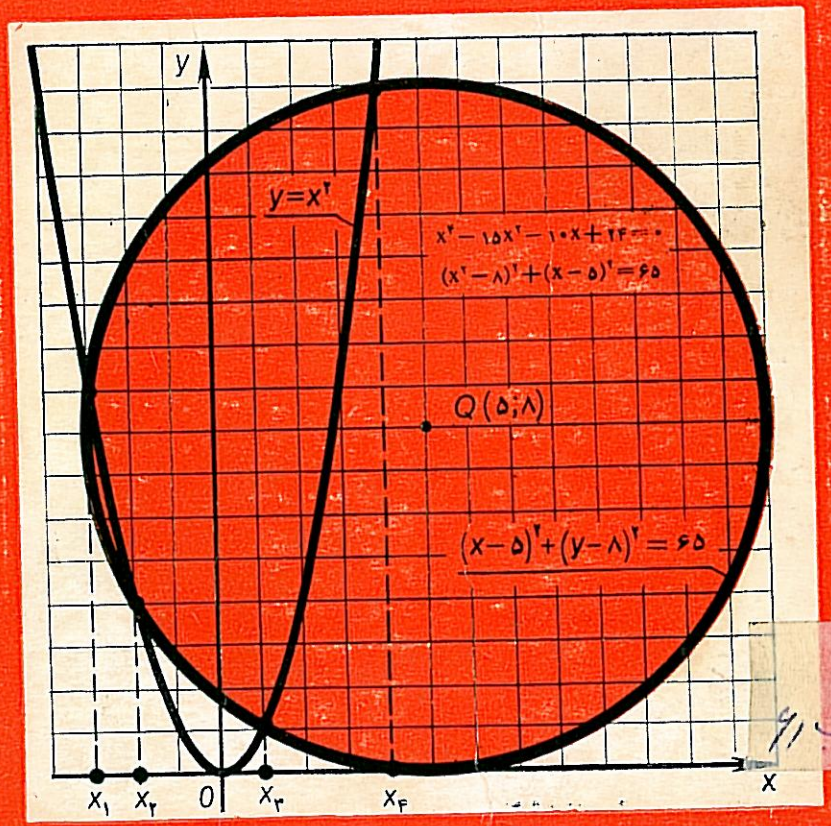
آشنائی با ریاضیات

جلد ششم



آشنایی با ریاضیات (جلد ششم)

گردآورنده : پرویز شهریاری

صفحه‌آرا: حسن نیک‌بخت

تیراژ ۴۰۰۰ نسخه

چاپ اول، بهمن‌ماه ۱۳۶۴

روی جلد:

حل یک معادلهٔ درجهٔ چهارم

حروفچینی: مهدی

چاپ : رامین

فهرست جلد ششم

۱۸۰ ریال

آشنایی با ریاضیات (جلد ششم)
گردآورنده : پرویز شهریاری
صفحه‌آرا: حسن نیک‌بخت
تیراژ ۴۰۰۰ نسخه
چاپ اول، بهمن‌ماه ۱۳۶۴

روی جلد:
حل یک معادلهٔ درجهٔ چهارم
حروفچینی: مهدی
چاپ : رامین

فهرست جلد ششم

۱۸۰ ریال

اندازه‌گیری فاصلهٔ بین تابع‌ها

مدت‌هاست که برخی از مقدمات آنالیز ریاضی، وارد در برنامهٔ دبیرستانی شده است؛ به خصوص، مفهوم تابع، نقشی جدی را دراین مورد به عهده دارد. درسال‌های اول دانشگاه هم، بحث دربارهٔ تابع، جزو درسهای اساسی بسیاری از رشته‌های علمی است. درچنین اوضاع و احوالی، ازمعلم ریاضیات دبیرستانی انتظارمی‌رود که با مفهوم‌های اصلی آنالیز ریاضی، به اندازهٔ کافی، آشنا باشد تابتواند گره‌های اصلی را از ذهن دانش‌آموزان خود دورکند.

دراین مقاله (که ازمجلهٔ «ریاضیات دردبیرستان» اتحادشوروی ترجمه شده است) تنها دربارهٔ یکی ازاین مفهوم‌ها- یعنی مفهوم فاصلهٔ بین تابع‌ها- صحبت می‌شود و، با توجه به این که سعی شده است ، با زبانی ساده تهیه شود ، می‌تواند مورد استفادهٔ دانش‌آموزان‌هم، به‌عنوان کارخارج‌ازکلاس، قرارگیرد.

پرویزشهریاری

ابتدا به‌طورمختصر، با مفهوم فاصله، به‌طورکلی، آشنا شویم. حتی در زندگی روزانه‌هم، وقتی که از«فاصله» بین‌دوشهر «A و B» صحبت‌می کنیم، بسته به هرمسالهٔ مشخص، ممکن است مفهوم‌های مختلفی داشته باشد. خلبان، به احتمال زیاد، این فاصله را در طول یك خط راست اندازه می گیرد، در حالی‌که رانندهٔ اتومبیل، فاصلهٔ بین دوشهر A و B را درطول‌جادهٔ شوسه‌ای اندازه می گیرد که می‌تواند از مسیرمستقیم انحرافهایی داشته باشد. به یاد بیاوریم که فاصلهٔ معمولی بین دونقطهٔ $A(x_1y_1)$ و $B(x_2y_2)$ را درصفحه، با دستور زیر به‌دست می‌آورند:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

که آن را فاصلهٔ اقلیدسی بین دونقطهٔ A و B می‌نامند.

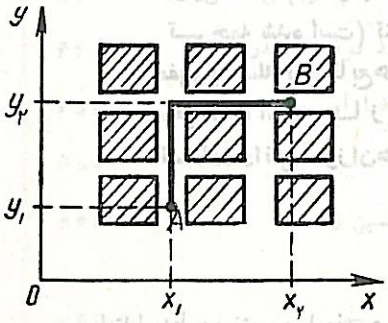
مثال ساده‌ای می توان آورد که فاصلهٔ طبیعی را نشان می‌دهد، ولی با فاصلهٔ اقلیدسی تطبیق نمی‌کند؛ مفهوم فاصله را، برای موقعی درنظربگیرید که، ضمن طرح یك نقشهٔ درست، می‌خواهید کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دونقطه از شهررا طی کنید. وقتی که می گویید، برای رفتن ازمنزل A به سینمای B باید «ابتدا دویست متر به‌طور مستقیم و، سپس پنجاه متر درجهت راست حرکت کرد»، ازنظر ریاضی، به معنای آن است که فاصلهٔ دونقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ در صفحهٔ مختصات xOy، که محورهای آن موازی دو خیابان شهر باشد (شکل ۱)، با این دستورمحاسبه می‌شود:

$$s(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1| \quad (۲)$$

حالتهایی وجود داردکه بهتر است فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ را، بزرگترین عدد ازبین دوعدد $|x_2-x_1|$ و $|y_2-y_1|$ در نظربگیریم، یعنی

$$m(A,B)= \quad (۳)$$
$$=\max\{|x_2-x_1|,|y_2-y_1|\}$$

این نوع فاصله را، معمولاً، فاصلهٔ هینکوسکی گویند.



شکل ۱

مثالی برای کاربرد طبیعی این فاصله می آوریم. فرض کنید، نظام حرارتی یك روند صنعتی را با دوحرارت‌سنج اندازه بگیرند، به‌نحوی که، اگردرجهٔ این دو حرارت‌سنج را با x و y نشان دهیم، نظام حرارتی مورد نظرما، متناظربا نقطهٔ $A=A(x,y)$ ازصفحهٔ مختصات xOy باشد. فرض کنیدکه حالت ایده‌آل جریان، وقتی باشدکه حرارت‌سنج اول، درجهٔ x_0 وحرارت‌سنج دوم، درجهٔ y_0 را نشان دهد. اگر بخواهند درجه حرارت‌های x و y را، بادقت یکسانی حفظ کنند، طبیعی است که باید، به‌عنوان مقدار انحراف نظام‌حرارتی $A(x,y)$ ازنظام‌حرارتی ایده‌آل $A_0=A(x_0,y_0)$، ماکزیمم

مقدارهای $|x_0-x_1|$ و $|y_0-y_1|$، یعنی $m(A_0,A)$ را درنظر بگیرند.

رابطه‌هایی شبیه رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) را، برای دونقطهٔ $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ ازفضای سه بعدی هم می‌توان نوشت و $s(A,B)$، $d(A,B)$ و $m(A,B)$ را برای آن‌ها تعریف کرد.

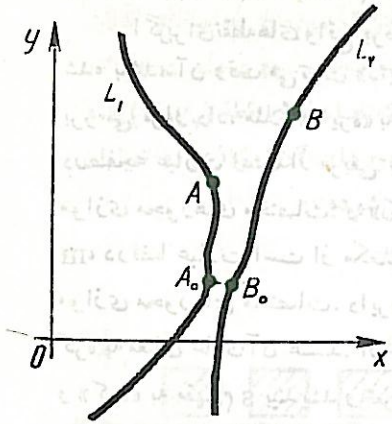
اگربرای نقطه‌های واقع برصفحه یا فضا، مفهوم فاصلهٔ $p(A,B)$ تعریف شده باشد، آن وقت می‌توان «دایره» یا «کره» را به‌مفهوم این فاصله مورد بررسی قرار داد. مثلاً «دایرهٔ» به مرکز A_0 و شعاع r، به مفهوم فاصلهٔ m، درصفحه عبارت است از مربعی به مرکز A_0 و ضلع‌های به طول $2r$ و موازی محورهای مختصات؛ و «کرهٔ» به مرکز A_0 و شعاع r، به مفهوم فاصلهٔ m، درفضا عبارت است از مکعب به مرکز A_0 وضلع‌های برابر $2r$ و موازی محورهای مختصات. دایره و کره، به مفهوم فاصلهٔ d، همان دایره و کره به معنای عادی آن هستند. ازخواننده می‌خواهیم، خودش دربارهٔ «دایره» و «کره» به مفهوم s بیندیشد و تعریف آن‌ها را پیداکند.

ازمفهوم‌های مختلف فاصلهٔ بین دو نقطه می گذریم و به بحث اصلی خود، یعنی مفهوم‌فاصله بین دومنحنی و، به‌خصوص، بین نمودارهای دوتابع می‌پردازیم. هرمنحنی یا تابع را، به‌عنوان‌یك موضوع واحد، یعنی به‌عنوان عضوی ازمجموعهٔ منحنی‌ها یا تابع‌ها درنظر می‌گیریم. به این مفهوم، می‌توان تابع را «نقطه» نامید؛البته، این «نقطه»، نه‌به‌معنای معمولی‌آن درفضای عادی سه بعدی، بلکه به معنای «نقطه‌ای» ازفضای انتزاعی تابع‌هاست. ویژگی‌های هندسی این فضای تابعی، بستگی به این دارد که فاصلهٔ بین «نقطه‌های» این فضا ـ یعنی فاصلهٔ بین تابع‌ها ـ را چگونه تعریف کنیم.

ازمثال‌های مشخصی آغاز می کنیم که برای تعریف‌های مختلف فاصلهٔ بین دو منحنی، مناسب باشد. دو منحنی را در نظر می گیریم که روی نقشهٔ جغرافیایی، معرف مسیردو رود هستند و می‌خواهیم آن‌ها را بوسیلهٔ یك آب‌راه به هم وصل کنیم. فرض کنید که آب‌راه را باید در جایی حفر کرد که دو رود، ازهمهٔ جاهای‌دیگر، به‌هم نزدیکترند. درمورداین‌مساله،مناسب‌ترین تعریفی که برای فاصلهٔ δ بین دو منحنی L_1,L_2 می‌توان کرد، چنین است: اگر

فاصلهٔ بین دونقطهٔ A و B ($A\in L_1$ و $B\in L_2$) را طبق دستور (۱) محاسبه کنیم، فاصلهٔ بین دومنحنی برابر است با حداقل فاصله‌هایی که از این راه‌به دست می‌آید، یعنی تعریف می‌کنیم:

$$\delta(A,B)=\min_{A\in L_1,B\in L_2} d(A,B) \qquad (۴)$$

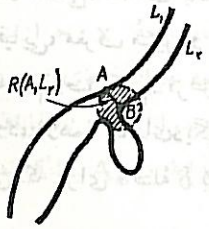


شکل۲

درشکل۲، نقطه‌های A_0 و B_0، مشخص شده‌اند، که برای آن‌ها، فاصلهٔ اقلیدسی بین نقطه‌های دو منحنی، بنابر رابطهٔ (۴)، به حداقل خود می رسد. رابطهٔ (۴) را می‌توان به عنوان تعریف فاصلهٔ هردو «نقطهٔ» دلخواه ازمجموعه، درصفحه درنظر گرفت، تنها در حالت کلی، باید به‌جای min از علامت inf استفاده کرد، زیرا ممکن است می‌نیممی‌برای $d(A,B)$ وجودنداشته باشد. روشن‌است که‌اگر دومنحنی L_1وL_2 دارای نقطهٔ مشترکی باشند،فاصلهٔ $\delta(A$و$B)$، برای‌آن‌ها، برابرصفر می‌شود؛ولی عکس این‌حکم، همیشه‌درست نیست، مثلاً فاصلهٔ بین محور Ox با نمودارتابع $y=\frac{1}{x}$ برابر صفر است، درحالی‌که آن‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

ولی گاهی، برخلاف منحنی‌های قبل،دومنحنی«درنزدیکی» هم حرکت می‌کنند،یعنی‌هرگزخیلی ازهم‌دورنمی‌شوند. البته،این‌جمله باید دقیق‌ترشود و برای‌آن، تعریف دقیق‌ریاضی‌پیدا کرد.

ما این‌کار را کمی بعد خواهیم کرد، ولی حالا، به این مثال توجه‌کنید. منحنی‌های L_1 و L_2 (شکل۳) را، نمایش دو جادهٔ غیرآسفالته در نظر بگیرید و فرض کنید که می‌خواهیم



شکل ۳

آن‌ها را به‌کمک ماشین آب‌پاشی کنیم‌ضمناً، این ماشین طوری ساخته شده است که‌آب رادر اطراف‌خودروی‌دایره‌ای به‌شعاع ثابت R(به‌مرکزجایی‌که قرار دارد) می‌پاشد. می‌خواهیم‌شعاع عمل R طوری باشدکه وقتی ماشین درطول جادهٔ L_2 حرکت‌می‌کند، تمامی جادهٔ L_1 را هم‌آب‌پاشی کند.حداقل شعاعی‌که برای این منظور لازم است، « از دیدگاه ماشین آب‌پاش»، فاصلهٔ بین دومنحنی L_2L_1 خواهدبود. ببینیم، این فاصله را، ازنظرریاضی، چگونه باید بیان‌کرد؟

نقطهٔ ثابت A را روی منحنی L_1 درنظر می‌گیریم. برای این‌که از نقطهٔ B واقع برL_2،آب به‌نقطهٔ A برسد، باید شعاع‌عمل ماشین، از$d(A,B)$ کمترنباشد. وبه‌طورکلی، برای هرموضع‌دلخواه ماشین برمنحنی L_2،حداقل شعاع عمل ماشین، برابراست با

$$R(A,L_2)=\min_{B\in L_2} d(A,B)$$

باجابه‌جا شدن نقطهٔ A، این شعاع تغییر می‌کند. ولی ما می‌خواهیم، همهٔ نقطه‌های A را، از L_2 آب‌پاشی کنیم. برای این منظور ناچاریم، حداکثر شعاع‌های $R(A,L_2)$ را ــ که برای نقطه‌های مختلف A به دست می‌آید ــ انتخاب‌کنیم. همین مقدار هم، عبارت است‌از فاصلهٔ بین دومنحنی L_1،L_2، یعنی فرض می‌کنیم

$$R(L_1,L_2)=\min_{A\in L_1,B\in L_2} d(A,B) \qquad (۵)$$

به‌همین‌ترتیب، می‌توان‌حداقل‌شعاع‌عمل را، برای وقتی‌که ماشین‌روی L_1 حرکت می‌کند ومی‌خواهد L_2 را هم آب‌پاشی‌کند، به‌دست‌آورد.

$$R(L_2,L_1)=\max_{B\in L_2} \min_{A\in L_1} d(A,B)$$

بایدتوجه‌کرد که،معمولاً،$R(L_1,L_2)$و$R(L_2,L_1)$ با هم برابرنیستند، یعنی‌فاصلهٔ R، بااین تعریف، نسبت به‌منحنی‌های L_2،L_1 متقارن نیست. مثلاً، می‌توانید همین وضع را در مورد شکل۳ مشاهده‌کنید.

روشن است که اگر بخواهیم شعاع عمل ماشین را طوری پیدا کنیم که بتوان با آن، ضمن عبور از هر جاده، جادهٔ دیگری را آب‌پاشی کرد، آن‌وقت، حداقل شعاع عمل ماشین باید برابر با بزرگترین مقدار از بین دو مقدار $R(L_1,L_2)$ و $R(L_2,L_1)$ گرفت. مقدار

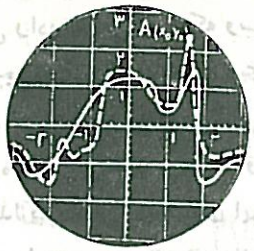
$$D(L_1,L_2)=\max\left\{\begin{array}{c}\max\min d(A,B)\\ A\in L_1,B\in L_2\\ \max\min d(A,B)\\ B\in L_1,A\in L_1\end{array}\right\} \qquad (۶)$$

فاصلهٔ متقابل دو منحنی L_1,L_2 را نسبت به‌هم نشان می‌دهد و ضمناً، نسبت به منحنی‌های L_1,L_2 متقارن است. به سادگی معلوم می‌شود که $D(L_1,L_2)$ وقتی، و تنها وقتی، برابر صفر است که دو منحنی L_1,L_2 کاملاً بر یکدیگر منطبق باشند (با تعریف فاصله از روی دستور (۴) مقایسه کنید). اگر در رابطهٔ (۶)، در داخل آکولاد، max و min را، به‌ترتیب، به sup و inf تبدیل کنیم، می‌توان آن را برای اندازه‌گیری فاصلهٔ بین هر دو مجموعه‌ای از صفحه، به‌کار برد. این نوع فاصله را، فاصلهٔ هاوس‌دورفی گویند [به‌نام ریاضی‌دان آلمانی، فلیکس هاوس‌دورف Housdorff (۱۸۶۸–۱۹۴۲)، کسی که این مفهوم را وارد در ریاضیات کرد]. اگر در دستور (۶) به‌جای $d(A,B)$، $m(A,B)$ را قرار دهیم (دستور (۳) را ببینید)، فاصله هاوس‌دورفی دیگر $M(L_1,L_2)$ بین مجموعه‌های L_1,L_2 به دست می‌آید که گاهی آن را فاصله هاوس‌دورفی ـ مینکووسکی می‌نامند، در برابر $D(L_1,L_2)$ که فاصله هاوس‌دورفی ـ اقلیدسی نامیده می‌شود.

علاوه بر مثالی که قبلاً دربارهٔ کاربرد مفهوم فاصلهٔ هاوس‌دورفی، برای منحنی‌ها، آوردیم، دو مثال دیگر هم از صنعت ذکر می‌کنیم که به‌طور مشخص از این مفهوم استفاده می‌کنند.

وقتی که می‌خواهند، نزدیکی دو علامت الکتریکی متناوب، با دورهٔ تناوب‌های یکسان را، روی صفحهٔ نوسان‌نگار (اوسیلوگراف) با دو پرتو کاتدی، ارزیابی

کنند (روی صفحهٔ نوسان‌نگار، این دورهٔ تناوب‌ها، به‌صورت دو منحنی روشن نشان داده می‌شوند)، اغلب، به‌این ترتیب عمل می‌کنند: روی این دو منحنی، نقطه‌ای را پیدا می‌کنند که حداکثر فاصله را از منحنی دیگر (یعنی منحنی که این نقطه متعلق به آن نیست) داشته باشد (نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ روی شکل ۴)، و همین فاصله را، به‌عنوان مقدار انحراف علامت از یکدیگر، قبول می‌کنند. به



شکل ۴

این ترتیب، به‌عنوان مقدار انحراف متقابل علامت‌ها، همان فاصلهٔ هاوس‌دورفی بین منحنی‌های نمایش این علامت‌ها را، انتخاب می‌کنند. ضمناً، به عنوان فاصلهٔ هاوس‌دورفی، می‌توان هم فاصلهٔ هاوس‌دورفی ـ اقلیدسی و هم فاصلهٔ هاوس‌دورفی ـ مینکووسکی را درنظر گرفت. یادآوری می‌کنیم که روی نوسان نگاره (صفحهٔ نوسان نگار)، فاصلهٔ مینکووسکی بین دو نقطه، در عمل، ساده‌تر از فاصلهٔ اقلیدسی به‌دست می‌آید، زیرا، روی صفحه، شبکهٔ مختصات وجود دارد.

مثال دوم را، ضمن ارزیابی روند یک دستگاه واقعی، به‌دست می‌آوریم. فرض کنیم، در ورودی دستگاه مورد بررسی، علامت‌هایی بدهند که آن‌ها را با x نشان می‌دهیم و با وسیله‌ای، که آن را X می‌نامیم، اندازه‌گیری شوند، علامت‌های خروجی دستگاه را، که با کمیت‌های y مشخص می‌کنیم، با وسیلهٔ دیگری اندازه‌گیری شوند که آن را Y می‌نامیم. ضمناً، هر وقت که صحبت از یک اندازه‌گیری باشد، به این معناست که یک زوج متناظر x و y به دست آورده‌اند. به‌عنوان x و y، می‌توان فشار الکتریکی، شدت جریان، بسامد آن و غیره را در نظر گرفت. بعد از اندازه‌گیری‌ها، جدولی تنظیم می‌کنند و به کمک نقطه‌های (x,y) نمودار بستگی مقدارهای y به مقدارهای x، یعنی نمودار تابعی مثل $y=f(x)$، را رسم می‌کنند. با وجود این، هرقدر که در ساختن این منحنی دقت به‌کار بریم، تنها تصوری تقریبی از بستگی واقعی y از x به ما می‌دهد. زیرا برای خود اندازه‌گیری مقدارهای x و y به ناچار،

مرتکب خطا می‌شویم. در واقع، چه وسیلهٔ X چه وسیلهٔ Y، مرتکب خطایی می‌شوند که به درجهٔ دقت این وسیله‌ها بستگی دارد. برای مشخص بودن، حالتی رادرنظرمی‌گیریم که وسیله‌های x وy، عبارت باشند ازولت‌مترهایی با درجه دقت ۱٪، واندازه‌گیری‌ها درمقیاس ۰ تـا ۱۰۰ ولت انجام گرفته باشد. این وضع، به‌معنای آن است که، فشارالکتریکی که به‌کمك هروسیله اندازه‌گیری می‌شود با مقدار واقعی آن، می‌تواند اختلافی داشته‌باشد که‌از ۱٪ حداکثرمقدار درجه‌بندی این وسیله- درحالت ما، ۱ ولت- تجاوزنمی‌کند. دراین صورت،ضمن هراندازه‌گیری، نقطهٔ واقعی (x،y) ازنقطهٔ منحنی که به وسیله ما رسم شده است، فاصله‌ای به مفهوم مینکووسکی دارد، که‌از یـك واحد تجاوز نمی‌کند. این وضع، بـه معنای آن است که نقطهٔ واقعی (x،y)، می‌تواند درهر نقطهٔ مربع به ضلع دو واحد وبه مرکز نقطه‌ای که‌از طریق‌آزمایش به‌دست‌آورده‌ایم، قرار گیرد (این‌جا وازاین به‌بعد، ضلع‌های مربع را موازی محورهای مختصات می‌گیریم).به‌همین ترتیب، می‌توان گفت که نقطهٔ به‌دست‌آمده ازطریق آزمایش، درمربعی به ضلع دو واحد و مرکز نقطهٔ واقعی (x،y) قراردارد. اگر اندازه‌گیری را، به تعداد به اندازهٔ‌کافی زیاد، انجام داده باشیم (بـه نحوی کـه حوزهٔ اندازه‌گیری x- پـاره خط [a،b]- به اندازهٔ‌کافی، به وسیلهٔ اندازه‌گیری‌های X، به طورفشرده پرشده باشد)، آن وقت، با رسم مربع‌های به ضلع دو واحد، به مرکز نقطه‌های به دست‌آمده ازطریق‌آزمایش، روی صفحهٔ xOy،نواری منحنی‌الخط به‌دست می‌آید- هم‌نمودار واقعی‌تابع $y=f_0(x)$، وهم نمودار تابع $y=f(x)$، که به‌کمك نقطه‌های آزمایشی به‌دست‌آمده است، روی این نوارقراردارند. بـه‌همین ترتیب هردوی این منحنی‌ها، روی نوار دوم هم قـرار داردکه از مربع‌های به ضلع۲ و به مرکز نقطه‌های واقع برنمودار تابع $y=f_0(x)$ تشکیل شده است (روشن است‌که نوار اخیر را درعمل نمی‌توانیم بسازیم، زیرا نمودار واقعی را دراختیار نداریم). از این ساختمان‌ها وهم ازدستور شبیه (۶) برای فاصلهٔ $M(L_1،L_2)$، معلوم می‌شود که منحنی‌های مربوط به تابع‌های $y=f_0(x)$ و $y=f(x)$، درفاصله‌ای ازیکدیگر قرارگرفته‌اندکه

به مفهوم فـاصلهٔ هاوس‌دورف-مینکووسکی، ازیـك واحد تجاوز نمی‌کند. دوباره یادآوری می‌کنیم که، مقدار این فاصله، به‌کمك میزان دقت وسیله‌ای که برای مقیاس به‌کارمی‌بریم، بستگی دارد.

درحالت‌کلی، وقتی‌که مقدارهای مطلق خطای وسیله‌های X وY با هم اختلاف داشته باشند، می‌توان با اندازه‌گیری مقیاس‌ها، درجهت محور Ox و محور Oy عمل نمود.

ازاین مثال، ممکن است به این نتیجه برسیم‌که برای پیداکردن فاصلهٔ دوتابع، می‌توان فاصلهٔ متناظربین منحنی‌های نمودارهای‌آن‌ها را پیداکرد. در واقع هم درغالب موردها، همین‌طور است. به‌خصوص، از همهٔ‌آن‌چـه که دربارهٔ فاصلهٔ‌بین منحنی‌ها یامجموعه‌ها گفتیم، می‌توان برای‌اندازه‌گیری فاصلهٔ بین تابع‌ها هم، استفاده‌کرد.

با وجود این، روشن است که نمودار تابع، حالت خاصی ازمجموعهٔ نقطه‌های (x،y) برصفحه است، که درآن، نقش مختصات x و y یـکسان نیست. به یاد بیاوریم که یـك منحنی یا، به‌طورکلی، مجموعه‌ای ازنقطه‌های واقع برصفحهٔ مختصات، وقتی و تنها وقتی، نمودار یك تابع f هستند، یعنی به صورت نموداری تابع f را می‌دهند،که عمودی‌که ازهرنقطهٔ x برمحور Ox اخراج کنیم، ایـن مجموعه را، در بیش ازیك نقطه قطع نکند. ضمناً، مجموعهٔ مقدارهایی از x، که برای آن‌ها، برخورد عمود مربوط با نمودار تهی نباشد، حوزهٔ تعریف تابع مفروض را تشکیل می‌دهند.

با توجه به این نمودارهای خاص برای تـابع‌ها، مفهوم‌های خاصی برای فاصله واردکرده‌اند که به سادگی می‌توان، ازآن‌ها، برای حالت‌کلی مجموعه‌های مسطحه هم‌استفاده‌کرد. گاهی هم لازم است‌که فاصلهٔ بین‌دوتابع عددی را پیداکردکـه حوزهٔ تعریف آن‌ها، نـه یك مجموعهٔ عددی، بـلکه موضوع‌هایـی هستند کـه طبیعت بغرنج‌تری دارند. درچنین حالتی، مفهوم نمودار حالتی پیچیده پیدا می‌کند و، در نتیجه، نمی‌توان از بحث‌های قبلی، برای‌آن‌ها، استفاده‌کرد.

