جهاد دانشگاهی

دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

جُنگ ریاضی

دانشجو

ویژه ششمین کنفرانس ریاضی کشور

جلد سوم، فروردین ۱۳۶۸

به‌همت جمعی از دانشجویان گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

جُنگ ریاضی دانشجو

به‌همت جمعی از دانشجویان گروه ریاضی و علوم کامپیوتر
دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

مدیر مسؤول: بهزاد منوچهریان
استاد مشاور: غلامرضا برادران خسروشاهی
زیرنظر هیات تحریریه: شاهین آجودانی تمینی
امیراکبری مجدآبادنو
ناصر بروجردیان
بهزاد منوچهریان
همکار این شماره: اقبال زارعی
ویراستار: بهرام معلمی
مسؤول فنی و صفحه‌آرا: نادر کثیری

ناشر: جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران
حروفچینی: عبدی
چاپ:
جلد سوم، فروردین ۱۳۶۸
بها، ۴۰۰ ریال
پخش، نشرروز، صندوق پستی ۱۳۱۴۵-۱۴۹۹، تلفن ۶۴۰۷۸۳۴

نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.

بسم ا... الرحمن الرحیم

فهرست

ویژه‌نامه ... د

مقالات

نقش روش اصل موضوعی	ر. ل. ویلدر	۱
وقتی ریاضیات نه می‌گوید	فیلیپ دیویس	۱۷
صداقت درمباحث ریاضی: آیا یك ویك به‌راستی می‌شود دو؟	فیلیپ دیویس	۳۳
ریاضیات و ریاضی فکر کردن	م. ل. کادت رایت	۴۷
ریاضیات به‌عنوان هنری خلاق	پال هالموس	۵۷
ریاضیدان به‌مثابه یك کاشف	شرمن. ک. استین	۷۴
ریاضیات و صداقت فکری	موزس ریچاردسون	۸۹
آیا می‌توان ریاضیات را قابل فهم کرد؟	رالف فیلیپ بابوس	۹۶
آموزش حل مسئله	پال‌هالموس	۱۰۲

گزارشها

کنفرانسهای ریاضی در ایران، نگاهی به بیست سال گذشته	امیراکبری مجدآبادنو، بهزاد منوچهریان	۱۱۰
نگاهی اجمالی به تاریخچهٔ دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران	بهزاد منوچهریان	۱۱۵
تاریخچهٔ اجمالی کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی	سید محمدکاظم نائینی	۱۱۷
گزارش ششمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی درمجارستان	رحیم زارع نهندی	۱۱۹

بسمه‌تعالی

ویژه‌نامه...

سلام بر خمینی بت‌شکن که از خرداد ۴۲ تا بهمن ۵۷ نهال انقلاب اسلامی را با ایمان و خلوص آبیاری کرد تا با فداکاریهای امت اسلامی به‌بار نشست. به‌امید حق تعالی این نهال که اکنون دهساله شده روز به‌روز تنومندتر و پرثمرتر خواهد شد.

همزمانی بیستمین کنفرانس ریاضی کشور را با آغاز یازدهمین سال پیروزی انقلاب اسلامی به‌فال نیک گرفته و این مجموعه را به صورت ویژه‌نامه‌ای تقدیم می‌کنیم.

از آنجا که به عقیدهٔ ما کنفرانس ریاضی در این کشور باید یکی از اهداف خود را پرداختن به ماهیت ریاضیات و تبلیغ هرچه بهتر ریاضیات قراردهد، با برهم زدن چارچوب معمول جنگ ریاضی دانشجو و انتخاب مقالاتی که عمدتاً اشاراتی طریف به ماهیت ریاضیات و آموزش آن دارند این جنگ را به‌صورت ویژه‌نامه‌ای در رابطه با کنفرانس ریاضی درآورده‌ایم.

علاوه بر مقالات ترجمه شده در بخش گزارشها اشاره‌ای به‌تاریخچهٔ کنفرانسهای ریاضی در ایران و تاریخچهٔ دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران داریم. همچنین از گزارش مأموریت آقایان سید محمدکاظم نایینی و دکتر رحیم زادرع نهندی به‌کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضیات در مجارستان استفاده کرده‌ایم و دو گزارش دیگر در این مورد داریم.

امیدواریم بیستمین کنفرانس ریاضی که در فروردین ماه سال ۱۳۶۸ در دانشگاه تهران برگزار می‌شود نقطهٔ عطف جدیدی از لحاظ کیفیت برگزاری کنفرانسهای ریاضی در این مرز و بوم باشد. لازم است از مساعدتهای معاونت محترم اداری و مالی دانشگاه تهران برادر عزیز مهندس هاشمی نیز تشکر کنیم. منتظر انتشار جلد چهارم جنگ ریاضی دانشجو و گزارش ویژه در مورد بیستمین کنفرانس ریاضی باشید.

من‌ا... التوفیق
جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم
دانشگاه تهران

ر.ل. ویلدر

نقش روش اصل موضوعی•

از وقتی که اهمیت روش اصل موضوعی در تحول نظریه‌های ریاضی شناخته شد، مطالب بسیاری دربارهٔ آن نوشته‌اند. اما، جز کار چند تن از پیشگامان سالهای نخستین این قرن، مانند اسکولم[1] و تارسکی[2]، اکثر این نوشتارها تقریباً درخلال بیست سال اخیر به‌قلم آمده‌اند. مدتها طول کشید تا دنیای ریاضی به‌قابلیتها و نیز، محدودیتهای این روش پی برد؛ و این هم بی‌گمان درست است که حتی امروزه برخی از ریاضیدانان برجسته از کاربرد گستردهٔ آن ناخشنودند. دیدگاهی که پوانکاره [۱۰] و وایل[3] ابراز داشته‌اند، هنوز هم به‌قوت خود باقی‌است. هرچندکه وایل کامیابیهای این روش را می‌پذیرفت، اما فکر می‌کرد باورویش از بابت "اقنای تدریجی[4]" آن است [۱۵]. اومدافع سرسخت بازگشت به‌مسائل "ذات ریاضی" بودکه به اعتقاد او اساس مفاهیمی را تشکیل می‌دادکه بعدها به‌قالب اصل موضوعی درآمد. پوانکاره و وایل هردو به‌نوعی شهودگرا بودند؛ به‌عقیدهٔ آنها ریاضیات را نمی‌توان بدون قربانی کردن چیزهایی از ماهیت واقعی آن به‌صورت اصل موضوعی درآورد. آنها انکار نمی‌کردندکه روش اصل‌موضوعی ابزاری معقول و بجاست، اما فقط وسیله‌ای برای دقت بخشیدن به‌آن موجودات ریاضی است که قبلاً پدیدآمده‌اند-نوعی عمل رده‌بندی یا فهرست‌گذاری، خیلی شبیه همان چیزی که شهودگرایان امروزی به‌آن نظر می‌کنند.

بنابراین، بجاست که از این روش، به‌ویژه در پرتو تحولات اخیر منطق ریاضی، ارزیابی مجددی به‌عمل آوریم؛ و در این‌راستا برای دستیابی به‌چشم‌اندازی مناسب، ظاهراً بایدکار خود را با مروری کوتاه از سیرتحول این‌روش آغاز کنیم. در بررسی تکامل مفاهیم

• Wilder, R. L. "The role of the axiomatic method," *Amer. Math. Monthly*, 74(1967) 115-127.

1. Skolem 2. Tarski 3. Weyl
4. approaching exhaustion

ریاضی، من بی‌برده‌ام که بهتر است میان فشارهای فرهنگی که بر تحول مفاهیم تأثیر می‌گذارند، ازلحاظ "داخلی" بودن وعارضهٔ محیطی بودن تمییز قائل شویم. مثلاً* آغاز قسمت اعظم ریاضیات اولیه، مانند حساب، و اشکال ابتدایی هندسه، ناشی از فشارهای محیطی بوده است؛ اما روش اصل موضوعی جایگاه ویژه‌ای دارد؛ زیرا به‌نظر می‌رسد آغاز آن عمدتاً یا حتی کاملاً* مدیون فشارهای داخلی بوده است. به‌عبارت دیگر، عواملی که در پیدایش آن نقش تعیین‌کننده داشته‌اند، نیازهای درونی بوده‌اند و نه بیرونی. البته، چون نسبت به‌بیشترفتهای اولیهٔ یونانیان اطلاعات ناچیزی داریم، نمی‌توان دراین‌باره یقین‌مطلق داشت؛ اما، ظاهراً اکثرمورخان‌دراین‌باره هم‌رأی‌اند که بحرانهای‌پدیدآمده، در پی تلاشهایی که برای مقابله با پارادوکسهایی مانند پارادوکس زنون به‌عمل آمد، ناگزیر به فرمولبندی یک‌دسته اصول اساسی انجامیدکه سرانجام بنای‌رفیع‌هندسی برپایهٔ آن استوار شد. ابداع این‌روش، پذیرش ضمنی نوع خاصی از استدلال منطقی‌را با خود به‌همراه آورد؛ بدینسان استنتاج منطقی برای نخستین‌بار در ریاضیات به‌کاربرده شد.

از اینرو، ظاهراً منطقی است که نقش عمدهٔ ایفا شده توسط روش اصل موضوعی در ریاضیات یونان را ایجاد یک بنیان سازگار بدانیم. با درنظر داشتن این نقش، باید به‌دو جنبه از این‌روش توجه کنیم: (۱) شیوهٔ وارد شدن منطق به‌حوزهٔ ریاضیات؛ در واقع، هم انگیزه (یعنی، دستیابی به‌یک دستگاه سازگار) و هم جنبهٔ دوم‌شناختی (استنتاج منطقی)؛ گرایش‌داشتندکه ریاضیات را فرعی‌برمنطق سازند؛ (۲) احتمالاً* ازهندسه‌ای‌که در اصول[1] توصیف شده است تنها یک تعبیر ـ به‌زبان امروزی، تنها یک‌مدل ـ وجود داشته است. هندسهٔ ابتدایی، همانند حساب، در ارتباط با نیازهای مقابله با محیط فیزیکی رشد کرد؛ و هندسه درنزد یونانیان، حتی پس‌ازآنکه به‌صورت یک‌دستگاه اصل موضوعی فرمولبندی‌شد، ظاهراً هنوز هم یکی از علوم مربوط به‌جهان فیزیکی به‌حساب می‌آمده است. درنتیجه، آنچه‌که ما نمادهای اولیه می‌خوانیم قابل تغییر نبودند و به‌طور ثابت تنها به یک مدل فضایی اشاره داشته‌اند.

برای بررسی تحول اساسی بعدی باید به‌قرن نوزدهم برگردیم. جای آن نیست که به‌عوامل ایجادکنندهٔ این تغییر وتحول بپردازیم؛ با نگاه به‌گذشته می‌توانیم علایم آن را حتی از خیلی پیشتر مشاهده‌کنیم. چنین متداول بوده است که این تحول را به‌ابداع هندسهٔ نااقلیدسی نسبت می‌دادند. اما، همان‌طورکه اخیراً فرودنتال[2] خاطرنشان ساخته است [۴]، شواهدکمی مبنی برهیجان وحتی توجه جامعهٔ ریاضی به‌کارهای بولیایی[3] و لباچفسکی، تا حداقل سی سال پس از انتشار آن، موجود است. و دراین‌میانه مؤلفان دیگری مانند پیکاک[4] در جبر، وول[5] در مکانیک، و بول در منطق، به‌روشنی ویژگی نسامعین بودن نمادهای اولیهٔ هردستگاه اصل موضوعی‌را که ما امروزه برای آنها قائلیم، تشریح کردند. تنها پیامد ناشی

۱. منظور کتاب اقلیدس است ـ م.

2. Freudenthal 3. Bolyai 4. Peacock
5. Whewell

از مقبولیت هندسهٔ نااقلیدسی در ریاضیات، تسریع تحولی بود که از پیش درراه بوده است.

مثلاً* بول در کتابش باعنوان تحلیل ریاضی. منطق، ۱۸۴۷، در ارتباط با جبرنمادی خود اظهار داشت: "اعتبار فرایندهای تحلیل به‌تعبیرنمادهای به‌کاررفته بستگی‌ندارد، بلکه صرفاً به‌قوانین ترکیب آنها بستگی دارد. هرگونه تعبیری که بردرستی روابط فرض شده تأثیر نگذارد، به‌یک‌میزان قابل‌قبول است..." با این‌همه، پس‌از قبول‌اینکه هندسهٔ نااقلیدسی درست به‌همان اندازهٔ هندسهٔ اقلیدسی سازگار است؛ به‌نظر می‌رسدکه نظرعامه برآن بوده است‌که دستگاههای اقلیدسی و نااقلیدسی هنوز هم صرفاً داوطلبان بالقوهٔ علم فضا هستند. شاهد این مدعا تلاشهایی است‌که به‌عمل‌آمد تا تعیین کندکه آیا مجموع زوایای هرمثلث، چه درمقیاس زمینی وچه مقیاس کیهانی، به‌راستی °۱۸۰ است.

اما، باآن‌کار تفکرهندسی رفته‌رفته به‌مسیرهایی درحوزه‌هایی دیگرافتاد؛ انتشارکتاب پاش[1] با عنوان: دزسهایی در باب هندسهٔ جدید در ۱۸۸۲، به‌خصوص در تحقق ویژگی تغییرپذیری نمادهای اولیه مؤثر بود. به‌گفته نگل[2]: "از آن پس هیچ اثری‌توجه دانشجویان این رشته را جلب نکرد مگرآنکه با شمارش دقیق نمادهای اولیه یا تامعین وگزاره‌های اولیه یا اثبات نشده‌آغاز می‌شد ونمادهای اضافی با صدق درشرایط لازم تعریف می‌شدند، و همهٔ گزاره‌های دیگر صرفاً با استفاده از این مبنای اولیه اثبات می‌شدند." [۷]

اما، تامعین دانستن نمادهای اولیه به‌معنای قابل تغییر پنداشتن آنها نیست، و بدیهی است تحول در نگرش، مانند اکثر مفاهیم اساسی ریاضیات فرایندی کند بود. بی‌گمان کارهای گراسمن، پاش، پئانو، پادوا[3]، هیلبرت، راسل، و بسیاری دیگر، جملگی در این سیرتکاملی سهم داشته‌اند؛ این مفهوم تا اوایل این قرن قطعاً اگرکاملاً* هم درک نشده مورد قبول واقع شده بود. این‌مطلب درکارهایی مانندآثار فرشه[4] درباب فضاهای مجرد، و مور[5] دربارهٔ آنالیز عمومی؛ درفرمولبندی اصل موضوعی نظریه‌گروهها؛ و اصول هاوسدورف[6] در مورد فضای کلی توپولوژیک، کاملاً* آشکار است. یانگ[7] در سخنرانی پایانی سلسله سخنرانیهایی‌که در خلال تابستان ۱۹۰۹ در دانشگاه ایلینویز ایرادکرد، و بعداً درکتابش با عنوان مفاهیم بنیادی جبر و هندسه در ۱۹۱۱ منتشر شد، چنین می‌گوید: "ما می‌توانیم علایم تعریف نشده در یک علم مجرد (مقصود او یک دستگاه اصل موضوعی است) را نمادهایی بدانیم‌که نمایانگر هرگونه موجودانی‌اندکه درفرضهای‌اساسی آن‌صدق می‌کنند." مطمئناً در اینجا شناسایی مفهوم نمادهای اولیه به عنوان موجودانی قابل تغییر به ظهور می‌رسد.

سعی من برآن است‌که با این اشارات نقش مهم تاریخی دیگری را که روش اصل موضوعی بازی می‌کند، نمایان سازم. گفته بودم که ظاهراً نقش این روش در ریاضیات یونان ایجاد بنیانی سازگار برای ریاضیات بوده است ـ هدفی دوگانه، یعنی فراهم آوردن

1. Pasch 2. Ernest Nagel 3. Padoa
4. Fréchet 5. E. H. Moore 6. Hausdorff
7. J. W. Young

بنیانی که همچنین تهاجم عوامل ناسازگاری جاری آن زمان را جوابگو باشد (هدف دوم به‌خوبی می‌تواند عاملی انگیزشی باشد). درخلال دوره‌ای که تقریباً سی سال آخر قرن نوزدهم و سی‌سال اول قرن بیستم را دربرمی‌گیرد، می‌بینیم که روش اصل موضوعی نقش جدیدی‌را، درعرصهٔ تجرید بیشتر در ریاضیات، بازی می‌کند. بل [۱، ص ۲۲۹] این‌دوره را از ۱۸۷۹ تا ۱۹۲۵ تعیین‌می‌کند، درحالی‌که برنظریهٔ گروهها تأکید می‌نهدکه درخلال این دوره برخوردی که با آن می‌شود کاملاً* اصل موضوعی است. امـا از اشارات بعدی خود بل به‌روشنی برمی‌آیدکه این افتخار در واقع از آن خود روش اصل موضوعی است؛ او درحدود بیست‌وهشت صفحه بعد صریحاً اظهارمی‌دارد: "روش اصل موضوعی سرچشمهٔ جنبش موشکافانه و نیز تجرید نوین است."

(دراین‌ضمن، باید بگوییم‌که من به‌هیچ روی‌قصد ندارم درباب‌اینکه خصلت‌تجریدی ریاضیات نوین چیز خوبی است یا خیر، نظری ابراز دارم. من فقط می‌خواهم نقش‌روش اصل موضوعی را درتحول ریاضیات نمایان سازم.)

قبل از اینکه به‌وضعیت‌کنونی برسیم، باید نمونه‌ای را ذکرکنم که در آن روش‌اصل موضوعی بار دیگر برای تأسیس بنیانی‌سازگار برای یك‌نظریه به‌کار گرفته می‌شود؛ همان کاری که نخستین‌نمونه‌اش ریاضیات یونان‌بوده است. پس‌از آنکه پی برده‌شد نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها عرصهٔ تاخت و تاز تناقضهاست، تسرملو مجموعهٔ اصول موضوع مشهور خویش را که درآن "مجموعه" و "عضویت" به‌عنوان نمادهای اولیه به‌کار برده شده بودند، منتشر کرد [۱۴]. شباهت این‌حالت با وضعیت یونان، بدان گونه‌که از پس‌پردهٔ گرد وغبار قرون برما آشکارمی‌شود، قابل توجه است. در هردوحالت، بحرانهایی پدیدآمده بودندکه امنیت ریاضیات را تهدید می‌کردند؛ و در هر دو حالت، چارهٔ کار را درآن دیدند که بیان اصل موضوعی بنیانهایی را تصریح کنند و با استوارکردن بنای خود برآنها امیدوار باشند که از یورشهای بیشتر ناسازگاری در امان خواهند بود. علاوه براین، هرچند دستگاه تسرملو از نقایص نسبتاً بی‌اهمیت، اما جدی، اصول اقلیدس خالی بود، احتمالاً* این‌فرض درست است که دستگاه تسرملو، همانند دستگاه یونانی فقط یك مدل را درنظر داشت، یعنی بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها که برای براوردن منظورهای ریاضیات معمولی کفایت می‌کرد، و با این‌حال به‌دقت محدود بود تا از تناقضات شناخته شده اجتناب شود.

دراین رابطه، بایدکارهای پیشتازان قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم را نیز درهمان چیزی کـه امروزه معمولاً* "منطق ریاضی" می‌نامند، یادآوری‌کنیم. در اینجا نیز بار دیگر روش اصل موضوعی درمقام یکی از وجوه بنیان ریاضیات به ایفای نقش فراخوانده شده است. هرچند راسل اصول خود را "همه‌جا درست" یا اصل موضوعهای راستگو[1] نـامید، اما آنها آشکارا اصل موضوع بـودند و بعداً "اصول موضوع ضربی" (اصل انتخاب) و "اصول موضوع نامتناهی" به‌آنها اضافه شدکه به‌زحمت می‌توان‌آنها را ماهیتاً چیزی جز اینکه دقیقاً از نوع اصول موضوع‌اند، دانست. جالب است‌کـه ملاحظه شود، راسل نیز،

1. tautology

مانند اقلیدس و تسرملو، فقط یك‌مدل را در ذهن داشت، وهدف او این‌بودکه شرایط حاکم بردستگاهش چندان دقیق باشدکه تنها یك‌مدل را پذیرا شود. او درنخستین ویرایش‌کتابش با عنوان درآمدی بوفلسفهٔ ریاضی می‌گوید: «منطق درست همان‌قدر بـا دنیای واقعی در ارتباط است‌که جانورشناسی؛ هرچندکه سیمای آن کلیتر و مجردتر است.» مشکل این‌سخن (همانگونه‌که شاید راسل خودش هم بعداً دریافت، زیرا در ویرایش بعدی‌کتاب این‌جمله حذف شده است.) دراین است که مدل مورد مطالعهٔ جانورشناسان از قبل وجود دارد، در حالی‌که آن چیزی‌که راسل مطالعه می‌کرد تنها تجریدی بود ازیك فرایند تحول.

همچنین، باید توجه‌کنیم که انگیزه‌های راسل و وایتهد عمدتاً ازاین‌خواست‌سرچشمه می‌گرفت‌که بحران بنیادی ناشی از تناقضهای نظریهٔ مجموعه‌ها را فروبنشانند. این‌امر در تعارض با نظر منطقیهای متقدم برایشان، چون پئانو و فرگه بودکه پایه‌ای فراهم‌آورند تا عبارت‌ریاضیات‌را برآن بناکنند. همچنین، باید ازتعارض میان‌دستگاههای اصل‌موضوعی تسرملو و راسل و وایتهد درخصوص زبانی که به‌کاربرده‌اند، یادکنیم. دستگاه تسرملو به‌سبك اقلیدسی، به‌آن شکلی‌که ریاضیدانان قـرن نوزدهم آن را توسازی کردند، بنا شده بود، نمادهای اولیهٔ "مجموعه" و یك رابطه بین مجموعه‌ها، "عضویت"، به‌همراه زبـان طبیعی به‌کاربرده شده بود. راسل و وایتهد مفهوم خیلی جامعتری را در نظر داشتند، یعنی پایه‌ای برای‌کل ریاضیات، که با چیزی آغاز می‌شدکه آنها را حقایق منطقی[1] اولیه نامیدند.

همانگونه‌که معلوم شد، هر دو دستگاه کاستیهایی داشتندکـه باید برطرف می‌شدند. درمورد دستگاه تسرملو، مفهوم "خاصیت" به تبع زبـان طبیعی نـاخودآگاه مورد استفاده قرار می‌گرفت و ازآنجا که به‌زودی پی بردندکه "خاصیت" و "مجموعه" درواقع مترادف و هم‌معنا هستند، لازم بودکه برای ازمیان برداشتن این دور باطل مفهوم دقیقتری جایگزین شود ــ کاری که فرانکل [۳] و اسکولم برعهده گرفتند. در موردکتاب اصول ریاضیات اثر راسل و وایتهد، گذشته از انتقادهای وارد براصل موضوع تحویل‌پذیری و اصل موضوع انتخاب و مانندآنها (که این پرسش را مطرح می‌کردندکه دقیقاً تا چه حد می‌توان مفهوم "حقیقت منطقی اولیه" را بسط داد)، قواعد نحوی‌آن نیز ناقص بودند. این نقص را آن پیروان راسل و وایتهد رفع‌کردندکه فلسفهٔ صورتگرایی‌را پذیرفته بودند، و درپی‌انگیزش اولیهٔ ایجاد شده توسط هیلبرت، آنها به‌روشنی بین نمادهای اولیه، اصول موضوع و قواعد ریاضی برای استنتاج فرمولها (یعنی، اثبات قضایـا) از اصول موضوع تمییز گذاردند، به کمك امکان ویژه‌ای‌که درنگرستن به‌گذشته دراختیار داریم، می‌توانیم ببینیم کـه این دو جریان (جریانی‌که تسرملو به‌سبك اقلیدس ادامه دهندهٔ آن بود، وآنکه راسل به سبك منطق صوری بول و فرگه آغازکرده بود) محل تلاقی آرای گوناگون بود.

مقالـهٔ اسکولم، با اهمیت تـاریخیش، که در سال ۱۹۲۲ در پنجمین گـردهمایی اسکاندیناوی [۱۲] ارائه شد، گواهی براین واقعیت است. اسکولم، منطقدانی که با دستگاه منطقی شرودر کاملاً* آشنا بود، دراین مقاله خاطرنشان ساخت‌که اصول موضوع تسرملو را

1. primitive logical truths

بنیانی که همچنین تهاجم عوامل ناسازگاری جاری آن زمان را جوابگو باشد (هدف دوم به‌خوبی می‌تواند عاملی انگیزشی باشد). درخلال دوره‌ای که تقریباً سی سال آخر قرن نوزدهم و سی‌سال اول قرن بیستم را دربرمی‌گیرد، می‌بینیم که روش اصل موضوعی نقش جدیدی‌را، درعرصهٔ تجرید بیشتر در ریاضیات، بازی می‌کند. بل [۱، ص ۲۲۹] این‌دوره را از ۱۸۷۹ تا ۱۹۲۵ تعیین‌می‌کند، درحالی‌که برنظریهٔ گروهها تأکید می‌نهدکه درخلال این دوره برخوردی که با آن می‌شود کاملاً* اصل موضوعی است. امـا از اشارات بعدی خود بل به‌دوشنی برمی‌آیدکه این افتخار در واقع از آن خود روش اصل موضوعی‌است؛ او درحدود بیست وهشت صفحه بعد صریحاً اظهارمی‌دارد: "روش اصل موضوعی سرچشمهٔ جنبش موشکافانه و نیز تجرید نوین است."

(دراین‌ضمن، باید بگوییم که من به‌هیچ روی‌قصد ندارم درباب اینکه خصلت‌تجریدی ریاضیات نوین چیز خوبی است یا خیر، نظری ابراز دارم. من فقط می‌خواهم نقش‌روش اصل موضوعی را درتحول ریاضیات نمایان سازم.)

قبل از اینکه به‌وضعیت کنونی برسیم، باید نمونه‌ای را ذکرکنم که در آن روش‌اصل موضوعی بار دیگر برای تأسیس بنیانی‌سازگار برای یك‌نظریه به‌کار گرفته می‌شود؛ همان کاری که نخستین‌نمونه‌اش ریاضیات یونان‌بوده است. پس‌از آنکه پی برده‌شد نظریهٔ‌کانتوری مجموعه‌ها عرصهٔ تاخت و تاز تناقضهاست، تسرملو مجموعهٔ اصول موضوع مشهور خویش را که درآن "مجموعه" و "عضویت" به‌عنوان نمادهای اولیه به‌کار برده شده بودند، منتشر کرد [۱۴]. شباهت این‌حالت با وضعیت یونان، بدان گونه‌که از پس‌پردهٔ گرد وغبار قرون برما آشکارمی‌شود، قابل توجه است. در هردوحالت، بحرانهایی پدیدآمده بودندکه امنیت ریاضیات را تهدید می‌کردند؛ و در هر دو حالت، چارهٔ کار را درآن دیدند که بیان اصل موضوعی بنیانهایی را تصریح کنند و با استوارکردن بنای خود برآنها امیدوار باشند که از یورشهای بیشتر ناسازگاری در امان خواهند بود. علاوه براین، هرچند دستگاه تسرملو از نقایص نسبتاً بی‌اهمیت، اما جدی، اصول اقلیدس خالی بود، احتمالاً* این‌فرض درست است که دستگاه تسرملو، همانند دستگاه یونانی فقط یك مدل را درنظر داشت، یعنی بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها که برای برآوردن منظورهای ریاضیات معمولی کفایت می‌کرد، و با این‌حال به‌دقت محدود بود تا از تناقضات شناخته شده اجتناب شود.

دراین رابطه، بایدکارهای پیشتازان قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم را نیز درهمان چیزی کـه امروزه معمولاً* "منطق ریاضی" می‌نامند، یادآوری‌کنیم. در اینجا نیز بار دیگر روش اصل موضوعی درمقام یکی از وجوه بنیان ریاضیات به‌ایفای نقش فراخوانده شده است. هرچند راسل اصول خود را "همه‌جا درست" یا اصل موضوعهای راستگو[1] نـامید، اما آنها آشکارا اصل موضوع بـودند و بعداً "اصول موضوع ضربی" (اصل انتخاب) و "اصول موضوع نامتناهی" به‌آنها اضافه شدکه به‌زحمت می‌توان‌آنها را ماهیتاً چیزی جز اینکه دقیقاً از نوع اصول موضوع‌اند، دانست. جالب است‌کـه ملاحظه شود، راسل نیز،

1. tautology

مانند اقلیدس و تسرملو، فقط یك‌مدل را در ذهن داشت، وهدف او این‌بودکه شرایط حاکم بردستگاهش چندان دقیق باشدکه تنها یك‌مدل را پذیرا شود. او درنخستین ویرایش‌کتابش با عنوان «درآمدی برفلسفهٔ ریاضی می‌گوید: «منطق درست همان‌قدر بـا دنیای واقعی در ارتباط است‌که جانورشناسی؛ هرچندکه سیمای آن‌کلیتر و مجردتر است.» مشکل این‌سخن (همانگونه‌که شاید راسل خودش هم بعداً دریافت، زیرا در ویرایش بعدی‌کتاب این‌جمله حذف شده است.) دراین است که مدل مورد مطالعهٔ جانورشناسان از قبل وجود دارد، در حالی‌که آن چیزی‌که راسل مطالعه می‌کرد تنها تجریدی بود ازیك فرایند تحول.

همچنین، باید توجه‌کنیم که انگیزه‌های‌راسل و وایتهد عمدتاً ازاین‌خواست‌سرچشمه می‌گرفت‌که بحران بنیادی ناشی از تناقضهای نظریهٔ مجموعه‌ها را فروبنشانند. این‌امر در تعارض با نظر منطقیهای متقدم برایشان، چون پئانو و فرگه بودکه پایه‌ای فراهم‌آورند تا عبارت‌ریاضیات‌را برآن بناکنند. همچنین، باید ازتعارض میان‌دستگاههای اصل‌موضوعی تسرملو و راسل و وایتهد، درخصوص زبانی که به‌کاربرده‌اند، یادکنیم. دستگاه تسرملو به‌سبك اقلیدسی، به‌آن شکلی که ریاضیدانان قـرن نوزدهم آن را نوسازی کردند، بنا شده بود. نمادهای اولیهٔ "مجموعه" و یك رابطه بین مجموعه‌ها، "عضویت"، به‌همراه زبـان طبیعی به‌کاربرده شده بود. راسل و وایتهد مفهوم خیلی جامعتری را در نظر داشتند، یعنی پایه‌ای برای‌کل ریاضیات، که با چیزی آغاز می‌شدکه آنها را حقایق منطقی[1] اولیه نامیدند.

همانگونه‌که معلوم شد، هر دو دستگاه کاستیهایی داشتندکـه باید برطرف می‌شدند. درمورد دستگاه تسرملو، مفهوم "خاصیت" به تبع زبـان طبیعی نـاخودآگاه مورد استفاده قرار می‌گرفت و ازآنجاکه به‌زودی پی بردندکه "خاصیت" و "مجموعه" درواقع مترادف و هم‌معنا هستند، لازم بودکه برای ازمیان برداشتن این دور باطل مفهوم دقیقتری جایگزین شود ــ کاری‌که فرانکل [۳] و اسکولم برعهده گرفتند. در مورد کتاب اصول ریاضیات اثر راسل و وایتهد، گذشته از انتقادهای وارد براصل موضوع تحویل‌پذیری و اصل موضوع انتخاب و مانندآنها (که این پرسش را مطرح می‌کردندکه دقیقاً تا چه حد می‌توان مفهوم "حقیقت منطقی اولیه" را بسط داد)، قواعد نحوی‌آن نیز ناقص بودند. این نقص را آن پیروان راسل و وایتهد رفع‌کردندکه فلسفهٔ‌صورتگرایی‌را پذیرفته بودند، و دربی‌انگیزش اولیهٔ ایجاد شده توسط هیلبرت، آنها به‌روشنی بین‌نمادهای اولیه، اصول موضوع و قواعد ریاضی برای استنتاج فرمولها (یعنی، اثبات قضایـا) از اصول موضوع تمییز گذاردند. به کمك امکان ویژه‌ای‌که درنگریستن به‌گذشته دراختیار داریم، می‌توانیم ببینیم کـه این دو جریان (جریانی‌که تسرملو به‌سبك اقلیدس ادامه دهندهٔ آن بود، وآنکه راسل به سبك منطق صوری بول و فرگه آغاز کرده بود) محل تلاقی آرای گوناگون بود.

مقالـهٔ اسکولم، با اهمیت تـاریخیش، که در سال ۱۹۲۲ در پنجمین گـردهمایی اسکاندیناوی [۱۲] ارائه شد، گواهی براین واقعیت است. اسکولم، منطقدانی که با دستگاه منطقی شرودر کاملاً* آشنا بود، دراین مقاله خاطرنشان ساخت‌که اصول موضوع تسرملو را

1. primitive logical truths

می‌توان درچارچوب منطق شرودر به‌صورت گزاره‌هایی مقدماتی فرمولبندی کرد، و درنتیجه می‌توان به‌جای مفهوم نامعین "خاصیت" که تسرملو به‌کار برده بود، عبارتهای معینی را قرار داد که از رابطه‌های "ع" و "=" تشکیل شده باشند. و حتی مهمتر از این، او خاطرنشان ساخت، قضیه‌ای که لوون‌هایم[1] در ۱۹۱۵ در ارتباط با جبر شرودر اثبات کرد، می‌تواند ساده شود و با انجام جرح و تعدیلاتی در آن نشان داده‌می‌شود که اگردستگاه تسرملو-سازگار باشد، آنگاه فرمولهای آن باید مدلهای شمارش‌پذیر داشته باشند. ازآنجا که فرمولهای بیانگروجود توانهای بالاتراز $\aleph_0$ را می‌توان در دستگاه تسرملو اثبات کرد، اسکولم به‌حق به‌این نتیجه رسید که: "مبنای اصل موضوعی نظریهٔ مجموعه‌ها به‌مفهوم نسبی مجموعه می انجامد، و این امر به‌گونه‌ای جدانشدنی با هر گونه اصل موضوعی‌سازی همراه است." او در نتیجه‌گیری خود، روشن ساخت که به استفاده از روش اصل موضوعی به‌عنوان ابزاری مناسب برای بنیانگذاری نظریهٔ مجموعه‌ها اعتقاد ندارد ــ در واقع، او از اینکه عدهٔ زیادی از ریاضیدانها چنین تصوری از این روش دارند، اظهار شگفتی کرد.

اگر چه نتیجه‌گیریهای اسکولم مورد تصدیق قرار گرفت، خوشبختانه چنین نگرش بدبینانه‌ای پژوهشگران بعدی را از ادامهٔ به‌کارگیری این روش درنظریهٔ مجموعه‌ها باز نداشت. مثلاً فون‌نویمان که مقالات کلاسیك او درنظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها چندی بعد انتشار یافت، خاطرنشان کرد که روش لوون‌هایم و اسکولم درمورد دستگاه او هم قابل به‌کارگیری است و درنتیجه آنها بردستگاه او، وهر گونه نظریهٔ اصل‌موضوعی مجموعه‌های دیگری هم، "مهر غیرواقعی بودن" نهاده‌اند. و پس از ذکر این نکته که "ظاهراً هیچگونه اصل موضوعی‌سازی جازمی از نظریهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد"، ادامه می‌دهد: "ازآنجاکه هیچ دستگاه اصل موضوعی برای ریاضیات، هندسه، و مانندآنها وجود ندارد، مگرآنکه نظریهٔ مجموعه‌ها را فرض کرده باشد، بنابراین بی‌گمان هیچگونه دستگاه نامتناهی اصل موضوعی جازمی قابل ارائه نیست." وی در ادامه می گوید: "این شرایط، ازنظرمن حجتی است برای شهود گرایی." [۸]. آنگاه، فون‌نویمان درنتیجه‌گیری کلی با اسکولم هم‌رأی می‌شود.

اما، "پیروان روش اصل موضوعی" ازآنجایی که فون‌نویمان از راه ماند، کار را ادامه دادند، و پل برنایز[2] طی یك رشته مقاله‌های خودکه از ۱۹۳۷ آغاز شد، ساده‌سازی مؤثر وقابل استفاده‌ای از دستگاه فون‌نویمان ارائه داد. اگرچه این‌دستگاه در زبان طبیعی قرارداشت، به‌وضوح درحساب محمولات مرتبه اول قابل‌فرمولبندی بود؛ وگودل درحدود ۱۹۴۰ با پیرایشهایی، از آن بهره گرفت تا سازگاری اصل انتخاب و فرضیهٔ پیوستار تعمیم‌یافتهٔ کانتور را با سایر اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت کند. [۵]

این نتیجه، گذشته از معنای دقیقاً ریاضی آن، ازنقطه‌نظر تحول روش اصل‌موضوعی درمرتبه اول اهمیت قرار دارد. برای قوام بخشیدن به‌این نظر، باید یکی دونکته‌ای را که دربررسی تاریخی خود از قلم انداخته‌ایم، بازگو کنیم.

1. Löwenheim 2. Paul Bernays

پیشتر، نقش روش اصل‌موضوعی را در افزایش تجرید ریاضیات برشمردیم. به‌موازات آن، درخلال سالهای پایانی قرن‌نوزدهم، تحقیقات دوکیند، وایرشتراس، کانتور، وسایرین در باب ساختار پیوستار اعداد حقیقی ایده‌های نظریهٔ مجموعه‌ای برجامعه ریاضی تحمیل می‌کرد ــ نمونه‌ای از آنچه که پیشتر فشارهای "داخلی" نامیدیم ــ و اگرچه کانتور آنقدر زیرك بود که "فرضیهٔ پیوستار" را کشف کند، اما هرگز متوجه‌نشدکه حتی درنخستین مقاله‌اش که باید ثابت می‌کرد هر مجموعهٔ نامتناهی زیرمجموعه‌ای با کاردینال $\aleph_0$ دارد، از اصل انتخاب سود جسته است. پئانو درهمان اوایل ۱۸۹۰ به اصل انتخاب توجه کرد (و به‌آن ایراد گرفت) [۹]، اما اثبات قضیهٔ خوشترتیبی (که تسرملو در ۱۹۰۴ آن‌را منتشر کرد [۱۳])، مورد نیاز بود تا قدرت اصل انتخاب جامعهٔ ریاضی را غافلگیر کند.

از دیدگاه تحول ریاضیات این یکی از مهمترین رویدادها بود، و به‌همان میزان نمونه‌ای عالی بود از کشف و فرمولبندی روشن یك جنبهٔ اساسی مکتوم مانده از یك مفهوم رایج. برعکس، فرضیهٔ پیوستار اقتباسی طبیعی از مسئلهٔ اتصال‌بود. همین‌که ثابت‌شد اعداد حقیقی کاردینالی بزرگتر از $\aleph_0$ را تشکیل می‌دهند، بلافاصله این پرسش مطرح می‌شود که آیا این همان کاردینال بعدی است یا خیر. کانتور درمقالهٔ خود در سالنامهٔ ریاضیات (جلد ۲۱)، در ۱۸۸۳ از این‌فرضیه یاد می کند و نخستین‌واکنش او این‌بود که اظهار امیدواری کرد بزودی بتواند ثابت کند که کاردینال ح همان کاردینال بعدی‌است. اما، همچنان به‌سادگی اصل‌انتخاب به‌کار برده می‌شد، بدون آنکه از وجود آن آگاه باشند. مسئلهٔ پیوستار، نخستین مسئله از مجموعه مسائل مشهوری بود که در کنگرهٔ ۱۹۰۰ [۶] ازسوی هیلبرت مطرح شد؛ درحالی که او توجه نداشت که دارد فرض می کند هرمجموعهٔ نامتناهی زیرمجموعه‌ای با کاردینال $\aleph_0$ دارد ــ و همانگونه که قبلاً گفته‌ایم، این موضوع نیز به‌اصل انتخاب وابسته است. باید تا برجسته‌ترین کاربرد این‌اصل: در اثبات قضیهٔ خوشترتیبی توسط تسرملو، منتظر می‌ماندند، تا به درك کلی موجودیت آن نائل شوند. این موضوع ما را به فهم این مطلب برمی‌انگیزاندکه به‌راستی چه مقدار فرضیات اساسی‌دیگری را از سرعادت درمفاهیم‌ذهنی خود داریم، بدون‌آنکه آنها را کشف کنیم یا به‌دقت آنها را فرمولبندی کنیم.

همین‌که قدرت و خصلت بنیادی‌این اصل آشکار شد، تسرملوآن را درمجموعه اصول خود برای نظریهٔ مجموعه‌ها گنجانید [۱۴]. از سوی دیگر، او فرضیهٔ پیوستار را جزو اصول‌موضوع قرارنداد، و به‌این‌ترتیب پروندهٔ این پرسش گشوده باقی ماندکه آیا می‌توان این فرضیه را از روی سایر اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت کرد؟

اهمیت نتیجه‌گیری‌سال ۱۹۴۰ گودل، یعنی‌سازگاری اصل انتخاب وفرضیهٔ پیوستار با قسمتهایی ازنظریهٔ مجموعه‌ها که بیانگراصولی‌اندکه مقبولیت عام‌دارند، ازلحاظ هدفی که ما دنبال می‌کنیم، آن است که این نتیجه همچنین نمایشگر قدرت روش اصل موضوعی به‌عنوان یکی از شیوه‌های پژوهش روابط میان جنبه‌های گوناگون یك نظریه است. حتی اگر کسی، مانند اسکولم، فکر کند که نظریهٔ مجموعه‌ها را نباید اصل موضوعی کرد، بازهم تحت تأثیرکارگودل قرار خواهد گرفت. بسیاری (از جمله گودل) براین اعتقاد بودند که فرضیهٔ پیوستار، به‌عنوان یکی از اصول عام نظریهٔ مجموعه درست نیست؛ و این فرضیه

ممکن است سرانجام از اصولی که مقبولیت عام دارند استنتاج شود. هیچکس نمی‌داند که این امید عبث است؛ و همین یکی از موفقیتهای روش اصل موضوعی بود. هنوز هم می‌توان از این نظر پشتیبانی کرد که روش اصل موضوعی در فرمولبندی، یعنی پایه‌ریزی، نظریهٔ مجموعه راه مناسبی نیست، و همچنان پذیرفت که این روش در مقام ابزار پژوهش در روابط میان جنبه‌های گوناگون آن نظریه، و احتمالاً کشف جنبه‌های جدید، نقش برحقی را ایفامی کند. البته، نتایج اخیر پاول کوهن [۲]، با نشان‌دادن اینکه فقیضهای اصل انتخاب یا فرضیهٔ پیوستار نیز با اصول معمول نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار هستند، این تز را تقویت کرده است.

من بر آن نوع نقشی که روش اصل موضوعی در تحول نظریهٔ مجموعه‌ها ایفا می‌کرد، از این بابت تأکید کردم که، فکرمی کنم مقدر است که این نقش در آینده مورد تأکید بیشتری قرار گیرد. ریاضیات، قرنهای زیادی از عمر خود را با ابزار مفهومی بسیار غیردقیقی به‌سر آورده است. به‌استثنای دوران دستاوردهای عظیم ریاضیدانها، که مدیون قرنها ذخیرهٔ مطالب ریاضی بود، پایهٔ ریاضیدانان پیش از دوران نوین، استوارتر از پایهٔ عدد شناسان بابلی عهد قدیم نبوده است. اما، آیا می‌توان تصور کرد که امروزه یک "تماشاچی" همچون اسقف بارکلی بتواند انتقادی اصولی از مفاهیم اساسی ریاضیات ارائه دهد؟ همچنین، لحظه‌ای در این موضوع تأمل کنیم که کمتر از صد سال است ریاضیدانان چیزی را ابداع کرده‌اند که آن‌را فرمولبندی دقیقی از ساختار اعداد حقیقی ــ پیوستار اعداد حقیقی ــ می‌دانستند. در آن هنگام این‌را بزرگترین دستاورد می‌دانستند. سرانجام، مفهوم تصوری مبهم "پیوستگی" در کلیت آن بررسی شد و ظاهراً آن را به‌دقت توصیف کردند. به‌قول راسل، "آن نوع تسلسلی که کانتور به‌عنوان پیوسته تعریف می‌کند، چه بیشترین نزدیکی را با آنچه که تاکنون به‌طور مبهم توسط این واژه بیان می‌شده است داشته باشد وچه نداشته باشد، باید تصدیق کرد که خود این تعریف و گامهایی که به‌آن منجر شده است یک پیروزی در آنالیز و تعمیم بوده است." [۱۱، ص ۳۰۳]. متأسفانه در این روند از مفهوم تصوری مبهم دیگری، مفهوم "مجموعه"؛ بهره گرفته شده است. و تردید نسبت به‌این مفهوم چندان ناچیز بود که حتی ریاضیدانی شایسته و دارای ذهنی فلسفی، چون پوانکاره، اینگونه اظهار نظر کرد که (هرچند نباید از ماهیت موهوم این گونه اعتقادات در نزد پیشینیان او چشم پوشید): "ما معتقدیم که در استدلالها یمان دیگر به‌شهود متوسل نخواهیم شد." و در حوزهٔ آنالیز، خاطرنشان می‌سازد "به‌دقت مطلق نائل آمده‌ایم." (بل [۱، ص ۲۹۵]). امروزه، به یمن روش اصل موضوعی، می‌دانیم که کانتور، ددکیند و سایر پیشگامان قرن نوزدهم فقط گامی به‌جلو برداشته‌اند، اما بی گمان یک گام مهم، آنچه که آنها انجام‌دادند، دست‌کم گامی به‌پیش بود. اما تاکنون، تا آنجا که به‌ساختار پیوستار اعداد حقیقی مربوط است، امروزه ما می‌دانیم که هنوز هم به‌شهود خودمان وابسته‌ایم. آیا فرضیهٔ پیوستار را خواهیم پذیرفت؟ آیا ما قطعاً می‌پذیریم که تمام مجموعه‌های حاصل از اعداد حقیقی اندازه پذیرند؟ در وضعیت فعلی شهود ریاضیمان نمی‌توانیم به‌این پرسشها پاسخ گوییم مگر به‌صورت حکم و فرمان. اما پرسشهای ریاضی بسا فرمان تصمیم گیری نمی‌شوند. این پرسشها نهایتاً به اعتبار فشارهای داخلی و دیگر

نیروهای فعال در تکامل ریاضیات پاسخ داده می‌شوند. حدس من این است که یکی از نقشهای عمده‌ای که روش اصل موضوعی در آینده بازی خواهد کرد، همین است: کمک به تجزیه و تحلیل عمیق نتایج آنچه که شهود ما القا می‌کند. درست همانگونه که نیازهای نظریهٔ توابع تجزیه و تحلیل دقیقتری را از ماهیت پیوستار اعداد حقیقی، در اواخر قرن پیش، ملزم ساخت، شاید نیازمندیهای تجرید روزافزون ریاضیات تصمیم گیریهای مربوط به موضوعاتی مانند اصل انتخاب و فرضیهٔ پیوستار را الزامی کند. در حال حاضر، من جسارت اظهار نظر پیرامون چگونگی پاسخ آن پرسشها را ندارم. در مورد اصل انتخاب، که ظاهراً وجود مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر به آن وابسته است، به نظر می‌رسد پذیرش عام آن بسیار محتمل است. ظاهراً تعداد زیادی از روابطی که ضرورت شهودی دارند، به‌این اصل وابسته‌اند ــ مثلاً، اگر مجموعهٔ A تحت یک تابع پوشا روی مجموعهٔ B تصویر شود، آنگاه تعداد عناصر A دست‌کم به همان اندازهٔ تعداد عناصر B است.

تکرار کنم: من نمی‌گویم، روش اصل موضوعی همان راه مناسب تأسیس نظریهٔ مجموعه‌ها یا منطق است. بی‌پرده بگویم، نظر من درست برخلاف این است. من اعتقاد ندارم که ما باید ریاضیات را بر پایهٔ دستگاههای قابل تغییری از اعداد، نظریهٔ مجموعه‌ها، یا منطق بنا کنیم ــ که در حال حاضر همهٔ آن چیزی است که می‌توانیم با روش اصل موضوعی انجام دهیم. تا این حد من یک شهود گرا هستم، و تا آنجا که از (فتار ریاضیدانان برمی‌آید، اکثر آنها نیز به همین نحله وابسته‌اند. مانیزمانند ریاضی‌کاران، فقط از یک نظریهٔ مجموعه‌ها، یک منطق، و یک نوع دستگاه اعداد بهره می‌گیریم؛ و اینها چه پذیریم و چه نپذیریم مبنای شهودی دارند. علاوه براین، به عقیدهٔ من، علیرغم اینکه اینها مفاهیم کاملاً بالغ و رشد یافته‌ای‌اند ــ که می‌توانیم بگوییم دیگر حالا ایده‌هایی "قدیمی" هستند ــ اما هنوز هم در راه تکامل هستند. همچنین اعتقاد دارم که روش اصل موضوعی در این فرایند نقشی بنیادی خواهد داشت. البته تاکنون روشن شده است که روش اصل مو ـعی مهمترین ابزار در انتظام آن چیزی بوده است که شهود ما می‌گوید.

نمی‌خواهم این ملاحظات را بدون ذکر آنچه که در نزد بسیاری از ریاضیدانان نقشهای مهمتری از روش اصل موضوعی است به پایان برم. احتمالاً باید به‌کارگیری حرف تعریف معین را در عبارت "روش اصل موضوعی" مورد چون وچرا قراردهم؛ زیرا ظاهراً امروزه چندین "روش اصل موضوعی" برای استفاده وجود دارد، درست به همان شکل که راههای متعددی بـرای رده بندی وجود دارد. اگر آنها را بـرمبنای درجهٔ صوری بودن مرتب کنیم، تقریباً سه نوع‌اند.

۱. در اولین نوع که بـه خاطر شباهتش بـا اصول اقلیدس می‌توانیم آن را "نوع اقلیدسی" بنامیم، به‌نمادهای اولیه به‌عنوان نامعین نگریسته نمی‌شود و فقط یک مدل توصیف می‌شود. این مدل معمولاً تصوری است که به واسطهٔ ادراکات ما از جهان فیزیکی و اجتماعی القا شده است، و منظور از آن این است که خواص و روابط اساسی این مدل قوام پیدا کنند. این آن نوع ظریفتری نیست که ما ریاضیدانان عموماً از آن بهره می گیریم؛ و عمدتاً باید در مطالعات در حوزه‌های علوم فیزیکی و اجتماعی، که ظاهراً در آنجا نقش مفیدی را

ایفا می‌کند، راه یافته باشد. درواقع، می‌توان پرسید که آیا دراین حوزه‌ها (با امکان چشم‌پوشی از برخی نظریه‌های فیزیکی) انواع روشهای اصل موضوعی که در ریاضیات به‌کار می‌روند، نتایج چشمگیری به بارخواهندآورد یا خیر.

مسائل جالبی را می‌توان درکاربرد این نوع روش اصل موضوعی، به‌ویژه ازلحاظ انتخاب مدلها، یافت. قرنهای هفدهم وهجدهم سرشاراز نمونه‌های بیشماری‌ازبه‌کارگیری مطلوب ونامطلوب این روش هستند؛ به‌نظرمن نام‌آورترین آنها عبارت‌انـد از : اخلاق[1] اثراسپینوزا و اصول[2] نیوتن. موارد نامطلوب این‌روش در خلال این دوران ممکن است درارتباط با لغزشهای واقعی کاربرد آن در علوم اجتماعی تا دوران اخیر بوده باشد.

با همهٔ اینها، تردید نداریم که بررسی دقیق آن دوران مناسباتی را با پیدایش منطق نمادی نشان خواهـد داد. مثلاً : دکارت و هابز هر دوچیزی را مطرح ساختند که آن را «هندسی سازی» ــ به‌معنی اصل موضوعی سازی به‌سبك اقلیدس ــ تمامی معـرفت بشری نام نهادند. درنزد دکارت، این طرح پزشکی و اخلاق، هردو را، دربرمی‌گرفت. و درنزد هابز این طرح روانشناسی، اخلاق، وسیاست را شامل می‌شد. درهردومورد به‌وضوح یك "حساب عمومی استدلال" به تصور درمی‌آمد. بعدها، وقتی لایب‌نیتس پای به صحنه گذارد، آشکارا طرح مشابهی در نزد همگان شایع بود. لایب‌نیتس تلاش کرد روش اصل‌موضوعی را حتی درسیاست نیز به‌کارگیرد. مثلاً، در ۱۶۶۹ وقتی بیست وسه ساله بود ودررشته‌های فلسفه وحقوق تحصیل کرده بود، وکیل حاکم ایالت مـاینتز[3] بود و در همین زمان لهستان بی‌تاج وتخت مانده بود. بنابراین مقدرشدکه او از ادعاهای موکلش دفاع کند. او به این منظور رسالهٔ کوتاهی بـا عنوان نمونهٔ استدلال برای پادشاهی که برای لهستان انتخاب خواهد شد[3] نوشت که به شیوهٔ «هندسی»، در حدود شصت قضیه (به همراه قضایای فرعی) ارائه می‌داد وبنابر آنها سه نفرازنامزدهای پادشاهی باید حذف می‌شدند وچهارمی برگزیده می‌شد (البته، چهارمی انتخاب نشد). دوسال بعد، او با استفاده‌ازیك دستگاه "هندسی" دیگر کوشید تا لوئی چهاردهم پادشاه فـرانسه را قانع سازد لشگری را برعلیه تـرکها اعزام سازد.

با توجه به مثالهایی ازاین دست، همراه با ایـده‌های همکاران لایب‌نیتس در باب یك "حساب استدلال"، می‌توان حدس زدکه اینها ازجمله نیاکان چیزهایی‌اندکه بعدها به صورت منطق ریـاضی تکامل پیدا کـرد. مثالهای بسیارزیادی ازاین گونـه، که با وضوح کمتری نوشته شده‌اند وجود دارند (معلم خود لایب‌نیتس، ارهارد ویگل[4]، یك ریـاضیدان معتبردر دانشگاه ینا[5] درباره هر دو مطلب اخلاق اقلیدسی[6] و ایده‌های کلی در ریاضیات[7]

1. Hobbes 2. Mainz
3. Specimen demonstrationum politicarum pro rege polonarum eligendo
4. Erhard Wiegel 5. Jena 6. *Ethica Euclidea*
7. Idea Matheseos Universae

چیزهایی نوشته است). عدم موفقیت‌آنها درسیدن به اهداف مورد نظـرشان (بی گمان، تا اندازه‌ای به‌خاطر اینکه مفهوم ابتدایی روش اصل موضوعی غالب بوده است)، نبایـد اهمیت آنها را در تکامل فکر بشری خدشه‌دار کند.

احتمالاً اکثر ما شاهد تلاشهایی بوده‌ایم که هدف آنها اعمال روشهای ریاضی در حوزه‌هایی بوده است که پیش‌ازآن صرفاً توصیفی یا رده بندی‌کردن بوده‌اند، وظاهراً این تلاشها گزافه وبیهوده بوده‌اند. اما، من مطمئنم که روش اصل موضوعی "نوع اقلیدسی" در بسیاری ازاین موارد واقعاً نقش دارد، به‌ویژه ازلحاظ روشن سازی وکشف خواصی که ازنظر دور مانده ــ نقشی که نوع دقیقتر روش اصل موضوعی در خود ریاضیات در خلال سالهای اولیه همین قرن بازی می‌کرد.

به نظرمن عدم موفقیت‌روش اصل موضوعی درعلوم‌اجتماعی درسالیان اخیراحتمالاً ناشی ازدوعلت‌است: (۱) فقدان نظریه دراین‌علوم، و(۲) فقدان مدلهای به حدکافی‌ساخته وپرداخته (نقصی که عامل آن احتمالاً واماندگی در درك یااحساس جزئیات مشخص ومهم الگوهـای اجتماعی است) . این وضعیت بـه نحوی مشابـه وضعیت موجود در نظریـهٔ مجموعه‌هاست. درحوزهٔ واقعیت فیزیکی، ما مجموعه‌هایی ازاشیاء را، خیلی‌پیش ازآنکه هیچگونه اهمیت ریاضی داشته باشند، به‌تصور درمی‌آوردیم؛ گواه این مطلب، این حقیقت است که کلماتی مانند "طبقه"، "گردایه"، واصطلاحاتی برای گردایه‌های‌خاصی چون "گله" "رمه"، و "توده" خیلی پیشتر ازآنکه ریاضیدانان توجه‌کرده باشند که این جنبـهٔ واقعیت اهمیتی اساسی دارد، درزبان طبیعی وجود داشته‌اند. پس‌ازآنکه کانتور اهمیت مفهوم مجموعه‌را تثبیت‌کرد، شهود ما ازنظریه مجموعه‌ها تاآنجاگسترش یافت که به‌نظرمی‌رسید به‌مدلی سازگاردست یافته‌ایم؛ اما امروز، تقریباً بعد ازیك قرن، هنوز هم مـدلی یکتا یا روشن ودقیق برای نظریه مجموعه‌ها دراختیارنداریم. بانگاهی دوباره به نقش روش‌اصل موضوعی در علوم اجتماعی، متوجه موقعیت مشابهی می‌شویم که امروزه در جامعه‌شناسی و انسان‌شناسی در جریان است. در اینجا تاریخچهٔ مفهوم فرهنگ مـانند تـاریخچهٔ نظریـهٔ مجموعه‌هاست، با این تفاوت که این مفهوم هنوزهم درحالت‌کاملاً شهودی‌است؛ این‌مفهوم هنوزهم به‌جایگاهی دست‌نیافته است که تحلیل آن همانند نظریه مجموعه‌ها مقرون به‌صرفه باشد.

علت اینکه چرا یونانیها دراستدلالات خود دچاردردسر گمی نشدند ــ و این امر در مورد ریاضیدانان قرنهای ۱۶، ۱۷، ۱۸، و ۱۹ هم صادق است ــ این است که‌آنها مدل شهودی پخته‌ای را برای‌چیزی که‌آنرا واقعیت‌فیزیکی می‌پنداشتند، به‌وجودآورده بودند. نمی‌خواهم ژرفـای این مباحث را خیلی بکاوم، اما آنچه که اقلیدس وریاضیدانان بعدی توصیف می کردند یك واقعیت فیزیکی نبود، بلکه مدلی ذهنی بودکه ازدریـافت آنها از واقعیت فیزیکی سرچشمه می‌گرفت. ووقتی‌از گرفتارنشدن‌آنها به‌مشکلات منطقی به شگفت می‌آییم، باید به‌یادآوریم که مدل و منطقی که آنها به‌کار می‌بردند هر دو از این واقعیت استخراج می‌شدند. جالب است که توجه کنیم پس از کشف هندسه‌های نااقلیدسی، نخستین رویداد مهم درنظریهٔ اصل موضوعی یافتن مدلهایی برای نظریه‌های جدیـد بود. بدینسان

که پس‌ازپی‌بروایی درجایی که ظاهراً می‌توان آن را عرصهٔ خیالپردازی نامید باردیگردر "واقعیت" دربی‌آرامش می گردیم ــ دست‌کم در داخل ساختاری، مثل هندسه اقلیدسی استقرار یافته،که اساس آن برپایه مدلی تصوری از جنبه‌های خاصی از واقعیات فیزیکی استواراست.علاوه براین، درمطرح ساختن‌استفاده ازمدلها به عنوان آزمونی‌برای سازگاری منطقی، ریاضیدانان صرفاً همان مسیررا طی می‌کنند. امروزه، نظریهٔ مدلها درمنطق ریاضی شاخهٔ جاافتاده‌ای است، اما دراینجا استفاده‌ازمدلها صرفاً توسل به‌واقعیت بود، واین‌اعتقاد که واقعیت سازگار است، بـه این اعتقاد جـوش خـورده بود که فقط نظریه‌های سازگار واقعی‌اند ــ هیلبرت و پوانکاره هر دو دراین مورد هم رأی بودند.

تا آنجا که به نظریه‌های ریاضی ارتباط داده، پس‌ازآنکه "نوع اقلیدسی" روش اصل موضوعی نقش مهمی را درتحول تفکرریاضی بازی کرد، اکنون دیگر منسوخ شده است. اما احتمالاً در حوزه‌هایی ازتکاپوی عقلانـی که قدمت مقدس علوم کهنی همچون ریاضیات را ندارند، نقش مهم خود را حفظ خواهدکرد.

