سخن سازی

سال ۲، شمارهٔ ۲، مرداد ۱۳۶۸

مرکز نشر دانشگاهی

نشر ریاضی

مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی

شمارهٔ ۸۵ خیابان پارك خیابان دکتر بهشتی، تهران ۱۵۱۳۴

نقل مطالب با ذکر مأخذ مجاز است

بهای هر شماره ۴۰۰ ریال
حق اشتراك سالانه برای داخل کشور ۱۲۰۰ ریال

وجه اشتراك به حساب شمارهٔ ۹۰۰۰۹ بانك ملی شعبهٔ خیابان پارك تهران به‌نام مرکز نشر دانشگاهی واریز شود.

نشر ریاضی از انتشارات ادواری مرکز نشر دانشگاهی است که هر چهار ماه یك بار منتشر می‌شود. هدفهای اصلی انتشار مجله عبارت است از

- معرّفی پیشرفتهای جدید ریاضیات؛
- معرّفی شاخه‌های جدید علوم ریاضی و همچنین مباحثی که مورد توّجه پژوهشگران است؛
- معرّفی جنبه‌های کاربردی، فرهنگی، فلسفی، و تاریخی ریاضیات؛
- معرّفی کارهای ریاضی پژوهان فارسی‌زبان و ایجاد ارتباط بین آنان؛
- طرح مسائل آموزشی ریاضیات، به‌ویژه مسائل مربوط به آموزش ریاضیات دانشگاهی در ایران.

نشر ریاضی از همکاری تمام علاقه‌مندان استقبال می‌کند. مقاله‌های ارسالی باید در چهارچوب هدفهای فوق و با سبکی مشابه با سبك مقاله‌های چاپ شده در *نشر ریاضی* باشد. به‌همکارانی که مایل‌اند مقاله‌ای را به فارسی برگردانند و برای درج به مجله بفرستند توصیه می‌شود ابتدا اصل مقاله را با ذکر منبع برای بررسی و تصویب ارسال دارند. ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود، و فرستادن اصل مقاله‌های ترجمه شده الزامی است. مقاله‌های ارسالی پس فرستاده نمی‌شود. هر مقاله‌ای مطابق ضوابط رایج داوری می‌شود. هیأت ویراستاران در رد، قبول، و حك و اصلاح مقالات آزاد است. ویرایش، نگارش، انتخاب واژه‌ها، و ضبط اسامی و اعلام مطابق ضوابط گروه ریاضی در مرکز نشر دانشگاهی انجام خواهد گرفت.

یادآوری

- متن مقاله روی یك طرف کاغذ، یك خط در میان، و با حاشیهٔ کافی ماشین، یا با خط خوانا نوشته شود.
- نحوهٔ نگارش، بخشبندی، فرمول‌نویسی، و شیوهٔ ارجاع به منابع حتی‌المقدور مطابق با مقاله‌های چاپ شدهٔ در *نشر ریاضی* باشد.
- فهرست معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در مقاله به‌کار می‌رود همراه با مقاله فرستاده شود.

نشر ریاضی

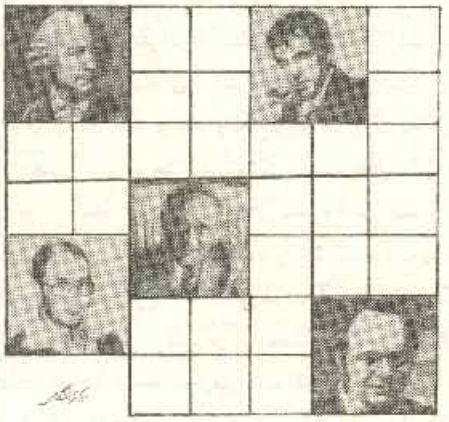
ISSN 1015-2857

سال ۲، شمارهٔ ۲، مرداد ۱۳۶۸

مدیر مسؤول: مهدی بهزاد

با همکاری لایتوترون مرکز نشر دانشگاهی
لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه پیام نور (آموزش از راه دور)

فهرست



روی جلد

بالا:
چپ، اویلر؛ راست، هاردی
وسط:
پولیا
پایین:
چپ، آرنولد؛ راست، کنوت
[مطالبی در بارهٔ این افراد یا به‌قلم آنها در این شماره آمده‌است.]

دانشجوی ریاضی

در این نکته تقریباً اتفاق نظر وجود دارد که هدف از ایجاد رشتهٔ ریاضی در دانشگاه، پرورش سه دسته از افراد است: اول، افرادی که می‌خواهند در آینده ریاضیدان بشوند؛ دوم، افرادی که قرار است به‌عنوان دانش‌آموختهٔ ریاضی نیازهای صنایع و مؤسسات گوناگون را به‌ریاضیات کاربردی رفع کنند؛ و سوم، افرادی که قرار است تعلیمات عمومی در ریاضیات ببینند و به‌خدمات فرهنگی و تدریس در دبیرستانها اشتغال ورزند.

دستهٔ اول، استادان و پژوهشگران ریاضی آیندهٔ کشور خواهند بود، افرادی که باید نسلهای بعدی ریاضیدانان ایران را آموزش دهند و نیز با پژوهش کردن و کشف قلمروهای نو، "تولید ملی" کشور ما را در زمینهٔ ریاضیات افزایش دهند. علی‌رغم کوششها و دستاوردهای تعدادی از ریاضیدانان ایرانی در سه دههٔ اخیر، میزان این تولید در مجموع ناچیز بوده است و ما تقریباً سهمی در عرضهٔ افکار و ایده‌های نو نداشته‌ایم. به‌نظر ما، تربیت افرادی که بتوانند در آینده پژوهشگرانی زبده و فعال باشند و در عرصهٔ علمی جهانی به‌اصطلاح حرفی برای گفتن داشته باشند، باید یکی از هدفهای اساسی نظام آموزش دانشگاهی باشد. توجیه چنین هدفی، الزاماً رفع نیازهای فوری جامعه نیست، بلکه فراتر از آن است: صحبت از نیاز روحی یك ملت به‌سرافرازیستن، به‌تقویت کلی بنیهٔ علمی و فرهنگی خود، و به‌فراهم آوردن زمینه‌ای اساسی است که در درازمدت برای هرگونه پیشرفت اصولی و اسلو بمند در علم و تکنولوژی ضرورت تام دارد. گاه شنیده می‌شود که بعضی افراد، و حتی مسؤولان، نسبت به‌فایدهٔ پژوهشهای ریاضی ابراز تردید می‌کنند. اگر در کشورهای پیشرفته می‌بینیم که فرضاً کمپانی بل که سهامدارانش سرمایه‌دارانی سودپرست‌اند، باعث و بانی نابترین تحقیقات نظری، مثلاً در نظریهٔ اعداد، می‌شود به این دلیل است که این گونه تحقیقات را از دیدگاه استراتژیك و در درازمدت، زمینه‌ساز اقتدار و تفوق علمی و مایهٔ افتخار خود و جامعه خود می‌داند. افتخاری که حتی کشورهای عقب‌ماندهٔ آسیا و افریقا هم در سالهای اخیر به‌امید کسب آن از درآمدهای ملی ناچیز خود مایه می‌گذارند. وانگهی، حتی در کشورهای پیشرفته هم پرداختن به‌کارهای علمی و دانشگاهی، گرچه زندگی آسوده‌ای را فراهم می‌کند، به‌هر حال چندان پولساز نیست و تلاش و تب و تاب و بازدهٔ فراوان در محیطهای علمی، ناشی از انگیزه‌هایی روحی است که در آن کشورها به حد اعلا تقویت می‌شود. مهمترین این انگیزه‌ها تلاش برای دستیابی به‌افقهای جدید و لذت ناب "کشف کردن" است که برای بسیاری از ذهنهای کنجکاو و عمیق، جالبتر از موفقیتهای مالی است؛ یعنی اگر بخواهیم محیط علمی زنده و پر جنب و جوشی داشته باشیم که سرشار از اندیشه‌ورزی و بحث و تبادل نظر باشد، باید موجبات لازم را برای رشد و بقای چنین انگیزه‌هایی فراهم کنیم، و گرنه استاد ما با بی میلی و از سرِ رفع تکلیف درسی را چندین سال تکرار می‌کند و دانشجوی ما هم بی هیچ اشتیاقی و فقط برای گرفتن نمره و مدرك درس می‌خواند.

دستهٔ دوم، افرادی هستند که باید برآورندهٔ نیازهای صنایع و مؤسسات گوناگون و انواع پروژه‌های فنی، کشاورزی، برنامه‌ریزی، و مالی به‌ریاضیات کاربردی باشند. یکی از پدیده‌های جالبی که در عصر حاضر بسیار بیشتر از گذشته به‌چشم می‌خورد، این است که گاه نیازهای تکنولوژی به‌ریاضی، از ریاضیات موجود جلو می‌افتد و به‌اصطلاح تکنولوژی به‌ریاضیات "سفارش کالا" می‌دهد. مثلاً یکی از دلایل پیشرفتهای چشمگیر دهه‌های اخیر در نظریهٔ اعداد، نظریهٔ کدگذاری، و... نیاز تکنولوژی پیشرفتهٔ نظامی به‌ابزارها و مدلهای ریاضی کاملاً جدید بوده است. در کشورهای رشد یافته، کمتر مؤسسهٔ بزرگ صنعتی یا مالی می‌توان یافت که از همکاری ریاضیدانان ارشد و برجسته‌ای برخوردار نباشد. البته، پیشرفتگی صنعت و تکنولوژی ایران درحدی نیست که دستاوردهای کاملاً اصیل و تازه‌ای را در سطح عالی ریاضیات کاربردی طلب کند و چه بسا در دو سه دههٔ آینده تکنولوژی ما حتی قادر به جذب ریاضیات موجود هم نباشد؛ با این حال، نیاز به‌فارغ‌التحصیلانی در سطوح گوناگون که بتوانند مدلها و ایده‌های کلی موجود را بر شرایط موضعی یك مؤسسه یا پروژهٔ خاص تطبیق کنند کاملاً محسوس است و در صورت توسعهٔ علمی و صنعتی کشور، محسوستر و مبرمتر خواهد شد.

سومین دسته، افرادی هستند که زمینه‌ای در ریاضیات و فرهنگ ریاضی

به‌دست می‌آورند و در آینده به خدماتی از قبیل خدمات فرهنگی می‌پردازند و یا در رشتهٔ دیگری به‌تحصیل ادامه می‌دهند. از میان این عده، تربیت دبیرانی شایسته که بتوانند نقش حساس خود را در آموزش صحیح ریاضی به‌دانش‌آموزان و استحکام پایهٔ ریاضیات کشور ایفا کنند، اهمیت ویژه‌ای دارد.

طبیعی است که باید طیفی از استعدادهای گوناگون را به این سه مسیر هدایت کرد و آنها را پرورش داد. به این منظور، باید موجباتی فراهم شود که افراد مستعد و قوی بیشتر به رشتهٔ ریاضی راه یابند. افت کیفی ریاضیات در دبیرستانها و سهمیه‌بندیهای مختلف (که مبتنی بر شایستگیهایی جدا از استعداد علمی است) و مخصوصاً کم جاذبه بودن رشتهٔ ریاضیات در جامعه، موانعی در راه رسیدن به این منظور ایجاد کرده‌اند. بسیاری از دانش‌آموزان مستعد و حتی بسیار علاقه‌مند به ریاضی، چون ریاضیات را رشتهٔ نان و آب‌داری نمی‌دانند جذب رشته‌های "پولساز" پزشکی و مهندسی می‌شوند. فشار شدید اقتصادی و مالی بر خانواده‌ها، که گاه تأمین مایحتاج اولیه و ضروری را برای آنها دشوار می‌سازد، فکر انتخاب رشته‌هایی را که تصور می‌رود زندگی شخص را تأمین کنند بسیار تقویت کرده و انتخاب رشته بر مبنای صرفِ علاقه را بیش از بیش غیر واقعبینانه جلوه می‌دهد. از طرف دیگر، رشد حیرت‌انگیز انواع مؤسسات آموزش عالی بدون وجود امکانات و ضوابط لازم، باعث شده که در اقصی نقاط کشور ــ شاید بزودی در هر شهر و شهرکی ــ مدرك پزشکی و مهندسی در اختیار مشتاقان بگذارند! در نتیجه، به‌تدریج دانش‌آموزان ضعیفی جذب رشتهٔ ریاضی خواهند شد.

این مشکل را تنها با اصلاح سیستم آموزشی نمی‌توان به‌طور کامل رفع کرد و مسؤولان کشور باید در برنامه‌ریزیهای کلی خود چاره‌ای برای آن بیندیشند. اگر کشور ما در گذشتهٔ دور می‌توانست ریاضیدانانی بپرورد که خود مبتکر ایده‌های نو بودند، به‌دلیل ارزش و اهمیتی است که جامعهٔ آن زمان برای کار این اشخاص قائل بود. امروز اگر چه ریاضیدان آینده می‌داند که در حد کاسب محله در آمدمالی نخواهد داشت ولی دست کم نظام جامعه باید به او اطمینان بدهد که حداقلِ نیازهای مادی‌اش تأمین خواهد بود و او خواهد توانست بدون آنکه زیر چرخ بیرحم گرانی و مشکلات مالی له شود، به‌کار فکری و علمی مورد علاقه‌اش بپردازد.

از لحاظ مقطعی، اقداماتی از قبیل برگزاری مسابقه‌های ریاضی و اعطای بورسها و جایزه‌ها همراه با تبلیغات مناسب، می‌تواند تا حدی جاذبهٔ ریاضی را درمیان جوانان افزایش دهد و به کشف استعدادها کمك کند. شرکت در المپیاد جهانی ریاضی و برگزاری مسابقه‌های مربوط به آن در ایران (که گویا قرار است در سطح دبستانها هم انجام شود) گام مثبتی است که باید با گامهای مشابهی دنبال شود.

برای آموزش بهتر دانشجویان، به‌صورتی که اهداف پیشگفته تا حد امکان برآورده شود، چه تدابیری باید اندیشید؟ در وهلهٔ اول، به‌نظر ما برنامه‌های درسی دانشگاهها باید از انعطاف کافی برخوردار باشد. یکنواختی زیاده از حد، بیش از آنکه مفید باشد مضر واقع می‌شود. هماهنگی باید محدود به‌حداقلها باشد. هر دانشگاهی باید بتواند بر اساس امکانات و استادان و طیف دانشجویان خود برنامهٔ مناسبی را تدوین و اجرا کند. یك چنین آزادی امکان رقابت سالم بین مؤسسات علمی و مقایسه و تصحیح برنامه‌های درسی مختلف را ــ بر اساس تجربه‌های مشخص و نه بحثهای نظری ــ فراهم می‌کند. در هر دانشگاه خاص هم ممکن است تنوع طیف دانشجویان تفاوتهایی را در برنامهٔ یك درس خاص ایجاب کند. واقعیت این است که برنامهٔ درسی فعلی از طرفی دانشجویان بسیار مستعد را چندان ارضا نمی‌کند و از طرف دیگر برای دانشجویان ضعیفتر سنگین است. اگر در دانشگاهی امکان کافی فراهم باشد چرا نباید درس خاصی را برای عده‌ای از دانشجویان در سطح بالاتر از معمول ارائه کرد؟ البته، تأمین کادر علمی شایسته پیش شرط اجرای موفق هر برنامهٔ درسی است.

گسترش امکانات کتابخانه‌ای و کامپیوتری، از اهم ضروریات است. در شمارهٔ پیشین نشر ریاضی در مقالهٔ "کتابخانه‌های ریاضی" به‌تفصیل از فقر کتابخانه‌های ریاضی دانشگاهها سخن گفتیم. وقتی در این کتابخانه‌ها تنها درصد ناچیزی از ضروریترین کتابهای دورهٔ کارشناسی یافت می‌شود، و تا زمانی که این کتابخانه‌ها به‌مفهوم امروزین کلمه به‌صورت سیستمهای اطلاع‌رسانی زنده و کارآمدی در نیامده‌اند، مشکل بتوان برنامهٔ آموزشی موفقی را اجرا کرد. امروز بسیاری از مباحث ریاضی در ارتباط با کامپیوتر مورد مطالعه قرار می‌گیرند و تعدادی از آنها هم اساساً در حوزهٔ نظریه‌های زیربنایی کامپیوتر قراردارند. بنا بر این، نه تنها برای دانشجویانی که علایق کاربردی دارند و می‌خواهند بعدها در پروژه‌ها و مؤسسات گوناگون کار کنند، بلکه به‌طور کلی برای هر دانشجوی ریاضی، امکان استفادهٔ گسترده از تسهیلات کامپیوتری بسیار لازم است.

برگزاری سمینارها و سخنرانیهای هفتگی و تشویق دانشجویان به‌شرکت در کنفرانسها و سمینارهای ریاضی که در کشور تشکیل می‌شود، در تقویت بنیهٔ علمی آنها مؤثر خواهد بود. اخیراً در کشورهای پیشرفته برنامه‌هایی برای مشارکت دانشجویان دورهٔ کارشناسی در کارهای پژوهشی به مرحلهٔ اجرا درآمده است. از طریق چنین برنامه‌هایی می‌توان دانشجویان نخبه را با کار پژوهش آشنا کرد و گام مؤثری در پرورش محققان آینده برداشت.

تشویق دانشجویان به‌برخی از فعالیتهای فوق برنامه در زمینهٔ فرهنگ ریاضی، مثلاً تهیه نشریات دانشجویی، کمك خواهد کرد که نسل آینده معلمان و مؤلفان و مترجمان ریاضی مهارت بیشتری در بیان مفاهیم ریاضی به‌زبان فارسی داشته باشد و کمبودی که در حال حاضر جامعهٔ ریاضی از لحاظ ریاضی نویس توانا دارد، تا حدودی بر طرف گردد.

امکان ایجاد دورهٔ کارشناسی ارشد پیوسته را باید بررسی کرد. چنین دوره‌ای هم می‌تواند جاذبهٔ بیشتری برای رشتهٔ ریاضی فراهم کند و هم پیوستگی و انسجام بیشتری در برنامهٔ تحصیلی و مطالعاتی دانشجو ایجاد خواهد کرد. همان طور که در سرمقالهٔ یکی از شماره‌های پیشین مجله (آذر ۱۳۶۷) گفتیم، برنامهٔ دورهٔ دکتری ریاضی در ایران حتی در بهترین حالت نمی‌تواند نیازها را کاملاً برطرف سازد و حتماً باید تعدادی از فارغ‌التحصیلان ممتاز برای ادامهٔ تحصیل به‌خارج از کشور اعزام شوند. این امر ضمناً می‌تواند در دانشجوی با استعداد این فکر را القا کند که راه برای پیشرفت و ادامهٔ مطالعات او باز است، و بر جاذبهٔ رشتهٔ ریاضی بیفزاید.

هیأت ویراستاران

کتابهای ریاضی دانشگاهی

گذشته، حال، آینده

در چند دههٔ اخیر، ریاضیدانان ایرانی به تجربه‌های گوناگونی در زمینهٔ انتشار مطالب درسی ریاضی در سطح دانشگاه دست زده‌اند، از جزوه‌ها و درسنامه‌هایی که به‌صورت پلی‌کپی تکثیر می‌شد یا دانشجویان سر کلاس می‌نوشتند تا کتابهای چاپی که رسماً "تألیفی" بودند ولی اکثراً تألیف واقعی نبودند، و از معدودی آثار تألیفی موفق نظیر نوشته‌های مرحوم مصاحب و درسنامه‌های خودآموز دانشگاه آزاد تا ترجمه‌های کمابیش دقیق کتابهای خارجی در مقیاس نسبتاً وسیع در دوران پس‌از انقلاب.

بازبینی دقیق این تجربه‌ها و ارزیابی نیازهای فعلی، برای تعیین خط‌مشی انتشارات ریاضی ضرورت‌دارد. نشر ریاضی برای‌اینکه فتح‌بابی دراین زمینه کرده باشد، میزگردی با شرکت سه‌نفر از دست‌اندرکاران ترجمه و انتشار کتابهای ریاضی دانشگاهی (آقایان غلامرضا برادران خسروشاهی، مهدی‌بهزاد، ومحمدقاسم وحیدی‌اصل) ویکی‌از صاحبنظران انتشارات علمی (آقای حسین معصومی همدانی) تشکیل داد که متن گفتگوی آنها را در زیر می‌خوانید.

نشر ریاضی: ابتدا خواهش می‌کنیم نظرتان را دربارهٔ وضع جزوه‌ها و کتابهای درسی ریاضی در قبل از انقلاب بفرمایید.

بهزاد: بنده در سال ۱۳۳۵ در دانشگاه تهران به تحصیل پرداختم. در آن زمان استادی داشتیم که سر کلاس فی‌البداهه کتاب ترجمه می‌کرد و کلمات قصار خود را دیکته می‌گفت. می‌توانید تصور کنید که چنین ترجمه‌ای تا چه حد می‌توانست قابل فهم و روان باشد. استاد دیگری پلی‌کپی توزیع می‌کرد. پلی‌کپی دستنویس، تهیه شده از روی استنسیل، ناخوانا، کثیف، و با جملات مغلق. استاد دیگری جزوهٔ کوچکی داشت که از روی آن دیکته می‌گفت و صرفاً شیوهٔ حل بعضی از معادلات دیفرانسیل خاص را به ما یاد می‌داد. وقتی از او دلیل می‌خواستیم می‌گفت همین برای شما کافی است. استادی هم در روز آغاز درس خود پشت میز نشست و پس‌از ذکر "بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم" با افتخار تمام گفت "نوزدهمین سال-دترمینان". این‌استاد که به‌ندرت گچ دست می‌گرفت به ما دیکته می‌گفت و جزوهٔ نوزدهمین سال او هیچ‌فرقی با جزوهٔ هیجدهمین سالش نداشت. استادانی هم داشتیم که در زمینهٔ خاص خود کتابی داشتند واز روی آن درس می‌دادند. این کتابها بیشتر به سبک کتابهای فرانسوی آن زمان تمرین و مثال بسیار کم داشتند، و به‌اصطلاح کتابهای درسی خوبی نبودند. در هر زمینه در تمام کشور بیش‌ازیك و گاه دوکتاب وجود نداشت. تخصص گرایی و به‌اصطلاح داشتن کرسی در حداعلا بود. بعدها در سال ۳۹ با درجهٔ کارشناسی دستیار استادی‌شدم. یکی از وظایفم همکاری با استاد برای ترجمهٔ کتابی در زمینهٔ هیئت بود. استاد متن فرانسه‌را ترجمه می‌کرد

و من آن را می‌نوشتم. روزی به‌جمله‌ای طولانی رسید. چند مرتبه آن را خواندولی از آن چیزی نفهمید. با حالتی عصبانی گفت "ولش کن - بنویس: پس بنابراین. . ." باز هم قابل تصور است که حاصل این کار چه جزوه و چه کتاب قابل فهمی می‌توانست باشد.

استادی در روز آغاز درس پشت میز نشست و پس از ذکر "بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم" با افتخار تمام گفت: "نوزدهمین سال‌دکترمینان"... جزوهٔ نوزدهمین سال این استاد هیچ فرقی با جزوهٔ سالهای قبل او نداشت.

از دانشگاه تهران که بگذریم در قبل از انقلاب کتابهای ریاضی دانشگاه شیراز کلاً به زبان انگلیسی بود. در دانشگاه شریف فعلی به‌جز چند جزوهٔ مربوط به‌درسهای عمومی، بقیهٔ کتابها انگلیسی بودند. وضع دانشگاههای دیگرهم خیلی بهتر نبود. مؤسسهٔ انتشارات دانشگاه تهران سالها یکه‌تاز چاپ و نشر کتابهای ریاضی بود. بخش خصوصی در این زمینه فعالیت چندانی نداشت. بعدها در اوایل دههٔ ۵۰ مرکز انتشارات دانشگاه صنعتی شریف به فعالیت پرداخت. اخیراً دربارهٔ کتابهای ریاضی چاپ دانشگاه تهران جنگ ریاضی گزارشی چاپ کرده است که از آقای دکتر خسروشاهی تقاضا می‌کنم خلاصهٔ آن‌را ذکر کنند.

از نظر واژه‌ها و اصطلاحات ریاضی وضع اسفناک بود. در فروردین‌ماه ۱۳۵۱ که سومین کنفرانس ریاضی کشور تشکیل شد به انجمن تازه‌تأسیس ریاضی ایران پیشنهاد کردم کمیته‌ای را مأمور بررسی اصطلاحات و استانده کردن آنها کند و در مجمع عمومی به عنوان نمونه اصطلاحی را ذکر کردم که تا آن‌زمان بیش از ۱۰ معادل فارسی داشت.

در آن دوران کتابها عمدتاً به‌اصطلاح "تألیف" می‌شدند ولی فی‌الواقع هریک ترجمهٔ ناقص و آزادی از یک کتاب خاص یا مونتاژی از ترجمهٔ ناقص بخشهایی از چند کتاب بود. ترجمه گویا کسر شأن محسوب می‌شد. کتاب قبل از چاپ داوری یا ویرایش نمی‌شد و اگر کسی آن‌را می‌دید صرفاً نظری کلی می‌داد. در اوایل تشکیل دانشگاه تهران نشر کتابهای ریاضی فارسی سره بود، که خود فهم مطلب را مشکل می‌کرد. ولی رفته‌رفته فارسی سره جای خود را به‌فارسی ناسرهٔ پر از کلمات و اصطلاحات خارجی داد. (به عنوان جملهٔ معترضه پیشنهاد می‌کنم دو یا سه کتاب از کتابهای آن دوران نقد و بررسی شوند.) خلاصه در آن دوران سیاست انتشاراتی خاصی وجود نداشت و مشکلات به‌طور موضعی توسط فرد حل و فصل می‌شد.

خسروشاهی: به‌نظر من می‌رسد که اغلب کتابهای ریاضی دانشگاهی در دوران قبل از انقلاب توسط "مؤسسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه تهران" انتشار یافته‌اند. نگاهی مجمل به این کتب نشان می‌دهد[1] که از سال ۱۳۲۵ (سال تأسیس مؤسسه) تا سال ۱۳۵۷، از تقریباً ۲۰۰۰ جلد کتاب منتشره از طرف این مؤسسه تعداد ۶۵ جلد به‌ریاضیات اختصاص داشته است، (یعنی در حدود ۳٫۳ درصد کل کتب منتشره) و این یعنی به‌طور متوسط دو کتاب در سال و بعضی سالها نیز اصلاً کتابی منتشر نشده است. از این ۶۵ جلد، فقط ۵ جلد کتاب ترجمه‌ای بوده است و بقیه به‌عنوان تألیف عرضه شده‌اند. اولین کتاب ترجمه‌ای در سال ۱۳۵۲ به بازار عرضه شده‌است. و اولین کتاب ریاضی مؤسسه در سال ۱۳۲۶ به‌زبان فرانسه و باعنوان "حوزهٔ فضاهای ریمانی" تألیف دکتر محسن هشترودی که گویا تز دکتری استاد مرحوم است، می‌باشد.

دربارهٔ این کتابها کلاً می‌توان گفت که واژگان به‌کار رفته در آنها اغلب نامأنوس بوده و از هماهنگی برخوردار نیست؛ تقریباً هیچ‌یک از این کتابها ویرایش نشده‌اند؛ در انتشار آنها تناسبی بین شاخه‌های مختلف ریاضی مراعات نشده است؛ اغلب این کتابها گردآورده‌ای از ترجمهٔ قطعاتی از کتب مختلف است؛ اختصاص اولین کتاب مؤسسه به یک موضوع تخصصی آن‌هم به‌زبان فرانسه خود حاکی از آن است که ناشر به دنبال انتشار متون ریاضی مورد استفادهٔ دانشجویان نبوده بلکه برای کسب پرستیژ از نام مؤلف بهره جسته است وکاری به‌اینکه این کتاب به چه دردی می‌خورد، نداشته است؛ به‌طور کلی با نگاهی به‌این کتابها وکارکرد مؤسسه به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که اولاً در انتشارات دانشگاه تهران هیچگونه سیاست انتشاراتی درکار نبوده است. ثانیاً روند غالب "تألیف" بوده است تا ترجمه یا شقوق دیگر کتاب‌نویسی. ثالثاً دقت و امانت‌داری اغلب در این تألیفات مراعات نشده است. رابعاً در میان این ۶۵ کتاب، به‌استثنای کتاب کاشانی‌نامه (که آن‌هم خود استثنایی است) به هیچ کتاب جنب‌درسی بر نمی‌خوریم. جامعهٔ ریاضی آن روزها اصلاً کاری به‌کار نشر و پخش و اشاعهٔ ریاضیات نداشته‌است. بلکه اغلب کتابها به‌منظور کسب پرستیژ دانشگاهی و فراهم کردن درسنامه‌های چاپی منتشر شده‌اند. روزی مرا به مؤسسه انتشارات خواستند و گفتند راجع به‌کتابی نظر دهم. گفتم که اولاً من به موضوع این کتاب وارد نیستم و ثانیاً درچند دقیقه نمی‌شود دربارهٔ کتابی نظر داد. گفتند آقا سخت نگیر، چند سطر این‌ور و آن ور آن را بخوان و نظر مثبتی بده. در هر صورت این کتاب چاپ خواهد شد. (البته این داستانی است مربوط به زمانهای قدیم!) بهتر است فعلاً به همین بسنده کنم.

در آن دوران کتابها عمدتاً به‌اصطلاح "تألیف" می‌شدند ولی فی‌الواقع هریک از این تألیفها ترجمهٔ ناقص و آزادی از یک کتاب خاص یا مونتاژی از ترجمهٔ ناقص بخشهایی از چندکتاب بود.

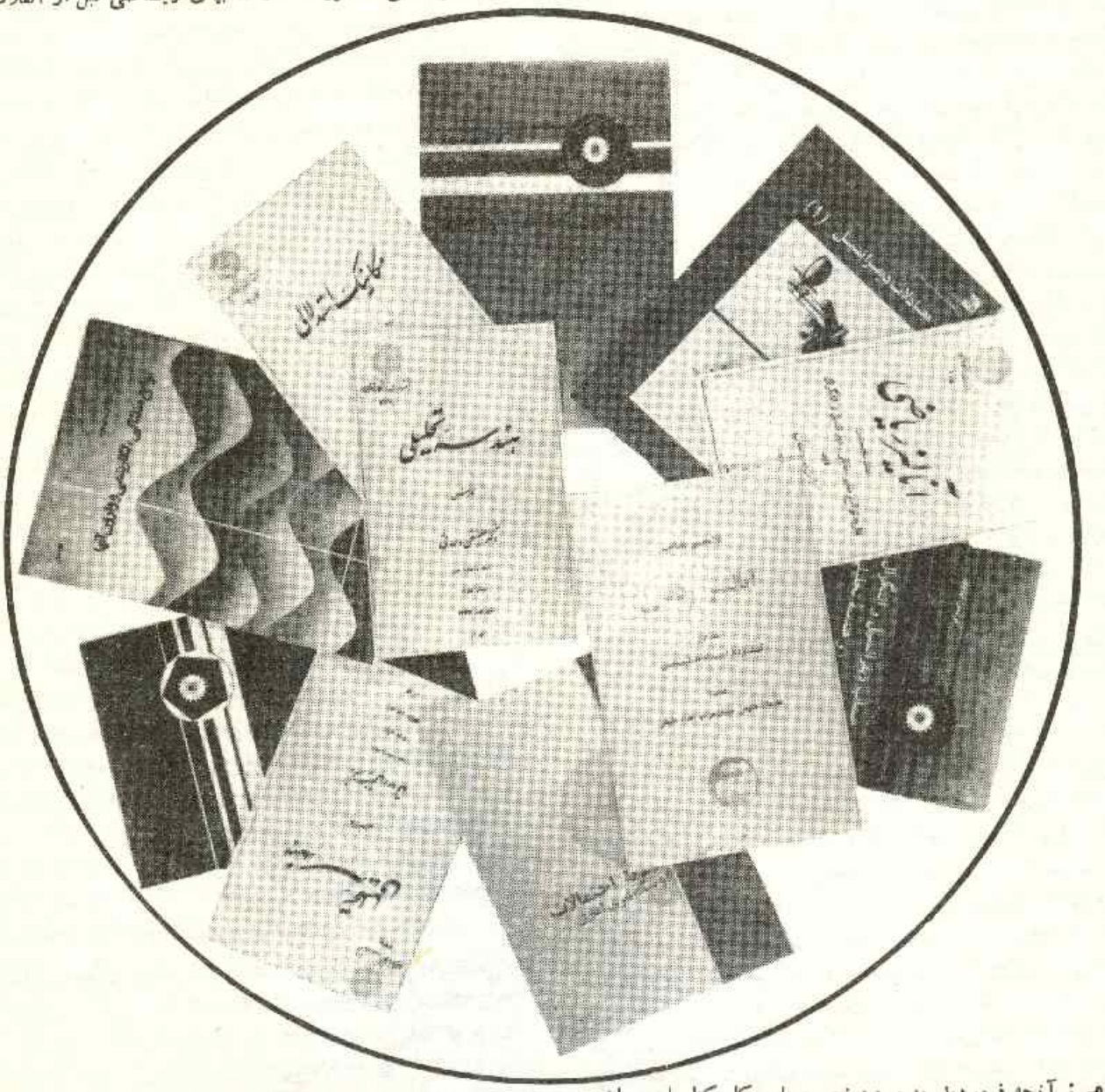
وحیدی: تصور من‌هم همین‌است که قبل از انقلاب سیاست اصولی و مشخصی درمورد ترجمه و تألیف نداشته‌ایم و به‌طور کلی صفات بارز انتشارات قبل از انقلاب را می‌توان در کمی تعداد کتابهای ریاضی، متناسب نبودن کتابهای منتشر شده با نیازهای روز و نبودن سیستم ویراستاری و تصحیح کتب دانست. بیشتر کتابهای ریاضی قبل از انقلاب به‌وسیلهٔ دانشگاه‌تهران منتشر شده‌است. در این‌دوره هراستادی بسته به‌تمایل و تخصص خود و بدون‌توجه به‌برنامه‌های درسی، کتابی را انتخاب و ترجمه و یا به اصطلاح تألیف می‌کرد. کتابها ویرایش نمی‌شدند و حتی اغلاط چاپی کتاب هم گرفته‌نمی‌شد و چه‌بسا در اغلب موارد مترجم یا مؤلف کتاب حتی یک‌بار هم نمونه‌های چاپی را نمی‌خواند. اینها مسائل و مشکلاتی‌هستندکه می‌توان آنها را برجسته کرد ولی مسأله‌ای که بیشتر مورد نظر من هست، این است که در بی‌سیاستی انتشاراتی قبل از انقلاب، مفهوم تألیف به شدت لوث شده است. بیشتر کتابهایی که‌عنوان تألیف‌دارند ترجمهٔ ناقص و ابتری از یک کتاب شناخته‌شدهٔ خارجی‌هستند و به‌طوری که آقای دکتر بهزاد اشاره کردند، "مؤلف" یا مترجم کتاب، هرجا که ضمن ترجمه به‌مشکلی برخورد می‌کرد، آن قسمت را حذف یا سرهم‌بندی می‌کرد. درمقدمهٔ یکی از این "تألیفات" دانشگاه تهران، "مؤلف" می‌نویسد که ازمدتها

---

۱. بهزاد منوچهریان، "نظری اجمالی برکتابهای ریاضی منتشر شدهٔ دانشگاه تهران"، جنگ ریاضی دانشجو، ۲، ۱ (۱۳۶۷).

پیش دنبال کتاب مناسبی برای عنوان موردنظرش بوده و چون به‌فلان کتاب خارجی که نام ومشخصاتش‌را در مقدمه ذکر می کند، برخورده آن‌را برای ترجمه برگزیده‌است، مع‌هذا روی جلد کتاب نام خودرا به عنوان مؤلف ذکر می کند! بنابراین بجاست که در این صحبتها به جایگاه تألیف هم اشاره‌ای شود و مشخص شود که منظور واقعی از تألیف چیست. همچنین باید روی سایر مشکلات بحث شود تا ببینیم که آیا همهٔ این مشکلات از بین‌رفته است یا خیر و درصورتی که بعضی از این مشکلات هنوز موجود باشند باید دیدکه چگونه می‌توان آنها را برطرف کرد.

بوده‌اند. به‌دپارتمانهای‌ریاضی‌هم برخلاف دپارتمانهایی که‌وجودشان به‌خودی‌خود یك‌وجهی داشت، مثل پزشکی وحقوق، توجهی نمی‌شد. بگذریم از اینکه آن دپارتمانها هم آش دهن‌سوزی‌نبودند. نکتهٔ دیگر اینکه‌کتاب نوشتن غیرازمعلم‌بودن است، معلوم نیست که هرمعلم‌خوبی کتاب نویس خوبی باشد، به‌خصوص در دروس‌هرچه به‌طرف مطالب عمیقتر می آییم این مشکل جدیتر می‌شود، یعنی شاید یك نفرکتابی را درسطوح بالای ریاضی‌خیلی‌راحتتربتواند بنویسد تا کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال خوبی که تکرارکتابهای خوب موجود نباشد. بنابراین خیلی از نویسندگان کتابهای ریاضی قبل از انقلاب واقعاً



معصومی: آنچه فرمودید در مورد خصوصیات کلی کتابهای ریاضی قبل از انقلاب درمجموع درست است، منتهی دوتا نکته است که باید به‌آن توجه‌کرد، یکی اینکه چرا این وضع پیش‌آمد و دیگراینکه آیا این قاعده استثنایی هم داشت یا نداشت. چون من فکر می کنم که آن جریان درست وسالمی که درنشرکتاب به‌طورکلی و درموردکتابهای ریاضی به‌نحواخص بعد از انقلاب پیش‌آمد، دنبالهٔ جریانی بودکه قبل از انقلاب وجود داشت. درمورد بدی وضع کتابهای ریاضی در قبل از انقلاب یکی از دلایلش این بودکه واقعاً در ایران به‌علوم پایه توجهی‌نمی‌شد و دروس ریاضی‌غالباً دروس‌معلم‌پرور یاسرویس‌دهنده

نویسنده نبودند، مترجم هم نبودند، بنابراین محصول کارشان یك‌چنین چیزهایی شده است. سدهم به نظرمن از وقتی شکسته شد که کسانی وارد این‌کار شدند که غیر از ریاضیدان بودن خصوصیات دیگری هم داشتند، مثل‌مرحوم دکتر مصاحب که چاپ کتابهایش‌شروع تحول‌چاپ کتابهای ریاضی است در ایران، و حتی می‌توان گفت سر آغاز تحولی است درتألیف کتابهای ریاضی. ایشان نویسنده بود، یعنی علاقه به‌چیز نوشتن داشت، و می توانست خوب چیز بنویسد. به‌زبان فارسی علاقه داشت، فقط ریاضیدانی دربین ریاضیدانها نبود. دیگرانی‌هم که‌کمك کردند به‌این‌جریانات، به‌این‌دلیل بودکه به‌تألیف کتاب فقط به‌چشم اینکه

درسی داریم و متنی هم برای این درس لازم داریم نگاه نمی کردند، بلکه برای کتاب هویت جداگانه‌ای قائل بودند. نمونهٔ دومی که می‌توانم اشاره کنم تاحدودی کتابهای ریاضیی است که انتشارات دانشگاه صنعتی قبل از انقلاب می‌خواست دربیاورد، و درست است که بنا بود از این کتابها استفادهٔ آموزشی هم بشود ولی فقط قصد این نبود که کتابی درست بشود که نیاز کلاس معینی را که شخص معینی درس می‌داد برآورد. پس دوعامل باعث شد که در تألیف و ترجمهٔ کتابهای ریاضی تحولی ایجاد شود، یکی اینکه کسانی وارد کار شدند که تا حدودی درک کردند که برای مترجم یا مؤلف بودن تخصص در موضوع کافی نیست و این خصوصیات دیگر، اگر در کسی وجود نداشت باید از طریق ویرایش کمبود آن‌را جبران کرد، ثانیاً مؤسساتی پیدا شدند که به کتاب به‌چشم کتاب نگاه کردند نه به‌عنوان وسیلهٔ برآوردن نیاز یك کلاس معین برای یك ترم خاص یا تا آخرعمر یك‌مدرس. تجربهٔ دیگری که وجود داشت تجربهٔ دانشگاه آزاد سابق بود؛ در آنجا چون نوع خاصی از

بالاخره مردم [ازطریق کتابهای مرحوم مصاحب] دیدندکه ریاضیات مقدماتی دارد، مؤخراتی دارد، و مقارناتی‌دارد ودرآن به‌جز فرض و حکم و برهان و یك مشت فرمول چیزهای دیگری هم هست.

آموزش درمد نظر بود تشخیص داده شد که کتابهای موجود طبعاً نکافو نمی کند، و برای رفع نیاز باید کتابهایی تألیف شود. شاید اول بار مفهوم ویرایش کتابهای تألیفی دانشگاهی درزمینهٔ ریاضی درآنجا پاگرفت.

خسروشاهی: فکر می کنم کتاب مدخل منطق صورت تألیف دکتر غلامحسین مصاحب (۱۳۳۴) کتابی است بی‌اندازه دقیق وبا ضوابط آکادمیك تدوین و تألیف شده است. چنین کتاب تألیفی در ۳۵ سال انتشارات دانشگاهی تقریباً استثنایی برقاعده و منحصر به‌فرد است. واژگان، نحوهٔ ارجاع، و نثر کتاب ستودنی و ماندگار است.

بهزاد: مرحوم مصاحب چندکتاب دیگرهم تألیف کرده است.

وحیدی: ایشان علاوه بر کتاب مدخل منطق صورت، کتابهای ریاضی دیگری‌هم داشته و اغلب آنها درسالهای پیش‌از انقلاب منتشرشده‌اند. دراین کتابها ضوابط کتاب‌نویسی به‌دقت رعایت شده‌اند. یکی از این کتابها، کتاب آنالیز ریاضی است که بعد از انقلاب تجدید چاپ شده و الان هم به‌عنوان کتاب درسی در دروس‌مبانی ریاضیات مورداستفاده

صفات بارز انتشارات قبل از انقلاب را می‌توان کمی تعداد کتابهای ریاضی، متناسب نبودن کتابهای منتشر شده با نیازهای روز و نبودن سیستم ویراستاری و تصحیح‌کتب دانست.

قرارمی گیرد. دورهٔ کتابهای تئوری اعداد را هم داریم که درسال ۶۳ برندهٔ جایزهٔ بهترین کتاب سال‌شد. دوجلد مقدمهٔ کتاب پیش‌از انقلاب منتشرشده‌اند وسه جلدبعدی پس از انقلاب. علاوه‌برایشان، نویسندگان دیگری هم وجود داشته‌اندکه در کارهایشان ضوابط دقیقی را اعمال کرده‌اند. مثلاً آقای ابوالقاسم قربانی از این جمله‌اند. با همهٔ این احوال، اینها استثناآتی برقاعده‌اند و قاعدهٔ معمول این بوده‌است که به‌تألیف‌وترجمهٔ کتاب‌ریاضی‌خوب توجه نمی‌شده و ضوابط مشخصی درنظرنبوده است.

معصومی: دلیل اینکه توجه نمی‌شده این‌بوده‌که ترجمه وتألیف دوسه منظورداشته، یکی‌ارتقا گرفتن که اگرتألیف‌می‌بودظاهراً بیشتردرارتقاء تأثیر داشت؛ یکی‌از دلایلی که اشخاص باید ترجمه می کردند و در مقدمه‌اش می‌نوشتند ما ترجمه کردیم ولی روی جلد می‌نوشتند تألیف، این بودکه هیأت مسؤول ارتقاء روی جلد را می‌دید و آن نمره‌های کاذب‌را به‌نویسنده می‌داد. دلیل دیگرش‌را قبلاً عرض کردم: به‌کتاب فقط به‌عنوان یك وسیلهٔ کمك درسی توجه می‌شد.

دو عامل باعث شدکه در تألیف و ترجمهٔ‌کتابهای ریاضی تحولی‌ایجاد شود، یکی اینکه‌کسانی واردکار شدندکه غیرازریاضیدان بودن خصوصیات دیگری هم داشتند، یعنی علاقه به چیز نوشتن و استعداد نویسندگی داشتند، و دوم‌اینکه مؤسساتی پیدا شدندکه به‌کتاب‌به‌چشم کتاب نگاه‌کردند نه به‌عنوان وسیلهٔ برآوردن نیاز یك‌کلاس معین برای یك ترم خاص.

اما این قضیهٔ استثناها، من فکر نمی کنم زیاد استثنا باشند، به‌این معنی که به‌کلی‌بی‌تأثیرباشند. این‌استثناها بعدها الگوقرار گرفتند. مثلاً همین کتاب توماس که الان کتاب استاندارد ریاضی است قبل از انقلاب ترجمه‌شده و فقط انتشارش بعداز انقلاب بوده. کتابهای دکتر مصاحب هم زبانی برای ریاضیات درست کرد و این مسأله منحصر به‌اصطلاحهای ریاضی‌نبود. اتفاقاً خیلی‌از اصطلاحهای دکتر مصاحب با ذوق این زمانه نمی‌خواند ولی زبان کلی ریاضی را می‌توان گفت که دکتر مصاحب در ساخته‌شدنش خیلی سهم داشته است. این زبانی است که اشخاص دیگر بعدها به‌طور مکانیکی از آن استفاده کردند، یعنی بسیاری از قالبهای ساخته‌شده را گرفتند و به‌کار بردند. البته درمورد کتابهای دکتر مصاحب آنکه بیشتر تأثیر داشته مدخل منطق صورت نیست. این کتاب در واقع دیده نشد، چون به‌طور کلی در جامعهٔ علمی ایران زمینه‌اش خیلی تخصصی بود. ولی کتاب دوم ایشان یعنی آنالیز ریاضی واقعاً مورد توجه‌قرار گرفت. اصلاً حتی از لحاظ زیبایی‌ظاهری این کتاب در عالم‌نشرکتاب در ایران یك حادثه است. گرچه شاید به درد تدریس نخورد (من در این مورد صلاحیت ندارم، اگر اشتباه می گویم لطفاً تذکر بدهید)، ولی بالاخره مردم دیدندکه کتابی‌ریاضی چاپ شده که‌در آن به‌جزفرض‌و حکم وبرهان‌و یك‌مشت فرمول چیزهای‌دیگری هم‌هست، دیدندکه ریاضیات مقدماتی دارد، مؤخراتی‌دارد، و مقارناتی‌دارد. درواقع‌اولین‌کسی که نشان‌داد ریاضیات با دترمینان شروع نمی‌شود، اقلاً در عالم کتابهای تألیفی، دکتر مصاحب بود. یکی از دلایل اینکه بعدها بیشتر به ترجمه روی آوردند همین بود. یعنی دیدند که نوشتن این نوع مطلب غیرصوری ریاضی سخت است ولی کتابهای خارجی خیلی‌هاشان این مطالب را دارند، این بودکه می‌رفتند ترجمه می کردند.

از مشخصات دورهٔ بعدازانقلاب یکی افزایش تعدادکتابهاست و دیگر اینکه متنهای درسی معروف ریاضی زیاد ترجمه و چاپ شده، و یکی دیگرهم کیفیت‌کتابهاست‌که در مجموع بهتر شده.

خسروشاهی: فقط چندکلمهٔ دیگر راجع به‌مرحوم مصاحب عرض کنم که من‌فکر می کنم ایشان جزء جریان‌اصلی ریاضیدانهای عصرخودش نبوده است. مصاحب یك ادیب بوده و کلاً یك عضو خیلی تیپیك جامعهٔ ریاضی نبوده است.

معصومی: در میان ریاضیدانان کسانی داشتیم که از ایشان ادیب‌تر بودند، حتی دیوان شعر هم داشتند.

نشر ریاضی: مثل اینکه حالا می‌توانیم وارد دورهٔ بعد از انقلاب بشویم و بعد ببینیم وضع فعلی چطور است و چه پیشنهادهایی می‌توان داد.

معصومی: مجموع حرفهامان ظاهراً این شد که اوضاع قبل از انقلاب خیلی خوب نبوده. از مشخصات دورهٔ بعد از انقلاب یکی افزایش تعداد کتابهاست دیگر اینکه کتابهای با اسم‌ورسم، متنهای درسی معروف ریاضی، زیاد ترجمه و چاپ شده یعنی کتابهایی که قبلاً بعضیها آرزو داشتند یك وقتی ترجمهٔ آنها را به زبان فارسی ببینند. یکی دیگر هم کیفیت کتابهاست که در مجموع بهترشده و این‌را از روی عکس‌العمل خوانندگان و دانشجویان می‌توان فهمید. عاملی که شاید این جریان را تشدید کرد تعطیلی دانشگاهها بود و فراغتی که عده‌ای از اساتید پیدا کردند و تشکیل شدن "کمیتهٔ تألیف و ترجمه" و بعداً هم بیرون آمدن "مرکز نشر" از دل آن کمیته. در بین پرسشنامه‌هایی که به آن کمیته رسیده بود، عدهٔ زیادی از اساتید پیشنهاد کرده بودند وقتشان را در تعطیلی دانشگاه به تألیف یا ترجمه بگذرانند. تعداد تألیفها در آن میان زیاد بود، ترجمه هم کم نبود. در بررسی اینها معلوم شد که خیلی از این پیشنهادهایی که‌شده چندان جدی نیست و واقعاً غالب آن آدمها قصد ترجمه‌یا تألیف کتاب معینی راکه در پرسشنامه‌نوشته‌اند ندارند. به‌تدریج این‌فکر پیدا شد که از این فرصت استفاده بشود و یك مقدار کتابهای درست و حسابی‌تر از بین اینها غربال بشود و چاپ و منتشر بشود. مشکل این‌بود که با کتابهای‌تألیفی، یعنی با طرحهایی که به‌عنوان تألیف پیشنهاد شده بود، چه‌کار باید کرد. اینجا ترس از تکرار تجربهٔ قبلی وجود داشت. یعنی اینکه کسانی کتابهایی راترجمه‌کنند یا از یکی دو منبع تلفیق کنند و اسمش را تألیف بگذارند. از همان اوایل در کمیتهٔ تألیف وترجمه‌فکر ویرایش پیداشده‌بود و طبعاً ویرایش درمورد تألیفها مشکلتر بود. بعد این‌فکر پیش آمد که ما به چه دلیل می‌خواهیم تألیف بکنیم و با چه بضاعتی. یعنی آیا ما آدمهایی که شرایط تألیف را احراز کرده باشند داریم یا نه. ما چه توجیهی داریم که بر خیل کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال دنیا یك کتاب جدید اضافه کنیم؟ بخصوص که کتابهای ریاضی در هرقدمش اشکالات منطقی پیش می‌آید، اشتباه در استدلال پیش می‌آید، وهمهٔ اینها مسائلی است که گرفتاری ایجاد می‌کند، چه برای نویسنده و چه برای ویراستار. حتی یکی از گروهها ضوابطی برای تألیف تدوین کرد که عملاً ضوابط تألیف نکردن بود، چون با اینکه به نظر می‌آمد حداقل ضوابط است ولی آن‌قدر دشوار بود که کمتر کتابی از صافی آن رد می‌شد. البته کتاب تألیفی حاضر و آماده‌ای هم وجود نداشت، و فقط طرحهایی داده بودند. به‌هرحال تصمیم گرفته شد که کتابها بانیازهای دانشجویان سنجیده‌شود، اول از کتابهای عمومی‌ترشروع بشود و کتابهایی که خیلی پرت یا جنبی است کنار گذاشته بشود. الان هم ازاین کتابهایی که منتشرشده پیداست که تاحدودی این‌منظورعملی‌شده است. اما تجربه‌ای که پشت این کار بود مقداری تجربهٔ دانشگاه آزاد و دانشگاه صنعتی بود، ومهمترین خدمت مرکز نشر این بود که نگذاشت آن سنت نیکو قطع بشود، بلکه آن‌را ادامه‌داد و فکر می‌کنم همه قبول داشته باشند که آن‌را بهترهم کرده است. منتهی این قضیه ظاهراً جواب خوبی بود به‌یك نیاز اجتماعی، یعنی فقط این نبود که مرکز نشر کتابهای خوبی چاپ کند و بعد در انبار خاك بخورد، بلکه به‌تدریج معلوم شد که دانشجویان هم کتاب‌خوان‌ترشده‌اند. یعنی زمان دانشجویی ماها هم کتاب بود ولی خیلیها راغب‌تر بودند جزوهٔ درسی را بخوانند، چون فرهنگ کتاب‌خوانی و یا استفاده از کتاب در بین بچه‌ها چندان وجود نداشت، ولی گویا در این فاصله این فرهنگ تا حدود زیادی به‌وجود آمده‌است. همین‌شد که دستگاههای دیگر هم این نیاز را حس کردند، یعنی الان می‌توان گفت که خوشبختانه مرکز نشر تنها ناشر کتابهای علمی دانشگاهی نیست، بلکه دستگاههای دیگر هم، از دولتی ونیمه دولتی وخصوصی، این‌کار را می‌کنند. اما خطر این است که به‌دلیل آسان‌نمایی ترجمهٔ کتابهای‌علمی، و به‌خصوص ریاضیات که شاید آمیختگی‌اش با مطالب دیگر از همهٔ رشته‌ها کمتر باشد، این تصور به‌وجود بیاید که ترجمه‌کار راحتی است و بنابراین یك عده از استاد و دانشجو بدون داشتن‌مقدمات لازم به این‌کار کشیده شوند. این نقطهٔ مقابل خطر قبلی یعنی مرحلهٔ تألیف است. چون آن‌زمانها شخص یك چیزی می‌نوشت، خیلی وقتها هم به صرافت طبع می‌نوشت، بدون مأخذ هم می‌نوشت. شاید مطلبی هم که می‌نوشت غلط بود، ولی بیشتر وقتها مفهوم بود یعنی کتابها عموماً پراشتباه بود ولی نسبتاً فارسی‌شان متعارف و مفهوم بود. الان به‌دلیل یك نوع تلقی مکانیکی ازکار ترجمه به‌خصوص ترجمهٔ ریاضیات روز بروز تعداد ترجمه‌های "دقیق" اما نامفهوم زیاد می‌شود. این مشکل الان ما است که انسان حس می‌کند با همهٔ بدیهایی که از تألیف می‌گوییم و با همهٔ احترازی که از آن می‌کنیم شاید چارهٔ این‌مشکل این‌باشد که یك کسانی دوباره دست‌به‌کار تألیف بزنند، یعنی جرأت بکنند مطالبی‌راکه معمولاً از زبان دیگران ترجمه می‌کنند از زبان خودشان و به‌زبان خودشان بنویسند.