سنتی‌تریـن تعریف فاصله، بین دوتابع پیوستهٔ f_1 و f_2، کـه درفاصلهٔ

$[a,b]$ مفروض‌اند، به‌کمك دستور زیر داده شده است،

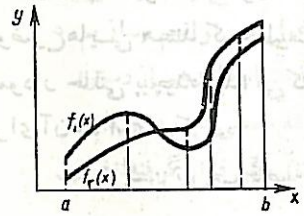
$$c(f_1,f_2)=\max_{x\in[a,b]}|f_1(x)-f_2(x)| \qquad (7)$$

از این تعریف فاصله، می‌توان برای تابع‌هایی هم که حوزهٔ تعریف بغرنج‌تری دارند و حتی برای تابع‌هایی که آوندی غیرعددی دارند، استفاده کرد. فاصله‌ای را که با دستور (۷) معین می‌شود، متریك یکنواخت گویند. به‌طورکلی، فاصله‌ای را در ریاضیات، متریك گویند که دارای چند ویژگی باشد (در این باره، کمی بعدتر صحبت می‌کنیم). ضمناً، به این جهت یکنواخت گفته می‌شود که کوچك‌بودن فاصلهٔ $c(f_1,f_2)$، درعین حال به‌معنای کوچکی همهٔ تفاضل‌های $|f_1(x)-f_2(x)|$ است ($x\in[a,b]$). به‌سادگی روشن می‌شود که این فاصله، متقارن است، یعنی $c(f_1,f_2)=c(f_2,f_1)$ و وقتی و تنها وقتی برابرصفر می‌شود که تابع‌های f_1,f_2 متحد یکدیگر باشند.

شبیه فضای سه‌بعدی، در «فضای» همهٔ تابع‌های پیوستهٔ $f(x)$ هم، که درفاصلهٔ‌مفروض $[a,b]$ معین باشند، می‌توان به‌کمك متریك‌یکنواخت،مفهوم «کره» را وارد کرد: «کرهٔ» به‌شعاع r و مرکز «نقطهٔ» f_0، به مجموعهٔ همهٔ تابع‌های f گفته می‌شود که، به مفهوم فاصلهٔ (۷)، از تابع f_0 دورتر از r نباشند، یعنی همهٔ fهایی که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

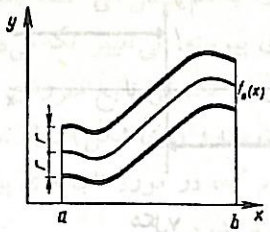
$$c(f,f_0)\leqslant r$$

این مفهوم را، می‌توان ازنظرهندسی، به سادگی، تعبیر کرد. ازهرنقطهٔ واقع برمحور Ox ومتعلق به پاره خط $[a,b]$، عمودی برمحور Oxاخراج و روی آنها، پاره‌خط‌هایی را انتخاب می‌کنیم که دو انتهای آن‌ها،نقطه‌های برخورد عمود با نمودار تابع‌های f_1 و f_2 باشد (شکل۵ را ببینید). طول بزرگترین این پاره‌خط‌ها را، به‌عنوان فاصلهٔ یکنواخت بین تابع‌های f_1 و f_2 می‌گیریم. «کرهٔ» متناظر به شعاع r و مرکز در f_0 را می‌توان این طور به دست آورد: نمودار تابع f_0 را به



شکل ۵

اندازهٔ r و به موازات خود، هم به طرف پایین و هم به طرف بالا منتقل می‌کنیم. نواری منحنی‌الشکل روی صفحه به‌دست می‌آید (شکل۶ را ببینید) که در عرض قائم آن برابر است با $2r$. همهٔ تابع‌های پیوسته‌ای که، منحنی آن‌ها، ازمرزهای‌این نوارخارج نشوند، «کرهٔ» مورد نظرما را به شعاع r ومرکز f_0 تشکیل می‌دهند. فاصلهٔ



شکل ۶

یکنواخت را با فاصله‌ای که به‌کمك متریك هاوس‌دورفی، اندازه‌گیری‌می‌شود، مقایسه می‌کنیم. مثالی که دربارهٔ ارزیابی نزدیکی دوعلامت‌درصفحهٔ نوسان‌نگار، بررسی کردیم، نشان می‌دهد که، دربعضی موردها، فاصلهٔ هاوس‌دورفی برفاصلهٔ یکنواخت؛ رجحان دارد. ازشکل۵ دیده می‌شود که درقسمت‌های پرشیب منحنی‌ها، حداکثرفاصلهٔ بین‌آنها روی خط قائم،که فاصلهٔ یکنواخت بین تابع‌ها را می‌دهد، می‌تواند نسبت به فاصلهٔ هاوس‌دورفی بین نمودار این تابع‌ها، به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ باشد.

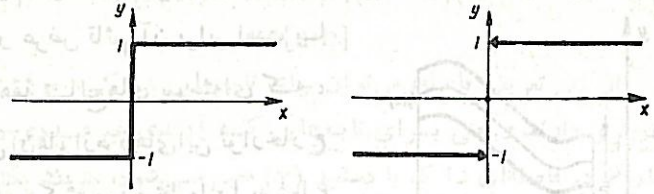
تا این‌جا، تنها ازتابع‌های پیوسته صحبت کردیم. فاصلهٔ هاوس‌دورفی به ما امکان می‌دهد، متریك مناسبی برای هرمجموعه‌ای ازتابع‌های متناهی (و ازآن جمله، تابع‌های ناپیوسته) با حوزهٔ تعریف مفروض $[a,b]$ برقرار کنیم. با توضیحی که‌خواهیم داد، روشن می‌شود که، دراین حالت، بهتراست به‌جای‌فاصلهٔ هاوس‌دورفی بین نمودارهای خود تابع‌ها، فاصلهٔ هاوس‌دورفی بین به اصطلاح نمودارهای مکمل تابع‌های موردبررسی را اندازه بگیریم.

برای این که مفهوم «نمودار مکمل» را روشن کنیم، این تابع را در نظرمی‌گیریم:

$$\operatorname{sign}x=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

نمودار این تابع، که درشکل ۷ داده شده است، نموداری ناپیوسته است و گاهی، بعضی از دانش‌آموزان، آن را به غلط، به‌صورت شکل۸ نشان می‌-

دهند، اشتباه دراین جاست که در نمودار شکل۸، نقطهٔ $x=0$، به‌جای این



شکل۸ شکل۷

که متناظر با یك‌مقدار y باشد. متناظر با همهٔ مقدارهای یك پاره‌خط است. ولی دلیل روانی اشتباه روشن است: می‌خواهند نمودار را، بدون این که قلم را ازکاغذ بردارند، رسم کنند. ولی، همین نمودارغلط، درسال‌های اخیر، در ریاضیات به‌رسمیت شناخته شده است ونام «نمودار تکمیلی» تابع $\operatorname{sign} x$ را به آن داده‌اند.

دراین‌جا،تعریف «نمودارتکمیلی» را، نه برای هرتابع ناپیوسته،بلکه تنها برای تابع‌هایی می‌دهیم که ناپیوستگی آن‌ها ازنوع اول باشد، یعنی تابع‌هایی که در هرنقطهٔ x_0 از آن‌ها، برای $x\to x_0$، حد چپ و حد راست یعنی حدهای

$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}} f(x), \quad (x<x_0) \qquad \underset{x\to x_0}{\text{حد}} f(x) \quad (x>x_0)$$

وجودداشته‌باشند. این‌حدها را، به‌ترتیب‌به‌صورت $f(x_0-0)$ و $f(x_0+0)$ نشان‌می‌دهند. می‌دانیم که‌تابع $f(x)$، وقتی‌وتنهاوقتی درنقطهٔ x_0 پیوسته است که‌داشته باشیم:

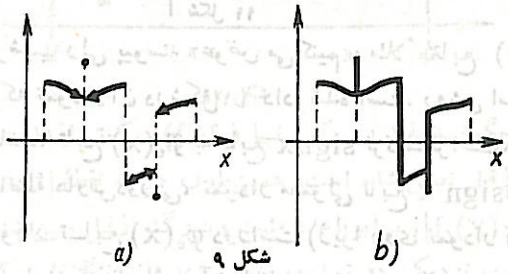
$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$

درحالت ناپیوستگی، می‌توان به موردی برخورد که هیچ کدام از حدهای $f(x_0-0)$ و $f(x_0+0)$ بر $f(x_0)$ منطبق نباشند.

نقطهٔ $x_0\in[a,b]$ را درنظرمی‌گیریم وفرض می‌کنیم

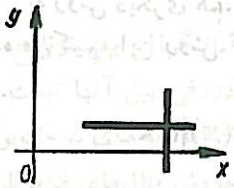
$$M(x_0)=\max\{f(x_0),f(x_0-0),f(x_0+0)\},$$
$$m(x_0)=\min\{f(x_0),f(x_0-0),f(x_0+0)\}$$

اگر x_0، نقطهٔ ناپیوستگی‌باشد، نمودار تابع $f(x)$ را، به‌کمك خط قائمی‌که دو نقطهٔ $(x_0,m(x_0))$ و $(x_0,M(x_0))$ را به هم وصل می کند، کامل می‌کنیم. طبیعی است‌که نمودار را درنقطه‌های پیوسته، بی‌تغییر نگه می‌داریم. نموداری‌که ازاین راه به‌دست می‌آید، نمودار تکمیلی تابع مفروض نامیده می‌شود،روی‌شکل۹ـa، نموداریك تابع‌ناپیوسته و روی شکل۹ـb، نمودار تکمیلی آن داده شده است. تاکید می‌کنیم که، در مورد تابع‌های پیوسته، نمودار اصلی و نمودارتکمیلی برهم منطبق می‌شود.



شکل ۹

ازخود تعریف نمودارتکمیلی نتیجه می‌شود که، هرخط راست عمود برمحور Ox یا آن را قطع نمی‌کند و یا دریك پاره‌خط بسته ـ که می‌تواند به‌یك نقطه هم‌تبدیل شده باشدـ قطع می‌کند. ولی البته، هرمجموعهٔ‌نقطه‌هایی که چنین ویژگی‌هایی داشته باشد، به معنای نمودارتکمیلی یك تابع نیست، مثلاً ثابت‌کنید که مجموعهٔ به‌صورت صلیب، که درشکل۱۰ نشان داده شده است، نمی‌تواند نمودار تکمیلی یك تابع باشد.

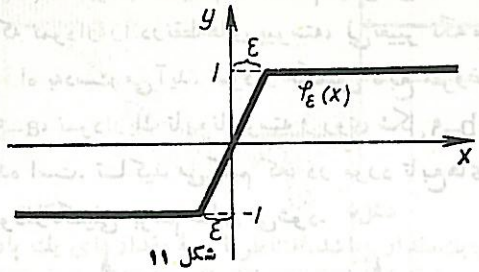


شکل ۱۰

حالا می‌توانیم، این‌تعریف‌را بدهیم: فاصلهٔ هاوس‌دورفی بین تابع‌های f_1 و f_2، عبارت‌است‌از فاصلهٔ هاوس‌دورفی بین نمودارهای تکمیلی آن‌ها.

استفادهٔ ازنمودارهای تکمیلی به‌جای نمودارهای معمولی، وقتی به‌درد می‌خوردکه با تابع ناپیوسته سروکار داشته باشیم؛ در این صورت است که آن را به تقریب به‌صورت یك نمودار پیوسته نشان می‌دهیم. دوباره به تابع

sign x بر می‌گردیم. اگر بخواهیم به‌جای این تابع، تابع پیوسته‌ای را انتخاب کنیم که، به مفهومی، به‌آن نزدیك باشد، جهش تابع sign x را، با



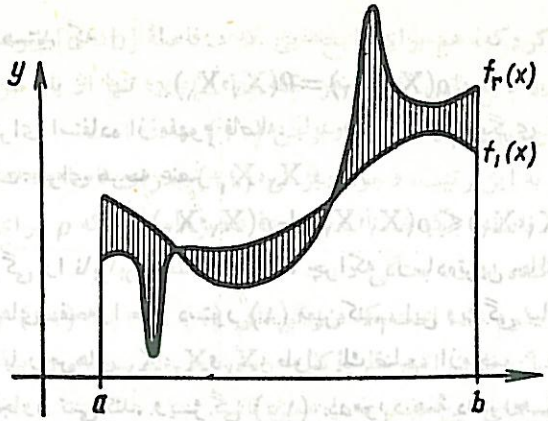
شکل ۱۱

یك سربالایی پرشیب ولی پیوسته «عوض می‌کنیم»، مثلاً، تابع $\varphi_\varepsilon(x)$ را درنظر می‌گیریم که نمودار آن درشکل ۱۱ داده شده است. روشن است که هر چه ε کوچکتر باشد، تابع $\varphi_\varepsilon(x)$ به تابع signx نزدیك‌تر است. با وجود این، به مفهوم فاصلهٔ هاوس‌دورفی، نمودار معمولی تابع sign x، به ازای هرمقدار ε، ازنمودار تابع $\varphi_\varepsilon(x)$ دوراست (زیرا روی نمودار $\varphi_\varepsilon(x)$، نقطه‌هایی وجود دارند که فاصلهٔ ازآن‌ها تا نمودار sign x، بیشتر یا برابر $\frac{1}{2}$ است). ولی فاصلهٔ هاوس‌دورفی بین نمودار تکمیلی sign x و نمودار $\varphi_\varepsilon(x)$، همراه با ε، به‌سمت صفرمیل می‌کند.

به روش دیگری هم، که برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین تابع‌ها وجود دارد، اشاره می‌کنیم، این روش، به متریك انتگرالی یا متریك لبگ مشهوراست:

$$I(f_1,f_2)=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,dx \qquad (8)$$

معنای این تعریف، از نظر هندسی، چنین‌است: $I(f_1,f_2)$ عبارت است ازمساحت شکل مسطحه‌ای که به نمودارهای تابع‌های f_1,f_2 ودوعمودی که‌از نقطه‌های a و b برمحور Ox رسم شوند، محدود باشد (شکل ۱۲). به‌سادگی می‌توان فهمید که، اگر دو تابع به مفهوم فاصلهٔ یکنواخت به هم نزدیك باشند، به مفهوم متریك انتگرالی هم به‌یکدیگر نزدیك‌اند، ولی البته، عکس این‌مطلب درست نیست. به‌سادگی می‌توان حدس زد که، نمودارهای تابع‌های پیوستهٔ



شکل ۱۲

f_1,f_2 را چگونه باید رسم کرد تا $I(f_1,f_2)$، کمتر ازعدد مثبت کوچك d باشد، که ازقبل تعیین شده است؛ همین‌طور، درچه نقطهٔ $x_0\in[a,b]$، تفاضل $|f_1(x)-f_2(x)|$، برابر باعدد مثبت وبزرگ ازقبل معین شدهٔ D، می‌شود. با وجود این، نزدیکی دو تابع، به‌مفهوم متریك انتگرالی، کوچکی تفاضل $|f_1(x)-f_2(x)|$ رادر «اغلب» نقطه‌های پاره‌خط[a,b]، تضمین می‌کند؛ نقطه‌هایی مثل $x\in[a,b]$، که برای آن‌ها، انحراف $f_1(x)$ از $f_2(x)$ به‌طور نسبی بزرگ باشد، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که درازای نسبتاً کوچکی دارد.

یادآوری می‌کنیم که کوچك بودن فاصلهٔ انتگرالی بین دوتابع، در حالت کلی، به معنای کوچك بودن فاصلهٔ هاوس‌دورفی بین آنها نیست. به همین ترتیب، کوچك بودن فاصلهٔ هاوس‌دورفی، الزاماً، به‌معنای کوچك‌بودن فاصلهٔ انتگرالی نیست. ازخواننده می‌خواهیم، خودش مثال‌های مربوط را پیدا کند.

به بعضی از جنبه‌های کلی مربوط به مفهوم‌های مختلف فاصله، اشاره می‌کنیم.

قبلاً هم گفتیم که در حالت (۵)، فاصلهٔ $R(L_1,L_2)$، نامتقارن است، ولی این، یك استثنا است. درهمهٔ حالت‌های دیگر، فاصلهٔ بین عنصرهای X_1وX_2 (که‌درحالت کلی، آن را با$\rho(X_1,X_2)$ نشان می‌دهیم)، دارای‌این

ویژگی هستند که

$$\rho(X_1,X_2)=\rho(X_2,X_1) \qquad (۹)$$

برای استفاده از مفهوم فاصله، باید ویژگی مهم دیگری از آن را در نظر گرفت: برای هرسه عنصر X_1، X_2 و X_3

$$\rho(X_1,X_2)\leqslant\rho(X_1,X_3)+\rho(X_2,X_3) \qquad (۱۰)$$

این ویژگی را نابرابری مثلث گویند، چراکه درساده‌ترین حالتی که فاصلهٔ بین‌نقطه‌های‌صفحه‌را طبق دستور (۱) معین‌کنیم، این ویژگی بیان می‌کند که درمثلث با راس‌های X_1، X_2وX_3، طول یك ضلع، ازمجموع طول دوضلع دیگر، تجاوز نمی‌کند. ویـژگی (۱۰)، درمورد همهٔ دستورهـای مربوط به فاصله، به جزدستور (۴)، صدق می‌کند (امتحان کنید!).

سرانجام، به‌ویژگی دیگری ازفاصله، توجه‌کنیم:

وقتی، وتنهاوقتی‌داریم $\rho(X_1,X_2)=0$، که داشته باشیم $X_1=X_2$

[این ویژگی را، با شمارهٔ (۱۱) مشخص می‌کنیم.]

به‌جزسه تا، بقیهٔ مفهوم‌های فاصله، دارای ویژگی (۱۱) هستند.همان‌طورکه قبلاً هم گفتیم، این ویژگـی در مورد (۴) صادق نیست. در مورد متریك انتگرالی‌هم، این‌ویژگی صدق‌نمی‌کند؛ به‌عنوان مثال، فاصلهٔ بین تابع $f_1(x)=0$ ـ برای همهٔ مقدارهای $x\in[0,1]$ ـ وتابع

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

را پیداکنید.

اگرفـاصلهٔ هاوس‌دورفی را برای خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های مسطحه، در نظر بگیریم، ویژگی (۱۱) در مورد آن صدق نمی‌کند؛ مثلاً فاصله بین دایره‌ای بدون محیط‌آن، با دایره‌ای با محیط‌آن، برابرصفر است.

ولی اگر متریك هاوس دورفی را، تنها در گـروه مجموعه‌های بسته (یعنی مجموعه‌هایی‌که، همهٔ‌نقطه‌های مرزی، منطبق به آن‌باشند) به‌کار بریم، ویژگی (۱۱) درموردآن صدق می‌کند.

اما آن چه که به متریك انتگرالی مربوط می‌شود، به‌سادگی می‌توان

روشن‌کردکه، هم برای تابع‌هایی که درفاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته هستند و هم در مورد تابع‌هایی که در هر نقطهٔ $x\in[a,b]$، تنها از یك طرف(و مثلاً از سمت چپ) پیوسته هستند، ویژگی (۱۱) صادق است.

به این‌ترتیب، وجود ویژگی (۱۱) بـرای فاصلهρ، نه‌تنها بـه روش محاسبهٔ فاصله، بلکه ضمناً به‌مجموعهٔ عنصرهایی هم‌که ρ برای آن‌ها درنظر گرفته شده است، بستگی دارد.

معلوم شده است که ویژگی‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) برای فاصلهٔ ρ کافی است تا بتوانیم نظریهٔ‌کلی مجموعه‌ها را، بـه‌نحوی بسازیم که فاصلهٔ بین عضوهای این مجموعه‌ها، معین باشد.

مجموعهٔ M باعضوهای دلخواه(مثلاً، مجموعهٔ‌نقطه‌های‌صفحه،مجموعهٔ تابع‌ها، مجموعهٔ منحنی‌ها)، به‌شرطی‌که‌برای هردوعضو X_1، X_2 آن، فاصلهٔ غیرمنفی $\rho(X_1,X_2)$ با ویژگی‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) تعریف شده باشد، فضای متریك (یا فضای فاصله‌ای) و خود فاصلهٔρ، متریك این فضا نامیده می‌شود.

مفهوم فضای‌متریك،یکی‌ازمفهوم‌های‌اصلی‌ومرکزی رادرآنالیز تابعی، نظریهٔ جدید تابع‌ها، توپولوژی، فیزیك ریاضی و سایر دانش‌های ریاضی، تشکیل می‌دهد.

رقم آخرمجموع

آیا می‌توان kرا طوری پیداکردکه مجموع

$$1+2+3+\dots+k$$

به رقم ۷ختم شود؟

سکه‌های تقلبی

۱۰ جعبه داریم که درهر کدام مقداری سکه وجوددارد. می‌دانیم که دریکی ازجعبه‌ها، سکهٔ تقلبی وجود دارد. وزن هر سکهٔ واقعی ۱۰ گرم و وزن هرسکهٔ تقلبی ۹ گرم است. باچند باروزن‌کردن می‌توان‌جعبهٔ حاوی سکه‌های تقلبی را پیداکرد؟

حل درصفحه ۶۹۱

ریاضیدانان ایران

||| کوهی |||

ابوالقاسم قربانی

ابوسهل ویجن بن رستم کوهی ریاضی‌دان ومنجم معروف ایرانی (؟ـ در حدود ۴۰۵)

اصلاً ازمردم طبرستان بود و درایام سلطنت عضدالدوله وشرف‌الدوله دربغداد می‌زیست و درسال ۳۷۸ بـه دستور شرف‌الدوله رصدخانه‌ای در بغداد بناکرد و درآن به رصد پـرداخت. درجوانی ازشاگردان ابـوحامد صاغانی* بوده است[1]. تاریخ وفات کوهی را مورخان سال ۴۰۵ یاکمی‌بعد ازآن دانسته‌اند.[2]

کوهی علاوه برآنکه منجمی دقیق و زبردست بود، در ریـاضیات و بخصوص در هندسه مقامی شامخ داشت. سارتن نوشته است[3] که «کوهی هم خود را مصروف آن عده از مسایلی کرد که ارشمیدس واپولونیوس طرح کرده بودند و منجر به معادلات بالاتر ازدرجهٔ دوم شد و بعضی از آنها را حل کرد وشرایط قابل حل بودن آنها را مورد بحث قرار داد. تحقیقات او دراین‌باره از بهترین آثار هندسی دورهٔ اسلامی‌است».

---

۱. زیرا رساله‌ای از ابوالجود موجود است (رسالهٔ اول از تألیفات ابـوالجود درکتاب حاضراست) که درعنوان آن آمده است: «رساله فـی‌طریق ابـی‌سهل‌ـ الکوهی وشیخه ابی حامد صاغانی».

۲. و رجوع کنید به نامهٔ دانشوران، ج۲ ص۶۷۱ دوسطر آخر و صفحه ۶۷۲ سه سطر اول.

۳. سارتن I، ج۱ ص ۶۶۵.

ازتفحص در آثار ریاضی کوهی که اسامی آنها را در زیرخواهیم دید، معلوم می‌شودکه وی در ریاضیات دارای شخصیت بارز و بخصوص‌در هندسه استاد و زبردست بوده است وعده‌ای ازبزرگترین ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی به‌آثار وتألیفات وی استناد واشاره‌کردند.

بیرونی* درکتاب «قانون مسعودی» کوهی را ازمبرزان زمان خود در هندسه نامیده است[1]، ودرکتاب «تحدید نهایات الاماکن» نوشته است[2] که: شرف‌الدوله، ابوسهل کوهی را به‌تجدید رصد مأمورساخت و او را دربغداد بنایی ساخت‌که قاعده‌اش قطعه‌کره‌ای به قطر ۲۵ ذراع (تقریباً ۱۲/۵ متر) بود و درمرکز آن سوراخی درسقف بنا قرار داشت وشعاعهای خورشید از آن سوراخ واردبنا می‌شد ومدارات یومیه را رسم می‌کرد...» وبیرونی در جای دیگر نیز ازهمین رصدخانه و رصدهای کوهی نام برده است.[3]

حکیم عمرخیام* در رسالهٔ جبرو مقابلهٔ خود نوشته است:[4] «ومسأله‌ای که ابوسهل کوهی وابـوالوفای بوزجابی وابوحامد صاغانی* و جماعتی از رفقای ایشان که‌در بغداد مقیم دربارعضدالدوله بودند ازحل آن عاجزماندند، این است‌که می‌خواهیم عدد ده را به دوپاره تقسیم کنیم که مجموع مربعین آنها به‌علاوهٔ خارج قسمت پارهٔ بزرگتر برپارهٔ کوچکتر هفتاد ودو شود».

نصرالدین‌طوسی* در «تحریر کتاب مأخوذات ارشمیدس» نوشته است[5] «ابوسهل کوهی مقاله‌ای نوشت که آن‌را «تزئین کتاب ارشمیدس فی‌المأخوذات» نامید و برهان این قضیه (= قضیهٔ پنجم مأخوذات) را به‌طریق کلی و بهتر، با همه چیزهایی که از ترکیب و تألیف نسبت به‌آن تعلق دارد بیان‌کرد»

---

۱. بیرونی: قانون، ج۱ ص ۲۹۷: «ولوکان ماخاض‌فیه‌المبرزون من‌اهل زماننا، ك ابی سهل‌الکوهی».

۲. ترجمهٔ فارسی تحدیدالاماکن، ص۷۵.

۳. بیرونی: قانون، ج۲ ص ۶۴۲.

۴. مصاحب: حکیم خیام، ص۲۶۸ و ۲۸۸.

۵. طوسی: نه رساله، رسالهٔ سوم ص۴۰۲.

در کتاب « تحریر مأخوذات ارشمیدس» دو قضیه از ابوسهل کوهی عیناً نقل شده است.[1]

چون ترجمهٔ احوال ابوسهل کوهی درکتاب «تاریخ الحکماء»مفصلتر از جاهای دیگر آمده است، اینك قسمتی از آن را عیناً از روی ترجمهٔ فارسی کتاب مزکور دراینجا نقل می کنم:[2]

«منجمی است فاضل وکامل، وبه هیأت وبه صنعت آلات ارصاد خبیرو عالم. در دولت آل‌بویه و ایام عضدالدوله وبعد ازآن، تقدم وتفوق وی بر اقران مسلم بود. چون‌شرف‌الدوله وارد بغداد گردید وبرادرش‌صمصام‌الدوله را ازعراق بیرون‌کرد وخودبرآن مستولی شد، درسنهٔ ۳۷۸ امرکرد به‌آنکه کواکب سبعه را رصدکنند، به‌حسب میسرات ایشان و به حسب انتقالات ایشان در بروج، برهمان مثال که مأمون درایام خود فرموده بود. وعمده در این‌کار و من‌علیه‌المدار، ابوسهل ویجن بن رستم بود که به هندسه و هیأت معرفتی به کمال داشت. و درآن دو فن، کاربه نهایت رسانیده بود. لاجرم خانه‌ای در دارلمملکة، درآخربستانی، نزدیك دروازهٔ حطابین، بنا نهاد و کمال اهتمام و اعتنا به‌استحکام اساس وقواعد آن رعایت‌کرد، تا مبادابنیان حرکتی‌کند، یا دیوارها نشستی نمایند. وآلتها که خود استخراج آن نموده بود، نصب‌کرد. پس رصد نمود آنچه دو محضر برآن نوشته شد. وحاضران خطوط خویش برآن محضرها به‌آنچه مشاهده کردند، وهمگی برصحت آن اتفاق نمودند ثبت‌کردند.[3]

آثار ریاضی موجود کوهی

(دراینجا فقط فهرست آثار ریاضی موجودکوهی را ثبت می‌کنم. برای

---

۱. طوسی، نه رساله، رسالهٔ سوم ص۷ و۸.

۲. ترجمهٔ فارسی تاریخ الحکما ، ص ۴۷۹.

۳. صورت این دومحضر واسامی کسانی که آن را امضاءکرده‌اند درمنابع زیر آمده است: تاریخ الحکماء، ص ۳۵۱ تا ۳۵۴ــ ترجمهٔ فارسی آن کتاب، ص ۴۸۰ و ۴۸۱ــلغت‌نامه، حرف الف (مقالهٔ ابوسهل‌ویجن)ــگاهنامهٔسال ۱۳۱۰ص ۱۱۳ تا ۱۱۶ــ نامهٔ دانشوران، ج۲ ص۶۷۰ و ۶۷۱.

کسب اطلاع ازسایر آثارنجومی وی رجوع‌کنید به«سزگینG_5» و«سزگینG_6» ــبرای آنکه یافتن نشانی نسخه‌های خطی موجوددرخارج ازایران آسان باشد بعد از معرفی‌هرکتاب شمارهٔ‌آن را درفهرست آثارکوهی درکتاب «سزگینG_5» ذکر کرده‌ام).

۱ـ رساله فی‌البرکارالتام والعمل به

یك نسخهٔ خطی از این رساله درکتابخانهٔ مجلس (به شمارهٔ ۶۰۹۲) ویك نسخهٔ خطی دیگرازآن درتهران[1] و چند نسخهٔ ازآن درخارج ازایران موجود است (سزگین G_5، ص۳۱۷ ش۱) و علاوه براین وپکه متن عربی و ترجمهٔ فرانسوی‌آن‌را بامقدمه‌ای‌جامع ویادداشتهای سودمنددرسال۱۸۷۴م. منتشرکرده است.[2]

مقصود از «پرگارتام» پرگاری است‌که بتوان با آن خطوط قیاسی یعنی خط راست و دایره و بیضی و هذلولی و سهمی را با حرکت اتصالی رسم‌کرد. شکل این پرگار را با اسامی قسمتهای مختلف آن درصفحات ۲۳ و ۱۲۱ مقالهٔ وپکه[3] خواهید یافت.