۲. دومین نوع اصل موضوعی سازی، بابرده بندی من، همان است که مـا همگی درزمینهٔ تحقیقات و نیزدر زمینهٔ‌آموزش خود با آن آشناییم؛ این همان نوعی است که به اصطلاح "ریاضی‌کاران"، آن را به‌کارمی‌بـرند. من در اینجا تـرجیح می‌دهم کـه عبارت "ریاضی کار" را به‌کارنبرم، زیرا مطمئناً من همکاران خود را درمنطق ریاضی، ریاضی‌کار می‌دانم. دراین نوع، ما در فهرست‌کردن نمادهای اولیهٔ‌خود دقت می‌کنیم، اما نه قواعد منطقی ونه قوانین نظریهٔ مجموعه‌ای را که ما را دچارسکون می‌کنند، فهرست نمی‌کنیم. بنابراین عبارت "روش‌اصل موضوعی ساده" مناسب‌آن است. درراستای رسیدن به قواعد منطقی و نظریهٔ مجموعه‌ای، ما موضعی را اتخاذ می کنیم که عملاً مشابه دیدگاه "مطلق" یا "افلاطونی" است. ما این روش را به‌عنوان یك ابزاراساسی برای تحقیقات جـدید در همهٔ شاخه‌های ریاضی، به‌ویژه جبر، توپولوژی، وآنالیزمی‌دانیم، و لزومی ندارد که در اینجا اهمیت این نقش را به تفصیل تشریح کنم؛ همانگونه‌که بیشترمتذکـر شدم، این نوع اصل موضوعی سازی تا حدود زیادی عامل بالا رفتن تجرید درریاضیات نوین است.

اهمیت نقش آموزشی این روش نیزفزاینده است. بـه نظرمن می‌توان ازفعالیتهای مکتب ریاضی ا. هـ مور[1] در دانشگاه شیکاگودرخلال دودههٔ نخست این قرن، تا آنجه که بعضیها "مکتب جدید ریاضی" می‌خوانند، خط نسبتاً مستقیمی را پی گرفت. یکی‌از "تربیت‌شدگان"مکتب مور، ر.ل. مور[2] بود واکثرما چیزهایی از "روش مور" درتدریس‌شنیده‌ایم ــ برای کسانی‌که با این‌روش آشنایی ندارند، دیدن یکی ازفیلمهایی‌که اکنون توسط کمیته آموزشی متوسطه، تحت نظارت انجمن ریاضی‌آمریکا تهیه شده است، و درآن این روش ازسوی نمایندهٔ اصلی‌آن تشریح می‌شود، فرصت مناسبی است تا اطلاعاتـی در این زمینه کسب کنند. روش اصل موضوعی در کانون این روش جای دارد. مطمئناً اگر امروز ا. هـ. مورزنده بود، در به‌اصطلاح "اصلاحات" آموزش ابتدایی نقش فعالی ایفا می‌کرد، زیرا به روش تدریس دراین سطوح بسیارعلاقه‌مند بود. هرچند من هرگز درنوشتن متون درسی

1. E. H. Moore 2. R. L. Moore

برای تدریس درمدارس ابتدایی امروزسهمی نداشته‌ام، اما معتقدم‌که یکی از دونوع اول روش اصل موضوعی را به‌کارمی‌گیرند.من نه تنها به‌دانش‌آموزان جوانی برخوردکرده‌ام که می‌توانند قوانین جابجایی وانجمنی را برایم بازگویند، بلکه همچنین باکسانی مواجه شده‌ام‌که به زبان نظریهٔ مجموعه‌ای صحبت می‌کنند!

اما، من درموردکاربرد روش‌اصل موضوعی درراستای تأسیس دستگاه اعداد طبیعی وحقیقی احساسات متضادی دارم. زمانی‌که دانشیار جوانی بودم، به روش متداول شروع با اصول پئانودرنظربه توابع حقیقی اهمیتی نمی‌دادم. اما فکرمی‌کنم واکنش من تـا حد زیادی مبنای شهودی داشت. وقتی به‌گذشته نگاه می‌کنم، فکرمی‌کنم که احتمالاً یك نیمه شهودگرا بودم؛ درآن مـوقع احساس می‌کـردم که دانش‌آموزان سالها وقت خود را صرف محاسبه با اعداد طبیعی وگویا کرده‌اند، ومبنای اصل موضوعی دادن به‌آنها اتلاف وقت است. برعکس، درمورد دستگاه اعداد حقیقی، احساس می‌کردم که دانش آمـوزان تازه درنظریه توابع وارد می‌شوند درحالی‌که‌فهم وآشنایی آنها نسبت به‌اعداد حقیقی‌فقط به‌اندازه یك دیاگرام پخته یك قرن پیش است؛اوراینجالازم است‌که‌آنها را با نظریه‌های ساختاری دوکینددوکانتورآشناسازند. به‌نظرمن، پیشرفتهای بعدی دلایل معتبری را در دفاع ازاین نگرش فراهم‌آوردند. علاوه براین، نسبت به‌نظریهٔ مجموعه‌ها نیز همین احساس را دارم. مجموعه‌ها، مانند اعـداد طبیعی، در محیط اجتماعی، علمی، وفیـزیکی ما زمینه‌ای طبیعی دارند، ومعتقدم‌که اگربا رهیافتی بـه‌اصطلاح "ساده انگارانه" عمل‌کنیم، می‌توانیم به‌میزان قابل‌ملاحظه‌ای در وقت دوران تحصیلی‌خود صرفه‌جویی‌کنیم. ابتدا درك شهودی مجموعه‌ها وخواص ابتدایی‌آنها باید به‌وجودآید. البته، مانند مورد اعداد طبیعی، همین که دانش‌آموزی به یك درك شهودی ازنظریه مجموعه‌ها دست یابد، می‌تواند ازچگونگی خلق یك نظریه مجموعه‌ها ویك نظریه اعداد مبتنی برآن، برپایه‌آن درك شهودی، وبا شیوهٔ اصل موضوعی، بهره‌مند شود. اما اوباید متوجه باشدکه دراینجا روش‌اصل موضوعی فقط یك نقش زودگذرانه و موشکافانه دارد؛ تـاکنون، تا آنجا که بنیانی برای اعداد طبیعی، اعدادحقیقی، یا نظریه مجموعه‌ها مطـرح است، فقط بـه‌یك مشخصهٔ نسبی دست یافته‌ایم. تأکید می‌کنم که من دراینجا بـه نقش آموزشی روش اصل‌موضوعی نظر دارم. امیدوارم کـه پیش از این روشن کرده بـاشم کـه من نقش روش اصل موضوعی را در بـرد(می بنیانهای نظریه مجموعه‌ها عمیقاً مورد تأیید قـرارداده‌ام. این همان جـایی است‌که‌این روش جنبه‌هایی از شهود ما را آشکار می‌سازد که به طریق دیگـرمتوجه‌آن نمی‌شدیم. آن درك شهودی ازساختاردستگاه اعـداد حقیقی‌که دویست سال پیش براندیشه‌هـا غالب بود شاید برای ریاضیات آن زمان‌کافی بوده است، اما درخلال قـرنهای بعدی عدم‌کفایت‌آن بیشتر و بیشتر آشکار و انگیزه‌ای شد تـا فرمولبندیهای دقیقتری از آن بـه واسطهٔ روش اصل موضوعی به‌عمل‌آید؛ و با این فـرمولبندیها ما تا به‌امروزکار خود را پیش برده‌ایم. اینکه آیا این حالت تداوم خواهد داشت یانـه، برای دست یافتن به‌پاسخ باید به‌انتظار آینده نشست. درهرصورت، نسبت به‌اهمیت نقشی‌که روش اصل موضوعی دراینجا بازی کرده است، هیچگونه تردیدی وجود ندارد. بااین همه، ما باید میان‌کاربردهای این روش

تمایز قائل شویم. من تردید ندارم که فرمولبندی دقیق قوانین حساب ممکن است برای مدارس ابتدایی نقشی مفید و روشنگرانه بازی کند، و پاسخگوی پرسشهایی باشد که رهیافت شهودی پیش می‌آورد؛ اما این روش باید درادامهٔ روش شهودی باشد نه مقدم بر آن.

۳. سومین نوع روش اصل موضوعی، که در آن ابزار منطقی نه تنها وارد بحث، بلکه صریحاً صوری می‌شوند، به عنوان یکی از ابزارهای عمدهٔ پژوهشهای بنیادی نوین جا افتاده است. با استفاده از حساب محمولات اصل موضوعی شده که ساختارهای تکنیکی این نظریه در آن جاگرفته است، تارسکی، هنکین[1] و سایرین موضوعاتی از قبیل ارتباط سازگاری با مدلها و رابطهٔ کمال با مدلها را روشن ساختند. ما اکنون می‌دانیم که چرا دستگاهی مانند اصول پئانو وقتی نظریهٔ مجموعه‌های زمینه اصل موضوعی نشده باشد، می‌تواند جازم باشد، اما وقتی نظریه مجموعه‌های زمینه اصل موضوعی شده باشد، دیگر جازم نیست؛ و ما ناگزیریم برای پاسخ به پرسشهای بی‌سامان در نظریهٔ مجموعه‌ها و پیوستار اعداد حقیقی به پژوهشهای آینده در منطق ریاضی امید ببندیم.

مثلاً، برهان گودل راجع به سازگاری فرضیه پیوستار تعمیم یافته با سایر اصول موضوع نظریه مجموعه‌ها بر پایهٔ مفهوم مجموعه‌های "ساخت‌پذیر" استوار است؛ اگر ما از اصل موضوعی بهره گیریم که لازم می‌دارد تمامی مجموعه‌ها "ساخت‌پذیر" باشند، فرضیهٔ پیوستار تعمیم‌یافته برقرار خواهد بود[۲]. اما ما اکنون، به‌لنگی کار پاول کوهن، می‌دانیم که فرضیهٔ پیوستار تعمیم‌یافته خودش اصل موضوعی ضعیفتر از اصل موضوع ساخت‌پذیری است. البته، برای دستیابی به مطلوب می‌توان به سادگی فرضیهٔ پیوستار تعمیم‌یافته را به اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها اضافه کرد، اما بر این کار دو ایراد وارد است: (۱) این اصل فاقد آن ویژگی شهودی است که، ملازم دیگر اصول موضوع نظریه مجموعه‌هاست، و (۲) این اصل فاقد انگیزش است، زیرا باوری ریاضی آن، تا کنون، بسیار اندك بوده است.

به طور خلاصه، همانطور که من سه نوع روش اصل موضوعی را به دلخواه از یکدیگر متمایز کردم، فکر می‌کنم که ریاضیات جدید، علیرغم تجریدش، ظاهراً هر روز بیشتر از پیش به یك علم کاربردی شبیه می‌شود. وقتی دانشمند عملی برای تحلیل و توصیف مدلی تصوری در وضعیتی فیزیکی یا اجتماعی از نوع اقلیدسی روش اصل موضوعی بهره می‌گیرد، او اصول موضوع خود را از یك مفهوم الفایی شهودی استنتاج می‌کند. وقتی "ریاضی‌کار" از روش "ساده انگارانه" بهره می‌گیرد، او اصول موضوع خود را از یك مفهوم الفایی شهودی ــ از چیزی که شهود ریاضی او احساس می‌کند یك ساختار یا الگوی مهم است؛ بیرون می‌کشد. خالصترین شکل روش اصل موضوعی، نوع سوم، منطقیون را قادر به تجزیه و تحلیل روشهای منطقی و نظریه مجموعه‌ها ساخته است ــ مطالبی که در روش اصل‌موضوعی "ساده انگارانه" مسلم فرض می‌شود. همچنین، نقش سازنده‌ای که روش اصل‌موضوعی در نوع دوم بازی کرده است به موازات نقش سازندهٔ اساسیتر در کاربرد نوع سوم است، که در آن اساسیترین شهودهای ما با کشف اصول موضوع جدید، مانند اصل

1. Henkin

۲. و همچنین اصل انتخاب. ــ م.

ساخت‌پذیری گودل، تقویت و روشن می‌شود.

روش اصل موضوعی علیرغم محدودیتهایش، و با وجود ناکامی در ایجاد آن نوع پایه و مبنایی که در ابتدا توسط پئانو، هیلبرت و دیگر پیشتازان به‌تصور در می‌آمد، هنوز به‌پایان شکوفایی خود نرسیده است ــ شاید حتی والاترین جلوهٔ شکوه آن در راه باشد. نقش گسترش‌یابندهٔ آن در آموزش، به عنوان ابزاری تحقیقاتی در تجزیه و تحلیل ساختارهای ریاضی تجریدی، و در راه پژوهش روشها و ساختارهایی که شهود ما عرضه می‌دارد، شاید فقط منادی نقشهای اساسیتری باشند که از راه خواهند رسید. هرچند روش اصل موضوعی ظاهراً نمی‌تواند مبنا و پایه‌ای مستقل از شهود برای ریاضیات فراهم آورد، فکر می‌کنم همچنان یکی از مؤثرترین ابزارهای ما در پدید آوردن ریاضیات جدید و آموزش ریاضیات، باقی خواهد ماند.

ترجمهٔ ناصر پروجردیان

مراجع

1. Bell E. T., *The Development of Mathematics*, New York, 1945.
2. Cohen P. J., "The independence of the continuum hypothesis," I, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 50(1963)1143-1148; II, *ibid*, 51(1964) 105-110.
3. Fraenkel A., *Über den Begriff "definit" und die Unabhangigkeit des Auswahlsaxioms*, S.B. Preuss. Aked. Wiss., Phys.-Math. Kl., (1922) 253-257.
4. Freudenthal H., *The Main Trends in the Foundations of Geometry in the 19th Century: in Logic, Methodology, and Philosophy of Science*, ed. by E. Nagel, P. Suppes and A. Tarski, Stanford Univ. Pr., Stanford, Calif., 1962,
5. Gödel K., *The Consistency of the Axiom of Choice, and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton Univ. Pr., Princeton, N. J., 1940.
6. Hilbert D., "Mathematical problems," tr. by Mary W. Newsom, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 8 (1901-1902)437-479.
7. Nagel E., "The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry," *Osiris*,7(1939)142-222.
8. von Neumann J., "Eine axiomatisierung der mengenlehre," *Jour. fur Math.*, 154(1925)219-240.
9. Peano G., "Démonstration de pintegrabilité des équations differen-

tielles ordinaires, *Math., Ann.*, 37(1890)182-228.
10. Poincaré H., *The Foundations of Science*, The Science. Pr.Lancaster., Pa., 1946.
11. Russell B., *Principles of Mathematics*, 2nd ed., Norton. New York, 1937.
12. Skolem T., *Einigé Bemerkungen zur Aximatischen Begründung der Mengenlehré*, 5th Skad. Math. Kong., Helsingfors (1923)217-232.
13. Zermelo E., "Beweis dass jede menge wohlgeordnet werden kann," *Math. Ann.*, 59(1904)514-516.
14. Zermelo E., "Untersuchungen über die grundlagen der mengenlehre I." *Math. Ann.*, 65(1908)261-281,
15. Weyl H., "Emmy noether," *Scripta Math.*, 3(1935)1-20.

فیلیپ دیویس

وقتی ریاضیات نه می‌گوید•

تجربه نه حد دارد نه کمال

هنری جیمز

احکام محال

وقتی همهٔ بی‌ثباتیهای عالم را درنظر می‌گیریم؛ وقتی دربارهٔ سقوط این همه امپراتوریهای عظیم فکر می‌کنیم؛ وقتی به‌واقعیتها و نظامهای علم فکر می‌کنیم، که براثر ضربه‌های بی‌وقفهٔ طبیعت باشتاب تمام فراهم آمده‌اند؛ وقتی به‌آرایش روزمره می‌نگریم و می‌بینیم که در همان حال که هر لحظهٔ زندگی ما را همراهی می‌کند به‌سرعت در حال تغییر است [این پرسش پدید می‌آید که]: پس در کدام گوشهٔ عالم می‌توان به‌یافتن ثبات امیدوار بود؟ یکی از پاسخهایی که به‌این پرسش داده شده ــ و درواقع دیرینه‌ترین پاسخ ــ این بوده است: در ریاضیات. بنابراین دیدگاه، احکام اثبات شدهٔ ریاضیات صادق‌اند، و در حقیقت به‌طور تشکیک‌ناپذیری هم صادق‌اند؛ احکامی کلی هستند، که صدقشان مستقل از زمان ومنشاء ملی (یا حتی بین کهکشانی) آنهاست. اینها دیدگاههایی بسیار مرسوم و متداول‌اند؛ وچون به‌هیچوجه بدیهی نیستند، طبعاً دیر زمانی است برسر آنها منازعه جریان داشته است. طی سالیان، این اختلاف نظرها بخشی چشمگیر از مطالبی را تشکیل داده است، که آن‌را فلسفهٔ ریاضی خوانده‌اند. به‌نظر نگارنده (و بسیاری از ناظران صحنهٔ ریاضی) این دیدگاهها جملگی از روی ساده دلی است وتصویری نارسا از فعالیت ریاضی ترسیم می‌کنند.

در این مقاله تلاش خواهم کرد که این نظرات را از دیدگاهی خاص، یعنی، ازدیدگاه احکام محالی که در ریاضیات پیش می‌آیند، بررسی کنم. تعداد این نوع احکام در ریاضیات فراوان است:

"تلاقی خطوط متوازی محال است،"

• Davis Phillip J., "When mathematics says no," *Mathematics Magazine*, 59(1986)67-76.

"تربیع دایره محال است،"
"اینکه حاصل‌جمع دوعدد زوج عددی فرد باشد امری محال است،"
"ارائهٔ اثبات سازگاری اصول موضوع تسرملو امری محال است،"

و تعداد زیادی احکام دیگر. از آنجا که عبارت ". . . محال است" چیزی جز نقیض عبارت "چنین است که..." نیست، می‌توانیم بگوییم که هر گزارهٔ ریاضی که حکم به‌صدق امری کند ازطریق نقض آن به‌امری محال قابل تبدیل است. بنابراین، "دو به‌علاوهٔ دو برابر است با چهار" تبدیل می‌شود به "محال است که دو و دو چهار نباشد." با این حال، به‌نظر می‌آید که قالب گزاره‌های محال برای برخی احکام نسبت به‌احکام دیگر قالب طبیعی‌تری باشد. مثلاً کودکان درهنگام انجام عمل تفریق می‌گویند "شما نمی‌توانید شش را ازچهار کم کنید" [یا شش از چهار کم کردنی نیست"] و ریاضیدانان می‌گویند "عدد متعالی عددی است که به‌هیچوجه نتواند درمعادله‌ای بسجمله‌ای که ضرایب آن عدد صحیح‌اند صدق کند." افزون براین، اهمیت روانشناختی گزاره‌ای که حکم به‌امری محال می‌کند، با اهمیت روانشناختی گزاره‌ای که حکم به‌امری واقع می‌کند، متفاوت است. ("منظورتان این است که فلان و بهمان محال است؟ منظورتان این است که هرکاری می‌کنم، هراندازه هم تلاش کنم، هرگزموفق نخواهم شد که...؟") به‌نظر می‌آید که در چنین احکامی عامل زمان نقش معینی ایفا می‌کند. امر واقع، یا واقعیت، مکان دارد، اینجاست، زمان دارد، اکنون است، تمام است؛ درحالی که به‌نظر می‌آید که امر محال با آینده‌ای نامعلوم سروکارداشته باشد.

گزاره‌های زیر را در نظر گیرید:

۱. وجود دوعدد صحیح p و q به‌طوری که $p/q=\sqrt{2}$ امری محال است.
۲. تعریف کردن مفاهیم به‌کار برده شده در یك اصل موضوع امری محال است.
۳. نمایش $10^{1000000}$ امین رقم اعشار $\sqrt{2}$ امری محال است.

گزارهٔ اول یکی از قضایای قدیمی ریاضیات است. گزارهٔ دوم دربارهٔ ریاضیات و زبان نگارش آن است. ازآنجاکه در ریاضیات صوری به‌کمك قیاس، از اصول موضوع به‌قضایا می‌رسیم؛ اصول موضوع ما نقطهٔ آغاز دلخواهی را تشکیل می‌دهند، و در نتیجه تعریف‌ناپذیرند. دردو گزارهٔ اول، عملی که انجام می‌گیرد در چارچوب عالم تخیل ریاضی به‌وقوع می‌پیوندد. درگزارهٔ سوم، اگرکلمهٔ "نمایش دادن" را به‌معنایی فیزیکی تعبیر کنیم، جهان خارج و قضاوت ما در مورد آن نقشی معین پیدا می‌کند. ریاضیات منزوی، خود-بسنده، وکاملاً صوری شده تنها به‌صورت مجرد و خیالی وجود دارد؛ گفتار روزمره، همراه با جهان واقع، دائماً دخالت می‌کنند تا به‌آن معنی وجهت بخشند.

بنابراین، هدف این مقاله آن است که موارد نمونه‌وار احکام محال ریاضی را ارائه دهد و جایگاه معرفت‌شناختی آنها را مورد بحث قراردهد. یعنی به‌این می‌پردازیم که آنها واقعاً چه چیزی را بیان می‌کنند و چرا ما معتقدیم که این احکام با معنی و صادق هستند.

تربیع دایره

کار خود را با بررسی آنچه احتمالاً آشناترین حکم محال در ریاضیات به‌شمار می‌آید، آغاز می‌کنیم: "تربیع دایره امری محال است."

این حکم بسیار قدیمی است. اریستوفان (۴۰۵ق. م.) ــ نمایش‌نامه‌نویس ــ عبارت "دایره مربع سازان" را درمفهومی تمسخرآمیز به‌کارمی‌برد. اصطلاح‌آدم دایره مربع‌ساز، به‌استعاره، یعنی کسی که در مورد انجام‌کاری محال اصرار می‌ورزد.

از سوی دیگر، دایره مربع‌سازان، به‌مفهوم دقیقترآن، به‌افراد یکی از گروههایی اشاره دارد که در حاشیهٔ فعالیت ریاضی‌کارمی‌کنند، و جداً عقیده دارند که علیرغم گفتهٔ ریاضیدانان راه تربیع دایره را کشف کرده‌اند. امر محال جاذبه‌ای دارد که امر ممکن نمی‌تواند با آن رقابت کند.

معنای حکم پیچیده است؛ در نتیجه، ابتدا مطلب را عمداً بیش‌ازاندازه ساده‌می‌کنم. نخست، صورت مسئله: دایرهٔ معینی را فرض کنید، آنگاه مربعی بسازیدکه مساحتش برابر مساحت آن باشد. روایت دیگر این مسئله، مطلب را ساده‌تر بیان می‌کند: دایرهٔ معینی را فرض کنید، آنگاه مربعی بسازیدکه پیرامونش برابر پیرامون آن باشد. این دو مسئله خویشاوندی نزدیکی با یکدیگر دارند. اگریکی محال باشد دیگری هم چنین است، وبر عکس. آنچه در زیربیان می‌کنیم در ارتباط با روایت دوم مسئله است. خود حکم محال، درحالت ساده‌ترش این طور است: هرکاری کنید نمی‌توانید موفق شوید، مربع کردن دایره کارمحالی است.

اگر این مطلب رابرای نخستین‌بار می‌شنوید، شاید بگویید: "این حکم‌محال‌مسخره است. چون‌خلاف عقل سلیم است. فرض‌کنیدکه دایرهٔ مورد نظر یك بشکه، یا یك حلقهٔ لاستیك یا تنهٔ درختی باشد. طنابی را یك دور سفت دور آن بپیچد، وآن را ببرید، طول آن‌را اندازه بگیرید، وسپس به‌چهارقسمت مساوی تقسیمش کنید؛ همین‌وبس! حاصل، طول ضلع مربعی است که پیرامونش مساوی پیرامون دایره است."

شاید اهل تجربه نباشید، و ذوقتان در حساب بیشتر باشد و بخشی از هندسهٔ دوران مدرسه هم هنوز یادتان باشد. درآن صورت ادعای محال را به‌این طریق رد می‌کنید: "فرض‌کنیم که شعاع دایره یك متر باشد. آنگاه برمبنای آنچه از اقلیدس یادگرفتیم محیط این دایره 2π متر است. و ازآنچه که ماشین حساب جیبی توی دستم به‌من می‌گوید، پی می‌برم که مقدار π تا چهار رقم اعشار عبارت است از ۳٫۱۴۱۶. پس، مقدار $2\pi/4$، طول ضلع‌مربع مطلوب، ۱٫۵۷۰۸ متراست. حالا اگر مربعی بسازی که ضلعش ۱٫۵۷۰۸ متر باشد، دایره را مربع کرده‌ای!"

این استدلالها که حکم به‌امکان امر یادشده‌می‌کنند، نکات جدیدی را در بحث‌وارد می‌کنند: (۱) دایره به‌عنوان یك شیٔ فیزیکی، (۲) اندازه‌گیری به‌عنوان عملی فیزیکی، (۳) ترسیم به‌عنوآن فعلی فیزیکی، (۴) تقریب درچارچوب خود ریاضیات. تردیدی‌نیست که می‌توانیم به‌کمك هریك از راههای بیان شده در بالا دایره را مربع کنیم، وجوابمان

هم از نظرعملی جواب خوبی باشد، اما این راه‌حلها قابل انتقادند؛ با آنکه جواب تقریبی خوبی به‌دست می‌دهند، هیچکدام به‌معنای ریاضی کلمه دقیق نیست.

اگر هدف ما رسیدن به‌مربع ریاضی ایده‌آلی باشد که جایگاه آن فقط در عالم ریاضی است، و راه رسیدن به‌آن هم فقط ازطریق یك سلسله اعمال ریاضی ایده‌آل ممکن باشد که از نوع مشخص شده‌ای هستند، بایدکارخود را کاملاً درچارچوب عالم ریاضی انجام دهیم. تجربه‌ای که ازریاضیات وفیزیك کسب کرده‌ایم، ما رابه‌دوجای متفاوت هدایت کرده است: "طبیعت ومصنوع با هم تصادم کرده‌اند." [۳]

گرایش ریاضیدانان دوران کلاسیك باستانی یونان بیشتر این بود که راه نظریهٔ ریاضی محض را پیش گیرند تا طریق اندازه‌گیری فیزیکی را. آنان بودند که مسئله را به طورکامل واستوار درعالم ریاضی جای دادند، واین جایگزینی بخشی اساسی ازبیان نهایی این امرمحال را تشکیل می‌دهد. ولی هنوز کار واردکه ما به‌طرح کامل مسئله، طرحی که به حکم محال منجرمی‌شود، برسیم. باید تکلیف ابزاری را هم تعیین کنیم که برای "ترسیم" پاره‌خطها مورد استفاده قرار می‌گیرد. معمولاً یك خط واقعی یا یك منحنی واقعی را به کمك ابزارهای ترسیمی، روی یك تکه‌کاغذ واقعی رسم می‌کنیم. بدین‌ترتیب، محیط فیزیکی به‌آزمایشگاهی تبدیل می‌شودکه در آن استدلال، ترسیمات، و اکتشاف، جملگی می‌توانند درآن واحد رخ دهند. خط‌کش وپرگار ابزارترسیمی موردعلاقهٔ یونانیان بود. بااین ابزار می‌توان خط راست و دایره کشید. یونانیان ابزار دیگری هم برای ترسیم منحنیهای دیگر داشتند، وشرح کاربرد آنها درنوشته‌های تخصصی‌شان می‌آمد. لیکن به‌خاطرسادگی خط‌کش و پرگار، مفهوم ترسیم با خط‌کش و پرگار شأن ومقام خاصی پیدا کرد. چنین ترسیمهایی به‌شکلی می‌انجامدکه همهٔ اجزای آن به‌طورگام‌به‌گام و ازطریق کاربرد همین دو ابزار ساخته می‌شد. اقلیدس درکتاب ۱\اصول انواع فراوانی از این ترسیمها را ارائه می‌دهد.

اکنون باید برای عمل فیزیکی ترسیم توسط خط‌کش وپرگار مدلی ریاضی بسازیم. یعنی آنکه برای این عمل، جانشینی ریاضی، وصوری بیافرینیم که گامهای مجاز درآن به روشنی بیان شده باشد. وقتی این کارانجام شد، مسئلهٔ تربیع دایره در قلمرو ریاضیات مجرد قرار می‌گیرد؛ به‌سخن دقیق‌تر، به‌کمك جبری کردن هندسه، که با کارهای دکارت آغازشد، وحساب دیفرانسیل و انتگرال، که نیوتون و لایب‌نیتس آن را ابداع کردند، مسئلهٔ ما از قلمرو هندسه خارج و به‌مسئله‌ای تبدیل می‌شودکه در چارچوب مجموعه اندیشه‌هایی که امروزه جبر وآنالیز خوانده می‌شوند، قابل بیان است. استدلال در باب این مسئله دیگر مستلزم آن نیست که یك رشته ابزارترسیمی در اختیار داشته باشید، بلکه باید معرفت عمیقی درمورد قضایای جبر و اطلاع دقیقی ازآنالیز ریاضی عالی داشته باشید. اکنون مسئله را می‌توان دقیق بیان کرد؛ معنای محال بودن تربیع دایره این است: قضیه‌ای ریاضی وجود داردکه بنابر آن نمی‌توان تعدادی متناهی عمل جبری ازفلان وبهمان نوع یافت که به‌نتیجهٔ مطلوب بینجامد. محال بودن تربیع دایره به‌عنوان یك قضیهٔ ریاضی به‌اندازهٔ هرقضیهٔ دیگر ریاضیات محض صادق است، و پذیرفتن آن هم بر پایهٔ همین امر استوار است.

درحقیقت، ازنظر تاریخی واقعیت این است که زمانی که اریستوفان به‌ریشتربیع کنندگان دایره می‌خندید، کسی نمی‌دانست که آیا چنین ترسیمی ممکن است یا محال. شکستهای پی‌درپی سبب‌شدکه جامعهٔ ریاضیدانان محال بودن آن را حدس بزنند. البته درطول تاریخ این شکستها، انواع ترسیمهای خط‌کشی وپرگاری ارائه شدکه دقتشان هم بسیار زیاد بود (ولی‌کامل نبود). اثبات محال‌بودن آن، نخست، درسالهای ۱۸۰۰ میلادی ارائه شد. ودرآن سالها ادعای قویتری شکل گرفت؛ اینکه π عددی متعالی است، البته به‌معنایی که هم‌اکنون تعریف کردیم، و این امر مدتها مهمترین مسئلهٔ ریاضی حل نشده تلقی می‌شد. تا آنکه‌عاقبت درسال ۱۸۸۲ فردیناندلیندمان، ریاضیدان آلمانی، متعالی بودن π را اثبات کرد.

امور محال در چارچوب ساختارهای ریاضی قیاسی

همانگونه که دیدیم، برای آنکه مفهوم امرمحال ریاضی را دقیق و ساخته و پرداخته کنیم، همیشه باید توجه خودرا به‌چارچوب مبحث معینی از ریاضیات معطوف کنیم. چنین مبحثی شامل اشیای ریاضی منحصر به‌موضوع خودآنهاست، ودرنهایت، برمبنای تعاریف واصول موضوع مناسب به‌مجموعه‌ای از احکام درست (قضایا) درارتباط با همان اشیاء می‌رسد. این محدودیت، "کارکردن‌درچارچوب ساختار ریاضی قیاسی‌معین" خوانده می‌شود. ازنظر تاریخی، جزئیات اصل موضوعی مبحث غالباً بعداز آن مطرح می‌شودکه حجم چشمگیری از نتایج برپایهٔ روشهای غیرصوری‌تر بدست آمده باشد.

اکنون چند مورد جالب دیگر از امورمحال را همراه با مباحث ریاضی مربوط به آنها ذکر می‌کنیم:

الف) محال است که مجموع دو عدد صحیح زوج عدد صحیح فردی باشد (حساب اعداد صحیح مثبت).

ب) محال است که‌برمبنای یال داده شدهٔ یك مکعب، بتوان توسط خط‌کش وپرگار یال مکعب دیگری را ترسیم کردکه حجمش دوبرابرحجم مکعب اول باشد (نظریهٔ گالوا).

پ) محال است که بتوان به‌کمك خط‌کش و پرگار زاویه‌ای رابه‌سه قسمت مساوی تقسیم کرد (نظریهٔ گالوا).

ضمناً موارد (ب)، (پ)، وتربیع دایره سه مورد کلاسیك امرمحال در هندسهٔ یونان به‌شمار می‌آیند.

ت) محال است بتوان فرمولی یافت‌کـه فقط شامل تعدادی متناهـی عمل حساب و تعدادی متناهی عمل جذر باشد، و بتواند معادلهٔ درجهٔ پنج را درحالت کلی (یا درحقیقت هرنوع معادله‌ای از درجهٔ چهاربه‌بالا را) حل‌کند (نظریهٔ گالوا).

ث) محال است که بتوان "جدول هوش" (هندسهٔ ترکیبی دوبعدی) را حـل کـرد.

(این جدول یك سرگرمی‌کائوچویی متداول است. قطعات مربعی شکل کوچك و جا به‌جا شدنی که روی آنها اعداد ۱۵،۱۴،...،۳،۲،۱ نوشته شده است، به‌صورت عمودی و افقی در یك قاب‌کائوچویی چهاردرچهار قرارداده می‌شوند. ویك‌جای خالی باقی گذاشته

می‌شود. نظم و ترتیب قطعات را می‌توان با جابجاکردن پشت سرهم قطعات ازطریق‌فضای خالی تغییر داد.

آرایش اولیهٔ قطعات به‌صورت معکوس ۳،۲،۱،...، ۱۴،۱۵ است، و موضوع معما عبارت است از بازآرایی آنها به‌ترتیب عادی ۱،۲،۳،...، ۱۴، ۱۵. دراین مسئله نقش آرایش اولیهٔ قطعات بسیارمهم است.)

ج) محال است که چندوجهی منتظمی جزپنج نوع چندوجهی منتظم (چهار وجهی، مکعب، هشت وجهی، دوازده وجهی، بیست وجهی) وجـود داشته بـاشد (هندسهٔ اقلیدسی سه‌بعدی).

چ) وجود $\sqrt{-1}$ محال است (حساب اعداد حقیقی مثبت و منفی)

ح) محال است که بتوان میان مجموعهٔ اعداد طبیعی و مجموعهٔ اعداد حقیقی تناظری یك‌به‌یك برقرار کرد (نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها).

هریك از امور محال (الف) تا (ح) قضیه‌ای ریاضی است، که برمبنای بیان دقیق یك سلسله شرایط درچارچوب ساختار ریاضی مورد اشاره اثبات شده است. وضعیت‌صدق هرکدام از این امورمحال نظیر وضعیت صدق هرقضیهٔ اثبات شده‌ای است. ولـی وضعیت صدق آنها با وضعیت صدق احکام، مثلاً فیزیك، فرق دارد، ونگاهی کوتاه به‌این تفاوت بی‌ثمرنخواهد بود.

بدون سایهٔ تردید ممکن محتمل[1]

چرا قضایای ریاضی صادق هستند؟ شاید تعداد پاسخهایی که بتوان به‌این پرسش داد بیش از تعداد آدمهایی باشدکه عمیقاً دربارهٔ آن به‌تفکر پرداخته‌اند. مکتبهای فلسفهٔ ریاضی به گرد همین پاسخها تبلور و تشکیل یافته‌اند. برای آنان‌که ذهنی شکاك دارند، هیچ پاسخی نمی‌تواند قانع‌کننده باشد؛ و ازسوی دیگر، چنانچه همهٔ آنها را با هم درنظرگیریم، چه بسا، پاسخهایی متناقض باشند.

گفته شده است: ریاضیات صادق است چون خدادادی است. ریاضیات صادق است چون‌آدمی آن را ساخته است. ریاضیات صادق است چون چیزی جز منطق نیست، وآنچه منطقی است باید صادق‌باشد. ریاضیات صادق است چون راستگویی (یا همان‌گویی)است. صادق است چون اثبات شده است. صادق است چون ساخته شده است؛ متن آن از اصول موضوعش تنیده شده است، به‌همان‌گونه‌که بلوز از مقداری نخ‌کاموا بافته شده‌است.صادق است، درست به‌همان‌گونه‌که قواعد یك بازی وحرکات مبتنی بر آنها صادق‌اند.صادق‌است چون زیبا است، چون به‌هم‌پیوسته است. ریاضیات صادق است چون سودمند است. ریاضیات صادق است چون. به‌گونه‌ای طرح شده‌که بازتاب دقیق پدیدهٔ جهان واقع است.

ریاضیات صادق است چون‌بارتوافق صادق است. صادق است چون ما می‌خواهیم

1. W. S. Gilbert, "The Gondolier, - [No probable possible shadow of doubt].

که صادق باشد، وهرگاه مورد ناخوشایندی یافت شود، جامعهٔ ریاضی به‌نابودی آن قیام، ودرشیوهٔ تفکرخودتجدید نظرمی‌کند. ریاضیات صادق‌است چون، همانند هرعلم ومعرفتی، برفهمی ضمنی استوار است. ریاضیات صادق است چون بیان دقیق معرفتی شهودی واولیه است. ریاضیات صادق است‌چون برای‌رسیدن به‌معرفتی‌ازنوع آن، راههایی مستقل ومتعدد ــ ولی مقوم یکدیگر ــ وجود دارد؛ راههایی‌که همواره با یکدیگرسازش پیدا می‌کنند.

همچنین گفته شده است‌که ریاضیات اصلاً به‌معنایی یقینی صادق نیست، بلکه تنها به معنایی احتمالاتی صادق است. ریاضیات صادق است تنها به‌این اعتبار که ابطال‌پذیـر و تصحیح‌پذیر است، حقایق آن الی‌الابد به‌طور موقتی صادق هستند. [بـاز گفته شده است] حقیقت ریاضی حالت ثابتی نیست، بلکه روندی دائم‌التغییر است.

به‌احتمال زیاد، بیان تق‌توق‌وار این فهرست، برخی از خوانندگان را بـه‌سرگیجه می‌اندازد وچه بسادرآنان این احساس را ایجادکرده باشدکه درباب این مهمترین‌پرسش این مهمترین رشته، هرج و مرج دست بالا را دارد. اما هرج و مرج چیزی است که تنها فلاسفهٔ ریاضی با آن‌دست و پنجه نرم می‌کنند. اکثر ریاضیدانان در مـورد آن هیچگونه نگرانی ندارند، و غالباً نظرپردازی فلسفی را به‌دیدهٔ اکراه و تمسخر می‌نگرند. در هنگام تحقیقات شخصی، درنزدآنان آرامش خاطرقاعده است نه‌استثناً. دلایل این احساس امنیت آنان هرگز به‌زبان رانده نمی‌شود، و یکی ازاین دلایل که به‌هیچوجه نباید آن‌را دست‌کم گرفت، این است‌که معتقدند کاری‌که می‌کنندکاملاً موجه است؛ چون بسیاری از همکاران تاباکنون هم درست همان‌کار را انجام می‌دهند.

در اینجا، بدون آنکه کمترین امیدی به‌حل وفصل مسئلهٔ صدق ریاضی داشته باشم، یا بخواهم استنباط خود را از آن به‌کفایت بیان‌کنم، به‌مسئلهٔ محال بـودن تربیع دایـره بازمی‌گردم و می‌پرسم: چرا بایدقضیهٔ اینده‌ان راکه مستلزم این امرمحال است، باورکرد؟ مناظره‌ای رادرنظرآوریدکه میان ریاضیدان (الف) وشخص (ب)، که معتقد است راهی برای مربع‌کردن دایره یافته است، درجریان است. از چنین مناظره‌هایی در طـول تاریخ چندان رخ داده‌اندکه این یکی هم جنبهٔ‌صرفاً خیالی نداشته‌باشد.(اگرخواننده‌مشتاق خواندن شرح و توصیف سرگرم‌کننده‌ای از مناظره‌هایی با افراد واقعی تربیع‌کننده دایره هست، به‌اوتوصیه می‌کنم‌که حتماً به‌کتاب خودجیبی پادادوکسها نوشتهٔ آگوستن دومورگان مراجعه‌کند.) افزون براین‌فرض می‌کنم‌که ریاضیدان (الف) یکی ازمتصدیان رسمی جامعهٔ ریاضی باشد و (ب)، علیرغم حسن نظربه‌کارخود، آدم متعصبی نباشد.

(ب) نزد (الف) می‌آید ومی‌گوید: "ببینید، من روشی ترسیمی به‌کمك خط‌کش و پرگار یافته‌ام‌که دایره‌را مربع می‌کند. نظرشما درمورد آن چیست؟"

پاسخ محتمل (الف) این است که "نه، حتماً اشتباه کرده‌اید. نتیجه‌گیری شما بـاید غلط باشد." ادعای (الف) براین واقعیت استوار است‌که جامعهٔ جهانی ریاضیدانـان، از زمان لیندمان به‌بعد، اثبات این‌امرمحال‌راپذیرفته است. کارلیندمان به‌هنگام خودازمجاری عادی تأیید واعتبار، عبورکرده است. (الف)، به‌عنوان یك فرد، ممکن است شخصاً دراین

روند تأیید و اعتبار شرکت نکرده باشد، ولی پروندهٔ ثبت وضبط آن علنی است، و (الف) هر آن که بخواهد، می‌تواند کارلیندمان را از نو داوری کند. اگر (الف) درسالهای ۱۹۸۰ زندگی کند، پذیرش این امر محال صرفاً بخشی از میراث ریاضی او است.

اما ادعای (ب) ناقض امر واقعی است که (الف) وکل جامعهٔ ریاضی به آن باور دارد. حال اگر (الف)، علاوه برهمهٔ اینها، معتقد باشد که آن بخش از ریاضیات کـه چارچوب بحث را تشکیل می‌دهد از نظر منطقی سازگار است ــ و او باید این فرض را پایهٔ کار خود قراردهد و گرنه کل ساختمان ریاضی فرومی‌ریزد[1] ــ در این صورت ترسیم (ب) باید غلط باشد.

اذیدگاه روانشناسی، احتمالاً پاسخ (الف): (ب) را قانع نخواهد کرد. هرچه باشد، (ب) برای دستیابی به‌ترسیم مطلوب خود سخت تلاش کرده است. کاراو، درنگاه نخست، همان ارزش پاسخ حاکم را دارد، بااین تفاوت ــ و این تفاوت حیاتی است ــ که ازمجرا و ند تأیید و اعتبار عبور نکرده است. (ب) مدعی است که به اثر او هم باید مجال داد تا در دادگاه حضور یابد، دادگاهی که طی آن اعتبار پاسخ حاکم باید از نوبررسی شود. اگر (الف) آدم دل نازکی باشد خواهد پذیرفت.

اکنون (الف) باید چندکار انجام دهد. (الف) (یا جامعهٔ ریاضی) باید کارلیندمان (یا انواع بعدی معادل آن) را از نو بررسی انتقادی کند. احتمال وقوع چنین امری بسیار ضعیف است مگر در موقعیت بحران شدید. بنابراین (الف) باید کـار (ب) را بـررسی انتقادی کند. او باید تحقیق کند که آیا مسئلهٔ (ب) همان مسئلهٔ جا افتاده است یا نه. (اکثر اوقات، افراد اهل تفنن صورت دقیق مسئله را نمی‌فهمند.) به فـرض اینکه (ب) مسئله را درست فهمیده باشد، (الف) باید تحقیق کند که آیا گامهای استدلال (ب) صحیح‌اند یا خیر، به‌این معنی که آیا استنتاجهای منطقی او درست هستند، و توسل او به‌نتایج "تثبیت‌یـافته [و جا افتاده]" بجا است، و اینکه آیا خود این نتایج جا افتاده درست‌اند یـا خیر. (غالباً پیش می‌آید که آماتورها یا افراد اهل تفنن آنچه را می‌خواهند ثابت کنند فرض می‌کنند، و آن را از نوثابت می‌کنند و می‌گویند: فهو المطلوب.) این روند، بسته به‌اینکه پیچیدگی کـار (ب) تا چه حد باشد، ممکن است بسیار دشوار ووقت‌گیر باشد، ولی به‌هرصورت، (الف) به‌هیچوجه نمی‌خواهد که پروندهٔ تأیید و اعتباریابی همهٔ نتایج "جاافتاده"ای را کـه (ب) بدانها متوسل شده است از نو بگشاید.

می‌توان نمایشنامه‌ای نوشت که در آن (الف)، پس‌ازتلاش بسیار، انگشت خود را روی فلان خط از فلان صفحه می‌گذارد و به (ب) می‌گوید: "نگاه کنید. شما در این جا

۱. با پذیرفتن فقط یك تناقض، هرحکمی ازنظر منطقی صادق ازآب در می‌آید. مثلاً، فرض کنیدکه ۱ = ۰. افزون‌براین، فرض کنید که می‌خواهید نشان دهید ۱۱ = ۴: طرفین معادلهٔ اول را در ۷ ضرب کنید. نتیجهٔ این عمل عبارت است از ۷ = ۰. حال عدد ۴ را به‌طرفین این معادله اضافه کنید. البته اگر قرار بود چنین ریاضیاتی وضع شود، دنیا به‌آخر نمی‌رسید، ولی نقش قابل تصور این ریاضیات چه می‌توانست باشد؟

مرتکب اشتباه شده‌اید و اشتباهتان فلان و بهمان است." (ب) که آدم معقول و محترمی است کار خود را از نو بررسی می‌کند و با (الف) موافقت می‌کند، و اختلاف نظر و مناظره خاتمه می‌یابد. ولی اگر کار (ب) مورد تأیید قرار گیرد و اعتبار نتیجهٔ تثبیت‌یافته ساقط شود، آنگاه کار (ب) طبعاً [دست بالارا پیدا می‌کند و] حاکم می‌شود. اگر کار (ب) مورد تأیید قرار گیرد، ونتیجهٔ تثبیت‌یافته یا حاکم هم مورد تأیید مجدد قرار گیرد، آنگاه وارد یك موقعیت بحرانی می‌شویم.

در واقع امر، آنچه (الف) در یك مناظرهٔ نمونه‌وار می‌گوید این است: "بروید پی کارتان. بـه اعتقاد من: (۱) کارلیندمان معتبر است، و (۲) آنالیز ریاضی سازگار است. بنابراین، کار شما بی‌اعتبار است و من حتی بدون بررسی کارتان به بی‌اعتباری آن حکم می‌کنم." در پشت این بی‌اعتنایی چه چیزی نهفته است؟

در ارتباط بـا موضوع (۱)، (الف) ممکن است چنین استدلال کند: من شخصاً کار لیندمان، یا انواع جدید معادل آن، را بررسی نکرده‌ام، اما جامعهٔ ریاضی این کارها را کرده است. این جامعه به‌صورت یك مجمع علنی کار می‌کند، مجمعی که آثار مختلف را دائماً تحت نظر می‌گیرد و درمعرض انتقاد، تجدیدنظر، تعدیل، وتعمیم قرار می‌دهد. این مجمع با سوابق مضبوط تاریخی و گفت و شنودهای غیررسمی دربارهٔ گذشته و حال خود، پیوندهایی معنوی دارد. با مجامع رشته‌های مجاور خود، مانند فیزیك و فلسفه، نیز پیوندهایی دارد، و همهٔ اینها با هم تجربهٔ ریاضی را تشکیل می‌دهند. سابقهٔ این تجربه روشن و خوب است، و با آنکه خود به‌برخی از خطاها اذعان دارد، خطاهایـی که همیشه عاقبت تصحیح شده‌اند، معدل ممتاز و بسیار بالایی دارد.

بنابراین اعتقاد من نسبت به‌کارلیندمان مطلق نیست، ولی بسیار با برجاست و درنهایت بر ایمان من به داوری دسته‌جمعی جامعهٔ ریاضی استوار است. حدود خطایی که برای این داوری قائل هستم نه مانع کار شخصی من می‌شود، و نه مرا دچار حالت عصبی ناشی از بی‌تصمیمی می‌کند. با آنکه اعتقادم به‌این قضیهٔ معین ریاضیات ممکن است اندکی کمتراز، مثلاً، اعتقاد من نسبت به‌وجود خودم باشد، اعتقادم به‌کل روند ریاضی به‌همین اندازه است.

وقتی پای موضوع (۲) یعنی سازگاری آنالیز ریاضی، به‌میان می‌آید، (الف) ممکن است چنین استدلال کند: تجربه نشان داده است که آنالیز تا به‌امروز سازگار بوده، و آنالیز ریاضی همیشه ازانسجام کافی برخوردار بوده است که هرمورد ناسازگار نمایی را که مطرح شده است، حل و فصل کند. البته من از آثاری چون اثر گودل (که ازسوی جامعهٔ ریاضی مورد تأیید قرار گرفته است) اطلاع دارم، یعنی از اینکه اگر یك مبحث ریاضی به‌اندازهٔ کافی غنی باشد) به‌این معنی که تعداد تعاریف و اصول موضوع آن کافی باشد) که بتواند مسئلهٔ سازگاری خود را صورتبندی کند، آنگاه این سازگاری در چارچوب خود مبحث اثبات‌ناپذیر است. اما چنین اثباتی می‌تواند در یك ماورا مبحث فراگیر طرح شود. اعتقاد من به‌سازگاری آنالیزریاضی چندان برامکان چنین اثباتی استوار نیست، بلکه بیشتر ناشی‌از این واقعیت است که تاسازگاری، ریاضیات را ازموقعیت منحصربه‌فردی که درمیان رشته‌های

معنوی دارد، موقعیتی که من به‌آن متعهد هستم، محروم می‌کند. به‌این ترتیب، معنای امر محال را تا آنجا تعقیب کردم که مجبور شده‌ام پذیرش خود را به صورت تعهدی شخصی صورتبندی کنم. این پیگیری اکنون باید خاتمه یابد.

اما مفهوم امرمحال صرفاً در مفهوم نتیجهٔ استنتاج شده از یك ساختارقیاسی خلاصه نمی‌شود. زیرا ساختارها می‌توانند منقرض وامورمحال می‌توانند به‌امورممکن تبدیل شوند.

تئاتر پوچی: تبدیل محال به ممکن

اینکه فکر کنیم ریاضیات از مجموعه‌ای ساختارهای قیاسی، صوری، و ثابت تشکیل‌یافته است که‌آرایشی دائمی دارند، وهمواره همان خواهند ماند، کارخطایی است ــ یادست‌کم به‌دیدگاه گمراه‌کننده‌ای درمورد ریاضیات یاری می‌رساند. تصویر حقیقیتر از آن این‌است که این‌ساختارها را به‌عنوان ساختارهایی تاریخی، ولی‌موقتی، به‌شمار آوریم؛ ساختارهایی که با هرتفکر جدیدی قواعد جدیدی را طرح، و حدودشان را معین می‌کنند، وتحت‌تأثیر عوامل‌خلاق جدید ربط ومعنای فردیشان تغییر می‌کند. قواعد می‌توانند تغییر کنند،فرضیه‌ها می‌توانند تغییر کنند،تقدم وتأخرگامهای استنتاج می‌تواند وارونه شود تا فرضیه‌ها بتوانند به نتایج تبدیل شوند و برعکس؛ و شاید تعابیر جدیدی هم در چارچوبهای گسترده‌تر کشف شوند. امور محال زیرا که هرکدام یك‌بحران ریاضی را پدیدآورده است،درنظرگیرید.

الف) محال است که $\sqrt{2}$ وجود داشته باشد.(بحران‌فیثاغورس‌مورد بحث قرارگرفته‌است.)

ب) محال است که $\sqrt{-1}$ وجود داشته باشد. (بحران‌کاردانو)

پ) خط مستقیم L را درصفحه‌ای فرض‌کنید،که نقطهٔ p روی آن واقع نباشد، محال است که خط مستقیم دیگری، جز همان یك خط مستقیم، وجود داشته باشد که از p عبورکند و با L موازی باشد. (بحران پیش هندسی ترکیبی،که درزیر مورد بحث قرارگرفته است.)

ت) محال است‌که مقادیر بینهایت‌کوچك وجود داشته باشند. (بحران‌برکلی)

ث) محال است تابعی داشته‌باشیم‌که به‌ازای همهٔ‌مقادیر x به‌استثنای $x=$صفر، وانتگرال آن (یا مساحت زیر آن) مثبت باشد. (بحران هویساید ــ دیراك)[1]

ج) محال است‌که بتوان همهٔ اعداد حقیقی را با اعداد طبیعی مثبت در تناظری‌یك‌به‌یك قرارداد.(استقلال فرضیهٔ پیوستار. بحران گالیله‌ــولی به‌مفهوم امروزی‌وجدید آن)

و اما در یك‌کلام: همهٔ این امور محال به‌امورممکن منطقی، سودمند، و پرتحرکی تبدیل شده‌اند.

۱. بحران ــ یا بحرانکی ــ در جامعهٔ ریاضی‌که فیزیکدانان، باآن ساده دلی منحصربه‌خود، اصلا متوجه نشدند.فیزیکدانان به‌درستی،انرژی خود را برای مقابله با بحرانهای فیزیك حفظ می‌کنند.

محال، ولی ممکن. $\sqrt{2}$ نخستین مورد "پوچی" در ریاضیات است . محال ، پوچ اما درکجا. درچارچوب مفید دوست‌وپاگیرحسابی اصل موضوعی، چارچوبی‌که‌ریاضیات نمی‌توانست خودرا بدان محدودکند و همچنان خلاق باقی بماند. ولی ممکن، پس‌از رها کردن چارچوب از قیود وگسترش آن. تئاتر پوچی به‌موفقیت گسترده‌ای دست پیدا کرده است. باآنکه هرکدام از امور محال (الف) ــ (ج)، وسیر حل و فصل آنها، بخش‌بزرگ و مهمی از تحول ریاضیات را تشکیل می‌دهد، در زیرفقط در مورد (الف) و (پ) وارد جزئیات می‌شوم.[1] این دو مورد از اهمیت خاصی برخوردارند، زیرا بحرانهای ناشی از آنها به‌عالم غیرعلمی خارج ازخود نیزسرایت کرد.

یادآوری یك نکته خالی از لطف نیست و آن اینکه، در برخی موارد، راه خروج از بحران در واقع خیلی زودترازبیان صریح ومناسب خود امرمحال مطرح می‌شود. مثلا"، در هنگام کارکردن با اعداد، محال است که بتوان عدد صحیح ۱ را به عدد صحیح ۲، یا عدد ۳ را به‌عدد صحیح ۲، بخش‌کرد؛ زیرا حاصل، عددی‌صحیح نیست. اما، ازنظرتاریخی، عملا"دستگاه اعدادی وجود نداردکه درآن ۱/۲، و ۲/۳ همزمان با یك و دو و سه وجود نداشته باشد. محال بودن وضعیتی است‌که وابسته به‌اصول موضوع است.

اهمیت اصل موضوعی‌کردن نظریه‌های ریاضی همیشه فراز وفرودهایی را طی‌کرده است. امروزه ــ و در حقیقت از ۱۸۵۰ میلادی به‌بعد ــ این‌گرایش بسیارقوی است و از نفوذ بسیار زیادی نیز برخوردار است. حساب و آنالیز (حساب دیفرانسیل و انتگرال) در واقع در همین قرن گذشته به‌صورت اصل موضوعی درآمدند. اما، البته‌هندسهٔ کلاسیك یونانیان همواره اصل موضوعی بوده است. درحقیقت، همهٔ این جنجالها هم درهمان زمان برپاشد؛ در همان زمان بودکه "زنجیرهایی ساخته شدکه خود آدمی را بـه مدت ۲۳۰۰ سال زنجیرکرد." [۲]

ریاضیات دورهٔ باستان هند و مشرق زمین هم اصلا" کاری با اصول موضوع‌نداشتند.

امرمحالی‌که با $\sqrt{2}$ ارتباط دارد، عبارت است از یافتن دوعدد صحیح چون p و q چنانکه $p/q=\sqrt{2}$ (یعنی، $(p/q)^2=2$). کشف این واقعیت‌که این امری محال است به فیثاغورس (قرن ششم قبل ازمیلاد) نسبت داده شده است. از آنجا که $\sqrt{2}$ به عنوان طول قابل لمس قطر واحد مربع وجود دارد، و از آنجا که به‌عنوان نسبت دوعدد صحیح وجود ندارد (مگر می‌شودکه اعداد نوع دیگری هم وجود داشته باشند؟)، در نتیجه هـم وجود دارد هم وجود ندارد. در واقع این چیزی جز تصادم میان طبیعت و صناعت نیست.

بابلیها به‌راه خروج ازاین موقعیت اشاره‌ای‌کرده بودند. دریکی از الواح آن دوره به‌تاریخ تقریبی ۱۷۰۰ پیش‌ازمیلاد [۱]، تقریب شصت‌گانی بسیارخوبی برای $\sqrt{2}$ وجود دارد. [درحالی‌که]، شیوهٔ استدلال یونانیان به‌بحرانی در تفکر ریاضی یونانیان انجامید.

۱. تبدیل (ج) به امری ممکن حتی برای خود متخصصین ریاضی هم‌کمترشناخته شده وناآشنا است. ایـن تبدیل درقضیهٔ لوونهایم‌ــاسکولم مستتر است. برای آشنایی، مثلا، ر.ك نظریهٔ مجموعه‌ها، نوشته توماس جیچ، ص۸۱.

ولی معما، پس‌ازچندین و چند قرن، عاقبت زمانی حل شدکه هندسه از نو در دستگاه‌اعداد حقیقی تعبیه شد، یعنی در دستگاه همهٔ "اعشارهایی" که تعداد ارقام‌شان نامتناهی است ــ روندی‌که با همان لوح با بلیها آغاز شده بود. محال بودن $\sqrt{2}$ به‌عنوان نسبت دوعدد، دراین هندسهٔ از نوصورت‌بندی شده به‌مسئلهٔ‌ای تبدیل می‌شودکه مشمول مرورزمان‌شده‌است، در حالی‌که درچارچوب نظریهٔ اعداد، اگرچه به‌طور نامتناقض، همچنان مسئلهٔ روز است. بحران فیثاغورس پیامدهایی داشت‌که دامنه‌اش به‌مراتب گسترده‌تر ازخود ریاضیات بود. ازآنجاکه وقوع آن مقارن با، یا درست پیش از پیدایش روش قیاس اصل‌موضوعی بود، فرضیهٔ دورازذهنی نیست‌که بگوییم‌کشف آن در تبدیل و رسمیت بخشیدن به‌روش قیاسی به‌وسیله‌ای برای رسیدن به‌حقیقت نقشی تعیین‌کننده داشته است. به‌گمان سرکارل پوپر[۴] این بحران و نتیجهٔ آن، به‌قلمرویی به‌مراتب وسیع‌تر از ریاضیات سرایت کرد: "(نظریهٔ اصالت معانی یا مثل افلاطون) را تنها در پرتو موقعیت بحرانی و مسئله آفرینی کـه علم یونان درآن قرارگرفت (اساساً درزمینهٔ نظریهٔ ماده) می‌توان درک‌کرد، و خوداین‌موقعیت هم ازکشف اصم بودن ریشهٔ دوم عدد دوسرچشمه می‌گرفت." طبعاً این پرسش برای‌آدمی پیش می‌آیدکه اگر افلاطون خواب صور مثالی را برای ما ندیده بود تا ما رامبهوت و اسیرآن‌کند، تاریخ اندیشهٔ غرب چه سیری را می‌پیمود؟

بحرانهای دیروز غالباً پایه‌های اوضاع عادی امروز را تشکیل‌می‌دهند. هر دانشجوی دورهٔ‌لیسانس‌ریاضیات وفیزیك می‌داندکه برای هندسهٔ پیوسته سه دستگاه‌اصلی‌وجود دارد، مشهورترین دستگاه همان هندسهٔ اقلیدسی است. و به‌غیراز آن دو نوع هندسهٔ نااقلیدسی وجود دارد: هندسهٔ هذلولوی بولیایی و لوباچفسکی و هندسه بیضوی ریمان ... امروزه، درك این واقعیت بسیار دشوار است‌که در اوایل قرن نوزدهم عنوان کـردن امکان وجود هندسه‌ای جز هندسهٔ اقلیدسی با ترس ولرز همراه بـود. بدون شك بـای حیثیت و اعتبار اسلاف باستانی، به‌علاوهٔ اعتقادات جا افتادهٔ باستانی درمورد ارتباط میان عالم وتوصیف ریاضی آن، در میان بود. همه معتقد بودندکه هندسهٔ اقلیدسی توصیف دقیقی از چگونگی عالم فضایی به‌دست می‌دهد. صدق‌آن مقدم‌برتجربه بود، و درپرتو این امر، هرگونه‌هندسهٔ دیگری غیرقابل تصور ــ یعنی امری محال بود.

