد: «... برای اثبات کرویت زمین دلیل دیگری می‌آوریم وآن‌سایه زمین است.می‌دانیم که‌سایهٔ‌هرچیز گرد به‌شکل دایره‌وسایهٔ‌هر چیزمثلثی‌شکل به‌شکل‌مثلث وسایه‌هرچیز مربع‌شکل به‌شکل مربع وسایهٔ هرچیز مستطیل‌شکل به‌شکل‌مستطیل است. به‌طور کلی‌اشیاء به‌هرشکلی که‌باشندسایه‌شان‌هم به‌همان شکل خواهد بود. اگر کسی سایهٔ زمین را روی ماه مشاهده کند

۸- برای کسب اطلاع بیشتر دربارهٔ نظریه بیرونی دربارهٔ حرکت زمین رجوع شود به:

*- S. Pines "La théorie de la rotation de terre à l'époque d'al-Bīrūni" Journal Asiatique, 244 (1956) pp. 301-6

*- J. V. Gines. "al - Birûni et les mouvmens de la terre." The Commemoration volume of Bīrūnī In Tehran vol.2, 1976. pp. 212 - 234

۹- کرلوآلفنسونلینو، **تاریخ نجوم اسلامی**، ترجمه احمد آرام، صفحهٔ ۳۱۲-۳۱۳

می‌بیند که حدود کناره‌های آن مدور و کروی است. به‌ویژه هنگام‌خسوف کامل می‌توان سایه وکرویت تقریبا همه‌محیط زمینی را روی ماه مشاهده کرد. پس می‌توان چنین نتیجه گرفت که محل تقاطع آن‌قسمت از زمین که به‌وسیلهٔ خورشید روشن می‌شود وقسمتی که سایهٔ خود را روی ماه می‌افکند دایره‌یی را تشکیل‌می‌دهد. این گونه نقطه‌های‌تقاطع فراوانند،آنهامرحله‌به‌مرحله بامشاهدات انسان مطابقت می‌کنند و با قسمتهای مختلف‌زمین مربوط‌هستند زیراقسمتهای گوناگون زمین بدون استثناء این وجه مشترك را دارندکه همگی روی‌ماه سایهٔ گرد و مدوری می‌افکنند. پس‌نمی‌توان راجع به‌شکل زمین شك‌وتردید داشت. زمین درهمهٔ‌جهات‌گرد است[10]»

اندازهٔ‌تقریبی‌محیط‌کرهٔ زمین به‌وسیلهٔ اتساع افق

بیرونی درآخر کتاب اسطرلاب خود، فصلی در شناختن اندازهٔ محیط زمین به‌وسیلهٔ اتساع افق آورده، که امروزه نیز به‌نام«قاعدهٔ بیرونی»شهرت دارد.

ما اینك روش‌وی‌را دراندازه‌گیری کرهٔ زمین شرح می‌دهیم. بیرونی می‌نویسد: «وبرای دانستن آن روشی ذهنی هست که‌با برهان، صحت‌آن اثبات می‌شود، ولی عمل کردن آن به‌علت خردی اسطرلاب وکوچکی‌مقدارچیزی که برآن بنامی‌شود دشوار است. وراه کار آن است‌که برقلهٔ‌کوهی مشرف بر دریا، بردشت‌همواری بالا روی‌وغروب خورشید را رصدکنی و ازاین‌راه‌مقدار انحطاطی راکه گفتیم به‌دست‌آوری و ارتفاع کوه را درجیب منکوس خود زاویهٔ انحطاط تقسیم کنی، و خارج قسمت را در بیست و دو ضرب وحاصل را بر هفت تقسیم کنی تا از این راه مقدار محیط‌زمین را بنا بر واحدی که برآن ارتفاع‌کوه را اندازه گرفته‌ای بدست‌آوری و برای ما درمورد این انحطاط و مقدار آن در مواضع بلند تجربه‌ای دست نداد وآنچه‌مارا دربیان این روش‌جرئت داد، گفته ابوالعباس نیریزی به‌نقل از ارسطولس است که بلندترین ارتفاع‌کوه بنا برآنکه شعاع کرهٔ زمین تقریبا سه‌هزار و دویست میل باشد، پنج‌میل‌ونیم است. محاسبه نشان می‌دهد که مقدار انحطاط درکوهی به‌این‌بلندی باید تقریبا سه‌درجه بوده باشد. و درمانند این‌گونه چیزها باید به‌تجربه وامتحان توسل شود وکامیابی جز ازجانب خداوند توانانیست.

این گفته بیرونی را می‌توان با اصطلاحات وعلائم جدید به‌طریق زیر تفسیر کرد:

۱۰- برگزیده آثار بیرونی، **پیام‌یونسکو** سال پنجم شمارهٔ ۵۹. صفحهٔ۲۳-۲۴

مطابق شکل، فرض می‌کنیم O قلهٔ کوهی و OA ارتفاع آن باشد که از مرکز T زمین می‌گذرد. خط OH را عمود بر OT رسم می‌کنیم که درسطح افق قلهٔ کوه قرارمی‌گیرد. ونیزخط OC رادرنقطهٔ C برمحیط زمین مماس می‌کنیم. بنابراین مثلث OCT درC قائم‌الزاویه خواهد بود. زاویه HOC همان است که بیرونی آن‌را انحطاط افق نامیده است، ومی‌دانیم که این زاویه متمم زاویهٔ TOC است وبازاویهٔ OTC برابر است.

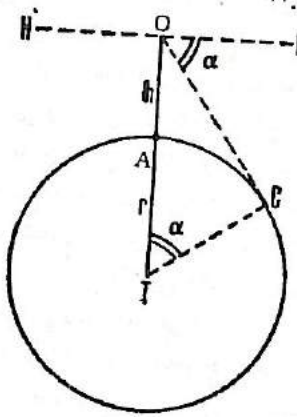
چون شعاع زمین را با R وارتفاع کوه‌را با h وزاویهٔ انحطاط‌را به α نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\sin OTC = \cos\alpha = \frac{R}{R+h}$$

$$R\cos\alpha + h\cos\alpha = R$$

$$R(1-\cos\alpha) = h\cos\alpha \Leftarrow R = h\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

واین معادلهٔ اخیرهمان قاعدهٔ بیرونی است، زیرا جیب منکوس عبارت است ازشعاع (دراینجا به فرض واحد) که جیب تمام زاویهٔ مفروض را از آن کاسته باشند وچون R راکه به‌این ترتیب به‌دست آمده است در π یعنی $\frac{22}{7}$ ضرب کنیم طول محیط زمین به‌دست می‌آید.[11]



بیرونی بعداز تألیف کتاب الاسطرلاب خود، طریقه‌پیشنهادی خود را از قوه به‌فعل آورده و در کتاب **القانون‌المسعودی** آن را بیان کرده است که اگر زمین واقعا یك کرهٔ هندسی بود، نه‌یك بیضی (Geoid) اندازه‌ای که بیرونی به‌دست آورده با اندازه‌گیریهای جدید کاملا تطبیق‌می‌کرد[12].

باوجود این، اندازهٔ محیط زمین آن‌طور که بیرونی محاسبه کرده، تنها درحدود ۱۱۰ کیلومتر بااندازه‌امروزی اختلاف دارد.

رصدماه و خورشید ودیگر ستارگان

استاد رصدهای دقیقی از خورشید

۱۱ـ **تاریخ نجوم اسلامی** ترجمهٔ کتاب، **علم‌الفلك و تاریخچه عندالعرب** تألیف کرلوالفونسونلینو. ترجمهٔ آقای احمد آرام تهران ۱۳۴۹ هجری شمسی. صفحات ۳۶۲ و۳۸۶

۱۲ـ سیدحسن البرنی: «بحوث المسلمین العلمیه فی‌المساحة التطبیقیه» **ثقافة‌الهند**، المجلدالثالث، العددالثانی، ۱۹۵۲ میلادی

به‌هنگام کسوف کرد. ومراحل مختلف سپیده‌دم وغروب راتوصیف کرد.

وی نحوهٔ اندازه‌گیری قسمتهای روشن‌ماه را بررسی کرد و دربارهٔ رنگهایی که هنگام کسوف قمر مشاهده می‌شود به‌تحقیق علمی‌پرداخت[13].

ابوریحان اجرام سماوی (ثوابت و سیارات) را برحسب بزرگی آنها ولی درواقع برحسب نورانی بودنشان طبقه‌بندی کرده‌است. اوجایگاه‌ستارگان را مشخص کرد، حرکت‌ظاهری آنهارا به‌دور دوقطب‌مشاهده کرد وبدین‌ترتیب مشخصات هزارو بیست‌ونه ستاره را به‌دست داد.

فرمایشات بچه‌ها

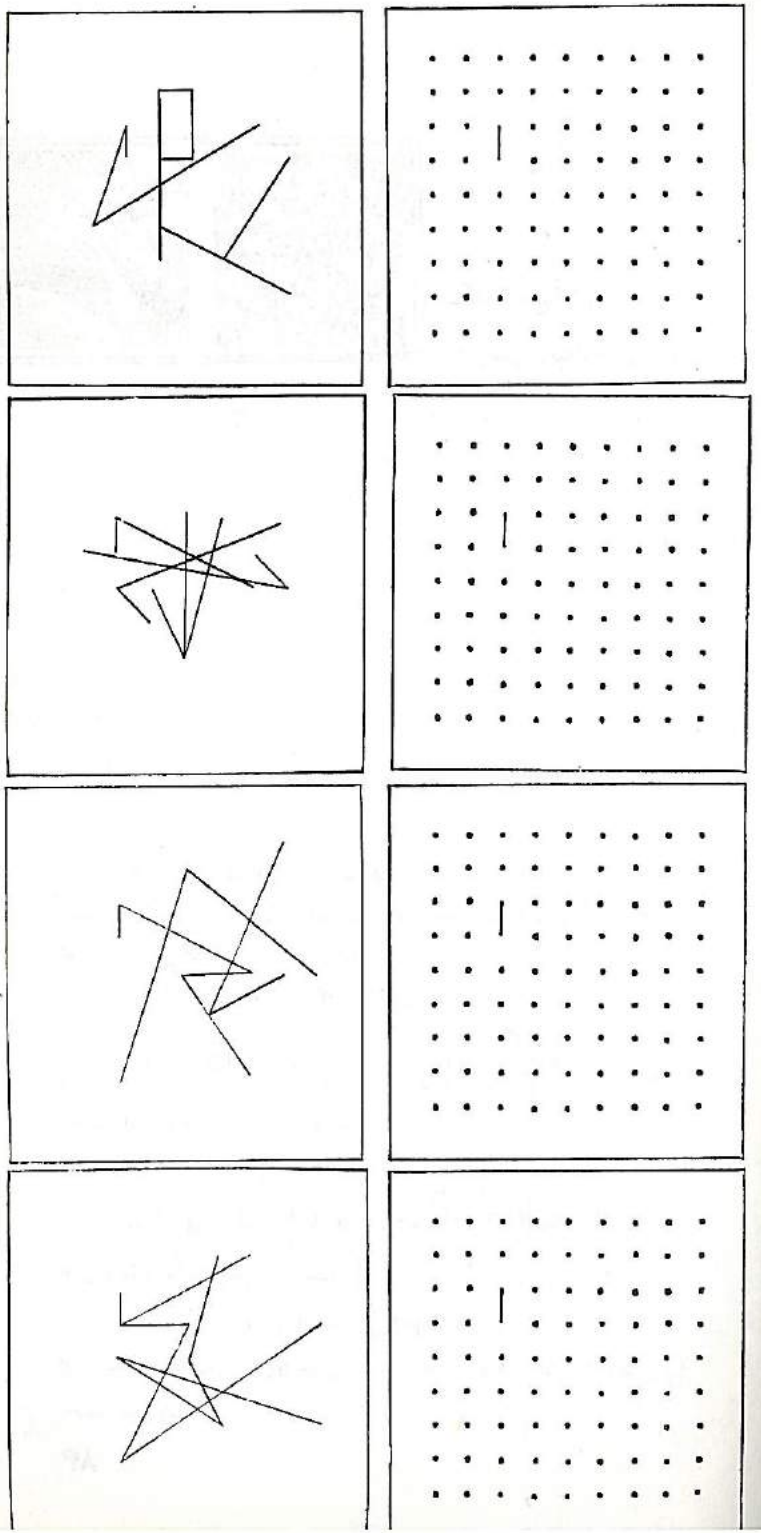
خطاب به‌دخترك سه‌ساله:

ـ عزیزم، چندسال داری؟

ـ وقتی دست کش یك‌انگشتی دستم‌است از کجا بدانم؟

۱۳ـ این‌قسمت ازقانون مسعودی بیرونی توسط ویدمان درمقاله زیر مورد بررسی قرارگرفته است:

E. Wiedemann, . "Uber die verschiedenen, bei der Mondfinsternis auftretenden Farben nach Bīrūnī" Jahrb. für photographie, 28(1914) pp. 25 - 30.



از صفر تا ۳۲

نیروی مشاهده، حافظه و دقت خود را آزمایش کنید

چهارشکل سمت‌چپ‌صفحه‌مقابل‌را درمدت یك دقیقه‌و نیم بررسی‌کنید و طول وجهت هر کدام‌ازهشت پاره خطی راکه درآن می‌بینید، به خاطر بسپارید.

