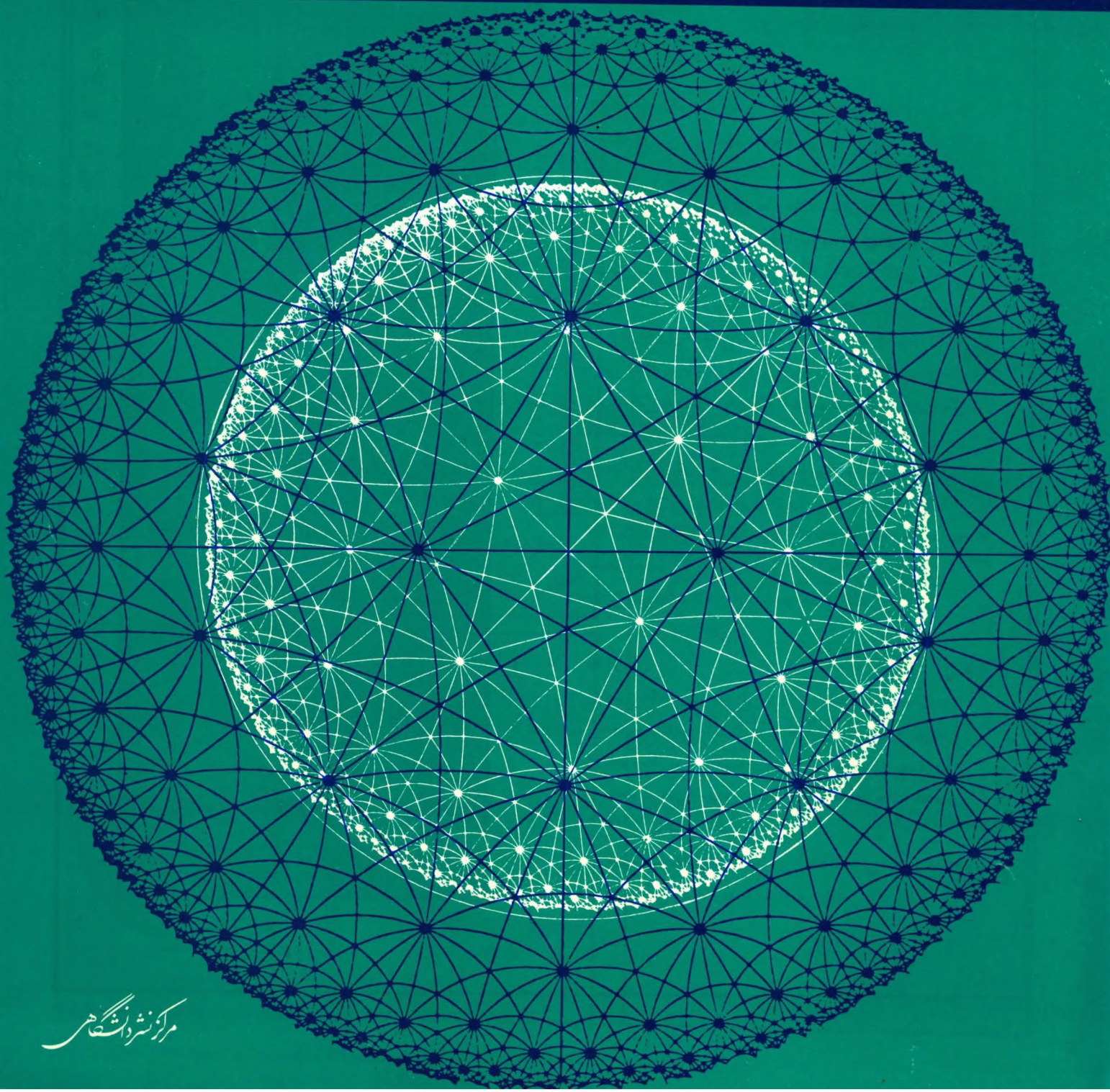
نشر دانش

سال ۲، شمارهٔ ۳، آذر ۱۳۶۸



مرکز نشر دانشگاهی

بسم الله الرحمن الرحیم

نشر ریاضی

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارك خیابان دکتر بهشتی،
تهران ۱۵۱۳۴

بهای هر شماره ۴۰۰ ریال
حق اشتراك سالانه برای داخل کشور
۱۲۰۰ ریال

وجه اشتراك به‌حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹
بانك ملی شعبهٔ خیابان پارك تهران به‌نام
مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر چهار ماه یك بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توّجه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی‌زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به‌ویژه مسائل مربوط به‌آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبك مقاله‌های چاپ شده در *نشر ریاضی* باشد. به‌همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به‌فارسی برگردانند و برای درج به‌مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حك و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یك طرف کاغذ، یك خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به‌منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در *نشر ریاضی* باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

ISSN 1015-2857

سال ۲، شمارهٔ ۳، آذر ۱۳۶۸

مدیر مسؤول: مهدی بهزاد

● مسؤول فنی: فرید مصلحی

● طراح و صفحه‌آرا: آزاده اصغری

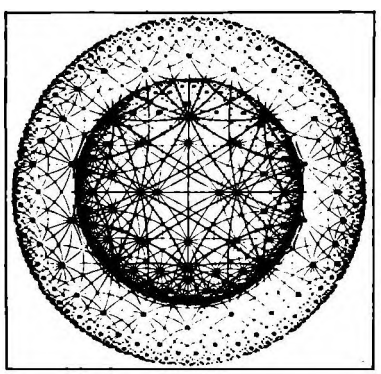
● ناظر چاپ: علی صادقی

با همکاری لاینوترون مرکز نشر دانشگاهی

لیتوگرافی: کیان

چاپ و صحافی: سایه

فهرست

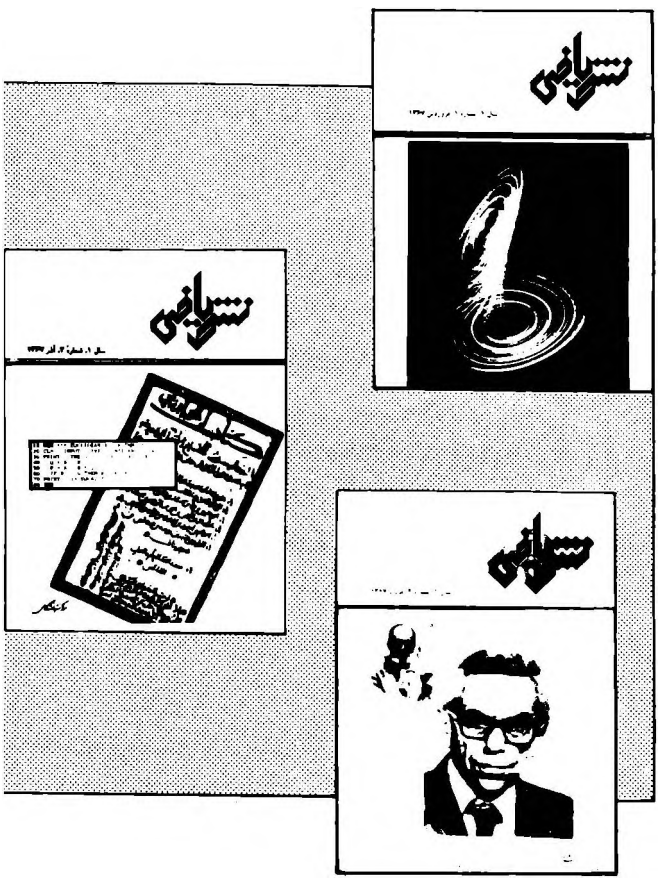


روی جلد

پوششی از صفحهٔ هذلولوی با مثلثهایی با زوایای $\pi/2$، $\pi/3$، و $\pi/7$

ر. ك. "آزمایشگاه ریاضیات"

سخن مدیر مسؤول



در گذشته‌ای نه چندان دور سه جوان پرشور اندیشهٔ چندین سالهٔ خود را در مورد انتشار مجله‌ای توصیفی در زمینهٔ ریاضیات با من در میان گذاشتند. شیفتگی و دم گرم آنان چنان در من اثر کرد که علی‌رغم پیش‌بینی مشکلات فراوان چاره‌ای جز تحسین و تسلیم ندیدم و تهیهٔ مقدمات کار را فریضه دانستم. جلب نظر موافق مرکز نشر دانشگاهی، که معمولا حامی چنین برنامه‌هایی است، کار دشواری نبود. با چند تن از استادان ریاضی که به مشاوره نشستیم هدف شکل گرفت، و ترکیب هیأت ویراستاران برای دورهٔ اول ـ اول فروردین ماه ۱۳۶۶ تا پایان اسفندماه ۱۳۶۸ ـ مشخص شد.

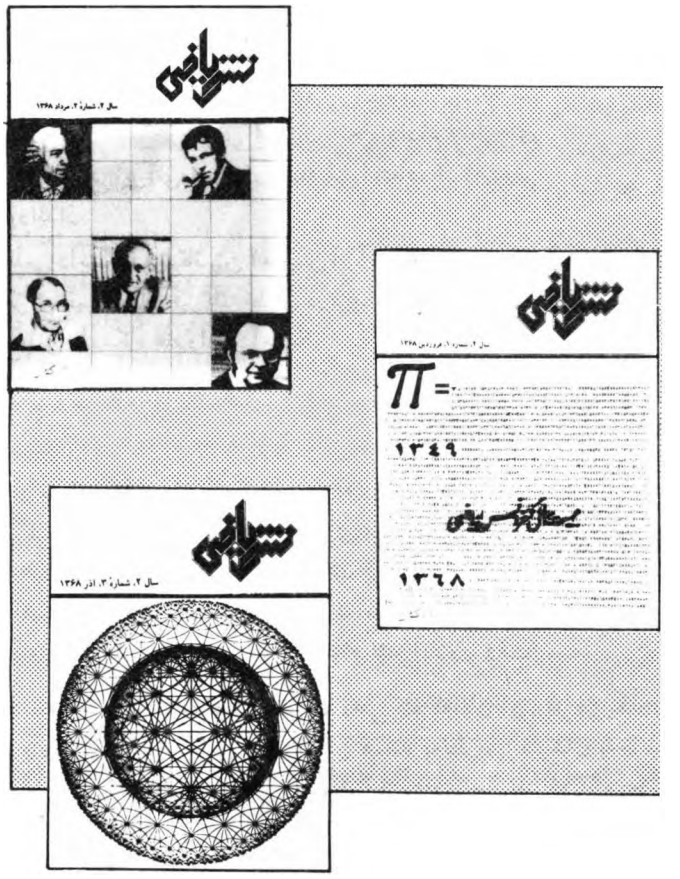
نخستین نشست رسمی هیأت ویراستاران در تاریخ ۲۰ر۱ر۶۶ برگزار شد. در این فاصله حدود هفتاد اجلاس رسمی داشته‌ایم. در این جلسات هرآنچه به مجله مربوط می‌شود مورد بحث و بررسی قرار گرفته و دموکراسی با تمام مزایا و مشکلاتش به جان و دل پذیرفته شده است و این در ژورنالیسم علمی ما تجربهٔ نوی است که امیدواریم با موفقیت ادامه یابد و الگو قرار گیرد.

در نیمهٔ اول سال ۱۳۶۶، هیأت ویراستاران به انتخاب مشاوران و مکاتبه با آنان، برگزیدن مقاله و تماس با مترجمان، تعیین موضوع و درخواست از مؤلفان وصاحبنظران، و به طور کلی به تهیهٔ مندرجات سال اول ـ شماره‌های ۱، ۲، و ۳ ـ پرداخت. در نیمهٔ دوم سال ۱۳۶۶ دشواریهای عملی و اجرایی کار بیش از پیش رخ نمود؛ ترجمه و ویرایش مقالات توصیفی توان و مهارتی می‌طلبد که متأسفانه در جامعهٔ ریاضی ما فراوان نیست. مشکلات مراحل فنی وچاپی مخصوصاً اگر تأکید بر بی‌غلط بودن و بر انتشار به موقع مجله باشد، و بسیاری از این مراحل در کنترل شخص نباشد، برای خود داستانی دارد. بااین همه، درپایان اسفندماه ۱۳۶۶ نخستین شمارهٔ *نشر ریاضی* انتشار یافت و تاکنون شش شمارهٔ آن به موقع منتشر شده است.

تاکنون کوشیده‌ایم به اهدافی که به دقت تعیین کرده‌ایم وفادار بمانیم. خوانندهٔ ما می‌داند که *نشرریاضی* یك مجلهٔ صرفاً تکنیکی نیست، بلکه به جنبه‌های گوناگون پژوهشی، آموزشی، تاریخی، و فلسفی ریاضیات هم توجه دارد. ما می‌کوشیم چشم و گوش خوانندگان باشیم، دست اندرکاران انجمن ریاضی ایران را یاری رسانیم، کاستیها را به مقامات آموزشی و پژوهشی کشور نشان دهیم و آنها را راهنمایی کنیم. مشکلات دورهٔ دکتری ریاضی، جذب استاد، جذب دانشجو، کتابخانه‌های ریاضی و کتابهای درسی ریاضی به زبان فارسی را به بحث و نظرخواهی گذاشته و بررسی دقیق و اسلوبمند آنها را درخواست کرده‌ایم.

اینك که هیأت ویراستاران سومین سال فعالیت خود را پشت سر می‌گذارد، با داشتن تجربهٔ فراوان و پشتوانهٔ حمایت خوانندگان برای تعالی کار خود در تلاش است. شخصاً ضمن ابراز مسرت از این تجربهٔ کم نظیر، و سپاس از همکاری مرکز نشریان، و تك‌تك ویراستاران، داوران و مشاوران، موفقیت مدیریت جدید و هیأت ویراستاران دوره‌های بعد را صمیمانه آرزو می‌کنم و امیدوارم با مساعدت بیش از پیش مرکز نشر دانشگاهی و یاری و همفکری ریاضیدانان ایرانی، به ویژه آنها که دور از این دیار به منابع سرشار دسترسی دارند، *نشر ریاضی* همواره پربار و به موقع در اختیار علاقه‌مندان قرار گیرد.

مهدی بهزاد



یادداشت هیأت ویراستاران

شایسته است که هیأت ویراستاران نشر ریاضی با استفاده از این فرصت ضمن سپاسگزاری از زحمات دکتر بهزاد، برخی مشکلات تهیه و انتشار مستمر این نشریه را با خوانندگان در میان بگذارد. در سرمقالهٔ یکی از شماره‌های پیشین از کمبود نیروی انسانی صحبت کردیم و گفتیم که این کمبود، حتی در انتشار سالی سه شماره نشر ریاضی فشار کاری عظیمی بر دست‌اندرکاران مجله وارد می‌آورد. اعضای هیأت ویراستاران اشتغالات دیگری در ارتباط با ریاضیات دارند و بیشتر آنان اعضای تمام‌وقت هیأت علمی دانشگاههای کشورند. تنها در اوقات تعطیل و در لابلای کارهای دیگر است که امکان پرداختن به امور نشر ریاضی فراهم می‌آید، هرچند که فکر این مجله همواره در ذهن ماست و همه‌جا و همه‌وقت نوشته‌های جدید، مؤلفان و مترجمان بالقوه، و اندیشه‌های نو را جستجو می‌کنیم.

در چنین شرایطی، وجود مهدی بهزاد برای ما برکتی سه‌گانه بود. اول این که ایشان دوران بازنشستگی زودرسی را می‌گذراند و گرچه هنوز جوان و فعال و پرمشغله بود، اشتغال رسمی در خارج از چارچوب مرکز نشر دانشگاهی نداشت. این فراغت نسبی به وی امکان می‌داد که امور روزمرهٔ مجله را مجدانه پیگیری کند و مشکلاتی را که در هر یك از مراحل کار، مجله را تهدید به تأخیر و تعطیل می‌کنند، با تکیه به تجربه و پشتکار خود از میان بردارد. به عنوان نمونه، در «سخن مدیر مسؤول»، دکتر بهزاد از انتشار به موقع شش شمارهٔ اول سخن می‌گوید حال آنکه خوانندگان ما می‌دانند که شمارهٔ مرداد ۱۳۶۸ در اواخر مهرماه به بازار عرضه شد. این شماره بایستی در اواسط مرداد ماه از چاپ خارج می‌شد ولی پس از رفتن دکتر بهزاد در این ماه، کار چند روزهٔ چاپ و صحافی مجله بیش از دو ماه به طول انجامید. این تنها یکی از مشکلاتی است که ممکن است گریبانگیر یك نشریهٔ ادواری شود و برای رفع آن، پیگیری ممتد و روزمره لازم است.

نکتهٔ دوم اینکه در بیشتر مدت زمان تهیهٔ چند شمارهٔ اول، دکتر بهزاد مدیریت گروه ریاضی مرکز نشر دانشگاهی را نیز به عهده داشت. این مسؤولیت، ایشان را در موقعیتی قرار می‌داد که می‌توانست به نحو مطلوب از نیروهای موجود در این سازمان برای انتشار مجله بهره گیرد بی‌آنکه نگران تداخل مسؤولیت باشد.

و بالاخره، حسن سوم مدیریت ایشان، رعایت کامل موازین دموکراسی بود. در جلسات متعدد و طولانی هیأت ویراستاران، محتوای مجله به دقت مورد بحث قرار می‌گرفت، هر نوشتهٔ پیشنهادی زیر ذره‌بین موشکافی می‌رفت، و متنها و تصاویر پذیرفته شده گاهی سه چهار بار دستخوش تجدیدنظر می‌شد. عهد و قرار ما این بود که در عین رعایت نظام جلسه‌ای، بدون پرده‌پوشی هر گونه انتقادی را که بجا می‌بینیم عنوان کنیم و نسبت به هیچ نقطهٔ ضعفی اغماض نورزیم. این جلسات برای هر یك از ما تجربه‌ای کم‌نظیر بود. احساس کردیم که می‌توانیم آزادانه بحث و انتقاد کنیم بی‌آنکه کار به دشمنی و ستیز منتهی شود. در این تجربهٔ ویژه، مهدی بهزاد به عنوان رئیس جلسه و سپس به عنوان سرپرست اجرایی مصوبات هیأت ویراستاران، نقش مهمی داشت. او توانست با اجرای دقیق این مصوبات، همکاری و مشارکت روزافزون اعضای هیأت را بیش از آنچه که در برنامه بود، جلب کند و نیروی موجود را در اعتلای مجله به کار گیرد.

با توجه به آنچه که گذشت، مشکلات جدیدی که در آستانهٔ آغاز سال سوم مجله پیش روی ماست برای خوانندگان روشن می‌شود. یکایك ما به تداوم این کار مؤمن هستیم ولی نمی‌توانیم وظایف و تعهدات دیگر خود را نادیده بگیریم. امید ما این است که راهی مطلوب برای ادارهٔ امور روزمرهٔ مجله گشوده شود تا بتوانیم همچنان از طریق انتشار این نشریه مصدر خدماتی به فرهنگ علمی کشورمان باشیم.

گفتگو با سه دانشمند ایرانی مقیم خارج

در آبان ۱۳۶۷ چند تن از ریاضیدانان وفیزیکدانان مشهور ایرانی مقیم خارج ازکشور برای شرکت درکنفرانس "فیزیك تئوری و ریاضی" که از سوی سازمان انرژی اتمی ایران در رامسر تشکیل شد، به ایران سفر کردند. در این فرصت آقای دکتر برادران خسروشاهی از سوی نشر ریاضی گفتگویی با سه تن ازآنان انجام دادند ونظرهای آنها را دربارهٔ مشکلات پیشبرد پژوهش درایران، بازگشت دانشمندان ایرانی‌مقیم خارج به‌وطن،استفاده ازکامپیوتر در پژوهش، و . . . جویا شدند. میهمانان میزگرد عبارت بودند از

دکتر امیرحسین اسدی(ریاضیدان) عضوهیأت علمی دانشگاه ویسکانسین (مدیسن)، آمریکا
دکترسیف‌الله رنجبر(فیزیکدان) پژوهشگر مرکز بین‌المللی فیزیك نظری درتریست، ایتالیا
دکترکامران وفا(فیزیکدان) عضو هیأت علمی دانشگاه هاروارد، آمریکا

متن این‌گفتگو را در زیر می‌خوانید.

خسروشاهی: یکی ازمسائل جامعهٔ فیزیك و جامعهٔ ریاضی این‌است که ما در اینجا فقط ۱۵۰ نفر فیزیکدان و ۱۵۰ نفر ریاضیدان داریم واین برای ۳۶۰ هزار نفر دانشجوی دورهٔ کارشناسی دانشگاه واقعاً نیروی کمی‌است. دولت هم‌درحال حاضر اشتیاق نشان می‌دهد که پژوهش توسعه پیداکند و حالا یکی از مسائل اصلی این است که چگونه می‌توانیم تعداد فیزیکدانها وریاضیدانها را زیادکنیم.

وفا: دراین مورد، به‌نظر من‌کار باید با توجه به‌بعضی نکات اولیه شروع بشود، به این ترتیب که اولاً باید به‌مقام و حیثیت استاد دانشگاه وکاراستاد تا آنجاکه ممکن‌است احترام گذاشته شود. دوم

استادهای دانشگاه باید تمام حقوقشان را بدهند اجاره‌خانه واین باعث تأسف‌است زیرا. . . مقدار زیادی از وقت تحقیق را می‌زنند ودرس‌اضافه می‌دهند تابتوانند تا حدی‌کمبودهای مالی راجبران کنند.

اینکه یك مقدار رسیدگی بشود به‌وضع مالی استادها که الان به‌نظر می‌رسدمشکلات مالی به‌آنها فشارمی‌آورد وباعث‌می‌شود ازتحقیق بازبمانند.سوم اینکه سعی‌بشود ارتباط باخارج ازطریق شرکت در کنفرانسهای متعدد درخارج از کشوروبرگزاری کنفرانس‌درداخل کشور و فرستادن دانشجویان به‌دوره‌های تابستانی درخارج، بیشتر بشود وسخنرانهای مختلف را ازخارج دعوت‌کنند. به‌داخل و به‌این ترتیب، پیشرفتی دراین رشته‌ها به‌وجود خواهدآمد.

رنجبر: من معتقدم افزایش تعداد فیزیکدان و ریاضیدان در ایران احتیاج به‌سرمایه‌گذاری‌کلان دارد. شمااگر بخواهید تعداداستادها را از۱۵۰مثلاً به ۱۰۰۰ برسانید، بالطبع احتیاج به‌برنامه‌ریزی درازمدت و مدیریت خوب دارید. توجه به‌دانشجو هم مهم است. به‌تربیت جوانها باید توجه بیشتری بشود و از هر آدم با استعداد و مشتاقی‌که به‌دانشگاه روی می‌آورد باید استقبال بشود. دورانی که یك جوان در دانشگاه سپری می‌کند مناسبترین دوران برای خلاقیت علمی‌است. باید مشکلات فرعی‌راکه نابودکنندهٔ خلاقیتها هستند، از بین برد. به‌دانشجو باید آموخت که‌کدام‌یك ازفعالیتهای او ثمر بخش وماندنی است وکدام‌یك، اتلاف وقت‌است.

اسدی: من به‌گفته‌های‌دوستان‌اضافه‌می‌کنم که‌الان ۱۵۰ نفرفیزیکدان و۱۵۰نفر ریاضیدانی‌که درایران هستند به‌نظرمن‌اکثرشان به‌خاطر شرایطی‌که دارند ازنظرپژوهشی‌تولید زیادی‌ندارند. قبل‌ازهرچیز

استادهایی‌که می‌خواهند مسافرت خارج بروند یابرای‌تحقیقاتشان بودجه‌ای‌تأمین‌بکنند، اغلب شکایت می‌کنندکه پروسهٔ بوروکراتیك این‌کارها آن‌قدر طولانی و مشکل‌است‌که بعضی وقتها آدم ازادامهٔ جریان منصرف می‌شود . . . باید طول وتفصیل این‌بوروکراسی‌را کم‌کنند، حتی اگرمنجر به‌این شودکه‌گاهی اشتباه‌کوچکی رخ دهد.

بایداین‌نیروهایی‌که دراینجا وجود دارند وهمگی‌افراد شایسته‌ای هستند و می‌توانند دریك محیط مستقل علمی و درصورت آسایش فکری واقعاً محصول علمی زیادی تولید کنند، فعال شوند. بعد نیروهایی‌که درخارج‌کشورهستند بادیدن اینکه شرایط مناسبی در کشوربه‌وجودآمده خودشان ابرازتمایل و رغبت خواهندکرد که به‌کشورشان برگردند، چون ایرانیها اصولاً به‌آب وخاکشان‌علاقهٔ زیادی دارند و اگر عده‌ای از آنها درخارج از کشور مانده‌اند به‌این‌علت‌است‌که تحت شرایطی‌که برای پژوهش مناسب نیست نمی‌توانند عناصرمفیدی باشند.

خسروشاهی: آیا شما توصیه می‌کنید که همهٔ ایرانیهایی که تحصیلات خوبی دارند و درخارج هستند (چه در فیزیك وچه در ریاضی)، درصورت فراهم شدن شرایط مطلوب به‌ایران برگردند؟

وفا: خیر، بازگشت همهٔ ایرانیهای مقیم خارج لزوماً برای پیشبرد علم در ایران مفید نخواهد بود. ارتباط با خارج برای پیشرفت علم در ایران بسیار مفید است و ایرانیان مقیم خارج می‌توانند به‌این ارتباط کمك کنند. ولی عده‌ای که در خارج می‌مانند باید تماسهایشان را با دانشمندان داخل کشور بیشتر کنند و از طریق شرکت در کنفرانسها و مثلاً ارائهٔ درسهای تابستانی در ایران و کمك به‌ارسال مقالات دانشجوها واستادهای ایرانی و مطلع کردن استادهای داخلی از موضوعهای تحقیقی روز و مقالات جالبی که در خارج نوشته می‌شود و نظایر اینها، به‌صورت پل ارتباطی بین جامعهٔ علمی ایران وجامعهٔ علمی بین‌المللی عمل کنند.

خسروشاهی: اگر قرار باشد همه برگردند، خود شما هم باید برگردید. به‌هر حال باید توجیهی داشته باشید که چه کسانی برگردند و چه کسانی برنگردند.

رنجبر: اگر شرایط علمی مناسب درداخل ایران فراهم باشد تعداد زیادی از ایرانیهای مقیم خارج حتماً برمی‌گردند. ولی‌شاید این فکر چندان خوبی نباشد که همهٔ ایرانیها به‌کشور برگردند. وجود عده‌ای ایرانی در خارج از ایران، می‌تواند مفید باشد. ما تعداد نسبتاً زیادی ایرانی داریم که دور و بر دنیا مشغول به‌کارند و در کار خودشان جا افتاده‌اند. بعضی از اینها واقعاً درموقعیت خوبی هستند و می‌توانند به‌پیشرفت علم در داخل ایران به‌طرق مختلف کمك بکنند. احتمالاً بدون این نوع یاوریها اختلاف عظیمی که بین سطح علمی ایران و جاهای پیشرفتهٔ جهان وجود دارد، از بین نخواهد رفت.

اسدی: به‌نظر من، شرایط زندگی یك فرد درهرمملکتی تابع یك سری عوامل مختلف است. بنابراین، برگشتن دانشمندان ایرانی

هر راه‌حل کوتاه‌مدت [برای توسعهٔ علمی] باید از نظر عملی بررسی شود و نه از نظر ایدئولوژیك یا تئوریك.

به‌کشور مطلبی نیست که بشود به‌همه توصیه کرد. بعضیها ممکن است به‌دلایل خاصی نتوانند برگردند، و اگر برگردند نتوانند آن‌طور که می‌خواهند فرد مفیدی باشند. البته این افراد می‌توانند درخارج ازکشورهم کمکی راکه‌ازدستشان ساخته باشد به‌پیشرفت علم در ایران بکنند. به‌خصوص در رشته‌های نظری، تحقیقی که انجام می‌شود نتیجه‌اش را خیلی راحت می‌توان از طریق آمدن به ایران یا به‌وسایل دیگر به‌دانشمندان ایرانی رساند. این افراد پژوهشگران بسیارخوب آنجاهم‌هستندوبایدموقعیت آنها را درك‌کنیم.

خسروشاهی: شما فکر می‌کنید در حال حاضر با این شرایطی که در ایران هست و شما در عرض این مدت کوتاه دیدید، چگونه می‌شود تحقیقات فیزیك وریاضی را درایران تاحدی راه‌انداخت. البته این مسأله هم راه‌حلهای کوتاه مدت دارد وهم راه حلهای درازمدت. من‌می‌خواهم قدری راجع به‌راه‌حلهای فوری وکوتاه‌مدت صحبت بفرمایید.

وفا: به‌نظرمن به‌این قضیه اصلاً نباید ازدیدکوتاه‌مدت نگاه‌کرد. کارهایی که درکوتاه‌مدت می‌شودانجام داد، برداشتن‌قدمهایی‌است که راه درازمدت را هموارترکند و آن‌هم فراهم‌کردن تسهیلاتی است‌که مسائل‌علم را از مسائل حول وحوش آن جداکند، یك‌سری برنامهٔ تشویقی و آگاه‌کننده ــ مثلاً برنامه‌های تلویزیونی درمورد ریاضیات و فیزیك ــ ارائه شود تا حال وهوای علوم جدید را در سطوح مختلف ایجادکند و افراد تشویق بشوند به‌آموزش وادراك علم وبه‌کسی‌که درمدرسه، علوم می‌خواند تفهیم بشودکه درآینده می‌تواند به‌عنوان یك دانشمند به خودش نگاه‌کند و دربارهٔ آیندهٔ زندگیش به‌او اطمینان داده شود تا از همان دوران نوجوانی در جهت‌این‌هدف حرکت‌کند وخلاصه،مدلهای قابل‌قبولی‌درجلوچشم دانش‌آموز قرارگیرد و چنین هدفی، هدف بزرگی‌برای او باشد نه‌اینکه در مرحلهٔ انتخاب رشته درکنکور، پزشکی را صد درصد بر ریاضی ترجیح دهد به‌این دلیل‌که از نظرمالی‌مشکلات‌کمتری خواهد داشت. مشکلات زندگی‌ریاضیدان و فیزیکدان را باید از بین برد تا جاذبهٔ بیشتری برای علوم نظری فراهم شود.

خسروشاهی: یعنی شما معتقدید باید در مورد ریاضیات وفیزیك تبلیغ‌کنیم و سعی درعمومی‌کردن و اشاعهٔ آنها داشته باشیم؟

وفا: تبلیغ‌کردن جزئی از چیزی است که مورد نظرم بود. جزء مهمتر آن فراهم‌کردن تسهیلات زندگی است برای‌کسانی‌که در این‌رشته‌ها کارمی‌کنند. به‌طوری‌که مااطلاع‌پیداکرده‌ایم‌استادهای دانشگاه باید تمام حقوقشان را بدهنداجاره‌خانه و این باعث‌تأسف است زیرا براثراین‌فشارها مقدار زیادی از وقت تحقیق‌رامی‌زنند و درس‌اضافه می‌دهند تا بتوانند تا حدی‌کمبودهای مالی‌را جبران کنند و این برای شخصی‌که می‌خواهد درآینده محقق بشود طبیعتاً جاذبه ایجاد نمی‌کند. چنین شخصی پیش‌خودش می‌گوید که اگر بخواهم تحقیق‌کنم آخرش‌به‌جایی می‌رسم‌که نمی‌توانم این‌کار را بکنم برای اینکه تمام وقتم را باید بگذارم برای تدریس. این مشکلات باید رفع شود تا استاد و محقق شدن، یك امکان و هدف ایده‌آل و جذاب باشد.

خسروشاهی: شما آقای دکتر رنجبر نظرتان چیست؟

رنجبر: من علاوه بر تأیید گفته‌های دکتر وفا دلم‌می‌خواهدکمی کلی‌بافی بکنم. علوم‌وفنون‌زاییدهٔ زندگی‌دسته‌جمعی‌انسانهاست‌یعنی یك پدیدهٔ اجتماعی‌است و مثل‌هرپدیدهٔ اجتماعی دیگر، اعتلای آن نیازمند عنایت و توجه همهٔ اقشار جامعه است. هدف از تبلیغ در

وجود عده‌ای ایرانی‌درخارج ازایران،می‌تواند مفید باشد. بعضی ازایرانیهای مقیم خارج واقعاً درموقعیت خوبی‌هستند ومی‌توانند به‌پیشرفت علم در داخل ایران به‌طرق مختلف کمك بکنند.

مورد علم این است‌که یك فرد معمولی در جامعه به‌ارتباط علم با موجودیت اجتماعی وفردی خویش عمیقاً پی‌ببرد. ما بدون‌استفاده از دستاوردهای علوم جدید نمی‌توانیم در بین ملتها سرافراز زندگی‌کنیم.حتی‌موجودیت قومی‌ماهمواره درخطر تعرض‌بیگانگان خواهد بود. ما برای دوام حیات جمعی خود ناچاریم در ساختن پیچ و مهره‌های تمدن جدید سهیم باشیم و این امکان‌پذیر نیست مگر از طریق نهادهای علمی وفنی کارامد. ایجاد و ادامهٔ حیات

دکتر امیرحسین اسدی

چنین نهادهایی نیازمند پشتیبانی آگاهانهٔ قشرهای وسیع مردم است. مردم باید خودشان را مسؤولانه در سرنوشت مراکز علمی خویش سهیم بدانند.

اسدی: من چند کلمه اضافه می‌کنم به‌این صحبتها. یکی اینکه راه‌حلهای کوتاه‌مدت اگر با راه‌حل درازمدت همراه نباشند تأثیرشان را در همان کوتاه‌مدت از دست می‌دهند و تکرارشان هم بیفایده خواهد بود. مثل ویروسهایی که عادت می‌کنند به‌یك داروی خاص، این امراضی هم که جلو پیشرفت علم را می‌گیرند در برابر تکرار راه‌حلهای کوتاه‌مدت از خودشان مقاومت نشان می‌دهند. قبل از هر

این طرز فکر باید تشویق بشود که هر ریاضیدانی، حتی اگر کارش خیلی تخصصی باشد، سعی کند با بازکردن و توسعه دادن زمینهٔ تخصصی‌اش با دیگران همکاری برقرار کند.

چیز این را باید بدانیم که هر راه‌حل کوتاه‌مدت باید از نظر عملی بررسی شود و نه از نظر ایدئولوژیك یا تئوریك. مسأله این است که چگونه میزان و سطح تحقیق را بالا ببریم. به‌این منظور، دانشمند باید فراغ بال داشته باشد تا بتواند تحقیق کند و هیچ دانش‌پژوهی، مخصوصاً در رشته‌های ریاضی و فیزیك نظری، نمی‌تواند بدون تمرکز حواس و افکارش ــ در چندین ساعت متوالی در هر روز و در روزهای متوالی ــ مسألهٔ مشکلی را تحلیل یا درك کند. لذا فراهم کردن این آسایش و فراغ بال برای استاد، یکی از چاره‌های کوتاه‌مدت برای این مشکل است. استادهایی که می‌خواهند مسافرت خارج بروند یا برای تحقیقاتشان بودجه‌ای تأمین بکنند اغلب شکایت می‌کنند که پروسهٔ بوروکراتیك این کارها آن‌قدر طولانی و مشکل است که بعضی وقتها آدم از ادامهٔ جریان منصرف می‌شود. خوب، یکی از راه‌حلهای کوتاه‌مدت این است که طول و تفصیل این بوروکراسی را کم کنند، حتی اگر منجر به‌این شود که گاهی اشتباه کوچکی رخ دهد. مطلب دیگر، گزینش دانشجو است که ممکن است استعدادهای خوب به‌دلایلی که مربوط به‌توان علمی آنها نیست کنار گذاشته شوند حال آنکه معیار گزینش باید توانایی علمی افراد باشد. دیگر اینکه مقدار معتنابهی بودجه برای برگزاری کنفرانسها وانواع و اقسام کارهای پژوهشی درنظر گرفته

قبل از هرچیز باید، این نیروهایی که در اینجا وجود دارند وهمگی می‌توانند... در صورت وجود شرایط مناسب و آسایش فکری واقعاً محصول علمی زیادی تولید کنند، فعال شوند. بعد افرادی که در خارج از کشور هستند با دیدن این شرایط رغبت خواهند کرد به‌کشور برگردند.

شود وحاصل کار را مثلاً درپایان یك دورهٔ پنجساله ارزیابی کنند. کارهای دیگری هم هست که لزوم آنها بدیهی است، مثل خریدن کتاب.

خسروشاهی: البته در اینجا لزوم خریدن کتاب چندان بدیهی نیست. شما اگر تشریف بیاورید به دانشگاهها، فقر کتابخانه‌ها را می‌بینید. اصلاً ما نمی‌دانیم دانشجویان فوق لیسانس و دکتری چکار باید بکنند. معمولاً باید خود استادها به‌کمك دوست وآشنا مقاله یا کتابی را که موردنیاز دانشجوست تهیه کنند. علی‌رغم قولهایی که درآغاز تأسیس دورهٔ دکتری به‌ما داده شد که به‌وضع کتابخانه‌ها رسیدگی کنند، هنوز خبری نشده‌است.

اسدی: تعداد این گونه مسائل بدیهی زیاد است. صاحبنظرانی که در ایران هستند بهتر اطلاع دارند و می‌توانند فهرستی از مسائل را تهیه کنند. حل این مشکلات اقدامی است که در برنامهٔ کوتاه‌مدت ضروری است.

خسروشاهی: حالا برویم سر یك سؤال دیگر. آیا شما فکر می‌کنید درکشور ما کار پژوهش در فیزیك و ریاضی باید حول محورهای خاصی متمرکز باشد یا هرکسی در هر زمینه‌ای که دلش می‌خواهد بتواند تحقیق کند؟

وفا: سؤال بسیار خوبی است. به‌نظر من در کشورهایی مانند ایران که هنوز آمادگی کامل برای تحقیقات همه جانبه در همهٔ زمینه‌ها را ندارند شاید بهتر باشد کار را درچند تا رشتهٔ کوچك شروع کنیم و پایهٔ خودمان را محکم کنیم و بعد به تدریج در رشته‌های دیگر

هم نفوذکنیم. اگرقرار باشد در یك زمان وارد همهٔ رشته‌ها شویم چون امکاناتمان کم است وافراد زیادی نداریم، ممکن‌است در هر زمینه‌ای یك یا دونفرداشته باشیم و چنین تعداد قلیلی نمی‌توانند در یك رشتهٔ خاص یك محیط تحقیقاتی درست‌کنند. به‌نظر من در حال حاضر انرژیها بایدمتمرکز بشوند درچند رشتهٔ کوچك و در وقت مناسب، این‌روند اصلاح شود و گسترش پیداکند به‌رشته‌های مجاور و به تدریج، به همهٔ رشته‌ها.

خسروشاهی: شما زمینه‌های خاصی ازفیزیك و ریاضی را توصیه می‌کنید؟

وفا: من در رشتهٔ خودم، فیزیك نظری، می‌توانم توصیه کنم که شاید نظریهٔ ریسمان زمینهٔ مناسبی باشد، زیرا خیلی از ایرانیها در داخل و خارج به این زمینه علاقه دارند و تحقیق می‌کنند و این زمینه می‌تواند یك نقطهٔ شروع طبیعی باشد. درمورد سایرقسمتهای فیزیك هم با یك نگاه به‌رشته‌هایی که الان در ایران روی آنها کار می‌کنند و البته با توجه به‌اینکه وضع این رشته‌ها درجهان چگونه است، می‌شود تصمیم گرفت که فعالیتها در چه زمینه‌هایی متمرکز شود. البته این تمرکز نباید به‌قیمت حذف رشته‌هایی تمام شودکه هم‌اکنون در ایران دنبال می‌شوند و یا اینکه چنانچه دانشجویی به‌رشتهٔ دیگری علاقه داشت، نباید او را دلسردکرد.

خسروشاهی: آقای دکتر رنجبر، شما دراین مورد نظر خاصی ندارید؟

رنجبر: اساسیترین پیش‌شرط‌کار علمی، علاقهٔ شخصی‌است. برای هرکاری یك نیاز وکشش درونی باید در شخص به وجود بیاید و به حد لازم رشد بکند. از طرف دیگر، در مورد کارهای علمی، بودن عده‌ای‌که در یك رشتهٔ خاص کار می‌کنند جو خاصی را در هر پژوهشکده‌ای به‌وجود می‌آوردکه تا حد زیادی به‌فعالیتهای آن

در جاهایی مثل‌کشور ما که تعداد پژوهشگر در هر رشته‌ای بسیار کم‌است، تمرکز[در رشته‌های خاص] می‌تواند مفید باشد... ولی این نباید به‌قیمت محدودکردن آزادی اندیشه به‌دست آید.

جهت می‌دهد. اصولاً در جاهایی مثل‌کشور ماکه تعداد پژوهشگر در هررشته‌ای بسیارکم است، تمرکز می‌تواند مفید باشد به‌خاطر اینکه مانع تلف شدن انرژی می‌شود ولی‌این‌نباید به‌قیمت محدود کردن آزادی‌اندیشه به‌دست‌آید. به‌هرحال، بودن عده‌ای‌پژوهشگر مبرز وبا تجربه درهرمؤسسه‌ای، اغلب جوانان علاقه‌مند رابه‌سمت خود می‌کشد و جهت فعالیتهای علمی‌آنها را تعیین می‌کند. مثلاً، دلیل علاقه‌مندی جوانان ایرانی به‌نظریهٔ ریسمان این‌است‌که چند نفر فیزیکدان ایرانی در داخل و خارج ایران روی این مطلب‌کار می‌کنند. ممکن‌است این سؤال پیش بیایدکه‌آیا چنین‌مطلب مجرد وتقریباً صددرصد ریاضی‌به‌درد جامعهٔ فیزیك ایران می‌خورد یانه؟ جواب بنده این‌است‌که اگرهمهٔ فیزیکدانهای ایرانی بخواهندروی نظریهٔ ریسمان‌کار بکنند، مسلماً کار بیخود و مضری خواهد بود. از طرف دیگر، ماهیت پژوهش علمی ایجاب می‌کند که برای زنده ماندن علم حتماً باید یك عده، ولو بسیار کم، در زمینهٔ مطالب مد روز کار بکنند. کوچکترین تأثیریك چنین‌کاری به‌وجودآمدن‌فرهنگ علمی‌است. ما محتاج داشتن فرهنگ علمی به‌معنای دقیق این کلمه هستیم. اگر فرهنگ علمی پویا به‌وجود بیاید، مثل دریایی می‌ماند که ما درآن شناوریم و این به‌خودی خود همه را دربرمی‌گیرد و

اگرهمهٔ فیزیکدانهای ایرانی‌بخواهند [مثلاً] روی نظریهٔ‌ریسمان کاربکنند، مسلماً بیخود ومضرخواهد بود... ولی‌ماهیت پژوهش علمی‌ایجاب می‌کندکه حتماً عده‌ای، ولو بسیارکم، در زمینهٔ مطالب مدروز کار بکنند.

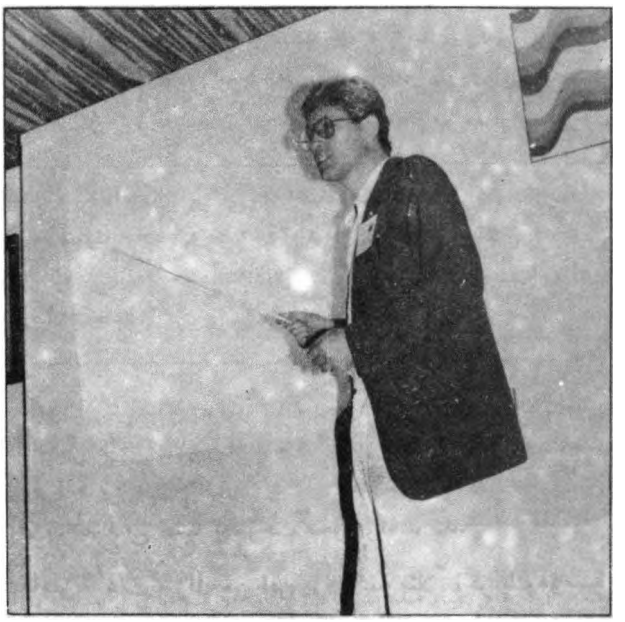
امکان ظهور چیزهای دیگر را به‌وجود می‌آورد. بدون داشتن فرهنگ علمی نباید منتظر خلاقیتهای علمی باشیم. ممکن است تك و توك جرقه‌هایی در اطراف و اکناف به‌وجود بیایند و خودشان را نشان بدهند ولی حتماً به‌سرعت محوخواهند شد.

خسروشاهی: علت سؤال من این بود که مثلاً اگر یك مؤسسهٔ تحقیقاتی‌دایر بشود، این‌مؤسسه به‌طورطبیعی‌یك‌سری‌سیاستگذاریهای علمی می‌کندکه مثلاً به‌چه رشته‌هایی بیشتر میدان بدهد و بالمآل به‌کار محققان جهت می‌دهد. آیا شما به‌چنین مؤسسه‌هایی توصیه می‌کنید‌که چنین سیاستگذاریهایی بکنند یا اینکه هرکسی‌آمد ودر هر زمینه‌ای‌که مایل بود، بتواند تحقیق‌کند. خواهش می‌کنم از ریاضیات هم مثال بیاورید.

رنجبر: اگر شما روزی مؤسسهٔ تحقیقاتی بازکنید، الزاماً عده‌ای محقق هم درآنجا خواهید داشت. بودن این محققان به‌خودی‌خود جهتی را تعیین می‌کند و اگر جدیتی درکار مؤسسهٔ تحقیقاتی شما باشد، سیاستگذاریهای آن را نهایتاً پژوهشگرانی‌که در آن کار می‌کنند تعیین خواهندکرد. مکانیسم‌کار این‌است. من شخصاً معتقدم که در هر مؤسسهٔ تحقیقاتی وجود یك مقدار تنوع سلیقه‌ها مفید و سازنده‌است و اصولاً در یك مؤسسهٔ تحقیقاتی نوبنیاد باید از هر نوع ایدهٔ علمی جدی استقبال‌کنید.

وفا: من‌هم با تأکید دکتر رنجبر بر آزادی دانشمند صد درصد موافقم. منظور من ازصحبتی‌که در مورد تأکید بررشته‌های خاص کردم این نبود که استعدادهای درخشانی را در زمینه‌های مختلف سرکوب‌کنیم. ولی‌اگرجهتها وخط‌مشی‌های کلی وجود داشته باشد و درعین‌حال به‌موارد استثنایی هم توجه بشود، مفیداست.

اسدی: من چند نکتهٔ به‌اصطلاح تخصصی را ذکر می‌کنم. ما ریاضیات پیوسته داریم و ریاضیات گسسته. هر دوی اینها لازم‌اند والبته منطق ریاضی هم ــ اگرآن را از این دونوع جدا بدانیم ــ لازم‌است. بین‌همهٔ اینهاکنش‌و واکنش وجود دارد. من‌فکرمی‌کنم یکی از مسائلی‌که حتماً باید به‌آن توجه بشود، مسألهٔ تربیت فکر هندسی است که هم به‌ریاضیات پیوسته و هم به‌ریاضیات گسسته کمك می‌کند. البته، منظورم‌فقط هندسهٔ دیفرانسیل‌یا فقط‌توپولوژی یا چیز خاصی نیست بلکه به‌طور مثال در ریاضیات گسسته هم هندسه‌های متناهی داریم‌که ظاهراً مانند هندسه نیستند ولی ازطرز فکرهندسی استفاده می‌کنند. در ریاضیات گسسته چیزهایی هم از قبیل‌جبرونظریهٔ اعداد، و ریاضیات ترکیبی‌وگراف، که‌کاربردهای



دکتر سیف‌الله رنجبر

عملی هم دارند، ظاهر می‌شوند. اینها قسمتهایی از ریاضی هستند که نباید فراموششان بکنیم. حالا دربعضی ازاین قسمتها آدم به‌صورت تخصصی ممکن‌است پیش برود ولی چون نیروهای ریاضی خیلی کم‌هستند، نمی‌شود عده‌ای را ردکرد و عدهٔ دیگری را آورد. منتها این طرز فکر باید تشویق بشودکه هر ریاضیدانی، حتی‌اگرکارش خیلی‌تخصصی باشد، باید سعی‌کند با بازکردن و توسعه دادن زمینهٔ تخصصی‌اش با دیگران همکاری برقرارکند. من فکر می‌کنم چندتا زمینهٔ خیلی‌مهم برای تحقیق هست. یکی آنالیز است، انواع و اقسام آنالیز، ولی‌مخصوصاً آنالیز فراگیر (global) با توجه به‌کاربردهایش درآنالیز تابعی‌مهم‌است و دیگر، هندسهٔ دیفرانسیل و توپولوژی است و در مورد ریاضیات گسسته هم‌که البته جبر و آنالیزترکیبی وبه‌خصوص نظریهٔ اعداد را باید نام برد. من‌نظریهٔ اعداد را خیلی می‌خواهم توصیه بکنم برای اینکه موضوعی است که هم در قسمتهای پیوسته و هم در قسمتهای گسسته مطرح می‌شود وکاربرد هم دارد.

خسروشاهی: شما دراین‌چندروزه با عده‌ای ازدانشجویان‌ریاضی و فیزیک تماس گرفته‌اید. آیا به نظر شما در بین دانشجویان کارشناسی ارشد آدمهای با استعدادی پیدا می‌شوند؟ آیا در آنها اشتیاق‌کافی برای یادگرفتن دیدید؟ آیا معلوماتشان به‌قدرکافی بود که شما را تحت تأثیرقراردهد؟

وفا: بیشترین چیزی که مرا تحت تأثیر قرارداد میزان اشتیاق و علاقهٔ جوانهایی بودکه اینجا دیدم و به‌نظر من این مهمترین‌عاملی است‌که برای فراگیری ریاضی یا فیزیک لازم است. البته انتظار نداشتیم و نداریم که اینها درحال حاضر از نظر دانسته‌های علمی در سطح بین‌المللی باشند چون محیط برای‌کسب مطالب بیشتر، مناسب نبوده. ولی امیدوارم با این اشتیاقی که هست و با فراهم آمدن امکاناتی‌ازقبیل‌کتاب و منابع و برقراری ارتباطات باتعداد بیشتری ازاستادان چه در داخل و چه درخارج و برگزاری کنفرانسهای بیشتری از قبیل همین‌کنفرانس، کمبودها جبران شود. میزان اشتیاقی‌که من دراینجا دیدم به‌مراتب بیشتراز اشتیاقی‌است که درخارج می‌بینیم و خلاصه، استعداد و علاقه‌که مایهٔ اصلی کار است‌خوشبختانه به‌حد وفور دراینجا وجوددارد ولی‌بایدکمبودهایی راکه از جهات دیگر وجود دارد رفع‌کرد.

رنجبر: من دانشجویان ایران را خیلی مشتاق یاد گرفتن یافتم و معتقدم اغلب اینها استعداد خوبی نیز دارند. متأسفانه باید اضافه

ازدانشمندان شوروی شنیدم‌که منین [ریاضیدان] به‌تمام‌کنفرانسهای فیزیک می‌رود. . . واخیراً هم به‌اتفاق‌همکارانش درنظریهٔ ریسمان کارهای اساسی‌کرده است. . . ولی خیلی از ریاضیدانهایی که من می‌شناسم، متخصص‌اند در رشته‌های خیلی باریک،ومثلاً یک نفرکه درآنالیزتخصص دارد، وحشت می‌کندکه راجع به‌هندسهٔ دیفرانسیل حرف بزند.

کنم‌که در این مدت‌کوتاهی‌که ما در اینجا بوده‌ایم اغلب بحث‌ما با دانشجویان بحث علمی نبوده بلکه درد دل‌کردن و بازگویی مشکلاتی بوده‌که اغلب دانشجویان باید با آنها دست و پنجه نرم بکنند. اغلب مسائل حول یک محور می‌چرخیدکه عبارت است از کمبود استاد و امکانات کتابخانه و تماسهای علمی وگیج بودن در مورد آینده. به‌طورکلی اینها نمی‌دانند چه‌کار باید بکنند. تصور مبهمی از خارج ایران دارند. اغلبشان می‌خواهند بروند و در خارج تحصیلاتشان را ادامه بدهند بدون اینکه به‌درستی وبه‌دقت بدانندکه کجا می‌خواهند بروند و یا چه مطلبی را باید دنبال‌کنند. بنابراین، من فکر می‌کنم‌که استعدادهای خوب موجود باید بیشتر و بهتر راهنمایی‌بشوند تا هدر نروند. اگر ما این نسل را ازدست بدهیم آیندهٔ ما تاریکتر ازگذشته‌مان خواهد بود.

خسروشاهی: دربارهٔ استعدادشان چه نظری دارید؟

رنجبر: من فکر می‌کنم موفقیت درکارعلمی بیشترمحصول‌کارممتد و زیاد است، گواینکه منکر استثناهایی مثل راماناوجان هم نیستم. به‌نظر من اغلب آدمها معمولی‌اند تا نابغه. آدمهای موفق پرکارند و انگیزهٔ‌کاری زیاد دارند. احتمالاً آدمهای خیلی‌موفق در ریاضی وفیزیک ازقبیل فون‌نویمان و اینشتین به‌طور مادرزاد استعدادهایی داشته‌اند که دیگران ندارند ولی اغلب آدمهای معروفی که من می‌شناسم من‌جمله استادآقای‌دکتروفا (ویتن)آدمهای خیلی‌پرکاری هستند.

اسدی: بازهم دوستان مطالب را فرمودند. من هم اشتیاق بسیار زیادی مشاهده‌کردم، خیلی‌زیادتر ازحدی‌که درکشورهای خارجی دیده‌ام، به‌خصوص به‌مراتب بیشتر ازآمریکا یا خیلی ازکشورهای اروپایی. شاید فقط چینی‌ها یا ژاپنی‌هاکه شباهتهایی به‌ما دارند میزان اشتیاقشان دراین‌حد باشد. ازنظراستعداد هم من شکی‌ندارم که‌کسانی‌که در این‌کنفرانس شرکت‌کرده‌اند حتماً بسیار بااستعداد هستند. حتی از دوران دبیرستان هم به‌یاد می‌آورم که خیلی از دوستانم بچه‌های بسیار با استعدادی بودند. خلاصه ایرانیهایی‌که می‌خواهند وارد مرحلهٔ دکتری شوند نه از حیث اشتیاق و انگیزه

و نه از حیث استعداد هیچ‌گونه کم و کسری ندارند و از این لحاظ نگرانی نداریم. اگر نگرانی وجود داشته باشد، از لحاظ کم‌کاری است که آن هم علتهای مختلفی دارد: یأس و افسردگی، کمبود امکانات، و در دسترس نبودن به موقع منابع، که خطر سرد شدن آتش اشتیاق را در بردارد.

خسروشاهی: من امروز متوجه شدم که شما سه نفر در سخنرانیهایتان اصطلاحات علمی امروزی فارسی را زیاد به‌کار می‌برید. آیا قبل از اینکه بیایید ایران در این زمینه تمرین کرده بودید؟

رنجبر: بنده به‌ادبیات فارسی علاقه‌مندم و گهگاه متون فارسی را می‌خوانم. کتابهای علمی را نیز که بعد از انقلاب به‌فارسی خوب ترجمه شده‌اند می‌خوانم. مثلاً کتاب تاریخ ریاضیاتی که خودشما ترجمه کرده‌اید به‌نظر من یکی از بهترین ترجمه‌هاست و خواندن آن برای من سودمند بود.

وفا: من برای یادگرفتن اصطلاحات فارسی بیشتر از مجلهٔ فیزیک که از ایران برایم می‌رسید استفاده کرده‌ام. اینجا هم که رسیدم با بقیهٔ دوستان و استادان ازجمله آقای دکتر رنجبر در مورد این کلمات صحبت کردم و برای تهیهٔ سخنرانیها به‌زبان فارسی از آنها کمک گرفتم. البته این فعلاً تاحدی جنبهٔ مصنوعی دارد برای اینکه زبان اصلی علمی ما فارسی نیست و طبیعتاً وقتی به زبان فارسی صحبت علمی می‌کنیم، درواقع فکرمان را ترجمه می‌کنیم که شاید برای شنونده هم قدری ناخوشایند باشد ولی به‌تدریج باید این زبانها را به‌هم نزدیک بکنیم.

اسدی: فکر نمی‌کنم که این سؤال شما شامل حال من بشود برای اینکه من کلمات ریاضی فارسی‌را متأسفانه زیاد به‌کار نبرده‌ام ولی امیدوارم با پیشرفت ریاضیات ایران زبانش‌هم توسعه پیدا بکند و من‌هم بتوانم با خواندن مجله‌های ریاضی فارسی این لغتها را یاد بگیرم که در آینده، انشاءالله بتوانم به‌زبان فارسی بدون غلط و بدون مخلوط کردن کلمات خارجی سخنرانی کنم.

خسروشاهی: سؤال دیگرمن‌راجع به‌کامپیوتر است. الان به‌تدریج کامپیوتر وارد ایران می‌شود. شرکتهای کامپیوتری خدماتی‌وتجارتی زیادی، دایر شده‌اند و در آموزش دانشگاه هم کامپیوتر به‌شدت وارد می‌شود ولی‌معلوم نیست سیاستگذاریهای درستی‌دراین‌مورد انجام‌می‌گیرد یا نمی‌گیرد. می‌خواستم بپرسم که به‌نظرشما کامپیوتر در آموزش وتحقیقات ریاضی وفیزیک نظری تا چه‌حد لازم‌است، مخصوصاً درکشوری جهان سومی مثل ایران.

وفا: به‌نظرمن امروزه‌کامپیوترصددرصد لازم است و برای‌تحقیقات در حد گچ و تخته سیاه مهم است. اغلب وقتی می‌گوییم کامپیوتر، برنامه‌نویسی کامپیوتر به‌زبان فرترن وغیره را درنظر داریم. منظور من تنها این نیست، بلکه بیشتر ایجاد یک نوع شبکهٔ ارتباطی بین دانشمندان درجاهای مختلف دنیاست. وقتی‌می‌گوییم کمبود داریم، کمبود در واقع فیزیکی‌است. این همه دانشمند درجاهای مختلف دنیاهست. اگربشود باآنها ارتباطات شبکه‌ای برقرارکرد به‌راحتی می‌توان‌کارها وپروژه‌های مشترک انجام‌داد. الان درخارج ازایران اقلاً در مورد دپارتمانهای فیزیک می‌توانم بگویم که در دفتر هر شخصی یک‌کامپیوتر وجود داردکه ارتباط او را با دنیای خارج کاملاً برقرارمی‌کند. مثلاً من ودکتررنجبر (من درآمریکا وایشان در ایتالیا) مرتباً پیغامهای‌کامپیوتری رد وبدل می‌کردیم. مخصوصاً در ایران‌که این‌قدرکمبود متخصص هست، ایجاد وگسترش چنین

این همه دانشمند در جاهای مختلف دنیا هست. اگربشود با آنها ارتباطات شبکه‌ای [کامپیوتری] برقرارکرد به‌راحتی می‌توان‌کارها وپروژه‌های‌مشترکی‌انجام داد. . . درخارج‌از ایران،در دفترهریک از اعضای هیأت علمی، کامپیوتری وجود دارد که ارتباط او را با دنیای خارج‌کاملاً برقرارمی‌کند.

شبکه‌ای‌که هم در داخل کشور و هم بین داخل و خارج، ارتباط آسان وسریع دانشمندان را میسرکند، بسیار لازم‌است. این به‌نظر من فایدهٔ اصلی‌کامپیوتر درکارهای علمی‌است. فایده‌های فرعی هم دارد. مثلاً نرم‌افزار ماکسیما نوشته شده‌که به‌کمک‌آن باسمبلهای ریاضی‌می‌شودکارهایی انجام داد. دانشجویان از این‌جور برنامه‌ها باید بیشتراستفاده‌کنند.

خسروشاهی: شما شخصاً درکارتحقیق ازکامپیوتراستفاده کرده‌اید؟

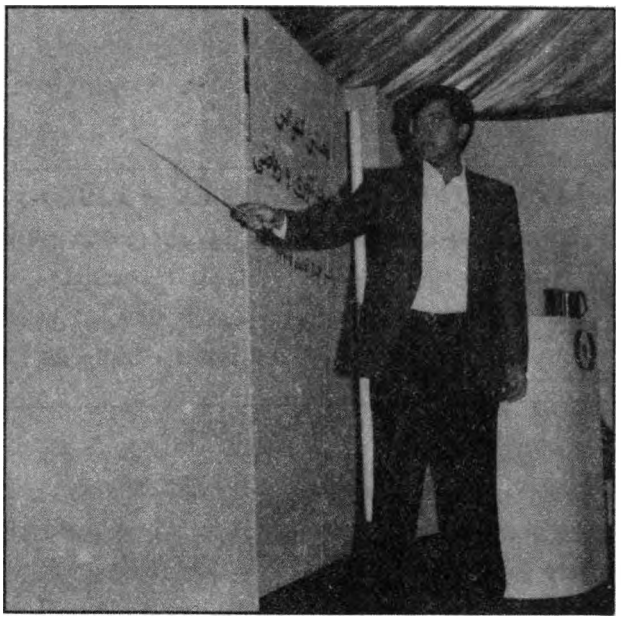
وفا: بله، من همان‌طورکه اشاره‌کردم در واقع چهارجور استفاده ازکامپیوترکرده‌ام. یکی برقراری ارتباط و فرستادن پیغام ونظایر اینها؛ دیگر، نوشتن برنامه‌های فرترن‌که‌گهگاه در مسائل فیزیکی لازم می‌شود، البته در رشتهٔ من‌کمترپیش‌می‌آید ولی در رشته‌هایی از قبیل نظریهٔ فیزیک آماری بیشتر لازم می‌شود؛ سوم، استفاده از نرم‌افزارهایی نظیر ماکسیما، که این نرم‌افزارها فیزیکدان نظری و ریاضیدان را از بسیاری محاسبات پرزحمت معاف می‌کنند، و چهارم، نگارش و ویرایش مقاله‌ها که در این مورد هم استفاده ازکامپیوترکار را بسیار راحت می‌کند.

خسروشاهی: آقای دکتررنجبر نظرشما دراین مورد چیست؟

رنجبر: من فکر می‌کنم کامپیوتر درحال حاضر و مسلماً در آینده یکی از اساسیترین نیازهای ما هست و خواهد بود. باید با آن آشنا شد و از آن به‌طور درست استفاده‌کرد. من بعید می‌دانم که کامپیوتر جای اندیشهٔ ناب ریاضی یا فیزیکی را بگیرد ولی برای فعالیت در فیزیک یکی ازوسایل بسیار ضروری است. مثلاً در نظریه‌های پیمانه‌ای شبکه‌ای، بدون کامپیوترهای عظیم هیچ کاری نمی‌شودکرد. من درکارهای علمی‌ام تماس‌خیلی‌نزدیکی باکامپیوتر نداشته‌ام، بجز در یک موردکه با آقای دکتر سرمدی روی مسألهٔ خاصی‌کار می‌کردیم. ایشان تسلط زیادی بر محاسبهٔ عددی داشتند و مشکل ما را برطرف‌کردند. در مورد ارتباطات که آقای دکتر وفا به‌آن اشاره کردند، فکر نمی‌کنم نیاز به تأکید بیشتری داشته باشد.

خسروشاهی: آقای دکتراسدی، شما چه می‌فرمایید؟

اسدی: اولاً کامپیوتر به‌عنوان ابزارمحاسبه در ریاضیات وفیزیک و به‌خصوص در ریاضیات خیلی لازم‌است. در خیلی از زمینه‌ها باید مقدار زیادی محاسبه انجام داد و دید که مثلاً نظریه‌ای که



دکتر کامران وفا

می‌خواهیم بسازیم در حالتهای خاص درست هست یا نه و خوب البته این کار را باید به‌کمك کامپیوتر کرد. ولی کامپیوتر الان فقط برای محاسبه نیست بلکه از لحاظ گرافیك هم خیلی مهم است. چیزی که من علاقه دارم انشاءالله در آیندهٔ نزدیك انجام بدهم، بررسیهای هندسی به کمك کامپیوتر است. هندسهٔ پیوسته یعنی ریاضیات پیوسته، مطالعهٔ تکینیها ومطالبی از این قبیل، که چیزهای توصیفی‌هستند ونمی‌توانیم روی‌کاغذ تصاویر آنها را خوب بکشیم یا تجسم فضایی از آنها داشته باشیم، از طریق کامپیوتر قابل بررسی‌اند. می‌توان اشکال را در فضا چرخاند وشهودخیلی‌خوبی، حتی به‌صورت هندسی، به‌دست آورد. درضمن، کامپیوتردرتدریس ریاضیات هم می‌تواند نقش‌اساسی داشته باشد. من با اینکه خودم درحال حاضرازکامپیوترفقط برای ارتباط شبکه‌ای استفاده می‌کنم نه برای محاسبات جدی، معتقدم که باید دوراندیش باشیم و هرچه زودترخودمان را با عصرکامپیوترتطبیق بدهیم برای اینکه‌کامپیوتر در زندگی این قرن و قرن آینده جای بسیار بسیار مهمی خواهد داشت و اگرما الان خودمان را مجهزنکنیم بعداً بهای خیلی‌زیادی خواهیم پرداخت. حتی خوب است که از دبیرستان دانش‌آموزان را با این ماشین آشناکنیم تا در دانشگاه با تسلط بیشتری از آن استفاده‌کنند. البته استفاده ازکامپیوتر نمی‌تواند جای فکرریاضی‌را در مدرسه بگیرد ولی می‌تواند جانشین یك سری تمرینهای خسته‌کننده و بی‌نتیجه بشودکه در ریاضیات دبیرستانی وجود دارند و واقعاً طرز فکر تحلیلی دانش‌آموز را تقویت نمی‌کنند و فقط یك نوع مهارت به‌آنها می‌دهند که به‌جای آن، می‌توان استفاده از کامپیوتر را برای انجام محاسبات به‌دانش‌آموز یاد داد.

رنجبر: من فقط می‌خواهم یك‌جمله اضافه‌کنم. آقای دکتر اسدی گفتند ازدبیرستان، ولی‌حالا دراغلب جاها بچه‌ها از دبستان بازی باکامپیوتررا شروع می‌کنند.

