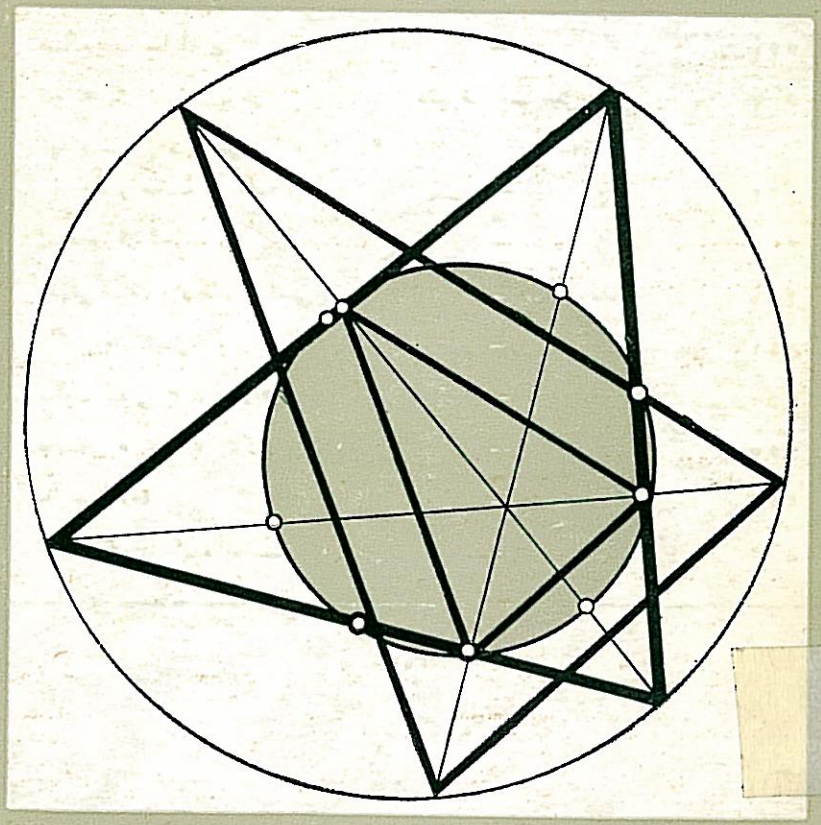
آشنائی با ریاضیات

جلد چهارم



مهرماه ۱۳۶۴

آشنایی با ریاضیات (جلد چهارم)

گردآورنده : پرویز شهریاری

طراحی و تصحیح: حسن نیک‌بخت

تیراژ ۴۰۰۰ نسخه

چاپ اول، مهرماه ۱۳۶۴

چاپ : رامین

روی جلد:
به صفحهٔ ۴۴۰ «استفاده از تجانس» مراجعه بفرمائید.

فهرست جلد چهارم

۱۸۰ ریال

آشنایی با ریاضیات (جلد چهارم)
گردآورنده : پرویز شهریاری
طراحی و تصحیح: حسن نیک‌بخت
تیراژ ۴۰۰۰ نسخه
چاپ اول، مهرماه ۱۳۶۴
چاپ : رامین

روی جلد:
به صفحهٔ ۴۴۰ «استفاده از تجانس» مراجعه بفرمائید.

فهرست جلد چهارم

۱۸۰ ریال

الکساندر یاکوولەویچ خین‌چین

نقش تربیتی درس‌های ریاضیات

این مقاله را، خین چین در تابستان سال ۱۹۴۷ نوشت، ولی در ۱۲ سالی که از زندگی او مانده بود، آن را برای چاپ به‌جایی نفرستاد ظاهراً، وجود بعضی کمبودها، او را راضی نمی‌کرد. دست نویس این مقاله را، بعد از مرگ او پیدا کردند و ابتدا، در سال ۱۹۶۰، با حذف بعضی قسمت‌ها در مجلهٔ «فرهنگ ریاضیات» (چاپ شوروی) و سپس، در سال ۱۹۶۲، متن کامل آن در مجلهٔ «ریاضیات در دبیرستان» (چاپ شوروی) چاپ شد. ترجمهٔ حاضر از روی متن کامل نوشتهٔ خین‌چین انجام گرفته است. در متن مقاله، پرسش‌های بسیاری طرح شده‌است، ولی به‌همهٔ آن‌ها، تاپایان و به‌طور کامل پاسخ داده نشده است و، شاید، همین امر موجب تردید خین‌چین درچاپ آن بوده است. ولی به‌نظر می‌رسد که خود این کمبود، از جهت دیگری می‌تواند سودمند باشد و هرصاحب اندیشه‌ای را به‌تلاش وادارد تا زمینه‌های مختلفی را، که دراین مقاله طرح شده است، گسترش دهد وزاویه‌های نیم‌تاریک آن راروشن کند.

*

خین‌چین، یکی از بزرگترین دانشمندان ریاضی سدهٔ بیستم درسال ۱۸۹۴ به‌دنیا آمد ودر سال ۱۹۵۹ درگذشت. در ۱۹۱۶ دانشگاه مسکو را تمام کرد و از سال ۱۹۲۲ درهمان جا درس می‌داد. ازسال ۱۹۳۹، عضو فرهنگستان علوم اتحاد شوروی بود. کارهای اولیهٔ خین‌چین، دربارهٔ نظریهٔ تابع‌های با متغیر حقیقی بود اوروی نظریهٔ تابع‌های اندازه پذیرکارکرد ومفهوم‌های دیفرانسیل‌گیری وانتگرال‌گیری را تعمیم داد. اندیشه‌هایی‌که درمورد نظریهٔ تابع‌ها داشت، او را به‌سمت نظریهٔ متری عددها و تجدید بنای نظریهٔ احتمال کشانید. کارهای خین‌چین، تا حد زیادی، نظریهٔ احتمال رادگرگون ساخت و راه را برای گسترش محتوای آن بازکرد.: نتیجه‌های مهمی درزمینهٔ قضیه‌های حدی بدست آورد، قانون لگاریتم تکراری را کشف‌کرد؛ تعریف روند ایستانهٔ تصادفی را داد واصول نظریهٔ این‌گونه روندها را، بنیان‌گذاشت.

بی‌جهت نیست‌که، در تمامی جهان، اورا یکی از بنیان گذاران نظریهٔ جدید احتمال می‌دانند. درسمپوزیوم سال ۱۹۶۰ برکلی دربارهٔ نظریهٔ احتمال وآمار ریاضی [برکلی، شهری است درغرب امریکا. سمپوزیوم برکلی، یك کنفرانس بین‌المللی واقعی دربارهٔ نظریهٔ احتمال وآمار ریاضی بود.]، نشست ویژه‌ای به‌خاطرهٔ خین‌چین اختصاص یافت و به‌نقش اودرپیشرفت دانش معاصر، ارزش فوق‌العاده داده شد.

پرویز شهریاری

موضوع مورد بررسی «ریاضیات» برخلاف دانش‌های دیگری‌که در دبیرستان درس داده می‌شود، به «چیزهایی» مربوط نمی‌شود که، به‌طور مستقیم، ازجهان بیرونی ـ که‌مارا احاطه‌کرده‌است ـ گرفته شده‌باشند: موضوع ریاضیات، عبارت است از **رابطه‌های کمیتی وشکل‌های فضائی**، که از ویژگی‌های این «چیزها» است. این خصلت دانش ریاضی، قبل از همه، موجب دشواری‌های آموزشی برای معلمان ریاضیات شده است که معلمان سایر رشته‌های دانش، تقریباً ازآن‌ها بی‌اطلاع اند: مشکلی‌که دربرابر معلم

ریاضیات قد علم‌کرده، این است‌که چگونه برتصوری‌که، خود به‌خود و به ناچار، دربارهٔ «خشکی» و خصلت صوری ریاضیات درذهن دانش‌آموزان به‌وجود می‌آید و، درنتیجه، آن را دور از زندگی وعمل می‌پندارند، غلبه کند. دراین باره، خیلی چیزهای سودمند و با ارزش نوشته شده است و ما می‌دانیم‌که، معلمان خوب وآزموده، چگونه از عهدهٔ این مشکل بر می‌آیند.

ولی، این‌خصلت‌ریاضیات،موضوع‌دیگری‌راهم‌روشن می‌کند: دربرابر معلم خوبی‌که می‌خواهد ازآموزش ریاضیات، **هدف‌های تربیتی** راهم‌دنبال کند، وضع خاصی به‌وجود می‌آید. روشن است‌که دراین مورد هم، نسبت به‌سایر دانش‌ها، مسألهٔ دشوارتری دربرابر ما قرار دارد. دانشی که دربارهٔ خود اشیاء بحث نمی‌کند وتنها به‌بستگی‌ها ورابطه‌های بین‌آن‌ها می‌پردازد، تا حد زیادی؛ به‌تجرید و انتزاع نیاز دارد و روشن است‌که این وضع، به‌ندرت این امکان رابه‌وجود می‌آورد،که‌معلم بتواند برشکل‌گیری‌خصلت‌ها وجهان بینی دانش‌آموز تاثیری ثمربخش بگذارد و به‌رفتار او نظم بدهد. به‌همین مناسبت است که در بررسی‌های مربوط به‌بنیان‌های تربیتی آموزش دبیرستانی، معمولا، هیچ صحبتی ازدرس ریاضیات نیست ویا خیلی‌کم ازآن صحبت می‌شود.

موردهایی، نه‌چندان زیاد، وجود داردکه‌کسی باآن‌ها مخالف نیست. این موردها، معمولاً، منجر به‌دواهرم اصلی، درنقش تربیتی‌آموزش‌ریاضیات، می‌شود: ازیك طرف گفته می‌شودکه دقت منطقی و استواری نتیجه‌گیری‌ها، در ریاضیات، موجب می‌شودکه دانش‌آموزان، به‌طورکلی، با تفکری منطقی بارآیند؛ واز طرف دیگر، ادعا می‌شودکه آگاهی‌های مضمونی ـ عینی مساله‌های ریاضی، به‌خاطر تنوع خود، چشم‌اندازگسترده‌ای ازعددها و شکل‌ها دربرابر دانش‌آموز می‌گذاردکه، به‌طور قابل توجهی، دیدگاه‌های اورا وسعت می‌بخشد، سطح کلی فرهنگ اورا بالا می‌برد و، درنتیجه، زمینه را برای تربیت سیاسی وجهت‌گیری‌های انسانی ومیهنی اوفراهم می‌کند.

همهٔ اینها بدون تردید، درست است؛ با وجود این فکر می‌کنم همهٔ واقعیت‌هارادربرنمی‌گیرند. قبل‌ازهمه، دراین‌جا، هیچ اشاره‌ای به‌مساله‌های

مهم تربیت اخلاقی نشده است، درحالی که، به‌گمان‌من، دردرس‌های ریاضی، امکان‌های ملموس زیادی در این باره وجود دارد. سپس، تربیت منطقی اندیشه، که معمولاً توجه زیادی به‌آن می‌شود، دربیشتر موردها، به‌صورتی پیش پا افتاده، سطحی وناکافی تفسیر می‌شود و، اغلب، به‌مثال‌هایی استناد می‌شود که از نمونه‌های عامیانه تجاوز نمی‌کند و، بنابراین، تاثیر ناچیزی دارد. سرانجام، باید از تاثیر تربیتی داده‌هایی یاد کنیم که در متن مساله‌ها وجود دارد. درست است که ازاین داده‌ها هم باید به‌نحو احسن استفاده کرد، ولی باید توجه داشت که بستگی آن‌ها با مضمون **ریاضی** درس، خیلی سطحی و ظاهری است. دراین جا، خود ریاضیات و قانون‌ها و روش‌های آن، نقشی ندارند، بلکه تاثیر تربیتی به‌عهدهٔ داده‌هایی است که به‌صورتی ظاهری به‌ریاضیات مربوط‌اند. ودر حاشیهٔ «متن اصلی» مساله‌هاقراردارند ومی‌توان آن‌هارا با داده‌های مشابه و دلخواه دیگری عوض کرد، بدون این‌که هیچ‌گونه تغییری در مضمون ریاضی مساله بوجودآید. بنابراین، این اهرم تاثیر تربیتی، اگرچه واقعی و مهم است، نمی‌تواند مستقیماً به‌دانش ریاضی دبیرستانی مربوط باشد.

باتوجه به‌این نکته‌ها، روشن می‌شودکه آن چه تاکنون دربارهٔ ارزش تربیتی درس‌های ریاضیات مورد مطالعه قرارگرفته است، بسیار نارسا و ناکافی است. هدف این مقاله این است که دربارهٔ این مساله بیشتر بحث کند و، تاحد امکان، آن را روشن‌تر کند. تلاش من این است، به‌نکته‌هایی بپردازم که درمورد تاثیرتربیتی درس‌های ریاضی‌وجود دارند و، تاکنون، یادربارهٔ آن‌ها هیچ توجهی نشده ویا خیلی سطحی مورد توجه قرارگرفته است.

I. پرورش اندیشه

۱. درستی تفکر. نقش واهمیت ریاضیات درتربیت تفکر وانداختن آن به‌مسیر قانون مند وبی‌خطا، چنان روشن است که، به‌فراوانی، با این اعتقاد برخورد می‌کنیم که: منطقی کردن اندیشه، مسالهٔ اصلی و نخست معلم

ریاضیات است، به‌نحوی که آشنائی دانش‌آموزان باخود محتوای دانش ریاضی، در مقایسهٔ با آن، باید درمرحلهٔ دوم قرارگیرد (که، بدون تردید، باید آن را نوعی زیاده‌روی زیان مند به‌حساب آورد). به‌همین دلیل است که این نقش تربیتی درس‌های ریاضی و به‌صورتی مبتذل درآمده است و، دراین باره، حرف‌های بسیاری می‌شنویم که اغلب قالبی وتکراری است، بدون این‌که دربارهٔ ریشه‌های موضوع به‌اندازهٔ کافی دقت شده باشد. نتیجهٔ این وضع آن است که تمامی توجه روی تعداد محدودی موضوع‌های عادی (وگاهی بیزارکننده) متمرکز شودکه، اگرچه به‌جای خود مهم‌اند، ولی ارزشی فرعی ومحدود دارند؛ ازنوع تکیه‌ای که برتشخیص کذائی یك‌قضیه از عکس‌آن می‌شود. ودر این میان، موضوع‌هایی که ارزش کلی و واقعی خیلی بیشتری دارند، درسایه می‌مانند.

به‌گمان من، جنبهٔ کلی واساسی عمل‌کرد تربیتی آموزش ریاضیات، که تاحد زیادی، موجب پدیدار شدن جنبه‌های دیگر این عمل‌کرد است، همان عادت دادن دانش‌آموزان به **ارزش استدلال** است.

حتی در جرو بحث‌های «مورد علاقهٔ خود» در زندگی عادی هم (که جنبهٔ علمی دقیقی ندارند)، ضمن دفاع ازعقیدهٔ خود، معمولاً به‌یکی دو استدلال قناعت می‌کنیم. ازطرف مقابل هم، می‌تواند استدلال‌هایی در جهت رد اعتقاد ما، ارائه شود. باوجود این، معمولاً، هیچ یك از استدلال‌های دو طرف، موجب پایان بحث نمی‌شود وهرطرف می‌کوشد، استدلال‌های تازه‌ای به‌نفع اعتقاد خود پیداکند و... بحث ادامه می‌یابد.

بحث‌های علمی، درمورد دانش‌هایی هم که هنوزجزو به‌اصطلاح «علوم دقیقه» به‌حساب نمی‌آیند، تقریباً به همین شکل جریان دارد؛ البته، دراین‌جا، استدلال‌ها کامل‌تر از جرو بحث‌های روزانه است، ولی هرگزکار بحث را، طوری به‌پایان نمی‌رساندکه جای هیچ‌گونه اعتراضی باقی نماند و، در نتیجه، خود بحث را ازمیان بردارد.

ولی در ریاضیات، وضع به‌گونهٔ دیگری است. دراین جا، استدلال‌هایی که خصلتی کامل نداشته باشند و نتوانند کار را، به‌طور مطلق، به‌پایان

برسانند وکوچکترین امکانی برای اعتراض باقی بگذارند، بی‌رحمانه اشتباه به‌حساب می‌آیند و، به‌عنوان چیزی بی‌فایده، کنارگذاشته می‌شوند. در ریاضیات، نمی‌توان ونباید حکمی را «تا نیمه» ویا «تقریباً» ثابت کرد: یا استدلال کامل وجود دارد که هیچ‌گونه بحثی را، درمورد حکم ثابت شده باقی نمی‌گذارد ویا اصلاً استدلالی وجود ندارد.

دانش‌آموزی که ریاضیات دبیرستانی را آغاز می‌کند، برای نخستین بار درزندگی خود، باچنین توقع بالائی از «استدلال کامل» مواجه می‌شود. ابتدا حیرت می‌کند، به‌وحشت می‌افتد وحتی بیزار می‌شود: به‌نظرش می‌رسد که‌این، توقعی خارج ازاندازه، فضل‌فروشانه وغیرلازم است. ولی، به‌تدریج وباگذشت روزها، به‌آن عادت می‌کند. معلم خوب، خیلی کارها باید انجام دهد تا این روند، هم سریع‌تر و هم ثمربخش‌تر، به‌انجام برسد. او باید به شاگردان خود، راه انتقاد متقابل رابیاموزد: وقتی‌که یکی ازآن‌ها، دربرابر تمامی‌کلاس، چیزی را ثابت ویامساله‌ای راحل می‌کند، همهٔ دیگران باید بادقت درجست وجوی اعتراض‌های ممکن باشند و، ضمناً، بتوانند، نظر خودرا بلافاصله بیان‌کنند. دانش‌آموزی که در برابر همهٔ اعتراض‌ها دفاع می‌کند وناچار می‌شود همهٔ انتقادهای دیگران را ساکت‌کند، ناگزیر ازطعم ناشی ازشادی پیروزی هم لذت می‌برد. ضمناً، به روشنی احساس می‌کندکه استدلال کامل ودرست، تنها سلاحی است‌که اورا به‌این پیروزی می‌رساند. هربارکه این موضوع را احساس‌کند، به‌ناچار یاد می‌گیرد که به‌این سلاح احترام بگذارد و سعی‌کند، آن را، همیشه همراه خود داشته باشد. وبه‌طور طبیعی، نه‌تنها درریاضیات، بلکه درهربحث ومناظره‌ای، بیشتر وپی‌گیرانه‌تر، به‌سمت استدلال‌کامل ودرست‌کشیده می‌شود. وآن وقت، هربارکه بامساله‌ای مواجه می‌شود، تلاش می‌کند تا ازتمام ذخیرهٔ استدلال‌هایی که درچنین موقعیتی به‌کارمی‌آیند. برای خلع سلاح مخالفان خود استفاده‌کند.

این روند تربیتی، برای منطقی‌کردن تفکر، اهمیتی تعیین‌کننده، دارد. به‌خصوص با توجه به‌این نکته که، دانش‌آموز عادت می‌کند، مدتها در مناظره‌ها، بلکه حتی در موردهایی هم که با اندیشه‌های یکسان سروکاردارد،

بی‌رحمانه تقاضای استدلال کامل ودرست داشته باشد. مادربرابرچشمان‌خود، تکامل این روند را درهزاران دانش‌آموزخود مشاهده می‌کنیم. این روند، بی‌شك، بدون دخالت ماهم، راه خودرا باز می‌کند وبه جلو می‌رود، ولی این، به‌معنای‌آن نیست‌که ماحق داریم‌آن رابه‌صورت جریانی خودبه‌خودی رهاکنیم: حکومت ما، کارهای‌زیادی برای سریع‌تر وکامل‌ترکردن این‌روند انجام داده است و درجهت استحکام وغنای آن، موفقیت‌هایی بدست آورده است؛ ولی ماهم می‌توانیم وباید دراین جریان‌نقشی داشته باشیم. این‌پرسش که، چه روش‌هایی می‌تواند ثمربخش‌تر باشد وما را بهتر به‌هدف برساند، یك مسالهٔ آموزشی است وما نمی‌توانیم آن را دراین‌جا، به‌تفصیل، مورد بررسی قراردهیم.

*

اصل کلی مبارزه به‌خاطراستدلال‌کامل‌ودرست، که درجریان رشدفکری دانش‌آموزبه‌دست می‌آید، صورت‌های‌گوناگونی داردکه ازمهم‌ترین‌آن‌ها، دراین‌جا یاد می‌کنیم.

۱) مبارزه علیه تعمیم‌های غیر قانونی. طبیعی دان، متوجه وجود خصوصیتی (علامتی) درتعدادی ازیك‌نوع خاص می‌شود، باآسودگی خاطر و باوجدان علمی اعلام می‌کندکه این نشانه، برای تمامی نوع موردمطالعه، عمومی است وکسی هم، اورا سرزنش نمی‌کند. این‌گونه استنتاج‌های استقرایی، یکی ازاساسی‌ترین محورهای روش‌شناسی در دانش‌های طبیعی است: البته، دراین دانش‌هاهم، تفکر نظری تطبیقی و ادراکی ممکن و لازم است، ولی همیشه، مشاهده و تجربه روی نمونه‌های جداگانه‌موضوع مورد آزمایش، چه به‌عنوان آغازکار وچه برای تحقیق نهائی دربارهٔ هرگونه نتیجه‌گیری، نقش عمده وتعیین‌کننده را به‌عهده دارد.

درریاضیات، وضع به‌طور اساسی، به‌گونهٔ دیگری است. اگر تحقیق کنیم‌که چند ده (یا حتی چند ملیون) مثلثی که به‌دلخواه انتخاب‌کرده‌ایم، دارای فلان ویژگی هستند، بازهم حق نداریم این ویژگی را متعلق به‌همهٔ مثلث‌ها بدانیم. این‌گونه نتیجه‌گیری‌ها، به‌طورکامل، پایه‌گذاری نشده‌اند و،

دردانش ریاضی، هرچیزی راکه به‌طورکامل پایه‌گذاری نشده باشد، به‌طور مطلق بی‌اساس می‌دانند. تنها **اثبات‌کلی** و کامل می‌تواند این اطمینان را به ما بدهدکه نشانهٔ مفروض، واقعاً یکی از ویژگی‌های هرمثلثی است. دانش‌آموز ازاین‌انتقاد سخت، نسبت به‌تعمیم‌های بی‌پایه‌ای‌که درریاضیات‌باآن‌ها مواجه می‌شود، چه‌چیزی می‌تواند وباید بیاموزد؟ البته، اونباید تلاش‌کندکه چنین توقعی را در دیگردانش‌ها و، به‌خصوص، درموقعیت‌های عملی‌زندگی داشته باشد. توقع کمال مطلق استدلال قیاسی، خاص ریاضیات است و در مورد دانش‌های طبیعی وزندگی عملی، به‌هیچ‌وجه قابل اجرا نیست. ولی عادت به‌دقت انتقادی، برای هرگونه تعمیمی ضرورت دارد. باید با این درك‌کاملاً خوگرفت‌که اگرحکمی درخیلی موردها برقرار باشد، به‌هیچ وجه به‌معنای آن نیست‌که درهمهٔ موردهادرست باشد وآن چه براساس مشاهده‌ها وتجربه‌های محدودی (ولوخیلی‌زیاد) به‌صورتی‌قانون مند به‌دست‌آمده‌است، بازدوباره ودوباره مورد تحقیق‌قرارگیرد؛ واین، که یکی ازمهم‌ترین عادت‌های روش شناسی است و، وجود آن، برای هرگونه فعالیت علمی وعملی لازم است، تا حد زیادی، همراه با رشد فرهنگ ریاضی دانش‌آموز، رشد می‌کند واستحکام می‌پذیرد.

این، جریانی است که ما درزندگی معلمی خود، دائماً ناظر آن هستیم.

۲) مبارزه علیه شبیه سازی‌های بی‌پایه. نتیجه‌گیری از راه شباهت، چه دردانش‌های‌تجربی وچه درزندگی عادی، روشی معمولی وقانونی، برای کشف قانون مندی‌های تازه است. اگر فرض‌کنیم، طبیعت شناسی متوجه شود که همهٔ نوع‌هایی‌که دارای نشانه‌های A و B هستند و تاکنون به‌آن‌ها برخورده‌اند، ضمناً دارای نشانهٔ C هم هستند، آن‌وقت اگر نوع تازه‌ای را پیداکنندکه نشانه‌های A و B درآن وجود داشته باشد، به‌طورطبیعی نتیجه می‌گیردکه این نوع تازه، دارای نشانهٔ C هم هست. این‌گونه نتیجه‌گیری از راه شباهت، موقعی قانع‌کننده‌تر می‌شودکه علاوه برآزمایش خالص، نوعی ملاحظهٔ نظری‌هم دراین باره وجود داشته باشدکه‌همراهی C با A وB

تصادفی نیست وزمینه‌ای درخود این نشانه‌ها ویا درجای دیگری دارد (و معمولاً هم، چنین ملاحظهٔ نظری، وجود دارد). تنها در ریاضیات است‌که بر ضرورت این امرتاکید می‌شودکه باید: این ملاحظه‌های نظری را، تا آخر وبه‌طورکامل ثابت‌کرد. یاباید بادقت کامل ثابت‌کنیم‌که وجود نشانه‌های A و B، الزاماً، به‌معنای وجود نشانهٔ C است و یا، اگرنتوانیم چنین اثباتی را به‌طورکامل ارائه دهیم، به‌معنای این است‌که به‌هیچ وجه حق نداریم از روی نشانه‌های A و B، وجود نشانهٔ C را نتیجه بگیریم. ولی درحالت اول (یعنی وقتی، این قضیه ثابت شده است که: «از A و B، می‌توان C را نتیجه‌گرفت»)، کاربرد سادهٔ این قضیهٔ کلی را دیگر نمی‌توان «نتیجه گیری ازراه شباهت» نامید. بنابراین می‌توان‌گفت‌که در ریاضیات، نتیجه‌گیری از راه شباهت، به‌طورکلی، منع شده است (واین، البته به هیچ‌وجه، به‌معنای بی‌اعتبارکردن‌نتیجه‌گیری‌های عظیمی‌که‌ازراه تجربه‌به‌دست‌آمده‌اند، نیست)، درحالی‌که در دانش‌های تجربی وفعالیت‌های عملی، نتیجه‌گیری ازراه شباهت، نقشی پرافتخاردارد ویکی ازعمده‌ترین واساسی‌ترین روش‌ها، برای پیداکردن قانون‌مندی‌های تازه‌است ـ به‌این ترتیب، دوباره پرسشی دربرابر ماقرار می‌گیردکه، دراین رابطه چه می‌توان کرد تا درس‌های ریاضیات، برای فرهنگ عمومی تفکر، نقشی تربیت‌کننده داشته باشد؟ وبازهم ناچاریم شبیه قبل پاسخ بدهیم: تربیت ریاضی ذهن وخو گرفتن به‌این موضوع، که نتیجه‌گیری براساس شباهت، تنهامی‌تواند درخدمت روش‌های‌آزمایشی‌باشد و، به‌خودی خود، هیچ‌گونه نیروی استدلالی ندارد، به‌ناچارآدمی را وا‌می‌دارد تا درهمهٔ زمینه‌های دیگر اندیشه هم، با احتیاط بیشترنسبت به‌این نوع استنباط‌ها روبرو شود و به‌خاطر بیاورد که، در هیچ موردی، نمی‌شود بدون دقت‌کافی وبدون پیداکردن نشانه‌های اساسی دیگری، تنها براساس شباهت داوری‌کرد. هرکدام ازما، این ویژگی تفکر ریاضی را آزمایش کرده‌ایم ودریافته‌ایم‌که چگونه این تاثیر، موجب بالارفتن فرهنگ‌اندیشه‌ای دانش‌آموزان ماشده است. برخورد انتقادی بانتیجه‌گیری‌هایی‌که براساس شباهت به‌دست می‌آیند، یکی از بهترین ومهم‌ترین نشانه‌ها، برای تشخیص

تفکر پختهٔ علمی از تفکر ابتدائی وکوته نظرانه است؛ ودانش ریاضی، یکی از بهترین امکان‌ها، برای تربیت اندیشه ابتدائی وتکامل آن به‌سمت اندیشهٔ علمی ودوراندیشانه است.

۳) **مبارزه به‌خاطر تفکیك کامل.** وقتی که ریاضی دان بخواهد یك ویژگی کلی را برای همهٔ مثلث‌ها ثابت کند، گاهی ناچار می‌شود اثبات را برای هرسه حالت مثلث (وقتی که سه‌زاویه حاده، یا یك زاویهٔ قائمه و یایك زاویهٔ منفرجه دارد)، به طورجداگانه، بیاورد. می‌دانیم که چطور تازه‌کاران اغلب دراین مورد، و به‌خصوص اگر داوری خود را براساس یك تصویر گذاشته باشند، دچار اشتباه می‌شوند، مثلاً، شکل مثلثی‌است بازاویه‌های‌حاده وداوری باید روی ساختمانی اضافی‌انجام گیرد که، اگر آن‌را بازاویهٔ منفرجه انتخاب کرده باشیم، یا این داوری غیر ممکن می‌شود ویانیروی استدلالی خود را ازدست می‌دهد. در ریاضیات، این استدلال درست نیست؛ زیرا اساس تفکیك‌کامل رابه‌هم می‌زند: اگرهمهٔ حالت‌های ممکن ومختلف‌موقعیت مورد نظررا پیش بینی نکنیم، ممکن است یکی ازاین حالت‌ها از میدان‌دید ما دورشود.

درموردهای معمولی و وقتی که با قضاوت علمی سروکار نداریم، خواست مربوط به‌تفکیك‌کامل، درهرگام، نقض می‌شود. وقتی‌درموردموقعیت مفروضی، که حالت‌های بسیار زیادی دارد، دردویاسه حالت، به‌نحوی قانع شویم که حادثهٔ A اتفاق می‌افتد، نتیجه می‌گیریم که موقعیت مفروض، در همهٔ حالت‌های خود، باحادثهٔ A همراه است، ولو این‌که، موقعیت مورد نظرما، به‌جز دو یا سه حالتی که مورد بررسی ما قرارگرفته‌است، ده‌ها حالت دیگرهم داشته باشد و، درمیان آن‌ها، حالت‌هائی پیدا شود که وجود حادثهٔ A، به‌هیچ‌وجه برای آن‌ها ضروری‌نباشد. مثلاً می‌گوییم، دانش‌آموزایوانف اصلاً قابل اصلاح نیست، زیرا نه محبت دراو اثرمی‌کند ونه تهدید. در این‌جا، فراموش می‌کنیم که به‌جزمحبت یاتهدید، راه‌های دیگری هم، برای اصلاح دانش‌آموزوجود دارد، ازجمله این‌که می‌توانیم، باحوصله‌وآرامش، برای قانع کردن اوتلاش کنیم، ما در واقع، با قضاوت خود، به‌تفکیك کامل

حالت‌های ممکن نپرداخته‌ایم واین اصل منطقی را نقض کرده‌ایم. اغلب به این مورد برمی‌خوریم که، مثلاً دانش‌آموزی که دربارهٔ معادله‌ای بحث می‌کند، حالت‌هایی را درنظر می‌گیرد که ضریب‌های معادله مثبت یامنفی هستند وگمان می‌کند که، به‌این ترتیب، بررسی خودرا دربارهٔ معادله‌به‌پایان رسانده است، درحالی که فراموش کرده است که، این ضریب‌ها، صفرهم می‌توانند باشند. دراین‌جا هم، تفکیک حالت‌ها، به‌طورناقص انجام گرفته است که می‌تواند به‌نتیجه‌گیری‌های کاملاً اشتباهی منجر شود.

برخلاف دوتوقعی که در بالا مطرح کردیم (مبارزه باتعمیم‌های غیرقانونی ومبارزه باشبیه سازی‌های بی‌پایه)، توقع مربوط به‌تفکیك‌کامل، یعنی به‌حساب‌آوردن همهٔ حالت‌های مختلف وممکن، تنها به‌ریاضیات مربوط نیست ودربارهٔ هرتفکر و یا داوری درستی، باید درنظرگرفته شود. هرگونه استدلالی‌که شامل همهٔ حالت‌های ممکن نباشد، همیشه قابل اعتراض است و، بنابراین، نمی‌توان آن را کامل و بی‌عیب شمرد. فرماندهی که نیروهای خودرا، در برابر دشمن، آرایش می‌دهد، باید بتواند هرگونه پاسخ دشمن را پیش‌بینی کند؛ نادیده گرفتن حتی یکی از حالت‌های ممکن، می‌تواند موجب فاجعه‌ای بزرگ شود. قانون‌های فضایی باید حتماً دربارهٔ تمامی موردهای ممکن اندیشیده باشد، درغیر این صورت، ممکن است قاضی با موردی‌روبرو شودکه درقانون وجود نداشته باشد و، به‌ناچار، شخصاً تصمیم بگیرد.

ولی بی‌نقص بودن مسالهٔ تفکیك به‌تمام حالت‌های ممکن، درهیچ‌جا، به‌روشنی وقاطعیت ریاضیات نیست وهیچ‌کس، مثل یك ریاضی‌دان خوب، اشتباه ناشی ازتفکیك‌کامل‌را، با این سرعت وبی‌رحمی، مورد حمله قرار نمی‌دهد. به‌همین دلیل‌است که‌درس‌های ریاضی‌باید درتربیت دانش‌آموزان وعادت دادن آن‌ها به‌رعایت این مهم‌ترین قانون داوری درست، نقشی‌جدی داشته باشد (که درواقع هم، این نقش را دارد)؛ نقش ریاضیات، دراین مورد، به‌مراتب، بیشتر ازسایر موضوع‌های‌درسی است.

۴) **مبارزه به‌خاطرکمال و استواری طبقه‌بندی‌ها.** طبقه بندی کردن،

تنها کار یك دانشمند نظری نیست، بلکه اغلب کارمندان کارهای عملی هم ـ مثل مهندسان، پزشکان، معلمان، آمارگران ومتخصصان کشاورزی ـ به‌طبقه‌بندی نیازدارند. برهمگان روشن است که اگرذهن نپخته وتربیت نشده‌ای، تمایل به‌طبقه‌بندی داشته باشد، دچار اشتباه‌های گوناگونی می‌شود؛ عمومی‌ترین این اشتباه‌ها عبارت ازخراب کردن کمال وتمامیت طبقه‌بندی وخراب‌کردن استواری و یگانگی آن است. خراب کردن تمامیت طبقه بندی، به‌این معنا است که مفهوم‌هائی وجود داشته باشندکه در هیچ یك از طبقه‌ها وارد نشده‌اند ویا این‌که، اساساً، همهٔ طبقه‌ها مورد توجه قرار نگرفته‌اند. مثال‌های ساده: دانش‌آموز، دربرابر پرسش «چه‌گیاهانی را می‌شناسید؟»، پاسخ می‌دهد «علف‌ها و درختان» و بوته‌ها وگل‌سنگ‌ها و بسیاری نوع‌های دیگر را ازیاد می‌برد؛ واحدهای نظامی را، به‌زمینی، دریایی وهوائی تقسیم می‌کنند (و واحدهای سررشته‌داری، ارتباطات وبسیاری دیگر را فراموش می‌کنند)؛ عددهای طبیعی را شامل عددهای اول و عددهای مرکب می‌دانند (واز عدد ۱ غفلت می‌کنند)؛ عددهای حقیقی از عددهای مثبت و عددهای منفی تشکیل شده‌اند (که البته، عدد صفر بلاتکلیف می‌ماند).

توقع طبقه‌بندی کامل، ظاهراً شبیه توقعی است که قبلاً دربارهٔ تفکیك کامل حالت‌های مختلف مطرح کردیم، ولی درواقع ازنظرمضمون، بایکدیگر فرق دارند. درآن‌جا صحبت از ضرورت توجه به‌همهٔ موقعیت‌های ممکنی است که به‌وجود می‌آید، درحالی که دراین‌جا، بحث برسرشمردن همهٔ گوناگونی‌های یك مفهوم است. ولی در هردو مورد، طبقه‌بندی کامل مورد توقع ریاضیات، روشن‌تر ومطلق‌تر ازسایر دانش‌ها است، وبه‌همین مناسبت، برای تربیت این عنصر «درست اندیشیدن»، بهترازهرجای دیگری، می‌توان ازریاضیات یاری گرفت.

استواری طبقه بندی که، طبق قاعدهٔ معینی انجام گرفته باشد ونشانهٔ شناسائی آن‌ها مشخص باشد. این توقع، که برای درست ودقیق اندیشیدن، بی‌اندازه ضروری است، نه‌تنها درداوری‌ها واستدلال‌های عادی و زودگذر، بلکه حتی دربسیاری موردهای جدی هم، اغلب مورد توجه قرار نمی‌گیرد.