بعد روی این چند شکل را بپوشانید و هرچه راکه به‌خاطرسپرده‌اید، باوصل نقطه‌ها، در چهار مربع سمت راست، رسم کنید. به این‌ترتیب، باید سعی‌کنید هرکدام از شکلهای سمت چپ را درشبکهٔ‌سمت‌راست‌آن‌وارد کنید.

یکی از پاره خطها، در شبکهٔ سمت راست‌داده شده‌است (این نهمین پاره خط‌است که‌از همه‌کوتاهتروعمودی است)، و بنا براین، به خاطر سپردن آن، لزومی ندارد. برای اینکه، صفحهٔ مجله خراب نشود، نمونه‌ای از این چهارشبکه را، به‌همین‌اندازه، تهیه و ازآن استفاده‌کنید. بعداز آنکه،از پاره‌خطها، آنچه را که به خاطر داشتید، رسم کردید، می‌توانید نتیجه را ارزیابی کنید.

حداکثر امتیازی را که می‌توان آورد، ۳۲ است. و این حداکثر امتیاز وقتی بدست می‌آید که شما هر ۳۲ پاره‌خط را به درستی رسم کرده باشید. ولی، تصور نمی‌رودکه‌کسی تااین‌حد موفق شود! بهترین حالت، برای موقعی‌است‌که شما درگروه «الف» قرارگیرید (جدول را ببینید، علامت «+» به معنای «وبیشتر» است)که دراینصورت دقت شماعالی است. اگر در گروه «ب» قرار گرفتید، به‌معنای‌اینست‌که از دقت‌خوبی برخوردارید.

قرار گرفتن در گروه «ج» هم‌بد نیست: دقت شما عادی است، ولی به‌هرحال ازحد متوسط تجاوز نمی‌کند.ولی، اگر درگروه «د» قرار گرفتید، موقعیت مناسبی ندارید، و به معنای اینست که شما نمی‌توانید حواس خود راجمع کنید و دقت شما خیلی کم است. باید حافظه و دقت‌خودرا تمرین بدهید. تنها باتمرین‌است که می‌توانید به‌تقویت آنچه‌که‌کم‌دارید، کمك کنید. درستون سمت‌چپ‌سن‌شما داده شده‌است، زیراتوانائی درتمرکز حواس‌تنها به‌خصلتهای اختصاصی فرد مربوط نیست، بلکه‌بسیاری از علتهای‌علنی‌هم (مثل‌سن‌فرد) درآن‌اثر دارد.

سن	تعداد پاره‌خط‌هایی که درست رسم شده است			
	الف	ب	ج	د
۱۳	۱۷+	۷–۱۶	۳–۷	۰–۳
۱۴	۱۸+	۱۰–۱۷	۵–۹	۰–۴
۱۵	۱۹+	۱۱–۱۸	۵–۱۱	۰–۵
۱۶	۲۰+	۱۲–۲۰	۶–۱۲	۰–۶
۱۷	۲۲+	۱۳–۲۱	۷–۱۳	۰–۷
۱۸	۲۳+	۱۴–۲۲	۸–۱۳	۰–۷
۱۹	۲۳+	۱۵–۲۳	۹–۱۴	۰–۸
۲۰	۲۴+	۱۵–۲۴	۹–۱۵	۰–۶
۲۱	۲۵+	۱۶–۲۴	۹–۱۵	۰–۸
۲۲	۲۵+	۱۶–۲۴	۹–۱۶	۰–۸
۲۳	۲۵+	۱۷–۲۵	۹–۱۶	۰–۸
۲۴	۲۵+	۱۷–۲۵	۹–۱۶	۰–۸
۲۵	۲۶+	۱۷–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۲۶	۲۶+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۲۷	۲۶+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۲۸	۲۶+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۲۹	۲۶+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۳۰	۲۶+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۳۱	۲۶+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۳۲	۲۵+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۳۳	۲۵+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۳۴	۲۵+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۳۵	۲۵+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۳۶	۲۵+	۱۸–۲۵	۹–۱۷	۰–۸
۳۷	۲۵+	۱۷–۲۴	۹–۱۷	۰–۸
۳۸	۲۴+	۱۷–۲۴	۹–۱۷	۰–۸
۳۹	۲۴+	۱۷–۲۴	۹–۱۷	۰–۸
۴۰	۲۴+	۱۷–۲۴	۹–۱۷	۰–۸
۴۱	۲۳+	۱۷–۲۳	۹–۱۶	۰–۸

شگفتیهای عدد

حد بعضی دنباله‌های عددی

قضیهٔ وایرشتراس می‌گوید که: اگر دنباله‌ای یکنوا و محدود باشد، در آنصورت دارای حدی است. در اینجا نمونه‌هایی را می‌آوریم که اهمیت این قضیه را روشن می‌کند.

مثال ۱. ثابت کنید که دنبالهٔ (a_n)، باشرط

$$a_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\dots+\sqrt{a}}}\quad (a>0)$$

متقارب است وحد آن‌را پیدا کنید.

حل. روشن است که داریم:

$$\sqrt{a}<\sqrt{a+\sqrt{a}}<\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}<\dots$$

یعنی دنبالهٔ (a_n) صعودی است. داریم:

$$a_n^2=a+a_{n-1}<a+a_n$$

از نامساوی $a_n^2-a_n-a<0$ (با توجه به‌اینکه $a>0$ و $a_n>0$) به‌دست می‌آید:

$$a_n<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

یعنی دنبالهٔ (a_n) محدود است. به‌این ترتیب، ثابت شد که دنبالهٔ (a_n) متقارب است. دوباره، تساوی:

$$a_n^2=a+a_{n-1}\quad (1)$$

را درنظر می‌گیریم. اگر داشته باشیم $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n=x$، خواهیم داشت: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_{n-1}=x$. اگر در تساوی (۱)، حالت حدی را در نظر بگیریم و از قضیه‌های مربوط به حد مجموع و حاصلضرب تابعها استفاده کنیم، به‌دست می‌آید.

$$x^2=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n^2=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,(a+a_{n-1})=a+x$$

و از آنجا:

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\quad (2)$$

ازجواب منفی، به‌این مناسبت، صرفنظرکرده‌ایم که همهٔ جمله‌های دنباله، مثبت است و درنتیجه، برای x نمی‌توان جواب منفی به‌دست آورد.

حالت خاص:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\sqrt{\underbrace{1+\sqrt{1+\dots+\sqrt{1}}}_{n}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad (3)$$

مثال ۲. ثابت کنید که دنبالهٔ (b_n) باشرط:

$$b_n=\sqrt{b+\sqrt{b^2+\sqrt{b^4+\dots+\sqrt{b^{2^{n-1}}}}}}\quad (b>0)\quad (4)$$

متقارب است وحد آن را پیدا کنید.

حل. تساوی (۴) را می‌توان به‌نحو دیگری نوشت:

$$b_n=\sqrt{b}\cdot\sqrt{\underbrace{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots+\sqrt{1}}}}_{n}}\quad (5)$$

که از تساویهای (۳) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} b_n = \sqrt{b}\,.\,\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\sqrt{\underbrace{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}_{n}} =$$

$$=\sqrt{b}\,.\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (6)$$

حالا فرض می‌کنیم که (c_n) ، دنباله‌ای از عددهای مثبت باشد و

$$x_n=\sqrt{c_1+\sqrt{c_2+\cdots+\sqrt{c_n}}} \qquad (7)$$

را در نظر می‌گیریم. به‌دنبال شرطهایی می‌رویم که به‌ازای آنها، دنبالهٔ (x_n) متقارب باشد.

قضیه . برای اینکه دنبالهٔ (x_n) متقارب باشد، لازم وکافی است که دنبالهٔ

$$c_1\,,\ c_2^{\frac{1}{2}}\,,\ c_3^{\frac{1}{2^2}}\,,\ \ldots\,,\ c_n^{\frac{1}{2^{n-1}}}\,,\ \ldots \qquad (8)$$

محدود باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم که دنبالهٔ (۸) نامحدود باشد. دراینصورت، هر $A>0$ ، عدد $c_n^{\frac{1}{2^{n-1}}}>A$ پیدا می‌شود، که از آنجا $c_n>A^{2^{n-1}}$ و

$$x_n>\sqrt{0+\sqrt{0+\cdots+\sqrt{0+\sqrt{c_n}}}}>$$

$$>\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{A^{2^{n-1}}}}}=\sqrt{A}$$

اگر A را به اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب کرده باشیم، عدد $\sqrt{A}$ هم به اندازهٔ کافی بزرگ می‌شود که به‌معنای نامحدود بودن دنبالهٔ (x_n) و نداشتن حد برای آنست. لازم بودن شرط قضیه ثابت شد.

حالا، فرض کنید که دنبالهٔ (۸) محدود است:

$$c_n^{\frac{1}{2^{n-1}}}<b \Rightarrow c_n<b^{2^{n-1}}$$

در اینصورت :

$$x_n=\sqrt{c_1\sqrt{c_2+\cdots+\sqrt{c_n}}}<$$

$$<\sqrt{b+\sqrt{b^2+\cdots+\sqrt{b^{2^{n-1}}}}}=\sqrt{b}\,.\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که دنبالهٔ (x_n) محدود و علاوه بر آن، صعودی و بنابراین متقارب است. قضیه، به‌طورکامل ثابت شد.

خواننده می‌تواند در مورد مثالهای بعدی تحقیق کندکه شرطهای این قضیه برای آنها صادق است (همانطورکه برای مثالهای ۱ و ۲ هم صادق بود).

وقتی‌که بنویسیم:

$$\sqrt{c_1+\sqrt{c_2+\sqrt{c_3+\cdots}}}$$

به‌معنای اینست‌که تعداد جمله‌های زیر رادیکالها، بینهایت است و بنابراین

$$\sqrt{c_1+\sqrt{c_2+\sqrt{c_3+\cdots}}}=$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\sqrt{c_1+\sqrt{c_2+\cdots+\sqrt{c_n}}}$$

مثال ۳ . کدامیک ازاین دوعدد بزرگتر است :

$$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

$$y=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\cdots}}}}$$

حل. در برخورد اول به‌نظر می‌رسدکه $y>x$ ، زیرا برای تشکیل عدد y ، ازهمهٔ عددهای طبیعی استفاده شده است، درحالیکه برای تشکیل عدد x ، تنها عدد $c_n=2$ به کار رفته است. ولی، دقیقتر محاسبه کنیم. بنابر دستور (۲) ، به‌ازای $a=2$ داریم :

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4\times 2}}{2}=2$$

برای ارزیابی مقدار y ازمثال ۲، استفاده می‌کنیم:

$$y=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\dots}}}}<$$

$$<\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{2^2+\sqrt{2^4+\dots}}}}=$$

$$=\sqrt{1+\sqrt{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}}<2$$

و بنابراین $y<x$.

مثال ۴. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}=7$$

حل. باتوجه به‌مثال ۱،می‌توان نوشت:

$$\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}=7\Rightarrow x=42$$

معادله را به‌این ترتیب هم می‌توانستیم حل کنیم. اگر دو طرف معادله را مجذورکنیم، به‌دست می‌آید:

$$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}=49$$

از آنجا

$$x+7=49\Rightarrow x=42$$

مثال ۵. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\dots}}}}}}=3$$

حل. دراینجا نمی‌توان از روش اول مثال قبلی استفاده کرد، زیرا دستور آماده‌ای برای مقدار سمت‌چپ تساوی وجود ندارد. بنابراین

از روش دوم حل‌آن استفاده می‌کنیم. دو طرف تساوی را مجذور می‌کنیم؛ به‌دست می‌آید:

$$1+\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\dots}}}=9$$

از آنجا:

$$\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\dots}}}=8$$

دوباره، دوطرف تساوی را مجذور می‌کنیم:

$$x+\sqrt{1+\sqrt{x+\dots}}=64$$

که از آنجا به‌دست می‌آید:

$$x+3=64\Rightarrow x=61$$

به‌این ترتیب:

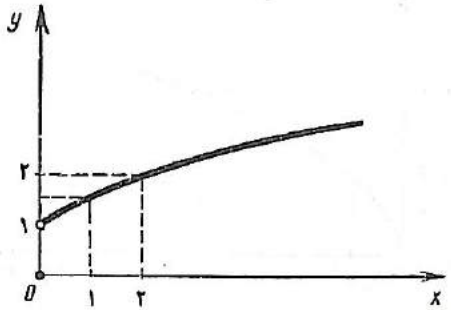
$$\sqrt{1+\sqrt{61+\sqrt{1+\sqrt{61+\dots}}}}=3$$

مثال ۵. نمایش تغییرات این تابع را، درمحورهای قائم‌مختصات رسم کنید:

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}\quad(x\geqslant 0)$$

حل. اگر $x=0$، آنگاه $y=0$. اگر $x>0$، آنگاه

$$y=\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$$



شکل ۱

ازاین رابطه معلوم می‌شود که اگر $x \to 0$ ، آنگاه $y \to 1$. نمایش تغییرات تابع‌را درشکل ۱ داده‌ایم (مبداء مختصات، نقطهٔ منفرد تابع‌است).