قاطبهٔ ریاضیدانان ایرانی نه‌مؤلف‌اند نه‌مترجم... یکی‌از بی‌سیاستی‌ها [بعدازانقلاب] این بودکه همهٔ استادان را وادار به‌ترجمه کردند... یکی دیگر از موارد بی‌سیاستی، عدم توجه به‌مسألهٔ تربیت ویراستار بوده است.

بهزاد: نکات آموزنده‌ای که فرمودند عمدتاً در ارتباط با کل فعالیتهای مرکز در بدو تأسیس بود. در مورد خاص گروه ریاضی، واقعیت امر این است که با آغاز انقلاب فرهنگی و بسته‌شدن دانشگاهها اعضای هیأت علمی گروههای ریاضی، آمار و کامپیوتر مجبورشدند برای گرفتن حقوق از مرکز نشر که امکانات دانشگاهها را نیز در اختیار گرفته بود، با پرکردن پرسشنامه وتعیین‌اولویت، اجازه بگیرند کتاب ترجمه کنند. تعداد انگشت‌شماری هم به‌تألیف تمایل نشان دادند. با تصویب کمیته‌های کار ترجمه به درخواست کنندگان واگذارشد. کسانی که به ترجمه پرداختند، اکثراً نه به‌موضوع تسلط داشتند، نه زبان مبدأ را می‌دانستند و نه زبان فارسی را؛ و الزاماً برای امرار معاش مشغول سیاه‌کردن کاغذ شدند. آخر هرکس که خواندن و نوشتن می‌داند که به درد ترجمه و کتاب نوشتن نمی‌خورد. در دوران بسته‌بودن دانشگاهها حدود ۳۶۰ کتاب به گروه تحویل شد. تعداد کتابهای تألیفی از ۱۰ تجاوز نمی‌کرد. مسألهٔ ویرایش جدی گرفته شد ولی ویراستار مجرب کم بود. صاحبان اثرگاه با ویراستاران کلنجارمی‌رفتند. متن‌اصلی کتابها هنگام ترجمه چند سالی کهنه بود و بر عمر آنها به سرعت افزوده می‌شد. با بازشدن دانشگاهها تجربه‌نشان‌داد که گروه نمی‌تواند در هر سال به‌طور متوسط بیش‌از ۱۵ کتاب ویرایش کند. بخش تولید مرکز هم‌نمی‌توانست در هرسال بیش از ۱۰ کتاب گروه را به‌چاپ برساند. لذا گروه مجبور شد خانه‌تکانی کند. براساس مصوبات اولیهٔ ستاد (بعداً شورای) انقلاب فرهنگی برای هریك از چند درس عمومی، اصلی و فرعی از بین کتابهای ترجمه یا تألیف شده کتابهایی انتخاب شد، و در دستور کار قرار گرفت. اینك بیش‌از چهل جلد از آنها چاپ و منتشر شده، حدود ۱۵ جلد در مراحل مختلف حروفچینی و چاپ، و چند جلد در دست ویرایش‌است. بقیه‌هم جزوکتابهای "واگذاری" قلمداد شده‌اند. از بین کتابهای منتشر شده تنها یکی تألیفی است که به‌قول ویراستار آن، کاش نبود.

از خصیصه‌های بارز این دوره این است که در اوایل، کار نشر کتابهای ریاضی عمدتاً در دست مرکز نشر بود. ولی در این اواخر یك نوع هرج‌ومرج به‌وجود آمده‌است. عده‌ای بدون‌داشتن صلاحیت و امکانات کافی "بچاپ-بفروش" شده‌اند. و با اینکه از کاغذ و فیلم و زینك به نرخ رسمی استفاده می‌کنند محصول آنها گاه از بازار سیاه سردر می‌آورد.

خسروشاهی: بعد ازانقلاب، برخلاف قبل ازانقلاب، غالب کتابهای منتشره کتابهای ترجمه‌ای بوده‌است، وکتابها اغلب ویرایش شده‌اند و تن دادن مترجم به‌کارویرایش به صورت امررایجی درآمده است. لکن آن بی سیاستی که قبل ازانقلاب درکارنشرکتابهای ریاضی وجود داشته بعد از انقلاب نیزتداوم یافته است؛ مثلاً مرکزنشردانشگاهی که بزرگترین ناشرکتب دانشگاهی درحال حاضراست، تا لحظهٔ حاضرهرگز سیاستهای انتشاراتی خود را درزمینه‌های مختلف علمی اعلام نکرده‌است. مثلاً مرکزنشرمی‌تواند اعلام کندکه درچند سال آینده x درصدکتابهایش درزمینهٔ درسی ریاضی و y درصدآن جنب درسی خواهد بود، یا درفلان شاخه‌های ریاضی کتب ترجمه‌ای یا تألیفی می‌پذیرد. شماها که هرسه دست‌اندرکارمرکزبوده یا هستید، اگراطلاعی ازچنین برنامه یا سیاستهای انتشاراتی مرکزنشردارید، لطفاً گفتهٔ مرا تصحیح کنید. یکی ازبی‌سیاستی‌های کلی این بوده که تمامی استادان را وادار به‌ترجمهٔ کتاب ریاضی کردند ونتیجه‌اش همین شدکه می‌بینید. باید بیشتر ۳۰۰ واندی کتاب ترجمه شده را برگردانید یا بیرون بریزید. قاطبهٔ ریاضی‌دانان ایرانی نه مؤلف‌اند نه مترجم. شاید معلم باشند. (درپرانتزمی گویم به‌جای این‌کار شاید اگر به‌آنان یك پروژهٔ تحقیقاتی ارجاع می‌شد، باآن اشتیاق وجدیتی که دراساتید وجود داشت، حتماً نتیجه‌اش بسیار رضایت‌بخش و امیدوارکننده می‌شد.) درموردکتابهای جنب درسی نیزبی‌سیاستی صدمات زیادی واردکرده‌است. من بارها به‌مسؤولین بخش‌ریاضی مرکزلزوم ترجمهٔ سی جلدکتاب‌جامعهٔ ریاضی آمریکا یعنی‌سری New Math.Library را گوشزد کردم لکن گوش شنوایی نیافتم. مجلد اول را هم که با عنوان اعدادگویا وگنگ انتشار یافته است بنده در اختیار مترجم آن قراردادم ودرمورد ترجمهٔ آن اصرارکردم، تااینکه وقتی آقای‌دکتر بهزاد مسؤول بخش‌ریاضی‌شدندقانع‌شدندکه این کتب بایدانتشاریابند و دست به‌کارشدند. این‌کاری‌است‌بسیارعمده ودرتبلیغ‌ریاضیات بسیار مؤثر خواهد بود و اثرات دوربردی خواهد داشت. تا همین اواخر به فکر انتشار یك مجله ریاضی نیز نبودند. حال‌که مجلهٔ نشر ریاضی منتشر می‌شود اثرات آن را درجامعه می‌توان مشاهده کرد. یکی دیگر از موارد بی‌سیاستی، عدم توجه به مسألهٔ تربیت ویراستار بوده‌است. این مسأله مستقیماً با مسألهٔ انتشارکتاب در رابطه است. شما در حال حاضر چند نفر ویراستار جوان و پرانرژی دارید؟ دقیقاً یك‌نفر، و این خود ضایعهٔ‌اسف‌باری‌است. بعداز ده‌سال‌که از تأسیس‌مرکزمی گذرد، کارکرد مرکز از این‌لحاظ تقریباً صفر بوده‌است. انتقاد من از مرکز نشر یك انتقاد نسبی است. مرکز نشر در مقایسه با انتشارات دانشگاه تهران که‌آن هم قبل از انقلاب بزرگترین مؤسسهٔ‌انتشاراتی دانشگاهی بوده، خیلی بهتر عمل کرده است. آن یك در ۳۲ سال شصت و پنج کتاب و این یك در ده سال چهل و چند کتاب. لکن باید در نظر داشت تا مدتها که دانشگاهها تعطیل بودند مرکز نشر امکانات چاپی اغلب مؤسسات را در اختیار داشت. از طرف دیگر انتقاد من از عملکرد مرکز نشر در واقع باید متوجه جامعهٔ ریاضی ایران باشد. تقصیر وگناه عدم انتشارمجله‌ای چون نشرریاضی تا این‌اواخر، برذمهٔ جامعهٔ ریاضی‌است. اینکه‌انجمن ریاضی ایران‌انتشارات موفقی‌ندارد، حقیقت تلخی‌است. این گناه بزرگ به‌گردن‌جامعهٔ‌ریاضی‌ایران‌وانجمن ریاضی‌ایران‌است. به"جامعهٔ‌ریاضی آمریکا" نگاه‌کنیدکه‌علاوه‌بر تشکیل کنفرانسها، مهمترین وظیفهٔ خود را انتشارات می‌داند. خواه نشریات ادواری‌وخواه‌کتب، ومی‌تواندکتب بسیارتخصصی‌منتشرکند ودراختیار علاقه‌مندان‌قراردهد، چون‌برای کسب سودکارنمی‌کند. ریاضی‌خوانان ایرانی‌بسیار شایق‌اندکه‌کتاب ریاضی بخوانند. مجلهٔ ریاضی بخوانند و درضمن نوشتهٔ خوب را از بد، سره، را از ناسره تشخیص می‌دهند. وظیفهٔ مرکز نشر، انجمن ریاضی ایران و دیگران است‌که با سیاستی مدبرانه به این نیاز لبیك گویند.

وحیدی: آقای‌معصومی به‌سابقهٔ تشکیل مرکزنشر اشاره‌کردند. مرکز نشردانشگاهی، سازمانی‌نیست‌که عالماً و عامداً طبق‌سیاستهای خاصی تأسیس شده باشد. تأسیس این سازمان نتیجهٔ وقوع انقلاب فرهنگی و تابع فعل و انفعالات آن بود. شاید در آن زمان مهمترین مسأله‌ای که برای مسؤولان آموزش‌عالی‌مطرح بود، اشتغال‌اعضای هیأت علمی دانشگاهها بود که در اثر تعطیلی دانشگاهها ازکار تدریس بازمانده بودند. استادها برای ارتزاق یکی از چندکاری را که در مقابلشان

مرکز نشر در جا انداختن مفهوم امانت درترجمه موفق بوده‌است... ویرایش دقیق‌کتابها،نمونه خوانی وتصحیح اغلاط،یکنواختی نسبی اصطلاحات و انطباق موادکتاب باریز مواد اعلام شده از طرف‌کمیتهٔ ریاضی ستاد انقلاب فرهنگی، از خصیصه‌های عمدهٔ کتابهای ریاضی مرکز است که حتی برخی از ناشرین خصوصی و دولتی دیگر را هم به‌تأسی واداشته است.

گذاشته شده بود، باید انجام می‌دادند؛کار ترجمه یا تألیف، تحقیق، و اشتغال در نهادها، یا تدریس در آموزش و پرورش و غیره. طبعاً تعدادکسانی‌که در رشتهٔ ریاضی پیشنهاد کار تحقیق و پژوهش دادند، اندك بود چون برای‌گرفتن حقوق باید گزارش ماهیانه داده می‌شد و معلوم نبودکه‌کار تحقیق به‌نتایج رضایتبخشی منجر شود. تازه اگر این کار موفقیت‌آمیز هم بود مجاب کردن مسؤولان دانشگاهها‌که ممکن بود بگویند در ازای یك‌سال حقوق ۵ صفحه مقاله نوشته‌ای، آسان نمی‌نمود. این بود که اکثریت اعضای هیأت علمی دانشگاهها به‌کار ترجمه روی‌آور شدند. کار تألیف چندان موردتوجه نبود. یکی اینکه خود افراد به علت نامشخص بودن نتایج کار تألیف چندان به‌طرف تألیف نمی‌رفتندو از طرف دیگر افرادی‌که درکمیتهٔ تألیف و ترجمه ریاضی‌مأمور بررسی‌تقاضاها بودند، از تألیفهای کذایی‌سابق دل‌خوشی نداشتند و نمی‌خواستند که باز همان ترجمه‌های سابق به‌نام تألیف وارد معرکه شوند. مع‌هذا تقاضای عده‌ای برای تألیف پذیرفته شد. ازآن ۳۶۰ عنوانی‌که آقای‌دکتربهزاد به‌آن اشاره‌کردندکمتراز ۱۰ درصدشان‌کتاب تألیفی بودکه البته بعضی از آنها هیچ‌وقت به فعلیت در نیامدند. البته درصدکمی‌از مترجمین‌هم‌بعدها به‌عللی ازکار ترجمه منصرف شدند، تعدادی ازکتابها تکراری بودند، وبعضی‌ازآنهاهم با برنامه‌ای‌که بعدها اعضای‌گروه‌ریاضی،آمار، وکامپیوتر ستاد انقلاب فرهنگی تنظیم‌کردند، سازگاری نداشتند. در نتیجه بعدها با توجه به کمی تعداد ویراستاران‌گروه و امکانات چاپ، تعدادی از این کتابها به خود مترجمین واگذار شد. چون با توجه به اولویتهای تعیین شده نوبت‌چاپ بعضی از این‌کتابها وقتی می‌رسیدکه مثلاً چهل سالی از انتشار متن اصلی گذشته‌بودا به‌هرصورت ایجاد مرکز نشر تحول‌مثبتی درکار انتشار کتابهای ریاضی بود. از یك طرف نیروهای تازه‌نفسی که تعدادی از آنها مترجمین نسبتاً خوبی بودند به کار ترجمه کشیده شدند و از طرف دیگر خمیرمایهٔ این‌کارکه با توجه به‌شرایط پیش‌از

انقلاب و گسترش کمی و کیفی دانشگاهها آماده شده بود در مرکز نشر دانشگاهی به‌کار گرفته‌شد. بالاتر از همهٔ اینها شانس گروه ریاضی، آمار، وکامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی این بود که توانست عده‌ای از استادان باتجربه‌را که خودشان دستی در تألیف وترجمه داشتند، برای همکاری درکار ویرایش جذب کند و مجموعهٔ این عوامل بود که سبب شد برای اولین‌بار تعداد قابل توجهی (درحدود ۴۰ جلد تا زمان حاضر) کتاب تحت ضوابط مشخصی منتشر شود. ویرایش دقیق کتابها، نمونه‌خوانی و تصحیح اغلاط، یکنواختی نسبی واژه‌ها و اصطلاحات و مهمتر از همه‌انطباق‌مواد کتاب باریز مواد درسی اعلام‌شده ازطرف کمیتهٔ ریاضی ستاد انقلاب فرهنگی‌را می‌توان ازخصیصه‌های‌عمدهٔ کتابهای ریاضی منتشرشده در این دوره دانست که حتی برخی از ناشرین خصوصی و دولتی دیگر را هم به تأسی واداشته است. به‌هرحال اگر بخواهیم یکی از این مشخصه‌ها را عمده‌کنیم، این مشخصهٔ کتابهای مرکز نشر، پایبندی آنها به امانت در ترجمه است و می‌توان ادعا کرد که مرکز نشر در جا انداختن مفهوم امانتداری در ترجمه موفق بوده است. اما در زمینهٔ تألیف طبعاً بنابه دلایلی که عرض شد، موفقیت بسیار ناچیز بوده است. البته به تصور من گروه ریاضی از همان ابتدا به تألیف خوب بی‌توجهی نکرده و حتی چند سال پیش با دعوت از گروهی از همکاران دانشگاهی‌دانشگاههای‌مختلف، گروه برآن‌شد که ضوابطی برای تألیف معین‌کند و بعداز تدوین‌این ضوابط‌آن را به دانشگاهها ابلاغ کرد وبخصوص‌دعوتی‌ازکلیهٔ ریاضیدانان به‌عمل‌آمد (باارسال ۱۳۲ نامه به‌دانشگاهها) که برابر اصول اعلام شده کتابی در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال تألیف کنند که حتی در یك مورد هم برای این‌کار داوطلب پیدا نشدکه البته دلیلش تا حدی روشن است. شما وقتی یك کتاب می‌خواهید تألیف کنید، کتاب شما باید با چند کتاب جا افتادهٔ خارجی (که ترجمه‌هایش هم در دسترس است) رقابت‌کند و به‌علاوه ازعاقبت‌کار مطمئن هم نیستند. وقتی یك کتاب مثلاً ۳۰۰ صفحه‌ای را ترجمه می‌کنید، مقدار کار شما و نوع کار شما کاملاً مشخص است در حالی که در تألیف این گونه نیست. مسألهٔ گرفتاریهای زایدالوصف استادان در کار تدریس و غیره را هم می‌توان براین افزود. چون تألیف به معنی واقعی خیلی خیلی بیشتر از ترجمه کارمی‌برد.

بهزاد: یکی از موانع تألیف خوب اینست که استاد ریاضی سخت گرفتار تدریس دوسه برابر حد معقول است. گرفتاریهای زندگی تاب و توان او را گرفته است. تألیف نظیر تحقیق به خیال راحت، حوصله و امکانات نیاز دارد. تألیف هر اثر دو یا سه داور می‌خواهد، حال آنکه در بسیاری از زمینه‌ها حداکثر یك متخصص داریم. تألیف باید بدیع باشد. یعنی باید شامل آخرین دستاوردهای علمی باشد، یا از نظر آموزشی و شیوهٔ اثبات قضایا تازگی داشته باشد، یا مسائل و تمرینهای تازه و مفید در برداشته باشد، یا دست‌کم کتابی باشد که خاص دانشجویان این مملکت نوشته شده و نتیجهٔ‌کار از ترجمهٔ یك‌کتاب بهترباشد. مانع‌دیگر اینکه در زمینه‌های عمومی اگر کتابی هم تألیف شود معمولاً مورد استقبال قرار نمی‌گیرد، زیرا استاد گرفتار حوصلهٔ رو به‌رو شدن با کتاب تازه را ندارد. اگر با کتابی مأنوس شد به‌سختی حاضر است آن را عوض کند. اگر کسی فرضاً کتاب توماس را بر کتاب لیتهلد ترجیح دهد علت اصلی آن شاید این باشد که حوصله ندارد حدود ۸۰۰۰ مسألهٔ تازه لیتهلد را حل کند. و اگر کتاب توماس‌را خواست به‌احتمال‌زیاد ترجمهٔ ویرایش‌جدید آن‌را که توسط فینی و توماس نوشته شده وحاوی مسائل‌کاربردی جالب وبسیارتازه‌ای است، نمی‌خواهد. کتابی می‌خواهد که یك بار مسائلش را حل کند و تا زمان کم شدن بارگران زندگی از روی آن تدریس کند. علی‌رغم همهٔ این مشکلات، تألیف باید تشویق شود زیرا متأسفانه هیچ جاذبه ندارد و کار همه‌کس هم نیست. ولی نیاز فوری استاد و دانشجو با ترجمهٔ کتابهای خوب هم رفع می‌شود. در هرحال تألیف خوب مشکلات دیگری هم دارد که در نوبت بعدی به آنها اشاره خواهم کرد.

الان به دلیل یك نوع تلقی مکانیکی ازکارترجمه به‌خصوص ترجمهٔ ریاضیات، روز به‌روز تعداد ترجمه‌های "دقیق" اما نامفهوم زیاد می‌شود.

وحیدی: تردیدی نیست که باید کتابهای تألیفی داشته باشیم، اما به‌طوری‌که گفته شد مشکلات تألیف زیاد است. ما هنوز تعریف دقیقی برای تألیف واقعی نداریم. ضوابطی‌که قبلاً از آنها صحبت شد بیشتر سلبی هستند تا ثبوتی، یعنی می گوییم که مثلاً تألیف نباید ترجمهٔ ناقص یك کتاب باشد، یا نباید مونتاژی از چند کتاب باشد و غیره اما نمی‌گوییم که تألیف دقیقاً چه چیزی باید باشد. البته ما نمونه‌هایی از تألیفهای خوب هم داریم که قبلاً به آنها اشاره شد. نکتهٔ مسلم اینکه در تألیف یك کتاب چند عامل ضروری هستند؛ یکی وجود دانشجویان و خوانندگان جدی است، کتاب تألیفی خارجی اغلب دستنوشته‌های درسی استادی است که آن را سالهای سال در دانشگاههای معتبر تدریس کرده و دانشجویانی هم به‌پرورده شدن مطالب کتاب یاری رسانده‌اند. این عامل‌کم و بیش در ایران دست یافتنی است. عامل دوم وجود بازار مصرف است. یعنی اگر کتابی تألیف شد باید استادان دیگر هم تمایل استفاده از آن را درکلاسهای خود داشته باشند یا آن را به‌دانشجویان خود توصیه کنند. این‌کتابها به هرحال رقبای سرسختی دارند و ممکن است افراد دیگر راغب به استفاده از آن نباشند. در این صورت فردی که زحمت زیادی‌کشیده خودش می‌ماند با کتابش که باید سالهای سال طول بکشد تا نسخ آن فروش برود. به‌علاوه ناشرین هم دنبال چاپ کتابهای دانشگاهی نیستند. باید مؤسساتی باشند که علی‌رغم‌کم تیراژ بودن کتابهای تألیفی، صرفاً برای تشویق این نوع کارها، به چاپ این‌گونه کتابها اقدام‌کنند. متأسفانه این روزها در مؤسسات‌دولتی وعام‌المنفعه هم، سود و بازدهی سرمایه ملاك کار قرار گرفته و این مؤسسات بیشتر دنبال کتابهای پرتیراژند تا کتابهای خوب چه تألیفی باشد وچه ترجمه. پس اگر قرار باشد کار تألیف هم در این کشور جا بیفتد، باید مؤسسات دولتی و حتی خصوصی موظف باشند که درصدی از انتشارات خود را به تألیف اختصاص بدهند. البته نظر من شاید هنوز زمان رواج کارهای تألیفی نرسیده است. به نظر من قبل از آنکه کار تألیف با جدیت شروع شود، باید بازار ترجمه از هر لحاظ اشباع شود. ما درحال حاضر با آنکه در بعضی زمینه‌ها به حد کافی کتاب داریم، در برخی شاخه‌های ریاضی هنوز دچار فقر وکمبود کتاب هستیم. مثلاً در فرایندهای تصادفی، ریاضیات گسسته به‌طورکلی، شاخه‌های کاربردی ریاضیات، و به‌ویژه کامپیوتر.

معصومی: وضع موجود در مقایسه با اوضاع قبلی به هر حال بهتراست. منتهی یك خطری‌هم هست وآن خطرآسانگیری کار ترجمه است. چون ریاضیات چندان به زباندانی احتیاج ندارد و ظاهراً

آشنایی با یك مشت اصطلاح برای آن کافی است، این خطر پیش می‌آید که عده‌ای سریع و شدید واردکار ترجمهٔ ریاضی بشوند و یك زبان غیرطبیعی و مصنوعی برای ترجمهٔ کتابهای ریاضی درست بشود. به‌خصوص که فشار بازار هم به‌حدی است که هرکتابی که ترجمه شود به فروش می‌رود. از این بابت بازار ما یك بازار رقابتی نیست که بگوییم آثار خوب آثار بد را ازمیدان بدر می‌کند، نخیر، آثار بد هم خوانندهٔ خودش را پیدا می‌کند و اگر هم نباشد کمکی به آثار خوب نمی‌شود. مثل هرکالای دیگری. الان یك پودر لباسشویی زیراستاندارد در ایران فروش می‌رود برای اینکه مقدار تولید پودر لباسشویی کم است. خطر دوم این است که در حال حاضر حتی سازمانهای دولتی با کتاب، وحتی کتاب درسی، معاملهٔ یك کالای سود ده می‌کنند وقتی که مثلاً با کسی برای تألیف یا ترجمه قرارداد می‌بندند در واقع دستمزد به او می‌پردازند نه‌مثلاً اعتباری ازقبیل پولی که مؤسسات تحقیقی از بابت‌تحقیق به‌یك نفر می‌دهند. دستمزد می‌پردازند به تعداد صفحات یا درصدی از پشت جلد. به این طریق ممکن است استاندارد کار آدمهایی هم که کار خوب هم می‌کنند پایین بیاید. دستمزدی هم که می‌دهند تقریباً برابری می‌کند با حداقل کاری که شخص برای ترجمه انجام می‌دهد، و بیشتر ازاین نیست. بنابراین، این‌کار خیلی پرفایده‌ای‌نیست که اشخاص را بکشد به طرف خودش، بلکه برای آدمهایی که مهارت و سرعت هم نداشته‌باشند می‌شود گفت کار خیلی کم فایده‌ای است. چون یك نفر چندین ساعت باید کار بکند تا دو یا سه یا حتی یك صفحه ترجمه کند. این است که میدان فقط برای دودسته مترجم باز می‌شود، یکی مترجمین حرفه‌ای هستند که در مورد ریاضیات و به‌خصوص در مورد ریاضیات دانشگاهی تعدادشان خیلی کم است، و حتی در مورد ریاضیات غیردانشگاهی هم می‌بینیم که آن آدمهای معدود حرفه‌ای هم سطح کارشان پایین آمده به دلیل همین تلقی حرفه‌ای و کار زیاد و سریع. دستهٔ دوم مترجمان غیرحرفه‌ای هستند که به‌دلیل آسان گرفتن کار، خودشان را حرفه‌ای تصور می‌کنند. یعنی با زبان ناقص یا حتی با ریاضیات ناقص شروع می‌کنند به ترجمه در مقیاس وسیع و با سرعتی که مترجم حرفه‌ای باید داشته باشد؛ در نتیجه سطح کارشان به‌نحو غریبی پایین است. تنها راه غلبه براین مشکل این است که یك مقداری در معیارهای تألیف و حق‌التألیف تجدید نظر بشود و این تجدید نظر هم نه از ناحیهٔ مرکز نشر یا از ناحیه انتشارات دانشگاه تهران بلکه از کل سیستم آموزشی باید شروع شود. یعنی کل سیستم آموزشی باید به ترجمه و تألیف کتابهای علمی دانشگاهی به‌خصوص کتابهای عمومی، به‌چشم تحقیق نگاه کند و برای ترجمه و تألیف خوب، به خصوص تألیف خوب، همان امتیازهای مادی ومعنوی را درنظر بگیرد که برای تحقیق قائل است. تألیف جدی درحقیقت کار تحقیقی است، ساختن یك‌چیزی است از نو. شما اگر بخواهید در کتابی فقط مثالهایش را ایرانی انتخاب کنید کلی باید تحقیق کنید، چون نمی‌توانید جعل کنید. اگر نویسنده یك مسابقهٔ فوتبال در آمریکا را به‌طور نمونه ذکر می‌کند، شما نمی‌توانید مسابقه‌ای از خودتان بسازید، بلکه باید مثلاً با یکی مشورت کنید و یك مسابقهٔ واقعی بیاورید. این خودش کلی کار می‌برد و غیراز ترجمهٔ صرف است. باید یك فرمولی پیدا شود. این کار را مرکز نشر تنها نمی‌تواند بکند، فلان ناشر خصوصی که مطلقاً نمی‌تواند بکند. ناشر خصوصی اصلاً امکانات مادی‌اش را ندارد. این فکر باید بالاخره روزی جا بیفتد که همان طور که به بعضی از آدمها حق‌التحقیق می‌دهیم و اصرار نداریم که کار مشخصی سر ساعت بکنند، اگر آدمهایی هم پیدا کردیم که استعداد تألیف را داشته باشند به‌آنها حق‌التألیف بدهیم که با فراغ بال بنشینند و کار کنند. مسألهٔ تألیف یك طرف دیگر هم دارد و آن مطالب تخصصی‌تر است، یعنی لازم نیست کار تألیف را از کتابهای عمومی شروع کنیم، چون در این صورت باید یك‌کتاب خیلی خوش خوان و خیلی لوکسی تألیف کنیم و تازه نتوانیم مثلاً با ترجمهٔ فارسی توماس برابری کنیم. ممکن است ما استادهای خوبی داشته باشیم که درسهای خاصی بدهند در سالهای بالای لیسانس و فوق‌لیسانس. یك مؤسساتی اگر بتوانند ثمرهٔ درسهای اینها را، یادداشتهای درسی (Lecture note های) اینها را با چاپهای فقیرانه‌تر و با ویرایش مختصری چاپ بکنند، این هم راه دیگری است برای تولید آثار علمی ایرانی به‌زبان فارسی و با شیوه‌های بیانی که از لغت در مقابل لغت گذاشتن حاصل نشده بلکه از ضرورت فهماندن مطلب در کلاس ناشی شده است.

وحیدی : چه نوع درسهایی را پیشنهاد می‌کنید؟

معصومی : من می‌گویم درسهای بالاتر که بار فرهنگی و آموزشی به‌معنی آموزش ریاضی‌دارند، ولی مشکلات کتابهای عمومی راهم، که هزارنکتهٔ باریکترزمو باید در نوشتن‌شان رعایت بشود ندارند.

خسروشاهی : حال که اذعان داریم که کیفیت ترجمه‌های بعد از انقلاب به مراتب بالاتر از کیفیت تألیفهای قبلی است، یك مسأله پیش می‌آید و آن اینکه آیا باید تألیف را فراموش کرد یا اینکه باید برای تألیف خوب نیز فکری کرد و آن را راه انداخت. من "تألیف"های قبل از انقلاب را مجبورم داخل گیومه بگذارم.

ابتدا باید تولید lecture note ها را با چاپ ارزان اما نه خیلی نازل راه انداخت. این‌کار درصورتی‌که جابیفتد می‌تواند زمینهٔ اولیه را برای تألیف فراهم‌کند.

فرمایشات دوستان دربارهٔ اشکالات تألیف، کلاً متین‌بود وظریف. این اشکالات خیلی واقعی‌است. ولی‌حرف‌اصلی این‌است‌که آیادرشرایط حاضر ضرورت تألیف‌کردن را احساس می‌کنیم یا آن‌را برای خالی نبودن عریضه مطرح می‌کنیم وهنوز قانع نشده‌ایم که باید تألیف کرد. اگر پاسخ مثبت باشد، راه فتح باب آن چیست؟من با آقای معصومی دراین‌باره هم عقیده‌ام‌که ابتدا باید تولیدlecture noteها را با چاپ ارزان اما نه خیلی نازل (یعنی، استنسیلی) در دانشگاهها راه انداخت. این شروع خوبی است.این کار درصورتی‌که جابیفتد می‌تواند زمینهٔ اولیه را برای تألیف فراهم‌کند. ولی باید هشدار داد که با عجله تألیف را تشویق‌کردن، شاید روند سالم گسترش ترجمهٔ خوب را متوقف سازد که به هیچ وجه کار صوابی نخواهد بود. ضمناً باید دانشگاهها به چاپگرهای کامپیوتری فارسی ـ انگلیسی مجهزشوند تا حروفچینی این تألیفات آسانتر وباکیفیت خوب انجام گیرد.

مطلب دیگری باید عرض کنم. باید یك بررسی جامع در بارهٔ زمینه‌های ریاضی که در آنها کتاب کم است یا اصلاً نیست، انجام گیرد. مثلاً در زمینهٔ آنالیز ریاضی، منطق ریاضی و جبر خطی چند تا کتاب خوب وجود دارند؛ اما فی‌المثل به علوم انفورماتیك اصلاً توجه نکرده‌ایم و برنامه‌ای جامع نیز نداشته‌ایم. پیشنهاد من این است‌که به‌ابتکار نظر ریاضی، سمیناری برای بررسی کتب‌فارسی در زمینه‌های مختلف ریاضی و کمبودهای آن و ارائهٔ توصیه‌های

لازم به‌مترجمین و مؤلفین و ناشران دولتی و خصوصی، تشکیل شود و وضع موجود کتابهای ریاضی نقادانه مورد بحث قرار گیرد. این کار تا کنون در هیچ زمینه‌ای انجام نگرفته است. مثلاً می‌توان یک برنامهٔ پنجسالهٔ انتشاراتی تدوین کرد و اجرای آن را قویاً توصیه نمود. چنین برنامه‌ای می‌تواند شامل تعدادی کتاب جنب درسی هم باشد، مثلاً کتابهای کلاسیک که علاوه برفواید دیگر، ترجمهٔ آنها به‌غنای زبان هم می‌افزاید.

قبل‌ازاینکه‌کار تألیف با جدیت شروع شود، باید بازار ترجمه از هر لحاظ اشباع شود.

وحیدی : در ارتباط باصحبتهای دوستان، چند نکته را متذکرمی‌شوم. یکی مسألهٔ lecture note ها یا درسنامه‌هاست. من نمی‌خواهم مخالف تألیف قلمداد شوم و مخالف تألیف هم نیستم ولی اگر بدون ضوابط دقیق و مشخص درسنامه منتشر کنیم چه بسا همان مشکلات قبل از انقلاب دامنگیرمان بشود و باز یك عده‌ای ترجمه‌های ناقص را به عنوان تألیف و درسنامه تحویل جامعه بدهند. ضرر این کار در این است که نه تنها دومرتبه کار تألیف لوث می‌شود بلکه به‌جای استفاده‌ازکتابهای استاندارد وخارجی که به‌هرحال سطح آموزشی را در کلاسها بالا می‌برد، باز آسانگیری و تعلیم مطالبی که بنا به جهات مختلف ممکن است ارزش کمی داشته باشند، رایج می‌شود. نکتهٔ دوم اینکه انجمن ریاضی ایران ، حالا که نمی‌تواند به کارهای انتشاراتی جدی دست بزند، دست کم در کنفرانسهای سالانه، مانند چند سال پیش که این‌کار را می‌کرد،میز گردهایی درخصوص کارهای انتشاراتی ریاضی ترتیب دهد و مسائل مطروحه و نتایج حاصله را برای اطلاع جامعهٔ ریاضی ایران منتشر کند.

تألیف جدی، در حقیقت‌کار تحقیقی است. باید همان طورکه به‌بعضی ازآدمها حق‌التحقیق می‌دهیم و اصرار نداریم که‌کار مشخصی سرساعت بکنند، اگر آدمهایی هم‌پیداکردیم‌که استعداد تألیف را داشته باشند به‌آنها حق‌التألیف بدهیم‌که با فراغ بال بنشینند و تألیف‌کنند.

معصومی : من فکر می‌کنم که وظیفهٔ انجمن ریاضی تهیهٔ کتاب درسی نیست بلکه معرفی ریاضیات به‌عنوان یك پدیدهٔ فرهنگی و اجتماعی و یك جزئی از زندگی بشر است . این کاری است که شما مثلاً می‌بینید در خیلی از انتشارات مثلاً جامعهٔ ریاضی آمریکا می‌شود. الان انجمن فیزیك ما بیشتر برنامه‌ریزی که دارد می‌کند برای کار انتشاراتی‌اش در این جهت است، یعنی معرفی بعد فرهنگی واجتماعی فیزیك. اگر به‌این‌جهات توجه بشود حتی‌اگر با بازدهٔ خیلی کمی شروع بشود باز غنیمت است. کتابی مثل کتاب ریاضیات چیست از آن نوع کتابهایی است‌که انجمن ریاضی باید چاپ‌کند یا همین کتابهایی که در مرکزنشر از روی ناچاری اسمشان را گذاشتیم "ریاضیات پیش دانشگاهی" که کتابهای کنکوری نیست بلکه کتابهایی است برای معرفی ریاضیات به آدمهایی که ریاضیات کارشان نیست، حالا به هردلیلی. اگر انجمن به‌فکر بیفتد و حتی اگر سالی‌دوتاکتاب‌دراین‌زمینه‌هابتواند دربیاورد‌شروع خیلی‌خوبی‌است.

بهزاد : ابتدا نظرم را دربارهٔ تألیف تکمیل می‌کنم . درصد بسیار اندکی از ریاضیات امروز از آن ماست. تألیف اصیل در یك زمینهٔ خاص به زبان فارسی وقتی امکانپذیر است که مؤلف در پیشبرد آن سهمی داشته باشد، یا دست کم هنگام نوشتن کاملاً به فارسی فکر کند و سالها در بارهٔ موضوع اندیشیده و کار کرده باشد. در چند قرن اول بعد از ظهور اسلام، علم در این مرز و بوم چگونه رشد کرد؟ مسلمین ابتدا به‌ترجمهٔ آثار یونانیان پرداختند و پس از تسلط بر آن کار ابداع و نوآوری و تألیف را شروع نمودند. این کار به‌گذشت یکی دو قرن نیاز داشت. درحال حاضرکه علم‌باسرعت سرسام آوری در حال پیشرفت است چه باید بکنیم؟ امروزه کتاب ریاضی برای هر نوع سلیقه‌ای به زبان انگلیسی وجود دارد و ما نمی‌توانیم در زمینهٔ تألیف با آنها رقابت کنیم . یکی از ضوابط تألیف می‌تواند این باشد که دیگران تمایل نشان دهند حاصل کار ما را به‌زبان خود برگردانند.

معصومی : ببینید، کتاب تألیف کردن مثل ماشین ساختن است یعنی ما یقین داریم چیزی که می‌سازیم از مشابه خارجی‌اش (برخلاف چیزهایی که در رادیو و تلویزیون می‌گویند) بهتر نیست، ممکن است مثلاً ارز بیشتری‌هم خارج کند، ولی اگرنسازیم همچنان این شکاف بیشترمی‌شود. یعنی هیچ‌وقت شروع‌نمی‌کنیم، هیچ‌وقت راه نمی‌افتیم، وفاصله‌مان با دنیا روزبروز بیشتر می‌شود.

بهزاد : من با شما مخالفتی ندارم. عرض من دربارهٔ اولویتهاست. تباید جلو تألیف را بگیریم. تشویق آن هم لازم است، اما نه به ضررترجمه. کسی که به‌نان‌شب محتاج است دنبال بوقلمون نمی‌گردد. من هم به‌قول دکتروحیدی نمی‌خواهم ضد تألیف قلمداد بشوم ولی احساس می‌کنم هیچ وقت از ترجمه بی‌نیاز نخواهیم بود و درحال حاضر باید آن‌را تشویق هم بکنیم. مگرکشورهای آمریکا، شوروی، یا ژاپن آثار علمی یکدیگر را ترجمه نمی‌کنند؟ اجازه دهید برایتان مثالی بزنم. در حدود یك سال پیش از یك ریاضیدان ایرانی مقیم آمریکا که در رشتهٔ خود صاحب نام هم هست خواسته بودم مقاله‌ای دربارهٔ‌کارهای کولموگوروف‌فقید تدوین‌کندوبرای‌چاپ‌در نشریاتی بفرستد. پس‌ازچندین‌ماه مطالعه وجمع آوری مطلب اخیراً نام سه‌مقاله راکه درهمین‌باره درمجلات خارجی چاپ شده برایم فرستاده، و آمادگی خود را برای ترجمهٔ یکی ازآنها اعلام کرده است. دلیل پیشنهاد خودش راعظمت‌کارهای چاپ شده‌دربرابر مقالهٔ تألیفی خود می‌داند.

حال ببینیم وضع کنونی چیست. درحال حاضر وضع اصطلاحات ریاضی بهترازسابق‌است وبه‌زودی واژه‌نامه‌ای متشکل ازحدود۸۰۰۰ واژه باهمکاری انجمن‌ریاضی ایران و مرکز دانشگاهی منتشرخواهد شد.کارویرایش وخدمت ارزندهٔ ویراستار مورد تأیید همگان است. راه ریاضی‌نویسی به‌زبان فارسی هموارتر از گذشته است، و زبان فارسی توانایی‌های خودش رانشان داده. ازطرفی استاد فوق‌العاده کم داریم و ویراستارمجرب‌ازآن‌هم کمتر. کاغذ، فیلم، زینك و... کم‌داریم وعلی‌رغم همهٔ این‌مشکلات هیچ برنامهٔ مدونی هم نداریم. همهٔ‌ناشران به‌فکر انتشارحساب دیفرانسیل و انتگرال‌وجبرخطی وکتابهای‌پرفروش دیگرهستند. ما نه مثل دول بلوك شرق ازبرنامه‌ریزی متمرکز برخوردار ایم ونه‌مثل کشورهای بلوك غرب ازفضای‌بازپررقابت بهره‌می‌بریم. درآمریکا انجمنهای ریاضی هریك رسالت خاص خود را دارند، حوزه‌های فعالیت خودشان را مشخص کرده وپا توی کفش یکدیگر نمی‌کنند. بخش‌خصوصی‌هم وقتی‌روی کتابی سرمایه گذاری می‌کندکه مطمئن‌باشد سود می‌برد. نیروی‌انسانی وامکانات‌مادی آنها فراوان‌است. اما در اینجا چی؟ ظاهراً قسمتی از امکانات مادیی‌که باید صرف کتابهای ریاضی‌شودبدون ضابطهٔ‌دقیقی به‌بخش‌خصوصی داده‌می‌شود، وقسمت اعظم آن‌صرف چاپ کتابهای‌تکراری‌می‌گردد. حال آنکه‌مثلاً کتاب جبرفرالی مجبور است در ۱۰۰۰ نسخه به‌چاپ برسد وپس‌از

اندك مدتی نایاب شود.

وحیدی : اخیراً ۴۰۰۰ نسخه چاپ شده.

بهزاد : خوب ۴۰۰۰ نسخه هم کم است، ببیند عرض من این است که اگرچیزی کم است و پربها، باید توزیع آن با برنامه‌ریزی کاملاً دقیق انجام شود. اگر امکانات فراوان بود، استاد هم زیاد بود که ما به‌میز گرد و نظرخواهی نیاز نداشتیم. کلاً پیشنهاد دکترخسروشاهی را می‌پسندم، ولی بدواً باید مقامات مسؤول احساس نیاز کنند، (راستی مقام مسؤول کمبود کتابهای ریاضی دانشگاهی کیست؟) و قبل از برگزاری سمینار پیشنهادی، ازدست کم دونفر بخواهند دربارهٔ موضوع به‌بررسی عمیق بپردازند و باتوجه به‌آمار و ارقام طرحی مدون جهت رفع تنگناها تهیه کنند و قبل از برگزاری سمینار نسخه‌ای از آنها را برای شرکت کنندگان بفرستند، و درسمینار مسأله را بشکافند و ازطرح خود دفاع کنند. آنگاه بحث و اظهارنظر برمبنای واقعیات آغاز شود، وقطعنامهٔ لازم به‌تصویب برسد. با اجرای تمام وکمال قطعنامه می‌توان امیدوار بود که مشکل تخفیف یابد. درغیر این صورت افراد شرکت کننده در سمینار مثل ما صرفاً به‌ذکرمصیبت می‌پردازند و احساس خود را بیان می‌کنند.

بررسی دقیق باید ازاینجا آغازشود که کلاً برای دوره‌های کاردانی وکارشناسی شاخه‌های مختلف ریاضی، آماروعلم کامپیوتر، و نیز برای ریاضیات مورد نیازسایررشته‌ها، به‌بیش از ۴۰ کتاب مختلف نیاز نیست. اگر برای هر کتاب سه‌سطح مختلف در نظر گرفته‌شود، جمعاً می‌شود چیزی حدود ۱۲۰ کتاب. بیش ازنصف این ۱۲۰ کتاب درحال‌حاضر موجود است یا زیرچاپ است. برای بقیه باید برنامه‌ریزی شود. کتاب مناسب، مترجم‌مناسب، و براستار مناسب انتخاب‌شود، اولویتها تعیین‌شوند، وبا یك‌برنامهٔ ضربتی این کار به‌انجام‌برسد. این نیازرا من نظیرنان درسفره می‌دانم و برای آن اولویت قائلم. این کار به‌یك برنامه‌ریزی چندماهه نیاز دارد. صرفنظر ازاین برنامهٔ کوتاه مدت به‌برنامهٔ درازمدت‌هم نیاز است تا سفره را رنگین کند، به‌کار تداوم بخشد، کتابهای تازه ترو تمیزی را جایگزین کتابهای کهنه کند، کتاب جنب درسی انتشاردهد، به‌ترجمهٔ کتابهای کلاسیك ریاضی بپردازد، کتابهای درسی تألیفی ارزنده را جایگزین کتابهای ترجمه‌ای کند، و....

در اوایل، کار نشرکتابهای ریاضی عمدتاً در دست مرکز نشر بود ولی در این اواخر یك‌نوع هرج ومرج به‌وجودآمده است وعده‌ای بدون داشتن صلاحیت و امکانات کافی، "بچاپ، بفروش" شده‌اند.

خسروشاهی: من همیشه براین‌عقیده هستم که برای‌سمینارها ومیز گردها باید تدارك لازم وکافی دیده شود، نه مثل میز گردهای انجمن ریاضی که اغلب یك ساعت به‌تشکیل میز گرد مانده می گویند فلانی باید در میز گردشرکت کنی و(باکمی اغراق)موضوع آن راآقای رئیس‌هنگام تشکیل‌جلسه اعلام‌می کنداکل کتابهای‌ریاضی دانشگاهی درحدوده ۲۰۰ جلد است و بررسی آنهاوارزیابی کل مسأله و آماده شدن‌برای‌سمینار به‌هیچ‌وجه‌کارسختی نیست‌وبهتراست این‌کاررامجله نشرریاضی به‌عهده بگیرد. عرض دیگر من دربارهٔ مطلبی است که آقای معصومی اشاره کردند، یعنی‌مسألهٔ اشاعهٔ‌فرهنگ به‌وسیلهٔ انتشارات‌ریاضی. این‌مطلب بسیار مهم و شایان توجه است. ریاضیات با نشریه وکتاب ترویج می‌شود.ازنظر نشریه، هرچند نشر ریاضی ، پیك ریاضی، جنگ‌ریاضی دانشجو و آشنایی با ریاضیات گاه وبیگاه‌منتشر می‌شوند،در واقع می‌توان گفت که فقط یك‌نشریهٔ اساسی (یعنی نشرریاضی) است که‌فعلاً می‌توان روی آن حساب بازکرد. انجمن ریاضی‌هم که اصلاً درحال حاضر نه نشریه دارد نه کتاب. حالاکه برای انجمن مقدور نیست که نشریه داشته باشد، می‌تواند همانند انجمن فیزیك کتاب منتشر کند، کتابهای خوب که اشاعه دهندهٔ فرهنگ ریاضی باشند، و برسودآوری آن نیز نباید تکیه‌کند. تا ما نتوانیم فرهنگ ریاضی را اشاعه دهیم، تا نتوانیم به‌طور سازمان یافته و با برنامه، فرهنگ ریاضیات‌راتبلیغ کنیم، نمی‌توانیم‌انتظارکوچکترین گشایشی‌داشته‌باشیم‌ووضع‌ریاضیات مملکت، مسألهٔ جذب دانشجو، مسألهٔ جذب بودجه به‌سامانی‌نخواهد رسید. باید یا یك دارالترجمه بزرگ تاسیس شود ویااینکه این‌مرکز نشرسرکیسه را شل کند، وبرای تربیت نیروی‌انسانی اعم‌ازویراستار، مترجم، وغیره سرمایه‌گذاری کند. به‌عقیدهٔ من سرمایه‌گذاری برای اشاعهٔ فرهنگ علوم ناب بالاخص ریاضیات یك فریضهٔ ملی‌است. باز یك باردیگرمی گویم، مرکز نشردانشگاهی بعداز تقریباً هشت سال که ازتأسیس آن‌می گذرد درموردتربیت وحفظ نیروهای متبحر و ورزیده کوتاهی کرده است. این موضوع بایدموردبازنگری جدی‌قرار گیرد.

وحیدی : البته اگر سمیناری تشکیل شود، نه تنها مشکل برای‌جامعهٔ ریاضی ایران مطرح و روشن می‌شود، بلکه حرفها تاحدی دوباره به گوش مسؤولان رسانده می‌شود. ولی به‌نظرمن تنها مشکل ما،عدم‌اشاعهٔ فرهنگ‌ریاضی درجامعه نیست. علت اینکه دانش‌آموزو دانشجوجذب رشتهٔ ریاضی نمی‌شود، آن‌است که این رشته فرجام خوبی ندارد، یعنی فارغ‌التحصیلان آن در جامعه ازشأن و اعتبارکافی برخوردار نیستند.

باید به‌ابتکار نشرریاضی‌سمیناری برای‌بررسی کتب‌فارسی در زمینه‌های مختلف ریاضی و کمبودهای آن وارائهٔ توصیه‌های لازم به مترجمین و مؤلفین و ناشران دولتی و خصوصی تشکیل شود.

معصومی : نه‌ببینید آقای دکتر، من یك مثالی بزنم... بعد از انتشار مجلهٔ فیزیك به‌طور محسوس عدهٔ‌دانشجویان با استعدادی که می‌توانستند بروندر شته‌های مهندسی ولی پدرانشان می آمدند شکایت می کردند که این بچه‌ها می‌خواهند بروند رشتهٔ فیزیك، افزایش پیداکرد. یعنی این جوری نیست که این چیزها تأثیرنداشته باشد.

وحیدی : بله، به‌این طریق جوانان را اغفال می کنند!

معصومی : خوب، حالا اغفال باشد یا چیز دیگر، تا بفهمند چه‌کلاهی سرشان رفته دیگر ریاضیدان شده‌اند. این اشکالی ندارد.

وحیدی : به‌هرحال، به‌بحث‌اصلی برگردیم؛ برای‌اطلاع‌ازتام وعنوان کتابهای منتشر شده در زمینه‌ریاضی نیازی به‌تحقیق مفصل و چندماهه نیست. ازروی‌فهرست کتابهای‌منتشره که‌وزارت فرهنگ‌وارشاداسلامی منتشرمی کند،می‌توان‌سریعاً فهرست کاملی‌از کتابهای ریاضی تهیه‌کرد. مشکل‌همان‌طور که گفتم دراین‌است که‌هنوزهم‌امکانات‌کافی‌درراه علوم پایه صرف نمی‌شود و انتشارکتاب ومسائل مربوطه هم مستثنی ازاین امر نیستند. ما اینجا صحبت‌ازجنبه‌های ذهنی‌مسألهٔ انتشارکتاب می کنیم ولی به‌مشکلات مادی‌چندان بها نمی‌دهیم. درعین‌حال که بایدضوابط دقیقی برای‌کارانتشارکتاب اعم ازترجمه و تألیف‌تدوین و روی آنها تبلیغ شود، لازم است که تلاشهای جدی برای ازبین بردن مشکلات مادی هم به‌عمل بیاید. بسا وجودکمبود نسبی مترجم وکمبود مطلق ویراستار ریاضی وهمهٔ‌مشکلات،درهمین مرکزنشرتعدادکتابهای‌درسی که قبلاً چاپ شده‌اند و الان به‌علت کمبود کاغذ و غیره تجدید چاپشان معوق مانده‌کم نیست وباید ازطرق گوناگون مثلاً همین تشکیل‌سمینار وغیره این‌مشکلات وکمبودها به سمع و نظر مسؤولان رسانده شود و برای ازبین بردن آنها چاره اندیشی شود.

الگوریتم L^3 و کاربردهای آن

غلامرضا برادران خسروشاهی
شاهین آجودانی نمینی، محمد رجبی طرخورانی*

۱. مقدمه

اگر با دانلدکنوت هم‌رأی باشیم که "علم کامپیوتر عمدتاً همان مطالعهٔ الگوریتمهاست" [۱]، باید بپذیریم که با رشد و گسترش روزافزون کامپیوتر، نظریهٔ الگوریتمها یا "ریاضیات الگوریتمی" نیز رشد متزایدی خواهد داشت و این رشد بالمآل در ریاضیات اثراتی ژرف و پایا خواهد گذاشت. در اینجا بر آن نیستیم که بر جنبه‌های مختلف این دیدگاه یا اعتقاد تأکید ورزیم، لکن می‌خواهیم از مصداق بارزی سخن بگوییم که نشانه‌ای مثبت و عمیق از اثرات کامپیوتر بر ریاضیات است.

بحث ما دربارهٔ الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای است که اولین بار برای تجزیهٔ یك چندجمله‌ای $f \in \mathbf{Q}[X]$ یك متغیره با ضرایب گویا به عوامل تحویل‌ناپذیر در $\mathbf{Q}[X]$ به‌کار گرفته شد و سپس در خدمت ردکنندگان حدس مرتنس و حل‌کنندگان "مسائل مجموع زیرمجموعه‌ای"[1]، درآمد و آنگاه درحل دستگاههای دیوفانتی و یافتن جواب ویژهٔ دستگاههای بسیار بزرگ معادلات خطی همگن مؤثر واقع شد.

این الگوریتم توسط لنسترا[2]، لنسترا جونیور[3]، و لواش[4] [۵] تدوین شده و به همین مناسبت به الگوریتم L^3 شهرت یافته‌است.

در این مقدمه، در چارچوب بررسی کلی و تاریخی تجزیهٔ چندجمله‌ایها، سرشت و جایگاه این الگوریتم را کمی روشن می‌کنیم. در بخش دوم مقاله، الگوریتم را با دقت وجزئیات، همراه با چند مثال ساده تشریح می‌نماییم و در بخشهای بعد به توصیف برخی از کاربردهای آن می‌پردازیم.

به‌مسألهٔ امکان تجزیهٔ چندجمله‌ایها به‌عوامل تحویل‌ناپذیر روی $\mathbf{Q}$ قرنهاست که پاسخ مثبت داده شده است، لکن حل "مؤثر" آن تنها در سالهای اخیر به‌سامان رسیده‌است. نیوتن گویا اولین کسی بوده است که راهی برای یافتن مقسوم‌علیه‌های خطی و درجهٔ دوم پیشنهاد کرده‌است؛ سپس در سال ۱۷۹۳، فریدریش فون شوبرت ستاره‌شناس روش نیوتن را تعمیم می‌دهدو تمام عوامل تحویل‌ناپذیر یك چندجمله‌ای را به دست می‌آورد. روش فون‌شوبرت با نشان دادن تصمیم‌پذیری مسألهٔ تجزیهٔ چندجمله‌ایها به‌عوامل تحویل‌ناپذیر، منطقیون را خشنود می‌سازد، لکن به‌علت "کندی"، دیگرانی را که به‌دنبال حل عملی مسأله هستند راضی نمی‌کند. این روش برای یك چندجمله‌ای درجهٔ n، دست‌کم به "۲ مرحله‌نیاز دارد تا نشان دهد که چند جمله‌ای تحویل‌ناپذیر است یا خیر. بنابراین، برای تجزیهٔ چندجمله‌ایهای با درجهٔ بزرگتر از ۲۰ عملی نیست. اساس مطلب در اینجا مسألهٔ پیچیدگی محاسبه است. یك الگوریتم تجزیه تا چه‌اندازه مجاز است که وقتگیر باشد؟ متخصصین کامپیوتر معتقدند که تنها راه‌حلهای با زمان چندجمله‌ای- یعنی الگوریتمهایی که تعداد گامهای اجرای هر یك از آنها نسبت به‌اندازهٔ ورودی یك چندجمله‌ای است- قابل قبول وعملی هستند. روش فون شوبرت برحسب درجهٔ چندجمله‌ای، نمایی است.