امروزه این مـوضوع را مـی‌توان از زاویـهٔ تعارض میان روش اصل موضوعی (اکسیوماتیك) و تجربه نگریست. هندسه، در دست اقلیدس، به‌یاری تعدادی مفاهیم کلی و اصول موضوع "بدیهی"، ساخته‌شد. پنجمین اصل موضوع‌او، اصل معروف خطوط‌متوازی، حکم می‌کندکه اگر درصفحه‌ای خط مستقیمی داده شده باشد، و اگرنقطه‌ای خارج از آن نیز داده شده‌باشد، آنگاه تنها و تنها یك خط می‌توان موازی با آن ترسیم کـرد‌که ازآن نقطه عبورکند (گزارهٔ (ب)، دربالا). البته این حکم را می‌توان‌کاملا از نوعبارت‌بندی و به‌صورت یك امرمحال‌بیان‌کرد:محال‌است‌که بیش‌از یك خط موازی ازیك‌نقطه‌عبورکند. برای نسلهای بعد، این‌اصل کمتراز اصول دیگرواضح بود، و تلاشهای مکرر برای استنتاج آن ازاصول دیگر تاریخچهٔ مفصلی‌دارد. همه این تلاشها به‌شکست انجامید، ووقتی‌شکست

برای مدت مدیدی تکرار شود، ظاهـراً شعورمتعارف، اگـر بتوان آن را چنین خواند، حکم می‌کندکه‌کاری‌که درجهت انجام آن تلاش می‌کنید، محال است. به‌هرصورت،نوعی عقل سلیم با نوع دیگری عقل سلیم درتعارض قرارگرفت،ومایهٔ محال بودن این قیاس نیز همین تعارض بود.

و اما در این مورد چگونه می‌توان امرمحال را ثابت‌کرد؟ اثبات آن عبارت است از یافتن مجموعه‌ای از اشیای ریاضی، همراه با تعبیری‌که این اشیاء را با مفاهیم‌موجود در اصول موضوع مرتبط سازد، و در همهٔ اصول اقلیدس، جز اصل پنجم، صدق‌کند. این اشیا می‌تـوانند همان اشیای هندسهٔ اقلیدسی متداول باشند، ولی به‌مفاهیم اساسی مـانند "نقطه"، "خط"، "تقاطع"، "موازی"، و غیره، معانی خاصی نسبت داده می‌شود. این‌کاررا، که ازآن زمان به‌بعد به‌روش جا افتاده‌ای در منطق ریاضی و نظریهٔ مجموعه‌ها تبدیل شده است، یافتن "مدل" (یا "الگو") برای اصول موضوع می‌خوانند. محققین انواع و اقـسام ــ و در حقیقت، تعدادی نامتناهی ــ مدل‌کشف کرده‌اند که هیچکدام در اصل پنجم صدق نمی‌کنند. از این راه، استقلال آن ثـابت شده است. امکان وجود تعدد خطوط موازی را هندسهٔ لوباچفسکی و بولیایی وامکان عدم وجود خطوط موازی را هندسهٔ ریمان به‌دست می‌دهد.

آیـا اکنون، ممکن است خواهش کنم هندسهٔ واقعی از جای بـرخیزد؟ هیچکدام نمی‌تواند به‌این تقاضا پاسخ دهد،زیرا در پرتواکتشافهای جدید،اکنون،از نظرمنطقی، هیچ هندسهٔ‌ممتازی وجود ندارد.هرکدام ازهندسه‌های نااقلیدسی به‌اندازهٔ هندسهٔ‌اقلیدسی منطقی و سازگار است. آنچه مطرح است دیگرحقیقت محض هندسه به‌معنایی رازآمیخته نیست، بلکه سودمندی، سادگی، و تسهیلات این یا آن هندسه مطرح است. کدام هندسه سودمند است؟ در قلمروکوچك اندازه‌گیریهای زمینی و سیاره‌ای، هندسهٔ اقلیدسی هندسه‌ای است که‌کاملاً مناسب آن است؛ در ابعاد عظیم فضا-زمان درون‌کیهانی، به‌نظرمی‌آیدکه هندسهٔ ریمانی ضرورت داشته باشد.

زنگ خطر و چراغ خطر

امروزه بسیار عادی است‌که یك استادریاضی‌کلاس خود را با این‌گفته شروع‌کند: "فرض کنیم X فضای تابعی فلان وبهمان نوع، وفرض‌کنیم f در X یك تابع نمونه باشد." بعد، ممکن است بگوید: "ازآنجاکه f در X زندگی می‌کند فلان و بهمان صادق است." ایـن شیوهٔ بیان محاوره‌ای، محدودیتهای صوری که f باید رعـایت کند، و دارای پیامدهایی برای آن هستند، نادیده می‌گیرد. افزون برآن، این واقعیت هم نادیده‌گرفته می‌شود که f نسبت بـه X مقدم است، اینکه X ممکن است محل اقامت طبیعی برای f نباشد؛ یا حتی ممکن‌است اصلاً اقامتگاه طبیعی وجود نداشته باشد،ودرنتیجه اقامت درنقطهٔ معینی ممکن است به‌این یا آن بها تمام شود.

این امـر در دنیای روزمره امر آشنایی است. ما در اتاقی زندگی می‌کنیم، اتاق

در خانه‌ای قراردارد، و خود خانه جزء یك مجتمع است و غیره. انجام‌کاری که در اتاق محال است شاید در خانه‌کاملاً ممکن باشد، و کاری‌که درخانه محال است شاید در حیاط کاملاً ممکن باشد. البته، عکس این قضیه هم ممکن است‌کاملا صادق باشد به‌این معنی‌که سیرتکامل ساختارها ممکن است به‌گونه‌ای تنظیم شودکه مانع از پیدایش برخی امور شود، و در نتیجه امورمحال مطلوبی را تأمین‌کند؛ مثلاً، اینکه ریزش باران برسرمان محال باشد یا اینکه رفتن دزد به‌سراغ دستگاه ویدئو محال باشد.

حال یکی از مهمترین دیدگاههای معاصر در ریاضیات این است که ریاضیات علم ساختارهای قیاسی‌است. این‌دیدگاه به‌دیدگاههای مشابهی درزمینهٔ مردم‌شناسی، روانشناسی، تعلیم و تربیت، و نقد ادبی منجرشده است. همانگونه‌که در بالا گفتیم، هرساختاری‌عبارت است از مجموعه‌ای از اشیاء همراه با مجموعه‌ای ازقواعدکه ترکیب یا برهم‌کنش این اشیاء را تنظیم می‌کنند. غالباً، تصور نخستین از این اشیاء به‌دورانی پیش‌از صورتبندی دقیق ساختار مربوطه بازمی‌گردد، و یك شیٔ معین ممکن است به‌چندین وچند ساختار تعلق داشته باشد. از اینرو، ۲ به عنوان یك شیٔ ریاضی می‌تواند عضو مجموعهٔ اعداد صحیح باشد، یا به یك گروه، یا به‌یك حلقه، یا به‌یك میدان، وغیره، تعلق داشته باشد. عمل مجذور کردن یك عدد (تابع $x^2=y$) می‌تواند عضو انواع واقسام مجموعه‌های توابع باشد.

ساختارها چیزی مانند باشگاههای اجتماعی هستندکه مقررات عضویتشان براصولی منع‌کننده استوار است. ازاینرو، رده نامتناهی یك‌ها: $(1,1,\ldots)$ ازحق عضویت درفضای هیلبرت موسوم بهL^2 برخوردارنیست، چون‌حاصل‌جمع مجذور مؤلفه‌هایش بینهایت‌است. افرادی‌که در ساختار L^2 حق رفت و آمد دارند "خوب" هستند، یا دست‌کم، به‌قول‌دکتر جانسون، ذاتاً "معاشرتی" هستند. هدف از ایجاد باشگاه این است‌که اعضا بتوانند به نحو مطلوب با یکدیگر معاشرت کنند. در چارچوب باشگاه، برخی‌کارها مجاز است و برخی ممنوع. تأکید ساختاری در ریاضیات قرن‌بیستم، چراغ صحنه را از فردفرد اعضا (اعداد، بردارها، جایگشتها و غیره) به خود ساختار متوجه‌کرده است؛ ساختار به عنوان موجودی که در آن باید دنبال خواصی چون بستار، زیرساختارها، هممورفیسمها، وغیره، گشت.

تا آنجاکه اشیای ریاضی جدا از موجودیتی‌که در ارتباط با ساختاری‌که موقتاً در آن زیست می‌کنند از موجودیتی برخوردار هستند[1]، می‌توان پرسشهایی در ارتباط با خصلت عامتر و بی‌ساختارشان مطرح‌کرد. و پاسخها می‌توانند متنوع باشند. آیا عضوی، مانند x، در ساختار من وجود داردکه به‌ازای آن $x=x^2$؟ اگر x در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت قرارداشته‌باشد، خیر. اگر xها اعدادی حقیقی باشند، بله. آیا معادلهٔ $x^2=-1$ جواب دارد؟ اگر x عددی حقیقی باشد، خیر. اگر x عدد مختلط باشد، بله.

آیا واقعاً می‌خواهید معمای جدول هوش راحل‌کنید؟ اگر چنین است بایدگرهٔ‌کور

۱. البته، تا حدود معینی. عدد ۲ به‌عنوان یك نماد صرف تنها می‌تواند به‌منظور متمایزساختن به‌کار رود، درست مانند کارکفشدار. ریاضیات زمانی آغاز می‌شودکه۲ به‌نحوی ازانحاء با ۱و۳ در ارتباط قرارمی‌گیرد. این طبعاً ساختاری بسیارابتدایی خواهد بود.

را پاره‌کنید: مربعهای کوچك را ازجای خود درآورده به‌بعد سوم برید و آنها را به‌طور مطلوب جابجا و مرتب‌کنید. اگر زندگی شما درگروجواب مطلوب این مسئله بود، ایـن درست همان‌کاری بودکه می‌کردید.

تبدیل امورمحال به‌امورممکن به‌طرق‌مختلف میسر است: با تغییرزمینهٔ ساختاری‌شان، با تغییر متن آنها، و یا با درج متن موجودشان در متنی جامعتر. به‌احتمال زیاد شایسته‌توان کلیهٔ امور محال ریاضی را، به‌شیوه‌ای‌جالب ونه‌پیش پا افتاده، به‌اموری ممکن تبدیل‌کرد. درارتباط با چنین تبدیلی، چندین و چند پرسش مهم قابل توجه است: (الف) اصلاً این کارچه لزومی دارد؟ ضرورت فی‌نفسه و غیرذاتی چنین کاری چیست؟ بـه یقین باید دلیل قانع‌کننده‌تری‌وجود داشته باشد، تا صرفاً اینکه جوهرریاضیات به‌اندازهٔ کافی انعطاف‌پذیر است‌که این‌کاررا میسرسازد. (ب) پیامدهای‌دامنه‌دارتراین‌کارچیست؟ باآنکه مواردبسیاری ازاینگونه تبدیلها وجود دارد، که‌شاید،مثالهای (الف) تا (ج) دربخش پیشین معروف‌ترین نمونه‌های آن باشد، تا آنجاکه من اطلاع دارم، هیچگونه انتقادکلی در مورد نفس خود عمل صورت نگرفته است.

وقتی زنگها به‌صدا در می‌آیند وچراغهای چشمك‌زن به‌کار می‌افتند، ما طبعاً هوش و حواس خود را جمع مـی‌کنیم. احتمالاً، در چنین موقعیتی، در معرض خطر هستیم. وقتی کارت پلاستیکی خودرا در شیار گیشهٔ خودکاربانك قرارمی‌دهیم و ازآن هزارتومان‌مطالبه می‌کنیم، درحالی‌که موجودی ما فقط هفتصد تومان است،ریاضیات می‌گوید نه و پیام"خطا است" را دریافت می‌کنیم. وقتی ماشین حساب علمی خود را در دست می‌گیریم، و عدد ۱را به آن می‌خورانیم و تلاش می‌کنیم که آن را به ۰ بخش‌کنیم، آن چراغهای چشمك‌زن به ما یادآوری می‌کنندکه‌کار ما محال، از روی نومیدی، و بی‌معنی بوده است.

با همهٔ اینها، روز بعد، ممکن است مدیریت بانك ماشین خود را به‌گونه‌ای برنامه‌ریزی‌کندکه هرکس تاده هزار تومان اعتبار داشته باشد. در بعضی‌کشورها دائم این‌کاررا می‌کنند. به این‌کارمی‌گویند تأمین اعتبار ازطریق‌کسری بودجه، و غولهای‌نظریهٔ اقتصادی مسؤول این تحول ساختاری بوده‌اند.

اما آیا واقعاً می‌خواهید [عدد خودرا] به‌صفر بخش‌کنید؟ خوب، شاید نه یك را به صفر (۱/۰)، بلکه صفر را به صفر (۰/۰). این نسبت بی‌معنی، وقتی بـه‌گونهٔ سنجیده‌ای به‌عنوان حد نسبتهای مشروعی تعبیرگردد، جوهرحساب دیفرانسیل را تشکیل می‌دهد. ولی چرا ۱/۰ را کنارگذاشتیم؟ ببخشید، غفلت از من بود. هیچ لزومی ندارد که آن راکنار بگذاریـم، زیرا در هندسهٔ تصویری یا نظریهٔ جدید ماتریسها، جواب آن یك امر پیش پا-افتاده، سودمند، و خالی از شرمساری است (هر ماتریس مستطیل‌شکلی معکوس تعمیم‌یافتهٔ مورـپنروز دارد).

وقتی زنگها به‌صدا در می‌آیند، و چراغهای چشمك‌زن به‌کار می‌افتند، روشن است که توجه شما جلب می‌شود. ولی این بار ممکن است‌که فقط بخواهید مکانیسم مسبب‌این زنگ زدن را بررسی‌کنید.

احکامی که امور محال را بیان می‌کنند، وقتی در چارچوب ساختارهای ریاضی قیاسی قرارداده می‌شوند، صرفاً تعاریف، اصول موضوع، یا قضایایی هستند که بسته‌به‌مورد، این یا آن هستند. اگر قضیه باشند، آنگاه ارزیابی اعتبارشان از راه روندها و معیارهای مرسوم تعیین اعتبار ریاضی انجام می‌پذیرد ــ که بررسی پایه‌های شهودی، قیاسی، و برهم‌کنشی قضایا از این جمله‌اند.

تاریخ ریاضیات شامل گنجینه‌ای از امور محال با سابقه و بسیار مهمی است که از طریق ایجاد تغییرات ساختاری درهم شکسته شده‌اند.

معنا در ریاضیات ازنمادهای عریان و صریح سرچشمه نمی‌گیرد، بلکه حاصل ارتباط میان این نمادها و دنیای خارج است. و این ارتباط ازطریق دخالت جامعهٔ ریاضی تأمین می‌شود. وقتی به‌اندیشه‌های نوپای ریاضی ساختارهایی به‌منظور تدقیق آنها اضافه می‌کنیم، حاصل، ازمیان رفتن انعطاف‌پذیری نیز هست.

بنابراین، به‌انحاء مختلف، هرچه به‌بیان "نه"یی مطلق نزدیک‌ترمی‌شویم، معنای قابل اطلاق به‌چنین "نه"یی هم کمترمی‌شود.

ترجمهٔ شاپور اعتماد

مراجع

1. Aaboe Asger, *Episodes from the Early History of Mathematics*, New York 1964, 26-27.
2. Bell Eric Temple, *The Search for Truth*, Reynal, NewYork, 1934.
3. Hampshire Stuart, *Modren Writers and other Essays*, Knopf, New-York, 1970.
4. Popper Karl, *Conjectures and Refutations*, Routledge and Kegan Paul. London, 1963, 75.

فیلیپ دیویس

صداقت در مباحثات ریاضی: آیا یك و یك به راستی می‌شود دو؟ ●

"من نیز همانگونه که هردم ایمان مذهبی را طلب می‌کنند، در پی یقین بودم، فکر می‌کردم که یقین را بیش از هر جای دیگر بتوان در ریاضیات یافت. اما دریافتم که بسیاری از اثباتهای ریاضی، که معلمین من انتظار داشتند آنهارا بپذیرم، پرازمغالطه بوده‌اند، و اینکه، اگر یقین حقیقتاً در ریاضیات کشف شدنی می‌بود، باید در حوزهٔ جدیدی از ریاضیات، با مبانی مستحکمتر از آنها که تاکنون استوار تصور می‌شده‌اند، جای می‌گرفت. ولیکن همچنانکه کارها پیش می‌رفت، من همواره به‌یاد افسانهٔ فیل و لاك‌پشت می‌افتادم. در حالی‌که فیلی خلق شده بودکه دنیای ریاضیات می‌توانست برروش آن سوار شود، من این فیل را متزلزل یافتم، و دست به‌خلق لاك‌پشتی زدم تا فیل را از فرو افتادن بازدارد. اما لاك‌پشت هم استوارتر از فیل نبود، وپس‌از حدود ۲۰ سال کار توانفرسا، به‌این نتیجه رسیدم که چیزی بیش‌ازآنچه که من مـی‌توانستم در راه حذف تردید، و شك از معرفت ریاضی انجام دهم، وجود ندارد."

برتراند راسل
تك چهره‌هایی از میان خاطرات

۱. ریاضیات افلاطونی. قرن بیستم هنوز هم اصول‌کارکرد واصول اساسی‌عقیدتی آنچه راکه "ریاضیات افلاطونی" خوانده می‌شود به‌طور قطعی تعیین نکرده است. درمیان این اصول می‌توان اینها را برشمرد:

۱. اعتقاد به‌وجود برخی موجودات ریاضی ایده‌آل همچون دستگاه اعداد حقیقی.
۲. اعتقاد به‌شیوه‌های قطعی استنتاج.
۳. اعتقاد به‌اینکه اگر یك گزارهٔ ریاضی با معنی باشد، آنگاه درستی یا نادرستی آن را

● Davis P. J., "Fidelity in mathematical discourse: is one and one really two?" *Amer. Math. Monthly*, 79 (1972)252-263.

می‌توان اثبات کرد.

۴. این اعتقاد بنیادی که، ریاضیات جدا از آدمیانی که در زمینهٔ ریاضیات‌کار می‌کنند وجود دارد. جایگاه عدد پی در آسمانهاست.

دربارهٔ این رشته باورها چون و چراهایی پیش کشیده‌اند، و در قرن گذشته تعدادی از ریاضیدانان برجسته برعلیه یك یا چند تا از آنها نوای اعتراض خود را بلند کرده‌اند از جملهٔ این‌ریاضیدانان کرونکر، بورل[1]، براور[2]، گودل، وایل، بعدها، بیشاب، بوده‌اند. یکی از ایرادهایی که بعضی از ماده‌گرایان می‌گیرند این است که جهان مادی کاملاً متناهی است، و تطبیق این جهان با اصل بینهایت بودن عدد صحیح دشوار است. سایر ایرادات باید به‌اصل موضوع انتخاب، و اصل موضوع طرد شق ثالث و مانند آنها مربوط باشد.

تا آنجا که به‌مورد ۳ در بالا مربوط می‌شود، کارگودل و مکتب منطقی ضربهٔ نهایی را براین اصل واردکرده است؛ با این حال ــ که اصلاً هم عجیب نیست ــ به‌عنوان محرکی روانی درکارهای روزمره دوام آورده است. زمانی ازیك دانشمند برجستهٔ نظریهٔ اعداد سؤال کردم که آیا به‌نظر او آخرین قضیهٔ فرما به‌مفهوم گودل، یکی از آن گزاره‌های غیرقابل اثبات است یاخیر، پاسخ اوسریع وروشن بود: "اینطور نیست. ماگیج وگنگ‌تر ازآن هستیم که اثباتش را بیابیم." واقعیت موضوع این است که اگرریاضیات زمانی‌وارد سرزمینی شودکه درآنجا از طریق تعداد بسیار زیادی گزارهٔ جالب ولی غیر قابل اثبات عاطل و باطل بماند، آنگاه این امر زنگاری بر روش‌شناسی و احکامی که مفهوم اثبات را دربرمی‌گیرند، خواهد نشاند.

چون و چراکردن در ریاضیات افلاطونی به‌انواع دیگر ریاضیات انجامیده است که ریاضیات شهودگرایانه، ریاضیات ساختنی، ریاضیات بازگشتی[3] و جز اینها نامهای گوناگونشان است. بعضی از اینها زیر مجموعه‌هایی از ریاضیات متعارف‌اند. بی‌گمان ماشین‌محاسبه باب برخی استدلالات را دوباره گنجوده ویاآنها را تقویت‌کرده است.روی‌آوردی به‌ریاضیات غیرافلاطونی حالاتی حاکی از خویشتنداری تا بی‌تفاوتی را در بر می‌گیرد. سرگذشت‌کرونکر در سالهای دههٔ ۱۸۸۰ را به‌یاد می‌آوریم. کسی نزد اوآمد وگفت‌که لیندمان[4] اخیراً اثبات‌کرده است‌که پی عددی متعالی(غیرجبری) است.کرونکر گفت: "خیلی جالب است،اما اصولاً"پی وجود ندارد."این بدبینی تا حدود زیادی نادیده گرفته شد. یکی از تعبیرهای رایج‌که دربك رشته از سخنرانیهای اخیردرباب ریاضیات غیرافلاطونی عنوان شد، این بودکه: "ارائهٔ آن مطلوب بود، اما بی‌ربط. اجازه دهید به همان تخته رسمهای (افلاطونی) خود بازگردیم." بی‌گمان در سال ۱۹۷۱، هر آدمی می‌توانست به‌کمك ریاضیات افلاطونی معاش خود را به‌دست آورد، و اگر ریاضیدان (الف) برای ریاضیدان (ب)،ازریاضیات افلاطونی مطالبی مطرح‌کند، و این یکی هم با

1. Borel 2. Brouwer 3. recursive mathematics
4. Lindemann

مهربانی دربرابراو واکنش نشان دهد، در این صورت دست‌کم یك‌کار انسانی انجام شده است. واین‌حکایت پادشاهی است‌که اگرباجامهٔ زیرش به‌اینسوآنسو برود، ودربارپانش هم به‌این‌کار اقدام‌کنند، درآن صورت می‌تواند سنگ برروی سنگ بند نشود.

هدف این مقاله ارائهٔ جنبه‌های دیگری از ریاضیات غیرافلاطونی است.

چندین سال پیش برای اثبات و استنتاج قضایایی در هندسهٔ تحلیلی؛ با بهره‌گیری‌از کامپیوتر تجربیاتی داشته‌ام [۴]. این تجربیات قهراً به‌اندیشه درباب تفاوت درجهٔ اعتبار قضیه‌ای‌که به‌وسیلهٔ ماشین اثبات ویا استنتاج شده است،درمقابل قضیه‌ای‌که به‌شیوهٔ سنتی و "توسط دست" استنتاج شده بود، انجامید. مقالهٔ حاضرحاصل این تجربه است.استدلالهای ویژه‌ای‌که دراینجا عنوان شده است به‌این تفصیل در هیچ‌جای دیگری ارائه نشده است، وبه‌این نتیجه منجر می‌شود که برخی جنبه‌های ریاضیات، ماهیت علوم تجربی را به‌خود می‌گیرد.

۲. نمادها. معمولاً عملیات ریاضی به‌کمك نمادها انجام می‌گیرد. شکلها، کلمات، نمودارها، نمادهای خاص ازهرنوعی صفحات کتابهای‌ریاضی را پوشانیده‌اند، متداولترین شیوهٔ انجام عملیات ریاضی در زمان ارشمیدس از طریق صفحهٔ کاغذ، تخته سیاه، چاله‌شنی در مورد ارشمیدس، و در مورد ارشمیدس دوران ما ازطریق صفحهٔ تلویزیونی‌کامپیوتری، یا واسطهٔ چشم واعصاب بینایی به‌مغز راه‌پیدا می‌کند. احتمالاً، وقتی این اطلاعات‌نمادین واردمغز می‌شوند، درآنجا اثر فیزیکی برجامی‌گذارد. آنگاه مغز این نمادها را پردازش می‌کند وممکن است از طریق دست یا دهان خروجی سخت افزار فراهم‌آید. اگر خروجی شفاهی و یاکتبی و یا عملی هرگز وجود نداشت (مثلاً مانند یك اسب تربیت شده‌که در پاسخ به‌مسائل حساب پای خود را به زمین می‌کوبد)، درآن صورت هم شاید ریاضیات وجود می‌داشت، اما نه به‌آن صورتی‌که ما می‌شناسیم.

پس، نماد اساسی ریاضیات، نماد نموداری است که چشم آن را دریافت می‌کند. ریاضیدانان نابینای طراز اولی در دنیا هستند (مانند پونتریاگین[1]) و جالب خواهد بود که بشنویم او در مورد روش فرمولبندی نمادها، عملیات ریاضی، و ادراك فضایی چه می‌گوید. از وجود ریاضیدانی‌که هم ناشنوا، هم لال و هم نابینا باشد اطلاعی ندارم، اما تصور می‌کنم هلن‌کلر که از دانشگاه رادکلیف فارغ‌التحصیل شد، می‌توانست عمل جمع را انجام دهد.

اگر کسی به‌ریاضیات افلاطونی اعتقاد داشته باشد،سپس این امکان پیش می‌آید که ریاضیات را از نمادهایی‌که حاصل آن هستند آزادکند. رویهمرفته،کلمهٔ محاوره‌ای "دو" و نماد عربی "۲" و نماد بریل برای دو، مفهومی مشترك دارند.از اینرومی‌بایستی، به‌همان ترتیب‌که استدلال به‌پیش می‌رود، یك مفهوم دوئیت‌که مستقل از نماد است، وجود داشته باشد. بنابرنظری‌که افلاطون ارائه‌کرد، این روح است‌که اشیای ریاضی را درلامی‌کند. در این صورت، نمی‌توانم یك نمونهٔ سادهٔ بی‌نمادی، ریاضیات روحانی، را ارائه دهم.

1. Pontryagin

حتی اگر یکی از این نمونه‌ها را می‌شناختم، بدون بهره‌گیری از تله‌پاتی[1] چگونه می‌توانستم آن را منتقل کنم؟

۳. اثبات. یکی از گرانبهاترین میراثهای ما از ریاضیات یونانی مفهوم اثبات است. برخی گزاره‌ها را می‌توان به وسیلهٔ "استدلال خالص" از سایر گزاره‌ها استنتاج کرد؛ مجموعه‌ای از مطالب به‌هم پیوسته را می‌توان چنان پدید آورد که تمام گزاره‌های آن از تعداد کمی گزاره‌های بنیادی به نام اصول موضوع مشتق شده باشند. این دستورالعملی است که اقلیدس پیش‌کشیده است، و پس از ۲۳۰۰ سال، همچنان برای تشریح و توضیح ریاضیات در مقام ابزاری کمال مطلوب باقیمانده است. در واقع برخی صاحب‌نظران معتقدند که این شیوهٔ نگرش، نشانهٔ ریاضیات است. حال، مقصود از اثبات چیست، و اثبات چگونه انجام می‌گیرد؟ اگر یکی از آثار افلاطون (منون، ۸۷) را خوانده باشید، سقراط را درحالی می‌یابید که به‌پسرکی برده آموزش می‌دهد. با استفاده‌از روش مامور سقراط، او پسربچه‌ای را، همچون مومی در دستش، به اینجا هدایت می‌کند که نتیجه بگیرد در مثلثی به زوایای ۴۵°، ۴۵°، ۹۰°، مساحت مربعی که روی وتر بنا شده باشد، دوبرابر مساحت مربعی است که روی ضلع کوچکتر آن ساخته شده است. اولاً تأثیر این گفتگو و معاوضه آفریده شدن معرفت جدید از هیچ (ویا چیزی که بیشتر خیلی اندك بوده) است، و ثانیاً تأکیدی است قاطع در مورد پایه بودن تعداد اندکی فرضیات و صغری و کبری که به‌راحتی‌پذیرفتنی‌اند، در مقابل گزاره‌هایی که‌وضوح آنها خیلی‌کمتر است. اثبات کردن یعنی تصدیق فراترازشك، وچنین می‌پندارند که ریاضیات به‌چنین چیزی قادر است. تاریخ اثبات نمی‌کند؛ جامعه‌شناسی اثبات نمی‌کند، فیزیك اثبات نمی‌کند، فلسفه اثبات نمی‌کند، مذهب (اگر بتوانیم هفتصد سال مغازلهٔ جبران ناپذیر کلیسا با ارسطوگرایی را فراموش‌کنیم) چیزی را اثبات نمی‌کند. ریاضیات به‌تنهایی اثبات می‌کند، و اثباتهای آن با اعتبار جهانی و مطلق، مستقل از مکان، دما و یا فشار برقرار است. ممکن است یك کمونیست و یایك ویگ[2]، ویا یك‌موگلتون[3] مرتدباشید، اما اگر درعین‌حال یك‌ریاضیدان هم باشید، وقتی اثبات درستی را می‌بینید می‌توانید آن را بازشناسید.

این دوجنبهٔ آموزش سقراط: اثبات به‌عنوان برنامه‌ای برای تصدیق ــ فعلاً آن‌را تأیید درستی نگوییم ــ و اثبات به‌عنوان برنامه‌ای برای کشف و تأسیس ریاضیات نوین، در ریاضیات امروزحضوری‌همیشگی دارند. نمونهٔ بسیار افسون‌کنندهٔ موفقیت نخستین جزء برنامهٔ اقلیدس را بی‌گمان می‌توان در خلاصهٔ زندگی توماس‌هابس فیلسوف که جان‌آبری به‌رشتهٔ تحریر درآورده است، جست:

> او (توماس‌هابس) پیش‌از آنکه، به‌طور اتفاقی، نگاهی به‌هندسه داشته باشد چهل سال عمر کرده بود. روزی، درکتابخانهٔ یکی ازاشراف به‌کتاب‌گشودهٔ *اصول* اقلیدس برخورد

1. telepathy

۲. Whig، به‌انقلابیون زمان انقلاب امریکا و اعضای حزب‌آزادیخواه انگلستان می‌گویند.

۳. Muggletonian، عضوفرقه‌ای که آن‌رادرقرن‌هفدهم شخصی به‌نام‌موگلتون‌پایه‌گزاری‌کرد.

> کرد، و در آن صفحه قضیهٔ ۴۷ ازمقالهٔ I. کتاب *اصول* آمده بود. اوآن قضیه‌راخواند. فریاد برآورد، خدایا! (گاهی از روی تأکید سوگند یاد می‌کرد) چنین چیزی ممکن نیست. سپس اثبات آن را خواند، که اورا به‌قضیهٔ‌دیگری ارجاع می‌داد، اثبات این‌یکی را نیز خواند. در اینجا به‌قضیهٔ دیگری ارجاع داده شده بود که این یکی رانیزخواند و به‌همین ترتیب تا آخر، تا سرانجام نسبت به‌درستی آن قانع شد. ازهمین جا بود که عاشق هندسه شد.

اما واقعیت کمی با این چیزها فرق دارد. اگر تصور می‌کنید که می‌توانید بادوست گرمابه وگلستان خود صحبت‌کنید و اورا به‌روش سقراطی به‌گونه‌ای بی‌اراده وآن طور که خود می‌خواهید به قضیهٔ استون‌وایرشتراس برسانید، باردیگر در این باره بیندیشید. این روش اورا از مسیر اصلی منحرف می‌کند، همانگونه که برهانهای اسپینوزا در زمینهٔ علم‌اخلاق، مسیر من‌را تغییر داد. بنا به‌نظر پوانکاره، توانایی دنبال‌کردن یك‌برهان ریاضی در میان تودهٔ مردم یکسان نیست. در نزد ریاضیدان حرفه‌ای، اثبات شاید به‌طور عمده در راستای قانع شدن خود فرد نسبت به‌درستی قضیه، تأثیری روانی دارد، تا اینکه موضوع صرفاً زدن برچسب "درست" یا "غلط" برپیکر آن قضیه باشد. اما دراین میان‌بایدموازنه‌ای برقرار باشد. زیرا به‌نوشتهٔ بورباکی:

> "به‌راستی، هرریاضیدانی می‌داندکه دریك برهان اگر کاری بیش‌از باز جست گام‌به‌گام صحت استنتاجهایی‌که آن را تشکیل داده است انجام نشود، وکوششی برای دستیابی به تصوری درست از اندیشه‌ای‌که به‌ایجاد این زنجیرهٔ ویژهٔ استنتاجها انجامیده و برتری آن نسبت به‌حالتهای دیگر شده نکند، برهان "فهمیده" نشده است."

ثانیاً، می‌توان در محیطی "بدون اثبات" به‌امور ریاضی پرداخت، کاری که انجام هم شده است. مصریان وبابلیان، حتی پیش‌ازآنکه یونانیان همراه با برهانها و اثباتهایشان از راه برسند، در زمینهٔ ریاضیات مقدار قابل توجهی معرفت اندوخته بودند. اگر کسی آثار بطلمیوس را بخواند ملاحظه خواهدکردکه چگونه مطالب بدون اثبات می‌توانددر کنار ریاضیاتی که پایهٔ اثباتی دارند، وجود داشته باشد. در دنیای امروزی، فیزیکدان و مهندس غالباً بدون اثبات‌کار می‌کنند، کافی است که به‌صورت صوری و تمادین کارکنند و شهود فیزیکی یا تأییدهای آزمایشگاهی را پشتوانهٔ‌کارشان‌کنند.

علیرغم این دوجهان ریاضی، که مدت مدیدی درکنار هم زیسته‌اند، ریاضیدانان، به‌ویژه علمای منطق ریاضی، در خلال قرن‌گذشته مفهوم اثبات را نظم بخشیده و دقتش را بالابرده‌اند. بی‌آنکه بکوشیم که وارد جزئیات تکنیکی شویم، ظاهراً موضوع به‌اینجا کشیده می‌شود. اصول‌موضوع، یعنی احکام اولیه و یافرضهارا می‌توان به‌صورت‌رشته‌های معینی ازنمادهای بنیانی ارائه کرد. قضایا به صورت مشخص دیگری از نمادهای بنیانی قابل عرضه‌اند. اثبات یعنی فرایند گذر از یك رشته اصول موضوع به‌رشته‌ای از قضایا به‌کمك دنباله‌ای‌متناهی از تبدیلهای مجاز. برای تأیید اینکه قضیهٔ فرض شدهٔ بعدی آدمی، در واقع، همان قضیه‌ای است که او ادعا می‌کند، صرفاً باید تأیید کرد که دنبالهٔ رشته

تبدیلات، مرتب است. کل مطلب علی‌الاصول به‌طور کامل قابلیت ماشینی شدن دارد و کاری است در حد همان پسرك برده و یا معادل امروزی آن، کامپیوتر. از این دیدگاه، تحقیق درستی یك قضیهٔ پیشرفته مشابه اثبات این قضیهٔ حساب است که برمبنای آن: ۵۷۹ = ۴۵۶ + ۱۲۳.

می‌توان هر برهانی را با برنامهٔ کامپیوتری قیاس کرد. اصول موضوع مشابه، ورودی کامپیوترند. قضیه مترادف خروجی خواهد بود، در حالی که اثبات به‌مثابه برنامه است. یافتن یك اثبات شامل پیدا کردن یك برنامه است. برای تحقیق در صحت یك اثبات مفروض تنها به‌این نیاز داریم که برنامه را دوباره اجرا کنیم.

۴. صحت. اینك در بحث خود به‌جان کلام می‌رسم. همانطور که دیده‌ایم، ریاضیات از طریق نمادها و عملیات نمادی پیش می‌رود. بنابراین فرض براین است که می‌توانیم نمادهای متمایزی بیافرینیم، رشتهٔ نمادها را بازشناسیم، نمادها را بازآفرینی کنیم، و آنها را به‌هم پیوندیم. هرنماد یك اثر فیزیکی دارد. این اثر می‌تواند قطره‌ای جوهر و یا ایجاد ارتعاشی در هوا و یا جزء آنها باشد. اگر دو "۱" را نشان گذاری کنم، ممکن است این یکها در سطح ماکروسکوپی یکسان باشند، اما در جهان میکروسکوپی چنین چیزی نیست. پدید آوردن نمادهای یکسان ناممکن است. آنها، مانند دانه‌های برف، همگی با هم متفاوت‌اند. اگرهم "تقریباً" یکسان باشند، ممکن است ذهن، آنها را از زوایای مختلفی دریافت کند. ممکن است چشم کم‌سو، گوش سنگین و مغز فرسوده باشد. شاید کامپیوتر پالسی را نگیرد، ولتاژ در آن افت کند، یا ازطریق کاتالی خیلی شلوغ با آن ارتباط برقرار شود.

بنابراین به‌عنوان جزئی از فرضهای ریاضیات افلاطونی باید مطالب زیر را برشماریم:

شکل ۱. آیا همهٔ نمادهای بالا نمونه‌هایی از نمادی واحدند؟ اینك در سال ۱۹۷۱ مشخص شده که بازشناسی صحیح علایم دست نوشته کار دشواری است.

۵. می‌توان نمادهای مجزایی را پدید آورد. نمونه‌های یك نماد مزوض را می‌توان ایجاد کرد. می‌توان نمادها را با صحت مطلق پردازش کرد، باز تولید کرد، و به‌هم پیوند داد. می‌توان نمادها را برحسب مورد به‌صورت مجزا یا یکسان بازشناخت.

ممکن است یکی از طرفداران راست آیین افلاطون بگوید که مطالب بالا غیر ضروری است؛ تا آنجاکه ریاضیات بدون مضامین فیزیکی وجود دارد یك نفرعالم غیر افلاطونی، خصوصاً کسی که با نظریهٔ ارتباطات آشنا باشد، این مطلب را بی‌معنی خواهد خواند. ما این کارها را فقط با مقداری احتمال موفقیت می‌توانیم انجام دهیم. در واقع این احتمال ممکن است خیلی هم زیاد باشد، اما خطاهای گاهگاهی هم ممکن است پیش آید. ریاضیات نامرادی چیست؟ بدون تمییز گذاریهای خیلی زیاد، بیایید بدون در نظر گرفتن تفاوتی، کار

تمایز گذاری، بازتولید، یا پردازش یك نماد را "عمل" بنامیم. فرض کنید احتمال انجام یك عمل با درستی مطلق p باشد. عدد p در نامساوی

$$0 < p < 1$$

صدق می‌کند، و p را بسیار نزدیك به‌یك در نظر می‌گیریم. یك مقدار واقعگرایانهٔ p به‌این بستگی دارد که چه کسی و یا چه‌چیزی و تحت چه شرایطی پردازش نماد را انجام می‌دهد. من می‌دانم که در جمع کردن و یا تایپ کردن یك کارت IBM احتمال اشتباه شخصی من در حدود $1-10^{-2} \approx p$ خواهد بود. شنیده‌ام که اعدادی در حدود $p \approx 1-10^{-12}$ یا $p \approx 1-10^{-9}$ را برای ماشینهای محاسبه ذکر کرده‌اند. حال اگر احتمال موفقیت در یك عمل مقدماتی p باشد، آنگاه، با فرض مستقل بودن، که ممکن است درست باشد یا خیر، احتمال موفقیت در دنباله‌ای از n عمل، عبارت است از p^n. بنابراین اگر n خیلی بزرگ باشد، این احتمال به‌نحو چشمگیری کاهش می‌یابد. حال چه احتمال عدم موفقیتی را تحمل می‌کنید؟ یك در هزار؟ پس شما می‌خواهید که

$$p^n \geqslant 1-10^{-3} \qquad \text{یا} \qquad n \log p \geqslant \log(1-10^{-3})$$

حال اگر

$$p = 1 - \frac{1}{m}$$

آنگاه می‌خواهیم

$$n \leqslant \frac{\log(1-1/1000)}{\log(1-1/m)}$$

از آنجاکه به‌ازای مقادیر کوچك h داریم: $\log(1-h) \approx -h$، پس باید داشته باشیم

$$n \leqslant \frac{m}{1000}$$

به‌بیان دیگر، برای واقع بودن درمحدوده‌های اطمینان مورد نیاز، نباید بیش از $m/1000$ عمل انجام دهیم. حال تعداد عملیاتی که در داخل کامپیوتر صورت می‌گیرد بی‌شمار است. پس به‌طوری که شانس عدم موفقیت برحسب احتمالات طول حیات بینهایت کوچك نیست. (یوهه[1] در مقالهٔ "برنامه نویسی کامپیوتر برای دقت" که به‌کنفرانس آنالیز عددی نیروهای مسلح در ۱۹۶۸، ادارهٔ تحقیقات نظامی ارتش امریکا، در دورهام، واقع در کارولینای شمالی، ارائه داد، ۳۸ نوع خطایی را که ممکن است در انجام محاسبات کامپیوتری پیش بیاید، برمی‌شمارد. اینها تحت این خطاها در هفت مقولهٔ اصلی به‌شرح زیر دسته‌بندی شده‌اند: خطاهای ناشی ازمحدودیتهای سخت‌افزاری، خطاهای ناشی از محدودیتهای نرم‌افزاری، خطاهای ناشی ازتقابض سخت‌افزار، خطاهای ناشی‌ازتقابض نرم‌افزار، خطاهای

1. J. W. Yohe

ناشی ازنقایص برنامه، خطاهای ناشی از انجام عملیات اشتباه، خطاهای ناشی ازناکافی بودن برنامه‌ریزی؛ سیاههٔ مشابهی برای خطاهای عملیات ریاضی به‌شیوه‌ای که مرسوم است و با دست انجام می‌گیرد، بی‌گمان جالب خواهد بود.)

البته، تکرار یك محاسبه به‌خاطر امتحان نتایج، به ما کمك خواهد کرد. اگرمحاسبه‌ای پیچیده بااحتمال موفقیت $(r-1)-1$، $r>1$، انجام گیرد، و v بارهم به‌طور مستقل اجرا شود، آنگاه احتمال دست کم یك مورد موفقیت در r بلوك ازمحاسبه $1-(1/r)^v$ خواهد بود. بدینسان، تراز اطمینان بالا می‌رود.

حال انجام عمل جمع ساده به‌روش متداول را در نظر بگیرید. اگر اعداد چندین رقمی باشند، آنگاه احتمال اینکه یك محاسبه دقیق باشد (یا پی‌بردن به اینکه کدامیك از بلوکها به‌طور مستقل به پاسخ درست رسیده‌اند) باید کم باشد. خواننده فقط لازم است احتمالات مطلوب خود و ماشین خود را در فرمولهای بالا قرار دهد. شاید ما باید رقمی با بیش ازیك میلیون رقم یا بیش‌ازیك میلیارد رقم انتخاب کنیم تا موفقیت را نامحتمل سازد، اهمیتی‌ندارد. ریاضیات افلاطونی‌وجود تعدادی نامتناهی از اعداد صحیح‌را تضمین می‌کند، وهرعدد صحیح نیز نمایشی اعشاری دارد.

حساب معمولی یکی از ابتداییترین شاخه‌های ریاضیات است. در میان قضایای حساب اعمال جمع گوناگونی وجود دارد. یکی از قضیه‌های حساب این است که: ۶۶۶۶۶ = ۵۴۳۲۱ + ۱۲۳۴۵. اگراین قضیه مخصوصاً در شماانگیزه‌ای ایجادنمی‌کند، علت آن داوری اعتباری شماست و نسبت به ساختار ریاضی بیگانه است. ممکن است این قضیه از نظر یك نفرهوادار روایت قباله[1] و یا یك مشاور مالیاتی جالب باشد. حال، همانطورکه ملاحظه کردیم، عملیات حسابی اعداد بسیار بزرگ را تنها می‌توان بادرستی اندکی انجام داد. اگراز عملیات جمع بدیهی دور شویم، اعمال حسابی در هاله‌ای‌ازعدم یقین‌پوشیده‌اند. مجموع ۵۴۳۲۱ + ۱۲۳۴۵ برابر ۶۶۶۶۶ نیست. این حاصل‌جمع یك عدد نیست، بلکه توزیعی احتمالی از جوابهای ممکنی است که در آنها ۶۶۶۶۶ مطلوبی محتمل‌الوقوع‌تر است. (مثالی راکه از وضوح کمتری برخوردار است مطرح می‌کنیم. بازی یك نفرهٔ معروف "کانفیلد"[2] را در نظربگیرید. اگر قواعد بازی تغییر نکنند،وروش بازی نیز بدون هیچگونه ابهامی مشخص شود، آنگاه مقدار مورد انتظار کانفلید قضیه‌ای ریاضی را تشکیل می‌دهدکه ازنظرهایی شایان توجه بسیار است. تا آنجا که من می‌دانم، به‌دلیل پیچیدگی کانفلید، هیچ‌کسی نتوانسته است درآن برای رسیدن به‌مقدارمورد انتظار ازقضایای مقدماتی‌مندرج‌درکتابهای آنالیز ترکیبیاتی بهره‌گیرد. باهمهٔ اینها، علی‌الاصول می‌توانیم هریك از ۵۲! بازی راکه محتمل است امتحان‌کنیم، و میانگین مقادیر آنها را به‌دست آوریم.)

چیزهایی مترادف با محدودیتهای اندازه‌گیری فیزیکی وجود دارد. دردستگاه‌شمار بدوی، یك، دو، سه، خیلی، هزاران، حکمتی وجود داشته است.

---

۱. (K)cab(b)ala، از احادیث بنی‌اسرائیل.ـم.

۲. بازیی‌یا ورق‌که به‌آن فال ناپلئونی نیزمی‌گویند.ـم.

مسئله: با داشتن

$A=$ ۱۱۷۷۷۷۷۷۷۱۱۱۷۱۸۱۷۱۷۱۷۷۷۱۷۱۱۷۱۱۷۱۱۱۱۱۱۱۷۷۷۱۷۱۷۷۷۷۱۱
۷۷۱۱۷۷۱۷۱۷۱۷۱۷۱۷۷۷۱۷۱۷۷۷۱۷۱۷۱۷۱۷۱۷۱۷۱۷۱۱۱۷۱۷۱

$B=$ ۱۱۱۱۱۷۱۷۷۷۷۱۱۱۷۱۷۱۷۱۱۱۱۷۱۷۱۷۷۱۷۱

پیدا کنید $A+B$ را.

شکل۲. اعداد A و B را نمی‌توان با درستی مطلق بازتولیدکرد، تا چه رسد به‌اینکه آنها را با هم جمع کنیم.

۵. صحت دراثباتها. درستی یك اثبات ریاضی باتحقیق درصحت این‌مطلب که دنبالهٔ تبدیلات رشته نمادهای بنیانی آن مجاز بوده‌اند، تصدیق می‌شود. این تبدیلات به‌صورت آمیزه‌ای ازمطالب تشریحی ونمادهای ریاضی نوشته می‌شوند. تعاریف ابداع می‌شوند تا به‌جای مخفف ترکیبات طولانیتری ازکلمات و نمادهای به‌کارآیند. لم ها به‌عنوان پایه و سکویی موقت ایجادمی‌شوند تا شخص بتواند از آنجا با رنج کمتر و درنتیجه با امنیت بیشتری به استدلال بپردازد. نتایج (یا قضایای فرعی) برای بالابردن توان روحی به‌دست آوردن قضایای عمیق‌تر بصورتی ساده‌تر مطرح می‌شوند.

به‌هم ارتباط دادن دوقضیه‌کاری متداول است. در روند اثبات، فرد به‌قضیهٔ اویلر، بگوییم، به‌خاطر اعتبارش استناد می‌کند. حال دیگر برعهدهٔ خواننده است که قضیهٔ خاص اویلرراکه نویسنده دربارهٔ آن سخن می‌گوید به‌کارگیرد و تحقیق‌کندکه تمام شرایط (به صورت جدیدترین فرمولبندی آنها)که برای به کاربردن قضیه ضروری است، در واقع وجود دارند.

اگر به‌هم ارتباط دادن در بین نویسندگان رایج است، آنگاه جاانداختن مطالب رایجتر است؛ منظورم از جاانداختن مطالب، عدم ارائهٔ یك استدلال مهم است. جاانداختن به‌این علت پیش‌می‌آیدکه کوتاه نگهداشتن طول مسیراثبات ضروری است. به‌خاطراجتناب از ملال (واقعاً نمی‌توانید ازمن انتظار داشته باشیدکه برداشتن کوچکترین گام شما را نیز بررسی کنم، می‌توانید؟) احتراز ازپیچیدگی درصحبت (اکثرکسانی که در محفل ما هستند می‌توانند حرفهای من را دنبال‌کنند) و یا به‌علت بی‌توجهی. بدینسان، بدون اینکه به‌چنبرهٔ احتجاج بیفتیم، تأیید قانع‌کننده‌ای از حقیقت، و یا وسیله‌ای برای بالابردن فهم، و اثبات درهرکتاب درسی دربارهٔ مباحث پیشرفته، غالباً همچون قطعه‌ای موسیقی یا سبك خاصی است‌که نویسنده با خوانندگان خود برای رسیدن به‌نتایج مشخص اجتماعی همراه باآن می‌رقصند. آنچه‌که به‌عنوان برهان شروع می‌شود، خیلی زود تبدیل به‌ذوق می‌شود وسپس به‌بی‌ذوقی و عدم ظرافت می‌انجامد.

مسیر مبانی ریاضیات تا هرمبحث پیشرفته‌ای در فراسوی مرزهای آن را می‌توان‌در ۵ یا ۶کتاب پیمود. شاید اثباتها با روشهایی‌که هم‌اکنون رایج است، ۱۵۰۰ صفحه را در برگیرد. این کمیت مطابق خوی انسان به‌قطعه‌های کوچکتر تقسیم شده است. طول این قطعه‌های کوچکتر، در شاخه‌های گوناگون، متفاوت است، شاید طولانیترین اثباتها متعلق

به‌نظریهٔ اعداد باشد. اثباتی را ازلاندا سراغ دارم که بیش‌ازیکصد صفحه‌را اشغال‌می‌کند. کتابی در مباحث پیشرفتهٔ آنالیز دربرابر خود دارم که به‌تازگی منتشر شده است. ظاهراً طول متوسط اثباتهای آن در حدود ۱۵ خط است. این آینهٔ تمام نمای موقعیت خوانندهٔ معاصر است.

کسان‌زیادی را نمی‌شناسم که‌داوطلب وارسی اثباتی پنجاه‌صفحه‌ای‌باشند. داوریهای اعتباری به‌میان می‌آیند؛ این امر بسته به‌آن است‌که پای چه‌چیزی در میان باشد. اثبات مفهومی فرضیهٔ ریمان درنزدکسانی‌که آن‌را بررسی می‌کنند، نسبت به‌جمع‌کردن دو عدد صحیح‌بسیار بزرگ جاذب‌ترخواهد بود. اماآدمی ناچار نیست بااثباتهای پنجاه‌صفحه‌ای سروکار پیداکند؛ شمار زیادی از اثباتها در مقالات تحقیقاتی، جزء توسط خود مؤلف وارسی نمی‌شود. اما دراین صورت، تعداد کثیری از قضیه‌ها بدون هیچگونه فرجامی خواهند ماند؛ اینها واپسین اثرات اندیشه‌هایی تابناک‌اند. اینها درسایهٔ‌کاربردهمچنان بدون وارسی باقی خواهند ماند. آنها سرشار از اشتباهند.

اگرماشینهای حسابگربه‌کارکنترل عملیاتی که بادست انجام شده ویا آنطور که در مواردی انجام گرفته است، در ابداع قضیه‌های جدید به‌کار گرفته شوند، همین مسائل، اما شاید با احتمالاتی دیگر، مطرح می‌شوند. یك جنبهٔ جالب مسئلهٔ درستی، در برنامه‌نویسی است. برنامه‌هایی‌هستند که ازچند هزار کلمه ودستورالعمل تشکیل یافته‌اند. چنین برنامه‌هایی غالباً توسط گروههای برنامه‌نویس نوشته می‌شوند، وسپس اجزای آن به‌هم مرتبط می‌شوند. حال مسئله این‌است‌که: برنامه واقعاً چه‌کاری انجام می‌دهد؟ بسیار خوب، از برنامه‌نویسها می‌پرسیم که برنامه چکار می‌کند. اولین برنامه نویس‌که اخیراً در آزمایشگاهی ۳۰۰۰ کیلومترآن‌سوترکار جدیدی گرفته است، ازطریق تلفن به‌ما پاسخ می‌دهد: "قسمت من به‌کار خود مشغول‌است." برنامه‌نویس دوم‌که در همین حوالی است، می‌گوید: "همین‌طور مال من"، درحالی‌که برنامه‌اش سرشاراز اشتباهاتی است‌که هنوز مشخص نشده است، وبرنامه‌نویس سوم، آه و افسوس، او چند ماه پیش در گذشته است.

برنامه‌خود تنها توصیفی است از آنچه که انجام خواهد داد. این امر مستلزم این فرض است‌که بدانید ماشین برنامه را چگونه تفسیر می‌کند، در حالی که همیشه هم این طور نیست. ممکن است هیچ توصیف مطلقاً کاملی از آنچه که ماشین در لحظه‌ای معین انجام خواهد داد در اختیار ما نباشد و درتمام این موارد فرض این است که ماشین با درستی مطلق با نمادهای الکترونیکی خود کار می‌کند. در سیستمی محاسباتی با طراحی ضعیف، در حالی‌که کامپیوتر در حال پردازش است ورودی مربوط به‌من مسی‌تواند به‌آن چیزی بستگی داشته‌باشدکه همکار من در آن‌سوی سالن در ترمینال مربوط به‌خودش دارد انجام می‌دهد. این موضوع را بازبانهای مبهم (فازی)، الگوریتمها ومحیطها مقایسه کنید (مثلا به‌مرجع[۳] رجوع کنید). از اینجا به‌راه‌حلی عملی هدایت می‌شویم: برنامه‌را اجرا کن و آنگاه متوجه همه‌چیز خواهی شد. شاید هم دریابیدکه چگونگی انجام‌کارقابل‌قبول است. در مواردی دیگر حتی نمی‌توانید پیرامون کیفیت خروجی قضاوت معقولی بکنید.

البته این به‌نظرهرکسی مربوط است.

برنامه‌های خیلی طولانی خود نوعی قضیه هستند. ممکن است اینها تابدیهی‌تر از مرزهای فعلی ریاضیات متعارف باشند (برحسب فاصله‌ای که نمادهای بنیانی دارند). اما مسئله این است‌که ما نمی‌دانیم ونمی‌توانیم بدانیم که این قضیه چه می گوید.

خلاصهٔ بحث ما این است‌که درستی و اعتبار یك اثبات ریاضی مطلق نیست، بلکه احتمالی است. این اثباتها افرادی چون، کاشفین، کسانی‌که از تحقیقات علمی حمایت‌مالی می‌کنند، استفاده کننده‌ها، کنترل‌کننده‌ها، تجدید سازمان دهنده‌ها، تعمیم دهندگان، ساده‌کنندگان، متخصصین ارتباطات، و مورخین را به‌خود جلب کرده است. تمام این افراد در استفاده ازابزار نشر مطالب‌علمی وارائهٔ‌کارهای خودکه برروی تخته سیاه‌صورت‌می گیرد، مشترك‌اند.

اثباتها نمی‌توانند خیلی طولانی باشند، در غیراین صورت احتمال درستی آنها کم می‌شود و فرایندکنترل را آشفته می‌کند. آن را به‌نحو دیگری مطرح کنیم: تمام قضایای واقعاً عمیق اشتباه هستند (یا در بهترین حالت، ثابت نشده یا غیرقابل اثبات‌اند). تمام قضایای درست بدیهی‌اند.

دراینجا می‌توان‌مورد مثالهی با نظریهٔ نسبیت ارائه کرد. مکانیك نیوتونی درشرایطی رشدکردکه سرعتهاکم بودند وبنابراین هیچگونه تصحیح نسبیتی، $(v/v_c)^{1/2}(v/v_c)^2-1$، در آن ضرورتی نداشت. ریاضیات متعارف پیش‌از کامپیوتر در شرایطی رشد کرد که طول اثباتها به‌اندازهٔ کافی کوتاه بود به‌طوری‌که درستی را می‌شد مطلق در نظر گرفت و قوانین نظریهٔ اطلاعات درآن بی‌ربط هستند. همچنین این امکان وجود داردکه ریاضیات وارد دوران و مجموعه‌ای از مطالب شودکه جنبهٔ اثبات مفهوم کلاسیك را از دست داده و آدمی بتواند با چیزی کمترازدرستی مطلق همزیستی نزدیکی داشته باشد.

۶. در مورد اشتباهات مشاهده شده. آنچه‌که باید در اینجا بگویم تا حدزیادی مجموعه‌ای از شایعات است. ازآنجاکه موضوع حساس است، باید ازخودم شروع کنم.

چاپ‌اول کتاب، دروغهایی و تقریب[1]، تألیف دیویس، دست کم چهار صفحه تایپ‌نوشت اشتباه‌داشت. این اشتباهات از غلطهای چاپی‌کوچك تا خطاهایی درمطالب ریاضیتر را شامل می‌شد. درآنجا دست‌کم یك اثبات بدوجود دارد و یك قضیه‌که اشتباهی‌بیان شده است و اگربه‌دقت به‌آن‌نظرکنیم، غلط است. کتاب انتگرال‌گیری عددی[2]، تألیف دیویس ورابینویتس[3]، کتابی کوچکتر است که فرمهای صفحه‌بندی‌نشدهٔ آن را هردومؤلف بازخوانی کرده بودند، خطاهای موجود در این‌کتاب نیز به‌یك صفحه‌تایپ نوشت می‌رسد. یك‌فرمول درآن کاملاً اشتباه است. این فرمول بدون آنکه کنترل شود از کتابی اقتباس شده که درآنجا غلط ارائه شده است. در مورد اشتباهات دیگربه‌آسانی نمی‌توان بهانه آورد.

چاپ اول کتاب راهنمای توابع ریاضی[4]، خلاصه‌ای هزار صفحه‌ای از فرمولها و

1. *Interpolation and Approximation* 2. *Numerical Integration*
3 Rabinowitz 4. *Handbook of Mathematical Functions*

شکل ۳. بابانوئل دیجیتالی یك شئ ریاضی است و تبدیلات آن مشابه قضیه‌ها هستند. جنبهٔ ذوقی چنین قضایایی ممکن است نسبت به ریاضیات کلاسیك شالودهٔ متفاوتی داشته باشد. وقتی که وفاداری در پردازش خیلی هم کامل نباشد احتمالاً آسیب زیادی نخواهد رساند.

جدولهایی است که توسط مؤسسهٔ ملی استانداردها به‌چاپ رسیده و تا امروز بیش از ۱۰۰۰۰۰ جلد از آن به‌فروش رفته است، بیش از صدها اشتباه دارد. در روزگاران گذشته، که جدولها را با دست تشکیل می‌دادند، برخی از کسانی که جدولها را درست می‌کردند پی بردند که هرمدخلی در جدول یك قضیه است (وواقعاً هم همین‌طور است) و باید حتماً درست باشد. سابرین برای کنترل کیفیت این جدولها نگرشی با آسودگی خاطر داشتند. یکی از جدول سازان مشهور عملاً اشتباهاتی در جدول خود وارد می‌کرد تاوقتی که دیگران بدون اجازهٔ او آنها را تکثیر می‌کردند، بتواند کارهای خودرا بازشناسد.

کتاب بسیار مهمی در باب مباحث پیشرفتهٔ آنالیز، که درحدود ۱۵ سال پیش منتشر شده، هم اکنون در برابر من است. پس از توزیع کتاب، مؤلف آن جزوه‌ای ده صفحه‌ای مشتمل برغلطهای آن را به دوستان خود رسانید.

یادداشتهای پلی‌کپی شدهٔ سال ۱۹۲۱ ی.ه. بور، عضو دانشگاه شیکاگو، دربارهٔ ماتریسهای هرمیتی نیزدربرابرچشمان من است. خودمطلب صدوهشتاد صفحه است، اما ۲۶ صفحه غلطنامه در انتهای آن پیوست شده است.

حکایتی به‌این مضمون می‌گویند که وقتی جدول انتگرالهای معروف ب. و. پیرس تازه منتشر شده بود، پروفسور پیرس اعلام کرد که به‌هردانشجویی که اشتباهی در آن پیدا کند، یك دلار خواهد پرداخت. با درنظرگرفتن نرخ تورم ۳ یا ۴ به ۱ آن زمان به حالا، من شك دارم که امروزه مؤلف دوراندیشی وجود داشته باشد که بتواند در مورد کتابش ادعای مشابهی داشته باشد. (کنوث[1] در مورد مجموعه کتابهای خود پیرامون هنر برنامه‌نویسی کامپیوتر حرفهایی از این دست زده است.)

شمارهٔ اخیر *Notices* متعلق به‌انجمن ریاضی آمریکا چکیدهٔ حدود ۱۳۰ مقاله را

1. D. E. Knuth

دربر دارد: از پنج مقاله به‌عنوان "پس‌گرفته شده" یاد شده است. احتمالا برخی از آنها اشتباهاتی داشته‌اند.

شمارهٔ دسامبر ۱۹۷۰ مجلهٔ *Mathematical Reviews*، خبراز مقاله‌ای با عنوان "انحطاط و سقوط قضیهٔ زارانکی‌ویکز[1]" می‌دهد.

یکی از ویراستاران پیشین *Mathematical Reviews* یك‌بار- با حالتی طعنه‌آمیز- به‌من گفت ۵۰٪ مقالات ریاضی چاپ شده عیب و ایراداتی دارند.

یکی از همکاران من در مورد دادری مقاله‌ای که قضیهٔ اصلی به‌دلیل آنکه مؤلفش به‌قضیه‌ای استنادکرده بودکه صورت آن دریك کتاب مرجع عمدهٔ توپولوژی به‌صورت اشتباه آمده بود، مطالبی عنوان می‌کرد. کلمات "بسته" و "باز" درمرجع مقاله سهواً به‌جای هم آمده بودند.