خسروشاهی: آقای دکتررنجبر، شماکه دوشمارهٔ مجلهٔ نشرریاضی را خوانده‌اید فکر می‌کنید چگونه مجله‌ای‌است؟ ارزیابی شما از این مجله چیست؟

رنجبر: ایدهٔ انتشار چنین مجله‌ای بسیار خوب است. می‌دانم مشکلات زیادی در این راه داریدکه امیدوارم به‌تدریج برطرف شوند و حاصل‌کارشما پیوسته پربارتر شود. من اکثرمقالات مجلهٔ شما را می‌خوانم ولی طبعاً همهٔ آنها به‌یك اندازه مورد پسند من نیستند. فکر می‌کنم اگر بخواهم انتقادی از مجلهٔ شما داشته باشم زیاد بودن درصد مقالات ترجمه شده از مجلات خارجی است. انتخاب این مقالات نیز بعضی وقتها برای من پرسش‌انگیز است. دیگر اینکه من‌ترجیح می‌دهم حجم مجله با مطالب ریاضی پر بشود تا مطالبی در مورد ریاضیات. من منکر اهمیت تاریخ ریاضیات نیستم ولی درکشوری‌که تعداد مجلات جدی وآبرومند ریاضی بسیارکم‌است: شاید مفیدترباشدکه بخش بزرگتر مجله را مطالب فنی پربکنند تا مقالات نیمه فنی و حاشیه‌ای. البته‌این‌گونه مطالب هم در اشاعهٔ فرهنگ ریاضی‌قطعاً مفید هستند و الحق مجلهٔ شما چند مقالهٔ خواندنی دراین موردها داشته است مثل "تاریخ و ریاضیات، تاریخ ریاضیات، ..." که بررسی جالبی بود و من چیزهایی‌ازآن یادگرفتم ولی‌من چاپ مقالاتی مثل"خمهای‌جبری" سیاوش شهشهانی را مفیدتر می‌دانم تا مقالهٔ هالموس در همان شماره[1] تحت عنوان"می‌خواهم ریاضیدان به‌حساب‌آیم". به‌هرحال قضاوت بنده برمبنای شماره‌های سال اول‌است ومن احساس‌می‌کنم که‌کیفیت مجلهٔ شما به‌نحوچشمگیری روبه‌تعالی دارد.

اسدی: من می‌خواهم چندجمله دربارهٔ ادبیات ریاضی در ایران و اهمیت توجه به‌آن بگویم. ما حداقل به دو نوع مجله یا نشریهٔ ریاضی احتیاج داریم. یکی درسطح آموزشی و یکی در سطح تخصصی. من در زمان دانش‌آموزی مجلهٔ یکان را با علاقهٔ بسیار می‌خواندم و سعی می‌کردم مقالاتش را بفهمم و مسائلش‌راحل‌کنم. حتی بی‌تاب بودم‌که هرشماره زود به‌دستم برسد. وقتی‌که دیر می‌رسید به‌شهر اراك، من‌خیلی‌مضطرب وناراحت می‌شدم.می‌توانم بگویم‌که شور و حال ریاضی را تا حد زیادی مجلهٔ یکان در من به‌وجود آورد وگرنه مطالب دورهٔ متوسطه بسیار خسته‌کننده بود. کلاً از نظر تشویق مطالعهٔ ریاضی درجوانان حداقل یك مجله در این سطح لازم است. در بیشترکشورهای دنیا مجلاتی هستند که

توصیهٔ من به‌دانشجویان ریاضی این‌است‌که حداقل دوقسمت فیزیك را جزء برنامهٔ مطالعاتی خودشان بگذارند: یکی مکانیك و دیگر، فیزیك‌کوانتومی.

بیشتر به‌تعلیم و تربیت ریاضی توجه دارند، مثل مجلهٔ مانتلی در آمریکا، که البته مطالب متنوع دیگری هم‌دارد یا همین نشر ریاضی، که البته خودم نخوانده‌ام و همین‌جوری حدس میزنم از این نوع باشد و آقای رنجبر معتقدند باید درصد مقالات غیرترجمه‌ای آن زیادتر باشد ولواینکه این مقالات در سالهای اول به‌نظر افرادی که‌کمال‌گرا هستند زیاد خوب نباشد. و دیگراینکه، ما به‌یك مجلهٔ

۱. شمارهٔ ۲ سال ۱ نشرریاضی

ریاضی احتیاج داریم که مطالب واقعاً تخصصی ریاضی را بنویسد یا مقالاتی توصیفی برای شرح ایده‌های ریاضی که به‌دانشجو چیزی یاد بدهد. دانشجو با خواندن چنین مقالاتی پی می‌برد که فلان‌رشته در ریاضیات وجود دارد و فلان‌کارها را می‌کند، در حالی که از یك کتاب قطور هیچوقت نمی‌تواند این‌مطالب را به‌دست بیاورد. در ضمن، این‌مقالات باید طوری باشند که به‌مطالب تحقیقاتی‌ختم بشوند به‌طوری که دانشجو تشویق بشود و ببیند که تحقیق در ریاضی، چیز عجیب وغریبی نیست. مثلاً یك‌سری مسائل تحقیقاتی‌خوب در آنالیز ترکیبی هست که بیان‌آنها احتیاج زیادی به‌مطالب تکنیکی ندارد، و همین‌طور درقسمتهای خاصی از جبر و نظریهٔ اعداد. دانشجوی با استعداد با مطالعهٔ این مطالب ممکن‌است تشویق‌بشود وراه‌حل‌خوبی‌پیداکند وقدم در راه تحقیق‌بگذارد. علاوه براینها، ریاضیدانهای ایرانی باید سعی‌کنند یك نشریهٔ ریاضی خاص خود داشته باشند حتی اگر در چهار یا پنج سال اول کیفیت آن زیاد خوب نباشد. این‌برای به‌وجودآوردن یك ادبیات ریاضی ایرانی که واقعاً متعلق به‌خود ایران باشد لازم‌است. گرچه ممکن‌است در آغاز تعداد مقالات توصیفی زیاد باشد ولی مطمئناً ریاضیدانهای داخل و خارج، هرچند تعدادشان زیاد نیست، سعی‌خواهند کرد مقالات تحقیقی‌در آن چاپ‌بکنند. خودمن‌هم خیلی‌خوشحال‌می‌شوم که دراین جهت‌کاری بکنم.

خسروشاهی: درپایان‌این گفتگو اگرمطلب دیگری دارید بفرمایید.

رنجبر: می‌خواهم ازاین‌فرصت استفاده‌کنم و به‌پرسشی که دراین چند روز گذشته از طرف دانشجویان فیزیك مطرح می‌شد، پاسخ بدهم. دانشجوها اغلب از من می‌پرسیدند برای یادگرفتن فیزیك نظری چقدر باید ریاضیات بدانند. شما می‌دانید که تقریباً همهٔ رشته‌های ریاضیات در فیزیك نظری کاربرد پیدا کرده‌اند و اگر کسی بخواهد قبل از شروع به‌کار در فیزیك، ریاضیات موردنیاز آن را آن‌گونه که ریاضیدانها آنها را یاد می‌گیرند یاد بگیرد،

پیوند خیلی‌نزدیکی‌که بین‌فیزیك وریاضیات به‌وجودآمده، تقریباً این دو را ازهم تفکیك‌ناپذیرکرده است. ما نمی‌توانیم فیزیکدان نظری بشویم مگراینکه مقدار زیادی ریاضیات یاد بگیریم.

هیچ‌وقت فرصت پرداختن به اصل مسأله را نخواهد داشت. پس راه‌حل چیست؟ به‌نظربنده، بهترین راه، خواندن چندکتاب خوب و جامع است که به‌طور متنوع، موردنیازترین بخشهای ریاضی را می‌آموزند. بهترین نمونه‌ای که من مد نظر دارم سری سه‌جلدی کتابهای هندسهٔ مدرن دوبروین، فومنکو، ونوویکف است که بهتر است حتی دربرنامهٔ درسی دوره‌های فوق‌لیسانس و دکتری فیزیك نظری تدریس شوند. این کتابها به‌دست استادان ماهری نوشته شده‌اند که همیشه در دوران فعالیت ریاضیشان به‌مسائل فیزیك عنایت خاصی داشته‌اند و چنانکه در مقدمهٔ کتاب می‌نویسند، اغلب کتابهای مهم و استاندارد مکانیك‌کوانتومی ونظریهٔ نسبیت ونظریهٔ میدانها را به‌دقت خوانده‌اند. در نتیجه، راههای اصلی کتابشان‌را (به‌ویژه درجلدهای یك و دو) مسائل‌فیزیکی‌تعیین می‌کنند. مطلب دیگری‌که می‌شود به‌دانشجویان فیزیك توصیه‌کرد این است‌که با دوستان ریاضی‌خوان در مورد مسأله هایشان مشورت بکنند تا دانشجویان ریاضی‌هم به‌مسائل فیزیکی‌علاقه‌مند بشوند. این‌می‌تواند برای هردوطرف سودمند باشد.

خسروشاهی: شما آقای دکتراسدی، اگرمطلبی‌دارید بفرمایید.

اسدی: در چند سالهٔ اخیر این پدیده مشاهده می‌شود که برای اولین‌بار بعد از آغاز قرن بیستم دوباره فیزیك و ریاضی به‌طور بسیار شدیدی با هم کنش و واکنش دارند و این ارتباط به‌قدری عمیق است که شاید در تاریخ ریاضیات و فیزیك بی‌نظیر باشد. بنابراین، توصیهٔ من به‌دانشجویان ریاضی‌این‌است که حداقل‌دوقسمت فیزیك را جزء برنامهٔ مطالعاتی خودشان بگذارند، یکی مکانیك و دیگر، فیزیك کوانتومی. به نظر من برای ریاضیدانان جوان، به‌خصوص در این قرن، دانستن قدری فیزیك بسیار لازم است، نه‌فقط به‌خاطراینکه ایده‌های ریاضی‌بهتری داشته باشند بلکه‌برای اینکه ریاضی به‌صورت مجرد ومتمرکز دریك رشتهٔ‌کوچك نباشد. دوم اینکه، حتی برای افرادی که در ریاضیات عملی کار می‌کنند دانستن قسمتهایی از ریاضیات نظیر نظریهٔ اعداد بسیار مفیداست. مطلب سوم اینکه، حتی کسانی که می‌خواهند معلمان و استادان ریاضی خوبی بشوند، سعی کنند تا حدی تحقیق بکنند برای اینکه تحقیق، حتی درسطوح نه‌چندان بالا، کمك عظیمی‌می‌کند به‌فهمیدن مطلبی که آدم می‌خواهد به‌دیگری تدریس بکند.

رنجبر: من در تأیید گفته‌های آقای دکتر اسدی نمونه‌هایی از همکاری ریاضیدانها و فیزیکدانهای معروف ذکر می‌کنم. از دانشمندان‌شوروی شنیدم که منین به‌تمام کنفرانسهای فیزیك می‌رود، حتی به کنفرانسهای تخصصی که خیلی از فیزیکدانها خودشان نمی‌روند، و به‌دقت هم یادداشت بر می‌دارد، و اخیراً هم به‌اتفاق همکارانش درنظریهٔ ریمان‌کارهای اساسی‌کرده‌است. مثال دیگر، آتیاست‌که در تماس دائم با ویتن(فیزیکدان) است وحتی‌پیشنهاد کرده بعضی از مسائل اساسی که در ریاضیات حل شده‌اند، از طریق روشهای فیزیکی هم حل‌بشوند، و ویتن توانسته مسائل‌خیلی عمیقی را حل بکند. مخصوصاً درشوروی نظیر این ریاضیدانهایی که به‌مسائل فیزیکی عنایت دارند بسیار زیاد است و می‌توانم از نوویکف و گلفاند هم نام ببرم. اغلب‌اینهامتون خیلی‌معروف‌فیزیکی را از اول تا آخر خوانده‌اند. ولی خیلی از ریاضیدانهایی‌که من می‌شناسم، متخصص‌اند در رشته‌های خیلی باریك، و مثلاً یك نفر که در آنالیز تخصص دارد وحشت می‌کند که راجع به هندسهٔ دیفرانسیل حرف بزند. به نظر من یك نشانهٔ ریاضیدان خوب این است‌که واقعاً عنایتی به‌فیزیك داشته باشد. پیوند خیلی نزدیکی‌که بین فیزیك و ریاضیات به‌وجود آمده، تقریباً این‌دو را از هم تفکیك‌ناپذیرکرده‌است. ما نمی‌توانیم فیزیکدان نظری بشویم‌مگر اینکه مقدار زیادی ریاضیات یاد بگیریم. مخصوصاً درجایی مثل ایران‌که هم تعداد ریاضیدان خیلی‌کم‌است وهم تعداد فیزیکدان، اگر این دو گروه با هم تفاهم و مراوده داشته باشند به کار هردو گروه‌کمك خواهد شد.

خسروشاهی: باتشکرازشما، که وقت خودتان رابرای این‌مصاحبه در اختیار نشر ریاضی گذاشتید.

از مثلث تا خمینه*

شینگ شن‌چرن*
ترجمهٔ محمد جلوداری‌ممقانی

۱. هندسه. فکر می‌کنم که انتظار می‌رود هرچه دربارهٔ هندسه می‌دانم بگویم؛ هندسه چیست، پیشرفت آن درطی سده‌ها چگونه بوده است، مسائل جاری آن چیست، و درصورت امکان، نگاهی اجمالی به‌آیندهٔ آن بیاندازم. پرسش اول پاسخ روشن و صریحی ندارد. معنی واژهٔ هندسه برحسب زمان و یا شخصی که از آن سخن می‌گوید تغییرمی‌کند. از دیدگاه اقلیدس، هندسه مجموعه‌ای است از احکام منطقی که از چند اصل نتیجه می‌شوند. روشن است که این دیدگاه با توجه به افقهای همواره درحال گسترش هندسه کافی نیست. از این‌رو در ۱۹۳۲، وبلن[1] و هنری وایتهد[2] هندسه‌دانان بزرگ اظهار داشتند "شاخه‌ای از ریاضیات هندسه نامیده می‌شود زیرا این نام درنظر تعداد زیادی از افراد ذیصلاحیت از لحاظ احساسی و سنتی نام مناسبی است" [۱]. این عقیده را الی کارتان، هندسه‌دان بزرگ فرانسوی نیز با حرارت تأئیدکرده است [۲]. ریاضیدان بزرگ آمریکایی جورج بیرکاف[3] که خود آنالیزدان بود، گفته است "این واهمهٔ پنهانی وجود دارد که ممکن است سرانجام معلوم شود هندسه چیزی نیست مگر پیرایهٔ شهودی پرزرق و برق آنالیز" [۳]. اخیراً دوست من آندره ویل می‌گفت "شاید جنبه‌های روانشناختی شهود هندسی واقعی هرگز روشن نشوند. درگذشته، معنای این شهود، نیروی تجسم درفضای سه‌بعدی بود. اکنون که فضاهای با بعد بیشترمسائل مقدماتیتر را به‌کنار زده‌اند، این تجسم در بهترین حالت جزئی یا نمادی است. به‌نظر می‌رسدکه نوعی تصور لمس‌کردن نیز تا حدی درکار باشد" [۴].

در اینجا شاید بهتر باشدکه کاری به‌این مطالب نداشته باشیم و به‌برخی مباحث مشخص بپردازیم.

1. O.Veblen 2. J. H.C.Whitehead 3. George Birkhoff

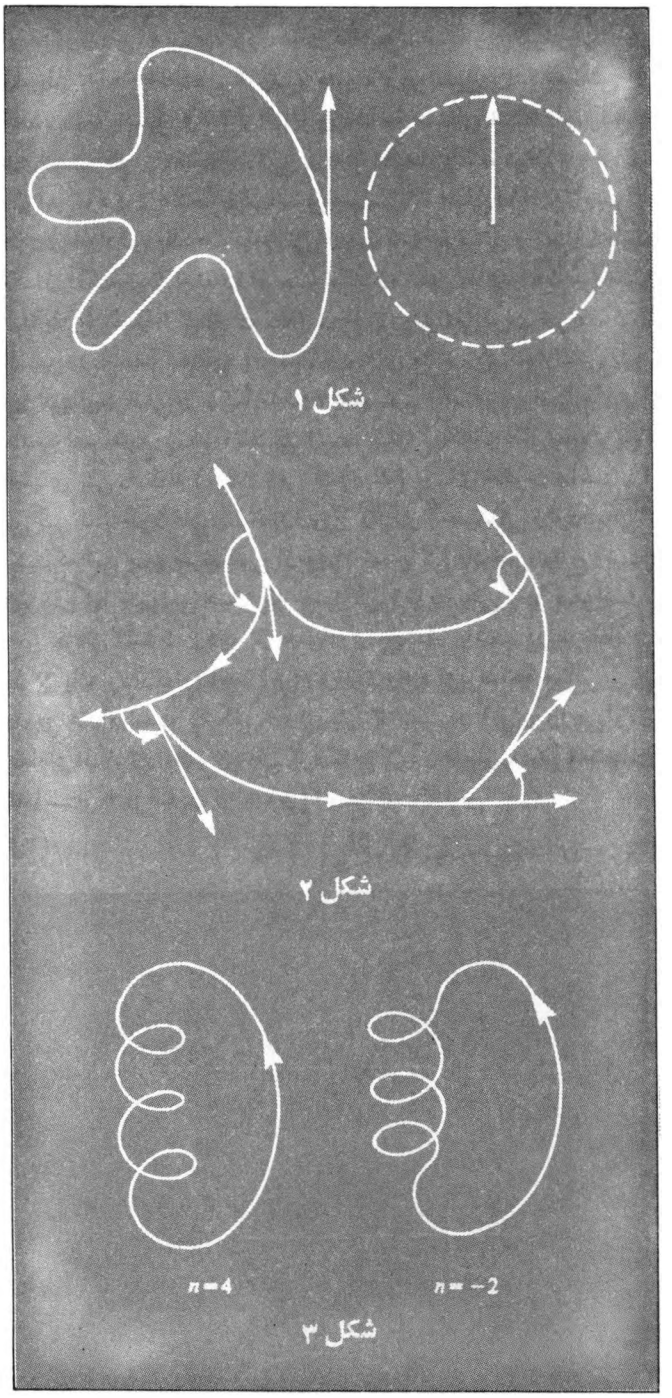
۲. مثلث. مثلث یکی ازساده‌ترین اشکال هندسی‌است که ویژگیهای بسیار زیبایی دارد. مثلاً مثلث تنها یك دایرهٔ محیطی و تنها یك دایرهٔ محاطی داخلی‌دارد. در اوایل این‌قرن، تقریباً هرریاضیدانی قضیهٔ دایرهٔ نه نقطه را می‌دانست. اما شگفت‌انگیزترین ویژگی مثلث بامجموع زاویه‌هایش ارتباط پیدا می‌کند. اقلیدس می‌گوید که این مجموع برابر است با ۱۸۰° یا π رادیان، و این حکم را از اصل بحث‌انگیزی معروف به اصل توازی نتیجه می‌گیرد. تلاشهایی که برای اجتناب از این‌اصل می‌شد، به‌شکست انجامید. نتیجهٔ این تلاشها کشف هندسه‌های نااقلیدسی بود که درآنها، مجموع زاویه‌های مثلث برحسب‌اینکه هندسه هذلولوی یا بیضوی باشد کوچکتر یا بزرگتر از π است. کشف هندسهٔ نااقلیدسی هذلولوی، توسط گاوس، یوهان بویویی و لباچفسکی در سدهٔ هیجدهم، یکی از درخشانترین فصلهای تاریخ تفکر آدمی است.

تعمیم مثلث، یك n ضلعی، یعنی یك چندضلعی با n ضلع است. با تقسیم n ضلعی به $n-۲$ مثلث مشاهده می‌کنیم که مجموع زاویه‌های آن $(n-۲)\pi$ است. بهتر است مجموع زاویه‌های خارجی این اشکال را نیز اندازه بگیریم! این مجموع، به‌ازای همهٔ n ضلعیها، ازجمله مثلثها، برابر است با ۲π.

۳. خمهای مسطح؛ شاخص دوران[1] و هموتوپی منظم[2]. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان خمهای هموار، یعنی‌خمهایی را که درهرنقطه خط مماسی دارندکه به‌طور پیوسته تغییر می‌کند، و خمهای هموار بسته را مطالعه کرد. هنگامی که نقطه‌ای روی خم هموار (جهتدار) بسته‌ای چون C یك‌دور بزند، خطوط ماربر نقطهٔ ثابتی چون O و موازی با خطوط مماس بر C به‌اندازهٔ $۲\pi n$ رادیان یا به تعداد n دور حول O دوران می‌کنند. عدد صحیح n، شاخص دوران C نامیده می‌شود (ر.ك. شکل ۱) قضیهٔ مشهوری درهندسهٔ دیفرانسیل می‌گویدکه اگر C خمی ساده باشد، یعنی اگر خود را قطع نکند، آنگاه $n=\pm ۱$.

روشن است که باید قضیه‌ای، قضایای مجموع زاویه‌های خارجی یك n ضلعی و شاخص دوران یك خم سادهٔ بستهٔ هموار را به‌هم پیوند دهد. به‌این قضیه می‌توان با مطالعهٔ ردهٔ وسیعتری از خمها موسوم به خمهای سادهٔ بستهٔ قطعه‌ـقطعه هموار دست یافت. شاخص دوران خمی از این نوع را می‌توان به‌روشی طبیعی با چرخاندن خط مماس دریك گوشه، به‌اندازهٔ زاویهٔ خارجی مربوط به‌آن گوشه، تعریف کرد (ر.ك. شکل ۲). در این صورت، قضیهٔ شاخص دوران فوق، درمورد خمهای سادهٔ بستهٔ قطعه‌ـقطعه هموار نیز معتبر است. درحالت خاص n ضلعی، حاصل از قطعه خطهای مستقیم، این‌قضیه به‌این گزاره‌که مجموع زاویه‌های‌خارجی n ضلعی مساوی با ۲π است، بدل می‌شود.

1. rotation index 2. regular homotopy



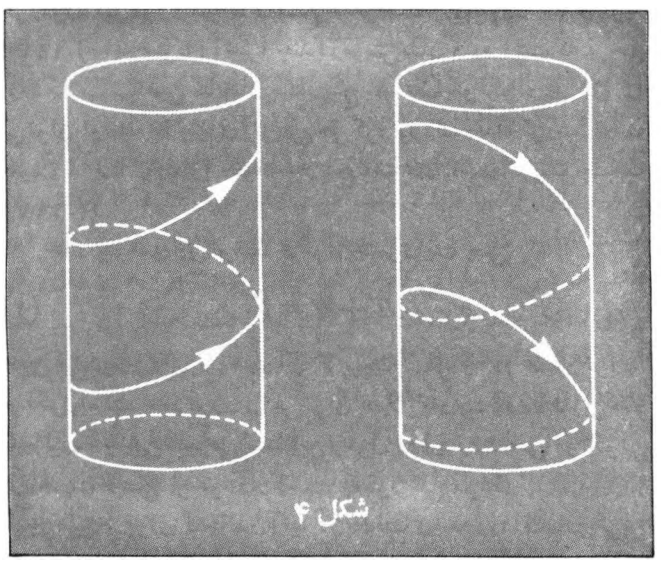
شکل ۱
شکل ۲
شکل ۳

این قضیه را از این‌هم بیشتر می‌توان تعمیم داد. به‌جای خمهای سادهٔ بسته، می‌توانیم خمهایی را درنظر بگیریم که خود را قطع می‌کنند. به‌هر نقطهٔ نوعی تقاطع خم با خودش می‌توان یك علامت نسبت داد. دراین‌صورت، اگرخم به‌طور مناسبی جهتدار شده باشد، شاخص دوران آن مساوی است با یك به‌علاوهٔ مجموع جبری تعداد نقاط تقاطع خم با خودش (ر. ك. شکل ۳). مثلاً شاخص دوران شکل 8 ، صفر است.

یك مفهوم بنیادی در هندسه، یا به‌طور کلی در ریاضیات، تغییرشکل[1] یا هموتوپی است. دوخم هموار بسته را هموتوپ منظم گویند هرگاه یکی را بتوان ازطریق یك‌خانواده از خمهای‌هموار بسته به‌شکل دیگری درآورد. چون شاخص دوران یك‌عدد صحیح است، و در این خانواده ازخمها به‌طور پیوسته تغییرمی‌کند، باید ثابت بماند؛ یعنی، هنگامی که خم منظماً تغییرشکل می‌یابد، شاخص دوران مقدار واحدی را اختیارمی‌کند. قضیهٔ مهمی از گراوشتاین-ویتنی[1] می‌گوید که عکس این موضوع نیز درست است [۵]: دوخم بستهٔ هموار با یك‌شاخص دوران، هموتوپ منظم هستند.

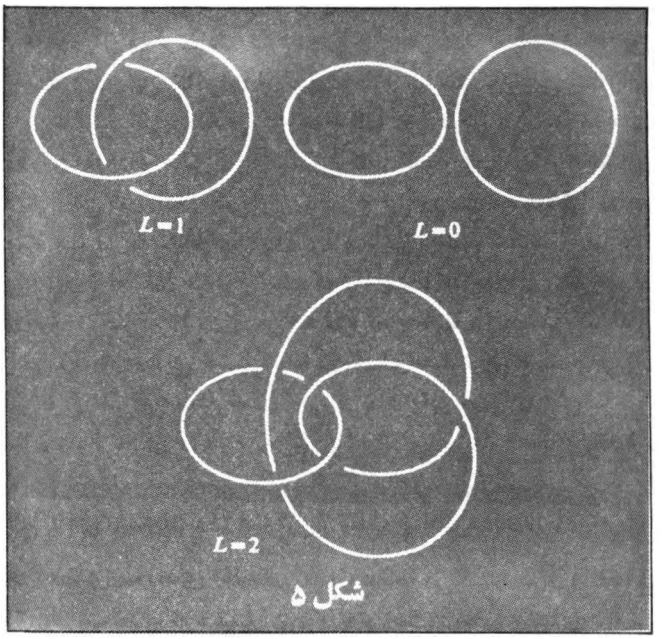
در ریاضیات مرسوم است که برای مطالعهٔ خمهای بستهٔ هموار درصفحه، صرفه را دراین‌می‌بینند که تمام خمها را درنظر بگیرند و آنها را به‌رده‌هایی تقسیم کنند؛ رده‌های هموتوپی منظم مثالی از این نوع‌اند. این‌ممکن است یکی‌از تفاوتهای اصولی‌روش‌شناختی میان علوم نظری و علوم تجربی باشد؛ زیرا درعلوم تجربی‌کاربرد چنین شیوه‌ای غیرعملی است. قضیهٔ گراوشتاین-ویتنی می‌گوید که تنها ناوردای[2] یك ردهٔ هموتوپی منظم، شاخص دوران آن است.

۴. فضای سه‌بعدی اقلیدسی. از صفحه می‌گذریم و به فضای اقلیدسی‌سه‌بعدی که هندسهٔ آن پرمایه‌تر است وخصوصیتهای‌متفاوتی دارد، می‌پردازیم. شاید زیباترین‌خم‌فضایی که درصفحه‌قرارندارد، مارپیچ مستدیر[3] باشد. این خم دارای خمیدگی[4] و تاب[5] ثابت است و تنها خمی‌است که بینهایت حرکت صلب را می‌پذیرد [۱]. میان مارپیچهای راستگرد و چپگرد (ر. ك. شکل ۴) یك تفاوت اساسی وجود داردکه ناشی از علامت تاب آنهاست. یك مارپیچ راستگرد با هیچ مارپیچ چپگردی، جز از راه انعکاس آیینه‌ای، نمی‌تواند قابل‌انطباق[6] باشد. درمکانیك، مارپیچها نقش مهمی‌بازی می‌کنند. از دیدگاه هندسی، این‌که الگوی کریك-واتسن[7] از مولکول DNA یك‌مارپیچ‌مضاعف‌است، شاید کاملاً تصادفی‌نباشد. مارپیچ مضاعف ویژگیهای هندسی جالبی‌دارد. مثلاً ازوصل کردن سروته هر یك از این مارپیچها با یك پاره‌خط یا یك‌کمان، دوخم


شکل ۴

1. deformation

1. Graustein-Whitney
2. invariant
3. circular helix
4. curvature
5. torsion
6. congruent
7. Crick-Watson



شکل ۵

بسته حاصل می‌شود. درفضای سه‌بعدی این خمها دارای یك عدد پیوندی[1] هستند (ر. ك. شکل ۵).

مسألهٔ بحث‌انگیزی که اخیراً در زیست‌شیمی توسط دوتن از ریاضیدانان، ویلیام پول[2] و جورج رابرتس، مطرح شده است این است که آیا DNAی کروموزومی نیز ساختمان مارپیچ مضاعف دارد یا نه. درحقیقت اگرچنین باشد، این مولکول دورشتهٔ بسته با عددی پیوندی ازمرتبهٔ ۲۰۰۰۰۰ خواهد داشت. این مولکول ازراه جداکردن رشته‌ها وتکمیل کردن هرکدام ازرشته‌ها تکثیرمی‌شود. پول و رابرتس نشان دادند که با چنین عدد پیوندی بزرگی، فرایند تکثیر مشکلات ریاضی جدیی خواهد داشت. از این‌رو ساختارمارپیچ مضاعف مولکول DNA، دست‌کم درمورد کروموزومها مورد سؤال واقع شده است [۶]. (در ۲۶ ژانویهٔ ۱۹۷۹ اضافه شدکه: اخیراً چندآزمایش نشان داده است که برخی ازمشکلات ریاضی ساختار مارپیچ مضاعف مولکول DNA را می‌توان توسط فعالیتهای آنزیمی حل کرد (ر. ك. مقالهٔ کریك[3] تحت عنوان "آیا DNA حقیقتاً مارپیچ مضاعف است؟" پیش‌چاپ ۱۹۷۸.))

عدد پیوندی L توسط فرمول جیمزوایت یعنی

$$T+W=L \qquad (۱)$$

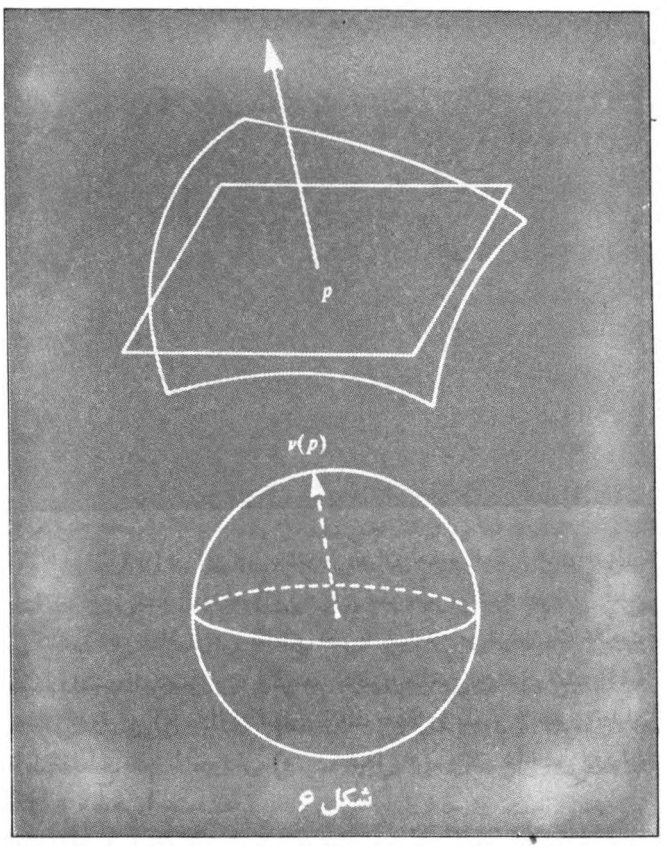
تعیین می‌شود [۷]، که درآن T پیچش[4] کل و W عدد نورد[5] مولکول است. عدد نورد را می‌توان عملاً به‌دست آورد و این عدد بافعالیت آنزیمی تغییرمی‌کند. این فرمول درزیست‌شناسی مولکولی از اهمیت خاصی برخوردار است. به‌طورکلی مولکولهای DNA طویل هستند. برای گنجاندن آنها دریك فضای محدود، اقتصادی‌ترین راه درنوردیدن و پیچاندن آنهاست. این بحثها می‌توانند مبین پیدایش نوعی هندسهٔ تصادفی[6] باشند که مثالهای اصلی آن از زیست‌شناسی اخذشده است.

1. linking number 2. William Pohl 3. F.H.C.Crick
4. twist 5. writhing number 6. stochastic geometry

درفضای سه‌بعدی، رویه‌ها درمقایسه باخمها ویژگیهای مهمتری دارند. کارهای اساسی گاوس، هندسهٔ دیفرانسیل را که مبحثی از حساب دیفرانسیل و انتگرال بود به‌شاخهٔ مستقلی اعتلا داد. کتاب وی تحت عنوان تحقیقات کلی دربارهٔ رویه‌های خمیده[1] (۱۸۲۷)، گواهی ولادت هندسهٔ دیفرانسیل است. ایدهٔ اصلی آن این است که هررویه دارای یك هندسهٔ ذاتی[2] است که فقط مبتنی براندازهٔ طول کمان است. با استفاده از جزء کمان، سایر مفاهیم هندسی نظیر زاویهٔ بین‌خمها و مساحت قطعه‌ای از رویه‌را می‌توان تعریف کرد. از این‌رو هندسهٔ مسطحه به‌هندسهٔ رویه‌ای مانند Σ که مبتنی بر ویژگیهای موضعی جزء کمان است، تعمیم می‌یابد. این موضعی‌سازی[3] هندسه هم بدیع و هم انقلابی است. ژئودزیکها، "کوتاهترین" خمهای بین دونقطه (به‌قدرکافی نزدیك) جای خطوط راست را می‌گیرند. به‌طورکلی، یك خم روی Σ دارای "خمیدگی ژئودزیکی" است که این مفهوم، تعمیمی ازمفهوم خمیدگی یك‌خم مسطح است؛ ژئودزیکها خمهایی هستند که خمیدگی ژئودزیکی آنها صفراست.

فرض کنیدکه رویهٔ Σ هموار و جهتدار باشد. در هرنقطهٔ p از Σ یك بردارقائم‌واحد $v(p)$ وجود داردکه برصفحهٔ مماس بر Σ در p عمود است (شکل ۶ را ببینید). بردار $v(p)$ را می‌توان نقطه‌ای ازکرهٔ واحد S_0 تلقی کردکه‌مرکز آن منطبق برمبدأ مختصات فضاست. با فرستادن p به $v(p)$، نگاشت گاوس

$$g:\Sigma \longrightarrow S_0 \qquad (۲)$$



شکل ۶

1. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*
2. intrinsic geometry 3. localization

را به‌دست می‌آوریم. نسبت جزء مساحت S_0 به‌جزء مساحت Σ را که تحت g متناظر می‌شوند، خمیدگی گاوسی می‌نامند. "قضیهٔ برجستهٔ" گاوس می‌گوید که خمیدگی گاوسی تنها به‌هندسهٔ ذاتی Σ بستگی دارد. درحقیقت، خمیدگی گاوسی به‌تعبیری این‌نوع هندسه را مشخص می‌کند. روشن است که اگر Σ یک‌صفحه باشد، خمیدگی گاوسی آن صفر است.

همچون هندسهٔ مسطحه، روی Σ ناحیهٔ D را که به‌یک یا چند خم قطعه‌قطعه هموار محدود شده‌است، درنظرمی‌گیریم. D دارای یک ناوردای توپولوژیک $\chi(D)$ به‌نام مشخصهٔ اویلر[1] است که خیلی‌آسان به‌صورت زیرتعریف می‌شود: D را "به‌روشی‌مناسب" به‌چندضلعیهایی تقسیم می‌کنیم و تعداد رأسها، یالها و وجه‌ها را به‌ترتیب با v، e و f نمایش می‌دهیم. دراین‌صورت

$$\chi(D)=v-e+f\,. \qquad (۳)$$

(قضیهٔ چندوجهی اویلر، قبل از اویلرهم شناخته شده‌بود ولی به‌نظر می‌رسد اویلر نخستین کسی‌است که به اهمیت این "مجموع متناوب" پی‌برده است.)

درنظریهٔ رویه‌ها، قضیهٔ گاوس-بونه[2] به‌صورت زیر است:

$$\sum\ (\text{خمیدگی ژئودزیکی})_{\partial D} + \int (\text{زاویه‌های خارجی}) + \iint_D (\text{خمیدگی گاوسی}) = ۲\pi\chi(D) \qquad (۴)$$

که درآن ∂D کنارهٔ D است. خمیدگی گاوسی یک ناحیهٔ مسطح صفر است. علاوه‌براین، اگر این‌ناحیه ساده‌همبند[3] باشد، داریم $\chi(D)=۱$. پس این فرمول به‌قضیه شاخص دوران که دربخش۳ مورد بحث قرار گرفت، تبدیل می‌شود؛ در واقع، ما از مجموع زاویه‌های یک مثلث بسیار فراتر رفته‌ایم.

برای تعمیم هندسهٔ خمهای مسطح بسته، می‌توانیم رویه‌های بستهٔ جهتدار درفضا را درنظربگیریم. تعمیم مفهوم شاخص دوران، درجهٔ نگاشت گاوس، g، در (۲) است. تعریف دقیق‌درجه پیچیده است. به‌طور شهودی، درجه عبارت است از تعداد دفعاتی (با احتساب علامت) که $g(\Sigma)$، رویهٔ S_0 را می‌پوشاند. برخلاف حالت صفحه، که درآن شاخص دوران می‌تواند هر عددی باشد، درجهٔ d توسط توپولوژی Σ کاملاً معین می‌شود، و برابر است با

$$d=\frac{۱}{۲}\chi(\Sigma)\,. \qquad (۵)$$

این‌درجه برای کرهٔ واحدی که [درفضای اقلیدسی] نشسته‌است، مستقل ازجهت‌آن، برابر است با ۱+. نتیجهٔ شگفت‌انگیزی که اسمیل به‌دست‌آورده [۸] حاکی است که در واقع دو کرهٔ واحد با جهتهای مخالف، هموتوپ منظم هستند؛ یا، به‌زبان شهودی، کرهٔ واحد را با یک هموتوپی منظم می‌توان پشت و روکرد. وجود صفحهٔ مماس درهر نقطه از رویه در هر مرحله از این هموتوپی، ضرورت دارد؛ ولی رویه ممکن است خود را قطع کند.

1. Euler characteristic 2. Bonnet 3. simply connected

۵. از فضاهای مختصاتی تا خمینه‌ها. این دکارت بود که در سدهٔ هفدهم با استفاده از مختصات، هندسه را دگرگون ساخت. به‌گفتهٔ هرمان وایل "معرفی اعداد به‌صورت مختصات، عمل گستاخانه‌ای بود" [۹]. ازآن پس، به‌قول وایل، شکل وعدد بسان فرشته و ابلیس برای تسخیر روح هندسه‌دان در ستیز بوده‌اند. مختصات دکارتی یک نقطه در صفحه، عبارت است از فاصله‌های آن، با احتساب علامت، از دوخط متعامد موسوم به محورهای مختصات. یک خط مستقیم مکان [هندسی] تمام نقاطی است که مختصات، یعنی x و y، آنها دریک معادلهٔ خطی چون

$$ax+by+c=۰ \qquad (۶)$$

صدق کنند. پیامد این تعبیرها، ترجمهٔ هندسه به‌زبان جبر است.

همین‌که در به‌روی هندسهٔ تحلیلی باز شد، سایر دستگاههای مختصات نیز وارد صحنه شدند. دستگاههای مختصات قطبی در صفحه وکروی و استوانه‌ای درفضا، و بیضوی درصفحه و فضا از جملهٔ این دستگاهها هستند. دستگاه اخیر برای رویه‌های درجهٔ دوم همکانون به‌کارمی‌رود و به‌ویژه برای مطالعهٔ بیضیوارها که زمین‌هم یکی ازآنهاست، مناسب است.

همچنین به فضاهای با بعد بیشتر نیازمندیم زیرا حتی اگر از فضای سه‌بعدی آغاز کنیم، نظریهٔ نسبیت خواهان واردکردن زمان به‌عنوان بعد چهارم است. در یک سطح ابتدایی‌تر، ثبت حرکت یک‌ذره به‌انضمام سرعتش، مستلزم شش مختص‌است (هودوگراف). مجموعهٔ توابع پیوستهٔ یک‌متغیره یک‌فضای بینهایت‌بعدی‌را تشکیل می‌دهد. مجموعهٔ توابعی‌که مربع‌آنها انتگرالپذیر است یک فضای هیلبرت پدید می‌آورد که می‌توان آن‌را به‌کمک دنباله‌ای نامتناهی، مختصات‌بندی کرد. در ریاضیات این دیدگاه، یعنی بررسی کلیهٔ توابعی‌که ویژگیهای خاصی دارند، دیدگاهی است اساسی.

با توجه به‌افزایش دستگاههای‌مختصات، طبیعی به‌نظرمی‌رسد که نظریه‌ای دربارهٔ مختصات داشته باشیم. تنها لازمهٔ تعمیم مفهوم مختصات این‌است‌که بتوان مختصات‌را با نقاط یکی‌گرفت. یعنی، بتوان یک‌تناظر یک به‌یک بین‌آنها و نقاط برقرارکرد؛ منشأ ومفهوم آنها اهمیتی ندارد.

اگرپذیرفتن مختصات عام برای شما دشوار است، [نگران نباشید چون] شما تنها نیستید. هفت سال طول‌کشید تا اینشتین از نسبیت خاص در ۱۹۰۸ به‌نسبیت عام در ۱۹۱۵ برسد. وی این تأخیرطولانی را با این‌کلمات شرح می‌دهد: "چرا هفت سال‌دیگر برای ساختن نظریهٔ نسبیت عام لازم بود؟ علت اصلی آن این نکته است‌که‌کنارگذاشتن این‌تصورکه‌مختصات، معنی‌متریکی بلاواسطه دارند، آسان نیست" [۱۰].

بعد از بهره‌گیری از مختصات در مطالعهٔ هندسه، اکنون می‌خواهیم از قیدآنها رها شویم. این‌خواست ما را به‌سوی‌مفهوم بنیادی خمینه سوق می‌دهد. یک خمینه[1] به‌طور موضعی توسط مختصات مشخص می‌شود، اما این مختصات از تبدیلات دلخواه تبعیت می‌کنند. به‌عبارت دیگر، خمینه فضایی است با مختصات تغییرپذیر یا نسبی (اصل نسبیت). می‌خواهیم پیدایش‌این‌مفهوم را با

1. manifold

واردشدن پوشاك در زندگی آدمی مقایسه کنم. اینکه انسان شروع به پوشاندن بدن خود کرد، یك رویداد بسیار مهم تاریخی است. اهمیت توانایی انسان در تغییر لباس خود نیزکمتر از این نیست. اگرهندسه بدن آدمی و مختصات لباس او باشد، دراین صورت سیرتکاملی هندسه را می‌توان با سیرتکاملی انسان مقایسه کرد:

هندسهٔ ترکیبی	انسان برهنه
هندسهٔ مختصاتی	انسان اولیه
خمینه‌ها	انسان جدید

مفهوم خمینه حتی برای ریاضیدانان مفهوم پیچیده‌ای است. مثلاً، ریاضیدان بزرگی‌چون ژاك آدامار، "دریادگیری نسبتاً عمیق نظریهٔ گروههای لی"، که مبتنی بر مفهوم خمینه است، "مشکلات لاینحلی می‌دید" [۱۱].

۶. خمینه‌ها، ابزارهای موضعی. با توجه به اینکه مختصات در عمل بی‌معنی‌اند، ابزار جدیدی برای مطالعهٔ خمینه‌ها مورد نیاز است. این ابزار، مفهوم ناوردایی است. ناورداها بر دونوع‌اند: موضعی و سراسری [فراگیر]. اولی به‌رفتارتحت یك‌تغییرمختصات موضعی‌مربوط می‌شود،درحالی‌که ناورداهای نوع دوم ناورداهای سراسری خمینه هستند. ناورداهای توپولوژیك از نوع دوم‌اند. حساب دیفرانسیل برونی[1] وآنالیزتانسوری ریچی[2] دوابزاربسیار مهم موضعی هستند.

فرم دیفرانسیل برونی، عبارت‌است ازعامل‌زیرعلامت‌انتگرال چندگانه‌ای چون

$$\int\int_D P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy \qquad (۷)$$

درفضای (x, y, z)، که درآن P، Q و R توابعی از x، y و z هستند و D، ناحیه‌ای است دوبعدی. ملاحظه می‌شود که اگر ضرب دیفرانسیلها پادمتقارن باشد، یك تعویض متغیر درناحیهٔ D (به‌فرض جهتداربودن) خود به‌خود رعایت می‌شود، یعنی

$$dy\wedge dz=-dz\wedge dy,\cdots \qquad (۸)$$

که درآن نماد $\wedge$ نشان‌دهندهٔ ضرب برونی است.و نیز بسیار جالبتر می‌شود وقتی فرم درجهٔ دوم برونی

$$\omega=P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy \qquad (۹)$$

را واردکنیم و انتگرال (۷) را به‌صورت زوجی چون (D, ω) مرکب ازناحیهٔ D و فرم ω بنویسیم.

زیرا اگرهمین‌عمل درفضای n بعدی انجام شود، آنگاه قضیهٔ استوکس را می‌توان به‌صورت

$$(D, d\omega)=(\partial D, \omega) \qquad (۱۰)$$

نوشت، که درآن D یك ناحیهٔ r بعدی و ω یك $(r-۱)$-فرم [فرم درجهٔ $r-۱$] برونی؛ ∂D کنارهٔ D و $d\omega$ مشتق برونی ω است که یك r-فرم می‌باشد. فرمول (۱۰)، فرمول اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره، نشان‌می‌دهدکه ∂ و d عملگرهای الحاقی هستند. نکتهٔ اساسی این‌است‌که درحالی‌که عملگر ∂ روی ناحیه‌ها سراسری است، عملگرمشتقگیری برونی d روی فرمها موضعی است.این ویژگی d را به‌ابزار نیرومندی مبدل می‌سازد. اگر این عملگر درمورد یك تابع ($=$ ۰-فرم) و یك ۱-فرم‌اعمال شود نتیجهٔ حاصل به‌ترتیب گرادیان و تاو خواهد بود. فرمهای هموار از تمام درجات (نابیشتر از بعد خمینه) روی یك خمینه دیفرانسیلپذیر با عمل‌مشتقگیری برونی d تشکیل یك حلقه‌می‌دهند. الی‌کارتان حساب دیفرانسیل برونی را به‌طرز مؤثری در مسائل موضعی هندسهٔ دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌کار برد. نظریهٔ بعد سراسری [فراگیر] به دنبال کارهای اولیهٔ پوانکاره به وسیلهٔ دورام[1] پایه‌گذاری شد. این موضوع در بخش بعد مورد بحث واقع خواهد شد.

حساب دیفرانسیل برونی، علی‌رغم اهمیتش، برای تبیین پدیده‌های هندسی و تحلیلی در مورد خمینه ناکافی است. مبحث آنالیز تانسوری ریچی برای این منظور مبحث‌گسترده‌تری است. تانسورها براین اصل استوارند که یك خمینه را می‌توان به‌سبب همواربودن‌آن در هرنقطه توسط یك فضای خطی، موسوم به‌فضای مماسی، تقریب زد. به‌فضای مماسی دریك نقطه، فضاهای تانسوری وابسته می‌شوند. مشتقگیری ازمیدانهای‌تانسوری نیازمندساختاری اضافی، به‌نام التصاق مستوی[2] است. در صورتی‌که خمینه دارای ساختاری ریمانی‌یالورنتسی[3] باشد، التصاق لوی-چیویتا[4]ی‌متناظر با آن مقصود ما را برآورده خواهدکرد.

۷. همولوژی[5] [مانستگی]. از لحاظ تاریخی، مطالعهٔ اسلوبمند ناورداهای سراسری یك خمینه با توپولوژی ترکیبیاتی آغاز شد. اندیشهٔ زیربنایی این بررسی، تجزیهٔ خمینه به‌یاخته‌ها و مشاهدهٔ چگونگی جورشدن آنها با یکدیگراست. (این تجزیه مقید به‌چند شرط ضعیف‌است‌که از ذکرآنها چشمپوشی می‌کنیم.) اگر M یك خمینهٔ بستهٔ nبعدی‌باشد و α_k تعداد kیاختهٔ تجزیه، $k=۰, ۱, \ldots, n$، را نشان دهد، آنگاه مشخصهٔ اویلر-پوانکارهٔ M به‌شکل

$$\chi(M)=\alpha_۰-\alpha_۱+\cdots+(-۱)^n\alpha_n \qquad (۱۱)$$

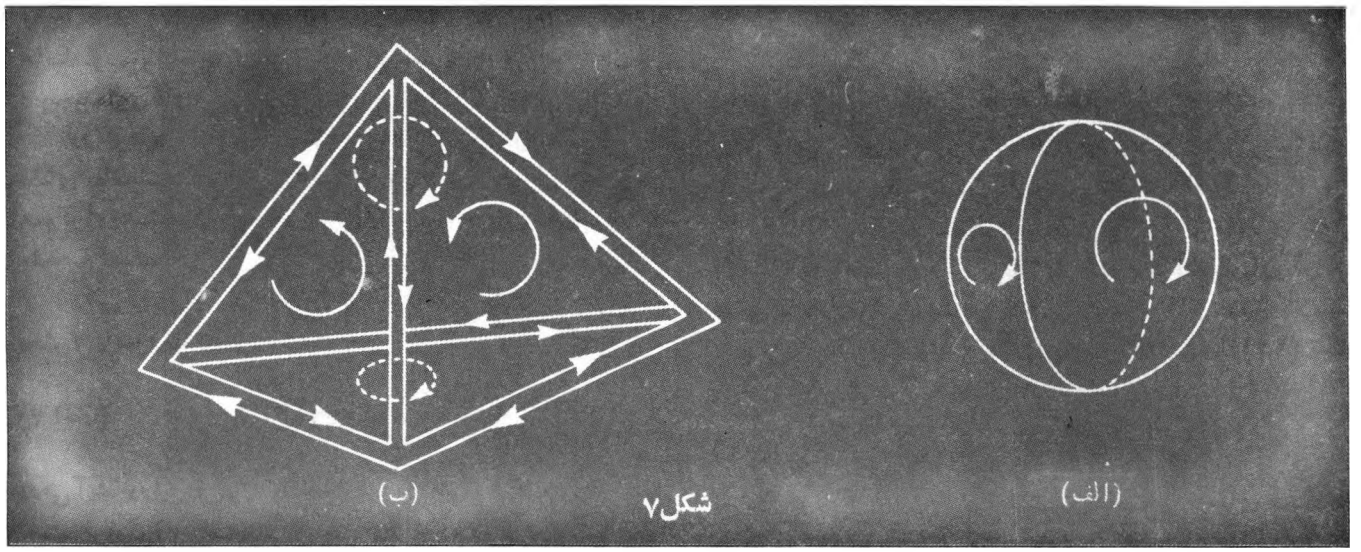
و به‌صورت تعمیمی از(۳) تعریف می‌شود.

مفهوم‌اساسی‌درنظریهٔ همولوژی، مفهوم‌کناره‌است. یك‌زنجیر مجموعی‌است از یاخته‌ها با ضرایب عدد صحیح. اگر زنجیری دارای‌کناره نباشد، یعنی‌اگرکنارهٔ آن صفرباشد، یك دور[6] نامیده می‌شود. کنارهٔ زنجیر یك دور است (ر.ك. شکل۷). تعداد دورهای kبعدی مستقل‌خطی به‌پیمانهٔ‌کناره‌های kبعدی، یك عدد صحیح b_k است. این‌عدد را kامین عدد بتی[7] می‌نامند. فرمول اویلر-پوانکاره حاکی‌است که

$$\chi(M)=b_۰-b_۱+\cdots+(-۱)^n b_n. \qquad (۱۲)$$

1. exterior differential calculus 2. Ricci's tensor analysis

1. G.de Rham 2. affine connection 3. Lorentzian
4. Levi-Civita 5. homology 6. cycle
7. Betti



شکل ۷

اعداد بتی b_k و بنابراین خود $\chi(M)$ ناورداهای توپولوژیك M هستند، یعنی این اعداد مستقل از تجزیهٔ M هستند و تحت هر تبدیل توپولوژیك M پایدار می‌مانند. این حکم وحکمهای بسیار کلیتر را می‌توان قضایای اساسی توپولوژی ترکیبیاتی تلقی کرد. توپولوژی ترکیبیاتی بعد از کارهای رهگشای پوانکاره و براوئر، در دههٔ ۱۹۲۰ و در آمریکا به رهبری وبلن، الکساندر و لفشتس[1] شکوفا شد.

گرچه بریدن خمینه راه‌مؤثری برای به‌دست آوردن ناورداهای توپولوژیك است، ولی در بریدن خمینه خطر "از بین‌رفتن" آن وجود دارد. به‌بیان روشنتر، در صورت استفاده از رهیافت ترکیبیاتی، امکان دارد روابط ناورداهای توپولوژیك ویژگیهای موضعی هندسی از نظر ما پنهان بمانند. از قضا، گرچه نظریهٔ همولوژی به‌عملگر کناره‌ای ∂ بستگی دارد، یك نظریهٔ دوگان وجود دارد به نام کوهمولوژی[2] [همانستگی] که مبتنی برعملگر مشتقگیری برونی d است که یك عملگر موضعی است.

نظریهٔ کوهمولوژی دورام را می‌توان به‌شرح زیر خلاصه کرد: عملگر d دارای این ویژگی بنیادی است که وقتی مکرراً اعمال شود فرم صفر را به‌دست می‌دهد؛ یعنی به‌ازای هر k-فرم α، مشتق برونی $(k+1)$-فرم $d\alpha$ برابر صفر است. این نکته متناظر با این واقعیت هندسی است که کنارهٔ هر زنجیر (یا ناحیه) کناره‌ای ندارد (ر.ك. (۱۰)). فرم α بسته نامیده می‌شود اگر $d\alpha = 0$. این فرم، یك فرم مشتق شده نامیده می‌شود اگر فرمی مانند β از درجهٔ $k-1$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\alpha = d\beta$. از این‌رو یك فرم مشتق شده همواره بسته است. دوفرم بسته، کوهمولوگ[3] [همانسته] نامیده می‌شوند اگر تفاوت آنها یك فرم مشتق شده باشد. تمام k-فرمهای بسته که با یکدیگر کوهمولوگ هستند ردهٔ کوهمولوژی k بعدی را تشکیل می‌دهند. نکتهٔ قابل توجه آن است که درحالی که خانواده‌های k-فرمها، k-فرمهای بسته، k-فرمهای مشتق شده بسیار بزرگ هستند، رده‌های کوهمولوژی k بعدی یك فضای برداری با بعد متناهی تشکیل می‌دهند که بعد آن b_k، kامین عدد بتی است.

1. Lefschetz 2. cohomology 3. cohomologous

کوهمولوژی دورام پیشرو کوهمولوژی بافه[1]ای است، که توسط لری[2] [۱۲] ابداع و با موفقیت فراوان توسط هانری کارتان و سر[3] تکمیل شده و به‌کار گرفته شده است.

۸. میدانهای برداری و تعمیم آنها. طبیعی است که برخمینه‌ای چون M میدانهای برداری پیوسته‌ای در نظر بگیریم یعنی به‌هر نقطه بردار مماسی وابسته کنیم که به‌طور پیوسته تغییر کند. اگر مشخصهٔ اویلر-پوانکاره، $\chi(M)$، صفر نباشد، دست‌کم یك نقطه بر M پیدا می‌شود که در آن، این بردار صفر شود. به‌عبارت دیگر، هنگامی که باد می‌وزد، دست‌کم یك نقطه روی زمین وجود دارد که درمعرض باد نباشد (زیرا برای کرهٔ دوبعدی، مشخصهٔ اویلر برابر با ۲ است). دقیقتر بگوییم، در یك صفر منزوی[4] یك میدان برداری پیوسته، می‌توان عدد صحیحی به‌نام شاخص تعریف کرد، که تا حدی رفتار میدان را در آن نقطه مشخص می‌کند، بدین‌معنی که مشخص می‌کند که آن نقطه، چشمه است یا چاهك، ویا از نوع دیگری است. میدان برداری هرچه باشد، به شرط اینکه پیوسته و دارای تعداد متناهی صفر باشد، قضیهٔ پوانکاره-هوپف[5] می‌گوید که مجموع شاخصها در همهٔ صفرها، ناوردایی است توپولوژیك و دقیقاً برابر است با $\chi(M)$.

این حکم، حکمی است دربارهٔ کلاف مماس[6] M، یعنی گردایهٔ فضاهای مماس بر M. به‌طور کلی، خانواده‌ای از فضاهای برداری که توسط یك خمینه مانند M پارامتری شده است و در یك شرط حاصلضرب موضعی صدق می‌کند، یك کلاف برداری روی M نامیده می‌شود.

یك سؤال اساسی این است که آیا چنین کلافی به‌طور سراسری یك حاصلضرب هست، یا نه. از بحث فوق معلوم می‌شود که اگر $\chi(M) \neq 0$، آنگاه کلاف مماس یك حاصلضرب نیست، زیرا اگر حاصلضرب باشد، یك میدان برداری وجود خواهد داشت که در هیچ‌جا صفر نیست. تصور وجود فضایی مانند کلاف مماس خمینهٔ

1. sheaf 2. J. Leray 3. J.P.Serre
4. isolated zero 5. Hopf 6. tangent bundle

M با $\chi(M) \neq 0$، که به‌طور موضعی و نه به‌طور سراسری، حاصلضرب باشد آسان نیست. بدین ترتیب، هندسه به‌مرحلهٔ ظریفتر و پیچیده‌تری گام می‌نهد.

در توصیف انحراف سراسری یک کلاف برداری[1] از یک فضای حاصلضرب، نخستین ناورداها رده‌های به اصطلاح مشخصهٔ همولوژی هستند. مشخصهٔ اویلر-پوانکاره ساده‌ترین رده از رده‌های مشخصه است.

وقتی رویهٔ Σ کناره نداشته باشد، فرمول گاوس-بونه (۴) در بخش ۴ به‌صورت سادهٔ

$$\iint K\,dA = 2\pi\chi(\Sigma) \qquad (۴ \text{ الف})$$

درمی‌آید. دراین فرمول K خمیدگی گاوسی و dA جزء مساحت است. فرمول (۴ الف) از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است، زیرا ناوردای سراسری $\chi(\Sigma)$ را به‌صورت انتگرال یک ناوردای موضعی بیان می‌کند و شاید مطلوبترین رابطه بین ویژگیهای موضعی و سراسری باشد؛ این قضیه یک تعمیم گسترده دارد.

فرض کنید

$$\pi : E \longrightarrow M \qquad (۱۳)$$

یک کلاف برداری باشد. تعمیم یک میدان برداری مماس روی M، مقطعی از این کلاف یعنی نگاشتی است هموار چون $s : M \to E$ به‌طوری که تابع مرکب $\pi \circ s$ تابع همانی باشد. چون E تنها به‌طور موضعی یک حاصلضرب است، مشتقگیری از s نیازمند ساختار جدیدی است که معمولاً التصاق نامیده می‌شود. درحالت کلی، مشتقگیری حاصل که مشتقگیری هموردا[2] نامیده می‌شود، تعویض‌پذیر نیست. خمیدگی، میزانی برای اندازه‌گیری تعویض‌ناپذیری مشتقگیری هموردا است. ترکیبهای مناسبی از خمیدگی، فرمهای دیفرانسیلی را پدید می‌آورند که نمایندهٔ رده‌های همولوژی، به‌تعبیر نظریهٔ درام، هستند. ساده‌ترین مثال این ترکیبها، فرمول گاوس-بونه (۴ الف) است [۱۳]. من براین باورم که مفاهیم کلاف مماس، التصاق، و خمیدگی آنچنان اساسی و به‌قدری ساده هستند که باید در هر درس مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره گنجانده شوند.

۹. معادلات دیفرانسیل بیضوی. هنگامی که M دارای یک متریک ریمانی باشد، عملگری مانند $*$ وجود دارد که k-فرم α را به $(n-k)$-فرم $*\alpha$، $n = \dim M$، تبدیل می‌کند. این متناظر است با عمل هندسی به دست آوردن مکمل قائم یک زیرفضای فضای مماس. با استفاده از $*$ و دیفرانسیل d، کودیفرانسیل[3]

$$\delta = (-1)^{nk+n+1} * d * \qquad (۱۴)$$

و لاپلاسی

$$\Delta = d\delta + \delta d \qquad (۱۵)$$

را معرفی می‌کنیم. در این صورت عملگر δ، یک k-فرم را به یک $(k-1)$-فرم بدل می‌کند و Δ یک k-فرم را به یک k-فرم دیگر. فرم α که در تساوی

$$\Delta\alpha = 0 \qquad (۱۶)$$

صدق کند، فرم همساز نامیده می‌شود. یک فرم همساز از درجهٔ صفر، یک تابع همساز به‌معنی معمولی آن است.

معادلهٔ (۱۶) یک معادلهٔ دیفرانسیل بیضوی با مشتقات جزئی از مرتبهٔ دوم است. درصورتی که M بسته باشد، جوابهای آن یک فضای برداری با بعد متناهی تشکیل می‌دهند. بنابر قضیهٔ کلاسیک هاج[1] این بعد دقیقاً kامین عدد بتی یعنی b_k است. از (۱۲) نتیجه می‌شود که می‌توان مشخصهٔ اویلر را به‌صورت

$$\chi(M) = d_e - d_o \qquad (۱۷)$$

نوشت، که در آن d_e و d_o به‌ترتیب بعد فضای فرمهای همساز از درجهٔ زوج و فرد هستند. مشتق برونی d خود یک عملگر بیضوی است و (۱۷) را می‌توان چنین تلقی کرد که $\chi(M)$ را به‌صورت شاخص یک عملگر بیضوی بیان می‌کند. شاخص هرعملگر بیضوی خطی برابر است با بعد فضای جوابهای آن منهای بعد فضای جوابهای عملگر الحاقی.

بیان شاخص یک عملگر بیضوی به‌صورت انتگرال یک ناوردای موضعی به‌قضیهٔ شاخص آتیا-سینگر منتهی می‌شود. حالتهای خاص این قضیه، بسیاری از قضایای مشهور دیگر از جمله قضیهٔ علامت هاج، قضیهٔ علامت هیرتسبروخ[2]، وقضیهٔ ریمان-رخ[3] برای خمینه‌های مختلط را دربرمی‌گیرد. یک دستاورد جنبی مهم این بررسی، تشخیص نیاز به بررسی عملگرهای شبه دیفرانسیل روی خمینه‌هاست که کلیتر از عملگرهای دیفرانسیل هستند.

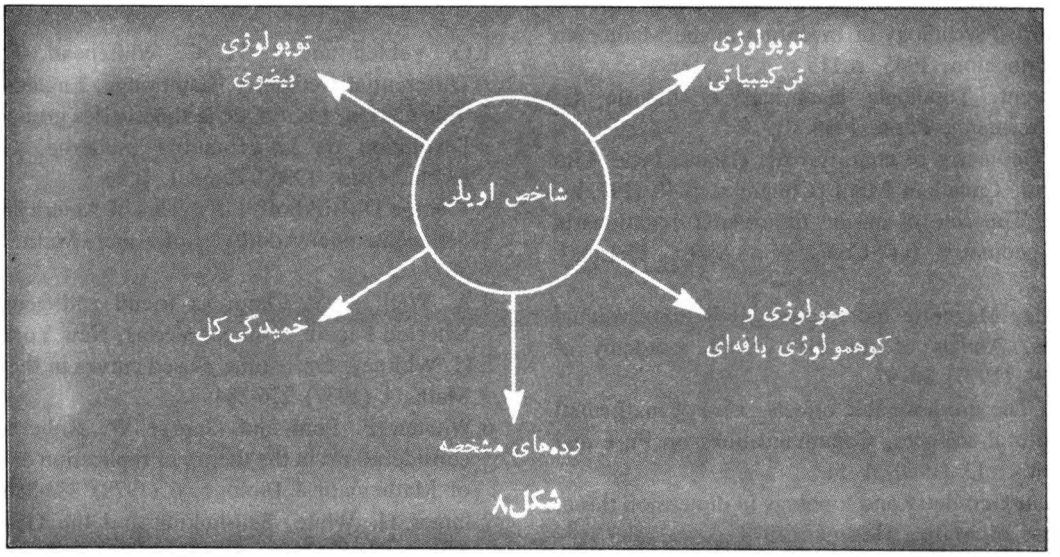
معادلات و دستگاههای معادلات دیفرانسیل بیضوی عمیقاً با هندسه گره خورده‌اند. معادلات دیفرانسیل کوشی-ریمان یک یا چند متغیرهٔ مختلط، اساس هندسهٔ مختلط هستند. واریته[4]های مینیمال، جوابهای معادلات اویلر-لاگرانژ مربوط به‌مسألهٔ وردشی مینیمم‌سازی مساحت هستند. این معادلات شبه‌خطی[5] هستند. شاید "غیرخطی‌ترین" معادلات، معادلات مونژ-آمپر باشند، که درچند مسألهٔ هندسی دارای اهمیت‌اند. درسالهای اخیر دراین زمینه‌ها پیشرفتهای بسیارزیادی حاصل شده‌است [۱۴]. با این دخالت گستردهٔ آنالیز، واهمه‌ای که جرج بیرکاف از آن سخن گفته و در بالا به‌آن اشاره شد، جدیتر به‌نظر می‌رسد. با این همه، در حالی که آنالیز نقشهٔ کل معدن را ترسیم می‌کند، هندسه جویای سنگهای زیبا و گرانبهای آن است. هندسه براین اصل استوار است که نه همهٔ ساختارها با هم مساوی‌اند نه همهٔ معادلات دارای اهمیت برابرند.

۱۰. مشخصهٔ اویلر منشأیی برای ناورداهای سراسری. خلاصه کنیم: مشخصهٔ اویلر منشأ تعداد زیادی از نظامهای هندسی است. این وابستگی را با نموداری نشان می‌دهیم (ر. ک. شکل ۸).

۱۱. نظریهٔ پیمانه‌ای میدانها. درآغاز این قرن، هندسهٔ دیفرانسیل بامطرح‌شدن نظریهٔ نسبیت اینشتین مورد توجه فراوان قرار گرفت.

1. vector bundle 2. covariant differentiation
3. codifferential

1. Hodge 2. Hirzebruch 3. Roch
4. variety 5. quasi-linear



شکل۸

ایدهٔ اینشتین عبارت بود از تعبیر پدیده‌های فیزیکی به‌صورت پدیده‌های هندسی و ساختن فضایی که با دنیای فیزیکی تطابق داشته باشد. این کاری بس بزرگ بود و روشن نیست که وی حرف آخر را در مورد نظریهٔ وحدت میدانهای گرانشی و الکترومغناطیسی زده باشد. ابداع کلافهای برداری پیشگفته، و به‌ویژه التصاقهای آنها همراه با رده‌های مشخصه و ارتباط آنها با خمیدگی، قلمرو هندسه را وسعت بخشید. موضوع کلاف یك‌بعدی[1] (یعنی: وقتی که تار[2] یك خط مختلط است) پایهٔ ریاضی نظریهٔ پیمانه‌ای میدان الکترومغناطیسی وایل را تشکیل می‌دهد. نظریهٔ یانگ-میلز که مبتنی است بر درکی از اسپین ایزوتوپی، نخستین مثال از نظریهٔ پیمانه‌ای غیرآبلی است. مبنای هندسی این نظریه یك کلاف دوبعدی مختلط همراه با یك التصاق یکانی[3] است. تلاشهایی که اخیراً برای وحدت تمام نظریه‌های میدان، از جمله بر همکنشهای ضعیف وقوی صورت می‌گیرد، حول یك نظریهٔ پیمانه‌ای یعنی یك الگوی هندسی مبتنی بر کلافها والتصاقها، متمرکز شده‌است. مشاهدهٔ وحدت مجدد هندسه و فیزیك بسیار خوشحال کننده است.

