جُنگ ریاضی دانشجو

جهاد دانشگاهی

دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

جلد هشتم: خرداد ۱۳۷۱

بسم الله الرحمن الرحیم

جنگ ریاضی دانشجو

مدیر مسئول: بهزاد منوچهریان
هیئت تحریریه: شاهین اجودانی‌نمینی
امیر اکبری‌مجدآبادنو
ناصر بروجردیان
سعید ذاکری
فرشته ملك
بهزاد منوچهریان
سعاد ورسایی

استاد مشاور: غلامرضا برادران خسروشاهی
ویراستاران: محمود احسانی
یوسف امیرارجمند
ناصر بروجردیان
سعید ذاکری

مسئول اجرایی: محمد کیا
مسئول فنی و صفحه‌آرا: نادر کثیری

هرمان وایل ۱۹۵۱ - ۱۸۸۵

جلد هشتم: خرداد ۱۳۷۱
ناشر: جهاد دانشگاهی دانشگاه تهران
تهران ـ صندوق پستی ۶۳۷۵ ـ ۱۴۱۵۵
نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.

حروفچینی: صبا
چاپ و صحافی: شمشاد
لیتوگرافی: علیرضایی‌فر
بها: ۷۰۰ ریال

به نام ایزد منان

سخن مدیر مسئول

آغاز سال جدید را که با بهار قرآن، ماه مبارک رمضان، مقارن بود، به تمامی خوانندگان تبریک می‌گوییم و برای تمامی ایشان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

اینک جنگی دیگر پیش روی شماست که حاصل کار جمعی صمیمی و کوشاست. در این بین زحمات هیأت تحریریه از همه چشمگیرتر است، زیرا از ابتدایی‌ترین مراحل شکل گرفتن هر جنگ ریاضی، یعنی تهیهٔ مقاله و پیشنهاد و بررسی آن، تا کنترل اغلب مراحل چاپی به عهدهٔ برخی از ایشان است، و این کار به طور داوطلبانه و با شوق و دقت وصف‌ناپذیری انجام می‌پذیرد و حاصلش مجله‌ای است که تاکنون هشت شماره از آن منتشر شده است.

نقش مسئول امور اجرایی جنگ پس از هیأت تحریریه اهمیتی به‌سزا دارد. چرا که هم‌اوست که باید ناظر بر انجام صحیح کلیهٔ کارهای چاپی جنگ باشد؛ از ارتباط دقیق و منظم با صفحه‌پرداز گرفته تا پیگیری سرانجام هر مقاله در رفت و برگشت از حروف‌چینی و لیتوگرافی و چاپخانه و صحافی و بالاخره امور توزیع جنگ. البته در اغلب این مراحل برخی از اعضای هیأت تحریریه هم همواره حاضر بوده‌اند.

پس از اینها وجود ویراستار ورزیده و مطلع و نیز صفحه‌پرداز ماهر از نیازهای حیاتی جنگ است، که باید بگوییم متأسفانه در این چند سال از کمبود ویراستار مناسب که با شرایط کار در جنگ ریاضی سازگار باشد، رنج برده‌ایم. یکی از مهمترین دلایل بیش از یک سال وقفه در انتشار جنگ ریاضی شمارهٔ ۷ همین موضوع بوده است. بد نیست بگوییم که در این چند سال از وجود صفحه‌پردازی مناسب بهره برده‌ایم ولی کمبود صفحه‌پرداز متون ریاضی هم به طریقی دیگر ما را در تنگنا قرارداده است. برای حل این دو مشکل و به‌خصوص مشکل ویراستار، دو راه به نظر می‌رسد: یکی اینکه هرروز دستمزد را مطابق آنچه بازار آشفتهٔ انتشارات روز تعیین می‌کند بالا ببریم، و دیگر اینکه خود به‌تربیت ویراستار و احیاناً صفحه‌پرداز همت گماریم. قطعاً راه دوم معقولتر و سودمندتر است، هرچند دشوارتر خواهد بود. این موضوعی است که شاید تاکنون به علت اشتغال به مسائل گوناگون از آن طفره رفته باشیم، اما هرروز ضرورتش بیشتر احساس می‌شود.

سرمایهٔ لازم برای انتشار جنگ ریاضی دانشجو تاکنون با پیگیری جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم با اخذ کمکهای مالی از یکی از مسئولین اجرایی سطح بالای کشور، یک وزارتخانه، دانشگاه تهران، یکی از مراکز تحقیقاتی و اخیراً دفتر مرکزی جهاد دانشگاهی، تأمین شده است. در این بین کمکهای دانشگاه تهران در تأمین کاغذ کلیهٔ شماره‌های جنگ ریاضی بسیار مشکل‌گشا بوده است و باید در این مورد سپاسگزار مدیریت دانشگاه بود. البته باید بگوییم که تمامی کمکهای مالی دریافت‌شده، حتی مخارج انتشار سه شمارهٔ جنگ را هم تأمین نکرده و مابقی از محل درآمدهای جهاد دانشگاهی دانشکده علوم تأمین شده است.

امیدوارم با تمهیداتی که جهاد دانشگاهی دانشگاه تهران فراهم نموده، از سال ۱۳۷۱ هزینهٔ انتشار جنگ ریاضی توسط جهاد دانشگاهی تأمین شود و کار اجرایی چاپ هر شمارهٔ آن توسط واحد انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه تهران با همکاری جهاد دانشگاهی دانشکده علوم انجام گیرد.

با پیگیریهای انجام‌شده به نظر می‌رسد پس از گذشت بیش از شش سال فعالیت در راه فراهم آمدن جنگ ریاضی دانشجو، این نشریه راه خود را یافته و به‌وضعیتی استوارتر رسیده است. امیدوارم با همت و همدلی همهٔ کسانی که پویندگان این راه‌اند بتوانیم گامهای بلندی در راه غنای فرهنگ ریاضی این مملکت برداریم.

هرمان وایل

نیم‌قرن ریاضیات•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

هرمان وایل در ۹ نوامبر ۱۸۸۵ در المشورن، نزدیک هامبورگ، آلمان به‌دنیا آمد و در ۸ دسامبر ۱۹۵۵ در زوریخ سوئیس درگذشت. در ۱۸ سالگی وارد دانشگاه گوتینگن شد و به جز یک‌سال که به مونیخ رفت، تا سال ۱۹۱۳ در آنجا بود. در ۱۹۱۳ استاد دانشگاه زوریخ شد. پس‌از بازنشستگی کلاین، پیشنهاد جانشینی او را در گوتینگن نپذیرفت، اما در ۱۹۳۵ هنگامی که پس‌از بازنشستگی هیلبرت برای برای بار دوم رهبری گوتینگن را به او پیشنهاد کردند، به‌آنجا رفت. در ۱۹۳۳، چون دیگر تاب‌تحمل رژیم نازی را نداشت، آلمان را ترک کرد و در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ پرینستون به‌کارمشغول شد، و تا بازنشستگی‌اش در ۱۹۵۱ در آنجا به‌تحقیق پرداخت.

وایل بدون‌شک برجسته‌ترین شاگرد هیلبرت بود. زمانی که به عنوان دانشجو وارد گوتینگن شد، هیلبرت در کار آفریدن نظریهٔ طیفی عملگرهای خودالحاق بود. اگرچه نظریهٔ طیفی و آنالیز همساز هستهٔ اصلی علایق او را تشکیل می‌داد، خیلی زود حوزهٔ فعالیت خود را به موضوعات دیگری چون گروههای لی و نظریه تحلیلی اعداد گسترش داد که هیلبرت هرگز به‌آنها نزدیک نشده بود. و دقیقاً از همین‌جا بود که وایل بزرگترین ریاضیدان نسل خود شد.

نخستین کار بدیع او پژوهش درمورد شرایط مرزی تکمله بر معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم (مسئلهٔ اشتورم-لیوویل) بود. مسئله‌ای که او بررسی کرد، عملاً نخستین مثال نظریهٔ عمومی کاستیهای یک‌عملگر هرمیتی پیکران بود که بعدها توسط فون‌نویمان پایه‌گذاری شد.

در ۱۹۱۱ او با بررسی رفتار مجانبی مقادیر ویژهٔ یک عملگر فشردهٔ خودالحاق بر فضای هیلبرت، فصل دیگری در نظریهٔ طیفی گشود. دراین پژوهش او تأکید زیادی بر کاربرد در نظریهٔ کشسانی داشت. از این نظریه وایل و بعدها کورانت درحل بسیاری ازمسائل آنالیز تابعی بهره جستند.

• Weyl, Hermann, "A half-century of mathematics," *Amer. Math. Monthly*, 58(1951)523-553.

مقالهٔ معروف او درمورد توزیع یکنواخت دنباله‌ها به پیمانهٔ ۱ در ۱۹۱۶ منتشر شد. مهمترین نتیجهٔ او اثبات این قضیه بود که هرگاه P یك چندجمله‌ای دلخواه با ضریب جملهٔ پیشرو گنگ باشد، دنبالهٔ $\{P(n)\}$ به‌پیمانهٔ ۱ دارای توزیع یکنواخت است. اثبات هوشمندانهٔ این قضیه، امروزه نمونه‌ای کلاسیك درنظریهٔ ارگودیك به‌شمار می‌آید.

وایل با بهره‌وری از بینش هندسی عمیق ریمان و دیدگاه دقیق اصل موضوعی هیلبرت درهندسهٔ اقلیدسی، نخستین تعریف دقیق‌رویهٔ ریمان، یعنی خمینهٔ مختلط یك‌بعدی، را به‌سبك امروز به‌دست‌داد، و به بررسی‌خواص جهتپذیری، هوموتوپی، و گروههای بنیادی آنها پرداخت. مفهوم یك رویهٔ ریمان که در ۱۹۱۳ منتشر کرد، کتابی کلاسیك شد که تأثیر زیادی بر پیشرفتهای بعدی گذاشت. در ۱۹۱۵ به پیروی از کارهای هیلبرت مسئلهٔ صلب بودن رویه‌های محدب را مورد بررسی قرار داد.

در ۱۹۱۶ همکار آینشتاین در زوریخ شد و این توجه او را به‌نظریهٔ نسبیت جلب کرد. دراین مطالعه، او مفهوم یك هموستار خطی را معرفی کرد و حساب تانسورها را به‌طور مؤثری به‌کار گرفت. کتاب معروف فضا، زمان، ماده (۱۹۱۸) حاصل بخشی از مطالعات او در همین زمینه است.

در ادامهٔ کارهای فروبنیوس، شور، یانگ، کارتان، وهورویتس به‌بررسی گروههای کلاسیك لی علاقه‌مند شد. او یلی بین روشهای شور و کارتان برای نمایشهای جبر لی گروه خطی خاص زد و سپس همان روش را به گروههای مختلط درهم تافته و متعامد تعمیم داد. او همچنین به نظریهٔ عمومی گروههای مختلط نیمه‌ساده توجه زیادی نشان داد. پژوهشهای او نقشی اساسی در نظریهٔ نمایش خطی گروههای لی ایفا کرد. مقالات او دراین زمینه، در سالهای ۱۹۲۵ تا ۱۹۲۷ از اهمیت فراوانی برخوردارند. دو کتاب ارزشمند او، نظریهٔ گروهها و مکانیك کوانتمی (۱۹۲۸) و گروههای کلاسیك[1] (۱۹۴۶)، هنوزهم مراجعی اساسی به‌شمار می‌روند.

او به‌بحثهای مربوط به فلسفهٔ ریاضی هم‌شدیداً علاقه‌مند بود و از بین دو مکتب صورتگرایی هیلبرت و شهودگرایی براوئر، سرسختانه به‌دفاع از دومی پرداخت. کتاب فلسفهٔ ریاضیات و علوم طبیعی (۱۹۴۹) یادگار مهم او دراین زمینه است.

هرمان وایل نویسندهٔ بیش از ۱۵۰ کتاب و مقاله است. حتی عمومیترین مقاله‌های او که برای استفادهٔ جماعت ریاضی‌خوانان نوشته شده، حاوی اندیشه‌های اصیل و بدیع است. مقالهٔ حاضر نیز یکی از آثار گرانقدر اوست که احاطهٔ او را برشاخه‌های گوناگون ریاضیات زمان خودش، و بینش عمیق او را درمورد پیوند این شاخه‌ها به‌خوبی نشان می‌دهد. خواننده پس از خواندن مقاله به راحتی تصدیق خواهد کرد که تنها ریاضیدانی همپایهٔ وایل می‌توانسته است این چنین چشم‌اندازی از فتوحات ریاضیات نیمهٔ نخست قرن بیستم به دست دهد. این مقاله همچنین الهام‌بخش این پرسش هیجان‌انگیز است: کدامین یك از مردان ریاضیات در ده سال آینده به‌نگاشتن تاریخ بسیار پیچیده‌تر ریاضیات درنیمهٔ دوم قرن بیستم همت خواهد گماشت؟

هیأت تحریریه

۱. مقدمه. اصل موضوعیها. ریاضیات در کنار نجوم قدیمیترین علوم است. بدون دریافتن مفاهیم، روشها و نتایجی که نسلهای پیشین، که قدمتشان به‌یونان باستان می‌رسد، کشف کرده و توسعه‌داده‌اند، نمی‌توان به‌هدفها یادستاوردهای ریاضیات در پنجاه‌سال گذشته پی برد.

ریاضیات از دیرباز علم نامتناهی نامیده‌شده است؛ درواقع، ریاضیدان ساختارهای متناهی را ابداع می‌کند تا به‌کمك آنها برای پرسشهایی پاسخ پیدا کند که دراصل از نامتناهی ریشه می‌گیرند. شکوه کار او در اینجاست. کایرکگارد[1] زمانی گفته بود که مذهب به مسائلی می‌پردازد که مطلقاً به انسان مربوط می‌شوند. برعکس (و با همان درجه اغراق) می‌توان گفت ریاضیات از اشیایی گفتگو می‌کند که اصلاً ارتباطی به آدمی ندارند. ریاضیات کیفیاتی غیربشری دارد؛ درخشان، باشکوه، و تابناك است، اما سرد و بیروح. بااین حال ظاهراً طنز خلقت در اینجاست که هرقدر امری از کانون وجود انسان بیشتر فاصله داشته باشد، آدمی بهتر می‌داند که چگونه با آن برخورد کند. بدینسان در آنجا که معرفت و دانش ما کمتر از همه‌جاست: یعنی در ریاضیات و به‌ویژه در نظریهٔ اعداد، باهوشترین موجوداتیم. درهیچ یك از دیگرعلوم مبحثی نیست که به‌لحاظ ظرافت و پیچیدگی با نظریه‌های ریاضی همچون، مثلاً، میدانهای رده‌ای جبری، حتی اندکی قابل‌مقایسه باشد. درحالی که روند تحول فیزیك از آغاز قرن حاضر یادآور جریان نیرومندی بوده که در یك راستا سیلان داشته است، ریاضیات بیشتر همانند دلتای رودنیل است که آبش درهمهٔ جهات جریان می‌یابد. باتوجه به‌همهٔ این موارد، یعنی وابستگی به‌گذشتهٔ دور، آن جهانی‌بودن، پیچیدگی، و تنوع، ارائهٔ گزارش روشنی از آنچه ریاضیدانها در پنجاه‌سال اخیر انجام داده‌اند، بعید به‌نظر می‌رسد. دراینجا سعی خواهم کرد که نخست در قالب عباراتی نسبتاً مبهم گرایشهای کلی تحول را توصیف کنم و آنگاه به‌زبانی دقیقتر برخی‌از برجسته‌ترین مفاهیم ریاضی را که در این دوران ابداع شده‌اند شرح دهم؛ و بعضی از مهمترین مسائل حل‌شده در این دوران را برشمارم.

یکی‌ازبارزترین جنبه‌های ریاضیات قرن بیستم، نقش به‌غایت فزاینده‌ای است که رهیافت اصل موضوعی در آن ایفا می‌کند. درحالی‌که روش اصل موضوعی سابقاً تنها برای توضیح و روشن‌سازی مفاهیم بنیادی به کار می‌رفت، اکنون خود به ابزاری برای تحقیقات ملموس ریاضی تبدیل شده است، شاید درجبر باشد که این روش به بزرگترین کامیابیهایش دست یافته است. برای نمونه دستگاه اعداد حقیقی را درنظر می‌گیریم. این دستگاه شبیه‌سر ژانوس[2] است که رو به دوسو دارد: از یك‌سو میدان اعمال جبری جمع و ضرب است، و از سوی دیگریك خمینهٔ پیوسته است که اجزای آن چنان به‌یکدیگر مرتبط شده‌اند که جداسازی دقیقشان از یکدیگر بعید به‌نظر می‌رسد. یکی از آنها چهرهٔ جبری، و دیگری چهرهٔ توپولوژیك اعداد است. روش اصل موضوعی جدید، که آسان‌فهم است (برخلاف سیاست امروزی جهان)، هیچ‌شباهتی به‌چنین آمیزه‌های مبهم جنگ وصلح ندارد و بنابراین این دو جنبه را به‌روشنی از یکدیگر جدا کرده است.

1. Kierkegaard

۲. Janus. یکی ازخدایان رم‌باستان، نگهبان دروازه‌ها، که با دوچهرهٔ رو به سوهای مخالف نموده می‌شد.ـم.

برای فهم یك وضعیت ریاضی پیچیده اغلب بهتر است جوانب گوناگون مبحث موردنظر را به‌شیوه‌ای طبیعی از یکدیگر جدا کنیم، سپس به‌هریك ازآنها به‌کمك گروهی از مفاهیم نسبتاً محدود که به‌آسانی قابل بررسی باشند، و حقایقی که برمبنای این مفاهیم فرمولبندی‌شده‌اند، دسترسی پیدا کنیم، وسرانجام با یکی‌کردن نتایج جزئی وقراردادنشان درمکان ویژهٔ مناسب بـه مبحث کلی بازگردیم. این عمل تلفیقی آخر صرفاً مکانیکی است. هنر اصلی درمرحلهٔ اول، یعنی عمل تحلیلی جداسازی وتعمیم مناسب، نهفته است. ریاضیات ما در دهه‌های اخیر به بستر تعمیم و صوری‌سازی غلتیده است. اما اگرکسی فکر کند تنها به‌خاطر نفس عمومیت در جستجوی تعمیم هستیم، این گرایش را به‌خوبی درك نکرده‌است. هدف واقعی سادگی است: هرتعمیم طبیعی‌ازآن‌جهت کار را ساده می‌کندکه فرضیاتی‌راکه باید درنظرگرفت، تقلیل می‌دهد. به آسانی نمی‌توان گفت چه‌چیز یك جداسازی و تعمیم طبیعی را می‌سازد. برای این منظور نهایتاً هیچ‌معیاری جـز سودمند بودن وجود ندارد: تنهاملاك موفقیت است. درپیروی از این طرز عمل، یك‌فرد پژوهشگر باتوجه‌به‌شباهتهای کم وبیش آشکار و به کمك بصیرت فکری که اساساً در خلال تجربیات تحقیقاتی پیشین خود کسب‌کرده است، کار خود را به‌پیش می‌برد. هنگامی که این فرایند اسلوبمند شود، مستقیماً به‌روش اصل موضوعی می‌انجامد. دراین‌صورت مفاهیم و حقایق اساسی‌که ازآنها سخن می‌گوییم مبدل می‌شوند به‌اصطلاحات تعریف نشده و اصول موضوعی‌که آنها را دربر دارند. حال تمام گزاره‌هایی که از این اصول فرضی نتیجه می‌شوند در اختیار ما هستند. و این نه‌تنها درمورد آن نمونه‌ای کـه این مفاهیم و اصول موضوع از آن مجرد شده‌اند، بلکه در هرجایی هم که تعبیری ازاصطلاحات تعریف نشده داشته باشیم که اصول موضوع را به‌گزاره‌هـای درست تبدیل کند، درست است. بارها پیش می‌آید که چندین تعبیر از این نوع در مباحث کاملاً متفاوت وجود دارد.

اغلب اوقات رهیافت اصل موضوعی روابط درونی میان حوزه‌هـایی را که ظاهراً از هم خیلی دورند آشکارکرده، و برای وحدت روشها در درون این حوزه‌ها ساخته شده است. این گرایش بـه هم پیوستن چندین شاخهٔ ریاضیات از دیگر جنبه‌های بارز تحول نوین علم ماست، و جنبه‌ای است که هم‌عنان گرایش ظاهراً متضاد تدوین اصول موضوع به‌پیش می‌رود. این امر درست مانند آن است که آدمی را از محیطی جدا کنیم که نه به اعتبار تناسب با آنجا بلکه به‌خاطر عادتها و تعصبات در آن محیط زیسته است، و آنگاه بگذاریم که پس‌از آزادیش‌ازآن محیط، برمبنای سازگارتری با طبعش به‌معاشرت‌بپردازد.

در تأکید بر اهمیت روش اصل موضوعی قصد مبالغه ندارم. بدون ابداع‌فرایندهای سازندهٔ جدیـد هیچ ریاضیدانی پیشرفت چندانی نخواهد کـرد. شاید بهتر باشد بگوییم توانمندی ریـاضیات امروز در اثر متقابل میان روش اصل موضوعی و روشهای ساختنی نهفته است. جبر را به عنوان یـك مثال شاخص درنظر بگیرید. تنها درهمین قرن بودکه جبر با خلاص‌کردن خود از قید یك دستگاه جهانی اعداد Ω، که برای تشکیل مبنای همهٔ اعمال ریاضی و نیز همهٔ انـدازه‌گیریهای فیزیکی به کار می‌گرفت، هویت خود را یافت.

جبر در پرتو این آزادی نویافتهٔ خود با تعدادی نامتناهی "میدان عددی" مواجه است که هریك از آنها می‌تواند به‌عنوان مبنایی عملیاتی به‌کارآید؛ هیچ تلاشی برای نشاندن آنها درون یك دستگاه Ω صورت نمی‌گیرد. اصول موضوع، امکانات گوناگون برای مفهوم‌عدد رامحدود می‌سازند؛ فرایندهـای ساختنی‌میدانهایی عددی به دست می‌دهند که در اصول‌موضوع صدق می‌کنند.

به‌این طریق جبر خود را از ارباب سابقش، آنالیز، مستقل کرده‌و حتی دربرخی‌از شاخه‌ها نقشی غالب بـه‌عهده گرفته است. این تحول در ریاضیات تا حدودی با تحول در فیزیك از طریق‌گذر از فیزیك کلاسیك به فیزیك کوانتومی مقارن شده است، چرا که در حوزهٔ اخیر به‌هرساختار فیزیکی، دستگاه مشاهده‌پذیرهـا یا کمیتهای مخصوص به خودش نسبت داده می‌شود. اعمال جبری جمع و ضرب روی این‌کمیتها انجام می‌گیرد؛ اما چون ضرب آنها تعویض‌پذیر نیست، بی‌گمان این‌کمیتها به‌اعداد معمولی تحویل‌پذیر نیستند.

در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات در پاریس درسال ۱۹۰۰، داویدهیلبرت که اعتقاد داشت مسائل شریان حیات علم هستند، بیست و سه‌مسئلهٔ حل‌نشده را که انتظار داشت در آینده نقش مهمی در ریـاضیات ایفا کنند، فرمولبندی کرد. پیش‌بینی او دربـارهٔ آیندهٔ ریاضیات، چـه‌قدر بهتراز پیش‌بینی هر سیاستمدار آن زمان در مورد پیامدهای جنگ و وحشتی بود که قرن‌جدید عنقریب به‌بشر تحمیل می‌کرد! ما ریاضیدانها غالباً پیشرفت‌خود را با وارسی این موضوع که آیا مسائل هیلبرت تا زمان ما حل‌شده‌اند یا خیر، می‌سنجیم. هرکس وسوسه می‌شود که با الگو قراردادن فهرست هیلبرت مروری نظیر آنچه‌که‌تلاش شده است در اینجا عرضه شود، ارائـه کند. من این‌کار را نکرده‌ام، زیرا درآن صورت ناگزیر ازتوضیح جزئیات بسیاری‌می‌شدم. به‌هرحال مجبورخواهم شد [دربعضی‌جزئیات] به‌قدرکافی حوصلهٔ خواننده را سر ببرم.

بخش اول. جبر. نظریهٔ اعداد. گروهها.

۲. حلقه‌ها، میدانها، ایده‌آلها. در واقع، دراین‌موضع‌پیش بردن بحث‌بدون‌روشن ساختن رهیافت اصل موضوعی به‌کمك برخی ازساده‌ترین مفاهیم جبری برای من‌غیرممکن به‌نظرمی‌رسد. برخی‌ازآنها به‌اندازهٔ متوشائیل[1] عمردارند. قدیمیتر ازدنبالهٔ اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳،... که با آنها می‌شماریـم، چیست؟ دوتا از این اعداد مانند a و b را می‌توان جمع و یا ضرب کرد ($a+b$ و $a.b$). گام بعدی در تکوین اعـداد، به‌این اعداد صحیح مثبت،اعداد منفی و صفر را اضافـه می‌کند؛ در دستگاه گسترده‌تری که بدینسان پدید آمده است، عمل جمع یك وارون یکتا، یعنی تفریق، پیدا می‌کند. کار به‌همین‌جا پایان‌نمی‌گیرد: اعداد صحیح به نوبهٔ خود به‌داخل دستگاه بـازهم گسترده‌تر اعداد گویا (کسرها) جذب

۱. Methuseloh. یکی‌از قدیمیترین کتاب مقدس که گفته می‌شود ۹۶۹ سال زیست.-م.

می‌شوند. ازراه تقسیم، وارون‌عمل ضرب نیز ـ مگر با استثنای جالب توجه تقسیم بر صفر ـ امکان‌پذیر می‌شود (از آنجا که به ازای هرعدد گویای b، $b.0=0$، پس هیچ وارونی برای صفر وجود ندارد که $b.0=1$). اینك حقایق بنیادی برای اعمال "به‌اضافه" و "ضرب‌در" را به‌صورت اصول موضوع فرمولبندی می‌کنم.

جدول T

(۱) قوانین تعویض‌پذیری و شرکت‌پذیری برای جمع،

$$a+b=b+a, \qquad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

(۲) قوانین متناظر برای ضرب.

(۳) قانون توزیع‌پذیری که جمع را به‌ضرب مربوط می‌کند،

$$c.(a+b)=(c.a)+(c.b).$$

(۴) اصول تفریق: ($۴_۱$) عنصری چون ۰ ("صفر") وجود دارد که به‌ازای هر a، $a+0=0+a=a$. ($۴_۲$) به‌ازای هرعدد a عددی چون $-a$ وجود دارد که

$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

(۵) اصول تقسیم: ($۵_۱$) عنصری چون e (۱، "واحد") وجود دارد که به‌ازای هر a، $a.e=e.a=a$. ($۵_۲$) به‌ازای هر $a\neq 0$ عنصری چون a^{-1} وجود دارد که

$$a.a^{-1}=a^{-1}.a=e.$$

با استفاده از ($۴_۲$) و ($۵_۲$) تفاضل $b-a$ و خارج‌قسمت b/a را به‌ترتیب می‌توان به‌صورت $b+(-a)$ و $b.a^{-1}$ تعریف کرد.

هنگامی که یونانیان کشف کردند نسبت بین قطر ویك‌ضلع مربع ($\sqrt{2}$) را نمی‌توان با یك عدد گویا اندازه‌گیری کرد، توسیع فراتری ازمفهوم عدد ضرورت پیدا کرد. اما اندازه‌گیری کمیتهای پیوسته فقط به‌صورت تقریبی امکان‌پذیر است، و این اندازه‌گیری همواره محدودهٔ معینی برای عدم دقت دارد. بدینسان، اعداد گویا و یا حتی کسرهای اعشاری متناهی را، مادامی که به عنوان تقریب تعبیر شوند، می‌توان در مقام ابزارنهایی اندازه‌گیری به‌کاربرد، و در واقع چنین‌کاری هم انجام می‌شود، و به‌نظر می‌رسد که یك حساب اعداد تقریبی، ابزارعددی‌کافی‌برای همهٔ علوم اندازه‌گیری باشد. اما ریاضیات باید برای‌هرنوع تظریف‌بعدی اندازه‌گیریها آماده شده باشد. بنابراین، مثلاً درکار باپدیده‌های الکتریکی، جای خوشحالی است اگر بتوان مقدار تقریبی بار الکتریکی یك الکترون، e، رادرنظر گرفت که آزمایشگرها آن را بادقت بیشتری به‌عنوان مقادیر یك‌مقدار عددی دقیق e براورد می‌کنند. و بدینسان، در خلال بیش‌از دو هزار سال از زمان افلاطون تا پایان قرن نوزدهم، ریاضیدانان از یك‌مفهوم عددی دقیق، یعنی اعداد حقیقی، سود جسته‌اند که همهٔ نظریه‌های ما را در حوزهٔ علوم طبیعی دربرمی‌گیرد. حتی امروزه مباحث منطقی مربوط

به‌این مفهوم کاملاً روشن‌نشده و جا نیفتاده‌اند. اما اعداد گویا تنها بخش کوچکی ازاعداد حقیقی‌اند. اعداد حقیقی نیز مانند اعداد گویا در اصول موضوع ما صدق می‌کنند، اما دستگاه آنها یك خاصیت تمامیت معین را نیز دارد که اعداد گویا فاقد آن‌اند، و آن عبارت است از جنبهٔ "توپولوژیك" آنها، که برمبنای آن عملیات با مجموعهای نامتناهی و مانند آن، و نیز استدلالهای پیوستگی، امکان‌پذیر است. بعداً به این موضوع اخیر بازخواهیم گشت.

سرانجام، در خلال رنسانس اعداد مختلط پا به‌صحنه گذاردند. این اعداد اساساً زوجهایی چون $z=(x,y)$ از اعداد حقیقی x و y اند که جمع و ضربشان به‌گونه‌ای تعریف شده است که برای آنها همهٔ اصول موضوع برقرارند. برمبنای این تعاریف، معلوم می‌شود که $e=(1,0)$ همان واحد است، درحالی که $i=(0,1)$ در معادلهٔ $i.i=-e$ صدق می‌کند. دو مؤلفهٔ x و y از زوج z بخشهای حقیقی و موهومی آن نامیده می‌شوند، و z معمولاً به‌شکل $xe+yi$، یا به سادگی به صورت $x+yi$، نوشته می‌شود. سودمندی اعداد مختلط از آنجا ناشی می‌شود که هرمعادلهٔ جبری (با ضرایب حقیقی یا حتی‌مختلط) درمیدان اعداد مختلط حلپذیر است. توابع تحلیلی از یك متغیر مختلط موضوع یك نظریهٔ غنی و هماهنگ‌اند، که نمونهٔ آنالیز کلاسیك قرن نوزدهمی است.

مجموعهٔ عناصری که به‌ازای آنها اعمال $a+b$ و $a.b$ به‌گونه‌ای تعریف شده باشد که اصول موضوع (۱) تا (۴) برقرار باشند، یك حلقه نامیده می‌شود: اگر اصول موضوع (۵) نیز برقرار باشند، به‌این‌مجموعه میدان می‌گویند. بدینسان اعداد صحیح معمولی‌حلقهٔ I، و اعداد گویا میدان ω را تشکیل می‌دهند؛ وهمچنین‌است وضعیت اعداد حقیقی (میدان Ω) و اعداد مختلط (میدان Ω^*). اما اینها به‌هیچ‌عنوان تنها میدانها یا حلقه‌ها نیستند. چندجمله‌ایهای از همهٔ درجه‌های ممکن h،

$$f=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_hx^h, \qquad (1)$$

که درآن ضرایب a_i از حلقهٔ مفروض R (مثلاً، حلقهٔ I اعداد صحیح، یا میدان ω) برگرفته شده‌اند، "چندجمله‌ایهای روی R" نامیده می‌شوند و حلقهٔ $R[x]$ را تشکیل می‌دهند. در اینجا به‌متغیر یا عنصر نامعین x باید به‌صورت یك نماد صوری نگریست؛ چندجمله‌ای در واقع چیزی جزدنبالهٔ‌ضرایبش a_0، a_1، a_2، ... نیست. اما نوشتن آن به شکل متداول (۱) قواعد جمع و ضرب چندجمله‌ایها را الهام می‌کند، که در اینجا آن را تکرار نمی‌کنم. اگر به جای متغیر x عنصر معین ("عدد") γ را از حلقهٔ R، یا از حلقه‌ای مانند P که حلقهٔ R را به‌عنوان یك زیرحلقه در بر دارد، قرار دهیم، عناصر f از $R[x]$ در عناصر α از P تصویر می‌شود: چندجمله‌ای $f=f(x)$ به عدد $\alpha=f(\gamma)$ نگاشته می‌شود. این نگاشت $f\to\alpha$ همریختی است، یعنی اعمال جمع و ضرب را حفظ می‌کند. در واقع، اگر نشاندن γ به جای x چندجمله‌ای f را به α، و چندجمله‌ای g را به β تبدیل کند، در این صورت $f+g$ و $f.g$ را متناظراً به $\alpha+\beta$ و $\alpha.\beta$ تبدیل می‌کند.

اگر حاصلضرب دوعنصر یك حلقه تنها درصورتی صفر شود که یکی‌از عاملها صفر باشد، می‌گوییم حلقه بدون مقسوم علیه صفر است. تمام حلقه‌هایی که تا اینجا درباب آنها بحث کرده‌ایم دارای این ویژگی‌اند. یك میدان، همواره حلقه‌ای بدون مقسوم‌علیه صفر است. ساختنی را که از طریق آن از اعداد صحیح به‌اعداد گویا می‌رسیم، می‌توان به‌کار برد و نشان داد که هر حلقهٔ R را که یکدار و بدون مقسوم‌علیه صفر باشد، می‌توان در یك میدان k، به نام میدان خارج‌قسمت نشاند، به طوری که هر عنصر k خارج‌قسمت a/b دو عنصر a و b از حلقه است که دومی (مخرج) صفر نیست.

با نوشتن a، $a+a$، $a+a+a$ و مانند آنها به‌صورت $1a$، $2a$، $3a$، . . . ، اعداد صحیح $n=1,2,3,\ldots$ را به‌عنوان ضرایب عضو a از حلقه بسا میدان به کار می‌بریم. فرض کنید که این حلقه شامل عنصر یك e باشد. ممکن است اتفاقاً مضرب‌معینی از e چون ne صفر باشد؛ دراین‌صورت به‌سادگی دیده می‌شود که به‌ازای هر عضو a از حلقه، $na=0$. اگر حلقه بدون مقسوم‌علیه صفر باشد، به‌ویژه اگر این حلقه یك میدان و p کوچکترین عددطبیعی باشد که $pe=0$، p ازوماً عدد اولی چون ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، . . . خواهد بود. پس میدانهای از مشخصهٔ p را از میدانهای با مشخصهٔ صفر، که در آنها هیچ مضرب e صفر نمی‌شود، متمایز می‌کنیم.

اعدادصحیح $\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$ را به‌صورت نشانه‌های با فاصلهٔ برابر روی یك خط ترسیم کنید. فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۲ باشد و این خط را پیرامون چرخی با محیط n بپیچید. دراین‌صورت اگر دو نشانهٔ a و a' منطبق شده باشند، تفاضل $a-a'$ بر n بخشپذیر است (ریاضیدانان می‌نویسند $a\equiv a'$ (پیمانهٔ n) و می‌گویند a همنهشت با a' است به پیمانهٔ n). با این یکی گرفتن، حلقهٔ اعداد صحیح I به یك حلقهٔ I_n که فقط n عضو دارد (نشانه‌های روی چرخ) تبدیل می‌شود، به‌قسمی که‌می‌توان آنها را با "مانده"های $0,1,\ldots,n-1$ یکی گرفت. درواقع، اعدادهمنهشت تحت‌اثر جمع و ضرب به‌نتایجی همنهشت می‌انجامند: $a\equiv a'$ (پیمانهٔ n) و $b\equiv b'$ (پیمانهٔ n) ایجاب می‌کند که $a+b\equiv a'+b'$ (پیمانهٔ n) و $ab\equiv a'b'$ (پیمانهٔ n). مثلاً، در پیمانهٔ ۱۲ داریم: $3+8=7+4$ و $5\cdot 8=4$، زیرا اگر ۱۵ و ۴۰ را بر ۱۲ تقسیم کنیم، مانده‌ها به‌ترتیب ۳ و ۴ خواهند بود. حلقهٔ I_{12} بدون مقسوم‌علیه صفر نیست، زیرا ۳.۴ بر ۱۲ بخشپذیر است، درحالی که ۳ و ۴ هیچ یك چنین نیستند. اما اگر p یك‌عدد طبیعی اول باشد آنگاه I_p هیچ مقسوم‌علیه صفری ندارد و حتی یك میدان است، زیرا همان‌گونه که یونانیان با روشی نبوغ‌آمیز (الگوریتم اقلیدس) ثابت کردند، به ازای هرعدد صحیح a که بر p بخشپذیر نباشد، عددی چون a' وجود دارد که $a\cdot a'\equiv 1$ (پیمانهٔ p). این قضیهٔ اقلیدسی زیربنای کل نظریهٔ اعداد است. این مثال نشان می‌دهد که به‌ازای هر عدد اول p، میدانی با مشخصهٔ p وجود دارد.

درهر حلقهٔ R می‌توان مفاهیم عنصر یکه و اول را به‌صورت زیر معرفی کرد: عنصر a درحلقه، یکه است اگر وارونی چون a' در حلقه داشته باشد که $a\cdot a'=e$. عنصر a

مرکب است اگر بتواند به‌حاصلضرب دو عامل a_1 و a_2 که هیچ یك از آنها یکه نباشد، تجزیه شود. یك عنصر اول، آن است که نه یکه باشد و نه مرکب. یکه‌های I، $1+$ و $1-$ اند. یکه‌های حلقهٔ $k[x]$ متشکل از چندجمله‌ایهای روی میدان k، عناصر غیرصفر k (چندجمله‌ایهای از درجهٔ صفر)اند. بنابرکشف یونانیان در مورد گنگ بودن $\sqrt{2}$، چندجمله‌ای x^2-2 در حلقهٔ $\omega[x]$ اول است؛ اما البته در $\Omega[x]$ چنین نیست، چون در آنجا به‌حاصلضرب دوعامل خطی $(x+\sqrt{2})$ و $(x-\sqrt{2})$ تجزیه‌می‌شود. الگوریتم‌اقلیدس را برای چندجمله‌ایهای یك متغیرهٔ $f(x)$ روی هرمیدان دلخواه k نیز می‌توان به‌کار برد، بنابراین این چندجمله‌ایها در قضیهٔ اقلیدس صدق می‌کنند: به‌ازای هرعنصر اول مفروض $P=P(x)$ از حلقهٔ $k[x]$ و هر عنصر $f(x)$ از $k[x]$ که بر P بخشپذیر نباشد، چندجمله‌ای دیگری چون $f'(x)$ روی K وجود دارد بطوری که $\{f(x).f'(x)\}-1$ بر $P(x)$ بخشپذیراست، بنابراین یکی گرفتن هردو عنصر f و g از $k[x]$ که تفاضلشان بر P بخشپذیر باشد، حلقهٔ $k[x]$ را به یك "میدان مانده‌ای K از $k[x]$ به پیمانهٔ P" تبدیل می‌کند. مثال: $\omega[x]$ به پیمانهٔ x^2-2 (ضمناً اعداد مختلط را می‌توان به صورت اعضای میدان مانده‌ای $\Omega[x]$ به پیمانهٔ x^2+1 توصیف کرد). جای تعجب است که قضیهٔ بنیادی اقلیدس برای چندجمله‌ایهای با دو متغیر x و y برقرار نیست. مثلاً، $P(x)=x-y$ یك عنصر اول از $\omega[x,y]$ است، و $f(x,y)=x$ عنصری است که بر $P(x,y)$ بخشپذیر نیست. اما یك همنهشتی به‌صورت

$$x\cdot f'(x,y)\equiv 1(x-y \text{ پیمانهٔ})$$

ناممکن است. در واقع این همنهشتی به $-1+xf'(x,x)=0$ می‌انجامد که با این حقیقت که چندجمله‌ای از یك مجهول x

$$-1+xf'(x,x)=-1+c_1x+c_2x^2+\ldots$$

صفر نیست‌منافات دارد. پس‌حلقهٔ $\omega[x,y]$ ازقواعد ساده‌ای که بر I و $\omega[x]$ حکمفرماست، پیروی نمی‌کند.

K، یعنی میدان‌مانده‌ای $\omega[x]$ به پیمانهٔ x^2-2 را در نظر بگیرید. چون به‌ازای هر دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $f'(x)$ که به پیمانهٔ x^2-2 همنهشت باشند، اعداد $f(\sqrt{2})$ و $f'(\sqrt{2})$ برابرند، نگاشت $f(x)\to f(\sqrt{2})$، K را به زیر میدان $\omega[\sqrt{2}]$ از Ω، که شامل اعداد $a+b\sqrt{2}$ به‌ازای a و b گویاست، می‌نگارد. نگاشت دیگری از این‌نوع می‌تواند $f(x)\to f(-\sqrt{2})$ باشد. پیشترها K را جزء $\omega[\sqrt{2}]$ ازپیوستار Ω یا Ω^*ی اعداد حقیقی یا اعداد مختلط می‌پنداشتند؛ در واقع می‌خواستند همهٔ اشیا را در عالم Ω یا Ω^* که آنالیز و فیزیك در آنها عمل می‌کنند، بنشانند. اما به‌ترتیبی که ما در اینجا معرفی کرده‌ایم، K موجودی است جبری که عناصرش اعداد به‌تعبیر متداول نیستند. ساختن این موجود به‌اعداد دیگری جز اعداد گویا نیاز ندارد. هیچ ارتباطی هم به Ω ندارد و

نباید آن را با هیچ یک از دو تصویرش روی Ω اشتباه گرفت. به بیان کلیتر، اگر $P=P(x)$ عنصر اول دلخواهی در $\omega[x]$ باشد، می‌توان میدان‌مانده‌ای κ_p از $\omega[x]$ به‌پیمانهٔ P را تشکیل داد. بی‌گمان، اگر δ یکی از ریشه‌های حقیقی یا مختلط معادلهٔ $P(x)=0$ در Ω^* باشد، آنگاه $f(x)\to f(s)$ یک تصویر همریخت از κ_p در Ω^* تعریف می‌کند. اما این تصویر، خود κ_p نیست.

اینک به‌اعدادصحیح $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ که حلقهٔ I را تشکیل می‌دهند بازگردیم. آشکار است که مثلاً مضارب ۵، یعنی اعداد صحیح بخشپذیر بر ۵، یک حلقه تشکیل می‌دهند. این حلقه یک ندارد، اما ویژگی مهم دیگری دارد: نه‌تنها حاصلضرب هر دو عنصرش را دربردارد، بلکهٔ همهٔ مضارب صحیح یک عنصرش را نیز شامل می‌شود. برای چنین مجموعه‌هایی واژهٔ غریب ایده‌ال معرفی‌شده است: با مفروض بودن حلقهٔ R، یک R — ایده‌ال (a) مجموعه‌ای از عناصر R است که (۱) مجموع و تفاضل هر دو عنصر (a) در (a) باشد، (۲) حاصلضرب یک عنصر (a) در عنصری از R در (a) باشد. می‌توانیم یک مقسوم‌علیه a را توسط مجموعهٔ همهٔ عناصری که بر a بخشپذیرند، توصیف کنیم. البته انتظار می‌رود که این مجموعه، به‌مفهومی که هم‌اینک تعریف شد، یک ایده‌ال (a) باشد. با مفروض بودن ایده‌ال (a)، ممکن است هیچ عنصر واقعی a از R وجود نداشته باشد که (a) از همهٔ مضارب a به شکل $j=ma$ (m عنصر دلخواهی از R است)، تشکیل شده‌باشد. اگر چنین a ای وجود نداشته باشد می‌گوییم که (a) "مقسوم‌علیه ایده‌ال[1] a است. کلمات "عنصر j از R مضربی از a است" به‌این مفهوم ساده‌است که "j به (a) تعلق دارد." در حلقهٔ اعداد صحیح مقسوم‌علیه‌ها واقعی‌اند.[2]

اما درهر حلقه‌ای وضعیت چنین نیست. یک رویهٔ جبری در فضای اقلیدسی سه‌بعدی با مختصات دکارتی x, y, z به کمک معادلهٔ $F(x,y,z)=0$ تعریف می‌شود که در آن F عنصری از $\Omega^3=\Omega[x,y,z]$، یعنی یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی ازسه‌متغیر x, y, z است. F درهمهٔ نقاط این رویه صفر است؛ این مطلب درمورد هر مضرب $L.F$ از F (L عنصر دلخواهی از Ω^3 است)، و به‌عبارت دیگر، برای هر چندجمله‌ای از ایده‌ال (F) در Ω^3 نیز صادق است. دستگاه معادلات چندجمله‌ای

$$F_1(x,y,z)=0, \qquad F_2(x,y,z)=0$$

درحالت کلی یک‌خم تعریف‌می‌کند که تقاطع‌رویهٔ $F_1=0$ و $F_2=0$ است. چندجمله‌ایهای $(L_1F_1)+(L_2F_2)$ که در آن L_1 و L_2 چندجمله‌ایهای دلخواهی از Ω^3اند یک‌ایده‌ال (F_1, F_2) را تشکیل می‌دهند، و همهٔ این چندجمله‌ایها روی خم صفر می‌شوند. این ایده‌ال

1. ideal divisor

۲. یعنی هیچ مقسوم‌علیهی ایده‌ال نیست، به‌عبارت دیگر هر ایده‌ال (a) از مضارب یک عنصر واقعی a در R تشکیل شده است.ـم.

درحالت کلی با یک مقسوم‌علیه حقیقی F متناظر نیست، زیرا این خم یک رویه نیست. مثالهایی از این دست خواننده را متقاعد می‌سازند که مطالعهٔ خمینه‌های جبری (خمها، رویه‌ها، و مانند آنها با ابعاد ۲، ۳، و یا هربعد دیگری) اساساً به مطالعهٔ ایده‌الهای چندجمله‌ای می‌انجامد. لزومی ندارد که میدان ضرایب Ω یا Ω^* باشد، بلکه می‌تواندمیدانی با ماهیت کلیتر نیز باشد.

۳. برخی از دستاوردهای جبر و نظریهٔ اعداد. سرانجام به نقطه‌ای رسیده‌ام که امیدوارم بتوانم با چیزی بهتر از ابهام مطلق، به‌برخی از نتایج زیبای جبر و نظریهٔ اعداد دراین قرن اشاره‌کنم. شاید مهمترین آنها این آزادی باشد که درپرتو آن آموختیم که مفاهیم اصل موضوعی مجردی را چون میدان، حلقه، ایده‌ال، و مانند آنها بپروراییم. فضای حاکم برکتابی چون جبرنوین تألیف وان‌دروردن[1] که در ۱۹۳۰ انتشار یافت، کاملاً متفاوت با روحیهٔ حکمفرما بر مثلاً مقالات جبری است که درحوالی ۱۹۰۰ برای دایرةالمعارف ریاضی[2] نوشته شده بود. به‌خصوص، یک نظریهٔ کلی ایده‌الها، و درحالت خاص ایده‌الهای چندجمله‌ای مطرح شد (اما باید خاطرنشان ساخت که پیشگام بزرگ جبر مجرد، ریچارد ددکیند، که برای نخستین‌بار ایده‌الها را درنظریهٔ اعداد معرفی کرد، هنوز هم متعلق به‌قرن نوزدهم بود). هندسهٔ جبری، که پیش‌از ۱۹۰۰، و در همان ایام عمدتاً درایتالیا رشد می‌کرد، درمیان شاخه‌های ریاضیات شاخه‌ای نامتداول بود: روشهایی نیرومند و نتایج کلی بسیاری داشت، اما اعتبار آنها تاحدی مورد تردید بود. با بهره‌گیری از روشهای جبر مجرد قرن بیستم، همهٔ اینها زیربنایی مطمئن یافتند، و کل این مبحث به انگیزهٔ جدیدی دست یافت. پذیرش میدانهایی غیراز Ω^* به‌عنوان میدان ضرایب، افق تازه‌ای در برابر ریاضیات گشود.

اندکی پس‌از آغاز قرن، هنسل[3] روش جدیدی را، موسوم به "اعداد پریمادیک[4]"، به حیطهٔ جبر و نظریهٔ اعداد واردکرد، که از آن پس اهمیتی روزافزون داشته است. هنسل این ابزار را درمشابهت باسریهای توانی‌شکل‌داد. سریهای‌توانی درنظریهٔ ریمان و وایرشتراس و انتگرالهای آنها (انتگرالهای آبلی) نقش مهمی ایفا کرده بودند. دراین‌نظریه، که یکی از جذابترین محصولات ذهنی قرن پیشین بود، فرض می‌شد که ضرایب در میدان اعداد مختلط Ω^* تغییر می‌کنند. بدون پی‌گیری این شباهت نیز می‌توان ایدهٔ اعداد p-آدیک را با یک‌مثال زرعی، یعنی ترمهای درجهٔ دوم توضیح داد. فرض کنید p عددی اول باشد، و پیش‌از هرچیز توافق کنیم که به‌ازای اعداد گویای a و b، همنهشتی $a\equiv b$ به‌پیمانهٔ‌توانی چون p^h ازم به این معنی باشد که $(a-b)/p^h$ مساوی کسری است که مخرجش بر p بخشپذیر نیست؛ مثلاً

1. Van der Waerden
2. *Mathematical Encyclopedia*
3. K. Hensel
4. Primadic

$$\frac{۳۹}{۴}-\frac{۱۲}{۵}=۷^{۲}.\frac{۳}{۲۰}\quad \text{زیرا}\quad \frac{۳۹}{۴}\equiv\frac{۱۲}{۵}\ (\text{پیمانهٔ } ۷^{۲})$$

حال فرض کنید a و b اعدادی گویا باشند، $a\neq ۰$، و b مربع یک‌عدد گویا نباشد. در میدان درجهٔ دوم $\omega[\sqrt{b}]$: عدد a یک نرم است هرگاه اعداد گویایی چون x و y وجود داشته باشند که

$$a^{۲}=x^{۲}-by^{۲}\quad \text{یا}\quad a=(x+y\sqrt{b})(x-y\sqrt{b}).$$

برای حلپذیری این معادله لازم است که: (۱) به‌ازای هرعدد اول p و هر توان p^h از p همنهشتی (پیمانهٔ p^h) $a\equiv x^{۲}-by^{۲}$ جواب داشته باشد، که دراین‌حالت می‌گوییم معادله یک جواب p-آدیک دارد. (۲) اعداد گویایی مانند x و y وجود داشته باشند که اختلاف $x^{۲}-by^{۲}$ را بتوان به‌هر اندازهٔ دلخواه کوچک کرد، که دراین‌حالت می‌گوییم معادله یک جواب ∞-آدیک دارد. واضح است که اگر b مثبت باشد، شرط اخیر به‌ازای هر a برآورده می‌شود؛ اما اگر b منفی باشد، این شرط تنها به‌ازای مقادیر مثبت a برآورده می‌شود. درحالت نخست هر a یک نرم ∞-آدیک است، درحالت دوم تنها نیمی از aها، یعنی مقادیر مثبت، نرم ∞-آدیک هستند. در مورد نرمهای p-آدیک نیز وضعیت مشابهی حکمفرماست. ثابت می‌شود که این شرایط لازم کافی نیز هستند: اگر a همه‌جا یک نرم موضعی باشد، یعنی اگر معادلهٔ $a=x^{۲}-by^{۲}$ به‌ازای هر "عدد اول متناهی p" یک جواب p-آدیک و همچنین جوابی به‌ازای "عدداول نامتناهی ∞" داشته باشد، آنگاه یک‌جواب "فراگیر" دارد، یعنی جواب دقیقی برحسب اعدادگویای x و y.

این‌مثال، که ساده‌ترین مثالی است که می‌توانم به آن بیندیشم، ارتباط نزدیکی با نظریهٔ فرمهای‌درجهٔ دوم دارد، مبحثی که قدمتش به "تحقیقات حسابی[1]" گاؤس بازمی‌گردد، اما در قرن بیستم با استفاده از روش p-آدیک به‌پیشرفتهای شایانی دست یافته است، و به‌علاوه معرف جذابترین شاخهٔ ریاضیات، که در مقدمه به‌آن اشاره کردیم، یعنی نظریهٔ میدان‌رده‌ای به‌شمارمی‌آید. درحوالی ۱۹۰۰ داویدهیلبرت چندین قضیهٔ پیچیده در مورد میدانهای رده‌ای را فرمولبندی‌کرد، برخی ازآنها را دست‌کم درحالات خاص ثابت‌کرد، و بقیه را به‌اخلاف قرن بیستمی‌اش که ازمیان آنها می‌توان تاکاجی[2]، آرتین[3]، و شوالیه[4] را نام برد، واگذاشت. نماد ماندهٔ نرم[5] او راه را برای قانون تقابل کلی آرتین هموار ساخت. هیلبرت برای کار خود از قیاس با نظریهٔ توابع جبری ریمان‌وایرشتراس روی Ω^{*} بهره‌گرفته بود، اما آن روشهای هوشمندانه و تاحدودی متعالی که او به‌کار می‌گرفت،

1. *Disquisitiones arithmeticae*
2. Takagi
3. Artin
4. Chevalley
5. norm residue

هیچ‌شباهتی به‌روشهای خیلی‌ساده‌تری که برای این توابع خیلی‌مؤثرتر از کار درآمده‌اند نداشت. به‌کمک روش پریمادیک پل جدیدی بین این روشها زده شده است، با این‌حال هنوز هم شکاف عمیقی وجود داردکه نظریهٔ توابع جبری را از مبحث ظریفتر اعداد جبری جدا می‌کند.

هنسل‌واخلافش روش p-آدیک‌را براساس مفهوم "توپولوژیک"غیرجبری("ارزیابی[1]" یا) همگرایی بیان کردند. یک دنبالهٔ نامتناهی از اعداد گویای a_1، a_2، ... همگراست هرگاه چنانچه i و j مستقل از یکدیگربه‌بینهایت میل کنند، تفاضل a_i-a_j به صفر میل کند، یعنی $a_i-a_j\to ۰$؛ به‌بیان صریحتر، اگر به‌ازای هرعدد صحیح مثبت ε، عددصحیح مثبتی‌چون N وجودداشته باشدکه به‌ازای هر $i,j>N$، داشته باشیم $-\varepsilon<a_i-a_j<\varepsilon$ تمامیت[2] دستگاه اعداد حقیقی با قضیهٔ همگرایی کشی بیان می‌شود: برای هر دنبالهٔ همگرای a_1، a_2، ... از اعدادگویا عددی حقیقی چون α وجود دارد که دنباله به‌آن همگراست، یعنی به‌ازای $i\to\infty$، داریم $a_i-\alpha\to ۰$. حال با توجه به‌مفهوم ∞- آدیک همگرایی، با نوع p-آدیکی روبرو هستیم که عدد اول p آن را القا می‌کند. در اینجا دنباله را همگرا گوییم هرگاه به‌ازای هرنمای $h=۱,۲,۳,\ldots$ عدد صحیح مثبتی چون N وجود داشته باشد که اگر $i,j>N$، آنگاه a_i-a_j بر p^h بخشپذیر باشد. با معرفی اعداد p-آدیک می‌توان دستگاه اعداد گویا را به مفهوم p-آدیک تام ساخت، همان گونه که معرفی اعداد حقیقی اعداد گویا را به‌مفهوم ∞-آدیک تام می‌سازد. اعداد گویا می‌توانند به‌همان‌ترتیب که در پیوستار تمام اعداد حقیقی نشانده می‌شوند در پیوستار کلیهٔ اعداد p-آدیک نیز نشانده شوند. همهٔ این نشاندنها که با یک عدد اول متناهی یا نامتناهی p متناظرند، از دیدگاه حسابی به یک اندازه جالب‌توجه‌اند. حال بدیهی‌تراز همیشه دیده می‌شودکه یکی‌گرفتن میدان اعداد جبری با تصاویر همریختش درمیدان اعداد حقیقی تا چه‌حد اشتباه است. درکنار اعداد اول نامتناهی (حقیقی) باید به اعداد اول متناهی که با ایده‌الهای اول مختلف میدان متناظرند، توجه داشت. این قاعده‌ای طلایی است که از تحقیقات اولیه در زمینهٔ حساب تجرید شد وبعدها به بارنشست؛ دراینجا پلی‌هست(به‌پلهای دیگر بعداً اشاره می‌کنیم) که دو شاخه از برجسته‌ترین شاخه‌های ریاضیات نوین، یعنی جبر مجرد و توپولوژی، را به‌هم پیوند می‌دهد.

گذشته ازمعرفی اعداد پریمادیک و پیشرفتی‌که درنظریهٔ میدانهای رده‌ای حاصل شد، به‌نظر می‌رسد که مهمترین پیشرفتهای نظریهٔ اعداد در ۵۰سال گذشته در آن حوزه‌هایی قرار می‌گیردکه می‌توان ابزار نیرومند توابع تحلیلی را به‌مسائل آن مربوط ساخت. من دو تا از این حوزه‌های پژوهشی را برمی‌شمارم: I: توزیع اعداد اول و تابع زتا؛ II نظریهٔ جمعی اعداد.

I. بدون شک، مفهوم‌عدداول به‌همان‌میزان قدیمی‌وابتدایی است که‌ضرب اعدادطبیعی.

1. valuation
2. completeness

بنابراین بسیار مایهٔ شگفتی است هنگامی که درمی‌یابیم توزیع اعداد اول در میان اعداد طبیعی سرشتی تا این حد نامنظم و تقریباً مرموز دارد. درحالی‌که هرچه در میان اعداد طبیعی به‌پیش می‌رویم، اعداد اول روی هم‌رفته کمیاب‌تر می‌شوند، همواره در پی‌شکافهای گسترده در اعداد اول به‌تراکم آنها برمی‌خوریم. بنابریك حدس قدیمی از گلدباخ، حتی مرتباً پیش می‌آید که یك زوج از اعداد اول با کوچکترین فاصلهٔ ممکن ۲، نظیر ۵۷ و ۵۹، ظاهر می‌شوند. اما توزیع اعداد اول از یك قاعدهٔ مجانبی نسبتاً ساده پیروی می‌کند: تعداد اعداد اول بین اعداد از ۱ تا n، که به $\pi(n)$ نشان داده می‌شود، به طور مجانبی برابر $n/\log n$ است [دراینجا $\log n$ لگاریتم بریگس که‌درجدولهای لگاریتمی محاسبه‌شده‌اند نیست، بلکه لگاریتم طبیعی است که با انتگرال $\int_2^x dx/x$ تعریف می‌شود]. منظور از مجانبی این است که چنانچه n به بینهایت میل کند نسبت $\pi(n)$ و تابع تقریبی $n/\log n$ به ۱ میل می‌کند. در دوران باستان اراتوستنس[1] روشی برای غربال کردن اعداد اول ابداع کرد. چبیشف ریاضیدان روسی، با استفاده از این‌روش غربالی درخلال قرن‌نوزدهم به‌نخستین نتایج غیربدیهی درمورد توزیع اعداد اول دست یافت. ریمان رهیافت‌متفاوتی به‌کاربرد: ابزار او تابعی موسوم به زتا بودکه با سری نامتناهی

$$\zeta(s)=1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\cdots \qquad (2)$$

تعریف می‌شود. در اینجا s یك متغیرمختلط است، و سری به‌ازای جمیع مقادیر s که‌جزء حقیقی آنها بزرگتر از ۱ باشد، یعنی $Rs>1$، همگراست. قبلاً در قرن هجدهم، این حقیقت‌که هرعدد صحیح مثبت می‌تواند به‌طوریکتایی به‌حاصلضرب اعداد اول تجزیه‌شود، توسط اویلر به‌معادلهٔ

$$1/\zeta(s)=(1-2^{-s})(1-3^{-s})(1-5^{-s})\cdots$$

برگردانده‌شده بود، که‌دراینجا حاصلضرب (نامتناهی) روی همهٔ اعداد اول ۲،۳،۵،... گرفته شده است، ریمان نشان‌دادکه تابع زتا یك "ادامهٔ تحلیلی" یکتا به‌تمام صفحهٔ‌مختلط داردکه دریك‌معادلهٔ تابعی‌معین، که مقادیرش را در s و $1-s$ به‌یکدیگر مربوط می‌سازد، صدق می‌کند. صفرهای تابع زتا نقش قاطعی در مسئلهٔ اعداد اول دارند؛ اینها مقادیری از sاند که به‌ازای آنها $\zeta(s)=0$. معادلهٔ ریمان نشان داد که جزء حقیقی همهٔ صفرها به‌جز صفرهای "بدیهی" در $s=-2,-4,-6,\ldots$ بین ۰ و ۱ است. ریمان حدس‌زدکه جزء حقیقی آنها در واقع برابر ۱/۲ است. حدس او تاکنون، یعنی تقریباً به‌مدت یکصدسال، همچنان برای ریاضیات به‌صورت معمایی باقی‌مانده است. اما در انتهای قرن نوزدهم، دربارهٔ این صفرها آنقدر می‌دانستند که قادر باشند با استفاده از برخی قضایای جدید و عمیق درمورد توابع تحلیلی قاعدهٔ مجانبی را که از آن یادکردیم اثبات کنند. این امر،

۱. Eratosthenes. منجم و جغرافیادان یونانی سدهٔ سوم پیش ازمیلاد.م.

به‌طورکلی یکی از کامیابیهای بزرگ ریاضیات به‌شمار می‌آید. از ابتدای قرن حاضر، معادلهٔ تابعی ریمان و نتایجی که به‌دنبال دارد، از تابع زتای "کلاسیك" (۲) روی میدان اعدادگویا به‌میدانهای‌جبری دلخواه تعمیم یافته‌اند(هك[1]). درمورد برخی ازمیدانهای با مشخصهٔ اول موفق شده‌اند حدس ریمان را ثابت‌کنند؛ اما به‌دشواری می‌توان پذیرفت که این روند پرتوی به‌حالت‌کلاسیك بیفکند. در مورد تابع کلاسیك زتا، اکنون می‌دانیم که **این تابع روی خط بحرانی $Rs=1/2$ تعدادی نامتناهی صفر دارد، و حتی دست‌کم درصد** ثابتی از آنها، مثلاً ۱۰ درصد، روی آن قرار دارند (این بدان معنی است که درصدی‌از آن صفرهایی‌که جزءموهومیشان میان حدود ثابت و دلخواه $-T$ و $+T$ واقع است، جزء حقیقی برابر با ۱/۲ دارند، و هنگامی که T به بینهایت میل کند، این درصد از یك حد مثبت، مثلاً ۱۰ درصد، پایینتر نمی‌آید). سرانجام‌حدود دو سال قبل آتل‌سلبرگ[2] موفق‌شد با ارائهٔ برهانی "مقدماتی" از قانون اعداد اول‌که با تظریقی هوشمندانه ازروش غربالی اراتوستنس به‌دست آورده بود، دنیای ریاضیات را به‌شگفتی وا دارد.

II. از دیرباز می‌دانستند که هرعدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع حداکثر چهارمربع‌کامل نوشت؛ مثلاً

$$7=2^2+1^2+1^2+1^2\ ,\quad 87=9^2+2^2+1^2+1^2=7^2+5^2+3^2+2^2.$$

همین مسئله برای مکعبها، و به‌طورکلی برای هر توان kام $(k=2,3,4,5,\ldots)$مطرح می‌شود. درقرن هجدهم، وارینگ[3] حدس زده بود که هر عدد صحیح نامنفی n را می‌توان به‌صورت مجموع تعدادی متناهی از توانهای kام، مثلاً Mتا، مانند

$$n=n_1^k+n_2^k+\cdots+n_M^k \qquad (3)$$

بیان‌کرد، که درآن n_iها اعداد صحیح نامنفی‌اند و M مستقل از n است. دههٔ نخست قرن بیستم با دو رویداد مهم‌قرین است: نخست‌اینکه دریافتند که هرعدد n می‌تواند به‌صورت مجموع حداکثر ۹مکعب بیان شود (و بداستثنای چندمقدار نسبتاً کوچك n، حتی ۸مکعب هم کافی است)؛ و انسدکی پس‌از آن هیابرت قضیهٔ کلی وارینگ را ثابت‌کرد. روش او به زودی به رهیافتی متفاوت جای سپرد و آن روش دایرهٔ هاردی-لیتل‌وود است که بر استفاده از یك‌تابع تحلیلی معین از یك متغیر مختلط متکی است و برای تعداد نمایشهای متمایز n به صورت (۳) فرمولهایی مجانبی به‌دست می‌دهد. بعدها با اعمال محدودیتهایی که از ماهیت مسئله نشاشی می‌شد، و با غلبه بر برخی از موانع کاملاً جدی، این نتیجه به میدانهای جبری دلخواه منتقل شد؛ و با تظریف مجدد روش دایره در راستایی متفاوت، وینوگرادوف[4] ثابت‌کردکه هر n به‌اندازهٔ کافی بزرگ مجموع حداکثر ۳ عدد اول‌است.

1. E. Hecke
2. Atle Selberg
3. Waring
4. Vinogradoff

آیا این‌مطلب که هرعدد زوج حتی‌مجموع دوعدد اول است هم درست است؟ به‌نظرمی‌رسد که تمامی قوای ریاضی ما برای نشان دادن صحت این گزاره، یعنی حدس گلدباخ، بسیج شده‌اند. اعداد اول هنوز هم موجوداتی گریزپا به‌نظر می‌رسند.

III. سرانجام، بایدچند کلمه‌ای هم درمورد تحقیقات‌مربوط به‌ماهیت حسابی‌اعدادی بگوییم که ریشه درآنالیز دارند. یکی‌از ابتداییترین این ثابتها، عدد π یعنی مساحت‌دایرهٔ به‌شعاع واحد است. با اثبات این‌که π یک‌عدد متعالی است (درمعادله‌ای جبری باضرایب گویا صدق نمی‌کند)، بـه مسئلهٔ باستانی تربیع دایره درسال ۱۸۸۲ پاسخ منفی داده شد؛ این بدان معنی‌است که نمی‌تـوان از طریق ساختنهای به‌کمک خط‌کش وپرگار، دایره را تربیع کرد. درحالت کلی اثبات‌متعالی‌بودن اعداد بسیار مشکلتر ازتوابع است. درحالی‌که به‌سادگی دیده می‌شودکه تابع‌نمایی

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots$$

جبری نیست، اثبات این‌که مبنای آن، e، عددی است متعالی، خیلی دشوار است. زیگل[1] نخستین کسی بودکه در حدود سال ۱۹۳۰موفق‌شد روشی‌کلی برای‌آزمایش متعالی‌بودن اعداد ارائه دهد.اما دراین‌حوزه نتایج همچنان پراکنده باقی مانده‌اند.

۴. گروهها. فضاهای‌برداری و جبرها. دراینجا گزارش ما پیرامون نظریهٔ اعداد به‌پایان می‌رسد، اما درمورد جبر چنین نیست، زیرا حال باید مفهوم گروه را معرفی کنیم کـه از ۱۸۳۰ کـه نابغهٔ جوان اواریست گالوا چارچوب آن را شرح داد به تمامـی پیکـرهٔ ریاضیات نفوذ کرده است. بدون درك گـروه، فهـم ریاضیات امروز غیـرممکن است. گروهها نخستین‌بار به‌صورت گروههای تبدیلات ظاهر شدند. تبدیلات می‌توانند‌در هر مجموعه‌ای از عناصر عمل‌کنند، خـواه این مجموعه مانند اعـداد صحیح از ۱ تا ۱۰ متناهی و خواه مانند نقاط فضا نامتناهی باشد. مجموعه مفهومی پیشریاضی است. هر وقت با قلمرویی از اشیا سروکار داریم، مجموعه با ارائهٔ معیاری تعریف می‌شودکه به‌ازای هر عنصر از قلمرو نشان دهد که آیا آن عنصر به مجموعه تعلق دارد یا نه. پس می‌توانیم از مجموعهٔ اعداد اول، یا مجموعهٔ نقاط واقع بر دایره، یا همهٔ نقاط با مختصات گویا در یك دستگاه مختصات مفروض، یا همهٔ مردمی‌که هم اینك درایالات نیوجرسی زندگی می‌کنند، سخن بگوییم. دومجموعه را مـساوی می‌گوییم هرگاه هر عنصر یکی متعلق به دیگری باشد و برعکس. یك نگاشت S از مجموعهٔ σ به‌توی مجموعهٔ σ' هنگامی تعریف می‌شود که به هرعنصر a از σ یـك عنصر a' از σ' نظیر شده باشد؛ $a \to a'$. دراینجا قاعده‌ای لازم است‌که برای هرعنصر مفروض a از σ بتوانیم "تصویر" a' آن را بیابیم. این‌مفهوم کلی نگاشت را نیز می‌توان ماهیتی پیشریـاضی نامید. مثالها: یك تابع حقیقی از متغیر حقیقی نگاشتی است ازپیوستار Ω به‌توی خودش. تصویر متعامد نقاط فضا روی یك‌صفحهٔ‌مفروض، نگاشتی است از فضا به‌توی آن‌صفحه. نمایش هرنقطهٔ فضا با سه‌مختص x، y، و z نسبت

1. C. L. Siegel

به یـك دستگاه مختصات، نگاشتی است از فضا به توی پیوستار همـهٔ سه‌تاییهای حقیقی (x,y,z). اگر یك نگاشت S از σ به توی σ'، مانند $a \to a'$، با نگاشت S' از σ' به تـوی مجموعهٔ سوم σ''، مانند $a' \to a''$، دنبال شود، نتیجهٔ کار نگاشت $SS':a \to a''$ از σ به‌توی σ'' است. یك‌تناظر یك‌به‌یك بین دومجموعهٔ σ و σ'، یك زوج‌نگاشت مانند $S:a \to a'$ از σ به‌توی σ' و $S' : a' \to a''$ از σ' به‌توی σ است‌که وارون یکدیگر باشند، یعنی نگاشت SS' از σ به‌توی σ نگاشت همانی E روی σ است‌که عنصر a از σ را به‌روی خودش می‌فرستد، و $S'S$ نگاشت همانی σ' است. درحالت خاص، تناظرهای یك‌به‌یك ازیك مجموعهٔ σ به‌توی‌خودش موردتوجه‌اند. برای آنها از کلمهٔ تبدیل استفاده خواهیم کرد. یك جایگشت چیزی نیست جز یك تبدیل مجموعه‌ای متناهی.

برای هر تبدیل S از مجموعـهٔ مفروض σ، مانند $a \to a'$، وارون آن S' نیز یك تبدیل است و معـمولاً با S^{-1} نشان داده می‌شود. بـه‌ازای هر دو تبدیـل S و T از σ، ترکیب ST بازهم یك‌تبدیل، و وارون آن $T^{-1}S^{-1}$ است (مطابق قاعدهٔ لباس پوشیدن و لباس درآوردن: اگر در لباس پوشیدن ابتدا بلوز و سپس ژاکت را به‌تن‌کنید، درهنگام درآوردن لباس باید نخست ژاکت و بعد بلوز را از تن درآورید. ترتیب دو "عامل" S و T نقشی اساسی ایفا می‌کند). یك‌گروه‌از تبدیـلات مجموعـه‌ای است از تبدیلات یـك خمینهٔ[1] مفروض‌که: (۱) نگاشت همانی E را دربر دارد، (۲) به‌ازای هر تبدیل S وارون آن S^{-1}، و (۳) به‌ازای هـر دو تبدیل S و T، "حاصلضرب" آنها، ST، را دربر دارد. مثال: شکلهای همنهشت در فضا را می‌توان به‌صورت مجموعه‌هایی ازنقاط تعریف کرد که یکی‌از آنها به‌وسیلهٔ یك تبدیل همنهشت فضا به دیگری نگاشته می‌شود. تبدیلات همنهشت یا "حرکتهای" فضا یك گـروه تشکیل می‌دهند؛ این گزاره، بنابر تعریف بالا ازگروه، با این گزارهٔ سه‌تایی هم‌ارز است که (۱) هرشکل با خودش همنهشت است؛ (۲) اگرشکل F با F' همنهشت باشد، آنگاه F' نیز با F همنهشت است؛ (۳) اگر F همنهشت با F' و F' همنهشت با F'' باشد،آنگاه F با F'' همنهشت است. این مثال اهمیت ذاتی مفهوم گروه را بیدرنگ روشن می‌کند. تقارن یك شکل F درفضا با گروه حرکتهایی که F را به توی خودش می‌نگارند، توصیف می‌شود.

خمینه‌ها اغلب دارای یك ساختار هـم هستند. برای نمونه، عناصر یك میدان با دو عمل جمع و ضرب به هم مربوط می‌شوند؛ یا در فضای اقلیدسی با رابطهٔ بین شکلها سر و کار داریم. بنابراین، ایدهٔ نگاشتهایی که‌ساختار را حفظ می‌کنند مطرح‌می‌شود.این‌نگاشتها را همریختی می‌نـامند. پس یك نگاشت همریخت از میدان k به توی میدان k'، نگاشتی چون $a \to a'$ از"اعداد" k به‌توی‌اعداد k' است‌به‌طوری‌که $(a+b)'=a'+b'$ و $(a.b)'=a'.b'$. یك نگاشت همریخت از فضا به توی خودش نگاشتی خواهد بود که هر دو شکل همنهشت را به دو شکل متقابلاً همنهشت بفرستد. اصطلاح زیر اکنون مورد

۱. در اینجا و چند سطر بعد، مقصود از خمینه (manifold) یك مجموعـه یـا فضای زمینه است، نه مفهوم هندسی امروزی‌آن.ـم.

قبول واقع شده است: همریختیهایی کـه تناظری یك بـه یك نیز باشند یکریختی نامیده می‌شوند؛ وقتی یك همریختی خمینهٔ σ را به توی خودش تصویر کند، درون‌ریختی، و وقتی که علاوه بر این تناظری یك بـه یك از σ به توی خودش نیز باشد، خـودریختی نامیده می‌شود. دستگـاههای یکریخت، یعنی هر دو دستگاهی کـه از طریق یکریختی به‌یکدیگر نگاشته شوند، ساختار یکسانی دارند؛ درواقع در مورد ساختار یکی از این دو نمی‌توان حکمی کرد که درمورد دیگری درست نباشد.

خودریختیهای یـك خمینه بـا ساختاری خوش‌تعریف، یـك گروه تشکیل می‌دهند. بجاست دو زیرمجموعه از خمینه را که تحت یك خودریختی به‌یکدیگر نگاشته می‌شوند، هم‌ارز بنامیم. این، صورت دقیق شدهٔ اندیشهٔ مورد نظر لایبنیتس است هنگامی که می‌گوید هر دو چنین زیرمجموعه‌ای، "مادامی که به هر کدامشان مستقلاً [نه به عنوان زیرمجموعه] نظر بیفکنیم، از یکدیگر غیرقابل تشخیص‌اند." او با ملاحظهٔ مفهوم هندسی خاص تشابه به این اندیشهٔ کلی پی‌برد. مسئلهٔ کلی نسبیت دراصل چیزی جز یافتن یك گروه خودریختیها نیست. پس دراینجا به‌درس مهمی برمی‌خوریم که ریاضیدانان قرن بیستمی آموختند: وقتی با خمینه‌ای دارای ساختار سروکار دارید، گروه خودریختیهای آن را بررسی کنید. همچنین مسئلهٔ عکس، که فلیکس کلاین آن را در برنامهٔ ارلانگن معروفش (۱۸۷۲) بیان کرد شایان توجه است: گروهی از تبدیـلات یك خمینهٔ σ مفروض است، روابط یا اعمالی را تعیین کنید که نسبت به‌این گروه ناوردا باشند.

اگر درمطالعهٔ گروهی از تبدیلات، این حقیقت را که هرعنصر این گروه یك تبدیل است نادیده بگیریم و صرفـاً به روشی بنگریم که به‌هر دو تبدیل S و T ترکیب ST را نظیر می‌کند، به‌طرح ترکیبی مجردگروه دست یافته‌ایم. بنابراین یك‌گروه‌مجرد مجموعه‌ای ازعناصر (با ماهیت مجهول یا نامرتبط) است که برای آنها یك عمل ترکیب تعریف شده است که به‌ازای هر دوعنصر s و t یـك عنصر st را به گونه‌ای تعریف می‌کند که اصول موضوع زیر برقرار باشند:

۱. یك‌عنصر همانی e وجود دارد که به‌ازای هر s، $es=se=s$.
۲. هر عنصر s وارونی چون s^{-1} دارد به‌طوری‌که، $ss^{-1}=s^{-1}s=e$.
۳. قاعدهٔ شرکتپذیری $(st)u=s(tu)$ برقرار است.

شاید شگفت‌انگیزترین تجربهٔ ریاضیات نوین این باشد که بدانیم پیامدهای این سه اصل موضوع تا چه‌حد غنی‌اند. تحقق یك گروه مجرد به‌کمك تبدیلات یك خمینهٔ مفروض σ از این طریق میسر می‌شود که به هر عضو s از گروه، یـك تبدیل S از σ نسبت دهیم، $s \to S$، به‌طوری‌که $s \to S$ و $t \to T$ رابطهٔ $st \to ST$ را ایجاب کند. درحالت کلی قانون جابه‌جایی $st=ts$ برقرار نیست. اگر این قانون برقرار باشد گروه را جابه‌جایی یا آبلی (به نام ریاضیدان نروژی، نیلس‌هنریك آبل) می‌گویند. ازآنجا که ترکیب عناصر

گروه به‌طورکلی درقانون جابه‌جایی صدق نمی‌کند، مناسبتر آن است که ازاصطلاح "حلقه" درمعنایی وسیعتر استفاده شود که به‌موجب آن قانون جابه‌جایی ضرب لزوماً برقرار نیست (به‌هرحال، در جایی که سخن ازمیدان است معمولاً این قانون را می‌پذیریم).