چون تجزیهٔ چندجمله‌ایها روی هیأتهای متناهی ساده‌تر است؛ لذا ابتدا مسألهٔ تجزیه روی هیأتهای متناهی مانند $\mathbf{Z}_p$، مورد بحث قرار گرفته و در سال ۱۹۶۷ برلی کمپ[1] الگوریتمی با زمان

1. subset sum problems
2. A. K. Lenstra
3. H. W. Lenstra Jr.
4. Lovasz

1. Berlekamp

چندجمله‌ای برای تجزیهٔ یك چندجمله‌ای از درجهٔ n روی $\mathbf{Z}_p$ ساخته است [۸]. به‌دنبال آن هنزل[1] نحوهٔ انتقال یك تجزیه از $\mathbf{Z}_p$ به $\mathbf{Z}_{p^2}$ را بیان کرد [۱].

حال فرض کنید عدد اول p، مبین (تعریف مبین را در یادداشت پایان بخش ۳ ببینید.) چندجمله‌ای f را عاد نکند و h یك عامل تحویل‌ناپذیر f در $\mathbf{Z}_p[X]$ باشد. ما به‌دنبال عامل تحویل‌ناپذیر h_0 از f در $\mathbf{Z}[X]$ هستیم که بر h تقسیم‌پذیر باشد. شرط تقسیم‌پذیری h_0 بر h به این معناست که h به "شبکهٔ خاصی" تعلق داشته باشد و شرط اینکه f بر h_0 تقسیم‌پذیر باشد این است که ضرایب h_0 نسبتاً کوچك باشند. بنابراین، مسأله به‌این منجر می‌شود که به‌دنبال عنصر "کوچکی" در شبکهٔ به‌دست آمده از h باشیم. درست این کار است که توسط الگوریتم L^3 انجام می‌پذیرد. این الگوریتم به دفعات لازم تکرار می‌شود تا کلیهٔ عوامل f در $\mathbf{Z}[X]$ به دست آید. لازم به یادآوری است که تجزیهٔ یك چندجمله‌ای در $\mathbf{Q}[X]$ با تجزیهٔ چندجمله‌ای اولیه‌ای از $\mathbf{Z}[X]$ (یعنی یك چند جمله‌ای که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك ضرایبش برابر ۱ باشد)، معادل است.

به‌طور مجمل، الگوریتم L^3 برای شبکه‌های تعمیم‌یافتهٔ ریاضیات کلاسیك پایه‌ای به دست می‌دهد که به وسیلهٔ آن می‌توان عنصر "کوچکی" را در شبکه به دست آورد و این عنصر کوچك است که کارایی بسیار دارد. بدین‌ترتیب الگوریتمی که ظاهر بسیار ساده‌ای دارد، به‌مسائل مهمی پاسخ می‌گوید.

بگذارید در پایان این‌مقدمه، حرف اول مقالهٔ لانداو[2] [۴] را که تأکیدی است بر اهمیت ریاضیات الگوریتمی متذکر شویم: "علوم کامپیوتر راهی برای برگشت به مبدأ ریاضیات، یعنی حساب و محاسبه، فراهم می‌سازد. با مطرح شدن مسألهٔ یافتن اعداد اول، تجزیهٔ اعداد بار دیگر به صحنه می‌آید. و حالا نیز داستانی دیگر: تجزیهٔ چندجمله‌ایها به‌عوامل تحویل‌ناپذیر روی اعداد گویا."

۲. الگوریتم پایهٔ تحویل‌یافته برای شبکه

در این بخش ابتدا به ذکر چند تعریف می‌پردازیم. فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد. زیر مجموعهٔ L از فضای n بعدی اقلیدسی $\mathbf{R}^n$، یك شبکه نامیده می‌شود اگر و تنها اگر یك پایهٔ $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ از $\mathbf{R}^n$ وجود داشته‌باشد به‌طوری که هرعضو L یك ترکیب خطی صحیح از بردارهای B باشد. به‌عبارت دیگر

$$L=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Z}b_i=\left\{\sum_{i=1}^{n}r_ib_i \mid r_i\in\mathbf{Z},\quad 1\leqslant i\leqslant n\right\}.$$

B یك پایهٔ L و n رتبهٔ L نامیده می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که به‌ازای هر پایهٔ $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ از $\mathbf{R}^n$، یك پایهٔ متعامد $B^*=\{b_1^*,\dots,b_n^*\}$ را می‌توان به طور استقرایی از فرایند متعامدسازی گرام ـ اشمیت به صورت زیر به‌دست آورد:

$$b_i^*=b_i-\sum_{j=1}^{i-1}\mu_{ij}b_j^*,\quad 1<i\leqslant n$$

$$\mu_{ij}=(b_i,b_j^*)/(b_j^*,b_j^*),\quad 1\leqslant j<i\leqslant n$$

که در آن $(\cdot,\cdot)$ نمایشگر ضرب داخلی معمولی در $\mathbf{R}^n$ است. همچنین دترمینان L که با $d(L)$ نشان داده می‌شود به صورت $d(L)=|\det(b_1,\dots,b_n)|$ تعریف می‌شود. b_iها بردارهای ستونی هستند و $d(L)$ به پایهٔ انتخاب شده بستگی ندارد. پایهٔ مرتب $B=[b_1,\dots,b_n]$ برای شبکهٔ L، تحول یافته (یا y ـ تحویل یافته) نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$|\mu_{ij}|\leqslant\frac{1}{2},\quad 1\leqslant j<i\leqslant n \qquad (i)$$

$$|b_i^*+\mu_{ii-1}b_{i-1}^*|^2\geqslant y.|b_{i-1}^*|^2\quad 1<i\leqslant n, \qquad (ii)$$

که در اینجا y یك مقدار ثابت $1/4<y<1$ است و $|\cdot|$ نمایشگر طول اقلیدسی است. لنسترا و همکارانش [۵] الگوریتمی ساختند که یك پایهٔ مرتب $B=[b_1,\dots,b_n]$ شبکهٔ L را به یك پایهٔ تحویل یافتهٔ $B'=[b'_1,\dots,b'_n]$ تبدیل می‌کند.

اساس الگوریتم L^3 بر به‌کارگیری دو نوع تبدیل خطی زیر، به‌تعداد متناهی دفعه، استوار است:

$T1$: به‌ازای $1<i\leqslant k$ و ثابت‌عمومی $y\in(1/4,1)$، اگر $|b_i^*+\mu_{ii-1}b_{i-1}^*|\geqslant y|b_{i-1}^*|^2$ برقرار نباشد، بردار b_i و b_{i-1} را جا به‌جا می‌کنیم.

$T2$: اگر به‌ازای $k>1$، $|\mu_{kk-1}|>1/2$، آنگاه به‌جای b_k، b_k-rb_{k-1} را قرار می‌دهیم که در آن $r=\mathrm{round}(\mu_{kk-1})$ است. ($\mathrm{round}(\mu)$ نزدیکترین عدد صحیح به μ است.)

علت موفقیت دنبالهٔ تبدیلات $T1$ و $T2$ این است که مقادیر قدیمی μ_{ij} و $|b_i^*|^2$ را بدون به‌کارگیری کل فرایند متعامدسازی می‌توان تازه کرد. هنگامی که نتوان هیچ یك از تبدیلات $T1$ و $T2$ را به‌کار گرفت، الگوریتم به پایان می‌رسد. پایهٔ تحویل‌یافتهٔ B' تقریب صحیحی از پایهٔ B^* حاصل از فرایند گرام ـ اشمیت است و حاوی بردار کوتاهی می‌باشد. (قسمتهای (۳) و (۴) قضیهٔ ۱ را ببینید.)

از تعریفهای فوق قضیهٔ زیر به سادگی نتیجه می‌شود که بخشی از خواص پایهٔ تحویل‌یافته را برملا می‌سازد.

قضیهٔ ۱. فرض کنید L شبکه‌ای در $\mathbf{R}^n$ با پایهٔ تحویل یافتهٔ $B=[b_1,\dots,b_n]$ و پایهٔ متعامد متناظر $B^*=[b_1^*,\dots,b_n^*]$ باشد. در این‌صورت به‌ازای $y=3/4$ احکام زیر برقرارند:

$$|b_j|^2\leqslant 2^{i-1}|b_i^*|^2,\quad 1\leqslant j\leqslant i\leqslant n \qquad (1)$$

$$d(L)\leqslant\prod_{i=1}^{n}|b_i|\leqslant 2^{n(n-1)/4}d(L) \qquad (2)$$

1. Hensel 2. S. Landau

$$|b_1| \leqslant 2^{(n-1)/4} d(L)^{1/n} \tag{3}$$

$$|b_1|^2 \leqslant 2^{n-1}|x|^2, \quad x \in L, \quad x \neq 0 \tag{4}$$

$$|b_j|^2 \leqslant 2^{n-1} \cdot \max\{|x_1|^2, \ldots, |x_r|^2\} \tag{5}$$

که دراینجا $j = 1, 2, \ldots, r$ و $x_j \in L$ (x_jها مستقل خطی‌اند).

اثبات این احکام وسایر گزاره‌های زیر در سطح مقدماتی است. به [۵] مراجعه کنید. در جدول ۱ تمامی الگوریتم و در تابلوی ۱ فلوچارتی از آن ارائه شده است.

جدول ۱. الگوریتم L^3

$$\left.\begin{array}{l} b_i^* := b_i; \\ \left.\begin{array}{l} \mu_{ij} := (b_i, b_j^*)/B_j; \\ b_i^* := b_i^* - \mu_{ij} b_j^* \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, i-1; \\ B_i := (b_i^*, b_i^*) \end{array}\right\} i = 1, 2, \ldots, n;$$

$k := 2;$

(1) perform (*) for $l = k-1$;

if $B_k < \left(\frac{3}{4} - \mu_{kk-1}^2\right) B_{k-1}$, go to (2);

perform (*) for $l = k-2, k-3, \ldots, 1$;

if $k = n$, terminate;

$k := k+1$;

go to (1);

(2) $\mu := \mu_{kk-1}$; $B := B_k + \mu^2 B_{k-1}$; $\mu_{kk-1} := \mu B_{k-1}/B$;

$B_k := B_{k-1} B_k / B$; $B_{k-1} := B$;

$$\begin{pmatrix} b_{k-1} \\ b_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b_k \\ b_{k-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{k-1j} \\ \mu_{kj} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mu_{kj} \\ \mu_{k-1j} \end{pmatrix} \text{ for } j = 1, 2, \ldots, k-2;$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{ik-1} \\ \mu_{ik} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & \mu_{kk-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{ik-1} \\ \mu_{ik} \end{pmatrix} \text{ for } i = k+1, \ldots, n;$$

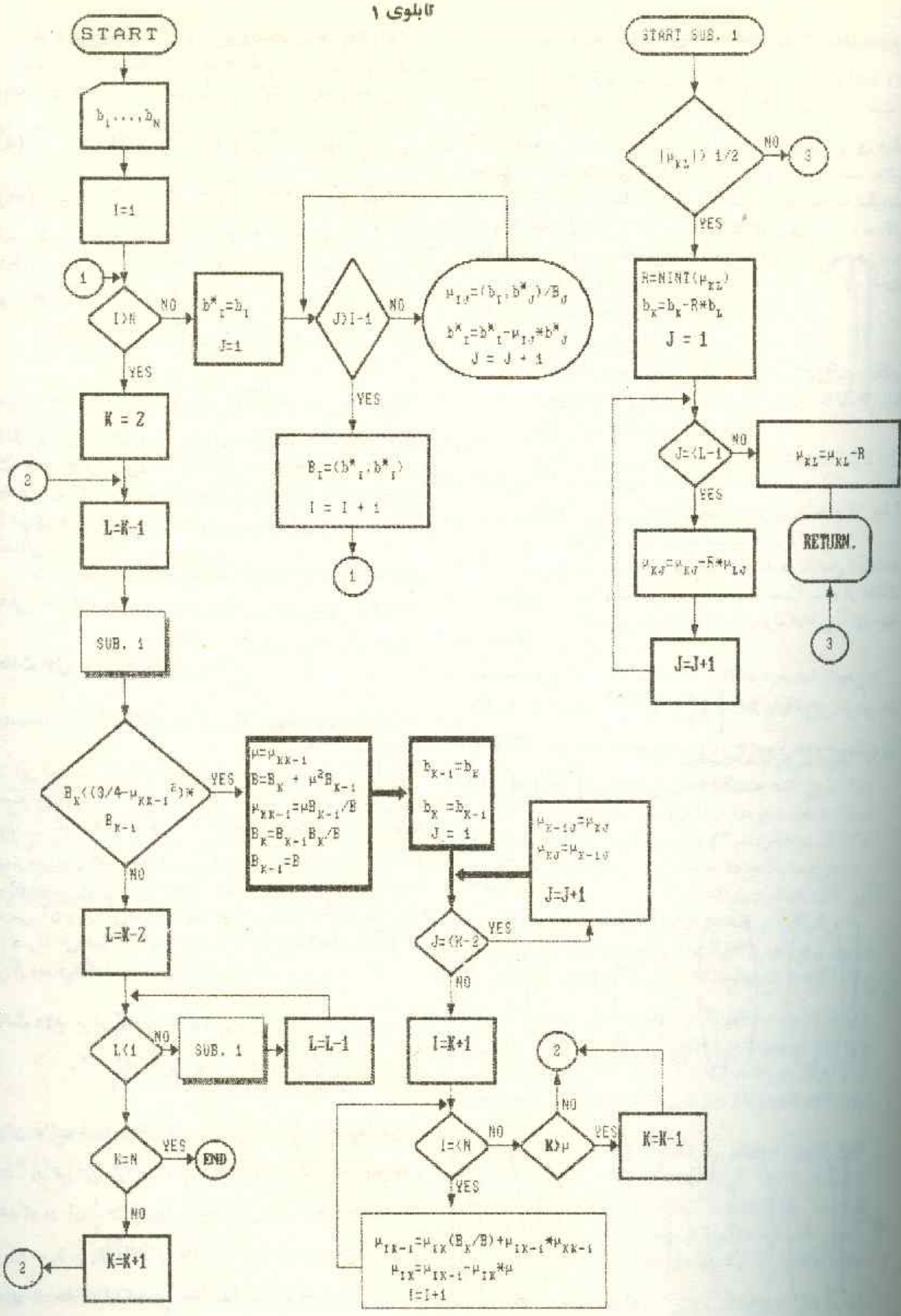
if $k > 2$, then $k := k-1$;

go to (1).

(*) if $|\mu_{kl}| > 1/2$, then;

$$\begin{cases} r := \text{integer nearest to } \mu_{kl};\ b_k := b_k - r b_l; \\ \mu_{kj} := \mu_{kj} - r\mu_{lj} \text{ for } j = 1, 2, \ldots, l-1; \\ \mu_{kl} := \mu_{kl} - r \end{cases}$$

تابلوی ۱


START
$b_1, \ldots, b_N$
I=1
I>N
NO
YES
K = 2
L=K-1
SUB. 1
$b^*_I=b_I$
J=1
J>I-1
$\mu_{IJ}=(b_I, b^*_J)/B_J$
$b^*_I=b^*_I-\mu_{IJ}*b^*_J$
J = J + 1
$B_I=(b^*_I, b^*_I)$
I = I + 1
START SUB. 1
$|\mu_{KL}| > 1/2$
R=NINT(μ_{KL})
$b_K=b_K-R*b_L$
J = 1
J=<L-1
$\mu_{KL}=\mu_{KL}-R$
$\mu_{KJ}=\mu_{KJ}-R*\mu_{LJ}$
J=J+1
RETURN.
$B_K<(3/4-\mu_{KK-1}^2)*B_{K-1}$
$\mu=\mu_{KK-1}$
$B=B_K+\mu^2B_{K-1}$
$\mu_{KK-1}=\mu B_{K-1}/B$
$B_K=B_{K-1}B_K/B$
$B_{K-1}=B$
$b_{K-1}=b_K$
$b_K=b_{K-1}$
J = 1
$\mu_{K-1J}=\mu_{KJ}$
$\mu_{KJ}=\mu_{K-1J}$
J=J+1
J=<K-2
L=K-2
L<1
L=L-1
I=K+1
I=<N
K>μ
K=K-1
K=N
END
$\mu_{IK-1}=\mu_{IK}(B_K/B)+\mu_{IK-1}*\mu_{KK-1}$
$\mu_{IK}=\mu_{IK-1}-\mu_{IK}*\mu$
I=I+1
K=K+1

حال به شرح الگوریتم L^3 می‌پردازیم. در هر گام الگوریتم با یك پارامتر k سروکار داریم که $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. در ابتدا $k=2$. در هر گام شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$|\mu_{ij}| \leqslant \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant j < i < k \qquad (*)$$

$$|b_i^* + \mu_{i,i-1} b_{i-1}^*|^2 \geqslant y \cdot |b_{i-1}^*|^2, \quad 1 < i < k. \qquad (**)$$

این شرایط به وضوح به ازای $k=2$ برقرارند و وقتی $k=n+1$، پایهٔ تحویل‌یافته به دست می‌آید. پس فرض می‌کنیم $k \leqslant n$.

ابتدا شرط (*) را بررسی می‌کنیم. اگر به ازای $k > 1$،

$$|\mu_{k,k-1}| > \frac{1}{2}$$

آنگاه فرض می‌کنیم $r = \mathrm{round}(\mu_{k,k-1})$ و $b_k - r b_{k-1}$ را به جای b_k قرار می‌دهیم. به‌ازای $j < k-1$، $\mu_{kj} - r\mu_{k-1,j}$ را به جای μ_{kj}، و $\mu_{k,k-1} - r$ را به جای $\mu_{k,k-1}$ قرار می‌دهیم. با این‌کار شرط (*) برقرار می‌شود. اثبات این مدعا نیز درسطح مقدماتی است.

حال شرط (**) را درنظر می‌گیریم و دربارهٔ دوحالت زیر به‌طور جداگانه بحث می‌کنیم.

حالت اول. فرض کنید $k \geqslant 2$ و

$$|b_k^* + \mu_{k,k-1} b_{k-1}^*|^2 < \frac{3}{4} |b_{k-1}^*|^2.$$

در این صورت b_k را با b_{k-1} تعویض می‌کنیم و به‌بقیهٔ b_iها دست‌نمی‌زنیم. حال بردارهای b_{k-1}^* و b_k^* و اعداد $\mu_{k,k-1}$، $\mu_{k-1,j}$، μ_{kj}، $\mu_{i,k-1}$، μ_{ik}، به‌ازای $j < k-1$ و $i > k$، تغییر می‌یابند. مهمترین این تغییرات، قرار گرفتن $b_k^* + \mu_{k,k-1} b_{k-1}^*$ به جای b_{k-1}^* است. بدین ترتیب مقدار جدید $|b_{k-1}^*|^2$ از ۳/۴ مقدار قدیمی آن بیشتر می‌شود. برای انجام تغییرات، به‌جای k، $k-1$ را قرار می‌دهیم. از اینجا دوباره به‌شرایط (*) و (**) بازمی‌گردیم و الگوریتم را پی می‌گیریم.

حالت دوم. فرض کنید $k=1$ یا

$$|b_k^* + \mu_{k,k-1} b_{k-1}^*|^2 \geqslant \frac{3}{4} |b_{k-1}^*|^2.$$

دراین حالت باید به‌ازای $1 \leqslant j \leqslant k-1$، $|\mu_{kj}| \leqslant \frac{1}{2}$ برقرار باشد. در غیر این صورت، فرض کنید l نزدیکترین اندیس به k باشد که در آن $|\mu_{kl}| > \frac{1}{2}$. حال قرار می‌دهیم $r = \mathrm{round}(\mu_{kl})$ و $b_k = b_k - r b_l$، و کار را مانند حالت اول ادامه می‌دهیم تا به ازای $1 \leqslant j \leqslant k-1$، $|\mu_{kj}| \leqslant \frac{1}{2}$ برقرار شود.

حال k را با $k+1$ عوض می‌کنیم، و الگوریتم را ادامه می‌دهیم.

قضیهٔ ۲. الگوریتم L^3 به‌پایان می‌رسد هرگاه نتوان تبدیلات $T1$ و $T2$ را به‌کار برد. به‌عبارت دیگر الگوریتم L^3 پایان‌پذیر است.

قضیهٔ ۳. فرض کنید $B = [b_1, \dots, b_n]$ پایهٔ مرتبی برای شبکهٔ صحیح L باشد به‌طوری که به ازای $1 \leqslant i \leqslant n$ داشته باشیم $|b_i| \leqslant M$، که M یك عدد ثابت است. در آن صورت الگوریتم L^3 پایهٔ تحویل‌یافتهٔ $B' = [b_1', \dots, b_n']$ برای L را با حداکثر $O(n^4 \log_2 M)$ عمل حسابی تولید می‌کند، و اعداد صحیحی که این عملیات در آنها انجام می‌گیرد حداکثر دارای طول $O(n \log_2 M)$ هستند.

به‌طور خلاصه:

الگوریتم L^3 هنگامی که روی یك پایهٔ Bی یك شبکهٔ n بعدی $L \subset \mathbf{Z}^n$ اعمال شود آن را به‌یك پایهٔ تحویل‌یافتهٔ B' برای L تبدیل می‌کند. ضمناً

(۱) برای این کار حداکثر به $O(n^4 \log_2 M)$ عمل نیاز است.

(۲) B' تقریباً متعامد است (تقریبی صحیح از پایهٔ متعامدسازی گرام-اشمیت است).

(۳) B' بردارهای کوتاهی در بر دارد. درعمل ثابت‌شده است که طول بردارهای به‌دست‌آمده از اعمال الگوریتم بسیار کوتاهتر ازطول ادعایی آنهاست.

مثال ۱. فرض کنید $B = \left[\binom{5}{0}, \binom{0}{1}\right]$ پایهٔ مرتبی برای یك شبکهٔ $L \subset \mathbf{Z}^2$ باشد. این پایه به‌وضوح تحویل‌یافته نیست، ولی $B' = \left[\binom{0}{1}, \binom{5}{0}\right]$ تحویل‌یافته است.

مثال ۲.

$$B = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$B' = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]$$

پایهٔ متعامد $(B')^*$ متناظر با B' به‌این صورت است

$$(B')^* = \left[\begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ -1.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.00 \\ 0.50 \\ 0.00 \\ 0.50 \\ 0.00 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.66 \\ 0.66 \\ -1.00 \\ 0.66 \\ 0.00 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.57 \\ 0.57 \\ 1.14 \\ 0.57 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.35 \\ 0.70 \\ 0.35 \\ -1.39 \end{pmatrix} \right]$$

$\mu_{21} = -0.50$

$\mu_{31} = 0.50 \qquad \mu_{32} = -0.33$

$\mu_{41} = 0.50 \qquad \mu_{42} = -0.33$

$\mu_{43} = 0.14$

$\mu_{51} = 0.50 \qquad \mu_{52} = -0.33$

$\mu_{53} = 0.14 \qquad \mu_{54} = 0.39$

این محاسبات به‌وسیلهٔ یك برنامهٔ کامپیوتری انجام گرفته است[۱۱]. مرجع اصلی این بخش، [۵] است.

۳. تجزیهٔ سریع چندجمله‌ایها

از آنجایی که خاستگاه اصلی الگوریتم L^3 تجزیهٔ چندجمله‌ایها است، جادارد این مسأله را با تفصیل بیشتری بررسی کنیم تا نحوهٔ به‌کارگیری الگوریتم L^3 در تجزیه دقیقاً روشن‌شود. نخست رابطهٔ بین تجزیه وشبکه‌ها را به‌اختصار شرح می‌دهیم. این مطالب برای فهم الگوریتم ضروری است.

فرض کنید p یك عدد اول و k یك عدد صحیح مثبت باشد. همچنین فرض کنید $f \in \mathbf{Z}[X]$ یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ n، $n > 0$ و $h \in \mathbf{Z}[X]$ یك چندجمله‌ای با ویژگیهای زیر باشد.

(۱) h یك چندجمله‌ای یکانی است.
(۲) $h(\bmod p^k)$ در $\mathbf{Z}_{p^k}[X]$، $f(\bmod p^k)$ را عاد می‌کند.
(۳) $h(\bmod p)$ در $\mathbf{Z}_p[X]$ تحویل‌ناپذیر است.
(۴) $[h(\bmod p)]^2$ در $\mathbf{Z}_p[X]$، $f(\bmod p)$ را عاد نمی‌کند.

قضیهٔ ۱. چندجمله‌ای $f \in \mathbf{Z}[X]$ دارای عامل تحویل‌ناپذیر $h_0 \in \mathbf{Z}[X]$ است اگر $h(\bmod p)$، که در آن h دارای ویژگیهای فوق است، $h_0(\bmod p)$ را عادکند، واین عامل صرف نظر ازعلامت به‌طور منحصر به فرد تعیین می‌شود. به‌علاوه اگر g در $\mathbf{Z}[X]$، f را عادکند، آنگاه سه شرط زیر هم‌ارزند:

(الف) $h(\bmod p)$ در $\mathbf{Z}_p[X]$، $g(\bmod p)$ را عاد می‌کند.
(ب) $h(\bmod p^k)$ در $\mathbf{Z}_{p^k}[X]$، $g(\bmod p^k)$ را عاد می‌کند.
(پ) h_0 در $\mathbf{Z}[X]$، g را عاد می‌کند.

تبصرهٔ ۱. فرض کنید m یك عدد صحیح ثابت است به‌طوری که $l \leqslant m$، و نیز فرض کنید L مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهای متعلق به $\mathbf{Z}[X]$ با درجهٔ نابیشتر از m است به‌طوری که وقتی به‌پیمانهٔ p^k حساب‌شوند بر $h(\bmod p^k)$ در $\mathbf{Z}_{p^k}[X]$ تقسیم‌پذیر باشند. این مجموعه زیرمجموعه‌ای از فضای برداری $(n+1)$ بعدی

$$\mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot x + \cdots + \mathbf{R} \cdot x^m$$

است. این فضای برداری با $\mathbf{R}^{m+1}$ تحت نگاشت خطی

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \longrightarrow (a_0, \cdots, a_m)$$

یکریخت است. به‌این‌جهت طول چندجمله‌ای $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ را به صورت $|f| = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i^2\right)^{1/2}$ تعریف می‌کنیم. به‌سادگی می‌توان دید که L یك شبکه در $\mathbf{R}^{m+1}$ است وباتوجه به‌شرط (۱) مجموعهٔ

$$\{p^k x^i \mid 0 \leqslant i < l\} \cup \{h x^j \mid 0 \leqslant j \leqslant m-l\}$$

یك پایهٔ L است و ضمناً $d(L) = p^{kl}$.

قضیهٔ ۲. فرض کنید h_0 همان چندجمله‌ای مذکور در قضیهٔ ۱ و L شبکهٔ فوق باشد. نیز فرض کنید $b \in L$ در شرط

$$p^{kl} > |f|^m \cdot |b|^n$$

صدق کند. دراین صورت b بر h_0 در $\mathbf{Z}[X]$ تقسیم‌پذیر است، وبه‌ویژه $\gcd(f, b) \neq 1$.

قضیهٔ ۳. فرض کنید p یك عدد اول و k یك عدد صحیح مثبت باشد و $f \in \mathbf{Z}(X)$ و $n = \deg f$ و چندجمله‌ای h در شرایط (۱)، (۲)، (۳) و (۴) صدق کند. همچنین فرض کنید h_0 در شرایط قضیهٔ ۱ صادق باشد، و m و L همان m و L مذکور در تبصرهٔ ۱ باشند. نیز تصور کنید $[b_1, \cdots, b_{m+1}]$ یك پایهٔ تحویل‌یافته برای L است و

$$p^{kl} > 2^{mn/2} \binom{2m}{m}^{n/2} |f|^{m+n}.$$

دراین‌صورت، $\deg h_0 \leqslant m$ اگر و تنها اگر

$$|b_1| < \left(\frac{p^{kl}}{|f|^m}\right)^{1/n}.$$

قضیهٔ ۴. فرض کنید نمادها و فرضها همانند قضیهٔ قبل باشند وعلاوه برآن فرض کنید که اندیسی چون $j \in \{1, \cdots, m+1\}$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$|b_j| < \left(\frac{p^{kl}}{|f|^m}\right)^{1/n}. \qquad (1)$$

حال فرض کنید t بزرگترین عدد j باخاصیت فوق باشد. دراین‌صورت

$$\deg(h_0)=m+1-t$$

$$h_0=\gcd(b_1,\ \cdots,\ b_t)$$

و نامساوی (۱) برای تمام j ها، $1\leqslant j\leqslant t$، برقرار است.

تبصرهٔ ۲. اگر $t=1$، آنگاه b_1 یك عامل تحویل‌ناپذیر f است و نیازی به‌محاسبهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك نیست.

شرح الگوریتم. فرض کنید $f\in\mathbf{Z}[X]$ یك چندجمله‌ای اولیه‌از درجهٔ n $(n>0)$ باشد. می‌خواهیم الگوریتمی ارائه کنیم که f را به عوامل تحویل‌ناپذیر در $\mathbf{Z}[X]$ تجزیه کند. الگوریتم شامل دو بخش کمکی و یك بخش اصلی است.

بخش کمکی ۱. فرض کنید که علاوه‌بر f و n، یك عدد اول p، یك‌عدد صحیح‌مثبت k و یك‌چندجمله‌ای $h\in\mathbf{Z}[X]$ داده‌شده‌اند و شرایط (۱)، (۲)، (۳)، و (۴) برقرارند. نیز فرض کنید که ضرایب h در $\mathbf{Z}_{p^k}$ در شرط

$$|h|^2\leqslant 1+lp^{2k}$$

صدق کنند، که در آن $l=\deg h$. به‌علاوه تصور کنید $m\geqslant l$ داده شده است و نامساوی

$$p^{kl}>2^{mn/2}\binom{2m}{m}^{n/2}|f|^{m+n}$$

برقرار است. در این صورت الگوریتمی که ارائه می‌دهیم تصمیم می‌گیرد که آیا $\deg h_0\leqslant m$ یا خیر (h_0 همان‌چندجمله‌ای‌مذکور در قضیهٔ ۱ است). و اگر $\deg h_0\leqslant m$، h_0 را می‌توانیم تعیین کنیم.

فرض کنید L شبکهٔ تعریف شده در تبصرهٔ ۱ با پایهٔ

$$\{p^kx^i\mid 0\leqslant i<l\}\cup\{hx^j\mid 0\leqslant j\leqslant m-l\}$$

است. با استفاده از الگوریتم L^3 پایهٔ تحویل یافتهٔ $[b_1,\ \cdots,\ b_{n+1}]$ را برای L به‌دست می‌آوریم.

اگر $|b_1|>(p^{kl}/|f|^m)^{1/n}$، آنگاه بر طبق قضیهٔ ۳ داریم $\deg h_0>m$ و الگوریتم متوقف می‌شود.

اگر $|b_1|<(p^{kl}/|f|^m)^{1/n}$، آنگاه طبق قضیهٔ ۳ و قضیهٔ ۴ داریم

$$\deg h_0\leqslant m,\ h_0=\gcd(b_1,\ \cdots,\ b_t)\cdot$$

در اینجا همان شرایط مذکور در قضیهٔ ۴ روی t برقرارند. (این بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك را می‌توان با کاربرد مکرر الگوریتم زیر برایند[1] به دست آورد. (الگوریتم زیر برایند در [۱] آمده است.))

قضیهٔ ۵. تعداد اعمال حسابی لازم در الگوریتم کمکی فوق $O(m^4k\log p)$ است، و اعداد صحیحی که روی آنها این اعمال صورت می‌گیرد هریك دارای طول دوتایی $O(mk\log p)$ است. (منظور از طول دوتایی، تعداد ارقام عدد در دستگاه دوتایی است).

1. subresultant

بخش کمکی ۲. فرض کنید علاوه‌بر f و n، یك‌عدد اول p و یك چندجمله‌ای $h\in\mathbf{Z}[X]$ داده شده‌اند به‌طوری که شرایط (۱)، (۲)، (۳)، و (۴) برقرارند با این‌تفاوت که به‌جای k، ۱ قرار دارد. تصور کنید که ضرایب h به $\mathbf{Z}_p$ منتقل شده‌اند. الگوریتمی که اینك عرضه می‌کنیم h_0 را تعیین می‌کند. h_0 یك‌عامل تحویل‌ناپذیر f است به‌طوری که $h(\bmod p)$، $h_0(\bmod p)$ را عاد می‌کند.

فرض کنید $l=\deg(h)$. اگر $l=n$، آنگاه $h_0=f$ و الگوریتم متوقف می‌شود. اگر $l<n$، نخست کوچکترین عدد مثبت k را به‌دست‌می‌آوریم که به‌ازای‌آن، نابرابری (۱) برقرار باشد. با این شرط که به‌جای m عدد $n-1$ قرار گیرد، داریم

$$p^{kl}>2^{(n-1)n/2}\binom{2(n-1)}{n-1}|f|^{2n-1}.$$

سپس h را اصلاح می‌کنیم بدون‌اینکه $h(\bmod p)$ را عوض کنیم. این کار را به‌طریقی انجام می‌دهیم که علاوه‌برشرایط (۱)، (۳)، (۴)، شرط (۲) برای مقداری از k که محاسبه می‌شود برقرار باشد. این عمل با استفاده از لم هنزل صورت می‌گیرد. می‌توانیم فرض‌کنیم که ضرایب h به $\mathbf{Z}_pk$ منتقل شده‌اند.

گیریم u بزرگترین عدد صحیحی باشد که به ازای آن $l\leqslant(n-1)/2^u$. الگوریتم کمکی ۱ را متوالیاً برای هریك از مقادیر

$$m,\ \left[\frac{n-1}{2^u}\right],\ \left[\frac{(n-1)}{2^{u-1}}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{(n-1)}{2}\right],\ n-1$$

به کار می‌بریم. ($[x]$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x است.) اما به‌محض این‌که برای یکی‌از مقادیر m، الگوریتم کمکی ۱ موفق به‌تعیین h_0 شود، الگوریتم را متوقف می‌سازیم. اگر به‌ازای هیچ‌یك از مقادیر m، h_0 تعیین نشود، آنگاه $\deg h_0>n-1$، و بنابراین $h_0=f$ و الگوریتم متوقف می‌شود.

قضیهٔ ۶. فرض کنید $m_0=\deg h_0$، درجهٔ عامل تحویل‌ناپذیر h_0 از f باشدکه توسط‌الگوریتم‌کمکی ۲ به‌دست‌می‌آید. دراین‌صورت تعداد عملیات حسابی لازم در این الگوریتم مساوی $O(m_0(n^5+n^4\log|f|+n^3\log p))$ است و اعداد صحیحی که‌این‌عملیات روی‌آنها انجام می‌گیرد هرکدام دارای طول دوتایی $O(n^2+n^2\log|f|+n\log p)$ است.

بخش اصلی الگوریتم. حال الگوریتمی را شرح می‌دهیم که یك چندجمله‌ای اولیهٔ داده‌شدهٔ $f\in\mathbf{Z}[X]$ با درجهٔ $n>0$ را به عوامل تحویل‌ناپذیر در $\mathbf{Z}[X]$ تجزیه می‌کند.

اولین گام محاسبهٔ برایند، $R(f,\ f')$، است که در آن f' مشتق f است [برای تعریف برایند به یادداشت پایان بخش ۳ مراجعه کنید.] اگر $R(f,\ f')=0$، آنگاه f و f' دارای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك g در $\mathbf{Z}[X]$ با درجهٔ مثبت است و g را با الگوریتم زیر برایند به دست می‌آوریم. این حالت را در پایان مورد بحث قرار می‌دهیم. پس فرض کنید $R(f,\ f')\neq 0$.

در گام دوم کوچکترین عدد اول p را به‌دست می‌آوریم که $R(f,\ f')$ را عاد نکند، و سپس $f(\bmod p)$ را در $\mathbf{Z}_p[X]$

توسط الگوریتم برلی کمپ تجزیه می‌کنیم. توجه دارید که $R(f, f')$ صرف‌نظر از علامت، برابر است با حاصلضرب ضریب پیشرو f درمبین آن. بنابراین $R(f, f')\equiv 0 \pmod p$ نتیجه می‌دهد که $f \pmod p$ هنوز دارای درجهٔ n است و در $\mathbf{Z}_p[X]$ دارای هیچ عامل چندگانه نیست؛ بنابراین شرط (۴) برای هر عامل تحویل‌ناپذیر $h \pmod p$ از $f \pmod p$ در $\mathbf{Z}_p[X]$ برقرار است.

در گام سوم، فرض می‌کنیم که یک تجزیهٔ $f=f_1f_2$ در $\mathbf{Z}[X]$ را می‌شناسیم به قسمی که تجزیهٔ کامل f_1 در $\mathbf{Z}[X]$ و $f_2 \pmod p$ در $\mathbf{Z}_p[X]$ معلوم هستند. در نقطهٔ شروع می‌توانیم فرض کنیم که $f_1=1$ و $f_2=f$. در این وضعیت، کار را به صورت زیر ادامه می‌دهیم: اگر $f_2=\pm 1$، آنگاه $f=\pm f_1$ به‌طور کامل در $\mathbf{Z}[X]$ تجزیه می‌شود، و الگوریتم متوقف می‌شود. حال فرض کنید f_2 دارای درجهٔ مثبت است. در $\mathbf{Z}_p[X]$ یک عامل تحویل‌ناپذیر $h \pmod p$ از $f_2 \pmod p$ را انتخاب می‌کنیم. می‌توانیم فرض کنیم که ضرایب h به‌پیمانهٔ p تحویل یافته‌اند و h دارای ضریب پیشرو ۱ است. اکنون درهمان وضعیتی هستیم که الگوریتم کمکی ۲ را شروع کردیم، با این تفاوت که f_2 نقش f را دارد، و با استفاده از این الگوریتم، عامل تحویل‌ناپذیر h_0 از f_2 را در $\mathbf{Z}[X]$ به دست می‌آوریم، زیرا $h \pmod p$، $h_0 \pmod p$ را عاد می‌کند. اکنون f_1 و f_2 را به ترتیب با f_1h_0 و f_2/h_0 عوض می‌کنیم وازفهرست عاملهای تحویل‌ناپذیر $f_2 \pmod p$ آن عاملهایی راکه $h_0 \pmod p$ را عاد می‌کنند حذف می‌کنیم. حال دوباره به آغاز مرحلهٔ سوم برمی‌گردیم. بدین‌ترتیب توصیف الگوریتم درحالتی که $R(f, f')\neq 0$ است پایان می‌یابد.

اکنون فرض کنیدکه $R(f, f')=0$، و نیز تصور کنیدکه g بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک f و f' در $\mathbf{Z}[X]$ است، و قرار دهید $f_0=f/g$. در این صورت، f_0 دارای هیچ‌عامل چندگانه در $\mathbf{Z}[X]$ نیست. بنابراین، $R(f_0, f_0')\neq 0$ و می‌توانیم f_0 را توسط‌قسمت‌اصلی الگوریتم تجزیه‌کنیم. چون‌هرعامل‌تحویل‌ناپذیر g در $\mathbf{Z}[X]$، f_0 را عاد می‌کند، می‌توانیم تجزیهٔ $f=f_0g$ را با تقسیمهای متوالی کامل کنیم.

قضیهٔ ۷. الگوریتم فوق هر چندجمله‌ای اولیهٔ $f\in\mathbf{Z}[X]$ با درجهٔ مثبت n را به‌عوامل تحویل‌ناپذیر در $\mathbf{Z}[X]$ تجزیه می‌کند. تعداد عملیات حسابی لازم برای اجرای این برنامه $O(n^6+n^5\log|f|)$ است و اعداد صحیحی که این عملیات روی آنها انجام می‌گیرند هرکدام دارای طول دوقایی $O(n^3+n^2\log|f|)$ است.

یادداشت

تعریف ۱. فرض کنید $f\in K[X]$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n\geqslant 2$ است، و فرض کنید $f(x)=a_0\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ و α_iها متعلق به‌هیأت شکافندهٔ f روی K هستند. دراین صورت مبین f که با $D(f)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)^2.$$

از تعریف $D(f)$ برمی‌آیدکه f دارای ریشهٔ چندگانه است اگر و تنها اگر $D(f)=0$.

تعریف ۲. اگر $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$ و بپذیریم که ممکن است $a_0=0$، در این صورت n مساوی درجهٔ $f(x)$ نیست. از n به‌عنوان درجهٔ صوری f یاد می‌کنیم.

فرض کنید K یک هیأت و $f\in K[X]$ و

$$g\in K[X] \text{ و } g(x)=b_0x^m+\cdots+b_m$$

دو چند جمله‌ای با درجات صوری n و m باشند. دراین صورت برایند این دو چندجمله‌ای که با $R(f, g)$ نمایش داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \cdots a_n & 0\cdots 0 \\ 0 & a_0a_1\cdots a_n & 0\cdots 0 \\ & & \vdots \\ 0\cdots 0 & a_0 & \cdots a_n \\ b_0 & b_1\cdots b_m & \\ 0 & b_0\cdots b_1\cdots b_m & \\ \vdots & & \\ 0 & 0\cdots 0 & b_0b_1\cdots b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ سطر} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ سطر} \end{matrix}$$

این دترمینان از مرتبهٔ $m+n$ است. اگر $a_0\neq 0$ و اگر α_iها ریشه‌های $f(x)$ در هیأت شکافندهٔ f روی K باشند، آنگاه

$$R(f, g)=a_0^m\prod_{i=1}^{m}g(\alpha_i).$$

با توجه به‌اینکه عضو $b\in K$ یک ریشهٔ چندگانهٔ $f\in K[X]$ است اگر وتنها اگر b ریشهٔ مشترکی از f و f' باشد، ارتباط بین $D(f)$ و $R(f, f')$ به‌دست می‌آید.

$$D(f)=(-1)^{n(n-1)/2}a_0^{-1}R(f, f').$$

مراجع عمدهٔ این بخش عبارت‌اند از [۵]، [۴]، [۱]، [۶].

۴. حدس مرتنس و اثبات نادرستی آن

رد حدس مرتنس با استفاده ازالگوریتم L^3، در واقع اولین کاربرد مهم این الگوریتم به‌غیر از کاربرد اصلی آن یعنی تجزیهٔ چندجمله‌ایها می‌باشد. این کاربرد برکارایی الگوریتم بیشتر صحه می‌گذارد. حدس مرتنس به‌دلیل اینکه درست بودنش می‌توانست درستی فرضیهٔ ریمان را نتیجه بدهد، در نظریهٔ اعداد ازاعتباری برخوردار بود. ولی نادرستی حدس مرتنس چیزی دربارهٔ فرضیهٔ ریمان بیان نمی‌کند.

برای اینکه ارزش این کاربرد بهتر معلوم شودکمی در بارهٔ حدس مرتنس گفتگو می‌کنیم.

***

یکی از مسائل مهم در نظریهٔ اعداد، مسألهٔ توزیع اعداد اول است. در این باره "قضیهٔ اعداد اول" می‌گویدکه اگر $\pi(x)$ نمایشگر تعداد اعداد اول کوچکتر از x باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1.$$

این حدس را اولین بار گاوس و لژاندر بیان کردند و بعدها به‌وسیلهٔ پواسون و آدامار به‌اثبات رسید. ریمان نیز در مقاله‌ای به‌بررسی اعداد اول پرداخت و با فرمول دقیقی توانست $\pi(x)$ را به‌صفرهای تابع زتا مرتبط سازد. ریمان قضیهٔ خود را براساس شش فرض بدون اثبات، ثابت کرد. همهٔ این فرضها بعداً اثبات شدند، به‌استثنای یکی از آنها که بعدها به‌فرضیهٔ ریمان شهرت یافت و شرح مجمل آن چنین است: تابع زتا را درنظر بگیرید

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}. \qquad (1)$$

این تابع نخستین بار درقرن هفدهم مطرح شد. ریاضیدانان بزرگی از قبیل برنولی‌ها و اویلر به‌آن علاقهٔ وافرنشان دادند. در قرن نوزدهم ریمان نیز آن را مورد بررسی قرار داد. هرچند سری $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^s$ تنها به‌ازای $\mathrm{Re}\,s>1$ تعریف شده‌است، لکن به‌سادگی می‌توان ادامه‌ای تحلیلی برای آن یافت، یعنی تابعی تحلیلی چون f که بر تمام صفحهٔ مختلط تعریف شده است و تحدید آن در نیمصفحهٔ $\mathrm{Re}\,s>1$ با سری فوق برابر است. این تابع راهم با ζ نمایش می‌دهیم. همچنین ریمان نشان داد که معادلهٔ تابعی

$$\zeta(s)=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s) \qquad (2)$$

برقراراست. دراینجا Γ همان تابع گاما است با استفاده از (۱) و (۲) می‌توان نشان داد که کلیهٔ صفرهای تابع زتا، به استثنای صفرهای بدیهی (اعدادصحیح زوج منفی)، برنوار $0<\mathrm{Re}\,s<1$ (موسوم به نوار بحرانی) واقع‌اند. فرضیهٔ ریمان می‌گوید که تمامی صفرهای غیربدیهی تابع زتا بر "خط بحرانی" $\mathrm{Re}\,s=1/2$ واقع‌اند. امروزه انتظار همگان آن است که درستی این فرضیه اثبات شود. نشان داده شده است که دست‌کم ۷۰ درصد صفرهای غیربدیهی (صفرهای روی نوار بحرانی) روی خط بحرانی واقع‌اند ونخستین ۷ میلیون صفرغیربدیهی نیزروی خط بحرانی قراردارند. اما اثبات فرضیه بحث دیگری است. پس مسأله آن است که تحلیلی بودن تابع زتا را درخارج از نوار بحرانی مورد بررسی قرار دهیم. برای این کارمی‌توان قطبهای ζ^{-1} را بررسی کرد. نخستین گام در این راه، محاسبهٔ $\zeta^{-1}(s)$ به‌ازای $\mathrm{Re}\,s>1$، بود.

فرض کنید μ تابع موبیوس باشد، یعنی

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ (-1)^k & n=\prod_{i=1}^{k}p_i \ (p_i\text{ها اعداد اول متمایزهستند})\\ 0 & p^2|n \ (\text{به‌ازای یك عدد اول } p)\end{cases}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)/n^s$ نیزدرناحیهٔ $\mathrm{Re}\,s>1$ تحلیلی است و داریم

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)=1,$$

یا

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}.$$

سری فوق در $\mathrm{Re}\,s>1$ همگراست، پس تابع $1/\zeta$ دراین ناحیه تحلیلی است. این مقدار اطلاع برای فرضیهٔ ریمان بسنده نیست (باید درجستجوی یك ادامهٔ تحلیلی تابع $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)/n^s$ باشیم.) اگر $M(x)$ نمایانگرمجموعهای جزیی تابع موبیوس باشد:

$$M(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n).$$

در این صورت با توجه به اینکه $M(x)$ روی هر بازهٔ به‌صورت $[n,n+1)$ ثابت‌است، داریم

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(n)-M(n-1)}{n^s} \qquad (3)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}M(n)\left[\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n-1)^s}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}M(n)\int_n^{n+1}\frac{s\,dx}{x^{s+1}}=s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{M(x)\,dx}{x^{s+1}}$$

$$=s\int_1^{\infty}\frac{M(x)\,dx}{x^{s+1}}.$$

هرچند درستی رابطهٔ فوق را تنها به‌ازای $\mathrm{Re}\,s>1$ نشان دادیم، اما با توجه به‌اینکه تابعی که توسط انتگرال فوق تعریف می‌شود تحلیلی‌است، بنابرقضیه‌ای مقدماتی در آنالیز، تساوی فوق در هر ناحیه‌ای که این انتگرال همگرا باشد، برقراراست. اما با استفاده از معادلهٔ تابعی (۲)، کافی‌است ثابت کنیم که انتگرال فوق به‌ازای $\mathrm{Re}\,s>1/2$ همگراست. پس اگر انتگرال فوق را به‌صورت $s\int_1^{\infty}M(x)x^{-1/2}\,dx/x^{s+(1/2)}$ بیان کنیم، باید به‌بررسی رفتار $x^{-1/2}M(x)$ درهمسایگی بینهایت بپردازیم. اگراین عبارت کراندار باشد، در آن صورت انتگرال فوق می‌تواند تابعی تحلیلی در $\sigma=\mathrm{Re}\,s>1/2$ تعریف کند و این، به تحلیلی بودن $1/\zeta(s)$ در $\sigma>1/2$ دلالت می‌کند واز این، درست‌بودن فرضیهٔ ریمان نتیجه می‌شود.

در سال ۱۸۹۷، مرتنس درمقاله‌ای در باب تابع زتا مقادیر عددی $M(n)$ و $\mu(n)$ را به‌ازای $n=1,2,\ldots,10^4$ محاسبه کرد و برمبنای این محاسبات حدس زدکه نامساوی

$$|M(x)|<x^{1/2},\qquad x>1$$

درست‌است. امروزه این نامساوی را حدس مرتنس می‌نامند.

در سال ۱۹۶۳، نویباوئر[1] مقادیر $M(n)$ را برای $n\leqslant 7.8\times 10^9$ محاسبه و مشاهده کرد که به‌ازای تمام این مقادیر

1. Neubauer

رابطهٔ فوق برقرار است. در واقع انتظار می‌رود که این نابرابری برای هر $n \leqslant 10^{30}$ درست باشد وحتی با توجه به قدرت کامپیوترهای امروزی نیز یافتن مثالی برای رد آن به‌طور مستقیم عملی نباشد [۷].

درنظریهٔ اعداد فرمولهای دقیقی وجود دارندکه توابعی‌چون $\pi(x)$ را به صفرهای تابع زتا مربوط می‌سازند. در سال ۱۹۵۱ تیچمارش[1] بافرض‌درستی فرضیهٔ ریمان وساده‌بودن صفرهای تابع زتا،فرمول‌مشابهی برای $M(x)$ کشف کرد. ازاین‌فرمول به‌سادگی نتیجه می‌شود که $\sum_{\rho} 1/|\rho\zeta'(\rho)|$ که سیگما روی صفرهای غیربدیهی‌تابع زتا $(\rho = 1/2 + i\gamma)$ است، واگراست. به‌علاوه اگر تعویض متغیر

$$x = e^y, \qquad -\infty < y < +\infty$$

را اعمال‌کنیم و قراردهیم

$$h(y) = \lim_{k \to \infty} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| < T_k}} \frac{e^{i\gamma y}}{\rho\zeta'(\rho)},$$

و

$$m(y) = M(x)x^{-1/2} = M(e^y)e^{-y/2},$$

آنگاه داریم

$$m(y) = h(y) + O(\min(1, e^{-y/2})).$$

(در تعریف h، T_k دنباله‌ای است که در فرمول تیچمارش ظاهر می‌شود و درنابرابری $k \leqslant T_k \leqslant k+1$ صدق می‌کند.)پس‌رفتار h و m در بینهایت یکسان‌است و مثلاً برای اثبات‌کراندار بودن $m(y)$ کافی‌است‌کراندار بودن $h(y)$ را ثابت‌کنیم. اما مشکلی‌که در مورد h وجود دارد این است‌که در مورد ضرایب $1/\rho\zeta'(\rho)$ اطلاع چندانی نداریم. این مشکل نیز در ۱۹۴۲ توسط اینگهام[2] رفع شد. پاسخ وی چنین بود که به‌جای مطالعهٔ مجموع فوق، سریهای متناهی‌ازاین نوع را بررسی کنیم. به‌عبارت دقیقتر،فرض کنید K تابعی نامنفی، زوج و ازردهٔ C^2 باشد و به علاوه شرط

$$K(y) = O((1+y^2)^{-1}), \quad y \to \infty$$

را برآورده سازد و اگر

$$k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)e^{-ity}\,dy,$$

و K به‌گونه‌ای باشدکه $k(t)$ دارای محملی‌کراندار باشد (یعنی $k(t)$ خارج یك مجموعهٔ‌کراندار مثلاً $[-T, T]$ صفرباشد) و $K(0) = 1$، دراین‌صورت پیچش[3] h و K یعنی h_K برابرخواهد بود با

$$h_K(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y-t)K(t)\,dt$$

1. Titchmarsh 2. Ingham
3. convolution

$$= \sum_{\rho} \frac{e^{i\gamma y}}{\rho\zeta'(\rho)} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)e^{-i\gamma t}\,dt$$

$$= \sum_{\rho} k(\gamma) \frac{e^{i\gamma y}}{\rho\zeta'(\rho)}. \qquad (۴)$$

حال می‌توان نشان دادکه به‌ازای هر y_0 داریم

$$\limsup_{y \to \infty} m(y) \geqslant h_K(y_0),$$

$$\liminf_{y \to \infty} m(y) \leqslant h_K(y_0).$$

پس برای رد حدس مرتنس‌کافی‌است K و y_0 را طوری انتخاب کنیم که داشته باشیم $|h_K(y_0)| > 1$. بنابراین لازم است $|h_K(y_0)|$ را بزرگ کنیم. فرض کنید $[-T, T]$ محمل $k(t)$ باشد. معمولاً T را برابرقسمت موهومی‌یکی‌ازصفرهای‌غیربدیهی تابع زتا فرض می‌کنیم. به‌این ترتیب اگر T جزء موهومی این صفرباشد، داریم

$$h_K(y) = \sum_{|\gamma| < T} k(\gamma) \frac{e^{i\gamma y}}{\rho\zeta'(\rho)}$$

$$= 2 \sum_{0 < \gamma < T} k(\gamma) \frac{\cos(\gamma y - \psi_\gamma)}{|\rho\zeta'(\rho)|} \qquad (۵)$$

که درآن $\psi_\gamma = \mathrm{Arg}(\rho\zeta'(\rho))$. این‌تساوی‌آخر ازاینجا به‌دست می‌آیدکه K و در نتیجه k توابع زوجی هستند.