کلاف، التصاق، کوهمولوژی، و رده‌های مشخصه مفاهیم ظریف و پیچیده‌ای هستند که بعد از سالهای دراز جستجو و آزمایش در هندسه پدیدار شده‌اند. یانگ[4] فیزیکدان نوشته‌است [۱۵]: "انطباق مفاهیم میدانهای پیمانه‌ای غیرآبلی با اندیشه‌های موجود در نظریهٔ زیبای کلافهای تاری که توسط ریاضیدانان بدون مراجعه به‌دنیای واقعی به‌وجود آمده، برای من بسیار شگفت‌آور است." یانگ در ۱۹۷۵ به‌من می‌گفت که "این امر هم هیجان‌انگیز است و هم حیرت‌آور، زیرا شما ریاضیدانان این مفاهیم را از هیچ بیرون کشیده‌اید. این شگفت‌زدگی، متقابل است. یوجین ویگنر[5] با اشاره به‌نقش ریاضیات در فیزیك از تأثیر باورنکردنی ریاضیات صحبت می‌کند [۱۶]. اگر ناچار به‌یافتن علت این امر باشیم، ممکن است بتوانیم آن را با اصطلاح مبهم "یگانگی علم" بیان کنیم. مفاهیم اساسی همیشه نادرند.

1. line bundle 2. fiber 3. unitary
4. C.N.Yang 5. Eugene Wigner

۱۲. ملاحظات نهایی. هندسهٔ دیفرانسیل جدید، موضوع نوپایی است. اگرهم نیروی محرکه‌ای را که این موضوع از نسبیت و توپولوژی دریافت کرد به‌حساب نیاوریم، باز رشد هندسهٔ دیفرانسیل مداوم بوده‌است. خوشحالم که نمی‌توانیم تعریفی برای آن ارائه دهیم، و امیدوارم که برخلاف بسیاری از رشته‌های ریاضی به‌صورت یك دانش اصل موضوعی درنیاید. این رشته با تماسی که با شاخه‌های دیگر در داخل و خارج ریاضیات دارد، و با این خصیصه‌اش که مباحث موضعی و سراسری را به‌هم مربوط می‌سازد، در سالهای آینده رشتهٔ باروری باقی خواهد ماند.

شاید مشخص کردن یك دوره از ریاضیات با تعداد متغیرهای توابع یا بعد فضاهایی که از آنها بحث می‌کند، جالب باشد. با این تعبیر، ریاضیات سدهٔ نوزدهم یك‌بعدی و ریاضیات سدهٔ بیستم nبعدی است. به‌سبب چند متغیری بودن است که جبر اهمیت بیشتری کسب می‌کند. تاکنون غالب قضایای سراسری دربارهٔ خمینه‌ها، مربوط به‌خمینه‌هایی با بعد زوج بوده‌است. به‌ویژه تمام واریته‌های جبری مختلط دارای بعد حقیقی زوج هستند. خمینه‌های با بعد فرد هنوز بسیار اسرارآمیزند. می‌خواهم این آرزو را ابراز کنم که آنها در سدهٔ بیست ویکم مورد توجه بیشتر و شناسایی افزونتری قرار گیرند. کارهای جدیدی که در زمینهٔ خمینه‌های هذلولوی سه بعدی به‌وسیلهٔ ترستن[1] [۱۷] و در زمینهٔ رویه‌های مینیمال در خمینه‌های سه‌بعدی به‌وسیلهٔ یاو[2]، و میکس[3]، و شوئن[4] انجام شده، خمینه‌های سه‌بعدی و هندسهٔ آنها را به‌نحو قابل ملاحظه‌ای روشنتر ساخته‌است. شاید ابرمسألهٔ هندسه هنوزهم این حدس پوانکاره باشد که هرخمینهٔ سه‌بعدی ساده‌همبند با کره همانریخت است. تاکنون روشهای توپولوژیك وجبری به‌روشن‌شدن این مسأله نیانجامیده‌اند. قابل تصور است که ابزارهای هندسه و آنالیز بتوانند مفید واقع شوند.

1. W.Thurston 2. S.T.Yau 3. W.Meeks
4. R.Schoen

مراجع

1. O. Veblen and J. H. C. Whitehead, Foundations of Differential Geometry, Cambridge, England, 1932, P. 17.
2. Elie Cartan, Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne, Congrès Inter. Math., Oslo, 1936, Tome I, p.96.
3. George D. Birkhoff, Fifty years of American mathematics, Semicentennial Addresses of Amer. Math. Soc., 1938, P. 307.
4. A. Weil, S. S. Chern as friend and geometer, Chern, Selected Papers, Springer Verlag, New York, 1978, P. xii.
5. H. Whitney, On regular closed curves in the plane, Comp. Math. 4 (1937) 276-284.
6. William F. Pohl and George W. Roberts, Topological considerations in the theory of replication of DNA, Journal of Mathematical Biology, 6 (1978) 383-386, 402.
7. James H. White, Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions, American J. of Math., 91 (1969), 693-728; B. Fuller, The writhing number of a space curve, Proc. Nat. Acad. Sci., 68 (1971) 815–819; F. Crick, Linking numbers and nucleosomes, Proc. Nat. Acad. Sci., 73 (1976) 2639-2643.
8. S. Smale, A classification of immersions of the two–sphere, Transactions AMS, 90 (1959) 281–290; cf also A. Phillips, Turning a surface inside out, Scientific American, 214 (May 1966) 112–120. A film of the process, by N. L. Max, is distributed by International Film Bureau, Chicago, III.
9. H. Weyl, Philosophy of Mathematics and Science, 1949, p. 90.
10. A. Einstein, Library of Living Philosophers, vol. 1, p. 67.
11. J. Hadamard, Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton, 1945, p.115.
12. R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.
13. S. Chern, Geometry of characteristic classes, Proc. 13th Biennial Sem. Canadian Math. Congress, 1–40 (1972).
14. S. T. Yau, The role of partial differential equations in differential geometry, Int. Congress of Math., Helsinki, 1978.
15. C. N. Yang, Magnetic monopoles, fiber bundles, and gauge fields, Annals of the New York Academy of Sciences, 294 (1977) 86–97.
16. E. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, Communications on Pure and Applied Math., 13 (1960) 1–14.
17. W. Thurston, Geometry and topology in dimension three, Int. Congress of Math., Helsinki, 1978.

• Shing-Shen Chern, "From triangles to manifolds," *Amer. Math. Monthly*, (5) **86** (1979) 339-349.

★ شینگ شن چرن از بزرگترین ریاضیدانان قرن در زمینهٔ هندسهٔ دیفرانسیل است. وی در ۱۹۱۱ در چین به دنیا آمد، درجهٔ دکتری خود را از دانشگاه هامبورگ آلمان گرفت، و در اواخر جنگ بین‌الملل دوم به آمریکا رفت. او در دانشگاه شین هوای چین و دانشگاههای شیکاگو و کالیفرنیا (برکلی) در آمریکا کار و تدریس کرده است. شینگ شن چرن عضو آکادمی علوم و دارندهٔ نشان ملی علوم [آمریکا] است.

نظریهٔ ابعاد در جبر

احمد حقانی*

از شناخته شده ترین راههای بررسی ساختار یك دستگاه ریاضی، یافتن و مطالعهٔ ناورداهای آن دستگاه است. منظور از ناوردای یك موجود ریاضی‌عموماً یك یا چندکمیت عددی، اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و یا به‌طورکلی مجموعه‌ای از اشیای ریاضی است که به آن موجود نسبت داده می‌شود، به قسمی که با "مقایسهٔ" ناورداهای دو موجود بتوان معین کرد که آیا آنها "یکسان" هستند و یا تا چه "اندازه" از یکدیگر متفاوت و دورند. درضمن‌مثالهای زیر، مراد از مقایسه و یکسانی روشن می‌گردد.

۱. اگر V و W فضاهایی برداری بریك هیأت F باشند، آنگاه شرط لازم و کافی برای یکریخت بودن آنها تساوی ابعادشان است. پس بعد یك فضای برداری، ناوردایی از آن فضاست.

۲. فرض شود G گروهی متناهی و آبلی با مرتبه‌ای بزرگتر از ۱ است. یك فهرست منحصر به فرد از اعداد صحیح مثبت چون $d_1, d_2, \dots, d_n$ به‌قسمی که $d_1 | d_2, \dots, d_{n-1} | d_n, d_1 > 1$ به G منسوب می‌گردد که به فاکتورهای ناوردای G موسوم است. در این صورت، گروههای متناهی آبلی G_1 و G_2 یکریخت‌اند اگر و تنها اگرفهرست فاکتورهای ناوردای آنها برابر باشند.

۳. عدد پیچشی[1]، یك ناوردای خمهاست. اگر $\gamma: [0, 1] \to \mathbf{C}$ خمی بسته با درازای متناهی و a نقطه‌ای ازصفحهٔ مختلط باشد و بر خم واقع نباشد، عدد پیچشی γ حول a عبارت‌است از

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} .$$

حال اگر γ_1 و γ_2 خمهای بسته‌ای با درازای متناهی در $\mathbf{C} - \{0\}$ باشند به‌طوری که $\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = 1$، آنگاه شرط لازم وکافی برای آنکه γ_1 و γ_2 در $\mathbf{C} - \{0\}$ هموتوپیك باشند آن است که $n(\gamma_1; 0) = n(\gamma_2; 0)$. دراین مثال، معیار یکسانی، هموتوپی‌خمهاست درحالی که مقایسه به‌وسیلهٔ تساوی معمولی اعداد صحیح انجام می‌پذیرد.

۴. در توپولوژی جبری، به‌فضای توپولوژیك گروهی موسوم به گروه بنیادی منسوب می‌گردد که در مبحث رده‌بندی فضاهای توپولوژیك ابزاری نیرومنداست. مثلاً با محاسبهٔ گروه بنیادی رویه‌ها و مقایسهٔ آنها ــ توسط یکریختی گروهها ــ می‌توان رویه‌های فشرده را به‌تقریب همانریختی[1] رده‌بندی کرد.

۵. سیستمهای جبری دیگری نیز به عنوان ناوردا ظاهر می‌شوند. فی‌المثل اگر X یك فضای فشردهٔ هاسدورف و $C(X)$ جبر کلیهٔ توابع پیوسته از X به $\mathbf{C}$ باشد، آنگاه شرط لازم وکافی برای همانریخت بودن X با فضای فشرده وهاسدورف Y آن‌است که جبرهای $C(X)$ و $C(Y)$ یکریخت باشند. دراین مثال یك جبر، ناوردای فضایی توپولوژیك‌است.

اما سهم نظریهٔ حلقه‌ها از این‌بررسی، یعنی یافتن ومطالعهٔ ناورداها، چیست؟ باید اذعان کرد که در مقایسه با برخی دیگر از شاخه‌های ریاضیات، این سهم چندان قابل‌توجه نیست، و این‌خود انعکاس‌این‌واقعیت‌است که موضوع رده‌بندی حلقه‌ها،جزدرمواردی که حلقه‌ها مقید به‌انواع شرایط مناسب باشند، در مراحل ابتدایی پیشرفت‌است. تنها درقضایای‌معدودی‌ــچون‌قضیهٔ ودربورن[2]ــ آرتین در تشخیص حلقه‌های آرتینی نیمه‌ساده به‌عنوان حاصلجمع مستقیم حلقه‌های ماتریسی برهیأتهای‌کج[3]؛ و یا قضیهٔ تراکمی جاکوبسن که برطبق آن یك حلقهٔ اولیه[4] در حلقهٔ درونریختیهای یك فضای برداری‌مناسب به‌صورت"متراکم" ظاهرمی‌گردد؛ ویا قضیهٔ گلدی[5] که شرایط لازم وکافی برای وجود داشتن حلقهٔ خارج‌قسمتهای‌یك حلقهٔ مفروض‌را به‌طوری‌که این‌حلقهٔ خارج‌قسمتها آرتینی‌نیمه‌ساده باشد، به‌دست می‌دهد ــ می‌توان ردپایی از ناورداها را دید. اما در نظریهٔ عمومی حلقه‌ها، از ناورداــ آن‌گونه‌که در بالا توصیف شدــ تاکنون خبری نبوده است و در عوض مفهومی به‌نام "بعد" نقش ناوردا را برای حلقه‌ها و آن‌هم به‌طور محدود ایفا می‌کند. بعدهای مختلفی که برای حلقه‌ها تعریف شده‌اند عموماً اسباب اندازه‌گیری‌اند بدین معنا که دوری، حلقه را از یك موقعیت "ایده‌آل" معین می‌کنند. گرچه عموماً این‌ملاکهای دوری به‌تنهایی منجر به‌شناسایی کامل حلقه نمی‌شوند، معهذاگاه اطلاعات ذیقیمتی

1. winding number

1. homeomorphism
2. Wedderburn
3. skew fields
4. primitive
5. Goldie

از ساختار حلقه به‌دست می‌دهند.

از طرف دیگر، بررسی توأم بعدهای مختلف، رهیافت وحدت‌بخشی به‌نظریهٔ حلقه‌ها به‌شمار می‌رود که نمود و تجلی آن را در اختصاص سه فصل عمده از کتاب معتبر [۹] به بعدها و یا انتشار [۱۰] و کتب و مقالات متعددی که کلاً راجع به‌بعدهاست می‌بینیم. از این دیدگاه‌است که نگارنده به‌معرفی بعدها و به بیان توسعه و تحولی که از این رهگذر عاید جبر شده‌است خواهد پرداخت، و ازمیان انبوه قضایا و نتایج حاصله تنها به‌توصیف گزیده‌ای کوچك قناعت خواهد کرد. مهمترین بعدهایی که در نظریهٔ حلقه‌ها مطرح شده‌اند عبارت‌اند از: بعد کرول[1]، بعد همولوژیك فراگیر[2]، بعد گادی و بعد گلفاند ـ کیریلوف. این ترتیب بی‌ارتباط با تاریخ پیدایش آنها نیست. این مقاله را اختصاص به بعد کرول و بعد همولوژیك فراگیر می‌دهیم و درآن روی سخن ما با خوانندگانی است که لزوماً آشنایی چندانی با جبر ندارند. معهذا امید است که خبرگان این رشته نیز در این مقاله مطلبی درخورتوجه بیابند.

بعد کرول

از آنجا که قسمت بزرگی از نظریهٔ حلقه‌ها، لااقل به‌لحاظ تاریخی، مربوط به‌حلقه‌های جابه‌جایی [تعویضپذیر] می‌شود، طبیعی‌است که مفهوم بعد ابتدا در جبر جابه‌جایی [تعویضپذیر] مطرح شده باشد. لذا این امر به‌طور طبیعی بعدی را مطمح نظر می‌سازد که ریشه در هندسهٔ جبری دارد وازارتباطات اولیه وپایداری که جبرجابه‌جایی با هندسهٔ جبری دارد ناشی می‌گردد. در اینجا ذکر مقدماتی از هندسهٔ جبری خالی از فایده نخواهد بود.

هیأت F را که به‌طور جبری بسته است (فرضاً $F=\mathbf{C}$) در نظر گرفته و مجموعهٔ تمام nتاییهای مرتب اعضای F را با A_F^n، موسوم به‌فضای آفین، نشان می‌دهند. اگر X زیرمجموعه‌ای از A_F^n باشد گویند Xمجموعه‌ای جبری‌است هرگاه‌درجبر $F[X_1, \ldots, X_n]$ چندجمله‌ایهای n متغیره برهیأت F، زیرمجموعه‌ای چون T یافت شود به‌طوری که X مجموعهٔ صفرهای مشترك اعضای T باشد. با استفاده از مجموعه‌های جبری، A_F^n را می‌توان تبدیل به‌یك فضای توپولوژیك کرد، بدین‌ترتیب که مکملهای مجموعه‌های جبری را به‌عنوان مجموعه‌های باز این توپولوژی، که امروزه به توپولوژی زاریسکی موسوم‌است، قرارمی‌دهند (شرح‌جزئیات‌ونیز نتایج دیگر در[۶] مندرج‌است). دراین‌صورت، یك واریته (آفین)، زیرمجموعهٔ بسته‌ای چون Y از A_F^n است که تحویل‌ناپذیرباشد، یعنی نتوان آن را به‌صورت اجتماع زیرمجموعه‌های سره‌ای که هریك در Y بسته است نوشت. البته Y را همراه با توپولوژی القاشده ازتوپولوژی زاریسکی درنظرخواهیم داشت. به هر مجموعهٔ جبری X، ایده‌آل $I(X)$ از حلقهٔ $A=F[X_1, \ldots, X_n]$ نظیر می‌گردد و این، مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهایی‌است که هرکدام درتمامی اعضای X صفر می‌شود. برطبق (نتیجه‌ای از) قضیهٔ معروف هیلبرت موسوم به‌قضیهٔ صفرها[3]، تناظر

$$Y \longrightarrow I(Y)$$

تناظری یك به‌یك از واریته‌های فضای آفین به‌مجموعهٔ ایده‌آلهای اول جبر A است. این تناظر، ترتیب شمولی را معکوس می‌سازد و لذا زنجیرهٔ کاهشی و سرهٔ

$$Y \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_t$$

از واریته‌ها را متناظر با زنجیرهٔ افزایشی وسرهٔ

$$P \subset P_1 \subset \cdots \subset P_t$$

ازایده‌آلهای اول می‌کند. بعد یك فضای توپولوژیك X، سوپریمم کلیهٔ اعدادصحیح m تعریف می‌گردد به‌قسمی که زنجیرهٔ سره‌ای به‌طول m از زیرمجموعه‌های بسته و تحویل ناپذیر در X وجود داشته باشد. نوتر در ۱۹۲۳ ثابت کرد که بعد واریتهٔ Y به‌عنوان یك فضای توپولوژیك برابراست‌با ماکسیمم طولهای زنجیره‌های سره وافزایشی‌ازایده‌آلهای اول که از $P=I(Y)$ آغازمی‌گردند. بدین‌ترتیب، شمارش طول زنجیره‌های ایده‌آلهای اول، ابتدا در جبر جابه‌جایی و سپس درجبر ناجابه‌جایی به‌عنوان وسیلهٔ طبیعی تعریف بعد مورداستفاده قرار گرفت. گرچه این‌کار توسط نوتر در مورد حلقهٔ چندجمله‌ایها آغاز شد اما این بعد به کرول منسوب است به‌این دلیل که‌کرول توانست این شمارش‌را به‌همهٔ حلقه‌های جابه‌جایی نوتری گسترش داده و آن را به‌عنوان ابزاری جدید در مطالعهٔ ایده‌آلها بکارگیرد.

در بقیهٔ این مقاله، R حلقه‌ای با عضو واحد (ناصفر) فرض می‌شود. ارتفاع ایده‌آل اول P، سوپریمم اعداد صحیح n است به‌قسمی که $n+1$ ایده‌آل اول P_i با شرط

$$P=P_0 \underset{\neq}{\supset} P_1 \underset{\neq}{\supset} \cdots \underset{\neq}{\supset} P_n$$

وجود داشته باشند. سوپریمم را با $ht(P)$ نشان می‌دهند. به طور مثال در حلقهٔ $\mathbf{Z}$ ازاعداد صحیح، $ht(0)=0$ وبرای هرعدد اول p، $ht(p\mathbf{Z})=1$.

مفهوم ارتفاع عملاً هنگامی مفید است که مقدارش عددی طبیعی باشد و از ابتدا معلوم نیست که چرا چنین کمیتی‌باید متناهی باشد. مثلاً درحلقهٔ چندجمله‌ایها $F[X_1, X_2, X_3, \ldots]$ ارتفاع ایده‌آل M تولید شده توسط کلیهٔ متغیرها بینهایت‌است:

$$M=(X_1, X_2, X_3, \ldots) \underset{\neq}{\supset} (X_2, X_3, X_4, \ldots)$$
$$\underset{\neq}{\supset} (X_3, X_4, \ldots) \underset{\neq}{\supset} \cdots .$$

کرول نشان داده‌است که برای حلقهٔ جابه‌جایی Rی که هر ایده‌آل آن دارای مجموعهٔ مولد متناهی باشد، هرگز چنین اتفاقی رخ نمی‌دهد. شرط مذکور در مورد حلقهٔ R معادل آن است که هر زنجیرهٔ افزایشی (وسره) از ایده‌آلهای R متناهی باشد، و چنین حلقه‌ای را نوتری نامند.

قضیهٔ ایده‌آل اصلی کرول (۱۹۲۸). حلقهٔ جابه‌جایی R نوتری فرض می‌شود. اگر $x \in R$ و P در مجموعهٔ ایده‌آلهای اول که حاوی x هستند کمین [مینیمال] باشد، آنگاه $ht(P) \leqslant 1$.

خاطرنشان می‌شود که ارتفاع از مفاهیم اساسی جبر است و

1. Krull 2. global 3. Nullstallensatz

قضیهٔ زیر که ارتباط آن را با یکتایی تجزیه بیان می‌کند مبین این امر است. یادآوری می‌کنیم که ایده‌آل را اصلی گویند هرگاه توسط تنها یك عضو تولید شود.

قضیه. دامنهٔ جابه‌جایی‌ونوتری R مفروض‌است. شرط لازم وکافی برای‌آنکه R یك دامنهٔ یکتایی تجزیه باشد، آن‌است‌که هرایده‌آل اول به‌ارتفاع ۱، اصلی باشد.

نتیجه‌ای‌که فوراً از قضیهٔ ایده‌آل اصلی کرول عاید می‌شود، این‌است‌که در حلقهٔ جابه‌جایی نوتری R اگر ایده‌آل I توسط t عضو تولید شود، فرضاً $I=x_1R+\cdots+x_tR$، و P درمجموعهٔ ایده‌آلهای اول کـه حاوی I اند، کمین باشد آنگاه $ht(P)\leqslant t$. حال چنانچه R موضعی نیز باشد، یعنی دارای یك ایده‌آل بیشین [ماکسیمال] منحصر به‌فرد چون M باشد، آنگاه ارتفاع M کوچکتر یا مساوی حداقل تعداد مولدهای لازم برای تولیدکردن ایده‌آل M است. هنگامی کـه این دوکمیت مساوی باشند، حلقه را منظم (موضعی) نامند. چنین حلقه‌هایی به عنوان حلقه‌های موضعی نقاط ناتکین واریته‌های جبری ظاهرمی‌گردند.

به‌لحاظ اهمیت فـراوان نقاط تکین، مختصراً مفاهیم مربوط به‌آن را توصیف می‌کنیم. فرض شود Y یك واریتهٔ آفین در A_k^n، و P نقطه‌ای متعلق بـه Y باشد. Y در P ناتکین نامیـده می‌شود هرگاه مرتبهٔ ماتریس ژاکوبی

$$\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right\|$$

برابر $n-\dim Y$ باشدکـه در آن چند جمله‌ایهای $f_1,\cdots,f_t$ تشکیل یك مجموعهٔ مولد برای ایده‌آل $I(Y)$ می‌دهند و $\dim Y$ بعد فضای توپولوژیك Y است. (این تعریف مستقل از مجموعـهٔ مولد فوق‌است). برطبق قضیه‌ای از زاریسکی، شرط لازم و کافی برای آنکه Y در P ناتکین‌باشد آن‌است‌که $O_{P,Y}$، حلقهٔ موضعی P، منظم باشد. توضیح‌آنکه می‌توان درحلقهٔ مختصات Y، یعنی‌در

$$A(Y)=\frac{F[X_1,\cdots,X_n]}{I(Y)}$$

اعضا رابه‌صورت توابعی بر Y که مقادیرشان در F اند، تصور کرد. دراین‌صورت، مجموعهٔ توابعی که در P صفرشوند تشکیل‌ایده‌آلی بیشین از $A(Y)$ رامی‌دهند (واین هم‌خود نتیجه‌ای‌ازقضیهٔ‌صفرهای هیلبرت‌است). چنانچه $A(Y)$ رادراین ایده‌آل بیشین‌موضعی‌سازی[1] کنیم، حلقهٔ موضعی حاصل با $O_{P,Y}$ نشان داده می‌شودکـه به‌حلقهٔ موضعی P موسوم‌است. نکتهٔ جالب آن‌است‌که همواره بعد فضای Y با ارتفاع تنها ایده‌آل بیشین $O_{P,Y}$ برابراست، لـذا بعد حلقهٔ مزبور را برابر $\dim Y$ تعریف می‌کنند.

حال‌که تااندازه‌ای‌سبب نامگذاری روشن گشت، بعدکلاسیك کرول حلقهٔ دلخواه R رابه‌عنوان سوپریمم‌اعداد صحیح n تعریف می‌کنیم به‌قسمی‌که‌زنجیره‌ای سره و افزایشی به‌طول n از ایده‌آلهای اول در R وجود داشته باشد. این کمیت بـا $\dim R$ نشان داده می‌شود. یکی‌از نتایج‌قضیهٔ ایده‌آل اصلی کرول آن‌است‌که ارتفاع هرایده‌آل اول دریك‌حلقهٔ جابه‌جایی نوتری عددی‌است طبیعی، لذا برای یك‌چنین‌حلقه‌ای‌بعدکلاسیك‌کرول همانا سوپریمم‌ارتفاعهای ایده‌آلهای اول آن حلقه‌است. آشکاراست‌که بعد کلاسیك کرول هرهیأت صفراست و $\dim \mathbf{Z}=1$. از جمله اولین نتایج حاصله، قضیهٔ زیراست‌که ارتباط شرایط نوتری وآرتینی‌را برای‌حلقه‌های جابه‌جایی به‌دست می‌دهد: حلقه را آرتینی (چپ) نامند هرگـاه هر زنجیرهٔ سره وکاهشی از ایده‌آلهای (چپ) آن متناهی باشد.

قضیه. R جابه‌جایی فرض می‌شود. در این‌صورت R آرتینی‌است اگر و تنها اگر R نوتری، و بعدکلاسیك‌کرول آن صفرباشد.

با استفاده از این قضیه است‌که ساختار حلقه‌های جابه‌جایی آرتینی به‌عنوان حاصلجمع مستقیم یکتایی از حلقه‌هـای موضعی آرتینی به‌دست آمده‌است. بنابرقضیهٔ فـوق، بعدکلاسیك کرول، دوری یك حلقهٔ جابه‌جایی را از آرتینی بودن مشخص می‌سازد.

آیا حلقه‌هایی وجود دارندکه به‌هراندازهٔ دلخواه از آرتینی بودن به‌دور باشند؟ آری، زیرا برای هرعدد طبیعی n داریم

$$\dim \mathbf{C}[X_1,\cdots,X_n]=n.$$

اما وجود حلقه‌های‌کاملاً متفاوت‌که بعدکلاسیك‌کرول آنها مساوی است (مثلاً $\dim Z_p=\dim Z=\dim \mathbf{C}[X]=1$؛ p عـدد اول) مبین این مطلب است‌کـه این بعد به‌تنهایی برای بررسی و شناخت‌کامل حلقه‌ها کافی نیست.

پس از آنکه بعد کلاسیك‌کرول مطرح شد، بـه‌طور طبیعی محاسبهٔ بعد حلقهٔ R که به‌نحوی با حلقهٔ S درارتباط باشد برحسب $\dim R$ موردنظرقرارگرفت. مثلاً S می‌تواند هریك ازحلقه‌های زیرباشد:

R/I، که درآن I ایده‌آلی در R است؛

$R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ و یا به‌طورکلی حلقهٔ چند جمله‌ایها بـا ضرایب در R برحسب متغیرهای $\{X_i\}_{i\in I}$؛

$R[[X_1,\cdots,X_n]]$ یعنی سریهای صوری با ضرایب در R؛

حلقهٔ‌گروه G با ضرایب در R یعنی $R[G]$؛

$R[X,\sigma]$ که σ یك درونریختی R است.

$R[X,d]$ که $d:R\to R$ یك تابع مشتق‌است.

⋮

دقیقترین نتایج عموماً در حالتی‌که R نوتری باشد حاصل شدند زیرا درچنین موقعیتی‌نظریهٔ ایده‌آلها پیشرفته‌تراست. بعدکلاسیك کرول را می‌توان برای اعداد ترتیبی (اردینال) نیز تعریف‌کرد، که دراین صورت مسألهٔ وجود بعد را باید مدنظرداشت.

کرمزاده مشاهدهٔ جالب زیررا داشته‌است. وی ابتدا مجموعهٔ $X=\mathrm{Spec}(R)$ متشکل از کلیهٔ ایده‌آلهای اول حلقهٔ دلخواه R را به دو طریق تبدیل به‌یك فضای توپولوژیك‌کرده وسپس بعدمشتق[1] X رانسبت به‌این توپولوژیها به‌دست می‌آورد. آنگاه ثابت‌می‌کند که بعد مشتق فضای توپولوژیك X وجود دارد اگر وتنها اگر بعد کلاسیك‌کرول حلقهٔ R وجود داشته باشد، و اختلاف این ابعـاد

1. localization

1. derived dimension

حداکثر ۱ است [۸].

بعد کلاسیک کرول درمورد حلقه‌های ناجابه‌جایی ـ خصوصاً اگر ساده باشند یعنی ایده‌آلی بجز ایده‌آلهای بیمایه نداشته باشند ـ اطلاع زیادی به دست نمی‌دهد. بنابراین، می‌بایست این مفهوم به‌طریقی مناسب تعمیم داده شود. این عمل توسط رنتسلر و گابریل در ۱۹۶۷ به‌انجام رسید [۱۲]. پیش از آنکه تعریف آنان را از بعد ارائه کنیم، حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که انگیزهٔ اصلی تعریف را روشن می‌کند. دامنهٔ جابه‌جایی R به طوری که $\dim R = n > 0$، مفروض است. در این صورت عضوی ناصفر چون x در R وجود دارد به‌طوری که: $\dim(R/xR) = n-1$. لذا زنجیرهٔ نامتناهی

$$R \supseteq Rx \supseteq Rx^2 \supseteq Rx^3 \supseteq \cdots$$

از ایده‌آلها با این ویژگی وجود دارد که هریك از مدولهای خارج قسمت Rx^i/Rx^{i+1} با R/Rx یکریخت است، و در نتیجه به "اندازهٔ" حلقه‌ای از بعد کلاسیك $n-1$ "بزرگ" است.

اکنون E را مجموعه‌ای مرتب می‌گیریم و برای هردو عضو a و b در E قرار می‌دهیم

$$[a, b] = \{x \in E: \quad a \leqslant x \leqslant b\}.$$

کمیتی به‌نام $\operatorname{dev} E$ (انحراف E) بدین‌گونه به‌این‌مجموعه نسبت می‌دهیم: اگر E گسسته باشد (یعنی در E استلزام $a \leqslant b \to a = b$ برقرار باشد)، $\operatorname{dev} E = -\infty$. چنانچه E ناگسسته ولی آرتینی باشد (یعنی تمام زنجیره‌های سره و کاهشی از اعضای E متناهی باشند) تعریف می‌کنیم $\operatorname{dev} E = 0$. به‌طور کلی برای عدد ترتیبی α تعریف می‌کنیم $\operatorname{dev} E = \alpha$ هرگاه اولاً $\operatorname{dev} E \neq \beta < \alpha$ و ثانیاً در هر زنجیرهٔ کاهشی از اعضای E نظیر

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots$$

کلیهٔ $[a_{i+1}, a_i]$ها، مگر تعدادی متناهی از آنها، دارای انحراف کمتر از α باشند.

به‌طور مثال، اگر $\mathbf{N}$ و $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ را با ترتیبهای طبیعی درنظر بگیریم، آنگاه $\operatorname{dev} \mathbf{N} = 0$ و $\operatorname{dev} \mathbf{Z} = 1$، اما $\mathbf{Q}$ دارای انحراف نیست. اکنون اگر M یك مدول چپ برحلقهٔ دلخواه R باشد، بعد (چپ) کرول M که با $|M|$ نشان داده می‌شود با انحراف مجموعهٔ کلیهٔ زیرمدولهای M که تحت رابطهٔ شمول مرتب شده باشد تعریف می‌گردد. بعد چپ کرول حلقهٔ R نیز انحراف مجموعهٔ ایده‌آلهای چپ در R تعریف می‌شود. این مفاهیم را طبعاً می‌توان برای مدولهای راست نیز بیان کرده و همچنین بعد راست کرول حلقهٔ R را درنظر آورد.

از جمله اولین نتایج تعریف آن است که مدولهای نوتری دارای بعد کرول هستند، اما عکس این مطلب درحالت کلی درست نیست. علاوه براین، برای حلقهٔ R ی که نوتری چپ باشد نه‌تنها $|R|$ وجود دارد بلکه در رابطهٔ

$$\dim R \leqslant |R|$$

نیز صدق می‌کند. در مورد حلقه‌های جابه‌جایی نوتری R، تساوی برقرار است: $\dim R = |R|$. به‌طور کلی اگر حلقهٔ (ناجابه‌جایی و از دوطرف) نوتری R و کلیهٔ فاکتورهای آن توسط ایده‌آلهای اول، دارای این ویژگی باشند که در هر ایده‌آل چپ یا راست و ناصفر آنها ایده‌آلی دوطرفه و ناصفر وجود داشته باشد، آنگاه بعد چپ کرول R مساوی بعد راست کرول حلقهٔ R و این هردو مساوی $\dim R$ هستند. چنین حلقه‌هایی طبعاً خیلی به جابه‌جایی بودن نزدیك تلقی می‌شوند، اما رنتسلر و گابریل با عرضهٔ یك مثال جالب و مهم ـ برای اولین‌بار ـ عمومیت تعریف خود را به‌نمایش گذاردند. مثال آنها از جبرهایل بود: n امین جبرهایل بریك هیأت F عبارت است از F-جبر انجمنی [شرکتپذیر]

$$A_n(F) = F[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]$$

متشکل از کلیهٔ چند جمله‌ایها برحسب $2n$ متغیر $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ باضرایب درهیأت F که جمع آنها همانند چندجمله‌ایهای معمولی انجام می‌شود اما ضرب آنها با استفاده از روابط زیرانجام می‌گیرد:

$$X_iX_j = X_jX_i; \qquad Y_iY_j = Y_jY_i; \qquad X_iY_j - Y_iX_j = \delta_{ij}$$

جبر حاصل یك دامنهٔ سادهٔ نوتری والبته ناجابه‌جایی است، لذا $0 = \dim A_n(F)$. اما

$$|A_n(F)| = \begin{cases} n & \text{اگر مشخصهٔ } F \text{ صفر باشد} \\ 2n & \text{اگر مشخصهٔ } F \text{ صفر نباشد} \end{cases}$$

بدین‌گونه، بعد کرول تعمیم واقعی بعد کلاسیك کرول محسوب می‌شود زیرا برای حلقه‌های جابه‌جایی نوتری با بعد کلاسیك کرول مطابقت دارد، اما مفهومی است به‌مراتب عامتر از آن. این بعد جدید، نیز خود تعمیمهای تازه‌ای یافته‌است و مطالعه و بررسی آن از عمده‌ترین مشغولیات ذهنی تعداد کثیری از پژوهشگران برای مدتی قریب به ۲۰ سال بوده‌است. به‌عنوان نمونه، دو کاربرد آن درنظریهٔ عمومی حلقه‌ها را ذیلاً خواهیم دید.

قضیهٔ گوردن ـ رابسون [۹]. هرحلقهٔ نیمهٔ اول که دارای بعد کرول باشد، یك حلقهٔ گلدی است (یعنی دارای حلقهٔ خارج‌قسمتها می‌باشد که نیمه‌سادهٔ آرتینی است).

قضیهٔ فوق پیشرفت جالب وعمده‌ای درمبحث "کسرها"ی یك حلقه محسوب می‌شود. نتیجهٔ کیفی دیگری که از مطالعهٔ بعد کرول حاصل شد، در مورد مسألهٔ پوچتوانی است که سابقه‌ای ۶۰ ساله دارد. عضو a از حلقهٔ R پوچتوان نامیده می‌شود هرگاه توان مناسبی از a صفر شود. اگر S زیرحلقه‌ای از R باشد S را پوچتوان نامند هرگاه یك عدد طبیعی n یافت شود به‌طوری که $s^n = 0$ برای هر $s \in S$. چه وقت زیرحلقه‌ای که هرعضو آن پوچتوان باشد (که در آن صورت زیر حلقه را پوچ نامند) پوچتوان است؟ برطبق قضیه‌ای کلاسیك، منسوب به‌لویتزکی[1]، اگر R نوتری باشد هر زیرحلقهٔ پوچ آن پوچتوان است.

قضیهٔ گوردن ـ رابسون ـ لنگان[2] [۹]. درحلقه‌ای که دارای بعد کرول باشد، زیر حلقه‌های پوچ لزوماً پوچتوان هستند. علاوه براین، در

1. Levitsky 2. Lenagan

چنین حلقه‌ای رادیکال اول پوچتوان، ومقطع تعدادی متناهی ایده‌آل اول، کمین است.

دیگر نتایج به‌دست آمده عموماً کمی هستند. فرض کنید $R \to S$ یك همریختی حلقه‌ای باشد و ما بخواهیم ارتباط بین بعدهای کرول S-مدولها و R-مدولها را مطالعه کنیم. حالت خاص این مطلب، یافتن ارتباط بین بعدهای کرول حلقه‌های S و R است، که در بررسی حلقه‌های نوتری وکوشش درشناخت ساختار آنها مفید واقع می‌گردد. ما از خیل نتایجی که به‌دست آمده و عمدتاً در [۹] ودر[۱۰] به‌تفصیل مذکورند، به‌علت پیچیدگی وتعدد حالتها می‌گذریم و به شرح موقعیت زیر اکتفا می‌کنیم. حلقهٔ نوتری R زیرحلقه‌ای از S فرض‌می‌شود به‌طوری که S به‌عنوان یك R-مدول توسط اعضای $x_1, \ldots, x_n$ تولید می‌شود و $x_i r = r x_i$ برای هر $r \in R$ وهر $i = 1, \ldots, n$ برقرار است.

قضیهٔ حقانی-دارات [۵]. اگر M یك S-مدول متناهیاً تولید شده، باشد آنگاه بعدهای کرول M به‌عنوان S-مدول و R-مدول برابرند.

درحالت خاصی که R در مرکز S قرار داشته باشد، بعدهای کرول حلقه‌های مزبور برابرمی‌شوند زیرا به‌سادگی می‌توان برای هر ایده‌آل اول p در R یك ایده‌آل اول P در S یافت به‌شرط آنکه $P \cap R = p$، و بدین‌ترتیب بعدهای کرول با بعدهای کلاسیك کرول مرتبط می‌شوند.

همان‌طورکه پیش از این گفته شد، سؤالات کمّی دربارهٔ بعد کرول متعدد و فراوان‌اند. یکی از این‌گونه سؤالات که هنوز پاسخی بدان داده نشده، این‌است:

سؤال: آیا بعدهای چپ وراست کرول یك حلقهٔ نوتری دوطرفه برابرند؟

تبصره: در معرفی بعد کلاسیك کرول به‌نقش و تأثیر مهمی که قضیهٔ ایده‌آل اصلی کرول در جبر جابه‌جایی داشته‌است اشاره شد. در واقع این قضیه راهگشای تتبعات و تحقیقات عمیق تازه‌ای شد ولذاطبیعی است که تعمیم مناسبی ازاین قضیه درحلقه‌های ناجابه‌جایی بیان و اثبات شود. اما جالب آن‌است که انجام این کارتنها اندکی کمتر از نیم قرن طول کشید. اولین تعمیم توسط جاتگانکار[1] در ۱۹۷۴ و با استفاده از روشهای مورد استفاده در مباحث مربوط به‌بعدکرول بیان و اثبات شد. سپس گلدی-حاضرنویس-لنگان و چترز[2] تعمیم بهتری ارائه کردند. در این مورد خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به‌کتاب موجز و مفید [۳] مراجعه‌کند.

بعد همولوژیك

بعد دیگری که در جبر مطالعه شده است، بعد همولوژیك و یا بعد تصویری مدولهاست و این مفهوم و روشهای مربوط به آن از توپولوژی جبری مایهٔ فراوان گرفته‌است. معهذا برای بیان تاریخچهٔ پیدایش آن در نظریهٔ حلقه‌ها، داستان را ازهیلبرت آغازمی‌کنیم. وی در دو مقاله‌ای که به‌سالهای ۱۸۹۰ و ۱۸۹۳ منتشرساخت، دو قضیهٔ عمیق و اساسی دربارهٔ حلقهٔ چندجمله‌ایهای n متغیره برهیأت F اثبات کرد. در مقالهٔ نخست نشان داد که هر ایده‌آل حلقهٔ $R = F[X_1, \ldots, X_n]$ دارای مجموعهٔ مولدمتناهی‌است- مطلبی که به‌قضیهٔ پایه‌ای هیلبرت شهرت یافته‌است- وقضیهٔ صفرها را در مقالهٔ دوم مطرح کرد. به‌هرصورت، اگر I ایده‌آلی در R باشدآنگاه قطعاً چندجمله‌ایهای $f_1, \ldots, f_r$ در R وجود دارند به‌طوری که هرعضو I ترکیبی‌خطی از $f_1, \ldots, f_r$ است وضرایب این ترکیب خود چندجمله‌ایهایی در R هستند. اما چنین ترکیبی‌عموماً یکتا نیست و فقدان یکتایی توسط روابطی نظیر

$$u_1 f_1 + \cdots + u_r f_r = 0$$

موسوم به‌سی‌زیگی[1] اندازه‌گیری می‌شود. هیلبرت مجموعهٔ کلیهٔ rتاییهای $u_1, \ldots, u_r$ را مورد مداقه قرارداده و متوجه شد که این‌بار به‌عوض آنکه با ایده‌آلی روبرو باشد با یك مدول مواجه است که آن هم به‌طور متناهی تولید می‌شود. سپس با ادامهٔ روش به‌سی‌زیگیهای دوم، سوم، ... رسید. وی ثابت کرد که در مرحلهٔ nام مدول صفر عاید می‌شود، به‌عبارت دیگر، بعد از $n-1$ مرحلهٔ یك مدول آزاد به‌دست می‌آید. می‌توان این قضیه و روش اثبات آن‌را سرآغازظهورآنچه به‌جبرهمولوژیك شهرت یافته‌است، تلقی کرد.

حال R را حلقه‌ای دلخواه و M را یك R-مدول می‌گیریم. همواره می‌توان یك‌همریختی‌پوشای $P_0 \xrightarrow{\epsilon} M$ یافت به‌طوری که مدول P_0 تصویری باشد، بدین‌معنا که جمعوند مستقیم یك مدول آزادباشد. به‌عبارت‌دیگر، مدول P_0' وجود داشته باشد که $P_0 \oplus P_0'$ آزاد باشد. اگرهستهٔ ϵ را K_0 بنامیم، باز یك مدول تصویری P_1 وجود دارد که K_0 تصویرهمریخت آن باشد و از اینجا دنبالهٔ $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M$ به‌دست می‌آید. فرض کنیم با ادامهٔ روش، دنبالهٔ "دقیق" زیرکه درآن هر P_i تصویری‌است ظاهر گردد

$$\cdots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

چنانچه j کوچکترین‌عدد صحیح باشدبه‌طوری که هستهٔ d_j تصویری باشد، آن‌وقت $j+1$ طول دنبالهٔ فوق در نظر گرفته می‌شود. در صورتی که چنین jیی وجود نداشته‌باشد، طول دنبالهٔ ∞ گرفته می‌شود. بعد همولوژیك و یا بعد تصویری M که با pdM نشان داده می‌شود، عبارت‌است ازطول دنبالهٔ بزرگ (*) واین‌تعریف مستقل از دنبالهٔ مزبور است، بدین‌معنا که طولهای هردو دنبالهٔ تصویری یك‌مدول باهم برابرند. بنابراین، $pdM = 0$ اگروتنها اگر M تصویری باشد. و در واقع، بعد تصویری مقیاسی برای‌دوری مدول ازتصویری بودن‌است. بعد چپ همولوژیك فراگیر R چنین تعریف می‌شود:

$$\mathrm{l.gl.dim}\, R = \sup\{pdM\}$$

و سوپریمم برکلیهٔ R-مدولهای چپ گرفته می‌شود. به‌طریق مشابه، بعد راست همولوژیك فراگیر برای R تعریف می‌گردد و این دو کمیت عموماً مساوی نیستند. اما هنگامی که حلقهٔ R جابه‌جایی ویا

1. Jategaonkar 2. Chatters

1. Syzygy

از هردوطرف نوتری باشد، این دو بعد برابرند. برخی از نتایج مهم به‌شرح زیرند.

۱. $\mathrm{gl.dim}\, R = 0$ اگر و تنها اگر R نیم‌سادهٔ آرتینی باشد.

۲. حلقهٔ R را موروثی[1] چپ نامند هرگاه هر ایده‌آل چپ آن، تصویری باشد. قضیه‌ای از کاپلانسکی حاکی است که اگر R موروثی چپ باشد آنگاه هر زیر مدول یك R-مدول چپ تصویری، بازهم تصویری‌است (علت نامگذاری). ازقضا عکس این مطلب نیز درست است و توسط کارتان و آیلنبرگ اثبات شده‌است [۲] و البته $\mathrm{l.gl.dim}\, R \leqslant 1$ اگرو تنها اگر R موروثی چپ باشد. دامنه‌های جابه‌جایی موروثی حائز اهمیت ویژه‌ای هستند زیرا درچنین دامنه‌هایی اولاً هرایده‌آل متناهیاً تولید می‌شود (پس دامنه نوتری‌است) وثانیاً هرایده‌آل‌دارای نمایشی یکتا به‌صورت حاصلضربی از توانهای ایده‌آلهای‌اول است. این‌حلقه‌هاموسوم‌اند به‌دامنه‌های ددکیندکه اشیای‌اساسی درنظریهٔ جبری اعدادند. طرق دیگری برای رده‌بندی آنها یافته شده‌است وتعمیم آنها درجبرناجابه‌جایی نیزانجام پذیرفته‌است. به‌غیر از هیأتها و دامنه‌های ایده‌آل اصلی‌که مثالهای بیمایه‌از دامنه‌های ددکیند هستند؛ می‌توان از حلقهٔ اعداد گاوسی $Z[i]$ نام‌برد. به‌طورکلی، حلقهٔ "اعداد صحیح"ازهرهیأت‌که توسیع متناهی $\mathbf{Q}$ باشد، یك دامنهٔ ددکیند است [۱].

۳. قضیهٔ هیلبرت‌که در مقدمه توصیفی از آن به‌عمل آمد، در واقع بیان این مطلب‌است‌که اگر F هیأت باشد آنگاه

$$\mathrm{gl.dim}\, F[X_1, \cdots, X_n] = n.$$

۴. بعد همولوژیك فراگیر کدام حلقه‌های جابه‌جایی و نوتری R متناهی‌است؟ برای پاسخ می‌توان فرض‌کرد که R موضعی هم باشدزیرا $\mathrm{gl.dim}\, R = \sup \mathrm{gl.dim}\, R_P$ (P ایده‌آل اول در R).

دراین‌صورت قضیهٔ زیبای زیر را داریم.

قضیه. حلقهٔ جابه‌جایی نوتری و موضعی R مفروض است. شرط لازم وکافی برای متناهی بودن بعد همولوژیك فراگیر R آن‌است که R منظم باشد و دراین صورت $\mathrm{gl.dim}\, R = \dim R$.

بدین ترتیب، باردیگر اهمیت حلقه‌های منظم موضعی آشکار می‌گردد. در جبرجابه‌جایی‌ثابت شده‌است‌که هرحلقهٔ منظم موضعی لزوماً یك دامنه‌است، اما بااستفاده ازروشهای همولوژیك به‌سؤالی که از زمان کرول مطرح بوده‌است در حوالی ۱۹۶۰ این‌گونه پاسخ داده شد.

قضیهٔ آسلاندر[2]ـ باکزبام[3]ـ کلاپلانسکی. هرحلقهٔ نوتری‌منظم‌موضعی، یك دامنهٔ یکتایی‌تجزیه است [۷].

بالاخره دومطلب دیگر را متذکر می‌شویم. اول آنکه اگر یك R حلقهٔ جابه‌جایی نوتری و دارای بعد همولوژیك فراگیر متناهی باشد، آنگاه R حاصلجمع مستقیم تعدادی متناهی دامنه‌است و $\mathrm{gl.dim}\, R = \dim R$. دوم آنکه‌تعمیم‌مفهوم‌حلقهٔ‌منظم‌موضعی به‌جبرناجابه‌جایی ازطریق روشهای همولوژیك میسر گشت [۱۱].

۵. باردیگر حلقهٔ چندجمله‌ایها، $R = F[X_1, \cdots, X_n]$، بر یك هیأت F را درنظرمی‌گیریم. درحالت $n = 1$ حلقهٔ R یك‌حلقهٔ ایده‌آل اصلی‌است و درنتیجه، هرمدول تصویری‌ومتناهیاً تولید-شده برآن، آزاد است. سر[1] در اواسط دههٔ ۱۹۵۰ حدس‌زدکه این مطلب برای $n > 1$ نیز درست‌است. اثبات صحت حدس سر بیست سال بعد توسط‌کوئیلن و سوسلین به‌طورهمزمان اما مستقل از یکدیگر انجام پذیرفت [۱۳]، اما درطی این بیست سال کوششهایی که برای حل این مسأله شد، به‌گسترش رشتهٔ جدیدی به‌نام نظریهٔ Kی جبری‌کمکهای فراوان‌کرد. این نکته جالب‌است‌که حدس سر برای هیأتهایی‌که جابه‌جایی نباشند برقرارنیست.

۶. در بند ۴ ملاحظه شدکه در مورد حلقه‌های جابه‌جایی نوتری، متناهی بودن بعد همولوژیك فراگیر، ساختار حلقه را مستقیماً (چنانچه موضعی‌باشد) ویا به‌طور غیرمستقیم (ازطریق‌موضعی-سازیهای آن توسط ایده‌آلهای بیشین) برحسب حلقه‌های منظم موضعی معین می‌سازد. بنابراین طبیعی‌است‌که درمراحل دیگر، متناهی بودن بعد فراگیر بدون شرط نوتری مطالعه شود. می‌دانیم برای حلقهٔ جابه‌جایی R حلقهٔ‌کل خارج‌قسمت $Q(R)$ وجود دارد و

$$R \text{ هیأت‌است} \leftrightarrow \mathrm{gl.dim}\, R = 0$$

$$\mathrm{gl.dim}\, Q(R) = 1 \leftrightarrow \mathrm{gl.dim}\, R = 1$$

اما توصیف حلقه‌های جابه‌جایی موضعی با بعد همولوژیك فراگیر ۲ کمی پیچیده‌تراست و این مضمون قضیهٔ زیراست.

قضیهٔ واسکانسلوس [۱۵]. R را حلقهٔ جابه‌جایی موضعی با بعد همولوژیك فراگیر ۲ فرض می‌کنیم. در این صورت، R یا منظم موضعی(ونوتری) است یایك‌دامنهٔ ارزه[2]ای‌است ویا دامنه‌ای‌است حاوی یك ایده‌آل اول P با این‌شرایط: $P = PR_P$؛ حلقهٔ R/P یك حلقهٔ منظم موضعی نوتری از بعد ۲ است، R_P دامنه‌ای‌ارزه‌ای است‌که ایده‌آلهایش دارای مجموعه‌های مولد شمارا هستند؛ R تنها تعدادی شمارا ایده‌آل اول اصلی دارد.

یادآور می‌شودکه دامنهٔ جابه‌جایی و دلخواه R ارزه‌ای نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x \in Q(R)$ اگر $x \notin R$ آنگاه $x^{-1} \in R$. طبعاً توصیف حلقه‌های جابه‌جایی‌موضعی‌با بعدهمولوژیك فراگیر بیشتر از ۲ بسیار پیچیده‌تر به‌نظرمی‌رسد وتعیین ویژگیها، شناخت انواع و به‌طورکلی یافتن ساختار این حلقه‌ها تاکنون میسر نبوده است.

۷. محاسبهٔ بعد همولوژیك فراگیر حلقه‌های مشخص، مشغولیت عمده‌ای برای پژوهشگران بوده و هست. در اینجا نیزاز انبوه نتایج حاصله فقط چند نمونه را ذکر می‌کنیم که به‌کم وکیف حلقه‌ها می‌پردازند.

1. hereditary 2. Auslander 3. Buchsbaum

1. Serre 2. valuation

۱.۷. هیأت F و گروه G مفروض‌اند. توسط این‌دو می‌توان حلقه‌ای موسوم به جبر گروه G بر هیأت F ساخت که با $F[G]$ نشان داده می‌شود. اگر H زیرگروهی با شاخص متناهی در G باشد، منظور ما یافتن ارتباط بین بعدهای همولوژیك فراگیرحلقه‌های $F[G]$ و $F[H]$ است واین کار توسط سر [۱۴] انجام گرفته است: شرایط کافی برقراری $\mathrm{l.gl.dim}\, F[G]<\infty$ آن‌است که

$$\mathrm{l.gl.dim}\, F[H]<\infty$$

وچنانچه مشخصهٔ F عدد اول p باشد، در G عضوی از مرتبهٔ p وجود نداشته باشد. هنگامی که G حاصلضرب یك گروه چند دوری در یك گروه متناهی باشد شرط لازم و کافی برای متناهی‌بودن بعد همولوژیك فراگیر حلقهٔ $F[G]$ آن است که در G عضوی از مرتبهٔ P، در صورتی که مشخصهٔ F برابر P باشد، وجود نداشته باشد [۱۱] و در این‌حال این کمیت متناهی با عدد هرش[1] گروه G برابراست.

۲.۷. برای nامین جبروایل برهیأت F:

$$\mathrm{l.gl.dim}\, A_n(F)=\begin{cases} 2n & \text{اگرمشخصهٔ } F \text{ صفرنباشد} \\ n & \text{اگر مشخصهٔ } F \text{ صفرباشد}\end{cases}$$

۳.۷. اگر $R \xrightarrow{\theta} S$ یك همریختی حلقه‌ای باشد، هر S-مدول را می‌توان توسط همریختی فوق به‌صورت یك R-مدول‌درنظر گرفت. گوییم S به‌طور نسبی R-نیم‌ساده‌است. اگر به‌ازای هر زوج S-مدول $N \subseteq M$ به‌طوری‌که N یك R-جمعوند مستقیم M است، N یك S-جمعوند مستقیم M باشد. مثلاً اگر G گروهی‌از مرتبهٔ n و R حلقه‌ای باشدکه درآن n یکه است، آنگاه $R[G]$ به‌طورنسبی R-نیم‌ساده است.و یا چنانچه R جابه‌جایی و S یك R-جبرمرکزی جدایی‌پذیر باشد، آنگاه S به‌طورنسبی R-نیم‌ساده‌است. اکنون فرض‌کنید R نوتری و $\theta(R)$ در مرکز حلقهٔ S قرار داشته و S یك R-مدول تصویری باشد:

قضیهٔ حقانی [۴]. تحت شرایط فوق

$$\mathrm{l.gl.dim}\, R=\mathrm{l.gl.dim}\, S.$$

نکته: حالت خاص‌قضیهٔ فوق‌که درآن $S=F[G]$ و Fهیأت و G گروهی متناهی از مرتبهٔ n باشد، قضیه‌ای کلاسیك در جبر، موسوم به‌قضیهٔ ماشکه[2] است: اگر F دارای مشخصهٔ صفر باشد و یا اگرمشخصهٔ F عدد اول p باشد و اعداد p و n نسبت به‌هم‌اول باشند، آنگاه جبرگروه G برهیأت F نیمه‌سادهٔ آرتینی‌است.

وبالاخره در اینجا شایسته‌است از مسأله‌ای‌که تاکنون تنهادر حالتهای بسیار خاص به‌آن جواب داده شده است ذکری به میان آورده شود.

مسأله: اگر S و T دو R-جبر باشند، بعد همولوژیك فراگیر حلقهٔ $S \underset{R}{\otimes} T$ را برحسب بعدهای S و T به‌دست آورید.

1. Hirsch 2. Mashke

۸. ارتباط بعدهای کرول و همولوژیك فراگیر حلقه‌ها. چنانکه دیدیم، برای حلقهٔ چندجمله‌ایها بر یك هیأت و یا برای nامین جبروایل، بعدکرول و بعد همولوژیك فراگیر برابرند، و یا چنانچه R حلقه‌ای جابه‌جایی، نوتری و منظم موضعی باشد، $\mathrm{gl.dim}\, R=|R|$. از طرف دیگر، $|\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}|=0$ در حالی‌که $\mathrm{gl.dim}(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})=\infty$. بنابراین،درحالت‌کلی نمی‌توان انتظار داشت‌که رابطه‌ای بین‌این دوبعد برقرار باشد. اما چنانچه به‌جای بعد همولوژیك فراگیر حلقهٔ دلخواه R که سوپریمم بعد همولوژیك R-مدولهای چپ است، به محاسبهٔ سوپریمم بعدهمولوژیك‌آن‌دسته از R-مدولهای چپ‌که برایشان این‌کمیت متناهی‌است اکتفا شود و قراردهیم

$$\mathrm{FPD}(R)=\sup\{pdM: \quad pdM<\infty\}$$

آنگاه نتیجهٔ جالب زیر به‌دست می‌آید.

قضیه. اگرحلقهٔ جابه‌جایی R نوتری باشد، آنگاه

$$\mathrm{FPD}(R)=\dim R=|R|.$$

متأسفانه بیشترسؤالات واضح و طبیعی‌که دراین زمینه به‌ذهن می‌رسند، تاکنون بدون جواب مانده‌اند. از طرف دیگر هر حلقهٔ نوتری که در یك اتحاد چندجمله‌ای صدق‌کند دارای این ویژگی است‌که بعد کرول و بعد همولوژیك فراگیر آن برابرند. تساوی دوبعد مذکوربرای دسته‌های دیگری از حلقه‌های ناجابه‌جایی نیز برقراراست، لذا حدس زیر مطرح می‌گرددکه صحت یا سقم آن هنوز معلوم نشده‌است.

حدس: اگر R حلقه‌ای ناجابه‌جایی ولی نوتری و دارای بعد همولوژیك فراگیر متناهی باشد، آنگاه $|R|\leqslant \mathrm{gl.dim}\, R$.

تبصره: ما روشهای همولوژیکی را درارتباط با بعد تصویری بیان کردیم، اما این روشها دربارهٔ انواع دیگر مدولها، خاصه مدولهای "تك‌گزین"[1] و "تخت"[2] نیز به‌کار برده شده و بعدهای نظیر برای مدولها و حلقه‌ها مورد مطالعه قرار گرفته وگاه ارتباط بین این بعدها پیدا شده‌است.

مراجع

1. M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley (1969).
2. H. Cartan and S.Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press (1956).
3. A. W. Chatters and C. R. Hajarnavis, *Rings with Chain Conditions*, pitman (1980).

1. injective 2. flat

4. A. Haghany, "On duality and Krull dimension," *J. London Math. Soc.*(2) **14** (1976) 79-85.
5. A. Haghany and B. Sarath, "A formula on the Krull dimensions of Noetherian semi prime algebras," *Bull Iran Math. Soc.* (2) **8** (1981) 109-113.
6. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Verlag (1977).
7. I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Allyn and Bacon (1970).
8. O. A. S. Karamzadeh, "On the classical Krull dimension," *Fund. Math.* **117** (1983).
9. J. C. Mc Connell and J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, J. Wiley & Sons (1987).
10. C. Nastasescu and F. Van Oystaeyen, *Dimensions of Ring Theory*, D. Reidel Publishing Company (1987).
11. D. S. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, Wiley Interscience (1977).
12. R. Rentschler and P.Gabriel, "Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnes," *Compt. Rend. Acad. Sci.*, Paris, **265** (1967), Series A, 712-715.
13. J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press (1979).
14. J. P. Serre, "Cohomologie des groups discretes," *Prospects in Mathematics,* Annals of Math Studies No. 70, Princeton (1971) 77-169.
15. W. V. Vasconcelos, *The Rings of Dimension Two*, Marcel Dekker (1976).

* احمد حقانی، دانشگاه صنعتی اصفهان

جایزهٔ عبدالسلام برای پژوهشگران جوان علوم پایه در جهان سوم

جایزهٔ سال ۱۹۹۰: رشتهٔ ریاضی

جایزهٔ عبدالسلام برای تشویق پژوهشگران جوان در رشته‌های علوم پایه در جهان سوم هر ساله به تناوب دریکی از چهار رشتهٔ پایهٔ ریاضیات، فیزیك، شیمی، و زیست شناسی اعطا می‌شود. قرار است جایزهٔ سال ۱۹۹۰ به رشتهٔ ریاضی (شامل ریاضیات محض و کاربردی، آمار، و علوم کامپیوتری نظری) تعلق گیرد. مبلغ جایزه ۱۰۰۰ دلار آمریکاست و برندهٔ جایزه در دسامبر ۱۹۹۰ (آذر ۱۳۶۹) اعلام خواهد شد.

ضوابط گزینش

۱. جایزه براساس مجموعهٔ آثار ریاضی پژوهشگر یا براساس یك یا یك رشته کارپژوهشی او اعطا می‌شود.
۲. برندهٔ جایزه باید تبعه و مقیم ایران باشد و بخش عمدهٔ کارپژوهشی مربوط به جایزه را در ایران انجام داده باشد.
۳. چون منظور از اهدای این جایزه تشویق پژوهشگران جوان است، علی القاعده افراد بالای ۴۰ سال به عنوان نامزد دریافت جایزه در نظر گرفته نخواهند شد.

روش معرفی نامزدها

۱. داوطلب دریافت جایزه می‌تواند خود را نامزد جایزه کند و یا به وسیلهٔ اشخاص دیگری نامزد شود.
۲. مدارك مورد نیاز عبارت‌اند از مجموعهٔ آثار پژوهشی چاپ شده یا آماده به چاپ نامزد در سه نسخه، بیوگرافی علمی مشروح نامزد، و یك نامهٔ کوتاه که در آن، اثر یا آثار مهم نامزد مشخص شده باشد. نامزد کنندگان می‌توانند ریاضیدانانی از ایران یا خارج را برای داوری کار پژوهشی نامزد پیشنهاد کنند. در مدارك ارسال شده، باید نظم و خوانایی و درستی انشاء و املاء رعایت شده باشد.
۳. کلیهٔ مدارك باید طوری ارسال شود که حداکثر تا ۱۵ مرداد ۱۳۶۹ به دست کمیتهٔ معرفی نامزدان جایزه برسد. ولی چون ممکن است مکاتباتی برای تکمیل اطلاعات لازم شود، توصیه می‌شود مدارك هر چه زودتر و حتی المقدور تا آخر خرداد ۱۳۶۹ به نشانی تهران، صندوق پستی ۷۸۸ـ۱۳۴۵ به نام کمیتهٔ معرفی نامزدان جایزهٔ عبدالسلام در ریاضیات ارسال شود.

پوانکاره و توپولوژی*

پاول آلکساندروف
ترجمهٔ منوچهر میثاقیان

به‌این پرسش‌که رابطهٔ پوانکاره با توپولوژی چیست می‌توان در یك جمله پاسخ داد: او آن را آفرید. البته امکان آن هم هست‌که دریك دوره درس‌که قضایای‌بنیادی پوانکاره درتوپولوژی راکم و بیش‌تشریح‌کند، به‌آن پاسخ گفت. از این دو نحوهٔ پاسخ، اولی‌را می‌توانم نادیده بگیرم، وبرای دومی طبعاً فرصت ندارم؛ بنابراین من می‌مانم و راه‌حلی سازشکارانه وبینابینی،که همچون همهٔ موارد سازشکاری رضایت‌بخش نیست، اما با وجود این به‌دیدگاه نخست نزدیکتراست تا به‌دیدگاه دوم. این راه حل فقط می‌تواندکوششی باشد برای زنده‌کردن و نشان دادن احساس شعفی‌که از ابداعات با شکوه‌این‌هندسه‌دان بزرگ فرانسوی درحیطهٔ توپولوژی‌حاصل می‌شود،یعنی حیطه‌ای‌که نفوذش برتمام دانش ریاضی نه‌تنها بیشتر از تمام توقعات آن زمان بوده‌است بلکه هنوزهم سال به‌سال در حال فزونی است.

پوانکاره دردوره‌ای رمانتیك ازتاریخ دانش‌ریاضی‌می‌زیست؛ در این دوران، سازگاری هندسهٔ نااقلیدسی نخستین‌بار (توسط خودش‌وکلاین) ثابت شد ودرنتیجه دیدگاههای هندسی‌ما ومفهوم فضای هندسی به‌صورتی‌زایدالوصف بسط یافت؛ همچنین‌اندیشه‌های جدید هندسی (بازهم در کارهای خود پوانکاره) در نظریهٔ نسبیت خاص‌کاربردپیداکردند ــ نظریه‌ای‌که برای‌دگرگون ساختن‌درك ما از جهان‌که از زمان‌گالیله و نیوتن به‌نظر تغییرناپذیرمی‌آمد،کافی بود ــ و نیز در ژرفناهای مجرد خود ریاضیات نظریهٔ مجموعه‌ها سربرآوردکه به‌اعتقاد بسیاری از ریاضیدانان تراز اول درخارج از دانش ریاضیات، و شاید به‌طورکلی در خارج از دانش قرار داشت و باعث وقوع انقلابی در ریاضیات شدکه اهمیتش در حد اهمیت انقلاب نظریهٔ نسبیت در فیزیك بود.