ساده‌ترین نگاشتها، نـگاشتهای خطی‌انـد، که روی فضای برداری عمل می‌کنند. بردارهای‌فضای سه‌بعدی ما پاره‌خطهای جهت‌دار AB اند که ازیك‌نقطهٔ A شروع و به یك نقطهٔ B ختم می‌شوند. بردار AB را مساوی $A'B'$ می‌گیریم هرگاه یك تغییرمکان موازی (انتقال) AB را به $A'B'$ ببرد. درنتیجهٔ این‌قرارداد می‌توان بردارها را جمع کرد وهمچنین می‌توان یك بردار را در یك عدد (صحیح، گویا، یاحتی‌حقیقی) ضرب کرد. جمع درهمان اصول موضوعی صدق‌می‌کند که‌در جـدول T برای اعدادبرشمردیم، و فرمولبندی‌اصول موضوع برای عمل دوم نیزساده است. این اصول‌موضوع مفهوم اصل موضوعی کلی فضای برداری را تشکیل می‌دهند کـه بنابراین مفهومی است جبری و نه هندسی. اعدادی که به‌عنوان ضرایب‌بردارها به‌کار می‌روند می‌توانند عناصر هرحلقه‌ای باشند؛ این کلیت، عملاً برای استفاده از مفهوم مجرد بردار در توپولوژی لازم است. اما در اینجا فرض می‌کنیم که ضرایب یك‌میدان تشکیل می‌دهند. دراین صورت بیدرنگ دیده می‌شود که به‌هر فضای برداری می‌توان یـك عدد طبیعی n به عنوان بعد نسبت داد، به‌این مفهوم که n بردار e_1، e_2، . . . ، e_n وجود دارند به‌طوری‌که هر بردارمی‌تواند به‌یك و فقط یك‌طریق به‌صورت ترکیب خطی $x_1e_1+\ldots+x_ne_n$ بیان شود، که درآن "مختصات" x_i اعداد معینی از میدان‌اند. درفضای سه‌بعدی ما n برابر ۳ است، اما مکانیك وفیزیك نمونه‌های کافی برای استفاده از مفهوم کلی فضای برداری n-بعدی با nهای بزرگتری به‌دست ما می‌دهد.

درون‌ریختیهای یك‌فضای برداری نگاشتهای‌خطی نامیده می‌شوند؛ چنین‌نگاشتهایی علاوه بر ترکیب ST (نخست نگاشت S عمل می‌کند، سپس T)، جمع و نیز ضرب دریك عدد γ را مجاز می‌دارند: اگر S بردار دلخواه x را بـه xS و T آن را به xT بفرستد، آنگاه $S+T$ و γS نگاشتهایی خطی‌اند کـه x را به‌ترتیب به $(xS)+(xT)$ و $\gamma\cdot xS$ می‌فرستند. اما مجبوریم از توصیف این‌که چگونه برحسب یك پایهٔ برداری e_1، . . . ، e_n یك نگاشت خطی را می‌توان با یك ماتریس مربعی از اعداد نمایش داد، چشم‌پوشی کنیم.

در بسیاری موارد به‌حلقه‌هایی برمی‌خوریم که درعین‌حال فضای برداری نیزهستند ــ و در این صورت جبر نامیده می‌شوند ــ یعنی برای آنها سه‌عمل جمع، ضرب دو عنصر، و ضرب یك عدد دریك عنصر به‌گونه‌ای تعریف می‌شوند که در اصول موضوع مشخصه‌صدق می‌کنند. نگاشتهای خطی یـك فضای برداری nبعدی خود چنین جبـری تشکیل می‌دهند که جبر ماتریسی کامل (در nبعد) نامیده می‌شود. بنابر اصـول مکانیك کوانتومی، مشاهده‌پذیرهای یك سیستم فیزیکی، جبری از نوع خاص و با ضربی تعویض‌ناپذیر تشکیل می‌دهند. بدین‌ترتیب جبر مجـرد در دست فیزیکدانها به‌کلیدی تبدیل‌شده است که رازهای درون اتم را می‌گشاید. تحقق یك‌گروه مجـرد به‌وسیلهٔ تبدیلات خطی یـك فضای برداری نمایش نامیده می‌شود. از نمایشهای یك حلقه با جبر نیز می‌توان سخن به میان آورد: در

هرحالت نمایش‌را می‌توان به‌عنوان نگاشت همریختی‌ازگروه یا حلقه یاجبردرجبرماتریسی کامل‌توصیف کرد (که درواقع، در آن‌واحد هم یك‌گروه است، هم یك حلقه، و هم یك‌جبر).

۵. سرانجام. پس از اختصاص چنین وقت زیادی به توضیح مفاهیم، می‌توانم ارزیابی خود را از برخی دستاوردهای اساسی جمعبندی‌کنم، چرا که برای این منظور ابزارها فراهم آمده‌اند. اگر g زیرگروهی از گروه G باشد، می‌توان عناصر s و t از G راکه به‌پیمانهٔ g همنهشت‌اند، یعنی st^{-1} در g است، یکی‌گرفت؛ g زیرگروه خودمزدوج[1] [نرمال] است هرگاه این فرایند یکی‌سازی G را دوباره به‌یك گروه، یعنی گروه "خارج‌قسمت" G/g، تبدیل کند. عصارهٔ نظریهٔ گروهی نظریهٔ گالوا قضیه‌ای است منسوب به ژوردان و هلدر[2] که با روشهای مختلفی سروکار داردکه می‌توان یك گروه متناهی مفروض G را به‌اجزای $G = G_0, G_1, G_2, \ldots$ تجزیه‌کرد که هر G_i زیرگروه‌نرمالی‌اززیرگروه قبلی G_{i-1} باشد. با این فرض که این عمل در کمترین تعدادگام ممکن انجام شود، قضیه حکم می‌کند که گروههای خارج‌قسمت G_{i-1}/G_i $(i = 1, 2, \ldots)$ با گروههای خارج‌قسمت دریك چنین "سری ترکیبی" دیگر که به‌نحومناسبی بازآرایی‌شده باشند یکریخت‌اند. این قضیه فی‌نفسه بسیار جالب‌توجه است، اما شاید برهانش بسیار جالبتر باشد، زیرا بربایهٔ همان بحثی متکی است که توسط آن چیزی ثابت می‌شودکه از نظر من بنیادیترین گزارهٔ سراسر ریاضیات است، یعنی این حقیقت که اگر شما یك مجموعهٔ متناهی ازعناصر را به دو طریق بشمارید، هردوبار یك عدد n را به‌دست می‌آورید. اخیراً قضیهٔ ژوردان‌هلدر از طریق: (۱) کنارگذاشتن این فرض که عمل شکستن گروه درکمترین تعداد گام ممکن انجام‌شده باشد، و (۲) با پذیرش تنها زیرگروههایی که تحت اثر مجموعهٔ معینی‌از درون‌ریختیهای گروه ناوردا باشند، به‌فرمولبندی کلیتر و طبیعیتری دست‌یافته است. بدین طریق قضیه را می‌توان برای گروههای نامتناهی نیز همچون گروههای متناهی به‌کاربرد، و زمینهٔ مشترکی برای تعداد زیادی از حقایق مهم جبری فراهم آمده است.

نظریهٔ‌نمایش گروههای‌متناهی، که‌اسلوبمندترین‌واستوارترین‌بخش نظریهٔ گروههاست، اندکی پیش ازآغازاین قرن توسط فروبنیوس ارائه شد، کسی‌که به ما آموخت که تنها چند نمایش تحویل‌ناپذیر وجود دارد و بقیه ترکیبی از این چندتا هستند. این نظریه پس از سال ۱۹۰۰ به‌طور چشمگیری ساده شد و بعدها نخست به‌گروههای پیوسته‌ای‌که خاصیت توپولوژیك فشردگی را دارند، و سپس با قیدی محدودکننده (به نام تقریباً تناوبی بودن) برروی نمایشها، به‌همهٔ گروههای متناهی گسترش یافت. این تعمیمها از حدود جبر تجاوز می‌کنند، و بایسد تحت عنوان آنالیز هم چندکلمه‌ای درموردشان بگوییم. اگر نمایش گروههای متناهی در میدانهای با مشخصهٔ اول را هم درنظر بگیریم، پدیده‌های جدیدی‌رخ می‌دهند، که از بررسی آنها نتایج عمیقی در نظریهٔ اعداد حاصل شده است. به سادگی می‌توان یك‌گروه متناهی را در یك جبر نشاند، و بنابراین حقایق مربوط به‌نمایشهای یك

1. self-conjugate 2. O. Hölder

گروه را می‌توان به‌طرز بهتری ازحقایق متناظر مربوط به‌آن جبر به‌دست آورد. درآغاز قرن حاضر جبرها موجوداتی غریب با رفتاری غیرقابل پیش‌بینی تصور می‌شدند، اما پس ازپنجاه‌سال‌تحقیق، آنها، یادست‌کم رده‌ای‌که نیم‌ساده نامیده می‌شوند، به‌طور چشمگیری رام‌شده‌اند. درواقع پدیده‌های غریب نه دراین ابر ساختارها، بلکه در میدانهای "عددی" جابه‌جایی زمینه رخ می‌دهند. در قرن نوزدهم به‌نظر می‌رسیدکه هندسه به‌بررسی ناوردا‌های گروهها تقلیل‌یافته است؛ فلیکس کلاین درپرنامهٔ ارلانگن خود این دیدگاه‌را صریحاً فرمولبندی‌کرد. اما عملاً گروه خطی کامل تنها گروهی بودکه ناورداهایش مورد بررسی قرارگرفت. اکنون از این قیدرهایی یافته‌ایم و دیگر هیچ‌یك ازگروههای پیوسته‌ای را که در جبر، آنالیز، هندسه و فیزیك با آنها مواجه می‌شویم، نادیده نمی‌گیریم. بالاتر از همه، کم‌کم می‌فهمیم که نظریهٔ ناورداها را باید تحت نظریهٔ نمایشها رده‌بندی کنیم. برخی گروههای ناپیوستهٔ نامتناهی، همچون گروههای پیمانه‌ای و تك‌پیمانه‌ای[1] که به‌شهادت نظریهٔ رده‌ای فرمهای درجهٔ دوم گاؤس در نظریهٔ اعداد از اهمیت خاصی برخوردارند، موردمطالعه قرارگرفته و ازآنها نتایج عمیق و جالب‌توجهی به‌دست آمده است. تقارنهای میکروسکوپی بلورها را می‌توان به‌کمك گروههای ناپیوستهٔ حرکتها توصیف کرد وآنچه از دبرباز برای حالت ۳بعدی ثابت‌شده بود، برای nبعد نیز به اثبات‌رسیده است، یعنی این‌که به‌مفهومی برای این گروه بلورشناختی تنها امکانات محدودی وجود دارد. در قرن نوزدهم سوفوس‌لی گروههای پیوسته را به "نطفهٔ[2]" عناصر بینهایت کوچکش تقلیل داده‌بود. این‌عناصر نوعی‌جبر تشکیل‌می‌دهندکه درآن قانون دیگری به‌جای‌قاعدهٔ‌شرکتپذیری می‌نشیند. یك جبر لی ساختاری صرفاً جبری است، به‌ویژه اگر اعدادی‌که به‌عنوان‌ضرایب عمل می‌کنند به‌جای‌پیوستار اعداد حقیقی Ω از یك میدان جبری مفروض گرفته‌شده‌باشند. این گروههای لی تفرجگاه جدیدی برای جبردانهای عصر ما فراهم‌آورده‌اند.

ساختارهای ذهن ریاضی آزاد و در عین‌حال ضروری‌اند. هرریاضیدانی به تنهایی احساس می‌کندکه در تعریف مفاهیم موردنظرش واصول موضوعی‌که می‌پسندد آزاداست. اما این پرسش مطرح می‌شود که آیا او وریاضیدانان پس از خودش را به‌ساخته‌های اندیشه‌اش علاقه‌مند خواهدکرد؟ ما نمی‌توانیم کمکی به‌اشاعهٔ این طرزفکر کنیم‌که برخی ساختارهای ریاضی‌که در خلال کوششهای مشترك جامعهٔ ریاضی حاصل‌شده‌اند، زاییدهٔ ضرورتی‌بوده‌اندکه هیچگاه دستخوش تصادفات موجود درتاریخچهٔ پیدایش این‌ساختارها نبوده است. هرکه به‌چشم‌انداز جبرامروزی بنگرد، تحت‌تأثیرکمال آزادی و ضرورت آن قرار خواهدگرفت.

بخش دوم. آنالیز. توپولوژی. هندسه. مبانی

۶. عملگرهای خطی و تجزیهٔ طیفی آنها. فضای هیلبرت.

یك دستگاه مکانیکی با

1. unimodular 2. germ

n درجهٔ آزادی درحالت تعادل پایدار می‌تواند نوسانهای "بینهایت کوچکی" با انحراف از حالت تعادل داشته باشد. این حقیقت که همهٔ این نوسانها از برهمنهی n نوسان "همساز" با بسامدهای مشخص حاصل می‌شوند، نه‌تنها در فیزیك بلکه در موسیقی نیز اهمیتی بنیادی دارد. از دیدگاه ریاضی مسئلهٔ تعیین نوسانهای همساز به ساختن محورهای اصلی یك بیضیگون در یك فضای اقلیدسی n بعدی می‌انجامد. چنانچه در این فضا بردارهای x را با مختصات $(x_1, \ldots, x_n)$ شان نمایش دهیم، باید معادلهٔ

$$x-\lambda\cdot Kx=0$$

را حل کنیم که در آن K یك عملگر خطی (= نگاشت خطی) مفروض را نشان می‌دهد، λ مربع بسامد مجهول نوسان همساز یعنی ν است، درحالی که "بردار ویژهٔ" x دامنهٔ آن را نمایش می‌دهد. حاصلضرب اسکالر دوبردار x و y یعنی (x, y) را با مجموع $x_1y_1+\ldots+x_ny_n$ تعریف می‌کنیم. حال اگر به‌هر بردار x طول $\|x\|$ را، که با $\|x\|^2=(x, x)$ داده می‌شود، نسبت دهیم، فضای برداری "مستوی" ما به‌یك فضای‌متری تبدیل می‌شود و این فاصله از نوع اقلیدسی است که با حالت ۳ بعدی آن آشنایی داریم و توسط اقلیدس توصیف شده است. عملگر خطی K متقارن است، به این معنی که $(x, Ky)=(Kx, y)$. البته، دراینجا میدان اعدادی که در آن عمل می‌کنیم بیوستار همهٔ اعداد حقیقی است. تعیین n بسامد ν، یا به جای آن مقادیر ویژهٔ متناظر $\lambda=\nu^2$، مستلزم حل یك معادلهٔ جبری از درجهٔ n است (که اغلب معادلهٔ فرنی[1] نامیده می‌شود، زیرا نخستین‌بار در نظریهٔ آشفتگیهای قرن به‌قرن دستگاه سیارات ظاهر شد).

در فیزیك نوسانهای یك محیط پیوسته، مانند نوسانهای مکانیکی-صوتی یك‌ریسمان، یك پوسته، یا یك جسم کشسان ۳ بعدی، و نوسانهای الکترومغناطیسی-نوری "اتر"، بسیار مهمتر از نوسانهای یك دستگاه مکانیکی با تعداد متناهی درجهٔ آزادی است. در اینجا بردارهایی که باید روی آنها عمل کرد عبارت‌اند از توابع پیوستهٔ $x(s)$ از یك نقطهٔ s با یك یا چند مختص که در قلمرو معینی تغییر می‌کنند، و بنابراین K یك عملگر خطی انتگرالی است. مثلاً ریسمان مستقیمی را به‌طول ۱ در نظر بگیرید که نقاط آن با یك پارامتر s که از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند مشخص شده باشد. در اینجا (x, x) عبارت است از $\int_0^1 x^2(s)ds$، ومسئلهٔ نوسانهای همساز (که نخستین‌بار اندیشهٔ دنیای تحت سیطرهٔ قوانین هماهنگ ریاضی را به‌یونانیان باستان الهام کرد) به‌شکل معادلهٔ انتگرالی

$$x(s)-\lambda\int_0^1 K(s, t)x(t)\,dt=0, \qquad (0\leqslant s\leqslant 1) \qquad (1)$$

درمی‌آید که در آن

1. secular

$$K(s, t)=(a/\pi)^2\times\begin{cases}s(1-t) & \text{به‌ازای } s\leqslant t\\ (1-s)t & \text{به‌ازای } s\geqslant t\end{cases} \qquad (1')$$

و a ثابتی است که توسط شرایط فیزیکی ریسمان تعیین می‌شود. جوابها عبارت‌اند از

$$\lambda=(na)^2, \qquad x(s)=\sin n\pi s,$$

که n می‌تواند هر یك از مقادیر مثبت ۱، ۲، ۳، ... باشد. این حقیقت که بسامدهای ریسمان مضارب صحیح na از یك بسامد پایهٔ a هستند، قانون اساسی هماهنگی (هارمونی) موسیقی است. اگر تعبیر نوری را به‌یك تعبیر صوتی ترجیح دهیم، می‌توانیم از طیف مقادیر ویژهٔ λ صحبت کنیم.

پس از فردهولم[1] که در اواخر قرن نوزدهم نظریهٔ معادلات انتگرالی خطی را توسعه داد، هیلبرت بود که در دههٔ بعد نظریهٔ عمومی طیفی عملگرهای خطی متقارن K را بنیان گذاشت. تنها بیست‌سال قبل از او، بزرگترین کوششهای ریاضی لازم بود تا وجود بسامد پایه را برای ارتعاش یك پوسته ثابت کند، و حال، در روزگار هیلبرت، اثباتهایی ساختنی برای وجود تمامی نوسانهای همساز و بسامدهای سرشت‌نمای آنها وجود داشت که تحت فرضهایی بسیار کلی درمورد محیط نوسان‌کننده داده‌شده بود. این واقعه هم در فیزیك نظری و هم در ریاضیات نتایج بسیاری به‌همراه داشت. اندکی بعد، رهیافت هیلبرت این امکان را به‌وجود آورد که آن قوانین مجانبی توزیع مقادیر ویژه، که فیزیکدانها در بررسی آماری ترمودینامیك تابش و اجسام کشسان به‌عنوان اصل موضوع پذیرفته بودند، ثابت شود.

هیلبرت دریافت که تابع پیوستهٔ مفروض $x(s)$ را که در بازهٔ $0\leqslant s\leqslant 1$ تعریف شده‌باشد، می‌توان با دنبالهٔ ضرایب فوریه‌اش،

$$x_n=\sqrt{2}\int_0^1 x(s)\sin n\pi s\,ds, \qquad n=1, 2, 3, \ldots$$

جایگزین کرد. بنابراین میان یك فضای برداری که عناصرش توابع $x(s)$ از یك متغیر پیوسته‌اند و فضایی که عناصرش دنباله‌های نامتناهی از اعداد $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ اند، هیچ تفاوت درونی وجود ندارد؛ مربع "طول" $\int_0^1 x^2(s)\,ds$ با $x_1^2+x_2^2+x_3^2\ldots$ برابر است. بنابراین میان دو روش گذر از یك مجموع متناهی به‌حد، یعنی مجموع نامتناهی $a_1+a_2+a_3+\ldots$ و $\int_0^1 a(s)\,ds$ هیچ تفاوت اساسی وجود ندارد. بدین‌ترتیب باید جویای یك فرمولبندی اصل موضوعی شد. به اصول موضوع یك فضای برداری (مستوی) این فرض اضافه شد که برای هردو بردار x و y یك حاصلضرب اسکالر (x, y) با خواص

1. Fredholm

سرشت‌نمای متریك اقلیدسی وجود دارد: (x,y) نسبت به‌هر یك از دو بردار x و y بستگی خطی دارد؛ متقارن است، یعنی $(x,y)=(y,x)$؛ و به‌ازای هر x غیر صفر $(x,x)=\|x\|^2$ مثبت است. اصل متناهی بودن بعد نیز با یك اصل شمارشپذیری کلیتر جایگزین شد.[1] در چنین فضایی اگر فرض‌کنیم که این فضا نیز به‌همان مفهومی که دستگاه اعداد حقیقی کامل است، کامل باشد، همهٔ عملیات به‌غایت ساده می‌شوند؛ این یعنی که‌فرض کنیم عبارت زیر درست باشد: اگر $x', x'', \ldots$ دنباله‌ای "همگرا" از بردارها باشد، یعنی برای آنها هرگاه m و n به‌بینهایت میل کنند $\|x^{(m)}-x^{(n)}\|$ به صفر میل می‌کند، آنگاه یك بردار a وجود دارد که دنباله به آن همگراست، یعنی چنانچه $n\to\infty$، $\|x^{(n)}-a\|\to 0$. یك فضای برداری غیرکامل رامی‌توان باهمان روش ساختنی کامل کرد که از طریق آن دستگاه اعداد گویا کامل می‌شود و دستگاه اعداد حقیقی را تشکیل می‌دهد. امروز، فضای برداری‌ای راکه این اصول‌موضوع‌را برآورده‌سازد،"فضای هیلبرت"می‌نامند.

هیلبرت در ابتدا تنها معادلات انتگرالی را، به‌همان مفهوم اکیدی‌که در (۱) مثال زده شد، درنظرمی‌گرفت. اما به‌زودی نظریهٔ طیفی‌اش را به‌ردهٔ گسترده‌تر عملگرهای خطی (متقارن) کراندار در فضای هیلبرت توسعه داد. کرانداری یك عملگر خطی به‌معنای وجود یك ثابت M است که برای هر بردار با طول متناهی x، نامساوی $\|Kx\|^2\leqslant M\cdot\|x\|^2$ برقرار باشد. درواقع، محدودشدن به‌عملگرهای انتگرالی غیرطبیعی است زیرا ساده‌ترین عملگرها، یعنی عملگر همانی $x\to x$، از این نوع نیست. حال یکی از آن حوادثی رخ دادکه حتی عجیب وغریب‌ترین تخیلات نیز نمی‌توانند آن را پیش‌بینی کنند؛ ماجرایی‌که می‌تواند آدمی را به‌پذیرش این باور وسوسه‌کندکه میان طبیعت فیزیکی و ذهن ریاضی یك نوع هماهنگی از پیش تثبیت‌شده وجود دارد. بیست‌سال پس از بررسیهای هیلبرت، مکانیك کوانتومی نشان داد که مشاهده‌پذیرهای یك دستگاه فیزیکی با عملگرهای خطی متقارن در یك فضای هیلبرت نمایش‌داده می‌شوند، و مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ آن عملگر که انرژی را نمایش می‌دهد، ترازهای انرژی و حالتهای کوانتومی مانای دستگاه‌اند. البته این تعابیر فیزیك‌کوانتومی به‌میزان علاقه به‌این نظریه افزود و به یك بررسی دقیقتر آن انجامید،که نتیجهٔ آن تعمیمها و ساده‌سازیهای گوناگون بود.

نوسانات پیوسته، مسائل مقدار مرزی فیزیك کلاسیك، و مسئلهٔ ترازهای انرژی در فیزیك کوانتومی، تنها حوزه‌های کاربرد نظریهٔ معادلات انتگرالی و طیف آنها نیستند. کاربردی دیگر وتا حدودی منفرد، عبارت است از حل مسئلهٔ مونودرومی[2] ریمان درمورد توابع تحلیلی از یك متغیر مختلط z. این مسئله درمورد تعیین n تابع تحلیلی از z است که تحت اثر ادامهٔ تحلیلی در طول هرمسیر دلخواه در صفحهٔ z که از تعدادی متناهی نقطهٔ

۱. مقصود شرط "جدایی‌پذیر" بودن فضای هیلبرت است، یعنی این شرط که فضا دارای زیر مجموعهٔ چگال شمارشپذیری باشد. البته امروز دیگر قراردادن جدایی‌پذیری در بین اصول فضای هیلبرت چندان مرسوم نیست.ـم.

2. monodromy

تکین عبور نکند منظم باقی بمانند، و اگر مسیر دور یکی از این نقاط تکین حلقه بزند، این توابع تحت اثر یك تبدیل خطی مفروض با ضرایب ثابت قرار بگیرند.

یك کاربرد شگفت‌انگیز دیگر، عبارت است ازاثبات حقایق بنیادی و درحالت‌خاص رابطهٔ کامل‌بودن، در نظریهٔ نمایش گروههای فشردهٔ پیوسته. ساده‌ترین این گروهها از دورانهای یك دایره تشکیل‌شده است، و دراین حالت نظریهٔ نمایش چیزی نیست‌جز نظریهٔ موسوم به‌سریهای فوریه، که تابع تناوبی دلخواه $f(s)$ با دورهٔ تناوب 2π را برحسب نوسانهای همساز

$$\cos ns,\qquad \sin ns,\qquad n=0,1,\ldots$$

بیان می‌کند. در طبیعت اغلب به‌توابعی با دوره‌های تناوب نهفتهٔ ناهم‌مقیاس برمی‌خوریم. هارالد بور ریاضیدان، برادر نیلس‌بورفیزیکدان، باالهام ازبرخی تحقیقاتش‌درموردتابع زتای ریمان، نظریهٔ ریاضی عمومی این توابع تقریباً تناوبی را توسعه داد. نظریهٔ او را می‌توان به‌عنوان نظریهٔ نمایش تقریباً تناوبی ساده‌ترین گروه پیوسته‌ای که می‌توان تصور کرد، یعنی گروه همهٔ انتقالهای یك خط مستقیم، شرح داد. نتایج اصلی او را می‌توان به هرگروه‌دلخواهی‌منتقل کرد. هیچ‌محدودیتی روی‌گروه اعمال‌نمی‌شود، به‌جزاینکه‌نمایشهای تحت بررسی تقریباً‌تناوبی‌اند. برای تابع $x(s)$،که متغیر s روی عناصرگروه تغییرمی‌کند و مقادیرش اعداد حقیقی یا مختلط‌اند، تقریباً تناوبی بودن به‌این معنی است‌که گروه تحت توپولوژی معینی‌که تابع‌القا می‌کند، فشرده باشد. این فشردگی نسبی به‌جای فشردگی‌مطلق کافی است. حتی درچنین‌حالتی هم محدودیت موردنظردست‌وپاگیر است. درواقع‌مهمترین نمایشهای گروههای پیوستهٔ کلاسیك، تقریباً تناوبی نیستند. بنابراین نظریه به‌توسعهٔ بیشتری نیاز دارد،که درطول دههٔ اخیرتعدادی از ریاضیدانان امریکایی و روسی را به‌خودمشغول ساخته است.

۷. انتگرال لبگ. نظریهٔ اندازه. فرضیهٔ ارگودیك. پیش ازآنکه به کاربردهای دیگر عملگرها در فضای هیلبرت بپردازم باید به‌قالبی اشاره‌کنم که لبگ در آغاز این قرن به‌اندیشهٔ انتگرالگیری بخشید، و به‌احتمال زیاد شکل نهایی این اندیشه نیز خواهد بود. به‌جای سخن‌گفتن از مساحت قطعه‌ای از صفحهٔ ۲بعدی با مختصات x و y، یا حجم ناحیه‌ای ازفضای اقلیدسی ۳بعدی، از واژهٔ‌خنثای اندازه برای همهٔ بعدها استفاده می‌کنیم. مفاهیم اندازه و انتگرال به‌یکدیگر وابسته‌اند. هربخشی ازفضا، یعنی هرمجموعه‌ای‌ازنقاط فضا رامی‌توان با تابع مشخص آن $\chi(P)$ توصیف کردکه مقدار آن بسته به‌اینکه نقطهٔ P متعلق به‌مجموعه باشد یا نباشد برابر ۱ یا ۰ است. اندازهٔ یك مجموعه از نقاط، انتگرال این تابع مشخص است. پیش از لبگ همه نخست انتگرال توابع پیوسته را تعریف می‌کردند و مفهوم اندازه یك مفهوم ثانوی بود، که مستلزم انتقال از توابع پیوسته به‌توابع ناپیوسته‌ای چون $\chi(P)$ بود. لبگ روش عکس و شاید طبیعیتر را در پیش گرفت: برای او نخست اندازه مطرح بود، و بعد انتگرال. برای تشریح کار او فضای یك‌بعدی کفایت

می‌کند. تابع حقیقی $y=f(x)$ از متغیر حقیقی x را درنظر بگیرید که بازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ را در بارهٔ کراندار $a\leqslant y\leqslant b$ می‌نگارد. لبگ به‌جای تقسیم بازهٔ متغیر x، بازهٔ (a,b)ی متغیر وابستهٔ y را به‌تعدادی متناهی زیربازهٔ کوچك مانند $a_i\leqslant f(x)\leqslant a_{i+1}$؛ مثلاً به طول کوچکتر از ε، تقسیم کرد و سپس m_i، یعنی اندازهٔ مجموعهٔ S_i نقاطی روی محور x را که در نامساوی $a_i\leqslant f(x)\leqslant a_{i+1}$ صدق می‌کنند، تخمین زد. انتگرال بین دو مجموع $\sum a_i m_i$ و $\sum a_{i+1}m_i$ قرار می‌گیرد که تفاضلشان از ε کمتر است، و بنابراین می‌توان آن را با هردرجه‌ای از دقت محاسبه کرد. در تعیین اندازهٔ یك مجموعه از نقاط، لبگ به جای تعدادی متناهی بازه آن را با دنباله‌ای نامتناهی از بازه‌ها پوشاند، و این نسبت به نکات دیگر اصلاحی اساسیتر است. پیش از لبگ به‌مجموعهٔ اعداد گویای واقع دربازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ هیچ اندازه‌ای نسبت داده نمی‌شد. اما این اعداد گویا را می‌توان دریك دنبالهٔ شمارشپذیر a_1، a_2، a_3، . . . مرتب کرد و پس ازانتخاب یك عدد مثبت به‌دلخواه کوچك ε، می‌توان نقطهٔ a_n را با بازه‌ای به‌طول $\varepsilon/2^n$ و به‌مرکز a_n پوشاند. پس کل مجموعهٔ اعداد گویا را می‌توان در دنباله‌ای از بازه‌ها به‌طول کل

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots\right)=\varepsilon$$

پوشاند و بنابراین مطابق تعریف لبگ اندازه‌اش از عدد (مثبت دلخواه) ε کوچکتر ودر نتیجه برابر صفر است. مفهوم احتمال به‌مفهوم اندازه پیوندخورده است، و به‌همین علت متخصصان آمار ریاضی عمیقاً به نظریهٔ اندازه علاقه‌مندند. اندیشهٔ لبگ در چندین راستا تعمیم داده‌شده است. دو عمل اساسی که می‌توان با مجموعه‌ها انجام داد عبارت‌اند از تشکیل اجتماع و اشتراك مجموعه‌های داده‌شده، وبنابراین مجموعه‌ها را می‌توان به عنوان اعضای یك "جبر بولی" با این دو عمل درنظر گرفت، که خواص آن می‌توانند با اصول موضوعی بیان شوند که یادآور اصول حسابی جمع و ضرب است. بنابراین یکی از پرسشهایی که در میان ریاضیدانها و آماردانها، ذهنهای اصل‌موضوع‌پسندتر را به‌خود مشغول کرده است، به‌معرفی اندازه در جبرهای بولی مجرد مربوط می‌شود.

اهمیت انتگرال لبگ درزمینهٔ بحث حاضرازآن جهت است که توابع حقیقی $f(x)$ از یك متغیر x که (روی بازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$) تغییر می‌کند و) مربع آنها انتگرالپذیر لبگ است، یك فضای هیلبرت کامل تشکیل می‌دهند، مشروط برآنکه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را مساوی بگیریم هرگاه مجموعهٔ مقادیری از x که برای آنها $f(x)\neq g(x)$، اندازهٔ صفر داشته باشد (قضیهٔ ریس-فیشر[1]).

معادلات مکانیکی یك دستگاه هامیلتونی با n درجهٔ آزادی، به‌شرط آنکه حالت P در نقطهٔ $t=0$ داده‌شده باشد، حالت tP در لحظهٔ t را به‌طور یکتا تعیین می‌کنند. این،

1. Riesz-Fischer

فرمولبندی دقیق قانون علیت در مکانیك است. حالتهای ممکن P، نقاط یك فضای فاز $2n$ بعدی را تشکیل می‌دهند، و برای یك t ثابت و یك P دلخواه، گذر $P\to tP$ یك نگاشت حافظ اندازه مانند (t) است. این تبدیلات یك گروه تشکیل می‌دهند: $(t_1)(t_2)=(t_1+t_2)$. برای یك P مفروض و t متغیر، نقطهٔ tP حالتهای متوالی‌ای راکه این دستگاه اختیار می‌کند نشان می‌دهد؛ مشروط برآنکه حالت در $t=0$، P باشد. اگر P را به‌عنوان ذره‌ای از یك سیال nبعدی که فضای فاز را پرمی‌کند درنظر بگیریم و به‌هر ذرهٔ P در لحظهٔ t حالت tP را نسبت دهیم، تصویری از یك سیال تراکم‌ناپذیر در یك جریان مانا به‌دست می‌آید. استخراج آماری قوانین ترمودینامیك مبتنی براستفاده‌ازچیزی موسوم به فرضیهٔ ارگودیك[1] است که مطابق آن مسیر یك ذرهٔ دلخواه P (به‌استثنای برخی حالتهای آغازی P که مجموعه‌ای با اندازهٔ صفرتشکیل می‌دهند) درفضای فاز (یا دست‌کم زیرفضایی $(2n-1)$بعدی از آن که انرژی مقداری مشخص دارد) همه‌جا چگال است، به طوری که احتمال یافتن آن در این یا آن بخش از فضا با هر بخش دیگری از فضا باهمان اندازه، یکسان است. در قرن نوزدهم به‌نظر می‌رسید که تا اثبات این قضیه با هردرجه‌ای ازکلیت راه بسیاری باقی باشد. برخلاف انتظار، اندکی پس ازآنکه انتقال از مکانیك کلاسیك به‌مکانیك کوانتومی فرضیه را تقریباً بی‌ارزش کرده بود، این فرضیه با همان‌ابزارهای ریاضی مکانیك کوانتومی ثابت شد. تحت اثرنگاشت $(t):P\to tP$، هرتابع $f(P)$ در فضای فاز به‌یك تابع $f'=U_tf$ تبدیل می‌شود که با معادلهٔ $f'(tP)=f(P)$ تعریف می‌شود. U_tها درفضای هیلبرت توابع دلخواه $f(P)$ یك گروه ازعملگرها تشکیل می‌دهند، $U_tU_{t'}=U_{t+t'}$، و به‌کاربستن تجزیهٔ طیفی براین گروه جان‌فون‌نویمان را قادر ساخت که فرضیهٔ ارگودیك را با دوشرط نتیجه بگیرد: (۱) همگرایی یك دنباله از توابع $f_n(P)$ به تابع $f(P)$، $f_n\to f$، به‌عنوان همگرایی در فضای هیلبرت درنظر گرفته می‌شود (همان‌گونه که در مکانیك کوانتومی چنین است) که به‌این معنی است که چنانچه $n\to\infty$، انتگرال[2] (f_n-f) به‌صفر میل می‌کند، (۲) فرض می‌شود که هیچ زیرفضایی از فضای فاز وجود نداردکه تحت اثرگروه تبدیلات ناوردا باشد، مگر آن زیرفضاهایی که به‌مفهوم لبگ مساوی مجموعهٔ تهی یا کل فضا باشند. اندکی پس ازآن برای دیگر تعابیر همگرایی نیز اثباتهایی داده‌شد.

قوانین‌طبیعت‌را می‌توان به‌صورت معادلات دیفرانسیل یا به‌صورت "اصول‌وردشی[2]" فرمولبندی کرد که مطابق آن کمیتهای معینی تحت شرایط داده‌شده مقادیر غائی را اختیار می‌کنند. برای نمونه، در یك محیط نوری همگن یا غیرهمگن، نور از نقطهٔ مفروض A به نقطهٔ مفروض B در مسیری حرکت می‌کند که زمان حرکت مینیمم باشد. در نظریهٔ‌پتانسیل کمیتی که مینیمم را اختیار می‌کند، موسوم به‌انتگرال دیریکله است. در قرن نوزدهم به جهت انتقاد وایرشتراس، دیگرانگیزهٔ چندانی برای اثبات مستقیم وجود یك مینیمم نبود.

1. ergodic hypothesis 2. variation

در قرن ما، پس‌از آنکه در ۱۹۰۰ هیلبرت برهان مستقیمی از اصل دیریکله ارائه‌کرد و بعدها نشان دادکه چگونه می‌توان آن را نه‌تنها در اثبات حقایق اساسی درمورد توابع و انتگرالها (توابع "جبری" و انتگرالهای "آبلی") روی یک رویهٔ ریمان فشرده (که ریمان ۵۰سال پیشتر آن را مطرح کرده بود)، بلکه برای استخراج نتایج اساسی نظریهٔ یکنواخت‌سازی[1] نیز به‌کار برد، روشهای حساب وردشی اهمیت بسزایی یافت. این نظریه نقش قاطعی در نظریهٔ توابع یك متغیر مختلط بازی کرده است و دههٔ نخست قرن بیستم شاهد بود که کوبه[2] و پوانکاره نخستین اثباتها را برای این گزاره‌ها، که ۲۵سال قبل خود پوانکاره و کلاین آنها را حدس‌زده‌بودند، ارائه‌کردند. همانند یك فضای برداری‌اقلیدسی با بعد متناهی، در یك فضای هیلبرت با بعد نامتناهی نیز این واقعیت درست است که‌برای هرزیرفضای خطی مفروض (کامل) E، هربردار را می‌توان به‌طور یکتا به دو مؤلفه‌تجزیه کردکه یکی در E قرار بگیرد (تصویر متعامد) و دیگری بر E عمود شود. اصل دیریکله چیزی نیست جز حالت‌خاصی ازاین واقعیت. اما ازآنجاکه‌کاربردهای نظریهٔ تابعی‌تصویر متعامد در فضای هیلبرت که‌گریزی به‌آن زدیم ارتباطی تنگاتنگ با توپولوژی دارد، بهتر است نخست به‌شرح این شاخهٔ مهم ریاضیات نوین، یعنی توپولوژی بپردازم.

۸. توپولوژی و انتگرالهای همساز. ویژگیهای اساسی رهیافت نوین به‌توپولوژی را می‌توان در ارتباط آن با نظریهٔ اخیراً توسعه‌یافتهٔ انتگرالهای همساز تشریح کرد. میدان مغناطیسی مانای h را دریك ناحیهٔ G که خالی از جریانهای الکتریکی است، در نظر بگیرید. این میدان در هرنقطه از G در دو شرط دیفرانسیلی صدق می‌کند که به‌کمك نمادهای عادی آنالیز برداری می‌توان آنها را به‌صورت $\operatorname{div} h = 0$ و $\operatorname{rot} h = 0$ نوشت. میدانی از این نوع همساز نامیده می‌شود. شرط دوم بیان می‌کندکه انتگرال خط h درطول یك خم بستهٔ (دور) C، یعنی $\int_C h$، صفر می‌شود مشروط به اینکه C در یك همسایگی به‌اندازهٔ‌کافی کوچك نقطهٔ دلخواهی از G قرار بگیرد. این امر ایجاب می‌کندکه برای هردور دلخواه C که مرز رویه‌ای در G باشد، $\int_C h = 0$. اما برای یك دوردلخواه C در G، انتگرال برابر جریان الکتریکی محصور توسط C است.

فرض کنید عبارت "C هومولوگ[3] با صفر است"، که با $C \sim 0$ نشانش می‌دهیم، به‌این معنی باشدکه دور C در G، رویه‌ای را در G محصور می‌سازد. می‌توان روی یك‌دور C درجهت مخالف حرکت کرد، که بدین‌سان $-C$ پدید می‌آید، یا روی آن ۲، ۳، . . . بار حرکت کرد، که بدین‌سان $2C$، $3C$، . . . پدید می‌آیند، و دورها را می‌توان به‌یکدیگر

1. uniformization
2. Koebe
۳. اصطلاح "هومولوژی" (homology) را مانستگی نیز ترجمه‌کرده‌اند و به این لحاظ "هومولوگ" را شایدبتوان مانسته نیز گفت. اما ازآنجاکه دربه‌کاربردن "مانستگی" باید به‌سرنوشت ترجمهٔ مشتقات متعدد homology نیز نظر داشت، ترجیح داده‌ایم فعلاً همان اصطلاح "هومولوژی" و مشتقات آن را به‌کار ببریم.ـم.

اضافه یا از یکدیگر کم کرد (اگر اصرار نورزیم که دورها حتماً از یك‌تکه تشکیل‌شده باشند). دو دور C و C' را هومولوگ می‌گوییم هرگاه $C - C' \sim 0$. توجه‌کنید که $C \sim 0$ و $C' \sim 0$ ایجاب می‌کند که $-C \sim 0$ و $C + C' \sim 0$، بنابراین اگر دورهای هومولوگ رایکی بگیریم، این دورها تحت عمل جمع یك‌گروه جابه‌جایی تشکیل‌می‌دهند که "گروه بتی" نامیده می‌شود. مفاهیم دورها و هومولوژی آنها را می‌توان ازیك ناحیهٔ سه‌بعدی در فضای‌اقلیدسی به‌هرخمینهٔ nبعدی و درحالت خاص به‌خمینه‌های بسته[1] (فشرده) مانند رویه‌های ۲بعدی‌کره یاچنبره انتقال داد، و روی یك خمینهٔ nبعدی نه‌تنهاازدورهای ۱بعدی بلکه از دورهای ۲، ۳، ...، nبعدی هم می‌توان سخن‌گفت. در حالتی‌که خمینه یك مقریك ریمانی داشته باشد، مفهومی‌که بعداً در بخش هندسه به آن خواهیم پرداخت، مفهوم میدان برداری همساز را نیز می‌توان به‌یك میدان تانسوری همساز (فرم همساز) از رتبهٔ r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ تعمیم داد. از هرمیدان تانسوری (فرم دیفرانسیل خطی) از رتبهٔ r، می‌توان روی هردور rبعدی انتگرال‌گرفت.

مسئلهٔ اساسی نظریهٔ هومولوژی عبارت است از تعیین ساختار گروه بتی نه‌تنها برای دورهای ۱بعدی، بلکه برای دورهای ۲، ۳، . . .، nبعدی، و به‌خصوص تعیین تعداد دورهای مستقل خطی (عدد بتی). [vدور C_1، C_2، . . .، C_v مستقل خطی‌اند هرگاه هیچ هومولوژی $k_1C_1 + \ldots + k_vC_v \sim 0$ با ضرایب صحیح k موجود نباشد مگرآنکه $k_1 = k_2 = \ldots = k_v = 0$] قضیهٔ اساسی فرمهای همساز روی خمینه‌های فشرده بیان می‌کندکه به‌ازای هر vدورمستقل‌خطی مفروض C_1، . . .، C_v، یك فرم همساز hباتناوبهای از پیش داده‌شدهٔ

$$\int_{C_1} h_1 = \pi_1, \ldots, \int_{C_v} h_v = \pi_v$$

وجود دارد.

هانری پوانکاره، ابزارهای جبری لازم را برای فرمولبندی دقیق مفاهیم دور و هومولوژی توسعه داد. در خلال قرن بیستم مشخص شدکه در بسیاری از مسائل، کارکردن باکوهومولوژیها بسیار ساده‌تر از هومولوژیهاست. من این مطلب را برای دورهای ۱بعدی شرح می‌دهم. خط C_1 که از نقطهٔ P_1 به نقطهٔ P_2 می‌رود، چنانچه باخط C_2 دنبال شودکه از نقطهٔ P_2 به نقطهٔ سوم P_3 می‌رود، منجر به خطی چون $C_1 + C_2$ خواهد شدکه از P_1 به P_3 می‌رود. انتگرال خط $\int_C h$ میدان برداری مفروض h در طول خط دلخواه (بازیاستهٔ) C، یك‌تابع‌جمعی $\phi(C)$ از C است، یعنی $\phi(C_1 + C_2) = \phi(C_1) + \phi(C_2)$. به‌علاوه اگر $\operatorname{rot} h$ همه‌جا صفر باشد، آنگاه برای هرخط بستهٔ C که دریك‌همسایگی به‌اندازهٔ کافی‌کوچك یك نقطهٔ دلخواه قرار بگیرد، $\phi(C) = 0$. هرتابع حقیقی ϕ راکه

۱. مقصود از خمینهٔ بسته، خمینهٔ فشردهٔ بدون لبه است.ـم.

این دو شرط را براورده سازد، یک انتگرال مجرد می‌نامیم. کوهومولوژی $\phi \sim 0$ به این معنی است که برای هر خط بستهٔ C، $\phi(C)=0$، و بنابراین مفهوم کوهومولوژی $k_1\phi_1+\dots+k_n\phi_n \sim 0$ با ضرایب حقیقی دلخواه $k_1, \dots, k_n$ روشن است. حال هومولوژی $C \sim 0$ را می‌توان نه با این شرط که C رویه‌ای را محصور کند، بلکه با این الزام که برای هر انتگرال مجرد ϕ، $\phi(C)=0$، تعریف کرد. با این قرارداد که دو انتگرال مجرد ϕ و ϕ'، چنانچه $\phi-\phi' \sim 0$، یکی گرفته شوند، این انتگرالها یک فضای برداری تشکیل می‌دهند و بعد این فضای برداری را اکنون می‌توان به‌عنوان عدد بتی تعریف کرد. و به‌این‌ترتیب قضیهٔ اساسی انتگرالهای همساز روی یک خمینهٔ فشرده ادعا می‌کند که، برای هر انتگرال مجرد مفروض ϕ، یک و تنها یک میدان برداری همساز h وجود دارد که انتگرالش کوهومولوگ با ϕ است، به‌این معنی که برای هر دور C، $\int_C h=\phi(C)$ (نمایش انتگرال مجرد توسط یک انتگرال همساز ملموس).

آلکساندر نتیجهٔ مهمی کشف کرد که اعداد بتی یک خمینهٔ M را که در فضای اقلیدسی n بعدی $\mathbf{R}^n$ نشانده‌شده‌است، به‌اعداد بتی مکمل $\mathbf{R}^n - M$ مربوط می‌کند (قضیهٔ دوگانی آلکساندر).

مشکلات توپولوژی ناشی از جنبهٔ دوگانه‌ای است که از طریق آن می‌توان خمینه‌های پیوسته را بررسی کرد. اقلیدس یک‌شکل را به صورت اجتماع تعدادی متناهی از اشیا هندسی مانند نقطه، خط مستقیم، دایره، صفحه، و کره در نظر می‌گرفت. اما پس از آن‌که به جای هر خط یا رویه مجموعهٔ نقاط روی آن را در نظر بگیریم، می‌توان دیدگاه نظریهٔ مجموعه‌ای را نیز بیان کرد که به‌موجب آن تنها یک‌نوع عنصر، یعنی نقطه، وجود دارد، و هر مجموعه از نقاط (درحالت کلی نامتناهی) را می‌توان به‌عنوان یک شکل در نظر گرفت. این دیدگاه نوین به‌وضوح به‌هندسه کلیت و آزادی بیشتری می‌بخشد. اما در توپولوژی لزومی ندارد که به‌عنوان ذرات نهایی تا حد نقطه‌ها پایین بیاییم، بلکه می‌توان خمینه‌را مانند ساختمان از "بلوکها" یا "سلولها" ساخت، و چنانچه خمینه فشرده باشد، می‌توان این عمل را با تعدادی متناهی سلول انجام داد. بنابراین در اینجا بازگشت به‌یک نوع بررسی به‌سبک "متناهیانهٔ" اقلیدس ممکن است (توپولوژی ترکیباتی).

از دیدگاه نخست، یعنی بررسی خمینه به عنوان مجموعه‌ای از نقاط، وظیفهٔ ما فرمولبندی پیوستگی است که به‌موجب آن یک نقطهٔ P که به‌نقطهٔ مفروض P_0 نزدیک می‌شود، تدریجاً از P_0 غیرقابل تشخیص می‌شود. این عمل با نظیر کردن همسایگیهای P به آن انجام می‌شود، یعنی یک دنبالهٔ انقباضی نامتناهی از زیرمجموعه‌های $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ که همگی P_0 را در بر داشته باشند ($U \subset V$) یعنی که مجموعهٔ U مجموعهٔ V را در بر دارد. برای مثال، در صفحهٔ با مختصات دکارتی x و y به‌عنوان n امین همسایگی U_n از نقطهٔ $P_0=(x_0, y_0)$ می‌توان درون دایره به‌شعاع $1/2^n$ حول P_0 را انتخاب کرد. مفهوم همگرایی که اساس همهٔ ملاحظات پیوستگی است، برحسب دنبالهٔ همسایگیها به صورت زیر تعریف می‌شود: دنبالهٔ نقاط $P_1, P_2, \dots$، به P_0 همگراست هرگاه برای هر عدد طبیعی n عددی چون N

وجود داشته باشد که همهٔ نقاط P_v، که $v>N$، در n امین همسایگی P_0، یعنی U_n، قرار بگیرند. البته انتخاب همسایگیهای U_n تا حد مشخصی دلخواه است. مثلاً، به‌عنوان n امین همسایگی V_n از (x_0, y_0) می‌توان مربع به‌ضلع $2/n$ حول (x_0, y_0) را نیز انتخاب کرد، که یک نقطهٔ (x, y) را در بر دارد هرگاه

$$-\frac{1}{n}<x-x_0<\frac{1}{n}, \qquad -\frac{1}{n}<y-y_0<\frac{1}{n}.$$

اما دنبالهٔ V_n با دنبالهٔ U_n هم‌ارز است، به‌این معنی که برای هر n یک n' وجود دارد که $U_{n'} \subset V_n$ (و بنابراین برای هر $v \geqslant n'$، $U_v \subset V_n$) و همچنین برای هر m یک m' وجود دارد که $V_{m'} \subset U_m$، و در نتیجه مفهوم همگرایی نقاط به‌این‌که با کدام یک از این دو دنبالهٔ همسایگی تعریف‌شده باشد بستگی ندارد. واضح است که پیوستگی یک نگاشت از یک خمینه در خمینه‌ای دیگر چگونه تعریف می‌شود. یک تناظر یک‌به‌یک میان دو خمینه اگر از هر دو سو پیوسته باشد، یک نگاشت توپولوژیک نامیده می‌شود، و دو خمینه که بتوان آنها را با یک نگاشت توپولوژیک به‌یکدیگر نگاشت، هم‌ارز توپولوژیک‌اند. توپولوژی به‌بررسی خواصی از خمینه‌ها می‌پردازد که تحت اثر نگاشتهای توپولوژیک (درحالت خاص نسبت به دگردیسی[1]های پیوسته) ناوردا هستند.

یک تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ را می‌توان با توابع تکه‌ای خطی تقریب زد. ابزار متناظر در بعدهای بالاتر روش تقریبات سادکی[2] تابع پیوستهٔ مفروض از یک خمینه به خمینهٔ دیگر است که در توپولوژی نظریهٔ مجموعه‌ای اهمیت بسیار دارد. این روش در توسعهٔ یک نظریهٔ عمومی ابعاد، اثبات ناوردایی توپولوژیک گروههای بتی، تعریف مفهوم قطعی درجهٔ یک نگاشت ("درجهٔ تصاویر[3]" به‌تعبیر براوئر)، و نیز برای اثبات چند قضیهٔ جالب نقطهٔ ثابت به‌کار رفته است. مثلاً یک نگاشت پیوسته از مربع به روی خودش لزوماً یک نقطهٔ ثابت دارد، یعنی نقطه‌ای که توسط نگاشت به‌روی خودش تصویر می‌شود. به‌طور کلیتر، با مفروض بودن دو نگاشت پیوسته از یک خمینهٔ (فشردهٔ) M به‌خمینهٔ M' می‌توان سؤال کرد که برای چه نقاط Pای از M هر دو تصویر روی M' برهم منطبق می‌شوند. دستور معروفی از لفشتس[4] "شاخص کل"[5] چنین نقاطی را با نظریهٔ هومولوژی دورها روی M و M' مربوط می‌کند.

به‌کار بستن قضایای نقطهٔ ثابت در فضاهای تابعی با بعد نامتناهی، روش نیرومندی برای اثبات وجود جوابهای معادلات دیفرانسیل غیرخطی فراهم کرده است. این مطالب در موارد خاص ارزشمند است، زیرا معادلات هیدرودینامیک و آئرودینامیک تقریباً همه

1. deformation
2. simplicial approximation
3. Abbildungs-grad
4. Lefschetz
5. total index

از این نوع‌اند.

پوانکاره دریافت که فرمولبندی رضایت‌بخشی از نظریهٔ هومولوژی دورها، تنها از دیدگاه دوم امکان‌پذیر است که خمینهٔ nبعدی را به‌عنوان مجتمعی از سلولهای nبعدی‌در نظر می‌گیرد. مرز یك سلول nبعدی (n-سلول) از تعدادی متناهی ($n-1$)-سلول تشکیل‌شده است و مرز یك ($n-1$)-سلول از تعدادی متناهی ($n-2$)-سلول، و همین‌طور تا آخر. اسکلت ترکیباتی[1] خمینهٔ ما به‌این‌ترتیب حاصل می‌شود که نخست به‌هریك از این سلولها نمادی نسبت دهیم و سپس برحسب این نمادها بیان کنیم که کدام‌یك از ($i-1$)-سلولها به‌مرزیك i-سلول تعلق‌دارد ($i=1,2,\dots,n$) ازطریق فرایند تکراری تقسیمهای‌جزئی، می‌توان از سلولها به نقاط خمینه رسید، به این ترتیب که نقطه‌ها را در توری که به نحو فزاینده‌ای ظریفتر می‌شود به‌دام بیندازیم. از آنجا که این تقسیمهای جزئی براساس یك ایدهٔ ترکیباتی ثابت پیش می‌رود، ماهیت توپولوژیك خمینه را اسکلت ترکیباتی‌اش کاملاً ثابت نگه‌می‌دارد. پرسشی که بلافاصله مطرح می‌شود این است که تحت چه فرضهایی دو اسکلت ترکیباتی مفروض، یك خمینه رانمایش می‌دهند، یعنی با تقسیمهای جزئی متوالی به‌خمینه‌های هم‌ارز توپولوژیك می‌انجامند. اکنون دانش ما ناتوانتر ازآن است که این مسئلهٔ بنیادی را بتواندحل کند. توپولوژی جبری، که با اسکلتهای ترکیباتی سروکاردارد، به‌خودی‌خود نظریه‌ای زیبا و غنی است، که به‌طرق مختلف با مفاهیم و قضایای اساسی‌جبر و نظریهٔ گروهها پیوندخورده است.

ارتباط میان توپولوژی جبری و توپولوژی نظریهٔ مجموعه‌ای با مشکلاتی جدی همراه است که تاکنون به‌شکل رضایت‌بخشی برآنها غلبه نشده است. اما واضح به‌نظر می‌رسدکه بهتر است کار را نه با تقسیم به‌سلولها، بلکه با پوشش توسط وصله‌هایی که ممکن است یکدیگر را نیز قطع کنند، شروع کنیم. مفاهیم اساسی ناوردای توپولوژیك را باید از چنین الگویی تعمیم داد. مفهوم فوق از یك انتگرال مجرد، که هومولوژی و کوهومولوژی را به‌هم مربوط می‌سازد، یك نشانه است، و درواقع می‌تواند برای اثبات مستقیم ناوردایی عدد اول بتی، بدون استفاده از تقریبات سادکی، به‌کار رود.

۹. نگاشت همدیس، توابع برخه‌ریخت، حساب وردشی فراگیر. نظریهٔ هومولوژی در ترکیب با اصل دیریکله یا روش تصویر متعامد در فضای هیلبرت، منجر به نظریهٔ انتگرالهای همساز می‌شود، و درحالت خاص برای کمترین بعد، یعنی $n=2$، به نظریهٔ انتگرالهای آبلی روی رویه‌های ریمان می‌انجامد. درحالت رویه‌های ریمان، اگر اصل دیریکله را با نظریه هوموتوپی (و نه هومولوژی) خمهای بسته بیامیزیم، نتایجی اساسی در زمینهٔ یکنواخت‌سازی یك تابع تحلیلی یك متغیره نیز به‌دست می‌آید. درحالی که یك دور را هومولوگ با صفر تعریف کردیم اگر رویه‌ای را محدود سازد، یك‌دور را هوموتوپ با صفر می‌نامیم اگر بتوان با یك دگردیسی پیوسته آن را به‌یك نقطه جمع کرد. نظریهٔ

1. combinatorial skeleton

هوموتوپی دورهای یك و چندبعدی به‌تدریج به‌شاخهٔ مهمی از توپولوژی تبدیل می‌شود، و جنبهٔ نظریهٔ گروهی هوموتوپی به‌کشف نتایج شگفت‌انگیزی درنظریهٔ مجرد گروهها انجامیده است. هوموتوپی دورهای ۱ بعدی ارتباط نزدیکی با ایدهٔ خمینهٔ پوششی اکمل[1] یك خمینهٔ مفروض دارد. چنانچه نگاشت پیوستهٔ $P' \to P$ ازخمینهٔ M به‌خمینهٔ M' داده‌شده‌باشد، نقطهٔ P' را می‌توان به‌عنوان اثر یا تصویر نقطهٔ دلخواه P از M در M' تلقی کرد، و بنابراین M مبدل می‌شود به‌خمینه‌ای که M' را می‌پوشاند. ممکن است که هیچ نقطه‌ای از M وجود نداشته باشد و یا چندین نقطهٔ P از M موجود باشند که روی نقطهٔ P' از M' قرارگیرند (یعنی روی P' نگاشته شوند)[2]. نگاشت را بدون شاخه می‌نامیم هرگاه به‌ازای هرنقطهٔ P_0 از M دریك همسایگی به‌اندازهٔ کافی کوچك آن یك‌به‌یك (و از هردو سو پیوسته) باشد. فرض کنید P_0 نقطه‌ای از M، P'_0 اثر آن روی M'، و C' خمی روی M' باشدکه از P'_0 شروع می‌شود. اگر M خمینهٔ M' را بدون شاخه بپوشاند می‌توانیم با شروع از P_0 این خم را روی M، دست‌کم تا نقطهٔ معینی که به‌یك "مرز M نسبت به M'" برخوریم، دنبال کنیم. خمینه‌های پوششی Mای‌که برای آنها حالت بالا هرگز پیش نمی‌آید و بنابراین M' را بدون مرز نسبی می‌پوشانند، از اهمیت خاصی برخوردارند. بهترین روش تعریف مفهوم توپولوژیك اساسی "همبند ساده" عبارت است از توصیف یك خمینهٔ همبند ساده به‌عنوان خمینه‌ای‌که هیچ پوشش بدون مرز بدون شاخه به استثنای خودش ندارد. خمینهٔ پوششی اکمل را، که از همهٔ پوششهای بدون مرز بدون شاخهٔ دیگر خمینهٔ مفروض ما قویتر است، می‌توان به‌این صورت توصیف کردکه روی آن یك خم C تنها درصورتی بسته است که اثرش C' (بسته و) هوموتوپ با صفر باشد. اثبات قضیهٔ اساسی یکنواخت‌سازی[3] از دو بخش تشکیل شده است: (۱) ساختن خمینهٔ پوششی اکمل برای یك رویهٔ ریمان مفروض، (۲) ساختن یك نگاشت همدیس یك‌به‌یك از خمینهٔ پوششی به‌درون یك دایره با شعاع متناهی یا نامتناهی، که این عمل با استفاده از اصل دیریکله انجام می‌شود.

کلیهٔ مباحثی که تاکنون در بحثمان از آنالیز شرح دادیم، به‌نوعی به‌عملگرها و تصویرها در فضای هیلبرت که مشابه بینهایت بعدی فضای اقلیدسی است، مربوط‌اند. در هندسهٔ اعداد مینکوفسکی، فاصله‌های $|AB|$ که با فاصلهٔ اقلیدسی تفاوت دارندولی در دو اصل موضوع $|AB|=|BA|$ واین‌که در مثلث ABC، $|AC| \leqslant |AB|+|BC|$، صدق

1. universal covering manifold

۲. البته معمولاً نگاشت $P' \to P$ پوشا فرض می‌شود به‌طوری‌که هر P' در M' دست‌کم یك پیش‌تصویر P در M دارد.-م.

۳. این قضیه به‌بیان ساده حاکی ازآن است که هررویهٔ ریمان همبند ساده درحد یکریختی برابر کرهٔ ریمان $\bar{C}$، صفحهٔ مختلط C، و یا قرص یکهٔ D در صفحهٔ مختلط است، و نیز هر رویهٔ ریمان دلخواه دارای پوششی اکمل است که یکریخت با یکی از سه‌رویهٔ بالا ست.-م.

می‌کنند، در اثبات نتایـج بسیاری در زمینهٔ جلپذیری نامساویها بـا اعداد صحیح به کار رفته‌اند. اما در اینجا مجال آن نیست که به سیر پیشرفت این شاخهٔ جذاب نظریهٔ اعداد در ۵۰سال اخیر بپردازیم. باناخ فضاهای بینهایت‌بعدی‌ای معرفی‌کرده است که به‌متریکی از این نوع، با ماهیتی کلیتر از متریك اقلیدس-هیلبرت، مجهز شده‌اند. امـا این‌کار برای مقاصد صرفاً تحلیلی، و نه‌نظریهٔ اعدادی، انجام‌گرفته است. اینکه آیا اهمیت این‌موضوع تعدادکثیر مقالاتی را کـه در زمینهٔ فضاهای باناخ نوشته‌شده است توجیه می‌کند یا نه، جای سؤال دارد.

اما اصل دیریکله ساده‌ترین مثال ازروشهای مستقیم حساب وردشی است که‌باشروع قرن حاضر مورداستفاده قرارگرفته است. با استفاده ازاین روشها بودکه نظریهٔ رویه‌های مینیمال، که ارتباط نزدیکی با نظریهٔ توابع تحلیلی دارد، وضعیت جدیدی پیداکرد. آنچه دربارهٔ معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌دانیم یا از طـریق روش توپولوژیك نقطـهٔ ثابت (به‌بالا رجوع‌کنید) به‌دست‌آمده است، یا ازطریق روش موسوم به‌پیوستگی، ویا ازطریق ساختن جواب آنها به‌عنوان مقادیر ماکزیمم یا مینیمم یك تابعك مناسب.

یك تابع [حقیقی] پیوسته روی یك خمینهٔ فشردهٔ nبعدی، درجایی مینیمم ودرجایی ماکزیمم خود را اختیار می‌کند. [نمودار] این توابع را به‌عنوان نشیب و فرازهای سطح زمین‌تعبیر می‌کنیم. دراین صورت علاوه‌برقله (ماکزیمم موضعی) و تەدره (مینیمم‌موضعی)، امکان سوم‌وجود یك نقطهٔ زینی (گردنه) هم‌به‌عنوان یك‌نقطهٔ "مانا" هست.[1] درحالت nبعدی امکانات متعددی‌که می‌تواند [برای یك‌نقطهٔ مانا] رخ دهد بایك شاخص لختی[2] kمشخص می‌شودکه می‌تواند مقادیر ۰، ۱، . . . ، n را اختیارکند. مقدار $k=0$ متناظر با مینیمم و $k=n$ متناظر با ماکزیمم است. مارستن مورس[3] نامساوی $M_k \geqslant B_k$ راکشف‌کردکه در آن M_k تعداد نقاط مانای با شاخص k، و B_k عدد بتی تعداد رده‌های هومولوژی مستقل خطی دورهای kبعدی است. در تعمیم این روابط به‌فضاهای تابعی، خط مطالعاتی جدیدی‌گشوده شده است‌که عنوان مناسب حساب وردشی فراگیر[4] را برخود دارد.

توسعهٔ نظریهٔ یکنواخت‌سازی توابـع تحلیلی به‌بررسی دقیقتر نگاشتهای همدیس خمینه‌های ۲بعدی به‌طور فراگیر انجامید، و از این طریق چندین قضیه‌که به‌طرز شگفت‌آوری ساده و زیبا هستند نتیجه شده‌اند. درهمین حوزه، از توسعهٔ فراوان دانش مادرمورد رفتار توابـع برخه‌ریخت[5] باید نام‌برد، یعنی توابع تحلیلی تك‌مقداری از متغیرمختلط zکه همه‌جا به‌استثنای "قطبهای" مجزا (نقاط بینهایت) منظم‌اند. در اواخر قرن پیش تابع‌زتای ریمان‌انگیزهٔ اصلی مطالعهٔ عمیقتر "توابع‌تام" (توابع بدون قطب) بود. بزرگترین‌پیشرفتی

۱. با تمثیل وایل، نقطهٔ "مانا" را باید به‌عنوان نقطه‌ای روی ایـن نشیب‌وفرازها دانست که هرگاه ذره‌ای در آن نقطه فقط تحت‌تأثیر نیروی گرانش باشد، هیچ‌گاه حرکت نکند.-م.

2. inertia index
3. Marston Morse
4. calculus of variation in the large
5. meromorphic

که چه در روشها و چه درنتایج دراین زمینه حاصل‌شد، مقاله‌ای بودکه ریاضیدان‌فنلاندی رولف نوانلینا[1] دربارهٔ توابع برخه‌ریخت انتشار داد. عـلاوه بر توابع برخه‌ریخت در صفحهٔ z، می‌توان این توابع را روی یك رویهٔ ریمان مفروض نیز مطالعه کرد، و به‌همان طریقی که نظریهٔ توابع جبری (کـه روی یك رویهٔ ریمان فشرده بـا توابع برخه‌ریخت معادل‌اند) را می‌توان به‌عنوان نظریهٔ خمهای جبری دوبعدی مختلط به‌هرتعداد بعدی تعمیم داد، می‌توان از توابع برخه‌ریخت نیز به‌خمهای برخه‌ریخت گذرکرد.

نظریهٔ توابع تحلیلی از چند متغیر مختلط، علی‌رغم وجـود چند نتیجهٔ عمیق، هنوز به‌دوران بلوغ نرسیده است.

۱۰. هندسه. حال کـه مسائل آنالیز و توپولوژی را نسبتاً به‌تفصیل شرح داده‌ام، باید مرور خـود را دربارهٔ هندسه خلاصه‌کنم. از میان مباحثی کـه تاکنون شرح داده‌ام، رویه‌های مینیمال؛ نگاشت‌همدیس، خمینه‌های جبری، وتمامی مبحث توپولوژی رامی‌توان تحت عنوان هندسه نیـز به‌حساب آورد. در قلمرو هندسهٔ اصـل موضوعی مقدماتی یك کشف عجیب، یعنی "هندسه‌های پیوستهٔ" بدون نقطهٔ فون‌نویمان، قدعلم می‌کند، زیرامکانیك کوانتومی؛ منطق، و نظریهٔ عمومی جبری "شبکه‌ها" را به‌طور نزدیکی به‌هم مربوط ساخته است. خمینه‌های خطی ۰، ۱، ...، $(n-1)$بعدی یك فضای نقطه‌ای افکنشی $(n-1)$بعدی از خمینه‌های خطی ۱، ۲، . . . ، nبعدی یك‌فضای برداری nبعدی حاصل می‌شوند. فرمول‌بندی اصل موضوعی متداول هندسهٔ افکنشی، نقاط را به‌عنوان عناصر اولیه یا اتمهایی که خمینه‌های بـا بعد مثبت ازآنها تشکیل یافته‌اند، بـه‌کار می‌گیرد. امـا نگرش دیگری نیز امکان‌پذیر است‌که درآن خمینه‌های‌خطی ازهمهٔ ابعاد مختلف به‌عنوان عناصر درنظرگرفته می‌شوند و اصول موضوع با رابطهٔ "B شامل A است" $(A \subset B)$ بین این عناصر، واعمال اشتراك $A \cap B$ و اجتماع $A \cup B$ کـه روی آنها انجام می‌شود سروکار دارند. در اینجا اجتماع $A \cup B$ مرکب است از تمام مجموعهای $x+y$ که x برداری در A و y برداری در B است. در منطق کـوانتومی ایـن رابطه و این اعمال متناظرند بـا رابطهٔ استلزام ("گزارهٔ A گـزارهٔ B را ایجاب می‌کند") و اعمال "و" و "یا" در منطق کلاسیك. اما با وجودی‌که در منطق‌کلاسیك قانون توزیع‌پذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

برقرار است، در منطق کوانتومی این قانون درست نیست و باید آن را با اصل ضعیفتر زیر جایگزین‌کرد:

اگر $C \subset A$، آنگاه $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

در فرمولبندی این اصل موضوعها اگـر قید متناهی‌بودن بعد را برداریم، امکانات متعددی

1. Rolf Nevanlinna

پیش خواهد آمد؛ یکی به‌فضای هیلبرت که حوزهٔ عمل مکانیك کوانتومی است می‌انجامد؛ دیگری به‌هندسهٔ پیوستهٔ فون‌نویمان و مقیاس پیوستهٔ ابعاد منجر می‌شود که در آن عناصری با بعد به‌اندازهٔ دلخواه کوچك ولی ناصفر وجود دارند.

مهمترین پیشرفت هندسه در قرن بیستم درهندسهٔ دیفرانسیل رخ داد و انگیزه‌بخش آن نظریهٔ نسبیت عام بود که نشان دادجهان خمینه‌ای ۴بعدی است که به‌یك متریك ریمانی مجهزشده است. یك قطعه از خمینهٔ nبعدی را می‌توان به‌طور پیوسته و یك‌به‌یك به‌روی بخشی از "فضای حسابی" nبعدی متشکل ازهمهٔ nتابیهای $(x_1, \cdots, x_n)$ از اعدادحقیقی نگاشت. یك متریك ریمانی به‌یك عنصر خط که از نقطهٔ $P=(x_1, \cdots, x_n)$ به نقطهٔ بینهایت نزدیك $P'=(x_1+dx_1, \cdots, x_n+dx_n)$ متصل می‌شود، طول dsای نظیر می‌کند که مربع آن، فرم درجهٔ دومی از مختصات نسبی dx_i است،

$$ds^2=\sum g_{ij}\, dx_i\, dx_j, \qquad (i, j=1, \cdots, n)$$

وضرایب g_{ij} تنها به‌نقطهٔ P بستگی دارند و نه به‌عنصر خط. این بدان‌معنی است که در بینهایت‌کوچك، قضیهٔ فیثاغورس و بنابراین هندسهٔ اقلیدسی برقرار است، اما درحالت کلی و در ناحیه‌ای با گسترهٔ متناهی چنین نیست. عناصر خط در یك نقطه را می‌توان به صورت برداره‌ای بینهایت‌کوچك یك‌فضای برداری nبعدی در P؛ موسوم به‌فضای مماس‌در P، تعبیر کرد؛ درواقع هرتبدیل (دیفرانسیل‌پذیر) دلخواه از مختصات x_i، تبدیلی خطی روی مؤلفه‌های dx_i هرعنصر خط در نقطهٔ مفروض P القا می‌کند. همان‌گونه‌که لوی‌چیویتا[1] در ۱۹۱۵ دریافت، توسعهٔ هندسهٔ ریمانی منوط به‌این واقعیت است که یك‌متریك ریمانی به‌طور یکتا تعیین‌کنندهٔ تغییرمکان موازی بردار مماس بر P به هر نقطهٔ بینهایت نزدیك P' است. از این مطلب طرح کلی هندسهٔ دیفرانسیل حاصل می‌شود که در آن به‌هر نقطهٔ P ازخمینهٔ موردنظر، یك فضای همگن[2]، $\sum_P$ نسبت می‌دهیم که باگروه معینی از "خودریختیها" توصیف می‌شود و این فضا اکنون نقش فضای مماس را به‌عهده می‌گیرد (که گروه خودریختیهایش عبارت است از مجموعهٔ همهٔ تبدیلات خطی نامنفرد). فرض می‌کنیم مشخص باشد که‌چگونه $\sum_P$ با یك‌تغییرمکان بینهایت‌کوچك به‌فضای $\sum_{P'}$ متناظر با نقطهٔ بینهایت نزدیك P' تبدیل می‌شود. بنیادی‌ترین مفهوم هندسهٔ ریمانی، یعنی انحنا، که در معادلات آینشتاین برای میدان‌گرانشی نقشی چنین برجسته دارد، می‌تواند در این چارچوب کلی قرار بگیرد. به‌این ترتیب هندسه‌های دیفرانسیل عمومی مستوی، افکنشی، همدیس، و . . . را می‌توان بناکرد. همچنین کوششهایی به‌عمل آمده است تا از طریق این ساختارها، ماهیت دیگرمیدانهای فیزیکی که درکنار میدان‌گرانشی در طبیعت وجوددارند، یعنی میدانهای الکترومغناطیسی، میدان موج الکترونی، ودیگرمیدانهایی که به‌ذرات بنیادی مختلف وابسته‌اند، تبیین شود. اما به‌نظر نگارنده، همهٔ این‌گونه تلاشهای نظری برای بنای

1. Levi-Civita
2. homogeneous space

یك نظریهٔ وحدت میدانها تاکنون با شکست مواجه شده‌اند. دلایل خوبی برای تعبیر گرانش برحسب مفاهیم اساسی هندسهٔ دیفرانسیل وجود دارد، اما احتمالاً تلاش برای "هندسی‌کردن" همهٔ موجودات فیزیکی درست نخواهد بود.

هندسهٔ دیفرانسیل فراگیر حوزهٔ جالبی برای تحقیق است که خواص دیفرانسیلی یك خمینه را به‌ساختار توپولوژیك آن مربوط می‌سازد. طرح هندسهٔ دیفرانسیل که در بالا شرح دادیم، و فضاهای $\sum_P$ متناظرش و تغییرمکانهای آنها، نهاد توپولوژیك خالصی‌دارد که اخیراً تحت عنوان فضاهای تاری[1] توسعه‌یافته و به‌تکنیك توپولوژیك مهمی تبدیل‌شده است.

درگزارشمان ازپیشرفتهایی‌که طی پنجاه سال اخیر در آنالیز، هندسه، وتوپولوژی حاصل‌شده است، مجبور بودیم مباحث خاص متعددی را به‌طور سطحی مرور کنیم. اگراین گزارش تصوری درمورد ارتباط نزدیکی‌که همهٔ این پدیده‌های ریاضی را به‌هم مربوط می‌کند به‌خواننده نداده‌باشد، کاملاً ناموفق‌بوده‌است. همان‌گونه‌که آخرین مثال ازفضاهای تاری (درکنار بسیاری مطالب دیگر) نشان می‌دهد، این وحدت نهفته در کثرت، حتی‌تقسیم روشنی از ریاضیات به‌آنالیز، هندسه، توپولوژی (و جبر) را هم عملاً ناممکن می‌سازد.

۱۱. مبانی. سرانجام چندکلمه‌ای هم درمورد مبانی ریاضیات بگوییم. در قرن نوزدهم شاهد بودیم که همهٔ مفاهیم‌ریاضی ازجمله مفهوم اعداد طبیعی بدان‌حد موردتحلیل انتقادی قرار گرفتندکه بررسی‌آنها به‌منطق محض و ایده‌های "مجموعه" و "نگاشت" تحویل‌یافت. در پایان قرن نوزدهم آشکارشدکه تشکیل آزادانهٔ مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌های مجموعه‌ها، مجموعه‌هایی از مجموعه‌ها و اعمال بلامانع سورهای منطقی "وجود دارد" و "هرچه باشد" برآنها همانند عناصر اصلی منطق [یا این جملات مقایسه‌کنید. عدد(طبیعی) nزوج است هرگاه عددی چون x وجود داشته باشد به‌طوری‌که $n=2x$؛ و فرد است اگربه‌ازای هر x، n از $2x$ متمایز باشد] به‌تناقض غیرقابل رفعی می‌انجامد. سه فعالیت شاخصی‌که در قرن بیستم درجهت گشودن این گرهٔ‌کور انجام شد، با نامهای براوئر، هیلبرت، وگودل پیوندخورده‌اند. انتقاد براوئر از "فلسفهٔ اصالت وجود ریاضی" نه‌تنها این تناقضها را کاملاً باطل ساخت، بلکه بخش بزرگی از ریاضیات را هم‌که از مقبولیت همگانی برخوردار بود، از هستی ساقط‌کرد.

اگرتنها روشی‌که به‌موجب آن‌حق داریم ادعاکنیم "عددی طبیعی با خاصیت‌مفروض P وجود دارد" این باشدکه عملاً یك عدد طبیعی n را بااین خاصیت بسازیم، آنگاه این گزاره‌که با چنین عددی وجود دارد با همهٔ اعداد خاصیت نقیض P را دارند، بی‌اساس خواهد بود. اصل طرد شق ثالث در چنین گزاره‌هایی تنها می‌تواند برای خداوند صادق باشدکه قادر است به‌طرفه‌العینی دنبالهٔ نامتناهی همهٔ اعداد طبیعی را همان‌گونه که هست ببیند، اما مسلماً برای منطق بشری این چنین نیست. ازآنجاکه‌در تشکیل گزاره‌های‌ریاضی

1. fibre spaces

چندین سور "وجود دارد" و "هـرچه باشد" یکی پس از دیگـری می‌آید، انتقاد براوئر تقریباً همهٔ این‌گزاره‌ها را بیمعنی می‌سازد؛ و برای همین بود کـه براوئر کوشیدریاضیات جدیدی بنا کندکه در آن هیچ‌گاه از این اصل منطقی [طرد شق ثالث] استفاده نشده باشد. به‌اعتقاد مـن همگان مجبورند انتقاد براوئر راکه دوست داشت براین عقیده پافشاری‌کند کـه گـزاره‌های ریاضی گویای حقیقت محض مبتنی بـرشهود هستند، بپذیرند. دست‌کـم طرف مقابل براوئر، یعنی هیلبرت، به طور ضمنی انتقاد وی را پذیرفت. هیلبرت کوشید تا ریاضیات کلاسیك را از ایـن طریق نجات ببخشدکـه نخست آن را از دستگاهـی از گزاره‌های با معنی به‌بازی‌ای با فرمولهای بیمعنی تبدیل‌کند، و سپس نشان دهدکه در این بازی هیچ‌گاه به‌دو فرمول F ونقیض F که ناسازگارندبرنمی‌خوریم. هدف اوناسازگاری بود و نه‌صدق. درواقع، نخستین گامهای او بسیار امیدوارکننده بود. اما پس از آن‌کشف گـودل سایهٔ سنگینی برکارهای وی افکند. خودِسازگاری را می‌توان بـا یك فرمول بیان کرد. گودل نشان‌داد که اگـر بازی ریاضیات عملاً سازگار باشد، فرمول سازگاری را نمی‌توان در داخل خود ایـن بازی اثبات‌کرد. پس چگونه می‌توان اصـلاً به‌اثبات این سازگاری امید داشت؟

این جایگاهی است‌که اکنون برفرازآن ایستاده‌ایم. کاملاً واضح است‌که نظریهٔ ما درمورد دنیای واقعی توصیفی از پدیده‌هایی‌کـه می‌بینیم نیست، بلکه تنها یـك ساختمان نمادی‌جسورانه‌است. اما ممکن است مایهٔ شگفتی باشدکه ببینیم حتی ریاضیات نیزسرشتی این چنینی دارد. موفقیت روش ساختمنی ضـد اصالت ظاهری را نمی‌توان انکارکـرد. با این‌حال، ستونهایی‌که این روش واقعاً برروی آن ایستاده است، حتی در ریاضیات، هنوز در هاله‌ای از رمز و راز پوشیده است.