درسال ۱۹۷۶، یورکات[1] و پیریموف[2] ملاحظه کردند که هرچند از لحاظ نظری در مورد اندازهٔ ضرایب $|\rho\zeta'(\rho)|^{-1}$ اطلاع چندانی نداریم، اما به‌طور عددی می‌دانیم که این ضرایب به‌سرعت کاهش می‌یابند بنابراین (۵) عمدتاً توسط چندجملهٔ اول معین می‌شود، پس‌می‌باید چندجملهٔ اول همعلامت و بزرگ باشند. به این منظور با توجه به اینکه $\sum_{\rho} 1/|\rho\zeta'(\rho)|$ واگراست، می‌باید K و y به‌گونه‌ای انتخاب شوند که برای چند صفر اول، $\cos(\gamma y - \psi_\gamma)$ و $k(\gamma)$ تقریباً برابر ۱ باشند. اما $\cos\theta$ زمانی تقریباً برابر ۱ است‌که θ تقریباً مضربی از 2π باشد. نزدیك‌کردن کمیت مثلثاتی مورد نظر به ۱، به این معناست‌که دستگاه معادلات دیوفانتی

$$|\gamma_j y - \psi_j - 2\pi m_j| < \epsilon \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,\ m_j \in \mathbf{Z} \qquad (۶)$$

راحل‌کنیم که‌درآن $\psi_j = \mathrm{Arg}((1/2 + i\gamma_j)\zeta'(1/2 + i\gamma_j))$، و γ_j قسمت موهومی jامین صفرتابع زتاست.

اما چگونه می‌توان اطمینان یافت که $k(\gamma)$ برای چند صفر اول تقریباً برابر ۱ است؟ برای این کار قرار می‌دهیم $k(t) = g(t/T)$ که درآن g تابعی‌است‌که خارج از $[-1, 1]$ صفراست.حال اگر g چنان باشدکه درهمسایگی صفر، $g(t)$ بسیار نزدیك ۱ باشد، وقتی T به‌اندازهٔ‌کافی‌بزرگ اختیار می‌شود، $k(\gamma)$ برای چند جملهٔ اول تقریباً برابر ۱ خواهد بود.

1. Jurkat 2. Peyerimhoff

یورکات و پیریموف تابع g ای به‌صورت زیر معرفی کردند:

$$g(t)=\begin{cases}(1-|t|\cos\pi t+\pi^{-1}\sin(\pi|t|)), & |t|\leqslant 1\\ 0 & |t|\geqslant 1\end{cases}$$

و T را برابر قسمت موهومی ۵۳۶امین صفر تابع زتا (تقریباً $T=1000$) انتخاب کردند. همچنین روشی یافتند که دستگاه (۶) را به‌ازای εای که خیلی بزرگ نباشد حل می‌کرد و این الگوریتم را با استفاده از یک کامپیوتر کوچک (جیبی) قابل برنامه‌نویسی برای این تابع به‌کار بردند و نتیجه گرفتند که

$$\limsup_{y\to\infty} m(y)\geqslant 0.779,\quad \liminf_{y\to\infty} m(y)\leqslant -0.639.$$

اندکی بعد تی‌ریله[1] روش آنها را با یک کامپیوتر با سرعت زیاد و برای ۱۵۰۰۰ صفر (به‌جای ۵۳۶ صفر) به‌کار برد و با صرف صدها ساعت وقت کامپیوتر نشان داد که

$$\limsup_{y\to\infty} m(y)\geqslant 0.860,\quad \liminf_{y\to\infty} m(y)\leqslant -0.843.$$

با توجه به ارقام فوق به‌نظر می‌رسد که با تکنولوژی امروزی رد حدس مرتنس با استفاده از الگوریتم یورکات-پیریموف امکان‌پذیر نباشد.

در سال ۱۹۸۵، ادلیزکو[2] و تی‌ریله با اصلاحاتی در روش یورکات-پیریموف موفق شدند نادرستی حدس مرتنس را به‌اثبات رسانند. اینان دستگاه معادلات دیوفانتی (۶) را نه برای n صفر نخست تابع زتا، بلکه برای آن n صفر تابع زتا که $1/(|\rho\zeta'(\rho)|)$ بیشترین مقدار را دارد در نظر گرفتند. به زبان دقیقتر، فرض کنید مثلاً نخستین ۴۰۰ صفر تابع زتا را برحسب مقادیر $|\rho\zeta'(\rho)|$ به صورت صعودی مرتب کنیم: $\rho_1,\dots,\rho_{400}$ که در آن $\rho_j=1/2+i\gamma_j$، و قرار دهیم

$$\psi_j=\operatorname{Arg}(\rho_j\zeta'(\rho_j))=\operatorname{Arg}\left(\left(\tfrac{1}{2}+i\gamma_j\right)\zeta'\left(\tfrac{1}{2}+i\gamma_j\right)\right)$$

می‌خواهیم عدد حقیقی y و اعداد صحیح m_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ را به گونه‌ای بیابیم که کمیتهای $\eta_j=|\gamma_j y-\psi_j-2\pi m_j|$ همزمان کوچک باشند. برای یافتن چنین yی، آنها از الگوریتم L^3 در شبکه‌ای مناسب استفاده کردند. قرار می‌دهیم $\alpha_j=|\rho_j\zeta'(\rho_j)|^{-1/2}$ و فرض می‌کنیم v یک عدد صحیح مثبت باشد. (معمولاً $2n\leqslant v\leqslant 4n$) و شبکه‌ای را که توسط بردارهای ستونی ماتریس $(n+2)\times(n+2)$ زیر تولید می‌شود، در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccccc}
-[\alpha_1\psi_1 2^v] & [\alpha_1\gamma_1 2^{v-10}] & [2\pi\alpha_1 2^v] & 0 & 0\\
-[\alpha_2\psi_2 2^v] & [\alpha_2\gamma_2 2^{v-10}] & 0 & [2\pi\alpha_2 2^v] & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-[\alpha_n\psi_n 2^v] & [\alpha_n\gamma_n 2^{v-10}] & 0 & 0 & [2\pi\alpha_n 2^v]\\
2^v n^4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

1. te Riele 2. Odlyzko

($[x]$ به‌معنای بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x است.)

با استفاده از الگوریتم L^3 یک پایهٔ تحویل یافته برای شبکهٔ فوق به‌دست می‌آوریم: $[v_1^*,\dots,v_{n+2}^*]$. از آنجا که v_i^*ها پایه‌ای برای شبکهٔ فوق تشکیل می‌دهند، درایهٔ $(n+1)$ام دست‌کم یکی از آنها مخالف صفر است. چون مقدار این درایه نسبت به‌سایر درایه‌ها نسبتاً بزرگ است، برای آنکه الگوریتم تحویل پایهٔ خوبی داشته باشیم (مجموعه‌ای از بردارهای با وزن کوچک فراهم شود)، لازم است که تنها یکی از بردارهای پایهٔ جدید مثلاً $\mathbf{w}$ دارای این خاصیت باشد. به‌علاوه از آنجا که در پایهٔ اولیه تنها یک بردار این خاصیت را دارد، درایهٔ $(n+1)$ام $\mathbf{w}$ مضربی از $2^v n^4$ خواهد بود. بازهم برای اینکه الگوریتم تحویل پایهٔ خوبی داشته باشیم باید این مقدار $\pm 2^v n^4$ باشد. در تمام بررسیهایی که اینان به‌عمل آوردند (با تعویض مقادیر v و n) مشاهده کردند که الگوریتم L^3 همواره هردوی این خواص را دارد. حال فرض کنید این درایهٔ $(n+1)$ام ناصفر دقیقاً $2^v n^4$ باشد، چون $\mathbf{w}$ برداری از شبکه است، داریم

$$\exists z, m_1,\dots,m_n\in\mathbf{Z},\ \mathbf{w}=v_1+zv_2-\sum_{k=1}^{n} m_k v_{k+2}.$$

پس درایهٔ jام $\mathbf{w}$ عبارت است از

$$z[\alpha_j\gamma_j 2^{v-10}]-[\alpha_j\psi_j 2^v]-m_j[2\pi\alpha_j 2^v].$$

برای اینکه طول $\mathbf{w}$ کوچک باشد، لازم است که قدرمطلق هریک از درایه‌هایش کوچک باشد. پس هریک از عبارات فوق نیز باید کوچک باشد

$$z\alpha_j\gamma_j 2^{v-10}-\alpha_j\psi_j 2^v-m_j 2\pi\alpha_j 2^v.$$

و در نتیجه اگر $y=z/2^{10}$، $|\alpha_j|(\gamma_j y-\psi_j-2\pi m_j)$ بسیار کوچک خواهد شد. بررسیهای عملی نشان داد که الگوریتم L^3، در واقع این خاصیت را دارد و دستگاه دیوفانتی (۶) را به‌ازای ε کوچک حل می‌کند.

در اینجا ذکر دو نکتهٔ ضروری است. نخست آنکه علت حضور α_jها در پایه این است که هدف، بزرگ کردن

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\cos(\gamma_j y-\psi_j-2\pi m_j)$$

بود. اما اگر $(\gamma_j y-\psi_j-2\pi m_j)$ها همگی کوچک باشند، عبارت فوق تقریباً برابر

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2(\gamma_j y-\psi_j-2\pi m_j)^2$$

است. پس باید $|\alpha_j(\gamma_j y-\psi_j-2\pi m_j)|$ را کوچک کنیم. و این درحقیقت متناظر است با کمینه کردن نرم اقلیدسی بردار $(\beta_1,\dots,\beta_n)$، که درواقع به‌وسیلهٔ الگوریتم L^3 انجام می‌پذیرد. و دوم آنکه اگر بخواهیم مقادیری از y را بیابیم که $h_K(y)<-1$، کافی است در شبکهٔ فوق ψ_j را به $\psi_j+\pi$ تبدیل کنیم. و بدین ترتیب ادلیزکو و تی‌ریله با استفاده از الگوریتم L^3، عدم صحت حدس مرتنس را نشان دادند.

بررسیهای عددی نشان می‌دهد که با همان ترتیبی که برای

نخستین ۴۰۰ صفر تابع زتا قائل شدیم مقدار $\sum_{j=1}^{n} |\rho_j \zeta'(\rho_j)|$، به‌ازای $n=54$ از ۱ تجاوز می‌کند و به ازای $n=70$ تقریباً برابر ۱٫۰۵۷۸۷ می‌شود. بنابراین، کافی بود دستگاه معادلات دیوفانتی را برای $n=70$ حل کنند. به‌علاوه برای آنکه عامل $k(\gamma)$ نسبتاً بزرگ باشد، T را برابر جزء موهومی ۲۰۰۰امین صفر تابع زتا، یعنی تقریباً معادل ۲۵۱۵ تعریف کردند. همچنین بررسیهای اینان نشان داد که اگر صفرهای تابع زتا به‌طور تصادفی روی خط بحرانی ($\mathrm{Re}z=1/2$) توزیع شده باشند، مقدار y که دستگاه (۶) را حل می‌کند تقریباً درحدود 10^{70} خواهد بود. پس خطای کوچکی در محاسبهٔ γ_jها به‌خطای بزرگی منجر می‌شد. به‌این علت ادلیز کو و تی‌ریله ۲۰۰۰ صفر اول تابع زتا را با استفاده از فرمول اویلر-مکلورن تا صد رقم اعشار محاسبه کردند. و به‌ازای مقادیر مختلف n و v دستگاه معادلات دیوفانتی (۶) را حل کردند و مقدار z را محاسبه کردند. سپس به y مقادیری نزدیک $z/1024$ دادند و به‌نتایج زیر رسیدند:

$n=70,\ v=230$

$y=-1404528968059299804679036163039978112774005919999789738039965960762$

5215005

$h_K(y)=1.061545$

$n=70,\ v=230$

$y=3209702577292265586974000001862113070999797144540349062682805321651$

6697419

$h_K(y)=-1.0097449$

مرجع اصلی این بخش [۷] ومراجع فرعی آن [۸]، [۹]، [۱۰]، و [۱۲] است.

۵. کاربردی دیگر

درکارهای عملی گاهی با مسائلی مواجه می‌شویم که هیچ الگوریتم با زمان چندجمله‌ای برای حل آنها موجود نیست. چنین مسائلی را NP-تمام می‌نامیم. مثلاً مسألهٔ یافتن تمام جایگشتهای روی n حرف، از زمرهٔ این مسائل است زیرا $n!$ جایگشت وجود دارد. البته در موارد دیگر اثبات NP-تمام بودن از چنین وضوحی برخوردار نیست. یکی دیگر از مسائلی که NP-تمام بودن آن مشخص شده است و در واقع یکی از ساده‌ترین این نوع مسائل است، مسألهٔ مجموع زیرمجموعه‌ای (مسألهٔ کوله‌پشتی دقیق)[1] است. صورت این مسأله این است: فرض کنید اعداد صحیح مثبت $a_1, \ldots, a_n$، و b داده‌شده‌اند. زیرمجموعهٔ J از $\{1, \ldots, n\}$ را بیابید به‌طوری که $\sum_{i\in J} a_i = b$. به‌عبارت دیگر مسألهٔ برنامه‌ریزی با اعداد صحیح

$$\sum a_i x_i = M, \qquad x_i \in \{0, 1\} \qquad (*)$$

را حل کنید. NP-تمام بودن این مسأله سبب شده‌است که کاربردهای وسیعی در رمزنگاری داشته باشد.

هرچند هیچ الگوریتم با زمان چندجمله‌ای برای حل این مسأله موجود نیست، لکن رده‌های خاصی از این نوع مسائل را می‌توان با الگوریتمهای با زمان چندجمله‌ای حل کرد. از جملهٔ آنها مسائل کوله‌پشتی با چگالی کوچک می‌باشد. چگالی یک مسألهٔ مجموع زیرمجموعه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(a)=\frac{n}{\log_2(\max\{a_i \mid 1\leqslant i\leqslant n\})},\quad a=(a_1, \ldots, a_n).$$

درسال ۱۹۸۵ ادلیز کو ولاگاریس [۳] برمبنای الگوریتم L^3 روش ساده‌ای عرضه کردند که برخی از این مسائل را حل کرد. آنها ثابت کردند که برای هر n داده شده، یک عدد ثابت $d_c(n)$ وجود دارد که هرمسألهٔ مجموع زیرمجموعه‌ای با $d(a)\leqslant d_c(n)$ را می‌توان با این روش حل کرد. روش آنها برای حل (*) بدین قرار است:

شبکهٔ تولید شده توسط بردارهای سطری ماتریس $(n+1)\times(n+1)$ زیر را درنظر بگیرید

$$B=\begin{bmatrix} 1 & & \bigcirc & -a_1 \\ & 1 & & -a_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & 1 & -a_n \\ & & & M \end{bmatrix}$$

هر بردار دراین شبکه به‌صورت

$$\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, M-\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right)$$

است. حال اگر $(x_1, \ldots, x_n)$ جوابی برای مسألهٔ (*) باشد، دراین صورت $(x_1, \ldots, x_n, 0)$ در شبکهٔ فوق قرار خواهد داشت و بردار کوچکی ازشبکه‌است. پس به‌این ترتیب عمل می‌کنیم: نخست یک پایهٔ تحویل یافته $B=[b_1, \ldots, b_{n+1}]$ برای شبکه به‌دست می‌آوریم که در آن $b_i=(b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in+1})$. حال اگر یکی از بردارهای این پایه مثلاً b_i، برداری با مؤلفه‌های ۰ و ۱ و ۱− باشد، قرار می‌دهیم $x_j=|b_{ij}|$ و بررسی می‌کنیم که بردار $\mathbf{x}$ یک جواب برای مسألهٔ (*) هست یا خیر. اگر جواب منفی بود، در آن صورت M را با $M'=\sum_{i=1}^{n} a_i - M$ عوض می‌کنیم و الگوریتم را تکرار می‌کنیم.

این الگوریتم در حالت کلی لزوماً به‌جوابی نمی‌انجامد اما، همان‌طور که گفته شد، برای هر مسألهٔ با $d(a)\leqslant d_c(n)$ حتماً به‌جواب می‌رسد.

بعدها، با اعمال چند الگوریتم کمکی، ثابت d_c اصلاح شد [۲].

1. exact knapsack problem

۶. حرف آخر

لنسترا الگوریتم L^3 را تعمیم داده و در مورد مسائل متنوعی به‌کار برده است: هیأت اعداد جبری، چندجمله‌ایهای چندمتغیره روی هیأتهای متناهی، وهیأتهای با مشخصهٔ p و $\mathbf{Q}$.

تدوین کنندگان این مقاله نیزاین الگوریتم را در مورد طرحهای بلوکی به‌کار گرفته‌اند و نتایج تحقیقات خود را درمقالهٔ جداگانه‌ای منتشر خواهند کرد.

مراجع

1. D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 2. *Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley (1981).
2. D. L. Kreher and S. P. Radziszowski, "Solving subset sum problems with the L^3 algorithm," *J. Combin. Math. and Computing*, to appear.
3. J. C. Lagarias and A. M. Odlyzko, "Solving low-density subset sum problem," *J. ACM.*, (1) **32** (1985) 229-246.
4. S. Landau, "Factoring polynomials quickly," *Notices*, (1) **34** (1987) 3-8.
5. A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, Jr., and L. Lovász, "Factoring polynomials with rational coefficients," *Math. Ann.*, **261** (1982) 515-534.
6. R. Lidl, *Finite Fields*, Cambridge Univ. Press (1987).
7. A. M. Odlyzko and H. J. J. te Riele, "Disproof of the Mertens conjecture," *J. für die Reine und Angewandte Mathematik*, **357** (1985) 138-160.
۸. تام آپوستل، *نظریهٔ تحلیلی اعداد*، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، و علی‌اکبر رحیم‌زادهٔ ثانی، انتشارات شباهنگ، چاپ اول، تابستان ۶۷.
۹. ریموند ایوب، «اویلر و تابع زتا»، ترجمهٔ شاهین آجودانی نمینی، جنگ ریاضی دانشجو، جلد اوّل (۱۳۶۶)، ۴۳ـ۶۷.
۱۰. دان‌زاگیر، «نخستین ۵۰ میلیون عدد اوّل»، ترجمهٔ رحیم زارع نهندی، نشر ریاضی، سال ۱، شمارهٔ ۳ (۱۳۶۷) ۱۸۹ـ۱۹۹.
۱۱. سعید عباس بندی، *الگوریتم L^3*، پروژهٔ دانشجویی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه تهران، (۱۳۶۸).
۱۲. هربرت ویلف، «نگاهی به فرضیهٔ ریمان»، ترجمهٔ مجتبی منیری، نشر ریاضی، سال ۱، شمارهٔ ۱ (۱۳۶۷)، ۱۶ـ۱۸.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

* غلامرضا برادران خسروشاهی، شاهین آجودانی نمینی، و محمد رجبی طرخورانی، دانشگاه تهران

آزمون استعداد ریاضی!

اخیراً آزمونی رایج شده که با آن استعداد ریاضی افراد را می‌سنجند. این آزمون شامل دو مسأله است. در مسألهٔ اول از فرد آزمون شونده می‌خواهند که فرض کند در آشپزخانه‌ای یك اجاق گاز تك شعله قراردارد ویك کتری آب نیزروی زمین است. از او می‌پرسند که آب کتری را چگونه باید گرم کرد. طبعاً پاسخ می‌دهد که باید کتری را ازروی زمین برداشت وروی شعلهٔ گاز گذاشت. سپس مسألهٔ دوم را مطرح می‌کنند که مانند مسألهٔ اول است با این تفاوت که کتری آب حالا روی میزی قراردارد. اگر فرد آزمون شونده بگوید که باید کتری را از روی میز برداشت و روی گاز گذاشت، معلوم می‌شود که شانس چندانی برای ریاضیدان شدن ندارد. ریاضیدان واقعی، کتری آب را از روی میز برمی‌دارد و روی زمین می‌گذارد و به‌این ترتیب مسأله دوم را به مسألهٔ اول، که قبلاً حل کرده، تبدیل می‌کند!

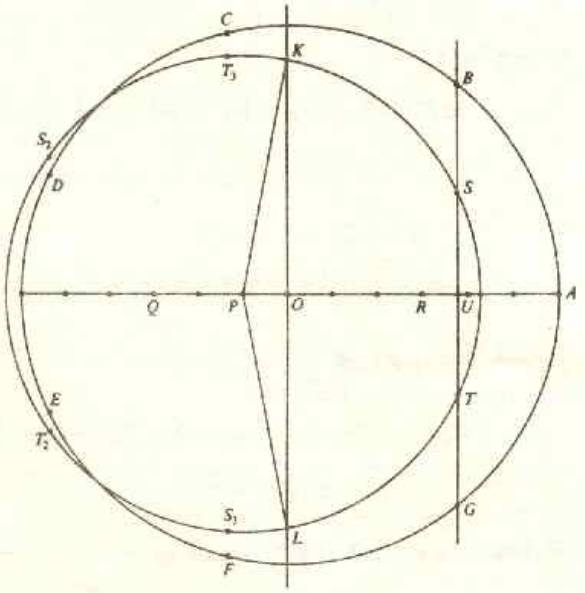
تثلیث زاویه، هفت ضلعی منتظم، و سیزده ضلعی منتظم*

اندرو گلیسن
ترجمهٔ مسعود هادیان

درسال ۱۷۹۶ گاوس کشف کرد که چگونه می‌توان ۱۷ ضلعی منتظم را فقط با استفاده از ستاره و پرگار رسم کرد. گاوس نشان داد که ۲۵۷ ضلعی منتظم یا ۶۵۵۳۷ ضلعی منتظم را نیز می‌توان رسم نمود. او این نتایج را در کتاب تحقیقات حسابی مشهورش [۱۰، بخش VIII] درسال ۱۸۰۱ انتشارداد. وی در آن کتاب تحلیلی از هیاتهای $O(\xi)$، که ξ ریشهٔ pام مختلط واحد و p یك عدد اول فرد است، به عمل می‌آورد و از این تحلیل نتیجه می‌گیرد که یك n ضلعی منتظم زمانی قابل ترسیم است که n به صورت $2^m p_1 p_2 \cdots p_k$ باشد؛ دراینجا p_1، p_2، ...، p_k اعداداول متمایز فرما، یعنی اعداد اول فردی هستند که یك واحد از توانی از ۲ بیشتر باشند. وی شیوهٔ ترسیم هندسی آنها را صریحاً بیان نمی‌کند. گاوس همچنین با تأکید زیاد می‌نویسد [۱۰، ص ۴۵۹] که هیچ چند ضلعی منتظم دیگری قابل ترسیم نیست، اما هیچگاه برهانی برای این امر عرضه نمی‌کند. سرانجام در سال ۱۸۳۷ برای آن برهانی به‌وسیله وانتسل[1] [۱۷] ارائه‌شد. چون هیچ عدد اول فرمای بزرگتر از ۶۵۵۳۷ شناخته نشده، فهرست چند ضلعیهای منتظم قابل ترسیمی که گاوس تهیه کرده بود، دست نخورده باقی مانده است [۱].

اگر وسایل کار ترسیم را بیشتر کنیم چندضلعیهای منتظم دیگری نیز ممکن است قابل ترسیم باشند [۲]. به‌عنوان مثال، به‌کمك یك مارپیچ ارشمیدس می‌توان هر زاویه‌ای را به هرتعداد دلخواه از اجزاء مساوی تقسیم کرد و از این طریق، هر چند ضلعی منتظمی را رسم کرد. فرض کنیم غیرازترسیم با ستاره و پرگار استانده، مجاز باشیم زاویه را نیز به‌سه قسمت مساوی تقسیم کنیم؛ دراین صورت چه نتایجی به‌دست می‌آوریم؟ بدیهی است که می‌توانیم ۹، ۲۷، ۸۱، ... ضلعیهای منتظم را رسم کنیم. اما مطمئناً بدیهی نیست که هفت ضلعی منتظم را نیز بتوانیم رسم کنیم. در آنچه که در زیر می‌آید رابطهٔ بین تثلیث زاویه وحل معادلهٔ درجهٔ سوم را بررسی وسپس مشخص خواهیم کرد که کدام یك از چند ضلعیهای منتظم را می‌توان به‌کمك یك "زاویه ثلث‌کن" ترسیم کرد. ابتدا چگونگی رسم هفت ضلعی منتظم را نشان می‌دهیم.

کار را با دایرهٔ $\mathcal{C}$ به شعاع ۶ و مرکز مبدأ دستگاه مختصات دکارتی آغاز و نقاط $A(6, 0)$، $Q(-3, 0)$، و $R(3, 0)$ را مشخص می‌کنیم. جای نقاط $K(0, \sqrt{27})$ و $L(0, -\sqrt{27})$، رئوس دومثلث متساوی‌الاضلاع به قاعدهٔ مشترك QR، را نیز مشخص می‌نماییم. کمان KL را به‌مرکز $P(-1, 0)$ رسم و آن را در نقاط S و T به‌سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. نقاط B و G، محل تلاقی پاره‌خط ST بادایرهٔ $\mathcal{C}$، دورأس هفت‌ضلعی منتظم $ABCDEFG$ هستند. بقیهٔ رئوس را می‌توان باجدا کردن کمانهایی



شکل ۱. روش ترسیم هفت ضلعی منتظم

1. Wantzel

متوالی به‌اندازهٔ کمان AB، برروی دایره مشخص کرد.

از راه دیگر: می‌توانیم کمان بزرگتر K به L را رسم و آن را در نقاط S_2 و T_2 به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم؛ محل برخورد S_2T_2 با دایرهٔ $\mathcal{C}$ نقاط D و E هستند. سرانجام فرض می‌کنیم KL کمانی به‌مبدأ K باشد که یک‌دور درجهت ساعت بر دایرهٔ به‌مرکز P بچرخد، به K بازگردد، و سپس به L برسد. این کمان را نیز درنقاط S_3 و T_3 به‌سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و نقاط C و F را به‌دست می‌آوریم.

برهان ترسیم: محل برخورد ST با محور x را U می‌نامیم.

از روش ترسیم واضح است که داریم:

$$PK=\sqrt{28}$$

$$\cos\angle APK=\frac{1}{\sqrt{28}}$$

$$PU=\sqrt{28}\cos\angle APS=\sqrt{28}\cos\frac{1}{3}\angle APK.$$

ترسیم درصورتی درست است که تساوی $OU=6\cos(2\pi/7)$ و یا تساوی معادل آن $PU=1+6\cos(2\pi/7)$ برقرار باشد. بنابراین تنها کافی است ثابت کنیم که

$$\sqrt{28}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\sqrt{28}}\right)=1+6\cos\frac{2\pi}{7}.$$

برای اثبات فرض می‌کنیم $\xi=\cos(2\pi/7)+i\sin(2\pi/7)$ ریشهٔ اصلی هفتم عدد یک باشد. قرارمی‌دهیم

$$\eta=\xi+\xi^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{7}.$$

پس

$$\eta^3+\eta^2-2\eta-1$$
$$=\xi^3+\xi^2+\xi+1+\xi^{-1}+\xi^{-2}+\xi^{-3}=0.$$

بنابراین، η یک ریشهٔ معادلهٔ زیر است

$$X^3+X^2-2X-1=0. \qquad (1)$$

با قراردادن $X=(Y-1)/3$ نتیجه می‌شود که

$$1+6\cos\frac{2\pi}{7}(=1+3\eta)$$

یک ریشهٔ معادلهٔ

$$Y^3-21Y-7=0 \qquad (2)$$

است. با جانشانی $Y=\sqrt{28}\cos\theta$ این معادله به‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

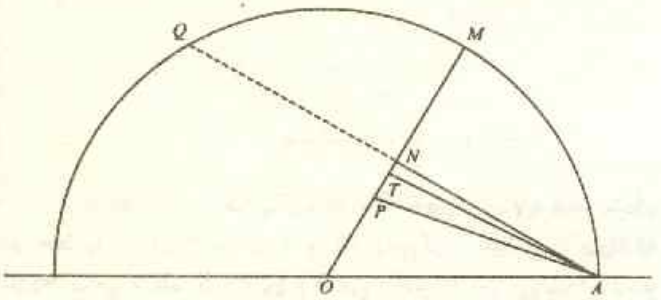
$$7\sqrt{28}\,(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=7$$

و از آنجا

$$\cos 3\theta=\frac{1}{\sqrt{28}}.$$

از این معادله برای θ شش مقدار به‌پیمانهٔ 2π به‌دست می‌آید، که دوبه‌دو با یکدیگرسه ریشهٔ معادلهٔ (۲) را مشخص می‌کنند. برعهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود که نشان دهد $1+3\eta$ با انتخاب $\theta=(1/3)\arccos(1/\sqrt{28})$ متناظراست. ریشه‌های دیگر عبارت‌اند از $1+6\cos(4\pi/7)$ و $1+6\cos(6\pi/7)$، که متناظر با جوابهای مختلف θ هستند و به‌پیداکردن نقاط C، D، E و F مذکور دربالا منجرمی‌شوند.

پلملی[1] در [۱۴] روش دیگری برای ترسیم هفت‌ضلعی منتظم $ABCDEFG$ با معلوم بودن A و مرکز O ارائه داده است:



شکل ۲. روش ترسیم پلملی

دایره‌ای به‌مرکز O و شعاع OA رسم و M را برآن چنان تعیین می‌کنیم که $AM=OA$. OM را درنقاط N و P به‌ترتیب به‌دو وسه‌پارهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم و T را بر NP چنان درنظرمی‌گیریم که $\angle NAT=(1/3)\angle NAP$. در این صورت AT برابر ضلع هفت ضلعی منتظم مورد نظر است که با جدا کردن کمانهایی متوالی که طول آنها برابر AT باشد می‌توان هفت ضلعی را کامل کرد.

پلملی خاطرنشان می‌سازد که چون‌زاویه‌ای که بایدتثلیث‌شود خیلی کوچک است، خطای کل به‌اندازه‌ای کوچک است که می‌توان در هرکار عملی‌آن را نادیده گرفت. اگر NT را برابر یک‌سوم NP بگیریم، AT حداکثر ۱/۲۰,۰۰۰ واحد طول از اندازهٔ حقیقی‌بزرگتر است. حتی اگر T را بر N بگیریم، AT حدود ۱/۴۰۰ واحد طول از اندازهٔ حقیقی‌کوتاهترخواهد شد. چون AN برابر نصف AQ، ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی، است قاعدهٔ زیر را نتیجه می‌گیریم: طول ضلع هفت‌ضلعی‌منتظم محاطی (تقریباً) نصف طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی است. تریفکه[2] [۱۵] می‌نویسد که این تقریب‌را ریاضیدان سدهٔ دهم محمد ابوالوفای بوزجانی به‌کاربرده است وهمچنین این‌تقریب بر هرون اسکندرانی، و شاید ریاضیدانان پیش از او نیز معلوم بوده است.

برای توجیه روش ترسیم پلملی باید ثابت کنیم که

$$AT=OA\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right).$$

چون

1. Plemelj 2. Tropfke

$$2\cos\frac{2\pi}{7}=2-\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^2$$

از (۱) نتیجه می‌شود که $2\sin(\pi/7)$ یك ریشهٔ معادلهٔ زیر است

$$(2-X^2)^3+(2-X^2)^2-2(2-X^2)-1=0.$$

ریشه‌های دیگر عبارت‌اند از $-2\sin(\pi/7)$، $\pm 2\sin(2\pi/7)$ و $\pm 2\sin(3\pi/7)$. معادلهٔ اخیر چنین تجزیه می‌شود:

$$(X^3+\sqrt{7}(X^2-1))(X^3-\sqrt{7}(X^2-1))=0.$$

ریشه‌های عامل اول عبارت‌اند از: $2\sin\frac{\pi}{7}$، $-2\sin\frac{\pi}{7}$ و $-2\sin\frac{3\pi}{7}$. اگر این معادله را به‌صورت

$$\left(\frac{1}{X}\right)^3-\frac{1}{X}=\frac{1}{\sqrt{7}} \qquad (3)$$

بنویسیم و قرار دهیم $(1/X)=2\sqrt{1/3}\cos\psi$، آنگاه از (۳) نتیجه می‌شود $\cos 3\psi=\sqrt{27/28}$. ریشهٔ مطلوب متناظر است با انتخاب

$$\psi=\alpha=\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{27}{28}}=\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

و سرانجام چنین به‌دست می‌آوریم

$$2\sin\frac{\pi}{7}\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

با توجه به‌شکل ۲، داریم

$$\angle NAP=\arctan\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

لذا $\angle NAT=\alpha$. بنابراین

$$AT\cos\alpha=AN=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,OA.$$

از مقایسهٔ این معادلات می‌بینیم

$$AT=OA\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم.

یادآوری می‌کنیم که $\angle OKP$ در شکل ۱، همان $\angle NAP$ در شکل ۲ است. بنابراین $\angle NAP$ (شکل ۲) متمم زاویهٔ $\angle OPK$ (شکل ۱) است، پس $\angle OPS=(\pi/6)-\alpha$. در نتیجه تثلیثهای مورد نیاز در هر دو ترسیم معادل یکدیگرند بدین معنی که هر یك از دو روش تثلیث را می‌توان از دیگری به‌وسیله ستاره و پرگار به‌دست آورد.

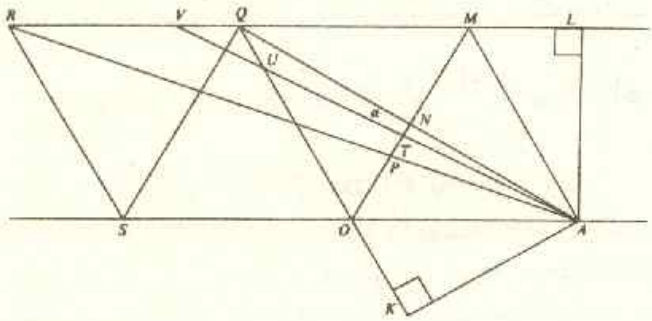
به‌دست آوردن دو ریشهٔ دیگر (۳) نیز جالب است. این ریشه‌ها در واقع با تغییر جواب ψ از α به $\alpha+(2\pi/3)$ و به $\alpha-(2\pi/3)$ معلوم می‌شوند. داریم

$$\left(-2\sin\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\left(-2\sin\frac{3\pi}{7}\right)\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

حال اگر علامتهای منهای نامطلوب را در کسینوسها دخالت دهیم درمی‌یابیم که

$$2\sin\frac{2\pi}{7}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$



شکل ۳. تعمیم ترسیم پلملی. نقاط O، A، M، Q، R، S رئوس شبکه‌ای از مثلثهای متساوی‌الاضلاع هستند. خط AV چنان اختیار شده است که $\angle QAV=(1/3)\angle QAR$. پس AT، AU و AV به‌ترتیب عبارت‌اند از ضلع، قطر اقصر و قطر اطول هفت‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به‌شعاع OA.

درشکل ۳ داریم

$$AU\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=AK=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,OA$$

و

$$AV\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=AL=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,OA.$$

بنابراین

$$AU=OA\left(2\sin\frac{2\pi}{7}\right)$$

و

$$AV=OA\left(2\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

این روابط نشان می‌دهند که AU و AV به‌ترتیب برابر قطرهای اقصر و اطول هفت ضلعی منتظم هستند.

حال به‌نظریهٔ زیربنایی این ترسیمات می‌پردازیم. این مطلب را بامروری برحل معادلهٔ درجهٔ سوم باضرایب حقیقی آغاز می‌کنیم. جملهٔ X^2 را می‌توان همواره با انتقال ریشه‌ها حذف کرد؛ برای اجتناب از کسرهای بعدی، معادله را به‌صورت

$$X^3-3pX+2q=0 \qquad (4)$$

می‌نویسیم. چون این معادله از درجهٔ فرد است، باید حداقل یك

ریشهٔ حقیقی داشته باشد. ماهیت دو ریشهٔ دیگر از بررسی کمیت

$$D=q^2-p^3$$

مشخص می‌شود [۳]. اگر $D>0$، معادله دارای دو ریشهٔ مختلط مزدوج و یک ریشهٔ حقیقی است؛ اگر $D<0$، معادله سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؛ و اگر $D=0$، معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف، q/p، و یک ریشهٔ ساده، $-2q/p$، است (مگر در حالتی که $p=q=0$ که در این صورت هر سه ریشهٔ معادله صفرند). این نتایج را می‌توان به‌سادگی با بررسی نقاط بحرانی تابع چندجمله‌ای در (۴) به‌دست آورد. متذکر می‌شویم که D نمی‌تواند منفی باشد مگر اینکه p مثبت باشد.

برای Dی مثبت، طبق فرمول کاردان ریشهٔ حقیقی و یکتای معادله عبارت است از

$$\sqrt[3]{-q+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{D}}.$$

این ریشه را می‌توان با معلوم بودن p و q به‌وسیلهٔ ستاره و پرگار و استخراج یکی از ریشه‌های سوم رسم کرد. (ریشهٔ سوم دیگر را می‌توان از روی اولی به وسیله ستاره و پرگار رسم کرد، زیرا حاصلضرب هر دو ریشهٔ سوم برابر p است).

هنگامی که $D<0$، حالت معروف به‌تحویل ناپذیری که ظاهراً جنبهٔ پارادوکسی دارد پدید می‌آید: گرچه هر سه ریشه حقیقی هستند، آنها را به‌وسیلهٔ رادیکالها در حوزهٔ اعداد حقیقی نمی‌توان به‌دست آورد [۴]. فرمول کاردان در این حالت به‌قوت خود باقی است، اما شامل ریشه‌های سوم اعداد مختلط است.

برای به‌دست آوردن ریشهٔ سوم عدد مختلط c، باید در حالت کلی ریشهٔ سوم عدد حقیقی $|c|$ را به‌دست آوریم و زاویهٔ قطبی c را به سه پارهٔ مساوی تقسیم کنیم. ولی در این حالت خاص، تنها تثلیث زاویه به ابزارهای خاص نیاز دارد، زیرا قدرمطلق هر یک از مقادیر ریشهٔ سوم برابر $p^{3/2}$ است، که با توجه به‌آن، ریشهٔ سوم به‌سادگی قابل ترسیم است.

در حالتی که بدانیم همهٔ ریشه‌ها حقیقی هستند، می‌توانیم مستقیماً با قرار دادن $X=2\sqrt{p}\cos\theta$ در (۴) به مسألهٔ تثلیث زاویه بپردازیم که این عمل معادله را به معادلهٔ $\cos 3\theta=-qp^{-3/2}$ تبدیل می‌کند. یادآوری می‌کنیم که فرض $D<0$ ضامن برقراری نامساوی $|qp^{-3/2}|<1$ است، بنابراین یک زاویه قابل ترسیم برای تثلیث وجود دارد. همانند قبل، شش مقدار θ به پیمانهٔ 2π به سه ریشهٔ مطلوب منجر می‌شوند. پس از آنکه یکی از مقادیر θ معلوم شد ریشه‌های دیگر را می‌توان به‌آسانی با افزودن و کاستن $2\pi/3$ پیدا کرد؛ بنابراین تنها یک تثلیث زاویه برای پیدا کردن هر سه ریشه کفایت می‌کند.

برعکس، هر معادلهٔ درجهٔ سومی که به‌وسیلهٔ تثلیث زاویه قابل حل باشد، باید سه ریشهٔ حقیقی داشته باشد، زیرا این روش اگر ریشه‌ای به‌دست دهد، هر سه ریشه را به‌دست می‌دهد. بنابراین قضیه بنیادی زیر را داریم:

قضیهٔ ۱. یک معادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب حقیقی را می‌توان از راه هندسی با استفاده از ستاره، پرگار و زاویه ثلث‌کن حل کرد، اگر و تنها اگر هر سه ریشهٔ معادله حقیقی باشند.

از این رو، یک زاویه ثلث‌کن در تضعیف مکعب به ما کمکی نخواهد کرد، زیرا معادله‌ای که باید حل شود، $X^3=2$، تنها دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

اکنون در وضعیتی هستیم که می‌توانیم دقیقاً توضیح دهیم که چه چیزهایی را می‌توانیم با ستاره، پرگار و زاویه ثلث‌کن رسم کنیم.

به‌هر شکل هندسی (یعنی، مجموعه‌ای متناهی از نقاط، خطوط و دوایر) در صفحهٔ مختصات دکارتی [۵]، زیرهیأت مشخصی از اعداد حقیقی، یعنی هیأت مختصات همهٔ نقاط و ضرایب معادلات کلیهٔ خطوط و دوایر وقتی که به‌شکل استاندهٔ $y=mx+b$ (یا $x=a$) و $x^2+y^2=ax+by+c$ بیان شوند، وابسته است. فرض کنید که داده‌های یک مسأله ترسیمی [۶] به‌هیأت F_0 و شکلی که باید ترسیم شود به‌هیأت G وابسته است. ترسیم را می‌توان با استفاده از ستاره و پرگار تنها انجام داد اگر و تنها اگر برجی از هیأتهای $F_0\subseteq F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_k$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $G\subseteq F_k$، و هر F_i $(i=1,2,\ldots,k)$ با افزودن ریشهٔ دوم عنصر مثبتی از F_{i-1} به‌آن به‌دست آید. (برای ملاحظهٔ اثبات این قضیهٔ استانده به [۱۶، ص ۱۸۳ و بعد از آن] رجوع کنید). هیأتهای میانی F_i متناظرند با شکل اولیه همراه با نقاط، خطوط و دوایری که به‌طور متوالی در ترسیم مورد نظر به‌کار رفته‌اند. وقتی که استفاده از زاویه ثلث‌کن مجاز باشد، نتیجه تغییر نمی‌کند جز اینکه حالا به خرد اجازه می‌دهیم F_i را از F_{i-1}، با افزودن یک ریشه از چند جمله‌ای درجهٔ سومی که ضرایبش در F_{i-1} و همهٔ ریشه‌هایش حقیقی هستند، بسازیم. برهان این قضیهٔ جدید وقتی قضیهٔ ۱ اثبات شده باشد عملاً شبیه برهان قضیهٔ استانده است.

برای توضیح وضعیت بالا بجاست که بگوییم هیأت F_k را می‌توان از طریق هیأت F_0 ساخت.

برای چندضلعیهای منتظم قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۲. یک n ضلعی منتظم به‌وسیلهٔ ستاره، پرگار و زاویه ثلث‌کن قابل ترسیم است اگر و تنها اگر n به‌صورت $2^r\times 3^s\times p_1p_2\cdots p_k$ قابل تجزیه باشد، که $p_1, p_2, \ldots, p_k$ اعداد اول متمایزی (بزرگتر از ۳) باشند، و هر کدام به‌صورت $2^t\times 3^u+1$ باشد [۷] (امکان $k=0$ یعنی حالت $n=2^r\times 3^s$ را نیز می‌گنجانیم).

برای اثبات قضیه از لم زیر استفاده می‌شود.

لم. فرض می‌کنیم K یک هیأت حقیقی و L یک توسیع نرمال K از درجهٔ ۳ است. در این صورت L را می‌توان از K با استفاده از ستاره، پرگار و زاویه ثلث‌کن ساخت.

برهان: می‌دانیم $L=K[\beta]$، که در آن β ریشه‌ای از یک چندجمله‌ای تحویل ناپذیر از درجهٔ ۳ مانند $p(X)$ است که ضرایب آن در K هستند. چون L یک توسیع نرمال K است، همهٔ ریشه‌های $p(X)$ در L واقع‌اند و هر یک از آنها L را تولید می‌کند. اما یکی از ریشه‌ها، فرضاً γ، حقیقی است و $L=K[\gamma]$. بنابراین L هیأتی است حقیقی و ریشه‌های $p(X)$ همه حقیقی‌اند. لذا این لم از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود.

برهان قضیهٔ ۲: چون برهان خیلی شبیه به‌برهان معروف برای ستاره و پرگار تنهاست، فقط مهمترین مراحل آن را ذکر می‌کنیم.

فرض می‌کنیم n عدد صحیحی، لااقل مساوی ۳، باشد. قرار می‌دهیم

$$\xi = e^{2\pi i/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

و

$$\eta = \xi + \xi^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{n}.$$

گروه گالوای هیأت دایره‌بری[1] $Q(\xi)$ روی Q گروهی است آبلی با $\varphi(n)$ عنصر، که φ تابع فی اویلر است. درنتیجه هرهیأت بین Q و $Q(\xi)$ روی Q نرمال است و گروه گالوای آن آبلی است. به‌ویژه، هیأت حقیقی $Q(\eta)$ روی Q نرمال است. چون ξ روی $Q(\eta)$ از درجهٔ ۲ است، درجهٔ $Q(\eta)$ روی Q برابر است با $(1/2)\varphi(n)$.

حال فرض می‌کنیم n به‌صورت مذکور درقضیهٔ ۲ باشد. در این صورت $\varphi(n) = 2^v \times 3^w$، که در آن v و w اعدادی صحیح هستند، پس گروه گالوای $Q(\eta)$ دارای $2^{v-1} \times 3^w$ عنصر است. بنابراین این گروه دارای سری ترکیبی به‌طول $v+w-1$ است که کلیهٔ خارج قسمتهایش با Z_2 یا Z_3 یکریخت هستند. متناظر با آنها برجی مانند

$$F_0 = Q \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_{v+w-1} = Q(\eta)$$

ازهیأتهای حقیقی وجود دارد که هریك از آنها روی‌هیأت پیش‌از خود نرمال و از درجهٔ ۲ یا ۳ است. با به‌کار بردن لم مشاهده می‌کنیم که هیأت $Q(\eta)$ را می‌توان با استفاده از ستاره، پرگار و زاویه ثلث‌کن ترسیم کرد. این بدین‌معنی است که‌می‌توانیم پاره‌خطی به‌طول $\cos(2\pi/n)$ رسم کنیم و بااستفاده از آن و به‌سادگی می‌توانیم یك n ضلعی منتظم بسازیم. با برگشت به‌عقب می‌بینیم که از زاویه ثلث‌کن باید دقیقاً w بار استفاده کنیم.

برعکس، فرض‌می‌کنیم یك n ضلعی‌منتظم‌را بتوانیم بااستفاده ازستاره، پرگار و زاویه‌ثلث‌کن‌رسم کنیم. پس η قابل‌ترسیم‌است، بنابراین باید درهیأتی از درجهٔ $2^a \times 3^b$ روی Q باشد. لذا خود η باید ازدرجهٔ $2^c \times 3^d$ باشد و $\varphi(n) = 2^{c+1} \times 3^d$. اما این‌امر ایجاب می‌کند که n شکل مذکور درقضیه را داشته باشد.

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ فوق، عدد اول تازهٔ بعدی، یعنی $13 = 2^2 \times 3 + 1$ را درنظر می‌گیریم. قضیهٔ ۲ می‌گوید که سیزده‌ضلعی‌منتظم را می‌توان با تنها یکبار استفاده از تثلیث زاویه ترسیم کرد. راههای‌زیادی برای این‌ترسیم‌هست،اما ازلحاظ‌هندسی هیچ‌یك بردیگری ارجحیت ندارد.

اعداد $2\cos(2\pi k/13)$، $k = 1, 2, \ldots, 6$، ریشه‌های چندجمله‌ای

$$X^6 + X^5 - 5X^4 - 4X^3 + 6X^2 + 3X - 1$$

هستند که روی هیأت $Q(\sqrt{13})$ به‌صورت زیر تجزیه می‌شود

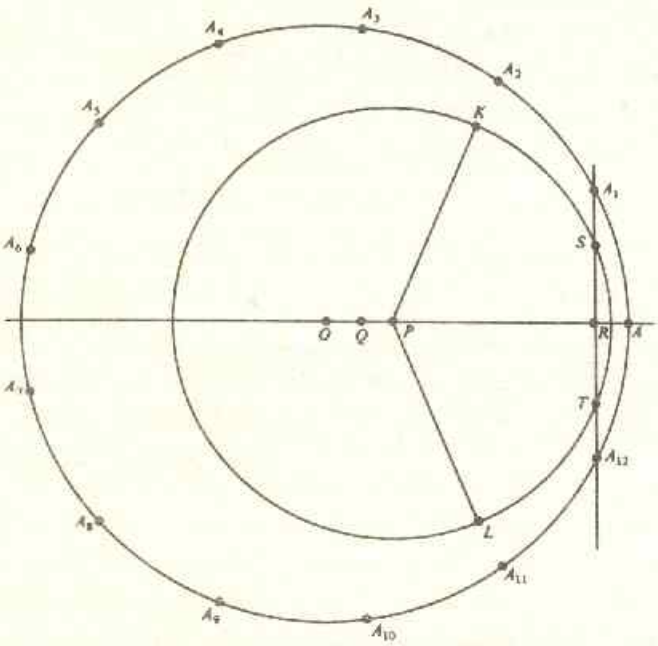
$$(X^3 - X - 1 + \lambda(X^2 - 1))(X^3 - X - 1 + \bar{\lambda}(X^2 - 1))$$

که در اینجا $\lambda = (1 - \sqrt{13})/2$ و $\bar{\lambda} = (1 + \sqrt{13})/2$. عامل اولی دارای ریشهٔ $2\cos(2\pi/13)$ است. بنابراین $2\lambda + 12\cos(2\pi/13)$ یك‌ریشهٔ ازچندجمله‌ای درجهٔ‌سومی‌است که‌هیچ جملهٔ درجهٔ دومی‌ندارد که بتوانیم آن را مانند بالا به‌دست آوریم. بعد از محاسبات زیاد به‌دست می‌آوریم

$$12\cos\frac{2\pi}{13} = \sqrt{13} - 1 + \sqrt{104 - 8\sqrt{13}}$$

$$\times \cos\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(\sqrt{13}+1)}{7-\sqrt{13}}$$

و این به‌ترسیم زیر منجر می‌شود که کاملاً شبیه ترسیمی است که برای هفت ضلعی‌منتظم ذکر کردیم:



شکل ۴. روش ترسیم سیزده ضلعی‌منتظم

فرض می‌کنیم $\mathcal{D}$ دایره‌ای به‌شعاع ۱۲ و مرکزمبدأ مختصات باشد. نقاط $A(12, 0)$، $P(\sqrt{13}-1, 0)$، $Q(5-\sqrt{13}, 0)$ و $R(7+\sqrt{13}, 0)$ را مشخص می‌کنیم. جای نقاط

$$K(6, \sqrt{3}(\sqrt{13}+1))$$

و

$$L(6, -\sqrt{3}(\sqrt{13}+1))$$

دورأس مثلث متساوی‌الاضلاع به‌قاعدهٔ QR، را نیزمعین می‌کنیم. کمان KL به‌مرکز P را رسم و آن را درنقاط S و T به سه پارهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم. خط ST دایرهٔ $\mathcal{D}$ را در A_1 و A_{12}، دو رأس از سیزده ضلعی منتظم $AA_1A_2 \ldots A_{12}$، قطع می‌کند.

باید توجه داشت که پاره‌خط به طول $\sqrt{13}$ وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است به‌اضلاع ۲ و ۳.

1. cyclotomic

شکل فوق دو ترسیم تقریبی را پیش‌پای ما می‌گذارد. نقطهٔ R خیلی نزدیک به‌خط ST' به‌نظر می‌رسد. زیرا، خط مار بر R و عمود بر محور x دایرهٔ $\mathcal{D}$ را در دو نقطه قطع می‌کند؛ آن یک که به A_1 نزدیکتر است حدود ۱۲ دقیقهٔ کمانی از A_1 فاصله دارد. حتی از این هم نزدیکتر، خط PK دایرهٔ $\mathcal{D}$ را در نقطه‌ای قطع می‌کند که در حدود ۳ دقیقهٔ کمانی از A_2 فاصله دارد.

عدد اول تازهٔ بعدی، ۱۹، احتیاج به‌دو بار تثلیث زاویه دارد. جزئیات اثبات به‌عهده خواننده گذاشته می‌شود!

چند تعمیم قضیهٔ ۲ بلافاصله به‌ذهن القا می‌شود. برای ترسیم ۱۱ ضلعی منتظم باید چند جمله‌ای درجهٔ پنجمی را حل کنیم که $2\cos(2\pi/11)$ ریشهٔ آن باشد. آیا انجام‌دادن این‌عمل با تقسیم یک‌زاویه به ۵ پارهٔ مساوی امکان‌پذیر است؟ گاوس به‌کلیهٔ این گونه پرسشها پاسخ داده است. در اینجا حکم نهایی او را دربارهٔ این موضوع می‌آوریم[۳، ص ۴۵۰]:

> درنتیجه، تقسیم یک دایره به n (عدد اول) پارهٔ مساوی نیازمند است به: اولاً تقسیم کل آن دایره به $n-1$ پارهٔ مساوی؛ ثانیاً تقسیم کمان دیگری به $(n-1)$ پارهٔ مساوی که به‌محض انجام تقسیم اول امکان‌پذیر است؛ ثالثاً استخراج یک ریشهٔ دوم؛ و می‌توان نشان داد که این عدد همواره برابر است با $\sqrt{n}$.

از اینجا به‌آسانی نتیجه می‌شود که یک n ضلعی منتظم (n دیگر لزومی ندارد اول باشد) را زمانی می‌توان رسم کرد که علاوه بر ستاره و پرگار ابزار دیگری برای p قسمت کردن هر زاویه، به‌ازای هر عدد اول p که $\varphi(n)$ را عاد می‌کند، در دست باشد. بنابراین ستاره، پرگار و زاویه خمس‌کن برای ترسیم ۱۱ ضلعی، ۴۱ ضلعی و یا ۱۰۱ ضلعی کافی است.

یادداشتها و مراجع

۱. چون $2^{2^n}+1$، n عدد فرد بزرگتر از یک، دارای شمارندهٔ غیرپیش‌پا افتادهٔ $2^{2^q}+1$ است، واضح است که $2^{2^q}+1$ فقط درصورتی اول است که q خود توانی از عدد ۲ باشد، بنابراین کلیهٔ اعداد اول فرما به صورت $2^{2^k}+1$ هستند. اعداد اول شناخته شدهٔ فرما ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، و ۶۵۵۳۷ به‌ترتیب متناظر با مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ برای k هستند. اویلر نشان داد

$$2^{2^5}+1=641\times 6700417.$$

که این خود حدس فرما را که $2^{2^k}+1$ به‌ازای کلیهٔ مقادیر k عددی اول است، رد می‌کند. اخیراً ثابت کرده‌اند که $2^{2^k}+1$ به‌ازای مقادیر $6\leqslant k\leqslant 19$ و بسیاری مقادیر بزرگتر عددی است مرکب. دربسیاری ازموارد تجزیهٔ کامل این اعداد مرکب به‌دست نیامده است. [۹] را ببینید.

۲. هم [۸] و هم [۱۳] شامل اطلاعات زیادی دربارهٔ روش ترسیم با استفاده از ابزارهای استثنایی هستند. برای شرح ترسیمهای استاندهٔ "ستاره و پرگار" به [۱۲] رجوع کنید.

۳. این بحث معمولاً برحسب مبین معادله (یعنی مربع حاصلضرب کلیهٔ تفاضلهای ریشه‌ها) انجام می‌گیرد. مبین معادله $D(f)$ نیست بلکه $-108D$ است؛ پس مقدار مثبت D متناظر است با مبین منفی و برعکس.