مثال ۷. منحنی نمایش تغییرات این تابع را رسم کنید:

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\dots}}}$$

حل. اگر $x \to 0$ ، آنگاه $y \to 0$ واگر $x \geqslant 0$، آنگاه

$$y=\sqrt{x}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

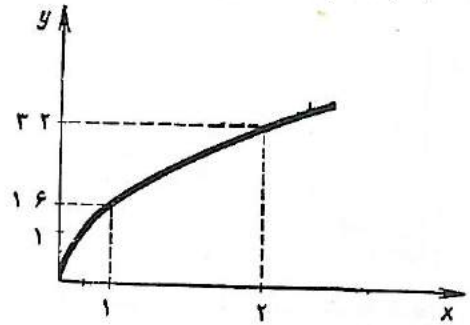
حال، دیگر به‌سادگی منحنی نمایش تغییرات تابع ساخته می‌شود:

تا اینجا به‌مثالهایی پرداختیم که با $\sqrt{x}$ سروکار داشت، ولی به‌سادگی معلوم می‌شودکه می‌توان این رابطه‌ها را در مورد $\sqrt[m]{x}$ هم $(m>2)$ تعمیم داد. درچنین حالتی، برای اثبات قضیهٔ بالا، بایدبه‌جای دنبالهٔ $\left(c_n 2^{\frac{1}{n-1}}\right)$ ، دنبالهٔ $\left(c_n m^{\frac{1}{n-1}}\right)$ را درنظرگرفت.

البته، ممکن است باموارد‌ی سروکار داشته باشیم که در آنها ریشه‌های مختلفی وجود داشته باشد. چند مثال می‌آوریم.

مثال ۸. این معادله‌ها را حل کنید:

$$\text{a)}\quad 2=\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\dots}}}}$$



شکل ۲

$$\text{b)}\quad 2=\sqrt{1+\sqrt[3]{y+\sqrt{1+\sqrt[3]{y+\dots}}}}$$

حل. a) به‌ترتیب داریم:

$$8=1+\sqrt{x+\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\dots}}}\ ,$$

$$7=\sqrt{x+\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\dots}}}\ ,$$

$$49=x+2\ ,\quad x=47$$

b) به‌ترتیب داریم:

$$4=1+\sqrt[3]{y+\sqrt{1+\sqrt[3]{y+\dots}}}\ ,$$

$$27=y+\sqrt{1+\sqrt[3]{y+\dots}}$$

$$27=y+2 \Rightarrow y=25$$

مثال ۹. ثابت کنید که دنبالهٔ (x_n) متقارب است به‌شرطی که با فرض $c_n>0$:

$$x_n=\operatorname{arc\,tg}(c_1+\operatorname{arc\,tg}(c_2+\dots+$$
$$+\operatorname{arc\,tg}(c_{n-1}+\operatorname{arc\,tg} c_n)\dots))$$

حل. دنبالهٔ (x_n) صعودی و محدود به‌عدد $\frac{\pi}{2}$ است و بنابراین متقارب است.

مثال ۱۰. این معادله را حل کنید:

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}(x+\operatorname{arc\,tg}(x+\dots)$$

از آنجا که $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ و $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}u)=u$ ، به‌دست می‌آید:

$$1=x+\operatorname{arc\,tg}(x+\operatorname{arc\,tg}(x+\dots)$$

از آنجا :

$$1 = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 1 - \frac{\pi}{4} = 0/21\ldots$$

***

بیان عددهای طبیعی به‌کمك رادیکالهای مرکب

درکارهای راما نوجانا این دستورها داده شده است :

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} \qquad (1)$$

$$4 = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}} \qquad (2)$$

هاردی ، ریاضیدان انگلیسی دوست ومعلم راما نوجانا متذکر می‌شود که درهمهٔ فرمولهای او ، چیزی خیلی بیشتر ازآنچه که درابتدا به نظر می‌رسد، وجود دارد. در واقع، اگر ریشه‌های منطقی حتی‌ساده‌ترین دستورهای راما نوجانا را جستجو کنیم، می‌توان بستگیها و زیبایهای بسیار جالبی را پیدا کرد.

اگر اصول ساختمانی فرمولهای (۱) و (۲) را بررسی کنیم، معلوم می‌شود که می‌توان عبارتهای مشابه (ولو اینکه همیشه به این زیبایی نباشند)، به هرتعداد که بخواهیم به‌دست آورد. همچنین، ضمن این‌بررسی قانونهایی به‌دست می‌آید که می‌توان به‌کمك آنها چنین عبارتهایی را پیدا کرد.

فرمولهای (۱) و (۲) ، بر اساس تبدیلهای متوالی عبارت $n=\sqrt{f(n)}$ $(n\in N)$ قرار دارد، که در هرگام این تبدیل، مقدار $f(n)$ برابر n^2 می‌شود. عبارت (۱)، حالت خاصی (به ازای $n=1$) از فرمول راما نوجانا است:

$$n(n+2) = \qquad (3)$$

$$= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+\ldots}}}}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که دراینجا، عبارت اولیه به‌اینصورت بوده است:

$$(n+2) = \sqrt{(n+2)^2} = \sqrt{1+(n+1)(n+3)}$$

که اگر $n+2=t$ بگیریم، به‌اینصورت درمی‌آید:

$$t = \sqrt{1+(t-1)(t+1)}$$

فرمول (۳) ، از تبدیلهای متوالی عبارت زیر رادیکال به‌دست می‌آید، به‌شرطی که مقدار زیر رادیکال را به‌صورت

$$t+1 = \sqrt{1+t(t+2)}$$

بگیریم ودر ابتدا به‌جای $(t+1)$،مقدار $(n+2)$، وسپس $(n+4)$ وغیره را قرار دهیم:

در دستور (۲) راما نوجانا هم می‌توان عبارت اولیه‌را تشخیص داد:

$$\sqrt{f(n)} = \sqrt{n^2} = \sqrt{(n+2)+(n-2)(n+1)}$$

و از آنجا

$$n = \sqrt{(n+2)+(n-2)(n+1)} =$$

$$= \sqrt{(n+2)+(n-2)\sqrt{(n+3)+(n-1)(n+2)}} = \ldots$$

مطلب جالب دراینجاست که در هر دودستور راما نوجانا ، می‌توان $f(n)=n^2$ را به‌صورتهای مختلفی بیان کرد، مثلا

$$n^2 = -n + n(n+1) \ ,$$

$$n^2 = -1 + n(n-1) + (n+1) \ , \ \ldots$$

درحالت کلی‌تری، عبارت $f(n)=n^2$ را می‌توان به‌اینصورت نوشت:

$$n^2 = (n+k_1)k_2 + k_3 \qquad (4)$$

که درآن k_1 مقداری ثابت و k_2 و k_3 یا مقداری ثابت ویا تابعی از n هستند. اگر k_1 و k_2 به‌دلخواه انتخاب شوند، مقدار k_3 از دستور (۴) به‌دست می‌آید.

اگر در رابطهٔ (۴) فرض کنیم $k_1=1$ و $k_2=(n-1)$، درآنصورت $k_3=1$ می‌شود، که ازآنجا دستور (۱) به‌دست می‌آید. همچنین دستور (۲) را می‌توان باانتخاب $k_1=1$ ، $k_2=(n-2)$ و $k_3=(n+2)$ نتیجه گرفت.

روشن است که k_1 را لازم نیست حتماً برابر واحد بگیریم، همچنین لزومی ندارد که تبدیل روی جملهٔ $(n+k_1)$ انجام شود. به‌این ترتیب، حتی به‌ازای مقادیر مشخص k_1 ، k_2 و k_3، می‌توان گروههای مختلفی از بیان عددهای طبیعی برحسب رادیکالهای مرکب به‌دست آورد.

نخستین گروه بزرگ، از راه تکرار متوالی فرمول (۴) به دست می‌آید (که فرمولهای (۱) و (۲) هم‌ناشی ازآن هستند). این تکرار، به‌این ترتیب مشخص می‌شود: هرعدد طبیعی به‌وسیلهٔ فرمولی بیان می‌شود وقسمتی ازآن درفرمولی مشابه فرمول همهٔ عددهای قبلی رشتهٔ طبیعی‌وارد می‌شود. برای روشن شدن مطلب، بیان عدد ۲ رادرچنین تبدیلی، می‌آوریم:

$$2=\sqrt{1+1(3)}=\sqrt{1+1\sqrt{1+2(4)}}=$$

$$=\sqrt{1+1\sqrt{1+2\sqrt{1+3(5)}}}=$$

$$=\sqrt{1+1\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4(6)}}}}=\dots$$

و روشن است‌که دراینجا، آخرین عددها (که ما در داخل پرانتز قرار داده‌ایم)، رشتهٔ عددهای طبیعی را تشکیل می‌دهند. به‌همین مناسبت،می‌توان برای هرعدد ازرشتهٔ عددهای طبیعی، رادیکال مرکب مربوطه را، درهمین بیان عدد ۲، که دربالا آوردیم، پیدا کرد. مثلاً، عبارت،

$$4=\sqrt{1+3(5)}=$$

$$=\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\dots}}}}$$

قسمتی از همان رادیکال مرکب مربوط به‌بیان ۲ است. این خاصیت برای تبدیل $n+k_1$ ، وقتی به‌دست می‌آید که $k_1=1$ باشد.

دستورهای زیرهم، به‌همین گروه فرمولها مربوط می‌شوند:

برای $n>1$

$$2=\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{29+\sqrt{41+\dots}}}}}}$$

$$(k_1=1\ ,\ k_2=1\ ,\ k_3=-1+n(n-1))$$

برای $n>2$

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{6+2\sqrt{13+2\sqrt{22+\dots}}}}$$

$$(k_1=1\ ,\ k_2=2\ ,\ k_3=(n-2)n-2)$$

برای $n>3$

$$4=\sqrt{11+1\sqrt{13+2\sqrt{15+3\sqrt{17+\dots}}}}$$

$$(k_1=1\ ,\ k_2=n-3\ ,\ k_3=2n+3)$$

برای $n>4$

$$5=\sqrt{19+1\sqrt{22+2\sqrt{25+3\sqrt{28+\dots}}}}$$

$$(k_1=1\ ,\ k_2=n-4\ ,\ k_3=3n+4)$$

گروه دوم، وقتی به دست می‌آید که $k_1>1$ بگیریم. دراینصورت، ضمن تبدیل تکراری جملهٔ $(n+k_1)$ ، قسمتهای مشابه رادیکالهای مرکب، متناظر با «تجزیهٔ» همهٔ عددهای طبیعی نیستند، بلکه متناظر با عددهایی هستند که تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت $d=k_1$ می‌دهند.

مثلاً به‌ازای $k_1=3$ ، $k_2=1$ ، $k_3=n(n-1)$ به‌دست می‌آید:

$$3=\sqrt{3+(6)}=\sqrt{3+\sqrt{27+(9)}}=$$

$$=\sqrt{3+\sqrt{27+\sqrt{69+(102)}}}=\dots$$

$$۴=\sqrt{۹+(۷)}=\sqrt{۹+\sqrt{۳۹+(۱۰)}}=$$

$$=\sqrt{۹+\sqrt{۳۹+\sqrt{۸۷+(۱۳)}}}=\dots$$

گروه سوم فرمولها، آنهایی هستند که درآنها، هر n تنها به عبارت خاص خودش مربوط می‌شود و بینهایت عدد مشابه زیر رادیکالها به‌دست می‌آید. به‌ازای $k_۱=۰$ ، $k_۲=۱$ و $k_۳=n(n-۱)$ فرمول کلی این گروه به‌دست می‌آید:

$$n=\sqrt{n(n-۱)+\sqrt{n(n-۱)+\sqrt{n(n-۱)+\dots}}}$$

که درحالتهای خاص $n=۳$ و $n=۴$ خواهیم داشت:

$$۳=\sqrt{۶+\sqrt{۶+\sqrt{۶+(۳)}}}$$

$$۴=\sqrt{۱۲+\sqrt{۱۲+\sqrt{۱۲+(۴)}}}$$

بالاخره گروه چهارم فرمولها به‌ازای $k_۱<۰$ به‌دست می‌آید. دراین حالت، که تکرار تبدیل روی $(n-k_۲)$ انجام می‌گیرد، عددهای زیر رادیکالها، به‌ترتیب کوچك می‌شوند تا جایی‌که سرآخر به واحد یاصفر ختم می‌شود؛ و به‌همین مناسبت تعداد رادیکالها، محدود خواهد بود، مثلا

$$۵=\sqrt{۱+۶\sqrt{۱+۵\sqrt{۱+۴\sqrt{۱+۳\sqrt{۱+۲(۰)}}}}}$$

$$(k_۱=-۱\ ,\ k_۲=n+۱\ ,\ k_۳=۱)$$

$$۷=\sqrt{۹+۸\sqrt{۷+۶\sqrt{۵+۴(۱)}}}$$

$$(k_۱=-۲\ ,\ k_۲=n+۱\ ,\ k_۳=n+۲$$

$$۸=\sqrt{۱۰+۹\sqrt{۸+۷\sqrt{۶+۵\sqrt{۴+۳(۰)}}}}$$

$$(k_۱=-۲\ ,\ k_۲=n+۱\ ,\ k_۳=n+۲)$$

گروههای مشابهی از فرمولها را می‌توان، با تکرار تبدیل عبارتهایی به دست آورد که شامل رادیکالهایی بافرجهٔ بزرگتر از ۲ باشند. به‌عنوان مثال، عدد ۲ را به‌چند طریق به‌کمك ریشهٔ سوم می‌نویسیم:

