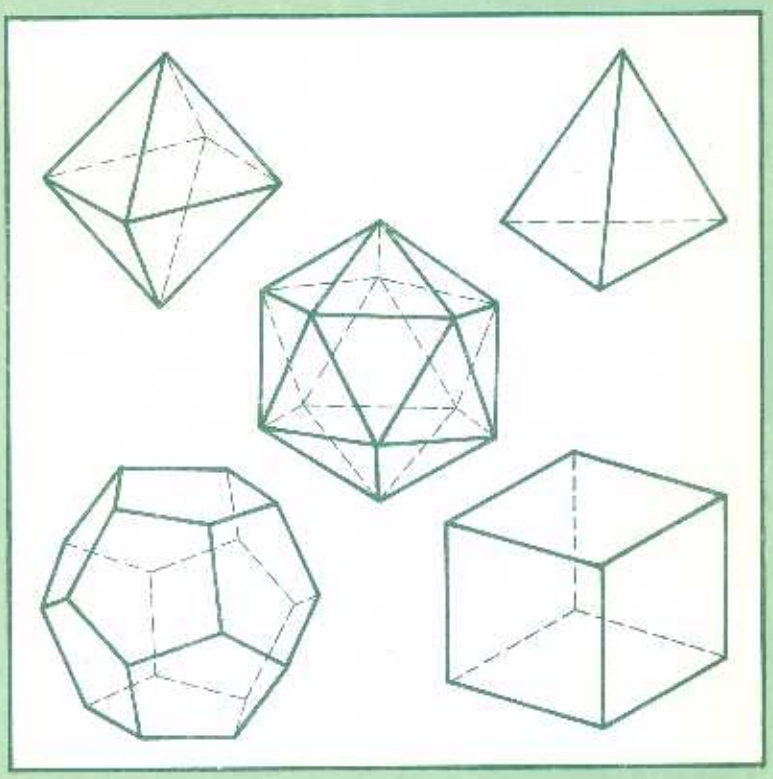
جُنگ ریاضی دانشجو

جهاد دانشگاهی

دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران



جلد ششم، شهریور ۱۳۶۹

جُنگ ریاضی دانشجو

جُنگ ریاضی دانشجو به کوشش جمعی از دانشجویان گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران، هرسال ۳ شماره منتشر می‌شود.

هدف از انتشار جُنگ، ایجاد انگیزه و فراهم ساختن محیطی مناسب برای فعالیتهای فوق‌برنامهٔ دانشجویان و علاقه‌مندان ریاضی، غنی گردن منابع مقاله‌های ترویجی-آموزشی به زبان فارسی، معرفی فعالیتهای مستقل و جالب توجه دانشجویان رشتهٔ ریاضی، و ایجاد ارتباط مؤثر میان دانشجویان این رشته است.

مقاله‌های جُنگ بیشتر توصیفی‌اند، و قالب «نصف‌لم بسروان» در وهلهٔ اول مورد نظر نیست. این مقاله‌ها زمینه‌های تخصصی ریاضیات همچون آنالیز، جبر، هندسه و توپولوژی، و زمینه‌های عمومی‌تری چون تاریخ، فلسفه، و آموزش ریاضیات را دربرمی‌گیرند.

مخاطبین جُنگ دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی هستند.

□ درمورد مقاله‌های ارسالی توجه به نکته‌های زیر لازم است:

۱. مقالهٔ ارسالی باید مطابق با چارچوب پیشگفته باشد.

۲. مقاله تألیفی و یا ترجمهٔ دقیق متن اصلی باشد؛ ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود.

۳. متن اصلی مقالهٔ ترجمه‌ای همراه با ترجمه فرستاده شود. همچنین شرح شکلها در صفحهٔ جداگانه‌ای ترجمه شود.

۴. مقاله‌ها روی کاغذ A4 ماشین شده یا به طور کاملا خوانا نوشته شود. طول مقاله از ۳۰ صفحهٔ دست‌نوشت تجاوز نکند و در هرصفحه بیش از ۱۵ سطر نوشته نشود.

۵. هیئت تحریریه در رد، حک، و اصلاح مقالهٔ ارسالی آزاد است، و هرگونه تغییری به اطلاع فرستندهٔ مقاله خواهد رسید، و در هرصورت مقالهٔ ارسالی پس فرستاده نخواهد شد.

مدیرمسؤول: بهزاد منوچهریان

استاد مشاور: غلامرضا برادران خسرو شاهی

هیئت نظرخواهی تحریریه: شاهین آجودانی ثمینی
امیر اکبری مجدآباد نو
ناصر بروجردیان
سعید ذاکری
فرشته ملک
بهزاد منوچهریان

ویراستاران: ناصر بروجردیان
سعید ذاکری
فرخ وطن

مسؤول اجرایی: محمد کیا

مسؤول فنی و صفحه‌آرا: نادر کثیری

چاپ و صحافی: آذنی چاپ

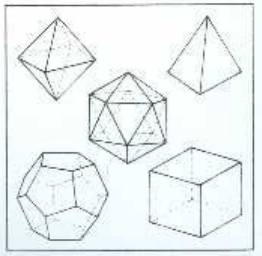
شرکت چاپ دانشگاه در دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

تهران، صندوق پستی ۶۳۷۵-۱۴۱۵۵

چاپ ششم، شهریور ۱۳۶۹

بها: ۵۰۰ ریال

نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.



پنج جسم افلاطونی

مقالهٔ «قضیهٔ اویلر در مورد...» را ببینید.

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

به‌نام خداوند متعال

سرآغاز

چندماه گذشته کشورمان شاهد چند رویداد مهم بود. نخست باید ازاولین سالگرد رحلت حضرت امام خمینی قدس‌سره یادکرد که به‌حق ضایعهٔ جبران‌ناپذیری برای اسلام ومسلمین بود وداغ فقدان آن رهبر کبیر را تازه‌کرد. فاجعهٔ دردناك زلزله دربخش‌وسیعی ازکشورمان نیز ازرویدادهای تاسف‌انگیزی‌بودکه باعث ازبین‌رفتن وبیخانمان‌شدن عدهٔ‌کثیری ازهموطنانمان‌گردید. ما این‌دومصیبت بزرگ را به سهم خود به‌همگان تسلیت عرض می‌کنیم. اما در کنار این دو واقعهٔ تأثرانگیز، خبر ورود قهرمانان آزاده به‌میهن اسلامی از اخبارخوش چندهفتهٔ اخیر بودکه موجب شادی وسربلندی ملت مقاوم ایران‌گردید. مقدم این‌عزیزان غیوررا گرامی می‌داریم وبرصلابت و پایداریشان درود می‌فرستیم.

این‌ششمین شمارهٔ جنگ ریاضی دانشجو است که خدمت علاقه‌مندانش تقدیم می‌شود. اقبال طیف وسیع ریاضی دوستان به‌این مجله، مارا برادامه راهمان مصمم‌تر کرده‌است، واز این روست که احساس می‌کنیم با انتشارهرشماره مسئولیتمان سنگینتر واز زیربار این‌مسئولیت سربلند بیرون آمدنمان دشوارترمی‌شود. نظرات متنوع خوانندگان عزیز درباب محتوا، سبك مقالات، و اهداف مجله، وبعضاً انتقادهای دوستانهٔ آنها، مارابرآن داشت‌که تصمیم بگیریم درفرصتی مناسب، جنگ ریاضی دانشجو را به‌گونه‌ای دقیقترمعرفی‌کنیم، اهداف آن‌را توضیح دهیم، ازنظرگاهمان درباب سیاست انتخاب مقالات دفاع‌کنیم، والبته، اشکالات آن‌را بپذیریم ونظرات صائب خوانندگان را به‌گوش‌جان بشنویم. انشاءالله این مهم را درمقاله‌ای تحلیلی، که بررسی‌تطبیقی شماره‌های‌گذشتهٔ جنگ را نیزشامل می‌شود، در شمارهٔ هفتم که مقارن سومین سال انتشار مجله است انجام خواهیم داد. برای هرچه پربارتر شدن این بررسی، خوانندگان عزیز را به‌همکاری می‌خوانیم تا حداکثر تا پایان آذرماه امسال، دیدگاه خود را درموارد زیر برای‌ما ارسال‌دارندکه بسیارمغتنم خواهدبود:

۱. اهداف مجله، باتوجه به‌آنچه درصفحهٔ داخل جلدبیان شده، تاچه حد فراگیر است وچه موارد مهمی را شامل نمی‌شود؟
۲. مقالات این شش شمارهٔ جنگ تاچهٔ اندازه برآورندهٔ اهداف بیان شده بوده است؟ (می‌توانید حتی‌درمورد هرمقالهٔ خاص نظردهید.)
۳. ترجمه‌ای یا تألیفی بودن مقالات چه‌اثری بر کیفیت مجله وذهنیت خواننده دارد؟
۴. مسائل جانبی مجله (کیفیت ترجمه و ویرایش مقالات، شکل وکیفیت چاپ، نحوهٔ توزیع، قیمت، ...) چگونه است؟

خوانندگان برماخرده‌گرفته‌اندکه چرا فاصلهٔ‌زمانی میان شماره‌های مجله زیاد است وتاریخ انتشارآن خیلی‌منظم نیست. گرچه می‌توان به‌طریق مألوف مجلات، سفرهٔ دل‌را پیش‌خواننده‌گشود وازمشکلات بیشمار دادسخن داد، ما ترجیح می‌دهیم تنها خدای را شکرگزار باشیم که‌هنوزاینقدر هست‌که بانگ جرسی‌می‌آید.

هیئت تحریریهٔ جنگ ریاضی دانشجو

آنتونی زیگموند

ملاحظاتی در باب سرگذشت سریهای فوریه•

ترجمهٔ سعید ذاکری

۱. سرآغاز

تصمیم گرفته‌ام کـه دربارهٔ برخی پیشرفتها در نظریهٔ سریهای مثلثاتی در نیمهٔ اول قرن بیستم صحبت‌کنم[۱]، اما برای این‌کار مجبورم نخست به‌قرن نوزدهم برگردم (که می‌توان آن را توفیقی اجباری انگاشت). سخن خودرا باچند مفهوم مقدماتی آغاز می‌کنم.

بنا به‌تعریف، یك سری مثلثاتی عبارت است از یك ترکیب خطی نامتناهی از جملات نمایی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

اگرقرار باشد این سری چیزی را نمایش دهد، قبل‌از هرچیز نمایشگر تابعی چون $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π خواهدبود

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

دلایل متعددی بـرای مطالعهٔ سریهای مثلثاتی وجود دارد: یك دلیل آن است کـه ایـن موضوع به‌خودی خود مبحثی جالب و مهم است: دلیل دیگرآنکه از روشهایی که در اینجا به‌کار می‌رود می‌توان در بسیاری مسائل دیگراستفاده کرد. سریهای مثلثاتی هستهٔ اصلی این کاربردها را تشکیل می‌دهند، لکن بررسی آنها به‌مباحث فرعی زیادی می‌انجامد.

• Zygmund, Antoni, "Notes on the history of Fourier series," *Studies in Harmonic Analysis*, MAA, 1979, 1-19.

۱. این مقاله برگرفته از یك سخنرانی پروفسور زیگموند است.

برخی‌از این‌گسترشها نسبتاً ساده‌اند، وبعضی دیگرمشکلتر. ازمیان ساده‌ترها می‌توان به‌عنوان مثال تعمیم سریهای مثلثاتی به‌انتگرالهای مثلثاتی را درنظر گرفت، که درآن‌جای جمعبندی را انتگرالگیری نسبت به یك متغیر پیوسته می‌گیرد. اما تعمیمهای دیگر به این سادگی نیستند. مثلا دراین سخنرانی راجع به‌سریهای چندگانهٔ مثلثاتی چیزی نخواهم گفت. درگذار ازیك متغیر به‌چند متغیر، برخی نتایج به‌طورخودکار به‌دست می‌آیند، لکن قضایای دیگری هستند که بسیار دشوارترند. واقعیت امر این است که امروزه بسیاری ازجالبترین مسائل این‌مبحث به‌حالت چندمتغیره‌مربوط می‌شود، ودرحال حاضرحالت یك متغیره را می‌توان تاحد زیادی یك مبحث قدیمی وکهنه انگاشت.

فرض‌کنیم تابع مشخصی مانند $f(x)$ را، که $f(x+2\pi)=f(x)$ ، با یك سری مثلثاتی نمایش داده باشیم

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (1)$$

با دردست داشتن این نمایش، می‌توان ضرایب c_m را به‌طورصوری تعیین کرد، به‌این‌طریق که معادلهٔ بالارا در e^{-imx} ضرب‌کنیم وازحاصل روی‌بازه‌ای به‌طول 2π، مثلاً $(0, 2\pi)$، انتگرال بگیریم

$$c_m=c_m(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-imx}dx \qquad (2)$$

به‌عکس، با در دست داشتن تابع $f(x)$ بـا دورهٔ تناوب 2π، می‌تـوان ضرایب فوریهٔ آن $c_n=c_n(f)$ ــ را به‌یاری معادلهٔ (۲) تعریف‌کرد وسپس سری (۱) را، که بنا به‌تعریف سری فوریهٔ تابع $f(x)$ است، تشکیل داد.

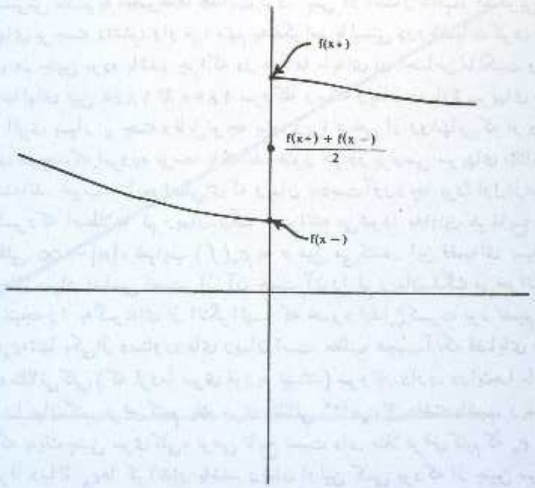
مسئلهٔ اصلی در اینجا ایـن است: تابع f را داده‌اند. $c_n(f)$ را به طریق گفته‌شده تعیین کرده‌ایم وسری فوریه را تشکیل داده‌ایم. تحت چه شرایطی‌این‌سری‌تابع f رانمایش می‌دهد؟ این پرسش درحقیقت مسئلهٔ اساسی نظریهٔ مورد بحث است. نخستین‌گامهای صوری دراین زمینه را باید ازآن اویلر و فوریه دانست، اما روشن است که این مبحث پیش‌ازآن نیز درارتباط با معادلات دیفرانسیل یا مشتقات جزئی سابقه داشته‌است، که من اینجا وارد این موضوع نمی‌شوم. گفتم که اویلر و فوریه پیشگامان این نظریه، و آن‌هم عمدتاً جنبه‌های صوریش، بوده‌اند. اما هنگامی که به‌قرن نوزدهم می‌رسیم، به‌پیشرفتهای مهم ونامهای‌بزرگی برمی‌خوریم. بگذارید سه‌نام را که معرف پیشرفتهای چشمگیر این دوره‌اند ذکرکنم. اولی دیریکله است، دومی ریمان، وسومی کانتور. این سه تن اصلیترین نظریه‌پردازان این‌مبحث در قرن نوزدهم‌اند.

نخست باید بپرسیم که سهم عمدهٔ دیریکله در این بین چیست؟ او اولین ریـاضیدانی بود که دربارهٔ صحت نمایش یك تابع به‌کمك سری فوریه‌اش به‌مطالعه پـرداخت. البته او تنها مسئلهٔ همگرایی سری را درنظر گرفت. او در رساله‌اش ــ حدود ۱۸۳۷ــ نشان داد که

اگر تابع موردنظر ساختارخیلی‌ساده‌ای داشته‌باشد، درواقع اگر نمودارآن‌را بتوان به‌تعدادی متناهی منحنی یکنوا تفکیك کرد، آنگاه سری واقعاً همگراست و واقعاً تابع f را نمـایش می‌دهد. به‌بیان ملموستر، دنبالهٔ

$$S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$$

درهر نقطه به‌میانگین حدود چپ وراست f میل می‌کند (شکل ۱).



شکل ۱

این‌همان چیزی است که اصطلاحاً آزمون دیریکله برای همگرایی سری‌فوریه‌خوانده می‌شود. گاهی‌آن‌را آزمون دیریکله‌ـژوردان هم می‌گویند، واین به‌خاطرقضیهٔ‌ژوردان است که می‌گوید هرتابع با تغییرکراندار تفاضل دوتابع یکنواست، وبنابراین خودبه‌خود سری فوریه‌ای همه‌جا همگرا دارد. اما با وجود این، آزمون فوق را اساساً ازآن دیریکله می‌شناسند. ازنظرگاه تاریخی، این اولین‌آزمون همگرایی است. بعدها ــ به‌ویژه دراواخرقرن نوزدهم ــ به‌سیلی ازمقالات دراین‌باره برمی‌خوریم. برخی‌ازنتایج این‌مقالات بااهمیت‌اند، لکن‌آزمون بالا نتیجه‌ای مقدماتی است.

ضمناً در همین زمـان است‌که مفهوم تابـع، به شکلی‌که امروزه درکتابهای حساب دیفرانسیل وانتگرال می‌بینیم، معرفی می‌شود. پیش از این زمان، تابع را چیزی می‌دانستند

که بتواند با یك عبارت تحلیلی یا یك منحنی هندسی تعریف شود. بگذارید دراینجا حکایتی را به‌عنوان جملهٔ معترضه نقل کنم. من در پیشگفتار کتابم [۲] خاطرنشان کرده‌ام که نظریهٔ سریهای مثلثاتی تأثیر قابل‌توجهی بر پیشرفت آنالیز داشته است. درآنجا من از دیریکله در ارتباط با مفهوم تابع نام برده‌ام؛ پس از آن از ریمان یادکرده‌ام که در آن مقالهٔ مفصلش، که اثر اساسی او درباب سریهای مثلثاتی است، مفهوم انتگرالش را معرفی کرد؛ ونیز نام کانتور را آورده‌ام که اولین کسی بود که به‌مطالعهٔ مجموعه‌های یکتایی پرداخت (دراین باره بعداً صحبت خواهم کرد) وتلاشش برای سرشت‌نمایی آنها، که هنوز مسئله‌ای حل‌نشده است، او را به‌گسترش نظریهٔ مجموعه‌ها هدایت کرد. پس از انتشار کتاب، گفتگویی با یکی از ریاضیدانهای برجسته داشتم، واو مرا متهم به‌تفکر امپریالیستی درریاضیات کرد. ممکن است تا حدودی هم چنین بوده باشد، چراکه در همهٔ ما مایه‌ای از احساس مالکیت وجود دارد.

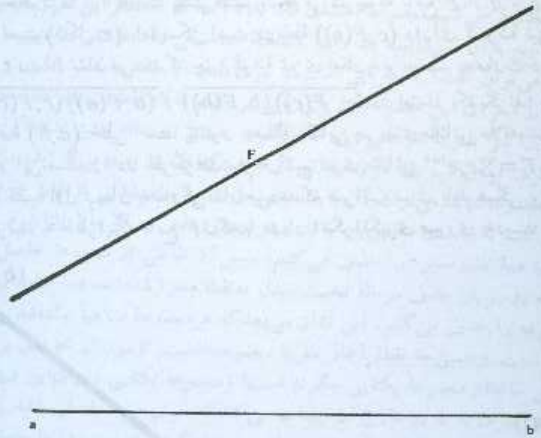
درسالهای بین ۱۸۵۰ تا ۱۸۶۰ سروکلهٔ رسالهٔ ریمان دربارهٔ سریهای مثلثاتی پیدا شد، واین اثری بسیار برجسته وقابل‌توجه بود، زیرا برخی از روشهایی که او دراین‌رساله معرفی کرد، هرچندکه امروزه توسعه یافته‌اند، هنوز هم در بررسی سریهای مثلثاتی کلی کنار گذاشته نشده‌اند. خوب، نتایج اصلی‌ای که ریمان به‌دست آورد چه بود؟ اول‌ازهمه اوچیزی را ثابت کرد که اصطلاحاً لم ریمان-لبگ خوانده می‌شود: به‌ازای هر تابع انتگرالپذیر $f(x)$، وقتی $|n|\to\infty$، ضرایب $c_n(f)$ به ۰ میل می‌کنند. این قضیه‌ای بسیار مقدماتی و در عین‌حال بسیار اساسی است. از آن جهت آن را لم ریمان-لبگ می‌خوانندکه بعدها لبگ این نتیجه را به‌گونه‌ای از انتگرالها که خود ابداع کرده بود تعمیم داد. اینکه $c_n(f)\to 0$، تنها یکی‌از دستاوردهای ریمان است. مطلب عجیب آنکه قضایای عمدهٔ ریمان با سریهای مثلثاتی کلی (که لزوماً سری فوریه نیستند) سروکار دارد. دراینجا مایلم یکی از این قضایا را بیان کنم. فرض کنیم یك سری مثلثاتی $\sum c_n e^{inx}$ داشته باشیم. ریمان نخستین کسی بودکه به‌یك چنین سری کلی، نوعی تابع نسبت داد. مثلا فرض کنیم که c_n به‌صفر میل کند، یا صرفاً دنبالهٔ c_nها کراندار باشد. ریمان اولین کسی بودکه از چنین سریی به‌طور صوری انتگرال گرفت. فرض کنیم از سری دوبار انتگرال گرفته و مجموع را $F(x)$ نامیده‌ایم

$$c_0\frac{x^2}{2}+\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_n}{(in)^2}\, e^{inx}=F(x)$$

که درآن ازجملهٔ مرکزی، $n=0$، جداگانه انتگرال گرفته شده‌است. (علامت پریم نشانگر حذف همین جمله است.) ریمان این قضیه را ثابت کرد: هرگاه $S_n(x_0)$ به c میل کند، و هرگاه تابع $F(x)$ را تشکیل دهیم و مشتق دوم تعمیم‌یافتهٔ آن (که امروزه مشتق شوارتز یا ریمان-شوارتز نامیده می‌شود)، یعنی

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}$$

را درنظر بگیریم، آنگاه این مشتق در x_0 موجود و برابر c است. این نتیجه را قضیهٔ اول ریمان می‌گویند. اهمیت این قضیه درچیست؟ پاسخ این است که به اعتقاد بعضیها این قضیه منشاء نظریهٔ توزیع است، چراکه به‌یك‌سری مثلثاتی کاملا دلخواه تابع‌خوش‌تعریف‌پیوسته‌ای مربوط می‌کندکه ارتباطش با سری اصلی از طریق مشتقگیری است. پس به‌عنوان مثال اگر سری مورد نظرما در بازه‌ای چون (a,b) به‌صفر میل کند، آنگاه تابع F در این بازه مشتق دوم شوارتزی برابرصفردارد، و در چنین حالتی بنابریك حکم مشهور F برابر بازه تابعی خطی خواهد بود [۲، ج ۱، ص ۲۳] (شکل ۲).



شکل ۲

قضیه‌ای دیگر از ریمان دراین باره هست که اهمیتش کمتر واضح است؛ این قضیه می‌گوید که اگرصرفاً فرض کنیم c_n به ۰ میل کند، آنگاه در هرنقطهٔ x تابع F در رابطهٔ زیر صدق خواهدکرد

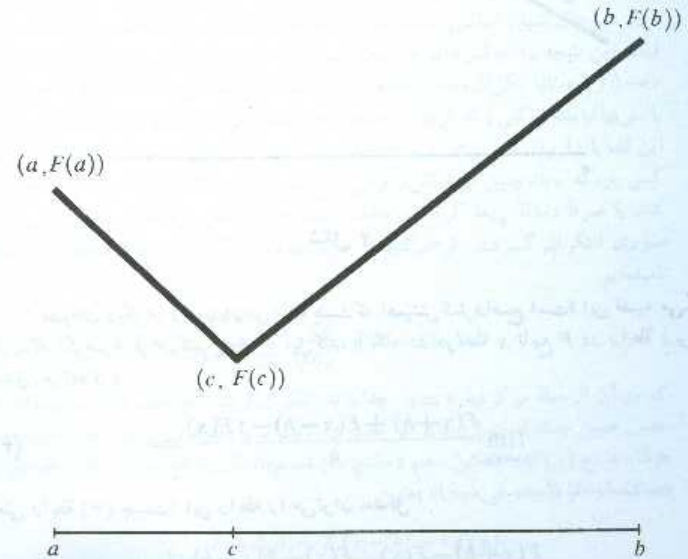
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h}=0 \qquad (3)$$

معنی رابطهٔ (۳) چیست؟ این رابطه را می‌توان به‌شکل

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\frac{F(x)-F(x-h)}{h}\to 0$$

نیز نوشت. به‌عبارت دیگر، صرفاً با فرض‌کردن اینکه $c_n \to 0$، تابع F به‌مفهوم فنی زیر هموار خواهد بود: خارج‌قسمتهای تفاضلی از سمت راست‌وچپ دقیقاً یکسان رفتارمی‌کنند و تفاضلشان به‌صفر می‌گراید. خوب، اینها کارهای عمدهٔ ریمان دراین زمینه بود، اما این کارها نتایج فزاینده‌ای دربرداشت‌که خود ریمان عامل توسعهٔ آنها نبود. این نتایج را باید اساساً مرهون کانتور وشوارتز دانست.

چیزی‌که قصد دارم دربارهٔ کارهای کانتور بگویم. این حقیقت است: فرض‌کنیم سری مورد نظر دربازه‌ای چون (a,b)، مگر احتمالاً درنقطهٔ c، به ۰ میل کند. دربارهٔ این سری‌چه می‌توان حکم‌کرد؟ از آنچه‌که پیشتر گفتیم نتیجه می‌گیریم که تابع F از a تا c، ونیزاز c تا b خطی است (شکل ۳)، اما ممکن است درنقطهٔ $(c,F(c))$ دارای گوشهٔ تیز باشد. لکن قضیهٔ دوم ریمان نشان می‌دهدکه چنین‌گوشهٔ تیزی امکان‌پذیر نیست. به‌عبارت دیگر، دوباره‌ـ خط $\overline{(a,F(a))(c,F(c))}$ و $\overline{(c,F(c))(b,F(b))}$ در امتداد یکدیگرند؛ یعنی تابع F برکل بازهٔ (a,b) خطی است. کانتور به‌مسئلهٔ یکتایی سریهای مثلثاتی علاقه‌مند بود. به‌بیان دیگر، او این مسئله را در نظر گرفت: فرض‌کنیم سری مثلثاتی $T=\sum c_n e^{inx}$ همه‌جا به ۰ میل کند. قضیهٔ اول ریمان به‌سادگی‌نشان می‌دهدکه ضرایب سری باید همگی برابر ۰ باشند. چرا؟ خوب، به‌خاطر اینکه تابع Fی‌که با دوبار انتگرالگیری صوری به‌دست می‌آید خطی



شکل ۳

است، وازاینجا به‌سهولت نتیجه می‌شودکه همهٔ ضرایب باید برابربا صفر باشند [۲، ج ۱، ص ۳۲۶]. دراینجا بودکه کانتور این سؤال را ازخود پرسید: اگرفرض‌کنیم سری‌همه‌جا بر $[0,2\pi]$، مگر احتمالاً در نقطهٔ c، به صفر میل کند، چه می‌توان حکم‌کرد؟ او با استدلالی که دربالا به‌کمک خطوط گفتیم به‌سرعت دریافت‌که سری T درنقطهٔ c، و بنابراین همه‌جا، به ۰ می‌گراید. واضح است‌که اگر به‌جای یک‌نقطه، تعدادی متناهی‌نقطه داشته‌باشیم، همین حکم برقرارخواهدبود. پس، به‌بیان دیگر، هرمجموعهٔ متناهی از نقاط یک مجموعهٔ یکتایی است ــ بدین‌معنی‌که اگرسری خارج این مجموعه به ۰ میل کند، آنگاه خود به‌خود متحد با صفرخواهدبود.

واما گام بعد: فرض‌کنیم مجموعهٔ استثنای ما، که تاآنجاکه به‌همگرایی سری مربوط می‌شود چیزی راجع به‌آن نمی‌دانیم، یک وتنها یک‌نقطهٔ انباشتگی داشته‌باشد. درچنین‌حالتی دربارهٔ سری چه می‌توان گفت؟ پاسخ این است‌که سری همچنان متحد با صفر است، زیرا می‌توانیم همهٔ نقاط مجزای این مجموعه را یکی یکی برداریم تاکه فقط‌آن یک نقطهٔ حدی باقی بماند، که‌آن‌را نیز به‌نوبهٔ خود می‌توان حذف‌کرد. بدیهی است‌که چنین استدلالی را می‌توان تکرارکرد. فرض‌کنیم یک سری مثلثاتی T داریم که همه‌جا به ۰ می‌گراید، مگر احتمالاً درنقاط مجموعه‌ای‌که می‌توان آن‌را یک مجموعهٔ متناهیاً ساده‌شدنی ازنقاط خواند، یعنی مجموعه‌ای که با تعدادی متناهی‌بار به‌کار بستن روش حذف بالا مآلاً افنا شود. در چنین حالتی ابتدا همهٔ نقاط مجزا را حذف می‌کنیم، سپس‌آن نقاطی از مجموعهٔ حاصل را حذف می‌کنیم‌که درجریان حذف مرحلهٔ نخست مبدل به‌نقطهٔ مجزا شده‌اند، وبا ادامهٔ‌این‌کار تمام نقاط مجموعه را حذف می‌کنیم. این نشان می‌دهدکه هرمجموعهٔ متناهیاً ساده‌شدنی یک مجموعهٔ یکتایی است. و همین‌جا نقطهٔ آغاز نظریهٔ مجموعه‌هاست. کانتور از خودش پرسید که درحالت‌کلی ساختار مجموعهٔ یکتایی چگونه است؟ (مجموعهٔ یکتایی دارای‌این ویژگی است‌که همگرایی سری به ۰ درخارج آن ایجاب می‌کندکه سری متحد باصفر باشد.) این مسئله هنوز هم حل نشده است. اما در آن مقطع زمانی ــ همان‌گونه که این روزها عقیده‌ای متداول است ــ نظریهٔ مجموعه‌ها و اعداد فرامتناهی حقیقتاً قد علم‌کردند، چرا که فرایند بالا به‌وضوح منجر به‌مفهوم اعداد فرامتناهی می‌شود، واین اعداد اصلاً به‌همین خاطر معرفی شدند.

مایلم دراینجا فرمول‌کلاسیک دیریکله را برای مجموع جزئی سری فوریه یادآوری کنم

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt \qquad (۴)$$

که درآن $D_n(t)$ هستهٔ دیریکله است

$$D_n(t)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

توجه کنیم که با چشم‌پوشی از $1/2$ در $\sin(n+1/2)t$ و درنظر گرفتن جملهٔ $1/(2\sin t/2)$ با تابع f، $S_n(x)$ به‌طور صوری برابر ضریب فوریهٔ (سینوسی) تابع $f(x+t)/(2\sin t/2)$ خواهد بود. این حقیقت فوق‌العاده مهمی است، زیرا به کمک آن و با استفاده از قضیهٔ ریمان در باب میل ضرایب به ۰ می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت که هرگاه تابع f در بازهٔ (a,b) صفر باشد، آنگاه مجموع جزئی nام آن، یعنی $S_n(x)$، در (a,b) به ۰ میل خواهد کرد. به‌ویژه، اگر دو تابع در بازه‌ای با یکدیگر برابر باشند، آنگاه سریهای فوریه‌شان در آن بازه دقیقاً مثل هم رفتار خواهند کرد. در چنین حالتی می‌گوییم که این دو سری فوریه همانگوا[1] هستند، یعنی در آن بازه اختلاف بین مجموعهای جزئی آنها به ۰ می‌گراید.

مسائل سریهای فوریه همچنین منجر به‌بررسی انتگرال

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\tan t/2}\,dt \qquad (5)$$

می‌شود، که شباهتش به‌انتگرال رابطهٔ (۴) آشکاراست. انتگرال (۵)، که با

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{h\to 0}\left(\int_{-\pi}^{-h}+\int_{h}^{\pi}\right)\frac{f(x+t)}{2\tan t/2}\,dt$$

تعریف می‌شود، مزدوج $f(x)$ نام دارد ومعمولا به $\tilde{f}(x)$ نشان داده می‌شود.[2] این تابع نقش مهمی درنظریهٔ سریهای فوریه دارد و آن‌را باچیزی‌که اصطلاحاً سری مزدوج خوانده می‌شود نمایش می‌دهند

$$\operatorname{sgn} n=\begin{cases}1, & n>0\\ 0, & n=0\\ -1, & n<0\end{cases}\quad \text{که در آن}\quad ،\ \sum c_n(-i\operatorname{sgn} n)e^{inx}$$

صحبتهایم در مورد قرن نوزدهم دراینجا عملا به‌پایان رسیده است. اما چند پیشرفت دیگردراین زمینه بوده‌است‌که تنها یکی‌ازآنها را خواهم گفت. می‌دانیم که سری فوریه یك تابع پیوسته می‌تواند واگرا باشد. این مطلب را دوبوا ریمون[3] در ۱۸۷۶ به‌دست آورد. او نخستین کسی بود که نشان داد تابع پیوسته‌ای وجود داردکه سری فوریه‌اش در نقطه‌ای

1. equiconvergent

۲. توجه کنید که تابع مزدوج درحقیقت همان «تبدیل هیلبرت» یك تابع متناوب است.ـم.

3. DuBois Reymond

واگراست، ودرواقع، می‌تواند حتی دربینهایت نقطه واگرا شود. این اکتشاف آنالیزدانهای آن زمان راکاملا مبهوت کرد، زیرا در آن زمان تصورناچیزی درمورد جمعپذیری سریهای فوریه داشتند.

هنگامی‌که قدم به‌قرن بیستم می‌گذاریم، به‌دوپیشرفت عظیم برمی‌خوریم. یکی ازآنها ایداع نظریهٔ اندازه و انتگرال توسط لبگ است. لبگ نظریهٔ سریهای فوریه را برمبنای مفهوم انتگرال جدیدش بازسازی‌کرد وتعدادی ازقضایای مشهور را به‌حالت کلیتری‌که در نظرگرفته بود تعمیم داد. پیشرفت دیگر، مفهوم جمعپذیری سریهای فوریه بود. این مفهوم اساساً ازیك حالت خیلی خاص، یعنی پژوهشهای فِیر[1] دربررسی حدود میانگین مجموعهای جزئی

$$\sigma_n=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$$

به‌وجودآمد. البته نمایش $f(x)$ با انتگرال پواسون‌آن نیز به‌مفهوم به‌کاربستن نوعی روش جمعپذیری برروی سری‌فوریهٔ $f(x)$ است، وبا وجوداینکه این مطلب حتی پیش‌ازکارهای فیر شناخته شده بود، تصورجامعی ازمفهوم جمعپذیری درآن زمان وجود نداشت، ومی‌توان گفت بر اهمیت انتگرال پواسون تنها از دیدگاه نظریهٔ توابع تأکید می‌شد. ازآنجاکه σ_n ارتباط نـاچیزی بـا نظریـهٔ توابع دارد، قضیهٔ فیر را بایـد عامل مطرح شدن مفهوم کلی جمعپذیری دانست.

این دوپیشرفت، یعنی نظریهٔ اندازه وانتگرال لبگ وجمعپذیری‌سریها، سیمای‌سریهای فوریه را به‌کلی دگرگون کرد. من در اینجا قصد ندارم هیچ نتیجهٔ خاصی را ذکر کنم، اما می‌دانیدکه با به‌کارگیری روشهای جمعپذیری می‌توان به‌نظریهٔ سریهای‌فوریه، حتی‌از برخی جنبه‌های زیبایی‌شناختی، سامان بخشید. وکسانی بوده‌اند که چنین‌کاری‌کردند. بگذارید تنها دوسه نفرازآنها را نام ببرم. نخست باید از دولا واله پوسن[2] وفاتو[3] نام برد،که بازسازی نظریهٔ سریهـای فوریه برمبنای انتگرال لبگ را اساساً تکمیل کردنـد. همچنین باید از و. هـ. یانگ[4] یادکنیم که ثابت‌کردهرمجموعهٔ شمارشپذیر با هرساختاری‌که داشته باشد یك مجموعهٔ یکتایی است، وبدین ترتیب‌کار استقرای فرامتناهی را یکسره‌کرد. اما روشهایی‌که دراینجا به‌کاربسته می‌شد، بازهم دراساس ادامهٔ روشهایی بودکه لبگ ازآنها استفاده‌کرده بود. این وضعیت، تا آنجاکه به‌سریهای فوریه مربوط می‌شود، کم و بیش تا تقریباً دهـهٔ ۱۹۲۰ ادامه داشت.

پیشرفتهای جدیدتر در قرن بیستم را با یك مرور سریع آغاز می‌کنم.

پیش‌ازهمه، باید ازهاردی و لیتلوود نام برد ــ که به‌رغم تلفظ مجزای نامهایشان، در

1. Fejér 2. de la Vallée-Poussin 3. Fatou
4. W. H. Young

این مبحث یك نـام واحد بـه‌شمارمی‌آیند. هاردی و لیتلوود عملا چیزی دراین‌زمینه برای بررسی باقی‌نگذاشتند. این دو یا به‌کارگیری ایده‌های کلاسیك، هرچیزی راکه می‌شد بدون فراتر رفتن از این ایده‌ها ثابت کرد، ثابت‌کردند. (لکن بعدها خودشان پا را ازاین ایده‌ها فراتر گذاشتند. با بخش ۶ در زیرمقایسه‌کنید.) پس از این‌دو به‌کولموگوروف می‌رسیم که نشان داد تابع انتگرالپذیری وجود دارد کـه سری فوریه‌اش همه‌جا واگراست. البته این نتیجه مؤیـد اهمیت جمع‌پذیری درنظریهٔ سریهای فوریـه‌گردید. چندین ریاضیدان برجستهٔ دیگر نیز دراین زمینه‌کارکرده‌اند، اما از این میان مایلم دونفر را نام ببرم‌کـه تأثیرقـابل ملاحظه‌ای برجای‌گذاشته‌اند، هرچندکه اهمیت‌کارهای‌آنها تنها پس ازمرگ زود هنگامشان روشن‌شد. یکی‌ازاین‌دو پالی[1] ودیگری مارکینکیویچ[2] است. پالی به‌اتفاق هاردی ولیتلوود با معرفی برخی دیدگاههای جدیدکه بعضاً مبتنی برروشهای به‌اصطلاح مختلط بودند، نتایج قبلی این مبحث را تعمیم داد. اهمیت‌کارهای مارکینکیویچ را محتملا نمی‌توان با یادآوری قضایای خاص به‌قدرکافی توضیح داد. هرچندکه او قضایایی اساسی به‌دست‌آورد، و مسائل دشواری را حل‌کرد، سهم عمدهٔ او درابداع روشهای تازه بود. فکرمی‌کنم او بینش هندسی بسیار روشنی داشت. به‌گمانم این احساس درمن هست‌که روشهای اوهنوز هم اهمیت خود را ازدست نداده است.

اکنون به‌پیشرفتهای قرن بیستم درچندین زمینه می‌پردازیم.

۲. توابع مزدوج

اینکه به‌ازای هر f در L^2 تابـع مزدوج $\tilde{f}(x)$ تقریبـاً همه‌جـا وجـود دارد، نتیجه‌ای قدیمی از آن لوزین[3] است. وجود $\tilde{f}$ به‌ازای یك تابع انتگرالپذیر دلخواه f حکمی است که پریوالوف[4] آن را ثابت‌کرد. به‌عبارت دیگر، این حکم می‌گویدکه مقدار اصلی انتگرال تعریف کنندهٔ $\tilde{f}$، به‌ازای یك تابع دلخواه انتگرالپذیر به‌مفهوم لبگ، دارای معنی است.[5]

این حقیقت اساسی را مدیون مـارسل ریس[6] هستیم که در ۱۹۲۷ ثابت‌کرد هرگاه $f(x)$ در L^p، $1<p<\infty$، باشد، آنگاه $\tilde{f}(x)$ نیز در L^p است و

1. Paley 2. Marcinkiewicz 3. Lusin
4. Privalov

۵. به‌عبارت دقیق، پریوالوف ثابت‌کردکه هرگاه $f\in L^p[0,2\pi]$ که $1\leq p<\infty$ ، آنگاه $\tilde{f}$ تقریباًهمه‌جا وجود دارد. برای دیدن اثباتی براین‌قضیه، وچند قضیهٔ‌مربوط به‌آن‌که نویسنده دراین بخش به‌آنها اشاره می‌کند، به‌کتاب

Butzer, P.L., Nessel, R.J. *Fourier Analysis and Approximation*, Birkhauser Verlag, 1971 Vol I , 335-336.

رجوع کنید.ـم.

6. Marcel Riesz

$$\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \qquad (۶)$$

که درآن A_p تنها وابسته به p است. (البته حـالت $p=2$ از پیش شناخته شده بود. این نتیجهٔ بلافصلی ازقضیهٔ پارسوال[1] است‌کـه دربخش ۵ زیر به‌آن اشاره می‌کنیم.) از (۶) به‌سادگی نتیجه می‌شودکه دنبالـهٔ مجموعهای جزئی $S_n[f]$ نسبت به‌متریك L^p به f میل می‌کند

$$\|S_n - f\|_p \to 0 \quad \text{هرگاه} \quad n \to \infty \qquad (۷)$$

(همچنین به‌طورهم زمان نتیجه می‌گیریم‌که $\|\tilde{S}_n - \tilde{f}\|_p \to 0$، کـه درآن $\tilde{S}_n$ نمایانگر مجموع جزئی سری مزدوج است.)

نامساوی (۶) به‌ازای $p=1$ یا $p=\infty$ برقرار نیست. شایسته است برای حالت $p=1$ تذکرمخصوصی بدهیم، چون‌که این مورد به مفهوم بسیارمهم انتگرالپذیری ضعیف منجرمی‌شود. کولموگوروف (۱۹۲۲) نشان داده است‌که هرچند $\tilde{f}(x)$ لزوماً انتگرالپذیر نیست، خاصیت ضعیفتری دارد وآن‌اینکه مجموعهٔ‌نقاطی چون x به‌طوری‌که $|\tilde{f}(x)|>y$ دارای اندازه‌ای است‌کمتر از مضرب ثابتی از $\|f\|_1/y$.

۳. روشهای مختلط

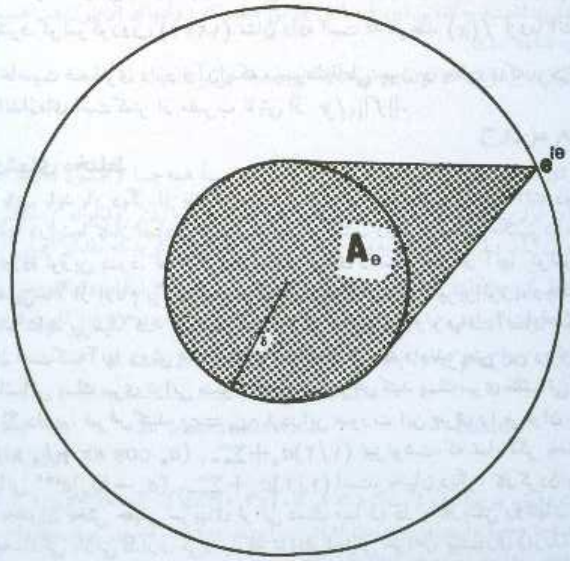
در این باب باید بار دیگر از یك نام دسته جمعی یاد کنم: مکتب روسی. البته دسته جمعی بودن نامها دراینجا کاملا تصادفی است. اما ببینیم مکتب روسی چیست؟ مکتب روسی اساساً دست‌پروردهٔ لوزین بـود. او شاگردان بسیار مبرزی داشت. یکی از آنها کولموگوروف بودکه همین‌حالا از اونام بردیم. جز او افرادی چون منشوف[2]، پریوالوف، وچند نفردیگر هم بودند. شاید بپرسید کـه اهمیت مکتب روسی درچیست، و رهیافت‌آنـان چگونه بود. پاسخ‌آن است‌کـه‌آنها روش به اصطلاح مختلط را توسعه دادند، یعنی این روش‌که به‌یك سری مثلثـاتی یـك سری توانی منسوب کنیم. مثلا فرض‌کنید یـك سری مثلثـاتی کلی چون $\sum c_n e^{inx}$ داریم. فرض‌کنید $c_{-n}=\bar{c}_n$؛ دراین صورت این سری را می‌توان به‌صورت $(1/2)a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)$ نیز نوشت، که نمایانگر بخش حقیقی سری‌توانی $(1/2)a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)e^{inx}$ است. به‌بیان دیگر، کارکردن باسریهای مثلثاتی به‌عنوان بخش حقیقی سریهای توانی دست مـا را در به‌کاربستن روشهای متغیرهای مختلط به‌سادگی بازمی‌گذارد. می‌دانیدکه توابع تحلیلی خواص بیشماری دارند، ویکی از کارهـای اصلی مکتب روسی بررسی بسیار جامعی بود که در مورد خواص مقدار کرانه‌ای توابعی تحلیلی‌که درقرص یکه تعریف شده‌اند به عمل‌آوردند. نتایج اصلی این بررسی چه

1. Parseval 2. Menshov

بود؟ یکی نتیجهٔ پریوالوف در مورد $\bar{\partial}$ بودکه در بالا در ارتباط با توابع مزدوج به‌آن اشاره‌کردیم. پیشرفت دیگر به‌دست خود لوزین بود. پیش‌از اومعمولاگرایش شعاعی یا غیر مماسی به‌کرانه را درنظر می‌گرفتند. حال فرض کنید مثلا $\varphi(z)$ی داریم‌که درون قرص یکه تعریف شده است. لوزین نخستین‌کسی بودکه مفهوم جدیدی راکه اصطلاحاً تابع مساحت خوانده می‌شود معرفی‌کرد. $0<\delta<1$ را ثابت می‌گیریم (شکل ۴)، وفرض می‌کنیم A_θ ناحیهٔ هاشورخورده باشد. دراین صورت تابع مساحت با

$$S(\theta)=\int_{A_\theta}|\varphi'(z)|^2\,d\sigma$$

تعریف می‌شود. لوزین نشان دادکه هرگاه $\varphi(z)=\sum c_n z^n$ و $\sum|c_n|^2<\infty$، آنگاه تابع بالا به‌ازای تقریباً هر θ متناهی است. امروزه می‌دانیم‌که متناهی بودن این انتگرال به‌ازای یك سری مثلثاتی کلی، معادل است با وجود حد غیرمماسی[1] (مگر درمجموعه‌ای از θها با



شکل ۴

۱. هرگاه ناحیهٔ هاشورخوردهٔ شکل ۴ را $A(\theta,\delta)$ بنامیم، بنابه‌تعریف می‌گوییم φ درنقطهٔ $e^{i\theta}$ دارای حدغیرمماسی ϕ است، اگر به‌ازای‌هر $0<\delta<1$ و هردنبالهٔ (z_n) ازنقاط $A(\theta,\delta)$ ←

اندازهٔ صفر)؛ و بدینسان تابع مساحت به‌ابزار بسیار مهمی در مطالعهٔ سریهای مثلثاتی مبدل شده است.

۴. مجموعه‌های یکتایی و چندگانگی

اکنون ببینیم‌که منشوف دراین میان چه‌کرد. کارهای او با مسائل یکتایی سروکار داشت. و. د. یانگ با تعمیم قضایای قبل نشان دادکه هرمجموعهٔ شمارشپذیر یك مجموعهٔ یکتایی است. در اینجا بودکه سؤالی‌کاملا طبیعی پیش‌آمد، وآن اینکه درمورد مجموعه‌هایی‌که یکتایی نیستند چه می‌توان‌گفت. منشوف اولین‌کسی بودکه ثابت‌کرد مجموعه‌هایی بااندازهٔ صفر ـ وحتی‌کامل ـ وجود دارندکه مجموعهٔ یکتایی نیستند. او بررسی مسائلی راآغاز کرد که هنوزخیلی زود است کارشان را تمام شده بدانیم. اوثابت‌کرد مجموعه‌هایی یکتایی با توان پیوستار (ولی لزوما با اندازهٔ صفر) وجود دارند. اما حتی هنوزهم برما معلوم نشده است‌که چه مجموعه‌های با اندازه صفری از این ویژگی برخوردارند. خود منشوف نشان داد مجموعه‌های خاصی با اندازهٔ صفرهستندکه مجموعهٔ یکتایی نیستند. به‌بیان دیگر، اینها مجموعه‌های چندگانگی[1]اند، به‌این مفهوم‌که سری مثلثاتی‌ای وجود داردکه خارج آنها به صفرمی‌گراید اما متحد با صفرنیست.

درضمن مطالب بالا مؤیدآن‌است‌که پیشرفت دراین زمینه درمقایسه بازمینه‌های دیگر ازموفقیت نسبی‌کمتری برخوردار بوده است. دیریکله وریمان سریهای مثلثاتی را به‌سوی نظریهٔ توابع یك متغیرحقیقی سوق دادند. لکن بررسیهای مکتب روسی، که برمبنای‌کارهای فاتو بود، سریهای مثلثاتی را به‌حوزهٔ متغیرهای مختلط کشانید. با تمام این حرفها، سریهای مثلثاتی ارتباطات بیشتری با حوزه‌های دیگر ریاضیات، به‌ویژه نظریهٔ اعداد، پیداکرده‌اند. هرگاه‌سری مثلثاتی $\sum c_n e^{inx}$ رادرنظربگیریم، خواهیم دیدکه‌آنچه دراینجاواقعاً مهم‌است، رفتارحاصل‌ضرب nx به‌هنگ 2π است. به عبارت دیگر، سریهای مثلثاتی، تاآنجاکه به رفتارشان مربوط می‌شود، بستگی شدیدی با خواص دیوفانتی اعداد دارند. تا به‌حال نتایج خاص بسیار درخشانی دراین باب به‌دست‌آمده است[1]، اما این موضوع درمقایسه بامباحث دیگرکمتر ثمربخش بوده (به‌گمانم این احساس شخصی خود من باشد) ومحتملا پژوهشهای آینده به‌آن‌تعلق خواهد داشت. درواقع‌کاربردهای زیادی ازسریهای مثلثاتی درنظریهٔ‌اعداد وجود دارد؛ برای نمونه می‌توان آنها را درکارهای‌وینوگرادوف[2] یافت. لکن کاربردهای نظریهٔ اعداد درسریهای مثلثاتی نسبتاً ناچیز است.

→ که به $e^{i\theta}$ میل کند داشته باشیم $\lim_n\varphi(z_n)=\phi$. برای ملاحظهٔ بحث کوتاه ولی بسیار جالبی در این‌باره به

Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, 3d ed. McGraw-Hill Book Co., 1986, 239-245

رجوع کنید.ـم.

۱. یك نمونهٔ خوب، قضیهٔ زیراز سلم(Salem) و زیگموند است: با مفروض بودن $0<\xi<1$ ←

۵. درونیابی عملگرها

قضیهٔ پارسوال می‌گوید

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 dx$$

همچنین نامساوی زیر بدیهی است

$$|c_n(f)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|dx$$

بنابراین در مورد ضرایب فوریهٔ توابعی که در L^2 و نیز L^1 اند، چیزهایی می‌دانیم. اما مسئله این است: درمورد توابعی که در L^p اند، هنگامی که p لزوماً ۱ یا ۲ نیست، چه می‌توان گفت؟ حکم اساسی در اینجا چیزی است که اصطلاحاً قضیهٔ هاوسدورف ـ یانگ خوانده می‌شود. با استفاده از نرمهای

$$\|c\|_{p'} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^{p'}\right)^{1/p'} \quad \text{و} \quad \|f\|_q = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^q dx\right)^{1/q}$$

این قضیه اساساً می‌گوید که

$$\|c\|_{p'} \leqslant \|f\|_p$$

که در آن p عددی بین ۱ و ۲، و $p' = p/(p-1)$ اندیس مزدوج p است (به‌طوری که $1/p + 1/p' = 1$). این بخشی از قضیهٔ هاوسدورف-یانگ است. یادم می‌آید هنگامی که مقالهٔ هاوسدورف را می‌خواندم (من هیچوقت مقالهٔ یانگ را نخواندم ـ او این قضیه را تنها برای مقادیر خاصی از p ثابت کرد)، به‌شدت تحت تأثیر آن قرار گرفته بودم، اما هرگز آن را نفهمیدم، چراکه مقاله‌ای بسیار تکنیکی بود. در واقع، ظرافت و عمق استدلال

"مجموعهٔ کانتور" C_ξ را بر $[0, 2\pi]$ چنین تشکیل می‌دهیم که ابتدا بازهٔ بازی به‌طول $2\pi/\xi$ از وسط آن برمی‌داریم، سپس بازه‌های بازی به‌طول $2\pi/\xi^2$ از وسط هر یک از بازه‌های بستهٔ حاصل حذف می‌کنیم، این کار را تکرار می‌کنیم. دراین صورت C_ξ (که از اندازهٔ صفر است) یک مجموعهٔ یکتایی است اگر و تنها اگر ξ یک عدد صحیح جبری باشد که همهٔ مزدوجهایش قدرمطلقی کوچکتر از ۱ داشته باشند (یعنی کوچکترین عدد صحیح n، و اعداد صحیح $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ی وجود دارند به طوری که $\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \ldots + a_n = 0$، و بقیهٔ $n-1$ ریشهٔ $x^n + \ldots + a_n = 0$ قدرمطلقی کوچکتر از ۱ دارند). درحالت خاص، مجموعهٔ کانتور کلاسیک C_3 یک مجموعهٔ یکتایی است، حال آنکه مجموعهٔ «شهوداً نحیفتر» $C_{5/2}$ چنین نیست. به‌اعتقاد من، این نتیجه‌ای بسیار شگفت‌انگیز است. ـ ویراستار انگلیسی.

2. Vinogradov

او تحسین‌کردنی بود، اما نمی‌شدگذر از ۱ و ۲ به p کلی را حقیقتاً درک کرد (این احساس خود من است).

برهان جدیدی براین قضیه را مارسل ریس ارائه داد. این اثبات نیز پیشرفت بسیار مهمی درنظریهٔ آنالیز تابعی بود. ریس نشان داد که قضیهٔ هاوسدورف ـ یانگ صرفاً حالت خاصی از یک قضیهٔ بسیارکلی درباب درونیابی عملگرهای خطی است. اثبات او نه‌تنها به خاطر این حسالت خاص حائز اهمیت بود، بلکه ازاین جهت مورد توجه قرارگرفت که دیدگاهی کاملاً کلی درموردکاربردهای نظریهٔ عملگرها به‌دست می‌داد. اینک، هرگاه دونامساوی بین نرمها (مثلاً $\|c\|_2 \leqslant \|f\|_1$ و $\|c\|_\infty \leqslant \|f\|_2$) را درنظر بگیریم، می‌توانیم به‌پیروی از روش مارسل ریس به‌طور تقریباً خودکار بین این دومقدار درونیابی کنیم (یعنی $\|c\|_{p'} \leqslant \|f\|_p$ را به‌دست آوریم). به‌اعتقاد من (البته هرکس برای خودش عقیده‌ای دارد) این قضیه یکی ازجالبترین وبرجسته‌ترین نتایج درآنالیز است، ولو اینکه تنها به‌خاطر نشان دادن دیدگاهی کلی چنین باشد.

در همین باب به‌قضیه‌ای از مارکینکیویچ برمی‌خوریم. قضیهٔ مارسل ریس با وجود اهمیتش همواره قابل استفاده نیست، زیراگاهی اوقات نتیجهٔ حاصل از درونیابی صوری بین دو نامساوی برحسب نرمها درست است، بی‌آنکه خودآن دو نامساوی برقرارباشد. به بیان دیگر، ممکن است تابع مورد نظر لزوماً درمفروضات قضیهٔ مارسل ریس صدق نکند، ولی نتیجهٔ قضیه باز هم درست باشد. این مارکینکیویچ بود که قضیه‌ای خیلی کلیتر در این‌باره به‌دست آورد. قضیهٔ او نه فقط به‌خاطر کلیتش جالب است، بلکه ازاین‌جهت مهم است که در اثبات مارسل ریس، متغیرهای مختلط نقش بیش از اندازه مهمی دارد. شما واقعاً نمی‌فهمید که چه اتفاقی دارد می‌افتد. قضیهٔ سه دایره را به‌کارمی‌برید ومی‌بینید که نتیجه به طورشسته ورفته به‌دست می‌آید. ولی حقیقتاً چه‌رخ‌می‌دهد؟ نمی‌دانید. اما اثبات مارکینکیویچ این برتری را دارد که درآن می‌توان آشکارا دیدکه چه بخشهایی از توابع در نتیجهٔ کار سهیم‌اند.[1]

۶. قضیهٔ ماکسیمال هاردی ولیتلوود

این قضیه اهمیتی قابل ملاحظه و ماندگار دارد، و معرف دیدگاهی است که در بسیاری پیشرفتهای آنالیز دخیل بوده‌است. تابع موضعاً انتگرال‌پذیر یک‌متغیرهٔ $f(x)$، ومقدارمیانگین آن یعنی

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$$

۱. پروفسور زیگموند خود ازجمله کسانی است که روش مارکینکیویچ را تکمیل کرده‌اند. به‌مقالهٔ Zygmund, A.; "On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operators," *J. Math. Pures. Appl.* 35(9), 1956, 223-248 رجوع کنید.ـم.

را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که با میل h به ۰، این انتگرال (هرگاه f صرفاً در L^1 باشد، تقریباً همه‌جا) به $f(x)$ میل می‌کند؛ لکن اندیشهٔ هاردی و لیتلوود این بود که به‌جای حد گرفتن، تابع

$$\sup_{h>0} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|dt$$

را درنظر بگیرند. این همان است که اصطلاحاً تابع ماکسیمال هاردی و لیتلوود خوانده می‌شود. آنها نتایج بسیارجالبی در مورد این تابع به‌دست آوردند. کارکردن با این تابع به مراتب ساده‌تر از تابع حدی است. هاردی و لیتلوود چندخاصیت اساسی این تابع ماکسیمال را ثابت کردند، خواصی که بعدها به‌ابعاد بالاتر تعمیم پیداکردند و همان‌گونه که می‌دانیم امروزه نقش مهمی در آنالیز نوین بازی می‌کنند.[1]

ضمناً باید حقیقتی را بگویم که محتملا تابه‌حال از نظرها پوشیده مانده است. اندیشهٔ درنظرگرفتن سوپرموم به‌جای حد، و به‌بیان دیگر درنظرگرفتن عبارتی مثل $S_{n(x)}(x)$ به جای $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$، اساساً در مقاله‌ای قدیمی از هرمان وایل آمده است، که در آن او همگرایی سریهایی متعامد را درنظر می‌گیرد [۱]. متأسفانه آن مقاله جوهرگرانقدر این اندیشه را به‌اندازهٔ کافی نشان نمی‌دهد.

من ازچندقضیه از هاردی و لیتلوود نام بردم بی‌آنکه صورت هیچ‌یك از آنها را بیان کنم. دراینجا اجازه می‌خواهم که وارد جزئیات نشوم، اما درپایان مایلم موضوعی را ذکر کنم که درجوانی خیلی به‌آن علاقه‌مند شده بودم، و باکمال تأسف این علاقه بعدها به‌هیچ نتیجه‌ای نرسید. آن موضوع، مسئلهٔ همگرایی ورفتار یك‌سری متعامدکلی است. بین سالهای ۱۹۱۰ تا ۱۹۳۰ مقالات متعددی دربارهٔ سریهای متعامدکلی مانند $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$، معمولا با فرض اینکه $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2<\infty$، نوشته می‌شد. ویژگی این سریها چه بود؟ اگر درست به‌خاطر بیاورم، امید می‌رفت که با حل مسئلهٔ همگرایی سریهای متعامدکلی بتوان مسئلهٔ متناظرش را برای سریهای مثلثاتی، که البته مسئلهٔ اصلی بود و هرکس دوست داشت آن را حل کند، خودبه‌خود حل کرد. به‌دلایلی آن روزها هنوز کاملا نفهمیده بودند که چنین امیدی آن‌قدرها بجا نیست، چراکه مفهوم یك دنبالهٔ متعامد کلی مستقل از ترتیب است. به عبارت دیگر، هرگاه قضیه‌ای راجع به‌سریهای متعامدکلی ثابت می‌کردیم، آنگاه می‌توانستیم قضایای متناظری برای سریهای مثلثاتی با ترتیب دلخواه به‌دست آوریم. یعنی می‌توانستیم چیزی درباب همگرایی نامشروط سریهای فوریه ثابت کنیم. این مبحث تنها همین اواخر به‌طور صریح مطرح شده است، ومحتملا یکی از مباحثی است که در آینده به‌آن خواهند

---

۱. دراباعاد بالاتر، گوی $B(x,h)$ جای بازهٔ $[x-h\ ,\ x+h]$ را می‌گیرد، و $2h$ با $\mu(B(x,h))$ عوض می‌شود. نقش مهمی که نویسنده به‌آن اشاره می‌کند، مثلا ناشی از قابلیتی است که این تابع در بررسی مشتقات توابع روی فضاهای اقلیدسی، از دیدگاه نظریهٔ اندازه دارد. مفهوم نقطهٔ لبگی نیز ازهمین تابع الهام گرفته شده است.ـم.

پرداخت! مثلا یك سؤال این است که هرگاه ترتیب جملات یك سری مثلثاتی را به‌نحوی دلخواه تغییردهیم، ویژگیهای همگرایی آن چه خواهد بود؟ دراین مورد برخی نتایج منفی دردست است. فکرمی‌کنم زاهورسکی[1] بودکه در ۱۹۶۰ ثابت کرد سری فوریهٔ یك تابع در L^2 ممکن است با تجدیدآرایش مناسب جملاتش تقریباً همه‌جا واگرا شود.

اما نتایج قطعی بسیارنادرند. اینك این پرسش پیش می‌آیدکه هدف از این همه پژوهش درباب همگرایی نامشروط چیست؟ این بستگی به‌سلیقهٔ افراد دارد. ومن؟ من هم آن را می‌پسندم، واین پایان سخن است.

مراجع

1. Jerosch, F., and H. Weyl, "Uber die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten," *Math.Ann.*, **66** (1909), 67-80.
2. Zygmund, A., *Trigonometric Series*, 2nd ed., Cambridge University Press, New York, 1959.

---

1. Zahorski

س. ا. رابرتسون

قضیهٔ اویلر درمورد چند وجهیها•

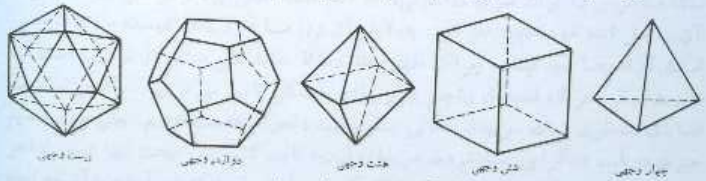
ترجمهٔ فرشته ملك

۱. اجسام افلاطونی و ارشمیدسی

با کمی فکر درمورد اهرام مصر، درمی‌یابیم که هزاران سال است که چند وجهیهای محدب شناخته شده و مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. اولین مطالعهٔ جدی روی چند وجهیهای محدب، به‌عنوان اشیای ریاضی، در یونان و به‌احتمال قریب به‌یقین توسط «تیه‌تتوس»[1] آغاز شد. کارهای او برروی پنج چند وجهی منتظم محدب محتوای کتاب سیزدهم اصول اقلیدس را تشکیل می‌دهد[۹].

پنج چند وجهی منتظم محدب عبارتنداز: چهاروجهی، مکعب (یاشش وجهی)، هشت‌وجهی، دوازده وجهی، وبیست وجهی که تصویر آنها را درشکل ۱.۱ می‌بینید.

این اشیاء به‌عنوان پنج جسم منتظم ویا پنج جسم افلاطونی نیزمعروف‌اند. نامگذاری



شکل ۱.۱ اجسام منتظم.

• Robertson S. A "Euler theorem on Polyhedra," *Proceedings of the 14th Annual Iranian Mathematics Conference*, 1983, 11-35.

1. Theaetetus

اخیر به‌دلیل بحثی نسبتاً مفصل درمناظرهٔ افلاطون و تیمائیوس[1] است [۲۶].

بنا به‌روایت اقلیدس، فیثاغورسیان یامکعب، چهاروجهی ودوازده‌وجهی آشناتر بوده‌اند، اما (ساختن) هشت وجهی و بیست وجهی از آن تیه‌تتوس است [۹].

دستهٔ دیگری از چند وجهیهای محدب بسیارمنتظم به‌عنوان خانوادهٔ اجسام ارشمیدسی شناخته می‌شوند. بنا به‌گفتهٔ پاپوس [۹] این چند وجهیها را ارشمیدس توصیف کرده است، ولی اثری ازکارهای ارشمیدس دراین خصوص باقی نمانده است. سیزده جسم ارشمیدسی وجود داردکه می‌توان آنها را همانند اجسام افلاطونی بااصطلاحاتی موقتی به‌شرح زیر مشخص کرد.

یادآوری می‌کنم که یك چند وجهی محدب بخشی محدب وفشرده از فضای سه بعدی اقلیدسی است که توسط تعدادی متناهی صفحهٔ مسطح مرزبندی شده است. مرزهای این‌گونه چند وجهیها (ی محدب) عبارت‌اند از: **وجوه** مسطح دو بعدی، **یالهای** یك بعدی، و نقاط گوشه‌ای یا **رئوس** صفر بعدی.

اجسام افلاطونی تنهاچند وجهیهایی (محدب) هستندکه وجوهشان چند ضلعیهای‌منتظم و محدب یکسان‌اند، و گروه تقارنهای آنها روی مجموعهٔ رئوس آنها به‌طور متعدی عمل می‌کند. اجسام ارشمیدسی تنها چندوجهیهایی (محدب) هستندکه‌وجوه آنها از چندضلعیهای منتظم نایکسان تشکیل شده است، وگروه تقارنهای آنها روی مجموعهٔ رئوس به‌طور متعدی عمل می‌کند، مگردرمورد منشورها و ضد منشورها.[2]

اگر یك جسم ارشمیدسی که دارای m تا α وجهی منتظم و n تا β وجهی منتظم و... است را با $(m_\alpha, n_\beta, \ldots)$ نشان دهیم، آنگاه سیزده جسم ارشمیدسی عبارتند از:

$$A_1=(4_3, 4_6)\ ,\ A_2=(8_3\ ,\ 6_4)\ ,\ A_3=(6_4\ ,\ 8_6)\ ,\ A_4=(8_3\ ,\ 6_8),$$

$$A_5=(8_3\ ,\ 18_4)\ ,\ A_6=(12_4\ ,\ 8_6\ ,\ 6_8)\ ,\ A_7=(20_3\ ,\ 12_5\ ),$$

$$A_8=(12_5\ ,\ 20_6)\ ,\ A_9=(20_3\ ,\ 12_{10})\ ,\ A_{10}=(32_3\ ,6_4)\ ,$$

$$A_{11}=(20_3\ ,30_4\ ,12_5)\ ,\ A_{12}=(30_4\ ,\ 20_6\ ,\ 12_{10})\ ,$$

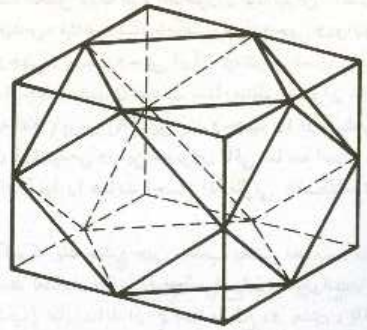
$$A_{13}=(80_3\ ,\ 12_5)\ ,$$

هرون اسکندرانی[3] درقرن اول بعد از میلاد می‌نویسد: افلاطون ازاین اجسام دوتایشان را می‌شناخته است و نوشته‌هایش به A_2 ویکی از A_3 یا A_4 اشاره دارد. اولین اینها، که نزد عامه به‌شکل یك وزنهٔ کاغذ شیشه‌ای مشهوراست، درشکل ۲.۱ به‌نمایش درآمده، و در آن

1. Timaeus

۲. منشور و ضد منشور بزودی در همین مقاله تعریف می‌شوند.م.

3. Hero of Alexandria



شکل ۲.۱ جسم ارشمیدسی A_2 که دریك مکعب محاط شده‌است.

بدچگونگی ساخته شدنش به‌عنوان یك‌مکعب تراش داده شده نیز اشاره شده‌است.

حال،برخی خواص ترکیبیاتی اجسام‌افلاطونی‌را بررسی‌می‌کنیم. به‌ویژه، می‌خواهیم اعداد V، تعداد رئوس، E، تعداد یالها، و F تعداد وجوه‌را درهرحالت شمارش کنیم.حاصل این تمرین ساده درجدول ۳.۱ دیده می‌شود.

دو نکته را می‌توان مورد توجه قرارداد. اول آنکه سطر اعداد مربوط به‌چهاروجهی، متقارن است، درحالی‌که، سطرهای دوم وسوم و همچنین سطرهای چهارم و پنجم معکوس یکدیگرند. دوم آنکه، رابطهٔ $V-E+F=2$ درهرسطرصدق می‌کند.

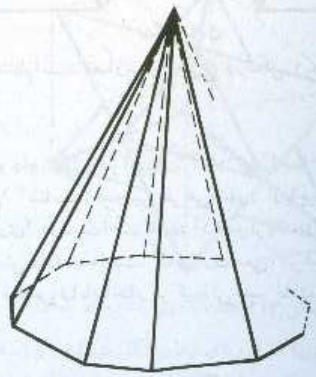
هیچ مدرکی‌مبنی براطلاع یونانیان ازرابطهٔ اخیروجودندارد. همچنین تقارن‌درونی این جدول (علاوه برتقارن داخلی چهار وجهی) تاقبل از شروع قرن نوزدهم (از طریق

جدول ۳.۱

	V	E	F
چهاروجهی	۴	۶	۴
شش وجهی	۸	۱۲	۶
هشت وجهی	۶	۱۲	۸
دوازده وجهی	۲۰	۳۰	۱۲
بیست وجهی	۱۲	۳۰	۲۰

کارهای ژرگونه[1]) بخوبی شناخته شده بود.

به‌عنوان یك تمرین مفید می‌توان تحقیق کرد که رابطهٔ $V-E+F=2$ برای چند-وجهیهای محدب دیگرنیز برقراراست. مثلا، یك هرم باقاعدهٔ n ضلعی محدب را همانگونه که درشکل ۴.۱ نشان داده شده‌است، درنظر بگیریم. در این‌صورت $V=n+1=F$، و $E=2n$. درنتیجه، $V-E+F=(n+1)-2n+(n+1)=2$.

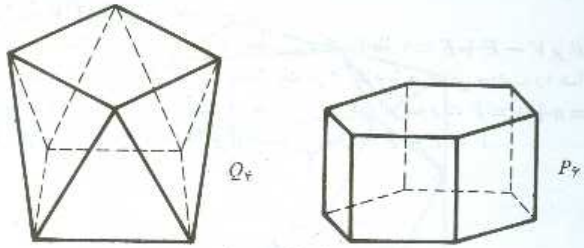


شکل ۴.۱ هرم باقاعدهٔ چندوجهی.

تمرین ۵.۱ تحقیق کنیدکه رابطهٔ $V-E+F=2$ برای همهٔ اجسام ارشمیدسی برقرار است.

تذکر: منشورها وضد منشورها که قبلا به‌آنها اشاره شد، اشیایی به‌شکل زیرند. یك n ضلعی‌منتظم محدب دلخواه را درنظر بگیریدکه طول اضلاع آن S است. حالا منشور قائم P_n را روی این قاعده به‌ارتفاع S بسازید. دراین‌صورت، P_n دووجه n ضلعی منتظم و n وجه مربع شکل دارد. مثلا، P_4 یك مکعب است. برای ساختن ضد منشور نظیر آن، Q_n، قاعدهٔ بالای P_n را به‌اندازهٔزاویهٔ π/n حول مرکزش دوران‌می‌دهیم وسپس فاصلهٔوجه‌های بالا وپایین‌را به‌گونه‌ای تنظیم می‌کنیم که وجوه جانبی مثلثهای‌متساوی‌الاضلاع شوند. مثلا،

1. Gergonne

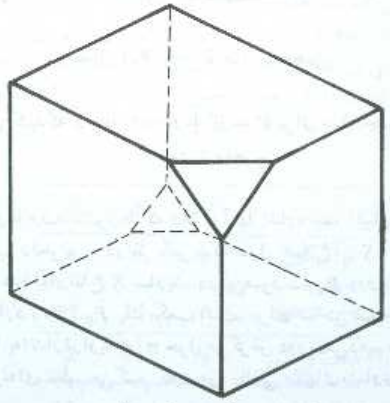


شکل ۵.۱

Q_3 یك هشت وجهی منتظم است. تصاویر P_6 و Q_4 درشکل ۵.۱ نشان داده شده‌اند.