نمونه‌های ساده‌ای از بی‌پایگی وناستواری طبقه‌بندی‌هارا می‌آوریم: ضمن نام بردن ازانواع کشتی‌ها، ازکشتی‌های پاروئی، تفریحی، بادبانی، موتوری ونظامی نام برده می‌شود؛ روشن است که، این تقسیم بندی، براساس نیروی محرکهٔ کشتی آغاز می‌شود، ولی عنوان آخری، این اساس را به‌هم می‌زند؛ مثالی دیگر: انواع کفش‌ها عبارت است ازکفش‌چرمی، کفش برزنتی، کفش لاستیکی وکفش مد روز؛ دراین جا هم، عنوان آخر، اساس طبقه‌بندی را (برپایهٔ جنس کفش) خراب کرده است. البته، دراین‌گونه تقسیم بندی‌ها، همیشه ادعای یك طبقه بندی استوار ، وجود ندارد و، بنابراین، لزومی هم به‌رعایت یك مبنای واحد درموردآن نمی‌بینند (مثال، آگهی: کارخانه، چند نجار، چندگچ‌کار، چند زن وچند دوشیزه استخدام می‌کند). ولی هرجا که، چنین‌گروه بندی هایی، بخواهند درنقش طبقه‌بندی ظاهرشوند، نا استواری اساس‌آن، تمامی طرح را دچار ابهام می‌کند که می‌تواند ، به‌نوبهٔ خود ، موجب خطاهای نظر وسردرگمی‌های عملی باشد. به‌همین مناسبت، هر ذهن منطقی وتربیت شده‌ای، ناستواری مبنای طبقه‌بندی را، کمبودی جدی برای استدلال و داوری می‌داند. و دوباره ، نقش دانش ریاضی ظاهر می‌شود؛ دروس‌های ریاضیات است که دانش‌آموز راه طبقه‌بندی درست، کامل و استوار را می‌بیند ومی‌تواند خودرا باآن تطبیق دهد.

*

من، آن جنبه‌هایی ازمبارزه به‌خاطررسیدن به‌اندیشهٔ منطقی واستدلال کامل را نام بردم که به‌نظرم مهم‌تر وجدی‌تر می‌رسید. همان‌طورکه قبلاً هم گفته‌ام، نمی‌توانم دراین مقاله به‌بحث دربارهٔ روش‌های آموزشی بپردازم و مشخص کنم که معلم ریاضیات، چگونه می‌تواند دانش‌آموزان خودرا، با موفقیت بیشتری، به‌این جنبه‌ها عادت دهد و ، درنتیجه، به‌سمت «درست و منطقی‌اندیشیدن» هدایت کند. با وجود این، لازم می‌بینم یك مسالهٔ آموزشی را که خصلتی عام دارد (وبرای معلمان کارآزموده روشن است) مطرح کنم: دانش‌آموزرا باید به‌تدریج: گام به‌گام وبدون هیچ فشار اضافی، باقانون‌های درست اندیشیدن (که دربارهٔ آن‌ها سخن رفت) آشنا کرد و به‌آن‌ها

عادت داد؛ این درست نیست که گمان کنیم، می‌توان درس خاصی را، مثلاً به «مبارزه با شبیه‌سازی‌های بی‌اساس» اختصاص داد؛ چنین روشی، تنها می‌تواند، به‌صورتی جبران‌ناپذیر، همهٔ تاثیرهای مورد انتظار را از بین‌ببرد. برعکس، باید ازهرگونه بحث کلی پرهیز کرد وتوجه دانش‌آموزان را به‌جنبه‌های منطقی و آموزنده‌ای که، دراین باره، در موضوع‌های مشخص و قانع‌کنندهٔ درس‌های ریاضی وجود دارد، جلب کرد. ضرورت استدلال‌های منطقی وکامل، به‌معنای این نیست که دائماً و به‌صورتی بیزارکننده این ضرورت را تکرارکنیم، بلکه باید درعمل و روی موردهای مشخص، نشان دهیم (وتقریباً هردرسی ازریاضیات، این امکان را برای مابه‌وجودمی‌آورد) که چگونه عدم رعایت این یاآن قانون، موجب ناکامی، اشتباه وسردرگمی می‌شود. نباید به‌صورت تجریدی، وبه‌طورکلی، دربارهٔ استدلال وداوری درست، بحث کرد، بلکه باید دانش‌آموزرامتوجه‌کردکه هرکمبود یااشتباهی که دراستدلال وداوری او باشد، مواجه باپرسش وخورده‌گیری معلم و یا (چه بهتر) دوستان خود اومی‌شود.

دراین جا، دراین باره صحبت نخواهم کردکه چگونه باید از درس ریاضیات، برای تشخیص یك حکم مستقیم از حکم عکس آن و بسیاری تشخیص‌های دیگر مشابه‌آن، استفاده‌کرد. ازیك طرف، آن قدر دراین‌مورد نوشته شده است که من به‌زحمت می‌توانم چیزی به‌آن چه دیگران گفته‌اند، اضافه‌کنم. ازطرف دیگر، باهمهٔ اهمیتی که این‌گونه موضوع‌ها برای درست اندیشیدن دارند، به‌خاطرخصلت اختصاصی خود، کمتر می‌توانند درخارج‌از ریاضیات، به‌کارآیند و، بنابراین، اهمیت آن‌ها به‌اندازهٔ جنبه‌هایی که مورد بحث قراردادیم، نیست.

۲. اسلوب تفکر. ریاضیات، علاوه برامتیازی که به‌خاطرصحت‌کاملاً منطقی نتیجه‌گیری‌های خود دارد، دراسلوب وشیوهٔ تفکرهم، با دانش‌های دیگر متفاوت است. گرچه این اسلوب، درطول سده‌ها، وحتی درطول ده‌ها سال، تغییرکرده است و ازاین به‌بعد هم تغییر می‌کند، ولی دارای بعضی خط‌های کلی است که همیشه موجب تمایز آن از اسلوب‌های مربوط به سایر

دانش‌ها بوده‌است.

اسلوب تفکری که دریك علم مورد تایید قرارگرفته است، چیزی بیرون ازآن دانش و، بنابراین، عاملی درجه دوم نیست که تنها ارزش هنری و زیبایی شناسی داشته باشد و، در نتیجه، نتواند برتکامل این دانش، تاثیری جدی بگذارد. برعکس، اسلوب تفکررا، تا حد زیادی، می‌توان ازروی روشنی وصراحت بستگی‌های نظری، سادگی وروشنی ساختمان‌های علمی، عینی‌بودن مفهوم‌ها و غیرآن بازشناخت، و همهٔ این‌ها هم، به‌نوبهٔ خود، با ثمربخش بودن شاخه‌های دانش وآموزش علمی و، همراه با آن، باآهنگ پیشرفت دانش، بستگی‌کامل دارند.

بعضی ازجنبه‌های اسلوب تفکرریاضی، اهمیت عمومی وگسترده‌ای دارند. اگرچنین جنبه‌هایی ازتفکر ریاضی، مورد توجه نمایندگان سایر دانش‌ها وفعالیت عملی قرارگیرد، چه برای خود آن‌ها وچه برای شاگردان وهواداران آن‌ها، می‌تواند خدمت ذیقیمتی باشد. وقتی که یك ریاضی دان، اثری ازیك دانشمند سرشناس رابخواند، بی‌اختیار وبا تعجب پیش خود زمزمه می‌کند: «بله، اوهم مثل من می‌اندیشد»، شگفتی او، بیشتر از این جا ناشی می‌شودکه درآن شاخهٔ دانش، اسلوبی را برای تفکر پذیرفته‌اندکه خیلی‌کم بااسلوب ریاضی شباهت دارد.

ولی، اگرفراگیری بعضی جنبه‌های تفکرریاضی می‌تواند دربهترکردن شیوه اندیشه‌ای درسایرشاخه‌های دانش وفعالیت‌های عملی مفید باشد، و وسیلهٔ نیرومند و ثمربخشی برای اندیشهٔ انسانی به‌حساب می‌آید، روشن می‌شودکه چرا نباید ازآموزش مغزهای جوان دراستفادهٔ ازاین وسیله غفلت کرد؛ باید دانش‌آموزان‌را، به‌تدریج واداشت‌که ابتدا درخود ریاضیات و، سپس، دربیرون ازآن، به‌این شیوهٔ تفکر عادت‌کنند. برای رسیدن به‌این هدف، باید قبل از همه، منظور خود را ازاین جنبه‌های تفکر ریاضی، روشن کنیم.

*

درپایهٔ هرساختمان اندیشه‌ای درستی، بدون ارتباط باموضوعی که

مضمون آن را تشکیل می‌دهد، طرحی منطقی قراردارد که، هر ذهن پخته‌ای، آن را به‌عنوان نوعی استخوان بندی منطقی، که برای موضوع مورد بررسی استوار وقانون مند است، مـی پذیرد. اسلوب تفکرهرچه باشد، این طـرح منطقی باید قانون مند وبـدون نقص باشد؛ درغیر ایـن صورت، استدلال و داوری نامرغوب می‌شود و، بنابراین، بایدکنار گذاشته شود.

باوجود ایـن، نقش وموقعیت ایـن استخوان بندی منطقی درجـریان اندیشه، بسیار گوناگون است و، در واقع، به‌اسلوب تفکر مربوط می‌شود. دربعضی حالت ها، طرح منطقی، با راهنمائی جنبه‌ای از تفکر معین می‌شود، به‌نحوی که صاحب اندیشه، همیشه این نکته را دربرابر خـود می‌بیند و، برطبق آن، مرحله‌های بعدی داوری‌را انتخاب وهدایت من کند. درحالت‌های دیگر، برعکس، استخوان بندی منطقی خاموش می‌ماند و فکر، تاحد زیادی، به‌وسیلهٔ خواست‌های مضمون مشخص خود موضوع مورد بررسی هـدایت می‌شود؛ دراین جا، نقش منطق در بازبینی بعدی‌ظاهرمی‌شود واین‌بازبینی‌هم اغلب، به‌صورت طرحی کتبی یاذهنی، تنها درنظر گرفته می‌شود، بدون‌این‌که درعمل نیازی به‌آن باشد؛ وبه‌این ترتیب، طرح منطقی، به‌عنوان یك واحد کامل، دربیرون ازمیدان دیـد صاحب اندیشه باقـی مـی‌ماند. روشن است، اسلوب‌هایی از تفکر هـم وجود دارد کـه درحد فاصل این دواسلوب قرار گرفته‌اند.

تلاش برای رسیدن به‌حد اعلای طـرح منطقی استدلال و داوری، از ویژگی‌های ریاضی دانان است؛ ریاضی دانی که، حتی وبه‌تصادف و به‌طور موقت، ازاین طرح جـدا شود، به‌طورکلی، امکان تفکـر علمی را ازدست می‌دهد. این جنبهٔ اختصاصی اسلوب تفکرریاضی، که تااین درجهٔ کمال، در هیچ دانش دیگری وجود نـدارد، ارزش وارج بسیاری را درخـود نهفته است. بدیهی است که این اسلوب، حد اکثر امکان را بـرای حرکت درست اندیشه‌فراهم می‌آورد وآن‌را مصون ازاشتباه می‌سازد؛ ازطرف دیگر، ایـن اسلوب تفکر، صاحب اندیشه‌را وا مـی‌دارد تا، ضمن هرتفکیك کامل، همـهٔ حالت‌های ممکن را دربرابر چشمان خود داشته باشد وهمهٔ آن‌هارا، بدون

کنار گذاشتن حتی یك مورد، به‌حساب بیاورد (غفلت‌کردن ازبعضی موردها، اغلب دراسلوب‌های دیگر تفکر دیده می‌شود). به‌همین مناسبت، آن‌چـه از طریق درس‌های ریاضی دراین مورد به‌دست می‌آید، می‌تواند اهمیت فوق‌العاده‌ای برای بالابردن فرهنگ عمومی تفکردانش‌آموزان داشته باشد.

به‌عنوان یکی از روشن‌ترین و جالب‌ترین نمونه‌هایی که، در زمینه‌ای دور از ریاضیات، به‌صورتی‌کامل، این اسلوب تفکـررا رعایت‌کرده است، می‌توان ازنوشتهٔ مارکس نام برد. خواننده‌ای کـه، بعد ازمطالعهٔ نوشته‌هـای اقتصادی دیگر دانشمندان، کتاب «سرمایه» راباز می‌کند، ازهمان صفحه‌های نخست، به‌خاطرمنطق آهنین واستوار سطرهای آن، به‌حیرت می‌افتد. طـرح منطقی، باتوقع‌های بی‌چون وچرائی که این‌طرح باخود می‌آورد، نه‌تنهامسیر فکری نویسنده را معین می‌کند، بلکه خواننده راهم، که نمی‌تواند از تاثیر خط فکری اوخارج شود، به‌نحوکاملا قانع‌کننده‌ای، به‌دنبال خود می‌کشاند. این شیوه ــ که برای نوشته‌های اقتصادی غیرعادی وبه‌اسلوب ریاضی‌خیلی نزدیك است، دائماً درخواننده، احساس استواری، اطمینان واقناع‌کامل را به‌وجود می‌آورد و، درعین‌حال، کمکی‌جدی برای فهم پردوام موضوع‌های مورد بحث‌کتاب است.

*

دومین جنبه‌ای که به‌اسلوب ریاضی تفکر مربوط می‌شود و می‌توانیم، دراین‌جا، ازآن یادکنیم، خصلت **اختصارگوئی** است، تعیین‌وتمایل آگاهانه درجهت پیداکردن کوتاه‌ترین مسیر منطقی به‌سوی هدف وکنارگذاشتن همهٔ آن‌چه‌که برای استدلال کامل وبی‌نقص ما، ضرورت ندارد. یك اثر ریاضی، که خوب نوشته شده باشد، به‌هیچ‌وجـه وقت خواننده را تلف نمی‌کند واز هرگونه جمله‌پردازی پرزرق و برقی‌که موجب تضعیف نیروی منطقی مطلب باشد، پرهیز می‌کند؛ خست کامل و دقت بی‌اندازه دراندیشه و طرح مطلب، ازجنبه‌های مسلم وجدانشدنی اندیشهٔ ریاضی است. این جنبه نه‌تنها بـرای ریاضیات، بلکه برای هرگونه بحث واستدلال جدی (درهرزمینه‌ای که‌باشد)، اهمیت بسیار دارد. اختصارگوئی وتمایل به‌حذف هرآن‌چـه اضافی است،

هم به‌خود صاحب اندیشه وهم به‌خوانندگان یاشنوندگان اوکمك می‌کند تا اندیشهٔ خودرا، درهمان جهتی که‌لازم است، متمرکز کنند، حواسشان به‌طرف موضوع فرعی پرت نشود وتماس آن‌ها، باخط اصلی بحث قطع نشود.

نام‌داران دانش، حتی زمانی که می‌خواهند اندیشه‌های تازهٔ خود را مطرح کنند، این جنبهٔ اختصارگوئی را رعایت مـی‌کنند. اندیشه‌هـا وسخنان کوتاه بزرگترین‌آفرینندگان فیزیك، یعنی نیوتون و انیشتن ونیلس بور، چه تاثیرعظیمی بردیگران‌گذاشته است! به‌سختی می‌توان، مثالی روشن‌ترازتاثیر عمیقی که اسلوب تفکـر آفرینندگان این اسلوب بـرتکامل دانش گذاشته‌اند، پیدا کرد.

برای ریاضیات، اختصارگوئی اندیشه، قانونی است انکارناپذیر که درطول سده‌های بسیار، به‌رسمیت شناخته شده است. هرگونه بحث، سخن یا طرحی که مزاحم بحث اصلی باشد ویاضرورتی نداشته باشد (ولـو این‌که، برای شنوندگان، مطبوع وسرگرم‌کننده‌هم باشد)، باهشدار انتقادی رو به‌رو می‌شود. به‌همین مناسبت، درس‌های‌ریاضی، بهترازهردرس دیگری، می‌تواند عادت به‌اختصارگوئی وحرکت مستقیم به‌طرف مقصدوگم نشدن دراندیشه‌های اضافی وغیرلازم رادردانش‌آموزان به‌وجودآورد.

*

سپس، باید ازتقسیم بندی روشن استدلال وداوری نام برد، کـه یکی دیگر ازخصلت‌های اسلوب تفکر ریاضی است. وقتی که مثلا، بـرای اثبات یك حکم، باید چهارحالت ممکن را درنظر بگیریم وهریك ازاین حالت‌ها هم ممکن است به‌چند حالت جزئی‌تر تقسیم شوند، آن وقت درهرلحظه‌ای که ریاضی‌دان استدلال یاداوری می‌کند، باید به‌روشنی بداندکه اندیشهٔ او درموردکدام حالت یاحالت جزئی است وچه حالت‌ها یا حالت‌های جزئی، هنوز برای بررسی، باقی مانده‌اند. ریاضی دان، در مورد هرتقسیمی، بایـد درهرلحظه‌به‌این پرسش پاسخ دهدکه‌کدام خانواده از مفهوم‌هارا، به‌مفهوم‌های جزئی‌ترتقسیم کرده‌است. دراندیشه‌های غیرعلمی عادی، اغلب به‌اختلاط حالت‌ها وپرش ازحالتی به‌حالت دیگر برمی‌خوریم که موجب سردرگمی و

اشتباه دراستدلال وداوری می‌شود. بسیار پیش می‌آیدکه‌کسی آغاز به‌شمردن نوع‌های یك خانواده می‌کند و، بعد ، یواشکی و بدون این‌که برای شنونده (وگاهی حتی‌برای خودش) روشن باشد، بااستفاده ازمنطقی ضعیف وناکافی، به‌خانوادهٔ دیگری می‌پرد و، سرانجام، اعلام می‌کندکـه هردوخانواده را طبقه‌بندی کرده‌است؛ وشنوندگان یا خوانندگان متوجه نمی‌شوندکه،درکجا، ازمرز بین نوع‌های دوخانواده گذشته است.

ریاضی دانان، از دیرباز، برای جلوگیری ازاین‌گونه اختلاط‌هـا و پرش‌ها، چاره‌ای اندیشیده‌اند و ازروش‌های سادهٔ شماره‌گذاری مفهوم‌هـا و قضیه‌ها، به‌طورگسترده‌ای، استفاده می‌کنندکه، گاهـی (والبته به‌ندرت) در سایر دانش‌ها هم به‌کار می‌رود. حالت‌های مختلف ویامفهوم‌های خانواده‌ای را، که باید مورد بررسی وداوری قرارگیرند، ازقبل شماره‌گذاری‌می‌کنند؛ سپس، به‌حالت‌های فرعی هریك ازاین‌حالت‌ها، به‌نوبهٔ خود (وگاهی، برای تمایز، به‌کمك دستگاه شماره‌گذاری دیگـری) شماره می‌دهند. جلـو هـر قطعه‌ای که بررسی یك حالت فرعی تازه آغاز می‌شود، نشانه‌ای کـه برای این حالت فرعی درنظرگرفته شده است، قرار می‌دهند (مثلا می‌نویسند: II، ۳.، که به‌معنای حالت فرعی سوم ازحالت دوم ویا نوع سوم از خانوادهٔ دوم است). وخواننده به‌خوبی می‌داند کـه تااین لحظه، به‌این عنوان عددی برخورد نکرده است وآن‌چه زیراین عنوان می‌خواند، تنها به‌همین حالت و حالت‌فرعی مربوط می‌شود. به‌خودی‌خودبدیهی است‌که این شماره‌گذاری‌که بی‌اندازه مفید است، یك روش بیرونی است؛ اصل مطلب، دراین‌شماره‌گذاری نیست، بلکه درتقسیم‌بندی روش استدلال‌ها و یا طبقه‌بندی‌هـا است؛ وشماره‌گذاری مصنوعی ما، تنها می‌تواندگواهی براین واقعیت باشد.

*

سرانجام، باید ازیك سنت‌کاملا بیرونی ومصنوعی اسلوب ریاضی یاد کنیم که، برای منظورما، بی‌اندازه مفید است وچنان ارزش‌تربیتی نیرومندی داردکه نمی‌توان ازآن صرف نظرکرد. منظورمن، **دقت فوق‌العاده علامت‌گذاری‌ها** است،که از ویژگی‌هـای ریاضیات به‌شمار می‌رود. هر نماد یـا

علامت ریاضی، معنای کاملا معینی دارد؛ تبدیل یك نماد به‌نماد دیگر و یا جابه‌جا کردن آن، موجب تحریف می‌شود و، گاهی، مفهوم موضوع مورد بررسی را، به‌کلی، از بین می‌برد. دانش‌آموزی که هنوز به‌سخت‌گیری کافی درمورد صحبت‌های شفاهی یا نوشته‌های کتبی عادت نکرده‌است، ممکن است، در ابتدا، با نوعی بی‌توجهی با پیشنهاد بدون انحراف ومحکم معلم ریاضیات برخورد کند که: هر نوشتهٔ ریاضی باید دقت مطلق داشته باشد؛ حتی ممکن است، این سخت‌گیری‌ها، به‌نظرش خرده‌گیری‌های بی‌جا بیاید وموجب استهزای او بشود. ولی، خیلی زود و با تجربهٔ شخصی خود در می‌یابد که، اگر در نوشتن علامت‌های ریاضی دقت کامل را رعایت نکند، باید بلافاصله جریمهٔ سنگین آن را بپردازد: نمی‌تواند مفهوم آن چه را که نوشته‌است بفهمد و ناچار می‌شود حدس بزند، حدس نادرست می‌زند و، یا پاسخ نادرست به‌دست می‌آورد ویا امکان حل مساله را به‌کلی ازدست می‌دهد. در بهترین حالت خود، ناچار می‌شود باصرف نیروی زیاد به‌عقب برگردد وآن را به‌صورت درست بازنویسی کند تا بتواند گام بعدی را بردارد.

به این ترتیب، دانش‌آموز قانع می‌شود که رعایت دقت در نوشتن نمادهای ریاضی، به‌نفع خود اواست و، بنابراین، خودرا با آن وفق می‌دهد و، به‌تدریج، دقت در نمادهای ریاضی، جزوعادت‌های اومی‌شود. این عادت، به‌تدریج، فضای فکری اورا اشغال می‌کند و، سرانجام، منجر به‌اسلوبی عام برای تفکراو می‌شود؛ سعی می‌کند، چه درصحبت‌ها وچه درنوشته‌های خود، دقیق‌تر باشد؛ او، به‌خصوص، دقت زیادی دردرست‌نویسی خود پیدا می‌کند واشتباه‌های املایی، به‌همان‌اندازهٔ اشتباه‌های نمادی درریاضیات، او را به‌تشویش می‌اندازد ونگران می‌کند. ما شاهد این وضع هستیم که، وقتی دانش‌آموزان نسبت به‌نمادهای ریاضی، سخت‌گیری و دقت لازم را پیدا کنند، خیلی ساده‌تر وسریع‌تر، اشتباه‌های املائی خودرا هم تصحیح می‌کنند. ومن نمی‌دانم که، آیا ممکن است کسی که دبیرستان را تمام می‌کند، دارای فرهنگ ریاضی لازم برای گواهی‌نامهٔ دبیرستانی باشد، ولی هنوز یاد نگرفته

باشد بدون اشتباه بنویسد.

*

با به‌پایان رساندن این بخش، که به تاثیر تربیتی درس‌های ریاضی براندیشهٔ دانش‌آموزان اختصاص داشت، حیرت طبیعی خواننده را دراین باره پیش بینی می‌کنم که، چرا هیچ اشاره‌ای به‌مسالهٔ تکامل تفکر دیالکتیکی نکرده‌ام. به‌همین مناسبت، لازم می‌بینم، دربارهٔ این موضوع، توضیح کوتاهی بدهم.

مارکس وانگلس بادلیل کافی تاکید می‌کنند که ریاضیات، نه‌تنها وسیله‌ای پرمضمون وروشن‌کننده برای قانون‌های تفکر دیالکتیکی است، بلکه ضمناً، به‌صورتی دائمی ومنظم، به‌تکامل توانائی ومهارت دیالکتیکی ما، در روند تفکر کمك می‌کند. ولی، همان‌طور که بنیان‌گذاران مارکسیسم، بارها تکرار کرده‌اند، این موضوع تاحد زیادی، به‌ریاضیات «عالی» یعنی ریاضیات باکمیت‌های متغیرمربوط می‌شود. دراین‌جاست که به‌بررسی ریاضی پدیده‌های طبیعی، جریان‌های صنعتی ودگرگونی‌های زندهٔ آن‌ها، ونه «اجسام» بی‌حرکت وثابت می‌پردازیم. دراین‌جاست که کمیت‌ها، در بستگی متقابلی که نسبت به‌هم دارند (مفهوم تابع) مورد بررسی قرار می‌گیرند و نه به‌صورت مجرد وجدا ازهم. عبور ازکمیت به‌کیفیت، سنتز دیالکتیکی براساس تضاد ودیگرقانون‌های دیالکتیکی، هرگز پشتوانه‌ای به‌این حد عینی وقانع‌کننده، نمی‌توانند بیابند. واین، یکی ازدلیل‌هایی بوده است (والبته، درکنار دلیل‌های دیگر) که مقدمهٔ ریاضیات عالی را، در برنامهٔ دبیرستانی وارد کرده‌ایم.

ولی ما هنوز در این‌باره تلاش می‌کنیم. البته‌ریاضیات «مقدماتی» هم ـ که برنامهٔ اصلی دبیرستانی را تشکیل می‌دهد ـ مثل هردانش اصیل و زنده‌ای، نمی‌تواند شامل عنصرهای دیالکتیکی‌نباشد. ولی دراین‌جا به‌صورتی ناقص جلوه‌می‌کنند ونیروی لازم راندارند و، درمقاله‌ای به‌اختصاص اهرم‌های اصلی تاثیر تربیتی درس‌های ریاضی دارد، نمی‌توان به‌آن‌ها پرداخت. ولی من درنظردارم، مقاله ای دربارهٔ ضرورت واردکردن عنصرهایی از

ریاضیات عالی در برنامهٔ دبیرستانی بنویسم؛ و امیدوارم که درآن‌جا نشان دهم که، ریاضیات کمیت‌های متغیر، چه‌نیروی عظیمی برای تربیت تفکر دیالکتیکی دانش‌آموزان به‌شمارمی‌رود.

II. جنبه‌های اخلاقی و تربیت میهن دوستی

دربارهٔ نقش واهمیت درس‌های ریاضی درتربیت وپرورش تفکر درست ومنظم، بسیار گفته ونوشته‌اند. ولی، دربارهٔ تاثیر آگاهی‌های ریاضی بر شکل‌گیری خصلت و شخصیت اخلاقی دانش‌آموزان، تقریباً چیزی گفته نشده است. دلیل این امر ، کاملا معلوم است : دانش ریاضی ، به‌دلیل انتزاعی بودن موضوع خود، نمی‌تواند چنان تاثیر مستقیمی را که، مثلا تاریخ یا ادبیات، ازنظر اخلاقی بر دانش‌آموزان دارد، داشته باشد ونقشی بدون واسطه، درشکل دادن به‌خلق و خو و احساس آن‌ها به‌عهده بگیرد. با همهٔ این‌ها، نمی‌توان از این‌جا به‌این نتیجه‌گیری سطحی تن دادکه درکار شکل دادن به‌شخصیت اخلاقی دانش‌آموز، باید درس‌های ریاضی را، به‌طورکلی، ازقلم انداخت. تجربهٔ سال‌های طولانی، به‌من نشان داده است که، یادگیری دانش ریاضی ــ کم‌کم وکاملا به‌تدریج ــ ناگزیر درجوانان تاثیرهایی می‌گذاردکه رنگ روشن اخلاقی دارند و، درطول زمان، می‌توانند به‌مهم‌ترین سیمای اخلاقی‌آنان منجرشوند. فعال‌ترکردن این‌جریان واستحکام بخشیدن به‌نتیجه‌های‌آن، ازوظیفه‌های جدی هرمعلم ریاضی است. ولی قبل ازهمه‌باید بدانیم که‌این جنبه‌های اخلاقی‌کدام‌اند وچه ویژگی‌هایی ازکار ریاضی قادر به‌پرورش‌آن‌ها است.

۱. درستکاری وحق‌گویی. درمشاجره‌های‌عادی وکوته‌بینانه، معمولا، هرطرف دعوا ازجائی آغاز می‌کندکه مسالهٔ مورد نزاع را بهتر وساده‌تر به‌نفع‌اوحل‌کند وازجست وجوی‌هرگونه برهانی، برای حل مساله، به‌نحوی که به‌نفع اوباشد دریغ نمی‌کند و، دراین راه، ازهمهٔ قابلیت‌های خود

استفاده می‌کند. ضمناً، دوطرف مشاجره، در ارتباط با موقعیت، محیط و مضمون بحث، سخنان خودرا مستند می‌کنند و با استفاده ازاخلاق موردقبول همه، حق‌های «طبیعی»، نوشته‌های مقدس، قانون‌های حقوقی و ، گاهی، با استناد به‌گفته دانشمندان معتبر و رهبران نامدار سیاسی، بحث خود را رونق می‌دهند. همهٔ ما بارها دیده‌ایم که این بحث وگفت وگوها با چه شور و هیجانی ادامه می‌یابد وهریك ازدوطرف، چه اعتقاد بی‌چون و چرائی نسبت به‌استدلال‌های خود دارند.

وکاملا روشن است که، تنها دربحث عادی روزمره، باچنین بحث‌هایی مواجه نمی‌شویم. همین وضع وباهمین دقت، اغلب درمشاجره‌های علمی هم دیده می‌شود. دانشمندی نتیجه‌هایی را، بااعتقادکامل، به‌دست می‌آورد، ولی به‌طور جدی، و بازهم بااعتقادکامل، با اعتراض دیگران مواجه می‌شود؛ بحث در می‌گیرد، هرطرف استدلال‌های تازه‌ای به‌نفع خود پیدا می‌کند، حتی آزمایش‌های تازه‌ای پیشنهاد می‌شود و، بازهم، هرطرف بنا به میل‌خود ازآن‌ها نتیجه‌گیری می‌کند. درجریان مشاجره، هرطرف نه‌تنها تلاش می‌کند تاموقعیت خودرا، تا آن جاکه می‌تواند، تقویت‌کند، بلکه ضمناً از هر وسیله‌ای هم استفاده می‌کند تا موقعیت طرف مقابل خودرا متزلزل وبی‌اعتبار سازد وحتی، گاهی، تا آن‌جا پیش می‌رودکه این بی‌اعتباری را به‌موضوع‌های شخصی اوهم می‌کشاند. و به‌مذمت پیش می‌آید که درچنین مشاجرهٔ پرتشنجی، یکی از دوطرف دعوا، باشرافت و مردانگی، اشتباه خود را بپذیرد .

زمینه‌های ذهنی چنین پدیده‌هایی در مورد دانش، به‌سادگی قابل درك است: باکمال تاسف بایدگفت این پایه‌های ذهنی، به‌خاطر نامقبولی خود، هیچ تفاوتی با پایه‌های ذهنی‌کوچك‌ترین دعواهای عادی ندارند. پایه‌های عینی این‌گونه موقعیت‌های علمی را هم، می‌توان به‌سادگی پیدا کرد: در دانش‌های تجربی، هرچیز تازه‌ای را هنوز نمی‌توان پایان یافته و به‌عنوان یك قانون تلقی‌کرد و، دست‌کم به‌طورموقت، صورت یك «فرضیه» رادارد؛ بنابراین، هنوز مساله به‌طورقطع حل نشده است و، ملاحظه‌هایی (تجربی یا

نظری)، هم به‌نفع این‌فرضیه وهم درجهت مخالفت باآن وجود دارد. یکی ازدانشمندان ممکن است به‌جمع‌آوری همهٔ استدلال‌هایی بپردازدکه مؤید این فرضیه‌اند ودیگری، برعکس، به‌ملاحظه‌هایی توجه‌کندکه برنادرستی‌آن تاکید می‌کنند. کاررا می‌توان شبیه یك پروندهٔ جنایی دانست‌که دادستان و وکیل مدافع، هرکدام به‌طورجداگانه، استدلال‌های خودرا، یکی علیه متهم ودیگری به‌نفع او، جمع‌آوری می‌کنند.

بدیهی است، یك بحث علمی‌که بدین‌گونه طرح شده باشد، به‌خودی خود، ازنظر اخلاقی، هیچ جنبهٔ ناپسندی ندارد: جمع‌آوری همهٔ دلیل‌های ممکن؛ چه به‌سود فرضیهٔ مفروض وچه علیه آن، همیشه ودرهرحالتی، موجب پیشرفت دانش می‌شود؛ بحث‌استدلالی‌که، علیه یا له فرضیه، بین دودانشمند (یا دوگروه از دانشمندان) جریان داشته باشد، به‌شرطی‌که هردوطرف در برخورد با موضوع‌ها انصاف داشته باشند وهدف آن‌ها، تنها کشف حقیقت عینی باشد، شایستهٔ هیچ‌گونه سرزنشی نیست. انحراف ازموازین اخلاقی و زشتی‌کار ازآن‌جا آغاز می‌شود که دانشمند، در نتیجه‌گیری‌های خود، علاقهٔ به‌کشف حقیقت عینی را ازدست بدهد وبخواهد (با آگاهی‌کامل، آگاهی نسبی ویا به‌کلی ناآگاهانه) ازاین نتیجه‌گیری‌ها، به‌خاطر منافع شخصی خود (لجاجت، شهرت‌طلبی یا طمع‌کاری) استفاده کند؛ آن‌وقت است که، کاملا شبیه جنجال‌ها ودعواهای حقیر وعادی، استدلال‌های باتعصبی کور در می‌آمیزند، درموردهای نابجابه‌کاربرده می‌شوند وتکیهٔ بحث بر «استدلال‌هایی» غیرعینی و نادرست قرار می‌گیرد. این انحطاط دربحث‌های علمی را، همچون وصلهٔ ناجوری، حتی در زندگی برخی از بزرگترین نام‌آوران دانش‌هم می‌توان دید؛ وباکمال تاسف، در بین دانشمندان پایین تر و درجه دوم‌تر، پدیده‌ای عادی است.

تنها دانش ریاضی است‌که از همهٔ این جنبه‌های نامعقول، مبرا است. دانش ریاضی، هرگز «فرضیه‌ای» پیشنهاد نمی‌کند که، برای اثبات درستی یا نادرستی‌آن، نیاز به‌بحث ومشاجره باشد. تا زمانی‌که طرحی اثبات نشده باشد، به‌طورکامل، بیرون ازگنجینهٔ دانش قراردارد وهیچ‌کس به‌ذهنش‌خطور

نمی‌کند، به‌دفاع ازآن برخیزد؛ واگر ثابت شده باشد، هیچ‌کس درمورد درستی‌آن تردید نمی‌کند و، درنتیجه، الزاماً مورد قبول همگان قرار می‌گیرد. ریاضیات، هیچ‌گونه موقعیت بینابینی را به‌رسمیت نمی‌شناسد. تنها بی‌سوادان، شیادان ویا بیماران روانی ممکن‌است به‌فکردفاع ازیك اثبات ناقص در ریاضیات وبحث دربارهٔ آن بیفتند (از هرسه نوع، گاه به‌گاه و به‌خصوص در رابطه با حل مساله‌های تربیع دایره و تثلیث زاویه، پیدا می‌شوند)؛ ولی این «مدافعان» ، بلافاصله، هم‌آواز و بی‌رحمانه، از جانب محفل‌های علمی افشا و طرد می‌شوند. هیچ تعصب یا تمایلی و هیچ «به‌این در و آن در زدنی» نمی‌تواند به‌موفقیت ریاضی دان کمك‌کند. روشن است که، این وضع، ناشی از ماهیت ومضمون خود ریاضیات است؛ درحالی‌که، درمبانی منطقی وفلسفی ریاضیات هم، امکان (وحتی ناگزیری) این‌گونه بحث‌ها وجود دارد؛ درزمینه‌های مربوط به‌تکامل ریاضیات (و مثلا، درباره حق تقدم‌ها) هم بحث‌هایی باخصلت‌های شخصی وفردگرایانه وجود دارد (که متاسفانه، چندان هم‌کم نیستند).