جنگ ریاضی دانشجو، ۸، ۱۳۷۱، ۳۹-۵۸

آرتورچارلز ورث

برهانی ازقضیهٔ گودل با اصطلاحات برنامه‌های کامپیوتری●

ترجمهٔ فرزان ریاضتی، فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشدریاضی دانشگاه آزاد اسلامی

بادر نظرگرفتن شرایطی‌اندك که یك دستگاه اصل موضوعی جهانی می‌بایست دارا باشد، به سادگی می‌توانیم ببینیم که وجود چنین دستگاهی امکان‌ناپذیر است.

چه‌خوب بوداگردستگاه اصل‌موضوعی منفردی می‌داشتیم که می‌توانستیم در آن تمامی‌انگاره‌های ریاضی‌رابی‌هیچ خللی‌سروسامان دهیم. اما به‌نظرمی‌رسدکه قضیهٔ برجستهٔ گودل‌نمایانگر آن‌است‌که وجود چنین‌دستگاهی‌امکان‌ناپذیر است. علاوه‌براین، نه‌تنها کسانی‌که درمبانی‌کار می‌کنند، بلکه کسانی‌که در جریان اصلی ریاضیات نیزهستند، آثار این محدودیت را روی نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو-فرانکل (نزدیکترین چیزی‌که به‌یك‌دستگاه اصل‌موضوعی جهانی داریم) به‌مرور بیشتر احساس می‌کنند.

یکی‌ازاهداف این مقاله، فراهم آوردن برهانی برای قضیهٔ گودل است‌که عمق کافی برای‌ایجاد درکی صحیح‌داشته‌باشد، ودرعین حال تا آنجاکه ممکن‌است نکات فنی‌کمی را شامل شود. در بررسی قضیهٔ گودل، طبیعی است‌که به‌دنبال راه گریزی در فرضیات باشیم تابتوانیم خواستهٔ خود رابرای یك‌دستگاه اصل‌موضوعی‌جهانی، تجدید حیات بخشیم. دومین هدف این‌مقاله، ارائهٔ فرضیات به‌شکلی‌آنچنان‌کلی است‌که، وجود چنین راه‌گریزی رامحال به‌نظرآورد.

بیایید کاررا بااین بیان‌شهودی ازقضیه شروع‌کنیم.

قضیهٔ عدم تمامیت‌گودل. فرض‌کنید S دستگاه صوری‌اصل موضوعی‌سازگار دلخواهی‌باشد که‌دارای یك‌زبان معقول، ومفهوم‌معقولی‌ازقضیه‌است، وبه‌اندازه‌کافی توانمند است. دراین صورت S کامل نیست، یعنی ادعایی مثل A در زبان مربوط به S وجود دارد که نه A و نه

● Charlesworth, Arthur, "A proof of Gödel's theorem in terms of computer programs," *Math.Mag*, May 1981,109-121.

نقیض A هیچکدام قضیه‌ای از S نیستند.

قبل از اینکه این قضیهٔ کلی را از نو به‌طرز دقیقتری بیان کنیم، می‌بایست نیاز به دستگاههای اصل موضوعی صوری و ماهیت آنها را بفهمیم.

دستگاههای اصل موضوعی صوری

ما همه با مفهوم "دستگاه اصل موضوعی" آشنا ییم: ایدهٔ اصلی این است که با یك دسته اشیاء تعریف نشدهٔ خاص و اصول موضوعی دربارهٔ این اشیاء شروع کنیم، و با اثبات قضایایی از این اصول به پیش رویم. در اثبات قضایا فقط از آن خواص این اشیاء می‌توانیم استفاده کنیم که در اصول موضوع ارائه شده‌اند؛ ما اجازه نداریم به معانی معمولی این اشیاء تکیه کنیم. البته این مفهوم از دستگاه اصل موضوعی یك تکامل طولانی داشته: که محرك اصلی آن نحوهٔ نگرش اقلیدس به هندسه بوده است. داوید هیلبرت در اواخر قرن نوزدهم، اولین کسی بود که مفهوم دستگاه اصل موضوعی را به شکل بالا بیان کرد و تأکید نمود که در یك نگرش اصل موضوعی به هندسه، باید بتوان اشیاء تعریف نشدهٔ "نقطه و خط و صفحه" را با "میز و صندلی و فنجان" عوض کرد، زیرا از معانی مرسوم این اشیاء استفاده نخواهد شد.

این مفهوم از دستگاه اصل موضوعی اگرچه در بسیاری حالات مفید است، یك نقطهٔ ضعف دارد. برای اثبات قضایا از روی اصول ملاك روشنی وجود ندارد تا یقین شود یك برهان دقیقاً چگونه چیزی است. مثلاً، چه چیزی مانع این است که کسی ادعای موجهی را بگیرد و برای "اثبات" آن بگوید "به وضوح از اصول نتیجه می‌شود"؟ در عرف ریاضی یك شهود رشد یافتهٔ پیراسته دربارهٔ اینکه چه چیزی قابل قبول است، از چنین ادعاهایی جلوگیری می‌کند. اما "فرهنگ" ریاضی متغیر است و این طور نیست که همواره هرچه که برای اقلیدس قابل قبول بوده است، برای هیلبرت هم قابل قبول باشد. حتی در فرهنگهای یکسان دوراز انتظار نیست که دو ریاضیدان بر سر اینکه آیا یك استدلال ارائه شده نیاز به دقیقتر شدن (با بیشتر وارد شدن در جزئیات و یا اگر این امکان‌پذیر نباشد، با یافتن راههای دیگر) دارد یا نه، با یکدیگر اختلاف نظر داشته باشند.

آنچه که لازم است، یك مفهوم روشن از "برهان" است که جنبه‌های اساسی این مفهوم مبهم را در خود داشته و در عین حال آنچنان دقیق باشد که واقعاً هر ریاضیدانی بتواند آن را قبول کند. اما جنبه‌های اساسی مفهوم مبهم برهان کدام‌اند؟ یك جواب می‌تواند این باشد که یك برهان، دنباله‌ای متناهی از گزاره‌ها است که به‌طور منطقی به‌هم وصل شده‌اند. پس، باید مفهوم "گزاره" و "به‌طور منطقی" را دقیق کنیم.

یك گزاره در یك برهان معمولی، عموماً، علاوه بر اصطلاحات ریاضی، شامل اصطلاحات منطقی خاصی مانند "نتیجه می‌دهد" و "وجود دارد" نیز هست. بنابراین، وقتی یك "گزاره" دقیقاً تعریف شده باشد، بایستی بتواند شامل اصطلاحات ریاضی و منطقی هر دو باشد. مرسوم است که نمادهای منطقی $\neg$، $\vee$، $\&$، $\rightarrow$، $\exists$، $\forall$ به‌ترتیب برای نمایش "نه"، "یا"، "و"، "نتیجه می‌دهد"، "وجود دارد"، "برای هر"، به‌همراه پرانتزها برای روشن کردن نحوهٔ استفاده از آنها

برهانی از قضیهٔ گودل با

به‌کار رود. چگونه می‌توان این علائم را به‌گونه‌ای تعریف کرد که معنای مورد نظر ما را داشته باشد؟ به‌غیر از آن دو تای آخر، این کار را می‌توان، مثلاً با استفاده از جدول ارزش، واقعاً انجام داد. اما به‌نظر نمی‌رسد که بشود علائم $\exists$ و $\forall$ را، به‌ویژه وقتی دامنهٔ آنها مجموعه‌های نامتناهی باشند، به‌شکلی اصیل تعریف کرد. به‌نظر می‌رسد که اول باید معنای اصطلاحاتی مانند "وجود دارد" و "برای هر" دانسته شده باشد. این شبیه مسئلهٔ تعریف "نقطه" در هندسه است. به‌یاد آورید که راه‌حل هیلبرت این بود که "نقطه" را تعریف نشده درنظر گرفت و معنای آن را منحصر به‌استفاده از اصول موضوع کرد. طبیعی است که می‌توانیم روش مشابهی در مورد $\forall$ و $\exists$ در پیش بگیریم. درواقع، چون تمامی اصطلاحات ریاضی و علائم منطقی $\forall$ و $\exists$، تعریف نشده خواهند ماند، مناسب است که به‌اندازهٔ کافی به اصول موضوع اضافه کنیم، به‌گونه‌ای که بقیهٔ علائم منطقی نیز تعریف نشده باشند. (اگر بخواهیم علائم منطقی دیگر را با استفاده از جدول ارزش تعریف کنیم، عملاً باید اصول موضوعی راجع به جدول ارزش یا برای اشیایی که با آن جدول را تعریف می‌کنیم، فراهم آوریم.) پس بالاخره ما به دستگاهی می‌رسیم که در آن معانی روزمرهٔ اصطلاحات منطقی و ریاضی، هیچ یك نمی‌توانند در برهان به‌کار روند؛ تنها شکل گزاره‌ها مهم است. به‌همین دلیل این گونه دستگاهها را دستگاههای اصل موضوعی "صوری" می‌خوانند، و مجموعهٔ نمادها مبنایی برای زبان صوری آن دستگاه تشکیل می‌دهد. (هیلبرت خودش از به‌وجود آورندگان چنین دستگاههایی در اوایل سدهٔ ۱۹۰۰ بود.)

یك بازی لغوی

در آینده، ما با دو سطح متفاوت از زبان و استنتاج سروکار خواهیم داشت. زبان فارسی[1] و روشهای معمولی ریاضی در یك سطح (که آن را "فرازبان" می‌نامیم) قرار دارند، و اینها برای بررسی سطح دوم که متشکل از گزاره‌ها و برهانهای دستگاههای اصل موضوعی صوری است، مورد استفاده قرار می‌گیرند. تمیز بین این دو سطح بدون داشتن افق فکری مناسب، ممکن است یك فریب به‌نظر آید.

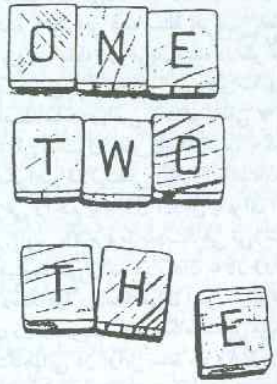
برای به‌دست آوردن بینشی مناسب، درنظر گرفتن نوعی از یك بازی آشنا، ما را یاری خواهد داد. در این بازی از شما خواسته می‌شود که یك کلمه را مانند "IRON" به یك کلمه مانند "GOLD" تبدیل کنید، به‌این ترتیب که در هر مرحله یك حرف را با حرف دیگری عوض کنید، به‌گونه‌ای که هر کلمه جدید پدید آمده در لغتنامه موجود باشد. به‌ویژه بیایید بازی زیر را در نظر بگیریم.

بازی با کلمات

فرض کنید که لغات ONE و TWO را به‌شما داده‌اند و از شما می‌خواهند که با ساختن فهرستی از لغات که در فرهنگ لغت یافت می‌شوند و آخرین لغت این فهرست THREE است، این دو لغت را به لغت THREE تبدیل کنید. برای قرار گرفتن یك لغت w در فهرست، این لغت یا باید یکی از لغتهای داده‌شدهٔ ONE یا TWO باشد و یا باید در قاعدهٔ زیر صدق کند:

۱. البته در متن اصلی، زبان انگلیسی آمده است.م.

اگر w_1 به‌فهرست اضافه‌شده باشد، باید ازقبل دولغت w_1، و w_2، در فهرست بوده‌باشند به‌گونه‌ای که هرحرف موجود در w، به‌جزیکی، درهمان جایی که در w ظاهر شده‌است در w_1 یا w_2 ظاهرشده باشد.



یك‌جواب برای این بازی، به‌صورت زیراست :

(۱) ONE یکی‌ازلغات داده شده

(۲) TWO یکی‌ازلغات داده شده

(۳) THE استفاده‌ازقاعده درمورد (۱) و (۲)

(۴) THEE استفاده‌ازقاعده‌در مورد (۱) و (۳)

(۵) TIE استفاده‌ازقاعده درمورد (۱) و (۴)

(۶) TIRE استفاده‌ازقاعده‌درمورد (۴) و (۵)

(۷) THREE استفاده‌ازقاعده درمورد (۴) و (۶)

شباهت زیادی بین این بازی و آن نوع ازدستگاه اصل‌موضوعی صوری که ما تشریح کردیم وجوددارد؛ به‌ویژه هنگامی‌که بازی را گسترش دهیم وبخواهیم بدانیم غیراز THREE چه لغات دیگری‌از ONE و TWO قابل‌استخراج‌اند. برای روشن‌کردن این‌شباهت، بگذارید بگوییم که‌فهرست بالایك" برهان" THREE ازاصول‌موضوع ONE و TWO، بااستفاده‌از قاعدهٔ مربوطه‌است. ازآنجا که برای THREE یك برهان موجود است، می‌توانیم بگوییم THREE یك "قضیه" است. بدیهی‌است که TIRE نیزیك قضیه است و قضایای ممکن زیاد

دیگری هم وجود دارند. توجه‌کنیدکه مفهوم برهان دراین بازی به‌روشنی تعریف شده‌است وکاملاً مبتنی برشکل لغات است؛ ما در این بازی برمعنای لغات متکی‌نیستیم.

یك دید خوب این است که به‌این‌بازی به‌صورت یك‌بازی‌بسته‌بندی شده دریك جعبهٔ مقوایی‌همانند یك‌بازی‌جدول‌معمولی‌نظرکنیم که درآن هرحرف‌الفبا روی‌یك مربع‌چوبی حك شده‌است، وقاعدهٔ‌بازی‌هم درپوشش داخلی‌جعبهٔ آن چاپ‌شده‌است. یك‌فرهنگ لغت نیزباید درجعبه‌گذاشته شود تادقیقاً لغات قابل‌قبول مشخص‌شوند. دراین صورت به‌آسانی می‌توان ثابت کردکه "دراین بازی با لغات فقط تعدادی متناهی قضیه وجود دارد". (زیرا تعداد لغات موجود درفرهنگ‌لغت متناهی‌است وهرقضیه دراین‌بازی، لغتی‌درفرهنگ لغت‌است.) حکم‌اخیرداخل گیومه را می‌توان قضیه‌ای در فراریاضیات خواند. بدیهی است‌که این یك قضیه دربازی‌بالغات نیست‌زیراکه خودلغتی درفرهنگنامه نیست. همچنین‌توجه‌کنیدکه‌برهان این ادعا درسطح فراریاضی قرار دارد؛ واین برهان لازم نیست درشرایط برهان دربازی بالغات صدق‌کند.

مثالی از یك دستگاه اصل موضوعی صوری

یادآوری می‌کنیم که یك‌راه توصیف مفهوم معمولی برهان‌این‌است‌که بگوییم برهان‌فهرستی متناهی از گزاره‌ها است‌که به نحوی منطقی به‌هم وصل شده‌اند. درحوزهٔ دستگاههای اصل‌موضوعی‌صوری‌می‌توانیم عبارت"به‌نحومنطقی"رادقیقاً تعریف‌کنیم، به‌این‌صورت‌که هرگزاره دریك برهان یایکی ازاصول موضوع باشد ویا ازگزاره‌های‌قبلی موجود دربرهان بایکی‌از قواعدستگاه، که"قواعد استنتاج"نام‌دارند، استنتاج‌شود. نگاه به‌یکی‌ازاین‌گونه دستگاههای صوری روشنگرخواهد بود.

آن نوع از زبان صوری‌که ما در این مثال استفاده می‌کنیم، نمونه‌ای‌از آن زبانهایی است‌که عموماً دراثبات قضیهٔ‌گودل به‌کار می‌روند. بااین‌حال، مادراین مقاله این‌نوع زبان‌را فقط برای مقاصد روشنگرانه به‌کارمی‌بریم؛ فرضیات به‌کاررفته درنسخهٔ کلی قضیهٔ گودل‌که آن‌را دراینجا درنظرمی‌گیریم، به‌وسیلهٔ طیف وسیعی از زبانهای صوری‌براورده می‌شوند.

مثال . اصول‌موضوع دستگاه صوری S_0 به‌قرار زیرند:

$$\forall x(x+0=x)\ \&\ \forall x(0+x=x)\rightarrow\exists y(\forall x(x+y=y+x)) \qquad (1)$$

$$\forall x(x+0=x), \qquad (2)$$

$$\forall x(0+x=x). \qquad (3)$$

قواعد استنتاج عبارت‌اند از

۱. اگر A و B درفهرست باشند، آنگاه $A\&B$ را نیز می‌توان درفهرست گذاشت.

۲. اگر A و $A\rightarrow B$ درفهرست باشند، آنگاه B رانیزمی‌توان درفهرست گذاشت.

۳. اگر A درفهرست باشد و B یك‌گزارهٔ صوری‌در S_0 باشد، دراین‌صورت $A\vee B$ رانیزمی‌توان درفهرست گذاشت.

درتشریح قواعد استنتاج، حروف A و B (که در زبان صوری نیستند) برای نمایش گزاره‌های صوری درزبان صوری به‌کارگرفته شده‌اند. این‌مشابه‌استفاده ازحروف w_1، w_2، و w برای‌نمایش لغات درتشریح قاعدهٔ بازی دربازی بالغات است.

یك مثال ازیك قضیه در دستگاه S_0، $\exists y(\forall x(x+y=y+x))$ است زیرا این گزاره‌آخرین عنصردربرهان زیراست:

(۱) اصل۲ $\forall x(x+0=x)$

(۲) اصل۳ $\forall x(0+x=x)$

(۳) قاعدهٔ ۱ واستفاده‌از (۱) و (۲) $\forall x(x+0=x)\ \&\ \forall x(0+x=x)$

(۴) اصل۱ $\forall x(x+0=x)\ \&\forall x(0+x=x) \rightarrow \exists y(\forall x(x+y=y+x))$

(۵) قاعدهٔ ۲ واستفاده از (۳) و (۴) $\exists y(\forall x(x+y=y+x))$

زبان S_0، با مشخص کردن نمادهای آن وسپس تعیین اینکه چه عباراتی (دنباله‌های متناهی از نمادها) گزارهٔ صوری درنظر گرفته می‌شوند، معین می‌شود. درسطح فرارياضی، هرگزارهٔ صوری دارای خاصیت مهم زیر است: هرگاه به نمادهای S_0 معنای مورد نظر را بدهیم، یك گزارهٔ صوری و نقیض آن متناظر با جملاتی در زبان فارسی می‌شوندکه روشن وبدون‌ابهام‌اند ویکی‌از آنهاصادق‌است. مثلا، هریك‌ازعبارات زیرمی‌تواند یك‌گزارهٔ‌صوری درنظرگرفته شود: عبارت $\forall x(x+0=x)$ (که‌قصد داریم به‌معنای این‌باشدکه "برای هر عدد طبیعی x، x به اضافهٔ صفر برابر x است")، عبارت $1+1=1$ ("یك به اضافهٔ یك مساوی‌یك‌است")، وعبارت $\exists y(w=2y) \rightarrow 8=w$ ("اگر w مساوی ۸ باشد، آنگاه‌یك‌عدد طبیعی‌مانند y هست‌که w مساوی دوبرابر y است"). ازطرف دیگر، عبارات $x+y=y$ ("xبه‌اضافهٔ y مساوی y است") و $\forall x=+$ ("مساوی به‌اضافهٔ x برای هر") را نمی‌توان به‌عنوان گزارهٔ صوری درنظرگرفت.

البته، ماتأکیدکرده‌ایم که هنگام‌کار دریك دستگاه صوری‌نباید برمعناهای‌موردنظر تکیه کرد. بنابراین برای تعیین‌اینکه کدام‌یك ازعبارات گزارهٔ صوری‌هستند، لازم‌است‌که صرفاً ازشکل آنها استفاده‌کنیم. نیازی‌نیست‌که یك "لغتنامه"، که‌شامل همهٔ گزاره‌های صوری زبان باشد، ارائه‌دهیم؛ همهٔ آنچه‌که نیاز داریم، الگوریتمی برای تحقیق گزارهٔ صوری بودن یا نبودن‌یك عبارت‌خاص مفروض‌است. ازآنجاکه‌ما از S_0 فقط برای‌مقاصد روشنگرانه‌استفاده می‌کنیم، لزومی‌نداردکه واقعاًچنین الگوریتمی رابرای‌آن ارائه‌کنیم. (برای کسانی‌که می‌خواهند یك‌ایدهٔ‌کلی داشته‌باشند: این‌الگوریتم دروهلهٔ اول‌بااستفاده ازیك‌روش استاندارد، مشابه آنچه‌که دربخش ۶.۶ از [۹۱] آمده است، تحقیق‌می‌کندکه عبارت "درست‌ساخت" باشد. چنین‌روشی مشابه‌روشی‌است‌که کامپیوترها به‌کارمی‌برند تاتحقیق‌کنند عبارتهایی‌مانند $A=(B+C)*D$ برای زبانهای بیسیك وفرترن درست ساخت‌اند، اما عبارتهایی‌مانند $A=(B+C)/*D$ چنین‌نیستند. بعد، الگوریتم‌باید تحقیق‌کندکه‌همهٔ متغیرها، مگراحتمالا

یکی، توسط یك‌سور محدود شده‌اند. اگرمتغیری پیدا شدکه توسط سوری محدود نشده‌بود، مانند w در $\exists y(w=2y) \rightarrow 8=w$، دراین‌صورت باید توسط یك فرض مقدماتی صوری مانند "$8=w\rightarrow$" محدود شده باشد. توجه‌کنیدکه هرعبارت تأیید شده توسط‌این الگوریتم باید دارای خاصیت‌مهم گزاره‌های صوری مذکور دربند پیش باشد. ازطرف دیگر، لزومی ندارد که هرعبارت S که این خاصیت را دارد توسط این الگوریتم‌پذیرفته شود).

قبل از اینکه بحث خود را درمورد S_0 رها کنیم، می‌خواهیم ببینیم که S_0 به‌اندازهٔ کافی اصول موضوع و قواعد استنتاج ندارد تا معانی نمادهایش را به‌طور منحصربفردی محدود کند. از یك طرف، می‌توانیم نمادهای S_0 را به‌طریق معمولی تعبیرکنیم و آنها را بیانگر جمع اعداد طبیعی بدانیم. چنین تعبیری، یك تعبیر رضایتبخش است زیرا هر یك ازفضایای آن صادق خواهند بود؛ یعنی هرقضیه‌ای تحت این تعبیرنظیر یك جملهٔ صادق در زبان فارسی است. (برای دیدن اینکه چرا هرقضیه‌ای صادق خواهد بود توجه‌کنیدکه‌همهٔ اصول موضوع صادق‌اند و هر قاعدهٔ استنتاج صدق را حفظ می‌کند، یعنی هرقاعده وقتی در موردیك فهرست ازگزاره‌های صوری صادق به‌کاربرده شود، فقط گزاره‌های صوری‌صادق به‌فهرست اضافه می‌کند. پس نتیجه می‌شودکه هرگزارهٔ صوری دریك‌برهان صادق است، بنابراین همهٔ قضایا صادق خواهند بود.) ازطرف دیگر، می‌توانیم + را به‌معنای ضرب اعداد طبیعی، ۰ را به‌معنای عدد یك، & را به‌معنای "نتیجه می‌دهد"، $\rightarrow$ را به‌معنای "و" وبقیه نمادها را به‌معنای معمولی خودشان تعبیر کنیم. این‌تعبیر ازنمادهای S_0نیزرضایتبخش است، زیرا دوباره همهٔ قضایا صادق خواهند بود (زیرا اصول موضوع صادق‌اند و قواعد استنتاج صدق را حفظ می‌کنند).

شرایط یك دستگاه اصل‌موضوعی صوری معقول S

به‌جای آنکه محدودیتهای سختی برای یك دستگاه اصل موضوعی S قائل شویم تا کاری‌کنیم‌که قضیهٔ‌گودل‌یك نتیجهٔ نه‌چندان فراگیر به‌نظر آید، روش مافهرست‌کردن‌شرایطی کلی‌است‌که به‌نظرمی‌رسد برای اثباتهای ریاضی‌طبیعی‌اند. برای‌این‌کار باید ماهیت برهان‌های غیرصوری را در ذهن‌خود داشته باشیم. مثلا، از آنجاکه ما عادت‌کرده‌ایم برهانهای غیرصوری خودرا به‌زبان فارسی، که‌کمترازصد نماد دارد، بنویسیم، طبیعی است‌که تعداد نمادهای زبان صوری مربوط به S را متناهی درنظر بگیریم. (در شمارش تعداد نمادهای زبان فارسی‌که‌به‌صد نمی‌رسد، ما اعداد ونمادهای نقطه‌گذاری را نیز به‌حساب آورده‌ایم، اما عمدتاً آن نمادهای ریاضی را که به‌طریق خاصی تعریف می‌شوند، محسوب نکرده‌ایم. این‌نوع نمادهارا همواره می‌توان به‌عنوان یك‌کوتاه‌نوشت درزبان فارسی در نظرگرفت.)

شرط ۱. تعداد نمادهای زبان‌صوری مربوط به‌S متناهی است. یك‌عبارت S، دنباله‌ای ناتهی و متناهی از نمادهای S است که درآن یك نماد می‌تواند چندبار هم تکرار شود. هرگزارهٔ صوری یك عبارت‌است و الگوریتمی مانند α، برای تحقیق اینکه یك‌عبارت خاص

داده شده گزارهٔ صوری است یا نه، وجود دارد.

اگر چه دستگاه صوری S_0 تعدادی متناهی اصل موضوع داشت، دستگاههای صوری معقولی هم هستند که بینهایت اصل موضوع دارند. مثلا، ممکن است بخواهیم گزاره‌هایی صوری به شکل کلی $A\&B \rightarrow A$، که در آن A و B گزاره‌هایی صوری‌اند، اصل‌موضوع باشند. اگر S مجاز به‌داشتن بینهایت اصل‌موضوع باشد، باز هم ما باید بتوانیم بگوییم‌چه‌عباراتی اصل موضوع‌اند و کدامها نیستند. بنابراین باید توقع داشته باشیم الگوریتمی برای تحقیق اینکه یك عبارت خاص داده شده اصل موضوع است یا نه، وجود داشته باشد. برای داشتن کلیت بیشتری فراتر از S_0 الزام نمی‌کنیم که اصول موضوع S حتماً از گزاره‌های صوری باشند، اگرچه قضایا باید از گزاره‌های صوری باشند.

قواعداستنتاجی که‌در S گذارده‌شده‌اند نیز بایدصریح‌وروشن‌باشند، به‌گونه‌ای که‌صحت اضافه‌کردن یك‌عبارت جدیدبه‌یك برهان‌رابتوان بایك‌الگوریتم تحقیق کرد. این‌شرایط‌روی اصول‌موضوع وقواعداستنتاج رامی‌توان به‌این‌صورت خلاصه کرد که الزام‌کنیم الگوریتمی برای تحقیق اینکه یك فهرست از عبارات، برهان است یا نه، وجود داشته باشد.

شرط ۲. یك‌قضیه‌از S **گزاره‌ای صوری** است‌که درآخرین‌سطریك برهان‌ظاهرشده باشد. هربرهان فهرستی متناهی ازعبارات S است والگوریتمی مانند α_2 برای تحقیق اینکه یك فهرست متناهی داده‌شده از عبارات، برهان است یا نه، وجود دارد.

مفهوم‌نفی‌درریاضیات غیرصوری مفهومی‌اساسی‌است، وبنابراین طبیعی‌است‌که‌الزام کنیم دستگاه‌صوری S طریقی‌برای‌نمایش‌نفی‌داشته‌باشد. نیازی‌نیست‌که نمادمعمول $\neg$ برای نقیض به کاربرده شود؛ نقیض یك گزارهٔ صوری می‌تواند یك تجدید آرایش پیچیده ازآن گزاره‌باشد، ونه‌صرفاً همان‌گزاره بایك‌علامت $\neg$ درجلوی‌آن. همهٔ آنچه‌که واقعاً ضروری است، داشتن الگوریتمی برای‌ساختن این‌تجدید آرایش‌است.

درشرط بعدی به‌معانی‌ممکن نمادهای S می‌پردازیم. درست همانطور که مامی‌توانیم آن بازی با لغاتی رادرنظر بگیریم که اصول‌موضوعش اسامی فلزات باشند، برای قراردادن شرایطی روی S می‌توانیم ازمعانی‌استفاده‌کنیم. جاهایی‌که‌نباید برمعانی تکیه‌کرد آنجاهایی است‌که داریم واقعاً دریك‌بازی با لغات یایك دستگاه صوری، برهان‌می‌سازیم.

شرط ۳. الگوریتمی مانند α_3 هست‌که هرگزارهٔ صوری S رابه نقیضش که‌آن نیز گزاره‌ای صوری در S است، تبدیل‌می‌کند. درهرتعبیری‌ازنمادهای S که همهٔ قضایا راصادق‌می‌کند، وبه‌ازای هرگزارهٔ صوری A بانقیض B، یا A صادق است، یا B، ولی نه هردو.

تعریف. یك دستگاه اصل موضوعی صوری S را **سازگار** می‌گوییم هرگاه تعبیری از نمادهای آن وجود داشته باشدکه همهٔ قضایای آن را صادق کند، درغیر این صورت S را **ناسازگار** می‌گوییم.

یادآوری‌می‌کنیم که هدف‌ازاستفاده ازدستگاههای صوری طرح دوبارهٔ استدلالهای غیرصوری در یك چارچوب دقیق است. بنابراین، عملا آن‌دستگاه صوری انتخاب می‌شود

که انتظار می‌رود قضایای آن با تعبیردرآن شاخه ازریاضیات غیرصوری‌که درذهن داریم، صادق‌باشند. (البته ممکن‌است ارائهٔ دلیل قانع‌کنندهٔ درستی مبنی براینکه یك‌دستگاه صوری واقعاً این ویژگی‌را دارد مشکل‌باشد؛ ما به‌این نکته‌دربخش‌باعنوان "استفاده ازشرایط" باز-خواهیم‌گشت.)

توجه‌داشته باشیدکه اگر S سازگارباشد ودر شرط ۳ صدق‌کند، هیچ‌گزارهٔ صوریی مانند A وجودندارد‌که هم A وهم‌نقیض A قضیهٔ S باشند.

تعریف. یك‌دستگاه اصل موضوعی صوری S را **کامل** گوییم هرگاه برای هر گزارهٔ صوری A در S، یا A ویانقیض A قضیهٔ S باشند. درغیراین‌صورت S را **غیر کامل** گوییم.

زبان صوریی‌که برای شبیه‌سازی چیزهایی فراتراز بخش‌کوچکی ازریاضیات‌غیر-صوری به‌کارمی‌رود، بایدتوانایی نمایش هر عددطبیعی‌خاص‌راداشته‌باشد. بنابراین، دستگاه صوری S بایددارای الگوریتمی برای ساختن نمادی مناسب برای هرعدد باشد، حال فرقی نمی‌کندکه این‌نوشتارچگونه باشد: دهدهی، دودویی، چوب‌خطی، یاحتی فارسی (که درآن ۱۷۷۶ نوشته‌می‌شود "یك‌هزاروهفتصد وهفتاد وشش").

شرط ۴. الگوریتمی مانند α_4 هست که با دادن یك عدد طبیعی، نمادی برای آن در S می‌سازد. نمادهرعدد یك‌عبارت در S است، واگرنماد یك‌عدد خاص‌دریك گزارهٔ صوری F بانماد هر عدد دیگری جایگزین شود، حاصل یك گزارهٔ صوری S است.

این‌حقیقت که‌نماد اعدادمتفاوت در S بایدمتفاوت‌باشد، ازآخرین‌شرط نتیجه‌می‌شود.

یك‌روش استاندارد درریاضیات غیرصوری، اثبات نتایجی مانند این است‌که "اگر x عدد زوجی باشد، آنگاه x^2 زوج است"، وسپس استفاده از "اگر ۱۷۷۶ زوج باشد، آنگاه 1776^2 زوج است" و "۱۷۷۶ زوج است"، وگرفتن این نتیجه‌که "1776^2 زوج است". باالهام ازاین‌روش، دستگاه‌صوری S بایددارای عباراتی‌مشابه عبارات فارسی "x عددی زوج‌است" و "a^2عددی مربع‌است" باشد، که خودشان‌گزاره‌های صوری‌نیستند، اما با جایگذاری نماد یك عددطبیعی درآنها مبدل به‌یك‌گزارهٔ صوری می‌شوند. مثلا، در عبارات $x = w \rightarrow \exists y(w \cdot w = 2y)$ و $x = w \rightarrow \exists y(w = 2y)$ در زبان مربوط به S_0، وقتی ۱۷۷۶ را جایگزین x کنیم، گزاره‌های صوری $1776 = w \rightarrow \exists y(w = 2y)$ و $1776 = w \rightarrow \exists y(w \cdot w = 2y)$ به‌دست خواهندآمد. این‌گونه عبارات را "گزاره‌نماهای عددی"می‌نامیم. برای‌سادگی و کلیت، شرایطمان رابدون‌ارجاع به‌مفهوم متغیر بیان‌می‌کنیم؛ درنتیجه، تعریف ما ازگزاره‌نماهای عددی این امکان را فراهم می‌آورد که در یك دستگاه صوری دنبالهٔ علایمی به‌صورت "این یك عدد زوج است" به‌عنوان یك گزاره نمای عددی باشد. (برای‌کسانی‌که بامنطق محمولات آشنایی‌دارند خاطرنشان‌می‌کنیم که $1776 = w \rightarrow$ ابزار مناسب و راحتی است تا مجبور نشویم دربارهٔ چیزهایی مانند "فرمول حاصل از $\exists y(w \cdot w = 2y)$ وقتی همهٔ موارد آزاد w را با ۱۷۷۶ عوض‌می‌کنیم"، صحبت‌کنیم.)

تعریف. فرض‌کنید S یك‌دستگاه اصل موضوعی صوری و F یك عبارت آن‌باشدکه

گزارهٔصوری‌نیست. دراین‌صورت F یك **گزاره‌نمای عددی** است هرگاه دارای‌این‌خاصیت باشد: F بایك‌عبارت E آغازمی‌شود، به‌طوری‌که اگر نماد عدد یك در S را جایگزین E کنیم، حاصل یك‌گزارهٔ صوری S شود.

علامت‌گذاری. فرض کنید F یك‌گزاره‌نمای عددی، n یك عدد طبیعی، و E' کوتاهترین عبارت‌درون F باشدکه می‌تواند نقش E رابازی‌کند. دراین‌صورت منظور از $F(n)$ آن عبارتی‌است‌که ازقراردادن نماد n در S به‌جای E' به‌دست‌می‌آید.

توجه‌کنیدکه با این فرض‌که S در شرط ۴ صدق می‌کند، عبارت $F(n)$ یك گزارهٔ صوری S است. به‌یاد داشته‌باشیدکه F و $F(n)$ نمادهایی درسطح فرازیاضی‌هستند نه‌نماد-هایی دردستگاه S. این‌مطلب راباستفاده از w_1، w_2، و w درتشریح بازی‌بالغات، واستفاده از A و B برای‌تشریح قواعداستنتاج S_0 مقایسه‌کنید.

دستگاههای صوری به‌اندازهٔ معقول قوی

راههای متعددی برای دقت بخشیدن به‌عبارت "به اندازهٔ معقول قوی" وجود دارد. ما این مطلب‌را برحسب قابلیت S برای بررسی‌خروجی برخی برنامه‌های کامپیوتری ساده تعریف خواهیم‌کرد. برنامه‌های موردنظرما آنهایی‌هستندکه فقط یك عددرا به‌عنوان ورودی‌گرفته و نهایتاً باچاپ "YES" یا "NO" به‌عنوان‌خروجی‌متوقف می‌شوند. برای‌مشخص‌بودن وضع، فرض‌کنید برنامه‌ها به‌زبان بیسیك نوشته شده‌اند. (فقط بااندکی تغییر دربخشمان می‌توانیم به‌جای بیسیك اززبانهای فرترن، پاسکال، ویا هرزبان عمومی کامپیوتری دیگری هم‌استفاده کنیم.)

توجه‌داشته باشیدکه برای‌هرچنین خروجی‌ای یك‌برهان غیرصوری وجوددارد: فقط مجبوریم مراحل‌اجرای برنامهٔ کامپیوتررا بررسی‌کنیم، بااین فرض‌که تضمین شده است با ورودی داده‌شده، این‌بررسی پس‌ازطی مراحل‌متناهی پایان می‌یابد. بنابراین همهٔ آن چیزی که لازم‌داریم این‌است‌که S مشابه این‌برهانهای غیرصوری رابرایمان فراهم سازد.

شرط ۵. برای هر برنامهٔ P به‌زبان بیسیك (ازنوعی که به‌عنوان ورودی فقط یك‌عدد را می‌گیرد ونهایتاً به‌عنوان خروجی باچاپ YES یا NO متوقف می‌شود) یك گزاره‌نمای عددی F_P در زبان صوری‌مربوط به S هست‌که برای هرعدد طبیعی n، برنامه P با ورودی n، YES چاپ می‌کند اگر و فقط اگر $F_P(n)$ قضیه‌ای در S باشد.

برای‌روشن‌شدن رابطهٔ‌بین P و F_P فرض‌کنید P برنامهٔ زیرباشد (که به سؤال "آیا n زوج است؟" پاسخ می‌دهد).

```
10 INPUT N
20 IF N/2≠INT(N/2) THEN 50
30 PRINT "YES"
```



```
40 STOP
50 PRINT"NO"
60 STOP
70 END
```

اگرزبان S مانند S_0 باشدگزاره‌نمای عددی F_P که نمایشگر P است‌می‌تواند مثلا عبارت $x=w\rightarrow\exists y(w=2\cdot y)$ باشد. بافرض‌اینکه‌نماداعدادر S دهدهی‌است، $F_P(8)$ عبارت $8=w\rightarrow\exists y(x=2\cdot y)$ خواهدبود. شرط ۵ ایجاب‌می‌کندکه S قدرت‌کافی برای‌اثبات $F_P(8)$ وبه‌طورکلی $F_P(n)$ برای دقیقاً nهای زوج را دارد.

به عنوان مثالی دیگر، برنامه‌ای را درنظر بگیرید که به سؤال "آیا N اول است؟" پاسخ می‌دهد. چنین برنامه‌ای می‌توانـد مشابه برنامهٔ قبل باشدکه خط شمارهٔ ۲۰ باخطهای زیرتعویض شده‌است.

```
20 I=2
22 IF N=I THEN 30
24 IF N/I=INT(N/I) THEN 50
26 I=I+1
28 GO TO 22
```

اگـر زبان S مانند S_0 باشد، گزاره‌نمای عددیی کـه می‌توان‌برای برنامهٔ P نامزدکرد، می-تواند مثلا

$$x=w\rightarrow(\forall y((1<y\&y<w)\rightarrow\neg\exists z(z\cdot y=w)))$$

باشد. بنابراین $F_P(8)$ بااین فرض‌که نماد اعداد در S دهدهی‌است، عبارت است‌از

$$8=w\rightarrow(\forall y((1<y\&y<w)\rightarrow\neg\exists z(z\cdot y=w)))$$

شرط ۵ ایجاب‌می‌کندکه در S برهانی‌برای $F_P(8)$ وجودندارد، زیرا $F_P(n)$ دقیقاً وقتی یك قضیه است‌که n اول‌باشد.

استفاده ازشرایط

شرایط ۱تا۵ شرایطی طبیعی‌اندکه یك‌دستگاه‌صوری S، اگرقراراست‌که هم‌دقیق‌باشد وهم نمونه‌هایی‌ازفنون مورد استفاده درریاضیات غیرصوری راگرد هم بیاورد، باید واجد آنها باشد. اگربخواهیم به‌یك دستگاه صوری‌که واجدشرایط ماست مانند یك‌بازی‌بسته‌بندی‌شده،

همانند بازی بالغات دریك‌جعبه ازکارتها نگاه‌کنیم، جعبه بایدشامل‌تعدادی متناهی‌نماد روی مربعهای چوبی‌باشد وما باید مجازباشیم‌که به‌هر میزان‌که نیازداریم ازاین نمادها برداریم. جعبه همچنین باید دارای‌توضیحاتی راجع‌به‌الگوریتمهای α_1، α_2، α_3، و α_4 باشد. اثبات این‌که یك دستگاه‌صوری S واقعاً سازگار است و شرایط ۱ تا ۵ را برآورده می‌سازد، ممکن‌است واقعاً مشکل‌باشد. اما، اگرمقصود ما فهم محدودیتهایی باشدکه قضیهٔ‌گودل آشکار می‌سازد، این مشکل به ما مربوط نمی‌شود. به‌سخنی نه چندان دقیق: اگر S در این شرایط صدق نکند، ارزش محدودی دارد، اما اگر S در این شرایط صدق‌کند، آنگاه قضیهٔ گودل می‌گویدکه S به‌خاطر ناتمامیتش محدود است.

حال بیایید ببینیم‌که چگونه الگوریتمهای داده شده درشرایط، می‌توانند باهم‌ترکیب شوند و دوالگوریتم دیگر به‌دست دهند.

لم ۱. فرض‌کنید S دستگاه اصل موضوعی صوری سازگار دلخواهی باشدکه در ویژگیهای معقولیت داده شده در شرایط ۱ تا ۵ صدق می‌کند؛ دراین صورت یك الگوریتم ϕ هست که به‌طور کامل‌همهٔ قضایای S را تولید می‌کند، ویك الگوریتم ψ هست که همهٔ‌گزاره‌های صوری به شکل $F_1(1)$، $F_2(2)$،... را تولید می‌کند، که فهرست F_1، F_2،... شامل همهٔ گزاره‌نماهای عددی S است.

برهان. بنابه‌شرط اول زبان صوری S فقط تعدادی متناهی علامت دارد. بنابراین یك‌الگوریتم β_1 هست‌که کلیهٔ عبارات E_1، E_2، E_3،... را تولید می‌کند. (ابتدا همهٔ‌دنباله‌های یك‌علامتی، سپس همهٔ دنباله‌های دوعلامتی وبه‌همین ترتیب تا به‌آخر.)

با استفاده از الگوریتم β_1 می‌توان یك‌الگوریتم β_2 ساخت‌که همهٔ فهرستهای متناهی L_1، L_2،... ازعبارات را به‌صورت زیرتولیدکند. الگوریتم β_2 به‌ازای هرعدد طبیعی n یك‌مرحله دارد؛ درمرحلهٔ nام به‌سادگی همهٔ فهرستهای با طول کوچکتر یامساوی n را که ازعبارات E_1، E_2، ...، E_n تشکیل شده‌اند، تولید می‌کنیم. با استفاده از الگوریتم α_2 داده شده درشرط دوم، می‌توانیم هر L_i را که برهان نیست حذف کنیم و درنتیجه یك الگوریتم β_3 به‌دست می‌آیدکه دقیقاً کلیهٔ برهانهای P_1، P_2،... موجود در S را تولید می‌کند. با اصلاحاتی ساده در β_3 (با استفاده از الگوریتم α_1 داده شده درشرط اول) می‌توانیم یك الگوریتم ϕ به‌دست آوریم‌که آخرین‌گزارهٔ صوری هر برهان P_i را که به یك‌گزارهٔ صوری ختم می‌شود، بیرون دهد؛ بدیهی است‌که ϕ دقیقاً همهٔ قضایای Sرا تولید می‌کند.

باترکیب الگوریتم β_1 و الگوریتمهای α_1 و α_4 که به‌ترتیب درشرایط ۱ و۴ داده شده‌اند، می‌توانیم یك الگوریتم β_4 به دست آوریم‌که‌کلیهٔ گزاره‌نماهای عددی F_1، F_2، F_3،... را تولیدکند. (الگوریتم β_4 روی هرعبارت E_i، درست پس ازآنکه توسط β_1 تولید شد، آزمایش زیررا انجام می‌دهد: ابتدا α_1 روی E_i به‌کار بسته می‌شود. اگر نتیجهٔ کار این‌بودکه E_i گزارهٔ‌صوری‌است، آنگاه β_4، E_i را بیرون‌نمی‌دهد. درغیر این‌صورت β_4 تعداد نمادهای E_i، یعنی m_i، را می‌شمارد و باتغییر j از ۱ تا m_i، نماد عدد ۱ در S

را جایگزین زیر دنبالهٔ متشکل از j نمادا‌ول E_i می‌کند. اگرحاصل یکی‌ازاین‌جایگزینیها توسط α_1 گزارهٔ صوری تشخیص داده شود، β_4، E_i را بیرون می‌دهد؛ درغیراین‌صورت β_4، E_i را بیرون نمی‌دهد.)

به‌آسانی دیده می‌شودکه چگونه می‌توان با استفاده از α_4 اصلاحاتی در β_4 به‌عمل آورد تا یك الگوریتم ψ به‌دست‌آیدکه گزاره‌های صوری $F_1(1)$، $F_2(2)$، $F_3(3)$،... را تولیدکند. □

فرضیه چرچ[1]

فرض‌کنید یك دستگاه صوری S که درشرایط ۱ تا ۵ صدق می‌کند، به‌همراه‌الگوریتمهایی که دراین شرایط تضمین شده‌اند، داده شده است. آیا الگوریتم ϕ را که‌همهٔ قضایای S را تولید می‌کند، می‌توان به‌صورت یك برنامه به‌زبان بیسیك به‌اجرا در آورد؟

اشکال کوچکی‌که ممکن است درضمن نوشتن چنین برنامه‌ای به‌وجود آید این است که همهٔ نمادهای S احتمالا جزء نمادهای بیسیك نیستند؛ این‌مشکل را می‌توان به‌آسانی با کدگذاری نمادهای S برطرف ساخت. (یك‌کدگذاری ساده می‌تواند این باشدکه نمادهای S را باماتریسهای‌مربعی متشکل‌ازصفرها ویك‌ها‌که شبیه خودآن نمادهاباشند، نمایش‌دهیم. به‌این‌ترتیب $\neg$ را باید به‌صورت ماتریسی‌کدگذاری‌کردکه سطر بالایی وآخرین ستون سمت راست آن همگی یك وبقیهٔ درایه‌ها صفر باشند. تعداد نمادهای S وشباهت آنها با یکدیگر، تعیین‌کننده‌بزرگی این‌ماتریسهاست تابرنامه بتواند بین‌نمادهای S فرق‌بگذارد.) مشکل دیگراین است‌که دربه‌اجرا درآوردن ϕ حافظهٔ زیادی برای حفظ نتایج میانی‌لازم است؛ برای حل این مشکل می‌توانیم تصورکنیم که درطی اجرای برنامه هرجا که لازم شود، حافظهٔ کامپیوتر می‌تواندگسترش یابد (مثلا با اضافه‌کردن چند دیسك مغناطیسی تازه).

وقتی برای نمادهای S کدهایی را انتخاب‌کرده و روشی را برای‌کارکردن‌باحافظه درپیش‌گرفته باشیم، نوشتن یك برنامهٔ بیسیك برمبنای الگوریتم ϕ که همهٔ قضایای S را تولیدکند، امکان‌پذیر خواهدبود. درواقع، چنین‌برنامه‌ای را می‌توان برای همهٔ‌دستگاههای صوری‌که تاکنون شناخته شده‌اند و در شرایط ۱ تا ۵ صدق می‌کنند، نوشت. سؤالی که ما به‌آن علاقه‌مندیم این‌است‌که آیا این عمل برای هر دستگاه صوری دلخواه‌که درشرایط ۱ تا ۵ صدق می‌کند، قابل انجام است یانه. باتوجه به‌ساختن الگوریتم ϕ این‌سؤال‌تبدیل به‌این پرسش می‌شودکه آیازبان بیسیك برای‌برنامه‌کردن الگوریتمهای α_1 و α_2 به‌اندازهٔ کافی قدرت دارد یاخیر. از آنجا که تضمین شده است هردوی این الگوریتمها (همچنین α_3 و α_4). باهرورودی بالاخره به‌اتمام می‌رسد، در واقع پرسش این است‌که آیا یك‌نتیجهٔ ریاضی وجود داردکه اطمینان‌دهد هرالگوریتمی‌که بالاخره خاتمه‌می‌یابد قابل برنامه‌شدن درزبان بیسیك است، یانه.

1. Church

اگر بخواهیم دقیق باشیم، برای داشتن چنین نتیجه‌ای باید یك مفهوم دقیق را جایگزین مفهوم مبهم الگوریتم کنیم. رهیافتهای متعددی بـه‌تعریف دقیق مفهوم الگوریتم وجود دارد که همگی به‌مفهوم توابع بازگشتی[1] می‌رسند. می‌دانیم که هر تابع بازگشتی در زبان بیسیك قابل برنامه شدن است. (برای دیدن توضیحاتی ساده دربـارهٔ این موضوع، به‌همراه یك تعریف از بازگشت، به‌شکل ۱ مرجع [۳] مراجعه کنید.) بنابراین هر الگوریتمی در زبان بیسیك قابل برنامه شدن بود هرگاه می‌دانستیم که هر الگوریتم متناظر بایك تابع بازگشتی است؛ این ادعا را **فرضیهٔ چرچ** می‌نامند، زیرا آلونزو چرچ یکی از اولین کسانی بود که آن‌را بررسی کرد.

از آنجا که هر تابع بازگشتی متناظر با یك الگوریتم (درحقیقت یك برنامهٔ بیسیك) است، فرضیهٔ چرچ مدعی است که آن مفهوم مبهم خاصی (الگوریتم) که قصد داشته‌ایم آن‌را دقیق کنیم، واقعاً متناظر با این مفهوم ریاضی (تابع بازگشتی) است. ادعای مشابهی درمورد مفهوم مبهم تابع (قاعده‌ای که به‌هر عنصر X یك عنصر Y را نظیر می‌کند، به‌گونه‌ای که هیچ عنصری از X به دو عنصر متفاوت از Y مربوط نمی‌شود) و مفهوم ریاضی تـابع (زیرمجموعه‌ای از $X \times Y$ که هر عنصر X مؤلفهٔ اول عضوی از این زیرمجموعه است و هیچ دو عضوی از این مجموعه مؤلفهٔ اول یکسان ندارند)، قابل بیان است. در این‌جا استدلالی شهودی وجود دارد که نشان می‌دهد هرچیزی که دراین مفهوم مبهم صدق می‌کند متناظر با مجموعه‌ای است کـه در مفهوم ریاضی صدق مـی‌کند. (**هیـچ کدام از ایـن استدلالهـا** نمی‌توانند فراتر از یك استدلال شهودی بروند؛ زیرا مفهوم مبهم، خود چیز دقیقی نیست.) در ۱۹۳۶، آ. تورینگ استدلالی شهودی برای نشان‌دادن اینکه هر الگوریتم متناظر با یك تابع بازگشتی است، ارائه داد. (مرجعی برای این موضوع که به‌آسانی در دسترس است بخش ۷۵ از [۸] است.) از آنجا که مفهوم مبهم الگوریتم به سادگـی مفهوم مبهم تابع نیست، ممکن است نگران شویم که شاید یك نوع الگوریتم وجود داشته باشد که تورینگ متوجه آن نشده، و تابه‌حال نیز کسی به‌آن التفات نکرده‌باشد. اما، مجموعه شواهدی که به نفع فرضیهٔ چرچ در دست است، به‌غایت‌قوی هستند (شاید قویترین شواهدی باشند که اصلا می‌توانند برای چنین‌ادعای غیرصوری تابدیهی‌ای وجود داشته باشند)، و به‌همین‌جهت است که فرضیهٔ چرچ به‌طور گسترده‌ای پذیرفته‌شده‌است. چارچوب فرضیهٔ چرچ دربخشهای ۶۲ و ۷۵ [۸] خلاصه شده است.

به‌نظر می‌رسد برای در نظرگرفتن قضیهٔ گودل دربیان واقعاً کلی آن، تکیه برفرضیهٔ چرچ الزامی است. اتکای ما برفرضیهٔ چرچ از این باب است که مطمئن باشیم برای اجرای الگوریتمهای شرایطمان می‌توانیم برنامه‌ای به زبان بیسیك بنویسیم؛ چنین برنامه‌ای نقشی اساسی دربرهان ما ایفا می‌کند. (از آنجا کـه می‌دانیم می‌توان یك بـرنامهٔ بیسیك برای دستگاههای صوری‌ای که تاکنون شناخته‌ایم نوشت، برای اثبات قضیهٔ گـودل یابیان کمتر کلی آن درمورد این دستگاهها نیازی به‌فرضیهٔ چرچ نداریم.)

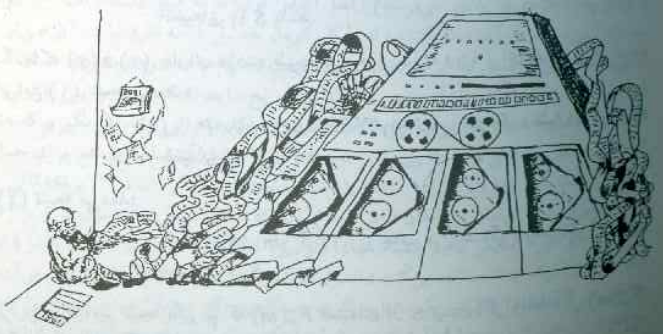
1. recursive function

تکیهٔ ما برفرضیهٔ چرچ ممکن است "نقیصه‌ای" دراثبات قضیهٔ گودل به‌نظر آید، به‌ویژه برای کسانی که بافرضیهٔ چرچ آشنایی ندارند، وبه‌همین علت بودکه ما آن رابه‌تفصیل بررسی کردیم. درپایان یك‌نکتهٔ دیگر هم در مورد فرضیهٔ چرچ مورد توجه قرار می‌دهیم: اگر آن امربسیار نامحتمل اتفاق بیفتد والگوریتمی پیدا شودکه متناظر بایك تابع‌بازگشتی نباشد، این الگوریتم نوع جدید می‌توانـد احتمالا در نوع جدید قویتری از بـرنامه‌های کامپیوتری شکل گیرد، ودر این‌صورت‌اثبات ما ازشکل کلی‌قضیهٔ گودل باتعویض‌برنامه‌های به‌زبان بیسیك بابرنامه‌هایی ازنوع جدید، پابرجا باقی‌خواهد ماند.

اثبات قضیهٔ گودل

نتایج لم ۱ نباید موجب برداشت نادرست شود؛ این لـم راهی عملی برای حل‌مسئلهٔ حل‌نشدهٔ مطلوب شما فـراهم نمی‌آورد. در واقع شما می‌توانیـد مسئلهٔ خود را به‌صورت یك گزارهٔ صوری A دریك زبان صوری درآورید، اصول موضوع خودتـان را در این زبان صوری بیان‌کنید، چند قاعدهٔ استنتاج‌استاندارد انتخاب کنید، الگوریتم ϕ را به‌صورت‌یك برنامهٔ کامپیوتری بنویسید، ومنتظر بمانید تا ببینید که آیا A در فهرست تولید شده ازقضایا ظاهر می‌شود یا نه. اما آنچه‌که احتمالا اتفاق می‌افتد این است که بعد از یك قرن مشاهدهٔ خروجیها وندیدن A، شما نخواهید دانست که آیا این به‌خاطر این است که به اندازهٔ کافی صبر نکرده‌اید یا اینکه اصلا A قضیه نیست. به‌عبارت دیگر، اگـر A قضیه نباشد، از ϕ نمی‌توان این‌را فهمید.

اما، اگر S نه تنها سازگار بلکه کامل هم باشد، آنگاه ϕ واقعاً قضیه بودن یا نبودن A را معین می‌کند، زیرا شما می‌توانید با استفاده از الگوریتم α_3 نقیض A را تولیدکنید وسپس به‌خروجیهای ϕ نگاه‌کنید تا اینکه یا A ویا نقیض A ظاهرشود. اگر A ظاهرشود، آنگاه A قضیه است. اگر نقیض A ظاهر شود، آنگاه A قضیه نیست. (البته این الگوریتم



طولانیتر از آن است که واقعاً عملی باشد.) این نکته را به‌صورت لم دیگری بیان می‌کنیم.

لم ۲. فرض‌کنید S دستگاه اصل موضوعی صوری سازگاری باشد که درویژگیهای معقولیت که درشرایط ۱ تا ۵ آمده‌است، صدق می‌کند؛ اگر S کامل باشد، آنگاه الگوریتمی برای تعیین اینکه آیا یك گزارهٔ صوری داده‌شده قضیه است یا نه، وجود دارد.

حال با بیان دوبارهٔ قضیهٔ گودل آن‌را با یك استدلال قطری کانتوری ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ عدم تمامیت گودل. فرض‌کنید S دستگاه اصل موضوعی سازگاری باشد که در ویژگیهای معقولیت که درشرایط ۱ تا ۵ آمده‌است صدق می‌کند. دراین‌صورت S کامل نیست.

برهان: فرض‌کنید S کامل باشد. باقبول فرضیهٔ چرچ، یك برنامهٔ بیسیك P به‌صورت زیر می‌توان ساخت. بافرض عدد طبیعی n به‌عنوان ورودی، P با استفاده از الگوریتم ψ لم ۱، گزارهٔ صوری $F_n(n)$ را تولید می‌کند وسپس با استفاده از الگوریتم لم ۲، معین می‌کند که آیا $F_n(n)$ قضیه‌ای از S است یا نه. اگر $F_n(n)$ یك قضیه باشد، P عبارت "NO" را چاپ می‌کند، اگر $F_n(n)$ قضیه نباشد، P عبارت "YES" راچاپ می‌کند. پس‌ازچاپ این خروجی، P متوقف می‌شود. به‌طور خلاصه،

(۱) P با ورودی n، "YES" چاپ می‌کند اگر و فقط اگر $F_n(n)$ قضیه‌ای از S نباشد.

بنا به شرط ۵، یك گزاره‌نمای عددی F_P هست که P باورودی n، عبارت "YES" را چاپ می‌کند اگروفقط اگر $F_P(n)$ قضیه‌ای از S باشد. حال F_P یکی از گزاره‌نماهای عددی F_1، F_2، F_3، . . . مذکور در لم ۱ است. برای مشخصتر شدن وضع، فرض‌کنید F_P مثلا F_m باشد. دراین صورت داریم

(۲) P با ورودی n، "YES" را چاپ می‌کند اگروفقط اگر $F_m(n)$ قضیه‌ای از S باشد.

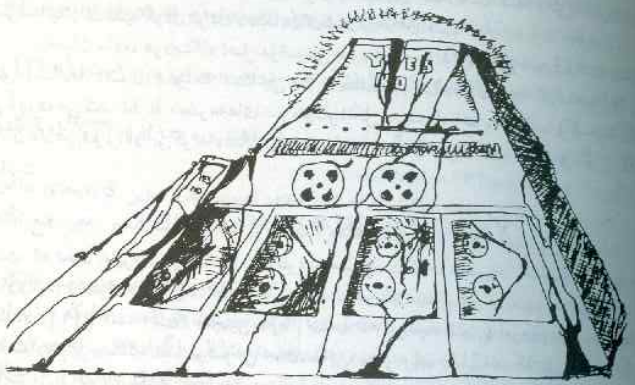
ازآنجاکه (۱) و (۲) به‌ازای هرعدد طبیعی n برقرارند، به ویژه برای m نیز برقرارند، بنابراین (۱) نتیجه می‌دهد:

(۳) P باورودی m، "YES" راچاپ می‌کند اگر و فقط اگر $F_m(m)$ قضیه‌ای از S نباشد.

و (۲) نتیجه می‌دهد:

P با ورودی m، "YES" را چاپ می‌کند اگر و فقط اگر $F_m(m)$ قضیه‌ای از S باشد.

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که $F_m(m)$ قضیه‌ای از S نیست اگر وفقط اگر $F_m(m)$ قضیه‌ای از S باشد، که تناقض است. □



فرض‌کنید S درشرایط قضیهٔ گودل صدق کند، و A یك گزارهٔ صوری S باشد به‌طوری که A ونقیض A هیچ‌کدام قضیه‌ای در S نباشند، وآن تعبیرموردنظر ازنمادهای S را (که درآن همهٔ قضایا صادق‌اند) درنظر بگیرید. دراین‌صورت بنا به‌شرط ۳، یا A ویا نقیض A صادق است. بنابراین یك گزارهٔ صوری در S هست که تحت تعبیر مورد نظر از نمادهای S صادق است اما قضیه‌ای در S نیست. گاهی اوقات این‌نتیجه را قضیهٔ گودل می‌خوانند.

دستگاههای صوریی که درشرایط ۱ تا ۵ صدق می‌کنند

اگرچه اکنون برهان ما ازقضیهٔ گودل کاملا ارائه شده‌است، ممکن‌است فکر کنید که شرایط ۱ تا ۵ (اگرچه کاملا موجه به‌نظر می‌رسند) واقعاً آنقدر قوی‌اند که هیچ دستگاه اصل موضوعی صوری نمی‌تواند درآنها صدق کند، وقضیهٔ کلی گودل به‌دلیل آنکه مفروضات آن نمی‌تواند تحقق‌یابد، برقرار است. اما این‌طور نیست؛ درحقیقت دستگاههای صوری متعددی هستند که در این‌شرایط صدق می‌کنند. یادآوری می‌کنیم که درتشریح رابطه‌ای که شرط ۵ بین یك برنامهٔ P وگزاره‌نمای عددی F_P برقرارمی‌ساخت، طبیعی بود که عباراتی رادرنظر بگیریم که نه‌تنها نمادهای منطقی معمولی ونمادهایی برای متغیرها دارا باشند، بلکه نمادهایی هم برای حساب مقدماتی مانند ۰ ، + ، . ، و = داشته باشند. یك نماد مفید دیگر، نماد "′" برای تالی یك عدد طبیعی‌است؛ این‌نماد این‌امکان رافراهم‌می‌آورد که اعداد طبیعی رابه‌صورت ۰ . ′(۰)، ′(′(۰))، و غیره نمایش دهیم. دستگاههای صوریی ملهم ازاصول غیرصوری پئانو وجود دارندکه ازاین‌نمادها استفاده می‌کنند واصول موضوع و قواعد استنتاج کافی برای برآورده ساختن شرایطمان را دارند. یکی ازاین گونه دستگاهها، که عموماً "حساب صوری" نامیده می‌شود، درفصل ۴ مرجع [۸] آمده‌است تحقیق‌اینکه حساب‌صوری درچهارشرط اول‌صدق

می‌کند نسبتاً سرراست است، اما تحقیق شرط پنجم کاری بسیار خسته‌کننده وفنی است؛ این از نمونه اثباتهای قضیهٔ گودل برای دستگاههای صوری خاص است.

به‌بیان ساده، هر دستگاه اصل موضوعی صوری که به‌اندازهٔ کافی قدرت داشته باشد که بتوان نمادها، اصول، وقواعد استنتاجی مشابه حساب صوری در آن ایجاد کرد، شرایط ما را برآورده می‌کند. نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو-فرانکل به همراه اصل انتخاب (که با ZFC نشان داده‌می‌شود) از این‌گونه دستگاههای صوری است. یك مثال از اصول موضوع ZFC، عبارت

$$\forall z((z\in x\rightarrow z\in y)\&(z\in y\rightarrow z\in x))\rightarrow x=y$$

است که تحت تعبیر معمولی نمادها، متناظر این جمله است که دومجموعه باعناصر دقیقاً یکسان، مساوی‌اند. (اصول موضوع ZFC که می‌توانند به‌گونه‌ای تنظیم شوند که درشرایط ما صدق کنند،در [۱۱] آمده است؛ همچنین به [۱] صفحهٔ ۳۰ مراجعه کنید.) امروزه، دستگاه ZFC پراستفاده‌ترین دستگاه اصل‌موضوعی است، واین بیشتر به آن دلیل است که تقریباً هرانگارهٔ ریاضی‌می‌تواند به‌صورت گزاره‌ای درباب مجموعه‌ها درآید و درزبان ZFC بیان‌شود، و در واقع هرتکنیك قابل‌قبول ریاضی، مشابهی در ZFC دارد.

همگان براین‌عقیده‌اند که اصول ZFC تحت تعبیرمعمولی‌ازنمادها صادق‌اند و قواعد استنتاج هم‌صدق‌راحفظ می‌کنند. به‌همین‌دلیل، درباقی این مقاله فرض‌می‌کنیم ZFC سازگار است. یك گزارهٔ‌صوری A در ZFC را **تصمیم‌ناپذیر** گوییم، هرگاه A ونقیض A هیچکدام قضیه‌ای از ZFC نباشند. از آنجا که ZFC در شرایط ۱ تا ۵ صدق می‌کند، قضیهٔ گودل می‌گوید یك گزارهٔ صوری تصمیم‌ناپذیر در ZFC وجود دارد. این حقیقت که در ZFC گزاره‌های صوری تصمیم‌ناپذیروجود دارند ممکن‌است مسئله‌ساز نباشد، به‌شرط آنکه وقتی تحت تعبیر نمادهای ZFC این گزاره‌های صوری به‌زبان فارسی برگردانده شوند تبدیل به جملاتی شوندکه خارج ازجریان اصلی‌ریاضیات باشند یاحداقل اهمیت ریاضی‌اندکی‌داشته باشند. اما، تعدادی‌گزارهٔ تصمیم‌ناپذیر پیداشده‌است‌که بیانی بسیارطبیعی وساده دارندوبه نظرمی‌رسیده است‌که باتکنیکهای قابل‌قبول ریاضی وهوشمندی کافی‌قابل بررسی‌اند.

دراینجا چهارمثال ازاین‌گونه‌گزاره‌های تصمیم‌ناپذیرمی‌آوریم. اگر بااصطلاحاتی‌که دراین مثالها به‌کاررفته‌اندآشنا نیستید، نیازی نیست‌که نگران‌شوید. فقط درذهن‌داشته‌باشید که مثالهای (۲) و (۳) مفاهیم استاندارد توپولوژی عمومی را در بردارند ومثال (۴) از مفاهیم استاندارد جبرهومولوژی استفاده می‌کند.

۱. هر مجموعهٔ نامتناهی از اعداد حقیقی یا با مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی و یا با مجموعهٔ اعداد طبیعی در یك تناظر یك‌به‌یك قرار می‌گیرد. (به [۵] مراجعه کنید).

این‌البته‌فرضیهٔ پیوستار کانتوراست. انگاره‌های‌بسیاری‌وجود دارندکه همانند فرضیهٔ پیوستار به وضوح با بیش از یك سطح نامتناهی (شاید با ساختارهای اضافی توپولوژیك، جبری، یا تحلیلی) سروکار دارند، و می‌دانیم که در ZFC تصمیم‌ناپذیرند (برای دیدن چند

نمونه به [۲،۴،۱۷، و ۱۳] مراجعه کنید). سه‌مثال دیگر ما ازاین نوع نیستند.

۲. هرفضای‌توپولوژیك T_1 کاملا نرمال و به‌طور شمارشپذیر فشرده ،فشرده است. (به [۹،۱۵، و ۱۶] مراجعه کنید.)

۳. هرفضای توپولوژیك کاملا نرمال‌فشرده هاوسدورف، جدایی‌پذیر است. (به [۱۲] مراجعه کنید.)

۴. اگر A یك‌گروه‌آبلی و Z گروه‌اعداد صحیح باشند و $EXT(A,Z)=0$، آنگاه A یك‌گروه‌آزاداست. (به [۷] مراجعه کنید.)

اگرچه قضیهٔ‌گودل پنجاه سال‌است‌که ثابت‌شده، تصمیم‌ناپذیری‌این گزاره‌های خاص باتکنیکهای متنوع نسبتاً جدیدی نشان داده‌شده است. (برای جزئیات بیشتر به‌مراجع نگاه کنید.)

درگذشته بسیاری ازریاضیدانها ممکن‌بود این‌گونه‌احساس کنندکه محدودیت آشکاره شده در قضیهٔ گودل برحوزهٔ تحقیقاتی خاص‌آنها اثری نخواهد گذاشت. حال‌که نشان‌داده شده‌است انگاره‌های جالب توجهی درحوزه‌های متعددی متناظر باگزاره‌هایی تصمیم‌ناپذیر در ZFC اند، دیگرپافشاری براین‌دیدگاه آسان‌نیست. البته قضیهٔ‌گودل امکان وجوددستگاه صوری بهتراز ZFC رامردود نمی‌سازد. مثلا، نهایتاً می‌توان‌گزاره‌ای راصادق‌درنظرگرفت که با اضافه‌کردن آن به‌عنوان اصل به ZFC یك دستگاه اصل موضوعی پدید آیدکه درآن بتوان به همهٔ انگاره‌های (۱) تا (۴) پاسخ گفت. اما، روشن نیست که آیا چنین دستگاه صوریی به وجود خواهد آمد یاخیر؟ حتی اگرچنین دستگاهی به‌وجودآید، بنابرقضیهٔ‌گودل می‌دانیم‌که این‌دستگاه هم "تصمیم‌ناپذیرهای" خودش‌را دارد.

مراجع

1. Barwise, J., *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, New-York, 1977.
2. Baumgartnet, J. E., Prikry, K., "Singular cardinals and the generalized continuum hypothesis," *Amer. Math. Monthly*, **84** (1977)108-113.
3. Charlesworth, A., "Infinite loops in computer programs, "*Amer. Math. Monthly*. **52**(1979)284-291.
4. Charlesworth, A. T., Hodel, R. E., Tall, E. D., "On a theorem of Jones and Heath concerning separable normal spaces," *Colleg. Math.*, **34** (1975)33-37.
5. Cohen, P. J., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York, 1966.
6. Davis, M., *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problem, and Computable Functions*, Raven Press, Hewlett,

New York 1965. (Contains a translation of Gödel's original proof, together with related papers of Gödel, Church, Turing, and others.)

7. Eklof, P. C., "Whitehead's problem is undecidable," *Amer. Math. Monthly*, **83**(1976)77-88.

8. Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, American Elsevier, New York, 1971.

9. Ostazewski, A. J., "On countable compact, perfectly normal spaces," *J. London Math. Soc.*, **14**(1976)505-516.

10. Reid, C., *Hilbert*, Springer-Verlag. New York, 1970.

11. Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, Reading, 1967.

12. Tall, F. D., *Set-theoretic Consistency Results and Topological Theorems Concerning the Normal Moore Space Conjecture and Related Problems*, Thesis, University of Wisconsin, Madison, 1969.

13. Tall, F. D., "How separable is a space? That depends on your set theory!," *Proc. Amer. Math. Soc.* **46**(1974)310-314.

14. Turing, A. M., "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem," *Proc. London Math. Soc.* 2nd Series, **42**(1936-7)230-265; a Correction appears in **43**(1937)544-546.

15. Weiss, W., "Countably compact spaces and Martin's axiom," *Canad. J. Math.* **30**(1978)243-249.

16. Weiss, W. A. R., "Countably compact, perfectly normal spaces may or may not be compact," *Notices, Amer. Math. Soc.* **22**(1975). Abstract 75T-G32. p. A-334.

17. Wilansky, A., "How separable is a space?," *Amer. Math. Monthly*, **79**(1972)764-765.

هارولد ادواردز

تقدیر از کرونکر•

ترجمهٔ ویدا میلانی

مفتخرم که برای سخنرانی در جلسهٔ مشترک سالانهٔ بخش ریاضی و تاریخ آکادمی دعوت شده‌ام[1]. سخنران این جلسه در دسامبر گذشته آندره‌ویل[2] بود. همان‌طور که خوب می‌دانید، سال گذشته ویل دربارهٔ شخصی که موضوع صحبت امروز من است چیزی نگفت، اما احتمالاً نمی‌دانید که می‌توانست بگوید، و شاید هم باید می‌گفت. درحقیقت، در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در کمبریج ماساچوست در سال ۱۹۵۰، ویل به‌مطلبی اشاره کرد که سبب سخنرانی امشب من شد، و آن "تقدیر از کرونکر" بود. بعداً در صحبتهایم به‌مضمون نطق کمبریج ویل باز خواهم گشت. اما درابتدا، بهتر است سخن را با حقایق اساسی دربارهٔ کرونکر شروع کنم؛ چون تصور می‌کنم که حتی بسیاری از ریاضیدانان حاضر در اینجا نیز تنها کمی بیش از "دلتای کرونکر" با نام وی آشنا باشند.

لئوپولد کرونکر در سال ۱۸۲۳ در شهر سیلسیایی[3] لایگنیتس[4]- که درحال حاضر در لهستان است و در آن زمان جزو خاک پروس بود- در خانواده‌ای یهودی و ثروتمند به‌دنیا آمد. منبع و مقدار ثروت خانواده برای من ناشناخته است. سخنرانی فروبنیوس در یادوارهٔ کرونکر، که معتقدم مرجعی است که برای شرح‌حال کرونکر همه از آن استفاده می‌کنند، پدر کرونکر را به‌عنوان "تاجر" معرفی می‌کند، اما از بانکداری وزمینداری نیز

• Edwards, H. "An appreciation of Kronecker," *The Math. Intelligencer*, 9(1987)28-35.

۱. این سخنرانی که برای جلسهٔ مشترک سالانهٔ بخشهای ریاضی و تاریخ و فلسفهٔ علوم آکادمی نیویورک نوشته شده بود، در ۴ دسامبر ۱۹۸۵ ایراد شد.

2. Andre Weil 3. Silesia 4. Liegnitz

در ارتباط با ثروت‌خانواده نام می‌برد. ظاهراً این ثروت از هر منبعی که بوده، بسیارزیاد بوده است.

پدر کرونکر که‌توجه‌زیادی‌به تعلیم و تربیت پسرش داشت، در سالهای اولیه برایش معلم خصوصی می‌گیرد وسپس او را به آموزشگاه واقع در لایگنیتس می‌فرستد. پسرجوان دانش‌آموزی‌مشتاق وبا استعداد بود. در آموزشگاه بخت‌مساعدی برای آشنایی با کومر[1] جوان داشت، که بعدهانه‌تنها به‌عنوان ریاضیدان خلاق بلکه‌همچنین به‌عنوان معلمی‌برجسته شهرت جهانی کسب کـرد. کرونکر از زمـان آشناییش با کومر در آموزشگاه به بعد گرایشی به ریاضیات پیدا کرد، گرچه در دوران زندگیش به بسیاری موضوعات دیگر از جمله فلسفه، زبان کلاسیك، و تاریخ نیز علاقه‌مند بود. بعداز لایگنیتس، تحصیلات‌مقدماتی خود را در دانشگاه برلین ادامه داد، گرچه دوره‌های شش‌ماهه‌ای را در دانشگاههای بن و برسلاو، کـه دومی مقارن اقامت کومر در آنجا بود، گذراند. برای این‌که شمه‌ای از ریاضیات برلین در آن دوره بـه دست دهیم، کافی است بگوییم که در آنجا دیریکله، یك ریاضیدان و معلم بزرگ دیگر، در اوج خود بود، و ژاکوبی وآیزنشتاین[2] نیز هر دو در آنجا بودند. کرونکر در سال ۱۸۴۵ در سن ۲۲ سالگی موفق به دریافت درجهٔ دکتری از برلین شد.

پس‌از آن کاری غریب از اوسرزد، یعنی برلین و محیط زندگی ریاضی‌اش رابرای بازگشت به‌سیلسیا و رسیدگی به‌کارهای مختلف خانوادگی ترك گفت. ظاهراً او درطی‌این زمان فعالیت ریاضی داشته، اما مطلبی منتشر نکرده است. بنابرگفتهٔ فروبنیوس او ارتباط علمی جدی خود را با کومر حفظ کرد. و بنابرگفته‌خودوی درسالهای بعد، دوران انزوا در سیلسیا این نتیجهٔ موفقیت‌آمیز را که "قادر به تکامل تدریجی خود بود"، داشته است. فروبنیوس چنین ادامه می‌دهد: "این واقعه، برای همکارانش کـه نمی‌توانستند در مراحل پیشرفت او شرکت داشته‌باشند، زیان بزرگی بود. پس‌ازسکوتی ۸ساله، هنگامی که‌شروع به انتشار ثمرهٔ فراغتش کرد، حـداکثر ۳ ریاضیدان بودند که می‌توانستند پرواز افکار او را دنبال کنند."

داستان قضیهٔ کرونکر-وبر[3] نشان می‌دهد که‌سخنان فروبنیوس تا چه‌اندازه به‌حقیقت نزدیك است. این قضیه، که برای هر متخصص نظریهٔ جبری اعداد آشناست، بیان‌می‌دارد که زیر میدانهای میدانهای دایره بر، که به‌سادگی دیده می‌شود که توسیعهای آبلی اعداد گویا هستند، درحقیقت شامل تمام توسیعهای آبلی اعداد گویااند. گزارهٔ مزبور گزاره‌ای فوق‌العاده ساده وعمومی است، که بسیاری از حقایق مهم نظریهٔ اعداد به‌سادگی از آن‌نتیجه می‌شوند. بنابر گفتهٔ فروبنیوس، اولین اثر منتشر شدهٔ کرونکر پس‌از مقالـهٔ دکترایش و پس‌از ۸سال سکوت، در سال ۱۸۵۳ ظاهر شد. این مقاله که به‌نام "معادلاتی که به‌طور جبری حل‌پذیرند" موسوم است، شامل صورت قضیهٔ کرونکر-وبر به‌عنوان یك فرع است.

1. Kummer 2. Eisenstein 3. Weber

متخصصین‌نظریهٔ اعدادی‌که به‌این قضیه بها می‌دهند اما تاریخچهٔ آن را نمی‌دانند، معمولاً تصور می‌کنند که کرونکر از کل قضیه آگاه نبوده یا اینکه مقالهٔ فوق‌الذکر در اوج‌مسیر فکری‌وی بوده‌است. و بدون استثنا ازشنیدن اینکه تمام صورت قضیه در اولین مقالهٔ بعد از رسالهٔ دکتری وی ظاهر شده، تعجب می‌کنند.

اگر کرونکر قضیهٔ خود را درسال ۱۸۵۳ هنگامی کـه هاینریش‌وبر ۱۰ساله بوده بیان‌کرده‌است، دراین‌صورت‌چرا قضیهٔ مزبور به‌نام قضیهٔ‌کرونکر-وبرشناخته‌می‌شود؟ این موضوع به گفتهٔ فروبنیوس که حداکثر سه نفر کار کرونکر را هنگام انتشار درك کردند، برمی‌گردد. و به‌نظر من این‌گمان منصفانه است. به‌عقیدهٔ من عبارات مهمی در اثر کرونکر وجود دارند که هرگز کسی جز خود کرونکر به‌طور کامل آنها را درك نکرده است. اما درمورد قضیهٔ‌کرونکر-وبر مسلماً بسیاری از افراد صورت آن را در آن زمان درك‌کردند، و بدون‌شك بسیاری اهمیت آن را ستودند. اما آنچه درمیان نبود اثبات آن بود.