۴. برای ملاحظهٔ اثبات این موضوع به [۱۶، صفحهٔ ۱۸۰] رجوع کنید. برای مطالعهٔ بحث مبسوطی درمورد حل معادلات به‌وسیلهٔ رادیکالهای حقیقی، [۱۱] را ببینید.

۵. فرض می‌کنیم نقاط $(0,0)$ و $(1,0)$ دو نقطه از شکل باشند.

۶. اگر در صفحهٔ داده‌ها هیچ دستگاه مختصاتی نداشته باشیم، ابتدا با انتخاب دو نقطه مفروض $(0,0)$ و $(1,0)$ یک دستگاه مختصات می‌سازیم. این داده‌ها باید شامل دو نقطه باشند، و یا حداقل دو نقطه اشتراک باید فوراً در دسترس باشند؛ درغیر این صورت هیچ ترسیمی مقدور نیست. (در اینجا دستور "نقطهٔ دلخواهی را انتخاب کنید" پذیرفتنی نیست زیرا در این صورت تحلیل ترسیمها خیلی پیچیده خواهد شد. به [۱۲] رجوع کنید).

۷. روی‌هم رفته ۴۱ عدد اول به‌این‌شکل وجود دارند که از یک میلیون کوچکترند. این اعداد عبارت‌اند از:

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۳۷، ۷۳، ۹۷، ۱۰۹، ۱۶۳، ۱۹۳، ۲۵۷، ۴۳۳، ۴۸۷، ۵۷۷، ۷۶۹، ۱۱۵۳، ۱۲۹۷، ۱۴۵۹، ۲۵۹۳، ۲۹۱۷، ۳۴۵۷، ۳۸۸۹، ۱۰۳۶۹، ۱۲۲۸۹، ۱۷۴۹۷، ۱۸۴۳۳، ۳۹۳۶۷، ۵۲۴۸۹، ۶۵۵۳۷، ۱۳۹۹۶۹، ۱۴۷۴۵۷، ۲۰۹۹۵۳، ۳۳۱۷۷۷، ۴۷۲۳۹۳، ۶۲۹۸۵۷، ۷۴۶۴۹۷، ۸۳۹۸۰۹، ۹۹۵۳۲۹.

بجاست حدس بزنیم که تعداد آنها بینهایت است؛ احتمالاً حدود ۹٪ از آنها کوچکتر از 10^4 هستند.

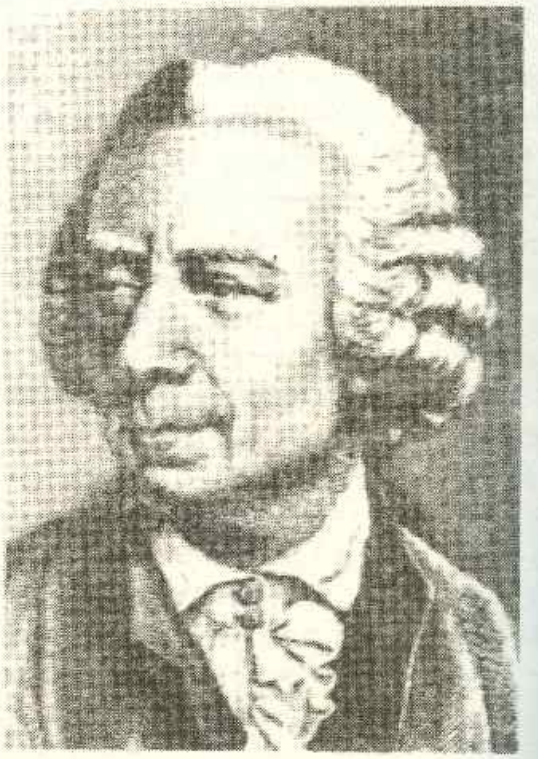
8. L. Bieberbach, Theorie der Geometrischen Konstruktionen, Birkhauser, Basel, 1952.
9. J. Brillhart, D.H. Lehmer, J.L. Selfridge, B. Tuckerman, and S.S. Wagstaff, Factorizations of $b^n\pm 1$, *Contemporary Mathematics*, 22 (1983) American Mathematical Society, Providence, R.I.
10. C.F. Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, Leipzig, 1801, translated from the Latin by A.A. Clarke, Yale University Press, New Haven, CT, 1965.
11. I.M. Isaacs, Solution of Polynomials by real radicals, *Amer. Math. Monthly*, 92 (1985) 571-575.
12. N.D. Kazarinoff, Ruler and the Round, vol.15, Complementary series in mathematics, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1970.
13. H. Lebesgue, Leçons sur les constructions géométriques, Gauthier-Villars, Paris, 1950.
14. J. Plemelj, Die Siebenteilung des Kreises, *Monatshefte fur Math. und Phys.*, 23 (1912) 309-311.
15. J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Band IV. de Gruyter, Berlin, 1940, p.259.
16. B.L. van der Waerden, Modern Algebra (trans. from the German by Fred Blum). Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1949.
17. P.L. Wantzel, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2 (1837) 366-372.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

• Andrew M. Gleason, "Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon," *Amer. Math. Monthly*, (3) **95** (1988) 185-194.

اویلر*

آندره ویل
ترجمهٔ محمد جلوداری‌ممقانی



تا اواخر قرن هفدهم، ریاضیات گاه بـه‌استادان زبردستش شهرتی بسزا می‌بخشید ولی به‌ندرت موجبات پیشرفت در جامعه و به‌دست آوردن‌شغل آبرومندانه‌را برای‌آنها فراهم می‌کرد.ویت[1] زندگانی خود را از راه وکالت می‌گذراند و فرمـا از راه قضاوت؛ حتی به‌روزگار فرما تعداد کرسیهای استادی ریـاضیات اندك، و فاصلهٔ زمانی بین تفویض آنها زیاد بود. البته شی‌پیونه دل‌فرو[2] دراوایل قرن شانزدهم یکی از استادان دانشگاه بلونیا[3] به‌حساب می‌آمدکه درسراسر اروپا دانشگاه مشهوری بود. شغل کاردان طبابت و شغل بومبلی[4] مهندسی بود.سیمون استوین نیز درهلند مهندس بود. تپر، کاشف لگاریتم، یك ملاك اسکاتلندی بود کـه پس از بازگشت از مسافرتهای دوران جوانی، درقصر خود واقع در مرچیستون زندگی می‌کرد. در رشته‌های نزدیك به‌ریاضی هم وضع بهتر ازاین نبود. کوپرنیك مقام کشیشی داشت. معلم کپلر، ماستلین[5]، استاد توبینگن بود، ولی کپلر با جدیت به‌کسب وکارش یعنی طالع‌بینی و ساختن زایچه مشغول بود. نبوغ گالیله همراه با شخصیت نافذش، نخست او را به مقام استادی در پادوا و سپس بـه‌منصب رشك‌برانگیز تحت‌الحمایگی گراندوك توسکانی رسانـد، و درنتیجه از مصیبت بارترین نتایج برخورد باکلیسای رم نجات یـافت. شاگرد وی توریچلی به‌عنوان "فیلسوف و ریاضیدان" نزدگراندوك جـانشین وی شد، درحالی که کاوالیری[6] هم‌کرسی بلونا و هم ریاست صومعهٔ ژزواتی[7] درهمان شهر را داشت.

از میان آنهایی که بـا فرما مکاتبهٔ علمی داشتند، عـدهٔ کمی دارای مرتبهٔ استادی بودند. روبروال، درکولژدوفرانس (که بعد به‌کولژ رویال موسوم شد) کرسیی راکه درسال ۱۵۷۲ بنا به‌وصیت پیر دولارامه، دانشمند وفیلسوف، بنیاد نهاده شده بود، اشغال‌کرد. والیس از سال ۱۶۴۹ تـا زمان مرگش در سال ۱۷۰۳ صاحب کرسی ساویلی[8] در اکسفرد بـود؛ ایـن کـرسی در سال ۱۶۲۰ به‌افتخار بریگز ایجاد شده‌بود.ولی‌همکار جوان وبااستعداد والیس، ویلیام برانکر، ویکنت دوم، نجیب‌زاده‌ای بود کـه شرح دوران خدمتش درنیروی دریایی وعشقهایش، در یادداشتهای روزانه پپیز[9] درج شده‌است. تنها درسال ۱۶۶۳ بودکه آیزك‌بارو اولین استاد لوکازی[10] در دانشگاه کمبریج شد؛ وی این مقام را در سال ۱۶۶۹ به‌نیوتن واگذارکرد تا خود درخدمت چارلز دوم واعظ شود، و درمقام یك روحانی شهرت بسزایی به‌دست آورد. درهلند، زمانی که دوست و شارح آثار دکارت، اسخوتن[11]، استاد لیدن بـود، رنه دواسلوز[12]، ریاضیدانی که دربین معاصرانش بسیار محترم بود و شخصیتی جذاب داشت، در لیژکشیش بود. دکارت، چنانکه خود

1. Viète
2. Scipione del Ferro
3. lo studio di Bologna
4. Bombelli
5. Maestlin
6. Cavalieri
7. Gesuati
8. Savilian
9. Pepys
10. Lucasian
11. Schooten
12. Sluse

گفته است، بـه لطف الهی[1]، خود را بی‌نیاز از شغل انتفـاعی می‌دانست؛ دوستـان او کنستانتین هـویگنس و پسر کنستانتین، کریستیان هویگنس کبیر، نیز چون او بی‌نیاز بودنـد. لایب‌نیتس در استخدام دربـار هانور بود، و در تمـام طول زنـدگانی‌اش بـه ریاضیات عشق می‌ورزیـد. امـا گاهی دوستانش در شگفت می‌ماندند که با آن همه اشتغالاتی کـه دارد چگونه برای مطالعه ریاضیات فرصت کافی به‌دست می‌آورد.

شغل ایـن افراد هرچه بود، طرز برخوردشان بـا ریاضیات غالباً طوری بود که گویی ریاضیدان کاملاً حرفه‌ای هستند. آنهـا کوشش می‌کردند خواه به‌وسیلهٔ نوشته‌های چاپی و خواه به‌وسیلهٔ مکاتبه، افکار خود و نتیجه‌هایی را کـه به‌دست آورده‌اند به طرز صحیحی منتشر کنند و در جریان پیشرفتهای عصر خود قرار گیرند. برای این‌کار به‌شبکه‌ای ازمخبرهای خصوصی متکی بودند. هنگامی که مسافرت می‌کردند، در جستجوی دانشمندان بیگانه بودند. در وطن، مسافرین دوستدار علم به دیدار آنها می‌شتافتند؛ زنبورهای عسل ساعی کاری جز افشاندن گرده‌های برچیده شده از اینجا و آنجا نداشتند. آنهـا مشتاقانه درپی افرادی بـا علایق مشابه خودشان بودند که با آنها مکاتبه کنند؛ نامه‌هـا دست به‌دست می‌گردید تـا به‌دست فرد ذیعلاقه برسد. داشتن یك کتابخانهٔ شخصی که به تعداد کافی کتاب داشته باشد، از ضروریات بود. کتابفروشها، ازمشتریان خود سفارش دائمی داشتند کـه آخـرین انتشارات را در زمینهٔ انتخابی آنهـا، در اختیارشان بگذرانند. این نظام، یا فقدان نظام، نسبتاً خوب کار می‌کرد؛ و در واقع تا امروز هم به‌صورتی برقرار مانده و بـا روشهای رسمیتر ارتباط تکمیل شده و از ارزش آن چندان کاسته نشده است. بـا این همه، حتی در قرن هفدهم، چنین نظامی کافی وکارا به‌نظر نمی‌رسیده است.

قبل از تولـد اویلر در سال ۱۷۰۷، تحولاتی اساسی کـه اولین علایم آن حتی قبل از مرگ فرما آشکار شده بود، رخ داد. انتشار مجلهٔ دانشمند در ژانویهٔ ۱۶۶۵ آغاز شد، درست موقعی که باید خبر مرگ فرما را (که درمجله "این مرد بزرگ" نـامیده شده‌است) چاپ می‌کرد. کلبرت، وزیر دوراندیش لوئی‌چهاردهم، در ۱۶۶۶ هویگنس را و در ۱۶۶۹ کاسینی‌ستاره‌شناس رابه‌پاریس آورده ومستمری‌شاهانه‌ای‌ازآن‌نوع که تاآن‌زمان به‌ادبا اختصاص داشت،برای‌هریك مقرر کرده‌بود. درسال۱۶۳۵ ریشلیوفرهنگستان فرانسه را بنیان نهاد. کلبرت که ذهن عملگراتری داشت و فـایدهٔ پژوهش علمی را تشخیص می‌داد (و ارزش پژوهش محض راکمتر از پژوهش کاربردی نمی‌دانست) برای شکوفایی کشور، در سال ۱۶۶۱ فرهنگستان علوم را حول هسته‌ای که بیشتر اعضایش قبلاً با فرما مکاتبه داشتند، تأسیس کرد و ادارهٔ آن را به‌دوست صمیمی وهمکار قبلی فرما، کارکاوی[2]، تفویض نمود و وی اولین دبیر آن شد. در انگلستان بـا بازگشت چارلـز دوم درسال ۱۶۶۰ ثبات سیاسی تا حدی برقرار شده بود؛ درسال ۱۶۶۲ گروه آماتورها که مدتی جلسات منظمی درکالج گرشام[3] داشت، فرمانی دریـافت کردکه به‌موجب آن، انجمن سلطنتی توسط این افراد تشکیل، و برانکـر اولین رئیس آن شد. درسال ۱۶۶۵ این گـروه انتشار

1. *graces à Dieu* 2. Carcavi 3. Gresham

چکیده‌های فلسفی راکه تاکنون نیز ادامه یافته است، آغاز کرد. به‌پیروی ازآن، درسال ۱۶۹۸ فرهنگستان فرانسه انتشار یك سری مجلهٔ سالانه، به‌نامهای متفاوت تاریخ و مقاله‌های فرهنگستان علوم فرانسه را آغاز کرد. در سال ۱۶۸۲ لایب‌نیتس در ایجاد یك مجلهٔ بزرگ علمی، آکتااریودیتوردوم[1] لایپزیگ، نقش مؤثری ایفا کرد و دراولین شماره‌های آن مقالاتی نوشت که حساب بینهایت کوچکها از آنها نشأت گرفت.

بـه‌زودی دانشگاهها و فرهنگستانها بـرسر استعدادهای علمی به‌رقابت برخاستند و ازهیچ کوشش و پولی برای جذب آنها دریغ نکردند. یاکوب برنولی در شهر خود بازل درسال ۱۶۸۷ استاد دانشگاه شد، و این موجب شد که تـا زنده بود برادر کوچکتر و رقیب سرسختش یوهان از به‌دست‌آوردن شغل دانشگاهی درآن شهـر قطع امید کند. یوهـان نخست مجبور شد حساب بینهـایت کوچکهای لایب‌نیتس را به‌نجیب‌زادهٔ فرانسوی مارکی دولوپیتال بیاموزد و حتی قـراردادی غیرعادی امضا کند کـه به‌موجب آن مارکی دولوپیتال نسبت به‌تمام کشفیات ریاضی او ذیحق باشد. با این حال، درسال ۱۶۹۵ یوهان برنولی درگرونینگن استاد شد و با تدبیر ماهرانهٔ قراردادن اوترشت درمقابل گرونینگن، سرانجام موقعیت خود را درآنجا بهبود بخشید، و بـالاخره پس از مرگ برادرش درسال ۱۷۰۵ در بازل اقامت گزیـد. بنابراین، تعجبی ندارد که ببینیم او در ۱۷۴۱ استخدام اویلر در برلین را، به‌خاطر جنبهٔ مالی این‌استخدام، تبریك می‌گوید و درهمان‌جا اشاره‌می‌کند که حاضر است (درمقابل حقوق سالانـهٔ اندکی) بـا ارسال منظم تحقیقات خود، مجموعهٔ مقاله‌هـای فرهنگستان برلین را پرمایه‌تر کند. خلاصه، وضع زندگی علمی در اوایل قرن هیجدهم با آنچه که امروز شاهد آن هستیم، چندان تفاوتی نداشت.

پـدر اویلر، پاول اویلر، کشیش نـاحیهٔ ریهن در نـزدیکی بازل بود؛ وی در دانشگاه بـازل الهیات خوانده و همزمـان در کلاسهای درس یـاکوب برنولی نیز شرکت کرده بود؛ او برای پسرش شغل مشابهی را درنظر داشت، امـا هنگامی کـه تمایلات ثئونهارت جوان آشکار شد، هیچ مانعی بر سر راه آنها قرار نداد. درآن هنگام، هرجوانی که استعداد علمی استثنایی داشت به‌وضوح آیندهٔ روشنی درانتظارش بود.

درسال ۱۷۰۷، وقتی اویـلر به‌دنیا آمد، یاکوب بـرنولی درگذشته و یوهان جانشین وی شده بود؛ دوپسر یوهان، نیکولاوس (متولد ۱۶۹۵) و دانیل (متولد ۱۷۰۰)، سنت خانـدان خود را دنبال می‌کردند با این تفاوت که آنها برخلاف پدر وعموی خود، قلباً یکدیگر را دوست می‌داشتند وبسیار می‌کوشیدند این دوستی را نشان دهند. اویلر دوست صمیمی آنها، و شاگرد مقرب یوهان شد؛ او درسنین پیری، با شعف به‌یاد می‌آورد که شنبه‌ها به ملاقات استادش می‌رفته و مشکلاتی راکـه درطول هفته بـا آنها روبه‌رو می‌شده، مطرح می‌کرده‌است، و بسیار می‌کوشیده است که استادش را با طرح سؤالات غیرلازم دردسر ندهد.

سه تن از شاهان در زندگانی اویلر نقش مهمی داشتند: پتر کبیر، فردریك کبیر وکاترین کبیر. پتر، که شاید واقعاً تزار کبیری

1. *Acta Eruditorum*

بود، درسال ۱۷۲۵ درگذشت؛ اما در زمان حیاتش توانسته بود سن‌پترزبورگ را بناکند، بعضی از باشکوهترین ساختمانهای آن را برپا سازد، ومهمتر ازهمه برای داستان ما، برای فرهنگستان علوم طرحهایی به‌سبك آنچه‌که درغرب دیده بود بریزد، که همهٔ این طرحها را همسر بیوه‌اش به‌طورکامل اجراکرد. درسال ۱۷۲۵ برنولیهای جوان، نیکولاوس و دانیل، به‌پترزبورگ دعوت شدند. سال بعد، نیکولاوس گویا از بیماری آپاندیسیت درگذشت. تقریباً درهمان موقع به اویلر پیشنهاد شد که به فرهنگستان پترزبورگ بپیوندد. اویلر هنوز بیست‌سالش تمام‌نشده بود و به‌تازگی به‌خاطر نوشتن مقاله‌ای دربارهٔ کشتی‌سازی برندهٔ جایزه شده بود ــ حال آنکه درعمرش حرکت حتی یك‌کشتی دریاپیما را ندیده بود. او هیچ امیدی نداشت که به‌زودی شغلی در وطن خود به‌دست آورد و لذا پیشنهاد را با رغبت پذیرفت.

باکشتی از بازل از طریق رود راین به مینتس رفت. سپس بیشتر با پای پیاده به‌لوبك سفرکرد؛ در بین راه به‌دیدن کریستین ولف که فیلسوفی پیرو لایب‌نیتس بود، رفت؛ او را (چنانکه به‌اویلر گفت) پادشاهی که از فلسفه چیزی نمی‌فهمید از برلین تبعید کرده بود. موضوع مورد علاقهٔ ولف نظریه مونادهای لایب‌نیتس بود، که توجه اویلر را جلب نکرد. یك‌کشتی، ریاضی‌دان جوان را از لوبك به‌پترزبورگ رسانید.

درآن روزگار فرهنگستانها مؤسساتی تحقیقاتی بودند که موقوفهٔ کافی، سرمایهٔ فراوان وکتابخانه‌های خوب داشتند. اعضای آنها از آزادی قابل‌ملاحظه‌ای برخوردار بودند. وظیفهٔ اصلی آنان، مشارکت فعال در انتشارات فرهنگستان و اعتلای حیثیت علمی آن در عرصهٔ جهانی بود. ضمناً این افراد مشاورین علمی شاه ومقامات دولت نیز بودند و برای انجام هر وظیفه‌ای، چه با طبیعتشان سازگار بود و چه نبود، آمادگی داشتند. اگر چنین نبود، چنانکه یکبار اویلر به‌کاترین گوشزدکرده بود، هیچ دولتی زیر بار خرج گزاف این‌گونه مؤسسات نمی‌رفت. اویلر (که درپترزبورگ به‌زبان روسی خوب مسلط شده بود) در اوج شهرت خود درسال ۱۷۵۸، چند نامه راکه درعملیات نظامی علیه ارتش روسیه به‌دست آمده بود برای شاه فردریك ترجمه کرد، بدون اینکه این‌کار را دون شأن خود ویاآن را ناسازگار با رابطهٔ نزدیکش با فرهنگستان پترزبورگ بداند.

اما در سال ۱۷۲۷، زمانی که اویلر به پترزبورگ رسید، وضع سیاسی تغییرکرده بود. تحت فرمانروایی تزار جدید، تمام استخدامهای فرهنگستان متوقف شده بود. به اویلر به‌خاطر مقالهٔ فوق‌الذکرش [دربارهٔ کشتی‌سازی] کاری درنیروی دریایی دادند. کمی بعد عضو حقوق‌بگیر فرهنگستان شد؛ ولی درآغاز رتبه‌اش پایین و درسطح دستیار بود. هنگامی که دوستش دانیل در سال ۱۷۳۳ عازم بازل شد، به جای او منصوب گشت. اینك بضاعت آن را داشت تا، طبیعتاً با یکی ازمهاجرین سویسی آنجا، ازدواج کند و خانهٔ خوبی برای خود بخرد. عروس، دختر گسل[1] نقاش بود و باگذشت زمان سیزده بچه به‌دنیا آوردکه ازآنها تنها سه پسر بعد از اویلر زنده ماندند؛ بیش از این چیزی دربارهٔ همسر اویلر نمی‌دانیم. پسر ارشدش، یوهان آلبرت، متولد ۱۷۳۴، ابتدا یکی ازهمکاران پدر و سپس یکی از اعضای برجستهٔ فرهنگستان شد.

همینکه اویلر در پترزبورگ کاملاً مستقر شد، علی‌رغم اینکه با رفتن دانیل برنولی نسبتاً تنها شده بود، میزان تولید علمی‌اش از حدود انتظار بسیار فراتر رفت. [ولی] بیماری سخت سال ۱۷۳۵، که دراثر آن چشم راست خود را از دست داد، از این میزان به‌شدت کاست. او بدون شك ارزشمندترین عضو آکادمی شده بود و شهرتش با سرعت زایدالوصفی افزایش می‌یافت؛ ولی وقوع دوحادثه در فضای سیاسی اروپا، موجب تحول مهمی در زندگی آرام وی شد. در پترزبورگ به‌نظر می‌رسیدکه مرگ تزارینا درسال ۱۷۴۰، روی‌کارآمدن شورای سلطنت، وآشوبهای پس ازآن حتی موجودیت فرهنگستان را به‌خطر افکنده باشد. درست در همین زمان بحرانی، فردریك دوم به جای پدر خود (همان شاهی که به طور اهانت‌آمیزی کریستین‌ولف را از برلین بیرون‌کرده بود) بر تخت سلطنت پروس نشست و بی‌درنگ برای تأسیس فرهنگستان به‌سرپرستی خود اقدام‌کرد؛ برای این مقصود اسامی مشهورترین دانشمندان اروپایی را خواست، که البته نام اویلر دراین صورت اسامی بود. پیشنهاد سخاوتمندانهٔ فردریك و بدترشدن سریع اوضاع در پترزبورگ دست به‌دست هم دادند و اویلر پس از سه هفته مسافرت روی دریای بالتیك (که در طول آن، به‌ادعای خودش تنها کسی ازخانواده بودکه دچاردریاگرفتگی نشد) در ژوئیهٔ سال ۱۷۴۱ به برلین رسید. سال بعد، وی با خشنودی تمام توانست خانه‌ای عالی با چشم‌اندازی خوب خریداری‌کند و به‌دستور مخصوص شاه ازمالیات معاف شود. در این خانه ۲۴ سال زندگانی‌کرد وظاهراً آنجا را ترك نکرد مگر درفصل مناسب برای رفتن به‌ملك ییلاقی خود در شارلوتنبرگ که آن را در سال ۱۷۵۲ خریده بود، و درسال ۱۷۵۰ که یك مسافرت خانوادگی به فرانکفورت‌کرد تا مادرش راکه بیوه شده بود و از بازل برای زندگی به برلین می‌آمد، ببیند. پدر اویلر مأیوس از دیدار پسر درسال ۱۷۴۵ در بازل درگذشت.

با تغییر محل زندگی اویلر، انتظار می‌رفت که جریان مستمر انتشارات وی از پترزبورگ به‌برلین منتقل شود، ولی چنین نشد! او نه‌تنها مجاز به‌حفظ عضویت خود درآکادمی پترزبورگ شد، بلکه پرداخت مستمری‌اش از پترزبورگ نیز ادامه یافت، و اویلر مصمم بود پولی راکه ازهمکاران سابقش می‌گیرد [با فرستادن مقاله] جبران‌کند. بهترین توصیف از دوران اقامت اویلر دربرلین دراثر نوه‌اش پ. ه. فوس تحت‌عنوان "بیست و پنج سال فعالیت شگفت‌انگیز" آمده است. از محصولات فکری اویلر درآن سالها، بیش از ۱۰۰ مقالهٔ ارسالی به پترزبورگ، ۱۲۷ مقاله در تمام زمینه‌های ریاضی محض وکاربردی‌که در برلین منتشر شد، و در کنار آنها نه‌تنها آثار بزرگی در آنالیز، بلکه در اصلحه‌سازی، کشتی‌سازی، و در نظریهٔ ماه را می‌توان ذکرکرد. صرف‌نظر از مقاله‌های‌جایزه برنده‌ای که به‌فرهنگستان پاریس فرستاد (جایزه‌هایی که علاوه برشهرت زیادمقدار قابل‌توجهی پاداش نقدی نیز نصیب اوکردند)، باید نامه‌هایی به یك شاهزاده خانم آلمانی (یکی از موفقترین کتابهای علمی عامه‌فهمی که تاکنون منتشر شده است) و نیزکتابی در دفاع از مسیحیت راکه درجلب توجه شاه فردریك

1. Gsell

به‌اصطلاح فیلسوف به‌نویسنده اثری نداشت، نام برد. در آن زمان مکاتبات علمی، شخصی و اداری اویلر بسیار زیاد و دائماً رو به افزایش بود، زیرا بار مسؤولیتهای اداری فرهنگستان بیشتر و بیشتر به‌دوش او می‌افتاد.

به‌مرور زمان اویلر و فردریك از یکدیگر دل‌آزرده می‌شدند. شاه از اعتبار وشکوهی که اویلر به‌آکادمی او می‌بخشید، ناآگاه نبود، ولی دانشمندان فرانسوی خیلی بیشتر مورد توجه او بودند. فردریك درصدد جلب دالامبر به‌برلین برآمد، و انتظار می‌رفت او را درمقام ریاست فرهنگستان مافوق اویلر قرار دهد. حیثیت اویلر ازاین خطر مصون ماند. دالامبر که شاید از رفتار فردریك با ولتر درسال ۱۷۵۳ عبرت گرفته بود، درسفر کوتاهی از الطاف ملوکانه برخوردار شد، اما برای آزادی‌اش ارزشی بیشتر ازآن حد قائل بود که مدتی طولانی ازآن چشم بپوشد. به‌هرحال در اوایل سال ۱۷۶۳ اویلر به‌فکر بازگشت به‌روسیه افتاد.

خوشبختانه درست در همان زمان تغییر دیگری در اوضاع سیاسی روسیه رخ داد. درسال ۱۷۶۲ همسر آلمانی تزار بعد از رهاکردن خود و روسیه از دست همسرش، به‌نام‌کاترین دوم قدرت را به‌دست گرفت. یکی از اولین طرحهای او تجدید شکوه وعظمت فرهنگستان پترزبورگ بود، و این تقریباً به‌معنی برگرداندن اویلر بود. مذاکرات سه‌سال ادامه یافت. سرانجام درسال ۱۷۶۶ به‌سفیر روسیه در برلین دستور داده شد که از اویلر خواهش کند قرارداد را خود بنویسد. فردریك که خیلی دیر به‌میزان این‌خسارت پی برد، سعی کرد دراین راه مانعهایی ایجاد کند، ولی به‌زودی دریافت که نباید علیاحضرت ملکه را ناراضی کند. در همان سال اویلر به‌پترزبورگ برگشت. دربین راه اقامتی بسیار موفقیت‌آمیز در لهستان داشت؛ درآنجا معشوق پیشین کاترین، شاه استانیسلاس، از وی تقریباً نظیر یك شاهزاده پذیرایی کرد.

درآن هنگام اویلر به‌تدریج بینایی خود را از دست می‌داد. دید چشم راستش را درطول اولین اقامت خود درپترزبورگ از دست داده بود. تقریباً هنگامی که برلین را ترك می‌کرد، یا مدت کوتاهی بعد ازآن، آب آوردن چشم چپش شروع شد. در سال ۱۷۷۰ درجواب نامهٔ لاگرانژ دربارهٔ نظریهٔ اعداد، حال خود را چنین توصیف می‌کند: "تمام محاسبات شما را در بارهٔ معادلهٔ $p^2-13q^2=151$ برایم خواندند، و من به‌درستی آنها کاملاً یقین حاصل کرده‌ام؛ اما چون قادر به‌خواندن یا نوشتن نیستم، باید اقرار کنم که قوهٔ تصورم نتوانست دلیل همهٔ مراحلی را که شما آورده‌اید دنبال کند، و نیز نتوانستم معنای همهٔ نمادهای شما را به‌خاطر بسپارم. درست است که پیش از این، این‌گونه پژوهشها برای من لذت‌بخش بوده‌اند و من روی آنها وقت زیادی صرف کرده‌ام، اما درحال حاضر تنها به‌کارهایی می‌توانم دست بزنم که بتوانم آنها را در ذهن انجام دهم، و غالباً برای انجام محاسبات مورد نظرم مجبورم به‌دوستان رجوع کنم."

درسال ۱۷۷۱ چشمش را عمل کردند؛ عمل ابتدا موفقیت‌آمیز بود، ولی به‌زودی چشم عفونت کرد، و اویلر نابینا شد. صرف‌نظر ازاین اتفاق ناگوار وآتش‌سوزی سال ۱۷۷۱ که خانهٔ او و چندین خانهٔ دیگر در پترزبورگ را ویران کرد، او در رفاه می‌زیست، ومورد عزت واحترام فراوان بود. نه پیری و نه‌نابینایی، نتوانستند او را وادار به‌استراحت کنند، استراحتی که بسیار مستحق آن بود. دستیارانی داشت که یکی از آنها پسر خودش بود، و دستیاران دیگر با مساعدت دوست دیرینش، دانیل برنولی از بازل فرستاده شده بودند؛ توصیف زندهٔ روش کار اویلر در آخرین دههٔ زندگانی‌اش را مدیون یکی از اینها به‌نام ن. فوس هستیم که درسال ۱۷۷۳ به‌پترزبورگ آمد و بعد با نوهٔ اویلر ازدواج کرد. دراین دوره اویلر صدها مقاله نوشت وهمچنانکه او پیش‌بینی کرده بود، این مقاله‌ها برای انتشارات چندین سال فرهنگستان کافی بود. اویلر ناگهان در ۱۸ سپتامبر سال ۱۷۸۳، درحالی‌که ازصحت عمومی مزاج و قدرت ذهنی کامل برخوردار بود، درگذشت.

یك اثبات مقدماتی برای مجموعهای مربعها

درسال ۱۷۵۱ اویلر که ثابت کرده بود هرعدد صحیح مجموع (حداکثر) چهار مربع از اعداد گویاست چنین نوشت: "درآنالیز دیوفانتی، معمولاً قبول می‌کنند که هیچ عدد صحیحی را نمی‌توان به‌حاصلجمع چهار مربع از اعداد گویا تجزیه کرد، مگر اینکه به‌صورت مجموع حداکثر چهار مربع از اعداد صحیح قابل بیان باشد. اما من تاکنون اثبات این مطلب را درهیچ‌جا نیافته‌ام..."

این درواقع سؤالی است که درمورد مجموعهای ۲، ۳ یا ۴ مربع، به‌طور طبیعی برای هرکس که‌کتاب دیوفانتوس را می‌خواند مطرح می‌شود. فرما هم درآغازکار خود زمانی که درنظریهٔ اعداد تحقیق می‌کرد، دراین‌باره اندیشیده بود وظاهراً به‌نتیجه‌ای نرسیده بود. سپس خود اویلر مسأله را به‌ویژه درمورد مجموعهای دومربع درسال ۱۷۴۵، وبعد مکرراً درمکاتبات خود با گولدباخ درمورد مجموعهای چهار مربع، مطرح کرده بود.

دراینجا برهان آوبری را می‌آوریم. این برهان مجموعهای ۲، ۳ یا ۴ مربع و چند صورت درجهٔ دوم دیگر راشامل می‌شود. نخست آن را به زبان هندسی برای مجموعهای ۳ مربع بیان می‌کنیم.

نقاطی از R^3 گویا (صحیح) نامیده می‌شوند که دارای مختصات گویا (صحیح) باشند. به‌ازای هرنقطهٔ $a=(x, y, z)$ نقطه‌ای صحیح، چون $a'=(x', y', z')$، به فاصلهٔ اقلیدسی کمتر از ۱ از a وجود دارد؛ مثلاً می‌توان x'، y'، و z' را به‌ترتیب نزدیکترین اعداد صحیح به x، y، و z گرفت، که دراین حالت فاصلهٔ a تا a' حداکثر $\sqrt{3}/2$ می‌شود.

حال فرض کنیم عدد صحیحی چون N مجموع مربعهای ۳ عدد گویا باشد؛ به‌عبارت دیگر، روی کرهٔ S به معادلهٔ $N=x^2+y^2+z^2$ یك نقطهٔ گویای a_0 وجود داشته باشد. نیز فرض کنیم a'_0 نزدیکترین نقطهٔ صحیح (یا یکی ازنزدیکترین‌نقاط صحیح، اگر بیش از یك نقطه وجود داشته باشد) به a_0 باشد؛ فاصلهٔ این نقطه از a_0 کمتر از ۱ است. محل تلاقی دیگر S با خط واصل a_0 به a'_0 را a_1 می‌نامیم؛ این نقطه گویاست. فرض کنید a'_1 نزدیکترین نقطهٔ صحیح به a_1 باشد؛ a_2 را محل تلاقی S با خط واصل a_1 به a'_1 می‌گیریم و این عمل را ادامه می‌دهیم. اینك نشان می‌دهیم که به‌ازای یکی از nها، a_n یك نقطهٔ صحیح است.

قرار می‌دهیم $a_0=(x_0, y_0, z_0)$ وفرض می‌کنیم a_0 نقطهٔ صحیح نباشد، و m را کوچکترین مخرج مشترک x، y، و z می‌نامیم. اگر بنویسیم $x=n/m$، $y=p/m$، و $z=q/m$، داریم

$$Nm^2=n^2+p^2+q^2.$$

فرض می‌کنیم $a'_0=(n', p', q')$ نزدیکترین نقطهٔ صحیح به a_0 باشد، وقرار می‌دهیم

$$r=n-mn',\ s=p-mp',\ t=q-mq'$$
$$N'=n'^2+p'^2+q'^2,\ M=2(nn'+pp'+qq').$$

دراین صورت مربع فاصلهٔ بین a_0 و a'_0 عبارت است از

$$\frac{1}{m^2}(r^2+s^2+t^2)=N+N'-\frac{M}{m}$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت m'/m، که درآن m' یك عددصحیح است، نوشت؛ چون این فاصله کمتر از ۱ است، داریم $0<m'<m$، و درعین حال داریم

$$r^2+s^2+t^2=mm',\ M=m(N+N')-m'.$$

اکنون می‌گوییم خط واصل a_0 به a'_0 ازنقاط

$$(n'+\lambda r,\ p'+\lambda s,\ q'+\lambda t)$$

تشکیل می‌شود؛ نقطهٔ a_1 از

$$\begin{aligned}0&=(n'+\lambda r)^2+(p'+\lambda s)^2+(q'+\lambda t)^2-N\\&=mm'\lambda^2+(M-2mN')\lambda+N'-N\\&=(m\lambda-1)(m'\lambda+N-N')\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید. ریشهٔ $\lambda=1/m$ متناظر با نقطهٔ a_0 است، بنابراین ریشهٔ دیگر $\lambda=(N'-N)/m'$ متناظر با a_1 است. درنتیجه m' یك مخرج مشترك مختصات a_1 است؛ چون m' از m کوچکتر است، پس کوچکترین مخرج مشترکهای مختصات a_0، a_1، a_2 وغیره یك دنبالهٔ نزولی از اعداد صحیح مثبت تشکیل می‌دهند، و ادعای ما ثابت می‌شود.

دراین برهان، تنها ازاین ویژگی صورت درجه دوم

$$F(X, Y, Z)=X^2+Y^2+Z^2$$

که به‌ازای هر نقطهٔ ناصحیح (x, y, z) یك نقطهٔ صحیح (x', y', z') وجود داردکه

$$0<|F(x-x', y-y', z-z')|<1$$

استفاده شده‌است. این استدلال درمورد صورتهایی نظیر X^2+Y^2، $X^2\pm 2Y^2$، و X^2-3Y^2 نیز صادق است. اکنون با یك دستکاری ساده درنمادگذاری، نشان خواهیم دادکه می‌توان این برهان را درمورد بعضی ازصورتهای درجهٔ دوم $F(X)$ در $\mathbf{R}^n$ نیز به‌کار برد. دراین موارد به‌ازای همهٔ بردارهای صحیح x مقادیر صحیح را اختیار می‌کنیم و به‌ازای هربردار ناصحیح x از $\mathbf{R}^n$ برداری‌صحیح‌چون x' می‌یابیم که $0<|F(x-x')|\leqslant 1$. مثلاً صورتهای X^2+3Y^2، $X^2+Y^2+2Z^2$، و $X^2+Y^2+Z^2+T^2$ از این مواردند. صورت دوخطی $B(x, y)$ را به‌صورت

$$F(\lambda x+\mu y)=\lambda^2F(x)+\lambda\mu B(x, y)+\mu^2F(y)$$

تعریف می‌کنیم. همچون گذشته یك نقطهٔ گویای a_0 را چنان‌انتخاب می‌کنیم که $F(a_0)=N$، ونقطهٔ صحیح a'_0 را طوری اختیار می‌کنیم که

$$0<|F(a_0-a'_0)|\leqslant 1.$$

فرض کنید m کوچکترین عدد صحیحی باشد که به‌ازای آن، $n=ma_0$ یك نقطهٔ صحیح است؛ می‌نویسیم $a'_0=n'$، $r=n-mn'$، $N'=F(n')$، $M=B(n, n')$. داریم

$$\begin{aligned}F(a_0-a'_0)&=F(m^{-1}r)=F(m^{-1}n-n')\\&=N+N'-\frac{M}{m}.\end{aligned}$$

با نوشتن این عدد به‌صورت m'/m، داریم $0<m'\leqslant m$، و m' یك عدد صحیح است.

خط واصل a_0 به a'_0 ازنقاط $n'+\lambda r$ تشکیل‌می‌شود و a_1، محل تلاقی آن با ابر رویهٔ $F(x)=N$، از

$$\begin{aligned}0&=F(n'+\lambda r)-N=mm'\lambda^2+(M-2mN')\lambda\\&\quad+N'-N=(m\lambda-1)(m'\lambda+N-N')\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید. مانند پیش، a_1 با ریشهٔ $\lambda=(N'-N)/m'$ متناظر است، و بنابراین $m'a_1$ یك نقطهٔ صحیح است، و m' یك مخرج مشترك مختصات a_1 است. اکنون باید $|m'|=m$؛ یعنی $|F(m^{-1}r)|=1$ را درنظر بگیریم. اگر F را یکی از سه‌صورت بالا بگیریم، می‌توانیم فرض کنیم که a'_0 را نقطه، یا یکی ازنقاطی، اختیار کرده‌ایم که مختصاتش نزدیکترین اعداد صحیح به مختصات a_0 هستند، و درنتیجه قدرمطلقهای مختصات $m^{-1}r$ از $1/2$ نابیشترند؛ بنابراین برای اینکه $F(m^{-1}r)$ مساوی با ۱ باشد، همه باید مساوی با $\pm 1/2$ باشند، و $2a_0$ باید صحیح باشد، پس $m=2$. دراین صورت، 2^n امکان انتخاب برای a'_0 وجود دارد واین انتخاب را می‌توان چنان انجام دادکه $N-N'$ زوج باشد. چون درهمین حال m' باید ۱ یا ۲ باشد، پس a_1 صحیح است.

این اثبات را قاعدتاً اویلر می‌فهمیده است؛ شاید فرما هم که توانایی‌اش در جبر اندکی کمتر از میزان لازم برای این اثبات بوده، می‌توانسته با اندکی تلاش آن را بفهمد. اینکه چنین اثباتی این‌قدر دیر کشف شده می‌تواند مایهٔ دلگرمی کسانی باشد که در جستجوی اثباتهایی مقدماتی برای قضایای احتمالاً پیچیده هستند.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

• André Weil, "Euler," *Amer. Math. Monthly*, (9) **91** (1984) 537-542.

حروفچینی کامپیوتریِ متنهای ریاضی

علی پارسا*

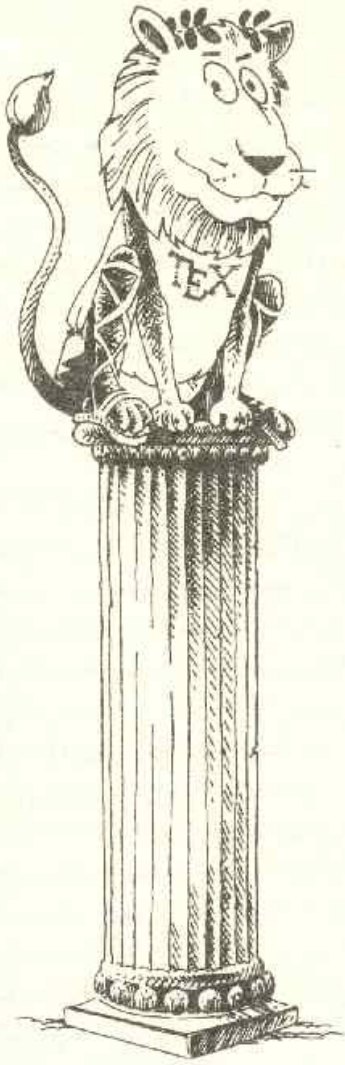
انجمن ریاضی امریکا (AMS) ازسال ۱۹۸۶ به‌نویسندگان مقاله برای نشریات این انجمن توصیه می‌کند که مقالات خود را با استفاده از سیستم حروفچینی کامپیوتری تِك (TEX) تهیه‌کنند و به صورت ضبط شده روی‌نوار یا دیسکت کامپیوتری به‌انجمن بفرستند. بنا به‌تشخیص مسؤولان انجمن این‌کار به‌حدود ۹۰٪ کاهش در هزینهٔ تهیهٔ نسخهٔ آمادهٔ چاپ مقالات منجر می‌شود و موعد چاپ مقالاتی که به‌این‌ترتیب آماده می‌شوند نیز زودتر فرامی‌رسد.

سیستم تك را ریاضیدان برجستهٔ امریکایی دانلدکنوت استاد علم‌کامپیوتر دردانشگاه استنفرد امریکا تهیه‌کرده‌است. وی که بیشتر به‌خاطر اثر بزرگ خود، هنر برنامه‌نویسی کامپیوتر (که تا کنون سه جلد آن منتشر شده و بناست به‌هفت جلد برسد)، شهرت دارد، از سال ۱۹۷۷ به تهیهٔ این سیستم و سیستم دیگری به‌نام متافونت (METAFONT) برای طراحی‌حروف پرداخت. حاصل نهایی کار او درسال ۱۹۸۶ به‌صورت پنج جلد کتاب به‌نام کامپیوتر و حروفچینی منتشرشد. دراین‌کتابها، دکتر کنوت علاوه‌بر توضیح نحوهٔ استفاده از تك (برای حروفچینی متنها باکیفیتی عالی) و متافونت (برای طراحی‌حروف چاپی)، متن‌کامل برنامه‌های این‌سیستمها را نیز دراختیار عموم‌گذارده‌است.

نیاز به تِك

کسانی‌که متنی پر از فرمول را برای چاپ آماده می‌کنند می‌دانند که کار حروفچینی این‌نوع متنها تا چه اندازه مشکلتر از متنهای معمولی است و نتیجهٔ کار نیز معمولاً آن چیزی که انتظار می‌رود نیست و نویسنده مجبور است به‌گذشتهایی در مورد شکل ظاهری مقاله تن دردهد. این تازه مشکلاتی است که در راه تهیهٔ نسخهٔ چاپی و قابل انتشار مقاله‌های ریاضی پیش می‌آید و کیفیت صورت مقدماتی این نوع مقاله‌ها (مثلاً به‌صورت تایپ شده) از این‌هم بدتر است. در این موارد متن مقاله تایپ می‌شود و فرمولها را معمولاً درجاهایی که برای آنها خالی گذارده‌شده بادست می‌نویسند. دراین موقع اغلب پیش می‌آید که نویسنده لزوم تغییراتی را حس می‌کند و لازم می‌داند چند قسمت از مقاله حذف شود و چندنکتهٔ تازه به‌آن اضافه شود یا قسمتهایی ازمقاله را جابه‌جا می‌کند. پس دوباره باید مقاله تایپ شود و روز از نو روزی از نو. اگر مقاله به‌حدکافی مهم باشد ممکن‌است قبل‌از انتشار به‌صورت حروفچینی شده، مدتها به‌همان صورت تایپی با فرمولهای دستنویس در میان خوانندگان که معمولاً همکاران نویسنده یا علاقه‌مندان به‌موضوع (درواقع‌مخاطبهای اصلی نویسنده) هستند دست به‌دست شود. یعنی خوانندگان اصلی مقاله مجبور خواهند بود ظاهر نامطلوب مقاله را بپذیرند و برای‌نسخهٔ بهتر تا روز انتشارنسخهٔ زیباتر وآراسته‌تر حروفچینی شده انتظار بکشند.

دکتر کنوت که خود ریاضیدان است به‌خوبی با این مشکل آشناست. خود او درمصاحبه‌ای با مجلهٔ دیسکاور درسال ۱۹۸۴ در مورد اولین برخوردش با فرمهای چاپخانه‌ای جلد دوم کتاب هنر برنامه‌نویسی‌کامپیوترمی‌گوید: "...نمونه‌های‌چاپخانه به‌قدری بدنما بودکه‌دلم‌می‌خواست آنهارا پاره‌کنم." زیرا فاصله‌های بین کلمات و حروف و به‌خصوص فرمولها اصلاً مطابق خواست و سلیقهٔ او نبود. تهیهٔ سیستم تك درواقع پاسخ کنوت برای رفع این مشکل است.



تك چیست؟

کنوت در اولین بخش جلد اول کتاب تك (TEX Book) ضمن توضیح وجه تسمیهٔ این سیستم، زمینهٔ اصلی کاربرد آن را نیز مطرح می کند. وی می گوید:

"بعضی از کلمات انگلیسی مثل تکنولوژی از یك ریشهٔ یونانی مشتق می‌شوند که دارای حروف ... τεχ است؛ و این کلمهٔ یونانی هم معنی هنر می‌دهد و هم معنی فن. نام TEX هم ازهمین‌جا آمده است و با حروف بزرگ همان τεχ را نشان می‌دهد."

در مورد نحوهٔ تلفظ این اسم کنوت می گوید حرف X در انتهای TEX همان "خی" یونانی‌است و آن را نبایدمثل x بلکه باید مثل "ch" درانتهای کلمهٔ اسکاتلندی "loch" یا کلمهٔ آلمانی "ach" یا مثل تلفظ اسپانیایی "j" یا تلفظ روسی "kh" تلفظ کرد. خلاصه چیزی است بین "ك" و "خ"ی خودمان.

نکتهٔ دیگر درموردنام تك (TEX) خارج از ردیف بودن حرف E است. کنوت می‌گوید بااین‌کار می‌خواهد یادآوری کندکه تك سیستمی برای حروفچینی است.

بدین ترتیب، تك یك سیستم کامپیوتری برای تولید متنهای فنی با کیفیتی درحد اعلاست.

البته قبل از ابداع تك سیستمهای دیگری برای تهیهٔ متنهای چاپی به‌کمك کامپیوتروجود داشت ولی اغلب‌این سیستمها صرفاً برای تهیهٔ متنهای معمولی بودند و در آنها جنبه‌های ظریف مربوط به‌درهم‌آمیزی فرمولها و متنها درنظر گرفته نشده بود. این نوع سیستمها که اغلب به‌نام کلی کلمه‌پرداز[1] خوانده می‌شوند برای نویسندگان وسائلی‌بسیار دلپذیرند و اغلب‌نویسندگان پرکار امروز جهان از این‌نوع سیستمها استفاده می کنند. با این سیستمها می‌توان متنی را از طریق صفحه‌کلیدها به‌کامپیوتر منتقل کرد و سپس هرنوع دستکاری در متن مثل حذف کلمه و پاراگراف یا جابه‌جایی آنهارا به‌سهولت انجام داد. یك‌کامپیوترخانگی یا شخصی و یك چاپگر معمولی کامپیوتری به‌همراه برنامهٔ کامپیوتری کلمه‌پرداز برای این منظور کفایت می کند. درصورتی که نویسنده بخواهد کیفیت متن خروجی درحد متنهای تایپ شده باشد باید چاپگرهایی با کیفیت بالاترمعروف به‌چاپگرهای با کیفیت نامه‌ای[2] یا چاپگرهای چرخ مینا[3] را به‌کارگیرد و برای دسترسی به‌کیفیتی بازهم بهتر باید از چاپگر لیزری استفاده‌کند. ولی اشکال کار در اینجاست که هرچند چنین سیستمهایی در امرتهیهٔ متنهای معمولی بسیارمفیدند ولی‌برای متنهای فنی همان اشکال متنهای تایپ شده را دارند یعنی فرمولها را باید جداگانه در آنها وارد کرد یا با دست نوشت. خلاصه رمان‌نویسها از این‌نوع سیستمها بسیار راضی‌اند ولی ریاضیدانها نمی‌توانند راضی باشند.

نکتهٔ دیگراینکه درکلمه‌پردازهای معمولی استفاده‌کننده بیشتر وقتها با مجموعهٔ محدود و ثابتی ازحروف و علائم سروکار دارد، درحالی که در سیستم تك مجموعهٔ علامتها و حرفهایی که به‌طور همزمان در دسترس‌است عملاً نامحدوداست. به‌علاوه‌استفاده‌کنندهٔ تك می‌تواند با بهره‌گیری از سیستم متافونت، خود به‌طرح حرفها و علامتها بپردازد و ازحاصل این‌کار در تهیهٔ متن‌خود استفاده‌کند. این ویژگی برای متنهای ریاضی که معمولاً شامل حروف مختلف الفبای لاتین (ایتالیك، سیاه، ...)، الفبای یونانی و عبری، علائم ریاضی متداول و علامتهای غیرمتعارف است بسیار مفید است. فرمول زیر با استفاده ازسیستم تك تهیه شده‌است

$$x_i = \prod_{j=1}^{\max(k,i)} e^{2\pi j r e^2} \cos(ij) \quad (i = q, \ldots, n)$$

دراین فرمول نه‌تنها ازعلامتها و حروف مختلف استفاده شده بلکه اندازه‌ها نیز با توجه به‌محل علامتها مناسب انتخاب‌شده ودرنتیجه حاصل‌کار به‌چشم‌خوشایند است. البته برای اینکه متن خروجی تك دارای این‌کیفیت‌باشد حتماً باید ازچاپگرهایی باکیفیت بسیاربالا مثل چاپگرهای لیزری استفاده شودکه گرانتر ازچاپگرهای‌معمولی کامپیوتری است ولی به‌نتیجهٔ بسیارعالی‌آن می‌ارزد. به‌علاوه تمام این‌کارها را خود نویسندهٔ مقاله می‌تواند انجام دهد. یعنی نسخه‌ای که او به‌عنوان پیش‌نویس آماده می کند دارای چنان‌کیفیتی خواهد بودکه مستقیماً قابل عکس‌برداری و چاپ است.

زیبایی و بد نمایی متنها

یکی از ویژگیهای بسیار مفید و در عین حال منحصر به‌فرد تك، بهینه سازی کیفیت یك خط یا یك پاراگراف است. تك با درنظر گرفتن معیارهایی یك عدد را به‌عنوان میزان "بدنمایی" یك خط

1. Word - processor 2. Letter Quality 3. Daisy Wheel

یا یك پاراگراف در نظر می‌گیرد و با استفاده از الگوریتمهایی سعی درکم کردن این عدد و در نتیجه "زیباتر" کردن آن خط یا پاراگراف می‌کند. این کار با افزودن یا کاستن فاصلهٔ بین حروف وکلمات انجام می‌شود. اگر میزان بدنمایی صفر باشد معنای آن این است که خط یا پاراگراف به‌بهترین صورت ممکن چیده شده است. بدنمایی صد زیاد دلپذیر نیست و بدنمایی هزار بساعث آبروریزی است. معمولاً تك‌بدنمایی‌هایی درحد دویست را تحمل می‌کند یعنی سعی دارد که بدنمایی از دویست بیشتر نشود ولی مواردی هست که کلمات متن را نمی‌توان طوری کنارهم گذاشت که این حد از بدنمایی رعایت شود. در این موارد تك بسا پیامی عذرخواهانه و با ذکرمیزان بدنمایی از نویسنده می‌خواهد که با تغییراتی در متن به‌زیباتر کردن آن کمك کند.