$$n=\sqrt[۳]{(n^۲-۱)n+n}$$

$$۲=\sqrt[۳]{۲+۳\sqrt[۳]{۲+۳\sqrt[۳]{۲+۳(۲)}}}$$

$$n=\sqrt[۳]{-n^۲+n^۲(n+۱)}$$

$$۲=\sqrt[۳]{-۴+۴\sqrt[۳]{-۹+۹\sqrt[۳]{-۱۶+۱۶(۰)}}}$$

$$n=\sqrt[۳]{-(n^۲-n-۱)+(n^۲-۱)(n+۱)}$$

$$۲=\sqrt[۳]{-۱+۳\sqrt[۳]{-۵+۸\sqrt[۳]{-۱۱+۱۵(۵)}}}$$

در مورد ریشهٔ سوم هم، می‌توان عددهای طبیعی را، با تعداد محدودی رادیکال، بیان کرد. مثلا اگر به‌عنوان عبارت اولیه

$$n=\sqrt[۳]{n^۲+n^۲(n-۱)}$$

را درنظر بگیریم، به‌ازای $n=۵$ به‌دست می‌آید:

$$۵=\sqrt[۳]{۲۵+۲۵\sqrt[۳]{۱۶+۱۶\sqrt[۳]{۹+۹\sqrt[۳]{۴+۴(۱)}}}}$$

و اگر درنظر بگیریم:

$$n=\sqrt[۳]{۱+(n^۲+n+۱)(n-۱)}$$

داریم:

$$۵=\sqrt[۳]{۱+۳۱\sqrt[۳]{۱+۲۱\sqrt[۳]{۱+۱۳\sqrt[۳]{۱+۷\sqrt[۳]{۱+(۰)}}}}}$$

اگر رابطه‌های مختلفی را که برای یک‌عدد به‌دست می‌آید، با هم مقایسه کنیم، به‌تساویهای جالبی می‌رسیم. مثلا

$$۴=\sqrt{۶+۲\sqrt{۷+۳\sqrt{۸+۴\sqrt{۹+\dots}}}}=$$

$$=\sqrt{۱۱+\sqrt{۱۹+\sqrt{۲۹+\sqrt{۴۱+\dots}}}}:$$

$$۳=\sqrt{۱+۲\sqrt{۱+۳\sqrt{۱+۴\sqrt{۱+\dots}}}}$$

$$=\sqrt[۳]{۳+۳\sqrt[۳]{۸+۸\sqrt[۳]{۶۳+\dots}}}=$$

$$=\sqrt{-۱+۷\sqrt[۳]{-۱+۱۳\sqrt[۳]{-۱+۲۱\sqrt[۳]{-۱+\dots}}}}$$

اگر به تناوب، برای تبدیل آخرین عدد به صورت رادیکال، از فرمولهای مختلف استفاده کنیم، بازهم به‌رابطه‌های جالبتری می‌رسیم.

مثلا اگر آخرین عدد زوج باشد، از رابطهٔ

$$n=\sqrt{-۱+(n-۱)n+(n+۱)}$$

و اگر آخرین عدد فرد باشد، از رابطهٔ

$$n=\sqrt[۳]{-۱+(n^{۲}-n+۱)(n+۱)}$$

استفاده کنیم، برای عدد ۲ می‌توان به‌دست آورد :

$$۲=\sqrt{۱+(۳)}=\sqrt{۱+\sqrt[۳]{-۱+۷(۴)}}=$$

$$=\sqrt{۱+\sqrt[۳]{-۱+۷\sqrt{۱۱+(۵)}}}=$$

$$=\sqrt{۱+\sqrt[۳]{-۱+۷\sqrt{۱۱+\sqrt[۳]{-۱+۲۱(۶)}}}}=$$

$$=\dots$$

پ . ش

نوارموبیوس

آ. ج. دیج

(داستان فکاهی و تخیلی علمی)

خط مترو، از ایستگاه *پارک-ستریت*، به‌همه طرف منشعب می‌شود و شبکهٔ به‌هم بافته پیچیده‌ای را تشکیل می‌دهد. یك مسیر اضافی، خط *لیج مور* را به‌خط اشمونت، برای قطارهایی که به‌قسمت جنوبی شهر می‌روند، و به‌خط *فورست هیل*، برای قطارهایی که به‌شمال می‌روند، مربوط می‌کند. *هاروارد* و *بروکلین* در تونلی که در عمق زیاد به‌خط کنمور برخورد می‌کند، یکی می‌شوند، و در ساعتهایی که ظرفیت کار به‌حداکثر خود می‌رسد، هر قطار دومی که در مسیر عکس می‌رود، به‌*ایگلستون* منتقل می‌شود. در نزدیکی *فیلدس-کورنر*، خط کنمور به‌تونل *ماوریك* وصل می‌شود و ضمن آمدن به‌سطح زمین، *سکولزی-سکوور* را به‌خط *کوپلی*، که روی زمین است، مربوط می‌کند. سپس دوباره زیرزمین می‌رود و در نزدیکی *بویلستون* به‌خط کمبریج می‌پیوندند. خط کمربندی حومهٔ بویلستون، همهٔ هفت خط اصلی قطار زیرزمینی را، در چهار سطح، به‌هم وصل می‌کند. همانطور که به‌خاطر دارید، این خط در سوم مارس آغاز به‌کار کرد و از آن تاریخ، قطارها می‌توانند بدون هیچ مانعی، به‌هر ایستگاهی از شبکه بروند.

در روزهای شنبه، در همهٔ خطها دویست و بیست و هفت قطار کار می‌کند، و قریب

یك ملیون و نیم مسافر را جا به جا می نماید. قطاری که در چهارم مارس در خط کمبریج ـ دورچستر ناپدید شد، شماره ۸۶ را داشت. ابتدا کسی متوجه غیبت او نشد. در ساعتهای غروب، که ظرفیت کار به حداکثر می رسد، جریان مسافران در این خط تا حد زیادی غیر عادی بود. ولی ازدحام، ازدحام است. تنها در ساعت هفت و سی دقیقه، جدولهای تنظیم کننده در بارهٔ هشتاد و شش پرسیدند. با وجود این، سه روز تمام طول کشید تا بالاخره یکی از تنظیم کننده ها غیبت آن را اطلاع داد. بازرس *میلك ستریت کروس* از کشیك خط *هاروارد* خواهش کرد که باز هم یك قطار اضافی برای پایان مسابقهٔ هوکی بدهد. کشیك، درخواست را در ایستگاه تحویل داد. تنظیم کننده، قطار ۸۷ را، که معمولاً ساعت ۱۰ بعد از ظهر به ایستگاه می رود، احضار کرد. ولی، حتی آنوقت هم، تنظیم کننده، ناپدید شدن هشتاد و شش را کشف نکرد.

صبح روز بعد، در ساعتهایی که حداکثر عبور مسافران بود، *جك او براین* از مرکز تنظیم در *پارك ـ ستریت* با *اوورن سووینی* تصمیم گرفت روی جدول امتحان کند که آیا قطار و گروه آزادی وجود دارد یا نه. و در آنجا او کشف کرد که *هالاخر* راننده در پایان تعویض، شمارهٔ خود را آویزان نکرده است. *سووینی*، همانطور که شمارهٔ *هالاخر* را آویزان می کرد، در گزارش خود نوشت: تعویض *هالاخر* در ۱۰ صبح آغاز شد. در ساعت ده و نیم، *سووینی* دوباره جلو تابلو آمد: شماره و یادداشت سرجای قبلی خود بود. *سووینی* که با نارضایتی غرغر می کرد، رو به کشیك کرد و خواست برای او روشن کند که چرا *هالاخر* دیر آمده است. کشیك پاسخ داد که امروز صبح اصلاً او را ندیده است. در اینجا بود که *سووینی* به فکر افتاد ببیند که به جز *هالاخر*، چه کسی در هشتاد و شش خدمت می کند. و هنوز دو دقیقه نگذشته بود که متوجه شد، *دورکین* بلیت فروش هم سرکار نرفته است. تنها در ساعت یازده و نیم بود که *سووینی* بالاخره فهمید که قطار را از دست داده است.

او یك ساعت و نیم بعد را به تلفن کردن به همهٔ تنظیم کننده ها، بازرسها و کشیکها در همهٔ خطهای مترو گذراند. بعد از نهار هم دوباره به سراغ تلفن رفت. او در ساعت پنج و نیم تعویض را تمام کرد و در حالیکه سخت به مخمصه افتاده بود، همه چیز را به ادارهٔ کل گزارش داد. تا نیمه شب تلفن تونلها و تعمیرگاه راه آهن شهری قطع نشد و تنها بعد از ساعت دوازده نیمه شب بود که تصمیم گرفتند به مدیر کل اطلاع بدهند و به خانهٔ او زنگ زدند.

ششم مارس، مدیریت مرکز تنظیم کننده برای نخستین بار به فکرش رسید که باید بین قطار ناپدید شده با آگهی های زیادی که یکباره در روزنامه های آن روز در بارهٔ

جستجوی خویشان گم شده چاپ شده بود، ارتباطی وجود داشته باشد. او دربارهٔ این حدس خود بایکی از روزنامه ها *(ترانسکریپت)* تماس گرفت و درست در نیمروز، سه روزنامه شمارهٔ فوق العاده منتشر کردند. و به این ترتیب، این تاریخ برسر زبانها افتاد.

کلوین وایت، مدیر کل راه آهن شهری، تمام نیمهٔ اول روز را در ادارهٔ پلیس گذراند. خانم *هالاخر* و خانم *دورکین* را خواسته بودند. ولی آنها چیزی جز این نمی توانستند بگویند که شوهرانشان ساعت چهار صبح سرکار رفته اند و دیگر به خانه برنگشته اند. در نیمهٔ دوم روز، دیگر پلیس شهری می دانست که دست کم سیصدو پنجاه بوستونی همراه قطار، گم شده اند. تلفنها قطع نمی شد و مرتباً خبر از این طرف و آن طرف پخش می کرد. *وایت* نزدیك بود از خشم بترکد، ولی قطار پیدا نشد، مثل اینکه دود شده به هوا رفته بود و یا اینکه آب شده و به زمین فرو رفته بود.

روز ششم مارس، *راجر توپه لو* ریاضیدان، از دانشگاه *هاروارد*، وارد صحنه شد. بعد از غروب، به منزل وایت زنگ زد و به او اطلاع داد که در بارهٔ ناپدید شدن قطار، حدسی زده است. *توپه لو* تاکسی گرفت و خود را به خانهٔ *وایت* در حومهٔ *نیوتون* رسانید. در اینجا بود که نخستین بحث بین ریاضیدان با مدیر کل در بارهٔ قطار شمارهٔ ۸۶، که ناپدید شده بود، درگرفت.

وایت، که مردی چیزفهم، تحصیل کرده، با تجربه و مدیری قابل بود، با بیقراری گفت:

ـ نمی توانم بفهمم که شما چه تفسیری دارید!

توپه لو تصمیم گرفته بود، در هر موقعیتی، آرامش خود را حفظ کند و صبر و تحملش را از دست ندهد.

ـ آقای *وایت*، درك این مطلب خیلی دشوار است، من بحث و جدلی ندارم. به شما هم کاملاً حق می دهم که تردید داشته باشید. ولی، این تنها توضیح ممکنی است که در این باره می توان داد. قطار، همراه با مسافرانش گم شده است. ولی، مترو، یك دستگاه بسته است. قطار نمی تواند از دستگاه خارج شده باشد و جائی در درون همین دستگاه است.

وایت دوباره صدایش را بالا برد.

ـ آقای *توپه لو*، باید به شما بگویم که قطار روی خط نیست. نه! نمی شود قطار را با صدها مسافر، مثل سوزنی در یك بار علف، گم کرده باشم. تمامی دستگاه را جستجو کرده ایم. آیا واقعاً شما گمان می کنید که من علاقمندم، یك قطار کامل را جایی پنهان کنم؟

ـروشن است که نه، ولی، اجازه بدهید با استدلال درست جلو برویم. ما می‌دانیم که چهارم مارس در ساعت ۸ و ۴۰ دقیقه صبح، قطار به ایستگاه کمبریج رفته است. چند دقیقه پیش از ساعت ۸ و ۴۰ دقیقه، در ایستگاههای *واشینگتن* و *پارک* ـستریت، نزدیک به شصت مسافر سوار و طبعاً چند نفری هم پیاده شدند. این، همهٔ آن چیزی است که ما می‌دانیم. هیچیك از کسانی که به قصد ایستگاه *کندال*، ایستگاه مرکزی یا ایستگاه کمبریج سوار شده بودند، به نقطهٔ مورد نظر خود نرسیده اند. قطار، به ایستگاه نهایی خود کمبریج، وارد نشده است.

وایت، که به زحمت خشم خود را فرو می‌خورد، غرغرکنان گفت:

ـآقای *توپه‌لو*، همهٔ این چیزها را، من بدون شما هم می‌دانستم. قطار، در تونل زیر رودخانه، ناگهان تبدیل به کشتی شده و به افریقا رفته است.

ـنه آقای *وایت*. من کوشش می‌کنم وضع را برای شما روشن کنم. قطار به نقطهٔ گرهی رسیده است.