۲. فرمول دکارت

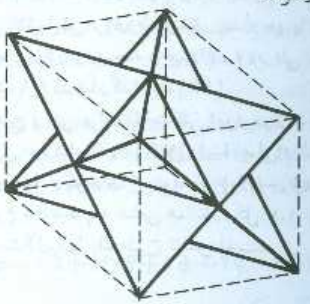
هر نقاش پیرو لئوناردو داوینچی با طراحیهای "آزاد" او از اجسام منتظم در رسالهٔ نسبت مقدس (۱۵۰۹) اثر پاچیولی[1] آشناست. همچنین طرحی مشهور از پاچیولی و شاگردش، دوك اوربینو، اثر جاکوپو دی باربری[2] در دست است که در آن تصویر یك دوازده وجهی و جسم ارشمیدس A_5 به طرز جالبی نمایش داده شده است. کنده‌کاری مسی آلبرشت دورر[3] به نام فلانچولیا ۱ (۱۵۱۴)؛ چندوجهی محدبی را با ساختار ترکیباتی جسم نشان داده‌شده درشکل ۱.۲، نشان می‌دهد.



شکل ۱.۲ مکعب تراش داده شده.

1. Pacioli 2. Jacopo de Barbari 3. Albrecht Dürer

درطی قرن شانزدهم تا اوایل قرن هفدهم، این کپلر بود که تحقیقات بلند نظرانه‌ای درمورد چند وجهیهای محدب (و غیرمحدب) به‌انجام رسانید. به‌ویژه او سعی کرد که اجسام منتظم را به‌مدارسیارات (شناخته‌شده) مربوط سازد. کار او در *Mysterium Cosmographicum* (۱۵۹۶) و *Harmonice Mundi* (۱۶۱۹) آمده‌است. کپلر همچنین سه جسم غیرمحدب بسیارمنتظم ارائه کرد [۴]. یکی از این اجسام که به‌نام **هشت وجهی ستاره‌ای** معروف است، درشکل ۲.۲ نشان داده‌شده‌است. این جسم را می‌توان اجتماع دو چهار وجهی منتظم محاط‌شده دریك مکعب تصور کرد.



شکل ۲.۲ هشت وجهی ستاره‌ای کپلر.

بدین‌ترتیب، چند وجهیها دراروپای زمان دکارت (۱۵۹۶–۱۶۵۰)، وجه مشخصهٔ مسائل فکری بود. درحقیقت، دکارت تعدادی قضیه درمورد هندسه وساختار ترکیباتی چند وجهیهای محدب کشف کرد که فرمول اویلر $V-E+F=2$ به‌سرعت از آنها نتیجه‌می‌شد. اما، هیچ مدرکی دردست نیست که نشان‌دهد دکارت چنین رابطه‌ای‌را درنظر داشته، ویاحتی ازاین فرمول آگاهی داشته است.

نتایج بررسیهای دکارت در نوشته‌ای تحت عنوان اجسام فضایی[1] آمده، که اکنون گم‌شده است. برای ما مایهٔ خوشبختی‌است که لایب‌نیتس درطی دیدارش از پاریس دربین سالهای ۱۶۷۲و۱۶۷۶ یك‌کپی ازاین نوشته تهیه‌کرد، وزمانی که کنت فوشه[2] کشفیات‌اورا در۱۸۵۹ منتشرساخت، این کپی‌را درمیان مقالات درهانوربیداکرد. یك‌نسخهٔ تصحیح شدهٔ آن درسال بعد توسط پروهه[3] به‌چاپ رسید [۲۸].

ای. دوژانکوبیرز[4] رابطهٔ اویلررا به‌نیابت دکارت به‌صورت مجموعه‌ای ازمقالات درسال ۱۸۹۰ به‌چاپ رساند [۱۲،۱۳،۱۴].

دراینجا، مانمی‌خواهیم درمورد جزئیات نتایج دکارت بحث کنیم. اما، بخش بعد اختصاص به‌استدلال لژاندردارد که شامل همهٔ پیشنیازهای لازم درمثلثات کروی نیزهست.

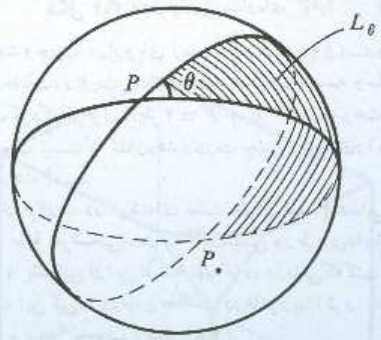
1. *De Soidorum Elementis* 2. Count Foucher de Carcil
3. E. Prouhet 4. E. de Jonquieres

معمولا عبارت «فرمول دکارت» را برای نتیجهٔ زیر به‌کار می‌برند. یك چند وجهی محدب را در نظر بگیرید. مجموع زوایای وجوه در هر رأس می‌باید کمتر از 2π، مثلا $2\pi-\delta_i$ باشد. دکارت نشان داد که $\sum_i \delta_i = 4\pi$.

۳. سهم اویلر

کشف فرمول اویلر $V-E+F=2$، درسال ۱۷۵۰ اتفاق افتاد. ظاهراً اویلر این رابطهٔ بین V، E و F را درطی تلاشهایش برای طبقه‌بندی چند وجهیها مورد توجه قرارداد. او این کشف (وحقایق بسیاردیگری درمورد چند وجهیها) را در طی نامه‌ای که تاریخ آن ۱۴ نوامبرهمان سال است، باگلدباخ درمیان گذاشت [۱۶].

در آن زمان، اویلرهیچ راهی برای اثبات کلی این فرمول نداشت، اما درسال ۱۷۵۲، طرحی برای استدلال دراین مورد ارائه‌داد[۷،۶]. ایدهٔ اصلی او تقسیم چند وجهی به‌هرمهای متعدد وبرداشتن یکی‌یکی هرمها به‌گونه‌ای است که $V-E+F$ در هرمرحله ثابت بماند. در آخرین مرحله یك هرم باقاعدهٔ چند ضلعی همانند شکل ۱.۴ باقی می‌ماند. بنابراین، $V-E+F=2$. این استدلال تنها یك طرح ناقص است.



شکل ۱.۴ هلالها.

۴. مثلثات کروی

درسال ۱۷۹۴[۳۱]، لژاندر اثباتی برای قضیهٔ اویلر، حداقل درمورد چندوجهیهای محدب، ارائه داد. اثبات وی مبتنی بر یك قضیه در مثلثات کروی است که در اوایل قرن هفدهم

توسط ژیرار[1] ثابت شده بود. ما این قسمت را با اثبات قضیهٔ ژیرار آغاز می‌کنیم.

کرهٔ S به‌شعاع واحدرا درفضای اقلیدسی سه بعدی درنظر بگیرید. دراین صورت، هر دایرهٔ عظیمهٔ A روی S، آنرا به‌دو نیمکره بامساحتهای مساوی 2π تقسیم می‌کند. حال فرض کنید که B دایرهٔ عظیمهٔ دیگری باشد که A را در نقطهٔ P و نقطهٔ متقاطر آن P_* قطع می‌کند. اگر زاویهٔ تقاطع A با B، θ باشد، آنگاه مساحت هلال متناظر L_θ، که آن‌را با α_θ نشان می‌دهیم، با θ متناسب است. بنابراین، به‌ازای λ خاصی، $\alpha_\theta=\lambda\theta$. اما $\alpha_{\pi/2}=\pi=\lambda\pi/2$، پس $\lambda=2$. یعنی، مساحت L_θ برابر است با 2θ.

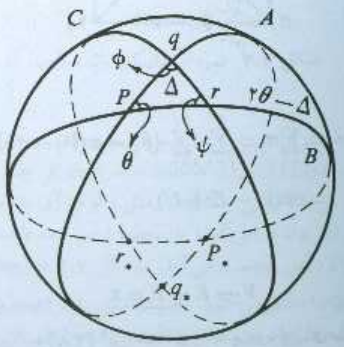
حال، فرض کنید که دایرهٔ عظیمهٔ سوم C، A را در q ومتقاطر آن q_*، و B را در r و متقاطر آن r_* قطع کند. بنابراین C، هلال L_θ را به‌دومثلث کروی Pqr و P_*qr بامساحتهای Δ و $2\theta-\Delta$ تقسیم می‌کند.

فرض کنیم ϕ و ψ زوایای داخلی مثلث Pqr به‌ترتیب در q و r باشند. به‌این ترتیب، دوایرعظیمهٔ A، B و C کرهٔ S را به‌هشت مثلث کروی تقسیم می‌کنند که اینها درواقع چهار جفت مثلث متقاطر بامساحتهای Δ و $2\theta-\Delta$ و $2\phi-\Delta$، و $2\psi-\Delta$ هستند. بنابراین مساحت کل کره عبارت است از

$$4\pi=2\Delta+2(2\theta+2\phi+2\psi-3\Delta)$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که

$$\Delta=(\theta+\phi+\psi)-\pi$$



شکل ۲.۴ مثلثهای کروی.

1. Girard

به‌عبارت دیگر، مساحت یك مثلث کروی عبارت است از "افزونی کروی"[1] آن. این قضیهٔ ژیرار است.

شکل کلیترِ این قضیه را بلافاصله می‌توان به‌دست آورد. فرض کنیم π مساحت یك چند ضلعی کروی بازوایای داخلی $\theta_1, \ldots, \theta_n$ باشد؛ دراین‌صورت

$$\pi = (\theta_1 + \cdots + \theta_n) - \pi(n-2)$$

(برای به‌دست آوردن نتیجهٔ اخیر، چندضلعی کروی داده شده‌را به‌مثلثهای کروی تجزیه، واز قضیهٔ ژیرار استفاده کنید.)

حال، مادرموقعیتی قراردارایم که می‌توانیم اثبات لژاندررا توضیح دهیم. فرض کنید P یك چند وجهی محدب و C نقطه‌ای دلخواه دردرون آن باشد. دراین صورت، می‌توانیم رئوس ویالهای این چند وجهی‌را به‌طورشعاعی از C روی‌سطح کرهٔ واحد به‌مرکز C تصویر کنیم. با این عمل، یك گراف (یاشبکهٔ) Γ روی‌کره به‌دست می‌آید که رئوس و یالهای آن درتناظر یك به‌یك بایالها ورئوس چند وجهی P است. اما، یالهای گراف Γ کمانهایی از دوایر عظیمهٔ کره‌اند و Γ کرهٔ S را به‌چند ضلعیهای کروی افرازمی‌کند، و به‌ازای هروجه P یك چند ضلعی کروی خواهیم داشت.

می‌توانیم این چندضلعیهای کروی‌را با $S_1, \ldots, S_F$ نمایش‌دهیم، که در آن F مطابق معمول تعداد وجوه چند وجهی P است. حال، فرض کنید چند ضلعی jام، S_j، دارای V_j رأس باشد وزوایای داخلی آن $\theta_{j1}, \ldots, \theta_{jV_j}$ باشند. در این صورت π_j، مساحت S_j، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{V_j} \theta_{ji} - \pi(V_j - 2)$$

و درنتیجه

$$4\pi = \sum_{j=1}^{F} \pi_j = \sum_{j=1}^{F} \sum_{i=1}^{V_j} \{\theta_{ji} - \pi(V_j - 2)\}$$
$$= 2\pi(V - E + F)$$

بنابراین

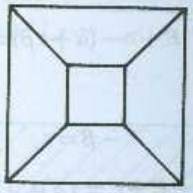
$$V - E + F = 2$$

درسال ۱۸۰۹، پوانسو[۲۸] این استدلال‌را به‌چندوجهیهای ستاره‌گون تعمیم‌داد. منظور ازستاره‌گون، چند وجهی‌ای است که نقطه‌ای برای آن وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که هر

۱. مقصود از افزونی کروی یك مثلث کروی، اضافی مجموع زوایای آن مثلث از "۱۸۰ است.ـم.

نیم خط خارج شده از آن، سطح چند وجهی را دقیقا در یك نقطه قطع کند. چند وجهیهای محدب ستاره‌گون‌اند، ولی چند وجهیهای ستاره‌گون دیگری‌هم هستندکه محدب نیستند مثلا، هشت وجهی ستاره‌گون کپلر. همچنین چهار چند وجهی (غیر محدب) کپلر - پوانسو نیز ستاره‌گون‌اند [۴].

استدلال لژاندرخیلی دلپذیراست، ولی در آن ازمفاهیم متریکی استفاده شده است، وهیچ اشاره‌ای به‌ویژگی ترکیبیاتی و توپولوژیکی قضیه در آن نیست. درسال ۱۸۱۱[۵]، کوشی بااتشاریك اثبات نسبتا متفاوت، گام بزرگی درپیشرفت این‌قضیه و کلاً خودتوپولوژی برداشت. ایدهٔ وی جداکردن یك‌وجه ازچند وجهی (محدب) P، وپهن کردن آن روی‌صفحه بود به‌گونه‌ای که ساختمان‌ترکیبیاتی چندوجهی حفظ. اماساختارمتریکی آن به‌دست‌فراموشی سپرده‌شود. این‌روش تقریبا شبیه به"تصویر گنجنگاری"[1] است. وتصویری از P ایجاد می‌کند که درآن یالها ورئوس، یك‌گراف یاشبکه روی صفحه تشکیل می‌دهند. نتیجهٔ این‌کار اساسا همان نمودارشلیگل[2]، P است [۴]. مثلا، اگر P یك‌مکعب باشد، گراف سطح آن‌ایزومورف باشکل ۳.۴ است.

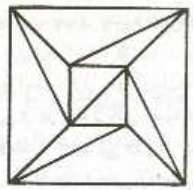


شکل ۳.۴ نمودار شلیگل یك مکعب.

چنین نموداری‌را می‌توان تعیین کنندهٔ ناحیهٔ محدب وفشرده‌ای درنظر گرفت که‌توسط یك خم مرزی خارجی محدود، وازدرون به‌تعداد $K = F - 1$ چند ضلعی افرازشده است. قدم بعدی‌کوشی تحویل هرچند ضلعی به‌مثلثها باوصل رئوس آن به‌رئوس غیرمجاوره، توسط پاره خطهای مستقیم‌بود. اگر n تا ازاین‌گونه پاره‌خطها رسم شده باشد، دراین‌صورت $k+n$ مثلث با $E+n$ ضلع و V رأس به‌دست می‌آید. به‌شکل ۴.۴ مراجعه کنید.

حال، یکی‌یکی‌مثلثهارا حذف‌می‌کنیم، وهمیشه مثلثی‌را برای‌حذف کردن‌انتخاب‌می‌کنیم که یك یا دو ضلع روی مرز خارجی به‌دست آمده داشته باشد. این روند را آنقدر ادامه می‌دهیم تا تنها یك مثلث باقی‌بماند. حال،فرض کنید α تعداد مثلثهایی باشدکه هنگام حذف‌شدن، یك ضلع روی محیط، و β تعداد مثلثهایی باشد که هنگام حذف شدن، دو ضلع روی

1. Stereographic projection 2. Schlegel



شکل ۴.۴ مثلث‌بندی کوشی.

محیط داشته‌اند. دراین‌صورت

$$K+n-(\alpha+\beta)=۱ \qquad (۱)$$

از آنجا که $\alpha+۲\beta$ ضلع حذف شده است

$$E+n-(\alpha+۲\beta)=۳ \qquad (۲)$$

وچون β رأس حذف شده‌است

$$V-\beta=۳ \qquad (۳)$$

از روابط (۱)، (۲)، و(۳) نتیجه می‌شود $K-E+V=۱$ وازآنجا که $F=K+۱$، خواهیم داشت

$$V-E+F=۲$$

یك نقطهٔ ضعف استدلال کوشی آن است که اوهیچ تعریف دقیقی ازچند وجهی ارائه نمی‌دهد. خطر این بی‌دقتی باکارهای لولیه کاملاً آشکارشدکه بعداً آن‌را توضیح‌خواهیم‌داد.

۵. استثناهای قضیهٔ اویلر

ریاضیدان سویسی س. ا. ژ. هولیه (یالولیه[1])، در سال ۱۸۱۳ شرح مهمی دربارهٔ قضیهٔ اویلر منتشر کرد [۲۲]، که در آن انواعی از چند وجهیها ارائه شده بودکـه قضیهٔ اویلر دربارهٔ آنها صدق نمی‌کرد، ونشان دادکه چگونه می‌توان این فرمول را چنان تعمیم دادکه باچنین شرایطی کاملا سازگار شود. لولیه راه جدیدی درجهت بررسی سطوحی که از نظر

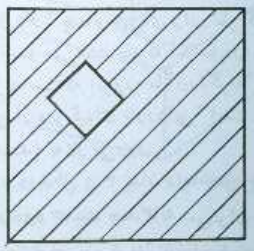
1. S. A. J. L'Huilier (Lhuilier)

توپولوژیك باکره تفاوت دارند گشود، وازاین نظر باید اورا یکی‌ازچهره‌های اصلی‌تاریخ توپولوژی تلقی کرد. (توجه داشته باشیدکه درآن زمان هیچکس (حتی گاوس) آگاهانـه توجهی به‌توپولوژی به‌عنوان یك‌نظام ریاضی نداشت. این مبحث درچند دههٔ بعد از میان کارهای لیستینگ [۲۳] و موبیوس [۲۴] پدیدار شد. (به‌کار بردن نام "توپولوژی" از لیستینگ است.)

در اینجا مثالهای لولیه را بررسی خواهیم کرد. مقالهٔ اوبایك ویرایش سنگین، و با توضیحات اضافی سردبیر مجله (ژرگونه). که شامل نتایج متعددی ازخودش درمورد چند ضلعیهای مسطح بود، منتشرشد. بویژه، ژرگونه ایدهٔ یك ناحیهٔ مسطح‌راکه بدوسیلهٔ تعدادی چند ضلعی محدود شده‌است ارائه داد، وثابت کردکه اگر تعداد اضلاع چنین ناحیه‌ای M، و کلاً $n+۱$ چندضلعی وجود داشته باشد، دراین‌صورت مجموع زوایای داخلی این ناحیه برابراست با

$$\pi(M+۲(n-۱))$$

مثال: فرض کنید $n=۱$ و $M=۸$. چنین ناحیه‌ای می‌تواند به‌صورت یك سطح چند ضلعی سوراخ‌دارباشدکه به‌دومربع محدودشده‌است. این شکل، چهارزاویهٔ داخلی برابر $۳\pi/۲$ و چهار زاویهٔ داخلی برابر $\pi/۲$ دارد. پس، مجموع این زوایا $۸\pi=\pi(۸+۲(۱-۱))$ است.



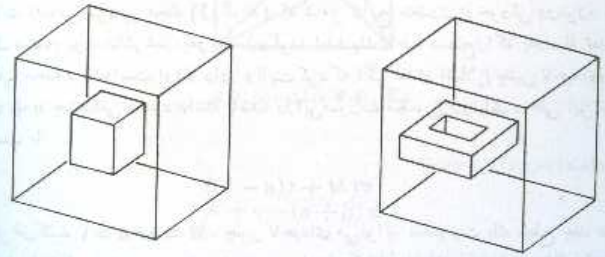
شکل ۱.۵ یك ناحیه ژرگونه.

فرمول ژرگونه‌را می‌توان به‌عنوان حالت بسیارساده‌ای ازقضیهٔ گاوس ـ بونه‌درهندسهٔ دیفرانسیل تلقی کرد. درهرصورت، درنظر گرفتن نواحی همبند چندگانه قدم بزرگی‌در پیشرفت مفاهیم توپولوژیك است.

حال بیایید انواعی ازچند وجهیهای استثنایی راکه توسط لولیه توصیف شده است بررسی کنیم.

الف) چند وجهیهای حفره‌دار. جسمی‌رادرفضای سه‌بعدی‌درنظر بگیرید که‌ازخارج‌ـ کردن یك چندوجهی توپر ازدرون یك چندوجهی توپر دیگر حاصل شده‌باشد. مثلاً، یك‌مکعب

کوچك را از درون یك مکعب بزرگتر خارج کنید. برای این‌گونه چند وجهیهای حفره‌دار $V-E+F=۴$. به‌طور کلی، اگر n تای این چند وجهیها از یك‌چند وجهی خارج شود، آنگاه برای چند وجهی حفره‌دار به‌دست‌آمده رابطهٔ $V-E+F=۲(n+۱)$ برقرار خواهد بود. لولیه امکان همبند چندگانه‌بودن خود حفره‌را درنظر نگرفت. مثلا، مامی‌توانستیم ازدرون یك چند وجهی یك چنبرهٔ جعبه‌ای شکل خارج کنیم. به‌شکل ۲.۵ مراجعه کنید.



مکعب باحفرهٔ مکعبی — مکعب باحفرهٔ چنبره‌ای

شکل ۲.۵ مکعبهای حفره‌دار.

ب) چند وجهیهای تونل‌دار. چند وجهی‌ای رادرنظر بگیرید که درآن n تونل به‌شکل چندوجهی حفر شده باشد. برای چندوجهی همبندچندگانهٔ حاصل، رابطهٔ $V-E+F=۲-۲n$ برقرار است. عدد n همان‌چیزی‌است که امروزه ما آن‌راگونهٔ[1] سطحی می‌نامیم که‌چندوجهی به‌آن محدود شده است، ویکی از ویژگیهای ناوردایی[2] است که درطبقه‌بندی توپولوژیك سطوح (فشرده، جهت‌پذیر، همبند) به‌کار می‌رود.

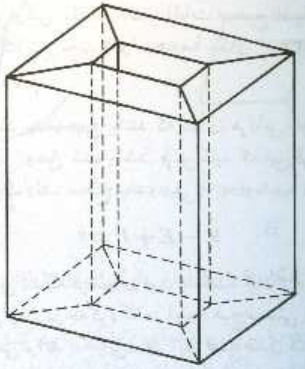
یك مثال به‌ازای $n=۱$ درشکل ۳.۵ نشان داده‌شده‌است.

ج) چند وجهیهای باوجوه همبند چندگانه. می‌توان چند وجهی‌ای را تصور کرد که درآن یك یا چند وجه "چند ضلعی ژرگونه" باشند، یعنی توسط بیش ازیك چند ضلعی محدود شده باشند. اگر یك چند وجهی یکی از این‌گونه وجه‌ها داشته باشد که توسط n چند ضلعی محدود شده باشد، آنگاه رابطهٔ $V-E+F=n+۲$ برای آن برقرار است و فرمول اویلر درمورد آن‌صدق نمی‌کند.

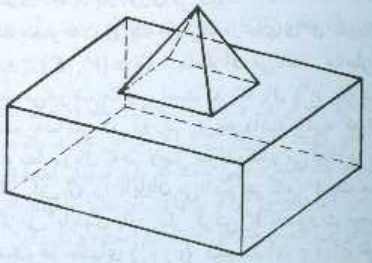
یك مثال ازچنین پدیده‌ای درشکل ۴.۵ نشان داده شده است.

حفره‌ها، تونلها، و وجوه همبند چندگانه، همگی می‌توانند در یك چند وجهی ایجاد شوند. لولیه یك بیان کلی برای $V-E+F$ ارائه می‌دهد که در آن تمام این حالات در

1. genus 2. invariant



شکل ۳.۵ چند وجهی تونل‌دار.



شکل ۴.۵ چند وجهی باوجه همبند چندگانه.

نظر گرفته می‌شود. به‌این ترتیب نتیجه می‌شود که می‌توان برای برقراری رابطهٔ $V-E+F=۲$، یك شرط لازم وکافی پیداکرد. درسال ۱۸۳۲، هسل[1] پیشنهاد کرد که چند وجهیهایی که فرمول اویلر در مورد آنها صادق است، چند ضلعیهای "اویلری" نامیده شوند.

۶. قضیهٔ فون‌اشتات[2]

در صورتهای مختلف قضیهٔ اویلر که تاکنون بررسی کرده‌ایم، آنچه از قلم افتاده، انتخاب

1. Hessel 2. von Staudt

مجموعه فرضیایی روشن برای قضیه بوده‌است. بدویژه، مفهوم چند وجهی مطرح شده‌دراین قضیه، کاملا مبهم‌است. شاید اولین بیان درست واثبات صحیح قضیهٔ اویلر، از آن‌فون‌اشتات باشدکه درسال ۱۸۷۴ درکتابش تحت عنوان هندسهٔ مکان[1] [۳۲] ارائه شد. دراینجا بیان دیگری ازاین قضیه‌را می‌آوریم.

قضیهٔ ۱.۶ فرض کنید P یك چندوجهی باشد که درآن هررأس به هررأس دیگر با مسیری متشکل از یالهای چندوجهی وصل شده باشد. فرض‌کنید که این‌گونه مسیرها اگربسته‌باشند و ازهررأس حداکثر یکبار بگذرند، سطح چندوجهی‌را به‌دوناحیه قسمت‌کنند. دراین‌صورت

$$V-E+F=۲$$

کمی فکر، آشکار می‌کندکه فرضهای فون اشتات، چند وجهیهای استثنایی اولیه را کنارمی‌گذارد. همچنین می‌توان توجه‌کردکه دراینجا هیچ‌صحبتی ازتحدب درکارنیست: یك چند وجهی غیرمحدب نیزمی‌تواند به‌خوبی‌درشرایط قضیه‌صدق‌کند. ولی لازم‌است‌که‌سطح چند وجهی باکره هومئومورف باشد.

استدلال فون‌اشتات تاحدودی ازنظریهٔ‌گراف استفاده می‌کند، وما برخی از ایده‌های مقدماتی آن‌را بااصطلاحات جدید یادآوری می‌کنیم.

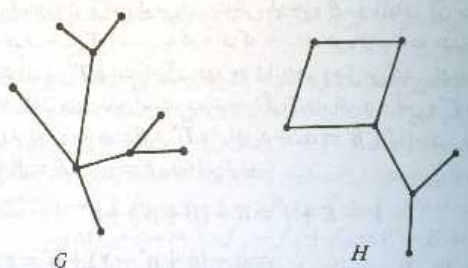
فرض‌کنید V یك مجموعه، و E یك مجموعه ازجفتهای V، بدون رعایت ترتیب آنها، باشد. دراین‌صورت، زوج $G=(V, E)$ را یك **گراف** می‌نامند. عناصر V **رئوس** G وعناصر E **یالهای** گراف نامیده می‌شوند. مناسب است‌که یك یال $\{v, v'\}$ را با یك پاره خط که v را به v' وصل می‌کند، به‌نمایش در آوریم. توجه داشته باشید که تعریف بالا این امکان راکه دو رأس بتواند توسط دویال به‌هم وصل شوند، کنار می‌گذارد، ولی **دورها** را جایز می‌شمارد ($v=v'$). گراف G را **باپایان** می‌نامیم هرگاه V یك مجموعهٔ باپایان باشد. یك مثال بدیهی ازیك‌گراف باپایان بادر نظر گرفتن V به‌صورت مجموعهٔ رئوس یك‌چند وجهی و E به‌صورت مجموعهٔ جفتهای $\{v, v'\}$ که درآن v و v' نقاط انتهایی یك ضلع چند وجهی‌اند، به‌دست می‌آید.

یك **درخت**، گرافی است‌که همبند باشد و مداری نداشته باشد، یعنی، $G=(V, E)$ یك‌درخت است اگروتنها اگر، برای هر $v, v' \in V$ یك‌دنبالهٔ $v=v_0, v_1, \ldots, v_r=v'$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$، برای هر $i=1, \ldots, r$، وهیچ دنباله‌ای از یالهای مجزا، به‌صورت $\{v_r, v_0\}$ و $\{v_{r-1}, v_r\}, \ldots, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1\}$، $r \geqslant 1$، وجود نداشته باشد.

باقراردادهای تصویری‌که دربالا تذکرداده شد، درشکل ۱.۶ دوگراف باپایان G و H نشان داده شده‌است، که G درخت است و H درخت نیست.

اگر T یك درخت باپایان با α رأس و β یال باشد، آنگاه $\alpha=\beta+۱$. مثلادرگراف G شکل ۶.۲، $\alpha=۹$ و $\beta=۸$.

1. *Geometrie der Lage*

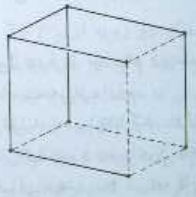


شکل ۱.۶ مثالهایی ازگرافهای باپایان.

تمرین. رابطهٔ $\alpha=\beta+۱$ را برای درختهای باپایان ثابت‌کنید. (راهنمایی: یك رأس v از T انتخاب‌کنید. یالهایی راکه v دریك انتهای آنها قراردارد، به‌طرف نقطهٔ انتهایی دیگرشان‌جهت‌دارکنید. هریال باقیمانده‌راکه چنین نقطهٔ‌پایانی‌ای دارد به‌طرف نقطهٔ‌پایانی دیگرش جهت‌دارکنید. این روش‌را تاجهت‌دارشدن‌کلیهٔ یالها تکرارکنید. حالا توجه‌کنید که هریال تنها به‌طرف یك نقطه نشانه رفته‌است وتناظر به‌دست آمده یك تناظر دوسویی‌بین E و $V \setminus \{v\}$ است.)

اگر $G=(V, E)$ یك‌گراف و $T=(U, F)$ یك درخت باشد، T را **درخت‌مولد** G می‌نامند اگر وتنها اگر $V=U$ و $F \subset E$. هرگراف همبند یك درخت‌مولد دارد.

حال فرض‌کنید P یك چند وجهی باشدکه درفرضهای قضیهٔ ۱.۶ صدق می‌کند. دراین صورت‌گرافی‌که رئوس آن رئوس P و یالهای آن نظیر یالهای P باشد (حتی می‌توانند یکی‌گرفته شوند)، یك‌گراف همبند متناهی مانند G است، وبنابراین یك درخت مولد مانند T دارد. درشکل ۲.۶ چنین درخت مولدی‌را درحالتی‌که P یك‌مکعب است، نشان‌داده‌ایم. گراف G را گاهی **۱- اسکلت** P می‌نامند.



شکل ۲.۶ یك درخت مولد برای ۱-اسکلت یك مکعب.

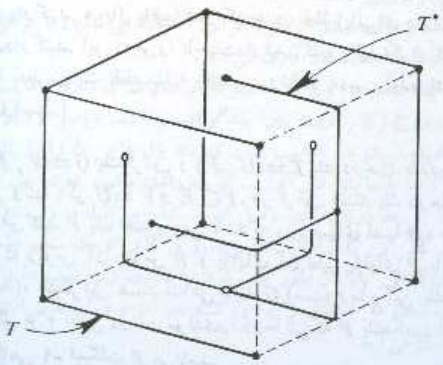
تا اینجا ما فقط ازفرض همبندی G استفاده کرده‌ایم. ازفرض دوم می‌توان درساختن

یك درخت دیگر استفاده کرد که رئوس آن متناظر باوجوه P. ویالهای آن متناظر بابالهای استفاده نشدهٔ G دردرخت T، است، بدگونه‌ای که بدازای هریال استفاده نشدهٔ G که رابطدو وجه P است یك‌یال در T^* هست که آن دووجه را بهم وصل می‌کند. یك‌تصویرمناسب از T^* درشکل ۳.۶ نشان داده شده است. درنتیجه اگر T دارای α رأس و T^* دارای α^*رأس باشد. آنگاه T دارای $\beta=\alpha-1$ و T^* دارای $\beta^*=\alpha^*-1$ یال است. دراین صورت، $V=\alpha$ و $E=\beta+\beta^*$ و $F=\alpha^*$. وبداین ترتیب

$$V-E+F=\alpha-(\beta+\beta^*)+\alpha^*$$
$$=\alpha-(\alpha+\alpha^*-2)+\alpha^*=2$$

۷. نتیجه

آنچه تاکنون گفته‌ایم چیزی بیش از طرح مختصر برخی مسیرها در این کارهای درهم پیچیدهٔ تاریخی حول فرمول مشهور اویلر نبوده است. در این بخش آخر، به ذکر برخی



شکل ۳.۶ درختهای T و T^*.

ازجنبه‌های رشد وتوسعهٔ این‌فرمول درقرن نوزدهم وبیستم که به‌علت کمی وقت و یا به‌علت بالارفتن سطح بحث ازقلم افتاده‌است، می‌پردازیم.

قضیهٔ اویلر بدوطریق می‌تواند تعمیم پیداکند. اول آنکه، می‌توانیم به‌دنبال یك بیان کلی برای آن بگردیم تا نه‌تنها برای چند وجهیهای (محدب) واقع‌درفضای سه بعدی، بلکه برای چند سطحیها[1]ی واقع درفضای nبعدی، $n \geqslant 2$، قابل به‌کاربردن‌باشد. این کارتوسط اشلافلی[2] درحدود سال ۱۸۵۲ انجام شد. ولی کار او، به‌طور کامل، تاسال ۱۹۰۱ [۳۰]

1. Polytopes 2. Schlafli

یعنی چند سال پس از مرگش، منتشر نشد. اشلافلی تمام چندسطحیهای منتظم و محدب فضای nبعدی را نیز برای هر $n > 3$ معین‌کرد. نتایج وی، سالها بعد توسط استرینگهام[1] مستقلا به‌دست آمد [۳۱].

یك چند سطحی محدب، زیرمجموعهٔ فشرده و محدبی ازفضای n بعدی اقلیدسی‌است، که درون آن غیرتهی است و توسط تعداد باپایانی ابرصفحه محدود شده است. یك چند سطحی به این معنا، دارای ۰ ـ وجهها (رئوس)، ۱ ـ وجهها (یالها)، ۲ ـ وجهها، ... و $(n-1)$ ـوجههایی است. فرض کنید تعداد jـوجههای چنین چند سطحی‌ای، f_j باشد. در این صورت، اشلافلی ثابت کرد $\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j f_j = 1-(-1)^n$. برای $n=3$، فرمول $f_0-f_1+f_2=V-E+F=2$ را به‌دست می‌آوریم.

دربند ۱ گفتیم که درفضای سه بعدی درست پنج چند وجهی منتظم وجود دارد و در فضای چهار بعدی، دقیقاً ۶ چند سطحی ۴ بعدی منتظم وجود دارد، ولی در فضای اقلیدسی n ـ بعدی، $n>4$، درست سه چند سطحی n بعدی منتظم وجود دارد که مشابه‌های nـبعدی چهار وجهی، مکعب وهشت وجهی‌اند [۴].

طریقهٔ دوم تعمیم قضیهٔ اویلر، که به‌طورضمنی درکارهای لولیه دیده می‌شود، تعویض مرزیك چندوجهی (محدب)، که هومئومورف باکره‌است، بایك رویهٔ (فشرده، همبند، بدون‌مرز) دلخواه‌است. طبقه‌بندی‌توپولوژیکی چنین‌سطوحی، ازحدود ۱۸۵۰ به‌بعد توسط ریاضیدانان زیادی، بررسی شد. چهره‌های برجستهٔ این توسعه عبارتند از: گاوس [۸]، ریمان [۲۹]، لیستینگ[۲۳]، ژوردان[۱۵]، موبیوس[۲۴]، اشلافلی[۳۰]، کلاین[۱۸]، وپوانکاره[۲۷]. نتیجهٔ بررسیها آن شد که اگر یك رویهٔ فشرده، همبند وبدون مرز S را بتوان به‌وسیلهٔ یك گراف‌همبند به‌قسمتهایی‌هومئومورف بایك‌دیسك (سلول) افرازکرد، آنگاه‌عدد $V-E+F$، که در آن V و E مانند قبل تعداد رئوس ویالها، و F تعداد سلولهای به‌دست‌آمده‌است، یك ناوردای توپولوژیکی‌است؛ یعنی، تحت هومئومورفیسمها ثابت‌می‌ماند. این‌عدد به‌**عددا‌ویلر** رویهٔ S معروف شده است، وآن‌را با $e(S)$ نشان می‌دهند (و یا $\chi(S)$، زیرا معمولا آن‌را شاخص اویلر می‌نامند).

سطوح را می‌توان به‌دودستهٔ جهتپذیر و جهت‌ناپذیرهم تقسیم کرد (سطوح دوطرفه و یك طرفه). مثلا کره وچنبره سطوح جهتپذیرند، درصورتی‌که صفحهٔ تصویری وبطری کلاین جهت ناپذیرند.

درپایان قرن گذشته‌ثابت شدکه دو رویه ازنوع بالا (یعنی بدون‌مرز، فشرده، وهمبند) مانند S و S' هومئومورف‌اند اگروتنها اگر هر دو جهتپذیر یا هر دو جهت‌ناپذیر باشند و $e(S)=e(S')$. در واقع، ژوردان درحدود سال ۱۸۶۶، سطوح جهتپذیر (فشرده، همبند، و بدون مرز) راکه برای آنها $e(S)=2-2g$ به‌وسیلهٔ گونه آنها، g، طبقه بندی کرد. بنابراین شاخص اویلرسطوح جهتپذیرزوج است. (اگر S جهت‌ناپذیر باشد، $e(S)$ می‌تواند زوج یا فرد باشد. مثلا شاخص اویلرصفحهٔ تصویری برابر ۱ و شاخص اویلر بطری کلاین

1. Stringham

o است.)

دوطریقهٔ تعمیم ذکرشده در بالا می‌توانند بایکدیگر ترکیب، و به‌مفهوم شاخص اویلر برای خمینه‌های n- بعدی منجرشوند. به‌این ترتیب تا امروز، ایدهٔ اویلر، جایگاهی در قلب توپولوژی احراز کرده‌است. این‌داستان هنوزهم تا به‌آخر به‌رشتهٔ تحریردرنیامده، اما کارهای افرادی‌چون پونت [۲۸]، لاکاتوش [۲۰]، وبیگز وللوید وویلسون[۱]، چشم‌اندازروشنی‌تا اوایل قرن بیستم به‌دست داده است.

مراجع

1. Biggs N. L., Lloyd E. K., Wilson R. J., *Graph Theory 1736-1936*, Oxford, 1976.
2. Boy W., "Ueber die curvatura integra und die topologie geschlossener flachen", *Math. Ann.* **57** (1903) 151-184.
3. Cauchy A., "Recherches sur les polyédres," *J. del'Ecole Poly.* **9**, Paris, 1813. 68-86.
4. Coxeter H. S. M., *Regular Polytopes*, 3rd ed: Dover, New York, 1973.
5. Dürer A., *Engravings, Etching and Dryphous of Albrecht Durer*, Dover, New York.
6. Euler L.,"Elementa doctrinae solidorum," *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petopol. 4*, 1752-3, (1758), 109-140; Operaomnia, 26, 72-93.
7. Euler L.,"Demonstratio . . .," *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petopol. 4* (1752-3), (1758) 140-160: Operaomnia, 26, 94-108.
8. Gauss C. F., *Disquisitiones generales circa superfisies arrvos*, 1927, gottingen.
9. Heath T. L., *Elements of Euclid*. Dover, 1956 (3Vol).
10. Hessel C., "Nachtrage Zur Eules'schen hehrsatze Von Polyedra," *J. f. Math.*, **8** (1832), 13-20.
11. Hilbert D., Cohn-Vossen S., *Anschatiche Geometrie*: Berlin, 1952.
12. Janquières E.,"Note sur le théoréune d'Euler...," *Comptes Rendus*, **110** (1890) 169-173.
13. Janquiéres E.,"Note sur un memoire de Descartes ...," *ibid.*, 261-266.
14. Janquiéres E., "Ecrit posthume de Descartes sur les polyhdéres", *ibid.*, 677-680.

15. Jordan C., "Des Contours traiés sur les surfaces," *J. de. Math., Presset App.* **11** (1866) 110-130.
16. Juskevic A.P. and Winter E., *Leonhard Euler and Christian Goldbach*, paricfwechsel 1729-1764, Berlin, 1965.
17. Kepler J., *Opera Omnia*, Frankfurt, 1864.
18. Klein F., *Ueber Riemann's Theorie...*, Taubner, Leipzig, 1882.
19. Klein F., *Gesammelte Math. Abh.* 3 vols: Springer, Berlin, 1921-23.
20. Lakatos I., *Proofs and Refutations*, ed J. Norroll and Zahov. E., Cambridge, 1976.
21. Legendre A. M., *Elements de Geometrie*, Firmin-Didot, Paris, 1794.
22. Lhuilies S.,"Mémoire sur la polyédroréstione", *Annales de Math., Press et App* (Nimes), **3** (1812-1813) 169-192.
23. Listing J. B.,"Der census raumlicner complexe," *Oper... Abh. K. ges Wiss. gottingen Math. cl.* **10** (1861-62) 97-182.
24. Möbius A. F., *Gesammelte Werke*: Hirzel, Leipzig, 1885-1886(3vol).
25. Pedoe D., *Geometry and the Liberal Arts*, Penguin, 1976.
26. Plato, *Timaeus*, translated by D. Lee, Penguin, 1965.
27. Poincaré J. H., *Oeuvres Complétes*, Vol. 6, Paris.
28. Pont J. C., *La Topologie Algébrique des Origines, Poincaré*, Presses Universitaires, Paris, 1974.
29. Riemann B., *Gessamelte Werke*, Dover: 1953 led. H. Weber.
30. Schlafli L., *Die Vielfache Continuitat*, Berne, 1901.
31. Stringuam W. J., "Regular figures in n-dimensional space," *J. Amer. Math.*, **8** (1880) 1-14.
32. von Staudt C., *Geometry der Lage*, Nürnberg, 1847.

ایان بلیک

کدها و طرحها•

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

طرحهای ترکیبیاتی که با الگوهایی از زیر مجموعه‌های یك مجموعه ساخته می‌شوند، درهایی به سوی دستیابی به کدهای سودمند می‌گشایند.

نظریهٔ جبری کدگذاری بیش از بیست و پنج سال قدمت دارد، پیدایش این نظریه مرهون قضیهٔ معروف شنون [۱] دربارهٔ کدگذاری نویزی است که خطای عملکرد یك کانال گسسته را تخمین می‌زند، بی‌آنکه اشاره‌ای به نحوهٔ دستیابی به این خطا کند. اززمان اثبات آن تاکنون، ارتباط متقابل میان نظریهٔ کدگذاری و دیگر شاخه‌های ریاضیات، به‌خصوص نظریهٔ گروهها و آنالیز ترکیبیاتی، مداوماً توسعه یافته است. نتیجهٔ این تأثیر متقابل، مبحث زیبایی است که نتایج و روشهایی فراهم می‌سازد که می‌توانند درمسائلی با اهمیت زیاد کاربردی مفید باشند.

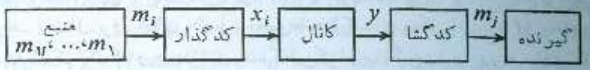
دراین مقاله در نظر دارم ارتباط میان کدگذاری و برخی از طرحهای ترکیبیاتی را بررسی کنم. نخست برخی از مفاهیم اساسی نظریهٔ کدگذاری را معرفی خواهم کرد و تعدادی از کدهای موردنیاز را خواهم ساخت. از آنجا که کدهای دودویی مورد توجه خاص ما هستند، بسیاری از مفاهیم را تنها دراین حالت شرح خواهم داد. شمارش وزن کدها، که فی‌نفسه مبحث جالبی است، دریافتن طرحها از میان کدها نیز سودمندند؛ بنابراین برخی از نتایج مربوط به آن بیان شده است. سپس برخی از طرحهای ترکیبیاتی را که از دیدگاه کدگذاری مورد توجه‌اند شرح می‌دهیم، و برخی از خواص آنها را بیان می‌کنیم. درادامه، نتایج این بخشها را برای اثبات سلسله قضایای منسوب به آسموس[1] و ماتسون[2] به کار می‌بریم. این قضایا نشان می‌دهند که چگونه می‌توان از کدهای "خوب" طرح ساخت. دربخش نهایی مقاله سعی داشته‌ام تعمیمها و پیشرفتهای اخیر این

• Blake, Ian, "Codes and designs," *Mathematics Magazine*, **52**(1979) 81-95.

1. Assmus 2. Mattson

مباحث را نشان دهم، و مطالبی نیز درمورد منابع و مقالات دراین زمینه آورده‌ام.

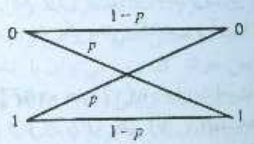
اهداف این مقاله تاحدودی بلندپروازانه است، بنابراین ناچار بودم که تصمیم بگیرم که چه چیزهایی اثبات و چه چیزهایی تنها بیان شود. هدف من آشنا ساختن خواننده با خطوط کلی این مبحث و روشهای نظریهٔ کدگذاری است، بی‌آنکه بر روی هیچ یك از این مباحث بیش از حد تأکید شود. اخیراً دو مقاله منتشر شده است که نظریهٔ کدگذاری و آنالیز ترکیبیاتی را مرور می‌کنند [۲ و ۳]؛ این مقالات هر دو عمیقتر و جامعتر از این مقاله‌اند، و خواننده‌ای که این مقاله را باب طبع خود بیابد، حتماً باید آن دو مقاله را هم بخواند. به‌ویژه مقالهٔ آسموس و ماتسون [۲] در تهیهٔ این مقاله، که درواقع مروری بر کار آنهاست، مفید بوده است.



شکل ۱

کدها

به‌منظور یافتن انگیزه‌ای برای مطالعهٔ کدگذاری، مدل ساده‌ای از یك شبکهٔ ارتباطی را که در شکل ۱ نشان داده شده است، درنظر می‌گیریم. دراین مدل از میان M پیام ممکن $m_1, \ldots, m_M$، پیام m_i برای انتقال برگزیده می‌شود. کدگذار[1] این پیام را به یك رشتهٔ دودویی به‌طول N، $x_i = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_N})$، که در آن $x_{i_j} \in \{0, 1\}$، تبدیل می‌کند. این رشته کدواژهٔ[2] پیام m_i نامیده می‌شود. درهرواحد زمانی کانال یکی از این نمادهای دودویی را می‌پذیرد و آن را یا به‌طور صحیح و با احتمال $1 - p$ و یا به‌صورت خطا و با احتمال p، به گیرنده انتقال می‌دهد.



شکل ۲

چنین کانالی یك کانال دودویی متقارن (BSC) نامیده می‌شود و در شکل ۲ نشان داده شده است. کدگشا[3] که فهرستی از تمام کدواژه‌های ممکن x_i، $i = 1, 2, \ldots, M$، را در اختیار دارد، پس از دریافت N رقم y با توجه به آزمون کمترین احتمال خطا تشخیص می‌دهد که کدام پیام مخابره شده است. اگر پیام m_i فرستاده شده باشد، ولی کدگشا تشخیص دهد که پیام m_j،

1. coder 2. codeword 3. decoder

$j \neq i$ ، مخابره‌شده‌است، آنگاه یك‌خطای کدگشایی صورت گرفته‌است واحتمال‌وقوع چنین خطایی p_e است،ظرفیت BSC به صورت $C = 1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)$ ونرخ کد به‌صورت $R = (\log_q M)/N$ تعریف می‌شود. قضیهٔ‌اساسی شنون می‌گوید که به ازای هر $\delta > 0$، اگر $R < C$، آنگاه‌برای N به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ کدی به‌طول N با نرخ $R' > R$ وجوددارد به‌طوری که $p_e < \delta$. بنابراین می‌توان درمکالمات احتمال‌خطارا به‌هر اندازهٔ دلخواه کوچك کرد ونرخ راثابت نگاه‌داشت، مشروط به‌آنکه طول کد به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد. البته‌این کار به‌قیمت‌افزایش پیچیدگی سیستم، وتأخیردراعمال کدگذاری وکد گشایی تمام می‌شود.

اثبات این‌قضیهٔ جالب‌توجه ازطریق استدلالهای کدگذاری تصادفی‌صورت‌می‌گیرد. به‌طورخلاصه، ازبین q^N کدواژهٔ ممکن، M تابه‌طورتصادفی وباتوزیع‌احتمال معینی‌انتخاب می‌شوند. احتمال بروزخطای حاصل به‌مجموعهٔ همهٔ کدهای ممکن‌بااندازهٔ M محدود می‌شود، وباید دست‌کم یك‌کد وجودداشته باشدکه‌این‌کران میانگین را برآورده سازد. البته، چنین فرایندهای کدگذاری تصادفی‌ای برای‌اهداف عملی مناسب‌نیستند وروشهایی برای کدسازی موردبررسی قرارگرفته‌اند که ازنظر کارایی برآورندهٔ کران مورد نظر باشند. نتیجهٔ این مطالعات، پیدایش نظریهٔ جبری کدگذاری است.

ماکارخود را باتعریف ساختارها ورهیافتهای بنیادی به‌نظریهٔ‌کدگذاری آغازمی‌کنیم. میزان توجهی‌که به‌رهیافتهای دیگرشده درجات مختلفی‌داشته‌است، امااین‌رهیافتها آنقدرها پیشرفت نکرده‌اندکه به‌طورگسترده مورد مطالعه قرارگیرند. ساختاری بنیادی‌که اساساً کلیهٔ کارهای تحقیقاتی درزمینهٔ‌کدگذاری حول‌وحوش آن‌صورت می‌گیرد، فضای برداری یابعد متناهی روی‌یك میدان‌متناهی‌است. اگر q توانی‌ازیك عدداول باشدمیدان متناهی q عنصری را، که در حد یکریختی یکتاست، با F_q نشان می‌دهیم. گهگاه به خواصی ازاین میدان، که ممکن‌است چندان مشهور نیز نباشند، نیازخواهیم داشت، امابه‌جای آنکه اکنون به‌شرح این خواص بپردازیم، آنهارادرمواقع لزوم بیان خواهیم‌کرد. فرض‌کنید F_q^n فضای برداری n بعدی‌روی F_q باشد. F_q^n نیز در حد یکریختی یکتاست وآن‌را به‌صورت‌مجموعهٔ n تاییهای روی F_q درنظرمی‌گیریم.

وزن (همینگ) عنصر $x \in F_q^n$، یعنی $w(x)$، عبارت‌است‌از تعداد مختصات ناصفر x، **و فاصلهٔ** (همینگ) دوعنصر x و y از F_q^n، یعنی $d(x,y)$، به‌عنوان تعدادمختصاتی‌که xوy درآنها برابرنیستند تعریف‌می‌شود، وبنابراین $d(x,y) = w(x-y)$. یك زیرمجموعهٔ C از F_q^n رایك **کد** (n,M,d,q) می‌نامیم هرگاه $M = |C|$، که‌در آن $|C|$ تعداد عناصر C است، و $d = \min\{|d(x,y)| x,y \in C, x \neq y\}$. اگر C زیر فضایی k ـ بعدی از F_q^n باشد، آن‌را یك **کدخطی** یایك **کد** (n,k,d,q) **خطی** می‌نامیم.معمولا q ثابت و d مجهول است یا اینکه در آن مبحث خاص به d نیازی نیست. در این حالات C را به طور ساده یك‌کد (n,k) خطی می‌نامیم. به سادگی دیده می‌شودکه برای هر کد خطی، $d = \min\{w(x) | x \in C, x \neq 0\}$.

مسئلهٔ‌کدگذاری ازاین قراراست: چنانچه n و M (qو) داده شده‌باشد، کدواژه‌ها را

چنان اختیارکنیدکه d بیشینه‌شود. به‌عکس، چنانچه n و d داده‌شده‌باشد. مسئله بیشینه‌ساختن M خواهد بود. اگر $e = [(d-1)/2]$ (که $[x]$ جزءصحیح x رانشان می‌دهد)، کره به شعاع eحول‌نقطهٔ $x \in F_q^n$ رابه‌صورت $S_e(x) = \{y \in F_q^n | d(x,y) \leqslant e\}$ تعریف‌کنید. حال، واضح است که $|S_e(x)| = \sum_{j=0}^{e} \binom{n}{j} (q-1)^j$ ، زیرا دقیقاً $(q-1)^j$ عضودر F_q^n وجود داردکه با x در j مختص‌مفروض اختلاف‌داشته‌باشد، و$\binom{n}{j}$ روش برای‌انتخاب‌این jمختص وجود دارد. درمسائل گزینش‌کدواژه‌ها کههم اکنون مطرح‌شد، مجموعهٔ همهٔ چنین‌کره‌هایی حول‌کدواژه‌ها، دوبه‌دواشتراك تهی‌دارندو به‌سادگی‌دیده‌می‌شودکه برای‌یك‌کد(n,M,d,q)، $M|S_e(x)| \leqslant q^n$، که‌در آن $e = [(d-1)/2]$. این‌نتیجه‌اغلب **کره‌چینی**[1] یا **کران‌همینگ‌ـ رائو**[2] نامیده می‌شود، وهرکدی که کران فوق‌را باعلامت تساوی برآورده سازد یك کد **کامل** نامیده می‌شود. توجه‌کنیدکه برای‌یك‌کدکامل d لزوماً فرد است.

ازآنجاکه برای‌هرکدکامل‌با فاصلهٔ مینیمم d، کره‌های به‌شعاع $e = [(d-1)/2]$ حول‌کد واژه‌ها همگی غیرمتقاطع‌اند، می‌توانیم الگوریتم کدگشایی رابرحسب مینیمم فاصله به‌کاربریم. اگر n تایی دریافتی $y \in F_q^n$ درکرهٔ به‌شعاع e و حول $c \in C$ قرارگیرد، y را با c کدگشایی می‌کنیم. اگردر انتقال کمتر از e خطا رخ داده باشد، کدگشایی صحیح خواهد بود. اگردرانتقال بیش‌از e خطا رخ‌داده باشد، یا y به‌یك واژهٔ نادرست‌کدگشایی خواهد شد (y درکرهٔ به‌شعاع e حول‌کدواژه‌ای متفاوت‌با کدواژهٔ ارسال‌شده قرارخواهدگرفت.) یا این‌که y در هیچ شعاع eای حول یك‌کدواژه قرار نمی‌گیرد که در این صورت باید استراتژی دیگری را، مثل تقاضای ارسال‌مجدد این‌کدواژه، پیش بگیریم. ازاین ملاحظات سرشت‌کره چینی در مسئلهٔ کدگذاری دیده می‌شود. البته درعمل تکنیکهای دیگری نیز به‌کار می‌روندکه درکدگشایی مؤثرند ودراینجا بررسی‌نخواهندشد.

برای‌حصول موفقیت بیشتردرشرح کدهای خطی، نخست توجه می‌کنیم‌که اگر C یك کدخطی(n,k)باشد،کدرامی‌توان‌به‌صورت‌فضای‌سطری‌یك‌ماتریس$k \times n$رویF_q مانندG در نظرگرفت وهرمجموعه‌از k کدواژهٔ مستقل‌خطی C رامی‌توان به‌عنوان سطرهای G انتخاب کرد. ماتریس G ، یعنی **ماتریس مولد** کد ، را می‌توان با تحویل سطری به شکل استاندهٔ $G' = [I_k : A]$ درآوردکه‌درآن A یك‌ماتریس $k \times (n-k)$ است. اگرعمل کدگذاری‌را به‌صورت ضرب ماتریسی $c = iG'$ در نظر بگیریم که درآن i یك رشتهٔ اطلاعاتی k تایی روی F_q، و c کدواژهٔ نظیر آن است، آنگاه نخستین k مختص c، i را تشکیل می‌دهند ، و $(n-k)$ مختص‌باقیمانده برای‌آزمون زوجیت[3] این k مختص اول به‌کار می‌روند. کدی‌که خانه‌های اطلاعاتی آن‌صریحاً معلوم باشند، سازمان یافته (سیستماتیك) نامیده‌می‌شود.

اگر C کدی خطی‌باشد، می‌توان‌مفهوم‌مفید **کد**(یافضای)**دوگان** رابه‌طورطبیعی با

1. sphere packing 2. Rao 3. Parity

$$C'=\{y\in F_q^n \mid (x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0, \forall x\in C\}$$

تعریف کرد که در آن حاصلضرب داخلی در F_q محاسبه شده است. کد دوگان خود یک کد خطی است (مفهوم دوگان برای یک کد غیرخطی بدوضوح داده نشده است)، برای یک فضای برداری حقیقی، چنانچه دوگان یک زیرفضا به طریق مشابه تعریف شود، داریم $C\cap C'=\{0\}$ و $\dim C+\dim C'=n$. اما برای F_q^n تنها رابطهٔ $\dim C+\dim C'=n$ درست است. برای مثال اگر $C\subset F_2^4$ عبارت باشد از

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه $C=C'$؛ این خاصیت برای کسانی که به برداشت هندسی از فضاهای حقیقی خو گرفته‌اند، عجیب به‌شمار می‌آید.

یک ماتریس مولد H برای دوگان C' از کد (n,k) خطی C، ماتریسی $(n-k)\times n$ ای است که فضای سطری آن C' است و ماتریس **آزمون زوجیت** C نامیده می‌شود. بنا به تعریف، این ماتریس در معادلهٔ $GH^T=0$ صدق می‌کند. اگر G به‌شکل استاندهٔ $[I_k : A]$ باشد، آنگاه $H=[-A^T : I_{n-k}]$. یک خاصیت مهم ماتریس آزمون زوجیت که باید آن را به خاطر بسپاریم از این قرار است: اگر همهٔ عناصر کدواژهٔ $x\in C$ صفر نباشند، آنگاه $xH^T=0$، اما از آنجا که xH^T ترکیبی خطی از ستونهای H است، ستونهایی از H که با درایه‌های ناصفر x متناظرند، وابستهٔ خطی‌اند. در نتیجه، اگر هیچ $(d-1)$ ستونی از H وابستهٔ خطی نباشند، فاصلهٔ مینیمم C دست‌کم برابر d است. از این استدلال کرانی نیز برای کدها به‌دست می‌آید. از آنجا که رتبهٔ H حداکثر $n-k$ است، در بهترین حالت هر مجموعه از $(n-k)$ ستون مستقل است، و بنابراین $d-1\leqslant n-k$ یا $d\leqslant n-k+1$ که **کران سینگلتون**[1] کدگذاری نامیده می‌شود. هر کدی که کران فوق را با علامت تساوی برآورده سازد، یک **کد بهینه** نام دارد. توجه کنید که کاربرد هنرمندانهٔ کد دوگان به‌کسب اطلاعاتی درمورد خود کد انجامید.

مثالی از این ایده‌ها می‌تواند مفید باشد. کد $(7,4)$ خطی دودویی C را با ماتریس آزمون زوجیت

$$H=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

1. Singleton bound

در نظر بگیرید و ملاحظه کنید که هر سه‌تایی ناصفر به‌عنوان ستونی از H ظاهر می‌شود. از آنجا که هر دو ستون مستقل خطی‌اند، فاصلهٔ مینیمم C برابر ۳ است. روش بهتری برای بررسی این کد (که اصلاً ساختهٔ همینگ است [۴]) آن است که هر کدواژه را به صورت $(p_1,p_2,i_1,p_3,i_2,i_3,i_4)$ در نظر بگیریم که i_1,i_2,i_3,i_4 رقمهای حاوی اطلاعات، و p_1، p_2 و p_3 رقمهای آزمون زوجیت‌اند. این ارقام در معادلات F_2

$$p_1+i_1+i_2+i_4=0$$

$$p_2+i_1+i_3+i_4=0$$

$$p_3+i_2+i_3+i_4=0$$

صدق می‌کنند. برای مراجعات بعدی، توجه کنید که کدواژه‌های C عبارت‌اند

000	0000	111	0000	110	0110	011	0011
110	1001	100	0011	101	1010	101	0101
010	1010	010	0101	011	1100	001	0110
100	1100	001	1001	000	1111	111	1111

از آنجا که

$$M|S_1(x)|=2^4\left(\sum_{i=0}^{1}\binom{7}{i}\right)=2^7=|F_2^7|$$

کد کامل است و کد $(7,4)$ دودویی همینگ نامیده می‌شود.

تعمیم این مثال و شرح رده‌ها کدهای همینگ، چندان مشکل نیست و اکنون به آن می‌پردازیم. ماتریس $k\times n$ آزمون زوجیت H را روی F_q طوری می‌سازیم که ستونهایش همهٔ دیگری نیستند. کد C با ماتریس آزمون زوجیت H، طولی برابر $n=(q^m-1)/(q-1)$، بعدی برابر $n-m$ و فاصله‌ای برابر ۳ دارد، و باز هم کامل است، زیرا

$$M|S_1(x)|=q^{n-m}\left(\sum_{i=0}^{1}\binom{n}{i}(q-1)^i\right)=q^n=|F_q^n|$$

اخیراً ثابت شده است [۵ و ۶] که تنها دو کد خطی کامل دیگر وجود دارد، که این دو را نیز تا پایان این بخش معرفی خواهیم کرد، و نیز هر کد کامل دیگری غیرخطی است، و دقیقاً همان پارامترهای (طول، فاصله، اندازه) کدهای همینگ را دارد.

وضعیت مختصات یک کد خطی C به‌طول n، اغلب با اعضای $\{0,1,\ldots,n-1\}$ شماره‌گذاری می‌شود. عملی که به‌نوبهٔ خود مفید خواهد بود توسیع C است که آن را با C_e

نمایش می‌دهیم و به‌این صورت انجام می‌گیرد که یك رقم آزمون زوجیت را طوری اضافه می‌کنیم که مجموع همهٔ مختصات صفر شود. به‌عنوان نتیجه‌ای از محاسباتی که توسط گروههای خطی کسری روی کدها انجام شده است، مختص اضافی را با ∞ برچسب می‌زنیم. اگر C یك کد (n,k) باشد، آنگاه C_e یك کد $(n+1,k)$ است و اگر H ماتریس آزمون زوجیت C باشد، ماتریس زیر ماتریس آزمون زوجیت C_e خواهد بود

$$H' = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & \infty \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc|c} & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \cdot \\ & & & H & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & 0 \\ \hline 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

روی میدانهای غیردودویی گاهی اوقات مختص اضافه شده با ضربی از مجموع دیگر مختصات پر می‌شود تا شرایط معینی درمورد دوگان کد توسعه یافته برقرار شود. از توسعهٔ کد (۷,۴) همینگ، کدی به‌طول ۸ حاصل می‌شود. درنتیجهٔ این توسعه، ۷ برداری که وزنشان در C برابر ۳ است، به‌بردارهای به‌وزن ۴ در C_e تبدیل می‌شوند، و به بردارهای به‌وزن ۴ در C یك مختص صفر اضافه می‌شود. بنابراین C_e ۱۴ بردار به‌وزن ۴، یك بردار به‌وزن ۰، و یك بردار به‌وزن ۸ دارد، و کدی (۸,۴) با فاصلهٔ ۴ است.

مفهوم مهم دیگری که به‌آن می‌پردازیم، کد دوری است. توجه کنید که با تعویض ترتیب ستونها، ماتریس آزمون زوجیت H در (۱) را می‌توان به‌صورت

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نوشت، و به‌این ترتیب هم در C و هم در دوگانش C' انتقال دوری هر کدواژه باز هم یك کدواژه است؛ (یك انتقال دوری از $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ به‌صورت $(c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-2}, c_{n-2})$ تعریف می‌شود). یك کد دوری را به‌عنوان کدی خطی تعریف می‌کنیم که در آن انتقال دوری هر کدواژه باز هم یك کدواژه باشد؛ به عبارت دیگر یك کد دوری تحت اثر جایگشتهای دوری روی مختصات پایاست. این کدها به طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و اغلب کدهای جالب، کدهای دوری و یا گسترش یافته‌های آنها هستند.

در مطالعهٔ کدهای دوری استفاده از یك نمادگذاری چند جمله‌ای مفید خواهد بود: به‌هر کدواژهٔ $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$، یك چند جمله‌ای $c(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$ نظیر می‌کنیم. یك انتقال دوری این کدواژه با چند جمله‌ای $xc(x)$ به‌پیمانهٔ $x^n - 1$ متناظر است. یك کد دوری متناظر با ایده‌آلی در حلقهٔ چندجمله‌ایهای $F_q[x]/(x^n - 1)$ است. در چنین

حلقه‌ای هر ایده‌آل یك ایده‌آل اصلی، و مولد $g(x)$ آن لزوماً مقسوم علیهی از $x^n - 1$ است. اگر بعد زیرفضای دوری k باشد، آنگاه درجهٔ چندجمله‌ای مولدش، یعنی $g(x)$، برابر $n-k$ است. بنابراین کد C را می‌توان با ایده‌آل چندجمله‌ای

$$C = \{a(x)g(x) \mid \deg(a(x)) \leqslant k-1, a(x) \in F_q[x]\}$$

توصیف کرد. اگر $x^n - 1$ تعداد s عامل تحویل‌ناپذیر روی F_q داشته باشد، آنگاه دقیقاً 2^s کد دوری به‌طول n روی F_q وجود دارد، زیرا هر مقسوم علیه $x^n - 1$ یك کد دوری تولید می‌کند.

حال به‌مرور نتایجی در باب چند جمله‌ایهای روی میدانهای متناهی می‌پردازیم. گروه ضربی F_q^* حاصل از F_q دوری است[1] و هر مولدش یك **عنصر اولیه** نامیده می‌شود. هر میدان متناهی دست‌کم یك، و در واقع $\phi(q-1)$، عنصر اولیه دارد که در آن ϕ تابع نشانگر اویلر است. یك **چند جمله‌ای تحویل‌ناپذیر** روی F_q چندجمله‌ایی است که نتوان آن را به‌صورت حاصلضرب دو چند جمله‌ای با درجهٔ کوچکتر نوشت. هر چند جمله‌ای تحویل‌ناپذیر از درجهٔ k روی F_q همواره $x^{q^k} - x$ را عاد می‌کند و این چندجمله‌ای به حاصلضرب همهٔ چند جمله‌ایهای تحویل‌ناپذیری که درجه‌شان k را عاد می‌کند، تجزیه می‌شود. چند جمله‌ای تحویل‌ناپذیر $f(x)$ روی F_q را **اولیه** می‌نامیم اگر $f(x) \mid x^{q^s} - 1$، ولی به ازای هر $s < q^k - 1$، $f(x) \nmid x^s - 1$. اگر β عنصری از توسیع F_{q^k} از F_q باشد، چندجمله‌ای تکین (ضریب بزرگترین توان x یك است) و از کوچکترین درجهٔ ممکن $m_\beta(x)$ را که β یکی از ریشه‌هایش است، چند جمله‌ای می‌نیمال β روی F_q می‌نامیم. به‌ازای هر چند جمله‌ای $f(x) \in F_q[x]$ داریم $f(x^q) = (f(x))^q$، و بنابراین اگر β ریشه‌ای از $f(x)$ باشد، $\beta^q, \beta^{q^2}, \dots$ نیز چنین خواهند بود و **مزدوجهای** β نامیده می‌شوند. اگر $K = \{\beta, \beta^q, \dots, \beta^{q^{s-1}}\}$، که در آن $\beta^{q^s} = \beta$، و به‌ازای هر $0 < i < s$، $\beta^{q^i} \neq \beta$، آنگاه $m_\beta(x) = \prod_{i=0}^{s-1} (x - \beta^{q^i})$، و از آنجا که $m_\beta(x) \mid x^{q^k} - x$، نتیجه می‌گیریم که s عدد k را عاد می‌کند. هر چند جمله‌ای تکین اولیه از درجهٔ k روی F_q، چند جمله‌ای می‌نیمال عنصر اولیه‌ای از F_{q^k} است.

همانطور که دیدیم، کد دودویی (۷,۴) همینگ را همواره می‌توان به یك کد دوری تبدیل کرد. در حالت کلی اگر α عنصر اولیه‌ای از $F_{2^m}^*$ باشد، چند جمله‌ای مولد کد همینگ به‌طول $2^m - 1$ و بعد $2^m - m - 1$، یعنی $m_\alpha(x)$، یك چند جمله‌ای اولیه است. برای

---

۱. مقصود از گروه ضربی F_q^*، گروه $(F_q - \{0\}, \cdot)$ است.ـ م.

کدهای همینگ روی F_q ، اگر α عنصر اولیه‌ای از F_{q^m} باشد، چند جمله‌ای مولد کد $((q^m-1)/(q-1)-m)$، $(q^m-1)/(q-1)$ همینگ، چند جمله‌ای مینیمال عنصر α^{q-1} است، مشروط بر آنکه $(q-1)$ و m نسبت به‌هم اول باشند [۷].

اگر $g(x)$ چند جمله‌ای مولد یك کد دوری (n,k) مانند C باشد و

$$g(x)h(x)=x^n-1$$

به سادگی دیده می‌شود که C' نیز دوری و چند جمله‌ای مولدش $x^{n-k}h(1/x)$ است.

در بخشهای بعد به‌ردهٔ دیگری از کدها، یعنی کدهای ماندهٔ درجهٔ دوم، نیاز داریم. فرض کنید n یك عدد اول فرد، و α یك ریشهٔ nام واحد در یك توسیع از F_q باشد. فرض کنید R مجموعهٔ ماندهای درجهٔ دوم در F_n؛ یعنی $R=\{x\in F_n \mid \exists a: a^2=x,\ x\neq 0\}$، و $\bar{R}$ مجموعهٔ عناصر ناصفر F_n-R باشد. چند جمله‌ایهای

$$g_1(x)=\prod_{r\in R}(x-\alpha^r) \text{ و } g_2(x)=\prod_{r\in \bar{R}}(x-\alpha^r)$$

را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم (پیمانهٔ n) $q^{(n-2)/2}\equiv 1$، که ایجاب می‌کند q یك ماندهٔ درجهٔ دوم در F_n باشد. درحالت دودویی کافی است که (پیمانهٔ ۸) $n\equiv\pm 1$. از آنجا که حاصلضرب دو مانده بازهم یك مانده است، $qR=R$ و مشابهاً $q\bar{R}=\bar{R}$. بنابراین مزدوجهای هر ریشهٔ $g_1(x)$ بازهم ریشه‌ای از آن‌اند و $g_1(x)$ یك چندجمله‌ای روی F_q است و وضعیت مشابهی درمورد $g_2(x)$ نیز برقرار است. کدهای تولید شده توسط $g_1(x)$ و $g_2(x)$ را کدهای ماندهٔ درجهٔ دوم به‌طول n و بعد $(n+1)/2$ می‌نامند.

به‌ویژه ما به دو کد ماندهٔ درجهٔ دوم توجه داریم. پیش از هرچیز، توجه کنید که $x^n-1=(x-1)g_1(x)g_2(x)$ و به‌ازای $i=1,2$، $g_i(x)\mid x^n-1$. نخستین کدی که مورد توجه ماست، کدی دودویی است به‌طول ۲۳ با چند جمله‌ای مولد

$$g_1(x)=1+x+x^5+x^6+x^7+x^9+x^{11}$$

یا

$$g_2(x)=1+x^2+x^4+x^5+x^6+x^{10}+x^{11}$$

و این چند جمله‌ایها روی F_2 تحویل ناپذیرند. می‌توان نشان داد که فاصلهٔ مینیمم کد دوری (۲۳،۱۲)ای که توسط هریك از این چند جمله‌ایها تولید می‌شود، برابر ۷ است و از آنجا که $M|S_3(x)|=2^{12}.2^{11}=2^{23}=|F_2^{23}|$ و $|S_3(x)|=\sum_{i=0}^{3}\binom{23}{i}=2^{11}$، کد کامل است.

کد دیگری که به آن علاقه‌مندیم، کدی به‌طول $n=11$ روی $F_3=\{0,1,-1\}$ است. چند جمله‌ایهای $g_1(x)$ و $g_2(x)$ عبارت‌اند از

$$g_1(x)=x^5-x^3+x^2-x-1 \text{ و } g_2(x)=x^5+x^4-x^3+x^2-1$$

و هریك از این چند جمله‌ایها یك کد (۱۱،۶) با فاصلهٔ $d=5$ تولید می‌کنند. از آنجا که

$M|S_2(x)|=3^6.3^5=3^{11}=|F_3^{11}|$ و $|S_2(x)|=\sum_{i=0}^{2}\binom{11}{i}2^i=3^5$، این کد نیز کامل است.

این دو کد ماندهٔ درجهٔ دوم تنها کدهای کامل (اعم از خطی و غیرخطی) با $n>d>3$ اند. این کدها تاریخچهٔ جالبی دارند، هر دو کد در ۱۹۴۹ توسط گولی[1] [۸] کشف شده‌اند. او نخست با بررسی مثلث پاسکال ضرایب دوجمله‌ای (یا، درحالت کدهای سه‌سه‌ای، شکل اصلاح شده‌ای از آن) امکان وجود چنین کدهایی را بررسی و ماتریس آزمون زوجیت آنها را ارائه کرد، بدون آنکه توضیحی در مورد روش به‌دست آوردن این ماتریسها بدهد. همان‌طور که پیش از این نیز گفتیم، تنها کدهای کامل دیگر، کدهای غیرخطی با $d=3$ و باطول و اندازهٔ کدهای همینگ‌اند. در بخشهای بعد به کدهای گولی تعمیم یافته، که ساختار ترکیبیاتی جالب توجهی دارند، می‌پردازیم. ردهٔ تمام کدهای ماندهٔ درجهٔ دوم به‌طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است، و کرانهایی برای فاصلهٔ مینیمم و برخی از مشخصات گروه خودریختیهای آن معلوم شده است. اما، برای اهداف ما اطلاعات فوق کفایت می‌کند.