ابوریحان بیرونی، در رسالهٔ«استیعاب الوجوه الممکنه فی‌صنعة الاسطرلاب» ازکتاب پرگارتام‌کوهی نام‌برده ونوشته است‌که شیخ ابوسهل ویجن‌بن رستم القوهی رساله‌ای دربارهٔ ساختن وبه کاربردن پرگارتام نوشته و درآن رساله روش ترسیم قطوع مخروطی را به وسیلهٔ پرگارتام بر پایهٔ قضایایی بنانهاده‌که درکتاب خودموسوم به«قسمة الخطوط علی‌نسب‌السطوح» بیان‌کرده است

کتاب اخیر ظاهراً همان کتابی است که در «الفهرست» نام آن به صورت«کتاب احداث النقط‌علی‌الخطوط (علی نسب السطوح)» آمده است.

کتاب پرگارتام کوهی دارای مقدمه و دو مقاله است : مقالهٔ اول در اثبات اینکه ممکن است با این پرگارخطوط قیاسی یعنی خط راست ودایره

---

۱. نشریهٔ دانشگاه تهران، ج۳ ص۲۲۸.

۲. وپکه: پرگارتام،ص۶۸ـ۱۱۱ (ترجمهٔفرانسوی) و ص۱۴۵ـ۱۷۵ متن‌عربی.

۳. مقالهٔ فوق.

و بیضی وهذلولی و سهمی را رسم کرد. مقالهٔ دوم درچگونگی رسم خطوط قیاسی به وضع معلوم.

۲ـ رسالهٔ فی‌استخراج ضلع المسبع المتساوی‌الاضلاع

موضوع این رساله‌روش محاط کردن هفت‌ضلعی منتظم در دایره‌است. عنوان این‌رساله‌در بعضی نسخه‌های‌خطی«رساله فی‌عمل ضلع‌المسبع‌المتساوی‌الاضلاع فی‌الدائره» است.

این رساله را کوهی بدنام عضدالدولهٔ دیلمی نوشته ویك نسخهٔ خطی آن درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران (به‌شمارهٔ ۱۷۵۱/۷) موجوداست[۱] وفیلم یك نسخهٔ خطی‌آن که متعلق به‌کتابخانهٔ ایاصوفیا است نیز دردانشگاه تهران هست[۲]. ازاین رساله دونسخهٔ خطی نیزدرکتابخانهٔ ملی پاریس هست که یکی ازآنها به‌خط ابوسعید سجزی* است و چند نسخهٔ خطـی دیگر نیز از آن وجود دارد (سزگین، ش۲).

این رساله توسط سامپلونیوس (Samplonius) درسال ۱۹۶۳ به زبان آلمانی ترجمه شده است (سزگینG_5، ص۳۱۸).

ابـولجواد* محمدابن لیث رسالـه‌ای دربارهٔ روش استخراج ضلع مسبع توسط‌کوهی نوشته است (رجوع شود به‌شمارهٔ یك از آثار ابوالجود درکتاب حاضر).

درمجلهٔ تاریخ علوم عربی دربارهٔ این رساله‌گفت‌وگوشده است[۳].

۳ـ رساله فی عمل مخمس متساوی‌الاضلاع فی‌مربع معلوم

موضوع این رساله محاط‌کردن پنج ضلعی منتظم دریك مربع است و کوهی آن را به نام شرف‌الدوله نوشته است.

یك نسخهٔ خطی ازاین رساله در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران (به شمارهٔ ۱۷۵۱/۸) وچند نسخهٔ خطی از آن درخارج ایران موجود می‌باشد

---

۱. فهرست دانشگاه، ج۸ ص۲۷۶.
۲. فهرست میکروفیلمها، ج۱ص۴۶۹ (ش۱۷ و ۲۸).
۳. عادل انبوبا، تسبیع دایره.

(سزگین، ش۳). فیلم یـك نسخهٔ متعلق به ایاصوفیا نیز در دانشگاه تهران موجود است.[۱]

نسخهٔ خطی دانشگاه تهران چنین شروع مـی‌شود: «بعدفراغنا من‌عمل‌المسبع المتساوی الاضلاع فی‌الدائره نبدء باستخراج شکل‌آخر احسن وابعد واغمض‌واصعب استخراجاً من عمل‌المسبع تقربا الی‌الملك شرف‌الدوله...»

۴ـ طریق فی استخراج خطین بین خطین‌حتی تتوالاعلی نسبةوقسمة‌الزاویه مثلثه اقسام متساویه

ظاهراً بخش‌اول این رساله متعلق به‌کتابی است که نامش در«تاریخ‌الحکماء» به‌صورت «کتاب اخراج الخطین علی‌نسبة» آمده است.

یك فیلم ازنسخهٔ خطی این رساله کـه اصل آن متعلق به‌کتابخانهٔ ایاصوفیاست درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران[۲] وچند نسخهٔ خطی از آن در خارج از ایران موجود است (سزگین، ش۴).

۵ـ رساله فی استخراج مساحة المجسم المکافی

یك‌فیلم‌ازنسخهٔ خطی این‌رساله متعلق‌به‌کتابخانهٔ ایاصوفیا درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران[۳] وچند نسخهٔ خطی ازآن درخارج از ایران موجود است (سزگین۵) وگذشته از ایـن متن عربی آن درسال ۱۹۴۷ میلادی در حیدرآباد دکن به طبع رسیده است[۴].

سوتر درسال ۱۹۱۸ میلادی این رساله و رسالهٔ ثابت‌بن‌قره* درهمین موضوع را به زبان آلمانی ترجمه‌کرده است (سزگینG_5، ص۳۱۸ ش۵ـ قربانی: ریاضیدانان، ص۲۱۳ [م۶]).

۶ـ رساله فی‌قسمةالزاویه المستقیمه الخطین مثلثه اقسام متساویه

این رساله قسمت دوم رسالـه‌ای است که درشمارهٔ ۴ معرفی کـردم.

---

۱. فهرست میکروفیلمها، ج۱ص۴۶۹ (ش۲۰).
۲. فهرست میکروفیلمها، ج۱ص ۴۶۹ (ش۲۹)
۳. فهرست‌میکروفیلمها، ج۱ص ۴۶۹ (ش۲۲)درآنجا به‌جای «مساحة»اشتباهاً «مسأله» چاپ شده است.
۴. رسائل‌المتفرقه فی‌الهیئه، رسالهٔ ششم.

نسخه‌های خطی این رساله درخارج از ایران موجود است (سزگین، ش۶)

آیدین صاییلی متن‌عربی وترجمهٔ انگلیسی این‌رساله را درسال۱۹۶۲ انتشارداده است (قربانی: ریاضیدانان، ص۲۱۲ [م۴]).

۷ـ رساله فی‌نسبة مایقع بین ثلثه خطوط من‌خط‌واحد

این رساله راکوهی به نام شرف‌الدوله نوشته وموضوع آن رسم یك خط راست ازیك نقطهٔ معلوم است به قسمی‌که سه خط راست معلوم روی‌آن قطعاتی با نسبت معین پدیدآورند. یك نسخهٔ خطی از این رساله درایاصوفیا (به‌شمارهٔ ۴۸۳۰) موجود است (سزگین۷).

۸ـ اخراج الخطین من نقطه علی زاویه معلومه بطریق‌التحلیل

یك‌نسخهٔ‌خطی‌ازاین‌رساله‌درکتابخانهٔ ملی پاریس(به‌شماره۲۴۵۷/۸) موجود است[1]. وپکه این نسخه را مورد مطالعه قرار داده ونوشته است[2] که «موضوع این رساله ترسیم دو خط راست از یك نقطهٔ معلوم است به قسمی که با هم زاویهٔ معینی تشکیل دهند و به خط راست معلومی منتهی شوند بـه قسمی که نسبت دو پاره خطی که بین نقطه و خط راست معلوم پدید می‌آید (یا حاصل‌ضرب این دوپاره‌خط یا مساحت مثلثی که ایجاد می‌شودـیا قاعدهٔ این مثلث یا مجموع مربعات دوپاره‌خط مذکورـ یا مجموع این پاره خطها ـیا تفاضل آنها) دارای مقدار معینی باشد. سپس کوهی چهارحالت اول را به‌فرض آنکه خطی‌که وضعش معلوم است خط راست نباشد بلکه دایره باشد حل‌کرده است».

وپکـه افزوده است کـه موضوع این رساله تقریباً موافق بـا عنوان رسالـه‌ایست کـه ابن‌ندیم در «الفهرست» بـه صورت «کتاب احداث‌النقط علی‌الخطوط» آورده وهمچنین بسیار نزدیك به‌عنوان «کتاب اخراج‌الخطین علی نسبة» است‌که در «الفهرست» نامش آمده است.

۹ـ مراکزالدوائرالمتماسه علی‌الخطوط بطریق التحلیل

یك نسخه از این‌کتاب‌درکتابخانهٔ ملی پاریس (به شمارهٔ ۲۴۵۷/۲)

---

۱. فهرست پاریس، ص۴۳۱.

۲. وپکه: جبرخیام، ذیل‌صفحات ۵۵ و ۵۶.

موجوداست‌که با نسخهٔ اصل آن مقابله شده است.[1]

وپکه این نسخه را مورد مطالعه قرار داده و نوشته است[2] که کوهی دراین رساله مسایل زیر را حل کرده است:

الفـ ترسیم دایره‌ای که‌از دو نقطهٔ معلوم بگذرد (یا با دوخط راست معلوم مماس باشدـ یا ازنقطهٔ معلومی بگذرد و یا باخط راست معلومی مماس باشد)ومرکزآن روی یك‌منحنی‌معلوم واقع شود.

بـ ترسیم دایـره‌ای که ازیك نقطهٔ معلوم بگذرد وبا دایـرهٔ معلومی مماس باشد و مرکز آن روی خط راست معینی (یـا روی منحنی معلومـی) واقع شود.

جـ ترسیم دایره‌ای که مرکزش روی منحنی معینی واقع باشد وبا دو دایرهٔ معلوم مماس شود.

کوهی در آخر این رساله نوشته است‌که «پیش ازآنکـه بـا کتاب مخروطات اپولونیوس آشنا شویم یکی از حالات خاص این مسأله را که حل آن به‌مخروطات منجر نمی‌شود حل کرده بودیم. و آن حالتی است‌که منحنی معلوم قسمتی از دایره باشد، درصورتی کـه مراکز سه دایره روی یك خط راست واقع شوند. این حالت و همچنین بعضی ازاین مسایل‌را در رسالـه‌ای کـه آن را «کتاب مـراکز دایره‌های متماس کـه روی خطوط واقع‌اند» نامیده‌ایم، شرح داده‌ایم» (ظاهراً رسالهٔ شمارهٔ۹).

۱۰ـ المسائل الهندسیه

یك نسخه ازاین رسالهٔ مختصردرقاهره ویك نسخه درکتابخانهٔ ظاهریه در دمشق موجود است (سزگین،ش ۱۱).

۱۱ـ المسئلتان هندسیتان

فیلم این رساله‌که از روی یکی از دو نسخهٔ موجود آن در ایاصوفیا برداشته شده درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران مـوجود است[3] (سزگین، ش۱۲).

---

۱. فهرست پاریس، ص۴۳۱.

۲. وپکه، جبرخیام، ذیل‌ص۵۵.

۳. فهرست میکروفیلمها، ج۱ ص۴۶۹ (ش۲۶).

۱۲- المقالة الاولی والثانیه من کتاب اقلیدس فی الاصول

نسخهٔ خطی این مقاله درقاهره موجود است (سزگین، ش۱۴).

۱۳- من کلام ابی‌سهل فیمازاد من الاشکال فی امر المقالة الثانیه

نسخهٔ خطی این رساله در بانکیپور موجود است (سزگین، ش۱۵).

۱۴- من کلام ابی‌سهل فیمازاد من الاشکال فی آخر المقالة الثالثه

نسخهٔ خطی این رساله در برلین موجود است(سزگین، ش۱۶).

۱۵- زیادات لکتاب اقلیدس فی المعطیات

دونسخهٔ از این رساله در ایاصوفیا موجود است (سزگین، ش۱۷) و فیلم یکی از آنها درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران هست.[۱]

۱۶- اختصار دعاوی المقالة الاولی من کتاب اقلیدس

نسخهٔ خطی این رساله درکتابخانهٔ آستان رضوی (به شمارهٔ ۵۴۱۲) موجود است (سزگین،ش۱۸).

۱۷- زیادات علی کتاب الکره والاسطوانه لارشمیدس

نسخه‌های (ناقصی) از این کتاب درلیدن وپاریس ولندن موجوداست (سزگین،ش۲۵) و قسمتهایی از آن را نصیرالدین طوسی* درپایان کتاب «الکره والاسطوانه» ارشمیدس نقل کرده است[۲].

وپکه قسمت موجود این کتاب را از روی نسخه‌ای که درکتابخانهٔ ملی پاریس هست به زبان فرانسوی ترجمه و مطالب آن را مورد بررسی قرار داده است[۳].

دراین رساله مسألهٔ زیرموردبررسی قرارگرفته‌است: طرح قطعه کره‌ای که حجمش برابر حجم قطعه کره‌ای مفروض وسطحش مساوی با سطح قطعه کرهٔ معین دیگری باشد.

---

۱. فهرست میکروفیلمها، ج۱ ص۴۱۹ (ش۲۶).

۲. طوسی: نه‌رساله، رسالهٔ پنجم، ص۱۲۵ تا ۱۲۷.

۳. وپکه: جبرخیام، ص۱۰۳ تا ۱۱۴ـ کانتور،G، ص۷۴۸ و۷۵۰ـیوشکویچ M، ص۹۲ـ۹۴.

۱۸- قول علی‌ان فی‌الزمان المتناهی حرکة غیرمتناهیه

نسخهٔ خطی این رساله در ایاصوفیا موجود است وآیدین صابیای آن را به‌زبانهای ترکی‌وانگلیسی‌ترجمه‌کرده است (سزگینG_5ص۳۲۰،ش۲۸) وایندکس‌ایسلامیکوس، ج۲ ص۵۵ (ش۱۵۰۶).

۱۹- دومکتوب

دومکتوب‌ازابواسحاق صابی* به‌ابوسهل کوهی که یکی از آنهامربوط به مرکز ثقل قطعهٔ دایره است وجواب کوهی به‌آن‌نامه‌ها درکتابخانهٔ‌ایاصوفیا موجود است و فیلم این مکتوبها وجواب آنها درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران‌هست[۱] (سزگین G_5 ص۳۲۰، ش۲۳ و۲۴). ورجوع کنیدبه «قربانی: ریاضیدانان» ص۲۱۳ [م۵].

آثار ریاضی مفقود کوهی

۲۰- علاوه برآثار ریاضی فوق‌که ازکوهی باقی مانده است‌می‌دانیم که وی مقاله‌ای نوشته‌بوده‌باعنوان «تزئین‌کتاب ارشمیدس‌فی‌المأخوذات». در واقع‌نصیرالدین‌طوسی* درمقدمهٔ‌کتاب «تحریرکتاب‌مأخوذات ارشمیدس» ازقول نسوی* (علی‌بن‌احمد) نوشته است:«ثم من‌بعد ذلك‌عمل‌ابوسهل‌القوهی مقاله سماها تزئین کتاب ارشمیدس فی‌المأخوذات واورد برهان ذلك‌الشکل بطریق اعم و احسن مع مایتعلق به‌من ترکیب النسبه وتألیفها».

۲۱- ابن صلاح همدانی* مقاله‌ای دارد با عنوان «مقاله فی‌تزییف مقاله ابی‌سهل القوهی‌فی‌ان‌نسبة القطرالی‌المحیط‌نسبة الواحدالی ثلثه وسبع» و درمقدمهٔ‌آن مقاله نوشته است‌که ابوسهل‌کوهی رامقاله‌ایست دربارهٔ اینکهٔ نسبت قطر دایره به محیط آن مساوی است با نسبت واحد به سه‌ویك‌هفتم.

۲۲- ملاعلی محمد اصفهانی[۲] رساله‌ای دارد موسوم به «تقسیم کره بسطوح مستوی» که نسخهٔ خطی آن درکتابخانهٔ مدرسه سپهسالارتهران ودر

---

۱. فهرست میکروفیلمها، ج۱ص۴۶۹ (ش۲۳ و ۲۴ و۲۵).

۲. علی‌محمد پسرمحمدحسین معروف به **ملاعلیمحمد اصفهانی** وملقب به«غیاث-

←

کتابخانهٔ مجلس موجود است[1] وآن را به نام ناصرالدین شاه قاجار تألیف کرده است. مؤلف درآن رساله نوشته است کـه: «پیش ازمن تنها ابوسهل کوهی دراین‌باره کتابی دارد».

منابع

الدومیه‌لی S ، ص۱۰۹ و ۱۱۱.

بروکلمان G_1 ،ص۲۵۴ (ش۱۲)/ بروکلمان S_1 ص ۳۹۹.

بیرونی: قانون، ص۲۹۷ و ۶۴۲ و ۶۴۳

تاریخ ادبیات دکترصفا، ج۱ ص۳۳۵

ترجمهٔ فارسی الفهرست، ص۵۰۶

ترجمهٔ فارسی تاریخ الحکماء، ص۴۷۹–۴۸۲ (متن عربی آن کتاب، ص۳۵۱–۳۵۴)ترجمهٔ فارسی تحدیدالاماکن،ص۷۴ و۷۵ و۷۶ و۸۸

*دانشنامهٔ ایران و اسلام، ابـوسهیل ویجن‌بن رستم کوهی (ترجمه از دایرةالمعارف اسلام)

* دایرةالمعارف اسلام، چاپ دوم فرانسوی ج۵ ص۳۵۴–۳۵۵

ریحانة الادب، ج۵ ص۹۷ (ش۱۵۵)

* سارتنI، ج۱ ص۶۶۵؛سزگینG_5،ص۱۳۳ و ۳۱۴–۳۲۱ و ۳۴۱ و ۴۰۳/سزگینG_6، ص۲۱۷–۲۱۹ و ۲۳۲.

---

۱. فهرست‌سپهسالار، بخش۳ ص۴۹۰ وفهرست مجلس،ج۶ص۱۱۱.

→ الدین جمشیدثانی» ازعلمای ریاضی ایران درسدهٔ سیزدهم هجری بـود (در سال ۱۲۱۵ دراصفهان‌متولد شد ودر ۱۲۹۳ در تهران‌درگذشت) ودرادبیات نیز دست داشت. علیقلی میرزا اعتضاد السلطنه وزیرعلوم او را ازاصفهان‌به تهران آورد وبه سمت معلمی پذیرفت وی در وزارت علوم وتکالیف مدرسهٔ دارالفنون شاهزادهٔ مزبور را مددکاربود (فرهنگ معین، ج۵ص۱۲۰۵). از وی‌کتاب دیگری موسوم به «تکملة العیون» به‌عربی دردست است که به‌چاپ نرسیده (فهرست سپهسالار، ج۳ص۲۹۶) دربارهٔ برخی از کارهای ریاضی وی رجوع کنید به «مصاحب، جبرومقابلهٔ خیام»، ص۱۶۰ تا ۱۶۴ (با در نظرداشتن‌مطالب صفحات ۲۷۳–۲۷۴ آن‌کتاب).

سوترM، ص۷۵ (ش۱۷۵)؛ صابیلیO، ص۱۱۳–۱۱۶

طوسی: نه رساله، رسالهٔ پنجم (تحریرالکرة)، ص۱۲۵–۱۲۷

طوسی: نه رساله، رسالهٔ سوم (تحریرمأخوذات) ص۲ و ۷–۹

* فرهنگ زندگینامهٔ علمی، ج۱۱ ص۲۳۹–۲۴۱

فهرست خدیویه، ج۵ ص۲۰۳

فهرست دانشگاه، ج۸ ص۲۷۶

فهرست رضوی، ج۳ فصل۱۷ ص۶۱ (ش۱۸۶)/ ج۸ ص۴۱۹

فهرست سپهسالار، بخش۳ص۴۹۰–۴۹۱

فهرست لیدن، ج۳ ص۵۷ (ش۱۰۰۱)/ ج۷ ص۱۶۵ و ۴۳۱

فهرست مجلس، ج۱۹ ص۷۵

فهرست میکروفیلمها، ص۴۶۹ و ۴۷۱ و ۵۲۳

* قربانی: ریاضیدانان، ص۱۹۵–۲۱۳

کانتور G_1، ص۷۴۸–۷۵۰

کراوزهS، ص۴۶۶ (ش۱۷۵)

گاهنامهٔ سال ۱۳۱۰، ص۲۶–۲۸ و ۱۱۳

لغت نامهٔ؛ ابوسهل ویجن‌بن رستم کوهی طبری

مجلهٔ تاریخ علوم عربی، ج۱ سال۱۹۷۷ ص۷۳–۱۰۵ (عربی)/ ج۲ سال ۱۹۷۷ص269–264 (انگلیسی)

مصاحب: حکیم خیام، ص۱۰۵ و ۱۰۶ و ذیل ص۱۵۲

نامهٔ دانشوران، ج۲ ص۶۶۹–۶۷۱

نشریهٔ دانشگاه تهران، دفتر۳ص۲۸۸

وپکه: پرگار تام، ص۳و۶۸–۱۱۱ (ترجمهٔ فرانسوی)و ۱۴۵–۱۷۵ (متن عربی)

وپکه: جبرخیام، ص۵۴ و ۱۱۸ و ۱۰۳–۱۱۴

هیث E، ج۱ ص۸۸

یوشکویچM، ص۹ و ۱۱ و ۹۲– ۹۴ و ۹۹ و ۱۲۳ و۱۲۸.

Ya. khurgin

حرکت‌های تصادفی

توفیق حیدرزاده

این مقاله، ترجمهٔ گفتار Random walks از کتاب Did you say mathematics? است که توسط **دکتر یاکووخورگین** نوشته شده است. وی، استاد ریاضیات درکرسی ریاضیات کاربردی مؤسسهٔ صنعت نفت وگازگوبکین است. تا حال، بیش ازصد مقالهٔ علمی دربارهٔ ریاضیات محض و کاربردی به رشتهٔ تحریردر آورده است که در میان آنها، رشته‌هایی چون مهندسی رادیو، فیزیك رادیویی، سیبرنتیک، فیزیولوژی اعصاب Neurophysiology. Psychiatry وروان درمانی جای خاصی دارند. اکنون پرفسور خورگین مسؤلیت آزمایشگاه ریاضیات کاربردی را به‌عهده دارد. او، همچنین عضو کمیتهٔ ملی کنترل اتوماتیك شوروی است.

حدود سیصد سال پیش بازرگان آلمانی، **آنتوان وان‌لی‌ون‌هوك** که مردی بیسواد ولی کنجکاو وبا پشتکاربود ازپشت عدسیهای میکروسکوپی که خود درست کرده بود موجودات زندهٔ بسیار کوچکی را مشاهده کرد. او حیوانات ریزی را درآب باران دیدکه شنا می‌کردند، حیواناتی صدها بار کوچکتر از موجوداتی که با چشم غیرمسلح دیده می‌شدند.

یکصدو پنجاه سال بعد ازکشف شگفت‌انگیز لی‌ون‌هوك، گیاهشناس انگلیسی **روبرت براون** با میکروسکوپ پرتوانتری به مطالعهٔ موجودات میکروسکوپی پرداخت. او متوجه پدیدهٔ عجیبی شد: درون آب، ذرات ریز گردهٔ گیاهان پرش ورقص اتفاقی ازخود نشان می‌دادند. براون تحصیلکرده

وآگاه بود وبه این نتیجه رسیدکه این حرکت از آن موجودات زنده نمی‌تواند باشد بلکه صرفاً شنای ذرات غبار درآب است. براون خود را به کلیات قانع نمی‌کردوبرای اثبات این‌حرکتهای حساب نشده به‌مطالعهٔ رفتار ذرات اجسام بسیار زیادی ازجمله تکه‌ای ازمجسمهٔ ابوالهول پرداخت. او دربین این تکه‌ها، قطعه‌ای کوارتزیافت که درون آن حفره‌ای پرآب وجود داشت. کوارتز را زیر میکروسکوپ‌قرارداد وبازمشاهده‌کرد که ذرات‌معلق درآب درون‌کوارتز حرکت اتفاقی دارند. این‌آب به احتمال زیاد سالهای سال بود که درون کوارتز محبوس شده بود ولی باز ذرات به رقص خود درآن ادامه می‌دادند. سال ۱۸۲۷ میلادی بود.

بیان علت حرکت ذرات ریز درمایعات کار ساده‌ای به‌نظر نمی‌رسید. ماهیت عمومی این اثر، تأثیر زیادی بر براون گذاشت و اوچنین‌پنداشت که نوعی حیات ابتدایی‌کشف کرده است که مشخصه‌های مادهٔ آلی‌وغیرآلی را با هم دارد.

تا پایان قرن نوزدهم فرضیه‌های زیادی ارائه شد در آنها ماهیت حرکت براونی به‌سبب نوعی نیروی الکتریکی تبخیرآب یا برخوردهای مکانیکی تعبیر می‌شد. حرکت براونی به طور تغییرناپذیر در نمونه‌هایی آشکار می‌شدکه هفته‌ها درتاریکی مطلق بودندیا ساعتها جوشیده شده‌بودند.

سرانجام معلوم شدکه این پدیده‌خود ازاهمیت‌اساسی برخورداراست آزمایشهای متعددی‌که انجام‌گرفت همگی به‌یك نتیجه‌گیری طبیعی منجرشد: علت حرکت براونی دربمباران اتفاقی ذرات توسط‌مولکولهای مایعی است که‌ذره درآن قراردارد. ولی لازم بودکه نبوغ اینشتاین مسئله‌را به شیوه‌ای کاملاً روشن وبدون ابهام تحلیل‌کند.

حال، سعی می‌کنیم که برخی از مسائل مربوط به حرکت براونی را تشریح کنیم. نخست باید مدل مناسبی ازپدیده و نیز یك مدل ریاضی ارائه دهیم. یك ذرهٔ معلق‌درمایع درمعرض بمباران مولکولهای مایع‌قرارمی‌گیرد. نیروی هربرخورد متفاوت‌است (زیرا مولکولها با سرعتهای متفاوت‌حرکت می‌کنند، و برخورد درتمام جهتها صورت می‌گیرد)، جهتها تصادفی هستند و

شانس برخورد ازچپ وراست وبالاوپایین یکسان است. تعداد برخوردهای بین ذره ومولکولها، بسیارزیاد، و از مرتبهٔ 10^{14} درهـرثانیه است. ضمناً، تعداد مطلق بـرخوردها وسرعت مولکولی در ارائه واقعی مدل ایـن پدیده اساسی نیستند.

اکنون به تعیین تغییرات مکان یك ذرهٔ درحال پرش در فاصله‌ای می‌پردازیم که چندین‌بار بزرگترازفاصلهٔ بین دوبرخورد است.

مدلی برای این‌پدیده می‌سازیم‌وفرضهای‌زیر راپیش می‌کشیم. نخست اینکه‌سرعتهای‌مولکولی ازیك‌مرتبهٔ‌بزرگی‌هستند.دوم، برخوردهادرفاصله‌های زمانی یکسان رخ می‌دهند. مثلاً اگر درهرثانیه حدود 10^{14} برخورد روی دهد، می‌گوئیم که هربرخورد درفاصلهٔ زمانی $\tau = 10^{-14}$ روی داده‌است. برای واحد مقیاس، زمان بین دو برخورد متوالی را درنظرمی‌گیریم. سوم، ذرات متحرك درمایع، شکل تقریباً کروی دارند.

احتمال یکسان راستاهای مختلف حرکت مولکولها به این معنی است که اگر O دوسطح یکسان‌را در روی یك‌کره مجزاکنیم (که الزاماً دوسطح هم‌شکل‌نیستند)، آنگاه احتمال برخورد هرمولکول به هریك ازاین سطحها یکسان است. ازطرف دیگر، احتمال برخوردمولکول با هرناحیهٔ مجزابرابر است با نسبت مساحت‌آن ناحیه به‌مساحت کل‌کره. چنین‌توزیعی‌از راستاهای برخورد، توزیع یکنواخت نامیده می‌شود.

علاوه برآن فرض می‌کنیم بـرخورد دلخواه مولکولهای مختلف بـه سطحهای مختلف (سطحهایی‌که رویهم نمی‌افتد) پدیده‌های مستقلی‌هستند.

تحت این فرضها، هرگام متوالی یـك ذره ازگام پیشترمستقل است و بزرگی گامها علی‌رغم تصادفی بودن راستاها وتوزیع یکنواختشان، یکسان است.