هرریاضی دانی، خیلی زود، به‌این وضع عادت می‌کند و می‌داندکه، اگرجست وجوهای او به‌هرعلتی مغرضانه باشد، واز قبل به‌جواب یاراه حل خاصی دل ببندد وتنها به‌استدلال‌های موافق‌آن توجه‌کند، تمامی تلاش او با عدم موفقیت روبه‌رو می‌شود وهیچ نتیجه‌ای، جزناامیدی، به‌دست‌نمی‌آورد. این‌که، استدلال نادرست ویا استدلال ناقص بتواند برای استدلال‌کننده‌مفید واقع شود، برای ریاضی دان هیچ معنائی ندارد. به‌این ترتیب، ریاضی‌دان به‌سرعت یاد می‌گیردکه، در دانش او، تنها استدلال‌هایی به‌درد می‌خوردکه درست، عینی‌وبدون هرگونه شائبهٔ شخصی باشد؛ او یاد می‌گیرد که تنها با اندیشه‌ای بدون پیش داوری وبدون تعصب می‌تواند به‌موفقیت دست یابد. ریاضی‌دان، در هرسطح‌اخلاقی‌که باشد، عادت می‌کندکه درکار علمی خود، هیچ‌چیز، جزحقیقت مطلق عینی‌را، راهنمای خود قرار ندهد.

ولی این‌جنبه، که‌به‌طورطبیعی در ریاضی‌دان، متخصص‌به‌کمال خود می‌رسد، تاحدمعینی، موجب تربیت هرغیر متخصص و به‌خصوص، هردانش-

آموزهم‌می‌شود. دانش‌آموز، خیلی خوب می‌داندکه معلم ریاضی رانمی‌توان فریب داد؛ او می‌داندکه تسلط برخود ویا چرب زبانی وخوش سخنی، به‌او کمك نمی‌کند تابتواند بی‌دانشی‌را به‌جای دانش واستدلال ناکافی‌را به‌جای اثبات‌کامل وکافی جابزند. اگرکسی دروغ‌گو باشد، مربوط به‌جاهای دیگر است، درریاضیات‌کاملا مواظب است حرف ناحقی نزند وبه‌اثبات نادرستی تن ندهد.

ولی، همان طورکه معمولا چنین است، وقتی‌که‌کسی در محیطی به‌یك نوع خصلت اخلاقی عادت‌کند، این عادت، تاحدی، به‌سایرفضاهای فکری وفعالیت‌های عملی اوهم، سرایت مـی‌کند. درست کاری نظری، کـه برای ریاضی‌دان، قانون تغییرناپذیر تفکر علمی و فعالیت حرفه‌ای (و به‌خصوص، آموزشی) او به‌شمار می‌رود، به‌تدریج برتمامی زندگی او اثر می‌گذارد و وازاعتقادی ذهنی به‌رفتاری عملی تبدیل می‌شود.

من همیشه به‌این خصلت علاقه مند بوده‌ام و، بارها، شاهد تکامل آن درکسانی بوده‌ام‌کـه تحت تاثیر اجتماع‌های جدی علمـی و، به‌خصوص، درس‌های ریاضی بوده‌اند. چقدر شادی‌آور است، وقتی کـه انسان بتواند، به‌تدریج یا برعادت‌های به‌هم‌ریخته ونفرت انگیزی غلبه‌کندکه اندیشهٔ اورا مطیع ومنقاد منافـع کوچك شخصی مـی‌کنند واورا به‌دفاع ازنظرهایی وا‌ـ می‌دارندکه تنها تامین‌کنندهٔ غرض‌هـای شخصی او هستند. وچقدر، ازنظـر اخلاقی، ارزشمند است، وقتی‌که آدمی یاد بگیرد، به‌حقیقت‌هـای عینی و به‌استدلال‌های درست، به‌عنوان یك ارزش والای روحـی وفرهنگی احترام بگذارد وحاضرباشد، هرگونه‌منافع شخصی رادرراه درست‌کاری وحقیقت‌ـ گوئی فداکند. واین، وقتی‌که به‌مرزخود برسد، ازشریف‌ترین وانسانی‌ترین جنبه‌های اخلاق‌آدمی است.

۲. پایداری ومردانگی. هرکار جدی در زمینهٔ کسب وتحکیم دانش، در هررشتهٔ علمی کـه باشد، مستلزم تلاش ذهنی سخت ومنظـم، پایداری در برطرف‌کردن دشواری‌ها وبرخورد مردانه با ناکامی‌ها است؛ بنابراین، چنین کاری، به‌شرط راهنمائی درست، ناگزیر موجب بروز همین خصلت‌هـا، در

دانش‌آموز، می‌شود: عشق به‌کار، پشتکار، پافشاری وایستادگی دردنبال‌کردن هدف، توانائی تسلیم نشدن دربرابر دشواری‌هـا و ناامید نشدن در برابر ناکامی‌ها، خود به‌خود روشن است‌که این خصلت‌ها، چه ازنظر اخلاقی وچه ازنظر اجتماعی ، تا چه‌اندازه، برای شکل دادن و تکامل شخصیت انسانـی، اهمیت دارند و، بنابراین، چه وظیفهٔ بزرگی به‌عهده معلم است تا از تاثیر تربیتی درس‌های خود دراین مسیر، حداکثر استفاده را بکند. امکان‌هایی‌که، دراین مورد، درآموزش دبیرستانی وجود دارد، بسیار متنوع و متعدد است؛ موضوعی در درس‌های دبیرستانی پیدا نمی‌شود کـه نتوان از آن به‌عنوان اهرمی‌برای به‌حرکت درآوردن این‌تاثیرتربیتی، استفاده‌کرد. ولی دراین‌جا، به‌طور طبیعی، باید به‌جنبه‌هائـی از ریاضیات ، به‌عنوان یك مادهٔ دبیرستانی بپردازیم که آن را ازسایردرس‌هـای دبیرستانی متمایز مـی‌کند و، درعین حال، برای پرورش وتکامل پایداری عقلانـی و مردانگی آگاهانه دانش‌ـ آموزان ـ دوخصلت پرارزش مبارزان آینده ـ می‌تواند مفید باشد.

قبلا می‌خواهم یادآوری‌کنم کـه، در ریاضیات، هدفی‌کـه براساس نتیجه‌گیری از یك دستور ریاضی تعیین شده است ، کاملا روشن و مشخص است. وقتی‌که مساله، مربوط به‌تالیف یك مضمون تاریخی یا ادبـی باشد، نمی‌توان لحظه‌ای را نشان دادکه دستورکار، به‌صورتی قطعی وکامل، به‌پایان رسیده باشد ـ امکان اضافـه‌کردن، تکمیل و یـا بهترکردن چنین نوشته‌ای، همیشه، وتقریباً به‌طور نامحدود، وجود دارد؛ ازطرف دیگر، دانش‌آموزآن صلاحیت واختیار رادرخود احساس نمی‌کندکه بتواند، دراین مورد، نتیجهٔ کار خودرا ارزیابی‌کند: چه بسا به‌آن‌چه که نوشته است و به‌نظر خـودش همراه باموفقیت‌بوده‌است، ازطرف معلم، ارزش صفرداده شود. این‌نامشخص بودن وابهام در ارزیابی‌کار دانش‌آموزی که، طبق دستورالعمل معینی عمل کرده است، بدون تردید، نوعی تاثیر تضعیفی در قدرت اداری عقل جوانی که هنوز تربیت نشده است، باقی می‌گذارد. ولی، وقتی‌که دستوری دربارهٔ حل یك مساله یا اثبات یك قضیه داده شده‌باشد، به‌گونه‌ای روشن ومشخص، می‌توان لحظه پایان‌کار موفقیت‌آمیز رامعین‌کرد: این لحظه، وقتی فرامی‌رسد

که‌مساله‌حل یاقضیه‌ثابت شده‌باشد؛ همهٔ جنبه‌های دیگر کار، یعنی طرح و پیدا کردن راه‌حل، درستی ودقت نوشته‌هاوغیره، چه‌ازنظرمعلم وچه‌ازنظر شاگرد، درجه دوم به‌حساب می‌آیند واهمیتی تعیین کننده ندارند دراین‌جا، کیفیت کار، برای همه، به‌صورتی یکسان ارزیابی می‌شود: باید حل‌مساله صحیح واثبات قضیه درست باشد. خود دانش‌آموز می‌تواند و باید این توانائی را داشته باشدکه به‌وجوداشتباه‌های منطقی دراستدلال‌های خود پی ببرد؛ درحالت حل مساله، حتی شیوه‌های مشخصی برای بازبینی راه حل‌خود وآزمایش جوابی که به‌دست‌آورده است، دراختیار دارد. به‌سادگی می‌توان فهمید که روشن ومشخص بودن‌نشانه‌های نتیجه‌گیری درست، تاچه حد می‌تواند دانش‌آموز را به‌ایستادگی وادارد و انگیزهٔ نیرومندی در پافشاری او برای رسیدن به هدف باشد. همچنین، دراین‌جا، مثل بازی شطرنج ومسابقهٔ ورزشی، پیروزی قابل لمس است وخود دانش‌آموزهم می‌تواند، بااطمینان‌کامل وبه‌جای‌معلم، موفقیت خودرا ارزیابی کند.

دومین جنبه‌ای که اختصاص به درس‌های ریاضی دارد و به‌مراتب عمیق‌تر ومهم‌تراست، وجود خصلت **آفرینندگی**، دربسیاری ازحالت‌های آن است. دربیشتر رشته‌های دانش، انجام تکلیف‌ها، با بعضی استثناها، مستلزم وجود میزان محدود و معینی آگاهی واستعداد است (ودربهترین حالت خود، باید توانائی طرح درست ومنظم این‌آگاهی‌ها را هم داشته باشد)؛ درحالی که، درحل مساله‌های ریاضی، باید استدلال وداوری خاصی‌راکشف‌کردکه مارابه‌سمت مقصد هدایت‌کند، واین درواقع، چیزی جزیك عمل‌آفرینندگی‌ـ ولو به‌معنای ضعیف‌آن ـ نیست. ودرست همین خصلت‌آفرینندگی وپژوهش گرانهٔ تکلیف‌های ریاضی است که، بیش ازسایر دانش‌ها موجب رشد و تحکیم نیروی فکری و معنوی دانش‌آموزان می‌شود. شادی نجیبانه‌ای که به خاطر یك موفقیت اکتشافی وخلاق، به‌دانش‌آموز دست می‌دهد، خستگی را ازتن او بیرون می‌کند وآثار مشقتی را که به‌خاطر رسیدن به‌این موفقیت تحمل‌کرده است، ازبین می‌برد. به‌دلیل نیرویی که درهدف او وجود دارد، هیچ مشکلی اورا متوقف نمی‌کند وباهرموفقیت، پشت‌کار وپایداری اوبرای

ازمیان برداشتن دشواری‌ها، استحکام بیشتری می‌پذیرد؛ او یاد می‌گیردکه چگونه، همچون یك مبارز راستین، باناکامی‌ها، اشتباه‌ها وحادثه‌ها وشکست‌های موقتی، مواجه شود؛ در برابر دشواری‌ها تسلیم نمی‌شود وسرچشمه و انگیزهٔ نیروی فکری وارادهٔ خودرا، برای رسیدن به‌آن‌چه‌که تازه وتازه‌تر است، ازدست نمی‌دهد.

۳. تربیت میهن دوستی. مسالهٔ استفاده ازدرس‌های ریاضی، برای تربیت وتحکیم حس سرافرازی و افتخار نسبت به‌زادگاه خود وعشق به‌آن، دشواری‌هایی به‌همراه دارد که، بیش از همه، به‌خصلت انتزاعی‌بودن دانش ریاضی مربوط می‌شود. صاف وساده بایدگفت‌که ریاضیات، با موضوع و مضمون خاص خود، نمی‌تواند به‌طورمستقیم، وسیله‌ای برای تبلیغ مثلازیبائی وبزرگی میهن زادگاه دانش‌آموزان باشد و، باکمال تواضع، این وظیفه‌را به‌عهدهٔ دانش‌های دیگرمی‌گذارد.

باوجود این، تمامی‌کاردانش‌آموزدردرس‌های ریاضی، روی‌موضوع‌های انتزاعی متمرکزنمی‌شود؛ طرح‌های‌انتزاعی‌ریاضیات، تقریباً درهردرس، به‌وسیلهٔ مضمون‌های گوناگون مشخص وقابل لمسی، تکمیل و روشن می‌شود. مثل مضمون‌هایی‌که در موضوع‌ها و مساله‌ها وجود دارد، آگاهی‌های تاریخی، کاربردهای‌گوناگون ریاضیات در صنعت و زندگی و غیره ضمناً، دربسیاری موردها، معلم می‌تواند این وسیلهٔ ملموس را، با میدان گسترده‌ای که دارد، به‌دلخواه تغییردهد و مضمون‌های مورد نظر خود را برای آن انتخاب‌کند: با استفاده ازاین اختیار وآزادی است‌که معلم باید، با استناد به‌آمار وواقعیت‌ها، احترام وعلاقه دانش‌آموز را به‌میهن زادگاه خود استحکام بخشد. دراین‌باره، بسیارنوشته شده است‌که باید متن مساله‌ها را با مضمونی میهن‌دوستانه انتخاب کرد. با این روش، هیچ مخالفتی نمی‌توان داشت، باوجود این، باید بادقت تمام مواظبت‌کردکه با طرح مضمون‌های غیر واقع‌بینانه واحتمالا نادرست و یا باطرح پرسش‌های بی‌جا و غیرطبیعی (که رابطهٔ مستقیمی با واقعیت‌ها وآمار مطرح شده‌ندارند)، کاررا به‌ابتذال نکشانید. ودرهمهٔ این موردها، باید به‌خاطر داشت که این شیوه، نسبت

به‌ریاضیات، کاملا خارجی‌است؛ برای رشد احساس میهن‌دوستی ازدرس‌های ریاضی استفاده می‌شود، نه‌ازخود ریاضیات.

آگاهی‌های بسیاری درتاریخ ریاضیات وجود داردکه ازجهت ترغیب حس میهن دوستی، بستگی نزدیک‌تری با خود دانش ریاضی دارد. استفاده از زمینه‌های تاریخ ریاضیات، علاوه برتاثیرهای سودمندی که در این جهت دارد ازاین بابت هم ارزش دارد که دانش‌آموزان را، به‌طور کلی، به‌تاریخ دانش ریاضی علاقه‌مند می‌کند وبه‌آن‌ها امکان می‌دهد تا با موضوع‌های تازه‌ای ازخود دانش ریاضی ــ که دربرنامهٔ درسی آن‌هاوجود ندارد ــ آشناشوند واندیشهٔ ریاضی خودرا تقویت‌کنند.

تاریخ ریاضیات هرکشوری، جنبه‌هایی داردکه (به‌خصوص اگر در زمینهٔ طرح کلی تاریخ مردمی و میهنی باشد) آشنایی با آن‌ها، موجب غرور وافتخار دانش‌آموزان می‌شود. در بین حقیقت‌های تاریخی، دانش‌آموز به موردهایی برمی‌خوردکه به‌کمک‌آن‌ها می‌تواند دانش ریاضی دبیرستانی خودرا ارزیابی‌کند وآگاهی‌های خودرا گسترش دهد. روشن است‌که خود معلم باید، به‌اندازهٔ کافی، از تاریخ ریاضی‌کشور خود (والبته، تاریخ ریاضیات، به‌طورکلی) آگاه باشد، لحظه‌های حساس‌آن رابشناسد وبتواند ارزش کار هرریاضی‌دان وهرموضوع ریاضی را درجهت تکامل این دانش، ارزیابی‌کند، همچنین، معلم باید این هنررا داشته باشدکه تاریخ ریاضی و موضوع‌های مربوط به‌آن را چنان برای دانش‌آموزان روایت کندکه حد اکثر تاثیر را درآن‌ها به‌وجود آورد و، ضمناً، برای تربیت، احساس سالم افتخار میهنی آن‌ها مفید باشد.

نتیجه

۱. من آگاهانه، دربارهٔ اهمیت درس‌های ریاضیات درشکل دادن به جهان‌بینی دانش‌آموزان، دراین مقاله، بحثی نکرده‌ام. دلیل من دراین‌مورد، تقریباًهمان‌است‌که موجب‌شد، درموقع‌خود (بخش I)، به‌بررسی‌مساله‌استفادهٔ از درس‌های ریاضی، برای تربیت تفکردیالکتیکی دانش‌آموزان، نپردازم:

آشنائی باهدف‌ها و روش‌های دانش ریاضی، برای گسترش وتعمیق جهان‌بینی، اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد، ولی سهم اصلی تاثیر تربیتی دراین‌جهت، به‌عهدهٔ ریاضیات با کمیت‌های متغیر، یا به‌اصطلاح ریاضیات عالی، است، درآن‌جاست که، به‌گفته انگلس، دیالکتیک به‌ریاضیات وارد می‌شود و ریاضیات با واقعیت‌های جهان خارج پیوند می‌خورد؛ ولی می‌دانیم‌که این قسمت از ریاضیات، در برنامهٔ رسمی دبیرستانی وجود ندارد. و در واقع، اشاره به‌این جنبه تربیتی ریاضیات دبیرستانی وتاثیری‌که برجهان‌بینی دارد (با توجه به‌ناچیز بودن خود ریاضیات در برنامهٔ دبیرستانی) ارزشی‌ندارد. به‌همین مناسبت است‌که بحث دراین‌باره را هم، به‌مقالهٔ بعدی خود موکول می‌کنم.

۲. دراین مقاله، به‌موضوع‌های آموزشی پرداخته‌ام. من تنها دراین‌باره صحبت‌کردم‌که چه‌ویژگی‌هایی ازدانش ریاضی وبرای چه جنبه‌هایی ازتفکر ویا شخصیت اخلاقی دانش‌آموزان می‌تواند وباید مورد استفاده قرارگیرد، ولی دراین موردکه چگونه می‌توان به‌این هدف رسید، چیزی نیاوردم. با تجربه‌ای‌که دارم، این وضع، ممکن است موجب نارضایتی گروه‌هایی از خوانندگان این مقاله بشود و، احتمالا، مراسرزنش‌کنندکه این مقاله «چیزی به‌معلم نمی‌دهد» وهیچ توصیهٔ مشخصی برای اوندارد. به‌همین مناسبت لازم می‌بینم، توضیح‌کوتاهی دراین زمینه بدهم.

۱) به‌گمان من، اصولا، تنظیم اشاره‌های آموزشی مشخص، دربارهٔ آن چه دراین مقاله مورد بررسی قرارداده‌ام، کاری بیهوده واضافی است. تاثیر تربیتی درس‌های ریاضیات (همچون دانش‌های دیگر) تنها وقتی می‌تواند نمودکندکه معلم، اولا بردانش مربوط به‌درس خودکاملا مسلط باشد و از روش‌ها و تاریخ آن اطلاع داشته باشد، ثانیاً، درکار معلمی به‌اندازهٔ کافی مجرب وآزموده باشد وثالثاً، خود به‌اندازهٔ کافی دارای همان خصلت‌هایی باشدکه خیال دارد به‌دانش‌آموزان خود بیاموزد. هیچ‌گونه حیلهٔ آموزشی نمی‌تواندبه‌معلمی که‌خودش دارای‌نیروی‌اندیشهٔ انتزاعی‌نیست‌نمی‌تواندکمک کند تا این اندیشه را دردانش‌آموزان خود به‌وجودآورد؛ یا مثلا، کدام

روش آموزشی می‌تواند به‌معلمی که خودش احساس میهنی سست وضعیفی دارد، کمک کند تاشاگردان خودرا میهن دوست بارآورد؟

برعکس، وقتی که معلم برخود وبرموضوع درس خود مسلط باشد، وقتی که خودش صاحب همهٔ خصلت‌های نیکی که دربارهٔ آن‌ها صحبت کرده‌ایم باشد، آن وقت دیگر به‌هیچ‌گونه توصیهٔ مشخص آموزشی نیاز پیدا نمی‌کند: درهر موردی، می‌تواند، خیلی‌ساده وآزادوبی‌تعصب، بهترین وثمربخش‌ترین راه را برای هدف تربیتی خود پیدا کند. برای چنین معلمی، تحمیل هرگونه توصیهٔ مشخص آموزشی، تنها می‌تواند مانعی درکار اوبه‌حساب آید.

۲) بنابراین، وقتی که به‌اعتقاد من، طرح و تنظیم توصیه‌های مشخص آموزشی درباره هدف‌های این مقاله، کاری بیهوده است، چیزی جز این نمی‌ماند که توصیه‌های عام آموزشی را مورد توجه قراردهیم؛ امیدوارم، مقالهٔ من، انگیزه‌ای برای معلمان آزموده ومربیان ومتخصصان روش‌های آموزشی باشد تا از تجربه‌های خود، دراین باره، سخن بگویند. من، با فروتنی تمام، اذعان می‌کنم که این موضوع‌ها، نیاز به‌بررسی بیشتری دارند و، به‌همین مناسبت، خودرا نیازمند به‌اظهارنظردیگران می‌بینم.

۳) سرانجام، می‌خواهم از قبل یك سوء تفاهم احتمالی دیگر را هم برطرف کنم. ازآن‌جا که می‌خواستم دربارهٔ تاثیر تربیتی درس‌های ریاضی صحبت کنم، طبعاً ناچار بودم جنبه‌هایی از دانش ریاضی رابرشمرم، که به اعتقاد من، نسبت به‌سایررشته‌های دانش برتری دارند. ولی وقتی مطلب به این صورت طرح شده باشد، ممکن است این تاثیررادر برخی ازخوانندگان بگذارد که‌گویا من خواسته‌ام ریاضیات را مافوق همهٔ دانش‌های دیگر قرار دهم وسراسر مقالهٔ من حاکی ازآن است که ریاضیات را تنها علم واقعی می‌دانم وبه همهٔ دانش‌های دیگر به‌چشم انتقاد و عیب‌جوئی می‌نگرم. ممکن است بعضی ازهمکاران عزیز من ـ نمایندگان سایردانش‌ها ـ احساس بی‌عدالتی کنند وبا آزردگی خاطر، نوشته مرا باشدت مورد انتقاد قراردهند وثابت کنند که دانش‌های دیگر، به‌هیچ وجه، بدتراز ریاضیات نیستند وهمهٔ آن‌چه که من، به‌عنوان امتیاز ریاضیات برشمرده‌ام، در دانش‌های دیگرهم

وجود دارد.

باقسمت اول این بحث کاملا موافقم: دانش‌های دیگر، به‌هیچ وجه بدتراز ریاضیات نیستند؛ ازاین‌گذشته، من اعتقاد دارم که آفرینندگی درسایر رشته‌های دانش، به‌مراتب دشوارتر از ریاضیات است و، به‌همین جهت، برای کسانی که دراین رشته‌ها، آفرینش‌های پرارزشی دارند، احترامی‌عمیق قائلیم. ولی من در هیچ‌جای مقاله‌ام ریاضیات را برصدر ننشانده‌ام وآن را برتراز همهٔ دانش‌ها ندانسته‌ام. برعکس، چندبار و بافروتنی، تاکید کرده‌ام که ریاضیات، به‌خاطر ویژگی‌های خاص خود، نمی‌تواند به‌عنوان یك وسیلهٔ تربیتی درفلان مورد به‌کاررود، چرا که ریاضیات، دانشی انتزاعی است و موضوع آن، مطالعهٔ مستقیم خود چیزها و یا پدیده‌های دنیای واقع نیست، بلکه تنها از رابطه‌های کمیتی وشکل‌های فضائی آن‌ها صحبت می‌کند. همین موقعیت است که‌وظیفهٔ تربیتی رابرای ریاضیات، به‌مراتب، دشوارترازانجام این وظیفه برای سایر دانش‌ها می‌کند. (ومن روی این موضوع، چند باردر مقالهٔ خود تاکید گذاشته‌ام). باهمهٔ این‌ها، ریاضیات جنبه‌هایی هم دارد که آن، ازنظر امکان‌های تربیتی، بااهمیت‌تر ازسایر دانش‌ها نشان می‌دهد. و این‌که من، درمقالهٔ خود، براین جنبه‌های ریاضیات تکیه کرده‌ام، به‌هیچ‌وجه به‌معنای آن نیست که خواسته‌ام ریاضیات را برسایردانش‌ها ترجیح دهم ویا آن را دانشی برتر بشناسانم.

من دانش ریاضی را، آن‌طورکه در واقع وجود دارد، معرفی کرده‌ام وباصداقت کامل، هم نقطه‌های مثبت وهم نقطه‌های ضعف آن‌را، درزمینهٔ مورد بحث این مقاله، برشمرده‌ام. ولی در زمینه‌هایی که معتقد به‌برتری ریاضیات هستم وآن‌ها را درمقاله خود شرح داده‌ام، حاضر به‌هرگونه مبارزه‌ای هستم وتاآخر ایستاده‌ام، واگرهمکاران محترم من درسایردانش‌ها، مدعی باشندکه این جنبه‌ها درانحصار وامتیاز ریاضیات نیست ورشته‌های دیگرهم، به‌همان اندازهٔ ریاضیات، قابلیت‌دارند، برای دفاع ازنظرخود حاضرم دریك‌مناظره وبحث منطقی رویارو شرکت کنم.

نقوش هندسی سفالینه‌های ایرانی

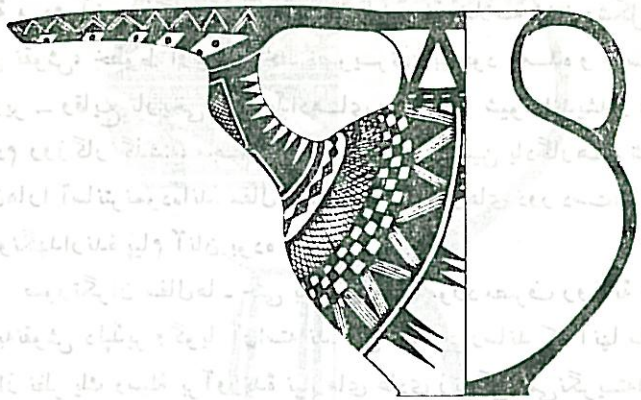
جابر عناصری

در کارگه کوزه‌گری کردم رای
در پایهٔ چرخ دیدم استاد بپای
می‌کرد دلیر کوزه را دسته و سر
از کلهٔ پادشاه و از دست گدای

«حکیم عمر خیام»

گویا در روزگار کهن، نخستین آثار هنری انسان غریب این کیهان خاکی، از نقش و نگارهای دیوارهٔ غارها و بروی ظروف گلی آغاز شده است.

در آستانهٔ نوآشنائی انسان با طبیعت، تجربه بدو آموخته بود که گل و لای‌هائی که دانه را می‌رویاند، نرم و شکل‌پذیر است. خورشید آنرا خشک می‌کند و به‌عنوان ظرفی که چیزی درخود جای می‌دهد، قابل استفاده می‌سازد. نخستین ظرف‌های گلی بدین سان ساخته شدند. ظرف‌هائی که بشکل کاسه‌های «نیم کره» بودند. سپس بشقاب‌ها و پیاله‌ها و ظروف دیگر را ساختند و بر کاسه‌ها ـ سرپوش‌ها گذاشتند. ظروف را یحتمل برای نگاهداری نوشیدنی‌ها، ذخیرهٔ غلات و انباشتن خاکستر مرده‌ها در خمره‌ها بکار می‌بردند. بدین نحو، سفال یکی از مهمترین و کهن‌ترین نمونهٔ هنری بشر است و سرزمین ایران از روزگار باستان تا کنون در این زمینه آثار بسیار ارزنده و ماندگاری داشته است. در طی ادوار مختلف تاریخ ـ سفالگری بخش عمده‌ای از فکر انسان هنرمند و ظریف‌اندیش کشور ما را بخود اختصاص داده است. هرچند امروزه سفال نقش و اهمیت خود را ـ در زندگی روزمره ـ



ظرف لوله دار

بدنه، دهانه و لبهٔ ظرف با نقوش هندسی تزیین گردیده است.

به‌خاطر وجود فلزات و دیگر مواد از دست داده است با وجود این هنوز هم رف‌های اطاق‌های هر روستائی به‌کاسه کوزه‌های سفالین مزین است. نقوش منقش بر این ظروف چشم انسان را خیره می‌سازد و انسان از خویشتن به کنجکاوی می‌رسد که راستی این هنرمندان عامی چه‌سان این همه نقش و نگار پر رمز و راز را آموخته و به‌کار گرفته‌اند؟ انسان به‌وضوح از تماشای این ظروف در می‌یابد که نگارگر سفالینه ساز، در این نقش‌اندازی ـ جائی از کاسه و کوزه‌ها را بی‌نقش و نگار نمی‌گذارد. هر گوشه‌ای از سینهٔ ظروف سفالین را به‌نقشی می‌آراید. هرچند هوشیار است که مبادا هماهنگی نقش‌ها را بهم بریزد. بی‌شك آفرینندگان هنرمند این نقش و نگارها، از آفرینش گیتی و راز جهان درشگفت بوده‌اند. نگرش بر آب، باد، خاك، آسمان، ستاره‌ها، ماه و خورشید برای آنان توأم با اعجاب بوده است و همیشه ایام باخود درزمزمه بوده‌اند که:

هردم از روی تو نقشی زنم راه خیال
تو چه دانی که در این پرده چه‌ها می‌بینم

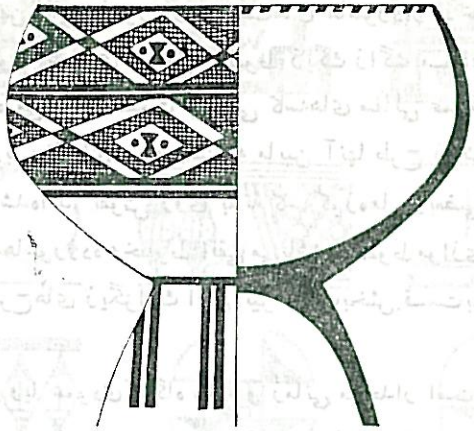
باید گفت که نقوش روی سفال‌های پیش از تاریخ، در واقع خط و

نوشتهٔ مردم آن روزگار بوده است. بعدها نیز از خلاصه شدن وشکل گرفتن همین نقوش، خطوط اولیه و «خط تصویری» بوجود آمده و بوسیلهٔ این تصاویر ـ وقایع تاریخی و رویدادهای روزمره و شیوهٔ اندیشه و زندگی مردم روزگار گذشته، مجسم گردیده و امروزه همین یادگارها، شناسائی تمدن‌هارا آسانتر نموده‌اند. سفال برای مردم دوران‌های دور دست، امانت‌دار ونگهدارندهٔ پیام آنان بوده است.

صورتگران سفال‌ها ـ حتی بیشتر ظروف مورد مصرف روزانهٔ خودرا نیز به‌نقوش دلپذیر وگویا آراسته‌اند. این خود می‌رساند که آنها سفال را تنها از نظر یك وسیلهٔ برآورندهٔ نیازهای عادی زندگی نمی‌نگریسته‌اند بلکه آنرا بهانه‌ای برای رساندن پیام خود می‌دانستند. هرچند هنوز این سؤال برای ماباقی است که چه‌سان نقوش تزئینی و هندسی درخور توجهی برروی این ظروف مجسم می‌کردند. مهمترین پیشرفت در صنعت سفال‌سازی به

ظرف لوله دار

نقوش‌هندسی برروی‌لوله واطراف آن، خطوط افقی روی گردن و طرح زیگزاگ و نقطه‌چین درقسمت زیرین دهانه، تزیینات ظرف راتشکیل می‌دهد.



قدح پایه‌دار با بدنهٔ کروی

سطح خارجی شامل:

خطوط عمودی‌توأمان‌برروی پایه واشکال هندسی افقی برروی بدنه.

کارگرفتن هنر نقاشی بروی سفال بوده است. شاید این امر درنتیجهٔ انگیزهٔ زیبا پسندی سازندگان و مصرف‌کنندگان این ظروف باشد ولی در هرحال اکنون این نقوش، ترجمان پیام هنرمندان گمنام نقشگراین سفال است.

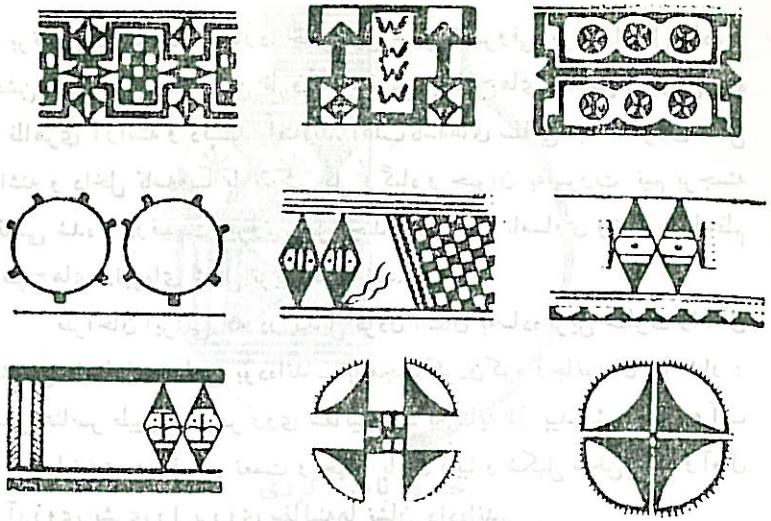
مردم فلات ایران، نقاشان چیره دستی بودند که‌گلها وگیاهان و یا حیواناتی مانند لك‌لك، مار، شترمرغ، پلنگ، قوچ‌کوهی و مرال را در روی ظروف با فواصل معین ـ نقاشی می‌کردند. نقوش تزئینی ـ هندسی و نگرش ناتورالیستی به‌طبیعت، پرده‌های شکیل و منقشی برروی سفالینه‌ها بوجود می‌آورند. بسیار هنگام درنهایت اعجاب می‌بینیم که نقوش هندسی نظیر دوایر مجزا و مماس و متداخل، بیضی‌ها، مربع و مثلث و ذوذنقه و خطوط موازی هاشورخورده برروی ظروف سفالین‌نقش بسته‌اند وبه‌صورت علائم هندسی تزئینی هارمونی دلپسندی بوجود آورده‌اند. در طی تاریخ سفالگران ماهر به‌کرات از نقوش هندسی بهره گرفته‌اند. در گوشه گوشهٔ قسمت بیرونی این ظروف وبرکف بشقاب‌ها وکاسه‌ها و... نقوش هندسی

به‌صورت نوارپهن افقی هاشوردار ـ مثلث‌های هاشوردار ـ خطوط راست دندانه دار ـ نقوش عمودی به‌شکل خطوط زیگ زاگ موازی وخطوط جناقی و... دیده می‌شوند. قسمت بیرونی کاسه‌های سفالی عموماً باخطوط عمودی تقسیم وبا رنگهای زرد وسبزکه مابین آنها طرح زیگزاگ قرار گرفته، آرایش شده‌اند. نقوش روی بدنهٔ کاسه‌کوزه‌ها دربعضی از نمونه‌ها شامل مثلث‌های هاشورزده وخطوط افقی می‌باشد. خطوط موازی، عمودی و ردیف‌هائی ازطرح‌های زیگزاگ افقی نیز زینت‌بخش قسمت‌بیرونی بعضی ازسفالینه‌هاست.

خط افقی ویا عمودی که‌گاه ساده و زمانی موجدار است، روی اغلب ظروف سفالی ایران (به‌خصوص در دورهٔ پیش ازتاریخ) دیده می‌شود. این خطوط علاوه بر زیبائی، شاید هدف دیگری نیز در بردارند. توگوئی صنعتگران چیره دست می‌خواسته‌اند باین طریق از جویباری که آب آن‌مورد استفاده قرار می‌گرفته، گفتگو کنند وحرکت آب را بوسیله خطوط موجدار مجسم سازند. برخی دیگر ازاین ظروف، با خطوط متقاطع تزیین گشته‌اند، باین معنی که چند خط بطور متقاطع، روی یك خط رسم گردیده است. نقش بدست آمدهٔ مثلثی شکل شباهت زیادی به‌خیمه‌ها وچادرهائی دارد، که مردم صحرانشین درزیر این چادرها بسر می‌برده‌اند و باترسیم خطوط متقاطع و با تماس مثلث‌های کنارهم نهاده شده، صنعتگران ـ احیاناً ـ محل مسکونی

ظرف سفالی

بدنه‌تقریباً استوانه‌ای، خطوط شیاری‌درزیرلبه. قسمت میانی ظرف بانقوش هندسی وروی لبه با خطوط عمودی موازی تزیین گردیده است.



برخی ازنقوش هندسی منقش برسفالینه‌ها

خود را مجسم ساخته‌اند. در بررسی نقوش هندسی سفالینه‌ها، به‌نظر می‌رسد خطوط متوازی منکسرکه در دایره یا مستطیلی محاطند، مقداری‌آب رانشان می‌دهند ویا مثلثی که داخل‌آن خطوط شطرنجی طرح گردیده، معرف کوه است ونقش مربع که با خطوط افقی وعمودی خانه‌بندی شده و برسفالینه‌ها مجسم گشته، نشانهٔ زمین‌های مزروعی قلمداد می‌شود.