کتابی با عنوان *خطاهای ریاضیدانان*[2] توسط موریس لکسا در سال ۱۹۳۵ در بروکسل منتشر شده است. این کتاب شامل ۱۳۰ صفحه از اشتباهاتی است که ریاضیدانان طراز اول و دوم از روزگار باستان تا حدود ۱۹۰۰ مرتکب شده‌اند. دراین کتاب اسامی ریاضیدانان، جایی که اشتباه رخ داده، کسی که اشتباه را پیدا کرده است، و جایی که‌دربارهٔ آن اشتباه بحث شده است، درستونهای موازی آمده است. مثلا ج. ج. سیلوستر در مقالهٔ "دربارهٔ رابطهٔ میان دترمینان کهاد فاکتورهای معادل خطی درجه دوم"[3] مرتکب خطایی شده است. بیکر[4] در مجموعه مقالات سیلوستر، جلداول، صفحات ۶۴۷-۶۵۰، این اشتباهات را تصحیح کرده است.

درسال ۱۹۱۷ ترن‌بال[5] دستگاهی از ۱۲۵ ناوردای دوشکل درجهٔ دوم چهارجزئی را محاسبه‌کرد. در ۱۹۲۹ ویلیامسون دریافت که سه‌تا از آنها تحویل‌پذیرند. در ۱۹۴۶ ترن بال‌خودش دریافت که پنج‌تای دیگر نیز تحویل‌پذیراند، درحالی که در ۱۹۴۷، تاد[6] تحویل‌پذیر دیگری یافت. آیا این مطلب اهمیتی هم دارد؟

شاید در حدود هربیست سال یك‌بار اشتباهی ریاضی با اهمیتی جهانی پیش‌بیاید. منظور من از این مطلب نشان دادن ارتباط ریاضیدانی با اعتباری عظیم و مسئله‌ای با رسوایی زیاد است. چنین ارتباطی در حدود ۱۹۴۵ پیش‌آمد و آن هنگامی بود که‌رادماخر[7] فکرکرد فرضیهٔ ریمان را ثابت‌کرده است. گزارشی دراین باره در مجلهٔ تایم چاپ شد. نمونهٔ دیگر در حدود ۱۸۶۰ اتفاق افتاد، هنگامی که کومر، با دنبال‌کردن ردپاهای اشتباه‌آمیز کوشی و لامه، تصورکردکه قضیهٔ آخرفرما را حل‌کرده است.

۸. نتیجه‌گیری. نمادها و عملیات معنی دقیقی ندارند، بلکه تنها حاوی معنایی احتمالی‌اند. به‌دست آوردن یك قضیه یا تحقیق در درستی یك اثبات تنها اعتباری احتمالی

1. Zarankiewicz
2. *Erreurs de Mathématiciens*
3. *Philos. Mag.* (1851)295-305
4. H. E. Baker
5. H. W. Turnbull
6. J. A. Todd
7. H. Rademacher

دارد. هیچ فرقی نمی‌کند که ابزار حصول به‌قضیه یا بررسی درستی آن انسانی بوده‌است یا ماشینی. احتمالات ممکن است تغییر کند اما درمقایسه با احتمالات کیهانی[1] اهمیتشان تقریباً یکسان است.

ریاضیات دارای برخی جنبه‌های علوم تجربی است، به‌کمک پایداری عالم که بر تکرارپذیری تجربیات و خود تصحیح‌کنندگی امورکاربردی دلالت می‌کند، ازآشوب و هرج و مرج (ذهنی) مصون می‌مانیم.

ریاضیات درطول سالیان افلاطونی بوده است وآیا این امر آزادی و اهمیتی‌راکه احتمالاً با در نظرگرفتن ماهیت احتمالی آن حاصل می‌شود، ازآن سلب نکرده است!

ممکن است نوع جدیدی ازریاضیات پدید آیدکه "استنتاجها" یا "فرایندها"درآن چندان طولانی باشندکه ماهیت احتمالی نتیجه، جنبه‌ای یکپارچه ازخود موضوع بشود.

ترجمهٔ علیرضا افشار محرابی

مراجع

1. Bourbaki N., "The architecture of mathematics," *Amer. Math. Monthly*, 57(1950)221-232.
2. Cerutti E., Davis P. J. "FORMAC meets PAPPUS: sóme observations on elementary analytic geometry by computer, *Amer. Math. Monthly*, 76(1969)895-905.
3. Zadeh L. A., "Fuzzy algorithms," *Information and Control*, 12 (1963)94-102.

۱. بورل (E. Borel)زمانی گفت که فرصتهای زیر یك رویداد مشاهده نشدنی‌اند،

درمقیاس انسانی،	۱ فرصت در 10^{6}
در مقیاس زمینی،	۱ فرصت در 10^{15}
در مقیاس کیهانی،	۱ فرصت در 10^{50}
صفر مطلق،	۱ فرصت در 10^{500}

م. ل. کارت رایت

ریاضیات و ریاضی فکر کردن•

من امسال را در بخش ریاضیات‌کاربردی دانشگاه براون می‌گذرانم. هردانشگاه یا مدرسهٔ عالی یك بخش مجزای ریاضیات‌کاربردی ندارد؛ اما سی‌سال است که در دانشگاه کمبریج انگلستان مرا یك ریاضیدان محض به‌حساب آورده‌اندکه درآنجا برخی ریاضیدانان کاربردی‌ترجیح می‌دهند فیزیکدان نظری به‌حساب آیند. به‌علاوه یك باراز یك‌ژئوفیزیکدان که اساساً سابقهٔ‌کار ریاضی داشت، شنیدم‌که از "ریاضیات‌کاربردی" به‌عنوان اصطلاحی نامناسب‌که در ریاضیات مطلوب نیست و درواقع نسبت به‌هرمسئلهٔ فیزیکی نامربوط است، یاد می‌کرد. تمام این عوامل باعث شده‌اندکه پیرامون مرزمیان ریاضیات وکاربردهایش بیندیشم، نه تنها در زمینهٔ مسائل فیزیکی کم و بیش سنتی فکرکنم، بلکه در مسائل‌آماری، اقتصادی و صنعتی نیز می‌اندیشم.

کاملا روشن است‌که ریشهٔ برخی از تجریدیترین حوزه‌های ریاضیات محض را می‌توان در نظریهٔ سریهای‌فوریه در مسئله‌ای پیرامون تارهای مرتعش، یا در نظریهٔ اعداد گنگ، درمسائل هندسهٔ یونانی و ابزار مصریان برای اندازه‌گیری زوایای قائمه ردگیری کرد؛ اما ریاضیدانان محض صد یا صدوپنجاه سال اخیر ریاضیات را به‌خاطر خود آن پی گرفته‌اند، بدون آنکه حتی دربارهٔ مثلاً تارمرتعش فکری هم بکنند. از سوی دیگر، بسیاری از پیشرفتهای عمده‌ای‌که اخیراً در ریاضیات محض حاصل شده است به‌طور مشخص در راستای هدفی‌کاربردی بوده است. مثلاً این امر بی‌تردید در مورد سهم نیوتون درحساب دیفرانسیل و انتگرال و نظریهٔ احتمال صادق است؛ و به‌نظر می‌رسدکه در مورد تحقیق در عملیات و نظریهٔ‌کنترل نیز چنین باشد. در قائل شدن تمایزمیان ریاضیات محض‌وکاربردی دو پرسش پیش می‌آید: (۱) آیا کاری حقیقتاً تجریدی و مجرد از هر گونه کاربردی هم وجود دارد؟ و (۲) آیا اگر مطلبی واقعاً تجریدی باشد و پی‌جویی آن تنها به‌خاطرخودش باشد، ریاضیتر است؟

• Cartwright M. L., "Mathematics and thinking mathematically," *Amer. Math. Monthly*, 77(1970)20-29.

خانم کارت‌رایت از شاگردان هاردی ریاضیدان معروف انگلیسی است.-م.

اگر در مورد آغاز شکل‌گیری تفکر ریاضی در کودکان خردسال یا انسانهای بدوی کندوکاو کنیم، به‌روشنی خواهیم دید قدرت تجرید کامل یا کندی بسیار دست می‌دهد، و در واقع نزد بسیاری از مردم احتمالاً تنها با دریافت بسیار محدودی برخورد می‌کنند. در نظر گروهی از مردم دانا، تفکر تنها با ایدهٔ انجام کنشها درذهن، یعنی به‌اصطلاح عملیات، آغاز می‌شود. طبق نظر پیاژه یك کودك معمولی پیش از دوسالگی قبل از انجام هر کاری می‌تواند در نزد خود چگونگی انجام آن را بسنجد، مشروط بر آن که وضعیت پیش آمده ساده و برایش آشنا باشد، اما برای درك مفاهیم تجریدی ریاضی نظیر ۱، ۲، ۳، ... کودك باید از دریافتهای محیط پیرامون و اعمال خود تا مرحلهٔ تجرید، روندی تجریدی وطولانی طی کند. پیاژه و اینهلدر[1] در زمینهٔ درك کودك از فضا، ومثلاً توانایی او در قائل شدن تمایز میان انواع گوناگون اشکالی چون دایره، مربع یا دایره‌ای با یك دایره در درون یا بیرون آن، کار زیادی انجام داده‌اند. تجربیات ایشان بر تکامل مفاهیم عددی، فضایی و فیزیکی از نوعی بسیار ابتدایی در میان کودکان خردسال، پرتو بسیار روشنی افکنده است، اما در این مورد که توانایی‌های آزموده‌شده واقعاً همواره ریاضی بوده‌است، شك دارم. جوجه‌توکاها به‌قطعه‌ای مقوای سیاه مشکل از یك دایرهٔ بزرگ ودو دایرهٔ کوچك متصل به‌آن، خیره می‌نگرند، اما این پرنده‌ها فقط به‌دوایر کوچکی که با دایرهٔ بزرگ تناسبی خاص دارند، خیره نگاه می‌کنند. این نشان می‌دهد که توانایی تمایز گذاشتن میان اشکال معین ممکن است مبانی روانی داشته باشد.

ه. فرانکفورت و ه. ا. فرانکفورت[3] در رساله‌ای پیرامون اقسانه و واقعیت خاطرنشان می‌کنند که انسان دوران باستان در مورد علت وجودی اشیاء می‌توانست استدلال کند و جزئیات آن را به‌بحث بکشد، اما روی فرضیاتی بسیار متفاوت با فرضیات امروزی کار می‌کرد.

ذهن مبتدی در جستجوی علت می‌پرسد "چه‌کسی؟" و نمی‌تواند از واقعیت محسوس چندان فراتر رود. در عین حال انسان اولیه نسبت به ما از نمادهای خیلی بیشتری استفاده می‌کرد؛ اما بیش از آنچه می‌توانست رابطهٔ بین قوای گوناگون را درك کند نمی‌توانست از آنها در راستای مشخص کردن اشیاء بهره گیرد. بدینسان یك هم‌آمیختگی بین نماد وآنچه نماد مشخص می‌کند وجود دارد، همانگونه که دوشیء مقایسه شده با یکدیگر هم‌آمیختگی دارند به‌طوری که یکی می‌تواند به‌جای دیگری بنشیند.

آنگاه فرانکفورت آیینی را که مصریان برگزار می‌کردند نمونه می‌آورد، که طی آن قدحهای سفالین حاوی نام دشمنان را همراه با مراسم نیایش خرد می‌کردند و اعتقاد داشتند که با شکسته شدن آنها بر دشمنانشان واقعاً ضربه وارد می‌شود. ظاهراً این مثال به ریاضیات جدید ربط چندانی ندارد اما بوخنر[4] میان ریاضیات و افسانه خطوطی موازی ترسیم کرده است و در برخی جملات فرانکفورت جای "افسانه" را با "ریاضیات" عوض کرده است. من سرآن ندارم تا آنجا پیش روم که او با نشاندن کلمهٔ "افسانه" به‌جای "ریاضیات" در یك جمله پیش می‌رود و آنگاه اظهار می‌کند که ریاضیات فرا تر از استدلالی

1. Innhelder

۲. رنگ توکا سیاه است. ـ م.

3. H. & H. A. Frankfort 4. Beochner

می‌رود که در آن می‌خواهد حقیقتی را فراهم آورد که ادعای آن را دارد. اما در آیین نیایش، ما دو جنبهٔ بنیادی ریاضیات در اختیار داریم، نمادها نمایانگر چیزی و عملیات روی آنها نمایانگر عملیات روی خود آن چیزهستند. نمادها ونمادگذاری جزئی از شالودهٔ اساسی ریاضیات هستند، و به نظر من پدید آوردن و استاندارد سازی یك نمادگذاری مطلوب نقش بسیار مهمی در تکامل ریاضیات بازی می‌کند.

اگر به سردیگر مطلب بازگردیم؛ در جدا کردن ریاضیات از کاربردهایش دچار مشکل دیگری می‌شویم. چنین به‌نظر می‌رسد که برخی ریاضیدانان محض به‌کمك ایده‌های فیزیکی و فضایی آرمانی به‌تفکر ریاضی خود دست می‌یابند. هاردی عقیده، که استاد من بود، خیلی با ریاضیات کاربردی مخالف بود، اما ضمن پانوشتی درمقالهٔ مشترکش با لیتلوود که در یك نشریهٔ ادواری سوئدی منتشر شدنوشت که هرمسئلهٔ مشخصی به‌کمك اصول‌بازی کریکت[1] به‌ساده‌ترین وجه قابل درك است. نوربرت وینر می‌خواست یك مسئلهٔ ریاضی را به زبان حرکت براونی برگرداند و به‌عقیدهٔ من فکر اوکاملاً انتزاعی بود؛ هرچندکه از آن نظریه (حرکت براونی) چیزی نمی‌دانم، وخوب هم به‌یاد نمی‌آورم اوچه گفت، که دراین موردکاملاً مطمئن باشم. آدامار[2] تصور خود را از اثبات اینکه عدد اولی بزرگتراز ۱۱ وجوددارد، توصیف کرده است. برای به‌تصور درآوردن تمام اعداد اول از ۲ تا ۱۱، یعنی ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ او تودهٔ درهم وبرهمی را تصور می‌کرد. با تشکیل حاصلضرب $N = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱$، از آنجاکه N بزرگ است، نقطهٔ پرتی را از این توده به تصور درآورد؛ باافزودن عدد یك به‌این حاصلضرب نقطه‌ای را اندکی فراتراز اولی دید. اگر $N+۱$ اول نباشد باید به عددی اول و بزرگتر از ۱۱ قابل قسمت باشد. آدامار مکانی را میان این توده ونقطهٔ اول می‌دید. به‌نظر من این نوعی کوتاه‌نویسی ریاضی است وقبل ازاینکه بتواند به‌فرد دیگری منتقل شود باید به‌زبان اعداد برگردانده شود.

همانطورکه قبلاً هم گفتم، من تاکنون همواره یك ریاضیدان محض به‌حساب آمده‌ام اما پروفسور لیتلوود و من در زمینهٔ نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی که ریشه در مسائل مهندسی رادیو دارند، کارهای زیادی انجام داده‌ایم. لیتلوود نیز از بسیاری جهات ریاضیدانی کاملاً محض است، اما او درخلال جنگ جهانی اول در زمینهٔ پدافند هوایی کار کرد و مسائل ما را که از وجود لامپها و نوسانهای رادیویی، خازن و القاگر و مانند آنها ناشی می‌شد، به‌مسائل دینامیکی برمی‌گرداند و تمامی جوابهای معادلات را "مسیر" می‌نامید. گویی این مسیرها گذرگاه گلوله‌های پرتابه‌ای بودندکه از تفنگ شلیك می‌شد. در مسائل رادیویی نوسانهایی بامیرایی منفی وجود دارد، و بنابراین ما مسیرهایی تناوبی داشتیم که بارها وبارها بالا و پایین می‌رفتند، و من مطمئنم که در اینجا تجرید کامل بود، هرچند تا زمانی که استدلال کامل می‌شد، درست مانند مورد تصور آدامار، تا حدودی سردرگم

1. Cricket، بازی ورزشی ملی تابستانی انگلستان که در آن دو دستهٔ ۱۱ نفری با توپ وچوب مخصوص شرکت می‌کنند. ـ م.

Hadamard

وجود داشت. میان این دوحالت واقع در دومنتهی‌الیه کسانی هستند، به‌ویژه فیزیکدانان و مهندسان که از ریاضیات پیچیده‌ای بهره می‌گیرند، و همواره (یا تقریباً همواره) به جنبهٔ فیزیکی مسئله‌می‌اندیشند. تاکنون مهندسان بامن، دربارهٔپاره‌ای از مسائل گونا گون،رادیو، نظریهٔ کنترل و نوسانات تارهای کشیده مشورت کرده‌اند، آنان معمولاً همراه با چندمعادله و توضیح مختصری پیرامون آنها نزد من می‌آیند. پیش از آنکه آنها چیزی در بارهٔ مسئلهٔ ریاضی مورد نظرشان بگویند من باید چیزهای زیادی از ایشان بپرسم. برای ایشان‌مشکل به‌نظر می‌رسدکه بتوانند به‌مفاهیم مجرد ریاضی بیندیشند، ظاهراً نمادها در نزد ایشان به معنی مفاهیمی مهندسی، ثابتهای جریان و مدار، نظیر مقاومت ظاهری و القایی است. این مطلب از دونظرحائز اهمیت است. یکی آنکه مهندسان اندوختهٔ ذهنی دارند و می‌توانند در هرمرحله درستی مطلب را بیازمایند، زیرا چگونگی کار سیستم فیزیکی را به‌تصور در می‌آورند.از سوی دیگر،آنها اعمال فرایندهای ریاضی به‌کاررفته در یك حوزه را در هر مسئلهٔ فیزیکی دیگری مشکل می‌یابند، حتی اگر این مسئله به‌آن حوزه مربوط باشد. چند سال پیش‌از من خواسته شد درکنفرانسی برای مهندسان پیرامون روش لیاپونوف[1] دربارهٔ مسئلهٔ پایداری صحبت‌کنم. من اصول اساسی این روش را تا آنجاکه می‌توانستم ساده‌بیان کردم، و بعدازآنکه من صحبت کردم، پروفسور پارکز[2] در مورد کاربردهای این روش سخنرانی کرد. تعداد زیادی ازحضار اظهار داشتندکه بهتربود ترتیب سخنرانیهای‌ماعوض می‌شد و اینکه اگر می‌فهمیدند سخنان من دربارهٔ صفحهٔ فاز بوده است، سخنان دیگر را خیلی بهتر درك می‌کردند. ممکن است این مشکل تا حدودی ناشی از نمادگذاری و اصطلاحات خاصی باشدکه من به‌کارمی‌بردم، اما به‌نظر من ایشان ازطریق‌تفکردرریاضیات پیشرفته به‌کمك مسائل مهندسی خاص خودشان، می‌توانستند آن را به‌بهترین وجه به کار گیرند. روش لیاپونوف به‌طور عمده درارتباط با مهندسی‌کنترل ابداع شده بود وتاکنون قسمت اعظم اصطلاحات آن جا افتاده است، اما ریاضیائی‌که درآن قسمت لازم است، به تجرید نیاز دارد و باید به‌صورتی درآیدکه در ارتباط باکاربردهای دیگر قابل دسترسی باشد. مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی درارتباط بانجوم، پرتابشناسی، مهندسی‌مخابرات، نظریهٔ‌کنترل و نوسانات مکانیکی ماشین‌آلات پدید آمده‌اند؛ هر کاربرد جنبهٔ ویژه‌ای از این‌نوع معادله دارد، ونظریهٔ آن مدت مدیدی قبل‌ازاینکه درنظریهٔ کلی معادلات‌دیفرانسیل معمولی به‌عنوان ریاضیات محض جا بیفتد، طی روندی منطقی تکامل یافته است. کسی که آن را فرمولبندی و پرسش را مطرح‌کرده به‌تعبیر عنوان این مقالهٔ ریاضی فکرمی‌کند؛اما تا زمانی‌که روی نمادهاکارنکند،کاریاضی نکرده است. لطفاً توجه‌کنیدکه من نمی‌گویم "اویك جواب معادله را بخواهد"، زیرا، اگر چه ممکن است اوچنین حرفی بزند، اما واقعاً می‌خواهد چیزی دربارهٔ جواب کلی آن بداند. آیا جوابی تناوبی دارد؟ آیاپایاست؟ اگرپارامتری تغییرکند، آیا این جواب همچنان پایا می‌ماند؟ آیا دورهٔ تناوب طولانیتر می‌شود یاکوتاهتر؟ ممکن‌است روشهایی راکه نیاز دارد درنوشتارها بیابد وبخودش‌کارش

1. Lyaponov 2. Parks

را به‌انجام رساند. او ممکن است ریاضیدانی را بیابد و از او یاری بطلبد. هرچند من خودم به‌تکامل نظریهٔ کلی‌کمك و مسائل نظری خاصی را حل‌کرده‌ام، اما فکرنمی‌کنم‌وقتی برای مسئلهٔ عملی خاصی به‌نتیجهٔ مفیدی نیاز داشته‌ام، هرگز آن را به‌وجود آورده باشم. چندی بعدمن و لیتلوودکار در زمینهٔ این مسائل را آغازکردیم؛ معلوم شده بودکه تغییرات در تك لامپهای گرمایونی چندان زیاد است که‌به‌دست آوردن نتایج دقیق ریاضی بذحمتش نمی‌ارزد، و محاسبات قانع‌کنندهٔ تجربی با سهولت بیشتر قابل انجام بود. در روزهای اخیرکسی‌که عبارات ریاضی یك مسئلهٔ فیزیکی یا سایر مسائل واقعی زندگی‌رافرمولبندی می‌کند هیچ‌کار دقیقاً ریشه‌ای در مسائل ریاضی مربوط به‌آن انجام نمی‌دهد، هرچندکه برخی‌کارهای جالب ریاضی محض که‌بر روی ماتریسهاانجام شده‌اند و در نشریات آمده‌اند به‌محاسبه یا کاربرد آنها در اقتصاد مربوطند و از ریاضیات محض جدا شده‌اند.

برای جمعبندی آنچه تاکنون آمد، من معتقدم‌که از خط متمایزکننده میان تفکرکاملا تجریدی در ریاضیات و اندیشهٔ در ارتباط با دنیای واقعی به‌هیچوجه تعریف روشنی‌ارائه نشده است و برخی پیشرفتهای اساسی دریاضیات، نظیر حساب دیفرانسیل و انتگرال‌کم و بیش به‌یاری دنیای واقعی آموخته می‌شوند. تجرید ضرورتاً ریاضیات را بهتر نمی‌کند. دانشمندان بابلی مجموعه‌هایی از پیچیده‌ترین فرمولهای ساختگی ــ شاید ۲۰۰ فرمول روی یك لوح ــ برای شاگران خود مهیا می‌کردند تا آنها را ساده‌کنند. ریاضیات‌ایشان برای آنها چندان تجریدی بودکه درنزدآنها فرقی‌نمی‌کرد تعداد مردان را به‌تعدادروزها بیفزایند. در اوضاع فعلی، این بدترین حالت تجرید به‌نظر می‌رسد، اما شاید آن زمان‌این عمل گامی به‌پیش محسوب می‌شده است. باید بابلیان خیلی در قسوانین حساب پیش رفته باشندکه چنین تمرینات پیچیده‌ای داشته‌اند، اما اینها عمدتاً در راستای مقاصد عملی بوده‌اند، خواه حسابداری بوده باشد و خواه نجوم.

حال به‌سروقت‌آنان برویم‌که درحوزهٔ ریاضیات به‌خاطر خود ریاضیات‌کارمی‌کنند. می‌خواهم بحث خود را با نوشتهٔ هندویی آغازکنم‌که درحدود ۱۲۰۰ قبل‌ازمیلادنوشته شد: "مانند تاج روی سرخروسها، مانند جواهرات روی سرمارها جانیتا[1]، یا ریاضیات، نیز برتارك علوم‌که به‌آنها ودانگا[2] می‌گوییم، جای دارد." جانیتا درلغت به‌معنای علم محاسبه است و در روزگاران اولیه ازحساب انگشتی، حساب ذهنی و به‌طورکلی از حساب‌عالی تشکیل می‌شد. در ابتدا نجوم را نیز دربرمی‌گرفت، اما در جاهای دیگر هندسه به‌آن تعلق داشت. در یك مرحله‌ریاضیات عالی "کاردشنی" نامیده می‌شد،زیرا آن را برشنهای‌افشانده برتخته یا روی زمین انجام می‌دادند. ما اعداد به‌اصطلاح عربی را از هندوان داریم و ایشان خیلی قبل‌از دیگران در جبر بسیار پیش رفته بودند.

به‌نظراکثر مردم، یونانیان اولین‌کسانی بودندکه ریاضیات را به‌خاطرخودریاضیات مطالعه می‌کردند، ونیاز به‌اثبات رابازشناختند. ریشهٔ واژهٔ "هئما"[3] به‌معنی موضوع آموزش و تعلیم بود، اما ازهمان اوایل به‌مباحث ریاضی محدود شدکه فیثاغورس هندسه، نظریهٔ

1. Ganita 2. Vedanga 3. Mathema

اعداد، اکر[1](مثلثات کروی که در نجوم به‌کار می‌رفت) و موسیقی را در آن گنجانده بود. یونانیان اعداد را نه‌تنها به‌فرد و زوج، بلکه به‌زوج-زوج (2^n)، زوج-فرد($(1+2n)2$)، فرد-زوج ($(1+2n)2^{n+1}$) رده‌بندی کردند، وهمچنین ثابت کردند که بینهایت عدد اول وجود دارد. من شك دارم که آنان می‌توانستند مانند بابلیان محاسبه‌انجام‌دهند، اما احتمالاً[2] این کار آنها را به‌خود جذب نمی‌کرد، ونیز فاقد انگیزه‌هایی بودند که دولتی دست نشاندهٔ یك امپراتوری دوردست برایشان فراهم آورده بود. احساس می‌کنم که باید از دشواریهای ناشی از فقدان نمادهای مناسب یاد کنم. توماس هیث[3] نویسندهٔ حساب نیکوماخوس[3] می‌گفت: "اگر لفاظی حذف شود، مطالب ریاضی را می‌توان در یك پرگار کاملاً کوچك جای داد." اما هیث از نمادگذاری جدید واعداد عربی بهره‌می‌گرفت. در نمایشنامهٔ ژنبورها اثر اریستوفان یکی از شخصیتها به پدرش می‌گوید که یك عمل جمع آسان، نه با ریگها بلکه با انگشتان، انجام دهد وهرودوت می‌گوید که، یونانیان هنگام شمارش با ریگها از چپ به راست ومصریان از راست به‌چپ، که مستلزم رویارویی شمارنده با ستونهای عمودی است، حرکت می‌کنند.

یونانیان یك نظریهٔ هندسه را که نسبت به‌هرنظریهٔ دیگری از این دست نزدیك به ۲۵۰۰ سال اعتبار خود را حفظ کرد، و نخستین پیشرفت سنجیدهٔ یك دستگاه منطقی در ریاضیات بود، پدید آوردند. در قرن سوم میلادی نویسنده‌ای ناشناس از راه طنز از کلمات هومر که برای مقاصدی دیگر به‌کار برده بود، برای توصیف ریاضیات بهره گرفت: "درهنگام تولد کوچك است، اما با گذشت هرساعت رشد می‌کند. او برروی زمین می‌خرامد و دنیای پیرامون خود را می‌لرزاند."

از آناتولیوس[4] اسقف لائودامیا[5] روایت شده که ریاضیات با یك نقطه و یك خط آغاز می‌شود وخود وهرچه‌را در مدارش گنجیده‌بی‌درنگ به‌عرش می‌رساند. اگردرچنان گذشتهٔ دوری دیدگاه یونانیان این بود، آیا امکان می‌داشت که هندسهٔ آنها حقیقتاً تجریدی نباشد و نمادهای نقطه و خط هنوز هم تا حدودی با نقطه وخط تجریدی در می‌آمیختند؟ جایگاه هندسه، و به‌طورکلی مفاهیم فضا دررياضيات کاملاً برمن‌روشن نیست. اخیراً به‌همهٔ انواع هندسه مبانیی تحلیلی داده شده و هندسه‌ها از مشکلات منطقی نظیر آنچه معلمین مدارس هنگام تدریس تشابه به‌مثلثها به‌کمك روش برهمنهش با آن روبروهستند، رها شده‌اند. بنابراین ازخودم می‌پرسم که آیا هندسه‌ومفاهیم فضایی، واقعاً جزئی‌ازمبانی‌ریاضیات هستند، یاحوزه‌ای ازکاربردها مانند مکانیك، هم‌زمینی وهم آسمانی، یا مقوله‌ای از بازیهای شانسی‌اند. علت وجودی وضعیت خاص سنتی هندسه شاید این باشد که در هندسه علایم خودشان به‌مثابه اشیاء هستند؛ تا آنجاکه هندسهٔ مسطحه نقطه، خط و مثلث مجرد را نقطه، خط و مثلث نمایش می‌دهد. مسئلهٔ مهم این است که می‌توان آنها را برروی‌ه‌ای تخت به وسیلهٔ مداد برکاغذ یا روی شنهای زمین ترسیم کرد، وقتی هندسهٔ یونانی روبه‌تکامل نهاد

1. Sphaeric 2. T. Heath 3. Nicomachus
4. Anatolius 5. Laodacia

نمادگذاری مطلوبی برای پرداختن به‌اعداد وجود نداشت، وحتی در قرن پانزدهم به‌علت فقدان یك‌نمادگذاری‌جبری مناسب جواب معادلهٔ درجهٔ سوم با اصطلاحات هندسی توصیف می‌شد و آن را به‌کمك شکل توضیح می‌دادند. درمکانیك نمودی ازشکل متناظری‌درزندگی واقعی برای حرکت نمی‌یافتند که به‌کمك آن نظریه را توضیح دهند؛ نمادهای مکتوب یا اشکال هندسی برای برقراری ارتباط مورد نیاز بود. اما پاسخ به‌این پرسش‌که آیا سهم مفاهیم در ریاضیات نوین بیش از سهم سایر مسائل زندگی واقعی است یا خیر، دشوار است. تفکر فضایی به نظریهٔ بسیار تجریدی اعدادگنگ کانتور و ددکیند انجامیده، واندیشهٔ ریاضی را تقریباً در تمامی حوزه‌ها تسری داده است؛ علوم فیزیکی مایهٔ پیدایش حساب دیفرانسیل وانتگرال بوده است (نه‌بدون‌کمك هندسه)، وآمار واحتمالات ریشه دربسیاری مسائل عملی دارند. فقر[1] این وضعیت را در ارتباط با احتمالات به‌خوبی توضیح می‌دهد. برخی‌نکات برجستهٔ توضیح اوازاین قرارداست: تاریخچهٔ احتمالات (همانطورکه در مورد اکثرنظریه‌ها صادق است) راکشف وشهود تابناك ونیز اشتباه‌کاری ومباحثه متمایز می‌کند، تازمانی که الگوهای مشخصی برای شکل دادن مبنای یك مدل نظری روشن پدید نیامده بودند، پژوهشگران نمی‌توانستند مسائل را با دقت فرمولبندی‌کنند، وبا اعتمادی ریاضی برای آنها دلیل ارائه دهند.

با توجه به‌آنچه بعضیها می‌گویند و من هم می‌شوم گویی نظریهٔ کوانتومی هنوز هم به‌این مرحله نرسیده است؛ اما قضاوتی درست دراین باب بی‌گمان فراترازآن است که‌من شایسته‌اش باشم.

فقر ادامه می‌دهد که هرچند برای وضع کردن نظریه‌ای رضایتبخش تجربه‌ای‌طولانی مورد نیاز بوده، اما به بازگشت وتکرار تجربیات افرادی خام نیازندارد یم که درکشف یك مدل ریاضی مناسب درنگ کرده‌اند. این نظریهٔ سیستمی ریاضی‌است که مفاهیم و رابطه‌هایش به‌مفاهیم و روابط دنیای واقعی وابسته‌اند. همین‌که مدلی کشف، مطالعه و حك واصلاح‌شده باشد، برای هر ذهن معمولی، در مدت زمانی منطقاً کوتاه، امکان‌پذیر می‌شود که پذیرای الگوهایی باشد که اذهان هوشمند ازهمان آغاز دهها سال صرف گسترش آن کرده‌اند. متذکر می‌شوم که فقر با قطعیت عنوان می‌کند که نشانهٔ مدل موفقیت‌آمیز نظریهٔ احتمالات که امروزه شناخته شده است همانا تجرید چشمگیرریاضی آن است.

به‌نوشتهٔ ویلارد گیبس، یکی‌ازمباحث اساسی تحقیقات نظری درهربخش از معرفت، یافتن دیدگاهی است که موضوعات ازآن دیدگاه، به‌ساده‌ترین صورت پدیدار می‌شوند و بوشاو[2] می‌گوید یکی‌ازویژگیهای ممیزهٔ ریاضیات جدید روش آن در جداسازی‌ریاضیات قدیم است، مانند اجزای ساعت، آنگاه مطالعهٔ آن اجزا به‌طورجداگانه، و دوباره‌کنار هم نهادن این اجزا به‌صورت ترکیبهای جدید وجالب وسپس به نوبهٔ خود مطالعهٔ این‌ترکیبها. به‌نظر من این فرایند درروند ساده سازی درخود ریاضیات فوق‌العاده‌کمك کرده است، واز اینرو دسترس‌پذیری آن‌را برای کاربردها آسانتر کرده است. مانندل برویت[3] باشاره به‌نقل

1. Pfeiffer 2. Bushaw 3. Mandelbrojt

قولی ازویلارد گیبس می‌گوید: "انتگرال‌گیری در فضاهای تابع چنان دیدگاهی راچندین بار درحوزه‌های بسیار پراکندهٔ معرفت فراهم آورده و نه‌تنها روش جدید نگرش به‌مسائل را به‌ما ارزانی‌داشته بلکه عملاً راه جدیدی برای تفکردربارهٔ آنها پیش پای‌ما نهاده‌است."

حال بایدفرشد[1]، پدرفضاهای مجرد، را فراخوانیم که درپیشگفتار کتابش روایتی از بررسی آمار در آنالیز تابعی که در ۱۹۱۱ ارائه شده، نقل می‌کند: "پیوستار تابعی هیچگونه مفهوم ساده‌ای را در تخیل ما ظاهر نمی‌کند. شهود هندسی هیچ چیز از پیشی دربارهٔ آن به‌ما نمی‌گوید. مجبوریم این جهل را جبران کنیم وتنها به‌طریق تحلیلی می‌توانیم چنین کنیم؛ با پدیدآوردن فصلی در نظریهٔ مجموعه‌ها برای آنکه ازعهدهٔ پیوستار تابعی برآییم این کار را انجام می‌دهیم." در جایی دیگر آدامار نوشت که حساب تغییرات چیزی نبود مگر نخستین فصل از آنالیز تابعی؛ و دربارهٔ کار خود درزمینهٔ حساب تغییرات، معادلات دیفرانسیل یا مشتقات جزئی هدلولوی، و سایر مباحث مشخص گفت که بخش عظیمی از آنها را به مراوداتش با دوهم[2] فیزیکدان، ازطریق کتاب دوهم دربارهٔ دینامیک سیالات، کشسانی و آکوستیک و مکالمات بسیاری با وی هنگامی که هردو دربوردو[3] بودند، مدیون است. از اینرو در اینجا سندی در اختیار داریم دربارهٔ چرخهٔ کاملی ازیک مبنای فیزیکی از طریق حساب تغییرات تا آنالیز تابعی و فضاهای تجریدی، و بدینسان تا موارد زیادی کاربرداز راه فرایند ایده‌های هندسهٔ تحلیلی و مجدداً کنارهم گذاشتن آنها به‌روش جدید و به‌مجردترین وجه برای آفریدن فضاهای تابعی.

تغییر بعدی در این الگو درسالهای اخیر بارز شده است که همانا بهره‌گیری از یك مدل کمکی مشتمل برابزارگوناگون ترسیمی، مکانیکی و ابزاری دیگربرای تجسم‌بخشیدن یادآوری، و حتی کشف چیزهایی دربارهٔ مدل ریاضی است. تصویرهای بصری آدامار، کربکتهای هاردی، و گذرگاههای لینلوود را باید مدلهایی کمکی دانست، اما ماشینهایی آنالوگ با وسیله‌های الکترونیکی وجود دارند که آنچه در، مثلا، مکانیك سیالات روی می‌دهد، یا هر چه در مدل ریاضی منتظر آنهاست، شبیه سازی می‌کند، دارای اهمیتی جهان‌شمولترند.

حال داریم:

الف) دنیای پدیده‌های واقعی، که از راههای گوناگون تجربه، این پدیده‌ها به‌ما شناسانده می‌شود.

ب) دنیای مجرد مدل ریاضی که با دقت وصرفه‌جویی بسیار، از نمادها برای بیان روابط واقعیتها استفاده می‌کند.

ج) مدل کمکی.

گذراز (الف) به(ب) همان فرمولبندی پدیده‌های دنیای واقعی به کمك ریاضیات است؛ گذراز (ب) به(الف) تعبیراستنتاج به‌کمك ریاضیات محض از آن فرمول‌بندی است. به‌نظر من هردوی اینها ریاضی فکرکردن است، اما فقط استنتاجهای درون (ب) ریاضیات هستند.

1. Frechet 2. Duhem 3. Bordeaux

همچنین ممکن است ریاضی فکرکردن ما با حرکت از (ب) به (ج)، که یك تفسیر ثانویه است، دست دهد و سپس یا برای حصول اطمینان ازآنچه (ج) ارائه داده، مجدداً به(ب) بازمی گردیم یا از (ج) مستقیماً به (الف) برمی گردیم.

همانگونه‌که ففرخاطرنشان می‌کند، ارزش مدلهای ریاضی وکمکی به‌چگونگی موفقیت رابطهٔ جنبه‌های خاص این مدل با وضعیت "زندگی واقعی" بستگی دارد. این مدلها را نمی‌توان برای‌اثبات هیچ چیزی دربارهٔ دنیای واقعی به‌کارگرفت، هرچندمطالعهٔ آنها ممکن است درکشف حقایق مهمی دربارهٔ دنیای واقعی به‌ما یاری رساند. یك مدل نه درست است و نه غلط، بلکه ممکن است قابل انطباق یا غیرقابل انطباق باشد. این‌مدل رضایتبخش نیست اگر: (۱) جوابهای مسائل مدل تعبیرهای غیر واقع بینانه داشته باشد، مثلا، کمیتهای به‌دلخواه بزرگ یاتفاوتهای به دلخواه ظریف، یا (۲) ناقص یا ناسازگار است، به‌طوری‌که این نوع ریاضیات به‌تناقض می‌انجامد. بسیاری از مدلها به‌طرز شگفتی [با اصل] منطبق می‌شوند. به‌نوشتهٔ کارل پیرسون[1] "ریاضیدان، با میلی ازنمادهایش آشکار به‌حقایق صرفاً صوری می‌پردازد، وهنوزهم ممکن است به‌نتایجی با اهمیت بی‌پایان برای توصیف ما ازعالم فیزیکی، دست یابد."

شاید تا صد سال پیش بسیاری از دانشمندان و ریاضیدانان ذره‌ای ازهر چیز می‌دانستند، وفرمولبندی ریاضی را، همانگونه‌که مخصوصاً دربارهٔ نیوتون گفتم، توسط کسی که به‌قدرکافی ریاضیدان خوبی بود و تا حدی چشمگیر برگسترش ریاضیات توانا بود، انجام می‌دادند. این‌مطلب بخصوص درمورد اسحق‌نیوتون صادق است، اما دراین‌روزهای تخصص‌گرایی، دانشمند یا اقتصاددان، یا کارگر، در ارتباط نزدیك با وضعیت دنیای واقعی ما باید گذر (الف)—(ب) را انجام دهد. هنشل‌وود[2]، رئیس پیشین انجمن سلطنتی، می‌گفت: "دانشمندان نیازمندند که ریاضیات را به‌صورت زبانی بیاموزند که واقعاً بتوانند با آن صحبت کنند. نزد یك دانشمند، این نکته خیلی مهم است که قادر باشد هنرفرمولبندی مسائل را با عبارتهای ریاضی یادبگیرد، که البته کارمشکلی است. پیش‌ازآنکه مسئله‌ای را حل کنیم باید با دقت و وسواس زیادی دربارهٔ آن فکر کنیم. باید درصحبت کردن به‌زبان ریاضیات تمرین کنیم. خبره بودن در معادلات دیفرانسیل مهم نیست. برای حل یك معادله می‌توان به‌یك آدم خبره مراجعه کرد. اما نمی‌توان از یك ریاضیدان انتظارداشت که عمل ترجمه به ریاضی را انجام دهد. باید یك آماده سازی اولیه و بسیار قوی نیروی تفکر دربارهٔ اشیای واقعی وکاربردنمادهای ریاضی درایده‌های فیزیکی وجود داشته باشد. اویك نوع توازی میان آموختن زبان فرانسهٔ مقدماتی توسط یك کودك و آموختن بیان ایده‌های فیزیکی به‌ریاضی، وقتی سطح ریاضیات و فیزیك هر دو مقدماتی باشد، قائل بود؛ به‌این صورت که کودك با [گذشتن از] مراحل ساده به‌فرایند یادگیری عادت می‌کند" اگرچه او، مانند من، می‌گوید که دانشمند باید فرمولبندی ریاضی را انجام دهد، از کلماتش چنین

۱. Carl Pearson، متخصص آمار و احتمال انگلیسی ـ م.

2. C. Hinshelwood

برمی‌آید که به‌انتزاعی ناقص اشاره می‌کند. به‌نظر او نمادهای ریاضی کماکان نمایشگر همزادان فیزیکی خود بودند. برای یك دانشمند که به‌ریاضیدانی خبره دسترسی داشته‌باشد این امر چندان اهمیتی ندارد، اما از اشارات ماتدل برویت به‌فضاهای تابعی و اشارات آدامار دربارهٔ پیوستار تابعی، روشن است که بدون اعمال انتزاع کامل دنزد برخی ریاضیدانان اکنون فاقد قسمتی از بخش اعظم بیان توصیفی زبان ریاضیات مورد استفادهٔ دانشمندان، می‌بودیم.

ترجمهٔ بهزاد منوچهریان

مراجع

1. Bochner S., *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, Princeton, 1966.
2. Bushaw D., *Elements of General Topology*, Wiley, NewYork, 1963.
3. Datta B., and A. N. Singh, *A History of Hindu Mathematics*, Lahore, 1935.
4. Frankfort H., and H. A. Frankfort, *The Intellectual Adventures of Ancient Man*, Chicago, 1946.
5. Heath T. L., *A History of Greek Mathematics*. Vol. 2, Oxford, 1921.
6. Mandelbrojt S., "Les tauberienes généraux de Norbert Wiener," *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72(1966)48-51.
7. Neugebauer O., "The exact sciences in antiquity," *Acta Hist. Sci. Nat. Medicinalium*, Copenhagen, 9(1951).
8. Pfeiffer P. E., *Concepts of Probability Theory*, McGraw-Hill, New-York, 1965.
9. Piaget J., Innhelder B., and A. Sjeminska, *A Child's Conception of Geometry*, Trans. by E. A. Lunzer, Basic Books, NewYork, 1960.
10. Tinbergen N., *The Herring Gull's World*, Basic Books, NewYork, 1961.

پال هالموس

ریاضیات به‌عنوان هنری خلاق•

آیا شما هیچ ریاضیدانی را می‌شناسید ــ و اگر می‌شناسید، هیچ می‌دانید که ریاضیدانها وقتشان را چگونه می‌گذرانند؟ اکثر مردم از این امر بی‌اطلاع‌اند. وقتی که در هواپیما سرصحبت را با نفر بغل دستی‌ام باز می‌کنم، و او به من می‌گوید که شغل آبرومندی مثل طبابت، وکالت، تجارت، یا ریاست دانشکده دارد، وسوسه می‌شوم که بگویم من در کار ساخت و تعمیر سقف و دیوار خانه‌ها هستم. اگر به او بگویم که ریاضیدانم، محتملترین جواب او این است که خود او هرگز نتوانسته حساب وکتاب دفاتر حسابش را تراز کند، وخیلی مسخره بود اگر در ریاضیات کاره‌ای می‌شد. اگر بغل دستی‌ام اخترشناس، زیست‌شناس، شیمی‌دان، یا دانشمندی از هرنوع دیگرعلوم طبیعی یا اجتماعی باشد، دیگر کلاهم پس معرکه است. چنین آدمی می‌پندارد که می‌داند ریاضیدان کیست، و احتمالاً هم اشتباه می‌کند. فکرمی‌کند که من وقتم را با تبدیل مرتبه‌های بزرگی، مقایسهٔ ضرایب دوجمله‌ای و توانهای ۲، یا حل معادلاتی درباب سرعت واکنشها می‌گذرانم (یا باید بگذرانم).

اسنو[1] به‌وجود دونوع فرهنگ اشاره و از وجود آنها اظهار تأسف می‌کند؛ او از دست فیزیکدانی عصبانی است که فکرمی‌کند ادبیات نوین یعنی آثار دیکنز، وشاعری را سرزنش می‌کند که نمی‌تواند قانون دوم ترمودینامیك را بیان‌کند. رابطهٔ ریاضیدانها با آدمهای تحصیل‌کردهٔ دارای حسن نیت اما ناوارد، خیلی بدتراز رابطهٔ فیزیکدانها با شاعرهاست (اشکالی دارد که همهٔ غیرریاضیدانها را ناوارد بنامم؟). این مسئله خیلی مرا می‌آزارد که افراد تحصیل‌کرده حتی نمی‌دانند که من موضوع‌کار مشخصی دارم. اینهااسم یك چیزی را ریاضیات گذاشته‌اند، اما نه می‌دانند که ریاضیدانهای حرفه‌ای چطور این واژه را به‌کار می‌برند و نه می‌توانند تصورکنند که چرا باید کسی به این کار بپردازد.

• Halmos, P. R. "Mathematics as a creative art," *Amer. Scientist*, 56 (1968) 375-389.

1. C. P. Snow

بی‌گمان، این امکان هست که فردی که در رشتهٔ خودش آدم مطلعی است، نداند رشته‌های مصرشناسی یا خون‌شناسی هم وجود دارد، اما تنها کافی است به او بگویید که چنین چیزهایی وجود دارد، که در این صورت او به‌روشی تقریباً کلی، سریعاً درمی‌یابد که چرا چنین چیزهایی باید وجود داشته باشد، و با طلبهٔ این رشته‌ها که علاقه‌مند به آن است، مشترکاتی ذهنی هم پیدا خواهد کرد.

معمولاً وقتی که ریاضیدانی سخنرانی می‌کند، نقش یك مبلغ را دارد. او همه جا در حال ایراد خطابه و موعظه برای جلب تازه‌کیش است ـ خواه در حال صرف قهوه و گپ‌زدن با همکارش، یا تدریس در کلاسی از فارغ‌التحصیلان متخصص باشد، خواه به گروهی از دانشجویان بی‌میل سال اول مهندسی ریاضیات درس بدهد، یا برای جمعی از مستمعان ناوارد سخنرانی کند. او قضیه‌هایی را بیان و در اثبات آنها بحث می‌کند و امید دارد که مخاطبان بحث او بیش از پیش ریاضیات یاد گرفته باشند. اما هدف سخنان امروز من چیز دیگری است: من نیامده‌ام که شما را به کیش تازه‌ای در بیاورم، آمده‌ام که شما را راهنمایی کنم ـ در پی تازه‌کیش نیستم، به‌دنبال دوست می‌گردم. نمی‌خواهم به‌شما یاد بدهم که ریاضیات چیست، فقط می‌خواهم بگویم که این ریاضیات است.

من موضوع کارم را ریاضیات می‌نامم ـ چیزی که همهٔ همکاران من درسراسر دنیا آن‌را به‌همین نام می‌خوانند ـ و این، به احتمال زیاد، آغاز سردرگمی است. واژهٔ مذکور دو نظام را دربرمی‌گیرد ـ در حقیقت نظامهای خیلی بیشتری را دربرمی‌گیرد، اما به‌همان مفهومی که اسنو از دو نوع فرهنگ سخن می‌راند، این نیز دست‌کم در برگیرندهٔ دو نظام است. برای اینکه واژه‌هایی داشته باشم که به‌کمك آنها به‌ایده‌های مورد نظرم اشاره کنم، موقتاً دو اصطلاح ویژه وضع می‌کنم. ریاضیات (ماتماتیك)، به عنوان واژه‌ای که به طور متداول به‌کار می‌رود، دست‌کم از دوپارهٔ مجزا تشکیل یافته است، و من قصد دارم آنها را ماتولوژی و ماتوفیزیك بنامم. به‌بیانی غیردقیق، ماتولوژی چیزی است که معمولاً ریاضیات محض، و ماتوفیزیك آن است که ریاضیات کاربردی خوانده می‌شود؛ اما این واژه‌های توصیفی از جنبهٔ هیجانی نیرومند چندانی برخوردار نیستند که متوجه نشویم که همان واژهٔ ریاضیات (ماتماتیك) را توصیف می‌کنند. اگر پیوستگی هجاهایی که من در اینجا انتخاب کردم، شما را به‌یاد واژه‌های دیگری می‌اندازد، مهم نیست؛ زیرا قافیه‌های اشاره شده چندان هم اتفاقی نیستند. من در اصل تصمیم گرفته بودم که عنوان این سخنرانی را چیزی شبیه به "ریاضیات یك هنر است" یا "ریاضیات علم نیست" یا "ریاضیات کاربرد ندارد" بگذارم؛ ولی هرچه بیشتر دربارهٔ آن فکر کردم، بیشتر متقاعد شدم که منظور من این است که "ماتولوژی یك هنر است"، "ماتولوژی علم نیست" و "ماتولوژی کاربرد ندارد." تا وقتی که سخنرانیم به‌پایان برسد، امیدوارم تشخیص دهید که اکثر شما قبلا راجع به ماتوفیزیك چیزی می‌دانستید و شاید آن را ریاضیات می‌نامیدید؛ امیدوارم همهٔ شما تفاوت میان ماتولوژی و ماتوفیزیك را دریابید؛ و امیدوارم بعضی از شما ماتولوژی را با آغوش باز بپذیرید، یا دست‌کم تحسین کنید، یا خیلی دست کم، آن را همچون یك تلاش احترام‌

برانگیز انسانی بشناسید.

در جریان این سخنرانی ناگزیر خواهم بود که از خیلی قیاسها و تشبیهات (مانند ادبیات، شطرنج، نقاشی) استفاده کنم، که هریك به‌نوبهٔ خود تشبیهی ناکامل است، اما امید من آن است که این قیاسها در تمامیت خود در طرح الگویی که می‌خواهم ترسیم کنم، یاریمان کنند. گاهی بنا به‌مقتضیات زمان، و بدون شك گاهی به‌طور غیرعمدی، اغراق خواهم کرد. در چنین مواردی، خوشحال خواهم شد که هرچیز نادرست یا به‌هرنحو توهین‌آمیز و خلاف واقع را باطل اعلام کنم.

آنچه که ریاضیدانها انجام می‌دهند. به‌عنوان نخستین گام در توضیح اینکه ریاضیدانها چکار می‌کنند، بگذارید چندکار را که نمی‌کنند نام ببرم. نخست آنکه سروکار ریاضیدان با عدد خیلی کم است. شما نمی‌توانید بیش از آنچه از یك نقاش انتظار دارید که یك خط راست بکشد، یا از یك جراح انتظار دارید که شکم بوقلمون را بشکافد، از یك ریاضیدان انتظار داشته باشید که ستونی از ارقام را سریعتر و دقیقتر از آنها جمع بزند ـ افسانه‌های رایج در میان مردم، این مهارتها را به‌این حرفه‌ها نسبت می‌دهد، اما این افسانه‌ها نادرست‌اند. به یقین، بخشی از ریاضیات به‌نام نظریهٔ اعداد وجود دارد، اما حتی آن نیز با اعداد به‌معنی افسانه‌ایش سروکار ندارد ـ یك کارشناس نظریهٔ اعداد و یك ماشین محاسبهٔ ویژهٔ جمع کردن اعداد، چندان با هم دمساز نیستند. ماشین ممکن است از اثبات اینکه $۱۵۳ = ۳^۳ + ۵^۳ + ۱^۳$، لذت ببرد، یا حتی پیشتر برود و کشف کند که تنها پنج عدد صحیح مثبت با خاصیتی که تساوی بالا نشان می‌دهد وجود دارد (۱، ۳۷۰، ۳۷۱، ۴۰۷)، اما اکثر ریاضیدانها نمی‌توانند بی‌پروایی کنند؛ بسیاری از آنها برای این قضیه که هرعدد صحیح مثبت مجموع حداکثر چهار مربع کامل است، احترام قائل‌اند و از آن لذت می‌برند؛ حال آنکه بینهایت نهفته در واژهٔ "هر" می‌تواند هرماشین معمولی اداری را دچار ترس و بهت‌زدگی کند، و در هرصورت این قضیه برای کسی که ریاضیدانها را با اعداد دمساز می‌داند احتمالاً از آن نوع چیزهایی نیست که به‌فکرش می‌رسد.

برای ریاضیدان نه آن موجودات خیالی داستانهای علمی سالهای اخیر جالب است و نه‌حتی مغزهای غول‌آسا، یعنی ماشینهای محاسبی که این روزها زندگی ما را می‌چرخانند. بعضی ریاضیدانها به‌مسئله‌هایی منطقی علاقه‌مندند که هنگام حل مسئله‌های دشواری از قبیل فهم تکلم کودك کودن به‌وسیلهٔ ماشین پیش می‌آید: طرح منطقی ماشینهای محاسب قطعاً ریاضیات است. اما این حکم در مورد ساخت آنها صادق نیست، چرا که آن مربوط به مهندسی است، و محصول این ماشینها، خواه یك لیست حقوق یا دسته‌ای از نامه‌های مرتب‌شده باشد، خواه یك هواپیمای مافوق‌صوت، از نظر ریاضی ارزش و اهمیتی ندارد.

ریاضیات عدد و یا ماشین نیست؛ تعیین ارتفاع کوهها به‌کمك مثلثات، یا محاسبهٔ ربح مرکب به‌کمك جبر، یا محاسبهٔ گشتاورهای ماند به‌کمك حساب دیفرانسیل و انتگرال هم نیست. خیر، امروز دیگر چنین نیست. هریك از اینها، یا چیزهای دیگری مانند اینها، ممکن است زمانی مهم و یك مسئلهٔ تحقیقاتی غیربدیهی بوده باشند، اما همین که مسئله حل

شد، کاربرد تکراری آن همانقدر به‌ریاضیات مربوط می‌شود که کار یك اپراتور شرکت مخابرات به‌نبوغ مارکونی.

دست‌کم دوچیز دیگر هست که ریاضیات نیست؛ یکی از آنها چیزی است که هرگز ریاضیات نبوده است، و دیگری آن است که زمانی جزء ریاضیات بوده و حالا از آن جدا شده است. اولی فیزیك است. یك آدم ناوارد ریاضیات را با فیزیك نظری اشتباه می‌گیرد ومثلاً از اینشتین به‌عنوان یك ریاضیدان بزرگ نام می‌برد. شکی نیست که اینشتین مرد بزرگی بود، اما حداکثر همانقدر ریاضیدان بزرگی بود که ویولون‌نواز بزرگی. او برای دریافتن حقایقی در باب عالم، از ریاضیات استفاده می‌کرد، و اینکه برای همین منظور از برخی بخشهای هندسهٔ دیفرانسیل به‌طور موفقیت‌آمیزی بهره برد، بازار هندسهٔ دیفرانسیل را گرم کرده است. از این گذشته، نظریهٔ نسبیت و هندسهٔ دیفرانسیل یك چیز واحد نیستند. اینشتین، شروِدینگر، هایزنبرگ، فرمی، ویگنر وفاینمن همه مردان بزرگی بوده‌اند، اما ریاضیدان نبوده‌اند؛ در واقع، بعضی از آنها برعلیه ریاضیات، با افکاری قویاً ضدریاضی تبلیغ می‌کردند وکسرشأن خود می‌دانستند که ریاضیدان نامیده شوند.

آنچه که یك بار ریاضیات بوده همواره ریاضیات باقی‌خواهد ماند، اما ممکن‌است چنان هضم شده باشد، چنان فهمیده شده باشد، و در پرتو هزاران سال کوشش و پیگیری آگاهانه چنان بدیهی شده باشد که ریاضیدانها هرگز میل یا نیازی به‌بررسی دوبارهٔ آن نداشته باشند. مسئله‌های مشهور یونانی (تثلیث زاویه، تربیع دایره، تضعیف مکعب) از این قماش‌اند، و ریاضیدانها، به‌رغم آماتورهای سرکش و رام نشدنی، دیگر تلاشی برای حل آنها نمی‌کنند. خواهش می‌کنم دقت کنید، منظور این نیست که ریاضیدانها تسلیم شده‌اند. ممکن است شما ازقول ریاضیدانها شنیده یا خوانده باشید که تربیع دایره یا تثلیث زاویه ناممکن است، ونیز بعیدنیست شنیده یاخوانده باشید که به‌همین دلیل، ریاضیدان‌موجودی است ترسو وبزدل که به‌سادگی تسلیم می‌شود وشانه خالی می‌کند و از فتاوی مقتدرانه‌اش برای پوشاندن و توجیه جهل خود بهره می‌گیرد. این نتیجه‌گیری درست است و شما اگر دوست داشته باشید می‌توانید آن را باور کنید، اما اثبات آن ناقص است. نکتهٔ مورد نظرم فوق‌العاده باریك، اما مشهور و ازنظرگاه تاریخی مورد توجه است: لحظه‌ای بگذارید از موضوع صحیحم منحرف شوم.

گریزی کوتاه. مسئلهٔ تثلیث زاویه این است: زاویه‌ای مفروض است، زاویه‌ای دیگر بسازید که اندازهٔ آن درست یك سوم زاویهٔ اولی باشد. طرح مسئله کاملا ساده است وچندین روش برای حل آن می‌شناسیم. اما نکته در آنجاست که فرمولبندی اولیهٔ مسئله به‌وسیلهٔ یونانیها از این دقیقتر است: در این فرمولبندی چنان ساختنی مطلوب است که طی آن تنها ازخط‌کش وپرگار بهره گرفته شود. حتی این هم شدنی‌است، و من قادرم درعرض یك دقیقه روش کاملاً ساده‌ای به‌شما نشان دهم و درعرض دو دقیقه شما را متقاعد کنم که این روش زاویهٔ مطلوب را به‌دست می‌دهد. ولی مشکل اصلی آن است که فرمولبندی دقیق مسئله از این هم دقیقتر است. فرمولبندی دقیق، ترسیمی را می‌طلبد که تنها از خط‌کش و پرگار

استفاده کند، و به‌علاوه دست ما را در نحوهٔ به‌کار گیری آنها شدیداً می‌بندد؛ مثلاً علامت زدن دو نقطه روی خط‌کش و استفاده از آن دو در ترسیمات بعدی مجاز نیست. فرمولبندی دقیق وحقیقی آنچه که قوانین یونانی مجاز یا ممنوع می‌شمرد، مستلزم یك قانونمندی دقیق (یا نوعی ریاضیات نسبتاً ملانقطی) است. تثلیث‌گر زاویهٔ تازه از گرد راه رسیده، یا آن قوانین را نمی‌داند، یا آنها را می‌داند و فکر می‌کند که هدف رسیدن به‌یك تقریب خوب است، یا آن قوانین را می‌داند و می‌داند که جواب دقیق مطلوب است، اما می‌گذارد که خواسته‌اش برعمل دقیق بچربد و به‌راحتی گرفتار خطا می‌شود. طرز فکر چنین شخصی اغلب مثل دید یك آدم مریخی زیرك به‌بازی گلف است. (آدم مریخی با دیدن بازی گلف می‌گوید: اگرهم و غم شما این است که آن توپ کوچك سفید، در آن سوراخ کوچك سبز بیفتد، چرا خودتان نمی‌روید توپ را بردارید و در سوراخ بیندازید؟)

از شما اجازه می‌خواهم که علاوه برگریز پیشین، گریز دیگری هم بزنم. مایلم توجه شما را به‌این نکته جلب کنم که وقتی ریاضیدان می‌گوید چیزی ناممکن است، منظورش این نیست که آن چیز خیلی‌خیلی دشوار است، وفراسوی قدرت او و احتمالاً همهٔ انسانهای چند نسل پس‌ازاوست. این نوع فکروقتی موردنظر است که می‌گوییم ناممکن است بتوان در ارتفاع پنج میلی سطح زمین با سرعت صوت پرواز کرد، یا بتوان لحظه به‌لحظه با کسی در فاصلهٔ هزار میلی ارتباط برقرار کرد، یا بتوان با انگولك کردن رمزهای ژنتیکی، نژادی از شهروندان به‌وجود آورد که هم خردمند باشند و هم در صلح وصفا زندگی کنند. اینها چیزهایی است که لاف زن حرفه‌ای می‌تواند تحقیرشان کند (چنین لاف‌زنی مسی‌گوید: اینها که چیزی نیست، تنها کمی بیشتر وقت می‌گیرد). اما ناممکن ریاضی چیز دیگری است: کم‌قیل‌وقال‌تر و مطمئن‌تر است. ناممکن ریاضی ناممکن منطقی است. وقتی ریاضیدان می‌گوید که ناممکن است بتوان عددی مثبت یافت که مجموعش با ۱۰ کوچکتر از ۱۰ شود، صرفاً به یاد ما می‌آورد که این واژه‌ها (مثبت، مجموع، ۱۰، کوچکتر) چه معنی می‌دهند؛ وقتی می‌گوید ناممکن است بتوان با خط‌کش وپرگار زاویه‌ای را به‌سه قسمت مساوی تقسیم کرد، دقیقاً چیزی از همین نوع را مد نظر دارد؛ تنها تعداد لغات فنی به‌کار گرفته شده چندان زیاد و بحثهایی که آنها را به‌هم پیوند می‌دهد چندان مفصل است که مثنوی هفتادمن کاغذ می‌شود.