شمارش وزن کدها

به‌طور شهودی، ساختار فاصله‌ای کد، کیفیت و بنابراین کارآیی آن را تعیین می‌کند. با دانستن آن می‌توان پارامترهایی نظیر احتمال خطا را، هنگامی که از کد در یك کانال گسسته استفاده می‌شود، محاسبه کرد. در حالت کلی توصیف کامل ساختار فاصله‌ای بسیار پیچیده است، بنابراین به‌مسئله‌ای ساده‌تر می‌پردازیم، یعنی تعیین تعداد کدواژه‌هایی که فاصله‌شان از یك کدواژهٔ مفروض $x\in C$ برابر i است، که این تعداد را با $A_i(x)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $A_i(0)$ همان تعداد کدواژه‌های به‌وزن i است. با اضافه کردن کدواژه‌ای چون y به‌هر کدواژه، کد بدون تغییر باقی می‌ماند و از اینجا نتیجه می‌گیریم که $A_i(y)=A_i(0)=A_i$ به‌عبارت دیگر، اگر تصور کنیم که روی یك کدواژه ایستاده‌ایم و به کدواژه‌هایی که در اطراف آن قرار دارند نگاه کنیم، منظرهٔ مشاهده شده برای کلیهٔ کدواژه‌ها یکسان خواهد بود. **شمارندهٔ وزن** یك کد خطی (n,k) را با چند جمله‌ای دومتغیرهٔ

$$A(x,y)=\sum_{i=0}^{n}A_ix^iy^{n-i},\quad A_0=1,\quad \sum_{i=1}^{n}A_i=q^k-1$$

تعریف می‌کنیم، که بازهم A_i تعداد کدواژه‌های به‌وزن i، یا تعداد کدواژه‌هایی است که فاصله‌شان از یك کدواژهٔ مفروض i است. شمارنده وزن کد را به‌طور یکتا تعریف نمی‌کند زیرا دو کد متفاوت می‌توانند شمارندهٔ وزن یکسانی داشته باشند. با وجود این شمارندهٔ وزن توصیف کنندهٔ مناسب و مفیدی برای یك کد است.

به‌عنوان مثالهایی از شمارنده‌های وزن، کدهایی را که قبلا بررسی کرده‌ایم، در نظر می‌گیریم. شمارندهٔ وزن کد (۷،۴) همینگ با فاصلهٔ ۳، عبارت است از

1. Golay

$$h(x,y)=x^{7}+7x^{4}y^{3}+7x^{3}y^{4}+y^{7}$$

وشمارنده وزن توسیع (۸,۴) این کد عبارت است از

$$H(x,y)=x^{8}+14x^{4}y^{4}+y^{8}$$

کد دودویی دوری (۲۳,۱۲) گولی با فاصلهٔ مینیمم ۷، دارای شمارندهٔ وزن

$$g(x,y)=x^{23}+253x^{16}y^{7}+506x^{15}y^{8}+1288x^{12}y^{11}+1288x^{11}y^{12}+506x^{8}y^{15}+253x^{7}y^{16}+y^{23}$$

است، ونیز توسیع (۲۴,۱۲) این کد شمارهٔ وزنی برابر با

$$G(x,y)=x^{24}+759x^{16}y^{8}+2576x^{12}y^{12}+759x^{8}y^{16}+y^{24}$$

دارد. توجه کنید که شمارنده‌های وزن کدهای توسعه یافته (۸,۴) و (۲۴,۱۲) ایجاب می‌کنند که این کدها دوگان خودشان باشند.

یکی از قضایای بنیادی نظریهٔ کدگذاری، منسوب به ف. ج. مک‌ویلیامز[1]، شمارندهٔ وزن یک کد (n,k) خطی را به شمارندهٔ وزن دوگانش مربوط می‌کند. مشخصاً اگر $A(x,y)$ شمارندهٔ وزن C و $A'(x,y)=\sum_{i=0}^{n}A'_i x^i y^{n-i}$ شمارندهٔ وزن C' باشد، آنگاه اتحادهای مک‌ویلیامز بیان می‌دارد که

$$A(x,y)=\left(\frac{1}{q^{n-k}}\right)A'(y-x,y+(q-1)x) \qquad (۲)$$

از بسط چند جمله‌ایها ومقایسه ضرایب، شکل معادلی از این رابطهٔ چند جمله‌ای حاصل می‌شود که عبارت است از

$$\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-i}{j}A_i=q^{k-j}\sum_{i=0}^{j}\binom{n-i}{n-j}A'_i \qquad j=0,1,\dots,n$$

ماتریس $\lambda=(\lambda_{ij})$ را که $\lambda_{ij}=\binom{n-i}{j}$، $0\leqslant i,j\leqslant n$، درنظر می‌گیریم. به سادگی وبا استفاده از دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی می‌توان این ماتریس را به یک ماتریس واندرموند تحویل کرد، ولذا این ماتریس نامنفرد است. این واقعیت که شمارندهٔ وزن یک کد، شمارندهٔ وزن دوگانش را به طور یکتا تعیین می‌کند، اغلب مفید واقع می‌شود.

یک نتیجهٔ مهم وفی البداهة اتحادهای مک‌ویلیامز که برای مقاصدمان به آن نیازداریم از این قرار است. اگر d' فاصلهٔ مینیمم C' باشد، آنگاه

1. F. J. MacWilliams

$$\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-i}{j}A_i=q^{k-j}\binom{n}{n-j} \qquad j=0,1,\dots,d'-1 \qquad (۳)$$

زیرا $A'_0=1$، وبه‌ازای $0\leqslant i\leqslant d'-1$، $A'_i=0$. اگر کد C تنها s وزن ناصفر داشته باشد و $s\leqslant d'$، آنگاه دستگاه d' معادله و s مجهول فوق جوابی یکتا دارد.

به‌عنوان مثالی از این وضعیت، فرض کنید C یک کد (n,k) بهینه روی F_q باشد، یعنی فاصلهٔ مینیمم d آن، برابر $n-k+1$ باشد، و فرض کنید G و H به‌ترتیب ماتریس مولد وماتریس آزمون زوجیت آن باشند. حال هر مجموعه از k ستون G باید مستقل خطی باشند، زیرا در غیر این صورت کد واژهٔ ناصفری وجود خواهد داشت که در این k مختص برابر صفر است وبنابراین کد واژه‌ای باوزن نابیشتر از $n-k$ به‌دست می‌آید که با این واقعیت که فاصلهٔ مینیمم کد $n-k+1$ است، تناقض دارد. بنابراین فاصلهٔ مینیمم C'، که یک کد $(n,n-k)$ است، دست‌کم برابر $k+1$ است و در نتیجه C' نیز بهینه خواهد بود. به‌ازای $d'=k+1$، معادلات (۳) دستگاهی از k معادله برحسب مجهولهای $A_0,\dots,A_{d'-1}$ تشکیل می‌دهند واز آنجا که $d=n-k+1$، معادلاتی برحسب k مجهول داریم که می‌توان آنها را به‌طور یکتا حل کرد. اگر C یک کد بهینه (n,k) روی F_q باشد، محاسباتی نه‌چندان مشکل نشان می‌دهد که

$$A_{n-i}=\sum_{r=i}^{k-1}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}\binom{n}{r}(q^{k-r}-1) \qquad i=0,1,\dots,k-1 \qquad (۴)$$

مثال ساده‌ای [۹] از یک کد بهینه روی F_3 عبارت است از کد (۴,۲) همینگ، که فاصله‌اش ۳، و ماتریس مولدش

$$G=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}$$

است، و با تولید فضای سطری G می‌توان مستقیماً تحقیق کرد که شمارندهٔ وزن آن $A(x,y)=8x^{3}y+y^{4}$ است.

حالتی که کد دوگان خودش باشد، یعنی $C=C'$، از دیدگاه ترکیبیاتی بسیار جالب توجه است. در یک کد دو دویی خود دوگان باید وزن همهٔ کد واژه‌ها بر ۲ بخشپذیر باشد. اما همان‌گونه که کدهای تعمیم یافتهٔ (۸,۴) همینگ و (۲۴,۱۲) گولی نشان می‌دهند، ممکن است که وزن هر کد واژه بر ۴ بخش‌پذیر باشد. نتیجهٔ جالبی منسوب به گلیسن[1] وپیرس[2] [۱۰] می‌گوید که اگر C یک کد خود دوگان روی F_q باشد که برای آن وزن هر کد واژه بر c بخشپذیر باشد، آنگاه تنها چهار حالت برای (q,c) امکان‌پذیر است که عبارتند از (۲,۲)، (۲,۴)، (۳,۳) و (۴,۲). این نتیجه‌ای بسیار عمیق است، واثباتش نیازمند ابزارهایی اساسی خواهد بود.

1. Gleason 2. Pierce

این شرط که یک کد خود دوگان باشد، محدودیت شدیدی درمورد شکلی که شمارندهٔ وزن آن‌می‌تواند داشته باشد اعمال می‌کند. در اینجا تنها حالت دودویی را بررسی‌می‌کنیم. از (۲) دیده می‌شود که اگر $A(x,y)$ شمارندهٔ وزن یک کد خوددوگان $(n,n/2)$ (n زوج است) باشد، آنگاه

$$A(x,y)=\frac{1}{2^{n/2}}A(y-x,y+x)=A\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}},\frac{y+x}{\sqrt{2}}\right)$$

بدعلاوه، چون تنها وزنهای زوج می‌توانند در کد ظاهر شوند، $A(x,y)=A(x,-y)$. پس $A(x,y)$ تحت اثر تبدیلات

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

وبنابراین تحت اثر گروه ماتریسهایی که توسط این دو ماتریس پدید می‌آید، یعنی گروه دووجهی مرتبهٔ ۱۶، پایاست [۹]. با استفاده از نظریهٔ پایاها برای این گونه چندجمله‌ایها می‌توان نشان داد که اگر C یک کد دودویی خوددوگان به‌طول n باشد، شمارندهٔ وزن آن مجموعی خطی از حاصلضرب چند جمله‌ایهای $f(x,y)=x^2+y^2$ و $H(x,y)=x^8+14x^4y^4+y^8$ (شمارندهٔ وزن‌کد تعمیم یافتهٔ همینگ) است. به‌عبارت دیگر

$$A(x,y)=\sum_{2r+8s=n} a_{rs}\, f(x,y)^r\, H(x,y)^s$$

اگر این محدودیت اضافی را نیز اعمال کنیم که وزن هر کد واژه بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه

$$A(x,y)=\sum_{8r+24s=n} a_{rs}H(x,y)^rG(x,y)^s$$

که در آن $G(x,y)$ شمارندهٔ وزن‌کد تعمیم یافتهٔ گولی است. دراین حالت طول کد همواره بر ۸ بخش‌پذیر است. برای‌دوحالت دیگر، یعنی $q=3$ که‌همهٔ وزنها بر ۳ بخش‌پذیرند و $q=4$ که همهٔ وزنها بر ۲ بخش‌پذیرند، نیز نتایج مشابهی برقرار است.

طرحهای ترکیباتی

مبحث طرحهای ترکیباتی موضوعی‌نسبتاً جامع است. در واقع من قصد دارم تنها دوتا از این طرحها، یعنی آرایه[1]های متعامد و t- طرحها را شرح دهم. این امر بدین معنی نیست که دیگر اشیای ترکیباتی‌ازقبیل صفحه‌های‌افکنشی[2]، هندسه‌های‌اقلیدسی‌وافکنشی، مربعهای‌لاتین، وماتریسهای آدامار[3] وغیره در نظریهٔ کدگذاری بی‌اهمیت وارزش‌اند، بلکه تنها به‌این‌معنی

1. array 2. projective planes 3. Hadamard

است که در این مقاله ترجیح داده‌ام توجه خود را به‌این دوطرح معطوف کنم.

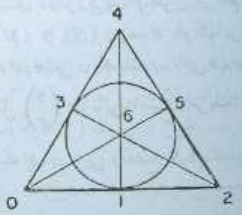
یک آرایهٔ متعامد (M,n,q,r,μ) عبارت‌است از یک آرایهٔ $M\times n$ روی الفبایی با q نماد، به‌قسمی که هر r ستون آن هریک از q^r- تایی ممکن را دقیقاً μ بار دربرداشته باشد. پارامتر r توان آرایه و μ شاخص آن‌نامیده می‌شود؛ البته واضح است که $M=\mu q^r$.

مثالی ازیک آرایهٔ متعامد عبارت است ازکدسه‌سه‌ای (۴,۲) که پیشتر آن‌را بررسی کردیم (در واقع این‌کد، یک‌کد همینگ روی F_3 است):

0	0	0	0
1	1	1	0
0	1	2	1
2	2	2	0
0	2	1	2
1	2	0	1
1	0	2	2
2	0	1	1
2	1	0	2

این‌کدمثالی از یک آرایهٔ متعامد(۹,۴,۳,۲,۱) است، زیرا هر دوتا ازستونهایش راکه‌درنظر بگیریم، هرزوج‌مرتب ازعناصر F_3 را دقیقاً یک‌بار دربردارد. این آرایه‌ها به‌طورگسترده‌ای بررسی شده‌اند، اما ازآنجا که تنها به‌ارتباطشان باکدها علاقه‌مندیم، شرح بیشترآنها رانا بخش بعد به‌تعویق می‌اندازیم.

شیء ترکیباتی دیگری‌که موردتوجه ماست، t- طرح است. یک t- طرح (v,k,λ) عبارت است ازگردایه‌ای اززیر مجموعه‌های k-تایی (که معمولا بلوک نامیده می‌شوند) یک مجموعهٔ v عنصری V به‌قسمی که هر زیر مجموعهٔ t-تایی از V دقیقاً در λ بلوک ظاهر شود. یک ۲- طرح‌معمولا یک‌**طرح بلوکی غیرکامل متعادل** نامیده می‌شود. یک t- طرح با $\lambda=1$



شکل ۳

یك **دستگاه اشتاینر**[1] وچنانچه $\lambda=1$ و $k=3$ یك **دستگاه سه‌تایی اشتاینر** نامیده می‌شود.[2]

هندسهٔ فانو[3] که‌درشکل ۳ نشان‌داده شده است، مثال ساده‌ای ازیك ۲- طرح است. دراین‌طرح مجموعهٔ V عبارت است‌از $\{0,1,\dots,6\}$، وهربلوك ازنقاط روی‌یك‌خط تشکیل شده‌است، دایره نیز یك خط بشمار می‌آید. بلوکها عبارت‌اند از $\{1,3,5\}$، $\{0,3,4\}$، $\{0,1,2\}$، $\{0,5,6\}$، $\{1,4,6\}$، $\{2,3,6\}$ و $\{2,4,5\}$، و هر زیر مجموعهٔ ۲-تایی دقیقاً دریك بلوك قرار می‌گیرد. برای مراجعات بعدی، توجه می‌کنیم که هربلوك دستگاه را می‌توان بایك هفتگانهٔ دودویی نمایش‌داد که مختصات آن باعناصر V برحسب خوزده است ودرنقاط بلوك برابر ۱ ودرسایرجاها صفراست. هندسهٔ فانو تناظرزیر رابه‌دست می‌دهد:

$\{1,3,5\}$	0101010	$\{1,4,6\}$	0100101
$\{0,3,4\}$	1001100	$\{2,3,6\}$	0011001
$\{0,1,2\}$	1110000	$\{2,4,5\}$	0010110
$\{0,5,6\}$	1000011		

توجه‌کنیدکه این‌هفتگانه‌ها دقیقاً کدواژه‌های به‌وزن ۳ درکد (۷,۴) همینگ‌اند، که‌پیش‌از این بررسی کردیم.

بسیاری از مطالب بخش‌بعد پیرامون خواص t- طرحها هستند، بنابراین بهتر است‌که این‌خواص رادراینجا شرح‌دهیم. بنابه‌تعریف، تعداد بلوکهایی از یك t-(v,k,λ) طرح که یك t- تایی مفروض را دربردارند برابر λ است. محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهدکه اگر λ_i تعدادبلوکهایی باشدکه یك‌زیرمجموعهٔ i-تایی مفروض را دربردارند، آنگاه

$$\lambda_i=\frac{\lambda\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}}\qquad i=0,1,\dots,t$$

که $\lambda_t=\lambda$ و λ_0 تعداد بلوکهای طرح است.

بحث شمارشی‌زیرکه در [۱۱] آمده‌است وعملا تعمیمی‌ازبحث ارائه شده‌در [۱۲] است، اطلاعات ساختاری مفیدی درمورد یك t-طرح فراهم می‌کند. فرض‌کنید S یك زیر-مجموعهٔ s- تایی دلخواه از V، و $y_i(S)$ تعداد بلوکهایی از t- طرح باشد که S را در دقیقاً i عضوقطع می‌کنند. تعداددفعاتی راکه‌یك r- تایی درمقطع S ویك‌بلوك ظاهرمی‌شود، به‌دوطریق می‌شماریم. S شامل $\binom{s}{r}$ r- تایی است وهریك‌ازاینهادر λ_r بلوك ظاهرمی‌شود. ازطرف دیگر، اگر I مجموعه‌ای i- تایی ومقطع S ویك‌بلوك باشد، آنگاه I تعداد $\binom{i}{r}$

1. Steiner

۲. برای‌یك‌دستگاه سه‌تایی اشتاینر معمولاعلاوه‌برشرایط بالا، شرط $r=2$ رادرنظرمی‌گیرند.

3. Fano

r- تایی در مقطع S و یك بلوك فراهم می‌آورد. به‌این ترتیب $\binom{i}{r}y_i(S)$ تا از این r- تایی‌ها به‌دست می‌آید. بنابراین،

$$\sum_{i=r}^{s}\binom{i}{r}y_i(S)=\binom{s}{r}\lambda_r\ ,\quad r=0,1,\dots,\min(s,t)\qquad(5)$$

این دستگاهی با $1+\min(s,t)$ معادله و $(s+1)$ مجهول است، و چنانچه $s\leqslant t$، این دستگاه جواب‌یکتایی خواهد داشت‌که مستقل از S است:

$$y_l(S)=y_l=(-1)^l\sum_{r=0}^{s}(-1)^r\binom{r}{l}\binom{s}{r}\lambda_r,\quad l=0,1,\dots,s\qquad(6)$$

اگر $s>t$، معادلات (۵) درحالت کلی جواب یکتایی ندارند؛ اما درحالت خاصی که $s=t+1$، می‌توانیم معادلهٔ r ام رادر $(-1)^r$ ضرب کنیم وسپس باجمع‌بندی روی r به معادلهٔ زیر برسیم:

$$y_0(S)+(-1)^t y_{t+1}(S)=\sum_{r=0}^{t}(-1)^r\binom{t+1}{r}\lambda_r\qquad(7)$$

چون طرف‌راست این معادله مستقل‌از S است، نتیجه می‌گیریم که‌سمت چپ نیزچنین‌است.

نخستین‌کاربرد این روابط، ساختن‌طرحهای جدید ازیك‌طرح مفروض‌است. مجموعهٔ تمام بلوکهای‌یك t-(v,k,λ) را با $\mathcal{B}$ ومکملهای این‌بلوکها را با $\mathcal{B}'$ نمایش می‌دهیم، یعنی، $\mathcal{B}'=\{(V\setminus B):B\in\mathcal{B}\}$. ادعا می‌کنیم که $\mathcal{B}'$ یك t- طرح است. برای‌اثبات، باید نشان‌دهیم که تعداد بلوکهایی‌که یك t- تایی را در بردارند، عددی است ثابت‌که از انتخاب t- تایی مستقل است. اما این عدد دقیقاً تعداد بلوکهایی از $\mathcal{B}$ است که بااین t- تایی مفروض هیچ اشتراکی‌ندارند؛ حال معادلهٔ (۶) با $l=0$ و $s=t$ نشان‌می‌دهدکه این عددبرابر y_0 است و به‌واقع از t- تایی انتخاب شده مستقل است. درنتیجه‌بلوکهای $\mathcal{B}'$ یك t-$(v,v-k,y_0)$-طرح تشکیل می‌دهند.

به‌عنوان مثالی‌ازمکمل‌یك‌طرح، مکمل‌طرحی راکه ازهندسهٔ فانو به‌دست‌آمد، درنظر بگیرید. بلوکهای آن‌عبارت‌اند از $\{0,2,4,6\}$، $\{1,2,5,6\}$، $\{3,2,5,6\}$، $\{3,2,3,4\}$، $\{0,2,3,5\}$، $\{0,1,4,5\}$، و $\{0,1,3,6\}$. چون کد(۷,۴) همینگ برداری را که همهٔ درایه‌هایش ۱اندر بردارد، مکمل کد واژه‌هایی به وزن ۳، کد واژه‌هایی به وزن ۴ اند، و اینها نیز با بلوکهای فوق متناظرند. طرح فوق یك (۷,۴,۲)-۲ ۲-طرح است.

دربخش‌قبل‌دیدیم که چگونه‌می‌توان یك‌کدرابا روشی طبیعی‌وبا افزودن یك‌رقم آزمون زوجیت توسعه‌داد. تحت‌شرایط معینی می‌توان‌یك t-طرح را نیز توسعه داد، ودراین حالت، این‌دوعامل توسعه نظیر هم‌اند. فرض می‌کنیم t عددی زوج و t-$(2k+1,k,\lambda)$ یك $(V,\mathcal{B})$ طرح‌است. حال باافزودن نماد ∞ به V مجموعهٔ $V'=V\cup\{\infty\}$ را تشکیل می‌دهیم، هر

گاه مجموعهٔ مکملهای بلوکهای $\mathcal{B}$ در V را با $\bar{\mathcal{B}}$ و مجموعهٔ $\{B\cup\{\infty\}|B\in\mathcal{B}\}$ را با $\mathcal{B}'$ نمایش‌دهیم، ادعامی کنیم که‌مجموعهٔ بلوکهای $\bar{\mathcal{B}}\cup\mathcal{B}'$ یك $(t+1)$-$(2k+2,k+1,\lambda)$ طرح است. اثبات سرراست‌است. یك‌زیرمجموعهٔ $(t+1)$ - تایی T رادرنظر بگیرید. اگر T شامل ∞ باشد، درهیچ یك‌ازبلوکهای $\bar{\mathcal{B}}$ ظاهرنمی‌شود و دقیقاًدر λ بلوك از $\mathcal{B}'$ ظاهر می‌شود، بنابراین T در دقیقاً λ بلوك از $\bar{\mathcal{B}}\cup\mathcal{B}'$ ظاهر می‌شود. اگر T شامل ∞ نباشد، در دقیقاً $y_0(T)$ بلوك‌از $\bar{\mathcal{B}}$ و $y_{t+1}(T)$ بلوك از $\mathcal{B}'$ ظاهر می‌شود وبنابر معادلهٔ (۷)، و با توجه به‌اینکه t زوج است، نتیجه می‌شود که

$$y_0+y_{t+1}=\sum_{r=0}^{t}(-1)^r\binom{t+1}{r}\frac{\lambda\binom{2k+1-r}{t-r}}{\binom{k-r}{t-r}}$$

$$=\frac{\lambda}{\binom{2k+1-t}{k-t}}\sum_{r=1}^{t}(-1)^r\binom{t+1}{r}\binom{2k+1-r}{k-r}=\lambda$$

درنتیجه $\bar{\mathcal{B}}\cup\mathcal{B}'$ یك $(t+1)$-$(2k+2,k+1,\lambda)$ طرح روی V' است.

ما برخی‌ازخواص t- طرحها رابررسی کرده‌ایم، وبرای‌شرح این‌خواص ازکدها کمك گرفته‌ایم. حال، موقعیت بسیارکلیتری را درنظر می‌گیریم؛ ودربخش بعد قضایای آسموس-ماتسون رامی‌آوریم که پایهٔ آنچه درمورد ارتباط بین کدها وطرحها می‌دانیم به‌شمارمی‌آید.

قضایای آسموس-ماتسون

به‌طورشهودی، می‌توان حدس‌زدکه یك کد "خوب"، یعنی کدی که "به‌طورچگال مرتب شده باشد"، باید ساختار پیچیده‌ای داشته باشد، واین‌مطلب برای کدهای باطول کم‌درست به‌نظر می‌رسد. شاید بارزترین مثالها ازاین دست، کدهای کامل باشندکه درآنها کره‌های به‌شعاع e تمام F_q^n رامی‌پوشانندودرعین‌حال یکدیگر راقطع نمی‌کنند. حال‌نشان می‌دهیم که درواقع ازاین کدها می‌توان t- طرح‌ساخت ومثالهای بخشهای‌قبل‌حالتهایی استثنایی نبودند. ارتباط‌نسبتاً ساده‌ای میان آرایه‌های متعامد وکدها وجوددارد، که پیش‌ازپرداختن به‌حالت جالبتر t-طرحها، این ارتباط‌رانشان‌می‌دهیم. همهٔ‌قضایا وبرهانهای‌این‌بخش، به‌استثنای‌پاراگراف آخر، به‌آسموس وماتسون منسوب‌اند. [۱۳ و ۱۴].

فرض‌کنید C یك‌کد (n,k) خطی و C' کد $(n,n-k)$ دوگان‌آن با فاصلهٔ مینیمم d' باشد. اگر G ماتریس‌مولدی برای C، ودرنتیجه یك‌ماتریس‌آزمون زوجیت برای C' باشد، از آنجاکه فاصلهٔ مینیمم C' برابر d' است، هرمجموعه از $d'-1$ ستون G مستقل خطی است. اگر D گردایه‌ای‌از $(d'-1)$ ستون G باشد، آنگاه بااعمال سطری مقدماتی روی G می‌توان ماتریس مولدجدیدی مانند G^* برای C ساخت‌که در $d'-1$ سطر نخست‌آن

ودرمختصات متناظر D ماتریس همانی‌قرارگیرد. ازاین‌مطلب بلافاصله نتیجه می‌شودکه‌در فضای سطری G^* روی F_q، و بنابراین درفضای سطری G، همهٔ $(d'-1)$ گانه‌ها ازعناصر F_q به‌تعدادی مساوی، یعنی $q^{k+1-d'}$ بار، ظاهر می‌شوند. پس‌هر کدخطی (n,k) روی F_q که فاصلهٔ مینیمم دوگانش d' باشد یك آرایهٔ متعامد $(q^k,n,q,d'-1)$ تشکیل می‌دهد. ملاحظات‌فوق، که بسیارساده به‌دست‌آمد، عملادرنظریهٔ کدگذاری کارآیی بسیاری داشته‌است. (دربخش‌بعد تحت‌عنوان "مطالعات بیشتر" اشارات دیگری دراین زمینه‌خواهیم داشت.)

حال به‌ارتباط میان کدهاوطرحها بازمی‌گردیم. اگروضعیت مختصات یك کد به‌طول n را با nعضو متمایز نشان‌دهیم. یك‌کدواژه به‌وزن w را می‌توان بامجموعهٔ وضعیت مختصات ناصفرش یکی گرفت؛ این مجموعه معمولا **محمل**[1] کدواژه نامیده می‌شود. عبارت "مجموعهٔ بردارهای به‌وزن w در یك کد، مؤید یك t- طرح است"، بداین معنی است که اگر محمل بردارهای‌به‌وزن w رابه‌عنوان‌بلوکها درنظر بگیریم، مجموعهٔ بلوکهای‌متمایزیك t-طرح‌است. روی F_q هرمضرب اسکالر ازیك‌کدواژه باز یك‌کدواژه است، وبنابراین هرمحمل دست‌کم $(q-1)$بار ظاهر می‌شود، اما برای‌تشکیل طرح‌تنها نماینده‌های متمایز رادرنظرمی‌گیریم. نخستین‌قضیه‌ای که‌ازکدها طرح‌می‌سازد، بدیهی‌است ولی‌راه رابرای‌قضایای‌بعدی‌می‌گشاید.

قضیهٔ ۱ [۱۴]. یك‌کدخطی (n,k) روی F_q بهینه‌است اگر وتنهااگر مجموعهٔ بردارهای با وزن مینیمم‌مؤید یك‌طرح بدیهی باشد.

برهان. نخست فرض کنیدکه C یك‌کدخطی (n,k) با فاصلهٔ مینیمم d است و برای هرمجموعهٔ d-تایی ازوضعیت مختصاتش‌کدواژه‌ای بااین‌محمل وجوددارد. می‌خواهیم ثابت کنیم‌که C یك‌کدبهینه است، یعنی $d=n-k+1$. فرض‌کنید C_1 زیرکدی‌از C باشدکه توسط بردارهای باوزن مینیمم پدید می‌آید و C'_1 دوگان آن باشد. ازآنجا که فاصلهٔ C_1 برابر d است، هرمجموعه از $(d-1)$ ستون هر ماتریس مولد C'_1 مستقل خطی‌است وبعد $d-1$ دارد. بنابراین بعد C_1 برابراست با $n-(d-1)$ که‌کوچکتر یامساوی k است: $n-d+1\leqslant k$. اماقبلادیده‌ایم‌که $k\leqslant n-d+1$ وبنابراین $k=n-d+1$.

حال فرض‌کنیدکه‌کد خطی (n,k) و بهینهٔ C با فاصلهٔ مینیمم $d=n-k+1$ داده شده است. باید نشان دهیم‌که هر مجموعهٔ d-تایی از وضعیت‌مختصات آن، محمل یکی‌ازکد واژه‌های دارای وزن مینیمم است. اما از معادلهٔ (۴) می‌دانیم‌که تعداد کدواژه‌های باوزن مینیمم برابر است با $A_{n-k+1}=A_d=\binom{n}{d}(q-1)$ ، وچون $\binom{n}{d}$ محمل ممکن وجود دارد، بایدبرای هرمحمل‌ممکن یك کدواژه (و $(q-1)$ مضرب اسکالر آن) موجود باشد. زیرا، اگر دوکد واژه به‌وزن d محمل یکسانی داشته باشند ومضرب اسکالری ازیکدیگر نباشند، درمیان ترکیبات خطی‌آنها بایدکد واژه‌ای به‌وزن‌کمتراز d وجود داشته باشد، که یك تناقض است.

1. support

دوقضیهٔ بعد اندکی عمیقترند و به‌کدهای کامل و توسیع آنها مربوط می‌شوند.

قضیهٔ ۲ [۱۳]. یک کد خطی C با فاصلهٔ مینیمم $d=2l+1$ کامل است اگر و تنها اگر کد واژه‌های دارای وزن مینیمم، مؤید یک $(n,d,(q-1)^e)-(e+1)$ طرح باشند.

برهان. نخست فرض کنید که کد C کامل است، یعنی به‌ازای‌هر $x\in F_q^n$ کد واژهٔ یکتایی چون $c\in C$ وجود دارد به‌طوری که x در کرهٔ به‌شعاع e حول c قرار می‌گیرد. به‌ازای‌هر مجموعهٔ $(l+1)$-تایی E از وضعیت مختصات، $(q-1)^e$ عنصر از F_q^n با محمل E وجود دارد هریک از این عناصر در گویی به‌شعاع e حول یکی از کد واژه‌ها قرار می‌گیرد، که این ایجاب می‌کند که وزن آن کد واژه حداکثر برابر $d=2e+1$ و بنابراین $2e+1$ باشد.

پس کد واژه‌ها در $(e+1)$ مختص با E مشترک‌اند. به‌مانند بحث فوق، هردو کد واژه به‌وزن d باید مضرب اسکالری از یکدیگر باشند. پس، با تقریب مضارب اسکالر، $(q-1)^e$ کد واژه وجود دارد که محملشان E را می‌پوشانند. چون این عدد به‌انتخاب E بستگی ندارد، این محملها یک طرح تشکیل می‌دهند.

حال فرض کنید محمل کد واژه‌های با وزن مینیمم یک $(n,d,(q-1)^e)-(e+1)$ طرح تشکیل دهند. می‌خواهیم نشان دهیم که هر $x\in F_q^n$ درفاصلهٔ e از یک کد واژه قرار دارد. فرض کنید x عنصری از F_q^n با کوچکترین وزن ممکن باشد که درفاصلهٔ e از هیچ کدواژه‌ای قرار ندارد (و بنابراین $w(x)\geqslant e+1$، زیرا n-تایی صفر عضوی از C است). فرض کنید E یک مجموعهٔ $(e+1)$- تایی ازمختصات برگزیده از محمل x باشد. چون کد واژه‌های به وزن d یک $(e+1)$- طرح تشکیل می‌دهند، $(q-1)^e$ بلوک از طرح وجود دارد که E را دربرمی‌گیرد. و با درنظر گرفتن مضارب اسکالر آنها $(q-1)^{e+1}$ کد واژه به‌وزن $2e+1$ وجود دارد که محمل آنها E را دربرمی‌گیرد. حال ازمیان این کد واژه‌ها دقیقاً یکی، مثلاً c، وجود دارد که مقادیرش روی E همان مقادیر x است و بنابراین وزن $x-c$ حداکثر $w(x)-1$ خواهد بود. اما اگر x درفاصلهٔ دست‌کم $e+1$ ازهر کد واژه باشد، $x-c$ نیزچنین است و بنابراین $x-c$ برداری به‌وزن حداکثر $w(x)-1$ است که فاصله‌اش از هر کد واژه دست‌کم $e+1$ است، که این با انتخاب x تناقض دارد و اثبات کامل است.

ازبدکاربستن این قضیه روی میدان F_2 دستگاههای اشتاینر حاصل می‌شود. دراین حالت می‌توانیم این قضیه را با اعمال محدودیتهایی برای کد تعمیم یافتهٔ C_e نیز بیان کنیم.

قضیهٔ ۳ [۱۳]. فرض کنید C_e یک کد خطی کامل تعمیم یافته به‌طول $n+1$ و فاصلهٔ $d+1=2e+2$ روی F_2 باشد. در این صورت مجموعهٔ بردارهای با وزن مینیمم، مؤید یک $(e+2)-((n+1),(d+1),1)$ طرح خواهد بود.

برهان. ازقضیهٔ ۲ می‌دانیم که بردارهای به‌وزن $2e+1$ در C یک دستگاه اشتاینر تشکیل می‌دهند. مختص اضافه شده را، که برای آزمون زوجیت است، با ∞ نشان دهید وفرض کنید که E یک مجموعهٔ $(e+2)$-تایی ازوضعیت مختصات باشد. اگر E شامل ∞ باشد، ازآنجاکه d فرد است، دقیقاً یک کد واژه‌به‌وزن d در C موجود است که $E\setminus\{\infty\}$ را می‌پوشاند و بنابراین دقیقاً یکی ازواژه‌های C_e، E را می‌پوشاند. اگر E شامل ∞ نباشد،

آنگاه E حداکثر در محمل یکی از کد واژه‌های به‌وزن d (یا معادلاً محمل برداری به‌وزن $d+1$ در C_e و شامل ∞) از C قرار می‌گیرد. اگر E در چنین محملی قرار نگیرد، ادعا می‌کنیم که باید در محمل برداری با وزن $d+1$ از C قرار داشته باشد. بردار دودویی به‌وزن $e+2$ که به E نظیر می‌شود درکره‌ای به‌شعاع e حول یک کد واژه قرار دارد و بنا به‌فرض این کد واژه نمی‌تواند از وزن d باشد. از این مطلب بلافاصله نتیجه می‌شود که این بردار به‌وزن $2e+2$ است، یکتاست، و محمل آن E را می‌پوشاند.

قضیهٔ اخیر، عملاً برای کدهای غیر خطی نیز به‌کار می‌رود. دراینجا t- طرحهایی را که ازکدهای کاملی که پیشتر شرح دادیم به‌دست می‌آیند، به‌اختصار شرح می‌دهیم. کدهای همینگ روی F_q دارای پارامترهای $n=(q^m-1)/(q-1)$، $k=n-m$، $d=3$ هستند و بنابرقضیهٔ ۲، ۲- طرحهای $(n,3,(q-1))$-۲ به‌دست می‌دهند. به‌ازای $q=2$، این طرحها دستگاههای سه‌تایی اشتاینرند؛ فاصلهٔ مینیمم کد تعمیم یافته ۴ است و کد واژه‌های به وزن ۴ یک $(n+1,4,1)$-۳ طرح تولید می‌کنند، که یک دستگاه چهارتایی اشتاینر نامیده می‌شود. کد (۱۱,۶) گولی روی F_3 دارای فاصله مینیمم ۵ است و بردارهای به وزن ۵ آن مؤید یک ۳-طرح (۱۱,۵,۴)-۳ اند. درواقع این طرح عملاً یک دستگاه اشتاینر (۱۱,۵,۱)-۴ است، اما قضیهٔ فوق تا آن حد قوی نیست که مستقیماً این مطلب را نتیجه دهد. اگر این کد را با اضافه کردن یک مختص که مقدارش قرینهٔ مجموع دیگر مختصات است توسعه دهیم، یک کد (۱۲,۶) با فاصلهٔ مینیمم ۶ به‌دست می‌آید. کد واژه‌های به‌وزن ۶ یک دستگاه اشتاینر (۱۲,۶,۱)-۵ تشکیل می‌دهند. کد (۲۳,۱۲) دودویی گولی دارای فاصلهٔ مینیمم ۷ است و کد واژه‌های به‌وزن ۷ یک دستگاه اشتاینر (۲۳,۷,۱)-۴ تشکیل می‌دهند. از توسعهٔ این کد یک کد (۲۴,۱۲) با فاصلهٔ مینیمم ۸ و یک دستگاه اشتاینر (۲۴,۸,۱)-۵ حاصل می‌شود.

دو ۵- طرح اشتاینری که ازکدهای گولی به‌دست می‌آیند، تنها ۵- طرحهای اشتاینری هستند که تاکنون شناخته شده‌اند. به‌ازای λی بزرگتر از یک ۵- طرحهای زیاد دیگری شناخته شده‌اند، اما به‌ازای $t\geqslant 6$، تاکنون هیچ t-طرحی (خواه اشتاینر، وخواه‌غیراشتاینر) یافت نشده است.[1]

قضیهٔ زیرشاید منشاء بسیاری ازکارهایی باشد که دراین‌مبحث انجام می‌شود. استدلال آن بسیار ساده، ولی نیرومند ومبتنی براستفادهٔ هوشمندانه از اتحادهای مک ویلیامز است. پیش از پرداختن به‌قضیه باید یک نکته را روشن کنم. درقضایای قبلی از این واقعیت استفاده شد که دو کد واژهٔ x و y به‌وزن d وبامحمل یکسان مضرب اسکالری ازیکدیگرند، زیرا درغیر این‌صورت می‌توان عنصری چون α از F_q یافت که $0<w(x-\alpha y)<d$، که با این واقعیت که d فاصلهٔ مینیمم کد است منافات دارد.

برای قضیهٔ بعد به‌تعمیمی از این خاصیت نیاز داریم. نخست ملاحظه کنید که اگر

---

۱. در ۱۹۸۶ ثابت شد که به ازای هر t، تعدادی نامتناهی t- طرح وجود دارد. ـم.

$w(x)=v$، آنگاه x دست‌کم $1+[v/(q-1)]$ درایهٔ ناصفر یکسان دارد. اگر x و y دوکد واژهٔ به‌وزن v و بامحمل یکسان ازیك‌کد خطی با فاصلهٔ مینیمم d باشند، عنصری چون α از F_q وجود دارد که $w(x-\alpha y)\leqslant v-\left(\left[\frac{v}{(q-1)}\right]+1\right)$. اگر عبارت سمت راست نامساوی از d کوچکتر باشد، x و y مضرب اسکالری از یکدیگر خواهند بود. در قضیهٔ آخر فرض براین است‌که C یك‌کد خطی (n,k) با فاصلهٔ مینیمم d، و فاصلهٔ مینیمم کد $(n,n-k)$ دوگان C' برابر e است. بزرگترین اعداد صحیحی را که درنامساویهای

$$w-\left(\left[\frac{w}{(q-1)}\right]\right)<e \quad \text{و} \quad v-\left(\left[\frac{v}{(q-1)}\right]+1\right)<d$$

صدق‌می‌کنند به‌ترتیب با v_0 و w_0 نشان‌دهید. برای کدهای دودویی‌قراردهید $v_0=w_0=n$؛ نکتهٔ مهمی‌که باید به‌خاطر بسپاریم آن‌است‌که دوکد واژهٔ به‌وزن کوچکتر یامساوی v_0 و با محمل‌یکسان مضرب اسکالری ازیکدیگرند. گزارهٔ مشابهی برای‌دوکد واژه به‌وزن کوچکتر یامساوی w_0 از C' نیز برقرار است.

قضیهٔ ۴ [۱۴]. فرض‌کنیدکه تعدادوزنهای ناصفری از C' که‌کوچکتر یامساوی $n-t$ اند، خود کوچکتر یا مساوی عدد مثبت $d-t$ باشد. در این صورت، برای هر وزن v، که $s\leqslant v\leqslant v_0$، بردارهای به وزن v در C یك t- طرح تشکیل می‌دهند، وبرای هروزن w، $e\leqslant w\leqslant \min(n-t,w_0)$، بردارهای به‌وزن w در C' یك t- طرح تشکیل خواهندداد.

برهان. اثبات حکم برای C' ازاثبات حکم برای C ساده‌تر است. لذا نخست به‌آن می‌پردازیم. برهانی‌که می‌آوریم نشان‌می‌دهدکه مکمل‌محمل بردارهای به‌وزن w در C'، وبنابراین خود محملها، یك t- طرح تشکیل می‌دهند.

ساختن طرح‌از C'. فرض کنید T یك مجموعهٔ t- تایی از مختصات و C^T کدی به طول $(n-t)$ باشدکه‌ازحذف مختصات T حاصل‌می‌شود. فرض‌کنید $C'^{\circ\circ T}$ کدی باشدکه توسط بردارهایی از C' که درمختصات T صفرند، پدید می‌آید. حال C^T و $C'^{\circ\circ T}$ متعامدند ویك‌کد $(n-t,n-t-k)$است. بنابه‌فرض $d<t$ واگر $x^T,y^T\in C^T$ یکسان باشند، آنگاه بردارهای نظیر آنها در C، یعنی x,y، فاصله‌ای حداکثر برابر $d-t$ خواهند داشت که‌یك تناقض است. بنابراین $|C^T|=q^k$ ودوگان C^T همان $C'^{\circ\circ T}$ است. حال فرض کنید $W=\{w_1,\dots,wd-t\}$ مجموعهٔ وزنهای‌ناصفر $C'^{\circ\circ T}$ باشد و دقت کنید که وزن مینیمم C^T دست‌کم $d-1$ است. ازبه‌کاربستن اتحادهای مك‌ویلیامز برای C و C'، معادلات

$$\sum_{i\in W}\binom{n-t-j}{\mu}A'^{\circ\circ T}_i=q^{n-t-k-\mu}\binom{n-t}{\mu}-\binom{n-t}{\mu},\ \mu=0,1,\dots,d-t-1$$

به‌دست می‌آیدکه دستگاهی‌از $(d-t)$ معادله برحسب حداکثر $(d-t)$ مجهول‌است، ودر آن $A'^{\circ\circ T}_j$ تعدادکد واژه‌های به‌وزن j در $C'^{\circ\circ T}$ است. ازاین معادلات جوابی یکتا برای توزیع‌وزنی $C'^{\circ\circ T}$ به‌دست‌می‌آید، وبااستفاده ازاین توزیع، می‌توان توزیع وزنی C^T را

نیز به‌دست‌آورد وهردوی اینهاازانتخاب T مستقل‌اند.

حال فرض کنید E_v مجموعهٔ محمل کد واژه‌های به وزن v در C' و $\overline{E}_v$ مجموعهٔ مکملهای این‌محملها باشد، که درآن $v\leqslant\min(w_0,n-t)$. تعداد مجموعه‌هایی از E_v که T رادربردارند دقیقاً $1/(q-1)$ برابر تعداد کدواژه‌های به‌وزن v در $C'^{\circ\circ T}$، وبنابراین از T مستقل است. پس مجموعه‌های $(n-v)$- تایی E_v یك t- طرح تشکیل می‌دهند. و در نتیجه بنابر خاصیتی که قبلا ثابت‌کردیم، مجموعه‌های v- تایی $\overline{E}_v$ نیز یك t- طرح تشکیل خواهندداد.

ساختن‌طرح‌از C. فرض‌کنید D_d مجموعهٔ‌محمل‌های‌کد واژه‌های‌به‌وزن d در C باشد. تعداد مجموعه‌های d- تایی D_d که‌یك t- تایی‌مفروض را دربردارند، $1/(q-1)$ برابر تعداد بردارهای به‌وزن $d-t$ در C^T است، و درنتیجه از انتخاب T مستقل است. پس مجموعه‌های d-تایی D_d یك t- طرح‌تشکیل‌می‌دهند. برای‌اثبات حکم درحالت $d<v\leqslant v_0$ از استقراء استفاده می‌کنیم، فرض‌کنید برای هروزن v، که $d<v<v'\leqslant v_0$، محمل کد واژه‌های به‌وزن v یك t- طرح تشکیل دهند. فرض کنید $D_{v'}$ مجموعهٔ کد واژه‌های به‌وزن v' باشد. تعدادزیرمجموعه‌هایی از $D_{v'}$ که T را دربردارند: $1/(q-1)$ برابر تعداد کد واژه‌های به‌وزن $v'-t$ در C^T است، که‌خود ازکدواژه‌های به‌وزن v در C' ناشی می‌شوند. تعدادکل کدواژه‌های به‌وزن $v'-T$ در C^T ازانتخاب Tمستقل‌است. بنابه‌فرض همهٔ‌وزنهای کمتراز v' یك t- طرح فراهم می‌سازند. بنابراین تعداد بردارهایی به‌وزن $v'-t$ در C^T که‌ازکد واژه‌های به‌وزن‌کمتراز v' ناشی می‌شوند نیزازانتخاب T مستقل است. پس $D_{v'}$ یك t- طرح است.

روش اثبات این قضیه به‌ویژه جالب‌است. استفاده ازاتحادهای مك‌ویلیامز وملاحظهٔ این‌که‌کدواژه‌های به‌وزن‌کمتراز v_0 وبامحمل یکسان، مضرب‌اسکالری ازیکدیگرند، پایه و اساس این برهان است.

کاربردهای‌قضیه رابامثال بهتر می‌توان توضیح داد. جالبترین کاربرد آن در کدهای خوددوگانی است که در شمارندهٔ وزنشان شکافهایی وجود دارد. نخست مسئله را برای‌کد (۱۲,۶) گولی‌روی F_9 حل می‌کنیم. این‌کد تنها کد واژه‌هایی به‌وزنهای ناصفر ۱۲,۹,۶ دارد؛ باانتخاب $t=5$، تعدادوزنهای کوچکتر یامساوی $n-t=12-5$ برابر ۱ است که خودکوچکتر یامساوی است با $d-t=6-5=1$. دراین‌حالت،کدواژه‌های به‌وزن ۶ مؤید یك‌دستگاه اشتاینر (۱,۶,۱۲)-۵، وکدواژه‌های به‌وزن ۹ مؤید یك‌طرح بدیهی‌اند که همهٔ زیرمجموعه‌های ۹ تایی روی ۱۲ عنصر را در بردارد. چنانچه این‌کد تعمیم یافته را به‌آن‌کدواژه‌هایی‌که دریك مختص خاص مقدارشان ۱ است محدودکنیم وبدانیم که این کد توسعه‌ای ازیك‌کد (۱۱,۶) است، قضیه نشان می‌دهدکه‌کدواژه‌های به‌وزن ۵ درواقع یك ۴- طرح‌تشکیل می‌دهند، نتیجه‌ای‌که از قضیهٔ ۲ به‌سادگی حاصل نمی‌شد.

بررسی دوبارهٔ کددودویی (۲۴,۱۲) گولی‌نیزجالب‌است. دراین‌کدتنهاوزنهای ناصفر ۸,۱۲,۱۶,۲۴است: باانتخاب $t=5$ تعدادوزنهای‌کوچکتر یامساوی $24-5$ خودکوچکتر یامساوی $8-5$، یعنی ۳، است. پس محمل‌کدواژه‌های‌هروزن یك ۵- طرح تشکیل‌می‌دهند،

که این ۵-طرحها به‌ترتیب عبارتند از (۲۴,۸,۱)-۵-(۲۴,۱۲,۴۸)-۵-(۲۴,۱۶,۷۸)-۵ [۱۴]. به‌سادگی‌می‌توان نشان داد که این کد، کدواژه‌ای را که همهٔ ارقامش یك است دربر دارد، وبنا بر این مکمل کدواژهٔ به‌وزن ۸، کدواژهٔ به‌وزن ۱۶ خواهد بود وطرحهای متناظر مکمل یکدیگرند. طرحی که ازوزن ۱۲ به‌دست‌می‌آید، مکمل خوداست.

کدماندهٔ درجهٔ‌دوم (۲۴,۴۷) روی F_2 ازفاصلهٔ مینیمم ۱۱ است وتوسیع آن تنها وزنهای ۱۲،۱۶،۲۰،۲۴،۲۸،۳۲،۳۶ و ۴۸ را دارد. ازاتحاد ملك‌ویلیامز نتیجه می‌شود که هر کد خود دوگان خطی با فاصلهٔ ۱۲ و طول ۴۸ که وزن هر کدواژه‌اش بر ۴ بخشپذیر باشد، شمارندهٔ وزن‌یکتایی دارد، که جزئیات آن دراینجا ذکر نمی‌شود. به‌ازای $t=5$، تعداد(۷) وزنهای ناصفر کوچکتر یامساوی $n-t=48-5$ برابر با $d-t=12-5$ است، وبنا بر این کد واژه‌های نظیر هروزن مؤید یك ۵- طرح‌اند. پارامترهای آنها در [۱۴] آمده است ودراینجا تنهایادآوری می‌کنیم که چون این کد، کدواژه‌ای را که همهٔ ارقامش یك‌است در بردارد، طرحهای به‌دست آمده‌ازکدواژه‌های به‌وزن ۱۲،۱۶، و ۲۰ به‌ترتیب مکمل‌طرحهای به‌دست آمده ازوزنهای ۳۶، ۳۲ و ۲۸ اند، درحالی که طرح‌نظیر وزن ۲۴، مکمل‌خوداست. این‌بخش راباشرح خطوط کلی بحثی، منسوب به دلسارت[1] [۲۰] به‌پایان می‌بریم. وی‌تنها با بهره‌گیری ازاین فرض که C یك آرایهٔ متعامد است، نشان‌دادکه ازمیان محمل کد واژه‌های C می‌توان t- طرح ساخت. فرض کنید C یك کد خطی (n,k,d,q) با s وزن ناصفر، و C' دارای فاصلهٔ مینیمم d' و s' ناصفر باشد. فرض کنید $v\in F_q^n$ به وزن t، $t<d$، باشد و تعداد کدواژه‌هایی از C را که دارای‌وزن τ هستند ودقیقاً در t مختص ناصفر u با آن‌مشترك‌اند، با $\lambda_\tau(u)$ نشان دهیم. ازآنجاکه C یك آرایهٔ متعامد باتوان $d'-1$ است، می‌توانیم تعداد دفعات ظهور بردارهای به وزن $t+j$، $0\leqslant j\leqslant d'-1-t$، در C را که با u دردقیقاً مختصات ناصفرمشترك‌اند، به‌دوطریق بشماریم:

$$\sum_\tau \binom{\tau-t}{j}\lambda_\tau(u)=\binom{n-t}{j}(q-1)^j q^{d'-t-j} \quad j=0,1,\dots,d'-1-t$$

درسمت چپ جمع‌بندی روی s وزن ناصفر C انجام می‌شود. پس دستگاهی از m معادله و برحسب s مجهول $\lambda_\tau(u)$ حاصل‌می‌شود. اگر $d'>s$، می‌توانیم t را به‌صورت $d'-s$ تعریف کنیم وبه‌این ترتیب دستگاهی‌از s معادله‌و s مجهول‌حاصل می‌شود. ازآنجاکه‌ماتریس تبدیل نامنفرد است (دنبالهٔ ساده‌ای ازاعمال سطری مقدماتی این ماتریس را به‌یك ماتریس واندرموند تبدیل‌می‌کند) به‌ازای هر τ جواب‌یکتایی برای $\lambda_\tau(u)$ وجود دارد، واین نشان می‌دهدکه کد واژه‌های به‌هر وزن ناصفر C مؤید یك t- طرح‌اند، زیرا $\lambda_\tau(u)$ از انتخاب بردار u به‌وزن $d'-s$، مستقل‌است. مشابهاً در C' نیز کدواژه‌های به‌هر وزن ناصفر مؤید یك t- طرح‌انـد که در آن $t=\max(d'-s',d'-\bar{s})$، و $\bar{s}$ برابـر $(n-s)$ تعریف می‌شود هرگاه C کدواژهٔ متشکل ازارقام یك‌را دربرداشته باشد، ودرغیراین صورت برابر

1. Delsarte

s تعریف می‌شود. $\bar{s}$ رانیز به‌طریق‌مشابهی‌تعریف می‌کنیم. این‌استدلال ساده، زیبا، ونیرومند است و به‌خوبی روابط جالبی راکه میان‌کدگذاری وترکیبیات وجود دارد، نشان می‌دهد.

مطالعات بیشتر

آنچه دراین مقاله آمد، بیانگر کوششهایی است‌که تا سال ۱۹۷۲ صورت گرفته بود. از آن‌زمان این مباحث‌دردوجهت توسعه یافته‌اند،که درهردوی آنها مسائل جالبی مطرح شده است. جهت‌اول توسعه ازاین طرزفکر سرچشمه می‌گیرد که چون کدهای کامل در تولید t- طرحها مفیدبوده‌اند، شایدبتوان قیدکامل‌بودن یك‌کدرا به‌طریقی‌مهارشده اندکی ضعیفتر کرد بی‌آنکه دراین میان t- طرحهایی ازدست بروند. این اندیشه‌ای است که در ورای تعریف کدهای به‌طوریکنواخت چیده‌شده [۱۶،۱۷،۱۸]، هرچند که دردونای این مراجع تعاریف متفاوتی داده‌شده‌است] وکدهای تقریباً کامل نهفته‌است [۱۹]. این‌رهیافت واقعاً باموفقیتهایی نیز روبرو شده‌است.

جهت دیگر توسعه از کارهای بنیادی دلسارت [۳] ناشی می‌شود، که، یقیناً یکی از مهمترین‌کارهایی است‌که درچندسال‌اخیردرزمینهٔ کدگذاری انجام شده است. پیش‌از وی، کدهای غیرخطی‌وپیچیدهٔ متعددی شناخته‌شده بودندکه t- طرح به‌دست می‌دادند، امادرچارچوب هیچ یك ازنظریه‌های موجود در آن وقت نمی‌گنجیدند. کوششهایی درجهت تعریف دوگان یك‌کد غیرخطی صورت گرفته‌بود، امابه‌نظرنمی‌رسیدکه ازاین‌تعریف هم‌کاری ساخته باشد. دلسارت توزیع‌فاصله‌ای‌کدها را (به‌جای توزیع وزنی) درنظر گرفت وتبدیلی روی آن تعریف‌کرد. با این توزیع وتبدیل متناظرش، اوچهار پارامتر رامعرفی‌کرد. چنانچه‌کد خطی‌باشد، توزیع فاصله‌ای وتبدیلش، به‌توزیع‌وزنی ومضارب‌اسکالرتوزیع وزنی‌کدوگان تحویل‌می‌شود. دراین‌حالت پارامترها عبارتنداز فاصلهٔ C یعنی d، تعداد وزنهای ناصفر C یعنی s، فاصلهٔ C' یعنی d'، وتعدادوزنهای ناصفردر C' یعنی s'. نتیجهٔ شگفت‌آوراین‌است که‌چنانچه برای کدهای غیرخطی‌این‌پارامترها رابه‌کاربریم، بسیاری‌ازنتایجی که برای‌کدهای خطی‌حاصل‌شد، هم‌ارزهای نیرومندی درموردکدهای غیرخطی‌دارند.

برای خوانندگانی‌که مایـل‌اند این مبحث را دنبال‌کنند، مقالهٔ اصلی دلسارت [۲۰] خواندنی‌خواهد بود. کتاب ملك‌ویلیامز واسلوان [۲۱] نیزشرح دقیقی‌ازبخش اعظم‌این کار رادربردارد. دومقالهٔ توصیفی آسموس وماتسون [۲] ووان‌لینت [۳] نیزجالب توجه‌انـد. به غیرازاین مراجع، دیگرمقالات بیشتر به‌موضوعات خاص و حاشیه‌ای می‌پردازند وبرای مطالعات بیشتر باید ازمراجع ذکرشده در [۲]،[۳]، یا [۲۱] کمك‌گرفت.

مراجع

1. Shanon, C. E., "A Mathematical Theory of Communication," *Bell System Tech. J.*, **27**(1948)379–423, 623–656.

2. Assmus, E.F.,Jr. and Mattson, H.F.Jr.,"Coding and Combinatorics," *SIAM Rev.*, **16**(1974)349-388.

3. Van Lint, J.H.,"Combinatorial Designs Constructed from or with Coding Theory,"in *Information Theory: New Trends and Open Problems* edited by G. longo, CISM Courses and Lectures 219, Springer-Verlag, Wien. 1975.

4. Hamming R.W., "Error Detecting and Error Correcting Codes," *Bell Sysiem Tech. J.*, **28**(1950)147–150

5. Tietavainen, A., "On the Nonexistence of Perfect Codes over Finite field," *SIAM J. Appl. Math.*, **24**(1973)88–96.

6. Tietavainen, A. and Perko, A., "There are no Unknown Perfect Binary Codes," *Ann. Univ., Turku., ser A.* **148**(1971)3-10.

7. Peterson, W.W. and Weldon, E.J.Jr., *Error-Correcting Codes*, MIT Press, Cambridge. 1972.

8. Golay. M.J.E., "Notes on Digital Coding,"*Proc.IRE.*,**37**(1949)657.

9. Sloane, N.J.A., "Weight Enumerators of Codes," *Mathematical Centre Tracts*, **55**(1974)111-138.

10. MacWilliams, F.J, Mallows, C.L. and Sloane, N.J.A., "Generalizations of Gleason's Theorem on Weight Enumerators of Self-Dual Codes,'*IEEE Trans. Information Theory*, **18** (1972) 794-805.

11. Alltop, W.O.,"Extending t-Designs,"*J. Combinatorial Theory*(A),**18** (1975)177–186.

12. Mendelsohn; N.S.,"Intersection Numbers of t-Designs," *Studies in Pure Mathematics*,Academic Press, New York,1971, 145-150

13. Assmus, E.F. and Mattson, H.F, "On Tactical Configurations and Error-Correcting Codes," *J. Combinatorial Theory*, **2**(1967)243-257.

14. Assmus, E.F. and Mattson, H.F. "New 5-Designs," *J. Combinatorial Theory*'**6**,(1969)122–151.

15. Goethals, J.M., "A Polynomial Approach to Linear Codes,"*Phillips Res. Repts.*,**24**(1969) 145–159.

16. Bassalygo, L.A., Zaitsev, G.V. and Zinovev, N.V., "Uniformly Packed Codes," *Problems of Information Transmission*, **10**(1974)6–10 (English Translation).

17. Goethals, J.M. and Van Tilborg, H.C.A,"Uniformly Packed Codes," *Phillip Res. Repts.*,**30**(1975)9-36

18. Semakov, N.V. Zinovev, V.A. and Zaitsev, "Uniformly Packed Codes," *Problems of Information Transmission*,**7**(1971)30-39 (English Translation).

19. Goethals, J.M, and Snover, S.L.,"Nearly Perfect Binary Codes,*Disc. Math*,**3**(1972)65–68.

20. Delsarte, P., "Four Fundamental Parameters of a Code and their Combinatorial Significance", *Information and Control*, **23** (1973) 407-438.

21. MacWilliams, F.J. and Sloane, N.J.A.,*The Theory of Error Correcting Codes*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam,1977.

کامپیوتر مهم است، اما نه برای ریاضیات.

پال هالموس

رابرت ل. لانگ

نکاتی پیرامون تاریخ و فلسفهٔ ریاضیات*

ترجمهٔ محمد باقری

تاریخ و فلسفهٔ ریاضیات اغلب در حاشیهٔ فعالیتهای ریاضیدانان ــ اعم از مدرسان و پژوهشگران ریاضی ــ قرار می‌گیرد. این امر موجب پیدایش "دیدگاه اکتسابی" به‌شکل پذیرفتن دربست این یا آن نظر راجع به‌رشته‌های فوق می‌شود که معمولاً با تأمل کافی روی یکایک مطالب همراه نیست. این جزم‌اندیشی بر کار ما تأثیر می‌گذارد، ولو آنکه این تأثیر به‌ظاهر ناچیز و دوردادور باشد. هدف اصلی مقالهٔ حاضر، انگشت گذاشتن روی همین طرز فکر اکتسابی و بررسی چند وجون آن است. در این بررسی خواهیم دید که میزان تأثیر این پدیده به مراتب بیش از آن است که تصور می‌شد. من قاطعانه براین عقیده‌ام که دانستن تاریخ وفلسفهٔ ریاضیات فی‌نفسه جالب است و می‌تواند بر کارایی‌ما درامر تدریس بیفزاید.

پیش از آنکه به‌نکات اصلی مقاله بپردازم، تلاش می‌کنم مختصراً نشان دهم که اساساً این مباحث به‌کار ما معلمان مربوط‌اند. دراینجا نمی‌خواهم برای اثبات مدعای خود روی یك مورد خاص تکیه کنم. گمان می‌کنم نکاتی که در مقاله می‌آید خود مؤید همین نظر است.

جورج پولیا بااستدلالی محکم نشان می‌دهد (درکتاب کشف ریاضی[1]، به‌خصوص دربخش ۵ مقدمه، بخش ۱۴.۲، ویادآوری ۱۴.۵) که هدف اصلی آموزش ریاضی، یاددادن شیوهٔ مسئله حل کردن است. مسلماً این خود جای بحث دارد که مسئله اساساً به‌چه‌چیزی

---

* Long, Robert L., "Remarks on the history and philosophy of mathematics," *Amer. Math. Monthly*, **95** (1986) 609-619.

۱. این کتاب با ترجمه آقای پرویز شهریاری به‌نام خلاقیت ریاضی در سال ۱۳۶۶ توسط انتشارات فاطمی منتشر شده‌است.م.

گفته می‌شود و واژهٔ "مسئله" می‌تواند معنایی چنان گسترده اختیار کند که جای فکر کردن درباره‌اش باقی نماند. با این حال فعلاً گفتهٔ پولیا را به‌عنوان یك معیار می‌پذیریم.

مسئله عبارت از سؤالی است که برای بررسی یا حل عنوان می‌شود. من معمولاً نحوهٔ پرداختن به‌یك مسئله را درذهن خود به‌انجام مسافرتی تشبیه می‌کنم. شخص باید بداند درکجاست، به‌کجا می‌خواهد برود، و آنگاه بکوشد تا راهی به‌سوی مقصد بیابد. دربرخی موارد دو عنصر اول معلومند و تنها کافی است الگوریتمی برای حل مسائلی از آن نوع خاص به‌دست آوریم ونیازی به‌تفکر بیشتر نیست. حل معادله‌های خطی یك مجهولی نمونه‌ای ازاین‌مسائل است. درسایر موارد، پیش‌از آنکه بخواهیم به‌جستجوی راه احتمالی بپردازیم باید راجع به‌مقصد نهایی خیلی فکر کنیم. خیلی از اثباتها به‌این دسته تعلق دارند؛ دراینجا به‌دشواری می‌توان تصورروشنی از آنچه باید اثبات شود به‌دست‌آورد. مسئلهٔ دورریختن زباله‌های‌اتمی هم ازهمین قماش است. ظاهراً درآموزش ابتدایی (تاسطح پیشدانشگاهی) اغلب برداشت فوق‌العاده محدودی از مفهوم مسئله (آن‌هم فقط ازنوع اولی که ذکر شد) وجود دارد و بدتراینکه مستقیماً به‌سراغ یك الگوریتم می‌روند، بی‌آنکه کارایی الگوریتم را به‌عنوان ابزاری برای صرفه‌جویی در وقت و انرژی نشان دهند.

درمورد مسئلهٔ آموزش، فکر می‌کنم که مقصد معلوم باشد. اما نقطهٔ عزیمت چندان روشن نیست. درهر کلاسی باید سعی کنیم دریابیم که شاگردان کجا هستند، وسپس طرحی برای درس بریزیم. این‌کار عمدتاً عبارت است از انتخاب آنچه در برانگیختن شاگردان به‌کار می‌آید. تشبیه‌های گوناگونی برای این برانگیختن ذکر شده است. کارایی این تشبیه‌ها به‌پاره‌ای نکات فلسفی مربوط می‌شود که بعداً از آنها سخن خواهیم گفت. دراینجا کافی است به‌آن چیزی که عموماً برانگیختن خوانده می‌شود، نگاهی بیاندازیم.

هدف از برانگیختن، بی‌شك یاری رساندن به‌شاگرد است تا درمسیر خود ــ از آنجا که فعلاً هست به‌سوی مقصد ــ پیشتر برود. اما مقصد او کجاست؟ این را از خودش باید پرسید! به‌هرحال قبولاندن مقصد به‌شاگرد هم کار مشکلی است؛ به‌علاوه، چگونه می‌توان شاگرد را به‌کسب نتیجه‌ای برانگیخت که او خود آن را به‌عنوان مقصد نپذیرفته است؟ بین هر هدف و کوششی که درراه رسیدن به‌آن صورت می‌گیرد، رابطه‌ای دوسویه برقرار است. هدفی که به‌طورمبهم درنظر گرفته شده درحکم محرك اولیه‌ای برای درس خواندن است. هرچه شاگرد دراین مسیر پیش‌تربرود برداشتش ازهدف باتوجه به‌آنچه به‌تازگی یاد گرفته، تغییر می‌کند. این هدف تغییریافته به‌نوبهٔ خود بر روال ادامهٔ تحصیل اثر می‌گذارد. دراغلب موارد این‌روند نامحسوس است وشاگرد نسبت به‌آن وقوف مستقیمی ندارد. ما باید نسبت به‌این پدیده آگاه باشیم، همچنان که باید از پاره‌ای دلایل برای دانش‌اندوزی که ممکن است برای شاگرد خاصی روشن نباشد، اطلاع داشته باشیم.

ولی نکند این طرز تلقی ازبرانگیختن، هیاهوی بسیار برای هیچ باشد؟ به‌علاوه، مدتهاست که همگان ریاضیات را زبانی می‌دانند که علم ازطریق آن، شیوهٔ تأثیرگذاری برجهان را بهما می‌آموزد. هم‌اکنون کامپیوترها به‌طور روزافزونی وظایف موجود در

دنیای بازرگانی را که شاگردان ما زندگی خود را در آن تأمین خواهند کرد، به‌عهده می‌گیرند. اغلب این شاگردان پی برده‌اند که دست‌کم باید مقداری ریاضیات بدانند.

وقتی ازچیزی برای برانگیختن علاقه به‌مطالعهٔ چیز دیگری استفاده می‌کنیم، این کار به‌طور ضمنی به‌معنای آن است که اولی مهم‌تر ازدومی است. این حکم هنگام توجه لزوم پرداختن به‌موضوع مورد نظر، به‌طور تلویحی بیان می‌شود. هر چند درست نیست برخوردمان حاکی از این باشد که موضوع سعادت آینده برای شاگردان مهم نیست یا نباید مهم باشد، ولی این‌هم نامعقول است که عاقبت‌به‌خیر شدن را در مقام تنها انگیزه یا مهم‌ترین انگیزهٔ تحصیل قرار دهیم.

این بیگانگی درقائل بودن حد فاصل مشخصی بین جهان واقع وابزارهای ریاضی که علم به کمک آنها این جهان را توصیف و دگرگون می‌کند، ریشه دارد. شاگردان می‌دانند که برای آنکه در کارهای خود موفق شوند باید به‌این ابزارها تسلط یابند ولی وجود رابطهٔ اساسی میان این دو را درك نمی‌کنند. (این نکته، به‌خصوص در این طرز فکر رایج منعکس می‌شود که واقعیت بدون وجود ریاضیات هم همان می‌بود که هست.) درنتیجه آنان ریاضیات را صرفاً یك مانع قلمداد می‌کنند.

برخی ازمدرسان این برداشت سودمدارانه را ازریاضیات می‌پذیرند وبرای‌ایجاد انگیزه،صرفاً روی آن تکیه می‌کنند. (متأسفانه این وضع بیشتر در کلاسهای پایین حاکم است.) عده‌ای دیگرمی‌کوشند تافرهنگ توجه به‌زیبایی نتایج ریاضی را گسترش دهند. این دوبرداشت ازریاضیات (سودمدارانه و زیبایی‌شناختی) هردو درجهت تقویت دیدگاه جدایی ریاضیات ازجریان وقایع روزمره عمل می‌کنند. به‌نظرمن این برداشت نادرست وغیرضروری است.

گروه عظیمی‌ازشاگردان هستند که تلقی سودمدارانه را بی‌ظرافت وناپسند می‌دانند ولی چندان هم مجذوب زیبایی ریاضیات نشده‌اند که به‌فراگیری آن روی آورند. آن معلمی می‌تواند این شاگردان را به‌شوق آورد که درك عمیقی ازنقش ریاضیات درزندگی روزمره داشته باشد و بتواند پیوندهای آن را بافعالیتهای گوناگون بشری دریابد. جزئی از هدف هرنوع فلسفهٔ ریاضیات، ایجاد زمینهٔ این درك است.

تاریخ

دراینجا کاری ندارم به‌اینکه ما در دروس ریاضی چه مطالبی تدریس می‌کنیم یا به‌چه صورت و تا چه حد نکات تاریخی را در درسهای معمولی ریاضیات وارد می‌کنیم. اینها مواردی است که به‌بررسی جداگانه‌ای نیازدارد هرچندکه احتمالا برخی ازنکاتی که در این مقاله می‌خوانید به‌آنها مربوط است. قصدم این است که دیدگاه اکتسابی نسبت به‌تاریخ ریاضیات را تشریح کنم و میزان اعتبار نسبی آن رانشان دهم.

همه می‌دانند که جهل تأسف باری درزمینهٔ تاریخ ریاضیات درهمه‌جا دامن گسترده

است. بنابراین ممکن است سخن گفتن از "دیدگاه اکتسابی" گمراه‌کننده به‌نظرآید. اما ماهیت دیدگاه اکتسابی دقیقاً صریح نبودن آن است. باآنکه واقعاً کارهای اصیل فراوانی درزمینهٔ تاریخ ریاضیات انجام شده، این‌پژوهشها نفوذچشمگیری درجامعهٔ ریاضی‌نداشته است. تعبیرمن از "دیدگاه اکتسابی" به‌طور خلاصه چنین است: تاریخ ریاضیات عبارت است از روایت اینکه درچه وقت وبه‌چه ترتیب فلان مفاهیم ظهور کرده‌اند وفلان قضایا اثبات شده‌اند. ممکن است تاریخ ریاضیات به‌روابط باسایر موضوعها هم گریزی بزند ولی هدف اصلیش نشان دادن نحوهٔ بالندگی ریاضیات است و اینکه چگونه نظرها با یکدیگر آمیخته شده‌اند ونظرهای تازه پدید آمده است.

از این دیدگاه، دلایل مطالعهٔ تاریخ ریاضیات عبارت است از (۱) حصول درك وارزیابی دقیقتری از مطالبی که شخص فراگرفته است، و (۲) پی‌بردن به‌این نکته که ریاضیات امروزی هرقدر هم که زیبا و جامع باشد باز هم می‌تواند فراتر برود. بی‌شك زمانی خواهد رسید که نظریهٔ عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت موضوعی عادی تلقی شود، اما این نظریه زیبایی خودرا همچنان حفظ خواهد کرد (مثل عکس زیبایی که رفته رفته کمرنگ وتار شود).

تاریخ ریاضیات بابیشتر حوزه‌های تاریخی دیگر بسیار متفاوت است . این تفاوتها را می‌توان با توجه به‌مفهوم تلویحی ریاضیات بیان کرد: دستگاهی اقلیدسی از حقایق ابدی. تاریخ ریاضیات سرگذشت آشکار شدن پیاپی این حقایق برای ذهن بشر است. بدین‌سان می‌توان آن را نمونهٔ تمام عیار پیشرفت دانست. مهم‌ترین تفاوت بین تاریخ ریاضیات وسایر تاریخها این است که درتاریخ ریاضیات باتفسیر وتعبیر سروکار نداریم. هرمطلب ریاضی صرفاً در رابطه بابقیهٔ ریاضیات معنی پیدا می‌کند. بنابراین بی‌توجهی به‌تقدم وتأخر زمانی (که در اغلب مطالعات تاریخی باید بدقت مواظب آن بود) چیزی است که درمورد ریاضیات‌می‌تواند مطرح باشد یانباشد. (مگر آنکه مستقل از زمان بودن حقایق ریاضی، موضوع تقدم و تأخر زمانی را بی‌معنی کند.) تمامی ریاضیات به‌صورتی که تاکنون مکشوف شده، معیار یگانه‌ای برای سنجش رسمی هر مطلب تازه است.