سفالینه‌های ایرانی بهرشکل وهراندازه‌ای که باشند ـ قدحی وکاسه‌ای پایه دار یا پیاله‌ای کوچك وخمره‌ای وجامی وکوزه‌ای و پیه‌سوزی، هریك نقش و نگار خاصی دارند که عموماً این نقوش، «تزیینی ـ هندسی» عنوان یافته‌اند.

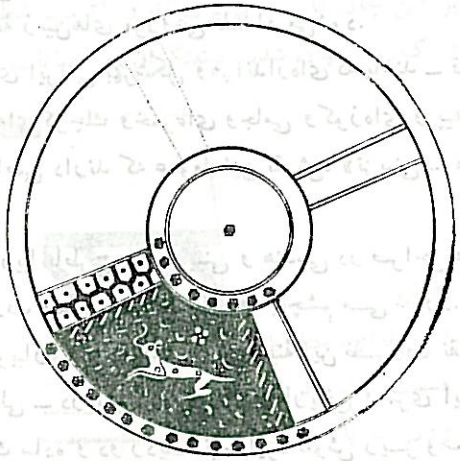
گل‌های زیبا باطرح‌های تزیینی و هندسی در صراحی‌ها وساغرها و بسیاری از ظروف مورد نیاز ایرانی‌ها به‌چشم می خورد. به‌نظر می‌رسد چمنزاری وجویباری آرزوگشته و برسینهٔ این ظروف نقش بسته است. بشقاب‌های سفالی ـ در بسیاری از ادوار تاریخی وهنری ایران ـ باطرح‌های پنج‌گلبرگ ساده و دو ردیف نیمدایره نقوش ریز وهمآهنگ دیگر چشم انسان راخیره می‌سازد وانسان درمی‌ماندکه چگونه ازنقشی دل برگیرد

و برنقشی دیگر، دل بسپارد. جنس این چنین ظروفی گرچه از گل ساده و خشن است ولی اکثراً این ظرف‌ها منقوش به‌طرح‌های هندسی وتزیینی بوده و ظاهری آراسته و دلپسند یافته‌اند. اغلب کاسه‌های سفالی، بدنهٔ کروی شکل داشته و داخل کاسه‌ها با نقوش گل وگیاه و حیوان به‌صورت نیم برجسته نقاشی شده و درقسمت بیرونی نیز باچند نور، افقی نامساوی وخطوط نامنظم وطرح‌های دایره‌ای شکل تزیین گرفته‌اند.

طراحان ایرانی که در تبدیل کردن اشکال به‌ساده ترین خطوط واشکال هندسی، استادان مسلمی بوده‌اند ــ با مجسم کردن کوه وجانوران شاخدار و سایر عناصر طبیعی ــ بر روی سفالینه‌ها ـ به‌کنایه از پیدایش جهان وآب و حاصلخیزی و وفور نعمت و چهار پایان زیبا و شکیل سخن گفته وآمال وآرزوی بشری را برروی سفالینه‌ها نشان داده‌اند.

آنچه‌که به‌اجمال گفته شد، معرف این عقیده است‌که ایرانیان ـ درطی تاریخ ــ درساختن ظروف سفالی و منقوش کردن آنها ودر خیالپردازی برای نقش اندازی، مهارت و استادی خاصی داشته و می‌توان با نگرش بر این آثار ــ ایران را زادگاه اولیه ظروف منقوش دانست.

هرچند امروزه دیگر کارگاه های کوزه‌گری رونقی وجلالی ندارند و



طرحی‌که برگوشه‌ای ازیك قمقمهٔ سفالی نقش بسته است

خمره، بابدنهٔ کروی

تزیینات ظرف شامل نقوش‌هندسی درروی بدنه، قسمت داخلی دهانه‌ولبه می‌باشد داخل دهانه‌خمره باچهار گروه‌خطوط مورب وهمچنین داخل لبه باخط قرمز پهن آرایش گردیده است.

کوزه‌گران کهنسال، شاگردان و هنرآموزان مشتاقی نمی‌یابند تا بی‌هیچ تکلفی ـ از طریق دیدار وتجربه اشکال هندسی روی سفالینه‌ها را بشناسند و بکارگیرند و ظروف تزیینی ساخته شده از مواد دیگر به چشم و هم‌چشمی سفالینه‌های پرنقش ونگاربرخاسته ورمق ازجان سفالگران خبره برگرفته‌اند. با این حال مختصر التفات به‌این نوع هنرمی‌تواند مسلماً درحفظ گوشه‌هائی از میراث‌های فرهنگی ایرانیان مؤثر باشد:

در کارگه کوزه‌گری رفتم دوش
دیدم دوهزارکوزه گویا وخموش
هریك بزبان حال با من گفتند
کوکوزه‌گر وکوزه‌خروکوزه فروش

«حکیم عمر خیام»

نظام اعرج نیشابور

نظام‌الدین حسن بن محمد بن حسین قمی نیشابوری معروف به نظام اعرج

(دانشمند و ریاضیدان ایرانی - نیمهٔ دوم قرن هفتم و ثلث اول قرن هشتم هـ.)

اصل و موطن خانوادهٔ او شهر قم ولی موطن و محل نشأت خود او نیشابور بوده است. او از شاگردان و یا از معاصران قطب‌الدین شیرازی* بوده و علاوه بر ریاضیات در علوم شرعی و ادبی نیز تبحر داشته است. از تاریخ تألیف بعض آثارش برمی‌آید که در ثلث اول قرن هشتم هجری فعالیت علمی داشته مثلاً کتاب «اوقاف‌القرآن» را در سال ۱۳۰۴/۷۰۴ نوشته و کتاب «توضیح‌التذکره» را در شرح تذکرهٔ نصیرالدین طوسی* در سال ۱۳۱۱/۷۱۱ به پایان رسانیده و تألیف «تفسیر قرآن» را در سال ۱۳۲۸/۷۲۸ تمام کرده است.

آثار موجود وی در ریاضیات

۱ـ «الشمسیه فی‌الحساب» = «الشمسیة فی‌الاصول الحسابیه» (به‌عربی)

این کتاب که گاهی آن را «الرسالة‌الشمسیه» نیز نامیده‌اند مهمترین اثر ریاضی نظام اعرج است و دارای مقدمه و دو فن و خاتمه می‌باشد به‌شرح زیر:

مقدمه در دو فصل (الف ـ تعریف علم حساب و بیان موضوع آن و تعریف عدد و اقسام آن. ب ـ در صور اعداد)

(فن اول ـ در آنچه به‌اصول حساب تعلق دارد در دو باب)

باب اول ـ در حساب صحاح در سه فصل (تضعیف و تنصیف و جمع و تفریق ـ ضرب ـ تقسیم)

باب دوم ـ در حساب کسرها در شش فصل (مقدمات و مطالب لازم مانند اشتراك و تباین و تداخل ـ بیان مخارج کسرها ـ ضرب کسرها ـ تقسیم کسرها ـ تضعیف و تنصیف و جمع و تفریق کسرها ـ تحویل کسر از یك مخرج به مخرج دیگر)

(فن دوم ـ در فروع علم حساب در چهار باب)

باب اول ـ در بیان منازل اعداد و استخراج ضلع اول در سه فصل (تعریف منازل ـ استخراج جذر ـ استخراج ضلع اول از سایر مضلعات)

باب دوم ـ در حساب کسرها به‌طریق اهل تنجیم در هشت فصل (حساب جمل ـ تضعیف ـ تنصیف ـ جمع ـ تفریق ـ ضرب ـ تقسیم ـ استخراج جذر)

باب سوم ـ در مساحت در سه فصل (مقدمات ـ مساحت سطوح ـ مساحت احجام)

باب چهارم ـ در استخراج مسایل به‌طریق جبر و مقابله در دو فصل (مقدمات ـ مسایل ششگانهٔ جبری)

خاتمه در حساب خطاین و میزان (= امتحان صحت اعمال)

* * *

از شمسیة‌الحساب نسخه‌های متعدد موجود است که از آن جمله است یك نسخه در دانشکدهٔ ادبیات تهران و سه نسخه در دانشکدهٔ الهیات [۷۴] و دو نسخه در کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران (به شماره‌های ۲۶۲۲/۱ و ۴۷۲۲/۳) و دو نسخه در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی [۱۱۴، ص ۴۳]. به‌قول بروکلمان [S_2، ص ۲۷۳ ش 2a] یك نسخه از آن با عنوان «الشمس‌الباهره فی‌الحساب» در استانبول موجود است. فیلم «رسالهٔ شمسیه» نیز در دانشگاه تهران هست.

* * *

بر کتاب «شمسیة‌الحساب» دو شرح (به‌عربی) نوشته شده است:

الف ـ توسط بیرجندی * که نسخهٔ خطی آن در مشهد موجود است.

ب ـ توسط ابواسحاق کوبنانی[1] که یك نسخهٔ خطی از آن در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران به‌شمارهٔ ۲۴۱۷/۱ و یك نسخهٔ دیگر در مدرسه سپهسالار تهران موجود است.

۲ـ «تعبیر (یا تفسیر) التحریر» یا «شرح تحریرالمجسطی»

متن تحریر مجسطی از نصیرالدین طوسی * است و نظام اعرج تفسیر

۱ـ رجوع کنید به قربانی: زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی. (زیرچاپ)

(یا تعبیر) آن را در ماه شعبان سال ۷۰۴ ه.ق. به‌پایان رسانیده و یك نسخهٔ خطی ازآن در دانشکدهٔ ادبیات تهران و یك نسخه درکتابخانهٔ آستان‌قدس رضوی ویك نسخه درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه وچند نسخه ازآن درخارج ازایران موجود است.

۳ــ کشف حقایق زیج ایلخانی = شرح زیج ایلخانی (به‌فارسی)

متن این زیج از نصیرالدین طوسی است و یك نسخه از شرح آن درکتابخانهٔ آستان قدس رضوی وچند نسخه ازآن درتبریزومورهٔ بریتانیا و مجلس شورای ملی ایران وکتابخانهٔ ملك موجود است.

مراجع

۱ــ بروکلمان G_2، ص۲۵۶ش ۲ــ بروکلمان S_2، ص۲۷۳ ش ۲a ــ بروکلمان S_1، ص ۹۳۰ (در ضمن شمارهٔ ۳۹) ؛ ۲ــ تاریخ ادبیات دکتر صفا، ج۳ ص۲۷۳؛ ۳ــ تاریخ نجوم اسلامی، ص ۲۸۸ (متن عربی «علم‌الفلك»، ص۲۳۳)؛ ۴ــ ریحانةالادب، ج۴ص۲۰۸ش۳۶۵؛ ۵ــ سارتنI_3، ص۶۹۸؛ ۶ــ سوتر M، ص۱۶۱ش۳۹۵ــ سوتر N، ص ۱۷۷؛ ۷ــ فهرست الهیات، ج۱ص۶۰۰ (شمسیةالحساب)؛ ۸ــ فهرست اول ادبیات، ص۳۴۴ (شمسیةالحساب)؛ ۹ــ فهرست دانشگاه، ج ۳ ص ۸۶۴ (تفسیرالتحریر) و ۹۰۶ــج۶ص۲۳۰۶ــج۸ص۱۶۶ــ ج۹ص۱۰۵۲ــ ج۱۰ص۱۵۰۸ــج۱۵ ص ۷۳ (شمسیةالحساب)؛ ۱۰ــ فهرست دوم ادبیات، ص ۷۶ (تفسیرالتحریر)؛ ۱۱ــ فهرست رضوی، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۱۰ (تعبیرالتحریر) و ص۱۳ و ص۳۸ (شرح زیج ایلخانی) و ص ۴۳ (شرح شمسیةالحساب)؛ ۱۲ــ فهرست سپهسالار، بخش۵ ص ۲۰۵ (شرح شمسیةالحساب)؛ ۱۳ــ فهرست فارسی، ج۱ ص ۱۷۵ (ربع مقنطر) و ۳۳۹ (کشف‌الحقایق)؛ ۱۴ــ فهرست میکروفیلمها، ج۱ ص ۵۶۵ (رسالهٔ شمسیه)؛ ۱۵ــ لغت نامه: نظام‌الدین حسن بن محمد؛ ۱۶ــ یوشکویچ M، ص ۱۶۸ ش ۳۲؛ ۱۷ــ استوری P_2، ص۵۹ (کشف حقایق زیج ایلخانی) ؛ ۱۸ــ فهرست مجلس، ج۱۹ص۸۸،۱۶۲،۱۶۵،۴۶۶.

مسأله‌های مسابقه‌ای

دراین شمارهٔ «آشتی با ریاضیات» هم، مساله‌های یکی‌از المپیادهای بین‌المللی ریاضی را آورده‌ایم . منظور بیست و دومین المپیاد بین‌المللی ریاضی است که از ۷ تا ۲۰ ژوئیهٔ ۱۹۸۱ درامریکا برگزار شد. دراین المپیاد، نسبت به‌المپیادهای‌قبلی، هیات‌های‌نمایندگی بیشتری شرکت‌داشتند: پرچم‌های ملی ۲۷ کشور، در جریان برگزاری المپیاد برافراشته بود . پنج کشور، برای نخستین بار، در المپیاد بین‌المللی ریاضی، شرکت می‌کردند: استرالیا، ونزوئلا، کلمبیا، مکزیك وتونس.

مسابقه در روزهای ۱۳و۱۴ ژوئیه درکلاس‌های دانشگاه جرج‌تاون، در واشینگتون، انجام شد مسابقه از $8\frac{1}{2}$ صبح تاساعت ۱۳ طول‌می‌کشیدو، درجریان آن، شرکت‌کنندگان می‌بایستی سه‌مساله راحل‌کنند (درجریان ۳۰ دقیقهٔ اول، شرکت‌کنندگان مـی‌توانستند دربازهٔ صورت مساله‌هـا، پرسش کنند) .

اینك صورت مساله‌های طرح شده دراین المپیاد، حل کامل هر مساله، ۷ امتیاز داشت. نام‌کشورهای داخل پرانتز، معرف طرح‌کنندهٔ مسالهٔ مربوطه است. به‌دنبال این مساله‌ها، طبق معمول، مساله‌های آزمایش ورودی‌دانشکده‌های اتحاد شوروی را می‌آوریم.

بیست و دومین المپیاد بین‌المللی ریاضی

۱. (بریتانیای‌کبیر) . P نقطه‌ای است واقع درداخل مثلث ABC، و D، EوF، به‌ترتیب، تصویرهای قائم این نقطه برخطهای راست BC، CAوAB می‌باشند. مطلوب است همهٔ نقطه‌های P، که برای‌آن مجموع:

$$\frac{|BC|}{|PD|}+\frac{|CA|}{|PE|}+\frac{|AB|}{|PF|}$$

حد اقل مقدار ممکن باشد.

۲. (جمهوری فدرال آلمان). عددهای طبیعی n و r داده شده‌اند، ضمناً $1 \leqslant r \leqslant n$. همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ را که شامل r عضو باشند، درنظر می‌گیریم. کوچکترین عضو را، درهریك ازاین زیر مجموعه‌ها، انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید واسطهٔ عددی این کوچکترین عضوها برابراست با

$$\frac{n+1}{r+1}$$

۳. (هلند). مطلوب است بیشترین مقدارعبارت m^2+n^2 به‌شرطی که m و n عددهایی طبیعی باشند ($1 \leqslant m \leqslant 1981$ و $1 \leqslant n \leqslant 1981$) وداشته باشیم: $(n^2-mn-m^2)^2=1$.

۴. (بلژیك). a) برای چه مقادیری از $n \geqslant 3$، مجموعه‌ای از n عدد طبیعی متوالی وجود دارد که دارای ویژگی زیر باشد: بزرگترین عضو این مجموعه، مقسوم علیهی از کوچکترین مضرب مشترك بقیهٔ $(n-1)$ عدد باشد.

b) برای چه مقادیری از $n \geqslant 3$ تنها یك مجموعه از n عدد طبیعی متوالی، باهمان ویژگی بالا، وجود دارد؟

۵. (اتحاد جماهیرشوروی). ازنقطهٔ O، واقع در داخل یك مثلث، سه دایره باشعاع‌های برابر طوری گذرانده‌ایم که هرکدام ازآن‌ها درداخل مثلث قرارگیرد و بردوضلع مثلث مماس باشد. ثابت کنید که نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و مرکز دایرهٔ محاطی آن، روی یك خط راست قرار دارند.

۶. (فنلاند). می دانیم که تابع $f(x,y)$، برای هرزوج عدد درست وغیر منفی x و y، باشرط‌های زیر، سازگاراست:

۱) $f(0,y)=y+1$؛

۲) $f(x+1,0)=f(x,1)$؛

۳) $f(x+1,y=1)=f\big(x,f(x+1,y)\big)$

مطلوب است محاسبهٔ $f(4,1981)$.

*

دانشکدهٔ مکانیك ریاضی (۱۹۷۸) گروه اول

۱. تفاضل $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ عددی درست است، این عدد راپیداکنید.

۲. همهٔ جواب‌های معادلهٔ زیررا، درفاصلهٔ [۲و۳]، پیداکنید:

$$\int_0^{\alpha} \cos(x+\alpha^2)dx=\sin\alpha$$

۳. در مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC، از راس‌های A و C، ارتفاع‌های AP و CQ را برضلع‌های BC و AB رسم کرده‌ایم. می‌دانیم، مساحت مثلث BPQ برابر ۲ وطول پاره خط PQ برابر $2\sqrt{2}$ می‌باشد. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را پیداکنید.

۴. مقادیر پارامتر a راطوری پیداکنیدکه، برای هریك ازآن‌ها، دستگاه نامعادله‌های زیر، دارای جواب باشد:

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 \geqslant \dfrac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2+10xy-5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

۵. حجم هرم ABCD، برابر است با ۵. صفحه‌ای ازوسط یال‌های AD و BC گذرانده‌ایم که یال CD را درنقطهٔ M قطع کرده است. ضمناً، نسبت طول پاره خط DM برطول پاره خط MC برابر $\frac{2}{3}$ شده‌است. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مقطع هرم باصفحهٔ مذکور، به‌شرطی که فاصلهٔ راس A تا این صفحه، برابر ۱ باشد.

۶. همهٔ جواب‌های معادلهٔ زیررا، درفاصلهٔ $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ پیداکنید:

۶. دایره‌ای به‌قطر AB مفروض است. دایرهٔ دیگری به مرکز A، دایرهٔ اول را در نقطه‌های C و D وقطر AB آن را در نقطهٔ E قطع کرده است. نقطهٔ M را روی کمان CE ـ که شامل نقطهٔ D نیست ـ وجدا از نقطه‌های C و E ـ انتخاب کرده‌ایم. نیم‌خط BM، دایرهٔ اول‌را، در نقطهٔ N قطع می‌کند. می‌دانیم $|CN| = a$ و $|DN| = b$. مطلوب‌است محاسبهٔ $|MN|$.

۷. سنگ معدنی ۴۰٪ مخلوط و فلز گداخته‌ای که از آن به‌دست می‌آید، ۴٪ مخلوط دارد. از ۲۴ تن سنگ معدن، چقدر فلز به‌دست می‌آید؟

۸. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{2}{x+2} < \frac{1}{x-3}$$

۹. هرم مثلث‌القاعده و منتظم DABC داده شده است (D راس و ABC قاعده). می‌دانیم $AB = a$ و $AD = a\sqrt{2}$. هرم را با صفحه‌ای موازی یال‌های AD و BC قطع کرده‌ایم. فاصلهٔ این صفحه ازیال AD برابراست با d. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مقطع هرم بااین صفحه.

حل درصفحه‌های آخر

معادله حل کنید

این معادله‌ها را حل کنید:

۱. $[x+\frac{1}{2}]+[x]^2=[2x]+2$

۲. $\frac{x^2+12x+4}{x+2}=6\sqrt{x}$

۳. $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

۴. $\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^3+6$

محاسبه کنید

می‌دانیم $\frac{x}{x^2+x+1}=a$، مطلوب است محاسبهٔ عبارت $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ برحسب a.

حل درصفحه‌های آخر

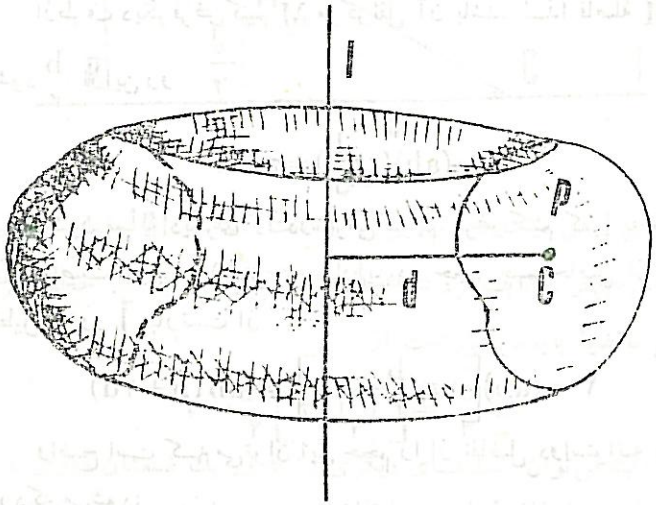
تجربه باقضیهٔ پاپوس (Pappus)

علیرضا امیرمعز (دانشگاه تگزاس تك)

قضیهٔ مشهور پاپوس که در بعضی کتاب‌ها آن‌را به‌گولدن (Guldin) نسبت می‌دهند بسیارجالب وقابل‌تحسین است. تجربه بااین قضیه کمك‌زیادی به‌تفهیم آن می‌کند. دستورهای بیشماری بدون اثبات درکتاب‌ها موجود است مثل سطح دایره، حجم کره وغیره. از این‌روقضیهٔ پاپوس را به‌عنوان یك دستور می‌توان قبول کرد.

قضیهٔ پاپوس: فرض کنیم که P قطعه‌ای محدود و مسطح باشد و C مرکزثقل آن. هرگاه P را دورخط l که درصفحه آنست و P را قطع نمی‌کند دوران دهیم، حجم جسم حاصل به‌قرارزیراست:

«اگرمسافت C را تا l با d نمایش دهیم (شکل ۱) ومساحت P را با C_a، نتیجه می‌شود که V، حجم جسم حاصل عبارتست از:

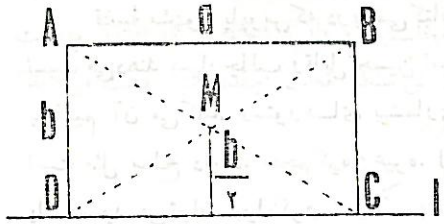


شکل ۱

$$V=(2\pi d)a. \qquad (1)$$

به‌این معنی که مساحت P را در محیط دایره بشعاع d ضرب می‌کنیم».

استوانه: مربع مستطیل ABCD را که اضلاع آن a و b می‌باشند درنظرمی‌گیریم (شکل ۲). هرگاه‌این مستطیل رادور $DC=l$ دوران دهیم‌استوانه‌ای به‌دست می‌آیدکه نمی‌توان حجم‌آن را بادوفرمول به‌دست آورد ومقایسه کرد.



شکل ۲

واضح است‌که حجم این استوانه

$$V=\pi b^2 a$$

است .

ازطرف دیگرفرض‌کنیم M مرکزثقل آن باشد. لذا فاصلهٔ M تا l می‌شود $\frac{b}{2}$. ازاین رو

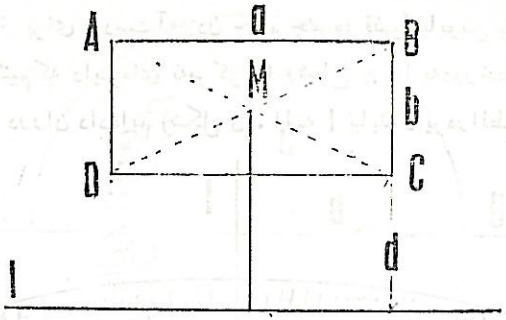
$$V=(ab)(2\pi\frac{b}{2})=\pi b^2 a$$

اکنون مسألهٔ دیگری را درنظرمی‌گیریم. فرض‌کنیم که l به‌موازات DC به‌فاصله d باشد (شکل ۳) . ازاین رو حجم جسم حاصل از دوران مستطیل به‌دور l عبارتست از

$$V=(ab)\left[2\pi(\frac{b}{2}+d)\right]=\pi ab(b+2d) \qquad (2)$$

واضح است که می‌توان این حجم را از تفاضل دواستوانه به‌دست آوردکه می‌شود:

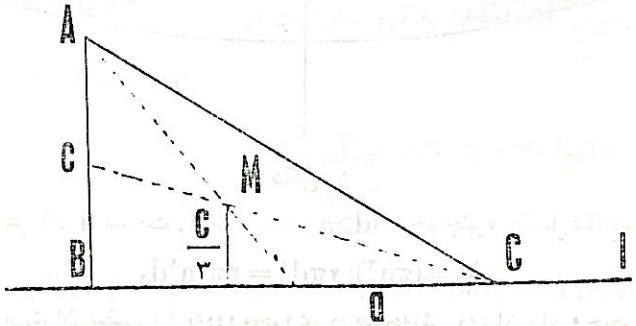
$$V=\pi(d+b)^2 a-\pi d^2 a. \qquad (3)$$



شکل ۳

خواننده به‌سهولت می‌تواند نشان دهدکه (۲)و(۳) هم‌ارزند.

مخروط: مثلث قائم‌الزاویه ABC رادرنظر می‌گیریم که زاویهٔ B درآن قائمه است (شکل ۴)، این مثلث را به‌دور $BC=l$ دوران می‌دهیم.



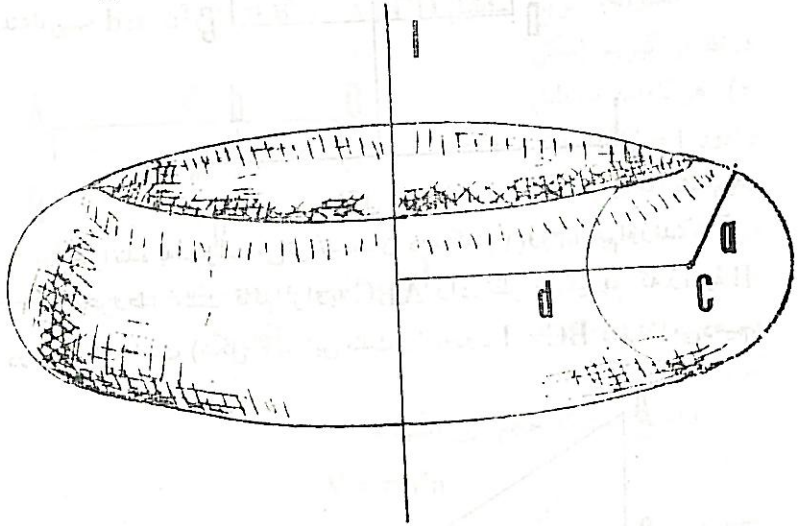
شکل ۴

مرکز ثقل این مثلث محل تلاقی میانه‌هاست که با M نمایش می‌دهیم . به‌آسانی می‌توان ثابت‌کردکه فاصلهٔ M تا BC می‌شود $\frac{c}{3}$. حجم مخروط حاصل باقضیهٔ پاپوس عبارتست از

$$V=\frac{ac}{2}\left[2\pi(\frac{c}{3})\right]=\frac{\pi c^2}{3}a.$$

البته می‌توان مثلث‌های دیگری را به‌دور یك ضلعشان دوران داد و حجم حاصل را باقضیهٔ پاپوس یا تفاضل دومخروط بدست آورد ونتیجه را مقایسه کرد.

چنبره: برای به‌دست‌آوردن حجم چنبره، قضیهٔ پاپوس بهترین وسیله است. فرض کنیم که دایره‌ای به‌مرکز C وشعاع a را به‌دورخط l که در صفحهٔ آنست دوران داده‌ایم (شکل ۵). البته l نباید دایره‌را قطع کند.



شکل ۵

هرگاه d مسافت C تا l باشد، $d \geqslant a$، حجم چنبرهٔ حاصل عبارتست از:

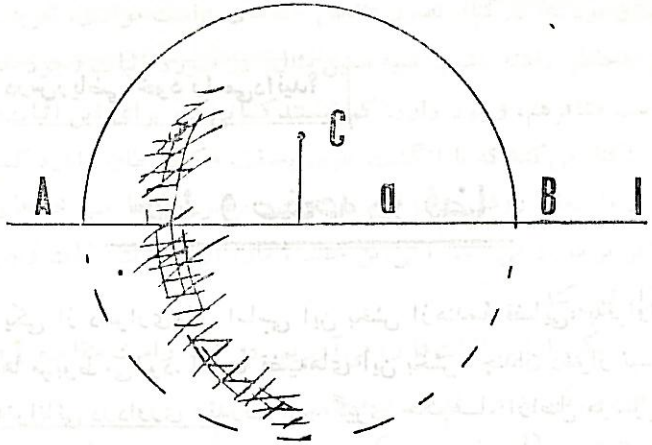
$$V=(\pi a^{2})(2\pi d)=2\pi^{2}a^{2}d.$$

می‌توان بیضی را به‌دورمحوری درصفحه‌اش دوران داد وحجم آن‌را به‌دست آورد. آن‌را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

به‌دست‌آوردن مرکزثقل: گاهی قضیهٔ پاپوس رامی‌توان برای به‌دست آوردن مرکز ثقل به‌کار برد. نیم‌دایره‌ای، به‌قطر AB را در نظر می‌گیریم (شکل ۶). فرض کنیم که C مرکزثقل آن باشد، برای بدست‌آوردن C نیم‌دایره را به‌دور AB می‌چرخانیم.

فرض کنیم که $AB=2a$ و فاصلهٔ C تا AB عبارت از d باشد. بنا به قضیهٔ پاپوس حجم کرهٔ حاصل عبارتست از:

$$V=\left(\frac{1}{2}\pi a^{3}\right)\left(2\pi d\right). \qquad (4)$$



شکل ۶

ازطرف دیگرحجم این‌کره عبارتست از:

$$V=\frac{4}{3}\pi a^{3}. \qquad (5)$$

از مقایسهٔ (۴)و(۵) نتیجه می‌گیریم که

$$d=\frac{4a}{3\pi}.$$

پاپوس ($\pi\alpha\pi\pi o\sigma$) که یکی از ریاضی‌دان‌های مشهور یونانی است درحدود قرن سوم یاقرن اول میلادی در اسکندریه می‌زیسته [۱]. بیشتر تالیفات اوگم‌شده است. ولی به‌قدرکافی برای مطالعه وتحقیق دردست‌است. قضایای بی‌شماری را کشف‌کرده است و مهم‌ترین آن‌ها قضیهٔ مذکور است که‌آن را مطالعه‌کردیم.

REFERENCE

[1] David Eugene Smith, History of Mathematics, Vol. 1, Gi nn and Co. (1925). Reprinted by Dover Publication Inc.

آیا درس‌ریاضی خود را می‌دانید؟

خط و صفحه در فضا

یکی از دشواری‌های اساسی این بخش ازهندسهٔ فضایی، به‌فراوانی تعریف‌ها مربوط می‌شود. اثبات قضیه‌های این بخش، چندان دشوار نیست، ولی به‌توانائی درداوری وقدرت نتیجه‌گیری حکم‌ها، ازاصل موضوع‌ها وتعریف‌ها، نیازدارد.

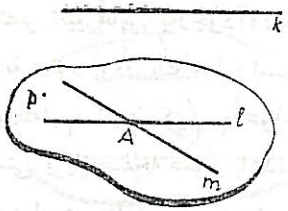
برای مطالعهٔ این بخش ازهندسهٔ فضائی باید، قبل از همه، تعریف‌ها را، به‌صورتی دقیق و روشن، درك‌کرد. موازی بودن و عمود بودن خط‌های راست وصفحه‌ها، زاویهٔ بین خط‌های راست متنافر و فاصلهٔ بین‌آن‌ها، زاویهٔ بین خط راست وصفحه، این‌ها، مفهوم‌هایی اساسی‌اندکه باید به‌اندازهٔ کافی برآن‌ها تسلط داشت.

ضمناً متوجه باشیدکه در دام یکی از دوحالت افراطی نیفتید، اولاً، از به‌خاطر سپردن واژه به‌واژه و حرف به‌حرف تعریف‌ها، اصل موضوع‌ها وقضیه‌ها، بدون این‌که مفهوم هندسی آن‌ها را درك‌کنید وبدون مراجعه به‌شکل هندسی متناظر آن‌ها، پرهیزکنید؛ ثانیاً، تنها به‌شکل هندسی و تصور فضائی آن اکتفا نکنید و مفهوم دقیق تعریف را به‌فراموشی نسپارید. حالت اخیر، دربین دانش‌آموزان بیشتر رواج دارد و، بنابراین، باید خطرآن را جدی‌تر گرفت.

مثلاً، هرکسی می‌تواند چگونگی دو خط راست موازی را در فضا، پیش خود تصورکند باوجود این، برخی می‌کوشند، این حکم «کاملاروشن» را ثابت‌کنندکه؛ از دوخط راست موازی، می‌توان صفحه‌ای عبورداد و فراموش می‌کنندکه وجود چنین صفحه‌ای، مستقیماً، ازخود تعریف خط‌های راست موزای ناشی می‌شود. روشن است‌که، تنها وقتی می‌توان ازاین اشتباه

مصون بودکه، درکنار تصور هندسی خط‌های راست موازی، تعریف آن را هم به‌خاطر داشته باشیم. شبیه همین مثال، در مورد اثبات وجود خط‌های راست متنافرهم، وجود دارد. کم نیستندکسانی‌که، برای این اثبات، تنها به این اکتفا می‌کنندکه با انگشت خود، به‌سقف وکف اطاق اشاره کنند. البته، برای ما کاملاً روشن است که، در دورو برخود، کجا با خط‌های راست متنافر برخورد می‌کنیم، ولی‌این مطلب، مارا ازضرورت اثبات وجود آن‌ها آزاد نمی‌کند.

یکی ازاین اثبات‌ها را می‌آوریم. دو خط راست متقاطع l و m را درنظر می‌گیریم وازنقطه‌ای واقع‌در خارج صفحه P، یعنی صفحه‌که به وسیلهٔ این دوخط راست متقاطع معین می‌شود، خط راست k راموازی با l رسم می‌کنیم. دراین صورت، k و m بریك صفحه قرار ندارند. در



واقع، چون خط راست k باخط l موازی است، درنتیجه، با صفحهٔ P موازی می‌شود بنابراین، نمی‌تواند باخط راست m متقاطع باشد. از طرف دیگر، این دوخط راست، موازی هم نیستند، زیرا، درغیر این صورت، توانسته‌ایم ازنقطهٔ A، دوخط راست، موازی با k، رسم‌کنیم، که ممکن نیست (چرا؟).

همه می‌دانیم که دوخط راست موازی با خط راست سوم، با هم موازی‌اند، ولی تعدادکمی هستندکه می‌توانند این حکم راثابت‌کنند. ضمناً، ازاین حکم می‌توان، پاسخ مربوط به‌پرسش بالاراهم پیدا کرد.

موردهایی وجود دارد، که دانش‌آموزی، بدون این‌که از تعریف درست آگاهی داشته باشد، ازتعریف‌های اشتباه‌آلود مشابهی استفاده می‌کند و، آن‌وقت، به «کشف‌هایی» خیالی می‌رسد، از نوع، خط راستی موازی با صفحه است‌که باخط راستی واقع درآن صفحه، موازی باشد؛ خط راستی بریك صفحه عمود است که برخط راستی ازاین صفحه عمود باشد؛ زاویهٔ

بین خط راست وصفحه، به‌زاویه‌ای گفته می‌شود که این خط راست باهرخط راست واقع برصفحه تشکیل می‌دهد و غیره. کافی است، مفهوم هندسی این «تعریف‌ها» را پیش خود تصور کنیم تا مهمل بودن آن‌ها، برای ما، روشن شود.

از طرف دیگر، نباید، این و یا آن تعریف را، واژه به‌واژه حفظ کرد. می‌توان، آن‌چه را که درکتاب‌های درسی داده شده است، در صورت لزوم، به‌نحو دیگری تنظیم کرد. مثلاً می‌توان، خط راست عمود برصفحه‌را، به‌عنوان خط راستی‌که بر دوخط راست متقاطع صفحه عمود است، تعریف کرد. ولی این‌تعریف تازه، مارا ناچارمی‌کند تادرتعریف‌ها وقضیه‌های بعدی، مختصر تغییرهایی به‌وجودآوریم. به‌خصوص، دیگر بی‌معنی خواهد بود که نشانهٔ عمود بودن یك خط راست برصفحه، یعنی آن‌چه راکه به‌عنوان‌تعریف پذیرفته‌ایم، ثابت کنیم. درعوض، باید این قضیه را ثابت‌کنیم که، اگرخط راستی بریك صفحه عمود باشد، برتمامی خط‌های راست واقع برآن صفحه، عمود است. به‌این ترتیب، حتی در این حالت‌هم، «ساده‌ترکردن» تعریف‌ها، ممکن است منجر به‌دشواری‌های اضافی شود.