وایت منفجر شد:

ـکدام گره؟ تمامی مسیر دستگاه ما، نظمی درجهٔ اول دارد، هیچ مانعی در مسیر آن نیست و قطارها بدون وقفه در حرکت اند.

ـشما باز هم حرف مرا نفهمیدید. گره، یك خاصیت است، قطبی از درجهٔ بالاست.

توضیحهای *توپه‌لو*، به هیچ نتیجه‌ای نمی‌رسید و *کلوین وایت* در ابتدا، هیچ چیز نمی‌فهمید. با وجود این، شب هنگام به ریاضیدان اجازه داد که با نقشه مترو آشنا شود. ولی، اول به پلیس تلفن کرد که البته نمی‌توانست هیچ کمکی به نخستین تلاش او در درك این راز بکند که چگونه توپولوژی با مدیریت کل ارتباط دارد.

توپه‌لو تاکسی گرفت و حرکت کرد و تا صبح روی نقشه‌های متروی بوستون کار کرد. بعد به سرعت قهوه‌ای نوشید، ساندویچی خورد و دوباره به طرف *وایت* حرکت کرد، این دفعه به دفتر او.

وقتی که وارد شد، مدیر با تلفن صحبت می‌کرد. صحبت برسر این بود که باید یکبار دیگر تمامی تونل دورچستر ـکمبریج در زیر رودخانه *چارلز*، بازرسی شود. وقتی که بالاخره گفتگو تمام شد، *وایت* با عصبانیت گوشی را روی تلفن انداخت و با چشمان خشمگین خود به *توپه‌لو* خیره شد. اول، ریاضیدان سکوت را شکست:

ـمن گمان می‌کنم که همهٔ تقصیرها، مربوط به خط تازه است.

وایت، دستهایش را به لبهٔ میز چسباند و تلاش بیهوده ای کرد تا در ذهن خود واژه‌هایی را پیدا کند که برای دانشمند، کمتر آزاردهنده باشد. بالاخره گفت:

ـدکتر *توپه‌لو*، من تمام شب را با نظریهٔ شما سرو کله زدم و اعتراف می‌کنم که حتی ذره ای از آن را هم نفهمیدم. حالا دیگر چرا باز هم خط بویلستون؟

توپه‌لو، خیلی آرام پرسید:

ـآیا آنچه را که عصر دیروز در بارهٔ خاصیتهای شبکهٔ ارتباطی گفتم به خاطر دارید؟ آیا نوار موبیوس را بیاد می‌آورید که به کمك هم آن را درست کردیم که سطحی یك رویه با یك کناره بود؟ به یاد می‌آورید؟ او یك بطری شیشه ای کوچك کلین را از جیب در آورد و روی میز گذاشت.

وایت، خود را عقب کشید، به صندلی راحتی خود تکیه داد و به ریاضیدان خیره شد. چهرهٔ او به سرعت تغییر می‌کرد و گاهی حالت خشم، گاهی دستپاچگی، گاهی ناامیدی و گاهی حالت تسلیم به آنچه پیش می‌آید، در آن دیده می‌شد. و *توپه‌لو* ادامه می‌داد:

ـآقای *وایت*، دستگاه متروی شما، عبارتست از یك شبکه بزرگ و پیچیدهٔ توپولوژی. این شبکه، حتی پیش از آنکه خط بویلستون هم وارد عمل بشود، بی اندازه پیچیده بوده است، دستگاهی از درجهٔ بسیار بالای همبندیها. خط تازه، دستگاه را به کلی منحصر به فرد کرده است. خود منهم درست نمی‌فهمم، ولی حدس می‌زنم که مشکل کار در کجاست: این خط تازه، درجهٔ همبندی دستگاه را چنان بالا برده است که من تصور محاسبهٔ آنرا هم نمی‌توانم بکنم. به نظر من، درجهٔ همبندی دستگاه نامتناهی شده است.

مدیر، همهٔ اینها را در پریشانی کامل گوش می‌کرد و چشمانش به بطری کلین، خیره شده بود. و *توپه‌لو* ادامه می‌داد:

ـنوار موبیوس، خاصیتهای عجیبی دارد، زیرا سطح این نوار، تنها یك رویه دارد. بطری کلین، از نظر توپولوژی، پیچیده تر است، زیرا آن هم به هم پیوسته و بسته است. ریاضیدانانی که روی توپولوژی کار می‌کنند، چنان سطحهای پیچیده ای را می‌شناسند که هم نوار موبیوس و هم بطری کلین، در مقایسه با آنها، تنها بازیچه‌های ساده ای به حساب می‌آیند. شبکهٔ همبندی نامتناهی، می‌تواند نمونهٔ شیطانی و بسیار پیچیده ای، از نظر توپولوژی باشد. آیا شما می‌توانید تصور کنید که چه خاصیتهایی ممکن است داشته باشد؟

و بعد از یك مکث طولانی، *توپه‌لو* اضافه کرد:

ـمنهم نمی‌توانم تصورش را بکنم. راستش را بخواهید، دستگاه متروی شما با حلقهٔ کمربندی *بویلستون*، خارج از فهم من است، من تنها می‌توانم حدس بزنم.

وایت، بالاخره چشم از میز برداشت، احساس کرد که دیگر نمی‌تواند جلو خشم

خود را بگیرد. با تغیر فریاد زد:

ـو آنوقت، بعد از همهٔ اینها، شما هنوز خود را ریاضیدان می‌دانید، پروفسور *توپه‌لو*؟

توپه‌لو، به‌زحمت جلو خندهٔ خود را گرفت. او خیلی زود احساس کرد که در چه موقعیت خنده‌دار و احمقانه‌ای قرار گرفته است. ولی، کوشید تا لبخند خود را پنهان کند.

ـ من متخصص توپولوژی نیستم. حقیقت اینست آقای *وایت*، که در این زمینه، منهم مثل شما تازه کار هستم. ریاضیات، دانش بسیار گسترده ای است. من شخصاً روی جبر کار می‌کنم.

صداقتی که در اعتراف ریاضیدان بود، *وایت* را کمی نرمتر کرد و گفت:

ـاگر اینطور است و شما در این زمینه کار نکرده اید، با کمال تاسف باید از یك متخصص توپولوژی دعوت کنیم. آیا چنین شخصی در بوستون پیدا می‌شود؟

توپه‌لو پاسخ داد:

ـهم بله و هم نه! بهترین متخصصی که در دنیا وجود دارد در انستیتوی تکنولوژی کار می‌کند.

دست *وایت* به‌طرف تلفن دراز شد و گفت:

ـاو چه کسی است؟ من همین الان شما را با هم آشنا می‌کنم.

ـاو را *ترنبول* می‌نامند. رابطه گرفتن با او غیر ممکن است. من سه روز است که تلاش می‌کنم.

وایت پرسید:

ـمگر در شهر نیست؟ من بلافاصله او را پیدا می‌کنم.

ـمن اطلاع ندارم که او کجاست. پروفسور *ترنبول* مجرد است و در باشگا «برتا» زندگی می‌کند. او از صبح چهارم مارس به‌آنجا نرفته است.

وایت، مثل اینکه ناگهان چیزی فهمیده باشد، با صدای گرفته پرسید:

ـ او هم در همین قطار بوده است؟

ریاضیدان پاسخ داد:

ـشما چه فکر می‌کنید؟

سکوتی طولانی حکمفرما شد. *وایت*، با حیرت، گاهی به‌ریاضیدان و گاهی به‌بطری شیشه‌ای روی میز، نگاه می‌کرد. ولی، بالاخره به‌صدا در آمد:

ـمن اصلاً نمی‌فهمم! ما تمامی دستگاه را زیر و رو کرده ایم. قطار هیچ جا

نمی‌توانست ناپدید بشود.

توپه‌لو پاسخ داد:

ـقطار گم نشده است، او هنوز روی خط است.

ـپس کجاست؟

توپه‌لو، شانه‌هایش را بالا انداخت:

ـبرای او «جای» حقیقی وجود ندارد. دستگاه، در فضای سه بعدی، قابل عمل نیست و اگر چیز بدتری نباشد، باید فضای چهار بعدی را در نظر گرفت.

ـپس قطار را در کجا می‌شود پیدا کرد؟

توپه‌لو پاسخ داد:

ـمی‌ترسم که ما اصلاً نتوانیم به‌چنین نتیجه‌ای برسیم.

باز هم، سکوتی طولانی پیش آمد. *وایت*، با یك لعنت، سکوت را شکست، از جا پرید و با خشم، بطری کلین را از روی میز برداشت و به‌گوشه ای انداخت و فریاد زد:

ـشما، پرفسور، خیلی ساده یك دیوانه اید. ما بین ساعت دوازده شب و شش صبح، تمام خطها را از قطارها، خالی خواهیم کرد. سیصد نفر، تمامی مسیر یکصدوهفتاد و سه میلی را، اینچ به‌اینچ، بازررسی خواهند کرد. مطمئن باشید که ما قطار را پیدا خواهیم کرد! و حال دیگر خواهش می‌کنم که مرا معذور بدارید. او با غضب به‌دکتر *توپه‌لو* نگاه می‌کرد.

توپه‌لو خارج شد. احساس خستگی و شکست خوردگی می‌کرد. بدون هدف در *واشنگتن* ـستریت راه می‌رفت. بالاخره، به‌طرف ایستگاه مترو رفت. وقتی که آغاز به‌پایین رفتن از پله‌ها می‌کرد، یکباره به‌خود آمد و فوراً ایستاد. به‌دو رو برخود نگاه کرد. به‌عقب برگشت، به‌سرعت از پله‌ها بالا دوید و یك تاکسی صدا کرد. با رسیدن به‌منزل، یك ویسکی دوبل خورد و همانطور که گرم می‌شد، روی تختخواب افتاد.

ساعت سه و نیم بعد از ظهر، بنابرعادت، گفتگوئی با دانشجویش در بارهٔ «جبر میدانها و حلقه‌ها» داشت. عصر، شام را با عجله در رستوران خورد، به‌خانه برگشت و دوباره کوشش کرد به‌بررسی ویژگیهای شبکهٔ ارتباطی متروی بوستون بپردازد. ولی، مثل قبل، این کوشش هم بی‌نتیجه ماند. با وجود این، ریاضیدان موفق شد نتیجه‌هایی برای خودش به‌دست آورد. ساعت یازده شب به *وایت*، در ادارهٔ مرکزی قطار شهری تلفن کرد.

ـبه‌نظر من، ممکن است ضمن بازرسی که امشب از خط می‌کنید، به‌مشورت من نیاز داشته باشید. آیا من می‌توانم بیایم؟

مدیر کل، بهیچوجه با محبت، نسبت به این پیشنهاد برخورد نکرد. او به ریاضیدان پاسخ داد که اداره متروی بوستون، خودش به تنهایی از عهدهٔ انجام این کار بی اهمیت برمی آید و هیچ نیازی به یاری پروفسورهای دیوانه کننده ای که گمان می کنند ممکن است قطار مترو به بعد چهارم افتاده باشد، ندارد. *توپه لو*، به پاسخ منفی و خشن مدیر کل هیچ جوابی نداد و راحت خوابید. ساعت چهار صبح، با زنگ تلفن از خواب پرید. *کلوین وایت*، بالحن پوزش خواهانه ای، تلفن می کرد:

ـ من از عصبانیت و تندخویی خودم متاسفم پروفسور. *وایت*، از شرمندگی زبانش گرفته بود و من من می کرد. ـ در واقع، ما به یاری شما نیاز داریم. آیا شما می توانید به ایستگاه *میلك* ـ *ستریت* ـ *کروس* بیایید؟

توپه لو با کمال میل موافقت کرد. حداقل این بود که او پیروز شده بود. تاکسی صدا کرد و در کمتر از نیم ساعت به ایستگاه مورد نظر رسید. پایین رفت و به سکوی طبقهٔ بالا رسید. تونل کاملاً روشن بود، درست مثل ساعتهایی که مترو کار می کند، ولی سکو خالی بود. تنها در انتهای سکو یك گروه کوچك هفت نفری جمع شده بودند. همانطور که به آنها نزدیك می شد، در میان آنها متوجه دو مامور پلیس شد. در آنجا یك واگون جلودار قطار، تك و تنها ایستاده بود، در جلو آن باز و داخل آن کاملاً روشن بود، ولی، کسی در آن نبود. *وایت*، به محض اینکه صدای پای پروفسور را شنید، به طرف او برگشت و با شرمندگی به او خیر مقدم گفت.

ـ آقای پروفسور، متشکرم که آمدید. آنوقت دستش را دراز کرد و گفت:

ـ آقا، ایشان دکتر *راجرتوپه لو* از دانشگاه *هاروارد* هستند. پروفسور، اجازه بدهید آقای کندی، سرمهندس اداره را به شما معرفی کنم؛ و ایشان، آقای *ویلسون* شهردار خوب شهر ما، ایشان هم دکتر *هانوت* از بیمارستان خیریه. *وایت* دیگر لازم ندید که راننده و دو مامور پلیس را معرفی کند.

توپه لو پاسخ داد:

ـ خیلی دلپذیر است. خوب، آقای *وایت*، به نتیجه ای رسیده اید؟ مدیر کل، با خجلت، به همکاران خود نگاه کرد.... و بالاخره به حرف آمد:

ـ چه گفتید، معذرت می خواهم.... آه، بله دکتر *توپه لو* با همهٔ اینها گمان می کنم به بعضی نتیجه ها رسیده ایم.