بی‌شك فقدان انعطاف دراین طرز تفکر ناشی از بی‌توجهی یابی‌اطلاعی از تاریخ ریاضیات است. اما در سالهای اخیر به‌این نکته توجه شده که آوردن حواشی تاریخی می‌تواندموجب افزایش "علایق انسانی" به‌مطالعهٔ ریاضیات شود. مثلادرمرجع[۳۳]صفحهٔ ۳۳۶ می‌خوانیم که یک‌بار نیوتن رابرای بریدن دریچه‌ای به‌منظور ورود وخروج گربه‌ها به‌یک انبارفرستادند. متأسفانه این‌گونه مطالب بی‌ربط تأثیرواروونه دارد وبدشاگردچنین القا می‌کند که ریاضیاتی که همراه بااین نکات خواندنی عرضه شده واقعا داروی تلخی است.

امیدوارم خواننده چنین برداشت بی‌مایه‌ای از ریاضیات و تاریخ آن را نپذیرد. به‌علاوه، موقتا پذیرفته‌ایم که یکی ازکاربردهای مهم ریاضیات ایجاد روشهایی برای حل مسائل است. این خود تلاشی فوق‌العاده انسانی است. هر چند به‌درستی می‌توان مسئله

حل کردن را به‌عنوان نوعی رفتار حیوانی توصیف کرد، ولی درواقع تنها انسان است که مسئله را در برابر خود می‌گذارد و دربارهٔ نحوهٔ حل کردن آن به‌تأمل می‌پردازد. پس، از آنجا که ریاضیات مطالعهٔ علم مسئله حل کردن است، همچون ادبیات یادین، خصلت بارز "انسانی" دارد.(البته باید روشن شود که مصداق این گفته دربارهٔ ساختمان اقلیدسی ریاضیات چیست.)

"آیا بهتر نیست ریاضیات صرف راازشرایط انسانی کشف وکاربرد آن که اساساً جنبهٔ تصادفی داردجدا کنیم؟" احتمالا تلاش برای مشخص کردن اینکه دراین‌مخالف‌خوانی "ریاضیات صرف" به‌چه‌معنی است، راه به‌جایی نمی‌برد. وقتی‌مطلب را به‌طورجدی‌دنبال کنیم، تمایزی که درنگاه اول تااین حد روشن به‌نظر می‌رسد، در پردهٔ ابهام فرو می‌رود. نکتهٔ مهم‌ترایکه، اگر دراین ایراد "ریاضیات صرف" بتواند معنایی داشته باشد، آنگاه ملاحظات تاریخی هیچ ربطی به‌درك این معنا ندارد.

به‌نظر من ریاضیات از برخی جنبه‌ها شبیه موسیقی است، ریاضیات نیز همچون موسیقی آفریدهٔ ذهن بشر است و در عین حال خود معیارهایی برای ارزشمندی یا زیبایی پدید می‌آورد، بدون آنکه این ملاکها را مستقیماً از سایر حوزه‌های تجربهٔ بشری اخذ کند. کیفیت یك راه حل، اثبات یاتألیف خاص، پیش ازهرچیز امری درونی است. اما درك کاملی از ریاضیات (یا موسیقی) تنها با در نظرگرفتن رابطهٔ آن باگسترهٔ توانایی‌های بشر حاصل می‌شود. بنابراین تاریخ ریاضیات نباید تنها پیشرفت نظرات ریاضی را ثبت کند، بلکه همچنین باید مفهومهایی ازریاضیات راکه درزمانهای مختلف غالب بوده‌اند، روشن کند وچگونگی مشارکت ریاضیات را درزندگی معنوی وعملی بشرنشان دهد.

حالا می‌توانم مشخص‌تر به‌اشکالات دیدگاه اکتسابی تاریخ بپردازم.

۱. این دیدگاه نمی‌تواند تغییرات پدیدآمده درنقش ومفهوم ریاضیات رادریابد. تغییرتاریخ به‌عنوان سیر تکامل نظرات مهم ریاضی (مثلا درایوز [۶] یا کرامر [۲۳])باید به‌کمك تغییر دیگری متکی به‌یك دیدگاه وسیعترکامل شود. مثلا تصور مفهوم ریاضیات (ودرنتیجه برداشتی که ازکارکرداساسی آن می‌شود) ازیونان باستان تاطلوع مسیحیت و ازعهد مسیحیت تا دوران علمی جدید (که باگالیله آغاز می‌شود) دستخوش تغییرات بسیاری شده است. ارزیابی این تغییرات منجر به‌حصول درك بهتری از بحرانهای ریشه‌ای حاکم برقلمرو فلسفهٔ ریاضیات در قرن حاضر می‌شود. علیرغم برخی ادعاهای سطحی در مورد کشف ناسوافق بودن ضلع وقطر مربع، وجود "بحران ریشه‌ای" در پهنهٔ ریاضیات یونان قابل تصور نیست.

وقتی تغییرات اساسی درنقش ریاضیات نادیده گرفته شود، این‌تصور پدیدمی‌آید که ریاضیات ازاغلب فعالیتهای بشری یکسره جداست. عقیده به‌این‌جدایی به‌طوروسیعی بین مردم وهمچنین بین شاگردان ما رایج است. این امر مانع عمده‌ای در راه درك ریاضیات است.

۲. دردیدگاه‌اکتسابی تاریخ‌ریاضیات بندرت‌به‌نقطه‌های شروع نادرست واثباتهای

غلط که همیشه جزئی ازریاضیات بوده توجه می‌شود. هرچند روشن است که دراین زمینه نباید بحث کرد ولی در درازمدت نادیده‌گرفتن آنها این تصور را پدیدمی‌آورد که علم یکراست وبی‌وقفه به‌سوی هدف خود پیش می‌تازد واین اندیشه را درقلمروریاضیات نیز تداوم می‌بخشد که: آدمهای‌خوب اشتباه نمی‌کنند. می‌دانیم که درواقع چنین نیست. ولی "معرفت" امری‌فوق‌العاده انتزاعی است. ما بشاگردان "می‌گوییم" که همه‌کس مرتکب اشتباه می‌شوند،درحالی‌که اگر تصور دقیق‌تری از گذشته عرضه می‌کردیم گفته‌هایمان متقاعدکننده‌تر می‌شد.

۳. بندرت اشارهٔ مستقیمی به‌این نکته می‌شودکه‌آنچه دریك یا دوترم درس‌حساب دیفرانسیل وانتگرال تدریس می‌شود، عصارهٔ بیش از۱۵۰ سال کارعده‌ای افراد بانبوغی درخشان است. البته این وضع حاکی از تصمیم‌گیری آموزشی برای عرضهٔ ابزارهای ریاضی مورد نیاز دانشجو طی کوتاهترین مدت ممکن است. (تصمیمی که تنها براساس عادت و بدون تأمل صورت نمی‌گیرد وهمیشه تصمیم تلقی نمی‌شود.) ولی ما این دین را نسبت به‌شاگردان خودداریم که به‌آنها تذکر دهیم که ریاضیات به‌صورت مطالبی حل‌شده برکتیبه‌ها کشف نشده است، بلکه آفریدهٔ ذهن بشر است همچنان که خود آنها با مسائل کلنجار می‌روند.

۴. نقش رسوم متداول و تأثیر افراد بندرت بازشناخته شده است. در ریاضیات هم مثل نقد آثارشکسپیر، موسیقی جاز ولباس‌پوشیدن، رهبران، پیروان وسلیقه‌های‌مختلف وجود دارد. این پدیده‌ای بشری (یا شاید بشری‌ترین پدیده) است. درك این پدیده نه‌تنها به‌رفع انزوای ریاضیات کمك می‌کند بلکه امکان پرداختن به‌این سؤال را هم فراهم می‌آوردکه: کدام کیفیتها موجب امتیاز رهبران ریاضیات می‌شود؟

۵. تاریخ ریاضیات عموما به‌عنوان ثبت مسیرتکامل اندیشه‌های مهم ریاضی قلمداد می‌شود. این نگرش بخصوص برای ریاضیدانان مفید است. امادراینجا هم چون همه‌چیز درون چارچوب خودریاضیات محصور می‌شود، اسطورهٔ انزوای ریاضیات قوت‌می‌گیرد. گذشته را می‌توان ازاین لحاظ بررسی کردکه چه مسائل یا چه‌نوع مسائلی بیش ازهمه موجب پیشبرد ریاضیات بوده است. این زاویهٔ نگرش امکان بیشتری برای بررسی رابطهٔ میان ریاضیات وسایر جنبه‌های فرهنگ فراهم می‌آورد.

به‌عنوان مثالی که شاید چندان هم منطبق برموضوع نباشد، آیا تصادف محض باعث شد که مهار کردن عملیات نامحدودسریهای‌نامتناهی بانفی گستردهٔ فلسفهٔ نظری هگل‌مقارن شود؟ یك نمونهٔ ملموس‌تر، اهمیتی است که افلاطون برای مسئلهٔ تضعیف مکعب قائل بود. برای اطلاع بیشتر رجوع شود به‌کتاب وان‌در وردن [۳۶]،صفحهٔ ۱۳۷.

به‌عنوان مثالی از گذشتهٔ نزدیکتر، به‌این نکتهٔ جالب می‌توان اشاره‌کردکه تقریباً همزمان بافروپاشی ایمان به‌ارزشهای فرهنگی و "تعالی"، به‌نظر می‌رسیدکه مبانی‌منطقی ریاضیات درحال متلاشی شدن است.

۶. تمایز میان ریاضیات محض وکاربردی، ونفی ریاضیات به‌عنوان یك ابزار، از

تاریخ ریاضیات استنباط شده است. این نکته با اولین نکته‌ای که ذکر آن در بالا آمد ارتباط نزدیک دارد. به‌این‌ترتیب نادیده گرفته می‌شود که این تمایز (واین ابزار بودن) به‌نوبهٔ خود جای بحث دارد.

مثلاً، اغلب می‌خوانیم که ریاضیات در مصر باستان به‌صورت ریاضیات کاربردی آغاز شد. درواقع نام هندسه (ژئومتری) که به‌معنی اندازه‌گیری زمین است ازاین امر حکایت می‌کند. (البته این نام یونانی است نه‌مصری ونشان‌دهندهٔ برداشت یونانیهاست‌از آنچه مصریان انجام می‌دادند.) اطلاق نام "ریاضیات کاربردی" به‌یك نوع فعالیت در واقع‌رجوع به‌همان‌تمایز مورد بحث‌است‌نه‌دلالت‌براینکه‌فعالیت مزبور جنبهٔ کاربردی دارد. تمایز فوق برامکان استفاده ازریاضیات به‌عنوان ابزاری برای درك طبیعت وتأثیر گذاشتن برآن مبتنی است. اما این امکان تنها درچارچوب تصور امروزی غرب ازطبیعت مطرح است؛ تصوری‌که برای مصریان عهدباستان، یونانیان باستان وحتی مسیحیان قرون وسطی به‌کلی ناآشنا بود.

فلسفه

به‌اعتقاد بسیاری‌افراد، رفتن از تاریخ به‌فلسفه مثل رفتن ازمحیطی‌آکنده ازغبار‌رقیق‌به مه غلیظ است. نکات تاریخی‌ممکن‌است‌ربطی‌به‌درك و تدریس ریاضیات داشته باشند، ولی از فلسفه چه انتظاری می‌توان داشت؟ عامل عمدهٔ توجه به‌فلسفهٔ ریاضیات "بحران ریشه‌ای" ناشی از کشف تناقضات نظریهٔ مجموعه‌ها بود. این بحران اکنون برطرف شده است و درواقع تلاشهای انجام‌شده، به‌پیدایش یك‌منطق ریاضی نیرومند انجامیده است. ریاضیات ازاین بحران سربلند و پیروز بیرون آمده‌وبه‌نظر نمی‌رسد نیازی به "فلسفه" داشته باشد. درمورد خود فلسفهٔ ریاضیات، عنصر جسورانه‌ای وجود دارد. ازآنچه راجع به‌فلسفهٔ افلاطون، رئالیسم (واقع‌گرایی) ونظیر آن گفته می‌شود، آیا چیزی هم به‌فلسفهٔ ریاضیات برمی‌گردد؟ آیا ارشمیدس یانیوتن فیلسوف بودند؟ گاوس چطور؟ فیلسوفان می‌توانند یك عمر سخن بگویند؛ ریاضیدانها کار می‌کنند.

تفاوت بین فلسفه، تاریخ، وریاضیات ظاهراً مبتنی بر وضوح نسبی مسائل آنهاست. مسئله‌های فلسفی هیچگاه روشن نیستند، ازهمین‌روست‌که اثبات گرایان کار خود را بدون توسل به‌فلسفه پیش می‌برند. مسائل تاریخی حوزه‌ای از مسائل روشن ولی بی‌اهمیت را دربرمی‌گیرد (مثلا اینکه فراوانی منابع طبیعی چگونه بر پیدایش نظام سیاسی فعلی یك کشور اثر گذاشته است). برخلاف مسائلی ازاین دست، مسائل ریاضی روشنند. این‌مسائل ممکن است خیلی دشوار باشند، ولی حل شدن آنها فوراً برما معلوم می‌شود. اثباتهایی هم وجود دارند که فوق‌العاده پیچیده‌اند (مثلا رده‌بندی گروههای متناهی) ولی‌ظاهراً بین‌این پیچیدگی وابهامی‌که بامسائل فلسفی همراه است، تفاوتی کیفی وجود دارد. مسائل ریاضی جواب می‌خواهند؛ مسائل فلسفی تفکرمی‌طلبند. یك فلسفهٔ ریاضی مناسب نشان می‌دهد که تفاوت بین این‌دو به‌شدتی که تصویر کردم نیست. دراینجا لازم است بحثی مطرح شود که

بابررسی‌تلقی عموم ازفلسفهٔ ریاضیات آغازمی‌شود. دراین بحث بایدمسائل مختلف‌وارسی وامور بی‌اهمیت از نکات اساسی جدا شود. در این بحث باید مراقب این لغزش روش‌شناختی بود که همان‌مفاهیم موردبررسی دربحث به‌کار نرود. این بحث باید به‌درك عمیق ازریاضیات، بخصوص ازنقش (غالباً نامرئی) ریاضیات دراین بنیادی‌ترین تصورما راجع به‌این موضوع بینجامد که سؤال چیست وبه‌چه معنی است. درمقالهٔ حاضر تنها خطوط کلی این بحث مطرح می‌شود.

موضوعهای مورد بحث درهر فلسفهٔ ریاضیات رامی‌توان تحت این‌عناوین‌دسته‌بندی کرد: مبانی منطقی، فقدان قطعیت، ماهیت برهان، رابطهٔ شناخت ریاضی با "جهان واقع" و"مقام بود شناختی" اشیای ریاضی همچون‌اعداد، مجموعه‌ها، توابع وجز آنها بخصوص یادآوری کنیم که مبحث مبانی منطقی، سراسر فلسفهٔ ریاضیات را دربر نمی‌گیرد.

اشتغال‌شدید به‌مسائل‌مربوط به‌مبانی، سایرمباحث را تحت‌الشعاع قرارداده وموجب بی‌مایه‌کردن فلسفهٔ ریاضیات شده، به‌طوری‌که برتلقی اکثر ریاضیدانان فعال اثر گذاشته است. روبین‌هرش(در[۱۸]) ریاضیدان‌فعال رابه‌عنوان"افلاطون‌گرا در روزهای هفته و صورت‌گرا در روز تعطیل آخرهفته" توصیف کرده است. (منظور وی از صورت گرایی، موضع فلسفی مبتنی براین نظر است‌که بخش اعظم ریاضیات یا تمامی آن یك بازی بی‌معناست.) وقتی ریاضیدانان نتوانند توضیح دهند که کارشان چگونه معنی می‌یابد، به‌بی‌معنی خواندن آن متوسل می‌شوند. ولی این کار بی‌حاصل است؛ درست مثل اینکه بگوییم فلانی نمی‌تواند دوستی قدیمی را به‌یادآورد مگر آنکه بتواند به‌شکل منظم و منطقی بیان کندکه این کاررا چگونه انجام می‌دهد. ازنظرمن مسلم‌است‌که چیزی به‌عنوان بازی بی‌معنی وجود ندارد؛ به‌همین اندازه مسلم می‌دانم‌که ریاضیات محض بامعنی است. هرش برآن است‌که انتخاب بین افلاطون گرایی وصورت‌گرایی بسیاربی مورد است (تا وقتی هم "شهودگرایی" وهم "منطق‌گرایی" درمیان باشند، اوضاع بدین‌قرار است) ونباید ریاضیدان را به‌انجام چنین انتخابی واداشت. توضیح پدیدهٔ معنی درریاضیات یك مسئلهٔ فلسفی است، مسئله‌ای‌که به نظر من بسیارمهم است.

شاید اکنون که دیگر موضوع ارائهٔ مبانی منطقی برای ریاضیات همه چیز را تحت‌الشعاع قرار نمی‌دهد، بتوانیم دربارهٔ معنای این نیاز سؤال‌کنیم. چه فرضهایی‌دربارهٔ ماهیت ریاضیات و رابطهٔ آن یااندیشه وتجربه به‌طورکلی دراین نیاز به‌مبنای منطقی‌نهفته است؟ این پرسشی‌است‌که بافراهم‌کردن تعریف جدیدی برای واژهٔ "مجموعه" یا حتی "عدد" نمی‌توان بسدان پاسخ گفت. این سؤال بیشتر اندیشه می‌طلبد تا "جواب".

باتعمق روی این مسئله می‌توان‌کلاً درك بهتری از مسائل به‌دست آورد؛ این درك می‌تواند سرکلاس برایمان مفید واقع شود. درهرمسئله. درعین حال که چیزی (همان "مجهول") خواسته می‌شود، صریحا یا تلویحا چارچوبی (که مورد سؤال نیست) مشخص می‌شود که جواب را باید برحسب آن یابراساس آن جستجوکرد. از این دیدگاه، خیلی از مسائل جبر وحساب دیفرانسیل وانتگرال بسیار ساده‌اند. آنها را می‌توان بامسئلهٔ جور-

کردن پازل‌های تصویری مقایسه کرد که در هر دو مورد می‌دانیم که نتیجه کم و بیش به‌چه‌صورتی باید باشد. شکل نهایی مطلوب در پازل‌های تصویری که اغلب روی جعبهٔ آنها نقش بسته بخشی از چارچوبی است که باید هدف را درمحدودهٔ آن دنبال کرد (این گفته درمورد این فرض هم که قطعات پازل حتماً با هم جور در می‌آیند، صادق است.).

اگر شکلی روی جعبه چاپ نشده باشد، مسئله دشوارتر است، ولی بی‌معنی نیست. اگر فقط به‌ما جعبه‌ای حاوی قطعات پازل بدهند وقرار باشد که با آنها تصویری بسازیم، بخش بیشتری ازچارچوب مورد سؤال واقع شده است. دراینجا چارچوب موجود به‌این حد تقلیل یافته که بدانیم منظور از جورشدن قطعات بایکدیگرچیست وواژهٔ "تصویر" به‌چه معنی است.

مسئلهٔ مبانی ریاضیات عملا چیزی به‌نام "ماهیت ریاضیات" را براساس چارچوب "تفکر و تجربه به‌طورکلی" مورد سؤال قرار می‌دهد. ابهام موجود در این اصطلاحات موانعی رفع نشدنی و بخشی اساسی از مسئله‌است. آنچه شاید مهم‌تر باشد این است که هرچه دراین‌باره بیشتر تفکر می‌کنیم روشن‌تر می‌شود که نمی‌توان ماهیت ریاضیات را مورد سؤال قرارداد، بی‌آنکه درمفهوم تفکر وتجربه به‌طورکلی دست برده باشیم.

این بصیرت محدود برای حل مسئله کافی نیست وفقط چشم‌اندازآن را تغییرمی‌دهد. به‌نظرمن مفیدتر آن است که ازفیلسوف بخواهیم تانقش ریاضیات را دربرداشت ما ازتفکر وتجربه ملموس سازد. این موضوع خصلتی دوری داردکه می‌توان آن‌را به‌تقریبهای‌پیاپی تشبیه کرد. کار بابرداشت خامی از ریاضیات (مثلا به‌عنوان علم اعداد و روابط آنها) و برداشت خامی از تجربه (ادراك اشیای مادی) آغاز می‌شود. اما در همین‌جا هم به‌صرف وجود اشیای متمایز، یك مفهوم "ریاضی" یعنی کمیت مستقر است. تفکر دراین زمینه به‌برداشت نسبتاً روشنتری از ریاضیات و غیره می‌انجامد.

شاید درك این مطلب که ریاضیات بسیار بیشتر ازآنچه عموماً تصور می‌شود در تجربیات نقش دارد، مهم‌ترین نتیجهٔ تفکر دربارهٔ مبانی باشد. شاخه‌های عمده‌ای درمبانی ریاضیات مربوط است به‌آنچه در بالا به‌نام رابطهٔ شناخت ریاضی باجهان واقع خوانده شد. ("جهان واقع" همان است که درآن می‌خوریم و می‌آشامیم، گیاه می‌چینیم و بیشتر اندوخته‌های خودرا حفظ می‌کنیم؛ جهانی ازاشیای مادی که ازآن به‌جهان مفاهیم‌می‌نگریم؛ نشانه‌های قدسی، مفید وپرجاذبهٔ جهانی فراتر ازطبیعت که در عین حال می‌تواند موجب اخلال دردرك حقایق شود.) ریاضیات به‌ظاهر از درون خود وبدون اتکا به‌جهان واقع می‌بالد. بااین وجود، دم‌به‌دم کاربردهایی برای آنچه قبلا ریاضیات "محض" تلقی می‌شده پدیدارمی‌شود. مابرآنیم که ریاضیات بردوگونه است: خالص وکاربردی. دیویس‌وهرش ([۴]، ص۸۶) اظهارنظرهاردی راجع به "خالص بودن ریاضیات" رانقل کرده‌می‌افزایند "[این‌روندغالب‌درریاضیات‌قرن‌بیستم وجود دارد] که‌والاترین‌خواسته دررياضيات‌دستیابی به‌یك اثرهنری ماندگار است. اگر تصادفاً بخش زیبایی از ریاضیات محض، کاربردی هم پیدا کند که چه‌بهتر». از سوی دیگر کتاب کلاین [۲۱] حاوی بحث شورانگیزی‌است

مبنی براینکه ریشه‌های راستین و آبشخور واقعی ریاضیات درطبیعت ودرکاربردهای عملی نهفته است.

برای پی بردن به‌وضعیت متقابل ریاضیات محض وکاربردی ابتدا باید به‌دقت دید که وجود چه تمایزی بین‌آنها پذیرفته شده است. آنچه ازقول دیویس وهرش نقل شد حاکی از تمایز بین ارزیابیهای متکی به زیبایی‌شناسی و متکی به‌کارایی است. البته این موضوع فوق‌العاده پیچیده‌ای‌است ودراینجا فقط می‌خواهم بریك نکته‌تأکید کنم: ارزیابی زیبایی‌شناختی یك چیز (مثلا اثبات یك قضیه) معمولاچیزی جزارزیابی خودآن شیء تلقی نمی‌شود؛ چیزی که ازلحاظ مفید بودنش بررسی می‌شود، ارزشش ناشی ازارزش هدفی است که‌آن‌را به‌کار می‌گیرد. درمفهوم ریاضیات کاربردی شباهتی بایك ابزاروجوددارد.

این نکته سرکلاس درس به‌کارمی‌آید. برای خیلی ازشاگردان بسیار مفید است که تشابه بین نحوهٔ برخورد بامسائل ریاضی ومسائل مکانیکی را دریابند. مثلا می‌توان طریقهٔ حل‌کردن معادلات درجهٔ دوم به‌روش آزمون وخطا یافاکتورگیری را باروشهای‌سوراخ‌کردن دیوار بااستفاده ازمیخ وچکش یا متةبرقی مقایسه کرد. فرم ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم درجایگاه خودهمانند متةبرقی مفید واقع می‌شود. توجه به‌جنبهٔ ابزاری ریاضیات در حل مسائل گاهی به‌رفع شبههٔ مرموز بودن ریاضیات که اغلب در ذهن شاگردان وجود داردکمك می‌کند.

اما این برداشت ازریاضیات به‌عنوان ابزار، که درتصور ما از ریاضیات کاربردی اهمیت بنیادی دارد هنوز باید مورد بررسی قرار گیرد. عموماً تصور، از ابزار، چیزی جنبی است برای‌منظورخاصی که‌که به‌آن‌نیازداردبه کار می‌بریم‌وسپس کنارش‌می گذاریم. زمانی نقش زبان‌دربیان اندیشه به‌ابزار تشبیه می‌شدولی بزودی معلوم شدکه زبان نقشی بسیار فعالتراز آن داردکه بخواهد به‌ابزارتشبیه شود. درواقع می‌توان گفت‌که برداشت رایج از ابزارچیزی درحد تقریبهای درجهٔ اول است‌که درکاربردهای عملی روزمره بخوبی جوابگوهستندولی اگربخواهیم بارفکری بیشتری برآنها بگذاریم کارایی خودرا ازدست می‌دهند. حتی درموردکارهای کاملا مکانیکی، ابزار نقش فعالی دربرداشت‌موجود از مسائل دارد. آشنایی استادکار مکانیك بااینکه چه ابزارهایی در دسترس هستند، روی دریافت اواز کارمکانیکی تأثیر تعیین‌کننده دارد؛ همان‌طورکه آشنایی شطرنج‌باز با طریقهٔ حرکت مهره‌ها ارزیابی او را از صفحهٔ شطرنج مشخص می‌کند.

نقش فعال مفاهیم ریاضی دردرك مسائل‌کاربردی‌چندان عظیم است‌که به‌نظرمن تشبیه آن به‌ابزار دراین مقاله کاملا نارساست. با متمایز دانستن ریاضیات محض و کاربردی، این واقعیت فراموش وازمعرض دید خارج می‌شود. البته در ریاضیات می‌توان مباحث "ناب" ومباحثی که به‌طورانفعالی مثل‌یك آچارپیچ‌گوشتی به‌کاربرده می‌شوند، یافت. ولی هیچ یك ازاینها نباید سبب شودکه از نقش بسیار مهم ریاضیات در تعیین اینکه چه‌چیزی مسئله به‌شمار می‌آید وچه‌چیزی جواب محسوب می‌شود غفلت‌کنیم. با پی‌بردن به‌این نکته، کمرنگ و محوشدن مرزبین ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی شروع می‌شود.

ویتگنشتاین این‌وضع را به‌روشنی ترسیم کرده است: "اماچه‌چیزهایی 'حقایق' هستند؟ آیا فکرمی‌کنید بتوانید نشان دهیدکه 'حقیقت' چیست، ومثلا باانگشت به‌آن اشاره‌کنید؟ آیا همین برای روشن کردن نقش تثبیت در مورد حقایق کافی است؟ اگر برفرض وظیفهٔ ریاضیات این‌باشدکه 'خصلت' آنچه راکه حقیقت می‌نامیم تعریف کند! چرا نبایدریاضیات به‌جای 'آموختن‌حقایق' صورتهایی ازآنچه حقیقت خوانده می‌شود بیافریند؟" ([۳۸]،ص ۳۸۱).

فقدان قطعیت

ماجرای فقدان قطعیت را موریس کلاین درکتاب خود باعنوان ریاضیات؛ فقدان قطعیت [۲۱] بیان کرده است. وی چگونگی پیدایش تصور طرح ریاضی خداوند برای طبیعت درخلال قرن شانزدهم را به‌عنوان نتیجهٔ کشاکش بین عقیدهٔ دینی جاری و احیای گرایش به‌اندیشهٔ کلاسیك توصیف می‌کند. درك حقیقت ریاضی با پی‌بردن به‌طرح خداوندبرای طبیعت معادل شد. این دوره‌ای طلایی برای ریاضیات بود. نتیجهٔ این‌وضع بی‌تردیدامکان بروز جدایی بین جنبه‌های محض وکاربردی بود.

دربقیهٔ کتاب فقدان تدریجی پاکی مطلق در ریاضیات بیان شده است.ریاضیات به تدریج به‌طور فزاینده‌ای سیمای یك آفریدهٔ بشر را به خود می‌گیرد که از خطاهای انسان نیزمصون نیست. ریاضیات یك‌چند به‌عنوان آخرین درقطعیت و آخرین مجوزبرای اعتقاد به‌امکان شناخت برپای ایستاد وآنگاه فرو ریخت. ازخرابه‌های آن قیل وقال فراوانی برسراصول به‌راه افتاد که اکنون بدون نیل به‌توافق واقعی،فروکش کرده است. امیدی نیست که ما ریاضیدانان بتوانیم از سایهٔ قضایای گودل خارج شویم. "تلاشهای انجام شده برای رفع تناقضهای ممکن واثبات سازگاری در ساختارهای ریاضی تاکنون ناکام مانده است." ([۲۱]، ص ۲۷۶).

ظاهراً این فقدان قطعیت مسائلی جدی از نوع فلسفی را پیش می‌کشدکه بی‌شك به‌ریاضیات مربوطند. اگر ریاضیات ازعهد افلاطون تاکانت به‌عنوان مدلی برای دانش به‌معنی کلی درخدمت فیلسوفان بوده‌است، شاید تغییری درتصور رایج ازریاضیات،معنای این روش سنتی راهم تغییر دهد. آنچه به‌عنوان ریاضیدان و مدرس بیشتر به ما مربوط می‌شود، همانا این نکته است‌که برداشت ماازماهیت ریاضیات شدیداً تحت تأثیر همان سنت (ازافلاطون تاکانت) است. این امرموجب بروز دوگانگی بین برخورد مستقیم ما با ریاضیات و درکمان ازآن می‌شودکه تحت‌الشعاع سنت مذکور است. این دوگانگی خود را در آنچه دیویس وهرش وضعیت فلسفی ریاضیات جاری ([۴]، ص ۳۲۱) خوانده‌اند نشان می‌دهد.

فقدان‌قطعیت تاجایی‌که فی‌نفسه مطرح باشد (نه‌به‌عنوان یك‌پدیدهٔ تاریخی-فرهنگی) به‌نظر من چندان عجیب یا مهم نیست. آنچه برای من بیشتر حیرت‌انگیز است مفهوم "قطعیت مطلق" است نه‌اینکه ریاضیات این قطعیت مطلق را عرضه نمی‌کند. به‌نظر من این

این حادثهٔ تاریخی (باتداوم ۴۵۰ ساله) وتاکتیك بحث‌انگیزی که انسانی پوشالی را می‌سازد ومتلاشی می‌کند شباهتی وجود دارد.

ریاضیات آفریدهٔ بشراست. اما نه‌به‌این معنی که امری دلبخواهی است، بلکه‌به‌این معنی که بی‌جا خواهد بود اگر توقع داشته باشیم که به‌معنی رایج کلمه "قطعاً درست" باشد. بی‌مورد است اگر ریاضیات را به‌عنوان منشأ یا محمل‌شناخت مطلقاً قطعی، بسنجیم یاتصور کنیم. ذکر این مطلب که فلان برهان درست بودن قضیه‌ای را نشان می‌دهد، معادل این است که گفته شود برهان مذکور گواه این عقیده است که قضیهٔ فوق هیچ زمانی در آینده درایجاد تناقضی نقش نخواهد داشت. تاریخ ریاضیات نشان می‌دهدکه معیارهای استحکام درمورد برهان، دستخوش تغییرات شده ودرتاریخ ریاضیات می‌توان نمونه‌هایی یافت از "برهانهای غلط"که‌مورد قبول همگان بوده و "برهانهای درست" که وسیعاً رد شده است.

این مثالها نشانگر چیزی‌اند که آن را می‌توان "عنصر انسانی" در برهان‌نامید. (علاوه‌براین واقعیت بدیهی‌که برهانهارا انسان پدید می‌آورد.) برهان نوعی گفتگوی ریاضی‌است. کارکرد برهان‌متحدکردن ریاضیدانان به‌عنوان کاروزان یك‌ریاضیات واحد است. گاهی مطرح می‌شودکه با صوری کردن برهانها و ساختن ماشینهای برهان‌آزمایی می‌توانیم ازتأثیر خطاپذیری انسان بربرهانهای ریاضی بکاهیم. براین سخن ایرادی‌نیست؛ اما اگراین کاررا به‌عنوان نخستین گام در برنامه‌ای پنهانی برای احیای "حقیقت مطلق" ریاضیات بدانیم، بی‌شك محکوم به‌شکست خواهد بود. در واقع تفکر دربارهٔ اثباتهای صوری وماشینهای برهان‌آزمایی می‌تواند چشم‌انداز جالبی از کم وکیف جنبهٔ انسانی برهان را روشن کند.

در وهلهٔ اول، سرچشمه‌های اجتناب‌ناپذیر اشتباه خودرا نشان می‌دهند: اشتباه در به‌قالب‌درآوردن‌برهان،اشتباه ناشی ازخستگی ضمن کار با بخشهای بسیار پیچیدهٔ موجود دربعضی‌برهانها وحتی‌اشتباههای احتمالی درکار خود ماشین. ثانیاً ومهم‌تراینکه، هربرهان تنها وقتی درماشین عمل می‌کند که به‌عنوان برهان پذیرفته شده باشد. این پذیرش کاری است که به‌توسط ریاضیدانان صورت می‌گیرد. حتی اگرحکم یك‌ماشین برهان آزمایی مورد قبول جامعهٔ ریاضیدانان واقع شود، آنها حق تجدیدنظر و پذیرفتن برهانهای غیر صوری را برای خود حفظ می‌کنند.

فرما می‌نویسد: "ماهیت برهان آن است‌که فکررا در مسیر اجباری هدایت کند." مادام‌که این اجبار ازطریق شهود عمل می‌کند، برهانهای (نسبتاً) غیرصوری همچنان‌نقش مهمی درریاضیات خواهند داشت. برهانهایی که سبب پیدایش شهود راجع به‌مفهومهای مورد نظرمی‌شوند، برای ما که پژوهشگر و مدرسیم جالبتر و ارزشمندتر از برهانهایی هستند که صرفاً درست‌بودن یك قضیه را نشان می‌دهند. ما به‌برهانی‌علاقه داریم که‌محصول آن‌چیزی باشدکه بنیادی به‌نظر آید. اگرتنها برهان یك‌قضیه، برهانی مصنوعی یاساختگی باشد، برایمان ناخوشایند خواهد بود. دراین صورت جستجو وتفکررا ادامه می‌دهیم اما

به‌جای آنکه راه به‌جایی ببریم، متوقف می‌شویم. این حقایق ملموس را بدان خاطر ذکر می‌کنم که تأکید کنم برهان صرفاً دستگاهی از پیوندها میان قضایا، اصول و تعاریف گوناگون نیست بلکه علاوه بر آن دستگاهی است برای گفتگو میان اشخاصی که با ریاضیات سروکار دارند. این نقش به‌طرق گوناگونی تجلی می‌یابد.

موجودات ریاضی

به‌طور سنتی بحثهای زیادی راجع به‌وجود موجودات ریاضی همچون اعداد، رسته‌ها و غیره درگرفته‌است. این امر ارتباط نزدیکی‌دارد با این سؤال که‌آیا قضایای ریاضی کشف می‌شوند یا محصول ابداعند. میزان توجهی که به‌این‌گونه سؤالها مبذول شده فوق‌العاده حیرت‌انگیز است. دروهلهٔ اول به‌دشواری می‌توان تصور کرد که باپذیرش یکی ازدوشق، چه‌چیزی اثبات یا نفی می‌شود. ثانیاً به‌نظر می‌رسد که این پرسش را نتوان جدی گرفت مگر آنکه وجود مبنایی به‌عنوان "حقیقت مطلق" برای اقدام به‌بحث، تلویحاً پذیرفته شده باشد. اما هرگاه چنین مبنایی درمعرض دید قرار گیرد، وجودش همان‌قدر مورد تردید است که امکان تشخیص آن.

گودل در [۹] راجع به‌موجودات مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها می‌گوید: " از موجودات مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها، علیرغم دور بودنشان از تجربهٔ حسی، چیزی شبیه دریافت حسی درما وجود دارد... من هیچ دلیلی نمی‌بینم که بخواهیم به‌این‌نوع دریافت اعتماد کمتری داشته باشیم... درمقایسه بادریافت حسی که امکان ایجاد نظریه‌های فیزیکی را پدید می‌آورد واین انتظاررا هم درما ایجاد می‌کند که دریافتهای حسی آتی‌مان باید بااین نظریه‌ها تطبیق کند..." وی درادامه به‌این نکته اشاره می‌کند که موجودات مربوط به‌تجربیات فیزیکی وجودشان برای ما به‌هیچ‌وجه بلاواسطه‌تر ازموجودات ریاضی نیست. این عبارت (بخصوص قدری آن‌سوتر از بخشهای نقل شده) بیانگر موضع "افلاطونی" است، ولی من آن‌را به‌دلایل دیگری دوست دارم. اولا به‌این دلیل که‌کاملا روشن می‌کند که موجودات مربوط به‌تجربهٔ فیزیکی، مدل زیربنایی برداشت ما از وجود را تشکیل می‌دهند. مدلهای "ظریفتر" ازطریق اصلاح و قیاس پدید می‌آیند. ثانیاً، به‌خاطر اینکه حاکی ازآن است که موجودات مربوط به‌تجربهٔ‌فیزیکی ازدیدگاه بازتاب نظری به‌همان اندازهٔ موجودات ریاضی شایان تردیدند. می‌خواهیم راجع به‌موجودات ریاضی صحبت کنیم زیرامی‌خواهیم هنگام بحث راجع به‌آنها این‌حقیقت مسلم که درواقع ارتباطی برقرار کرده‌ایم بی‌معنی نباشد. اما چه دلیلی دارد که وجود آنها چیزی فراتر و آن‌سوتر ازاین (امکان) ارتباط باشد؟

تجربه‌گرایی

آخرین موضوع "فلسفی" که می‌خواهم راجع به‌آن بحث کنم، موضوع تفاوت بین ریاضیات و

علوم تجربی است. خواننده‌ای که مطلب را تااینجا دنبال کرده می‌داند که قصد ندارم وانمودکنم که "وضعیت واقعی" چیزها را توضیح می‌دهم، این‌کاررا تنها به‌شیوهٔ "مصادره به‌مطلوب" می‌توان انجام داد. به‌جای این‌کار، امیدوارم برخی از جنبه‌های ریاضیات و علوم تجربی راکه موجب ابهام این تمایز می‌شوند، مشخص کنم.

ازقرارمعلوم، تمایز فوق متکی براین امر بدیهی است که: درعلوم تجربی باواقعیت مادی سروکار داریم که تجربهٔ همهٔ انسانها در مورد آن یکسان است و اساساً بدان متکی است. درحالی که ریاضیات بامفهومها سروکار دارد. (فعلا کاری به‌این سؤال نداریم که مفهومها راچه کسی می‌سازد.) درفصل دوم [۲۵] ، لاکاتوش این تمایز را چنین بیان می‌کند: درمدل‌سنتی (اقلیدسی) ریاضیات، حقیقت ازبالا به‌صورت اصول بلامنازع نازل شده و از طریق مجراهای استنتاجی به‌سوی قضایای خاص فرود می‌آید. از سوی دیگر، علوم تجربی بااصول مسلم آغاز نمی‌شود؛ بلکه‌این‌بار آنچه بلاتردید است، یعنی واقعیت حقایق عینی، درپایین قرارمی‌گیرد. دراینجا اشتباه ازپایین به‌بالا وارد فرضهای نظری می‌شود. (اگر یك پیش‌بینی نظری با واقعیات ناهمخوان باشد، این خطا به‌نظریه برگشت داده می‌شود و لزوم تصحیح آن مطرح می‌شود.)

لاکاتوش برآن است که برنامه‌های اقلیدسی برای ریاضیات توفیقی دربر نداشته و این ناکامی باعث شده است که گرایشی به‌سوی تلقی ریاضیات به‌عنوان علمی که بیشتر به‌علوم تجربی شباهت دارد، ایجادشود. نکتهٔ مهم‌تر اینکه، نگاهی دقیق به‌نحوهٔ کارکرد ریاضیدانان و اینکه طی چهارصد سالهٔ اخیر چگونه کار کرده‌اند روشن می‌سازد که مدل اقلیدسی به‌هیچ روی در جهت توصیف ریاضیات نیست. (حداکثر می‌توان گفت که این مدلی برای نمایش بخش قوام‌یافته‌ای از ریاضیات است؛ مدلی که مزایا وقابلیتهایش بحق جای بحث دارد.) درپنجاه سال اخیر این مدل دیگر حتی نمایشگر نحوهٔ تفکر فیلسوفان راجع به‌ریاضیات نیست.

طی همین دوران مفاهیمی چون "حقایق عینی" و "واقعیات ملموس" با ابهام فزاینده‌ای همراه بوده‌اند. درایجاد این‌وضع، تأملاتی که درمورد پیشرفتهای فیزیك‌نوین صورت گرفته دخیل بوده است. اما بررسی روانشناختی دریافت حسی معمولی شواهد فراوانی درمورد بی‌پایه بودن مفهوم واقعیتی که دربرابر تأثیر نظری مصون است، عرضه کرده است. به‌این‌ترتیب، مفاهیم ریاضیات و علوم تجربی هریك روبه‌سوی دیگری تغییر کرده است.

پیدایش توپولوژی جبری نمونه‌ای ازتشابه بنیادی میان ریاضیات و علوم تجربی به‌دست می‌دهد. آیلنبرگ[1] و استینراد[2] تنها پس ازدوره‌ای که در آن مفاهیم درترکیبهای گوناگون آزموده می‌شدند، توانستند کتاب خود [۵] را بنویسند. مسائل دست اول ودر عین حال ایجاد یك معیار درونی می‌توانست معلوم کند کدام ترکیبها ازهمه مناسب‌ترند. آزمون اصول موضوع همواره چنین است: آیا جوابگوی جنبه‌های اساسا همخوان‌مسائلی

1. Eilenberg 2. Steenrod

که منشأ آنها بوده هستند؟

به‌نظر من، این وضعیت کاملا شبیه چیزی است که گاه در علوم انسانی پیش آمده است. گاهی اتفاق می‌افتد که یك اثر بخصوص، جوابگو ودر نتیجه بیانگر ماهیت فلان پیشرفت مغشوش است. (در اغلب مـوارد، این قضاوتی است کـه تنها باتوجه به گذشته می‌توان انجام داد.) به‌یادکتاب انحطاط غرب از اشپنگلر[1] می‌افتم؛ همچنین کتاب هستی و زمان اثر هایدگر. اثرچنین حوادثی شبیه بلورسردی دریك ابر باران‌زا هستندکه منجر به‌پیدایش یك نقطهٔ تقطیر می‌شود. اگر مه به‌اندازهٔ کافی غلیظ باشد، تقطیر سریعاً گسترش می‌یابد وبه‌زودی وضع دگرگون می‌شود. البته وجوه تشابه فراتر از اینهاست. با گذشت زمان نوعی جابجایی حادث می‌شود: به‌جای آنکه هستی و زمان را عصارهٔ جـو فکری آلمان در دههٔ بیست قلمدادکنیم، رفته‌رفته گویی آلمان دههٔ بیست رااز پشت عینك هستی و زمان می‌بینیم.

به‌همین‌ترتیب، باپذیرفته شدن اصول موضوع مطرح شده برای یك نظریهٔ ریاضی خاص (نظریه‌ای که پیش از امکان تبیین اصول موضوع مـی‌باید قبلا ـ احیاناً به‌صورتی سازمان نیافته‌ـوجودمی‌داشته) این اصول از آن پس نظریهٔ مزبور را تعریف یـا تحدید می‌کنند. البته این پذیرش خود پدیده‌ای پیچیده باابعاد اجتماعی کاملا مشخص است.

پیشرفتی که درریاضیات توصیف‌کردم (و نیز تاحدی پیشرفت علوم انسانی) بسیار شبیه چیزی است کـه در علوم تجربی رخ می‌دهد. اگر بکوشیم وضعیتی کاملا فارغ از جنبه‌های نظری را درنظرآوریم، چنین به‌نظر خواهد رسیدکه "پدیده‌ها" انحصاراً خودرا نشان می‌دهند. دراین صورت جایی برای اغوا یا فریب باقی نخواهد ماند. من‌این‌وضعیت را حالت تجربهٔ بدوی می‌نامم. (البته ادعا نمی‌کنم چنین وضعیتی هیچ‌گاه جز به‌عنوان یك تصور نظری وجود داشته.) علـوم تجربی به‌تدریج از تجربهٔ بدوی فاصله می‌گیرند؛ هدف آنها رده‌بندی این تجربه به‌صورت یك کلیت منسجم ومعقول است. (واژهٔ "کلیت" دراینجا مهم است. مثلا درنهایت مدلهای فیزیکی، زیستی واخلاقی ازانسان باید به‌طور کامل بایکدیگر انطباق یابند.) مفاهیمی از قبیل شیء، ماده، نیرو، جانور، محیط زیست، و غیره در علوم تجربی همان نقشی را دارندکه اصول موضوع دربخشی از ریاضیات ایفا می‌کنند. به‌این‌معنی که موجب سازمان دادن تجربیات می‌شوند ومقایسه (و علم) را ممکن می‌سازند. این عناصر باید توجیه‌کنندهٔ تجربـه باشند؛ هرچندکه این واقعیت قدری مبهم است، زیرا تجربیات ما هم خود براساس همین مبادی انجام می‌پذیرد.

سردرگمی راجع به‌تفاوت بین ریاضیات وعلوم تجربی تاحدزیادی ازاین‌امرناشی می‌شودکه برای ما مثلا درنظر گرفتن شیء مادی به‌عنوان یك ساختار نظری بـه‌مراتب دشوارتر ازانجام این‌کار درمورد عدد صحیح سه است. این دشواری ازسوی دیگری هم افزایش می‌یابد: مامجموعه‌های اشیا را برای پی‌ریزی تعریف بنیادی خود از عدد به‌کار می‌گیریم وبنابراین برای اشیا جنبهٔ "بنیادی" بیشتری قائل می‌شویم. سرانجام، این‌واقعیت

1. Spengler

که مطالب علمی را به‌زبان ریاضیات می‌نویسیم سبب می‌شود کـه ریاضیات را بـه‌عنوان محصول خلاقیت آزادانهٔ روح انسان قلمدادکنیم؛ برخلاف علوم مادی کـه "به‌واقعیتهای عینی چسبیده‌اند". امیدوارم نکاتی‌که ذکرکردم باعث کمرنگ‌ترشدن این تمایز شده‌باشد.

نتیجه

درپایان باید تأکیدکنم‌که طرفدار آموزش تاریخ یا فلسفه دربرنامه‌های درسی‌ریاضیات نیستم. بلکه معتقدم مدرس باید با این مباحث آشنایی کامل داشته باشد تـا بتواند به‌نحو کارآمدتری تدریس کند. لابـد برمن خرده خواهندگرفت‌کـه چرا به‌صراحت توضیح نمی‌دهم‌که چگونه درك تاریخ و فلسفه (در جوار ریاضیات) روی کارایی تدریس اثر می‌گذارد. دراین‌مورد بایدبه‌وضعیتی که قبلا شناخته‌شده متوسل شوم. وقتی درسی‌را ارائه می‌کنیدکه قبلا جمع وجور نشده است باید اطلاعات خیلی‌گسترده‌تری در مورد موضوع داشته باشید (در مقایسه باوقتی‌که روی یك موضوع محدود و مشخص صحبت‌می‌کنید). درغیر این صورت مبنایی وجود نداردکـه براساس آن معلوم کنید بین راههای مختلفی که می‌توان درپیش گرفت ادامهٔ کدامیك ثمربخش‌تر خواهد بود. برای کارآمد بودن‌باید قبلا این راهها را شناسایی کرده باشید، نه‌اینکه فقط راهی را بشناسید که به‌مقصد منتهی می‌شود. به‌همین طریق ما در درسهای سطوح پایین‌تر، شیوهٔ حل انواع گوناگون مسائل را بشاگردان یاد می‌دهیم. ازدید دانش‌آموزان این‌روشها ابتدا دور ازتجربهٔ معمولی جلوه می‌کند وخیلی ازشاگردان ریاضیات را بواقع زبانی‌بیگانه قلمداد می‌کنند. فرصت چندان زیادنیست‌که بتوان به‌تفصیل نشان دادکه ریاضیات درپیدایش جهانی‌که وجودش را مسلم واجتناب‌ناپذیر می‌دانند واینهمه به‌نظرشان ازمباحث انتزاعی‌کـه باید فراگیرند دور است، چه نقشی داشته است. اماآگاهی ما نسبت به‌این‌نقش همواره می‌تواند برشیوهٔ کارمان اثر بگذارد؛ این تأثیر به‌صورت سهولت ووسعت درك تجلی‌می‌یابدکه به‌نوبهٔ‌خود متقاعدکننده‌تر ازکلام است.

مراجع

1. Benacerraf, Paul and Putnam, Hilary, *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
2. Blanshard, Brand, *The Nature of Thought*, Humanities Press, New-York, 1939.
3. Cantor, George, "Beitrage zur begrundung der transfiniten mengenieher," *Math. Ann*, **46** (1895) 481-412. English Translation: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, New York, 1955.

4. Davis Philip J. and Hersh, Reuben, *The Mathematical Experience*, Houghton Mifflin, Boston, 1981.
5. Eilenberg, Samuel and Stenrod, Norman, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1952.
6. Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, 5th ed., Saunders, Philadelphia, 1983.
7. Feyerabend, Paul, *Against Method*, Verso, London, 1978.
8. Gadamer, Hans-George, *Vom Zirkel des Verstehens*, in [30], pp. 24-34.
9. Gödel, kurt, *What is Cantor's Continuum Problem?* in [1], pp. 258-273.
10. Goodman, Nicolas D., "Mathematics as on objective science," *Amer. Math. Monthly*, **86** (1979) 540-551.
11. Thomas, hvor, (trasl.), *Greek Mathematics*, Loe classical Library, Harward University Press, Cambridge, 1967.
12. Guthrie, W. K. C., *A History of Greek Philosophy*; Vol. 1, *The Earlier Peesocratics and Pythagoreans*; Vol. 2, *The Presocrtic Tradition from Parmenides to Democritus*, Cambridge University Press, 1962, 1965.
13. Heath, Thomas, *A History of Greek Mathematics*, Vol. 1, Dover, New York, 1981.
14. Heidgger, Martin, *Die Frage nach dem Ding*, Niemeyer, Tübingen, 1962, English Translation: *What is a Thing*, Henry Regnery, Chicago, 1967.
15. Heidegger, Mlartin, *Die Zeit des Weltbilds*, in Holzwege; 6th ed. Klosterman, Frankfurt am Main, 1980; English Translation: *The Age of the World Picture*, in the Question Concerning Technology, Harper, New York. 1977.
16. Heidgger, Martin, *Sein und Zeit*, 14th ed., Max Niemeyer, Tübingen, 1977. Enghlish Translation: *Being and Time*, Harper and Row, New York, 1962.
17. Heisenberg, Werner, *Grundlegende Voraussetzungen in der Physik der Elementarteilchen*, in [30], pp. 291-297.
18. Hersh, Reuben, "Some proposals for reviving the philosophy of

mathematics," *Adv. in Math.*, **31** (1979) 31-50.
19. Hofetader, Douglas R., Gödel, Escher, Bach: *An Eternal Golden Braid*, Basic, Books. New York, 1979.
20. Kitcher, Philip, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York, 1984.
21. Kline, Morris, *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, Oxford, 1980.
22. Körner, Stephan, *On the Relevance of Post-Godelian Mathematics to Philosophy*, in [27], pp. 118-132.
23. Kramer, Edna E., *The Nature and Growth of Modern Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 1981.
24. Kuhn, Thomas S., *The Structure of Scientific Revolutions*, 2nd ed., University of Chicago Press, Chicago, 1970.
25. Lakatos, Imre, *Arenaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?*, in Mathematics Science and Epistemology, pp. 24-42.
26. Lakatos, Imre, *Mathematics, Science, and Epistemology* (Philosophical Papers, vol. 2), Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
27. Lakatos, Imre, (ed), *Problems in the Philosophy of Mathemtics* (Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1955) North-Holland, Amsterdam, 1967.
28. Lakatos, Imre, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
29. MacLane, Saunders, "Mathematical Models: A sketch for the philosophy of mathematics," *Amer. Math. Monthly*, **88** (1981) 462-472.
30. Neske, Günther, ed., *Martin Heidegger zum Siebzigsten Geburtstag*, Festschrift Neske, Pfullingen, 1959.
31. Polya, George, *Mathematical Discovery*, Wiley, New York, 1981.
32. Ritter, Joachim, ed., *Axiom. in Historisches Worterbuch der Philosophie*, vol. 1, Schwabe, Basel, 1971, pp. 737-748.
33. Smith, karl J., *The Nature of Mathematics*, 4th ed., Brooks/cole, Monterey, 1984.
34. Spengler, Oswald, *The Decline of the West*, vol. 1, Knopf, New York 1926.

35. Van der Waerden, B. L., "La demonstration dans les sciences exactes de l' antiquité," *Bulletin de la Societe Mathematique de Belgique*, 1x (1957) 8-13.

36. Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*. vol. 1. Noordhoff, Groningen, 1954.

37. Weil, Andre, *Number Theory, An Approach Through History*, Birkauser, Boston, 1983.

38. Wittgenstein, Ludwig, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, revised ed., MIT, Cambridge, 1978.

> همهٔ ما اغلب می‌شنویم که ریاضیات عمدتاً با "اثبات قضایا" سر وکار دارد. آیا شغل یك نویسنده عمدتاً "جمله‌نویسی" است؟ حرفهٔ ریاضیدان آن پیچیدگیهایی را دارد که در پس حل معما، قیاس، خیالپردازی، و تسلیم، نهفتهٔ است، و "اثبات" قطعاً نمی‌تواند جوهر اصلی کشف باشد، زیرا که آن تنها سند اطمینانی است بر اینکه اندیشه‌مان ما را فریب نداده است.
>
> جیان کارلوروتا

پال م. ب. ویتانی

آندری نیکلایویچ کولموگوروف•

ترجمهٔ ویدا میلانی

آندری ن. کولموگوروف در ۱۵ آوریل ۱۹۰۳ درشهر تامبوف[1] اتحاد جماهیر شوروی به دنیا آمد و در ۲۰ اکتبر ۱۹۸۷ درمسکو دیده ازجهان فروبست. احتمالاً وی برجسته‌ترین ریاضیدان معاصر شوروی بود ودر زمرهٔ بزرگترین ریاضیدانان این عصر بشمار می‌رود. فعالیتهای اساسی وخلاقانهٔ او درطیف وسیعی از شاخه‌های ریاضیات آنچنان گسترده‌اند که من نمی‌توانم حتی تلاشی دربررسی کلی وجزئی آنها بکنم. عجالتاً بگذارید فهرستی تاتمام ازشاخه‌هایی که او باتحقیقات اساسیش آنها را توسعه داد ذکر کنم: نظریهٔ سریهای مثلثاتی، نظریهٔ اندازه، نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ انتگرالگیری، منطق ساختی (شهودگرایی)، توپولوژی، نظریهٔ تقریب، نظریهٔ احتمال، نظریهٔ فرایندهای تصادفی، نظریهٔ اطلاعات، آمار ریاضی، سیستمهای دینامیکی، نظریهٔ اتوماتا[2]، نظریهٔ الگوریتمها، زبان‌شناخت ریاضی، نظریهٔ تلاطم، مکانیك آسمانی، معادلات دیفرانسیل، مسئلهٔ سیزدهم هیلبرت، بالیستیك، وکاربردهای ریاضیات درمسائل زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، وتبلورفلزات. او دربیش از ۳۰۰ مقالهٔ تحقیقی، کتاب درسی، وتك‌نگاشت، تقریبا تمام شاخه‌های ریاضیات به‌جز نظریهٔ اعداد را مورد بررسی قرار داد. درتمام این شاخه‌ها حتی تلاشهای کوچك او درمطالعهٔ یك مسئلهٔ تنها خلاصه نشد، بلکه به‌عکس دیدگاههای اساسی و ارتباطات عمیق را دربرگرفت، و موجد رشته‌های کاملاً جدید تحقیقات گردید.

کولموگوروف علاوه برکارهای عمیق درریاضیات وعلوم، بسیاری‌از اوقات خود را به‌پیشبرد تدریس ریاضیات در دبیرستانهای اتحاد شوروی، و فراهم‌کردن مدارس ویژه‌ای برای شاگردان با استعداد ریاضی اختصاص داد، که بسیارهم موفق بود. همچنین تلاشهای

• Vitanyi Paul M.B., "Andrei Nikolaevich Kolmogorov."

1. Tambov 2. Automata, 3–18.

او در بررسی هجایی برخی جنبه‌های شعر روسی، به‌خصوص اشعار پوشکین، مشهور است. می‌گویند شنیدن سخنرانی او در این باب، خواه شنونده زبان روسی می‌دانست یا نه، بسیار جالب توجه بود. درسال ۱۹۴۲ کولموگوروف با آنا دمیتریونا ایگوروف[1] ازدواج کرد. او از خود صاحب فرزندی نشد.

کولموگوروف، گذشته از اینکه در زمینهٔ علوم فردی شناخته شده بود، وجهه‌ای اجتماعی نیز داشت. اتحاد جماهیرشوروی هفت نشان لنین، وهمچنین عنوان عالی قهرمان کارگر سوسیالیست را به‌وی اعطا کرد؛ اوموفق به‌دریافت جوایز لنین وجوایز ایالتی نیز شد. درمیان‌تمام ریاضیدانان روسی، کولموگوروف‌ازنظر تعداد آکادمیهای‌خارجی وانجمنهای علمی‌ای‌که وی را به‌عنوان عضو برگزیدند، مقام اول را داراست. تعداد این مجامع به بیش از بیست می‌رسد، و ازمیانشان می‌توان از اینها نام برد: آکادمی سلطنتی علوم هلند (۱۹۶۳)،انجمن سلطنتی لندن(۱۹۶۴)، انجمن ملی ایالات متحده‌امریکا (۱۹۶۷)، آکادمی علوم پاریس (۱۹۶۸)، آکادمی علوم لهستان، آکادمی علوم رومانی (۱۹۵۶)، آکادمی علوم لئوپولدینای[2] آلمان (۱۹۵۹)، وآکادمی علوم وهنرهای امریکا در بوستون (۱۹۵۹). همچنین درجهٔ دکترای افتخاری ازدانشگاههای پاریس، برلین، ورشو، استکهلم، وچندجای دیگر را به‌اواهداکردند. او به‌عنوان عضوافتخاری انجمنهای ریاضی‌مسکو، لندن، هندوستان وکلکته، انجمن سلطنتی آمار لندن، مؤسسهٔ بین‌المللی آمار، وانجمن علوم‌کیهانی امریکا برگزیده شد. درسال ۱۹۶۳ جایزهٔ بین‌المللی بولتسانو را دریافت‌کرد. برای مطالب بیشتر در این باب [۲، ۳، ۸] و یادنامهٔ او در مجلهٔ تایمز [۱۸] را ببینید.

بگذارید همین‌جا بگویم که‌من‌هیچ‌ادعایی‌مبنی‌برداشتن روابط‌شخصی‌باکولموگوروف ندارم. این ملاحظات بر اساس اطلاعات دست دوم، و اساساً برپایهٔ منابعی در مورد تو ریاضیات شوروی، به ویژه [۲، ۳، ۸، ۱۳]، ومنابع دیگر، وتا حدود کمی هم براساس ارتباطات شخصی خودم قرار دارند. انگیزهٔ من در نوشتن در بارهٔ کارهای کولموگوروف را تنها درعلاقهٔ اخیرم به‌مفهومی عالی‌که‌آن‌را "پیچیدگی کولموگوروف" می‌نامیم می‌توان یافت. ازآنجا که کولموگوروف مردی با جنبه‌های بسیار بود، مایلیم برخی از این جنبه‌ها را با خواننده در میان بگذاریم.

۱. سالهای آغازی: ۱۹۰۳-۱۹۳۳

کولموگوروف در۲۵ آوریل سال ۱۹۰۳ درشهرتامبوف متولد شد، شهری که مادرش‌ماریا یاکولونا کولموگوروا[3] پس از ترک‌کریمیا[4] درآنجا توقف‌کرده بود. ماریا به‌هنگام تولد نوزاد ازدنیا رفت، ومسؤولیت‌نگهداری طفل به‌گردن‌خواهرش ورا یاکولونا کولموگوروا[5] افتاد

"زنی مستقل که از اعتقادات اجتماعی عالی‌ای برخوردار بود واین اعتقادات

1. Anna Dmitriyevna Egorov
2. Leopoldina
3. Mariya Yakovlevna Kolmogorova
4. Crimea
5. Vera Yakovlevna Kolmogorova

را به‌خواهرزاده‌اش منتقل کرد؛ اورا فردی بامسئولیت، دارای استقلال‌فکری، متعصب دربرابر کارهای پوچ وبیهوده، ومشتاق برای فهمیدن ونه‌صرفاً به‌خاطر سپردن، بارآورد" [۳].

کولموگوروف او را تا هنگام مرگش در سال ۱۹۵۰ در شهر کومارووکا[1] (در خانهٔ ییلاقیش) درسن ۸۷ سالگی همچون مادرخود می‌دانست. ازجانب مادر، کولموگوروف یك اشراف‌زاده‌بود؛ پدربزرگش یاکوف استفانویچ[2] کولموگوروف رهبرمحلی اشراف‌زادگان یوگلیچ[3] بود [۲]. اوسالهای کودکیش (قبل‌از انقلاب ۱۹۱۷) را درملك خانوادگی به‌سر می‌برد [۱۳]. منابع اطلاعاتی دربارهٔ پدرش مبهمترند. پدرکولموگوروف ظاهراً پسر یك روحانی، وخود نیز یك‌کشاورز بسیار تعلیم دیده بود، که در آن زمان چنین شخصی را "یك کشاورز متبحر" می‌نامیدند.

کولموگوروف درهمان سنین‌کم (احتمالاً پس از انقلاب) شروع به‌کارکرد، وپیش ازآنکه دانشجوی دانشگاه مسکوشود، مدتی مسؤول خط‌آهن بود. او درپاییز سال۱۹۲۰ با اندوختهٔ خوبی از ریاضیات، که ازکتابی به‌نام اندیشه‌های نو در ریاضیات به‌دست‌آورده بود، وارد دانشگاه شد. در آن زمان دانشجویان اعانهٔ کمی دریافت می‌کردند، ولی در سال دوم به‌آن ۱۶ کیلو نان پخته و یك‌کیلو روغن نیز اضافه می‌شد. از این‌رو کولموگوروف وقت‌کمی را صرف فراهم‌نمودن مقدمات لازم برای ارتقاء به سال دوم کرد (شرکت در سخنرانیها اجباری نبود) [۱۳]. شرایط عموماً سخت بود، وکلاسهای درس در زمستان سالهای ۱۹۲۰–۱۹۲۱ سرد بودند. قطعهٔ زیر بیان‌کننده این موضوع است [۱۷]:

"آن سال سخت، سال ۱۹۲۱،
پیشرفت علمی دانشگاه مسکو
شروع شد؛
گرچه درآن زمان سن و سالی نداشتم،
و گرچه پوستینهایی تنم را می‌پوشاندند،
اما هنوز آن سرمای وحشتناك را به یاد دارم"

کولموگوروف برای‌مدتی علاوه بر ریاضیات به‌تاریخ روسیه علاقه‌مند شد. اوتحقیقات‌علمی جدی‌ای درباب نوشته‌های خطی قرون ۱۵–۱۶ مربوط به ارتباطات زمینی در نوگورود[4] باستان انجام داد. دربیست سالگی فرضیه‌ای را مبنی برچگونگی‌تشکیل پینگاه[5]ی علیا ارائه داد. و این فرضیه بعدها با اعزام هیئتهایی به آن ناحیه تأیید شد [۳].

در این زمان، یعنی اوایل دوران انقلاب کبیر، حیات ریاضیات مسکو تحت سلطهٔ "لوزیتانیا[6]ی‌جوان"(۱۹۲۰–۱۹۲۳) و"لوزیتانیای ثانی" (۱۹۲۳–۱۹۲۷) قرارداشت، نام‌مستعاری که به‌مکتب‌نظریهٔ توابع‌حقیقی به‌رهبری ن.ن. لوزین[7] اطلاق می‌شد. این‌شخصیت

1. Komarovka
2. Yakov Stephanovitch
3. Uglich
4. Novgorod
5. Pinega
6. Luzitania
7. Luzin

افسانه‌ای ظاهراً شاگردان اوزین را با به‌تحسین هواخواهانه‌وامی‌داشت، و با در تلاشی برای استقلال به‌افکار یك‌جانبه، نظریهٔ مجموعه‌ها، هندسهٔ تصویری، ونظریهٔ توابع تحلیلی اولین موضوعات در ریاضیات بودکه کولموگوروف به بررسی آنها پرداخت. در سالهای ۱۹۲۱–۱۹۲۲ او به اولین نتیجهٔ مستقلش در ریاضیات (وجود سریهای فوریه‌ـ لبگی که ضرایب فوریه‌شان بدقدر دلخواه آهسته تزول‌می‌کنند) دست یافت، وبدین‌ترتیب درسلك شاگردان ن.ن. اوزین در آمد. درطی این دوره بودکه ارتباط نزدیکی با پ. س. اوریسون[1]، که سعی درعلاقه‌مند کردن او به‌مسائل توپولوژی داشت، پیدا کرد. از آنجا که کولموگوروف به‌برخی نتایج در نظریهٔ توصیفی توابع دست یافته بود، و این موضوعی نبودکه با اندیشه‌های اوزین چندان دمساز باشد، اوریسون اورا با پ. س. الکساندروف[2] که زمینه‌های تحقیقاتیش بیشتر به‌این موضوع نزدیك بود، آشنا کرد. اما درهمین زمان، کولموگوروف یك سری فوریهٔ همه جا واگرا ساخت، و این نتیجه‌ای بودکه توجه جهانی را به خود جلب کرد، و تا مدتی او را دوباره درمسیر کارهای اوزین قرارداد. به‌همین دلیل ارتباط اولیهٔ کولموگوروف با الکساندروف دراین هنگام بسیارمحدود شد.

کولموگوروف به‌منطق ریاضی علاقه‌مند شد. ودرسال ۱۹۲۵ مقاله‌ای در موردقانون طرد شق ثالث درمجلهٔ ماتماتیشسکی اسبورنیك[3] منتشر کرد، که مرجعی دائمی برای کارهای بعدی درمنطق ریاضی‌شد. این اولین مقالهٔ روسی درمنطق ریاضی شامل نتایج جدید (وخیلی اصیل) بود، واولین تحقیق اصولی دردنیای منطق شهودگرایانه به‌شمارمی‌رفت. کولموگوروف تا حد زیادی صوری‌سازی ا. هیتینگ[4] برای استدلالهای شهودگرایانه را پیش‌بینی کرد، و ارتباط مشخصتری بین ریاضیات کلاسیك وشهودگرایانه پدید آورد. اوعملی برای "نشاندن" یك نظریهٔ منطقی درنظریهٔ دیگر تعریف کرد. بااستفاده ازاین عمل برای نشاندن منطق کلاسیك درمنطق شهودگرایانه ــ که از دیدگاه تاریخی نخستین عمل ازاین دست بود، وامروزه "عمل کولموگوروف" نامیده می‌شود ــ ثابت کردکه کاربرد قانون طرد شق ثالث به خودی خود نمی‌تواند منجر به تناقض شود. درسال ۱۹۳۲ کولموگوروف دومین مقاله‌اش را در زمینهٔ منطق شهودگرایانه منتشر کرد، که درآن برای نخستین‌بار (برای این منطق) معنی شناسی‌ای مستقل از اهداف فلسفی شهودگرایانه پیشنهاد شده بود. این مقاله این امکان را پدید آورد که با منطق شهودگرایانه به‌عنوان منطق ساختنی رفتار شود.

علاقهٔ وی به‌نظریهٔ احتمال درسال ۱۹۲۴ آغازشد. نخستین گامهای او دراین زمینه با همکاری خینچین[5] بود. در سال ۱۹۲۸ او موفق شد شرایط لازم و کافی را برای برقراری قانون قوی اعداد بزرگ بیابد، و قانون لگاریتم مکرر را برای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل، تحت شرایطی بسیارکلی برمتغیرها، ثابت کند. او درمقالهٔ "یك نظریهٔ عمومی اندازه وحساب احتمالات"، ۱۹۲۹، اولین طرح یك‌دستگاه اصل موضوعی برای نظریهٔ احتمال را براساس نظریهٔ اندازه و نظریهٔ توابع یك متغیر حقیقی مطرح کرد. چنین نظریه‌ای اولین‌بار

1. Uryson 2. Alexandrov 3. *Mathematicheskii Sbornik*
4. Heyting 5. Khinchin

درسال ۱۹۵۹ توسط بورل پیشنهاد شد، و درسال ۱۹۲۳ توسط لومنیکی[1] توسعه یافت، و درسال ۱۹۲۳ با بررسی کلاسیك کولموگوروف به منتها درجهٔ موفقیت خود رسید. پیش ازآن نیزکارهای مهم زیادی درنظریهٔ احتمال، بدون توجه به‌مبانی آن، انجام شده بود، ولی کتاب کوچك مبانی حساب احتمالات که درسال ۱۹۳۳ به‌زبان آلمانی منتشر شد، به‌یکباره فرمولبندی قطعی این نظریه‌گردید. این کتاب نه‌تنها مرحلهٔ جدیدی را درتوسعهٔ نظریهٔ احتمال به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات رقم زد، بلکه مبنای لازم را برای آفرینش نظریهٔ فرایندهای تصادفی، که موضوع مقالهٔ سال ۱۹۳۱ او بود، به دست داد. درهمین مرحله بودکه قضایای اساسی توزیعهای با بعد نامتناهی، که امروزه شالودهٔ منطقی برای ساختن دقیق نظریهٔ توابع تصادفی و دنباله‌های متغیرهای تصادفی به‌شمارمی‌آیند، برای اولین‌بار فرمولبندی شد. این ایده‌ای پیچیده درقلب نظریهٔ نوین فرایندهای تصادفی قرار دارند، و مفاهیم اساسی را در ایده‌های نظریهٔ کنترل تشکیل می‌دهند، و نقشی حیاتی درطرحی که بعدها کولموگوروف در نظریهٔ اطلاعات ونظریهٔ ارگودیك ارائه داد ایفا می‌کنند. فعالیتهای زیادکولموگوروف در نظریهٔ احتمال وآمار، او را به‌عنوان برجسته‌ترین نمایندهٔ این نظام معرفی کرد.

درسال ۱۹۳۱ مقالهٔ او با عنوان "روشهای تحلیلی در نظریهٔ احتمال" منتشرشد. او در این مقاله مبانی نظریهٔ نوین فرایندهای مارکوف[2] را مطرح کرد. بنابرگفتهٔ گندنکو[3]:

> "درتاریخ نظریهٔ احتمال مشکل بتوان‌کارهای دیگری را سراغ گرفت‌که چنین قاطعانه تغییردهندهٔ دیدگاههای پذیرفته شده وگرایشهای‌اساسی درکارتحقیقاتی باشند. درواقع، می‌توان این‌کار را به‌عنوان آغازمرحلهٔ جدیدی درپیشرفت کل نظریه به‌شمار آورد" [۷].

این نظریه پیشروانی همچون ا. ا. مارکوف، پوانکاره و باشلیه[4]، فوکر[5]، پلانك، اسمولوخوفسکی[6]، وچایمن داشت. معادلات خاص آنها برای‌مسائل اختصاصی‌فیزیك، که به‌طورغیرصوری به‌دست آمده بود، به‌عنوان حالات ویژه‌ای ازنظریهٔ کولموگوروف به‌دست آمد. تعداد زیادی مقالهٔ پی درپی توسط کولموگوروف وشاگردانش نوشته شد، که درمیان آنها مقاله‌ای ازکولموگوروف بودکه بامسائل اساسی آمار ریاضی سروکارداشت. درآن مقاله اوآزمون آماری مشهور خود (آزمون کولموگوروف) را براساس تابع توزیع تجربی متغیرهای تصادفی مشاهده شده، برای آزمون صحت فرضیه‌ای درمورد توزیع صحیح آنها، معرفی کرد. به‌طورکلی می‌توان گفت‌که اندیشه‌های کولموگوروف درآمار و احتمال منجر به پیشرفتهای نظری بسیار، و کاربردهای زیادی درعلوم جدید فیزیکی امروزه شده است.