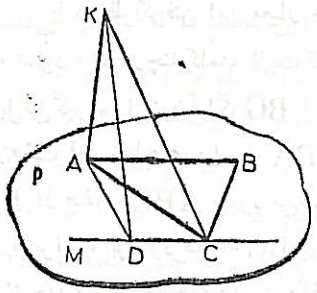
یکی از مهمترین مفهوم‌های این بخش از هندسهٔ فضائی، مفهوم زاویهٔ بین دوخط متنافر است آن را به‌خاطر بیاوریم. برای ساختن زاویهٔ بین دو خط متنافر، به‌این ترتیب عمل می‌کنند: نقطهٔ دلخواهی ازفضا را درنظر می‌گیرند وازآن، دوخط راست، موازی دوخط راست مفروض، رسم‌می‌کنند. زاویهٔ بین دوخط راست متقاطعی‌که به‌دست می‌آید، زاویه بین دو خط راست متنافر نامیده می‌شود.

این تعریف، به‌طور طبیعی، پرسشی به‌وجود می‌آورد: آیا زاویهٔ بین دوخط راست متنافر، به‌نقطه‌ای‌که به‌عنوان رأس‌آن انتخاب‌کرده‌ایم، بستگی ندارد؟ به‌نظر می‌رسد که انتخاب نقطه، تأثیری درمقدار زاویه ندارد؛ ولی برای اطمینان ازاین موضوع باید به‌معیار معلوم توازی دوصفحه و قضیهٔ مربوط به‌زاویه‌های باضلع‌های موازی درفضا، استنادکرد. حالا، دراین‌باره بیندیشیدکه آیا قضیهٔ مربوط به‌زاویه‌های با اضلاع عمود برهم، درفضاهم،

درست است؟

برای حل مسأله‌ها، معمولاً، راس زاویه را، نقطه‌ای واقع بریکی از دوخط راست را انتخاب می‌کنند. ماهم، مثلاً درمسالهٔ زیر، به‌همین ترتیب، عمل می‌کنیم.

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC روی صفحهٔ P داده شده‌است. روی عمود AK ،که برصفحهٔ P رسم شده است، پاره خط $AK=AB=a$ راجداکرده‌ایم. مطلوب است محاسبهٔ تانژانت زاویهٔ بین AB وKC.



از نقطهٔ C، خط راست CM را، موازی AB، رسم می‌کنیم. زاویهٔ KCM، بنا به‌تعریف، زاویهٔ مطلوب است. برای پیدا کردن تانژانت‌آن، ازنقطهٔ K، عمود KD را بر CM رسم می‌کنیم. دراین صورت، بنابرقضیهٔ سه‌عمود، AD بر AB عمود می‌شود. ازروی شکل، به‌سادگی دیده می‌شود که:

$$AD=\frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ و } CD=\frac{a}{2} \text{ و } KD=\frac{a\sqrt{7}}{2}$$

و ازآن‌جا

$$tg\,KCD=\sqrt{7}$$

مفهوم زاویهٔ بین دوخط راست متنافر، بلافاصله، امکان تعریف دوخط راست عمود برهم را، به‌عنوان خط‌های راستی‌که زاویهٔ بین آن‌ها قائمه است، به‌وجود می‌آورد. واین مفهوم، به‌نوبهٔ خود، موجب ساده‌تر شدن حل مساله‌ها می‌شود.

دراین ارتباط، تعمیم معیار عمود بودن خط راست برصفحه، می‌تواند جالب باشد.

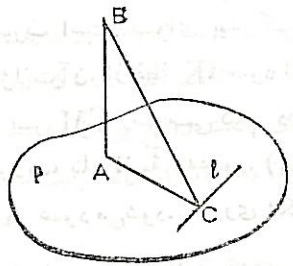
اگرخط راستی، بردو خط راست دلخواه وناموازی ازصفحه‌ای عمود باشد، براین صفحه عمود خواهد بود.

دراین تعریف، این ضرورت حذف شده است‌که دوخط راست واقع

برصفحه، باید الزاماً ازنقطهٔ برخورد خط راست مفروض و صفحه بگذرند. همین نکته، که ظاهراً اهمیت چندانی ندارد، نقش عمده‌ای درحل مساله‌ها به‌عهده دارد.

اثبات این معیار، فوق‌العاده ساده است. اگر خط راست مفروض، بر دوخط راست متقاطع صفحه عمود باشد، برخط‌های راست موازی آن‌هم، که ازنقطهٔ برخورد خط مفروض باصفحه می‌گذرند، عمود خواهد بود و، بنابراین، برصفحه عمود خواهد بود.

با درنظرگرفتن این معیار عمود بودن خط برصفحه، می‌توان قضیهٔ سه عمود را، درچندکلمه، ثابت کرد. AB و BC را، به‌ترتیب، عمود و مایل‌می‌گیریم. اکنون، اگر $l \perp BC$، آن‌وقت l برخط‌های راست BA و BC از صفحهٔ ABC عمود می‌شود و، بنابراین، برخود صفحه ABC و، درنتیجه، برهمهٔ خط‌های‌راست واقع برصفحهٔ ABC و، به‌خصوص، بر تصویر AC، عمود خواهد بود. بر عکس، اگر l را عمود برتصویر AC رسم‌کنیم، بردوخط راست واین‌بار، بر AB و AC ـ ازصفحهٔ ABC عمود می‌شود و، ازآن‌جا، نتیجه می‌شودکه l بر BC عمود است.



به‌یاری همین معیار عمود بودن خط راست برصفحه، حکم سودمند دیگری‌هم ثابت می‌شود.

ارتفاع هرم مثلث‌القاعدهٔ KABC، وقتی وتنها وقتی، از ارتفاع AD قاعده می‌گذردکه یال KA بر یال BC عمود باشد.

درواقع ، اگر ارتفاع هرم از همهٔ ارتفاع‌های قاعده بگذرد ، هریك از یال‌های جانبی هرم بر یال متناظر مقابل آن درقاعده، عمود است. ولی، بنابرهمین‌قضیه، منتهی در «جهت عکس»، هرارتفاع هرم هم، همین خاصیت را دارد.

این مسأله را خودتان حل‌کنید:

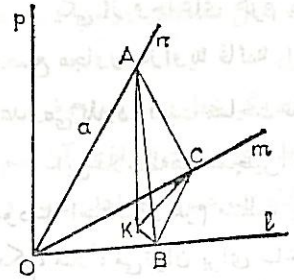
یکی از وجه‌های هرم مثلث‌القاعده‌ای، مثلث قائم‌الزاویه‌ای است با دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ b و c ارتفاع هرم، ازنقطهٔ برخورد ارتفاع‌های قاعده می‌گذرد. نسبت مساحت‌های دو وجه دیگررا پیدا کنید.

این ملاحظه‌ها همچنین، منجر به‌حکمی می‌شودکه، برای حل‌مساله‌ها، سودمند است: در هرم منتظم، یال‌هـای مقابل به‌هم، برهم عمودنـد. ازاین حکم، مثلاً، می‌توان برای ساختن زاویهٔ خطی متناظر بـا زاویهٔ دو وجهی هرم استفاده‌کرد. خیلی از دانش‌آموزان، این ساختمان‌را، این‌طورمی‌دهند: «ازضلع قاعده، صفحه‌ای عمود بر یال جانبی مقابل رسم می‌کنیم، زاویه‌ای که در مقطع به‌دست می‌آید، همان زاویهٔ خطی مطلوب است». این‌استدلال، اساساًدرست است، ولی دربارهٔ یك مطلب مهم سکوت می‌کند: به‌چه‌مناسبت، می‌توانیم چنین صفحه‌ای رسم کنیم؟ درواقع، درمورد دو خط راست متنافر دلخواه، همیشه نمی‌توان این عمل را انجام داد. رسم چنین صفحه‌ای، وقتی وتنهاوقتی ممکن است که‌این خط‌های‌راست، برهم عمود باشند(ثابت‌کنید!). ولی، همان طورکه دیدیم، یال مقابل به‌هم، درهرم مثلث‌القاعدهٔ منتظم، در واقع هم، بریکدیگر عمودند.

حالا، به‌مساله‌ای می‌پردازیم که، درآن، ازوضع چهارخط راست در فضا، نسبت به‌هم، صحبت شده است.

زاویه‌های مسطحهٔ یك کنج سه وجهی، برابرند با ۴۵°، ۴۵° و ۶۰°. از راس این کنج، خط راستی عبورداده‌ایم‌که برصفحهٔ شامل زاویهٔ ۴۵درجه عمود باشد. مطلوب است زاویهٔ بین این خط راست بـا یالی ازکنج کـه در صفحهٔ مذکور قرار ندارد.

برای‌رسم‌شکل، ازقاعدهٔ معمول‌که راس‌کنج رادربالامی‌گیرند،پیروی نمی‌کنیم. برعکس، چون درصورت مساله، ازخط راستی صحبت شده‌است که بردوخط راست دیگر، یا صفحه شامل آن‌ها، عمود است، این صفحه را به‌صورت افقی وخط راست عمود برآن را، به‌صورت قائم، نشان می‌دهیم. به‌این ترتیب، O را راس‌کنج سه‌وجهی می‌گیریم‌که خط‌های راست



l و m از آن گذشته و باهم زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازند، p بر این دو خط راست عمود و n، یال سوم کنج سه وجهی است. زاویهٔ بین n و m برابر ۴۵ درجه و زاویهٔ بین n و l برابر ۶۰ درجه است.

روی خط راست n، پاره خط DA را، به‌طولی مساوی a (دلخواه) جدا و از نقطهٔ A، عمود AK را برصفحهٔ خطهای راست l و m، رسم می‌کنیم. علاوه برآن از نقطهٔ A، عمودهایی هم برخطهای راست l و m رسم می‌کنیم. نقطه‌های B و C را به K وصل می‌کنیم، از آن‌جا، بنا برقضیهٔ سه‌عمود، معلوم می‌شود که خطهای راست BK و CK، به‌ترتیب، بر l و m عمودند.

ازمثلث‌های AOB و AOC، به‌سادگی، به‌دست می‌آید:

$$OC=\frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ و } OB=\frac{a}{2}$$

ولی به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که پاره خطهای به‌طول $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{a}{2}$، عبارتند از وتر و یك ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه از یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و چون زاویهٔ BOC برابر ۴۵ درجه است (ازاین شرط تاکنون استفاده نکرده بودیم)، درنتیجه، BC ضلع دوم مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ این مثلث است و، بنابراین، زاویهٔ CBO قائمه است. ولی، قبلاً هم یادآوری کردیم که، زاویهٔ KBO هم قائمه است به‌این ترتیب، به‌صورت کاملاً نامنتظره‌ای به‌تناقض رسیدیم.

ولی، به‌راحتی، می‌توان ازاین وضع نجات پیدا کرد: ازآن‌چه پیش آمد، خیلی ساده، نتیجه می‌شود که نقطه‌های C و K برهم منطبق‌اند، به‌زبان دیگر، عمود AC برخط راست m، عبارت است ازعمود برصفحهٔ COB. ولی دراین صورت، این عمود موازی خط راست p می‌شود. ازاین‌جا نتیجه

می‌گیریم که خطهای راست p و AC روی یك صفحه قرار دارند، و چون زاویهٔ AOC برابر ۴۵ درجه است، زاویهٔ مطلوب بین خطهای راست n و p هم، برابراست با ۴۵ درجه.

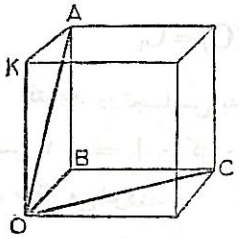
به‌خصوصیت این مساله توجه کنیم: توانستیم آن روی شکلی که نادرست رسم کرده بودیم، حل کنیم. وقتی هم که فهمیدیم، دونقطه از شکل باید برهم منطبق باشند، به‌فکر رسم شکل درست نیفتادیم. ولی از این وضع می‌توان فرار کرد، مثلاً به‌این ترتیب.

$AB \perp l$ و $AC \perp m$ را رسم می‌کنیم. طول پاره خطهای $AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ رامحاسبه می‌کنیم، بنابراین (از مثلث BOC) به‌دست می‌آید: $BC=\frac{a}{2}$، ولی دراین صورت

$$AC^2+CB^2=AB^2$$

به‌نحوی که، زاویهٔ ACB قائمه است.

این استدلال، موفقیت‌آمیزتراست. ولی، ساده‌ترین راه حل این‌مساله، چنین است. مکعبی را در نظر می‌گیریم روشن‌است که کنج سه‌وجهی OABC همان کنجی است که، در مسالهٔ ۱، ازآن صحبت شده است؛ ولی خط راست OK بر p عمود است. روشن است که زاویهٔ AOK، زاویهٔ مطلوب وبرابر ۴۵ درجه است.



اکنون خودتان این مساله راحل کنید.

ثابت‌کنید که، اگرهمهٔ زاویه‌های راس یك هرم قائمه باشند، راس هرم، مرکز کرهٔ محیط برآن ونقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث قاعده، روی یك خط راست قراردارند.

استفاده از تجانس

برای حل برخی مساله‌های هندسهٔ مسطحه

دراین مقاله، صحبت از مثلث‌هـای متجانس و، درارتباط بـا آن‌ها، دایره‌های متجانس و بعضی بستگی‌ها، بین عنصرهـای این شکل‌ها است، که می‌توان ازآن‌ها، برای حل مساله‌ها استفاده کرد.

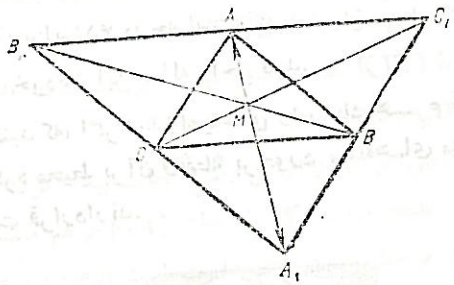
شکل‌های متجانس مختلفی را مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

I. اگر از راس‌های مثلث ABC، خط‌های راستی موازی باضلع‌های آن رسم‌کنیم، مثلث $A_1B_1C_1$ به‌دست می‌آید (شکل ۱)، کـه با مثلث ABC متجانس (متشابه) است. مرکز تجانس نقطهٔ M، محل برخورد میانه‌های مثلث وضریب تجانس $k=-2$ است.

اثبات. درتجانس به‌مرکز M و ضریب تجانس $k=-2$، نقطهٔ A به‌نقطهٔ A_1 تبدیل می‌شود، زیرا $\overrightarrow{MA_1}=-2\overrightarrow{MA}$ [این حقیقت را، این‌طور نشان می‌دهیم: $H_M^{-2}(A)=A_1$]. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$H_M^{-2}(B)=B_1, H_M^{-2}(C)=C_1$$

نتیجه. درتجـانس به‌مرکـز نقطهٔ برخورد میانه‌هـای مثلث و ضریب تجانس $k=-2$، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، به‌نقطهٔ برخورد ارتفاع‌هـای مثلث منتقل می‌شود.



شکل ۱

مسالهٔ ۱. ثابت کنید، درهرمثلث ABC، نقطهٔ O، مرکزدایرهٔ محیطی، نقطهٔ M محل برخورد میانه‌ها ونقطهٔ H محل برخورد ارتفاع‌ها، روی یك خط راست قراردارند (خط راست اولر) و، ضمناً، $2|OM|=|MH|$.

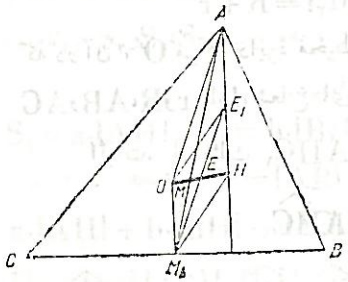
اثبات. چون $H_M^{-2}(O)=H$ (نتیجه را ببینید)، بنابراین خط‌راست OH شامل نقطهٔ M (مرکزتجانس) است (شکل ۲). ضمناً، از $k=-2$ به‌دست می‌آید $2|OM|=|MH|$.

مسالهٔ ۲. H رانقطهٔ برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC و M_1، M_2، M_3، E_1، E_2، E_3 را، به‌ترتیب، وسط پاره خط‌های BC، AC، AB، AH، BH، CH می‌گیریم. ثابت کنید، پاره خط‌های M_1E_1، M_2E_2 و M_3E_3 متقاربند، یعنی دریك نقطه به‌هم می‌رسند و، ضمناً $|M_1E_1|=|M_2E_2|=|M_3E_3|=R$ که درآن، R عبارت است ازشعاع دایرهٔ محیطی مثلث.

اثبات. چون $H_M^{-2}(M_1)=A$ و $H_M^{-2}(O)=H$، بنابراین $H_M^{-2}([OM_1])=[AH]$ و دراین صورت $[OM_1]\parallel[AH]$ و

$$|OM_1|=\frac{1}{2}|AH|$$

(شکل ۲) یعنـی چهـارضلعـی OM_1HE_1 متوازی‌الاضلاع است. به‌همین ترتیب، چهارضلعی‌های OM_2HE_2 و OM_3HE_3 هم متوازی‌الاضلاع می‌شوند . این سه‌متوازی‌الاضلاع، درقطر [OH] مشترکند، بنابراین



شکل ۲

$$[M_1E_1]\cap[M_2E_2]\cap[M_3E_3]=E$$

که درآن، E عبارت است از وسط [OH].

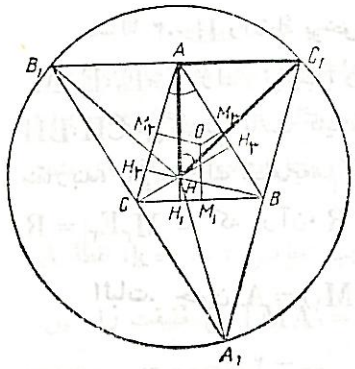
به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که چهارضلعی DAE_1M_1 متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه

$$|M_1E_1| = |M_2E_2| = |M_3E_3| = |OA| = R$$

مسالهٔ ۳. H را محل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC، R را اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی آن و a را طول ضلع BC می‌گیریم. ثابت کنید:

$$|AH|^2 = 4R^2 - a^2$$

اثبات. چون H مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ است (شکل ۳)، بنابر این $|HC_1| = 2R$ و رابطهٔ مورد نظر، به سادگی، از مثلث قائم‌الزاویهٔ HAC_1 به‌دست می‌آید.



شکل ۳

مسالهٔ ۴. ثابت کنید، در مثلث ABC، با سه زاویهٔ حاده،

$$|OM_1| + |OM_2| + |OM_3| = R + r$$

که در آن، O مرکز دایرهٔ محیطی، M_1 و M_2 و M_3 وسط ضلع‌های BC و AC و AB، R و r طول شعاع‌های دایره‌های محیطی و محاطی است.

اثبات. از مثلث AHC_1 (شکل ۳) داریم:

$$|AH| = 2R\cos A\widehat{HC_1}$$

ولی $A\widehat{HC_1} = \widehat{A}$ ($\widehat{A}$، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$، زاویه‌های مثلث ABC هستند)، در نتیجه

$$|AH| = 2R\cdot\cos\widehat{A}$$

چون $|OM_1| = \frac{1}{2}|AH|$ (شکل ۲)، پس

$$|OM_1| = R\cos\widehat{A}$$

و به‌همین ترتیب:

$$|OM_2| = R\cos\widehat{B},\quad |OM_3| = R\cos\widehat{C}$$

به‌این ترتیب:

$$|OM_1| + |OM_2| + |OM_3| = R(\cos\widehat{A} + \cos\widehat{B} + \cos\widehat{C}) =$$

$$= R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) =$$

$$= R\left(1 + \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}\right) =$$

$$= R\left(1 + \frac{r}{R}\right) = R + r$$

مسالهٔ ۵. مثلث ABC داده شده است؛ a، b و c طول ضلع‌ها، H محل برخورد ارتفاع‌ها و S مساحت آن است. ثابت کنید

$$a\cdot|AH| + b\cdot|BH| + c\cdot|CH| = 4S$$

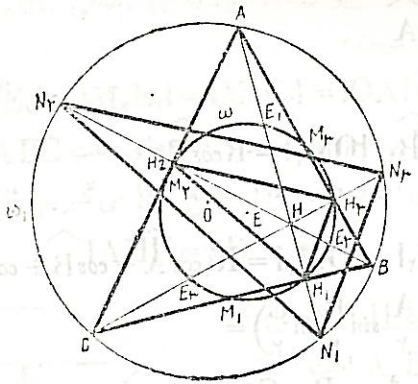
اثبات. مثلث‌های B_1HC_1، A_1HC_1 و B_1HA_1 را در نظر می‌گیریم (شکل ۳). مساحت این مثلث‌ها را، به‌ترتیب، S_1، S_2 و S_3 می‌نامیم، در این صورت $S_1 + S_2 + S_3 = 4S$. ولی

$$S_1 = a\cdot|AH|,\quad S_2 = b\cdot|BH|,\quad S_3 = c\cdot|CH|$$

که در آن‌ها، $a = |BC|$، $b = |AC|$ و $c = |AB|$؛ در نتیجه

$$a\cdot|AH| + b\cdot|BH| + c\cdot|CH| = 4S$$

II. دو مثلث در نظر می‌گیریم: مثلث $H_1H_2H_3$ (H_1، H_2 و H_3 پای ارتفاع‌های مثلث ABC است) و مثلث $N_1N_2N_3$ (N_1، N_2 و N_3 عبارتند از محل برخورد امتداد ارتفاع‌های AH_1، AH_2 و AH_3 مثلث، با محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC) (شکل ۴). در تجانس به‌مرکز نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاع‌های مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC و ضریب تجانس $k = 2$، مثلث $H_1H_2H_3$ به مثلث $N_1N_2N_3$ تبدیل می‌شود.



شکل ۴

راهنمائی. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد

$|HH_1| = |H_1N_1|$ و $|HH_2| = |H_2N_2|$ و $|HH_3| = |H_3N_3|$

ازهمین‌جا، می‌توان نتیجه‌گرفت که، اگرشعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را R بگیریم، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $H_1H_2H_3$ (که آن‌را **مثلث ارتفاعیه** گویند) برابر با $\frac{1}{2}R$ می‌شود.

مسالهٔ ۶. ثابت‌کنید، نقطه‌های M_1، M_2 و M_3 (وسط ضلع‌های مثلث ABC)، H_1، H_2 و H_3 (وسط پاره خط‌های AH، BH و CH)، H، محل برخورد ارتفاع‌ها) روی محیط یك دایره قراردارند (دایرهٔ اولر) و، ضمناً، شعاع این دایره، برابراست بانصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC.

اثبات. تجانس به‌مرکز H (محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC) و باضریب $k = 2$ رادرنظرمی‌گیریم. ω را، دایرهٔ محیطی مثلث $H_1H_2H_3$، ω_1 را، دایرهٔ محیطی مثلث $N_1N_2N_3$ و E و O را، به‌ترتیب، مرکز دایره‌های ω و ω_1 فرض می‌کنیم. دراین صورت، داریم:

$$H^2_H(\omega) = \omega_1,\quad H^2_H(E_1) = A,\quad H^2_H(E_2) = B,$$
$$H^2_H(E_3) = C$$

چون نقطه‌های A، B و C به‌دایرهٔ ω_1 تعلق دارند، بنابراین نقطه‌های

E_1، E_2 و E_3، متعلق به‌دایرهٔ ω خواهند بود. باتوجه به‌ضریب تجانس، نتیجه می‌گیریم که مرکز دایرهٔ ω (نقطهٔ E)، روی پاره خط OH قراردارد و، ضمناً، $|OE| = |EH|$. ازاین‌جامعلوم می‌شودکه شعاع دایرهٔ ω برابراست با نصف شعاع دایرهٔ ω_1. چون $|M_1E| = |E_1E|$ (مسألهٔ ۲ را ببینید)، بنابراین دایرهٔ ω از نقطهٔ M_1 وسط ضلع BC و، درنتیجه، از وسط ضلع‌های AC و AB هم می‌گذرد.

III. J را نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث ABC، W_1، W_2 و W_3 را نقطه‌های برخورد این نیمسازها با دایرهٔ محیطی مثلث (شکل ۵) می‌گیریم وفرض می‌کنیم:

$[AW_1] \cap [W_2W_3] = Q_1, [BW_2] \cap [W_1W_3] = Q_2,$
$[CW_3] \cap [W_1W_2] = Q_3$

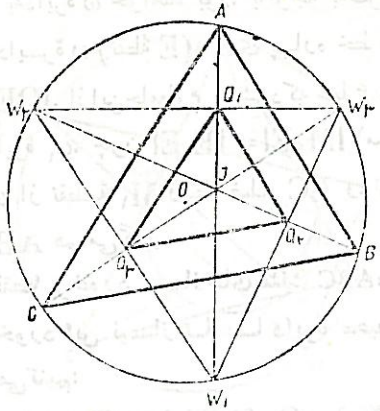
ثابت کنید، در تجانس به‌مرکز نقطهٔ J و ضریب تجانس $k = \frac{1}{2}$، مثلث ABC به‌مثلث $Q_1Q_2Q_3$ تبدیل می‌شود.

اثبات. می‌توان ثابت‌کرد (خودتان ثابت کنید) که $|CW_1| = |W_1J|$. علاوه برآن $\widehat{CW_1W_2} = \widehat{W_2W_1J}$، یعنی $|CQ_3| = |Q_3J|$؛ به‌همین ترتیب $|AQ_1| = |QJ|$ و $|BQ_2| = |Q_2J|$. از آن جا نتیجه می‌شود:

$$H^{\frac{1}{2}}_J(\Delta ABC) = \Delta Q_1Q_2Q_3$$

مسالهٔ ۷. ثابت‌کنید، خط راستی که ازنقطهٔ J (مرکزدایرهٔ محاطی) و نقطهٔO(مرکزدایرهٔ محیطی) مثلث ABC می‌گذرد، عبارت‌است‌ازخط راست اولر در مثلث به‌راس‌های W_1، W_2 و W_3 (نقطه‌های برخورد نیمسازهای مثلث بادایرهٔ محیطی‌آن).

اثبات. چون $[W_1W_2] \perp [W_3Q_3]$، $[W_1W_3] \perp [W_2Q_2]$ و $[W_2W_3] \perp [W_1Q_1]$، بنابراین، نقطهٔ J، محل برخورد ارتفاع‌های مثلث $W_1W_2W_3$ است (شکل ۵)، ازآن‌جا که نقطهٔ O، هم مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و هم مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $W_1W_2W_3$ و J

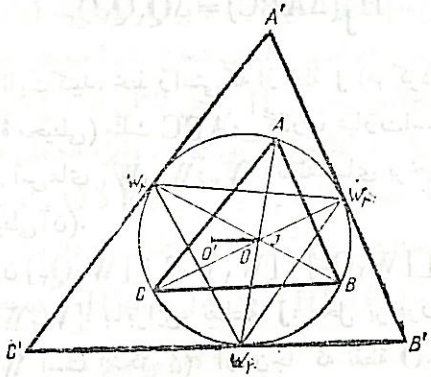


شکل ۵

نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های مثلث اخیراست، بنابراین (OJ)، خط راست اولر درمثلث $W_1W_2W_3$ است.

IV. اگر از نقطه‌های W_1، W_2 و W_3 (نقطه‌های برخورد نیمساز-های مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن) (شکل ۶)، مماس‌هایی بردایرهٔ محیطی مثلث ABC رسم‌کنیم، مثلث $A'B'C'$ به‌دست می‌آید که با مثلث ABC متجانس است.

مسالهٔ ۸. ثابت کنید، نقطه‌های O و O′، مرکزهای دایره‌های محیطی دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (شکل ۶) و نقطهٔ J، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث



شکل ۶

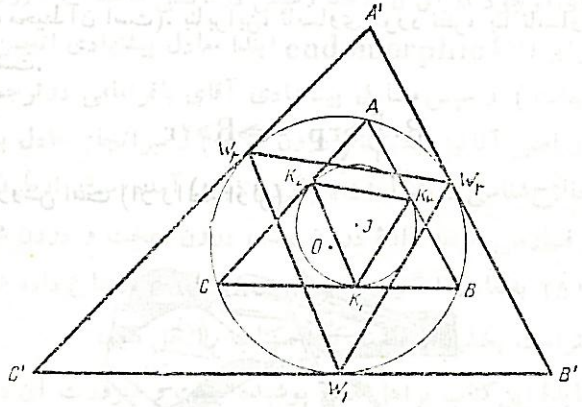
ABC، روی یك خط راست قرار دارند.

اثبات. چون مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC متجانس‌اند، بنابراین، دراین تجانس، نقطهٔ O′ به‌نقطهٔ O؛ و نقطهٔ O، به‌عنوان مرکز دایرهٔ محاطی مثلث $A'B'C'$، به‌نقطهٔ متناظر خود J مرکز دایره محاطی مثلث ABC تبدیل می‌شود. ازآن جا نتیجه می‌شود که نقطه‌های O′، O و J بر یك خط راست قرار دارند.

V. مثلث $K_1K_2K_3$ رادرنظر می‌گیریم، که درآن، K_1، K_2 و K_3 عبارتند ازنقطه‌های تماس ضلع‌های مثلث ABC بادایرهٔ محاطی آن. ثابت کنید، مثلث $K_1K_2K_3$ بامثلث $W_1W_2W_3$ متجانس است (W_1، W_2 و W_3، عبارتند از نقطه‌های برخورد نیمسازهای مثلث ABC بادایرهٔ محیطی آن)، وضریب تجانس برابراست با $k=\frac{r}{R}$ (r شعاع دایره محاطی و r شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است).

اثبات. درواقع، اگر ازنقطه‌های W_1، W_2 و W_3 مماس‌هایی بردایره رسم کنیم، مثلث $A'B'C'$ به‌دست می‌آید (شکل ۷)، که متجانس با مثلث ABC است ومثلث $W_1W_2W_3$ رابه‌مثلث $K_1K_2K_3$ تبدیل می‌کند.

مسالهٔ ۹. ثابت کنید، خط راستی که ازنقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی



شکل ۷

و نقطهٔ J ، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌گذرد، خط راست اولر در مثلث $K_1K_2K_3$ است، که در آن، K_1، K_2 و K_3 عبارتند از نقطه‌های تماس ضلع مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن.

اثبات. در واقع ، خط راست OJ ، خط راست اولر در مثلث $W_1W_2W_3$ است که با مثلث $K_1K_2K_3$ متجانس است (شکل ۷) و این خط راست از نقطهٔ J، مبدل نقطهٔ O، می‌گذرد.

مسالهٔ ۱۰. S و S_W را ، به‌ترتیب ، مساحت مثلث‌های ABC و $W_1W_2W_3$ می‌گیریم (W_1، W_2 و W_3 ، عبارتند از نقطه‌های برخورد نیمسازهای مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن). ثابت کنید $S \leqslant S_W$.

اثبات. $Q_1Q_2Q_3$ را مثلثی می‌گیریم که راس‌های آن، پای ارتفاع‌های مثلث $W_1W_2W_3$ باشد. ثابت کردیم (III را ببینید) که

$$H_J^{\frac{1}{2}}(\Delta ABC)=\Delta Q_1Q_2Q_3$$

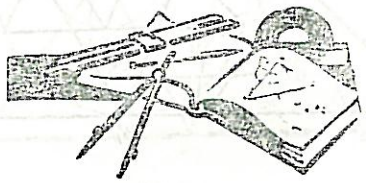
که در آن، J عبارت است از نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث ABC. یعنی

$$S_W=R.\frac{p}{2}, S=r.p$$

(دراین‌جا، R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، r شعاع دایره محاطی آن و p نصف محیط آن است). بنابراین، نامساوی مورد نظر، با نامساوی زیر هم‌ارز است.

$$R.\frac{p}{2} \geqslant rp \Longrightarrow R \geqslant 2r$$

واین‌هم روشن است (از رابطهٔ اولر).



واژگان ریاضی

انگلیسی ــ فارسی

فارسی ــ انگلیسی

تألیف مهندس محمد باقری. تهران، ۱۳۶۳، نشرروز، وزیری، اوست، ۱۴۵+۲۷۶ صفحه، ۱۱۴۰ ریال.

تاکنون چندین واژه‌نامه، فرهنگ و واژگان ریاضی منتشر شده است. تفاوت کتاب حاضر درجامعیت، وسعت ودقت آن است.

واژگان ریاضی قریب ۹۰۰۰ واژهٔ انگلیسی (یعنی دقیقاً ۸۹۶۱ واژه) ونزدیك به ۱۳۰۰۰ معادل فارسی آن را شامل است و برای تهیهٔ آن از ۷۰ مأخذ بهره‌گیری شده است، که ۵ مأخذ به‌صورت اصلی و ۶۵ مأخذ دیگر به‌صورت فرعی مورد اشاره و ذکر قرارگرفته؛ یعنی، مؤلف ابتدا معادل‌های موجود در آن ۵ مأخذ وسپس در باقی مآخذ را آورده است. مثلاً دربرابر واژهٔ endomorphic ابتدا معادل پیشنهادی انجمن ریاضی (درون‌ریخت) و سپس معادل پیشنهادی آقای باقرامامی درترجمهٔ کتاب پایه‌های ریاضی آنالیز جدید (درون شکل) و سرانجام معادل پیشنهادی گروه اصطلاح‌شناسی دانشگاه‌آزاد (درون دیسه) آمده است. ازطرف دیگر، در بخش فارسی هرسه واژهٔ درون دیسه، درون ریخت و درون شکل با شمارهٔ ۲۵۱۶ به‌معادل انگلیسی endomorphic ارجاع داده شده.

بهتراست بخشی از مقدمهٔ کوتاه‌کتاب را نقل کنیم:

«فایدهٔ این‌کتاب براهل فن پوشیده نیست و ضرورت آن در مطالعهٔ متون ریاضی و درترجمه وتألیف به‌خوبی پیداست، اگرهم روزی به‌تثبیت

و یك‌دست‌کردن واژه‌ها و معادل‌های ریاضی اقدام شود، باز یك چنین مأخذی نخستین وسیله ودست‌افزار به‌شمار می‌آید.

درنقل واژه‌ها، طبعاً به‌علت ماهیت تألیف، هیچ انتخابی درکار نبوده و همهٔ واژه‌های منابع ذکرشده به‌همان صورتی‌که بوده، نقل شده است. گاه دربرابر غلط‌های فاحش علامت سؤال گذاشته شده است».

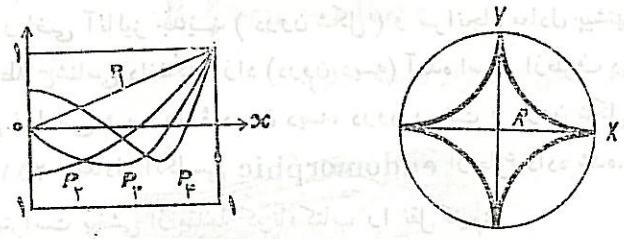
* * *

اما احساسی‌که از مطالعهٔ این واژگان به‌من دست داد، این بود که گاه برخی استادان ودست‌اندرکاران ریاضیات درکشور ما تاچه حد با زبان مادری خود و میراث آن بیگانه‌اند. همچنین، به‌نظر می‌رسد، برخی ریاضی‌دانان از خواندن آثار همکارانشان سخت می‌گریزند وآشنایی چندانی با کارآنان ندارند؛ درنتیجه، هنگام ترجمهٔ یك متن ریاضی‌شخصاً، ناگزیر می‌شوند معادل‌های تازه‌ای ابداع کنند.

همچنین مشاهده‌گرایی‌های افراطی درمیان نویسندگان ریاضی جالب است. برخی ازآنان درصدد ساختن واژه‌های فارسی سره‌اند و برخی دیگر نوشتن همان واژه‌های فرنگی را به‌خط فارسی‌کافی می‌دانند. چند نفری هم با توسل به‌اطلاع اندکشان از زبان عربی به‌ابداع ترکیبات و صیغه‌های مجعول عربی می‌پردازند.

باید امیدوار بود درآینده، مرجع صالحی با استفاده ازمنابع ومصالح موجود، سرانجام به‌کار تثبیت واژه‌های ریاضی همت کند.

رسم دومنحنی



$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n}(x^2 - 1)^n \qquad X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$$

شگفتی‌های شکل

سرگرمی‌های هندسه

دراین یادداشت از سرگرمی‌هایی صحبت می‌کنیم و مساله‌هایی از هندسه را می‌آوریم که دارای مجموعه‌ای نامتناهی ازجواب هستند.