ـ شما قطار را پیدا کردید؟

ـ بله..... یعنی تقریباً پیدا کردیم. ما می دانیم که به هر حال، قطار روی خط است.

هر شش نفر، با علامت سر، گفتهٔ *وایت* را تایید کردند.

این خبر بهیچوجه، ریاضیدان را متعجب نکرد. قطار باید روی خط باشد، زیرا تمامی دستگاه مترو، یك شبکه بسته است. او خواهش کرد:

ـ اگر ممکن است مفصل تر بگویید.

راننده جرات پیدا کرد و گفت:

ـ من نور قرمز چراغ راهنما را، در تقاطعی که بلافاصله قبل از ایستگاه *کوپلی* است، دیدم. *وایت*، حرف او را قطع کرد و در حالیکه واگن را نشان می داد، گفت:

ـ خط را کاملاً از قطارها تخلیه کرده ایم، به جز این یکی. ما، چهار ساعت تمام، دستگاه خط مترو را وارسی کرده ایم. ناگهان، *ادموند* نور قرمزی در ایستگاه *کوپلی* دید و طبعاً همانجا ترمز کرد. من عقیده داشتم که این نور مربوط به خراب بودن چراغ راهنماست و دستور دادم که راه خود را ادامه دهد، ولی شنیدم که قطار سریع السیر دیگری از تقاطع می گذرد.

ریاضیدان پرسید:

ـ شما آن را دیدید؟

ـ ما نمی توانستیم آنرا ببینیم. تقاطع، پشت پیچ بود. ولی، صدای آن را شنیدیم. هیچ تردیدی نیست که از ایستگاه *کوپلی* می گذشت. این، مسلماً همان قطار هشتادوشش بود. به جز واگون ما، هیچ قطار دیگری، روی خط نیست.

بعد چه شد؟

ـ چراغ راهنما زرد شد و ادموند به سرعت حرکت کرد.

ـ آیا شما به دنبال همان قطار رفتید؟

ـ نه؟ ما نمی دانستیم که او از چه طرفی رفته است. چه بسا که ما به کلی به جهت دیگری رفته باشیم.

ـ این حادثه چه وقت اتفاق افتاد؟

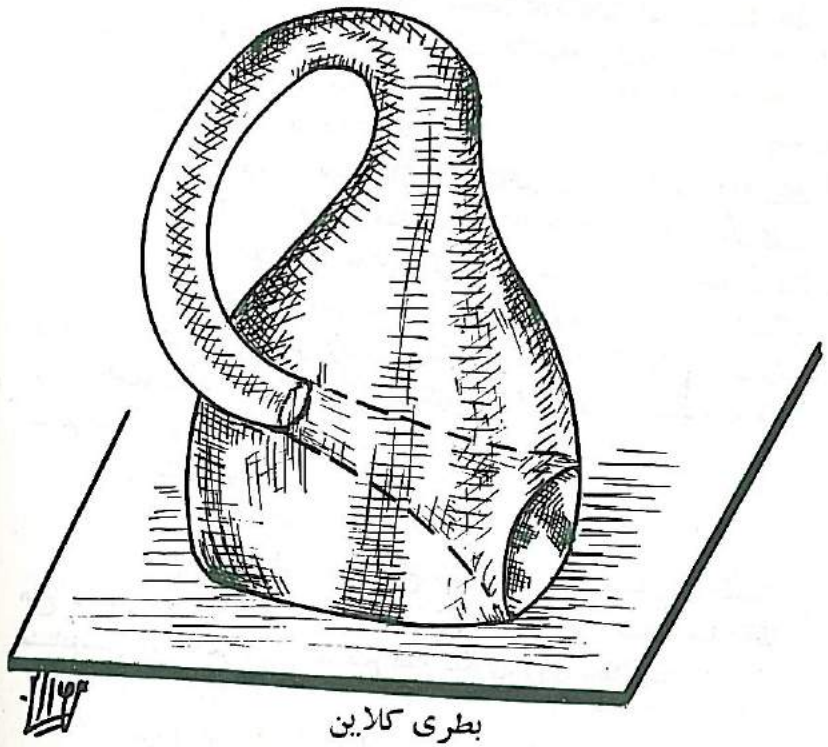
ـ دفعهٔ اول در ساعت یك و سی و هشت دقیقه.

توپه لو پرسید:

ـ آیا این حرف شما، به معنای اینست که شما دفعهٔ دیگری هم به آن برخورد کرده اید؟

ـ بله، منتهی در جای دیگری. ما دوباره جلو چراغ راهنما، در ایستگاه جنوب ایستاده بودیم، ساعت دو و پانزده دقیقه بود. و بعد بازهم در ساعت سه و بیست و هشت دقیقه.....

رویهٔ یك رویه



بطری کلاین

توپه‌لو، اجازه نداد او حرفش را تمام کند:

ـ آیا در ساعت دو و پانزده دقیقه، خود قطار را دیدید؟

ـ نه، ما حتی صدای آن را هم نشنیدیم. *ادموند* سعی می کرد به او برسد، ولی، او ظاهراً به حلقهٔ *بویلستون* پیچید.

ـ و در ساعت سه و بیست و هشت دقیقه چطور؟

ـ دو باره چراغ قرمز. این دفعه در *پارك ـ ستریت*. ما صدای آن را که از روی ما رد می‌شد شنیدیم.

ـ و دیگر، برای باردیگری آن را ندیدید؟

ـ نه. بعد از چراغ راهنما، تونل با شیب زیادی، سرازیری بود. ولی ما، صدای آن را خوب می‌شنیدیم. دکتر *توپه‌لو*، من تنها از یك چیز سر در نمی‌آورم. چطور ممکن است که یك قطار، پنج روز روی خط حرکت کند و حتی یکبار هم، کسی آن را نبیند؟

صدای *وایت* قطع شد، او دستهایش را به علامت درماندگی بالا برد. از دور صدای قطاری که به سرعت نزدیك می‌شد، به گوش رسید، صدا به غرش کر کننده‌ای تبدیل شد، و وقتی که قطار، از جائی زیر سکو عبور کرد، آنرا به سختی لرزاند.

وایت فریاد زد:

ـ آهان، خودشه. او درست از زیر دماغ ما، در پایین رد شد.

او برگشت و به طرف پلکانی که به سکوی طبقهٔ پایین می‌رفت، دوید. همهٔ حاضران به جز *توپه‌لو*، به دنبال او رفتند. او می‌دانست که همه چیز تمام شده است. و او اشتباه نمی‌کرد. هنوز *وایت* موفق نشده بود تا پلکان بدود که پلیس کشیك سکوی طبقهٔ پایین، با عجله از پلکان بالا آمد و با هیجان پرسید:

ـ شما آن را دیدید؟

وایت متوقف شد. دیگران، از ترس خشکشان زد.

پلیس دوم کشیك هم که از پله‌ها بالا می‌آمد پرسید:

ـ شما قطار را دیدید؟

آقای *ویلسون*، که کاملاً گیج شده بود، پرسید:

ـ چه اتفاقی افتاده است؟

کندی با عصبانیت فریاد زد.

ـ بالاخره، قطار را دیده‌اید یا نه؟

پلیس کشیك پاسخ داد:

ـ البته که نه! آخر، قطار از کنار سکوی شما عبور کرد! *وایت*، که به شدت خشمگین شده بود، گفت:

ـ به هیچوجه همچو چیزی نیست

و به پایین رفت

ـ هفت نفری را که *وایت* در راس آنها بود، آماده بودند چشمان آنهایی را که از سکوی پایین بالا آمده بودند، در آورند. *توپه‌لو* طرف *وایت* رفت، به آرنج او زد و به آرامی گفت:

ـ آقای *وایت*، قطار را نمی‌شود دید.

وایت، که گیج و سر در گم شده بود، به او نگاه کرد.

ـ ولی آخر، شما خودتان صدای آن را شنیدید همین جا، از طبقهٔ زیر ما عبور کرد....

توپه‌لو پیشنهاد کرد:

ـ آقای وایت بفرمایید به داخل واگون برویم. در آنجا راحت‌تر می‌توانیم گفتگو کنیم.

وایت با سر موافقت کرد، بعد به طرف پلیس و دو کشیك دیگر سکوی پایین برگشت و با صدایی تقریباً التماس‌آمیز پرسید:

ـ شما واقعاً آن راندیدید؟

پلیس پاسخ داد.

ـ ما صدای آن را شنیدیم، صدای واقعی قطار بود. او از اینجا گذشت، از روی این خط و مثل اینکه در این جهت حرکت می‌کرد. و با انگشت نشانهٔ خود، طرفی را نشان داد.

در این وقت، یکی از پلیسهای درجه‌دار گروه *وایت* به او دستور داد:

ـ شما آقای *مدلونی* بروید پایین.

و *مدلونی*، سراسیمه، پشت خود را خاراند، به عقب بر گشت و به طرف پایین رفت. دو کشیك طبقهٔ پایین هم همراه او رفتند. *توپه‌لو* به طرف واگون رفت و به آرامی در جای خودش نشست. همه، بیصبرانه به ریاضیدان چشم دوختند. *توپه‌لو*، که به *وایت* نگاه می‌کرد، آغاز کرد:

ـ وقتی که شما مرا خواستید، مطمئن بودم به این علت نیست که به من اطلاع دهید، قطار گم شده را پیدا کرده‌اید. مگر اینطور نیست؟ خوب، آیا آنچه که هم اکنون پیش‌آمد، برای نخستین بار بود؟

وایت، که در جای خودش بیقراری می‌کرد، چپ‌چپ به سر مهندس نگاه کرد. و او به طور مبهم گفت:

ـ نه کاملاً. ما قبلاً هم متوجه چیزهای غیر قابل توضیحی شده‌ایم.

توپه‌لو، با هشیاری و دقت پرسید:

ـ مثلاً؟

ـ مثلاً علامت قرمز چراغ راهنمایی. مراقبین ایستگاه کندال، تقریباً همان موقعی نور قرمز را دیدند که ما در ایستگاه جنوب دیده بودیم.

ـ خوب، بعد.

ـ سووینی از *فورست ـ هیل* در خط *پارك ـ ستریت* تلفن کرد. او سروصدای قطار را، دودقیقه بعد از آنکه ما در ایستگاه *کوپلی* شنیده بودیم، شنیده بود. در حالیکه بین این دو ایستگاه، از مسیر راه‌آهن، بیست‌و هفت میل فاصله است.

آقای *ویلسون* دخالت کرد:

ـ دکتر *توپه‌لو*، موضوع اینست که در چهار ساعت اخیر، آدمهای زیادی در نقطه‌های به کلی متفاوت، نور قرمز چراغ راهنمایی را در یك زمان دیده‌اند و سروصدای قطار را شنیده‌اند. مثل اینست که این قطار، به طور همزمان از چند ایستگاه می‌گذرد.

ـ توپه‌لو یادآوری کرد:

ـ این کاملاً ممکن است.

مهندس اضافه کرد:

ـ ما مرتب گزارشهای عجیب و غریبی دریافت می‌کنیم. مردم نه به صورتی که شما آنها را ببینید، بلکه به صورت چیزهای مبهمی، در یك لحظه و به طور همزمان. در دو یا سه نقطه که گاهی فاصلهٔ بسیار زیادی از هم دارند، پدیدار می‌شوند. تردیدی نیست که قطار روی خط است. آیا ممکن است واگونهای از هم جدا شده باشند؟

توپه‌لو پرسید:

ـ آقای کندی، شما مطمئن هستید که قطار روی خط است؟

سر مهندس پاسخ داد:

ـ به طور قطع اطمینان دارم، دستگاهها، نشان می‌دهند که انرژی برق مصرف شده است. قطار، لاینقطع و در تمامی شب، انرژی مصرف می‌کند. در ساعت سه و سی دقیقه، ما برق را قطع کردیم.

ـ خوب چه پیش آمد؟

وایت پاسخ داد:

ـ هیچ «فرض کنید که هیچی!» انرژی برق، برای بیست دقیقه قطع شد و در این بیست دقیقه، هیچکدام از دویست نفرِ که مراقب بودند، نه علامتهای قرمز را دیدند و نه سروصدای قطار را شنیدند. ولی، هنوز پنج دقیقه از وصل جریان برق نگذشته بود که نخستین گزارشها را دریافت کردیم. دو گزارش در یك دقیقه داشتیم: یکی از *آرلینگتون* و دیگری از اگلستون

وقتی که *وایت* حرفش را تمام کرد تا مدتی سکوت بر قرار بود. از پائین شنیده می‌شد که یکی از کشیکها، دیگری را صدا می‌کند. *توپولو* به ساعتش نگاه کرد. ساعت پنج و بیست دقیقه بود.

بالاخره، مدیر کل سکوت را شکست:

ـ کوتاه کنیم دکتر *توپه‌لو*، *ما متاسفانه ناچاریم اعتراف کنیم که شما در نظریهٔ خودتان حق داشته‌اید.*

و *توپه‌لو* پاسخ داد:

ـ از محبت شما ممنونم حضرت آقا.

پزشك، سینه‌اش را صاف کرد و گفت:

ـ مسافرها چی؟ آیا شما تصوری در باره.....

توپه‌لو حرف او را قطع کرد:

ـ هیچ تصوری ندارم.

شهردار پرسید.