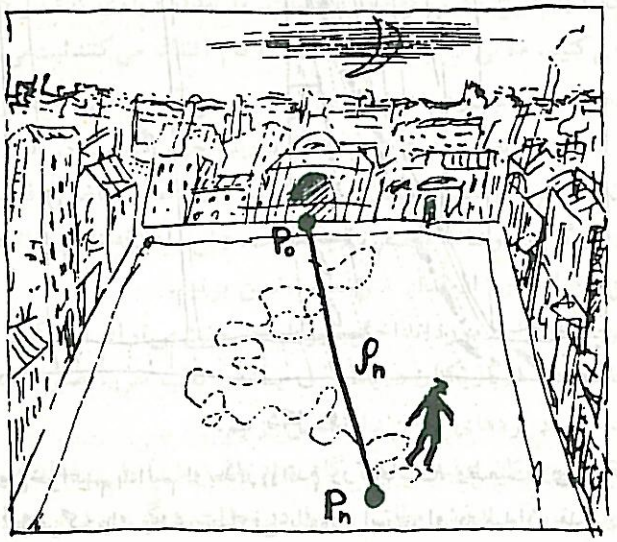
حالا ازمدل سه‌بعدی می‌گذریم و به یك مدل دوبعدی می‌رسیم. رفتار ذره دریك سطح، مشابه رفتارآدمی مست است‌که درمیدانی قدم برمی‌دارد. وضع اوچنان است که قدمهایش را اتفاقی به این سو و آن سو می‌گذاردو تمام جهتها ازاین نظرشانس یکسان دارند. همچنین، جهت قدم بعدی کاملاً

مستقل از قدم قبلی است. ما این مرد را مست مطلق می‌نامیم.

اوبعدازفاصلهٔ زمانی‌معینی‌خود راکجاخواهد یافت؟ جواب این‌سئوال را نه خود او و نه من و شما مـی‌توانیم پاسخ بگوئیم و پیش‌بینی هم نمی‌توانیم بکنیم.

خوب‌ممکن است اودیر یا زود بهبود یابد، ولی ازمسیر سئوال‌خارج نمی‌شویم، مست مطلق، مدلی است ازحرکت براونی. می‌توانیم این حالت را با تصویر یك کك در اتاقی بزرگ عوض‌کنیم.

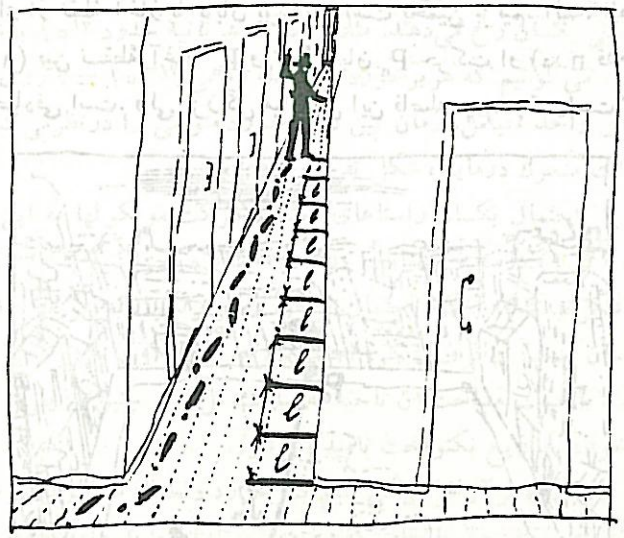
مست مطلق قادر است n قدم درجهتی‌حرکت‌کندوما می‌توانیم‌فاصله‌ای را که او از نقطهٔ آغاز تا پایان پوشانده است تخمین بزنیم. البته، فاصلهٔ ρ_n (شکل ۱) بین نـقطهٔ آغاز P_0 و نقطهٔ پایان P_n حرکت او (درn قدم) یك متغیر تصادفی است. ولی بزرگی میانگین این فاصله، ρ_n، چقدراست؟



شکل ۱

می‌توانیم کمیت ρ_n را برمبنای فرضهای اولیهٔ خود محاسبه‌کنیم. ولی قبل ازتعیین این‌کمیت‌مدل‌خودمان را بازهم ساده‌ترمی‌کنیم. قصدمان ازاین کار، کاهش دادن تعداد مختصات یا درجه‌های آزاد است.

مرد مست را ایـن‌بار در کریدور کم عرضی قـرار می‌دهیم. کریدور چنان باریك است که او فقط می‌تواند به‌عقب یا جلو برود. رفتار او به‌همان شکل باقی می‌ماند: هرقدم مستقل ازقدم قبلی است. همچنین جهت آنها، روبه جلو یا به‌عقب، یك احتمال را دارد. همهٔ قدمهای او بـه‌یك انـدازه است و اگر این را l بنامیم، با هرقدم به مقدار $\pm l$ و با احتمال $\frac{1}{2}$ ازنقطـهٔ آغاز دور می‌شود یا به آن نزدیك می‌گردد. (شکل۲)



شکل ۲

می‌خواهیم بدانیم اوبعدازn قدم درکجاست. وضعیت وی درکریدور نشاندهندهٔحرکت‌یك بعدی تصادفی یك‌ذره است. او درمیدان، مدل دوبعدی حرکت تصادفی را عرضه می‌کند و حرکت براونی یك ذره درمایع حرکت تصادفی درسه بعد است.

مدل یك بعدی حرکت اتفاقی به مدل بازی تفریحی، شیر یا خط می‌ماند. در واقع اگر یك سکهٔ متقارن رادرفاصله‌های زمانی یکسان بیاندازید

و قرارتان این باشدکه دوستتان به‌ازای آمدن شیر، l بار l ریال به شمابدهد وزنهٔسنگینی‌را بلندکند واگرخط‌بیاید شما l بار این‌کار را انجام‌دهید،حاصل کار برای هرکدامتان بعد ازn بار سکه انداختن، برابرخواهد بود بااختلاف بین تعداد شیرها وخطها ضربدر l. به‌طور عددی این مقدار دقیقاً مساوی بـا فاصله‌ای است که مست درn قدم می‌پیماید، یعنی اختلاف تعدادقدمها به‌چپ یا راست ضربدر اندازهٔ هرقدم.

ازآنجاکه احتمال قدمهای روبـه جلو و روبـه عقب یکسان است و قدمها نیزمستقل ازیکدیگرند، تعداد قدمهای روبه جلو و روبه عقب، به‌طور میانگین، برابرخواهند بـود و از اینرو، فاصلهٔ متوسطی‌که مست درکریدور می‌پیماید مساوی صفر می‌شود. پس، به طور متوسط، او سر جای خود باقی خواهد ماند!

بگذارید شرح دهیم که منظورچیست. ما تعداد زیادی ذرهٔ سرگردان رادنبال می‌کنیم. مکانی راکه هریك بعداز n گام اشغال می‌کنندثبت‌می‌کنیم. با این‌کارهم اعداد مثبت‌وهم‌اعدادمنفی‌را به‌دست می‌آوریم ولی میانگین‌آنها (مجموع تقسیم بر تعداد ذره‌ها) بـه صفر نزدیك خـواهد بـود. از زبـان ریاضیدان «ارزش متوسط» (یا درتئوری احتمالات، امید ریاضی) فاصله‌ای که ذره درn گام‌می‌پوشاند به‌صفرنزدیك است. ولی ماعلاقه‌مندیم که‌انحراف ممکن این فاصله‌ها را ازمقدار متوسط، تخمین بزنیم.

این جمله را درمورداندانختن شیریا خط چنین می‌توان بیان‌کرد: امید برد توسط هریك ازبازیکنان دریك‌بازی بـدون تقلب تقریباً صفراست ولی می‌خواهیم تعداد بردهای ممکن را تخمین بزنیم.

فاصلهٔ بین مکان اولیه و مکان گام nام یك ذره را با ρ_n نشان می‌دهیم ما همچنین می‌توانیم ارزش مطلق ρ_n (یا در حالت دیگر، برد هر یـك از بازیکنان) را مطالعه‌کنیم. ولی مناسبتر آن است‌که کمیتهای مثبت مختلفی را که مربع فاصلهٔ پوشانده شده، ρ_n^2، نامیده می‌شوند، به‌دست‌آوریم.

امید ریاضی مربع فاصله را (یعنی، ارزش متوسط این کمیت موقتی که تعداد زیادی ذرهٔ «سرگردان» مورد مشاهده قرار می‌گیرند) با R_n^2 نشان

می‌دهیم. این‌دیگر یك کمیت اتفاقی نیست بلکه کمیتی تعیّنی است.

معلوم می‌شود که R_n^2 ـ کمیتی با ابعاد مربع‌فاصله ـ با مربع طول گام l^2، متناسب است. همچنین آشکار است که کمیت R_n^2 به تعداد گامهای n بستگی دارد و درنگاه اول به نظر می‌رسد که با n^2 متناسب باشد. ولی، با استفاده از استقلال گامها از یکدیگر (یا استقلال آمدن شیر یا خط) می‌توان چنین بیان کرد که R_n^2 درواقع با توان اول n متناسب‌است ودرنتیجه،عبارت به‌صوت زیر درمی‌آید:

$$R_n^2 = nl^2$$

اگرطی زمان واحد، k گام از مرتبهٔ بزرگی ± 1 وجود داشته باشد، آنگاه انحراف میانگینی ذره‌ازمکان اولیهٔ خود طی زمان t، یعنی R_t^2، بازمان متناسب خواهد بود:

$$R_t^2 = ktl^2$$

این کمیت بعد مربع فاصله را دارد ولی مناسبتر آن است که فاصله را در واحدهای خطی (سانتیمتر، نه مربع سانتیمتر) به دست‌آوریم، از اینرو، انحراف نمونهٔ مناسب برای ذره در n گام برابرخواهد بود با:

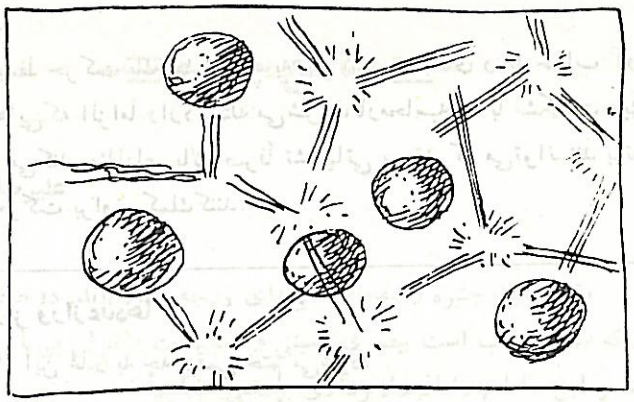
$$\sqrt{R_n^2} = R_n$$

به‌همین صورت، انحراف نمونهٔ یك ذره در زمان t عبارت است از

$$Rt = \sqrt{R_t^2} = l\sqrt{kt}$$

متناسب بودن انحراف یك ذره با ریشهٔ دوم تعداد گامها، $\sqrt{n}$ (یا $\sqrt{t}$) (ونه با تعداد گامهای n) فاکتور اساسی در مطالعهٔ چنین پدیده‌های آماری است.

به‌حرکت مست درکریدور بازمی گردیم. فرض می کنیم که او مست دیگری مثل خود را از دورمی‌بیند. همانند حالت پیش، او یا به‌جلو قدم بر می‌دارد یا به‌عقب. ولی دراینجا به‌طرف‌دوستش کشیده می‌شود وما می‌توانیم حرکت او را چنین توصیف کنیم که اگر چه قدمهای هم‌اندازهٔ او، به جلو یا عقب، تصادفی ومستقل ازیکدیگر است ولی احتمال قدم گذاشتن به‌طرف جلو بیشتراز احتمال $q = 1 - P$، یعنی قدم‌گذاشتن به عقب است. دراین موقعیت، به‌طورمیانگین،مست به‌تدریج‌وآرام‌آرام روبه‌جلو حرکت می کند.



شکل۳

این انتقال‌متوسط‌متناسب است‌باحاصلضرب قدمهادراختلاف‌احتمالهای بین قدمهای روبه جلو و روبه عقب.

این‌مدل حرکت تصادفی یك بعدی، حالتی‌است‌که نیرویی برذره وارد می‌شود و او را بیشتر از عقب، به‌جلو می‌راند. حال، نه‌تنها محاسبهٔ انحراف میانگین ذره ازمکان اولیهٔ خودبلکه محاسبهٔ انحراف نمونهٔ آن نیزآسان‌است. همانند حالت راه رفتن تصادفی متقارن، انحراف میانگین متناسب است با طول گام وریشهٔ دوم تعداد گام‌ها؛ ولی‌چون با ریشهٔدوم حاصلضرب احتمال قدمهای روبه جلو و روبه‌عقب نیز متناسب است، بنابراین، فرمول نهایی به صورت زیر درمی‌آید:

$$R_n = 2l\sqrt{pqn}$$

حرکت تصادفی نامتقارن به‌عنوان یك مدل ریاضی خوب دربسیاری ازفرآیندها مورد استفاده قرارمی‌گیرد. مثلاً تخمین ترافیك دریك تقاطع T شکل یکی ازبهترین مثالهاست. زیرا پیچیدن به‌چپ یا راست به میل راننده صورت می گیرد و باید از مشاهدهٔ ترافیك، فراوانی انتخاب هر مسیر را تخمین زد.

همچنین درمسائل مربوط به پخش ذرات (اتمها، مولکولها و ذرات غبار) در محیطهایی که شار وجود دارد می‌توان از این مدل ریاضی کمك گرفت. پخش یونهای گاز درمیدان الکتریکی ازاین‌گونه مثالهاست.

بسط حرکت یك بعدی ذره به حرکت سه بعدی و به حساب آوردن پارامترهایی که الزاماً وارد مسئله می‌شوند، کارمحاسبه را با مشکلات ویژه‌ای روبه‌رو می‌کند. مثالهای بالا، صرفاً تشابهاتی بودند که می‌توانستند به‌تحلیل پدیدهٔ حرکت براونی کمك کنند.

رمز ورازعددها

۱. این عدد به چه رقمی ختم می‌شود:

۹

۹۹

۹۹۹

۹۹۹۹

N = ۹۹۹۹۹

۲. همهٔ عددهای دورقمی راپیداکنید که برحاصل‌ضرب رقم‌های خود، بخش‌پذیر باشند.

۳. این معادله، چند جواب دارد؟

$$\overline{xy}+\overline{zt}=\overline{yz}$$

۴. همهٔ عددهای شش رقمی را پیداکنید که هرکدام از آن‌ها برحاصل‌ضرب دوعددی بخش‌پذیر باشند که اولی، ازسه رقم سمت‌چپ ودومی ازسه رقم سمت راست تشکیل شده‌اند. (با همان ردیف اصلی).

۵. a و b و c را سه عدد مثبت می‌گیریم. ثابت کنید

$$2^{a+b}+2^{b+c}+2^{c+a}<2^{a+b+c+1}+1$$

۶. ثابت کنید که، اگر a، b و c طول ضلع‌های مثلثی باشند، مثلثی وجود دارد که طول ضلع‌های آن $\sqrt{a}$، $\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$ باشد. آیا حکم عکس درست است؟

حل درصفحهٔ ۶۹۲

مقاطع چنبره

علیرضا امیرمعز

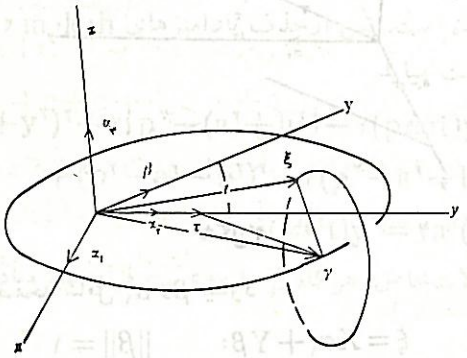
مقاطع یك چنبره وصفحه‌منحنی‌های درجه چهارم‌اند. دوحالت خاص آن‌که بسیارجالب است بیضوی‌کاسینی و لمنیسکات برنولی می‌باشد. دراین مختصر این مقاطع را از راه‌برداری بررسی میکنیم.

۱ــ اصطلاحات: بردارهارا باحروف‌یونانی‌نمایش‌میدهیم. حاصلضرب داخلی α و β عبارتست از (α,β) و $||\alpha||$ نمایش طول α است. ازخواص بردارها و جبرآنها نیزاستفاده میکنیم.

۲ــ چنبره: مبنای‌قائم ونرمال $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ را درفضا انتخاب میکنیم (شکل ۱). فرض‌کنیم که $\tau=p\alpha_2$ به مرکزدایره پایه چنبره پایان یابد واین دایره را درصفحه xy میگیریم. فرض‌کنیم که γ روی این دایره پایان یابد. از اینرو

$$\gamma=h\alpha_1+k\alpha_2,\ ||\gamma-\tau||=a>0$$

واضح است که a شعاع دایرهٔ پایه است.



شکل ۱

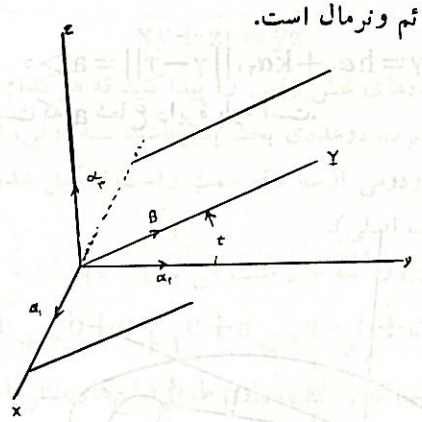
دایرهٔ مولد باید در صفحه‌ای موازی α که انتهاهای γ و τ میگذرد باشد. بنابراین بردار ξ که روی چنبره پایان میابد در معادلهٔ برداری زیر صدق میکند

$$(1)\qquad \begin{cases}\xi = m(\gamma-\tau)+s\alpha_3+\tau\\ \|\xi-\gamma\| = b>0.\end{cases}$$

ملاحظه میشود که b شعاع دایرهٔ مولد است. باید درنظر گرفت که، p، a و b مقادیر ثابت‌اند و m، s، h و k پارامترند. معادلهٔ (۱) را بحسب دستگاه مختصات بصورت زیر میتوان نوشت

$$\xi = mh\alpha_1+[mk+(1-m)p]\alpha_2+s\alpha_3,$$
$$h^2+(k-p)^2=a^2,$$
$$(m-1)^2a^2+s^2=b^2.$$

۳ـ صفحات مارّبر α_1: برای سهولت صفحات مارّبر محور x را در نظرمیگیریم (شکل ۲). فرض کنیم که β درصفحه yz باشد و $\|\beta\|=1$. از اینرو $\{\alpha_1, \beta\}$ قائم ونرمال است.



شکل ۲

معادلهٔ صفحه شامل α_1 و β میشود

$$\xi = X\alpha_1+Y\beta, \qquad \|\beta\|=1$$

این معادله بحسب α_1، α_2 و α_3 چنین میشود

$$\begin{cases}\xi = x\alpha_1+y[(\beta,\alpha_2)\alpha_2+(\beta,\alpha_3)\alpha_3],\\ \|\beta\|=1\end{cases}$$

برای سهولت، زاویهٔ بین β و α_2 رادرجهت مخالف ساعت، t میگیریم. بنابراین معادله صفحه میشود

$$(3)\qquad \xi = X\alpha_1+(Y\cos t)\alpha_2+(Y\sin t)\alpha_3.$$

ملاحظه می‌شود که t مقداریست ثابت.

۴ـ مقاطع چنبره: مقاطع چنبره ازدستگاه زیر بدست میآید

$$(4)\qquad \begin{cases}\xi = mh\alpha_1+[mk+(1-m)p]\alpha_2+s\alpha_3\\ \xi = x\alpha_1+(y\cos t)\alpha_2+(y\sin t)\alpha_3\\ h^2+(k-p)^2=a^2, a^2(m-1)^2=b^2.\end{cases}$$

ازاینرو معادلات پارامتری مقاطع بقرار زیراست

$$(5)\qquad \begin{cases}X = mh\\ y\cos t = m(k-p)+p\\ y\sin t = s\\ h^2+(k-p)^2=a^2, a^2(m-1)^2+s^2=b^2.\end{cases}$$

دراین معادلات (x,y) نسبت بدستگاه $\{\alpha_1,\beta\}$ است وبجای Y همان y قرارداده شده است. پس ازحذف پارامترهای h، k، m و s معادله درجه چهارم زیر بدست میاید

$$(6)\qquad (x^2+y^2)^2+2[p^2-(a^2+b^2)-2(p\cos t)y](x^2+y^2)+$$
$$+(p^2-a^2-b^2)^2-4(p^2-a^2-b^2)(p\cos t)y+$$
$$+4p^2(\cos^2 t)y^2=4a^2(b^2-y^2\sin^2 t).$$

۵ـ حالات خاص: هرگاه β را روی α_3 قراردهیم معادله (۶) بصورت زیرمیشود

$$(x^2+y^2)^2+2[p^2-(a^2+b^2)](x^2+y^2)+$$
$$+(p^2-a^2-b^2)=4a^2(b^2-y^2) \quad (7)$$

بعلاوه اگر p را برابر با b بگیریم بیضوی کاسینی بدست میآید

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)+4a^2b^2-a^4. \quad (8)$$

از اینرو فقط صفحات قائم خاصی بیضوی کاسینی بدست میدهند.

هرگاه $a=2b$ بگیریم مقطع لمینسکات برنولی میشود

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

خواننده میتواند شکل حالتهای خاص را بررسی کند.

شگفتی‌های عدد و شکل

● عدد ۱۰۰ را می‌توان به سه‌طریق با ترکیب رقم‌های ۱، ۲، ۳، ...، ۹، و بدون آن‌که ردیف آن‌ها به‌هم بخورد، تشکیل داد:

$$100=1+2+3+4+5+6+7+8\times 9,$$
$$100=123+45-67+8-9,$$
$$100=(1+2-3-4)\cdot(5-6-7-8-9)$$

● چه مثلثی را باید انتخاب کرد تا بتوانیم با رسم تنها یك خط راست، در آن، همهٔ گونه‌های مثلث را به‌دست آوریم: متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین، مختلف‌الاضلاع، قائم‌الزاویه، حاده‌الزاویه ومنفرجه‌الزاویه.

پاسخ: مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ حادهٔ ۳۰درجه انتخاب کنید و، سپس، میانه‌ای را که از راس زاویهٔ قائم می‌گذرد، رسم کنید.

● چگونه‌می‌توان خطی‌را دریك مثلث غیرمشخص‌رسم کرد تا آن را به۴شکل جداگانه تقسیم کند.

پاسخ: مثلاً می‌توان دایرهٔ محاطی‌مثلث را رسم کرد(در صورت مساله توجه کردید که تاکیدی بر راست بودن خط نشده بود).

مساله‌های مسابقه‌ای

این بارششمین المپیاد بین‌المللی ریاضیات را انتخاب کرده‌ایم. این المپیاد، از ۳۰ ژوئن تا ۱۰ ژوئیه ۱۹۶۴، در دانشگاه‌دولتی‌مسکو، به‌نام‌لومونوسف، برای‌دانش‌آموزان‌دبیرستانی، برگزارشد. در این المپیاد، دانش‌آموزانی ازکشورهای اتحاد شوروی، بلغارستان، جمهوری دموکراتیك آلمان، چکوسلواکی، رومانی، لهستان، مجارستان، مغولستان (برای نخستین بار)، یوگسلاوی و از هرکشور، ۸ دانش‌آموز شرکت کرده بودند. ۷کشور، مساله‌های پیشنهادی خودرا به‌کمیتهٔ برگزارکننده فرستادند. اتحاد شوروی به‌عنوان کشور میزبان، خود مساله‌ای پیشنهاد نکرد. مغولستان هم مساله‌ای پیشنهاد نکرده بود، زیرا خیلی دیرتصمیم به شرکت هیات نمایندگی خود در المپیادگرفته بود. از بین همهٔ مساله‌های ارسالی، ۶ مساله انتخاب وبه‌همهٔ زبان‌های افرادشرکت‌کننده، ترجمه شد. سوم ژوئیه، پروفسورآ. ای. مارکوشویچ، نمایندهٔ‌گروه برگزارکننده، المپیاد ششم را افتتاح‌کرد. پروفسور چی ژی‌کووسکی، ازکشورلهستان (کشور میزبان پنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضیات) سخن‌رانی‌کرد وسپس، دانش‌آموزان، بانحوهٔ برگزاری مسابقه و شماره و جای خود آشنا شدند. چهارم وپنجم ژوئیه، هرروز سه مساله و به مدت چهار ساعت، به دانش‌آموزان ارائه شد. ششم وهفتم ژوئیه ورقه تصحیح وروز هشتم ژوئیه، نتیجه‌ها اعلام شد و دانش‌آموزان در مجلس شامی‌که به افتخار آن‌ها داده شده بود، شرکت‌کردند؛ روز نهم ژوئیه المپیاد به پایان رسید. به افرادی که بین ۳۷ تا ۴۲ امتیاز آورنده بودند، دیپلم درجه اول، به امتیازهای بین ۳۱ تا۳۶، دیپلم درجه دوم وبه امتیازهای بین ۲۷ تا ۳۰ دیپلم درجه سوم و به‌بقیه، دیپلم شرکت در ششمین المپیاد داده شد.

اینك مساله‌های ششمین‌المپیاد بین‌المللی‌ریاضیات

۱. a) همهٔ عددهای درست ومثبت n را طوری پیدا کنید که، به ازای

هر کدام از آن‌ها، عدد $2^n - 1$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد. b) ثابت کنید که، برای هیچ عدد درست و مثبت n، عدد $2^n + 1$ نمی‌تواند بر ۷ بخش‌پذیر باشد.
(چکوسلواکی ـ ۷ امتیاز)

۲. a، b و c را طول ضلع‌های یك مثلث می گیریم. ثابت کنید:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$$

(مجارستان ـ ۷ امتیاز)

۳. درمثلث ABC، دایره‌ای محاط کرده‌ایم ومماس‌هایی بر دایره رسم کرده‌ایم که با ضلع‌های مثلث مفروض موازی باشند. این مماس‌ها، سه‌مثلث جدید، ازمثلث ABC جدا می کنند. درهریك ازمثلث‌های جدید، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. مجموع مساحت‌های این چهاردایره را محاسبه کنید.
(یوگسلاوی ـ ۶ امتیاز)

۴. ۱۷ دانشمند، به هم نامه نوشته‌اند. موضوع نامه‌ها دربارهٔ سه زمینهٔ علمی است. نامه‌های هردو دانشمند به‌یکدیگر، تنها به‌یك زمینهٔ علمی مربوط می‌شود. ثابت کنید، تعداد دانشمندانی که در یك زمینهٔ علمی به هم نامه نوشته‌اند، از ۳ کمتر نیست.

(مجارستان ـ ۶ امتیاز)

۵. روی صفحه‌ای، پنج نقطه داده شده است. بین خط‌های راستی که این پنج نقطه را به‌هم وصل کرده‌اند، هیچ دو خط راستی موازی با هم، عمود برهم ویا منطبق برهم وجود ندارد. ازهرنقطه، عمودهایی برخط‌های راستی رسم کرده‌ایم که چهارنقطهٔ دیگر را، به‌هم وصل کرده‌اند. بدون درنظر گرفتن پنج‌نقطهٔ مفروض، این خط‌های راست عمود، حداکثردرچندنقطه یکدیگر را قطع می کنند؟

(رومانی ـ ۷ امتیاز)

۶. چهاروجهی ABCD مفروض است ـ راس D را به نقطهٔ D_1، مرکز ثقل قاعده، وصل کرده‌ایم. از راس‌های مثلث ABC، خط‌های‌راستی موازی DD_1 رسم کرده‌ایم، تا صفحه‌های وجه‌های مقابل را، درنقطه‌های A_1، B_1 و C_1 قطع کنند. ثابت کنید، حجم چهاروجهی ABCD برابر با $\frac{1}{3}$ حجم

چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$ است، اگر نقطهٔ D_1، نقطهٔ دلخواهی از داخل مثلث ABC باشد، آیا بازهم این حکم درست است؟ (لهستان ـ ۹ امتیاز)

چند مسالهٔ متفرقه

۱. برای معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$ (a، عددی است درست و مثبت)، چند جواب درست می توان به‌دست آورد؟

۲. این معادله را حل کنید:

$$3^x+\frac{1}{5^x}(3^{x+1}-377)+5=0$$

۳. ثابت کنید که اگر تابع

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\dots+a_n\cos nx$$

به ازای هرمقدار حقیقی x مثبت باشد، به‌ناچار $a_0>0$.

۴. این حد را پیدا کنید:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, x\left[\frac{1}{x}\right]$$

منظور از [a]، نزدیك‌ترین عدد درست نسبت به a و کوچکتر از آن است.