پوانکاره بنابر علائق شخصی خود در ریاضیات و سنتی‌که به‌ارث برده بود نمایندهٔ ریاضیات کلاسیك ــ یعنی نمایندهٔ مکتب بزرگ فرانسه در آنالیز ریاضی که توسط لاگرانژ، لاپلاس و کوشی‌بنیاد یافته بود ــ به‌شمار می‌رفت. او به‌آنالیزریاضی به‌مفهوم عام آن، شامل نظریهٔ توابع، و همهٔ جنبه‌های معادلات دیفرانسیل‌و "فیزیك ریاضی" در وسیعترین معنی، پرداخت. جامعیت پوانکاره به‌عنوان ریاضیدان،درشیوهٔاو برای‌خلق‌حیطهٔ تازه‌ای‌از ریاضیات ــ توپولوژی ــ دقیقاً نمایان است. برای پوانکاره توپولوژی از ابتدا و درهمه حال ابزاری قدرتمند برای حل مسائلی بودکه در شاخه‌های کلاسیك ریاضیات مطرح می‌شدند؛ درمیان‌این‌شاخه‌ها، نظریهٔ توابع یك متغیر مختلط که ریمان روابط نزدیك آن را با هندسه به صورت ناقص بررسی‌کرده بود و پوانکاره نخستین‌بار این روابط را به‌طور عمیق درك کرد، ونظریهٔ معادلات دیفرانسیل که‌ازدیدگاه پوانکاره ازمکانیك سماوی وخود هندسه تفکیك‌ناپذیر بود، در مقام اول جای داشتند. پوانکاره با درك قدرت روشهای توپولوژیك در "ریاضیات‌کلاسیك" واغلب، با پیشگویی آنها در زمانی که این روشها را هنوز با تمام توانشان نمی‌شد به‌کاربرد، درهای دنیای جدیدی از مسائل ــ مسائل "کیفی" یعنی واقعاً توپولوژیك ــ را به‌روی ریاضیات گشود،دنیایی‌که دراساس‌نه‌تنها از طریق روشها بلکه، شاید بتوان گفت، از طریق عالم ریاضیات "کلاسیك"، که در مرکزش فرمول و محاسبه قرار داشت، قابل دسترسی نبود. ازاین‌رو، پوانکاره نمایندهٔ عالی‌ریاضیات‌کلاسیك، برخلاف دیگران، سنتهای این نوع ریاضیات را از درون"زدود" و نه‌تنها روشهای تازهٔ پژوهشی، بلکه همچنین شیوه‌های تازه‌ای‌از فهم مطالب جالب را وارد آن‌کرد.

اجازه بدهید مطلب را روشنتربیان‌کنم. همهٔ ابداعات ریاضی در تحلیل نهایی پایه در شهود (ریاضی) ما دارند. تفکر مداوم و متمرکز سرانجام (به‌صورت‌کم وبیش ناگهانی)به‌تشخیص اساس قوانین‌مربوطه،به‌تحقیق درآنچه‌که‌کوشش وفکرمان معطوف به‌آن است،راه می‌برد.هدف بررسیهای بعدی‌که اغلب بسیارخسته‌کننده هم هستند، وارسی این تشخیص است، یعنی‌وارسی شهودمان (که اگر این وارسی آن را تأییدکند) نطفهٔ واقعی نتیجهٔ به‌دست آمده است. هیچ‌کس نتوانسته‌است این مکانیسم ابداع ریاضی را بهتر از پوانکاره درکتابهایش دانش و روش و دانش و فرضیه توصیف کند. اما سرشت شهود ریاضی‌به‌هیچ‌وجه در همهٔ حالات ونزدهمهٔ ریاضیدانان یکسان نیست. شهود ژاکوبی همانند شهود هیلبرت نبود؛ شهود وایرشتراس نیز همانند شهود پوانکاره نبود.

احتمالاً چیزی‌به‌نام "شهود فرمولی" به‌معنای‌استعدادپیشگویی نتیجهٔ یك تبدیل پیچیده (مثلاً در آنالیز تانسوری) وجود دارد. همچنین شهودی با سرشت جبری ـ منطقی، یعنی توانایی تصور (و پیشگویی) روابط منطقی پیچیده (مثلاً در نظریهٔ مجموعه‌ها و

جبرمجرد) وجود دارد، و سرانجام (یا تقریباً قبل ازهرچیز)وجود شهود هندسی‌است که گاهی از آن به‌عنوان تنها شهود "حقیقی" در ریاضیات نام‌برده می‌شود. البته من فکرمی‌کنم که این‌درست‌نیست و واقعاً اشکال مختلفی ازشهود ریاضی- حتی علاوه برمثالهایی که من نام بردم- وجود دارد.

عموماً شهود "توپولوژیك" را حالت خاصی ازشهود هندسی معمولی می‌دانند ولی این حالت خاص چنـان صورتهای متنوع و متعددی دارد، و از سوی دیگر با اشکال دیگرشهود هندسی آنچنان متفاوت‌است که احتمالاً شایستهٔ قرارگرفتن در مقولهٔ خاصی‌است. شهود توپولوژی به‌خطوط مستقیم،تبدیلات پرسپکتیووسایرنگاره‌ها کـه برای هندسهٔ تصویری اهمیت اساسی دارند، مربوط نیست. شهود توپولوژیك، شهودی از صورت و وضع [جای] شکلهاست درهیأتی‌محض.این‌شهود،ازهمهٔ انواع‌شهود هندسی، هندسیتراست.

پوانکاره‌خداوندگاراین نوع‌شهود دربین ریاضیدانان‌هم‌عصر خود و پیش از خود بود. شاید تنها ریمان را بتوان از این‌حیث با او مقایسه کرد، اگرچه ریمان نتوانست شهود توپولوژیك خود را چنان بپرورد و به‌کارگیرد که درحد شهود پوانکاره گستردگی و تنوع‌کاربرد داشته باشد.

شهود توپولوژیك در بیشتر مهمترین‌کارهای پوانکاره دخالت داشته‌است؛ ازجمله، درنظریهٔ توابع‌خودریخت ویکنواخت‌سازی[1] (که شاهکار رهیافت "ریمانی" به‌نظریهٔ توابع متغیرمختلط‌است.)، نظریهٔ‌کیفی معادلات دیفرانسیل،که شاید بهترین نمونه از توانایی پوانکاره درنگرش تازه به‌اکثرموضوعات‌کلاسیك ریاضیات ونیز نگرش بـه‌مسائل بی‌سابقه‌ای باشد که او توانست با آنها دست و پنجه نـرم‌کند، و سرانجام، مجموعـهٔ مبسوط کارهای توپولوژیك ناب او.

اینکه پوانکاره مفهوم همولوژی [مانستگی] را محور اساسی توسعهٔ توپولوژی درآینده‌می‌دید،جلوه‌ای‌ازظهورنبوغ‌توپولوژیك اوست. نخستین‌صورتبندی این مفهوم (در رسالهٔ اساسی۱۸۹۵ او تحت عنوان"تحلیل‌جا") ازتجسم هندسی مستقیم‌مایه می‌گرفت، و تنها چند سال بعد مبنایی اکیداً منطقی به‌خودگرفت.

دومین مفهوم بنیادی توپولوژیکی کـه پوانکاره عرضه کرد -مفهوم‌گروه بنیادی- هرچند به دقت صورتبندی شده بود ولـی بازهم مبتنی‌برشهود بود. پوانکاره با ابداع این‌مفهوم شالودهٔ رشد عظیم توپولوژی هموتوپیك را ریخت‌که پیشرفتهای‌بعدی‌آن با نام براوئر وسپس هوپف، هورویتس، و فهرست طویلی ازریاضیدانان دیگر، همراه‌است.دراینجا باید خاطرنشان‌کردکه تعریف‌گروههای هموتوپی، یعنی گروههایی‌که مفهوم‌گروه بنیادی‌را به‌ابعاد دلخواه تعمیم می‌دهنـد، نخست در ۱۹۳۲ توسط توپولوژیدان معروف چك، ای. چك[2] ارائه شد، هرچندکه او موضوع را مورد بررسی بیشتر قرارنداد وهمان‌طورکه می‌دانیم این‌افتخار بعداً به‌هورویتس تعلق‌گرفت.

قابل ذکرترین و قدیمیترین بخشهای توپولـوژی هموتوپیك به‌نظریهٔ میدانهای برداری (وچند برداری) وتکینیهای آنهامربوط می‌شود که رابطهٔ بسیار نزدیکی با نظریـهٔ نقاط ثابت نگاشتهای پیوسته دارد. بانی این‌نظریه بازهم خود پوانکاره است. اودردههٔ هشتاد و پیش ازآفرینش‌آثار توپولوژیك‌ناب خود، درتحقیقاتش درزمینهٔ نظریهٔ‌کیفی معادلات دیفرانسیل، نخستین تعاریف ومفاهیم بنیادی نظریـهٔ میدانهای برداری را بنا نهاد، و مخصوصاً مفهوم بنیادی شاخص تکینی میدان برداری را معرفی‌کرد.

در حال حاضر مشکل بتوان اهمیت اساسی اندیشه‌ها ونتایج پوانکاره را در تمام پیشرفتهای بعدی نظریـهٔ معادلات دیفرانسیل و نیزآنالیز ریاضی نوین،کاملاً ارزیابی‌کرد.

مخصوصاً در مورد قضیه‌های وجود نقاط ثابت، تحت این یا آن نگاشت پیوسته، باید گفت کـه پوانکاره اهمیت این قضیه‌ها را در اثبات قضیه‌های وجودی آنالیز دریافته بود. این موضوع از کوششهای فراوان او برای اثبات "آخرین قضیهٔ هندسی"اش درباب وجود نقطهٔ ثابت برای رده‌ای مفروض‌ازنگاشتهای پیوستهٔ یك ناحیهٔ طوقی‌شکل[1] صفحه درخودش، آشکاراست. باید بگویم که این‌آخرین‌کار پوانکاره تأثیری غم‌انگیز برخواننده می‌گذارد. نویسنده در مقدمهٔ‌کوتاهی برآن می‌نویسدکه هرگز کاری اینچنین ناقص‌را منتشر نکرده‌است- در واقع اونتوانسته بود برای‌نتیجه‌ای بنیادی (آخرین‌قضیهٔ هندسی‌پوانکاره)که اثربه‌آن اختصاص‌داشت، اثباتی‌بیابد. با این‌حال پوانکاره، هم به‌لحاظ مشکل‌بودن موضوع وهم به‌خاطر اینکه، به‌گفتهٔ خود او، درآن سن وسال نمی‌توانست خیلی امیدوار باشدکه راه‌حل‌کامل مسأله را به‌دست آورد، انتشار نتایج جزئی به‌دست آمده را ممکن و لازم تشخیص داده بود. در آن زمان پوانکاره تنها ۵۷ سال داشت. در واقع مسألهٔ اصلی،سن وسال او نبود بلکه بیماری سختی بودکه او ازقبل به‌آن مبتلا بود (ودرآن زمان کار ازمرحلهٔ عمل جراحی هم‌گذشته بود) به‌طوری که یکـسال بعد به‌علت آن بیماری درگذشت.

صورت کلی "آخرین قضیهٔ هندسی پوانـکاره" مدت زمـان کوتاهی‌بعد از مرگ او توسط ریاضیدان‌آمریکایی‌جوان‌آن‌زمان، جورج بیرکاف،ثابت‌شد وبیرکاف بی‌درنگ به‌خاطراین‌کارشهرت یافت. اما امروز برای ما مهم‌است‌که توضیح دهیم پوانکاره باچه دید ژرفی اهمیت قضیه‌های توپولوژیك از نوع قضیه‌های "نقطهٔ ثابت" را برای آنالیز و مکانیك سماوی پیش‌بینی‌کرد و خود را به‌عنوان بانی "روش نقطهٔ ثابت" جاودان ساخت.

نیروی شهود هندسی پوانکاره، گاهی او را به‌چشم‌پوشی از وسواسهای عالمانه در اثباتها سوق می‌داد. البته در این مورد نظر دیگری هم هست: پوانکاره‌که ذهنش دائماً درمعرض هجوم ایده‌ها در حوزه‌های بسیار متنوعی از ریاضیات بود، "فرصت دقیق شدن را نداشت"،واغلب به‌محض اینکه شهودش او را متقاعدمی‌ساخت که فلان قضیه را می‌توان با دقت منطقی کاملی ثابت‌کرد، راضی می‌شد و کامل کردن اثبـات را به‌دیگران وامی‌گذاشت. در میان "دیگران"که ریاضیدانان بلندمرتبه‌ای بودند، یکی براوئر بود که من‌می‌خواهم نامه‌ای‌را از پوانکاره به‌اونقل‌کنم (این‌نامه درآخرین سال زندگی پوانکاره نوشته شده و تا آنجا که من می‌دانم پیشتر هرگزمنتشرنشده‌است)که به‌نظرمن‌شرح خوبی‌است از اینکه‌چگونه فکر به‌عمل در می‌آید.

1. uniformization 2. E. Čech

1. annular

نامهٔ پوانکاره به‌براوئر

همکار عزیزم

از نامه‌ات بسیار سپاسگزارم. نمی‌دانم چرا شك داری که تناظر بین این‌دو خمینه تحلیلی‌است. مدولوسهای رویه‌های ریمانی را می‌توان به‌طور تحلیلی و به‌صورت توابعی از ثابتهای گروههای فوشی بیان کرد؛ در واقع تنها باید به‌متغیرهای معینی مقادیر حقیقی داد، اما توابع این متغیرهای حقیقی نیز حافظ ماهیت تحلیلی آنها هستند.

یا اینکه ممکن است مشکل را در این امر ببینی که یکی از خمینه‌ها نه به‌ثابتهای گروه بلکه به‌ناورداها وابسته است. اگر درست به‌خاطر آورم، من خمینه‌ای وابسته به‌ثابتهای جانشانیهای بنیادی[1] گروه را درنظر گرفته‌ام و به‌یك گروه، بینهایت گسسته‌ای از نقاط این خمینه را نظیر کرده‌ام. سپس، این خمینه را به‌زیرخمینه‌ها چنان تقسیم کرده‌ام که به‌یك گروه، یك تك‌نقطه‌ازهرزیرخمینه نظیرشود (به‌همان‌روشی که صفحه را به‌متوازی‌الاضلاعهایی با تناوب، یا دور اصلی را به‌چندضلعیهای فوشی تقسیم می‌کنند). به‌نظرمن‌نمی‌آید که ماهیت تحلیلی تناظر تغییر کند.

درمورد خمینهٔ رویه‌های ریمانی، اگررویه‌ها را به‌روش ریمان در نظربگیریم ممکن‌است دچار مشکل شویم. مثلاً آدم می‌تواند ازخودش بپرسد که آیا مجموعهٔ این رویه‌ها دوخمینهٔ جدا ازهم تشکیل‌نمی‌دهند؟ اگراین‌رویه‌ها برطبق دیدگاه آقای کلاین درنظر گرفته‌شوند مشکل‌ازبین‌می‌رود، پیوستگی، فقدان تکینیها، امکان‌گذر از یك رویه به‌رویهٔ دیگر به‌طریقی پیوسته، و آنگاه رسیدن به‌حقایق تقریباً شهودی.

من از شیوهٔ درهم و برهم و ناپیوستهٔ این توضیحات پوزش می‌خواهم. امیدوار نیستم که این توضیحات شما را راضی‌کند، زیرا آنها را بسیارسطحی برای شما بیان‌کردم، اما فکرمی‌کنم که به‌شما کمك خواهد کرد تا نکاتی را که موجب ایجاد اشکال برای شما شده‌اند، روشن سازید و بنابراین بعداً بتوانم شما را کاملاً متقاعد کنم. خوشحالم که فرصت یافتم تا با مردی به‌شایستگی‌شما تماس‌پیدا کنم.

همکار بسیار صمیمی شما
پوانکاره

به‌تاریخ (براساس مهرپستخانه) ۱۰ دسامبر ۱۹۱۱

این‌نامه نه‌تنها ازاین‌نظر جالب است که بعضی جنبه‌های روش ابداع پوانکاره را نشان می‌دهد، بلکه همچنین نشان می‌دهد که پوانکاره اعتقاد زیادی به‌کارهای‌ریاضی، یعنی‌کارهای توپولوژیك، براوئرداشته‌است. مضمون این‌نامه تنها به‌کارهای سالهای ۱۹۰۹–۱۹۱۱ براوئر مربوط می‌شود. روشن است که پوانکاره نه‌تنها از این‌کارها درپایان ۱۹۱۱ (هنگامی‌که نامه نوشته شده‌است) اطلاع داشت، بلکه عمق آنها را هم درك کرده بود. درحالی‌که مقاله‌های توپولوژیك براوئر درنهایت پیچیدگی نوشته شده بودند وحداقل به‌سبك کلاسیك هم نبودند. بنابراین، پوانکاره حتی درآخرین‌سال زندگیش آن‌قدر انرژی وکنجکاوی داشت که برقضایا و روشهایی تسلط یابدکه شیوهٔ ابداع آنها با شیوهٔ خودش کاملاً تفاوت داشت واین‌خصیصه‌ای‌است که فقط محققان بسیاربزرگ دارند. پوانکاره این خصیصهٔ را درتمام زندگی ازخود نشان داد. در۱۸۸۳ کانتور مجموعه‌ای ساخت که (دریك بازه) کاملاً ناپیوسته‌است و نام اورا برخود دارد ("گسستارکانتور"). این کشف، کشفی برخاسته ازنبوغ بود، نه‌تنها به‌دلیل‌اهمیتی که مجموعهٔ کانتور درکل ریاضیات کسب کرد، بلکه همچنین به‌این دلیل که ساختار کاملاً تازه‌ای را وارد ریاضی‌کرد که تا آن زمان‌کسی نظیرش را درعلم ندیده بود. کانتور تصویری هندسی را درنظرگرفت که خارج ازمحدوده‌ای بودکه وابسته به‌شهود هندسی قلمداد شود، و به‌این ترتیب، قلمرو این نوع شهود وهمهٔ تصورات ما از فضا را به روشی بی‌نظیر گسترش داد. اوپیش ازهرچیز نشان دادکه این‌تصورات رامی‌توان به‌تبدیلاتی در ارتباط با نظریهٔ مجموعه‌ها تعمیم داد، نظریه‌ای که ریاضیدانان معروف وصاحب نام (مثلاً کرونکر) حتی‌شك داشتند که اصلاً به ریاضیات تعلق داشته باشد. پوانکاره نه‌تنها یکی از نخستین ریاضیدانانی بودکه کشف کانتور را پذیرفت بلکه قطعاً نخستین کسی بودکه آن را درآنالیز به‌کار برد؛ یعنی این نوزاد جدید ریاضی‌که آن‌قدر غیرعادی بود ودر تمام دانش‌قدیم نظیری نداشت، درست در لحظهٔ تولدش مورد استفادهٔ پوانکاره قرار گرفت.

بسیاری از ریاضیدانان تراز اول ساختمانهای خاص‌وجالب متعددی را در راستای شهود هندسی جدیدی‌که توسط‌کانتوروضع شده بود ساختند. براوئر نخستین مثالهایش را از پیوستارهای تجزیه‌ناپذیر[1] ساخت، آنتواین‌کمانهای جالبش راکه برای آنها گروه بنیادی فضای مانده‌ای[2] نابدیهی است ارائه داد، الکساندر کره‌های "شاخدار"[3] را، وبسیاری نمونه‌های دیگر. اما گام‌نخست را کانتور برداشت،و پوانکاره نخستین‌کسی بود که نه‌تنها اهمیت این نخستین‌گام را بلکه بارآوری آن را برای آنالیز ریاضی و به‌تبع برای تمام ریاضیات دریافت.و بالاخره همانگونه‌که آخرین مقالهٔ پوانکاره نشان می‌دهد، باید به‌تسلط بسیار زیاد او درآخر عمرش به جنبه‌های هندسی نظریهٔ مجموعه‌ها تا آن حد که تا آن زمان تکامل یافته بود، توجه کنیم.

1. fundamental substitutions

1. non - decomposable 2. residual space 3. horned

اکنون برمی‌گردیم به‌مفهوم همولوژی [مانستگی] که توسط پوانکاره ایجاد شد. همچنانکه پیشتر گفتیم این‌مفهوم به‌شکل‌شهودی در نخستین مقالهٔ توپولوژیك پوانکاره، مقالهٔ مشهور "تحلیل‌جا"، ارائه شد. ولی‌دراین مورد، رهیافت اوکه به‌اندازهٔ‌کافی دقیق‌نبود، به‌اصطلاح نتایـج عملی درپی داشت، زیـرا مبنای انتقـاد جدی ریاضیدان نروژی، هیگارد، قرار گرفت. واقعیت این است کـه پوانکاره درنخستین مقاله‌اش به‌پدیدهٔ تاب[1] که اساساً به‌وسیلهٔ‌اعداد بتی محدود می‌شود، توجه‌کافی نکرد. اما در مقالهٔ بعدیش در باب توپولوژی (در "یادداشت تکمیلی بـر تحلیل‌جا") این خـلا را به‌طرز خیره‌کننده‌ای پرکرد. در اینجا پوانکاره بـا اتخاذ دیدگاه ترکیبیاتی، مفهوم تجزیـهٔ سادکی (مثلثی‌کردن) یك خمینه، یعنی مفهوم مجتمع سادکی[2] را ارائـه کرد، و بنابراین، روش بنیادی توپولوژی ترکیبیاتی را ابداع کرد. احتمالاً پوانکاره این مطلب را به‌طور شهودی واضح می‌دانست که مشخص‌سازی همولوژیك یك خمینه (و به طور کلی، یك چند وجهی[3]) که او در توپولوژی مطرح کرد، نمی‌تواند به‌نحوهٔ مثلثی‌کردن چندوجهی وابسته باشد. اما همچنانکه می‌دانیم، این‌مطلب قضیه‌ای مشکل‌وعمیق‌در توپولوژی است. برای‌اثبات این‌موضوع، علاوه برمفهوم زیرتقسیم به‌دلخواه کوچك‌یك مثلثی‌شدهٔ مفروض که‌پوانکاره درنظر گرفته بود، همچنین به‌مفهوم (مبتنی برآن زیرتقسیم) تقریب زدن سادکی (یعنی قطعه‌قطعه خطی) نگاشت پیوسته (که تعمیمی از تقریب زدن خم‌پیوسته به‌وسیلهٔ خط شکستهٔ محاط درآن‌است) ویك مفهوم مربوط به‌درجهٔ یك نگاشت (یعنی، تعداد دفعاتی که، تحت یك‌نگاشت پیوسته مثلاً از سادك X به‌روی سادك Y یا از خمینهٔ X به‌روی خمینهٔ دیگر Y با همان بعد، Y توسط تصویر X پوشیده شود) یا مفهومی هم‌ارز آن، نیز نیـاز داریم. این دو مفهـوم را بـراوئر در ۱۹۱۱، درست پیش از مرگ پوانکاره ارائه کرد و براوئر به‌کمك‌آنها قضیه‌های معروفش را دربارهٔ ناوردای توپولوژیك تعداد ابعاد یك خمینهٔ nبعدی، وناوردایی نقاط درونی مجموعه‌های واقع‌درآنها، قضیهٔ‌کلی‌ژوردان (درحالت nبعدی)، قضیه‌های نقاط ثابت وغیره، ثابت‌کرد. بـا وجود این، براوئـر قضیهٔ ناوردایی مشخصه‌هـای همولوژیك خودچندوجهی‌را ثابت‌نکرد، اگرچه همهٔ ابزارهای‌لازم را برای چنین اثباتی در اختیار داشت. این‌کار نخست در ۱۹۱۵ توسط توپولوژیـدان معـروف امریکایـی، الکسانـدر، انجـام گرفت.

اثبات قضیهٔ ناوردایی نخستین گام اساسی در گسترش بیشتر نظریهٔ همولوژی بودکه پوانکاره‌آن را ابداع‌کرده بود. گام بعدی برخلاف گام نخست، به‌ازمیان بردن‌اشکالات ریاضی‌خاصی‌مربوط نبود، اما ارزش‌نظری زیادی داشت. این گام را جبردان معروف، امی‌نوتر (در ۱۹۲۵–۱۹۲۶) برداشت و عبارت بود از تعویض مشخصه‌های همولوژیك عددیی‌که توسط پوانکاره ارائه شده‌بودند،

1. torsion 2. simplicial complex

۳. من اصطـلاح "چند وجهی" را دراینجا به‌معنای امروزیش به‌کار می‌برم، یعنی مجموعه‌ای که به‌سادکها قابل‌تجزیه است؛ پوانکاره خودش کلمهٔ "چندوجهی" را به‌معنایی به‌کار برده است‌که امروزه ما برای "مجتمع" به‌کار می‌بریم.

اعداد بتی و ضرایب تاب، با یك مفهوم واحد یعنی‌گروه بتی (یا آن گونه‌که‌اکنون ترجیح می‌دهیم بگوییم، گروه همولوژی). بعضی ازتوپولوژیدانان مشهور، مثلاً لفشتس، درابتدا برخورد بدبینانه‌ای نسبت به‌ابداعات تازهٔ امی‌نوتر داشتند و این ابداعات را صرفـاً صوری می‌دیدند (درواقع به‌نظرمی‌رسیدکه تفاوتی‌اساسی‌دراینکه به‌طور سرراست از گروه بتی چندوجهی حرف زده شود یـا از مجموعهٔ‌کاملاً معین مشخصه‌های‌عددیش، یعنی، رتبه‌اش‌که همان عدد بتی‌است و ضرایب تابش، وجود ندارد.) با وجود این بررسیهای دقیقتر نشان دادکه این ابداعات، حرف بی‌محتوایی‌نیست.

مخصوصاً ومهمتر ازهمه، براساس دیدگاه قدیم وبدون‌مفهوم گروههای‌همولوژی، گسترش‌یکی‌ازمهمترین‌نظریه‌های‌توپولوژیك یعنی نظریهٔ دوگانی‌توپولوژیك، که مبانی‌آن‌را خود پوانکاره‌وضع کرد، غیرممکن بود. این نظریه بعدها درجهتها و هیأتهای تازه‌ای توسط الکسانـدر و سپس در تمامی جهات توسط پونتریاگین و ریاضیدانان دیگر گسترش یافت.

بدون‌مفهوم گروه بتی، تصور دوپیشرفت اساسی‌دیگردرنظریهٔ همولـوژی غیرممکن بود. اولـی، انتقال مفهومهـای همولوژیك به‌اشیای هندسی‌کلیتر ازچندوجهیها، وپیش ازهمه به‌فشرده[1]هاست، که بـا تقریب‌زدن صورتبندیهـای توپولوژیك پیچیده (فشرده‌ها، دو-فشرده‌ها[2]، و حتی‌فضاهای‌توپولوژیك‌کلیتر) توسط ساختمانهای ترکیبیاتی-توپولوژیك به‌کمك مجتمعها میسرشد؛ من این‌کار را در ۱۹۲۶ با استفاده ازطیفهای تصویری[3] (که بعداً تعمیمها وصورتهای گوناگونی‌یافت) شروع کردم. این‌فرایند تقریب‌زدن متکی‌برمفهوم تاروپود[4] یك پوشش فضای مفروض‌است‌که من‌آن را معرفی‌کردم و امکان می‌دهد تا مفهومهای بنیادی توپولوژی ترکیبیاتی راعملاً به‌همهٔ فضاهای توپولوژیك انتقال دهیم.[5]

دومین پیشرفت اساسی در نظریهٔ همولوژی، معرفی‌همولوژی "عالی" به‌وسیلهٔ الکساندر و آندری‌کولموگوروف در ۱۹۳۴–۱۹۳۵ بودکه اکنون‌کوهمولوژی نامیـده می‌شود. از گروههای همولوژی وکوهمولوژی‌که قلمروتعریف وکاربردشان همواره در حال توسعه‌است، درنهایت نظام ریاضی جدیدی حاصل آمد، یعنی جبر همولوژیك، که اساساً مشخص‌کنندهٔ چهرهٔ بخش قابل توجهی از ریاضیات نوین است.

در این قسمت از صحبت امروزم، نمی‌توانم از کنار مقالـهٔ عامه‌فهم و قابل بحث پوانکاره، "چرا فضا سه بعد دارد؟" که در مجلهٔ معروف فرانسوی بررسی متافیزیك و اخلاق[6] چاپ‌شده‌است، بگذرم.

اهمیت این مقاله، که شیوهٔ بیان آن بیشترادبی‌است تا صرفاً علمی، دراین‌است‌که ایدهٔ یکی ازمفاهیم اساسی‌توپولوژی عمومی ــ یعنی تعریف استقرایی‌کلی بعد ــ را مورد بحث قرار می‌دهد و مسألهٔ مربوط به‌آن رامطرح می‌کند. ایدهٔ پوانکاره این‌بودکه‌اگر

1. compacta 2. bicompacta
3. projection spectra 4. nerve

۵. البته، منشأ نخستین مفهوم من از تاروپود در آنچه‌کـه پوانکاره "چندوجهی متقابل" نامیده‌است، جای دارد.

6. *Revue de Métaphysique et de Morale*

فضا دارای n بعد باشد می‌توان آن‌را به‌وسیلهٔ زیرفضاهای $n-1$ بعدی به بخشهایی (به قدر دلخواه کوچك) تقسیم کرد. نخستین ریاضیدانی که این عقاید ساده و نادقیق پوانکاره را به‌شکلی‌دقیق و خوش‌بنیاد[1] درآورد، براوئر بود (در مقاله‌ای در ۱۹۱۳). از این‌رو براوئر بنیانگذار مبحث وسیع توپولوژی عمومی است که منگرو (ازلحاظ اصول) اوریسون آن را عرضه‌کرده‌اند و امروزه به‌عنوان نظریهٔ کلی بعد شناخته می‌شود. با این‌حال، در اینجا مهم است تأکیدکنم که فکر مفهوم کلی بعد از آن پوانکاره است و این دلیل‌دیگری‌است برتوان استثنایی شهود هندسی‌او، که دراین‌مورد، مبحث توپولوژی عمومی را شامل می‌شود. در خاتمه، خوب است توجه‌کنیم که نظریهٔ کلی بعد، پس از آنکه من در ۱۹۲۸–۱۹۳۲ آنچه راکه به‌عنوان نظریهٔ همولوژیك بعد می‌شناسیم ارائه کردم، به‌مرحلهٔ کمال رسید. نظریهٔ همولوژیك بعد، مفهوم بعد را به همولوژی وابسته می‌کند و بنابراین شامل نظریهٔ بعد درتوپولوژی همولوژیك عمومی است.

صحبتم را با ذکر این نکته آغازکردم که پوانکاره درعصری می‌زیست که اندیشه‌های‌جدیدی درریاضیات پدید آمدندکه قدرت تأثیرشان در درك ما از جهان و نیزقدرتشان در گسترش ناگهانی افقهای خود ریاضیات و بالاخره زیبایی و کمال درونیشان، ذهن انسان را به‌شگفتی وامی‌داشتند.

اندیشه‌های ریاضیی که در دوران ما پدید می‌آیند (دست‌کم) به‌همان قدرتمندی و شاید به‌همان زیبایی هستند. با این‌حال اگر چارچوبی چون کشفیات پوانکاره وجود نمی‌داشت، شاید این اندیشه‌ها هرگز پدید نمی‌آمدند.

لاپلاس در رسالهٔ مشهورش "تشریح نظام عالم"[2] گفته‌است که اخترشناسی به‌واسطهٔ وسعت موضوعش وکمال نظریه‌اش بلندترین قله‌ای است که درك آدمی به‌آن رسیده و زیباترین نشانهٔ هوش آدمی‌است.

ریاضیدانانی چون پوانکاره ما را برآن می‌دارند که گفتهٔ لاپلاس‌را به‌ریاضیات تعمیم دهیم و این رشته را از لحاظ وسعت موضوع و مسلماً کمال نظریه‌اش،همتایی برای اخترشناسی به‌حساب آوریم.

پیوست

دربارهٔ نامهٔ پوانکاره به‌براوئر

و. ك. زورین

متأسفانه به‌نامه‌ای از براوئر که پوانکاره به‌آن پاسخ داده‌است، دسترسی نداریم اما با بررسی‌نامهٔ پوانکاره ازیك سو وموضوعات مقالات براوئر [۱–۴] از سوی دیگر می‌توان با اطمینان نسبی به‌مضمون نامهٔ براوئر پی‌برد.

مقالهٔ براوئر [۳] دراین مورد می‌تواند راهگشا باشد. اوآن را در ۲۷ سپتامبر ۱۹۱۱ در همایش انجمن ریاضی آلمان ارائه کرده است و مقاله اختصاص دارد به‌تدوین مبنایی برای "روش پیوستگی" در نظریهٔ توابع خودریخت. براوئرمی‌نویسد:

"... پوانکاره ([۷] صص۳۶۸–۳۷۰) اثباتی از وجود یك تابع به‌طور خطی چندریخت بر رویهٔ ریمانی، به کمك روش پیوستگی ارائه می‌کند و دو قضیهٔ زیر را بدون بحث می‌پذیرد:

قضیهٔ ۱ [هم‌ارزی هندیس]. رده‌های یك رویهٔ ریمانی از گونهٔ g، یك خمینهٔ $(6-g)$بعدی بدون تکینی تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ ۲. تصویر یك به‌یك وپیوستهٔ یك حوزهٔ[1] nبعدی دریك خمینهٔ nبعدی بازهم یك‌حوزه است.

با تغییرکوچکی در روش می‌توانیم از به‌کارگیری قضیهٔ ۱ اجتناب کنیم... وبنابراین،کافی‌است‌توجیهی برای قضیهٔ ۲ بیاوریم، یعنی قضیهٔ ناوردایی حوزه‌ها که اثباتی از آن را درآینده‌ای‌نزدیك منتشرخواهم‌کرد. [۴]"

بنابراین، آشکار است‌که براوئر برای توضیحاتی در مورد روش پیوستگی که پوانکاره در [۷] به‌کاربرده‌است، با او تماس می‌گیرد.

برای توضیح پاسخ پوانکاره، ابتدا مناسب است چندکلمه‌ای دربارهٔ روش پیوستگی بگوییم.

این روش که به‌لحاظ بداهت هندسیش و درعین‌حال کلیت زیادش بسیارجالب‌است، در قله‌های نظریهٔ توابع خودریخت یك متغیر مختلط زاده شد. کلاین و پوانکاره همزمان به‌آن پرداختند.

فریك در [۵] دراین‌باره می‌نویسد: "کلاین اندیشه‌هایش را در باب اثبات پیوستگی در مقاله‌اش ([۶] ص۷۰۴) شرح‌داد. از سوی دیگر پوانکاره (در[۷] ص۳۲۹) همین مسأله را موردبحث قرارداد، و درنخستین بررسی دقیق خود ازاساس موضوع به‌عمق و دشواری فوق‌العادهٔ این نوع اثبات پی‌برد و در عین‌حال برای رفع دشواریها ایده‌هایی عرضه‌کرد."

در اینجا شرح واضحی از ایدهٔ روش پیوستگی را به قلم پوانکاره‌می‌آوریم ([۷] ص ۳۳۰):

"فرض‌کنیم‌که هرنقطهٔ m از (خمینهٔ)S را در تناظر با یك نقطهٔ m' از(خمینهٔ)S' قراردهیم به‌طوری‌که مختصات m' توابعی تحلیلی‌از مختصات mباشند، به‌شرطی‌که اگر S مرزی داشته‌باشد، m برمرز S واقع نباشد. تصورکنیم که به‌هر نقطهٔ S' بیش از یك نقطهٔ S نظیرنشود. اگر S یك خمینهٔ بسته باشدآنگاه می‌توانیم مطمئن باشیم که به‌هرنقطهٔ S' نقطه‌ای ازS نظیر می‌شود. ولی اگر S یك خمینهٔ باز مرزدار باشد، نمی‌توان چیزی گفت... و این واقعیتی‌است‌که‌کلاین نادیده‌گرفته است. در اینجا مشکلاتی هست که نمی‌توان درچندکلمه برطرفشان‌کرد."

نمونه‌ای از دشواریهای کاربرد روش پیوستگی در نظریهٔ توابع خودریخت اثباتی است‌که‌کلاین ([۶] ص۷۰۴) در مورد تحلیلی‌بودن تناظری‌که خود ساخته‌است، ذکرمی‌کند. اومی‌نویسد ([۶] ص۷۰۴): "برای بحث زیر نیازمند به‌گزاره‌ای هستم‌که در درستی آن شك ندارم اگرچه نمی‌توانم اثبات جمع و جوری از آن ارائه‌کنم. مهم این‌است‌که ارتباط بین دوخمینهٔ M_1 و M_2

1.well-founded

2. Exposition du système du monde

1. domain

تحلیلی است. شك ندارم که این موضوع با پیشرفت بیشتر این گونه اثباتهای وجودی ثابت خواهد شد. . . اگر مشکلاتی در اینجا بخواهد بروز کند می توان از فرمولی که پوانکاره برای ارتباط بین دو خمینه M_1 و M_2 به‌دست آورده است استفاده کرد."

با مقایسهٔ مطالبی که از مقالهٔ براوئر نقل کردیم با دیدگاههای پوانکاره و کلاین می‌توان دریافت کـه مسألهٔ بنیادیی که براوئر به‌خاطرش با پوانکاره تماس می‌گیرد، تحلیلی بودن نگاشت است. نخستین بخش نامهٔ پوانکاره، پاسخ این پرسش است. این پرسش از دیدگاه توپولوژی اساساً این است کـه آیا نگاشتی که در روش پیوستگی به‌کار می‌رود بازاست؟

در بخش دوم نامهٔ پوانکاره (کـه به‌واقع رابطهٔ نزدیکی با بخش اول دارد) قضیهٔ ۱ براوئر (قضیهٔ فوق) شرح داده می‌شود؛ بنا بر گفتهٔ کلاین و خود پوانکاره، هر رویـهٔ ریمانی S می‌توانـد همدیسانه بر روی فضای خارج قسمت K/Γ نگاشته شود، که در آن K یك دایره، یك صفحه، یـا یك کره است و Γ گروه تبدیلات کسری خطی K یکریخت با $\pi_1(S)$ است. در اینجا فضاهای K/Γ_1 و K/Γ_2 همدیسانه هم‌ارزند اگر و تنها اگر Γ_1 و Γ_2 زیرگروههای مزدوج گروه تبدیلات کسری خطی K باشند. با استفاده از این نمایش رویهٔ ریمانی، مشخص کردن تعداد رده‌های متفاوت رویه‌های ریمانی فشرده از گونهٔ g که به $6g-6$ پارامتر حقیقی وابسته‌اند و به‌طور همدیس هم‌ارز نیستند کار مشکلی نیست.

به‌جای اصطلاح "جانشانی" که پوانکاره به‌کار برده است، امروزه غالبـاً می‌گوییم تبدیـل "خطی" یا "کسری خطی". "جانشانیهای بنیادی" پوانکاره مولدهای گروه مفروض Γ از تبدیلات خطی کسری است که توسط آن خارج قسمت K/Γ حاصل می‌شود.

در پایان خاطرنشان می‌کنم که مسألهٔ توپولوژیك ناب ناوردایی حوزه و تعداد ابعاد که حل دقیق آن تنها به‌وسیلهٔ براوئر در ۱۹۱۱–۱۹۱۲ [۴] انجام شد، در چهارچوب نظریهٔ هندسی توابع تحلیلی و در خلال کوششهایی برای ارائهٔ یك بنیاد کامل منطقی برای روش پیوستگی به‌وجود آمد.

مراجع

1. L. E. J. Brouwer, Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweises der Existenz- Theoreme eindeutig umkehrbar polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen No.5(1912), 603-606.
2. L.E.J. Brouwer, Über die Singularitätenfreiheit der Modulmannigfaltigkeit, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen No.7 (1912), 803-806.
3. L.E.J. Brouwer, Über den Kontinuitätsbeweis für des Fundamentaltheorem der automorphen Funktionen in Grenzkreisfalle, Jber. Deutsch. Math. - Verein **21** (1912), 154-157.
4. L.E.J. Brouwer, Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets, Math. Ann. **71** (1911), 305-313.
5. R. Fricke, Beiträge Zum Kontinuitätsbeweise der Existenz linear-polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen, Math. Ann. **59** (1904), 449-513.
6. F. Klein, Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, vol. III, Springer-Verlag, Berlin 1923, 531-710.
7. H. Poincaré, Sur les groupes des équations linéaires, Oeuvres, vol. II, Gauthier-Villars, Paris 1916, 300-401.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

● این مقاله از روی ترجمهٔ انگلیسی اصل مقاله به فارسی برگردانده شده است. اصل مقاله، متن سخنرانی مؤلف در یکی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضیات (۱۹۵۴) به مناسبت صدمین سالگرد تولد پوانکاره است. مشخصات متن انگلیسی این است:

P. S. Aleksandrov, "Poincare and topology," *Russian Mathematical Surveys*, (1)**27** (1972) 157-168.

چه وقت یك تابع C^∞ تحلیلی است؟*

رالف بواس*
ترجمهٔ مهدی حسینی‌نسب

دانشجویان اغلب تعجب می‌کنند که استادانشان پیش ازقبول اینکه یك سری تیلر نمایانگر تابعی‌است که از آن به‌دست آمده، بر اثبات میل کردن باقیماندهٔ سری به‌صفر اصرار دارند. دانشجویان باعمل معمولی استفاده از صورت لاگرانژی باقیمانده، با آن نقطهٔ میانی نامشخص واسرارآمیزش، نمی‌توانند بـه یك بینش صحیح دست یابند.

در این مسأله تنهادانشجویان نیستند که دچار اشتباه می‌شوند؛ یك ریاضیدان ممتاز (پرینگشایم[1]) نیز یك‌بار در مورد باقیمانده دچار اشتباه شد. این مقاله داستان میراث آن اشتباه‌است که مدت چهل‌سال مورد توجه قرارنگرفته بود.

سری تیلر یك تابـع C^∞ مانند f می‌تواند دو نوع رفتـار غیرعادی [تکین] داشته باشد: سری ممکن است درهمه‌جا مگر در مرکزش‌واگرا باشد یا ممکن‌است دریك همسایگی‌ازمرکز به‌تابعی که درهمسایگیهای به‌دلخواه کوچکی از مرکزبا f تفاوت دارد، همگرا باشد. مثالهـای بسیاری از تکینی نوع اول وجود دارد، اگرچه آنها را نمی‌توان برای یك‌کلاس مقدماتی‌به‌راحتی مطرح کرد. برای‌تکینی‌نوع دوم مثال استانداردی وجود داردکه‌عبارت است از تابع F که به‌صورت $F(x)=e^{-1/x^2}$ برای $x<0$، و $F(x)=0$ بـرای $x\geqslant 0$ تعریف می‌شود. (حتی در سال ۱۹۲۸ اسگود در[۵] صفحهٔ ۱۲۵،خود را مجبور می‌بیند بر پیش‌افتادگی این‌ایرادکه "F واقعاً یك تابع نیست"چون‌با یك تك‌فرمول‌تعریف نشده، تأکیدکند.)

اگـر سری تیلر F حول نقـاط مختلف x را بنویسیم، شعاع همگرایی سری، $\rho(x)$، وقتی $x\to\infty$ به‌سمت صفرمیل می‌کند.

1.A. Pringsheim

با وجود این، فرض کنید f تابعی‌باشد با این خاصیت‌که به‌ازای هر x دریك بازه، $\rho(x)\geqslant\delta>0$. آیا چنین‌تابعی، تحلیلی‌حقیقی (برابر با سری تیلرخود) است، یا ممکن‌است دارای تکینی نوع دوم باشد؟ ظاهراً این سؤال را اولین‌بار پرینگشایم [۶] در سال ۱۸۹۳ مطرح‌کرد. او اثباتی ارائه‌کردکـه بنابرآن، چنین تابعی لزوماً تحلیلی‌است؛ من اثبات اورا با علائم امروزی‌ترنقل‌می‌کنم. فرض‌کنیدکه

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)r^n}{n!}$$

به‌ازای $a\leqslant t\leqslant b$ و $0\leqslant r\leqslant r_1$ همگرا باشد؛ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(t)r^n}{n!}=0 \qquad \text{(الف)}$$

به‌ازای $a\leqslant t\leqslant b$ و $0\leqslant r\leqslant r_1$. بنابراین اگر $0<s<r_1$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(t+\theta s)s^n}{n!}=0 \quad \text{برای } a\leqslant t+\theta s\leqslant b \qquad \text{(ب)}$$

پرینگشایم ازروی (ب) نتیجه‌گرفت‌که باقیماندهٔ سری تیلر fحول t به‌صفر می‌گراید، پس f روی (a, b) تحلیلی‌است.

آیا متوجه اشکال استدلال شدید؟

تعجب‌آور است که پرینگشایم که شیفتهٔ همگرایی یکنواخت بوده به‌این‌مطلب توجه نکرده است‌کـه هیچ‌چیز دال بر اینکه حد مذکور در (الف) یـا (ب) نسبت به r (یـا θ) یکنواخت باشد وجود ندارد، و بنابراین اثبات کامل نیست. توضیح دقیقتر اینکه، اگربگوییم $\rho(x)>0$ درست مثل‌این‌است‌که‌گفته باشیم

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}\right\}^{1/n}<\infty. \qquad (1)$$

درحالی‌که فرض پرینگشایم این‌است‌که برای Mی متناهی‌ومستقل از x داریم

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}\right\}^{1/n}<M \qquad (2)$$

و این‌کاملاً روشن است (و از صورت لاگرانژی باقیماندهٔ سری تیلر نتیجه می‌شود) که شرط کرانداری یکنواخت $|f^{(n)}(x)/n!|^{1/n}$ در یك همسایگی از هرنقطهٔ یك بازه، برای تحلیلی بودن f کافی است.

حتـی امروز مفهوم همگرایی یکنواخت گاه مفهوم دشواری به‌نظر می‌رسد و طبیعتاً پنجاه سال پیش، از این هم دشوارتر به‌نظر می‌رسیده‌است. درسال ۱۹۳۲ گرگن[1] ناچار شد درسی درسریهای فوریه را بدون استفاده از همگرایی یکنواخت ارائه‌کند، چرا که گروه ریاضی دانشگاه هاروارد مفهوم همگرایی‌یکنواخت رابرای دانشجویان دورهٔ لیسانس بسیار دشوار تشخیص داده بود.

من یکی ازآن دانشجویـان دورهٔ لیسانس بودم. من به طور اتفاقی مقالهٔ پرینگشایم را خوانده و فریفتهٔ قضیهٔ مورد بحث شده بودم.اولین باری‌که مقاله راخواندم اثبات پرینگشایم راپذیرفتم.

1.J. J. Gergen

لیکن وقتی در تعطیلات تابستانی سعی کردم آن اثبات را بازسازی کنم، از عهده برنیامدم. نهایتاً دست از کار کشیدم، ۹۰ مایل تا هاروارد رانندگی کردم و اثبات را پیدا کردم. سپس آن را دقیقتر مورد مطالعه قراردادم و اشتباه آن را تشخیص دادم.

شما وقتی در اثبات یك قضیهٔ جالب نقصی پیدا می‌کنید، چه کار می‌کنید؟ ممکن است تصمیم به‌مکاتبه با نویسندهٔ مقاله بگیرید، ولی یك دانشجوی لیسانس معمولاً چنین کاری نمی‌کند. به‌هرصورت من این احتمال را درنظر گرفتم که پرینگشایم دراین ۵۰ سال مرده است (در واقع او در ۱۹۳۲، ۸۲ ساله بود و تا سال ۱۹۴۱ نیز زندگی کرد). ولی برای پیداکردن یك اثبات صحیح حتماً باید کاری انجام می‌شد.

در ۱۹۳۲–۱۹۳۳ من از نظریهٔ مجموعه‌ها تنها درحدی که در دروس مقدماتی آنالیز حقیقی و مختلط مطرح می‌شود آگاهی داشتم. به‌ویژه قضیهٔ رسته‌ای بر[1] را هرگز ندیده بودم، ولی موفق شده بودم که خودم آن را کشف کنم (فقط برای خط حقیقی؛ این واقعه حداقل دوسال قبل از آشنایی من با فضاهای متریك کامل اتفاق افتاد). با استفاده از قضیهٔ بر، من حداقل توانستم ثابت کنم که اگر $\rho(x)$ برای هر x در بازه‌ای چون J اکیداً مثبت باشد، آنگاه f در تمام J، مگر دریك زیرمجموعهٔ هیچ‌جا چگال بستهٔ آن، تحلیلی است. این مطلب یك نتیجهٔ جدید وفی‌نفسه جالب بود، برای اینکه نشان می‌داد که یك تابع C^∞ نمی‌تواند درهمهٔ نقاط یك بازه، یا حتی در نقاط یك زیرمجموعهٔ چگال آن، تکینی نوع دوم داشته باشد.

من تشخیص دادم که قضیهٔ قدرتمندی همچون قضیهٔ بر نمی‌تواند کاملاً تازه باشد، اما مدتها طول کشید تا توانستم آن را دریك کتاب پیدا کنم. وقتی قضیه را برای اعضای گروه ریاضی شرح دادم ایشان آن را نشناختند، گرچه کاملاً محتمل است که من نتوانسته باشم خوب ازعهدهٔ توضیح آن برآیم.

طولی نکشید که دراوایل ۱۹۳۴ توانستم اثبات قانع کننده‌ای برای قضیهٔ پرینگشایم بیابم. من درباغی در جزیرهٔ مدیرا[2]، که به‌دلایلی بی‌ارتباط با ریاضیات به آنجا رفته بودم، موفق به‌یافتن اثبات شدم. بعد از آن متوجه شدم که متقاعدکردن مردم در مورد نادرستی یك اثبات ادعایی از یك قضیهٔ درست، تا چه حد دشوار است. وقتی که اثبات خود را در ۱۹۳۵ منتشر کردم [۹] می‌بایستی تحلیلی از اثبات پرینگشایم را نیز ضمیمهٔ آن می‌کردم ولی ساده‌اندیش‌تر از آن بودم که چنین کاری بکنم. من تصور می‌کردم که تمام ریاضیدانان مجرب به‌محض اینکه به‌آن نگاه کنند به‌نادرستی آن پی می‌برند. این گمان نادرست بود: منتقد یاربوخ[3] معتقد نبود که اثبات پرینگشایم اشتباه است و این مطلب را اظهار کرد. نهایتاً توانستم او را متقاعد کنم و او با انتشار اصلاحیه‌ای نقد خود را تصحیح کرد. منتقد تسنترالبلات[4] محتاطتر بود، ولی فکر می‌کنم به‌هر حال حرف مرا قبول نکرد.

اثبات اولیهٔ من بیش از اندازه طولانی بود؛ اثبات خلاصه‌تری را می‌توان در [۷] یافت؛ و نیز در [۹] اثبات دیگری هست که آن را زاهورسکی که مستقلاً به‌اشتباه پرینگشایم پی‌برد و آن را اصلاح کرد، ارائه کرده‌است. همچنین اثبات نوین دیگری از قضیهٔ پرینگشایم را که هوفمان و کاتس ارائه داده‌اند می‌توان در [۳] پیدا کرد. اخیراً بوقوسیان و جانسن [۲] قضیهٔ پرینگشایم را مجدداً کشف کردند. ایشان تعمیمهای جالب و نتایج مشابه‌متعددی یافته‌اند وقضیه را در پهنهٔ وسیعتری مطرح کرده‌اند. هرکاردیگری که بخواهد درآینده دراین زمینه انجام شود باید از [۲] آغاز گردد. دراینجا من تنها می‌خواهم اثباتی را خلاصه‌وار ارائه دهم و درطی آن اصولی را که همهٔ اثباتهای موجود به آنها وابسته‌اند بیان کنم. استدلال زیرعملاً نتیجهٔ کلیتری را به‌دست خواهد داد.

قضیه. فرض کنید f روی بازهٔ بازی چون J، C^∞ باشد و $\rho(x)$ شعاع همگرایی سری تیلر f حول نقطهٔ x باشد. تصور کنید که (۱) در هر نقطهٔ x از J، $\rho(x) > 0$ و (۲) در هر نقطهٔ p از J، $1 < \liminf_{x\to p}\rho(x)/|x-p|$. در این صورت، f در J تحلیلی است.

قضیهٔ فوق قضیهٔ پرینگشایم را در بر دارد چرا که اگر $\rho(x) \geqslant \delta > 0$ آنگاه $\liminf_{x\to p}\rho(x)/|x-p| = \infty$. به‌زبان غیررسمی، مفروضات قضیه می‌گویند که اگر نقطهٔ p بی‌وجود داشته باشد که f در آن تحلیلی نباشد، آنگاه بازهٔ همگرایی سری تیلر f حول نقاط نزدیك p نباید به‌فراتر از p امتداد یابد.

اثبات طبیعتاً در چندین گام انجام می‌شود.

I. فرض (۱) به‌تنهایی نتیجه می‌دهد که f روی یك زیرمجموعهٔ چگال J تحلیلی است. این، کاربرد مستقیمی از قضیهٔ بر است. فرض (۱) به‌این معنی است که

$$\frac{1}{\rho(x)} = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|^{1/n} < \infty$$

و این معادل است با اینکه بگوییم یك تابع متناهی μ وجود دارد به‌طوری که

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant n!\,[\mu(x)]^n, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

فرض کنید E_m زیرمجموعه‌ای از J باشد که روی آن، $m \leqslant \mu(x) < m+1$ و بنابراین $J = \bigcup_{m\geqslant 0} E_m$. طبق قضیهٔ بر، بعضی از E_mها نمی‌توانند در J هیچ جا چگال باشند؛ یعنی عدد صحیح m و بازهٔ $K \subset J$ وجود دارد به‌طوری که E_m در K چگال است. بنابراین، به‌ازای $x \in E_m$ داریم

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant n!\,(m+1)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

و برای $x \in K - E_m$ نابرابری (*) به‌سبب پیوستگی برقرار است. پس نابرابریهای (*) برای هر $x \in K$ برقرارند. از اینجا معلوم می‌شود که f روی K تحلیلی است. با استدلال مشابهی در مورد بازه‌های $J - K$، f روی یك زیرمجموعهٔ چگال J تحلیلی است. فرض کنید H مکمل نسبی این مجموعهٔ باز باشد.

II. H دارای هیچ نقطهٔ منزوی نیست. این گام از اثبات، چندان ضروری نیست لیکن نقش فرض (۲) را در قضیه روشن می‌سازد.

فرض کنید y یك نقطهٔ منزوی H باشد. آنگاه y نقطهٔ انتهایی مشترك دو زیربازهٔ مکمل از H است؛ سمت چپی را J_1 و سمت

1. Bair
2. Madeira
3. *Jahrbuch*
4. *Zentralblatt*

راستی‌را J_2 بنامید. اگر z_1 نقطه‌ای از J_1 و به‌اندازهٔ کافی نزدیك به y باشد، سری تیلر f حول z_1 در بازه‌ای که در درون J_2 امتداد دارد همگراست. حکم مشابهی در مورد $z_2 \in J_2$ برقرار است. می‌توانیم ضرایب تیلر f را در نقطهٔ y از روی سری تیلر f حول z_1 محاسبه کنیم و این سری نمایشگر f در بازه‌ای درسمت چپ y است. ضرایب همین سری (حول y) را می‌توان از سری تیلر f حول z_2 محاسبه کرد و این سری نمایشگر f در بازه‌ای در سمت راست y است. بنابراین f درنزدیکی y با سری تیلر خود که مرکزش y است نمایش داده می‌شود. به‌بیان دیگر، y متعلق به H نیست واین با فرض درتناقض است. پس H یك مجموعهٔ بی‌کاست است.

III. چون H بسته‌است، می‌توانیم آن را به‌عنوان یك فضای متریك کامل درنظر بگیریم وقضیهٔ بر را برای آن به‌کاربریم. سپس درمی‌یابیم که یك زیرمجموعهٔ بستهٔ P از H ویك λی متناهی‌وجود دارد به‌طوری‌که رابطهٔ

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant n!\,\lambda^n, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad (3)$$

برای هر x در مقطع P با بازه‌ای چون J_1 برقراراست.

IV. حال‌رابطهٔ(۳) را داریم که درنقاط یك مجموعهٔ هیچ‌جا چگال بستهٔ P_1 برقراراست. به‌راحتی می‌توان دید که f نه‌تنها روی هر بازهٔ مکمل P_1 تحلیلی‌است بلکه در واقع دراین‌بازه‌ها با بسط تیلرخودحول یك نقطهٔ انتهایی‌r از بازه نمایش داده می‌شود. حال نیازداریم که $|f^{(n)}(x)/n!|^{1/n}$ را دربازه‌های مکمل P_1 در J_1 تخمین بزنیم. این‌کار رابا محاسبات مستقیم روی سریهامی‌توان انجام داد (ر.ك. [۲]). همچنین‌می‌توانیم ایدهٔ زالتسمان[1] و تسلر[2] رابه‌کاربریم[۷]: f را به‌صفحهٔ مختلط توسیع دهیم وبراوردهای کوشی را برای مشتقات بـه‌کار گیریم. بـا هریك از این روشها می‌توانیم یك کران‌یکنواخت‌برای $|f^{(n)}(x)/n!|^{1/n}$ در J_1 به‌دست آوریم، واین نشان می‌دهدکه f دریك بازهٔ شامل‌نقاط H تحلیلی است. این با تعریف H در تناقض است، پس H باید تهی باشد. یعنی f باید روی J تحلیلی‌باشد وقضیهٔ پرینگشایم خاتمه می‌یابد.

قضیهٔ پرینگشایم‌قضیهٔ چندان‌شناخته شده‌ای نیست؛ من تا به‌حال ندیده‌ام که درکتابی درسی اشاره‌ای به‌آن بشود. درمدت نیم قرن من اعتقاد داشتم که این قضیه واقعاً یك قضیهٔ "محض" است وهیچ کاربردی در ریاضیات و درجاهای دیگرندارد. لیکن‌حالت خاصی ازآن اخیراً کاربردهایی درفیزیك یافته است ([۳] و [۸])، گرچه فیزیکدانان مجبور شدند خودشان آن راکشف‌کنند. نتیجه‌ای که آنها به‌آن احتیاج داشتند این بودکه اگر برای هر t در یك بازهٔ J، $\liminf_{n\to\infty}|f^{(2n+1)}(t)|^{-1/n} \geqslant C > 0$، آنگاه f تحدید یك تابع تام است. این‌شرط معادل با این‌است که برای هر $t \in J$، $|f^{(2n+1)}(t)|^{1/(2n+1)} \leqslant L$. سپس قضیه‌ای‌از آدامار نشان می‌دهد که $f^{(2n)}(t)$ نیزدرنابرابری متناظرصدق‌می‌کند (بایك L بزرگتر). من به‌جای استنتاج این مطلب از قضیهٔ آدامار، آن را به‌سادگی به‌شکل مطلوب ثابت می‌کنم. طبق قضیهٔ تیلر با باقیماندهٔ مرتبهٔ ۲، اگر t و $t+\lambda$ متعلق به J باشند، داریم

$$f^{(2n)}(t) = \frac{f^{(2n-1)}(t+\lambda) - f^{(2n-1)}(t)}{\lambda} - \frac{1}{2} f^{(2n+1)}(t+\theta\lambda)\lambda, \qquad |\theta| < 1$$

پس نتیجه می‌شود

$$|f^{(2n)}(t)| \leqslant 2|\lambda|^{-1}L^{2n-1} + 1/2\lambda L^{2n+1}.$$

فرض کنیم h عـدد حقیقی مثبتی‌کوچکتر از نصف طول J باشد. می‌توانیم فرض کنیم $L > 2/h$، آنگـاه برای $t \in J$ یکی از $t \pm 2/L$ متعلق به J است، پس‌اگر بگیریم $\lambda = \pm 2/L$، خواهیم داشت

$$|f^{(2n)}(t)| \leqslant 2L^{2n}$$

$$|f^{(2n)}(t)|^{1/(2n)} \leqslant 2^{1/(2n)}L < 2L.$$

مراجع

1. R. P. Boas, A theorem on analytic functions of a real variable, *Bull. Amer. Math. Soc.* 41 (1935), 233-236.
2. A. Boghossian and P. D. Johnson, Jr., Pointwise conditions for analyticity and polynomiality of infinitely differentiable functions, *J. Math. Analysis and Appl.* 140 (1989), 301-309.
3. M. J. Hoffman and R. Katz, The sequence of derivatives of a C^∞-function, *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), 557-560.
4. P. Kolar and J. Fischer, On the validity and practical applicability of derivative analyticity relations, *J. Math. Phys.* 25 (1984), 2538-2544.
5. W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie,* vol. I, 5th. ed., Leipzig and Berlin: Teubner (1928).
6. A. Pringsheim, Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich, *Math. Ann.* 42 (1893), 153-184.
7. H. Salzmann and K. Zeller, Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen, *Math. Z.* 62 (1955), 354-367.
8. I. Vrkoc, Holomorphic extension of a function whose odd derivatives are summable, *Czechoslovak Math. J.* 35(110) (1985), 59-65.
9. Z. Zahorski, Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres, *Fund. Math.* 34 (1947), 183-245; supplement, *ibid.* 36 (1949), 319-320.

• R. P. Boas, "When is a C^∞ function analytic?," *The Mathematical Intelligencer*, (4) **11** (1989) 34-37.

* رالف بواس از ریاضیدانان معروف آمریکایی است و مدتی ویراستار اجرایی مجلهٔ *Mathematical Reviews* بوده است. در حال حاضر نیز جزو ویراستاران چند مجلهٔ معتبر ریاضی است.

1. Salzmann 2. Zeller

گزیده‌هایی از کتاب

ریمان، توپولوژی، و فیزیک*

میخائیل موناستیرسکی*
ترجمهٔ سیامک کاظمی

دوران اولیهٔ زندگی ریمان

گئورك فریدریش برنهارد ریمان در ۱۷ سپتامبر ۱۸۲۶ در دهکدهٔ بریزلنتس[1] نزدیك شهر دانبرگ در امیرنشین هانور به‌دنیا آمد. پدرش، فریدریش برنهارد ریمان، کشیشی لوتری مذهب بود که در مبارزهٔ ضد ناپلئونی سالهای ۱۸۱۲–۱۸۱۴، معروف به "جنگهای رهایی‌بخش"، شرکت داشت. او در سپاه ژنرال اتریشی کنت لودویك والمودن که در محاصرهٔ هامبورگ به‌شهرت رسید، درجهٔ سروانی داشت. این سپاه که ترکیبی از واحدهای روس، پروس وسایر متفقین بود، واحدهای مارشال داوو[ی فرانسوی] را در ناحیهٔ مکلنبورك تار ومار کرد.

پدر ریمان در میانسالگی با شارلوت ابل، دختر یك مشاور دادگاه، ازدواج کرد. برنهارد دومین فرزند ازشش فرزند آنها بود که دوپسر و چهار دختر بودند. او در کودکی ازسلامت برخوردار نبود و به‌طورکلی، بیماری ومرگ ناگهانی گریبانگیر خانوادهٔ ریمان بود: مادرش وقتی که او بیست ساله بود درگذشت و برادر و سه تا از خواهرانش جوانمرگ شدند.

ریمان همیشه وابستگی زیادی به‌خانواده‌اش داشت و درتمام زندگی ارتباط بسیار نزدیکی را با اعضای خانواده حفظ می‌کرد. کمرویی و کم حرفی‌اش باعث می‌شد که در جمع خویشاوندان احساس راحتی وآزادی کند.

در پنجسالگی به‌تاریخ، و به‌خصوص تاریخ لهستان، بیش از هرچیزی علاقه‌مند شد. علاقه به‌تاریخ و به‌طور کلی به‌موضوعات علوم انسانی خصیصه‌ای است که بسیاری از ریاضیدانان بزرگ داشته‌اند. کافی است کارل فریدریش گاوس را در نظر بگیریم که در زمان دانشجویی مردد بود کدام یك از دو رشتهٔ ریاضی یا فلسفه را به‌عنوان تخصص خود انتخاب کند، و نیز کارل گوستاو یاکوب یاکوبی را که در درسی در زمینهٔ زبانهای باستانی شرکت می‌کرد.

1. Breselenz

به‌زودی اعضای خانوادهٔ ریمان متوجه استعداد خارق‌العادهٔ او در محاسبه شدند. او درشش‌سالگی، تحت سرپرستی پدرش که مرد بسیار تحصیلکرده‌ای بود، مسائل حساب را حل می‌کرد. در دهسالگی‌اش، آموزگاری به‌نام شولتس شروع به‌تعلیم او کرد ولی به‌زودی شاگرد از معلم جلو افتاد. ریمان درچهاردهسالگی مستقیماً وارد کلاس سوم (عالی) مدرسهٔ متوسطهٔ هانورشد. پس از دوسال به‌مدرسهٔ متوسطهٔ شهر لونبورگ رفت و در آنجا تا ۱۹ سالگی به‌تحصیل ادامه داد. وی هرچند با جدیت درسهایی ازقبیل عبری و الهیات را مطالعه می‌کرد، ولی شاگرد درخشانی نبود.

اشمالفوس، مدیر مدرسهٔ متوسطه، به‌قریحهٔ ریاضی ریمان پی برد و به‌او اجازه داد که ازکتابخانهٔ شخصی‌اش استفاده کند. زمانی او کتاب نظریهٔ اعداد لژاندر را به‌ریمان داد. ریمان این کتاب را که ۹۰۰ صفحه داشت، در شش‌روز مطالعه کرد و بسیاری ازمطالبی را که از این کتاب آموخت، سالها بعد در تحقیقات خودش در زمینهٔ نظریهٔ اعداد به‌کار برد.

ریمان در ۱۸۴۶ بنا به‌میل پدرش در دانشکدهٔ الهیات دانشگاه گوتینگن نامنویسی کرد ولی علاقه‌اش به‌ریاضیات آن‌قدر قوی بود که از پدرش خواست با تغییر رشتهٔ او موافقت کند. دراین زمان دانشمندان معروفی مانندکارل گولد اشمیت اخترشناس که مغناطیس زمینی را درس می‌داد، موریتس اشترن ریاضیدان(۱۸۰۷–۱۸۹۴) که روشهای عددی و انتگرالهای معین را تدریس می‌کرد، و نیز "سلطان ریاضیدانان" کارل فریدریش گاوس(۱۷۷۷–۱۸۵۵)، در این دانشگاه به‌کار اشتغال داشتند. دراین زمان، گاوس که در اوج اقتدار علمی‌اش بود درس مختصری در زمینهٔ روش کمترین مربعات می‌داد. ولی با توجه به‌انزواطلبی و گوشه‌گیری ریمان، بعید است که او در این زمان تماس شخصی با گاوس داشته باشد. استعداد ریمان از چشم پروفسور اشترن پنهان نماند. او بعدها گفت که ریمان از همان زمان در میان اقران خود ممتاز بود.