کولموگوروف، پس از فارغ‌التحصیل‌شدن درسال ۱۹۲۵، چهارسال دیگر به‌عنوان دانشجوی پژوهشگر در دانشگاه باقی ماند. اما سرانجام درسالهای ۱۹۲۸–۱۹۲۹ کنترل شدیدتری روی تعداد سالهای مجاز برای تحقیق دانشجویان اعمال شد. درسال ۱۹۲۹

1. Lomnicki 2. Markov 3. Gnedenko
4. Bashelier 5. Fokker 6. Smolukhovski

تعداد بسابقهٔ ۷۰ دانشجو، که کولموگوروف نیز در میانشان بود، کار خود را تمام کردند. همین مطلب موجب این مسئله برای اوشد که کجا کار تحقیقی خود را ادامه دهد. الکساندروف دراین میان وسیله‌ای شد تا تنها جای خالی موجود درمؤسسهٔ ریاضیات و مکانیك دانشگاه مسکو درسال ۱۹۲۹، علی‌رغم رقابتهای شدید، به کولموگوروف برسد.

۳. سالهای جوانی: ۱۹۲۹-۱۹۴۰

کولموگوروف درسالهای ۱۹۳۰-۱۹۴۰ بیش از ۶۰ مقاله درزمینهٔ نظریهٔ احتمال، هندسهٔ تصویری، آمار ریاضی، نظریهٔ توابع یك متغیرهٔ حقیقی، توپولوژی، زیست‌شناسی ریاضی، فلسفه، وتاریخ ریاضیات منتشر کرد. درسال ۱۹۳۱ استاد دانشگاه مسکوشد، وازسال ۱۹۳۷ کرسی نظریهٔ احتمال را به‌دست آورد. از همین زمان دوستی مادام‌العمر بین کولموگوروف و الکساندروف آغاز شد. بنابه گفتهٔ الکساندروف:

"درسال ۱۹۷۹ پنجاهمین سالگرد این دوستی [باکولموگوروف] جشن گرفته شد. در تمام این نیم قرن نه تنها خدشه‌ای بر آن وارد نشد، بلکه در تمام این مدت هرگز هیچ نزاعی میان ما درنگرفت وهرگز درهیچ مسئله‌ای، هرقدر هم که درزندگی ومنش ما اهمیت داشت، سوءتفاهمی بین ما به‌وجود نیامد؛ حتی زمانی که عقاید ما درمورد این مسائل متفاوت بود، نسبت به‌دیدگاههای یکدیگر تفاهم و همفکری کامل نشان می‌دادیم" [۲].

کولموگوروف می‌گوید:

"برای من این ۵۳ سال دوستی صمیمانه وپایدار دلیلی است براینکه چرا تمام زندگی من سرشار از شادی بود، و مبنای آن شادی، ملاحظات فکری همیشگی از جانب الکساندروف بود" [۱۳].

کولموگوروف شرح می‌دهد که چگونه این دوستی درسال ۱۹۲۹ هنگام یك سفر با کشتی بر رود ولگا شروع شد. در آن‌زمان "انجمن گردش وسیاحت کارگران" برای تعطیلات برنامه‌های پرباری ترتیب داده بود: هرکس می‌توانست یك قایق و تجهیزات اردوزنی را در شهری در جوار ولگا بگیرد و آنها را در شهرهای دیگر پایین رود تحویل بدهد. کولموگوروف که ازقبل به‌فن قایقرانی آشنا بود، تصمیم گرفت چنین سفری ترتیب دهد، واز الکساندروف (ودونفر دیگر) خواست که به‌او بپیوندند. مردان جوان لباسهای "یانگشتورم"[1] راکه آن وقتها بین همهٔ خدمهٔ کشتی مرسوم بود، خریدند. تنها کتابهایی که همراه بردند یك برنامهٔ ساعات حرکت کشتی بخار ویك نسخهٔ اودیسه (و همچنین کاغذ برای یادداشت و یك میز تحریر تاشو) بود. آنها سفرخود را در ۱۶ ژوئن آغاز کردند، وتا تحویل دادن قایق در شهرپایین رود سامار[2] ۱۳۰۰ کیلومتر راه پیمودند. پس از آن کولموگوروف والکساندروف باکشتی بخار رهسپار کاوکاسوس[3] شدند. پس ازکمی گردش، دراتاق خالی صومعه‌ای واقع

1. Jungsturm 2. Samar 3. Caucasus

درشبه جزیرهٔ کوچکی در دریاچه ساوان[1] اقامت کردند. هنگام وقت‌گذرانی درسواحل دور دست، در فاصلهٔ بین شنا کردن وآفتاب گرفتن تا حدودی هم به‌کارهای خود می‌پرداختند: کولموگوروف با نظریهٔ انتگرالگیری و توصیف تحلیلی فرایندهای زمان پیوستهٔ مارکوف مشغول بود، و الکساندروف، با آن عینك دودی وکلاه سفید پاناما در زیر آفتاب سوزان، با کتاب توپولوژی‌اش که با هاپف[2] می‌نوشت. آنها حدوداً سه هفته در این محیط روستایی اقامت کردند، سپس پاره‌ای پیاده وپاره‌ای با وسایل نقلیهٔ دیگر راه پیمودند، وسرانجام به کوه آلاگز[3] (۴۱۰۰ متر) صعود کردند. سفر آنها در تفلیس خاتمه یافت، و از آنجا بودکه الکساندروف برای یك ملاقات ازپیش‌تعیین‌شده باگروهی از ریاضیدانان، به‌تنهایی رهسپار شد (دراین زمان ماه آگوست بود). کمی بعد درگاگرا[4] دردریای سیاه، باردیگر به یکدیگر ملحق‌شدند، وزمان بیشتری را درآنجا به‌شنا کردن، آفتاب گرفتن وکارهای ریاضی پرداختند. تقریباً درهمین زمان تصمیم گرفتند یك خانهٔ مشترك بگیرند.

پس از بازگشت به مسکو، بی‌درنگ اولین خانه را درسری خانه‌های نزدیك دهکدهٔ کلیازم[5] اجاره، و به همراه خالهٔ کولموگوروف، ورا یاکولونا، به آنجا نقل مکان کردند. مدت زمان کوتاهی پس از آن ماشا باربانووا[6]، که پیش از انقلاب درملك خانوادگی نزدیك یاروسلاول[7]، دایهٔ کولموگوروف بود، برای خانه‌داری به‌آنها ملحق شد. درسال ۱۹۳۵ آنها صاحب (اساساً قسمتی از) یك‌خانهٔ قدیمی اربابی درکومارووکا شدندکه اتاقهایی برای یك کتابخانهٔ بزرگ وگنجاندن چندین مهمان داشت. این "خانهٔ درکومارووکا" محل ملاقاتی برای ریاضیدانان شد. بنابه گفتهٔ یکی از آنها:

"این محل درست مانند اوبرولفاچ[8] [یك مؤسسهٔ ریاضیات در یك فارست[9]] است بااین‌تفاوت که دراینجا کولموگوروف همهٔ نوشیدنیها را می‌خرد" [۱۸].

شاید آموزنده باشدکه به زندگی ییلاقی یك ریاضیدان هم نظری بیندازیم [۱۳].

کولموگوروف می‌گوید: "معمولاً ازهفت روزهفته، چهارروز را درکومارووکا می‌گذراندیم، یك روز تمام به‌تفریحاتی مانند اسکی، قایقرانی، پیاده‌رویهای طولانی (که به‌طور متوسط به ۳۰ تا ۵۰ کیلومتر می‌رسید)، می‌پرداختیم، در روزهای آفتابی ماه مارس درحالی‌که تنها شلوارکوتاهی به پا داشتیم، چهار ساعت بدون وقفه اسکی می‌کردیم. در روزهای دیگر، ورزش صبحگاهی اجباری بود، که در زمستان ۱۰ کیلومتر اسکی کردن نیز به‌آن اضافه می‌شد... به‌ویژه ما عاشق شنا کردن در رودخانه‌ای بودیم که تازه یخهای آن داشت آب می‌شد... و من مسافت کمی را در آب یخ شنا می‌کردم، ولی الکساندروف مسیر طولانیتری را شنا می‌کرد. در عوض این من بودم که مسافتهای خیلی

1. Savan 2. Hopf 3. Alagez 4. Gagra
5. Klyaz'm 6. Masha Barbanova 7. Jaroslavl
8. Oberwolfach 9. Black Forest

دورتری را اسکی می‌کردم.»

پ. هالموس، که درسال ۱۹۶۵ کولموگوروف را درمسکوملاقات کرد، چنین‌می‌گوید [۹]:

«کولموگوروف ۵ اتاق [در آپارتمان واقع در دانشگاه] داشت،... در یك گوشهٔ آن توده‌ای‌از نوشته‌های چاپی، در جایی چند ماسك نمایشی، و در جای دیگر یك جفت چوب اسکی به‌چشم می‌خورد. از او پرسیدم: «تو در اینجا کارمی‌کنی؟» و اوگفت: «نه، نه، من درخانهٔ ییلاقیم‌کار می‌کنم، وتنها سه روز در هفته اینجا هستم.»

(در جشن هفتادمین سالگرد تولد کولموگوروف، یك گردش با اسکی ترتیب داده شدکه در آن‌کولموگوروف درحالی‌که تنها شلوارکوتاه به‌پا داشت بیش‌از هرشرکت‌کنندهٔ دیگر اسکی‌کرد [۲۳].)

درسالهای ۱۹۳۰–۱۹۳۱ کولموگوروف والکساندروف عمدتاً درخارج بودند.سال ۱۹۳۰ را هردو درگوتینگن گذراندند. در اینجاکولموگوروف در مورد قضایای حدی با کورانت[1]، درمورد منطق‌شهودگرایانه با وایل[2]، و درمورد نظریهٔ‌توابع با لاندائو[3] به‌تبادل نظر پرداخت. کولموگوروف ماجرا را چنین نقل می‌کندکه مسئله‌ای راکه لاندائوخیلی‌مایل بود حل شود، حل‌کرد و به‌طورکامل نوشت. لاندائوکه از این موضوع خیلی خوشحال شده بود، مطلب را با همه‌کس درمیان‌گذاشت و از کولموگوروف خواست‌که مقاله‌ای در این مورد بنویسد، اما علی‌رغم دستپاچگی او، چندهفتهٔ بعدکولموگوروف همان نتیجه را باهمان استدلال توسط بسیکوویچ[4] درمجلهٔ فاندامنتا ماتماتیکا[5] (مبانی ریاضیات) پیداکرد. در تابستان‌کولموگوروف والکساندروف هردو به دیدار کاراتئودوری[6] درمونیخ رفتند (نظریهٔ اندازه)، و از آنها دعوت شد درسواحل مدیترانه با فرشه[7] بمانند (در موردکولموگوروف علت‌دعوت،کار بر روی نظریهٔ احتمال بود). سفرآن دوشامل گردش در باواریا، یك‌ماه اقامت با فرشه، دیدار از آزمایشگاه پ. س. اوریسون در نورماندی، وسرانجام رفتن به پاریس بود. الکساندروف در اواخر ماه سپتامبر پاریس را به مقصدگوتینگن ترك‌کرد، وکولموگوروف تا ماه دسامبر درآنجا ماند وملاقاتهایی با بورل[8] وبه‌خصوص پ. لوی[9] داشت. زمانی‌که کولموگوروف بدگوتینگن برمی‌گشت، الکساندروف نیمسال بهارهٔ ۱۹۳۱ را در ایالات متحده می‌گذراند.

به‌عنوان شاهکار دیگری دراین دوره، اغلب ازمقالهٔ «ریاضیات» برای ویرایش دوم دایرةالمعارف بزرگ روسی نام برده می‌شود. شاخهٔ دیگری که وی در این زمان به سوی آن روی‌آورد، توپولوژی بود. کولموگوروف همزمان ولی مستقل از الکساندر[10]، توپو-

1. Courant 2. Weyl 3. Landau 4. Besicovitch
5. *Fundamenta Mathematicae* 6. Caratheodory 7. Frechet
8. Borel 9. P. Lévy 10. Alexander

لوژیدان امریکایی، ایدهٔ کوهمولوژی را کشف‌کرد و نظریهٔ عملیات کوهمولوژیك را پایه گذاشت. کارکولموگوروف ومکتب او بر روی ارتباط عمیق بین توپولوژی، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی، مکانیك آسمانی، ونظریهٔ سیستمهای دینامیکی، تاحد قابل توجهی مسیر فعلی این موضوعات را تعیین کرده است.

درپایان سی‌سالگی، توجه کولموگوروف به‌مکانیك تلاطم‌جلب شد. نظریهٔ تلاطم به دست‌کولموگوروف ومکتبش، به‌عنوان مبحثی‌کاربردی درنظریهٔ اندازهٔ فضاهای توابع، یك شکل دقیق ریاضی یافت. کولموگوروف در دومقالهٔ‌کوتاه درسال ۱۹۴۱، بایك‌دیدفیزیکی قوی، ایده‌هایی را درباب ساختارمؤلفه‌های مقیاس کوچك درحرکت تلاطمی‌مایعات‌وگازها به‌شکل ریاضی شسته ورفته‌ای در آورد ــ ایده‌هایی‌که در آزمایشهای اولیه، خصوصاً کارهای ج. ا. تیلور[1]، پنهان‌مانده‌بود. این‌فرضیه‌ها نتایج کیفی‌بسیاری را ایجاب‌می‌کنندکه‌کاربردهای وسیعی دارند ــ به‌عنوان مثالی ازاین‌کاربردها، تلاطمی‌است‌که درهوای پشت‌یك هواپیمای جت ایجاد می‌شود، برخی روابط کمیتی به‌دست آمده، سرشت قوانین جدید طبیعت را دارند ــ همچون قانون "۲/۳ کولموگوروف": درهر جریان متلاطم پیش رونده، میانگین مربع تفاضل سرعتها در دونقطه‌متناسب با فاصله‌شان به‌توان ۲/۳ است (درصورتی‌که‌فاصله خیلی‌کم و خیلی زیاد نباشد). کولموگوروف همچنین پیش‌گوییهایی کمیتی برپایهٔ نظریات خودکردکه بعدها ضمن آزمایشهایی مانند اثر "پن‌کیك[2]" ساختار چین‌خوردهٔ اقیانوسها، مورد تأیید قرارگرفت. کارهای‌کولموگوروف درنظریهٔ تلاطم درسال ۱۹۴۱، احتمالاً[3] از بهترین کارها در تاریخ طولانی و پایان نگرفتهٔ این نظریه بوده‌است.

۳. سالهای میانی ۱۹۴۰–۱۹۶۰

کولموگوروف به‌تمام شاخه‌های علوم علاقه‌مندبود؛ او و شاگردانش دربارهٔ رشدکریستالها، وهندسهٔ برهمکنش‌گیاهان مقالاتی نوشتند، وهمچنین‌کارهای مهمی در فرایندهای "زادومیر" و ژنتیك انجام دادند. یکی از این مقالات او را در مقابلهٔ رودر رو با لیسنکو[4] قرارداد. کولموگوروف دریك ایستادگی شجاعانه درپافشاری برحقیقت علم، در مقاله‌ای‌که درسال ۱۹۴۰ دربخش "ژنتیك" مجلهٔ *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* منتشر کرد، نشان‌دادکه مطالب گردآوری شده توسط پیروان لیسنکو که عضو آکادمی وتحت‌الحمایهٔ استالین بود، برخلاف آنچه تصورمی‌شد، قوانین‌مندل‌را تأییدمی‌کند. کارمشترك دیگر(با پیسکونوف[4] وپتروفسکی) درمورد نرخ رشد ژن مفید دریك محیط خطی بود (این مبحث را ر. ا. فیشر به‌طور مستقل بررسی‌کرده بود، کسی که‌کولموگوروف شدیداً به‌واحترام می‌گذاشت). این‌موضوع بعدها به‌منظور توصیف روند انتشار شایعات، وهمه‌گیرشدن بدعتها مورد استفاده قرارگرفت.

نظریهٔ هموارکردن وپیشگوی‌سریهای زمانی ایستا معمولاً[1] با نام نوربرت وینرعجین شده‌است، اما در حقیقت این وینر و کولموگوروف بودندکه به‌طور همزمان در طی جنگ

1. G. I. Taylor 2. Pancake 3. Lysenko 4. Piscounov

دوم جهانی آن‌را توسعه دادند. برای این‌مطلب [۲۴، ۲۵] را نیز ببینید.

در دوران پس‌ازجنگ کولموگوروف دوباره به‌نظریهٔ تلاطم روی‌آورد، وقوانینی را که قبلاً کشف کرده بود وبه‌طورتجربی نیز تأیید شده بود، کمی بهبود بخشید. درهمین دوره بودکه به‌موضوعاتی در رشته‌های متنوع مکانیك کلاسیك، نظریهٔ ارگودیك، نظریهٔ توابع، نظریهٔ اطلاعات، و نظریهٔ الگوریتمها پرداخت. اوسعی داشت ارتباطی بین‌حوزه‌های کاملاً نامربوط بدهم پیداکند؛ ومقالاتی اندك ولی کاملاً اساسی درهریك ازاین زمینه‌ها منتشر کرد. کار وی در سیستمهای دینامیکی را می‌توان به‌دو دوره تقسیم کرد. در سالهای ۱۹۵۳ تا ۱۹۵۴، تحقیقی بنیادی روی مسئلهٔ اساسی مکانیك کلاسیك انجام داد، که ۵۰ سال قبل ه. پوانکاره درمطالعاتش درباب حرکت‌سیارات به‌دورخورشید آن‌را مطرح کرده‌بود. بانادیده‌گرفتن تمام سیارات به‌جز یکی، به‌مسئله‌ای "انتگرالپذیر"، می‌رسیم که حل آن کاملاً شناخته شده‌است. اما، تأثیرات کوچك ناشی‌از نیروی‌گرانش متقابل بین‌سیارات موجب‌تغییر کیفی عمیقی می‌شودکه معلول این‌واقعیت‌است که معادلات اکنون "انتگرال‌ناپذیر"‌اند. کاربزرگ کولموگوروف درحمله به‌این مسئله، گسترش یك نظریهٔ عمومی سیستمهای هامیلتونی تحت آشفتگیهای کوچك بود، که‌کاربردهای عملی فراوانی از جمله درمطالعهٔ میدانهای مغناطیسی و فیزیك پلاسما دارد. این کار نیز، همراه با اصلاحات انجام شده توسط آرنولد[1] (شاگرد کولموگوروف) وموزر[2]، منجر به شکوفایی مبحثی شدکه امروزه بررسی "جنبرهٔ ك. ا. م" نام دارد. بررسیهای محاسباتی بعدی دیدگاههای کولموگوروف را تأیید کرده‌وپدیدآورندهٔ حوزهٔ بسیار پربار "آشوب در سیستمهای دینامیکی" شده‌است؛ حوزه‌ای‌که در حال حاضر توجه بسیاری را به‌خود معطوف کرده‌است. این مطالعات، به‌عنوان‌مثال، پیشگویی‌هواشناسی بهتری را ممکن می‌سازد.

دراین هنگام اوکار برروی نظریهٔ اتوماتا ونظریهٔ الگوریتم را نیزآغاز کرد. به‌همراه شاگردش اوسپنسکی[3]، مفهوم مهم ماشین کولموگوروف ـ اوسپنسکی را فرمولبندی کرد. او ازحوزهٔ روبه‌پیشرفت سیبرنتیك، که درابتدا با مخالفت‌شدید (دراتحاد شوروی) روبرو شده بود، حمایت کرد. بسیاری ازدانشمندان علم‌کامپیوتراتحاد شوروی، شاگردان کولموگوروف یا شاگردان شاگردان او هستند [۳].

دومین دوره ازسال ۱۹۵۵ تا ۱۹۵۹ شامل کاربردهایی ازنظریهٔ اطلاعات درنظریهٔ سیستمهای دینامیکی بود. او ایدهٔ پربار مشخصه‌های اطلاعاتی (انتروپیك) را در مطالعهٔ فضاهای متریك وسیستمهای دینامیکی معرفی کرد. درسالهای ۱۹۵۶ـ۱۹۵۷ کولموگوروف به‌کمك آرنولد مسئلهٔ سیزدهم هیلبرت را ثابت‌کرد، و با نشان‌دادن اینکه یك تابع پیوسته ازهرتعداد متغیررا می‌توان به‌صورت ترکیب توابع پیوستهٔ یك متغیره و جمع آنها نمایش داد، نتیجهٔ حدس زده‌شده را ردکرد. اندیشهٔ معرفی مشخصه‌های انتروپیك درنظریهٔ سیستم‌های دینامیکی حوزهٔ جدید و وسیعی را پدیدآورد. مفهوم مهم دیگر، یعنی مفهوم یك سیستم

1. Arnold 2. Moser 3. Uspenskii

شبه منظم (که امروزه سیستم K نامیده می‌شود)، نقش بسیار مهمی را درتحلیل سیستمهای دینامیکی کلاسیك باخواص تصادفی قوی، مانندآنچه در فیزیك، زیست‌شناسی، و شیمی می‌بینیم، ایفا می‌کند. کولموگوروف درسالهای ۱۹۵۸ـ۱۹۵۹ نظریهٔ ارگودیك را در مورد پدیده‌های از نوع تلاطم به‌کار برد، که تأثیرزیادی در کارهای بعدی داشت.

۴. سالهای بعد: ۱۹۶۰-۱۹۸۷

درحالی‌که کولموگوروف درسالهای قبل مفاهیم نظریهٔ اطلاعات را درعلوم ریاضی به‌کار می‌برد، اکنون نوبت خود نظریهٔ اطلاعات بودکه با استفاده ازنظریهٔ الگوریتمها بازسازی شود وبا این‌کار دایرهٔ تحقیقات کولموگوروف به‌فراهم آوردن پایه‌های منطقی ـ الگوریتمی برای نظریهٔ احتمال محدودگردد. سرچشمهٔ نظریهٔ الگوریتمی اطلاعات، یا "نظریهٔ‌پیچیدگی کولموگوروف"، کشف توصیفهایی جهانی از اشیاء متناهی، و یك رهیافت پایای بازگشتی به‌مفاهیم پیچیدگی توصیفها، تصادفی‌بودن و یك احتمال پیشین، بود. از نظرگاه تاریخی، این نظریه عمیقاً درتعبیر ر. فون میزس[1]، از دنباله‌های‌نامتناهی‌تصادفی (کولکتیوها[2]) ریشه داشت، که ازسال ۱۹۱۹ به‌بعد، با استفاده ازتعریف بسامدی برای احتمال، به‌عنوان شالودهٔ نظریهٔ احتمال با جوهرهٔ یك نظریهٔ فیزیکی (مطابق برنامهٔ مطرح‌شده در مسئلهٔ ششم هیلبرت) پیشنهاد شد. درسال ۱۹۴۰ چرچ[3] نسخه‌ای الگوریتمی‌ازدنباله‌های تصادفی فون‌میزس‌ارائه داد، اما نتایج آن باز رضایت‌بخش نبود.

کولموگوروف درجزوهٔ سال ۱۹۳۳ خود، به‌تعبیری پیشنهاد هیلبرت را در ششمین مسئله‌اش اجرا کرد:

> "برای بررسی اصل موضوعی آن‌دسته ازعلوم فیزیکی که ریاضیات نقش‌مهمی درآنها بازی می‌کند (به‌شیوهٔ بررسی اصل موضوعی هندسه)، نظریهٔ احتمال بیشترین شایستگی را دارد...".

درسال ۱۹۶۳ کولموگوروف معتقد بودکه:

> "این نظریه [رهیافت اصل موضوعی ـ نظریهٔ مجموعه‌ای سال ۱۹۳۳ کولموگوروف] آنقدر موفق بودکه مسئلهٔ یافتن پایه‌ای برای‌کاربردهای‌حقیقی نتایج نظریهٔ ریاضی احتمال، برای بسیاری از محققین در درجهٔ دوم اهمیت قرار گرفت... [با این حال] مبنای کاربردپذیری نتایج نظریهٔ ریاضی احتمال در پدیده‌های "تصادفی" واقعی باید به‌نحوی به‌مفهوم بسامدی احتمال متکی باشد، مفهومی‌که طبیعت‌غیرقابل‌اجتنابش به‌گونه‌ای‌الهام‌بخش‌توسط‌فون‌میزس پایه‌گذاری شده‌است." [۱۰]

1. R. von Mises 2. Kollektivs 3. Church

با این‌همه، فون‌میزس رهیافت خودرا برپایهٔ دستگاهی اصل‌موضوعی از دنباله‌های تصادفی نامتناهی قرارداد، که نمایش‌دهندهٔ آزمایشهای مستقل‌مکرری با بسامد حدی بودند. دراین‌باب کولموگوروف می‌گوید:

"مفهوم بسامد، که براساس ایدهٔ بسامد حدی‌وقتی که تعداد آزمایشها به‌بینهایت میل کند قراردارد، چیزی درمورد کاربرد نتایج نظریهٔ احتمال درمسائل علمی واقعی، که درآنها همواره مجبوریم باتعداد متناهی آزمایش‌سروکارداشته‌باشیم، نشان نمی‌دهد" [۱۰].

در [۱۱]، به‌دنبال چهاردهه جدال برسرمفهومی که فون‌میزس برای‌یک‌دنبالهٔ تصادفی نامتناهی پیشنهادکرده بود، کولموگوروف نظریهٔ الگوریتمها را درتوضیح پیچیدگی‌یک‌شیء متناهی به‌عنوان طول کوتاهترین توصیف (الگوریتم بازسازی‌آن) به‌کاربرد. به‌نظرمی‌رسید که این تعریف به روش الگوریتمی به‌کار رفته بستگی داشته باشد. اما بعداً معلوم شدکه روشهایی‌جهانی و بهینه وجود دارندکه برای‌آنها پیچیدگی اشیاء توصیف‌شده مجانباً بهینه است. باوجود این‌که روشهای بهینهٔ زیادی در دست است، پیچیدگی‌متناظرشان تنها دریک ثابت جمعی با یکدیگر اختلاف دارند. طبیعی است‌که یک شیء متناهی را تصادفی بنامیم هرگاه هیچ‌توصیفی برای پیچیدگی، کمتراز آنچه‌خود دارد، نداشته‌باشد. درتشابه بارهیافت ابتدایی فون میزس، تعریف یک دنبالهٔ نامتناهی تصادفی به‌عنوان دنباله‌ای‌که برای‌آن‌رشد پیچیدگی پاره‌خطهای آغازین با افزایش طول به‌قدر کافی سریع باشد، تعریفی گمراه‌کننده است. این‌تعریف قابل استفاده نیست، زیرا درپیچیدگی پیشوندها به‌عنوان‌تابعی ازطولشان، نوسانهای غیرقابل اجتنابی روی می‌دهد. اما ب. مارتین-لوف[1]، ریاضیدان سوئدی‌که در سالهای ۱۹۶۴–۱۹۶۵ باکولموگوروف درمسکوتماس داشت، توانست ثابت‌کندکه تحت تعاریف اصل موضوعی مناسبی برای تصادفی‌بودن، می‌توان یکبار و برای همیشه ثابت‌کرد که دنباله‌های با تعریف فوق درتمام‌آزمونهای مؤثر تصادفی‌بودن صدق‌می‌کنند، ودرمجموعهٔ تمام چنین دنباله‌های نامتناهی‌ای اندازهٔ یک‌دارند. این روش به‌گونه‌ای دقیق یک‌ردهٔ‌مناسب تعریف می‌کردکه ازنظرشهودی نیزرضایت‌بخش بود، وهمانندکولکتیوهای فون‌میزس به‌کار می‌آمد. بعدها ل. ا. لوین[2]، پ. گاکس[3]، و گ. ج. چایتین[4] نشان دادندکه می‌توان مفهوم پیچیدگی را با تعریف‌آن نسبت به‌مجموعه‌ای از توصیفهای سازگار بهبود بخشید. هرگاه توصیفهای سازگار را چنان تحدیدکنیم‌که هیچ توصیفی پیشوند سرهٔ هیچ توصیف دیگری نباشد، آنگاه یک دنبالهٔ نامتناهی به‌مفهوم مارتین-لوف تصادفی است اگروتنها اگردنباله‌های ابتدایی متناهی‌آن پیچیدگی‌ای برابر با طولشان داشته باشند (تاحد یک عدد ثابت).

با ظهور کامپیوترهای الکترونیکی در سال ۱۹۵۰، تأکید تازه‌ای برالگوریتمهای

1. P. Martin-Löf 2. L. A. Levin 3. P. Gacs
4. G. J. Chaitin

کامپیوتری، ویک نظریهٔ عمومی وکامل برای توابع بازگشتی، که ایده‌هایی درحکم پیچیدگی کولموگوروف بودند، در فکرافراد زیادی نضج گرفت، زیرا همچنانکه ولفگانگ‌بویوئی[1] درمورد یک مبحث مشهوردیگر گفته‌است:

"هنگامی‌که زمان معهود چیزی فرا رسد، آن چیز، همچون بنفشه‌هایی‌که در اوایل بهار می‌شکفند، درجاهای مختلفی ظاهرمی‌شود"

ازسوی دیگر، ر. سولومونوف[2] درکمبریج‌ماساچوست، ایده‌های مشابهی را درسال ۱۹۶۰ فرمولبندی [۲۱]، وکار واقعاً بدیع خودرا دراین باب درسال ۱۹۶۴ منتشر کرده‌بود [۲۲]. بنابرگفتهٔ سولومونوف [۲۰]، کار او پس‌ازآنکه‌کولموگوروف ازسال ۱۹۶۸ به‌بعدارجاع دادن به‌آن‌را آغازکرد، خیلی بیشترمورد توجه قرارگرفت، گرچه به‌نظر می‌رسدکه نسبت دادن پیچیدگی به "کولموگوروف" بیشترجا افتاده است. کولموگوروف می‌گوید:

"من پیش‌ازآنکه از کار سولومونوف درسالهای ۱۹۶۳–۱۹۶۴ مطلع شوم، به‌نتایج مشابهی دست یافتم" [۱۲].

بعدها محقق مستقل سومی به‌نام گ. ج. چایتین وارد صحنه‌شد. هنگامی‌که اودرسال ۱۹۶۴ مجموعهٔ تحقیقات‌کاملاً مشابهی برای انتشار ارائه داد، یک دانشجوی ۱۸ ساله درنیویورک بود [۴، ۵]. چایتین می‌گوید:

"این تعریف [برای پیچیدگی کولموگوروف] در حدود سال ۱۹۶۵ مستقلاً توسط ا. ن. کولموگوروف ومن ارائه شد... درآن هنگام هردوی‌ما ازمطالبی درهمین موضوع‌که ر. سولومونوف درسال ۱۹۶۰ مطرح‌کرده‌بود، بی‌اطلاع بودیم" [۶].

یکی از آخرین مقالات کولموگوروف در زمینهٔ نظریهٔ الگوریتمی اطلاعات بود ــ مقاله‌ای مشترک با اوسپنسکی‌که درسال ۱۹۸۸ انتشاریافت [۱۲]. برای مروری تازه بردامنهٔ وسیع و شگفت‌انگیز کاربردهای پیچیدگی کولموگوروف به [۱۶] رجوع‌کنید.

۵. به‌عنوان یک معلم

فعالیتهای‌آموزشی کولموگوروف درسال ۱۹۲۲ آغازشد، وآن‌هنگامی بودکه اومعلم‌مدرسهٔ نمونهٔ تجربی درمؤسسهٔ خلقی‌آموزش شد. اوتا سال ۱۹۲۵ درآنجا تدریس‌کرد. از سال ۱۹۲۵ تا ۱۹۲۹ مربی دانشگاه بود. برای کولموگوروف انتقال معلومات و اندیشه‌های علمی از اهمیت بسیاری برخوردار بود. علاقهٔ وی دراین زمینه ازآموزش ابتدایی تا عالی

1. Wolfgang Bolyai 2. R. Solomonoff

را دربر می‌گرفت واکثر اوقات اورا پرمی‌کرد. اوفعالانه درسازماندهی المپیادهای ریاضی درمدارس شرکت می‌کرد وبا شاگردان مدرسه به‌صحبت می‌پرداخت. به‌همین‌ترتیب بودکه در زمینهٔ ریاضیات به‌عنوان یك حوزه کتابچه‌ای نوشت‌که در دهها هزارنسخه تکثیرشد. او تأکید خاصی برانتخاب جوانان با استعداد ریاضی داشت، زیرا حتی غیرریاضیدانان نیز برای آینده‌شان احتیاج به‌دیدن چنین‌آموزشی دارند [۱۵]. بنابرگفتهٔ کولموگوروف، در سن ۱۴–۱۵ سالگی تقریباً نیمی‌از دانش‌آموزان به‌این نتیجه می‌رسندکه‌ریاضیات وفیزیك برای‌آنها فایدهٔ چندانی نخواهد داشت. در ازای چنین واقعیتی، این‌گونه شاگردان می‌باید برنامهٔ ساده‌شدهٔ مخصوصی را درپیش بگیرند.

"اصول به‌طورمکانیکی پذیرفته‌شدهٔ یکنواختی در مدارس آموزش عمومی، که مدارس را ازمطالعات دقیقتر روی موضوعات اختصاصی محروم می‌کند، بیش ازحد خود دوام یافته‌است. درمورد ریاضیات، با ظهور مدارسی‌که آموزش ویژه‌ای به‌اپراتورها وبرنامه‌نویسهای‌کامپیوتر می‌دهند، این اصول مدتها پیش ازمیان رفته‌است."

و

"در ۱۴–۱۶ سالگی همه‌چیز تغییرمی‌یابد. معمولاً دراین سن وسال علاقه به ریاضیات آشکار می‌شود، و به‌سرعت و بی‌زحمت دانش‌آموز را به‌سوی کار متمرکز وسرانجام به‌سوی‌کار تحقیقی واقعی یك دانشمند جوان (در ۱۸–۲۰ سالگی) هدایت می‌کند... برای مبتدیان، یعنی افراد جوانی‌که برای‌اولین‌بار وارد جهان علم می‌شوند، بسیاراهمیت داردکه هرچه زودتر متقاعد شوندکه قادر به‌انجام کارهای اصیل از خودشان هستند. استاد راهنما هنگام ارائهٔ موضوعی برای تحقیق به یك دانشجوی دوره‌های بالا یا محقق، نباید تنها به اهمیت هدف، یا ضرورت موضوع بیندیشد، بلکه باید این مطلب راهم درنظر داشته‌باشدکه آیا این موضوع محرك پیشرفت آن دانشمند جوان هست، و آیا انجام‌دادن این‌کارتحقیقاتی ازعهدهٔ او برمی‌آید، ودرعین‌حال نیازمند حداکثر تلاش درتوان اوست یا نه."

توانایی ارائهٔ آن مطالب به دانشجویان‌که در پیشرفت علم از بیشترین اهمیت و استفاده برخوردار است، و اجتناب از دنبال کردن مطالب بی‌نتیجه، و ارائهٔ آنچه‌که در عین حال دانشجویان توانایی انجامش را داشته باشند، از صفات ویژهٔ مورد نظر کولموگوروف بود [۱].

بیش‌از ۶۰ نفراز شاگردان پژوهشگر کولموگوروف درجهٔ دکتری‌گرفتند. اودرتغییر شکل اساسی شیوهٔ‌آموزش ریاضیات دانشگاهی (دراتحاد شوروی)، وبه‌ویژه درسازماندهی کارهای عملی در ریاضیات وبه‌زبان روز درآوردن محتوای ریاضیات، نقشی‌اساسی‌داشت.

اوهمچنین درجستجوی محتوای جدید ریاضیات برای دبیرستانها، تأسیس آموزشگاههای شبانه‌روزی ریاضیات، ارائهٔ دوره‌های سخنرانی در زمینهٔ ساختار ریاضیات نوین برای آموزگاران، وبسیاری‌کارهای دیگر، فعالیت می‌کرد. سرانجام مجمعی‌ازمؤلفان پدیدآورد، وخود درنوشتن کتابهایی درسی در زمینهٔ هندسه، جبر، و آنالیز برای کلاسهای ششم تا دهم شرکت‌کرد. او در مؤسسهٔ شبانه‌روزی ریاضیات شمارهٔ ۱۸ دانشگاه مسکو، که به "مدرسهٔ کولموگوروف" نیز معروف است، سالها تا ۲۶ ساعت درهفته تدریس می‌کرد و سرفصل دروس‌مربوطه را می‌نوشت. همچنین به‌شاگردانش‌درسهایی‌درزمینهٔ موسیقی، هنر، وادبیات داد. اواحساس می‌کردکه پیشرفت معنوی می‌بایست به طور متعادل در همهٔ زمینه‌ها صورت پذیرد. شاگردان اول این مدرسه بسیارموفق‌اند وبه‌طورمنظم اولین رتبه‌ها را درالمپیادهای کشوری ونیز بین‌المللی ریاضیات احرازمی‌کنند؛ به‌مرجع[۳] مراجعه کنید. درسال۱۹۶۴ کولموگوروف سرپرست بخش ریاضی کمیتهٔ مشترك مواد درسی‌آکادمی علوم اتحاد جماهیر شوروی وکمیتهٔ علوم‌آموزشی شد. او همچنین یك‌آزمایشگاه‌آماری در دانشگاه مسکو بنیان گذاشت، وبا به‌دست‌آوردن پشتوانهٔ زیاد، و همچنین دستیابی به‌منابع کتابهای خارجی از طریق قسمتی‌از پولی‌که از جایزهٔ بین‌المللی بولتسانو دریافت‌کرده بود، موفق شد کیفیت کتابخانهٔ تازه تأسیس را ارتقاء دهد. درسال ۱۹۷۲ با پیشقدمی‌کولموگوروف یك درس اجباری منطق ریاضی برای اولین‌بار دربخش مکانیك وریاضیات دانشگاه ایالتی مسکودایر شد. او مواد این درس را نوشت (که تا سال ۱۹۸۳ هم اجرا می‌شد) واولین‌کسی بودکه آنرا تدریس‌کرد.

بنابرگفتهٔ و. ا. آرنولد، [۲۶]:

"کولموگوروف هرگزچیزی را توضیح‌نمی‌داد، تنها مسائل رامطرح می‌کرد، و آنها را تجزیه وتحلیل نمی‌کرد. به دانشجو استقلال کامل می‌داد و هیچگاه کاری را به‌کسی تحمیل نمی‌کرد. وهمیشه مشتاق شنیدن نکتهٔ جالبی ازدانشجو بود. درمحترم شمردن شخصیت دانشجو، با دیگر استادانی‌که می‌شناسم کاملاً فرق داشت. تنها یك مورد را به‌یاد دارم‌که درکار من دخالت‌کرد. در سال ۱۹۵۹ ازمن خواست‌که بخش‌کاربرد دردربانهای قلب را از مقالهٔ مربوط به‌خودنگاشتهای دایره حذف‌کنم، و اضافه کرد "این از آن مسئله‌های کلاسیك نیست‌که مجبور باشیم رویش‌کارکنیم". ۲۵ سال‌بعد، درحالی‌که من‌مجبور بودم تلاش خودرا روی‌کاربردهای همین نظریه درمکانیك‌آسمانی صرف‌کنم، کاربرد درنظریهٔ ضربانهای قلب را ا. ل. گلاس[1] منتشرکرد."

در [۱۹]، ل. س. پونتریاگین[2] اظهار می‌دارد:

"کولموگوروف کار جالبی به من محول‌کرد...: مطالعهٔ [برخی مسائل در]

1. L. Glass 2. L. S. Pontryagin

میدانهای جبری موضعاً فشرده‌ای که عمل ضرب لزوماً در آنها جابجایی نیست... یك هفته بعد به الکساندروف گزارش دادم که مسئله را در حالت میدانهای جابجایی حل کرده‌ام. بلافاصله پس از آن ما سه‌نفر، یعنی الکساندروف، کولموگوروف، ومن، در آپارتمان الکساندروف گردهم آمدیم. کولموگوروف با شك طعنه آمیزی گفت: "خوب لوسمنوبچ[1]، شنیده‌ام که حالا دیگر مسئلهٔ ما را حل می‌کنی، منتظر شنیدن حرفهایت هستیم." کولموگوروف به‌همان اولین جملهٔ من اشکال گرفت، اما من بلافاصله گفتهٔ اورا رد کردم. بعد او گفت: "بله، ظاهراً مسئله خیلی آسانتر از آنچه من تصور می‌کردم از آب در آمد." بقیهٔ راه حل من هیچ شکی را بر نمی‌نگیخت. درحالت میدانهای غیر جابجایی مسئله بی‌اندازه دشوارتر بود. یك‌سال تمام وقت من صرف حل کردن آن شد."

همچنین می‌گویند که کولموگوروف از معدود ریاضیدانان غیرسیاسی در اتحاد شوروی بود که درعین‌حال قدرتی واقعی داشت. او خیلی بی‌سروصدا به‌افراد با استعدادی که نظراتشان غیر از آرای متداول درجامعه بود کمك می‌کرد.

شاگردان کولموگوروف درسالهای اولیه شامل این افراد بودند: میلیونشچیکوف[2] (که بعدها نایب رئیس آکادمی علوم اتحاد جماهیر شوروی شد)، مالتسف[3]، نیکولسکی[4]، گلفاند[5]، باولی[6] و ورچنکو[7]. موضوع کارایشان درزمینه‌های ژئوفیزیك نظری، منطق ریاضی، آنالیز تابعی، نظریهٔ احتمال، و نظریهٔ توابع بود. شاگردان او در دوران جنگ و پس‌از آن عبارت بودند از: شیلوف[8]، فیج[9]، سواستیانوف[10]، سیراژدینوف[11]، پینسکر[12]، پریخوروف[13]، بارن‌بلت[14]، بولشف[15]، دوبروشین[16]، مدودف[17]، میخالویچ[18]، اوسپنسکی، بوروکوف[19]، زولوتارف[20]، الکسیف[21]، بلیایف[22]، مهالکین[23]، اپوخین[24]، روزانوف[25]، سینایی[26]، تیخومیروف[27]، شیریایف[28]، آرنولد، باسالیگو[29]، وآفمن[30]. همچنین بعدها اینهاهم اضافه شدند: پروخوروف[31]، ل. ا. لوین، کوزلوف[32]، ژوربنکو[33]، آبراموف[34]، وبولینسکی[35].

1. Lev Semenovich
2. Millionshchikov
3. Mal'tsev
4. Nikol'skii
5. Gel'fand
6. Bavli
7. Verchenko
8. Shilov
9. Fage
10. Sevast' yanov
11. Sirazhdinov
12. Pinsker
13. Prikhorov
14. Barenblatt
15. Bol'shev
16. Dobrushin
17. Medvedev
18. Mikhalevich
19. Borokov
20. Zolotarev
21. Alekseev
22. Belyaev
23. Mehhalkin
24. Epokhin
25. Rozanov
26. Sinai
27. Tikhomirov
28. Shiryaev
29. Bassalygo
30. Ofman
31. Prokhorov
32. Kozlov
33. Zhurbenko
34. Abramov
35. Bulinskii

شاگردان او شامل تعدادی از ریاضیدانان معروف خارجی بودند، که ازمیان آنها می‌توان از پ. مارتین-لوف سوئدی نام برد. شاگردانی که عضو آکادمی علوم اتحاد جماهیر شوروی شدند: ا. ای. مالتسف (جبر، منطق ریاضی)، س. م. نیکولسکی (نظریهٔ توابع)، ا. م. اوباخوف[1] (فیزیك جو)، ای. م. گلفاند (آنالیز تابعی)، یو. و. پروخوروف (نظریهٔ احتمال)؛ واعضاء وابسته: ل. ن. بولشف (آمار ریاضی)، ا. ا. بوروکوف (نظریهٔ احتمال، آمار ریاضی)، ا. س. مانین[2] (افیانوس‌شناسی)، و و. ا. آرنولد. اعضای آکادمی علوم اوکراین: ب. و. گنیدنکو (نظریهٔ احتمال، تاریخ ریاضیات)، و. م. میخالویچ (نظریهٔ فرایندهای کنترل) ودیگران.

۶. خط مشی علمی

کولموگوروف درسال ۱۹۲۰ وارد دانشگاه مسکو شد ودرسال ۱۹۲۵ فارغ‌التحصیل شدو درسال ۱۹۲۹ مدرك (معادل) دکتری را، هنگامی که در دانشکده سمتی نیز داشت دریافت کرد. درسال ۱۹۳۱ استاد دانشگاه مسکو شد. واز ۱۹۳۳ تا ۱۹۳۹ ریاست مؤسسهٔ پژوهشهای علمی ریاضیات دانشگاه ایالتی مسکو را برعهده داشت. ظاهراً او نه‌تنها درگیر تحقیقات خود، بلکه درگیر پژوهشهای علمی تمام دانشجویان فارغ‌التحصیل مؤسسه بود. اکثر آنان از پیاده روبهای فراموش‌نشدنی روزهای یکشنبه یاد می‌کنند که در آنها کولموگوروف از تمام شاگردانش (دورهٔ لیسانس وبالاتر) و همچنین شاگردان مربیان دیگر دعوت می‌کرد. از این پیاده‌روبهای ۴۰ کیلومتری در محوطه بولشوو[3]، کلیازم، و بعدها در کوماروکا، به عنوان تجربیات پربارفرهنگی ومحرك از جنبهٔ معنوی یاد می‌شد که درنهایت بادعوت به‌شام او و الکساندروف از تمامی همراهان در خانه بیلاقیشان خاتمه می‌یافت. در سال ۱۹۳۹ کولموگوروف به‌عنوان عضو آکادمی متحد علوم و همچنین به‌عنوان منشی آکادمی بخش فیزیك‌وریاضی انتخاب شد. اوهمچنین فعالیتهای بسیاری به‌عنوان سرپرست هیئت‌ویراستاران ریاضی در خانهٔ نشر ادبیات خارجی، و ویراستار بخش ریاضی دایرةالمعارف بزرگ روسی انجام داد. درطی جنگ دوم جهانی کولموگوروف با حل مسائلی در بالستیك درگیر موضوع جنگ شد وشروع به‌تحقیق درمسائل کنترل کیفی تولید محصولات انبوه صنعتی کرد. ازسال ۱۹۶۴ تا ۱۹۶۶ وازسال ۱۹۷۶ تا دست‌کم ۱۹۸۳، کولموگوروف رئیس انجمن ریاضی مسکو بود؛ از ۱۹۳۶ تا ۱۹۵۴ واز ۱۹۸۳ به‌بعد سردبیر مجلهٔ مهم روسی بوریاضیات روسیه[4] شد. از سال ۱۹۳۸ تا ۱۹۶۶ کرسی نظریهٔ احتمال را در دانشگاه مسکو داشت. از ۱۹۶۶ تا ۱۹۷۶ سرپرست آزمایشگاه بین دپارتمانی روشهای آماری شد، و از ۱۹۷۶ تا ۱۹۸۰ کرسی آمار ریاضی راکه خود سازمان داده بود، به‌عهده داشت. از سال ۱۹۸۰ به‌بعد کرسی منطق ریاضی را به‌عهده گرفت. ازسال ۱۹۵۱ تا ۱۹۵۳ رئیس مؤسسهٔ ریاضیات

1. O. M. Obukhov
2. A. S. Manin
3. Bolshevo
4. *Uspekhi Math. Nauk*

ومکانیك دانشگاه ایالتی مسکو بود؛ از ۱۹۵۴ تا ۱۹۵۶ و از ۱۹۷۸ تا دست‌کم ۱۹۸۳ رئیس بخش ریاضی دانشکدهٔ مکانیك و ریاضیات بود. از ۱۹۵۴ تا ۱۹۵۸ معاون دانشکدهٔ مزبور بود.

مراجع

1. Aleksandrov, P. S., Gnedenko, B. V., "A. N. Kolmogorov as a teacher," *Russian Math. Surveys*, **18** (1963).
2. Aleksandrov P. S., "A few words on A. N. Kolmogorov," *Russian Math. Surveys*, **38** (1983) 5-7.
3. Bogolyubov N. N., Gnedenko B. V., Sobolev, S. L. "Andrei Nikolaevich Kolmogorov (On his eightieth birthday)," *Russian Math. Surveys*, **38** (1983) 9-27.
4. Chaitin, G. J., "On the length of programs for computing finite binary sequences," *J. Assoc. Comp. Math.*, **13** (1966) 547-569.
5. Chaitin G. J., "On the length of programs for computing finite binary sequences: statistical considerations," *J. Assoc. Comp. Mach.*, **16** (1969) 145-159.
6. Chaitin, G. J., "Randomness and mathematical proof," *Scientific American*, **232** (1975) 47-52.
7. Gnedenko, B. V., "The work of A. N. Kolmogorov in the theory of probability," *Russian Math. Surveys*, **18** (1963).
8. Gnedenko, B. V., "Andrei Nikolaevich Kolmogorov (on the occasion of his seventieth birthday)," *Russian Math. Surveys*, **28** (1973) 5-16.
9. Halmos, P.R., *I Want to be a Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin, (1985).
10. Kolmogorov, A.N., "On tables of random numbers," *Sankhya, The Indian Journal of Statistics*, Series **A 25** (1963) 369-376.
11. Kolmogorov, A. N., "Three approaches to the quantitative definition of information," *Problems in Information Transmission*, **1** (1965) 1-7.
12. Kolmogorov, A. N., "Logical basis for information theory and probability theory," *IEEE Trans. on Information Theory IT*, **145** (1968) 662-664.

13. Kolmogorov, A.N., "Memories of P.S. Aleksandrov," *Russian Math. Surveys*, **41** (1986) 225-246.
14. Kolmogorov, A. N., Uspenskii, V. A., "Algorithms and randomness," *Theoria Veroyatnostey i ee Primeneniya (Theory of probabilities and its Applications)* 32:3 (1987) 425-455.
15. Kolmogorov, A.N., "A search for talent", *Izvestia*, **83**(1963)14246.
16. Li, M., Vitanyi, P. M. B., "Two decades of applied Kolmogorov complexity," *Proc-3rd IEEE. Structure in Complexity Theory Conference*, (1988).
17. Lyusternik, L. A., "The early years of Moscow University II," *Russian Math. Surveys*, **22** (1967) 171-211.
18. Obituary, "Mr. Andrei Kolmogorov-Giant of mathematics," *Times*, 26 October, 1987.
19. Pontryagin, L. S., "A short autobiography of L. S. Pontryagin," *Russian Math. Surveys*, **33** (1970) 7-24.
20. Solomonoff, R. J., *Personal Communication*, October 1937.
21. Solomonoff, R. J., *A Preliminary Report on a General Theory of Inductive inference*, Tech. Rept. ZTB-138, Zator Company, Cambridge, Mass (1960).
22. Solomonoff, R. J., "A formal theory of inductive inference," *Information and Control*, **7** (1964) 1-22, 224-254.
23. Trakhtenbrot, B., *Personal Communication*, March (1988).
24. Wiener, N., *I Am a Mathematician*, MIT Press, (1956).
25. Wiener, N., *Cybernetics*, MIT Press: (Second edition (1901).
26. Zdravskovska, S., "Conversation with Vladimir Igorevich Arnol'd," *The Mtahematical Intelligencer*, **9** (1987) 28-32.

بارت برادن

فرمول مساحت نقشه‌بردارها*

ترجمهٔ محمدرضا احمدی‌زند، دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه تهران

نقشه‌برداری معمولی از یك قطعه زمین معمولا به داده‌هایی منجر می‌شود که جابه‌جاییهای متوالی مورد نیاز را برای آنکه مرز یك چندضلعی مسطح ساده پیموده شود به‌دست‌می‌دهد. با استفاده از این داده‌ها می‌خواهیم مساحت ناحیه را تعیین کنیم. در یك مثال ساده مانند شکل ۱ الف می‌توان چندضلعی را به‌مثلثهایی تقسیم کرد که مساحتهای آنها با روشهای مثلثاتی، با زحمت بسیار قابل محاسبه است. یك راه بهتر (شکل ۱ ب) واردکردن مختصات قائم‌وتبدیل شکل قطبی بردارهای تغییرمکان به‌صورت دکارتی است، درنتیجه، آنها می‌توانند بایکدیگر جمع شوند تا مختصات رئوس چندضلعی را به‌دست دهند. سپس می‌توان یك فرمول کلی را بکاربرد، که مساحت یك چندضلعی را به‌صورت تابعی از مختصات رئوس آن بیان می‌کند. این فرمول مساحت چندضلعی برای نقشه بردارها به‌خوبی شناخته شده است، اما با وجود ماهیت ابتدایی آن، دراکثر کتابهای مقدماتی یا کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال نمی‌توان آن‌را یافت.

علاوه براهمیت ذاتی این‌فرمول، زمانی که بردارهای صفحه تعریف شده‌باشند، حداقل می‌توان دو دلیل برای آوردن فرمول مساحت نقشه‌بردارها در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال اقامه‌کرد.

۱. این عمل فرصتی عالی فراهم می‌آورد تا تعبیر هندسی دترمینان ۲ × ۲ به‌عنوان مساحت یك متوازی‌الاضلاع جهت‌دار در R^2 ارائه شود ومورد استفاده قرار گیرد. این

* Braden, Bart, "The surveyor's area formula," *College Mathematics Journal*, **17**(1986)326-337.

کار بعدها فهم خواص هندسی ضرب خارجی بردارها در R^3 را برای دانشجویان آسانتر می‌سازد.

۲. فرمول نقشه‌بردارها یك تعبیر هندسی برای فرمول مرموز دیگری در حساب دیفرانسیل وانتگرال چند متغیره که بیان‌کنندهٔ مساحت داخل یك منحنی بستهٔ سادهٔ پارامتری، به‌صورت یك انتگرال روی مرز آن است، فراهم می‌آورد. یك اثبات ابتدایی برای این فرمول مساحت منحنی‌الخط، کاملا مشابه همین عمل برای فرمول طول قوس است، بنابراین می‌توان، هردو را باهم به‌دست آورد. یك مزیت مهم فرمول مساحت آن است که انتگرال مساحت برای بسیاری از منحنیها به‌آسانی قابل محاسبه‌است.

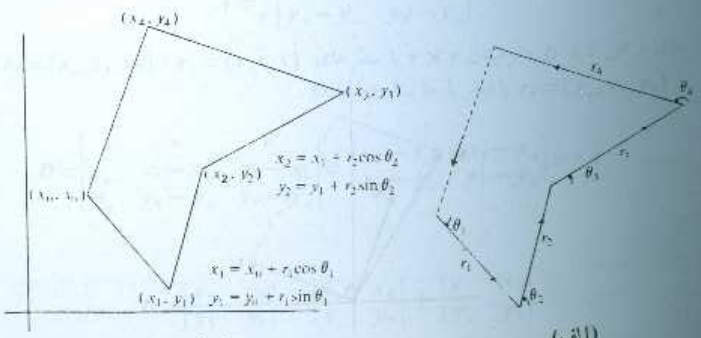
فرمول نقشه‌بردارها

اگر رئوس یك چندضلعی ساده، که درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت روی محیط آن مرتب شده‌اند، عبارت باشند از (x_0,y_0)، (x_1,y_1)، ...، (x_{n-1},y_{n-1})، آنگاه مساحت چندضلعی برابر است با

$$A=\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_{n-2} & x_{n-1} \\ y_{n-2} & y_{n-1} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{n-1} & x_0 \\ y_{n-1} & y_0 \end{vmatrix}\right\}$$

توجه‌کنید که هرضلع جهت‌دار چندضلعی متناظر با یك دترمینان ۲ × ۲ در فرمول نقشه‌بردارها است.

روش ما برای به‌دست آوردن فرمول نقشه‌بردارها مبتنی است بر تعبیر هندسی یك دترمینان ۲ × ۲ به‌عنوان مساحت جهت‌دارمتوازی‌الاضلاعی که اضلاع آن بردارهای تشکیل-



(ب) (الف)

شکل ۱

دهندهٔ ستونهای آن دترمینان می‌باشند. ما این‌مطلب را دقیقا بیان خواهیم کرد و یك اثبات مناسب درس حساب دیفرانسیل وانتگرال فراهم خواهیم آورد.

لم. قدرمطلق مقدار $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$ برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است که با بردارهای $\mathbf{V}=\langle v_1, v_2\rangle$ و $\mathbf{W}=\langle w_1, w_2\rangle$ مشخص می‌شود، و دترمینان‌فقط زمانی‌مثبت است که جهت دوران (با زاویهٔ کوچکتر) از $\mathbf{V}$ به $\mathbf{W}$ خلاف جهت حرکت عقربه‌های‌ساعت باشد.

برای اثبات، فرض‌کنید $\mathbf{N}$ بردار حاصل از دوران $\mathbf{V}=\langle v_1, v_2\rangle$، به‌اندازهٔ $\pi/2$ درخلاف جهت‌حرکت عقربه‌های ساعت باشد. اگر θ زاویهٔ قطبی $\mathbf{V}$ (زاویهٔ بین‌محورهای مثبت و بردار $\mathbf{V}$) باشد، آنگاه $\theta+(\pi/2)$ زاویهٔ قطبی $\mathbf{N}$ است، از آنجا که

$$\mathbf{V}=\langle r\cos\theta,\ r\sin\theta\rangle$$

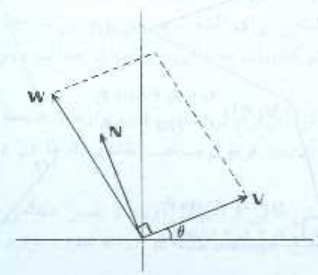
که در آن

$$r=|\mathbf{V}|$$

داریم

$$\mathbf{N}=\langle -r\sin\theta,\ r\cos\theta\rangle=\langle -v_2, v_1\rangle$$

ارتفاع متوازی‌الاضلاع با قاعدهٔ $\mathbf{V}$ وضلع مجاور $\mathbf{W}$ برابر است با قدرمطلق مؤلفهٔ $\mathbf{W}$ درامتداد $\mathbf{N}$؛ که عبارت‌است‌از $|\mathbf{W}\cdot\mathbf{N}|/|\mathbf{N}|$. بنابراین، A، مساحت‌این متوازی‌الاضلاع برابراست با $|\mathbf{V}||\mathbf{W}\cdot\mathbf{N}|/|\mathbf{N}|$ اما $|\mathbf{N}|=|\mathbf{V}|$، بنابراین



شکل ۲

$$A=|\mathbf{W}\cdot\mathbf{N}|=|v_1w_2-v_2w_1|$$

که قدر مطلق دترمینانی است که بردارهای $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ ستونهای آن است. علاوه براین، این دترمینان تنها زمانی مثبت است که زاویهٔ بین $\mathbf{N}$ و $\mathbf{W}$ حاده باشد؛ واین به‌معنای آن است که اگر زاویهٔ بین $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری‌شود، بین ۰ و π خواهدبود.

حال بیایید به‌سراغ فرمول تقشه بردارها برویم. حالت $n=3$، که چندضلعی مثلث است‌کلید اثبات ما است.

شکل ۳

با استفاده از لم، می‌دانیم که مساحت مثلثی با رئوس (x_0,y_0)، (x_1,y_1)، (x_2,y_2) که درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت مرتب شده‌اند (بنابراین، جهت دوران‌بازاویهٔ کوچکتر $\mathbf{V}=\langle x_1-x_0,\ y_1-y_0\rangle$ به $\mathbf{W}=\langle x_2-x_0,\ y_2-y_0\rangle$ خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است). برابراست با

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}$$

حال فرض کنید D دترمینان 3×3 با سطرهای $r_1=(1,1,1)$، $r_2=(x_0,x_1,x_2)$، و $r_3=(y_0,y_1,y_2)$ باشد. با مقایسهٔ دوبسط D

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}=2A$$

و

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}$$

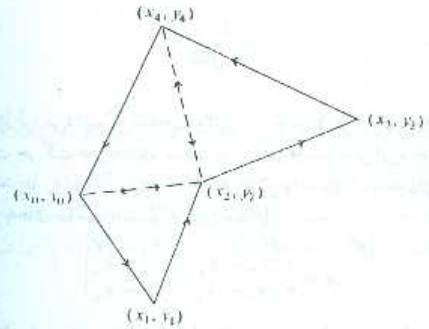
$$=\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_0 \\ y_2 & y_0 \end{vmatrix}$$

فرمول نقشه‌بردارها برای مساحت یك مثلث را به‌دست می‌آوریم

$$A=\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_0 \\ y_2 & y_0 \end{vmatrix}\right\}$$

توجه داشته‌باشیدکه دترمینانهای ظاهرشده درفرمول با سه ضلع جهت‌دار مثلث متناظرند.

برای اثبات فرمول نقشه‌بردارها برای n ضلعیهای به‌ازای $n>3$، ما از این نکته استفاده می‌کنیم که هر چند ضلعی ساده جهت‌دار را می‌توان مثلث‌بندی کرد. یعنی، می‌توانیم $n-3$ قطر کمکی از داخل چندضلعی بگذرانیم، تا چند ضلعی به $n-2$ مثلث تقسیم شود، هرقطر یك ضلع دومثلث مجاور، اما جهت آن در هریك از این دومثلث خلاف یکدیگراست (شکل ۴). ازآنجا که رئوس چندضلعی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت مرتب شده‌اند، همهٔ مثلثها این‌جهت مثبت را به ارث می‌برند، بنابراین مساحت جهت‌دار چندضلعی برابراست با مجموع مساحت مثلثها.



شکل ۴

با بکارگیری فرمول نقشه‌بردارها برای هریك از مثلثها وجمع آنها داریم

$$A=\frac{1}{2}\sum\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$$

که درآن به‌ازای هرضلع جهت‌دار در مجموعه مثلثها یك دترمینان وجود دارد. ازآنجاکه هر قطر دوبار با جهتهای متقابل رخ می‌دهد (به عنوان ضلع مشترك مثلثهای مجاور)، دو دترمینان متناظر باهر قطرحذف می‌شوند (زیرا $\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_j & x_i \\ y_j & y_i \end{vmatrix}=0$)، و برای ما تنها مجموع دترمینانهای متناظر با اضلاع جهت‌دار چند ضلعی اولیه باقی می‌ماند. این

مطلب اثبات را کامل می‌کند.

تمرینهای مبتنی بر یك طرح مانند شکل ۱، یا داده‌های نقشه‌برداری [۷] درك دانشجویان را از فرمول نقشه‌بردارها تقویت خواهدکرد.

مساحت داخل یك خم بستهٔ ساده

دریك درس معمولی حساب دیفرانسیل وانتگرال درترم دوم معادلات پارامتری خمها ارائه می‌شوند، اما هیچ اشاره‌ای به مسئلهٔ پیدا کردن مساحت داخل یك خم بستهٔ ساده نمی‌شود. بجز خمهای درمختصات قطبی، دانشجویان فقط وقتی می‌توانند مساحت را پیداکنندکه‌ناحیه را به‌قطعاتی تقسیم کنند که مرز آنها نمودار توابع ونیز خطوط موازی محورهای مختصات باشد.

بعدها در ترم سوم، یا شاید در یك درس حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره فرمول

$$A=\frac{1}{2}\oint x\,dy-y\,dx$$

به‌عنوان یك نتیجهٔ بدیهی قضیهٔ گرین، ظاهر می‌شود. اغلب‌هیچ‌توضیح هندسی‌داده نمی‌شود، وفرمول دانشجورا چندان تحت‌تأثیر قرار نمی‌دهد. اگرخم به‌صورت حد چندضلعیهای‌محاط‌شده درنظرگرفته شود، فرمول نقشه بردارها به‌طور طبیعی منجر به‌این فرمول کلی انتگرالی می‌شود. ازآنجاکه فرمول مساحت در مختصات قطبی یك نتیجهٔ سادهٔ فرمول کلی انتگرالی برای‌خمهای پارامتری است، وقت صرف شده برای ارائهٔ فرمول نقشه‌بردارها تا اندازه‌ای جبران می‌شود. حاصل کارعملیاتی مقدماتی درمحاسبات مربوط به‌خمهاست، که نقش اساسی حالت پارامتری را روشن می‌سازد.

مثال. فرض کنید دایرهٔ C، به‌شعاع r ومرکزمبدأ بامعادلات‌پارامتری $x(t)=r\cos t$ و $y(t)=r\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ داده شده‌باشد. به‌ازای هرعدد طبیعی n، نقاط

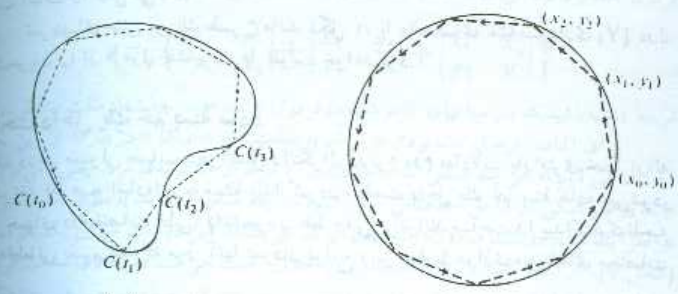
$$t_k=2k\pi/n \quad (0\leqslant k\leqslant n)$$

یك افراز منظم بازهٔ پارامتر $[0,2\pi]$ را به‌وجود می‌آورند، ونقاط متناظر

$$(x_k, y_k)=(r\cos t_k,\ r\sin t_k)$$

رئوس یك n-ضلعی منتظم باجهت مثبت محاط شده دردایره‌ها هستند (شکل ۵ الف). توجه داشته‌باشیدکه $(x_0,y_0)=(x_n,y_n)$.

بکارگیری فرمول نقشه‌بردارها در هرمثلث وجمع آنها نتیجه می‌دهد



(ب) (الف)

شکل ۵

$$A_n=\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} r\cos 0 & r\cos\frac{2\pi}{n} \\ r\sin 0 & r\sin\frac{2\pi}{n}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} r\cos\frac{2\pi}{n} & r\cos\frac{4\pi}{n} \\ r\sin\frac{2\pi}{n} & r\sin\frac{4\pi}{n}\end{vmatrix}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\begin{vmatrix} r\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} & r\cos 2\pi \\ r\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} & r\sin 2\pi\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}r^2\left\{\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2\pi}{n}\right\}$$

$$=\frac{r^2}{2}\cdot n\sin\frac{2\pi}{n}=\pi r^2\left[\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\right]$$

درنتیجه؛ مساحت این دایره عبارت است از $A=\lim_n A_n=\pi r^2$. توجه داشته باشید که همچنین

$$\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[r\cos t\,(r\cos t)-r\sin t\,(-r\sin t)]\,dt=\pi r^2$$

برای اثبات آن‌که حد مساحتهای چند ضلعیهای محاط شده، برای هر خم بستهٔ سادهٔ طول‌پذیر C، انتگرال $(1/2)\int_C x\,dy-y\,dx$ می‌باشد. کمی علامتگذاریمان را تغییر می‌دهیم و فرمول نقشه‌بردارها را به‌صورت

$$A=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i \\ y_{i-1} & y_i\end{vmatrix} \qquad (1)$$

می‌نویسیم با این قرارداد که $(x_n, y_n)=(x_0, y_0)$. با قرار دادن $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ و $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$، و با استفاده از اتحاد

$$\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i \\ y_{i-1} & y_i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_{i-1} & \Delta x_i \\ y_{i-1} & \Delta y_i\end{vmatrix}$$

خواهیم داشت

$$A=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{i-1} & \Delta x_i \\ y_{i-1} & \Delta y_i\end{vmatrix} \qquad (2)$$

حال فرض کنید $C: t\to C(t)=(x(t), y(t))$ به‌ازای $t\in[a,b]$ یك خم سادهٔ هموار مسطح با جهت مثبت (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) باشد؛ درنتیجه داخل خم درسمت چپ نقطهٔ متحرك $C(t)$ قرار می‌گیرد. هر افراز $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$ از بازهٔ $[a,b]$ معین کنندهٔ رئوس $C(t_i)$ یك چند ضلعی با جهت مثبت "محاط شده" درخم است (شکل ۵ ب).

با استفاده از قضیهٔ مقدارمیانگین، طول چند ضلعی محاط شدهٔ

$$\sum_{i=1}^{n}|C(t_i)-C(t_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2\}^{1/2}$$

می‌تواند به‌صورت

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\{x'(u_i)\}^2+\{y'(v_i)\}^2}\,(t_i-t_{i-1})$$

بیان شود که مشتقها درنقاط v_i و u_i درفاصلهٔ (t_{i-1}, t_i) محاسبه می‌شوند. همچنین، فرمول نقشه‌بردارها (۲) برای مساحت چند ضلعی

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{x(t_{i-1})[y(t_i)-y(t_{i-1})]-y(t_{i-1})[x(t_i)-x(t_{i-1})]\}$$

می‌تواند به‌صورت

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{x(t_{i-1})y'(v_i)-y(t_{i-1})x'(u_i)\}(t_i-t_{i-1})$$

بیان شود. وقتی نرم[1] افراز $[a,b]$ به‌صفر میل کند، این "مجموعهای ریمانی تعمیم‌یافته" به انتگرالهای

$$L=\int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt$$

و

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b [x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]\,dt=\frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ y(t) & y'(t)\end{vmatrix}\,dt \qquad (3)$$

میل می‌کنند [۲، ص۱۳۳]. اینکه انتگرال L واقعاً طول خم C را به‌دست می‌دهد در [۶] به‌تحوقانع‌کننده‌ای نشان داده شده‌است. برای اثبات اینکه A واقعاً مساحت داخل C است به‌نکتهٔ ۲ که در زیر می‌آید مراجعه کنید.

ارتباط بین فرمول مساحت (۳) و فرمول نقشه‌بردارها (۲) به‌کمک علائم مربوط به انتگرال یک فرم دیفرانسیل روی یک خم. به روشنترین وجه آشکارمی‌شود. با این علائم [۵، ص۲۹۰]، انتگرال (۳) روی $[a,b]$ عبارت است از انتگرال فرم $\omega=(1/2)(x\,dy-y\,dx)$ روی خم C، که با

$$\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\int_C \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy\end{vmatrix}$$

نشان داده می‌شود. به‌سادگی می‌توان گفت که وقتی Δx_i و Δy_i به‌بینهایت کوچکهای dx و dy تبدیل می‌شوند، مجموع درفرمول نقشه‌بردارها (۲) به‌انتگرال (۳) تبدیل می‌شود.

چند نکته

۱. با اضافه‌کردن همهٔ مقادیر t که در آنها $C'(t)$ صفر است یا $C(t)$ دیفرانسیل‌پذیر نیست، به‌افرازهای $[a,b]$، دیده می‌شود که فرمول طول قوس ومساحت برای خمهای به‌طور پاره‌ای هموارتیزمعتبر است، واین دسته ازخمها، خانواده‌ای به‌اندازهٔ کافی بزرگ هستند که همهٔ خمهای مورد مطالعه دردوره‌های ابتدایی حساب دیفرانسیل وانتگرال را دربرمی‌گیرد.

۲. برای خمهای کج رفتارخاصی، چند ضلعیهای محاط شدهٔ متناظر یا افرازهای بازهٔ تغییرات پارامتر $[a,b]$، حتی برای افرازهای به‌اندازهٔ دلخواه ظریف، ممکن است خود را قطع کنند. با این وضعیت پیچیدهٔ ناخوشایند به‌دوطریق می‌توان مقابله کرد، یا به‌سادگی این

۱. منظور از نرم یک افراز، ماکزیمم طول بازه‌های $[t_{i-1}, t_i]$ است.

گونه خمها را از بحث خارج کنیم، یا بهتر بحث را گسترش دهیم تا چندضلعیها و خمهایی که خود را قطع می‌کنند نیز داخل بحث باشند [۳، ص ۳۱۱].

بهتر از اینها، به‌کارگیری قضیهٔ گرین

$$\int_C f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy=\iint_R\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dA$$

است که برای یک ناحیهٔ ژوردان R با خم مرزی C معتبر است [۹، ص ۲۸۹]، و مشکل خمهای کج رفتار حل‌می‌شود. باانتخاب $f(x,y)=-(1/2)y$ و $g(x,y)=(1/2)x$ خواهیم داشت $\int_C x\,dy-y\,dx=\iint_R 1\,dA$، که (بنا به‌تعریف) مساحت ناحیهٔ R است. بنابراین، فرمول L (۳) برای هرخم بستهٔ ساده طول‌پذیر جهت‌دار معتبر است. تنها نکته‌ای که به هنگام مطرح کردن چندضلعیهای محاط باید در نظر داشت فراهم آوردن یک‌ایدهٔ هندسی برای فرمول انتگرال روی خم‌است، وبرای این منظورمی‌توانیم توجه خود را به‌خمهای خوشرفتارمحدودکنیم.

صورتهای دیگر فرمول مساحت

فرمول طول قوس برای یک خم قطبی $r=f(\theta)$ $(a\leqslant\theta\leqslant b)$ معمولاً به عنوان حالت خاص فرمول طول قوس برای خمهایی که به شکل پارامتری هستند، استخراج می‌شود. پارامتری‌سازی خمهای قطبی با زاویهٔ قطبی عبارت است از $x(\theta)=f(\theta)\cos\theta$ و $y(\theta)=f(\theta)\sin\theta$.