۵. این اتحادها را ثابت کنید (a، b و c طول ضلع‌ها، و A، B و C اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC و $n\geqslant 3$، عددی درست است):

۱) $a^2-2ab\cos(C+60^\circ)=c^2-2bc\cos(A+60^\circ)$

۲) $a^2-ab\sqrt{2}\cos(c+45^\circ)=c^2-bc\sqrt{2}\cos(A+45^\circ)$

۳) $$a^2+ab\cdot\frac{\sin\left(c-\frac{180^\circ}{n}\right)}{\sin\frac{180^\circ}{n}}=c^2+bc\cdot\frac{\sin\left(A-\frac{180^\circ}{n}\right)}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

۶. ازبین همهٔ هرم‌های مثلث‌القاعدهٔ منتظمی که فاصلهٔ بین دویال متنافر، درهرکدام آن‌ها، برابر l باشد، آن را پیدا کنید که حداقل ممکن حجم را داشته باشد.

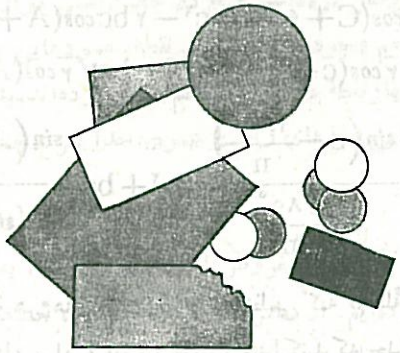
۷. درصفحهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، نقطهٔ M را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم $A\widehat{M}B = 120^\circ$. مطلوب است طول $|CM|$، به شرطی که $|AM| = 1$ و $|BM| = 2$.

۸. چهارضلعی ABCD مفروض است. مجموعهٔ نقطه‌های وسط پاره‌خط‌های MN را پیدا کنید، که در آن $M \in [AB]$ و $N \in [CD]$.

حل در صفحهٔ ۶۹۴

سه دایره

چهارمربع مستطیل (که یکی از گوشه‌های آن بریده‌شده است) وپنج دایره، که ازمقوای نازکی ساخته شده‌اند، به ترتیبی که درشکل می‌بینید، روی میزریخته شده‌اند. چند گروه چهار نقطه‌ای می‌توان پیدا کرد که بتوان ازآن‌ها یک دایره عبور داد؟ هر راس مستطیل وهرنقطهٔ برخورد محیط‌های دو شکل را، یك نقطهٔ مشخص به‌حساب می‌آوریم. به‌عنوان مثال، راس‌های مستطیلی راکه سیاه‌کرده‌ایم (سمت راست وپایین شکل) یکی ازاین گروه‌های چهارنقطه‌ای را تشکیل می‌دهند که می‌توان ازآن‌ها دایره‌ای عبور داد.



جواب درصفحهٔ ۷۰۷

شگفتی‌های عدد

آقای دکترحسین‌زند، با اظهارمحبت نسبت به‌این نشریه، این مطلب را—که خود درمورد تحقیق و اثبات آن کارکرده‌اند—برای ما فرستاده‌اند. ایشان درسال‌های قبل، عضو هیات علمی ومسئول گروه ریاضی دانشگاه آزاد ایران بوده‌اند و هم اکنون در دانشگاه آزاد انگلستان مشغول به‌کارهستند.

تعریف. نخست، عددیك را، برخلاف معمول، اول به‌حساب می‌آوریم و، سپس، می‌گوییم که p، وقتی **جداً اول** است که، اگریك یا چند رقم آن را ازسمت راست حذف کنیم، بازهم عددی اول به‌دست آید.

به این ترتیب، عدد ۴۳، گرچه اول است، ولی جداً اول نیست، زیرا با حذف رقم ۳، عدد ۴ باقی می‌ماند که اول نیست. ولی عدد ۱۹۳۱، عددی جداً اول است. زیرا نه تنها خود ۱۹۳۱، بلکه هرکدام ازعددهای ۱۹۳، ۱۹ و ۱ هم اول هستند.

مساله. چند عدد جداً اول وجود دارد؟

در واقع، تنها ۱۴۷ عدد جداً اول وجود دارد که بین ۱ و 10^{10} قرار دارند.

درجدول ضمیمه، لیست این ۱۴۷ عدد داده شده است. ولی، چرابعد از 10^{10} نمی‌توان عددی پیدا کرد که جداً اول باشد؟ به‌این پرسش، می‌توان پاسخ‌های استدلالی تجربی داد. روشی که دراین جا توضیح داده می‌شود، نیمه استدلالی—نیمه‌تجربی‌است. البته، بخش تجربی آن، بااستفاده ازکامپیوتر (IBM 3081، دانشگاه کمبریج) به‌دست آمده است. درعمل، وقتی ۱۴۷ عددجداً اول بین ۱ و 10^{10} به‌دست‌آمد، تلاش شدتا عددهایی با این ویژگی که بین 10^{10} و 10^{30} واقع‌اند. مشخص شوند. جواب کامپیوتر منفی بود، یعنی بین 10^{10} و 10^{30}، عدد جداً اول وجود ندارد. حالا، می‌توان ثابت کرد که عدد جداً اول بزرگتر از 10^{30} هم نمی‌تواند وجود داشته باشد. اگرفرض کنیم، عددp، بزرگتر از 10^{30} وضمناً عددی جداً اول باشد، از

۷	۵	۳	۲	۱
۱۳۱۹	۱۳۱	۱۳	۱۱۳	۱۱
۱۳۹۹۷	۱۳۹۹	۱۳۹	۱۳۷۳	۱۳۷
۱۳۹۹۹۱۹	۱۳۹۹۹۱۳۳	۱۳۹۹۹۱۳	۱۳۹۹۹۱	۱۳۹۹۹
۱۷۳۳	۱۷۳	۱۷	۱۳۹۹۹۹۹	۱۳۹۹۹۹
۱۹۱۳	۱۹۱	۱۹	۱۷۹	۱۷۳۳۳
۱۹۳۳	۱۹۳۱۹	۱۹۳۱	۱۹۳	۱۹۱۳۹
۱۹۷۳۹	۱۹۷۳	۱۹۷	۱۹۳۳۳۷	۱۹۳۳۳
۱۹۷۹۳۳۹۳	۱۹۷۹۳۳۹	۱۹۷۹۳۳	۱۹۷۹۳	۱۹۷۹
۱۹۹۳	۱۹۹	۱۹۷۹۳۳۹۳۳۹	۱۹۷۹۳۳۹۳۳۳	۱۹۷۹۳۳۹۳۳
۱۹۹۷۳	۱۹۹۷	۱۹۹۳۷۹	۱۹۹۳۷۳	۱۹۹۳۷
۱۹۹۹	۱۹۹۷۹۹۹	۱۹۹۷۹۹	۱۹۹۷۹	۱۹۹۷۳۹
۱۹۹۹۳۳۱	۱۹۹۹۳۳	۱۹۹۹۳۱	۱۹۹۹۳	۱۹۹۹۱
۲۳۳	۲۳	۱۹۹۹۷	۱۹۹۹۳۳۹	۱۹۹۹۳۳۱۹
۲۳۳۹۹	۲۳۳۹	۲۳۳۳۹	۲۳۳۳۳	۲۳۳۳
۲۳۹۳	۲۳۹	۲۳۳۹۹۳۳۹	۲۳۳۹۹۳۳	۲۳۳۹۹۳
۲۹	۲۳۹۹۳۳۳	۲۳۹۹۳۳	۲۳۹۹۳	۲۳۹۹
۲۹۳۹۹۹۹	۲۹۳۹۹۹	۲۹۳۹۹	۲۹۳۹	۲۹۳
۳۱۱۹۳	۳۱۱۹	۳۱۱	۳۱	۲۹۳۹۹۹۹۹
۳۷	۳۱۷	۳۱۳۷۹	۳۱۳۷	۳۱۳
۳۷۳۳۷۹۹	۳۷۳۳۷۹	۳۷۳۳۷	۳۷۳۳	۳۷۳
۳۷۳۹۷	۳۷۳۹	۳۷۳۳۹۳	۳۷۳۳۹	۳۷۳۳۷۹۹۹
۵۹	۵۳	۳۷۹۷	۳۷۹۳	۳۷۹
۵۹۳۹۳۳۳	۵۹۳۹۳۳	۵۹۳۹۳	۵۹۳۹	۵۹۳
۷۱	۵۹۹	۵۹۳۹۹۳	۵۹۳۹۹	۵۹۳۹۳۳۳۹
۷۳	۷۱۹۳۳۳	۷۱۹۳۳	۷۱۹۳	۷۱۹
۷۳۹	۷۳۳۳۱	۷۳۳۳	۷۳۳۱	۷۳۳
۷۳۹۳۹۱۳۳	۷۳۹۳۹۱۳	۷۳۹۳۹۱	۷۳۹۳۹	۷۳۹۳
۷۳۹۳۹۹	۷۳۹۳۹۷	۷۳۹۳۹۳۳	۷۳۹۳۹۳۱	۷۳۹۳۹۳
			۷۹۷	۷۹

لیست ۱۴۷ عدد جداً اول

سمت راست آن، آن‌قدر رقم حذف می‌کنیم تا به‌عدی بین 10^{10} و 10^{30} برسیم. طبق تعریف عدد جداً اول، باید این عدد حاصل هم جداً اول باشد، درحالی‌که با تجربه روشن شد که بین 10^{10} و 10^{30} عدد جداً اول وجود ندارد. درنتیجه، p نمی‌تواند جداً اول باشد.

روشن است که به‌جای 10^{30}، می‌توانستیم 10^{11} را به‌کار ببریم؛ این که ما، عدد 10^{30} را انتخاب کرده بودیم، کاملاً تصادفی بود و البته غیرلازم.

همان‌طور که می‌دانید، استفادهٔ ازکامپیوتر برای حل‌مساله‌های ریاضی، هر روز پردامنه‌تر می‌شود، مثال‌بالا، البته مثال ضعیفی است، ولی درموردهایی مساله‌های بسیار بغرنجی، مثل «مسالهٔ چهار رنگ» با استفادهٔ از کامپیوترحل شده‌اند.

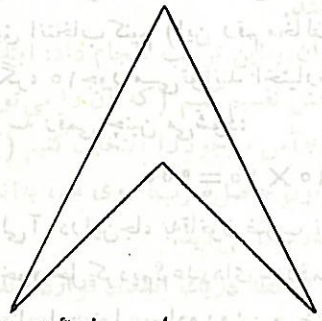
ملیون ازضرب چهل‌درشصت

```
      ل  ه  چ  ×
      ت  ص  ش
    ---------
    *  *  *  ه
    *  *     ل
    *  *  *
    ---------
    ن  و  ی  ل  م
```

راز این‌ضرب را پیدا کنید.

تبدیل به‌مربع

این شکل را به ۴ قسمت تقسیم کنید و با قرار دادن این قسمت‌ها در کنارهم، یک مربع بسازید.



حل درصفحهٔ ۷۰۷

مسأله‌های مربوط به آنالیز ترکیبی

مساله‌های عادی را از آنالیز ترکیبی درنظر می‌گیریم.

۱۰ کتاب و ۸ مجله داریم؛ می‌خواهیم یك بستهٔ پستی آماده کنیم که شامل ۳ کتاب و ۵ مجله باشد: به چند طریق می‌توانیم امانت پستی را درست کنیم؟

روشن است که ۳ کتاب را ازبین ۱۰ کتاب موجود، می‌توان به C_{10}^{3} طریق جدا کرد به همین ترتیب، انتخاب ۵ مجله ازبین ۱۰ مجلهٔ موجود، به C_{8}^{5} طریق جدا می‌شود. با استفاده ازاصل محاسبهٔ تعداد ترکیب‌ها، معلوم می‌شود که تعداد شیوه‌های انتخاب امانت پستی، چنین است:

$$C_{10}^{3} \times C_{8}^{5} = 6720$$

(ازاین به بعد، اصل محاسبهٔ تعداد ترکیب‌ها را، قانون ضرب می‌نامیم).

چند عدد سه رقمی وجود دارد؟

برای تشکیل یك عدد سه‌رقمی، رقم اول (رقم سمت چپ) رامی‌توانیم به ۹ طریق انتخاب کنیم (این رقم مخالف صفر است)، ولی هرکدام از دو رقم دیگر، ۱۰ جور می‌توانند اختیارشوند. بنابرقانون ضرب، تعداد همهٔ عددهای سه رقمی چنین می‌شود:

$$9 \times 10 \times 10 = 900$$

ولی آیادراین‌جا، به‌قانون ضرب نیازداشتیم؟آیا مساله را به‌ساده‌ترین صورت خود حل کردیم؟ عددهای سه‌رقمی از ۱۰۰ آغاز و به ۹۹۹ ختم می‌شوندو، بنابراین،خیلی ساده روشن می‌شود که تعدادآن‌ها برابراست با ۹۰۰. حتی دیده شده است که گاهی، باکمال تأسف، به‌این «راه حل‌ها»، ازجانب

برخی دانش‌آموزان برمی‌خوریم: «هرسه رقمی، ازسه رقم تشکیل‌شده‌است‌و، روی هم، ۱۰ رقم داریم؛ بنابراین، نه‌با یك تبدیل (جاوشتش)، بلکه با یك ترتیب (جای گشت) یا بایك ترکیب (هم گیری) سروکارداریم. ولی ردیف رقم‌ها، درعدد اهمیت دارد، بنابراین، این یك ترتیب است: $A_{10}^{3} = 720$».

ولی، بلافاصله معلوم می‌شود که، مثلاً، ۳۳۲ را نمی‌توان ترتیبی از (۲،۳،۳) دانست، زیرا دردبیرستان، تنها ازترتیب عنصرهای متفاوت صحبت می‌شود و، طبعاً رابطهٔ مربوط بـه‌ترتیب، تنها به‌کارهمین حالت (یعنی، وقتی که عنصرها، مختلف باشند) می‌خورد. علاوه‌براین، «استدلال» فوق، به‌هیچ‌وجه، به‌این نکته توجه نمی‌کند که رقم اول عدد، نمی‌تواند برابرصفر باشد.

شاید این گونه افراد، با ساده‌لوحی، گمان می‌کنند که، به‌جزتبدیل‌و ترتیب وترکیب، هیچ گونه اتحاد واجتماع دیگری، درطبیعت وجود ندارد. ولـی در واقع، این‌طورنیست وعلاوه براین گونه ارتباط‌های ساده‌ـیعنی تبدیل وترتیب وترکیب‌ـارتباط‌های دیگری هم پیدا می‌شود که اغلب به‌این سادگی نیستند. گاهی رابطهٔ بین داده‌ها رانمی‌توان بایکی ازاین طرح‌های ساده بیان کرد وباید راه‌حلی اختصاصی برای آن پیدا کرد. به‌همین‌مناسبت، مساله‌های مربوط به «آنالیزترکیبی»ـ به‌مفهوم آن‌ـ می‌تواند وسیلهٔ خوبی برای بالابردن سطح دقت وابتکار دانش‌آموزان باشد.

۳۶ ورق بازی را به‌چند طریق‌می‌توان به‌دو بخش تقسیم‌کرد، به‌نحوی که درهر بخش، دوآس وجود داشته باشد.

روشن است که هرتقسیم را می‌توان به‌این ترتیب انجام داد: ابتدا ۳۲ ورق را، که شامل آس نیستند، به دوبخش تقسیم کنیم (که آن را می‌توان به C_{32}^{16} طریق انجام داد)، سپس ۲ آس از ۴ آس موجود را انتخاب کنیم (که به C_{4}^{2} طریق قابل انتخاب است). طبق قانون حاصل‌ضرب، روی هم، به‌اندازهٔ $C_{32}^{16} \times C_{4}^{2}$ طریق برای تقسیم ورق‌ها به‌دست می‌آید.

از ۱۲ نقطهٔ واقع بریك صفحه، ۴ نقطه دریك امتداد قراردارند. از بقیهٔ نقطه‌ها، هیچ سه‌نقطه‌ای روی یك خط راست نیستند. برای وصل دو به‌دوی این نقطه‌ها، به‌چند خط راست مختلف نیازداریم؟

۴ نقطه‌ای را که بریك خط راست قرار دارند، برای سادگی کار، نقطه‌های خاص می‌نامیم. دراین صورت، خطهای راست مورد نظرمساله، از سه‌نوع تشکیل شده‌اند: ۱) خطهای‌راستی که‌نقطه‌های‌غیرخاص را به‌نقطه‌های غیرخاص وصل می‌کنند. تعداد این خطهای راست برابراست با C_8^2، یعنی ۲۸؛ ۲) خطهای راستی که نقطه‌های خاص را به نقطه‌های غیرخاص وصل می‌کنند. این خطهای راست برابر است با ۸ × ۴ یعنی ۳۲؛ ۳) یك خط راست که ازنقطه‌های خاص می‌گذرد. بنابراین، روی هم، می‌توان ۶۱ خط راست رسم کرد.

۳ توپ سیاه، ۱ توپ سفید، ۱ توپ آبی و ۱ توپ قرمزداریم. چند ردیف مختلف چهارتایی، می‌توان از آن‌ها تشکیل‌داد؟

یك ردیف چهارتایی از توپ‌ها را، می‌توان سه‌نوع درست کرد: در این ردیف می‌تواند، ۱ یا ۲ یا ۳ توپ سیاه وجود داشته باشد. درهر ردیف نوع اول، همهٔ توپ‌ها باهم فرق دارند وبنابراین تعداد این ردیف‌ها برابر است با P_4 یعنی ۲۴. تعداد ردیف‌های نوع دوم را محاسبه می‌کنیم. برای به‌دست‌آوردن چنین ردیفی، ابتدا باید دوجا را برای قرار دادن توپ‌های سیاه انتخاب کرد؛ این‌کار را به C_4^2، یعنی ۶ طریق می‌توان انجام داد. سپس، دوجای باقی مانده را باید با دوتوپ ازسه توپ باقی مانده پر کرد؛ این‌کار را به A_3^2 یعنی ۶ طریق می‌توان انجام داد. تعداد همهٔ ردیف‌های‌نوع دوم، بنابرقانون حاصل‌ضرب، برابربا ۶ × ۶، یعنی ۳۶ می‌شود. به‌همین ترتیب، می‌توان تعداد ممکن ردیف‌های نوع سوم را محاسبه‌کرد، که برابراست با

$$C_4^3 \times A_3^1 = 4 \times 3 = 12$$

بنابراین، روی هم، می‌توان ۷۲ ردیف متفاوت درست کرد.

چند عدد چهار رقمی وجود داردکه، درهریك ازآن‌ها،دو رقم‌زوج و دو رقم فرد وجود داشته باشد؟

دوحالت درنظرمی‌گیریم: وقتی عدد با یك رقم فردآغازشود و وقتی رقم اول عدد، زوج باشد. درحالت اول، رقم‌اول عدد را به ۵طریق می‌توان انتخاب کرد. سپس، رقم فرد دوم را دریکی ازسه مرتبهٔ دیگرعدد می‌توان

قرارداد، که برای انتخاب عدد فرد دوم‌هم، ۵امکان وجود دارد. هریك ازدو جای باقی مانده را، به ۵طریق، می‌توان با یك عددزوج پر کرد. بنابرقانون حاصل‌ضرب، تعداد همهٔ این امکان‌ها برابراست با

$$5 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3 \times 5^4$$

واین تعدادعددهای چهار رقمی نوع اول است که با شرطهای مساله‌سازگار باشند.

به‌همین‌ترتیب، می‌توان‌تعداد عددهای چهار رقمی نوع دوم را پیدا کرد؛ تنها رقم‌اول را، دراین‌جا، فقط به‌چهارطریق می‌توان‌انتخاب کرد(رقم اول نمی‌تواند برابرصفر باشد). در حالت دوم، تعداد عددهای چهار رقمی چنین می‌شود:

$$4 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 12 \times 5^3$$

به‌این‌ترتیب، تعدادکل عددهای چهار رقمی، با توجه به شرطهای مساله، برابراست با

$$3 \times 5^4 + 12 \times 5^3 = 27 \times 5^3$$

چند عددشش رقمی پیدا می‌شودکه‌مجموع رقم‌های هرکدام از آن‌ها، عددی فردباشد؟

روشن‌است که‌اگریك واحدبه‌عددی اضافه‌کنیم،مجموع‌رقم‌های‌آن از زوج به‌فرد وبرعکس، تبدیل می‌شود. بنابراین، عددهای شش رقمی هم،یك درمیان، مجموعی زوج ویك درمیان مجموعی‌فرد برای رقم‌های خود دارند. تعداد همهٔ عددهای شش رقمی ۹۰۰۰۰۰ است وبنابراین، تعداد عددهای ۶ رقمی با مجموع فرد رقم‌های خود، برابراست با ۴۵۰۰۰۰.

pمهرهٔ سفید وq مهرهٔ سیاه داریم ($p \geqslant q$). همهٔ مهره‌ها را به‌چند طریق می‌توان دریك ردیف قراردارد، به‌نحوی‌که هیچ دومهرهٔ سیاهی در کنارهم واقع نباشند؟

اگر p مهرهٔ سفید را در ردیف هم‌قراردهیم،۱ ــ pجا درفاصلهٔ بین آن‌ها و دوجا در دوطرف مهره‌های سفید، یعنی‌روی‌هم ۱ + pجا وجوددارد که باید،ازبین‌آن‌ها،qجا را، برای مهره‌های سفید انتخاب کنیم؛ واین‌عمل‌را

به C_{p+1}^{q} طریق می‌توان انجام داد.

در یک n ضلعی محدب، همهٔ قطرها را رسم کرده‌ایم. معلوم شد که هیچ سه قطری در یک نقطه به‌هم نمی‌رسند. این قطرها در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

هر نقطهٔ برخورد دو قطر، متناظر با چهار رأس n ضلعی است. بنابراین تعداد نقطه‌های برخورد قطرها برابر است با تعداد انتخاب ۴ راس از n راس n ضلعی، یعنی C_n^4. اکنون خودتان این مساله‌ها را حل کنید:

۱. m نقطه داریم که، از آن‌ها، n نقطه بر یک خط راست قرار دارند. به جز این n نقطه، هیچ سه نقطهٔ دیگری بر یک امتداد نیستند. با چند خط راست مختلف می‌توان این نقطه‌ها را دو به‌دو به‌هم وصل کرد؟

۲. ۳ مهرهٔ سیاه، ۲ مهرهٔ سفید و ۱ مهرهٔ آبی داریم. به‌چند طریق می‌توان یک ردیف ۴تایی از آن‌ها درست کرد؟

۳. ۶ عنصر a، b، c، d، e و f داریم. می‌خواهیم از آن ترتیب‌های چهارتایی درست کنیم، به‌نحوی که در هر ترتیب، عنصرهای c و e وجود داشته باشد و ضمناً عنصر c قبل از عنصر e واقع باشد. چند ترتیب خواهیم داشت؟

۴. از چهار عنصر ۱، ۲، ۳، و ۴، چند ترکیب می‌توان ساخت، به‌نحوی که هیچ کدام از عنصرها در جای خودشان نباشند.

۵. چند عدد شش رقمی وجود دارد که مجموع رقم‌های آن برابر ۳ باشد؟

۶. به‌چند طریق می‌توان دو رخ سفید را در صفحهٔ شطرنج قرار داد که مدافع یکدیگر باشند؟

جواب در صفحهٔ ۷۰۹

«عقل انسانی، تاکنون نتوانسته است ماشین دیگری کشف کند که به اندازهٔ جبر، به‌دور از کارهای خسته‌کننده و بیزاری‌آور باشد. کاملاً طبیعی است که دوران ما، که در آن بشر برای خلاصی از کار ماشینها تلاش می‌کند، **این دقیق‌ترین و زیباترین همهٔ ماشینها**، به‌طور حیرت‌انگیزی تکامل پیدا کرده است».

ج. گیبس (۱۸۳۹ — ۱۹۰۳) فیزیکدان، شیمی‌دان و به‌وجود آورندهٔ آنالیز برداری

معرفی کتاب:

نقش‌های هندسی در هنر اسلامی

جابر عناصری

نام کتاب: نقش‌های هندسی در هنر اسلامی
نویسندگان: عصام‌السعید و عایشه پارمان
مترجم: مسعود رجب‌نیا
ناشر: انتشارات سروش
تاریخ نشر: خرداد ۱۳۶۳
محل نشر: تهران
تعداد صفحات: ۱۶۸

شامل: فهرست تصاویر (عکس‌وشکل)، فهرست مطالب، مقدمهٔ مترجم، پیشگفتار [از هنرشناس معروف] تیتوس بورکهارت، مقدمه، هفت فصل و نتیجه + کتابنامه بانگلیسی.

در این کتاب، بخصوص در فصل دوم (= الگوهای هندسی در طرح‌های اسلامی) در مورد هندسهٔ نقوش و نقوش هندسی و آفرینش هنری و شیوهٔ هندسی طراحی، بحث به‌میان آمده است.

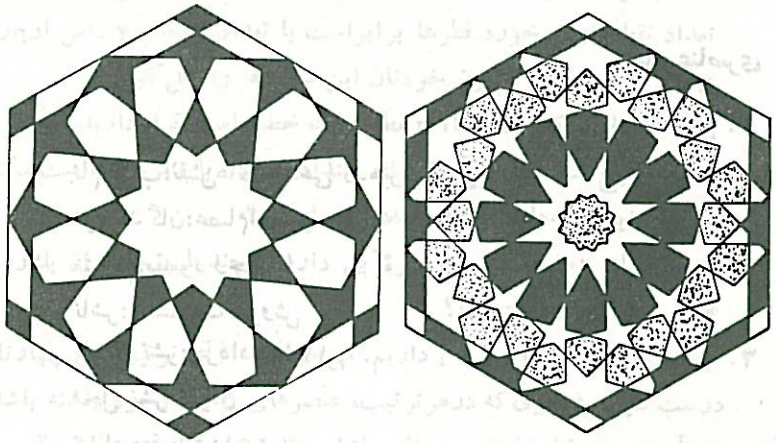
هنر اسلامی، پرداختهٔ ملت‌های ایرانی و هندی و ترک و عرب و یونانی و اسپانیائی و مصری است که هریک صدها سال پیش از ظهور اسلام، در هنر، گذشته‌ای تابناک و درخشنده داشته‌اند.

اما چون اسلام، سرزمین‌های پهناوری را فرا گرفت و از هند تا اندلس گسترده شد، دورانی از رونق و شکوه، پدیدار گشت و آنچه به‌نام هنر اسلامی به دستیاری این ملت‌ها ظاهر شد، جلوه و درخششی خاص یافت.

از میان هنرهای تجسمی اسلامی، نقش‌های هندسی، اقبالی یافت و پایه‌ای

برای پیدایش نقش‌های دلکش وچشمگیر اسلیمی گردید.

درهنراسلامی ـ اشکال هندسی گسترش پیدا کرد ودارای ضابطه‌ای منظم گردید وبه کمال گرائید. هنرمند اسلامی، همهٔ شکل‌های هندسی وابسته به تقسیمات منظم دایره را بررسی کرده و درنظر آورده است.



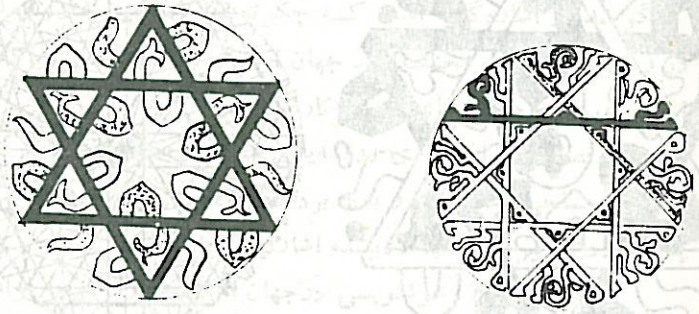
عصام‌السعید وعایشه پارمان، بدنبال تحقیقات وسیع خود درباب «هنر اسلامی»، با بررسی شیوه‌های هنری درقلمرو ذوق هنرمندان اسلامی ـ با متدلوژی صحیح که متضمن پژوهش‌های علمی دراین زمینه است ـ درکتاب نقش‌های هندسی‌درهنراسلامی، گوشه‌هائی ازقلمرو شوق اهل فن درنمایش مهارت‌های ماهران چیره‌دست وخالق هنر درنقش را چنین بیان کرده‌اند:

«...هدف این پژوهش، همانا پیگیری چگونگی پی بردن آدمیان‌است به‌اندازه‌ها وتصورکلی شکل‌های هندسی ترکیبی وفرایند به کارگیری آنها در رشته‌های گوناگون هنراسلامی».

نویسندگان این کتاب معتقدند که: ازطریق برداشت هندسی در قالب طرح‌ها،اجرای‌منظم هنرتزئینی، خوشنویسی، معماری وترکیب الحان موسیقی و اوزان شعر ـ درجهان اسلام یکپارچه وهماهنگ‌شد. بهره‌گیری درشیوه‌های هندسی، هنرمند راتوانا ساخت تابافراخ‌دستی درمیدان گسترده‌ای باسهولت و روشی درست به فعالیت بپردازد.