نقطهٔ شروع ریاضیات. هیچکس نمی‌داند نطفهٔ ریاضیات کی وکجا، و یا اینکه چگونه، بسته‌شد؛ اما ظاهراً منطقی آن است که بپذیریم ریاضیات از همان مشاهدات فیزیکی اولیه (شمردن، و اندازه‌گیری) که بینش ریاضی همهٔ ما با آن آغاز می‌شود، پدیدار شده است. در واقع ممکن است در آغاز کار بسیاری از ایده‌های ریاضی، و احتمالاً نه همهٔ آنها، ازتفکر محض نشأت نگرفته، بلکه نتیجهٔ احتیاج بوده باشند. تقریباً همان موقعی که انسان به‌ضرورت شمارش گوسفندهایش پی‌برد (یا زودتر؟)، تفکر دربارهٔ عددها، شکلها، حرکتها، وآرایشها را آغاز کرد. به‌نظر می‌رسد که کنجکاوی درمورد این چیزها، به‌اندازهٔ کنجکاوی در مورد زمین، آب، آتش و هوا، و کنجکاوی ـ کنجکاوی خردمندانهٔ ناب ـ

دربارهٔ ستارگان وحیات برای روح آدمی ضروری باشد. عددها،شکلها،حرکتها وآرایشها، و نیز اندیشه‌ها و ترتیب آنها، و مفاهیمی چون "خاصیت" و "رابطه"، جملگی خمیر مایهٔ ریاضیات را تشکیل می‌دهند. مفهوم ریاضی تکنیکی اما اساسی "گروه" بهترین راه‌برای درك مفهوم‌شهودی "تقارن" ازسوی انسان‌است وکسانی‌که فضاهای توپولوژیك، مسیرهای ارگودیك وگرافهای جهتدار را بررسی می‌کنند، تصور مبهم و خام ما را درمورد شکلها، حرکتها و آرایشها دقت می‌بخشند.

چرا ریاضیدانها این چیزها را بررسی می‌کنند، و چرا باید این کاررا بکنند؟به‌بیان دیگر، چه چیز موجب انگیزش یك ریاضیدان می‌شود؛ وچرا جامعه وسایل پیشرفت او را دست‌کم تاحد پرورش وسپس تأمین معاشش فراهم می‌آورد، برای اینکه وقت لازم‌را برای تفکر در اختیار او بگذارد؟ برای هر یك ازپرسشهای بالا دو پاسخ وجود دارد: چون ریاضیات عملی است وچون ریاضیات یك‌هنر است. ریاضیات عصر حاضر، هرروزکاربرد بیشتر و بیشتری می‌یابد و رشد سریع کاربردهای مورد نظر، ریاضیات عملی جدید و جدیدتری را ملهم می‌کند. درعین‌حال، با رشد کمی ریاضیات، و افزایش سریع افرادی که در حوزهٔ آن تفکرمی‌کنند، مفاهیم جدیدتری احتیاج به‌تشریح و توضیح پیدا می‌کنند، ومناسبات متقابل منطقی جدیدتری پیدا می‌شودکه باید آنها را بررسی، درك، وساده کرد، و در این‌حال درخت ریاضیات‌شکوفه‌های پرحوزهٔ بیشتری می‌دهدکه تزدبسیاری‌ازناظران، ارزش آنها خیلی بیشتر از ریشه‌هایی است‌که سرچشمه‌آنها بوده، یا عللی‌که سبب به‌وجود آوردن آنها شده است.

ریاضیات امروز. امروزه ریاضیات بسیار زنده و پویاست. بیش‌از هزارمجله‌انتشار می‌یابدکه در آنها مقالات ریاضی چاپ می‌شود؛ هرسال حدود ۱۵۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰مقالهٔ ریاضی منتشر می‌گردد. دستاوردهای ریاضی یکصد سال اخیر نسبت به‌گذشته ازنظر کمی وکیفی زیادتر شده است. جوانهای ریزودرشت دانشجوی دانشگاهها ازبرکلی تا اودسا، مسائل ریاضی دشواری راکه هیلبرت، کانتور یا پوانکاره را به‌ستوه آورده بودند، حل و توصیف می‌کنند و تعمیم می‌دهند.

گاهی ریاضیدانها خودشان را به دوگروه مسئله حل‌کن و نظریه‌آفرین دسته‌بندی می‌کنند. مسئله حل‌کن‌ها به‌پرسشها پاسخ آری یا نه می‌دهند و درمورد حالتهای‌خاص‌اساسی بحث می‌کنند وشالودهٔ مثالهایی را می‌ریزندکه گوشت وخون ریاضیات را تشکیل‌می‌دهند. نظریه آفرین‌ها چارچوب مناسبی برای نتایج می‌سازند، نقاط مبهم آن را روشن می‌کنند وآن را در مسیری معین می‌اندازند ــ آنها استخوانبندی و روح ریاضیات را فراهم می‌آورند. یك فرد می‌تواند مسئله حل‌کن و درعین حال نظریه آفرین باشد، اما معمولاً تخصصش دریکی ازآنهاست. مسئله حل‌کن‌ها ترسیمات‌هندسی‌انجام می‌دهند،نظریه‌آفرین‌ها درمبانی هندسهٔ‌اقلیدسی بحث می‌کنند؛ مسئله حل‌کن‌ها آنچه راکه ضامن‌اعتبارنمودارهای کلیدی است پیدا می‌کنند، نظریه آفرین‌ها قضایای نمایش را درمورد جبرهای بولی ثابت می‌کنند. در هر دو نوع ریاضیات و درتمام حوزه‌های آن، میزان پیشرفت طی هرنسل

شگفت‌انگیز است. این روزها هیچکس نمی‌تواند خود را ریاضیدان بنامد بی‌آنکه حتی ایده‌ای مبهم درموردجبرهوموتوپولوژیك، توپولوژی‌دیفرانسیلی، و آنالیز تابعی داشته باشد، و احتمالاً هر ریاضیدان دست‌کم دریکی از این مباحث تا حدودی متخصص است. این در حالی است که وقتی من در دههٔ ۱۹۳۵ مشغول تحصیل بودم، هیچیك از این اصطلاحات هنوز وضع نشده بود وخود مباحث مورد نظرنیز تنها در مرحلهٔ تکوین بود.

ریاضیات تفکرمجرداست، ریاضیات منطق محض است، ریاضیات هنری‌خلاق‌است. همهٔ این گزاره‌ها نادرست است، اما اندکی هم صحت دارد؛ همهٔ این حرفها از اینکه بگوییم "ریاضیات عدد است" یا "ریاضیات اشکال هندسی‌است" به‌حقیقت نزدیکتر است. ازنظر یك متخصص ریاضیات محض، ریاضیات عبارت است از جفت‌وجور کردن منطقی مجموعه‌ای از مفروضات به‌دقت انتخاب شده، همراه با نتایج شگفت‌آورشان از طریق یك اثبات مفهومی ظریف. بی‌تکلفی، پیچیدگی، و بالاترازهمه، تحلیل منطقی، نشان ویژهٔ ریاضیات است.

ریاضیدان به‌حالتهای غایی علاقه‌مند است ــ از این جهت او بیشتر شبیه به‌مأمور کنترل کیفیت‌کالاهای صنعتی است‌که حبابهای لامپ را می‌شکند، جامه‌ها را پاره می‌کند و اتومبیلها را روی جاده‌ها می‌سراند. می‌خواهد بداند یك استدلال تا چه‌گستره‌ای قابل اجراست، و اگرچنین نباشد چه می‌شود؟ چه می‌شود اگر یکی از فرضها را ضعیف‌کنیم،یا تحت چه‌شرایطی می‌توانیم یکی‌ازنتایج را قوت بخشیم؟ پرسیدن دائمی‌چنین‌سؤالاتی‌است که به‌فهم جامعتر و یافتن روشهای بهترواعطاف‌پذیرتری برای مسائل آینده‌کمك می‌کند.

ممکن است این امر برای شما شگفت‌آور و تا حدودی تکان دهنده باشدکه جریان آفرینش ریاضیات هرگز استتناجی نیست. ریاضیدان به‌هنگام کار خود حدسهای مبهمی می‌زند،تعمیمهای گسترده‌ای‌پیش‌خرد تصور می‌کند وبه‌سوی‌نتایجی غیرمجازخیز برمی‌دارد. ایده‌هایش را پس و پیش می‌کند و خیلی پیش‌ازآنکه بتواند اثباتی منطقی برای آن بنویسد، خود را بدرستی آن متقاعد می‌کند. بعید است‌که این روند اقناع خیلی سریع انجام بگیرد ــ معمولاً پس‌ازبسیاری تلاشها، شکستها، دلسردیها و نقاط شروع نادرست، خود را متقاعد می‌کند. اغلب پس‌ازماهها کارمعلوم می‌شودکه روش حمله به‌مسئله احتمالاً نافرجام است،که در این صورت فرایند حدس زدن، تصورکردن، و خیزش به‌سوی نتیجه دوباره ازسرگرفته می‌شود. در چنین حالتی فرمولبندی مجدد مسئله ضروری است و ــ این هم ممکن است شما را شگفت‌زده کند ــ کار تجربی بیشتری‌را می‌طلبد. به‌یقین،منظور من‌از "کارتجربی"، لوله‌های آزمایش و سیکلوترونها نیست. مقصودم تجارب اندیشه‌ای است. وقتی ریاضیدانی می‌خواهد قضیه‌ای درباب فضای هیلبرت بینهایت بعدی ثابت کند، ابتدا مشابه آن را با بعد متناهی می‌آزماید، به‌تفضیل به حالتهای ۲ و ۳ بعدی نظر می‌کند، و غالباً یك مورد عددی خاص را امتحان می‌کند، و امیدوار است که از این راه به بینشی دست یابدکه تردستی چون تعریف محض آن را به‌دست نداده بود. وقتی‌که یك‌بار بینش حقیقی حاصل شد، مرحلهٔ استنتاج، یعنی نوشتن نتایج و نگاشتن اثبات دقیق آن کار نسبتاً

پیش پاافتاده‌ای خواهد بود، که بیشتر شبیه کار نقشه‌کش است، تا معمار.

انجمن اخوت ریاضی. انجمن اخوت ریاضی را می‌توان تا حدودی شبیه به‌اعطای نسل‌به‌نسل حق‌کشیشی دانست. ریاضیدانهای امروز ریاضیدانهای فردا را تربیت می‌کنند، و در واقع، تصمیم می‌گیرند که حق‌کشیشی خود را به‌چه‌کسی اعطا کنند. اکثر مردم‌پیوستن به‌این انجمن را مشکل می‌یابند ــ ظاهراً استعداد و نبوغ ریاضی به‌اندازهٔ استعداد و نبوغ در نقاشی و موسیقی نادر است ــ اما بسم‌الله! هرکس بخواهد می‌تواند به‌این انجمن بپیوندد. هرچند که قواعد ریاضی فکر کردن هیچ جا به‌طور صریح فرمولبندی نشده‌است، هر کس که دستی در کار داشته باشد، آنها را به‌طور شهودی درك می‌کند. آنچه که ضرورت دارد، بینش ریاضی است ــ می‌توان از اشتباهها و توصیفهای نامفهوم در گذشت. شلختگی فکری، زوده درازی بی‌محتوی، و مجادله نقشی در ریاضیات ندارند و ــ این بـرای من یکی ازشگفت‌آورترین جنبه‌های ریاضیات است ــ تشخیص این صفات نسبت به‌حوزه‌های غیرریاضی فعالیت آدمی به‌مراتب ساده‌تر است (مثلاً، در میان هنرها ادبیات، در میان علوم انسانی نقد هنری، و در میان علوم اجتماعی مطالعهٔ ناهنجاریهای اجتماعی مورد نظر شما).

ریاضیات علمی اجتماع‌پذیر است، هرچندکه بسیاری از آفرینشهای ریاضی را یك نفر پشت میز، روی تخته سیاه، یا درحال قدم زدن انجام می‌دهد، یا گاهی هم دونفردرحال گفتگوصورت می‌دهند. آفرینندهٔ یك نظریه، هنگام تکوین آن به‌انگیزه، وپس‌ازخلق‌آن به مخاطب نیاز دارد. ریاضیات به‌این معنی علمی اجتماع پذیراست که فکرنمی‌کنم اگرکسی را در جزیره‌ای متروك رها کنید، بتواند (جز به‌مدتی خیلی‌کوتاه) وقتش را با ریاضیات بگذراند؛ اما این‌هم هست که ریاضیات علمی مردمی نیست، علمی گروهی نیست. قضیه ورد وجادو نیست؛ هرگز الهامی شناخته نشده است که بر انجمنی نازل شده باشد. یك قضیهٔ بزرگ را نمی‌توان بهتر از یك نقاشی بزرگ با رهیافتی "مبتنی برطراحی" به‌دست آورد. فکر نمی‌کنم دستیابی به‌قضیهٔ مربوط به‌چند ضلعیهای منتظم به‌وسیلهٔ گروهی از گاوسهای کوچولو به‌سرپرستی یك دایادار: بهتر از نوشتن هملت به‌وسیلهٔ گروهی ازشکسپیرهای کوچولو تحت چنین شرایطی باشد.

یك مسئلهٔ ریاضی کوچك و پیش پا افتاده. تا اینجا تلاش کرده‌ام در حد عباراتی کلی تشریح کنم که ریاضیات چیست و ریاضیدانها چه می‌کنند، اما اگر شما توضیحاتم را کاملا رضایت‌بخش نمی‌یابید، سرزنشتان نمی‌کنم. تقریباً احساس کسی را دارم که می‌خواهد برف را برای یك بومی استوایی تشریح کند. اگر به‌چنین کسی بگویم برف چیزی است سفید مثل تخم مرغ، مرطوب مثل گل، وسرد مثل آب آبشار، آیا او می‌فهمد که اسکی در کوههای آلپ به‌چه‌چیز شباهت دارد؟ نشان‌دادن یك قاشق‌از برفکهای یخچال جناب‌رئیس قبیله هم به او کمك چندانی نمی‌کند، اما به‌هرحال این کار کوچکی هم نیست. بنابراین، بگذارید این شیوهٔ خاص را با ذکر یك مسئلهٔ کوچك و پیش‌پـا افتادهٔ ریاضی و توصیف روش حل آن به‌کار ببندم ــ پس از این کار، احتمالاً اندکی احساس خواهید کرد (اگر تا

کنون احساس نکرده باشید) که چه‌چیز ریاضیدان را جلب وسرگرم می‌کند، و نیز ماهیت الهام، که دربارهٔ آن صحبت کرده‌ام، چیست.

باشگاهی مرکب از ۱۰۲۴ تنیس‌باز را در نظربگیرید. وجود عدد دراینجا، هرکسی **با تفکر ریاضی را**، درصورتی که قبلاً این مسئلهٔ مشهور را نشنیده باشد، به‌سرعت گوش **بمزنگ می‌کند. برای هرکس** که تا به‌حال دستی در دوبرابر کردن چیزی، هرچیز که باشد **داشته روشن است که ۱۰۲۴ برابر با 2^{10} است.** بنابراین هرفرد مطلعی می‌فهمد که حضور عددی مانند $2^{10}+1$ قرار است راهنمایی بزرگی برای حل مسئله باشد؛ بعید نیست که جواب با دوبرابر کردن ــ یا نصف‌کردن ــ چیزی بستگی داشته باشد، واین را مـی‌توان حتی پیش‌ازکامل شدن صورت مسئله حدس زد. شخص مطلعتر این امکان را نیز که عـدد مذکور دام باشد نه راهنمایی، از نظر دورنمی‌دارد. حال فرض کنید که ایـن تنیس‌بازها می‌خواهند یك تورنمنت بسیار بزرگ برگزار کنند. برنامه به‌این ترتیب است که بازیکنان به‌قید قرعه دوبه‌دو انتخاب می‌شوند تا آنکه یك نفر دردور اول بیرون بماند، واین‌زوجها یا یکدیگر مسابقه می‌دهند. در دور دوم تنها برندگان دور اول وآن یك نفر بیرون مساند شرکت می‌کنند. روش کار در دور دوم مانند دور اول است ــ انتخاب تصادفی دوبه‌دو، و (در صورت لزوم) بیرون گذاشتن یك نفر جدید. قواعد بازی اقتضا می‌کند که این روند چندان ادامه یابد که قهرمان باشگاه انتخاب شود. قهرمان، به‌این مفهوم، الزاماً ازهمهٔ افراد دیگر نمی‌برد، اما می‌تواند بگوید که او، به‌ازای هربازیکن خاص، ازکسی برده است که ازکسی برده است که... که ازکسی برده است که آن بازیکن خاص را برده است. سؤال این است: درکل دورهای این تورنمت، رویهم رفته چند مسابقه برگزار می‌شود؟

چندین روش برای حل‌این مسئله وجوددارد، وحتی ساده‌ترین آنها هم کارساز است. مطابق این راه‌حل، دوراول شامل ۵۱۲ مسابقه است (زیرا تعداد ۱۰۲۵ فرد، و ۵۱۲ نصف ۱۰۲۴ است)، دور دوم شامل ۲۵۶ مسابقه است (زیرا ۵۱۲ برندهٔ دور اول، به انضمام نفر بیرون مانده درآن دور، ۵۱۳ نفر می‌شوند که دوباره فـرد است و ۲۵۶ نصف ۵۱۲ می‌شود)، و همین طور تا آخر. عبارت "همین طور تاآخر" بس‌از اعداد ۵۱۲ و ۲۵۶ اعداد ۱۲۸، ۶۴، ۳۲، ۱۶، ۸، ۴، ۲، ۱ را به‌دست می‌دهد (۱ آخرمربوط به‌همان دورآخراست که تنها شامل یك مسابقه است و تنها دوری است که درآن هیچ بازیکنی بیرون گذاشته نمی‌شود)، وتنها لازم است که اینها را یکدیگرجمع کنیم. این کارساده‌است ومی‌توان آن را با قلم وکاغذ در طی چند ثانیه انجام داد؛ نتیجه (وبنابراین پاسخ مسئله) ۱۰۲۴ است.

روش کارآمدِ بی‌خرد پرادها در ریاضی، اندکی متفاوت است. ازقرار معلوم، او به سرعت تشخیص می‌دهد که مسئله با نصف‌کردنهای متوالی سروکار دارد، بنابراین اعدادی که باید با یکدیگر جمع شوند، توانهای متوالی ۲ اند، از توان نهم تا توان اول ــ بیخشید از توان نهم تا توان صفر ــ به‌اضافهٔ ۱ آخری که زاییدهٔ کوشش آشکـارا کینه‌توزانهٔ طراح مسئله برای به‌اشتباه انداختن حل‌کنندهٔ مسئله است، که بـه‌جای ۱۰۲۴ از ۱۰۲۵ استفاده کرده است. سپس، پرادهای ما معلومات خـودش را از فـرمول مجموع یك سری

هندسی مغرورانه به‌نمایش می گذارد، وبنابراین (بدون جمع زدن) مـی‌فهمد که مجموع ۵۱۲، ۲۵۶، ۱۲۸، ۶۴، ۳۲، ۱۶، ۸، ۴، ۲، ۱ برابر ۱۰۲۳ است و سپس ۱ را اضافه می کند تا به همان ۱۰۲۴ دست پیدا کند.

اشکال راه حل آدم برادعا در ریاضی آن است که روشی خیلی خاص است. اگر تعداد تنیس‌بازها به‌جای ۱۰۲۵، ۱۰۵۰ می‌بود، برادعای مذکور آسوده‌تر ازیك آدم تاوارد نبود. راه حل آدم برادعا در ریاضی کارساز، اما به‌اندازهٔ راه حل یك آدم تاوارد خالی از الهام و خلاقیت است. البته کوتاهتر از آن است، اما بازهم بـه‌بیان آکنده از غـرور ریاضیدان، "محاسباتی" است.

مسئله یك راه‌حل خلاقه هم دارد که نیازمند هیچ محاسبه، فرمول وعددی نیست ــ تنها تفکرخالص است. استدلال چنین: شنبه به‌این است: هرمسابقه یك برنده و یك بازنده دارد، بازنده نمی‌تواند در هیچ دور بعدی شرکت کند. هرعضو باشگاه، مگر قهرمان، دقیقاً یك مسابقه را می‌بازد. بنابراین، درست همان‌تعداد مسابقه برگزارمی‌شود که بازنده وجود دارد، و در نتیجه تعداد مسابقات درست یکی کمتر از تعداد اعضای باشگاه است. اگر تعداد اعضا ۱۰۲۵ باشد، پاسخ ۱۰۲۴ است. اگر تعداد اعضا ۱۰۰۰ باشد، پاسخ ۹۹۹ است، و به وضوح، روش تفکرخالص مورد بحث، جواب را بی‌هیچ محاسبه‌ای برای هر تعداد ممکن بازیکن به‌دست می‌دهد.

این چیزی است که من به‌عنوان مثال کوچکی از بخش زیبایی از ریاضیات آوردم. مثال از این جهت خوب نیست که پس از تمام انحطارهای من درباب اینکه ریاضیدانها به چیزهای دیگری چزشمردن علاقه‌مندند، با شمردن سروکار دارد؛ خوب نیست زیرا اصلاً قدرت مفهومی و روش هوشمندانهٔ ریاضیات واقعی رانشان نمی‌دهد ونمی‌تواند نشان دهد؛ وخوب نیست زیرا ریاضیات کاربردی را (یعنی ریاضیاتی راکه در مسئله‌ای از "زندگی واقعی" به‌کارمی‌رود) بیش از ریاضیات محض (یعنی ریاضیاتی که چکیدهٔ پرسشی پیرامون روابط منطقی مفاهیم است ــ مفاهیم، نه تنیس‌بازها وتورنمنتهاومسابقات) مجسم می‌سازد. با این‌حال، این مثال به‌کار پندی اخلاقی می‌آید؛ اگرقدرت تخیل شما چندان خوب است که می‌تواند از یك قطره آب، اقیانوس را بازسازی کند، می‌توانید ریاضیات را نیز از این مسئلهٔ تنیس‌بازها بازسازی کنید.

ماتولوژی درمقابل ماتوفیزیك. تا به‌حال‌در بارهٔ‌ریاضیات توصیفهایی ارائه‌داده‌ام، اما ازشما چه پنهان که بیشتر ماتولوژی (محض) را در نظر داشته‌ام تـا ماتوفیزیك (کاربردی). به‌دلایلی،دست اندرکاران ماتوفیزیك به‌کم کردن اختلافها بین این دوشاخه گرایش دارند، و دیگران، یعنی ماتولوژی‌دانها، به تأکید براین اختلافها. مطمئنم کـه خیلی وقت است می‌دانید گرایش من کدام است. هرریاضیدان تنها در یکی از این دسته‌ها مـی گنجد (خیلی خوب، قبول می کنم که تقریباً هرریاضیدان ــ چندتایی هم در هردودسته‌اند)، و من هم ازآغاز ماتولوژی‌دان بارآمده‌ام. اما درخطابه‌ای مانند این، باید سعی کنم که‌درمورد تمایلات وموضوعات مورد تنفر اغراق نکنم. بنابراین، بحث رابا این جمله آغازمی کنم که در واقع میان ماتولوژی و ماتوفیزیك شباهتهای عمده‌ای وجود دارد. این یك واقعیت

تاریخی است که دست آخر، جهان فیزیکی همهٔ ریاضیات را برای ما به‌ارمغان می آوردو به ما ملهم می کند. به‌اعتقاد من، ایـن یك حقیقت روانشناختی است کـه حتی شخصی بـا انتزاعیترین تفکرها در میان ما، وقتی کـه افکارش ارتباط جدید و غیرمنتظره‌ای باجهان غیرریاضی پیدا می‌کند، تنها کمی تکان می‌خورد. آن نوع استعدادی که بـرای پیشرفت در ماتولوژی لازم است، خیلی نزدیك به‌استعدادی است که مـاتوفیزیك اقتضا مـی‌کند. مقاله‌هایی که ماتوفیزیك‌دانها می‌نویسند، اغلب از مقاله‌های همکاران مـاتولوژی‌دانشان تمیزناپذیر است.

از دیدگاه من، تفاوت اصلی بین ماتوفیزیك و ماتولوژی در هدف از کنجکـاوی هوشمندانه‌ای نهفته است که انگیزهٔ پژوهش است ــ یـا شاید دقیقتر آن باشد کـه بگویم تفاوت در نوع کنجکاوی هوشمندانهٔ مورد بحث است. بگذارید یك سؤال عجیب، ولی قطعاً ریاضی ازشما بپرسم. آیا می‌توانید با دست‌کاری یك جفت تاس، آنها را طوری از حالت تقارن خارج کنید که احتمال آمدن نتیجهٔ هریك از پرتابها ــ بـه‌بیان بهتر: احتمال آمدن همهٔ مجموعهای ممکن در یك پرتاب، یعنی همهٔ اعداد از ۱ تا ۱۲ مساوی باشد؟ این پرسش، بخش مشروعی ازریاضیات، وپاسخ آن‌معلوم است، اما‌بدیهی نیست. بااین‌سؤالی که من مطرح کردم، شما می‌توانید روانکاوی سریعی از خود به‌عمل آورید. وقتی‌که من سؤال را مطرح می‌کردم، آیا شما به‌فکرتوزیع همگن یا ناهمگن جرمی بودید که به‌نحوی شگفت‌انگیز در دو مکعب توزیع شده، یا به فکر مجموع حاصلضربهای دوازده عدد (دو تا شش احتمال که مربوط به دوتا شش وجه دوتاس است)؟ اگر درفکر اولی بـودید، یك ماتوفیزیك‌دان نهفته هستید، واگر به‌دومی فکرمی کردید، ماتولوژی‌دانی بالقوه‌اید.

شماچگونه مسئلهٔ تحقیقاتی خودرا انتخاب می‌کنید، وچطوربه‌آن می‌پردازید؟ بیشتر دوست دارید راجع به‌طبیعت چیز بدانید یا منطق؟ آیا حقایق محسوس را به‌روابط مجرد ترجیح می‌دهید؟ اگراین‌طبیعت است که می‌خواهیدآن را بررسی کنید، یا محسوسات برای شما جاذبهٔ بیشتری دارد، یك‌ماتوفیزیك‌دان هستید. درماتوفیزیك، پرسشها همواره از خارج، یعنی "جهان ملموس"، پیش می‌آیند و رضایتی که از جواب مسئله به‌دانشمند دست می‌دهد، تا حدود زیادی، بستگی دارد به‌جنبهٔ اتکاء مسئله به حقایق.

به‌یقین، هیچکس نمی‌تواند با ماتوفیزیك مخالفت کند، یا به‌خاطر ماتولوژی آن را ناچیزبشمارد، و بازهم‌کاری در ریاضیات‌انجام دهد. منظورم این‌نیست که "محسوس"، را با "عملی" یکی کنیم و به‌این وسیله آن را دست‌کم بگیریم؛ به‌همین ترتیب نمی‌خواهم‌بگویم که "محض" و "بی‌استفاده" یکی‌هستند (این‌مطلب که ۱ ــ 2^{11213} عددی اول است، حقیقتی محسوس اما مطمئناً بی‌استفاده است؛ اینکه $E=mc^2$، رابطه‌ای مجرد اما بدبختانه عملی است). مع‌هذا، این یکی پنداشتن ــ کاربردی، محسوس، عملی، خام و محض، مجرد، غیرعملی، بی‌استفاده ــ در هردودسته کاملاً متداول است. نزد ریاضیدان‌کاربردی، متضاد کلمهٔ "کاربردی"، کلمهٔ "بی‌ارزش"، وازنظر ریاضیدان‌محض، متضادکلمهٔ "محض"، "آلوده" است. تاریخ برای جبران اشتباهات فرضی به‌ما نمی‌دهد. ازنظرگـاه تاریخی، ریاضیات

محض وکاربردی (ماتولوژی و ماتوفیزیك) در گذشته نسبت به‌امروز خیلی به‌هم نزدیکتر بوده‌اند. امروزه، همان اصطلاحات (ریاضیات محض در مقابل ریاضیات‌کاربردی)موجب اغتشاش معنایی می‌شود. آنچه‌که این اصطلاحات به‌ذهن متبادر می‌کنند، به‌جای اختلاف همراه با رابطه‌های مهم، تطابق همراه با اختلافات جزئی است.

اختلاف درهدفها، موجب پیدایش اختلاف در سلیقه‌ها و در نتیجه درارزش‌داوریها می‌شود. ماتوفیزیك‌دان می‌خواهدواقعیتها را بداند، وبه‌هرحال گاهی حوصلهٔ متنه‌به‌خشخاش گذاشتنهای سختگیرانهٔ ماتولوژی‌دانها را (که باتسمخر آن را ریاضت موتافی می‌خوانند) ندارد.ماتولوژی‌دان می‌خواهد ایده‌ها رادریابد، وبه‌جنبه‌های زیباشناختی ادراك وراههای حصول آن بهای زیادی می‌دهد؛ او واژه‌ای مانند "ظریف" را برای توصیف یك اثبات به کارمی‌برد. اختلاف نظر ماتولوژی‌دان و ماتوفیزیك‌دان در انگیزه، هدف،غالباً درروش.و تقریباً همیشه در سلیقهٔ آنهاست.

وقتی به‌شما می گویم‌که من ماتولوژی‌دانم، سعی ندارم ازداشتن معلومات‌بی‌استفاده دفاع‌کنم، یا به‌شما بقبولانم‌که این، بهترین نوع ممکن است. لکن، اگربه‌شما نگویم که مرام من این است، با شما چندان روراست نبوده‌ام. من تفکر دربارهٔ اشیاء را به خاطر خودشان دوست دارم. این نوع ایده را در موسیقی، صنعت وحتی پزشکی‌می‌پسندم. من‌به طبیبی‌که می‌گوید حرفهاش را علیرغم میل باطنی، تنها برای خدمت به‌جامعه، انتخاب کرده است، هرگز اعتمادکامل ندارم. وقتی که این چیزها را می‌شنوم، احساس نارضایتی درمن‌به‌وجود می‌آید وبه‌ترديد می‌افتم. خیلی بیشتر ترجیح می‌دهم‌که طبیب بگوید‌به‌خاطر این پیشهٔ طبابت‌را برگزیده‌که موضوع کارش‌را دوست داشت، که فکرمی کردمی‌تواند‌در آن فرد لایقی شود، یا حتی به‌این خاطر به‌حرفهٔ پزشکی روی آورد کـه در مدرسه در درس جانورشناسی نمرات خوبی می گرفت. من موضوعات را به‌خاطرخودشان دوست‌دارم، در پزشکی چندان‌که درموسیقی، ونیزدر ریاضیات.

لحظه‌ای از موضوع صحبتم منحرف می‌شوم وحکایتی‌کوتاه و شایدساختگی راجع به‌داوید هیلبرت، که احتمالاً بزرگترین ریاضیدان قرون نوزدهم وبیستم بود، نقل می کنم. وقتی‌که هیلبرت خودرا برای یك سخنرانی عمومی آماده می‌کرد، ازاوخواسته می‌شد که به‌مخاصمه بین ریـاضیات محض وکاربـردی (کـه حتی آن وقت‌هم جریـان داشت!) اشاره‌ای بکند؛ به‌این امید که هیلبرت، به‌عنوان‌تنها کسی که می‌تواند‌گامی درجهت رفع‌این مخاصمه بردارد، اقدامی صورت دهد. می گویند‌که هیلبرت هم حسب‌الامر سخنرانی خود را چنین شروع می کرد: "ازمن خواسته شده‌که راجع به‌مخاصمه بین ریـاضیات محض و کاربردی صحبت‌کنم. خوشحال می‌شوم‌که این کاررا بکنم، زیرا در واقع این مخاصمه تا حدود زیادی بی‌معنی است، نباید مخاصمه‌ای باشد، نمی‌تواند بـاشد، اصلاً مخاصمه‌ای نیست ــ در حقیقت هیچیك ازاینها کاری به‌کار هم ندارند!"

به‌نظرمن، این مطلب انکارناپذیر است‌که بخش عظیمی از ریاضیات بـه‌ثمرنشسته، وبی‌هیچ دلیلی مگرجذابیت ــ جذابیت ذاتی ــ با شگفتی و بالندگی به‌زندگی خود ادامه

می‌دهد. تثلیث زاویهٔ‌یونانیها، مسئلهٔ‌مشهورچهاررنگ، وتأثیرچشمگیرگودل برمنطق‌ریاضی با ارزش‌اند، زیرا زیبا هستند، و این به‌خاطرآن است‌که ما خواهان دانستن هستیم. آیـا همهٔ ما جاذبهٔ‌غیرقابل اجتناب پازل را احساس نمی‌کنیم؟ آیا واقعاً اشتباه است‌اگربگوییم که ریاضیات به‌نوعی احیای با شکوه روح آدمی است و سزاوار است‌کـه درغیاب هـر کاربرد عملی زنده‌بماند؟

ریاضیات یك زبان است. چرا ریاضیات مـوضعی چنین منزوی درآسمان اندیشه اشغال‌کرده است؟ چرابرای روشنفکران جامعهٔ عارنیست‌که ازریاضیات متنفرباشندواعلام کنندکه تاب تحمل آن را ندارند، یا اینکه دست کم پوزخندی بزنند و بگویندکه هرگز نتوانسته‌اند آن را بفهمند؟ شاید یکی از دلایل این موضوع آن باشد کـه ریاضیات یك زبان است. زبانی دقیق وظریف‌که برای این طراحی شده است که انواع معینی ازایده‌ها را خلاصه‌تر، دقیقتر و سودمندتر از زبانهای معمولی بیان کند. منظورم از این حرف آن نیست‌که ریاضیدانها، مانند همهٔ‌گروههای حرفه‌ای دیگر، از زبانـی فنی استفاده می‌کنند. البته گاهی هم این‌کاررا می‌کنند، ولی اغلب اوقات چنین نیست، و استفاده ازچنین زبانی بیشتر یك پدیدهٔ شخصی است تا خصیصه‌ای حرفه‌ای که می‌خواهم تـوصیف‌کنم. تفاوت میان دوجملهٔ زیر، منظورم را ازاینکه ریاضیات یك زبـان است، بـه‌طورسردستی و غیر جامع روشن می‌کند:(۱) اگرهریك از دوعدد مفروضی را درخـودش ضرب‌کنیم، تفاضل نتایج حاصل برابـر حاصلضرب مجموع آن دوعـدد مفروض در تفاضل آنهاست. (۲) $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$. (توجه: فرمولبندی طولانیتر، نه تنها ناهنجار و ناشیانه، که ناکامل نیز هست.)

یکی از چیزهایـی که‌گاهی آدم ناوارد در ریـاضی را آشفته و بیزار مـی‌سازد، اصطلاحاتی است‌که‌ریاضیدانها به‌کارمی‌گیرند. واژه‌های‌ریاضی صرفاً به‌عنوان اصطلاحات خاصی به‌کارگرفته می‌شوندکه بعضاً تلقین‌کننده و احتمالاً با مزه‌اند، اما همواره بـه‌دقت تعریف شده‌اند؛کاربرد روزمرهٔ این واژه‌ها را باید با جدیت تمام‌کنارگذاشت. همان طور که این روزهاکسی دل به‌دریا زدن را به‌معنی شکم به‌آب زدن نمی‌دانـد، عددی راکـه گنگ خوانده می‌شود نباید عددی غیرناطق دانست؛ همان‌گونه‌که منظومهٔ درامانیکی‌مانند کمدی‌الهی لزوماً خنده‌دارنیست، عددی‌که‌موهومی خوانده می‌شود دارای همان‌موجودیت ریاضی است‌که موجودات ریاضی دیگر دارند (گویا، rational، برای اعداد، از ریشهٔ لاتین ratio به‌معنی عقل استخراج نشده، بلکه ازریشهٔ انگلیسی ratio به‌معنی خارج قسمت گرفته شده است).

ریاضیات یك زبان است. وقتی‌که یك چین‌شناس عبارتهایی بـه‌زبان چینی بـه‌کار می‌برد، هیچیك از ما احساس حقارت نمی‌کنیم، و لاجرم یا باید برای آمـوختن زبـان چینی سالهای سال وقت صرف‌کنیم، یا اینکه قید یادگرفتن زبان چینی را بزنیم. دیدگاه ما نسبت به‌ریاضیات نیز باید چنین باشد. ریاضیات یك زبان است وسالها طول می‌کشد تا بتوانیم آن را درست تکلم‌کنیم. همهٔ ما مـی‌توانیم اندکی بـه‌این زبان صحبت‌کنیم،

فقط به‌خاطر اینکه مقداری از آن همواره برسرزبانها بوده است، ولی ما این زبان را با لهجه واغلب غیردقیق تکلم می‌کنیم؛ اکثر ما مثلاً بههمان اندازه‌که یك نفرفارسی زبان می‌تواند به‌عربی تها "یااخی" و "کیف حالك" بگوید، می‌توانیم به‌زبان ریاضیات صحبت کنیم. مادامی که بقیهٔ جماعت روشنفکران، ریاضیدان را به‌خاطر تکلم به‌زبانی رمز گونه شماتت نکنند، او در این زبان اشکالی نمی‌بیند. وی وقت زیادی برای یادگیری این زبان صرف کرده، و به‌دوستش که هرگز آن را نخوانده و به‌آن سخن نگفته است، بـه دیدهٔ حقارت نگاه نمی‌کند. با وجود این، با هم کنار آمدن دو آشنا درمیهمانی، که یکی از آنها می‌خواهد زبان را ضمن خوردن و نوشیدن یاد بگیرد، و دیگری چنین‌کاری را به‌عنوان نشانه‌ای از حماقت یا عوامانه بودن ننگ وعیب می‌داند، همواره کار چندان ساده‌ای نیست.

برخی تشابهات. اندك بینشی را درباب ماهیت ریاضیات وتفکر ریاضی می‌توان از طریق مقایسهٔ آن با شطرنج به‌دست آورد. این قیاس، همچون همهٔ قیاسهای دیگر، ناقص اما به‌نوبهٔ خود روشنگر است. قوانین بازی شطرنج به‌همان اندازه اختیاری‌اند که گاهی اصول موضوع ریاضیات چنین به‌نظرمی‌رسند. بازی شطرنج به‌اندازهٔ ریاضیات تجریدی است (اینکه شطرنج را با مهره‌های چوبی، پلاستیکی یا شیشه‌ای بازی مـی‌کنند، خصیصهٔ ذاتی آن نیست، چه می‌توان آن را درست به‌همان خوبی با قلم وکاغذ یا چشم بسته بازی کرد، چنانکه با چشم‌بسته می‌توان به‌ریاضیات پرداخت). همچنین شطرنج زبان‌فنی استادانهٔ خودش را دارد، و یك بازی کاملاً جبرگرایانه است.

میان ریاضیات و موسیقی نیز برخی تشابهات وجود دارد. همان طور که موسیقی‌دان توجیه موسیقی‌خود را ضروری نمی‌بیند، ماتولوژی‌دان هم‌نیازی به‌توجیه ریاضیات‌محض احساس نمی‌کند. آیا اهل‌کارو کسب، وحقوق بگیران، فقط خواهان موسیقی عملی‌انـمثل جازمطبوع، برای اینکه کارگریك خط‌تولید پیچ ومهره‌ها را تندتر بپیچاند، یا مارش‌هیجان‌انگیز، برای اینکه سربازها غیرت بیشتری بجنگد؟ خیر، بی‌گمان هیچیك ازما معتقد به‌این نوع توجیه نیستیم. موسیقی وریاضیات، ازجمله ارزشهای انسانی‌اند، زیرا انسان دربارهٔ آنها چنین احساسی دارد.

تشابه با موسیقی‌را می‌توان کمی بیشتر تفصیل داد. پیش‌از آنکه اثرهنری یك‌تو انزنده به‌بوتهٔ نقدگذارده شود، باید مسلم بدانیم که او نتهای صحیحی را انتخاب کرده است، اما صرفاً انتخاب نتهای صحیح از او یك موسیقی‌دان نمی‌سازد. اگر تك چهره‌ای را به‌عنوان یك اثرنقاشی خوب می‌ستاییم، درشناخت هنرنقاشی صاحبنظر نمی‌شویم؛ به‌همین ترتیب، اگر تنها چیزی که می‌توانیم دربارهٔ اثریك تاریخ‌دان بگوییم این است که اودرست گفته، در علم تاریخ صاحبنظرنشده‌ایم. دقت در اجرای موسیقی، شباهت ظاهـری تك‌چهره، وصدق گفتار در نقل تـاریخ، صرفاً موجب پیدایش موسیقی، نقاشی یا تاریخ خـوب نمی‌شود؛ به‌همین ترتیب، صرفاً درستی منطقی موجب پیدایش ریاضیات خوبی نخواهد شد.

خوبی، یا بالا بودن کیفیت‌را می‌توان درحوزه‌ای مهمتر از صدق واعتباردر مورد بررسی ونقد قرارداد. بخش قابل ملاحظه‌ای از ریاضیات بـا اکثر بخشهای دیگـر آن ارتباط

تنگاتنگی دارد. این، بخشی جدید است که درعین حال نمی‌توان آن را یاوه وباطل‌دانست (فیلم وسترن "جدید"ی را درنظر آورید که در آن نامها و رسوم تغییریافته، امـا موضوع اصلی دست نخورده باقی مانده است)، ونیز به‌مفهومی غیرقابل توصیف اما اجتناب‌ناپذیر عمیق است ــ به‌همان مفهوم که یوهان سباستین باخ عمیق است وکارل فیلیپ امانوئل باخ (پسرش) این طـور نیست. معیارکیفیت عبادت است از زیبایـی، پیچیدگـی، آراستگی، ظرافت، رضایت‌بخش بودن و تناسب ــ که همگی ذاتی‌اند و اساسی، امـا هریك از آنها به‌نحوی مرموز دربقیه سهیم است.

ریاضیات به‌ادبیات هم شبیه است، لکن این شباهت با آنچه درمورد موسیقی گفتیم متفاوت است. جمع و تفریق عملی، همان قدر به‌ریاضیات مربوط است که خواندن‌ونوشتن روزنامه، آگهی وعلایم جاده‌ها به‌ادبیات. همهٔ ما درزندگی روزمره به‌خواندن، نوشتن‌و حساب‌کردن نیاز داریم: اما ادبیات، چیزی بیش از خواندن و نوشتن، وریاضیات چیزی بیش‌از حساب کردن است. تشابه با ادبیات را می‌توان برای کمك به‌فهم نقش معلمان ونیز نقش دوگانی محض‌ــکاربردی به‌کار گرفت.

خیلی از کسانی که به‌ساختار، تاریخچه، و جنبهٔ زیباشناختی زبان علاقه دارند، نان خود را از راه تدریس مقدمات زبان به‌کسانی که می‌خواهند درآینده ازآن استفادهٔ عملی کنند، به‌دست می‌آورند. به‌طریق مشابه، بسیاری، یا شایـد اکثر کسانی کـه به‌ریاضیات امروزی علاقه دارند، نان خود را از راه تدریس حساب، مثلثات، یا حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌دست می‌آورند. کاری که مقرون به‌صرفه به‌نظر می‌رسد این است: جامعه به‌طور مطلق و جمعی تصمیم گرفته که به‌زبان محض و ریاضیات محض کمك مالی کند، اما این کافی نیست. بگذارید کسی که می‌خواهد محض‌دان شود گلیم خود را، ازراه تدریس جنبه‌های کاربردی هنرخود بـه‌نسل بعد، ازآب بیرون بکشد. در این صورت او این مجال را پیدا می‌کند که بخشی از وقتش را برای چیزهایی که به‌نظر خود برتر می‌داند، صرف کند. این کاره آنچه راکه در یك معلم خوب باید جمع باشد تأمین می‌کند. معلم باید از حداقل چیزی که باید درس بدهد، بیشتر بداند. این به‌آن علت است که بیشتر وبیشتر از اشتباه کردن جلوگیری به‌عمل آید؛ و از تداوم سوء تعبیر شاگردان پیشگیری شود، تا رکود فاجعه‌آمیز آموزشی رخ ندهد. علاقهٔ معلم به‌دستور زبان، غوطه‌وری او درعلم ریشه‌شناسی لغات، یا ورزیدگی او در شعر، در پویا نگهداشتن و دورکردنش ازجمود فکری، نقش قاطعی بازی می‌کند.

دوگانی محض‌ــکاربردی در ادبیات هم وجـود دارد. سرچشمهٔ ادبیات زندگـی انسان است، اما ادبیات همان زندگیی نیست که موجب پیدایش آن شده است: با هدفی شوم نیز دست به‌نوشتن زدن ادبیات نیست. بی‌گمان حالتهای بینابینی هم وجود دارد: آیا جنگل اثر آپتن سینکلر[1]، ادبیات است یا تبلیغات؟ به‌هرتقدیر، این حالتهای بینابین مبهم،

۱. آپتن سینکلر (A. Sinclair) رمـان‌نویس آمریکایی. در آثار اجتماعی تحقیقی خود تأثیرات زیانبخش فشاراقتصاد سرمایه‌داری را برمؤسسات فرهنگی و علمی فاش‌کرده است، از آثار مشهورش می‌توان از جنگل (۱۹۰۶) و دندان اژدها (۱۹۴۲) که اورا برندهٔ جایزهٔ پولیتزر ۱۹۴۳ کرد، نام برد (نقل از دایرةالمعارف فارسی مصاحب)...م.

خدشه‌ای به‌این حقیقت که در ادبیات محض و کاربردی (همچون ریاضیات محض و کاربردی)، مضمون، روش، و معیار موفقیت متفاوت است، وارد نمی‌کنند.

شاید نزدیکترین شباهت میان ریاضیات و نقاشی وجود داشته باشد. سرچشمهٔ نقاشی، واقعیت جهان مادی است، چنانکه در مورد ریاضیات نیز چنین است ــ اما نقاش دوربین و ریاضیدان مهندس نیست. اینکه نقاشی (و ریاضیات) چقدر باید به‌واقعیت نزدیک باشد، به باریک‌بینی در قضاوت افرادبستگی دارد. اگر از یک نقاش بخواهیم "داستانی واقعی تعریف کند"، مثل این است که از یک ریاضیدان بخواهیم "مسئله‌ای مربوط به‌جهان واقعی حل کند". نقاشی جدید و ریاضیات جدید از شکل قبلی خود فاصله گرفته‌اند و به‌عقیدهٔ بعضیها خیلی هم فاصله گرفته‌اند. احتمالاً درهریک از اینها ایده‌آل آن است که همیشه اندکی هم چاشنی واقعیت وجود داشته باشد، اما این چاشنی را نباید مانند مثلاهندسهٔ ترسیمی در ریاضیات، یا مثلا شکلهای کتابهای پزشکی در نقاشی، به‌اینها افزود.

با یک نقاش گفتگو کنید (من این کار را کرده‌ام) و بعد با یک ریاضیدان حرف بزنید، در این صورت از شباهت رفتار آنها متحیر خواهید شد. تقریباً هرجنبه از زندگی و هنر یک ریاضیدان، نقطهٔ مشابهی در نقاش دارد و برعکس. هربار که ریاضیدان می‌شنود "من تا به حال نتوانسته‌ام حساب و کتاب دفتر حسابم را تراز کنم"، نقاش می‌شنود که "من تا به‌حال نتوانسته‌ام یک خط مستقیم رسم کنم" ــ و عقاید در این باره به‌یک اندازه مرتبط و جالب توجه‌اند. ابداع پرسپکتیو همان ابزار مفیدی را در اختیار نقاش گذاشت که صفر در اختیار ریاضیدان. هنر قدیم همان قدر مطبوع و مطلوب است که هنر جدید؛ ریاضیات قدیم به‌همان مطلوبیت ریاضیات جدید است. بی‌تردید، درهردوموضوع، سلیقه‌ها تغییر می‌کند، اما یک نقاش قرن بیستمی با نقاشیهای در و دیوار غارها احساس نزدیکی می‌کند، و یک ریاضیدان قرن بیستمی هم با کسرهای افسونگر بابلیها. یک نقاشی را ابتدا باید بکشند و بعد به‌آن نگاه کنند؛ یک قضیه را ابتدا باید منتشر کنند و بعد بخوانند. نقاشی که دربارهٔ تصاویر خوب فکر می‌کند، و ریاضیدانی که در رؤیایش قضیه‌های زیبا می‌بروده، هردونقاش و ریاضیدانی تفریحی‌اند؛ یک اثرهنری تاوقتی که به‌منصهٔ ظهور نرسد، ناکامل است. درنقاشی و ریاضیات، استانداردهای محسوسی برای سنجش کمال وجود دارد ــ نقاش ازساختار، خط، شکل، و تاروپود سخن می‌گوید، درحالی که ریاضیدان ازصدق، اعتبار، تازگی، وعمومیت حرف می‌زند ــ لکن این استانداردها نسبتاً به‌آسانی براورده می‌شوند. هم‌نقاشها و هم ریاضیدانها میان خودشان بر سر این بحث دارند که آیا این معیارهای محسوس را حتی باید به تازه‌کارها گفت یا خیر ــ شخص تازه‌کارممکن است این معیارها را درست نفهمد و یا بیش‌از اندازه برآنها تأکید ورزد و درعین حال بینش خود را درباب معیارهای ذهنی مهمتر برای کمال ازدست بدهد. نقاشی و ریاضیات دارای تاریخ، سنت، و رشدانند. دانشجویان هردو رشته، سعی دارند که گرد جدیدترین موضوعات جمع شوند؛ اما جز دربهترین حالات، هدف را گم می‌کنند. آنها فاقد توان و نیروی خلاقهٔ لازم برای آنچه که به‌آن تأسی می‌کنند، هستند، زیرا درکنار دلایل دیگر، تجربه‌ای مبتنی برسوابق تاریخی موضوع کارشان ندارند.

من دربارهٔ ریاضیات صحبت کرده‌ام، اما به‌زبان ریاضیات صحبت نکرده‌ام، و بنابراین آنچه که تاکنون به‌زبان آورده‌ام، شایستهٔ اطلاق نام برهان به‌مفهوم ریاضی کلمه نیست. تنها امیدوارم به‌شما نشان داده‌باشم که موضوعی به‌نام ریاضیات (ماتولوژی؟) وجوددارد، واین موضوع هنری خلاق است. هنری خلاق است؛ از آن جهت که ریاضیدانها مفاهیم جدید زیبایی می‌آفرینند؛ هنری خلاق است، زیرا ریاضیدانها مانند هنرمندان زندگی می‌کنند، عمل می‌کنند و فکر می‌کنند؛ و هنری خلاق است، زیرا ریاضیدانها آن را این طور به‌حساب می‌آورند.

ترجمهٔ سعید ذاکری

دانشجوی دوره کارشناسی برق
دانشکده فنی دانشگاه تهران

شرمن ك. استین

ریاضیدان به مثابه یك كاشف•

یادآوری گرفتن از روایت یك ریاضیدان در باب این ماجرا كه چطور كلمه‌ای یادآور شد، كه طبالهای هند باستان به‌كار می‌بردند، اورا به مسئلهٔ كلاسیك تعیین مسیر فروشندهٔ دوره‌گرد هدایت كرد، ماهیت ریاضیات توضیح داده می‌شود.

ریاضیات، مانند هرشاخهٔ دیگر معرفت، محصول برخورد میان گذشته و آینده، میان معرفت اندوخته شده و كنجكاوی، میان ساختاری مستقل و سلیقه‌ها و نیازهای زمانه است. آنچه كه زمانی یك پرسش مبرم تلقی می‌شود، ممكن است در دوره‌ای دیگر اصلاً مطرح نشود، ریاضیات محض متعلق به‌یك عصر، ممكن است كه در دورانی دیگر، شاید قرنها بعد، به‌كار آید.

مسئله‌ای كه من اخیراً درگیرش بودم این جنبه‌های بالندگی معرفت را نشان می‌دهد، و راه حل آن به طعم ماجراجویانهٔ تحقیق ریاضی آغشته می‌شود. ریاضیدان كاشف متهور ناشناخته‌هاست، كه احتمالاً چیزهایی راكه به‌دنبالشان نیست می‌یابد، ونمی‌تواند پیشگویی كندكه دیگران درآینده كشفیاتش را چگونه به‌كارخواهند برد.

این ماجرای خاص از زمانی شروع شدكه جرج پرل[1] آهنگساز دربارهٔ نظریهٔ ماهرانهٔ ریتم، كه بیش ازیك هزار سال پیش درهند به‌گونه‌ای مهارت‌آمیز تكامل یافته بود، با من سخن گفت. اوگفت: "در حالی كه دربارهٔ این نظریه مطالعه می‌كردم، تنها یك كلمهٔ سانسكریت را یادگرفتم، وآن عبارت است از: *Yamátárájabhánasalagám*." من درباب معنی این كلمه از اوپرسیدم، اودرپاسخ گفت:

"درواقع این كلمه‌ای بی‌معنی است كه برای كمك به‌حافظهٔ طبالهای هندی ابداع شده است." من گفتم: "اگر طبالی بتواند آن را به‌خاطر بیاورد، می‌تواند همه چیز را به یادآورد."

• Stein Sherman K., "The mathematician as an explorer," *Sci. Amer.* (May 1961)148-158.

1. George Perle

پرل گفت: "درآن ۱۰ هجا خیلی چیزها نهفته است. همانطوركه این كلمه را تلفظ می‌كنید همهٔ سه‌تاییهای ممكن از هجاهای كوتاه و بلند را به‌كار می‌برید. سه‌هجای اول، *já mátá* ریتم كوتاه، بلند، بلند دارد. از دومی تا چهارمی، *mátárá*، بلند، بلند، بلند است. سپس دارید: *tárájd*، بلند، بلند، كوتاه، وپس از آن *rajábbá*: بلند، كوتاه، بلند وجزاینها."

من این كلمه را یادداشت كردم و دیدم كه آنچه پرل می‌گفت درست است. هرسه هجای (سه‌تایی) متوالی الگوی متفاوتی را نمایش می‌دهد، وكل كلمه همهٔ الگوهای ممكن سه‌تایی را باز می‌نمایاند. درحالی كه هركدام را یك بار و فقط یك بار به‌دست می‌دهد. به‌عنوان یك ریاضیدان توجهم جلب شد تا دریابم كه آیا چنین دنباله‌ای می‌تواند وجود داشته باشد یا خیر.

آن شب به‌این كلمهٔ باستانی برگشتم. به‌منظوربیراستن مسئله ازمفاهیم نامربوط، با قراردادن (صفر) به‌جای هجاهای كوتاه و (یك) به‌جای هجاهای بلند، به‌جای هجاها رقم قراردادم. با این نمادگذاری، عبارت *yamatárájabhánasalagám* به ۰۱۱۱۰۱۰۰۰۱ تبدیل شد.

بانهادن نشانهٔ ستاره روی این رشتهٔ ساده شده، به‌چیز جالبی پی‌بردم. دو رقم اول مشابه دو رقم آخرند؛ بنابراین اگر این رشته را به‌صورت حلقه خم می‌كردم، به‌ماری شباهت پیدا می‌كردكه در حال بلعیدن دم خود است یعنی، آخرین ۰۱می‌توانست درجای ۰۱ اول قرار بگیرد، به‌طوری كه این دوزوج ارقام به‌یك تك‌زوج تبدیل شوند (شكل ۱). اینك به‌جای ردیفی متشكل از ۱۰ رقم دایره‌ای شامل هشت رقم را می‌دیدم.

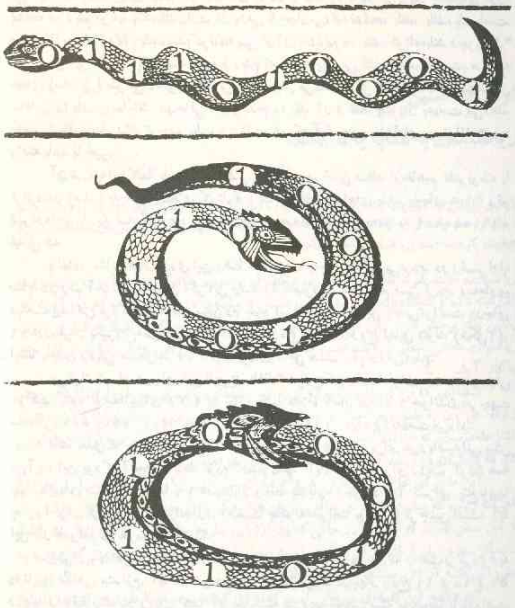
می‌توانستم از هرجای این "چرخ حافظه" شروع كنم و در اطراف آن در هرجهتی حركت كنم، تا سه‌تاییهای ۰ و ۱ را جارو كنم. مثلاً، آغاز از بالا و خواندن در جهت ساعتگرد ۰۰۱، ۰۱۰، ۱۰۰، ۰۰۰، ۱۰۱، ۱۱۰، ۱۱۱، ۰۱۱ را به‌دست می‌داد.

نكتهٔ بعدی‌كه برای من پیش‌آمد، همانطوركه خودبه‌خود برای هرریاضیدانی پیش می‌آید، این بودكه آنچه را یافته بودم تعمیم دهم. آیا، كلمه‌ای برای ردیف كردن همهٔ چهارتاییهای متشكل از ۰ ها و ۱ ها یك‌بار و فقط یك‌بار وجود دارد؟ برای پنج‌تاییها چطور؟ برای گروههایی به‌هراندازه، وضعیت چگونه خواهد بود؟ و اگر چنین است، آیا این مار همواره دم خود را می‌بلعد؟

پیش‌ازپرداختن به‌مسئلهٔ چهارتاییها، ظاهرآكار معقول این بودكه به‌عقب برگردم و به دوتاییها نگاهی بیندازم. آیاكلمه‌ای وجود داردكه هریك ازچهار زوج ۱۱ و ۱۰ و ۰۱ و ۰۰ را دقیقاً یك بار ردیف كند؟ آیا این كلمه برروی خودش بسته می‌شود؟ بایادداشت كردن دنبالهٔ ۰۰۱۱، دیدم كه به‌راحتی سه زوج ۱۱ و ۰۱ و ۰۰ را در اختیار دارم. با اضافه‌كردن یك ۰ دیگر و تشكیل دادن ۰۰۱۱۰، آخرین زوج به‌دست آمد: ۱۰. متوجه شدم كه اولین و آخرین ارقام ۰ هستند، بنابراین مار دمش را می‌بلعد. كلمهٔ پنج رقمی می‌توانست به‌صورت یك‌چرخ چهار رقمی خم شودكه یك بار وفقط یك‌بارشامل هر زوج است (شكل ۲).

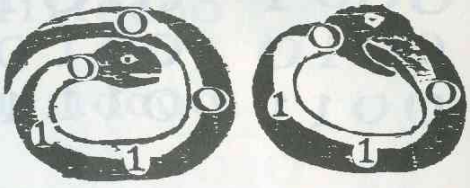
yamátárájabhánasalagám

O111010 001



شکل ۱. کلمهٔ سانسکریت پاستانی (بالا) کمکی به‌حافظهٔ طبالها بود؛ این کلمهٔ سه‌تاییهای ممکن (ترکیباتی از ضربهای کوتاه و بلند در دسته‌ای از سه) را دقیقاً یك بار ردیف می‌کند. نشاندن ۰ به‌جای ضرب کوتاه و ۱ برای ضرب بلند عدد سطر دوم را به‌دست می‌دهد، که همتای ساختار کلمه را آشکار می‌کند. به‌دلیل اینکه ۰۱ در دوسر کلمه آمده است، نویسنده به‌یاد ماری که دارد دمش را می‌بلعد، افتاد.