از آنجاکه $\{x'(\theta)\}^2+\{y'(\theta)\}^2=\{f(\theta)\}^2+\{f'(\theta)\}^2$، داریم

$$L=\int_a^b \sqrt{\{f(\theta)\}^2+\{f'(\theta)\}^2}\,d\theta$$

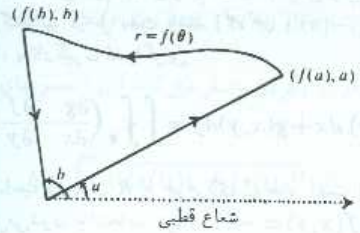
با عملیات مشابه داریم، $x(\theta)y'(\theta)-y(\theta)x'(\theta)=\{f(\theta)\}^2$، واین فرمول مساحت

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b \{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

برای یک خم قطبی سادهٔ بسته را به‌دست می‌دهد.

استدلالهای‌معمولی هندسی، مبتنی برفرمول $A=(1/2)r^2\theta$ برای‌مساحت قطاعی از دایره، نشان می‌دهد که فرمول قطبی مساحت نه‌تنها برای خمهای بستهٔ ساده‌کاربرد دارد بلکه به‌طورکلی $(1/2)\int_a^b\{f(\theta)\}^2d\theta$ مساحت "ناحیه‌ای" محدودبه‌شعاعهای $\theta=a$ و $\theta=b$، وخم $r=f(\theta)$ را به‌دست می‌دهد (شکل ۶).

می‌توان این نتیجهٔ کلیتر را این گونه استخراج کرد که مشاهده می‌شود که $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y'\end{vmatrix}$



شکل ۶

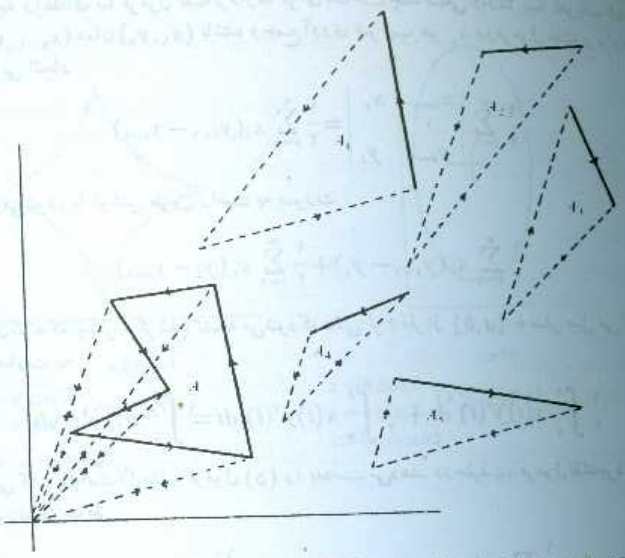
در ابتدا هر شعاعی که از مبدأ می‌گذرد متحد صفر است، زیرا در امتداد چنین شعاعهای بردار مماس (x' , y') مضربی از بردار شعاعی (x , y) است. بنابراین انتگرال $(1/2)\int x\,dy - y\,dx$ درامتداد پاره‌خطهای ازقطب به‌نقطهٔ یامختصات‌قطبی $(f(a),a)$ و از $(f(b),b)$ به قطب هر دو صفر هستند. و تنها قسمت باقیمانده از انتگرال $(1/2)\int (x\,dy - y\,dx)$ روی مرز "ناحیه" که صفرنمی‌شود $(1/2)\int_a^b \{f(\theta)\}^2\,d\theta$ است.

در این زمینه، یك جنبهٔ دیگر ازفرمول مساحت نقشه‌بردارها باید ذکر شود. مشاهده کنید که

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i \\ y_{i-1} & y_i \end{vmatrix}$$

مساحت مثلثی‌است با رئوس (x_{i-1} , y_{i-1})، (x_i , y_i)، و $(0,0)$ که جهت آن باجهت i امین ضلع چند ضلعی اولیه مشخص می‌شود. بنابراین به فرمول نقشه‌بردارها می‌توان این‌گونه‌نظر کرد که بیان‌کنندهٔ مساحت چندضلعی به‌صورت مجموع مساحتهای جهت‌دارمثلثهایی است که با وصل جفتهای متوالی رئوس به‌مبدأ تشکیل می‌شوند (شکل ۷).

این نظر منجر به‌این می‌شود که فرم دیفرانسیل $\omega=(1/2)(x\,dy - y\,dx)$ را به عنوان "جزء سطح شعاعی" در مختصات قائم درنظر بگیریم، دقیقاً به همان شکل که از $(1/2)r^2 d\theta$ به عنوان جزء سطح درمختصات قطبی صحبت می‌شود. وقتی پارامتر t از a به b می‌رود، شعاع ازمبدأ به نقطهٔ $C(t)=(x(t) , y(t))$ مساحتی را جاروی‌می‌کند که با انتگرالگیری از ω روی خم C محاسبه می‌شود. توجه کنید که این تعبیر ω توضیحی ساده برای قانون کپلر دربارهٔ مساحتهای مساوی برای حرکت دریك میدان نیروی مرکزی‌فراهم می‌آورد. در این‌گونه میدانها، $\langle x'' , y''\rangle$ مضربی از $\langle x , y\rangle$ است، بنابراین



شکل ۷. $A=|A_1|+|A_3|-|A_2|+|A_4|-|A_5|$، مجموع مساحتهای جهت‌دار مثلثهای تولید شده توسط اضلاع چندضلعی.

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x'' \\ y & y'' \end{vmatrix} = 0$$

یعنی $xy' - yx'$ ثابت است؛ پس سرعت مساحت جاروشده ثابت است.

مااین بحث را با نگاهی مختصر به‌دوشکل مفید دیگر ازفرمول انتگرال برای‌مساحت داخل یك خم بستهٔ ساده تکمیل می‌کنیم

$$A=\int_a^b x(t)y'(t)dt \qquad (۴)$$

و

$$A=-\int_a^b y(t)x'(t)dt \qquad (۵)$$

جمع این دو باهم وتقسیم آن بر۲، فرمول متقارن (۳) را به‌دست می‌دهد. فرمولهای (۴) و

(۵) چه رابطه‌ای با فرمول نقشه‌بردارها برای مساحت چند ضلعی دارد؟ با تعریف اینکه (x_{n+1}, y_{n+1}) همان (x_1, y_1) باشد، وجمع‌آوری ضرایب هر x_i درفرمول نقشه‌بردارها، به‌آسانی اتحاد

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i \\ y_{i-1} & y_i \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i+1}-y_{i-1})$$

ثابت می‌شود. با نوشتن طرف راست به صورت

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i+1}-y_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i-y_{i-1})$$

(همان‌گونه که پیشتر ذکرشد) نتیجه می‌شود که وقتی نرم افراز $[a,b]$ به صفر میل می‌کند، این عبارت به

$$\frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t)\,dt=\int_a^b x(t)y'(t)dt$$

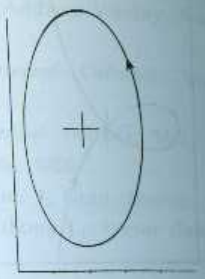
میل می‌کند. یك استدلال مشابه فرمول (۵) را به‌دست می‌دهد. درحقیقت، فرمول نقشه‌بردارها به‌صورتهای متناظر

$$A=\frac{1}{2}\sum y_i(x_{i-1}-x_{i+1}) \quad \text{یا} \quad A=\frac{1}{2}\sum x_i(y_{i+1}-y_{i-1})$$

درکتابهای نقشه‌برداری بیان می‌شود [۷، ص ۲۰۲؛ ۸، ص ۴۸۳].

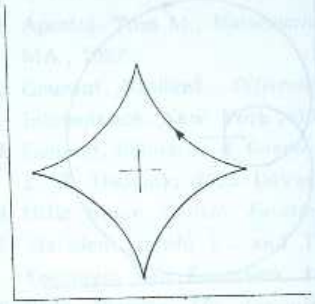
چند تمرین

یك اشکال فرمول $L=\int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2+\{(y'(t)\}^2}\,dt$ هنگامی که در کلاس درس گفته می‌شود، آن است که برای اکثرخمها این انتگرال مقدماتی نیست. اما، این انتگرال مساحت (۳)، (۴)، یا (۵) برای بیشترخمهای آشنا به‌آسانی محاسبه می‌شود. از خواننده‌می‌خواهیم که فرمولهای مساحت برای خمهای داده شده در زیر را که به صورت پارامتری هستند، ثابت کند.



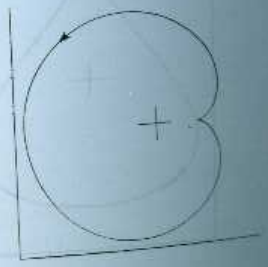
بیضی

$x=b\cos t \quad (0\le t\le 2\pi)$
$y=a\sin t$
مساحت $=\pi ab$



آستروئید

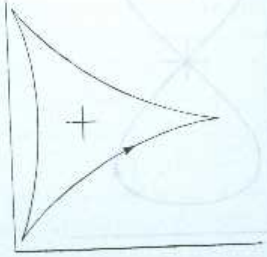
$x=a\cos^3 t$
$y=a\sin^3 t \quad (0\le t\le 2\pi)$
مساحت $=\frac{3}{8}\pi a^2$



کاردیوئید

$x=2a\cos t-a\cos 2t \quad (0\le t\le 2\pi)$
$y=2a\sin t-a\sin 2t$

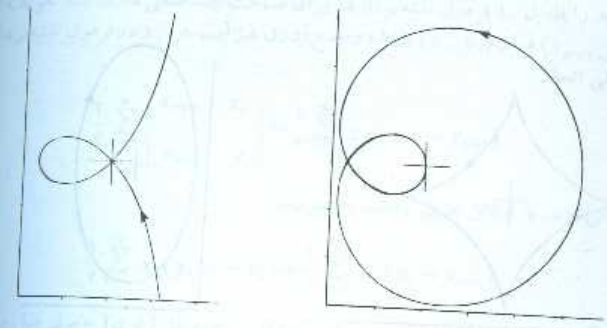
مساحت $=6\pi a^2$



دلتوئید

$x=2a\cos t+a\cos 2t$
$y=2a\sin t-a\sin 2t \quad (0\le t\le 2\pi)$

مساحت $=2\pi a^2$



استروفوئید

$x=a(t^2-1)/(t^2+1)$

$y=at(t^2-1)/(t^2+1)\ (-1\leq t\leq 1)$

مساحت $=a^2(4-\pi)/2$

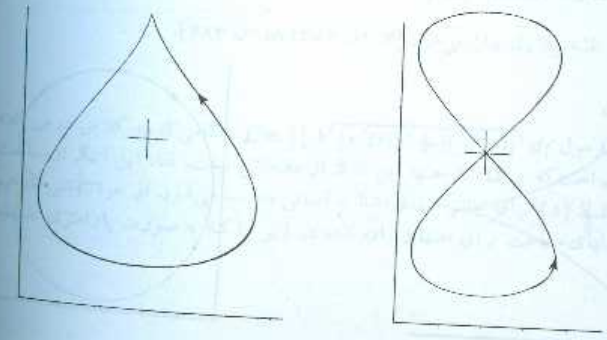
ترایسکتریکس

حلقهٔ داخلی

$x=a\cos t+a\cos 2t$

$y=a\sin t+a\sin 2t\ (2\pi/3\leq t\leq 4\pi/3)$

مساحت $=a^2\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$



قطرهٔ اشک

$x=2a\cos t-a\sin 2t$

$y=b\sin t\ (0\leq t\leq 2\pi)$

مساحت $=2\pi ab$

ساعت شنی

یک حلقه

$x=a\sin 2t$

$y=b\sin t\ (0\leq t\leq \pi)$

مساحت $=\frac{4}{3}ab$

مراجع

1. Apostol. Tom M., *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading MA, 1957.
2. Courant, Richard, *Differential and Integral Calculus*, Vol. 1, Interscience, New York, 1936.
3. Goursat, Edouard, *A Course of Mathematical Analysis*, Vol. 1. tr. E. R. Hedrick, 1905 Dover, New York. 1959.
4. Hille, Einar, *Analytic Function Theory*, Vol. 1. Ginn, Boston, 1959.
5. Marsden, Jerrold E., and Tromba, Anthony J., *Vector Calculus*, Freeman, San Francisco, 1976.
6. Page, Warren, *The Formula for Arc Length Does Measure Arc Length*, Two-Year College Mathematics Readings, ed. W. Page. The Mathematical Association of America, 1981, 111-114.
7. Rayner William, H., and Schmidt, Milton, O., *Fundamentals of Surveying*, 5th ed, Van Nostrand, New York, 1969.
8. Rice, Harold, S., and Knight, Raymond, M., *Technical Mathematics*, 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1973.

بارت برادن

تصویر هندسی پولیا از انتگرالهای مرزی مختلط*

ترجمهٔ امیر اکبری مجدآبادنو

انتگرالهای مرزی مختلط را هاله‌ای از رمز و راز پوشانیده که ازدوران دانشجویی همواره مرا به‌خود مشغول کرده است. جان کلام درسخن چرچیل وبراون [۲] آمده است: "انتگرال معین درحساب دیفرانسیل وانتگرال را می‌توان به‌عنوان مساحت تعبیر کرد، و نیز تعبیرهای دیگری برای آن وجود دارد. اما برای انتگرال درصفحهٔ مختلط، به جز در موارد خاص، تعبیرمفید هندسی یا فیزیکی مشابهی دردست نیست." در ۱۹۷۴، ژرژ پولیا پاسخی ساده برای این مسئله پیشنهاد کرد، اما به نظر نمی‌رسدکه ایدهٔ او آنقدرها مورد توجه قرارگرفته باشد. باپیروی ازاین رهیافت پولیا، می‌توان به‌کمك روشهای گرافیك کامپیوتری دانشجویان را درتجسم وتخمین انتگرالهای مختلط یاری کرد.

درنظریهٔ پتانسیل کلاسیك مرسوم است که به‌تابع حقیقی‌همساز $u(x,y)$ یك "پتانسیل مختلط" $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ نسبت دهند، که درآن $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y)$ است. دراین صورت بخشهای حقیقی و موهومی $\overline{f'(z)}$ مؤلفه‌های میدان گرادیان متناظر با پتانسیل $u(x,y)$ اند. ایدهٔ پولیا به‌سادگی این بود: $\langle u_x(x,y), u_y(x,y)\rangle$ به‌هر تابع مختلط $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ به‌جای میدان مشتق $\overline{f'(x+iy)}$، میدان برداری صفحه‌ای $\overline{f(x+iy)}=\langle u(x,y), -v(x,y)\rangle$ را نسبت دهید. در [۳] نشان داده شده است که انتگرالهای مختلط با انتگرالدهٔ $f(z)$ تعبیر هندسی و فیزیکی ساده‌ای برحسب میدان برداری نظیر $\overline{f(x+iy)}$ دارند. تحقق این واقعیت مسرت‌بخش، هدف این مقاله است، و ما نشان خواهیم دادکه تصویر میدان برداری می‌تواند به منظور تخمین انتگرالهای مرزی خاص به‌کاررود و به‌چشم‌اندازجدیدی درنظریهٔ انتگرالگیری مختلط

---

* Braden, Bart., "Pólya's geometric picture of complex contour integrals," *Mathematics Magazine*, **60** (1987) 321-327.

* این مقاله از طرف جامعهٔ ریاضی امریکا (MAA) درسال ۱۹۸۸ برندهٔ جایزهٔ "کارل آلندورفر" شده است.

بیانجامد. دریك مقالهٔ پیش [۱] برمفید بودن تصویرمیدان برداری توابع مختلط (به‌عنوان جانشینی برای دیدگاه سنتی نسبت به یك تابع به عنوان نگاشتی از صفحهٔ مختلط) درتحلیل صفرها ونقاط تکین آنها تأکیدکرده‌ایم.

برای تأکید برتمایز بین یك تابع مختلط ومیدان برداری وابسته به‌آن، از این پس میدان برداری پولیای نظیر تابع مختلط $f(z)$ را با $\overline{\mathbf{W}}(z)$ یا $\overline{\mathbf{W}}(x,y)$ نشان می‌دهیم. بنابراین اگر $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ تجزیهٔ $f(z)$ به قسمتهای حقیقی و موهومی‌اش باشد، آنگاه $\overline{\mathbf{W}}(x,y)=\langle w_1(x,y), w_2(x,y)\rangle$ که $w_1=u$ و $w_2=-v$.

انتگرال f روی‌خم جهتدار γ را می‌توان برحسب انتگرالهای حقیقی مؤلفه‌های $\overline{\mathbf{W}}$ درامتداد γ نوشت:

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma (u+iv)(dx+idy)=\int_\gamma udx-vdy+i\int_\gamma vdx+udy$$

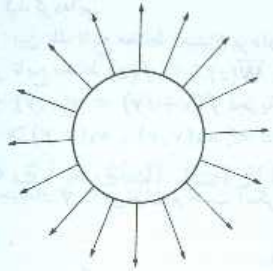
$$=\int_\gamma w_1dx+w_2dy+i\int_\gamma w_1dy-w_2dx$$

$$=\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}\cdot\mathbf{T}\,ds+i\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}\cdot\mathbf{N}\,ds,$$

که درآن $\mathbf{N}$ بردارقائمی است که باچرخش بردارمماس واحد $\mathbf{T}$ درجهت حرکت عقربه‌های ساعت به‌اندازهٔ $\pi/2$ بدست می‌آید. درقالب عبارات، بخش حقیقی $\int_\gamma f(z)\,dz$ انتگرال مؤلفهٔ مماسی میدان برداری پولیا $\overline{\mathbf{W}}$ روی γ (یعنی جریان در امتداد γ). اگر $\overline{\mathbf{W}}$ را به عنوان یك میدان سرعت تصور کنیم)، و بخش موهومی $\int_\gamma f(z)\,dz$ انتگرال مؤلفهٔ قائم $\overline{\mathbf{W}}$ روی γ (شار گذرنده از γ) است. یك ره‌آوردآنی این تعبیر هندسی این است که به وضوح نشان می‌دهدکه مقدار یك‌انتگرال مرزی مستقل از پارامتری‌سازی است، واگر جهت خم برعکس شود تغییرعلامت می‌دهد.

درست همان‌طوری‌که می‌توانیم انتگرال‌حقیقی $\int_a^b f(x)\,dx$ را باتعبیر آن به‌عنوان مساحت علامت‌دار بین نمودار f وفاصلهٔ $[a,b]$ برمحور x تخمین بزنیم، انتگرال مختلط $\int_\gamma f(z)\,dz$ را می‌توانیم به طور غیردقیق با براورد بصری جریان وشار میدان برداری پولیا $\overline{\mathbf{W}}$ در امتداد مسیر، تقریب بزنیم.

به عنوان مثال، درشکل ۱، میدان برداری $\overline{\mathbf{W}}$ برای تابع $f(z)=1/z$ در امتداد دایرهٔ واحد نشان داده شده است. بردار $\overline{\mathbf{W}}(z)$ درهرنقطهٔ z به‌مسیر عمود است، بنابراین جریان $\overline{\mathbf{W}}$ در امتداد مرز انتگرالگیری صفر است. همان طورکه دیده می‌شود مؤلفهٔ قائم $\overline{\mathbf{W}}$ برابر مقداری ثابت یعنی ۱، است، بنابراین شار $\overline{\mathbf{W}}$ گذرنده ازمسیر به سادگی برابر حاصل ضرب این مقدار ثابت درطول مسیر، یعنی 2π، خواهد بود. پس تحلیل هندسی ما



شکل ۱. میدان برداری پولیا برای $f(z)=1/z$ روی دایرهٔ واحد.

نشان می‌دهد که $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

البته مثالی که هم‌اکنون مورد بررسی قرار گرفت خیلی خاص است: درحالت کلی فقط می‌توانیم انتگرال مؤلفه‌های مماس و قائم $\mathbf{W}$ روی γ را از روی شکل میدان برداری در امتداد این مسیر تخمین بزنیم. برای این که بر تشابه فرایند تخمین انتگرالهای مختلط با تخمین انتگرالهای حقیقی تأکید بورزیم، فرایند اخیر را به اختصار یادآوری می‌کنیم و در این میان از خواننده می‌خواهیم اندکی قوهٔ اغماض خود را به‌کار گیرد.

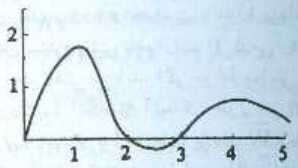
روشن است که برای براورد $\int_a^b f(x)\,dx$ ازروی نمودار f روی $[a,b]$، سطح بین این نمودار و محور x را تخمین می‌زنیم و مساحت زیر محور x را از مساحت بالای محور کم می‌کنیم. به‌بیان دقیقتر، می‌توانیم به‌طور ذهنی افراز $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ را طوری در نظر بگیریم که علامت $f(x)$ درهر زیر بازهٔ آن تغییر نکند؛ سپس هر یك از انتگرالهای $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ را تخمین بزنیم. و اعداد علامتدار حاصل را با هم جمع کنیم. برای براورد سطح بین نمودار ومحور x روی هرزیر بازهٔ $[x_k\,,\,x_{k+1}]$، ارتفاع میانگین $\bar{y}_k$ نمودار را روی این زیر بازه تخمین می‌زنیم و حاصلضرب $\bar{y}_k(x_{k+1}-x_k)$ را به‌عنوان تقریبمان ازمساحت به‌کارمی‌بریم.

به‌عنوان‌مثال این فرایند ذهنی برای براورد $\int_0^5 f(x)\,dx$ برای تابعی که نمودارش درشکل ۲ رسم شده است، می‌تواند چیزی شبیه به این باشد: افراز $0<2<3<5$ را درنظر می‌گیریم:

$$\int_0^2 f(x)dx \cong (1.1)(2-0) \qquad \int_2^3 f(x)dx \cong (-0.1)(3-2)\ ,$$

$$\int_3^5 f(x)dx \cong (0.7)(5-3)\ ,$$

بنابراین $\int_0^5 f(x)\,dx = 2.2 - 0.1 + 1.4 = 3.5$. اگر محاسبه‌ای تحلیلی مقدار بسیارمتفاوتی برای این انتگرال، مثلا -3، را به‌دست دهد، متوجه می‌شویم که اشتباهی در محاسبه رخ داده است؛ آنچه که این تخمین هندسی را بسیار متقاعدکننده می‌سازد، سادگی آن است.

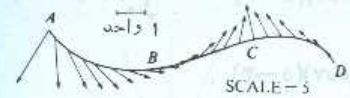


شکل ۲

تعبیر انتگرالهای مختلط به‌وسیلهٔ میدان برداری را می‌توان به روش مشابهی برای دستیابی به‌تخمین ساده‌ای برمبنای شهود هندسی به‌کار بست، که دراین صورت می‌تواند به عنوان آزمونی درمقابل روشهای تحلیلی تلقی شود.

برای براورد $\int_\gamma f(z)\,dz$ ، باید بخش حقیقی‌اش ، $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}\,ds$ ، و بخش موهومی‌اش، $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{N}\,ds$ ، را جداگانه تخمین بزنیم. برای تخمین $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}\,ds$ ، ابتدا خم را به‌قطعه‌های $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ که روی هریك از آنها $\overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}$ علامت ثابت دارد افراز می‌کنیم (یادآوری می‌کنیم که برای مثبت بودن $\overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}$ تنهاکافی است که زاویهٔ بین $\overline{\mathbf{W}}$ و $\mathbf{T}$ حاده باشد). آنگاه برهرقطعهٔ γ_k به‌طور بصری مؤلفهٔ مماسی متوسط $\overline{\mathbf{W}}$، یعنی τ_k، را تقریب می‌زنیم، به‌طوری که $\int_{\gamma_k} \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}\,ds \cong \tau_k\, l_k$، که درآن l_k نشانگر طول γ_k است. درعمل نمودار $\overline{\mathbf{W}}$ در امتداد γ مقیاس‌بندی می‌شود، یعنی ضریبی چون SCALE وجود دارد به‌طوری که برداری با اندازهٔ ظاهری ۱ درنمودار، برداری رادر $\mathbf{C}$ درهمان جهت اما با اندازه‌ای برابر SCALE نمایش می‌دهد. بنابراین اگر τ_k اندازهٔ ظاهری مؤلفهٔ مماسی متوسط $\overline{\mathbf{W}}$ درامتداد قطعه‌خم γ_k را نشان‌دهد، آنگاه $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{T}ds \cong \mathrm{SCALE}\,\sum_{k=1}^{n} \tau_k l_k$. فرایند تخمین $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}.\mathbf{N}\,ds$ مشابه است.

مثال ۱. اگر شکل $\overline{\mathbf{W}}$ در امتداد γ همان طور باشد که درشکل ۳ نشان داده شده است، می‌توانیم برای تخمین $\int_\gamma f(z)\,dz$ چنین استدلال کنیم.



شکل ۳

روی قطعهٔ AC زاویهٔ بین $\overline{\mathbf{W}}$ و $\mathbf{T}$ حاده است. بنابراین مؤلفهٔ مماسی $\overline{\mathbf{W}}$ روی این قطعه مثبت‌است. در A اندازهٔ (ظاهری) $\overline{\mathbf{W}}$ درحدود ۲ واحد، واندازهٔ مؤلفهٔ مماسی (تصویر $\overline{\mathbf{W}}$ برروی خط مماس) درحدود ۰٫۵ واحداست. اندازهٔ بردار $\overline{\mathbf{W}}$ با حرکت به‌سمت B کاهش می‌یابد، اما درعوض بیشتروبیشتر به‌موازات $\mathbf{T}$ درمی‌آید، به‌طوری‌که مؤلفهٔ مماسی $\overline{\mathbf{W}}$ فقط درحدود ۰٫۵ واحد کاهش می‌یابد. اگر مؤلفهٔ مماسی متوسط $\overline{\mathbf{W}}$ را درطول این قطعه برابر ۱ واحد برآوردکنیم. آنگاه از آنجاکه طول خم AB درحدود ۵ واحد است، داریم $\tau_1 l_1 \cong (1)(5) = 5$. از B تا C اندازهٔ بردار $\overline{\mathbf{W}}$ زیاد می‌شود، اما مؤلفهٔ مماسی روی BC از ۰٫۵ در B به ۰ در C کاهش می‌یابد. با استفاده از تخمین $\tau_2 \cong 0.3$ برای مؤلفهٔ مماسی متوسط روی BC . و تقریب ۳ واحد برای طول این قطعه، بدست می‌آوریم $\tau_2 l_2 \cong (0.3)(3) = 0.9$. روی قطعهٔ CD مؤلفهٔ مماسی $\overline{\mathbf{W}}$ از ۰ شروع می‌شود، به مینیمم منفی در حدود ۰٫۲ − می‌رسد، و سرانجام در D دوباره ۰ می‌شود، پس تخمین می‌زنیم $\tau_3 l_3 \cong (-0.1)(3) = -0.3$ ؛ و از آنجاکه ضریب مقیاس برای نمودار SCALE = ۵ است. تخمین ما از $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}\cdot\mathbf{T}\,ds$ برابر $5(5 + 0.9 - 0.3) = 28$ خواهد بود. به روش مشابه با تخمین مؤلفهٔ قائم متوسط $\overline{\mathbf{W}}$ در امتداد AB، BC، و CD به ترتیب به صورت $v_1 \cong 0.5$ ، $v_2 \cong -0.4$ ، و $v_3 \cong -0.5$ به دست می‌آوریم SCALE. $\sum v_k l_k \cong 5[(0.5)(5) + (-0.4)(3) + (-0.5)(3)] = -1$. بنابراین اگر $\overline{\mathbf{W}}$ میدان برداری پولیای تابعی مختلط چون $f(z)$ باشد، تقریب هندسی ما نشان می‌دهد که $\int_\gamma \overline{\mathbf{W}}\cdot\mathbf{N}\,ds$ $\int_\gamma f(z)\,dz \cong 28 - i$. ما نمی‌توانیم ازعلامت بخش موهومی مطمئن باشیم، زیرا خطاهایی کوچک درتقریب v_k و l_k می‌تواند روی علامت مجموع تأثیر بگذارد، اما می‌توانیم با اطمینان بگوییم که جریان درامتداد γ مثبت (درحدود ۳۰)، وشار گذرنده ازγ نزدیک به ۰ است. اگرمحاسبه‌ای تحلیلی به‌نتیجه‌ای مثل $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i$ بیانجامد، معقول خواهد بودکه آن محاسبه راکنترل کنیم.

دریک درس مقدماتی آنالیزمختلط "کاربرد" اصلی انتگرالگیری‌مختلط محاسبهٔ برخی انتگرالهای حقیقی بااستفاده ازحساب مانده است. برای این‌کارمعمولا بازهٔ حقیقی انتگرال‌گیری را به یک مرز بسته درصفحهٔ مختلط تکمیل می‌کنیم، قضیهٔ مانده را برای محاسبهٔ یک انتگرال‌مختلط مناسب روی این‌مرزبه‌کارمی‌بریم، وسپس سعی‌می‌کنیم سهمی راکه درمجموع انتگرال درامتداد محورحقیقی x دارد، تعیین کنیم. گاهی‌مشاهدهٔ شکلی ازمیدان برداری پولیا

درامتداد مرز، می‌تواند روشن‌کنندهٔ این‌گام آخر باشد. (همچنین می‌توان مانده را دریک‌قطب ساده به‌طورهندسی تخمین زد، اما نشان دادن اینکه چگونه این‌کارممکن‌است ما را از زمینهٔ اصلی بحثمان دراینجا بسیار دور می‌کند.)

مثال ۳ . مقدار $I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx$ را محاسبه کنید.

درابتدا، قضیهٔ مانده را برای محاسبهٔ

$$I = \int_\gamma \frac{1}{z^3+1}\,dz\,, \qquad \gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2\,.$$

به‌کارمی‌گیریم، که در آن γ_1 مسیرروی محور x ازمبدأ تا R، γ_R کمانی‌از دایره $|z| = R$ از R تا $Re^{2\pi i/3}$، و γ_2 قطعه خطی است‌که از $Re^{2\pi i/3}$ به مبدأ باز می‌گردد. داریم $I = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, z_1)$، که در آن $f(z) = 1/(z^3+1)$ و z_1 قطب سادهٔ f در $e^{\pi i/3}$ است. با محاسبه به‌دست می‌آوریم:

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1}(z - z_1)f(z) = \frac{1}{\left[\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right](i\sqrt{3})}\,,$$

بنابراین

$$I = \pi\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - i\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

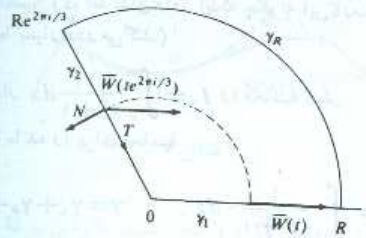
چون با افزایش $|z|$ ، $|f(z)|$ خیلی سریعتر از $1/|z^3|$ کاهش می‌یابد، $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$ بنابراین از آنجا که مقدار I مستقل از R است، می‌توان نوشت $I = I_1 + I_2$، که $I_2 = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

اکنون توجه‌کنیم که مقدار z^3 در $z = t$ روی γ_1 با $z = te^{2\pi i/3}$ روی γ_2 یکسان است، بنابراین بردارهای پولیای $\overline{\mathbf{W}}(t)$ و $\overline{\mathbf{W}}(te^{2\pi i/3})$ مساوی‌اند. اما جهت $\overline{\mathbf{W}}(t)$ در امتداد مسیر γ_1 است، درحالی‌که $\overline{\mathbf{W}}(te^{2\pi i/3})$ با بردار یکهٔ مماس بر γ_2 زاویهٔ $\pi/3$ می‌سازد (شکل ۴). بنابراین مؤلفهٔ مماسی $\overline{\mathbf{W}}(te^{2\pi i/3})$ برابر

$$|\overline{\mathbf{W}}(t)|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}|\overline{\mathbf{W}}(t)|\,,$$

و مؤلفهٔ قائم برابرمقدار زیرخواهد بود

$$|\overline{\mathbf{W}}(t)|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{\mathbf{W}}(t)|\,.$$



شکل ۴

پس

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 - i\frac{\sqrt{3}}{2} I_1 \qquad (*)$$

که در آن

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{t^3+1}\, dt$$

بنابراین

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) I_1$$

و با مقایسهٔ این مقدار I که در بالا به‌کمک قضیهٔ مانده یافتیم، نتیجه می‌گیریم که $I_1 = 2\pi/(3\sqrt{3})$. بحث ما تنها در یک اصل با محاسبهٔ تحلیلی معمولی I فرق دارد: استدلال هندسی ما، به‌جای پارامتری‌سازی γ_1 و به‌دست آوردن معادلهٔ (*) با روشهای تحلیلی، از تجزیهٔ $\overline{W}(te^{2\pi i/3})$ به مؤلفه‌های مماس و قائم برای به‌دست آوردن این رابطه بین I_2 و I_1 بهره می‌برد.

نگرش میدان برداری به انتگرالهای مختلط، علاوه بر روشنگری در تحلیل انتگرالهای خاص، و بر توافکنی تازه‌ای بر خواص آشنای توابع مختلط، می‌تواند به نتایج نظری جدیدی منجر شود. در تخمین انتگرالهای مختلط نامساوی $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,ds$ اساسی است، اما به نظر نمی‌رسد که این نامساوی نامی مورد قبول عام داشته باشد. گاهی اوقات آن را، نامساوی مثلثی برای انتگرالهای مختلط می‌نامند، چرا که می‌توان آن را نتیجه‌ای از این حقیقت که قطعه خط راست کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطه در صفحهٔ مختلط است، تلقی کرد. من تاکنون دربارهٔ شرایطی که تحت آنها در نامساوی مثلثی تساوی برقرار می‌شود چیزی در منابع نیافته‌ام. به نظر می‌رسد دلیل این امر آن باشد که شرایط مناسب برحسب خواص

نگاشتی توابع مختلط براحتی قابل بیان نیست. اما از دیدگاه میدان برداری، شرط مطلوب به طرز زیبایی ساده است. توجه کنید که چون مقدار یک انتگرال مرزی، با تغییر مسیر انتگرال‌گیری به کمک یک دگردیسی پیوسته (که نقاط انتهایی را ثابت نگه دارد) در حوزهٔ تحلیلی بودن انتگرالده، عوض نمی‌شود، شرایط تساوی در نامساوی مثلثی هم به مرز γ و هم به انتگرالدهٔ $f(z)$ بستگی خواهد داشت.

قضیه: فرض کنید $f(z)$ یک تابع پیوستهٔ مختلط روی دامنه‌ای شامل کمان تکه‌ای مشتق‌پذیر γ باشد. در این صورت تساوی در نامساوی مثلثی، یعنی رابطهٔ

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \int_\gamma |f(z)|\, ds$$

دقیقاً وقتی برقرار است که میدان برداری پولیای $\overline{\mathbf{W}}$ با میدان برداری مماس $\mathbf{T}$ در امتداد γ زاویه‌ای ثابت بسازد.

اثبات ما مبتنی بر لم ساده‌ای دربارهٔ قدرمطلق یک مجموع برداری و مشابه پیوسته‌اش برای انتگرالهای برداری است.

لم ۱. اگر $\mathbf{W} = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}_k$، آنگاه $|\mathbf{W}| = \sum_{k=1}^n |\mathbf{V}_k| \cos\theta_k$، که θ_k زاویهٔ بین $\mathbf{V}_k$ و $\mathbf{W}$ است. [در قالب عبارات، مجموع مؤلفه‌های جمعوندها در امتداد مجموع $\mathbf{W}$، قدر مطلق مجموع، یعنی $|\mathbf{W}|$، را به‌دست می‌دهد.]

برهان.

$$\sum_{k=1}^n |\mathbf{V}_k| \cos\theta_k = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{W}}{|\mathbf{W}|} = \frac{1}{|\mathbf{W}|}\sum_{k=1}^n \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{W} = \frac{1}{|\mathbf{W}|}\mathbf{W}\cdot\mathbf{W} = |\mathbf{W}|$$

لم ۲. اگر $\mathbf{V}(t)$، $a \leqslant t \leqslant b$، تابع برداری پیوسته‌ای باشد، و $\mathbf{W} = \int_a^b \mathbf{V}(t)\,dt$، آنگاه $|\mathbf{W}| = \int_a^b |\mathbf{V}(t)| \cos\theta(t)\,dt$ که در آن $\theta(t)$ زاویهٔ بین $\mathbf{V}(t)$ و $\mathbf{W}$ است.

برهان. فرض کنید $R_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(t_k)\,\Delta t$ نمایانگر یک تقریب مجموع ریمان $\mathbf{W}$ نسبت به افراز $[a,b]$ به n زیربازهٔ مساوی به‌طول $\Delta t = (b-a)/n$ باشد. با به‌کارگیری لم ۱ داریم $|R_n| = \sum_{k=1}^n |\mathbf{V}(t_k)| \cos\theta_k \Delta t$، که در آن θ_k زاویهٔ بین $\mathbf{V}(t_k)$ و R_n است. وقتی که $n \to \infty$، $R_n \to \mathbf{W}$، بنابراین به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض با اختیار کردن n به‌قدر کافی بزرگ می‌توانیم کاری کنیم که به‌ازای هر k، $|\cos\theta_k - \cos\theta(t_k)| < \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$، که در آن $\theta(t_k)$ زاویهٔ بین $\mathbf{V}(t_k)$ و $\mathbf{W}$ است، و $M = \max_{t\in[a,b]} |\mathbf{V}(t)|$. در این صورت

$$\left|\sum_{k=1}^n |\mathbf{V}(t_k)|(\cos\theta_k - \cos\theta(t_k))\Delta t\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |\mathbf{V}(t_k)| \frac{\varepsilon}{M(b-a)}\Delta t$$
$$\leqslant nM \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot \frac{b-a}{n} = \varepsilon$$

یعنی وقتی که $n\to\infty$، $\Sigma|\mathbf{V}(t_k)|\cos\theta_k\,\Delta t\to\Sigma|\mathbf{V}(t_k)|\cos\theta(t_k)\Delta t$. اما از آنجا که $R_n\to\mathbf{W}$، سمت چپ به $|\mathbf{W}|$ میل می‌کند، وسمت راست یك تقریب مجموع ریمان $\int_a^b|\mathbf{V}(t)|\cos\theta(t)\,dt$ است. بنابراین همان‌طور که ادعا شده بود

$$\mathbf{W}=\int_a^b|\mathbf{V}(t)|\cos\theta(t)\,dt$$

نتیجه. اگر $\mathbf{V}(t)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه $\left|\int_a^b\mathbf{V}(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^b|\mathbf{V}(t)|\,dt$، و تساوی دقیقاً وقتی برقرار است که $\mathbf{V}(t)$ زاویهٔ قطبی ثابتی داشته باشد.

برهان. اگر $\theta(t)$ زاویهٔ بین $\mathbf{V}(t)$ و $\mathbf{W}=\int_a^b\mathbf{V}(t)\,dt$ باشد، از آنجا که درطول $[a,b]$، $1-\cos\theta(t)\geqslant 0$، داریم $\int_a^b|\mathbf{V}(t)|\,\{1-\cos\theta(t)\}dt\geqslant 0$، و تساوی دقیقاً وقتی برقرار است که $\cos\theta(t)\equiv 1$. بنابراین با به‌کارگیری لم ۲ داریم، $\left|\int_a^b\mathbf{V}(t)\,dt\right|=|\mathbf{W}|=\int_a^b|\mathbf{V}(t)|\cos\theta(t)\,dt\leqslant\int_a^b|\mathbf{V}(t)|dt$، و تساوی درست وقتی برقرار است که زاویهٔ $\theta(t)$ بین $\mathbf{V}(t)$ و $\mathbf{W}$ صفر باشد، که این با این شرط هم‌ارز است که $\mathbf{V}(t)$ زاویهٔ قطبی ثابتی داشته باشد.

برهان قضیه.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|=\left|\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^b|f(z(t))|\,|z'(t)|dt$$
$$=\int_a^b|f(z)|\,ds,$$

وتساوی دقیقاً وقتی برقرار است که تابع برداری $f(z(t))\,z'(t)$ زاویهٔ قطبی ثابتی داشته باشد، اما زاویهٔ قطبی $f(z(t))\,z'(t)$ برابر $\arg f(z(t))+\arg z'(t)$ یا $\arg z'(t)-\arg f(z(t))$ است، که ما آن را به‌عنوان زاویهٔ بین بردارمماس برمسیر و بردار پولیای $\overline{\mathbf{W}}$ در $z(t)$ می‌شناسیم.

توجه کنیم که میدان برداری شعاعی $f(z)=1/z$ درشکل ۱، همان طور که درقضیه خواسته شده، با میدان برداری مماس روی دایرهٔ $|z|=1$ زاویهٔ ثابت $\pi/2$ می‌سازد ودر واقع هم داریم

$$\left|\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,dz\right|=\int_{|z|=1}\left|\frac{1}{z}\right|ds$$

که مقدار مشترك این دو 2π است. مثال دیگری که در آن فرض زاویهٔ ثابت برقرار است، انتگرال $\int_{\gamma_2}1/(z^3+1)\,dz$ است که در مثال ۲ بررسی شد؛ و این حقیقت که برای این انتگرال تساوی در نامساوی مثلثی برقرار است نتیجهٔ بدیهی معادلهٔ (*) در آن مثال است.

نظر به در دسترس بودن ریز کامپیوترهایی با امکانات نیرومندگرافیکی، و افزایش تعداد دانشجویان آشنا با چنین سخت افزارهایی، می‌توان دریك دورهٔ مقدماتی آنالیزمختلط

تکالیفی کلاسی تدارك دیدکه با استفاده ازتصاویرمیدان برداری پولیا سروکار داشته باشند. تجربه با یك چنین مدل هندسی، به خصوص در مطالعهٔ انتگرالگیری مرزی، می‌تواند کمك کند تا تصویر نامطلوبی راکه شنیدن واژهٔ «موهومی» درآنالیزمختلط مجسم می‌کنیم از یاد ببریم.

مراجع

1. Braden, Barl. "Picturing functions of a complex variable," *College Math. J.*, **16** (1985) 63-72.
2. Churchill, Ruel V., and James W. Brown, *Complex Variables and Applications*, 4th ed., McGraw-Hill, 1984.
3. Polya, George, and Gordon Latta, *Complex Variables*, Wiley 1974.

ا. ر. برلکامپ، ا. ن. گیلبرت، و ف. و. سیندن

یك مسئلهٔ چندضلعی*

ترجمهٔ علی پارسیان

P_0 را یك چند ضلعی بسته می‌گیریم. فرض می‌کنیم P_1 چند ضلعی باشد که با به هم پیوستن مرتب نقاط وسط اضلاع P_0 به دست می‌آید (شکل ۱). می‌نویسیم:

$$P_1 = TP_0$$

گیریم $P_2 = TP_1$ و $P_3 = TP_2$ وغیره. P_1، P_2، P_3 و... را تالیهای P_0 می‌نامیم.

این سؤال را در نظر می‌گیریم: برای کدام چندضلعیهای P_0، یك تالی محدب P_n وجود دارد؟

به آسانی می‌توان نشان داد که همهٔ تالیهای یك چندضلعی محدب، محدبند. از این‌رو، وجود یك تالی محدب، وجود تعداد بیشماری از آنها را ایجاب می‌کند.

برای چندضلعیهایی که کمتر از پنج ضلع دارند، فوراً به این نتایج می‌رسیم:

۲ ضلعیها: همهٔ تالیها، رئوس منطبق دارند.

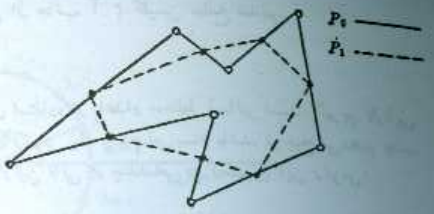
۳ ضلعیها: همهٔ تالیها با چندضلعی اولیهٔ P_0 که لزوماً محدب است، متشابهند.

۴ ضلعیها: همهٔ تالیها متوازی‌الاضلاعند، در نتیجه محدبند، هر چند ممکن است چندضلعی اولیهٔ P_0 محدب نباشد.

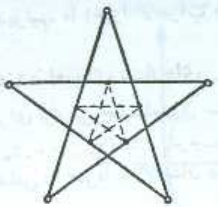
(برای ملاحظهٔ نتیجهٔ اخیر به موازی بودن اضلاع P_1 با قطرهای P_0 توجه کنید.)

چندضلعیهایی که تعداد اضلاعشان پنج یا بیشتر است بسیار پیچیده‌ترند، اما ما در طی چند مثال دریافتیم که استفادهٔ مکرر از T، سریعاً به چندضلعیهای محدب می‌انجامد. ظاهراً، این مطلب شگفتی نیست، زیرا در حقیقت T یك عملگر هموار است. ما با این

* Berle Kamp E.R., Gilbert E.N., Sinden F. W. "A polygon problem," *Amer. Math. Monthly*, **72** (1965) 233-241.



شکل ۱



شکل ۲

حدس، که هر چندضلعی سرانجام تالیهای محدب دارد، بحث خود را آغاز می‌کنیم.

شکل ۲ نشان می‌دهد که این حدس نادرست است. چندضلعی منتظم ستاره‌ای، فقط تالیهایی از نوع خود تولید می‌کند.

از آنجا که پنج‌ضلعی منتظم ستاره‌ای خود را قطع می‌کند ممکن است این مثال نادرست به نظر آید. شکل ۳ یك چندضلعی ناخودبر را با هیچ تالی محدب نشان می‌دهد.

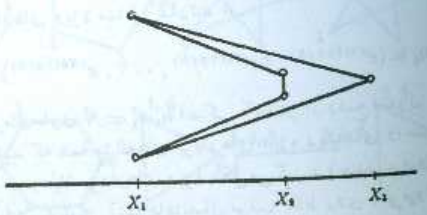
در حقیقت این چندضلعی ظاهر فریب است. تالیهای آن نه فقط نامحدبند، بلکه تعداد بیشماری از آنها خودبر نیز هستند. (برای مشاهدهٔ این امر، به رابطهٔ:

$$\frac{X_2 - X_1}{X_3 - X_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

که بین تصاویر رأسها، X_1، X_2، X_3، ودرمورد همهٔ تالیها، به‌همان ترتیب خود چندضلعی برقرار است، توجه کنید. وقتی که P_{i-1} خودبر نباشد، P_i خودبر است.)

علیرغم این مثالها، این حدس که همهٔ چندضلعیها تالیهای محدب دارند، کاملا هم بی‌محتوا نیست. آن حدس به این شکل در می‌آید که تقریباً همهٔ چندضلعیها تالی محدب دارند.

منشأ این مسئله از ج. ر. مك‌لین است که به اعتبار برخی حدسیات مفیدش به او



شکل ۳. $(X_2 - X_1)/(X_3 - X_2) = (1+\sqrt{5})/2$

مدیونیم. ما اخیراً ازجواب مستقلی از جانب آ. م. گلیسن مطلع شدیم.

چندضلعیهای ستاره‌ای

برای بررسی چندضلعیهای ستاره‌ای استفاده از اعداد مختلط آسانتر است. گیریم N تایی $Z=(z_1,\ldots,z_n)$ بترتیب معرف رئوس یك چندضلعی بسته باشد. ترجیح می‌دهیم چند ضلعی را صرفاً به Z نشان دهیم. اولین تالی Z چندضلعی w است با این رئوس:

$$w_1=\frac{1}{2}(z_1+z_2)\,,\ \ldots\,,\ w_N=\frac{1}{2}(z_N+z_1)$$

و می‌تواند به صورت $w=Tz$ است نوشته شود که:

$$T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ & & \cdots & & \\ 0 & & \cdots & 1 & 1\\ 1 & & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ T، یعنی جوابهای $Tu=\lambda u$ از اهمیت خاصی برخوردارند، زیرا اگر u یك بردار ویژه باشد، چندضلعی پدید آمده به‌وسیلهٔ u صرفاً دوران می‌کند و به طور یکنواخت به‌وسیلهٔ T کوچك می‌شود. توضیح اینکه، تحت زاویهٔ $\arg\lambda$ در حول مبدأ دوران می‌کند و با ضریب $|\lambda|$ کوچك می‌شود.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را می‌توان صریحاً نوشت. مقادیر ویژه عبارتند از

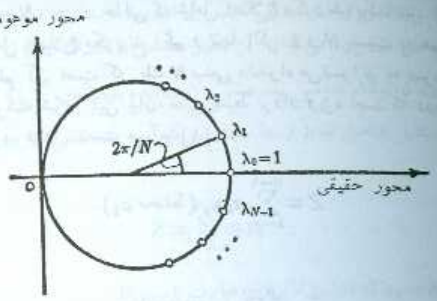
$$\lambda_k=\frac{1}{2}(1+e^{ik(2\pi/N)})\,,\quad k=0,1,\ldots,N-1$$

(شکل ۴) و بردارهای ویژهٔ متناظر عبارتند از

$$u_k=(e^{i\,1k(2\pi/N)},\ e^{i2k(2\pi/N)},\ldots,e^{iNk(2\pi/N)})$$

در وضع فعلی نرمال‌سازی $u_k u_k^*=N$ اندکی آسانتر از وضع معمول $u_k u_k^*=1$ به نظر می‌رسد. توجه کنید که همهٔ مؤلفه‌های بردارهای ویژه ریشه‌های واحد هستند. بنابراین چندضلعیهایی که به وسیلهٔ بردارهای ویژه شکل می‌گیرند (چندضلعیهای ویژه) جملگی در دایره واحد محاطند. k امین آنها با اتصال مرتب نقاط روی دایرهٔ واحد با

$$k1\phi\,,\ k2\phi\,,\ \ldots\,,\ kN\phi,\qquad \phi=2\pi/N$$

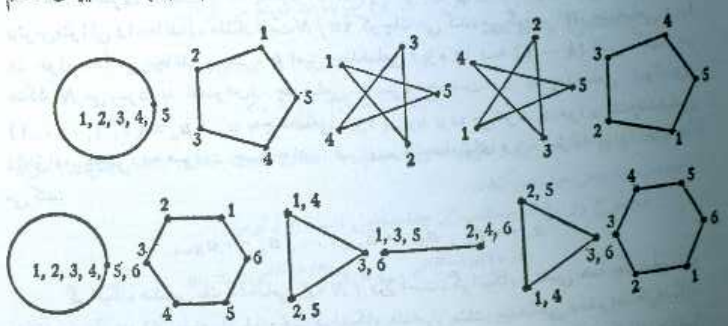


شکل ۴. مقادیر ویژه

به دست می‌آید. چندضلعیهای ویژه به ازای $N=5$ ، ۶ در شکل ۵ نشان داده شده‌اند. به تعبیر هندسی، واضح است که این چندضلعیها از طریق تبدیل T فقط دوران کرده و کوچك شده‌اند.

ما هر چندضلعی را که با kامین Nضلعی ویژه متشابه باشد Nضلعی منتظم از مرتبهٔ k می‌نامیم. بنابراین در بین چندضلعیهای منتظم، چندضلعیهای خودبر، چندضلعیهای شامل اضلاع مکرر و چندضلعیهای تبهگون نیز قرار دارند.

مشاهده می‌کنیم که Nضلعیهای منتظم این خواص را دارند: (۱) Nضلعیهای منتظم از مرتبه ۰ کلاً تبهگونند، یعنی همهٔ رئوس، برهم منطبقند. (۲) Nضلعیهای منتظم از مرتبه‌های ۱ و $N-1$، به ترتیب در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت و درجهت حرکت عقربه‌های آن، Nضلعیهای منتظم محدب هستند. ما همهٔ چندضلعیهای خودبر، شامل اضلاع مکرر و تبهگون را نامحدب در نظر می‌گیریم. (۳) Nضلعیهای منتظم



شکل ۵. چندضلعیهای ویژه.

مرتبه‌های k و $N-k$، جز درحالتی که شامل اضلاع مکررند، یکسانند. (۴) Nضلعیهای منتظم مرتبه k شامل اضلاع مکررند اگر و تنها اگر k و N نسبت به هم اول نباشند.

حقیقت مسلم آن است که یك Nضلعی دلخواه می‌تواند به صورت مجموع N-ضلعیهای منتظم نوشته شود. این بیان، معنی بسیط بردار ویژه است که درستی آن از مجزا بودن مقادیر ویژه، فوراً بدست می‌آید[۱].

$$Z=\sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k \ (\text{مختلط } a_k) \qquad (1)$$

یا صریحاً:

$$z_j=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{ijk(2\pi/N)}$$

ضرایب با فرمول زیر بیان می‌شوند:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j e^{-ijk(2\pi/N)}$$

برای این فرمول می‌توان یك تعبیر هندسی به شرح زیر ارائه داد. تبدیل $w=Wz$ را، که در آن داریم،

$$w_j=z_j e^{-ij(2\pi/N)}$$

درنظر بگیرید. W دوران رأس jام درحول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ $-j(2\pi/N)$ است. رأس z_N با طی یك دوران کامل، به جای اولیهٔ خود باز می‌گردد، درحالی که سایررأسها به اندازهٔ کسری متناسب با اندیسشان از j/N، گردش می‌کنند. این گردش، زاویهٔ بین رئوس‌متوالی را، به‌اندازهٔ مقدارثابت $2\pi/N$ کوچك می‌کند. می‌گوییم W، چندضلعی z را در حول مبدأ می‌پیچاند. پیچش، k امین چندضلعی ویژه را به $(k-1)$ امین آنها در هنگ N می‌برد، به خصوص، چندضلعی ویژهٔ محدب u_1 به چندضلعی نهگون $u_0=(1,1,\dots,1)$ و u_0 به‌چندضلعی ویژهٔ u_{N-1} برده می‌شود. درمورد یك‌چندضلعی دلخواه، پیچش، به صورت چرخه‌ای، ضرایب چندضلعیهای ویژهٔ مؤلفه‌ای را جابه‌جا می‌کند:

$$a_1\to a_0,\ a_2\to a_1,\ \dots,\ a_0\to a_{N-1}$$

گرانیگاه هندسی یك‌چندضلعی Z، $\Sigma z_j/N$ است. گرانیگاه هندسی همهٔ چندضلعیهای ویژه، جز u_0، O است. از این‌رو، گرانیگاه هندسی یك چندضلعی دلخواه، گرانیگاه هندسی مؤلفهٔ صفرم است که آن را با a_0 می‌نمایانیم. در نتیجه گرانیگاه هندسی

چندضلعیی که با پیچاندن Z بدست می‌آید، a_1 است.

در مورد ضرایب a_k، می‌توان این تعبیر هندسی را ارائه داد:

ضریب a_k، گرانیگاه هندسی چندضلعیی است که باپیچاندن k بار Z بدست می‌آید.

به T، تبدیل واصل نقاط وسط، باز می‌گردیم. چندضلعی Z را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$Z=\sum_{k=0}^{N-1} a_k u_k$$

از آنجا که $Tu_k=\lambda_k u_k$، اولین تالی Z عبارت است از:

$$Z_1=TZ=\sum_{k=0}^{N-1} a_k \lambda_k u_k$$

و n امین تالی عبارت است از:

$$Z_n=T^nZ=\sum_{k=0}^{N-1} a_k \lambda_k^n u_k$$

با افزایش n، مؤلفه‌های با بزرگترین قدرمطلق مقدار ویژه، به طور نسبی نقش غالب پیدا می‌کنند. همان‌طور که از شکل ۴ پیداست، مقادیر ویژه به این گونه مرتب می‌شوند:

$$1=\lambda_0>|\lambda_1|=|\lambda_{N-1}|>|\lambda_2|=|\lambda_{N-2}|>\cdots$$

از آنجا که $\lambda_0=1$، مراکز (ضرایب صفرم) Z_n ثابت باقی می‌مانند. مؤلفه‌های دیگر رفته رفته محو می‌شوند. بنابراین همهٔ رئوس Z_n به گرانیگاه هندسی همگرا می‌شوند. لذا مؤلفه‌های محدب $(k=1\ ,\ N-1)$ سریعا به‌کمینه می‌گرایند.

چندضلعی نرمال شده

$$Z'_n=\frac{1}{|\lambda_1|^n}(Z_n-a_0u_0)$$

گرانیگاههای هندسی O و مؤلفه‌های محدب با اندازهٔ ثابت دارد. با افزایش n، مؤلفهٔ نامحدب به صفر میل می‌کند.

مجموع دو مؤلفهٔ محدب Z چندضلعیی است با رئوس:

$$w_j=a_1e^{ij(2\pi/N)}+a_{N-1}e^{i(N-1)j(2\pi/N)}$$

این چندضلعی تصویر آفین یك N ضلعی محدب منتظم است. همهٔ رئوس آن در نقاط $t_j=j(2\pi/N)$ و $w_j=w(t_j)$ در بیضی

$$w(t)=a_1e^{it}+a_{N-1}e^{-it}$$

قرار دارند. بیضی $w(t)$ نه تنها برمجموع W از دومؤلفه Z، بلکه برمجموع W'_n از دو مؤلفه محدب Z'_n، تالیهای نرمال شده Z محیط است. از سوی دیگر، اگر $w(t)$ تبهگون باشد همهٔ Z'_nها خودبر یا تبهگون هستند، از این‌رو طبق تعریف ما، نامحدبند. یکی از شرایط لازم وکافی برای اینکه Z تالیهای محدب داشته باشد این است که $w(t)$ تا تبهگون باشد.

طول نصف قطر بزرگ $w(t)$ برابر با $|a_1|+|a_{N-1}|$ و طول نصف قطر کوچك برابر با $||a_1|-|a_{N-1}||$ است. بیضی تبهگون است اگر و تنها اگر $|a_1|=|a_{N-1}|$، به عبارت دیگر، اگر و تنها اگر دو مؤلفه محدب Z از طولهای مساوی برخوردار باشند.

اکنون می‌توانیم جواب سؤالی را که در اول مقاله مطرح شد، به‌روش زیر تعیین کنیم.

رئوس چندضلعی P_0 را با اعداد مختلط $z_1, \ldots, z_N$ نشان می‌دهیم. گیریم $a_j, \ldots, a_N$ اعداد مختلطی باشند که به کمك روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j\, e^{-ijk(2\pi i/N)}$$

P_0 یك تالی P_n دارد اگر و تنها اگر

$$|a_1|\neq|a_{N-1}| \qquad (2)$$

تعبیر هندسی این شرط به‌این قرار است: P_0 یك تالی محدب دارد اگر و تنها اگر گرانیگاه هندسی ضلعهای P_+ و P_- که با پیچاندن مثبت و منفی P_0 حول مبدأ به‌دست می‌آیند، در فواصل مختلف از مبدأ قرار داشته باشند.

چندضلعیهای مسطح

۱. در حالتهای بسیار، تالیهای یك چندضلعی تناوب عجیبی را آشکار می‌سازند. مثلاً، تالیهای یك مستطیل متناوبا لوزی و مستطیل هستند. در حالتهای کلی، اگر تالیهای زوج $P_2, P_4, P_6, \ldots$ در طول نرمال شده باشند، به سمت یك چندضلعی ثابت P و تالیهای فرد به سمت یك چندضلعی ثابت دیگر P' میل می‌کنند. P و P' تصاویر آفین چندضلعیهای منتظم هستند و در بیضی مشترکی محاطند.

۲. بدون پیچیده کردن اساسی مسئله، تبدیل T با فرمول $w_j=1/2\,(z_j+z_{j-1})$ می‌تواند با تبدیل تعمیم یافته‌تر T' به فرمول

$$w'_j=A_0z_j+A_1z_{j+1}+\cdots+A_{\nu-1}z_{j+\nu-1}$$

تعویض شود که در آن A_0، A_1، و . . . ثابتهای دلخواه هستند و جایی که N روی

z_{j+k} نوشته شده باید به هنگ N محاسبه شود. بردارهای ویژه مانند قبل همان u_kها هستند ولی مقادیر ویژه عبارتند از:

$$\lambda_k=\sum_r A_r\, e^{ir k2\pi i/N}$$

اگر $|\lambda_1|$ یا $|\lambda_{N-1}|$ از همهٔ مقادیر $|\lambda_2|, \ldots, |\lambda_{N-2}|$ بزرگتر باشند تقریباً برای همهٔ چندضلعیهای P، همهٔ تالیهای P، جز تعداد متناهی، محدبند. دو مثال از این نوع عبارتند از:

$$w'_j=\alpha z_j+\beta z_{j+1} \qquad (\alpha>0\,,\ \beta>0\,,\ \alpha+\beta=1) \qquad (1)$$

و

$$w'_j=\frac{1}{3}(z_j+z_{j+1}+z_{j+2}) \qquad (2)$$

در (۱) نقاط وسط اضلاع یا نقاطی که اضلاع را به نسبت α/β تقسیم می‌کنند، و در (۲) با گرانیگاههای هندسی مثلثهای متوالی تعویض می‌شوند.

۳. چندضلعیهایی وجود دارند که تالی هیچ چندضلعی دیگری نیستند، هر چهارضلعی که متوازی‌الاضلاع نباشد چنین‌است. تعداد اضلاع این نوع چندضلعیها زوج وشامل یك مؤلفهٔ ناصفر از مرتبهٔ $N/2$ است. مقدار ویژهٔ صفر $\lambda_{N/2}=0$، این مؤلفه را در اولین دوره پاك می‌کند. بنابراین چندضلعیی که $N/2$ مؤلفه داشته‌باشد نمی‌تواند تالی چندضلعی دیگری باشد.

ازموارد مشابه برای تبدیل تعمیم‌یافتهٔ T' در مطلب قبل بهره می‌گیریم. اگر T' مقدار ویژهٔ ناصفر داشته‌باشد (مانندمثال (۱)، اگر $\alpha\neq\beta\neq1/2$) همهٔ‌چندضلعیها، نیای منحصر به‌فردی دارند. دراین‌حالت ممکن‌است شجرهٔ خانواده به‌همان خوبی که به‌سمت جلورشد می‌کند به‌عقب‌نیز کشیده شود. جالب توجه است که تقریباً همهٔ چندضلعیهای محدب نیاهای دوری دارند که محدب نیستند.

چندضلعیهای نامسطح

حالت نامسطح به‌طرز تعجب‌آوری مشکلتر و پیچیده‌تر از حالت مسطح است. در جهت تعمیم، نوشتن ترکیب چندضلعی ویژه به شکل جدید، کاری آسان است. با ترکیب جملات kام و $(N-k)$ام در (۱)، یك مجموع با $[N/2]+1$ جمله که هر یك تصویر آفین یك چندضلعی منتظم است، به دست می‌آوریم که دراینجا $[N/2]$ به‌معنی جزء صحیح $N/2$ است. برای فضای d بعدی این مجموع به روشی که می‌آید، تعمیم می‌یابد. اگر X یك Nضلعی بسته در فضای d بعدی باشد X می‌تواند به شکل

$$X=\sum_{k=0}^{[N/2]} W_k$$

نوشته شود که دوباره هر چندضلعی مؤلفهٔ W_k یك تصویر آفین چندضلعی منتظم است. این مطلب با حالت مسطح تنها دراین نکته تفاوت داردکه لازم نیست همهٔ W_kها دریك صفحه واقع باشند.

برای رسیدن به این منظور می‌توان به قرار زیر عمل کرد. گیریم.

$$x(t)=\sum_{k=0}^{[N/2]} u_k \cos kt+v_k \sin kt$$

که نمادهای x، u، و v نمایانگر بردارهایی با d مؤلفهٔ حقیقی‌هستند. همواره می‌توان [۲] کمیتهای u_k و v_k را چنان انتخاب کرد که مقادیر $x(t)$ در N نقطهٔ مفروض $t_1, \ldots, t_N$ از قبل داده شده باشد، به خصوص به گونه‌ای که:

$$x\left(j\frac{2\pi}{N}\right)=x_j$$

که x_jها رئوس چندضلعی مفروض Xاند. پس X می‌تواند به شکل زیر نوشته شود،

$$X=\sum_{k=0}^{[N/2]} W_k$$

که W_k چندضلعیی است با رئوس

$$w_{kj}=u_k \cos kj\frac{2\pi}{N}+v_k \sin kj\frac{2\pi}{N}$$

چندضلعی W_k در صفحه‌ای قرار داردکه با u_k و v_k مشخص می‌شود، و در بیضی

$$w(t)=u_k \cos t+v_k \sin t$$

محاط است.

W_k را می‌توان به‌قسمی درنظر گرفت که مجموع دو N ضلعی از مرتبهٔ k یکی در جهت گردش عقربه‌های ساعت و دیگری در جهت خلاف گردش آنها باشد، همان‌طور که در بخش اول هم انجام شد. W_k را می‌توان متناوباً به عنوان تصویر مسطح یك N-ضلعی منتظم از مرتبهٔ k در نظر گرفت. در حالت کلی، یك چندضلعی d بعدی ممکن است به‌عنوان تصویر یك چندضلعی $(d+1)$ بعدی که همهٔ مؤلفه‌هایش منتظم‌اند، به روی d-فضا در نظر گرفته شود.

تبدیل واصل نقاط وسط T را می‌توان به همان روش قبل تجزیه کرد. تنها عضو جدید، بعد تالیهاست. (یك چندضلعی دارای بعد کوچکترین فضایی است که می‌تواند در

آن جای داده شود.) مثال زیر نشان می‌دهد که T می‌تواند بعد را کاهش دهد: گیریم X یك چندضلعی ۳ بعدی باشد که رئوس آن متناوباً در صفحات $z=1$ و $z=-1$ قرار دارند. اولین تالی X در صفحه x-y واقع است. اما، این روند تا جایی پیش می‌رود که کاهش بعد می‌تواند جلو برود. به‌کارگیری بیشتر T بعد را تغییر نمی‌دهد. موقعیت کلی چنین است.

همهٔ تالیهای X_1، X_2، و . . . از یك چندضلعی d بعدی X_0 بعد یکسانی دارند. ممکن‌است‌بعد X_1 از X_0 کمتر باشد، اما این رویداد فقط وقتی پیش می‌آیدکه X_0 تالی چندضلعی دیگری نباشد. به عبارت دیگر، فقط وقتی که X_0 یك مؤلفهٔ ناصفر از مرتبه $N/2$ داشته باشد.

برهان: فرض کنید X_n دارای بعد d و X_{n+1} دارای بعد $d'<d$ باشد. گیریم X_n و X_{n+1} تصاویر X_n و X_{n+1} به روی یك خط عمود بر d' فضای شامل X_{n+1} باشد. همهٔ رئوس X_{n+1} در یك تك نقطه p قرار دارند. از آنجاکه p باید واسطهٔ همهٔ اضلاع X_n باشد رئوس X_n باید متناوباً در دو نقطه p_1 و p_2 و با فواصل مساوی از p قرار داشته باشند. پس X_n، یك N ضلعی از مرتبه $N/2$ است، اگر X_n دارای تجزیهٔ

$$X_n=\sum_{k=0}^{[N/2]} W_k$$

باشد، X_n دارای تجزیهٔ

$$X_n=\sum_{k=0}^{[N/2]} W_k$$

خواهد بود. اما، در تجزیهٔ اخیر تنها $W_{N/2}$ می‌تواند ناصفر باشد. اگر $W_{N/2}$ ناصفر باشد، $W_{N/2}$ نیز چنین است. در این حالت X_n تالی چندضلعی دیگری نیست، پس $n=0$. این مطلب برهان راکامل می‌کند.

در نتیجه می‌توانیم بگوییم که تقریباً همهٔ چندضلعیهای نامسطح فاقد تالیهای مسطحند. اگر اولین تالی، نامسطح باشد بقیه نیز چنینند.

از سوی دیگر، همهٔ چندضلعیهای نامسطح دارای تالیهایی‌اندکه تا حد دلخواه (نسبت به اضلاعشان) اندکی با چندضلعیهای مسطح تفاوت‌دارند. و تقریباً همهٔ چندضلعیهای نامسطح دارای تالیهایی‌اندکه به‌طور دلخواه (نسبت به‌اضلاعشان) اندکی با چندضلعیهای محدب مسطح تفاوت دارند.

مراجع

1. Gantmacher, F. R., *Theory of Matrices*, vol. 1, Chelsea, New York, 1959. p. 72.
2. Poussin, Ch. de la Vallee, *Lecons sur L'approximation des Fonctions d'une variable reelle*, Gauthier-Villars Paris, 1929, 93.

ژرژ پولیا

دربارهٔ تصویرنگاری•

ترجمهٔ بهزاد منوچهریان

در تصویرنگاری، برای نوشتن "خورشید"، "ماه"، و "درخت"، به‌سادگی یك دایره، یك هلال، و یك تصویر ساده‌شدهٔ مرسوم از درخت می‌کشند. تصویرنگاری را بسرخی قبایل سرخپوست مورد استفاده قرار می‌داده‌اند و کاملا ممکن است که سیستمهای پیشرفته‌تر نوشتن درهمه‌جا تکامل‌یافتهٔ همین سیستم ابتدایی باشند؛ و بنابراین ممکن است تصویرنگاری منبع اصلی الفبای یونانی، لاتین، گوتیك وحروفی باشدکه امروزه به‌عنوان علائم ریاضی ازآنها استفاده می‌شود. امیدوارم‌روزی برسدکه تصویرنگاری بدوی نیزمورد استفاده درریاضیات بیابد. درآنچه‌که ذیلا می‌آید می‌خواهم نشان دهم چگونه روش توابع مولد، که درآنالیز ترکیبی‌مهم است، می‌تواند به‌طورکاملا شهودی از "سریهای شکلی" که جملاتشان تصاویر (ویا به‌بیان دقیقتر، متغیرهایی‌که با تصاویرنشان داده می‌شوند) هستند، نتیجه شود.

استفاده ازتصویرنگاری روی کاغذ یا تخته‌سیاه‌آسان است، اما برای چاپ، مشکل و گران است. بااینکه محتوای صفحات آتی را به‌دفعات به‌طورشفاهی ارائه‌کرده‌ام، درچاپ آن مردد بودم.

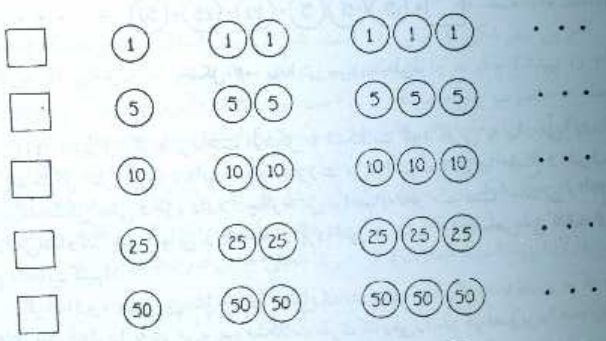
سعی من برآن است‌که یا به‌بحث کشیدن سه‌مثال‌خاص ایدهٔ کلی را تشریح کنم. اولین آنها، اگرچه از همه‌آسانتراست، بسیار وسیعترمطرح خواهد شد.

۱. به‌چندطریق‌می‌توان یك دلار را خردکرد؟ بیایید این سؤال را تعمیم دهیم. فرض کنید P_n نمایانگر تعداد روشهای پرداخت n سنت برحسب ۵ نوع سکه باشد: یك سنتی،

• Polya, G., "On picture writing," *Amer. Math. Monthly*, **49** (1956) 689-697.

پنج سنتی، ده سنتی، بیست‌وپنج سنتی، و نیم‌دلاری. "روش پرداخت" فقط وفقط وقتی‌مشخص می‌شودکه معلوم‌باشداز هر نوع سکه چندتا استفاده‌می‌شود. پس $P_1 = 1$، $P_5 = 2$، $P_{10} = 4$. مناسب‌است که‌قراردهیم $P_0 = 1$. درمسئله‌ای که ابتدا مطرح کردیم باید P_{100} را حساب کنیم. به‌طورکلی می‌خواهیم ماهیت P_n رابفهمیم وبالاخره شیوه‌ای برای‌محاسبهٔ آن بیابیم.

درنظرگرفتن امکانهای گوناگون می‌تواند بمما کمك کند. ممکن است اصلا از سکهٔ یك سنتی استفاده نکنیم، یا ۱ یك سنتی، یا ۲ یك سنتی، یا ۳ سه‌سنتی، یا... به‌کار بریم. این حالات به‌طورتصویری دراولین سطرشکل ۱ ترسیم شده‌اند: "هیچ سنت" با یك مربع، که ما را به یاد گیشهٔ خالی می‌اندازد، نمایش داده شده است. سطردوم نمایانگر این حالات است: استفاده از هیچ پنج سنتی؛ ۱ پنج سنتی؛ ۲ پنج سنتی، ... سه سطر بعد به‌ترتیب امکانات مختلف درنظرگرفتن سکه‌های ده‌سنتی، بیست‌وپنج سنتی، ونیم‌دلاری را نشان می‌دهند. ما باید یکی‌ازتصاویرسطراول را انتخاب کنیم، سپس یك تصویرازسطردوم، وهمینطور، با انتخاب تنها یك تصویرازهرسطروکنارهم قراردادن پنج تصویری‌که به‌این صورت انتخاب‌شده‌اند، یك طریقهٔ خردکردن را به‌دست‌آوریم. بنابراین‌شکل ۱ مستقیماً نمایانگر روشهای‌گوناگون درنظرگرفتن انواع سکه‌ها، وبه‌طور غیرمستقیم نمایانگر تمام طرق خردکردن دلار مطلوب ماست.