در نظر مؤلفان کتاب، سوابق پژوهشی اهل نظر درگذشته‌های دوردست، شکوفائی‌اندیشه درقلمروهنراسلامی‌وپیوندآن‌با مسائل‌ریاضی ونقوش هندسی رابوجودآورده ودرجهان اسلام امروزی اهل فن و صنعتگران، در پرداختن الگوهای هندسی برچوب و مرمر و فلز وسفال وغیره ـ از ابزارهای سنتی، پرگار وخط‌کش بهره می‌گیرند. بنظر این نویسندگان: روش هندسی را استادان گمنام‌روزگار گذشته به‌کارگرفتند وگسترش دادند وهنرمندان‌امروزی به تقلید وپیروی ازآن می‌پردازند.

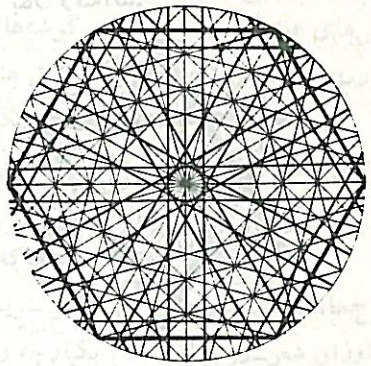
نقوش هندسی، زیبائی و هارمونی خاصی به‌هنراسلامی بخشیده ـ در کاشیکاری‌ها، گچبری سردرمساجد ومکتب‌خانه‌ها ومدارس وحمام‌ها، برج‌ها، دیوارهٔ مناره‌ها وقلعه‌ها وآرامگاه‌ها، حاشیهٔ نسخ خطی کتاب، کنارهٔ جلد کتابها (نظیرمقامات حریری)، درهای چوبی‌و... ازجبل‌الطارق ومراکش تا تاج محل وهند بکارگرفته شده وتجلی ذوق هنرمند درجهان اسلام را در افق‌های دوردست نشان داده وانسجام وهماهنگی خاص درساختن وپرداختن و بوجود آوردن آثار هنری نمایان ساخته است. کاشی‌های آب رنگی که توگوئی زلالی‌آب روان را می‌نمایاند یاآسمان‌آبی را درمدنظرمی‌آورد، با طرح‌های هندسی برمبنای ستاره‌های شش‌پر یا هشت‌پر و... چشم را خیره می‌سازد واین کاشی‌های شش ضلعی‌یا هشت‌ضلعی‌و... برای پوشاندن سطوح و نشان دادن پیوند هندسی با آثار هنری بکار رفته‌اند.



اماکن مذهبی وغیرمذهبی‌درجهان اسلام عموماً تزئینات سنگی‌وگچی وچوبی بکارگرفته و بر سردرمدارس، مساجد، کاخ‌ها و کاروانسراها، نقوش

بسیاری منقش نموده‌اند. سردر است که با تزئینات و اشکال گوناگون خود به‌یك بنا شکل خاصی می‌دهد. این نقوش وطرح‌های هندسی-تزئینی،افزون بـرجلوه‌ای که برسردر بناها مـی‌دهند، دراثاث و لوازمی نظیر: در، منبر، تابوت و رحل‌های‌مخصوص قرائت قرآن‌نیزدیده می‌شوند. درمورد درها و منبرها، برای تزئین سطوح-عموماً ازطرح‌های چندضلعی استفاده شده است. کاشیکاری محراب‌ها و گنبد مساجد و مدارس و معابر- بـا طرح‌ها و اشکال ستارگان-پنج‌پر، شش‌پر وهشت‌پردیده می‌شوند. افزون براین-نقش هندسی که بوسیلهٔ هنرمندان با مهارت وظرافت واحساس خاصی بـر روی ظروف سفالی بوجود آمده، چشمگیرترین نقش‌ها بوده است.

ستاره‌های شش‌پر و... با مفاهیمی رازگونـه، درهنرخوشنویسی نیز متجلی می‌گردند. نقوش هندسی در دستبافته‌های‌هنرمندان اسلامی بخصوص درقالی نیزنمایان گشته و دراین «باغ‌هـای بافته» ازنظرهماهنگی طرح-نقش‌های زیبائی بکار گـرفته شده است. بر روی پارچه‌های سبك حـریر نیز بیشترنقوش‌حیوانات، بخصوص عنقاوشیر رابه‌صورت زربفت دراطراف یك درخت برجسته که در وسط یك‌دایرهٔ محاط شده بوسیلهٔ کتیبه‌هاونقوش حیوانات دیگر قرار گرفته- نشان می‌دهند.



درهنر کتاب‌سازی نیز، صفحاتی که دارای سرلوحه هستند، به اشکال

هندسی تقسیم مـی گردند وبا تزئینات پـوشانده می‌شوند، با توجه به این مقدمات، در کتاب «نقش‌های هندسی درهنرهای اسلامی»، نویسندگان کتاب درفصل اول از «آدمی واندازه» سخن گفته و به‌زمینهٔ تاریخی وکوشش‌های اقلیدس-درکتاب‌اصول هندسه درمورد گسترش هندسه وبکار گرفتن «هندسه» توسط مساحان ومعماران و مهندسان درسرزمین بین‌النهرین برای نشان دادن شگرفی در آثـار هنری (مانند نیایشگاهاه، کاخ‌ها، تندیس‌ها و ...) اشاره کرده‌اند.

عصام‌السعید وعایشه پارمان دراین مورد چنین می‌نویسند:

«...آثارنمایـان معماری بین‌النهرین ومصر ما را برآن مـی‌دارد که بگوئیم‌آنان قواعد دقیقی در اندازه‌گیری داشته‌اند.

مساحان ریسمان بدست مصری ونیایشگاه سازان،گویا شیوهٔ تطابقی و انتقالی‌خاصی درنقل اضلاع وشکل‌ها با میخ وطناب‌برای کشیدن دایره وخط راست‌برشن‌ها ابداع کرده بودند. این‌روش‌آنان را تواناساخت‌که فرایندی هندسی ازساختمان دقیق با اسلوبی خاص بـرای ساختمان‌هـائی نظیراهرام بزرگ جیزه‌که در۲۶۰۰ پیش ازمیلاد برپا شد، بیابند.»

نویسندگان کتاب نقش‌های هندسی درهنراسلامی از وام‌هندسهٔ‌یونانی به منابع مصری وبین‌النهرین نیز به شگرفی یادکرده‌اند.

درفصل دوم کتاب فوق‌الذکرازالگوهای هندسی درطرح‌های‌اسلامی گفتگو شده و اشاره‌گشته است کـه چگونه اهل حرفه وپیشه‌وران اسلامی در زمان‌ها ومکان‌های مختلف- در جهان اسلام- اصول هندسی را در طرح الگوهای عملی درپیشه‌های خود به‌کارگرفتند.

درفصل سوم ازمعماری وریشه‌یابی شیوه‌های‌معماری اسلامی وکاربرد هندسه درمساحی بحث شده و به‌کاربرد خط‌خوش و طرح‌های هندسی برای پدیدآوردن تأثیرمناسب بنا دربیننده اشاره گشته است.

درفصل چهارم «خوشنویسی درجهان اسلام» مورد تـوجه قرارگرفته وازکاربرد هندسه درخوشنویسی سخن به‌میان آمده است.

فصل پنجم عروض درشعر عرب را مطرح مـی کند وفصـل ششم بـه

موسیقی درجهان اسلام می‌پردازد ودرهر دوفصل یاد شده از هندسه واشکال هندسی گفتگو بمیان می‌آید.

درفصل ششم درباب موسیقی وهندسه چنین می‌خوانیم:

«...فیلسوفانی مانندکندی (سدهٔ سوم هجری، نهم میلادی) شیوه‌های منظم وپیوستهٔ تحلیل وتدوین موسیقی را براساس روش‌های هلنیستی‌اقلیدس واریستوخنوس ونیکوماخوس ترتیب دادند».

درفصل هفتم کتاب «نقش‌های هندسی در هنرهای اسلامی» تحلیل الگوها در هنرهای عملی صورت‌می‌گیرد. دراین فصل تحلیل‌های مشروحی ازطرح‌های گوناگون درهنرهای عملی عرضه می‌شود تا نمودار گردد که چگونه الگوها وتناسبات براساس هندسه بدست آمده‌اند.

وبالاخره درنتیجه‌گیری وبخش پایانی کتاب به‌کاربرد و انطباق شیوهٔ هندسی- به‌عنوان پایه‌ای واحددررشته‌های گوناگون-وارزش نقوش‌هندسی درآثارهنری، پرداخته شده وباکتابنامهٔ انگلیسی-کتاب را می‌بندند.

فاضل محترم مسعود رجب‌نیا ازجمله‌مترجمان آگاهی است که‌چیرگی و خبرگی خود را درقلمرو پژوهش وترجمهٔ‌آثار هنری مکرر درنوشته‌ها و ترجمه‌های خود نشان داده ودربرگردان کتاب نقش‌های هندسی‌درهنرهای اسلامی، مهارت یك ریاضی‌دان را درکنارظرافت وذوق‌واحساس یك‌محقق هنریکجا نشان داده وما را چشم‌انتظار آثاردیگری ازخویشتن می‌گذارد.

***

تابع وعددهای دو به‌دو متباین

فرض کنید $f(x)=x^3-x+1$. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $m>1$، عددهای

$$m\ ,\ f(m)\ ,\ f(f(m))\ ,\ f(f(f(m_1)))\ ,\ldots$$

دو به دو، نسبت به‌هم، اول‌اند (یعنی، مقسوم‌علیه مشترکی، جز واحد، ندارند).

پاسخ درصفحهٔ ۷۰۹

دربارهٔ عناصر پارمنیدسی درمنطق صوری و اشارات دیگر

حمید حمید

نظریهٔ غالب برسیرتحول و تاریخ منطق این است که بـه حکم تواتر تاریخی واجماع بزرگان فن،ارسطومصنف منطق وکاشف قسمت‌اعظم‌قوانین آن‌است.[1] این نظریه‌ی قبول عام‌یافته، نه‌درجهان‌غرب که تمامی سنت‌منطقی آن دست‌کم‌تااوایل قرن نوزدهم و گاه‌تاهم‌امروز زیرسلطه‌ی منطق‌ارسطویی است، بلکه‌درشرق مسلمان نیز مورد پذیرش‌واذعان اکثرفیلسوفان وفرزانگان وعلمای منطق بوده است[2].

شهرستانی صاحب «الملل والنحل» در بیان دلیل اطلاق عنوان «معلم اول» به‌ارسطو مـی‌نویسد: «او را معلم‌اول گفتند، زیرا واضع تعالیم منطقی است وقوانین آن را ازقوه به فعل‌آورده.... به‌آن‌معنی این‌حکیم را واضع میگوئیم که قوانین منطقی را تجریدکرد.»[3]

---

۱. درست درلحظاتی که‌این‌مقاله‌برای «آشتی‌با ریاضیات» تنظیم می‌شد- «تاریخ منطق» اثرشایان اهمیت ماکوولسکی با ترجمه فریدون شایان انتشاریافت. اگرچه‌فرصت برای بهره‌مندی ازآن بدست نیامد مع‌الوصف دراینجا ازآن بعنوان یك مرجع درجه اول یادمی‌کنم.

۲. منطق صوری. دکترمحمد خوانساری. چاپ‌آگاه ص۴۲.

۳. الملل والنحل. ابوالفتح محمدبن عبدالکریم شهرستانـی. تصحیح دکتر سید محمدرضا جلالی‌نائینی. چاپ اقبال ص ۳۱۴.

قطب‌الدین شیرازی تاکید می‌کند که «مؤلف منطق، یعنی مصنف این فن ومدون آن ارسطو است، بـه شهادت مفسرین کـلام او وآن را میراث ذوالقرنین خوانند»[1]

بیگمان اثری که ارسطو ازخود بجا گذاشته یکی ازشاهکارهای فکر انسانی واز وقایع مهم تاریخ رشد فکربشر است. از زمان ارسطو تا قریب بیست وسه‌قـرن، علم منطق مورد تحقیق جمع کثیری ازدانشمندان و محققین قرار گرفته وبسیاری ازمحققین ملحقاتی برمنطق ارسطو آورده‌اند. ولی این ملحقات به‌استثنای یکی دومورد شرح کلام ارسطو بوده وبه مواردداستثنایی مذکور هم به‌علت احترام واعتباری که اقوال وآراء ارسطوداشت التفاتی نشد.[2] طرفه آنکه‌درتمامی قرون پس‌ازارسطو تا دهه‌های پایانی قرن‌نوزدهم گمان وتصورپرداختن به تحقیق درعناصرغیر ارسطویی درساختمان منطق او درحوصله‌ی شجاعت هیچ متفکری نبود.

شیوع نهضت انتقادی درحیات اجتماعی وروند تفکرعلمی وفلسفی، به‌ویژه ازاوایل قرن حاضر وانجام تحقیقات تاریخی دربـاره‌ی آثارمعنوی ملل غیراروپایی ویونانیان پیش ازسقراط تا حدزیادی این حکم غالب رابه صورت یك قضاوت مطلق از اعتبار انداخت و سبب شد تا ایـن باور رواج یابد که‌تاکنون «اغلب به‌اهمال او [ارسطو] راواضع علم منطق‌شمرده‌اند.»[3]

پژوهش درتاریخ فلسفه وبه ویژه تحقیق درآثارفیلسوفان یونانی و از جمله ارسطو حقایق دیگری را درباب تاریخ منطق وعناصر واجزاء و منابع آن آشکار ساخت. بیان صریح ارسطو درباب مرده‌ریگ منطقی او، گشاده‌

---

۱. منطق صوری. دکترمحمد خوانساری. چاپ آگاه ص۴۳.

۲. مدخل منطق صورت. نگارش‌غلامحسین‌مصاحب. ازانتشارات دانشگاه تهران شماره ۲۷۷ص۲.

۳. همان. ص ۳ وهم‌چنین برای مطالعه چگونگی وحد علمی تغییرات واضافات مسلمانان درمنطق ارسطو دیده شود: مقدمه‌ای بـرفلسفه معاصر. حمیدحمید فصل سوم چاپ زوار وتاریخ منطق. وبـرای همین تغییرات در اروپا اثـر ماکوولسکی ترجمه فریدون شایان.

دستی بیشتری را درپی‌جویی واقعیت سبب گردید. شیخ‌الرئیس ابـن‌سینا در پایان منطق شفا ازقول ارسطو میگوید: «ما ازپیشینیان خود درقیاسهای منطقی جزضوابط مختصر چیزی به‌میراث نبرده‌ایم. اما توضیح آنها وجداکردن و اختصاص‌دادن هرقیاس به‌شرایط واقسام‌آن‌ومشخص کردن‌قیاس‌منتج ازقیاس عقیم واحکام‌دیگرکارهایی بوده که‌خوه را درباره‌ی آنها سخت‌به‌رنج افکندیم ودیدگان را ازخواب بازداشتیم تاکاربدین‌ترتیب پای گرفت واستوارشد.»[1]

بنابراین مجال تردیدی نیست کـه دست‌کم ارسطو درمقابل مغالطه و مناقشه‌ی سوفسطائیان‌وجدلیان، بنابرکشف قواعد صحیح استدلال واستخراج حقیقت گذاشته وبه رهبری افلاطون وسقراط[2] اصول منطق وقواعد قیاس را بدست‌آورده است.[3]

ابوالفرج‌بن‌هرون‌طبیب‌ملطی‌معروف به‌ابن‌عبری درتاریخ‌مختصرالدول می‌نویسد: «ارسطوراکه‌معلم‌اول‌نامیده‌اند نه‌ازاین‌جهت است که مخترع‌منطق ومستنبط‌آن باشد بلکه ازاین باب است که متفرقات‌آن‌را جمع کرده است»[4] شهرستانی درموضع دیگری ازکتابش تصریح می‌کند: «این‌حکیم [ارسطو] نامدار را واضع می‌گوئیم نه به‌آن‌معنی که پیشتر از حکیم معانی بـه منطق مقوم نداشتندی».[5] ابن‌خلدون نیز در «مقدمه» براین ادعا که خود ارسطو بر آن تصریح دارد تاکید مـی‌کند: «و متقدمان نخستین‌بارکه دراین دانش [منطق] گفتگو کرده‌اند به‌صورت تکه‌تکه ومطالب پراکنده سخن‌گفته‌اند و

---

۱. منطق شفا. کتاب سفسطه. چاپ مصر و هم‌چنین متفکریـن اسلامی دربرابر منطق یونان. مصطفی حسینی طباطبائی. چاپ‌قلم ص۱۶.

۲. سیرحکمت در اروپا. محمدعلی فروغی. چاپ تهران. ج۱ ص۲۴.

۳. برای آگاهی ازساختمان منطقی نظام افلاطون وبخصوص خطاهای منطقی‌او رجوع شود به‌مقاله‌ی بسیارسودمند: جی. پاتریك‌تحت عنوان «منطق دراوی‌ـ تیـفرون در Islamic Philosophy and The Classical Tradition, Cassirer. 1972 PP 293–305

۴. رهبرخرد. محمودشهابی. چاپ خیام. ص. یح.

۵. الملل‌والنحل. شهرستانی. چاپ اقبال ص۳۱۴.

شیوه‌های آنها نامهذب ومسائل آن متفرق بوده است، تا دریـونان ارسطو پدیدآمد واو به «تهذیب» مقاصد منطق پرداخت ومسائل وفصول آن را مرتب کرد و مباحث مزبور را نخستین دانش فلسفه وآغاز آن قرارداد، وازاین رو این علم به‌دانش نخستین نامیده شدو کتاب مخصوص آن را بنام «فص» می‌خواندند وآن مشتمل برهشت کتاب بود.»[1]

با توجه به‌این تصریحات، اینك آنچه مـی‌تواند زمینه‌ی بکری برای تحقیق قرارگیرد این نکته وپرسش باریك است که‌به‌راستی این «گذشتگان» که اینهمه منابع وحتی خود ارسطو به‌آنها اشاره می کنند چه کسانی ویا چه روندهای‌فکری بوده‌اند.؟ طبیعی‌است که‌چنین‌زمینه‌ی وسیعی‌موضوع‌مطالعه‌ی من دراین وجیزه نیست و بخصوص پـرداختن به‌منابع هندی وایرانی منطق صوری که گاهی چند برسرآن گفتگوها رفته‌است‌ازبررسی من بیرون‌است.[2] اما دراین حقیقت تأئید شده تردید نمی‌رود که مبانی یونانی منطق ارسطویی به عصرفرزانگان بزرگ مکتب الثایی وبـه‌ویژه آثار دوتن ازنامداران آن مکتب: پارمنیدس وزنون که درهمانندی تضاد وصفات طرد ثالث واقعیت را می‌دیدند، وبه حوزه‌ی گرایشهای شك گرایانه‌ی پاره‌ای از سوفسطائیان دامن

۱، مقدمه. ابن‌خلدون. ترجمه محمد پروین گنابادی. چاپ بنگاه ترجمه و نشر کتاب ج۲ص۱۰۲۴.

۲. درآثارمحققینی ازمعاصرین و منابعی ازگذشتگان میهن ما اشارات مکرری درمورد منشائیت‌ایرانی‌منطق ارسطویی‌بعمل آمده است. قطب‌الدین‌اشکوری [محمدبن شیخعلی‌بن عبدالوهاب پیله فقیه الاشکور] درمحبوب‌القلوب پس از ذکر کلامی از ابومعز بـلخی و پس ازذکر اینکه صاحب‌بن‌عمید مقداری از مکتوبات راکه بواسطه‌ی خرابی که‌دراصفهان ظاهرشده بود به بغداد فرستاد تا درآنجا قرائت ومطالب آنها را استخراج‌کنند نوشته است «وگفته‌اندکه اصل منطق... که‌ارسطوطالس‌تالیف وتهذیب‌کرده است هنگام‌غلبه‌ی‌اسکندر بردارا واستیلا بربلاد ایران‌ازخزائن‌ایران‌گرفته‌وارسطو براین‌تالیف‌توانایی نیافت مگر بوسیله کتابهای ایران. هرکس بهره‌ای ازحکمت صحیحه داشته باشد... درآنچه‌گفته‌اند تردیدی نخواهد داشت.»

می‌کشد.[1] ازآراء مخالف وموافقی که برسراین موضوع وجوددارد به‌لحاظ رعایت زمان ومکان در می‌گذریم وهمین بسنده است که جمع این آراء که درست از روزگارخود ارسطو آغازمیشودمی‌تواندکتاب کلانی را فراهم آورد[2].

آنچه‌که این نوشته بـرسرتحقیق ازآن است تشخیص وتحدید نقشی است‌که یکی ازاین دوتن یعنی که پارمنیدس درپی‌ریزی وتـدارك عناصری اساسی ازمنطق ارسطویی ایفاکرده است. شاید روشنتراین باشدکه بگوئیم اساس‌کاراین مطالعه تلاش بـرای یافتن یا بازیافت میراث پارمنیدسی منطق ارسطویی است.

***

الئاشهری درساحل لوکانیابودکـه درحدود ۵۴۰ پیش ازمیلاد توسط مهاجرینی ازفوکانیا که درجریان‌تهاجم‌ارتش ایرانی به ایونیا کوچیده‌بودند بنیاد شده بود. این جامعه‌ی مهاجرنشین در سی‌مایلی جنوب پوزیدونیا که‌به اتحادیه‌ی‌فیثاغورسیان تعلق‌داشت‌قرار گرفته بود. یکی ازقدیم‌ترین‌سکه‌هایی که تاکنون‌کشف شده ازهمین منطقه است و تمامی ویژگیهای آن موید این

---

1. Recent School of Logic. By. E. Avey در A history of philosophical systems. Ed. By. V. Ferm. 1950 New York

۲. تحسین کنندگان بلاقید وشرط ارسطو (مثلاً ب. سنت‌هیلر) این اندیشه را پیش می‌نهند که علم منطق توسط ارسطو آغاز شده و بـه وسیله خود او به اتمام رسید... ازسوی دیگر فرانسیس‌بیکن و ف شلایرماخر به‌ارسطو خرده گرفته‌اندکه وی درآنجاکه می‌خواسته ازنتایج پژوهشهای اسلاف بهره‌جوید به آن اسلاف اشاره ننموده است. بیکن ارسطو را با سلطان عثمانی مقایسه می‌نمایدکه همه‌ی اقوام خویش را برای تحکیم تاج وتخت‌خود قربانی کرد. شلایرماخر، ارسطورا متهم می‌کندکه‌آگاهانه ازذکرنام فیلسوفانی‌که‌نظریات آنان‌را اقتباس‌نموده طفره‌رفته‌است. رج: تاریخ منطق. تالیف‌آ.ماکوولسکی ترجمه فریدون شایان. از انتشارات پیشرو- مرزبان. ص۲۰۹.

حقیقت‌است که الئا ازلحاظ بازرگانی عقب‌مانده‌تراز شهرهای فیثاغورسیان نبوده است. مهم‌ترآنکه الئا گهواره‌ی فلسفه جدید یا بزبان دقیق‌تر مهد تفکر فلسفی مغرب زمین است.

بنا بـرآنچه ازسنت برمـی‌آید گزنوفون کولوفونی پایه‌گذار مکتب الئایی است. گزنوفون نغمه‌سرای دوره‌گردی که منظومه‌های مذهبی‌خویش را با آب وتـاب میخواند در مستعمره‌ی «الـه» «ولیا» کـه اقوام فوسه‌ای درایتالیای جنوبی دایر کرده بودندمسکن گزید ودرآنجا نحله‌ای دینی فلسفی بنیادکرد. این نحله‌ی جدید دربرابر «اره‌ته ARETE» جسم ستاره‌نما که منزلت متعالی داشت مفهوم «سوفیا» و «خرد» را قرار دادکه می‌بیند وتفکر وتأمل می‌کند.[1] براساس قطعاتی از سروده‌های او می‌دانیم که وی به «یك» خدا، و بزرگترین ازهمه‌ی خدایان‌وانسانها باورداشته است. خدای‌گزنفون چه ازلحاظ درك وفهم وچه ازلحاظ وجه وشکل فناپذیرنبوده است. ازمنظر تفکر گزنفون خدای موردقبول وی«به‌همه‌جا بینا» [بصیر]، «به‌همه‌جا آگاه» [عالم] و «به‌همه‌جا شنوا» [سمیع] و«برهمه‌ی اشیاء محیط» [غالب] است و بدون‌کمترین تلاش برمقدرات واعمال‌همه‌چیزوهمه‌کس دانا و واقف‌است.[2] اگربه روایت‌کسانی چون دیوگنس‌اعتمادکنیم پارمنیدس ازشهر الئا شاگرد گزنوفانس بود، ولی هر چند درس وی را شنیده بـود از او پیروی نکرد. بنا برگزارش‌سوتیون، پارمنیدس باآمی‌نیاس Ameinias فیثاغورسی‌فرزند دیوخاتیاس مردی شریف وفقیرهمنشینی داشت وبیشتر ازوی پیروی‌می‌کرد. پارمنیدس پس ازمرگ آمی‌نیاس... آرامگاهی برای اوبرپاکرد. وبالاخره به وسیله‌ی امی‌نیاس بود و نه گزنوفون که وی به زندگی آرام فیلسوفانـه راه یافت.

اگربتوان بـراینکه گزنوفون واقعاً نحله‌ی الئایی را پـی‌نهاده باشد

---

۱. رج. تاریخ پیشرفت علمی‌وفرهنگی بشر.چاپ یونسکو ج۲ بخش اول.قسمت اول ترجمه دکترضیاءالدین دهشیری ص ۸-۴۳۷.

۲. دیوگنس‌لائرتیوس‌کتاب ۹. ب ۲۳-۲۱ وهمچنین‌نخستین فیلسوفان یونان. دکترشرف‌الدین خراسانی ص۲۷۴.

تردیدهایی رواداشت، از اینکه او برپارمنیدس تاثیراتی اعمال کرده است نمی‌توان تن‌زد.

پارمنیدس فرزند پای‌رس Pyres در ربع آخرقرن‌ششم[1] پیش‌ازمیلاد متولد شد ودرجوانی معاصر آشیلوس بـود. وی به‌عنوان یك فیثاغورسی در محافل جامعه‌ی سری که‌درعین‌حال دینی وعلمی بود تربیت یافته بود. به‌باور تامسون‌اومردی‌سیاسی وفعال‌بود وبرای‌شهرخودمجموعه قوانینی‌فراهم‌آورده بود. دوستی صمیمانه‌با امی‌نیاس‌مورد اشاره‌ی دیوگنس را تامسون بهانه‌ای تلقی می‌کند تا برعضویت‌پارمنیدس درفرقه‌ی‌فیثاغورسی تاکیدکند. کاپلستن نیزضمن تصریح براین نکته با توجه به روایت دیوگنس‌که ازقول سوتیون نویسنده‌ی‌کتاب «حکومت فیلسوفان» نقل شد می‌نویسد: «پارمنیدس درآغاز یك‌فیثاغوری‌بود»[2] وهمین‌ازعوامل‌موثری‌است‌که به‌ریشه‌دارشدن‌وگستردگی نفوذ او دراندیشه‌ی ادوار بعدی مددکرد. درتوسعه‌ی علوم یـونانی مکتب فیثاغورس چه درنظر وچه درعمل نمایشگرنقطه‌ای انشقاقی است که پیدایی دونظام فکری کاملاً متفاوت را موجب‌گردید. انتزاعی‌تـرین ومنطق‌زده‌ترین جوانب این مکتب را پـارمنیدس اخذ کرد که سرانجام اساس پندارگرایی افلاطون را پی افکند. پارمنیدس سرچشمه‌ی رشته‌ی‌جالبی ازعرفان است‌که اندیشه‌ی افلاطون را فراگرفته است وآن عرفانی است‌که مـی‌توان آن را «منطقی» نامید زیراکه درنظریات مربوط به‌منطق تجسم یافته است. این‌نوع عرفان تـا آنجا که بـه مغرب‌زمین مربوط مـی‌شود از پارمنیدس سرچشمه گرفته است وهمه‌ی فلاسفه‌ی بزرگ عرفانی مشرب از زمان خود پارمنیدس تا هگل وشاگردان جدید او در استدلالات خود تحت تاثیر آن هستند[3].

---

۱. ر.د. راناد. تاریخ تولد اورا ربع اول‌قرن‌ششم می‌نویسد؛ تاریخ فلسفه:شرقی وغربی. تالیف راداکریشنان. فصل پیش ازسقراطیان ج۲.

۲. وهمچنین The First Philoso Phers By George Thomson.P.290 کاپلستون؛ تاریخ فلسفه. ترجمه ج اول ص۷۵.

۳. عرفان ومنطق. برتراندراسل. ترجمه نجف دریابندری. چاپ جیبی ص۴۶.