OO110

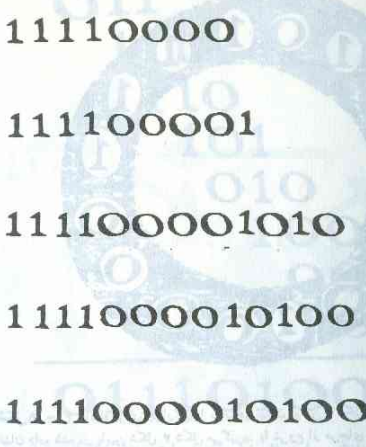


شکل ۲. عدد یاری دهندهٔ حافظه (بالا). همهٔ دوتاییها، یا زوجها، از ضربهای کوتاه (۰) و بلند (۱) را ردیف می‌کنند. همانند عدد شکل ۱، تکرار اولین و آخرین ارقام یك مار را پیشنهاد می‌کند.

حال آماده بودم تا به چهارتاییها بپردازم. من به‌طور روشمندی با ردیف کردن همهٔ دسته‌های ممکن از ارقام چهارتایی متشکل از ۰ و ۱ کارخود را شروع کردم. برای انجام این منظور نخست هشت سه‌تایی را یادداشت کردم و در مقابل هر کدام یك صفر قراردادم. این کار همهٔ چهارتاییهایی را به‌من می‌داد که با ۰ آغاز می‌شد. سپس سه‌تاییها را تکرار کردم و مقابل آنها ۱ قرار دادم (شکل ۳). از آنجا که این فهرست شامل ۱۶ چهارتایی است، دیدم که یك کلمهٔ حافظه که هر کدام از چهارتاییها را یك بار جارو کند (اگر وجود داشته باشد) باید ۱۹ رقم داشته باشد. چهاررقم اول یك چهارتایی را تشکیل می‌دهد، و هر کدام از ۱۵ رقم بعدی ارقام دیگر را تکمیل می‌کند.

حال می‌بایست کلمه را می‌یافتم. درجایی از آن کلمه رشته‌ای از چهار ۱ و درجایی دیگر رشته‌ای از چهار صفر باید وجود داشته باشد. چرا آنها را کنار یکدیگر نگذاریم و ببینیم که چه اتفاقی می‌افتد؟ من ۸ نماد ۱۱۱۱۰۰۰۰ را یادداشت کردم. سپس در فهرست خود ۵ چهارتایی را علامت گذاشتم که عبارت بودند از: ۰۰۰۰ و ۱۰۰۰ و ۱۱۰۰ و ۱۱۱۰ و ۱۱۱۱. تا اینجای کار به‌خوبی پیش رفتم، بعد برای اجتناب از به‌دست آوردن دوبارهٔ ۰۰۰۰، ناگزیر یك ۱ باید اضافه می‌کردم، تا ۱۱۱۱۰۰۰۱ به دست آید. من ۰۰۰۱ را در فهرست نشانه‌گذاری کردم. با اضافه کردن ۰۱۰ سه‌تا چهارتایی به‌دست آمد که همگی جدید بودند، و دنبالهٔ ۱۱۱۱۰۰۰۰۱۰۱۰ به‌دست آمد.

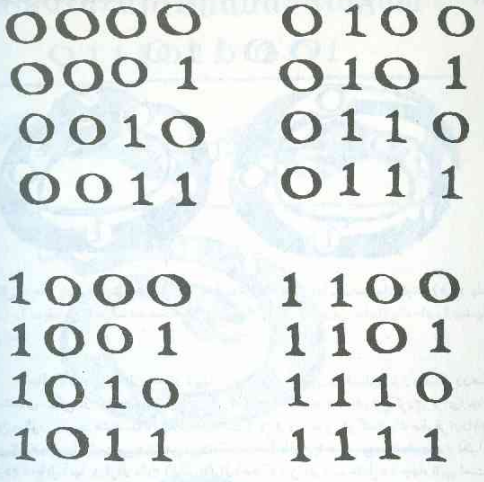
از اینجا در هر دفعه یك رقم اضافه می‌کردم، و با فهرست مقابله می‌کردم تا مطمئن شوم که رقمی تکراری وجود ندارد. در هرکدام از سه موضع بعدی انتخاب واضح بود، یکی از ارقام یك چهارتایی را تشکیل می‌داد که قبلاً علامتگذاری شده بود، اما رقم دیگر چنین نبود. آنگاه به‌کلمهٔ ۱۵ نمادی ۱۱۱۱۰۰۰۰۱۰۱۰۰۱۱ رسیده بودم.



شکل۴. ساختن عدد حافظه برای چهارتاییها. نویسنده با به رشته درآوردن ۱۱۱۱ و ۰۰۰۰ (سطر اول) از فهرست شکل ۳ آغاز می‌کند. افزودن ۱، چهارتایی ۰۰۰۱ را به‌دست می‌دهد (سطر دوم). افزودن ۰۱۰ (سطر سوم) و ۰ (سطر چهارم) چهار چهارتایی غیر تکراری دیگر را به‌دست می‌دهد. ادامهٔ روند عدد (پایین) شامل چهارتاییهای ۰ و ۱ دقیقاً یک‌بار را تولید می‌کند.

کلمات حافظه وجود داشته باشد. علاوه‌براین، من مطمئن بودم که آنها به‌صورت چرخهایی مسدود درمی‌آیند. به‌هرحال، زمان آن فرارسیده بود که فرایند آزمایش را به‌پایان برم و به‌جستجوی اثباتی برای حدس خود برآیم.

برای روبروشدن با مسئله، به‌کلمهٔ حافظهٔ هندی با روش کمی متفاوتتر نگاه کردم، در حالی که توجه خود را به‌هشت سه‌تایی تشکیل دهنده‌اش متمرکز کردم (شکل۶). ازاین لحاظ این کلمه به‌عنوان وسیلهٔ آزاستن سه‌تاییها ظاهر شد به‌طوری که دونماد آخر اولی مشابه دونماد اول بعدی است. فرض کنید کلمهٔ مورد نظر پیدا نشده باشد. چگونه می‌توان در

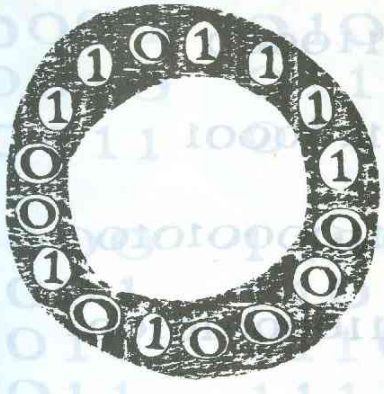


شکل۳. همهٔ چهارتاییهای ممکن از ۰ و ۱ ردیف شده‌اند، نصف لیست شامل سه‌تاییهاست که با ۰ آغاز می‌شوند (بلوکهای بالایی اعداد)؛ بقیه سه‌تاییهایی هستند که با ۱ شروع می‌شوند (پایین).

فقط چهارتا (باقی) مانده. با ملاحظهٔ رقم بعدی، متوجه شدم که نه ۱ و نه ۰ باعث هیچگونه تکراری نمی‌شوند. اما یک ۱ در مکان بعدی مشکل خواهد آفرید، که هم ۰ و هم ۱ موجب یک تکرار خواهند شد، نگرانی من از این بود که نتوانم به ۱۹ نماد برسم. به‌هرحال، معلوم شد که یک صفر در مکان ۱۶ ام موجب چنین مشکلی نخواهد شد، و برای سه محل آخر انتخابهای بدون ابهامی دادیم. من کلمه‌ام از ۱۹ نماد، شامل هریک از چهارتاییها را دقیقاً یک‌بار در اختیار داشتم: ۰۱۱۱۱۰۰۰۰۱۰۱۰۰۱۱۰۱۱۱.

به‌محض آنکه این کار را به‌پایان رساندم، به‌سه نماد اول و سه‌تای آخری نگاه کردم. آنها مشابه بودند. بدینسان این مار نیز می‌توانست دم خود را ببلعد. این کلمه می‌توانست خم شود و به‌صورت چرخی ۱۶ نمادی درآید (شکل۵).

با الهام از این موفقیت، برایم قطعی شد که باید برای پنج‌تاییها، شش‌تاییها و جز آنها نیز



شکل۵. چرخ حافظه برای چهارتاییها با برهم نهادن اولین و آخرین سه‌رقم از عدد حافظهٔ نشان داده شده در پایین شکل ۴ شکل می‌گیرد. با شروع از هرجای چرخ وپیشروی درهرجهت فهرست نشان داده شده در شکل ۳ دوباره تولید می‌شود.

راستای پیداکردن کلمه پیش رفت؟ تصمیم گرفتم که سه‌تاییها را روی تکه‌ای کاغذ پخش و زوجهای مناسب را با پیکانهایی بهم وصل کنم. یعنی پیکانی ازیك سه‌تایی به‌سه‌تایی دیگر رسم کردم، و این درحالی بود که دو نماد آخر اولی مشابه دو نماد اول دومی باشد؛ مثلاً ۵۱۰←۱۰۵ و ۱۰۵←۰۵۱. بعدازکمی جابه‌جایی سه‌تاییها و پیکانها به‌اطراف، الگوی ساده‌ای ساختم، و نمودار شکل ۷ به‌دست آمد.

همانطورکه به‌دقت به‌این پیکربندی نگاه می‌کردم، ناگهان شکل را به‌مثابهٔ نقشه‌ای یافتم که درآن پیکانها جاده‌هایی یك طرفه وسه‌تاییها شهرهایی بودند. مسئلهٔ آراستن هشت سه‌تایی به‌شکل یك کلمهٔ حافظه حالا می‌توانست به‌کمك نوعی طبال دیگر بیان شود؛ فروشنده‌ای دوره‌گردکه در جستجوی مسیری برجاده‌های یك طرفه است‌که او را فقط یك بار به‌هر شهر برساند. با کمك کلمهٔ حافظهٔ هندی یك مسیر ممکن را تعقیب‌کردم، مطابق شکل ۸، شهری‌که سفردرآن پایان می‌پذیرد به‌شهری‌که سفرازآن آغاز شده متصل است، قسمتی ازاین جاده فروشنده را از نقطهٔ پایانی به آغاز آن می‌رساند. البته این مطلب

011
111
110
101
010
100
000
001

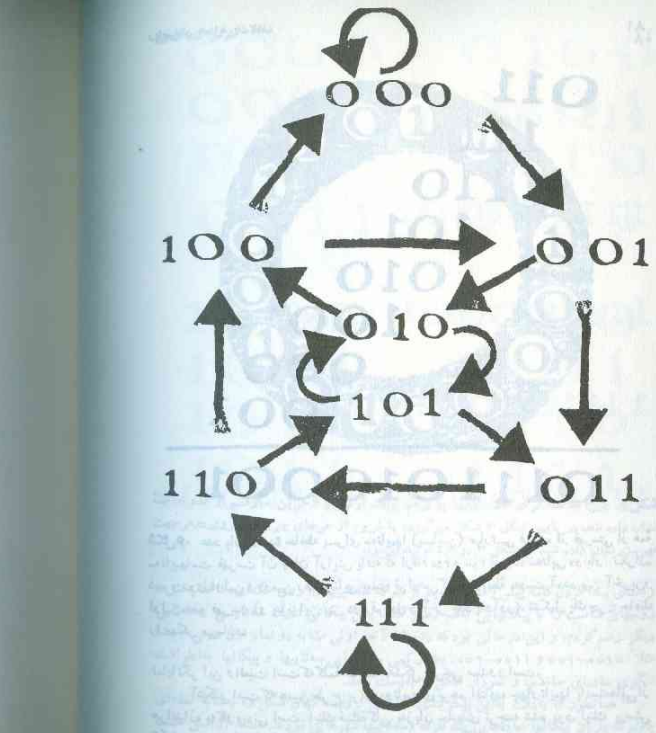
011101000 1

شکل۶. عدد باریدهندهٔ حافظه برای سه‌تاییها (پایین) عبارتی فشرده از فهرستی از همهٔ سه‌تاییهاست. فهرست آن چنان آرایش یافته‌که ارقام دوم و سوم از یك سه‌تایی دو بار تکرار شده و روی اولین و دومین رقم سه‌تایی بعدی قرار می‌گیرد. رابطهٔ به‌دست آمده بین آخرین و اولین عضو فهرست (و بنابراین بین دو رقم اول و آخر عدد یادآور)، تشکیل یك چرخ حافظه را ممکن می‌سازد.

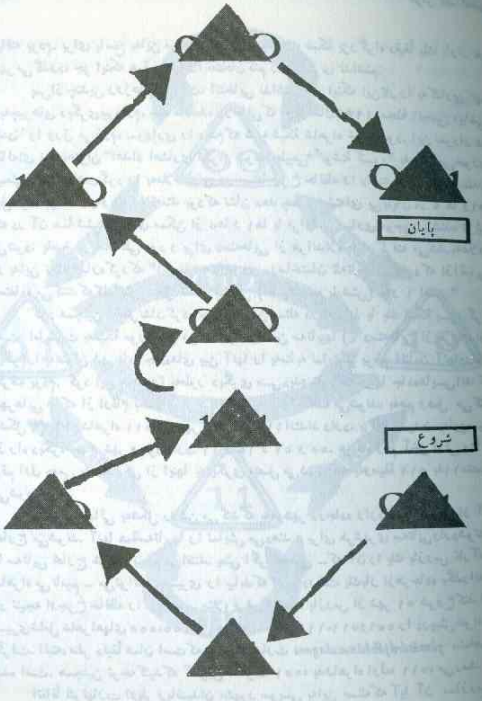
نمایانگر این واقعیت است‌که کلمهٔ حافظه به‌شکل چرخی مسدود است.

آشکار است‌که همین طرح برای دوتاییهای برهم افتاده، چهارتاییها یادسته‌هایی‌از هراندازه به‌کاربردنی است. اینك مسئلهٔ کلی به‌زبان جدیدی ترجمه شده بود. اینك پرسش "آیا همیشه یك کلمهٔ حافظه وجود دارد؟" خوانده می‌شد "آیا همواره یك‌مسیر برای فروشنده وجود دارد؟" پرسش "آیا هرکلمهٔ حافظه روی خودش بسته می‌شود؟"، اینك خوانده می‌شد آیا فروشنده همواره سفرش را در شهری به‌پایان می‌رساندکه به‌شهری‌که نقطهٔ آغازسفرش بوده متصل است؟"

بدبختانه ترجمهٔ من خوب نبود. در حل هیچیك از مسائل فروشنده به موفقیتی دست



شکل ۷. پیچ‌وخم سه‌تایی‌ها و یکانها و آرایشهای ممکنی را که سه‌تایی‌ها ممکن است در الگوی برهم افتادهٔ اعداد و حافظه‌ساز را نشان می‌دهد. به‌هر حال، همهٔ اعداد چرخهای حافظه را به دست نمی‌دهند. یکانهای بسته (منحنی شکل) در ۰۰۰ و ۱۱۱ به این مطلب که دو رقم آخر هر کدام دوی دو رقم اول قرار می‌گیرند، دلالت دارند.



شکل ۸. نقشهٔ جادهٔ ظاهر شده از میان پیچ‌وخم در شکل ۷ وقتی که سه‌تایی‌ها به‌عنوان شهرها و یکانها به‌عنوان جاده‌های یک طرفه در نظر گرفته شده‌اند. مسئله پیدا کردن مسیری است که از هر شهر یک بار می‌گذرد و آغاز و پایانش در شهرهای مجاور است. مسیر نشان داده شده یا عدد حافظه ۰۱۱۱۰۱۰۰۱ داده شده است.

تیافته بودم. برای پاسخ به‌این موضوع که آیا مسیر یك شبکهٔ بزرگراه دقیقاً یك بار از هر شهر می‌گذرد، جز اینکه همهٔ راهها را امتحان کنم راه دیگری نداشتم.

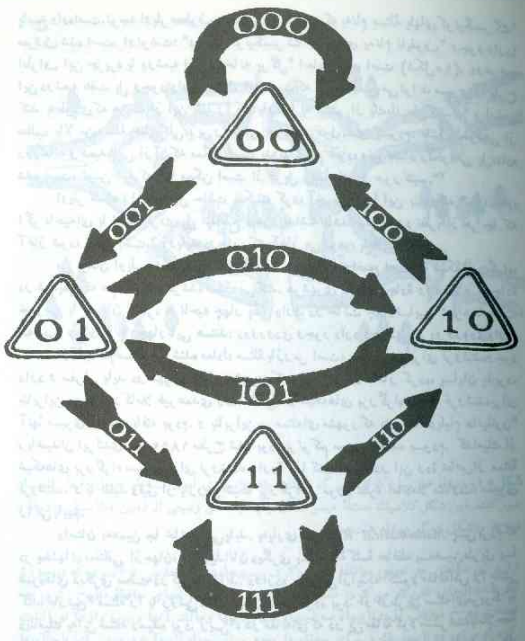
پس‌از چندین روزعلم پیشرفت، انتخابی نداشتم مگر اینکه این‌کار را به‌کناری نهم وبه‌چیزهای دیگری بپردازم. چند ماه‌بعد، درحالی که مجلد سال ۱۹۴۶ مجلهٔ انجمن ریاضی لندن[1] را ورق می‌زدم، نموداری را دیدم که شبیه شبکهٔ شاهراه خودم بود. این نمودار در مقاله‌ای تحت‌عنوان "اعداد اعشاری تکرار شوندهٔ طبیعی"[2] نوشتهٔ گـود[3] به‌چشم می‌خورد. مبحثی کاملا متفاوت گود را به‌ملاحظه‌ای در مسئلهٔ چرخ حافظه وا داشته، و او این مسئله‌را حل‌کرده بودا او به‌ویژه علاقه‌مند بودکه نشان دهد چطور رشته‌ای بی‌پایان از ۰ ها و ۱ها که در آن همهٔ شش تایپهای ممکن از ۰ها و ۱ها با فراوانی مساوی موجود باشند، تولید می‌شود. پاسخ اوکاملا کلی بود و برای دسته‌هایی از هراندازه به‌کار گرفته می‌شد. به‌علاوه او به‌این نکته اشاره‌کردکه "این نتیجه‌کاربردی درساختمان تله‌تایپهایی داردکه ازالفبایی استفاده می‌کنندکه کلماتش شامل تعداد متناهی (معمولا پنج یا شش) ۰ و ۱ است."

گود همچنین خاطرنشان‌کرده بودکه ایـن مسئله در ارتباط با یك شبکهٔ بـزرگراه است، اما نسبت به‌شبکهٔ مورد نظر من متمایز بود. من سه‌تایپها (یا دسته‌هایی از هر اندازهٔ دیگر)را به‌عنوان شهرها،و جاده‌های بین آنها را به‌مثابه نمایشگر برهم افتادن آنهادرنظر گرفته بودم. گود این مسئله را به‌طور دیگری مـی‌دید؛ خود سه‌تایپها جاده‌هایـی‌اند که شهرهایی راکه از ارقام بخشهای برهم افتادهٔ سه‌تایپها ساخته می‌شوند، به‌هم وصل می‌کند (شکل ۹).مثلا، شاهراه ۰۱۱ از شهر ۰۱ تاشهر ۱۱ امتداد دارد. برای رسیدن به‌این‌مسیر از راه دیگر، چهار شهر وجود دارد: ۱۱ و ۱۰ و ۰۱ و ۰۰. هرگاه رقم آخر اولی مشابه رقم اول دومی باشد، یکی از اینها به‌دیگری متصل می‌شود: ۰۱ به‌وسیلهٔ ۱۱۰ به۱۱۰متصل می‌شود.

نگاهی اجمالی به‌شکل روشن می‌کندکه به‌هرشهر دوجاده وارد ودوجاده هم از آن خارج می‌شوند. آنها همهٔسه‌تایپها را نمایش می‌دهند و برای هرشهری سه‌تایی‌وارد‌شونده با سه‌تایی خارج شونده برهم می‌افتند. یعنی اگر شخصی ـ که آن را یك بازرس کارآمد شاهراه می‌نامیم ـ می‌توانست مسیری را بیابدکه اورا دربست یك‌بار ازهرجاده بگذراند، در نتیجه اوچرخ حافظه را می‌پیمود. مثلا، فرض کنیدکه بازرس از شهر ۰۱ شروع کند.او مسیری‌شامل شاهراههای ۰۰۰،۱۰۰،۰۱۰،۱۰۱،۰۱۱،۱۱۱،۱۱۰و۱۰۰ را درپیش‌خواهد گرفت. البته، سفر دقیقاً همان است‌که به‌وسیلهٔ عبارت *jámátárdjábhánatalagam* مشخص شده است. همچنین توجه‌کنیدکه آخرین شاهراه، ۰۰۱، به‌شاهراه اول، ۰۱۱، می‌رسد.

اتفاقاً لئونهارت اویلر ریاضیدان مشهور سویسی به‌این مسئله‌که آیا آن بـازرس کارآمد همیشه مسیری مانند شبکهٔ "گود" درشبکهٔ بزرگراهـی دارد، حدود ۲۰۰سال پیش

1. *Journal of the London Mathematical Society*
2. normal recurring decimals
3. I. J. Good



شکل ۹. شکل دیگر مسئلهٔ مسیر در شکل ۸ از (در نظرگرفتن) دوتایپها به‌عنوان شهرهـا و سه‌تایپها به‌عنوان‌بزرگراهها ایجادمی‌شود.هدف این‌است‌که بین‌همهٔ جاده‌ها،جاده‌هایی‌را انتخاب کنیم‌که از هرشهری خارج شوند و به‌هرشهری دقیقاً یك‌بار وارد شوند. این مسئله، مشابه مسئلهٔ کلاسیکی است‌که در شکل ۱۰ توضیح داده شده.

پاسخ داده‌است. توجه اویلر معطوف به‌معمایی بوده است که به‌نام مسئلهٔ پلهای کونیگسبرگ[1] معروف شده است. او نوشت: "در شهر کونیگسبرگ جزیره‌ای به‌نام نایفوف[2] وجود دارد؛ اطراف این جزیره با دوشعبه از رودخانه پرگل[3] احاطه شده است (شکل ۱۰). درعرض این دوشعبه هفت پل وجود دارد. سؤال این است که آیا شخصی می‌تواند مسیری را طرح کند به‌طوری‌که هریك از این پلها را یك بار اما نه بیشتر از یك‌بار طی کند...؟ براساس مطلب بالا من مسئلهٔ خیلی‌کلی زیر را برای خود فرمول‌بندی کردم: نقشهٔ دلخواهی از رودخانه و شعبه‌هایی از آن‌که ممکن است بدانها تقسیم شود، ونیز تعداد دلخواهی پل‌داده شده است، تعیین کنید که آیا ممکن است از هر پل دقیقاً یك‌بار عبور کنیم."[4]

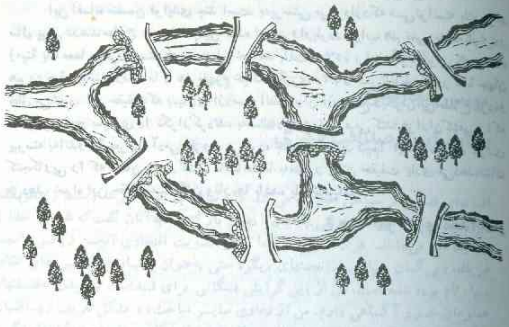
اویلر مسئله را به‌چندین حالت تفکیك کرد، آخرین آنها این بود که "سرانجام، اگر ناحیه‌ای با تعداد فردی پل متقاطع وجود نداشته باشد. سفر مورد نظر، از هر جا که آغاز شود، عملی است." [و باید درجایی که آغاز می‌شود، پایان پذیرد].

من برهان اویلر را در اینجا نمی‌آورم. به‌هرحال، واضح است که شبکهٔ بزرگراه، در شرایطی که هم‌اکنون ذکرشد، صدق می‌کند. هرشهری دقیقاً دوجادهٔ ورودی و دوجادهٔ خروجی یا به‌زبان اویلر، هرناحیه چهار پل دارد. در حالت چهارتایی‌ها شهرها هشت سه‌تایی، وجاده‌ها ۱۶ چهارتایی هستند: دورودی وجود دارد وهرشهرهم دو ورودی‌دارد.

ازآنجا که مسئلهٔ فروشنده معادل مسئلهٔ بازرس است، مسیری هم برای فروشنده‌وجود دارد و سفرش باید در شهری متصل به‌شهری که سفر را ازآن آغاز کرده، پایان پذیرد. بنابراین من به‌طورکاملا غیرعمدی ردهٔ خاصی از شبکه‌های بزرگراه را، که فروشنده‌برای آنها مسیری داشت، یافته بودم. و بنابراین بر مسئله‌ای مشهور که بوسیلهٔ ویلیام هامیلتون[5] ریاضیدان ایرلندی، در ۱۸۵۹ مطرح شده بود، پرتوکم سوبی افکنده بودم. کدامیك از شبکه‌های بزرگراه مسیری برای فروشنده دارد؟ با کنجکاوی، در این ردهٔ خاص‌از مسئلهٔ فروشنده، و با تقلید دقیق از بازرس شبکهٔ بزرگراهی مورد نظر، اما کاملا متفاوت، مسیری را می‌یابیم.

داستان به‌همین جا خاتمه نمی‌یابد. به‌یاری *Mathematical Reviews* پی بردم که در بخشهای مختلفی ازجهان، ریاضیدانان دیگری با مسئلهٔ کلمهٔ حافظه به‌همین‌طریق با شیوه‌های دیگری سخت درگیر بوده‌اند. دوازده سال قبل ازاینکه گود مقاله‌اش را منتشر کند، مارتین[6] مسئله را با روشی کاملا[7] متفاوت حل کرده بود. او ازطریق مسئله‌ای‌مربوط به دینامیك به‌این مسئله رسیده بود. ریس[7]، در مقاله‌ای که در پی مقالهٔ گود منتشر شد، باملاحظهٔ مقسوم علیه‌های مشخص چندجمله‌ایهایی به‌شکل $X^n - 1$ مسئله را حل کرد. در ۱۹۵۱ یك ریاضیدان روسی که در زمینهٔ جزءکسری مضارب اعداد مطالعه می‌کرد، روش کاملا متفاوتی

1. Konigsberg Bridges 2. Kneiphof 3. Prégel
4. "Leonhard Euler and the Konigsberg bridges," *Sci. Amer.*, July 1953.
5. William Rowan Hamilton 6. M. H. Martin
7. D. Rees



شکل ۱۰. مسئلهٔ هفت پل کونیگسبرگ محتاج یافتن مسیری است که از هرپل دقیقاً یك‌بار عبورکند. این شکل کلاسیك مسئلهٔ میرس است؛ پلها ومناطق وسیعی از زمین مطابق جاده‌ها و شهرها درشکل دیگر مسئله هستند.

را برای ساختن چرخهای حافظه تشریح کرد. پست‌هاموس[1] مهندسی فرانسوی که درحوزهٔ نظریهٔ مدارهای تلفن‌کار می‌کرد، مسئلهٔ دیگری را دربارهٔ چرخهای حافظهٔ مطرح کرد: چه تعدادی چرخ مختلف ازدوتایی‌ها، سه‌تایی‌ها، چهارتایی‌ها ومانند آنها وجود دارد؟ او اثبات کرد که برای دوتایی‌ها یك و برای سه‌تایی‌ها دو و برای چهارتایی‌ها ۱۶ و برای پنج‌تایی‌ها ۲۰۴۸ چرخ وجود دارد، و فرمولی را برای دسته‌ای ازهراندازه (nتایی) حدس زد؛ ۲ به توان $\frac{n^n - 1}{n} - 2$. در سال ۱۹۴۶ یك ریاضیدان دانمارکی این حدس را اثبات کرد.

همچنین پی بردم که چرخهای حافظه‌کاربردهای تکنولوژیکی یافته است. کامپیوتری که در چکسلواکی ساخته‌شده چرخ حافظه‌ای از ۱۵۲۴ نماد را برای جستجودرمیان‌تعداد مساوی از مکانهای حافظه در یك حافظه به‌کار می‌گیرد. در دامودار والی[2] نزدیك کلکته

1. K. Posthumus 2. Damodar Valley

(چرخ سرنوشت حالا کاملا تغییر کرده) چرخ حافظه‌ای در یك دفتر مرکزی به‌طور خودکار گزارشهای واصله از ۶۴ اندازه‌گیر، ارتفاع باران را به‌دقت بررسی می‌کند.

این افسانه متضمن فوایدی چند است. به‌پرسشی می‌پردازد که می‌توانسته یك هزار سال پیش درهند مطرح شود اما چنین نشده است. واویلردرخواب هم نمی‌دید که کارش در زمینهٔ یك معما درقرن بیستم کاربرد عملی خواهد یافت. علاوه براین، گوناگونی کاربردها، هم روحیهٔ ریاضی زمانهٔ ما و هم مفهوم خیال انگیزی را باز می‌تاباند که در همهٔ جهان خلق می‌شود. این حقیقت که بسیاری ازدست اندرکاران از نتایج دیگران بی‌اطلاع بوده‌و بنابراین نتایج بسیاری را تکرار کردند، به‌مسئله دیگری اشاره می‌کند: هزاران کشفی را که پیوسته به‌اندوختهٔ معرفت آدمی افزوده می‌شود، چگونه ثبت کنیم؟ این داستان نیروی کنجکاوی را که انسان را درکشف ناشناخته‌ها به‌منظور یافتن حقیقت یاری می‌دهد، نشان می‌دهد، خواه این حقیقت سارگان وقاره‌ها باشد، یا ریاضیات.

ترجمهٔ امیر اکبری مجدآبادنو

موزس ریچاردسون

ریاضیات وصداقت فکری•

افسانه‌ای قدیمی از سیاحی حکایت می‌کند که سالها در میان شیرها زیست و سخن گفتن به زبان آنها را آموخت. وقتی به میان آدمیان بازگشت، به‌آنان گفت که شیرها خدا را نیز یك شیر می‌دانند. هرازگاهی، از خدا برای عضویت افتخاری انجمن ریاضی، انجمن فیزیك، وبی‌گمان بسیاری ازانجمنهای دیگر، حتی به‌عنوان پشتیبان اغلب نیروهای نظامی دنیا، نام برده شده است. من از این گرایش همگانی برای قداست بخشیدن به‌فضیلتهای همنوعان خود آگاهی دارم. من از دعاوی سایر مباحث، و مشکل تعریف ریاضیات به‌گونه‌ای که همهٔ ریاضیدانان را خشنود سازد نیز نیك آگاهم. علیرغم همهٔ اینها، اگر نه به‌عنوان یك تعریف، دست‌کم به‌عنوان شرحی کوتاه چنین پیشنهاد می‌کنم: ریاضیات صداقت فکری پایدار است. در ادامهٔ سخنانم، می‌خواهم این گزاره را به‌تفصیل بیان کرده و برخی از استلزامهای آن را برای معلمین خاطرنشان سازم.

نخست دیدگاه ریاضیدانان امروز را در مورد ریاضیات بررسی کنیم. بی‌گمان، آشناترین نمونهٔ تفکر ریاضی، هندسهٔ اقلیدسی است. گفتگویی میان ریاضیدانی استثنائاً صبور و یك فرد عامی برخلاف معمول با هوش را در ذهن خود مجسم کنید. فرد عامی گفتگو را با این پرسش آغاز می‌کند که آیا قضیهٔ فیثاغورس درست است؟ ریاضیدان با اثبات قضیه به‌روشی متداول، مثلاً استنتاج آن از قضایای مثلثهای متشابه، به‌او پاسخ می‌دهد. فرد عامی درمی‌یابد که این بحث دنبالهٔ رسوخ ناپذیری از قوانین صریح منطق استنتاجی است، که تنها ثابت می‌کند اگر قضایای مثلثهای متشابه درست باشند، قضیهٔ فیثاغورس نیزدرست خواهد بود. آنگاه ریاضیدان این قضایا را از گزاره‌های بازهم ساده‌تری استنتاج می‌کند، وبه‌همین ترتیب کار خود را ادامه می‌دهد. اما ازآنجا که اوباید از دور و تسلسل پرهیز کند، نهایتاً باید از این نحوهٔ استدلال بازایستد وکل بحث را برپایهٔ مجموعه‌ای از گزاره‌های اولیه، به‌نام اصول موضوع، که بدون اثبات رها می‌شوند، استوار کند. آنگاه فرد عامی می‌پذیرد که اگر این اصول موضوع درست باشند، قضیهٔ فیثاغورس نیز درست خواهد

• Richardson Moses, "Mathematics and intellectual honesty," *Amer. Math. Monthly*, 59(1952)73-78.

بود، اما ادعا می‌کند که گیج شده است زیرا مفهوم برخی اصطلاحات، چون "مثلث"، را که به‌کاررفته است نمی‌فهمد. ریاضیدان با تعریف مثلث به‌روشی متداول، با بهره‌گیری از اصطلاحات نقطه و "پاره‌خط" و مانند آنها، به او پاسخ می‌دهد. حال، فرد عامی می‌گوید که اگر معنی اصطلاحات "پاره خط" وجز آنها را می‌فهمید، مفهوم مثلث را نیز درک می‌کرد. سپس، ریاضیدان این مفاهیم را نیز به‌کمک اصطلاحاتی بازهم ابتدایی‌تر تعریف می‌کند، و به‌همین‌ترتیب ادامه می‌دهد. اما در اینجا نیز، چون باید از دور و تسلسل پرهیز کند، عاقبت باید در یك جایی متوقف شود و تمامی تعریفهایش را برپایهٔ مجموعه‌ای از مفاهیم اولیه بیان کند که اینها نیز نامعین و تعریف نشده باقی می‌مانند.

در اینجاست که، او هندسهٔ اقلیدسی را به‌یك علم (ریاضی مجرد تبدیل کرده است، که عبارت است از مجموعهٔ گزاره‌هایی که برخی اثبات نمی‌شوند (اصول موضوع)، اما بقیه (قضایا) نتایج منطقی آنها هستند؛ ودرآن برخی از اصطلاحات تعریف نشده‌اند، اما بقیه برحسب آنها تعریف می‌شوند.

آنگاه فردعامی می‌پرسد: "آیا درجهان اشیایی یافت می‌شوند که این احکام درمورد آنها صادق باشند؟"

ریاضیدان پاسخ می‌دهد: "ثابت کرده‌ایم که اگر اشیایی مانند نقاط وجز آنها، وجود داشته باشند، که دراصول موضوع صادق کنند، آنگاه قضایا نیز در مورد آنها صادق‌خواهند بود. ریاضیات محض در مورد این مسئله چیزی بیش از این نمی‌گوید. مسائل درستی و نادرستی به‌ریاضیات کاربردی تعلق دارند. ازآنجاکه درستی یك بحث استنتاجی ازمفهوم جملاتی که دربردارد، مستقل است، جملات تعریف‌نشده را به‌صورت نمادهای ساختگی‌در نظرمی‌گیریم. بدینسان در بررسی هندسه به‌عنوان یك علم ریاضی مجرد به‌جای "دو نقطه یك‌خط را تعیین می‌کنند" باید بنویسیم "دو بر یك بر را تعیین می‌کنند". ریاضیات محض، عبارت است ازکلیهٔ علوم ریاضی تجریدی. اگردریك علم‌ریاضی مجرد به‌جای‌اصطلاحات تعریف نشده معانی واقعی بنشانیم آنگاه‌یك تعبیرواقعی یا کاربردی ازآن خواهیم داشت. (ریاضیات‌کاربردی)، عبارت است ازکلیهٔ این تعبیرهای واقعی، و خود ریاضیات، هر دو ریاضیات محض و کاربردی را دربر دارد. اگر به‌طریقی در می‌یافتیم که به‌ازای تعبیر مفروضی اصول موضوع درست‌اند، آنگاه از صحت قضایا نیز اطمینان می‌یافتیم. اما به ندرت پیش می‌آید که در مورد درستی اصول موضوع اطمینان حاصل‌کنیم. سعی ما برآن است که تا آنجاکه ممکن است آنها را ساده‌تر و قابل فهم‌ترکنیم. اما نمی‌توانیم درستی آنها را تضمین کنیم. در ریاضیات‌کاربردی اصول موضوع خود را به‌عنوان فرضیه‌هایی با کارایی مطلوب به‌کار می‌بریم، تا قضایای مفیدی فراهم سازیم. اما نمی‌توانیم قول بدهیم که سودمندی آنها همیشگی باشد. اگرفرضیه‌ای علمی به‌نتیجه‌گیری یگانه‌ای دلالت کند که با مشاهدات تطابق ندارد، آنگاه قطعاً می‌دانیم که این فرضیه آن چنان‌که می‌نماید صحیح نیست، اگرمعلوم شودکه تمامی استنتاجهایی‌که تاکنون ازآن شده‌است بامشاهدات تطبیق می‌کند، بازهم نمی‌توانیم با قاطعیت آن را درست بدانیم، بلکه تنها می‌توان آن‌را موقتاً فرضیه‌ای باکارایی مطلوب دانست."

سپس فردعامی می‌پرسد: "آیا درسایر مباحث علمی‌نیزهمین وضعیت‌حاکم نیست."

ریاضیدان پاسخ می‌دهد: "گمان مـی‌کنم حق بـا شما باشد. اگر در سازمـاندهی ساختار هرمبحث منطقی بکوشیم، سرانجام آن را به‌قالب یك علم ریـاضی تجریـدی در می‌آوریم، و اگر در عمل ازآن استفاده کنیم، تعبیری واقعی از این علم ریاضی تجریدی را به‌کاربرده‌ایم. ریاضیات، از این لحاظ حتی بسیار بیشتر از مفهوم سابقش، به‌عنوان علم مکان وکمیت، زیربنای همهٔ‌علوم است. دیوارنمایی در تالار علم نمایشگاه جهانی‌شیکاگو، باعنوان درخت دانش، این‌مفهوم را چنین نمایش می‌دهدکه ریاضیات را در ریشهٔ‌درخت و علوم پایه را به‌لحاظ قدمتشان، شاخه‌هایی از درخت کـه بیشتر توسعه یافته‌انـد و علوم کاربردی را به‌عنوان شاخه‌های جوانتر، شاخه‌هایی که کمتر گسترده شده‌اند، قرار می‌دهد و استحکام آنها را از پایین به‌بالاکشیده است. بنابرتعریفی کـه ما از ریـاضیات محض و کاربردی داریم، درواقع، همهٔ‌علومی‌که ساختارشان استنتاجی است، درنهایت به‌شاخه‌هایی از ریاضیات تبدیل می‌شوند. زمانی این نکته حتی از نظر برخی از ریاضیدانان نیز یك فاجعه قلمداد شده بود، اما واقعیتْ آن است‌که هرگونه‌کوششی برای محدود ساختن معنی واژهٔ ریاضیات آن را چندان هم محدود نمی‌کند."

حال، فردعامی چنین می‌گوید: "شما در واقع چشم‌انداز الهام‌بخشی را دربرابرمن گشودید، و من اکنون درمی‌یابم که چرا ریاضیدانان تا این حد، شیفتهٔ موضوع تخصصی خود هستند. اما هنوز شما به‌من نگفته‌اید که چرا قضیهٔ فیثاغورس درست است."

وپاسخ ریاضیدان این‌است‌که: "من نشان داده‌ام که‌اگر درعمل، اشیایی وجود داشته باشندکه دارای همان خواصی باشند که در اصول موضوع برای نقاط و مانند آنها بیان کردیم، آنگاه قضیهٔ فیثاغورس باید برای این اشیاء درست باشد. درحالی‌که از بسیاری جهات به‌نظر می‌رسد هندسهٔ اقلیدسی‌برای نیل به‌اهداف عملی کفایت می‌کند، من نمی‌توانم ادعا کنم که چنین اشیایی وجود دارند."

فرد عامی می‌پرسد: "اما مگر یونانیان نمی گفتند که اصول موضوع هندسه درست هستند، زیرا خود بدیهی‌اند؟"

ریاضیدان پاسخ می‌دهد: "این مطلب برای آنان‌که ریاضیدانان بزرگی را دردامن خود پرورده‌اند، نقطهٔ ضعفی محسوب می‌شود. تاریخ علم گذرگاهی است‌که برسراسرآن استخوانهای پوسیدهٔ فرضیاتی ریخته شده است کـه زمانی خود-بدیهی تصور مـی‌شدند، ولی گذشت زمان نشان داده‌که آنها فرضیهایـی غلط‌اند. در واقـع، بسیاری از پیشرفتهای بنیادی به‌این شکل حاصل شده‌اند که در صحت فرضیهایی تردید شدکه زمانی چنان خود-بدیهی تصور می‌شدندکه درستی آنها به‌طور ضمنی پذیرفته شده بود. برای منظورهـای عملی هندسه، می‌توان همانند هندسهٔ اقلیدسی، اصول موضوع دیگری را به‌کاربرد، و این هندسه‌های نااقلیدسی از بسیاری جهات با هندسهٔ اقلیدسی در تضادند. می‌ترسم که اگـر واژهٔ "حقیقت" را به‌نحوی به‌مفهوم بی‌پیرایهٔ حقیقت مطلق تعبیر کنید، آنگاه نتوانم ادعـا کنم که هندسهٔ‌اقلیدسی‌درست‌است. گفته می‌شود که درزمانهای دور یکبار پونتوس‌پیلاتوس[1]

۱. Pontius Pilate، والی یهودا ازطرف دولت روم.

پرسیده بود: "حقیقت چیست؟" و تا آنجا که من می‌دانم، هیچ پاسخ قانع‌کننده‌ای به این پرسش او داده نشده است. خوشبختانه، ریاضیات بی‌نیاز به‌حقیقت مطلق بـه‌پیش می‌رود. نظریه‌های پی‌دربی هرچه بیشتر به‌دقت نزدیک می‌شوند، به‌این معنی کـه هرنظریهٔ جدیدی نسبت به‌نظریه‌ای‌که جای خود را به‌آن سپرده است، باید پیشگویی درستتری از مجموعهٔ حقایق مشاهده شدنی عامتری ارائه دهد. همهٔ دانشمندان می‌دانند که‌کشف حقیقت حتی در این مفهومی‌که مستلزم آزمایش‌است،وبه‌طریق اولی درمفهوم مطلق، تا چه‌حد دشوار است. اگر افزون بر دانشمندان سایرین نیز از این مشکل آگاه بودند شاید دنیای بهتری داشتیم، زیرا این آگاهی برای جزم‌اندیشی تعصب‌آمیز نقش پادزهر را دارد. در سراسر تاریخ، همواره‌کسانی‌که خود را متقاعد ساخته بودندکه عاری از خطا هستند، به‌سرکوب آزادی پژوهش وسانسور آزادی‌بیان گرایش‌داشته‌اند،گاهی بربایهٔنظریاتی کم‌وبیش‌شگفت‌انگیز، در حالی‌که حقیقت مطلق در نزد آنها خود-بدیهی بود، سایرین را بـه سادگی و به‌کمک بحثهایی‌که ازدیدگاههای متناقض تقویت می‌شد،گمراه می‌کردند، وحتی‌گاه تمایل شدیدی به‌قتل مخالفینشان نشان می‌دادند. هرآدم بالغی باید بیاموزد که با چنین مشکلات غیرقابل احترازی زندگی‌کند. گفتهٔ یکی از بازیگران قدیمی نمایشنامه‌های کمدی را به‌یادمی‌آورم که می‌گفت: "این جهل نیست‌که مایهٔ زحمت است ــ بلکه این تصورکه مردم فکرمی‌کنند جاهل نیستند، همه‌را به‌زحمت انداخته است."

حال فردعامی، که بایدبه‌یاد داشته باشیدکه یك عامی برخلاف معمول باهوش‌است، می‌گوید: "شمابه‌من نشان داده‌ایدکه ریاضیات درواقع خلاصه‌ای از صداقت فکری‌است، که دامنهٔ آن‌تا افقهای نامعلومی هم‌کشیده شده است. شما بیش‌ازآنچه می‌توانستید اثبات کنید، ادعا نکردید،حتی‌وقتی قضایای‌خود را ازاصول موضوعی استنتاج‌کردیدکه‌به‌آسانی می‌توانستید مرامتقاعد سازیدآنهاحقیق خود-بدیهی‌اند، مرا ازخطراین اشتباه آگاه‌کردید، و امکان قبول فرضهای دیگر را خاطر نشان‌کرده و مورد بررسی قـرار دادید. یافشاری شما بربیان صریح فرضها و اصطلاحات تعریف نشده، بر اثبات منطقی و اکید قضایا و بر وضوح تعاریف الهام‌بخش است. ریاضیات نقطهٔ مقابل خشك انـدیشی، تعصب گـرایی، و سلطه‌جویی است، ومن‌گمان می‌کنم‌که تصادفی نیست‌که خودکامگان اغلب با ریاضیدانان‌و سایر دانشمندان از در دشمنی درآمده و حتی‌گاهی آنان را به‌قتل رسانده‌اند. من تصمیم دارم در اولین فرصت به مطالعهٔ ریاضیات بپردازم.

با این ماحصل راضی‌کننده، بیایید ریاضیدان و فردعامی را ترك گوییم، زیـرا از عاقبت‌کار می‌ترسم که پس‌ازآنکه عامی در کلاسهای گوناگون درسهای ریـاضی شرکت کرد آنگاه نظریاتش چه خواهد بود. من به‌شدت می‌ترسم‌که اوعملاً در کلاسهای درس چیزی ازاین ایده‌آلهای صداقت فکری را نبیند.

برتراند راسل در جایی می‌گوید‌که یکی از مشکلترین چیزها در دنیا برای آدمی این است‌که در برابر مخاطبینی بایستد و از سخن‌گفتن بیش‌ازآنچه‌که می‌داند خودداری کند. می‌گمان همهٔ ماممکن است‌گاهی شتابزده‌سخن بگوییم و یا خطای صادقانه‌ای‌مرتکب شویم. من کمال‌طلب نیستم. اما می‌ترسم کـه معلمین ریاضی و علـوم طبیعی همواره آن

ایده‌آلهای‌متعالی راکه ریاضیدان‌صبور ما به‌تفصیل توصیف کرده‌است عملی نسازند. امروزه غالباً این‌طور به‌نظرمی‌رسدکه نفوذ آزادانهٔ عقل‌گرایی علمی‌تیزرنگ باخته‌است وآموزش در نزد معلمین به‌یك دیکتهٔ خودکامانه، و در نزد محصلین به‌برگردان پاسخهای بی‌اندیشه‌و فاقد تفکری مبدل شده است. یك‌بار ازمدیر دبیرستانی شنیدم که می‌گفت: رویهمرفته‌هندسه عمدتاً موضوعی است مربوط به‌حافظه. آیا ممکن است او نیز به‌همان پژوهشی مـراجعه کرده باشدکه من به‌عنوان طرح اولیهٔ خود از ریاضیات امروزی ازآن بهره‌گـرفتم. من به‌طورکلی درستی واکنش وی یا تجدید خاطره‌اش را نسبت به‌مطالعاتش انکار نمی‌کنم. ترسم فقط از این بابت است‌که اواحتمالاً این نتیجه را از بررسی دقیق روشی‌که هندسه را به‌او آموخته بودند، به‌دست آورده باشد. اما این راکه باید چنین باشد انکار می‌کنم. من با معلمینی از ریاضیات دورهٔ دوم دبیرستان دیدار کرده‌ام‌که ظاهراً هندسه را براساس استدلال سنتی تدریس می‌کردند، اما روش آنان بـرای تـدریس جبر و مثلثات چنان جا افتاده بودکه‌گویی این مباحث چیزی بیش‌از یك بازی بیگانه بـا نمادها نیستند. همین مطلب را می‌توان دربارهٔ برخی از معلمین سالهای اول دانشگاه عنوان‌کردکه جبرومثلثات وحتی حساب دیفرانسیل و انتگرال و معادلات دیفرانسیل را به‌شکل کتابهای دورهٔ آشپزی و انباشته از فرمولها و دستورالعملها درآورده‌اند. نیاز به‌این‌کار را به‌شدت انکارمی‌کنم.

معروف است کـه آدمی در تقسیم‌بندی مقوله‌ای ذهن خـود از توانـایی شگـرفی بـرخوردار است. کسانی‌که درکار ریـاضی خـود، برحسب عـادت از صداقت فکـری برخوردارند، ممکن است در سایرمباحث، یادرمعاملات وامور شخصی خود، که‌واکنشهای هیجانی، تعصبات دیرینه، حسد و غیره می‌توانند برآنها حاکم باشند، خیلی ازاین‌ایده‌آلها دور شوند. حتی کسانی‌که درشاخه‌ای از ریاضیات ازاندیشه‌ای عمیق وقاطع بهره‌می‌گیرند ممکن است در دیگر شاخه‌های خود ریاضیات نیز اندکی از ایده‌آلهایشان فاصله گیرند. من براین‌اعتقاد نیستم‌که مطالعهٔ ریاضیات به‌خودی خود به‌پیدایش صداقت فکری‌درآدمها می‌انجامد. با این حال، براین نظر پای‌می‌فشارم‌که ریاضیات آن‌بحث ایده‌آلی است‌که محاسن صداقت فکری را بردانش‌آموز خاطرنشان می‌سازد. دراین عصر انسان تبلیغات و هزاد پلیدترش متخصص نشر اطلاعات و عقاید، آیا می‌توان‌کار مهمتری برای آموزش‌و پرورش انجام داد؟

اما این مهم تنها وقتی تحقق می‌پذیردکه ریاضیات به‌درستی آموزش داده‌شود. تنها درصورتی می‌توان ایده‌آلهای صداقت فکری را با ارائهٔ مثال و شیوه‌های آموزشی بـه محصلین انتقال داد‌که ذهن خود معلم ازآنها سرشار بـاشد و در ایـن صورت است‌کـه فرصتهای زیادی برای بیان آنها درکلاس بـه‌دست خواهـد آورد. اما اگـر ریاضیات به‌عنوان آموختن عادتهایی بی‌اندیشه و مطالب بـی‌معنی، تنها به‌عنوان یك مشق نظـامی، صرفاً به‌صورت تکنیکهایی غیراستدلالی، انجام اعمالی مکانیکی بـا نمادها ارائه شود، روشی که تنها توسط معلمین مستبد توجیه می‌شود، آیا این ایده‌آلها به‌کار خواهند آمـد؟ اگربحثهای نادرست به‌عنوان برهانهای صحیح ارائه شوند ومعلوم نباشدکه نادرستی آنها در دروس بعدی آشکار می‌شود یا خیر، آیا این ایده‌آلها به‌کار خواهند آمد؟ من نکته‌ای

از قوردر را یادآوری می‌کنم که می‌پرسید آیا می‌توان قانع شد کـه "یك برهان سطحی ممکن است ارزشی داشته باشد که برهانی عمیق فاقد آن باشد." اصلاً منظورم این نیست که آموزش کلاً باید خشك وبیروح باشد. من هیچ ایرادی نمی‌بینم کـه بـرهانهای نسبتاً مشکل حذف شوند وبحثهایی ابتکاری‌وغیررسمی جانشین آنها شوند. اعتقاد من این‌است که درصورتی‌که برهانی ژرف و دقیق نباشد، نباید چنان ارائه شودکـه گـویی همهٔ آن صفات را داراست. درغیراین صورت معلم در مـوضعی است کـه نسبت به‌کسانـی که اسکناسهای جعلی را وارد مجرای پولی جامعه می‌کنند و افـراد ساده‌لوح از جانب آنها شخصاً دچار خسران مالی می‌شوند، کمتر دفاع‌پذیر است.

ریاضیات باید به‌گونه‌ای آموزش داده شودکه این نکات را به‌دانش‌آموزارائه‌دهد:

۱. درکی از منشاء طبیعی و رشد تکاملی ایده‌های اساسی ریاضیات؛

۲. نگرشی منطقی و رابطه‌ای سالم بین استدلال صحیح، تعاریف دقیق، وفهم روشن فرضیات اساسی؛

۳. درك نقش ریاضیات به‌عنوان یکی از شاخه‌های تلاش آدمی و ارتباطش با سایر شاخه‌های معرفت بشر؛

۴. بحثی پیرامون برخی از مسائل مهم ریاضیات محض وکاربرد آنها؛

۵. فهم ماهیت و اهمیت عملی تفکر مبتنی براصل موضوع.

باید تلاشی به‌عمل آید تا برتمایز میان آشنایی و فهم، میان برهان منطقی‌وعملیات ماهرانهٔ سرراست جا افتاده، میان نگرش نقادانهٔ ذهن وعقیده‌ای‌که برحسب عادت‌غیرقابل تردید به‌نظر می‌رسد، میان معرفت علمی و مجموعه‌ای دایرةالمعارفی از حقایق، و پندار صرف و حدس تأکید شود.

این ملاحظات نه تنها خطاب به‌معلمین ریاضیات دورهٔ دوم وسطوح‌کالج است، بلکه به‌کسانی هم اشاره داردکه آنها را تربیت می‌کنند. اگر معلمی بخواهد به‌ایـن اهداف جامهٔ عمل بپوشاند، باید برای آن پس زمینه‌ای هم داشته باشد. چنانچه مرا از بابت بـد تعبیرکردن کتاب مقدس آموزشی نوین ببخشید، باید بگویم‌که او نه‌تنها باید دانش‌آموز را بشناسد، بلکه باید با مبحث درسی نیز آشنایی داشته باشد، اما منظور من آن نیست که یك‌معلم دورهٔ دوم دبیرستانی ملزم است مطالب زیادی در مورد هندسهٔ دیفرانسیل، توپولوژی و یا حساب تغییرات بداند. اما او باید در مفاهیم اساسی ریاضیات مقدماتی پایه‌ای قوی داشته باشد. بدبختانه، اغلب ازاوانتظار دارندکه این مبانی را ازطریق مبادلات علمی کسب کند. خیلی وقتها هم، این فرایند به‌وقوع نمی‌پیوندد؛ معلم آینده از دورهٔ آموزش ریاضی خود با تجهیزاتی از روشهای نامتجانس، وبا اندك درکی از تکـامل تـاریخی، فلسفی، مفاهیم اساسی، ماهیت مطلب و روحیه، یا حتی با درکی ناقص از هدف وجود مبحث‌مورد‌مطالعهٔ خود، مجهز می‌شود، یا اینکه اصلاً هم درکی از آنها حاصل نمی‌کند.

هردانش‌آموزی، دریك جامعهٔ آزاد اندیش باید یاد بگیردکـه ارزش یك نظریـهٔ علمی نه با دستورهای آمرانهٔ صاحبان قدرت، وته حتی با تحسین عمومی، بلکه تنها به‌کمك بررسی بی‌غرضانه و آزادانهٔ شواهد موجود برله وعلیه آن و نیز برله و علیه نظـریه‌های

احتمالی دیگر تعیین می‌شود. تحقق این امر در مباحث مورد مجادله کاری است دشوار. برای این منظور چه آموزش وتعلیمی بهتراز آن است‌که‌کار خود را از صداقت فکری از طریق ریاضیات آغاز کنیم، جایی‌که مجادله تقریباً غایب است و معیارهای صداقت فکری به‌حدی متعالی رسیده‌اند؟ بی‌گمان اهداف عینی دیگری هم درآموزش‌ریاضی مطرح‌اند، اما آیا در این عصر مخاطره‌آمیز کـه آزادی بیان و اندیشهٔ از هر سو مورد تهاجم قرار گرفته، هدف بهتری هم هست‌که به‌آن پرداخته شود؟

ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی

رالف فیلیپ باوس

آیا می‌توان ریاضیات را قابل فهم کرد؟*

چرا ما ریاضیدانها در شناساندن علم خودمان به‌دیگران با این همه دشواری روبرویم؟ خیلیها احساس نامساعدی نسبت به ریاضیات دارند که، به‌حق یا ناحق، معلمانشان را مقصر می‌دانند[۱]. شاگردان گله می‌کنند که کتابهای درسیشان را نمی‌فهمند؛ این نظر از زمانی که خود من نیز شاگرد بودم، وشاید هم خیلی پیش از آن، شایع بوده‌است. متخصصان رشته‌های دیگر نیز خود را ناگزیر می‌دانند که برداشتهایشان را از ریاضیاتی که زمانی با آن درگیر بوده‌اند، بنویسند. اما، تنها موقعی که من ویراستار مجلهٔ ماهانهٔ ریاضی امریکا (مانتلی) شدم، کاملاً درك کردم که ریاضیدانها برای اینکه نوشتهٔ خود را حتی برای ریاضیدانهای دیگر (جزمتخصصان همکارشان) قابل‌فهم کنند، با چه دشواریهایی مواجه‌اند. تعداد مقاله‌هایی که به سبب نامفهوم بودن، و نه به‌علت کاستیهای ریاضی، پس‌فرستاده می‌شوند، حیرت‌آور است. یکی از ویراستاران پیش‌ازمن نیز، ۳۵ سال پیش، به‌همین تجربه دست‌یافته بود[۲].

پرسش خود را به‌گونه‌ای دیگر مطرح کنیم: چرا گفتار و نوشتارما درباب ریاضیات چنان است که به‌گونه‌ای بارز از آنچه می‌خواهیم صریحاً انجام دهیم جلوگیری می‌کند؟ کاش جواب را می‌دانستم. با این حال، می‌توانم دست‌کم به‌برخی اصول اشاره کنم که معلمان و مؤلفان اغلب از آنها تخطی می‌کنند. شاید یکی از علل این تخطی آن باشد که این اصول یا آنچه که بسیاری از همعصران من ظاهراً حقایقی بدیهی می‌دانند، در تناقض است. (اصول من مشترکات اندکی نیز با گزارش انجمن ریاضی امریکا (MAA) درباب چگونگی تدریس ریاضیات دارد [۳].)

تعاریف مجرد. فرض کنید می‌خواهید به‌کودك خردسالی یاد بدهید که "گربه" چیست. آیا برای او توضیح می‌دهید که گربه پستانداری ذاتاً گوشتخوار ونسبتاً کوچك است، با پنجه‌هایی جمع شدنی وصدایی مخصوص به‌خود، و . . .؟ شرط می‌بندم که این‌طور نیست.

* Boas R. P., "Can we make mathematics intelligibel?," *Amer. Math. Monthly*, December 1981, 727-731.

احتمالاً به آن کودك گربه‌های مختلفی نشان می‌دهید، و هربار آن را "پیشی" صدامی‌زنید، تا آنکه ایدهٔ گربه در ذهن کودك نقش ببندد. به‌بیانی کلیتر، بهترین راه برای تعمیم، انتزاع از تجربیات است. آنها را باید گام به‌گام آموخت؛ حجم زیاد در زمانی‌اندك فشار زیادی به‌ذهن وارد می‌آورد.

آزمونی هست که با آن می‌توان برخی ریاضیدانهای حرفه‌ای آینده را در سن کم شناخت. اینها شاگردانی هستند که جمله‌هایی با سرآغاز "X را پنج‌تایی مرتبی چون (a, T, π, σ, B) بگیرید که . . ." را به‌سرعت درك می‌کنند. چنین اشخاصی اگر پس‌از شنیدن این جمله اضافه کنند که "من قبلاً هرگز مفهوم این را واقعاً نفهمیده بودم"، حتی آتیهٔ بهتری نیز خواهند داشت. البته، همهٔ ریاضیدانهای حرفه‌ای این‌طور نیستند؛ اما ریاضیدان حرفه‌ای شدن دشوار است، مگر اینکه دست‌کم بتوان این نوع نوشتار را فهمید.

با همهٔ این حرفها، جز در مواردی که فوق‌العاده خوش‌شانس باشید، اکثر مخاطبهای شما ریاضیدان حرفه‌ای نیستند، نمی‌خواهند باشند و هرگز هم نخواهند شد. اولاً، آنها هرچیزی را که با یك تعریف مجرد آغاز شود نمی‌فهمند (چه رسد به‌یك دوجین تعریف در آن واحد)، زیرا هنوز چیزی درچنته ندارند که تعمیم دهند. خواهش می‌کنم فورآنامه‌های خشم‌آلودی که اهمیت تجرید و تعمیم را برای گسترش ریاضیات شرح می‌دهد، برای من ننویسید: من این چیزها را می‌دانم. این را هم یقین دارم که وقتی با تاخ اصول موضوع فضای باناخ را تدوین می‌کرد، خیلی از فضاهای خاص را به‌عنوان الگو در ذهن داشت. به‌علاوه، موضوع صحبت من تنها انتقال افکار ریاضی است، نه ابداع آن.

به‌عنوان مثال، اگر می‌خواهید به‌کلاسی در سطح متوسط توضیح دهید که فاصلهٔ یك نقطه از یك صفحه را چگونه می‌توان به‌دست آورد، باید ابتدا فاصلهٔ $(۱, -۳, -۲)$ از $۵ = ۷ + ۲z - ۲y - x$ را به‌دست بیاورید. پس از این، روش کلی تقریباً بدیهی خواهد بود. کتابهای درسی اغلب به‌این شیوه نوشته شده‌اند. یك اصل کاملاً کلی این است که، اگر درس خود را دوبار منسجمتر از آن که فکر می‌کنید باید باشد عرضه می‌کنید، انسجام آن حداکثر نصف چیزی است که باید عرضه می‌کردید.