ـ دکتر *توپه‌لو*، حالا تکلیف ما چیست، ما چه کاری باید انجام دهیم؟

ـ من نمی‌دانم، شما چه پیشنهادی دارید؟

و آقای *ویلسون* ادامه داد:

ـ آنطور که من از توضیح‌های آقای *وایت* فهمیده ام، قطار، به ترتیبی که من نمی‌دانم، وارد بعد دیگری شده است. بنابراین، قطار دیگر به‌معنای خاص خود، در دستگاه متروی ما نیست. او گم شده است. آیا این درست است؟

ـ تا حدی.

ـ ولی این پدیدهٔ غریبی است. آیا واقعاً بعضی از نتیجه‌گیریهای انتزاعی ریاضیات، در خط متروی *بویلستون* به‌حقیقت پیوسته است؟

ـ کاملاً درست است.

ـ و آیا هیچ امکانی وجود ندارد که ما بتوانیم قطار را از این... این بعد چهارم، برگردانیم؟

ـ من چنین امکانی را نمی‌شناسم.

آقای *ویلسون* احساس کرد که حالا موقع آنست که همه چیز را خودش در دست بگیرد و گفت:

ـ در اینصورت آقایان محترم، نقشهٔ کار روشن است. قبل از هر کار، باید خط جدید را ببندیم، تا به همهٔ این معجزه‌ها پایان داده شود. بعدها مادام که قطار واقعاً ناپدید است، با وجود علامتهای قرمز چراغهای راهنمائی و با وجود سرو صداهایی که به گوش می‌رسد، می‌توانیم حرکت عادی قطارها را در خطها، تجدید کنیم. در هیچ وضعی، خطر تصادف وجود ندارد و، آقای *وایت*، به‌نظر می‌رسد که نقش این قطار، مثل نقش یك مترسك باشد. و اما در بارهٔ قطار و مسافرهای گم شده.... ـ در اینجا ژست نامعنی در فضا گرفت ـ آنوقت رو به ریاضیدان کرد و گفت: ـ شما، دکتر *توپه‌لو*، با من موافقید؟

توپه‌لو، به‌آرامی سرش را تکان داد و گفت:

ـ کاملاً نه، آقای *ویلسون*. توجه داشته باشید که خود منهم از همهٔ آنچه که گذشته است، سر در نمی‌آورم. خیلی باعث تاسف است که ما نمی‌توانیم کسی را پیدا کنیم که بتواند همه چیز را برای ما روشن کند. تنها کسی که می‌توانست به‌ما کمك کند، پروفسور *ترنبول* از انستیتوی تکنولوژی است، ولی او هم در همین قطار گم شده است. در هر حال، اگر بخواهیم نتیجه‌گیریهای مرا مورد آزمایش قرار دهیم، می‌توانیم به‌یك متخصص مراجعه کنیم. من می‌توانم شما را با بعضی از آنها مربوط کنم.

و اما در بارهٔ جستجوی قطاری که گم شده است. من، آن را موضوع درمان ناپذیری نمی‌دانم. من گمان می‌کنم که احتمال دارد این قطار سر آخر از قسمت غیر فضایی، که اکنون در آن قرار دارد به‌قسمت فضایی خود برگردد. از آنجا که این قسمت غیر فضا، مطلقاً ناشناخته و دست نیافتنی است، با کمال تاسف، من، نه می‌توانم برگشت قطار را به‌فضای اصلی خودش، تسریع کنم و نه حتی می‌توانم پیش بینی کنم که این برگشت، چه موقع اتفاق می‌افتد. با وجود این، اگر خط *بویلستون* را ببندید، هرگونه امکان عبور از غیر فضا به‌فضا را از بین برده اید. همین خط است که دستگاه را به‌صورت خاصی در آورده است. اگر این ویژگی را از بین ببرید، قطار گم شده، هرگز برنخواهد گشت. متوجه حرف من شدید؟

بدیهی است که همهٔ حاضران به‌سختی چیزی از حرفهای ریاضیدان می‌فهمیدند، با وجود این سرشان را به‌علامت تایید تکان دادند. *توپه‌لو* ادامه داد:

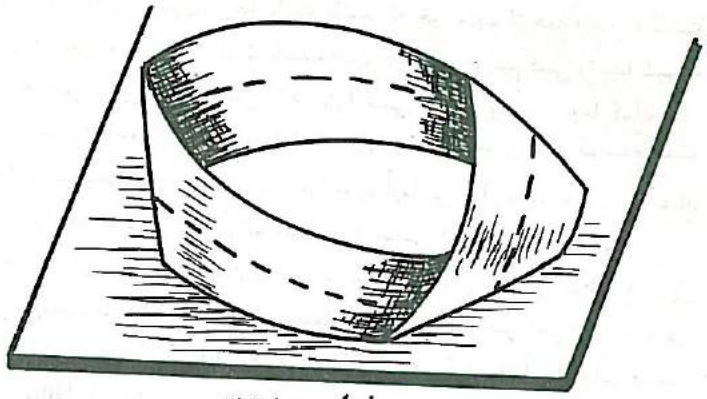
ـ آنچه که دربارهٔ حرکت عادی قطارها در شرایطی که هنوز قطار گم شده در قسمت غیر فضاست، می‌توان گفت، من تنها می‌توانم بعضی حقایق را برای شما روشن کنم و نتیجه‌گیری و اتخاذ تصمیم را به عهدهٔ خودتان بگذارم. همانطور که قبلاً هم گفتم، ما نمی‌توانیم پیش بینی کنیم که قطار گم شده، چه موقع از قسمت غیر فضا به‌قسمت فضا منتقل می‌شود.

ما نمی‌توانیم پیش بینی کنیم که کی و کجا به فضای ما بر می‌گردد. علاوه براین پنجاه درصد احتمال دارد که در نتیجهٔ این انتقال، روی خط دیگری، غیر از خط اصلی خودش، قرار گیرد. و در اینصورت، احتمال تصادف وجود دارد.

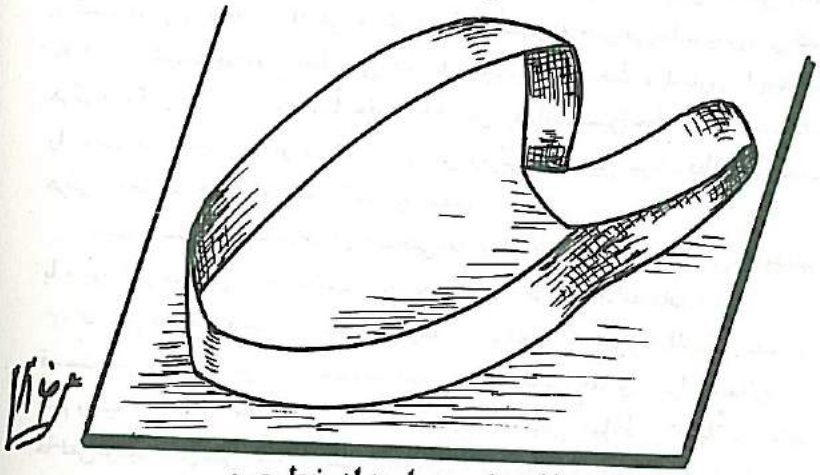
سر مهندس پرسید:

ـ دکتر *توپه‌لو*، برای اینکه امکان این تصادف را از بین ببریم، آیا نباید خط *بویلستون* را باز نگه داریم، ولی اجازه ندهیم که قطاری در آن کار کند؟ در اینصورت، اگر قطار گم شده، پیدا شود، نمی‌تواند با قطارهای دیگر تصادف کند.

توپه‌لو پاسخ داد:



نوار موبیوس



پس‌از برش در امتداد خط‌چین

ـ من، این را به هیچوجه، یك تدبیر احتیاطی نمی‌دانم، آقای کندی شما می‌بینید که قطار ممکن است در هر خطی از دستگاه پیدا شود. درست است که از نظر توپولوژی، علت دشواریهایی که پیدا شده است، همین خط بویلستون است. ولی حال، تمامی دستگاه یك همبندی نامتناهی دارد. به زبان دیگر، درست است که این خاصیتهای توپولوژی، در اثر به وجود آمدن خط تازهٔ بویلستون، پیدا شده است، ولی حال، آنها، خاصیتهایی از تمامی دستگاه هستند. به خاطر بیاورید که نخستین نشانهٔ قطار را در نقطه‌ای دیده اید که تا خط بویلستون بیش از سه میل فاصله دارد. ممکن است این پرسش برای شما به وجود آید: اگر حرکت قطارها را در همهٔ

خطها، به جز بویلستون، آغاز کنیم، آیا ممکن نیست که قطار دیگری دوباره گم شود؟ من، پاسخ را دقیقاً نمی‌دانم، ولی، گمان می کنم که باید پاسخ منفی داد. بنظر من در اینجا «اصل حذف» عمل می کند و تنها یك قطار ممکن است در قسمت غیر فضایی شبکه قرار گیرد.

دکتر از جای خودش بلند شد.

سر مهندس گفت:

ـ پروفسور *توپه‌لو*، وقتی که قطار پیدا شود، آیا ممکن است که مسافران....

توپه‌لو حرف او را دوباره قطع کرد:

ـ من هیچ حرفی دربارهٔ مسافران نمی‌توانم بگویم. توپولوژی، به چنین مساله‌هایی نمی‌پردازد.

او به سرعت نگاهی به چهره‌های ناراضی و خستهٔ هفت نفر انداخت و با لحنی تسکین دهنده گفت:

ـ آقایان، خواهش می کنم مرا ببخشید. من هیچ‌چیز دربارهٔ مسافران نمی‌دانم.

و سپس، به طرف *وایت* برگشت و اضافه کرد:

ـ به نظرم می‌رسد که امروز هیچ کمك دیگری از من ساخته نیست. شما، هر وقت که بخواهید می‌دانید که در کجا مرا پیدا کنید.

و ناگهان به عقب برگشت، از واگون بیرون آمد و از پله‌های مترو بالا رفت در خیابان سپیدهٔ صبح پیدا شده بود و تاریکی شب را باز می‌کرد.

*

دربارهٔ این مشاورهٔ ناگهانی که در یك واگون مترو انجام گرفته بود، هیچ اطلاعی به روزنامه‌ها داده نشد. دربارهٔ کشیکهای طولانی شبانه در تونلهای متروی بوستون و نتیجه‌های مربوط به آن، اطلاعی به‌آنها نیز داده نشد. در جریان تمام هفته بعد، *توپه‌لو*، در چهار جلسهٔ مشاورهٔ رسمی، با شرکت *کلوین وایت* و دیگر مقامهای شهری، شرکت کرد. در دوتا از این جلسه‌ها، متخصصان توپولوژی هم حاضر بودند. از *فیلادلفی*، *اوریستاین* آمده بود، از شیکاگو، *کشتا* و از *لوس‌آنجلس*، *مایکلسن*. ریاضیدانان نتوانستند به عقیدهٔ واحدی برسند. هیچکدام از آنها، دیدگاه *توپه‌لو* را تایید نکردند، تنها *کاشتا*، اعتقاد داشت که در حرفهای *توپه‌لو*، هستهٔ معقولی وجود دارد. *اوریستاین* تاکید می کرد که یك شبکه محدود نمی‌تواند دارای همبندی نامتناهی باشد، ولی او نه توانست این حکم را ثابت کند و نه توانست همبندی دستگاه را محاسبه کند. *مایکلسن*، خیلی ساده می گفت که همه اینها خیالهای خام و حرفهای بیهوده ای است،

که هیچ عمومیتی در توپولوژی ندارد. او اعتقاد داشت که قطار بر نمی‌گردد، به این معنی که یا دستگاه باز است و یا دست‌کم برای یك مورد بسته بودن آن خراب شده است.

ولی، *توپه‌لو* هر چه عمیق‌تر، این مساله را تجزیه و تحلیل می‌کرد، بیشتر به درستی نتیجه‌گیری اولیهٔ خودش، معتقد می‌شد. از دیدگاه توپولوژی، دستگاه عبارتست از خانوادهٔ شبکه‌های چند ارزشی، که هر کدام از آنها، مجموعهٔ بیشماری ناپیوستگی دارد. ولی، ساختمان نهایی این شبکهٔ جدید «فضائی- فوق فضائی» را هیچکس نتوانسته است روشن کند. او یك هفتهٔ تمام در این باره کار می‌کرد، بدون اینکه توفیقی در کشف آن به دست آورد. سپس، کارهای دیگر، او را مجبور کرد که حل این مساله را کنار بگذارد. او خیال داشت در بهار، وقتی که کار با دانشجویانش به پایان می‌رسید، دوباره به مسالهٔ مورد نظرش برگردد.

در همین حال، دستگاه مترو کار می‌کرد، بدون اینکه هیچ اتفاقی بیفتد. مدیر کل مترو شهردار شهر، تأثرات نامطبوع شبی را که به تحقیق دربارهٔ خط متروی بوستون پرداخته بودند، تقریباً فراموش کرده بودند، و حال، همهٔ آنچه را که در آن موقع دیده بودند، یا دقیقتر ندیده بودند، به نحوی تفسیر می‌کردند. ولی، روزنامه‌ها و محافل اجتماعی، خیالبافیهای بی معنی خود را ادامه می‌دادند و با حمله‌هایی که به *وایت* می‌کردند، از او توضیح می‌خواستند. بعضی از خویشان مسافران گم شده، ادارهٔ راه‌آهن زیر زمینی بوستون را به محاکمه جلب کردند. دولت دخالت کرد و تصمیم گرفت تحقیقات دقیقی انجام دهد. در جلسه‌های کنگره، اعضای کنگره با خشم پرده‌دری می‌کردند. روایتهای دکتر *توپه‌لو*، به صورت کاملاً تحریف شده‌ای به روزنامه‌ها نفوذ کرد. ولی، او سکوت خود را حفظ کرد و به تدریج بحث در این باره، فروکش کرد.