تعلق پارمنیدس به مکتب فیثاغورسی عناصر بـاروری از آن مکتب را به او منتقل ساخت. درحیطه‌ی علوم عملی اصحاب ایـن مکتب امکان تبدیل کمیات فیزیکی‌را به‌اندازه‌وعدد بدست دادند. اهمیت برجسته‌ی فیثاغورس درعالم ریاضیات بیشتر ازاین جهت بود که مکتب او روش برهان استقرایی را از روی‌اصول‌موضوعه‌جایگیرساخت که‌درامر تعمیم، نیرومندترین‌روشهاست چون جمعی از مصادیق مختلف را به شکل یك فرضیه درمـی‌آورد. درمیان فیلسوفانی که به این شیوه‌ی احتجاج متوسل شدند پارمنیدس نـامدارترین آنان است.[1]

پارمنیدس نمونه کامل کسانی است که درمتافیزیك کارکرده‌اند. نزد یونانیان عصرتفکر وعصرهیچ‌چیز جزتفکر تنها بـا پارمنیدس آغاز شد.[2] او با شورفرزانه‌ای کـه دل درهوای یافتن یك بن‌ساخت بسیط‌الحقیقه و جاری وساری درهمه‌ی عالم بسته بودکوشید تا چشم از ظواهر بپوشاند و وسایلی راکه بتواند نیل و وصول‌آدمی به «حقیقت» یگانه، تجزیه‌ناپذیر، جاودانه و بی‌حرکت را در ماوراء این ظواهر موجب شود بیابد. چنانکه خواهیم دید وسایلی که او برای چنین هدف بزرگی‌به‌آن‌دست‌یافت جنبه‌ی منطقی‌داشت.[3] درهمان ابتدای چنین جستجویی بود که نظام برهان وجودی که وی اساس محکم آن را افکند لزوماً به «نخستین تعبیر متافیزیکی‌قانون منطقی اینهمانی»[4] [هوهویت] انجامید. پارمنیدس کوشید تا وحدت وجود ایـونی را دربرابر کثرت یا ثنویت فیثاغورسی تقویت‌کند اگرچه مایه‌های اولیهٔ چنین وحدت وجودی را او قویاً به‌گزنوفون مدیون بود وچون او به «وحدت همگانی، هستی یگانه‌وبی‌حرکت» که جزاو «هستی دیگری وجود ندارد»[5] قایل بود،

---

۱. علم درتاریخ. جان‌برنال. ترجمه اسد پیرانفر ـ کامران فانی. ج‌اول ص۱۴۳

۲. پندارگسترش‌پذیری بی‌پایان حقیقت. امیرمهدی‌بدیع. ترجمه احمد آرام. چاپ بنیاد فرهنگ‌ایران. ج اول ص۱۴۹.

۳. تاریخ علم. جورج سارتن. ترجمه احمد آرام. ازانتشارات امیرکبیرص۶۸

۴. تاریخ منطق. آ. ماکوولسکی. ترجمه فریدون شایان. ص۶۷.

۵. همان ص۶۷.

اماعمدتاً کار اوبیشتر به‌ریاضی‌دانی شباهت داردکه بیش از واقعیت‌متناسب وسازگار با ذوق‌وعقل عمومی بـه جنبهٔ صحت و دقت قضایا علاقمند است. «چیستی» یا «هستی» که او درتصور داشته همه‌ی فضا را پرمی‌کرده است. «عدم» یا نیستی فضای مطلق وخلاء مطلق است. این عدم ممکن نیست وجود پیداکند، ولی‌آن را می‌توان «اندیشید» وازآن تعبیرکرد. پارمنیدس ازاین مقدمه نتیجه می‌گرفت که جهان بـاید «یکی» و «محدود» باشد. ولی همه‌ی فضا راپرکند. جهان هستی‌ها به‌باور اوابدی وبی‌حرکت است وتغیروحرکت غیرواقعی هستند.[1]

اندیشه‌ی بزرگ پارمنیدس اندیشه‌ی «وجود مطلق» است، وجودی‌که همواره به «یکسان» است و با «عدم» نمی‌آمیزد. درنظر او تصوراتی‌که از امر واقع برای ما حاصل می‌شود و درنظـر اول آن را مقرون به کثرت و تغیر جلوه‌گرمی‌سازد لازمه‌اش وجود «عدم» است. زیرا اشیاء اگرکثیرندبا یکدیگرفرق‌دارند هریك ازآنها آن چیزی نیست‌که «دیگری» است. چیزی که درحال تغییراست «هنوز» آن چیزی نیست‌که «بعداً» خواهد «شد». حال مسئله‌ی اساسی‌این است‌که ببینیم آیامی‌توان «وجود» و «عدم» را پذیرفت.؟ فلسفه تماماً به‌جوابهایی بسته است‌که به این معمای ذوحدین می‌دهد: وجود «هست» یا «نیست»؟ درباره‌ی هستی‌مسئله‌ی اساسی برسر «بودن» و «نبودن» است. جواب باید یا «آری» بـاشد یا «نه». بـه‌وضوح پیداست که هستی «وجود» داردونمی‌تواند وجود نداشته باشد. «عدم» شبحی‌است دست‌نیافتنی که به هیچ‌وجهی از وجوه بـدان نسبت وجود نمی‌تـوان داد. زیرا نه به اندیشه‌درمی‌آیدنه‌به‌گفتار. پارمنیدس‌میگوید«اندیشه‌و وجودیك چیزواحدند» لازمه‌ی اندیشه وجود موضوع آن است. نمی‌توانیم چیزی را تصور کنیم مگرآنکه‌آن را به‌مثابه‌ی چیزی‌که «وجود» دارد تصورکنیم. لاوجودیاعدم چون موضوع فکرنیست برای‌ما هیچ است وحکم‌بروجودآن نمی‌توان‌کرد. پس تنها حکمی که می‌توانیم‌با اطمینان صادرکنیم اینست‌که «وجود» هست

---

۱. تاریخ علم. جورج‌سارتن. ص۲۵۹.

یا «هستی» وجود دارد. اعتقاد راسخ یونانیان به پیوستگی و ابدیت طبیعت همچون کلی یگانه ومنظم وآهنگدار ومنطقی همیشه آنان‌را به‌سمت این باور رهبری می‌کرد که علی‌رغم ناپایداری اشکال وصور ظاهری هستی‌هاواشیاء چیزی ازآنها ابدی می‌ماند که ازناپایداری زمان ومکان وچیزهای دیگربر کناراست.

این فکرکه هنوز در حرکت‌گرایی کلی هـراکلیتوس باقی بود و به او اجازه داد که جهان وجهان هرلحظه راهمچون نتیجه‌ی طبیعی تغییرشکل پیوسته یك صورت به‌صورت دیگربداند برای دستگاه دیالکتیکی پارمنیدس که جوهر وتغییرات آن‌را درسطح ظواهرانداخت تا بتواند در ورای آنها حقیقتی را بیابد که ایـن‌بارنه‌تنها ازلحاظ جـوهربلکه ازلحاظ اندیشه نیز یگانه وتغییرناپذیر است عنوان چوب‌بستی منطقی داشت. بنابراین می‌توانیم بگوئیم‌که باکارفلسفی پارمنیدس رأی مخالف فیزیك ایونیایی و فسخ حکم دیالکتیك هراکلیتوسی فراهم شده است. واین عمل با انعکاسی اجمالاً منطقی درعناصرشناخت صورت‌گرفته است: قبول وجود آنکه می‌شناسد «مقدم» بر-آنچه باید شناخته شود قرارگرفته و «منی» که می‌اندیشد بـرآنچه اندیشیده می‌شود پیشی‌جسته والگو و معیار آن شده است. انسان از ناچیزی که در منظومه‌ی هراکلیتوس داشت که درآن حرکت ولوگوس همه‌چیز را با خود می‌برد وسامان می‌بخشد خارج شده و داوری‌عالی می‌شودکه درخودنمونه‌ی گزیده‌های جهان را می‌یابد.[1] دقیقاً ازاین‌موضوع است‌که بحث ما ازعناصر منطقی پارمنیدس آغازمی‌شود.

دنبالهٔ مطلب را در شمارهٔ بعد بخوانید

---

۱. برای یك تحقیق منحصربفرد وبسیارغنی ودلکش دربـاب پارمنیدس رجوع شود بـه: پندارگسترش‌پذیری بی‌پایان حقیقت. ازا میرمهدی بدیع. ترجمه احمدآرام. چاپ بنیاد فرهنگ ایران.

سه‌جمله‌ای اولر و عددهای فرما

۱. فرض کنیم: $f(x)=x^2+x+41$، درآن صورت داریم:

$$f(2)=47\,,\ f(3)=53\,,\ f(7)=97\,,\ f(12)=197$$

به‌سادگی روشن می‌شودکه:

$$f(2)+f(3)+f(7)=f(2+3+7)$$

به‌همین‌ترتیب، درستی رابطه زیرهم معلوم می‌شود:

$$f(-2)+f(-3)+f(-7)=f(-2-3-7)$$

۲. می‌دانیم که $f(x)=x^2+x+41$، به‌ازای

$$x=0,1,2,\ldots,39$$

عددی است‌اول. روندبه‌وجودآمدن‌عددهای اول را،برای $x>40$ بررسی می‌کنیم؛ داریم:

عددهای اول	عددهای غیراول
$f(42)\,,\ f(43)$	$f(41)$
$f(45)\,,\ f(46)\,,\ f(47)\,,\ f(48)$	$f(44)$
$f(50)\,,\ f(51)\,,\ f(52)\,,\ f(53)$	$f(49)$
$f(54)\,,\ f(55)$	
$f(57)\,,\ f(58)\,,\ \ldots\,,\ f(64)$	$f(56)$
$f(66)\,,\ f(67)\,,\ \ldots\,,\ f(75)$	$f(65)$
	$f(76)$

بین تعداد عددهای اول و تعداد عددهای غیراول یك نوع قانون‌مندی وجود دارد.

یك عدد غیراول، بعد، ۲عدد اول

» » » » ۴ »

» » » » ۶ »

» » » » ۸ »

» » » » ۱۰ »

به‌این‌ترتیب، بین $f(۴۱)$ و $f(۷۶)$، ۳۰ عدد اول وجود داردکه‌بنابر قانون معینی به‌دست می‌آیند. ازآن به‌بعد، این قانون‌مندی خراب می‌شود.

۳. همان‌طورکه‌می‌دانیم، گمان‌فرما دراین‌موردکه عدد $۲^{۲^n}+۱$ به‌ازای هرعدد درست وغیرمنفی n، عددی اول است، درست ازآب درنیامد. اولاً مقسوم‌علیه این‌عدد را به ازای $n=۵$ پیداکرد. اگرعدد فرما را F_n بنامیم، داریم:

$$F_۵=۴\ ۲۹۴\ ۹۶۷\ ۲۹۷$$

که برعدد ۶۴۱ بخش‌پذیراست.

دو روش جالب، برای به‌خاطرسپردن این مقسوم‌علیه وجود دارد.

چهار رقم اول و چهار رقم آخر $F_۵$ عبارتند از ۴۲۹۴ و ۷۲۹۷. مجموع رقم‌های هریك ازایـن دوعـدد، به‌ترتیب، برابر۱۹ و ۲۵ و تفاضل این دومجموع، یعنی ۱۹ — ۲۵، برابر۶می‌شود (رقم اول مقسوم‌علیه).

a) درعدد فرما ۱۰ رقم وجود داردکه مجموع آن‌ها برابراست با ۵۹:

$$۱۰^۲-۵۹=۴۱$$ (رقم‌های بعدی مقسوم‌علیه)

نتیجهٔ نهائی: ۶۴۱.

b) اگرفقط رقم‌های فرد عدد $F_۵$ را باهم جمع کنیم:

$$۹+۹+۷+۹+۷$$

بازهم عدد ۴۱ (دو رقم آخرمقسوم‌علیه) به‌دست می‌آید.

۴. سه‌خاصیت یکی ازعددهای اول فرما را می‌آوریم:

$$F_۴=۲^{۲^۴}+۱=۶۵۵۳۷$$

۱) مجموع رقم‌های دوطرف، برابراست با مجموع بقیهٔ رقم‌ها:

$$۶+۷=۵+۵+۳$$

۲) مجموع مربع‌های رقم‌ها، خود مربع‌کامل است:

$$۶^۲+۵^۲+۵^۲+۳^۲+۷^۲=۱۲^۲$$

۳) اگر مجموع مربع‌های سه‌رقم وسط را ازمجموع مربع‌های دو رقم کنارکم کنیم، مجموع رقم‌های خود عدد به‌دست می‌آید:

$$(۶^۲+۷^۲)-(۵^۲+۵^۲+۳^۲)=۶+۵+۵+۳+۷$$

۵. عدد فرمای F_e را می‌توان به‌کمك عددهای اول به‌دست‌آورد.

مجموع عددهای‌اول تامرز۵۰(نیم سدهٔ اول) برابراست با $S_A=۳۲۸$؛ مجموع عددهای اول درمرزهای ۵۰ و ۱۰۰ (نیم‌سدهٔ دوم) برابراست با: $S_B=۷۳۲$ آن وقت:

$$F_e=\frac{S_B-S_A}{۲}.S_A-(S_B-۱۳)$$

۶. عدد فرما

$$F_۳=۲^{۲^۳}+۱=۲۵۷$$

را می‌توان به‌این‌ترتیب به‌دست‌آورد: اگرعـددهای اول ۱۳، ۱۷ و ۴۱ را ازبین عدهای اول بین ۱و۵۰، خارج کنیم، مجموع بقیهٔ عددهای‌اول برابر $F_۳$ می‌شود:

$$F_۳=S_A-(۱۳+۱۷+۴۱)$$

۷. با توجه به ساختمان عدد $۲^{۲^n}+۱$، می‌توان متوجه شدکه‌رقم‌های هر عدد فرما—F_n— ازمجموع گروه‌هائی‌که تنهاازسه عدد تشکیل شده‌اند،به‌دست می‌آیند. این مطلب را، برای $F_۴$ روشن می‌کنیم:

$$F_۴=۲^{۲^۴}+۱=۶۵۵۳۷$$

$$۲+۴=۶$$

$$۲+۲+۱=۵$$

$$۲+۱=۳$$

$$۲+۴+۱=۷$$

البته، آن‌چه دراین‌جا آمد، همهٔ رابطه‌های مربوط به‌عددهای اول‌فرما را دربرنمی‌گیرد. خواننده می‌تواند، خود، رابطه‌های بسیار دیگری را کشف کند.

در بارهٔ رابطهٔ $m^{\log_a n} = n^{\log_a m}$

حل بعضی ازمعادله‌های نمائی- لگاریتمی ویا دستگاه معادله‌ها، به‌شرطی ساده می‌شودکه ازاتحاد زیراستفاده‌کنیم:

$$m^{\log_a n} = n^{\log_a m}$$

اگر ازدوطرف این اتحاد درمبنای a لگاریتم بگیریم، درستی‌آن ثابت می‌شود. دومثال می‌آوریم:

۱) مطلوب است حل‌معادلهٔ $۵^{\log_۲ x} = ۴^{\log_۲ ۵}$.

چون داریم: $۴^{\log_۲ ۵} = ۵^{\log_۲ ۴}$، بنابراین، معادلهٔ مفروض، به صورت $۵^{\log_۲ x} = ۵^{\log_۲ ۴}$ در می‌آید و ازآن‌جا $x = ۴$.

۲) معادلهٔ $۱۰^{\log_a(x^۲ - ۳x + ۵)} = ۳^{\log_a ۱۰}$ راحل کنید. چون داریم: $۳^{\log_a ۱۰} = ۱۰^{\log_a ۳}$، بنابراین، معادلهٔ مفروض به‌این صورت، درمی‌آید:

$$۱۰^{\log_a(x^۲ - ۳x + ۵)} = ۱۰^{\log_a ۳}$$

که ازآن‌جا نتیجه می‌شود:

$$x^۲ - ۳x + ۵ = ۳ \Longrightarrow x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$$

که دو ریشه‌دارد: $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = ۲$.

حل مسأله‌ها

رقم آخرمجموع (صفحهٔ ۶۳۳ را ببینید)

به روشنی معلوم است که

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + k = \frac{k(k+۱)}{۲}$$

اگر بخواهیم این مجموع به۷ ختم شده‌باشد، باید $k(k+۱)$ به۴ ختم‌شود. می‌دانیم، رقم آخرحاصل‌ضرب دو عدد، برابراست با رقم آخرحاصل‌ضرب دو رقم آخری حاصل‌ضرب. k و $k+۱$، دو عدد متوالی‌اند واگرعددهای یك رقمی متوالی را دوبه دو درهم ضرب‌کنیم، برای رقم آخرحاصل‌ضرب، تنها بـه ۰، ۲یا۶ می‌رسیم. بنابرایـن به ازای هیچ مقداری از k، مجموع $۱ + ۲ + \dots + k$ به ۷ (وهمچنین به۲ یا۴یا۹) نمی‌تواند ختم‌شود.

سکه‌های تقلبی

تنها با یك‌بار وزن‌کردن، می‌توان جعبهٔ حاوی سکه‌های تقلبی را پیدا کرد.

جعبه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم، سپس، ازجعبهٔ اول یـك سکه، از جعبهٔ دوم ۲ سکه، ازجعبهٔ سوم۳ سکه وبه‌همین‌ترتیب... ازجعبه دهم ۱۰سکه برمی‌داریم. روی هم ۵۵ سکه می‌شودکه وزن آن‌ها، به شرط حقیقی‌بـودن همهٔ سکه‌ها، باید ۵۵۰ گرم باشد. اگر وزن این ۵۵ سکه، یك‌گرم کمتر از ۵۵۰ گرم باشد، جعبهٔ اول واگر۲ گرم کمترباشد، جعبه دوم،... واگر۱۰ گرم کمترباشد، جعبه دهم حاوی سکه‌های تقلبی است.

رمزو راز عددها (صفحهٔ ۶۵۴ را ببینید)

۱. $n_1=9$، $n_2=99^{n_1}$، $n_3=999^{n_2}$ وغیره، همه، عددهایی فرد هستندو وقتی‌که عدد ۹ به‌توان فرد برسد، حتماً به۹ ختم‌می‌شود. بنابراین، عدد n به ۹ختم شده است.

۲. اگرعدد $\overline{xy}$،جوابی ازمساله‌باشد، باید $10x+y$ بر $x.y$ بخش‌پذیرباشد، یعنی y بر x و $10x$ بر y بخش‌پذیراست. اگرفرض کنیم $y=ax$، آن وقت $10x$ بـر ax و یا، ۱۰ بـر a بخش‌پذیر مـی‌شود. و، بنابراین: $a\in\{1,2,5\}$.

برای $a=1$ به‌دست‌می‌آید. $x=y$. ولی $11x$، تنها به‌ازای $x=1$ بر x^2 بخش‌پذیراست، یعنی $\overline{xy}=11$. برای $a=2$، داریم: $y=2x$ و به‌سادگی می‌توان تحقیق کردکه شرط مساله، باعددهای ۱۲، ۲۴ و۳۶سازگار است بالاخره، به‌ازای $a=5$، تنها یك عدد به‌دست می‌آید: عدد ۱۵.

به‌این‌ترتیب،شرط‌مساله،درعددهای۱۱،۱۲،۱۵،۲۴و۳۶ صدق‌می‌کند.

۳. معادله را می‌توان، به‌این‌صورت نوشت:

$$10x+t=9(y-z)$$

چون x و z برابرصفرنیستند، بنابراین، تفاضل $(y-z)$ مـی‌تواند برابرهمهٔ عددهای از۲ تا ۸ باشد؛ و هر زوج عدد y و z که درشرط زیر صدق کنند.

$$2\leqslant y-z\leqslant 8 \qquad (1)$$

متناظربا یك‌زوج عدد x و t هستند، به‌نحوی‌که x، y، z و t، درشرط مساله صدق‌کنند.

به ازای $z=1$، با شرط (۱)، ۷ مقداربرای y بـه‌دست می‌آیدو به ازای $z=2$، ۶مقدار وغیره. درنتیجه، تعدادکل جواب‌ها، چنین است:

$$7+6+5+4+3+2+1=28$$

۴. فرض می‌کنیم عددشش رقمی $\overline{xyztuv}$، با شرط مساله بسازد و، ضمناً،فرض‌می‌کنیم: $a=\overline{xyz}$ و $b=\overline{tuv}$. دراین‌صورت، $1000a+b$ بر

$a.b$ و، بنابراین، b بر a بخش‌پذیراست، یعنی $b=ka$، علاوه‌براین، $1000a$ بر b و، بنابراین، ۱۰۰۰ بر k بخش‌پذیراست. چون k عبارت است‌ازخارج قسمت دو عدد سه رقمی، بنابراین $k\leqslant 9$ و در نتیجه: $k\in\{1,2,4,5,8\}$.

برای $k=1$، عدد مورد نظر، برابر $1001a$ می‌شود و تنها وقتی بر a^2 بخش‌پذیراست‌که ۱۰۰۱ بر a بخش‌پذیرباشد و، درنتیجه، $a=143$ و عدد مطلوب، برابراست با ۱۴۳۱۴۳.

برای $k=2$، باید عدد $2002a$ بر $2a^2$ بخش‌پذیرباشد، به‌نحوی‌که عدد a،عددی سه رقمی ویکی‌ازمقسوم‌علیه‌های ۵۰۱باشد؛ وچون $a<500$، بنابراین $a=167$، وعدد مطلوب، برابر است با ۱۶۷۳۳۴.

اگر استدلال را به‌همین‌ترتیب ادامه دهیم، معلوم می‌شودکه مساله،در حالت‌های دیگر، جواب ندارد و ، بنابرایـن، شرط مساله، تنها در دو عدد ۱۴۳۱۴۳ و۱۶۷۳۳۴ صدق می‌کند.

۵. اگـر 2^a، 2^b و 2^c را، به ترتیب، x، y و z بگیریم، به‌این مساله، می‌رسیم: ثابت‌کنیدکه، اگرx، y و z، بزرگتر از واحد باشند، داریم:

$$xy+yz+zx<2xyz+1$$

که با توجه به‌گروه‌بندی زیر، واضح است:

$$2xyz-xy-yz-zx+1=(x-1)(y-1)(z-1)+$$
$$\times(x-1)(yz-1)+(y-1)(z-1)$$

۶. اگر c، بزرگترین‌ضلع مثلث باشد، نابرابری $a+b>c$ برقرار است و بنابراین

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}>a+b>c$$

یعنی $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$ و، بنابرایـن، مثلثی بـا ضلع‌های $\sqrt{a}$، $\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$ وجود دارد.

عکس این‌حکم، هم‌ارز حکم زیراست: اگرa، b و c ضلع‌های مثلثی باشند. a^2، b^2 و c^2 هم، می‌توانند ضلع‌های یك مثلث باشند. ولی اگر،مثلاً مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین‌رادرنظربگیریم که‌ضلع مجاوربه‌زاویهٔ قائمه (ساق)آن برابر ۱ باشد،آن‌وقت، روشن است‌که‌با عددهای ۱ و ۱و۲(مجذور

طول ضلع‌های این مثلث قائم الزاویه)، نمی‌توان یك مثلث ساخت. بنابراین، عکس حکم، همیشه درست نیست.

مساله‌های مسابقه‌ای (صفحهٔ ۶۶۲ را ببینید)

ششمین المپیاد بین‌المللی ریاضیات

۱. a) n را مضربی از ۳ فرض کنید ($n=3k$)، دراین‌صورت داریم:

$$2^n-1=2^{3k}-1=8^k-1$$

ولی تفاضل دوتوان با نماهای برابر، همیشه بر تفاضل پایه‌های آن‌ها، یعنی 8^k-1 بر $8-1$ بخش‌پذیراست. درنتیجه، عدد 2^n-1، وقتی که n مضربی از ۳ باشد، بر ۷ بخش‌پذیراست.

درحالت $n=3k+1$ داریم:

$$2^n-1=2^{3k+1}-1=2\times 8^k-1=2(7+1)^k-1$$

ولی درتقسیم $(7+1)^k$ بر ۷ به‌باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسیم (این را می‌توان، مثلاً، ازبسط دوجمله‌ای نیوتون نتیجه گرفت) و درنتیجه، ازتقسیم $2(7+1)^k$ بر ۷، باقی مانده‌ای برابر ۲ به‌دست می‌آید. به‌این‌ترتیب، باقی‌ماندهٔ تقسیم 2^n-1، در حالت $n=3k+1$، بر ۷ برابر ۱ می‌شود، یعنی بر ۷ بخش‌پذیرنیست.

درحالت $n=3k+2$ داریم:

$$2^n-1=2^{3k+2}-1=4(7+1)^k-1$$

که درتقسیم بر ۷، باقی مانده‌ای برابر ۳ می‌دهد.

بنابراین، عدد 2^n-1، وقتی وتنها وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است که n مضربی از ۳ باشد.

b) درحالت $n=3k$ داریم:

$$2^n+1=(2^n-1)+2=7m+2$$

که بر ۷ بخش‌پذیرنیست.

درحالت $n=3k+1$ داریم

$$2^n+1=2^{3k+1}+1=2\times 2^{3k}+1=2(7m+1)+1=14m+3$$

که بر ۷ بخش‌پذیرنیست

وبالاخره درحالت $n=3k+2$ داریم

$$2^n+1=2^{3k+2}+1=4\times 2^{3k}+1=4(7m+1)+1=28m+5$$

که بازهم بر ۷ بخش‌پذیرنیست. بنابراین، عدد 2^n+1، به ازای هیچ‌مقداری از n، نمی‌تواند بر ۷ بخش‌پذیر باشد.

۲. این نابرابری‌ها، به‌ازای هر مقدار دلخواه a، b و c، برقرارند:

$$(a-b)^2\geqslant 0,\ (b-c)^2\geqslant 0,\ (c-a)^2\geqslant 0$$

ضمناً، با توجه به این که a، b و c، طول ضلع‌های یك مثلث‌اند، داریم:

$$b+c-a>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0$$

وبه این‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(b-c)^2(b+c-a)\geqslant 0\\(c-a)^2(c+a-b)\geqslant 0\\(a-b)^2(a+b-c)\geqslant 0\end{cases}$$

اگراین سه نابرابری را با هم جمع کنیم، بعد از تبدیل‌های لازم، به‌دست می‌آید:

$$6abc-2a^2(b+c-a)-2b^2(a+c-b)-2c^2(a+b-c)\geqslant 0$$

که ازآن‌جا نتیجه می‌شود:

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$$

۳. دایره‌ای را درمثلث ABC محاط وماس‌های $A_1A_2\|BC$، $B_1B_2\|AC$، $C_1C_2\|AB$ را برآن رسم می‌کنیم. شعاع این دایره را r می‌گیریم. درهرمثلث جدید، دایره‌ای محاط می‌کنیم. و شعاع‌های آن‌ها را r_1، r_2 و r_3 می‌نامیم. مساحت دایرهٔ محاط درمثلث ABC، عبارت‌است‌از:

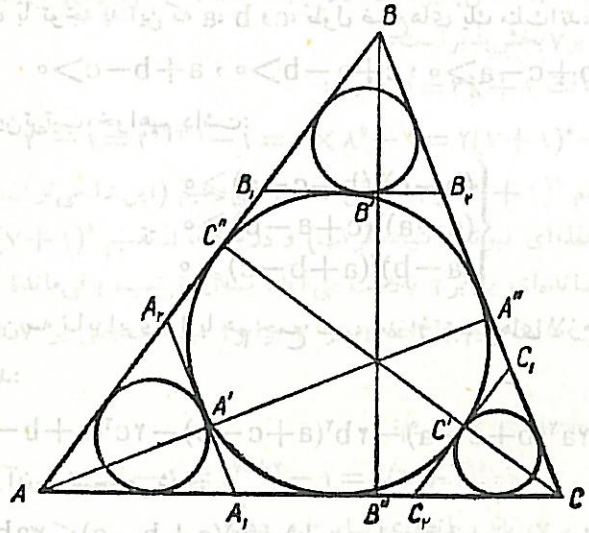
$$S=\pi r^2,\ r=\frac{S_{ABC}}{p}$$

که در آن داریم:

$$p=\frac{a+b+c}{2},\ S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

مثلث‌های AA_1A_2، BB_1B_2 و CC_1C_2 با مثلث ABC و دایره‌های محاط در آن‌ها، با دایرهٔ به‌شعاع r مجانس یکدیگرند. بنابراین

$$\frac{r_1}{r}=\frac{h_1}{ha},\ \frac{r_2}{r}=\frac{h_2}{hb},\ \frac{r_3}{r}=\frac{h_3}{hc}$$



که در آن‌ها، h_1، h_2 و h_3 ارتفاع مثلث‌های جدید و h_a، h_b و h_c، ارتفاع‌های نظیر ضلع‌های a، b و c از مثلث ABC هستند.