گرچه هـدف من از این سخنرانی تقدیر از کرونکر است، نمی‌توانم این را انکار کنم که درك آثار او فوق‌العاده مشکل است. من خود درمطالعهٔ آثار او کوشیده‌ام و در بسیاری موارد آنقدر درکشان‌کرده‌ام که احساس کنم‌کوشش وسیعم بی‌اجر نمانده است. اما اقرار می‌کنم که حتی نمی‌دانم که آیا هدف کرونکر از اظهاراتش دربارهٔ قضیهٔ مقاله سال ۱۸۵۳ طرح اثبات بوده است یا نه. علاوه بر آن، نمی‌دانم آیا کرونکر در مقالات بعدی بر این ادعاست که اثبات مورد نظر را به‌دست داده است یا خیر. به‌نظر می‌رسد که اظهارات او، بدون‌اینکه صراحت داشته باشند، حاکی از این است که قضیهٔ مورد بحث‌را در جایی اثبات کرده است. بااین‌حال کورت‌هنسل[1]، شاگرد محبوب کرونکر و ویراستار آثار گردآوری شدهٔ او، ۶ اثبات به‌چاپ رسیدهٔ قضیهٔ مزبور را که هیچ یك از آنها از کرونکر نبوده‌اند، به‌عنوان پیوست مقالهٔ ۱۸۵۳ آورده‌که قدیمی‌ترین آنها درسال ۱۸۸۶، یعنی یـك سوم قرن پس‌از بیان قضیهٔ کرونکر، توسط هاینریش‌وبـر منتشر شده است، و به‌همین‌دلیل است که قضیهٔ مزبور را به‌نام کرونکر-وبر می‌نامند.

دراین مرحله به‌ذهنم چنین خطور می‌کند که در تاریخ و فلسفهٔ علم برخی سؤالات جالب وجود دارد. به‌عنوان‌مثال، آیا می‌تـوان تصور کـرد که کسی $E=mc^2$ را، تنها به‌این‌دلیل که شخص دیگری برای اولین‌بار تبدیل جرم به انرژی را به‌طور تجربی نشان داده است، معادلهٔ آینشتاین-آن شخص بنامد؟البته کـه نه. چه، این مزیت آینشتاین بود که رابطهٔ خود را به‌طور نظری کشف کرد و اثبات تجربی آن را نتوانست. این ناتوانی عمق بصیرت نظری او را می‌رساند. البته ریاضیات علمی بس‌متفاوت است؛ درآن، اثبات دقیق در درجـهٔ اول اهمیت قرار دارد. یك فرض مناسب ارزش زیـادی دارد، اما تاج افتخار از آن‌کسی است که قضیه را اثبات کند. من از بسیاری جهات با این‌سخن موافقم، اما (۱) برخلاف هنسل، به‌هیچ‌وجه مطمئن نیستم که نتوانم با پیش هم گذاشتن قسمتهایی

1. Kurt Hensel

از نوشته‌های کرونکر اثباتی به‌دست آورم، و (۲) مهمتر از آن، معتقدم که ریاضیدانان، در تخصیص جمیع ارزشها به اثبات ازنقش بصیرت در توسعهٔ ریاضیات چشم‌پوشی می‌کنند. کرونکر نیز همانند آینشتاین براساس ملاحظات نظری حقیقت بس شگرفی را کشف کرد که سازش دادن آن با علم رسمی دهها سال به درازا کشید. مطمئناً تلاش در یافتن ملاحظاتی که منجر به این دیدگاه در وی شد نیاز به بررسیهای جدی دارد، و تنها داشتن ایده‌ای که توسط منابع دیگر تصدیق شده است، نباید راضی‌کننده باشد.

کرونکر دو سال بعد، یعنی ۱۸۵۵، بر تمام اشتغالاتی که در سیلسیا ترتیب داده بود خاتمه داد و به برلین برگشت و برای باقی عمر در آنجا زندگی کرد. درسال ۱۸۴۸ با دخترعموی خود، فانی‌پراوس‌نایتسر[1] ازدواج کرد. آنها شش‌فرزند به‌وجودآوردند و با بهره‌گرفتن از ثروت بسیار، مسافرتهای متوالی به‌نقاط خوش‌آب و هوای اروپا، و در مورد خود کرونکر کار ثمربخش و شهرت گسترده، زندگی به‌ظاهر رشك‌انگیزی را به‌سر بردند. به‌نظر می‌رسد که محیط اجتماعی آنها را افراد نخبهٔ برلین و اشخاص برجستهٔ دنیاهای فرهنگ، ثروت وعلم تشکیل می‌داده‌اند. فانی درسال ۱۸۹۱ درگذشت وائوپولد، که گفته می‌شود از این غم شکسته شد، چندماه بعد درحالی‌که فقط ۶۸ سال داشت بر اثر بیماری برونشیت از پای درآمد.

سالی‌که کرونکر به برلین رسید، یعنی سال ۱۸۵۵، سال تغییرات عظیمی درصحنهٔ ریاضیات آلمان بود. گاوس درگذشت، و دانشگاه گوتینگن موفق به‌تشویق دیریکله برای ترك برلین و جانشینی گاوس شد. فضای خسالی‌ای که در برلین ایجاد شد توسط کومر اشغال شد، و به‌دستور هم او، وایرشتراس نیز از دبیرستان محلیش، جایی که‌مدت‌مدیدی درآنجا پای‌بند شده بود، به‌برلین آورده شد. این سه تن، کومر، وایرشتراس وکرونکر، برای بیش‌از سه دهه تأثیرات نافذی در ریاضیات برلین ـ و تا حدود زیادی در آلمان ـ گذاشتند. در سال ۱۸۶۱، کرونکر عضو آکادمی سلطنتی علوم برلین شد. عضویت در آکادمی مزبور بنا به‌دلایل خاصی حق ایراد سخنرانی در دانشگاه برلین را به‌همراه داشت، و کرونکر از این حق به صورت پایگاه منظمی استفاده می‌کرد. زمانی که ریمان در سال ۱۸۶۶ درگذشت، کرسی او درگوتینگن به‌کرونکر پیشنهاد شد. از آنجایی‌که سه متصدی قبلی گاوس، دیریکله، و ریمان بودند، تصور یك‌پیشنهاد بهتر دراین مورد، مشکل می‌نمود. اما زندگی‌کرونکر دربرلین خوبتر از آن بود که‌آن را ترك کند، وظاهراً دعوت به‌گوتینگن را به‌طور جدی موردتوجه قرار نداد. به‌هرحال کرونکر تا سال ۱۸۸۸، که در آن کومر تصمیم به بازنشسته شدن گرفت و کرونکر به‌جای او نشست، به‌مقام استادی نرسید.

اکنون مایلم اندکی دربارهٔ "احلام‌شباب[2]" معروف کرونکر، یا "رؤیای جوانی" او صحبت کنم. پیش‌از این شگفتی خود را از این موضوع که چگونه قضیهٔ کرونکر ـ وبر در اوایل مسیر فکری کرونکر بر او روشن بود آشکار کردم. در واقع او، از همان آغاز

1. Fanny Prausnitzer
2. Jugendtraum

کار، دیدگاهی بس فراتر از آن داشت. قضیهٔ کرونکر ـ وبر توصیف کاملی از توسیعهای آبلی میدان اعدادگویا به‌دست‌می‌دهد. کرونکر درارتباط با بررسی پدیدهٔ ضرب مختلط توابع بیضوی، دریافت که ـ و دراین‌مورد نیز برای من‌ملاحظاتی‌که منجر به‌این ایده‌شداسرار امیز به‌نظر می‌رسد و ارزش توجه جدی را دارد ـ توابع بیضوی‌ای که ضرب مختلط دارند، رفتار توابع دایروی در مورد میدان اعداد گویا را در مورد میدانهای عددی درجهٔ دوم موهومی تکرار می‌کنند، یعنی تمام توسیعهای آبلی را پدید می‌آورند.

قضیهٔ مربوط به توسیعهای آبلی میدانهای درجهٔ دوم موهومی به‌این علت به "احلام شباب" کرونکر موسوم شده که خود کرونکر طی نامه‌ای درسال ۱۸۸۵ به ددکیند اعلام داشت که "گرامی‌ترین رؤیای جوانی او" اثبات آن بوده است. و ادامه می‌دهد که تصور می‌کند که بر آخرین مشکلات آن فائق آمده و آماده است تا تمام نیروی خود را در نوشتن نظریهٔ کامل و اثبات قضیهٔ آن به‌کار گیرد. اما افسوس که به‌نظر می‌رسد که هیچ‌گاه این کار را نکرد. احتمالاً هنگام پرداختن به مسائل اساسی‌آن با مشکلات دیگری مواجه شده است، یا شاید چنانکه هاسه[1] در مقاله‌ای راجع به‌این‌موضوع، که به‌صورت‌یادداشتی بر آخرین مجلد مجموعهٔ آثار کرونکر به چاپ رسیده، حدس زده است، سلسله مقالات طولانی که کرونکر در آخرین سالهای عمرش راجع به توابع بیضوی چاپ کرد در کاربنای اثبات قضیهٔ احلام شباب بوده‌اند. اما پیش از آنکه به این هدف برسد، مرگ امانش نداده است.

دراین مورد نکته‌ای‌تاریخی از هاسه می‌آوریم: او در اثر تفسیری معروف درمورد نظریهٔ میدان رده‌ای چنین مطرح کرد که قضیهٔ مزبور چنانکه کرونکر آن را بیان کرد، نادرست بود! اما در یادداشتش بر مجموعهٔ مقالات کرونکر که هم‌اکنون به‌آن اشاره‌شد، پذیرفته که نظرش براساس مطالعهٔ دقیق کارهای کرونکر نبوده، و هنگامی که موضوع را به‌دقت مورد بررسی قرار داده. دریافته‌که خودش به‌خطا بوده است. قضیه‌ای‌که کرونکر آن‌را بیان داشت کاملاً صحیح بود، و سرانجام توسط ریاضیدان ژاپنی، تی‌جی‌تاکاگی[2]، در زمان جنگ‌اول جهانی ثابت شد. متأسفانه عقیدهٔ غلط‌بودن قضیهٔ مزبور بیش‌از عقیدهٔ بعدی درست بودن آن همه‌گیر شد ـ مقاله‌ای که این خطا در آن ظاهر شده بود بار دیگر در دههٔ ۱۹۶۰ بدون اصلاح اشتباه مزبور چاپ شد ـ و این نتیجه را داد که احلام شباب کرونکر حدس مناسبی بود، که تنها به تقریب صحت داشت. نظریهٔ جالبتر هاسه این بود که قضیه نه‌تنها کاملاً درست بوده، بلکه خود کرونکر اثباتی از آن را به‌دست داده که نسلی از نظریهٔ اعداد پردازان بین کرونکر و تاکاگی از بررسی آن طفره رفته‌اند.

کرونکر عقاید استواری دربارهٔ فلسفهٔ ریاضیات داشته است که بخش مهمی از میراث او را تشکیل داده‌اند.

اگر اطلاع بیشتری از آنها داشتیم ممکن بود ببینیم که اینها در بین میراث او،

1. Hasse
2. Teiji Takagi

بیشتر از آنچه می‌پنداریم، مهم بوده‌اند. متأسفانه، او در چنین موضوعاتی مقالات بسیار اندکی منتشر کرد، و اغلب مطالبی هم که دراین مورد از نظریاتش می‌دانیم دست‌دوم است. معمولاً این اطلاعات توسط افرادی که با نظرات او مخالف بودند مطرح شده‌اند و باید آنها را به‌عنوان شواهد غیرقابل اعتماد درنظر گرفت. با این‌حال، ایده‌های اساسی فلسفهٔ ریاضی کرونکر نسبتاً روشن است، و سعی من بر آن است که به توصیف آنها بپردازم. غیر ریاضیدانها ممکن است این بخش از سخنرانی را بیش‌از ریاضیدانها پذیرا باشند، زیرا عقاید کرونکر دراین‌باره به‌قدری با نظریات متداول مخالفت دارد که توصیف طبیعی آنها برای بسیاری از ریاضیدانهای جدید با استفاده از کلمهٔ "بدعت" میسر است. در گزارشی دست‌دوم اما موافقانه از فلسفهٔ ریاضی کرونکر توسط هنسل، در مقدمه‌ای بر سخنرانیهای کرونکر در زمینهٔ نظریهٔ اعداد چنین آمده‌است: "... باید همچنین به‌ضرورتی که کرونکر آگاهانه در تعاریف و استدلالهای حساب عمومی اعمال می‌کرد اشاره کنم، یعنی به مشاهدهٔ دقیقی که روش او را درنظریهٔ اعداد و جبر از دیگران متمایز می‌کرد. او معتقد بود که هر تعریف می‌تواند، و باید، در این شاخه از ریاضیات در چنان چارچوبی قرار گیرد که بتوان طی مراحل متناهی دریافت که آیا برای هر کمیت مفروض برقرار است یا خیر. با همان روش، اثبات وجود یك کمیت تنها زمانی می‌تواند کاملاً جدی گرفته شود که شامل روشی باشد که توسط آن، کمیتی که وجود آن مورد اثبات است بتواند حقیقتاً یافت شود. کرونکر مایل نبود تعریف یا برهانی را که فاقد این خصوصیات بودند به‌طور کامل ردکند، ولی احساس می‌کرد که در چنین مواردی نقصی موجود است، و برطرف کردن این نقص مسئله‌ای اساسی بود که از دانش ما در موضوع اصلی فراتر می‌رفت. به‌علاوه معتقد بود که دستگاهی که از این لحاظ دقیق باشد درحالت کلی صورتی ساده‌تر [!] از فرمول‌بندیهای دیگری که این نیازها را برطرف نمی‌کردند می‌یابد، و در سخنرانیهایش برهانهای فراوانی دراین موارد ارائه داد."

من در یك سخنرانی در اوایل امسال حضور داشتم که سخنران آن این نظرات را از زبان هنسل بیان می‌داشت و ادامه می‌داد که این عقاید منطقی‌تر از آن به‌نظر می‌رسد که صحیح باشند، زیرا که کرونکر اغلب قاطع، افراطی و تند توصیف شده است. اما من بنابر دلایلی که امیدوارم از متن سخنرانی برآید، به کرونکر منطقی بیش‌از کرونکر تند معتقدم. ابتدا، اجازه دهید مسئلهٔ ساده‌ای را در مورد مبانی ریاضیات مطرح کنم.

ریشهٔ دوم عدد ۲ چیست؟ اگر از ماشین‌حساب جیبی خود این سؤال را بپرسید، پاسخ ۱٫۴۱۴۲۱۳۵۶۲ را به‌شما خواهد داد. البته می‌دانید که این تنها تقریبی از ریشهٔ دوم عدد ۲ است و پاسخ صحیح کسر اعشاری بی‌پایانی است که هیچگاه خود را تکرار نمی‌کند. اما آیا واقعاً چنین است؟ کرونکر از این ایدهٔ قدیمی یونانی که بینهایت کامل در ریاضیات غیر قابل قبول و مهمتر از آن غیرضروری است حمایت می‌کرد. او عدد ۱٫۴۱۴۲ . . . را به عنوان یك ایدهٔ ریاضی با معنی مورد توجه قرار نمی‌داد. در عوض، الگوریتمی را برای محاسبهٔ ریشهٔ دوم عدد ۲ تا هر درجهٔ دقت از پیش تعیین شده درنظر

می‌آورد؛ به‌عبارت‌دیگر، می‌خواست دریابد که چگونه جاهای موجود در ۱٫۴۱۴۲ . . . باید پر شوند. (بعد از این قصد دارم کلمهٔ الگوریتم را بیشتر به کار ببرم. دراین‌صورت اجازه دهید برای آن‌عده از شما که با آن آشنا نیستید توضیح دهم که الگوریتم به‌طور ساده به‌معنی یك رشته اعمال محاسباتی، و در اینجا یك‌سری از اعمال برای محاسبهٔ ریشهٔ دوم ۲ است. برای روشن‌شدن مطلب، مثالی از چنین الگوریتمی را می‌دهم. مجموعه‌ای‌از زوجهای مرتب را درنظر بگیرید که در آن زوج اول (۱,۱)، و اولین مؤلفه در هرزوج مجموع مؤلفه‌های اول و دوم زوج قبلی و دومین مؤلفه در هر زوج مجموع اولین مؤلفه آن و اولین مؤلفهٔ زوج‌قبلی است. به‌این‌ترتیب تعدادی از این زوجها عبارت‌اند از (۱,۱) و (۲,۳) و (۵,۷) و (۱۲,۱۷) و (۲۹,۴۱) و (۷۰,۹۹). اگر به همین ترتیب ادامه دهید درمی‌یابید که خارج‌قسمت این زوج‌اعداد به‌سرعت به‌ریشهٔ دوم ۲ میل می‌کنند. به‌طور مشخص‌تر، $۱^۲ = ۲ \times ۱^۲ - ۱$، $۳^۲ = ۲ \times ۲^۲ + ۱$، $۷^۲ = ۲ \times ۵^۲ - ۱$، و به‌طور کلی، به سادگی می‌توان نشان داد که اگر زوج مرتب (a,b) یکی از اعضای این رشته باشد، آنگاه $b^۲ = ۲a^۲ \pm ۱$. لذا $(b/a)^۲$ برابراست با ۲ به‌علاوه یامنهای عدد بسیار کوچك $(۱/a)^۲$. مثلاً، مربع ۴۱/۲۹ عبارت است از ۱٫۹۹۸۸ . . . و مربع ۹۹/۷۰ عبارت است‌از ۲٫۰۰۰۰۲۰ . . . بنابراین، ۱٫۴۱۴۲۸۵۷۱۴ . . . = ۹۹/۷۰ خیلی به‌ریشهٔ‌دوم ۲ نزدیك است، وخارج‌قسمت زوجهای جلوتر فهرستمان حتی نزدیك‌تر هم می‌شوند (گفته می‌شود که الگوریتم بالا برای پیدا کردن ریشهٔ دوم ۲ توسط فیثاغورثیان به کار می‌رفته است.) در مفهوم چنین الگوریتمی هیچ‌گونه بینهایت کاملی وجود ندارد. بینهایت‌های کامل به‌طور بی‌پروا در ریاضیات جدید نه هنگام مطرح شدن اعداد حقیقی خاصی مانند ریشهٔ دوم ۲ یا π، بلکه هنگام مطرح شدن مجموعهٔ تمام اعداد صحیح، یا، حتی بدتر، مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی ظاهر می‌شوند. به‌چنین مفاهیمی امروزه معمولاً به‌عنوان "اشیاء ریاضی" اشاره می‌کنند. این معنی که چنین تجرید وقیحانه‌ای "شیء" نامیده شود، مرا گریزان می‌کند.)

طبق اصول ریاضیات جدید، بینهایت‌های کامل برای اعمال ریاضی ضروری‌اند و قسمت عمدهٔ عظمت و قدرت آن را تشکیل می‌دهند. از آنجا که چنین ایده‌ای در زمان کرونکر وسعت نیافته بود، درست نیست بگوییم او احتمالاً به‌دلیل بی‌اهمیت شمردن آن، آن را قبول نداشت، آنچه کرونکر رد می‌کرد شیوهٔ ریاضیات پذیرفته شده‌ای بود که بخش اعظم آن توسط همکارش کارل‌وایرشتراس در برلین به‌وجود آمده بود. اختلافات عقیدتی‌نتایج غم‌انگیزی در روابط شخصی این‌دو، که در سالهای اولیهٔ اقامتشان دربرلین دوستانی صمیمی بودند و سرانجام تا سرحد دشمنی بایکدیگر بیگانه شدند، به بار آورد. کرونکر، احتمالاً بدون ریا، همواره خاطرنشان می‌کرد که اختلافات عقاید درموضوعات فلسفی نباید به‌روابط دوستانه‌شان لطمه بزند، ولی عملاً چنین شد.

در آن زمان موضوعات اساسی ریاضیات عالی، نظریهٔ توابع بیضوی و تعمیمهای آن نظریهٔ توابع آبلی، رویه‌های ریمان، خمهای جبری، توابع با متغیر مختلط، نگاشت

همدیس و غیره‌ـ بوده‌اند. روش وایرشتراس برمبنای نمایش بـه سریهای توانی و ادامهٔ تحلیلی توابع با استفاده از بسط به‌سریهای توانی حول نقاطی جز مرکز قرص همگرایی، استوار بـود. نقش بسط بـه سری تـوانـی در مـورد تابـع همان نقش بسط اعشاری ۱٫۴۱۴۲ . . . درمورد عدداست. وایرشتراس نه‌فقط بینهایتهای کامـل در تعریف‌توابع، بلکه قضایای وجـودی نیز ساختاری‌ای چـون قضیهٔ بولتسانو‌ـوایرشتراس (دنباله‌ای نامتناهی در فاصله‌ای بسته و کراندار بایـد اقلاً یك نقطهٔ انباشتگی داشته باشد) و این گزاره را که دنبالهٔ صعودی و کراندار از اعداد بایـد دارای حد باشد، وسیعاً به کاربرد، و بلکه قویاً از آن حمایت کرد. در جمع‌بندی هنسل از فلسفهٔ کرونکر، سخت‌شگفت‌آور است که کرونکر روش وایرشتراس را ناقض یافته، و در این‌باره چنین گفته است: "اگر زمان و توان کافی برایم باقی بماند، من خود به‌جهان ریاضیات نشان خواهم داد که‌حساب نه‌تنها می‌تواند مطمئناً به‌طریقی دقیقتر راه رسیدن به‌هندسه را رهبری کند، بلکه در مورد آنالیز نیز چنین می‌کند. و اگر نتوانم این‌کار را ادامه دهم، دراین‌صورت آنان که از پی من خواهند آمد چنین‌خواهند کرد. و نیز خطای جمیع‌مطالبی را که‌امروزه دانش به‌اصطلاح آنالیز کار خود را با استفاده از آنها انجام می‌دهد، تشخیص خواهند داد."

روشن است که کرونکر و وایرشتراس، اگر پس از برخورد با چنین مخالفت‌کاملی درمورد ایده‌های بنیادی‌کارشان روابط دوستانهٔ خود را حفظ می‌کردند، افـرادی غیرعادی بودند. از بیانات کرونکر که هم‌اکنون از آن نقل کردم نیز برمی‌آید که دیگر قادر به حفظ دوستیشان نبودند. در نامه‌ای به‌تاریخ ۲۴ مارس ۱۸۸۵ وایرشتراس به‌سونیا کوالوسکی[1] چنین می‌نویسد: "من عقیده دارم که عدد گویا همانند هر چیز دیگر در دنیای مفاهیم واقعاً وجود دارد، ولی برای کرونکر اصل این است کـه معادلات تنها در میان اعداد درست وجود دارند. .... اما از این بدتر: وقتی است که کرونکر تمام نیروی خود را درحمایت از این عقیده به‌کار می‌برد که تمام‌آنچه کـه تاکنون در پایه‌گذاری نظریهٔ توابع انجام شده گناهانی در درگاه خداوندند. هنگامی کـه شخص عجیب و غریبی چون کریستوفل[2] می‌گوید آنـالیز معاصر در ۲۰ یا ۳۰ سال آینده از بین خواهد رفت و همهٔ آنـالیز در نظریهٔ فرمها ادغام خواهد شد، شخص در پاسخ تنها شانه‌اش را بالا می‌اندازد. اما وقتی کرونکر اظهاراتی، که‌کلمه‌به‌کلمه آنها را تکرارمی‌کنم، بیان می‌دارد [دراینجا اظهارات فوق را می‌آورد] این سخنان، از زبـان مردی که من مهارتش را در تحقیقات ریاضی و کارهای برجسته‌اش را البته بـه اندازهٔ دیگر همکارانش ستایش کرده‌ام، نه تنها توهین به افرادی است که از آنها خواسته شده تا اشتباهات خود را تصدیق و از آنچه در افکار و تلاش بی‌وقفه‌شان است چشم‌پوشی کنند، بلکه درخواستی مستقیم از نسل جوان‌تر است که کسانی را که تاکنون راهنمایشان بوده‌اند ترك کنند و با قبول اصولی، که مسلماً باید کنار گذاشته شوند، چون مریدانی به‌گرد او جمع آیند. درحقیقت، خودخواهی مردی که‌شهرت

1. Sonja Kowalewski 2. Christoffel

او انکارناپذیر است، منجر بـه اظهاراتی شده که ظاهراً خود وی نیز، برای لحظه‌ای به زیان‌بار بودنشان در مـورد دیگران نیندیشیده، و این غم‌انگیز است و درون مرا از رنجی تلخ آکنده می‌سازد."

گمان می‌کنم که احساس ناراحتی مزبور دوجانبه بوده است، و کرونکر شدیداً از موفقیت بسیار وایرشتراس به‌عنوان معلـم و رهبر نسل جـوان‌ـهمان‌گونه کـه‌وایرشتراس خود در متنی که نقل‌شد چنین‌اظهار داشته‌ـسرخورده است. وسعت موفقیت وایرشتراس از زمینه‌ای که نامهٔ او به‌نوبهٔ خود از آن نقل شده است، روشن است. این نامه یکی از نامه‌هـای متعدد وایرشتراس است کـه در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در پـاریس در سال ۱۹۰۰ باعنوان "برگی از دفتر زندگانی وایرشتراس" در سخنرانی‌گوستامیتاگ‌ـلفلر[1] نقل شده است. آخریـن کلمات نطق میتاگ‌ـلفلر چنین بودند: "درآخرین روز جلسات دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانـان، کـه جمعیتی چنین انبوه از ریاضیدانان را گردهم آورده است، چنین اندیشیدم که علاقه‌مند به شنیدن کلمه‌ای چند راجع به مردی باشید که او را متفق‌الرأی، به همراه ریمان، بـه عنوان بزرگتریـن ریاضیدان نیم‌قرنی‌کـه گذشت می‌شناسیم." این اظهار عقیده، تنهـا ۱۵ سال پس از نامهٔ وایرشتراس، نشان می‌دهد کـه حقیقتاً کرونکر زمان و توان کافی برای دورکـردن نسل جوان از رهبران قبلی را نداشته است.

به‌نظر من، تنها نکتهٔ مـؤثر در شکایت وایرشتراس توجه او به این نکته است که اصولی را که کرونکر پیش می‌برد درآن زمان به زحمت قابل‌فهمیدن بود. آیا کرونکر در برابر روش وایرشتراس روشی کاربرد پذیر داشت، و اگر چنین بود، آن روش چه بود؟ فکر می‌کنم توانسته باشم سرنخ مهمی از آنچه کرونکر دربـارهٔ آن صحبت می‌کرد بیابم. ابتدا، اجـازه دهید به‌طور خلاصه به‌موضوع ریشهٔ دوم ۲ برگردم. در جبر تساوی $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد. $\sqrt{2}$ به‌طور ساده چیزی است که مربع آن ۲ است. با این طرز تفکر از دبیرستان آموخته‌ایم که چگونه اعدادی به شکل $a+b\sqrt{2}$ را جمع و ضرب کنیم، وحتی با به‌کار بردن "گویا کردن‌مخرج" آنها را برهم تقسیم کنیم. لذا، مسئلهٔ وجود $\sqrt{2}$ به‌عنوان یك عددحقیقی درجبر اتفاق نمی‌افتد.

در زبان جبر نـوین، این روش کارکردن با $\sqrt{2}$ به الحاق یك ریشهٔ چند جمله‌ای x^2-2 به‌میدان اعداد گویا برمی‌گردد. فرایند الحاق ریشهٔ‌یك‌چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر با ضرایب واقـع در یـك میدان ازپیش‌ساخته شده بـه آن میدان، یکی از مفاهیم بنیادی پیشرفتهای انقلابی جبر است کـه توسط اواریست‌گالوا، که می‌توان کرونکر را یکی از پیروان عمدهٔ او دانست، پدید آمد. این یـك ساختار جبری، و احتمالاً بهترین نمونهٔ آن است، که البته این خواست کرونکر را کـه برای اثبات اینکه یك‌کمیت دارای وجودی ریاضی است باید آن را ساخت، براورده می‌سازد. گالـوا خود آن را در ساختن میدان

1. Gosta Mittag-Leffler

شکافندهٔ یك چندجمله‌ای به‌کار برده بود ـ ساختاری چنان کلی، ساده و اساسی که درك آن برای جامعهٔ ریاضی دهها سال به‌طول انجامید.

به‌خاطر دارید که گفتم در آن روزها موضوع اصلی ریاضیات نظریهٔ توابع آبلی و موضوعات مربوط به آن بود. از آنجا که وایرشتراس ـ و نتیجتاً، تقریباً تمام مؤلفان جدید ـ با این نظریه به عنوان قسمتی از نظریهٔ توابع یك متغیر مختلط سروکار دارند، این تمایل وجود دارد که آن را منحصراً به‌عنوان قسمتی‌از آنالیز درنظر بگیریم. اما کرونکر از سوی دیگر، با این مبحث تقریباً به‌طور کامل به عنوان قسمتی از جبر برخورد می‌کرد. دراین‌صورت معتقدم که آنچه کرونکر هنگام صحبت درمورد زاید بودن آنالیز واثباتهای وجودی غیر ساختاری آن در ذهن داشت، نشان می‌داد که موضوعاتی که او با آنها سروکار داشت می‌توانستند در نظریهٔ جبری کاملی که در آن اثباتهای وجودی، اثباتهایی ساختاری بر پایهٔ روش الحاق ریشه‌های معادلات گالوا بودند، ادغام شوند.

این باور، که اخیراً به‌آن دست یافته‌ام، براساس مدرك زیر است. یکی از معدود جدالهای مستند از اظهارات جدال‌آمیز کرونکر بحث او با میتاگ ـ لفلر بود. میتاگ ـ لفلر سازمان‌دهنده و مؤسس بزرگی بود. از مؤسسات وی می‌توان از مجلهٔ ریاضیات خود او، به‌نام آکتاماتماتیکا[1]، نام برد که با حمایت پادشاه سوئد بنیان گذاشت. در زمان تأسیس آکتا، در اوایل دههٔ ۱۸۸۰، کرونکر نوشتن مقاله‌ای را برای آن در بیان عقایدش در مبانی ریاضیات، قبول کرد. از آن پس جدالشان آغاز شد. و سبب آن مسابقهٔ جایزه‌داری بود که میتاگ ـ لفلر بازهم با حمایت پادشاه سوئد ترتیب داده بود. مسابقهٔ مزبور، چهار مسئله را مطرح می‌کرد که آخرین آنها مسئله‌ای بود که حقاً کرونکر را می‌توان به‌خاطر آن ممتازترین مرجع جهانی نامید، و برای نظارت به‌این کار هیئتی از ریاضیدانان بین‌المللی شامل یك فرانسوی، یك آلمانی، و یك ریاضیدان اهل اسکاندیناوی تعیین شد. ریاضیدان آلمانی وایرشتراس بود و کرونکر سخت از این موضوع به خشم آمد. همان‌گونه که در نامه‌ای تند به میتاگ ـ لفلر نوشت، احساس کرد که مطلقاً به او خیانت شده است. بنابر دلایلی، میتاگ ـ لفلر در این زمان در برلین، جایی که کرونکر صمیمانه و با مهمان‌نوازی او را پذیرا شد، بود و از مسابقه‌ای که در آیندهٔ نزدیك اعلام می‌شد ذکری به‌میان نیاورد. من مطمئن هستم که جدال مزبور دو طرفه بوده است، اما در اینجا نیازی به پرداختن به‌آن نیست. نکتهٔ مهم این‌است که کرونکر قصد نداشت مقاله‌ای را که قول نوشتنش را برای آکتا داده بود، بنویسد.

یك‌سال بعد، در آوریل ۱۸۸۶، کرونکر طی نامه‌ای به میتاگ ـ لفلر قبول کرد که گذشته‌ها را فراموش‌کند، وی گفت که البته عقایدش تغییر نکرده است. او در ادامهٔ سخنان خود به میتاگ ـ لفلر گفت که در ایام اخیر چقدر سخت و در چه زمینه‌هایی کار کرده است. در میان شمار حیرت‌آوری از کارهای دیگر، از کار بر روی مبانی جبر نام

1. *Acta Mathematica*

می‌برد و می‌گوید: "من در اصل فکر کردم که آن را برای چاپ به‌شما بدهم"، و پس از شرح خلاصه‌ای از آن ادامه می‌دهد: "این مبانی زیبا و استوار جدید جبر را مدیون انتقاد دقیقم از روش هاینه[1] در تعریف کمیتها و همچنین مدیون اصل با ارزش گالوا می‌دانم. من مقاله‌ای که این صراحت را نشان می‌دهد در صدمین جلد مجله‌مان چاپ خواهم کرد".

اگر کرونکر در اشاره‌اش این‌چنین صریح نبود، هرگز تصور نمی‌کردم که این مقاله با عنوان "یك قضیهٔ اساسی در حساب عمومی" پاسخ کرونکر به روشی بوده است که من آن را به عنوان روش وایرشتراس شناختم، ولی کرونکر آن را در بیش از این یك مورد به هاینه نسبت داده است. این یك انتقاد سازنده از افراطی‌ترین نوع است، و در آن هیچ نامی ازروشی که محکوم می‌کند نمی‌آید، و تنها روشی که پیشنهاد می‌کند ذکر می‌شود. کاش می‌توانستم به طریقی بدانم که چه‌کسانی این مقاله را مطالعه کرده و تا چه اندازه عمیق آن را خوانده‌اند. حدس می‌زنم که انتقاد کرونکر، اگر بتوان آن را انتقاد نامید، به‌طور سرسری مورد توجه مخاطبان مورد نظرش قرارگرفته باشد، و اگر به‌طریقی مطلع شوم که تاکنون هیچ‌کس آن مقاله را به عنوان بیانیه‌ای از ایده‌های کرونکر راجع به مبانی ریاضیات نخوانده است، به هیچ‌وجه تعجب نخواهم کرد. اما، به موجب نامهٔ کرونکر به میتاگ ـ لفلر، هدف کرونکر از نوشتن آن، مطالعهٔ آن با این نیت بوده است.

به‌طور کلی، معتقدم که آثار کرونکر کمتر خوانده و حتی کمتر فهمیده می‌شوند. درنظر بگیرید که این موضوع که هاسه اظهار نظر خود را دربارهٔ نادرست بودن احلام شباب بدون مطالعهٔ مقالهٔ کرونکر بیان داشته، تا چه حد غیرمعمول است. تنها دلیلی که سرانجام او را وادار به خواندن آن و دریافتن قضاوت غیرعادلانه‌اش در مورد کرونکر کرد، احترام به‌معلمش هنسل بود، که ویراستاری مجموع آثار کرونکر را برعهده‌داشت. به‌مدت ۱۰ تا ۱۵ سال پس‌از مرگ کرونکر می‌توان ارجاعات معتبری به‌آثار او یافت؛ اما پس‌از آن، احساسم این است که، با استثنائات نادری، جمیع ریاضیدانانی که از کارهای کرونکر اطلاع داشتند آنها را از دست‌دوم به‌شمارمی‌آوردند. جالب‌توجه است که تاکاگی، که قضیهٔ احلام شباب کرونکر را ثابت کرد، ظاهراً مقالهٔ کرونکر را نخوانده بود ـ حداقل او هیچ‌گاه به هیچ‌یك از آثار کرونکر ارجاع نمی‌دهد و به‌جای آن‌رجوعش همواره به وبر است.

آشکارترین دلیلی که کارهای کرونکر هیچ‌گاه به صورت یك مطالعهٔ جدی مورد استفاده قرار نگرفته، درحالی‌که به اعتقاد من استحقاق آن را داشته، مشکل خواندن آن بوده است. اما این توضیح روی‌هم رفته توضیح قانع‌کننده‌ای نیست. چه اولاً آنها آنقدرها هم مشکل نیستند، و ثانیاً آثار مشکل، هنگامی که خواننده به‌اهمیت آنها آگاه باشد، خوانده می‌شوند. در این مورد تأثیر مکتب وایرشتراس، و احساس ناخوشایند

1. Heine

پیروان آن نسبت به کرونکر (نطق میتاگ‌ـلفلر در ۱۹۰۰ گواه این مطلب است)، مسلماً بی‌نقش نبوده است. چهرهٔ دیگری که در این زمینه تأثیر کرده است، ددکیند بوده که اعمال‌نفوذ زیادی هم ازطریق آثار خود وهم از طریق تأثیراتی روی ریاضیدانان‌جوانی همچون وبر،کانتور، و هیلبرت‌داشته است. ددکیند سبك ریاضی و دیدگاهی درمبانی‌ریاضی خلق کرد که سبب شد کارهای کرونکر مشکلتر ازآنچه بودند به‌نظر برسند. سرانجام، هیلبرت و کانتورهریك به‌نوبهٔ خود تلاشهای فراوانی در دورکردن نسل جوان از کرونکر کردند.

هدف هیلبرت این بود که گزارش اعداد[1]ـگزارش وی درنظریهٔ اعداد جبری که‌در اوایل دههٔ ۱۸۹۰ نوشته شدـآثار ریاضیدانان بزرگ قبل از خود به‌ویژه کرونکر و کومر را، که روش آنها را به‌ویژه نامتعارف می‌دانست، به‌زبان معمول بیان کند. هدف‌او تلخیص این آثار و تنظیم مجدد آنها با روش خودش بود، که‌به‌این‌ترتیب مطالب آنها برای دانشجویان نظریهٔ اعداد قابل‌دسترسی‌باشد. او ازاین لحاظ‌که گزارش مزبور برای دانشجویان قابل‌حصول بود و وسیله‌ای برای تحریم آثارکومر وکرونکر فراهم می‌آورد، موفق بود. ولی ازاین لحاظ‌که در کارهای کومر و بیش‌از آن درآثارکرونکر مطالب بسیاری یافت می‌شدکه قادر به‌تلفیقشان نبود توفیق نداشت و لذا در برقراری ارتباط با نسل بعد شکست خورد. ورای‌گزارش مزبور، کارهای وسیعاً تحسین‌شدهٔ هیلبرت درکمك به بنیان نهادن نظریهٔ میدان‌رده‌ای، دراصل ثمرهٔ تلاشهای تاحدی موفق وی در درك‌احلام شباب بود.

و اما کانتور، اکثر شما احتمالاً امشب درانتظار شنیدن مطالبی بس بیشتراز آنچه قصد دارم راجع به او بگویم هستید. کانتور، تأثیر یافته از وایرشتراس، هاینه، ددکیند و الهیات قرون‌وسطی، نظریهٔ خود را در زمینهٔ مجموعه‌ها و اعداد ماورای متناهی در حدود آخرین دهه از زندگی کرونکر خلق کرد. موفقیت اصول کانتور، همراه با اصرار او در ارزش بینهایتهای کامل، مسلماً در تضعیف ارائهٔ تعاریف و برهانهای وجودی در قالب عبارات الگوریتمی و جبری و متناهی، که به‌عنوان حسن اصلی قسمت اعظم کار کرونکر مورد توجه او بود، نقش بسیار داشت. اما این کار عمدتاً پس ازفوت‌کرونکر انجام‌شد، درحالی‌که کرونکر نقش بزرگی درنظریهٔ جهانی مشخصاً آشوب‌طلبانهٔ کانتور داشت، شك دارم‌که کانتور نقش زیادی درنظریات کرونکر ایفا کرده باشد. گمان می‌کنم برای‌کرونکر، کانتور صرفاً جوان دیگری بوده که به طریقی نادرست از وایرشتراس پیروی می‌کرده و قواعد مفاهیم ریاضیاتش به طور ناامیدکننده‌ای اشتباه بوده است.

درقرن بیستم خوانندگان آثار کرونکر معدود اما افرادی از سطح بالا بوده‌اند. اریش‌هکه[2] هرمان‌وایل[3]، کارل لودویك‌زیگل[4]، و آندره‌ویل از آن جمله‌اند. این امر

1. Zahlbericht
2. Erich Hecke
3. Hermann Weyl
4. Carl Ludwig Siegel

مرا به‌یاد نطق ویل در کنگرهٔ بین‌المللی ۱۹۵۰ می‌اندازد. موضوع سخنرانی او مقالهٔ مهم سال ۱۸۸۱ کرونکر با عنوان "اصول نظریهٔ حسابی‌کمیات جبری[1] بود.بنابر گفتهٔ ویل: "درحالی‌که هرخط از ضمیمهٔ یازدهم ددکیند، با سه‌شرح‌متوالی و به طور افزاینده‌ای"محض"، تنقید و تجزیه و تحلیل و تعمیم داده می‌شد و به شکل اصل موضوع درمی‌آمد، اصول بنیادی[2] کرونکر که زمانی مشهور بودند، یا فراموش می‌شدند یا به‌عنوان ارائه‌دهندهٔ روشی پیش‌پا افتاده (و غیرمحض) برای دستیابی به‌بخشی از همان نتایج، تلقی می‌شدند.... اکنون وقت آن رسیده‌که دریابیم کرونکر در اصول بنیادیش تنها قصد ارائهٔ روش خود را درمسائل اساسی نظریهٔ ایده‌الها، که موضوع اصلی کاریك عمر ددکیند راتشکیل می‌دهند، نداشته است. هدف‌او بالاتر بوده است. در واقع، او سعی در توصیف و ابداع شاخهٔ جدیدی از ریاضیات داشته‌است‌که می‌توانست به‌عنوان‌حالات خاص‌هم نظریهٔ اعدادهم هندسهٔ جبری را در بر گیرد. این فرضیهٔ عالی تا اندازه‌ای به دلیل مشکلات ذاتی درکار کردن با آن، و تاحدی هم به‌دلیل حوادث تاریخی و موفقیتهای موقتی ددکیند و طرافداران محضیت، از دیدمان محو شد. هدف اصلی این سخنرانی‌سعی درنجات آن از دست‌فراموشی، زنده کردن آن، و شرح برخی نتایج جدیدی است که احتمالاً می‌تواند به‌عنوان جزئی از برنامهٔ کرونکر مدنظر قرار گیرد."

قسمت اعظم توجه ویل به هندسهٔ جبری است. اما حداقل در یك مرحله،به‌بحث در موضوعات مبانی ریاضیاتی، که در مورد آنها صحبت کردم، می‌پردازد. او ملاحظه می‌کند که علیرغم تأکیدهایی که برکاربرد میدانهای زمینهٔ دلخواه دزهندسهٔ جبری جدیدمی‌شود، حس بسیار واقعی مشخصی وجود دارد که هر قضیه‌ای که به روشهای جبری‌ـمتمایز از روشهای آنالیزی وتوپولوژی‌ـقابل‌دسترسی است، می‌تواند به‌عنوان قضیه‌ای درمیدانهای زمینه‌ای که او آنها را میدانهای جبری محض، یعنی میدانهای متناهی یا میدانهای اعداد جبری می‌نامید، درنظرگرفته شود. او می‌گوید: "این درك.... بینشی را درعمق مفهوم‌نظریهٔ کرونکر به‌ما می‌دهد، که به‌موجب آن میدانهای جبری محض همان میدانهای زمینهٔ طبیعی هندسه جبری هستند." به‌بیان دیگر، درحالی‌که در وهلهٔ اول دیدگاه اصلی کرونکر ازدید جدید بسیار تنگ‌نظرانه می‌نماید، درحقیقت‌تمام حالاتی‌را که‌باروشهای جبری قابل بررسی کردن باشند دربردارد.

عجیب‌است‌که هرچند ویل درسخنرانی خود از هدفش برای نجات برنامهٔ‌کرونکر از فراموشی و احیای آن صحبت می‌کند، در یادداشتی بر سخنرانی مزبور،که برای‌چاپ مجموعهٔ آثار خود درسال ۱۹۷۹ نوشته است، می‌گوید: "بزرگترین آرزوی من این بود که توجه اشخاص را به‌مطالعهٔ هندسهٔ جبری روی یك‌حلقه، به‌عنوان مثال، روی حلقهٔ اعداد صحیح یا حلقهٔ اعداد صحیح یك میدان اعداد جبری، یا حلقهٔ اعداد صحیح در میدان p-

1. *Grund zuege einer arithmetischen Theorie der algebraischen Groessen*
2. *Grundzuege*

آدیك، جلب کنم." او احساس می‌کند که خلق نظریهٔ شماها[1] توسط گروتندیك[2] و توسعهٔ آن توسط شاگردان و پیروان او تا اندازهٔ زیادی این آرزوی او را تحقق داده است. متأسفانه، آرزوی اولیهٔ او در ارتباط با کرونکر مسکوت و احتمالاً به اندازهٔ کار خود کرونکر ناشناخته باقی مانده است.

به‌اعتقاد من، بیشترین امید به بقای کرونکر به‌جای نظریهٔ شماها، از گرایش کاملاً متفاوتی به ریاضیات امروز یعنی گرایش تغذیه‌شده از ظهور کامپیوترها به‌تفکر الگوریتمی، ناشی می‌شود. کامپیوترها همان‌گونه که راه‌آهن الگوهای توسعهٔ زمینها را تحت‌تأثیر قرار داد، تأثیر غیرقابل اجتنابی در ریاضیات داشته‌اند. آزمایش فرضیه‌ها و ترکیب‌داده‌ها که قبلاً درصورت امکان‌تنها ازطریق روشهای پیچیده قابل‌دسترسی بودند، توسط‌کامپیوتر امکان‌پذیر و آسان شده‌اند، و این نه‌تنها نوع سؤالات مطرح‌شده توسط ریاضیدانان، بلکه نحوهٔ اندیشه‌شان را نیز تحت‌تأثیر قرار داده است. دراین مورد باید از خود سؤال کرد که چه مثالهایی‌توسط کامپیوتر می‌توانندآزمایش شوند، سؤالی‌که انسان را وادار به‌توجه در الگوریتمهای واقعی و سعی در کامل ساختن آنها می‌کند. گسترش الگوریتمها، به این دلیل و به‌دلیل‌اینکه کاربردهای بسیار قابل‌توجهی در زندگی واقعی دارند، به نوبهٔ خود موضوع مهمی است.

کرونکر الگوریتمی فکر می‌کرد. او در اوایل اصول بنیادی خود، بخشی را در اهمیت اساسی تجزیهٔ چندجمله‌ایهای با ضرایب صحیح و چندجمله‌ایهای با ضرایب‌واقع درمیدانهای اعدادجبری، ضمیمه می‌کند. البته‌نیازهای زمان‌او متفاوت‌بود، والگوریتمهایش برای ارائه‌کردن جریانی صریح و متناهی در پاسخ به‌نیازهای موجود، بدون آنکه قصد به‌کارگیری آنها را داشته باشد، مطرح شده بودند. برای او، الگوریتم در مفهوم پخشیدن به ریاضیاتش ضروری‌بود، او از بسیاری ازمتفکرین بزرگ ریاضی پیش‌از خود-می‌توان گفت همه-پیروی می‌کرد. تنها معاصرین کرونکر بودند که سبب شدند الگوریتم امری غیرضروری، و حتی عصاکش ریاضیدانان درجهٔ دوم محسوب شود. آن دوران اکنون، با پدیدآمدن کامپیوتر، به سر آمده است. کار جدی این روزهای ریاضیدانان و دانشمندان کامپیوتر بر مسئلهٔ تجزیهٔ چندجمله‌ایهای با ضرایب صحیح گواهی براین مطلب است-و در این زمینه بخشی ازکتاب اصول‌بنیادی کرونکر دارد موردمطالعه قرار می‌گیرد.

مایلم به دو مثال دیگر درارتباط با افکار الگوریتمی کرونکر اشاره کنم. مثال اول تجربهٔ شخصی خود من است. درباب مطالعاتم در زمینهٔ آخرین قضیهٔ فرما ونظریهٔ اعداد مربوط به‌آن، نظریهٔ مقسوم‌علیه‌های کرونکر را مطالعه می‌کردم که نسخهٔ پیشنهادی او از نظریه ایده‌الهای ددکیند است. چنانکه برایتان نقل کردم، وبل معتقد است که نظریهٔ مقسوم‌علیه‌های کرونکرفراتر ازنظریهٔ ددکیند است، اما برای مردی ازنسل من‌طبیعی‌است که در ابتدا به عنوان صورت دیگری از نظریهٔ ددکیند به آن بنگرد. من در درك تعریف

1. schemes
2. Grothendieck

اساسی کرونکر مشکلات فراوانی داشتم، تا اینکه متوجه شدم که‌آن صرفاً الگوریتمی برای معین‌کردن این است‌که آیا عدد صحیح معلوم b درمیدان اعداد جبری مفروض K درایده‌ال تولیدشده توسط مجموعه‌ای ازاعداد صحیح $a_1, \ldots, a_k$ واقع در K قرار داردیا خیر. این مطلب مطابق با اظهارنظر هنسل درمورد نظریات کرونکر به‌منظور اعتباردادن به تعریف ایده‌ال حاصل از $a_1, \ldots, a_k$ لازم است.

مثال دوم را هنسل بیان می‌کند. کرونکر قضیهٔ معروف دیریکله را که هر تصاعد حسابی (به‌جز موارد استثنایی واضح) شامل‌تعدادی نامتناهی عدد اول است، دردرسهایش در زمینهٔ نظریهٔ اعداد ثابت می‌کند. اما، آن را به‌این‌صورت تدقیق می‌کند: به‌ازای هر تصاعد حسابی و هرعدد صحیح m مفروض، یك عدد صحیح n چنان وجود داردکه‌تصاعد حسابی مزبور شامل عدد اولی بزرگتراز m وکوچکتراز n باشد. کرونکر اثبات"وجود" عددn را با ارائهٔ الگوریتمی برای‌یافتن n انجام می‌دهد. من‌خود این‌اثبات رانخوانده‌ام، اما هنسل آن را به‌عنوان یکی‌از مثالهای بیشمار موجود در سخنرانیهای کرونکر از تعمیم یك قضیه که بهترازتعمیمهای دیگر در برآوردن نیازهای کرونکر مؤثر بوده است، بیان می‌دارد. البته من بیان کرونکر از قضیه را، هنگامی که درمی‌یابم منظور او از گفتن "وجود دارد" ساختن آن است، اصلاحی در قضیهٔ اصلی می‌دانم.

قسمت عمدهٔ افکارکرونکر به صورت الگوریتمهای عملی نبوده‌اند-زیرا بدون کامپیوترها الگوریتمهای برخوردار ازهرگونه کاربرد واقعی، غیرعملی بودند-لذاشك دارم که کارهای او درصنعت جدید کامپیوتر از اهمیت بسزایی برخوردار باشند. اما، درمورد تجزیهٔ چندجمله‌ایهای با ضرایب صحیح، اثر او حتی درهمین حد صورت واضحی ازمسئله و شروع روشی به‌سوی حل آن به‌دست می‌دهد. ازاین‌گذشته، خوانندگانی‌که الگوریتمی فکر می‌کنند، اوقات راحت‌تری نسبت به‌افراد نسل قبل‌از خود برای مطالعهٔ آثارکرونکر خواهندداشت. درزمانهای‌نه‌چندان‌دور-حتی احتمالاً امروز-قضایای‌جبرجدیدمی‌توانستند با استدلالی از این‌نوع‌که "یك چندجمله‌ای مفروض یاتحویل‌پذیراست یاتحویل‌ناپذیر؛ اگر تحویل‌پذیر باشد آنگاه چنین و اگر تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه چنان" اثبات شوند. دانشجویانی که با چنین مسائلی برخورد می‌کنند هرگز نیاموخته‌اند که از خود بپرسند "صبرکنید، اصلاً چگونه می‌توان‌گفت که یك چندجمله‌ای تحویل‌پذیر است یا نه؟" ایشان هنگامی‌که کرونکر به‌سؤالی که حتی آن را مطرح نکرده‌اند، پاسخ می‌دهد، دچارشگفتی می‌شوند.

به‌طورخلاصه، به‌اعتقاد من‌نسل جوان امروز به‌دلیل تجاربشان با کامپیوترها،احساس همدردی بیشتری با فلسفهٔ کرونکر، آن‌گونه که توسط هنسل نقل شده دارند. امیدوارم که احیای این نظریه، که برای مدتهای طولانی راکد مانده بود، توانسته باشد قدردانی دوباره‌ای از میراث کرونکر کرده وکشف دوباره‌ای باشد ازآنچه ویل آن را "نتایج ثمربخش و ایده‌های والای کرونکر" می‌نامد، که چنانکه در ۱۹۵۰ نیز گفت: "امروزه در لابلای مجلدات‌جالب اما به‌ندرت خوانده شدهٔ آثارکامل او مدفون شده‌اند."

جنگ ریاضی دانشجو، ۸، ۱۳۷۱، ۷۴-۸۰

جان میلنر

اثباتهایی تحلیلی از "قضیهٔ توپ مودار" و قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر•

ترجمهٔ سعید ذاکری

در این نوشتهٔ کوتاه اثباتهایی عجیب اما کاملاً مقدماتی از دو قضیهٔ کلاسیك توپولوژی به دست خواهیم داد که بر مبنای یك محاسبهٔ حجم در فضای اقلیدسی و توجه به این نکته استوارند که تابع $(1+t^2)^{n/2}$ به ازای n فرد چند جمله‌ای نیست. استدلال ما ملهم از روشهای به کار گرفته شده توسط اسیموف [۱] است. اثباتهای شناخته شدهٔ این قضایا یا همگی از استدلالهای ترکیباتی، نظریهٔ هوموالوژی، و فرمهای دیفرانسیل استفاده می‌کنند و یا از روشهای توپولوژی هندسی [با ۲، ۳، ۴، ۶، و ۷ مقایسه کنید].

یك شکل مقدماتی قضیهٔ نخست چنین است:

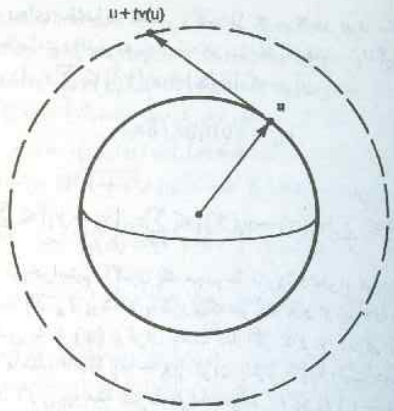
قضیهٔ ۱. بر یك کرهٔ زوج بعدی نمی‌توان هیچ میدان به‌طور پیوسته مشتق‌پذیری از بردارهای یکهٔ مماس تعریف کرد.

بنا به تعریف، کرهٔ S^{n-1} مجموعهٔ همهٔ بردارهای $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_n)$ در فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ است به‌طوری که طول اقلیدسی $\|\mathbf{u}\|$ برابر ۱ باشد. بردار $\mathbf{v}(\mathbf{u})$ در $\mathbf{R}^n$ مماس بر S^{n-1} در نقطهٔ $\mathbf{u}$ است هرگاه ضرب داخلی اقلیدسی $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{u})$ برابر صفر باشد.

این فرض که بعد $n-1$ زوج باشد، فرضی اساسی است، زیرا هرگاه $n-1$ فرد باشد، رابطهٔ

$$\mathbf{v}(u_1,\dots,u_n)=(u_2,-u_1,\dots,u_n,-u_{n-1})$$

• Milnor, J., "Analytic Proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem", *Amer. Math. Monthly*, **85** (1978) 521-524.



شکل ۱

یك میدان مشتق‌پذیر از بردارهای یکهٔ مماس بر S^{n-1} تعریف می‌کند.

اثبات قضیهٔ ۱ بر مبنای دو لم خواهد بود. اولین لم مربوط به یك محاسبهٔ حجم است. فرض کنیم A ناحیهٔ فشرده‌ای در $\mathbf{R}^n$، و $\mathbf{x}\to\mathbf{v}(\mathbf{x})$ میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق‌پذیری باشد که روی یك همسایگی A تعریف شده است. مقادیر $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ می‌توانند بردارهای دلخواهی در $\mathbf{R}^n$ باشند. به ازای هر عدد حقیقی t، تابع

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{x})=\mathbf{x}+t\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

را در نظر می‌گیریم که برای هر $\mathbf{x}$ در A تعریف شده است.

لم ۱. هرگاه پارامتر t به‌قدر کافی کوچك باشد، نگاشت $\mathbf{f}_t$ یك به‌یك است و ناحیهٔ A را به ناحیهٔ نزدیکی چون $\mathbf{f}_t(A)$ می‌نگارد که حجم آن را می‌توان به‌شکل تابعی چند جمله‌ای از t بیان کرد.

اثبات. چون A فشرده و تابع $\mathbf{x}\to\mathbf{v}(\mathbf{x})$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر است، یك ثابت لیپشیتس c وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در A،

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x})-\mathbf{v}(\mathbf{y})\|\leqslant c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|. \qquad (*)$$

[این را می‌توان به‌طریق زیر ثابت کرد. ابتدا حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که A مکعبی

باوجوه‌موازی محورهای مختصات باشد. باگذر از $\mathbf{x}$ به $\mathbf{y}$ در n مرحله، به‌طوری‌که درهر مرحله تنهایکی‌ازمختصات راتغییردهیم؛ وبا به‌کاربستن‌قضیهٔ مقدار میانگین حساب دیفرانسیل می‌بینیم که $|v_i(\mathbf{x})-v_i(\mathbf{y})|\leqslant\sum_j c_{ij}|x_j-y_j|$، که در آن

$$c_{ij}=\sup_A|\partial v_i/\partial x_j|.$$

بنابراین

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x})-\mathbf{v}(\mathbf{y})\|\leqslant\sum_i|v_i(\mathbf{x})-v_i(\mathbf{y})|\leqslant\sum_{i,j}c_{ij}|x_j-y_j|\leqslant\sum_{i,j}c_{ij}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

واین همان است که می‌خواستیم. اکنون یك مجموعهٔ فشردهٔ دلخواه A در $\mathbf{R}^n$ رامی‌توان با تعدادی متناهی مکعب باز I_α پوشاند به‌طوری‌که هرگاه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ هردو دریکی ازاین‌مکعبها باشند، شرط لیپشیتسی مانند (*) برقرار باشد. اما اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در A به‌هیچ مکعب مشترك I_αای تعلق نداشته باشند، فاصلهٔ $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ کران پائینی‌اکیداً مثبت دارد. درواقع عبارت $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ رامی‌توان تابعی پیوسته بـرمجموعهٔ فشردهٔ $A\times A-\bigcup I_\alpha\times I_\alpha$ انگاشت که هیچ جا صفر نمی‌شود. اکنون می‌توان بـه سادگی یك ثابت c برگزید بـه طوری‌که شرط لیپشیتس (*) به‌طور یکنواخت برای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در A برقرار باشد.]

اکنون tی دلخواهی با $|t|<c^{-1}$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت $\mathbf{f}_t$ یك بـه یك است، زیرا هرگاه $\mathbf{f}_t(\mathbf{x})=\mathbf{f}_t(\mathbf{y})$، آنگاه $\mathbf{x}-\mathbf{y}=t(\mathbf{v}(\mathbf{x})-\mathbf{v}(\mathbf{y}))$، وبنابراین‌نامساوی $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\leqslant|t|c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ ایجاب می‌کندکه $\mathbf{x}=\mathbf{y}$.

ماتریس مشتقات اول $\mathbf{f}_t$ را می‌توان به‌صورت $I+t[\partial v_i/\partial x_j]$ نوشت که در آن I ماتـریس همانی است. بنابراین دتـرمینان این ماتـریس تابعی چند جمله‌ای از t به شکل $1+t\sigma_1(\mathbf{x})+\cdots+t^n\sigma_n(\mathbf{x})$ است که ضرایبش تـوابعی‌پیوسته از $\mathbf{x}$اند. این دترمینان، برای $|t|$ به‌قدرکافی‌کوچك، اکیداً مثبت است. باانتگرالگیری روی A، ملاحظه می‌کنیم که حجم ناحیهٔ تصویر رامی‌توان به‌شکل تابعی چند جمله‌ای از t نوشت:

$$\text{حجم}\ \mathbf{f}_t(A)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n.$$

که در آن $a_k=\int\cdots\int_A\sigma_k(\mathbf{x})dx_1\cdots dx_n$. ■

اکنون فرض‌کنیم کرهٔ S^{n-1} میدان به‌طور پیوسته مشتق‌پذیری‌ازبردارهای یکهٔ مماس مانند $\mathbf{u}\to\mathbf{v}(\mathbf{u})$ داشته باشد. به‌ازای هرعددحقیقی t، توجه می‌کنیم که بردار $\mathbf{u}+t\mathbf{v}(\mathbf{u})$ طولی برابر $\sqrt{1+t^2}$ دارد.

لم ۲. هرگاه پارامتر t به قدر کافی‌کوچك باشد، تبدیل $\mathbf{u}\to\mathbf{u}+t\mathbf{v}(\mathbf{u})$ کرهٔ یکه در $\mathbf{R}^n$ را **به‌روی** کرهٔ به شعاع $\sqrt{1+t^2}$ می‌نگارد.

هرگاه لحظه‌ای درستی این لم رامفروض بگیریم، می‌توانیم قضیهٔ ۱ را ثـابت‌کنیم.

فرض‌کنیم ناحیهٔ A، ناحیهٔ محدود بین دوکرهٔ هم‌مرکز باشدکه بانامساویهای $a\leqslant\|\mathbf{x}\|\leqslant b$ تعریف می‌شود. باتعریف $\mathbf{v}(r\mathbf{u})=r\mathbf{v}(\mathbf{u})$ به‌ازای $a\leqslant r\leqslant b$، میدان برداری $\mathbf{v}$ را بـه سرتاسر این ناحیه توسعه می‌دهیم. نتیجه‌آنکه نگاشت $\mathbf{f}_t(\mathbf{x})=\mathbf{x}+t\mathbf{v}(\mathbf{x})$ در سرتـاسر ناحیهٔ A تعریف شده است واگر t به‌قدرکافی‌کوچك باشد، کرهٔ به‌شعاع r را به روی‌کرهٔ به شعاع $\sqrt{1+t^2}$ می‌نگارد (توجه‌کنیدکه $r\mathbf{f}_t(\mathbf{u})=\mathbf{f}_t(r\mathbf{u})$). بنابراین نگاشت مزبـور A را به‌روی ناحیهٔ بین‌کره‌های به شعاع $a\sqrt{1+t^2}$ و $b\sqrt{1+t^2}$ می‌نگارد. واضح است که

$$\text{حجم}\ \mathbf{f}_t(A)=(\sqrt{1+t^2})^n\cdot\text{حجم}\ (A).$$

پس هرگاه n فرد باشد، این حجم تابعی چند جمله‌ای از t نیست. از مقایسه بـا لم ۱ بـه تناقض می‌رسیم، واین قضیه را ثابت می‌کند.

اکنون باید لم ۲ راثابت‌کنیم. برای این‌کار دو استدلال متفاوت وجود داردکه‌اولی برمبنای "لم انقباض" [۵] ودومی مبتنی بر توپولوژی مقدماتی مجموعهٔ نقاط است.

اثبات نخست. فرض‌کنیم ناحیهٔ Aای‌که در بـالا در نظرگرفتیم بـا نـامساویهای $1/2\leqslant\|\mathbf{x}\|\leqslant 3/2$ تعریف شده‌باشد. t را به‌قدری‌کوچك‌اختیارمی‌کنیم‌که $|t|<1/3$ و $|t|<c^{-1}$، که در آن c یك ثابت لیپشیتس برای $\mathbf{v}$ است. دراین‌صورت به ازای هر $\mathbf{u}_0$ ثابت در S^{n-1}، نگاشت‌کمکی

$$\mathbf{x}\to\mathbf{u}_0-t\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

فضای متریك‌کامل A رابه‌توی‌خودش‌می‌نگارد(زیرا $|t\mathbf{v}(\mathbf{x})|<1/2$)؛ ودرشرط لیپشیتسی با ثابت لیپشیتس‌کوچکتر از ۱ صدق می‌کند. پس، بنابر لم انقباض، این نگاشت‌کمکی‌یك نقطهٔ ثابت یکتا خواهد داشت. به بیان دیگر، معادلهٔ $\mathbf{f}_t(\mathbf{x})=\mathbf{u}_0$ دارای جوابی یکتاست. باضرب $\mathbf{x}$ و $\mathbf{u}_0$ در $\sqrt{1+t^2}$، لم ۲ نتیجه می‌شود.

اثبات دوم. می‌توانیم‌فرض‌کنیم $n\geqslant 2$. اگر t به‌قدرکافی‌کوچك‌باشد، آنگاه‌ماتریس مشتقات اول $\mathbf{f}_t$ درسرتاسر ناحیهٔ فشردهٔ A نامنفرد است (بـا اثبات لم ۱ مقایسه‌کنید). از قضیهٔ تابع وارون نتیجه می‌شود $\mathbf{f}_t$ مجموعه‌های باز واقع در درون A رابه‌مجموعه‌های باز می‌نگارد. بنابراین تصویر $\mathbf{f}_t(S^{n-1})$ نسبت به‌توپولوژی القایی روی‌کرهٔ به‌شعاع $\sqrt{1+t^2}$ باز است. اما این تصویر $\mathbf{f}_t(S^{n-1})$ فشرده و بنـابراین بسته هم هست. چون S^{n-1} همبند است، یك‌زیرمجموعهٔ [ناتهی] بازوبسته‌اش‌بایدبرابرهمهٔ‌کره باشد، وحکم‌نتیجه می‌شود. ■

شکل کمی دقیقتری ازقضیهٔ ۱، که ازمشتق‌پذیری یا یکه بودن بردارها صحبتی به‌میان نمی‌آورد، اکنون به‌عنوان نتیجه‌ای فوری به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۱′. بریك کرهٔ‌زوج بعدی نمی‌توان هیچ‌میدان پیوسته‌ای ازبردارهای ناصفر مماس

تعریف کرد.[1]

اثبات. فرض کنیم کرهٔ S^{n-1} میدان پیوسته‌ای از بردارهای ناصفر مماس $\mathbf{v}(\mathbf{u})$ به خود بپذیرد. $m>0$ را مینیمم $\|\mathbf{v}(\mathbf{u})\|$ می‌گیریم. بنابر قضیهٔ تقریب وایرشتراس [۵]، نگاشتی چند جمله‌ای همچون $\mathbf{p}$ از S^{n-1} به $\mathbf{R}^n$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $\mathbf{u}$ در

$$\|\mathbf{p}(\mathbf{u})-\mathbf{v}(\mathbf{u})\|<m/2$$

صدق می‌کند. میدان برداری مشتق‌پذیر $\mathbf{w}(\mathbf{u})$ را به‌ازای هر $\mathbf{u}$ با رابطهٔ

$$\mathbf{w}=\mathbf{p}-(\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، محاسبهٔ $\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}=0$ نشان می‌دهد که $\mathbf{w}(\mathbf{u})$ در $\mathbf{u}$ بر S^{n-1} مماس است، درحالی‌که محاسبهٔ

$$\|\mathbf{w}-\mathbf{p}\|=|\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}|<m/2$$

به‌همراه نامساوی مثلثی نشان می‌دهد که $\mathbf{w}\neq 0$. بنابراین، خارج‌قسمت $\mathbf{w}(\mathbf{u})/\|\mathbf{w}(\mathbf{u})\|$ میدانی بینهایت بار مشتق‌پذیر از بردارهای یکهٔ مماس بر S^{n-1} است. این مطلب، اگر $n-1$ زوج باشد، بنابر قضیهٔ ۱ غیرممکن است. ■

با در دست داشتن قضیهٔ ۱′، اثبات قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر کاملاً آسان است:

قضیهٔ ۲. هر نگاشت پیوستهٔ $\mathbf{f}$ از قرص D^n به خودش دست‌کم یک نقطهٔ ثابت دارد.

در اینجا D^n را به عنوان مجموعهٔ همه بردارهای $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^n$ تعریف می‌کنیم که $\|\mathbf{x}\|\leqslant 1$.

اثبات. هرگاه به‌ازای هر $\mathbf{x}$ در D^n، $\mathbf{f}(\mathbf{x})\neq\mathbf{x}$، عبارت $\mathbf{v}(\mathbf{x})=\mathbf{x}-\mathbf{f}(\mathbf{x})$ یک میدان برداری ناصفر $\mathbf{v}$ بر D^n تعریف می‌کند که همه جا برروی مرز برونگراست، به این مفهوم که به ازای هر نقطهٔ $\mathbf{u}$ در S^{n-1}، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{u})>0$.

با اندکی احتیاط، می‌توان تعریف $\mathbf{v}$ را چنان اصلاح کرد که یک میدان برداری ناصفر $\mathbf{w}$ بر D^n به دست آید که روی مرز مستقیماً برونگرا باشد، به این مفهوم که به ازای هر $\mathbf{u}$ در S^{n-1}، $\mathbf{w}(\mathbf{u})=\mathbf{u}$. مثلاً قرار می‌دهیم

$$\mathbf{w}(\mathbf{x})=\mathbf{x}-\mathbf{y}(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})/(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}),$$

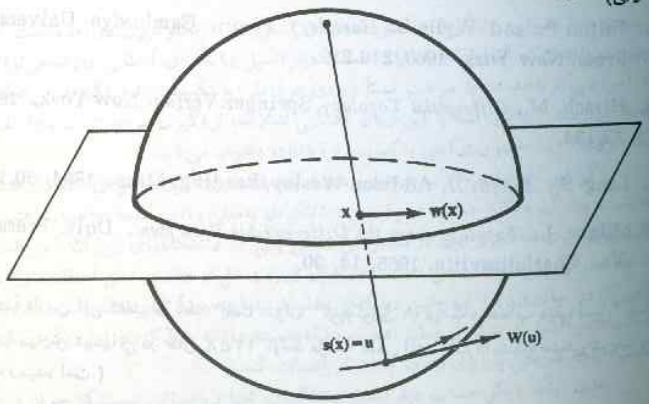
۱. به‌این قضیه، "قضیهٔ توپ مودار" نیز می‌گویند، زیرا در حالت دوبعدی، هرگاه خمهای انتگرال میدان برداری روی کره را به‌عنوان موهای روی توپ در نظر بگیریم، قضیه حکم می‌کند که به هیچ طریقی نمی‌توان موهای این توپ را طوری شانه زد که هیچ جای توپ "فرق" باز نشود. ـ م.

که در آن $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})\neq\mathbf{x}$. واضح است که هرگاه $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=1$، آنگاه $\mathbf{w}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$. این عبارت تابعی پیوسته از $\mathbf{x}$ است، زیرا مخرج هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ مستقل خطی باشند، این عبارت به‌وضوح ناصفر است، درحالی‌که هرگاه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ وابسته خطی باشند، اتحاد $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})\mathbf{y}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{x}$ ایجاب می‌کند که $\mathbf{w}(\mathbf{x})=(\mathbf{x}-\mathbf{y})/(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\neq 0$.

اکنون این میدان برداری مفروض $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ را به‌نیمکرهٔ جنوبی کرهٔ یکه S^n در $\mathbf{R}^{n+1}$ منتقل می‌کنیم. با یکی گرفتن $\mathbf{R}^n$ با ابرصفحهٔ $x_{n+1}=0$ که از "استوا"ی S^n می‌گذرد، از افکنش گنجنگاری[1] نسبت به‌قطب شمال $(0,\dots,0,1)$ استفاده می‌کنیم تا هر نقطهٔ $\mathbf{x}$ در D^n را به یک نقطهٔ $\mathbf{s}(\mathbf{x})=\mathbf{u}$ در نیمکرهٔ جنوبی $u_{n+1}\leqslant 0$ بنگاریم. رابطهٔ دقیق چنین است

$$\mathbf{s}(\mathbf{x})=(2x_1,\dots,2x_n,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-1)/(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+1).$$

با اعمال مشتق نگاشت $\mathbf{s}$ در $\mathbf{x}$ بر بردار $\mathbf{w}(\mathbf{x})$، بردار متناظری چون $\mathbf{W}(\mathbf{u})$ مماس بر S^n در نقطهٔ تصویر $\mathbf{s}(\mathbf{x})=\mathbf{u}$ به‌دست می‌آوریم. (بردار $\mathbf{W}(\mathbf{u})$ را می‌توان به مثابهٔ بردار سرعت $d\mathbf{s}(\mathbf{x}+t\mathbf{w}(\mathbf{x}))/dt$ خم کروی $t\to\mathbf{s}(\mathbf{x}+t\mathbf{w}(\mathbf{x}))$، محاسبه شده در $t=0$، درنظر گرفت.) به‌این طریق، میدان برداری ناصفر $\mathbf{W}$ای بر نیمکرهٔ جنوبی به‌دست می‌آوریم. در هر نقطهٔ $\mathbf{u}=\mathbf{s}(\mathbf{u})$ی استوا، چون $\mathbf{w}(\mathbf{u})=\mathbf{u}$ مستقیماً برونگراست، محاسبه نشان می‌دهد که بردار متناظر $\mathbf{W}(\mathbf{u})=(0,\dots,0,1)$ مستقیماً متوجه شمال (یعنی جهت مخالف نیمکرهٔ جنوبی) است.



شکل ۲

1. stereographic projection

به طریق مشابه، با استفاده از افکنش گنجنگاری نسبت به قطب جنوب، میدان برداری $-w(x)$ متناظر با میدانی برداری روی نیمکرهٔ شمالی خواهد شد که بر روی استوا بازهم متوجه شمال است. با به‌هم چسباندن این دو میدان برداری، یك میدان برداری ناصفر مماس W به دست می‌آوریم که همه‌جا بر S^n تعریف شده و پیوسته است. این، اگر n زوج باشد، بنا بر قضیهٔ ۱′ ممکن نیست.

این تناقض قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر را به‌ازای nهای زوج ثابت می‌کند. اما این برای اثبات قضیه به ازای مقادیر فرد $n=2k-1$ نیز کافی است. زیرا هر نگاشت بدون نقطهٔ ثابت f از D^{2k-1} به خودش، منجر به نگاشت بدون نقطهٔ ثابت $F(x_1,\dots,x_{2k})=(f(x_1,\dots,x_{2k-1}),0)$ از D^{2k} به خودش می‌شود. ■

مراجع

1. Asimov, D., "Average Gaussian curvature of leaves of foliations," preprint, 1976. *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978) 131-133.

2. Boothby, W.M., "On two classical theorems of algebraic topology," *Amer. Math. Monthly*, **78** (1971) 237-249.

3. Hilton P., and Wylie S., *Homology Theory*, Cambridge University Press, New York, 1960, 218-219.

4. Hirsch, M., *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York, 1976, 73,134.

5. Lang. S., *Analysis II*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964, 50,121.

6. Milnor, J., *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Univ. Press of Va., Charlottesville, 1965, 14, 30.

(ترجمهٔ فارسی این کتاب ارزشمند تحت عنوان "توپولوژی از دیدگاه حساب دیفرانسیل" با ترجمهٔ سیاوش شهشهانی در سال ۱۳۵۸ توسط مؤسسهٔ علمی انتشارات دانشگاه صنعتی شریف به چاپ رسیده است.)

7. Spanier, E., *Algebraic Topology*, Mc Graw-Hill, New York, 1966, 151, 194.

آنتونی رالستون

ریاضیات گسسته: ریاضیات جدید علم•

ترجمهٔ روزبه توسرکانی، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

انقلاب کامپیوتری ریاضیات گسسته را همانند حساب دیفرانسیل و انتگرال برای علم و تکنولوژی ضروری ساخته است.

دیدگاهها

"حساب دیفرانسیل و انتگرال به صورت زبان اصلی علم و تکنولوژی درآمده است. من چنین دریافته‌ام که آنهایی که با زبان حساب دیفرانسیل وانتگرال آشنایی دارند، می‌توانند با آموزشی کوتاه‌مدت، با سرعت نسبتاً زیادی هر دانش یا تکنیکی را فراگیرند. برعکس، به‌نظر می‌رسد آنهایی که با این زبان آشنایی ندارند، فراگیری هر چیزی در بارهٔ علم و تکنولوژی را ــ به‌صورت کیفی یا کمی ــ فوق‌العاده دشوار می‌یابند."

اگر این حرفها ــ مثلاً ــ در سال ۱۹۶۰ گفته‌شده بود، موردی برای انتقاد وجود نداشت؛ در آن هنگام حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌معنی واقعی کلمه ریاضیات علم و تکنولوژی بود. اما گفتار فوق از سخنرانی رئیس یکی از دانشگاههای بزرگ آمریکا ــ که شخصاً دارای پس‌زمینه‌ای فنی است ــ در سال ۱۹۸۵ نقل‌شده است. من اعتقاد دارم هر کسی که در سال ۱۹۸۵ از چنین دیدگاهی پشتیبانی نماید، جداً گمراه‌شده است. درواقع حساب دیفرانسیل و انتگرال همان اهمیتی را که همیشه داشته حفظ کرده، اما دیگر مهمترین نیست، بلکه شریکی پایاپای دارد، به‌نام "ریاضیات گسسته".

علت اینکه دیگر حساب دیفرانسیل وانتگرال، تنها ریاضیاتی نیست که جواز ورود

• Ralston, A., "Discrete mathematics: The new mathematics of science," *American Scientist*, 74(1986)611-619.

به‌دروازه‌های علم و تکنولوژی را صادر می‌کند، مربوط می‌شود به‌گسترش کامپیوترها و رشتهٔ علوم کامپیوتری. علیرغم آگاهی ظاهری جهانیان از انقلاب کامپیوتری کمتر کسی از تغییراتی که به‌دنبال آن در دنیای ریاضیات اتفاق‌افتاده آگاهی دارد. در این مقاله‌مختصراً محتوای ریاضیات گسسته را شرح می‌دهیم و دربارهٔ بعضی از کاربردهای آن بحث‌خواهیم کرد. همچنین برخی از آثار افزایش اهمیت ریاضیات گسسته را برروی تحقیقات‌ریاضی و آموزش ریاضیات بررسی خواهیم کرد.

وجه تمایز ریاضیات گسسته و حساب دیفرانسیل و انتگرال

در اساسیترین سطح، مدلی برای بیان تمایز بین ریاضیات گسسته و ریاضیات پیوسته (یعنی حساب دیفرانسیل وانتگرال و شاخه‌هایی از آنالیز که به‌حساب دیفرانسیل وانتگرال وابسته‌اند) تفاوت بین اعداد صحیح واعداد حقیقی است. اعداد حقیقی پایهٔ همهٔ ریاضیاتی هستند که مانند حساب دیفرانسیل و انتگرال با خواص توابع پیوسته سروکار دارند. اما کامپیوترهای رقمی (که ازاین‌پس آنها را به‌اختصار "کامپیوتر" می‌گوییم) ماشینهای گسسته هستند. هرچند این گفته که کامپیوترها تنها با اعداد صحیح سروکار دارند، مسامحه‌آمیز به‌نظر می‌رسد، می‌توانیم بگوییم که اعدادی که کامپیوترها با آنها سروکار دارند مانند اعداد صحیح، مجموعهٔ گسسته‌ای برمحور اعداد هستند، درحالی‌که اعداد حقیقی روی این محور چگال‌اند. ریاضیاتی که لزوماً بیشتر با توابعی سروکار دارد که برمجموعهٔ نقاط گسسته تعریف‌شده‌اند تا برمجموعهٔ نقاط پیوسته، از بسیاری جهات به طور کامل باکاخ پرشکوه آنالیز ــ که برپایهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال بناشده و عمدتاً به‌توابع پیوسته‌می‌پردازد ــ تفاوت دارد.