حل این‌گونه مساله‌ها را، می‌توان، به‌عنوان مسابقه، برای ساختن شکل‌های بکر، مطرح کرد. این شکل‌ها رامی‌توان روی‌کاغذهای یك‌اندازه‌ای رسم‌کرد و ازآن‌ها آلبومی درست‌کرد. می‌توان، برای بهترین‌آلبوم‌ها هم، جایزه تعیین‌کرد.

چنین سرگرمی‌هایی، علاقه به‌ریاضیات را افزایش می‌دهد، دقت، حوصله ونیروی‌کشف دانش‌آموزان را تکامل می‌دهد و، به‌پیشرفت حسن زیبائی‌شناسی کمك می‌کند.

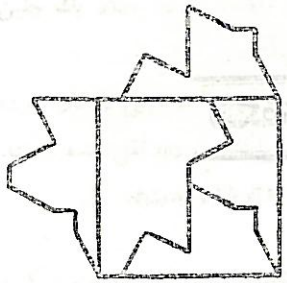
شکل‌های زیبا

چند مساله دراین‌جا می‌آوریم، ولی، معلم ریاضیات وخود دانش‌آموزان هم، می‌توانند، مساله‌های مشابهی طرح‌کنند.

۱. بارسم خط‌های شکسته و یا کمان‌های دایره، دریك مربع، آن‌را به‌سه‌قسمت تقسیم کنید، به‌نحوی که بتوان ازاین قسمت‌ها، شکلی ساخت‌که دارای محورتقارن باشد.

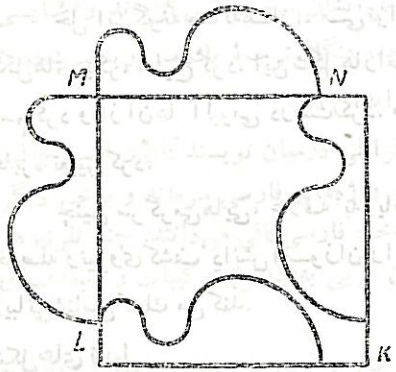
بهتراست، کار را روی یك کاغذ شطرنجی آغازکنید. مربعی انتخاب کنیدکه ۳۶، ۴۶ یا ۱۰۰ خانه داشته باشد. ابتدا، با آزمایش‌های متوالی، بهترین تقسیمی‌هارا که می‌پسندید، به‌کمك خط‌های شکسته و کمان‌های دایره، پیداکنید (تااین‌جا، می‌توانید از دست خود استفاده‌کنید. خط‌کش و پرگار) واز میان‌آن‌ها، زیباترین را (ازنظرخودتان) انتخاب‌کنید.

این‌شکل‌را، بادقت‌تمام، روی کاغذ شطرنجی رسم کنید و ، برای آلبوم، آن راروی‌کاغذیامقوای بدون خط منتقل کنید.



شکل ۱

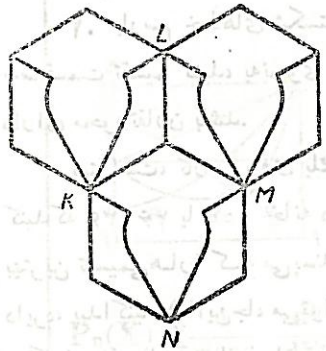
می‌توان، شرط‌های اضافی‌هم، به‌مساله اضافه کرد، مثلاً، تقسیم، تنها به‌کمك خط‌های شکسته انجام شود (شکل ۱) و یا فقط به کمك کمان‌های دایره‌ای (شکل ۲)، که البته، امکان را، تا حدی محدودتر می‌کند.



شکل ۲

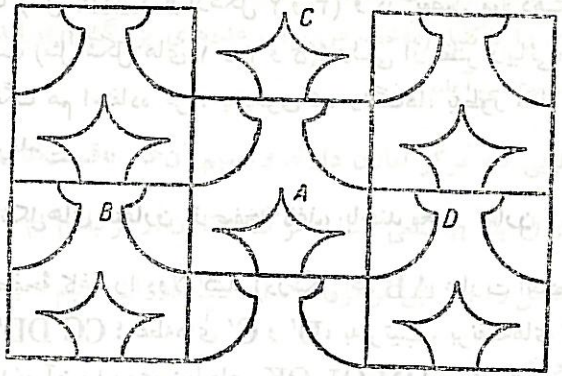
همچنین می‌توان، امکان‌ها را وسیع‌تر کرد، مثلاً، از متقارن بودن شکل نهائی صرف نظر کنیم، یااستفاده‌ازهرنوع کمانی‌راآزاد بگذاریم، که دراین صورت، با اندکی‌هنرمندی، می‌توان شکل‌های بسیار زیبائی پیداکرد.

۲. به‌جای مربع، شکل اولیهٔ خودرا، یك شش ضلعی منتظم درنظر بگیرید (شکل۳).

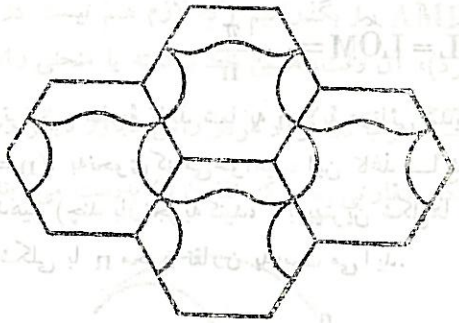


شکل ۳

۳. مربع یا شش ضلعی منتظم را، به‌چهار قسمت، چنان تقسیم کنید که بتوان از قسمت‌های آن، شکل جدیدی ساخت که محورتقارن داشته باشد (شکل های ۴ و ۵).



شکل ۴



شکل ۵

البته، تعداد تقسیم‌هارا، می‌توان اضافه‌کرد.

همچنین، به‌عنوان شکل اولیه، می‌توان هشت ضلعی منتظم، پانزده ضلعی منتظم وغیرآن را در نظرگرفت. ولی، باید توجه داشت‌که، تنها، در مورد مربع وشش ضلعی است‌که می‌توان با طرح‌های به‌دست آمده، پارکت یا کاشی ساخت. مثلاً، روی شکل ۴ دیده می‌شودکه می‌توان صفحه را با شکل‌هائی به‌صورت ABCD ساخت.

به‌همین مناسبت، می‌توان، روی کاغذ آلبوم ، تکه‌ای از پارکت را، بامقیاس‌کوچکتر، رسم کرد.

دربعضی از موردهایی‌که شکل برای پارکت طرح ریزی شده‌است،

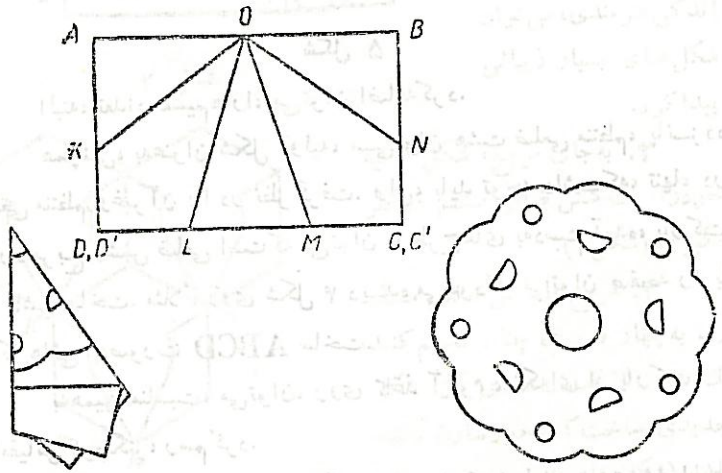
دورنگ (مثل KLMN ازشکل ۲ و ۳) و در بعضی موردهـا، سه رنگ لازم است (مثل شکل های ۱ و ۴ و ۵)؛ ولـی از نظر زیبائی، می‌توان از چهاررنگ هم استفاده کرد، به‌نحوی که، رنگ‌ها، به‌طور منظم پشت سرهم قرارگیرند.

بریدن شکل‌های متقارن از صفحهٔ کاغذ، باچند محور تقارن

صفحهٔ کاغذ را دولا کنید (درشکل ۶، AB عبارت است ازخط تای صفحهٔ $CC'DD'$ ؛ نقطه‌های C' و D'، به‌ترتیب، برنقطه‌های C وD قرار گرفته‌اند)، آن را روی خط‌های OK،OL،OM،... تا کنید، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$\widehat{AOK} = \widehat{KOL} = \widehat{LOM} = \cdots \frac{\pi}{n}$$

به‌این ترتیب، صفحهٔ کاغذ شما به n لایهٔ دوتائی تبدیل می‌شود (روی شکل ۶: $n = ۵$). به‌نحوی که می‌خواهید، این کاغذ تـا شده را بـا قیچی برش‌هایی بدهید (چند بارتجربه‌کنید، تا به‌بهترین شکل‌ها برسید). کاغذ را که بازکنید، شکلی با n محور تقارن به‌دست می‌آید.



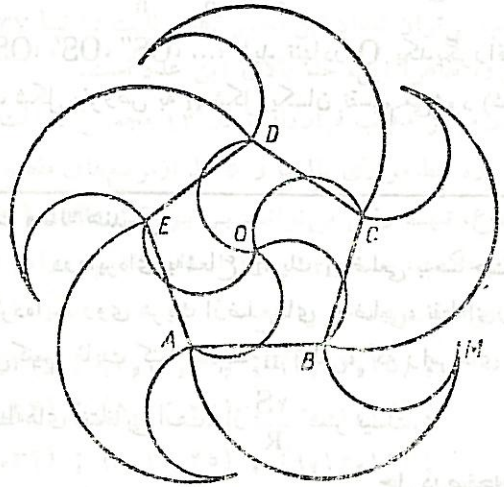
شکل ۶

برای رسم شکل‌های متقارن، ازکاغذ نازك استفاده‌کنید، زیـرا وقتی که‌کاغذکلفت را تاکنید (به‌خصوص برای عددهای بزرگ n)، اندازه‌های نامساوی به‌دست می‌آید.

رسم شکل‌هایی کـه مرکز تقارن دارند وتقسیم آن‌ها، به‌قسمت‌های یکسان.

مرکز O یك n ضلعی منتظم، مرکـز تقارن از مرتبهٔ n ام آن است، زیرا اگر شکل را دوراین مرکز، به‌اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۲}$ دوران دهیم « برخـودش منطبق می‌شود».

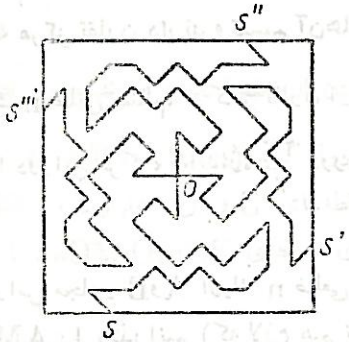
اگر از دوراس مجاور A وB ازیك n ضلعی منتظم، خط شکسته یـا منحنی دلخواه AMB را بگذرانیم (که لازم هم نیست درداخل زاویـهٔ AOB قرارگیرد)، آن وقت، همین خط شکسته یا منحنی را، ضمن دوران شکل بـه‌اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۲}$، مرتباً در مورد هردو راس مجاور دیگر رسم‌کنیم (شکل ۷ را ببینید)، شکل متقارنی با مرکز تقارن O به‌دست می‌آیند کـه ازمرتبهٔ



شکل ۷

n ام است.

منحنی AMB را باید طوری گرفت که «بعد از هر دوران» با حالت اولیهٔ خود متقاطع نباشد.



شکل ۸

اگر از مرکز تقارن O، خطی (شکسته یامنحنی یا مختلط) به‌نقطهٔ S از محیط شکل رسم کنیم و، سپس، خط‌های OS'، OS''، OS''' و A از OS ضمن دوران به‌اندازهٔ $\frac{2\pi}{n}$ ، $\frac{4\pi}{n}$ ، $\frac{6\pi}{n}$ ،... به‌دست می‌آیند، رسم کنیم (خط‌های OS، OS'، OS''، ...، باید تنها در O یکدیگر را قطع کرده باشند)، آن‌وقت، شکل مفروض به n شکل یکسان تقسیم می‌شود (شکل ۸).

یك مسالهٔ هندسی

دردایره‌ای به‌شعاع r، یك n ضلعی به‌مساحت S محاط کرده‌ایم. روی هریك ازضلع‌های n ضلعی، نقطه‌ای‌را انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید محیط n ضلعی، که راس‌های آن همین نقطه‌های انتخابی است، از $\frac{2S}{R}$ کمتر نیست.

حل درصفحه‌های آخر

مکعب وفقی ۳×۳×۳

در مکعب وفقی $n \times n \times n$ $(n \geq 3)$، باید عددهای درست از ۱ تا n^3 را، طوری روی یال‌ها و خط‌های موازی یال‌ها قرارداد که مجموع عددها درهر یال، هرخط موازی با یال و هرقطر، برابر مقدار ثابتی باشد. اگراین مقدار ثابت را S بگیریم، برای مکعب وفقی $n \times n \times n$ باید داشته باشیم :

$$S = \frac{1 + n^3}{2} \cdot n$$

تعداد ردیف‌هایی که، در هریك ازآن‌ها، این مقدار ثابت به‌دست می‌آید، برابراست با $3n^2 + 4$. مثلاً برای مکعب ۳×۳×۳ (مکعب مرتبهٔ سوم) $S = 42$ است واین مجموع، ۳۱ بار تکرار می‌شود.

اگر این مجموع ثابت را، درمورد قطر وجه‌ها ومقطع‌های مکعب هم، درنظر بگیریم، می‌توان تعداد این مجموع‌های ثابت را تا ۳۷ (برای $n = 3$) بالا برد و، ظاهراً این، حد بالای این عدد است.

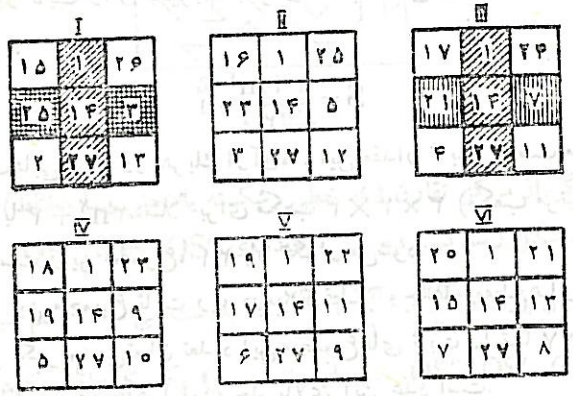
عددی‌که در مرکز مکعب قراردارد، در ۱۳ مجموع دخالت‌می‌کند: ۴ قطر مکعب، سه‌پاره خط موازی یال‌ها و ۶ قطرازمربع‌های مقطع مکعب. همهٔ این ۱۳ مجموع، تنها وقتی می‌توانند برابر مقدار ثابت $(S = 42)$ بشوندکه در مرکز مکعب، عدد ۱۴ را قرار داده باشیم؛ دراین صورت، عددهای سه‌گانهٔ این ۱۳ مورد چنین‌اند:

(۲۷و۱۴و۱) ; (۲۶و۱۴و۲) ; (۲۵و۱۴و۳) ;
(۲۴و۱۴و۴) ; (۲۳و۱۴و۵) ; (۲۲و۱۴و۶) ;
(۲۱و۱۴و۷) ; (۲۰و۱۴و۸) ; (۱۹و۱۴و۹) ;
(۱۸و۱۴و۱۰); (۱۷و۱۴و۱۱); (۱۶و۱۴و۱۲);
(۱۵و۱۴و۱۳).

هرعدد دیگری که در مرکز مکعب قراردهیم، تعداد این عددهای سه‌گانه (به‌مجموع ۴۲) کمتر از ۱۳ می‌شود.

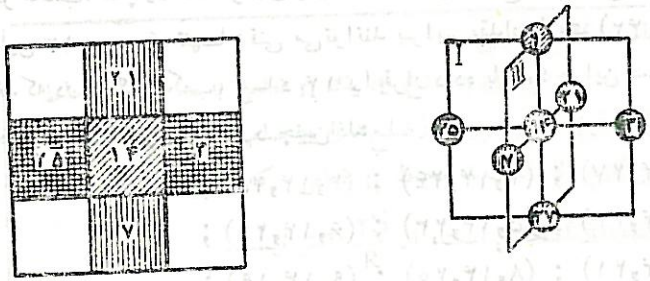
حالا ازاین‌جا آغاز کنیم که، باید درهرکدام ازسه مقطع مربعی دو به دو عمود برهم مکعب، یك مربع وفقی ۳ × ۳، داشته باشیم، طوری که‌خانه مرکزی را، عدد ۱۴ گرفته باشد.

فرض کنیم که، مثلاً، سه‌عدد (۲۷و۱۴و۱) ستون وسط مربع وفقی ۳ × ۳ را اشغال کرده باشند. تنها شش حالت مختلف ازاین گونه مربع‌ها وجود دارد (شکل ۱).



شکل ۱

ترکیب دومربع I و III را درنظرمی‌گیریم (شکل۲)، این دومربع،



شکل ۲

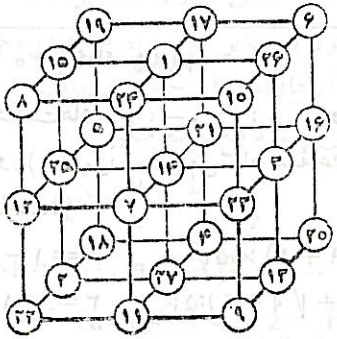
چهارعدد مربع سوم را می‌دهند و، درنتیجه، «مربع وفقی افقی» سوم

به‌سادگی به‌دست می‌آید (شکل ۳) «مکعب وفقی» که درآن، می‌توان،

۵	۲۱	۱۶
۲۵	۱۴	۳
۱۲	۷	۲۳

شکل ۳

مجموع ثابت ۴۲ را، ۳۷ بار شمرد، آماده می‌شود (شکل ۴).



شکل ۴

به‌همین ترتیب، می‌توان به‌ترکیب مربع‌های دیگر پرداخت.

سپس، بایدبه‌سراغ مربع‌های باستون‌های(۲۶و۱۴و۲)،(۲۵و۱۴و۳)، ...،(۱۵و۱۴و۱۳) برویم.

با این روش، معلوم می‌شودکه تنها چهار نوع ازاین گونه مکعب‌ها وجود دارد.

درجداول‌صفحهٔ بعد، این‌چهار نوع‌مکعب وفقی داده شده‌است؛ عددهای داخل‌پرانتزها، معرف عددهای‌راس‌های مکعب‌است.

	نوع اول	نوع دوم
یکی ازوجه‌ها	(۷و۱۲و۸و۲۸)	(۱۹و۶و۱۰و۸)
وجه مقابل آن	(۲۰و۴و۲۱و۱۶)	(۱۸و۲۰و۹و۲۲)

	نوع سوم	نوع چهارم
یکی ازوجه‌ها	(۲و۱۸و۱و۲۴)	(۳و۲۲و۲و۱۶)
وجه مقابل آن	(۲۷و۴و۲۶و۱۰)	(۲۶و۱۲و۲۵و۶)

عددهای صفر تا ۳۰ به‌کمك ۱۹۸۵

بااستفاده از علامت‌های $+$ ، $-$ ، $\times$ ، : ، $\sqrt{\ }$ و پرانتز بین رقم‌های ۱، ۹، ۸و۵ (به‌همین‌ردیف) می‌توان همهٔ عددهای‌طبیعی ازصفرتا ده راساخت:

$$1 = 1 - \sqrt{9} + 8 - 5 \qquad 0 = (1 - 9 + 8) \times 5;$$

$$3 = -1 - 9 + 8 + 5 \qquad 2 = (-1 + \sqrt{9} + 8):5;$$

$$5 = 1 - 9 + 7 + 5 \qquad 4 = -1 \times 9 + 8 + 5;$$

$$7 = 1 + 9 - 8 + 5 \qquad 6 = 1 \times 9 - 8 + 5;$$

$$9 = 1 \times \sqrt{9} \times (8 - 5) \qquad 8 = \left(1/(9)\right)^{8-5};$$

$$10 = -1 \times \sqrt{9} + 8 + 5$$

اگر ضمناً مجاز باشیم که از علامتهای ! (فاکتوریل) و [ ] (بخش درست عدد) هم استفاده‌کنیم ازهمان ۴ رقم (و باهمان ردیف) می‌توان عددهای طبیعی از ۱۱ تا ۳۰ راهم ساخت مثلاً

$$26 = (1 + \sqrt{9})! + [\sqrt{8/5}]$$

سعی کنید خودتان بقیهٔ عددهارا بسازید.

حل مسأله‌ها

مساله‌های مسابقه‌ای (صفحهٔ ۴۲۶ را ببینید)

بیست ودومین المپیاد بین‌المللی ریاضی

۱. اندیشهٔ راه‌حل روشن است: باید مجموع مورد نظر را برحسب پارامترهایی محاسبه و، سپس، مقدار پارامترهارا طوری پیدا کرد که این مجموع، حداقل مقدار ممکن بشود. پارامترها را به شیوه‌های گوناگونی می‌توان انتخاب کرد و، بنابر این، راه حل‌های مختلفی برای مساله وجود دارد. عادی‌ترین آن‌هارا، دراین‌جا، آورده‌ایم.

باید نقطهٔ می‌نیمم تابع باسه متغیر

$$f(p) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

را پیدا کرد ، که درآن ، $a = |AB|$ ، $b = |AC|$ ، $c = |BC|$ ، $x = |PF|$ ، $y = |PE|$ و $z = |PD|$ است (شکل ۱ـa). قاعدهٔ پیدا کردن اکسترمم‌های تابع باچند متغیر، جزو برنامهٔ دبیرستانی نیست. ولی می‌توان مساله را به‌محاسبهٔ می‌نیمم تابعی با یك متغیر، منجر کرد. قبلاً یادآوری می‌کنیم که، بنابر فرض، نقطهٔ P در درون مثلث واقع است و، بنابراین، مساحت S این مثلث را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{BPC} + S_{APC} + S_{APB} = S$$

ازآن جا، نتیجه می‌شود

$$ax + by + cz = S \qquad (S\text{، مقداری است ثابت}) \qquad (1)$$

اگرخودرا به‌این محدودکنیم که نقطهٔ P، روی پاره‌خط MN، موازی ضلع BC قرارداشته باشد، دراین صورت. مقادیر cz و $\frac{c}{z}$ برای تمامی این

پاره خط. مقادیری ثابت می‌شوند و، درنتیجه، مسالهٔ ما، منجر به پیدا کردن می‌نیمم تابع $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ می‌شود که تنها شامل دومتغیر است. ولی این دومتغیر هم، بنا به رابطهٔ (۱)، به‌هم مربوط‌اند: $ax+by=D$ ($D=S-cz$، مقداری است ثابت). بنابراین، باید می‌نیمم این تابع را پیدا کرد:

$$f_1(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{a}{x}+\frac{b^2}{D-ax}$$

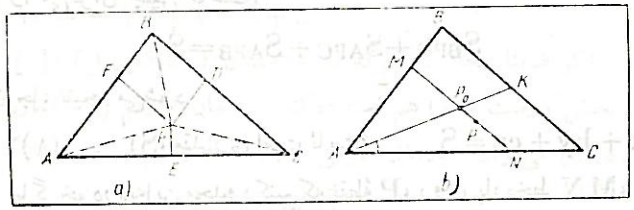
برای بررسی علامت مشتق این تابع

$$f'_1(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{ab^2}{(D-ax^2)}$$

بهتر است از این مطالب استفاده کنیم که $y=\frac{D-ax}{b}$:

$$f'_1(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{ab^2}{b^2y^2}=\frac{a}{x^2y^2}(x-y)(x+y)$$

حالا دیده می‌شود که وقتی $f'_1(x)=0$، که $x=y$ باشد، یعنی به‌ازای $x=\frac{D-ax}{b}$ و، ضمناً، این نقطه، می‌نیمم است. به‌این‌ترتیب، نتیجه‌می‌شود که، درمحدودهٔ پاره خط MN، برای این‌که تابع f می‌نیمم باشد، نقطهٔ P منحصر به‌فرد است ودرمحل برخورد MN با نیمساز زاویهٔ A قراردارد. بنابراین، این می‌نیمم تابع f، تنها می‌تواند نقطه‌ای از نیمساز AK باشد؛ اگر $P\notin[AK]$، ازنقطهٔ P، خط راستی موازی BC رسم می‌کنیم (شکل ۱



شکل ۱

b–) ونقطهٔ P_0، برخورد آن با [AK] را پیدا می‌کنیم. همان طور که ثابت کردیم $f(P_0)<f(P)$، برای نقطه‌های نیمساز AK داریم: $x=y$. از شرط (۱) به‌دست می‌آید: $z=\frac{S-(a+b)x}{c}$ و بنابراین، برای نقطه‌های داخلی پاره خط AK

$$f(P)=f_2(x)=\frac{a+b}{x}+\frac{c^2}{S-(a+b)x}$$

بررسی مشتق این تابع، شبیه بالا، نشان می‌دهد که می‌نیمم تابع f_2 تنها دریك نقطهٔ نیمساز به‌دست می‌آید ($x=z$)، یعنی نقطهٔ می‌نیمم تابع f. منحصر به‌فرد و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است.

این راه حلی کاملاً عادی است، ولی ساده‌ترین راه حل‌ها به‌شمار نمی‌رود. کوتاه‌ترین راه حل‌هارا هم می‌آوریم.

تابع $S\cdot f(P)$ را درنظر می‌گیریم، که درآن، S عبارت است از مساحت مثلث ABC. باتوجه به‌رابطهٔ (۱) داریم:

$$S\cdot f(P)=\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)=$$

$$=a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+$$

$$+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ac\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

از نابرابری معلوم $f+\frac{1}{k}\geqslant 2$ (به‌ازای $k>0$؛ علامت برابری تنها برای $k=1$ درست است)، به‌دست می‌آید:

$$S\cdot f(P)\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

$$S\cdot f(P)\geqslant(a+b+c)^2,\quad f(P)\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{S}$$

ضمناً، تنها وقتی $f(P)=\frac{(a+b+c)^2}{S}$، که داشته باشیم:

$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$. بنابراین $f(P)$ در نقطهٔ P_0، که برای آن داریم $x=y=z$، حداقل مقدار خود را دارد، یعنی P_0 مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است.

۲. بسیاری از راه حل‌های این مساله، اگر از نکته‌های جزئی بگذریم، تقریباً، به‌راه حل زیر منجر می‌شود:

می‌دانیم که، اگر مجموعه‌ای دارای m عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایی از آن که شامل p عضو هستند، برابر است با

$$C_m^p=\frac{m!}{p!(m-p)!}$$

برای حل مساله، ابتدا، عبارت مورد نظر، یعنی واسطهٔ عددی را، برحسب n و r پیدا می‌کنیم. توجه کنیم که کوچکترین عضوهای زیر مجموعه‌های r عضوی، از مجموعهٔ $M=\{1,2,\dots,n\}$، تنها می‌توانند در میان عددهای ۱، ۲، ...، $(n-r+1)$ باشند. ضمناً هر عدد طبیعی $k\leqslant n-r+1$، برای C_{n-k}^{r-1} زیر مجموعهٔ r عضوی، کوچکترین عضو است. درواقع، هریك ازاین‌گونه زیر مجموعه‌ها، به‌جز k شامل $(r-1)$ عضو از مجموعهٔ $\{k+1,k+2,\dots,n\}$ است (که از $(n-k)$ عضو تشکیل شده است). $(r-1)$ عضو را ازاین مجموعه، به‌تعداد C_{n-k}^{r-1} می‌توان انتخاب کرد.

به‌این ترتیب، مجموع S همهٔ عضوهای حداقل، چنین است:

$$S=10C_{n-1}^{r-1}+20C_{n-2}^{r-1}+\dots+(n-r+1).C_{n-(n-r+1)}^{r-1}$$

وچون، تعداد همهٔ زیر مجموعه‌های r عضوی، برابر است با C_n^r، برای حل مساله، باید ثابت کنیم: $\frac{S}{C_n^r}=\frac{n+1}{r+1}$، یعنی

$$S=\frac{n+1}{r+1}\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}=C_{n+1}^{r+1} \quad (1)$$

با استفاده از اتحاد معلوم زیر، که به‌سادگی هم قابل تحقیق است

$$C_{m+1}^{k+1}=C_m^{k+1}+C_m^k \quad (2)$$

مجموع S را، تبدیل می‌کنیم:

$$S=10(C_n^r-C_{n-1}^r)+20(C_{n-1}^r-C_{n-2}^r)+\dots+$$
$$+(n-r).(C_{r+1}^r-C_r^r)+(n-r+1).C_r^r=$$
$$=C_n^r+C_{n-1}^r+\dots+C_{r+1}^r+C_r^r$$

به‌این ترتیب

$$S=C_n^r+C_{n-1}^r+\dots+C_r^r \quad (3)$$

این می‌ماند که ثابت کنیم:

$$C_n^r+C_{n-1}^r+\dots+C_r^r=C_{n+1}^{r+1} \quad (4)$$

اثبات، به‌سادگی و با ورش استقراء ریاضی، با استفاده از برابری (۲)، به‌دست می‌آید.

باید ازراه حل یو. یکیشف، عضو گروه اتحاد شوروی هم نام ببریم. اگر A را واسطهٔ عددی کوچکترین عضوها و B را واسطهٔ عددی بزرگترین عضوهای زیر مجموعه‌های r عضوی بگیریم، داریم:

$$A+B=\frac{(n+1)\,(C_{n-1}^{r-1}+C_{n-2}^{r-1}+\dots+C_{r-1}^{r-1})}{C_{n-1}^{r-1}+C_{n-2}^{r-1}+\dots+C_{r-1}^{r-1}}$$

برای این‌که ثابت کنیم $A=\frac{n+1}{r+1}$، کافی است ثابت کنیم $B=Ar$، یا $A=\frac{B}{r}$. به‌زبان دیگر، باید ثابت کنیم:

$$\frac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}+\frac{n-1}{r}C_{n-2}^{r-1}+\dots+\frac{r}{r}C_{r-1}^{r-1}=$$

$$=10C_{n-1}^{r-1}+2C_{n-2}^{r-1}+\dots+(n-r+1)C_{r-1}^{r-1} \qquad (5)$$

ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\frac{n-k+1}{r}C_{n-k}^{r-1}=\frac{(n-k)!(n-k+1)}{r(r-1)!(n-k-r+1)!}=C_{n-k+1}^{r}$$

بنابراین، سمت چپ برابری (۵)، برابراست با

$$C_n^r+C_{n-1}^r+\dots+C_n^r$$

که باتوجه به‌برابری (۳)، درستی برابری (۵) نتیجه می‌شود.

دراین روش، نتیجهٔ دیگری هم به‌دست می‌آید: واسطهٔ عددی بزرگترین عضوهای زیرمجموعه‌های r عضوی، ازمجموعهٔ $\{1,2,\dots,n\}$، برابراست با $\frac{(n+1)r}{r+1}$.

۳. همهٔ زوج عددهای طبیعی (m,n) را درنظر می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$(n^2-mn-m^2)=1 \qquad (\text{ویژگی } P)$$

درحالت $m>n$، این برابری نمی‌تواند، برای زوج عددهای طبیعی m,n، برقرار باشد؛ دراین حالت داریم: $n^2-m^2<-1$، $-mn<-1$ و $n^2-mn-m^2<-2$.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که درحالت $m=n$، تنها به‌ازای $m=n=1$، این برابری برقراراست.

اکنون توجه می‌کنیم (واین، اندیشهٔ اصلی حل مساله است) که اگر زوج (m_0,n_0) در شرط P صدق کند و $n_0>m_0$، آن‌گاه زوج (m_0,n_0-m_0) هم دراین شرط صدق می‌کند. درواقع n_0-m_0 عددی طبیعی است $(n_0>m_0)$ وداریم:

$$[m_0^2-m_0(n_0-m_0)-(n_0-m_0)^2]^2=$$

$$=(m_0^2+m_0n_0-n_0^2)^2=1$$

زیرا، زوج (m_0,n_0) را، سازگار باشرط P فرض کردیم.

فرض کنیم $m_1=n_0-m_0$ و $n_1=m_0$. چون زوج (m_1,n_1) دارای ویژگی P می‌باشد، همان‌طور که ثابت کردیم، $n_1\geqslant m_1$؛ و اگر $n_1>m_1$ بگیریم، زوج (m_2,n_2) هم، دارای ویژگی P خواهد بود، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$m_2=n_1-m_1 \qquad n_2=m_2,$$

اگراین روش را، برای پیداکردن زوج‌های تازه ادامه دهیم، بعد از چند گام محدود، به‌زوج (۱،۱) می‌رسیم.

درواقع، دنبالهٔ این زوج‌ها، نزولی است، زیرا $n_i>m_i$ و $m_{i+1}=n_i-m_i>0$. تشکیل‌زوج تازهٔ (m',n')، طبق این قاعده، تنها درحالت $n'=m'$ نمی‌توان انجام داد (دراین حالت $n'-m'$ برابریك عدد طبیعی نمی‌شود). ولی، دراین صورت $n'=m'=1$.

به‌این ترتیب، از زوج (m_0,n_0) — که دارای ویژگی P است — با به‌کار بردن متوالی تبدیل $n_{i+1}=m_i$، $m_{i+1}=n_i-m_i$، به‌زوج (۱،۱) می‌رسیم. ولی اگرزوج (m',n') را، به‌کمك این تبدیل، از زوج (m,n) به‌دست‌آورده باشیم، داریم:

$$m=n', \quad n=m'+n'$$

واین به‌معنای آن است که، باآغاز از زوج (۱،۱)، تنها یك دنبالهٔ زوج‌ها به‌دست می‌آید. ازاین‌جا، همچنین معلوم می‌شود که هم دنبالهٔ نخستین‌عضوها وهم‌دنبالهٔ دومین عضوها، دنباله‌هایی‌صعودی هستند. بنابراین، زوج (m,n) که درموردآن m^2+n^2- به‌ازای $1\leqslant n\leqslant 1981$ و $1\leqslant m\leqslant 1981$، حد اکثر مقدار ممکن است، زوجی است که برای آن داریم: $n\leqslant 1981$ و $m+n>1981$. عضوهای این دنبالهٔ زوج‌ها را می‌نویسیم:

(۱,۱), (۲,۱), (۳,۲), (۵,۳), (۸,۵), (۱۳,۸), (۲۱,۱۳),
(۳۴,۲۱), (۵۵,۳۴), (۸۹,۵۵), (۱۴۴,۸۹), (۲۳۳,۱۴۴),
(۳۷۷,۲۳۳), (۶۱۰,۳۷۷), (۹۸۷,۶۱۰), (۱۵۹۷,۹۸۷),

وزوج مورد نظرما، همان (۱۵۹۷,۹۸۷) است.

جواب، حداکثر مقدار m^2+n^2 برابراست با 1597^2+987^2.

درخاتمه‌یادآوری می‌کنیم که، همان‌طور که ازجریان حل دیده‌می‌شود، همهٔ زوج‌هایی که دارای ویژگی P می‌باشند، زوج‌هایی به‌صورت (f_{i+1}, f_i) هستند، که در آن، f_i, f_{i+1} جمله‌های مجاور دنبالهٔ فیبوناچی را تشکیل می‌دهند.

۴. هرعدد طبیعی n، به‌ازای مقداری از k در نابرابری $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$ صدق می‌کند، ازآن‌جا

$$2^k < n < 3\times 2^k < 5\times 2^k$$

مجموعهٔ $A_1=\{3\times 2^k, 3\times 2^k-1, \dots, 3\times 2^k-n+1\}$، که از n عضو تشکیل شده است، درنظر می‌گیریم. چون $n-1\geqslant 2^k$، بین n عدد متوالی از $3\times 2^k-n+1$ تا $3\times 2^k-1$، دست‌کم یك عدد پیدا می‌شود که بر 2^k بخش پذیر باشد. برای $n\geqslant 4$، دست‌کم یکی ازآن‌ها بر ۳ بخش‌پذیراست، بنابراین، 3×2^k، مقسوم علیهی‌ازکوچکترین مضرب‌مشترك بقیهٔ عددهای A_1 است.

مجموعهٔ دیگری که دارای چنین خاصیتی است (به‌ازای $n\geqslant 6$)، عبارت است از مجموعهٔ

$$A_2=\{5\times 2^k, 5\times 2^k-1, \dots, 5\times 2^k-n+1\}$$

درواقع، بین عددهای $5\times 2^k-1, \dots, 5\times 2^k-n+1$، عددی پیدا می‌شود که بر 2^k بخش‌پذیر است $(n-1\geqslant 2^k)$؛ اگر $n-1\geqslant 5$، یعنی $n\geqslant 6$، یکی ازاین عددها، بر ۵ بخش‌پذیر است.