شکل ۱. مروری‌کامل بر روشهای انتخاب.

کشف اصلی درمشاهدهٔ این نکته‌است‌که درواقع، تصاویرشکل ۱ را براساس‌قوانین خاص جبری با یکدیگرترکیب می‌کنیم: اگر هرسطرشکل ۱ را به‌عنوان مجموع تصاویری که در آن قراردارند تصورکنیم و ضرب این پنج مجموع (نامتناهی) را درنظرگیریم، به اختصار اگراز شکل ۱ به‌شکل ۲ گذرکنیم وضرب را انجام دهیم، جملات‌این حاصلضرب حالات مختلف خردکردن پول راکه مطلوب ماست نشان می‌دهد. یك جملهٔ این حاصلضرب که درسطرآخرشکل ۲ نشان داده شده‌است نمونه‌ای است‌که نمایانگر یك‌روش‌خردکردن

یك دلار را نشان می‌دهد (پرداخت هیچ سکهٔ یك سنتی، سه پنج سنتی، یك ده سنتی، یك بیست وپنج سنتی، ویك نیم‌دلاری). مجموع تمام این‌گونه جملات یك سری نامتناهی از تصاویر است. هر تصویر یك طریقهٔ خردکردن پول را نشان می‌دهد، جملات مختلف طرق گوناگون خردکردن‌را نشان می‌دهند، وکل‌سری تصاویر، متناسباً سری‌شکلی نامیده‌می‌شود، که تمام طرق خردکردن را که باید برای محاسبهٔ P_n درنظر بگیریم، به‌دست می‌دهد.

$$(\square + (1) + (1)(1) + (1)(1)(1) + \cdots)\cdot$$
$$(\square + (5) + (5)(5) + (5)(5)(5) + \cdots)\cdot$$
$$(\square + (10) + (10)(10) + (10)(10)(10) + \cdots)\cdot$$
$$(\square + (25) + (25)(25) + (25)(25)(25) + \cdots)\cdot$$
$$(\square + (50) + (50)(50) + (50)(50)(50) + \cdots)\cdot$$
$$= \cdots + \square\cdot(5)(5)(5)\cdot(10)\cdot(25)\cdot(50) + \cdots$$

شکل ۲. پیدایش سری شکلی.

۱.۱ هنوز این‌گونه برداشت ازشکل ۲ مشکلات گوناگونی به بار می‌آورد. اول اینکه یك مشکل نظری وجود دارد: به‌چه صورت می‌توانیم تصاویررا جمع و ضرب کنیم؟ سپس، یك مشکل عملی وجود دارد: چگونه می‌توانیم به‌نحو مناسب جملاتی راکه مقدار P_n را می‌شمارند، یعنی آنهایی راکه مقدار پرداختی n سنت را مشخص می‌کنند، از سری شکلی انتخاب کنیم؟

اگر تصاویر، یعنی این نشانه‌های نوشتاری بدوی را همان‌گونه به‌کار بریم که حروف الفباهای پیشرفته‌تر را به‌کار می‌بریم، مشکلات نظری کنارمی‌روند: هرتصویر را همچون نمادی برای یك متغیر یا حرف نامعینی در نظر می‌گیریم.

برای فائق آمدن برمشکل دیگر به‌یك ایدهٔ اساسی دیگر احتیاج داریم: به‌جای‌هرمتغیر "تصویری" (یعنی متغیری که با یك تصویرنشان داده می‌شود) توانی ازیك متغیرجدید مثل x قرار می‌دهیم، که مقدار توان آن مجموع سکه‌هایی است که در متغیر تصویری نشان داده شده‌است. جزئیات این مطلب درشکل ۳ آمده است. سطر شکل ۳ تطابق خوبی را نشان می‌دهد: سه‌سکهٔ پنج سنتی کنارهم‌قرارگرفته را به‌عنوان یك تصویر، تصور کرده‌ایم. باتوجه به‌قاعدهٔ عمومی‌ای که وضع کردیم، باید برای این متغیر x^{15} را اختیار کنیم؛ بااین‌حال اگر به‌جای هرسکه توان مناسب x آن‌را قرار دهیم و حاصلضرب توانهای کنار هم را درنظر

$$(1) = x,\ (5) = x^5,\ (10) = x^{10},\ (25) = x^{25},\ (50) = x^{50},$$

$$\square = x^0 = 1,$$

$$(5)(5)(5) = x^5x^5x^5 = x^{15},$$

$$\square\cdot(5)(5)(5)\cdot(10)\cdot(25)\cdot(50) = x^{100}$$

شکل ۳. توانهای یك متغیر که جایگزین متغیرهایی شده‌اند که با تصویرنشان داده می‌شوند.

بگیریم، باز به‌همان نتیجهٔ x^{15} می‌رسیم.

آخرین سطرشکل ۳ خیلی مهم است. این سطر بایك‌مثال نشان می‌دهدکه (سطر آخر شکل ۲ را ببینید) چگونه جایگذاری مزبور روی جملهٔ عمومی سری شکلی اثر می‌گذارد. این جمله حاصلضرب پنج متغیر تصویری است. بدازای هرعامل، توانی از x جایگزین می‌شودکه نمای‌آن برابرمقدارآن عامل (برحسب‌سنت) است: نمای حاصلضرب ازجمع ۵نما حاصل می‌شودکه همان مجموع مقادیرعاملهاست. وبه‌این‌ترتیب جایگذاری مذکور درشکل ۳ هرجمله ازسری شکلی را به‌یك توان x^n مبدل می‌کند. ازآنجاکه سری شکلی هرطریق خردکردن پول را تنها یك بار نشان می‌دهد، نمای n دقیقاً P_n بار ظاهر می‌شود، یعنی (پس‌از بازآرایی مناسب جملات) کل سری شکلی به‌این صورت درمی‌آید

$$P_0 + P_1x + P_2x^2 + \cdots + P_nx^n + \cdots \qquad (1)$$

در این سری ضریب x^n تعداد طرق گوناگون خردکردن n سنت را می‌شمارد، و بنابراین (۱) به‌تناسب، سری شمارنده نامیده می‌شود.

جایگذاری مذکور در شکل ۳،اولین سطر شکل ۲ را به یك سری هندسی مبدل می‌کند

$$1 + x + x^2 + \cdots = (1-x)^{-1} \qquad (2)$$

درواقع، این جایگذاری هرکدام از پنج سطراول شکل ۲ را به‌یك سری هندسی تبدیل می‌کند و معادلهٔ نشان داده‌شده در شکل به این صورت درمی‌آید:

$$(1-x)^{-1}(1-x^{5})^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1}(1-x^{50})^{-1} \qquad (3)$$
$$= P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_n x^n + \dots$$

اکنون ما در بیان مجموع سری شمارنده موفق شده‌ایم. این مجموع معمولاً تابع مولد نامیده می‌شود؛ درواقع، این تابع که برحسب توانهای x بسط داده شده است، اعداد P_0، P_1، ...، P_n، ... را تولید می‌کند که معنای ترکیبیاتی آنها نقطهٔ آغاز کار ما بود.

۲.۱ یك مسئلهٔ ترکیبیاتی را به‌مسئله‌ای از نوع دیگر تحویل کرده‌ایم: بسط یك تابع داده شده از x برحسب توانهای x. به ویژه، مسئلهٔ اولیمان دربارهٔ خردکردن یك دلار را به‌مسئلهٔ محاسبهٔ ضریب x^{100} دربسط سمت چپ معادلهٔ (۳) تحویل کرده‌ایم. هدف اصلی‌ما این بود که نشان دهیم چگونه تصویرنگاری می‌تواند برای این تحویل کردن مورد استفاده قرارگیرد. اما باز بگذارید مختصری هم به محاسبات عددی اشاره کنیم.

سمت چپ (۳) حاصلضرب پنج عامل است. بسط مشهور عامل اول در معادلهٔ (۲) نشان داده شده‌است. هربار با اضافه‌کردن یك به‌یك عوامل‌متوالی پیش‌می‌رویم. فرض‌کنید مثلاً بسط حاصلضرب دوعامل اول را به‌دست آورده‌ایم:

$$(1-x)^{-1}(1-x^{5})^{-1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

و می‌خواهیم‌کار را برای سه عامل انجام دهیم:

$$(1-x)^{-1}(1-x^{5})^{-1}(1-x^{10})^{-1} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

نتیجه می‌شود

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)(1-x^{10}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

با مقایسهٔ ضریب x^n در دوطرف، به‌دست می‌آید

$$b_n = b_{n-10} + a_n \qquad (4)$$

(هرگاه $m<0$ قرار دهید $b_m = 0$). به‌کمك معادلهٔ (۴)، اگر a_nها معلوم باشند می‌توانیم به‌طور بازگشتی ضرایب b_n را حساب کنیم، وسری (۳) می‌تواند در چهار مرحلهٔ متوالی که هریك شبیه همان است‌که در بالا بحث کردیم، از معادلهٔ (۲) به‌دست آید.

درزیر جدولی که محاسبهٔ P_{50} را نشان می‌دهد آمده‌است. این جدول ضریب x^n را برای برخی مقادیر n درپنج بسط گوناگون نشان می‌دهد. دربالای هرستون مقدار n آمده است و در ابتدای هرسطر آخرین عامل به حساب می‌آید. درصورت محاسبه، آخرین سطر مقدار P_n را به‌ازای $n = 0, 5, 10, \dots, 50$، نشان می‌دهد. جدول تنها گامهایی راکه برای محاسبهٔ جواب مسئلهٔ اولیه موردنیازاست دربردارد، ونتیجهٔ $P_{50} = 50$ را به‌دست‌می‌دهد، یعنی ۵۰ سنت را دقیقاً به ۵۰ طریق متفاوت می‌توان خردکرد. بقیهٔ مطلب را به‌خواننده

واگذار می‌کنیم تا محاسبه را ادامه دهد وجواب $P_{100} = 292$ را به‌دست آورد. همچنین خواننده می‌تواند بکوشد تا این روش محاسبه را مستقیما و بدون توسل به سری شمارنده توجیه کند.

جدول محاسبهٔ P_{50}

$n=0$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$(1-x)^{-1}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$(1-x^5)^{-1}$
1	2	4	6	9	12	16		25		36	$(1-x^{10})^{-1}$
1					13					49	$(1-x^{25})^{-1}$
1										50	$(1-x^{50})^{-1}$

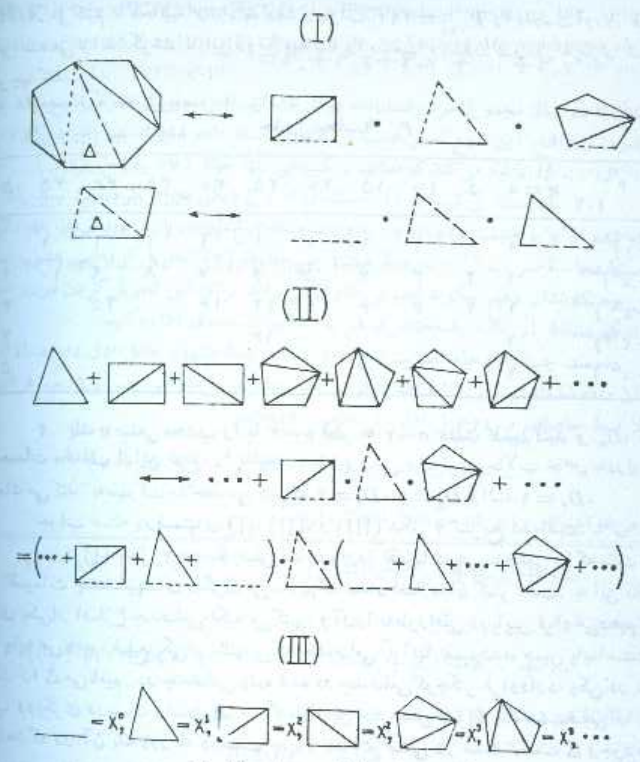
۲. یك n ضلعی محدب را با $n-3$ قطر به $n-2$ مثلث تقسیم‌کنید و D_n، تعداد تقسیمات مختلف ازاین نوع، را بیابید. ابتدا بررسی ساده‌ترین حالات خاص به‌درك مسئله کمك می‌کند. به‌سهولت ملاحظه می‌کنیم که $D_4 = 2$، $D_5 = 5$ والبته $D_3 = 1$.

جواب مسئله درقسمتهای (I)، (II)، و (III) شکل ۴ تشریح شده‌است.

قسمت (I) شکل ۴ به‌ایدهٔ اصلی اشاره دارد: تقسیمات هرچندضلعی راکه مثلث نباشد از تقسیمات چندضلعیهای دیگری می‌سازیم که تعداد اضلاعشان کمتر است. به این منظور، روی یکی‌از اضلاع چندضلعی تکیه می‌کنیم، وآن‌را به‌طورافقی درپایین قرار می‌دهیم وآن را پایه می‌نامیم. ضلع یکی‌از مثلثهایی که چند ضلعی به‌آنها تقسیم‌شده، همین پایه‌است؛ این مثلث را Δ می‌نامیم. در چندضلعی داده شده دو چندضلعی کوچکتر قراردارد، یکی در سمت چپ ودیگری درسمت راست Δ. مثلاً، بالاترین سطرشکل ۴ (I) یك هشت‌ضلعی را نشان می‌دهد که در آن یك ذوزنقه درسمت چپ و یك پنج ضلعی در سمت راست Δ وجود دارد که به‌نحو مناسبی جدا شده‌اند. همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، می‌توانیم با شروع از Δ وقراردادن دوچندضلعی ازقبل تقسیم شده به‌طور مناسب در دوطرف آن، تقسیم بعدی هشت‌ضلعی را تولیدکنیم، و می‌توانیم امید داشته‌باشیم که‌این شیوهٔ ساختن تقسیمات سودمندباشد.

با بررسی پیامدهای این ایده، امکان دارد به‌یك مشکل برخورد کنیم: حالتهایی شبیه آنچه در سطردوم شکل ۴ (I) نشان داده شده، وجود داردکه برای آنها چندضلعی جانبی روی یکی‌از اضلاع Δ وجود ندارد. هنوز می‌توانیم این مشکل را برطرف کنیم: بله، چند ضلعی جانبی روی‌آن ضلع Δ (در حالت نشان داده شده در شکل، ضلع سمت چپ) وجود دارد، اما تبهگون[1] است، چون به یك پاره‌خط تغییرشکل داده‌است.

1. degenerate



شکل ۴. ایدهٔ اصلی، سریهای شکلی، گذر.

قسمت (II) شکل ۴ نحوهٔ پیدایش سریهای شکلی را نشان می‌دهد. این سری، که در سطر اول آمده است، مجموع تمام تقسیمات ممکن چندضلعیهای با ۳، ۴، ۵ و... ضلع است. طبق قسمت (I) (همان‌گونه که درسطر بعد یادآوری می‌شود) هر جملهٔ سری شکلی می‌تواند با قراردادن دو چندضلعی از قبل تقسیم‌شده روی مثلث Δ، یکی از چپ و یکی از راست (که یکی یا هردوی آنها ممکن است تبهگون باشند)، تولید شود. پس همان‌طور که سطر بعد (آخرین سطر شکل ۴ قسمت (II)) نشان می‌دهد، جملات سری شکلی در تناظر یك به‌یك با بسط حاصلضرب سه‌عامل‌اند: عامل میانی صرفاً یك مثلث است. دوعامل دیگر همان سری شکلی هستند که یك پاره‌خط به آن افزوده شده‌است.

۱.۲ قسمت (III) شکل ۴ به‌گذر از سری شکلی به سری شمارنده اشاره دارد. با دنبال‌کردن الگویی که درشکل ۳ و بخش ۱.۱ وضع شده، به‌جای هر تقسیم‌بندی (اگر دقیقتر بگوییم، به‌جای متغیری که توسط آن تقسیم‌بندی نمایش داده شده) توانی را از x می‌گذاریم که نمای آن تعداد مثلثهای تقسیم‌بندی است. این جایگذاری که درشکل ۴ (III) نشان داده شده‌است، سری شکلی را به

$$D_2x+D_3x^2+D_5x^3+\dots+D_nx^{n-2}+\dots=E(x) \qquad (5)$$

مبدل می‌کند که در آن $E(x)$ همان سری شمارنده است. رابطه‌ای که درشکل ۴ (II) نشان داده‌شده، به این رابطه تبدیل می‌شود

$$E(x)=x[1+E(x)]^2 \qquad (6)$$

این یك معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $E(x)$ است که جواب آن عبارت است از

$$E(x)=D_2x+D_3x^2+D_5x^3+\dots+D_nx^{n-2}+\dots \qquad (7)$$

$$=\frac{1-2x-(1-4x)^{1/2}}{2x}=x+2x^2+\dots$$

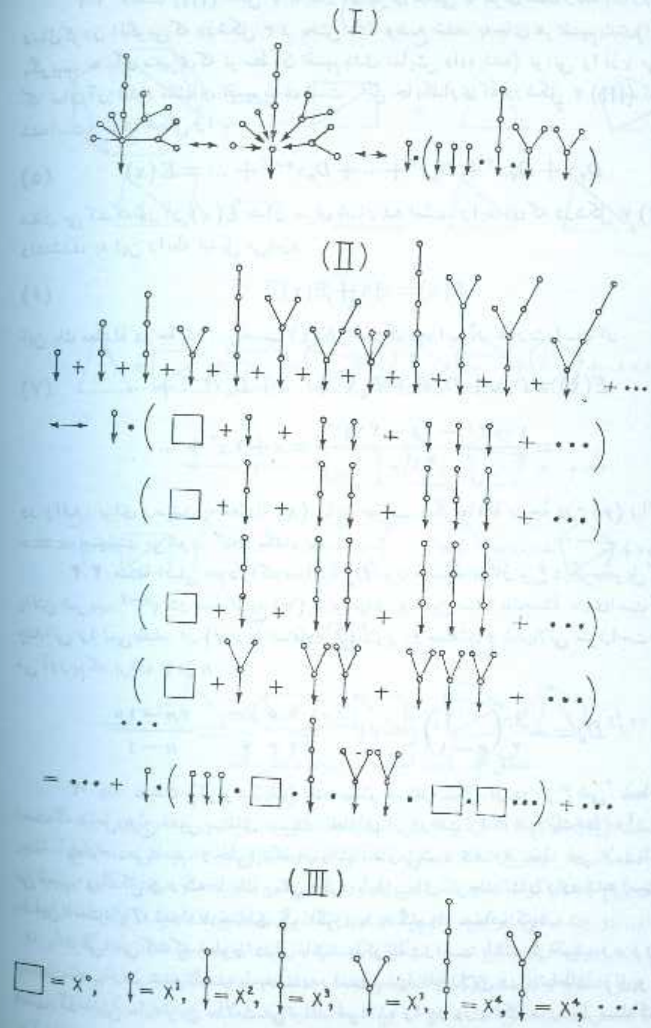
در واقع، برای رسیدن به معادلهٔ (۸)، باید جواب دیگرمعادلهٔ درجهٔ دوم (۶) راکه برای $x=0$ بینهایت می‌شود، کنار بگذاریم.

۲.۲ مسئلهٔ اصلی خودرا که محاسبهٔ D_n بود به‌مسئله‌ای از نوع دیگر تحویل کرده‌ایم: یافتن ضریب x^{n-2} در بسط تابع (۷) به‌توانهای x. این مسئله یك‌مسئلهٔ عادی‌است که بحث چندانی را نمی‌طلبد. از (۷)، با استفاده ازدستور دوجمله‌ای و تبدیلاتی سرراست به‌دست می‌آوریم که برای $n\geqslant 3$

$$D_n=-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n-1}(-4)^{n-1}=\frac{2}{2}\,\frac{6}{3}\,\frac{10}{4}\cdots\frac{4n-10}{n-1}$$

۳. یك درخت (توپولوژیك) یك سیستم همبند متشکل از دو نوع شیء خط و نقطه است که شامل هیچ مسیر بسته‌ای نیست. نقطه‌ای از درخت راکه تنها یك‌خط به‌آن می‌رسد ریشهٔ آن‌درخت‌می‌نامیم، وخطی‌راکه از ریشه آغازمی‌شود تنه. وهرنقطه غیر از ریشه راگره می‌نامیم. درشکل ۵ ریشه با یك پیکان وگره با دایره‌ای کوچك نشان داده شده است. مسئلهٔ ما این است: T_n، تعداد درختهای گوناگون با n گره (۱، حساب کنید.

فرقی نمی‌کند که خطوط دراز باشند یاکوتاه وراست باشند یا خمیده و برروی کاغذ به‌سمت چپ رسم شده باشند یا به‌سمت راست؛ تنها اختلاف درارتباطات (توپولوژیك) است. آزمایش ساده‌ترین حالات می‌تواند خواننده را در درك نکتهٔ موردنظرمسئله کمك کند؛ به‌آسانی دیده می‌شود که $T_1=1$، $T_2=1$، $T_3=2$، $T_4=4$، و $T_5=9$.



شکل ۵. ایدهٔ اصلی، سریهای شکلی، گذر.

راه حل در سه قسمت شکل ۵ که رده‌بندی کلی آن بسیار شبیه ترکیب شکل ۴ است، نشان داده شده است. خواننده باید سعی کند تنها با نگاه کردن به شکل ۵ و مشاهدهٔ شباهتهای آشکار آن با شکلهای قبل، راه حل را درک کند؛ خواننده همچنین می‌تواند به تذکرات مختصر زیر رجوع کند.

ساده‌ترین درخت از ریشه، تنه و تنها یک گره تشکیل شده است. ایدهٔ اصلی، ساختن درختهای دیگر از درختان با گرههای کمتر است. برای این منظور، همان‌طور که در شکل ۵ (I) نشان می‌دهد، "شاخه‌های اصلی" هر درخت را به عنوان درختی (با گرههای کمتر) تصور می‌کنیم که به نقطهٔ انتهایی بالایی (تنها گره) تنه افزوده شده‌اند. بنابراین، همان گونه که باز هم شکل ۵ (I) نشان می‌دهد، می‌توانیم هر درخت را به عنوان جایگذاشت ساده‌ترین درخت و چندتصویر، که هر یک از یک یا دو و یا تعدادی بیشتر درخت یکسان، تشکیل شده‌اند، تصور کنیم؛ به شباهت این با آخرین سطر شکل ۲ توجه کنید.

قسمت (II) شکل ۵ سری شکلی را نمایش می‌دهد: مجموع نامتناهی تمام درختهای گوناگون. روند تکوین این سری شبیه به سری شکلی شکل ۲، ولی پیچیده‌تر از آن است. در شکل ۲ حاصلضرب پنج سری "درواقع هندسی" را می‌بینیم؛ اما در شکل ۵ حاصلضرب یک سری نامتناهی "درواقع هندسی" را، که در یک جملهٔ اولیه (ساده‌ترین درخت، تنهٔ مشترک تمام درختان) ضرب شده‌اند، مشاهده می‌کنیم.

۱.۳ قسمت (III) شکل ۵ نشان دهندهٔ جایگذاری است که سری شکلی را به سری شمارنده مبدل می‌کند. با این جایگذاری هر سری "در واقع هندسی" که در شکل ۵ (II) به‌وجود آمده بود، به سری هندسی واقعی که مجموعش معلوم است تبدیل می‌شود، و کل روابطی که توسط شکل ۵ (II) نمایش داده شده‌اند به رابطهٔ مشهور کیلی مبدل می‌شود:

$$T_1x+T_2x^2+\cdots+T_nx^n+\cdots \qquad (8)$$
$$=x(1-x)^{-T_1}(1-x^2)^{-T_2}\cdots(1-x^n)^{-T_n}\cdots$$

۲.۳ با بسط سمت راست معادلهٔ (۸) به توانهای x و مقایسهٔ ضرایب x^n در دو طرف، یک فرمول بازگشتی به‌دست می‌آوریم که عبارتی برحسب $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ برای T_n $(n \geqslant 2)$ است. لازم است خواننده عملیات مربوط به حالات اول را انجام دهد و با محاسبات تحلیلی مقادیر T_n را برای $n \leqslant 5$، که قبلاً با تجربیات هندسی به‌دست آورده بود، اثبات کند.

مراجع

1. Cayley, A., *Collected Mathematical Papers*, 13 vol, Cambridge, 1889-1898.

2. Konig, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig, 1936.
3. Polya, G., Szegö, G, *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis*, 2 vol, Berlin, 1925.
4. Polya, G., *Acta Mathematica*, **68** (1937), 145-254.
5. Polya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning*, 2 vol, Princeton, 1954.

فون نویمان تنها شاگردی است که تا به‌حال مرا تهدید کرده است. او آدم بسیار سریع‌الانتقالی بود. زمانی در زوریخ برای شاگردان زبده سمیناری برپا شده بود که در آن من درس می‌دادم، و فون‌نویمان هم در آن شرکت می‌کرد. من قضیهٔ خاصی را بیان کردم و بعد گفتم که این قضیه تا به‌حال ثابت نشده و ممکن است اثباتش خیلی مشکل باشد. فون‌نویمان چیزی نگفت اما پنج دقیقه بعد دستش را بالا برد. وقتی به او اجازهٔ صحبت دادم، پای تخته سیاه آمد و اثبات قضیه را نوشت. از آن موقع به‌بعد من از فون‌نویمان می‌ترسیدم.

ژرژ پولیا

پرویز شهریاری

به درک شهودی در ریاضیات اهمیت بدهیم*

۱. ورود به مطلب

بدون معرفت شهودی، نه می‌توان درس را به‌درستی فهمید و نه می‌توان از دانش و آگاهی خود، درموارد لازم استفاده کرد؛ و تکامل معرفت شهودی، که به‌دشواری قابل تعریف است، تنها از راه توجیه و تجزیه و تحلیل مفهومها، گزاره‌ها، و روشها میسر است.

هانری پوانکاره حق داشت که می‌گفت منطق نمی‌تواند تصوری کامل دربارهٔ مجموعهٔ دانشها به‌ما بدهد. این تصور تنها از راه معرفت شهودی به‌دست می‌آید، و این داوری برای هرشاخه‌ای از دانش درست است. بدون معرفت شهودی، دانش ما شکلی ظاهری و صوری دارد و به "فرهنگی کوچك" می‌ماند که شامل برخی آگاهیهای عمومی است و به "ماهیت" و "درون" موضوعات توجهی ندارد. معرفت شهودی آن است که آدمی "درون وحال را بنگرد" ونه "برون وقال را".[1]

پیش از خود درسهای ریاضی، روشهای آن ونقشی که معلم در تنظیم وتوجیه کار خود به‌عهده دارد، می‌تواند موجب تکامل معرفت شهودی در دانش‌آموزان شود؛ و این کار معلم به‌ناچار باید متکی برمنابعی باشد که با کمال تأسف به‌ندرت می‌توان نشانی از آنها درزبان فارسی پیدا کرد. دراین مقاله تاجایی که مقدور است کوشش می‌کنیم که به‌این بحث بپردازیم، وبا مثالهایی آن را روشن کنیم.

۲. پیش آگاهی

یکی ازگونه‌های ظهور معرفت شهودی در ریاضیات، این است که دانش‌آموز مفهومها و

* هیأت تحریریهٔ جنگ ریاضی دانشجو ازآقای پرویز شهریاری که باوجود مشغلهٔ فراوان قبول زحمت کرده، مقالهٔ حاضر را نوشته‌اند، صمیمانه تشکر می‌کند.

۱. ما درون را بنگریم وحال را نی برون را بنگریم وقال را
(مولوی)

گزاره‌های ریاضی را، پیش از تعریف دقیق و استنتاجهای قیاسی، چگونه "می‌بیند"! این "بینش" می‌تواند براساس آگاهیهای او در این شاخهٔ ریاضیات باشد (پیش‌آگاهی)، و یا درنتیجهٔ این آگاهیها ظاهر شود (آگاهی بعدی).

پیش‌آگاهی، درواقع برتمامی ریاضیات مدرسه‌ای تکیه دارد، زیرا (به‌جز درموارد بسیار نادر) دانش‌آموزان تنها وقتی تعریف دقیق و رسمی مفهومی را می‌فهمند که بتوانند درکی شهودی از آن داشته باشند. به‌همین مناسبت، وبه‌خصوص وقتی که با مفهومها و گزاره‌های مهم سروکار داریم، باید از درك شهودی دانش‌آموزان، چه برای مفهومی که مطرح شده است و چه برای مفهومهای نزدیك به آن، یاری گرفت. برای این منظور، قبل از طرح رسمی تعریف باید درحد امکان از اصطلاحهایی که به درس مربوط می‌شود (خط، شکل، جسم، طول، سطح، حجم، مماس، تحدب، برابری تقریبی و...) صحبت کرد و معنای آنها را به‌صورتی عینی وملموس توضیح داد. سپس به‌تدریج به آگاهیهای لازم (مساحت سطح بزرگتر است ازمساحت بخشی از آن، و برابر است با مجموع همهٔ بخشهایی که شکل مورد نظر را تشکیل داده‌اند و...) افزود و با طرح تمرینهایی، دانش‌آموزان را با موضوع اصلی آشنا کرد.

۳. آگاهی بعدی

تکامل معرفت شهودی، پیش از همه براساس تشریح موضوع به‌کمك مثالها، مسئله‌ها و تصویرهاست. ضمن این "تجزیه وتحلیل"، باید به صورتی کوتاه از آن مفهومها، اندیشه‌ها وبا آگاهیهایی نام برد که برای جلب توجه دانش‌آموز لازم به‌نظر می‌رسد: "دراین مسئله، دومجهول وجود دارد. بنابراین به دو معادله نیاز داریم؛ چون تعداد معادله‌ها باید برابر تعداد مجهولها باشد"؛ "به‌این‌نکته توجه کنید که معادله $f(x)=0$، دربازهٔ مفروض، دست کم یك‌ریشه دارد، وچون مقدار $f(x)$ در دو انتهای بازه، علامتهای مختلفی دارد و نمودار آن خمی به هم پیوسته است، به ناچار باید درنقطه‌ای از آن بازه محورطول را قطع کند"؛ "رابطهٔ حاصل‌را می‌توان به‌طور مشروط به‌صورت $1/\infty=0$ نوشت. این‌رابطه درواقع معرف این حقیقت است که اگر واحد را برعددی بسیار بزرگ تقسیم کنیم، عددی بسیار کوچك به‌دست می‌آوریم که می‌توانیم آن را تقریباً برابر صفر بدانیم"؛ و از این دست مثالها.

ضمن تکامل معرفت شهودی، باید به تدریج و به‌طور منظم "عدم دقت" را در مورد مفهومهای اصلی روشن کرد. در واقع، هرمفهوم دقیق ریاضی از نظر تاریخی از همین "گذرگاههای تنگ وپر پیچ وخم وآسفالت نشده" گذشته است. مثلا مفهوم مشتق را درنظر بگیریم. این مفهوم درکاربردهای خود به‌عنوان سرعت تغییر یك کمیت نسبت به کمیت دیگر، یا به‌عنوان شیب (ضریب زاویه) عنصری از نمودار تابع، ظاهر می‌شود؛ و تعریف رسمی مشتق، به عنوان حد نسبت نموها، چیزی جز "دقیق کردن" مضمون همین مفهوم "پرداخت نشده" نیست. به‌این ترتیب، چه در تعریفها وچه بعد از آن، باید مضمون اصلی را شکافت و در همه جا برمعرفت شهودی دانش‌آموز تکیه کرد.

هنوز بعضیها گمان می‌کنند که اینکه دانش‌آموزی بتواند مثلا ریشه‌های دقیق معادله‌ای رابه‌دست آورد، به‌معنای ناتوانی او درحل مسئله است، درحالی که باید به‌دانش‌آموز امکان داد تا ریشه‌های تقریبی را حدس بزند و با روش آزمایش وخطا به‌تقریب لازم برسد. اگر شرایطی پیدا شود که دانش‌آموزان بتوانند از سالهای دوره راهنمایی تحصیلی با ماشینهای حساب کوچك کار کنند، فرصت پر ارزشی برای این کار به‌دست می‌آید.

۴. ارزیابی موقعیت

روشنترین و مهمترین شکل بروز معرفت شهودی در ریاضیات، عبارت است از توانایی برخورد با موضوعهای تازه وموقعیتهای ناآشنا؛ قدرت پیش‌بینی نتیجه‌های درست وانتخاب مسیری که بدین نتیجه‌ها منجر می‌شود، و همچنین امکان تشخیص نتیجه‌گیریهای نادرست. البته چنین معرفت شهودی پرباری باید برمفهومها وگزاره‌هایی از ریاضیات تکیه داشته باشد که در بند ۲ و ۳ دربارهٔ آنها گفتگو کردیم.

همه‌جا، چه درمسئله‌های نظری و چه درمسئله‌های عملی، ارزیابی درست موقعیت را باید بخشی ازحل مسئله دانست، و دانش‌آموزان را عادت داد تا توانایی پیش‌بینی مسیر راه‌حل، و درموارد لازم تخمین جواب، را داشته باشند. پیش‌ازحل هرمسئله، باید موقعیت آن را کاملا روشن کرد و با رسم شکلها و مقایسهٔ مسئله با مسئله‌های مشابهی که قبلا حل شده است، تصوری روشن دربارهٔ آن به‌وجود آورد. برای بالابردن قدرت تصور وشهود دانش‌آموزان بایدآنها را واداشت تا پاسخ مسئله را پیش‌ازحل کامل آن به‌صورت یك نابرابری ("بیشتر از دوساعت")، یا یك نابرابری دوطرفه ("از دوتا پنج ساعت")، یا تخمین مقدار ("در حدود سه ساعت") حدس بزنند. طبیعی است که ارزیابی پاسخ پیش از حل مسئله، برای دانش‌آموزان مختلف متفاوت خواهد بود، ولی بعد از حل مسئله و پیداکردن جواب دقیق، روشن می‌شود که حدس چه کسی به‌جواب نزدیکتر بوده‌است وچه کسی دچار اشتباه شده است؛ وهمین امر موجب تکامل درك شهودی آنها می‌شود.

یك مثال ساده. فرض کنید این مسئله مطرح باشد: "شیر اول حوض را در ۲ ساعت وشیر دوم حوض را در ۴ ساعت پرمی‌کند. اگر هر دوشیر باز باشند، حوض در چه مدتی پر می‌شود؟" ابتدا روشن می‌کنیم که شیر اول قویتر است (ومی‌توان آن را مثلا در شکل با لوله‌ای با قطر بزرگ نشان داد). بعد توضیح می‌دهیم که شیر دوم هم به‌کمك شیر اول آمده‌است؛ بنابراین زمان لازم کمتر از ۲ ساعت می‌شود. باالدکی توجه می‌توان مرز پایینی جواب را پیداکرد: اگر شیر دوم قدرت شیر اول را داشت، آن وقت زمان لازم برای پر شدن حوض نصف می‌شد. بنابراین، با توجه به ضعیفتر بودن شیر دوم، متوجه می‌شویم که زمان لازم برای پر کردن حوض بیشتر از یك ساعت است. به‌این ترتیب پیش ازحل مسئله محدوده‌هایی برای جواب پیداکرده‌ایم: بین ۱ ساعت و ۲ ساعت. وقتی که دانش‌آموزعادت کند پیش از حل مسئله نوعی ارزیابی از جواب به عمل آورد، علاوه برارزشهای دیگر، معیاری دراختیار او قرار می‌گیرد تا به‌کمك آن بتواند بعدازحل دقیق مسئله جواب را کنترل کند.

زمانی که به خاطر این‌گونه بحثها صرف می‌شود، به هدر نمی‌رود. اگر دانش‌آموز این قدرت را پیدا کند که حتی برای مسئله‌های بسیار سادهٔ عملی، مدلی ریاضی طرح کند، برای او بسیار با ارزشتر از آن است که بتواند به‌صورت خودکار مسئله‌های رسمی ریاضی را با توجه به‌فرمولهایی که یادگرفته است، حل کند.

۵. برآورد و آزمایش

ارزیابی موقعیت و پیش‌بینی جواب، بایدبر "برآوردکردن" تکیه داشته‌باشد. برآورد اغلب ذهنی و شفاهی است و بنابراین باید دانش‌آموزان را به محاسبهٔ ذهنی عادت داد. حدس تقریبی جواب می‌تواند با یك یا دو رقم درست و یا حتی درحدودآن باشد.

مثالی بیاوریم. فرض‌کنید بخواهیم حاصل این مقدار را برآوردکنیم:

$$a=\frac{۲٫۳۷۱\times ۷۲۲}{۵۱٫۶+۰٫۰۹۷۶\pi}$$

صورت‌کسر به تقریب برابر است با

$$۲٫۴\times ۷\times ۱۰^{۲}\approx ۱۷\times ۱۰^{۲}$$

درمخرج، جملهٔ دوم نسبت به‌جملهٔ اول مقدار کوچکی است، وبنابراین می‌توان آن‌را نادیده گرفت به‌این ترتیب

$$a\approx\frac{۱۷\times ۱۰^{۲}}{۵\times ۱۰}\approx ۳۴$$

یادآوری می‌کنیم که اگر مقدار a را به‌کمك ماشین حساب محاسبه‌کنیم، برابر با ۳۲٫۹ می‌شود.

برای تقویت قدرت محاسبهٔ ذهنی و برآورد مقدارهای عددی، می‌توان از مسئله‌های مربوط به‌محاسبهٔ بخش درست ریشه‌ها و الگاریتمها استفاده‌کرد؛ ویا پرسشهایی ازاین قبیل: "وزن‌کرهٔ فلزی به قطر یك دسی مترچقدر است؟"؛ "چند نفر روی زمین فوتبال می‌توان جادادد؟"؛ "در شهر تهران چند مدرسه‌وجود دارد؟"

هرکسی برای خود قانونی در ذهن پیدا می‌کند، ولی در اینجا چند قانون ساده را برای‌گردکردن عددها وبازکردن مسیر برآورد، می‌آوریم. اگرموقع محاسبهٔ مقدارعددها، یکی از عاملهای ضرب را بزرگ گرده‌ایید، عاملی دیگر راکوچك‌کنید. مثلا برای ضرب ۲٫۵ × ۳٫۵، آن‌را به‌صورت $۸\doteq ۲\times ۴$ یا $۹=۳\times ۳$ درنظربگیرید، نه $۶=۲\times ۳$ یا $۱۲=۳\times ۴$ (مقدار دقیق آن برابر ۸٫۷۵ است). درجمع هم از همین قاعده استفاده کنید. درتفریق و تقسیم‌گردکردن را باید به‌یك نسبت انجام داد: یا هردو راکوچك‌کرد و یا هردو را بزرگ. افزون براین، باید توجه داشت که‌گاهی باکم‌کردن مقدارهای تقریبی

ممکن است خیلی از واقعیت دورشویم. مثلا، اگر به این ترتیب براوردکنیم

$$\frac{۱}{۲٫۱۱\times ۲٫۸۷-۵٫۱۷\times ۱٫۲۲}\approx\frac{۱}{۲\times ۳-۵\times ۱}=۱$$

دچار اشتباهی جدی شده‌ایم (کافی است در جملهٔ دوم مخرج، ۱٫۲۲ را با ۱٫۲، ونه ۱، عوض‌کنیم تا اشتباه روشن شود). جواب این‌کسر بعد ازگردکردن برابر ۴ — است.

درمحاسبه‌های تقریبی به‌کمك ماشین حساب هم باید ازهمین روش استفاده‌کرد. بعد ازگردکردن عددها، محاسبه‌ها را با ماشین حساب انجام می‌دهیم، سپس‌گردکردن را روی رقم بعدی عددها درنظرمی‌گیریم؛ باید جوابها نزدیك به‌هم باشند، درغیر این صورت باید آزمایش را تکرارکنیم.

باطرح اینگونه مثالها وپی‌گیری درکار، می‌توان‌قدرت معرفت شهودی دانش‌آموزان را بالا برد. این توانایی سرانجام به‌مرحله‌ای می‌رسدکه دانش‌آموز بتواند باحذف عامل‌های ناچیزجواب را حدس بزند وحتی اشتباه تقریب خود را ارزیابی‌کند.

به چند مثال توجه کنید. در رمان فروشندهٔ باد اثر آلکساندر رمانوویچ بلیایف (۱۸۸۴–۱۹۴۲)، این قطعه‌آمده است: "راوی بایك نفردیگر از انباری بازدید می‌کندکه درآن‌جاگلوله‌هایی‌گذاشته شده است. اولی می‌کوشدگلوله‌ای‌را بلندکند، ولی نمی‌تواند. دومی می‌گوید این عجیب نیست،حتی‌هراسبی نمی‌تواند چنین باری را تکان دهد. آخر این گلوله به‌اندازهٔ یك‌کیلومترمکعب هواوزن دارد."کسی‌که تاحدی توانایی برآورد مقدارها را داشته‌باشد،نادرستی این‌تصور دربارهٔ اسب را درمی‌یابد. یك‌کیلومترمکعب هوا به‌اندازهٔ

$$۱٫۳\times(۱۰^{۳})^{۳}\ \mathrm{kg}=۱٫۳\times ۱۰^{۶}\ \mathrm{ton}$$

وزن دارد. ظاهراً نویسنده‌کتاب بایدکیلومترمکعب را برابر $۱۰^{۳}$ مترمکعب‌گرفته باشد.

مثال دیگر. این چیستان مشهور راکه "ما وما و نصف ما و نصفه‌ای ازنصف ما،گرتو هم با ما شوی، ماجملگی صد می‌شویم" می‌توان با معادله حل‌کرد. ولی‌راه دیگری‌هم برای تقویت نیروی معرفت شهودی وجود دارد: تعداد غازها مضربی از ۴ وعددی دورقمی است. ۴۰ را امتحان می‌کنیم:

$$۴۰+۴۰+۲۰+۱۰+۱=۱۱۱$$

۳۲ را امتحان می‌کنیم:

$$۳۲+۳۲+۱۶+۸+۱=۸۹$$

تنها $n=۳۶$ می‌ماند وآزمایش درستی جواب را نشان می‌دهد.

مثال آخر. فرض‌کنیم $a=\sqrt[۳]{۱۷۵۷۶}$، و می‌خواهیم بدانیم‌که a برابرکدام عدد صحیح است. به‌سادگی معلوم می‌شود

$$۲۰ < a < ۳۰$$

چون عدد بالا به ۶ ختم شده است، تنها $a = ۲۶$ جواب است.

چنین کارهایی تنها منحصر به کلاسهای پایین نباید باشد. این روشها هیچ تناقضی با راه حل فرمولی، و مثلا حل معادله و دستگاه ندارد.

۶. تجزیه و تحلیل مسئله‌ها

یکی از راههای بالا بردن معرفت شهودی در ریاضیات، تجزیه و تحلیل مسئله‌هاست. این، قبل از همه به انتخاب روش حل مربوط می‌شود. کتابهای دبیرستانی (وحتی دانشگاهی) معمولا به بخشهایی تقسیم شده‌اند ودرهر بخش روشهایی برای حل مسئله‌ها آمده است. ولی مسئله‌هایی که در دانشهای دیگر و یا طبیعت مطرح می‌شود تقسیم‌بندی نشده‌اند، و برای حل آنها باید روشهایی اندیشید. به‌همین دلیل مناسب است که گهگاه چنین مسئله‌هایی مطرح شود.

با همه اینها و قبل از هر چیز، روشهایی در ریاضیات وجود دارد که بسیار مهم و کلی‌اند و بحث دربارهٔ آنها و ذکر نمونه‌های متنوع مسائلی که از آنها استفاده می‌کنند، می‌تواند موجب تقویت درک شهودی شود.

کمتر پیش می‌آید که در دبیرستان مسئله‌هایی به‌دانش‌آموزان داده شود که مفروضات آن کمتر یا بیشتر از مقدار لازم باشد. پرسشهایی از این قبیل، به بالا بردن درک شهودی دانش‌آموزان کمک می‌کند:

— آیا داده‌های مسئله برای حل آن کافی است؟
— چگونه می‌توان این داده‌ها را تکمیل کرد؟

و اگر داده‌ها بیش از حد لازم است:

— اینک ازچه فرضهایی باید برای حل استفاده کرد؟
— چه فرضهایی را باید برای بحث وتفسیر مسئله گذاشت؟

در بند ۳ گفتیم که برای تجزیه وتحلیل درسطح شهودی، باید تا آن‌جا که ممکن است آگاهی را جمع کرد تا بشود نتیجهٔ مورد انتظار را بهتر حدس زد. وبرای دانش‌آموزان چقدرجالب است که بتوانند با درک شهودی و "عقل‌سلیم" و بدون یاری گرفتن از معادله‌ها و دستورها، جواب درست مسئله را پیدا کنند. این در واقع کشف دانش‌آموز است و هم اوست که چقدر از کشف کردن لذت می‌برد. البته، اگر مسئله هوشیارانه تنظیم شده باشد، حتی نوع تشکیل معادله‌ها هم می‌تواند کشف به‌حساب آید.

در زمستان معروف ویتیا درخانه و مدرسه (۱۹۵۱) اثر نیکلای نیکلایویچ نوسوف، پیشامد جالبی شرح داده شده است: "پسر و دختری ۶۰ گردو به‌دست آوردند و آنها را بین خود تقسیم کردند، ولی به‌پسر دوبرابر دختر رسید. هرکدام چندگردو دارند؟" ویتیا مدتی روی مسئله فکر می‌کند ولی نمی‌تواند راه‌حلی برای آن پیدا کند. سرانجام دراین باره می‌اندیشد که چرا گردوها را عادلانه تقسیم نکرده‌اند؟ چرا پسر دوبرابر دختر از گردوها برداشته است؟

پیش خود فکر می‌کند لابد به این خاطر که پسر دوجیب داشته است، درحالی که دختر یک جیب. ویتیا پسری را با دوجیب ودختری را با یک جیب رسم می‌کند، و آن وقت بلافاصله مسئله حل می‌شود.

۷. تجزیه و تحلیل جواب

تجزیه وتحلیل جواب مسئله می‌تواند کمک زیادی به‌بالا بردن درک شهودی کند. پس از آنکه جواب پیدا شد، می‌توان مثلا پرسید:

— آیا انتظارچنین جوابی را داشتید؟
— آیا جواب با "عقل سلیم" سازگار است؟ و اگر پاسخ منفی است، چرا؟ اشکال کار را درکجا می‌بینید؟
— آیا جواب غیر منتظره نیست؟
— آیا نمی‌توان مسئله را طور دیگری حل کرد؟ (و اگرممکن است باید راه حلهای مختلف را ارائه داد و آنها را با هم مقایسه کرد.)
— اگرمسئله شامل پارامتر است، این پارامترچه تأثیری برجواب می‌گذارد؟
— اگر پارامتر به بینهایت میل کند، وضع جواب چگونه می‌شود؟

در این زمینه کتاب بسیار جالب خلاقیت ریاضی ژرژ پولیا را توصیه می‌کنیم که لازم است هرمعلم ریاضی آن را بخواند.

۸. شهود هندسی در درسهای آنالیز و جبر

درحل معادله‌ها، نامعادله‌ها، وهرگونه بحث مربوط به‌تابعها، تعبیرهندسی جواب یا راه‌حل می‌تواند دربالا بردن درک شهودی کمک کند. به‌همین مناسبت دائماً باید از نمودارها، چه با رسم دقیق و چه به‌صورت ذهنی، به‌ویژه برای طرح مقدمات آنالیز استفاده کرد.

استفاده ازنمودارها درحل مسئله‌ها موضوعی گسترده است که برای پرداختن به‌آن به مقاله‌ای جداگانه نیازخواهد بود.

۹. ساختن نمونه‌ها و مثالها

مسائل مربوط به‌پیداکردن عددها، معادله، وتابعهایی که شرایط ویژه‌ای داشته باشند، دربالا بردن درک شهودی نقش اساسی دارند. این‌گونه مسائل علاوه برآن‌که زیبا و جالب‌اند، ذهن را به‌کار می‌اندازند و موجب خلاقیت فکری می‌شوند. مسائلی ازقبیل:

— نموداری از یک تابع صعودی بکشیدکه مشتق آن نزولی باشد (رو به‌بالا برود و مقعر باشد). وکمی دشوارتر:
— نمونه‌ای از یک‌تابع را با خاصیت بالا مشخص کنید ($y = \sqrt{x}$ ، $y = \log x$ ، $y = -۲^{-x}$ ، ...)
— تابعی صعودی پیداکنیدکه نقطه‌ای ناپیوستگی داشته باشد.

ـ تابع پیوستهٔ صعودیی پیدا کنید که مشتق آن درهمه‌جا تعریف شده نباشد.
ـ تابع مشتق‌پذیر صعودیی پیدا کنید که مشتق آن همه‌جا مثبت نباشد.
ـ تابعی بیابید که درهمه‌جا، جز نقطه‌های مفروض، مشتق داشته باشد.
ـ تابع f ی پیدا کنید که برای آن $\int_0^{2k} f(x)\,dx = 0$ و $\int_0^{2k+1} f(x)\,dx = 1$، $k = 0, 1, 2, \ldots$.

و مسئله‌ای چون این (که جواب ندارد):

ـ آیا تابع پیوسته‌ای وجود دارد که دو ماکزیمم داشته باشد، ولی مینیمم نداشته باشد؟

۱۰. نتیجه‌گیری

بیش از همه طرح مسائلی مفید است که شاگردان بتوانند آنها را درذهن و بدون محاسبه حل کنند. مسئله باید طوری باشد که مشابهی نداشته باشد، بتوان دربارهٔ آن فکر کرد، حدس زد، برآورد کرد و...

شاگردان را وادار کنید معادلهٔ درجه دوم را حل کنند، ولی نه از روی فرمول؛ الگوریتم خوب است، ولی تکیهٔ زیاد بر آن دانش‌آموز را ازفکر کردن باز می‌دارد.

برای دانش‌آموزان معماهایی طرح کنید که رنگ ریاضی داشته باشند، و آنها را تشویق کنید که دربارهٔ واژه‌ها و معنای ریاضی آنها فکر کنند.

هارلی فلاندرز

معادلات ماتریسی چندجمله‌ای•

ترجمهٔ سهیلا شریعتی

فیلیپ دیویس درصفحهٔ ۲۶ مقالهٔ هیجان‌انگیز خود با عنوان "چه‌چیز می‌دانم؟ ـ مطالعه‌ای در خودآگاهی ریاضی" [۱] پرسیده بود که آیا معادلهٔ

$$X^3 + X^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

جوابی به صورت یك ماتریس حقیقی 2×2 دارد یا نه. من درنامه‌ای به او نوشتم البته که جواب دارد، و (به‌شوخی) این‌چنین شعده‌بازی کردم:

فرض کنیم λ و μ جوابهای حقیقی متمایز معادلهٔ

$$(t^3 + t^2 - 1)(t^3 + t^2 - 4) + 3(t - 2) = 0 \qquad (2)$$

باشند، وقرار دهیم

$$P = \begin{bmatrix} \lambda^3 + \lambda^2 - 4 & \mu^3 + \mu^2 - 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

حالا این‌هم یك جواب معادلهٔ (۱):

$$X = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} P^{-1} \qquad (4)$$

• Flanders, Harley; "On polynomial matrix equations," *College Mathematics Journal*, **17** (1986) 388-391.

قطعاً این‌کار شبیه نردستی است، وتوضیح آن می‌تواند دستمایه‌ای برای توسعهٔ طرحها وپژوهشهای دانشجویی فراهم آورد. (به‌عنوان اولین تمرین، ثابت کنید (۲) دقیقاً دوجواب حقیقی دارد.) بیایید کار را با ردهٔ مسائلی آغاز کنیم که (۱) نمونه‌ای از آنهاست.

فرض کنید $A_0, A_1, \ldots, A^r$ (که $A_r = I$) ماتریسهای مختلط $n \times n$ ثابتی باشند، ومعادلهٔ

$$\sum_{j=0}^{r} A_j X^j = \mathbf{0} \qquad (۵)$$

را برحسب ماتریس مجهول $n \times n$ ای چون X درنظر بگیرید. (توجه کنید که چون ضرب ماتریسها معمولاً جابجایی نیست، (۵) کلیترین معادلهٔ ماتریسی چندجمله‌ای نخواهد بود؛ همهٔ توانهای X درسمت راست واقع‌اند. برای نمونه ازشاگردانتان بخواهید معادلات

$$X^3 + AX^2 + B = 0 \,, \qquad X^3 + XAX + B = 0 \,, \qquad X^3 + X^2 A + B = 0$$

را بررسی کنند.)

برای تحلیل معادلهٔ (۵)، فرض کنید جوابی مانند X دراختیار داریم. چون ماتریس مربعی مختلط X بردار ویژه دارد، فرض کنید $X\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ، که در آن $\mathbf{v}$ یك بردار ستونی غیرصفر و λ عددی مختلط است. دراین صورت به‌ازای $j = 0, 1, \ldots, r$ ،

$$X^j \mathbf{v} = \lambda^j \mathbf{v}$$

پس بنابر (۵)

$$\left(\sum_{j=0}^{r} A_j \lambda^j\right)\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad (۶)$$

چون $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$، نتیجه می‌گیریم که λ جوابی از

$$\det\left(\sum_{j=0}^{r} A_j t^j\right) = 0 \qquad (۷)$$

است. چون $A_r = I$ ، این دترمینان یك چند جمله‌ای از درجهٔ nr برحسب متغیر (اسکالر) t خواهدبود.

اکنون سعی می‌کنیم یك جواب ماتریسی برای (۵) فراهم کنیم. فرض کنید

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

n جواب نه لزوماً متمایز (۷)، و $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ بردارهای ستونی غیرصفری باشند به‌طوری که برای $i = 1, 2, \ldots, n$ ،

$$\left(\sum_{j=0}^{r} A_j \lambda_i^j\right)\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \qquad (۸)$$

چنین بردارهای غیرصفری وجود دارند، زیرا بنابر (۷) هرماتریس

$$\sum_{j=0}^{r} A_j \lambda_i^j$$

منفرد است. اکنون ماتریسهای $n \times n$

$$P = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \quad \text{و} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (۹)$$

را تعریف می‌کنیم. با محاسبه به‌دست می‌آوریم

$$PD^j = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^j \end{bmatrix} = [\lambda_1^j \mathbf{v}_1, \ldots, \lambda_n^j \mathbf{v}_n] \qquad (۱۰)$$

نتیجه آنکه

$$\sum_{j=0}^{r} A_j P D^j = \sum_{j=0}^{r} A_j [\lambda_1^j \mathbf{v}_1, \ldots, \lambda_n^j \mathbf{v}_n]$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{r} A_j \lambda_1^j \mathbf{v}_1, \ldots, \sum_{j=0}^{n} A_j \lambda_n^j \mathbf{v}_n\right]$$

بنابر (۸)، هر ستون این ماتریس $n \times n$ برابر $\mathbf{0}$ خواهد بود. پس n معادلهٔ برداری در (۸) با معادلهٔ ماتریسی شسته ورفتهٔ زیر هم‌ارزند

$$\sum_{j=0}^{r} A_j P D^j = 0 \qquad (۱۱)$$

تا اینجای‌کار n بردار $\mathbf{v}_i$ تنها غیرصفر بودند وبس. اما فرض کنید بتوانیم به‌طریقی λها و $\mathbf{v}$هایی انتخاب کنیم که در (۷) و (۸) صدق کنند، به‌طوری‌که $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ مستقل خطی نیز باشند (یك "فرض قوی"). در این صورت ماتریس P در (۹) نامنفرد است؛ بنابراین می‌توانیم (۱۱) را در P^{-1} ضرب کنیم تا به‌دست آوریم

$$\sum_{j=0}^{r} A_j (P D^j P^{-1}) = 0 \qquad (۱۲)$$

اما $PD^jP^{-1} = (PDP^{-1})^j$. پس اگر قرار دهیم

$$X = PDP^{-1} \qquad (۱۳)$$

آنگاه

$$\sum_{j=0}^{r} A_j X^j = 0 \qquad (۱۴)$$

بدین‌ترتیب X یك جواب (۵) خواهد بود.

خلاصه آنکه: می‌خواهیم معادلهٔ (۵) را برحسب یك ماتریس $n \times n$ مانند X حل کنیم. n جواب مختلط $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ را از (۷) وبردارهای ستونی غیر صفر متناظر $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ را از (۸) پیدا می‌کنیم. هرگاه بتوانیم این کار را به‌طریقی انجام دهیم که $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ مستقل خطی باشند، آنگاه ماتریس X در (۱۳) یك جواب (۵) خواهد بود، که درآن P و D مطابق (۹) تعریف شده‌اند. این بحث سؤالات بسیاری به ذهن می‌آورد. اما اول بگذارید به‌چند مثال نگاهی بیندازیم.

مثال ۱. معادلهٔ (۱) فیلیپ دیوپس برای ماتریسهای ۲ × ۲ را در نظر بگیرید. معادلهٔ (۲) حالت خاص معادلهٔ (۷) ماست؛ پس (۲) واقعا از روش تحلیلی به‌دست می‌آید، نه از توی کلاه شعبده بازی! می‌توان دید که (۲) دقیقا دوجواب حقیقی دارد (که ساده‌اند):

$$\lambda_1 \approx -1.3813075 \quad \text{و} \quad \lambda_2 \approx 1.3794399$$

معادلهٔ (۸) متناظر با $\mathbf{v}_1$ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} -2.0637371 & -3.4834075 \\ -3.0000000 & -5.0637371 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{0}$$

(درواقع این ماتریس ۲ × ۲ بسیار نزدیك به‌یك ماتریس منفرد است.) چون $\mathbf{v}_1$ تنها در حد یك مضرب مشخص می‌شود، می‌توانیم انتخاب کنیم

$$\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} -5.0637371 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$$

این اعداد مطمئنا تا ۶ رقم اعشار اعتبار دارند. به‌طریق مشابه، می‌توانیم انتخاب کنیم

$$\mathbf{v}_2 \approx \begin{bmatrix} 0.5277290 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$$

چون $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی‌اند، $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ نامنفرد است. اکنون محاسبهٔ $X = PDP^{-1}$

در (۱۳) وآزمودن اینکه این جواب با دقت معقولی در (۱) صدق می‌کند، می‌تواند تمرین (کامپیوتری) جالبی به‌شمار آید.

مثال ۲. معادلهٔ $X^2 - I = 0$ برای ماتریسهای ۲ × ۲. دراین حالت معادلهٔ (۷) به‌صورت

$$(t^2 - 1)^2 = 0$$

درمی‌آید، که $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 1$ تنها جوابهای متمایز آن‌اند. در هردو حالت

$$\lambda^2 I - I = 0$$

بنابراین $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بردارهایی دلخواه و غیر صفرند. انتخابهای زیادی برای بردارهای مستقل خطی وجود دارد، که بیشمار جواب برای $X^2 = I$ به‌دست می‌دهند. علاوه بر I و $-I$، چند جواب دیگر وجود دارد؟

مثال ۳. معادلهٔ $X^2 = 0$ برای ماتریسهای ۲ × ۲. در این حالت معادلهٔ (۷) به صورت $t^2 = 0$ درمی‌آید، که تنها جواب آن $\lambda = 0$ است. تنها جواب $X = PDP^{-1}$ که با استفاده ازاین‌روش به‌دست می‌آید، $X = 0$ است، زیرا $D = 0$. امابیشمارماتریس ۲ × ۲ی دیگرمانند X وجود دارد به‌طوری‌که $X^2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad P\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

بنابراین روش ما ممکن است تمام جوابها را به‌دست ندهد.

مثال ۴. معادلهٔ زیر را برای ماتریسهای ۳ × ۳ درنظر بگیرید:

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در این حالت معادلهٔ (۷) به‌صورت $t^6 = 0$ درمی‌آید، که $\lambda = 0$ تنها جواب آن است. درنتیجه روش ما دراینجا برای حصول هیچ جوابی موفق نیست. اما

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یك جواب معادلهٔ بالاست. چرا این روش نمی‌تواند جوابی به‌دست دهد؟

مثال ۵. معادلهٔ زیررا برای ماتریسهای ۲ × ۲ درنظر بگیرید:

$$X^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

اینجا هم روش ما در به‌دست‌آوردن جواب ناموفق است. با این‌حال، دراین حالت هیچ جوابی هم وجود ندارد! آیا می‌توانید بگویید چرا؟ آیا ایده‌های این‌مقاله به‌اثبات این‌امر کمك می‌کند؟

چند سؤال دیگر. مسئلهٔ قبل می‌تواند به‌عنوان پایه‌ای برای پژوهشهای دانشجویی در سطحی‌فراتر از تمرینهای معمول کتابهای درسی، مورد استفاده قراربگیرد. دراینجا به‌طرح چند سؤال می‌پردازیم که بررسی آنها خالی‌از فایده نخواهد بود.

(الف) فرض‌کنید معادلهٔ (۷) nr ریشهٔ متمایز داشته باشد. دراین‌صورت آیا روش ما می‌تواند دست‌کم یك جواب برای معادلهٔ (۵) به‌دست دهد؟ تمام جوابها را چطور؟

(ب) آیا می‌توانیم شرایطی روی معادلهٔ (۵) بیابیم که تاکام ماندن روش مارا، یعنی اینکه (۸) هیچ دسته جواب مستقل‌خطی نداشته باشد، تضمین‌کند؟

(پ) نمونه‌هایی راکه در آنهامعادلهٔ(۵) به‌صورت حاصل‌ضرب عوامل جابجاشونده تجزیه می‌شود، مانند $(X-I)(X-A)=۰$، بررسی‌کنید.

برای مطالب دیگری درباب معادلات ماتریسی، خواننده می‌تواند به مقالهٔ نگارنده تحت عنوان "جوابهای تحلیلی معادلات ماتریسی" [۲] و رسالهٔ چندجمله‌ایهای ماتریسی اثر گوبرگ، لنکستر، و رادمن [۳] که مطالب مربوطه درحدود صفحات ۱۱۳ تا ۱۲۵ آن آمده‌است، رجوع‌کنید.

مراجع

1. Davis, P., "What do I know? - A study of mathematical self-awareness," *College Mathematics Journal*, **16** (1985) 22-41.
2. Flanders, H., "Analytic solution of matrix equations," *Linear and Multilinear Algebra*, **2** (1974) 241-243.
3. Gohberg, I., Lancaster, P.; Radman, L., *Matrix Polynomials*, Academic Press, 1982.

سعید ذاکری

نقاط ثابت و معادلات تابعی

هدف ازاین نوشتهٔ‌کوتاه ارائهٔ روشی طبیعی برای بررسی انواع خاصی از معادلات تابعی درحالتهای‌گسسته وپیوسته‌است. ایدهٔ نهفته دراین روش بسیارساده ومقدماتی‌است؛ اما به‌نظر نمی‌رسدکه چنین شیوه‌ای تاکنون درحل معادلات تابعی چندان مورد توجه واقع شده باشد. استفاده ازقضایای نقطهٔ ثابت امروزه یکی‌از ابزارهای‌کلاسیك مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل و انتگرال است، وهمین مطلب الهام‌کنندهٔ آن است که شاید بتوان این ایده را درجاهای‌دیگر نیز به‌کار بست. این مقالهٔ‌کوتاه تنها حاوی طرحی‌کلی ازاین شیوه‌است که درقالب‌چهارمثال ارائه خواهد شد، چراکه هنوز رسیدن به‌تعمیمی درقالب قضایای‌کلی واصیل، نظیر آنچه‌در معادلات دیفرانسیل می‌بینیم، نسبتاً بعید به‌نظر می‌رسد. پیش از بیان این چهار مثال، برای کامل بودن بحث چند نکته را یادآوری می‌کنیم.

فرض‌کنیم f نگاشتی از فضای متریك X به توی خودش باشد. $\mu\in X$ را مفروض می‌گیریم. دنبالهٔ $\{f^n(\mu)\}$ راکه با $f^0(\mu)=\mu$ و $f^n(\mu)=f(f^{n-1}(\mu))$ تعریف می‌شود، یك دنبالهٔ تکراری f روی μ می‌نامیم. این دنباله بستگی مشهود و واضحی‌با نقاط ثابت نگاشت f دارد. بدین معنی‌که هرگاه دنبالهٔ تکراری f روی μ همگرا، و f پیوسته باشد، حد این دنباله نقطهٔ ثابتی از f خواهدبود. این واقعیت ساده ولی‌مهم، نتیجه‌ای فوری از تعریف است. پس هرگاه بتوانیم به ازای μیی مناسب نشان دهیم‌که دنبالهٔ تکراری f روی μ همگراست، می‌توانیم مقدارحدآن‌را دربین جوابهای معادلهٔ $f(x)=x$ جستجوکنیم. اما در برخی موارد، نشان دادن همگرایی این دنباله به‌طور مستقیم ساده نیست. در این حالتها ممکن است بتوان از بعضی شرطهای کافی روی نگاشت f برای نشان دادن همگرایی بهره جست. یکی‌ازاین شرطهای کافی، انقباض بودن f است. نگاشت $f:X\to X$ را انقباض می‌خوانیم هرگاه $\alpha<۱$یی وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر x و y در X، $d(f(x),f(y))\leqslant\alpha\, d(x,y)$. بنابر "قضیهٔ نگاشت انقباض"، هرگاه X یك فضای تام و f یك انقباض روی X باشد، دنبالهٔ تکراری f روی μ به ازای هر $\mu\in X$ همگراست.

توجه کنیم که چون هر انقباض یك نگاشت پیوسته است، قضیهٔ بالا درحقیقت می‌گوید که به‌ازای هر μ، دنبالهٔ تکراری f روی μ به‌نقطهٔ ثابتی از f همگراست، که تلویحاً وجود نقطهٔ ثابتی برای f را نیز نشان می‌دهد. همچنین از شرط انقباض بودن واضح است که این نقطهٔ ثابت یکتاست. برهان قضیهٔ نگاشت انقباض را می‌توان در هر کتاب استاندارد آنالیز مقدماتی یافت [۴ و ۵].

این قضیه، درحالت $X=\mathbf{R}_1$، منجر به‌نتیجه‌ای می‌شود که مورد توجه ماست: هرگاه $f:\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_1$ مشتق‌پذیر باشد و $\|f'\|_\infty<1$، آنگاه f دقیقاً یك نقطهٔ ثابت دارد که عبارت است از حد هر دنبالهٔ تکراری f روی نقطه‌ای دلخواه. به‌وضوح، این همان قضیهٔ نگاشت انقباض با $\alpha=\|f'\|_\infty$ است. توجه کنید که شرط $\|f'\|_\infty<1$ کافی است و نه لازم $(f(x)=2x)$؛ و حتی اگر برای هر x، $|f'(x)|<1$، نمی‌توان وجود نقطهٔ ثابت را نتیجه گرفت $(f(x)=x+(1+e^x)^{-1})$.

قرار می‌گذاریم که نقطهٔ ثابت نگاشت f را با f^* نشان دهیم. در حالتی که f بیش از یك نقطهٔ ثابت داشته باشد، منظورمان از f^* از سیاق مطالب معلوم خواهد بود.

اینك آماده‌ایم که چهار مثال مورد نظر را مطرح کنیم. مثالهای ۱ و ۲ به‌حالت گسسته (یافتن حدود دنباله‌ها) و ۳ و ۴ به‌حالت پیوسته (یافتن پاسخ معادلات تابعی توابع حقیقی روی زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}_1$) اختصاص دارند. به‌خواننده‌ای که مایل است کاربرد این روش را درحل معادلات تابعی درحالت گسسته ببیند، تذکر می‌دهیم که مثال ۳، با تعویض $\mathbf{N}$ به‌جای $\mathbf{R}_1$، عیناً مثالی برای حالت گسسته خواهد بود. اما جان کلام درهمهٔ این مثالها، و به‌طور کلی در این روش، آن است که نخست جواب را پیدا کنید؛ سپس به‌کمك شرایط مسئله برآوردتان را دقیق‌تر کنید. هریك از این چهار مثال را از میان مسائل مشهور برگزیده‌ایم و آنها را با روش مورد نظر بررسی کرده‌ایم. البته، نمی‌توان ادعا کرد که روش ما برای حل این مسائل ساده‌تر یا کوتاه‌تر است، اما درعوض می‌توان به‌وضوح دید که چگونه یك روش واحد می‌تواند در حل مسائلی به‌ظاهر نامربوط به‌کار گرفته شود. به‌بیان دیگر، هدف ما از حل این چهار مسئلهٔ نمونه، بررسی اصول روش مورد نظر است و نه صرفاً ارائهٔ راه حلی تازه. با این حال، رجوع به‌مراجعی که درابتدای هر مثال آمده‌است، و دیدن راه‌حلهای کلاسیك این مسائل، خالی از لطف نیست.

مثال ۱ [۲، ص ۱۶۷ و ۵، ص ۸۱]. اعداد مثبت k و a_1، و عدد طبیعی m مفروض است. به‌ازای هر $n\geqslant 2$، دنبالهٔ $\{a_n\}$ را با $a_n=\frac{m-1}{m}a_{n-1}+\frac{k}{m}a_{n-1}^{-m+1}$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $\lim_n a_n=k^{1/m}$.

نخست توجه می‌کنیم که بنابرنامساوی میانگین حسابی-هندسی، به‌ازای هر $n\geqslant 2$،

$$a_n=\frac{1}{m}((m-1)a_{n-1}+ka_{n-1}^{-m+1})\geqslant(a_{n-1}^{m-1}\,k\,a_{n-1}^{-m+1})^{1/m}=k^{1/m}$$

پس $\liminf_n a_n\geqslant k^{1/m}$. فرض کنیم μ عدد حقیقی دلخواهی باشد که $a_2\leqslant\mu$. دراین صورت، واضح است که $a_2\leqslant\frac{1}{m}((m-1)\mu+k^{1/m})$. با تعریف

$$g(x)=\frac{1}{m}((m-1)x+k^{1/m})$$

خواهیم دید که به‌ازای هر $n\geqslant 2$، $a_n\leqslant g^{n-2}(\mu)$. چون $\|g'\|_\infty=\frac{m-1}{m}<1$، نتیجه می‌گیریم که $\limsup_n a_n\leqslant\lim_n g^{n-2}(\mu)=g^*$. اما از تعریف g روشن است که $g^*=k^{1/m}$. پس $\lim_n a_n=k^{1/m}$. ■

مثال ۲ [۲، ص ۳۱۶]. دنبالهٔ $\{a_n\}$ از اعداد بازهٔ $(0,1)$ به‌ازای هر $n\geqslant 1$ در $(1-a_n)a_{n-1}>1/4$ صدق می‌کند. ثابت کنید $\lim_n a_n=1/2$.

فرض کنیم به‌ازای هر $n\geqslant 1$، $\lambda<a_n<\mu$. دراین صورت، از رابطهٔ

$$(1-a_n)a_{n-1}>1/4$$

نتیجه می‌گیریم که

$$1-a_n>1/(4a_{n-1})>1/(4\mu)\Longrightarrow a_n<1-1/(4\mu)\qquad(n\geqslant 1),$$

$$a_n>1/(4(1-a_{n-1}))>1/(4(1-\lambda))\Longrightarrow a_n>1/(4(1-\lambda))\qquad(n\geqslant 2).$$

با تعریف $g(x)=1-1/(4x)$ و $h(x)=1/(4(1-x))$، خواهیم دید که

$$a_n<g^m(\mu)\ ,\quad \text{به‌ازای هر } m\geqslant 1 \text{ و هر } n\geqslant 1,$$

$$a_n>h^m(\lambda)\ ,\quad \text{به‌ازای هر } m\geqslant 1 \text{ و هر } n>m.$$

اینك توجه می‌کنیم که چون $0<a_n<1$، می‌توان قرارداد $\lambda=0$ و $\mu=1$. پس هرگاه $m\to\infty$، نتیجه می‌شود

$$\limsup_n a_n\leqslant\lim_m g^m(1)\qquad(*)$$

$$\liminf_n a_n\geqslant\lim_m h^m(0)\qquad(**)$$

اما $\{g^m(1)\}$ نزولی و از پایین کراندار، و $\{h^m(0)\}$ صعودی و از بالا کراندار است (چرا؟). بنابراین هرگاه $m\to\infty$، $g^m(1)\to g^*$ و $h^m(0)\to h^*$، وتعریف g و h

نشان می‌دهد که $g^*=h^*=1/2$. پس از (*) و (**) نتیجه می‌شود که

$$\lim_n a_n = 1/2$$

■

شایسته است توجه کنیم که در برهان بالا، $|g'(1/2)|=|h'(1/2)|=1$. بنابراین برای نشان دادن همگرایی دنباله‌های تکراری g و h به‌ترتیب روی ۱ و ۰ ، نمی‌توان از نتیجهٔ ابتدای مقاله بهره جست.

مثال ۳ (مسابقهٔ پاتنم، امریکا، ۱۹۸۹ [۳]). ثابت کنید تنها یك تابع $f:\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_1^+$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر x، $f(f(x))=6x-f(x)$.