مقداری توضیح تاریخی به روشن‌شدن این موضوع کمك می‌کند که در ارتباط با کامپیوترها نیاز به‌نوعی ریاضیات غیرسنتی داریم. باوجوداینکه سیستمهای فیزیکی‌ازتعداد زیادی ذرات گسسته ــ اتمها ومولکولها ــ تشکیل شده‌اند، در عمل پیوسته فرض‌کردن‌ماده، فرض بسیار مناسب و دقیقی است. بنابراین راه متعارف مدلسازی قوانین فیزیك ازطریق حساب دیفرانسیل وانتگرال،نوعاً به‌صورت معادلات دیفرانسیل است. این‌رویکرد آنچنان موفقیت شگفت‌انگیزی داشته است که نتایج حاصل از آن، تقریباً برای همهٔ مقاصد و اهداف، ذاتاً دقیق‌اند. پیش از ظهور حسابگرهای الکترودینامیکی رومیزی که مقدم بر کامپیوترها بودند، بررسی مدلهای حاصل از حساب دیفرانسیل و انتگرال تنها با روشهای تحلیلی ــ یعنی با یافتن‌خودجواب و یا احتمالاً بایافتن سری جواب معادلات‌دیفرانسیل ــ امکان‌پذیر بود.

با پیدایش حسابگرهای رقمی و سپس کامپیوترها، امکان تلاش برای حل عددی معادلات دیفرانسیل و معادلات دیگر فراهم شد. ممکن است بعضی از خوانندگان تجربهٔ حل یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی را با استفاده از یك ماشین حسابگر رومیزی، همراه با

سیاه‌کردن صفحات متعددی با محاسبات طولانی، داشته باشند. چنین محاسبه‌ای همیشه شامل جانشین‌کردن مشتقات وانتگرالهای مربوط به‌حساب دیفرانسیل و انتگرال‌باتقریبات گسسته است، زیرا تنها این تقریبات را می‌توان به‌صورت عددی محاسبه‌کرد. سابق‌براین توجیه ریاضی این‌کار چنین بودکه اگر تقریب گسسته برای‌کمیت پیوسته، به اندازهٔ کافی خوب باشد، جواب حاصل از تقریب به‌اندازهٔ کافی به‌جواب واقعی مسئلهٔ پیوسته نزدیك است، به‌طوری‌که می‌توان از آن برای کارهای علمی و مهندسی استفاده‌کرد. این آغاز شکوفایی آنالیز عددی بود، شاخه‌ای از ریاضیات که اساساً با حل مسائل آنالیز بااستفاده از حساب سروکار دارد.

با آمدن کامپیوترها، آنالیز عددی در خلال دههٔ شصت تا اوایل دههٔ هفتاد سریعتر از همهٔ شاخه‌های ریاضی رشد کرد. این رشته همچنان به‌سرعت رشد می‌یابد ولی حالا می‌توان گفت که یك شاخهٔ بالغ وکامل ریاضی است. نمونهٔ متعارف از مسائلی که با استفاده از تکنیکهای آنالیز عددی‌حل می‌شوند، این‌است که فرمولبندی یك مسئلهٔ فیزیکی‌را (که همان‌طوری که قبلاً ذکر شد، نوعاً تقریبی از یك وضعیت فیزیکی‌گسسته است) با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال درنظر بگیریم و سپس آن را به‌شکل گسسته تبدیل‌کنیم‌تا با روشهای عددی قابل‌حل باشد. این روش آنچنان خوب کار می‌کندکه هم تقریب‌پیوستهٔ مسئلهٔ فیزیکی گسستهٔ تحت بررسی وهم تقریب گسستهٔ معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه، هردو به اندازهٔ‌کافی دقیق هستند تا نتایج نهایی درعمل مفید واقع شوند. دانستن این نکته مهم‌است که مقیاسهای تقریب مربوط به‌حساب دیفرانسیل و انتگرال و فرمولبندی گسستهٔ نتیجه‌شده ازآن، بسیار متفاوت‌اند؛ اولی شامل انبوهش تعداد عظیمی از اتمهای واقع درموجودی منفرد با خطایی درحدود یك در 10^{24} یا بیشتراست، درحالی‌که تقریب مربوط به‌تبدیل‌کردن مسئله به‌صورت گسسته بسیار خامتر ونوعاً شامل دقتی درحدود یك در 10^{3} تا 10^{8} است.

اگر نیاز به‌ریاضیات گسسته محدود به‌آنالیز عددی می‌شد، نمی‌توانستیم ادعا کنیم که‌چنین ریاضیاتی نقشی مقایسه‌کردنی باحساب دیفرانسیل و انتگرال دارد. آنالیزعددی، با وجود کاربردهای وسیع آن، موضوعی تخصصی است و نمی‌تواند تأثیر چشمگیری بر روند آموزش ریاضیات بگذارد. هرچند آنالیز عددی مهمترین محل تلاقی ریاضیات پیوسته وگسسته است، امروزه تنها کسر کوچك و درحال کاهشی از کاربردهای ریاضیات گسسته را دربرمی‌گیرد.

محرك حقیقی برای رشد ریاضیات گسسته، خود علوم کامپیوتری و همچنین‌نیازهای سایررشته‌ها مانند اقتصاد و زیست‌شناسی بوده است. هنگامی که اقتصاددانان و زیست‌شناسان سعی‌کردندکه بحثهای خود راکمی‌تر و ریاضی‌تر نمایند، با وجود اینکه‌وضعیتهای تحت بررسی‌که باید مدلسازی می‌شدند غالباً گسسته بودند، از مدلهایی شروع‌کردندکه توسط حساب دیفرانسیل وانتگرال فراهم‌شده بودند؛ زیرا به‌نظر نمی‌رسید چیز دیگری‌در دسترسشان باشد؛ هنگامی‌که کامپیوترها بیشتر در دسترس قرارگرفتند و وقتی‌که ریاضیات

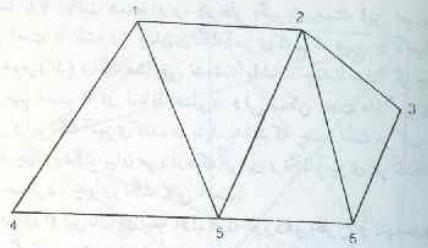
گسسته روشهای مفید و سهل‌الوصولی فراهم کرد، رشته‌های یادشده به‌طور فزاینده‌ای از مدلهای گسسته به‌جای مدلهای پیوسته استفاده کردند. چند مثال از این مدلها را در بخشهای بعدی به‌دست خواهیم داد.

علوم کامپیوتری به‌عنوان یك رشتهٔ علمی به‌زحمت بیست‌سال عمر دارد. باوجوداین اگر به‌رشد سریع خودادامه دهد، هم‌اکنون و برای سالهای متمادی بزرگترین منبع‌مسائل برای ریاضیات کاربردی خواهد بود. چون برای حل اکثر این مسائل به‌ریاضیات گسسته نیاز داریم، در آینده ریاضیات گسسته به‌طور فزاینده‌ای درمرکز توجه ریاضیات‌کاربردی قرار خواهدگرفت. نکته این نیست که در ریاضیات‌کاربردی، ریاضیات گسسته از آنالیز مهمتر خواهد شد یا نه؛ در هرحال مسئلهٔ مهم این است که هردو به‌اندازهٔ کافی مهم‌خواهند بود؛ به طوری که اگر کسی بخواهد در ریاضیات ــ یا هر رشته‌ای که عمیقاً به ریاضیات وابسته است ــ پیشرفتی داشته باشد، نمی‌تواند از دانستن ریاضیات کاربردی کلاسیك یا ریاضیات گسسته یعنی ریاضیات کاربردی جدید، طفره برود.

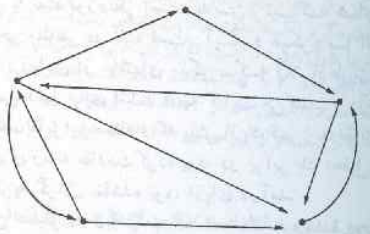
انواع ریاضیاتی که تحت‌عنوان ریاضیات‌گسسته شناخته می‌شوند وانواع مسائلی که این ریاضیات برای حل آنها به‌کارگرفته می‌شود، با استفاده از تعدادی مثال بهتر فهمیده خواهند شد؛ بعضی از این مثالها مطلقاً ریاضی و بعضی مربوط به‌مسائل عملی خواهندبود. این مثالها به‌هیچ‌وجه همهٔ شاخه‌های ریاضی موجود درریاضیات گسسته رادربرنمی‌گیرند، بلکه مقصود ازآوردنشان صرفاً این است که روحیهٔ حاکم برریاضیات گسسته وکاربردهای آن نشان‌داده شود. اما همهٔ شاخه‌های ریاضیات گسسته‌که در زیر موردبحث قرارخواهیم داد، پهنهٔ گوناگونی ازکاربردهای عملی را دربرخواهند داشت. قبل‌ازآنکه جلوتر برویم باید تذکر بدهیم که ریاضیات گسسته و پیوسته وجه‌تمایز قاطعی ندارند، بعضی‌ازشاخه‌های ریاضیات ــ شاید جبرخطی بهترین مثال باشد ــ شامل عناصری از هــر دو نوع گسسته و پیوسته هستند. همچنین در اینجا تذکر این نکته ارزشمند است کــه از نظرآموزشی بهتر است که ریاضیات گسسته و پیوسته همراه هم تعلیم‌داده شوند، نه آن‌طوری که امروزه معمول است، یعنی تعلیم آنها در درسهای جداگانه.

نظریهٔ گراف

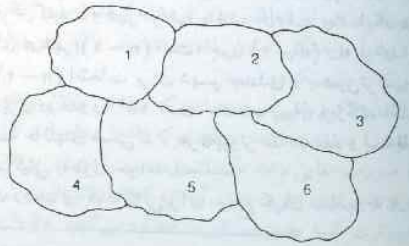
نظریهٔ‌گراف که یکی از پرکاربردترین شاخه‌های ریاضیات گسسته است، یکی اززمینه‌های فعال برای کارهای تحقیقاتی در بین ریاضیدانان و متخصصین علوم کامپیوتری به‌شمار می‌رود. برای یك ریاضیدان حرفه‌ای، یك گراف آن چیزی نیست که ما در دبیرستان برای نمایش‌رفتاریك تابع ــ مثلاً درجهٔ دوم ــ رسم می‌کردیم. نظریهٔ‌گراف دربارهٔ‌ساختارهایی که از رأسها و یالها تشکیل شده‌اند، بحث می‌کند.



یالها ممکن است بدون جهت باشند یا جهت داشته باشند، که دراین حالت آن را گراف جهتدار یا "دی‌گراف"[1] می‌نامیم:



یکی از معروفترین مسائل درنظریهٔ گراف، مسئلهٔ چهاررنگ است، هرچندکه این‌مسئله در اصل مربوط به‌نقشه‌هاست نه‌گرافها:



1. digraph

نقشه‌ای با ۴۸ ایالت همجوار را درنظر بگیرید. مسئله این است که کمترین تعداد رنگهایی که لازم است تا نقشه را چنان رنگ‌آمیزی کنیم که هیچ دوناحیهٔ هم‌مرزی (که‌در بیش ازیك نقطه هم‌مرزند) رنگ مشابهی نداشته باشند، چندتاست؟ گرچه این مسئله‌بیشتر از لحاظ ریاضی مهم است تا از لحاظ عملی، ولی ممکن است مثلاً برکار نقاشی که می‌خواهد یك اطلس را رنگ‌آمیزی کند، و باید بداند که چندرنگ مرکب لازم خواهدشد، اثر بگذارد. قضیهٔ چهاررنگ بیان می‌داردکه برای رنگ‌آمیزی هرنقشه‌ای که بتوان آن را برروی کاغذ رسم‌کرد، چهاررنگ کافی است.

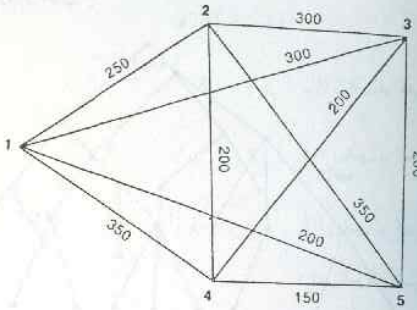
این مسئله برای اولین‌بار درنیمهٔ اول قرن نوزدهم مطرح و تنهاحدود ده‌سال قبل[1] ـ بااستفاده ازنظریهٔ گراف ـ توسط دو ریاضیدان به‌نامهای کنت آپل[2] و ولفگانگ‌هیکن[3] در دانشگاه ایلی‌نویز حل شد. چگونه قضیهٔ چهاررنگ به‌صورت قضیه‌ای درنظریهٔ گراف درمی‌آید؟ اگر به‌جای هریك از نواحی نقشه یك رأس درنظر بگیریم و سپس فقط‌رأسهای مربوط به‌نواحی هم‌مرزرا به‌یکدیگر وصل کنیم، نقشهٔ موردنظر تبدیل به‌یك‌گراف می‌شود. گراف حاصل متناظر با نقشهٔ موردنظر است، بدین‌ترتیب که شماره‌های رئوس گراف همان شماره‌های نواحی متناظر در نقشه است. آپل و هیکن، با استفاده از یك‌کامپیوتر سریع، به‌بررسی تعداد زیادی از حالتهای ممکن ـ که قبلاً ازطریق تحلیل ریاضی نشان داده‌شده بودکه بررسی آنها برای اثبات قضیه کفایت می‌کند ـ پرداختند و به‌این ترتیب قضیه را ثابت کردند. بنابراین مسئله‌ای‌که بیش ازیك قرن درمقابل حملهٔ تعدادی از بزرگترین ریاضیدانهای زمانه مقاومت‌کرده بود، در برابر یك تحلیل کامپیوتری‌که برپایهٔ پیشرفتهای ریاضی نظریهٔ گراف بناشده بود، ازپای درآمد.

یك مسئلهٔ خیلی عملیتر در ریاضیات گسسته، مسئلهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد است که در شکل ۱ شرح داده‌شده است. یك فروشندهٔ دوره‌گرد باید از تعداد زیادی شهر ـ هرکدام فقط یکبار ـ دیدن‌کند. (این شهرها درحکم رئوس گراف هستند.) هدف یافتن‌کوتاهترین مسیر ممکن‌است. شایدفکر کنید که‌خیلی‌راحت، همهٔ حالتهای‌ممکن را می‌شماریم وطول‌مسافت هریك را محاسبه می‌کنیم. این روش هنگامی که فقط ۵ شهر وجود دارد (مانند شکل ۱) ساده است. اما فرض‌کنید ۲۰ شهر موجود باشد، آن‌وقت چند امکان وجود دارد؟ جواب درحالت‌کلی برای n شهر $(n-1)!$ است، چون $(n-1)$ راه برای انتخاب اولین شهر وجود دارد و $(n-2)$ انتخاب برای شهر بعدی و به‌همین‌ترتیب تا آخر. اما اگر $n=20$، $19!$ چیزی درحدود 10^{17} است. یك‌عدد بسیار بزرگ. اگر $n=50$، روش بدوی محاسبهٔ همهٔ حالتهای ممکن ـ با هرکامپیوتر شناخته‌شده و یا قابل‌تصوری ـ مدت زمانی بیش‌از عمرگیتی به‌طول خواهد انجامید.

ممکن است روشهای گوناگونی‌برای سریع کردن محاسبه به‌کار گرفته شوند، مثلاً

۱. منظور ۱۹۷۶ است.ـم.

2. Kenneth Appel 3. Wolfgang Haken



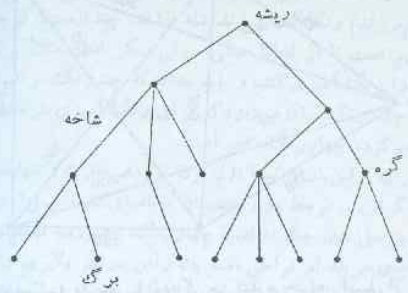
شکل ۱. یك فروشنده که در شهر ۱ زندگی می‌کند می‌خواهد قبل از برگشتن به‌خانه از کوتاهترین مسیر ممکن، از چهارشهردیگر هرکدام یك‌بار دیدن‌کند. دراین شکل طرح‌گونه از مسئلهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد (که بدون رعایت مقیاس رسم‌شده) کوتاهترین مسیر، یعنی ۱ـ۲ـ۴ـ۳ـ۵ـ۱، با طول ۱۰۵۰ است، که درآن حتی از مزیت کوتاهترین فاصلهٔ بین دو شهر، یعنی ۱۵۰ بین شهرهای ۴ و ۵، استفاده نشده است. مسیرهایی که درآنها همواره در هر مرحله، طمعکارانه نزدیکترین شهر انتخاب می‌شود، یعنی ۱ـ۵ـ۴ـ۳ـ۲ـ۱ یا ۱ـ۵ـ۴ـ۳ـ۲ـ۱ به‌ترتیب طولهایی معادل ۱۱۰۰ و ۱۱۵۰ دارند.

اینکه هیچ‌وقت بررسی مسیری را ادامه ندهیم که تا همین الان طول آن بیش از طول مسیری که قبلاً یافته‌ایم‌شده است. یا مسیری راکه‌درجهت مخالف یکی‌از مسیرهایی‌است که قبلاً بررسی شده است، بررسی نکنیم. علاوه براین تکنیکهایی وجود دارند که از نمونه‌برداری تصادفی از مسیرها استفاده می‌کنند و به تقریبهای خوبی از بهترین مسیر دست می‌یابند. در واقع تعدادی الگوریتم‌محاسباتی بسیار زیرکانه برای این مسئله که مدلی‌برای وضعیتهای عملی دیگری غیراز مسافرتهای فروشندگان است، اختراع شده است. اما هیچ‌کدام از این روشها بر مشکل اساسی اشاره شده در بالا، یعنی رشدنمایی ابعاد مسئله وقتی‌که n رشد می‌کند، غلبه نکرده است.

آیا ممکن است الگوریتمی موجود باشدکه توانایی یافتن‌کوتاهترین مسیر درمسئلهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد را داشته باشد، به‌طوری‌که مقدار محاسبات لازم نسبت به تعداد رأسهای‌گراف به صورت نمایی رشد نکند؟ نمی‌دانیم. پاسخ این‌پرسش در قلب مهمترین مسئلهٔ حل‌نشدهٔ علوم کامپیوتری نظری جای گرفته، که عبارت است از مسئلهٔ "$P=NP$؟" بخشی ازعلوم کامپیوتری که چنین مسائلی را مطالعه می‌کند، نظریهٔ پیچیدگی محاسبات نامیده می‌شود.

نوع خاصی از گراف به‌نام درخت وجود دارد که از اهمیت ویژه‌ای در علوم

کامپیوتری برخوردار است :

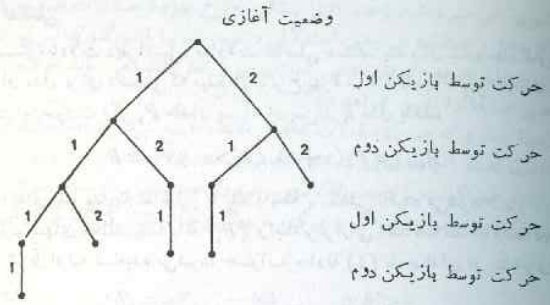


باوجودی که جهتی بر روی بالها نشان داده نشده است، هر درخت یك دی‌گراف است؛ زیرا جهت‌بالها به‌طور ضمنی به‌سمت‌پایین است. (اینکه متخصصان علوم‌کامپیوتری درختها را از ریشه به سمت پایین رشد می‌دهند، یك انتخاب کاملاً دلخواه و خودسرانه نیست، بلکه هنگام کار با قلم وکاغذ و یا روی صفحهٔ یك‌کامپیوتر، کارکردن از بالا به‌پایین واقعاً راحتتر است.) یك‌گراف جهتدار چه‌خواصی باید داشته باشد تا یك درخت‌محسوب شود؟ همان‌طور که مثال بالا ایجاب می‌کند، نباید شامل هیچ دوری (مسیر بسته) باشد، و به‌هر رأسی تنها یك یال از بالا وارد می‌شود، به‌غیراز بالاترین رأس (ریشه) که‌هیچ‌یالی به‌آن وارد نمی‌شود.

یك کاربرد درختها دربازی‌کردن است. درخت‌بازی در شکل ۲، همهٔ حرکات ممکن دریك بازی ساده را نشان می‌دهد، که در آن چهار ترکهٔ چوب در ابتدا وجود دارد، هر بازیکنی بایـد یك یا دو ترکـه را در هر نوبت بردارد و بازیکنی کـه آخرین شاخه را بردارد می‌برد. در صورتی‌که هر دو بـازیکن به‌خوبی بازی کنند، برنـده بازیکن اول خواهد بود یا دوم؟ شکل، جواب را نشان می‌دهد. چنین درختهایی نقش مهمی دربرنامه‌های کامپیوتری مربوط به بازیهایی مانند شطرنج و چکرز[1] ایفا می‌کنند.

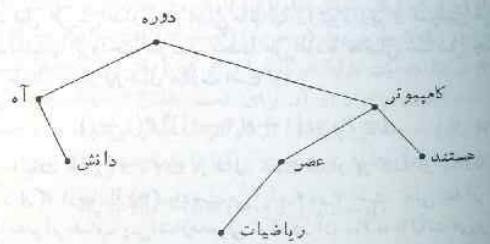
این درخت‌بازی یك درخت دوتایی است زیرا از هرگره حداکثر دو انشعاب‌ناشی می‌شود. درختهای دوتـایی در بسیاری از مسائل علوم کامپیوتری کاربرد دارند. یکی از معمولیترین‌کاربردهای آنها مسئلهٔ مرتب کردن یك فهرست است. برای مثال فرض کنید لغات زیر باید به‌صورت‌الفبایی مرتب شوند: کامپیوتر، آه، دانش، دوره، ریاضیات، هستند، عصر؛ چون لغتها بـه نوبت در کامپیوتر خوانده می‌شوند، مکان هر لغت روی درخت، با

۱. نوعی بازی‌که در آمریکا checkers و در انگلستان draughter نامیده می‌شود.-م.



شکل ۲. این درخت بازی همهٔ حرکات ممکن در یك بازی را نشان می‌دهد که در آن‌دو بازیکن با چهار ترکه چوب‌بازی را شروع می‌کنند و متناوباً هر کدام یك یـا دو ترکه برمی‌دارند. هدف ازبازی، برداشتن آخرین ترکه‌است. بنابراین یك استراتژی برنده برای بازیکن‌اول این است‌که دراولین حرکت فقط یکی‌ازترکه‌ها را بردارد، چون برداشتن دو ترکه‌به‌بازیکن دیگر این امکان را می‌دهد که دو ترکهٔ باقیمانده را در حرکت بعدی بردارد و بازی راببرد.

شروع از ریشهٔ درخت و به چپ یا راست رفتن معین می‌شود، به‌این‌ترتیب که اگر لغت واردشده‌نسبت به‌لغتی‌که دررأس قرارگرفته ازنظرالفبایی جلوتر یا عقبتر باشد به‌ترتیب به‌چپ یا راست حرکت کنیم و این‌کار را آن‌قدر ادامه دهیم تا به رأسی برسیم که تا آن لحظه هیچ لغتی به‌آن نرسیده است.



همان‌طورکه رسم شده است، فهرست لغات باترتیب الفبایی را می‌توان از چپ به‌راست قرائت‌کرد، اما روشهای‌بسیارمؤثرتری، نسبت به‌این‌روش‌که وابسته به‌دقت ترسیم‌درخت است، وجود دارند.

معادلات تفاضلی

همتای گسستهٔ معادلات دیفرانسیل، معادلات تفاضلی هستند. یك مثال ساده معادلهٔ زیر است که به‌عنوان مدل برای وضعیتی که مبلغ P با نرخ بهرهٔ سالانهٔ ثابت r پس‌اندازشده، به‌کار می‌رود. دراین‌صورت اگر P_k مقدار پس‌انداز پس‌از k سال باشد،

$$P_{k+1}=P_k(1+r)\ ,\ k>0\ \ ;\ P_0=P \qquad (1)$$

چنین معادله‌ای یك معادلهٔ تفاضلی یا یك رابطهٔ بازگشتی نامیده می‌شود، زیرا بین مقادیر اعضای بازنویسهای مختلف یك‌دنبالهٔ $\{P_i\}$ رابطه برقرار می‌کند. همانند معادلات دیفرانسیل $P_0=P$ شرط اولیه نامیده می‌شود. جواب معادلهٔ (۱) با جمله‌ای از یك‌سری هندسی داده می‌شود:

$$P_k=(1+r)^kP \qquad (2)$$

برای‌مثال، اگر درسال ۰ مبلغ P به‌حساب بازنشستگی‌شخصی (IRA) گذاشته شود و بعداز N سال (بدون جریمه) برداشت شود، دراین صورت بااستفاده ازمعادلهٔ (۲) مبلغ‌نهایی A عبارت خواهد بود از: $A=(1-t)P_N=(1-t)(1+r)^NP$، که در آن t نرخ مالیات درزمان برداشت پول است. البته، فرض ثابت بودن نرخ بهره و منفرد بودن نرخ مالیات (عدم جهشهای مالیاتی) مسئله را ساده‌کرده است، اما هر دو فرض به‌بهای پیچیدگی معادلهٔ (۱) و دشواری بیشتر حل آن، می‌توانند حذف شوند.

اگر به‌جای گذاشتن پول در IRA آن را دریك حساب پس‌انداز یا حساب بازار سهام با همان نرخ بهرهٔ r بگذاریم، معادلهٔ (۱) دراین‌حالت عبارت است از

$$P_0=P(1-t)\ ,\quad k>0\quad ;P_{k+1}=(1+r)P_k-rtP_k$$

زیرا حالا باید قبل از پس‌انداز مبلغ اصلی مالیاتها را بپردازیم و همچنین هرسال هنگام اخذ بهره باید مالیاتها پرداخته شوند. مجدداً حل معادلهٔ تفاضلی حاصل چندان دشوار نیست و مبلغ حاصل بعداز N سال عبارت است از:

$$A=P_N=[1+r(1-t)]^NP(1-t) \qquad (3)$$

برای t (نرخ مالیات ۳۰٪) و $N=40$ سال، نسبت مقدار A که از معادلهٔ (۲) حاصل می‌شود به‌مقدار A که ازمعادلهٔ (۳) به‌دست می‌آید، ۳٫۰۴ است. یعنی بعداز گذشت ۴۰ سال با IRA سه‌برابرحساب پس‌اندازمعمولی ــ که در آن سالانه مالیات می‌پردازیم ــ پول خواهیم داشت. حتی با ساده‌کردن فرضها مزیت IRA واضح است. با استفاده از معادله‌های تفاضلی بالا همچنین می‌توان نشان دادکه حتی اگر سرمایهٔ خودمان را قبل از ۵۹٫۵ سالگی ازIRA بیرون بکشیم ــ و درنتیجه متحمل ۱۰٪ جریمه شویم ــ درصورتی که قبلاً مدت ۶سال سرمایه‌های خود را در IRA نگاه داشته‌باشیم، هنوز نسبت به‌حساب‌پس‌انداز

مبلغ بیشتری خواهیم داشت (عدد دقیق بستگی به‌نرخ بهره و مالیات صحیح دارد). من کوشش کرده‌ام با استفاده از چنین استدلالی دانشجویان را قانع‌کنم که نمی‌توانند از باز-کردن یك IRA به‌محض‌گرفتن اولین شغلشان صرف‌نظر کنند (هر چند اصلاحات مالیاتی اخیر بعضی چیزها را تغییر خواهد داد).

زمینهٔ دیگری که در آن معادلات تفاضلی مفید واقع می‌شوند، مطالعات مربوط به جمعیت است که در آنها مدلهای گسسته مناسبترین مدلها هستند، زیرا نوعاً اندازه‌گیری جمعیت در فواصل گسسته ــ و معمولاً ثابت ــ موردتوجه‌است. برای مثال،حالتی رادرنظر بگیرید که درمحدودهٔ مشخصی، گونه‌ای گونهٔ دیگری را ــمثلاً گرگ خرگوش را ــ شکار می‌کند. معادلهٔ

$$R_n=aR_{n-1}-bW_{n-1}\quad a,b>0 \qquad (4)$$

می‌گوید که R_n، تعداد خرگوشها، در دورهٔ زمانی n (مثلاً یك سال) متناسب است باتعداد آنها در دورهٔ $n-1$ و تعداد گرگها در دورهٔ $n-1$. ضریب a به‌طور معمول بزرگتراز ۱ وبازتابندهٔ نرخ‌تولد خرگوشها نسبت به‌نرخ مرگ‌ومیر (طبیعی) آنهاست، درحالی‌که b بازتابندهٔ تعداد خرگوشهایی است که انتظار داریم هر گرگ در طول یك دورهٔ زمانی شکار کند. یك معادلهٔ متناظر برای تعداد گرگها در دورهٔ nام می‌تواند چنین باشد:

$$W_n=cW_{n-1} \qquad (5)$$

با این شرط که در این سیستم اکولوژیك خاص: نه در دسترس بودن غذا برای گرگها به‌صورت خرگوش حیاتی باشد و نه غذایی‌که توسط خرگوشها خورده می‌شود. ضریب c، مشابه ضریب a درمعادلهٔ (۴)، بازتابندهٔ نرخ خالص تولد به مرگ‌ومیر برای‌گرگهاست. معادلات (۴) و (۵) یك زوج معادلهٔ تفاضلی همزمان هستند که جوابهای آنها را می‌توان با حل معادلهٔ (۵) که شکلی چون معادلهٔ (۱) دارد، و جاگذاری جواب حاصل در معادلهٔ (۴) به‌دست آورد که‌نتیجه می‌دهد $R_n=Ra^n-bW(c^n-a^n)/(c-a)$ و $W_n=Wc^n$ که در آن R و W جمعیت اولیهٔ خرگوشها و گرگها (وقتی که $n=0$) است. گرچه این مدل بسیار ساده است، می‌توان از آن برای کسب اطلاع از اینکه چه‌نسبتی از خرگوشها وگرگها (R/W) به جمعیتی پایدار از خرگوشها منجر می‌شود، بهره جست. برای مثال فرض‌کنید $c=1$؛ دراین‌صورت جمعیت گرگها ثابت است (W). پس

$$R_n=Ra^n-bW(1-a^n)/(1-a)$$

و درشکل مفیدترش،

$$R_n-R_{n-1}=a^{n-1}[(a-1)R-bW]$$

بنابراین بسته به‌اینکه $(a-1)R-bW$ کوچکتر، مساوی، یا بزرگتر از صفر باشد،

جمعیت خرگوشها به‌ترتیب کم می‌شود، ثابت می‌ماند، یا افزایش می‌یابد.

یك مدل شکار-شکارچی واقعگرایانه‌تر به‌یك دستگاه معادلات تفاضلی پیچیده‌تر منجر خواهد شد که به‌جز درحالات خاص نمی‌توان آن را به‌صورت تحلیلی حل کرد، توجه کنید که همواره می‌توانیم جواب را برای مقادیر متوالی ۰ تا n با استفاده از معادلهٔ تفاضلی به‌طور مستقیم محاسبه نماییم. برای مدلهای فیزیکی کلاسیك که برحسب معادلات دیفرانسیل بیان شده‌اند، اگر معادلات به صورت تحلیلی قابل‌حل نباشد، مستقیماً نمی‌توان جواب را محاسبه کرد. برای محاسبهٔ آن عموماً لازم است که اول معادلات دیفرانسیل را به وسیلهٔ معادلات تفاضلی تقریب بزنیم و سپس محاسبه را انجام دهیم؛ پس هنگامی که یك مدل به‌طورطبیعی برحسب عبارتهایی شامل معادلات تفاضلی بیان می‌شود (مثلاً درعلوم کامپیوتری یا به‌همان‌ترتیب در اقتصاد، زیست‌شناسی و سایر رشته‌ها) نسبت به مدلی که برحسب معادلات دیفرانسیل بیان می‌شود، ارجحیت خواهد داشت.

ترکیبیات

ترکیبیات شاخه‌ای بسیار قدیمی از ریاضیات است که اکثر دانش‌آموزان هنگام مطالعهٔ جایگشتها و ترکیبها در دبیرستان با آن آشنا می‌شوند. در سالهای اخیر هم بدین دلیل که کامپیوترها امکان محاسبات ترکیبیاتی را که قبلاً ممکن نبود فراهم ساخته‌اند و هم به‌دلیل اینکه بسیاری از مسائل ریاضی‌ای که در تحقیقات علوم کامپیوتری مطرح شده‌اند نیاز به‌روشهای ترکیبیاتی دارند، رشدی انفجارآمیز دراین زمینه به‌وجود آمده است. دو مثالی که در اینجا می‌آوریم، مشخص‌کنندهٔ ماهیت مسائل ترکیبیاتی هستند. در واقع در مسئلهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد برای شمردن تعداد مسیرهای ممکن بین n شهر، از یك استدلال ترکیبیاتی سود جستیم.

همان‌طور که اولین مثال ما نشان می‌دهد،حل مسائل ترکیبیاتی غالباً منوط به استفاده از معادلات تفاضلی است. فرض کنید X یك n-مجموعه (یعنی گردایه‌ای غیر مرتب از n شیء که بنا به‌فرض متمایزند) باشد. یك افراز X، یعنی گردایه‌ای مجزا از زیرمجموعه‌هایی که همهٔ اعضای X را دربر دارند و هریك از آنها لااقل شامل یك‌عضو است. برای‌مثال،اگر $X=\{۱,۲,A,B\}$، افرازی از X عبارت است از $\{۱,A\},\{۲\},\{B\}$. یك n-مجموعه را به‌چندطریق می‌توان به‌k زیرمجموعه افراز کرد؟ (به‌ترتیب فهرست کردن زیرمجموعه‌ها اهمیت نمی‌دهیم.) این تعداد را با $S(n,k)$ نمایش می‌دهیم، و به صورت زیر استدلال می‌کنیم: $S(n,۱)=۱$،زیرا تنها افراز به یك زیرمجموعه، خود n- مجموعه است. $S(n,n)=۱$، زیرا تنها افراز به n زیرمجموعه، هر عنصر را در یك زیرمجموعه قرار می‌دهد. اگر $k>n$، آنگاه $S(n,k)=۰$، زیرا دراین حالت هیچ افرازی ممکن نیست. حال فرض کنید که مقدار $S(n-۱,k)$ را به‌ازای همهٔ مقادیر مثبت k بدانیم. اگر اعضای n-مجموعه را با $x_۱$، $x_۲$، . . . ، x_n نمایش دهیم، افرازهای زیر به k زیر مجموعه

فهرست اولیه	پس از اولین گذر	پس از دومین گذر	پس از سومین گذر	پس از چهارمین گذر	پس از پنجمین گذر	پس از ششمین گذر
۱۵	۱۲	۹	۹	۶	۶	۲
۱۲	۹	۱۲	۶	۹	۲	۶
۹	۱۵	۶	۱۲	۲	۸	۸
۱۷	۶	۱۲	۲	۸	۹	۹
۶	۱۲	۲	۸	۱۲	۱۲	۱۲
۱۲	۲	۸	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۲	۸	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵
۸	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶
۱۶	۱۷	۱۷	۱۷	۱۷	۱۷	۱۷

شکل ۳. یك الگوریتم ساده برای مرتب کردن یك‌فهرست درهم‌ریخته از nعدد، مطابق‌ترتیب عددی، این است که اولین دوعدد را با هم مقایسه کنیم و اگر به ترتیب درست قرار نگرفته بودند، جای آنها را با هم عوض کنیم و بعد همین کار را برای دومین و سومین اعدادموجود در فهرست انجام دهیم و سپس سومی و چهارمی و همین‌طور تا به‌انتهای فهرست برسیم.دراین مثال جای ۱۵ با ۱۲ و سپس ۹ عوض‌شده است و سپس جای ۱۷ با همهٔ اعدادی که درفهرست اولیه پایین آن قرار داشتند عوض‌شده است. بعد ازیك‌گذر از بالا تا پایین، بزرگترین عدد باید درانتهای فهرست قرار داشته‌باشد. هربار تکرار این روند، تضمین می‌کند که‌بزرگترین عدد بعدی درجای درست قرارگرفته‌است. پس $n-۱$ گذر لازم است تا مرتب بودن همهٔ عناصر فهرست تضمین‌گردد، هرچند ممکن است تعداد کمتری لازم باشد؛ در این حالت فهرست پس‌از ۶گذر مرتب‌شده است ولی کامپیوتری‌که از الگوریتم شکل ۴ پیروی می‌کند، دوگذر بیشتر انجام خواهد داد که در آنها چیزی تغییر نمی‌کند.

ممکن است؛ افرازهایی که در آنها x_n به‌تنهایی دریك زیرمجموعه قرار می‌گیرد، که‌تعداد این نوع افرازها $S(n-۱,k-۱)$ خواهد بود زیرا $n-۱$ عنصر دیگر باید در $k-۱$ زیر مجموعه قرار بگیرند، و افرازهایی که درآنها x_n به‌تنهایی در یك زیر مجموعه قرار ندارد، که تعداد اینها $kS(n-۱,k)$ است زیرا $n-۱$ عنصر باقیمانده باید به k زیر-مجموعه افراز شوند و دراین‌صورت x_n می‌تواند در هر کدام از این k زیرمجموعه قرار بگیرد. بنابراین

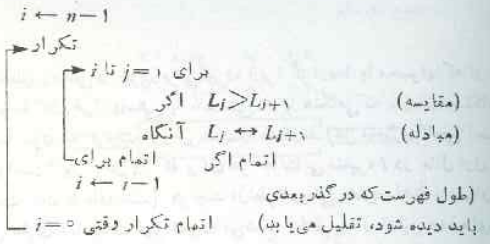
$$S(n,k)=S(n-۱,k-۱)+kS(n-۱,k) \qquad (۶)$$

به‌دلیل مشابهت با معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، این معادله یك معادلهٔ تفاضلی پاره‌ای نامیده می‌شود. معادلهٔ فوق شامل بیش از یك متغیر گسسته (دقیقاً دوتا — k, n) است، و به‌طور تحلیلی قابل حل نیست، اما با استفاده از شرایط مرزی بالا محاسبهٔ مقادیر $S(n,k)$ بسیار ساده است (این اعداد به افتخار جان استرلینگ، ریاضیدان اسکاتلندی قرن هجدهم که ماهیت آنها را مشخص کرد، اعداد استرلینگ نوع دوم نام گرفته‌اند).

در علوم کامپیوتری، ریاضیات ترکیبی بیش از همه برای تحلیل الگوریتمها (که یکی از مهمترین و ریاضی‌ترین قسمتهای علوم کامپیوتری است) مورد نیاز است (یك الگوریتم دقیقاً یك رویّه است، قانونی است برای انجام یك دستور خوش‌تعریف؛ مطالعهٔ الگوریتمها در قلب علوم کامپیوتری جای دارد). به‌عنوان یك‌مثال مجدداً مسئلهٔ مرتب کردن یك‌فهرست nتایی با ترتیب الفبایی یا عددی را در نظر بگیرید. شاید این‌مسئله معمولیترین دستوری است که کامپیوترها اجرا می‌کنند، زیرا پایهٔ اکثر کاربردهای مربوط به پردازش داده‌ها است. بنابراین کارایی در اجرای این دستور از اهمیت زیادی برخوردار است. یك الگوریتم معروف برای مرتب کردن فهرستها، الگوریتم حباب نامیده می‌شود. طرز عمل همان‌طور که درشکل۳ نشان داده شده است، به‌صورت زیر است: دو عبارت اول فهرست را باهم مقایسه کنید و اگر طبق ترتیب موردنظر قرار نگرفته‌اند جای آنها را عوض کنید. سپس دومین (که دراصل ممکن است همان اولی باشد) و سومین عبارت را باهم مقایسه کنید و همان عمل را انجام دهید. این رویّه را تا رسیدن به انتهای فهرست ادامه دهید. دراین لحظه بزرگترین عنصر درمحل n ام واقع‌شده است. حال به نقطهٔ شروع برگردید و این فرایند را با نادیده انگاشتن عناصری که درمحل درست خودشان واقع شده‌اند، تکرار کنید. بعد از حداکثر $n-1$ گذر، فهرست مرتب خواهد شد. نام این الگوریتم از این واقعیت اخذ شده که عناصر کوچکتر (یا آنهایی که از نظر الفبایی مقدم‌اند) مانند حباب به بالای فهرست می‌آیند.

شکل۴ الگوریتم حباب را نشان می‌دهد. این روش چقدر کارایی دارد؟ برای پاسخ به‌این سؤال توجه خود را به عمل کلیدی الگوریتم که تحت‌عنوان "مقایسه" مشخص شده است، معطوف می‌کنیم، زیرا این‌عمل بیش‌ازهمه تکرار می‌شود (دقت کنید که عمل "مبادله" درخط بعدی تنها هنگامی که عمل "مقایسه" درست‌نبودن ترتیب را نشان داده باشد، اجرا می‌شود). برای هرمقدار i از ۱ تا $n-1$، مقایسه iبار اجرا می‌شود، بنابراین تعداد کل مقایسه‌ها $(n-1)+(n-2)+\dots+2+1$ است. این مجموع $n-1$ عدد است که می‌تواند به صورت $n(n-1)/2$ بیان شود. بنابراین تعداد مقایسه‌ها همیشه متناسب با n^2 است. با نمادی متداولتر می‌نویسیم $O(n^2)$، که O باید "مرتبه" خوانده شود.

آیا کارایی این الگوریتم قابل افزایش است؟ بله، می‌توان این را در هرگذر با نشان کردن آخرین محلی که در آن مبادله‌ای انجام‌شده است تحقق بخشید، زیرا همهٔ عبارتهایی که در زیر آن محل قرار گرفته‌اند، مرتب شده‌اند و لازم نیست در گذر بعدی مورد آزمایش قرار بگیرند. این کار چه تغییری در تحلیل فوق به وجود می‌آورد؟ در



شکل ۴. این الگوریتم با روش مرتب کردن "حباب" یك فهرست $L[1:n]$ از n عدد را به ترتیب بزرگی عددی مرتب می‌کند و همان‌طور که در شکل ۳ دیده می‌شود، الگوریتم کارایی بالایی ندارد، زیرا حلقهٔ "تکرار-اتمام تکرار" ممکن است پس از مرتب‌شدن فهرست چندبار دیگر تکرار شود و هم به‌این دلیل که "مقایسه" پارها در قسمت مرتب‌شدهٔ فهرست که مرتباً از پایین به‌بالا درحال رشد است — به‌طور غیرضروری اجرا می‌شود.

بدترین حالت هیچ تغییری حاصل نمی‌شود، زیرا اگر ترتیب اولیه $n, n-1, \dots, 1$ باشد، آنگاه همچنان $n(n-1)/2$ مقایسه ضروری خواهد بود. اما به‌طور متوسط تعداد کمتری مقایسه لازم است. با وجود اینکه ثابت تناسب کمتر از ۱/۲ است، ولی تعداد متوسط مقایسه‌ها همچنان متناسب با n^2 است.

آیا روشهایی برای مرتب کردن فهرستها وجود دارند که در آنها، در بدترین‌حالت یا در میانگین، تعداد مقایسه‌ها به‌عنوان تابعی از n، کندتر از n^2 رشد کند؟ این یك‌پرسش مهم است، زیرا هنگامی که اختلاف بین n^2 و تابعی با نرخ رشد کمتر از n بتواند خیلی زیاد باشد، کارایی این روش برای مقادیر بزرگ n با اهمیت می‌شود. پاسخ این پرسش مثبت است. روشهایی برای مرتب کردن فهرستها وجود دارد که در آنها تعداد مقایسه‌ها، هم در میانگین و هم در بدترین حالت، متناسب با $n \log n$ رشد می‌کند (دوتا از شناخته‌شده‌ترین این روشها مرتب کردن سریع[1] و مرتب کردن انبوه[2] نام دارند). اگر لگاریتمها در پایهٔ ۲ محاسبه شوند، ثابتهای تناسب تفاوت چندانی با ثابت تناسب در روش حباب نخواهند داشت. مثلاً، چون برای $n=10000$، مقدار n^2 مساوی ۱۰۰ میلیون است، درحالی که مقدار $n \log n$ حدوداً ۱۳۵۰۰۰ است، روش حباب درواقع روش بسیار ضعیفی است که تنها برای nهای بسیار کوچك قابل استفاده است.

1. quicksort
2. heapsort

منطق ریاضی

ریاضیات گسسته منطق ریاضی را نیز در برمی‌گیرد، زیرا گزاره‌ها یا محمولها که از اجزای کلیدی منطق‌اند نوعاً "ارزش" درستی یا نادرستی، و یا هنگامی که به‌زبان دستگاه‌دوتایی اعـداد برگردانده شوند، به ترتیب ارزش ۱ یـا ۰ دارند (هر محمول تابعی است مانند "عدد مثبت i اول است" یا "$x > ۲$" که برای هر جانشانی متغیر، i در مثال اول و x در مثال دوم، یا درست است یا نادرست). هر چند از نظر تاریخی منطق عمدتاً به‌عنوان ابزاری برای مطالعهٔ مبانی نظری ریاضیات مهم شمرده می‌شده، اما تقریباً از اولین روزهای پیدایش سخت‌افزار کامپیوتر برای طراحی آنها به‌کار گرفته شده است. منطق در قالب جبر بولی در طراحی سخت‌افزار به‌کار می‌رود، کـه به‌افتخار ریاضیدان قرن نوزدهم جرج بول کـه برای اولین‌بار پیشرفت چشمگیری در گسترش جبری منطق به‌وجود آورد، بدین نام خوانده می‌شود.

برای مثال، مسئله‌ای را در نظر بگیرید که در شکل ۵ نشان داده شده است. می‌خواهیم یك مدار منطقی ــ که می‌توانیم آن را با استفاده از مدارات الکترونیکی بسازیم ــ طراحی کنیم که دو "بیت" (یعنی دو رقم) x_i و y_i از دو عدد درمبنای دوی X و Y را با نادیده‌گرفتن رقـم **انتقالی** از مرحلهٔ $(i-۱)$ام، با هـم جمع کند. جدول درستی، همهٔ مقادیر ممکن از ورودیهای x_i و y_i را نشان می‌دهد و مقادیر متناظر خروجیهای مجموع و انتقالی s_i و c_i را به‌دست می‌دهد. از ایـن جدول می‌توان معادلات بولی را، که هـم به‌صورت غیرصوری و هم با نمادهای ریاضی معمولی نشان داده شده‌اند، نتیجه گرفت. شکل ۵، مدار منطقی مناسب برای این نیم-جمع کننده را با استفاده از نمادهای استانده برای "و"، "یا" و "نفی" نشان می‌دهد. جهت طراحی یك جمع‌کنندهٔ کامل، که بایستی رقم انتقالی از مرحلهٔ $(i-۱)$ام را هم بپذیرد، به دوتا از این نیم-جمع کننده‌ها و یك مدار "یا"ی اضافی نیاز داریم. تکنیکهای جبر بول هنـوز در طراحی بسیاری از مدارات مجتمع پیچیده بـه کار می‌روند.

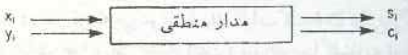
اخیراً منطق ریاضی در دوشاخهٔ دیگر از علوم کامپیوتری اهمیت یافته است. در یکی از این دوشاخه کـه به وارسی الگوریتمها و برنامه‌های کامپیوتری اختصاص دارد، زبان منطق برای توصیف ورودی و خروجی یك الگوریتم یا برنامه و همچنین برای ارائهٔ اثبات ادعاهایی دربارهٔ خود الگوریتم یـا برنامه، به‌کار برده می‌شود. این مسائل هنگامی به کار می‌روند کـه سعی داریم برای آنچه ادعاشده است کـه الگوریتم یا برنامه انجام می‌دهد، برهانی بسازیم. برای مثال، اگر از الگوریتم شکل ۴ استفاده کنیم، یك حکم که می‌توانیم قبل از حلقهٔ "برای" بگذاریم این است:

(۷) برای هر k، اگر $j \leqslant k \leqslant ۱$، آنگاه $x_k \leqslant x_{j+۱}$

که باید چنین خوانده شود: "برای هر k وقتی k یکی ازمقادیر ۱ تا j باشد، x_k کوچکتر

جمع دو رقم

$$X = x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1$$
$$Y = y_n y_{n-1} \ldots y_2 y_1$$



جدول درستی

x_i	y_i	s_i	c_i
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

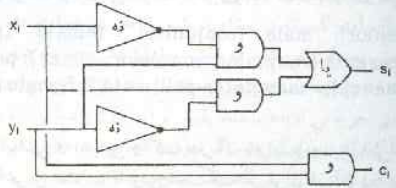
معادلات بولی

s_i ۱ است وقتی x_i یا y_i و نه هردو ۱ باشند.

c_i ۱ است فقط وقتی که x_i و y_i، ۱ باشند.

$$s_i = x_i \bar{y}_i + \bar{x}_i y_i$$
$$c_i = x_i y_i$$

مدار منطقی



شکل ۵. یك مـدار منطقی برای جمع دو رقم x_i و y_i از اعـداد در مبنای دوی X و Y، با ترجمهٔ این عملیات به‌معادلاتی از جبر بولی طراحی‌شده است. معادلات بولی همهٔ مقادیرممکن جمع x_i و y_i را که در جدول درستی ذکر شده، خلاصه می کنند. مثلاً وقتی x_i و y_i هـردو ۱ باشند، مجموع ۰، و رقم انتقالی ۱ است.

یا مساوی $x_{j+۱}$ است." لذا این حکم ادعا می‌کند که درست قبل از $(j+۱)$امین اجرای حلقه، $(j+۱)$امین عبارت حداقل به‌بزرگی همهٔ عبارتهای قبل از خود است. و این‌همان

چیزی است که در روش حباب انتظار آن را داریم. قبل از اینکه برای اولین‌بار وارد حلقه شویم، j تلویحاً مساوی صفر است، پس هیچ مقداری از k که از ۱ تا j باشدوجود ندارد، پس حکم منتفی است. حکمی مانند معادلهٔ (۷) را ناوردای حلقه می‌نامند، زیرا شرطی را بیان می‌کند که فرض‌شده است در هربار اجرای حلقه بدون تغییر است. چنین حکمهایی ازآن‌جهت درنظر گرفته می‌شوند تا یك اثبات‌کنندهٔ مکانیکی (یعنی یك برنامهٔ کامپیوتری، که برای اثبات قضایا طرح‌شده است) بتواند با استفاده ازآنها درستی یك الگوریتم یا برنامه را ثابت کند. این یك‌زمینهٔ نسبتاً جدید تحقیقات علوم کامپیوتری است که آیندهٔ بسیار نویدبخشی دارد. این امر همچنین با نشان دادن اینکه چگونه طراحی برنامه‌ها برمیزان دشواری یا سادگی اثبات درستی آنها اثر می‌گذارد، تاکنون به‌شناخت روشهای بهتر برنامه‌نویسی کمك کرده است.

کاربرد جدیدتر دیگری از منطق ریاضی استفادهٔ مستقیم ازآن به‌عنوان زبان برنامه‌نویسی است در آنچه برنامه‌نویسی منطقی خوانده می‌شود. در سال ۱۹۸۱ هنگامی که ژاپنی‌ها اعلام کردند که یك زبان برنامه‌نویسی منطقی، به‌نام پرولوگ[1] ابزار نرم‌افزار پایه‌ای در پیشرفتهایشان در زمینهٔ تولید کامپیوترهای جدید (موسوم به نسل پنجم) بوده است، ناگهان جهش بزرگی در میزان علاقه به تحقیقات در این زمینه به‌وجود آمد. یکی از کاربردهای پرولوگ، درکنار انواع بسیاری از محاسبات نمادی که درآنها می‌تواند مورد بهره‌برداری قرارگیرد، کاربرد آن در پایگاه داده[2]های بزرگ است، که درآنها در کنار بازیابی و به‌هنگام‌آوری داده‌ها، غالباً مقتضی است که به‌سؤالاتی دربارهٔ روابط بین اشیای‌موجود در پایگاه داده پاسخ‌داده شود. برای مثال هفت عبارت موجود در پایگاه دادهٔ زیر (که‌کمی از قواعد نحوی پرولوگ منحرف‌شده است) را درنظر بگیرید:

male (ronsenior); male (ronjunior); female (nancy); female (maureen); parents (ronjunior, ronsenior, nancy); parents (maureen, ronsenior, nancy); may-enter-politics (X):-female (X) and father (ronsenior).

شش عبارت اول روابطی و اشیایی راکه در آن روابط صدق می‌نمایند، تعریف می‌کنند، درحالی‌که آخرین عبارت قانونی است که می‌توان از آن در پرسش از پایگاه داده‌استفاده کرد. مثلاً فرض کنیدپرسش "may-enter-politics (X)?" را وارد کرده‌اید، آنگاه پرولوگ پاسخ می‌دهد: "maureen".

هرچند این مثال ساده، روشنگر آن نیست ولی پرولوگ ابزارهای پیچیده‌ای از منطق ریاضی را برای پاسخ به‌پرسشها و انجام سایرکارهایی‌که توانایی انجام آنها را دارد، به‌کار می‌گیرد. هنوز برای قضاوت دربارهٔ اینکه برنامه‌نویسی منطقی در آینده چقدر اهمیت پیدا خواهدکرد، بسیار زود است، ولی روشن است که استفاده از منطق ریاضی‌در

1. POROLOG 2. database

یك متن برنامه‌نویسی تسهیلاتی به وجود می‌آورد که در بسیاری ازموارد، کاربردی مفید هستند.

آموزش و پژوهش ریاضی

پژوهش در ریاضیات عملاً سیستمی با تحریك داخلی است. ریاضیدانان در زمینه‌هایی تحقیق می‌کنند که نظرشان راجلب کنند. آژانسهای سرمایه‌گذار، مانند بنیاد ملی‌دانش[1]، تااندازه‌ای براینکه روی چه زمینه‌های تحقیقاتی باید بیشتر تأکید شود اثر می‌گذارند ولی آنها غالباً بیشتر پیرو جریانات هستند تا رهبرآنها. با وجود این علی‌رغم آنچه "فروپاشی اعتقاد به‌اینکه هدف ریاضیات خدمت به‌علوم است" [۲] خوانده می‌شود، ریاضیدانان کاربردی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای در پژوهشهای خود تحت‌تأثیر مسائلی هستند که در سایر زمینه‌های علمی نیازبه‌حل دارند. هرچند هنوزمسائل بسیاری در علوم‌فیزیکی وجود دارندکه برای حل نیاز به تحقیقات ریاضیات کاربردی دارند، زمینه‌ای که در ریاضیات کاربردی از رشد بیشتری برخوردار بوده است، مربوط به‌مسائلی می‌شود که از علوم کامپیوتری نشأت می‌گیرند. چون این مسائل شدیداً مربوط به‌ریاضیات گسسته‌هستند، می‌توان انتظار داشت‌که در این شاخه از ریاضیات کاربردی شاهد افزایش تدریجی حجم تحقیقات نسبت به‌ریاضیات کاربردی‌کلاسیك باشیم. درواقع اینکه چنین اتفاقی هم‌اکنون درحال روی‌دادن است از افزایش حجم نوشته‌های منتشرشده دربارهٔ کاربردهای ریاضیات گسسته آشکار است.

اما غیر از ریاضیدانان، سایرین برای اولین‌بار از راه آموزش ریاضیات آثار رشد اهمیت ریاضیات گسسته را مشاهده کرده‌اند. ریاضیات دو سال اول کالج به‌طور فزاینده‌ای به‌سمتی حرکت می‌کند که نقشی معادل نقش حساب دیفرانسیل و انتگرال را به ریاضیات‌گسسته محول نماید. این‌تمایل متضمن مفاهیم ژرفی برای دورهٔ تحصیلات‌ریاضی است. اگر چنین جریانی ادامه یابد یقیناً برانواع ریاضیاتی که در دوره‌های تحصیلات تکمیلی مورد تأکید قرار می‌گیرند، اثرخواهدگذاشت و بنابراین برزمینه‌های موردتأکید در تحقیقات ریاضی نیز اثر می‌گذارد. همچنین تأثیرات مهمی خواهد گذاشت برروش تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال و رشته‌هایی در علوم فیزیکی و مهندسی‌که طبق‌سنت به‌حساب دیفرانسیل و انتگرال به عنوان تکیه‌گاه درسهایشان نیاز دارند. حجم فزاینده‌ای از نوشته‌ها دربارهٔ مطلوبیت گنجاندن مقدار بیشتر ریاضیات گسسته در دو سال اول ریاضیات کالج وجود دارد [۳ و ۵]. افزایش کتابهای درسی دربارهٔ ریاضیات گسسته‌که جهت تدریس به‌دانشجویان سال اول دانشگاهها یا سال دوم کالج نوشته شده‌اند، کاملاً چشمگیر است ــ لااقل یك دوجین بین سالهای ۱۹۸۳ تا ۱۹۸۵ چاپ‌شده و هنوز توقع

1. National Science Foundation

چاپ تعداد بیشتری در سه‌سال آینده می‌رود (مثلاً [۱ و ۶]). تمایل به ریاضیات گسسته در سطح کالج به‌ناچار آثارمهمی برریاضیات در سطوح دبیرستانی و حتی ابتدایی‌خواهد گذاشت.

علی‌رغم این نشانه‌ها، وجود "ریاضیات جدید" دیگری روشن نیست [۴]. مسلماً جراحت حاصل از ریاضیات جدید در دهۀ شصت هنوز شدیداً همراه ماست. اما اگر ریاضیات گسسته ریاضیات جدید دهۀ ۹۰ شود، بدین‌دلیل است که دگرگونیهای علم و تکنولوژی ایجاب می‌کنندکه‌ریاضیات به‌فرزندان ماچیزهایی بیاموزدکه مناسب‌حرفه‌هایی باشدکه درآینده برخواهندگزید.

مراجع

1. Johnsonbaugh, R., *Discrete Mathematics*, Macmillan, 1984.
2. Mandelkern, M., "Constructive mathematics," *Math. Mag.* 58 (1985)272-279.
(ترجمۀ فارسی این مقاله را می‌توانید تحت عنوان "ریاضیات ساختنی" در جنگ ریاضی دانشجو، ۱(۱۳۶۶)ص ۱۰۵-۱۱۸، بخوانید.)
3. Ralston, A., "Computer science, mathematics, and the undergraduate curricula in both," *Amer. Math. Monthly*, 88(1981) 472-485.
4. Ralston, A.,"Discrete mathematics_the really new mathematics," *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, 1985.
5. Ralston, A., and Young, G. S., *The Future of College Mathematics*, Springer-Verlag, 1984.
6. Ross, K. A., and Wright, C.R.B., *Discrete Mathematics*, Prentice-Hall, 1985.

پیتر هیلتون، جین پدرسن

نگرشی بر مثلث پاسکال: ترکیبیات، حساب، هندسه•

ترجمۀ ویدا میلانی

مقدمه

از آنجا که امروزه اهمیت نقش ترکیبیات در ریاضیات روبه‌فزونی است، طبیعی است که این مبحث در سطح لیسانس اهمیت بسزایی کسب کرده باشد. روشهای ترکیبیات متفاوتند. برخی (مثلاً، نظریۀ گراف) مختص این مبحث‌اند درحالی‌که در موارد دیگر استدلالهای‌سنتی برپایۀ حساب‌کلاسیک و جبر، مناسب و مقتضی‌هستند. ضرایب دوجمله‌ای بنیاد ترکیبیات را تشکیل می‌دهند. دربررسی این ضرایب وخواص آنها غالباً به‌انتخاب روش رو می‌آوریم. به‌عنوان یك روش کلی‌دریافته‌ایم که استدلالهای جبری بیشترمقدماتی و خودکارند، درحالی‌که استدلالهای ترکیباتی بینش عمیقتری را منتقل می‌کنند.

درمقالۀ حاضر برخی از الگوهایی راکه در مثلث پاسکال مشاهده شده‌اند نشان می‌دهیم و روشهای تجربیمان در مشاهدات و روشهای اثبات را توصیف می‌کنیم. مخصوصاً مایلیم به‌نقش تقارن دراثباتمان از قضایای ۱.۲ و ۲.۲ توجه کنیم، چراکه این تقارنها آنهایی نیستندکه به‌طور سنتی با مثلث پاسکال قرین‌اند. توانایی تقارن دراثبات ریاضی مضمون مرجع [۴] می‌باشد.

بی‌گمان، ما چه در روشهای به کار رفته وچه درنتایج به‌دست آمده، احتمالات را نادیده نگرفته‌ایم. در واقع، یکی از اهداف ما در نوشتن این مقاله ترغیب دیگران به جستجو در پی نتایج گسترده‌تر، و حتی جالبتر است. مثلاً، آیاقضیۀ " یك چوب چوگان

• Hilton Peter, Pedersen Jean, "Looking into Pascal's triangle: combinatorics, arithmetic, and geometry," *Mathematics Magazine*, **60**, December 1987, 305-316.

بزرگتر"[1] وجود دارد (ر. ك بخش ۱)؟ و آیا همواره یك بزرگتری وجود خواهد داشت؟

ما به‌شکل " در چپ قرارگرفتهٔ " مثلث پاسکال اشاره کرده‌ایم. برای کسانی (مانند PH و نه مثل JP) که با این اصطلاح بیگانه‌اند، توضیح می‌دهیم که منظور تغییر شکل‌دادن مثلث به نحوی است که ساق چپ آن به طور قائم واقع شود. درمواردی خاص، مزیت چنین تغییرشکلی نشان دهندهٔ حالتی است که به ادعای ما غالباً جنبهٔ هندسی دارد و منتهی به‌حدسهایی می‌شود که برای اثباتشان جبر[2] ویا ترکیبیات و یا هر دو مورد نیازند. دربارهٔ مثلث پاسکال نمی‌توان نقل قولی بهتر از گفتهٔ ژاکوب برنولی آورد که گفت [۴]: "جوهرترکیبیات در درون آن نهفته است، اما آنها که با هندسه آشنایی نزدیکتری دارند نیز می‌دانند که رازهای مهم وعمدهٔ تمامی ریاضیات در درون آن نهان است."

هیچکس در نشان دادن صدق گفتهٔ برنولی موفق‌تر، و دقیق‌تر از جورج پولیا نبوده است. اوهمچنین برای‌ارائهٔ راهبردهای‌مطلوب‌حل مسئله که درذات مثلث پاسکال‌اند، احتمالات زیادی را مشاهده کرد. غالباً اثر بزرگ پولیا با عنوان "کشف ریاضی" [۶] الهام‌بخش ما بوده است؛ در این مقالهٔ خاص، ازبخش ۶.۳ جلد اول آن متن الهام گرفته شده است.

۱. کشفیاتی مقدماتی در مثلث پاسکال

ضرایب دوجمله‌ای در قلب ریاضیات ترکیبیاتی قرار دارند. اگر قرار باشد بدون جایگزینی، از n شیء مجزا r شیء برگزیده شود، تعداد راههای انجام این‌کار از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad (۱.۱)$$

این فرمول بین حساب و ترکیبیات پیوندی بنیادی ایجاد می‌کند. می‌توان خواص ضرایب دوجمله‌ای را به‌کمك استدلال ترکیبیاتی یا حسابی، اثبات کرد، یا مورد بهره‌برداری قرارداد، و همچنین ممکن است درمطالعهٔ آنها از ایده‌های هندسی یاری گرفت.

در زیرمثالی خوب ازیك واقعیت حسابی با اثبات ترکیبیاتی را می‌آوریم.

قضیهٔ ۱.۱ حاصل‌ضرب r عدد صحیح متوالی بر $r!$ بخش‌پذیر است.

---

1. A Bigger Hockey Stick and Puck

۲ دیدگاه ما این است که جبر، در این سطح، صرفاً حساب به‌نظام درآمده است. از این‌رو در این مقاله این دو اصطلاح تعویض‌پذیرند. برای دستیابی به‌بیان جامع‌تراین دیدگاه ر. ك مرجع [۵].

اثبات: واضح است که می‌توان حاصل‌ضرب اعداد صحیح مثبت را درنظر گرفت. فرض کنیم k دربین r عدد صحیح‌متوالی مثبت کوچکترین باشد. دراین‌صورت‌حاصل‌ضرب آنها عبارت است از $k(k+1)\ \dots\ (k+r-1)$ و

$$\frac{k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}=\binom{k+r-1}{r}$$

اما، واضح است که سمت راست این عبارت، به اعتبار تعبیر ترکیبیاتیش، عددی است صحیح.

به‌عنوان نمونه‌ای دیگر ازاین پدیده مثال زیررا عنوان می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۱ (الف) $\binom{2n-2}{n-1}$ بر n بخش‌پذیر است؛

(ب) $\binom{2n-1}{n}$ بر $2n-1$ بخش‌پذیر است؛

(پ) $\binom{2n}{n}$ بر $4n-2$ بخش‌پذیر است.

اثبات. خارج قسمتها صورتهای دیگرعدد n ام کاتالان c_n هستند، که به‌صورت تعداد راههای مختلف قراردادن پرانتز درمیان مجموع n عددتعریف می‌شود به‌طوری‌که عبارت به دست آمده با معنی باشد (بنابراین، $c_1=1$، $c_2=1$، $c_3=2$، $c_4=5$، $c_5=14$ و ...).

دسترسی به اثباتی حسابی برای این قضایا ساده به‌نظر نمی‌رسد. اغلب می‌توان میان اثباتهای‌ترکیبیاتی وحسابی یکی رابرگزید،معمولا درچنین مواردی اثبات‌ترکیبیاتی بینش وسیعتری را فراهم می‌آورد. مثالی از این نوع اتحاد پاسکال است:

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1} \qquad (۲.۱)$$

البته می‌توان این اتحاد را مستقیماً به کمك (۱.۱) اثبات کرد، اما ظاهراً برهان زیر رضایت بخش‌تر است: می‌دانیم که

$$\binom{n+1}{r}=\text{تعداد انتخابهای ممکن } r \text{ شیء ازمیان } n+1 \text{ شیء}.$$

اینك این انتخابها را به دو دستهٔ مجزا تقسیم می‌کنیم. اولا،

$$\binom{n}{r}=\text{تعداد انتخابها به‌استثنای آخرین شیء}،$$

دراین صورت r شیء از نخستین n شیء را انتخاب می‌کنیم. ثانیاً،

$$\binom{n}{r-1} = \text{تعداد انتخابها شامل آخرین شیء،}$$

بدینسان $r-1$ شیء از n شیء را انتخاب می‌کنیم. به این ترتیب (۲.۱) ثابت می‌شود.

مثال دیگر (شامل نتیجه‌ای که بعداً به‌کارخواهیم برد) در ارتباط باضریب‌دوجمله‌ای $\binom{n+1}{2}$ است. به‌تعبیر هندسی، می‌توان باآزمون‌یك‌آرایهٔ مربعی 5×5 از نقاط افراز شده به‌سه مجموعهٔ مجزای نموده شده درشکل ۱، به‌یك "مدل نمونه" نظری انداخت.

باتوجه به‌شکل داریم

$$2(1+2+3+4)+5=5^2 \quad \text{و}$$

و در نتیجه

$$1+2+3+4=\frac{5(5-1)}{2}$$

که آن را با $\binom{5}{2}$ نمایش می‌دهیم.

از آنجاکه دراین برهان عدد ۵ دقیقاً همان نقشی را ایفا می‌کند که اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۳ بازی می‌کنند، به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که افراز متناظری از یك‌آرایهٔ $(n+1)\times(n+1)$ ازنقاط به‌اتحاد

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$$

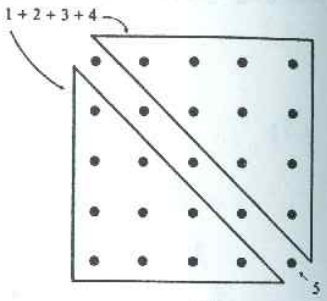
خواهد انجامید که سمت راست آن درست همان $\binom{n+1}{2}$ است. حال به سهولت می‌توان پی‌برد که چرا گاهی ازضرایب دوجمله‌ای به‌عنوان n امین عدد مثلثی یاد می‌شود، و آن را با T_n نشان می‌دهند. می‌توان این دیدگاه هندسی را حتی ازاینها هم فراتر برد. با افراز آرایهٔ 5×5 به دو آرایهٔ مثلثی از نقاط، مانند مورد شکل ۲، مشاهده می‌شود که $T_4+T_5=5^2$؛ که در نتیجه $\binom{5}{2}+\binom{6}{2}=5^2$ این شکل همچنین نشان می‌دهد که $T_5=T_4+5$، و لذا $\binom{6}{2}=\binom{5}{2}+5$ نتایج‌متناظر کلی‌عبارتند از $T_{n-1}+T_n=n^2$. یا

$$\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=n^2 \quad ; \qquad (3.1)$$

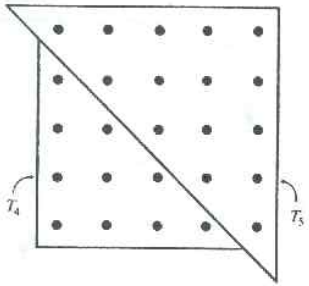
و نیز $T_n=T_{n-1}+n$، یا

$$\binom{n+1}{2}=\binom{n}{2}+n \quad . \qquad (4.1)$$

قابل توجه است که (۴.۱) را می‌توان حالت خاصی از اتحاد پاسکال (۲.۱) در نظر گرفت.



شکل ۱



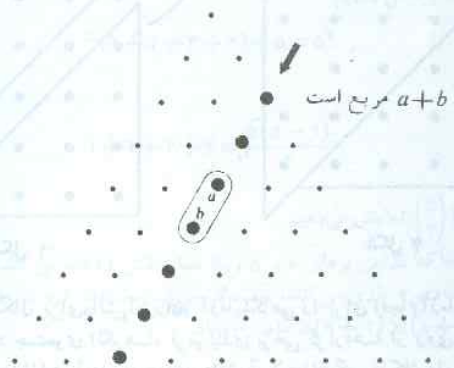
شکل ۲

مثلث پاسکال برای‌دانش‌آموزان، آزمایشگاهی را برای انجام‌آزمایشهای‌ریاضی فراهم می‌آورد: جستجوی الگوها، فرمولبندی برخی گزاره‌ها از روی مشاهدات، و سرانجام تلاش دراثبات آنها. در واقع، دانش‌آموزی ازیکی ازکلاسهایمان قضیهٔ زیر

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 \\
1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1
\end{array} \qquad (5.1)$$

را کشف کرد، که برای ما تازگی داشت. پیش از ارائهٔ قضیه، اجازه دهید توضیحاتی چند درمورد روشهای نمایش مثلث پاسکال ارائه دهیم.

طبیعی است، در مرحلهٔ ابتدایی تجربی، درایه‌های مثلث پاسکال را چیزی جز اعداد نبینیم. در هرحال، پس از کشف یك الگو، غالباً نشاندن نقاط به‌جای ارقام مفید خواهد بود. لذا، مثلا مشاهده‌ای که منجر به رابطهٔ (۳.۱) شد می‌توانست توسط تصویر زیر خلاصه شود. از روی این تصویر می‌توان دریافت که معادلهٔ داده شده برای هر زوج از درایه‌های مجاور، به‌صورت دایره‌های سیاه، که درامتداد قطر و به‌وسیلهٔ پیکان مشخص شده‌اند، برقرار است.



(۶.۱)

شکل ۳

البته، از آنجا که غالباً به ارائهٔ اثباتی حسابی ناگزیرهستیم، توانایی اندیشیدن به مثلث پاسکالی که برحسب ضرایب دو جمله‌ای واقعی به صورت (۷.۱) بیان شده باشد، ضروری است.

وقتی از مثلث پاسکال به عنوان آزمایشگاهی ریاضی بهره می‌گیریم، یك سلسله رویدادهای طبیعی به صورت زیر به‌وقوع می‌پیوندند. اولا یك الگو در آرایهٔ (۵.۱) مشاهده می‌شود، آنگاه این الگو در جهت ارتباط صوری، مانند (۶.۱)، بیان می‌شود، و سرانجام، به‌عنوان یك قضیهٔ به‌حدس درآمده باجایگزینی تصویرشامل نقاط توسط تصویر شامل ضرایب دو جمله‌ای عمومی مناسب، نموده شده در (۷.۱)، توجیه می‌شود. در اکثر موارد بررسی اعتبار قضیهٔ حدس زده شده به‌وسیلهٔ جبر با به‌کاربردن حقایق دانسته‌شده‌ای مانند (۱.۱) یا (۲.۱)، موضوعی ساده (وگاهی‌خسته‌کننده) است. این از کنجکاوی طبیعی

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
 & \text{قطر } ۰ & & & & & & & & & \\
 & \text{قطر } ۱ & & & & & & & & & \\
\text{سطر } ۰ & & \binom{0}{0} & & & & & & & & \\
\text{سطر } ۱ & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & & \\
\text{سطر } ۲ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & & \\
\text{سطر } ۳ & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & & \\
\text{سطر } ۴ & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & & \\
\text{سطر } ۵ & & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & & \\
\text{سطر } ۶ & & \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & & \\
\text{سطر } ۷ & & \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} & \\
\text{سطر } ۸ & & \binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} & \binom{8}{4} & \binom{8}{5} & \binom{8}{6} & \binom{8}{7} & \binom{8}{8} \\
\text{سطر } ۹ & & \binom{9}{0} & \binom{9}{1} & \binom{9}{2} & \binom{9}{3} & \binom{9}{4} & \binom{9}{5} & \binom{9}{6} & \binom{9}{7} & \binom{9}{8} \quad \binom{9}{9} \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\qquad (۷.۱)
$$

عنصر واقع درسطر n ام و قطر r ام عبارت از $\binom{n}{r}$ است.

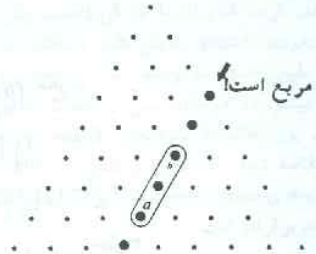
ماست که بدانیم چرا یك رابطه معنی پیدا می‌کند، ویك میل خستگی ناپذیر ما را برای جستجوی توجیهات هندسی و ترکیبیاتی نتایجمان برمی‌انگیزد.

اکنون به‌ارائهٔ چند مثال مقدماتی می‌پردازیم. مشاهدهٔ زیر اولین بار توسط آلیسون ك. فانگ[1]، و سپس توسط یك دانشجوی سال اول دانشگاه سانتاکلارا، تشریح شد. (هنگامی که دایره‌های سیاه درراستایی که با پیکان مشخص شده است به‌دقت به‌جلووعقب حرکت کنند، گزاره همچنان درست باقی می‌ماند.)

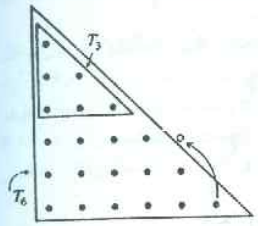
قضیهٔ فانگ: درواقع، با مراجعه به ضرایب دو جمله‌ای، و مشاهدهٔ مقدار عددیی که مربع آن در چند حالت خاص $a-b$ باشد، حدس زیر را فرمولبندی می‌کنیم

$$\binom{n+۲}{۳}-\binom{n}{۳}=n^{۲}. \qquad (۸.۱)$$

1. Allison K. Fong



شکل ۴



شکل ۵

اثبات این نتیجه با استفاده از (۱.۱) تا حدودی خسته‌کننده است، اما اگر به اتحادهای مشهور دیگری متوسل شویم، به‌سرعت به‌این نتیجه می‌رسیم:

$$\binom{n+2}{3}-\binom{n}{3}=\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}-\binom{n}{3}, \quad \text{از } (2.1)$$

$$=\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}, \quad \text{از } (2.1)$$

$$=n^2, \quad \text{از } (3.1)$$

شگردی جالب و کاملا متفاوت با روشی که به این نتیجه انجامید، و آمیزه‌ای از رفتارهای جبری وهندسی، ازسوی‌داور مسقاله بهما پیشنهاد شد. مانند قبل، باحالت نمونه‌ای $n=5$ بررسی خود را آغازمی کنیم. بنابرشکل ۵ داریم، $T_6-T_3=3\times 5$، که در آن T_n عبارت است از n-امین عدد مثلثی. با روشی مشابه، می‌توان نشان داد که درحالت کلی $T_{n+1}-T_{n-2}=3n$، $n\geqslant 3$. از این‌رو

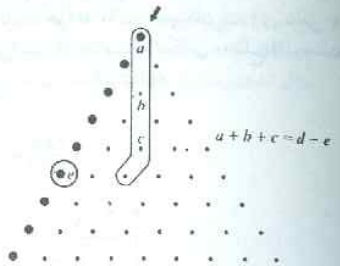
$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=3n.$$

و با ضرب کردن در n وتقسیم بر ۳ خواهیم داشت

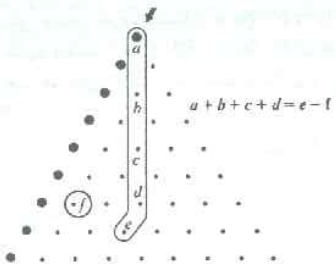
$$\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=n^2,$$

که همان (۸.۱) است.

اثبات دو قضیهٔ زیررا به‌خواننده وامی‌گذاریم و تنها آنها را به صورت نقطه‌ای، که درحالت کلی همان ضرایب دوجمله‌ای است، ارائه می‌دهیم.



شکل ۶



شکل ۷

قضیهٔ ۳.۱ (قضیهٔ چوب چوگان کوچک[1])

$$\binom{n}{0}+\binom{n+2}{1}+\binom{n+4}{2}=\binom{n+5}{2}-\binom{n+5}{0}, \quad n\geqslant 0$$

قضیهٔ ۴.۱ (قضیهٔ چوب چوگان بزرگ)

$$\binom{n}{0}+\binom{n+2}{1}+\binom{n+4}{2}+\binom{n+6}{3}=\binom{n+7}{3}-\binom{n+6}{1}, \quad n\geqslant 0$$

ما این‌بخش را، بانمایاندن شکل نقطه‌ای برخی الگوهای مستطیلی‌درمثلث پاسکال، که زمینه‌ساز نتایج ژرفتر بخش دوهستند، به پایان می‌رسانیم. ازخواننده انتظار نمی‌رود فوراً، زودتر از ما، الگوها را مشاهده کند!