به‌این‌ترتیب، به‌ازای $n\geqslant 6$، دست‌کم دومجموعه پیدامی‌شود که‌دارای خاصیت مطلوب هستند. باقی می‌ماند که حالت‌های $n=3,4,5$ را بررسی کنیم.

به‌ازای $n=5$ هم، دومجموعه می‌توان به‌دست آورد:

$$\{2,3,4,5,6\} \ ; \ \{8,9,10,11,12\}$$

به‌ازای $n=4$، تنها یك مجموعه با خاصیت مورد نظر پیدامی‌شود. درواقع، اگر مجموعه را

$$\{n, n+1, n+2, n+3\}$$

بگیریم، باید $n+3$، مقسوم علیهی ازکوچکترین مضرب مشترك سه عدد n، $n+1$ و $n+2$ باشد، یعنی $n(n+1)(n+2)$ بر $n+3$ بخش‌پذیر باشد. ولی داریم:

$$n(n+1)(n+2)=(n+3)(n^2+2)-6$$

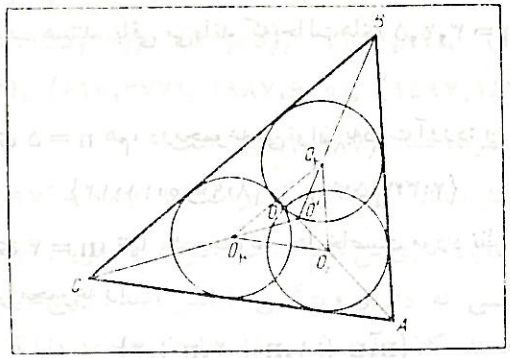
بنابراین، باید ۶ بر $n+3$ بخش‌پذیر باشد واین شرط، تنها به‌ازای $n=3$ درست است. مجموعهٔ

$$\{3,4,5,6\}$$

دارای خاصیت مورد نظراست.

بالاخره، به‌ازای $n=3$، چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. درواقع، در مجموعهٔ $\{n, n+1, n+2\}$، عددهای‌متوالی n و $n+1$ نسبت‌به‌هم‌اول‌اند و، بنابراین، کوچکترین مضرب مشترك آن‌ها، برابر $n(n+1)$ می‌شود، یعنی $n(n+1)$ باید بر $n+2$ بخش‌پذیر باشد، که ممکن نیست $(n+2>n)$.

۵. O_1، O_2 و O_3 را مرکزهای دایره‌های مفروض می‌گیریم (شکل ۲). چون دایره‌های به‌مرکزهای O_1 و O_2، برضلع AB مماس‌اند و، ضمناً، شعاع‌های آن‌ها یکی است، بنابراین نقطه‌های O_1 و O_2 از AB به‌یك فاصله‌اند و، درنتیجه، $O_1O_2 \parallel AB$، به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود $O_2O_3 \parallel BC$ و $O_1O_3 \parallel AC$.



شکل ۲

نقطهٔ مشترك O دایره‌ها، از O_1، O_2 و O_3 به‌یك فاصله است و، این فاصله، برابر است باشعاع هرکدام از دایره‌ها، یعنی O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $O_1O_2O_3$ است.

بنابر شرط، هریك از دایره‌ها، بردو ضلع مثلث ABC مماس است، بنابراین، نقطه‌های O_1، O_2 و O_3، به‌ترتیب، روی نیمسازهای A، B و C از مثلث مفروض قراردارند.

O' را، نقطهٔ برخورد این نیمسازها می‌گیریم، یعنی O'، مرکزدایرهٔ محاطی مثلث ABC است، ازتوازی خطهای راست O_1O_2 و AB، O_2O_3 و BC، O_1O_3 و AC، بلافاصله، نتیجه می‌شودکه O'، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث $O_1O_2O_3$ هم می‌باشد.

اکنون، کافی است توجه کنیم که در تجانس به‌مرکز O'، مثلث $O_1O_2O_3$ به‌مثلث ABC تبدیل می‌شود (به‌دلیل موازی بودن ضلع‌های متناظرآن‌ها)، نقطهٔ O' (مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC) ثابت می‌ماند، ومرکز دایرهٔ محیطی مثلث $O_1O_2O_3$ به‌مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC منتقل می‌شود. به‌زبان دیگر، نقطهٔ O و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، نسبت به‌مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، متجانس یکدیگرند و، بنابراین، این نقطه‌ها، روی یك‌خط راست قراردارند.

۶. اندیشهٔ راه حل این مساله چنین است: رابطهٔ (۳) از شرطهای مساله، امکان می‌دهد که، پشت سرهم، رابطه‌های برگشتی را پیدا کنیم که مقدارهای $f(x_0,y)$ و $(x_0,y+1)$ را ـ به‌ازای $x=1,2,3,4$ ـ به‌هم مربوط می‌کنند. سپس، به‌کمك آن‌ها، و با دردست داشتن مقدارهای $f(x_0,0)$. سادگی و با به‌کاربردن روش‌های عادی دستوری‌برای $f(x_0,y)$ پیدا کنیم. همین اندیشه را درزیر تنظیم کرده‌ایم (عددهایی‌که زیر علامت برابری نوشته شده است، نشانهٔ شماره‌ای از شرطهای مساله است‌که برای سادگی‌کار، آن‌هارا دوباره نوشته‌ایم):

$$f(0,y)=1, \qquad (1)$$

$$f(x+1,0)=f(x,1), \qquad (2)$$

$$f(x+1,y+1)=f\big(x,f(x+1,y)\big) \qquad (3)$$

a) در (۳) فرض می‌کنیم $x=0$:

$$f(1,y+1)=f\big(0,f(1,y)\big)\underset{(1)}{=}f(1,y)+1 \qquad (4)$$

با استفاده ازروش استقراء ریاضی، ثابت می‌کنیم که

$$f(1,y)=2+y \qquad (4')$$

داریم:

$$f(1,0)\underset{(2)}{=}f(0,1)=1+1=2+0$$

فرض می‌کنیم $f(1,n)=2+n$. دراین صورت، باتوجه به (۴) داریم:

$$f(1,n+1)=f(1,n)+1=(2+n)+1=(n+1)+2$$

که حکم مارا ثابت می‌کند.

b) $x=1$ رادر (۳) قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$f(2,y+1)=f\big(1,f(2,y)\big)\underset{(3)}{=}\underset{(4')}{f(2,y)}+2 \qquad (5)$$

با روش استقراء ثابت می‌کنیم

$$f(۲,y) = ۲y + ۳ \qquad (۵')$$

درواقع، به‌ازای $y = ۰$ داریم:

$$f(۲,۰) = \underset{(۲)}{f(۱,۱)} = \underset{(۴')}{۲ + ۱} = ۲ \times ۰ + ۳$$

فرض کنیم $f(۲,n) = ۲n + ۳$، دراین صورت

$$f(۲,n+۱) = \underset{(۵)}{f(۲,n) + ۲} = (۲n + ۳) + ۲ = ۲(n + ۱) + ۳$$

c) دررابطهٔ (۳) فرض می‌کنیم $x = ۲$، به‌دست می‌آید:

$$f(۳,y+۱) = \underset{(۳)}{f\big(۲,f(۳,y)\big)} = \underset{(۵')}{۲f(۳,y)} + ۳ \qquad (۶)$$

ابتدا مقدار $f(۳,۰)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(۳,۰) = \underset{(۲)}{f(۲,۱)} = ۵$$

بنابراین

$$f(۳,y+۱) = \underbrace{۲.(\dots ۲.(}_{y\text{مرتبه}۲}۲.۵ + ۳) + ۳) + \dots) + ۳$$

ازآن جا

$$f(۳,y+۱) = ۵ \times ۲^y + ۳(۱ + ۲ + \dots + ۲^{y-۱}) =$$
$$= ۸ \times ۲^y - ۳ = ۲^{۳+y} - ۳ \qquad (۶')$$

d) سرانجام در (۳) قرار می‌دهیم $x = ۳$، به‌دست می‌آید:

$$f(۴,y+۱) = \underset{(۶)}{f\big(۳,f(۴,y)\big)} = ۲^{f(۴,y)+۳} - ۳ \qquad (۷)$$

از (۲) به‌دست می‌آید:

$$f(۴,۰) = f(۳,۱) = ۲^۴ - ۳$$

و برابری (۷) امکان می‌دهد که، باروش استقراء، ثابت کنیم:

$$f(۴,y) = ۲^{۲^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۲}}}}} - ۳$$

که درنما به‌تعداد $(y + ۲)$ تا ۲ وجود دارد

به‌این ترتیب، خواهیم داشت:

$$f(۴,۱۹۸۱) = ۲^{۲^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۲}}}}} - ۳$$

که درنما، به‌تعداد ۱۹۸۳ تا ۲ وجود دارد.

دانشکدهٔ مکانیک ـ ریاضی

۱. عدد مطلوب را x می‌گیریم. چون $(۴۰\sqrt{۲})^۲ = ۳۲۰۰$ و $۵۷^۲ = ۳۲۴۹$، بنابراین $۵۷ > ۴۰\sqrt{۲}$ ودرنتیجه

$$x = \sqrt{۵۷ - ۴۰\sqrt{۲}} - \sqrt{۵۷ + ۴۰\sqrt{۲}}$$

اگردوطرف این برابری را مجذور کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^۲ = ۵۷ - ۴۰\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۳۲۴۹ - ۳۲۰۰} + ۵۷ + ۴۰\sqrt{۲} = ۱۰۰$$

واین، به‌معنای آن است که، x یکی از دو عدد ۱۰ یا ۱۰ − است، ولی روشن است که x باید عددی منفی باشد و، درنتیجه، $x = -۱۰$.

۲. انتگرال سمت چپ برابری را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_۰^\alpha \cos(x + \alpha^۲)dx = \sin(x + \alpha^۲)\Big|_۰^\alpha = \sin(\alpha + \alpha^۲) - \sin\alpha^۲$$

وبنابراین، معادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sin(\alpha + \alpha^۲) - \sin\alpha^۲ = \sin\alpha$$

که، به‌ترتیب، به‌این صورت‌ها، تبدیل می‌شود:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha^2\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha^2\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right]=0,$$

$$-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha^2}{2}\cdot\sin\frac{\alpha^2+\alpha}{2}=0$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، بامجموعهٔ معادله‌های زیر، هم‌ارزاست:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=0,\quad \sin\frac{\alpha^2}{2}=0,\quad \sin\frac{\alpha^2+\alpha}{2}=0$$

جواب‌های معادله‌های اول و دوم، عبارتند از $\alpha=2k\pi$ $(k\in Z)$ و $\alpha=\pm\sqrt{2n\pi}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ ومعادلهٔ سوم، هم ارز است با مجموعهٔ نامتناهی معادله‌های $\alpha^2+\alpha=2l\pi$ $(l\in Z)$. مبین این معادله، برابراست با $1+8l\pi$ و، درنتیجه، این معادله‌ها، به‌ازای مقادیر درست و منفی l جواب ندارند. درحالتی که l برابر یکی از عددهای $0,1,2,\ldots$ باشد، معادلهٔ $\alpha^2+\alpha=2l\pi$ دارای دوریشه $\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{8l\pi+1}}{2}$ می‌باشد.

بنابراین، جواب‌های معادلهٔ $\sin\frac{\alpha^2+\alpha}{2}=0$ چنین است

$$\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{8l\pi+1}}{2}\quad (l=0,1,2,\ldots)$$

اکنون باید از میان مجموعه‌های جواب، آن‌هارا جداکنیم که در فاصلهٔ [۲و۳] قراردارند. به‌سادگی دیده می‌شود که هیچ‌کدام ازجواب‌های معادلهٔ اول، دراین فاصله، قرار ندارند؛ از بین جواب‌های معادلهٔ دوم هم، تنها یکی‌درفاصلهٔ [۲و۳] واقع است: $\alpha=\sqrt{2\pi}$. همهٔ عددهای به‌صورت $\alpha=\frac{-1-\sqrt{8l\pi+1}}{2}$ منفی و، بنابراین، در بیرون فاصلهٔ مورد نظرند. از

جواب‌های $\alpha=\frac{-1+\sqrt{8l\pi+1}}{2}$، تنها آن‌هایی درفاصلهٔ بستهٔ [۲و۳] قراردارندکه، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$2\leqslant\frac{-1+\sqrt{8l\pi+1}}{2}\leqslant 3$$

و یا

$$5\leqslant\sqrt{8l\pi+1}\leqslant 7$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید

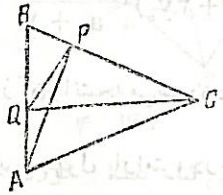
$$\frac{3}{\pi}\leqslant l\leqslant\frac{6}{\pi}$$

و روشن است که تنها $l=1$ دراین نابرابری‌ها صدق می‌کند وریشهٔ متناظر آن $\alpha=\frac{-1+\sqrt{8\pi+1}}{2}$ است.

پاسخ: $\sqrt{2\pi}$ و $\frac{-1+\sqrt{8\pi+1}}{2}$.

۳. از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABP و BCQ به‌دست می‌آید (شکل ۳)

$$\frac{|BP|}{|AB|}=\cos B,\ \frac{|BQ|}{|BC|}=\cos B$$



شکل ۳

ازاین برابری‌ها، نتیجه می‌شود که دو مثلث BPQ و ABC متشابه‌اند، ضمناً، ضریب تشابه، برابراست با $\cos B$. ازآن‌جا که نسبت مساحت‌های دو چندضلعی متشابه، برابر است با مجذور ضریب تشابه آن‌ها، بنابراین

$$\cos^2 B = \frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

بنابرفرض، مثلث ABC، زاویه‌هایی حاده دارد و، بنابراین، $\cos B = \frac{1}{3}$ ، ازتشابه دومثلث ABC و BPQ به‌دست می‌آید:

$$\frac{|PQ|}{|AC|} = \cos B = \frac{1}{3} \Longrightarrow |AC| = 3|PQ| = 6\sqrt{2}$$

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را R می‌گیریم. بنابرقضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$2R = \frac{|AC|}{\sin B} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = 9 \Longrightarrow R\frac{9}{2}$$

۴. فرض می‌کنیم، a_0 مقداری از پارامتر a باشدکه، به‌ازای آن، دستگاه مفروض دارای جواب است و (x_0, y_0) را، جواب متناظر آن می‌گیریم. دراین صورت، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} -x_0^2 - 2x_0y_0 + 7y_0^2 \leqslant 1 - \frac{2}{a_0+1} \\ 3x_0^2 + 10x_0y - 5y_0^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

اگر نابرابری اول رادرضرب و، سپس، باناابرابری دوم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x_0^2 + 6x_0y_0 + 9y_0^2 \leqslant \frac{-4}{a_0+1} \Longrightarrow (x_0+3y_0)^2 \leqslant \frac{-4}{a_0+1}$$

که ازآن‌جانتیجه می‌شود $\frac{-4}{a_0+1} \geqslant 0$، یعنی $a_0 < -1$. به‌این ترتیب، همهٔ مقادیر مجهول پارامتر، درحوزهٔ $a < -1$ قراردارند.

اکنون، ثابت می‌کنیم که برای هرمقدار a، که درشرط $a < -1$ صدق کند، دستگاه مفروض دارای جواب است. ازآن‌جا که، به‌ازای

$a < -1$، داریم: $\frac{1-a}{1+a} < -1$، کافی‌است ثابت کنیم، دستگاه معادله‌های

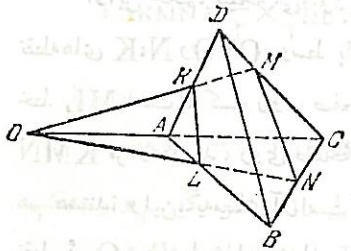
$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1 \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2 \end{cases} \quad (1)$$

دارای جواب است. هرجوابی از دستگاه (۱)، ضمناً جوابی ازدستگاه نامعادله‌های مفروض است. حالا، دستگاه (۱) را حل می‌کنیم. اگر معادلهٔ اول را در ۲ − ضرب و، سپس، با معادلهٔ دوم جمع کنیم، به‌معادلهٔ $(x+3y)^2 = 0$ می‌رسیم وازآن‌جا $x = -3y$. اگردریکی ازمعادله‌های (۱)، به‌جای x قرار دهیم $-3y$، به‌معادلهٔ $4y^2 = 1$ می‌رسیم که ازآن‌جا به‌دست می‌آید: $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = -\frac{1}{2}$ و، درنتیجه، $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$.

آزمایش‌نشان می‌دهدکه هردو زوج عددهای $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$، در دستگاه (۱) و، بنابراین، دستگاه نامعادله‌ها (به‌ازای $a < -1$) صدق می‌کنند.

جواب: $a < -1$.

۵. K را وسط یال AD و N را وسط یال BC می‌گیریم (شکل ۴). خط‌های راست KM و AC روی صفحهٔ ADC قراردارند وباهم موازی نیستند. محل برخورد آن‌هارا O می‌نامیم. چون نقطه‌های O و N، روی‌صفحهٔ‌مقطع‌وروی‌صفحهٔ ABC قراردارند، بنابراین، KMN صفحهٔ ABC را روی خط راست ON قطع می‌کند. نقطهٔ برخوردخط‌های راست AB و ON را، L می‌نامیم. مقطع هرم با صفحهٔ مورد نظر صورت مساله، چهارضلعی KMNL است، که باید مساحت آن را، تعیین کنیم. دو



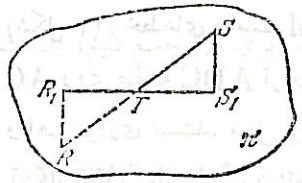
شکل ۴

راه حل، برای این مساله، می‌دهیم.

راه حل اول. ابتدا ثابت می‌کنیم، مساحت‌های دومثلث KMN و KLN برابرند و، سپس، مساحت مثلث KMN رامحاسبه می‌کنیم. ازنقطهٔ K، صفحهٔ π را مـوازی دوخط راست و متنافر AB و CD مـی‌گذرانیم (برای‌این منظور، کافی‌است خط‌های‌راست $KC_1 \parallel DC$ و $KB_1 \parallel AB$ را رسم کنیم، صفحهٔ K_1CB_1، همان صفحهٔ مطلوب است). چون $CD \parallel \pi$، همهٔ نقطه‌های خط راست CD ازصفحهٔ π به‌یك فاصله‌انـد. به‌همین‌ترتیب، همهٔ نقطه‌های خط راست AB، به‌یك فاصله از صفحهٔ π هستند. از برابری $|AK|=|KD|$ نتیجه‌می‌شود که‌نقطه‌های A وD، ازصفحهٔ π، به‌یك‌فاصله‌اند، به‌این‌ترتیب، هردونقطهٔ دلخواه روی خط‌های‌راست AB وCD، ازصفحهٔ π به‌یك فاصله می‌شوند.

حال، ثابت می‌کنیم که، اگردونقطهٔ R وS واقع دردوطرف صفحهٔ π، به‌یك فاصله باشند، نقطهٔ T محل برخورد RS باصفحهٔ π، پاره خط RS را به‌دوقسمت مساوی‌تقسیم می‌کند (شکل۵). درواقع، چون مثلث‌های RTR_1 و STS_1 قائم‌الزاویه‌اند، بنابراین

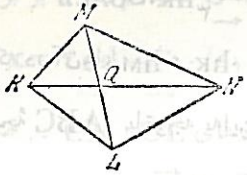
$$|RT| = \frac{|RR_1|}{\sin(RTR_1)} = \frac{|SS_1|}{\sin(STS_1)} = |ST|$$



شکل ۵

ازاین حکم، نتیجه می‌شود که نقطه‌های K،N وQ (Q، وسط پاره خط ML است)، کـه روی صفحهٔ KMN قرار دارند، روی صفحهٔ π هم هستند. واین، به‌معنای آن‌است که نقطـهٔ Q ـ وسط پـاره خط ML ـ روی خط راست KN قـراردارد (شکل ۶).

از برابری $|MQ|=|QL|$ نتیجه می‌شود که، نقطه‌هـای M و L از خط راست KN به‌یك فاصله‌اند. و، بنابر این، $S_{KLN}=S_{KMN}$. یعنـی $S_{KMNL}=2S_{KMN}$.



شکل ۶

بـرای این کـه مساحت مثلث KMN را محاسبه کنیم، حجم هرم AKMN را بـه‌دوطریـق به‌دست می‌آوریم. بنابرفرض مسالـه، فاصلهٔ نقطهٔ A ازصفحهٔ KMN برابراست با ۱، درنتیجه

$$V_{AKMN} = \frac{1}{3}\cdot S_{KMN}$$

از طرف دیگر، $V_{AKMN} = \frac{1}{3}h_N\cdot S_{AKM}$، که درآن، h_N عبارت‌است از فاصلهٔ نقطهٔ N تـا صفحهٔ ADC. چـون $|AK| = \frac{1}{2}|AD|$، بنابـرایـن $S_{AKM} = \frac{1}{2}S_{ADM}$. سپس، $|DM| = \frac{2}{5}|DC|$، بنابراین $S_{ADM} = \frac{2}{5}S_{ADC}$ به‌این ترتیب $S_{AKM} = \frac{2}{5}S_{ADC}$. باتوجه‌به‌آن‌که $|CN| = \frac{1}{2}|CB|$، داریم $h_N = \frac{1}{2}h_B$ (h_B، فاصلهٔ نقطهٔ B از صفحهٔ ADC است). بنابراین

$$V_{AKMN} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}h_B\times\frac{1}{5}S_{ADC} = \frac{1}{10}V_{ABCD} = \frac{1}{2}$$

بالاخره، به‌دست می‌آید:

$$S_{KMN} = 3\ V_{AKMN} = \frac{3}{2} \Longrightarrow S_{KMNL} = 3$$

راه حل دوم. اگر هرم AKMNL را درنظر بگیریم وتوجه‌کنیم که فاصلهٔ A ازصفحهٔ KMNL برابراست با ۱، خواهیم داشت:

$$V_{AKMNL} = \frac{1}{3}S_{KMNL}$$

از طریف دیگر $V_{AKMNL} = V_{OMNA} - V_{OKLA}$ حجم هرم‌های OMNA و OKLA را می‌توان از دستورهای زیر به‌دست آورد.

$$V_{OMNA}=\frac{1}{3}h_M\cdot S_{OAN},\quad V_{OKLA}=\frac{1}{3}h_K\cdot S_{OAL}$$

که درآن‌ها، h_M و h_K، به‌ترتیب عبارتند از فاصله نقطه‌های M و K از صفحهٔ ABC. باتوجه به‌این‌که $|CM|=\frac{3}{5}|CD|$ و $|AK|=\frac{1}{2}|AD|$ ، معلوم می‌شود که $h_M=\frac{3}{5}h_D$ و $h_K=\frac{1}{2}h_D$، که درآن‌ها، h_D عبارت است ازفاصلهٔ نقطهٔ D ازصفحهٔ ABC.

برای این‌که مساحت مثلث‌های OAN و OAL را محاسبه کنیم، باید نسبت‌های $\frac{|OA|}{|AC|}$ و $\frac{|AL|}{|AB|}$ را به‌دست‌آوریم (شکل ۴). برای این منظور، از بردارها استفاده می‌کنیم. x و y را عددهایی می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $\overrightarrow{AD}=x\cdot\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AL}=y\cdot\overrightarrow{AB}$. اگر در صفحهٔ ADC، بردارهای $\overrightarrow{MK}$ و $\overrightarrow{KO}$ را به بردارهای غیرواقع بریك امتداد $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{DA}$ تجزیه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{MK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{KO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=x\cdot\overrightarrow{CA}=x\cdot\overrightarrow{CD}+)\frac{1}{2}+x)\overrightarrow{DA}$$

$\vec{a}$ را بردار غیر صفری از صفحهٔ ADC می‌گیریم که برخط راست KM عمود باشد؛ دراین صورت $(\vec{a},\overrightarrow{MK})=0$ و $(\vec{a},\overrightarrow{KO})=0$. ازبرابری‌اول به‌دست می‌آید: $(\vec{a},\overrightarrow{DA})=-\frac{4}{5}(\vec{a},\overrightarrow{CD})$ ، دومی به‌این معناست که

$$0=x\cdot(\vec{a},\overrightarrow{CD})+(\frac{1}{2}+x)\cdot(-\frac{4}{5})\cdot(\vec{a},\overrightarrow{CD})=$$

$$=(\frac{1}{5}x-\frac{2}{5})\cdot(\vec{a},\overrightarrow{CD})$$

چون بردارهای $\vec{a}$ و $\overrightarrow{CD}$، بردارهای صفرنیستند و، ضمناً بردار $\vec{a}$ بر بردار $\overrightarrow{CD}$ عمود نیست ، بنابراین $(\vec{a},\overrightarrow{CD})\neq 0$. بنابراین $x=2$ یا $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{CA}$. به‌همین ترتیب، از تجزیهٔ بردارهای $\overrightarrow{OL}$ و $\overrightarrow{LN}$ در صفحهٔ ABC، به‌بردارهای غیر واقع بریك امتداد $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AB}$، به‌دست می‌آید.

$$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AO}=y\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BN}=(1-y)\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=$$

$$=(\frac{1}{2}-y)\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$\vec{b}$ رابرداری غیرصفردرصفحهٔ ABC می‌گیریم که‌برخط راست LM عمود باشد، خواهیم داشت: $(\vec{b},\overrightarrow{OL})=0$ و $(\vec{b},\overrightarrow{LN})=0$. ازبرابری اول به‌دست می‌آید.

$$(\vec{b},\overrightarrow{CA})=\frac{y}{2}\cdot(\vec{b},\overrightarrow{AB})$$

وسپس، از برابری دوم

$$0=(\frac{1}{2}-y)\cdot(\vec{b},\overrightarrow{AB})-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}(\vec{b},\overrightarrow{AB})=$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}y)\cdot(\vec{b},\overrightarrow{AB})$$

چون $(\vec{b},\overrightarrow{AB})\neq 0$، باید داشته باشیم $\frac{1}{2}-\frac{5}{4}y=0$ یا $y=\frac{2}{5}$ و $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. چون $|AL|=\frac{2}{5}|AB|$ و $|\overrightarrow{CN}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CB}|$ ، بنابراین $h_L=\frac{2}{5}h_B$ و $h_N=\frac{1}{2}h_B$ (h_L، h_B و h_N، به‌ترتیب، عبارتند از فاصلهٔ

نقطه‌های L، B، N تا خط راست AC). داریم:

$$S_{OAL}=\frac{1}{2}|OA|h_L=\frac{1}{2}\times 2\times |AC|\times\frac{2}{5}h_B=\frac{4}{5}S_{ABC},$$

$$S_{OAN}=\frac{1}{2}|OA|h_N=\frac{1}{2}\times 2\times |AC|\times\frac{1}{2}h_B=S_{ABC}$$

بنابراین

$$V_{OMNA}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\cdot h_D\cdot S_{ABC}=\frac{3}{5}V_{ABCD}=3,$$

$$V_{OKLA}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot h_D\cdot\frac{4}{5}S_{ABC}=\frac{2}{5}V_{ABCD}=2,$$

$$V_{AKLMN}=3-2=1$$

و چون $V_{AKMNL}=\frac{1}{3}S_{KMNL}$، بنابراین $S_{KMNL}=3$.

۶. معادله را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$4^{2\cos^2 x-1}+4^{\cos^2 x}=1$$

اگر $4^{\cos^2 x}$ را با t نشان دهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{1}{4}t^2+t-3=0$$

ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم، چنین است: $t_1=-6$ و $t_2=2$. یعنی معادلهٔ مفروض، به‌مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر، تبدیل می‌شود:

$$4^{\cos^2 x}=-6,\quad 4^{\cos^2 x}=2$$

معادلهٔ اول، ریشه‌ای ندارد، زیرا عدد ۶ − درحوزهٔ مقادیر تابع نهائی نیست. معادلهٔ دوم، با معادلهٔ $\cos^2 x=\frac{1}{2}$ هم‌ارز است، که به‌نوبهٔ خود، هم‌ارز مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر می‌شود:

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

جواب‌های معادلهٔ اول $(k\in Z)\ x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ وجواب‌های معادلهٔ دوم $(n\in Z)\ x=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$ است. بین این جواب‌ها، تنها یکی، درفاصلهٔ $[\frac{3}{4}, 1]$ قراردارد، یعنی $x=\frac{\pi}{4}$.

دانشکدهٔ ریاضیات محاسبه‌ای و سیبرنتیک

۱. حوزهٔ مقادیر قابل قبول نامعادلهٔ مفروض، ازدوفاصله $x\leqslant -1$ و $x\geqslant 2$ (جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-x-2\geqslant 0$) تشکیل شده است. مقادیر $x=-1$ و $x=2$ در نامعادلهٔ مفروض صدق می‌کنند (سمت چپ معادله، برابر صفر می‌شود). تابع $y(x)=\sqrt{x^2-x-2}$، به‌ازای مقادیر $x<-1$ و $x>2$ مثبت است و، بنابراین، دراین حالت‌ها، نامعادلهٔ مفروض، بانامعادله $x-1\geqslant 0$ هم‌ارزاست که، باتوجه‌به‌شرط‌های $x<-1$ یا $x>2$، به‌جواب‌های $x>2$ می‌رسد.

جواب: $x=-1$ و $x\geqslant 2$.

۲. چون $f(x)$، در تمام نقطه‌های محور عددی، دارای مشتق است، بنابراین، طبق قضیهٔ فرما همهٔ نقطه‌های می‌نیمم آن، در معادلهٔ $f'(x)=0$ صدق می‌کنند:

$$f'(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}$$

که اگرآن‌را برابر صفر قراردهیم، به‌دست می‌آید: $(n\in Z)\ x=4n\pi$ و $(k\in Z)\ x=4k\pi-\frac{4\pi}{3}$.

نقطه‌های می‌نیمم، درمیان همین مقادیر x هستند. برای پیدا کردن آن‌ها، از شرط‌های کافی وجود اکسترمم استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f'(x)>0$ یا $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)>\frac{1}{2}$، عبارت است از

$$2k\pi-\frac{\pi}{3}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{3} \qquad (k\in Z)$$

ویا

$$4k\pi-\frac{4\pi}{3}<x<4k\pi \qquad (k\in Z)$$

واین، به‌معنای آن است که درهمهٔ نقطه‌های

$$4(k-1)\pi<x<4k\pi-\frac{4\pi}{3} \qquad (k\in Z)$$

$f'(x)<0$ می‌باشد. بنابراین، ضمن عبور ازنقطه‌های به‌صورت $x=4k\pi-\frac{4\pi}{4}$، مشتق $f'(x)$ تغییر علامت می‌دهد و از منفی به‌مثبت می‌رود و، ضمن عبور از نقطه‌های به‌صورت $x=4k\pi$، از مثبت به‌منفی می‌رود، بنابراین، نقطه‌های $x=4k\pi-\frac{4\pi}{3}$ $(k\in Z)$، نقطه‌های می‌نیمم و نقطه‌های $x=4k\pi$ $(k\in Z)$، نقطه‌های ماکزیمم‌اند.

۳. مختصات نقطهٔ تماس خط بانمودار تابع $f(x)=-\frac{x^2}{2}+2$ را (α,β) می‌گیریم. ضریب زاویهٔ این خط، برابرمی‌شود با $f'(\alpha)=-\alpha$ و، درنتیجه، معادلهٔ آن، به‌این صورت درمی‌آید:

$$y=\beta-\alpha(x-\alpha)$$

این خط، باید از نقطهٔ $(\frac{1}{2},2)$ بگذرد و بنابراین

$$2=\beta-\alpha(\frac{1}{2}-\alpha)\Longrightarrow\beta+\alpha^2-\frac{\alpha}{2}=2$$

ضمناً، نقطهٔ تماس (α,β)، روی نمودار تابع $f(x)$ است وبنابراین

$$\beta=-\frac{\alpha^2}{2}+2$$

ازحل دستگاه شامل این دو معادله، به‌جواب‌های $(0,2)$ و $(1,\frac{3}{2})$ می‌رسیم؛

ومعادلهٔ مماس‌های برنمودار چنین می‌شوند:

$$y=2 \quad \text{و} \quad y=-x+\frac{5}{2}$$

نقطه‌های برخورد هریك ازاین دوخط راست را، بانمودار تابع $y(x)=\sqrt{4-x^2}$، پیدا می‌کنیم. دستگاه

$$\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ y=2 \end{cases}$$

به‌جواب منحصر به‌فرد $(2,0)$ می‌رسد. یعنی خط راست اول، تنها در یك نقطه با نمودار تابع $y(x)=\sqrt{4-x^2}$ مشترك است. دستگاه

$$\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ y=-x+\frac{5}{2} \end{cases}$$

منجر به‌جواب‌های قابل قبول

$$\left(\frac{5+\sqrt{7}}{4},\frac{5-\sqrt{7}}{4}\right) \quad \text{و} \quad \left(\frac{5-\sqrt{7}}{4},\frac{5+\sqrt{7}}{4}\right)$$

می‌شود و، بنابراین، خط راست دوم، نمودار تابع $y(x)=\sqrt{4-x^2}$ را دردونقطهٔ متمایز قطع می‌کند.

جواب : $y=-x+\frac{5}{2}$

۴. چون $210=2\times3\times5\times7$ بر هریك از عددهای متعلق به A بخش‌پذیراست، بنابراین، هرعضوی از A تنها می‌تواند حاصل ضربی از برخی عامل‌های اول ۲،۳،۵و۷، بانمائی که از واحد تجاوز نمی‌کند، باشد. بنابر فرض، حاصل‌ضرب همهٔ عددها، بر ۱۹۲۰، یعنی $2^7\times3\times5$ بخش‌پذیر است. واین، به‌معنای آن است که، دربین عضوهای A، دست‌کم هفت عدد زوج وجود دارد. ولی، تنها هشت عدد زوج وجود داردکه با شرطهای ما سازگاراست، یعنی

$$۲,\quad ۲\times۳=۶,\quad ۲\times۵=۱۰,\quad ۲\times۷=۱۴,$$
$$۲\times۳\times۵=۳۰,\quad ۲\times۳\times۷=۴۲,\quad ۲\times۵\times۷=۷۰,$$
$$۲\times۳\times۵\times۷=۲۱۰$$

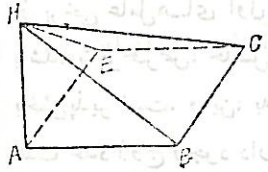
اگر ۲، یکی ازعضوهای A باشد، هریك ازدیگرعضوهای A هم باید بر ۲ بخش‌پذیر باشند، زیرا بنابرفرض، هردو عضو دلخواه A، مقسوم علیهی بزرگتر از واحد دارند. دراین حالت، خواهیم داشت:

$$A=\{۲،۶،۱۰،۱۴،۳۰،۴۲،۷۰،۲۱۰\}$$

(تعداد عضوهای A، کمتراز ۸ نیست). ولی دراین صورت، حاصل‌ضرب همهٔ عضوها برابر $۲^۸\times۳^۴\times۵^۴\times۷^۴$ می‌شود، که مجذور کامل و متناقض بافرض است. بنابراین، عدد ۲، متعلق به A نیست و، درنتیجه، عددهای ۶، ۱۰، ۱۴، ۳۰، ۴۲، ۷۰، ۲۱۰ متعلق به A هستند. ولی، بنابرشرط، تعدادعضوهای A ازهفت بیشتراست. Nرا، عددی فردمی‌گیریم که متعلق به A باشد. چون، بزرگترین مقسوم علیه مشترك ۶ و N مخالف واحد است، N باید بر ۳ بخش‌پذیرباشد (N عددی فرداست و، بنابراین، بر ۲ بخش‌پذیرنیست). باهمین روش استدلالی، معلوم می‌شودکه N باید بر ۵و۷ هم بخش‌پذیر باشد. به‌این ترتیب، N بر $۳\times۵\times۷$ بخش‌پذیراست. چون، عددهای‌اول ۳، ۵و۷، نمی‌توانند در N، توانی بزرگتر از واحد داشته باشند، پس $N=۳\times۵\times۷$ وعدد فرد دیگری ، در A، نمی‌تواند وجود داشته باشد. مجموعهٔ مطلوب، چنین است:

$$A=\{۶،۱۰،۱۴،۳۰،۴۲،۷۰،۱۰۵،۲۱۰\}$$

۵. چون مثلث‌های ABE و BCE هم‌ارزند (شکل ۷)، حجم هرم ABEH نصف‌حجم هرم ABCEH است، یعنی $V_{ABEH}=\frac{۱}{۱۲}$. از طرف دیگر، اگر h_B، فاصلهٔ نقطهٔ B تاصفحهٔ AEH باشد، داریم:



شکل ۷

$V_{ABEH}=\frac{۱}{۳}h_B\cdot S_{AEH}$. یعنی $h_B\cdot S_{AEH}=\frac{۱}{۴}$. اگر توجه کنیم که $h_B\leqslant|AB|=۱$ و $S_{AEH}=\frac{۱}{۲}|AH|\cdot|EH|\sin(AEH)\leqslant\frac{۱}{۲}|AH|\cdot|EH|$

وهمچنین، نابرابری مربوط به‌واسطه‌های هندسی وعددی رادرنظربگیریم:

$$\sqrt{|AH|\cdot|EH|}\leqslant\frac{|AH|+|EH|}{۲}$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۴}=h_B\cdot S_{AEH}\leqslant|AB|\cdot\frac{۱}{۲}\cdot|AH|\cdot|EH|\sin(AHE)\leqslant$$
$$\leqslant۱\times\frac{۱}{۲}\cdot\left(\frac{|AH|+|EH|}{۲}\right)^۲=۱\times\frac{۱}{۲}\cdot\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}$$

ازاین‌جا، نتیجه می‌شود که، در واقع، همهٔ علامت‌های نابرابری، باید به‌برابری تبدیل شود، یعنی

۱) $h_B=|AB|=۱$؛ واین، به‌معنای آن‌است که یال AB برصفحهٔ AEH عمود است؛

۲) $\sin(AHE)=۱$، یا $\widehat{AHE}=\frac{\pi}{۲}$؛

۳) $\sqrt{|AH|\cdot|EH|}=\frac{|AH|+|EH|}{۲}$، یا $(|AH|-|EH|)^۲=۰$

وازآن‌جا $|AH|=|EH|=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. از مثلث قائم‌الزاویهٔ AHE به‌دست می‌آید:

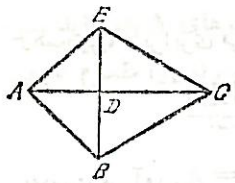
$$|AE|=\sqrt{|AH|^۲+|EH|^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=۱$$

معلوم می‌شودکه مثلث ABE متساوی‌الساقین است: $|AB|=|AE|=۱$. D را وسط پاره خط BE می‌گیریم (شکل ۸). چون مثلث‌های BAE و BCE متساوی‌الساقین‌اند، AD و CD، ارتفاع‌های این مثلث‌ها

خواهند بود؛ یعنی

$$S_{BAE}=\frac{1}{2}|AD|.|BE|,\quad S_{BCE}=\frac{1}{2}|CD|.|BE|$$

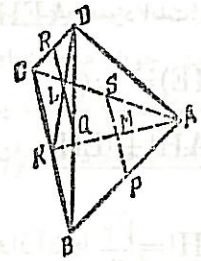
طبق شرط، مثلث‌های BAE و BCE هم‌ارزند، بنابراین $|AD|=|CD|$. درمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADE و EDC، ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ ED مشترک و $|AD|=|CD|$، در نتیجه $|AE|=|EC|$. به‌این‌ترتیب، چهارضلعی ABCE، یک لوزی است.