چگونه با تِك کار کنیم؟

از نظر تقسیم‌بندی برنامه‌های کاربردی کامپیوتر، تك یك نوع زبان صفحه‌بندی[1] است. یعنی این سیستم دستوراتی را دراختیار استفاده‌کننده می‌گذارد که با آنها نحوهٔ قرارگرفتن حروف و علائم ومتنها و فرمولها درصفحه به‌کامپیوتر داده می‌شود. این دستورها را باید با استفاده ازیك برنامهٔ ویراستار متن[2]، که درهر کامپیوتری دردسترس قراردارد، به‌کامپیوتر وارد کرد. حاصل کار ویراستار متن (که یك پروندهٔ کامپیوتری یا فایل است) به عنوان ورودی به سیستم تك داده می‌شود و تك با تعبیر کردن دستوراتی که در پروندهٔ کامپیوتری وجود دارد دستورهای لازم را به‌دستگاه چاپگر می‌دهد تا صفحهٔ تهیه شده مطابق خواسته‌های نویسندهٔ مقاله تنظیم شود و حروف وعلامتها درجای مناسب قرار گیرند.

دستورهای تك با یك علامت \ آغاز می‌شود. مثلاً برای اینکه چاپگر پنج سانتیمتر از صفحه را خالی بگذارد از دستور \vskip 5 cm استفاده می‌کنیم یا برای رسم یك خط نازك افقی در عرض صفحه دستور \hrule را وارد می‌کنیم.

فرمولهای ریاضی را باید بین‌دوعلامت $ محصور کنیم. مثلاً برای نوشتن متنی مثل "Suppose $\Sigma x_i \geqslant 0$" باید بنویسیم

```
Suppose $ \SUM x_i \ge 0 $
```

وجود دوعلامت $ درابتدا و انتهای فرمول باعث می‌شود که حروف ظاهرشده درفرمول مطابق قراردادی که درفرمولهای ریاضی رعایت می‌شود به‌صورت ایتالیك نوشته شود، هرچندکه ما درهنگام وارد کردن این فرمول به‌خاطر محدودیتهای پایانه‌های کامپیوتری ازحروف معمولی (غیرایتالیك) استفاده کرده باشیم.

تابلوی پایین‌صفحه یك برنامهٔ تك وخروجی آن‌را نشان‌می‌دهد.

دستورهای درشت

علاوه‌بردستورهای پایه‌ای که درتك‌وجود دارد، امکان تعریف کردن دستورهای‌مرکب یادرشت‌درتك نیزهست. دستورهای‌درشت[1] ازچند دستور پایه تشکیل می‌شوند به‌نحوی که هربار نام دستور درشت را به‌کامپیوترمی‌دهیم دستورهای پایه‌ای مربوط به‌آن اجرا می‌شود. بودن این‌نوع دستورها قدرت زیادی به تك می‌دهد و استفاده از آن را راحت‌تر می‌کند، زیرا استفاده‌کننده دیگر مجبور نیست به جزئیات بپردازد. نمونهٔ زیر تا حدی فایدهٔ استفاده از دستورات درشت را نشان می‌دهد. فرض‌کنیم شما می‌خواهید برای یك‌مقاله یك سطر عنوان بگذارید. قبل ازسطرعنوان می‌خواهید ۲ سانتیمتر کاغذ سفید باشد و عنوان دروسط صفحه قرارگیرد (یعنی‌فاصله‌اش از دولبهٔ راست و چپ کاغذ به‌یك اندازه باشد) و با حروف سیاه زده شود وبعدازآن هم ۲ سانتیمتر دیگرصفحه سفید باشد. دراینجا می‌توانید تمام‌این‌کارها را هربار به‌صورت جداگانه با دستورهایی ازقبیل \vskip 2 cm انجام دهید. ولی‌راحت‌تر آن است که یك دستور درشت مثلاً با نام \title تعریف کنیم که شامل دستورات

یك برنامهٔ تِك و خروجی آن

برنامه

```
\item{1.} This is the first of several cases that are being
enumerated, with hanging indentation applied to entire paragraphs.
\itemitem{a)} This is the first subcase.
\itemitem{b)} And this is the second subcase. Notice
that subcases have twice as much hanging indentation.
\item{2.} The second case is similar.
```

خروجی

1. This is the first of several cases that are being enumerated, with hanging indentation applied to entire paragraphs.
   a) This is the first subcase.
   b) And this is the second subcase. Notice that subcases have twice as much hanging indentation.
2. The second case is similar.

1. Macros

1. Page Formatter
2. Text Editor

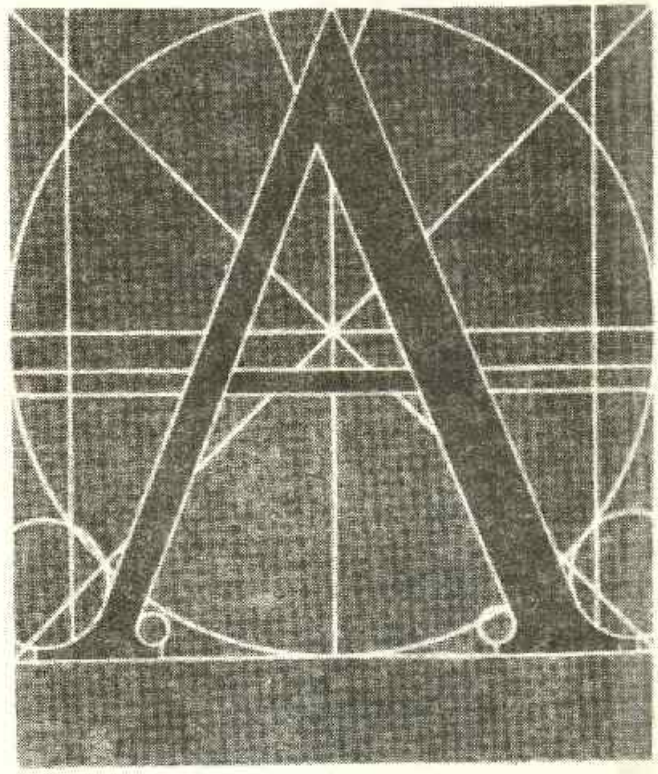
زیر باشد:

```
\vskip 2 cm
\centerline {\bf A NEW DISCOVERY}
\vskip 2 cm
```

از این به‌بعد هرگاه دستور \title را به تك بدهید، سیستم با بسط‌دادن این‌دستور، دستورهای‌جزیی آن را اجرا می‌کند. درخود سیستم تك مجموعهٔ نسبتاً کوچکی ازدستورهای درشت وجود دارد که برای‌مصارف متداول‌کارهای‌تهیهٔ مقالات‌مفیداست. علاوه‌براین انجمن‌ریاضی امریکا نیز مجموعهٔ وسیعی ازدستورات‌درشت را با نام AMS-TEX عرضه می‌کند که اختصاصاً برای تهیهٔ مقالات ریاضی طرح شده است.

طراحی حروف

آلبرشت دورر[1] هنرمند بزرگ آلمانی ازجمله نخستین کسانی بود که در دورهٔ رنسانس به‌کار طراحی حروف چاپی با استفاده از روشهای ریاضی پرداخت. ولی نتایج‌کار او و دیگرهنرمندان آن دوره به‌تولید شکلهای‌دلپذیری ازحروف نیانجامید. ریزه‌کاریهایی که درطراحی حروف چاپی موجود است با روشهایی که هنرمندان رنسانس به‌کارمی‌بردند وکار خود را محدود به‌روشهای معروف به "خط‌کش و پرگار" می‌کردند، قابل‌دسترسی‌نبود. درقرنهای‌شانزده و هفده نیز کوششهای زیادی دراین زمینه به‌عمل آمد ولی بالاخره



نمونه‌ای از طراحی هندسی حروف

1. Albrecht Durer

درقرن هیجدهم شور و شوق ریاضیدانان و هنرمندان برای ارائهٔ اصول ریاضی طراحی‌حروف‌چاپی فروکش‌کرد. و اکنون، درقرن بیستم، به‌خاطر وجود روشهای ریاضی کاراتر برای رسم خمهای دلپذیر و پیدایش‌کامپیوترهایی‌که قادر به‌انجام سریع محاسبات لازم‌برای این‌کار هستند، و نیز به‌خاطر در دسترس‌بودن دستگاههای چاپگری‌که به‌آسانی‌حروف طرح‌شده را روی‌کاغذ منتقل می‌کنند، کار طراحی‌حروف چاپی با استفاده از ریاضیات به‌مرحلهٔ جدیدی وارد شده است. حروف چاپی را امروز می‌توان بدون استفاده از چوب و فلز وفقط با مشخص‌کردن مجموعه‌ای‌ازصفر ویك‌مشخص کرد و ازطریق دستگاه چاپگر نقاط تیره و روشن را طوری روی کاغذ ترکیب کردکه حاصل تفاوتی با کار بهترین طراحان حروف نداشته باشد. البته همان‌طورکه گفتیم چاپگر باید ازکیفیت خوبی برخوردار باشد.

چاپگرها

چاپگرهای کامپیوتری به‌صورتها و با تکنیکهای مختلفی ساخته می‌شوند. ازنظرنحوهٔ ثبت‌کردن حروف روی کاغذ می‌توانیم آنها را به‌دودسته تقسیم‌کنیم: چاپگرهایی‌که حروف ریخته‌شده ازجنس فلز یا پلاستیك را روی‌کاغذ "می‌کوبند". و چاپگرهایی‌که حروف را با کنارهم چیدن تعدادی نقاط سیاه روی کاغذ می‌سازند. از چاپگرهای دستهٔ اول می‌توان از اغلب‌چاپگرهای خطی‌که درکنار کامپیوترهای بزرگ استفاده می‌شوند یا از چاپگرهای معروف به چرخ مینا که برای تهیهٔ نامه‌های اداری با کامپیوترهای کوچك به‌کار می‌روند یادکرد. اما آنچه‌که برای طراحی حروف چاپی به‌کمك‌کامپیوتر به‌کارمی‌آید دستهٔ دوم چاپگرهاست. دراین‌دسته چاپگرهای معروف به‌ماتریس نقطه‌ای، چاپگرهای الکترواستاتیك وچاپگرهای‌لیزری‌قراردارند. برخی‌از انواع ماشینهای‌حروفچینی نوری مثل لاینوترون نیز از لحاظ نحوهٔ تشکیل‌دادن حروف روی کاغذ از این دسته‌اند.

دراین نوع چاپگرها یك‌کامپیوترکنترل‌کننده براساس شکلی که قبلاً برای حروف تعریف شده است تعدادی صفر و یك را به‌چاپگرمی‌فرستد وچاپگر با تیره‌کردن نقاطی‌که یك‌هستند و روشن نگاه‌داشتن نقاطی‌که صفرهستند حرف را روی‌قسمتی ازکاغذ ظاهر می‌کند. هرچه تعداد نقاطی‌که بدین‌ترتیب قابل سیاه‌شدن باشد در واحد سطح بیشتر باشد، می‌گوییم چاپگر دارای تفکیك‌پذیری[1] بیشتری است. برای کار کردن با سیستم METAFONT باید دسترسی به‌چاپگری با تفکیك‌پذیری بالا (درحدود ۳۰۰ نقطه یا بیشتر در اینچ) داشته باشیم. چاپگرهای لیزری این حد از تفکیك‌پذیری را دارند و از اجزاء اصلی هر سیستم حروفچینی کامپیوتری‌اند. دستگاههای حروفچینی‌نوری مثل لاینوترون دارای تفکیك‌پذیری بسیار بیشتری (درحدود ۱۰۰۰ نقطه یا بیشتردراینچ) هستند و برای‌اینکه‌کیفیت حروف چاپی بسیارخوب باشد، می‌توان از آنها نیز استفاده‌کرد. البته این دستگاهها نیاز به‌کاغذ حساس مخصوص دارند درحالی‌که در چاپگرهای لیزری از کاغذمعمولی استفاده می‌شود.

1. resolution

متافونت چیست؟

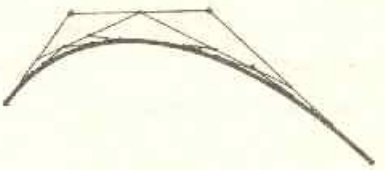
اگر کار تك این است که حروف متن‌را به نحو مناسب در صفحه جای دهد، کار متافونت این است که شکل این‌حروف‌را معین کند.

از زمانی‌که امکان تشکیل حروف‌چاپی به‌کمك کامپیوتر به‌وجودآمده‌است برنامه‌های‌زیادی برای کمك به‌کارطراحی حروف ساخته شده‌اند. این برنامه‌ها که معمولاً با نام عمومی ویراستار حروف[1] نامیده می‌شوند، با ظاهرکردن یك ماتریس از نقاط روی صفحهٔ پایانه به‌طراح امکان می‌دهند که نقاطی را که باید سیاه شود تعیین کند و درنتیجه یك حرف از مجموعهٔ حروف را به‌صورت نقاط تاریك و روشن ماتریس تعریف کند. این روش برای طراحی حروف در چاپگرهایی با تفکیك‌پذیری پایین مفید و کافی است‌ولی‌اگر منظورطراحی حروف چاپی برای استفاده در تهیهٔ کتابها و متنهایی با کیفیت بالا باشد دیگر به این‌روش‌نمی‌توان کارکرد. متافونت در واقع یك زبان طراحی حروف است که درآن به‌کمك دستورهایی ضوابط حاکم بر طرح خانواده‌هایی از حروف را به کامپیوتر می‌دهیم و کامپیوتر خود نقاط تیره و روشن ماتریس را تعیین می‌کند. کلمهٔ METAFONT از دو جزء META و FONT درست شده است. FONT نشان می‌دهد که این سیستم برای طراحی حروف است و META نشان می‌دهد که موضوع آن تعیین ضوابطی عمومی برای خانواده‌هایی از حروف است. به گفتهٔ کنوت فرق متافونت با ویراستارهای حروف معمولی فرق جبرمقدماتی با حساب است. به‌جای اینکه از اعداد استفاده کنیم از متغیرهایی که به‌جای اعداد به‌کارمی‌روند استفاده می‌کنیم و در واقع خانواده‌ای از محاسبات را نشان می‌دهیم که در اصول با هم مشترك‌اند.

درمتافونت برای توصیف شکل حروف از یك سیستم مختصات دکارتی استفاده می‌شود. طراح حروف نقاط اصلی یك شکل را روی این سیستم مختصات معین می‌کند و با استفاده از دستورهایی آنها را به‌هم وصل می‌کند. بدین‌ترتیب نقاط واقع دربین نقاطی که طراح معین کرده است توسط کامپیوتر "سیاه" می‌شود وبرخلاف ویراستارهای حروف لازم نیست که طراح تك‌تك نقاط‌را سیاه کند.

خمها

واضح است که حروف را نمی‌توان فقط با خطهای راست کشید و به‌خم نیز نیاز است. درسیستم متافونت ازخمهایی‌معروف به‌خمهای بزیه[2] استفاده می‌شود. حالت عمومی این‌خمها را قبلاً برنشتین در نظریهٔ تقریب در ۱۹۱۲ ارائه داده است. خمهای بزیه حالت درجهٔ سهٔ خمهای برنشتین است و اول‌بار توسط پیربزیه برای توصیف‌خمها درطراحی به‌کمك کامپیوتر (CAD) به‌کاررفته‌است. یکی‌ازویژگیهای مناسب این‌خمها امکان کنترل‌میزان خمیدگی آنها با جابه‌جایی نقاطی در خارج آنهاست. این نقاط را نقاط کنترل می‌نامند. درسیستم متافونت هرخم دارای چهار نقطهٔ کنترل است وطراح با تغییردادن مختصات‌نقاط کنترل می‌تواند شکلهای‌متفاوتی از حروف را برای کامپیوتر مشخص کند. شکل زیر یك خم بزیه و چهار نقطهٔ کنترل را نشان می‌دهد.



قلمها

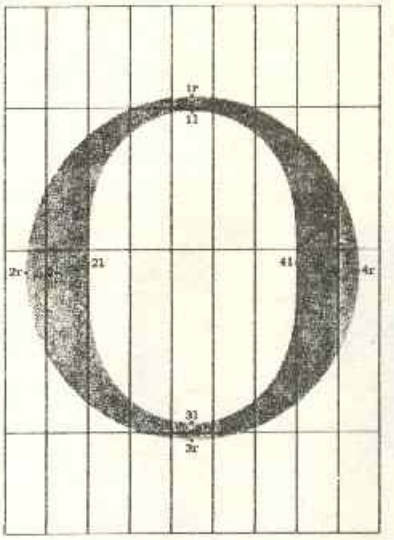
یکی از ویژگیهای بسیار جالب توجه سیستم متافونت در اختیار گذاردن "قلم"های متفاوت برای طراحی شکل‌حروف است. چون متافونت یك سیستم کامپیوتری است، طبیعی است که قلمهای این سیستم‌نیز با قلمهای معمولی‌متفاوت باشد. درواقع‌قلم دراین‌سیستم با پهنای خطوطی که برای رسم شکلها به‌کارمی‌روند مشخص می‌شود. همان‌گونه‌که درموقع‌نوشتن‌معمولی‌حاصل‌کار باخودنویس تفاوت زیادی با حاصل‌کار با قلم‌درشت دارد، درمتافونت‌نیزامکان ایجاد این تفاوتها وجود دارد، فقط در این سیستم عملاً قلمی را به‌دست نمی‌گیریم بلکه با مشخص‌کردن پهنای نوك قلم و مسیری که باید درنوشتن حرفی طی شود حرف را با آن "قلم" می‌نویسیم وخودسیستم،نقاطی‌راکه‌باید،تیره‌می‌کند وروی‌چاپگر چاپ‌می‌کند.

علاوه‌براین، درمتافونت این امکان هست که پهنای "نوك" قلم را درمسیری که برای رسم‌کردن یك حرف می‌پیماید تغییربدهیم. این‌کار را خطاطان با کم و زیادکردن فشار قلم یا با بلندکردن یك‌گوشهٔ قلم‌انجام می‌دهند. بدین‌ترتیب "حرکت قلم" درمتافونت تا حد زیادی به‌حرکت قلم خطاط درروی کاغذ نزدیك می‌شود و می‌تواند شکلهای دلپذیری را ایجاد کند.

نمونهٔ زیرنحوهٔ معرفی‌حرف O را درزبان مخصوص‌متافونت نشان می‌دهد. این حرف بخشی از مجموعهٔ حروف معروف به

1. Font Editor 2. Bézier

```
cmchar "The letter o";
beginchar("o", 9u#, x_height#, 0);
italcorr .7x_height# * slant;
adjust_fit(if monospace: .5u#, .5u# else: 0, 0 fi);
penpos1(vair, 90); penpos3(vair', −90);
penpos2(curve, 180); penpos4(curve, 0);
x2r = hround max(.5u, 1.25u − .5curve);
x1r = w − x2r; x1 = x3 = .5w; y1r = h + vround 1.5ne; y3r = −ne;
y2 = y4 = .5h − vair_corr; y2r := y4r := .52h;
penstroke pulled_arc.(1, 2) & pulled_arc.(2, 3)
  & pulled_arc.(3, 4) & pulled_arc.(4, 1) & cycle;
penlabels(1, 2, 3, 4); endchar;
```



Computer Modern است که کنوت خود آن را طرح کرده و درتهیهٔ کتابهای خود از این‌حروف استفاده می‌کند.

حروفچینی کامپیوتری متنهای فارسی

اگرچه تهیهٔ متنهای‌فارسی با وسائلی مثل کلمه‌پرداز و نرم‌افزارهای حروفچینی مشکلاتی دارد ولی به نظر نمی‌رسد این نوع مشکلات در امر استفاده از سیستمی مانند تك ومتافونت مانعی ایجادکند.در طراحی سیستم تك دکترکنوت امکاناتی را برای خطوطی‌که از راست به‌چپ نوشته می‌شود درنظرگرفته است. و سایر مسائل از قبیل مخلوط‌کردن متنهای فارسی ولاتین یا نحوهٔ واردکردن اعداد (ازچپ به‌راست) درمتن‌فارسی که از راست به‌چپ نوشته می‌شود نیز با تغییراتی درسیستم تك قابل حل است.

امکاناتی که تك و متافونت در اختیار حروفچینی فارسی می‌گذارد بسیار بیشتر ازچیزی است‌که درحال حاضر با استفاده ازماشینهای حروفچینی مثل لاینوترون دردسترس است. امکان طراحی حروف جدیدکه با ویژگیهای خطهای مختلف فارسی‌مثل نستعلیق وشکسته متناسب باشد، استفاده ازتمام‌علائم و حروف‌لازم برای فرمولهای ریاضی، امکان استفاده ازسیستم روی‌کامپیوترهای همه منظورهٔمعمولی‌واستفاده ازکاغذ معمولی برای گرفتن‌خروجیهای سیستم از جمله امکاناتی است‌که در دستگاههای حروفچینی فعلی وجود ندارد و تك و متافونت آنها را در اختیار استفاده‌کننده می‌گذارد. نگارنده اطلاع داردکه هم‌اکنون عده‌ای ازکارشناسان کامپیوتر و خوشنویسی ایران درکار افزودن تغییرات لازم برای استفاده از این دو سیستم در امر نشر فارسی هستند و با توجه به در دسترس‌بودن متن‌برنامه‌های این دوسیستم می‌توان انتظارداشت که‌کوششهای دیگری نیز دراین زمینه صورت گیرد.

در اینجا فرمولی را که به سه روش حروفچینی شده می‌بینید. (۱) به‌کمك تك و با استفاده از ماشینی شبیه لاینوترون [از کتاب تك کنوت برداشته شده‌است]. (۲) به‌کمك تك و با استفاده ازیك چاپگر معمولی کامپیوتری [در ایران]. (۳) با حروفچینی دستی [در ایران].

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\Bigg|_{r=0}^{r=\infty}\right)d\theta = \pi. \qquad (۱)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\Bigg|_{r=0}^{r=\infty}\right)d\theta = \pi. \qquad (۲)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\Bigg|_{r=0}^{r=\infty}\right)d\theta = \pi. \qquad (۳)$$

مراجع

1. W., Abikoff, "TEX-the ease and the art of text processing," *Abacus*, (4) **5** (1988).
2. Lincoln K. Durst, "AMS electronic manuscript program," *Notices of the AMS*, (2) **33** (1986).
3. Donald E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 1, *Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969a.
4. ——, ——, Vol. 2, *Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969 b.
5. ——, ——, Vol. 3, *Sorting and Searching*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973.
6. Richard S. Palais, "An introduction to TEX and AMS-TEX," *Notices of the AMS*, (2) **33** (1986).
7. Bruce Schechter, "The maestro of algorithm," *Discover*, (9) **5** (1984).
8. Hal R. Varian, "PC TEX and micro TEX," *Byte*, (4) **11** (1986).
9. Michael Vose, Gregg Williams, "Computer science considerations," *Byte*, (2) **11** (1986).
10. Herbert S. Wilf, "TEX: a none-review," *Amer. Math. Monthly* (4) **93** (1986) 309-315.

• علی پارسا، انجمن انفرماتیك ایران

گفتگو با ولادیمیر ایگورویچ آرنولد*

اسمیلکا ازدرافکوفسکا*
ترجمهٔ مهدی نیلچیانی

۱۲ ژوئن ۱۹۸۷ پنجاهمین سالروز تولد ولادیمیر ایگورویچ آرنولد بود. او در ۱۹ سالگی به‌خاطر اثبات این‌نکته‌که هرتابع پیوستهٔ سه متغیره را می‌توان به‌صورت یك برهمنهی از توابع پیوستهٔ دو متغیره نمایش داد، به‌شهرت رسید. وی با این کار، حل صریحترین تعبیر مسألهٔ سیزدهم هیلبرت را که استاد مشاورش، کولموگوروف، آغاز کرده بود به‌پایان رساند (حکم موردنظر هیلبرت را باطل کرد). آرنولد در سال ۱۹۵۹ از بخش ریاضی-مکانیك دانشگاه مسکو درجهٔ کارشناسی گرفت، و در سال ۱۹۶۱ به خاطر تحقیق روی برهمنهیها به درجهٔ نامزدی دکتری (معادل درجهٔ دکتری آمریکا) نائل آمد. این تحقیق، جایزهٔ انجمن ریاضی مسکو برای ریاضیدانان جوان را نیز نصیب او کرد.

آرنولد از بنیانگذاران نظریهٔ کام (کولموگوروف-آرنولد-موزر) است. بنابراین نظریه، مثلا، اگر اختلال کوچکی در یك سیستم هامیلتونی ایجاد شود، بیشترچنبره‌های ناوردا از بین نمی‌روند، بلکه تنها تغییرشکلی جزئی پیدا می‌کنند. این نظریه کاربردهای متعددی در خارج از ریاضیات از جمله در مکانیك سماوی و در مطالعهٔ رفتار خطوط مغناطیسی در سیستمهای محصورسازی پلاسما پیدا کرده است. آرنولد به‌خاطر تحقیقاتش درنظریهٔ اختلالها در سال ۱۹۶۳ به درجهٔ دکتری علوم نائل شد و دو سال بعد جایزهٔ لنین را که عالیترین جایزهٔ اتحاد جماهیر شوروی است مشترکاً با کولموگوروف دریافت کرد.

آرنولد با بررسی معادلات اویلر به‌عنوان معادلات ژئودزیکهای روی یك گروه لی با بعد نامتناهی، متشکل از دیفیومورفیسمهای حافظ حجم، روش نوینی برای مطالعهٔ هیدرودینامیك گازهای کامل ابداع کرد. او توانست ثابت کند که این گروه در جهتهای بسیاری خمیدگی مقطعی منفی دارد، و دلیل قابل پیش‌بینی نبودن رفتار جریان، همین خمیدگی منفی است.

آرنولد کاشف نظریهٔ تکینیها ودگرگونی محرقها وجبهه‌های موج است. اساس این نظریه ارتباطی است که آرنولد بین این اشیاء و هندسهٔ چند وجهیهای منتظم و گروههای تقارنی در بلورشناسی کشف کرد. نتیجهٔ اصلی این نظریه دسته‌بندی نقاط بحرانی یك تابع است.

پیشرفت سریع هندسهٔ جبری حقیقی در دههٔ گذشته با مقالهٔ ۱۹۷۱ آرنولد که به‌تعیین مکان هاگینه‌های خمهای جبری حقیقی اختصاص داشت، آغاز شد. این مقاله، هندسهٔ جبری حقیقی را به‌توپولوژی نوین پیوند داد.

تعمیم آخرین قضیهٔ پوانکاره به‌ابعاد بالاتر که به‌وسیلهٔ آرنولد کشف شد، درهندسهٔ درهم تافته[1] و حساب وردشی انعکاس یافت.

ولادیمیر ایگورویچ مؤلف کتابهای زیادی است که دو کتاب درسی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی و روشهای ریاضی در مکانیك کلاسیك، از آن جمله‌اند. بخش بزرگی از فعالیت خلاقهٔ او از ارتباطش با دانشجویان مایه می‌گیرد. او نزدیك به بیست سال نایب رئیس انجمن ریاضی مسکو بوده است. ازسال ۱۹۸۴ عضو

1. symplectic geometry

وابستهٔ فرهنگستان علوم اتحاد جماهیر شوروی است. با مؤسسهٔ ریاضی استکلوف همکاری دارد. از ۱۹۶۵ استاد دانشگاه مسکو است. عضو هیأت ویراستاران بسیاری ازمجلات ریاضی نیز هست. او در ۱۹۸۲ همراه با نیرنبرگ برندهٔ اولین جایزهٔ بین‌المللی کرافورد شدکه از سوی فرهنگستان علوم سوئد اعطا می‌شود. دوبار به عنوان سخنران عمومی مدعو در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان سخنرانی کرده است. درجهٔ دکتری افتخاری از دانشگاه پاریس گرفته است (۱۹۷۴). عضو خارجی فرهنگستان ملی علوم ایالات متحدهٔ آمریکا (۱۹۸۳)، فرهنگستان علوم فرانسه (۱۹۸۴)، و فرهنگستان هنرها و علوم آمریکا (۱۹۸۷) است.

و بالاخره، او به‌خاطر علاقه‌اش به‌پیاده‌روی طولانی روزانه، دوچرخه‌سواری، شنا، و اسکی شهرت دارد.

آنچه در زیر می‌خوانید گزیده‌هایی از مصاحبه‌ای است که در آوریل ۱۹۸۷ به زبان روسی انجام گرفته و خودم آن را [به‌انگلیسی] ترجمه کرده‌ام.

● کولموگوروف در مقام یك استاد مشاور چه خصوصیاتی داشت؟

آرنولد: آلبرت اینشتین می‌گوید: "اینکه روشهای جدیدآموزش هنوز شوق مقدس تحقیق را کاملاً خفه نکرده‌اند به‌معجزه می‌ماند؛ نهال کوچك وظریف تحقیق علاوه برانگیزه، اساساً نیازمندآزادی است." ازقرار معلوم آندری نیکولایویچ کولموگوروف این اندرز را مدنظر داشت. او هرگز چیزی را توضیح نمی‌داد، تنها به‌طرح مسائل می‌پرداخت و آنها را حلاجی نمی‌کرد. به‌دانشجو استقلال کامل می‌داد و هرگز برای کسی تکلیف تعیین نمی‌کرد. همیشه‌آمادهٔ شنیدن نظرات شنیدنی دانشجو بود. از لحاظ احترام خاصی که برای شخصیت دانشجو قائل بود قابل مقایسه با سایر استادانی که می‌شناسم نیست. به‌خاطر دارم فقط در یك مورد درکار من دخالت کرد: درسال ۱۹۵۹ ازمن‌خواست که‌ازمقالهٔ‌راجع به‌خودنگاشتهای دایره، بخش کاربرد در ضربان قلب را به‌این دلیل که: "این ازآن مسائل کلاسیك نیست که آدم مجبور باشد روی‌آن کارکند" حذف کنم. ۲۵ سال بعد موقعی که مشغول یافتن کاربردهای همین نظریه در مکانیك سماوی بودم، ل. گلاس کاربرد آن را درنظریهٔ ضربان قلب منتشر کرد.

● شما وقت زیادی را صرف همکاری با دانشجویان خود می‌کنید. آیا این امر به‌تحقیقات شما کمك می‌کند؟

آرنولد: من از بابت دانشجویانی که داشته‌ام، آدم خوشبختی هستم. درمیان آنها ریاضیدانان برجستهٔ زیادی وجود دارندکه از دستاوردهای آنها احساس غرور می‌کنم. بعضی ــ نظیر فارچنکو، خوفانسکی، نخوروشف[1]، کوشیرنکو[2]، گیوننال[3]، واسیلیف، لیاشکو و شچرباك[4] ــ خود دانشمندان مستقلی هستند که همکاری با آنها مسرت‌بخش است. ریاضیدانان معروفی چون ایلیاشنکو، گابریلوف، حسین‌زاده، برنشتاین و نیشتاد[5] را نیز درزمرهٔ دانشجویان خود به‌حساب می‌آورم، زیرا با اینکه‌کار خود را با استادان‌مشاور دیگری شروع کرده‌اند، ولی تحت‌نظر من‌هم مطالعاتی انجام داده‌اند. من به‌تیورین متخصص هندسهٔ جبری و نیز متخصصین معروف نظریهٔ اعداد آرخیپوف و ورونین[1] هنگامی که در دبیرستان تحصیل می‌کردند، درس داده‌ام.

من برای کار نسل جدید دانشجویانم: باختین، قازاریان، شاپیرو، گینزبورگ، چکانوف، خسین[2]، [و...] اهمیت بسیاری قائلم.

تعداد مسائل مورد علاقهٔ من معمولاً بیش‌ازآن‌است که بتوانم حلشان کنم، و دانشجویانم مرا ازحل بسیاری ازآنها معاف می‌کنند.

● چه مطالبی را در زمینهٔ ریاضیات می‌خوانید؟

آرنولد: برای‌من تقریباً غیرممکن‌است آثار ریاضیدانان‌معاصری‌را بخوانم که به‌جای‌اینکه بگویند "پتیا دستهایش‌را شست" می‌نویسند: "$t_1 < 0$ ی وجود دارد که تصویر t_1 تحت نگاشت طبیعی $t_1 \to \mathrm{Petya}(t_1)$ متعلق به‌مجموعهٔ دستهای کثیف است، و یك t_2، $t_1 < t_2 \leqslant 0$، موجود است به قسمی که تصویر t_2 تحت نگاشت فوق‌الذکر به‌متمم مجموعهٔ بالا تعلق دارد." مقالاتی که، مثلاً، میلنر و اسمیل نوشته‌اند، موارد استثنایی هستند.

اکثر مقالاتی که می‌خوانم به‌وسیلهٔ دانشجویان یا دوستانم به‌من معرفی می‌شود. من ریاضیدانان قرن گذشته به‌خصوص پوانکاره را بهتر درك می‌کنم، ولی ریاضیدانان قرن هفدهم را ساده‌نویس‌تر از دیگران و اساساً امروزی‌تر می‌دانم. ضمناً، به‌نظر من ریاضیات درفاصلهٔ زمانی ازهویگنس و نیوتن تا ریمان و پوانکاره به‌کویری می‌ماندکه تماماً ازمحاسبه انباشته شده است.

مایلم اشاره کنم که اخیراً در پرینکیپیای نیوتن قضیه‌ای در توپولوژی انتگرالهای آبلی پیدا کرده‌ام که به نظر می‌رسد ریاضیدانان از آن بی‌اطلاع بوده‌اند. نیوتن تقریباً ۲۰۰ سال از زمان خود جلوتر بود و آزادانه ایده‌های ادامهٔ تحلیلی و آنچه‌را که امروز مونودرومی نامیده می‌شود، به‌کار می‌برد. هاگینه‌ای را جبری‌ـمجذورپذیر می‌نامیم که مساحت تکه‌ای ازآن‌که با یك خط راست قطع شود تابعی جبری ازآن خط باشد. قضیهٔ نیوتن حاکی ازاین است که هیچ هاگینهٔ جبری‌ـمجذورپذیر C^∞ وجود ندارد. ولی هاگینه‌های‌جبری‌ـمجذورپذیری‌وجود دارندکه همه جا C^∞اند بجز در یك نقطه‌که (به‌ازای n های به‌دلخواه بزرگ) C^n هستند.

امسال‌سیصدمین‌سالگرد انتشار پرینکیپیای‌نیوتن است، به‌همین مناسبت مسألهٔ دیگری را که در آن ذکر شده عنوان می‌کنم. این مسألهٔ وردشی مربوط به‌جسم دواری است که در یك ملاء رقیق با کمترین مقاومت درامتداد محورجسم درحرکت است. دراین‌مورد نیوتن سیصدسال از زمان خودش‌جلوتر بود زیرا او می‌دانست که اکسترمم مربوط‌هموار نیست و گوشه دارد. به‌طوری که‌تیخومیروف به‌من اطلاع داده است این گوشه در تصویر نخستین چاپ کتاب مشهود است اما در تصویر برخی ازچاپهای بعدی پرینکیپیا دیده نمی‌شود. تا این اواخر که مسألهٔ مذکور درارتباط با علوم فضایی مطرح شد ریاضیدانان منظور نیوتن را نفهمیده بودند.

● بعضی از ریاضیدانان طرز تفکر جبری، بعضی هندسی و بعضی فیزیکی دارند. شما خود را متعلق به‌کدام گروه می‌دانید؟

---

1. Nekhoroshev 2. Kushirenko 3. Givental
4. Shcherbak 5. Neishtadt

1. Voronin 2. Khesin

آرنولد: اولین مسأله‌ای که به‌آن برخورد کردم یك مسألهٔ حساب بود. دو پیرزن همزمان از دو شهر مختلف به طرف هم شروع به‌حرکت می‌کنند، هنگام ظهر یکدیگر را می‌بینند، و در پایان یکی درساعت ۴ بعدازظهر و دیگری درساعت ۹ بعدازظهر به‌شهرمقابل می‌رسد. زمان شروع حرکت را پیدا کنید. هنوز جبر نخوانده بودم. یافتن راه‌حل این مسأله (براساس نظریهٔ تشابه که می‌توان آن را فیزیکی به‌شمار آورد) بر من تأثیر شدیدی گذاشت و از کشف آن احساسی به‌من دست داد که بعدها هم هروقت رابطه‌ای بین چیزهای ظاهراً دور از هم یافته‌ام، به‌من دست داده است، مثلاً وقتی که از طریق توپولوژی خمینه‌های چهار بعدی پلی بین نظریهٔ خمهای جبری حقیقی و حساب صورتهای درجهٔ دوم زدم.

با وجود این، من معمولاً هندسی فکر می‌کنم و کشیدن شکل را بر نوشتن فرمول ترجیح می‌دهم.

به‌نظر من ریاضیات درفاصلهٔ زمانی ۲۰۰ ساله ازهویگنس ونیوتن تا ریمان و پوانکاره به‌کویری می‌ماند که تماماً از محاسبه انباشته شده است.

● به نظر شما در ریاضیات چه زمینه‌های پژوهشی آیندهٔ نوید-بخش‌تری دارند؟

آرنولد: یکی ازخصایص تحسین برانگیز ریاضیات این است که انتزاعی‌ترین، و در نگاه نخست بی‌فایده‌ترین، شاخه‌های آن ــ در صورتی که زیبا باشند ــ به طرز غیرمنتظره‌ای سودمند از آب درمی‌آیند. واینبرگ در صفحهٔ ۷۲۸ شمارهٔ اکتبر ۱۹۸۶ نوتیسز[1] در این باره می‌نویسد: "این سودمندی غیرمنتظره از آن روست که عده‌ای از ریاضیدانان روح خود را به‌شیطان فروخته‌اند تا کسب خبر کنند که درآینده چه نوع ریاضیاتی از اهمیت علمی بیشتری برخوردار است"، و من شیفتهٔ این سخن‌ام. به‌نظر من قسمت اعظم آثار ریاضی عصر حاضر از طرفی زیبایی لازم ندارد، و ازطرف دیگر هرگز مورد استفاده‌ای نخواهد داشت، چه‌بسا این وضع همیشه وجود داشته و شرط اجتناب‌ناپذیر برای پیدایش بخش ضرور ریاضیات، وجود همین وضع باشد.

گروه بزرگی از ریاضیدانان شوروی کوشیده‌اند که نظرگاههای خود را دربارهٔ ریاضیات در چندین مجلد تحت عنوان: مسائل ریاضیات معاصر - جهتهای اساسی بیان کنند. (از ۱۹۸۵ تاکنون ۱۲ مجلد از این سری منتشر شده است.) من مجلدات جبر I اثر شافاروویچ و توپولوژی I اثر نوویکوف و فوکس را بسیار می‌پسندم. خودم در نوشتن مجلدات دستگاههای دینامیکی I با همکاری آنوسوف و ایلیاشنکو، کلیات هندسهٔ درهم تافته با همکاری گیونتال، نظریهٔ دو شاخگی با همکاری ایلیاشنکو، آفرایموویچ و شیلنیکوف، و نظریهٔ کاتاستروفها و غیره شرکت داشته‌ام. اشپرینگر این کتابها را ترجمه کرده است.

● به‌نظر می‌رسد یکی ازتفاوتهای فضای ریاضی درغرب و اتحاد شوروی این است که در کشور شما ریاضیدانان در دو نقطه متمرکز شده‌اند. این وضع چه مزایا و چه معایبی دارد؟

آرنولد: تمرکز اکثریت ریاضیدانان فعال درمسکو و لنینگراد امکان تماس دائم بین ریاضیدانانی را که ازنظر جغرافیایی دور ازهم بوده‌اند فراهم ساخته است. مثلاً من این شانس را داشته‌ام که در دانشگاهی تحصیل کنم که ریاضیدانانی نظیر کولموگوروف، پتروفسکی، بوگولیوبوف، لیوسترنیك[1]، پونتریاگین، نوویکوف، مارکوف، گلفاند، شافاروویچ، روخلین، گلفوند، خینچین، آلکساندروف، دینکین، ویتوشکین، شیلوف و پوستنیکوف[2] و فیزیکدانانی نظیر لئونتوویچ، آرتسیموویچ، تام، لانداو، و هر دو لیفشیتس همزمان در آن مشغول به‌کار بودند. ضمناً آلکسیف، سینایی، آنوسوف، مانین، نوویکوف، کریلوف، فوکس، تیورینا، وینبرگ[3]، پالامودوف، ماسلوف، و فادیف همکلاسیهای من بودند، و با هم در سمینارها شرکت می‌کردیم (دو نفر اخیر چندسالی بزرگتر از من بودند).

عیب چنین تمرکزی وضعیت دشواری است که ریاضیدانان جوان با آن روبرو شده‌اند زیرا همگی می‌خواهند در مسکو یا لنینگراد کار کنند، حال آنکه اشتغال در این دوشهر دشوار و دشوارتر می‌شود.

تمرکز اکثریت ریاضیدانان فعال در مسکو و لنینگراد امکان تماس دایم بین ریاضیدانانی را که ازنظر جغرافیایی دور ازهم بوده‌اند فراهم ساخته است.

● پولیت‌بورو [دفتر سیاسی حزب] اخیراً (در دسامبر ۱۹۸۶) تصمیم به‌افزایش نقش ریاضیات در اتحاد شوروی گرفته است. به‌نظر شما این تصمیم چه تأثیری در وضع ریاضیات کشور خواهد داشت؟

آرنولد: ظهور همزمان گروه بزرگی از ریاضیدانان توانمند در مسکو در آغاز دههٔ ۱۹۶۰ تا حد زیادی ناشی از تغییر شرایط به‌نفع توسعهٔ ریاضیات پس‌از ۱۹۵۳ بود. می‌توان امید داشت که اصلاحات کنونی نیز نتایج مطلوب مشابهی به‌همراه داشته باشد. هرچند این نتایج بلافاصله آشکار نخواهند شد.

● راجع به‌انتقال‌خودتان از دانشگاه به‌مؤسسهٔ ریاضی استکلوف صحبت کنید.

آرنولد: دلیل بیرون آمدن من از دانشگاه نابسامانی اوضاع بخش ریاضی پس ازمرگ پتروفسکی در ۱۹۷۳ بود که از ۱۹۵۳ به‌عنوان رئیس این بخش برای پیشرفت ریاضیات مسکو زحمات زیادی کشیده بود و این نابسامانی با مرگ ناگهانی رئیس بعدی بخش در یك ماجرای کوهنوردی همچنان ادامه یافت. پیش‌بینی عواقب افت اسلوبمند درقابلیت متخصصین (که گورباچف هم از آن سخن گفته) برتوسعهٔ ریاضیات و کلاً بروضع کشور، دشوار است.

● آیا واقعیت دارد که شما درگیر منازعات حق تقدم [دراکتشاف] هستید؟

1. *Notices of the AMS*

1. Lyusternik 2. Postnikov 3. Vinberg

آرنولد: نه، هرگز، چه با ریاضیدانان شوروی و چه با ریاضیدانان غربی چنین منازعه‌ای نداشته‌ام. عدم توافق با ریاضیدانان غربی که ظاهراً این پرسش را پدید آورده ارتباطی به‌این ندارد که فلان و بهمان نتیجه به‌چه‌کسی تعلق دارد، بلکه به‌این‌مطلب مربوط است که اگر نتیجه‌ای درغرب چاپ می‌شود که مشابه آن قبلاً در شوروی به‌چاپ رسیده، باید به‌متن روسی ارجاع داده شود.ظاهراً شیوهٔ معمول ارجاع در غرب چنین است: "این نتیجه متعلق به‌زید است (رجوع شود به [x]). پس از آن [y] مطرح شد." [y] ارجاع به‌ترجمهٔ انگلیسی ۱۹۷۹ از یك مقالهٔ روسی ۱۹۷۷ است که در ۱۹۷۵ ارائه شده و اثبات نتیجه را نیز شامل می‌شود، ولی [x] کار در دست چاپ مؤلف غربی است که در ۱۹۸۰ تنها نتیجه را اعلام کرده است. اختلاف تاریخ‌گاه به ۱۰ سال می‌رسد.

همهٔ ریاضیدانان روس به‌طور دائم با این‌وضع روبرو هستند، اما اکثریت آنها این وضع را نتیجهٔ اجتناب‌ناپذیر فقدان‌تماسهای شخصی می‌دانند. من شخصاً ازاینکه به‌آثارم ارجاع ندهند شکایتی ندارم و هرگز نخواهم داشت، ولی اصرار دارم که ریاضیدانان غربی باید به‌طرزصحیحی به‌آثار استادانم‌مخصوصاً کولموگوروف، بوگولیوبوف و آندرونوف و نیز آثار دانشجویانم ارجاع دهند.

بیایید به‌طورتصادفی‌شماره‌ای‌از اینونشنز[1] را ازقفسه برداریم، و تعداد ارجاعات به‌مقالات‌روسی‌را بشماریم. ازمیان ۱۵۶ مرجع در ۸ مقاله (جلد ۸۶، شمارهٔ ۲، سال ۱۹۸۶) فقط دو مقاله به ریاضیدانان روس تعلق دارد؛ تازه آنها هم (آثار بیلینسون) به‌زبان‌فرانسه منتشر شده‌اند. آمار ایندکس آو سایتیشنز[2] (گارفیلد) حاکی از نتیجهٔ بدتری است: نسبت ۷۰۰ به ۱. این به‌نظر من نشانهٔ تحریم‌آثار روسی است. برای‌مقایسه بیایید یکی ازشماره‌های مجلهٔ آنالیز تابعی و قضایای آن [چاپ شوروی] (جلد ۲۱، شمارهٔ ۱، سال ۱۹۸۷) را از قفسه برگزینیم: از میان ۶۲ مرجع در ۵ مقالهٔ مفصل، ۲۲ مورد به‌زبان روسی و ۴۰ مورد به‌زبانهای دیگر است. فکر می‌کنم که این به‌نسبت واقعی نزدیکتر باشد.

دربعضی‌از موارد وقتی که می‌بینم اثری‌درغرب منتشر می‌شود که تکرار یك اثر روسی است به مؤلف غربی اطلاع می‌دهم. در اکثر موارد معلوم می‌شود که مؤلف در بسارهٔ آن اثر روسی هیچ اطلاعی نداشته است و پس از تذکر من، منابع روسی را ذکر می‌کند. با این‌همه فکر می‌کنم که [ازنظر ریاضیدانان غربی] ارجاع ندادن به‌مقالات مشابه روسی ساده‌ترین و بی‌دردسرترین کار باشد.

بی‌دقتیهایی ازاین‌قبیل اثر مخربی درسرنوشت جوانان مستعد اتحاد شوروی دارد؛ ریاضیدانان خارجی انتساب نتایج به‌رقبای بی‌کفایت را آسانتر از انتساب آن به یك همکار همتراز می‌یابند.

● آیا هرگز مجلات نقد و بررسی را می‌خوانید؟

آرنولد: چبیشف توصیه کرده است که دنباله‌رو کارهای دیگران نباشید تا اصالت فکرتان آسیب نبیند. من عملاً هیچگاه به‌چنین مجلاتی مراجعه نمی‌کنم و هروقت هم که این‌کار را می‌کنم آن‌را ناخوشایند می‌یابم. در این مجلات راه‌حلهای غلط مسائل کلاسیك اغلب با نظر کاملاً مثبت نقد می‌شوند و این امر نشان می‌دهد که نقدکننده به ماهیت جنجالی این کار توجهی ندارد. برای مثال پرینکیپیا را احتمالاً چنین نقد می‌کنند: "مؤلف ویژگیهایی از مقاطع مخروطی را بررسی می‌کند. انگیزهٔ نجومی‌مؤلف درنحوهٔ ارائهٔ مطالب مشهود است. تصاویر بسیاری در کتاب وجود دارد که فهم کتاب را پیچیده می‌کند. کتاب فهرست راهنما ندارد و شماره‌گذاری مطالب مغشوش است. راه‌حل یك‌مسألهٔ وردشی‌اعلام شده‌است، اما ناقد موفق به‌بازسازی این راه‌حل نشده‌است. مؤلف شك خود را در مورد صحت نظریهٔ معروف دکارت ابراز می‌کند. نتیجهٔ نهایی (درمورد وجود خداوند) به‌نظر ناقد اساس درستی ندارد." واما اگر یك مقالهٔ روسی نقد شود قضیهٔ "از A، B نتیجه می‌شود" به‌صورت "A از B نتیجه می‌شود" ترجمه خواهد شد. در جوانی چنین نقدهایی آزارم می‌دادند، ولی حالا می‌فهمم که ناقد معمولی خود به‌خود همهٔ مطالب استثنایی و تازه را حذف می‌کند. در عین‌حال نقدهایی که حق مطلب را ادا می‌کنند معمولاً یا مربوط به آثار تقلیدی هستند ــ کارهای تکراری در زمینه‌هایی که برای همگان شناخته شده و آشناست و فهم آن برای ناقد آسانتر است ــ ویا مقاله‌های متعلق به‌دوستان ناقد. من معمولاً فقط به فهرست مؤلفین ماتماتیکال ریویوز[1] رجوع می‌کنم تا آثار چاپ شدهٔ مؤلفی را که به‌او علاقه‌مندم پیدا کنم.

من عملاً هیچگاه به‌مجلات نقد و بررسی مراجعه نمی‌کنم، وهروقت هم که این‌کار را می‌کنم آن را ناخوشایند می‌یابم.

● می‌دانم که از اسکی، پیاده‌روی، دوچرخه‌سواری و شنا لذت می‌برید. آیا این کارها برای شما نوعی تفریح است؟

آرنولد: وقتی نمی‌توانم مسأله‌ای را حل کنم کفشهای اسکی‌ام را می‌پوشم و (معمولاً با لباس شنا) ۴۰ یا ۵۰ کیلومتر اسکی‌می‌کنم. طی این مدت معمولاً مشکل خود به‌خود رفع می‌شود و من با یك راه‌حل آماده برمی‌گردم یا در هرصورت می‌دانم که بعداً چه باید بکنم. با بررسی مجدد، غالباً اشتباهی دراین راه‌حل پیدا می‌شود، ولی این مانع بعدی است که به‌نوبهٔ خود با همین روش برطرف می‌شود.

برای تفریح، در کنار کارهای دیگر، دوست دارم به آثار ویوالدی، موتسارت و کنسرتوهای براندنبورگ باخ گوش بدهم.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

● Smilka Zdravkovska, "Conversation with Vladimir Igorevich Arnol'd," *The Mathematical Intelligencer*, (4)9(1987) 28-32.

★ اسمیلکا ازدرافکوفسکا، ویراستار ماتماتیکال ریویوز

1. *Inventiones* 2. *Index of Citations*

1. *Mathematical Reviews*

سیزده راه نگرش به

ضریب همبستگی*

جوزف لی راجرز، و. الن نایسواندر*

ترجمهٔ علی عمیدی

در ۱۸۸۵، سرفرانسیس گالتن برای اولین بار اصطلاح "رگرسیون" را تعریف، و نظریهٔ همبستگی دومتغیره را کامل کرد. یك دهه بعد، کارل پیرسن، شاخص r پیرسن را که هنوز هم برای اندازه‌گیری همبستگی به‌کارمی‌رود، ارائه‌داد. مقالهٔ ما برای بزرگداشت صدمین سال اولین بحث گالتن از رگرسیون و همبستگی نوشته شده است. مقاله را با تاریخچهٔ کوتاهی آغاز می‌کنیم و سپس ۱۳ فرمول مختلف را می‌آوریم که تعریفهای محاسباتی و مفهومی متفاوتی از r اند. هرفرمول راهی برای اندیشیدن دربارهٔ این شاخص، از دیدگاه جبری، هندسی، و مثلثاتی ارائه می‌کند. نشان می‌دهیم که r پیرسن (یا تابعهای سادهٔ r) را می‌توان به صورتهای مختلف، نظیر نوعی خاص از میانگین، نوعی خاص از واریانس، نسبت دومیانگین، نسبت دوواریانس، شیب یك‌خط، کسینوس یك زاویه، و مماس بریك بیضی در نظر گرفت، و همچنین نشان می‌دهیم که ممکن‌است از دیدگاههای جالب دیگری نیز به‌آن نگریست.

مقدمه

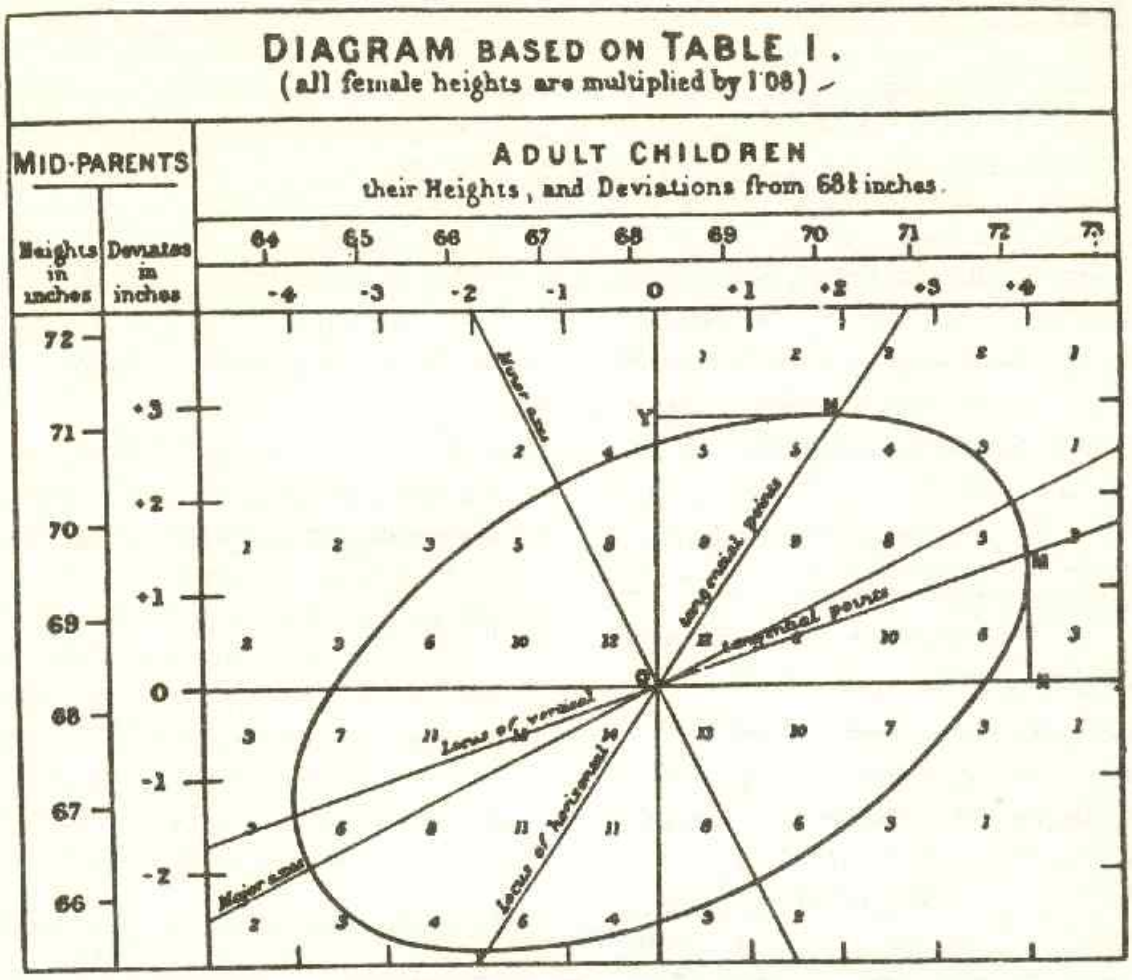
ما این روزها در اواسط "دههٔ بعد از صد سالگی" همبستگی و رگرسیون هستیم. دستاوردهای تجربی و نظریی که موجب شد رگرسیون و همبستگی به‌صورت مطالب آماری تعریف شوند در ۱۸۸۵ به‌وسیلهٔ سرفرانسیس گالتن ارائه شدند. سپس، کارل پیرسن در ۱۸۹۵، r پیرسن را انتشار داد. این مقاله که دربارهٔ ضریب همبستگی پیرسن گفتگو می‌کند، هم زیربنا وهم چند استنباط از r را مورد بحث قرار می‌دهد که برای مدرسین آمار مفید است.