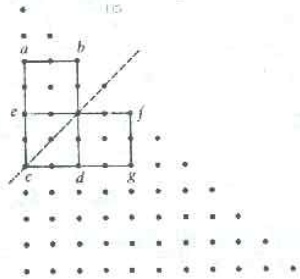
این نکته قابل ذکر است که در این نمایه‌ها درایه‌های مثلث در سمت چپ واقع شده‌اند ـ ولذا درشکل اصلی مثلث پاسکال، صورت متوازی‌الاضلاع خاصی را به خود می‌گیرند.

ما در مشاهدات خود با مستطیلهایی با شکل ثابت سر و کار داریم. در هریك از تصویرها، دوتا از چنین مستطیلهایی‌را نشان می‌دهیم. در حالت اول هردو مستطیل ۲ واحد در ۴ واحد با گوشهٔ پایین و سمت چپ مشترك هستند. درحالت دوم هردو ۱ واحد در۴ واحد با همان گوشه مشترك‌اند. توجه‌کنید که در هرحالت یك مستطیل از طریق انعکاس مستطیل دیگر نسبت به خط قطری مثلث پاسکال که از گوشهٔ مشترك می‌گذرد، به دست می‌آید. ما این دو مستطیل را P و P' نامگذاری خواهیم کرد.

1. The little Hockey Stick and Puck Theorem

مشاهده‌ای حتی جالبتر این است که با لغزاندن مستطیل به‌نحوی که نقطه c در طول قطر جابه‌جا شود، نسبت $(c \times b)/(a \times d)$ ثابت خواهد ماند. (با پیکان درروی شکل ۹ نشان‌داده‌شده است.) البته، این‌مطلب بدان معنی‌است که خاصیت انعکاس به‌ضلع قائم‌سمت چپ مستطیلی که در گوشهٔ مثلث پاسکال واقع است، بستگی ندارد.

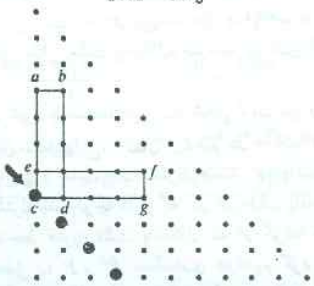
توجه: $\frac{c \times b}{a \times d} = \frac{c \times f}{e \times g}$



شکل ۸

و بطریق مشابه

توجه: $\frac{c \times b}{a \times d} = \frac{c \times f}{e \times g}$



شکل ۹

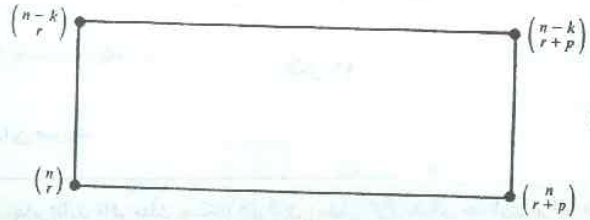
احتمالا خواننده پیش از مطالعهٔ بخش ۲ (که در آنجا پدیدهٔ کلی توضیح داده می‌شود) مایل خواهد بودکه به‌آزمایش با چند مستطیل به‌صورت "چپ واقع شدهٔ" مثلث پاسکال که در زیر عنوان شده است، دست بزند. ما در بحث ابتدایی بخش بعدی چند مثال عددی دراین باب ارائه خواهیم داد.

n										
۰	۱									
۱	۱	۱								
۲	۱	۲	۱							
۳	۱	۳	۳	۱						
۴	۱	۴	۶	۴	۱					
۵	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱				
۶	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱			
۷	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱		
۸	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱	
۹	۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹	۱
۱۰	۱	۱۰	۴۵	۱۲۰	۲۱۰	۲۵۲	۲۱۰	۱۲۰	۴۵	۱۰	۱
r	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

شکل مثلث پاسکال "چپ واقع شده"

۲. خاصیتی ژرفتر از مثلث پاسکال

مستطیلهای محاط در شکل "چپ واقع‌شدهٔ" مثلث پاسکال با یك زوج ضلع قائم‌ویك زوج ضلع‌افقی را درنظرمی‌گیریم. رأسهای مستطیل را می‌توان مانند شکل۱۰ نشان‌داد.



(۱.۲)

شکل ۱۰

به‌عنوان نتیجه‌ای از "ضرب صلبی" وزن مستطیل (۱.۲)، W، را، دقیقاً، به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$W = W(n, r, k, p) = \frac{\binom{n}{r}\binom{n-k}{r+p}}{\binom{n-k}{r}\binom{n}{r+p}}$$

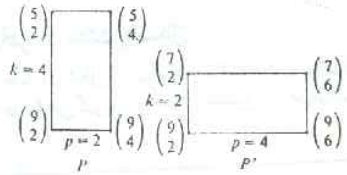
نتایج ما به شرح زیرند.[1]

قضیهٔ ۱.۲ (خاصیت انعکاسی). وزن W نسبت به k و p متقارن است؛ به عبارت دیگر

$$W(n, r, k, p) = W(n, r, p, k)$$

قضیهٔ ۲.۲ (خاصیت لغزندگی). به‌ازای مقادیر ثابت k و p، وزن W تنها به $(n-r)$ بستگی دارد.

قبل از اثبات این قضیه‌ها، مفهوم هندسی آنها را در مثلث پاسکال روشن خواهیم کرد. ضمن بحثهایمان در مثالهای پایانی بخش اول، خاطرنشان کردیم که وقتی مثلث پاسکال درسمت‌چپ واقع شود، وزن یك مستطیل نسبت به تعویض اضلاع افقی وقائمش، با ثابت ماندن رأس سمت چپ و پایین پایاست. به‌عنوان مثال، مستطیل شکل ۱۱ را در نظر بگیرید:



شکل ۱۱

دراین صورت

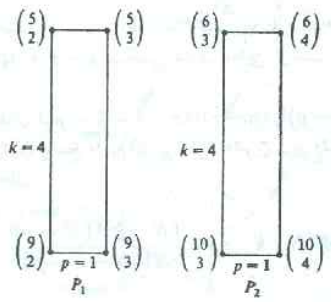
۱. بنابرتقارن قائم مثلث پاسکال در شکل اصلیش گزاره‌های متناظری برای مستطیلهای واقع شده درسمت راست مثلث پاسکال وجود دارند.

$$W(P) = \frac{\binom{9}{2}\binom{5}{4}}{\binom{5}{2}\binom{9}{4}} = \frac{36 \cdot 5}{10 \cdot 126} = \frac{1}{7},$$

$$W(P') = \frac{\binom{9}{2}\binom{7}{6}}{\binom{7}{2}\binom{9}{6}} = \frac{36 \cdot 7}{21 \cdot 84} = \frac{1}{7} = W(P),$$

و این همان ادعای قضیهٔ ۱.۲ است.

قضیهٔ ۲.۲ بیانگر واقعیت دیگری است که درمورد این مستطیلها مورد توجه‌ماست، یعنی، می‌توان مستطیل را دربالا وپایین قطر N ($n-r=N$ ثابت) لغزاند، بدون اینکه وزن آن تغییر کند. به‌عنوان مثال مستطیل شکل ۱۲ را درنظر بگیرید.



شکل ۱۲

(توجه کنید که P_2 را می‌توان با لغزاندن رأس $\binom{9}{2}$ به یك خانه پایین قطر $n-r=7$ از P_1 به دست آورد.) دراین صورت داریم

$$W(P_1) = \frac{\binom{9}{2}\binom{5}{3}}{\binom{5}{2}\binom{9}{3}} = \frac{36 \cdot 10}{10 \cdot 84} = \frac{3}{7},$$

$$W(P_2)=\frac{\binom{10}{3}\binom{6}{4}}{\binom{6}{3}\binom{10}{4}}=\frac{120.15}{20.210}=\frac{3}{7}=W(P_1)$$

حال به اثبات قضایای ۱.۲ و ۲.۲ می‌پردازیم. W را به‌صورت زیر بسط می‌دهیم.

$$W=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r+p)!(n-r-k-p)!}\cdot\frac{r!(n-r-k)!}{(n-k)!}\cdot\frac{(r+p)!(n-r-p)!}{n!}$$

دراینجا به امکان چند حذف زیبا توجه می‌کنیم، و فرمول زیر پدید می‌آید

$$W=\frac{(n-r-k)!(n-r-p)!}{(n-r)!(n-r-k-p)!}$$

واضح است که بسط سمت راست رابطهٔ اخیر نسبت به k و p متقارن است، و به‌ازای مقادیر ثابت k و p تنها به $n-r$ بستگی دارد. به‌این ترتیب هردو قضیهٔ ما به اثبات می‌رسند.

ببینیم آیا مقدار $(n-r-k)!\,(n-r-p)!/(n-r)!\,(n-r-k-p)!$ مفهوم ترکیبیاتی هم دارد؟ پاسخ ما به این پرسش به‌شرح زیر مثبت است. قرار می‌دهیم $n-r=N$، دراین حال

$$W(N,k,p)=\frac{(N-k)!\,(N-p)!}{N!\,(N-k-p)!}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$W(N,k,p)=\frac{\binom{N-p}{k}}{\binom{N}{k}}=\frac{\binom{N-k}{p}}{\binom{N}{p}} \qquad (۲.۲)$$

از تساوی دوکسر سمت راست ۲.۲، نتیجه می‌شود

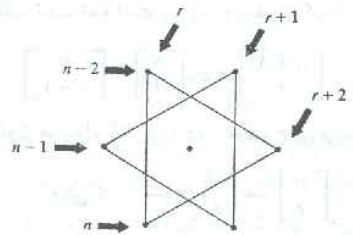
$$\binom{N}{k}\binom{N-k}{p}=\binom{N}{p}\binom{N-p}{k}\ , \qquad (۳.۲)$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر تعبیر کرد. فرض کنید دوشخص A و B قرار است از میان N شیء انتخابی داشته باشند؛ به‌علاوه‌فرض کنید که‌قرار است‌شخص A، k شیء و شخص B، p شیء انتخاب کند. انتخابها به چندطریق انجام خواهد شد؟ اگر فرض کنیم انتخاب با شخص A شروع شود (مسلماً این فرض در تعداد انتخابهای ممکن تأثیری نخواهدداشت)، تعداد انتخابها همان مقدارسمت چپ رابطهٔ (۳.۲) خواهد بود. درحالیکه اگرفرض کنیم ابتدا شخص B انتخاب را انجام دهد، تعداد انتخابهارا سمت راست رابطهٔ (۳.۲) به‌دست خواهد داد. و این اثباتی ترکیبیاتی ازتساوی (۳.۲) است بدون‌آنکه مستلزم هیچگونه بحث حسابی باشد.

نکته. حالت خاص قضیهٔ ۱.۲ که درآن $k=2$ و $p=1$، ممکن‌است برای‌برخی از خوانندگان به‌عنوان خاصیت "ستارهٔ داود[1]" مثلث پاسکال آشنا باشد [۳]. زیرا، در این حالت، بنابراتحاد $W(n,r,2,1)=W(n,r,1,2)$: به‌این حکم قطعی می‌رسیم که

$$\binom{n-2}{r+1}\binom{n-1}{r}\binom{n}{r+2}=\binom{n-2}{r}\binom{n}{r+1}\binom{n-1}{r+2}\ ,$$

و این ستارهٔ داود به‌مرکز $\binom{n-1}{r+1}$ است.



شکل ۱۳

اگربخواهیم مرکز ستاره را در $\binom{n}{r}$ قرار دهیم، اتحاد به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\binom{n-1}{r}\binom{n}{r-1}\binom{n+1}{r+1}=\binom{n-1}{r-1}\binom{n+1}{r}\binom{n}{r+1}$$

که با حکم زیر هم‌ارز است

1. Star of David

$$W(n+1,\ r-1,\ 2,\ 1)=W(n+1,\ r-1,\ 1,\ 2)$$

بررسی اثبات قضایای ۱.۲ و ۲.۲ نشان می‌دهد که درمثلث پاسکال نشاندن جملهٔ $f(n)/f(r)f(n-r)$ به‌جای ضرایب دوجمله‌ای، به‌ازای یك تابع ثابت f، در نتایج قضایا تغییری حاصل نخواهد کرد. درواقع دراین باب تعمیمی وجود دارد که ارزش مطرح‌کردن را دارد.

فرض کنید

$$f(n)=(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q) \quad \text{اگر } n\geqslant 1,\quad f(0)=1,$$

و قرار دهید

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}=\frac{f(n)}{f(r)\,f(n-r)}, \qquad 0\leqslant r\leqslant n \tag{۴.۲}$$

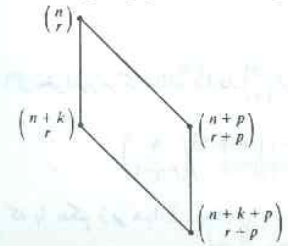
عبارتهای $\binom{n}{r}$ که چندجمله‌ایهای گاوسی یا q-مشابه‌های ضرایب دو جمله‌ای نامیده می‌شوند، درنظریهٔ افرازها نقشی اساسی دارند (ر. ك. [۱] و [۷]). به‌هیچ‌وجه آشکار نیست که اینها واقعاً چندجمله‌ایهایی برحسب q هستند، اما با استقرا روی n از اتحاد qی پاسکال این مطلب ثابت شده است (با (۲.۱) مقایسه کنید)

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}=q^r\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} \tag{۵.۲}$$

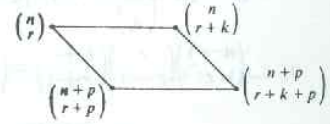
کسی که با قانون هوپیتال آشنایی دارد، به‌وضوح پی می‌برد که

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}\to\binom{n}{r},\ q\to 1 \quad \text{وقتی که} \tag{۶.۲}$$

ازآنجاکه با نشاندن هر $f(n)$ به‌جای $n!$ قضایای ۱.۲ و ۲.۲ برقرار می‌مانند، نتیجه



شکل ۱۵



شکل ۱۴

می‌شود که، مثلا، خاصیت ستارهٔ داود برای چندجمله‌ایهای گاوسی صادق‌است ــ نتیجه‌ای که می‌تواند مورد مطالعهٔ عمیق‌تر قرار گیرد!

ضمیمه‌ای براثبات. اخیراً ما دو پدیدهٔ دیگر را در شکل چپ واقع شدهٔ مثلث پاسکال، مشابه با قضایای ۱.۲ و ۲.۲ مورد توجه قرار داده‌ایم.

ابتدا متوازی‌الاضلاعهایی با دوضلع موازی افقی و دوضلع دیگر با زاویهٔ $45°$ نسبت به افق را در نظر می‌گیریم. رأسهای آنها درشکل ۱۴ نشان داده شده‌اند. پس وزن چنین متوازی الاضلاعی، مانند قبل، به‌صورت زیرتعریف می‌شود

$$W=\frac{\binom{n+p}{r+p}\binom{n}{r+k}}{\binom{n}{r}\binom{n+p}{r+k+p}},$$

که معلوم است از n مستقل و نسبت به k و p متقارن است.

درحالت بعدی متوازی الاضلاعهای با یك زوج ضلع موازی قائم و زوج دیگر بازاویهٔ $45°$ نسبت به‌خط قائم را در نظر می‌گیریم. رأسهای این متوازی‌الاضلاعها در شکل ۱۵ نشان داده شده‌اند. دراین حالت وزن به‌صورت

$$W=\frac{\binom{n+k}{r}\binom{n+p}{r+p}}{\binom{n}{r}\binom{n+k+p}{r+p}},$$

از r مستقل و نسبت به k و p متقارن تعریف می‌شود.

این پدیده‌ها، شاید با شگفتی، از طریق وارد کردن ضرایب دوجمله‌ای بسط‌یافتهٔ $\binom{n}{r}$ با احتمالا n منفی، به یکدیگر و به قضیه‌های ۱.۲ و ۲.۲ مربوط می‌شوند. ما بنا داریم که به این روند باز گردیم.

مراجع

1. Alexanderson G. L., and Klosinski L. F., "A Fibonacci analogue of Gaussian binomial coefficients," *Fibonacci Quart.*, **12**(1974) 129-132.
2. Bernolli, Jacob, *Ars Conjectandi*, Basel, 1713.
3. Hansell Walter, and Hoggatt V. E., Jr., "The hidden hexagon

squares," *Fibonacci Quart.*, **9**(1971)120.
4. Hilton Peter, and Pedersen Jean, "Symmetry in mathematics," *Comp. and Math. With Appl.*, **12B**(1986)315-328.
5. Hilton Peter, and Pederson Jean, *Modern Pre-calculus Mathematics, Understanding for Skill*, Addison-Wesley (to appear).
6. Polya George, *Mathematical Discovery*, combined edition, John Wiley and Sons, 1981.
7. Polya G., and Alexanderson G. L. "Gaussian binomial coefficients," *Elem. Math.*, **26**(1971)102-109.

شایان توجه است کـه پیشرفتهایی که در ریاضیات از آغـاز این قرن حاصل گردیده است برای علاقمندان این امکان را فراهم ساخته است تا به نوسازی آموزش ریاضیات بپردازند و این کار از یک سو با عرضه کـردن مفاهیم ساده و عام جدید انجام می‌گیرد و به نحو بارزی استدلالهای سنتی را توسعه می‌بخشد و از سوی دیگر با طرح استدلالهای تازه، نتـایجی کـه قبلا دشوار می‌نمود در دسترس مبتدیان قرار می‌گیرد. علاوه بر این توجه شـدیدی که به دقت و اتقان همواره از سوی متخصصین بزرگ نظریهٔ اعداد ابرازمی‌گردید، پس از آنکه درطول این سی سال همهٔ شاخه‌های ریاضیات را فرا گرفت اکنون بـه درجات بسیار متعادلی به مؤلفین کتب دبیرستانی چنان سرایت کرده است کـه آنان از همهٔ ریاضیدانان حرفه‌ای سبقت گرفته‌اند . . . این نوسازی و افراطهایی که گاه با آن همراه بوده است اعتراضات برخی ازکسانی را که با این کتابها سر و کار پیدا می‌کنند برمی‌انگیزد و از این کـه می‌بینند کتاب درسی فرزندشان را به زحمت می‌توانـد درک کنندآزرده خاطر می‌شوند و گاهی شنیده می‌شود کـه ریاضیدانان را سـرزنش می‌کنند و بـر این عقیده‌اند که آنان در ارزیابی اهمیت پژوهشهای خود اغراق می‌نمایند و با این عمل توجه مبتدیان را از مسائل محسوس‌تر منحرف می‌گردانند. گـرچه بدون شک در این ایرادها مایه‌ای از حقیقت وجود دارداما دراین صورت دربارهٔ متخصصین «پژوهشهای فضائی» چه باید گفت، که‌آنان مبالغ دهشتناکی را طلب می‌کنند تا روانهٔ شناسائی سیارهٔ زهره شوند، باآنکه درجلوی چشم‌آنها صدها میلیون افرادبشر تلاش می‌کنند که ازگرسنگی نمیرند. ریاضیات اقلا از امتیاز ارزانی بها برخوردار است . . .

از مقدمهٔ کتاب جبر نوشتهٔ روژه گودمان

کوین مك کین، تام دورتسکی

راههایی مغشوش درخدمت اهدافی منطقی•

ترجمهٔ فرامرز علی ایپچی، فارغ‌التحصیل کارشناسی برق دانشگاه تهران

مگر دقت‌می‌تواند عیب باشد و ابهام حسن؟ نسل جدیدی از منطق‌دانان‌که طرز فکرشان اصلاً ارسطویی نیست می‌گویند: بله.

مبهم و فرار است؛ به دیدارش بروید، رویش رانخواهیددید؛
به دنبالش بروید، پشتش را نخواهید دید.

ـ لائوتسو

اگـر برسرطاس مـردی تنها یـك مو بروید، آیا او بازهم طاس خواهد بود؟ اکثر مردم می‌گویند مردی‌که تنها یك مو برسرش باشد طاس است،گرچه خود او شاید چندان‌موافق این‌گفته نباشد. اما اگر برسرش موی دیگری بروید، ویکی دیگر ویکی دیگر، وهمین‌طور تا وقتی‌که هزاران مو داشته باشد، آن وقت چه؟ درکدام نقطه است که با افزودن تنها یك مو برسرطاس این مرد، او دیگرطاس به حساب نمی‌آید؟

یا کپه‌ای سنگ را درنظربگیرید. اگر به تعدادکافی‌سنگ به‌آن اضافه‌کنیم،سرانجام به‌کوهی میدل خواهد شد. اما برای این‌کار چند سنگ لازم است؟ وآیا برداشتن آخرین سنگی‌که برای‌کوه شدن باید قرار دهیم،کوه را دوباره به‌کپه‌ای سنگ بدل می‌کند؟

این چنین معماهایی ابهام چشمگیر زبان را در تعیین وجوه تمایز آشکارمی‌کنند. اما گویا از این بی‌قیدی زبانی‌لذت هم‌می‌بریم، وحتی با به‌کاربردن عباراتی مانند سری"نسبتاً" طاس یاکپه سنگی "بزرگ" براین بی‌قیدی دامن می‌زنیم. اما هنگامی‌که برای‌حل مسائلمان

• McKean, K., Dworetzky, T., "Fuzzy means to logical ends," *Discover*, February 1985, 70-73.

به‌کامپیوتر رو می‌آوریم، این چنین ابهامی در بیان مایهٔ دردسر می‌شود. مغز الکترونیکی با وسواس ذاتیش برای دقت، باید برخلاف مغز انسان بداندکه دقیقاً سری با چند مو طاس است، یا چند سنگ برروی هم کوهی می‌سازند، چه درغیر این صورت کامپیوتر از حل مسائل درمی‌ماند.

درهیچ‌کجا احتیاج به‌کمال دقت به اندازهٔ زمینهٔ روبه رشد هوش مصنوعی آشکار نشده است. دراین زمینه کامپیوترها را به حل مسائل عملی روزمره و نادقیق فرامی‌خوانند؛ مسائلی نظیر آنچه درکار پالایشگاه نفت یا حین اکتشاف معادن پیش می‌آیند. زمانی این کارها راکاملاً خارج از حیطهٔ ماشینها می‌دانستند، زیرا این اعمال درست با همان نوع بی‌دقتی در زبان سر وکار دارند که مشخصهٔ ارتباطات انسانی است. مثلاً کامپیوتر چگونه می‌تواند بگویدکه چه وقت کوره‌های پالایشگاه "بیش‌ازحد" داغ شده‌اند، یا فلان‌لایهٔ خاص زمین از لحاظ وجود مواد معدنی "کاملا" امیدوارکننده به نظر می‌رسد؟

شاخه‌ای گمنام از ریاضیات، با نام متناقض‌نمای "منطق‌مغشوش[1]" به‌بعضی‌ازپرسشهای بالا پاسخ می‌دهد. تا همین اواخر، منطق مغشوش بازیچهٔ فکری تعدادی از اساتید دانشگاه بود. اما اکنون استفاده از آن کامپیوترها را قادر ساخته است‌که خود را با ابهامات آدمی وفق دهند، و با عباراتی مبهم مانند "بسیار"، "تاحدودی"، "اکثراً" کارکنند. حین این کار، منطق مغشوش به آنها می‌آموزدکه برترین خصیصهٔ آدمی، یعنی "عقل سلیم"، را تقلیدکنند.

با این قدرت مغزی افزایش یافته، هرروز کامپیوترهای بیشتری به کار حل مشکلات عملی زندگی روزمره گمارده می‌شوند؛ مشکلاتی‌که درآنها به جای دقت ریاضی: ابهام و مغشوش بودن قاعدهٔ کار است،مانندادارهٔ واحدهای‌صنعتی، یاکنترل قطارها درراههای آهن، یا حتی‌به‌دام انداختن‌اخلالگران درشبکه‌های عصبی‌الکترونیکی‌کامپیوترها. به‌گفتهٔ کنستانتین ویرژیل‌نگویتا[2]، متخصص‌علوم کامپیوتر و منطق مغشوش ازدانشگاه هانتر[3] نیویورك، "منطق مغشوش صرفاً اصول لازم را برای‌کارکردن با مدلهای با مقیاس بزرگ از ابهامهای‌جهان خارج فراهم می‌کند". نگویتا می‌گوید با چنین اساس نظری استواری، برنامه‌نویسان‌آینده می‌توانند "سیستمهای خبره"ای ــ برنامه‌هایی که مانند انسان قضاوت می‌کنند ــ بسازند که بسیار پیچیده‌تر از انواع محدودی باشندکه تا به امروز ساخته شده است.

به یقین نمی‌توان انکار کرد که منطق مغشوش مخالفانی بسیار بسیار پرهیاهو دارد. آنها ادعا می‌کنندکه این تنها نامی فریبنده برای عملیاتی ریاضی است‌که می‌توان آنها را از راههای دیگر به نحوی بسیار ساده‌تر انجام داد. اما با اتحاد هواداران این مقوله که

---

۱. منطق‌مغشوش(fuzzy logic) را درفارسی "منطق‌مبهم"، "منطق‌ناروشن"، و "منطق‌فازی" نیز نامیده‌اند. واژهٔ fuzzy اصلاً به‌معنای پشمالو است، و در اصطلاح معنای غیردقیق و مبهم را می‌رساند. البته درمورد وجه تسمیهٔ این واژهٔ مضحك در ادامهٔ مقاله توضیح داده شده است.ـم.

2. C. V. Negoita 3. Hunter

مرام ابهام را با اصراری تقریباً متعصبانه اشاعه می‌دهند، این‌بگومگوها رشد منطق‌مغشوش را آهسته نکرده است.

این همه قیل وقال برای چیست؟ دست‌کم بخشی از پاسخ دراین نکته نهفته است‌که منطقیون مغشوش پای برجایی می‌گذارندکه واقعاً حریمی‌مقدس است. یکی از مثالهای مورد علاقهٔ آنان را درنظر بگیرید: چند مولازم است تا مردی با سرطاس به مردی‌موداربدل شود؟ ارسطو، بنیانگذار منطق سنتی، این پرسش را به کمك چیزی که از آن زمان قانون رد شق ثالث نام‌گرفته است پاسخ می‌گفت. این حکمت ارسطویی ایجاب می‌کرد که هرمورد تحت بررسی، دریکی از دو رده‌ای‌که با مرزی مشخص ازهم جدا شده‌اند، قرار گیرد. بدین ترتیب ممکن است ارسطوییان بگویند سری طاس است هرگاه تعداد موهایش از ۵۰۰۰ بیشترنباشد، وهرکه بیش ازاین‌مو داشته باشد، موودار محسوب‌می‌شود. با این ترفند، هرسری را می‌توان طاس یا غیرطاس تعریف‌کرد، وهیچ حالت دیگری بین این دو وجود ندارد.

اما این قانون می‌تواند به وضعیتی نامعقول نیز بینجامد: مردی که ۵۰۰۱ مو دارد، اگر تنها یك مویش را از دست بدهد، ناگهان خود را ملقب به لقب طاس می‌یابد. به‌قول لطفی عسگرزاده[1]، ۶۳ ساله، رئیس سابق دانشکدهٔ مهندسی برق و علوم کامپیوتر دانشگاه کالیفرنیا دربرکلی، و پایه‌گذار منطق مغشوش، "اشکال روشهای سنتی دراین است‌که رده‌ها یا مقولات مجاز دراین روشها باید مرزهایی دقیق داشته باشند، اما اکثر مقولات دنیای واقعی مرزهای دقیق ندارند."

زاده که در اتحاد جماهیر شوروی متولد و درایران بزرگ شده است، حتی زمانی که در دانشگاه‌کلمبیا و MIT دانشجوی فوق لیسانس رشتهٔ مهندسی برق بود، بااین‌ضعف منطق ارسطویی دست به گریبان بود. اومی‌گوید: "من کم‌کم متوجه شدم که سیستمهای با مقیاس بزرگ و بسیار پیچیده مانند سیستمهای مربوط‌به‌انتقال نیرو و حمل ونقل‌ومدلسازی اقتصادی، تن به تحلیل دقیق نمی‌دهند." متغیرها و عدم قطعیتها دراین نوع سیستمها بیش‌از حدی است که بتواند با محدودیتهایی از نوع "درست ــ نادرست" و "این یا آن" منطق ارسطویی،که درقلب تفکرکامپیوتری قرار دارد، جور درآید. زاده به این نتیجه رسیدکه اگر قرار باشد چنین مسایلی را کامپیوتر حل کند، "لازم است‌که سطح توقعاتمان را پایین بیاوریم و به پاسخهایی‌که طبیعتاً دقیق نیستند اکتفا کنیم."

یکی از بعدازظهرهای ژوئیهٔ سال ۱۹۶۴ [مرداد ۱۳۴۳]، هنگامی‌که او دریکی از هتلهای نیویورك در رختخوابش دراز کشیده و مشغول چنین تفکراتی بود، به مکاشفه‌ای دست یافت که به تولد منطق مغشوش منجرشد.زاده‌آن شب رادر منهتن[2] توقف‌کرده‌بود تا فردا به همایشی در سانتامونیکا[3] برود و با دیگر متخصصان دربارهٔ راه آموزاندن تشخیص

---

۱. پرفسورعسگرزاده درآن دیار به "زاده" شهرت دارد. دراین‌مقاله ازاین‌پس‌به‌نام "زاده" اکتفا خواهیم کرد.ـم.

2. Manhattan 3. Santa Monica

دستنوشته به کامپیوترها بحث کند. او متوجه شدکه این مسئله را دراصل می‌توان به یاری شاخه‌ای آشنا از ریاضیات، موسوم به نظریهٔ مجموعه‌ها[1]، بررسی کرد. اما مسئله به‌این سادگیها نبود. اگرچه هریك از حروف می‌تواند به سادگی مجموعه‌ای جداگانه تشکیل دهد، وضع قوانین عضویت برای یك‌گروه چیز دیگری است. اگر به عنوان مثال مجموعهٔ a های کوچك بیش از حد دقیق تعریف شود، کامپیوتر فقط a ای را تشخیص می‌دهد که به دقیقترین وجه ممکن نوشته شده باشد. از سوی دیگر اگرمجموعه‌ها بیش ازحدآزادانه تعریف شوند، ممکن است کامپیوتر a های کوچك را با d ها و o ها و q های کوچك اشتباه کند.

زاده می‌گوید "ناگهان از اعماق ذهنم این فکر به سرم افتاد که چرا عضویت دریك مجموعه را چیزی متدرج نگیریم؟" دراین صورت کامپیوتر دیگر مجبور نیست به صورت دوحالتی "این یا آن" قضاوت کند، و می‌تواند حرفی را به عنوان a بپذیرد، حتی اگر به حروف دیگرهم شبیه باشد. زاده به شوخی می‌گویدکه دنبال نامی "آبرومندانه" برای این مبحث جدید می‌گشته، ولی به جای آن به اسم "مغشوش" راضی شده است، زیرا "بهتر است اصطلاحی دقیق و با مسمی باشد، هرچند که به علت معانی عامیانه و موهنی که این اصطلاح به ذهن متبادر می‌کند، حتماً مشکلاتی به وجود خواهدآمد." فردای آن روز او این اندیشه را درهمایش مربوط به تشخیص دستنوشته مطرح کردکه با برخوردهای گوناگونی روبرو شد. وقتی به برکلی بازگشت، طی سلسله مقالاتی فنی، منطق مغشوش را به صورت نظریه‌ای رسمیتر درآورد.

زاده برای نشان دادن توانایی منطق مغشوش مشکلی را شاهد می‌آوردکه پزشکان‌یك درمانگاه با آن مواجه می‌شوند هرگاه‌بخواهند تصمیم بگیرندکه‌آیا بیمارانی‌که ازدر وارد می‌شوند تب دارند یا نه. اگردکترها ازقوانین‌ارسطویی‌پیروی‌کنند، می‌توانندبنا برسیاستی دلخواه، هرکسی راکه دمای بدنش از ۳۷٫۳ درجهٔ سلسیوس کمتر نباشد به عنوان فردی تب‌دار تلقی کنند. اما مگر تفاوت بین ۳۷٫۲ و ۳۷٫۳ خیلی چشمگیرتر از تفاوت بین ۳۷٫۳ و ۳۷٫۴ است؟ با این‌حال، بیماران تب‌داری‌که دمای بدنشان بین ۳۷٫۳و۳۷٫۴ باشد مورد درمان قرار می‌گیرند، اما بیماران با دمای بین۳۷٫۲ و ۳۷٫۳ مداوانمی‌شوند. براساس این قانون خشك عددی، پزشکان درمانگاه ارسطویی، بیماری را که دمای‌بدنش کمی‌کمتر از ۳۷٫۳ است مرخص‌می‌کنند، اما بیماری را که حرارتش‌کمی بیشتراز ۳۷٫۳ است درمان می‌کنند.

۱. نظریهٔ مجموعه‌ها از عملیات ریاضی روی مجموعه‌ها یا گردایه‌ای ازچیزهاکه صفتی‌مشترك دارند، بحث می‌کند. مجموعه می‌تواند شامل تقریباً هرنوع چیزی باشد، مردان کله طاس یاکوهها. قدرت‌نظریهٔ مجموعه‌ها دراین‌است‌که به متفکران اجازه می‌دهد بی‌آنکه‌تفاوتهای فردی از قبیل ارتفاع کوههای مختلف موی دماغشان شود، به یکباره تمام رسته‌های‌مختلف از موضوعها را با هم بررسی کنند.

منطق مغشوش با این مسئله به‌گونه‌ای دیگر برخورد می‌کند. ابتدا دمای "عادی"بدن را به عنوان عددی مغشوش‌که با عبارت "حدوداً ۳۷" بیان می‌شود تعریف می‌کنیم. تب را به عنوان افزایشی چشمگیر در دمای بدن در نظر می‌گیریم. سپس به هر بیماری که از در وارد می‌شود، به‌کمك اعدادی بین صفرویك، درجهٔ عضویتی درهردوگروه منسوب می‌کنیم. مثلا دمای °۳۷٫۲، به میزان ۰٫۶ در گروه عادی و ۰٫۴ در گروه تب‌دار عضویت دارد. دمای °۳۷٫۹ شاید ۰٫۹ درگروه تب‌دار وتنها ۰٫۱ درگروه عادی عضویت داشته باشد. زاده می‌گوید: " به این‌ترتیب می‌توان‌گفت‌که تب چیزی متدرج است وتعریفش را می‌توان برای تطبیق با شرایط هرمریض تغییر داد."

زیبایی رهیافت زاده دراین است که با استفاده از درجات عضویت در مجموعه‌ای مانند مردان " قد بلند"، می‌توان خمی به دست آوردکه درطول مسیرش، گروههایی‌نمایندهٔ مردان "فوق‌العاده قد بلند"، " نسبتاً قد بلند"، "کمابیش قد بلند"، "نه چندان قدبلند"، و... قرار دارند. چون هرگروه در واقع یك عدد ــ یعنی درجهٔ عضویت ــ است، منطق‌دانان مغشوش می‌توانند بی‌آنکه قصد شوخی داشته باشند، از ضرب "فوق‌العاده" در "بسیار" یا از یافتن جذر"بیشترین" صحبت‌کنند. پس‌آنها قادرند مسائلی را بررسی‌کنندکه منطق‌دانان سنتی برلاینحل بودنشان اصرار دارند. این‌گزاره‌ها را درنظر بگیرید: "بیشتر دانشجویان در دورهٔ کارشناسی‌اند. بیشتر دانشجویان دورهٔ کارشناسی ساکن حوالی دانشگاه‌اند." سؤال این است: چه‌کسری از دانشجویان ساکن حوالی دانشگاه‌اند؟ از نظرکسی‌که مسائل را به طریق ارسطویی حل می‌کند، عبارات "بیشتر" و "حوالی" به طرز مأیوس‌کننده‌ای‌غیر-دقیق‌اند. اما منطق‌دان مغشوش‌آنها را کاملاً قابل بررسی می‌داند. پاسخ مغشوش چیست؟ بی‌تردید این است: "[2](بیشتر)، یعنی(بیشتر دانشجویان × بیشتر دانشجویان دورهٔ‌کارشناسی) حوالی دانشگاه سکونت دارند."

قدرت منطق مغشوش، به ویژه در ترجمهٔ قضاوتهای نادقیق انسان به زبانی کامپیوتر-فهم بروزمی‌کند. این را اخیراً کورت اشموکر[1]، متخصص تحلیل احتمال خطر[2]واستادیار دانشگاه جرج واشینگتن، به نحو مؤثری نشان داده است. او می‌خواست برنامه‌ای طرح کند تا بفهمد آیا کامپیوترهای محرمانهٔ وزارت دفاع دربرابر نفوذ و خرابکاری مقاوم‌اند یا نه. برای یك ارزیابی همه جانبه او می‌بایست قسمتهای سیستم کامپیوتر، ازقبیل ساختمان فایل واژه‌های عبور[3]، سیستم عامل، و... را آزمایش‌کند. اما منطق معمولی واقعاً مناسب‌این کار نبود. اشموکر می‌گوید: "طی بررسیهایمان نشان دادیم‌که تحلیل‌گران تازه کار اغلب دچارخطاهای فاحشی می‌شوند، چون ظاهراطمینان‌بخش اعدادشان آنها را گمراه می‌کند."

درعوض اشموکر برنامه‌ای نوشت‌که درآن منطق مغشوش به کار گرفته شده بود، و به استفاده‌کنندگان این‌امکان را می‌دادکه اطلاعات را به صورتهایی که دارای دقت‌کمتری هستند واردکنند. درواقع اوکارش را با رسم شمایی‌کلی ازسیستم‌کامپیوتر با یك"موش[4]"ــ

1. K. Schmucker 2. risk analysis 3. password 4. mouse

نشانگری الکترونیك ــ بر صفحهٔ یك کامپیوتر اپل لیز [1] شروع مـی‌کند. واکنش کامپیوتر سلسله‌ای از پرسشهاست‌که در آنها از استفاده‌کننده می‌خواهد تا به زبان معمولی انگلیسی ازیابی‌خود را از میزان اطمینان و ضربه‌پذیری بخشهای خاصی از سیستم بیان‌کند. پس‌از آنکه این‌نظرات وارد کامپیوتر شدند، به اعدادی مغشوش ترجمه، و از طریق‌منطق‌مغشوش پرداخته می‌شوند تا ایمنی‌کلی سیستم تعیین شود. نتایج هم به زبان معمولی انگلیسی اعلام می‌شوند. اشموکر می‌گوید "این برنامه به شما می‌گوید که آیا احتمال خطر هـر بخش از سیستم خیلی کم است یا کم یا متوسط یا زیاد و یا خیلی زیاد." هرچند این پاسخها ممکن است فاقد دقت باشند، به اعتقاد اشموکر بررسیها نشان می‌دهد کـه افراد مختلف به طرز شگفت انگیزی همواره مفهوم ثابتی را از اصطلاحی‌که به‌کار می‌برند درنظر دارند.

در دانشگاه وین، دانش پژوهان منطق مغشوش را درتشخیص‌بیماریها به‌کار می‌برند. آنها برنامه‌ای‌موسوم به کادیاگ-۲[2] ساخته‌اند که نشانه‌های بیمار را تجزیه وتحلیل‌می‌کند وپزشکان بخشهای‌گوارش و کبد و مفاصل واستخوان را در پی‌بردن به علت بیماری یاری می‌دهد. کلاوس پتر آدلاسنیگ[3] از دانشکدهٔ علوم کامپیوتر پزشکی دانشگاه وین، ویکی از نویسندگان‌کادیاگ-۲، می‌گویدکه منطق مغشوش بر یکی ازمحدودیتهای مهم نظریهٔ‌احتمالات دربرخورد با علائم بیماری فائق می‌آید، و این امر به ویژه درسیستمهای بزرگ و پیچیده مشهود است. درنظریهٔ احتمالات، احتمال وقوع هرحادثه از ضرب تك‌تك احتمالهای‌دخیل به‌دست می‌آید. مثلاً شانس آمدن سه شیرمتوالی درشیر یا خط‌کردن یك سکه‌برابراست‌با یك دوم (احتمال شیرآمـدن در یك بار انداختن سکه) ضربدر یك دوم ضربدر یك دوم، یعنی یك‌هشتم $\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\right)$. پس هرچه متغیرها بیشتر شوند، احتمال‌کمتر می‌شود.

اما درپزشکی این طورنیست. چنانکه آدلاسنیگ می‌گوید: "هرچه نشانه‌هایی‌که در دست داریم بیشتر به‌بیماری‌خاصی بخورد، این نتیجه‌گیری‌که شخص‌به‌آن بیماری‌مبتلاست، درست‌ترمی‌شود." به عبارت دیگر احتمال افزایش می‌یابـد. منطق مغشوش به جـای اینکه احتمالها رادریکدیگرضرب‌کند، آنها رابه‌گونه‌ای‌ترکیب می‌کندکه هرجزء جدیداطلاعات، الگویی راکه ازشواهد موجودبه‌دست آمده است، تقویت‌می‌کند. منطق‌مغشوش به‌کادیاگ-۲ دربرخورد با نشانه‌های مشکوك نیز کمك می‌کند. آدلاسنیگ می‌گوید " درنظریهٔ احتمالات ما تنها گویهای سیاه وسفید داریم. این‌احتمال هست‌که‌گوی بعدی‌که ازجعبه‌بیرون می‌آید، سیاه باشد یا سفید. اما درمنطق مغشوش، گویهای خاکستری هم داریم."

تفکر مغشوش به تشخیص بیماریهای اقتصادی هم کمك می‌کند. دریك برنـامهٔ تازهٔ مدلسازی مالی موسوم به ریویل[4]، که درشرکت دسیژن پروداکتس[5] کالیفرنیا تهیه شده‌است، تصمیمهای مدیریت را به جای استفاده از ارقام دقیق مـی‌توان براساس عواملی ناملموس مانند "حجم زیاد فروش" یا "فیدبك عموماً مثبت" اتخاذ کرد. رئیس شرکت، بیل مرتن[6]

1. Apple Lisa 2. Cadiag-2 3. K. P. Adlassnig 4. Reveal
5. Decision Products 6. B. Morton

می‌گوید: "منطق مغشوش‌در آن روندهای تصمیم‌گیری‌که به سختی به اعداد تبدیل‌می‌شوند، به خوبی پذیرفتنی است، خصوصاً آنجاهایی که تشخیص و برداشت‌گروههای مدیریت در امر دخیل‌است. هرچه به عدد درآوردن پرددرسرترباشد، برای منطق مغشوش بهتر است." این‌شرکت‌حقوق مربوط به‌این برنامه را به شرکتی‌کامپیوتری متعلق به‌کمپانی هواپیماسازی مك دانل داگلاس[1] فروخت تا از آن درتصمیم‌گیریهای مالی وتجاری استفاده‌کند.

منطق مغشوش‌کاربردهای خاکی هم می‌تواند داشته باشد. شرکت ف. ل. اسمیت[2] و شرکاء درکپنهاگ دانمارك، برنامه‌ای می‌فروشدکه‌تمام جوانب‌کار بـا کوره‌های سیمان را کنترل می‌کند. در این‌کوره‌ها آهك و خاك رس تا دمای ۱۱۰۰ درجهٔ سلسیوس حرارت داده می‌شوند تا سیمان تولید شود. این برنامه دمای شعله‌ها و میزان جریان سوخت ونحوهٔ کار هواکشها و هواگیرها را کنترل می‌کند، وچون از منطق‌مغشوش استفاده می‌کند،ازبروز تغییرات ناگهانیی‌کـه نتیجهٔ قضاوتهایی از نوع "این یا آن" و "همه یا هیچ" منطق سنتی است، اجتناب می‌کند. به این ترتیب تجهیزات کوره نرمترکار می‌کنند، و تعداد توقفها و تندکارکردنهای ناگهانی‌که ممکن است به دستگاهها آسیب برساند و برکیفیت سیمان هم تأثیر بگذارد کاهش می‌یابد.

در ژاپن دانش‌پژوهان برای‌کنترل قطاربرنامه‌ای‌به‌کمك منطق مغشوش‌تهیه‌کرده‌اند. هدف آنها از این‌کار، صرفه‌جویی درانرژی وکاستن از زمان مسافـرت با انتخاب مقرون به صرفه‌ترین مسیرها وفراهم‌کردن سفری‌کم تکان‌تر برای مسافران‌است. تاکنون این‌کنترل‌کننده هم درشبیه‌سازیهای کامپیوتری و هم درنمونه‌های واقعی آزمایش‌شده است. مهندسان ژاپنی همچنین یك "رانندهٔ" کامپیوتری با منطق مغشوش ساخته‌اندکه می‌تواند یك‌خودروی مدل را در یك مسیر مانع‌دار مارپیچ شکل براند. درمرکز مهندسی زلزلهٔ دانشگاه استنفرد هم دانش‌پژوهان برای استفاده از منطق مغشوش درحل‌مسائل طراحی ساختارهایی‌که‌بتواند از گزند حرکات شدید زمین‌هنگام زلزله درامان بماند، طرحهایی دارند.

منطق مغشوش حتی روش بازی کردن کامپیوترها را هم دارد عوض می‌کند. هانس برلینر[3] از دانشگاه کارنگی‌ـملون[4] برای اصلاح یك برنامهٔ بازی تخت نرد به‌منطق‌مغشوش روی آورد. این برنامه تمام قسمتهای بازی را می‌فهمید، اما وقتی برای تمام کردن کار و بردن بازی می‌بایست دست بـه‌کار شود، دچار اشکال می‌شد. مشکل این بود کـه برنامه نمی‌توانست‌تصمیم بگیردکه تاکی می‌باید جلوی پیشرفت حریف‌را بگیرد، که‌این‌استراتژی مناسب اواسط بازی است، و ازکی به بعد دست از مانورهای دفاعی بردارد و مهره‌ها را به‌طرف خط پایان‌ببرد. انواع اولیهٔ بازی برلینر، این‌تشخیص را به عهدهٔ منطق‌سنتی‌وامی‌گذاشت، و اغلب به حریفهای انسانی می‌باخت. اما از وقتی‌که برلینر برنامه را به‌گونه‌ای تغییر دادکه مرز تشخیص بین دو استراتژی مغشوش باشد، کامپیوتر بازی را بهتر به‌پایان می‌برد و با درآمیختن دفاع وحمله، براکثرکسانی‌که با او بازی می‌کنند، غلبه می‌کند.

1. Mc Donnell Douglas 2. F. L. Smidth 3. H. Berliner
4. Carnegie-Mellon

هرچه کاربردهای عملی منطق مغشوش بیشتر می‌شود، منزلت منطق‌دانان مغشوش نیز بالاتر می‌رود. انجمن پردازش‌مغشوش‌اطلاعات[1] درامریکای شمالی درسال ۱۹۸۲ تأسیس شده است. منطق‌دانان مغشوش‌حتی مجله‌هایی ویژهٔ خودشان دارند. یکی با عنوان سیستمها و مجموعه‌های مغشوش[2] (که واژهٔ مغشوش آن با حروف پشمالوی قرمز چاپ شده است) پراست از مقاله‌هایی با عناوین‌مجذوب‌کننده‌ای چون "نقش منطق مغشوش دربه‌نظم آوردن عدم قطعیتها در سیستمهای خبره[3]"، که معلوم می‌شود انبانی است از مفاهیم ریاضی و منطقی. منطق مغشوش حتی به حریم شعر نیز دست درازی کرده است. کلود اولیه[4] اخیراً کتاب شعری با الهام از تفکر مغشوش منتشر کرده است به نام "Fuzzy Sets" (که برخلاف نامش، اشعارش به زبان فرانسوی‌اند).

بعضیها هم درمنطق مغشوش منطقی نمی‌بینند. برخی ریاضیدانها معتقدندکه این منطق چیز زیادی به تفکر رایج اضافه نمی‌کند، و بعضی به طعنه‌آن را "بدون محتوا" می‌خوانند. مایکل اربیب[5]، متخصص کامپیوتر در دانشگاه ماساچوستس، ضمن تقدیر از کارهای اصیل زاده، از این شکایت می‌کندکه منطق‌دانان مغشوش اکثر اوقات به مسئله‌ای می‌پردازند که منطق معمولی به خوبی از عهدهٔ آن برآمده است. او می‌گوید تنها کاری‌که آنهامی‌خواهند بکنند این است‌که "ببینند اگر این مسئله را به زبان مغشوش بیان کنند، چه می‌شود." اما اربیب قبول داردکه ممکن است سیستمهای خبره، برگ برنده‌ای برای منطق مغشوش باشد که زمینهٔ مساعدی برای امتحان نظریه‌هایش فراهم می‌آورد.

یك انتقاد واردتر این است که منتقدین می‌گویند تفکر مغشوش ما را واقعاً از دست تقسیم بندیهای انعطاف‌ناپذیرخلاص نمی‌کند. بلکه فقط آنها را درپس درجه‌بندیهای انعطاف‌ناپذیر عضویت در مجموعه‌ها پنهان می‌سازد. اربیب مثالی می‌زند: "اگر به شما بگویم که درفرودگاه به‌استقبالم بیایید ومرا از قد بلندم بشناسید، در فنلاند شاید منظور من از قد بلند ۱۸۰ سانتیمتر ولی دربین قبیلهٔ واتوزیها ۲۱۰ سانتیمتر باشد."

ماروین مینسکی[6] از MIT، که یکی از پایه‌گذاران هوش مصنوعی است، می‌گوید که‌ازداشتن‌ابزاری مانندمنطق مغشوش درحل‌مسائل‌خشنود است، اما دراینکه‌این برای‌همیشه تنها ابزار کار باقی بماند شك دارد. به عنوان مثالی از محدودیتهای منطق مغشوش، او به اختلاف بین طاس و مودار رجوع می‌کند. در منطق مغشوش مردی‌که تنها یك مو دارد، درجهٔ عضویتش‌درگروه "کله طاس" ۰٫۹۹۹ است، اما به قول مینسکی "در واقع معانی بسیار متفاوتی برای "طاس" وجود دارد، اگر مرد صاحب یك مو، سرباز باشد و بخواهند سربازان را بازرسی‌کنندکه آیا سرشان را تراشیده‌اند یا نه، او باید سرش را دوباره تیغ بیندازد."

به گفتهٔ منتقدان، بخشی از جذابیت منطق مغشوش در نام گیرای آن است. اربیب

1. Fuzzy Information Processing Society 2. *Fuzzy Sets and Systems*
3. expert systems 4. C. Ollier 5. M. Arbib 6. M. Minsky

می‌گوید: "اگر او [زاده] این ایده را "درجهٔ عضویت درنظریهٔ مجموعه‌ها" می‌نامید، بیش از چند مقاله درموردآن پیدا نمی‌شد؛" اما همان‌طورکه اربیب اشاره می‌کند، منطق‌مغشوش به صورت یك‌کیش واقعی درآمده است،که پیروان‌آن تنها درامریکا و اروپا نیستند، بلکه مرض آن علی‌الخصوص به جان چینیها و ژاپنیها هم افتاده است: فقط در چین ۲۰۰۰ منطق‌دان مغشوش هست.

زاده جذابیت‌نظریه‌اش‌رادرشرق، براساس‌تفاوت فرهنگها توجیه‌می‌کند. اومی‌گوید: "منطق دو ارزشی درست‌ـغلط، اساساً منطق ارسطویی است. در جامعهٔ غربی این رؤیا وجود داشته است‌که براندیشهٔ بشر یك نظام منطقی دقیق و منضبط حاکم شود. پس هدفش این بوده است: خلاصه‌کردن هرچیز تا حدی‌که بتوان درستی‌اش را به دقت، و ترجیحاً در قالب یك قضیه، تحقیق‌کرد."

"منطق مغشوش واقع گرایانه بودن این هدف را زیر سؤال می‌برد و ایجاب می‌کند با بی‌دقتیهایی‌که درهمه جای جهان واقعی رخنه دارد، کنار بیاییم. گمان می‌کنم که مشخصهٔ یك تمدن درحال رشد، این باشدکه به جایی برسدکه درك‌کند ظرفیت اودربرخوردباجهان خارج محدودیتهایی دارد. عدم‌کمال را باید بپذیریم؛ شاید به این دلیل‌که فرهنگهای‌غرب از فرهنگهای شرق جوانترند، هنوز از این اشتیاق نیل به منتهای دقت سرشارند. چون تمدنهای شرق قدیمیترند، با بینشی ازجهان‌که‌کمتر سیاه وسفید، یا کمتر دکارتی یاارسطویی است، خودرا وفق داده‌اند."

زاده،که مردی است موقر با موهای صاف وکم پشت، ظاهراً درمقابل انتقادهایی که از منطق مغشوش می‌شود، تن به رضا داده است. او می‌گوید: "علت اصلی وجود مخالفت این است‌که این‌منطق، زیراب سیستمهای سنتی منطق را می‌زند.کسی‌که ده بیست سال‌وقت صرف آموختن منطق سنتی‌کرده، نمی‌تواند به راحتی چیزتازه‌ای را بپذیرد." به‌این‌ترتیب او به جای تبلیغ تفکر مغشوش، روزهایش را درپشت میز صرف نوشتن و مطالعه می‌کند، و به این‌که دیگران مسلکش را اشاعه دهند قناعت می‌کند.

استیون گالویچ

حاصلضربهای سینوسها و کسینوسها•

ترجمهٔ بیژن هنری، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان

اوسیسکین[1] در [۳] اتحادهایی جالب ارائه می‌کند که شامل حاصلضرب سینوسهای مقادیری خاص هستند. مثالهایی از آن اتحادها چنین‌اند:

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8} \qquad (1)$$

$$\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = \frac{1}{16} \qquad (2)$$

اغلب اتحادهایی که اوسیسکین به‌دست آورده شکلی یکسان دارند: حاصلضرب سینوسهای k زاویه، که به‌نحوی مناسب انتخاب شده‌اند (k عددی صحیح ومثبت است) وهمگی بین 0° و 90° قرار دارند، برابر است با $1/2^k$.

دریکی از گفتگوهای اخیر، اوسیسکین جویای "تفسیر"ی برای این اتحادها شد. منظور اوفقط اثبات آنها نبود، زیرا مقالهٔ او اثبات (۱) و(۲) وچند فرمول مشابه دیگر را دربرداشت. درعوض، اوسیسکین به‌دنبال حکمی کلی می‌گشت که اتحادهای اوحالتی خاص از آن باشند. همچنین او دلایل رهگشا ونیز قاطعی را می‌جست که این تعمیم را توجیه کنند. این مقاله چنین تفسیری را ارائه می‌کند.

کار را با نوشتن سمت چپ (۱) و(۲) برحسب ریشه‌های مختلط واحد آغاز می‌کنیم. سپس عبارتهای به‌دست آمده را تعمیم می‌دهیم ومقدار عبارتهای تعمیم یافته را به‌دوطریق

• Galovich S., "Products of sines and cosines." *Mathematics Magazine*, 60 (1987) 105-113.

1. Z. Usiskin

به‌دست می‌آوریم. هردو روش براندیشه‌هایی ازنظریهٔ اعداد استوار است؛ اولی سرشتی مقدماتی دارد، اما دومی، که اندیشه‌هایی ازنظریهٔ جبری اعداد را درخود دارد، پیچیده‌تر است. رهیافت دوم همچنین "تفسیر" رهگشای مورد نظر اوسیسکین را برای اتحادها به دست می‌دهد. نتیجهٔ اصلی مقاله قضیهٔ ۲ است که مقدار حاصلضربهایی راکه ازتعمیم (۱) و (۲) به‌دست می‌آید تعیین می‌کند. قضیهٔ ۱، که حکمی مشهور ازنظریهٔ جبری اعداد است، دراثبات قضایای ۲ و ۳ به‌کارمی‌رود. قضیهٔ اخیرخاصیتی جالب از n-ضلعیهای منتظم محاط دردایرهٔ یکه را شرح می‌دهد.

فرمولبندی مسئله

برای اینکه زمینهٔ بحث رسمی راآماده‌کنیم، ابتدا اتحاد نخست را به‌صورت زیربازنویسی می‌کنیم:

$$(1 \sin 10^\circ)(2 \sin 50^\circ)(2 \sin 70^\circ) = 1 \qquad (3)$$

درمیدان اعداد مختلط،

$$[(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ) - (\cos 10^\circ - i \sin 10^\circ)]/i = 2 \sin 10^\circ$$

قرار می‌دهیم $\zeta = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$. مزدوج مختلط و وارون ζ، $\zeta^{-1} = \cos 10^\circ - i \sin 10^\circ$ است. بنابراین

$$2 \sin 10^\circ = (\zeta - \zeta^{-1})/i$$

همچنین $2 \sin 50^\circ = (\zeta^5 - \zeta^{-5})/i$ و $2 \sin 70^\circ = (\zeta^7 - \zeta^{-7})/i$. پس معادلهٔ(۳) برحسب ζ و ζ^{-1} به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\Pi_{j=1,5,7} (\zeta^j - \zeta^{-j})/i = 1$$

توجه کنید که طبق فرمول دموآور، $\zeta^{36} = 1$؛ یعنی ζ یك ریشهٔ ۳۶ ام واحد است.

با تغییراتی مشابه، اتحاد (۲) تبدیل می‌شود به

$$\Pi_{j=1,7,11,13} (\alpha^j - \alpha^{-j})/i = 1 \qquad (4)$$

که درآن $\alpha = \cos 6^\circ + i \sin 6^\circ$. درضمن به‌این اتحاد نیز توجه‌کنید:

$$\Pi_{j=1,7,11,13} 2 \cos(6j)^\circ = \Pi_{j=1,7,11,13} (\alpha^j + \alpha^{-j}) = 1 \qquad (5)$$

همچنین ملاحظه‌کنید که α یك ریشهٔ ۶۰ ام واحد است.

برای اینکه مبادا این فکر را القاکرده باشیم که مقدارچنین حاصلضربهایی همواره ۱ می‌شود، تساوی

$$(2 \cos 10^\circ)(2 \cos 50^\circ)(2 \cos 70^\circ) = \sqrt{3}$$

را درنظر آوریدکه به‌نوبهٔ خود اتحادی جالب است.

آیا الگویی کلی‌کـه مقادیر این حـاصلضربها را تعیین‌کند وجود دارد؟ تعدادی از اتحادهـایی راکـه اوسیسکین ارائـه‌کرده، ازجمله (۳) و(۴) را، می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی‌کرد: به‌ازای $n \in \{۳۶,۶۰,۷۲,۱۲۰,۱۳۰,۳۶۰\}$ و $r=۲\pi/n$ (از این به بعد مقیاس رادیان را به‌کارمی‌بریم)،

$$\Pi_{j=۱}^{n/۴} (۲ \sin (j\cdot r))=۱ \qquad (۶)$$

که درآن Π' نمایندهٔ حاصلضرب روی اعداد صحیحی چون j است‌که نسبت به n اول‌اند. وقتی $n=۳۶$ و $n=۶۰$، به‌ترتیب اتحادهای (۳) و(۴) به‌دست می‌آید.

هدف نهایی ما (که درقضیهٔ ۷ تحقق یافته) بررسی حاصلضربهایی به‌شکل زیراست:

$$\Pi'_{j=۱}^{k} ۲ f(jr) \qquad (۷)$$

که درآن $f(x)=\sin x$ یا $f(x)=\cos x$ و k برابراست با $n/۴$، $n/۲$ یا n. این اعداد را می‌توان همانند (۴) و (۵)، به‌صورت حاصلضربهایی ازمجموع ریشه‌هـای واحد نشان داد، بنابراین لازم است‌که به مطالعهٔ خواص حسابی ریشه‌هـای واحد (یعنی خواص مربوط به‌جمع، تفریق وضرب آنها) بپردازیم.

ریشه‌های واحد

تحقیق درخواص حسابی ریشه‌هـای واحد، یعنی نظریهٔ میدانهای دایره‌بری، را کرمر نظریهٔ اعدادان دراواسط قرن نوزدهم پایه‌گذاری‌کرد. مباحثی ازمیدانهای دایره‌بری‌که بدان‌نیاز داریم مقدماتی‌اند ومی‌توانیم آنهارا بدون مراجعه به‌کارهای زیبا وپیچیدهٔ کومر نتیجه‌بگیریم. پس‌ازآن بااستفاده ازاندیشه‌ها ونتایج نظریهٔ جبری‌اعداد، نتایج اصلی‌را به‌دست‌می‌آوریم.

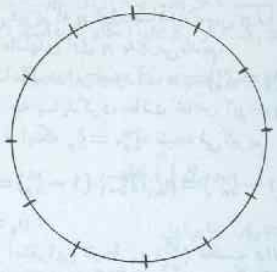
فرض‌کنید n یك عدد صحیح مثبت باشد چنانکه $n\neq ۱,۲,۴$. قراردهید

$$\zeta_n=\cos(۲\pi/n)+i \sin(۲\pi/n)$$

ζ_n یك ریشهٔ اولیهٔ n ام واحـد است، یعنی $\zeta_n^n=۱$ وبه‌ازای $۱\leqslant j\leqslant n-۱$، $\zeta_n^j\neq ۱$. البته ζ_n^j نیز بـه‌ازای $۱\leqslant j\leqslant n-۱$ یك ریشهٔ n ام واحد، ودرنتیجه ریشه‌ای ازمعادلـهٔ $x^n-۱=۰$ است. توجه‌کنیدکه

$$\zeta_n^j+\zeta_n^{-j}=۲ \cos (۲\pi j/n)$$

$$(\zeta_n^j-\zeta_n^{-j})/i=۲ \sin (۲\pi j/n)$$



شکل ۱. ریشه‌های دوازدهم واحد درصفحهٔ مختلط.

ریشه‌های‌اولیهٔ n ام واحدعبارت‌اند از ζ_n^j هایی‌که $(j,n)=۱$ ((j,n) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك j و n است). تعداد ریشه‌هـای اولیهٔ واحد $\varphi(n)$ است‌کـه $\varphi(n)$، تابع فی‌اویلر،طبق‌تعریف برابراست باتعداد اعدادصحیح‌مثبت کوچکتر از n که‌نسبت به‌آن‌اول‌اند. فرمول مشهور $\varphi(n)$ بعداً بـه‌کار خواهدآمد: اگر $n=p_۱^{a_۱}\dots p_m^{a_m}$، که درآن $p_۱,\dots,p_m$ اعدادی اول ومتمایزند، آنگاه

$$\varphi(n)=\Pi_{i=۱}^{m} p_i^{a_i-۱}(p_i-۱)$$

درمیدان C اعداد مختلط، تجزیهٔ زیر را می‌توان نوشت:

$$x^n-۱=\Pi_{j=۰}^{n-۱} (x-\zeta_n^j)$$

پس [به‌ازای $x\neq ۱$]،

$$(x^n-۱)/(x-۱)=۱+x+\dots+x^{n-۱}=\Pi_{j=۱}^{n-۱} (x-\zeta_n^j) \qquad (۸)$$

هنگامی‌که در (۸) قراردهیم $x=۱$، n در C به‌این صورت تجزیـه می‌شود:

$$\Pi_{j=۱}^{n-۱} (۱-\zeta_n^j)=n \qquad (۹)$$

می‌خواهیم حاصلضرب

$$\rho_n=\Pi'_{j=۱}^{n-۱} (۱-\zeta_n^j) \qquad (۱۰)$$

را بررسی‌کنیم، زیرا این حاصلضرب رابطهٔ نزدیکی با حاصلضربهای سینوسها وکسینوسها در (۷) دارد. برای تعیین مقدار ρ_n، از یك حیلهٔ متداول درنظریهٔ اعداد استفاده می‌کنیم:

۱. تساوی $۱+x+\dots+x^{n-۱}=\Pi_{j=۱}^{n-۱} (x-\zeta_n^j)$ همواره برقرار است.ـم.

ابتدا حالتی را درنظرمی‌گیریم که n اول باشد، سپس n را دلخواه می‌گیریم واستقرای ریاضی را درمورد تعداد عاملهای اول n به‌کارمی‌بندیم.

فرض‌کنیم n اول باشد. دراین صورت $\rho_n=\prod_{j=1}^{n-1}(1-\zeta_n^j)=n$. برای اینکه متوجه شویم درحالت‌کلی چه بایدکرد، حالت خاص $n=p^2$ را درنظرمی‌گیریم که p عددی است اول. از (۹) و اینکه $\zeta_{p^2}^p=\zeta_p$، نتیجه می‌گیریم

$$p^2=\rho_n\prod_{k=1}^{p-1}(1-\zeta_n^{pk})=\rho_n\prod_{k=1}^{p-1}(1-\zeta_p^k)=\rho_n\cdot\rho_p=\rho_n\cdot p$$

پس اگر $n=p^2$ ، $\rho_n=p$.

اکنون برای اثبات استقرایی نتیجهٔ زیر، گام نخست واندیشهٔ اصلی هردو دراختیار ماست:

قضیهٔ ۱. اگر ρ_n مطابق (۱۰) تعریف شده باشد، آنگاه

$$\rho_n=\begin{cases} p & \text{هرگاه } n=p^a\text{، که } p \text{ اول است} \\ 1 & \text{درغیر این صورت}\end{cases}$$

اثبات. به‌استقرا، برروی f، تعداد عاملهای اول n، بحث می‌کنیم. (عاملهای اول تکراری را نیز به‌حساب می‌آوریم، پس طبق شمارش ما، ۱۲ سه عامل اول دارد.) قبلاگام نخست، یعنی $f=1$، را برداشته‌ایم. فرض‌کنیم n عدد طبیعی دلخواهی با f عامل اول باشد. اگرفرض‌کنیم قضیه برای تمام اعداد طبیعی‌ای‌که تعداد عاملهایشان از f کمتر است برقرار باشد(وقتی $n=p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}$ و p_i ها اعداد اول متمایز باشند، $f=\sum_{i=1}^m a_i$)، آنگاه

$$n=\prod_{j=1}^{n-1}(1-\zeta_n^j)=\rho_n\prod_{(j,n)>1}^{n-1}(1-\zeta_n^j)=\rho_n\prod_{d|n,\ d\neq 1,n}A_d$$

که حاصلضرب اخیر برروی تمام مقسوم علیه‌هایی از n گرفته می‌شودکه از ۱ بزرگترند [واز n کوچکتر]، و به ازای هر چنین dای

$$A_d=\prod_{(j,n)=d}(1-\zeta_n^j)$$

ادعا می‌کنیم که $A_d=\rho_{n/d}$. با قبول این ادعا، اثبات قضیه به‌نحو زیر ادامه می‌یابد:

حالت ۱. فرض‌کنیم $m=1$؛ به‌عبارت دیگر، $n=p^a$ که درآن p اول است. در این صورت بنا به فرض استقرا:

$$\prod_{d|n,\ d\neq 1,n}A_d=\prod_{d|n,\ d\neq 1,n}\rho_{n/d}=\prod_{i=1}^{a-1}p=p^{a-1}$$

بنابراین $\rho_n=n/p^{a-1}=p$.

حالت ۲. فرض کنیم $m>1$. به ازای $1\le i\le m$ قرار می‌دهیم $S_i=\{n/p_i, n/p_i^2,\dots,n/p_i^{a_i}\}$. اگر $d\in S_i$، آنگاه بنا به‌استقرا $\rho_{n/d}=p_i$، و

$$\prod_{d\in S_i}A_d=\prod_{d\in S_i}\rho_{n/d}=p_i^{a_i}$$

اگر

$$d\notin\bigcup_{i=1}^m S_i$$

آنگاه بنا به‌استقرا $A_d=\rho_{n/d}=1$. بنابراین

$$\rho_n=1 \text{ و } n=\rho_n\prod_{d|n,\ d\neq 1,n}A_d=\rho_n\cdot n$$

اکنون باید ادعای $A_d=\rho_{n/d}$ را ثابت‌کنیم:

$$A_d=\prod_{(j,n)=d}(1-\zeta_n^j)=\prod_{l=1}^{n/d}{}'(1-(\zeta_n^d)^l)=\prod_{l=1}^{n/d}{}'(1-\zeta_{n/d}^l)=\rho_{n/d}$$

حاصلضربهای سینوسها و کسینوسها

برگردیم به‌موضوع تعیین مقدارحاصلضربهای سینوسها وکسینوسها. فرض‌کنیم n عددی طبیعی غیر از ۱، ۲ و ۴ باشد. به‌ازای $s=1, 1/2, 1/4$، و $r=2\pi/n$، قرارمی‌دهیم

$$C_n(s)=\prod_{j=1}^{ns}{}'\,2\cos(jr)$$

و

$$S_n(s)=\prod_{j=1}^{ns}{}'\,2\sin(jr)$$

ابتدا $C_n(1)$ را درنظرمی‌گیریم:

$$C_n(1)=\prod_{j=1}^{n}{}'(\zeta_n^j+\zeta_n^{-j})=\prod_{j=1}^{n}{}'\zeta_n^{-j}(1+\zeta_n^{2j})=\zeta_n^{-J}\prod_{j=1}^{n}{}'(1+\zeta_n^{2j})$$

که درآن

$$J=\sum_{j=1}^{n}{}'\,j$$

وجمع روی تمام اعداد طبیعی j ای‌گرفته شده‌که $(j,n)=1$. ازطرف دیگر:

$$S_n(1)=\prod_{j=1}^{n}{}'(\zeta_n^j-\zeta_n^{-j})/i=i^{-\varphi(n)}\zeta_n^{-J}\prod_{j=1}^{n}{}'(\zeta_n^{2j}-1)$$

به‌عنوان تمرین، خواننده می‌تواند تحقیق‌کندکه $\varphi(n)$ زوج است[1] و $J=n\varphi(n)/2$. پس $i^{-\varphi(n)}=(-1)^{\varphi(n)/2}$ و $\zeta_n^{-J}=1$، که ایجاب می‌کند

---

۱ توجه‌کنیدکه $n\neq 2$ ـ م

$$C_n(1)=\prod_{j=1}^{n}(1+\zeta_n^{2j})$$

و

$$S_n(1)=(-1)^{\varphi(n)/2}\prod_{j=1}^{n}(\zeta_n^{2j}-1)=(-1)^{\varphi(n)/2}\prod_{j=1}^{n}(1-\zeta_n^{2j})$$

اعداد $C_n(1)$ و $S_n(1)$ بسیار شبیه ρ_n به‌نظرمی‌رسند. برای اینکه رابطهٔ دقیق‌بین آنها را به‌دست‌آوریم، چند حالت درنظرمی‌گیریم.

حالت ۱. $n=p^a$ که درآن p یك عـدداول فرد است. چون n فرد است، مجموعهٔ $\{\zeta_n^{2j}\mid 1\le j\le n\ ,\ (j,n)=1\}$ دقیقاً مجموعهٔ ریشه‌های اولیهٔ n ام واحد است، درحالی که مجموعهٔ $\{-\zeta_n^{2j}\mid 1\le j\le n\ ,\ (j,n)=1\}$ مجموعهٔ ریشه‌های اولیهٔ $(2n)$ ام واحد است. بنابراین

$$C_n(1)=\prod_{j=1}^{n}(1-(-\zeta_n^{2j}))=\rho_{2n}=1$$

و

$$S_n(1)=(-1)^{\varphi(n)/2}\prod_{j=1}^{n}(1-\zeta_n^{2j})=(-1)^{\varphi(n)/2}\rho_n=(-1)^{\varphi(n)/2}p$$

حالت ۲. $n=2^a$. مجموعه‌هـای $\{-\zeta_n^{2j}\mid 1\le j\le n\ ,\ (j,n)=1\}$ $\pm$ هردو شامل ریشه‌های 2^{a-1} ام واحدند وهر ریشه درآنها دوبارظاهرمی‌شود. بنابراین

$$C_n(1)=\prod_{j=1}^{n}(1-(-\zeta_n^{2j}))=S_n(1)=\prod_{j=1}^{n/2}(1-\zeta_{n/2}^{j})^2=2^2=4$$

حالت ۳. $n=2p^a$ کـه درآن p یك عـدد اول فـرد است. مـانند حـالت ۱، $C_n(1)=1$ و $S_n(1)=p$. اثبات مشابه حالت ۱ است.

حـالـت ۴. $n=4p^a$ کـه در آن p یـك عـدد اول فـرد اسـت. ایـن بـار $\{-\zeta_n^{2j}\mid 1\le j\le n\ ,\ (j,n)=1\}$ مجموعـهٔ ریشه‌های p^a ام واحد است‌که درآن هر ریشه دوبارظاهرمی‌شود. بنابراین

$$C_n(1)=\rho_{p^a}^2=p^2$$

و

$$S_n(1)=\rho_{2p^a}^2=1$$

حالت ۵. سایرحالتهای باقیمانده. درتمام این حالتها، $C_n(1)=S_n(1)=1$. مثلاً اگر n فرد باشد، n توانی از یك عـدد اول نیست و $C_n(1)=S_n(1)=\rho_n=1$. اگر n زوج‌باشد، $n/2$ و $n/4$ هیچکدام توانی ازیك‌عدداول نیستند و $C_n(1)=S_n(1)=1$. بقیهٔ جزئیات را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

حال مقادیر $C_n(s)$ و $S_n(s)$ را بـه‌ازای $s=1/2$ و $s=1/4$ درنظرمی‌گیریم. ازآنجاکه $\varphi(n)$ زوج است، $|C_n(1)|=C_n(1/2)^2$ و $|S_n(1)|=S_n(1/2)^2$. اگر

$\varphi(n)$ بر ۴ بخشپذیر باشد (مثلاًدرحالت ۱ وقتی $p\equiv 1$ (پیمانهٔ ۴)، ودرحالتهای ۲،۳و۵)، آنگاه $|C_n(1/2)|=C_n(1/4)^2$ و $S_n(1/2)=C_n(1/4)^2$. دقت کنیدکه $S_n(1/4)$، $C_n(1/4)$ و $S_n(1/2)$ همواره مثبت اند. علامت $C_n(1/2)$ چندان آشکارنیست، زیرا وقتی $\pi/2<x\le\pi$، $\cos x<0$. یکی ازحالتها را بررسی می‌کنیم.

فرض‌کنیم $n=p^a$ که درآن p عدد اول فردی است. دراین صورت

$$C_n\left(\frac{1}{2}\right)=\prod_{j=1}^{n/2}2\cos(jr)$$

با $(-1)^b$ هم علامت است، که b تعداد اعداد صحیح j ای است‌که $\pi/2<jr<\pi$. (و این تعداد خود برابر است با تعداد اعداد صحیح jای‌که در $p^a/4<j<p^a/2$ صدق می‌کنند.) محاسبه‌ای سرراست نشان می‌دهدکه اگر $p\equiv 1,7$ (پیمانهٔ ۸)، این تعداد زوج واگر $p\equiv 3,5$ (پیمانهٔ ۸)، این تعداد فرد است. بنابراین

$$C_n\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}1 & \text{هرگاه } p\equiv 1,7 \text{ (پیمانهٔ ۸)}\\ -1 & \text{هرگاه } p\equiv 3,5 \text{ (پیمانهٔ ۸)}\end{cases}$$

یافته‌های خود را درقضیهٔ زیرگرد می‌آوریم.

قضیهٔ ۳. فرض‌کنید $n\neq 1,2,4$. دراین‌صورت $C_n(s)$ و $S_n(s)$ مطابق جـدول ۱ خواهند بود.

تعبیرجبری

تا اینجا بخشی از خواستهٔ اوسیسکین را برآورده‌ایم. برطبق معیارهای ما تفسیر یك پدیده عبارت است ازفرمولبندی واثبات یك‌گزارهٔ‌کلی‌که شواهد تجربی را به‌عنوان حالت‌خاص دربرداشته باشد. اما آن اندیشه‌های رهگشای نظریـهٔ جبری اعدادکه درپس قضایای ثابت شده پنهان‌اند، چیستند؟

تمام محاسبات به‌کار رفته درا‌ثبات قضایای ۱ و۲، شامل ترکیبهایی خطی باضرایب صحیح از ریشه‌های n ام واحد است. مجموعهٔ اعداد مختلطی‌که بدین شکل باشند، یك زیر حلقه از $\mathbb{C}$ تشکیل می‌دهند، به‌نام حلقهٔ اعداد صحیح دایره‌بُر:

$$Z[\zeta_n]=\{\textstyle\sum_{j=0}^{m}a_j\zeta_n^j\mid m\in Z\ ,\ m\geqslant 0\ ,\ a_j\in Z\}$$

در واقع ازآنجاکه $\zeta_n^n=1$،

$$Z[\zeta_n]=\{\textstyle\sum_{j=0}^{n-1}a_j\zeta_n^j\mid a_j\in Z\}$$

n	s	$S_n(s)$	$C_n(s)$
۱) $n=p^a$	۱	$(-1)^{\varphi(n)/2}p$	۱
	۱		اگر $p^a\equiv 1,7$ (پیمانهٔ ۸)
	۱−		اگر $p^a\equiv 3,5$ (پیمانهٔ ۸)
	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{p}$	p یك‌عدد اول‌فرد است
۲) $n=2^a$, $a>2$	۱	۴	۴
	۲	۲	اگر $a>3$
	۲−		اگر $a=3$
	$\frac{1}{2}$		
۳) $n=2p^a$	۱	$(-1)^{\varphi(n)/2}p$	۱
	۱		اگر $p^a\equiv 1,3$ (پیمانهٔ ۸)
	۱−		اگر $p^a\equiv 5,7$ (پیمانهٔ ۸)
	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{p}$	p یك‌عدد اول‌فرد است
۴) $n=4p^a$	۱	۱	p^2
	p		اگر $p^a\equiv 1$ (پیمانهٔ ۴)
	$-p$		اگر $p^a\equiv 3$ (پیمانهٔ ۴)
	$\frac{1}{2}$	۱	p یك‌عدد اول فرداست
	$\frac{1}{4}$	۱	$\sqrt{p}$
۵) بقیهٔ حالتها	۱	۱	۱
	$\frac{1}{2}$	۱	۱ (اگر n بر ۴ بخشپذیر باشد)
	$\frac{1}{4}$	۱	۱

جدول ۱

به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$$Z[\zeta_n]=\{\sum_{j=0}^{n-2} a_j\zeta_n^j \mid a_j\in Z\}$$

حلقهٔ $Z[\zeta_n]$ زیرحلقه‌ای است از میدان دایره‌بُر ریشه‌های n ام واحد:

$$Q[\zeta_n]=\{\sum_{j=0}^{n-1} a_j\zeta_n^j \mid a_j\in Q\}$$

که توسیعی جبری از Q از درجهٔ $\varphi(n)$ است. هر عنصر α از $Q(\zeta_n)$ ریشه‌ای است از یك معادلهٔ چند جمله‌ای به‌شکل $f_\alpha(x)=x^k+b_{k-1}x^{k-1}+\dots+b_1x+b_0$ که در آن هر b_i

یك عدد گویاست. عناصر $Z[\zeta_n]$ دقیقاً آن عناصر α ی از $Q(\zeta_n)$ هستند که به‌ازای آنها ضرایب b_i در $f_\alpha(x)$ اعداد صحیح‌اند. $Z[\zeta_n]$ را بستار صحیح Z در $Q(\zeta_n)$ می‌خوانند و عبارت است اززیرحلقهٔ ماکسیمال $Q(\zeta_n)$ (تحت رابطهٔ ترتیبی شمول) که شامل Z است و به‌عنوان گروه آبلی رتبه‌ای متناهی دارد.