فرض کنیم برای هر $x>0$ ، $0\leqslant\lambda x<f(x)<\mu x$. دراین صورت، از شرط بالا نتیجه می‌گیریم که

$$6x-f(x)=f(f(x))<\mu f(x)\Longrightarrow f(x)>6x/(1+\mu)\ ,$$

$$6x-f(x)=f(f(x))>\lambda f(x)\Longrightarrow f(x)<6x/(1+\lambda)\ .$$

قرار می‌دهیم $g(x)=6/(1+x)$. پس $g(\mu)x<f(x)<g(\lambda)x$. ازاینجا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد طبیعی m، $g^{2m}(\lambda)x<f(x)<g^{2m}(\mu)x$. به‌ازای هر $x\geqslant 0$ تعریف می‌کنیم

$$h(x)=g\circ g(x)=\frac{6(x+1)}{x+7}$$

پس برای هر m طبیعی، $h^m(\lambda)x<f(x)<h^m(\mu)x$. اما شرط $f(f(x))=6x-f(x)$ نشان می‌دهد که $0<f(x)<6x$. پس می‌توان قرارداد $\lambda=0$ و $\mu=6$. چون $\|h'\|_\infty=(6/7)^2<1$ ، هرگاه $m\to\infty$، هردو دنبالهٔ $\{h^m(6)\}$ و $\{h^m(0)\}$ به‌نقطهٔ ثابت $h^*=2$ میل می‌کنند. بنابراین $f(x)=2x$.

■

البته، h یك‌نقطهٔ ثابت نیز در $h^*=-3$ دارد که باتوجه به‌شرایط مسئله جواب نیست.

مثال ۴ [۱، ص ۸۲]. همهٔ توابع یکنوای $f:\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_1$ را بیابید که $f(0)=0$، و به‌ازای هر x، $f(x)+f^{-1}(x)=2x$.

از معادلهٔ تابعی بالا روشن است که f صعودی است. پس، چون $f(0)=0$، نتیجه می‌گیریم که برای xهای مثبت $f(x)>0$، و برای xهای منفی $f(x)<0$. همچنین معادلهٔ تابعی بالا نتیجه می‌دهد که $f(2x-f(x))=x$. پس هرگاه $x>0$، $0<f(x)<2x$. فرض کنیم به‌ازای هر $x>0$ ، $0<f(x)<\mu x$. دراین صورت

$$x=f(2x-f(x))<\mu(2x-f(x))$$

پس $0<f(x)<((2\mu-1)/\mu)x$. قرار می‌دهیم $g(x)=(2x-1)/x$. بنابراین

$$0<f(x)<g(\mu)x$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $x>0$ و هر m طبیعی، $0<f(x)<g^m(\mu)x$. باتوجه به‌آنچه در بالا دیدیم، می‌توانیم قرار دهیم $\mu=2$. دنبالهٔ $\{g^m(2)\}$ نزولی و از پایین کراندار است، پس هرگاه $m\to\infty$ ، $g^m(2)\to g^*$، و تعریف g نشان می‌دهد که $g^*=1$. بنابراین به‌ازای هر $x>0$ خواهیم داشت $0<f(x)\leqslant x$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که به‌ازای هر $x<0$، $x\leqslant f(x)<0$. باتوجه به‌اینکه f^{-1} نیز درمعادلهٔ تابعی

$$f^{-1}(2x-f^{-1}(x))=x$$

صدق می‌کند، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $x>0$ ، $0<f^{-1}(x)\leqslant x$ ؛ و به‌ازای هر $x<0$، $x\leqslant f^{-1}(x)<0$. اینك از شرط $f(x)+f^{-1}(x)=2x$ به‌دست می‌آید که برای هر x، $f(x)=x$.

■

مراجع

۱. سرگیف، ای. ن، مسأله‌های المپیادهای ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری، تهران، انتشارات فردوسی، ۱۳۶۸.

2. Klambauer, G.; *Problems and Propositions in Analysis*, Marcel Dekker, Inc., 1979.

3. Klosinsky, L.F.; "The William Lowell Putnam Mathemtical competition," *Amer. Math. Monthly*, **96** (1989) 688-695.

4. Kolmogorov, A. N.; Fomin, S.V.; *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, Inc., 1975.

5. Rudin, W.; *Principles of Mathematical Analysis*, 3d ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

امیر اکبری مجدآبادنو

مسئله‌ای دربارهٔ توانهای kام

در این نوشته به‌ارائهٔ دو راه حل بر یک‌مسئلهٔ معروف می‌پردازیم و سپس کاربرد و شکل معادلی از این مسئله را خواهیم دید.

۱. مسئله. فرض کنیم D یک قلمرو صحیح با مشخص صفر و $x_1, \ldots, x_n$ عناصری از آن باشند. به‌ازای هر عدد طبیعی k قرار می‌دهیم $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$. هرگاه $S_1 = S_2 = \cdots = S_n = 0$، آنگاه همهٔ x_iها صفرند، یعنی برای هر $i = 1, \ldots, n$، $x_i = 0$.

به بیانی ساده‌تر می‌خواهیم جوابهای دستگاه n معادلهٔ n مجهولی $\sum x_i = \sum x_i^2 = \cdots = \sum x_i^n = 0$ را روی قلمرو صحیح با مشخص صفر D بیابیم. هرگاه D میدان اعداد حقیقی باشد، به آسانی دیده می‌شود که تنها جواب این دستگاه جواب بدیهی صفر است. زیرا، اگر $n = 1$، مسئله به‌خودی خود حل است و اگر $n \geq 2$، n معادلهٔ $\sum x_i^2 = 0$ به‌تنهایی صفر بودن همهٔ x_iها را نتیجه می‌دهد. اما در حالت کلی چنین استدلالی درست نیست. در زیر دو روش برای حل مسئلهٔ بالا می‌آوریم.

روش اول. اساس این روش بر روابط بین ضرایب و ریشه‌های یک معادله استوار است. بدیهی است که می‌توان x_iها را ریشه‌های یک چندجمله‌ای درجهٔ nام مانند $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ در نظر گرفت. همچنین می‌توان x_iها را غیر صفر فرض کرد، زیرا در غیر این صورت با حذف x_iهای مساوی صفر به دستگاهی با تعداد مجهولات کمتر می‌رسیم و استدلال زیر را برای آن دستگاه تکرار می‌کنیم. با قرار دادن x_iها در معادلهٔ فوق و جمع رابطه‌های به‌دست آمده نتیجه می‌گیریم که $na_n = 0$. وچون مشخص D صفر است، $a_n = 0$. اما $a_n = (-1)^n x_1 \cdots x_n$، پس دست‌کم یکی از x_iها صفر است و این با فرض ما متناقض است. پس برای هر $i = 1, \ldots, n$، $x_i = 0$.

روش دوم. در این روش از تشکیل یک دستگاه معادلهٔ خطی همگن و به‌کارگیری دترمینان واندرموند استفاده می‌کنیم. اساس این روش، که در [۱] آمده، چنین است. فرض کنید n_1 تا از جوابها برابر a_1، n_2 تا از جوابها برابر a_2، ...، n_k تا از جوابها برابر a_k، و بقیه برابر

صفر باشند، که هر a_i غیرصفر است و a_iها از یکدیگر متمایزند، یعنی هرگاه $i \neq j$، آنگاه $a_i \neq a_j$. بنابراین، $\sum n_i a_i = \cdots = \sum n_i a_i^k = 0$. k معادلهٔ اولیهٔ این دستگاه تشکیل یک دستگاه همگن برحسب $n_1, \ldots, n_k$ با دترمینان $a_1 \ldots a_k V(a_1, \ldots, a_k)$ می‌دهند که در آن $V(a_1, \ldots, a_k)$ یک دترمینان واندرموند غیرصفر است. در نتیجه برای هر i، $n_i = 0$ و از اینجا $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

سؤال. در کدام قسمت اثبات بالا از صفر بودن مشخص D استفاده شده است؟

حال به کاربردی از مسئلهٔ بالا توجه می‌کنیم.

۲. کاربرد. هرگاه A ماتریسی $n \times n$ روی میدان با مشخص صفر k باشد و به‌ازای هر $r = 1, \ldots, n$، $tr(A^r) = 0$، آنگاه A پوچ توان است [۲، ص۳۷۰].

توجه کنید که عکس این حکم، با درنظر گرفتن چند جمله‌ای مینیمال A، تقریباً بدیهی است.

برای اثبات بی‌هیچ اشکالی می‌توان فرض کرد که k یک میدان به‌طور جبری بسته است. در این صورت، A با یک ماتریس بالا مثلثی چون B روی k متشابه است. چون پوچ توانی ماتریس A هم‌ارز با پوچ توانی ماتریس بالا مثلثی B است، کافی است ثابت کنیم که B پوچ توان است. از فرض بالا به‌سادگی نتیجه می‌گیریم که برای هر $r = 1, \ldots, n$، $tr(B^r) = 0$. پس هرگاه $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ عناصر روی قطر ماتریس B باشند، داریم $\sum \lambda_i = \sum \lambda_i^2 = \cdots = \sum \lambda_i^n = 0$. اینک از مسئلهٔ بالا نتیجه می‌شود که برای هر $i = 1, \ldots, r$، $\lambda_i = 0$، پس B پوچ توان خواهد بود.

۳. حکم معادل. با همان مفروضات مسئلهٔ ۱، هرگاه $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n+1}$، آنگاه هر x_i یا ۱ است یا ۰.

نخست ببینیم که چرا این مسئله با مسئلهٔ پیش معادل است. ابتدا با درست فرض کردن حکم اخیر، حکم مسئلهٔ پیش را ثابت می‌کنیم. هرگاه دو طرف چندجمله‌ای درجهٔ n روش اول را در x ضرب کنیم و x_iها را در آن قرار دهیم و عبارتهای به‌دست آمده را با یکدیگر جمع کنیم، نتیجه می‌گیریم که $S_{n+1} = 0$. پس $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n+1} = 0$. بنابراین "حکم معادل" بالا ایجاب می‌کند که هر x_i یا ۱ باشد یا ۰. این مطلب با توجه به اینکه $S_1 = 0$، نشان می‌دهد که برای هر $i = 1, \ldots, n$، $x_i = 0$. بنابراین، حکم اخیر درواقع مسئلهٔ ۱ را به‌عنوان حالتی خاص دربردارد. اکنون فرض کنیم حکم ابتدای مقاله برقرار باشد، می‌خواهیم "حکم معادل" را ثابت کنیم. با استدلالی مشابه روش اول، می‌توان x_iها را غیر یک فرض کرد چه هرگاه یکی از x_iها برابر ۱ باشد، می‌توانیم آن را کنار بگذاریم و توجه کنیم که روابط

---

۱. این مسئله، درحالت حقیقی، یکی از مسائل پیشنهادی المپیاد بین‌المللی ریاضیات در سال ۱۹۸۴ بوده است. همچنین شکل معادلی از آن بین مسائل معلومات عمومی مسابقهٔ ریاضی دانشجویان کشور در سال ۱۳۶۹ مطرح شده است.

بین S_iها برای بقیهٔ x_iها همچنان برقراراست. هرگاه دو طرف چندجمله‌ای درجهٔ n روش اول‌را در x ضرب کنیم و x_iها را درآن‌قراردهیم وعبارتهای به‌دست‌آمده را بایکدیگر جمع کنیم، باتوجه‌به‌روابط $S_1=\dots=S_{n-1}=S$ خواهیم‌داشت $S(1+a_1+\dots+a_n)=0$، هرگاه $S=0$، ازمسئلهٔ ابتدای مقاله دیدیم $x_i=0$ برای هر $i=1,\dots,n$، وحکم ثابت است. درغیراین صورت، $1+\sum a_i=0$ یعنی مجموع ضرایب آن چندجمله‌ای صفراست، پس ۱ یکی از ریشه‌های آن است، درنتیجه یکی از x_iها برابر ۱ است واین مخالف فرض ماست. پس هر x_i یا ۱ است یا ۰. بنابراین مسئلهٔ ۱ نیزحکم اخیررا به‌عنوان‌حالتی خاص‌دربر دارد ودرنتیجه این‌دوحکم معادل‌اند. این‌مطلب چندان هم تعجب‌برانگیز نیست، زیراهرچند "حکم معادل" فرض خاصی روی مقادیر S_iها نمی‌کند، در عوض فرض تساوی S_{n+1} با S_iها را اضافه می‌کند. برای حکم اخیر اثباتهای مستقیمی نیز می‌توان یافت که در زیر به چندتایی از آنها اشاره می‌کنیم.

هرگاه توجه خودرا ازقلمرو صحیح D به‌اعداد حقیقی معطوف کنیم، به‌اثبات ساده‌ای ازحکم بالا دست می‌یابیم. بدین‌ترتیب که درحالتهای $n=1$ و $n=2$ حکم واضح است، و اگر $n\geqslant 3$، آنگاه $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^2)^2=S_2-2S_3+S_4=0$ و درنتیجه به‌ازای هر i، $x_i-x_i^2=0$، پس هر x_i یا ۱ است یا ۰. همچنین با فرض نامنفی‌بودن x_iها و با فرض ضمیمه $S_i=S_j=S_k$ به‌ازای سه اندیس دلخواه $i<j<k$ می‌توان به‌اثباتی از حکم بالا دست یافت. برای این کار قرار می‌دهیم $p=(k-i)/(j-i)$. دراین صورت $q=(p-1)/p=(k-i)/(k-j)$. روشن است که $0<p<1$، $0<q<1$، و $1/p+1/q=1$. اکنون، باقراردادن $S_i=S_j=S_k=S$ وبه‌کارگیری نامساوی‌هولدر نتیجه می‌گیریم که

$$S_j=\sum x^j=\sum x^{k(j-i)/(k-i)}x^{i(k-j)/(k-i)}=\sum(x^k)^{1/p}(x^i)^{1/q}\leqslant(\sum x^k)^{1/p}(\sum x^i)^{1/q}$$
$$=S_k^{1/p}S_i^{1/q}=S^{1/p+1/q}=S$$

اما بنابه‌فرض تساوی $S_j=S$ برقراراست. پس شرط تساوی در نامساوی هولدر می‌گوید که αای هست که برای هر اندیس s، $x_s^k=\alpha x_s^i$ ودرنتیجه x_s به‌ازای هر s مقداری‌ثابت است. حال از این مطلب واضح است که هر x_s یا ۱ است یا ۰.

اما این مسئله‌را می‌توان مشابه مسئلهٔ ۱ با به‌کارگیری دترمینان واندرموند نیزحل کرد. برای‌این‌کار روابط $S_j=S_{j+1}$ را به‌شکل $\sum x_i^j(x_i-1)=0$ می‌نویسیم، ومشابه روش‌دوم فرض‌می‌کنیم که n_1 تا ازجوابها برابر a_1، ...، و n_k تا ازجوابها برابر a_k، وبقیه برابرصفر یا یک باشند، که در آن همهٔ a_iها متمایز از یکدیگر و متمایز از صفر و یک‌اند. بنابراین، $\sum n_i(a_i-1)a_i=\dots=\sum n_i(a_i-1)a_i^n=0$. از اینجا مشابه مسئلهٔ ۱ نتیجه می‌گیریم که برای هر i، $n_i=0$ و درنتیجه هر x_i یا ۱ است یا ۰.

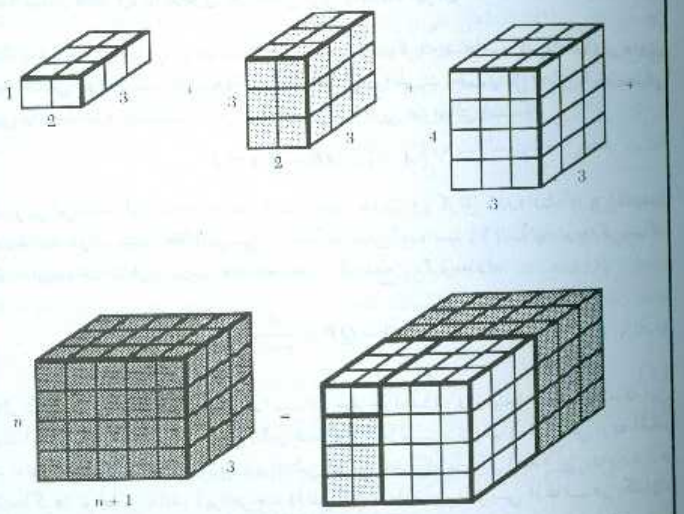
همچنین بااستدلالی مشابه‌روش‌اول وبه‌کارگیری‌روابط نیوتن درمعادلات چندجمله‌ای می‌توان اثبات دیگری ازحکم فوق ارائه داد. برای مشاهدهٔ این اثبات وتوضیحاتی‌درمورد حکم بالا به [۳، ص ۶۸] رجوع کنید.

مراجع

1. Parker, W.V., "On an application of the Vandermonde determinant," *Amer. Math. Monthly*, **61** (1954) 639.
2. Hungerford, T. W., *Algebra*, Springer-Verlag, 1974.
3. Klamkin, M. S., *International Mathematical Olympiads 1979-1985*, Mathematical Association of America, 1986.

بدون شرح

$$3(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n-1))=n(n+1)(n+2).$$



هنری هیترلی

یک نوع سرشت‌نمایی برای بعد نامتناهی فضاهای برداری•

ترجمهٔ مهدی مظفری، دانشجوی کارشناسی برق دانشگاه تهران

استدلالهای متفاوت زیادی برای اثبات این مطلب به‌کار گرفته شده‌است که یک‌فضای برداری با بعد متناهی روی‌هیأت اعداد حقیقی یا مختلط نمی‌تواند یک جفت‌تبدیل خطی با جابجاگر همانی داشته باشد؛ به‌عبارت دیگر برای چنین فضاهایی غیرممکن است که

$$[A,B]=AB-BA=I$$

قدیمیترین این‌استدلالها تلویحاً درنظریات ماکس بورن[1] وپاکوئل ژوردان[2]، درپژوهشهای بنیادینشان درمورد یک نسخهٔ ماتریسی مکانیک‌کوانتومی آمده‌است [۱]. آنها توجه‌کردند که برای ماتریسهای متناهی (روی اعداد مختلط)، اگر تابع رد[3] برمعادله

$$PQ-QP=\frac{h}{2\pi i}I$$

اعمال شود، طرف چپ صفروطرف راست غیرصفرخواهدشد، وازاینجا نتیجه‌گرفتندکه این معادلهٔ اساسی، یعنی "شرط‌کوانتومی دقیق شده"، باید برحسب‌ماتریسهای نامتناهی بوده‌باشد. بعید به‌نظر می‌رسدکه بورن و ژوردان اولین‌کسانی باشندکه به‌چنین استدلالی درمورد رد وجابجاگرها توجه‌کرده‌اند. زیراهرچند دانش آنها دربارهٔ جبرماتریسی ازغالب فیزیکدان‌های آن زمان (۱۹۲۵) بیشتر بوده‌است، هیچکدامشان را نمی‌توان دراین نظریه متخصص

• Heatherly, Henry, "A characterization of infinite dimension for vector spaces," *Mathematics Magazine*, **61** (1988) 239-242.

1. Max Born 2. Pacual Jordan 3. trace

دانست. (برای آگاهی بیشتر از نقش نظریهٔ ماتریسها درفیزیک، درسالهای شکوفایی مکانیک کوانتومی وپیش‌از آن، توصیف عالی[۳] را ببینید.)

استدلال ازطریق تابع رد

فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت K با سرشت‌نمایی صفر باشد. اگر α و β دوتبدیل‌خطی روی V باشند به‌طوری‌که $[\alpha,\beta]=1$. آنگاه فرض

$$\dim_K V=N<\infty$$

یک جفت ماتریس $n\times n$ روی K، مانند A و B، بدست می‌دهد به‌طوری‌که $[A,B]=I$. چون (رد AB) = (رد BA)، نتیجه می‌گیریم $0=$ رد $([A,B])=$ رد $(I)=n\cdot 1$.

این معادلهٔ آخر بما الهام می‌کندکه اگر سرشت‌نمایی هیأت K عددی اول باشد، ممکن است وضعیت تغییر کند. ودرحقیقت این‌گونه نیز هست.

در پیشرفتهای بعدی مکانیک‌کوانتومی، محاسبات‌مربوط به‌ماتریسهای کوانتومیکانیکی P و Q برای سیستمهای فیزیکی‌گوناگون (مثل نوسانگر خطی یا اتم هیدروژن) نشان داد که این ماتریسهای نامتناهی نمی‌توانند عملگرهای خطی‌کراندار روی فضای هیلبرت باشند. پیش‌ازآنکه آئورل وینتر[1] در ۱۹۴۷ این مطلب را ثابت‌کند، اثبات کلی ودقیقی برای آن داده نشده بود [۷]. برهان وینتر تخصصی بود و ویژگیهای فنی طیف عملگرها را به‌کار می‌گرفت. کمی بعداز انتشارمقالهٔ وینتر، هلموت ویلانت[2] اثباتی مقدماتی‌ولی‌مجرد برای‌این قضیه، به‌همراه خیلی مطالب دیگر، ارائه داد [۶].

استدلال ویلانت

چارچوب کار دراینجا یک جبر شرکتیذیرخطی ترمدار است [۴]، یعنی یک فضای برداری ترمدار (روی هیأت اعداد حقیقی یا مختلط)، به‌همراه یک ضرب تعریف‌شده روی‌بردارها، به‌طوری که دستگاه حاصل یک حلقهٔ یکدار باشد، و به‌ازای هر دو بردار x و y و هر اسکالر λ،

$$(\lambda x)y=x(\lambda y)=\lambda(xy) \qquad (1)$$

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\| \qquad (2)$$

فرض کنیم W چنین جبری باشد. همچنین $a,b\in W$ چنان باشندکه

$$[a,b]=ab-ba=1$$

با استقراء روی n می‌توان نشان داد که

$$a^{n+1}b-ba^{n+1}=(n+1)a^n, \qquad n=0,1,2,\cdots$$

1. Aurel Winter 2. Helmut Wielandt

توجه کنید که $a\neq 0$. اگر a پوچ توان باشد، آنگاه کوچکترین m ای هست که $a^m=0$ و $m\geqslant 2$. ازاینجا خواهیم داشت

$$a^{m-1}=0 \quad \text{یا} \quad 0=a^m b-ba^m=(m-1)a^{m-1}$$

بنابراین، به‌ازای هر n، $a^n\neq 0$ و $\|a^n\|\neq 0$. دراین‌صورت

$$\|(n+1)a^n\|=\|a^{n+1}b-ba^{n+1}\|\leqslant\|a^{n+1}\|\cdot\|b\|+\|b\|\cdot\|a^{n+1}\|$$

یا

$$(n+1)\|a^n\|\leqslant 2\|a^n\|\cdot\|a\|\cdot\|b\|$$

پس به‌ازای هر n

$$(n+1)\leqslant 2\|a\|\cdot\|b\|$$

بنابراین یك جبرخطی نرمدار نمی‌تواند شامل یك‌جفت ازچنین عناصری باشد.

تبدیلهای خطی کراندار روی یك‌فضای برداری نرمدار یك جبر نرمدار می‌سازند. (از $\|T\|=\sup\|Tx\|$ استفاده کنید که در آن $\|x\|<1$، [۵، ص ۱۶۲ و ۱۶۳].) بنابراین معادلهٔ $[A,B]=I$ برای تبدیلهای خطی کراندارممکن نیست. ازاینجا قضیهٔ وینتر برای ماتریسهای کوانتوم مکانیکی به‌سادگی نتیجه می‌شود.

هرفضای برداری با بعد متناهی روی اعداد حقیقی یا مختلط را می‌توان به‌یك فضای نرمدار مبدل ساخت وهمهٔ تبدیلهای خطی برروی چنین فضایی کراندارند. بنابراین اگریك فضای برداری (روی اعداد حقیقی یا مختلط) دارای یك جفت تبدیل خطی باشد که در $[A,B]=I$ صدق کنند، آنگاه این فضا الزاماً بعد نامتناهی خواهدداشت.

هریك از دو استدلالی که دربالا ارائه شد، به‌خودی خود جالب توجه است، اما هرکدامشان از یك نکتهٔ جانبی (رد یا نرم) استفاده می‌کند، درحالی‌که به‌کارگیری هیچ‌یك ازاین دومفهوم لازم نیست.

استدلال ازطریق استقلال خطی

فرض کنیم V یك فضای برداری روی هیأتی با سرشت‌نمایی صفر باشد. هرگاه A و B تبدیلهای خطی روی V باشند به‌طوری‌که $[A,B]=I$، آنگاه به‌ازای $n=0,1,2,\ldots$،

$$A^{n+1}B-BA^{n+1}=(n+1)A^n$$

به‌کمك این اتحاد واستقراء ریاضی می‌توان نشان داد که مجموعهٔ I، A، A^2، ... مستقل خطی است. بنابراین بعد فضای همهٔ تبدیلهای خطی روی V متناهی‌نیست و درنتیجه V نیز بعد متناهی نخواهد داشت.

هیچ‌یك از سه استدلال بالا هنگامی‌که سرشت‌نمایی هیأت اسکالرها عددی‌اول‌باشد، برقرار نخواهدبود. درواقع این قضیه دراین حالت درست نیست. اگر سرشت‌نمایی هیأت

مورد نظر p و بعد فضا بر p بخشپذیر باشد، آنگاه چنین جفت تبدیلی وجود خواهد داشت [۲].

وجود تبدیلهای مورد نظر روی فضاهای با بعد نامتناهی

یك مثال ملموس نشان می‌دهد که تبدیلهایی خطی با خواص مورد نظر ما واقعاً وجود دارند. این مثال همچنین راهنمای آن است که چگونه می‌توان وجود چنین جفت تبدیلهایی‌را روی هرفضای با بعد نامتناهی ثابت کرد. فرض کنیم P فضای همهٔ صورتهای چند جمله‌ای روی هیأت K، و D و $x1$ عملگرهایی باشندکه این‌چنین تعریف می‌شوند: به‌ازای هر $f(x)\in P$

$$x1\, f(x)=xf(x)\,, \qquad D\,f(x)=f'(x)\,,$$

توجه‌کنیم که $D.(x1)-(x1).D=1$. نگاهی به‌اثر D و $x1$ روی پایهٔ $1, x, x^2, \ldots$، چگونگی ساختن یك جفت تبدیل موردنظررا درحالت کلی به‌ما نشان می‌دهد

$$D1=0\,, \qquad Dx^n=nx^{n-1}\,, \qquad n=1,2,\ldots$$

$$x1\,x^n=x^{n+1}\,, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

فرض کنیم V یك فضای برداری با بعد نامتناهی باشد. پایه‌ای برای V انتخاب می‌کنیم وآن‌را به‌صورت اجتماع مجزای زیرمجموعه‌های

$$B_j=\{b_{jn}: n=0,1,2,\ldots\}$$

می‌نویسیم، که درآن j متعلق به‌یك‌مجموعهٔ اندیس دلخواه است، به‌طوری‌که $\bigcup B_j$ پایه‌ای برای V است. توابع α و β را روی پایه بدین‌شکل تعریف می‌کنیم

$$\alpha b_{j0}=0\,, \qquad \alpha b_{jn}=nb_{j,n-1}\,, \qquad n=1,2,\ldots$$

$$\beta b_{jn}=b_{j,n+1}\,, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

پس به‌ازای هر j, n، $(\alpha\beta-\beta\alpha)\,b_{jn}=b_{jn}$. α و β را به‌ترتیب به تبدیلهای خطی α' و β' توسعه می‌دهیم، وتوجه می‌کنیم که $[\alpha',\beta']=I_V$.

باکنارهم نهادن همهٔ آنچه که گفته‌ایم، خواهیم داشت:

قضیه. فرض‌کنیم V یك فضای برداری روی هیأتی با سرشت‌نمایی صفر باشد. گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱. بعد V نامتناهی است؛

۲. تبدیلهای خطی A و B ای روی V وجود دارندبه طوری‌که $[A,B]=I_V$.

برهان وجود بالا نشان می‌دهد که چگونه می‌توان تعداد زیادی از این جفتها ساخت.

هرگاه $[A,B]=I_r$ ، آنگاه به‌ازای هر تبدیل معکوسپذیر T روی V،

$$[TAT^{-1}, TBT^{-1}]=I_r$$

یك مسئلهٔ جالب، رده‌بندی همهٔ جفت‌تبدیلهایی است که جابجاگرهمانی دارند. وجود جفت آندومورفیسمهایی روی مدولها با خاصیت $[A,B]=I$، در [۲] مورد بحث واقع شده است. اما مسئله درحالت کلی هنوز حل نشده‌است.

مراجع

1. Born, M., and Jordan, P., "Zur Quantenmechanik," *Z. Phys.* **34** (1925), 858-888.
2. Heatherly, H., *Matrices, morphisms, and algebras with [A, B]=I*, to appear.
3. Mehra, J., and Rechenberg, H., *The Historical Development of Quantum Theory*, vol. 3, *The Formulation of Matrix Mechanics and its Modifications 1925-1926*, Springer-Verlag, New York, 1982.
4. Rickart, C., *General Theory of Banach Algebras*, Robert E. Krieger, Huntington, 1974.
5. Taylor, A., *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1963.
6. Wielandt, H., "Über die Unbeschränktheit der Schrödingerschen der Quanten mechanik," *Math. Ann.*, **121** (1949) 21.
7. Winter, A., "The unboundedness of quantum-mechanical matrices," *Phys. Rev*, **71** (1947), 738-739.

هیل ف. تراتر

یك مثال نادیده‌گرفته شده از تجزیهٔ غیریکتا*

ترجمهٔ زهره مستقیم، دانشجوی‌دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه تهران

برحسب ظاهر، اتحاد آشنای

$$\sin^2 t=1-\cos^2 t=(1+\cos t)(1-\cos t) \qquad (1)$$

بیان‌کنندهٔ این است که دو زوج از عوامل ظاهراً متفاوت حاصلضربهای یکسانی دارند. به‌نظرمی‌رسدکه توجه نشده است‌که اگر درزمینه‌ای مناسب به‌این‌ادعا نگاه‌کنیم، (۱) واقعاً مثالی معتبر ازیکتانبودن تجزیه دریك قلمرو صحیح است. آشنابودن‌آن، این مثال‌رابه‌طور ویژه‌ای‌برای‌ارائه به‌دانش‌آموزانی که‌اولین‌بار بایکتانبودن تجزیه دریك‌قلمروصحیح مواجه می‌شوند، گیرا می‌سازد. دقیقاً به‌همان شکلی‌که مثالهای معمولی متون درسی‌که شامل اعداد صحیح دریك میدان‌درجه دوم از اعداد است مانند $2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ نشان می‌دهندکه یکتایی تجزیه در حلقه‌هایی که مشابهت زیادی با حلقهٔ اعداد صحیح دارند می‌تواند برقرار نباشد، مثالی که دراینجا مطرح می‌شود نشان می‌دهدکه یکتایی تجزیه در حلقه‌هائی که مشابهت زیادی باحلقهٔ چندجمله‌ایها روی‌یك‌میدان دارند، می‌تواند برقرارنباشد.

البته ما باید بیش ازتذکر سادهٔ اینکه طرفین‌رابطهٔ (۱) ظاهرمتفاوت دارند،کارانجام دهیم. باید حلقه‌ای را که در آن کار می‌کنیم مشخص‌کنیم ، و سپس نشان دهیم‌که عوامل $\sin t$، $1+\cos t$، $1-\cos t$ تحویل‌ناپذیرند، و $\sin t$ مساوی حاصلضرب هیچیك از دوعامل دیگر با یك عنصر یکه (عضو وارونپذیر) نیست.

---

* Trotter, Hale F., "An overlooked example of nonunique factorization," *Amer. Math. Monthly*, **95** (1988) 339-342.

ما با چندجمله‌ایهای مثلثاتی حقیقی کار خواهیم کرد، این چندجمله‌ایها، توابعی هستند که بامجموعی‌متناهی به‌صورت

$$a_0+\sum^{k}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) \qquad (۲)$$

قابل نمایش‌اند که در آن ضرایب a_i و b_i اعدادی حقیقی‌اند. دانش‌آموزانی که قبلاچیزهایی درمورد سریهای فوریه دیده‌اند این‌توابع را به‌اندازهٔ‌کافی طبیعی می‌یابند تا آنها را درنظر بگیرند، اگرچه ممکن است آنهارا با نام چندجمله‌ایهای مثلثاتی نخوانده باشند، و یا این سؤال را مطرح نکرده باشند که آیا آنها یك حلقه تشکیل می‌دهند یا نه. فرمولهای آشنای ضرایب فوریه

$$a_0=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \quad , \quad a_n=\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n=\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

برای $n>0$، نشان می‌دهند که ضرایب در رابطهٔ (۲) به‌گونه‌ای یکتا توسط تابع معین می‌شوند.

درجهٔ یك چند جمله‌ای مثلثاتی ناصفر به‌عنوان بزرگترین مقدار nای تعریف می‌شود که a_n و b_n هر دو باهم صفر نیستند. لم مشهور زیر نشان می‌دهد که چندجمله‌ایهای مثلثاتی تشکیل یك حلقه می‌دهند، ودرجه‌ها همانگونه رفتار می‌کنند که در چند جمله‌ایهای عادی.

لم. حاصلضرب دو چندجمله‌ای مثلثاتی از درجه‌های m و n، یك چند جمله‌ای مثلثاتی از درجهٔ $m+n$ است.

برهان. اگر m یا n، 0 باشند مدعای لم واضح است، زیرا یك چند جمله‌ای درجهٔ صفر، به‌سادگی یك تابع ثابت است. از این به بعد فرض می‌کنیم m , $n>0$. اتحادهای استاندارد برای بیان حاصلضرب سینوسها و کسینوسها برحسب مجموع و تفاضل سینوسها و کسینوسهای دیگر را به‌یاد آورید:

$$(\sin a)(\sin b)=[\cos(a-b)-\cos(a+b)]/2$$

$$(\cos a)(\cos b)=[\cos(a-b)+\cos(a+b)]/2$$

$$(\sin a)(\cos b)=[\sin(a+b)+\sin(a-b)]/2$$

با به کارگیری این اتحادها در مورد حاصلضرب $p\cos mt+q\sin mt$ و $r\cos nt+s\sin nt$ و دسته‌بندی جملات، حاصل آن

$$A\cos(m-n)t+B\sin(m-n)t+C\cos(m+n)t+D\sin(m+n)t \qquad (۳)$$

می‌شود که $A=(pr+qs)/2$ ، $B=(ps-qr)/2$ و $C=(pr-qs)/2$ و $D=(ps+qr)/2$. وقتی $m>n$، (۳) از پیش به صورت (۲) است. اگر $n>m$، با قراردادن $\cos(n-m)$ به‌جای $\cos(m-n)$ و $-\sin(n-m)$ به‌جای $\sin(m-n)$، حاصل را به‌شکل مناسب در می‌آوریم. در صورتی که $m=n$، لازم است $\sin 0$ با 0 و $\cos 0$ با 1 جایگزین شود. محاسبه مستقیم نتیجه می‌دهد

$$C^2+D^2=(p^2+q^2)(r^2+s^2)/4$$

که نشان می‌دهد اگر هیچیك ازعوامل صفر نباشد (بنابراین $p^2+q^2\neq 0$ و $r^2+s^2\neq 0$) آنگاه $C^2+D^2\neq 0$، بنابراین درجهٔ حاصلضرب $m+n$ است.

حال حاصلضرب دو چندجمله‌ای مثلثاتی دلخواه ازدرجات m و n را درنظر بگیرید. این‌حاصلضرب مجموعی ازحاصلضربهای جملاتی است که هم‌اکنون مورد بررسی‌قرارداده بودیم، وبنابراین یك چندجمله‌ای مثلثاتی است. حاصلضرب جملاتی که بیشترین درجه را دارند یك‌جملهٔ ناصفر از درجهٔ $m+n$ به‌دست می‌دهد که به‌وسیلهٔ هیچیك از جملات دیگر در حاصلضرب حذف نمی‌شود، بنابراین همانطور که ادعا شده بود نتیجه از درجهٔ $m+n$ است.

گزاره. چندجمله‌ایهای مثلثاتی تشکیل یك قلمرو صحیح می‌دهند. علاوه براین،

الف) یکه‌ها (عناصر وارونپذیر این حلقه) عناصر از درجهٔ 0، یعنی توابع ثابت هستند.

ب) همهٔ عناصر از درجهٔ 1، از جمله $\sin t$، $1+\cos t$ و $1-\cos t$، تحویل‌ناپذیرند.

همانند حالت چندجمله‌ایهای معمولی، قضیه بلافاصله از لم نتیجه می‌شود وجزئیات آن را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

از (الف) و (ب) نتیجه می‌شود که عوامل در (۱) تحویل ناپذیرند و $\sin t$ حاصلضرب هیچیك‌ازعوامل دیگر با یك یکه نیست. بنابراین‌ما یك مثال صحیح از نبودیکتایی تجزیه به دست آورده‌ایم.

به‌خوبی می‌توان این‌بحث مقدماتی را همین‌جا متوقف کرد، اما، این‌مثال نکتهٔ‌دیگری را پیش می‌کشد که ممکن است جالب باشد.

دربرهان لم از این حقیقت استفاده می‌شود که مجموع مربعات دوعدد حقیقی تنها وقتی صفر است که هردوصفر باشند واگر ازضرایب مختلط استفاده می‌کردیم، برهان‌نادرست می‌شد. بااستفاده از شکل نمایی مختلط توابع سینوس وکسینوس دیده می‌شود که حلقهٔ چندجمله‌ایهای مثلثاتی باضرایب مختلط همان حلقهٔ چندجمله‌ایهای با توانهای‌مثبت ومنفی $z=e^{it}$ باضرایب مختلط است. برای دیدن اینکه این‌یك حلقهٔ یکتایی تجزیه‌است، درجهٔ یك چند-

جمله‌ای برحسب z و z^{-1} را به‌صورت تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین نماهای ظاهر-شده درجملات ناصفر تعریف کنید. با این تعریف، عناصر از درجهٔ صفر همان تک‌جمله‌ایها هستند، که دقیقاً عناصر وارونپذیر این حلقه‌اند. برهان معمولی برای اینکه چندجمله‌ایهای معمولی روی یک‌میدان تشکیل یک حلقهٔ اقلیدسی می‌دهند بدون هیچگونه تغییر اساسی در این حلقه نیز قابل پیاده شدن است.

چه تغییری درضرایب، ماهیت تجزیه درحلقه را تغییر می‌دهد؟ یک نکته آن است که باوارد کردن ضرایب مختلط یکه‌های بیشتری ایجاد می‌شود ــ همهٔ مضارب ثابت وغیرصفر از توانهای $z=\cos t+i\sin t$ و $z^{-1}=\cos t-i\sin t$. مثال خاص ما دیگر از هم پاشیده می‌شود زیرا عوامل موجود در آن رابطه دیگر تحویل‌ناپذیر نیستند. چونکه داریم

$$\sin t=(z-z^{-1})/(2i)=z^{-1}(z-1)(z+1)/(2i)$$

$$1-\cos t=(-z+2-z^{-1})/2=-z^{-1}(z-1)^2/2$$

و

$$1+\cos t=z^{-1}(z+1)^2/2$$

بنابراین هردوطرف (۱) وقتی به‌صورت حاصلضربی از عوامل تحویل‌ناپذیر بیان می‌شوند به‌صورت‌زیر در می‌آیند

$$-z^{-2}(z-1)^2(z+1)^2/4.$$

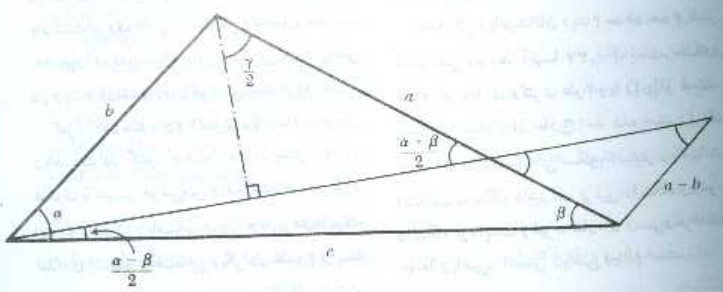
یک‌حلقه از اعداد صحیح جبری در برخی مواقع می‌تواند به‌گونه‌ای توسیع داده‌شود که یکتایی تجزیه در آن برقرارشود، هرچند مسئلهٔ چگونگی‌وشرایط انجام این‌عمل، به‌هیچ‌وجه ابتدایی نیست؛ و تا آنجایی که من اطلاع دارم این مسئله درحالت کلی حل نشده است. برای مثال، حلقهٔ $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ متشکل از اعداد به‌صورت $a+b\sqrt{-3}$ که a و b اعدادی صحیح هستند، همان‌طور که معادلهٔ $2\cdot 2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$ نشان می‌دهد تجزیهٔ یکتا ندارد. دراین‌حالت یکتایی تجزیه می‌تواند باتوسیع به‌حلقهٔ همه اعداد صحیح جبری‌درمیدان $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$، که همان $\mathbf{Z}[\omega]$ است و $\omega=(1+\sqrt{-3})/2$ یک ریشهٔ سوم مختلط واحد است، برقرار شود. این‌عمل در مورد حلقهٔ $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ که در مثال ابتدای مقاله استفاده کردیم کارگر نیست چون این‌حلقه همان حلقهٔ همهٔ اعداد صحیح جبری در میدان $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ است. اما، حلقه همهٔ اعداد صحیح جبری در میدان توسیع یافتهٔ $\mathbf{Q}(\sqrt{-5}\,,\,i)$ که می‌توان نشان‌داد همان‌حلقه $\mathbf{Z}(\eta)$ است که $\eta=(i+\sqrt{-5})/2$ یک ریشهٔ x^4+3x^2+1 است، یک توسیع $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ است که‌یکتایی تجزیه در آن برقرار است. من برهانی‌مقدماتی بر این آخرین مدعا نمی‌دانم؛ ولی می‌توان آن را به‌آسانی با استدلالهای استاندارد مبتنی بر برآورد مینکوفسکی، همانگونه که در [۱، فصل ۱۲]، [۲، فصل ۱۳] یا [۳، فصل ۵] تشریح شده است، به اثبات رسانید.

مراجع

1. Artin, E., "Theory of Algebraic Numbers," *Math. Inst. Gottingen*, 1959.
2. Cohn, H., *A Classical Invitation to Algebraic Numbers and Class Fields*, Springer, New York, 1978.
3. Lang, S., *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, Reading 1970.

بدون شرح

$$(a-b)\cos\frac{\gamma}{2}=c\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$$



گزارشی از ریاضیات ویتنام*

ترجمهٔ علیرضا افشار محرابی

کلیات

ریاضیات علمی جدید در ویتنام است، که در حدود ۳۰ سال پیش پاگرفته است. در آن زمان تنها یك ریاضیدان ویتنامی بادرجه دکتری وجود داشت، و تعداد اندك استادان ریاضی می‌بایستی شاخه‌های جدید ریاضیات را همراه با شاگردان خود فرا می‌گرفتند. برای پیشرفت علوم ریاضی، دولت ویتنام پیوسته دانشجویان را برای فراگیری ریاضیات به‌خارج اعزام کرده‌است، واین‌افراد در بازگشت نیروی فعالی‌در تدریس وتحقیق‌ریاضیات به‌وجودآورده‌اند. این امر به‌تکوین علوم‌ریاضی در ویتنام درمدت زمان کوتاهی کمك‌کرده است.

امروزه‌درحدود ۲۵ انستیتو،دپارتمان، ومرکز ریاضیات در کشور وجود دارد. بیشتر آنها در هانوی و شهر هوشی‌مین واقع شده‌اند. در کنار انستیتوتحقیقاتی‌ریاضیات محض وکاربردی‌هانوی، تعدادی انستیتو تحقیقاتی دیگر در علوم وابسته بدریاضیات وجود دارند: انستیتو مکانیك، انستیتو کامپیوتر و سیبرنتیك، مرکز فیزیك نظری (همگی درهانوی).

تقریباً هر دانشگاه دارای یك دپارتمان‌ریاضی است که مسئول تدریس ریاضیات به‌دانشجویان سایر قسمتها، و در برخی موارد، مسئول آموزش ریاضیدانان و تربیت معلمان ریاضیات است. در بعضی دپارتمانهای اقتصاد خدمات کوچکی از ریاضیات محاسباتی‌وجوددارد‌که درگیر تحقیقات در زمینه‌های ریاضیات کاربردی وعلوم کامپیوتر اند.

تعدادکل ریاضیدانان ویتنام حدود ۶۰۰ نفر است. سن متوسط آنها ۳۴ سال است. حدود ۳۰۰ نفر دارای دکتری علوم ویا Ph.D هستند. بیشتر این مدارك از خارج اخذ شده است: برای نمونه از دانشگاه ایالتی مسکو، انستیتو ریاضیات استکلف دانشگاه هامبولت برلین،دانشگاه ورشو، دانشگاه بوداپست وغیره. سازمان رسمی‌وحرفه‌ای جامعهٔ ریاضی، انجمن ریاضی ویتنام است.

فعالیتهای تحقیقاتی

قبل از سال ۱۹۶۰ تحقیقات در ویتنام سطح بسیار نازلی داشت، تعداد محققان خیلی کم بود وتعداداندکی سمینار باهدف‌معرفی شاخه‌های‌نوین ریاضیات برگزارمی‌شد. در دهه‌های‌شصت وهفتاد، تعداد زیادی ریاضیدان که بخوبی پرورش‌یافته

---

* متن انگلیسی این گزارش را آقای دکتر رحیم زارع‌نهندی در اختیار هیأت تحریریه گذاشتند که بدینوسیله از لطف ایشان تشکر می‌کنیم. با این توضیح که درنسخهٔ اصل این‌گزارش ازنام نویسنده و مرجع آن ذکری نرفته بودو تلاش‌ماهرای یافتن این‌مشخصات به جایی نرسید. (هیأت تحریریه)

بودند پس از تحصیل درخارج به‌کشور بازگشتند. آنها تقریباً درتحقیقات خودمنفرد بودند. بااینحال، کارهای آنها انگیزهٔ بسیار زیادی برای پژوهش به‌وجودآورد. درنتیجه، تعداد ریاضیدانان مشغول به تحقیقات و فعالیتهای تحقیقاتی وابسته، پیوسته افزایش یافت.

امروز حدود ۲۵۰ ریاضیدان ویتنامی وجود دارند که حداقل ۲ مقاله در مجلات بین‌المللی ریاضیات به‌چاپ‌رسانده‌اند. زمینه‌های موردعلاقه آنها تقریباً تمام شاخه‌های ریاضیات محض و کاربردی را دربر می‌گیرد، به‌ویژهٔ شاخه‌های‌زیر:

- نظریهٔ اعداد
- نظریهٔ حلقه‌ها
- نظریهٔ گروهها
- هندسهٔ جبری
- هندسهٔ دیفرانسیل
- توپولوژی جبری
- آنالیز مختلط
- معادلات دیفرانسیل
- نظریهٔ تقریب وبسط
- آنالیز تابعی
- احتمالات وفرایندهای تصادفی
- آمار ریاضی
- بهینه یابی
- تحقیق درعملیات ونظریهٔ‌کنترل
- مکانیك
- فیزیك نظری
- علوم کامپیوتر

دربعضی قسمتهای‌خاص‌ریاضیات،دستاوردهای ریاضی‌ریاضیدانان ویتنامی درسطح جهانی‌شناخته شده است. حجم تحقیقات در تعداد زیاد مقالاتی که در نشریات بین‌المللی ریاضیات به‌چاپ می‌رسد، منعکس‌است. اینها شامل تمام‌مجلات‌مشهور ریاضی‌کشورهای‌سوسیالیست‌وتعدادزیادی‌مجلات معروف‌کشورهای غربی می‌شود، ازقبیل:

- *Trans. Amer. Math. Soc.*
- *Proc. Amer. Math. Soc.*
- *Duke. Math. J.*
- *Bull. Soc. Math. France*
- *Compt. Rend. Acad. Sc. Paris*
- *Ann. Inst. Fourier*
- *Math. Ann.*
- *Math. Z.*
- *Manuscr. Math.*
- *Arch. Math.*
- *J. London Math. Soc.*
- *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*
- *Oxford Quartal J. Math.*
- *J. Math. Kyoto Univ.*
- *Nagoya J. Math.*
- *Japan J. Appl. Math.*
- *J. Algebra*
- *Comm. Algebra*
- *Topology*
- *J. Math. Analysis and Appl.*
- *J. Optimization Theory and Appl.*
- *Appl. Math. and Optimization*
- *Math. Oper. Res.*
- *Math. Programming*

سمینارهای تحقیقاتی تقریباً درتمام‌انستیتوهای ریاضی ویتنام تشکیل می‌شود. اهداف‌این‌سمینارها عبارت‌اند از:

- تحلیل دستاوردهای مهم و جدید ریاضیات
- ارائه وحل مسائل مورد توجه روز
- گزارش دستاوردهای جدید اعضا.

بعضی‌انستیتوهای ریاضیات همچنین‌سمینارهای مشترکی برای تحقیقات مشترك ترتیب داده‌اند. در هر زمان، برای مثال، می‌توان حداقل ۲۰

سمینار فعال در هانوی یافت. از سال ۱۹۸۰، دانشکده‌های ریاضی، کنفرانسها و همایشهای منظمی در زمینه‌های متعددی از ریاضیات برگزار کرده‌اند. درکنار تحقیقات در ریاضیات محض، انستیتوهای ریاضیات، ابزار ریاضی، تکنیکها، و مدلهائی برای کمك به‌درك و یا حل مسائل عملی به وجود آورده‌اند. سطح این فعالیتها هنوز ستانداردهای بین‌المللی را برآورده نمی‌کند، ولی محیط‌مناسبی برای پیشرفت ریاضیات ویتنام به‌وجود آورده‌است.

آموزش ریاضیات

گرچه ریاضیات تنها پس از سالهای ۱۹۲۰ در ویتنام آموزش داده شده است، بچه‌های ویتنامی معمولاً مشکلی درفراگیری آن ندارند. موادرمی در مدارس امروزی از مطالب مدارس فرانسوی دهه ۱۹۶۰ اقتباس شده است. از سال ۱۹۶۵ کلاسهای ویژه‌ای برای دانش‌آموزان پیشرفتهٔ ریاضیات در سرتاسر کشور دایر، و مسابقات ریاضی درسطوح مختلف منظماً برگزار شده‌است. دانش‌آموزان ویتنامی از سال ۱۹۷۳ در المپیاد بین‌المللی‌ریاضیات شرکت جسته‌اند وجوائز اول فراوانی به‌دست آورده‌اند. تیم آنها غالباً در بین بهترین ۶ تیم ملی قراردارد.

به‌طورمتوسط سالانه ۲۵۰ دانشجوی‌جدید در دورهٔ لیسانس رشته ریاضی دردانشگاهها پذیرفته می‌شوند (البته پس‌از پایان تحصیلات تمام آنها مشغول تحقیقات فعال نخواهند شد). واحدهای درسی ریاضیات در دانشگاهها را می‌توان با انواع مشابه در کشورهای سوسیالیست مقایسه کرد.

ازسال ۱۹۷۹ بعضی انستیتوهای ریاضیات برنامه‌های دکتری‌درعلوم ریاضی‌راارائه کرده‌اند. دانشجویان باسعی یاحمایت دولت می‌توانندتحت هدایت‌ریاضیدانان‌باتجربه برای‌اخذ درجهٔ‌دکتری خود فعالیت کنند. نتیجهٔ این تزها می‌باید در یك مجلهٔ ریاضی‌بین‌المللی به‌چاپ برسد ودرمقابل‌یك مجمع علمی از آن دفاع شود. این درجه توسط دولت اعطا می‌شود. در حدود ۴۵ ریاضیدان این برنامه دکتری را باموفقیت به‌پایان رسانده‌اند.

روابط بین‌المللی

انجمن ریاضی ویتنام عضوی ازاتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیات است. انستیتو ریاضی هانوی دارای برنامه‌های همکاری وتبادل با انستیتوهای ریاضی‌و آکادمی‌های‌علوم‌تمام‌کشورهای سوسیالیستی‌است. انجمن‌ریاضی ویتنام عضوی ازانجمن علمی‌مرکز بین‌المللی استفان باناخ ورشو است که هدف آن بالابردن سطح تحقیقات ریاضی درکشورهای سوسیالیست است.

ریاضیدانان‌ویتنامی‌برخی‌اوقات به‌عنوان‌اعضاء کمیتهٔ برنامه‌ها و سخنرانان مدعو در بسیاری از کنفرانسها و همایشهای‌بین‌المللی شرکت داشته‌اند. آنها برای بازدیدهای علمی به بسیاری از دانشگاههای اتحاد جماهیر شوروی، مجارستان، جمهوری دموکراتیك آلمان، جمهوری فدرال آلمان، بلژیك، فرانسه، انگلیس، سوئد، فنلاند، دانمارك، سوئیس، ایتالیا، اسپانیا، امریکا، کانادا، ژاپن، چین، سنگاپور، هندوستان و غیره دعوت شده‌اند. درمقابل درحدود ۶۰ ریاضیدان خارجی از ویتنام بازدید کرده‌اند، که در بین آنها ریاضیدانانی‌چون، آ. گروتندیك[1]، ل. شوارتس[2]،

1. A. Grothendieck 2. L. Schwartz

پ. کارتیه[1]، پ. هیلتون، م. آ. لاورنتیو[2] بوده‌اند. کارهای مشترك موفق متعددی بین‌ویتنامیها وریاضیدانان خارجی وجود داشته است.

سه کنفرانس بین‌المللی در علوم کامپیوتر و کاربردهای آن (۱۹۷۹)، درمورد مدل‌سازی و بهینه‌یابی (۱۹۸۳)، و ریاضیات محض (۱۹۸۸) در ویتنام سازمان یافته‌اند. درحدود ۲۰ ریاضیدان ویتنامی از جملهٔ ویراستاران *Zentralblatts Mathematical Reviews für Mathematik* هستند. برخی به‌عنوان‌اعضاء هیئت تحریریهٔ مجلات بین‌المللی مانند *Math. Programming*، *Optimization*، *Statistics Probability and Math.* فعالیت می‌کنند.

انجمن ریاضی ویتنام

انجمن ریاضی ویتنام درسال ۱۹۶۵ تأسیس‌شد. در حدود ۵۰۰ عضو دارد، که شامل تعدادی معلم ریاضی نیز می‌شود. فعالیتهای انجمن بیشتر شامل تشکیل کنفرانسهاوهمایشهایی در موضوعات مختلف می‌شودکه در سطح جامعه ریاضی بیشتر مورد توجه است.

هر ۵ سال یکبار، انجمن ریاضی، مشترکاً با انستیتو ریاضیات هانوی و وزارت آموزش عالی کنگره ملی ریاضیات را برگزار می‌کند که هدف آن بررسی وضعیت و هدایت تحقیقات ریاضی و آموزش درسطح کشور می‌باشد. درآخرین کنگره (۱۹۸۵)، ۳۱۰ گزارش درمورد دستاوردهای جدید درریاضیات‌وآموزش ریاضی ارائه‌گردید، وتصمیم‌گرفته شد تا به‌توسعه در زمینه‌های زیر اولویت داده شود:

- ریاضیات محاسبه
- تحقیق درعملیات و بهینه‌یابی
- احتمالات و آمار ریاضی
- قسمتهای انتخاب شده‌ای از جبر، هندسه، توپولوژی و آنالیز

این کنگره همچنین خواستار کاربرد بیشتر ریاضیات درعمل بدویژه درمدیریت اقتصادی، و همچنین‌خواستارتوجه‌بیشتر به‌آموزش ریاضیدانان جوانی گردیدکه در زمینهٔ ریاضیات کاربردی و علوم‌کامپیوتر، که به‌دلایل زیادی برای‌سالیان دراز از آن غفلت شده بود، کار می‌کنند.

انستیتو ریاضی

انستیتو ریاضی درسال ۱۹۷۰ به‌عنوان یك واحد اداری از مرکز ملی‌علوم تأسیس شد. اهداف‌آن عبارت‌اند از:

- انجام تحقیقات درریاضیات محض و کاربردی
- به‌کارگیری دستاوردهای ریاضی
- بالابردن سطح تحقیق وآموزش درکشور.

درحال‌حاضر، انستیتو شامل ۹۲ عضو است: ۷۸ ریاضیدان (شامل دانشجویان دورهٔ دکتری)و ۱۴ نفربه‌عنوان‌اعضاء اداری. دربین ریاضیدانان ۱۴ دکتری علوم و ۴۶ نفر Ph.D وجود دارد.

ریاضیدانان در ۹ قسمت فعالیت می‌کنند:

- ریاضیات گسسته
- نظریهٔ اعداد وجبر
- هندسه و توپولوژی
- آنالیز تابعی
- معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزئی
- ریاضی فیزیك
- سیستمهای دینامیکی

1. P. Cartier 2. M. A. Lavrentiev

– بهینه‌یابی ونظریهٔ سیستمها
– احتمالات و آمار ریاضی.

هرقسمت سمینارهای منظمی در زمینهٔ تحقیقاتی خود برگزار می‌کند. همچنین سمینارهای مشترکی برای مطالعهٔ مسائل پیچیده و ارتباط حوزه‌های گوناگون بایکدیگر برگزارمی‌گردد. انستیتو منظماً کنفرانسهای آموزشی ریاضی، و همایشهایی که درآنها انستیتوهای دیگر ریاضی نیز شرکت می‌کنند، برگزار می‌کند. به طور سنتی، انستیتو برگزارکننده اصلی کنگرهٔ ملی ریاضیدانان است.

اعضاء انستیتو هیچگونه وظیفهٔ آموزشی ندارند. بااین‌حال غالباً دردانشگاهها دروس ثابتی راارائه و یا سمینارهایی را برگزار می‌کنند. از سال ۱۹۷۳ انستیتو برنامه‌های دکتری را ارائه کرده است. ۲۵ ریاضیدان جوان درفاصلهٔ سالهای ۱۹۷۹ تا ۱۹۸۷ باموفقیت از تز Ph. D خود دفاع کرده‌اند.

امروزه انستیتوفعالترین مرکز تحقیقات ریاضی در ویتنام است. از سال ۱۹۸۰ تا ۱۹۸۷ اعضاء انستیتو بیش از ۳۰۰ مقاله در مجلات بین‌المللی ریاضیات به‌چاپ رسانیده‌اند. درکنار تحقیقات درریاضیات پایه، انستیتو باسازمانهای دولتی فراوانی‌درزمینهٔ کاربرد ریاضیات همکاری‌می‌کند. موفقترین اینها کاربرد روشهای مشخص بهینه‌یابی در مدیریت اقتصادی، آنالیز عددی در مدیریت منابع‌آب، وآمار درمسائل کشاورزی بوده‌است.

انستیتو ۲ مجلهٔ تحقیقاتی ریاضی به چاپ می‌رساند (تنها مجله‌های ویتنام):

– *Acta Mathematica Vietnamica* به‌زبانهای‌بین‌المللی (عمدتاً انگلیسی) با ۲ شماره درهرسال. مقالاتی‌ازبعضی ریاضیدانان شناخته‌شده ازقبیل ه. هیرونا کا[1]، ف. فام[2]، و. ماسلوف[3]، و لو دانگ‌ترنگ[4] دراین مجله آمده است.

– *Journal of Mathematics*، به زبان ویتنامی با چهار شماره در سال. هر دو مجله در *Mathematical Reviews* و *Zentralblatt für Mathematik* *Referativnyi Zhurnal* نقد می‌شوند. آنها منظماً به‌بیش‌از ۳۰انستیتوی ریاضی خارجی‌برای مبادله ارسال می‌شوند. انستیتو همچنین یك سری پیش از چاپ برای اعلام سریع دستاوردهای جدید منتشر می‌سازد.

امکانات تحقیقاتی و موانع

تمامی انستیتوهای ریاضیات ویتنامی وابسته به دولت‌اند. با اینحال، منابع مالی آنها نزدیك به‌صفر است،ازاینرو درهرآنچه‌که برای‌فعالیت‌های ریاضی ضروری است، کمبود وجود دارد. آنها تقریباًهیچگاه ارزخارجی برای خریدوسایل اداری،کتاب و یا مجله دریافت نکرده‌اند. تنها تعداد محدودی از انستیتوها دستگاههای کپی و یا کامپیوترهای شخصی به‌عنوان هدیه از مؤسسات بین‌المللی دریافت کرده‌اند. در تمام کشور، کتابخانه‌های‌اندکی‌وجود دارندکه دارای‌کتابهای ریاضی ویا مجلات باشند. مجموعه‌های آنها کوچك وقدیمی‌اند، و نیازهای جامعهٔ ریاضی ویتنام را برآورده نمی‌کنند. این‌وضعیت را می‌توان‌به‌خوبی با امکانات انستیتو ریاضیات، که مجهزترین بنیاد ریاضی وکتابخانه‌آن تنها کتابخانهٔ‌کشوربا عناوین تخصصی ریاضیات است، نشان داد.

1. H. Hironaka 2. F. Pham
3. V. Maslov 4. Le Dung Trang

انستیتو ریاضیات تنها دارای ۴ ماشین تحریر قدیمی، یك دستگاه‌کپی ودوکامپیوتر شخصی‌است. حتی ازاین ماشینهای تحریر ودستگاه‌کپی به‌خاطر کمبود نوار، جوهر و سایر وسایل تنها گهگاه می‌توان استفاده کرد. دستگاه کپی هدیهٔ کمیتهٔ امریکایی همکاری علمی با ویتنام است. کامپیوترها باپولهایی‌که توسط اعضاء ازسفرهای آنها به کشورهای غربی پس‌انداز شده، خریداری شده است. بااینحال، این کامپیوترها به دلیل نداشتن وسایل جانبی کافی ازکارایی بالایی برخوردار نیستند. کتابخانهٔ انستیتو حدوداً دارای هجده هزارکتاب، مجله ونسخه‌های پیش‌ازچاپ ازمنابع گوناگون است. بودجهٔ دولتی تنها برای خرید نشریات ازشوروی، که قسمت‌اصلی کتابهاراتشکیل می‌دهدکافی‌است. بقیهٔ عناوین، باموضوعات مبادله شده‌اند و یا هدایایی از کتابخانه‌های کشورهای خارجی. ازاینرو، انستیتو تنها دوهزارکتاب غیر روسی دارد، که غالباً قبل از ۱۹۷۰ خریداری شده‌اند. کتابها حتی‌تمام زمینه‌های‌تحقیقاتی‌انستیتو را دربرنمی‌گیرد. کتابخانه دارای لیست بلند بالائی ازمجلات دریافتی است، اما بیشتر آنهاتنها دارای‌کمتر از ۲۰ دوره هستند. درحال‌حاضر، تنها ۲۵ مجله ازکشورهای غربی (غالباً ازژاپن) ازطریق مبادله دریافت می‌شود.

این وضعیت‌مسائل‌عمده‌ای‌برای‌توسعهٔ‌ریاضیات درویتنام به‌وجودآورده‌است. بالاتر ازاین، کمبود اطلاعات وجسوددارد. ریاضیدانان ویتنامی غالباً دسترسی‌به‌متون‌ریاضی‌ندارند. هنگامی‌که آنها فکر وایدهٔ خوبی برای پژوهش دارند، باید ازهمکاران خارجی‌خوددرخواست‌مطالب‌مربوط به‌آن‌رابکنند. اما، معمولاً زمان‌زیادی‌برای‌گرفتن مطالب‌موردنظر گرفته می‌شود، چراکه‌ارتباط‌هوایی کمی‌بین ویتنام ودنیای‌خارج وجوددارد وپست نیزکارآیی ندارد. ریاضیدانان ویتنامی‌امکان‌کمی برای ارتباط مستقیم باهمکاران خود دارند. آنها به‌ندرت امکان‌مسافرت علمی و یا بازدید دارند (و تعداد محدودی از ریاضیدانان‌خارجی نیز از ویتنام بازدیدکرده‌اند) چراکه مسافرتهای‌هوائی‌گران‌است، تمام شرکت‌کنندگان‌ویتنامی درکنفرانسها ویادانشجویان‌بورسیه بایستی‌به‌حمایت مالی‌سازمانهای اعتباری بین‌المللی متکی باشند. از اینرو، ریاضیدانان ویتنامی معمولا تصورکاملی ازپیشرفتهای‌جدید در زمینه‌کاری خود ندارند، وبنابراین‌گرفتن ایده والهام برای‌کارهای آنان بسیار مشکل است، ونتایج آنها غالباً عقبتر از همکاران خارجی آنها ست. این مسئله آنها را بسیار نومیدکرده است. برای نمونه، تنها نیمی‌از ریاضیدانان دارای Ph.D پس از پایان تز خود به‌انجام تحقیقات ادامه می‌دهند. بقیه تنهامی‌توانند به‌تدریس بپردازند، ویا حرفهٔ خودرا عوض‌کنند. اخیراً بعضی از برندگان جوان المپیاد بین‌المللی ریاضی، که درقدیم معمولا ریاضیدانان خوبی می‌شدند، تصمیم‌گرفته‌اندکه‌به‌دلیل نداشتن آینده‌ای روشن ریاضی نخوانند. اینها علائمی از خطر رکورد در پیشرفت ریاضیات ویتنام است.

پیشنهادها

از گزارش بالا می‌توان دید که ویتنام توانی بالقوه در تحقیقات ریاضی، و تعداد قابل توجهی ریاضیدان فعال و با تحصیلات خوب دارد. انستیتوهای‌ریاضی آن‌درآموزش‌وتحقیق‌ریاضیات با تجربه‌اند. منبع پایان‌ناپذیری از دانش‌آموزان دبیرستانی وجود دارد، ازقبیل برندگان‌جایزه‌های المپیاد بین‌المللی ریاضی. اما، پیشرفت ریاضیات درویتنام با توجه به‌توان بالقوهٔ آن کافی نبوده

است وهم اکنون به‌دلیل وضعیت نامناسب اقتصادی درخطر فروپاشی است. از اینرو انجمن ریاضی ویتنام ازجامعهٔ بین‌المللی ریاضیات برای حمایت کوششهای خود برای حفظ شرایط عادی برای تحقیقات درخواست کمک کرده است.

۱. برای جبران کمبود اطلاعاتی، یك مرکز اسناد و مدارك می‌تواند برمبنای امکانات فعلی در انستیتو ریاضیات هانوی تشکیل شود. این مرکز باید اطلاعات ریاضی ومنابع تحقیقاتی برای کل جامعهٔ ریاضی‌ویتنام واحتمالاً برای لائوس وکامبوج را فراهم کند. برای این منظور باید وضعیت فعلی کتابخانه ازطرق زیر بهبود یابد:

- کتابخانه باید حداقل دارای تمام کتابها ومجلاتی که توسط اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیات برای کتابخانه‌های ریاضی کشورهای جهان سوم پیشنهاد شده است وقسمتهایی ازمجلات قدیمی، باشد.
- باید یك دستگاه کپی باتوان کوچك‌سازی ویك میکروکامپیوتر (سازگار با IBM) به علاوه یك چاپگر لیزری به‌منظور کمك به تکثیر نسخه‌های مطالب تحقیقاتی ونشر نسخه‌های پیش ازچاپ ومجلات ریاضی (که به‌خاطر کمبود وسایل چاپ وتجهیزات نتوانسته‌اند به‌موقع به‌چاپ برسند) تهیه گردد.
- اگر امکان داشته باشد، امکانات پست الکترونیك وفاکسینگ باید در آنجا نصب شود. اینها مسئلهٔ ارتباطات بادنیای خارج را برای جامعهٔ ریاضی ویتنام حل خواهد کرد.

۲. برای کمك به ریاضیدانان ویتنامی برای خروج از انزوا، اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیات می‌تواند موارد زیر را (برمبنای درخواستها) در نظر بگیرد.

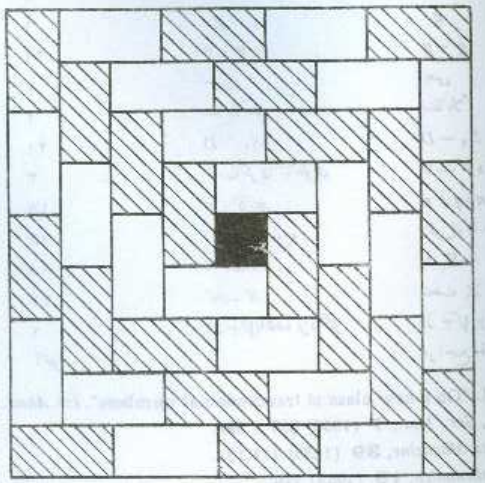
- اعطای هزینه‌های سفرعلمی وبازدیدهای خارجی ریاضیدانان جوان: برای مثال، ۲۰۰ دلار امریکا برای یك بلیط رفت وبرگشت بین هانوی و کشورهای اروپای شرقی کافی است، وازآنجا فرد به‌راحتی می‌تواند توسط قطار به‌تعداد زیادی از کشورهای غربی برود. از اینرو IMU می‌تواند به‌طور ثابت ۵۰۰ دلار برای ۲ سفر سالیانه کنار بگذارد.
- اعطاء هزینهٔ اقامت به‌ریاضیدانان خارجی بازدید کننده ازویتنام. این هزینه برای اقامت ۲ هفته‌ای درهانوی کافی است؛ آن هم به دلیل ارزانی هتل وغذا در ویتنام ونرخ مطلوب تبدیل ارز.
- حمایت و کمك در سازماندهی کنفرانسهای سالانهٔ بین‌المللی یا منطقه‌ای دربرخی زمینه‌های خاص ریاضیات در ویتنام.

درآیندهٔ نزدیك، ویتنام می‌تواند به‌عنوان مکانی برای کنفرانسها و همایشهای بین‌المللی در زمینه‌های زیر از ریاضیات (به‌ویژه برای کشورهای جنوب شرقی آسیا) فعالیت کند:

- بهینه‌یابی وتحقیق درعملیات
- آنالیز عددی
- آمار ریاضی
- احتمالات
- معادلات دیفرانسیل
- توپولوژی جبری
- هندسهٔ جبری
- نظریهٔ حلقه‌ها.

برخی ازانستیتوهای ریاضیات ویتنام می‌توانند دانشجویان فارغ‌التحصیل کشورهای جنوب‌شرقی آسیا را حتی در دورهٔ دکتری در زمینه‌هائی از ریاضیات که قوی هستند بپذیرند. ازطرف دیگر، دانشجویان ویتنامی نیز می‌توانند برای فراگیری قسمتهای خاصی از ریاضیات کاربردی و علوم کامپیوتر به این کشورها فرستاده شوند. ویتنام و دیگر کشورهای جنوب‌شرقی آسیا باید برای تبادل ریاضیدان ومطالب تحقیقاتی باهم به‌توافق برسند.

بدون شرح



$$1+4\cdot 2+8\cdot 2+12\cdot 2+16\cdot 2=9^2$$

$$1+2\sum_{k=1}^{n}4k=(2n+1)^2.$$

خوانندگان محترم

لطفاً غلطهای چاپی زیر را که در جنگ ریاضی دانشجو، جلد ۵ آمده است، اصلاح کنید.

صفحه	سطر	نادرست	درست
۷	۲۳	نگاشت	نقشه
۸	۱۳، ۱۴، ۱۸	«	«
۱۲	۸	؟ (دومی)	R
۱۰	۵	$n^{۲}-۱$	$n^{۲}+۱$
۲۳	۸	$\bar{f}$	f
۲۳	۲	f	$\bar{f}$
۲۵	۲	تاز بازکن	تا بازکن
۳۹	۲	درخطی	دوخطی
۳۹	۱۷	C_{λ}	C_{n}
۴۲	۵	تبدیل	انتقال
۴۷	۱	g	$\bar{g}$
۴۷	۲۲	g یا g	g یا $\bar{g}$
۴۹	۷	معین	یعنی
۵۲	۲	متقابلاً هم	متقابلاً
۵۲	۲۱	$S_{۲}\ D$	$S_{۲}-D$
۸۵	۳	ثابت کرد. تناظری	ثابت کرد تناظری
۹۴	۱۵	p و q، p	p و q؛ n
۹۷	۱۳	وقوع ماجمع،	وقوع، ماجمع
۱۰۳	۱۸	تا $S_{۱}$	یا $S_{۱}$
۱۲۹	۲۲	تحت X	تحت $\times$
۱۳۷	۱	از $\sqrt{۳}$ باشد، بزرگتر	از $\sqrt{۳}$ بزرگتر
۱۵۱	آخر		مراجع مقاله به این قرارند:

1. Kazmin, R., "On a new class of trancendental numbers", *Izv. Akad. Nauk SSSr, Ser. Mat.*, **7** (1930) 585 – 597.
2. *Mathematics Magazine*, **39** (1936) 111-134.
3. *Scripta Mathematica*, **19** (1953) 229.

۱۵۷	۱۳	$\left(\frac{m^{۲}}{a_{ij}^{k-۱}}\right)^{۲}$	$\left(\frac{m}{a_{ij}^{k-۱}}\right)^{۲}$
۱۵۸	۱۸	این n ضلعی	این nضلعی مشخص می‌شود
۱۶۲	۲۷	تعارت	تعارف
۱۶۲	۸	می‌داده شود	داده می‌شود

فهرست