از یاد نبرید که شما سالهای سال با ریاضیدانها دمساز بوده‌اید. اکنون پس از آن همه سال، احتمالاً نه‌تنها مانند یك ریاضیدان فکر می‌کنید، بلکه به‌گمانتان همه مثل ریاضیدانها فکر می‌کنند. هر آدم غیر ریاضیدانی می‌تواند نظر شما را در این باره عوض کند.

قیاس. گاهی اگر به‌مخاطب خود توضیح دهید که مفهوم جدید موردنظر شبیه فلان مفهوم آشناتر است، درك آن آسانتر خواهد شد. گاهی هم این تدبیر کارساز نیست. توفیق در به‌کار بستن آن، بستگی دارد به‌این که مخاطب شما تا چه حد تشابهات را می‌فهمد. انتگرال عبارت است از حد یك مجموع؛ بنابراین، چون مجموع ساده‌تر است (فرایند حدی ممنوع!)، شاگردان رفتار انتگرالها را با قیاس به‌رفتار مجموعها خواهند فهمید. فکر می‌کنید این‌طور نیست؟ عملاً که چنین به‌نظر نمی‌رسد. برای خیلیها انتگرال ساده‌تر از مجموع است، و برای توجیه این مطلب می‌توان دلایل نسبتاً قانع‌کننده‌ای هم

آورد [۴].

واژگان. هیچگاه اصطلاحی غیرضروری در نوشتار خود وارد نکنید [۵]. اگر قصد دارید دربارهٔ اشتراک گردایه‌ای شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز ــ آنهم فقط یک‌بارا ــ صحبت کنید، هیچ دلیلی برای تعریف G_δها و F_σها وجود ندارد.

بعضیها جسورانه به من گفته‌اند که هیچکس نمی‌تواند بدون کاربرد همهٔ اصطلاحات خاص جبرخطی جدید، درکی واقعی از دستگاه معادلات خطی پیدا کند. اگر شما هم این حرف را باور دارید، باید فراموش کرده باشید که سالها پیش از آنکه اصطلاحات جدید ابداع شود، کسانی که با دستگاههای معادلات خطی سروکار داشتند آنها را بسیار خوب می‌فهمیدند. وضع اصطلاح به‌مختصرشدن عبارات کمک می‌کند؛ اما اختصار، آلفا و امگای موجود در توصیفهای شسته و رفته نیست. به‌علاوه، به‌کاربردن اصطلاحات جدید، نسبت به‌ارائهٔ مطالب به‌شیوه‌های قدیمی، دست ما را برای بیان مطالب بیشتر باز می‌گذارد. با وجود این، قسمت اعظم تلاش شاگرد دراولین برخورد با موضوع، صرف به‌خاطرسپردن واژه‌ها می‌شود، واین در حالی است که این تلاش می‌توانست به‌صورت سودمندتری صرف یادگیری ریاضیات شود. تمرکز قسمت عمدهٔ توجه برروی واژگان به‌جای محتوی، موجب می‌شود که مضمون برما پوشیده بماند. این همان چیزی است که باعث می‌شود بعضی شاگردان فکر کنند که تفاوت حقیقی میان انتگرالگیری ریمان و لبگ آن است که در یکی محدود x را افراز می‌کنیم و در دیگری محدود y را.

اگر فکر می‌کنید که می‌توانید واژه‌های بهتری نسبت به‌آنچه فعلاً متداول است ابداع کنید، بی‌شک حق با شماست: اما، تقریباً بعید است که جز شاگردان خودکسی را پیدا کنید که اصطلاحات شما را بپذیرد؛ وچندان مطلوب نیست که شاگردان خود را درفهمیدن نوشته‌های دیگران به‌زحمت بیندازید. یک بوربا کی‌درهرقرن، تقریباً همهٔ واژه‌های جدیدی راکه جامعهٔ ریاضی می‌تواند جذب کند، وضع می‌کند.

درهرحال، اگرخود را ملزم به‌ابداع واژه‌های جدید می‌بینید، دست‌کم باید زحمت تحقیق در این‌مورد را برخود هموار کنید که این واژه‌ها قبلاً در معنای دیگری به‌کار نرفته باشند. اینکه "توزیع" در حال حاضردر احتمالات و آنالیز تابعی معانی متفاوتی دارد، به‌انتقال افکار ریاضی کمکی نکرده است. ازسوی دیگر، اگرلازم است از واژه‌های قدیمی و غیرمتداول بهره‌گیرید، خوب است معنای آنها را توضیح دهید. شخص کم‌اطلاعی، یکی از دوستان من را به‌خاطر "ابداع" واژه‌های غریب سرزنش می‌کرد، واژه‌هایی که عملاً ساختهٔ کپلر بودند.

به‌ویژه، فکرخطرناکی است اگر فرض کنید که با مخاطب شما واژه‌هایتان را در حال می‌فهمد، یا برداشت همه از این واژه‌ها همان است که شما درنظر دارید. من کسی را می‌شناسم که علیرغم شواهد مهمی برخلاف رأی او، فکرمی‌کند همه‌کس، ازدبیرستان به‌بالا، همهٔ مطالب را در باب تبدیل فوریه می‌داند. کسان دیگری هم هستند که فکر می‌کنند همه منظور آنها را از قضیهٔ آبل می‌دانند، و به‌همین دلیل هرگز نمی‌گویند که مقصودشان کدامیک از قضایای آبل است.

مثل جدیتر از چیزی ناشی می‌شودکه (اگر از اصولم تخطی‌نشود) می‌خواهم آن را زوال‌گرایی بنامم: یعنی‌واژه‌ها و عباراتی‌که، اگر درتکلم روزمره عملاً متروک نیستند، دارند چنین می‌شوند. شیوهٔ نثرامروزی آسانتر و سراستتر از قرن نوزدهم است ــ مگردر کتابهای درسی ریاضیات. وقتی‌که مشغول نوشتن این مقاله بودم، کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرالی‌را درس می‌دادم‌که مسئله‌ای را چنین شروع می‌کند: "شدت یك باریکهٔ (نور) به‌طور مستقیم با ... تغییر می‌کند." من نمی‌دانم که واژهٔ غیرمصطلح تغییر هنوزهم در دبیرستانها استفاده می‌شود یا نه، اما در هرصورت آموزش این واژه عملی نیست: تنها یك شاگرد در کلاس ۴۵ نفری درمورد آنچه‌که مقصودکتاب بود نظری داشت (که اوهم یك خارجی‌بود). اگرشاگردان را مقصرمی‌دانید، دبیرستانها را سرزنش کنید؛ من به‌سهم‌خودم مؤلفان کتابهای درسی را مقصر می‌دانم، زیرا تشخیص نمی‌دهندکه شاگردان امروزبه‌زبان دیگری تکلم می‌کنند. درکتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال متداول دیگری آمده است: "تمرکز ذره‌ای ماده در هرمیلیون جزء، از لحاظ نظری مطابق قانون عکس مجذور فاصله کاهش می‌یابد." آمدن چنین جمله‌ای در نیوزویك یا حتی نیویورکر بعید نیست، اما در یك کتاب درسی...

لازم است مؤلفان کتابهای درسی (و نیز، اساتید دانشگاه) به‌خاطر داشته باشند که وظیفهٔ آنها راهنمایی شاگردان است نه معلمان. تابع چیست؟ شما باید بنابرنوشته‌های کتابهای درسی این پاسخ را بدهیدکه "قاعده‌ای‌که به‌هرعدد حقیقی یك عدد حقیقی یکتا را نسبت می‌دهد." که بی‌گمان تعریف یك تابع است ــ اما بیان این مطلب به‌شیوه‌ای نیست که شاگردان آن‌را درك کنند. پوانکاره، قبلاً در ۱۹۰۹، به‌این نکته که "یك تعریف تنها وقتی رضایت‌بخش است که‌شاگردان آن را بفهمند" اشاره کرده [۶]، اما به‌نظر نمی‌رسدکه معلمان ریاضیات چندان توجهی به‌آن داشته باشند.

مشکلات واژگان منحصر به ریاضیات نیست؛ مشکلاتی از همین دست، صحبت کردن با پزشکان یا وکلا را چنین بیهوده می‌سازد. این افراد بر زبانی فنی و غنی خیلی پافشاری می‌کنند، زیرا معتقدند که: "این طور خیلی دقیقتر است". چنین عقیده‌ای درست است، اما اصطلاحات شسته و رفته تنها وقتی روشنترند که تمییز گذاری موشکافانه‌ای مورد نیاز باشد. تأکید بر تمایزات ظریف تا وقتی که مخاطب لزوم آنها را در نیابد، سودی ندارد.

نمادگذاری. نوع خاصی از وضع کردن اصطلاح است. ریاضیات بدون آن کاری ازپیش نمی‌برد. قسمت اعظم پیشرفت ریاضیات بسته به‌ابداع نمادهای مناسب است. اما نباید چنان شیفتهٔ نمادها شدکه وظیفهٔ اصلی آنها فراموش شود. فرض براین است که مخاطب ما (چه شنونده باشد چه خواننده) کمتر ازما با نمادگذاری آشناست. بنابراین (به‌عنوان یك مثال ساده) چندان‌درست نیست که به‌جای "f را تابع اندازه‌پذیری فرض کنید که مجذورش انتگرالپذیر باشد" بگوییم "f را متعلق به L^2 فرض کنید"، مگر اینکه یقین داشته باشیم مخاطبمان هم اکنون مفهوم نمادگذاری را می‌فهمد. به‌علاوه، اگر عملاً قصد ندارید از L^2 به‌عنوان یك فضای هیلبرت استفاده کنید، وتنها خواص اعضای آن را به‌عنوان تابع درنظر

دارید، ساختار این فضا ربطی به‌کار شما ندارد و بذل توجه زیاد به آن نوعی خودنمایی است ــ خوب است، اما خودنمایی است. اگر مخاطب از نمادگذاری اطلاعی نداشته باشد، گیج و سردرگم خواهد شد؛ اگرهم از آنها سررشته‌ای داشته باشد، وقتی که توضیح مطلب را شروع کنید، مایهٔ شگفتیش خواهد شد.

توصیه‌ام در باب اصطلاحات جدید را درمورد نمادهای جدید حتی با قوت بیشتری تأکید می‌کنم. جز در موارد ضروری، نماد جدید ابداع نکنید، و نمادهای قدیمی را تغییر ندهید؛ و (درصورت لزوم) بگذارید نمادها استعمال متنوعتری داشته باشند وهم‌ارزیهای موجود را توضیح دهید. اگر $P(x)$ شما در نوشتار به‌صورت $P(x)+۱/۲$ یا $E(x)$ هم ظاهر شود، آن را به‌همین صورت بنویسید. اصلاحات غیرمسؤولانه در نمادگذاری تا به‌حال به‌اندازهٔ کافی موجب دردسر شده است. من نمی‌دانم چه‌کسی اولین‌بار به‌فکر افتاد که در مختصات کروی، چنانکه در فیزیک و ریاضیات پیشرفته تقریباً به‌طور عام مرسوم بوده و هست، زاویهٔ سمتی را به‌جای منهم عرض جغرافیایی با θ نمایش دهد. با نگرشی سطحی، این قرارداد معقول است، زیرا θ را به‌همان مفهوم مختصات قطبی صفحه به‌کار می‌برد؛ لکن از آنجا که به‌هرحال r در اینجا معنای دیگری دارد، کمک زیادی به‌ما نمی‌کند. نتیجه این است که شاگردی که از حساب دیفرانسیل و انتگرال پا فراتر می‌گذارد، ناگزیر خواهد بود همهٔ فرمولها را دوباره یاد بگیرد. چنین پیچیدگیهایی، ریاضیدان محض‌وفادار را، که هنوز هم قانون دوم حرکت نیوتون را به‌صورت $\mathbf{v}=(d/dt)(m\,\mathbf{q})$ می‌نگرد، نگران نمی‌کند؛ بلکه موجب نگرانی خاطر بسیاری از شاگردان، و به‌علاوه دانشمندان خشمگین علوم فیزیکی، می‌شود.

اثباتها. تنها ریاضیدانهای حرفه‌ای همه چیز را از اثباتها می‌آموزند. بقیهٔ افراد از راه توضیحات چیز یاد می‌گیرند. من شك دارم که حتی ریاضیدانهای حرفه‌ای، در حوزه‌های غیرتخصصیشان، از اثباتها چیزهای خیلی زیادی بیاموزند. به‌کمك بحثهایی که نصیب چندانی از اثباتهای صوری ندارند، می‌توان خیلی کارها کرد. پروفسوری را می‌شناسم (تردید دارم که او را "آموزگار" بنامم) که یك نیم‌سال تمام را برای اثباتی از قضیهٔ انتگرال کوشی تحت مفروضات خیلی کلی وقت صرف می‌کند. حال آنکه مجموعه‌ای از حالتهای خاص و مثالها متقاعدکننده‌تر است و مجالی برای مباحث متنوعتر و جالبتر فراهم می‌کند، به‌علاوه مخاطب را برای فهم، کاربرد، تعمیم، و آموختن قضیهٔ کوشی بهتر آماده می‌کند.

به‌خاطر نمی‌آورم چه‌کسی بود که اولین‌بار گفت گرمکن چیزی است که کودك وقتی می‌پوشد که والدینش احساس سرما می‌کنند؛ اما اثبات چیزی است که شاگردان مجبورند وقتی معلمشان دربارهٔ صحت قضیه‌ای تردید می‌کند، به‌آن گوش فرادهند. ادعا شده است که [۷]: "برخی از مهمترین نتایج... در نگاه اول چندان مایهٔ شگفتی‌اند که هیچ چیزی کمتر از یك اثبات نمی‌تواند آنها را پذیرفتنی کند." تعداد این نتایج از آنچه فکرمی‌کنید کمتر است.

والدین با تجربه می‌دانند که وقتی بچه می‌پرسد "چرا؟"، ازوماً نمی‌خواهد دلیلی برای پرسش خود بشنود، بلکه فقط می‌خواهد بیشتر با دیگران صحبت کند. وقتی که یك

کلاس طالب یك اثبات می‌شود نیز می‌توان همین اصل را صادق دانست.

دقت. این‌مورد غالباً باعمومیت یا کامل‌بودن اشتباه می‌شود. به‌رغم آنچه که احتمالاً متفقان می‌گویند، اگر به‌جای کلیترین حالتی که در مورد قضیه‌ای می‌دانیم، حالت خاصی از آن را بیان کنیم، یا به‌جای یك شرط کافی پیچیده، شرط ساده‌ای ذکر کنیم، هیچ عمل غیردقیقی انجام نداده‌ایم. مثلاً، من ترجیح می‌دهم که آزمون دیریشله برای همگرایی سری نوریه را برای مبتدیان مطرح کنم: "یکنوای تکه‌ای و کراندار" نسبت به "با تغییر کراندار" قابل‌فهمتر است؛ و درحقیقت، پس از یك قضیهٔ دیگر (که بعداً درس داده می‌شود) همانقدر سودمند است.

پایبندی به‌اینکه هر چیزی را که می‌دانید بگویید، یکی از دشمنان سرسخت ارتباط مؤثر است. رابطهٔ ما ریاضیدانها با گروه فیزیك بهترمی‌بود، هرگاه مثلاً تصدیق می‌کردیم که گرچه دانشجویان آنها برای مکانیك کوانتومی به‌مقداری آنالیزفوریه نیاز دارند، لازم نیست به اندازهٔ یك نیم‌سال کامل آن را بیاموزند ــ یك دورهٔ آموزش دوهفته‌ای به هدف نزدیکتر است.

بیش ازحد لازم دقیق بودن، به‌معنی کامل ملانقطی‌بودن است، که (بنا بر فرهنگ لغت من) عبارت است از: "تأکید افراط‌آمیز برجزئیات پیش‌پا افتاده."

مثالی می‌آورم. فرض کنید شاگردان در جستجوی مینیمم موضعی تابسع مشتق‌پذیر f اند، و نقاط بحرانی را در $x=۲$ و $x=۵$ یافته‌اند. و نه‌درجای دیگر. همچنین فرض کنید که نمی‌خواهند (یا اجازه ندارند) که از مشتق دوم استفاده کنند. برخی کتابهای درسی می‌گویند که $f(۲+h)$ و $f(۲-h)$ را به‌ازای h کوچك امتحان کنید. طبیعتاً شاگردان ترجیح می‌دهند $f(۱)$ و $f(۳)$ را آزمایش کنند. معلم ملانقطی می‌گوید "نه"، اما معلم واقع بین آنها را آزاد می‌گذارد که هرنقطه را که به‌نقطهٔ بحرانی بعدی نرسد، امتحان کنند.

اشتیاق. معلمان غالباً اصرار دارند که نسبت به‌مواد درسیشان اشتیاق نشان داده شود. آیا هرگز مجبور بوده‌اید به‌سخنان یکی ازهواداران واقعاً احساساتی مکتب اصحاب مدرسه در مورد مطلبی که دربارهٔ آن چیزی نمی‌دانستید و یا نمی‌خواستید بدانید گوش دهید، مثل ضرب سکهٔ برنزی در پلداویا[1] درقرن دوازدهم یا "پژوهشی در باب کلمهٔ بی‌تکیهٔ *De*" [۸]؟ خوب، بگذریم.

مهارتها. قسمت اعظم ریاضیاتی که خیلی از ریاضیدانها یا درس دادن آن خود را تقویت می‌کنند، عبارت است از مباحثی چون جبر مقدماتی یا حساب دیفرانسیل وانتگرال یا آنالیز عددی ــ یا به‌طور خلاصه چیزهایی صرفاً در سطح مهارت. داوری در این‌باب که شاگرد به‌مهارتی دست یافته، یا چنان که ما می‌خواهیم، "حقیقتاً" مطلبی را فراگرفته یا خیر، همواره کار ساده‌ای نیست. دشواری نهفته در پس این امر بی‌شباهت به‌داوری درمورد این نیست که آیا میمونها می‌توانند به روش زبانشناسانهٔ جالبی از یك زبان استفاده کنند یا در

1. Poldavia

فشار دادن دکمه‌ای و تکان دادن دستهایشان، از خود مهارت نشان دهند یا خیر [۹]. کسب مهارت ریاضی شبیه مهارت در هرچیز دیگر است. اگر شما بخواهید نواختن پیانو را بیاموزید، معمولاً این‌کار را با کارآموزی نزد کسی آغاز می‌کنید؛ هرگز کار خود را با آموختن درسهایی نظری در باب ارتعاشهای آکوستیک و ساختار داخلی پیانو شروع نمی‌کنید. مهارتهای ریاضی نیز به‌همین گونه‌اند. ما غالباً حجتهایی در مورد مزیت نسبی سخنرانی و بحث می‌خوانیم یا می‌شنویم، حاکی از اینکه این دو تنها راههای برقراری ارتباط و انتقال افکار در کلاس‌اند. تمرین‌شاگردان زیرنظرفردی مطلع، از راههای بسیار مؤثر دیگر است. متأسفانه این راه هم نامتعارف است و هم گران تمام می‌شود.

حتی تحقیق در ریاضیات، تا حدود معتنابهی، یك مهارت آموختنی‌است. یکباریکی از شاگردان هاردی برای من توضیح دادکه این‌کار چگونه انجام می‌گرفت. اگرشاگرد هاردی بودید، بهشما مسئله‌ای می‌دادکه یقین داشت از عهدهٔ حلش برمی‌آیید. شما هم آن را حل می‌کردید. در این‌صورت از شما می‌خواست‌که آن را به‌روشی ویژه تعمیم دهید. شما هم این‌کار را می‌کردید. دراین‌صورت تعمیم دیگری پیشنهاد می‌کرد و به‌همین‌ترتیب تاآخر... پس‌ازچند مرحله، شامسئله‌های خودتان رامی‌یافتید (وآنها را حل‌می‌کردید). البته این همه را نمی‌آموختید تا ضرورتاً گاوس ثانی بشوید، بلکه می‌توانستید یاد بگیرید که چگونه‌کار مفید انجام بدهید.

جلسات سخنرانی (درس). اینها برای تحریك احساسات بسیار مؤثرند. وقتی‌که ماشین چاپ اختراع شد، سخنرانی به‌عنوان وسیله‌ای آموزشی باید متروك می‌شد (که خوشبختانه نشد). شانس دوم را وقتی آوردیم‌که ماشین زیراکس اختراع شد. اما به نظر می‌رسدکه به‌طورکامل از آن استفاده نمی‌کنیم. اگر لازم است سخنرانی‌کنید، دست‌کم می‌توانید نسخه‌هایی از آنچه‌که گفتید (یا می‌خواستید بگویید) به مخاطبین بدهید. من ریاضیدانهایی را می‌شناسم که مدعی‌اند تنها از طریق سخنرانیهایشان می‌توانند عقاید شخصی خود را در مورد مباحثشان به دیگران منتقل‌کنند. این حرف ممکن است درسطوح پیشرفته، برای شاگردان دورهٔ دکترا، درست باشد. در غیر این صورت، نمی‌دانم‌که آیا نظرات این ریاضیدانها برای یادگیری ارزشی دارد یا نه، و (اگر چنین است) آیا شاگردان نمی‌توانند آنها را با روش دیگری که بهتر هم باشد (مثل گفتگو هنگام صرف قهوه درکافه تریا) یاد بگیرند؟

یکی از اسرار بزرگ برای من این است: چگونه می‌توان افراد را تربیت کردکه اطلاعات سودمندی از هزاردرایهای غیرقابل فهم بیرون بکشند؟ در واقع می‌توان این‌کار راکرد و ما هم می‌کنیم. مثلاً، کتاب موریس کلاین [۱۰] را که در باب تاریخ تدریس حساب دیفرانسیل وانتگرال است، بخوانید. شاید این‌تعهدی‌که ما داریم، بتواند عامه فهم بودن جلسات تدریسمان را توجیه‌کند. تأثیر یك جلسه درس نامفهوم کافی نیست، اما یك دورهٔ درسی کامل نامفهوم می‌تواند چنان تأثیری بگذارد که از عهدهٔ یك کتاب نامفهوم برنمی‌آید. من باز مدعیم‌که کتاب نامفهوم خیلی بهتر است.

سرانجام. من عادت دارم‌که معلمان تازه‌کار را نصیحت کنم: "بخاطر بیاوریدکه

معلمتان چه‌کاری می‌کردکه شما از آن خوشتان نمی‌آمد، وآن‌کار را نکنید." این نصیحت به‌نوبهٔ خودش مفید است، اما کافی نیست. پاسخ آزمایشی من به‌پرسش‌عنوان مقاله، این‌است: "بله، اما نباید در این راه خویشتن‌نگری را سرمشق قرار داد. شما نمی‌توانید به‌طور مؤثر با مخاطبان خود (خواه در کلاس یا در نوشتن) ارتباط برقرار کنید، مگر اینکه آنها را درك‌کنید. این درسی است‌که آموختنش آسان نیست."

ترجمهٔ سعید ذاکری

مراجع

1. Harris, Sydney J., *Column for February*, 9 (1980), Chicago Sun-Times and elsewhere.
2. Ford, L. R., "Retrospect," *Amer. Math. Monthly*, 53(1946)582-585.
3. *College Mathematics: Suggestions on How to Teach It*, Mathematical Association of America, 1972.
4. Stoutemyer, D. R., "Symbolic computation comes of age," *SIAM News*, (6)12 (December 1979)1, 2, 9.
۵. پ. ر. هالموس دیدگاه مشابهی را در مقالهٔ زیرارائه داده است
"How to write mathematics," *L'Enseignement Mathématique* (2)16 (1970)123-152.
6. Poincare, H., *Science et Methode*, 1909, Book II, Chapter 2.
7. Jeffreys, H., and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1950, p.v.
8. Browning Robert, "A grammarian's Faueral," in *The Complete Poetic and Dramatic Works of Robert Browning*. Houghton Mifflin, Boston and NewYork, 1895, pp. 279-280.
9. Savage, E. S., Rumbaugh, D. M., and Boysens, "Do apes use language?" *Amer. Scientist*, 98(1980)49-61.
10. Kline Morris, *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, NewYork, 1980.

پال هالموس

آموزش حل مسئله● ★

بهترین راه آموختن "عمل" است؛ و بدترین راه تدریس، صحبت کردن.

واما دراین مورد اخیر: آیا هیچگاه توجه کرده‌اید که برخی از بهترین معلمان جهان ازجملهٔ بدترین سخنرانان هستند؟ (این مطلب را می‌توانم اثبات کنم، ولی ترجیح می‌دهم تعداد نسبتاً زیادی از دوستانم را از دست ندهم.) و، از سوی دیگر، آیا هرگز توجه کرده‌اید که سخنرانان خوب هم ضرورتاً معلمان خوبی نیستند؟ یك سخنرانی (یا تدریس) خوب معمولاً روش دار، کامل، دقیق، وخسته‌کننده است؛ و از اینرو ابزار نامناسبی برای آموزش بسحساب می‌آید. وقتی سخنرانان برجسته وافسانه‌ای چون امیل آرتین[1] و جان فون نویمان سخنرانی ایراد می‌کنند، حتی سخنرانی هم می‌تواند وسیله‌ای مفید باشد ــ گیرایی وشورسخنان آنان کفایت می‌کند تا مخاطبین بوجد آیند، گامی بپیش بگذارند، و کاری انجام دهند ــ همین امر خیلی جالب است. اما، در نزد غالب انسانهای عادی، که سخنرانی کردنشان به‌آن بدی نیست که ویرنبود وچندان برانگیزاننده هم نیست! ــ به‌خوبی آرتین هم سخن نمی‌گویند ــ ونه مانند او دراماتیك! ــ سخنرانی وابین ابزاری است که برای آموزش مطلوب باید به‌آن توسل جست.

آزمون من برای آنچه خوبی یك معلم را معلوم می‌کند، بسیارساده است: در این آزمون عملکرد را براساس "محصول" ارزشیابی می‌کنیم. اگر مدرس دانشجویان دورهٔ لیسانس همواره دکترهایی تربیت می‌کند که ریاضیدان‌اند ومباحث جدید سطح بالایی را در ریاضیات می‌آفرینند، اومعلم (یا مدرس) خوبی است. اگر یك معلم حساب دیفرانسیل وانتگرال پیوسته دانشجویان سال چهارمی را تربیت می‌کند که به‌دانشجویان فوق‌لیسانس ممتاز ریاضی، و یا افراد سطح بالایی به‌عنوان مهندس، زیست‌شناس، یا اقتصاددان تبدیل

● Halmos P. R., "The teaching of problem solvgni," *Amer. Math. Monthly*, 82(1975)466-470.

★ این مقاله، متن سخنرانی پروفسورهالموس دومیزگرد مشترك انجمن ریاضی آمریکا و جامعهٔ ریاضی آمریکاست که در ژانویهٔ ۱۹۷۴ در یك گردهمایی در شهر سانفرانسیسکو ایراد شده است.

1. Emil Artin

می‌شوند، او یك معلم خوب است. اگر یك معلم ریاضیات جدید (یا قدیم) سال سوم همواره دانشجویان برجسته‌ای را درحساب دیفرانسیل وانتگرال تربیت می‌کند، ویا شاگردانش بازرسان فروشگاه، نجار ویا مکانیك اتومبیل می‌شوند، باز هم او معلم خوبی است.

برای دانشجوی ریاضی شنیدن حرفهای کسی که درمورد ریاضیات سخن می‌گوید چندان مفیدتر از آن نیست که فن آموز شنا برای آموختن شنا بسخنانی دراین زمینه گوش فرا می‌دهد. شما نمی‌توانید روش شناکردن را با گفتار یك شخص فرا بگیرید که می‌گوید دست وپای خود را کجا وچگونه قرار دهید؛ نمی‌توانید حل کردن مسائل را با گفتن اینکه مربع را کامل کنید ویا $\sin u$ را جایگزین y کنید، یاد بگیرید.

آیا می‌شود کسی ریاضیات را با خواندن آن فراگیرد؟ من ناچارم بگویم خیر. خواندن نسبت به‌گوش دادن از یك امتیاز برخوردار است؛ چه خواندن صورت فعال‌تری دارد ــ ولی نه خیلی زیاد. خواندن ضمن درکنارداشتن مداد وکاغذ خیلی بهتر است ــ و درواقع برداشتن گامی بزرگ درجهت صحیح است. اما بهترین راه خواندن یك کتاب (مطمئناً همراه با مداد و کاغذ) این است که با مداد و کاغذ مشغول شوید و کتاب را به کناری بیندازید.

در حالی که این نظر افراطی را عنوان می‌کنم، باید آن را به‌سرعت رد کنم. می‌دانم که این گفته افراطی است، و منظور من هم واقعاً این نیست. اما خواستم براین نکته پای فشارم که با این دیدگاه که آموختن یعنی صرفاً گوش فرا دادن به‌سخنرانی و خواندن کتاب، هم رأی نیستم. اگر ما عمرهای طولانیتری، مغزهای بزرگتری و معلمین کارکشته و کافی جهت براوردن نسبت یك به‌یك شاگرد و معلم داشتیم، به‌این نظریهٔ افراطی پایبند می‌ماندم. اما فاقد جملگی اینها هستیم. کتابها وتدریسهای شفاهی به‌خوبی ازعهدهٔ جاری ساختن واقعیتها و روشهای گذشته در عروق دانشندان فردا، همچون جریان خون، برنمی‌آیند ــ اما ما باید دربی بهترین راه حلی باشیم تا دروقت وهزینه‌های خود صرفه‌جویی کنیم. اما، وهمین موضوع سخنرانی امروزمن است، اگرما فقط برسخنرانیها وکتابها تکیه کنیم، درحق دانشجویان خود، ودانشجویان آنان، کوتاهی تأثرآوری را روا داشته‌ایم.

مضمون واقعی ریاضیات عبارت است ازحل مسائل غیرمجرد وواقعی. هیلبرت یك بار (که یادم نیست درکجا) گفت که بهترین راه برای فهم یك نظریه، دریافت ومطالعهٔ یك مثال واقعی ونمونه ازآن نظریه است؛ مثالی ریشه‌ای که هرچیزی را که ممکن است اتفاق بیفتد، به‌نمایش می‌گذارد. بزرگترین نقص بسیاری ازدانشجویان، حتی دانشجویان خوب، این است که هرچند ممکن است بتوانند گزاره‌های درستی از قضایا را بیان کنند وانباتهای درست را به‌خاطر بسپارند، اما نمی‌توانند مثالهایی نمونه ارائه کنند؛ مثالهایی نقیض را تشکیل دهند، و مسائل خاص را حل کنند. من به‌تعداد زیادی دانشجو برخورده‌ام که می‌توانسته‌اند چیزهایی دربارهٔ آنچه خود قضیهٔ طیفی برای عملگرهای هرمیتی در فضای هیلبرت می‌نامند، عنوان کنند. اما، در این مورد که چگونه می‌توان یك ماتریس متقارن واقعی 3×3 را قطری کرد فاقد هرگونه ایده‌ای بوده‌اند. این شیوه‌جالبی برای یادگیری نیست ــ روش آموزش بدی است، شاید، دست‌کم تا حدی، ناشی از تدریس بد باشد.

ریاضیدانان حرفه‌ای تمام وقت و بهره‌گیران گاه به‌گاه ریاضیات، و در این میان طیف کامل جامعه علمی، جملگی نیازمند حل مسائل، مسائل ریاضی، هستند، و کار ما این است که به آنها یاد دهیم این کار را چگونه انجام دهند، یا اینکه تاحدودی‌هم به‌معلمین آینده آنها یاد دهیم که چگونه به آنها بیاموزند تا این کار را انجام دهند.

دوست دارم تدریس هر درسی را با یك مسئله آغاز کنم. آخرین بار که درس مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها را تدریس می‌کردم، اولین جملهٔ من تعریف اعداد جبری، و دومین جمله‌ام یك پرسش بود: آیا اعدادی وجود دارند که جبری نباشند؟ آخرین‌بار که مبانی نظریهٔ توابع حقیقی را درس می‌دادم، نخستین جمله‌ای که به زبان آوردم یك سؤال بود: آیا تابعی پیوسته و غیرنزولی وجود دارد که یك بازهٔ واحد را به‌یك بازهٔ واحد بنگارد، چنانکه طول منحنی‌اش برابر ۲ باشد؟ هوکس می‌تواند، تقریباً در اغلب دروس، مجموعه پرسشهایی را ازاین‌دست پیدا کند، پرسشهایی که می‌توان آنها را با حداقل زبان تخصصی عنوان کرد، سؤالاتی که برای جلب توجه افراد کفایت مـی‌کنند؛ سؤالاتی که پاسخهای پیش‌پاافتاده و مبتذل ندارند و پرسشهایی کـه قادرند در پاسخهای خود، ایده‌های اصلی موضوع را مجسم کنند. وجود چنین سؤالاتی منظور و مراد کسی که می‌گوید ریاضیات در واقـع تماماً دربارهٔ حـل مسائل است، و تأکید من بر حل مسئله (که مغایر با شرکت در سخنرانی و خواندن است) همین سؤالات هستند.

پولیا دربارهٔ حل مسئله قول مشهوری دارد به‌این‌مضمون که: اگر نمی‌توانی‌مسئله را حل کنی، مسئله‌ای آسانتر وجود دارد که آن را هم نمی‌توانی حل‌کنی ـ آن‌را پیداکن. اگر می‌توانید این جمله را به دانشجویان خود یاد بدهید، آن را چنان به آنها بیاموزید که آنان نیز بتوانندآن را به دانشجویان خود یاد بدهند؛ بدین ترتیب شما مشکل تربیت‌کردن معلمهایی را که حل مسئله درس می‌دهند، حل کرده‌اید. دشوارترین بخش پاسخ به پرسشها، طرح آنهاست: پیشهٔ ما به عنوان معلمان و معلمان معلمان این است که چگونگی سؤال کردن را آمـوزش دهیم. آموزش دادن چگونگی بهره‌گیری یك مهندس از کتاب راهنمای معادلات دیفرانسیل کار آسانی است؛ سختی کار این است که به او (و معلمش) یاد دهیم وقتی پاسخ را در کتاب راهنما نمی‌یابد، چه کنند. درآن‌صورت، بازهم احتمالاً[1] مشکل اصلی این پرسش خواهد بود: مسئله چیست؟ سؤال درستی را که باید پرسیده شود پیدا کنید، درنتیجه در راستای حل مسئله‌ای که روی آن کارمی‌کنید راه درازی پیموده‌اید.

پس رمز و راز مسئله در ایـن پرسش نهفته است: بهترین راه فراگیری حل مسئله چیست؟ پاسخ این پرسش تلـویحاً جمله‌ای است که من سخنانم را با آن آغـاز کردم: مسائل را حل کنید. روشی که من هوادار آن هستم گاهی به روش مور از آن یادمی‌شود، زیرا مور[1] این‌روش را در دانشگاه تگزاس ابداع کرد و به‌کاربست. روش مور یک‌روش آموزشی است، روش خلق بینش حل مسئله در دانشجو، یعنی آمیزه‌ای ازآنچه سقراط به‌ما آموخت و روح رقابت سرسختانهٔ بازیهای المپیك.

از لحـاظ تربیت دانشجویان خوب، همان روشی کـه ضمن آن یـك سخنران یك

1. R. L. Moore

می‌تواند معلم خوبی باشد، مانند تبدیل دانه‌ای شن به مروارید در یك صدف است. یـك سخنرانی آدام و کتابی تحت عنوان "جبر مقدماتی دانشگاهی برای دختران" دلپذیر بـه نظرمی‌رسد؛ اما یك‌معلم‌خوب‌شاگرد را به‌رقابت‌می‌کشاند؛ از او می‌پرسد، اورا اذیت‌می‌کند و به‌تکاپو وا می‌دارد، و به استانداردهای بالا دست می‌یابد، که همهٔ اینهاهم عموماً دلپذیر نیست. امکان ندارد که یك معلم خوب معلمی محبوب هم باشد (مگر احتمالاً دانشجویان پیشین خود) زیرا گـروهی از دانشجویـان دوست ندارند کـه به سختی بیفتند، از آنها سؤال شود، اذیت شوند و به تکاپو بیفتند، اما معلم مروارید می‌سازد. (به جای‌آنکه آنها را به قالبی معمولی در آورد.)

بگذاریـد از آن زمان‌کـه بـه دانشجویان سال اول و دوم جبر خطی درس دادم، برای شما حـرف بزنم. نخستین ساعت، به دست هر دانشجـو چند صفحه کاغذ دادم که به‌روی آنها گزاره‌های دقیق پنجاه قضیه نوشته شده بود. همهٔ درس همین بود؛ فقط صورت قضایا، بدون هیچ مقدمه‌ای، تعریفی‌هم وجود نداشت، مثالی‌هم نیامـده بود، و مسلماً هیچ اثباتی‌هم ارائه نشده بود.

در باقیماندهٔ ساعت اول، انـدکی دربارهٔ روش مور برای کلاس صحبت کـردم. به‌آنها گفتم خواندن جبر خطی را کنار بگذارند (فقط برآن ترم!) و از گفتگو باهم در این خصوص دست بردارند (تنها برای آن ترم). به آنان گفتم که کل درس در چنگهای آنان است. کـل دورهٔ آن درس شامل آن پنجاه قضیه بود، وقتی آنها را فهمیدند، آنگاه که توانستند آنها را توضیح دهند، وقتی‌توانستند آنها را بامثالهای لازم و مثالهای نقیض استوار دارند و سرانجام زمانی که توانستند آنها را ثابت کنند، همان هنگامی است که دوره را به پایان برده‌اند.

آنها خیره به مـن نگریستند. حرفهای مرا باور نمـی‌کردند. فکر می‌کردند که من معلمی تن‌آسایـم وسعی مـی‌کنم از زیرکار شانه خالـی کنم. اطمینان داشتند که از این طریق چیزی یاد نمی‌گیرند. امـا ایـن حالت بیش از نیم‌ساعت دوام نیاورد. نیم ساعت بعد را، من با ارائهٔ تعاریف اساسی بـه آنها که برای فهم شش قضیهٔ نخست نیاز داشتند به پایان بردم، و با آرزوی خوش‌کامی برای آنها، به حال خود رهایشان کردم.

دومین جلسه و جلسات بعد از آن، اسمیت را فرا خواندم تا قضیهٔ یك، و کوواکس را که قضیهٔ ۲ را ثابت کند و به‌همین ترتیب تا آخر. کوواکس و هرد و همهٔ دانشجویان را تشویق کردم تا مانند عقاب مـراقب اسمیت باشند کـه وقتی به راه خطا رفت، به او اعتراض کنند. من خودم تاآنجا که می‌توانستم گوش می‌دادم و سعی می‌کردم ضمن اینکه فاقد خوی دیگرآزاری باشم، وقتی لازم می‌دیدم، بـه او اعتراض می‌کردم. جاافتاد گیها را مشخص می‌کردم، درحالی‌که پیوسته می‌گفتم که مقصود او را نمی‌فهمم، دربارهٔ مسائل جنبی سؤال می‌کردم، و گاهی از او می‌خواستم تامثالهای نقیض ارائه دهد، و در مواقع مناسب، پیرامون جنبه‌های تـاریخی سخن می‌گفتم و به ارتباط آن مطلب با سایر بخشهای ریاضی اشاره می‌کردم. عـلاوه برآن بیش از ۵ دقیقه وقت هرجلسه را به معرفی تعاریف جدید و مورد نیاز اختصاص می‌دادم. بـه‌طور کلی من تقریباً در ۲۰ دقیقه از ۵۰ دقیقه

هرساعت درس با آنها صحبت مـی‌کردم. وقت زیادی است، اما خیلی کمتر از آن است که همهٔ ۵۰ دقیقه را یا حتی کمی هم زیادتر از آن صحبت می‌کردم.

این روش همچون یك‌طلسم کارامد بود. در هفتهٔ دوم، آنها به اثبات قضایا و یافتن خطا در اثبات دیگـران می‌پرداختند، و آشکارا از روند کار لذت می‌بردند. چندتـن از آنان از ایـن خوش نیتی برخوردار بودند که نزد مـن بیایند و اقرار کنند که در ابتدا نسبت به من‌بدبین بوده‌اند، اما اینك تغییر عقیده داده‌اند. بسیاری از آنها گفتند که روی این درس، نسبت بـه سایـر دروس، زمان بیشتری صرف می‌کنند و مطالب بیشتری از آن می‌آموزند.

آنچه کـه هم‌اکنون توصیف کـردم، شیوه روش مـور است که مور از آن بهره می‌برد؛ اما این روش مـورد خیلـی بهبود یافته است. اطمینان دارم که باید صدها اصلاح دیگر در آن صورت گیرد تا با خلق و خوی معلمین مختلف دنیا در مباحث گوناگون وفق کند. جزئیات اهمیتی ندارند. مهم ایـن است کـه دانشجویان را وادار به سؤال کردن و پاسخ دادن کنیم.

بسیاری اوقات، که روش مور را به‌کار گرفته‌ام، شاید یك یادوترم بعد، همکارانم به کار من تفسیرهایی نوشته‌اند، چه آنها غالباً توانسته‌اند آن دسته از دانشجویان کلاس خود را که در برابر دورهٔ مور قرارگرفته بودند از روی رفتار و بینش آنها باز شناسند. مشخصاتی که باعث شناسایی آنها شده، رشد ریاضیشان نسبت به دیگران (بینش تحقیقی) و تمایل بیشتر و توانایی مطرح‌کردن پرسشهای ازجانب آنها عمیق بوده است.

"بینش تحقیقی"، کمك بزرگی است به تمامی معلمان، دانشجویان، پدیدآورندگان و بهره‌گیران ریاضیات. مثلاً، برای نشان دادن این مطلب، چگونگی کمك این امر به‌من، زمانی‌که حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی درس می‌دهم (بـه‌کلاسی که بسیار بالاتر از حدی است‌که بتوان روش مور را در آن به کار برد)، من قبل از هرچیز باید به شما نسبت به حافظهٔ شگفت‌انگیز خودم برخود ببالم. یعنی به گونهٔ حیرت‌آوری ضعیف است. اگر من برای یك یا دوتـرم حساب دیفرانسیل و انتگرال درس ندهم، فراموشش می‌کنم. قضیه‌ها، مسائل، فرمولها، و روشها را به فراموشی مـی‌سپرم. در نتیجـه زمانی‌که مطالب درسی هفتهٔ بعد را آماده می‌کنم، که با ملاحظهٔ ریز مواد درسی، یا اگر آنها را دراختیار نداشته باشم، با استفاده از سرفصل مطالب متن، و نه هرگز از خود متن، تهیه می‌شود، از صفر شروع می‌کنم و به‌کاوش در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌پردازم. نتیجه این‌است که نسبت بـه اینکه تمام مطالب را به‌صورت تکراری از حفظ داشته باشم، لذت بیشتری خواهم برد. ودرنتیجه بارها وبارها واقعاً ازکشف دوبارهٔ دانشجویان ازآنچه لایب‌نیتس احتمالاً در دوران نوجوانی می‌دانسته است متعجب، و در عین حال خشنود می‌شوم. حس لذت، شگفتی،خشنودی،ودلبستگی من از روح‌کلاس احساس می‌شود،واز جانب‌هرکاشف، این امر به مثابه آیین تشویق جلوه می‌کند.

برای آموختن بینش تحقیق، هر معلم باید خود بـه تحقیق بپردازد و بایستی برای انجام تحقیق آموزش ببیند. من نمی گـویم هرکس مثلثات درس می‌دهد، نیمی از وقت

خود را صرف اثبات قضایای پیچیده دربـارهٔ مباحث عجیب مطلق کند و به مسابقهٔ مرگ یا چاپ بپیوندد. حرف من این است‌که، هرکس‌که درس می‌دهد، حتی اگر آنچه تدریس می‌کند جبر دبیرستان است، معلم بهتری خواهد بود، اگر به مفاهیم موضوع، فراتراز خود آن موضوع فکرکند، اگر دربارهٔ ارتباط موضوع با دیگر مباحث مطالعه‌کند،اگر سعی‌کند درزمینهٔ مسائلی که این مفاهیم و ارتباطها را معین می‌کندکار کند، و به‌بیانی دیگر، اگـر پیرامون جبر دبیرستان تحقیق کند، این تنها راه حفظ بینش تحقیق و جستجو است، بینش پرسش سؤال و از اینرو حفظ آن در وضعیتی مناسب برای انتقال به‌دیگران.

در اینجا همهٔ حرفهایم را درچند جمله جمعبندی می‌کنم.

بهترین راه یاد گرفتن عمل کردن، پرسیدن، و عمل کردن است.

بهترین راه آمـوزش وادار کـردن دانشجویان بـه پرسش و عمل است. در مورد حقایق وعظ نکنید ــ فعالیت عملی را در آنها برانگیزید.

بهترین راه آمـوزش معلمین وادارکردن آنها به پرسش و عمل به آن چیزی است که آنها به نوبهٔ خود دانشجویانشان را به پرسش و عمل وامی‌دارند.

باآرزوی نیکبختی و تدریس موفق برای همگان.

ترجمهٔ محمدرضا افشار محرابی

دانشجوی شیمی‌کاربردی دانشگاه صنعتی شریف

کنفرانسهای ریاضی در ایران، نگاهی به بیست سال گذشته

امیر اکبری مجدآبادنو بهزاد منوچهریان

هرسال درکشورهای مختلف کنفرانسهای ریاضی در مباحث گوناگون این علم برگزار می‌شود. ازمهمترین این کنفرانسها، کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان است که از سال ۱۸۹۳ به‌این سو تقریباً هر چهار سال یک‌بار برپا شده است. کنفرانسهای سالانه و فصلی متعددی نیز از جانب انجمنهای ریاضی ممالک گوناگون برگزار می‌شود.

این همه کنفرانس و سمینار در سراسر جهان، با هدف تبادل افکار، و درنهایت پیشبرد ریاضیات برپا می‌شود.

اما، در کشور ما، چون علوم پایه و به ویژه ریاضیات همواره مورد بی‌مهری بوده است برگزاری کنفرانسهایی از این دست با تأخیر زیادی همراه بوده است. در اواخر دههٔ ۴۰، با ورود چهره‌هایی جوان به‌صحنهٔ ریاضیات کشور، و گسترش آموزش عالی، فکر برپایی کنفرانس سالانهٔ ریاضی کم کم مطرح شد.

در سال ۱۳۴۹ به ابتکار گروه ریاضی دانشگاه شیراز از تعدادی از ریاضیدانان سرشناس خارجی دعوت به‌عمل آمد و نخستین گردهمایی قابل اعتنا در جامعهٔ ریاضی ایران پا گرفت.

در این گردهمایی، درپایان مباحثاتی که به منظور بررسی عوامل مؤثر در پیشرفت علم ریاضی در کشور به عمل آمد، پیشنهاد تأسیس "انجمن ریاضی ایران" به اتفاق آرا به تصویب رسید. در همین جا نیز تصمیم گرفته شد که چنین نشستهایی هرساله برگزار شود.

در فروردین ۱۳۵۰، هم زمان با برگزاری دومین کنفرانس ریاضی در دانشگاه صنعتی شریف، اساسنامهٔ انجمن ریاضی ایران نیز تنظیم و به‌تصویب رسید. از آن پس در فروردین ماه هر سال کنفرانس ریاضی کشور توسط انجمن ریاضی برگزار می‌شود.

در این مقاله ضمن نگاهی که به نوزده کنفرانس گذشته و نیز چند کنفرانس موضوعی می اندازیم، به‌چند نکتهٔ مهم اشاره‌ای خواهیم کرد.

از نوزده کنفرانس برگزارشده، گزارش کنفرانس دهم اصلاً منتشر نشده و گزارشهای مربوط به‌کنفرانسهای هفدهم به‌بعد نیز هنوز انتشار نیافته است. البته گویا گزارش کنفرانس شانزدهم چاپ شده اما هنوز توزیع نشده است.[1]

درکنفرانسهایی که گزارش آنها در دست است، تعداد ۵۸۸ مقاله عرضه شده است (۵۰۶ مقالهٔ لاتین و ۸۲ مقالهٔ فارسی).

اولین کنفرانس ریاضی در دانشگاه شیراز در سال ۱۳۴۹ تشکیل شد. در این کنفرانس ریاضیدان فقید، پروفسور محسن هشترودی، شرکت داشت و به همت ایشان از مدیر مجلهٔ یکان که تا آن زمان چند سالی بود منتشر می‌شد، تقدیر به‌عمل آمد. در این کنفرانس دو میزگرد با عناوین "چه کنیم تا ریاضیات در ایران پیشرفت‌تری شود؟" و "چه کنیم تا تحقیق ریاضیات در ایران ثمره یابد؟" نیز برگزار شد. همچنین ۱۳ مقاله به فارسی و ۱۶ مقاله به زبانهای دیگر در این کنفرانس ارائه شد.

کنفرانس دوم در سال ۱۳۵۰ در دانشگاه صنعتی شریف برگزارشد. در این کنفرانس از ریاضیدانان معروف خارجی افرادی چون دیودونه[2]، مک‌کارتی[3]، سیمپسون[4] و سوبولف[5] شرکت کرده بودند. همچنین ریاضیدانان ایرانی مقیم آمریکا، دکتر غفاری از سازمان ناسا و متخصص معادلات

۱. زمانی که این گزارش زیرچاپ رفت یک نسخه از گزارش کنفرانس شانزدهم به‌دست ما رسید.

2. J. Dieudonné
3. J. Mccarthy
4. J. Simpson
5. S. Sobolev

با مشتقات جزئی؛ دکتر رجوی که در مبحث آنالیز و آنالیز تابعی صاحب مقالات و نوشته‌هایی است[1]، و دکتر لطفعلی عسکرزاده که مدتهاست در آمریکا به سرمی‌برد ومحافل ریاضی جهان اورا به‌نام "زاده" می‌شناسند و واضع نظریهٔ مجموعه‌های نارونمن[2] است، نیز در این کنفرانس شرکت داشتند. همچنین در این کنفرانس سه میزگرد تشکیل شد؛ یکی با عنوان "برنامهٔ مطلوب ریاضی برای تمام دوره‌های تحصیلی از دبستان تا دانشگاه چیست؟" که در آن آقایان دکتر انوری، دکتر افضلی‌پور، ژان‌دیودونه، سر جی. سوبولف، جیمز سیمپسون، جان مک‌کارتی و دکتر وصال شرکت داشتند. در این میزگرد نظرات سودمندی از سوی ریاضیدانان خارجی مطرح شد، و گزارشی از نظام آموزشی کشورهای شوروی، فرانسه، و آمریکا ارائه دادند. در طی میزگرد، دیودونه که نظرات تندی درمواردگوناگون داشت، با این گفتهٔ سوبولف که "به‌نظر من ریاضیات محض وجود ندارد" از در مخالفت درآمد و گفت: "ریاضیات محض وجود دارد چون من وجود دارم!" همچنین مک‌کارتی و سیمپسون درمورد نقش کامپیوتر در تحول آموزش ریاضی سخنانی ایراد کردند. در میزگرد دوم با عنوان "پیشبرد ریاضیات در ایران" چهره‌هایی چون مرحوم پروفسور هشترودی و دکتر عسکرزاده شرکت داشتند. در میزگرد سوم نیز که عنوانش "اصلاح برنامه‌های ریاضی کشور" بود، پروفسور تقی فاطمی شرکت داشت. در این میزگرد روی مسئلهٔ تربیت معلم ریاضی توانا، به ویژه برای دبیرستانها، و روی این نکته که پیشهٔ معلمی بایدجایگاه چنان بلندی داشته باشد که بهترینها را بخود جذب کند، تأکید زیادی شد.

مجموع مقاله‌های ارائه شده در این کنفرانس ۴۵ مقاله (۷ مقاله به‌زبان فارسی و ۳۶ مقاله به‌زبانهای بیگانه) بود.

کنفرانس سوم درسال ۱۳۵۱ در دانشگاه ملی (شهید بهشتی فعلی) برگزارشد و در آن ریاضیدانان طراز اولی چون گرت بیرکاف جهرمان بزرگ معاصر، پال اردوش ریاضیدان بزرگ مجار، که شهرت او به‌خاطر کارهایی در زمینهٔ مسائل مشکل و گوناگون و ارائهٔ راه‌حلهای مناسب برای آنهاست؛ پل هالموس ریاضیدان معروف آمریکایی که نوشته‌های توصیفی او در ریاضیات بسیار جالب و معروف است، و در رشته‌های گوناگون ریاضی نیز کار کرده؛ وسیمپسون و لیونز[3] متخصص فرانسوی آنالیز عددی و معادلات با مشتقات جزئی، شرکت داشتند. در این کنفرانس ۴۲ مقاله ارائه شد که جملگی به‌زبانهای خارجی بود.

کنفرانس چهارم در سال ۱۳۵۲ در دانشگاه تهران برگزار شد. در این کنفرانس نا گی[4]، متخصص مجاری آنالیز تابعی، و رویر فورته متخصص آمار و احتمال از فرانسه شرکت داشتند. در این کنفرانس ۴۲ مقاله (۹ مقاله به‌زبان فارسی و ۳۳ مقاله به زبان خارجی) عرضه شد.

کنفرانس پنجم در سال ۱۳۵۳ برای بار دوم در دانشگاه شیراز برگزار شد. در این کنفرانس هورماندر[5]، متخصص معروف معادلات دیفرانسیل و برندهٔ مدال فیلدز و کوهن، جبردان معروف انگلیسی، شرکت داشتند. مجموع مقالات ارائه شده در این کنفرانس ۴۷ مقاله (۲ مقاله به‌زبان فارسی و ۴۵ مقاله به لاتین) بود.

درکنفرانس ششم که درسال ۱۳۵۴ دردانشگاه اهواز تشکیل شد، ریاضیدانانی چون رائو[6] آماردان نزدگ هندی و لدرمن[7]، کارشناس برجستهٔ انگلیسی در حوزهٔ نظریهٔ گسروها شرکت داشتند. مجموع مقالات ارائه شده در این کنفرانس ۴۷ مقاله (۴۶ مقاله به‌زبانهای خارجی و تنها یک مقاله به‌زبان فارسی) بود.

درکنفرانس هفتم، که درسال ۱۳۵۵ در دانشگاه تبریز برگزار شد، ریاضیدانان معروفی چون کرامر رول ریاضیدان فرانسوی که درهندسهٔ دیفرانسیل تخصص دارد، دیون یون متخصص نظریهٔ اعداد، رنه توم برندهٔ مدال فیلدز کنگرهٔ ۱۹۵۸ و بنیانگذار نظریهٔ فاجعه‌ها، وگرنیفیت متخصص آمریکایی هندسهٔ

1. Lions
2. Naggy
3. Hörmander
4. Rao
5. Lederman

۱. وی در آن زمان در دانشگاه شیراز تدریس می‌کرد.

2. fuzzy sets

جبری شرکت داشتند.

در این کنفرانس گزارشی درمورد برنامه‌های ریاضی تلویزیون آموزشی ارائه شد،که در بخشی از آن چنین آمده: "تلویزیون آموزشی‌درمهر۱۳۵۲ به‌عنوان جزئی از رادیو و تلویزیون ملی ایران گشایش یافت و در سال اول تنها برنامه‌های‌سال‌اول راهنمایی را پخش می‌کرد، و در سال دوم و سوم فعالیت خود، برنامه‌های سالهای دوم‌وسوم راهنمایی را نیز تهیه و پخش می‌کرد."

ضمناً در این کنفرانس ۵۸ مقاله ارائه شد کـه جملگی به‌زبانهای خارجی بود.

کنفرانس هشتم درسال ۱۳۵۶ در دانشگـاه صنعتی شریف برگزار شد. در این کنفرانس علاوه بر آیتان[1]، که ازمتخصصین بنام‌نظریهٔ مجموعه‌هاست، چند تن از ریاضیدانان ایرانی مقیم خارج: آقایان اکبرزاده متخصص هندسهٔ دیفرانسیل (مقیم فرانسه)، امیر معزکه عمدتاً بـه‌خاطر آثاری در جبرخطـی و هندسه اورا مسی‌شناسند (مقیم آمریکـا) و هدایت متخصص آمار (مقیم‌آمریکا) شرکت داشتند.همچنین گریفیث متخصص آمریکایی هندسهٔ جبری، باندی[2] فیزیکدان انگلیسی و برندهٔ جایزهٔ نوبل، و وایلز توپولوژیست انگلیسی هم حضور داشتند.

در این کنفرانس ۵۳ مقاله، همگی بـه زبـان خارجی، عرضه شد.

کنفرانس نهـم در سال ۱۳۵۷ در دانشگـاه اصفهان برگزار شد. دراین کنفرانس ریاضیدانانی چـون آبرامویچ[3]، گروئنبـرگ[4] از انگلیس، و نیرنبرگ[5] متخصص آمریکایی معادلات دیفرانسیل و شوکه[6]هندسه‌دان فـرانسوی شرکت داشتند. تعداد مقالات ارائه شده درکنفرانس نهم ۷۱ و جملگی به زبانهای خارجی بود.

درکنفرانس دهم‌که در دانشگاه تـربیت‌معلم و در فروردین ماه سال ۱۳۵۸ برگزار شده بود، به علت شورووشوق حاصل ازپیروزی انقلاب‌شکوهمند اسلامی و فضای خاص حاکم آن زمـان، بـه‌جای آنکه به‌خود ریاضیات پرداخته شود، عمدتاً درمورد آموزش ریاضیات بحث شد، میزگردی نیز در این مورد تشکیل شدکه در طی آن مباحثه‌های مفیدی به عمل آمد.

در ایـن کنفرانس هیچ مهمان خارجی شرکت نکرده بود.

محل برگزاری کنفرانس یازدهم دانشگاه مشهد و زمان آن سال ۱۳۵۹ بود. اغلب ریـاضیدانان خارجی شرکت‌کننده در این‌کنفرانس از کشورهای همسایه بودند.

استاد محیط ضاطبایی هم در مـورد تحولات تقویم و تاریخ‌ایران از نظر نجومی دراین‌کنفرانس سخنانی ایراد کرد. گویا دراین‌کنفرانس‌میزگردهایی نیز تشکیل شده است، که البته درگـزارش‌کنفرانس مطلبی در این باره به‌چشم نمی‌خورد.

در این کنفرانس ۵۸ مقاله (۳ مقالـه بـه‌زبان فارسی و ۵۵ مقاله به‌زبانهای خارجی) عرضه شد.

کنفرانس دوازدهم در سال ۱۳۶۰ در دانشگاه صنعتی اصفهان برگزار شد. یکی از میزگردهایی‌که دراین‌کنفرانس تشکیل‌شد، به‌بررسی مسائل آموزش ریـاضی در مـدارس اختصاص داشت. در ادامـهٔ بحثهای‌کنفرانس قبلی که قرار شده بوده‌دراستانهایی که در آنها دانشگاه وجود دارد گـروههای ریاضی متشکل از آموزگاران، دبیران، و استادان دانشگاه تشکیل شود، دستورالعملی که نحوهٔ همکاری دست‌اندرکاران‌ریاضی را با انجمن‌ریاضی‌ایران‌و آموزش و پرورش مشخص می‌کرد، ارائه شد.

دراین‌کنفرانس تنها ۱۸ مقاله (۶ مقاله‌به‌فارسی و ۱۲ مقاله به‌زبانهای خارجی) عرضه شد.

کنفرانس سیزدهم در سال ۱۳۶۱ در کرمـان تشکیل شد. در این کنفرانس استاد محمدتقی‌جعفری سخنرانی کرد، و مقاله‌ای از آیت‌الله حسن‌زاده‌آملی در مورد سابقه و نحوهٔ تدریس ریاضیات‌درحوزه‌های علوم دینی ارائه شد.

در این سال ۲۹ مقاله (۲۰ مقالـهٔ فارسی و ۹ مقاله به‌زبانهای دیگر) درکنفرانس ارائه شد.

کنفرانس چهاردهم در سال ۱۳۶۲ دردانشگاه تبریز برپا شد. در این کنفرانس فـرشید جمشیدیان

1. Abian
2. Bondy
3. Abramovich
4. Gruenberg
5. Nirenberg
6. Choquet

متخصص توپولوژی، و سیف‌الله رنجبر فیزیکـدان معروف و دستیار پروفـسور عبدالسلام‌شرکت‌داشتند. عنوان سخنرانی عمومی‌دکتر رنجبر "فیزیک، هندسه، توپولوژی"، وعنوان‌سخنرانی تخصصی او "فـردگی خلق‌الساعه" بود.دراین‌کنفرانس نسبت‌به‌دوریاضیدان فقید دکتـر هشترودی و دکتر مصاحب ادای احترام شد. آیت‌الله حسن‌زادهٔ آملی نیز در این کنفرانس شرکت داشت.