فرض کنید R یك حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد. عنصر u در R را یکه گویند اگر $v\in R$ ای وجود داشته باشد چنانکه $uv=1$. مجموعهٔ یکه‌های یك حلقهٔ جابجایی، $U(R)$، تحت عمل ضرب حلقه یك گروه است. مثلا $U(Z)=\{\pm 1\}$. در $Z[\zeta_n]$، ریشه‌های واحد، $\pm\zeta_n^j$ ؛ $0\le j\le n-1$ ، همه یکه‌اند. تنها اعداد صحیح یکه در $Z[\zeta_n]$، ± 1 هستند. ساختمان گروه تمام یکه‌های $Z[\zeta_n]$ را قضیهٔ مشهور یکهٔ دیریکله به‌دست می‌دهد: $U(Z[\zeta_n])$ حاصلضرب مستقیمی است ازمجموعهٔ یکه‌های $\{\pm\zeta_n^j \mid 0\le j\le n-1\}$ در $\varphi(n)/2-1$ نسخه از Z. قضیهٔ ۱ نتیجه می‌دهد که اگر n توانی از یك عدد اول نباشد و $(j,n)=1$، آنگاه ζ_n^j-1 در $Z[\zeta_n]$ یکه است.

فرض کنید x یك عنصر غیریکهٔ ناصفر در R باشد. x را تحویل‌ناپذیر می‌گوییم اگر برقراری رابطهٔ $x=yz$ به‌ازای $y,z\in R$ ای، نتیجه دهد که y یا z در R یکه است. عناصر تحویل‌ناپذیر Z دقیقاً همان اعداد اول هستند. بزودی خواهیم دید که اگر n توانی از یك عدد اول باشد، عنصر ζ_n-1 در $Z[\zeta_n]$ تحویل‌ناپذیر است.

اکنون تابع نرم را از $Q(\zeta_n)$ به Q معرفی می‌کنیم. فرض کنید $a=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\zeta_n^i\in Q(\zeta_n)$ چند جمله‌ای $a(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$ را تعریف می‌کنیم (پس $a=a(\zeta_n)$). عدد مختلط $N(a)$، که آن را نرم a می‌خوانیم، چنین تعریف می‌شود:

$$N(a)=\prod_{j=1}^{n}{}' a(\zeta_n^j)$$

از نظریهٔ مقدماتی گالوا نتیجه می‌شود که $N(a)$ گویاست. پس N، $Q(\zeta_n)$ را در Q می‌نگارد. N به‌عنوان تابع دارای خواص زیر است:

۱. اگر $a\in Z[\zeta_n]$، آنگاه $N(a)\in Z$.
۲. به‌ازای هر $a\in Q(\zeta_n)$ ، $a\neq 0$ ، $N(a)>0$.
۳. به‌ازای هر $a,b\in Q(\zeta_n)$ ، $N(ab)=N(a)N(b)$ (به عبارت دیگر، N یك تابع ضربی است).

توجه کنید که اگر $u\in U(Z[\zeta_n])$، آنگاه $N(u)=1$؛ زیرا اگر به‌ازای $v\in Z[\zeta_n]$ ای $uv=1$، آنگاه $1=N(1)=N(uv)=N(u)N(v)$. از آنجا که $N(u)$ و $N(v)$ هر دو صحیح و مثبتند، $N(u)=1$. برعکس اگر $N(u)=1$، آنگاه $u\in U(Z[\zeta_n])$:

$$1=N(u)=\prod_{j=1}^{n}{}' u(\zeta_n^j)=u(\zeta_n)\prod_{j=2}^{n}{}' u(\zeta_n^j)=uv$$

که $v=\prod_{j=2}^{n-1} u(\zeta_n^j)\in Z[\zeta_n]$.

دیگر آنکه نشان می‌دهیم اگر $N(a)=q$ در Z اول باشد، a در $Z[\zeta_n]$ تحویل‌ناپذیر است. زیرا اگر به‌ازای $b,c\in Z[\zeta_n]$ای، $a=bc$ آنگاه $q=N(a)=N(b)N(c)$؛ این بدین‌معنی است که $N(b)=1$ یا $N(c)=1$. اگر $N(b)=1$ (یا $N(c)=1$)، آنگاه b (یا c) در $Z[\zeta_n]$ یکه است، بنابراین a تحویل‌ناپذیر است.

حال قادریم قضیهٔ ۱ را بـه‌زبان نظریهٔ جبری اعداد تفسیر کنیم. ابتدا ρ_n را درنظر بگیرید. هنگامی کـه $n=p^a$ توانی از یـك عدد اول باشد، $\rho_n=N(1-\zeta_n)=p$. در این حالت $1-\zeta_n$ (و ζ_n^j وقتی $(j,n)=1$) در $Z[\zeta_n]$ تحویل‌ناپذیر است. هنگامی‌که n توانـی از یـك عـدد اول نبـاشد، $\rho_n=N(1-\zeta_n)=1$، پس $1-\zeta_n$ (و ζ_n^j وقتی $(j,n)=1$) در $Z[\zeta_n]$ یکه است.

اکنون می‌بینیم که اعداد $C_n(1)$ و $S_n(1)$ رابطهٔ نزدیکی با ρ_n دارند. برای مثال، جدول زیر $C_n(1)$ را برحسب ρ_n بیان می‌کند.

n	$p^a, p\neq 2$	2^a	$2p^a$	$4p^a$	همهٔ حالتهای دیگر
$C_n(1)$	ρ_{2n}	$(\rho_{n/2})^2$	$\rho_{n/2}$	$(\rho_{n/4})^2$	ρ_n

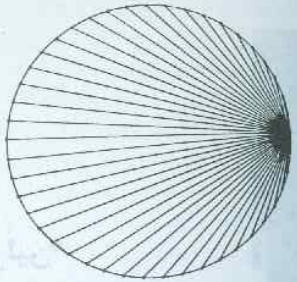
اگر $C_n(1)=\rho_k^e$ که درآن k توانی ازیك‌عدد اول نباشد و e مساوی ۱ یا ۲ باشد، آنگاه $C_n(1)$ نرم یك یکـه در $Z[\zeta_n]$ است، بنابراین $C_n(1)=1$. ازآنجاکـه "اکثر" اعداد صحیح مثبت، توانی از یك‌عدد اول نیستند، دراغلب مواقع $C_n(1)=1$ و $S_n(1)=1$. موارد استثنایی هنگامی رخ می‌دهدکه n توانی از یك‌عدد اول، یا شبیه به‌توانی از یك‌عدد اول باشد. دراین‌صورت $C_n(1)$ (یا $S_n(1)$) نرم یك‌عنصر تحویل‌ناپذیر در $Z[\zeta_n]$ است یا مربع نرم یك‌عنصر تحویل‌ناپذیر، پس $C_n(1)$ (یا $S_n(1)$) یا اول است یا مربعی ازیك عدد اول.

بـا این ملاحظات "تفسیر" جبری نتیجهٔ اصلی مقاله‌کامل می‌شود. خوانندگانی کـه مایل‌اند مباحث میدانهای دایره‌بر ونظریهٔ جبری اعداد را عمیقتر بررسی کنند می‌توانند به [۱]، [۲] یا [۴] رجوع کنند.

وترهای n- ضلعیهای منتظم

به‌عنوان‌کاربرد پایانی این چرخه از ایده‌ها، نتیجه‌ای دربارهٔ n- ضلعیهای منتظم ثابت می‌کنیم. اگرچه قضیهٔ بعد واثبات آن کاملا مشهوراست، گنجاندن آن دراین مقاله طبیعی‌است.

قضیهٔ ۳. فرض‌کنیدکه P یك n- ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ یکه و v رأس ثابتی از P



شکل ۲

باشد. دراین صورت حاصلضرب طولهای $n-1$ وتر P که v را به $n-1$ رأس باقیمانده وصل می‌کنند برابر n است.

اثبات. دایره را چنان درنظر بگیرید که مرکزش بر $(0,0)$ ورئوس چند ضلعی بر $\{\zeta_n^j \mid 0\leqslant j\leqslant n-1\}$ منطبق شود. بدون‌کاستن ازکلیت می‌توان فرض‌کردکه $v=1$. به ازای هر j، $1\leqslant j\leqslant n-1$، بردار واصل ζ_n^j و ۱ بـا عدد مختلط ζ_n^j-1 نمایش داده می‌شودکه طول آن $|\zeta_n^j-1|$ است. حاصلضرب این طولها برابر است با

$$\prod_{j=1}^{n-1}|1-\zeta_n^j|=\left|\prod_{j=1}^{n-1}(1-\zeta_n^j)\right|=n$$

مراجع

1. Borevich, Z.I. , and Shafarevich, I.R., *Number Theory*, Academic Press, New York, 1966.

2. Ireland, K. , and Rosen, N. , *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

3. Usiskin, Z., " Products of Sines, " *The Two-Year Coll. Math. J.*, **10**(1979)334-340.

4. Washington, L., *Introduction to Cyclotomic Fields*, Springer-Verlag, New York, 1982.

جنگ ریاضی دانشجو، ۸، ۱۳۷۱، ۱۴۰–۱۵۰

دان پلتیر

مربع جادویی مرلین*

ترجمهٔ مریم خادمی، دانشجوی کارشناسی‌ارشد ریاضی دانشگاه‌علم و صنعت ایران

دراین مقاله برای بازیی‌که روی یك اسباب بازی الکترونیکی متداول برای بچه‌ها انجام می‌شود، یك تحلیل ریاضی ارائه می‌کنیم. اگرمـاهیت ریاضیاتی راکه به‌کارمی‌آید درهمان ابتدا مورد بحث قرار دهیم، ممکن است توجه خواننده منحرف، وبرای بعضیها جنبه‌های غیرمترقبهٔ‌آن تا حدودی ضایع شود. بنابراین مستقیماً به‌شرح بازی می‌پردازیم.

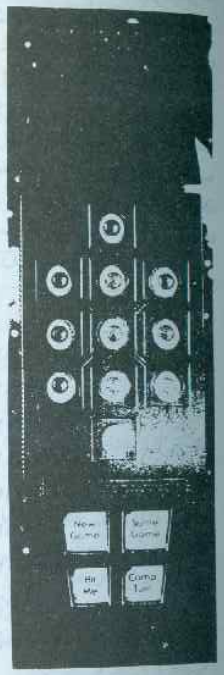
۱. بازی

این بازی روی اسباب‌بازیی بـاطری‌دار، مـوسوم به مرلین، که به وسیلهٔ برادران پارکر ساخته شده است، انجام می‌شود (شکل ۱).

یکی‌ازشش بازی مختلفی راکه می‌توان با مرلین بازی‌کرد، مربع جادویی‌می‌گویند، که عنوان این‌مقاله نیزهست. همان‌گونه‌که درنمودارضمیمه دیده می‌شود، صفحهٔ‌کلید مرلین از نـه دگمه تشکیل می‌شودکـه از ۱ تا ۹ شماره‌گذاری شده‌اند وآرایه‌ای ۳×۳ تشکیل می‌دهند. مرلین دگمه‌هـای دیگری نیز داردکـه به بازی مربع جـادویی ارتباطی ندارند (شکل ۲).

دگمه‌ها نیمه شفاف‌اند ودرون هریك ازآنها می‌توان لامپی مشاهده‌کرد؛ هرلامپ در یکی از دوحالت "خاموش" یا "چشمك‌زن" قرار دارد. برای سادگی می‌گوییم دگمهٔ مورد بحث خاموش است یا چشمك می‌زند. درشروع بازی، دستگاه الگوی اولیه‌ای از لامپهای چشمك‌زن را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کند (شکل ۳).

* Pelletier, Don, "Merlin's magic square," *Amer. Math. Monthly*, **94** (1987) 143–150.



شکل ۱

1	2	3
4	5	6
7	8	9

شکل ۲. صفحهٔ کلید مربع جادویی مرلین.

خاموش 1	چشمك‌زن 2	خاموش 3
خاموش 4	چشمك‌زن 5	چشمك‌زن 6
خاموش 7	خاموش 8	چشمك‌زن 9

شکل ۳. یك الگوی اولیهٔ نمونه.

چشمك‌زن 1	چشمك‌زن 2	چشمك‌زن 3
چشمك‌زن 4	خاموش 5	چشمك‌زن 6
چشمك‌زن 7	چشمك‌زن 8	چشمك‌زن 9

شکل ۴. الگوی برنده.

دراین مرحله، بازیکن می‌تواند با فشاردادن یکی‌ازدگمه‌ها، حالت اولیهٔ زیرمجموعهٔ معینی از دگمه‌ها را مطابق "قوانین بازی"که ذیلاً جزئیات آن را شرح می‌دهیم، تغییر دهد. برای بردن بازی، بازیکن باید با فشاردادن متوالی دگمه‌ها، الگوی چشمك‌زن تصادفی اولیه را به‌الگویی خاص، به‌نام "الگوی برنده"، تبدیل کند. الگویی برنده است که در آن همهٔ لامپها به‌استثنای لامپ دگمهٔ ۵ چشمك‌زن باشند (شکل ۴).

به‌طریقی‌که از پیش به‌وسیلهٔ مدار دستگاه تعیین شده، نتیجهٔ فشار یك دگمه عبارت است ازتغییر وضعیت آن دگمه وبرخی‌ازدگمه‌های مجاور به‌وضعیت مخالف. هرچند انتخاب از پیش‌تعیین‌شدهٔ دگمه‌های مجاور مورد نظر، از دگمه‌ای به دگمهٔ دیگر تغییرمی‌کند، تقارن فراوانی دراین‌گزینش منظورشده است به‌طوری‌که‌کودکان به‌سادگی‌می‌توانند قوانین بازی را فرا بگیرند. جدول زیر اثرفشار دادن دگمه‌های‌گوناگون را به‌تفصیل نشان می‌دهد:

قوانین مربع جادویی

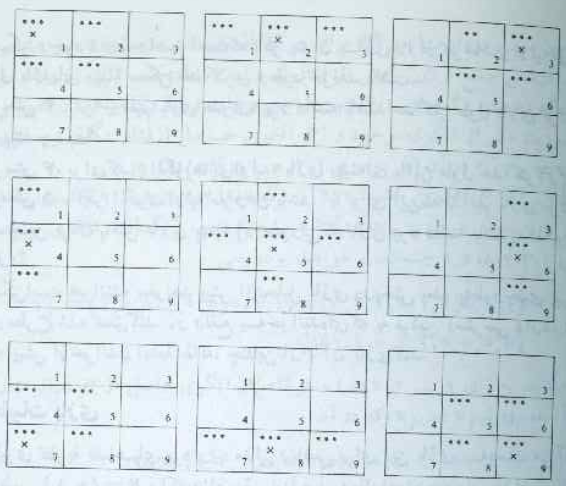
فشار دگمهٔ	۱	باعث‌تغییروضعیت دگمه‌های	۵،۴،۲،۱	می‌شود.
	۲		۳،۲،۱	
	۳		۶،۵،۳،۲	
	۴		۷،۴،۱	
	۵		۸،۶،۵،۴،۲	
	۶		۹،۶،۳	
	۷		۸،۷،۵،۴	
	۸		۹،۸،۷	
	۹		۹،۸،۶،۵	

برای دیدن خلاصهٔ مصوری ازقوانین بازی، شکل ۵ را ملاحظه‌کنید.

هنگامی‌که به‌کودك درحال بازی نگاه می‌کنیم چندین‌سؤال به‌ذهنمان می‌رسد. بعضی بازیها خیلی طولانی به‌نظرمی‌رسند، بیش از پنجاه حرکت دارند، وبرخی نیز نومیدانه وبا احساس عجز کنارگذاشته می‌شوند.

پرسش ۱ . آیا صرف‌نظر از این‌که اسباب‌بازی در ابتدا چه الگویی را انتخاب می‌کند، همیشه می‌توان بازی را برد؟ مطمئناً برای این‌که بازی برای بازیکن جوان‌منصفانه باشد، امید داریم‌که پاسخ این پرسش "آری" باشد؛ لکن قابل تصور است‌که الگوهایی اولیه وجود داشته باشندکه با درنظرگرفتن قوانین بازی نتوان ازآنها به‌الگوی برنده رسید.

از دید یك‌ناظر، بازی یك بازیکن مبتدی نسبتاً تصادفی می‌نماید. همچنین چون اثر فشاردادن یك دگمه می‌تواند با فشار مجدد همان دگمه خنثی شود، بازیکن مبتدی کراراً با



شکل ۵. فشاردادن دگمهٔ با علامت × وضعیت دگمه‌های با علامت *** را تغییر می‌دهد.

دوبار فشاردادن یك دگمه بازی خود را پس می‌گیرد. پس از بازیهای بسیار، بازیکن در تشخیص اینکه چگونه برخی الگوها منجر به‌الگوهای دیگرمی‌شوند، قدری مهارت‌کسب می‌کند. ولی درذهن بازیکن همواره مسئلهٔ‌کلی پیش‌بینی اثرفشاردادن دنباله‌ای طولانی از دگمه‌ها وجود دارد. یك مورد خاص از این مسئله ممکن است چنین باشد:

پرسش ۲ . دوبازی زیر راکه با فشاردادن دنباله‌های S و S' از دگمه‌ها تعیین می‌شود درنظرمی‌گیریم:

$$S : ۵،۸،۴،۷،۳،۸،۱،۲،۹،۸،۵،۳$$

$$S' : ۷،۲،۶،۵،۱،۷،۴،۲،۵،۳،۳،۸،۶،۲،۷،۹$$

اگرفرض‌کنیم‌که الگوی اولیهٔ هردو بازی یکی باشد، اختلاف الگوهای حاصل از دوبازی S و S' درچه خواهد بود؟

می‌توانیم بگوییم‌که طول یك بازی عبارت است ازتعداد حرکتها (= تعداد دگمه‌های فشار داده شده) درآن بازی. می‌گوییم یك بازی بهینه است هرگاه‌آن بازی درمیان کلیهٔ بازیهایی‌که ازیك‌الگوی مفروض‌اولیه منجر به‌الگوی‌برنده می‌شوند، دارای‌کوتاهترین طول باشد، با این فرض‌که چنین بازیی وجود داشته باشد. بازیکن بهینه کسی است‌که بازی او، در هر بازیی‌که برد دارد، بهینه باشد. چون تنها تعدادی متناهی ($۲۹ = ۲۵۶$)

الگوی ممکن وجود دارد، واضح است که اگر بتوان بازی را از هرحالت اولیه‌ای برد، برای طول بازیهای بهینهٔ ممکن حداکثری وجود خواهد داشت.

پرسش ۳ . فرض‌کنیم بازی همواره برد داشته باشد. حداکثر طول بازی برای یك بازیکن بهینه چیست؟

پرسش ۴. برای کدام الگو(ها)ی‌اولیه، بازی بهینه‌ای بااین طول حداکثر لازم‌است؟

پرسش ۵ . اگر الگوی اولیه مفروض باشد، آیا برای این‌که بدانیم بازی برد دارد یا نه، وهمچنین برای یافتن بازی بهینه [درصورتی‌که بازی برد داشته باشد]، الگوریتمی وجود دارد؟

ممکن‌است خواننده بخواهد پیش ازتحلیل بازی دربخش بعد، به‌طورجدی پیرامون پرسشهای مطرح شده تعمق‌کند. در واقع بـه‌خواننده‌ای‌که به مرلین دسترسی دارد، توصیه می‌کنیم‌که پیش ازخواندن ادامهٔ مقاله، چندین‌بار با آن بازی‌کند.

۳. ریاضیات بازی

با به‌کارگیری نظریهٔ فضاهـای برداری، مدلی ریاضی برای این بازی بـه‌دست می‌آوریم. میدان دوتایی $B=\{0,1\}$ راکه عناصرش تنها صفر ویك است به‌عنوان میدان اسکالرها، وحساب دوتایی را به‌عنوان اعمال میدان درنظرمی‌گیریم. دراین‌صورت جمع $\oplus$ وضرب $\odot$ در B مطابق جدولهای زیر انجام می‌شود:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

فضای B^9 مرکب از نـه‌تایی‌هایی مرتب ازصفر ویك را به‌عنوان یك فضای برداری برمیدان B درنظرمی‌گیریم. یك‌الگوی دلخواه P ازلامپهای چشمك‌زن را می‌توان با بردار $\mathbf{v}_P=(v_1,\dots,v_9)\in B^9$ نشان داد، که درآن

$$v_i=\begin{cases}0 & \text{اگر در الگوی } P \text{ لامپ } i \text{ خاموش باشد}\\ 1 & \text{اگر در الگوی } P \text{ لامپ } i \text{ چشمك‌زن باشد}\end{cases}$$

به‌این‌ترتیب، مثلاً الگوی برنده‌که درآن همهٔ لامپها به‌غیرازلامپ ۵ چشمك‌زن‌اند، با بردار

$$\mathbf{v}_W=(1,1,1,1,0,1,1,1,1)$$

نشان داده می‌شود.

چون جمع بردارهـا در B^9 برای هریك ازمختصات درمبنای ۲ صورت می‌گیرد، می‌توانیم ازعمل جمع برای نمایش اثرفشاریك دگمه استفاده‌کنیم. مثلاً اثر فشار دگمهٔ ۱ این است‌که وضعیت دگمه‌های ۱، ۲، ۴، و ۵ تغییرمی‌یابد وبقیهٔ دگمه‌ها بدون تغییرمی‌مانند. دراین صورت اگر P الگوی موجود و P' الگوی حـاصل ازفشار دگمهٔ ۱ بـاشد، آنگاه $\mathbf{v}_{P'}=\mathbf{v}_P\oplus\mathbf{u}_1$، که در آن $\mathbf{u}_1=(1,1,0,1,1,0,0,0,0)$.

مثال. اگر P الگویی باشدکـه درآن دگمه‌های ۲، ۳، ۵، ۸، و ۹ چشمك‌زن‌اند، یعنی $\mathbf{v}_P=(0,1,1,0,1,0,0,1,1)$، ودگمهٔ ۱ را فشاردهیم، آنگـاه درالگوی حـاصل P' دگمه‌های ۱، ۳، ۴، ۸، و ۹ چشمك‌زن خواهند بود، یعنی

$$\mathbf{v}_{P'}=(1,0,1,1,0,0,0,1,1)=(0,1,1,0,1,0,0,1,1)\oplus(1,1,0,1,1,0,0,0,0)$$

به‌طریق مشابه، به‌ازای $i=2,3,\dots,9$، هرگاه P' الگوی حاصل از P دراثرفشار دگمهٔ i باشد، آنگاه $\mathbf{v}_{P'}=\mathbf{v}_P\oplus\mathbf{u}_i$، که درآن

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_2&=(1,1,1,0,0,0,0,0,0)\\
\mathbf{u}_3&=(0,1,1,0,1,1,0,0,0)\\
\mathbf{u}_4&=(1,0,0,1,0,0,1,0,0)\\
\mathbf{u}_5&=(0,1,0,1,1,1,0,1,0)\\
\mathbf{u}_6&=(0,0,1,0,0,1,0,0,1)\\
\mathbf{u}_7&=(0,0,0,1,1,0,1,1,0)\\
\mathbf{u}_8&=(0,0,0,0,0,0,1,1,1)\\
\mathbf{u}_9&=(0,0,0,0,1,1,0,1,1)
\end{aligned}$$

با این قرارداد، امکان بردن بازی بـه‌ازای الگوی اولیهٔ P، معادل است بـا وجود دنباله‌ای متناهی از دگمه‌های $i_1,\dots,i_k$ که در رابطهٔ زیرصدق‌کنند:

$$\mathbf{v}_W=\mathbf{v}_P\oplus\mathbf{u}_{i_1}\oplus\mathbf{u}_{i_2}\oplus\cdots\oplus\mathbf{u}_{i_k} \qquad (\dagger)$$

حال ممکن است دردنبالهٔ $i_1,\dots,i_k$، هریك از دگمه‌ها بیش از یکبارتکرارشوند. دراین صورت چون جمع بردارهـا دارای خاصیت جـابه‌جـایی وشرکت‌پذیری است، می‌توان بردارهـای مشابه در $(\dagger)$ راکنار هم قرارداد؛ همچنین در B^9، $\mathbf{u}_i\oplus\mathbf{u}_i=0$. بنابراین بـه‌ازای الگوی اولیهٔ P، وجود بازی برنده هم‌ارز است با وجود اسکالرهـای $s_1,s_2,\dots,s_9\in B$ به‌طوری‌که

$$\mathbf{v}_W=\mathbf{v}_P\oplus s_1\mathbf{u}_1\oplus s_2\mathbf{u}_2\oplus\cdots\oplus s_9\mathbf{u}_9 \qquad (\dagger\dagger)$$

تعبیر فیزیکی ضرایب بالا این است:

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{اگر دگمهٔ } i \text{ را فشار ندهیم} \\ 1 & \text{اگر دگمهٔ } i \text{ را فشار بدهیم} \end{cases}$$

۳. نتایج

تحلیلی که تا اینجا ارائه شده است ما را قادرمی‌سازدکه به‌پرسش ۲ وبخشی از پرسش۳ پاسخ بگوییم. بدیهی است که دوبار فشاردادن متوالی یك دگمه هیچ اثری درنتیجهٔ بازی ندارد. چیزی‌که بدیهی نیست و از (††) نتیجه می‌شود این است که اگر در سراسر بازی دگمه‌ای به‌تعداد دفعات زوج فشار داده شود، درالگوی نهایی تأثیر نخواهد داشت. اگر دگمه‌ای به تعداد دفعات فرد فشار داده شود، اثر آن روی الگوی نهایی اثر یك‌بارفشار آن دگمه است، پس پاسخ پرسش ۲ این است که الگوی منتج از دو دنبالهٔ S و S' یکی‌است و هر دو هم‌ارز فشار دادن شش دگمهٔ ۱،۲،۴،۷،۸، و ۹ به هر ترتیب دلخواه‌اند.

چون لازم نیست که دگمه‌ای بیش از یك‌بار فشار داده شود، پاسخ پرسش ۳، به‌این فرض‌که هربازی برد داشته باشد، "کوچکتر یا مساوی ۹" است؛ هربازی معادل است با بازیی به‌طول حداکثر ۹. بنابراین طولانی‌ترین بازی بهینهٔ ممکن از الگوی اولیه‌ای ناشی می‌شودکه درآن برای بردن لازم است که هردگمه دقیقاً یك‌بارفشار داده شود، یعنی $s_1 = s_2 = \dots = s_9 = 1$.

پاسخ پرسش ۱ نیز برمبنای (††) دردسترس است. از (††) می‌بینیم که بازی می‌تواند برد داشته باشد اگر وتنها اگر $\mathbf{v}_W - \mathbf{v}_P$ را بتوان به صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{u}_1$ تا $\mathbf{u}_9$ نوشت. چون هرعنصر B^9 رامی‌توان برای الگویی‌مانند P به‌صورت $\mathbf{v}_W - \mathbf{v}_P$ نوشت، نتیجه می‌گیریم که بازی با هرالگوی اولیه‌ای‌که شروع شود برد دارد اگر وتنها اگرمجموعهٔ $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_9\}$، B^9 راپدیدآورد. چون B^9 نه‌بعدی‌است، این شرط هم‌ارز این است که $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای B^9 باشد.

پاسخ به‌پرسش ۱ مستلزم این است که دترمینان ماتریس ۹ × ۹ای راکه ستونهایش بردارهای $\mathcal{B}$ هستند، محاسبه کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1 \end{bmatrix}$$

معلوم می‌شودکه (بیمانهٔ ۲) $det\ A = 5 \equiv 1$. بنابراین A وارون‌پذیر است [به‌عنوان عنصری ازحلقهٔ ماتریسهای ۹ × ۹ روی میدان B]، وپاسخ به‌پرسش ۱ "آری" است.

دراینجا می‌توانیم مسائلی راکه طراح بازی باآن مواجه بوده‌است مورد توجه قرار دهیم. الگوی برنده ونتایج فشار دگمه‌های مختلف، یعنی قوانین بازی، باید طوری انتخاب شوندکه‌کودکان بتوانند به‌راحتی‌آنها را به‌خاطر بسپارند، اهدافی را تعیین‌کنند، ونتیجهٔ عملیات مختلف خود را درطول بازی پیش‌بینی‌کنند. به‌علاوه، مجموعهٔ نه تاییهایی‌که مانند بالا توسط قوانین بازی تعیین می‌شوند، باید طوری انتخاب شوندکه پایه‌ای برای B^9 تشکیل دهند.

مسئلهٔ پیداکردن‌الگوریتمی برای بازیهای‌بهینه، منجربه‌حل دستگاه خاصی‌ازمعادلات خطی روی میدان B می‌شود. برای بردن بازی به‌ازای الگوی اولیهٔ P، باید اسکالرهای $s_1, \dots, s_9$ را در B طوری بیابیم که

$$\mathbf{v}_W = \mathbf{v}_P \oplus s_1\mathbf{u}_1 \oplus s_2\mathbf{u}_2 \oplus \dots \oplus s_9\mathbf{u}_9$$

این معادل است با حل معادلهٔ ماتریسی $A\mathbf{x} = \mathbf{v}_W - \mathbf{v}_P$، که در آن A همانند بالا ماتریسی است که ستونهایش بردارهای $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_9$ اند. چون در B، $1 = -1$، بهتراست معادلهٔ بالا را به‌شکل $A\mathbf{x} = \mathbf{v}_W \oplus \mathbf{v}_P$ بنویسیم.

چون A وارون‌پذیر است، دستگاه بالا دارای جوابی منحصر به فرد، یعنی $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{v}_W \oplus \mathbf{v}_P)$ است. البته A^{-1} دراینجاوارون دو دویی ماتریس A است. برای محاسبهٔ آن می‌توان وارون معمولی ماتریس A را به‌عنوان یك ماتریس حقیقی پیداکرد و سپس آن را درمبنای ۲ نوشت.

خواننده می‌تواند تحقیق‌کندکه وارون ماتریس حقیقی A برابر است با

$$\left(\frac{1}{5}\right)\begin{bmatrix} -1&2&-1&2&2&-3&-1&-3&4 \\ 3&-1&3&-1&-1&-1&-2&4&-2 \\ -1&2&-1&-3&2&2&4&-3&-1 \\ 3&-1&-2&-1&-1&4&3&-1&-2 \\ -1&2&-1&2&-3&2&-1&2&-1 \\ -2&-1&3&4&-1&-1&-2&-1&3 \\ -1&-3&4&2&2&-3&-1&2&-1 \\ -2&4&-2&-1&-1&-1&3&-1&3 \\ 4&-3&-1&-3&2&2&-1&2&-1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس وارون A به‌عنوان یك ماتریس دو دویی عبارت است از

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&1&0&1&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&0&0&1&0&1 \end{bmatrix}$$

مثال. فرض‌کنید درالگوی اولیهٔ P، لامپهای ۱،۲،۳،۵،۸، و ۹ چشمك‌زن باشند، یعنی

$$\mathbf{v}_P=(1,1,1,0,1,0,0,1,1)$$

برای یافتن دگمه‌هایی که فشار دادنشان باعث برد می‌شود، $\mathbf{v}_W$ را با $\mathbf{v}_P$ جمع می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v}_W\oplus\mathbf{v}_P=(1,1,1,1,0,1,1,1,1)\oplus(1,1,1,0,1,0,0,1,1)$$
$$=(,0,0,0,1,1,1,1,0,0)$$

سپس محاسبهٔ زیر را (همه‌جا درمبنای ۲) انجام می‌دهیم:

$$\mathbf{x}=A^{-1}(\mathbf{v}_W\oplus\mathbf{v}_P)=\begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&1&0&1&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&0&0&1&0&1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\\0\\0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}$$

نتیجه آنکه با فشار دگمه‌های ۲،۳،۴ به‌هر ترتیب دلخواه برنده خواهیم شد.

می‌توان این الگوریتم را بـه‌شکل مکانیکی‌تری ارائه‌کرد. به‌ازای الگوی اولیهٔ P،

یك زیرمجموعهٔ S_P ازستونهای A^{-1} را به‌ترتیب زیر انتخاب می‌کنیم: $5\in S_P$ اگر وتنها اگر دگمهٔ ۵ چشمك‌زن باشد، وبرای $i\neq 5$، $i\in S_P$ اگر وتنها اگر لامپ دگمهٔ i خاموش باشد. فرض‌کنیم A_P^{-1} زیرماتریسی از A^{-1} باشدکه ازنگاه داشتن ستونهایی از A^{-1} که اندیس‌آنها در S_P است، به‌دست می‌آید. آنگاه بازی بهینه شامل دگمهٔ i است اگر وتنها اگرمجموع درایه‌های سطر i ام ماتریس A_P^{-1} درمبنای ۲ برابر ۱ باشد.

اگر A^{-1} قابل رؤیت بـاشد (یعنی‌مثلاً توسط صفحهٔ پروژکتور اورهد نمایش داده شود)، ویك مولین دردست داشته باشیم، بـه‌سادگی می‌توان این‌الگوریتم را به‌طور ذهنی انجام داد، واین‌کار موجب شگفتی زیاد اکثرحضارخواهد شد.

سرانجام به‌پرسشهای ۳ و ۴ پاسخ می‌دهیم: آیا الگو(ها)ی اولیه‌ای وجود داردکه برای بردن بازی فشاردادن هر ۹ دگمه لازم باشد؟ این پرسش در زبان ریاضی به‌صورت زیر درمی‌آید: برای‌کدام P ها، درصورت وجود، خواهیم داشت

$$A^{-1}(\mathbf{v}_W\oplus\mathbf{v}_P)=(1,1,\cdots,1)?$$

چون A وارون‌پذیر است، می‌دانیم‌که این P وجود دارد و یگانـه است. خواننده می‌تواند تحقیق‌کندکه جواب یگانهٔ معادلهٔ بالا $\mathbf{v}_P=(0,1,0,1,1,1,0,1,0)$ است.

به‌عبارت دیگر، اگر درالگوی اولیهٔ P، دگمه‌های ۲،۴،۵،۶، و۸ چشمك‌زن باشند، برای بردن بازی لازم است‌که همهٔ دگمه‌ها را یك‌بار فشار دهیم. □

یادداشت هیأت تحریریه

دوسال بعد، دانیل استاك در[۱] ضمن بررسی مجددالگوریتم ارائه‌شده درمقالهٔ بالا برای رسیدن به الگوی برنده، مسئله را از دیدگاه ساده‌تر و عملیتری مورد مطالعه قرار داد. در اینجا الگوریتم پیشنهـادی او را مختصراً می‌آوریم. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌توانـد دراثبات صحت‌آن بکوشد ویا برای توضیحات بیشتر به [۱] رجوع‌کند.

بنابرتعریف، دگمه‌های ۱،۳،۷، و ۹ را گوشه‌ای، دگمهٔ ۵ را مرکزی، وبقیهٔ دگمه‌ها، یعنی دگمه‌های۲،۴،۶، و۸ را جانبی‌می‌نامیم. به‌ازای الگوی‌اولیه‌ای همچونP، می‌خواهیم بدانیم‌کدام دگمه‌هـا را باید فشار داد تا به‌الگوی برنده رسید. به‌ازای هردگمهٔ جـانبی، بنابـه تعریف، مستطیل وابستگی آن دگمه عبارت است ازشش دگمه، مرکب ازخودآن دگمه وپنج دگمهٔ مجاورش. به‌عنوان مثال، مستطیل وابستگی دگمهٔ جانبی ۲، عبارت است ازمجموعه دگمه‌های ۱،۲،۳،۴،۵، و ۶. اکنون‌الگوریتم استاك را می‌توان چنین بیان‌کرد:

مرحلهٔ اول. دراین مرحله سرنوشت دگمه‌هـای جانبی را تعیین می‌کنیم. با دردست داشتن الگوی‌اولیهٔ P، دگمهٔ جانبی‌مفروضی‌رابایدفشار داد اگر وتنها اگرتعداد دگمه‌های چشمك‌زن درمستطیل وابستگی‌اش زوج باشد.

مرحلهٔ دوم. پس‌ازاینکه سرنوشت دگمه‌های جانبی تعیین شد، به‌دگمه‌های گوشه‌ای می‌رسیم. دراین مرحله دگمهٔ گوشه‌ای مفروضی را فشارمی‌دهیم اگروتنها اگر آن دگمه خاموش باشد.

مرحلهٔ سوم. اکنون کارتقریباً پایان یافته است. هرگاه با اجرای به‌ترتیب مراحل اول ودوم به‌الگوی برنده نرسیده باشیم، دگمهٔ مرکزی را فشارمی‌دهیم. درغیر این صورت‌کار در مرحلهٔ دوم به‌انجام رسیده بوده است.

مرجع

1. Stock, D., "Merlin's magic square revisited," *Amer. Math. Monthly*, **96** (1989) 608–610.

ناصر بروجردیان

الگوریتمی برای حل دستگاه معادلات سیالهٔ خطی

در دوره‌ای که تدریس درس نظریهٔ اعداد برعهدهٔ من گذاشته شده بود، یکی‌ازدانشجویانم برای حل معادلات سیالهٔ دومتغیره به‌صورت $ax+by=c$، روشی را که به‌صورت جمع و ضرب و تقسیم و فاکتورگیری بود، مطرح‌کرد. در نظر اول این روش درست به نظر نمی‌رسید، زیرا علتی برای درستی آن وجود نداشت. اما با اجرای آن عملیات روی چندمثال خاص ملاحظه شدکه این روش به‌جواب می‌رسد. با دقت درآن و در جستجوی علت به‌نتیجه رسیدن آن، توانستیم هم علت نتیجه‌بخش بودن آن راپیابیم و هم‌آن را به روشی الگوریتمی به‌صورت عملیات روی ماتریسها تبدیل‌کنیم و به‌حالت معادلات‌سیالهٔ n مجهولی نیز تعمیم دهیم. پس‌ازآن مشاهده شد که این الگوریتم برای حل دستگاه معادلات سیاله نیز قابل تعمیم است، و نهایتاً الگوریتمی برای حل دستگاه معادلات سیاله به‌دست آمد که بسیار کارامد است.

ابتدا خود الگوریتم را توضیح می‌دهیم و سپس به‌اثبات درستی آن می‌پردازیم. در این الگوریتم از دو عمل مقدماتی زیر،روی ستونهای ماتریسهای بادرایه‌های صحیح استفاده می‌شود.

۱. جابه‌جا کردن دوستون.
۲. ضرب یك‌ستون در یك عدد صحیح و جمع با ستونی دیگر.

اینها را عملیات مقدماتی ستونی می‌نامیم. بدیهی است با انجام این‌عملیات روی یك ماتریس با درایه‌های‌صحیح، ماتریسی بادرایه‌های صحیح به‌دست می‌آید. حال دستگاه معادلات سیالهٔ زیر را درنظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\
&\vdots\\
a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n&=b_k \qquad (k\leqslant n)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ماتریس ضرایب را با A نشان می‌دهیم که ماتریسی $k\times n$ با درایه‌های صحیح است:

$$
A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2}\cdots a_{kn}\end{bmatrix}
$$

حال A را روی ماتریس همانی مرتبهٔ n، I_n، قرار می‌دهیم و ماتریس بلوکی $\left(\frac{A}{I_n}\right)$ را می‌سازیم. با انجام اعمال مقدماتی ستونی روی این ماتریس، با طی مراحل کوتاهی می‌توان بلوک A را به‌شکل ماتریس پایین مثلثی زیر در آورد:

$$
D=\left[\begin{array}{cc} \begin{matrix} d_{11} & \\ d_{21} & d_{22}\\ \vdots & \\ d_{k1} & d_{k2}\cdots d_{kk}\end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\\ & \mathbf{0}\end{array}\right]
$$

در این زمان بلوک I_n به‌صورت ماتریسی با درایه‌های صحیح مانند M در آمده است:

$$
\left(\frac{A}{I_n}\right)\to\cdots\to\left(\frac{D}{M}\right)
$$

حال اعداد c_1، ...، c_k را به‌ترتیب به‌شکل زیر می‌سازیم:

$$
c_1=\frac{1}{d_{11}}b_1
$$

$$
c_2=\frac{1}{d_{22}}(b_2-d_{21}c_1)
$$

$$
\vdots
$$

$$
c_k=\frac{1}{d_{kk}}(b_k-d_{k1}c_1-d_{k2}c_2-\cdots-d_{k(k-1)}c_{k-1})
$$

حال کلیهٔ جوابهای (۱) عبارت‌اند از

$$
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_k\\ t_1\\ \vdots\\ t_n\end{bmatrix}
\tag{2}
$$

که t_1، ...، t_{n-k} اعدادی صحیح و دلخواه‌اند.

البته این عملیات زمانی به‌صورت بالا قابل انجام است که معادلات دستگاه (۱) مستقل و سازگار باشند، درغیر این‌صورت درمحاسبات مربوط به c_iها دچار مشکل می‌شویم؛ در واقع ممکن است d_{ii}ها صفر شوند. اگر در محاسبهٔ c_iها به حالت $d_{ii}=0$ و $b_i-d_{i1}c_1-\cdots-d_{i(i-1)}c_{i-1}=0$، این به‌معنای آن است که معادلهٔ iام دستگاه (۱) از بقیهٔ معادلات استقلال ندارد و اضافی است و می‌توانیم آن را حذف و دستگاه را از نو حل کنیم. البته اگر با هوشمندی کافی این الگوریتم را روی کامپیوتر اجرا کنیم؛ نیازی به‌تکرار عملیات نداریم. اگر درمحاسبهٔ c_i به‌حالت $d_{ii}=0$ و

$$
b_i-d_{i1}c_1-\cdots-d_{i(i-1)}c_{i-1}\neq 0
$$

برسیم، این به‌معنای آن است که دستگاه (۱)، ناسازگار است و جواب ندارد. سرانجام وقتی محاسبهٔ c_iها به‌خوبی پایان پذیرفت، ممکن است c_iها عدد صحیح نشوند؛ و در این صورت دستگاه (۱) جواب صحیح ندارد و رابطهٔ (۲) جوابهای دستگاه (۱) را در حوزهٔ اعداد گویا به‌دست می‌دهد. در این حالت با تغییر پارامترهای t_1،...،t_{n-k} در اعداد گویا کلیهٔ جوابهای گویای دستگاه (۱) به‌دست می‌آید.

شایسته است توجه کنیم که این روش اختصاص به اعداد صحیح ندارد و برای هر حلقهٔ اقلیدسی دلخواه نیز درست است. به‌ویژه برای میدانها، این روش شباهت بسیاری به روش گاوس-ژوردان دارد. در اثباتی که برای درستی این روش ارائه می‌دهیم، مشخصاً اعداد صحیح را درنظر داریم، ولی بی‌هیچ تغییر مهمی می‌توان این اثبات را برای هر حلقهٔ اقلیدسی دیگری نیز به‌کار برد.

اثبات درستی الگوریتم. ابتدا بهتر است ببینیم که هر ماتریس سطری $(r_1, r_2, \ldots, r_t)$ با درایه‌های صحیح را می‌توان پس از طی مراحل کوتاهی با عملیات مقدماتی ستونی به‌صورت $(d, 0, \ldots, 0)$ در آورد. r_j و r_i را به‌این نحو انتخاب می‌کنیم که به‌ترتیب بزرگترین و کوچکترین اعداد r_1، ...، r_t از حیث قدرمطلق باشند. اگر $r_i\neq 0$، k را مقسوم‌علیه تقسیم r_j بر r_i می‌گیریم. در این‌صورت با ضرب ستون iام در $(-k)$ و جمع

با ستون jام، عددی کمتر از r_i (از حیث قدرمطلق) حاصل می‌شود. با ادامهٔ این‌عمل، چون درایه‌های این ماتریس سطری مرتباً کوچك می‌شوند، حداکثر با یك تعویض ستون به‌شکل مطلوب می‌رسیم. اگر همهٔ درایه‌ها از ابتدا صفر باشند، d نیز صفر خواهد بود و از ابتدا شکل مطلوب حاصل است. ولی اگر حداقل یکی از درایه‌ها ناصفر باشد، d نیز ناصفر می‌شود و $|d|$ همان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $r_1, \ldots, r_s$ است. دراین‌حالت، این‌عملیات ستونی نیز همان الگوریتم اقلیدسی برای یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك چند عدد است که شکل بیان آن عوض شده است.

بنابراین تحویل ماتریس A به‌صورت ماتریس D عملی است: کافی است ازسطر بالا شروع کنیم و آن را به‌صورت $(d_{11}, 0, \ldots, 0)$ درآوریم و سپس سطر دوم را بدون آنکه به‌ستون اولش کاری داشته‌باشیم به‌صورت $(d_{21}, d_{22}, \ldots, 0)$ درآوریم و به همین ترتیب درسطر iام، ستونهای اول تا $(i-1)$ام را کنار می‌گذاریم وعملیات مقدماتی‌ستونی را روی‌بقیهٔ ستونها انجام می‌دهیم تا به‌حالت $(d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{ii}, 0, \ldots, 0)$ برسیم.

در ادامهٔ اثبات، بهتر است که عملیات مقدماتی ستونی را به‌صورت ضرب‌ماتریسها بیان کنیم. اگر $1 \leqslant i, j \leqslant n$ و $i \neq j$ و k عدد صحیحی باشد، فرض‌می‌کنیم E_{ij}^k ماتریس $n \times n$ای باشد که از ضرب‌ستون jام I_n (ماتریس همانی مرتبهٔ n) در k وجمع باستون iام به‌دست آمده‌است. دراین‌صورت برای هرماتریس Bی $m \times n$، ماتریس BE_{ij}^k ماتریسی است که از ضرب ستون jام B در k و جمع با ستون iام به دست آمده است. همچنین برای دو اندیس $1 \leqslant i, j \leqslant n$، فرض می‌کنیم H_{ij} ماتریسی باشد که ازجابه‌جایی ستونهای iام و jام I_n به‌دست‌آمده‌است. دراین‌صورت برای‌هر ماتریس Bی $m \times n$، BH_{ij} ماتریسی است که از جابه‌جایی‌ستونهای iام و jام B به‌دست آمده است. از آنجا که این‌ماتریسها، عملیات مقدماتی را انجام می‌دهند، آنها را ماتریسهای مقدماتی می‌نامند. روشن‌است که ماتریسهای مقدماتی وارونپذیرند و

$$(E_{ij}^k)^{-1} = E_{ij}^{-k}, \qquad H_{ij}^{-1} = H_{ij}.$$

اگر دنباله‌ای ازعملیات‌ستونی‌مقدماتی روی یك ماتریس A انجام‌شود وماتریسهای‌مقدماتی متناظر آن اعمال مقدماتی به‌ترتیب $F_1, \ldots, F_s$ باشند، آنگاه ماتریس به دست آمده عبارت است از

$$AF_1F_2 \cdots F_s.$$

حال می‌توانیم به‌سراغ حل دستگاه (۱) برویم. ابتدا این دستگاه را به‌صورت ماتریسی زیر می‌نویسیم

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \qquad (۳)$$

حال اگر عملیات مقدماتی لازم برای تبدیل A به D به‌ترتیب متناظر با ماتریسهای‌مقدماتی $F_1, \ldots, F_s$ باشند و قرار دهیم $M = F_1 \cdots F_s$، می‌توانیم (۳) را به صورت زیر بنویسیم

$$AMM^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

ازآنجا که $AM = AF_1 \cdots F_s = D$، رابطهٔ (۳) به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$DM^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

برای آسانی بحث قرار می‌دهیم

$$M^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

بنابراین برقراری (۴) به‌معنای آن است که

$$D\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}. \qquad (۴)$$

یا اگر آن را به‌صورت گسترده بنویسیم، رابطهٔ (۴) به‌شکل‌زیر درمی‌آید.

$$\begin{aligned} d_{11}y_1 &= b_1 \\ d_{21}y_1 + d_{22}y_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ d_{k1}y_1 + \cdots + d_{kk}y_k &= b_k \end{aligned} \qquad (۵)$$

رابطهٔ (۵) نشان می‌دهدکه مقادیر $y_{k+1}, \ldots, y_n$ هیچ اهمیتی در برقراری(۴) ندارند و هر مقدار دلخواهی که باشند رابطهٔ (۴) همچنان برقرار می‌ماند. اما از رابطهٔ (۵) هم با حل استقرایی آن به‌دست می‌آیدکه باید y_iها برابر همان c_iهایی باشندکه در ابتدای مقاله بیان شده است، پس برقراری (۴) دقیقاً معادل این است که داشته باشیم

$$M^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-k} \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

که t_1، . . . ، t_{n-k} اعداد صحیح دلخواهی‌هستند. به عبارت دیگر هر جواب (۶) در(۵)، (۴)، (۳)، و نهایتاً در دستگاه (۱) صدق می‌کند، و برعکس هر جواب $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ دستگاه (۱) را که درنظر بگیریم، رابطهٔ(۵) را براورده می‌سازد، واگر فرض کنیم t_1، . . . ، t_{n-k} به‌ترتیب حاصلضرب سطرهـای $k+1$ام، . . . ، nام M^{-1} در $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ باشند، به‌ازای این t_1، . . . ، t_{n-k} جواب $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ در (۶) نیز صدق می‌کند. بنابراین کلیهٔ جـوابهای دستگاه (۱) از رابطهٔ (۶) که معادل رابطهٔ زیر است، به‌ازای t_1، . . . ، t_{n-k}های‌دلخواه به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{bmatrix}$$

اما باتوجه‌به‌تعریف M، $M = I_n F_1 \ldots F_s$. یعنی M دقیقاً همان ماتریسی‌است که از انجام عملیات مقدماتی تبدیل کنندهٔ A به D، که روی ماتریس I_n صورت گرفته است، پدید آمده است.

البته‌این استدلال زمانی کاملاً درست است که d_{ii}ها ناصفر باشند، و ما بتوانیم c_iها

را حساب کنیم. اگر برخی از آنها صفر شوند، وضعیت به بحث دیگری نیاز دارد. وقتی رابطهٔ (۵) را تشکیل دادیم، اگر بخواهیم y_iها را حساب کنیم، به‌ترتیب از اول شروع می‌کنیم و می‌توانیم تا جایی که d_{ii} ناصفر است به‌راحتی پیش رویم و c_iها را دقیقاً به‌شکل پیشگفته محاسبه کنیم. اگر اندیس j اولین جایی بـاشد که $d_{jj} = 0$، آنگاه معادلهٔ jام دستگاه (۵) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$d_{j1}c_1 + \cdots + d_{j(j-1)}c_{j-1} = b_j$$

رابطهٔ بالا یك تساوی عددی است کـه می‌تواند برقرار باشد، یا نباشد. اگر این تساوی برقرار نباشد، به‌روشنی نتیجه می‌شود که دستگاه (۱) جوابی ندارد، و اگر برقرار باشد، معنای آن این است که اگرمعادلات اول تا $j-1$ام جواب $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ داشته‌باشند،این‌جواب خود به‌خود در معادلهٔ jام هم صدق می‌کند، پس این معادله استقلال ندارد و می‌توان آن را حذف کرد و دستگاه جدید را حل کرد. همچنین اگر c_iها اعداد صحیح باشند، از آنجا که M نیز ماتریسی با درایه‌های‌صحیح است، روشن است که با عدد صحیح انتخاب کردن پارامترهای t_1، . . . ، t_{n-k} برای دستگاه (۱)،جوابهای صحیحی به‌دست می‌آید. برعکس اگر دستگاه (۱) جـواب صحیح داشته باشد، از آنجا که M^{-1} ماتریسی با درایه‌های صحیح‌است، از رابطهٔ (۶) معلوم می‌شود که c_iها حتماً عدد صحیح خواهند بود. پس‌شرط لازم وکافی برای‌جواب صحیح داشتن دستگاه(۱) آن است که c_iها اعدادی صحیح‌باشند.

حسن‌علی شاه‌علی

باز هم تثلیث زاویه

مسائل مربوط به‌رسم‌پذیری به‌وسیلهٔ ستاره (خط‌کش نامدرج) و پرگار از جمله مسائل موردتوجه ریاضیدانان عهد باستان بوده‌است. در این میان سه مسئلهٔ تضعیف مکعب، تثلیث زاویه و تربیع دایره از معروفیت خاصی برخوردارند. منظور از تضعیف مکعب، رسم مکعبی با حجم دو برابر حجم مکعب مفروض، تثلیث زاویه، تقسیم یك زاویه به‌سه قسمت‌مساوی، و تربیع دایره، رسم مربعی هم‌مساحت با دایرهٔ مفروض است. داستان تلاش دوهزارسالهٔ ریاضیدانان برای پاسخ‌گفتن به این سه مسئله و پاسخهای نادرست متعدد ارائه‌شده به این مسائل قصه‌ای خواندنی‌است (برای توضیحاتی در این مورد به [۱] مراجعه‌کنید). سرانجام در قرن نوزدهم با پیشرفت جبر پاسخ قطعی به‌این مسائل داده شد و نشان‌داده شدکه ترسیمات فوق با استفاده از ستاره و پرگار ممکن نیستند. داستان تلاشهای امروزی‌بعضی ازنوابغ برای پاسخ‌گفتن به این مسائل نیز روایتی جالب است (برای توضیح در این مورد به [۲] مراجعه‌کنید).

در این نوشته نگاهی مجدد به مسئلهٔ تثلیث زاویه می‌افکنیم و پس از بیان احکامی درمورد این مسئله، تعمیمی‌ازآن‌را ارائه خواهیم داد. فرض ما براین است که خوانندهٔ این نوشته با مقدماتی از نظریه میدان و اثبات امتناع ساختنهای فوق‌آشنایی دارد. برای‌کامل‌بودن بحث، بعضی ازتعاریف وقضایای اساسی را یادآوری می‌کنیم. در این نوشته وقتی می‌گوییم عدد a ساختنی است، یعنی با مفروض‌بودن طول واحد و استفاده از ستاره و پرگار می‌توانیم طول $|a|$ را رسم‌کنیم. همچنین وقتی می‌گوییم زاویهٔ θ تثلیث‌پذیر است، منظور این است که با استفاده از ستاره و پرگار می‌توان θ را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد. در ادامه به‌تعریف زیر نیاز داریم:

تعریف. فرض‌کنیم F زیرمیدانی از میدان اعداد حقیقی باشد و $k\in F$ چنان باشدکه $k>0$ و $\sqrt{k}\notin F$. در این‌صورت $F(\sqrt{k})=\{a+b\sqrt{k}\,|\,a,\ b\in F\}$ را یك توسیع مربعی F می‌نامیم.

به‌سادگی می‌توان نشان دادکه $F(\sqrt{k})$ نیز زیرمیدانی از $\mathbf{R}$ است. حال قضیهٔ اساسی اعداد ساختنی را می‌توان چنین بیان‌کرد:

قضیهٔ اساسی اعداد ساختنی. دو گزارهٔ زیر هم‌ارزند:

(i) عدد a ساختنی است.

(ii) دنباله‌ای متناهی از میدانها چون $F_0=\mathbf{Q}\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_N$ وجود دارد به طوری که $a\in F_N$ و هر F_{j+1} یك توسیع مربعی F_j است $(0\leqslant j\leqslant N-1)$.

برهان. [۳، ص ۲۱، قضیهٔ ۱.] ▲

حال سعی می‌کنیم که صورتبندی‌ای برای مسئلهٔ تثلیث زاویه برحسب اعداد ساختنی ارائه دهیم. همان‌طور که گفتیم مسئلهٔ تثلیث زاویه تقسیم زاویهٔ مفروض θ را به سه قسمت مساوی طلب می‌کند. صورت معادل این مسئله چنین است که آیا با مفروض بودن ۱ و $\cos\theta$ می‌توان $\cos\theta/3$ راساخت؟ باتوجه به‌این مطلب و قضیهٔ اساسی اعداد ساختنی، لم زیر واضح است:

لم ۱. دو گزارهٔ زیر هم‌ارزند:

(i) زاویهٔ θ تثلیث‌پذیر است.

(ii) دنباله‌ای متناهی از میدانها چون $F_0=Q(\cos\theta)\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_N$ وجود دارد، به طوری که $\cos\theta/3\in F_N$ و هر F_{j+1} یك توسیع مربعی F_j است $(1\leqslant j\leqslant N-1)$.

لم بعد بحث بسیار مفیدی را برای تثلیث‌پذیری یك زاویه با استفاده از چندجمله‌ایها ارائه می‌دهد.

لم ۲. زاویهٔ θ تثلیث‌پذیر است اگر و فقط اگر چندجمله‌ای $4t^3-3t-\cos\theta$ روی $Q(\cos\theta)$ تحویل‌پذیر باشد.

برهان. نخست فرض‌کنیدکه θ تثلیث‌پذیر است. اگر چنین باشد به‌موجب (ii) در لم ۱، $\cos\theta/3$ ریشهٔ یك چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر از درجهٔ توانی از ۲ روی $Q(\cos\theta)$ است (چرا؟). از آنجا که $\cos\theta/3$ ریشهٔ چندجمله‌ای $4t^3-3t-\cos\theta$ روی $Q(\cos\theta)$ است و ۳ توانی از ۲ نیست، پس $4t^3-3t-\cos\theta$ روی $Q(\cos\theta)$ تحویل‌پذیر است. به‌عکس فرض کنیدکه $4t^3-3t-\cos\theta$ روی $Q(\cos\theta)$ تحویل‌پذیر باشد. دراین صورت این چندجمله‌ای حاصلضرب سه عامل خطی و یا حاصلضرب یك عامل‌خطی دریك عامل درجهٔ دوم است. پس درهرحالت $\cos\theta/3$ ریشهٔ یك معادلهٔ خطی و یا یك معادلهٔ درجهٔ دوم است. از طرفی می‌دانیم که ریشه‌های معادلات خطی و درجهٔ

دوم به‌شرطی که ضرایب این معادلات ساختنی باشند ساختنی هستند. پس $\cos\theta/3$ ساختنی است و درنتیجه θ تثلیث‌پذیر خواهد بود. ▲

به‌عنوان نتیجهٔ فوری این لم می‌توانیم امتناع مسئلهٔ تاریخی تثلیث زاویه را ثابت کنیم.

لم ۳. زاویهٔ 60° تثلیث‌پذیر نیست.

برهان. از آنجا که $\cos 60^\circ = 1/2$ و چندجمله‌ای $4t^3 - 3t - 1/2$ روی $Q = Q(1/2)$ تحویل‌ناپذیر است، بنابر لم ۲ حکم ثابت است. ▲

به‌این ترتیب زوایا را می‌توان به‌دو دستهٔ تثلیث‌پذیر و تثلیث‌ناپذیر تقسیم کرد. زوایای تثلیث‌پذیر مثل 90°، 180°، . . . و زوایای تثلیث‌ناپذیر مثل 60°، . . . حال سؤالی طبیعی مطرح می‌شود و آن اینکه "تعداد" زوایای تثلیث‌پذیر بیشتر است یا زوایای تثلیث‌ناپذیر؟ قضیهٔ زیر پاسخی به‌این سؤال می‌دهد.

قضیهٔ ۱. مجموعهٔ زوایای تثلیث‌پذیر شمارش‌پذیر نامتناهی است.

برهان. بنابر لم ۲ هرگاه θ تثلیث‌پذیر باشد، $4x^3 - 3x - \cos\theta$ روی $Q(\cos\theta)$ تحویل‌پذیر است، پس‌دارای ریشه‌ای در $Q(\cos\theta)$ است (چرا؟). فرض کنید این ریشه به‌شکل $f(\cos\theta)/g(\cos\theta)$ باشد که f و g چندجمله‌ایهایی روی Q هستند. از اینجا به‌دست می‌آوریم

$$4\left(\frac{f(\cos\theta)}{g(\cos\theta)}\right)^3 - 3\left(\frac{f(\cos\theta)}{g(\cos\theta)}\right) - \cos\theta = 0$$

و یا

$$4(f(\cos\theta))^3 - 3f(\cos\theta)\,(g(\cos\theta))^2 - \cos\theta\,(g(\cos\theta))^3 = 0$$

با توجه به ضریب بزرگترین درجهٔ $\cos\theta$ می‌توان مشاهده کرد که سمت چپ عبارت بالا یك چندجمله‌ای ناصفر برحسب $\cos\theta$ است. پس $\cos\theta$ ریشهٔ یك چندجمله‌ای غیرصفر با ضرایبی در Q است و درنتیجه $\cos\theta$ روی Q جبری است. از آنجا که مجموعهٔ اعداد جبری شمارش‌پذیر است، مجموعهٔ زوایای تثلیث‌پذیر حداکثر شمارش‌پذیر خواهد بود. حال نشان می‌دهیم که بینهایت زاویه وجود دارد که تثلیث‌پذیرند. برای این منظور چند جمله‌ای $4x^3 - 3x$ را روی R درنظر می‌گیریم و xهای گویایی را در نظر می‌گیریم که به‌ازای آنها $-1 < 4x^3 - 3x < 1$. واضح است که به‌ازای این xها داریم $-1 < x < 1$. می‌توان قرارداد $-1 < x = \cos\theta/3 < 1$، و درنتیجه $-1 < 4x^3 - 3x = \cos\theta < 1$. پس به‌ازای این xهای گویا که تعدادشان نامتناهی است، چندجمله‌ایهای $4t^3 - 3t - \cos\theta$

در $Q(\cos\theta)$ ریشه دارند و درنتیجه به‌موجب لم ۲ این θها تثلیث‌پذیرند. پس مجموعهٔ θهای تثلیث‌پذیر شمارش‌پذیر نامتناهی است. ▲

حال تعمیمی از مسئلهٔ تثلیث زاویه را ارائه می‌دهیم. برای این منظور سؤال زیر را درنظر می‌گیریم:

سؤال. به ازای چه nهایی می‌توان یك زاویه را به nقسمت مساوی تقسیم کرد؟

پاسخ این سؤال‌چنین است: nهایی که توانی از ۲ باشند. واضح است که هرگاه nتوانی از ۲ باشد، یك زاویه را می‌توان به nقسمت مساوی تقسیم کرد. حال نشان می‌دهیم که هرگاه n توانی از ۲ نباشد، در حالت کلی یك زاویه را نمی‌توان به nقسمت مساوی تقسیم کرد.

قضیهٔ ۲. هرگاه n توانی از ۲ نباشد، آنگاه بینهایت زاویه وجود دارد به‌طوری که آنها را نمی‌توان به n قسمت مساوی تقسیم کرد.

برهان. نخست به‌این نکته توجه می‌کنیم که هرگاه $n = 2^m p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ تجزیهٔ عدد n به‌عوامل اول باشد وزاویهٔ مفروض θ را بتوان به n قسمت مساوی تقسیم کرد، آنگاه به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant r$ این زاویه را می‌توان به $p_i^{\alpha_i}$ قسمت مساوی نیز تقسیم کرد. پس برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که هرگاه nعدد فردی باشد، بینهایت زاویه وجود دارد به‌طوری که آنها را نمی‌توان به nقسمت مساوی تقسیم کرد. برای این منظور بسط $\cos n\theta$ برحسب $\cos\theta$ را درنظرمی‌گیریم. هرگاه n فرد باشد،می‌توان نشان داد که بسط $\cos n\theta$ یك چندجمله‌ای درجهٔ n با ضرایب صحیح و ضریب پیشرو 2^{n-1} برحسب $\cos\theta$ است و جملهٔ ثابت این چندجمله‌ای صفر است. پس می‌توان نوشت

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + a_{n-1}\cos^{n-1}\theta + \cdots + a_1\cos\theta, \qquad a_i \in \mathbb{Z}.$$

به‌عبارت دیگر $\cos\theta$ ریشهٔ چندجمله‌ای

$$2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x - \cos n\theta$$

است.

حال p را یك عدد اول فرد درنظر می‌گیریم. واضح است که θای وجود دارد به طوری که $\cos n\theta = 1/p$ (چرا؟). به‌سادگی توسط محك آیزنشتاین معلوم می‌شود که چندجمله‌ای

$$2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left(2^{n-1}px^n + \cdots + a_1 px - 1\right)$$

روی Z تحویل‌ناپذیر است و از آنجا که n توانی از ۲ نیست، هر ریشهٔ حقیقی آن و در نتیجه $\cos\theta$ نیز ساختنی نیست. زیرا الزاماً برای آنکه $\cos\theta$ (با مفروض‌بودن ۱ و $\cos n\theta$) ساختنی باشد، باید ریشهٔ یك چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر از درجهٔ توان صحیحی از ۲ روی $Q(\cos n\theta)=Q(1/p)=Q$ باشد. پس $\cos\theta$ با مفروض‌بودن ۱ و $\cos n\theta$، ساختنی نیست. حال اگر p را روی اعداد اول فرد تغییر دهیم، بینهایت زاویهٔ مطلوب حاصل خواهد شد و حکم ثابت می‌شود. ▲

نکتهٔ بسیار جالبی که در اثباتهای فوق مشاهده می‌شود، ارتباط تنگاتنگ چندجمله‌ایها با مسائل رسم‌پذیری است. در این باب به‌خواننده توصیه می‌کنیم که یك‌بار دیگر برهان قضیهٔ ۲ را مرور کند و به‌این سؤال پاسخ دهد که چه ویژگیهای بسط $\cos n\theta$ (n فرد) موجب شد که بینهایت زاویه بیابیم که نتوان آنها را به n قسمت مساوی تقسیم کرد.

مراجع

۱. ایوز، هاورد، آشنایی با تاریخ ریاضیات، جلد اول، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۳.

۲. دادلی، اندروود، "با تثلیث‌گرها چگونه برخورد کنیم؟"، نشر ریاضی، ۱۳۶۸، ۳: ۲۲۲-۲۰۳.

3. Hadlock C.R., *Field Theory and Its Classical Problems*, Carus Mathematical Monographs No. 19, MAA, 1978.

ان. متروپلیس و جیان-کارلو روتا

رده‌های تقارن: توابع سه‌متغیره•

ترجمهٔ زهره مستقیم

۱. مقدمه. هر تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ به‌طور منحصر به‌فرد به‌صورت مجموع یك تابع متقارن f_s و یك تابع پاد متقارن f_a قابل بیان است، که به‌ترتیب با

$$f_s(x,y)=\frac{f(x,y)+f(y,x)}{2} \qquad f_a(x,y)=\frac{f(x,y)-f(y,x)}{2}$$

تعریف می‌شوند.

کوشش برای تعمیم این مطلب به‌توابع n متغیره، آلفرد یانگ[1] را به توسیع نظریهٔ متقارنگر[2]هایش هدایت کرد، که اکنون درنظریهٔ نمایشهای گروه متقارن جای گرفته است.

برطبق این نظریه، یك تابع n متغیره به‌طور منحصر به‌فرد به صورت مجموع p_n تابع که هرکدام به یك ردهٔ تقارن متفاوت متعلق‌اند قابل بیان است، که در آن p_n تعداد افرازهای عدد صحیح n است. متأسفانه هرگز توصیف شهودی ساده‌ای از این رده‌های تقارن، به‌جز برای $n=2$، داده نشده است.

برای توابع سه متغیره مشخص شده است که فقط یك ردهٔ تقارن دیگر علاوه بر دو ردهٔ تقارن بدیهی توابع متقارن و توابع پاد متقارن وجود دارد. دراینجا سرشت نمایی خیلی ساده‌ای از این سومین ردهٔ تقارن را، که به‌نظرمی‌رسد نادیده گرفته شده باشد، ارائه می‌دهیم که این رده شامل همهٔ توابع متقارن دوری است. ثابت می‌کنیم که هر تابع سه

• Metropolis, N., and Rota, G.C., "Symmetry classes; Functions of three variables," *Amer. Math. Monthly*, 98 (1991) 328-332.

1. Alfred Young 2. symmetrizer

متغیره به‌طور منحصربه‌فرد به صورت مجموع یك تابع متقارن، یك تابع پاد متقارن و یك تابع متقارن دوری قابل بیان است.

برای خودکفا ساختن این نوشته، اقتباسی کوتاه از بعضی فرمولهای شناخته شده آورده‌ایم.

باور ما این‌است که اندیشهٔ اساسی این نوشته به‌توابع n متغیره گسترش پیدا خواهد کرد. امیدواریم که نوشتهٔ حاضر دست‌کم خواننده را به مطالعهٔ بیشتر درمورد نظریهٔ وسیع رده‌های تقارن جلب کند.

۲. رده‌های تقارن. ما با توابع حقیقی و همه‌جا معین از سه متغیر که از یك مجموعهٔ $\{x,y,z\}$ گرفته می‌شوند، سروکار خواهیم داشت. مجموعهٔ تمام چنین توابعی تشکیل یك فضای برداری V روی میدان اعداد حقیقی می‌دهند. چارچوب کار را به منظور بیان روشن مطلب، به‌عمد محدود گرفته‌ایم.

اگر σ یك جایگشت روی مجموعهٔ $\{x,y,z\}$ باشد که x را به $x\sigma$ بنگارد، و اگر f یك تابع باشد، می‌نویسیم

$$\sigma f(x,y,z)=f(x\sigma,y\sigma,z\sigma)$$

زیرفضای W از فضای برداری V را یك ردهٔ تقارن می‌نامیم، هرگاه $f\in W$ نتیجه دهد $\sigma f\in W$.

هدف ما ارائهٔ توصیف‌ساده‌ای از تمام رده‌های تقارن است. سه ردهٔ تقارن جالب‌توجه وجود دارند، که دوتای آنها معروف‌اند:

۱. ردهٔ تقارن S شامل همهٔ توابع متقارن، یعنی همهٔ توابعی که به‌ازای تمام جایگشتهای σ از مجموعهٔ $\{x,y,z\}$، $f(x,y,z)=f(x\sigma,y\sigma,z\sigma)$؛

۲. ردهٔ تقارن A از تمام توابع پادمتقارن، یعنی همهٔ توابعی که به‌ازای تمام جایگشتهای σ ازمجموعهٔ $\{x,y,z\}$، $f(x,y,z)=(\operatorname{sign}\sigma)f(x\sigma,y\sigma,z\sigma)$؛ دراینجا $(\operatorname{sign}\sigma)$ علامت جایگشت σ است. ازآنجا که با سه متغیر سروکار داریم، $(\operatorname{sign}\sigma)$ برابر ۱− خواهد بود هرگاه σ ترانهشتی از دو متغیر باشد، و $(\operatorname{sign}\sigma)$ برابر ۱ خواهد بود هرگاه σ همانی یا یك جایگشت دوری باشد.

۳. سوم، ردهٔ تقارن C از توابع متقارن دوری، که به‌صورت زیرفضای C ازهمهٔ توابع f تعریف می‌شود که در دو معادلهٔ

$$\begin{aligned} f(x,y,z)+f(z,x,y)+f(y,z,x)&=0\\ f(x,z,y)+f(y,x,z)+f(z,y,x)&=0 \end{aligned}\qquad (*)$$

صدق می‌کنند.

گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که تعریف قبل معنی دارد:

گزاره. زیرفضای C از V شامل همهٔ توابعی که در (*) صدق می‌کنند، یك ردهٔ تقارن است.

اثبات. کافی است نشان دهیم که اگر f متقارن دوری و σ یك ترانهش روی مجموعه‌ی $\{x,y,z\}$ باشد، آنگاه σf متقارن دوری است. اکنون، باتوجه به‌تعریف، تابع σf متقارن دوری است اگر و تنها اگر درمعادلات

$$\begin{aligned} \sigma f(x,y,z)+\sigma f(z,x,y)+\sigma f(y,z,x)&=0\\ \sigma f(x,z,y)+\sigma f(y,x,z)+\sigma f(z,y,x)&=0 \end{aligned}\qquad (**)$$

صدق کند.

برای مشخص بودن بحث، مثلاً فرض کنید σ ترانهش بین x و z است. دراین‌صورت معادلات (**) بالا به دو معادلهٔ

$$\begin{aligned} f(z,y,x)+f(x,z,y)+f(y,x,z)&=0\\ f(z,x,y)+f(y,z,x)+f(x,y,z)&=0 \end{aligned}$$

تحویل می‌شوند. اما توجه کنید که این معادلات به‌جز از لحاظ ترتیب با دو معادلهٔ (*) برابرند.

همین بحث در مورد هر ترانهش صادق است. ازاینکه هر جایگشت حاصلضربی از ترانهشها است، همان‌طور که می‌خواستیم، نتیجه می‌گیریم که σf برای هر جایگشت σ متقارن دوری است. ▲

ارائهٔ مثالهایی از توابع متقارن دوری ساده است. اگر $f(x,y,z)$ هرتابعی باشد، آنگاه تابع

$$g(x,y,z)=f(x,y,z)-f(z,x,y)$$

و همچنین تابع

$$h(x,y,z)=f(x,y,z)-f(y,z,x)$$

متقارن دوری است.

هرگاه ازجایگشت موضع به‌جای جایگشت متغیر استفاده شود، دو معادلهٔ (*) را که یك تابع متقارن دوری را تعریف می‌کنند می‌توان با یك معادلهٔ واحد عوض کرد. فرض کنید τf تابعی باشد که از f با تغییر جای متغیر موضع اول f با متغیر موضع سوم، متغیر موضع دوم با متغیر موضع اول، و متغیر موضع سوم با متغیر موضع دوم به‌دست می‌آید. بنابراین

$$\tau f(x,y,z)=f(z,x,y),\qquad \tau f(x,z,y)=f(y,x,z).$$

بنابراین (به‌وضوح) داریم

گزاره. تابع f متقارن دوری است اگر و تنها اگر $f+\tau f+\tau^2 f=0$.

۳. افکنشها. سه‌عملگر E_s، E_a، و E_c از فضای برداری V به‌خودش را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$E_s f=\frac{1}{6}\sum_\sigma \sigma f,\qquad E_a f=\frac{1}{6}\sum_\sigma (\operatorname{sign}\sigma)\sigma f,$$

که در آن مجموع روی تمام جایگشتهای σ از مجموعهٔ $\{x,y,z\}$ گرفته می‌شود.

برای تعریف سومین عملگر E_c، فرض کنید $\sigma f(x,y,z)=f(z,x,y)$. قرار می‌دهیم

$$E_c f=f-\frac{1}{3}(f+\sigma f+\sigma^2 f).$$

این عملگرها را اولین بار آلفرد دیانگ تعریف کرد. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که این عملگرها خود توان و دو به دو متعامدند و $E_s+E_a+E_c=\sigma_0$، که در آن σ_0 عملگر همانی است. علاوه‌براین، تابع $E_s f$ متقارن و تابع $E_a f$ پادمتقارن است.

با این همه، آنچه در زیر می‌آید از نظر یانگ پوشیده مانده بود:

گزاره. برای هر تابع سه‌متغیرهٔ f، تابع $E_c f$ متقارن دوری است. علاوه براین، اگر f یك تابع متقارن دوری باشد، آنگاه $E_c f=f$.

اثبات. برای اثبات اولین ادعا، فرض کنید $g=E_c f$. به‌عبارت دیگر، فرض کنید

$$g(x,y,z)=f(x,y,z)-\frac{1}{3}[f(x,y,z)+f(z,x,y)+f(y,z,x)].$$

برای نشان دادن اینکه تابع g متقارن دوری است باید اتحادهای

$$g(x,y,z)+g(z,x,y)+g(y,z,x)=0$$
$$g(x,z,y)+g(y,x,z)+g(z,y,x)=0$$

را ثابت کرد.

ابتدا اتحاد اول را بررسی می‌کنیم. طرف چپ به صورت

$$\begin{aligned}
&f(x,y,z)-\frac{1}{3}[f(x,y,z)+f(z,x,y)+f(y,z,x)]\\
&+f(z,x,y)-\frac{1}{3}[f(z,x,y)+f(y,z,x)+f(x,y,z)]\\
&+f(y,z,x)-\frac{1}{3}[f(y,z,x)+f(x,y,z)+f(z,x,y)]
\end{aligned}$$

بسط پیدا می‌کند.

با جمع کردن هر ستون به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
&f(x,y,z)+f(z,x,y)+f(y,z,x)\\
&-\frac{1}{3}[f(x,y,z)+f(z,x,y)+f(y,z,x)]\\
&-\frac{1}{3}[f(z,x,y)+f(y,z,x)+f(x,y,z)]\\
&-\frac{1}{3}[f(y,z,x)+f(x,y,z)+f(z,x,y)]=0
\end{aligned}$$

درستی دومین معادله را به‌طور مشابه می‌توان تحقیق کرد.

برای اثبات دومین ادعا، f را متقارن دوری درنظر می‌گیریم. بنابراین فرض کنیم

$$f+\sigma f+\sigma^2 f=f(x,y,z)+f(z,x,y)+f(y,z,x)=0$$

که اولین معادلهٔ (*) است. از تعریف عملگر E_c بلافاصله نتیجه می‌شود که $E_c f=f$. این، اثبات را کامل می‌کند. ▲

۴. کمینگی. فرض کنید E یك عملگر خود توان از V به V باشد به‌طوری‌که برای هر جایگشت σ داشته باشیم $E\sigma f=\sigma E f$، و فرض کنید که E به‌شکل $E=\sum_\sigma \alpha_\sigma \sigma$ باشد، که در آن α_σ یك عدد حقیقی است و σ روی مجموعهٔ تمام جایگشتهای سه متغیر تغییر می‌کند. ثابت می‌کنیم E یك ترکیب خطی از سه‌عملگر E_s، E_a، و E_c است.