مامقاله‌را باتاریخچه‌ای کوتاه از گسترش همبستگی و رگرسیون آغاز و به دنبال آن، راههای تعبیر ضریب همبستگی را با تفصیل بیشتر مرور می‌کنیم. این‌مرور نشان می‌دهد که همبستگی به‌صورت شاخصی کلی درآمده‌است که استنباطهای گوناگونی از آن می‌شود. مع‌هذا، گذشت زمان براین شاخص صدساله چندان تأثیری نداشته است.

ایدهٔ اصلی همبستگی اساساً قبل از ۱۸۸۵ عنوان‌شده بود [۱۳]. پیرسن درسال ۱۹۲۰ارائهٔ رویهٔ نرمال y متغیرهمبسته (در ۱۸۲۳) را به‌گاوس نسبت داد. اما گاوس به‌همبستگی، به‌عنوان یك مفهوم متمایز، توجه‌خاصی نداشت و درمعادله‌های توزیعی‌اش، همبستگی را به‌عنوان یکی‌از پارامترها تعبیر کرد. پیرسن دریك‌مقالهٔ تاریخی قبلی‌که در ۱۸۹۵ انتشار یافت، ارائهٔ توزیع نرمال دومتغیره (در ۱۸۴۶) را به اوگوست براوه، ستاره‌شناس فرانسوی، نسبت داد (ر.ك. [۳۰]). براوه درواقع، به‌پارامتری از توزیع نرمال دومتغیره، عنوان " همبستگی " را اطلاق کرد، امانظیر گاوس اهمیت‌همبستگی را به‌عنوان معیار پیوند بین‌متغیرها تشخیص نداد. [قبل‌از ۱۹۲۰، پیرسن امتیازی راکه به‌براوه داده‌بود پس گرفت. اما والکر[۲۶] و سیل[1] [۲۴] تاریخچه‌ای‌راکه پیرسن گزارش‌داده و درپروراندن آن کمك‌کرده بود مرور کردند و ادعای براوه را درتقدم تاریخی تأیید نمودند.] چارلز داروین، دایی‌زاده گالتن، در ۱۸۶۸ با اشاره به اینکه "تمام اجزاء یك نظام به میزانی معین به هم مربوط یا همبسته‌اند" مفهوم‌همبستگی‌را به‌کاربرد. سپس، در ۱۸۷۷، گالتن دریك سخنرانی مربوط به‌بستگی مشخصه‌های جسمانی نسلهایی از والدین وفرزندان، برای‌اولین‌بار به‌اصطلاح "Reversion" اشاره کرد. "قانون Reversion" اولین توصیف رسمی از مفهومی است که‌گالتن بعدها "رگرسیون" را به‌جای‌آن باب‌کرد.

در طی این دوره، پیشرفت مهم فلسفه نیز سبب افزایش بسار معنایی‌مفاهیم‌همبستگی و رگرسیون شد. در ۱۸۴۳، جان‌استوارت میل فیلسوف بریتانیایی برای اولین‌بار "پنج قانون تحقیق‌تجربی" خود را ارائه داد. بین‌اینها روش تغییرات ملازم هم را گنجانیده بود: "هروقت تغییر پدیده‌ای به‌روشی‌خاص، به‌نحوی‌موجب تغییر

1. Seal



شکل ۱. اولین نمودار پراکنش دو متغیره (ازگالتن ۱۸۸۵)

پدیدهٔ دیگری شود، پدیدهٔ اول علت یا معلول پدیدهٔ دوم است، یا از طریق واقعیتی علّی به‌آن مربوط است." میل برای معتبر بودن استنباط علّی سه‌شرط پیشنهاد کرد [۶]. اولاً، علت باید از نظر زمانی مقدم بر معلول باشد. ثانیاً، علت و معلول باید به‌هم مربوط باشند. ثالثاً، توضیحات به ظاهر موجه دیگر باید رد شوند. بنابراین تفکیک‌پذیری همبستگی و علیت، و توصیف اولی به‌صورت شرطی لازم و نه‌کافی برای دومی، در نظام جاافتادهٔ فلسفه و نظام کم‌سابقهٔ زیست‌سنجی تقریباً به‌طور همزمان تشخیص داده شد.

تا ۱۸۸۵، زمینه برای ارائهٔ چند اثر مهم فراهم آمد. درطول آن سال، گالتن رئیس بخش مردم‌شناسی انجمن بریتانیا بود. وی درخطابه‌ای که به‌مناسبت انتصابش ایراد نمود، اولین بار به‌رگرسیون عنوان تعمیم "قانون Reversion" را اطلاق کرد. کمی بعد درهمان سال [۹]، خطابهٔ مزبور را به‌همراه اولین نمودار پراکنش دومتغیره که همبستگیی را نشان می‌داد منتشر کرد (شکل ۱).

وی در این نمودار، فراوانی ترکیبهای بلندی قد فرزندان و بلندی قد والدین را به‌نمایش گذاشت. وقتی وی نتایج را هموار کرد و خطوطی برنقاطِ با فراوانی برابر گذراند، دریافت که "خطوط ماربر درایه‌های هممقدار، یک‌سری از بیضیهای هممرکز و مشابه تشکیل می‌دهند." این اولین نمایش تجربی خمهای تک‌چکالی از توزیع نرمال دومتغیره بود [فراوانی روی هریک از این خمها یکی است]. گالتن، با همیاری هامیلتن دیکسن، ریاضیدانی از کمبریج، توانست فرمولی نظری برای توزیع نرمال دومتغیره به دست آورد. این فرمول، از نظر ریاضی، به موضوعی که گاوس و براوه نیم‌قرن قبل روی آن کار کرده بودند رسمیت داد. پیرسن [۲۵، ص۳۷] اظهار داشت که "در ۱۸۸۵، گالتن نظریهٔ همبستگی دومتغیره را کامل کرد."

در سالهای بعد از ۱۸۸۵، چند پیشامد دیگر براهمیت ریاضی اثر ۱۸۸۵ گالتن افزودند. در ۱۸۸۸، گالتن متذکر شد که r، دقت "همبستگی" را اندازه می‌گیرد و (هرچند ایدهٔ همبستگی منفی هنوز به‌ذهن او نرسیده بود) اظهار کرد که r نمی‌تواند از ۱ بیشتر باشد. هفت سال بعد، پیرسن فرمول ریاضیی را که هنوز متداولترین فرمول برای اندازه‌گیری همبستگی است، یعنی ضریب همبستگی گشتاور حاصلضربی پیرسن را ارائه داد. از دیدگاه تاریخی، به‌نظر مناسبتر می‌رسد که نام این شاخص معروف، r گالتن-پیرسن باشد. تحولهای مهم درحکایت همبستگی و رگرسیون درجدول ۱ خلاصه شده‌اند.

اینک، پس از یک قرن، دانشمندان معاصر اغلب ضریب همبستگی را مطلبی بدیهی و مسلم می‌دانند. به این مطلب توجه نمی‌شود که قبل از گالتن و پیرسن، تنها وسیلهٔ استقرار بستگی بین متغیرها، یافتن ارتباط علّی بود. حتی راهی برای بحث دربارهٔ پیوند بین متغیرهایی که فاقد بستگی علت و معلولی بودند وجود نداشت، چه رسد به

جدول ۱. پیشامدهای برجستهٔ تاریخچه همبستگی و رگرسیون

تاریخ	شخص	پیشامد
۱۸۲۳	کارل فریدریش گاوس، ریاضیدان آلمانی	رویهٔ نرمال N متغیر تصادفی همبسته را ارائه داد.
۱۸۴۳	جان استوارت میل، فیلسوف بریتانیایی	پنج قانون استقرا، از جمله تغییرات ملازم را مطرح کرد.
۱۸۴۶	اوگوست براوه، افسر نیروی دریایی فرانسه و ستاره‌شناس	با اشاره به "یك همبستگی"، روی توزیع نرمال دومتغیره کار کرد.
۱۸۶۸	چارلز داروین دایی‌زادهٔ گالتن، طبیعیدان بریتانیایی	تمام اجزاء یك نظام... به‌هم مربوط یا همبسته‌اند.
۱۸۷۷	سرفرانسیس گالتن، بریتانیایی، اولین متخصص زیست‌سنجی	برای اولین بار از "Reversion"، سلف رگرسیون، بحث کرد.
۱۸۸۵	سرفرانسیس گالتن	برای اولین بار به "رگرسیون" اشاره کرد. نمودار پراکنش دومتغیره باخمهای تك‌چگالی نرمال دومتغیره، اولین نمودار همبستگی، را انتشار داد. نظریهٔ همبستگی نرمال دومتغیره را کامل کرد[۲۰].
۱۸۸۸	سرفرانسیس گالتن	r را به‌طور مفهومی تعریف کرد، و کران بالایی آن را مشخص نمود.
۱۸۹۵	کارل پیرسن، آماردان بریتانیایی	ضریب همبستگی گشتاور حاصلضربی (گالتن-) پیرسن را تعریف کرد.
۱۹۲۰	کارل پیرسن	"یادداشتهایی بر تاریخچهٔ همبستگی" را نوشت.
۱۹۸۵		صد سالگی رگرسیون و همبستگی

اندازه‌گیری آنها. امروزه، ضریب همبستگی ـ و معادلهٔ رگرسیون همتای آن ـ در بسیاری از زمینه‌ها برای آزمایشهای مبتنی بر مشاهدات، یك ابزار آماری اصلی است. کارول [۳، ص ۳۴۷] در خطابه‌ای که به‌مناسبت انتصابش به ریاست انجمن روانسنجی ایراد کرد، ضریب همبستگی را "یکی از متداولترین ابزارهایی که در روانسنجی به‌کار می‌رود... و شاید یکی از متداولترین ابزارهایی که بد به‌کار گرفته شده است" خواند. در تجزیهٔ عاملی، در مدلهای ژنتیکی رفتاری، **درمدلهای معادله‌های ساختاری (مثلاً LISREL)، و در دیگر روشهای وابسته، ضریب همبستگی به‌عنوان واحد اساسی داده‌ها به‌کار می‌رود.**

بحث ما حول ضریب همبستگی گشتاور حاصلضربی پیرسن دور می‌زند. r پیرسن اولین معیار رسمی اندازه‌گیری همبستگی بود، و هنوز هم معیاری برای بستگی است که کاربرد فراوان دارد. بدون شك، بسیاری از شاخصهای همبستگی "رقیب"، درواقع حالتهای خاصی از فرمول پیرسن‌اند. ρی اسپیرمن، همبستگی نقطه‌ای مربوط به‌دوسری از داده‌ها، وضریب فی، مثالهایی هستند که هریك با به‌کار بردن r پیرسن درمورد انواع خاصی از داده‌ها قابل محاسبه است (مثلاً، ر.ك. [۱۰]).

مطلب را با کمی چاشنی آموزشی عرضه می‌کنیم. درنظر اول، معیار همبستگی، ساده و سرراست است. اما، اختلافهای جزئی شگفت‌انگیزی درمفهوم ضریب همبستگی وجود دارند که برخی از آنها را معرفی خواهیم کرد. به‌پیروی از پیرسن، تأکید ما برضریب همبستگی به‌عنوان یك شاخص محاسباتی است که برای اندازه‌گیری پیوند دومتغیره به‌کار می‌رود. از نظر آماری، درك عمیقتری از همبستگی مستلزم توجه به مدل نمونه‌گیری است که فرض می‌شود زیربنای مشاهدات باشد (مثلاً، ر.ك. [۳] و [۱۴])، و نیز مستلزم درك تعمیم همبستگی به همبستگی چندگانه و جزئی است، اما در اینجا تأکید ما برهمبستگی جنبهٔ بنیادیتری دارد. اولاً، توجه اصلی را به وضعیتهای دومتغیره محدود می‌کنیم. ثانیاً، اکثر تعبیرهای ما آزاد ـ توزیع‌اند، زیرا محاسبهٔ همبستگی نمونه‌ای نیاز به‌هیچ فرضی دربارهٔ جامعه ندارد (ر.ك. [۱۶]). برای بررسی مسائل زیادی که به‌کاربرد استنباطی r (مثلاً، محدودکردن، و کوچك‌کردن آن) مربوط‌اند خواننده را به روشهای دیگری ارجاع می‌دهیم (مثلاً، ر.ك. [۱۲]). برای استنباط این اصلیترین معیار بستگی دومتغیره سیزده راه مختلف معرفی می‌کنیم. ادعا نمی‌کنیم که این مقاله تمام تعبیرهای ممکن ضریب همبستگی را شامل می‌شود. محققاً تعبیرهای دیگری هم وجود دارند، و یقیناً تعبیرهای جدیدی نیز پیشنهاد خواهند شد.

۱. همبستگی به‌صورت تابعی از اندازه‌های خام و میانگینها

ضریب همبستگی گشتاور حاصلضربی پیرسن، شاخصی بی‌بعد است که تحت تبدیلهای خطی هر یك از دومتغیر ناورداست. اولین بار

پیرسن در ۱۸۹۵، فرمولی ریاضی برای این معیار مهم ارائه داد:

$$r=\frac{\Sigma(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{[\Sigma(X_i-\bar{X})^2\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2]^{1/2}} \qquad (۱.۱)$$

این فرمول، یا صورتهای سادهٔ جبری دیگر آن، فرمولهای متداولی در کتابهای درسی آمار مقدماتی هستند. درصورت این کسر، اندازه‌های خام هرمتغیر، به‌وسیلهٔ کم کردن میانگین متغیر از آن، "مرکزی" شده‌اند ومجموع حاصلضربهای متقاطع متغیرهای مرکزی شده به‌دست آمده است. مخرج کسر، مقیاس متغیرها را برای اینکه واحدهای یکسان داشته باشند تعدیل می‌کند. بنابراین معادلهٔ (۱.۱)، r را به‌صورت مجموع حاصلضربهای متقاطع دومتغیرمرکزی شده و استاندارد شده توصیف می‌کند. با استفاده از نابرابری کوشی-شوارتس، می‌توان نشان داد که قدرمطلق صورت از مخرج بیشتر نیست (مثلاً، [۱۲، ص ۸۷] را ببینید). بنابراین برای r، حدود ± 1 به‌دست می‌آیند. برای منظورهای محاسباتی، چندین تبدیل سادهٔ جبری این فرمول را می‌توان به‌کار برد.

۲. همبستگی به‌صورت کوواریانس استاندارد شده

کوواریانس، شبیه همبستگی، معیار پیوند خطی بین متغیرهاست. کوواریانس روی مجموع حاصلضربهای متقاطع متغیرهای مرکزی شده، که مقیاس آنها تعدیل نیافته است، تعریف می‌شود. هرچند در کتابهای درسی مقدماتی کوواریانس را اغلب نادیده می‌گیرند، ولی واریانس (که از آن گفتگو می‌شود)، واقعاً حالتی خاص از کوواریانس است ــ بدین‌معنا که واریانس، کوواریانس یك‌متغیر با خود آن متغیر است. کوواریانس دومتغیر، درجامعه‌های نامتناهی، دارای کرانهای مشخصی نیست، و در نمونه کرانهایی نامعین (و تعبیری نامناسب) دارد. بنابراین، کوواریانس اغلب معیار توصیفی مفیدی برای پیوند نیست، زیرا مقدار آن به‌مقیاسهای اندازه‌گیری X و Y بستگی دارد. ضریب همبستگی، از تغییرمقیاس کوواریانس به‌دست می‌آید:

$$r=\frac{s_{XY}}{s_X \cdot s_Y} \qquad (۱.۲)$$

که در آن s_{XY}، کوواریانس نمونه‌ای است و s_X و s_Y انحراف معیارهای نمونه‌ای هستند. وقتی کوواریانس به دو انحراف معیار تقسیم شود، بردکوواریانس به‌بازهٔ $(-1, +1)$ محدود می‌شود. لذا، تعبیرهمبستگی به عنوان معیار بستگی معمولاً ساده‌تر از تعبیر کوواریانس به‌عنوان معیار بستگی است (و به‌وسیلهٔ آن همبستگیهای مختلف با سهولت بیشتر مقایسه می‌شوند).

۳. همبستگی به‌صورت شیب استاندارد شدهٔ خط رگرسیون

بستگی همبستگی و رگرسیون را می‌توان به‌صورتی ساده‌تر با رابطهٔ

$$r=b_{Y\cdot X}\left(\frac{s_X}{s_Y}\right)=b_{X\cdot Y}\left(\frac{s_Y}{s_X}\right) \qquad (۱.۳)$$

نمایش داد که در آن، $b_{Y\cdot X}$ و $b_{X\cdot Y}$ شیبهای خطهای رگرسیون‌اند که به‌ترتیب Y را از روی X یا X را از روی Y پیشگویی می‌کنند. در اینجا همبستگی به‌صورت تابعی‌ازشیب یکی ازدوخط رگرسیون و انحراف‌معیارهای‌دومتغیر بیان‌می‌شود. نسبت انحراف معیارها دارای این اثر است که واحد شیب رگرسیون را به‌واحد همبستگی تبدیل می‌کند. بنابراین همبستگی، یك شیب استاندارد شده است.

تعبیری مشابه، همبستگی را به‌عنوان شیب خط رگرسیون استانداردشده مطرح‌می‌کند. وقتی‌دومتغیرخام‌را استاندارد می‌کنیم، انحراف معیارها برابر واحد می‌شوند و شیب خط رگرسیون به صورت همبستگی درمی‌آید. دراین حالت، عرض ازمبدأ خط صفر است، و خط رگرسیون به‌آسانی به‌صورت

$$\hat{z}_Y=rz_X \qquad (۲.۳)$$

بیان می‌شود. از این‌تعبیر آشکار است که همبستگی، برای‌پیشگویی واحدهای متغیر استاندارد شدهٔ Y، واحدهای متغیر استاندارد شدهٔ X را از نو مقیاس‌بندی می‌کند. توجه‌کنید که شیب رگرسیون z_Y روی z_X، خط رگرسیون را ملزم می‌کند که درناحیهٔ سایه‌خوردهٔ شکل ۲، بین نیمسازهای محورهای مختصات بیفتد. همبستگیهای مثبت ایجاب می‌کنند که خط از ربعهای اول و سوم بگذرد؛ همبستگیهای منفی ایجاب می‌کنند که خط از ربعهای دوم و چهارم عبور کند. زاویهٔ خط رگرسیون z_X روی z_Y با محور Y، برابر زاویهٔ خط رگرسیون z_Y روی z_X با محور X است، و این خط همان‌طور که نشان داده‌ایم درناحیهٔ سایه‌نخوردهٔ شکل ۲ می‌افتد.

۴. همبستگی به‌صورت میانگین هندسی دوشیب رگرسیون

همبستگی‌را ممکن‌است به‌صورت تابعی همزمان از دوشیب خطهای رگرسیون استاندارد شده، $b_{Y\cdot X}$ و $b_{X\cdot Y}$، بیان‌کرد. درواقع این تابع، میانگین هندسی است، و اولین‌تعبیر ازچندتعبیر r است که آن را به‌عنوان نوعی خاص ازمیانگین بیان می‌کند:

$$r=\pm\sqrt{b_{Y\cdot X}b_{X\cdot Y}}\,. \qquad (۱.۴)$$

این رابطه را می‌توان ازمعادله‌های (۱.۳) نتیجه گرفت: جمله‌های دوم و سوم برابریها را درهم ضرب می‌کنیم تا r^2 به‌دست آید، آنگاه انحراف معیارها را حذف می‌کنیم، و از دوطرف جذر می‌گیریم.

تعمیمی از این‌تعبیروجود دارد که متضمن‌رگرسیون چندمتغیره است. وقتی $B_{Y\cdot X}$ و $B_{X\cdot Y}$، ماتریسهای‌ضرایب رگرسیون‌مربوط به‌دومجموعه‌ازمتغیرها، معلوم‌اند، جذرهای‌ویژه‌مقدارهای‌حاصلضرب این‌ماتریسها، همبستگیهای‌کانونیك این‌دومجموعه ازمتغیرها هستند. وقتی یك تك‌متغیر X و یك تك‌متغیر Y وجود داشته باشند، این مقادیر به‌ضریب همبستگی ساده تبدیل می‌شوند.

۵. همبستگی به‌صورت جذر نسبت دوواریانس

گاه ازهمبستگی، به‌این دلیل که مقدارش تعبیرروشنی ندارد، انتقاد می‌شود. این انتقاد با مربع کردن همبستگی و با تعبیر زیرتخفیف می‌یابد. شاخص‌مربع‌شده را اغلب ضریب تعیین‌می‌خوانند. مقدار این ضریب را ممکن است به عنوان کسری از واریانس یکی از متغیرها تعبیر کرد ([۱۸] را، برای آگاهی از بحثی که مربوط به‌چند

تعبیر از ضریب تعیین است، ببینید). مجموع مربعات کل ($SS_{\text{کل}}$) برای Y را ممکن است به دو مجموع مربعات حاصل از رگرسیون ($SS_{\text{رگرسیون}}$) و مجموع مربعات ناشی از خطا ($SS_{\text{خطا}}$) افراز کرد. نسبتی از کل تغییرات Y که از تغییرات X ناشی می‌شود، نسبت $SS_{\text{رگرسیون}}$ به $SS_{\text{کل}}$ است، و r، جذر این نسبت است:

$$r=\sqrt{\frac{\Sigma(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2}}=\sqrt{\frac{SS_{\text{رگرسیون}}}{SS_{\text{کل}}}}$$

هم‌ارز آن، اگر صورت و مخرج این معادله را به $(N-1)^{1/2}$ تقسیم کنیم، r مساوی با جذر نسبت واریانسها (یا نسبت انحراف معیارها)ی متغیرهای پیش‌بینی شده و مشاهده شده می‌شود:

$$r=\sqrt{\frac{s_{\hat{Y}}^2}{s_Y^2}}=\frac{s_{\hat{Y}}}{s_Y} \qquad (۱.۵)$$

(توجه کنید که $s_{\hat{Y}}$، برآوردی اریب از $\sigma_{\hat{Y}}^2$ است، درحالی که s_Y^2 برآوردی نااریب است.) این تعبیر، تعبیری است که انگیزهٔ استنباط اولیهٔ پیرسن از شاخص همبستگی بوده است. ([۱۵، ص ۴] را ببینید.) همبستگی به‌عنوان نسبت دو واریانس را می‌توان با تعبیر دیگری از همبستگی به‌صورت نسبت دو میانگین (منسوب به گالتن) مقایسه کرد. ما این تعبیر را در بخش ۱۳ ارائه خواهیم داد.

۶. همبستگی به‌صورت میانگین حاصلضرب متقاطع متغیرهای استاندارد شده

راه دیگر تعبیر همبستگی به‌صورت میانگین (بخش ۴ را ببینید)، بیان آن به‌صورت متوسط حاصلضرب متقاطع متغیرهای استاندارد شده است:

$$r=\frac{\Sigma z_X z_Y}{N} \qquad (۱.۶)$$

معادلهٔ (۱.۶) را می‌توان مستقیماً از تقسیم صورت و مخرج معادلهٔ (۱.۱) بر حاصلضرب انحراف معیارهای دو نمونه به‌دست آورد. چون میانگین یک توزیع، اولین گشتاور آن است، این فرمول، به‌کار بردن مفهوم "گشتاور حاصلضرب" به‌جای ضریب همبستگی را توجیه می‌کند.

دو توصیف بعدی، متضمن تعبیرهای مثلثاتی از همبستگی هستند.

۷. همبستگی به‌صورت تابعی از زاویهٔ بین دو خط رگرسیون استاندارد شده

همان‌طور که در بخش ۳ اشاره شد، دو خط رگرسیون استاندارد شده نسبت به هر نیمساز متقارن‌اند. فرض کنیم زاویهٔ بین دو خط β باشد (شکل ۲ را ببینید). در این صورت

$$r=\sec(\beta)\pm\tan(\beta). \qquad (۱.۷)$$

برهان ساده‌ای از این بستگی را در اختیار داریم. معادلهٔ (۱.۷) به‌طور شهودی واضح نیست و برای هدفهای محاسباتی یا مفهومی هم به‌اندازهٔ دیگریها مفید نیست. مقدار r در این رابطه نشان می‌دهد که بین همبستگی و فاصلهٔ زاویه‌ای دو خط رگرسیون یک بستگی متقارن وجود دارد. تعبیر بعدی، که باز تعبیری مثلثاتی است، اساساً ارزش مفهومی بیشتری دارد.

۸. همبستگی به‌صورت تابعی از زاویهٔ بین دو بردار متغیر

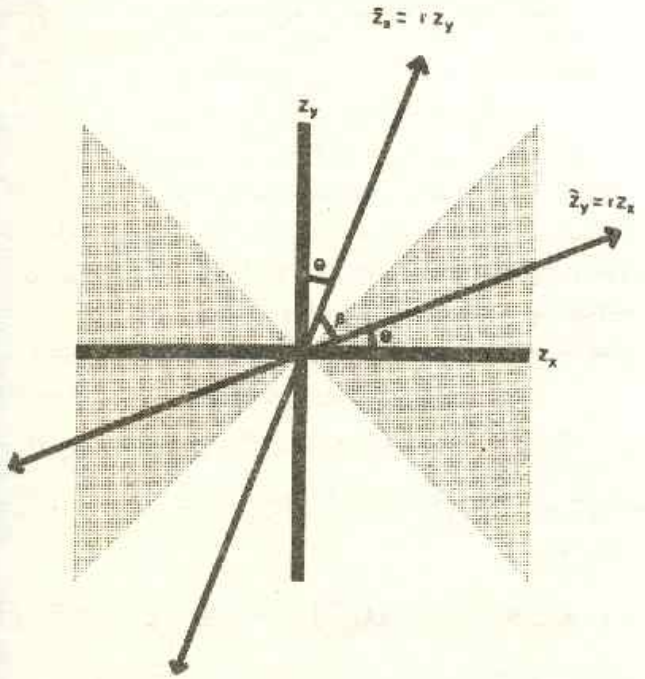
مدل هندسی استاندارد برای نمایش تصویری بستگی بین متغیرها، نمودار پراکنش است. در این مدل، مشاهدات را به‌صورت نقطه‌هایی از فضایی نمایش می‌دهیم که با محورهای متغیرها تعریف می‌شود. صورت "وارونهٔ" این فضا را که معمولاً به "فضای شخصی" موسوم است، می‌توان با فرض اینکه هر محور مشاهده‌ای را نمایش دهد، تعریف کرد. این فضا دو نقطه را در بردارد ــ یکی برای هر متغیر ــ که نقاط انتهایی بردارهای واقع در این فضای (بالقوه) کلان بعدی را تعریف می‌کند. گرچه چندبعدی بودن این فضا مانع تجسم آن است، اما دو بردار متغیر، یک زیرفضای دوبعدی را تعریف می‌کنند که به‌آسانی قابل تجسم است.

اگر بردارهای متغیر مبتنی بر متغیرهای مرکزی‌شده باشند، آنگاه همبستگی با α که زاویهٔ بین بردارهای متغیر است بستگی سر راست دارد [۲۱]:

$$r=\cos(\alpha) \qquad (۱.۸)$$

وقتی زاویه ۰ است، بردارها روی یک خط می‌افتند و در نتیجه $\cos(\alpha)=\pm 1$. وقتی زاویه 90° است، بردارها برهم عمودند و $\cos(\alpha)=0$. (راجرز، نایسواندر، توناکر [۲۲] بستگی بین بردارهای متغیر متعامد و ناهمبسته را در فضای شخصی نشان داده‌اند.)

برای تجسم همبستگی، مشاهدهٔ یک زاویه خیلی ساده‌تر از مشاهدهٔ چگونگی گردآمدن نقاط حول خط رگرسیون است. به عقیدهٔ ما، این تعبیر در مقایسه با سایر تعبیرها آسانترین راه "ملاحظهٔ" اندازهٔ



شکل ۲. تصویر هندسی همبستگی دو متغیره برای متغیرهای استاندارد شده

همبستگی است، زیرا می‌توان مستقیماً اندازهٔ زاویهٔ بین دو بردار را مشاهده کرد. اما، این فضای "وارونه"، که اجازه می‌دهد r را به‌صورت کسینوس یك زاویه نمایش دهیم به‌عنوان یك ابزار تعبیر کننده، نسبتاً از نظر دور مانده است. چند تعبیر مربوط به تجزیهٔ عاملی، نمایشهای هندسی تحلیل رگرسیون چندگانهٔ دریپر[1] و اسمیت ([۷] صص ۲۰۱–۲۰۳)، و هك[2] و ساندلر [۱۱، ص۵۲]، از جمله استثناهایی هستند که باید برشمرد. فیشر نیز برای تفهیم بینشهای آماری استادانه‌اش کراراً از این فضا استفاده کرده است ([۱] را ببینید).

۹. همبستگی به‌صورت یك واریانس تجدید مقیاس شده از تفاضل بین اندازه‌های استاندارد شده

$z_Y - z_X$ را به‌عنوان تفاضل بین متغیرهای استاندارد شدهٔ X و Y برای هر مشاهده تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$r = 1 - \frac{s^2_{(z_Y - z_X)}}{2} \qquad (۱.۹)$$

برای نشان‌دادن این رابطه می‌توانیم با واریانس تفاضلی

$$s^2_{Y-X} = s^2_X + s^2_Y - 2rs_Xs_Y$$

شروع کنیم. چون وقتی متغیرها را استاندارد می‌کنیم، انحراف معیارها و واریانسها برابر واحد می‌شوند، می‌توانیم به‌آسانی رابطهٔ بالا را نسبت به r حل کنیم و معادلهٔ (۱.۹) را به‌دست آوریم.

توجه به‌این نکته جالب است که در این معادله، چون همبستگی به‌بازهٔ از ۱– تا ۱ محدود است، واریانس این اندازهٔ تفاضلی به بازهٔ از ۰ تا ۴ محدود می‌شود. بنابراین واریانس تفاضلی اندازه‌های استاندارد شده هرگز از ۴ تجاوز نمی‌کند. وقتی همبستگی برابر ۱– است، واریانس به‌کران بالایی می‌رسد.

می‌توانیم r را به‌صورت واریانس مجموعی از متغیرهای استاندارد شده نیز تعریف کنیم:

$$r = \frac{s^2_{(z_Y + z_X)}}{2} - 1 \qquad (۲.۹)$$

در اینجا، واریانس مجموع نیز از ۰ تا ۴ تغییر می‌کند، و موقعی که همبستگی برابر ۱+ است به‌کران بالای خود می‌رسد. مقدار این نهمین تعبیر است که نشان می‌دهد همبستگی، تبدیل خطی نوع خاصی از واریانس است. لذا، با معلوم بودن همبستگی، می‌توانیم مستقیماً واریانس مجموع یا واریانس تفاضل متغیرهای استاندارد شده را تعریف کنیم، و برعکس.

تمام نه‌تعبیر قبلی ضریب همبستگی ماهیتاً جبری و مثلثاتی هستند. تا اینجا دربارهٔ ماهیت توزیعهای تك‌متغیره یا دومتغیره X و Y هیچ فرضی نشد. در تعبیرهای پایانی، نرمال بودن دومتغیره را فرض خواهیم کرد. توجه‌خود را همچنان به‌صورتهای مفهومی و محاسباتی r معطوف می‌داریم، اما چند تعبیر آخری را بر این فرض مشترك دربارهٔ توزیع جامعه، استوار می‌کنیم.

1. Draper 2. Huck

۱۰. همبستگی برآورد شده از روی قاعدهٔ بادکنکی

این تعبیر منسوب به‌شاتیون[1] [۴] است. او پیشنهاد کرد که پیرامون نمودار پراکنش یك بستگی دومتغیره، "بادکنکی" رسم کنیم. این بادکنك در واقع یك بیضی تقریبی است که از روی آن دو اندازهٔ h و H به‌دست می‌آیند (شکل ۳ را ببینید). h، قطر قائم بیضی است که از مرکز توزیع واقع بر محور X می‌گذرد؛ H، برد تغییرات عرضی بیضی روی محور Y است. شاتیون نشان داد که همبستگی را می‌توان به‌طور تقریبی به‌صورت

$$r = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{H}\right)^2} \qquad (۱.۱۰)$$

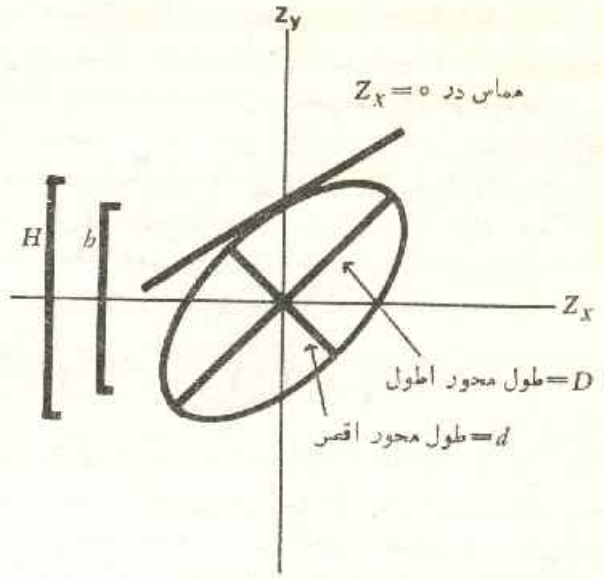
محاسبه کرد. وی با فرض توزیع نرمال دومتغیره و توزیع یکنواخت دومتغیره، دربارهٔ کارایی این شیوهٔ محاسباتی تقریبی و سهل‌الوصول، توجیهی نظری ارائه داد. او همچنین مثالهایی چند معرفی کرد که در آنها این تکنیك به‌خوبی قابل استفاده است. پیشنهاد اغواکننده‌ای که وی عرضه کرد این است که "قاعدهٔ بادکنکی" را می‌توان برای بنای تقریبی یك بستگی دومتغیره با همبستگی معینی به‌کار برد. بدین طریق که بیضیی می‌کشیم که r مطلوب را تولید کند و آنگاه سراسر بیضی را به‌طور یکنواخت از نقطه‌ها پر می‌کنیم. توماس [۲۵] یك "نوموگراف جیبی" ساخت که نواری "۵ × "۳ است که می‌توان از آن برای "مشاهدهٔ" یك بستگی دومتغیره استفاده کرد و همبستگی مبتنی بر قاعدهٔ بادکنکی را برآورد نمود.

۱۱. همبستگی در ارتباط با بیضیهای دومتغیرهٔ تك‌چگالی

دو نویسندهٔ مختلف، تعبیرهایی از r را که در ارتباط با بیضیهای دومتغیرهٔ تك‌چگالی‌اند پیشنهاد کرده‌اند. توجه کنید که این بیضیها صورتهای رسمیتر "بادکنك" بخش ۱۰ اند و ساختارهای هندسی هستند که گالتن در داده‌های تجربیش مشاهده کرده است (شکل ۱ را ببینید). شاتیون [۵] رده‌ای از توزیعهای دو متغیره (شامل نرمال، یکنواخت، و آمیزه‌هایی از یکنواخت) را ارائه داده است که دارای خمهای تك‌چگالی بیضی‌شکل هستند. با معلوم بودن همبستگی جامعه‌ای، برای هر ثابت مثبت یك بیضی وجود دارد. بادکنکی که پیرامون یك نمودار پراکنش کشیده می‌شود به ازای ثابت مثبت بزرگی یکی از این بیضیها را تقریب می‌کند. اگر متغیرها استاندارد شده باشند، آنگاه مرکز این بیضیها در مبدأ است. قطر اطول برای $\rho > 0$ بر نیمساز ربع اول و سوم و برای $\rho < 0$ بر نیمساز دو ربع دیگر می‌افتد.

مارکس [۱۴]، با محاسبه‌ای ساده نشان داد که شیب خط مماس در $z_X = 0$، برابر با همبستگی است. شکل ۳ این خط مماس را نشان می‌دهد که شیب آن مساوی با r است. وقتی همبستگی ۰ است، بیضی یك دایره است و مماس دارای شیب ۰ است. وقتی همبستگی ۱ است، بیضی به‌خطی مستقیم میل می‌کند که همان نیمساز (با شیب ۱) است. توجه کنید که چون تمام بیضیهای تك‌چگالی موازی‌اند، تعبیر ارائه شده به‌انتخاب بیضی بستگی ندارد. همچنین شایان توجه است که شیب خط مماس در $z_X = 0$ همان شیب خط رگرسیون

1. Chatillon



شکل ۳. همبستگی در ارتباط با تابعهایی از بیضیهای تك چگالی استاندارد شده است (بخش ۳ را ببینید).

شیلینگ [۲۳] نیز برای رسیدن به بستگی مشابهی، از این چارچوب استفاده کرده است. فرض کنید متغیرها استاندارد شده باشند به‌قسمی که، مثل قبل، مرکز بیضیها در مبدأ باشد. اگر D، درازای قطر اطول یکی از بیضیهای تك‌چگالی و d، درازای قطر اقصر آن باشد، آنگاه

$$r=\frac{(D^2-d^2)}{(D^2+d^2)} \qquad (۱.۱۱)$$

این محورها نیز در شکل ۳ رسم شده‌اند، و تعبیر، مثل قبل، به‌انتخاب بیضی بستگی ندارد.

۱۲. همبستگی به‌صورت تابعی از آمارهٔ آزمونی از آزمایشهای طرح‌شده

تعبیرهای قبلی r برمتغیرهای کمی مبتنی بودند. دوازدهمین نمایش همبستگی، بستگی آن را با آمارهٔ آزمونی از آزمایشهای طرح‌شده نشان می‌دهد که در آنها یکی از متغیرها (متغیر مستقل)، متغیری رسته‌ای است. این تعبیر، ساختگی بودن نمایز آزمایشها از همبستگی را در بحث طرح آزمایشها ثابت می‌کند. درواقع، فیشر (۱۹۵۲) دراصل، تحلیل واریانس را برحسب ضریب همبستگی درون‌رده‌ای ارائه داد (ر.ك. [۱]).

فرض می‌کنیم آزمایش طرح شده‌ای با دوشرط تیماری داشته باشیم. مدل آماری استاندارد برای آزمودن تفاوت بین شرایط، آزمون tی مربوط به دونمونهٔ مستقل است. اگر X به صورت یك متغیر دوحالتی معرف عضویت گروه، تعریف شود (۰، اگر گروه ۱، ۱، اگر گروه ۲)، آنگاه همبستگی بین X و متغیروابستهٔ Y عبارت است از

$$r=\frac{t}{\sqrt{t^2+n-2}} \qquad (۱.۱۲)$$

که در آن، n تعداد کل مشاهدات دو گروه تیماری است. این ضریب همبستگی را می‌توان به‌عنوان معیاری برای قدرت یك اثر تیماری، درمقابل معنادار بودن یك اثر به‌کار برد. دراین وضعیت آزمون معنادار بودن r، همان آزمون tی معمولی را به دست می‌دهد. بنابراین، r به‌وضوح می‌تواند به‌همان خوبی که معیاری از پیوند را در وضعیتهای مشاهداتی فراهم می‌کند به‌عنوان یك آمارهٔ آزمون نیز در یك آزمایش طرح شده به‌کاررود.

درحالت تحلیل واریانس با گروههای بیشتر یا عاملهای چندگانه، تعمیم این بستگی، ضریبهای همبستگی چندگانهٔ مربوط به‌اثرهای اصلی و اثرهای متقابل در آزمایشهای پیچیده‌تر را تعریف می‌کند. مثلاً، در حالت تحلیل واریانس یکطرفه با k گروه و مجموع کل N آزمودنی، مربع همبستگی چندگانه بین متغیر وابسته و ستونهای ماتریس طرح، ازطریق فرمول زیر به‌آمارهٔ F مربوط می‌شود [۷، ص ۹۳]:

$$R^2=\frac{F(k-1)}{[F(k-1)+(N-k)]}$$

۱۳. همبستگی به‌صورت نسبت دو میانگین

این سومین تعبیر همبستگی است که در ارتباط با میانگینهاست (بخشهای ۴ و ۶ را ببینید). این تعبیر، پایانی مناسب برمقالهٔ ماست، زیرا اولین بار گالتن آن را پیشنهاد کرده است. به‌علاوه، قدیمترین استنباط گالتن از همبستگی و محاسبهٔ آن، براین تعبیر مبتنی بود. نایسواندر و پرایس [۱۷] صورت پیشرفته‌تری از این تعبیر را ارائه داده‌اند.

اما گالتن، طبیعی بود که توجه خود را برهمبستگی به‌صورت نسبت میانگینها متمرکز کند، زیرا وی به سؤالهایی از این قبیل علاقه‌مند بود که چگونه باید متوسط قد پدرهایی را که به‌طور غیرمعمول بلندقدند با متوسط قد پسرانشان مقایسه کرد. در بحث زیر به جای نماد نمونه‌ای، از نماد جامعه‌ای استفاده می‌شود، زیرا این تنها درحد (حجم نمونه‌ای افزایشی) است که عبارت نسبت میانگینها همان مقادیر r پیرسن را به‌دست می‌دهد.

وضعیتی مشابه آنچه مورد توجه گالتن بود درنظر می‌گیریم. فرض کنید X متغیری باشد که بهرهٔ هوشی مادر را نشان دهد، و Y متغیری باشد که بهرهٔ هوشی بزرگترین فرزند این مادر را نمایش دهد. به‌علاوه فرض کنید که $\mu(X)$ و $\mu(Y)$ برابر ۰ و انحراف معیارهای $\sigma(X)$ و $\sigma(Y)$ برابریك باشند. حال مقداری به‌دلخواه بزرگ از X (مثل X_c) را برمی‌گزینیم، و میانگین بهرهٔ هوشی مادرهایی را که بهرهٔ هوشی آنها از X بزرگتر است محاسبه می‌کنیم. این میانگین را با $\mu(X|X>X_c)$ نشان می‌دهیم- این، متوسط بهرهٔ هوشی مادرانی است که بهرهٔ هوشی آنها بزرگتر از X_c است. سپس متوسط اندازه‌های Y، یعنی بهرهٔ هوشی بزرگترین فرزند این مادرهای خاص را محاسبه می‌کنیم. این میانگین را با $\mu(Y|X>X_c)$ نمایش می‌دهیم-یعنی، متوسط بهرهٔ هوشی بزرگترین فرزند مادرانی که بهرهٔ هوشی آنها بزرگتر از X_c است. دراین صورت، می‌توان نشان داد که

$$r=\frac{\mu(Y|X>X_c)-\mu_Y}{\mu(X|X>X_c)-\mu_X}=\frac{\mu(Y|X>X_c)}{\mu(X|X>X_c)}. \qquad (۱.۱۳)$$

برای اثبات (۱.۱۳)، لازم است که توزیع توأم دومتغیر استاندارد شدهٔ X و Y را نرمال فرض کنیم. برهان سرراست است و تنها مبتنی بر این واقعیت است که برای z_X و z_Y، مقدار r برابر با شیب خط رگرسیون و همچنین برابر با نسبت این دو میانگین شرطی است.

مثال ما، مثال ویژه‌ای است، اما این تعبیر دربارهٔ هر وضعیتی که روی یک متغیر انتخاب صریح رخ می‌دهد، و متغیر دوم هم به‌طور ضمنی انتخاب می‌شود کاربرد دارد. بروگدن[۲] تعبیر نسبت میانگینها را به‌کاربرد تا نشان دهد که وقتی یک آزمون روانشناسی برای انتخاب کارکنان مورد استفاده قرار می‌گیرد، همبستگی بین اندازهٔ آزمون و اندازهٔ ملاک، معیار مناسبی را به دست می‌دهد که بیان می‌کند آزمون تا چه حد ابزار انتخاب "کاملی" است. محققاً امکان استفاده‌های دیگری از این تعبیر وجود دارد.

سخن آخر

محققاً راههای دیگری هم برای تعبیر ضریب همبستگی وجود دارد. وقتی برای مسألهٔ همبستگی رهیافتی اختیار می‌شود که بیشتر آماری و کمتر جبری است، روشهای عدیدهٔ نموداری مفید و جالب دیگری موجودند. ما به‌هیچ وجه براین عقیده نیستیم که حتی در چارچوب نسبتاً محدودی که برای کارمان اختیار کرده‌ایم تمام رهیافتهای مفید یا جالب را خلاصه نموده‌ایم، مع‌هذا، این ۱۳ رهیافت، تنوع تعبیرهای موجود را به‌معلمین و محققینی که همبستگی را به‌کار می‌برند نشان می‌دهد.

کار اولیهٔ گالتن در زمینهٔ همبستگی، از یک مسألهٔ زیست‌سنجی بسیار خاص نشأت گرفت. جالب است که چنین کوششی که بر موضوعی خاص متمرکز بود، به‌چیزی منجر شد که شاید متداولترین شاخص عملی در رشتهٔ آمار باشد. دامنهٔ تعبیرهای ضریب همبستگی، رشد این شاخص مهم را درطول یک قرن نشان می‌دهد. ازسوی دیگر، شاخص گالتن و پیرسن، به‌گونه‌ای شگفت‌انگیز، به همان صورت که دراصل پیشنهاد شده است بدون تغییر باقی مانده است.

مراجع

1. Box, J. F. (1978), *R. A. Fisher: The Life of a Scientist*, New York: John Wiley.
2. Brogden, H. E. (1946), "On the Interpretation of the Correlation Coefficient as a Measure of Predictive Efficiency," *Journal of Educational Psychology* , 37, 65-76.
3. Carroll, J.B. (1961), "The Nature of the Data, or How to Choose a Correlation Coefficient," *Psychometrika*, 26, 347-372.
4. Chatillon, G. (1984 a), "The Balloon Rules for a Rough Estimate of the Correlation Coefficient," *The American Statistician*, 38, 58-60.
5. ——(1984 b), "Reply to Schilling," *The American Statistician*, 38,330.
6. Cook, T.C., and Campbell, D.T. (1979), *Quasi - Experimentation*, Boston: Houghton Mifflin.
7. Draper, N. R. and Smith, H. (1981), *Applied Regression Analysis*, New York: John Wiley.
8. Fisher, R. A. (1925), *Statistical Methods for Research Workers*, Edinburgh, U.K.: Oliver & Boyd.
9. Galton, F. (1885), "Regression Towards Mediocrity in Hereditary Stature," *Journal of the Anthropological Institute*, 15, 246-263.
10. Henrysson, S. (1971), "Gathering, Analyzing, and Using Data on Test Items," in *Educational Measurement*, ed. R.L. Thorndike, Washington, DC: American Council on Education, pp. 130-159.
11. Huck, S.W., and Sandler, H.M. (1984), *Statistical Illusions: Solutions*, New York: Harper & Row.
12. Lord, F.M., and Novick, M.R. (1968), *Statistical Theories of Mental Test Scores*, Reading, MA: Addison - Wesley.
13. MacKenzie, D.A. (1981), *Statistics in Britain: 1865-1930*, Edinburgh, U.K.: Edinburgh University Press.
14. Marks, E. (1982), "A Note on the Geometric Interpretation of the Correlation Coefficient," *Journal of Educational Statistics*, 7, 233-237.
15. Mulaik, S.A. (1972), *The Foundations of Factor Analysis*, New York: McGraw-Hill.
16. Nefzger, M.D., and Drasgow, J. (1957), "The Needless Assumption of Normality in Pearson's *r*," *The American Psychologist*, 12, 623-625.
17. Nicewander, W.A., and Price, J.M. (1982), "The Correlation Coefficient as the Ratio of Two Means: An Interpretation Due to Galton and Brogden," unpublished paper presented to the Psychometric Society, Montreal, Canada, May.
18. Ozer, D.J. (1985), "Correlation and the Coefficient of Determination, " *Psychological Bulletin*, 97, 307-315.
19. Pearson, K. (1895), *Royal Society Proceedings*, 58, 241.
20. —— (1920), "Notes on the History of Correlation," *Biometrika*, 13, 25-45.
21. Rodgers, J.L. (1982), "On Huge Dimensional Spaces: The Hidden Superspace in Regression and Correlation Analysis," unpublished paper presented to the Psychometric Society, Montreal, Canada, May.
22. Rodgers, J.L., Nicewander, W.A. and Toothaker, L. (1984), "Linearly Independent, Orthogonal, and Uncorrelated Variables," *The American Statistician*, 38, 133-134.
23. Schilling, M.F. (1984), "Some Remarks on Quick Estimation of the Correlation Coefficient," *The American Statistician*, 38, 330.
24. Seal, H.L. (1967), "The Historical Development of the Gauss Linear Model," *Biometrika*, 54, 1-24.
25. Thomas, H. (1984), "Psychophysical Estimation of the Correlation Coefficient From a Bivariate Scatterplot: A Pocket Visual Nomograph," unpublished paper presented to the Psychometric Society, Santa Barbara, California, June.
26. Walker, H.M. (1929), *Studies in the History of Statistical Method*, Baltimore: Williams & Wilkins.

• Joseph Lee Rodgers, W. Alan Nicewander, "Thirteen ways to look at the correlation coefficient," *The American Statistician*, (1) **42** (1988) 59-66.

★ جوزف راجرز و الن نایسواندر، بخش روانشناسی دانشگاه اوکلاهمای امریکا

دفاعیهٔ یك ریاضیدان*

گادفری هرلد هاردی
ترجمهٔ سیامك کاظمی

نام گادفری هرلدهاردی، ریاضیدان بزرگ انگلیسی درنیمهٔ اول قرن بیستم، برای بیشتر علاقه‌مندان ریاضیات نام آشنایی است. او درزمینهٔ تقریبهای دیوفانتی، مسألهٔ وارینگ، سریهای فوریه، نظریهٔ متغیرهای مختلط وحقیقی، تابع زتای ریمان، وتوزیع اعداد اول تحقیقات اساسی کرده است. یکی ازجنبه‌های جالب شخصیت هاردی، عقاید خاص و بحث‌انگیز او دربارهٔ ریاضیات است. هاردی به ریاضیات فارغ ازکاربردهای عملی آن و بـه‌عنوان هنری متعالی می‌نگرد. از نظر او، ریاضیدانان بزرگ خالقان آثارهنری هستند، آثاری که فی‌نفسه‌ارزش ماندگاردارند. بخشی ازعقاید هاردی درکتابی که اودرشصت سالگی با عنوان دفاعیهٔ یك ریاضیدان نوشت، آمده است. گراهام گرین نویسندهٔ معروف انگلیسی این کتاب را "بهترین توصیف ازکار یك هنرمند خلاق" خوانده است. بسیاری از ریاضیدانان با دیدگاههای هاردی موافق نیستند وضمناً، باگذشت زمان حتی قسمتهایی ازنظریهٔ اعداد که به نظر او "ریاضیات واقعی ولی فاقد فایدهٔ عملی" بودند، کاربرد عملی پیدا کرده‌اند. با این حال، کتاب کوچك هاردی به عنوان اثری کلاسیك که حاوی نگرش خاصی به ریاضیات است، همچنان اهمیت خود را حفظ کـرده است. دراینجا ترجمهٔ گزیده‌ای ازمطالب این کتاب را می‌خوانید.

ریاضیدان، مانند نقاش یا شاعر، نقش‌پرداز است. ولی نقشهای او مانـــدگارترند چون از ایده ساخته می‌شوند. نقاش نقشهای خود را با شکل و رنگ می‌سازد، وشاعر باکلام. تابلو نقاشی ممکن‌است "ایـده"ای را مجسم کند، ولی معمولاً این ایـده پیش پا افتاده و کم‌اهمیت است. در شعر ایده‌ها بیشتر بـه حساب می‌آیند ولـی، همچنانکه هاوسمن[1] با تأکید می‌گفت، دراهمیت ایده درشعر مبالغه می‌شود: "نمی‌توانم قبول کنم که چیزی به‌عنوان ایدهٔ شعری وجود دارد... شعر آن چیزی نیست که گفته می‌شود بلکه شیوه‌ای است که برای گفتن آن چیز به‌کار می‌رود."

گلیـم بخت کسی را کـه بـافتند سیاه
به آب زمزم و کوثر سفید نتوان کـرد[2]

آیا این شعر زیبا نیست؟ و درعین حال، آیـا ایده‌هـایش نازل و دروغین نیستند؟ به‌نظر می‌رسد که فقر ایده تأثیر چندانی بر زیبایی نقش لفظی ندارد. از طرف دیگر، ریاضیدان ابزارکاری در دست ندارد مگر ایده، وبنابراین نقشهای او احتمالاً بیشتر می‌پایند زیرا ایده دیرتر ازکلمه کهنه می‌شود.

۱. آلفرد ادوارد هاوسمن (Alfred Edward Housman) استاد ادبیات کلاسیك وشاعر انگلیسی

۲. برای‌اینکه نظر نویسنده بهتر القا شود، شعرفارسی آورده‌شد[م].

نقشهای ریاضیدان، همچون نقشهای نقاش یا شاعر، باید زیبا باشند. ایده‌های ریاضی بـاید همچون رنگهای نقاشی یـا واژه‌های شعر به‌گونه‌ای هماهنگ به‌هم بپیوندند. نخستین محك، زیبایی است. ریاضیات زشت دراین جهان مقام ماندگاری ندارد. دراینجا باید دربارهٔ سوءتفاهمی صحبت کنم که هنوز هم رایج است (گرچـه، احتمالاً کمتر ازبیست‌سال پیش) و وانهد آن را "خرافهٔ ادیبانه" نامیده‌است؛ یعنی این سوءتفاهم که عشق به‌ریاضیات و درك زیبایی آن "نوعی جنون است منحصر بـه معدودی افراد غیرعادی درهر نسل."