فاصلهٔ بین خط‌های موازی B_1B_2 و AC، A_1A_2 و BC، C_1C_2 و AB برابر است با $2r$. همچنین $A'A''=B'B''=C'C''=2P$ بنابراین

$$h_1=h_a-2r,\ h_2=h_b-2r,\ h_3=h_c-2r;$$

که در آن‌ها

$$h_a=\frac{2S_{ABC}}{a},\ h_b=\frac{2S_{ABC}}{b},\ h_c=\frac{2S_{ABC}}{c}$$

درنتیجه

$$\frac{r_1}{r}=\frac{h_a-2r}{h_a}=1-\frac{2r}{h_a};\ r_1=r-\frac{2r^2}{h_a}$$

و از آن‌جا

$$r_1=\frac{S_{ABC}}{p}-\frac{2a\cdot S^2_{ABC}}{2p^2\cdot S_{ABC}}=\frac{(p-a)S_{ABC}}{p_2}$$

و به‌همین ترتیب

$$r_2=\frac{(p-b)\cdot S_{ABC}}{p^2},\ r_3=\frac{(p-c)S_{ABC}}{p^2}$$

و دیگر مساحت مطلوب، به‌دست می‌آمد:

$$S+S_1+S_2+S_3=\pi(r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2)=\pi\left[\frac{S^2_{ABC}}{p^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(p-a)^2\cdot S^2_{ABC}}{p^4}+\frac{(p-b)^2S^2_{ABC}}{p^4}+\frac{(p-c)^2S^2_{ABC}}{p^4}\right]=$$

$$=\frac{\pi S^2_{ABC}}{p^4}\left[p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2\right]=$$

$$=\frac{\pi p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}\times$$

$$\times[4p^2+a^2+b^2+c^2-2p(a+b+c)]=$$

$$=\frac{\pi(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}$$

۴. یکی از دانشمندان را، به‌تصادف، درنظر می‌گیریم. او به‌هریك از ۱۶ دانشمند دیگر نامه نوشته است ودرهر نامه، تنها دربارهٔ یك زمینهٔ علمی. ثابت می‌کنیم، دست‌کم دریك زمینه ازسه زمینهٔ موجود، برای ۶ دانشمند نامه نوشته است. فرض کنیم چنین نباشد. بنابراین، درهر زمینه، حداکثر

برای ۵دانشمندتوضیح داده است. درنتیجه، درهرسه زمینه،می‌تواند حداکثر برای پنج‌دانشمند نامه‌نوشته باشد،که باشرط۱متناقض است. ازاین‌جا به‌بعد، این‌زمینه‌راA می‌نامیم.اگرازمیان‌این۶نفر، دونفردربارهٔ A با هم مکاتبه‌کرده باشند، مساله حل نشده است. ولی ممکن است وضع دیگری پیش آید: هیچ یك ازاین ۶دانشمند دربارهٔA بادیگری مکاتبه نکرده باشند. دراین صورت، آن‌ها دربارهٔ دو موضوع دیگر به‌هم نامه نوشته‌اند. یکی ازاین ۶نفر رادر نظرمی‌گیریم. اوبه پنج دانشمند دیگرنامه نوشته است. بنابراین، زمینه‌ای وجود دارد که دربارهٔ آن برای ۳نفر نامه نوشته است. درغیر این‌صورت، می‌تواند حداکثر برای ۴دانشمند نامه‌بنویسد. این زمینهٔ علمی راB می‌نامیم. اگریکی از این سه دانشمند، با دیگری دربارهٔ B مکاتبه کرده باشد، مساله حل شده است. واگراین سه‌نفر، دربارهٔ موضوع سوم باهم مکاتبه کرده‌باشند (موضوعC)،بازهم‌مساله حل شده‌است. همهٔ حالت‌هابررسی شد ودرهرحال، به‌چنین گروه‌سه نفری برخورد می‌کنیم.

۵. روی هم به‌اندازهٔ $C_5^2=10$ خط‌راست داریم. ازهرنقطه، ومثلاً C، ۴خط راست می‌گذرد. بنابراین، ازاین نقطه، ۶عمود رسم شده است. دو نقطهٔ دلخواه، مثلاً B و C، را درنظرمی‌گیریم. عمودهایی‌که ازنقطهٔ B، برخط‌های راستی‌که از C می‌گذرند، رسم شوند، همهٔ عمودهایی را که از نقطهٔ C رسم کرده‌ایم، قطع می‌کنند. ازنقطهٔC، سه‌خط راست عبورمی‌کندکه ازB نگذشته باشند، یعنی ازB می‌توان سه عمود برآن‌ها رسم‌کرد. آن‌ها، با عمودهای ازنقطهٔ C، در $3\times 6=18$ نقطه به‌هم برخورد می‌کنند. هر عمود دیگری ازنقطهٔB، بربقیهٔ سه‌خط راستی‌که ازB نمی‌گذرند، ۵ عموداز نقطهٔ C را قطع می‌کنند، به‌نحوی‌که با یکی برخورد ندارند، زیرا با آن‌در یك‌جهت رسم شده است. به این‌ترتیب، ۱۵ نقطهٔ دیگرهم به‌دست می‌آید. بنابراین، عمودهایی‌که از دو نقطه رسم شده‌اند، در $18+15=33$ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. ازپنج نقطه، می‌توان ۱۰ زوج درست‌کرد. در نتیجه، تعداد نقطه‌های برخورد از10×33، یعنی۳۳۰ تجاوزنمی‌کند.ولی، بعضی ازآن‌ها برهم منطبق‌اند. در واقع، هرسه نقطه ازاین پنج نقطه، تشکیل

یك مثلث می‌دهند. ارتفاع‌های این مثلث، که جزو عمودهای مورد بررسی‌ما هستند، دریك‌نقطه به‌هم می‌رسند. ما، این نقطه را، سه‌بار به‌حساب‌آورده‌ایم. تعداد این مثلث‌ها، برابر است با $C_5^3=10$. یعنی ۱۰ نقطه‌را ۳بار به‌حساب آورده‌ایم. به‌این‌ترتیب، تعدادکل نقطه‌های برخورد از $10+30-330$، یعنی ۳۱۰ تجاوزنمی‌کند.

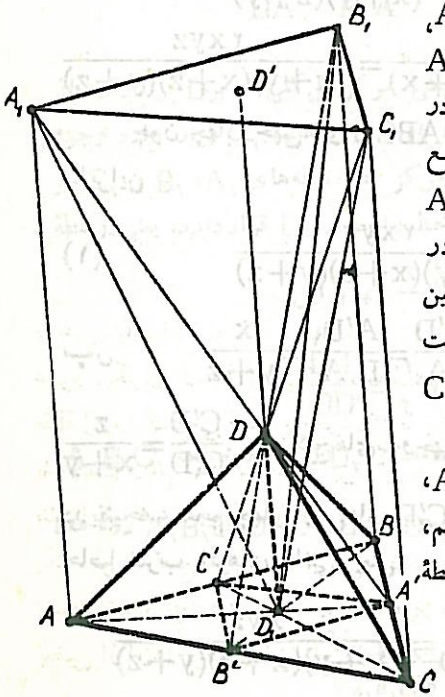
۶. مساله‌را، درحالت‌کلی‌حل می‌کنیم‌و، دراین‌جا، راه حل ۵. برنشتین را می‌آوریم.

نقطهٔ‌دلخواهD_1را،درداخل‌مثلثABC،درنظرمی‌گیریم‌وخط‌های‌راست

$$AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$$

را رسم می‌کنیم تا صفحه‌های وجه‌های مقابل چهاروجهی را در نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 قطع‌کنند (شکل را ببینید).

درمثلث ABC،خط‌های راست AD_1، BD_1 و CD_1 را رسم‌می‌کنیم، تا ضلع‌های مقابل را درنقطه‌های A'، B' و C' قطع کنند. خط‌راستA_1D ازنقطهٔ A' می‌گذرد، زیراA_1Dدر صفحهٔ A_1BC قراردارد وBC راقطع می‌کند، همچنین درصفحهٔAA_1A' قرار دارد که با خط راست، تنها در یك نقطهٔ A' مشترك است. به‌همین ترتیب ، معلوم می‌شود که خط راست B_1D از نقطهٔ B' و خط راست C_1D از نقطهٔ C' می‌گذرد.



در راس‌های مثلث ABC، وزنه‌هایx، y و z را قرارمی‌دهیم، به نحوی که مرکزثقل آن‌ها درنقطهٔ D_1 باشد. مثلا $x=B'C$،

$$y=\frac{CA'}{A'B}\cdot AB' \text{ و } z=AB'.$$

بنابر ویژگی مرکز ثقل:

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{z}{x},\ \frac{CA'}{A'B}=\frac{y}{z},\ \frac{BC'}{C'A}=\frac{x}{y}$$

داریم

$$\frac{S_{AC'B'}}{S_{ABC}}=\frac{AB'\cdot AC'}{AB\cdot AC}=\frac{yz}{(x+y)(x+z)}$$

و به‌همین‌ترتیب

$$\frac{S_{BC'A'}}{S_{ABC}}=\frac{xz}{(y+x)(y+z)}\ \text{و}\ \frac{S_{CA'B'}}{S_{ABC}}=\frac{xy}{(z+x)(z+y)}$$

بنابراین

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=1-\frac{xy}{(x+z)(y+z)}-\frac{xz}{(x+y)(z+y)}-\frac{yz}{(y+x)(z+x)}=\frac{2xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

چون چهاروجهی‌های $ABCD$ و $A'B'C'D$، ارتفاع مشترک دارند، بنابراین

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}}=\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{2xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)} \qquad (1)$$

سپس $\frac{A'D}{DA_1}=\frac{A'D_1}{D_1A}=\frac{x}{y+z}$ و به‌همین‌ترتیب $\frac{B'D}{B_1D}=\frac{y}{x+z}$ و $\frac{C'D}{C_1D}=\frac{z}{x+y}$. چون کنج‌های سه‌وجهی $DA'B'C'$ و $DA_1B_1C_1$ برابرند، در نتیجه، حجم چهاروجهی‌های $A'B'C'D$ و $A_1B_1C_1D$، متناسب‌اند با حاصل‌ضرب یال‌های جانبی، یعنی

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}}=\frac{A'D\cdot B'D\cdot C'D}{A_1D\cdot B_1D\cdot C_1D}=\frac{xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

که با توجه به (۱) به‌دست می‌آید:

$$V_{A_1B_1C_1}=2V_{ABCD}$$

در مثلث ABC، این وزنه را قرار می‌دهیم: در نقطهٔ A'، وزنهٔ $\frac{y+z}{2}$؛ درنقطهٔ B'، وزنهٔ $\frac{x+z}{2}$ و درنقطهٔ C'، وزنهٔ $\frac{x+y}{2}$. ضمناً، مرکز ثقل، همان نقطهٔ D_1 باقی می‌ماند. سپس، در راس‌های A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، وزنه‌های $\frac{x}{2}$، $\frac{y}{2}$ و $\frac{z}{2}$ را قرارمی‌دهیم. دراین‌صورت، مرکز ثقل زوج نقطه‌های (A_1, A')، (B_1, B')، (C_1, C')، برنقطهٔ D واقع می‌شود، زیرا

$$\frac{A_1D}{DA'}=\frac{AD_1}{D_1A'}=\frac{y+z}{x}=\frac{\frac{y+z}{2}}{\frac{x}{2}}$$

و به‌همین‌ترتیب برای بقیهٔ زوج نقطه‌ها. یعنی، مرکز ثقل کلی‌هم بر D قراردارد. از طرف دیگر، مرکز ثقل نقطه‌های A'، B' و C' برنقطهٔ D_1 قرار دارد وجرم آن برابراست با $x+y+z$. ولی مرکز ثقل نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بر صفحهٔ $A_1B_1C_1$ و، درعین‌حال، برخط راست DD_1 قراردارد، یعنی درنقطهٔ D'، وجرم آن برابراست با $\frac{x+y+z}{2}$. بنابراین

$$\frac{D_1D}{DD'}=\frac{1}{2}\ \text{و}\ \frac{D'D_1}{D'D}=\frac{3}{2}$$

یعنی، نسبت ارتفاع‌های وارد ازنقطه‌های D_1 و D بر صفحهٔ $A_1B_1C_1$، برابراست با $\frac{3}{2}$. ولی چهاروجهی‌های $A_1B_1C_1D$ و $A_1B_1C_1D_1$ درقاعدهٔ $A_1B_1C_1$ مشترک‌اند. بنابراین

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_1B_1C_1D}}=\frac{3}{2}$$

ولی $V_{A_1B_1C_1D}=2V_{ABCD}$ و درنتیجه

$$V_{A_1B_1C_1D}=4V_{ABCD}$$

چند مسالهٔ متفرقه

۱. اگر $\sqrt{x}$ را به‌سمت راست ببریم و دوطرف را مجذور کنیم. به‌دست می‌آید:

$$y=a^2-2a\sqrt{x}+x$$

ازاین برابری معلوم است که اگر x و y عددهایی درست باشند (a، بنابر فرض عددی درست است)، به‌ناچار باید $\sqrt{x}$ عدد درستی باشد، یعنی x مجذور کامل یك عدد درست است. به همین‌ترتیب، روشن می‌شود که y هم باید مجذورکامل یك عدد درست باشد. ازطرف دیگر، چون عدد درست و مثبت a را به $a+1$ طریق

$$0+a,\ 1+(a-1),\ \dots,\ (a-1)+1 \text{ و } a+0$$

می‌توان به‌صورت مجموع دوعدد درست نوشت، بنابراین، معادلهٔ مفروض دارای $a+1$ جواب درست (ومجذورکامل) می‌باشد.

۲. معادله را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$15^x+3^{x+1}+5^{x+1}=377$$

سمت چپ تساوی، مجموع تابع‌های نمائی صعودی است ، بنابراین عبارت سمت چپ، صعودی‌می‌شود. درنتیجه، این معادله نمی‌تواند بیش ازیك‌ریشه داشته باشد. عدد $x=2$ درمعادله صدق می‌کند و، بنابراین، همین عدد، تنها ریشهٔ‌معادله است.

۳. روشن است که انتگرال معین هرتابع مثبت، درهربازه‌ای، مثبت‌است، درنتیجه:

$$\int_0^{\pi}(a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\dots+a_n\cos nx)dx=a_0\pi+$$

$$+\left(a_1\sin x+\frac{a_2}{2}\sin 2x+\dots+\frac{a_n}{n}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}=a_0\pi>0$$

و ازآن‌جا: $a_0>0$.

۴. داریم:

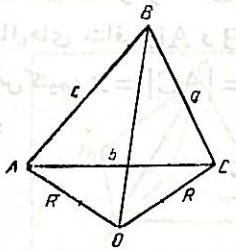
$$x\left[\frac{1}{x}\right]=x\left(\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)=1-x\left\{\frac{1}{x}\right\}$$

(منظور از $\{a\}$، مقدار $a-[a]$ است). ولی، x بی‌نهایت کوچك و $\left\{\frac{1}{x}\right\}$ متناهی است ودرنتیجه:

$$\lim_{x\to 0} x\left\{\frac{1}{x}\right\}=0$$

بنابراین، حدمطلوب وجود دارد وبرابراست با ۱.

۵. ابتدا، اتحادسوم‌راثابت‌می‌کنیم.



Oرا مرکزیك n ضلعی‌منتظم می‌گیریم که روی ضلع AC ازمثلث ABC ساخته‌شده‌باشد (شکل‌را ببینید) وفرض می‌کنیم: $|OA|=|OC|=R$. (در واقع، R عبارت است از شعاع دایرهٔ محیطی n ضلعی.) دراین صورت داریم:

$$\widehat{AOC}=\frac{360^\circ}{n},\ \widehat{CAO}=\widehat{ACO}=90^\circ-\frac{180^\circ}{n}$$

ازمثلث‌های BOC و BOA، بنا بر قضیهٔ کسینوس‌ها، به‌دست می‌آید:

$$|BO|^2=a^2+R^2-2aR\cos\left(C+90^\circ-\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$|BO|^2=C^2+R^2-2CR\cos\left(A+90^\circ-\frac{180^\circ}{n}\right)$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$a^2+2aR\cos\left(C-\frac{180^\circ}{n}\right)=c^2+2cR\cos\left(A-\frac{180^\circ}{n}\right)$$

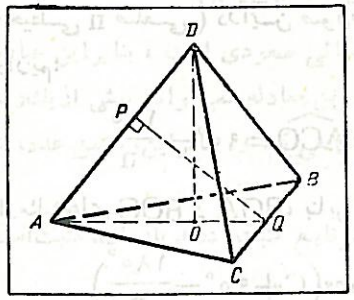
ولی، چون داریم: $R=\dfrac{b}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$، بنابراین

$$a^2+ab\cdot\frac{\sin\left(C-\frac{180^\circ}{n}\right)}{\sin\frac{180^\circ}{n}}=c^2+bc\cdot\frac{\sin\left(A-\frac{180^\circ}{n}\right)}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

به این ترتیب، اتحاد سوم ثابت شد. اتحادهای اول و دوم، از اتحاد سوم و با قرار دادن $n=6$ و $n=4$ نتیجه می‌شود.

۶. نقطهٔ O را مرکز مثلث ABC، قاعدهٔ هرم منتظم DABC، PQ را عمود مشترك یال‌های متنافر AD و CB و $PQ=l$ می‌گیریم (شکل را ببینید). اگر فرض کنیم: $|AB|=|BC|=|AC|=x$، مساحت قاعدهٔ هرم چنین می‌شود:

$$S=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$



چون $|OD|:|QP|=|AO|:|AP|$ (از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ APQ و AOD)؛ بنابراین

$$|DO|=\frac{2\sqrt{3}lx}{3\sqrt{3x^2-4l^2}},\quad x>\frac{2\sqrt{3}}{3}l$$

اگر حجم هرم DABC را با $V(x)$ نشان دهیم، به‌دست می‌آید:

$$V(x)=\frac{lx^2}{6\sqrt{3x^2-4l^2}}$$

مشتق این تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$V'(x)=\frac{l^2x^2(x^2-2l^2)}{\sqrt{(3x^2-4l^2)^2}}$$

این مشتق (درحوزهٔ تعریف تابع)، به‌ازای $x=l\sqrt{2}$، برابر صفر می‌شود.

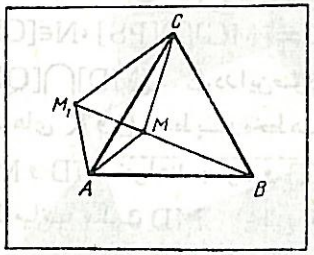
به ازای $\frac{2\sqrt{3}l}{3}<x<l\sqrt{2}$ داریم: $V'(x)<0$ و به ازای $x>l\sqrt{2}$ داریم: $V'(x)>0$. بنابراین

$$V_{min}=V(l\sqrt{2})=\frac{1}{3}l^3$$

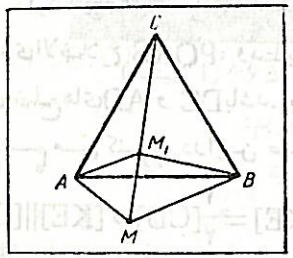
و به‌سادگی معلوم می‌شود که، دراین‌صورت:

$$|DA|=|DB|=|DC|=l\sqrt{2}$$

به‌این‌ترتیب، هرم با حجم حداقل، یك‌چهار وجهی منتظم با یال برابر $l\sqrt{2}$ می‌شود.



۷. M را در درون مثلث می‌گیریم (شکل را ببینید). اگر دوران $R_n 60^\circ$ (دوران به‌مرکز A و به‌اندازهٔ ۶۰ درجه) را انجام دهیم، نقطهٔ M به نقطهٔ M_1 تبدیل می‌شود، به‌نحوی که $|AM_1|=|AM|$ و $\widehat{MAM_1}=60^\circ$ نقطهٔ B به نقطهٔ C و، در نتیجه، مثلث ABM به مثلث ACM_1 تبدیل می‌شود، بنابراین $|M_1C|=2$ و $\widehat{AM_1C}=120^\circ$. سپس، به‌دست می‌آید:



$\widehat{AM_1M}=\widehat{AMM_1}=60^\circ$،

$\widehat{CM_1M}=120^\circ-60^\circ=60^\circ$

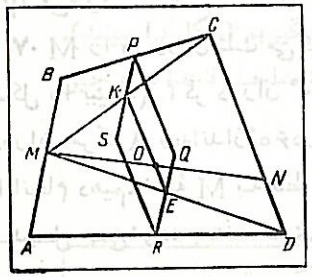
و $|MM_1|=|MA|=1$ از مثلث CMM_1، از روی قضیه کسینوس‌ها $|CM|=\sqrt{3}$. اگر نقطهٔ M در بیرون مثلث ABC باشد (شکل را ببینید)،

دوران R_{A60°، مثلث ABM را به مثلث AM_1C تبدیل می کند، به نحوی که $\widehat{AM_1M}=60^\circ$ و $\widehat{AM_1C}=120^\circ$ و، ضمناً، نقطه‌های M، M_1 و C روی یك خط راست قرار می گیرند. از آن‌جا

$$|CM|=|CM_1|+|M_1M|=3$$

۸. صورت مساله را، این‌طورهم می‌توان بیان کرد: اگرنقطه M برضلع AB و نقطهٔ N برضلع CD ازچهارضلعی ABCD واقع باشند، مطلوب است مکان هندسی وسط پاره‌خط MN.

اگرنقطه‌های M و N برراس‌های چهارضلعی مفروض واقع باشند، به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های P، Q، R و S، به‌ترتیب وسط پاره‌خط‌های BC، BD، AD و AC، راس‌های متوازی‌الاضلاع PQRS را تشکیل می‌دهند (شکل را ببینید).



فرض می کنیم: $M\in[AB]$، $N\in[CD]$، $K=[MC]\cap[PS]$ و $E=[MD]\cap[QR]$. دراین‌صورت نقطه‌های K و E وسط پاره‌خط‌های MC و MD خواهند بود و KE ـ خط میانهٔ مثلث CMD (خطی که وسط دوضلع مثلث را به‌هم وصل می کند) ـ پاره‌خط MN رادرنقطهٔ O، یعنی وسط آن، قطع می کند. یعنی، نقطهٔ O، در درون (یا روی محیط) متوازی‌الاضلاع PQRS قراردارد.

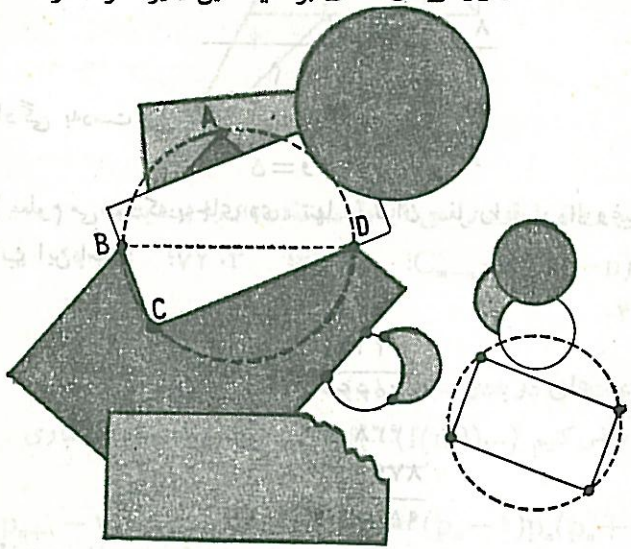
برعکس، ثابت می کنیم، هرنقطهٔ O، واقع در درون (یا روی محیط) متوازی‌الاضلاع PQRS، وسط‌یکی ازپاره‌خط‌هایی است که دوانتهای آن، روی ضلع‌های AD و DC باشد. برای‌این‌منظور، ازنقطهٔ O، $[KE]\parallel[PQ]$ را رسم می کنیم، دراین صورت: $(CK)\cap(AB)=M$. وچون $[KE]\parallel[CD]$ و $[KE]=\frac{1}{2}[CD]$، بنابراین، درتجانس به‌مرکز M ونسبت

۲. $[KE]$ مجانس $[CD]$ خواهد شد و داریم: $(MO)\cap(CD)=N$ ، و روشن است که N مجانس O و O وسط پاره‌خط MN است.

بنابراین، مجموعهٔ مطلوب، عبارت است‌از نقطه‌های واقع در درون متوازی‌الاضلاع PQRS ونقطه‌های واقع برمحیط آن.

سه‌دایره (صفحه۶۶۲ را ببینید)

روشن است که چهارنقطهٔ واقع بردایرهٔ کوچك، با شرط‌های مساله سازگارند وبرمحیط یك دایره واقع‌اند، گروه دیگرچهارنقطه‌ای، ازنقطه‌های A، B، C و D تشکیل شده است. اگرخط راست BD را رسم وبه قطرآن دایره‌ای بکشیم، ازآن‌جا که زاویه‌های BAD و BCD قائمه‌اند، می‌توان مطمئن شد که نقطه‌های A، B، C، و D برمحیط این دایره قرار گرفته‌اند.



ملیون ازچهل ضرب در شصت (صفحهٔ ۶۶۵ را ببینید)

ضرب‌های جزئی را درنظرمی گیریم:

(۱) * * * = ه ش × چ ه ل

(۲) * * ل = ص × چ ه ل

(۳) * * * = ت × چ ه ل

$$\left.\begin{matrix}(۲)\Longrightarrow ص=۱\\(۱)\Longrightarrow ل>ه\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{matrix}ه\geqslant ۲\\ل\geqslant ۳\\(۳)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow ت=۲\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{matrix}ه\geqslant ۳\\ل\geqslant ۴\\(۳)\\ت=۲\end{matrix}\right\}\Longrightarrow ل=۴،\ ه=۳$$

وضرب به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\begin{array}{rrrrr} & & ۴ & ۳ & ج & \times \\ & & & ۲ & ۱ & ش \\ \hline & ۳ & * & * & م & \\ & ۴ & ۳ & * & & \\ ۸ & ۷ & * & & & \\ \hline ن & و & ی & ۴ & م & \end{array}$$

به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$ن=۹،\ و=۵$$

حالا معلوم می‌شود که به‌جای «ی» تنها می‌توان صفر را قرارداد وغیره جواب این است:

$$\begin{array}{r} ۴۳۸\times \\ ۲۱۷ \\ \hline ۳۰۶۶ \\ ۴۳۸ \\ ۸۷۶ \\ \hline ۹۵۰۴۶ \end{array}$$

یادداشت. مساله

ملیون = شصت × چهل

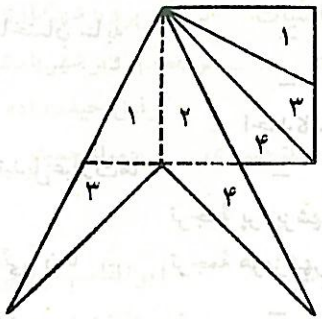
دارای شش جواب است:

$$۱۳۹\times ۴۰۸=۵۶۷۱۲،$$
$$۲۴۷\times ۱۵۸=۳۹۰۲۶،$$

$$۴۳۸\times ۲۱۷=۹۵۰۴۶،$$
$$۴۶۳\times ۲۰۷=۹۵۸۴۱،$$
$$۴۸۳\times ۱۰۹=۵۲۶۴۷،$$
$$۷۴۵\times ۱۲۶=۹۳۸۷۰$$

تبدیل به مربع

راه حل درشکل داده شده است



آیا درس ریاضی خود را می‌دانید؟(صفحهٔ ۶۷۰ را ببندید)

۱. $C^{۲}_{m-n}+n(m-n)$؛ ۲. ۳۸؛ ۳. ۷۲؛ ۴. ۹؛ ۵. ۲۱؛ ۶. ۴۴۸.

تابع وعددهای دوبه‌دو متباین (صفحه ۶۷۶ را ببینید)

فرض کنیم $p_n=\underbrace{f(f(f(\dots(f}_{n}(m))\dots)$. با استفاده ازتساوی

$$p_{n+۱}-۱=f(p_n)-۱=p_n^{۲}-p_n=(p_n-۱)p_n(p_n+۱)$$

به‌سادگی ثابت می‌شود که، به ازای $l>k$، عدد $p_l-۱$ بر $p_{k+۱}-۱$ و، همچنین، بر p_k، قابل قسمت است. بنابراین، p_l و p_k، نسبت به‌هم،اول‌اند.

یادآوری می‌کنیم که وجود دنبالهٔ نامتناهی از عددهایی که، دو به‌دو نسبت به‌هم اول‌اند، به‌معنای‌وجود مجموعه‌ای‌نامتناهی، ازعددهای اول‌است (کافی است، ازهرجملهٔ دنباله، یك حاصل اول‌را، انتخاب‌کنیم).

فهرست مقاله‌های سال هشتم

Reconciliation With Mathematics
Editor:* *Parviz Shahryari
Address:* *Tehran, Firdaus
Vol. VIII, No 5, *Serial No. 38, 1986*

۵. معرفی کتاب

۶. سرگرمی‌های ریاضی

۷. متفرقه