چون E با تمام جایگشتهای σ جابه‌جا می‌شود، می‌توانیم E را به‌صورت

$$E=\alpha\sigma_0+\beta\sum_{\sigma\ \text{فرد}}\sigma+\gamma\sum_{\substack{\sigma\ \text{زوج}\\ \sigma\neq\sigma_0}}\sigma$$

بنویسیم که در آن σ_0 بازهم جایگشت همانی است. اما

$$\sum_{\text{فرد}\,\sigma} \sigma = 3(E_s - E_a)$$

و

$$\sum_{\substack{\text{زوج}\,\sigma \\ \sigma \neq \sigma_0}} \sigma = 3(E_s + E_a) - \sigma_0$$

در نهایت با جایگذاری

$$\sigma_0 = E_s + E_a + E_c,$$

ملاحظه می‌کنیم که E یك ترکیب خطی از E_s، E_a، و E_c است.
درنتیجه، ثابت کرده‌ایم که:

قضیه. هر تابع سه متغیره را می‌توان به‌یك و تنها یك روش به‌صورت مجموع یك تابع متقارن، یك تابع پاد متقارن، و یك تابع متقارن دوری نوشت.

۵. ملاحظات تاریخی. نظریهٔ متقارنگرهای یانگ، یعنی طبقه‌بندی نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروه متقارن، از زمان اولین اثر چاپ‌شدهٔ آلفرد یانگ در ۱۹۰۰ [۱] بارها کشف و منتشر شده است. نزدیکترین شرح از لحاظ محتوی به‌نوشتهٔ حاضر را در اثر لیتلوود [۲] می‌توان یافت. شرحی کاملتر از این ایده‌ها در [۳] یافت می‌شود. کارهای لیتلوود سرشار از مثالها و ساختارهای صریح از نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروه متقارن روی n حرف، تا $n=7$، است. اگرچه فرمولهای او برای عملگرهای خودتوانی که هر نمایش تحویل‌ناپذیر را تولید می‌کنند به‌طور صریح داده شده است، به‌نظر می‌رسد که او نکتهٔ ساده‌ای را که در این نوشته به‌آن اشاره شده، نادیده گرفته باشد.

توضیحی ساده از کار آلفرد یانگ در اثر راذرفورد [۴] یافت می‌شود.

شرحی از نظریهٔ نمایش گروه متقارن را با منظور کردن پیشرفتهای اخیر نظریهٔ نمایش می‌توان در اثر جیمز و کربر [۵] یافت.

غیرممکن است که تمام رهیافتهایی را که درمورد این موضوع در قرن اخیر ارائه شده است، فهرست کنیم. پس در اینجا به ذکر آخرین آنها، رسالهٔ گراس‌هانس، روتا، و اشتاین [۶] اکتفا می‌کنیم.

مراجع

1. Young, A., *Collected Papers*, The University of Toronto Press, 1977.

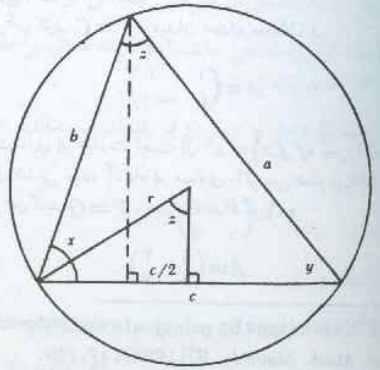
2. Littlewood, D. E., *A University Algebra*, 2nd edition, Whitefriars Press, London, 1961.
3. Littlewood, D. E., *Theory of Group Characters*, 2nd edition, University Press, Oxford, 1958.
4. Rutherford, D. E., *Substitutional Analysis*, University Press, Edinburgh, 1948.
5. James, G.D., and Kerber, A., *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Cambridge University Press, New York, 1981.
6. Grosshans, F. D., Rota, G-C. and Stein, J., *Invariant Theory and Superalgebras*, CBMS, Amer. Math. Soc, 1987.

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ به‌ازای $x+y<\pi$

$$c = a\cos y + b\cos x$$

$$r = 1/2 \Rightarrow \sin z = (c/2)/(1/2) = c, \quad \sin x = a, \quad \sin y = b;$$

$$\sin(x+y) = \sin(\pi - (x+y)) = \sin z = c = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$



استفن اچ. فریدبرگ

تعمیم قضیهٔ محور اصلی به‌میدانهای غیر از R •

ترجمهٔ اقبال زارعی

شاید یکی ازمهمترین قضایا درتمام جبرخطی قضیهٔ محور اصلی باشد، که بیان می‌کند یك ماتریس متقارن‌حقیقی متعامداً هم‌ارز بایك ماتریس قطری‌است؛ برای مثال، [۱، ص.۳۳۷] را ببینید. این قضیه کاربردهـای بسیاری درهندسه وآنـالیزعددی ونیز آمار وفیزیك پیدا می‌کند، به‌ویژه درمواردی‌که فرمهای دوخطی متقارن ظاهرمی‌شوند. با وجود این، به‌ندرت به‌این نکته توجه می‌شودکـه اگرمحدودیتی روی میدان زمینهٔ F نباشد، این قضیه درست نیست. چهارمثال اول زیر، موانع تعمیم قضیهٔ محور اصلی به‌میدانهای غیر ازمیدان اعداد حقیقی R را نشان می‌دهند.

مثال ۱ . فرض‌کنید $F=C$ ، میدان اعداد مختلط، و

$$A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

چند جمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از $f_A(x)=x^2$، پس تنهـا مقدار ویژهٔ A، ۰ است. اگر A قطری شدنی بود، آنگاه A مساوی ماتریس صفرمی‌شد.

مثال ۲ . فرض‌کنید $F=Q$ ، میدان اعداد گویا، و

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

• Friedberg, S.H. "Extending the principal axis theorem to fields other than R," *Amer. Math. Monthly*, 97(1990)147-149.

چند جمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از $f_A(x)=x^2-4x-1$، که صفرهای گویا ندارد. پس A قطری شدنی نیست.

مثال ۳ . فرض‌کنید $F=Z_2$ میدان دوعنصری متشکل از ۰ و ۱ باشد. اگر

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

آنگاه $f_A(x)=x^2+x+1$. چون $f(0)=1$ و $f(1)=1$، می‌بینیم که A هیچ مقدار ویژه‌ای ندارد، وبنابراین قطری شدنی نیست.

مثال ۴ . اگر $F=F(C)$ میدان اعداد جبری باشد (صفرهای مختلط چندجمله‌ایها در $Q[x]$)، ماتریس مثال ۱ نشان می‌دهدکه قضیهٔ محور اصلی دراین حالت برقرارنیست.

مثال ۵ . فرض‌کنید $F=F(R)$ زیرمیدان $F(C)$ شامل‌اعداد جبری حقیقی‌باشد. فرض‌کنیدکه A مـاتریسی متقارن روی $F(R)$ و f_A چندجمله‌ای سرشت‌نمای A باشد. طبق قضیهٔ محور اصلی سازه‌های f_A روی R طوری تجزیه می‌شوند که A متعامداً قطری‌شدنی باشد. امـا چون $F(C)$ بـه‌طورجبری بسته است، مقادیر ویژه باید عناصر $F(R)$ باشند. پس A روی $F(R)$ متعامداً قطری شدنی است.

مثال قبلی نشان می‌دهدکـه قضیهٔ محور اصلی وقتی‌کـه میدان زمینه $F(R)$ بـاشد برقرار است. نتیجهٔ اصلی این مقاله نشان می‌دهدکه قضیهٔ محور اصلی را نمی‌توان به‌هیچ میدان متناهی تعمیم داد. درحقیقت، وضع موجود از این‌جهت نومیدکننده است‌که همیشه یك مـاتریس متقارن 2×2 بدون هیچ مقـدار ویژه‌ای وجود دارد. هرچندکـه می‌توان برهانهای جبری خـالصی برای این مطلب ارائـه داد، درآنها ازنتایجی درنظریهٔ میدانها استفاده می‌شود. برهـان ارائه‌شده در اینجا فقط از یك استدلال شمارشی ساده استفـاده می‌کند، وبنابراین می‌تواند به‌دانشجویان جبرخطی مقدماتی عرضه شود.

قضیه . فرض‌کنید F یك میدان متناهی باشد. آنگاه یك مـاتریس متقارن 2×2 (روی F) وجود دارد که فاقد مقدار ویژه است.

برهان. فرض‌کنید F شامل n عنصر، و A یك‌ماتریس متقارن 2×2 دلخواه باشد، مثلاً،

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

چند جمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از

$$f_A(x)=x^2-(a+c)x+(ac-b^2) \qquad (1)$$

چند جمله‌ای تکین درجهٔ دوم $f(x)$ تحویل‌پذیر است اگر وتنها اگر به‌شکل

$$f(x)=(x-d)(x-e)$$

باشد. اگر نخست تعداد انتخابهای متمایز d و e را بشماریم؛ وسپس تعداد انتخابهایی را که $d=e$ بـه‌آن بیفزاییم، بـه‌سادگی نتیجه می‌شود کـه تعداد چندجمله‌ایهای درجه دوم تحویل‌پذیرعبارت است از

$$\binom{n}{2}+n=n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

اکنون نشان می‌دهیم کـه تعداد چندجمله‌ایهای بـه‌شکل (۱)، که آن را با s نشان می‌دهیم، بزرگتر از تعداد چندجمله‌ایهای تکین درجه دوم تحویل‌پذیر است. این نتیجه می‌دهد که یك ماتریس متقارن A وجود دارد کـه چند جمله‌ای سرشت‌نمایش تحویل‌ناپذیر است، و بنابراین A مقدار ویژه ندارد.

برای هر $k\in F$، فرض‌کنید $s(k)$ تعداد راههای انتخاب جملهٔ ثـابت $ac-b^2$ در (۱) بـاشد، بـه‌طـوری‌کـه $a+c=k$. توجـه‌کنیـدکـه اگـر $a+c=k$، آنگـاه $ac-b^2=ak-a^2-b^2$، پس $s(k)$ برابر تعداد عناصرمجموعهٔ

$$\{ak-a^2-b^2 : a,b\in F\}$$

است و

$$s=\sum_{k\in F} s(k)$$

اگر بتوانیم نشان بدهیم کـه برای هر k، $s(k)\geqslant(n+1)/2$، و نـامساوی اکید حداقل برای یك k برقرار است، آنگـاه خواهیم داشت $n(n+1)/2<s$، که طبق (۲) مساوی تعداد چندجمله‌ایهای تکین درجه دوم تحویل‌پذیر است. توجه‌کنیدکـه برای هر k، اگر فرض‌کنیم $a=0$، آنگاه جملهٔ ثـابت $-b^2$ را به‌دست می‌آوریم. چون $-b_1^2=-b_2^2$ اگروتنها اگر $b_1=\pm b_2$؛ حداقل $1+(n-1)/2=(n+1)/2$ مربع منفی(متمایز) وجود دارد. پس $s(k)\geqslant(n+1)/2$ برای هر k.

اگرهرعنصر F یك مربع (منفی) باشد (مثلاً، اگرسرشت‌نمای F، ۲ باشد)، آنگاه از چنین جمله‌های‌ثابتی nتا وجود دارد، وکارتمام است. پس‌فرض‌کنیدکه $e\in F$ ای وجود دارد به‌طوری‌کـه e یك‌مربع منفی نیست. فرض‌کنید $k_0=e+1$ ، $a=1$ ، و $b=0$ دراین صورت

$$ak_0-a^2-b^2=(e+1)-1-0^2=e$$

بنابراین

$$s(k_0)\geqslant(n+1)/2+1>(n+1)/2$$

وبرهان تمام است.

مسئله. ان میدانهایی راکه قضیهٔ محور اصلی برای‌آنها برقرار است دقیقاً رده‌بندی کنید.

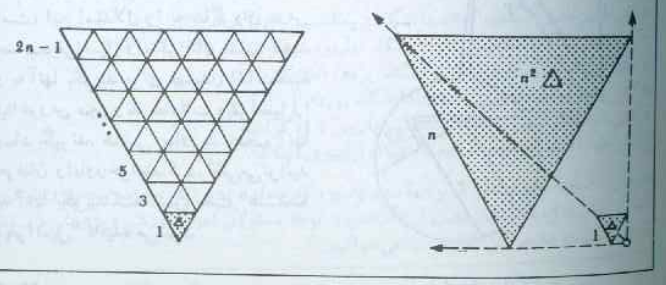
مرجع

1. Friedberg, S., A. Insel, and L. Spence. *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1989.

مجموع اعداد فرد

$$\Delta+3\cdot\Delta+\cdots+(2n-1)\cdot\Delta=A=n^2\cdot\Delta$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$



قضیهٔ فیثاغورس به بیان مشکل!•

مثلثی قائم‌الزاویه با یك ضلع به‌طول x و وتر به‌طول y را درنظر بگیرید که یکدیگر را دررأس A قطع می‌کنند. به‌کمك میکروسکوپ جروم کایزلر که بزرگنمایی بینهایت‌دارد، نگاه دقیقتری به‌نقطهٔ A بیندازید ([۱] را ببینید). فرض‌کنید dx و dy به‌ترتیب نموهای بینهایت کوچك x و y باشند. خط هاشورخورده باید بر وتر عمود باشد. اکنون تشابه مثلثها معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به‌دست می‌دهد:

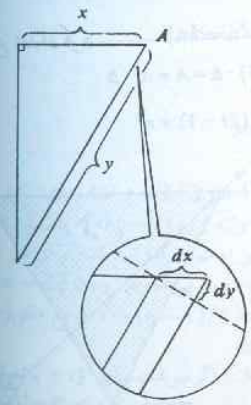
$$dy/dx = x/y$$

متغیرها را جداکنید:

$$y\,dy = x\,dx$$

انتگرال بگیرید:

$$y^2 = x^2 + C$$



ملاحظهٔ آنچه درحالت $x = 0$ رخ می‌دهد منجر به‌این نتیجه‌می‌شود که ثابت‌انتگرال‌گیری مربع طول ضلع دیگر است،وقضیهٔ فیثاغورس ثابت می‌شود!

اگردل ودماغ‌خوشی‌از دست روزگار ندارید و دلتان برای مردم آزاری‌لك‌زده است، این استدلال را به شاگردان درس حساب‌دیفرانسیل وانتگرالتان نشان بدهید و به‌آنها بگویید برای فهمیدن اثبات‌قضیهٔ فیثاغورس مجبورند معادلات دیفرانسیل‌را یاد بگیرند. شانس بیاورید نصف آنها حرفتان راباورخواهندکرد. حتی‌می‌توانید به آنها بگویید که این بحث "هندسهٔ دیفرانسیل" نامیده می‌شود.

مرجع

1. Keisler, H.J., *Elementary Calculus*, Prindle, Webber and Schmidt, Boston, 1976.

• *The Mtahematical Intelligencer*. **10** (1988) No 331.

دیدگاه

ده پرسش از ریاضیدانان ایرانی مقیم خارج

درفروردین ماه ۱۳۶۸، بیستمین کنفرانس ریاضی کشور دردانشگاه تهران شاهد حضور تعدادی از ریاضیدانان ایرانی مقیم خارج از کشور بود. هیأت تحریریهٔ **جنگ ریاضی دانشجو** تصمیم گرفت فرصت را غنیمت شمارد، و در مورد برخی مسائل مربوط به ریاضیات، آرای‌تنی چند از این استادان راگردآورد. هدف ازاین‌نظرخواهی، بهره‌گیری‌ازتجربهٔ ارزشمند این ریاضیدانان دربارهٔ مسائل‌آموزشی و پژوهشی ریاضیات بود. البته درطول چند روز برگزاری کنفرانس، برنامه‌ها فشرده‌تر ازآن بودکه بتوان این افراد را گردهم‌آورد وبه مصاحبهٔ حضوری پرداخت. به‌ناچار، هیأت تحریریه برآن شدکه پرسشهای خود را به‌صورت کتبی به‌این ریاضیدانان بدهد و پاسخ را نیزکتباً دریافت‌کند. بدین‌لحاظ، متنی‌که ملاحظه خواهیدکرد، حاصل‌نوعی "اقتراح" است. شرکت‌کنندگان دراین اقتراح کوچك، عبارت بودند ازآقایان:

دکتر امیرحسین اسدی، استاد دانشگاه وپسکانسین مدیسن، امریکا
دکتر نصرالله اعتمادی، استاد دانشگاه ایلینوی شیکاگو، امریکا
دکتر فریدون شهیدی، استاد دانشگاه پردو، امریکا
دکتر ناصرصاحب جهرمی، استاد دانشگاه بوردو ۱، فرانسه
دکتر سیدکاظم للهی، استاد دانشگاه پاریس ۱۱، فرانسه
دکتر عبدالصمد هدایت، استاد دانشگاه ایلینوی شیکاگو، امریکا

درمتن پاسخها، صرف‌نظر ازترجمهٔ متن پاسخ دکترهدایت وویرایش مختصر، دخل وتصرفی‌نشده است. به‌امید اینکه نکات مثبت این‌آرا مورد توجه مسئولان امورآموزشی وپژوهشی ریاضیات قرار بگیرد، با هم این نظرات را می‌خوانیم.

---

۱. به‌نظر شما آیا ریاضیات فی‌نفسه مهم است، یا اهمیت‌آن هنگامی بروز می‌کندکه به عنوان ابزاری برای‌کمك به‌دیگر علوم درنظرگرفته شود؟

اسدی: مطالعهٔ تاریخ ریاضیات نشان می‌دهدکه پژوهشهای عمیق‌وبا ارزش ریاضی خواه ناخواه پس‌ازچندسال(گاهی بیش‌ازیك‌قرن)کاربردهای‌مهم یافته‌اند. بنابراین قضاوت درموردکاربرد ریاضیات درکوتاه مدت به‌گمراهی علمی منجر می‌شود.

اعتمادی : البته ریاضیات مانند سایرهنرها وعلوم فی‌نفسه مهم است، ولی لازم است که محکی برای پیشرفت واندازه‌گیری اهمیت آن وجود داشته باشد. دراین‌مورد واضح است که کاربرد آن درعلوم دیگرنقشی مهم ایفا می‌کند.

شهیدی : پیشرفت ریاضیات دست‌کم به‌همان اندازه‌که مدیون مفید بودنش است، مرهون کنجکاوی ریاضیدانهاست به‌فهم حقیقت. هیچ ریاضیدانی به‌ریاضیات به‌خاطر اهمیتش دل نبسته است.

صاحب جهرمی : به‌نظرمن ریاضیات به‌خودی‌خودمهم است: بسیاری‌ازنظریه‌هایی‌که درآغاز مجرد وبدون کاربرد به‌نظرمی‌رسیدند، مدتها بعد سرانجام مورد استفاده قرارگرفتند.

الهی : درهر زمینه‌ای به‌ویژه ریاضیات، پژوهش بدون‌انگیزه ناممکن‌است. انگیزهٔ پژوهش ریاضی می‌تواند نیاز درسایرعلوم وفنون باشد ویا ازخود ریاضیات سرچشمه بگیرد. درصورت‌نخست،اهمیت آن به‌عنوان ابزاری برای‌کمك به‌دانشهای دیگرجلوه می‌کند، ودرصورت دوم می‌توان آن را فی‌نفسه مهم تلقی‌کرد. در هر یك ازعلوم وفنون نتیجهٔ تجربیات هنگامی مورد قبول همگان قرارمی‌گیردکه بریك مدل ریاضی متکی باشد. بنابراین ریاضیات درپیشبرد این علوم سهم بسزایی دارد.

هدایت : ریاضیات هم هنراست، هم علم. به‌عنوان یك هنرمی‌توان‌آن را تاحدکمال، مجرد کرد. به‌این‌مفهوم، اهمیت آن‌را هواخواهانش‌تعیین می‌کنند. اما ریاضیات به‌عنوان‌یك علم باید با مسائل واقعی سروکار داشته باشد. بنابراین، به‌مفهوم اخیر، اهمیت‌آن را مسائلی‌که به‌کمك ریاضیات حل می‌شوند تعیین خواهندکرد.

---

۲ . باتوجه به‌فراگیرشدن کاربرد کامپیوتر درزندگی امروز،آیا فکرمی‌کنید کامپیوتردرآموزش و پژوهش فردا نقشی اساسی ایفا خواهد کرد؟

اسدی : بله، حتماً.

اعتمادی : هیچ شکی دراین مورد برای من وجود ندارد.

شهیدی : بله، اما به‌هرحال جای ریاضیدانها را نخواهدگرفت!

صاحب جهرمی : کامپیوتر به‌تنهایی مسئله‌ای را حل نمی‌کند، اما می‌تواندکارهای تکراری، خسته‌کننده، و وقت‌گیررا برعهده بگیرد. ازاین جنبه، موارد استفادهٔ‌آن بسیار است و لازم است همهٔ فراگیرندگان علوم (وحتی‌گاهی ادبیات!) باکاربردآن‌آشنا شوند.

الهی : درکشورهای پیشرفتهٔ صنعتی نفوذ کامپیوتر درتمام شئون زندگی، روزافزون و اجتناب‌ناپذیر است. آموزش وپژوهش ریاضی نیزازاین نفوذ مبرا نیستند. ازآنجاکه دربسیاری‌ازدانشگاهها رشته‌های‌کامپیوتر درکنارریاضیات به‌وجودآمده ورشدکرده‌اند، این‌دودانش‌تأثیرمتقابلی بریکدیگر دارند. به‌علاوه دانش‌کامپیوتر امروزه به‌آن درجه از پختگی رسیده است‌که بتواند درسطح نظری هم ریاضیات را به‌کمك بگیرد وحتی گاهی‌اورا به‌مبارزه بطلبد. بنابراین‌تأثیر این دانش‌فراگیر، درروشهای‌تحقیق وبرنامه‌های تحقیقاتی در ریاضیات آینده، روزافزون خواهد بود.

هدایت : چه ما دوست داشته باشیم، چه‌دوست نداشته باشیم، حقیقت این است‌که کامپیوتر بازندگی‌ما عجین‌شده‌است. اگراین واقعیت‌را بپذیریم،نفوذ آن‌را برتمامی‌فعالیتهایمان تصدیق خواهیم‌کرد. به‌ویژه،کامپیوتر از ریاضیات بهره می‌گیرد وریاضیات را بهره می‌رساند. دراین فرایند، ریاضیات گسسته ومتناهی روزبه‌روز درامر آموزش وپژوهش اهمیت بیشتری خواهند یافت.

---

۳ . به‌نظر شما عوامل مؤثر درپیشرفت یا رکود ریاضیات در کشورهای رشد یابنده، به‌ویژه ایران، چیست؟

اسدی : یك‌عامل مؤثر درپیشرفت، برنامه‌ریزی درازمدت برای توسعهٔ رشته‌های فعال و اساسی ریاضیات، هم ازنظرتحقیق وهم‌ازنظرآموزش، است. به‌ویژه، باید توقع ثمرهٔ کوتاه مدت راکنارگذاشت.

اعتمادی : تنها عاملی‌که فکرمی‌کنم درشرایط فعلی باعث پیشرفت ریاضیات‌کشور است، همکاری ریاضیدانان درایران ودرصورت امکان‌کمك‌گرفتن ازریاضیدانان ایرانی‌مقیم خارج‌است. خلاف آن رکود درپی‌خواهدداشت. درزمینه‌های‌شخصی‌باید حس‌حسادت را با رقابت جایگزین‌کنیم.

شهیدی : عامل مؤثر در رکود، اهمیت ندادن جامعه به‌ارزش دانشمندان است‌که منجر به پایین‌آمدن‌کیفیت فعالیتهای آنان‌می‌شود.

صاحب جهرمی : متأسفانه درمدت اقامت‌کوتاهم نتوانستم دقیقاً با وضعیت ریاضیات ایران آشناشوم.اما آنچه‌مرا تحت‌تأثیرقرارداد شوق‌وعلاقهٔ بیش‌ازحددانشجویان به‌یادگیری بود، واین می‌تواند عاملی بزرگ برای پیشرفت ایران دراین علم بشود.

الهی : به‌دلیل عدم‌آشنایی کامل با وضعیت ریاضیات درسایرکشورهای رشد یابنده، نظری دربارهٔ‌آنها نمی‌توانم بدهم. درموردکشورخودمان ایران‌گمان‌می‌کنم ریاضیات،درمقام مقایسه‌باسایرعلوم وفنون،ازوضع‌خوبی‌برخورداراست.عوامل‌مؤثردرپیشبرد ریاضیات هم‌مانند عوامل پیشبرد سایرعلوم است: پیدایش‌انگیزهٔ یادگیری وپژوهش، به‌ویژه در جوانان. به‌وجودآوردن‌انگیزه هم‌به‌عوامل‌گوناگون‌اجتماعی،سیاسی،و وجود برنامه‌های درازمدت وابسته است‌که نیاز به‌بحث مفصل دارد.

هدایت : رکود ریاضیات دریك‌کشورمایهٔ تأسف بسیار است. پرداختن به‌ریاضیات، نسبت به‌هریك‌ازدیگرعلوم پایه،کم خرجتراست. فقدان مدیریت لایق، دلیل اصلی یك چنین وضع راکدی است.

---

۴ . باتوجه به‌کمبود نیروی متخصص ریاضی درایران، پیشنهادهای عملی‌شما برای رفع این نقیصه چیست؟

اسدی : یك راه تماس بیشتر با دنیای خارج است، چه ازنظرمسافرت ریاضیدانان داخلی وشرکت آنها درکنفرانسهای‌خارج ازکشور، وچه‌ازنظردعوت‌ازاستادان ریاضی‌خارج

برای برگزاری کنفرانسها وکلاسهای فشرده.

اعتمادی : پیشنهاد من، تربیت ریاضیدان "خوب" برای همهٔ سطوح است. ریاضیدانان ایرانی درحال حاضر نباید به‌هیچ وجه کیفیت را فدای کمیت کنند.

شهیدی : نظرمن این است که امکان ادامهٔ تحصیل برای دانشجویان دکترای دانشگاههای ایران، تنها به‌برطرف کردن کمبودهای کادردانشگاهی اثرخواهد داشت، نه دربالا بردن کیفیت تحقیق وحتی تدریس دراین دانشگاهها.

صاحب جهرمی : باتوجه به‌تأسیس دورهٔ دکتری درایران، فکرمی‌کنم که ما ایرانیان‌بتوانیم تاچندسال دیگراین‌کمبود را رفع کنیم. همچنین لازم‌است‌تماس‌خودرا بادانشگاههای معتبردنیا زیادکنیم.

للهی : نخست اذعان می‌کنم که همواره پیشنهاد دادن صدها بار از اجرای پیشنهاد ساده‌تر است. به‌نظرمن رفع کمبود نیروهای متخصص درهمهٔ زمینه‌ها ازجمله ریاضیات، باید درسطوح گوناگون وبا برنامه‌ریزی دقیق وپی‌گیری مداوم این برنامه‌ها انجام پذیرد. درکوتاه مدت، باید برای‌نیروهای‌جوان ایرانی‌که بیرون مرزها به‌دلایل مختلف مانده وتخصصی به‌دست‌آورده‌اند، امکانات بازگشت فراهم‌کرد. به‌وجودآوردن امکانات و تسهیلات‌پژوهش دردانشگاهها،وتضمین‌تماس‌مستمر آنها بادانشگاهها ومراکزبین‌المللی پژوهشی، می‌تواندکمك شایانی درراه‌ترغیب بازگشت این‌افراد به‌وطن باشد. درمیان مدت، باید به‌تدوین وتجدیدنظردر برنامه‌ها وکتابهای درسی ریاضی‌سطوح راهنمایی و دبیرستان پرداخت. هرکتاب درسی باید باکتاب راهنمای تدریس همراه باشد، وپیش ازآنکه تدریس‌کتاب آغازشود، باید دبیران‌را برای این‌کارآماده‌کرد. منظورازکتاب راهنمای تدریس تنها شرح‌کتاب درسی نیست، بلکه تعمیق مطالب آن‌کتاب نیزهست. چنین‌کتابی باید دردسترس دبیرقرار بگیرد، نه‌آنکه تنها رئیس اداره، وبازرسین از وجودآن‌آگاه باشند. در درازمدت، باید روش تدریس به‌طورکلی، وروش تدریس ریاضی‌به‌طور اخص، مورد تجدیدنظرقرارگیرد. جوانان ما وقت قابل‌ملاحظه‌ای برای یادگیری ریاضیات صرف می‌کنند، واین‌کاررا هم با شوروعلاقه انجام می‌دهند (چنین علاقه‌ای را درجوانهای‌غربی‌ازجمله فرانسه سراغ ندارم)، اما بیشروقت‌آنها صرف حفظ‌کردن‌مطالب وراه حلها می‌شود، ونیروی‌ابتکار درآنهاکم به‌وجودمی‌آید. متأسفانه آموزگاران‌ودبیران‌ما معلوماتشان دربسیاری‌موارد به‌آنچه درکتاب درسی‌است، خلاصه می‌شود، و یقیناً بسیاری ازآنها جزکتابهایی‌که تدریس می‌کنند، وچندکتاب‌که یادگار دوران‌تحصیل آنهاست،کتاب دیگری درخانه ندارند وسالی یك‌بارهم به‌کتابخانه‌ها سر نمی‌زنند. از نظرمن، نیروی متخصص مترادف با نیروی مبتکراست، ومادامی‌که ابتکار درجوانان تقویت نشود،کمبود متخصص همچنان ادامه خواهد داشت.

هدایت : به‌ریاضیات بها دهید. چند راه مختلف برای‌این‌کاررا مثال‌می‌آورم: (۱) هرسال ۲یا۳ روز را به "روززریاضیات دبیرستانی" اختصاص دهید. دانش‌آموزان دبیرستان را به‌دانشگاه دعوت‌کنید. دبیران‌را هم دعوت‌کنید. سخنرانیهای‌جالبی توسط بهترین

استادان ریاضی برای‌آنها ترتیب دهید. موضوع این سخنرانیها می‌تواند مباحثی در ریاضیات گسسته،گرافها، آمار، احتمالات، هندسه، و... باشد. برای‌این برنامه‌ها تبلیغات وسیع انجام دهید. تا می‌توانید برای ریاضیات مایه بگذارید. (۲) تعدادی ازبهترین دانشجویان دورهٔ‌کارشناسی ارشد خودرا برای ادامهٔ تحصیل ریاضیات به‌کشورهای خارج اعزام‌کنید.تسهیلاتی برای معافیت موقت‌آنها ازخدمت وظیفه فراهم‌کنید. (۳) تعدادی از بهترین دانشجویان خود را برای‌گرفتن دکتری در داخل نگه دارید. باید از این دانشجویان حمایت‌کافی به‌عمل‌آورید. مادامی‌که دکترهای ریاضی را ازخارج واردکنید، ازنظر ریاضی وابسته خواهید بود.

---

۵ . یکی از راههای مرتفع ساختن مشکل کمبود ریاضیدان، فراخواندن دانش‌آموزان و دانشجویان به‌تحصیل ریاضیات است. چه‌کنیم تا دانش‌آموزان و دانشجویان‌را به‌این کار تشویق کرده باشیم؟

اسدی : پیشنهادهای من چنین‌اند: (۱) درسطح دبیرستان با چاپ نشریات خوب وجدی ریاضی(مانند"یکان"سابق) دانش‌آموزان‌را تشویق‌کنیم. (۲) مسابقات ریاضی باجوایز ارزنده ترتیب دهیم، واستعدادهای درخشان ریاضی‌را جداً تشویق‌کنیم. (۳) درجهت رفاه زندگی ریاضیدانان داخل‌کشورگام برداریم وبا اهدای جوایزمناسب از دبیران خوب ریاضی قدردانی‌کنیم.

اعتمادی : درشرایط فعلی تنها راهی‌که به‌نظرمی‌رسدآن است‌که مانند سایرمسائل‌تجارتی، ریاضیات را به‌آنها بقبولانیم. "تبلیغ" ریاضیات به‌صورت انجام مسابقات شفاهی یا کتبی درمطبوعات وصدا وسیما، یکی از راههایی است‌که درشرایط فعلی امکان‌پذیر است وبدون شك، مؤثرخواهد بود.

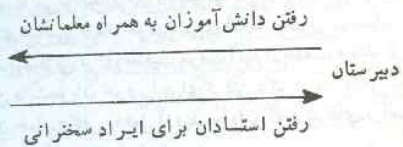
شهیدی : نشان بدهیدکه تحصیل ریاضیات، نزد جامعه مطلوب وبا پاداش است. تسهیلات بیشتری برای استادان دانشگاهها فراهم‌کنید تابه‌کارشان علاقه‌نشان دهند. هیچ‌چیزی به‌اندازهٔ اعتماد به‌نفس وعلاقهٔ استاد به‌کارش نمی‌تواند روی دانشجو اثر بگذارد.

صاحب جهرمی : ازجمله راهها، اهدای جایزه، تسهیلات برای ادامهٔ تحصیل، برگزاری کنفرانسها وسمینارهای ریاضی،و ردو بدل‌تجربیات پژوهشی درداخل وخارج‌کشور، است.

للهی : پاسخ به‌این پرسش برایم بسیار دشوار است.کتاب خوب، معلم خوب، وتشویق دانش‌آموزان و دانشجویان وصدها عامل دیگر است‌که دانشجویان مبرز را به‌سوی ریاضیات می‌کشاند. شخصاً مسابقه وایجاد رقابت‌را چندان مؤثرنمی‌دانم، اما این‌تنها یك‌عقیدهٔ شخصی است.

هدایت : باردیگر به "روز ریاضیات دبیرستانی" درپاسخ به‌پرسش ۴ ارجاع می‌دهم. همچنین باید بهترین استادان ریاضی‌را برای ایراد سخنرانیهای‌جالب ومهیج دربارهٔ ریاضیات به‌دبیرستانها بفرستید. این برنامه را باید به‌گونه‌ای رسمی سازمان داد وبه

شیوه‌ای منظم اجرا کرد. می‌توان آن را برنامه‌ای سالانه درنظر گرفت. نظر کلی خود را دربارهٔ "روز ریاضیات دبیرستانی" درطرح زیر خلاصه می‌کنم:



۶. برای ثمربخش بودن یک دورهٔ کارشناسی ارشد یا دکتری ریاضی چه روشهایی می‌شناسید که در کوتاه‌مدت مؤثر باشد؟ به‌نظر شما حتی با تأسیس این دوره‌ها در ایران، آیا باز هم لازم است دانشجویان با استعداد را به‌خارج اعزام کنیم؟

اسدی : پاسخ به‌پرسش اول مشکل است و احتیاج به‌مطالعهٔ وضع کنونی ریاضیات در ایران دارد و اطلاعات من در این مورد ناقص است. پاسخ به‌پرسش دوم مثبت است، زیرا سالها وقت لازم است که برنامهٔ دکتری ایران بتواند با کشورهای بزرگ قابل مقایسه شود.

اعتمادی : در این مورد لازم است بدانیم هدف ما از پرورش ریاضیدان در ایران چیست تا بشود در راه رسیدن به این هدف تصمیم گرفت. به‌نظر من هیچ چیز بهتر از این نیست که از تسهیلات خارج از کشور استفاده کنیم و دانشجویان مستعد را به‌خارج بفرستیم، اما باید تعهد جدی گرفت که حتماً به‌کشور برگردند.

شهیدی : هیچ کار اساسی‌ای در کوتاه مدت نمی‌تواند انجام شود. به‌پاسخ به‌پرسش ۴ رجوع کنید (من اصولاً زیاد معتقد به‌دورهٔ دکتری در شرایط موجود نیستم، مگر برای برطرف کردن کمبود کادر آموزشی دانشگاهها).

صاحب جهرمی : دادن مدرک دکتری بدون ایجاد محیطهای یادگیری و تبادل تجربیات، دردی را دوا نخواهد کرد. پاسخ من به‌پرسش دوم آری است، زیرا اعزام دانشجویان به‌خارج، حتی برای مدت کوتاه، سبب تماس و پختگی آنها، و آشنا شدنشان به‌تازه‌های این علم می‌شود.

للهی : برای کار علمی به‌این اهمیت، روش کوتاه‌مدتی نمی‌شناسم. آنچه به‌آن معتقدم این است که اگر سنگ بنای این کار بدگذاشته شود، و در دوره‌های اول فارغ التحصیل در سطح بین‌المللی بیرون ندهد، این پایین بودن کیفیت همواره ادامه خواهد داشت، زیرا همین افراد باید مدرسان و محققان آینده باشند. حتی با تأسیس این دوره‌ها نیز باید دانشجو به خارج فرستاد؛ آشنایی با محیطهای علمی دنیا و استفاده از تجربیات چند صد سالهٔ آنها ضروری ندارد. به‌نظر من باید وسیله‌ای فراهم شود که دانشجویان دورهٔ دکتری بتوانند بخشی از پژوهش خود را درخارج از کشور و در دانشگاههای خوب به‌انجام برسانند. دانشگاهها می‌توانند در چارچوب قراردادهای فرهنگی با دانشگاههای معتبر در تماس

باشند. شکی نیست که این امر نیاز به‌برنامه‌ریزی در سطح بالای دولتی دارد.

هدایت : باید بهترین استادان راهنما را به‌کار در دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری گماشت. این استادان باید پیش از هر چیز، پژوهشگر خوبی باشند، زیرا در غیر این صورت نمی‌توانند مباحث جالبی برای تحقیق فراهم کنند. استاد راهنمایی که محقق خوبی نباشد، ممکن است موضوعی را برای پژوهش به‌دانشجو محول کند که قبلاً حل شده است. این مشکلات کار تحقیق را به‌تأخیر می‌اندازد و شیرازهٔ برنامه را از هم می‌پاشد. حتی با تأسیس بهترین دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری، باید دانشجویان را برای تحصیل به‌خارج فرستاد. امروزه نمی‌توان خود کفا شد. هیچ کس، حتی بهترین دانشگاهها در پیشرفته‌ترین کشورها، نمی‌تواند مستغنی از دیگران باشد.

۷. از وضع پژوهشهای ریاضی در ایران تا چه اندازه خبردارید؟ درباب تأسیس پژوهشکدهٔ ریاضیات در ایران و به‌طور کلی اشاعهٔ فرهنگ پژوهش و تحقیق در بین استادان و دانشجویان نظرتان چیست؟

اسدی : اطلاع زیادی ندارم. تأسیس پژوهشکده‌ها و برنامهٔ منظم، با مشورت و کمک متخصصان مربوطه، امری حیاتی و اجتناب‌ناپذیر است.

اعتمادی : در این مورد به‌اندازهٔ کافی اطلاعات لازم را در اختیار ندارم که نظری بیان کنم.

شهیدی : پژوهشهای ریاضی در ایران متأسفانه از جریان اصلی تحقیقات ریاضی در دنیا خیلی دور است. این برای جامعهٔ ریاضی ایران مهم است که فرق ریاضیات فعال و غیر فعال را بشناسد.

صاحب جهرمی : تنها آشنایی من با این وضع خلاصه می‌شود به‌چند نشریه که در اختیارم قرار گرفت. یک نگاه کوتاه به‌این نشریه [جنگ ریاضی دانشجو] موجب مسرت من شد.

للهی : تا اندازه‌ای از این وضع آگاهم. خودم در گذشته در تدوین اساسنامه‌ای برای پژوهشکدهٔ ریاضیات شرکت داشته‌ام و وجود چنین نهادی را مفید می‌دانم. در کنار این پژوهشکده باید یک مرکز اسناد ریاضی، و یک نشریهٔ ریاضی بین‌المللی (به‌زبان انگلیسی) نیز دایر گردد.

هدایت : اطلاع بسیار کمی دارم، به‌جز تیم پژوهشی فعال به‌سرپرستی دکتر غلامرضا برادران خسروشاهی. تأسیس مراکز تحقیقاتی ریاضی کار جالبی است، و هرچه زودتر این کار انجام شود بهتر است. یک چنین مرکزی می‌تواند "کعبهٔ" ریاضیات باشد.

۸. به‌عنوان یک ریاضیدان ایرانی چگونه حاضرید وظیفهٔ خود را در قبال پیشبرد ریاضیات کشور خود انجام دهید؟ در چه شرایطی مایل به‌انجام فعالیتهای آموزشی-پژوهشی در ایران هستید؟

اسدی : این سؤال خوب طرح نشده؛ بنابراین جواب خوبی هم نمی‌توان برای آن پیدا کرد [!].

اعتمادی : حاضرم تا موقعی که درخارج هستم، به‌وسیلهٔ مکاتبه وفرستادن مقالات خودم و دیگران، درصورت درخواست، کمك کنم. همچنین‌مایلم درآوردن دانشجویان‌ایرانی و مستقر کردن آنها همکاری کنم. در تابستان واوقات تعطیل‌هم می‌توانم درصورت‌تمایل با قرار قبلی به‌ایران بیایم. ونیز می‌توانم برای آمدن ریاضیدانان ایرانی بـه‌اینجا برای فرصت مطالعاتی کمك کنم.

شهیدی : بهترین کمکی که‌ریاضیدانهای‌ایرانی که دردنیا شناخته شده‌اند می‌توانند بکنند این است که بین‌ریاضیدانان‌ایرانی وریاضیات‌دنیا تماس برقرار کنند. این کارمی‌تواند ازطریق شرکت درکنفرانسهای داخل‌کشور یا دادن درسهای فشردهٔ‌کوتاه مدت انجام بگیرد.

صاحب جهرمی : با وجود اینکه بـه‌علل خانوادگی درخارج سکونت دارم، حاضرم تاحد امکان باجمعیتهای ریاضی، ازطریق‌مکاتبه یاشرکت درکنفرانس یاتدریس دردوره‌های کوتاه مدت، همکاری کنم.

للهی گمان نمی‌کنم درمدت ۱۳ سالی‌که قبل وبعداز انقلاب دردانشگاه تهران به‌کارمشغول بوده‌ام، از ادای وظیفهٔ خود برای پیشبرد ریاضیات‌کشور سر باز زده باشم. چون به دلایل خانوادگی فعلاً باید در فرانسه باشم، باز هم با برنامه‌های از پیش تعیین شده حاضرم دررشتهٔ تخصصی کنونیم که نظریهٔ ریاضی‌کامپیوتر است همکاری داشته‌باشم.

هدایت : (۱) کمك به‌دانشجویان ایرانی برای‌آمدن به‌اینجا برای ادامهٔ تحصیل. (۲) کمك بـه‌استادان ایرانی برای تدریس موقت وگرفتن بورسهـای تحقیقاتی درامریکا. (۳) عرضهٔ مجلات تخصصی تحت ویراستاریم به‌دانشگاههای ایران. (۴) مسافرت به‌ایران وبرگزاری دوره‌های تحقیقاتی کوتاه مدت.

در اینجا مـایلم پیشنهادی به‌شما بدهم: منصبی با عنوان "استادملی" تأسیس کنید. چنداستاد ایرانی ممتاز را به‌این‌عنوان افتخاری منصوب کنید. تحت این عنوان: (۱) استادملی‌بایدبرای مشاوره وهمفکری‌درامورتخصصیش‌همواره حاضر باشد. (۲) گذرنامهٔ استادملی معرف اوخواهد بود، به‌این مفهوم کـه او می‌تواند بـدون مشکل چندانی به ایران بیاید. (۳) استادملی درمدت‌اقامت‌درایران، هزینهٔ‌کافی‌برای گذران زندگی را از دولت دریافت خواهدکرد. درمدت اقامتش درایران، او اقدام به‌برگزاری سخنرانی، سمینار، و...، خواهد نمود.

---

۹ . بیستمین‌کنفرانس ریاضی‌کشور راچگونه ارزیابی می‌کنید، وبه‌طورکلی نظرشما درباب ضرورت و فایدهٔ این نوع کنفرانسها چیست؟

اسدی : تشکیل این‌گونه‌کنفرانسها برای پیشرفت وبقای‌تحقیق درریاضیات این‌کشورامری لازم است.

اعتمادی : ———

شهیدی : بزرگترین فایدهٔ‌کنفرانس ریاضی ارتباطی است‌که جامعهٔ ریاضی ایران می‌تواند ازطریق ریاضیدانهای خارجی، وایرانی مقیم خارج، با دنیای ریاضیات برقرارکند.

حتی شنیدن یا احساس‌کردن مطالبی‌کـه با استانداردهای بالای دنیای خارج مطابقت دارند، درافزایش قدرت تشخیص ریاضیات خوب اثرفراوان خواهد داشت.

صاحب جهرمی : خوب بود. تماس وآشنایی دانشجویان‌کشورمان بـا مباحث ونتیجه‌های تازه یکی‌ازمهمترین فواید برگزاری‌کنفرانس است.

للهی : به‌نظرمن شور وعلاقهٔ ظاهری زیادی دیده می‌شد، ولی متأسفانه شرکت‌کنندگان از ناهمگنی بسیار برخوردار بودند. بهترین دلیل این مدعا این است‌که سئوالات علمی بسیارکمی ازسخنرانان می‌شد. بهتراست این‌گونه‌کنفرانسها درسطح محدودی‌که تنها خاص دانشگاهیان ودانشجویـان سالهای‌آخر وفوق لیسانس ودکتری بـاشد برگزار شود. دبیران ریاضی باید انجمن ویژهٔ خودشان را داشته باشند وخودکنفرانسهایی از همین قبیل درسطح آموزش ریاضیات، ریاضیات متوسطه وکمی بالاتر، تشکیل دهند. گمان نمی‌کنم شرکت بسیاری ازآنهـا درکنفرانس بیستم ارمغـانی علمی برای‌آنها آورده باشد.

هدایت : این‌کنفرانسها بسیار مفیـد و درواقع ضروری‌اند. ارتباط رسمی، نیمه رسمی، و غیررسمی میان ریاضیدانان برای سلامت ریـاضیات ایران ضروری است. بیستمین کنفرانس خیلی جالب وسودمند بود، اما می‌توان‌آن را به‌گونه‌ای بهتر نیزسازمـان داد.

---

۱۰ . جنگ ریاضی‌دانشجو را چگونه دیدید؟ چه‌رهنمودهایی برای بهبودکیفی وکمی‌مجله دارید؟

اسدی : زحمات شما قـابل تقدیر است. می‌توانید یك‌بخش برای مسائل جالب وحل‌آنها دایرکنید. مثلاً مسائل مسابقـات "پاتنم" را می‌توانید ازسالهـای خیلی قبل (حدود ۱۹۶۰ یـا حتی پیشتراز آن) درشماره‌های مختلف بنویسید وجواب آنها را سه‌ماه بعد چاپ کنید. منابع دیگرنیز وجود دارند. این مسائـل را می‌توانید از مجلهٔ "ماتنلی" به‌دست آورید.

اعتمادی : مجلهٔ خوبی است، ولی نمی‌دانم چند درصد مردم بـاآن‌آشنایی دارند. هرچه تعدادکسانی که بـه‌ریاضیات برخورد می‌کنند بیشتر باشد، احتمال پیداکردن استعداد-های ریاضی بیشترخواهد بود.

شهیدی : مجلهٔ خوبی است، موفقیت شما را خواستارم.

صاحب جهرمی : دراین مدت‌کوتاه نتوانستم نشریـه را بادقت بخوانم، اما می‌توانم نظرم را دراین مورد بگویم: جنگ ریاضی دانشجومطـالب باب روز را بـه شکل زیبایی عرضه‌کرده است. بـه‌نظرمن دانشجویان‌کشورمان می‌توانند مسائل پژوهشی را نیزحل کنند واز این نظرفکرمی‌کنم‌که مناسب است درهرشماره (درصورت امکان) یك مقالهٔ پژوهشی نیز به‌طورگسترده یا فشرده به‌آن اضافه شود.

للهی : تهیهٔ یك‌نشریه به‌زبان فارسی درهرسطحی‌که باشدکاری است بس دشوار، وازاینکه

جنگ ریاضی دانشجو تاکنون موفق شده است چند شمارهٔ پیاپی منتشر کند، باید به دست‌اندرکارانش آفرین گفت. برای بهبود کیفی آن معتقدم که نباید بیش‌از اندازه به ترجمه اهمیت داد. مادامی که تنها به‌ترجمه بپردازیم، ابتکار به‌وجود نخواهدآمد. موضوعات سادهٔ تحقیقاتی، گردآوری، مقایسهٔ‌کارهای اشخاص مختلف با یکدیگر وکارهای امثال آن را شخصاً به‌ترجمه ترجیح می‌دهم. مثلاً ما هنوز به‌طوردقیق ومستدل نمی‌دانیم که ریاضیدانان ایرانی قبل وبعد از اسلام چه ایده‌های بکری ارائه داده‌اند. اروپاییان همه‌چیز را به‌یونانیان وخود نسبت می‌دهند. می‌توان افکار ارائه شده در آن زمان را درقالب واژه‌ها وموضوعات کنونی بیان‌کرد و با ارائهٔ مدرك و روش علمی موردقبول همگان، ریاضیدانان ایرانی‌را شناساند. چنین‌کاری یك‌کار تحقیقاتی ساده‌است وازعهدهٔ یك‌دانشجوی دورهٔ‌کارشناسی هم ساخته‌است. ازنظر کیفیت چاپ گرچه روی هم رفته خوب است، با وسایل امروزی بهتر ازاین می‌توان چاپ‌کرد. برای آگاهی دوسال است که شرکت اپل یك کامپیوتر مکینتاش عربی همراه با سخت‌افزارهای مربوطه وارد بازار کرده‌است. بااین ماشین ونرم‌افزارهای آن می‌توان به‌وضع ساده وبسیار زیبایی متونی راکه درآنها فارسی، لاتین، وهرنوع شکلی هست تهیه وچاپ کرد. بهای این دستگاه همراه با دستگاه چاپ لیزری آن کمتراز ۶۰ هزارفرانك‌است. کار باآن چنان ساده است که حتی هرمنشی معمولی می‌تواند درعرض یك‌روزآن را یاد بگیرد.

هدایت : کاری بسیارعالی است. ضمناً باید مقالاتی نیز درزمینهٔ آمار واحتمالات به‌آن بیفزایید.

آیین‌نامهٔ‌مسابقهٔ‌ریاضی کشور

امیراکبری مجدآبادنو

حدود ساعت ۵ بامداد در محل برگزاری کنفرانس سالانهٔ ریاضی کشور سکوت و آرامش بر همه‌جا حکمفرماست. باوجود این درگوشه‌ای از این‌محل جنب‌وجوشی به‌چشم می‌خورد. یك ماشین درچندنوبت افرادی را درمقابل یکی‌ازساختمانها پیاده می‌کند. به‌نظر می‌رسد که این افراد منتظر ورود شخصی هستند. سرانجام مردی کیف به دست به‌آنها می‌پیوندد، پیشاپیش همه به‌راه می‌افتد، و بقیه را به یکی از اتاقهای ساختمان می‌برد. در اتاق افراد به سه دسته تقسیم می‌شوند و هر گروه دور میزی جمع می‌شوند. مرد کیف به‌دست از کیف خود تعدادی پاکت نامهٔ سربسته را درمی‌آورد و بین سه گروه تقسیم می‌کند . . . حدود ساعت ۸ صبح دانشجویان در جاهای خودمستقر شده‌اند و مسابقهٔ‌ریاضی دانشجویی کشور آغاز می‌شود.

منظرهٔ فوق‌تصویری از رویدادی است که هر ساله در سومین روز کنفرانس سالانهٔ ریاضی کشور اتفاق می‌افتد. در شماره‌های گذشتهٔ جنگ از مسابقات ریاضی در جهان و ایران و مشکلات برگزاری مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور سخن گفتیم[۲۰۱] و خاطرنشان کردیم که مسابقهٔ ریاضی دانشجویی نیازمند برنامه‌ریزی منسجم و منظمتری است. خوشبختانه باخبرشدیم که قرار است‌شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران تغییراتی در نحوهٔ برگزاری مسابقهٔ ریاضی سال ۱۳۷۱ بدهد و همچنین آیین‌نامهٔ جدیدی را برای مسابقهٔ ریاضی کشور تهیه نموده است. به‌همین خاطر برآن شدیم که نگاهی به آیین‌نامهٔ پیشنهادی جدید بیفکنیم ونکاتی‌را دراین‌باب گوشزد کنیم. اما قبل از هر چیز، به منظور آشنایی هر چه بیشتر با نقاط ضعف مسابقهٔ ریاضی، نظری به‌مسائل دوره‌های اخیر مسابقه (۱۳۷۰–۱۳۶۳) بیندازیم.

مسائل مسابقه

مطمئناً کیفیت مسائل یك مسابقه را نمی‌توان

۱. "نگاهی به‌مسابقات ریاضی‌درجهان وایران،" جنگ ریاضی دانشجو، ۱۳۶۶، ۱، ۱۲۸–۱۳۵.

۲. "گزارشی از بیستمین کنفرانس ریاضی،" جنگ ریاضی دانشجو، ۱۳۶۸، ۴، ۱۷۹–۱۸۴.

جدا از فرایند طرح این مسائل دانست. با توجه به روش انتخاب مسائل که در ابتدای مقاله توضیح داده شد، واضح است که نمی‌توان انتظار داشت مسائل مسابقه از کیفیت و هماهنگی خوبی برخوردار باشند. سه نکتهٔ بارز در مسائل مسابقهٔ ریاضی ایران را می‌توان چنین خلاصه کرد: (الف) وجود اغلاط (چاپی) در صورت مسائل؛ (ب) درسی بودن بسیاری از مسائل؛ (پ) نامتناسب بودن بسیاری از مسائل. در ادامه سعی می‌کنیم با ارائهٔ مثالهایی به توضیح موارد فوق بپردازیم. درهر مورد به ذکر یك یا دو مثال اکتفا می‌کنیم، چرا که مشت نمونهٔ خروار است.

الف) وجود اغلاط (چاپی) در صورت مسائل. به‌عنوان مثالی از این مورد مسئلهٔ زیر را درنظر بگیرید:

فرض کنید A یك ماتریس 3×3 وارون‌پذیر روی میدان F باشد به‌طوری‌که $\det A=1$ و $tr(A)=tr(A^{-1})$. ثابت کنید $A^3=I$. (امتحان جبر، مسابقهٔ ۱۳۶۷)

به سادگی با در نظر گرفتن ماتریس

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

می‌توان مشاهده کرد که حکم ادعاشده درصورت مسئله غلط است؛ در واقع صحیح آن است که فرض کنیم

$$tr(A)=tr(A^{-1})=0$$

وجود اغلاطی از این قبیل نتیجهٔ اجتناب‌ناپذیر طرح و تکثیر سؤالات در صبح روز امتحان است که با عجله و شتابزدگی انجام می‌شود. برای دیدن نمونه‌های دیگری از اشتباههایی درصورت مسائل، می‌توانید به مسئلهٔ ۴ ازمسائل جبر سال ۱۳۶۴، مسئلهٔ ۳ از مسائل عمومی سال ۱۳۶۵ و مسئلهٔ ۳ از مسائل عمومی سال ۱۳۶۹ مراجعه کنید.

ب) درسی بودن بسیاری از مسائل. منظور ما از مسئلهٔ درسی مسئله‌ای است که در ارتباط بسیار نزدیك با دروس دانشجویان است، و دانشجو در کتاب درسی، امتحان، و کتابهای درسی مشابه به این مسائل برخورد می‌کند. به‌عنوان مثال هر دانشجوی درس جبر ۲ باید مسئلهٔ زیر را دیده باشد:

فرض کنید G یك گروه متناهی و p کوچکترین عدد اولی باشد که مرتبهٔ G را عاد می‌کند. ثابت کنید که هر زیرگروه با شاخص p از G زیرگروه نرمال G است (امتحان جبر، مسابقهٔ ۱۳۶۴).

همچنین هر دانشجوی آشنا با مقدمات نظریهٔ گالوا مسئلهٔ زیر را دیده است:

ثابت کنید که A، میدان اعداد جبری، یك توسیع متناهی Q نیست (امتحان جبر، مسابقهٔ ۱۳۶۶).

این گونه مسائل تنها معلومات عمومی دانشجویان را می‌آزمایند. شاید طرح این گونه مسائل برای امتحان ورودی دورهٔ کارشناسی ارشد مناسب باشد، ولی برای مسابقهٔ ریاضی که در

آن علاوه بر معلومات دانشجو، قوهٔ ابتکار و خلاقیت ریاضی دانشجوهم باید محك زده‌شود، چنین نیست. یك مسئلهٔ مسابقه‌ای، (مثلاً) این‌چنین است[1]:

گزارهٔ زیر را ثابت یا ردکنید: اگر F یك مجموعهٔ متناهی با دو یا تعداد بیشتری عضو باشد، یك عمل دوتایی $*$ روی F وجوددارد به‌طوری‌که برای هر x و y و z در F،

(i) $x*y=x*z \Rightarrow y=z$

(ii) $x*(y*z)\neq(x*y)*z$.

پ) نامتناسب بودن بسیاری از مسائل. مسائل ریاضی در درجات متفاوتی از دشواری قرار دارند. برای حل بعضی از مسائل باید ساعتها فکر کرد درحالی‌که بعضی دیگر با اندکی تفکر قابل حل‌اند. واضح است که نوع این مسائل را باید با توجه به اهداف مسابقه انتخاب کرد. مثلاً در المپیاد بین‌المللی ریاضیات مسائلی مبارزطلب مطرح می‌شود که با توجه به مشکل بودن مسائل برای هرمسئله ۱٫۵ ساعت وقت درنظر گرفته می‌شود و مسابقه در دو روز متوالی هر روز ۴٫۵ ساعت (جمعاً ۶ مسئله) برگزار می‌شود. واضح است که این نوع مسائل در مسابقه‌ای که برای پاسخگویی به‌تمامی سؤالاتش ۱ ساعت وقت درنظر گرفته شده است، جایی ندارند. اما به‌خصوص در دوره‌های اخیر و با رونق گرفتن مسابقات ریاضی دانش‌آموزی، شاهد طرح این‌گونه مسائل در بخش عمومی مسابقهٔ ریاضی بوده‌ایم. به‌عنوان نمونه:

مجموعهٔ n عضوی S مفروض است. خانوادهٔ $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ شامل n زیرمجموعهٔ متمایز از S را درنظر می‌گیریم. نشان دهید که یك عضو x از S وجود دارد به‌طوری که مجموعه‌های $A_1\cup\{x\}, A_2\cup\{x\},\cdots,A_n\cup\{x\}$ متمایز باشند (امتحان عمومی، مسابقهٔ ۱۳۶۹).

آن‌طور که شنیده‌ایم هیچ‌یك از شرکت‌کنندگان نتوانستند در زمان مقرر مسابقه اثباتی درست برای این مسئله بیابند. راه‌حل مقدماتی این مسئله با استفاده از برهان خلف کمی پیچیده است و به‌نظر نمی‌رسد کسی که قبلاً راه‌حل مسئله را ندیده باشد درعرض ۲۰ دقیقه بتواند آن را حل کند. گویا این مسئله حالت خاصی از قضیه‌ای منسوب به‌باندی در نظریهٔ گراف است.

نامتناسب بودن سؤالات مسابقه تنها به طرح سؤالات دشوار مربوط نمی‌شود، بلکه این سکه روی دیگری هم دارد و آن طرح سؤالاتی است با راه‌حلهایی ساده و کاملاً سرراست، مانند این مسئله:

نشان دهید برای هر ماتریس $A_{n\times n}$، ماتریس غیرصفر $B_{n\times n}$ ای وجود دارد به‌طوری‌که AB خود توان است (امتحان جبر، مسابقهٔ ۱۳۷۰).

واضح است که طرح این مسئله در یك امتحان میان‌ترم جبر خطی خالی از لطف نیست، ولی

۱. این مسئله ازمسابقهٔ پانتم سال ۱۹۸۴ است. پاسخ آن را می‌توانید در انتهای نوشته ببینید.

حضورش در مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور جای سؤال بسیار دارد.

البته نباید تصور شود که کوتاه بودن راه‌حل مسئله ملاک مذمت آن از نظر ماست. آنچه در مورد مسئلهٔ بالا گفتیم، ابتدایی و پیش پا افتاده بودن حل آن بود نه کوتاه بودنش. به‌عکس به اعتقاد ما یکی از صفات مسائل خوب مسابقات ریاضی آن است که راه‌حلشان بسیار کوتاه ولی دشوار (یا دست کم غیربدیهی) باشد.

در اینجا به آن دسته از دوستان که ممکن است هنوز این شبهه را داشته باشند که مسائل مسابقات ریاضی با صرف وقت و وسواس بسیار طرح می‌شود و گمان می‌کنند موارد ارائه‌شده در بالا مواردی است که بیشتر سلیقه‌ای است و اشتباهاتی از این قبیل امری طبیعی در برگزاری هر مسابقه است، توصیه می‌کنیم که مسئلهٔ زیر و راه‌حل حکیمانهٔ طراح آن را با دقت بخوانند و خود به‌قضاوت بنشینند:

فرض کنید $f:R\to R$ یک تابع پیوسته باشد، و به علاوه $M>0$ای وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x\in R$ و هر $y\in R$، $|f(x)-f(y)|\geqslant M|x-y|$. نشان دهید که f یک به یک و پوشاست (امتحان آنالیز، مسابقهٔ ۱۳۶۷).

حل (طراح مسئله). اگر $f(x)=f(y)$ آنگاه $M|x-y|\leqslant 0$ و چون $M>0$ پس $x=y$. یعنی f، یک به یک است. چون f، یک به یک و پیوسته است پس یکنواست و در نتیجه معکوس آن نیز پیوسته است و بنابراین $f(R)$ یک مجموعهٔ باز است. علاوه بر این $f(R)$ بسته نیز هست و چون $f(R)$ همبند است، پس $f(R)=R$.[1]

ازحق نباید گذشت که درمسابقهٔ ریاضی، به خصوص در دوره‌های اخیر، مسائل زیبا و مناسبی نیز طرح شده است. برای اینکه نمونه‌ای ازاین‌گونه مسائل را نیز دیده باشیم (البته در اینجا مشت نمونهٔ خروار نیست)، مسئلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم که یکی از مناسبترین و زیباترین مسائلی است که تاکنون درمسابقهٔ ریاضی مطرح شده است.

فرض می‌کنیم X یک مجموعهٔ n عضوی و τ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد که دارای شرایط زیر است: (i) اگر $A,B\in\tau$، آنگاه $A\cup B\in\tau$؛ (ii) اگر $A\in\tau$، آنگاه $A^c=X-A\in\tau$؛ (iii) $\emptyset\in\tau$. نشان دهید تعداد اعضای τ برابر 2^k است که $k\leqslant n$[2] (امتحان عمومی، مسابقهٔ ۱۳۶۶).

باتوجه به موارد بالا روشن می‌شود که مسابقهٔ ریاضی در شکل کنونی ازوضعیت چندان مناسبی برخوردار نیست و نیازمند تجدیدنظری اساسی در نوع سؤالات، مواد امتحانی، و شیوهٔ طرح و گزینش و تصحیح سؤالات است. حال ببینیم که آیا آیین‌نامهٔ جدید (پیشنهادی) مسابقهٔ ریاضی کشور برای غلبه برمشکلات بالا چاره‌ای اندیشیده است یا نه. در اینجا متن آیین‌نامهٔ پیشنهادی را به‌نقل ازخبرنامهٔ انجمن

۱. "مسائل مسابقهٔ دانشجویی ریاضی کشور" (شدآموزش ریاضی، ۱۳۶۷، ۱۸، ۲۸-۳۲).

۲. حل این مسئله در انتهای نوشته آمده است.

ریاضی می‌آوریم. نخست متن آیین‌نامه را به همراه یکدیگر مرور، و سپس درمورد آن چندنکته را خاطر نشان می‌کنیم.

آیین‌نامهٔ مسابقهٔ ریاضی کشور

۱. هدف. به‌منظور ایجاد علاقه به ریاضیات در دانشجویان وشناسایی استعدادهای درخشان ریاضی وایجاد رقابت علمی بین آنان وگسترش تحرک ریاضی در دانشگاهها آیین‌نامهٔ زیر تدوین می‌گردد.

۲. مواد مسابقه. مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور در زمینه‌های جبر (جبر۱، جبر۲، جبر خطی۱) و آنالیز (آنالیز۱ و آنالیز۲) برگزار خواهد شد. سؤالات در سطح برنامه‌های مصوب وزارت فرهنگ و آموزش عالی طرح خواهد شد. امتیاز کل هر دو زمینه باهم برابر ند.

۳. زمان اجرای مسابقه. زمان اجرای مسابقه درطول برگزاری کنفرانس سالانهٔ ریاضی کشور می‌باشد.

۴. مسئول مسابقه. این مسابقه دارای یک مسئول است که به‌وسیلهٔ شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران برای مدت دو سال منصوب می‌شود.

۵. شرکت کنندگان درمسابقه. گروه ریاضی هر دانشگاه که تحت پوشش وزارت فرهنگ و آموزش عالی باشد می‌تواند حداکثر ۵ نفر از دانشجویان خود را به‌عنوان تیم شرکت‌کنندهٔ آن دانشگاه درمسابقه حداقل یک‌ماه‌قبل از برگزاری کنفرانس به‌مسئول مسابقه معرفی نماید.

۶. کمیتهٔ مسابقه. مسئول مسابقه ۶ نفر از اعضای هیأت علمی دانشگاههای کشور را به عنوان اعضای کمیتهٔ مسابقه به‌شورای اجرایی انجمن ریاضی معرفی می‌کند که درصورت تصویب، کمیته به‌مدت دوسال فعالیت می‌نماید. لذا اعضای کمیتهٔ مسابقه ۷ نفرند که یکی از آنها مسئول مسابقه، ۳ نفر متخصص جبر و ۳ نفر متخصص در آنالیز می‌باشد.

۷. وظایف کمیتهٔ مسابقه. کمیتهٔ مسابقه زیر نظر مسئول مسابقه دارای وظایف زیر است:

الف) تصمیم‌گیری درمورد نحوهٔ انجام مسابقه و احیاناً تغییر درمحتوای آن.

ب) نظارت بر انجام مراحل مختلف مسابقه.

ج) تهیهٔ بانک سؤال و کمک گرفتن از سایر همکاران جهت این امر.

د) تنظیم سؤالهای هر مسابقه، تصحیح و اعلام نتایج تا قبل از اتمام کنفرانس.

ه) برنامه‌ریزی جهت انجام امور درزمان مناسب برای برگزاری صحیح مسابقات.

و) سایر مواردی که از طرف شورای اجرایی به‌این کمیته محول می‌شود.

۸. رده‌بندی. براساس مجموع امتیازات از ۲ مادهٔ امتحانی رتبهٔ شرکت کنندگان درمسابقه مشخص می‌شود. همچنین براساس مجموع نمرات تیمها رتبهٔ تیمهای شرکت کننده از دانشگاههای مختلف معین می‌شود. اسامی نفرات رتبهٔ اول تا پنجم مسابقه در خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران چاپ خواهد شد. همچنین اسامی نفرات رتبهٔ اول تا حداکثر سوم در هر مادهٔ امتحانی و تیمهای دانشگاههای رتبهٔ اول تا پنجم معرفی خواهند شد.

۹. جوایز. به نفرات رتبهٔ اول تا پنجم

جوایزی داده خواهد شد که از آن جمله لوح افتخار انجمن ریاضی ایران و جایزهٔ ویژهٔ وزارت فرهنگ و آموزش عالی ایران است. نفر اول مسابقه طبق توافق با مرکز بین‌المللی فیزیك نظری ایتالیا (ICTP) به آن مرکز معرفی می‌شود تا به‌مدت یك‌ماه از امکانات آن مرکز استفاده کند. در این رابطه تسهیلات لازم توسط وزارت فرهنگ و آموزش عالی تأمین خواهد شد.

۱۰. تأمین هزینهٔ شرکت دانشجویان. هزینهٔ ایاب و ذهاب شرکت‌کنندگان تیمی به‌عهدهٔ دانشگاه مربوطه است و هزینهٔ اقامت و تغذیه در طول کنفرانس به‌عهدهٔ کمیتهٔ برگزار-کنندهٔ کنفرانس می‌باشد.

نکاتی پیرامون آیین‌نامهٔ پیشنهادی

بررسی این آیین‌نامه را با ذکر بعضی از نکات مثبت آن آغاز می‌کنیم. خوشبختانه در این آیین‌نامه صریحاً ذکر شده است که انتخاب سؤالات مسابقه به‌عهدهٔ کمیتهٔ مسابقه است و به‌این‌ترتیب روش طرح سؤالات به وسیلهٔ نامه و در صبح روز برگزاری مسابقه کنار گذاشته شده است. به عقیدهٔ نگارنده این مطلب دستاورد بزرگی است. شاید با من در این زمینه هم‌عقیده نباشید، ولی امیدوارم که با خواندن جملات زیر از یکی از آیین نامه‌های سابق مسابقهٔ ریاضی کشور با من هم-عقیده شوید:[1]

"سؤالهای لازم صبح روز مسابقه در حضور سرپرستان تیمها به طور قرعه از جمع سؤالهای رسیده انتخاب می‌شود و کمیتهٔ مسابقه می‌تواند تصمیم به حذف سؤالی که احیاناً از نظر مضمون تکرار تمام یا قسمت مهمی از سؤال انتخاب شدهٔ قبلی است بگیرد و سؤال دیگری به‌قید قرعه انتخاب نماید."

نکتهٔ بسیار مثبت دیگری که در این آیین‌نامه به‌چشم می‌خورد، تصحیح و اعلام نتایج مسابقه تا قبل از اتمام کنفرانس است. بر مبنای سنتی غلط هر ساله پاسخنامه‌های شرکت‌کنندگان در سه نسخه تکثیر می‌شد و توسط مسئول مسابقه برای ۳ مصحح فرستاده می‌شد و پس از تصحیح اوراق، میانگین سه نمرهٔ مصححین به عنوان نمرهٔ ورقه منظور می‌شد. علاوه‌بر زیانهای مادی و اتلاف وقت بیهوده‌ای که این روش داشت، در مواردی هم موجب بی‌عدالتیهایی می‌شد. اعلام نتایج مسابقه تا قبل از اتمام کنفرانس باعث هیجان‌انگیزتر شدن و در نتیجه رونق هرچه بیشتر مسابقهٔ ریاضی می‌شود.

در این آیین‌نامه انتخاب کمیتهٔ مسابقهٔ ریاضی به‌عهدهٔ شورای اجرایی انجمن ریاضی گذاشته شده است و به‌این‌ترتیب با تعویض شورای اجرایی انجمن ریاضی که هر دو سال یك‌بار صورت می‌گیرد، کمیته هم منحل می‌شود و کمیتهٔ جدیدی شکل می‌گیرد. به‌این‌ترتیب این خطر وجود دارد که کمیتهٔ جدید بدون توجه به‌تجربیات کمیتهٔ قبل راهی جدید را در پیش گیرد و در نتیجه برگزاری مسابقه را به‌تشتت دچار کند. درست است که انجام تغییرات

۱. بولتن انجمن ریاضی ایران، تیرماه ۱۳۵۳، صفحات ۳۷ و ۳۸.

امری لازم در تکامل یك مسابقهٔ ریاضی است ولی انجام تغییرات بدون برنامه نتیجه‌ای جز سردرگمی در پی نخواهد داشت. به نظر ما برای رفع این خطر باید انتخاب اعضای کمیته مستقل از انتخاب اعضای شورای اجرایی باشد و همیشه عده‌ای از اعضای کمیتهٔ قبلی در کمیتهٔ جدید هم حضور داشته باشند.

همان طور که قبلاً گفتیم مسائل رکن اساسی هر مسابقه‌ای را تشکیل می‌دهند. متأسفانه در این آیین‌نامه هیچ توضیحی دربارهٔ نوع مسائل مسابقه داده نشده و همه چیز به کمیتهٔ مسابقه محول شده و فقط به‌ذکر این نکته اکتفا شده است که مسائل در دو زمینهٔ جبر و آنالیز مطرح می‌شود. درست است که آیین‌نامه نباید به جزئیات بپردازد ولی پرداختن به خطوط اساسی و تعریف یك مسئلهٔ مسابقه‌ای (در قالب عباراتی کلی) امری ضروری است. نکتهٔ دیگر اینکه مواد مسابقه به دو مادهٔ جبر و آنالیز محدود شده است و به‌این‌ترتیب مسائلی از نظریهٔ اعداد، آنالیز ترکیبی، احتمالات، توپولوژی، . . . که همگی از بخشهای ریاضیات دورهٔ کارشناسی محسوب می‌شوند درمسابقه جایی نخواهند داشت. پیش از این مسائلی از این قبیل در بخش مسابقهٔ عمومی مطرح می‌شدند، اما شاید نتایج مسابقهٔ عمومی در چند دورهٔ اخیر دست‌اندرکاران انجمن ریاضی را به این باور رسانده باشد که طرح سؤالاتی معقول در زمینهٔ عمومی بسیار دشوار است و مسائل مطرح‌شده در این زمینه یا بسیار آسان‌اند و یا بسیار مشکل. در اینجا بر آن نیستیم که ریز موادی را برای مسابقهٔ ریاضی ایران پیشنهاد کنیم زیرا این کار به مطالعه، تأمل، و صرف وقت فراوانی نیاز دارد. فقط به یك نکته اشاره می‌کنیم و آن اینکه چقدر جای مسئله‌ای چون مسئلهٔ زیر درمسابقهٔ ریاضی ایران خالی است:

نقطه‌ای را شبکه‌ای می‌گوییم هرگاه مختصاتش اعدادی صحیح باشند. ۹ نقطهٔ شبکه‌ای در فضا مفروض‌اند، ثابت کنید که درون پاره‌خطهای واصل این ۹ نقطه، دست‌کم یك نقطهٔ شبکه‌ای وجود دارد.[1]

با توجه به‌موارد فوق می‌بینیم که به‌دلیل مبهم و کلی بودن بسیاری از عبارات آیین‌نامهٔ پیشنهادی بیم آن می‌رود که حتی با اجرای این آیین‌نامه نیز مشکلات این مسابقه مرتفع نگردد. پیشنهاد ما این است که کمیته‌ای تشکیل شود و در یك دورهٔ یك‌ساله با تشکیل جلسات منظم و بررسی مسابقات ریاضی که در کشورهای دیگر انجام می‌شود و با توجه به برنامهٔ دورهٔ کارشناسی ریاضی در ایران، آیین‌نامهٔ جامعی دربارهٔ مسابقهٔ ریاضی کشور تدوین کند. در این آیین‌نامه تعریف دقیقی از یك مسئلهٔ قابل طرح در مسابقهٔ ریاضی دانشجویی ارائه شود و همچنین مواد مسابقه نیز به‌طور جزئیتر مشخص گردد.

سرانجام باید به‌این نکتهٔ مهم اذعان کنیم که مسابقهٔ ریاضی دانشجویی را نباید امری فرعی یا تجملی یا حتی صرفاً یك رقابت سالم درسی انگاشت. با احترام به تلاش صادقانهٔ دست-

۱. این مسئله از مسابقهٔ پاتنم سال ۱۹۷۱ است. پاسخ آن را می‌توانید در انتهای نوشته ببینید.

اندرکاران این مسابقه در ایران، وعلی‌رغم اینکه نگارنده ازمشکلات برگزاری این‌مسابقه نیك آگاه‌است، باید بگوییم وضع فعلی این مسابقه‌در ایران گویای آن است که اهمیت آن تا حد زیادی بر مسئولان امر مشخص نیست. تجربهٔ کشورهـای دیگر در برگـزاری صحیح این مسابقات نشان می‌دهد که ریاضیدانهای بسیار برجسته‌ای از بین دانشجویان کم سن وسالی ظهور پیدا کرده‌اند که جذابیت این‌مسابقات آنها را به‌ریاضیات علاقه‌مند کرده‌بود. بی‌هیچ تردید، این مسابقه شایستهٔ سرمـایه‌گذاری و صرف بودجه، آن‌هـم به‌میزان بالاست، چرا که اکنون در کشورهـای دیـگر این‌گـونه مسابقات به‌مثابهٔ غربالی برای یافتن چهره‌های خلاق از بین نسل جوان درآمده است.

سخن آخر

شاید این سخن اقلیدس که در ریاضیات راه شاهانه‌ای وجودندارد، دربارهٔ فعالیتهای جنبی ریاضی و مثلاً برگزاری یـك مسابقهٔ ریاضی نیز صادق باشد. نمی‌توان بدون صرف وقت و تلاش دسته‌جمعی عده‌ای متخصص، انتظار ایجاد یك مسابقهٔ ریاضی آبرومند و مؤثر در پیشبرد ریـاضیات کشور را داشت، چرا که بی‌مایه فطیر است.

پاسخ مسئلهٔ اول. گـزارهٔ فوق درست است، کافی است ϕ را تابعی دوسویی وبدون نقطهٔ ثابت روی F درنظر بگیریم و قراردهیم $x*y=\phi(y)$.

پاسخ مسئلهٔ دوم. کافی است به‌این نکته توجه کنیم که τ همراه با عمل تفاضل متقارن مجموعه‌ها زیر گروهی از $P(X)$ است.

پاسخ مسئلهٔ سوم. میان هر ۹ نقطهٔ شبکه‌ای دلخواه در فضا همواره دو نقطه موجود است که زوجیت مؤلفه‌هـایشان یکسان است. نقطهٔ وسط پاره‌خط واصـل این دو نقطه، نقطه‌ای شبکه‌ای است.

فهرست

سخن مدیر مسئول

مقاله‌ها

نیم قرن ریاضیات	هرمان وایل	۱
برهانی از قضیهٔ گودل با اصطلاحات برنامه‌های کامپیوتری	آرتور چارلز ورث	۳۹
تقدیر از کرونکر	هارولد ادوارد	۵۹
اثباتهایی تحلیلی از "قضیهٔ توپ مودار" و قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر	جان میلنر	۷۴
ریاضیات گسسته: ریاضیات جدید علم	آنتونی رالستون	۸۱
نگرشی بر مثلث پاسکال: ترکیبیات، حساب، هندسه	پیترا هیلتون، جین پدرسن	۱۰۱
راههایی مغشوش در خدمت اهدافی منطقی	کوین مک کین، تام دورتسکی	۱۱۹
حاصلضربهای سینوسها و کسینوسها	استیون گالویچ	۱۲۸
مربع جادویی مرلین	دان پلنیر	۱۴۰

نکته‌ها

الگوریتمی برای حل دستگاه معادلات سیالهٔ خطی	ناصر بروجردیان	۱۵۱
بازهم تثلیث زاویه	حسن‌علی شاه‌علی	۱۵۸
رده‌های تقارن: توابع سه‌متغیره	ان. مترو پیس و جیان-کارلو روتا	۱۶۳
تعمیم قضیهٔ محور اصلی به میدانهای غیر از R	استفن فریدبرگ	۱۷۰
قضیهٔ فیثاغورس به بیان مشکل!		۱۷۴

دیدگاه

ده پرسش از ریاضیدانان ایرانی مقیم خارج		۱۷۵

گزارش

آیین‌نامهٔ مسابقهٔ ریاضی کشور	امیر اکبری مجدآبادنو	۱۸۵