توپولوژی

درسال ۱۸۵۰ در گوتینگن، علائق ریمان درزمینهٔ ریاضیات محض معطوف به‌مسائل توابع یك متغیرمختلط بود. خوش‌اقبالی ریمان در این بود که پس از یك اقامت دوساله در برلین، که در آنجا اطلاعات مبسوطی در آنالیز کسب کرد، به گوتینگن برگشت. به‌احتمال قوی درهیچ جای دیگری جوعلمی به‌اندازهٔ گوتینگن سرشار از ایده‌های هندسی، یا به‌زبان دقیقتر توپولوژیك، نبود. درهمین گوتینگن بود که در ۱۸۴۸ اولین کتاب درزمینهٔ توپولوژی با عنوان مطالعات مقدماتی در توپولوژی[1] به‌وسیلهٔ پروفسور لیستینگ انتشار یافت. لیستینگ مطالعات خود را در توپولوژی تحت تأثیر گاوس آغاز کرده بود. گاوس، چنانکه از آثار به‌جامانده‌اش پیداست، دراین زمینه زیاد کارکرده بود. ریمان با لیستینگ و تحقیقات او کاملاً آشنا شد ولی در واقع، صرفنظر ازتعریف و برخی از ویژگیهای خمهای گره‌دار، نتوانست چیزی از این تحقیقات کسب کند. ازاین بابت نمی‌توان لیستینگ را سرزنش کرد و این امرفقط نشان‌دهندهٔ وضعیت واقعی شاخه‌ای از ریاضیات است که گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس (۱۶۴۶–۱۷۱۶) آن‌را "تحلیل‌جا"[2] می‌نامید. لایب‌نیتس درکتاب ویژگیهای هندسی[3]اش سعی کرد که، به‌زبان امروزی، ویژگیهایی ازاشکال راکه به‌پارامترهای توپولوژیك، ونه‌هندسی، آنها مربوط است مطالعه کند. اونوشت که علاوه برنمایش‌مختصاتی اشکال "ما به‌شیوهٔ دیگری از تحلیل نیازمندیم که صرفاً هندسی یا خطی باشد. ومکان را همان‌طور تعریف کندکه جبر، کمیت راتعریف می‌کند". نکتهٔ جالب این است که لایب‌نیتس سعی کرد کریستیان هویگنس (۱۶۲۹–۱۶۹۵) را به‌این ایده‌ها علاقه‌مند کند ولی هویگنس اشتیاق زیادی نشان نداد. در طی ۱۵۰ سال بعد، بجز فرمول معروف اویلر دربارهٔ چندوجهیها ($V-E+F=2$، که در آن، V تعداد رأسها، E تعداد یالها، و F تعداد وجوه‌است) وحل مسألهٔ هفت پل کونیگسبرگ، اتفاق دیگری درنظریهٔ "تحلیل‌جا" رخ نداد.

اصطلاح "توپولوژی" که لیستینگ آن را معرفی کرد تازه در اوایل قرن ما براین‌رشته از ریاضیات اطلاق شد. ریمان اصطلاح "تحلیل‌جا" را به‌کارمی‌برد.

اولین‌موفقیتهای علمی‌ریمان مربوط‌است به‌واردکردن‌روشهای توپولوژیك در نظریهٔ توابع یك متغیرمختلط.

رویه‌های ریمانی

ریمان‌کارخود را از همان جایی که‌کار گاوس پایان یافته بود، آغاز کرد. او تابعهای تحلیلی را براساس ویژگی همدیسی بررسی کرد وبه‌این‌ترتیب امکان یافت که ازبه‌کاربردن فرمولهای تحلیلی‌صریح اجتناب کند. ویژگی‌همدیسی برگاوس نیزمعلوم بود (اثر او راکه در گزارشهای نجومی[4] نقل‌شده، ببینید.) این تنها ارجاعی است که در رسالهٔ ریمان به‌نوشته‌های موجود دراین‌زمینه داده شده وهمین است که‌زمینهٔ اولیه را برای‌شروع تحقیقات خود او فراهم ساخت.

هدف اصلی این تحقیقات عبارت بود از بررسی رفتار یك تابع تحلیلی، نه روی صفحه، بلکه روی رویه‌ای خاص یا به قول خود ریمان "روی رویه‌ای که برصفحه گسترده شده باشد". ریمان در بررسی کلی این‌مسأله به "تحلیل‌جا" بازگشت. ایدهٔ اصلی او این بود که بررسی رفتار یك تابع تحلیلی روی هر رویهٔ دلخواه به‌مطالعهٔ تابعی‌روی یك دامنهٔ ساده‌ـهمبند و به‌تعیین پرشهای تابع دربرشها تبدیل‌شود. به‌این منظور، تحقیق مبسوطی انجام دادکه دراساس، توپولوژیك محض بود. دراینجا، اولین نتایج مربوط به‌رویه‌های ریمانی‌ظاهر می‌شود. ما این نتایج را با تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم.

همبندی یك رویه با استفاده ازسیستمی‌ازبرشها تعریف‌می‌شود؛ یعنی در واقع یك تعریف ترکیبیاتی ارائه می‌شود که نطفهٔ نظریهٔ همولوژی آینده‌است. رویه، ساده‌ـهمبند نامیده می‌شود اگرهربرشی آن‌را به‌قسمتهای جداگانه‌ای تقسیم کند. اگرچنین نباشد، رویه را چندـهمبند می‌نامند. دراین تحقیق، در وهلهٔ اول رویه‌هایی با یك مرز موردنظرند. ریمان نشان دادکه همبندی رویه نباید به‌سیستم برشهایی که ایجاد می‌شوند بستگی‌داشته باشد. به‌طورمشخص، اگر تعداد برشهای یك سیستم معین‌برابر با n وتعداد قطعات ساده‌ـهمبند برابر با m باشد، آنگاه تفاضل $m-n$ به‌سیستم برشها بستگی‌ندارد و برای شکل مفروض یکسان خواهد بود. این عدد، مرتبهٔ همبندی نامیده می‌شود. مثلاً، در مورد قرص برابر است با ۱ — و در موارد حلقه، برابر با ۰ است. تعریف ریمان از درجهٔ همبندی با تعریف امروزی یك واحد اختلاف دارد. ریمان مفهوم همبندی‌را در مورد یك رویهٔ دوبعدی نیز به‌کار برد و رابطه‌ای را بین مرتبهٔ همبندی رویه و مرتبهٔ همبندی مرز ثابت کرد. تعداد خمهای مرزی جداگانهٔ یك رویهٔ nـ همبند یا برابر با n است و یا به‌اندازهٔ یك عدد زوج کوچکتر ازآن است.

ریمان پس ازاین زمینه‌چینیها به‌مسألهٔ اصلی‌پرداخت: تعریف رفتار یك تابع تحلیلی که بریك رویهٔ چندـهمبند دارای تکینیهای مفروض باشد. اوابتدا این مسأله رابرای یك دامنهٔ ساده‌ـهمبند حل کرد و سپس با استفاده از سیستمی از برشها و با محاسبهٔ پرشهای تابع در برشها، حالت‌کلی را به‌این حالت خاص تبدیل کرد. اودر مورد این دامنهٔ ساده‌ـهمبند دو قضیهٔ اساسی را ثابت کرد.

اولین قضیه می‌گویدکه اگر تابعی‌چون $u(x, y)$ در دامنه‌ای چون Ω در معادلهٔ لاپلاس صدق کند (چنین تابعی را همساز می‌نامند)،

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

آنگاه تابع u دارای مشتقات تمام مراتب است و به‌علاوه، قسمت حقیقی یك تابع تحلیلی چون $f(z)$ است. با مفروض بودن این مطلب، تابع f به‌وسیلهٔ u باتقریب افزایش‌یك جملهٔ ثابت موهومی محض به‌طور یکتا معین می‌شود.

قضیهٔ‌دوم ـ قضیهٔ وجود ـ می‌گویدکه دردرون یك دامنهٔ‌ساده‌ـهمبند (کافی‌است بحث را به‌مورد قرص محدودکنیم) یك و تنها یك تابع u وجود داردکه تا مرزی‌که مقدار مرزی مفروض f را درآنجا اختیار می‌کند، پیوسته باشد و در معادلهٔ لاپلاس‌در درون دامنه صدق کند.

---

1. *Vorstudien zur Topologie*
2. analysis situs
3. *Characteristica Geometrica*
4. *Astronomische Abhandlungen*

ریمان برای اثبات این‌قضیهٔ دوم یك‌اصل‌وردشی را به‌کار برد. به‌انتگرال مربوط به‌قرص

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy \qquad (۳)$$

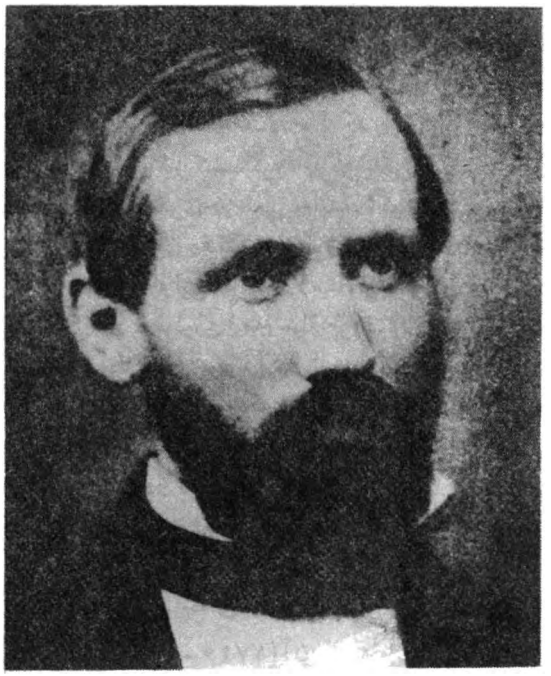
توجه کنید. در این انتگرال، شرایط زیر بر روی تابع u گذاشته می‌شود: u تا مرزی که در آنجا مقدار مرزی v را اختیار می‌کند پیوسته‌است و انتگرال (۳) در درون دامنه، متناهی‌است. حال‌ردهٔ همهٔ تابعهای u راکه در این شرطها صدق‌کنند درنظر می‌گیریم. چون انتگرال(۳) درهمه‌جامثبت‌است، نتیجه می‌شود که مقدارهایش کران پایینی دارند. فرض‌کنیم‌این‌کران به‌ازای تابع‌خاصی‌چون $u=\tilde{u}$ به‌دست می‌آیدکه دارای مقدارمرزی مفروض v است. این بدان‌معنی‌است که‌انتگرال(۳) به‌مینیمم‌خود $u=\tilde{u}$ می‌رسد. مساوی صفر بودن وردش انتگرال(۳) یك شرط لازم برای‌حصول مینیمم است:

$$\delta \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy=0$$

که، همچنانکه می‌دانیم، هم‌ارز با معادلهٔ $\Delta u=0$ است. پس، در صورت وجود جواب برای این مسألهٔ وردشی، فوراً یك همساز متناظر، و در نتیجه، یك تابع تحلیلی، می‌یابیم.

ریمان‌این‌ابزارتحلیل‌راکه‌بعداً آن‌را "اصل‌دیریکله"می‌نامید، بسیار به‌کار می‌برد. گرچه این مفهوم را گاوس، جورج گرین (۱۷۹۳–۱۸۴۱)، و ویلیام تامسن (لرد کلوین، ۱۸۲۴–۱۹۰۷) قبلاً می‌شناختند، ریمان اولین‌بار در درسهای دیریکله با آن آشنا شد. در "اصل دیریکله" دامهای، خطرناکی هست که دراولین‌نگاه، آشکارنیست. مشکل اینجاست که نمی‌توان پیشاپیش ادعاکرد که: اگر یك انتگرال وردشی دارای مینیممی باشد، تابعی بالفعل‌وجود داردکه به‌ازای آن، مینیمم حاصل می‌شود. برای تشریح این‌وضع می‌توان مستقیماً مثالی ازحساب وردشها آورد.مسألهٔ زیررادرنظر بگیرید: مسألهٔ یافتن‌خمی‌باکمترین طول دربین همهٔ خمهای‌هموار (دارای خمیدگی پیوسته)، که دو نقطهٔ A و B را به‌هم وصل کند و ازنقطهٔ سومی چون C بگذردکه فرض‌می‌شود با A و B همخط نیست. به‌آسانی دیده می‌شود که طول خط شکستهٔ ACB کران پایین طولهای خمهای موردنظراست. از سوی‌دیگر، آشکار است که ABC دارای یك شکستگی درنقطهٔ C است و بنابراین، به‌ردهٔ خمهای مفروض تعلق ندارد.

مباحثاتی‌که دراطراف "اصل دیریکله" درگرفت، نقش‌مهمی درتاریخ ریاضیات و نیز تا حدی در زندگی خود ریمان داشته است.



اصل دیریکله

واقعیت‌این‌است‌که ریمان قبلاً در رسالهٔ دکتری خود و به‌خصوص در "نظریهٔ توابع آبلی" از اصل وردشیی‌که ما مورد بحث قرار دادیم ــ"اصل‌دیریکله"ــ استفاده‌کرده بود تاوجودیك تابع مطلوب با نوع خاصی از تکینیها را ادعا کند. وایرشتراس نشان دادکه درحالت‌کلی،استنتاج وجود تابع مطلوب از اصل وردشی‌ناممکن است.این[موضوع وجود تابع] مستلزم اثبات خاصی‌بودکه ریمان ارائه نداده بود.

کلاین واکنشی راکه در برابر انتقاد وایرشتراس نشان داده شد به‌این صورت توصیف می‌کند:

> اکثریت ریاضیدانان از ریمان روی گرداندند ... ریمان عقیدهٔ کاملاً متفاوتی داشت. او درستی انتقاد وایرشتراس را درك می‌کرد ولی به‌طوری که زمانی وایرشتراس برایم نقل‌کرد، می‌گفت‌که‌ازاصل‌دیریکله تنها به‌این‌دلیل‌استفاده کرده‌که آن را ابزار مناسب و آماده‌ای می‌دیده است، و قضایای وجودی او هنوز درست‌اند.

خود وایرشتراس هم همین عقیده را داشت. او شاگردش هرمان شوارتس(۱۸۴۳–۱۹۲۱) را تشویق‌کردکه بررسی‌کاملی ازقضیهٔ وجودی ریمان به‌عمل آورد و به‌جستجوی‌اثباتهای دیگری‌بپردازد، و شوارتس دراین امر توفیق یافت.

در۱۸۶۹، بلافاصله‌پس‌ازآنکه ملاحظات انتقادی‌وایرشتراس به‌چاپ رسید، شوارتس‌وجود جواب برای مسألهٔ دیریکله رابدون استفاده از روش وردشی ثابت‌کرد. روش او به‌این صورت بود: ابتدا مسألهٔ دیریکله رابرای قرص به‌کمك انتگرال پواسن،ساختن یك تابع همساز $u(x, y)$ در قرص، وگرفتن مقدار f روی مرز، حل‌کرد. سپس نشان دادکه چگونه می‌توان به‌دامنه‌ای دلخواه‌که به‌صورت اجتماع تعدادی متناهی از قرصها به‌دست آمده باشد،

رسید. اثبات جالب دیگری که پوانکاره آن را عرضه کرد ــ روش جاروکردن[1] ــ مبتنی بر نظریهٔ پتانسیل بود.

"اشتباه" ریمان پیامد جالبتری هم داشت و آن اینکه، متخصصان هندسهٔ جبری را برانگیخت تا اثباتی صرفاً جبری برای قضیهٔ ریمان، و مشخصاً برای قضیهٔ ریمان-رخ، پیدا کنند. کار برجستهٔ رادولف فریدریش آلفرد کلبش (۱۸۳۳–۱۸۷۲) که اصطلاح "گونهٔ یك رویه" را ابداع کرد، در همین راستاست. پل گوردون (۱۸۳۷–۱۹۱۲)، ماکس نویتر[2] (۱۸۴۴–۱۹۲۱)، وسرانجام داویدهیلبرت (۱۸۶۲–۱۹۴۳) در ۱۸۹۹ موفق شدند اثباتی از اصل وردشی بدست دهند. مشکل بتوان در تاریخ ریاضیات قرن نوزدهم نمونهٔ دیگری بیاد آورد که تلاش برای یافتن یك اثبات دقیق بچنین نتایج پرباری منجر شده باشد.

از نظر فیزیکدانان، کار ریمان کاملاً قانع کننده بود. دراینجا جملاتی از گزارش زومرفلد تحت عنوان "کلاین، ریمان، وفیزیك ریاضی" را می‌آوریم:

> رسالهٔ ریمان در آغاز برای ریاضیدانان معاصر او غریب می‌نمود ... این امر که شیوهٔ استدلال این رساله بفیزیك نزدیکتر بود تا بریاضی، با داستانی که یکی از همکارانم نقل می‌کند تأیید می‌شود. زمانی این همکار با هلمهولتس و وایرشتراس برای گذراندن تعطیلات بجایی رفت. وایرشتراس رسالهٔ ریمان را در تمام مدت تعطیلی دردست داشت تا این اثر را که بنظر او کار پیچیده‌ای در ریاضیات بود در آرامش مطالعه کند. هلمهولتس نمی‌فهمید که متخصصان ریاضی چه پیچیدگیهایی درکار ریمان می‌بینند؛ ازنظر او، بیان ریمان فوق‌العاده واضح بود.

چرا توضیح ریمان از نظر فیزیکدانان این‌قدر واضح بود ولی از نظر ریاضیدانان اشکالاتی دربرداشت؟ دلیل این‌امر، البته، کند ذهنی ریاضیدانان ونبوغ فیزیکدانان نبود بلکه چیزهایی بود که هریك ازاین دوگروه از اثبات طلب می‌کرد.

تابع زتا

بموجب مقررات آکادمی برلین، نخستین وظیفهٔ کسی که بعنوان عضو وابستهٔ آکادمی انتخاب می‌شد. فرستادن گزارشی ازجدیدترین کارهایش بود. ریمان اثرخود دربارهٔ توزیع اعداد اول را بداین منظور برگزید، "مبحثی که نظر افرادی مانندگاوس و دیریکله را مدتی طولانی بخود جلب کرده بوده‌است وبنابراین، بایدامیدوار بودکه مورد توجه واقع شود". اثری که مؤلفش با این لحن فروتنانه از آن سخن می‌گوید، عنوانش دربارهٔ تعداد اعداد اولی که کوچکتر از عدد مفروضی هستند، بود. این اثرمسائلی را پیش روی ریاضیدانان قرار دادکه سیرتکامل شاخه‌های متعددی از ریاضیات را در طول یك قرن رقم زدند.

اویلر برای بررسی توزیع اعداد اول قبلاً تابع زتا (ζ) را مطالعه کرده بود. (نماد ζ منتسب بریمان‌است) و رابطهٔ زیر را بدست آورده بود

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod(1-p^{-s})^{-1}. \qquad (۱۵)$$

(ضرب روی همهٔ اعداد اول انجام می‌شود و جمع روی همهٔ اعداد صحیح مثبت. اویلر این رابطه را بازای sهای حقیقی بررسی کرد.) از این فرمول، بلافاصله وجود تعدادی نامتناهی عدد اول نتیجه می‌شود (سری مربوط به $\zeta(1)$ واگراست). ولی ریاضیدانان می‌کوشیدند اطلاعات دقیقتری دربارهٔ توزیع اعداد اول بدست آورند.

فرض کنید تعداد اعداد اول کوچکتر از یك عدد مفروض x را با $\pi(x)$ نشان دهیم. درآن زمان حدسی وجود داشت که ظاهراً از خود اویلر بود، و براساس آن وقتی $x \to \infty$، داریم

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} \longrightarrow 1. \qquad (۱۶)$$

علی‌رغم تلاشهای ریاضیدانانی چون اویلر، لژاندر، وگاوس، این حدس اثبات نشده بود. گاوس با انرژی زیادی که خصیصهٔ او بود وبا علاقه‌ای که بمحاسبه داشت، حتی جدولی ازاعداد اول کوچکتر از سه میلیون تشکیل داده بود.

قویترین نتیجه‌ای که قبل از ریمان بدست آمده بود، کار ریاضیدان بزرگ روس، چبیشف (۱۸۲۱–۱۸۹۴) بود که در ۱۸۵۴ در گزارشهای آکادمی علوم سن‌پترزبورگ به چاپ رسید. چبیشف ثابت کرد

$$A_1 < \frac{\pi(x)}{x/\log x} < A_2$$

(که در آن، $0.992 < A_1 < 1$، $1 < A_2 < 1.105$)، ولی ثابت نکرد که حد وجود دارد. او برای اثبات این نابرابری از رابطهٔ (۱۵) استفاده کرد. دراین مورد که ریمان ازکارچبیشف مطلع بوده یا نه، اطلاعی نداریم.

ریمان هم کارخود را با اتحاد اویلر (۱۵) آغاز کرد ولی سری (۱۵) را بازای مقادیر مختلط s مورد بررسی قرارداد و بهاین طریق در بررسی تابع ζ گامی برداشت که کاملاً تازگی داشت. (ما اصطلاحات پذیرفته شدهٔ جدید را بکارخواهیم برد واین تابع را تابع ζی ریمان خواهیم نامید). ریمان همگرایی سری (۱۵) را برای مقادیر مختلط بررسی کرد و معادلهٔ تابعی تابع ζ را استنتاج کرد.

کافی است فقط مسألهٔ توزیع اعداد اول را درنظر بگیریم تا دیده شود که چه نتیجه‌های مهمی می‌توان از ویژگیهای تحلیلی این تابع بدست آورد. مثلاً، قانون توزیع اعداد اول (فرمول ۱۶) هم‌ارزاست با این گزاره که تابع ζی ریمان صفرهای مختلطی که قسمت حقیقی آنها برابر با ۱ باشد، ندارد: اگر $\alpha(a+it)\neq 0$، $t\neq 0$. ولی جالبتر از همه، این گزاره است که همهٔ صفرهای توابع $\zeta(s)$ بهاستثنای صفرهای بیمایه $(-2, -4, \ldots, -2n)$ روی خط راست $\mathrm{Re}\,\zeta(s)=1/2$ قرار دارند. این، فرضیهٔ معروف ریمان است که هنوز ثابت نشده‌است.

بیشتر نتایجی راکه دراین اثر آمده‌اند، ریاضیدانان نسلهای بعد بدقت اثبات کردند. بخصوص، ژاك آدامار (۱۸۶۵–۱۹۶۳)

---

1. balayage 2. Max Noether

و شارل دلاواله پوسن (۱۸۶۶–۱۹۶۲) درستی فرمول مربوط به $\pi(x)$ را ثابت کردند. ولی چنانکه خود آدامار نوشت، "تقریباً سه دهه طول کشید. تا توانستم همهٔ ویژگیهایی را که ریمان برای آنها فقط یك فرمول داده بود اثبات کنم، البته بجز یکی". این یکی، فرضیهٔ ریمان بود. دردستنوشته‌هایی از ریمان که درآرشیو دانشگاه گوتینگن نگهداری می‌شود به مطالب دیگری در ارتباط با $\zeta(s)$ برمی‌خوریم ولی متأسفانه، بر اساس این نوشته‌ها نمی‌توان هیچ اثباتی به‌دست آورد و فقط می‌توان دربارهٔ تأملاتی که ریمان را به‌این فرضیه هدایت کرده اطلاعی کسب کرد. آدامار جمله‌ای را که در نوشته‌های ریمان آمده به‌یاد می‌آورد: "این ویژگیها ازیکی از نمایشهای این تابع، که من نتوانستم آن را به‌قدری ساده کنم تا قابل انتشار باشد، به‌دست می‌آیند." این جمله، یادداشتی را به یاد ما می‌آورد که پیرفرما درارتباط با قضیهٔ معروفش نوشت، قضیه‌ای که از امتناع حل معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ در اعداد صحیح به‌ازای $n>2$ سخن‌می‌گوید. جالب این‌است که مشابه‌این‌فرضیه درمورد هیأتهای دیگری، همنهشتی L-تابعها، به‌وسیلهٔ آندره ویل‌در۱۹۴۱ ثابت شد. پس‌می‌توان گفت که به‌یك اعتبار، هیأت اعداد مختلط و حقیقی که این‌همه با آن‌آشناییم، از هیأتهای دیگرپیچیده‌تراست.

سرنوشت کارهای ریمان

تا زمانی‌که ریمان زنده بود، از راه دستاوردهای خود نفوذ و اعتباری راکه ظاهراً انتظار داشت به دست نیاورد. این نکته در وهلهٔ اول دربارهٔ دستاوردهایی‌صادق‌است‌که امروز شاید مهمترین خدمات او به‌علم محسوب گردد: نظریهٔ انتگرالهای‌آبلی، رویه‌های ریمانی، وهندسهٔ ریمانی. دلایل عینی وذهنی بسیاری برای‌توضیح این‌امرمی‌توان‌آورد. نظرهای اودربارهٔ هندسه مسلماً برای‌بسیاری از ریاضیدانهاکاملاً تازگی داشت. نباید فراموش‌کرد که نفس تصور هندسهٔ نااقلیدسی با دشواری پذیرفته شده و اسباب خشم غالب فلاسفه را فراهم‌کرده بود. مثلاً دورینگ[1] درمقاله‌ای تحت عنوان "تاریخچهٔ انتقادی اصول عام مکانیك" که از سوی دانشکدهٔ فلسفهٔ دانشگاه گوتینگن در۱۸۷۲ برندهٔ جایزهٔ بنکه[2] شد، نوشت:

> بنابراین، استاد فقید، ریاضیات گوتینگن، ریمان–که ازهمه لحاظ دنباله‌رو [گاوس] بود مگر از لحاظ نهانکاری–حتی تحت تأثیر فلسفه بافی هربارت گمراه شد و (در مقاله‌اش تحت عنوان "دربارهٔ فرضهایی‌که مبانی هندسه هستند") نوشت: "ولی به‌نظر می‌رسد مفاهیم تجربی‌که تعریفهای فضایی عالم فیزیکی برآنها استوارند، مفهوم جسم صلب و پرتو نور، در مقیاس بینهایت‌کوچك دیگر معتبر نیستند. بنابراین، می‌توان گفت که این روابط فیزیکی فضایی در مقیاس بینهایت کوچك با اصلهای موضوع هندسه تطابق ندارند؛ و در واقع، این فکر در صورتی‌که مآلاً پدیده‌ها را ساده‌تر توضیح دهد، مجاز است."

سالها گذشت تا ایده‌های ریمان و هلمهولتس در کارهای پوانکاره و اینشتین تحقق یافت. آثار ریمان در زمینهٔ توابع آبلی

1. E. K. Duehring 2. Benecke

–که از لحاظ ایده‌هایی‌که دربردارد درخشانترین آثار اوست– به‌شیوهٔ شهودی خاص او نوشته شده‌است. این مطالب درمواردی مبتنی براحکام اثبات نشده‌است و از لحاظ دقت با استانداردهای ریاضیات آن زمان انطباق ندارد. برای‌آنکه ببینیم تا چه حد ارزش کار ریمان ناشناخته بود، باز به مقالهٔ دورینگ مراجعه می‌کنیم:

> گواه مستقل‌نبودن اثر ریمان در زمینهٔ توابع‌آبلی‌این‌است که در این نوشته، صرفاً به‌خاطر اعتقاد ریمان به‌مرجعیت استادخود، همان روش‌شهودی استاد دربیان مطالب، به‌همان شکل‌کاملاً دلبخواهی، به‌کارگرفته و بسط داده شده‌است.

"استاد"ی‌که دراینجا ازاویاد می‌شود، گاوس‌است. این‌مقاله امروز مایهٔ تعجب‌است اما باید درنظرداشت‌که دورینگ در زمان‌خودش فیلسوف معروف و پرنفوذی بود. ولی اگراین انتقاد بسیارناشیانهٔ دورینگ راهم به‌حساب نیاوریم، واقعیت این‌است‌که ریاضیدانان با صلاحیت نیز درك چندان روشنی ازکارهای ریمان نداشتند.

انتقاد وایرشتراس از"اصل‌دیریکله" که‌کار ریمان مبتنی برآن بود، دراین مورد بی‌تأثیر نبود. با این همه، به تدریج ایده‌های ریمان راکاملاً شناختند. هیلبرت "اصل‌دیریکله" را ثابت‌کرد وهمهٔ استدلالهای ریمان براساس محکمی استوارشد. ریمان به‌این دلیل ریاضیدان بسیاربزرگی‌است‌که تقریباً هریك ازکارهایش سرآغاز تحقیقات پربارجدیدی ازآب درآمده‌است.

می‌توان از نظریهٔ توابع خود ریخت، قضیهٔ آتیا–سینگر دربارهٔ اندیس عملگرهای دیفرانسیل برخمینه‌های با بعد دلخواه –که تعمیمی است از قضیهٔ ریمان–رخ–، مسألهٔ مدولوسها درنظریهٔ خمینه‌های مختلط، وچیزهای دیگر نام برد.

جوهر موفقیتهای ریمان در این زمینه‌های مختلف فیزیك و ریاضی، عبارت بود ازنگرش فراگیر و همه‌جانبهٔ او به‌پدیده‌های طبیعی و شم خارق‌العادهٔ او در ادراك روابطی‌که بین پدیده‌های ظاهراً نامتجانس وجود دارد. او درتأملات فلسفی‌اش‌می‌نویسد: "کار عمدهٔ من عبارت است از درك جدیدی از قوانین شناخته‌شدهٔ طبیعت".

در اینجا شاید بی‌مناسبت نباشدکه به‌وجه تمایز دو ریاضیدان بزرگ، ریمان و وایرشتراس، که نامشان در ریاضیات معاصر اغلب کنارهم می‌آید، توجه‌کنیم.

روش‌منطقی وایرشتراس، برخلاف‌روش‌شهودگرایانهٔ ریمان، عبارت بود از یك رشته استدلال دقیق و زنجیروار. او درمقالات و درسهای خود سخت به این‌روش پایبند بود. مفاهیمی‌که او از دقت درنظرداشت بعدها درکارهای ریاضی‌به‌صورت معیاردرآمد. وایرشتراس، نمونهٔ‌کلاسیکی‌ازیك ریاضیدان محض‌شمرده می‌شود و همین امرباعث می‌شودکه نظر او دربارهٔ رابطهٔ ریاضیات با کاربردهایش‌اهمیت خاصی داشته باشد:

> روابطی‌که بین فیزیك و ریاضیات برقرار می‌شود باید ژرفتر ازاین باشدکه فیزیك به‌ریاضیات به‌صورت یك‌رشتهٔ کمکی، ولو ضروری، نگاه‌کند و ریاضیدانها هم مسائلی‌را که فیزیکدانها مطرح می‌کنند صرفاً به صورت مثالهایی برای روشهایشان درنظر بگیرند... به‌این سؤال‌که "آیا

واقعاً از این نظریه‌های انتزاعی که ریاضیدانان معاصر را به‌خود مشغول داشته می‌توان چیزی به‌دست آورد که مستقیماً قابل کاربرد باشد؟" من چنین پاسخ می‌دهم که ریاضیدانان یونانی ویژگیهای مقاطع مخروطی‌را به‌شیوه‌ای صرفاً نظری و در زمانی مطالعه کردند که هیچکس نمی‌توانست پیش‌بینی کند این‌خمها نشان‌دهندهٔ مسیر گردش‌سیارات‌اند. من‌عقیده دارم‌که توابع بسیار بیشتری بـا این‌گونـه ویژگیها پیدا خواهد شد؛ مثلاً، به‌نظرمن، تابعهای معروف Θی ژاکوبی از یك طرف این‌امکان را فراهم می‌کنندکه ببینیم یك عدد مفروض به‌چند مربع تجزیه می‌شود و ازاین‌طریق‌راستیدن قـوسی از بیضی را امکانپذیر می‌کنند، و از طرف دیگر، یافتن قانون صحیح نوسانات آونگ را میسرمی‌سازند.

تمایز آشکار بین وایرشتراس و ریمان نه‌تنها درمسائل‌فیزیکی دشوارومشخصی که حل کردندبلکه درتلاش برای ساختن‌نظریه‌های توضیح دهندهٔ پدیده‌های طبیعی، متجلی‌است.

این دو دیدگاه متقابل دربارهٔ ریاضیات در همهٔ مراحل تکامل علم دیده می‌شود.

ژاکوبی این دونظر را به‌شکل‌واضحی بیان می‌کند:

آقای فوریه عقایدی از این قبیل داردکه‌گویا هدف اصلی ریاضیات، سودمندی اجتماعی‌آن وتوضیح پدیده‌های‌طبیعت است؛ ولی او درمقام یك فیلسوف باید دانسته باشدکه‌تنها هدف علم، اعتلای‌شهامت عقل‌بشری‌است و بنا براین،مسائل نظریهٔ اعداد، کم ارزشتر از مسائل مربوط به‌نظام جهان نیستند.

بارآورترین پدیده در سیر واقعی تحول علم، همزیستی این دو دیدگاه‌است‌که می‌توانیم‌آنها را به‌پیروی از نیلس‌بور از زمرهٔ "حقایق بزرگ" بشماریم. (حقیقت‌بزرگ، حقیقتی‌است‌که نقیض آن‌هم حقیقت بزرگی‌باشد.) تأیید این‌گفته را می‌توان درکارهای ژاکوبی‌در زمینهٔ مکانیك وکارهای ریمان در نظریهٔ اعداد ملاحظه کرد. با این همه، در تاریخ علوم ریاضی دوره‌هایی وجود داشته است‌که یکی از این‌دوگرایش رایجتر از دیگری بوده‌است.

کلاین،که یك "شهودگرا"ی نمونه بود و تلاش زیادی‌برای شرح وبسط ایده‌های ریمان‌کرد، توصیف طنزآمیزی از ریاضیات انتهای قرن نوزدهم به‌دست داده‌است:

ریاضیات روزگار ما، تولید طپانچه و سلاحهای سبك رادر زمان صلح به‌یـاد من می‌آورد. ویترین فروشگاه اسلحه، مملو از مدلهایی است‌که فرد متخصص از ظرافت و ساخت هنرمندانهٔ آنهـا لذت می‌برد؛ ولی علت وجودی و فایـدهٔ این‌اشیا ــ یعنی‌قابلیت آنها درتیراندازی وهدف‌قراردادن دشمن ــ از نظر دور می‌ماند.

درست همین وضع در دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ پیش آمد. فریمن دایسن فیزیکـدان نظری معروف آمریکایی این وضـع را به‌خوبی توصیف کرده‌است: "ازدواج ریاضیات و فیزیك کـه در قرنهای‌گذشته آن‌قدر بارآور بود اخیراً به‌طلاق انجامیده است." علل مختلفی‌باعث پیدایش‌این وضع شده بود. امروزالبته تصورش ناممکن‌است‌که ریاضیدانی در آزمایشگاه فیزیك تجربی کارکند، دوران ریمان دیگر باز نمی‌گردد، ولی‌درسالهای اخیرشاهدتجدید علاقه به‌فیزیك درمیان ریاضیدانان"محض"هستیم. این‌تجدید علاقه اولین ثمراتش‌را درهمان زمینه‌های ریاضی به‌بارآورده‌که ریمان درآنها کارکرده‌است.

در عین‌حال، بین مـوضوعهایی کـه ذهن ریمان را به‌خود مشغول داشته بودند روابط‌کاملاً جدید وجالبی‌پیدا شده‌است. مثلاً در نظریهٔ موجهـای غیرخطی (ونیز در مورد رده‌های دیگری از معادلات)، پای‌تابع‌Θی ریمان درکشف سولیتونهای تناوبی‌به‌میان آمده است. نظریهٔ‌گرانش‌که مبتنی برهندسهٔ ریمانی‌است با نظریهٔ واکنشهای قوی (از طریق نظریهٔ میدانهای پیمانه‌ای) درآمیخته است. نیز نظریهٔ‌کوانتومی‌گرانش پدیدآمده‌کـه درآن، روشهای هندسهٔ جبری و توپولوژی بسیاربه‌کار می‌روند. این روشها ازکار ریمان در زمینهٔ توابع آبلی نشأت‌گرفته‌اند. هنوز خیلی‌زود است که از "رنسانس"جدیدی در ارتباط متقابل فیزیك و ریاضی‌سخن بگوییم ولی موفقیتهای قاطعی دراین‌جهت به‌دست آمده است.

بیش از صد سال از مرگ ریمان می‌گـذرد. ریاضیات بـا پیدایش ایـده‌هـا و نتایج جدید بسیار غنیتر شده است. نظریـهٔ مجموعه‌های‌کانتور چهره عوض‌کرده ودرجهٔ انتزاع بسیاربالا رفته است ــ کافی‌است‌نظریهٔ‌رسته‌ها و تابعگونها، نظریهٔ‌اسکیمهای‌صوری گروتندیك و نظایر اینها را به‌یادآوریم. و جالب اینجاست‌که در قلهٔ نظریه‌های جدید، برای مفاهیم‌ریمانی‌که به‌نظرمعاصران اومبهم و نادقیق بودنـد، توصیف بسیار رسایی به‌زبـان هندسهٔ جبری و توپولوژی معاصرپیدا شده است.

محك باروری هرایدهٔ ریاضی، امکان حصول پیشرفت درزمینهٔ مسائل مشخص و پیچیده‌ای [در حول وحوش آن ایده] است‌کـه نسلهای قبل ازخود به‌جا گذاشته‌اند. اکنون نیزمانندگذشته، فرضیهٔ ریمان ریاضیدانان معاصر را به‌مبارزه می‌طلبد.

شکی‌نیست‌که‌کارهای ریمان نه‌تنها نظرمورخان علم‌بلکه توجه ریاضیدانان پژوهشگر را نیز سالهای متمادی به‌خود جلب خواهد کرد.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

● این کتاب را انتشارات Birkhaüser به انگلیسی منتشر کرده و شامل دو قسمت است. قسمت اول ترجمه‌ای است از مقاله‌ای که اول بار در یکی از مجلات شوروی به نام *پریرودا* (*طبیعت*) به مناسبت صد و پنجاهمین سالگرد تولد ریمان به چاپ رسیده است. قسمت دوم، به کاربردهای گوناگون توپولوژی در فیزیك معاصر اختصاص دارد.

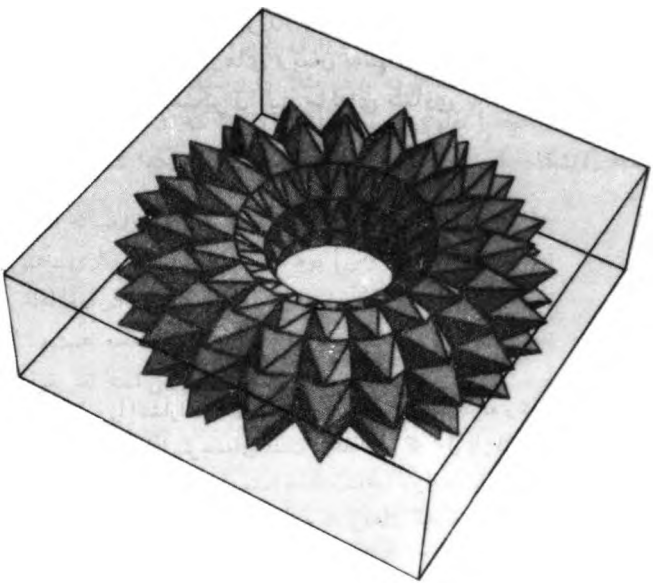
مطلب حاضر از منبع زیر به فارسی ترجمه شده است:

Michael Monastyrsky, "Excerpts from Riemann, topology, and physics," *The Mathematical Intelligencer*, (2)9 (1987) 46-52.

★ میخائیل موناستیرسکی، بخش نظری مؤسسهٔ فیزیك نظری و تجربی آکادمی علوم شوروی

آزمایشگاه ریاضیات

یحیی تابش، سیدعبادالله محمودیان



در سالهای اخیر دربرخی از تحقیقات ریاضی محض استفاده از کامپیوتر بیش ازپیش به‌چشم می‌خورد. بعضی از ریاضیدانان در ابتدا با شگفتی و احتیاط با این پدیده مواجه می‌شوند وحتی آنرا پدیده‌ای انحرافی می‌پندارند، ولی هرقدر هم که محتاطانه با این پدیده برخوردکنیم واقعیت این‌است‌که به‌عصر ریاضیات تجربی قدم‌گذارده‌ایم. شاید یکی از برجسته‌ترین کاربردهای ریاضیات این قرن پیشرفت حسابگرهای الکترونیکی باشد، ولی اینك کامپیوتر خود به‌یاری ریاضیات برخاسته‌است.

ریاضیدانان کامپیوتر را به عنوان "وسیلهٔ آزمایش" به کار می‌گیرند تا ایده‌ها و حدسهای اولیهٔ خود را برای دست‌یافتن به‌حدسهای دقیقتر بیازمایند. درمواردی‌کامپیوتر درپروراندن‌اثبات به‌عنوان همکار ریاضیدان عمل‌می‌کند و در مواردی نیزمثالهای ناقضی به‌کمك‌کامپیوتر ساخته می‌شوندکه ساختن آنها بدون‌استفاده ازکامپیوتر قابل تصور نیست. علاوه بر اینها به‌وسیلهٔ روشهای ساختاری باکمك‌کامپیوتر وجود برخی "اشیای" ریاضی به‌ثبوت می‌رسد. زمینه‌های متنوعی از ریاضیات از جمله نظریهٔ اعداد، هندسهٔ جبری،دستگاههای دینامیکی، ریاضیات گسسته وترکیبیات، توپولوژی، و آنالیز مختلط پهنهٔ فعالیتهای تجربی و آزمایشگاهی به‌کمك‌کامپیوتر شده‌اند.

کامپیوترمی‌تواند با انجام‌عملیات جبری، ترکیبیاتی،وتحلیلی نقشی در یك "آزمایش ریاضیاتی" به‌عهده‌گیرد. به‌عبارت دیگر سه‌گونه توانمندی‌کامپیوتر این امکان‌رافراهم‌کرده‌است: محاسبات عددی، محاسبات‌نمادین،وگرافیك‌کامپیوتری. روشهای عددی‌برای تقریب زدن مسائل پیوسته به‌کار می‌رود. عملیات نمادین برای کارهایی از قبیل مشتقگیری، انتگرالگیری، و محاسبات برداری و تانسوری مورد استفاده واقع می‌شود. ولی گرافیك کامپیوتری از اساسیترین توانائیهای کامپیوتر است‌که یاری‌دهندهٔ پژوهشگران ریاضی‌است. گرافیك کامپیوتری تجسم‌بخش ساختارهای پیچیده و مجردی‌است‌که امکان دست یافتن به"نمود" آنها به‌سهولت میسر نیست. هندسهٔ برخالی، مجموعه‌های ژولیا، ومقولاتی‌درنظریهٔ‌کیفی معادلات دیفرانسیل از جمله زمینه‌هایی است که به‌مدد گرافیك کامپیوتری رونق تازه‌ای یافته‌است.

در فعالیتهای پژوهشی، کامپیوتر به‌صورت ابزاری در دست پژوهشگرکارهای وقتگیر و توانفرسا را انجام می‌دهد. و در نتیجه برای پژوهشگر فرصت کافی فراهم می‌شود تا به‌کارخلاقه بپردازد. با مثالی ساده وبسیارابتدایی، چگونگی این امررا نشان می‌دهیم. فرض‌کنید می‌خواهیم فرمولی برای تعداد اعداد فرد درهرسطراز مثلث خیام-پاسکال پیدا کنیم. با نوشتن چند سطر از این مثلث و

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱
۱ ۸ ۲۸ ۵۶ ۷۰ ۵۶ ۲۸ ۸ ۱
. . . . . .

شمردن اعداد فرد در هرسطر خواهیم داشت:

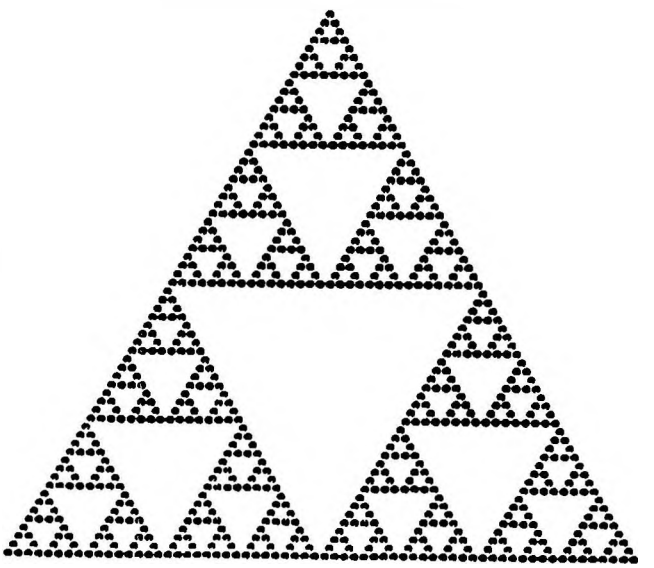
n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
تعداد اعداد فرد درسطر nام	۱	۲	۲	۴	۲	۴	۴	۸	۲	...

با توجه به‌این‌اعداد، یك حدس مثلاً می‌تواند این باشد که تعداد اعداد فرد درهرسطر همیشه توانی از عدد ۲ است. حتی با تأمل بیشتر می‌توان حدس زد که این عدد درسطر nام به‌صورت $2^{\gamma(n)}$ است که در آن $\gamma(n)$ تعداد رقمهای ۱ در بسط دودویی عدد n است:

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
بسط دودویی	۰	۱	۱۰	۱۱	۱۰۰	۱۰۱	۱۱۰	۱۱۱	۱۰۰۰	...

حال اگر بخواهیم حدس فوق را اثبات کنیم، می‌توان با یك برنامهٔ کامپیوتری خروجی زیر را استخراج کرد که در آن ● علامت عدد فرد، و جای خالی نشانگر عدد زوج درهرسطر مثلث است. شکل زیر ۶۴ سطر اول را نشان می‌دهد.

توجه کنید که مثلاً "طرح" ۳۲ سطر اول عیناً درطرفین ۳۲ سطر بعدی ظاهر می‌شود به‌طوری که بین آنها هیچ عددی بجز اعداد



زوج قرار ندارد. حال با این مشاهدات و برداشتها می‌توان نشان داد که: (الف) تکراری بودن این طرح در حالت کلی نیز برقرار است. (ب) حدس فوق که تعداد اعداد فرد درهرسطر $2^{\gamma(n)}$ می‌باشد درست است.

گذشته از اینکه کامپیوتر یك ابزار آزمایش در پژوهشهای ریاضی است، در آموزش ریاضی نیز نقش "آزمایشگاهی" ویژه‌ای دارد. در آموزش، نرم‌افزارها و درس‌افزارهای کامپیوتری با توانایی خود در انجام محاسبات نمادین و گرافیك کامپیوتری ابزارهایی کمکی هستند که به‌کمك آنها آموزش سریعتر و بهتر انجام می‌شود. علاوه بر آن در برخی موارد کامپیوتر نقش معلم و خودآموز زنده‌ای را عهده‌دار می‌شود.

هم‌اکنون کتابهای زیادی در دروس مختلف ریاضی نوشته می‌شود که در آنها آموزش ریاضی به‌کمك کامپیوتر صورت می‌پذیرد. این کتابها بعضی‌اوقات نرم‌افزارهای ویژه‌ای را نیز به‌همراه دارند. تولید "درس‌افزارهای ریاضی" شتاب روزافزونی دارد و این درس‌افزارها به‌طور فزاینده‌ای درزمینه‌هایی ازقبیل حساب دیفرانسیل وانتگرال، آنالیزعددی، معادلات دیفرانسیل، ریاضیات گسسته، جبر خطی، وحتی جبرمجرد و نظریهٔ اعداد به‌بازارعرضه می‌شوند.

کمك گرفتن ازکامپیوتر درآموزش بعضی ازدروس فوق‌الذکر به‌سادگی قابل تصوراست ولی نحوهٔ استفاده ازکامپیوتر در برخی دروس مجرد در بدو امرچندان روشن نیست. به‌مثالی در زمینهٔ جبر توجه می‌کنیم. کتاب جبر مجرد معاصر نوشتهٔ گالیان [۱] دارای ۴۶ مسألهٔ کامپیوتری است. به‌وسیلهٔ این مسائل دانشجویان هم‌امکان آن‌را پیدا می‌کنند که قضایای کتاب را خوب درك کنند وهم روش حل مسأله و حدس و اثبات را یاد می‌گیرند. مثلاً بعد از تعریف گروه، گروه $U(n)$ معرفی می‌شود که عبارت است از تمام اعداد صحیح ومثبت کوچکتر از n که نسبت به n اول هستند با عمل ضرب به‌پیمانهٔ n. دانشجو به‌سادگی می‌تواند خواص گروه را در مورد این‌مثال مورد بررسی قراردهد ولی‌پی‌بردن به‌ساختمان این گروهها (به‌ازای nهای مختلف) کار ساده‌ای نیست. از طرف دیگر این گروهها می‌توانند به‌عنوان مثال ومثال ناقض دربسیاری از موارد به‌کار گرفته شوند. اثبات دو قضیهٔ زیر نیز که ساختمان این گروهها را مشخص می‌کنند معمولاً از محدودهٔ اولین درس درجبر خارج است.

قضیهٔ ۱. اگر r و s نسبت به‌هم اول باشند، آنگاه

$$U(rs) \approx U(r) \oplus U(s)$$

که دراینجا علامت $\approx$ به‌معنای یکریختی و $\oplus$ به‌معنای حاصلجمع مستقیم دوگروه‌است.

قضیهٔ ۲. (گاوس ۱۸۰۱).

(i)
$$U(2) \approx \{1\} \qquad U(4) \approx Z_2$$
$$U(2^n) \approx Z_2 \oplus Z_{2^{n-2}} \qquad (\text{برای } n \geqslant 3)$$

(ii)
$$U(p^n) \approx Z_{p^n - p^{n-1}} \qquad (\text{برای عدد فرد و اول } p)$$

درکتاب گالیان، این‌قضیه‌ها دراواخر بحث مربوط به‌گروهها آمده

است ولی قبل از رسیدن به‌این دو قضیه، مسائل کامپیوتری (البته همراه با مسأله‌های معمولی) در اواخر هرفصل ذکر شده‌است. در طی این‌مسائل از دانشجوخواسته می‌شود تا به‌کمك کامپیوتر، مرتبهٔ $U(n)$ ومولدزیرگروههای دوری آن‌به‌ازای مثلاً $1<n<100$ را محاسبه‌کند و سپس مثلاً بررسی کند که مرتبهٔ زیرگروه، مرتبهٔ خودگروه را می‌شمارد وهمچنین سعی کند $U(n)$ را با برنامه‌های کامپیوتری به‌حاصلضرب مستقیم گروهها تجزیه نماید و تعیین کند که چه موقع $U(n)$ دوری است. با این قبیل مسأله‌ها درك قضایا آسانترشده و نهایتاً دانشجو به‌فهم و درك قضایای فوق می‌رسد.

در "آزمایشگاه ریاضیات" مسألهٔ اساسی عبارت است از تقریب‌زدن یك مسألهٔ پیوسته با مدلی گسسته، یا مدلسازی برای انجام محاسباتی نمادین. گرافیك کامپیوتری با استفاده از الگوریتمهای عددی، تقریبی ازشکل واقعی را ارائه می‌دهد ولی برای به‌دست آوردن تقریبی مطلوب، هم‌کامپیوتری پرقدرت لازم است وهم الگوریتمی مناسب. مثلاً برای فراهم‌کردن تصویر روی جلد این شماره‌که پوششی‌ازصفحهٔ هذلولوی با مثلثهایی‌با زوایای $\pi/2$، $\pi/3$، و $\pi/7$ است با الگوریتمی‌که درابتدا تهیه‌شده بود به‌چهارده ساعت وقت‌کامپیوتر نیاز بود، حال آنکه با الگوریتم جدیدی فقط در ظرف پنج دقیقه این شکل فراهم آمد. گذشته از الگوریتم‌که بایدکارامد باشد نوع‌کامپیوترمورد استفاده نیز حائز اهمیت‌است. کامپیوتر مورد استفاده باید پردازنده‌ای قوی وسریع داشته باشد، و علاوه برآن حافظهٔ زیادی نیزلازم‌است. ولی مهمتر از اینها، گرافیك کامپیوتری "نفیسی" نیز موردنیاز است. گرافیك کامپیوتری به‌کمك نقطه‌های‌روشن‌شونده‌روی‌صفحهٔ نمایش‌کامپیوتر، اشکال متنوعی را ترسیم می‌کند. نفاست گرافیك به‌این‌معنی‌است‌که تعداد نقاط روشن‌شونده در واحد سطح، درحد مطلوبی‌باشد.

در تقسیم‌بندی کامپیوترها، آن نوعی که برای تجهیز آزمایشگاههای ریاضیات مناسب‌است به‌**ایستگاه‌کار**[1] موسوم‌است. ایستگاه‌کار، ریزکامپیوتری است با پردازندهٔ قوی، گرافیك نفیس، وحافظهٔ زیاد. برای ساخت "ایستگاههای‌کار" تکنولوژی سطح بالایی موردنیازاست‌که معدودی از سازندگان‌کامپیوتر آن را در اختیار دارند. از بین معروفترین شرکتهای سازندهٔ ایستگاه‌کار از دو شرکت سان[1]، وآپولو[2] می‌توان نام برد. شرکت سان ریزپردازندهٔ اسپارك[3]، و شرکت آپولو ریز پردازندهٔ پریزم[4] را برای استفاده‌های علمی ومهندسی به‌بازار ارائه‌کرده‌اند.

نرم‌افزارهای قابل‌استفاده درآزمایشگاه ریاضیات نیز طیف گسترده‌ای دارند و مرتباً نرم‌افزارهای جدیدی به‌بازار عرضه می‌شوند. دربین این نرم‌افزارها برخی برای امور آموزشی، برخی برای آموزش وپژوهش، و بالاخره بعضی‌ازآنها فقط برای پژوهش‌درزمینه‌ای خاص‌قابل‌استفاده هستند. برخی‌ازنرم‌افزارهای آموزشی وپژوهشی عبارت‌اند از: *Math Lab*، *MuMath*، *MACSYMA*، *Mathematica*، و *CAYLEY*. هریك ازاین نرم‌افزارها مشخصات و تواناییهای ویژه‌ای دارد. از بین آنها **ماتماتیکا** از همه جدیدتر است و هم برای آموزش و هم برای پژوهش قابل استفاده است. مشخصات ویژهٔ ماتماتیکا به قرار زیر است:

۱. کاربرد: محاسبات عددی ونمادین، برنامه‌سازی نمادین، عملیات گرافیکی.
۲. حافظهٔ موردنیاز: حداقل یك مگابایت.
۳. نوع‌کامپیوترقابل‌استفاده: اپل، سازگار با آی‌بی‌ام (با پردازندهٔ ۳۸۶)، آپولو، و سان.
۴. تهیه‌کننده: شرکت تحقیقاتی ولفرم[5] (درارتباط با ام.آی.تی)، ۱۹۸۹.

ماتماتیکا برای عملیات عددی، گرافیکی، و نمادین مورد استفاده قرار می‌گیرد. مثلاً دو نمونه از محاسبات نمادین به‌قرار زیراست:

```
In[1]:= Factor[x^6 - y^6]
Out[1]= (x - y) (x + y) (x^2 - x y + y^2) (x^2 + x y + y^2)
```

تجزیهٔ x^6-y^6 به‌عوامل اول.

```
In[2]:= Integrate[1/(1 - x^3), x]
```

$$\text{Out[2]}= \frac{\text{Sqrt[3] ArcTan}\left[\frac{1 + 2\,x}{\text{Sqrt[3]}}\right]}{3} - \frac{\text{Log[1 - x]}}{3} + \frac{\text{Log[1 + x + x}^2\text{]}}{6}$$

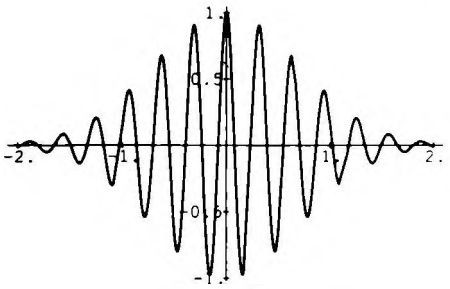
محاسبهٔ $\int \frac{1}{1-x^3}\,dx$.

1. Sun microsystems
2. Apollo computer Inc
3. Spark
4. Prism
5. Wolfram Research Inc

1. Work Station

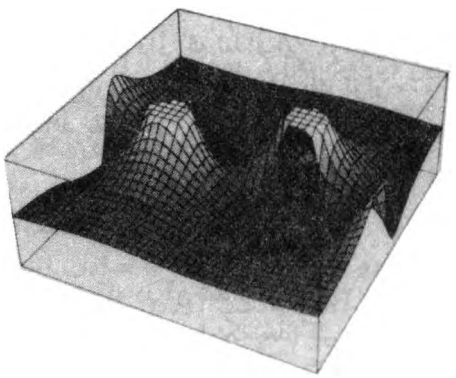
همچنین دو نمونه از عملیات گرافیکی را در مثالهای زیر می‌بینیم:

```
In[1]:= Plot[Exp[-x^2] Cos[20x],
                {x, -2, 2}]
```



ترسیم تابع $e^{-x^2}\cos 20x$ برای x بین ۲− تا ۲.

```
In[1]:= Plot3D[Im[Sec[x + I y]],
                {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
```



ترسیم $Im(Sec(x+iy))$ برای x بین ۴− تا ۴ و y بین ۴− تا ۴.

و دیگر اینکه، هرچند به نظر نمی‌رسد کامپیوتر در طراحی ساختمان اثبات جایگزین تفکر ریاضیدان شود، ولی در موارد زیادی به‌طور اساسی به‌یاری ریاضیدان می‌شتابد، ودرواقع مکمل توانایی ریاضیدان است.

تذکار این نکته ضروری است که در کشور ما هم بایستی با روند استفاده از کامپیوتر در آموزش و پژوهش ریاضی به‌نحو مطلوبی مواجه شد و به‌استقبال تجهیز آزمایشگاههای ریاضیات رفت. هم پژوهشگران باید به‌نحو سنجیده‌ای از روشهای جدید استفاده به‌عمل آورند، و هم در آموزش باید اهمیت کافی به‌استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری داده شود. آشنایی با استفاده از نرم‌افزارهایی نظیر ماتماتیکا باید جزء معارف عمومی یك دانشجوی ریاضی باشد و از بسیاری از درسهای سنتی ارزش کمتری ندارد. برنامه‌های آموزشی باید به طور انعطاف‌پذیر این امکان را در برنامه‌های رسمی خود فراهم کنند.

مراجع

1. J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, D. C. Heath & Company (1986).
2. D. A. Smith & others, *Computer & Mathematics*, MAA (1988).

اثباتهای ریاضی: پیدایش شك موجّه*

جینا کولاتا
ترجمهٔ سعید ذاکری

از چهل سال پیش ریاضیدانها پی برده‌اند که تعداد بیشماری از گزاره‌ها در ریاضیات تصمیم‌ناپذیرند ــ یعنی صادق یا کاذب بودن آنها را نه می‌توان ثابت و نه می‌توان رد کرد. این نتیجهٔ نگران کننده عواقب فلسفی عمیقی برای ریاضیدانها دربرداشت: چراکه در مقابل روشهای شکست‌ناپذیر پیشین اثبات، سدی در درون ریاضیات ایجاد می‌کرد. با این حال، ریاضیدانها به‌تدریج به‌اینجا رسیدندکه این‌نتیجه را بپذیرند واعتقاد داشته باشندکه نشان دادن تصمیم‌پذیری یك گزاره، به‌مثابهٔ نشان دادن امکان اثبات آن است. اما این‌روزها، گره دیگری در کار مسألهٔ تصمیم‌ناپذیری پدید آمده است. پژوهشگران دریافته‌اندکه حتی گزاره‌هایی که از لحاظ نظری تصمیم‌پذیرند ممکن است اثباتی چندان طولانی داشته باشند که نگاشتن‌آن، چه به‌دست آدمی‌وچه به‌یاری کامپیوتر، هرگزممکن نباشد.

برای فائق‌آمدن برمسألهٔ اثباتهای طولانی، مایکل رابین، از دانشگاه عبری اورشلیم، پیشنهاد می‌کندکه ریاضیدانها تعریفشان‌از اثبات را تعدیل کنند. در بسیاری حالات، اگرکامپیوتر مجاز باشد که با احتمال ازپیش‌تعیین‌شدهٔ ناچیزی مرتکب خطا شود،شاید بشود گزاره‌ها را به‌کمك‌آن "اثبات" کرد. رابین‌کارایی این اندیشه را به‌یاری روش جدیدی نشان دادکه می‌تواند با احتمال خطای یك درمیلیارد،اول بودن یا نبودن یك‌عدد به‌دلخواه بزرگ را به‌سرعت تعیین‌کند.[1] روش اثبات رابین، از آنجا که در تقابل با مفاهیم عمیقاً پذیرفته‌شدهٔ صدق وزیبایی در ریاضیات‌قرارمی‌گیرد،موجب دامن‌زدن‌به‌بحث‌وجدلهای پرحرارتی میان پژوهشگران شده‌است.

رابین هنگامی درمورد سودمندی تعریف جدیدی برای‌اثبات متقاعد شد که تاریخچهٔ تلاشهایی راکه برای اثبات قضایا به‌کمك کامپیوترصورت گرفته بود، موردتوجه قرارداد. حدود۵ سال‌پیش، اشتیاق زیادی به‌این‌نوع اثبات قضایا نشان داده می‌شد. این‌علاقه در ارتباط با پژوهش در زمینهٔ هوش مصنوعی و به‌ویژه مسائلی‌از قبیل طراحی شیوه‌های اتوماتیك اشکال‌زدایی برنامه‌های کامپیوتری پدیدآمد. لکن، پژوهشگران به‌زودی دریافتندکه اثبات‌حتی ساده‌ترین‌گزاره‌هامستلزم‌صرف‌وقت‌غیرقابل‌قبولی‌توسط کامپیوتراست. رابین‌معتقداست،که‌این‌عدم توفیق دراثبات اتوماتیك، قضایاممکن‌است ناشی‌ازدرازی‌اجتناب‌ناپذیراثبات بسیاری‌ازگزاره‌های تصمیم‌پذیر باشد ونه فقدان هوش‌وظرافت درطراحی الگوریتمهای کامپیوتری.

حدود ۴ سال پیش، آلبرت میر[1] از انستیتو تکنولوژی ماساچوست(MIT) نشان‌دادکه اثبات‌کامپیوتری برخی گزاره‌های دلخواه در یك دستگاه منطقی بسیار ساده، الزاماً به‌قدری طولانی است که‌امکان‌ناپذیراست. دستگاه موردنظرما،مرکب ازمجموعه‌هایی ازاعداد صحیح ویك عمل حسابی‌ــجمع عدد ۱ با اعداد صحیح‌ــ است. از مدتها پیش ریاضیدانها می‌دانستندکه درستی یا نادرستی هرگزاره را در این دستگاه منطقی‌می‌توان درتعدادی متناهی‌مرحله ثابت‌کرد، اما میر نشان داد که تعداد این مراحل می‌تواند نمایی تکراری باشد،یعنی‌توانی ازیك توان از یك توان . . . .گزاره‌ای به‌طول n می‌تواند به

$$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$$

مرحله نیازمند باشد،که درآن تعداد توانهای۲ متناسب با n است.

روش میر در نشان دادن اینکه حداکثر طول اثبات برخی‌از گزاره‌ها چقدر باید باشد، اکنون در دستگاههای منطقی دیگر نیز به‌کار رفته‌است. او ودیگران برای تقریباً همهٔ قضایای تصمیم‌پذیر معمول در منطق، احکام مشابهی در باب امکان ناپذیری اثباتها به‌دست آورده‌اند.

حدود ۲ سال پیش، میر و لری‌استاکمیر[2]،که اکنون در یکی از مراکز تحقیقاتی آی بی‌ام‌کار می‌کنند، نتیجهٔ ملموستری دربارهٔ طول اثباتهای کامپیوتری به‌دست آوردند. اینان پژوهش خود را بر روی دستگاه منطقی اولیه‌ای که میر برای آن نتایجی درمورد امکان‌ناپذیری به‌دست آورده بود متمرکز، و این پرسش را مطرح کردندکه اثبات گزاره‌هایی با چه طول‌کاملاً ناممکن است. آنها "کاملاً ناممکن" را اثباتی‌تعریف کردندکه محتاج شبکهٔ کامپیوتری با 10^{123} مؤلفه باشد،که، بنا به‌نظرمیر، تخمینی از تعداد ذرات در مقیاس پروتونی است‌که می‌تواند به‌طور چگال جهان شناخته شده را پرکند. سپس،نشان دادندکه برای‌اثبات گزاره‌ای دلخواه‌مرکب از حدود ۶۱۷ نماد،کامپیوترمحتاج 10^{123} مؤلفه خواهد بود.

به‌زعم رابین، مسأله‌ای‌که درمورد اثبات وجود دارداین‌است که می‌خواهیم اثبات،بدون احتمال خطا درست باشد. ولی‌انسانها پیوسته در ریاضیات ودیگر موضوعات دچار خطا می‌شوند. شاید بدین‌دلیل‌است‌که افرادی‌که درگیرحل مسأله‌اند، مایل‌اندکار خود را به‌اتمام برسانند، حال آنکه کامپیوتر اغلب به‌خاطر کمی وقت

1. رابین این نتیجه را در همایش "گرایشهای جدید و نتایج تازه در باب الگوریتمها و پیچیدگی" که در دانشگاه کارنگی ـ ملون درپیتسبورگ از ۷ تا ۹ آوریل ۱۹۷۶ برگزارشد، عرضه‌کرد.

1. Albert Meyer 2. Larry Stockmeyer

کارخود را متوقف می‌کنـد. بنابراین، رابین به‌جستجوی مواردی پرداخت که درآنها اگر به‌کامپیوتر اجازهٔ خطا کردن ندهیم نمی‌تواند کار خود را تمام کند، ولی اگر خطا کردن را مجاز بشماریم کارخود را به‌اتمام خواهد رساند. این موضوع او را به نتیجه‌ای در باب اعداد اول هدایت کرد.

آزمون رابین برای اعداد اول بر مبنای نتیجه‌ای است کـه گری‌میلر از دانشگاه واترلوی کانادا اخیراً به‌دست آورده است. میلر دریافت که اگر n عددی اول باشد، هرعدد صحیح بین ۱ و n به‌آزمون ریاضی خاصی پاسخ مثبت می‌دهد. بنابراین اگرهرچنین عدد صحیحی به‌آزمون پاسخ مثبت ندهد، n عددی اول نخواهـد بود. علاوه براین، میلر نشان دادکه لازم نیست این آزمون‌رابرای همهٔ اعداد صحیح بین ۱ و n انجام دهیم. کافی است آن را برای اعداد صحیح بین ۱ و عددی مانند m که به n بستگی دارد به کار بندیم. چنانچه n اول نباشد، یکی از اعـداد صحیح بین ۱ و m به‌آزمون پاسخ منفی خواهد داد. مزیت آزمون میلر این است که نسبتاً سریع عمل می‌کند، لکن این عیب را هم داردکه با افزایش n، تعداد اعداد صحیحی که باید آنها را آزمود افزایش می‌یابد.