در این‌کنفرانس جمعاً ۲۸ مقاله (۱۵ مقاله بـه زبان فارسی و ۱۳ مقاله به‌زبانهای‌دیگر) ارائه شد.

کنفرانس‌بازدهم در سال ۱۳۶۳ برای‌سومین باردرشیراز تشکیل شد. در این‌کنفرانس‌که با پیام وزیر فرهنگ و آموزش عالی، و سخنان امام جمعه شیراز گشایش یـافت، دکتر عبدالکریـم سروش نیز سخنانی درباب فلسفهٔ ریاضی ایراد کرد.

نتایج دومین گردهمایی‌که در این کنفرانس برپاشد، به‌صورت نامه‌ای به‌ستاد انقلاب فرهنگی فرستاده‌شد. در این نامه به‌آن ستاد پیشنهاداتـی ارائه شده بود، از جملهٔ‌کاهش واحدهـای درسی دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی، که با توجه به‌نیاز شدید مملکت زودتر بتوانند به‌بازارکار راه یابند، ازدیاد واحدهای اختیاری دردورهٔ‌کارشناسی، و تقلیل واحدها دردورهٔ کارشناسی ارشد؛ ایجاد دورهٔ کارشناسی ارشد پیوستهٔ ریاضی، تبدیل دروس ریاضیات عمومی از ۸ به ۱۲ واحد، و تبدیل رشته‌های مجزای "دبیری ریاضی" و "ریاضی کاربردی" به‌صورت گرایشهایی از شاخه‌ای به‌نام "علوم ریاضی".

کنفرانس شانزدهم که ابتدا قرار بود طبق‌روال هرساله در فروردین ۱۳۶۴ در زاهدان تشکیل‌شود، به‌علت وضعیت جنگی کشور و عدم امنیت حریـم هوایی، درشهریـور همان سال در دانشگـاه تربیت معلم تهران تشکیل شد. تنها مهمان خارجی در این کنفرانس دکتر موهای‌لعل[1] بود که توسط آموزش و پرورش برای‌همکاری در مسائل برنامه‌ریزی‌درسی، از هند دعوت شده بود، و در مورد بـرنامه‌ریـزی آموزش ریاضی و چگـونگی باز آمـوزی معلمین مدارس در زمان تعویض برنامه و کتابهای درسی در هند سخنانی ایراد‌کرد.

در این‌کنفرانس جمعاً ۲۸ مقاله (۱۵ مقاله بـه زبان فارسی و ۱۳ مقاله به‌زبانهای‌دیگر) ارائه شد.

کنفرانس‌بانزدهم در سال ۱۳۶۳ برای‌سومین باردرشیراز تشکیل شد. در این‌کنفرانس‌که با پیام وزیر فرهنگ و آموزش عالی، و سخنان امام جمعه شیراز گشایش یـافت، دکتر عبدالکریـم سروش نیز سخنانی درباب فلسفهٔ ریاضی ایراد‌کرد.

نتایج دومین گردهمایی‌که در این کنفرانس برپاشد، به‌صورت نامه‌ای به‌ستاد انقلاب فرهنگی فرستاده‌شد. در این نامه به‌آن ستاد پیشنهاداتـی ارائه شده بود، از جملهٔ‌کاهش واحدهـای درسی دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی، که با توجه به‌نیاز شدید مملکت زودتر بتوانند به‌بازارکار راه یابند، ازدیاد واحدهای اختیاری دردورهٔ‌کارشناسی، و تقلیل واحدها دردورهٔ کارشناسی ارشد؛ ایجاد دورهٔ کارشناسی ارشد پیوستهٔ ریاضی، تبدیل دروس ریاضیات عمومی از ۸ به ۱۲ واحد، و تبدیل رشته‌های مجزای "دبیری ریاضی" و "ریاضی کاربردی" به‌صورت گرایشهایی از شاخه‌ای به‌نام "علوم ریاضی".

کنفرانس شانزدهم که ابتدا قرار بود طبق‌روال هرساله در فروردین ۱۳۶۴ در زاهدان تشکیل‌شود، به‌علت وضعیت جنگی کشور و عدم امنیت حریـم هوایی، درشهریـور همان سال در دانشگـاه تربیت معلم تهران تشکیل شد. تنها مهمان خارجی در این کنفرانس دکتر موهای‌لعل[1] بود که توسط آموزش و پرورش برای‌همکاری در مسائل برنامه‌ریزی‌درسی، از هند دعوت شده بود، و در مورد بـرنامه‌ریـزی آموزش ریاضی و چگـونگی باز آمـوزی معلمین مدارس در زمان تعویض برنامه و کتابهای درسی در

1. Mohsilal

کنفرانس یازدهم در دانشگاه شیراز با همت دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش اجرا می‌شود.

غیر از کنفرانس سالانهٔ ریاضی، کنفرانسهای موضوعی مختلفی نیز، به‌ویژه پس از انقلاب اسلامی برگزار شده است. تا کنون سه سمینار آنالیز (یکی قبل و دو دیگر بعد از انقلاب اسلامی) و چهار سمینار جبر (جملگی بعد از انقلاب اسلامی) تشکیل شده است. همچنین سمینارهایی در زمینه‌های معادلات با مشتقات جزئی، و ریاضی-فیزیک در دانشگاههای تهران (سال ۶۶)، و تبریز (در آبان ۶۶) برپا شده است.

قابل ذکر است که سمینار آموزش ریاضی به کوشش جهاد دانشگاهی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران، و با همکاری گروه ریاضی این دانشکده در سال ۶۶ در دانشگاه تهران و اولین کنفرانس "مرکز فیزیک نظری و ریاضی" سازمان انرژی اتمی در سال ۶۷ در رامسر تشکیل شد.

در پایان پرسشی مطرح می‌شود: و آن اینکه آیا این سمینارها و کنفرانسها نقشی در پیشرفت ریاضیات کشور داشته‌اند، و به‌طور کلی برای اینکه چنین کنفرانسهایی بتوانند در این مورد نقش بارزتری داشته باشند، چه باید کرد؟

هرچند پاسخ به این سؤال به تأمل و بضاعت بیشتری نیاز دارد، و پرانجمن ریاضی است که در آستانهٔ بیستمین سال فعالیت خود با نگاهی دقیق و نقادانه به گذشته، برنامه‌ای برای هرچه پربارتر کردن کنفرانسها تدارک ببیند، ولی در همین مختصر هم نکاتی قابل ذکر است.

نخست اینکه اغلب سخنرانیهای ارائه شده در کنفرانس ریاضی کشور سخنرانیهایی تخصصی است و هر سخنرانی تنها برای تنی چند قابل استفاده است. البته در هر کنفرانس چند سخنرانی عمومی و یک میزگرد دربارهٔ مسائل عمومی ریاضی در کشور برپا می‌شود، اما به‌نظر می‌رسد که با افزایش سمینارهای تخصصی بهتر است که مقالات تخصصی در اینگونه سمینارها مطرح شود، و کنفرانس سالانه به بررسی مسائل عامتر و بخصوص مسائل مبتلا به آموزش ریاضی کشور بپردازد.

دیگر آنکه با توجه به اهمیت آیندهٔ دانشجویان و دبیران آموزش و پرورش در ریاضیات کشور، بهتر است با توجه بیشتر به مسائل آموزشی در سطوح دبیرستان و دانشگاه، زمینه‌های استفادهٔ هرچه بیشتر آنها از کنفرانس فراهم آید، و اگر در شرایط فعلی هم در کنفرانس شرکت می‌کنند، حرمت بیشتری برای آنان قائل شوند.

مطلب مهم دیگر اینکه تبادل افکار نباید تنها در سالنهای سخنرانی صورت گیرد، بلکه در لحظه لحظه و جای جای این نوع گردهمایی‌ها باید جوی پویا برای ارتباط علمی میان افراد ایجاد شود، که متأسفانه کنفرانسهای ریاضی فاقد چنین جوی است.

از همه مهمتر اینکه اگر حتی بهترین پیشنهادها هم در این کنفرانسها ارائه شود، اما مسؤولین به آنها توجه نکنند، و در نهایت به نظرات توجه و عمل نشود، مشکلات آموزش ریاضی و دیگر مسائل مربوط به عدم یا گرفتن ریاضیات و تحقیقات پویا در ریاضیات، همچنان باقی خواهد ماند. یک مثال از توجه مسؤولین به برخی پیشنهادهای دلسوزانهٔ انجمن ریاضی بعد از انقلاب اسلامی، بازگشایی رشتهٔ ریاضی محض از سال ۱۳۶۶ است که در پی حذف اشتباه‌آمیز این رشته بعد از انقلاب و پیشنهادهای اکید و مکرر انجمن ریاضی، در طی کنفرانسهای ریاضی و جاهای دیگر مبنی بر بازگشایی مجدد این رشته صورت گرفت. مثال دیگر تدوین برنامهٔ جدید درسی رشتهٔ ریاضی (دورهٔ کارشناسی) است. البته ریاضیات و مسائلی که مبتلا به این علم در مملکت است، توجه عمیقتر و گسترده‌تر مسؤولین را می‌طلبد.

منابع

۱. گزارش کنفرانسهای اول تا پانزدهم انجمن ریاضی ایران.

۲. پروژهٔ دانشجویی دورهٔ کارشناسی خانم حائی سلمی، استاد راهنما دکتر ارسلان شاهسان، نیمسال دوم ۱۳۶۶-۱۳۶۷.

۳. بولتن انجمن ریاضی ایران، سال اول، شمارهٔ ۱، بهمن ۱۳۵۲.

۴. بولتن انجمن ریاضی ایران، شمارهٔ ۷، پاییز ۱۳۵۶.

۵. خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران، سال نهم، شمارهٔ ۱، اردیبهشت ۱۳۶۶.

۶. خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران، سال دوم، شمارهٔ ۱، تیر ۱۳۶۷.

7. Alavi Y., "Let's meet at the congress," *Amer. Math. Monthly*, 93(1986) 3-8.

نگاهی اجمالی به تاریخچهٔ دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

بهزاد منوچهریان

سابقهٔ تدریس برخی از دروس این دانشکده به‌زمان تأسیس دارالفنون در ۱۲۲۶ برمی‌گردد. وقتی دارالفنون تأسیس شد، اغلب مردم ایران از علومی که در آنجا درس داده می‌شد بی‌اطلاع بودند، و شاید حتی نامی هم از آن علوم به‌گوش آنها نخورده بود. از اینرو دولت وقت هر از چندی از طریق روزنامهٔ وقایع اتفاقیه برای آگاهی مردم مطالبی در باب آن علوم منتشر می‌کرد.

تدریس رشتهٔ ریاضی نیز در زمان تأسیس دارالفنون برمبنای کیفیت آن‌زمان این علم در اروپا، در ایران معمول شد. کریشش اتریشی و ملکم خان نخستین معلمان ریاضی دارالفنون بودند. کریشش ریاضیات مربوط به تعلیمات توپخانه را درس می‌داد، و ملکم‌خان حساب و هندسه را برای تمامی دانش‌آموزان تدریس می‌کرد و درس دیگری در زمینهٔ مناظر و مرایا برای دوازده تن از دانش‌آموزان مستعدتر ارائه می‌داد. تحصیلات خود ملکم‌خان در سطح دبیرستان بوده است.

در سال ۱۲۳۶ بوهلر فرانسوی که از فارغ‌التحصیلان پلی‌تکنیک پاریس بود به ایران آمد، و تدریس ریاضی و مهندسی نظام دارالفنون را به‌عهده گرفت. پس از او نمبر که فرانسوی هندسه درس می‌داد.

با بازگشت محصلین اعزامی دورهٔ ناصرالدین‌شاه به ایران چند تن از آنها، از جمله عبدالرسول‌خان نوهٔ حاج محمد حسین خان صدر اصفهانی؛ میرزا نظام کاشانی معروف به مهندس‌الممالک؛ میرزا عباس خان پسر میرزا رضا مهندس باشی؛ که در ریاضیات تحصیل کرده بودند، مدتی به تدریس ریاضیات در دارالفنون پرداختند.

در سال ۱۳۰۷ دانشسرای عالی، شامل دانشکده‌های علوم و ادبیات، تأسیس شد. در این زمان هفت استاد فرانسوی و دو استاد ایرانی در دانشسرای عالی تدریس می‌کردند؛ مجموع دانشجویان آنجا به یکصد نفر می‌رسید. دانشکدهٔ علوم شامل رشته‌های فیزیک، شیمی، ریاضی و زیست‌شناسی بود.

با تأسیس دانشگاه تهران در سال ۱۳۱۳، دانشکده‌های علوم و ادبیات در محل دانشسرای عالی تأسیس شدند و در این زمان رشتهٔ زمین‌شناسی نیز به چهار رشتهٔ قبلی افزوده شد.

دروسی که در آن سال در دانشکدهٔ علوم تدریس می‌شدند عبارت بودند از: ریاضیات عمومی؛ آنالیز؛ مکانیک؛ هیئت و نجوم؛ فیزیک عمومی؛ شیمی عمومی؛ جانورشناسی قسمی؛ گیاه‌شناسی عمومی؛ زمین‌شناسی عمومی؛ زیست‌شناسی و فیزیولوژی و مقدمات طب.

در همین سال آقایان غلامحسین رهنما، جمال انشار، تقی فاطمی و محمد وحید ریاضی درس می‌دادند و آقایان احمد ابوترابیان و باقر محمودیان در حل تمرین آن دروس به آنها کمک می‌کردند.

مدت تحصیل برای اخذ لیسانس در آن زمان سه سال، و نظام درسی مالیانه برقرار بود و هر کس باید دست کم در سه درس قبول می‌شد تا بتواند لیسانس دریافت کند.

در سال ۱۳۲۱، دانشکدهٔ علوم با تفکیک از دانشکدهٔ ادبیات و انشسرای عالی به‌صورت دانشکده‌ای

مستقل درآمد. در این سال دانشکدهٔ علوم درساختمانی سه‌طبقه که تنها چنداتاق داشت مستقرشد، وودرهررشته چند دانشجو تربیت می‌شد. تا اینکه درسال تحصیلی ۱۳۳۰–۱۳۳۱ به ساختمان فعلی، کـه در آن زمان نیمه‌تمام بود، انتقال یافت.

از بدو تـأسیس دانشگـاه تهران، به مـوجب مقررات، مسؤولیت تمامی امورآموزشی مربوط بـه هراستاد متوجه خود او بـود و در دانشکـده ادارهٔ آموزشی‌وجود نداشت؛همهٔ استادان به‌اصطلاح‌صاحب کرسی بودند. مثلاً اگر استادی کرسی توابع یامتغیر مخلوط را در اختیار داشت، از ادارهٔ درس تا گرفتن امتحان وتعیین واعلام نمره‌ها همه برعهدهٔ خودش بود.

درسال تحصیلی ۱۳۲۰–۱۳۲۱ نیـز دروس دورهٔ سه‌سالهٔ کارشناسی رشتهٔ ریاضی دانشکدهٔ علوم عبارت بود از: زبان خارجی؛ ریـاضیات عمومی؛ جبروهندسهٔ تحلیلی؛درسفنی؛ هندسهٔ ترسیمی؛مکانیك؛ عملیات حساب،وهندسه؛متمم‌هندسه؛ حساب‌دیفرانسیل وانتگرال؛ هیئت و نجوم؛ و علوم تربیتی.

رشتهٔ ریـاضی ازسال ۱۳۳۷ در مقطع فـوق‌لیسانس (کارشناسی ارشد) دانشجو پذیرفته و دورهٔ دکتری آن در سی سال بعد (۱۳۶۷) گشایش یافته است؛ تاکنون یکصد وهفتادتن در مقطع فوق‌لیسانس ریاضی ازاین دانشکده فارغ‌التحصیل شده‌اند.

ازسال ۱۳۴۶، رشتهٔ ریاضی درمقطع کارشناسی در دورهٔ شبانه فعالیت خود را آغازکرده است.

از سال تحصیلی ۱۳۲۰–۱۳۲۱ بود که نظام درسی قدیمی این دانشکده، که به‌نظام درسی دورهٔ متوسطه شبیه بود، به نظام واحدی تبدیل شد؛ امـا محتوای درسها به‌همان صورت قبلی باقـی مـاند. همچنین از سال ۱۳۴۲ گروههای پنجگانهٔ آموزشی در دانشکدهٔ علوم تشکیل شد.

درس آشنایی باحساب‌گرهای الکترونیك، نخستین درس در زمینهٔ کامپیوتر بود که‌ودرسال تحصیلی ۱۳۴۲–۱۳۴۳ برای دانشجویان سال سوم تدریس می‌شد. و بعداً هم درسی در زمینهٔ زبان فورترن ارائه شد؛ وضع دروس کامپیوتر تا سال تحصیلی ۱۳۴۸–۱۳۴۹ بهمین منوال بود تا اینکه دروس بیشتری در زمینهٔ کامپیوتر ارائه شد و اندك اندك رشتهٔ ریـاضی بـا گرایش کامپیوتر افتتاح‌شد، و درسال ۱۳۵۲ نخستین کامپیوتر را برای این دانشکده تدارك دیدند.

در دانشکدهٔ علوم ازهمان ابتدا مسابقهٔ دوروی اختصاصی بین داوطلبین برگزار می‌شدکه اوایل به علت کم بودن تعداد داوطلبین تمام شرکت‌کنندگان قبول می‌شدند. کنکور عمومی دانشگاهها هم از سال ۱۳۳۷ به‌بعد برگزار می‌شد.

از سال ۱۳۴۸ دروس رشتهٔ ریاضی کم‌کم تغییر کرد تا اینکه درسال تحصیلی ۱۳۵۳–۱۳۵۴ دستخوش تغییرات تمام عیار شد.

چنانکه می‌دانید در خـرداد سال ۱۳۵۹ در دانشگاهها شاهد وقوع انقلاب فرهنگی بودیم، وچند ماه بعد از آن در دانشکدهٔ علوم جهـاد دانشگاهی با همت دانشجویان متعهد و مسلمان تأسیس شد و از آن زمان تاکنون در راستای دستیابی به دانشگاهی اسلامی ضمن فعالیتهای فرهنگی و پژوهشی، با بهره‌گیری از نیروی بالقوهٔ دانشجویان و استادان ایـن دانشکده (همچون‌جهادهای دانشگاهی درد‌انشکده‌ها و دانشگاههای دیگر) به‌فعالیت خود ادامه می‌دهد.

مؤسسات علوم و فنون هسته‌ای، ژئوفیزیك، و آمار، از مؤسسات وابسته به‌دانشکدهٔ علوم بودندکه اکنون مؤسسهٔ ژئوفیزیك ازاین دانشکده جدا شده و به‌صورت مؤسسه‌ای مستقل درآمده است. مؤسسهٔ علوم و فنون هسته‌ای نیز منحل شده‌وکادر هیئت‌علمی آن به‌گروه فیزیك این دانشکده منتقل شده‌اند.مؤسسهٔ آمار نیز تنها از ۱۳۳۷ تا ۱۳۴۲ فعالیت داشت و پس‌ازآن منحل شد.

دانشکدهٔ علوم که تعداد دانشجویانش ازسیزده، چهارده نفر درسال ۱۳۱۳ تجاوز نمی‌کرد، اکنون بیش‌ازدوهزاروهشتصددانشجودارد.خدمات آموزشی و تحقیقاتی آن برعهدهٔ بیش از یکصد و پنجاه تـن اعضای هیئت علمی آن است.

منابع

۱. راهنمای دانشگاه تهران، سال تحصیلی ۱۳۱۴–۱۳۱۵.

۲. راهنمای دانشجویان دانشگاه تهران، آذر ۱۳۲۵.

۳. راهنمای دانشگاه تهران، ۱۳۳۴.

تاریخچهٔ اجمالی کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی

سید محمد کاظم نائینی

دبیرشورای عالی برنامه‌ریزی وزارت فرهنگ‌وآموزش‌عالی

به‌دنبال تغییرات جدید در برنامهٔ آموزش ریـاضی در سالهای ۱۹۵۰ در کشورهای تـوسعه یـافته، و ضرورت بهره‌گیری از ریاضیات در پیشرفت‌وتوسعهٔ تکنولوژی‌وتأثیرریاضیات در حل معضلات اجتماعی و اقتصادی، برای همهٔ‌کشورها مسلم شدکه باید بـه آموزش ریاضیات در مدارس توجه خاصی مبذول دارند، و ضرورت بین‌المللی‌کردن تحقیقات ریاضی وبهره‌گیری از تجارب‌کشورها در آمـوزش ریاضی محرز شد. از سال ۱۹۵۸ فعالیتهای مختلف‌کشورها در زمینهٔ تجدید نظر پیرامون برنامه‌های ریاضیات در جلسات مربوطه درسطح بین‌المللی جلوه و بروز پیدا کرد.

نخستین مجمعی‌که جنبش‌گسترده‌ای را در سطح بین‌المللی در این زمینه برانگیخت، جلسه‌ای محدود بودکه نمایندگـان آمریکـا درکنگـرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان دراوت ۱۹۵۸در ادینبورو‌ی اسکاتلند، دربارهٔ آموزش ریاضیات تشکیل دادند.

براساس‌گزارش این جلسه سازمان همکاریهای اقتصادی اروپا[1] جلساتی برای بحث دربارهٔ برنامهٔ آموزش ریاضیات، ازکودکستان تا دانشگـاه، در مؤسسهٔ بین‌المللی آموزش‌وپرورش در سورا[2] فرانسه تشکیل داد. یکی از دلایل تشکیل این جلسات، آماده نبودن فارغ‌التحصیلان برای‌ادامهٔ تحصیل ریاضی‌در دانشگاهها بود و نتیجهٔ جلسات مذکور حاکی‌ازآن بودکه برنامه‌های آموزش ریاضیات دبیرستانها نه تنها دشوار است، بلکه قدیمی، عقب‌مانده وغیرقابل استفاده است، ونمی‌تواند جوانان را برای آموزش وفهم علوم جدید آماده‌کند.

به‌دنبال ایـن جلسات، سمیناری در وایـومنت فرانسه درسال ۱۹۵۹ تشکیل شدکه در این سمینار ۲۶ نماینده از ۲۰ کشور جهان شرکت‌کردند و هرکدام ازبرنامه‌های آموزشی ریـاضیات در کشور خـود گزارشی به‌اطلاع دیگر نمایندگان رسانیدند،ومطالب جدیدی تحت‌عنوان "اندیشهٔ‌نو در ریاضیات‌مدرسه"[3] عنوان شد،واین موضوع‌جنبشی همگانی‌درکشورهای مختلف جهان در راستای تجدید نظر در برنامه‌های آموزش ریاضیات ایجادکرد.

دربی این تحرك، یك‌کنفرانس یك مـاهه از ۱۷ ریاضیدان و متخصص آموزش وپرورش در ژاگرب[4] یوگسلاوی، در سپتامبر ۱۹۶۰ تشکیل شد؛تـا برنامهٔ جدیدی‌برای‌شاگردان‌قوی، یعنی آنهاکه‌درتحصیلات علمی قویتر از دیگران هستند تدوین‌کنند. بعد از آن دوکنفرانس‌دربارهٔ آموزش‌هندسه، یکی‌در آرهوس[5] دانمارك و دیگری در بولونیا[6] تشکیل شد،که‌در آن روش جدید آموزش هندسه به‌روش برداری و کـار‌برد دستگاه مختصات درآموزش هندسه موردبحث‌و توافق و تأکید قرارگرفت. بدین‌ترتیب، هندسهٔ‌قدیم ازکتابها رخت بربست.

در دسامبر سال ۱۹۶۱ نخستین سمینار جهت بررسی آموزش ریـاضیات در سطح بین‌المللی در بوگوتـا[7] کلمبیا تشکیل شد. در این سمینار گروه زیادی از ریاضیدانان جهان شرکت کرده بودند،ودر همین‌گردهمایی بودکه کمیتهٔ دایمی بین‌المللـی در آموزش ریاضی تشکیل شد، تا در مقیاس وسیع و برنامه‌های آموزش ریاضیات متوسطه تجدید نظرکند.

این کمیته‌که شالودهٔ‌کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات است، درحـال حاضر شورای بین‌المللی آمـوزش ریاضیات نام دارد، و برای بـرگزاری هـر‌کنگره یك کمیتهٔ اجرایی‌متشکل از رئیس و دونایب رئیس، و دبیر و سه عضو تشکیل می‌دهد.

این شورا در اوت ۱۹۶۲، در ابتدای تشکیل خود درکنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات در استکهلم، سه

1. New Thinking in Schoolmath.
2. Zagreb
3. Aarhus
4. Bologna
5. Bogota

1. O.E.E.C 2. Sevre

گزارش مهم در موضوعات مورد بحث راجع به تحقیقات و اقدامات کشورهای عضو در آموزش ریاضی به کنگره ارائه داد. این گزارشها عبارت بودند از:

۱. کاربرد ریاضیات نوین در تعلیمات متوسطه، توسط پروفسور کمنی،
۲. تربیت معلمان ریاضی، توسط پروفسور پین از نروژ،
۳. بنیادگذاری تعلیم جبر، توسط پروفسور ستراس زویکس از لهستان.

این سه گزارش پیش درآمد تشکیل اولین کنفرانس بین‌المللی دربارهٔ آموزش ریاضی به‌شمار می‌آید.

اولین کنفرانس بین‌المللی دربارهٔ آموزش ریاضیات در بوداپست مجارستان، از بیست و هفتم اوت تا هشتم سپتامبر سال ۱۹۶۲، تحت نظارت یونسکو با شرکت هفده کشور: استرالیا، بلژیک، کانادا، دانمارک، آمریکا، سوئد، سوئیس، چکسلواکی، فرانسه، مجارستان، ایتالیا، ژاپن، هلند، لهستان، رومانی، انگلستان، و شوروی تشکیل شد.

در این کنفرانس سه موضوع مورد بحث قرار گرفت:

۱. مواد آموزش (مواد درسی)،
۲. روش آموختن و آموزش‌دادن،
۳. تربیت معلم، و چگونه معلومات معلمین را مطابق روز نگاهداریم.

نکتهٔ قابل توجه، این بود که در این کنفرانس دست همکاری به‌سوی ریاضیدانان، متخصصان تعلیم و تربیت، و روانشناسان دراز شده بود. اشتراک مساعی این متخصصان، مستلزم به‌وجود آمدن یک مرکز بین‌المللی اطلاعات برای آموزش ریاضیات بود، تا نتایج تحقیقات آنها همزمان و سریع به یکدیگر برسد و هماهنگ شود.

بدین منظور آخرین توصیهٔ نخستین کنفرانس بین‌المللی آموزش ریاضی بوداپست، ایجاد مرکز بین‌المللی اطلاعات برای آموزش ریاضیات بود، و همین توصیه و پذیرش آن از سوی کلیهٔ کشورهای توسعه‌یافته و در حال توسعه، موجب شد که هر چهار سال یک بار کنگره‌ای بین‌المللی در آموزش و پرورش ریاضی در یکی از کشورهای جهان برگزار شود، که در آن نمایندگان کشورها، اطلاعات و نظریات و تجارب خود را در اختیار دیگر کشورها قرار دهند، و مسؤولیت تشکیل این کنگره نیز به‌عهدهٔ شورای بین‌المللی آموزش ریاضیات گذارده شد تا اینکه اولین جلسهٔ آن در سال ۱۹۶۸ در شهر لیون فرانسه، تشکیل شد.

دومین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضیات در سال ۱۹۷۲، در اکستر انگلستان تشکیل شد، که در آن ۱۴۰۰ نفر از دانشمندان و متخصصان تعلیم و تربیت ریاضی از ۷۳ کشور جهان شرکت کردند.

سومین کنگره در سال ۱۹۷۶، در کارلسروهٔ آلمان و چهارمین کنگره در سال ۱۹۸۰ در هلسینکی فنلاند، و پنجمین آن در آدلاید استرالیا، در سال ۱۹۸۴ تشکیل شد، که در آن برای اولین بار از جمهوری اسلامی ایران نیز گروهی از کارشناسان ریاضی آموزش و پرورش به‌طور رسمی شرکت کردند. ششمین اجلاس آن در بوداپست مجارستان، از پنجم تا دوازدهم مرداد ماه ۱۳۶۷ بود که در آن ۲۳۱۷ نفر از ۷۹ کشور جهان شرکت کردند.

هفتمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضیات در سال ۱۹۹۲ در کبک کانادا برگزار خواهد شد.

گزارش ششمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی در مجارستان

از اینکه در شرایط حساس کشورمان برای شرکت در این کنگره می‌رفتم وظیفهٔ سنگینی بر دوش خود احساس می‌کردم تا بتوانم در این راستا با دستی پر به‌ایران بازگردم. ساعت ۷ بعدازظهر روز قبل از

گشایش کنگره به‌عنوان نمایندهٔ کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضیات در ایران، در مجمع عمومی این کمیسیون شرکت کردم. این مجمع هرچهار سال یک بار تشکیل می‌شود. ادارهٔ مجمع برعهدهٔ پروفسور ژان پییر کاهان[1] از فرانسه به‌عنوان رئیس کمیسیون و پروفسور جفری هاوسون[2] از انگلستان به‌عنوان دبیر کمیسیون بود، و از ۵۳ نمایندهٔ کمیسیون در کشورهای مختلف، ۴۳ نفر حضور داشتند. ابتدا گزارش مالی کمیسیون ارائه شد، و رئیس جلسه موجودی کمیسیون را حدود ۳۰۰۰۰ پاوند انگلیس برآورد کرد. منابع مالی کمیسیون، در چهار سال گذشته را نیز برشمردند. منابع عمدهٔ کمیسیون، یونسکو و اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی، و اتحادیهٔ بین‌المللی دانشمندان علوم بوده است؛ کشورهای مختلف مانند آمریکا، انگلیس، فرانسه و به‌ویژه کویت، نیز کمکهای مالی قابل توجهی به کمیسیون کرده‌اند. مخارج کمیسیون در چهار سال گذشته شامل کمکهای مالی قابل توجه به برگزاری کنفرانسهای آموزش ریاضی محلی، یا قاره‌ای، مانند کنفرانس آموزش ریاضی کشورهای آمریکای لاتین، کنفرانس آموزش ریاضی کشورهای آسیای جنوب شرقی، و کنفرانس آموزش ریاضی کشورهای آفریقایی، و همچنین کمکهای نسبتاً کافی به گروههای مطالعاتی بین‌المللی وابسته به کمیسیون بوده است. کمیسیون به ۳۵ نفر از شهروندان کشورهای در حال رشد کمک مالی اعطا کرده است که در ششمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی شرکت کنند. سپس هر یک از سرپرستهای گروههای مطالعاتی بین‌المللی وابسته به کمیسیون گزارشی کوتاه دربارهٔ فعالیتهای خود، در چهار سال گذشته، ارائه کردند. این گروهها عبارت بودند از گروه بین‌المللی مطالعات تاریخ و تعلیم ریاضی؛ گروه بین‌المللی مطالعات روانشناسی آموزش ریاضی؛ و گروه بین‌المللی مطالعاتی زنان و آموزش ریاضیات. گروه اخیر درمورد ریاضیات و موضع زنان در این حوزه فعالیتهای گسترده‌ای را شروع کرده و مخصوصاً در مورد این که چرا زنان کشورهای مختلف در مقایسه با مردان، کمتر به ریاضیات روی می‌آورند، تحقیقات ارزنده‌ای انجام داده است.

صبح تا ظهر روز اول کنگره، یعنی روز ۲۷ اوت، به‌ثبت نام و دریافت کتابچه‌های مخصوص کنگره اختصاص داشت؛ و در محل ثبت‌نام آنان که از پیش با هم آشنا بودند، این بار نیز تجدید دیداری می‌کردند. ساعت ۲ بعدازظهر، کنگره در سالن اجتماعات شهر بوداپست که بنایی زیبا و باشکوه است، گشایش یافت. در این جلسه، نمایندهٔ مخصوص دبیر کل حزب کمونیست مجارستان، وزیر آموزش عالی، رئیس انجمن ریاضی، یانوش بولیای (انجمن ریاضی مجارستان)، و شهردار بوداپست، رئیس و دبیر کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی، رئیس کمیتهٔ برگزاری کنگره، و رئیس دانشگاه پلی‌تکنیک بوداپست، که مکان برگزاری سخنرانیهای تخصصی در آنجا بود، شرکت داشتند، و هرکدام طی سخنانی کوتاه به‌شرکت کنندگان خوشامد گفتند. سپس نخستین سخنرانی اصلی که سخنان پروفسور نبرس[1] از کشور فیلیپین بود، با معرفی پروفسور کاهان آغاز شد. عنوان این سخنرانی "برنامهٔ ریاضیات مدارس در دههٔ ۱۹۹۰، ضرورت تغییر، خاصه در کشورهای در حال رشد" بود. پروفسور نبرس استاد فلسفهٔ ریاضی و نظریهٔ اثبات است، او در بنیانگذاری انجمن ریاضی فیلیپین و پایه‌گذاری انجمن ریاضی آسیای جنوب شرقی سهم اساسی داشته است. محور سخنرانی پروفسور نبرس پیرامون محیط اجتماعی-فرهنگی-اقتصادی حاکم برجو آموزش ریاضی دور می‌زد، و تأکید داشت که این عوامل نقش اصلی را بازی می‌کنند و ریزه‌کاریهای آموزش ریاضی مانند برنامه‌های آموزشی، کتابهای درسی، استفاده از ماشینهای محاسبه و . . . در مرتبه‌های بعدی قرار می‌گیرند. به عقیدهٔ او، برنامهٔ ریاضیات در کشورهای مختلف کمابیش یکسان است؛ با این حال، درجهٔ متفاوت بازدهی به‌سیستمهای اجتماعی گوناگون مربوط است. در بعضی کشورها پربها دادن به‌ریاضیات ریشه در سنت و فرهنگشان دارد، و مثلاً معلمین ریاضی از احترام ویژه‌ای برخوردارند، و سخت‌کوشی در ریاضیات یک رسم است. در این کشورها، علیرغم

1. J. P. Kahane 2. G. Hawson

1. B. Nebres

تنگناهای اقتصادی، ریاضیات مدارس بسیار شکوفا بوده است. مثلاً ریاضیات مدارس در ویتنام حتی در گیرودار جنگ نیز در سطح بسیار مطلوبی بوده است. ریاضیات در ژاپن و مجارستان، به علل فرهنگی همواره جایگاه خاصی داشته است. پروفسور تیرس معتقد بود که به جهت قابل دسترس بودن ماشینهای حساب کوچك، باید از این وسایل برای ایجاد انگیزه در آموزش ریاضیات در مدارس به‌نحو درستی بهره گرفت. پیشرفت تکنولوژی، شرایط خاص اقتصادی-اجتماعی حاکم برجهان، تغییر برنامه‌های درسی در دههٔ ۱۹۹۰، به‌ویژه در کشورهای درحال رشد، را غیرقابل اجتناب می‌کند.

دومین سخنرانی از پنج سخنرانی عمدهٔ کنگره[1] سخنرانی پروفسور ورناد[2] از کشور فرانسه بود. او تحت عنوان چارچوب نظری و اصول تجویسی در روانشناسی آموزش (ریاضیات سخنرانی کرد. پروفسور ورناد از شاگران برجستهٔ ژان پیاژه محقق پرآوازهٔ سویسی در روانشناسی کودك بوده است. او با ارائهٔ نمونه‌های جالبی نشان داد که در تصورات و استنتاجهای کودکان دبستانی، چه ریاضیات و الگوریتمهای استواری وجود دارد. این تفکر کما بیش پرورده نظریه‌های خود پیاژه است.

ازصبح روز دوم برنامه‌های گروهی در محل دانشگاه پلی‌تکنیك شروع شد. ابتدا سرپرستهای گروهها کار گروه خود را بدو بر گروههای تخصصی‌تر، برحسب عنوانهای مطالعاتی، تقسیم کردند. من در گروه کار A-5 عضویت داشتم که مربوط به آموزش ریاضی در دانشگاهها است؛ و دستهٔ ۴ از این گروه دانشگاهها کار می‌کرد، انتخاب کردم. تعدادی که این دسته را تشکیل می‌دادند ۳۵ نفر بود. سخنرانیهای ۱۵ دقیقه‌ای و ۱۰دقیقه‌ای همراه با بحثها وصحبتهای بسیار مفیدی در آنجا جریان داشت. این برنامه سه روز دیگر از ساعت ۸/۳۰ الی ۱۰ صبح ادامه داشت. من نیز در یکی از بحثها موضوع "طرح تمام وقتی" دانشگاههای ایران را مطرح کردم و همه از نشر دگی کار در این طرح، تعجب کردند و اظهار

1. Plenary Address 2. G. Vergnaud

را یعنی سیاهپوستان، زنان، سرخپوستان و... تشکیل داده‌اند. ۳۸ درصد استادیاران دانشگاههای آمریکا خارجی هستند، نصف تا ۲/۳ تعداد هیئت علمی دانشگاهها تحقیق نمی‌کنند، حدود ۹۰۰۰ الی ۱۰۰۰۰ محقق ریاضی دارند که این تعداد نمی‌تواند نیاز کشور آمریکا را تأمین کند.

در گروههای "زمینهٔ فعالیت" که تعدادشان ۹گروه بود، من گروه "T-3"، یعنی "گروه حل مسئله" را برگزیده بودم، که در چهار جلسهٔ یك ساعت ونیمی که بیشتر به‌صورت میز گرد، پرسش و پاسخ، و بحث بود، برگزار شد. سؤالات جالبی مطرح می‌شد که به جمعبندی مطلوبی نیز می‌انجامید. مثلاً این که حل مسئلهٔ ریاضی چیست، و فرایند حل مسئله چه مراحلی را طی می‌کند. یك تعریف مطلوب از حل مسئلهٔ ریاضی این بود که این کار برخورد با سؤالی است ریاضی که شخص هیچگونه الگوریتمی برای پاسخگویی به‌آن در اختیار ندارد، یا ساختن الگوریتم به این پرسش پاسخ می‌دهد. البته درصورت مشخص بودن الگوریتم، با تمرین مواجه‌ایم و نه با مسئله. مراحل اساسی در حل یك مسئله عبارتند از: تحلیل مسئله، مسراجعه و مقایسه با مسائلی مشابه و ساده‌تر، به‌کارگیری نظریه‌ای مفید ومناسب، حل موقت، توضیح واستدلال، بررسی مجدد، ارائهٔ حل نهایی. در این جلسات بعضی از مسائل ریاضی را به‌عنوان مثال مطرح می‌کردند وشکل برخورد حضار با مسائل بررسی می‌شد، واینکه یك مسئلهٔ خاص تا چه حد مطلوب است و یا برای چه منظوری خوب است، مورد بحث قرار می‌گرفت.

در گروهبندی برحسب "مباحث مورد علاقه" من قسمت TO-5، یعنی مسابقات ریاضی را انتخاب کرده بودم که چهارجلسهٔ یك‌ساعته به آن اختصاص داشت. سخنرانیهای کوتاهی درمورد مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف دنیا، بخشی از این جلسات را تشکیل می‌داد. در کشورهای پیشرفته مسابقات ریاضی نه‌چون هدفی برای احراز رتبهٔ بالا، بلکه وسیله‌ای است برای تشویق دانش‌آموزان به‌ریاضیات، ایجاد انگیزه و رقابت سالم، وشناسایی دانش‌آموزان با استعداد. در این کشورها دهها نوع مسابقهٔ ریاضی با الگوها و سطحهای متفاوت و در چندین مرحله برگزار می‌شود، و در این راه سرمایه‌گذاری مادی و معنوی بسیار قابل توجهی انجام می‌گیرد. یکی از سخنرانان معتقد بود که نبایـد از المپیاد بین‌المللی ریـاضی، برای قهرمان پـروری در ریـاضیات استفاده کـرد؛ ریاضیات را باید در سطح عموم دانش‌آمـوزان و دانشجویان بالا برد و از مسابقات نیز بایـد در این راستا سود جست.

در این قسمت بود که من تحت عنوان "مسابقات ریاضی در ایران" سخنرانی کردم، و از پیشرفت در این زمینه در کشورمان، وجوایز ونتایج تیم ایران در المپیاد سال گذشته، و نتایج درخشان سال جاری که طی آن تیم ایران با به‌دست آوردن یك مدال نقره وسه مدال برنز رتبهٔ نوزدهم را درمیان ۴۹ کشور جهان به‌خود اختصاص داد، سخن گفتم، و تـأکید کردم که این فعالیتها درشرایط جنگی وبمباران شهرها ومناطق مسکونی از سوی دشمن صورت گرفته است، اشاره‌ای به‌پرواز تیم دانش‌آموزان ایرانی در سوم ژوئن سال جاری کردم و این‌که این روز با حادثهٔ رفت‌بار حملهٔ ناو آمریکایی به‌هواپیمای مسافری ایران مصادف شد. این سخنرانی با همکاری آقای دکتر علی رجالی از دانشگاه صنعتی اصفهان و آقای دکتر مگردیچ تومانیان از دانشگاه تبریز تهیه شده بود و پس از من آقای دکتر رجالی در مورد "بودجه، آمادی مسابقات ریاضی گذشته در ایران"، سخنانی ایراد کرد.

چهارسخنرانی ۲۵ دقیقه‌ای توسط نمایندگان ۴ کشور در آرژانتین، بلغارستان، ملاوی (کشور کوچکی در جنوب شرقی آفریقا) و اسپانیا در بارهٔ برنامهٔ ریاضیات در سیستم آموزشی کشورهای نامبرده ایراد شد. این سخنرانیها بـا پـوسترها و اسلایدهای جالبی همراه بود، و نکات جالبی در هر یك از آنها یافت می‌شد، در دو مورد، زبان ارائـهٔ سخنرانی خیلی ضعیف بود و فهم مطالب را تاحدی ناممکن می‌ساخت.

جلسه‌ای عمومی ولی تا حدی غیررسمی در بارهٔ اینکه در ده سال آینده کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضیات باید چه‌کارهایی را دنبال کند، تشکیل شد.

داشتند حداکثر ساعات تدریس هیأت عملـی از ۸ تا حداکثر ۱۲ ساعت (به‌تدریج) تغییر می‌کند. در جمعبندی جالبی که در آخرین جلسهٔ دستهٔ ۴ تـوسط سرپرست مربوطه به‌عمل آمد، چنین عنوان شده است:

ـ در اکثریت قریب‌باتفاق کشورها روزبه‌روز از علاقهٔ دانش‌آموزان نسبت بـه ریـاضیات کاسته می‌شود. آنان درجهان تکنولوژیکی‌امروز ریاضیاتی می‌خواهند که پاسخگوی فوری مسائل مبتلا به وروزمرهٔ آنها نیز باشد، تحرك وانگیزه داشته باشد، خشك و مجرد و جدا از جهان ملموس نباشد.

ـ در اکثر کشورهای دنیا، برنامهٔ دروسی مانند ریاضیات عمومی، همان مطالبی است کـه حدود ۳۰ سال پیش عرضه می‌شد؛ این وضع حتماً بـاید تغییر یابد و بر اساس نیازهای امروزی، هنگام با شتاب تکنولوژی و صنعت، و با حفظ معیارهای اصولـی، فلسفی و تاریخی؛ برنامهٔ دروسی از ایـن قبیل تغییر یابد. بدیهی است اقـدامات لازم برای هماهنگـی مدرسین با این تغییرات نیزضروری است.

ـ باید از وسایل مختلف آمـوزشی به‌ویـژه کامپیوتر، در آموزش ریاضیات با دقت و ظرافت و به‌طور صحیح سود جست، و ریاضیات را بـه مردم عادی معرفی کرد و آنها را از بیگانگـی نسبت بـه ریاضیات بیرون آورد.

سخنرانی یکی از اساتید دانشگاههای آمریکا، حاوی نکات جالبی بود که خوب است از آن یادکنیم: تعداد فارغ‌التحصیلان لیسانس ریاضی دانشگاههای آمریکا از سال ۱۹۷۲ به‌طور چشمگیری رو به‌کاهش گذاشته است؛ این موضوع در مورد فارغ‌التحصیلان فـوق لیسانس و دکتری ریاضی نیـز صادق است، تعداد فارغ‌التحصیلان زن درهرسه مورد تقریباً ثابت بوده، وتعداد فارغ‌التحصیلان خارجی در دانشگاههای آمریکا خصوصاً در دورهٔ دکتری ریـاضی، همواره رو به‌افزایش بـوده است، و در دو سال گذشته تعداد فارغ‌التحصیلان خـارجی در دورهٔ دکتری ریاضی برتعداد فارغ‌التحصیلان آمریکایی در ایـن دوره فزونـی گـرفته است. و بـاز جالبتر اینکه از تعداد محدود فارغ‌التحصیلان آمریکایی، دکتری ریاضی، ۷۵ درصد را مردان سفیدپوست و تنها ۲۵درصد بقیه

پیشنهاد شد که کمیسیون با سیاست‌گذاران کشورها ارتباط برقرار کند و از آنها بخواهد که توجه بیشتری به آموزش ریاضیات معطوف کنند. درمورد ریاضیات و زنان فعالیتهای گسترده‌تری انجام گیرد، ارتباط دست‌اندرکاران آموزش ریاضی از کشورهای در حال رشد با متخصصین مربوطه از کشورهای پیشرفته بیشتر شود، و کتابها و مقالات مفید در این زمینه توسط کشورهای توسعه‌یافته در اختیار سایرین قرار گیرد. این جلسه تا وقت مقرر ادامه نیافت و وقتی یکی از حضار سؤالی و پیشنهادی به زبان فرانسه مطرح کرد، چند تن از مسؤولین میزگرد درخواست کردند که خلاصهٔ سؤال به‌انگلیسی بیان شود که این موضوع با مخالفت ریاست کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی روبرو شد و اعضای میزگرد جلسه را تعطیل کردند!

عصر روز سوم فیلمی از جورج پولیا معلم پرآوازهٔ ریاضی این قرن نمایش داده شد که چگونه در یک کلاس حل مسئله، محصلین را به تفکر وامی‌دارد، گام به گام به‌جلو می‌برد، سؤالها را به‌طوری طبیعی و جالب برای محصلین مطرح می‌کند، و به‌آنها با پشتوانه‌های متفاوت پاسخ می‌دهد و در نهایت کلاس را با کولدباری از دیده‌ها و اندیشه‌های ریاضی برای تکمیل در مراحل بعدی به‌پایان می‌رساند. در زمان تهیهٔ این فیلم، فکر می‌کنم پولیا ۷۰ الی ۸۰ سال داشته است، لیکن با چنان علاقه و اشتیاقی تدریس می‌کند که گویی شیرین‌ترین لحظات زندگی خود را می‌گذراند. در اینکه پولیا یک نابغهٔ تعلیم ریاضیات بود تردیدی وجود ندارد، اما شرایط و امکاناتی که فراهم شده بود، زمینهٔ بروز نبوغ او را فراهم آورد. با خود فکر می‌کردم که آیا واقعاً در کشور خودمان امثال پولیا را در معیار خودمان نداشته‌ایم و نداریم؟ سعی می‌کردم مواردی از شخصیت و فداکاری و مهارت در تدریس معلمینی را که با آنها آشنایی داشته‌ام، به‌یاد بیاورم و هرچقدر بیشتر فکر می‌کردم این حدس که آنها نیز چندان بی‌مایه‌تر از پولیا نبوده‌اند، در من قوت می‌گرفت، شخصیتهایی چون پروفسور فاطمی، احمد بیرشک، حسین غیورو... دربرابر چشمانم مجسم می‌شدند. افسوس که ما ارزش والای این درهای شاهوار را نشناخته‌ایم و میدان را برای رشد و شکوفایی و هنرنمایی این عزیزان و بسیاری دیگر نگشوده‌ایم. یاد شعری افتادم که اگر درست به‌خاطر داشته باشم چنین است:

یار در خانه و ما گرد جهان می‌گردیم
آب در کوزه و ما تشنه لبان می‌گردیم

روز پنجم نام خاصی داشت: "روز مخصوص ریاضیات، آموزش، اجتماع" و سخنرانیها حول این زمینه متمرکز بودند. بعدازظهر همان روز آقای دکتر علی رجالی، تحت عنوان "بی‌علاقگی دانش‌آموزان به‌مطالعهٔ ریاضیات" سخنرانی کرد.

در این کنگره بحث برسر آموزش ریاضی بود وطبیعتاً سخنرانی ریاضی محض جایی نداشت. لیکن به احترام پال اردیش[1] ریاضیدان پرکار و خستگی‌ناپذیر مجاری، ساعتی برای سخنرانی ایشان اختصاص یافته بود، روز هفتم، ایشان یک سخنرانی تحت‌عنوان "مسائلی که ظاهری ساده وحلی خیلی مشکل دارند"، ارائه کرد، و مسائل زیبایی در نظریهٔ اعداد و هندسهٔ کلاسیک مطرح کرد که شاید ذکر یکی از مهمترین آنها خالی از لطف نباشد.

شکافهای بین اعداد اول: اگر n-امین عدد اول را با P_n نمایش دهیم و فرض کنیم

$$d_n = P_{n+1} - P$$

کدامیک از روابط زیر بینهایت بار رخ می‌دهد

$$d_{n+1} > d_n$$
$$d_{n+1} = d_n$$
$$d_{n+2} > d_{n+1} > d_n$$
$$d_{n+2} < d_{n+1} < d_n$$
$$d_n = 2$$

(انگارهٔ معروف به گلدباخ) درسال ۱۹۴۱ ثابت شده است که

$$\liminf \frac{d_n}{\log n} < 1$$

یکی دیگر از سخنرانیهای عمدهٔ یک‌ساعته، که بسیارهم مورد توجه حضار قرار گرفت، سخنرانی

1. P. Erdös

پروفسور ارشاو[1] از آکادمی علوم شوروی بود که دربارهٔ کامپیوتری کردن مدارس شوروی در کلیهٔ سطوح، سخنرانی کرد. او دربارهٔ لزوم این تحول و شکل پیاده کردن آن و دقت بسیار زیاد در استفادهٔ صحیح از کامپیوتر در مدارس ابتدایی و متوسطه، و مؤسسات عالی، نکات بسیار جالب و آموزنده‌ای ارائه کرد، واظهارداشت که این تحول در شوروی طبق برنامهٔ کولموگوروف، ریاضیدان شهیر شوروی، در شرف اتمام است. پروفسور ارشاو اقدام به‌این تحول در سایر کشورها را نیز ضروری می‌دانست.

دو سخنرانی عمدهٔ یک‌ساعته برای روز آخر در نظر گرفته شده بود. سخنرانی پروفسور لوواز[2] استاد برجستهٔ دانشگاه لوراند بوداپست که موضوع آن در زمینهٔ ریاضیات الگوریتمی بود. ایشان ریاضیات را به دو بخش عمده، ریاضیات ساختاری و ریاضیات الگوریتمی تقسیم کرده ریاضیات ساختاری شامل ساختارهای جبری و نظریه‌های کلاسیک ریاضی است، که اصول از پیش داده شده‌ای در آنها مطرح است. درصورتی که ریاضیات الگوریتمی چنین چارچوبی ندارد و امروز با پیدایش و تکوین کامپیوتر بیشتر خودنمایی می‌کند، والبته تدریس ریاضیات الگوریتمی در کلاس کار چندان ساده‌ای نیست. او پیشنهادهای جالبی در این زمینه ارائه کرد.

آخرین سخنرانی عمده توسط پروفسور کاهان ریاست کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضیات ایراد شد، که دربارهٔ شخصیت والای جورج پولیا صحبت کرد. شرح حالی از زندگی پولیا از بوداپست تا استانفورد، دوستیهای صمیمانه‌اش، روشهای بسیار روشن و محکم وی، و نتایج درخشانی که به‌گونه‌ای اعجازآمیز به کمک این روشها بدست می‌آورد، و سرانجام معیارهای انسانی وی که برای حل هرمشکلی حتی بی‌ارتباط با "ریاضیات محض" که از وی خواسته می‌شد، او خالصانه تلاش می‌کرد، فرازهایی از سخنرانی پروفسور کاهان بود. او عنوان کرد که نکتهٔ بارز در مورد پولیا این است که او درحالی که یک معلم ریاضیات کلاسیک بود، در عالیترین سطح ریاضی نیز تحقیق کرده است، ومورد احترام بزرگترین ریاضیدانان عصرخود بود.

درکنار برنامه‌های علمی کنگره، نمایشگاههای کتاب، وسایل آموزشی و نشریات مختلف آموزشی، درسطح قابل توجهی ارائه شده بود. البته در مقایسه با کنگرهٔ پنجم در استرالیا محقر به‌نظر می‌آمد. ظاهراً کمپانیهای غربی از این کنگره استقبال چندانی به‌عمل نیاورده بودند.

در این کنگره حدود ۲۵۰۰ نفر از بیش از ۷۰ کشور جهان شرکت داشتند. درحالی که از کشور ژاپن بیش از ۲۰۰ شرکت کننده آمده بودند، و اکثر آنها آموزگاران و دبیران جوان مدارس ژاپن بودند، و مشتاقانه و با آمادگی کامل در فعالیتها شرکت می‌کردند، از کشور ما فقط ۹ نفر در این کنگره شرکت داشتند و هرچند اکثر شرکت کنندگان ایرانی با تمام توان سعی می‌کردند بیشترین استفاده را از کنگره و امکانات ارائه شده ببرند، و در این راه موفقیت چشمگیری داشتند، جای آموزگاران و دبیران ایرانی، این انسانهای زحمتکش و دوست داشتنی، در کنگره خالی بود. متأسفانه مسؤولین آموزش و پرورش کشورمان طرز فکری ناصواب در این مورد دارند، اغلب مسؤولین فکر می‌کنند آموزگاران و دبیران ما تنبل و تن‌پرور و بی استعدادند، و احیاناً رکود آموزشی تقصیر آنهاست. ابراز این نظریک افترا یا گزافه‌گویی نیست؛ آیا اینکه در همین کنگره حدود نصف شرکت کنندگان، دبیران و آموزگاران کشورهای مختلف جهان بودند و از کشور ما هیچ دبیر و آموزگاری که با ضابطه‌ای مشخص انتخاب و به کنگره اعزام شده باشد، حضور نداشت، دلیل بارزی بر این ادعا نیست؟ من یک بار دیگر می‌خواهم توجه مسؤولین آموزش و پرورش کشورمان را نسبت به این عزیزان برانگیزم. شرکت آموزگاران و دبیران ریاضی کشورمان در این گونه کنگره‌ها، که می‌تواند با همکاری انجمن ریاضی ایران زمینه‌های آمادگی شرکت کنندگان را فراهم کند، گامی مناسب درجهت تشویق آنها خواهد بود. البته انتخاب حتماً باید برحسب معیارهای صحیح صورت گیرد.

هفتمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضیات در تابستان سال ۱۹۹۲ در شهر کبک کانادا برگزار خواهد

1. H. Ershov 2. L. Lovász

شد. چه خوب است که یك برنامه‌ریزی جدی، منطقی وصادقانه از سوی کلیه علاقه‌مندان در زمینهٔ آمادگی جهت شرکت فعال در این کنگره به‌عمل آید. برای برگزاری هشتمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضیات، کشور اسپانیا اعلام آمادگی کرده است، لیکن به دلیل گرمی هوا در این وقت سال در اسپانیا، موضوع هنوز قطعی نشده است.

در حاشیهٔ کنگره، شرکت کنندگان ایرانی که اغلب در خوابگاه دانشجویی سکونت داشتند، فرصتی یافتند تا برخی مسائل آموزش ریاضی در کشورمان را مطرح کنند، همدیگر را بیشتر بشناسند و برای این جلب شناخت بیشتر همکاران عزیزم بسیار لذت‌بخش بود. استفاده‌هایی که از مصاحبتها با آنان داشتم، بسیار با ارزش بود.

در خاتمهٔ گزارش خود لازم می‌دانم از مسؤولین محترم دانشکدهٔ علوم و دانشگاه تهران و وزارت آموزش عالی که در شرایط بسیار حادکشورمان، در حد امکان در تسهیل مسافرت، مرا یاری فرمودند، صمیمانه سپاسگزاری کنم.

رحیم زارع نهندی

دانشیار ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

در جُنگ ریاضی دانشجو، جلد ۱، می‌خوانید:

مقدمه دو

دربارهٔ جُنگ اول سه

غلامرضا برادران خسروشاهی

مقالات بلند

گرایشهای جاری درجبر ۱

گرت بیرکاف

سیاحتی درتوپولوژی ۳۰

فرشید جمشیدیان

اویلر و تابع زتا ۴۳

ریموند ایوب

مقالات کوتاه

پیامدهای فکری انقلاب کامپیوتری ۶۸

ر.و. همینگ

آیا حقیقت ریاضی وابسته به‌زمان است؟ ۷۹

جودیث گرابینر

ده قانون دربارهٔ چگونگی تحول درتاریخ ریاضیات ۹۳

مایکل کراو

هندسه‌های کلاینی ۱۰۰

احمد شفیعی ده‌آباد

ریاضیات ساختنی ۱۰۵

مارك مندلکرن

عدد حقیقی چیست؟ ۱۱۹

جان مای‌هیل

گزارشها

نگاهی به‌مسابقات ریاضی درجهان و ایران ۱۲۸

امیر اکبری مجدآبادنو

مگر، حقیقت و زیبایی خودبسنده نیستند؟ ۱۳۶

جیمز گلیك

کارنامهٔ برنامهٔ کارشناسی ارشد ریاضی و آمار دانشگاه تهران ۱۳۹

غلامرضا برادران خسروشاهی، بهزاد منوچهریان

در جُنگ ریاضی دانشجو، جلد ۲، می‌خوانید :

مقدمه — دو

مقالات بلند

نظری اجمالی بر سیر تکامل نظریهٔ گروهها — ایزرائل کلاینر — ۱
مجموعهٔ محدب چیست؟ — ویکتور کلی — ۲۹
انگرال لبگ نهارت اویلر: نگرشی تاریخی بر تابع گاما — فلیپ دیویس — ۵۱
میدانهای اقلیدسی اعداد — هندریك لنسترا — ۷۳
معماری بنای ریاضیات — نیکولا بورباکی — ۸۹
ملاحظاتی پیرامون مفهوم حد — روث ریکا استرویك — ۱۰۳
نگاهی به $1+2+\cdots+n$ از دیدگاه ریاضیات گسسته — لورن لارسن — ۱۱۳
جهان نیوتنی — روبرت هال — ۱۲۹
برنولیها و سری همساز — ویلیام دانهم — ۱۳۴
گروههایی که اجتماع سه زیرگروه هستند — هایمر، برایان، موبر — ۱۴۰

مقالات کوتاه

میز ناپدید شونده — لاری کنوب — ۱۴۸
شمارشپذیری مجموعه‌ها — استفن کمبل — ۱۵۰
برهان دیگری از قضیهٔ کوشی درمورد گروهها — جیمز مك کی — ۱۵۱
نکته‌ای درباب چندجمله‌ایهای مشخصه — ژوزف اشمید — ۱۵۲

گزارشها

گزارشی از سمینار ریاضی — بهزاد منوچهریان — ۱۵۳
نقش حل مسئله در پیشرفت علمی دانش‌آموزان — پرویز شهریاری — ۱۵۴
تدریس کامپیوتر در نیکاراگوئه — مارلین سنت، آرتور وین — ۱۵۶
نظری اجمالی برکتابهای ریاضی منتشر شدهٔ دانشگاه تهران — بهزاد منوچهریان — ۱۶۰

تکملهٔ فهرست اسامی فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران — ۱۶۵

تصحیح — ۱۶۶

ویژه‌نامه ... دو

مقالات

نقش روش اصل موضوعی	د. ل. ویلدر	۱
وقتی ریاضیات نه می‌گوید	فیلیپ دیویس	۱۷
صداقت درمباحث ریاضی: آیا یك ویك به‌راستی می‌شود دو؟	فیلیپ دیویس	۳۳
ریاضیات و ریاضی فکر کردن	م. ل. کارت رایت	۴۷
ریاضیات به‌عنوان هنری خلاق	پال هالموس	۵۷
ریاضیدان به‌مثابه یك کاشف	هرمن. ک. استین	۷۴
ریاضیات و صداقت فکری	موزس ریچاردسون	۸۹
آیا می‌توان ریاضیات را قابل فهم کرد؟	دالف فیلیپ باوس	۹۶
آموزش حل مسئله	پال‌ها لموس	۱۰۴

گزارشها

کنفرانسهای ریاضی در ایران، نگاهی به بیست سال گذشته	امیراکبری مجدآباد نوری بهراد منوچهریان	۱۱۰
نگاهی اجمالی به تاریخچهٔ دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران	بهزاد منوچهریان	۱۱۵
تاریخچهٔ اجمالی کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی	سید محمدکاظم نائینی	۱۱۷
گزارش ششمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی درمجارستان	رحیم زارع نهندی	۱۱۹