شکل ۸

قبلاً ثابت کردیم که یال AB برصفحهٔ AHE عموداست، یعنی $AB \perp AE$. یعنی ABCE، یک مربع و ضمناً، طول ضلع آن، برابر واحد است. چون $AB \parallel EC$ و AB برصفحهٔ AHE عمود است، بنابراین، مثلث‌های ABH و ECH، قائم‌الزاویه‌اند. درآن‌ها $|AB|=|EC|$ و $|AH|=|EH|$، درنتیجه، $|BH|=|CH|$.

فرض کنید، کره‌ای به‌شعاع r و به‌مرکز نقطه‌ای مثل O درهرم ABCEH واقع باشد. ازنقطهٔ O، صفحهٔ π را عمود بر یال AE رسم می‌کنیم (شکل ۹). ببینیم، ازتقاطع صفحهٔ π با هرم ABCEH، چه‌نوع چند ضلعی به‌دست می‌آید. وسط پاره خط AE را F می‌نامیم. چون خط راست AB برصفحهٔ AHE عموداست، صفحه‌های AHE و ABCE برهم عمود می‌شوند. مثلث AHE، همان‌طور که قبلاً ثابت کردیم، متساوی‌الساقین‌است، بنابراین HF، ارتفاع مثلث AHE است. از عمود بودن خط‌های راست HF و AE نتیجه می‌شود که HF برصفحهٔ ABCE عمود است، یعنی F تصویر نقطهٔ H برصفحهٔ ABCE است. واین، به‌معنای آن است که تصویر همهٔ نقطه‌های یال‌های جانبی هرم ABCEH برصفحهٔ قاعده، متعلق به‌چهارضلعی ABCE است. عمود بر



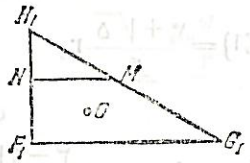
شکل ۹

صفحهٔ ABCE، که از نقطهٔ O عبور می‌کند، یکی از وجه‌های جانبی را قطع می‌کند (O در داخل هرم ABCEH قراردارد). چون این نقطهٔ برخورد ونقطهٔ O، دارای یک تصویر برصفحهٔ قاعده هستند، بنابراین، O_1 تصویر O برصفحهٔ قاعده، متعلق به‌مربع ABCE است. خط راست AE هم، برصفحهٔ π عمود بود. بنابراین، صفحهٔ π برصفحهٔ ABCE عمود می‌شود. وچون OO_1 برصفحهٔ ABCE عمود است، پس تمامی خط راست OO_1 برصفحهٔ π واقع می‌شود. به‌این ترتیب، صفحهٔ π، صفحهٔ قاعدهٔ هرم رادرخط راستی قطع می‌کند که ازنقطهٔ O_1 می‌گذرد. علاوه برآن، این خط راست، بایدبر یال AE عمودباشد (زیرا، یال AE برصفحهٔ π عموداست). محل برخورد آن‌را با یال‌های AE و BC، به‌ترتیب، F_1 و G_1 می‌نامیم.

فرض کنید G وسط پاره‌خط BC باشد، مثلث BHC متساوی‌الساقین است، بنابراین $BC \perp HG$. چون $AE \parallel BC$، پس $AE \perp HG$. قبلاً ثابت کردیم که $AE \perp HF$، ازآن‌جا نتیجه می‌شود که صفحهٔ HFG بر خط راست AE عمود است و، بنابراین، دوصفحهٔ HFG و π موازی‌اند. ازاین‌جانتیجه می‌شود که‌فصل مشترک‌صفحهٔ π با صفحه‌های BHC و AHE، به‌ترتیب، باخط‌های راست HG و HF موازی‌اند. اگر محل برخورد صفحهٔ π را با یال‌های جانبی هرم، که متعلق به‌وجه‌های BHC و AHE هستند، به‌ترتیب، M و N فرض کنیم، آن‌وقت، صفحهٔ π، هرم را در چهارضلعی F_1G_1MN قطع می‌کند (شکل‌های ۹ و ۱۰)؛ ضمناً،

$$\widehat{MG_1F_1}=\widehat{HGF} \text{ و } \widehat{NF_1G_1}=\widehat{HFG}=\frac{\pi}{2}\quad |F_1G_1|=1$$

به‌خصوص، یادآوری می‌کنیم که، اگر نقطهٔ O برصفحهٔ HFG واقع باشد، نقطه‌های M و N بریکدیگر منطبق می‌شوند. پاره‌خط‌های F_1N و G_1M را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را، درنقطهٔ H_1 قطع کنند (شکل ۱۰). در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $H_1F_1G_1$ و HFG



شکل ۱۰

داریم $|F_1G_1| = |FG|$ و $M_1\widehat{G_1F_1} = H\widehat{GF}$. بنابراین

$$|H_1F_1| = |HF| = |EF|.\ tg\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

$$|H_1G_1| = \sqrt{|H_1F_1|^2 + |F_1G_1|^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

صفحهٔ π، کره را در دایره‌ای به‌شعاع r قطع می‌کند و، این دایره، در مثلث $H_1F_1G_1$ قراردارد. اگر فاصلهٔ نقطهٔ O را تا خط‌های راست F_1G_1، F_1H_1 و H_1G_1، به‌ترتیب، h_1، h_2 و h_3 بگیریم، داریم: $r \leqslant h_j$ $(j = 1, 2, 3)$ وبنابراین

$$S_{F_1H_1G_1} = S_{OF_1G_1} + S_{OH_1G_1} =$$

$$= \frac{1}{2}h_1|F_1G_1| + \frac{1}{2}h_2|F_1H_1| + \frac{1}{2}h_3|H_1G_1| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(|F_1G_1| + |F_1H_1| + |H_1G_1|)r = \frac{3+\sqrt{5}}{4}r$$

وچون داریم:

$$S_{F_1H_1G_1} = \frac{1}{2}|F_1G_1|.|F_1H_1| = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین $\frac{3+\sqrt{5}}{4}r \leqslant \frac{1}{4}$، یا $r \leqslant \frac{1}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

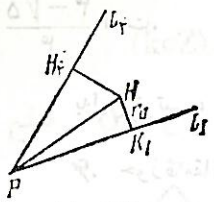
حالا ثابت می‌کنیم که کرهٔ به‌شعاع $r = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ را می‌توان درهرم ABCEH جاداد. مرکز دایرهٔ محاطی مثلث HGF را K وشعاع این دایره را r_0 می‌گیریم، دراین صورت مثل قبل، داریم:

$$\frac{1}{4} = S_{FHG} = \frac{1}{2}r_0(|FG| + |FH| + |HG|) = \frac{3+\sqrt{5}}{4}r_0$$

یعنی

$r_0 = \frac{3-3\sqrt{5}}{4}$. تحقیق می‌کنیم که کرهٔ به‌مرکز K وشعاع $r_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$،

درهرم ABCEH جادارد. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که فاصلهٔ نقطهٔ K ازوجه هرم، کمتراز r_0 نیست. چون صفحه HFK، برصفحه‌های ABCE، BHC و AEH عمود است، بنابراین، فاصلهٔ نقطهٔ K تا این صفحه‌ها، به‌ترتیب، برابراست با فاصلهٔ نقطهٔ K ازخط‌های راست FG، HG و HF، یعنی r_0. از نقطهٔ K، صفحه‌ای عمود بر یال AB رسم می‌کنیم. این صفحه، صفحه‌های ABCE و ABH را در خط‌های راست l_1 و l_2 قطع می‌کند. زاویهٔ بین آن‌ها، برابر است با زاویهٔ HAE (صفحهٔ AHE هم بر یال AB عموداست). و، بنابراین $(\widehat{l_1, l_2}) = \frac{\pi}{4}$. اگر K_1 و K_2، تصویرهای نقطهٔ K بر l_1 و l_2 باشند (شکل ۱۱)، خواهیم داشت:



شکل ۱۱

$|KK_1| = r_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ و KK_2، فاصلهٔ نقطهٔ K از صفحهٔ ABH می‌شود. نقطهٔ برخورد خط‌های راست l_1 و l_2 را P می‌گیریم. روشن است که

$$tg(KPK_1) = \frac{|KK_1|}{|PK_1|} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

سپس، از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ KPK_1 و KPK_2، به‌دست می‌آید:

$$\frac{|KK_2|}{\sin(KPK_2)} = |PK| = \frac{|KK_1|}{\sin(KPK_1)}$$

$$\frac{|KK_2|}{|KK_1|} = \frac{\sin(KPK_2)}{\sin(KPK_1)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - K\widehat{PK_1})}{\sin(KPK_1)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos(KPK_1) - \cos\frac{\pi}{4}\sin(KPK_1)}{\sin(KPK_1)} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{tg(KPK_1)} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4} > 1$$

به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که فاصلهٔ نقطهٔ K از صفحهٔ HEC بیشتر از $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ است.

به‌این ترتیب، کرهٔ به‌شعاع $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ درهرم مفروض جادارد.

۶. حوزهٔ مقادیر قابل قبول این معادله، شامل نقطه‌هایی است که در شرط $\cos 2x \neq 0$ یا شرط $x \neq (2m+1)\frac{\pi}{4}$ $(m \in Z)$، صدق کنند. در این حوزه $1 + tg^2 2x = \sec^2 2x$. ضمناً، روشن است که تابع $y = 1 + tg^2 2x$، هرگز برابرصفر نمی‌شود، ازاین‌جا، نتیجه می‌شود که‌این معادله، درحوزهٔ تعریف خود، با نامعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\cos\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x + \sin\frac{5}{4}x\cos\frac{x}{4} =$$

$$= \sin\frac{x}{4}\cos\frac{5}{4}x - \sin\frac{7}{4}x\cos\frac{21}{4}x$$

ویا، باجابه‌جائی جمله‌ها واستفاده از دستورهای مربوط به‌سینوس مجموع و تفاضل، خواهیم داشت:

$$\sin 7x = \sin(-x)$$

که با استفاده از دستور مربوط به‌برابری دوسینوس، به‌این جواب‌ها می‌رسیم:

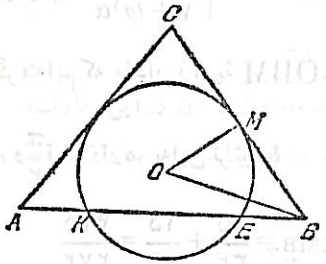
$$x = \frac{n\pi}{4}(n \in Z); \qquad x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}(k \in Z)$$

ازاین جواب‌ها، بایدآن‌هایی را انتخاب کنیم که درحوزهٔ تعریف معادلهٔ اصلی باشند، یعنی درشرط $x \neq \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ $(m \in Z)$ صدق کنند. از رشتهٔ جواب‌های اول، یعنی $x = \frac{n\pi}{4}$، تنها برای مقادیر زوج n، درحوزهٔ تعریف معادله‌قراردارند $(n = 2l)$، یعنی $x = \frac{\pi l}{2}$ $(l \in Z)$. ولی همهٔ رشتهٔ

جواب‌های دوم، درحوزهٔ تعریف معادلهٔ اصلی قراردارند.

جواب: $x = \frac{\pi l}{2}(l \in Z)$؛ $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ $(k \in Z)$

۷. مرکز دایره را O می‌نامیم دراین صورت، شعاع OM بر ضلع BC مماس خواهد بود. از مثلث قائم‌الزاویهٔ OMB (شکل ۱۲) به‌دست می‌آید.

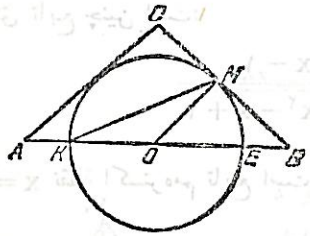


شکل ۱۲

$$tg(OBM) = \frac{OM}{MB} = \frac{1}{\frac{15}{8}} = \frac{8}{15}$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود

$tg(OBM) = tg(ABM)$. چون نقطه‌های O و A، نسبت به‌ضلع BC در یك طرف قرارگرفته‌اند، ازبرابری‌اخیر نتیجه می‌شود: $\widehat{OBM} = \widehat{ABM}$، یعنی نقطهٔ O روی پاره خط AB قراردارد. وضع درست دایره نسبت به‌مثلث را، روی شکل ۱۳ نشان داده‌ایم. داریم



شکل ۱۳

$$S_{KMB} = S_{OMB} + S_{KMO}$$

وچون $OM \perp MB$، بنابراین

$$S_{OMB} = \frac{1}{2}OM \cdot MB =$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{15}{8} = \frac{15}{16}$$

در مثلث KMO، ضلع‌های OK و OM برابرند باشعاع دایره، یعنی ۱، بنابراین

$$S_{KMO} = \frac{1}{2}OK \cdot OM \cdot \sin(KOM) = \frac{1}{2}\sin(KOM)$$

روشن است که

$$\sin(KOM)=\sin(BOM)=\cos(OBM)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(OBM)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{64}{225}}}=\frac{15}{17}$$

در رابطهٔ $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$، علامت جلو رادیکال را، به‌این دلیل مثبت گرفته‌ایم که مقدار زاویهٔ OBM، که برابراست با $arctg\frac{8}{15}$، درفاصلهٔ بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ قراردارد. به‌این ترتیب،

$$S_{KMO}=\frac{1}{2}\times\frac{15}{17}=\frac{15}{34},\quad S_{KMB}=\frac{15}{34}+\frac{15}{16}=\frac{375}{272}$$

دانشکدهٔ فیزیک

۱. جواب: $(k\in Z)x=2k\pi\pm\arccos(-\frac{1}{3})(n\in Z)x=n\pi$

۲. حوزهٔ تعریف تابع عبارت است ازمجموعهٔ همهٔ عددهای‌حقیقی. مشتق تابع چنین است:

$$y'(x)=\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}$$

$x=\frac{1}{4}$ نقطهٔ اکسترمم تابع است. برای $x<\frac{1}{4}$ داریم:

$$\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}<0 \implies y'(x)<0$$

و برای $x>\frac{1}{4}$

$$\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}>0 \implies y'(x)>0$$

ضمناً، تابع $y(x)$ درنقطهٔ $x=\frac{1}{4}$ پیوسته است و، بنابراین، $x=\frac{1}{4}$، نقطهٔ

می‌نیمم تابع است مقدار تابع دراین نقطه برابراست با $\sqrt{\frac{15}{8}}$.

۳. از شرطهای مساله معلوم می‌شودکه بردار $\overrightarrow{AB}$ دارای مختصات (۶،۴،۳) است. چون، صفحهٔ مجهول براین بردار عمود است، معادلهٔ آن را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$3x+4y+6z+d=0$$

وچون این صفحه از نقطهٔ A می‌گذرد، باید مختصات آن دراین معادله صدق کندکه،ازآن‌جا، به‌دست می‌آید: $d=-29$، بنابراین، معادلهٔ صفحهٔ مجهول چنین می‌شود

$$3x+4y+6z-29=0$$

۴. معادلهٔ مفروض را، می‌توان چنین نوشت:

$$3^x-8=3^{2-x}$$

که اگر دوطرف آن‌را در 3^x ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$3^{2x}-8\times3^x-9+0$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

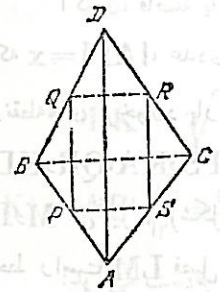
$$3^x=9 \quad و \quad 3^x=-1$$

جواب: $x=2$.

۵. P، Q، R وS را، نقطه‌های برخورد صفحهٔ α باخطهای‌راست AB، BD، CD وAC می‌گیریم (شکل ۱۴). چون $AD \parallel \alpha$ و $BC \parallel \alpha$، بنابراین

$$PQ\|AD\|RS,\quad QR\|BC\|PS \qquad (1)$$

واین، به‌معنای آن است که چهارضلعی PQRS، متوازی‌الاضلاع است. چون هرم منتظم است، تصویر AD برصفحهٔ ABC ازراس A ومرکزمثلث‌منتظم ABC می‌گذرد،



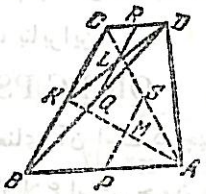
شکل ۱۴

یعنی بر BC عمود است. بنابرقضیهٔ سه عمود، این مطلب به‌معنای آن است که یال‌های AD و BC برهم عمودند. حالا، از (۱) نتیجه می‌شود که PQRS را، برحسب x محاسبه می‌کنیم. از تشابه مثلث‌های PBQ و ABD نتیجه می‌شود $\frac{|PQ|}{|AD|}=\frac{|BP|}{|AB|}$ یا $\frac{|PQ|}{b}=\frac{a-x}{a}$. بنابراین $|PQ|=\frac{b}{a}(a-x)$. بنابر شرط، مثلث ABC منتظم است. از توازی خط‌های راست PS و BC نتیجه می‌شود که مثلث APS هم‌منتظم است، یعنی $|PS|=|AP|=x$. به‌این ترتیب

$$S(x)=|PQ|.|PS|=\frac{b}{a}(a-x).x=\frac{b}{a}(ax-x^2) \qquad (2)$$

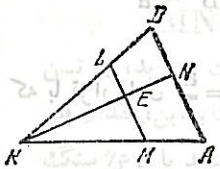
مشتق $S'(x)=\frac{b}{a}(a-2x)$، درنقطهٔ $x=\frac{a}{2}$ برابر صفر می‌شود. به‌این ترتیب، $S(x)$ درنقطهٔ $\frac{a}{2}$ ویا دریکی از دوانتهای فاصلهٔ $[0,a]$. ماکزیمم می‌شود. چون $S(0)=S(a)=0$ و $S\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{ab}{4}$، بنابراین مساحت وقتی ماکزیمم می‌شود که داشته باشیم: $x=\frac{a}{2}$، یعنی وقتی که صفحهٔ α از وسط پاره خط AB بگذرد.

اکنون، فاصلهٔ یال AD تاصفحهٔ α را محاسبه می‌کنیم، با این فرض که $|AP|=x$، عددی ازفاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant a$ باشد. وسط پاره خط BC را K ونقطه‌های برخورد پاره خط‌های KD و QR، KA و PS را، به‌ترتیب، L و M می‌گیریم (شکل ۱۵). چون خط راست LM فصل مشترک صفحه‌های α و AKD و $\alpha \parallel AD$، بنابراین، خط‌های راست LM و AD



شکل ۱۵

موازی‌اند. خط‌های راست KD و KA بر BC عمودند (میانه‌ها، در مثلث‌های متساوی‌الساقین، برقاعده عمودند). با توجه به‌معیار عمود بودن خط برصفحهٔ، خط راست BC برصفحهٔ AKD عموداست. ولی $PS \parallel BC$، بنابراین خط راست PS، ودرنتیجه صفحهٔ α، برصفحهٔ AKD عموداست. این، به‌معنای آن است که تصویر AD برصفحهٔ α برخط راست LM منطبق است وفاصلهٔ AD ازصفحهٔ α (که آن را با d نشان می‌دهیم)، برابراست بافاصلهٔ بین خط‌های راست موازی AD و LM.



شکل ۱۶

این فاصله را برحسب x بیان می‌کنیم. برای سادگی کار، مقطع AKD هرم راروی شکل ۱۶ نشان داده‌ایم. KN را ارتفاع مثلث AKD و E رانقطهٔ برخورد KN و LM می‌گیریم. دراین صورت $|NE|=d$. از تشابه مثلث‌های ANK و MEK نتیجه می‌شود:

$$\frac{|NE|}{|NK|}=\frac{|AM|}{|AK|}$$

واز تشابه مثلث‌های APM و ABK (شکل ۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{|AM|}{|AK|}=\frac{|AP|}{|AB|}=\frac{x}{a}$$

ازاین‌دو برابری، به‌دست‌می‌آید $|NK|.d=\frac{x}{a}|NK|$ را محاسبه می‌کنیم. از مثلث متساوی‌الساقین BDC داریم:

$$|DK|=\sqrt{|BD|^2-|BK|^2}+\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$$

چون مثلث ABC منتظم است، داریم: $|AK|=|AB|.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

با استفاده ازقضیهٔ کسینوس‌ها، درمثلث ADK، به‌دست می‌آید:

$$b^2-\frac{a^2}{4}=b^2+\frac{3}{4}a^2-2b\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos A$$

از آن‌جا $\cos = \frac{a}{b\sqrt{3}}$ و، در نتیجه، $\sin A = \sqrt{1-\frac{a^2}{3b^2}}$ و

$$|NK| = |AK| \sin A = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{3b^2}} = \frac{a}{2b}\sqrt{3b^2-a^2}$$

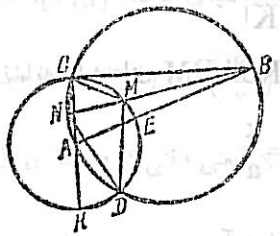
به‌این ترتیب

$$d = \frac{x}{a}\cdot\frac{a}{2b}\sqrt{3b^2-a^2} = \frac{x}{2b}\sqrt{3b^2-a^2}$$

که با قراردادن $x=\frac{a}{2}$، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$d_{max} = \frac{a}{4b}\sqrt{3b^2-a^2}$$

۶. روی شکل ۱۷ ، ترکیب مساله، با توجه به‌شرط‌های آن، رسم شده است. ثابت می‌کنیم، دو مثلث CNM و DNM متشابه‌اند. چون، AB قطراست، بنابراین مثلث‌های ACB و ADB قائم‌الزاویه‌اند AB وترمشترك این دومثلث‌است و دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه از آن‌ها، یعنی AC و AD، برابرند. بنابراین $|BC| = |BD|$. زاویه‌های CNB و DNB، زاویه‌هایی محاطی دردایره اول وروبه‌روی به‌کمان‌هایی هستندکه وترهای برابردارند؛



شکل ۱۷

بنابراین $\widehat{CNB} = \widehat{DNB}$ ویا $\widehat{CNM} = \widehat{DNM}$ زاویهٔ CMN، زاویهٔ خارجی مثلث CMB است، بنابراین $\widehat{CMN} = \widehat{BCM} + \widehat{MBC}$. زاویه‌های NBC و CDN زاویه‌های محاطی روبه‌روی به‌یك کمان‌اند؛ یعنی $\widehat{MBC} = \widehat{NBC} = \widehat{CDN}$. K رانقطهٔ برخورد خط راست CA بادایرهٔ دوم می‌گیریم. درآن صورت $KC \perp BC$ و $KM \perp CM$ (CK، قطر

دایرهٔ دوم است). ازآن‌جا نتیجه می‌شود $\widehat{BCM} = \widehat{CKM} = \widehat{CDM}$ (دو زاویهٔ آخر، محاط دردایرهٔ دوم و مقابل به‌کمان CM هستند). به‌این‌ترتیب

$$\widehat{CMN} = \widehat{BCM} + \widehat{MBC} = \widehat{CDM} + \widehat{CDN} = \widehat{NDM}$$

و در همین‌جا، تشابه دومثلث CNM و DNM ثابت می‌شود. از تشابه نتیجه می‌گیریم $\frac{|MN|}{|ND|} = \frac{|CN|}{|MN|}$، ازآن‌جا

$$|MN|^2 = |CN|\cdot|ND| = ab \Longrightarrow |MN| = \sqrt{ab}$$

۷. وزن فلزی راکه از ۲۴ تن سنگ معدن به‌دست می‌آید، x تن می‌گیریم . درآن ۴٪ مخلوط و ۹۶٪ فلز خالص است.، بنابراین، مقدار فلز خالص آن برابر $0/96x$ تن خواهد بود، واین مقدار، باید با ۶۰٪ سنگ معدن، یعنی ۲۴ تن، برابر باشد.

جواب: ۱۵ تن.

۸. جواب: $x < -2$ و $3 < x < 8$.

۹. راه حل شبیه مسالهٔ ۵ است.

جواب: $S = \frac{4}{\sqrt{5}}ad - \frac{8\sqrt{2}}{5}d^2$.

این معادله‌ها را حل‌کنید (صفحهٔ ۴۲۶ رابینید)

۱. ابتدا ثابت می‌کنیم‌که برای هرمقدار حقیقی x داریم:

$$[2x] = [x] + [x+\tfrac{1}{2}]$$

در واقع، اگر داشته باشیم $x = k + \alpha$، که درآن، k عددی درست و $0 \leqslant \alpha < 1$، داریم:

$$[2x] = [2k + 2\alpha] = 2k + [2\alpha],$$

$$[x] = k, [x+\tfrac{1}{2}] = k + [\alpha + \tfrac{1}{2}]$$

تنها، این می‌ماندکه ثابت‌کنیم:

$$[2\alpha]=[\alpha+\frac{1}{2}]$$

به‌سادگی دیده می‌شود که درحالت $0<\alpha<\frac{1}{2}$، هردوطرف تساوی، برابر صفر

ودر حالت $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$، هردوطرف تساوی، برابر ۱ می‌شود.

باتوجه به‌اتحادی که ثابت کردیم، می‌توان معادلهٔ مفروض را چنین نوشت:

$$[x]^2-[x]-2=0$$

ازآن‌جا $[x]=2$ و $[x]=-1$. بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های معادله، از اجتماع دوفاصلهٔ زیر به‌دست می‌آید: $[-1,0]$ و $[2,3]$.

۲. معادلهٔ مفروض را، به‌این صورت می‌نویسیم

$$(x+2)^2+8x=6(x+2)\sqrt{x}$$

این معادله، نسبت به‌عبارت‌های $(x+2)$ و $\sqrt{x}$، متجانس است، بنابراین، مجهول کمکی $y=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$، مارا، به‌معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رساند:

$$y^2-6y+8=0$$

که ازآن‌جا: $y_1=2$ و $y_2=4$.

چون داریم: $y=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\geqslant 2\sqrt{2}$، بنابراین، معادلهٔ $\frac{x+2}{\sqrt{x}}=2$ جواب ندارد. ازمعادلهٔ $\frac{x+2}{\sqrt{x}}=4$ هم، دوریشه به‌دست می‌آید:

$$x=6\pm 4\sqrt{2}$$

۳. حوزهٔ تعریف این معادله، عبارت است از $[-1,+\infty[$. عدد $x\in[-1,0]$ نمی‌تواند، ریشهٔ معادله باشد، زیرا به‌ازای این مقدارهای x داریم:

$$x+x<0,\quad 12\sqrt{x+1}\leqslant 12$$

ازطرف دیگر، به‌ازای $x>0$، سمت چپ معادله، تابعی صعودی است و،

بنابراین، تنها می‌تواند دارای یك جواب احتمالی باشد. به‌سادگی معلوم می‌شود که جواب معادله ـ وضمناً، تنها جواب آن ـ عبارت‌است از $x=3$.

۴. معادله را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(x-3)^2+9=\sqrt[3]{x-9}+3$$

ابتدا، یادآوری می‌کنیم که تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ که، به‌ترتیب، درسمت چپ وسمت‌راست معادله‌قرار گرفته‌اند،اولاً عکس یکدیگروثانیاً صعودی‌اند.

حالا ثابت می‌کنیم که اگر fوg، دو تابع صعودی معکوس و، ضمناً، همه‌جا معین باشند، آن‌وقت، معادلهٔ $f(x)=g(x)$ با معادلهٔ $f(x)=x$ هم ارزاست. در واقع، اگر داشته باشیم: $f(a)a$، درآن صورت $g\big(f(a)\big)=g(a)$، یعنی $g(a)=a=f(a)$، به‌نحوی که هرریشهٔ معادلهٔ دوم، معادلهٔ اول نیزهست. اگرهم، a ریشهٔ معادلهٔ دوم نباشد، یعنی داشته باشیم: $f(a)>a$ یا $f(a)<a$، درآن‌صورت

$$f(a)>a=g\big(f(a)\big)>g(a)$$

یا

$$f(a)<a=g\big(f(a)\big)<g(a)$$

به‌نحوی که a، ریشهٔ معادلهٔ اول هم نیست.

معادلهٔ $f(x)=x$ راحل می‌کنیم:

$$x^3-9x^2-26x-18=0$$

یکی ازریشه‌های این معادله $x=1$ است. سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم:

$$(x-1)(x^2-8x+18)=0$$

که ازآن‌جا، معلوم می‌شود، معادله ریشهٔ دیگری ندارد.

محاسبه کنید (صفحهٔ ۴۲۶ راببینید)

۱. ابتدا فرض کنیم $x\neq 0$، دراین صورت خواهیم داشت: $a\neq 0$.

و

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1,$$

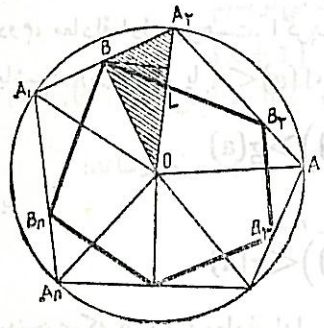
$$\frac{1}{a}=\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)+1$$

و بنابراین

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-1}=\frac{a^2}{1-2a}$$

وبه‌سادگی می‌توان متوجه شد که، این برابری، برای $a=0$ هم درست‌است.

یك مسألهٔ هندسی (صفحهٔ ۴۵۶ را ببینید)



مرکز دایره را دردرون n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ می‌گیریم B_1 را، نقطهٔ انتخابی روی A_1A_2 فرض می‌کنیم. اگر OA_2 را رسم کنیم، B_1L قسمتی از ضلع n ضلعی $B_1B_2\ldots B_n$ خواهد شد که در درون‌مثلث OB_1A_2 قرار گرفته‌است (شکل را ببینید). B_1L، بزرگتر یا مساوی ارتفاعی از مثلث OB_1A_2 است که ازراس B_1 می‌گذرد. چون $OA_2=R$، بنابراین، این ارتفاع برابراست با $\frac{2S_{OB_1A_2}}{R}$، یعنی

$$B_1L\geqslant\frac{2S_{OB_1A_2}}{R}$$

اگرهمهٔ نامساوی های ازاین‌گونه را، که از مثلث‌های OB_iA_{i+1} و OA_iB_i به‌دست می‌آیند، باهم جمع کنیم، به‌نامساوی مطلوب می‌رسیم. در حالتی هم که مرکزدایره، بیرون از n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ باشد، می‌توان، به‌همین‌ترتیب، استدلال کرد.

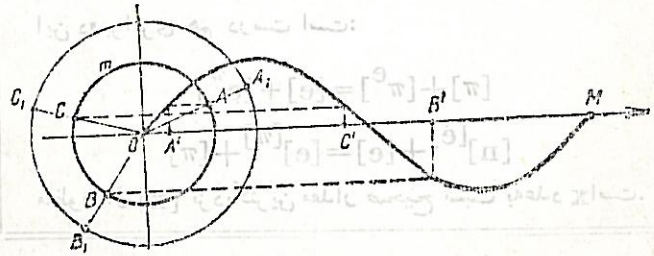
تقسیم کمان دایره به‌نسبت مفروض

به‌کمك سینوسوئید

بااستفاده‌ازرسم‌سینوسوئید، می‌توان کمانی ازمحیط دایره را، به‌نسبت مفروض، تقسیم کرد (این امکان، تنها به‌سینوسوئید مربوط نمی‌شود، بلکه از منحنی هرکدام ازتابع‌های اصلی مثلثاتی، می‌توان، برای این منظور، استفاده کرد).

سینوسوئید $y=\sin x$، بین نقطه‌های دایرهٔ مثلثاتی (دایرهٔ به‌شعاع واحد، که روی شکل کلفت تر نشان داده شده است) و نقطه‌های پاره خط OM از محور x، به‌طول 2π، رابطهٔ متقابل یك ارزشی برقرار می‌کند. روی شکل، تناظر نقطه‌های A و A′ و B، B′ نشان داده شده‌است. هرکمانی از دایره، متناظر است با پاره خطی از محور x، که طول آن برابر باطول این کمان باشد، مثلاً، کمان AmB، متناظراست با پاره خط A′B′.

فرض کنید، بخواهیم کمان AmB از دایرهٔ واحد را، به‌نسبت k:n تقسیم کنیم. ساختمان، از سه‌مرحله تشکیل شده است: ۱) روی محور x، نقطه‌های A′ و B′، متناظر با A و B از دایره را پیدا می‌کنیم، ۲) روی



Reconciliation With Mathematics
Editor: Parviz Shahryari
Address: Tehran, Firdaus
Vol. VIII, No 4, *Serial No. 36, 1985*

محور x، نقطهٔ C' را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:
$|A'C'|:|C'B'|=k:n$، ۳) روی دایره، نقطهٔ C، نظیر C' را پیدا می‌کنیم (شکل را ببینید).

اگر دایرهٔ مفروض، دایرهٔ واحد نباشد، آن را هم‌مرکز با دایرهٔ واحد قرار می‌دهیم واز تجانس به‌مرکز O، استفاده می‌کنیم.

اگر یکی ازنقطه‌های A،B،C، به‌نقطهٔ برخورد دایره با محور y نزدیك باشد، ازدقت رسم کاسته می‌شود. روش‌هائی، برای رفع این نامناسبی وجود دارد.

دربارهٔ عددهای π و e

کدام بزرگترند e^{π} یا π^{e}؟ می‌دانیم

$$۲<e<۳<\pi<۴$$

ولی $۳^{۲}>۲^{۳}$، درحالی که $۴^{۳}>۳^{۴}$.

برای روشن کردن مطلب، تابع $y=\frac{\ln x}{x}$ (۱) رادرنظر می‌گیریم. مشتق این تابع $y'=\frac{\ln x}{x^{۲}}$ دربازهٔ $[e, \infty]$ منفی است وبنابراین تابع (۱) دراین بازه نزولی می‌شود؛ یعنی

$$\frac{\ln e}{e}>\frac{۱-\ln\pi}{\pi}$$

که ازآنجا نتیجه می‌شود: $e^{\pi}>\pi^{e}$.

این دوبرابری هم درست است:

$$[\pi]+[\pi^{e}]=[e]+[e^{\pi}]$$

$$[n]^{[e]}+[e]=[e]^{[\pi]}+[\pi]$$

منظور از $[x]$ نزدیکترین مقدار صحیح نسبت به‌عدد x است.