رابین دریافت که اگر n عددی اول نباشد، دست‌کم نیمی از اعـداد صحیح بین ۱ و n به‌آزمون میلر پاسخ منفی خواهند داد. بنابراین، مادامی که n اول نباشد، اگرعددی رابین ۱ و n به‌تصادف انتخاب و آن را آزمایش کنیم، احتمال به‌دست‌آوردن پاسخ‌منفی دست‌کم ۱/۲ خواهد بود. اگر در همین وضعیت، یعنی وقتی که n اول نیست،دو عدد بین ۱ و n را به تصادف انتخاب و آنها را آزمایش کنیم، احتمال به‌دست آوردن پاسخ منفی درمورد یکی‌از آن دو دست‌کم ۳/۴ است، و اگر ۳۰ عدد را به‌تصادف‌انتخاب کنیم، احتمال به‌دست‌آوردن پاسخ منفی برای یکی‌ازآنهادست‌کم $1-(1/2)^{30}$ خواهد بود. در این‌صورت احتمال اینکه همهٔ این ۳۰ عدد بین ۱ و n کـه تصادفاً انتخاب شده‌اند، به‌آزمون پاسخ مثبت دهند، تنها $(1/2)^{30}$ یـا ۱ در میلیارد است. در این روش احتمالاتی، باآزمودن تعداد نسبتاً اندکی‌عدد صحیح سروکارداریم. تعداد اعداد صحیحی که بایدآنها را بیازماییم به n وابسته نیست، بلکه به‌احتمال خطای موردنظرما بستگی‌دارد.

آزمون احتمالاتی رابین بسیار سریعتر از آزمونهـای دقیق است. آزمونهای دقیق چندان طولانی‌اندکه فقط اعداد بزرگتراز 10^{60}ی که تا به‌حال آزموده شده‌اند، ازشکل خاصی برخوردارند. چنین اعدادی را رابین می‌تواند ظرف حـدوداً ۱ ثانیه به‌کمـك کامپیوتر آزمایش کند. به‌عنوان نمونه‌ای از توان بالقوهٔ این‌روش، رابین و وان‌پراپ[1] از انستیتوتکنولوژی ماساچوست نشان دادند که عدد $2^{400}-593$ به‌این‌آزمون پاسخ مثبت می‌دهد وبنابراین "برای همهٔ مقاصد عملی" عددی اول‌است.

پیتر واینبرگرکـه اکنون در آزمایشگاههای بل‌کارمی‌کند،این پرسش را مطرح می‌کند کـه اول بودن "برای همهٔ مقاصد عملی" یعنی چه؟ تولید اعداد تصادفی، و محاسبهٔ تبدیلهای سریع فوریه (FFT)، از جمله موارد استفاده از اعداد اول بزرگ است. واینبرگرمدعی‌است که وجود روشهای دقیق برای یافتن‌اعداداول بزرگ برای چنین کاربردهـایی کافی است. او در پاسخ به‌ادعای رابین مبنی براینکه روشهای احتمالاتی برای اثبات ضروری‌اند، می‌گوید: "اگرتنها یك مثال واقعی به‌من نشان بدهید، من متقاعـد خواهم شد."

نظر دانلدکنوت از دانشگاه استنفرد در این باره این است که مثال رابین نقداً کاربردهای جدیدی ندارد؛ با این‌حال، وقتی که راهی برای محاسبهٔ چیزی پیدا شد، همیشه یکی هم یافت می‌شود که‌کاربردی برای آن پیدا کند. او مسائل دشوار دیگری را مانند ردهٔ مسائلی‌که در علوم کامپیوتر مسائل NP تمام نامیده می‌شوند، نامزدهای مناسبی برای روشهای احتمالاتی می‌داند. با وجود این، او معتقداست که آثاراولیهٔ نتیجهٔ رابین، بیشترجنبهٔ زیباشناسی‌دارد تا عملی؛ و در زمینهٔ زیباشناسی‌است که بگومگو آغازمی‌شود.

یك نمونه از واکنش بسیاری از ریاضیدانها را می‌توان در سخنان کسی یافت که می‌گفت نمی‌تواند روش احتمالاتی اثبات را بپذیرد، چراکه "شکوه ریاضیات در این‌است که روشهای موجود اثبـات ریاضی، اساسـاً بری از خطا هستند". دانلد گراهـام از آزمایشگاههای بل و دیگران، درپاسخ می‌گویندکه آنها به‌نتایجی که از روشهای احتمالاتی نظیر آزمون اعداد اول رابین به‌دست می‌آیند بیشتر اطمینان دارند تـا به‌اغلب اثباتهای ریاضی ۴۰۰ صفحه‌ای. بررسی صحت چنین اثباتهایی غالباً نزدیك به ناممکن است، ومناظره‌ای پیرامون یك نتیجهٔ خاص درنظریهٔ هموتوپی، که مبحثی‌است در توپولوژی، گواهی براین مدعاست. دراین مناظره، یکی از پژوهشگران با اثبات یك گزاره، و دیگری با اثباتی از نقیض آن شرکت کرده بود. هردواثبات طولانی‌وفوق‌العاده پیچیده بودند؛ از این رو، آن دو اثباتهای خود را به یکدیگر دادند تا هر یك کار دیگری را بررسی کند. هیچ یك از آن دو نتوانست اشتباهی در اثبات دیگری بیابد. دراین میان نفرسومی پیدا شد و اثبات طولانی دیگری بر له یکی از دو اثبات اصلی ارائه داد. بنابراین، نتیجه ۲ بر ۱ به‌نفع یکی‌از اثباتها شد، اما مسألهٔ اصلی هنوز حل‌نشده باقی‌مانده‌است.

گراهام نگران این‌موضوع است که در ریاضیات، یادست‌کم در برخی زمینه‌ها مثل نظریهٔ گروهها، اثباتهای طولانی به‌جای استثنا دارند به‌صورت قاعده درمی‌آیند. به‌نظراواین وضعیت‌ممکن است نتیجهٔ این باشدکه در مقایسه با تعدادکل گزاره‌های ریاضی جالب ممکن،تعداد نسبتاً اندکی گزارهٔ جالب با اثبات کوتاه‌وجود دارد؛ و روز به‌روز تعدادکمتروکمتری گزارهٔ با اثبات کوتاه‌برای بررسی باقی می‌ماند. او و پال اردیش معتقدند که امروزه حجم برخی از اثباتهای طولانی منتشره، درحد مقدارکل اطلاعاتی‌است که مغزآدمی می‌تواند بپذیرد. بنابراین، گراهام و دیگران براین عقیده پا می‌فشارندکه تحقیق صحت قضایا به‌کمك کامپیوتر ممکن است بخشی از ریاضیات فردا باشد، و ریاضیدانها ممکن است مجبور شوند در تصور خود از آنچه‌که دلیل‌کافی و محکم برای صحت یك گزاره به‌شمار می‌آید، تجدیدنظرکنند.

1. Vaughn Perapp

• Gina Bari Kolata, "Mathematical proofs: the genesis of reasonable doubt," *Science*, (4243) **192** (1976) 989-990.

دستاورد نیوتن*

ریچارد وستفال*
ترجمهٔ محمدرضا خواجه‌پور

علائق آیزاك نیوتن گرچه صرفاً به‌موضوعهای ریاضی منحصر نبود ولی همهٔ دانشها را هم شامل نمی‌شد. اگرچیزی توجهش را به‌خود جلب می‌کرد، او را تمام و کمال به‌خود مشغول می‌داشت و همهٔ چیزهای دیگر کنار نهاده می‌شد. از این‌رو حیات فکری نیوتن درنظر مورخ چون سرگذشتهایی پی درپی است که درهر کدام او خود را وقف موضوعی کرده و در آن به‌استادی مسلم رسیده‌است. به‌هیچ‌وجه نمی‌توان دراو به‌چشم انسان جامع عصر رنسانس نگریست. نیوتن با بسیاری از قلمروهای تجربهٔ آدمی ــ مثلاً با بیشترمظاهر و جلوه‌های هنر ــ بیگانه بود.

حیات فکری نیوتن محدود به‌آنچه امروزه علم شمرده می‌شود نبود. از دستنوشته‌هایش چنین برمی‌آید که اوقات زیادی را در یك دورهٔ تقریباً سی‌سالهٔ اواسط عمرش، که از لحاظ فکری در اوج توانایی بود، صرف کیمیا کرد. در بهترین سالهای زندگیش، به‌الهیات حتی بیش از کیمیا علاقه‌مند بود. هر چند که در قسمت کلیات پرینکیپیا و در تجسسات ملحق به‌کتاب اپتیك بحث می‌کند که ساختار طبیعت بر وجود خدا دلالت دارد ولی علاقهٔ او به‌الهیات براین قبیل مسائل متمرکز نیست، بلکه متوجه آموزه‌های مربوط به‌تثلیث و الوهیت مسیح است. برفهرست علائق نیوتن باید وظایفش درضرابخانهٔ شاهی را هم افزود؛ چه او با همان تمرکز فکری غرق این وظایف می‌شد که به‌مسائل دیگر می‌پرداخت.

تاریخ، این علاقه‌ها را با همان ترازوی خود نیوتن نسنجیده است. کیمیا، وقتی نیوتن به‌آن روی آورد، حرمت چندانی نزد اهل فکر و اندیشه نداشت. او بعدها از این صناعت کناره گرفت؛ کیمیا از مشغولیات دوران اقامتش در کیمبریج بود که آن را با خود به‌لندن نبرد.

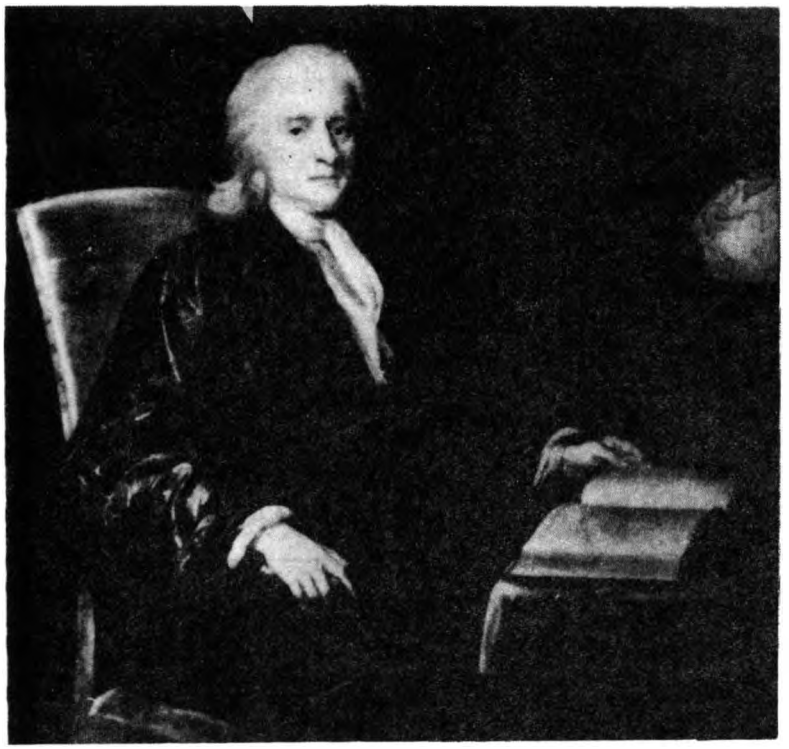
تاریخی که الهیات پشت‌سر نهاده باسرگذشت کیمیا فرق می‌کند ولی امروزه، فاصلهٔ هردو از کانون علائق علمی ما به‌یك اندازه زیاد است. و بالاخره گرچه این روزها حرمت کارمندان برجستهٔ دولت را بسی بیش از جامعهٔ دوران نیوتن پاس می‌داریم ولی سیصدمین سالگرد تولدشان را جشن نمی‌گیریم. این علائق با آنکه بخش بزرگی از زندگی نیوتن را به‌خود اختصاص دادند ولی اثرشان بر ادوار بعدی اندك بوده‌است وماهم غالباً آنها را نادیده‌می‌گیریم تا نگاه خود را متوجه دستاوردهایی کنیم که طی سیصدسال بعدی، سهمی عظیم در بنای تمدن مغرب زمین داشته‌اند. ریاضیات، به‌وضوح محوراصلی این دستاوردها بود. تردیدی نیست که جایگاه

ریاضیات در تحقیقات نورشناختی نیوتن ـ که بیشتر به اثبات تجربی ناپیوستگی نور مربوط می‌شد ـ چندان مهم نبود. ولی سوای نورشناخت، کارهای دیگر او را در علم نمی‌توان از ریاضیات تفکیک کرد.

نیوتن در چارچوب سنت کهنی که سابقه‌اش به یونانیان می‌رسد، یکی از خلاقترین ریاضیدانان بود. وقتی که دوران نوجوانی را پشت‌سر نهاد و به پختگی و بلوغ رسید، ریاضیات نخستین موضوعی بود که توجهش را تماماً به‌خود مشغول داشت. در ایام دانشجویی برحسب تصادف با رساله‌های اساسی آنالیز نو پدید قرن هفدهم ـ آثار دکارت، ویت، والیس و دیگران ـ آشنا شد. بی‌سروصدا برنامهٔ درسی مصوب کیمبریج را نادیده گرفت و تمام سال آخر دانشجوییش را وقف کاوش در این دنیای فکری جدید کرد و بی‌آنکه از تعلیم و راهنمایی کسی بهره‌مند شود همهٔ آثار ریاضیات قرن هفدهم را پیش خود آموخت و از قلمرو ریاضیات زمانه فراتر رفت و به‌سرزمین ناشناخته‌ها قدم نهاد.

توجه آنالیزدانهای اولیه معطوف به‌دو مسألهٔ مهم و اساسی بود. ترسیم خط مماس برخمها (یا عملاً همان مسأله‌ای که امروز آن را مشتقگیری می‌نامیم) و پیدا کردن مساحت زیر خمها (یعنی انتگرالگیری). اولین توفیق نیوتن، حل مسألهٔ دوم بود. ریاضیدانان قبلی با استفاده از ابزار بینهایت کوچکها، الگوریتمهایی برای محاسبهٔ مساحت زیر سهمیهای ساده و خمهای درجهٔ سوم ساخته بودند وازراه استقراء، این الگوریتمهارا برای سریهای تام (توانی) تعمیم داده بودند. نیوتن خانوادهٔ خمهای $y=(1-x^2)^n$ را در نظر گرفت و روش والیس را در مورد آنها بسط داد. بسط این دوجمله‌ای به‌ازای مقادیر صحیح n، چندجمله‌ایی است، باجمله‌های x^2، x^4، ...؛ و مساحتهای زیرخمهای این خانواده، همگی دارای جمله‌های x، $-x^3/3$، $x^5/5$، ... است. نیوتن برای محاسبهٔ مساحت زیر این خمها ($n=0, 1, 3, \ldots$) جدولی از ضرایب معادلات تنظیم کرد که در آن به‌هرجملهٔ توانی، یك ردیف افقی و به‌هر مقدار n، ستونی عمودی مربوط می‌شد. این جدول از نوع جدول پاسکال بود. نیوتن از روی ترتیب اعداد آن، مقادیرضرایب را برای ستون مربوط به‌کسر $n=1/2$ درونیابی کرد. این ستون به‌مساحت زیردایره مربوط بود که به‌صورت سری تامی باجمله‌های x، $-x^3/3$، $x^5/5$، ... نوشته می‌شد. بعداً این روش را در مورد سری نامتناهیی که مبین مساحت زیرخم $y=(1+x)^{-1}$ بود به‌کار بست و متوجه شدکه این مساحت برابراست با لگاریتم $(1+x)$؛ و از شور و حالی که براثر این کشف جدید پیدا کرد لگاریتم چندین عدد را تا ۵۵ رقم اعشار حساب کرد. روش بسط دوجمله‌ای نیوتن، با مساوی هم قرار دادن مساحتهای زیرخمهای ناجور و سریهای متناهی، روش موجودکوادراتورها (تربیع) را تکمیل کرد و امکان محاسبهٔ مساحت زیرهمهٔ خمهای جبری شناخته شده را برای ریاضیدانان فراهم آورد.

نیوتن در عملیاتش همیشه به‌الگوها توجه می‌کرد. از خود می‌پرسید: آیا می‌توان از الگویی که درجریان کوادراتور پدیدار شده استفاده کرد و خم دیگری را تعریف کردکه قابل مربع کردن باشد؟ خم $rx=y^2$ را در نظر گرفت؛ آن‌را مسیر نقطهٔ متحرکی شمرد ومساحت زیرآن را براین‌اساس که یك خط متحرك مساحتی



را می‌روبد، حساب کرد.

نکته‌ای که دراین مسأله مطرح است ونیوتن هم بدان پی برده بود، قضیهٔ اساسی آنالیز است. مفهوم حرکت اهمیتی اساسی در تحول روش نیوتن داشت و او با توجه به‌این مطلب روش‌خودرا روش فلوکسیونها نامید. این افکار پیش از پاییز ۱۶۶۶ در ذهن نیوتن قوام‌یافته بود ونیوتن آنهارا درچنان گسترهٔ وسیعی به‌کار بسته بودکه حتی در تصور هیچ ریاضیدان زندهٔ دیگری نمی‌گنجید. اما کشفش را بروز نداد. بدین‌طریق اسباب بحث و گفتگویی فراهم آمدکه بعدها برسر حق‌تقدم میان او و لایب‌نیتس درگرفت؛ زیرا لایب‌نیتس هم، تقریباً ده سال بعد از او، به‌همان نتایج ـ منتهی از راهی دیگر ـ رسید.

نیوتن همینکه مسائلی راکه بدواً مورد توجهش‌واقع‌شده بود باموفقیت حل کرد، از ریاضیات به‌چیزهای دیگرروی آورد. بعدها چندبار دیگر به‌ریاضیات بازگشت ولی باگذشت زمان از کثرت این دفعات کاسته می‌شد؛ معمولاً انگیزه‌های خارجی اورا به‌این‌کار وامی‌داشت. با این حال نتایج این بازگشتهای نوبه‌ای به‌راستی حیرت‌آور بود؛ او این نتایج را هم مانند روش فلوکسیونها منتشر نکرد. شمارشی که ازخمهای درجهٔ سوم به‌عمل آورد، عملاً سدی راکه تا آن زمان در برابر آنالیزجدید وجود داشت وآن راکم‌و بیش یکسره محدود به معادلات درجهٔ دوم می‌کرد، درهم شکست. درپاسخ به‌درخواست کمك محاسبی که به‌تنظیم جدول ریشه‌هامشغول بود، نظریهٔ درونیابی‌را ابداع کرد. کارهای مهمی‌درهندسهٔ تصویری انجام داد. دستاوردهایش در ریاضیات محض بیش از آن بودکه فقط شهرتی ماندنی برایش کسب کند.

نیوتن، کم و بیش درهمان اواسط دههٔ ۱۶۶۰ که به‌ریاضیات روی آورده بود، حکمت طبیعی جدید، از جمله علم مکانیك، راهم

کشف کرد و گوشهٔ چشمی به مسائل این علم انداخت. البته غور کامل او در فیزیك نظری (سوای اپتیك) مدتها بعد، در یك دورهٔ دوسال ونیمه، پس از دیداری که هالی در اوت ۱۶۸۴ ازاو کرد، اتفاق افتاد.

همینکه نیوتن به‌مسألهٔ حرکت‌مداری ــ که هالی برایش مطرح کرده بود ــ پرداخت، نخستین وظیفه‌اش آن شدکه علم مکانیك‌را بنا کند. شمار نظرپردازیهای دینامیکی در ۱۶۸۴ بسیار زیاد بود. اساس بیشتر آنها هم ضربه ونیرویی بودکه تصور می‌شد هرجسم

نیوتن بی‌سروصدا برنامهٔ درسی مصوب کیمبریج را نادیده گرفت و تمام سال آخر دانشجوییش را وقف کاوش در این دنیای فکری جدیدکرد و بی‌آنکه از تعلیم و راهنمایی‌کسی بهره‌مند شود همهٔ آثار ریاضیات قرن هفدهم را پیش خود آموخت و از قلمرو ریاضیات زمانه فراتر رفت و به‌سرزمین ناشناخته‌ها قدم نهاد.

متحرکی متضمن آن‌است. ولی‌هنوز علم دینامیك به‌دردخوری‌وجود نداشت. نیوتن علم دینامیك را به‌صورت امروزی آن در ماههای آخرسال ۱۶۸۴ وماههای اول۱۶۸۵ عملاً ازهیچ به‌وجودآورد. این کار اگرچه حاصل ذوق و نبوغی غیرعادی بود ولی از جنبهٔ ریاضی نباید آن را چنین به‌حساب آورد. لازمهٔ این کار توانایی فهم اصول دینامیکیی بودکه درسینماتیك حرکت شتابداریکنواخت گالیله مضمر بود. این کار اگرچه محتاج به‌مهارت ریاضی بسیار زیادی نبود ولی به‌ذهنی نیاز داشت‌که به‌راحتی بتواند در قالب کمیات بیندیشد و پیامدهای ضروری روابط متقابل کمی دقیق را دریابد. نیوتن ازچشمهٔ غنی‌این‌استعدادهایش‌دراین‌کار بهره‌گرفت.

لب‌کلام پرینکیپیا عبارت بود از کاربست علم دینامیك در مسائل حرکت مداری و اثبات اینکه قوانین کپلر پیامدهای ناگزیر همان اصول دینامیکیی‌هستندکه اساس وزمینهٔ سینماتیك گالیله‌اند. تصور اینکه کسی بتواند چنین کاری را انجام دهد ولی حساب دیفرانسیل‌وانتگرال را به‌خوبی‌نداند، غیرممکن‌است. پس‌پرینکیپیا نخستین‌کتاب فیزیك جدید است، نخستین کتابی است‌که به زبان جدید آنالیز نوشته شده است. برداشت متداول اینست که زبان پرینکیپیا زبان‌هندسهٔ کلاسیك است، ونیوتن هم خود باحرفهایی‌که درگرماگرم مجادله‌اش با لایب‌نیتس برسرحق تقدم زده، به اشاعهٔ این‌نظر کمك کرده‌است. کتاب راکه بازمی‌کنیم فرمولهای نسبتهای هندسی را می‌بینیم نه روابط تحلیلی آنالیز را. نیوتن مدعی‌شدکه نخست اثباتهای‌کتاب را به‌روش خود انجام داده و سپس آنها را در قالب هندسهٔ ترکیبی ریخته‌است، و از این‌راه‌کوشید ثابت‌کند که در استنتاج روش فلوکسیونها مقدم بوده است. کسانی که دستنوشته‌های نیوتن‌را مطالعه‌کرده‌اند این داستان را قبول‌ندارند. اماکسی هم‌که پرینکیپیا را به‌دقت مطالعه کند مرتکب این اشتباه نمی‌شودکه ریاضیات آن را هندسهٔ کلاسیك بشمارد. پرینکیپیا از ابزار نسبتها استفاده می‌کند، اما مفاهیمی‌که درپس این ابزارپنهان است از حساب‌دیفرانسیل و انتگرال نشأت گرفته‌است نه ازهندسهٔ کلاسیك.

قضیهٔ ششم ازکتاب اول، که قضیه‌های بعدی‌بر آن مبتنی‌است، مربوط به‌اندازهٔ نیرو درهرنقطه از یك مسیر منحنی‌الخط است. در این‌قضیه از یك نقطهٔ P واقع برمسیر صحبت می‌شود واز انحرافی که مسیر در نقطهٔ مجاور Q، نسبت به‌خط مماس برخم در P، پیدا می‌کند. نیوتن نیرو را در P حساب می‌کند و برای این‌کارفرض می‌کندکه به"این کمیت فضایی (یعنی‌کمیت مورد نظر در سه بعد) باید آن مقداری را نسبت دادکه مآلاً، وقتی نقاط P و Q برهم منطبق می‌شوند، اختیارمی‌کند". از نظرمفهومی‌سروکارما به‌هیچ‌وجه با دنیای هندسهٔ یونانی نیست بلکه با دنیای نسبتهای تغییرات لحظه‌ای، یعنی دنیای‌آنالیزاست. چند سطر بعد نیوتن به‌قضیهٔ ششم (و چارچوب مفهومی‌آن) متوسل می‌شود تا این نکتهٔ مهم رانشان دهدکه بیضوی بودن یك مدار، قانون نیروی عکس مجذور را (نسبت به‌یکی ازکانونها) ایجاب می‌کند، و این یکی از دو دلیل عمده‌ای است‌که پایه‌های اصل گرانش عام را تشکیل‌می‌دهند.

دلیل‌دیگر، که برای اصل گرانش به‌همین‌اندازه اساسی‌است، قضیهٔ هفتاد و یکم است‌که به‌نیروی جاذبهٔ میان یك سطح‌کروی و یك نقطهٔ مادی خارجی‌مربوط می‌شود. اساس استدلال دراین‌قضیه جمع‌کردن جاذبه‌های اجزای دیفرانسیلی سطح است‌که به دنیای مفاهیم حساب انتگرال تعلق دارد. به‌همین سیاق، تعداد زیادی از اثباتهای این اثر صریحاً مبتنی برفرض "تربیع‌اشکال منحنی‌الخط" است. یکی از دستنوشته‌های ریاضی نیوتن حاکی از آن است‌که نیوتن اندك زمانی‌پیش‌ازتدوین پرینکیپیا، از دنیای فکری دکارت روی‌گردانده و به‌کاوش مفهوم نسبتهای اول و نهایی به‌مثابهٔ‌شالودهٔ روش فلوکسیونی خود پرداخته بود، شالوده‌ای که هم مستقل از صورتهای مختلف آنالیز دکارتی بود و هم مطمئنتر ازآنها. او این روش را، که نشان‌دهندهٔ وضع تفکر ریاضی او درآن ایام بود، در مورد مسأله‌ای درفیزیك نظری ــ که حاصل‌دیدار هالی بود ــ به‌کار بست. نیوتن نسبتهای اول و نهایی را شالودهٔ روش فلوکسیونی می‌دانست نه جانشینی برای آن.

سومین گسترهٔ فکری نیوتن به‌عنوان عالم فیزیك ریاضی این بود که ضرورت همبستگی متقابل نظریه و آزمایش را درك می‌کرد و می‌توانست به‌آسانی آن‌را به‌نمایش گذارد. با آنکه میل و گرایش به‌سمت معرفت کمی، موجب حرکت وحیات انقلاب علمی‌شده بود ولی قرن هفدهم هنوز به‌وسایل اندازه‌گیری دقیق بیشتر کمیتها مجهز نبود. در اواخر قرن هفدهم، ساعت هویگنس سنجش‌زمان را ازهر اندازه‌گیری دیگری دقیقتر کرد. آونگ جزء اصلی این‌ساعت بود وتجمع نموهای خرد، از آن وسیله‌ای ممتاز برای اندازه‌گیری انواع کمیتهایی ساخت که مستقیماً مشهود نبودند. نیوتن بیش از

پرینکیپیا نخستین‌کتاب فیزیك جدید است، نخستین‌کتابی است که به‌زبان جدید آنالیز نوشته شده‌است.

هر دانشمند دیگر آن قرن، به امکانات بالقوهٔ آونگ پی برد. در پرینکیپیا از آن استفاده کرد تا تناسب دقیق جرم و وزن را به‌ثبوت رساند و نظریه‌ای راکه دربارهٔ مقاومت هوا پرداخته بود بیازماید و وجود اثیر کیهانی را نفی کند.

مدتها پیش‌وقتی که تازه فارغ‌التحصیل شده بود وهنوز کتاب هورولوگیوم[1] [ساعت] هویگنس انتشارنیافته بود، دیده بود که چگونه به‌کمك آونگ می‌توان شتاب ثقل را اندازه‌گرفت. وقتی دینامیك حرکت دورانی را حل کرد متوجه شد که می‌تواند نیروی گریز از مرکز وزنهٔ آونگ مخروطی را (یا تصوری راکه در آن‌وقت از این نیرو داشت) با وزن آن مقایسه کند و نیز پی برد که دورهٔ تناوب آونگ ساده و آونگ مخروطی یکی است هرگاه طولشان یکی باشد. پس لازم شدکه دورهٔ تناوب آونگ ساده را اندازه بگیرد. نیوتن که به‌جز آفتاب و مهارت در اندازه‌گیری با ساعت آفتابی چیز دیگری در اختیار نداشت، توانست زمان ۲۱ نوسان (تقریباً ۵۰ ثانیه) دو آونگ به‌طولهای ۵ر۵۶ اینچ و ۵ر۶۰ اینچ را اندازه بگیرد. اختلاف اندازه‌گیری او با آنچه ما از روی طول آونگ ثانیه‌شمار حساب می‌کنیم، در حدود یك درصد بود. از این مقدار شتاب ثقل را تقریباً یك درصد بیش از رقمی که اکنون مورد قبول ماست به‌دست آورد. در پرینکیپیا از رابطهٔ مدار ماه با شتاب ثقل برسطح زمین، یکی بودن جاذبه‌ای که سیارات را برمدارهایشان می‌گرداند و نیروی ثقلی که سبب سقوط اجسام به‌سطح زمین‌می‌شود را ثابت‌کرد. نیوتن درکتابش از اندازه‌گیریهای هویگنس استفاده‌کرد،زیرا مکانیسم ساعت چنان بودکه‌کار اندازه‌گیری را می‌شد در مدت چند روز انجام داد نه در ۵۰ ثانیه. اندازه‌گیریهای نیوتن که کار جوانی بود تازه فارغ‌التحصیل وتقریباً با دست خالی‌انجام شده بود، ازلحاظ دقت از همهٔ اندازه‌گیریهای دیگر، بجز هویگنس، به‌مراتب بهتر بود— و این را باید توفیقی قابل‌اعتنا در فیزیك‌کمی بشمار آورد.

اندازه‌گیری سرعت صوت به‌دست او نیز ازهمین‌قماش بود؛ گرچه نتایجش به‌این اندازه برجسته نبود. او در این کار هم از آونگ استفاده‌کرد،ویکی‌ازگوشه‌های اعجاب‌آورپرینکیپیا محاسبهٔ سرعت صوت است براساس اصول اولیهٔ دینامیك. بعدها معلوم‌شد که نتیجهٔ این محاسبه باید درحدود ۲۰ درصد افزایش یابد، واین ضریبی‌است برابر با جذر نسبت‌گرمای ویژهٔ هوا در فشار ثابت به‌گرمای ویژهٔ آن‌درحجم ثابت. وقتی‌که نیوتن‌خواست محاسبه‌اش را با اندازه‌گیریهای موجود مقایسه‌کند متوجه اختلافهای فاحشی در اندازه‌گیریها شد: روبروال مقدار ۶۰۰فوت برثانیه رابه‌دست آورده بود و مرسن ۱۴۷۴ فوت برثانیه را. نیوتن تصمیم‌گرفت که خود نتیجهٔ محاسبه‌اش رابه‌محك تجربه زند. راهرومسقف‌کالج ترینیتی‌که طولش ۲۰۸ فوت بود، پژواك خوبی تولید می‌کرد. نیوتن طول آونگی را چنان تنظیم‌کردکه هماهنگ با بازگشتهای متوالی پژواك نوسان کند، نتیجه را به‌صورت یك عدد واحد بیان نکرد بلکه دامنه‌ای برای آن قایل شد، و این حکایت از شناختی می‌کندکه‌نسبت به‌مسائل‌علوم‌کمی‌داشت. نخست دریافت‌که‌آونگ باید از چهار اینچ (که با سرعت حداکثر ۱۲۷۲ فوت بر ثانیه متناظر بود) بلندتر واز۹ اینچ (سرعت حداقل۸۶۶)کوتاهترباشد. نتیجهٔ کار او را راضی نکرد، آزمایش را تکرار کرد و حدود را به‌پنج و نیم اینچ (۱۰۸۵ فوت در ثانیه) و ۸ اینچ (۹۲۰) تقلیل داد. و اینها ارقامی‌است‌که در پرینکیپیا مندرج است؛ اما نیوتن بازهم ازاین‌اندازه‌گیری راضی نبود. کوششهای بعدیش‌درترینیتی به‌افزایش حدود اندازه‌گیری، ۹۸۴ و ۱۱۰۹، منجرشد. رقم‌اول، ۹۸۴، بیش‌ازسرعت حساب شده در چاپ اول‌کتاب، ۹۶۸، بود؛ پس آزمایش را با اختیار ارقام مختلفی برای چگالی هوا تکرار کرد تا شاید نتیجهٔ محاسبه را بهتر کند. قبل ازچاپ دوم پرینکیپیا، ویلیام درام از روی‌اختلاف زمان رؤیت آتش‌توپ‌وشنیدن صدای آن، مقدار ۱۱۴۲ فوت در ثانیه را برای سرعت صوت به‌دست آورده بود. نیوتن عدد درام را پذیرفت و محاسباتش را کمی دستکاری کرد تا با نتایج درام بخوانند. اندازه‌گیری درام، که خیلی نزدیك به‌مقدار مورد قبول ماست از حدود ارقام نیوتن خارج بود ولی از آخرین حد بالایی او چندان فاصله نداشت. اندازه‌گیریهای نیوتن نسبت به نتایج موجود پیشرفت عمده‌ای به‌حساب می‌آمد و شاهد معتبری است برتوفیق او درفیزیك‌کمی.

چنانکه در ابتدا متذکرشدم نیوتن زندگیش‌را به‌ریاضیات و علوم ریاضی منحصرنکرد؛ ولی ما حرمت او را به‌خاطر کارهای بزرگش دراین رشته‌هاکه نقش‌آینده را رقم زدند، پاس‌می‌داریم.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

● این مقاله به مناسبت سیصدمین سال انتشار پرنکیپیا در سال ۱۹۸۷ منتشر شده و مشخصات اصل آن چنین است:

Richard S. Westfall, "The achievement of Issac Newton," *The Mathematical Intelligencer*, (4)9 (1987) 45-49.

★ ریچارد وستفال، دانشگاه ایندیانای آمریکا

1. *Horologium*

مفهوم جبر در تاریخ جبر

الهه خیراندیش*

همان‌طور که سدهٔ اخیر شاهد پایه‌گذاری رشتهٔ مستقلی با عنوان تاریخ علم بوده‌است، تحولات چند دههٔ گذشته در نگارش تاریخ علم را نیز می‌توان انقلابی دراین رشته به‌شمار آورد. بحث اخیر مورخان ریاضیات برسرتعریف و تاریخ علم جبر انعکاسی‌است از نگرشی عمیقتر به‌نحوهٔ تعبیر و نگارش تاریخ علم که سالها به‌پایهٔ تجدیدنظر کلی نیازمند بوده‌است. دراین مقاله، پس ازشرح آراء مختلف دربارهٔ چگونگی تعبیرمتون ریاضیات دوران باستان، به‌نقد کوتاهی برچند جنبهٔ مهم از این نظریات، که با تعریف علم جبرو نگارش تاریخ آن رابطه دارند، می‌پردازیم.

علوم ریاضی از دیدگاه معاصر و مسألهٔ تعبیر "جبرهندسی"

با اینکه تعبیر وقایع تاریخی از دیدگاه معیارهای کنونی آنقدر مسألهٔ جدی وشناخته شده‌ای‌است که درتاریخ‌نویسی اصطلاح مستقلی به‌آن اختصاص یافته است [۱]، مشکل نگارش تاریخ علوم ریاضی از دیدگاه محدود معاصر مدت زیادی نیست که مورد انتقاد شدید مورخین قرار گرفته‌است. سالهاست که این حرف برسرزبانهاست که آینهٔ تاریخ باید از زنگار هرگونه پیشداوری وتعصب پاك باشد، و به‌خصوص نگریستن به‌سیرعلوم از پشت عینك موقعیت فعلیشان طبیعتاً تصویری نادرست ازاین علوم به‌ما نشان می‌دهد. بااین‌حال مسألهٔ جدی تعبیرتاریخی متون ریاضی از دیدگاه معیارها و زبان ریاضیات امروز مسأله‌ای‌است که به‌تازگی مورد توجه مورخین ریاضیات قرار گرفته، وتازگی آن خود مبین لزوم توجه بیشتر صاحبنظران به‌این‌مسأله‌است. درقسمت بعدی پس ازمرور تاریخچهٔ فصل کوتاهی‌درتاریخ ریاضیات که درمیان مورخان به"جبرهندسی" معروف‌است و به‌کمك شواهدی از تاریخ که ازچشم ایشان دور مانده‌است به‌گسترش این مبحث جالب می‌پردازیم.

الف) برخورد مورخ با ریاضیدان و مسألهٔ "دوفرهنگ"

ظاهراً دکسترهویس هلندی اولین مورخی‌است که باتوجه به‌مشکل حساس تعبیرمتون ریاضیات باستان هشدار دادکه "خطری که همهٔ کسانی راکه می‌خواهند ریاضیات یونان را از دیدگاه امروزی بنویسند تهدید می‌کند این است که ارائهٔ مفاهیم در قالب جدید چگونگی ادراك آنها را نیز مدرن جلوه خواهد داد" [۲]. پس از حدود نیم‌قرن سکوت در قبال چنین اخطار هوشیارانه و معقولی، ساباتای اونگورو با چاپ مقاله‌ای در نشریهٔ آرشیو تاریخ علوم دقیق تحت عنوان "دربارهٔ نیاز به‌از نو نویسی تاریخ ریاضیات یونان‌باستان [۳]، درمیان مورخان‌ریاضیات که غالباً‌خودریاضیدان نیز هستند سروصدای زیادی به‌راه انداخت. اعتراض اصلی این نویسنده به‌اصطلاح "جبرهندسی" است که در اواخر قرن نوزدهم زویتن ریاضیدان دانمارکی آن را بربخشی از ریاضیات یونان باستان اطلاق کرد [۴]. مورخانی که این اصطلاح را در مورد قسمتهایی ازکتب اقلیدس‌وآپولونیوس به‌کار برده‌اند "جبرهندسی" راجبری می‌دانندکه درآن خطوط مستقیم نمایش‌اعداد حقیقی‌مثبت هستند و اعمال چهارگانه منحصر به‌خطوط مستقیم وسطوحی چون مربع ومستطیل‌است که‌ازحاصل‌ضرب خطوط به‌دست می‌آیند[۵]. درمیان مثالهای گوناگون کتب‌ریاضی‌یونان باستان،قضایایی‌ازمقالهٔ دوم کتاب اصول اقلیدس ظاهراً مناسبترین نمونه‌ها برای توضیح جبرهندسی ومشکل‌اساسی‌تعبیرآن بوده‌اند. برای مثال قضیهٔ‌چهارم این مقاله بدین‌شرح‌است: "اگرخط مستقیمی ازنقطهٔ دلخواهی‌قطع شود، مربعی بر روی تمام این خط مساوی با مجموع دومربع بر روی دوقسمت این‌خط، به‌اضافهٔ دوبرابرمستطیل احاطه شده با این دوقسمت‌می‌باشد" [۶]. به‌زبان دیگر، مقدارسطح مربعی باقطرخط ب د مساوی است با مجموع مقدار سطح دو مربع با اقطار ب ج و ج د و مقدار سطح دو مستطیل ا ج و ج ه که معادل جبری آن چنین‌است

$$(a+b)^2=a^2+b^2+ab+ab=a^2+b^2+2ab.$$

بادرنظرگرفتن اینکه این قضیه‌کاملاً هندسی‌است، تبدیل آن به‌کمك حروف و فرمولهای نمادین مدرن به‌یك اتحاد جبری، هرچند از نظرریاضی‌اشکال ندارد، ازنظرتعبیرتاریخی‌قابل‌قبول‌نیست.ادعای اونگورو سخنگوی اصلی معترضان درهرسه مقالهٔ خود این‌است‌که نه‌تنها علمی‌به‌صورت"جبرهندسی" درآن دوره ازتاریخ‌امکان‌پذیر نبوده‌است بلکه این اصطلاح یك "تناقض" است. ازنظراوترکیب علمی چون هندسهٔ یونان باستان و علم مستقلی چون علم جبر قابل توجیه تاریخی نیست و زاییدهٔ تصورات برخی ازمورخان معاصر است‌که امروزه با دردست داشتن فرمول اتحادها ومعادلات درجه دوم می‌توانند قضیه‌هایی‌هندسی از قبیل قضیهٔ چهارم، پنجم وششم

مقالهٔ دوم یاقضیهٔ بیست وهشتم وبیست ونهم مقالهٔ ششم کتاب اصول اقلیدس را به‌صورت قضیه‌های جبری تبدیل کنند. او این افراد را متهم می‌کند که با عینکی مدرن به‌مفاهیم گذشته می‌نگرند و لذا تعبیری را اختیار می‌کنند که از حساسیت تاریخی برخوردار نیست[۷].

اولین عکس‌العمل در برابر مطالب جالب و جسورانهٔ این نویسنده ازطرف وان‌دروردن، ریاضیدانی که‌مقالات وکتب‌زیادی درتاریخ ریاضیات باستان نوشته‌است، در مقالهٔ کوتاهی بود تحت عنوان:"دفاع ازیك نظریهٔ تکان‌دهنده"،که همان سال درهمان‌نشریه به‌چاپ رسید. این مقاله همان‌طورکه از نامش نیز پیداست جواب مستقیمی به اعتراض اونگورو است: "ما (زویتن و پیروانش)، معتقدیم که یونانیان ابتدا به‌علم جبر پرداخته‌اند و بعدها آن را به‌زبان هندسی تبدیل کرده‌اند. جبرهندسی یك واقعیت‌است وهمان طورکه جزئی از جبراست جزئی از هندسه نیزهست. اونگورو در این مورد که ریاضیدانانی چون زویتن عقاید خود را دربارهٔ جبرهندسی یونانی صرفاً از راه تبدیل قضیه‌های اقلیدسی به‌زبان سمبلیك جبری به‌دست آورده‌اندکاملاً دراشتباه‌است. . . مقالهٔ دوم کتاب اصول اقلیدس به‌قدری از لحاظ دربر داشتن اصول جبر هندسی مشهوراست‌که حتی گاهی تصورشده‌که نویسندهٔ مقالهٔ دوم پیرو یك مکتب جبری بوده‌است"[۸].

تا چند سال بعد ازانتشار مقالهٔ وان‌دروردن مطالبی دفاعی در همین زمینه از ریاضیدانهای دیگر درهمان مجله به‌چاپ می‌رسید. پس ازچاپ مقالهٔ فرویدنتال با عنوان: "جبر چیست و تاریخ آن چه بوده‌است؟" [۹]، حملهٔ نهایی از آندره وایل فرانسوی بود و نامهٔ تند وی به‌مدیر این نشریه تحت عنوان: "چه کسی به‌اقلیدس خیانت کرد؟" با این جمله تمام می‌شود: "وقتی یك رشتهٔ تحقیقی تازه بین دو رشته به‌وجود می‌آید، معمولاً منجر به‌ظهورانگلهایی می‌شودکه ازهردو رشته بی‌خبرند، لیکن‌وانمود می‌کنندکه محققان هریك ازاین دو،آن رشتهٔ دیگر را نمی‌فهمند. متأسفانه امروزما در تاریخ ریاضیات با این جریان روبرو هستیم. بیایید این بیماری را قبل از اینکه مهلك شود براندازیم"[۱۰].

گفتگوی تند و حتی توهین‌آمیز این عده از محققان گاهی به جای از میان برداشتن مسألهٔ "دوفرهنگی"، یعنی نزدیك‌کردن مورخ و ریاضیدان یا به‌طور کلی‌محقق علوم ریاضی‌وعلوم‌انسانی، نمکی‌هم برزخمهایی‌که براثرجدایی‌این‌دوگروه ایجاد شده پاشیده است. برخورد شدید این افکار یادآور آن است‌که باید به‌جای زخم‌بندی سطحی، ترمیم عمیقتری دراین‌زمینه‌آغازشود وشاید این ترمیم از راه تاریخ علوم‌که خود حکم پلی‌میان این دو قطب را دارد آسانتر باشد.ولی منتقدین مفهوم "جبرهندسی" و مدافعین آن گاهی‌فراموش‌کرده‌اندکه هرمفهوم تاریخی‌را بایدازپشت‌دورنمای زمان ودرلابلای شواهد تاریخی جستجوکنند واین‌شواهدبه‌وضوح نشان می‌دهندکه بعد تاریخ اجازهٔ تأیید و انکار، یا حتی تعریف مفهومی راکه وجود و معنی ثابتی در تاریخ نداشته‌است نمی‌دهد. در نبرد میان مورخان علوم ریاضی‌برسرمفهوم جبرهندسی‌نیزغالب و مغلوب‌کامل وجود ندارد. اعتراض اونگورو به تبدیل بعضی از قضایای اصول اقلیدس‌به‌فرمولهای نمادین جبری، با درنظرداشتن اینکه چنین فرمولهایی در کتب تاریخ ریاضیات باستان یافت نمی‌شود، همان‌قدر قابل تأییداست‌که دفاع وان‌دروردن ازواقعیت تاریخی‌جبرهندسی، با استناد به‌نوشته‌ای از ثابت بن‌قره باعنوان: "درتصحیح مسائل جبر با براهین‌هندسی"[۱۱]که برریاضیات‌این دوران مبتنی است. همچنین متونی‌که از ریاضیات باستان به‌جا مانده، به‌خودی خود و بدون تحمیل حروف و فرمولهای جدید، همانقدر ادعای مدافعین جبرهندسی را که قسمتی از کتب هندسی یونان‌باستان"جبراست درلباس‌هندسی" تضعیف می‌کندکه‌شواهدی از تاریخ قبل از قرن هفدهم این برداشت راکه جبرهندسی‌زاییدهٔ ظهور ریاضیات نمادین‌است. پس مفهوم جبرهندسی نه قابل انکار مطلق‌است نه قابل‌تأیید مطلق، بلکه فقط قابل‌تجزیه وتحلیل تاریخی است. مثلاً متن رسالهٔ‌کوتاه ثابت بن‌قره به‌نام "درتصحیح مسائل جبر با براهین‌هندسی"که فقط دریکی ازمقاله‌های فوق به‌آن‌اشاره شده‌است، به‌این دلیل‌که ازقضیهٔ پنجم وششم مقالهٔ دوم‌کتاب‌اصول اقلیدس برای حل مسائلی قابل مقایسه با معادلات درجهٔ دوم‌جبری استفاده می‌کند و نیز از این منبع به‌طور صریح نام می‌برد شاید با ارزشترین شاهد تاریخی برای تثبیت جبر هندسی در مقطع به‌خصوصی از زمان یعنی قرن سوم دورهٔ اسلامی باشد.اما مورخان ریاضیات به‌جای استفادهٔ بیشتر از شواهدی چون رسالهٔ فوق‌که حتی ترجمهٔ آلمانی آن هم به‌همراه متن عربی‌آن نزدیك نیم قرن در دسترس بوده‌است [۱۲]، با عرضهٔ تعاریف ثابتی ازیك مفهوم تاریخی مسألهٔ جبر هندسی را آن‌قدر پیچیده‌کرده‌اند که این‌گمان به‌وجود می‌آیدکه حل‌مشکل جبرهندسی شاید تنها دلیلی نباشدکه مورخین ریاضیات را به‌فکرتعریف علم جبر وتجدیدنظر درتاریخ آن انداخته‌است.

ب) اختلاف نظر برسرتعریف و تاریخ علم جبر

در اکثرکتب تاریخ ریاضیات شناخت علمی تحت عنوان "جبر"با کتاب جبرومقابلهٔ خوارزمی‌رابطه داشته‌است. این‌شناخت‌تدریجی نخست توسط محققینی‌که در قرون وسطی آثارعلمی را از زبان عربی به‌زبانهای اروپایی ترجمه کردند و سپس‌از راه دسترسی به‌ترجمه‌های متعددکتاب جبرومقابله ایجاد شده‌است. بنابراین‌اگر تابه‌حال سؤالی درمورد پیدایش علم جبر مطرح بوده هرگزبه‌این صورت نبوده‌است‌که آیا جبر و مقابله نخستین‌کتاب در این‌زمینه هست یا نه، بلکه این بوده‌که ریشهٔ لغوی یا معنی علم‌جبرچیست.

دلیل‌اصلی اشکالاتی‌که درگذشته درموردتعریف وتعبیرتاریخی علم جبر پیش‌آمده این‌است‌که چون لغت "جبر" در زبان عربی‌دو معنی مختلف دارد (البته مورخینی هم بوده‌اندکه به‌دنبال‌ریشه‌های غیرعربی این لغت هم گشته‌اند. وگفته‌اند که مسلمانان این علم را همراه‌بانام‌سریانی‌آن (*gabru* = جبر) ازآرامیها وسریانیهایی‌که درناحیهٔ بابل به‌سرمی‌برده‌اند اخذکرده‌اند. [۱۳])، معنی‌شکستگی یاشکسته‌بندی‌این‌لغت، باعث‌شده‌است که‌علم‌جبررا به‌ازمیان‌برداشتن مقدار منفی و یاکسری یك معادله و یا حتی دومقدار متساوی ازدو طرف معادله تعبیرکنند. درصورتی‌که برپایهٔ معنی‌دیگرآن، جبررا علمی دانسته‌اندکه مجهول معادله را "مجبور" به‌قبول مقداری‌کند که درهر دوطرف معادله صادق باشد. تعریف اول که وجود لغت "مقابله" را درکنار"جبر" نادیده می‌گیرد، به‌عنوان تعریف کلی‌علم جبر طبعاً گمراه‌کننده‌است [۱۶]. اما به‌نظر می‌رسدکه انحراف در

تعریف و تعبیر تاریخ جبر گاهی خیلی‌جدیتر از اینها بوده است. اگر برخی‌از تعاریف علم جبر را که نسلهای بعدی مورخان‌ریاضیات ضمن‌اظهارنظردرموردنحوهٔ نگارش‌تاریخ ریاضیات‌پیش‌آورده‌اند به‌دقت بررسی کنیم شاید به‌عوامل دیگری که ریشهٔ این گونه انحرافات هستند نزدیکترشویم:

اونگوود (۱۹۷۵): "استفاده ازلغت جبر به‌عنوان نامی‌برای بخشی از ریاضیات بابلی ویونانی استعمالی نامناسب، بدون دقت، و گمراه‌کننده‌است. اگرجبر معنی واقعی خود را داشته باشد استفاده از این نام برای آن وصله‌ای ناجوراست...
تفکر درمسائل به‌صورت جبری این مشخصات را دارد:
۱. قابلیت به‌کاربردن نمادها؛
۲. سروکارداشتن با نسبتهای ریاضی، نه‌اشیاء ریاضی؛
۳. رهایی از درگیریهای مربوط به‌وجود خارجی مفاهیم" [۱۵].

واندردردن (۱۹۷۵): "وقتی من راجع به‌جبربابلی، یونانی، ویا عربی صحبت می‌کنم منظورم جبری است به‌معنای جبر خوارزمی، آرس‌مگنای کاردانو، یا جبرمدارس. پس‌جبرهنر به‌کاربردن عبارات و حل‌معادلات جبری‌است..." [۱۶].

فرویدنتال (۱۹۷۷): "جبر چیست؟ هیچ دادگاهی نیست‌که دراین باره حکم کند. با این حال "جبر" مثل هرلغت دیگری در زندگی روزمره معنی خاصی‌دارد. مثلاً درمدرسه، جبرحل معادلات درجهٔ اول و دوم‌است، نوع جبری است‌که بابلیها با آن شروع به‌کار کردند... قادربودن به تشریح روابط و حل مراحل وتکنیکی‌که به‌صورت عمومی‌به‌کار رود ازنظرمن درتفکرجبری چنان مقام مهمی داردکه من حاضرم نام جبر را به‌آن اختصاص بدهم،ولی مگر از یك نام چه توقعی می‌توان داشت؟" [۱۷].

اونگوود (۱۹۷۹): "معنی واقعی جبرهرچه باشد، استعمال متعارف این‌لغت‌معنی‌دیگری دارد. میزمیز است، صندلی‌صندلی... بنابراین درخت را میزخواندن گمراه‌کننده‌است، هرچندکه درخت می‌تواند به‌میز تبدیل شود وگاهی هم می‌شود. ولی در حقیقت خیلی وقتها هم نمی‌شود و این نکته بسیار مهم است... درنتیجه با مشخصاتی که خود فرویدنتال برای تفکرجبری تعیین‌کرده، جبربابلی‌ویونانی غیرجبری هستند. همین قادرنبودن به"تشریح روابط وحل مراحل" است‌که مانع این‌می‌شودکه ریاضیدان‌بابلی‌واجد شرایط جبردانی باشد... چیزی‌که او قادراست به‌وجود بیاورد دستورالعمل است نه‌فرمولهای عمومی... هیچ جبری درمنابع بابلی و یونان قبل از دیوفنطس وجود ندارد. جبربابلی ویونانی‌فقط زمانی به‌وجودآمد که قضایای مخصوص عددی بابلی وهندسی یونانی به‌زبان جبری رونویسی‌شد."جبر" فقط درنتیجهٔ تشریح متون‌به‌وسیلهٔ ریاضیدانان به‌وجود آمده‌است"[۱۸].

درهیچ‌یك از این تفاصیل، برای مشخص‌کردن اینکه علم‌جبر چیست یا اینکه تفکر به‌صورت جبری کدام‌است، اشاره‌ای به‌یکی از ارکان قدیمی و اصلی‌این‌علم، یعنی‌مرحلهٔ تشخیص‌وتثبیت مقدار مجهول نشده‌است. این‌مرحله‌ای‌است که به‌طورقطع درمسائل‌عددی بابلی وجود دارد، و هرچند درخود قضایای هندسی یونان باستان به‌چشم نمی‌آید، در متون ریاضی بعد ازاین دوره مانند قسمتی از جبرقرون‌اول دورهٔ‌اسلام چون جبرخوارزمی، ابن‌ترك، ثابت‌بن‌قره، ابوکامل، و حتی عمرخیام، از قضایای اقلیدسی برای استخراج و اثبات جواب مجهول‌که معمولاً به‌صورت ضلع مربعی مشخص می‌شود استفاده می‌کنند.همهٔ این نوشته‌ها به‌زبانهای‌جدیداروپایی ترجمه شده‌اند و تحقیقات مربوط به‌آنها در دسترس‌محققین‌دیگر بوده‌است [۱۹]. ولی واضح‌است‌که اگرکسی‌بخواهد مثلاً آغاز علم جبر را همزمان با جبرسه‌بولیك قرن بیستم ببیند، به‌تعریفی از جبرکه سابقهٔ این‌علم‌را به‌قرونی قبل‌ازآن برساند اعتراض‌خواهد کرد، چه تعریفی‌که رکن اصلیش وجود اتحادها و یا حل معادلات درجهٔ دوم است، و چه تعریفی که حتی وجود نوعی روش یا دید عمومی مانند جبرقرن هفدهم ویت ودکارت را لازم می‌داند[۲۰]. این تمایل باعث می‌شودکه درهرحال یکی ازاصلیترین‌ارکان‌برای شناخت علم جبر یعنی "استخراج مجهول" آنقدر پشت‌پردهٔ تعصب تاریخی پنهان شودکه حتی اشاره به‌مفهوم "مجهول" هم درتعریف آن از قلم بیفتد. این مفهوم باستانی یعنی "استخراج مجهول" که لفظ آن حداقل از قرن چهارم هجری درمورد علم جبربه‌کار رفته است، نه‌تنها صریحاًدرکتب ریاضیدانان این‌دوره ازتاریخ به‌چشم می‌خورد،بلکه درمنابع مهم تاریخی دیگرمانندکتاب‌التفهیم‌بیرونی و مقدمهٔ ابن‌خلدون نیز ذکرشده‌است [۲۱]. اگرمورخان‌ریاضیات امروز چنین رکنی را به‌عنوان اصلیترین پایهٔ علم جبربپذیرند، ویا حداقل آنقدر مهم بدانندکه در تعریف علم جبر بگنجانند، بالطبع امتیاز تأسیس علم مستقلی به نام جبر به ریاضیدانان عربی‌نویس دوران اسلامی بازگردانده خواهد شد [۲۲].

ج) مفهوم تاریخی علوم ریاضی و تاریخ این علوم

مفهوم تجمعی هرعلم و ثبت تاریخ‌آن دو رکنی هستندکه نه‌تنها از هم‌قابل‌تفکیك نمی‌باشند بلکه هرکدام به‌نوعی به‌آن دیگری متکی است، بدین‌معنی‌که هیچ علمی بدون درنظرگرفتن بعد تاریخی آن بیش از یك تعریف قراردادی نیست و نگارش تاریخ هرعلمی‌نیز به‌مفهومی ازاین علم نیازمنداست‌که هم ازنظرشواهد تاریخی‌قابل تأیید باشد و هم‌گمراه‌کننده نباشد. پس تعبیری‌که به‌این دو عامل توجه نکند از حساسیت تاریخی برخوردار نیست. برخی‌ازمنابعی که دراین مقاله به‌آنها اشاره شده است درکار نوشتن تاریخ جبر به‌دلیل انتخاب تعریفی برای این علم که مجموعهٔ مفاهیم آن را ثابت وشبیه به‌مفهوم معاصرآن می‌پندارد فاقداین‌حساسیت تاریخی هستند. اما مباحثی‌که در این میان درگرفته ظاهراً باعث شده است که مورخان به‌یك‌خانه تکانی‌اساسی‌کمر ببندندوپشت‌کردن تدریجی تاریخنویسان علم به‌این روش، و نیز به شیوه‌های غیرقابل قبول دیگری‌که سالهادرنگارش‌تاریخ‌علوم رایج بوده‌است، به‌خصوص در دههٔ اخیر،کاملاً محسوس‌است [۲۳].

آیا ما به‌راستی شاهد انقلابی در فلسفه و تاریخ ریاضیات هستیم؟ از نظر برخی، نوشتهٔ نسبتاً تازهٔ فیلیپ‌کیتچر با نام ماهیت معرفت ریاضی [۲۴]که درطی شش سال‌که ازتحریرآن می‌گذرد به‌وسیلهٔ حداقل سیزده نویسنده معرفی وتوصیه شده است، یادآور انقلابی‌است‌که بیش از بیست سال قبل‌کتاب توماس‌کوهن دربارهٔ انقلابات‌علمی، درمیان محققین‌درتاریخ وفلسفهٔ‌علوم به‌راه انداخت [۲۵]. ازنظرخودکیتچر نیز، روش او یك روش کاملاً انقلابی

است برای بر کندن ریشه‌های سه‌نوع نگرش در تاریخ علوم ریاضی که از نظر او غیرقابل قبول‌اند، یعنی جدا کردن ریاضیات از علوم دیگر، از زمینه‌های اجتماعی، و از جنبه‌های زمانی و تاریخی[۲۶]. اگر همگام با این نویسندگان دهۀ فعلی را دوران انقلاب در فلسفه و تاریخ علوم بپنداریم، باز از اهمیت دهۀ قبلی و بحث مورخان دربارۀ نگارش تاریخ علوم ریاضی به‌عنوان یك دورۀ "پیش انقلابی" کاسته نخواهد شد.

مراجع

۱. این اصطلاح "whig history" و واضع آن هربرت باترفیلد است:
Herbert Butterfield, *The Whig Interpretation of History*, London, G. Bell and Sons, 1931.

2. Sabetai Unguru, "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics", *Archive for History of Exact Sciences*, 1975, 15: 67-114.

3. E.J. Dijksterhuis, *De Elementen Van Euclides*, 2 vols, Groningen & Noordhoff, 1929-30: translated from E. M. Bruins' English version in *Janus*, 1975: 309-10.

4. H. G. Zeuthen, *Lehre von den Kegelschnitten in Altertum*, Kopenhagen, 1886.

5. B. L. Van der Waerden, "Defense of a 'Shocking' Point of View", *Archive for History of Exact Sciences*, 1975: 199-210, p. 203; "What is Algebra", *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, 1983: 70-99, p. 75.

6. Euclid, *Elements: The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols. edited and translated by T.L. Heath, Dover, New York, 1956, vol I, p. 379.

7. Sabetai Unguru, "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics", p. 73; "Critiques and Contentions-History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of the Art", *Isis*, 1979, 70: 555-65; Unguru,S. & Rowe,D.E. "Does the Quadratic Equation have Greek Roots? A Study of 'Geometric Algebra', 'Application of Areas' and Related Problems" *Libertas mathematicas*, vol I: 1981: 1-49; vol II: 1982: 1-62.

8. B.L. Van der Waerden, "Defense of a 'Shocking' point of View", p. 203.

9. H. Freudenthal, "What is Algebra and What has been its History?" *Archive for History of Exact Sciences*, 1977, 16:189-200.

10. Andre Weil, "Who Betrayed Euclid?-extract from a letter to the editor", *Archive for History of Exact Sciences*, 1978, 19: 91-93, p. 93.

۱۱. ثابت بن قره، "فی تصحیح مسائل الجبر بالبراهین الهندسیة". تصحیح از:
Paul Luckey, in *Abdruck aus den Berichten der Mathematische-Physischen Klass der Sachsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, XCIII. Band, Sitzung Vom 7. Juli 1941. Van der Waerden (1975), p. 205.

۱۲. ترجمۀ آلمانی این رساله در منبع پیشین آمده است.

13. Solomon Gandz, "The Sources of al-Khwārizmī's Algebra", *Osiris*, 1936, 1: 263-277, p. 275.

۱۴. برای منابع این تعاریف و نتایج آموزندۀ آن رجوع کنید به
George Saliba, "The Meaning of al-jabr wa al-muqabalah", *Centaurus*, 1972, 17:189-204.

15. Sabetai Unguru, "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics", p.77.
ظاهراً نوشته‌های زیر این تعریف سه قسمتی را الهام بخشیده‌اند.
Michael S. Mahoney, "Die Anfang der Algebraischen Denkwise", *Rete*, 1971, 1: 15-31, English version: The Beginnings of Algebraic Thought in the Seventeenth Century", published in S. Gaukroger ed., *Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics*, 1980: 141-155; Mahoney, Michael S. "Babylonian Algebra: Form Vs. Content", *Studies in the Hist. and Phil. of Science*, 1971, 1: 369-380.

16. B.L. Van der Waerden, "Defense of a 'Shocking' Point of View", p. 199.

17. H. Freudenthal, "What is Algebra and What has been its History?", p. 193.

18. Sabetai Unguru, "Critiques and Contentions...", p. 561 & 557.

19. Muhammad ibn Mūsā Khwarazmī, *Kitāb mukhtasar fī al-Hisāb al-jabr Wa al-muqabalah*. ed. and translated by Fredrick Rosen, London 1831; Ibn Turk, Abd al-Hamīd. *al-darurat fī al-muqtarināt min Kitāb al-jabr wa al-muqabalah*, ed. & trans. by Sayili, Aydin in *Logical Necessities in Mixed Equations by Abd al-Hamīd ibn Turk and the Algebra of his Time*, Ankara, 1962. Thābit ibn Qurra. *fī tashihi masā'il al-jabr bi al-barāhīn al-hindasiyah*, ed. and trans. into German by Paul Luckey, see note 12-13; Shuja' ibn Aslam, Abū Kāmil. *Kitāb fī al-jabr wa al-muqabalah* edited and translated as *The Algebra of Abu Kamil* by Martin Levey, Univ. of Wisconsin, 1966; Khayyam Umar. *fī al-barāhīn 'ala masā'il al-jabr wa l-muqabalah* ed. and translated by F. Woepke as *L' algebre d'Omar alkhayyami*, Paris, 1841, 128 p. English translation from Winter & Arafat's "The algebra of 'Umar Khayyam", *Journal of the Royal Society of Bengal (JRASB)*, 1950, 16: 27-77.

۲۰. بهترین منبع برای این تعبیر کتابی است با ارزش درباره تاریخ یونان باستان
Jacob Klein, "Die grieke Logistik und die Entstehung der Algebra" *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik*, 1936, 3, 2: 122-135 trans. into English as *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*, Cambridge, 1968.

۲۱. ابوریحان بیرونی، *کتاب التفهیم لاوائل صناعة التنجیم*، تصحیح جلال همائی، تهران ۱۳۵۲، ص ۴۸؛ ابن خلدون، مقدمه، ترجمۀ محمدپروین گنابادی، چاپ چهارم، تهران ۱۳۶۲، ص ۱۰۱۱؛ و رجوع کنید به
George Saliba, "The Meaning of al-jabr wa al-muqabalah".

۲۲. برای بحث جالب و مفصّلی در رابطه با "غربی" بودن علم، مراجعه کنید به
Roshdi Rashed, "Science as a Western Phenomena", *Fundementa Scientiae*, 1976, 1: 7-21.

۲۳. برای بحث مفصّل تر و جزئیات بیشتری در مورد این مطلب رجوع کنید به حسین معصومی همدانی، "تاریخ و ریاضیات، تاریخ ریاضیات و تاریخهای ریاضیات"، نشر ریاضی، سال ۱:۱۳۶۷، شمارۀ ۲، ص ۱۴۰ـ۱۴۷.

24. Philip Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, 1983.

25. Michael J. Crowe's Review of Kitcher's, *The Nature of Mathematical Knowledge* in *Historia Mathematica*, 1987, 14: p. 204.

26. Philip Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 3-4.

★ الهه خیراندیش، بخش تاریخ علوم دانشگاه هاروارد

در مقالهٔ زیر ازجماعتی به‌نام "سودازدگان" سخن می‌رودکه عده‌ای از ویراستاران مرکز نشردانشگاهی آنها را با عنوان مجعول "نوابیغ" می‌شناسند. نوابیغ ریاضی، از جمله مراجعان پیگیر وخستگی‌ناپذیر دفتر هرمجلهٔ ریاضی هستند وما تصمیم گرفتیم برای یك‌بار هم‌که شده، سراغ این‌مراجعان سمج خود برویم. یکی‌ازمشخصه‌های "نوابیغ" ریاضی، مانند سایر انواع نوابیغ، این است‌که به‌موفقیتهای کوچك قانع نیستند. حل مسائل معمولی آنها را راضی نمی‌کند و بلکه دون شأن آنهاست. می‌خواهند حرف مهم بزنند و یا پنبهٔ حرفهای مهم را بزنند. بیشتردوست‌دارند مسائلی را حل‌کنندکه دیگران ثابت‌کرده‌اند نمی‌توان حل‌کرد. از جملهٔ این مسأله‌ها، تضعیف مکعب، تربیع دایره، تثلیث زاویه، و اثبات اصل توازی است‌که همواره در معرض یورش بی‌امان نوابیغ بوده‌اند. در وهلهٔ دوم به‌مسائلی بذل عنایت می‌کنند،که گرچه حل‌ناپذیر بودنشان ثابت نشده ولی تلاش صدها ساله یا دهها سالهٔ ریاضیدانان حرفه‌ای ترازاول برای حل‌آنها به‌جایی نرسیده است. ازجملهٔ این‌مسأله‌ها، قضیهٔ معروف مرحوم فرماست. خلاصه، می‌خواهند کاری بکنندکارستان؛ و ازحیث شجاعت و بلندپروازی دست‌کمی‌از دانشمندان درست و حسابی ندارند، ولی‌متأسفانه شباهتشان با نوابغ واقعی در همین یك صفت خلاصه می‌شود. مقاله‌ای‌که در زیرمی‌خوانید، وضع وحال‌گروهی ازآنها راکه به‌تثلیث زاویه علاقه‌مندند، از زبان یك نوابیغ‌شناس آمریکایی‌که زمینهٔ تخصصی‌اش "تثلیث‌گر شناسی" است، شرح می‌دهد. گرچه ما همان لفظ بی‌اصل ونسب نوابیغ را بر "سودازدگان" ترجیح می‌دهیم، ولی دراین مقاله سلیقهٔ مترجم را محترم شمرده‌ایم.