هفته‌ها گذشت و بالاخره یك ماه شد. کمیسیون دولتی، تحقیقات خود را تمام کرد. آگاهیهای مربوط به این موضوع، ابتدا از صفحهٔ اول، به صفحهٔ دوم روزنامه‌ها منتقل شد، سپس به صفحه بیست‌و سوم رفت و سر آخر به کلی حذف شد. گم شدگان برنگشتند و مدت کمی دربارهٔ آنها سوگواری کردند.

یکروز، در میانه‌های اوریل، *توپه‌لو* دوباره از مترو پایین رفت و از ایستگاه *جارلز- ستریت* به ایستگاه *هاروارد* رفت. او با کمال دقت روی صندلی جلوی واگون اول نشست و به تماشای ریلهایی که به استقبال او می‌آمدند و دیوارهای یکنواخت تونل که از هم فاصله می‌گرفتند، پرداخت. قطار، دوبار در برابر چراغ راهنما ایستاد، و در این دقیقه‌ها *توپه‌لو* بی‌اختیار فکر می‌کرد: پس قطار مقابل کجاست، سر پیچ است یا

اصلاً در بعد دیگری قرار دارد؟ از روی کنجکاوی غیر ارادی، به نظرش رسید که کاش «اصل حذف» اشتباه از آب در می‌آمد و قطار او هم به بعد چهارم می‌افتاد. ولی، روشن است که هیچ اتفاقی نیفتاد و او به خیروخوشی به ایستگاه *هاروارد* رسید. احتمالاً، از میان همهٔ مسافران، تنها برای همین یکنفر بود که مسافرت غیر عادی به نظر رسید.

او، هفتهٔ بعد هم، همین مسافرت را انجام داد و بعد باز هم یکبار دیگر، این آزمایشها، هیچ جوابی، مثبت یا منفی به او ندادند و هیچکدام از آنها، هیجان مسافرت نخستین را نداشتند. *توپه‌لو*، در مورد نتیجه‌گیریهای خودش به تردید افتاد. در ماه مه، برنامهٔ رفت‌و آمد او به دانشگاه، از طریق مترو، دوباره آغاز شد. او هر بار در ایستگاه *بیکن- هیل*، که در نزدیکی آپارتمان او بود، سوار می‌شد. او دیگر دربارهٔ پیچ و خمهای یکنواخت تونل فکر نمی‌کرد و اصولاً، کمتر از پنجرهٔ واگون به بیرون نگاه می‌کرد. او معمولاً در قطار روزنامهٔ صبح را نگاه می‌کرد و یا به مطالعهٔ رسالهٔ «فوق ریاضیات» می‌پرداخت.

ولی، یك روز صبح، چشم از روزنامه برداشت و ناگهان دچار احساس بدی شد. ضمن اینکه تلاش می‌کرد تا ترس‌رو به افزایش خود را مهار کند و تا حد امکان آن را در خود فرو ببرد، به سرعت رو را به طرف پنجره برگرداند. نور داخل واگون از پنجره نفوذ می‌کرد و نوارهای سیاه و خاکستری بر دیوارهٔ تونل به وجود می‌آورد. چرخها، همان ریتم آشنا را داشت. قطار، دوری زد و به سرعت رد شد. او با هیجان به یاد آورد که چگونه در ایستگاه *چارلز* سوار قطار شده است، ایستگاه *کندال* را به خاطر آورد، دختر بچه‌ای که گریه می‌کرد، آگهی بستنی و قطار مقابل، که از ایستگاه مرکزی می‌رفت.

همانطور که جعبهٔ صبحانه را روی زانوهایش نگه داشته بود، به دوروبرش نگاه کرد. تمام صندلیهای قطار پر بود، خیلی از مسافران هم سرپا، دستگیره‌ها را گرفته بودند. جوانی با چهرهٔ گندمگون، در کنار در، با نقص قانون، سیگار می‌کشید، دو دختر جوان، با شادی و هیجان دربارهٔ کارهای خودشان، با هم صحبت می‌کردند. جلوتر، مادر جوانی، پسر بچه‌اش را سرزنش می‌کرد و باز هم دورتر، مردی روزنامهٔ خود را می‌خواند. بالای سر او، آگهی نصب شده بود که از سیبهای فلوریدا تعریف می‌کرد.

توپه‌لو، به مردی که روزنامه می‌خواند نگاه کرد و دوباره، با موجی شدیدتر، احساس ترس کرد، چیزی شبیه وحشت. او با دقت به مسافری که درجلو نشسته بود، نگاه کرد. او کیست؟ مردسیه چرده‌ای با موهای جوگندمی بود که جمجمه‌ای گرد، فرقی پریشان و کم پشت، پوستی پژمرده و رنگ پریده، خطهای چهره‌ای بیحالت و گردنی چاق داشت و کت خاکستری راه راهی پوشیده بود. وقتی که *توپه‌لو* او را نگاه می‌کرد،

مرد، مگسی را که روی شقیقهٔ چپش نشسته بود، از خود دور می کرد و به آرامی باتکان قطار، تلو تلو می خورد. روزنامه‌ای را که می خواند، عمودی گرفته بود. *روزنامه!* عجب، این شمارهٔ روزنامه، مال ماه مارس بود.

توپه‌لو، دوباره دور و برخود را به سرعت نگاه کرد. روزنامه‌ای روی زانوهای نفر پهلویی او قرار گرفته بود، ولی، این روزنامه، تاریخ امروز را داشت.

توپه‌لو، به مسافرانی که در پشت سرش بودند، نگاه می کرد. جوانی، صفحهٔ ورزشی روزنامهٔ «*ترانسکریپت*» را می خواند که تاریخ آن، چهارم مارس بود. *توپه‌لو*، به سرعت، به اطراف خود نگاه کرد: نزدیك به ده نفر از مسافران، روزنامهٔ یك ماه و نیم پیش را می خواندند.

توپه‌لو از جای خود پرید. وقتی که ریاضیدان، بابی ادبی و بدون توجه، به نفر پهلوی خود فشار داد تا به طرف دیگر واگون برود، همسایه‌اش به آرامی ناسزا گفت. *توپه‌لو*، وقتی که خودش را به انتهای دیگر واگون رساند، یکباره، طناب علامت را کشید. صدای گوش خراش ترمز بلند شد و قطار ایستاد. مسافران، باخشم و عصبانیت به *توپه‌لو* خیره شدند. در انتهای دیگر واگون، در باز شدو مرد لاغر و بلندی به داخل آن پرید.

ـ دورکین؟

بلیت فروش ایستاد و از تعجب دهانش باز مانده بود.

توپه‌لو، در حالیکه می کوشید با فریاد خود، غرغر مسافران ناراضی را بپوشاند، گفت:

دورکین، حادثه‌ای جدی است، فوراً *هالاخر* را بخواهید! دورکین، چهار بار طناب علامت را کشید و بالاخره پرسید:

ـ چی شده است؟

توپه‌لو اصلاً صدای او را نمی‌شنید. ولی پرسید:

ـ دورکین، شما کجا بودید؟

در صورت بلیت فروش حالت شگفتی منعکس شد.

ـ من در واگون کناری بودم، ولی چه پیش ....

توپه‌لو نگذاشت حرفش را تمام کند. همانطور که به ساعتش نگاه می کرد، رو به مسافران کرد و فریاد زد:

ـ امروز ۱۷ مه است و حالا، ساعت نه و ده دقیقهٔ صبح. حرف او با سکوت حیرت‌آوری برخورد کرد. مسافران، حیران و شگفت زده به هم نگاه می کردند.

توپه‌لو فریاد زد:

ـ به تاریخ روزنامه‌هاتان نگاه کنید، روزنامه‌هاتان!

مسافران، با هیاهو او را هو کردند. و وقتی که به روزنامه‌های یکدیگر نگاه کردند، هیاهوی آنها فروکش کرد. *توپه‌لو*، شانه دورکین را گرفت و او را به انتهای واگون برد و از او پرسید:

ـ چه ساعتی است؟

دورکین، به ساعتش نگاه کرد و گفت:

ـ هشت و بیست و یك دقیقه.

توپه‌لو، باسر، در جلوی را نشان داد و گفت.

باز کنید، مرا بیرون ببرید. اینجا تلفن کجاست؟

دورکین، بی‌چون و چرا، دستور *توپه‌لو* را اجرا کرد و تلفن را صد قدم آنطرف‌تر در فرو رفتگی تونل به او نشان داد. *توپه‌لو*، پایین پرید و در راه باریك بین قطار و دیوار تونل آغاز به دویدن کرد.

گوشی تلفن را برداشت و فریاد زد:

ـ مدیر کل را می خواهم، مدیرکل! وقتی که منتظر وصل شدن تلفن بود، در عقب قطار آنها، پشت نور قرمز چراغ راهنما، قطار دیگری ایستاده بود. دیوار تونل با نورافکن روشن بود. *توپه‌لو* دیدکه چگونه از طرف دیگر قطار، هالاخر می‌دود.

ـ خواهش می کنم *وایت* را به من بدهید، فوراً!

پس چرا وصل نمی کنند. او می‌شنید که سر و صدای نارضایتی، در قطار اوج می‌گیرد. او، نشانه‌های وحشت و خشم را می‌دید. فریاد زد.

ـ الو! الو! وضع اضطراری است! خواهش می کنم آقای *وایت* فوراً صحبت کند.

بالاخره، از طرف دیگر سیم، صدایی شنیده شد:

ـ به من بفرمائید *وایت* الان گرفتار است

توپه‌لو فریاد زد:

ـ قطار ۸۶ پیدا شده است درست بین ایستگاه مرکزی و ایستگاه *هاروارد* است. من نمی‌دانم که چطور پیش آمد. من در ایستگاه *چارلز* ـ ستریت، ده دقیقهٔ قبل در آن نشستم.

در طرف دیگر سیم، کسی به زحمت نفس می کشید و با صدای گرفته‌ای گفت:

ـ پس مسافران؟

توپه‌لو پاسخ داد:

ـ تا اینجا، همه سالم و زنده‌اند. بعضی‌ها باید در ایستگاههای کندال و

Reconciliation with Mathematics
Editor : Parviz Shahryari
Under the supervision of the editorial board
A supplementary publication of the Free University of Iran
Address : The Free University of Iran
P. *O. Box* 11–1932
Aban Shomali St. Karim-Khan Zand Boulevard
Tehran – 15 *Iran*

Vol. II, No. 2, 1978

Contents

مرکزی خارج شده باشند.

ـ آنها کجا بوده اند؟

توپه‌لو با تردید دستش را پایین آورد و گوشی تلفن را سر جایش گذاشت و به طرف در باز شدهٔ واگون پرید.

بالاخره، به هر زحمتی بود، توانست مسافران را آرام کند. نظم دوباره برقرار شد و قطار توانست راه خود را به طرف ایستگاه *هاروارد* ادامه دهد. در سکو، گروه پلیس انتظار می کشید، که بلافاصله، همهٔ مسافران را تحت نظر گرفتند. *وایت* هم قبل از رسیدن قطار، به ایستگاه آمده بود و *توپه‌لو* فوراً او را در سکوی ایستگاه شناخت.

وایت، که چهرهٔ خسته‌ای داشت، مسافران را رها کرد و از *توپه‌لو* پرسید.

ـ مثل اینکه همه چیز درست و منظم است.

ریاضیدان پاسخ داد.

ـ کاملاً. و جالب اینست که اینها خودشان نمی‌دانند در تمام این مدت کجا بوده اند.

مدیر کل پرسید:

ـ آیا من می‌توانم با پروفسور *ترنبول* آشنا شوم؟

ـ نه، او باید در ایستگاه *کندال* از قطار خارج شده باشد.

وایت گفت:

ـ خیلی باعث تاسف است. برای من خیلی مهم است که بتوانم با او صحبت کنم.

و *توپه‌لو* گفت:

ـ منهم همینطور. ضمناً، حالا وقت آنست که دیگر خط *بویلستون* بسته شود.

وایت پاسخ داد:

ـ نه دیگر دیر شده است. بیست و پنج دقیقه قبل، قطار شمارهٔ ۱۴۳ بین ایستگاههای *اگلستون* و *دورچستر* گم شده است.

توپه‌لو جرات نکرد به صورت *وایت* نگاه کند و چشمانش را پایین انداخت.

وایت تکرار کرد.

ـ من به هر ترتیبی هست، باید *ترنبول* را ببینم.

ـ *توپه‌لو* بالاخره سرش را بلند کرد و به طور ساختگی لبخند زد و پرسید:

ـ شما فکر می‌کنید که او در ایستگاه *کندال* از قطار خارج شده باشد؟

وایت پاسخ داد:

ـ البته، ولی پس حالا کجاست؟

ترجمه پرویز شهریاری