با تثلیث‌گرها چگونه برخورد کنیم؟*

اندروود دادلی*
ترجمهٔ محمد باقری

تثلیث‌گر کسی‌است‌که به‌خیال خود موفق‌شده راهی برای تقسیم هر زاویهٔ دلخواه به‌سه قسمت مساوی، تنها به‌کمك خطکش و پرگار بیابد. چنین شخصی درآستانهٔ ظهور خود روش تثلیث خود را از طریق نامه برایتان می‌فرستد و نظر شما را می‌خواهد، یا (بدتر از آن) با تلفن زدن به‌شما می‌خواهد راجع به‌کارش بحث‌کند. بدتر از همه وقتی است که شخصاً در مقابلتان ظاهرمی‌شود. شاید فکر کنید شیوهٔ برخورد با تثلیث‌گرها مسألهٔ چندان مهمی نیست، ولی در اینجا می‌خواهم نشان بدهم‌که اتفاقاً مهم هست.

تثلیث‌گرها زیرمجموعه‌ای هستند از "سودا زدگان" ریاضی که به‌نوبهٔ خود زیرمجموعه‌ای از همهٔ سودا زدگان را تشکیل می‌دهند. شاید خیال کنید برای یك ریاضیدان راحت‌تراست‌که با این سودازدگان سر و کار داشته باشد تا مثلاً با اقتصاددانها. طرفدار فلان شیوهٔ خاص مالیات‌گیری ممکن‌است بحث بی‌پایان و بی‌نتیجه‌ای به‌راه بیاندازد وتنها راهی‌که برای آزمودن‌کارایی آن شیوه وجود دارد این‌است‌که در مورد یك ملت یا مجموعه‌ای از ملتها عملاً آن را امتحان‌کنند. در ریاضیات قاعدتاً باید کمتر به بحثهای بی‌پایان بر بخوریم: در قبال یك "اثبات" عرضه شده برای حدس فرما، جوابی از این‌دست‌که: "درصفحهٔ چهارم، سطر ۱۲، اشتباهی وجود دارد"، غائله را ختم می‌کند و درمورد روشی که برای تثلیث زاویه عرضه شود نیازی نیست که حتی تا صفحهٔ

چهارم آن خوانده شود، زیرا هیچ‌گونه شانسی برای درست‌بودن آن‌وجودندارد. امامتأسفانه واقعیت همیشه چنین‌نیست. تثلیث‌گرها هم مثل سایرسودازدگان می‌توانند مجادله‌های پایان‌ناپذیری به‌راه بیاندازند.

خصلت مشترک تثلیث‌گرها پیربودنشان است. تثلیث‌گرهاعموماً موضوع تثلیث را درکلاس هندسه شنیده‌اند و تا سالها پس از آن و اغلب تا بعد از دوران بازنشستگی، نتوانسته‌اند روش‌ترسیمی برای آن بیابند.

دیگراینکه تثلیث‌گرها عموماً مذکرند. با توجه به‌دوتثلیث‌گر مؤنثی‌که سراغ دارم، می‌توان با یك محاسبهٔ آماری تقریبی نتیجه گرفت‌که به‌احتمال ۹۵٪ نسبت تثلیث‌گرهای‌مؤنث به‌کل تثلیث‌گرها ۴ درصد است. خانمها عاقلتر ازآنندکه وقت خود را در راه‌چنین اباطیلی صرف‌کنند. یك حقوقدان از ایلینوی درسال ۱۹۵۳ نوشته است:

"درسال اول دبیرستان (۱۹۱۳-۱۹۱۴) در ایلینوی توجهم به این مسأله جلب شد. مسأله را معلم هندسه‌مان مطرح‌کرد. راجع به‌آن تعمق‌کردم وبارها وبارها به‌آن اندیشیده‌ام."

یك مهندس درسال ۱۹۷۳:

"همه‌چیز درسال ۱۹۳۶ شروع شد. ازآن زمان به‌بعد، اوقات فراغتم راکم وبیش در راه موضوع تثلیث صرف کرده‌ام."

از دوسادورف، ۱۹۷۳:

"با بیش از۱۲۰۰۰ ساعت‌کار طی۴۰سال سرانجام این راه‌حل‌را یافته‌ام. من‌ریاضیدان نیستم، بلکه‌کارمند دولتم و اکنون ۶۹ سال دارم."

دوازده‌هزارساعت کارا با احتساب هفته‌ای چهل ساعت برای کار تمام‌وقت،این‌مقدار معادل سیصد هفته می‌شود، یعنی‌این‌مردسرگشتهٔ بینوا معادل شش سال از عمرش را صرف امری‌کرده‌است به‌همان بیهودگی‌که‌کسی بکوشد دوعدد زوج بیابدکه مجموعشان‌فردباشد. در چنین مدتی چه‌کارها که نمی‌توان‌کرد و براستی‌که ازچه‌اتلاف وقت دردانگیزی سخن می‌رود!

یکی دیگر از خصوصیات بارز تثلیث‌گرها این‌است‌که قادر به‌درك معنی "ناممکن" در ریاضیات نیستند. یکی از ضعفهای‌عمدهٔ آموزش ریاضی در این است‌که ماهیت اصلی ریاضیات را برای شاگردان روشن نکرده‌است. شاهدی براین مدعا، تثلیث‌گری‌است که چنین نوشته:

"از طریق پست، بروشوری از یك مجلهٔ علمی دریافت کردم‌که جملهٔ ساده‌ای درآن دیده می‌شد. مضمون جمله چیزی دراین‌ردیف بودکه **فرمول تثلیث زاویه** هیچگاه یافته نشده‌است. این موضوع شدیداً توجه و کنجکاوی مرا برانگیخت. نمی‌توانستم باورکنم‌که صدها سال پس ازپیدایش ریاضیات چنین چیزی واقعیت داشته باشد."

بنابراین به‌کتابخانه رفت و متوجه شد که همهٔ‌کتابها این کار را ناممکن دانسته‌اند:

"چطور امکان داردکه دانشمندان تا این‌حد ابله باشند؟ هردانشمند یا ریاضیدانی که پیشاپیش ادعا می‌کند حل فلان مسأله ناممکن‌است در واقع ناتوانی خود را نشان داده است."

تثلیث‌گری از نیواورلئان، ۱۹۳۳:

"به‌علاوه، مشاهده می‌کنیم‌که ریاضیدانان معتبر ما به‌حل این مسائل کمر نمی‌بندند، بلکه مقالاتی می‌نویسند تا ناممکن بودن حل‌آنها را نشان دهند. اینها به‌جای‌آنکه انگیزه‌هایی برای حل این مسأله‌ها ایجاد کنند، دیگران را دلسرد می‌کنند و به‌آنها "سودازده" لقب می‌دهند."

این تثلیث‌گر تأییدیه‌ای هم از یك استاد ریاضی- که نامش را نمی‌برم- ازیکی ازدانشگاهها -که نام‌آن را هم‌نمی‌برم- داشت:

"من‌کار شما را در مورد "تثلیث زاویه" به‌دقت بررسی کردم و نتوانستم هیچ غلطی درآن پیداکنم."

اما شما باتثلیث‌گر مثل‌این استاد رفتارنکنید. گرچه ممکن‌است در کوتاه‌مدت از دست او خلاص شوید اما در درازمدت این‌کار هم به‌ضرر تثلیث‌گر و هم به‌ضرر شماست.

سومین‌مشخصهٔ تثلیث‌گرها آن‌است‌که زیادریاضیات‌نمی‌دانند. معلومات آنها از حد هندسهٔ دبیرستانی بالاتر نیست. بعضیها حتی به‌این حد هم نرسیده‌اند. تثلیث‌گری در سال ۱۹۵۲ چنین نوشته است:

"برای حل این مسأله باید ازخارج بدان نگریست وآن را با مطالعهٔ هندسه و مثلثات نمی‌شود حل‌کرد، کما اینکه راقم این سطور هیچ‌گاه تحصیلی در این علوم نداشته است".

شاید گمان کنید کسی که ریاضیات عالی بداند، تثلیث‌گر نمی‌شود ولی همیشه چنین نیست. تثلیث‌گری در اثبات خود قضیهٔ "دزارگ" را به‌کارگرفته و دیگری اثباتی مثلثاتی ارائه کرده که پر از مشتقهای جزئی‌است.

تثلیث‌گرها چنین می‌اندیشندکه تثلیث کار مهمی است.کسی به‌آنها نگفته‌که این‌کار با نقاله به‌سرعت وبه‌خوبی انجام‌پذیراست و اگر نقاله در دسترس نباشد، خطکش ارشمیدس هم با دو خط نشانه‌ای‌که رویش‌هست برای این‌منظورمشکل‌گشاست. تثلیث‌گری درسال ۱۸۹۲ نظریهٔ غریبی ابراز داشته است:

"... مؤلف اثر حاضر، به‌خاطر حل این مسأله‌که برای همهٔ شاخه‌های علم وهنرفوق‌العاده مفید و ضروری‌است، مطالعات دقیقی به‌عمل‌آورده ...."

عجیبترین‌کاربردی که تاکنون برای تثلیث دیده‌ام در سال ۱۹۳۴ مطرح شده‌است:

"... بعید نیست معلوم شودکه **تثلیث زاویه** کلید کشف کیمیای جدیدی‌است‌که به‌کمك آن می‌توان عنصری را به‌عنصردیگرتبدیل‌کرد- یا به‌عبارت دیگر، به‌کیمیاگری عملی توفیق یافت."

تثلیث‌گری از اوهایو از ارسال روش ترسیمش برای من امتناع کرد زیرا گمان می‌کرد که باید بابت آن پولی دریافت کند و می‌ترسیدمن‌آن‌را بدزدم. من‌هم به‌قصد انتقام، بین او وتثلیث‌گری در تگزاس تماس ایجاد کردم ولی این انتقام‌جویی موفقیت‌آمیز نبود: آنها با یکدیگر مکاتبه‌کردند و هریك به این نتیجه رسیدند که دیگری چیزی سرش نمی‌شود. تثلیث‌گرها معمولاً به دنبال

گرفتن حق نشر انحصاری یا ثبت رسمی یا گرفتن تأییدیه برای روش ترسیم خود هستند:

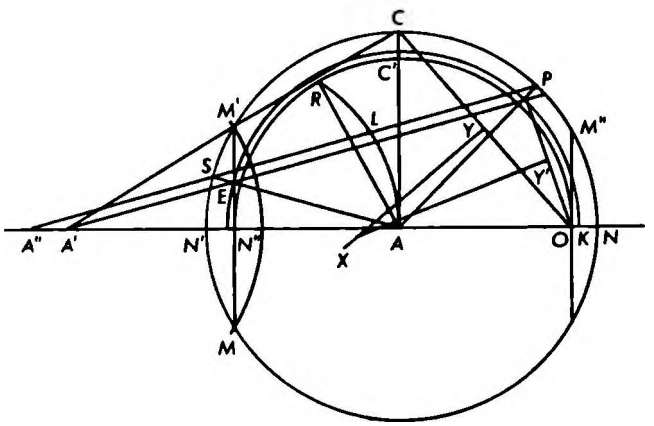
"وقتی قرار شد این طرح را به ناشر عرضه کنم، روی انحصار حق نشرخیلی تأکید داشتم. ترسم ازآن بودکه نکند ناشر تثلیث مرا بالا بکشد و من برای احرازحق خود به‌ناچار روانهٔ دادگاه شوم."

تثلیث‌گر دیگری می‌خواست بداند برای دریافت جایزهٔ نقدی که شنیده بود برای حل این مسأله داده می‌شود به‌کجا باید مراجعه کند. (راه‌حل او برایم تازگی داشت: عبارت بود از بریدن زاویه ازکاغذ، لوله‌کردن آن به‌طوری‌که به‌صورت مخروط دوار درآید، سپس تقسیم قاعدهٔ دایره شکل آن به‌سه قسمت مساوی و بازکردن آن. به‌اوگفتم‌که این ترسیم در واقع به‌کمك خط‌کش و پرگار و قیچی انجام می‌شود و جایزهٔ نقدی به آن تعلق نمی‌گیرد. از آن زمان هم دیگرخبری از اوندارم.) پزشکی از ماساچوست درسال ۱۸۹۰ نوشته‌است:

"با اطمینان به اینکه تلاش من به‌سود علم خواهد بود، به‌پاس افتخاراین دستاورد، از زحمت چندین‌ساله‌ای‌که کشیده‌ام چشم‌پوشی می‌کنم."

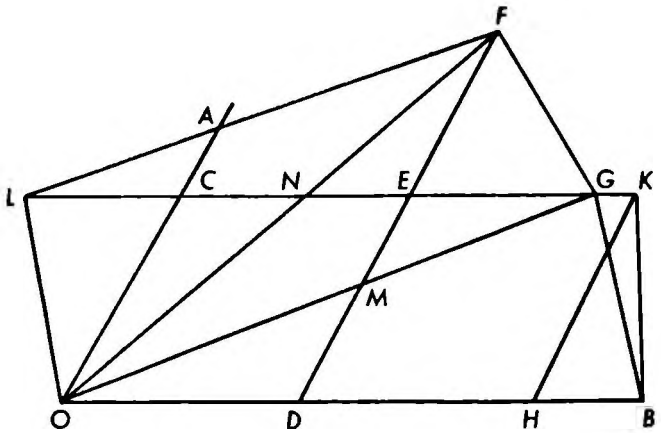
"چشم پوشی می‌کنم." براستی چه چیزی از این فروتنی جاهلانه خشمگین‌کننده‌تراست؟

تثلیث‌گرها نمودارهای پیچیده‌ای رسم می‌کنند. شکل ۱ نمونه‌ای از این ترسیمهاست. رسم مجدد آن خیلی‌وقت مراگرفت و با همهٔ کوششی‌که برای سادگی و وضوح آن‌کردم، می‌بینیدکه خطها وکمانها همه‌جا را پرکرده‌اند و به‌کنه آن نمی‌توان پی‌برد. علت پیچیدگی این ترسیمها معلوم نیست. شاید تثلیث‌گرها آن‌قدر

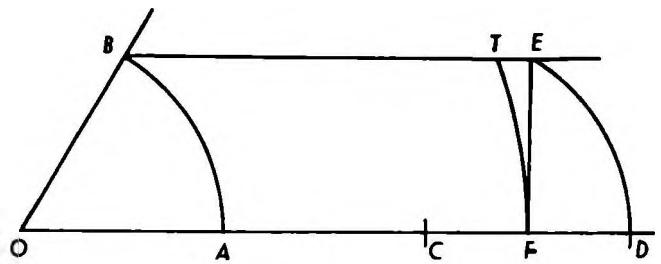


شکل۱

درکار خود غرق می‌شوندکه نمی‌توانند به‌عقب برگردند و در آن تجدیدنظر کنند. شاید فکر می‌کنند که این پیچیدگی خواننده را تحت‌الشعاع قرارمی‌دهد و یاشاید دانسته یا ندانسته، اندکی‌نسبت به‌کارخود نامطمئن هستند و فکر می‌کنند یافتن اشتباه در نموداری پیچیده با حروف‌فراوان، به‌مراتب دشوارتراست. درشکل۲ نمونهٔ نسبتاً ساده‌تری ازنمودارتثلیث را می‌بینیدکه شکل۳ صورت ساده شدهٔ آن است. در اینجا وارد این جزئیات نمی‌شوم‌که شکل اول



شکل۲



شکل۳

چگونه به‌دست می‌آید، ولی در مورد شکل دوم، خطی‌گذرنده از B به‌موازات OA بکشید؛ AC و CD را مساوی با OA جداکنید، کمان DE را به‌مرکز C و شعاع CD رسم کنید، از E عمودی بر OD فرود آورید وکمان FT را به‌مرکز O و شعاع OF رسم کنید تا نقطهٔ تثلیث T به‌دست‌آید. این تثلیث هم مثل بقیهٔ تثلیثها ویژگی برجسته‌ای ندارد ودر واقع بارها و بارها ازنوکشف شده و تا جایی‌که من می‌دانم تنها موردی است‌که حتی زمانی (درسال ۱۹۳۳) رئیس یك دانشگاه غیرمعروف مرتکب آن شده‌است. وی پیش از آن علاوه برتثلیث، تضعیف مکعب هم‌کرده بود و اثباتی برای اصل پنجم اقلیدس‌داده بود. لابد فکر می‌کنید بایدباکسانی ازدانشکدهٔ ریاضی دانشگاهش دربارهٔ کارخود صحبت‌کرده باشد، اما بسیاری از تثلیث‌گرها، از روی ترس یا به‌شوق‌کسب افتخار به‌نصیحت کسی گوش نمی‌دهند. شاید هم او مشورتهایی کرده و کسی با او مخالفت نکرده‌است ــ آخر درسال ۱۹۳۳ کار تدریس به‌زحمت گیرمی‌آمد. ترسیم او هم‌ارز است با این‌حکم‌که

$$\sin\frac{A}{۳}=\frac{\sin A}{۲+\cos A}.$$

تحقیق دربارهٔ صحت وسقم این حکم، تمرین مثلثاتی خوبی‌خواهد بود.

تثلیث‌گرها نامه‌نویسان چیره دستی هستند. آنها مشتاقانه با ریاضیدانان مکاتبه می‌کنند و خلاص‌شدن از دست آنها کارآسانی نیست. افراطی‌ترین نمونه‌ای‌که سراغ دارم سودازده‌ای است که

تثلیث نمی‌کرد بلکه نکتهٔ زیر را کشف کرده بود. شش جایگشت ۱، ۲، ۳ را اختیار کنید و آنها را به ترتیب صعودی بنویسید و تفاضلهای مرتبهٔ اول را به‌دست آورید.

۱۲۳	۱۳۲	۲۱۳	۲۳۱	۳۱۲	۳۲۱
۹	۸۱	۱۸	۸۱	۹	

مجموع این‌دو ردیف ۱۳۳۲ و ۱۹۸ است. اکنون ارقام عدد پی (π) را در گروههای سه‌تایی بگیرید و عدد سحرآمیز ۱۹۸ را به‌آنها بیفزایید:

۳۱۴	۱۵۹	۲۶۵
۱۹۸	۱۹۸	۱۹۸
۵۱۲	۳۵۷	۴۶۳

حاصلجمع این‌سه مجموع، بی‌کم وکاست ۱۳۳۲ است. این‌مطلب خود به‌تنهایی شگفت‌انگیز است، گرچه علاوه بر آن، خاصیتهای قابل‌توجه دیگری هم وجود دارد یعنی‌رابطهٔ $۵۱۲ = ۲^۹$ وترتیب ارقام ۳، ۵، ۷، و من این موارد را طی نامه‌ای به‌آن سودازده اطلاع دادم. طی سه هفتهٔ بعد، دوازده نامهٔ چند صفحه‌ای از او به‌دستم رسید گرچه به‌هیچ‌یك جوابی نداده بودم؛ و همین‌چند وقت پیش هم او یك‌بار دیگر بخت خود را آزمود.

تقریباً درهمهٔ موارد، مکاتبه با تثلیث‌گرها خطاست زیرا اساساً متقاعدکردن آنها به اینکه اشتباه می‌کنند غیرممکن است. در یك مورد، مکاتبهٔ تثلیث‌گر و ریاضیدان بیش از هفت‌سال ادامه یافت. بهتراست انسان اصلاً چنین‌کاری را شروع نکند.

نامه‌های یك تثلیث‌گر به‌من، کم‌کم لحن توهین‌آمیزی به‌خود گرفت (بعداً فهمیدم‌که با دیگران هم همین معامله راکرده است). سرانجام نامه‌ای رسیدکه با ماژیك‌آبی و با حروفی به‌ارتفاع‌پنج سانتیمتر نوشته شده بود. نویسندهٔ نامه در آتش خشم و نومیدی می‌سوخت. اندکی بعد، کپی نامه‌ای را دریافت کردم که به‌رئیس دانشگاهم نوشته بود و طی‌آن مرا به‌جنایتها و تخلفات گوناگون متهم‌کرده بود. گمان نمی‌کنم‌رئیسم چندان توجهی به‌این‌قضیه‌کرده باشد (او رئیس فوق‌العاده توداری بود)، ولی طی نامه‌ای به آن تثلیث‌گر، قوانین مربوط به‌تهمت و توهین راگوشزدکردم ومکاتبه قطع شد. لابد حالا این تثلیث‌گر به‌سراغ قربانی‌دیگری‌رفته‌است.

یکی‌ازعواقب سوءاین علاقهٔ مفرط به‌نامه‌نگاری،وقت زیادی است‌که تثلیث‌گرها از جامعهٔ ریاضی می‌گیرند، گذشته از پولی‌که دراین میان صرف هزینهٔ پستی می‌شود. خیلی از گروههای ریاضی خود را با سودازدگان درگیرنمی‌کنند، اما در بعضی ازما روحیهٔ معلمی آن‌قدر قوی است‌که می‌خواهیم با تثلیث‌گر استدلال‌کنیم. این کار تقریباً همیشه بیهوده است. شاید بتوانید به هدف نزدیك شوید ولی به ندرت موفقیتی حاصل خواهید کرد. تثلیث‌گری از "گویان" درسال ۱۹۷۵ نوشته‌است:

"دانشمند بزرگی به‌من گفت: فکرمی‌کنم باید به‌شما بگویم که از خیلی‌وقت پیش ثابت شده که تثلیث زاویه تنها به‌کمك خطکش‌وپرگار ناممکن‌است، درنتیجه هرکوششی برای این ترسیم چیزی جزاتلاف وقت نخواهد بود.

سپس همین شخص قضیهٔ ساده‌ای دراثبات امکان‌ناپذیری این کار به‌من عرضه‌کرد. همین باعث شد که ایمانم نسبت به این ریاضیدان عالی‌رتبه‌که او را محرم راز خود دانسته بودم از میان برود. اما اشراق و الهام مایهٔ پایداری من‌علی‌رغم شکستهای متعدد شد تا آنکه بالاخره حقیقت برمن مکشوف شد و پی‌بردم که لازمهٔ تثلیث زاویه، ترسیم یك ریشهٔ چهارم‌است نه ریشهٔ سوم که آن دانشمند سعی در اثباتش‌داشت."

چه سعی بیهوده‌ای! آنجاکه پای مکاشفه درمیان باشد، ازمنطق‌کاری ساخته نیست.

درسال ۱۹۵۱ تثلیث‌گری از دیترویت که در آن هنگام ۸۲ سال داشت ترسیمهای خود را (دو ترسیم‌که یکی‌ازآنها باخطکش و پرگار و دیگری تنها با خطکش انجام می‌شد) تکثیرکرد و به آدرس دانشگاههای دولتی تراز اول هر ایالت، مؤسسه‌های خصوصی معروف، آلبرت اینشتین، و روی‌هم رفته به بیش از صد جا فرستاد. وی بیش از ۶۰ جواب دریافت‌کرد! فکرش را بکنید چند ریاضیدان-ساعت صرف تهیهٔ این جوابها شده و تازه این تثلیث‌گر در نامهٔ بعدیش‌که آن‌را هم در سطح وسیعی پخش‌کرد، گزیده‌هایی از همین جوابها راگنجاند.

ازفرهنگستان ملی علوم: "نکتهٔ قابل‌ذکری نیست. تکلیف این مسأله یك‌بار برای همیشه روشن‌شده‌است." ازمجلهٔ ریاضی: "ازخیلی قبل‌ثابت شده‌که این‌کارتنها با خطکش غیرمدرج و پرگار ناممکن است." از شیکاگو: "مؤسسهٔ ما برای بررسی این جوابها مبلغی دریافت می‌کند تا جبران وقتی راکه صرف این‌کار می‌شود بکند."

جوابهای دیگری هم از ام. آی. تی، کلمبیا، کورنل، ایلینوی، . . . رسیده بود، اما بهترین جواب از آن اینشتین بود که فرمول خوشایندی درآن به‌کارگرفته شده بود:

"من‌آنچنان در نامه‌نگاری غرق شده‌ام‌که باهمهٔ اشتیاقم به‌این‌کار، فرصت پاسخ‌گفتن به‌همهٔ نامه‌ها را ندارم."

بعضی تثلیث‌گرها امکاناتی برای نشر و توزیع گستردهٔ آثار خود دارند. تثلیث‌گری درسال ۱۹۷۳ کتاب خود را تحت عنوان تثلیث زاویهٔ ۱۲۰ درجه (ترسیم اوعملاً فقط برای این‌زاویه قابل استفاده بود) از طریق ناشری بیمایه به‌چاپ رساند. این کتاب با چاپ عکس مؤلف درهیئت پیرمردی محترم و خوش‌سیما درپشت جلد، چیزی کم وکسر نداشت. احتمالاً وقتی مطالب زیر را در نامه‌ای برایش می‌نوشتم، چندان سردماغ نبودم:

"واقعاً خجالت داردکه‌آدم این‌همه وقت، انرژی وپول را صرف‌کاری بیهوده بکند؛ این‌کار ناممکن‌است ودلیل کافی هم دراین مورد وجود دارد. این هم خجالت‌آور است که‌شما حاضرشده‌ایدکتابی‌منتشرکنیدکه تنهامی‌تواند موجب گمراهی خواننده و ترویج اشتباه بشود."

از جواب او به‌کلی شرمنده شدم. نوشته بود:

"ازشما به‌خاطر توجهی‌که به‌روش‌تثلیث من‌نشان داده‌اید و وقتی که صرف مکاتبه با من‌کرده‌اید، سپاسگزارم."

پس بیخود نبود که عکس او از نجابت این پیرمرد خوش قلب حکایت می‌کرد. با این‌حال، ترویج اشتباه و اتلاف‌وقت وسرمایه،

خطایی است که حتی‌المقدور باید جلویش را گرفت.

یک‌سال تابستان به‌دیدار سه‌تثلیث گر رفتم و می‌خواهم مختصراً به‌توصیف آنها بپردازم زیرا فکر می‌کنم آنها نمونه‌های بارزی از اغلب این‌گونه افرادند. اولین تثلیث گر حدود ۵۵ سال داشت و با زنش در جنوب [آمریکا] زندگی می‌کرد. از دیدنم فوق‌العاده خوشحال شد و آنی از حرف زدن باز نمی‌ایستاد. وجودش از انرژی لبریز بود و نمی‌توانست آرام بگیرد، برعکس زنش می‌کوشید او را ساکت کند. این شخص شغلی نداشت اما زمانی در ارتش خدمت کرده بود. به این نتیجه (شاید به غلط) رسیدم که او را به‌دلایل روانی کنار گذاشته‌اند و با حقوق بازنشستگی روزگار می‌گذراند. در فرصتی که از سایر فعالیتها برایش باقی می‌ماند به خواندن کتابهای ریاضی می‌پرداخت: این فعالیتها نقاشی، نویسندگی (رمان ناموفقی از او را ناشری که هیچ وقت اسمش به‌گوشم نخورده بود، منتشر کرده بود) و مطالعهٔ گسترده در خیلی از زمینه‌های نامأنوس را دربرمی‌گرفت. با او راجع به تثلیثش صحبت کردم و کوشیدم اشتباهات روش او را گوشزد کنم (آن وقتها جوانتر بودم و عقلم کامل نشده بود). اوضاع به‌هیچ‌وجه مطلوب نبود. ظاهراً به‌حرفهای من گوش می‌کرد ولی این چیزها در او کارگر نبود. من مرتکب این اشتباه شدم که از تربیع دایره به‌عنوان مسألهٔ دیگری که حاش با خطکش و پرگار ممکن نیست یاد کردم. پس از آنکه با خاطرات خوشی از مهمان نوازی این تثلیث گر به‌خانه برگشتم، نامه‌ای حاوی یک روش تربیع دایره از او به‌دستم رسید. بعدها به‌کالیفرنیا که زادگاهش بود نقل مکان کرد و فکر می‌کنم الان در آریزونا اقامت دارد. به‌گمانم پرداختن به تثلیث هیچ تأثیر قابل توجهی بر زندگیش نگذاشته و احتمالاً اکنون به‌سراغ چیزهای دیگر رفته‌است.

تثلیث گر بعدی در یک شهرک دانشگاهی واقع در غرب میانه زندگی می‌کرد. وقتی من ضبط صوتم را روشن کردم او هم مال خودش را روشن کرد و یک‌تنه نطق مفصلی را آغاز کرد. به گفتهٔ خودش زمانی معلم شیمی بوده و یک روز که به‌جای معلم غایبی سر کلاس ریاضی رفته بود به‌فکر تثلیث افتاده بود. پس از مدتی به‌انجام تثلیث توفیق یافته و کوشیده بود صحت ترسیم خود را به‌دیگران بقبولاند. به‌سراغ افراد مختلفی در دانشگاه شهر خود رفت و با مجامع ریاضی تماس گرفت، حتی یک‌بار هم توانست در برنامهٔ فرهنگستان ایالتی علوم جایی برای خود دست و پا کند. به‌هر کسی که ممکن بود جوابی بدهد نامه نوشت و به گفتهٔ خودش دویست‌وپنجاه نفر تثلیث او را بررسی کرده و هیچ‌یک نتوانسته بودند نکتهٔ نادرستی در آن بیابند. (من از تذکر اشتباهی که در آن یافته بودم، خودداری نکردم ولی حرف من به‌گوشش نرفت). در پایان صحبتهای دور و درازش اشارات سربسته‌ای به‌کارهای بزرگی کرد که در مورد سایر مسأله‌های حل‌نشدهٔ مهم انجام داده بود. سعی کردم با او به استدلال بپردازم ولی هیچ سودی نداشت. پیش از آن، با هم مفصلاً نامه‌نگاری کرده بودیم و زمانی رسید که متوجه شدم همهٔ نامه‌هایش اساساً مثل یکدیگرند. در هر نامه مطالب قبلی و حتی گاهی عین عبارات تکرار می‌شد. حالا هم خودش حضوراً همان چیزهایی را که نوشته بود، برزبان می‌آورد. الگوهایی در ذهنش جا گرفته بودند که نمی‌شد تغییرشان داد. این مرد دچار وسواس شده بود و زندگی او در تثلیث خلاصه می‌شد و هدفی جز این نداشت که دیگران را از کشف بزرگ خود آگاه کند. چه زندگی محنت‌باری! زندگیی به دور از شادمانی که در آن بجز نومیدی و سرخوردگی بی‌پایان چیزی وجود ندارد؛ زندگیی که از باد زهرآگین تثلیث پژمرده شده‌است.

سومین تثلیث گر هم درشهرکی درغرب میانه زندگی می‌کرد. مرد کوتاه‌قد هفتاد وچندساله‌ای که درخانه‌ای قدیمی‌واقع درحاشیهٔ رو به‌ویرانی شهرک سکونت داشت. طبعاً مرا درخانه نپذیرفت زیرا خانه بیش ازحد کثیف بود وخجالت می‌کشید کسی آنجا را ببیند. اولین اقدام این بود که به‌دفتر روزنامهٔ محلی برویم و سردبیر را ببینیم تا مطلبی درمورد این دیدار در روزنامه بنویسد. این سردبیر آدم حرف شنویی نبود و به‌تذکرات مکرر تثلیث گر درمورد احضار عکاس برای گرفتن عکس اعتنایی نکرد. خودش پیش‌بینی همه‌چیز را کرده بود. مقصد بعدی یک آتلیهٔ عکاسی بود که عکسمان را در حال دست دادن با یکدیگر گرفت. در سالن انتظار یک بیمارستان حدود چهار ساعت گفتگو کردیم و او در بوفهٔ آنجا که نرخهای ارزانی داشت، غذای مفصلی خورد. در این گفتگوها علاوه بر ماجرای تثلیث، به‌اخراجش ازدانشگاه، بلندپروازی ناکام‌مانده‌اش برای وزارت، تغییر شغلهای پیاپی و نیز به‌تنهاییش پی‌بردم. مرد نجیبی بود که احتمالاً هیچ‌وقت آزارش به‌کسی نمی‌رسید ولی هنوز آتش‌جاه‌طلبی در وجودش شعله‌ور بود. خودش می‌گفت که علت روی آوردنش به‌تثلیث این بوده که بلکه از این راه اندکی احترام کسب کند؛ احترامی که مردم برای کسانی که ازعهدهٔ کارهای غیرعادی برآیند قائل می‌شوند. به‌قول خودش، خواستهٔ او تنها در همین‌خلاصه می‌شد: اندکی احترام. دوهفته بعد ازترک آنجا، بریده‌ای از روزنامه به‌توسط پست دریافت کردم که در آن عکسی که عکاس گرفته بود با این عنوان چاپ شده بود: "ریاضیدان محلی در یک قدمی رفوزگی". ماجرا با حفظ امانت نقل شده بود و تثلیث گر ما هم از این بابت خشنود بود. برایم در نامه‌ای نوشت که عملاً قدری احترام کسب کرده‌است. امیدوارم او با تثلیثش عاقبت به‌خیر شده باشد.

بی‌شک چنین‌عاقبت به‌خیری یک‌امر استثنایی‌است. تثلیث اغلب نومیدی، ناکامی و وسواس به‌بار می‌آورد.

سرانجام وقت آن رسیده که بگوییم با تثلیث گرها چگونه باید برخورد کرد. اما بگذارید اول بگوییم چگونه نباید برخورد کرد. یک راه خلاصی موقت ازچنگ تثلیث گر آن است که بگویید: "خوب تااینجایش قبول، اما می‌دانید که باید برای درست‌بودنش برهان داشته باشید. یعنی یک‌سری حکمها واستدلالهایی نظیر آنچه درکتاب هندسهٔ قدیمیتان داشتید." تثلیث گر ازنزدتان می‌رود ولی به‌همراه برهان برمی‌گردد.

دراین مرحله ممکن‌است بگویید: "خوب، حالا نگاهی به‌آن بیاندازم"، اشتباه آن را بیابید و به‌تثلیث گر گوشزد کنید. تثلیث گر این بار هم می‌رود ولی باز همراه با برهان تجدیدنظر شده‌ای برمی‌گردد که طولانیتر، پیچیده‌تر ویافتن اشتباهش دشوارتر است. تجدیدنظرهای پیاپی در برهان کار را به‌جایی می‌کشاند که دیگر نتوانید یا نخواهید اشتباه آن را پیدا کنید.

قدم بعدی که آن نیز خطاست، این است که بگویید: "راستش

من وقت بررسی این برهان را ندارم ولی می‌دانید که شخصی به‌نام وانتسل درسال ۱۸۳۷ ثابت کرده که زاویه را نمی‌توان با خط‌کش و پرگار تثلیث کرد. برهـان او موجود است، این‌هم برهان شما؛ هردوی اینها نمی‌توانند درست باشند؛ پس چاره‌ای نیست جز اینکه شما در برهان وانتسل اشتباهی پیدا کنید." این کار هم تثلیث‌گر را از سرتان باز می‌کند ولی او دیر یا زود برمی‌گردد با ردیه‌ای بر برهان وانتسل درقالب چنان عباراتی که درك معنی‌شان ناممکن است. هیچ‌چیز نمی‌تواند راه را بر تثلیث‌گر ازخود گذشته ببندد.

پس در برخورد با تثلیث‌گر چه باید کرد؟ به‌اولین نامهٔ تثلیث‌گر، اگر مطمئن شدید که خوبی تقریب یا سادگی روش یا هوشمندی او در یافتن تقریبی جدید، قابل توجه است، مؤدبانه جواب بدهید. به‌همراه نامه، برایش فهرستی کامپیوتری از اشتباهات موجود در ترسیم برای زاویه‌های مختلف بفرستید. من معمولاً فهرست را برای ۰ تا ۱۸۰ درجه، با فواصل ۳ درجه‌ای تهیه می‌کنم. این کار مهم است زیرا هنوز کامپیوتر قدرت آن را دارد که احساس احترام و ابهتی در افراد ایجاد کند. همچنین با آن نامه چند تثلیث تقریبی دیگر را بفرستید با تذکری از این قبیل که، "فکر کردم شاید علاقه‌مند باشید ببینید دیگران چه تثلیثهای تقریبی به‌دست آورده‌اند".

در سالهای اخیر با استفاده از این روش میزان موفقیتم خیلی بالا رفته‌است. یادم هست که اولین موفقیت تا چه حد مایهٔ رضایت خاطرم شد. مهندسی درشهر نیوجرسی کتاب بزرگی با جلد مقوایی در حجم بیش از ۲۵۰ صفحه تهیه کرده بود که عنوان ماجراهای هندسه روی جلد آن با حروف زرکوب نقش بسته بود. به نظرم رسید کسی که این همه برای تثلیث مایه گذاشته باشد، راه نجاتی ندارد ولی او ضمن پاسخ نامه‌ام نوشت:

"همین‌قدر که توانسته‌ام به‌تقریبی برسم راضی هستم و دیگر آن را کنار می‌گذارم."

این‌بار روحم از نفرین به‌دور ماند! اخیراً چند موفقیت دیگر هم داشته‌ام و شاید برخی از این تثلیث‌گرهای لب فروبسته، متقاعد هم شده باشند.

اگر با این روش‌کاری از پیش نرفت، آن‌وقت بیرحم باشید. نامهٔ تند و برخورنده‌ای بنویسید، به‌این‌قصد که طرف ازشما بدش بیاید. دیگر به‌هیچ قیمتی مزاحم شما نخواهد شد و شاید بخشی از نفرتش منجر به‌بیعلاقگی نسبت به‌ریاضیدانان و بی‌میلی به‌ادامهٔ کار تثلیث شود، زیرا معمولاً انسان اگر بتواند، ازکاری که مایهٔ آزارش شود خودداری می‌کند. اگر همه همین روش را در پیش می‌گرفتند نسل تثلیث‌گرها تحلیل می‌رفت و منقرض می‌شد. در آن صورت کسانی که سودازدگی جزء سرشتشان است مزاحم اقتصاددانها، فیزیکدانها یا علمای الهیات می‌شدند و ما می‌توانستیم درآرامش وامنیت زندگی کنیم ومطمئن باشیم که از این پس هیچ سودازده‌ای به‌سراغمان نخواهد آمد.

• Underwood Dudley, "What to do when the trisector comes," *The Mathematical Intelligencer*, (1) 5 (1983) 20-25.

این مقاله با اندکی تلخیص ترجمه شده است.

★ اندروود دادلی، دانشگاه دیپاو در ایندیانای آمریکا

انتشار اولین شمارهٔ مجلهٔ علوم پایه

اولین شمارهٔ مجلهٔ *علوم پایهٔ جمهوری اسلامی ایران* (*Journal of sciences, Islamic Republic of Iran*) انتشار یافت. این مجله به صورت فصلنامه و به زبان انگلیسی منتشر می شود و صاحب امتیاز آن، وزارت علوم و آموزش عالی است. مسؤولان این مجله اهداف اصلی آن را چنین برشمرده‌اند: "انتشار آخرین نتایج مطالعات و تحقیقات ارزندهٔ علمی و علمی ـ کاربردی به منظور کمك به مسأله‌یابی و حل مسائل علمی و توسعهٔ اجتماعی، اقتصادی و خدماتی درزمینه‌های مختلف علوم پایه نظیر زیست شناسی، شیمی، زمین شناسی، فیزیك و ریاضی و علوم کامپیوتر، کمك به ایجاد ارتباط بین مراکز علمی و تحقیقاتی و همین طور بین دانشمندان، محققین، و کارشناسان داخل و خارج به منظور انتقال، تبادل و استفاده از آموخته‌ها و تجربیات و اشاعهٔ دستاوردهای علمی و در نتیجه، گسترش مرزهای دانش در کشور و شناساندن فعالیتهای علمی به محافل علمی بین المللی". برای دست اندرکاران این مجله در رسیدن به این هدفها آرزوی موفقیت داریم.

سی و سه مسألهٔ قدیمی از مجلهٔ مانتلی

سیاوش شهشهانی

از آغاز تأسیس نشر ریاضی، موضوع درج مسائل ریاضی بحث بسیاری درجلسات هیأت ویراستاران برانگیخته است. از یك سو می‌دانستیم که دوستداران مسائل ریاضی بسیارند و انتشارمسائل ظریف وابتکاری به‌محبوبیت مجله خواهد افزود. ازسوی دیگر، چون هدف اصلی ما از انتشار این مجله معرفی جریانهای بزرگ ریاضیات معاصر و زمینهٔ فرهنگی آنها بود، ازاین بیم داشتیم که نشرمسائلی که عمدتاً جنبهٔ تفننی و سرگرم‌کننده دارند مجله را از مسیرخود منحرف کند. به‌این مصالحه رسیدیم که بخش‌مسأله داشته باشیم ولی مسائل را حتی‌المقدور درچارچوبی سازگار با نظام و هویت این‌نشریه ارائه‌کنیم. ازاین‌رو، مسأله‌پردازان معروفی‌چون اردیش وپولیا را معرفی‌کردیم، مسائلی راکه درمسابقات داخل و خارج مطرح شده‌اند، همراه با معرفی این رویدادها آوردیم، و غیره. موضوع بخش‌مسألهٔ این‌شماره نیز ازاین قاعده مستثنا نیست. این باربخش معروف مسائل مجلهٔ امریکن ماتماتیکال مانتلی[1] را که ازمعتبرترین‌منابع مسائل ابتکاری جدید است با برگزیده‌ای از مسائل آن معرفی می‌کنیم. از آنجاکه این نشریه را بسیاری از ریاضی دوستان ایرانی‌می‌شناسند، برآن شدیم که به دوره‌های کمتر شناخته شدهٔ آن نظری بیفکنیم ومنحصراً از آن دوره‌ها مسائلی را دستچین کنیم.

مجلهٔ مانتلی که اکنون توسط جامعهٔ ریاضی امریکا[2] سالی ده شماره منتشرمی‌شود، در سال ۱۸۹۴ به‌صورت نشریه‌ای مستقل توسط فینکل[3] تأسیس‌شد. ازآنجاکه دراواخر قرن نوزدهم هنوز دامنهٔ پژوهش ریاضی درامریکا بسیار محدود بود و به‌علاوه ذوق و علاقهٔ فینکل نیز درزمینهٔ طرح وحل مسأله بود، این مجله درابتدا عمدتاً به‌عنوان جنگ مسأله شهرت‌یافت. پس ازچندی تغییروتحول درمدیریت این‌مجله، درسال۱۹۱۷ جامعهٔ ریاضی امریکا مسؤولیت انتشار مانتلی‌را به‌عهده‌گرفت وتدریجاً آن را به‌عمده‌ترین‌ارگان انتشاراتی ادواری خود مبدل ساخت. درحال حاضر مانتلی یك مجلهٔ توصیفی‌ریاضی‌است باقشر وسیعی‌خواننده درسطوح‌گوناگون از دانش‌آموزان پرعلاقهٔ سالهای آخر دبیرستان تا ریاضیدانان حرفه‌ای.مقالات توصیفی‌مجله‌که بادقت وسختگیری تهیه وانتخاب می‌شوند برای غیرمتخصصان قابل استفاده‌اند و بخشهای دیگرمجله نیز مانند یادداشتهای ریاضی وآموزشی، نقدکتاب، والبته مسائل، طرفداران زیادی دربین افراد متخصص وغیرمتخصص دارد.

هرچند که مانتلی دیگر منحصراً یك جنگ مسأله نیست، ولی بخش مسائل‌آن همچنان از ارکان شاخص واستوار آن‌است. ازسال ۱۹۳۲ این بخش به‌دوقسمت "مسائل ابتدائی" و "مسائل پیشرفته" تفکیك شده است‌که قسمت اول به‌مسائلی اختصاص دارد که در سطح یکی دوسال اول دانشگاه قابل‌طرح‌اند. ازافرادی‌که در رشد و تحول بخش مسائل مانتلی سهم مهمی داشته‌اند باید از اتودانکل[1] نام بردکه به‌مدت ۲۸ سال از ۱۹۱۹ تا ۱۹۴۷ گاه تنها وگاهی به طور مشترك سرپرستی بخش مسائل این مجله را به عهده داشت. درسال۱۹۵۷ جامعهٔ ریاضی‌امریکا، برای‌بزرگداشت خاطرهٔ وی، جزوه‌ای زیرعنوان مسأله نامه به یادبود اتودانکل[2] منتشرساخت که درآن ۴۰۰ مسأله از بهترین مسائل طرح شده در دورهٔ سی وسه ساله ۱۹۱۸ تا ۱۹۵۰ گردآوری شده است. سال ۱۹۱۸، سال آغاز شماره‌گذاری سریال مسائل مانتلی و نیزسال آغاز همکاری دانکل با مانتلی بوده است.

در این شماره، سی و سه مسأله ازمسأله نامهٔ اتودانکل را از نظرتان می‌گذرانیم. برای‌کمك به‌خوانندگان علاقه‌مند، پس ازهر مسأله، تاریخ شماره یا شماره‌هایی ازمجلهٔ مانتلی را که درآن،

1. *The American Mathematical Monthly*

۲. Mathematical Association of America. کار اصلی این مؤسسه، پرداختن به امور آموزشی ریاضی در سطح دورهٔ کارشناسی است وسازمانی جدا ازانجمن ریاضی آمریکا (American Mathematical Society) است که اهداف فراگیرتری دارد.

3. B. F. Finkel

1. Otto Dunkel

2. H. Eves & E. P. Starke (eds.) *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, Mathematical Association of America(1957).

حل‌مسأله درج شده یامسأله مورد بحث قرار گرفته‌است آورده‌ایم.[1] مثلاً (۲/۳۴) به‌معنای شمارهٔ فوریهٔ سال ۱۹۳۴ است. در پایان مسائل، اسامی طراحـان ذکرشده است. در میان طراحان، اسامی ریاضیدانان ومسأله سازان معروفی را مشاهده خواهیدکرد. ازپال اردیش ولیوموزر[2]، هریك چهارمسأله آمده است.

۱. چهارنقطه داده شده‌اند. مربعی‌رسم کنیدکه (امتداد) هرضلع آن ازیکی ازچهارنقطه بگذرد. (۱/۳۱)

۲. ثابت کنیدهرگاه‌سری متناهی‌جملات‌مثبت $u_1+u_2+u_3+\dots$ همگرا باشد، آنگاه سری

$$\frac{u_1}{r_1}+\frac{u_2}{r_2}+\frac{u_3}{r_3}+\dots$$

واگراست، که‌در آن $r_n=u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\dots$ باقیماندهٔ سری پس از $(n-1)$ جمله است. (۴/۳۱)

۳. نشان دهیدکه انتگرال

$$V_n=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{x_1+x_2+\dots+x_n}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

وقتی n به‌بینهایت میل کند، به‌حد ۲/۳ میل می‌کند؛ وحاصلضرب $n(V_n-2/3)$ کراندار باقی می‌ماند. (۳/۳۲)

۴. نشان دهیدکه به ازای هرعدد صحیح مثبت k،

$$\phi_k=\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}=\frac{\binom{2k-1}{k}}{(2k-1)}$$

یك عدد صحیح است. فرمول بازگشتی $\phi_n=\sum_{i=1}^{n-1}\phi_i\phi_{n-i}$ را ثابت کنید. (۱۰/۳۳)

۵. نشان دهیدکه وقتی صورت درجه دوم

$$\sum_1^n|i-j|x_ix_j \qquad n>1$$

به‌وسیلهٔ یك تبدیل خطی‌حقیقی به‌مجموع مجذورات تقلیل داده شود، یك جملهٔ مثبت و $(n-1)$ جملهٔ منفی بـه دست خواهد آمد. (۴/۳۶)

۶. ثابت کنیدکه

$(61)!+1\equiv 0 \bmod (71)$ و $(63)!+1\equiv 0 \bmod (81)$.

گزاره‌ای کلی ثابت کنیدکـه این دو، موارد خاص آن باشند. (۲/۳۸)

۷. معادلهٔ زیررا حل کنید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

(۴/۳۸)

۸. نشان دهیدکه

$$\operatorname{arc\,cot}1=\operatorname{arc\,cot}2+\operatorname{arc\,cot}5+\operatorname{arc\,cot}13+\operatorname{arc\,cot}34+\dots$$

که در اینجا عددهای صحیحی که ظاهرمی‌شوند جمله‌های یکی در میـان سری فیبونـاتچـی هستند و در رابطـهٔ بـازگشتی $u_{n-1}=3u_n-u_{n-1}$ صدق می‌کنند. (۱۱/۳۸)

۹. نشان‌دهیدکه چگونه می‌توان یك شش‌ضلعی‌منتظم را با برشهای مستقیم به‌کوچکترین تعداد ممکن‌قطعات تقسیم‌کرد به‌طوری‌که بتوان با بازسازی آن یك مثلث متساوی‌الاضلاع (بـا همان مساحت) پدید آورد. (۸–۹/۴۰)

۱۰. نشان دهیدکه همهٔ مثلثهای محاط دریك بیضی کـه مرکز ثقل آنها برمرکز بیضی منطبق است مساحتهای برابردارند، واین بزرگترین مساحت ممکن برای یك مثلث محاطی است.

نشان دهید که همهٔ مثلثهای محیط بر یك بیضی‌که مرکز ثقل آنها برمرکز بیضی منطبق است، مساحتهای برابردارند، واین‌کوچکترین مساحت ممکن برای یك مثلث محیطی‌است. (۱۲/۴۳)

۱۱. (الف) نشان دهیدکه همهٔ خمهای‌بسته با قطرثابت وبرابر d، دارای محیط مشترك πd هستند. (ب) کـوچکترین مساحت ممکن برای یك خم بستهٔ قطر ثابت d چیست؟ (مقصود ازیك "خم‌قطرثابت" d، خمی‌است کـه در همهٔ راستاها بر دو خط راست موازی به فاصلهٔ d مماس باشد.) (۱۱/۴۴ و۴/۴۵)

۱۲. نشان‌دهیدکه نزدیکترین‌عدد صحیح به $n!/e$ مضربی‌از $n-1$ است. (۲/۴۵)

۱۳. دنباله‌ای ازاعداد حقیقی $a_1, a_2, \dots$ بیابیدکه $\sum_1^\infty a_n$ همگرا باشد، $\sum_1^\infty a_n^3$ واگرا باشد، $\sum_{n=1}^\infty a_n^5$ همگرا، و... بـه طورکلی، فرض کنید C مجموعه‌ای داده شده (متناهی یـا نامتناهی) از اعداد صحیح مثبت باشد، آنگاه دنباله‌ای از اعـداد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$، وابسته به C، وجود دارد به‌طوری‌که برای $l=1, 2, \dots$، سری زیر همگرا یا واگراست بسته به اینکه l در C باشد یانباشد:

$$a_1^{2l-1}+a_2^{2l-1}+\dots+a_n^{2l-1}+\dots$$

(۵/۴۶)

۱۴. ثابت کنیدکه برای هرمقدار $a\leqslant 1$، ومستقل‌ازمقدار b، سری $\sum_{n=1}^\infty n^{-a}\cos(b\log n)$ واگراست. (۴/۴۷)

۱۵. هفت نقطه درصفحه مفروض‌اند. ثابت کنید همواره می‌توان سه تا را طوری اختیارکرد کـه رئوس یك مثلث متساوی‌الساقین نباشند. برای شش نقطه ایـن لزومـاً درست نیست (اگر A، B و C روی یك خط قرار داشته باشند، می‌گوییم این سه یك مثلث متساوی‌الساقین تشکیل نمی‌دهند درصورتی که $AB\neq BC$.) (۸–۹/۴۷ و۱۰/۴۸)

۱۶. زمانی لوئیس‌کارول مسألهٔ زیر را مطرح کرد.

"دو مسافر فاصلهٔ زمانی ساعت۲ تا ساعت ۹ را بـه پیمودن

---

۱. طبق اطلاع، دورهٔ کامل مانتلی در کتابخانهٔ دانشکدهٔ علوم دانشگاه شهید بهشتی موجود است.

2. Leo Moser

جاده‌ای مسطح، بالارفتن از یك تپه و بازگشتن سرجای اول، طی می‌کنند. سرعت آنها درجادهٔ مسطح x کیلومتر درساعت، دربالا رفتن ازتپه y کیلومتر و در پایین آمدن $2y$ کیلومتر درساعت است. طول مسافت طی شده را پیدا کنید."
درمسألهٔ داده شده x و y اعداد صحیح مفروضی بودند. مسأله را بدون‌مفروض بودن این‌دوعدد صحیح حل کنید. (۲۱/۴۸)

۱۷. به‌چند صورت می‌توان a_1 عدد "۱"، a_2 عدد "۲"، ...، a_n عدد "n" را ردیف کرد به‌طوری که اگر ازاول شروع به خواندن کنیم به‌هیچ یك از "$k+1$"ها قبل‌ازرسیدن به‌دست‌کم یك "k" نرسیم؟ (۱/۴۹)

۱۸. سری همساز را بدین‌صورت تغییردهید که اولین‌جمله را مثبت بگیرید، دوتای بعدی را منفی، سه تای بعدی را مثبت، و به همین ترتیب نشان دهید که سری به دست آمده همگراست. (۲/۴۹)

۱۹. ثابت کنید که

$$\int_0^\infty \frac{\cos x^2 - \cos x}{x} d_x = \frac{1}{2}\gamma$$

که دراینجا γ ثابت اویلر است. (۸-۹/۴۹)

۲۰. نشان دهید که اگر همهٔ وجوه یك چند وجهی تقارن مرکزی داشته باشند، می‌توان با تعداد متناهی برش مسطح وبازسازی قطعات، یك مکعب توپر به‌دست آورد. (۱۲/۴۹)

۲۱. مجموع زیر را محاسبه کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n^3}$$

(۱/۵۰)

۲۲. فرض کنید a_1، a_2، ...، a_n عنصرهایی، نه‌لزوماً متمایز، از یك گروه n عنصری باشند. نشان دهید که اعداد صحیح p و q وجود دارند، $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$، به‌طوری که:

$$\prod_{i=p}^{q} a_i = 1.$$

(۱/۵۰)

۲۳. نشان دهید که هر گروه دارای بیش ازدوعنصر، خود ریختی بجزهمانی را می‌پذیرد. (۲/۵۰)

۲۴. فرض کنید

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

دنباله‌ای ازاعداد صحیح باشد به‌طوری که

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_1 n_2 \cdots n_{k-1}} = \infty.$$

نشان دهید که $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$ گنگ است. (۵/۵۰)

۲۵. نشان‌دهید که چگونه می‌توان دریك‌مکعب حفره‌ای ایجاد کرد که ازآن مکعبی به‌همان اندازه عبور کند. (۵/۵۰)

۲۶. نشان دهید که روی هرخم مسطح سادهٔ بسته چهار نقطه وجود دارند که رئوس یك مربع هستند. (۶-۷/۵۰ و ۲/۵۱)

۲۷. فرض کنید $a_1 < a_2 < \cdots$ دنباله‌ای نامتناهی‌ازاعداد صحیح باشد. ثابت کنید یا زیردنباله‌ای نامتناهی ازاین دنباله وجود دارد که در آن هیچ عدد، عدد دیگری را عاد نمی‌کند، و یا زیر دنباله‌ای نامتناهی وجود دارد که درآن، هرعدد مضرب صحیحی ازعدد قبلی‌است. (۸-۹/۵۰)

۲۸. یك عنصر x در یك حلقه را شبه منظم راست می‌نامیم اگر عنصری چون y وجود داشته باشد که $x+y+xy=0$. واضح است که دریك حلقهٔ تقسیم، هر عنصر به‌استثنای ۱ — شبه منظم راست است. عکس این‌موضوع را ثابت کنید: اگر همه عناصر یك حلقهٔ A، به‌استثنای تنها یك عنصر، شبه منظم راست باشند، آنگاه A یك حلقهٔ تقسیم است. (۱/۵۱)

۲۹. پروفسور استاین‌هاوس این مسأله را ازلهستان باخودآورد. معروف است که پروفسور باناخ درهریك ازدوجیب کت خود یك‌جعبه کبریت حمل‌می‌کرد. اوبرای روشن‌کردن پیپ‌خود، به‌طور تصادفی کبریتی ازیك جعبه کبریت بیرون می‌آورد. در آغاز، هرجعبه حاوی n کبریت بود. سؤال باناخ این است: نخستین باری که یك جعبهٔ خالی یافته شود، امیدریاضی تعداد کبریتهای جعبهٔ دیگرچیست؟ (۳/۵۱)

۳۰. $\lim_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!)$ را محاسبه کنید. (۳/۵۱)

۳۱. فرض کنید $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k \leqslant n$ چنان باشند که کوچکترین‌مضرب مشترك هردوتا از aها از n بزرگتر باشد. ثابت کنید که

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < 2$$

(۵/۵۱)

۳۲. اگر همهٔ وجوه یك چند وجهی تقارن مرکزی داشته باشند، نشان دهید که دست‌کم هشت رأس وجود دارند که هر یك، نقطهٔ تلاقی دقیقاً سه یال است. (مکعب دارای دقیقاً هشت رأس با این ویژگی‌است.) (۶-۷/۵۱)

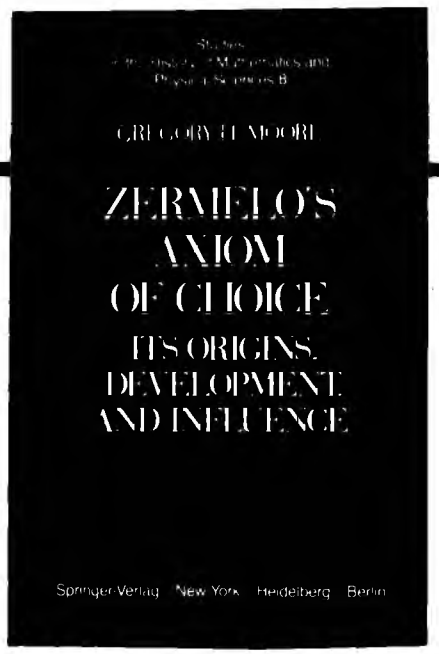
۳۳. همهٔ مقادیر α و β راکه به‌ازای آنها سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \sin(n^\beta)$ همگرا باشد، تعیین کنید. (۶-۷/۵۲)

فهرست طراحان. نام طراحان مسائل بالا به‌ترتیب شمارهٔ مسأله در زیر آمده است:

1. C. O. Williamson **2.** O. D. Kellogg **3.** J. V. Upensky
4. Garrett Birkhoff **5.** Raphael Robinson **6.** Hansraj Gupta
7. L. J. Adams **8.** D. H. Lehmer **9.** H. S. M. Coxeter
10. E. P. Starke **11.** Howard Eves **12.** D. H. Browne
13. G. Pólya **14.** V. L. Klee **15.** Paul Erdös
16. Leo Moser **17.** Raphael Robinson **18.** E. P. Starke
19. H. F. Sandham **20.** Leo Moser **21.** H. F. Sandham
22. Leo Moser **23.** Irving Kaplansky **24.** Paul Erdös
25. H. D. Grossman **26.** Orrin Frink **27.** Paul Erdös
28. Irving Kaplansky **29.** D. A. Darling **30.** D.J. Newman
31. Paul Erdös **32.** Leo Moser
33. P. R. Boas & W. K. Hayman

اصل موضوع انتخاب تسرملو*

رابرت بون*
ترجمهٔ محمد اردشیر



Zermelo's Axiom of Choice: It's Origins, Development, and Influence. By Gregory H. Moore. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Number 8. Springer-Verlag, New York, 1982. XiV + 410pp.

کتاب عالی آقای مور، نه فقط تاریخ اصل موضوع انتخاب را از اولین کاربردهای ضمنی آن با توجه به جنبه‌های ریاضی وفلسفی‌اش دربردارد، بلکه دربرگیرندهٔ مباحث زیادی دربارهٔ توسعهٔ مفاهیم و مبادی نظریهٔ مجموعه‌ها نیز هست. این کتاب شرح مفصلی ازمشاجرات مختلف و تحقیقات دربارهٔ کاربردهای اصل در نظریهٔ مجموعه‌ها، جبر، آنالیز، توپولوژی و منطق را تا اثبات سازگاری نسبی آن به‌وسیلهٔ گودل دربرمی‌گیرد. حسن‌ختام آن علاوه برضمیمه‌ای شامل ترجمهٔ پنج نامه از بورل، بر، لبگ و آدامار که مربوط به‌اولین روزهای مشاجره حول اصل است، شرح کوتاهی از تحولات بعداز کار گودل می‌باشد. کار مور، نمونهٔ بسیارخوبی از تحقیق تاریخی در قلمرو مبادی ریاضیات است: جالب، جامع و دقیق. درحالی‌که ایده‌های مختلف دربارهٔ مبادی و سهم ریاضی ریاضیدانان و منطقدانان مورد بحث قرار گرفته، بیشتر ازهمه به‌کار تسرملو توجه شده‌است، و شرحی جامع از تحقیقات او، چه در ابتدا وچه بعداز حوالی ۱۹۳۰ در آن آورده شده‌است. چون تسرملو برای من نیز یکی از قهرمانان عالم نظر است، دراین مقاله کانون توجه من خواهد بود.

اصل موضوع انتخاب، اولین‌بار در ۱۹۰۴ به‌عنوان یك اصل کلی بنیادین ریاضیات به‌وسیلهٔ ارنست تسرملو ارائه شد. در صورتبندی تسرملو، این اصل می‌گوید: برای هرمجموعهٔ A از مجموعه‌های غیرتهی، تابعی مانند f وجود دارد، به‌طوری‌که برای هر M در A، $f(M)$ یك عضو M است. به‌زبان روانشناختی، که غالباً برای بیان این اصل به‌کار می‌رفت، صحبت از امکان بینهایت انتخاب دلخواه‌است. برای تعداد متناهی انتخاب‌دلخواه، نیاز به‌فرض خاصی نداریم و در واقع در حالتی‌که اصل انتخاب به‌مجموعه‌های متناهی محدود باشد، می‌توان آن را به‌صورت یك قضیه به‌وسیلهٔ اصول منطق و استقرای ریاضی اثبات کرد. اولین حالت غیربدیهی برای مجموعه‌های شمارای نامتناهی ازمجموعه‌های غیرتهی پیش می‌آید ودراین‌حالت، این اصل به‌اصل موضوع انتخاب شمارای نامتناهی موسوم است. البته وقتی قاعده‌ای برای انتخاب در دست باشد، نیازی به‌این اصل نیست. در ۱۹۰۴ برتراند راسل، مستقل از تسرملو گزاره‌ای را بیان کرد که معلوم شد معادل اصل انتخاب است، ولی او و دیگران قبلاً آن را به‌عنوان فرض در براهین ریاضی به‌کار می‌بردند. این اصل که او آن را اصل موضوع ضربی[1] نامید، می‌گوید: برای هرمجموعهٔ A ازمجموعه‌های غیرتهی که دو به‌دو مجزا هستند، مجموعه‌ای مثل S وجود دارد که با هر مجموعه از A، دقیقاً یك عضومشترك دارد. برخلاف تسرملو، راسل این گزاره و اصل انتخاب را به‌دیدهٔ شك وتردید می‌نگریست واز آن فقط به‌عنوان فرضیه[2] استفاده می‌کرد.

قبل‌از آنکه تسرملو اصل موضوع انتخاب را صریحاً صورتبندی کند، بسیاری از ریاضیدانان براهینی را اقامه می‌کردند که بدون بیان هیچگونه قاعده‌ای، متضمن بینهایت انتخاب بود. این کارعلاوه

1.multiplicative axiom 2.hypothesis

بر نظریهٔ مجموعه‌ها، در جبر و آنالیز نیز رواج داشت. این براهین به وسیلهٔ ریاضیدانانی اقامه می‌شد که نمی‌دانستند اعتبار استدلال آنها به‌یك اصل شناخته نشده‌وابسته‌است، وخیلی‌ازهمین‌ریاضیدانها به‌محض آنکه این اصل صریحاً صورتبندی شد، آن را نفی کردند. حتی بعد از صورتبندی اصل هم بعضی از منتقدین سرسخت اصل، براهینی را اقامه می‌کردندکه درآنها به‌طور ضمنی از آن استفاده می‌شد (ص۱۵۳).

مور چهارنوع انتخاب را ازهم متمایز می‌کند: (۱) انتخاب یك عضو نامشخص ازیك مجموعه،که یك روش منطقی‌اساسی‌بوده و در ریاضیات باستان نیز انجام می‌گرفت، یا انتخاب از تعدادی متناهی‌مجموعه، (۲) بینهایت انتخاب‌که طبق یك‌قاعده انجام‌شود، (۳) بینهایت انتخاب‌که بدون یك قاعدهٔ ذکر شده انجام گیرد- نمونه‌ای ازاین‌مورد را می‌توان دراستدلال کوشی درحوالی ۱۸۲۱ دید(ص۱۲)، (۴) بینهایت‌انتخاب دلخواه‌که به‌دست‌دادن‌قاعده‌ای برای آن امکانپذیر نیست. شاید قدیمیترین نمونه از این مورد، در ۱۸۷۱ روی می‌دهدکه‌کانتور دراثبات‌گزاره‌ای درآنالیزاین‌نوع انتخاب را به‌کارمی‌گیرد. گزاره این‌است‌که دوتعریف مختلف از پیوستگی‌یك تابع دریك نقطه معادل‌اند. در اثبات معادل بودن‌این دو تعریف، فقط به‌اصل موضوع انتخاب شمارای نامتناهی نیـاز است. در ۱۸۷۷، ددکیند دربرهانی‌برای‌گزاره‌ای درنظریهٔ‌اعداد جبری، تعداد ناشمارایی انتخاب ازرده‌های همنهشتی‌انجام می‌دهد. که نمی‌تواند مطابق هیچ قاعده‌ای باشد. مثالهای ذکر شده، فقط از لحاظ قدمتشان جالب‌اند وگرنـه اینها فقط سه مثال از انبـوه مواردی‌هستندکه قبل از ۱۹۰۴ انتخابهایی از نوع ۳ و۴ صورت گرفته بود؛ مور نمونه‌های‌دیگری نیز ازکانتور، ددکیند،جوردن، لبگ، بورل، راسل، هاردی و دیگران آورده است.

اگرچه اصل‌موضوع انتخاب بدون سروصدا وارد ریاضیات شد، همینکه ریاضیدانان بـا آن مواجه شدند و نیروی استنتاجی آن آشکار شد، محور توجهات وصف‌ناپذیرکسانی واقع شد کـه به‌نظریهٔ مجموعه‌ها ومبادی ریاضیات دل‌بسته بودند. به‌نظرمی‌رسد نیروی استنتاجی‌آن- به‌ویژه دلالت آن برقضیهٔ خوشترتیبی، یعنی اینکه هرمجموعه‌ای می‌تواندخوشترتیب شود- سرچشمهٔ‌مشاجرات دربارهٔ این‌اصل بودکه به‌محض انتشار مقالهٔ تسرملودراثبات قضیهٔ خوشترتیبی آغازشد.تا چهارسال بعد، اعتراض وسکوت دربعضی کشورهای‌اروپایی‌وایالات متحده‌ادامه داشت. درفرانسه،انگلستان وآلمان انبوهی‌مقاله به‌چاپ رسیدکه درآنها اصل‌موضوع‌انتخاب و برهان تسرملو، در ارتباط با تعارضهایی که به‌تازگی در نظریهٔ مجموعه‌ها کشف شده بود، مورد بررسی‌نقادانه قرارگرفت."دست اندرکاران ریاضیات،علمی‌که به‌خاطرقطعیت نتایج آن مشهوراست، آن اندازه‌که دربارهٔ اصل انتخاب به‌اختلاف سخن گفتند، راجع به‌هیچ اصل دیگری چنین نکردند. امـا اگر اصل انتخاب نبود، ریاضیات امروز چهرهٔ دیگری می‌داشت. اگرآن دسته از منتقدین سرسخت اصل‌که پیرومکتب اصالت ساختن[1] بودند غالب‌می‌شدند، ریاضیات جدید صورتی دیگر به‌خود می‌گرفت و به‌مجموعه‌ای‌از الگوریتمها تقلیل‌می‌یافت. در واقع، اصل موضوع انتخاب‌عصارهٔ

1.constructivism

تحولاتی اساسی - در ریاضیات، فلسفه و روانشناسی- بودکه از زمان شروع مطالعه جدی‌ریاضیدانان دربارهٔ مجموعه‌های‌نامتناهی از مجموعه‌ها آغازشده بود" (ص۱).

اصل موضوع انتخاب و خوشترتیبی

شاید مهمترین‌مسائل نظریهٔ‌اولیهٔ‌مجموعه‌ها، مقایسه‌پذیری مجموعه‌ها (یا تثلیث اعداد اصلی)، خوشترتیبی و عدد اصلی پیوستار بوده باشد. اگر "توانها"ی ترامتناهی کانتور خاصیت تثلیث را نداشته باشند، مستحق نام "اعداداصلی" نیستند. تثلیث را درمورد الفها یا توانهای مجموعه‌های خوشترتیب می‌توان نشان داد؛ بنابراین اگر بتوان ثابت‌کردکه هرمجموعه‌ای می‌تواند خوشترتیب شود، نتیجه می‌شودکه توان هرمجموعه یك الف‌است و بنابراین تثلیث، برای همهٔ توانهای ترامتناهی برقراراست. به‌طورخاص نتیجه می‌شودکه توان پیوستار، یك الف است؛ الفی‌که مسألهٔ پیوستار را به‌وجود می‌آورد و فرضیهٔ پیوستار کانتور مدعی است که این الف، $\aleph_1$ است..

در ابتدا کانتور این گزاره را کـه هر مجموعه‌ای می‌تواند خوشترتیب شود، به‌عنوان یك "قانون تفکر" بیان‌کرد، امادیگران چنین چیزی را نپذیرفتند. وی درهمان مقالهٔ سال ۱۸۸۳ که درآن اصل خوشترتیبی را به‌عنوان یك قانون تفکر پیشنهاد کرد، فرضیهٔ پیوستار را به‌گونه‌ای‌صورتبندی‌کردکه خوشترتیبی‌پیوستار ازآن نتیجه می‌شد (این صورتبندی،صورتبندی اصلی او نیست)."مکاتبات کانتور نشان می‌دهدکه این شکل از فرضیهٔ پیوستار او را به‌اصل خوشترتیبی‌رهنمون شده‌است..." (ص۸۳). در ارائهٔ نهایی نظریهٔ ترامتناهی(۱۸۹۵، ۱۸۹۷) کانتور آشکارا دریافت‌که گزاره‌هایی مثل: هرتوانی یك الف است، هرمجموعه‌ای می‌تواند خوشترتیب باشد واز دوتوان‌نابرابر،یکی‌بزرگتر از دیگری‌است،به‌برهان‌نیاز دارد.او حتی درنامه‌ای به ددکیند (۱۸۹۹) ودیگران استدلالی‌را برای قضیهٔ‌الف[1](که‌گزاره‌های ذکرشدهٔ دیگرازآن نتیجه‌می‌شوند) صورتبندی‌کردکه درآن، از مطالبی استفاده‌کردکه بعدها به‌عنوان پارادوکسهای نظریهٔ مجموعه‌ها شناخته شدند. مور به‌درستی بیان می‌کندکه منشأ برهان‌کانتور برای قضیهٔ الف، ایدهٔ نهفته دربرهان او برای این‌گزاره بود که هر مجموعهٔ نامتناهی، یك زیرمجموعهٔ سرهٔ شمارای نامتناهی دارد.اگر مجموعهٔ A متناهی نباشد، دارای زیرمجموعه‌های سرهٔ متناهی با تعداد دلخواه از اعضای A است. کانتور با استفادهٔ ضمنی از بینهایت انتخاب، استدلال‌کرد کـه A باید شامل یك دنبالهٔ شمارای نامتناهی‌از اعضا باشد: اولین‌عضو، می‌تواند هر عضوی از A باشد، دومین عضو، هـر عضو مجموعهٔ باقیمانده، و الی‌آخر (ص۲۹). حال او می‌توانست تصور وجود مجموعه‌هایی‌راکه توان آنها الف نیست درسر بپروراند. آنها باید دارای زیرمجموعه‌های سره با هر الفی باشند، ودنباله‌ای ازعناصر که درآن همهٔ‌اعداد ترتیبی به‌عنوان اندیس به‌کارمی‌روند، به‌وجود می‌آید.خواه‌کانتور دقیقاً دراین فکر بوده باشدخواه نباشد،هاردی در مقالهٔ ۱۹۰۳ خودکه درآن ثابت‌کرد هر توان نامتناهی یا یك الف است یا بزرگتر از یك الف، چنین قدمی برداشت (ص۶۰).

1.aleph theorem

کانتور می‌توانست با استفاده از کشف خود درمورد نیاز به‌تمایز بین کثرتها[1]ی سازگار وناسازگار ازهاردی نیز پا فراترنهد؛ کثرتهای سازگار، وحدتها[2] هستند (که او آنها را مجموعه‌ها نامید)، در حالی که فرض وحدت بودن برای کثرتهای ناسازگار (که او آنها را مطلقاً نامتناهی می‌نامید) مولد تناقض است. همان‌طور که کانتور در مکاتبات خود نشان داد این فرض برای کثرتهایی از همهٔ اعداد ترتیبی، همهٔ مجموعه‌ها، همهٔ چیزها وهمهٔ الفها به‌تناقض می‌انجامد. کانتور با توسل به‌این اصل که کثرتی که شامل زیرکثرتی همتوان با یك کثرت ناسازگار باشد، ناسازگار است، می‌توانست ثابت کند. مجموعه‌ای نامتناهی که توان آن یك الف نیست، وجود ندارد. کثرتی که توان آن الف نباشد، باید شامل دنباله‌ای از عناصر یکریخت با کثرت ناسازگار همهٔ اعداد ترتیبی باشد.

به‌نظر می‌رسد که کانتور نسبت به‌این استدلال شك داشت ودر انتشار آن تعلل می‌ورزید. او درمورد تمایز بین کثرتهای سازگار وناسازگار نامطمئن بود و به‌همین دلیل از ددکیند در این مورد نظرخواست. ددکیند پاسخ داد که معنای آنچه که کانتور در این باره گفته، برایش روشن نیست [۴]. بعداً فیلیپ جوردین نامه‌ای برای کانتور فرستاد که حاوی برهانی برای قضیهٔ الف بود و البته‌فهمید که کانتور از قبل در این باره اطلاع دارد [۳]. کانتور، جوردین را در انتشار برهان مذکور تشویق کرد، ولی اجازه نداد که جوردین برهان خود او را چاپ کند. (ص۶۱).

تسرملو درچاپی که از آثار کانتور فراهم کرد، اعتراضات خود را نسبت به‌نوع استدلالی که به‌وسیلهٔ کانتور ودیگران اقامه شده بود، شرح داد. او بینهایت انتخاب متوالی را که به‌نظر می‌رسید به‌طور ضمنی دراستدلال کانتور به‌کار رفته، براین مبنا مورد انتقاد قرارداد که: "دراینجا شهود نسبت به‌زمان درفرایندی به‌کاربرده شده که از محدودهٔ هرشهودی فراتر می‌رود: موجودی فرض شده است که می‌تواند انتخابهای دلخواه متوالی را انجام دهد...". آنچه که کانتور بدان نیازداشت اصل موضوع انتخاب بود، "که امکان انتخاب همزمان را میسر کند..." (ترجمهٔ مور، ص۵۳). اماهنوز باید نسبت به‌موجودی که این انتخاب همزمان را انجام می‌دهد به‌دیدهٔ تردید نگریست. واقعیت این است که صورتبندی اصل براساس امکان انتخابهای همزمان، صورتبندی نهایی نیست؛ زیرا همان‌طوری که تسرملو به‌روشنی درمقالهٔ ۱۹۰۸ دربارهٔ خوشترتیبی می‌گوید: "هنوز اصل [انتخاب] با نوعی ذهنیت عجین است ومستعد سوءتعبیراست" [۱۶]. اصل معادلی که او آن را کاملاً "عینی" می‌داند و توصیفش کرده، اصل ضربی است که چیزی دربارهٔ امکان انتخاب نمی‌گوید بلکه فقط وجود یك مجموعه را تضمین می‌کند. تسرملو از استفاده از کثرتهای ناسازگار نیز انتقاد می‌کند. او در مقالهٔ ۱۹۰۴ خود قضیهٔ خوشترتیبی را با اجتناب از انتخابهای دلخواه متوالی وهمچنین کثرتهای ناسازگار به‌اثبات رسانید. اما یقیناً این برهان مایهٔ رضایت همه رافراهم نکرد، بلکه فقط عدهٔ قلیلی برهان و اصل جدیدی را که برهان برآن مبتنی بود پذیرفتند. در واقع، با انتشاراین مقاله بود که جدالی بزرگ برسراصل موضوع انتخاب آغاز شد.

1. multiplicities 2. unities

اعتراضات به‌اصل موضوع انتخاب

اولین اعتراضات به‌استفاده از بینهایت انتخاب که مطابق با قاعده‌ای نباشد، قبل از ۱۹۰۴ مطرح شد. پئانو در مقالهٔ ۱۸۹۰ خود این کار را غیرمجاز دانست، اما دلیلی برای این انتقاد ارائه نکرد (او در سال ۱۹۰۶ با ذکر دلیل از اصل موضوع انتخاب انتقاد کرد (ص۱۳۴) وتسرملو به‌آن پاسخ داد (ص۱۴۵).) دوسال بعد، بتازی[1] این دلیل را عرضه کرد: "تعدادی نامتناهی از اشیاء را که همگی ازطبقه‌های مفروض به‌طور دلخواه انتخاب شده‌اند، نمی‌توان متعین تلقی نمود. این موضوع هنگامی به‌روشنی معلوم می‌شود که توجه داشته باشیم انتخاب دلخواه اشیاء، معادل تعریف تك‌تك آنها دریك زمان واحد است" (ترجمهٔ مور، ص۷۷). بعداً، در سال ۱۸۹۶، بتازی در برهان ددکیند برای معادل بودن دو تلقی مختلف از مجموعه‌های متناهی، استفاده از بینهایت انتخاب دلخواه راتشخیص داد (ص۲۶). اگر بتازی قضیهٔ ددکیند راکه با کارهای بورالی-فورتی براساس یك اصل نادرست، اثبات شد، نمی‌پذیرفت، می‌توانست دراین زمان آغازگر یك بحث جدی درموردانتخابهای دلخواه باشد. "بدین‌ترتیب، تنها ریاضیدانی که در آن مراحل اولیه نسبت به‌معادل بودن دوتلقی مختلف از مجموعه‌های متناهی مشکوك بود، به‌جرگهٔ کسانی پیوست که این دو را یکی می‌گرفتند. بنابراین نه بتازی و نه هیچکس دیگراستفاده از انتخابهای دلخواه رامورد مداقه قرارندادند، تااینکه پنج‌سال بعد بپولوی[2]، در زمینهٔ دیگری، چنین کرد" (ص۹-۲۸).

در میان اولین نقادان اصل موضوع انتخاب، بعد از اینکه تسرملو ثابت کرد که این اصل، قضیهٔ خوشترتیبی را نتیجه می‌دهد، ریاضیدانان فرانسوی، بورل، بر ولبگ بودند. آنها اعتقاد داشتند که وجود اشیاء ریاضی وابسته به تعریف آنهاست؛ روشهای غیرساختنی "خارج از ریاضیات" تلقی می‌شد. بر نفی خود را از استدلال تسرملو، نهایتاً بر انکار این موضوع قرارداد که مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های یك مجموعهٔ نامتناهی، مشخص است. (برای ملاحظهٔ پاسخ این انتقاد به [۸] ص۹۵ مراجعه کنید.) درمقابل این نظرات، آدامار، که اصل موضوع انتخاب وبرهان تسرملو راپذیرفته بود، اعتقاد داشت که آنچه ما انجام می‌دهیم (انتخاب، تعریف) اموری ذهنی هستند وبه‌علم روانشناسی تعلق دارند، نه به‌ریاضیات. به‌نظر او، تاریخ نشان می‌دهد که "پیشرفت واقعی در ریاضیات ناشی ازالحاق متوالی مفاهیمی است که ازنظر یونانیان، یاهندسه‌دانان رنسانس، یااسلاف ریمان، به‌دلیل عدم امکان تعریف آنها، «خارج از ریاضیات» قلمداد می‌شده‌اند" (ترجمهٔ مور، ص۹۶). در واقع، هیچ ادعای ایدئولوژیك دربارهٔ مفهوم "خارج از ریاضیات" نمی‌تواند قطعیت داشته باشد. آدامارخاطرنشان کرد که ریاضیات در طول تاریخ دستخوش تغییر و توسعه بوده و هیچکس درمقامی نیست که بتواند تعیین کند ماهیت ریاضیات چیست وچه بایدباشد. البته گرایشهای مشخصی همیشه وجود داشته و "دو دیدگاه مختلف دربارهٔ ریاضیات برجسته‌تر می‌نماید، اما با توجه به‌تمام آنچه که تاکنون گفته شده، دلیلی برای تغییرموضع خویش نمی‌بینم" (ترجمهٔ مور، ص۳۱۸). به‌نظرمی‌رسد موضع آدامار موضع مسلط باشد،

1. Bettazzi 2. Bepo Levi

زیرا همان‌طوری که مور می‌گوید: "تحدید پیروان اصالت‌ساختن از ریاضیات (شاید به‌خاطر غیرعادی بودن آن) نامی به‌دست آورد ولی دیدگاه آداماروتسرملو به‌صورت یك موضع تثبیت‌شده درآمد و به‌همین دلیل مستحق نام «ریاضیات جدید» است" (ص ۳۱۰).

در انگلستان نیز جدال برسر اصل موضوع انتخاب و برهان تسرملو با شرکت افرادی چون هابسن، راسل، هاردی وجوردین با شدت تمام جریان داشت. در ۱۹۰۴، راسل درحال بررسی برهان وایتهد برای اصل ضربی دریافت که استدلال او مبتنی بردور است. "ابتدا فکرمی‌کردم که احتمالاً برهان ساده‌ای می‌توان یافت؛ اما کم‌کم دیدم که اگر برهانی وجود داشته باشد، باید بسیار پیچیده باشد" (ص ۱۲۲). راسل ظاهراً درابتدا فکر می‌کرده این اصل درست باشد چون درپی یافتن برهانی برای آن بود؛ اما وقتی نتوانست برهانی بیابد، نسبت بدان مشکوك شد. بعد از این، قضایایی که با استفاده ازاین اصل ثابت می‌شدند، مثل معادل بودن تعریف دد کیند از مجموعهٔ "متناهی" با تعریف متعارف آن، و اینکه هر مجموعهٔ نامتناهی، یك زیر مجموعهٔ شمارای نامتناهی دارد، از نظر راسل فقط به‌طورمشروط اثبات شده محسوب می‌شدند. لویی کوتورا که در آن زمان با راسل مکاتبه داشت، با شنیدن این نظرراسل، به‌وی اعتراض کرد. اوازاینکه راسل قادر به‌اثبات اصل ضربی نبود متعجب نشد، بلکه شك راسل نسبت به‌درستی اصل، که ازنظر کوتورا بدیهی و مطابق با فهم متعارف بود، او را شگفت زده کرد. تعارضات کشف شده، راسل را نسبت به‌فهم متعارف محتاط ساخت. معلوم شده بود که فهم متعارف قابل اطمینان نیست، و او اصل ضربی را منشأ جدیدی برای ظهورتناقضات تصور می‌کرد (ص ۱۲۵). کمی بعد، هاردی که معتقد بود انکاراصل، "پارادوکسیکال" به‌نظر می‌رسد، او را مجاب کرد. به‌نظرهاردی اگراصل پذیرفته نشود، "جالبترین بخشهای ریاضیات از میان می‌رود، و هیچ دلیلی برای این کار وجود ندارد" (ص ۱۲۷). اما یك دلیل اساسی وجود داشت که مانع‌ازآن می‌شدکه برای راسل این‌اصل، بدیهی باشد و آن‌تصور راسل از مجموعه بود.

تصورات متفاوت بسیاری دربارهٔ مجموعه وجود دارد که گرچه تمایز آنها همیشه آشکار نیست، ولی اکثر آنها (از جمله تصوری که خودکانتور ازآن در ذهن داشت) برای نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها نامناسب‌است. اینکه اصل انتخاب یا اصل ضربی بدیهی است یا نه، کاملاً بستگی به‌تصوری دارد که از مجموعه در ذهن داریم. اگرهمان تصوری راکه منتقدین از مجموعه در ذهن‌داشتند بپذیریم، اعتراضات راسل وامثال اوعلیه اصل انتخاب توجیه‌پذیر می‌شود. اجازه دهید دوتصور از مجموعه را مختصراً بررسی کنیم. بنا به‌تصورمفهومی[1] ازمجموعه، (وجود) یك مجموعه، با یك‌خاصیت مشترك و مختص اعضای آن معین‌می‌شود. ممکن‌است بعضیها به‌جای خاصیتها (که به‌عنوان ذوات مجرد درنظر گرفته می‌شوند) قوانین، قواعد یا فرمولهایی راکه از تعداد متناهی کلمه ترکیب یافته‌اند، درنظر بگیرند. این‌تصور ازمجموعه که وجود آن را به‌در دسترس بودن یك تعریف از آن وابسته می‌کند، موضع پیروان فرانسوی مکتب اصالت ساختن است. در مقابل هر نوع تصور مفهومی از

1. intensional concept

مجموعه، تصورمصداقی[1] محض ازیك مجموعه قراردارد که مطابق آن، یك شیء مجرد فقط با مشخص ساختن اعضاء آن معین‌می‌شود. این مفهوم ازمجموعه به‌عنوان یك "کثرت محض" از اشیاء، هیچ اشاره‌ای به‌خواص، قواعد یا تعاریف ندارد. به‌دلایلی که ذکرآن موجب تطویل کلام است ([۵] ص ۱۴۱)، راسل تصور مفهومی از مجموعه را ترجیح می‌دهد. با این تصور از مجموعه، اصل ضربی بدین‌معناست که برای‌هرطبقه از مجموعه‌های‌غیرتهی دوبه‌دو مجزا، خاصیتی‌وجود دارد که فقط یك عضو از هر یك از این مجموعه‌ها این‌خاصیت را دارد و فقط همین اعضاء این‌خاصیت را دارند. این گزاره‌ای بود که راسل فکر می‌کرد: "به هیچ‌وجه بدیهی نیست". بنابراین‌او به‌این نتیجه رسید که همین‌که بدانیم معنی اصل چیست، بداهت آن غیرقابل تصدیق می‌شود (ص ۱۷۶). اما همان‌طور که گودل می‌گوید هیچ چیزی بهتر از اصل ضربی تصور مصداقی‌از مجموعه‌را بیان نمی‌کند ([۵] ص ۱۵۱)؛ مطابق این تصور، "این اصل به‌اندازهٔ اصول دیگر نظریهٔ مجموعه‌ها بدیهی‌است" ([۶] ص ۵۱۶، پانوشت ۲).

تسرملو معتقد بودکه اصل انتخاب یا صورت معادل آن، یعنی اصل ضربی، به‌شرط اینکه تصور مناسبی از مجموعه داشته باشیم، گزاره‌ای بدیهی است. اما مؤثرترین حربه برای دفاع از اصل، نتایج ثمربخشی است که ازآن عاید ریاضیات می‌شود. این نتایج در دیدگاه هاردی نسبت به‌این اصل بیشترین تأثیررا داشت. مور سیر تحقیقات دربارهٔ نتایج‌اصل‌راکه بیش‌ازهمه مدیون سرپینسکی و مکتب ورشو (لهستان) است و از حدود سال ۱۹۱۶ آغاز شد، تعقیب و ترسیم می‌کند. می‌توان با این بیان مورکاملاً موافق‌بود: "همان‌طوری که تسرملو پیش‌بینی کرد، بالاخره مودمندی اصل موضوع انتخاب، آن را درجای مطمئنی از پهنهٔ تحقیقات ریاضی قرار داد" (ص ۱۹۷).

به‌استثنای جوردین، تقریباً همه در ابتدای پیدایش این‌اصل به غیرقابل‌اثبات بودن‌آن باور داشتند. اما بعضی از منتقدین، به‌ویژه کسانی‌امثال‌راسل که‌فکرمی‌کردند هرمجموعه‌ای‌قابلیت‌خوشترتیبی ندارد، معتقد بودندکه اصل‌انتخاب منجر به‌ظهورتناقض می‌گردد. راسل در یك سخنرانی در جامعهٔ ریاضی فرانسه در ۱۹۱۱ حتی شنوندگان را به‌جستجو برای یافتن تناقض‌ترغیب‌کرد (ص ۱۷۶). اما در سال ۱۹۳۸، گودل امیدهای مخالفین‌اصل موضوع انتخاب را با اثبات اینکه‌اگربقیهٔ اصول‌موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار باشند، مجموعهٔ آن اصول واصل انتخاب نیزسازگاراست، به‌یأس مبدل ساخت.

اصول موضوع تسرملو برای نظریهٔ مجموعه‌ها

در تابستان ۱۹۰۷ تسرملو همهٔ اعتراضاتی را که به‌اصل موضوع انتخاب و برهان او برای قضیهٔ خوشترتیبی شده بود، جمع‌آوری کرد. وی در ۱۹۰۸ دومقاله به‌چاپ رساندکه از نظر مور بسیار به‌هم مربوط‌اند: اولین مقاله شامل برهان جدیدی برای قضیهٔ خوشترتیبی و دومین مقاله شامل دستگاه اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها بود. نظری که معمولاً دربارهٔ انگیزهٔ تسرملو درساختن

1. extensional concept

دستگاه اصول موضوع داده می‌شود، این است که او می‌خواست مبادیی برای نظریهٔ مجموعه‌ها به‌دست دهد که از تعارضات در امان باشد. مور با اشاره به‌انگیزه‌های دیگر تسرملو، نقش تعارضات را از همه کمتر می‌داند. او تأکید می‌کند که نحوهٔ برخورد تسرملو، راسل و هاسدورف با تعارضات، با هم متفاوت بود. این هر سه تن در ۱۹۰۸ آثار مهمی در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها منتشر کردند. از بین این سه تن، هاسدورف کمترین حساسیت را نسبت به‌تعارضات نشان می‌داد و معتقد بود که باید از مجموعه‌هایی که منجر به‌تناقض می‌شوند، احتراز کرد (ص۱۵۸). در شرح اختلاف تسرملو و راسل نسبت به‌تعارضات، دو واقعیت باید مورد توجه واقع شود. اول اینکه هر دو، مستقل از هم تعارضی را کشف کردند که به‌نام پارادوکس راسل معروف است: پارادوکس مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که عضو خود نیستند [۱۲]. تسرملو دربارهٔ کشف خود فقط هیلبرت و چندتن دیگر را در جریان گذاشت و بعد، به‌طور کلی، در مقالات خویش کمترین فضا را به بحث دربارهٔ تعارضها اختصاص می‌داد. راسل نامه‌ای به‌فرگه، که فکر می‌کرد این خبرها علم حساب را تکان داده است، نوشت و بعد مشروحاً در کتاب اصول ریاضیات آن را مورد بحث قرارداد. دوم اینکه، راسل سالها درپی روشی برای "حل" تعارضات می‌گشت، و آماده بود تا برای راه‌حلی که به نظرش رضایت‌بخش باشد، بخشی از نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها را قربانی کند. در مقابل، برای تسرملو، خود نظریهٔ مجموعه‌ها اصل بود و کمتر به‌تعارضات می‌اندیشید. او به اندازهٔ راسل، تعارضات را جدی تلقی نمی‌کرد [۹]. به‌تعبیر مور، تسرملو "تعارضها را از نظر ریاضیات، بیشتر ظاهری می‌دید تا واقعی" (ص ۱۵۸). البته از مقالات ۱۹۰۸ چنین بر می‌آید که پیدایش تعارضها و اینکه هر انحرافی می‌تواند با "تحدید مناسب تصور از مجموعه" از بین برود، باعث بروز شک‌گرایی زیادی شد. به‌علاوه، تسرملو برخلاف هیلبرت در بند دقتی که سنتاً مشخصهٔ ریاضیات تلقی می‌شد، نبود. آنچه او درنظر داشت نشان دادن این مطلب بود که کل نظریهٔ مجموعه‌ها در آن حدی که کانتور و ددکیند عرضه کرده بودند، از اصول موضوع او نتیجه می‌شود. علاوه براین، می‌توان دید که با نظریهٔ مجموعه‌های مبتنی بر اصول موضوع او، "همهٔ تعارضهای کشف شده تا این‌زمان، رخت برمی‌بندند". البته، قضیهٔ خوشترتیبی او نیز از همین اصول نتیجه می‌شد.

مور اگرچه اثر تعارضها را در اصل موضوعی ساختن نظریهٔ مجموعه‌ها انکار نمی‌کند، عقیده دارد که این‌کار تسرملو، در وهلهٔ اول برای این بوده که برهان خود برای قضیهٔ خوشترتیبی را بر پایهٔ محکمی قراردهد و به‌خصوص، اصل انتخاب را نجات بخشد (ص ۱۵۹). گرچه تسرملو قبل از شروع مشاجرات درفکر تحدید مفهوم مجموعه به‌وسیلهٔ اصول موضوع بود و مور اطلاعاتی را دربارهٔ اصول موضوع قبلی تسرملو به‌دست می‌دهد (ص۱۵۵)، ولی به‌نظر می‌رسد انگیزهٔ او در نوشتن مقالات ۱۹۰۸ موضع‌گیریهای مختلف درمقابل کارهای او باشد. اما اصل موضوعی ساختن نظریهٔ مجموعه‌ها چگونه می‌تواند دفاعی از برهان تسرملو باشد؟ ارائهٔ دستگاه اصول موضوع چگونه می‌تواند کمکی درمبارزه با منتقدین باشد؟

وجود تعارضها به‌همان اندازه که ممکن است به‌طور غیرمستقیم محرک تسرملو درکار اصل موضوعی‌سازی بوده باشد، به‌طور مستقیم نیز مؤثر بوده زیرا رفع آنها می‌توانسته است برهان او برای قضیهٔ خوشترتیبی را قابل‌قبول سازد. بعضی از اعتراضات به‌تسرملو، علیه اصل موضوع انتخاب نبود، بلکه ناشی از این گمان بود که روش تسرملو با تنازع بورالی-فورتی (مجموعهٔ همهٔ اعداد ترتیبی متضمن تعارض بورالی-فورتی می‌شود) درمخاطره است. ([۱۲] را راجع به‌تعارض "بورالی-فورتی" ببینید)؛ به‌ویژه منتقدین آلمانی او این گمان را داشتند، و شك هاردی نیز از این فکر نشأت گرفت که برهان تسرملو بر این تعارض استوار است (ص۱۲۸). به‌نظر می‌رسد اینها تنها منتقدینی بودند که تسرملو امیدوار بود با اصل موضوعی کردن نظریهٔ مجموعه‌ها، آنها را از میدان به‌درکند. بنابراین حتی اگر تسرملو مقالهٔ مذکور را درباب اصول موضوع در وهلهٔ اول در دفاع از برهان خوشترتیبی نوشته باشد، مضمون آن می‌توانسته روش متقاعدکننده‌ای در اجتناب از تعارضات به‌شمار آید.

ظاهراً دستگاه اصول گرهارد هسنبرگ و چندتن دیگر را خشنود ساخت (ص۱۱۴)، ولی درمجموع دستگاه تسرملو در ابتدای کار چندان مورد استقبال واقع نشد. برنشتاین به‌دلیل قضیهٔ خوشترتیبی که از دستگاه نتیجه می‌شود، دستگاه را نپذیرفت هرچند که ظاهراً از جنبه‌های دیگر آن را پذیرفته بود (ص ۱۶۶). خیلیها به‌اصل موضوع جداسازی[1] او اعتراض داشتند: مفهوم خاصیت معین یا تابع گزاره‌ای معین، که برای اجتناب از پارادوکسهای تعریف‌پذیری متناهی بیان شد، مبهم تلقی گردید ([۱۶]، ص۱۹۲ و ص۲۰۲ پانوشت ۱۰). به‌علاوه، اینکه این اصل باعث اجتناب از تعارضات شود، برای همه واضح نبود. در واقع دستگاه تسرملو مبتنی بر نظریهٔ تحدید اندازه[2] است؛ این ایده از آن کانتور است و حاکی است که "کثرتهای ناسازگار" بسیار بزرگ‌اند، یا به اصطلاح کانتور، "نامتناهی مطلق" اند. تسرملو، به‌پیروی از هسنبرگ، تعارضات را "پارادوکسهای فوق متناهی[3]" نامید (مرجع ۲۰، ص ۲۰۲). به‌کسانی که فکر می‌کردند تنازع بورالی-فورتی ویران‌کنندهٔ برهان تسرملو برای قضیهٔ خوشترتیبی است، او می‌توانست این‌طور جواب دهد که از اصول موضوع او، وجود مجموعه‌های بسیار جامعی مثل مجموعهٔ همهٔ اعداد ترتیبی یا مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها نتیجه نمی‌شود. تسرملو بر اساس اصول موضوع خویش می‌توانست ثابت کند که برای مثال، هرمجموعه‌ای باید حداقل یك زیرمجموعه داشته باشد که عضو آن مجموعه نیست؛ بنابراین مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد. راسل نیز اشاره‌وار از "طبقات و فرایندهای باز تولیدکننده" صحبت می‌کند که می‌تواند متناظر باشد با "خاصیتهایی، به‌طوری که برای هر طبقهٔ مفروضی از عناصر که همه چنین خاصیتی دارند، همیشه بتوان عنصر جدیدی تعریف کرد که خاصیت مذکور را داشته باشد. بنابراین هرگز نمی‌توان همهٔ عناصر را که خاصیت مفروضی را دارند در یك کل جمع‌آوری کرد، زیرا برای کل جدید نیز با فرایند ذکرشده، می‌توان عنصر جدیدتری تولید کرد که خاصیت اولی را دارا باشد" [۱۵].

می‌توان مثل فون نویمان مجموعه‌های بسیار بزرگ را برحسب عدد اصلی آنها مورد بحث قرارداد: مجموعه‌های بسیار بزرگ، مجموعه‌هایی هستند که زیرمجموعه‌ای همتوان با مجموعهٔ همهٔ

1.separation 2.limitation of size 3.ultrafinite paradoxes

مجموعه‌ها دارند؛ اما بزرگ بودن مجموعه‌ها دلیلی بر ناموجود بودن آنها نیست ــ آنها کثرتهای ناسازگار کانتور نیستند. کانتور این گزاره را پیشنهاد کرده بود که کثرتی همتوان با کثرتی ناسازگار، خود ناسازگار است، و جوردین ادعا کرده بود که هر کثرتی که شامل زیرکثرتی همتوان با کثرت همهٔ اعداد ترتیبی باشد ناسازگار است؛ اما نه کانتور و نه جوردین، هیچکدام ایده‌های خویش را به روش منطقی قابل قبولی عرضه نکردند و این فون نویمان بود که چنین کرد (باید خاطرنشان ساخت که تسرملو هیچ توجهی به کثرتهای ناسازگار نداشت). می‌توان تمایزی را که فون نویمان بین مجموعه‌هایی که می‌توانند عضو مجموعه‌های دیگر باشند و مجموعه‌هایی که نمی‌توانند باشند قائل شد، نقطهٔ پایان "طبقات و فرایندهای باز تولیدکننده" راسل تلقی کرد.

اگرچه نظریهٔ تحدید اندازه را می‌توان به سادگی در یك دستگاه اصل موضوعی مثل دستگاه تسرملو بیان کرد و همچنین مجموعه‌های بسیار بزرگ را نیز می‌توان به روش فون نویمان مشخص کرد، ولی وقتی از نظریهٔ تحدید اندازه دفاع می‌شود، این تصور وجود دارد که باید چیز نادرستی با مفهوم جامعیت گره خورده باشد، یعنی در مفهوم مجموعه‌های بسیار بزرگ یك مشکل مفهومی نهفته است. آیا می‌توان چیز مشکوکی در مورد "مجموعه‌ها" که در تعارضها مطرح می‌شوند تصور کرد جز اینکه به تناقض می‌انجامند (کثرتهای ناسازگار هستند)؟ اگر مجموعه‌های همهٔ اعداد ترتیبی یا اعداد اصلی را کنار بگذاریم، موضوع عضو خود بودن[1]، تنها موضوع ممکن به نظر می‌رسد؛ و این موضوعی بود که خیلی زود مطرح شد. در ۱۹۰۴، هاسدورف میل داشت این گزاره را به‌عنوان یك اصل موضوع پیشنهاد کند: "یك طبقهٔ خوشتعریف از اشیاء، هرگز نمی‌تواند عضوی از این طبقه باشد بلکه همیشه شیء جدیدی را نمایش می‌دهد" ([۷] ص ۱۲۳). همان طوری که گودل خاطرنشان کرد، به نظر می‌رسد که تصور مصداقی از مجموعه دلالت می‌کند که یك مجموعه به طریقی به اعضاء خویش بستگی دارد که مجموعه‌های غیربندار[2] از مجموعه بودن طرد می‌شوند ([۵] ص ۱۴۰). در حوالی ۱۹۰۵، تسرملو اصل موضوعی را دال بر نفی عضو خود بودن در بیان اولیهٔ دستگاه خویش گنجاند که در مقالهٔ ۱۹۰۸ او دیده نمی‌شود. تازه در سال ۱۹۳۰ بود که او اصل بنداری را جزء دستگاه خود قرارداد [۱۷]؛ این اصل مجموعه‌هایی را که عضو خود هستند یا عضو عضو خود هستند، ... و یا مجموعه‌هایی را که شامل زنجیرهای نزولی نامتناهی از اعضاء هستند، از مجموعه بودن طرد می‌کند. مجموعه‌هایی که در این اصل صدق می‌کنند، یا مجموعه‌های بندار، یك سلسله مراتب تجمعی[3] مطلقاً بی‌پایان تشکیل می‌دهند که بن یا پایهٔ آن یك کلیت (مجموعه) از غیرمجموعه‌ها، مثلاً افراد مشخص است. در این سلسله مراتب، اول مجموعه‌هایی از افراد وجود دارند، بعد مجموعه‌هایی شامل افراد و مجموعه‌های افراد و الی غیرالنهایه... این ساختار از مجموعه‌های بندار، با استفاده از مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها می‌تواند توصیف بهتری بیابد:

$$R_0 = I$$

1. self-membership 2. well-founded
3. cumulative hierarchy

$$R_{\alpha+1} = P(R_\alpha) \cup R_\alpha$$

$$R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta \qquad (\alpha \text{ یك عدد ترتیبی حدی است})$$

برای مقاصد ریاضی، بهتر است که مجموعهٔ I از افراد را تهی فرض کنیم. اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها علاوه بر اینکه در جهان مجموعه‌های بندار صادق‌اند، در بخشهای مناسبی از آن نیز صادق‌اند؛ در [۱۷] این بخشها مورد تحقیق قرار گرفته‌اند.

مطابق نظر مور و بسیاری دیگر، "تسرملو هیچ دلیل صریحی برای انتخاب خود از اصول موضوع به‌دست نداده جز اینکه این اصول، قضایای اصلی نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها را نتیجه می‌دهند. چنین دلیلی را باید در سلسله مراتب تجمعی که تسرملو آن را دودههٔ بعد ارائه نمود، جستجو کرد" (ص ۱۶۷ و ۲۷۰). این موضوع تا حدودی قابل بحث است. نظریهٔ تحدید اندازه، هادی تحدید مفهوم مجموعه بود که به‌وسیلهٔ اصول موضوع تسرملو انجام شد. به‌علاوه، به‌نظر نمی‌رسد که او سلسله مراتب تجمعی را دلیلی برای انتخاب اصول موضوع خویش دانسته باشد، بلکه آن را "توضیح مناسبی برای تعارضات فوق متناهی" تلقی می‌کرد، و هیچ نشانه‌ای حاکی از تلقی او از سلسله مراتب به‌عنوان یك منشأ مفهومی که انگیزهٔ انتخاب اصول باشد، وجود ندارد. ظاهراً آنچه که تسرملو در [۱۷] می‌گوید با این واقعیت مطابق است که سلسله مراتب، مکملی برای نظریهٔ تحدید اندازه است ــ البته با ارزشترین مکمل!. اگر کسی مفهوم مجموعه‌ای از xها (مشهور به مفهوم تکراری[1] یك مجموعه) را به‌عنوان مولد سلسله مراتب تجمعی ترجیح دهد، حداقل باید مفهوم "مجموعهٔ" را به‌معنای مصداقی آن در نظر بگیرد تا اینکه بر اصل انتخاب (یا اصل ضربی) دلالت کند. روشن است که در [۶] چنین چیزی مورد نظر است. اما در مورد توجیه اصل تعویض یا جابه‌جایی[2] شك وجود دارد، و به‌نظر می‌رسد برحسب نظریهٔ تحدید اندازه بهتر قابل بیان باشد، و همچنین دربارهٔ آن مقدار از نظریهٔ مجموعه‌ها که برای توضیح تکرارها ضروری است (اعتراض دوم در [۲] مطرح شد. برای ملاحظهٔ بحث کلی و همچنین اعتراض اول به [۱] و [۱۳] مراجعه کنید). ظاهراً ورود سلسله مراتب تجمعی به نظریهٔ مجموعه‌ها نتیجهٔ تأمل روی دو موضوع بوده است. یکی اصول موضوع صورتبندی شده مطابق با نظریهٔ تحدید اندازه، و دیگر اینکه مجموعه‌های بسیار بزرگ، مجموعه‌های غیربندار هستند؛ می‌توان گفت این مجموعه‌ها بدین معنا بسیار جامع‌اند که شامل خودشان هستند، یا شامل مجموعه‌هایی که خودشان عضو آنها بوده‌اند، و . . . . درهرحال، سه ایدهٔ اصلی درمبادی مفهومی نظریهٔ بازسازی شدهٔ مجموعه‌ها عبارت‌اند از تصور مصداقی از مجموعه، نظریهٔ تحدید اندازه و سلسلهٔ مراتب تجمعی مجموعه‌ها. دلیل اینکه به سادگی نمی‌توان اصل بنداری و سلسله مراتب تجمعی را نتیجهٔ تصور مصداقی از مجموعه دانست، این است که آنها از مفهوم مجموعه به‌عنوان یك کثرت محض نیز ظاهراً نتیجه می‌شوند، یعنی از اینکه هر تعداد از اشیاء، مجموعه‌ای را می‌سازند و به‌عبارت دیگر، وجود اشیاء شرطی کافی برای وجود مجموعه است. گرچه به‌نظر غریب می‌آید، ولی این شرط کافی عام

1. iterative 2. replacement

برای وجود مجموعه و اصل موضوع بنداری، هردو با اصلاحاتی از مفهوم مصداقی مجموعه به‌دست می‌آیند؛ مثلاً اولی با محدود نمودن آن مطابق دومی وهمچنین به‌کاربردن نظریهٔ تحدید اندازه، نتیجه می‌شود. هرگز نمی‌توان وجود مجموعه‌های بسیار جامع را فقط با شروع از یك مجموعهٔ نامتناهی کوچك وبه‌کارگیری اصول موضوع مجموعهٔ توان، اجتماع، وجابه‌جایی تضمین کرد.

به‌عنوان حسن ختام، مختصراً واقعیت دنیای نظریهٔ مجموعه‌ها را بررسی‌می‌کنیم. بعضیها به‌این‌نظر تمایل دارندکه اشیاءمجردی مثل مجموعه‌ها همانقدر واقعی‌اندکه اشیاء انضمامی‌یا محسوس، و به‌همان‌صورت مستقل‌ازاندیشه وجود دارند؛ شایدگودل سردمدار این طرزتفکرباشد ([۵]، [۶] و [۱۰] را ببینید). به‌نظر نمی‌رسد که تسرملو، حداقل‌درنوشته‌های متأخرش، چنین‌موضعی‌داشته باشد؛ ازطرف دیگر، اویقیناًیك صورتگرا نبودکه زبان نظریهٔ‌مجموعه‌ها را علاماتی بداند که مطابق قواعد صوری تبدیل می‌شوند. او در سخنرانیی در ۱۹۳۱ گفت "موضوع حقیقی ریاضیات، آن‌طورکه بعضی برداشت کرده‌اند، ترکیبات [مختلف] علائم نیست، بلکه روابط مفهومی ایده‌آل بین عناصریك چندگونای نامتناهی‌است که به‌طور مفهومی معین شده است" [۱۱] ص ۱۲۶). به‌نظر می‌رسد این موضوع کم‌اهمیتی باشدکه آیا اشیاء ریاضی به‌طور واقعی‌در خارج از ذهن وجود دارند یا اینکه جهان مجموعه‌ها به‌گونه‌ای بر واقعیت تحمیل شده است که در عین‌حال اکتشافات واقعی نیز درآن صورت می‌گیرد. درهرحال، نظریهٔ مجموعه‌هاواقعاً محتوای معقولی دارد، و ما همگام با هیلبرت "مفاهیم سترگ کانتور" را می‌ستاییم، "جهانی‌با شکوه از ایده‌ها"که تسرملوتواناترین‌قهرمان آن بوده‌است.

مراجع

1. G. Boolos, The iterative conception of set, The Journal of Philosophy, 68 (1971) 215-231.
2. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, and A. Levy, Foundations of Set Theory, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam, 1973.
3. I. Grattan-Guinness, The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 73 (1971) 111-130.
4. ——, The rediscovery of the Cantor-Dedekind correspondence, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 76 (1974) 104-139.
5. K. Gödel, Russell's Mathematical Logic in The Philosophy of Bertrand Russell, ed. P. Schilpp, Tudor, New York, 1944, 123-153.
6. ——, What is Cantor's continuum problem?, this MONTHLY, 54 (1947) 515-525.
7. F. Hausdorff, Review of B. Russell's The Principles of Mathematics. Vierteljahrsschrift fur wissenschaftliche philosophie und Soziologie, 29 (1905) 119-124.
8. G. Kreisel, Two notes on the foundations of set theory, Dialectia, 23 (1969) 93-114.
9. ——, Bertrand Arthur William Russell, Biographical Memoirs of the Royal Society, 19 (1973) 583-620.
10. ——, Kurt Gödel, Biographical Memoirs of the Royal Society, 26 (1980) 149-224.
11. G. Moore, Beyond first-order logic: the historical interplay between mathematical logic and axiomatic set theory, History and Philosophy of Logic, 1 (1980) 95-137.
12. G. Moore and A. Alejandro, Burali-Forti's Paradox: a reappraisal of its origins, Historia Math., 8 (1981) 319-350.
13. C. Parsons, What Is the Iterative Conception of Set? in Logic Foundations of Mathematics and Computability Theory, ed. R. Butts and J. Hintikka, Reidel, Dordrecht-Holland, 1977, 335-367.
14. B. Rang and W. Thomas, Zermelo's discovery of the 'Russell paradox', Historia Math., 8 (1981) 15-22.
15. B. Russell, On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types. Proc. London Math. Soc. (2), 4 (1906) 29-53.
16. J. van Heijenoort, From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1967.
17. E. Zermelo, "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", Fund. Math., 16 (1930) 29-47.

• Gregory H. Moore, *Amer. Math. Monthly,* (10) **91** (1984) 654–662.

★ رابرت بون، دانشگاه بریتیش کلمبیای کانادا

اخبار و گزارشها

پنجمین سمینار جبر و چهارمین سمینار آنالیز

پنجمین سمینار جبر و چهارمین سمینار آنالیز به‌طور همزمان در روزهای ۱۸ و ۱۹ شهریور امسال در دانشگاه تبریز برگزار شد. این اولین تجربه در ادغام دو سمینار جبر و آنالیز بود و محسنات و معایب خاص خود را داشت. ضمناً، بسیاری از افرادی که قرار بود در سمینار سخنرانی کنند به دلیل نرسیدن دعوت‌نامهٔ نهایی نتوانستند در آن حضور یابند. امید است سمینارهای بعدی با تدارک دقیقتر و کیفیت بهتر برگزار شود.

بیست ویکمین کنفرانس ریاضی کشور

بیست و یکمین کنفرانس ریاضی کشور از تاریخ ۲۲ لغایت ۲۵ اسفندماه ۱۳۶۸ با همکاری انجمن ریاضی ایران در دانشگاه اصفهان برگزار خواهد شد. برنامه‌های علمی این کنفرانس، طبق معمول، مشتمل بر سخنرانیهای عمومی یک‌ساعته، سخنرانیهای تخصصی ۴۵ دقیقه‌ای و سخنرانیهای تخصصی کوتاه ۲۰ دقیقه‌ای خواهد بود. از جمله برنامه‌های دیگر این کنفرانس، برگزاری مسابقات ریاضی دانشجویی و دانش‌آموزی، میزگردهایی درمورد ریاضیات کشور، و مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران است.

تأسیس انستیتوی ریاضی در کمبریج

طرح تأسیس یک انستیتوی ریاضی به‌نام "مؤسسهٔ علوم ریاضی آیزک نیوتن" درجوار دانشگاه کمبریج انگلستان در اردیبهشت‌ماه گذشته به‌تصویب رسید و قراراست این مؤسسه از تابستان ۱۹۹۲ رسماً شروع به‌کار کند. این مرکز، سالانه درچهار رشتهٔ ریاضی و درهریک به‌مدت شش‌ماه برنامه خواهد داشت. قراراست که در آغاز هر برنامه، یک رشته سخنرانیهای آموزشی فشرده برای استفادهٔ دانشجویان سطوح بالا و نیز غیرمتخصصان ارائه شود. در طول برنامه، ریاضیدانان شرکت‌کننده از نقاط مختلف بریتانیا و سایر کشورها در کمبریج اسکان داده خواهند شد. برنامه‌ریزی علمی انستیتو توسط یک کمیتهٔ "سیاست علمی" که اکثریت اعضای آن را ریاضیدانان خارج از دانشگاه کمبریج تشکیل می‌دهند، صورت می‌گیرد و امور اجرایی برعهدهٔ رئیس انستیتو و "کمیتهٔ اجرایی" که عمدتاً از افراد محلی تشکیل می‌شوند خواهد بود.

درگذشت سوبولف

سرگی لوویچ سوبولف[1] ریاضیدان بزرگ شوروی که کارهایش تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای درپیشرفت ریاضیات قرن بیستم داشته است در ۱۳ دی ۱۳۶۷ به‌سن ۸۱ سالگی در لنینگراد درگذشت. سوبولف در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، آنالیز تابعی، نظریهٔ توابع، فیزیک ریاضی، و ریاضیات محاسباتی، تحقیقات اساسی کرده‌است.

سوبولف درسال ۱۹۰۸ درسن‌پترزبورگ (لنینگراد کنونی) به‌دنیا آمد. درسهای دبیرستان را پیش‌خود آموخت ودرسال ۱۹۲۵ وارد دانشگاه لنینگراد شد. در ۲۵ سالگی عضو وابستهٔ آکادمی علوم شد و در ۳۱ سالگی به‌عضویت کامل این آکادمی درآمد. از ۱۹۳۰ تا ۱۹۳۱ درمؤسسهٔ الکتروتکنیک لنینگراد به‌تدریس پرداخت ودر ۱۹۳۲ به شاخهٔ لنینگرادی مؤسسهٔ استکلف رفت. در ۱۹۳۴ درشاخهٔ مسکویی این مؤسسه شروع به‌کار کرد و در ۱۹۴۱ مدیر آن شد. او در دانشگاه مسکو نیز بیش از ۲۰ سال تدریس می‌کرد. از ۱۹۵۲ تا ۱۹۵۷ ریاست اولین دپارتمان ریاضیات محاسباتی در اتحاد شوروی را به‌عهده داشت.

از مهمترین دستاوردهای ریاضی سوبولف، روشی است که به‌اتفاق اسمیرنوف برای حل معادلهٔ موجی توصیف‌کنندهٔ نوسان در یک محیط مادی کشسان ابداع کرد. بررسی فضاهای تابعی سوبولف که او در دههٔ ۱۹۳۰ معرفی کرد بلافاصله تبدیل به‌حوزهٔ کاملی از آنالیز تابعی شد. مفهوم تابع تعمیم‌یافته (توزیع) که سوبولف آن‌را ابداع کرد اهمیت بسیاری یافت و با کارهای بعدی لوران، شوارتس، و گلفاند در این زمینه، به‌صورت یکی از مفاهیم اساسی ریاضیات درآمد. سهم عمدهٔ سوبولف در ریاضیات

1. Sergei L'vovich Sebolev

محاسباتی در اثر مهمش با عنوان آشنایی با نظریهٔ فرمولهای کوباتود پیداست.

سوبولف در ۱۹۷۸ به نووسیبریسک رفت و در بنیانگذاری شاخهٔ سیبریایی آکادمی علوم شوروی نقشی به‌عهده گرفت و نیز از ۱۹۶۰ تا ۱۹۶۸ استاد دانشگاه نووسیبریسک بود.

سوبولف در چندین آکادمی علوم، ازجمله آکادمی علوم فرانسه، عضویت داشت و مدتی نیز رئیس کمیتهٔ ملی ریاضیات شوروی بود.

درگذشت ویتنی

هسلر ویتنی[1] یکی از ریاضیدانان نوآور این قرن در تاریخ ۲۰ اردیبهشت ۱۳۶۸ در سن ۸۲ سالگی درگذشت. ویتنی در دههٔ ۱۹۳۰ دریك سلسله مقالات تاریخی تعاریف بنیادی و اولین قضایای نظریهٔ عمومی خمینه‌ها را عرضه کرد و رشتهٔ توپولوژی دیفرانسیل را بنیان نهاد. روشی که ویتنی دراین آثار برای نشاندن خمینه‌های هموار در فضای حقیقی ارائه کرد، به‌ابزار متعارف "قضایای نشاندن"[2] درمباحث گوناگون توپولوژی تبدیل‌شده‌است. همچنین، او اولین کسی بودکه به بررسی اسلوبمند تکینیهای نگاشتهای هموار پرداخت وبا رده‌بندی تکینیهای نوعی نگاشتهای هموار از صفحه به‌صفحه، راه را برای رنه‌توم گشود تا نظریهٔ تکینیها و فواجع را پایه‌گذاری کند. ویتنی در زمینهٔ توپولوژی جبری نیز ازشخصیتهای تراز اول محسوب می‌شود. اوازپیشگامان نظریهٔ کوهمولوژی [همانستگی] بود. در این مبحث، او و چك[3] حاصلضرب ناوی[4] را به‌طوردقیق درکاتگوری جبری بیان کرده و به‌کار گرفتند. همچنین ویتنی و اشتیفل[5] ردهٔ کوهمولوژی را که امروزه ردهٔ اشتیفل-ویتنی خوانده می‌شود برای کلافهای برداری حقیقی پیداکردند. از ویتنی آثار بدیع و بنیادی دیگری نیز در زمینهٔ واریته‌های تحلیلی، نظریهٔ گرافها، و نظریهٔ هندسی انتگرالها به‌جا مانده‌است.

ویتنی در سال ۱۹۰۷ در شهر نیویورك زاده شد. در سال ۱۹۲۸ از دانشگاه ییل لیسانس فیزیك و در سال ۱۹۲۹ لیسانس موسیقی گرفت ولی پس‌ازآن به‌دانشگاه هاروارد رفت ودر۱۹۳۲ به‌اخذ درجهٔ دکتری ریاضی نائل شد. پس از گذراندن مدارج استادی در هاروارد، در سال ۱۹۵۲ به عضویت دائم مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستون دعوت شد و پس از بازنشستگی در سال ۱۹۷۷، درهمان شهر باقی ماند.

ویتنی در ۲۰ سال آخر عمر به‌مسائل آموزش ریاضیات در دوران دبستان و پیش از دبستان پرداخت و براساس مشاهدات و تجربیاتش در این زمینه، تألیفاتی به‌رشتهٔ تحریر درآورد. اومعتقد بودکه طرز تفکرشهودی کودکان مشابه عادات فکری ریاضیدانان است وتنها بدآموزیهای مدرسه و موانعی که زبان روزمره در راه انتقال مفاهیم ریاضی ایجاد می‌کند، باعث می‌شوند این توانایی طبیعی دربیشترمردم تضعیف ویا ازآنها سلب شود. به‌نظر اوتأکید بر"جواب درست" در مسائل ریاضی، آزمونهای تستی، و استفاده از زبان و اشیای نامأنوس برای آموزش ریاضی به کودکان، مانعهایی دربرابر رشد تفکر ریاضی آنهاست.

1. Hassler Whitney 2. embedding theorems
3. E. Čech 4. cup product 5. E. Stiefel

جوایز استیل ۱۹۸۹

جایزهٔ استیل (که دریکی از شماره‌های گذشته معرفی‌شد) سه زمینه را دربرمی‌گیرد: نوشتن مطالب توصیفی ریاضی، تحقیق‌اساسی و مهم، و تأثیرگذاری کلی و مستمرشخص بر جریان ریاضیات در طول دورهٔ فعالیتهای علمیش. جایزهٔ استیل امسال در این‌سه زمینه به ترتیب به افراد زیر تعلق گرفت: دانیل گورنستاین[1]، آلبرتو کالدرون[2]، و ایروینگ کاپلانسکی.

دانیل گورنستاین به خاطر نوشتن کتاب آشنایی با رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی (۱۹۸۲) ونیز دومقاله‌که در زمینهٔ رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی در بولتن انجمن ریاضی آمریکا نوشته‌است، برندهٔ جایزهٔ استیل درزمینهٔ مطالب توصیفی‌شد. تلاش برای رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی، بزرگترین تلاش مشترکی‌است‌که در دنیای ریاضیات برای اثبات یك قضیهٔ واحد صورت گرفته‌است. نخستین‌بار براوئر در سال ۱۹۵۴ درکنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات اشاره کرد که چنین رده‌بندیی می‌تواند انجام پذیرد. در سالهای بعد، صدها تن از ریاضیدانان درگیر این‌کارشدند و بیش از ۱۰۰۰۰ صفحه مقاله در این زمینه نوشته شد. در دهه‌های ۵۰ و ۶۰ قضایای عمیق متعددی به‌اثبات رسیدند تاآنکه دراوائل دههٔ ۸۰ این‌برنامه پایان یافت و فقط صورتبندی رسمی نتایج اعلام شده وبررسی جزئیات باقی ماند. گورنستاین‌که خود درجهت دادن به‌مسألهٔ رده‌بندی نقش مهمی‌داشت داستان‌این‌تلاش‌پرشور رادرکتاب ومقالات فوق‌الذکر بازگو می‌کند. وی شخصاً برخی از نتایج مهم را اثبات کرده و مقالات تحقیقاتی بیشمارش ازلحاظ تکنیکی‌جزو مشکلترین مقالات دراین زمینه‌است.

گورنستاین درسال ۱۹۲۳ به‌دنیا آمده ودر ۱۹۵۰ ازدانشگاه هاروارد درجهٔ دکتری گرفته‌است. وی عضو آکادمی ملی علوم و آکادمی هنرها و علوم آمریکاست و تاکنون دوبار در کنگره‌های بین‌المللی ریاضیات سخنران مدعو بوده‌است.

آلبرتوکالدرون جایزهٔ استیل برای تحقیق‌اساسی را به‌خاطر مقالهٔ "یکتایی درمسألهٔ کوشی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی" که درسال ۱۹۵۸ درامریکن جورنال آف‌ماتماتیکس انتشار یافته، به‌دست آورد. این مقاله، اثر مهمی در نظریهٔ عملگرهای انتگرالی تکین به‌شمار می‌رود و قامرو این نظریه را ازحد مطالعهٔ معادلات بیضوی گسترده‌تر کرده‌است. کاربردخاص آن‌درموردیکتایی درمسألهٔ کوشی‌است، پدیده‌ای‌که یکی از اسرارآمیزترین‌پدیده‌ها در معادلات‌دیفرانسیل خطی با مشتقات جزئی است. تخصیص این مقاله‌به‌معادلات هذلولوی‌اهمیت‌بسیار داشته‌است. همچنین این‌مقاله مدلی برای تحقیقات کلی در موضوعاتی ازقبیل‌حل‌پذیری موضعی فراهم آورده و حقیقتاً پیشرو نظریهٔ جدید آنالیز ریزموضعی بوده است.

آلبرتوکالدرون درسال ۱۹۲۰ در آرژانتین متولد شد و در ۱۹۵۰ از دانشگاه شیکاگو درجهٔ دکتری گرفت. وی عضو آکادمی ملی‌علوم و آکادمی هنرها وعلوم آمریکا و آکادمی‌علوم فرانسه‌است؛

1. Daniel Gorenstein 2. Alberto Calderón

و در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات در مسکو (۱۹۶۶) سخنران مدعو بوده و جزو ویراستاران چند مجلهٔ معتبر ریاضی است.

ایروینگ کاپلانسکی به‌خاطر تأثیری که در تمام دوران فعالیتهای علمیش برجریان ریاضیات، به‌خصوص ریاضیات آمریکا، داشته سومین جایزهٔ استیل امسال را دریافت کرد. او تحولات چشمگیری در ریاضیات پدید آورده و الهامبخش چند نسل از ریاضیدانان جوان بوده‌است. تحقیقات اولیهٔ کاپلانسکی در زمینه‌های نظریهٔ اعداد، آمار، ترکیبیات، نظریهٔ بازیها و مخصوصاً جبر تعویضپذیر بوده‌است. اوحل مسألهٔ کوروش[1] در زمینهٔ جبرهای جبری بادرجهٔ محدود[2] را، به‌دنبال کاری که قبلاً جاکوبسن دراین زمینه کرده بود، به‌انجام رساند ومسائل متعددی رادرمحدودهٔ جبرهای باناخ بررسی کرد.

کاپلانسکی همیشه آمادگی داشته مطالب جدیدی را تدریس کند و بیشتر درسهای جدید او به‌صورت تکنگاری یا مقاله به‌چاپ رسیده‌اند. تکنگاریهای او دربارهٔ گروههای آبلی نامتناهی و جبر دیفرانسیل، نمونه‌هایی از این گونه متون هستند که دانشجویان بسیاری را به‌کارکردن در این زمینه‌ها برانگیخته‌اند.

وقتی جبر تعویضپذیر به‌کمک روشهای همولوژیک حیات جدیدی یافت، کاپلانسکی مسیرعلائقش را دراین‌زمینه یك‌باردیگر تغییر داد. او همیشه می‌خواسته از بالای سرفرمالیسم ببیند "واقعاً جریان از چه‌قراراست." گواه موفقیت او دراین‌کار، مطالبی‌است که درحدود شصت‌سالگی شروع به‌انتشارشان کرد واین انتشارات در نویسندگان دیگر تأثیر زیادی گذاشته‌است.

کاپلانسکی در ۱۹۱۷ متولد شد و در ۱۹۴۱ از دانشگاه هاروارد درجهٔ دکتری گرفت. وی‌عضو آکادمی‌ملی‌علوم آمریکاست و ازسال ۱۹۸۴ مدیریت مؤسسهٔ تحقیقات علوم ریاضی (MSRI) را دربرکلی به‌عهده دارد ولی بیشتر دورهٔ کار دانشگاهیش در دانشگاه شیکاگو سپری شده‌است.

نوعی تربیع دایره ●

امروز همه می‌دانند، یا باید بدانند، که مسألهٔ باستانی تربیع دایره یعنی ساختن مربعی که مساحتش برابرمساحت دایرهٔ به‌شعاع واحد باشد با خطکش وپرگار غیرقابل‌حل‌است. نکته اینجاست که طول ضلع مربع مطلوب برابر عدد غیرجبری $\sqrt{\pi}$ است در حالی‌که طولهای قابل ترسیم با خطکش و پرگار، زیرمجموعهٔ خاصی از اعداد جبری هستند. منظور ازعدد جبری، عددی‌است که به‌صورت ریشهٔ یك معادلهٔ جبری با ضرایب عدد صحیح قابل بیان باشد. اخیراً ریاضیدان مجار میکلیش لاشکوویچ[3] موفق شده‌است امکان نوع دیگری ازتربیع دایره را ثابت کند. دراین‌روش، دایرهٔ توپر به‌تعدادی متناهی قطعه با اشکال بسیارپیچیده تجزیه می‌شود و این اجزاء مجدداً طوری درکنار یکدیگر قرارداده می‌شوندکه مربعی تشکیل می‌دهندکه مساحتش برابر مساحت دایرهٔ اولیه‌است. ممکن است دراینجا ذکر "که مساحتش برابر مساحت دایرهٔ اولیه است" غیرضروری به‌نظربرسد ولی در واقع چنین نیست وبرای دریافتن ظرافت این عبارت و نیز آگاهی از زمینهٔ کشف فوق‌الذکر باید به‌دههٔ ۱۹۲۰ برگشت.

در سال ۱۹۲۴ استفان باناخ و آلفرد تارسکی ثابت کردند که می‌توان کرهٔ توپر را به‌تعدادی متناهی زیرمجموعه تجزیه کرد و اجزاء را طوری به‌هم چسباند که دوکرهٔ توپر هریك با حجمی برابر با حجم کرهٔ اولیه پدید آید. این قضیهٔ شگفت‌آور با اصل بقای حجم‌درتناقض‌نیست زیرابعضی‌ازاجزاءِ تجزیه، مجموعه‌های به‌اصطلاح "اندازه‌ناپذیر"، به‌تعبیر نظریهٔ اندازه،هستند. در نظریهٔ اندازه، این‌حکم که‌اندازهٔ اجتماع چند مجموعهٔ مجزا برابرمجموع اندازه‌های آنهاست، فقط درحالتی‌که مجموعه‌ها اندازه‌پذیرباشند لزوماً برقراراست. مجموعه‌هایی که درکاربردهای ریاضیات وحتی معمولا در درون‌ریاضیات باآنها سروکار داریم اندازه‌پذیر هستند؛ مجموعه‌های اندازه‌ناپذیری که وجود آنها با تکیه براصل‌موضوع انتخاب ثابت می‌شود به‌روشهای عملی قابل ساختن‌نیستند. درسال ۱۹۲۵ باناخ‌ثابت کردکه درمورد طول‌ومساحت (یعنی‌اندازه‌های یك‌بعدی و دوبعدی) می‌توان به‌کلیهٔ مجموعه‌ها اندازه‌ای سازگار با طول و مساحت معمولی‌نسبت داد به‌طوری‌که حکم ذکرشده در بالا حتی در مورد مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر نیز برقرارباشد؛ ولی البته قضیهٔ باناخ-تارسکی نشان می‌دهدکه این امر در مورد حجم (اندازهٔ سه‌بعدی) و در واقع در ابعاد بالاتر، تعمیم‌پذیر نیست. حدوداً در همان سالها فون نویمان ریشهٔ این موضوع را با به‌کارگرفتن ساختمان گروه حرکات‌صلب درفضای‌اقلیدسی (انتقال، دوران، و انعکاس) کاملا روشن‌ساخت.

به‌این ترتیب، مسأله‌ای که درصفحهٔ اقلیدسی می‌توان مطرح ساخت (و تارسکی مطرح‌کرد) این بودکه اگر دوشکل دارای مساحت برابر باشند (مثلاً دایرهٔ به‌شعاع واحد و مربع به ضلع $\sqrt{\pi}$)، آیا می‌توان یکی را از دیگری با تجزیه و به‌هم چسباندن قطعات به‌دست آورد؟ در اینجا دیگرمحدودیت استفاده ازخطکش و پرگار مطرح نیست؛ تنها محدودیت، متناهی‌بودن تعداد قطعات است. این مسأله‌است‌که لاشکوویچ موفق به‌حل‌آن شده‌است. وی، تخمین می‌زندکه تعداد قطعات لازم در روش وی، ازمرتبهٔ 10^{50} است. به‌علاوه، بعضی قطعات تجزیه، اندازه‌ناپذیرند و در نتیجه شکلهای بسیارناهنجار و خارج از تصورهندسی دارند. اینکه آیا می‌توان همهٔ اجزاء را اندازه‌پذیر اختیارکرد هنوز یك مسألهٔ حل نشده‌است. قبلاً ثابت شده بودکه نمی‌توان اجزاء راطوری‌اختیار کردکه هریك محدود به‌یك خم پیوسته (خم ژوردان) باشد. و بالاخره، این نیز بایدگفته شودکه قضیهٔ لاشکوویچ منحصر به‌دایره نیست بلکه به‌جای دایره می‌توان هرشکل محدود به‌کناره‌ای‌قطعه‌قطعه هموار راکه قطعات کناری آن پاره‌خطها یاخمهایی باخمیدگی محدود به‌دو ثابت مثبت باشند، درنظرگرفت.

1. Kurosch
2. algebraic algebras of bounded degree
3. Miklós Laczkovich

● *Siam News* (5)22.

NASHR-I RYAZY

A Mathematics Journal

of

Iran University Press

Volume 2, Number 3, December 1989

Nashr-i Ryazy is published by Iran University Press, three times a year: April, August, and December. The main objectives of the Jouranl are to present:

- new advances in mathematics;
- cultural, philosophical, and historical aspects of mathematics, as well as its applications;
- educational problems of mathematics, specifically those concerning higher education in Iran.

Some of the articles in each issue are written by Iranian mathematicians, and some are translations of expository articles selected from foreign sources.

The annual subscription rates including air mail postage are: Middle East £17, Europe & Asia £19, North America & Far East £24.

To subscribe, please send your name, address, and a check to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehran 15134, Iran.

مرکز نشر دانشگاهی
منتشر کرده است