در حال حاضر، به‌سختی می‌توان فرد تحصیلکرده‌ای یافت کـه نسبت به‌جاذبهٔ زیبایی‌شناختی ریاضیات هیچ احساسی نداشته‌باشد. ممکن است تعریف زیبایی ریاضی بسیار دشوار باشد، ولی تعریف هرنوع زیبایی همین‌قدر دشوار است ــ ممکن است بـه‌طور دقیق ندانیم کـه منظورمان از شعر زیبا چیست، ولی این دلیل نمی‌شود که شعر زیبا را هنگام خواندن آن تشخیص ندهیم. حتی پروفسور هاگبن[1]، کـه می‌خواهد بـه هر قیمتی اهمیت جنبهٔ زیبایی‌شناختی ریاضیات را به‌حداقل برساند، چنان جسارتی ندارد که واقعیت آن را انکار کند: "مسلماً افرادی هستند که ریاضیات برای آنها جاذبهٔ

۱. لنسلت هاگبن (LancelotHagben) دانشمند و نویسندهٔ انگلیسی

بیروح و سردی دارد... جذابیت زیبایی‌شناختی ریاضیات ممکن است برای عدهٔ معدودی بسیار واقعی باشد.» ولی به‌نظر او، این عده «معدود»ند واحساس «سردی» دارند (و واقعاً آدمهای مضحکی هستند که از هوای تازهٔ فضای باز و وسیع به‌شهرهای کوچك و مزخرف دانشگاهی پناه برده‌اند) او دراینجا، همان «خرافهٔ ادیبانه»ای را که وایتهد ذکر کرده است، تکرار می‌کند.

واقعیت این است که تنها معدودی از رشته‌ها «عامه‌پسند»تر از ریاضی هستند. بیشتر مردم همان‌طور که از یك آهنگ دلپذیر لذت می‌برند، زیبایی ریاضی را نیز درك می‌کنند. و احتمالاً تعداد دلبستگان ریاضی بیشتر از دوستداران موسیقی است. ممکن است ظواهر امر برخلاف این حکم کنند ولی توجیهات ساده‌ای [برای این گفته] وجود دارد. از موسیقی می‌توان برای تحریك احساسات وعواطف‌تودهٔ مردم استفاده کرد ولی از ریاضی نمی‌توان؛ و ناتوانی دردرك موسیقی (بحق) یك امتیاز منفی محسوب می‌شود، درحالی‌که بیشتر مردم طوری از نام ریاضی می‌ترسند که حاضرند خیلی ساده درکند ذهنی خود در ریاضیات مبالغه کنند.

با اندکی تأمل روشن می‌شود که «خرافهٔ ادیبانه» نامعقول است. درهرکشور متمدن، تعداد بسیار زیادی شطرنج باز وجود دارد ــ در روسیه، تقریباً همهٔ تحصیلکردگان شطرنج بازند؛ و هر بازیکن شطرنج می‌تواند یك بازی یا مسألهٔ «زیبا» را تشخیص دهد و درك کند، درحالی که مسألهٔ شطرنج چیزی نیست بجز تمرینی در ریاضیات محض (البته بازی شطرنج، به‌دلیل آنکه جنبه‌های روانشناختی نیز در آن نقش دارند، کاملاً ریاضی نیست)، وهرکسی که یك مسألهٔ شطرنج را «زیبا» می‌نامد در واقع از زیبایی ریاضی تمجید می‌کند، گیرم این زیبایی از نوع نسبتاً نازلی باشد.

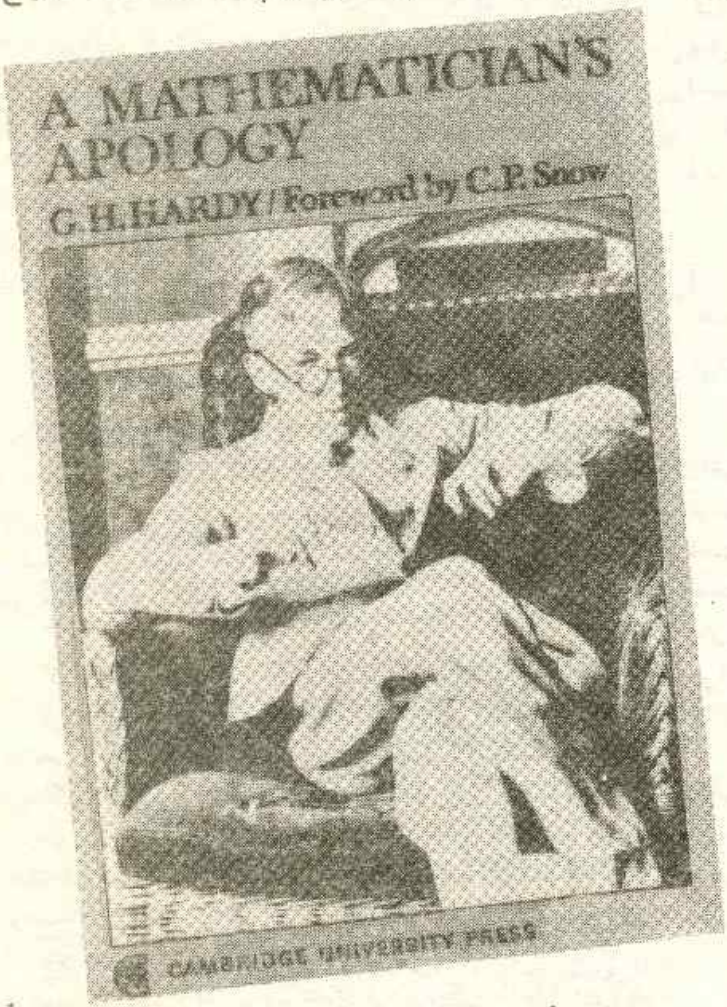
همین امر را می‌توان درسطحی پایینتر، اما درمورد جمعیتی بیشتر، از بازی بریج دریافت، و اگر از آن هم پایینتر بیاییم، از بخش معما در روزنامه‌های پرفروش. تقریباً تمامی محبوبیت عظیم این‌گونه بازیها، درحکم ستایشی است ازقدرت استخراج مطلب از ریاضیات مقدماتی، و بهترین طراحان معما از قبیل دادنی و کالیبن به‌ندرت از چیزی بجز ریاضیات استفاده می‌کنند. آنها حرفهٔ خود را می‌شناسند؛ آنچه‌مردم می‌خواهند، «تلنگر»ی است که به‌ذهن زده شود و هیچ چیزی نمی‌تواند به‌خوبی ریاضیات این کار را انجام دهد.

اضافه می‌کنم که هیچ چیزی در دنیا حتی برای افراد مشهور (و افرادی که به‌زبان تحقیرآمیزی دربارهٔ ریاضیات سخن گفته‌اند) دلپذیرتر ازکشف یا کشف مجدد یك قضیهٔ ناب ریاضی نیست. هربرت اسپنسر[1] در زندگینامهٔ خود قضیه‌ای دربارهٔ دایره‌ها آورده که درپیست سالگی اثبات کرده بوده است (بدون اینکه بداند آن قضیه بیش از دوهزار سال قبل به‌وسیلهٔ افلاطون اثبات شده‌است). کار پروفسور سادی[2] مثال جدیدتر و جالبتری است (ولی قضیهٔ او واقعاً متعلق به‌خود اوست).

* * *

مسألهٔ شطرنج، نمونه‌ای از ریاضیات اصیل است، اما ریاضیاتی که از جهتی «نازل» است. حرکات بازی هرقدر استادانه وپیچیده و هراندازه اصیل وشگفت‌آور باشد، باز هم این مسأله کمبودی اساسی دارد. مسائل شطرنج مهم نیستند. بهترین مسائل ریاضی، زیبا و درعین حال جدی می‌باشند ــ اگر دوست دارید به‌جای این لغت می‌توان «مهم» را به‌کار برد، ولی واژهٔ «مهم» بسیار مبهم است وهمان «جدی» منظور مرا بهتر می‌رساند.

من به‌نتایج «عملی» ریاضیات نمی‌اندیشم. به‌این نکته باید بعداً برگردم. درحال حاضر فقط می‌گویم که اگر مسألهٔ شطرنج



درنظر اول بیفایده است، بهترین مسائل ریاضی نیز اکثراً به‌همان اندازه بیفایده‌اند. قسمت بسیار کوچکی از ریاضیات فایدهٔ عملی دارد که آن قسمت هم نسبتاً ملال‌آور است. «جدی‌بودن» یك قضیهٔ ریاضی در نتایج عملی آن، که معمولاً ناچیزند، نیست بلکه در مضمون آن ایده‌های ریاضی است که به‌وسیلهٔ آن قضیه به‌هم می‌پیوندند. به‌طور کلی می‌توان گفت یك ایدهٔ ریاضی در صورتی «پرمضمون» است که بتواند به شکلی طبیعی و روشنگر با دستهٔ بزرگی از ایده‌های ریاضی دیگر در ارتباط قرار گیرد. بنابراین، یك قضیهٔ جدی ریاضی، قضیه‌ای که ایده‌های پرمضمون را به‌هم مربوط می‌سازد، محتمل است که سبب پیشرفتهای مهمی درخود ریاضی و یا حتی درعلوم دیگر شود. هیچ مسألهٔ شطرنجی

---

۱. هربرت اسپنسر (Herbert Spencer) فیلسوف انگلیسی
۲. فردریك سادی (Frederick Saddy) شیمیدان انگلیسی

در پیشرفت کلی تفکر علمی تأثیری نداشته است ولی فیثاغورس، نیوتن، و اینشتین، هریك درعصر خویش جهت تفکر علمی را تغییر داده‌اند.

البته، جدی بودن یك قضیه در پیامدهایش نیست؛ این پیامدها صرفاً می‌توانند گواه جدی‌بودن قضیه باشند. شکسپیر تأثیر عظیمی در توسعهٔ زبان انگلیسی داشته است و آتوی تقریباً هیچ تأثیری نداشته‌است ولی دلیل آنکه شکسپیر شاعر بهتری است، این‌نیست. شکسپیر به‌این دلیل بهتر است که اشعار بسیار بهتری سروده است. کم‌ارزشی مسألهٔ شطرنج، نظیرکم‌ارزشی شعر آتوی، نه از پیامدهایش که ازمحتوایش منشأ می‌گیرد.

نکتهٔ دیگری هست که فقط اشارهٔ کوتاهی به‌آن می‌کنم‌ومی‌گذرم؛ نه به‌این دلیل که جالب نیست بلکه به‌این علت که مسألهٔ دشواری است و من صلاحیتی برای بحث جدی در زیبایی‌شناسی ندارم. زیبایی یك قضیهٔ ریاضی تا اندازهٔ زیادی به‌جدی‌بودن آن بستگی دارد، همان‌گونه‌که حتی در شعر، زیبایی یك بیت ممکن است تا حدی به‌مضمونی که دربر دارد بستگی داشته باشد. قبلاً یك بیت شعر را به‌عنوان مثالی از زیبایی خالص یك نقش‌لفظی نقل کردم ولی قطعهٔ زیر از آن هم زیباتر به‌نظر می‌رسد.

شب‌تاریك وبیم‌موج وگردابی چنین‌حائل
کجا دانند حال ما سبکباران ساحلها

این نقش همان‌قدر لطیف است اما در اینجا ایده‌ها پرمعنی هستند و مضمون شعر واقعیتر است، از این‌رو احساسات ما عمیقتر تحت تأثیر قرار می‌گیرد. پس حتی در شعر، ایده‌ها اهمیت دارند وطبیعتاً در ریاضیات بسیار بیشتر مطرح‌اند؛ اما نمی‌خواهم‌دربارهٔ این مسأله به‌طور جدی بحث کنم.

* * *

اکنون روشن است که برای ادامهٔ بحث باید مثالهایی ازقضایای "واقعی" ریاضی ارائه دهم که هر ریاضیدانی آنها را تراز اول بداند. در اینجا محدودیتهایی در کار است که انتخاب را دشوار می‌سازد. از طرفی، مثالهای من باید ساده و برای خواننده‌ای که هیچگونه اطلاعات تخصصی ریاضی ندارد قابل فهم باشند، به‌مقدمات مفصلی نیاز نداشته باشند و خواننده بتواند اثباتها و توضیحات را تعقیب کند. این شرطها، مثلاً، بسیاری از زیباترین قضایای نظریهٔ اعداد از قبیل قضیهٔ "دومربع" فرما و قانون تقابل مربعی‌را ازبحث‌ما خارج می‌کنند. ازطرف دیگر، مثالهای من باید ازریاضیات "تمام‌عیار" انتخاب‌شوند یعنی‌ریاضیاتی که‌ریاضیدانان حرفه‌ای با آن سروکار دارند و این شرط، تعداد زیادی از قضایا را که بیان آنها به‌صورت قابل فهم خواننده آسان است ولی برموازین منطق و فلسفهٔ ریاضی منطبق نیستند، از گود خارج می‌کند.

من کاری بهتر از این نمی‌توانم بکنم که به‌ریاضیات یونانی برگردم. دو تا ازقضایای مشهور ریاضیات یونان را بیان و اثبات می‌کنم. این‌دوقضیه، هم ازلحاظ ایده وهم ازلحاظ اثبات، قضایای "ساده"ای هستند، ولی بدون هیچ‌تردیدی در بالاترین سطح قرار دارند ــ گذشت دوهزارسال چین و چروکی برچهرهٔ آنها ننشانده است؛ و بالاخره، خوانندهٔ باهوش حتی‌اگر زمینهٔ ریاضی‌اش ضعیف باشد، می‌تواند هم قضایا وهم اثبات آنها را ظرف یك‌ساعت بفهمد.

۱. اولین‌اثبات، برهان اقلیدس[1] برای وجود بینهایت عدد اول است.

اعداد اول اعدادی هستند به‌صورت

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, \cdots \qquad (\text{الف})$$

که نمی‌توانند به‌عوامل کوچکتر از خود تجزیه شوند[2]. مثلاً ۳۷ و ۳۱۷ هم اول‌اند. اعداد غیر اول را می‌توان از اعداد اول به‌وسیلهٔ عمل‌ضرب ساخت: $۶۶۶ = ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۳۷$. هرعددی که خودش اول نباشد حداقل بریك (و معمولاً برچند) عدد اول قابل قسمت است. باید ثابت‌کنیم که تعداد اعداد اول نامتناهی است یعنی رشتهٔ اعداد (الف) هیچگاه پایان نمی‌پذیرد.

فرض‌کنیم که این رشتهٔ اعداد پایانی داشته باشد و به‌شکل زیر باشد:

$$۲, ۳, ۵, \cdots, P$$

(دراین‌صورت، P بزرگترین عدد اول است)؛ براساس این‌فرض، عدد Q را درنظر می‌گیریم که به‌وسیلهٔ فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$Q = (۲ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times P) + ۱$$

واضح است‌که Q برهیچ‌یك ازاعداد ۲، ۳، ۵، ...، P قابل‌قسمت نیست زیرا تقسیم آن بر هریك از این اعداد دارای باقیماندهٔ ۱ است. ولی اگر Q خودش اول نباشد، برعددی اول قابل‌قسمت است و بنابراین عدد اولی (که ممکن است خود Q باشد) وجود داردکه بزرگتر از همهٔ این اعداد است. این با فرض ما، مبنی بر اینکه عدد اولی بزرگتر از P موجود نیست، مغایر است؛ بنابراین، فرض ما غلط است.

این اثبات به‌روش برهان خلف است و برهان خلف، که اقلیدس آن را بسیار دوست داشت، یکی از بهترین سلاحهای ریاضیدان است[3]. این نوع گامبی، بسیار جالبتر از گامبی دربازی شطرنج است: بازیکن شطرنج ممکن است یك پیاده یا حتی یك مهره را قربانی‌کند ولی ریاضیدان بازی را قربانی می‌کند.

۲. مثال دوم من، اثبات فیثاغورس از "گنگ بودن" $\sqrt{۲}$ است.

"عددگویا" کسری است به‌صورت a/b، که a و b اعدادی صحیح‌اند. می‌توانیم فرض کنیم a و b عامل مشترکی ندارند، چون اگر داشته باشند می‌توانیم آن را از صورت و مخرج حذف

---

۱. اصول مقالهٔ پنجم، قضیهٔ ۲۰. منشأ واقعی بسیاری از قضایای اصول نامعلوم است؛ ولی دلیل خاصی نداریم که فکر کنیم این قضیه متعلق به‌خود اقلیدس نیست.

۲. عدد ۱ به‌دلایل فنی عدد اول به‌حساب نمی‌آید.

۳. اثبات را می‌توان طوری ترتیب دادکه از برهان خلف اجتناب شود ومنطقیون پیرو پاره‌ای ازمکاتب چنان اثباتی‌را ترجیح می‌دهند.

کنیم. اینکه بگوییم "$\sqrt{2}$ گنگ است"، معادل‌است با اینکه‌بگوییم ۲ را نمی‌توان به‌صورت $(a/b)^2$ نوشت و این هم معادل است با اینکه گفته شود که رابطهٔ

$$a^2 = 2b^2 \qquad (ب)$$

نمی‌تواند به‌ازای مقادیرصحیح a و b ی که عامل‌مشترکی ندارند برقرار باشد. این گفته، قضیه‌ای در حساب محض است که به‌هیچ معلوماتی از "اعداد گنگ" نیازمند نیست و به‌هیچ نظریه‌ای دربارهٔ ماهیت آنها بستگی ندارد.

در اینجا هم به‌روش برهان خلف استدلال می‌کنیم. فرض می‌کنیم (ب) برقرار باشد که درآن، a و b اعداد صحیحی بدون عامل مشترك هستند. از (ب) نتیجه می‌شود که a^2 زوج‌است (زیرا $2b^2$ بر ۲ قابل‌قسمت است) وبنابراین a زوج است(زیرا مجذور یك عدد فرد،فرد است). اگر a زوج باشد آنگاه‌به‌ازای یك‌مقدار صحیح c،

$$a = 2c \qquad (پ)$$

و بنابراین

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$$

یا

$$b^2 = 2c^2 \qquad (ت)$$

ازاینجا b^2 زوج است و بنابراین (به‌همان دلایلی که در بالا گفته شد) b زوج است یعنی a و b هردو زوج‌اند و دارای عامل‌مشترك ۲ هستند. این با فرض‌متناقض است، و بنابراین فرض ما غلط‌است.

ازقضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود که قطر یك مربع با ضلع آن نامتوافق است (یعنی نسبت آنها یك عدد گویا نیست، و به‌عبارت دیگر، هیچ واحد طولی وجود ندارد که هردو، مضارب صحیحی از آن باشند) زیرا اگر طول ضلع را واحد طول بگیریم و طول قطر را d بنامیم، بنابه‌قضیهٔ معروفی که آن‌هم منسوب به‌فیثاغورس است، داریم

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

بنابراین d نمی‌تواند یك عددگویا باشد.

می‌توانم تعداد دیگری ازقضایای جالب نظریهٔ اعداد را ذکر کنم که مفهوم آنها را هرکسی می‌تواند درك کند. مثلاً، قضیه‌ای داریم موسوم به "قضیهٔ اساسی‌حساب" که می‌گوید هرعدد صحیح فقط به‌یك صورت به حاصلضرب اعداد اول قابل تجزیه است. مثلاً $666 = 2 \times 3 \times 3 \times 37$ واین عدد به‌هیچ صورت‌دیگری تجزیه‌پذیر نیست؛ غیرممکن است که $666 = 2 \times 11 \times 29$ یا $13 \times 89 = 17 \times 73$ (این نکته را می‌توان بدون انجام عمل ضرب ملاحظه‌کرد). این قضیه، چنانکه از نامش برمی‌آید، اساس حساب عالی است ولی اثبات آن، گرچه "مشکل" نیست، به‌مقدماتی نیاز دارد و ممکن است برای خواننده‌ای که اهل ریاضیات‌نیست، خسته‌کننده باشد.

قضیهٔ مشهور و زیبای دیگر، قضیهٔ "دو مربع" فرماست. می‌توان اعداد اول را (اگر عدد اول خاص ۲ را ندیده بگیریم) به‌دو دسته تقسیم کرد؛ دستهٔ اول اعداد

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, \cdots$$

که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۴، عدد یك است، و دستهٔ دوم اعداد

$$3, 7, 11, 19, 23, 31, \cdots$$

که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۴، عدد سه است. هریك از اعداد دستهٔ اول را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دوعدد صحیح نوشت:

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2$$
$$17 = 1^2 + 4^2, \quad 29 = 2^2 + 5^2$$

و هیچ‌یك ازاعداد دستهٔ دوم را نمی‌توان به‌صورت مجموع مربعات دوعدد صحیح نوشت. مثلاً ۳، ۷، ۱۱، و ۱۹ به‌این طریق قابل بیان نیستند. متأسفانه نمی‌توان اثباتی برای این قضیه ارائه‌کرد که برای کسی که ریاضیدان نسبتاً متبحری نباشد، قابل درك باشد.

همچنین قضایای زیبایی درنظریهٔ مجموعه‌ها داریم ازقبیل قضیهٔ کانتور دربارهٔ "شمارش‌ناپذیری" پیوستار. دراینجا مشکلی درجهت مخالف وجود دارد. اثبات‌قضیه، اگرکسی برزبان آن مسلط باشد به‌اندازهٔ کافی آسان است اما توضیح زیادی لازم است تا مفهوم قضیه روشن شود. بنابراین، سعی نمی‌کنم مثالهای دیگری بیاورم. مثالهایی که آورده‌ام، آزمونهایی برای خواننده هستند؛ اگر او نتواند آنها را بفهمد، احتمال نمی‌رود که هیچ‌چیزی را در ریاضیات بفهمد.

گفتم که ریاضیدان نقشهایی از ایده‌ها می‌پردازد، و این نقشها باید با محك زیبایی و محك جدی بودن سنجیده شوند. نمی‌توانم باور کنم که‌کسی این دوقضیه را فهمیده باشد و نپذیرد که هر دو از این آزمونها سربلند بیرون می‌آیند. اگر این دوقضیه را با زیرکانه‌ترین معماهای دادنی یا زیباترین مسائل شطرنج که استادان آن هنر پرداخته‌اند،مقایسه‌کنیم، برتری آنها از هردولحاظ واضح است: تفاوت مرتبهٔ آنها آشکار و قاطع است. آنها بسیار جدیتر و بسیار زیباترند؛ آیا می‌توانیم با دقت بیشتری مشخص‌کنیم که برتری آنها درچیست؟

* * *

در وهلهٔ اول، برتری این قضایای ریاضی ازلحاظ جدی‌بودن، آشکار وقاطع است. مسألهٔ شطرنج حاصل ترکیب هوشمندانه‌ای از ایده‌ها درمقیاسی محدود است، ایده‌هایی که تفاوت اصولی با یکدیگرندارند وبازتاب خارجی‌نیز ندارند. اگر شطرنج اختراع نمی‌شد، شیوهٔ تفکر ما فرقی نمی‌کرد، درحالی‌که قضایای اقلیدس و فیثاغورس تأثیر عمیقی بر تفکر بشر داشته‌اند، حتی در خارج از ریاضیات.

قضیهٔ اقلیدس برای کل ساختار حساب اهمیت حیاتی دارد. اعداد اول مواد خامی هستندکه با استفاده ازآنها علم حساب را می‌سازیم، وقضیهٔ اقلیدس به‌ما اطمینان می‌دهدکه برای‌این‌کارمواد فراوانی دراختیار داریم. اماقضیهٔ فیثاغورس‌کاربردهای گسترده‌تری دارد و زمینه‌ساز مبحث پربارتری است.

ابتدا باید توجه‌کردکه استدلال فیثاغورس قابلیت تعمیم بسیار

زیادی دارد و با مختصری تغییر درصورت قضیه، می‌توان این استدلال را برای رده‌های بسیار گسترده‌ای از اعداد "گنگ" به‌کار برد. می‌توان به روشی بسیار مشابه ثابت کرد (همچنانکه گویا تئوتئوس ثابت کرده است) که

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17} \cdot$$

گنگ هستند، یا (فراتر از کار تئوتئوس) اینکه $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{17}$ گنگ هستند.

قضیهٔ اقلیدس به ما می‌گوید که ذخیرهٔ سرشاری ازمواد لازم برای ساختن حساب اعداد صحیح داریم، آن‌چنان حسابی که اجزای آن ارتباط منطقی داشته باشند. قضیهٔ فیثاغورس وتعمیمهای آن به‌ما می‌گویند که هرگاه چنین حسابی را بسازیم، برای نیازهای ما کفایت نخواهدکرد، زیرا بسیاری مقادیر وجود دارند که نمی‌توانیم آنها را اندازه‌گیری کنیم. واضحترین مثال ازاین گونه مقادیر، قطر مربع است. ریاضیدانان یونانی بلافاصله به اهمیت عظیم این کشف پی‌بردند. آنها [قبل ازاین کشف] فرض می‌کردند (گمان می‌کنم براثر القائات "طبیعی" عقل سلیم) که همهٔ مقادیر همنوع، متوافق‌اند؛ یعنی مثلاً، هر دو طول مضاربی از یك واحد مشترك‌اند، و برمبنای این فرض، نظریه‌ای دربارهٔ تناسب پرداخته بودند. اکتشاف فیثاغورس نادرستی این مبنا را آشکار ساخت و به‌ایجاد نظریهٔ بسیار عمیقتر اودوکسوس انجامید که درمقالهٔ پنجم از کتاب اصول آمده است و درنظر بسیاری از ریاضیدانان جدید، بهترین دستاورد ریاضیات یونانی است. روح این نظریه به طرز شگفت‌آوری امروزی است ومی‌توان آن را مبتدای نظریهٔ جدید اعداد گنگ دانست که آنالیز ریاضی را دگرگون ساخته است و تأثیر زیادی برفلسفهٔ جدید داشته است.

با این اوصاف، هیچ شکی در بارهٔ "جدی‌بودن" این دوقضیه وجود ندارد و نکته‌ای که شایان ذکر است، این است که هیچیك ازاین دوقضیه کمترین اهمیت "عملی" ندارد. درکاربردهای عملی، فقط با اعدادنسبتاً کوچك سروکار داریم؛ تنها دراخترشناسی وفیزیك اتمی از اعداد "بزرگ" استفاده می‌شود که اهمیت عملی این دو رشته هم چندان بیشتر از اهمیت عملی مجردترین قسمتهای ریاضیات محض نیست. نمی‌دانم بالاترین درجهٔ دقتی که تاکنون برای یك مهندس لازم بوده چقدر است ــ اگر خیلی دست بالا را بگیریم، می‌توانیم بگوییم ده رقم معنی‌دار. عدد

۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۴

(مقدار π تا ۹ رقم اعشار) برابر است با نسبت زیر

$$\frac{3141592654}{1{,}000{,}000{,}000}$$

تعداد اعداد اول کوچکتر از ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ برابر است با ۵۰۸۴۷۴۷۸. این برای مهندس کافی است وبدون بقیهٔ این اعداد، می‌تواند کارهایش را راه بیندازد. در مورد [استفاده از] قضیهٔ اقلیدس، همین‌قدر [برای مهندس] کفایت می‌کند، و درمورد قضیهٔ فیثاغورس، واضح است که اعداد گنگ برای مهندس جالب نیستند زیرا او با تقریب سروکار دارد وتقریبها همه‌گویا هستند.

* * *

تقابل ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی شاید در هندسه به‌روشنترین شکل نمایان باشد. ما علم هندسهٔ محض را داریم که شامل انواع متعددی از هندسه، از قبیل هندسهٔ تصویری، هندسهٔ اقلیدسی، هندسهٔ نااقلیدسی، و غیره است. هریك از این هندسه‌ها یك الگوست، طرحی از ایده‌هاست که باید برمبنای جالب‌بودن و زیبایی‌اش دربارهٔ آن قضاوت کرد. چنین طرحی یك نقشه یا تصویر است که دستهای بسیاری آن را پرداخته‌اند و یك رونوشت جزئی وناقص (وبا این حال، دقیق درقلمرو خود) از بخشی از واقعیت ریاضی است. ولی نکته‌ای که دراینجا برای ما مهم است، این‌است که به‌هرحال چیزی وجود دارد که این هندسه‌ها تصاویر آن نیستند وآن، واقعیت فضا-زمانی جهان فیزیکی است. کاملاً واضح است که این هندسه‌ها نمی‌توانند چنین تصاویری باشند زیرا زلزله و خسوف وکسوف مفاهیم ریاضی نیستند.

این گفته ممکن‌است برای کسی که خارج ازگود ایستاده، اندکی غریب بنماید، ولی برای هندسه‌دان کاملاً بدیهی است؛و من شاید بتوانم با ارائهٔ مثالی آن را روشنتر بیان کنم. فرض کنید که من درسی دربارهٔ یك سیستم هندسی، مثلاً هندسهٔ اقلیدسی، می‌دهم و شکلهایی تقریبی ازخطوط راست،دایره‌ها، یا بیضیها روی تختهٔ‌سیاه می‌کشم تا تخیل شاگردان را برانگیزانم. در وهلهٔ اول، واضح است که درستی قضیه‌هایی که ثابت می‌کنم، به‌هیچ‌وجه ارتباطی با کیفیت ترسیمات من ندارد. تنها نقش این ترسیمات، این است که منظور مرا به شنوندگانم برسانند، و اگر ازعهدهٔ این‌کار برآیم، هیچ لزومی ندارد که ماهرترین نقشه‌کشها، آن شکلها را مجدداً رسم کنند. شکلها جنبهٔ آموزشی دارند و جزئی ازموضوع واقعی درس نیستند.

حال یك قدم به‌جلو برویم. اتاقی که درآن درس می‌دهم،جزئی ازجهان فیزیکی است وخودش طرح معینی دارد. مطالعهٔ این‌طرح، وطرح کلی واقعیت فیزیکی، به‌نوبهٔ خود علمی است که می‌توانیم آن را "هندسهٔ فیزیکی" بنامیم. حال، تصور کنید که یك دینام بسیار قوی یا جسمی بسیار سنگین را وارد اتاق کنند. در این صورت، فیزیکدانها به‌ما می‌گویند که هندسهٔ اتاق تغییر کرده است، طرح فیزیکی کلی آن مختصراً ولی قطعاً دگرگون شده‌است، [ولی] آیا قضایایی هم که من ثابت کرده‌ام غلط می‌شوند؟ مسلماً بی‌معنی است که تصورشود اثباتهای من تحت‌تأثیر این‌تغییر واقع‌می‌شوند. مثل این است که فکر کنیم اگر خوانندهٔ یك نمایشنامهٔ شکسپیر چاپی‌اش را روی صفحات آن بریزد، نمایشنامه تغییر می‌کند. نمایشنامه مستقل از صفحاتی است که روی آنها چاپ شده، و "هندسه‌های محض" مستقل از اتاقهای درس یا هرجزء دیگری از جهان فیزیکی هستند.

این، نظرگاه ریاضیدان محض است. اهل ریاضیات کاربردی، کسی که درفیزیك ریاضی کار می‌کند، طبعاً دیدگاه دیگری دارد زیرا او مجذوب خود جهان فیزیکی‌است که آن نیز برای خودش ساخت یا طرحی دارد. ما نمی‌توانیم این طرح را به‌دقت توصیف کنیم، چنانکه درموردهندسهٔ محض می‌کنیم، ولی می‌توانیم دربارهٔ آن حکم معنی‌داری بدهیم. ما می‌توانیم، گاهی به‌طور نسبتاً دقیق

وگاهی به‌صورت بسیار تقریبی، روابطی راکه بین پاره‌ای ازاجزاء آن برقرارند مشخص کنیم وآنها را با روابط دقیقی که بین اجزاء یك سیستم هندسی محض وجود دارند مقایسه نماییم. ممکن است بتوانیم تشابهی بین این دومجموعه از روابط پیدا کنیم و دراین صورت، هندسهٔ محض بـرای فیزیکدان جـالب می‌شود. چنین هندسه‌ای، نقشه‌ای به‌دست ما می‌دهدکه تا حدی به‌واقعیات جهان فیزیکی "می‌برازد". هندسه‌دان مجموعه‌ای از نقشه‌ها را به‌فیزیکدان عرضه می‌کند کـه ازمیان آنها انتخاب کند. ممکن است یك نقشه بیشتر از نقشه‌های دیگر برازندهٔ واقعیات باشد و دراین صورت، هندسه‌ای که آن نقشهٔ خاص را به‌دست می‌دهد مهمترین هندسه از نظر ریاضیدان کاربردی است. اضافه می‌کنم که حتی یك‌ریاضیدان محض ممکن است احساس کند این هندسه را سریعتر درك می‌کند، زیرا هیچ ریاضیدان محضی تفکرش آن‌قدر محض نیست که هیچ علاقه‌ای به‌جهان فیزیکی احساس نکند.معهذا،تا حدی‌که تسلیم‌این وسوسه می‌شود، ازتفکر ریاضی محض خود دست کشیده است.

* * *

درخاتمه، خلاصهٔ استنتاجهای خودرا درقالب‌شخصی‌تری مطرح می‌کنم. درآغاز گفتم که هرکسی‌که از رشته‌اش دفاع می‌کند، در واقع ازخودش دفاع می‌کند؛ وتوجیه من اززندگی یك‌ریاضیدان حرفه‌ای، در نهایت، توجیهی از زنـدگی خودم است. بنابراین، این بخش پایانی در اساس قطعه‌ای از زندگینامهٔ من است.

به‌یاد ندارم که هیچوقت خواسته‌باشم کار دیگری بجزریاضیات درپیش بگیرم. فکر می‌کنم این موضوع همیشه برایم واضح بوده که استعدادهای خاص من دراین مسیر قرار دارد و دراین مورد، هیچوقت نظر افراد مستر برایم مطرح نبوده است. [البته] به یـاد نمی‌آورم که در دوران کودکی شود و اشتیاق خاصی به ریاضیات داشته باشم وحرفهایی از این قبیل که ازهمان زمان برنامه و شیوهٔ زندگی یك ریـاضیدان را داشته‌ام، دور از صداقت است. برای من ریاضیات درامتحان و دریافت بورس تحصیلی متجلی می‌شد: می‌خواستم از بچه‌های دیگر جلو بزنم و به‌نظرم می‌رسیدکه از راه ریاضیات دراین کار بیشتر موفق می‌شوم.

. . . . . .

به‌محض اینکه واردکیمبریج شدم، دریافتم که عضویت در هیأت علمی مترادف‌است با انجام‌دادن "کاراصیل" ولی مدتها طول‌کشید تا تصور دقیقی از کار تحقیق به‌دست آوردم. البته درمدرسه دیده بودم که غالباً می‌توانم بهتر از معلمانم از پس کارها برآیم و حتی درکیمبریج، طبعاً به‌دفعات بسیارکمتر، می‌توانستم بهتر از مدرسان با مسائل دست وپنجه نرم کنم. با این حال، حتی وقتی که امتحان تریپوس را گذراندم، ازموضوعاتی که بقیهٔ عمرم صرف آنها شد بی‌اطلاع بودم وهنوز هم ریـاضیات را موضوعی برای "رقابت" می‌دانستم. چشمانم را اول‌بار پروفسور لاو بازکردکـه چند ترم استاد من‌بود واولین دریافت‌جدی خود ازآنالیزرا مدیون‌اوهستم ولی بزرگترین دینی‌که به‌او دارم ــ ازهرچه بگذریم او در درجهٔ اول یك‌ریاضیدان‌کاربردی‌بود ــ توصیه‌ای است‌که برای خواندن کتاب معروف ژوردان، درس آنالیز، به‌من کرد. هیچگاه حیرتی را که از مطالعهٔ این اثر برجسته بـه من دست داد فراموش نمی‌کنم، اثری‌که اولین الهامبخش بسیاری از ریاضیدانان هم‌نسل من بود وبرای اولین بار با مطالعهٔ آن آموختم‌که ریاضیات واقعاً چیست. ازآن زمان به بعد، به نظر خودم یك ریاضیدان واقعی بوده‌ام، بـا بلندپروازی در ریاضی و اشتیاق واقعی به‌ریاضیات.

درطول ده سال بعد مقالات زیـادی نوشتم‌که از اهمیت بسیار کمی برخوردارند؛ فقط چهار یا پنج‌تا ازآنها را می‌توانم هنوز با رضایت‌خاطر به‌یاد آورم. مراحل اوج کار من ده دوازده سال بعد فرا رسید، درسال ۱۹۱۱ کـه همکاری درازمدت خود را با لیتلوود شروع‌کردم و درسال ۱۹۱۳ که رامانوجان راکشف‌کردم. تمام بهترین کارهای من از آن‌زمان به‌بعد با آنها در ارتباط بوده است و واضح است‌که همکاریم باآنها حادثهٔ مهم زندگی من‌است. هنوز هم وقتی کـه احساس افسردگی می‌کنم و خودم را مجبور می‌بینم‌که بـه‌حرفهای افراد ازخود راضی وکسل‌کننده‌گوش دهم، به‌خودم می‌گویم "من کاری‌کرده‌ام که دیگران هیچوقت نکرده‌اند، وآن همکاری پایاپای با هر دونفر لتیلوود و رامانوجان است". من بلوغ دیردس خود را به‌آنها مدیونم: اوج کار من اندکی پس از چهل سالگی و زمانی بود کـه استاد آکسفورد بودم. ازآن پس، ضعف و افول تدریجی کـه سرنوشت همهٔ افراد مـن و بـه‌ویژه ریاضیدانان مسن است، به‌سراغ من آمده است. یك ریـاضیدان ممکن است درشصت سالگی هنوز هم بـه انـدازهٔ کافی اهلیت و صلاحیت داشته باشد، اما بیفایده است‌که ازاو انتظار داشته باشیم ایده‌های اصیلی داشته باشد.

اکنون واضح است‌کـه بخش ارزشمند زندگی من پایان یافته است و من دیگر نمی‌توانم‌کاری بکنم‌که ارزش‌زندگیم را به‌طرز محسوسی کاهش یا افزایش دهـد. قضاوت عاری از تعصب دراین مورد مشکل است ولی من‌زندگی خود را "موفقیت‌آمیز" به‌حساب می‌آورم؛ پاداشی که درطول‌زندگی‌دریافت‌کرده‌ام‌کمتر ازاستحقاق آدمی‌که درحد من قابلیت دارد، نبوده است. موقعیتهای آسوده و "محترمانه"ای داشته‌ام و چندان گرفتار جریان عادی و یکنواخت کار دانشگاهی نبوده‌ام. من از "درس‌دادن" خوشم نمی‌آیـد و بسیارکم به‌این‌کار پرداخته‌ام؛ تدریسی که می‌کرده‌ام تقریباً به‌طور کامل ناظر به‌کار تحقیق بوده است. من سخنرانی را دوست دارم و سخنرانیهای‌زیادی درجمع افراد بسیار با صلاحیت انجام داده‌ام. همیشه فرصت‌فراوانی برای‌تحقیق داشته‌ام‌که منشأ شادمانی‌بزرگ و دائمی در زندگی من بوده است. کارکردن بـا دیگران برایـم آسان بوده و در مقیاس وسیعی بـا دو ریاضیدان استثنایی همکاری کرده‌ام و این‌همکاری به‌من امکان داده است‌که بسیار بیش ازآنچه منطقاً انتظار داشته‌ام، مطالبی به‌ریاضیات بیفزایـم. در عین‌حال، مثل هر ریاضیدان دیگری ناکامیهایی هم داشته‌ام ولی هیچیك از آنها چندان جدی‌نبوده و مرا عمیقاً غمگین نساخته است. اگرقرار بود زندگی دوباره‌ای را آغازکنم، بی‌تردید بازهم همین‌مسیررا درپیش می‌گرفتم.

تصور این امر مهمل به‌نظر می‌آید که می‌توانستم [در زمینه‌ای دیگر] عملکرد بهتری داشته‌باشم. من‌هیچ استعدادی در زبانشناسی یا زیبایی‌شناسی نـدارم و علاقهٔ بسیارکمی به علوم تجربی دارم. ممکن بود فیلسوف متوسطی بشوم، ولی‌قطعاً فیلسوف بسیار اصیلی ازآب درنمی‌آمدم. ضمناً بعید نبود حقوقدان خوبی بشوم، ولـی صرفنظر از حرفهٔ دانشگاهی، روزنامه‌نگاری تنها حرفه‌ای است‌که

می‌توانسته‌ام واقعاً ازشانس موفقیت خود در آن مطمئن باشم. اگر محك ما آن چیزی باشد که معمولاً موفقیت نامیده می‌شود، شکی نیست که ریاضیدان شدن من کار درستی بوده است.

پس اگر خواست من این بوده باشد که در حد معقولی زندگی شاد و آسوده‌ای داشته باشم، انتخاب من درست بوده است. اما مشاوران حقوقی و دلالان سهام و افرادی که درمسابقهٔ اسبدوانی شرط‌بندی می‌کنند نیز غالباً زندگی آسوده و شادی دارند، [ولی] مشکل بتوان گفت که وجود آنها به‌غنای جهان می‌افزاید. آیا من می‌توانم ادعا کنم که زندگی‌ام ازجهتی کمتر از زندگی آنها پوچ و عبث است؟ باز به‌نظرم می‌آید که این‌سؤال فقط یك‌پاسخ دارد: شاید بله، ولی فقط به‌یك دلیل.

من هیچ کار "مفید"ی نکرده‌ام. هیچ‌یك از اکتشافات من مستقیماً یا به‌طور غیرمستقیم، درجهت مثبت یا در جهت منفی، کوچکترین تغییری در آسایش جهانیان ایجاد نکرده است. من به‌تعلیم و تربیت ریاضیدانان کمك کرده‌ام، ولی ریاضیدانانی از نوع خودم، و کار آنها نیز، تا جایی که به‌کمك من مربوط می‌شود، همان‌قدر بیفایده است که کار من. اگر طبق معیارهای عملی قضاوت کنیم، ارزش زندگی ریاضی من هیچ است، و به‌هرحال در خارج از حیطهٔ ریاضیات، ناچیز است. برای اینکه کاملاً بی‌اهمیت به‌حساب نیایم فقط یك شانس دارم و آن این است که مرا آفرینندهٔ چیزهایی بدانند که ارزش آفریده شدن داشته اند. در اینکه چیزهایی آفریده‌ام، تردیدی نیست؛ مسأله، ارزش آن است.

واقعیت زندگی من و زندگی هرکسی که ریاضیدانی از سنخ من بوده، این است: من چیزی به‌دانش افزوده‌ام و به‌دیگران هم کمك کرده‌ام که چیزی به‌آن بیفزایند واین چیزها ارزشی دارند که با ارزش ابداعات ریاضیدانان بزرگ و هنرمندان کوچك و بزرگ دیگری که یادگاری ازخود به‌جا گذاشته‌اند، فقط ازلحاظ درجه تفاوت دارد و نه ازلحاظ نوع.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

● ترجمهٔ گزیده‌ای از

G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, with a foreward by C.P. Snow, Cambridge University Press (1976).

این کتاب اولین بار در سال ۱۹۴۰ چاپ شده و از چاپ چهارم (سال ۱۹۶۷) به بعد با مقدمه‌ای از چارلز پرسی اسنو همراه بوده است.

اثبات چند قضیهٔ جبر خطی برای کلاس درس

امیدعلی کرمزاده*

یکی از مشکلاتی که امروز ریاضیات با آن مواجه است این است که چگونه می‌توان حجم روزافزون مطالب ریاضی را به‌دیگران منتقل کرد. آشکار است که نتایج ریاضی هنگامی که توسط افراد کشف می‌شوند برای یافتن آنها از هر روش و هر قسمتی از ریاضی در صورت امکان استفاده می‌شود، ولی فقط آن دسته از نتایج با اهمیت ریاضی می‌توانند به کتابهای درسی راه یابند که دارای اثباتهایی قابل فهم برای دانشجویان باشند؛ و بعد از مدتی که این نتایج در کتابهای درسی باقی ماندند، برای اینکه جا برای نتایج اساسی تازه باز شود، باید برای بعضی از نتایج قدیمی اثباتهایی مقدماتی عرضه کرد و آنها را در تمرینات کتابها جا داد و همین‌طور این عمل را در طی سالها انجام داد تا بتوان در اسرع وقت مطالب تازه را به‌کلاس درس آورد. البته اهمیت بعضی از قضایا در نزد افراد مختلف فرق می‌کند. در این مقاله می‌خواهیم نشان دهیم قضیه‌ای که در کتابهای درسی جبر خطی به اسم "قضیهٔ تجزیهٔ اولیه" نام برده می‌شود اهمیتی بیشتر از آنچه که در کتابها به‌آن اشاره‌می‌شود، دارد. به‌این‌منظور، ضمن‌ارائهٔ یك‌اثبات ساده برای‌قضیهٔ فوق‌نشان‌می‌دهیم قضایای‌تجزیهٔ‌دوری و کیلی-هامیلتون که از اساسیترین قضایای‌جبرخطی هستند نتایجی از قضیهٔ فوق‌اند؛ به‌نظر ما این‌اثبات قضیهٔ تجزیهٔ دوری از اثباتهای موجود درسایر منابع ساده‌تر است.

دراین مقاله، بعد یك فضای برداری متناهی است مگر خلاف آن ذکر شود.

قضیهٔ ۱. (قضیهٔ تجزیهٔ اولیه). اگر $T:V\to V$ یك عملگر خطی و V یك فضای برداری‌روی هیأت F باشد و $f(x)\in F[x]$ چند جمله‌ای مینیمال T و $f=f_1^{r_1}\cdots f_k^{r_k}$ تجزیهٔ آن به‌عوامل اول باشد، آنگاه

$$V=\sum_{i=1}^{k}\oplus\ker(f_i(T))^{r_i}.$$

این قضیه را اولین بار گراسمان روی هیأت اعداد مختلط اثبات کرد[۴]. متأسفانه با وجود اینکه بیشتر آنچه راکه ماامروز به‌اسم جبر خطی ۱ تدریس می‌کنیم گراسمان کشف کرده، به‌دیگران امتیاز بیشتری دراین مورد داده شده است. مثلاً درهیچ کتاب‌جبر خطی قضیهٔ فوق را به‌اسم قضیهٔ گراسمان نمی‌توان دید ولی تقریباً همهٔ کتابهای‌درسی جبرخطی ازقضیه‌ای به‌اسم قضیهٔ کیلی-هامیلتون نام می‌برند. بدون‌شك اگر نام‌بردن قضایا به‌اسم اشخاص با توجه به‌اهمیت قضیه صورت می‌گیرد، باید قضیهٔ تجزیهٔ اولیه هم به‌اسم کاشفش نام برده شود. به‌هرحال قبل‌از اینکه اثباتی ساده برای‌این قضیه ارائه‌کنیم، بهتر است چندکاربرد آنرا ذکرکنیم تااهمیت آن آشکارتر گردد. درتمام‌موارد زیر قضیهٔ تجزیهٔ اولیه به‌کار می‌رود:

۱. حل بعضی‌از معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت.

۲. یافتن شرط لازم و کافی مربوط به‌صورت چندجمله‌ای مینیمال یك عملگر T برای‌اینکه T قطری یا مثلثی شود.

۳. یافتن دو عملگر پوچ توان N و قطری شدنی D به‌طوری که برای عملگر داده‌شدهٔ T داشته باشیم

$$T=D+N \text{ و } DN=ND.$$

۴. یافتن یك چند جمله‌ای $f(x)$ به‌طوری که برای یك عملگر وارون‌دار مفروض T داشته باشیم

$$T=f(T)^2.$$

۵. یافتن یك بردار $\alpha\in V$ به‌طوری که اگر $p(x)$ چند جمله‌ای مینیمال عملگر مفروض T روی V باشد آنگاه $p(x)$ رتبهٔ α باشد (T-پوچساز α).

۶. تبدیل مطالعهٔ عملگرهای خطی روی هیأت جبری-بسته به‌مطالعهٔ عملگرهای پوچ توان.

۷. مطالعهٔ عملگرهای نیم‌ساده.

۸. اثبات قضیهٔ طیفی و دهها کاربرد دیگر.

قبل از اثبات قضیهٔ گراسمان (قضیهٔ تجزیهٔ اولیه) یادآوری می‌کنیم که اگر V یك فضای برداری روی هیأت F و T یك عملگر خطی روی آن باشد،

$$n(T)=\dim(\ker T),\ r(T)=\dim(T(V)),$$

$$\ker T=\{\alpha\in V : T(\alpha)=0\}.$$

منظور از رتبهٔ یك بردار $\alpha\in V$ چندجمله‌ای تکینی مانند $f(x)\in F[x]$ با کوچکترین درجه می‌باشد به طوری که $f(T)\alpha=0$.

لم زیر را که اثباتی بدیهی دارد می‌توان تعمیمی از قضیهٔ گراسمان درنظر گرفت.

لم. اگر $T_i : V\to V,\ i=1,2,\dots,k$ عملگرهای خطی باشند و $T_iT_j=T_jT_i$ و به ازای هر $i\neq j$، $\ker T_i\cap\ker T_j=(0)$ آنگاه $\ker T_1T_2\cdots T_k=\sum_{i=1}^{k}\oplus\ker T_i$.

اثبات: توجه می‌کنیم که

$$\ker T_1T_2\cdots T_{k-1}\cap\ker T_k=(0)$$

زیرا اگر

$$T_1T_2\cdots T_{k-1}(\alpha)=T_k(\alpha)=0$$

آنگاه

$$T_2T_3\cdots T_{k-1}(\alpha)\in\ker T_1\cap\ker T_k=(0)$$

و اگر همین عمل را تکرار کنیم خواهیم داشت $T_{k-1}(\alpha)=0$؛ پس $\alpha=0$. حال با توجه به استقرا کافی است لم را برای $k=2$ اثبات کنیم. پس قرار می‌دهیم $W=\ker T_1T_2$ آنگاه $T_2(W)\subseteq\ker T_1$. اما W تحت T_2 ناوردا است. پس

$$\dim W=r(T_2|W)+n(T_2|W)$$

و در نتیجه

$$\dim W\leqslant n(T_1)+n(T_2)$$

یعنی $W=\ker T_1\oplus\ker T_2$؛ زیرا آشکار است که $W\supseteq\ker T_1\oplus\ker T_2$.

نتیجهٔ ۱. فرض کنیم V یك فضای برداری روی هیأت F و T یك عملگر خطی روی V است. اگر $f(x)\in F[x]$ یك چندجمله‌ای باشد که $f=f_1^{r_1}f_2^{r_2}\cdots f_k^{r_k}$ تجزیهٔ آن به عوامل اول باشد، آنگاه $\ker f(T)=\sum_{i=1}^{k}\oplus\ker f_i^{r_i}(T)$.

اثبات: با استفاده از لم بالا کافی است نشان دهیم $\ker f_i^{r_i}(T)\cap\ker f_j^{r_j}(T)=(0)$. برای این منظور اگر $\alpha\in\ker f_i^{r_i}(T)\cap\ker f_j^{r_j}(T),\ \alpha\neq 0$ آنگاه $f_i(x)$ و $f_j(x)$ باید به رتبهٔ α قابل قسمت باشند که غیرممکن است.

نتیجهٔ ۲. (قضیهٔ گراسمان).

اثبات: طبق نتیجهٔ ۱.

حال ذکر این نکته لازم است که لم فوق وقتی که V دارای بعد متناهی نباشد درست نیست. زیرا اگر فرض کنیم V دارای یك پایهٔ شمارای نامتناهی S باشد و A و B و C سه زیرمجموعهٔ نامتناهی دو بدو جدا از هم از مجموعهٔ S باشند به طوری که $S=A\cup B\cup C$؛ و اگر فرض کنیم $T_1 : V\to V$ و $T_2 : V\to V$ عملگرهایی باشند که $T_1(\alpha)=0,\ \forall\alpha\in A$ و $T_1 : B\cup C\to B$ دوسویی باشد و همچنین $T_2(\alpha)=0,\ \forall\alpha\in B$ و $T_2 : A\cup C\to A$ دوسویی باشد، آنگاه آشکار است که $T_1T_2=T_2T_1=0$ و $\ker T_1\cap\ker T_2=(0)$، ولی $V\neq\ker T_1\oplus\ker T_2$.

هدف بعدی، اثبات قضیهٔ کیلی-هامیلتون با استفاده از قضیهٔ تجزیهٔ اولیه است. برای این منظور به نتیجهٔ زیر که در [۸ص۲۲۶] به‌صورت مسأله داده شده و ما آن را به عنوان مورد ۵ از موارد کاربرد قضیهٔ تجزیهٔ اولیه ذکر کردیم، نیاز داریم.

نتیجهٔ ۳. اگر V یك فضای برداری روی هیأت F و $T : V\to V$ یك عملگر خطی و $p(x)$ چندجمله‌ای مینیمال T باشد آنگاه یك $\alpha\in V$ وجود دارد که $p(x)$ رتبهٔ آن است.

اثبات: اول فرض می‌کنیم $p(x)=p_1(x)^r$ که در آن $p_1(x)$ یك چندجمله‌ای اول باشد. آنگاه آشکار است که اگر همهٔ بردارهای V دارای رتبه‌ای به شکل $p_1^s(x)$ باشند که در آن $s\leqslant r-1$، آنگاه $p(x)|p_1^{r-1}(x)$ که غیرممکن است. حال فرض می‌کنیم که $p(x)=p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$. در این صورت، طبق قضیهٔ گراسمان داریم $V=\sum_{i=1}^{k}\oplus\ker p_i^{r_i}(x)$. آنگاه مطابق آنچه که در ابتدای اثبات نشان دادیم یك بردار $\alpha_i\in\ker p_i^{r_i}(x)$ وجود دارد که رتبهٔ آن $p_i^{r_i}(x)$ است. پس $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ دارای رتبه‌ای برابر $p(x)$ می‌باشد.

توجه: یکی از نتایج مفید نتیجهٔ قبل این است که اگر $T : V\to V$ یك عملگر خطی و $p(x)$ چندجمله‌ای مینیمال T باشد، آنگاه $\deg p(x)\leqslant\dim V$.

مطالبی را نیز باید درمورد فضاهای خارج‌قسمت و زیرفضاهای ناوردا به‌یادآوریم. اگر $T : V\to V$ یك عملگر خطی و $W\subseteq V$ یك زیرفضای ناوردا تحت T باشد، آنگاه $T : V/W\to V/W$ با تعریف $T(\bar\alpha)=T(\alpha)+W$ یك عملگر خطی است و آشکار است که $\det T=\det T_W\cdot\det T$ که در آن $T_W=T|W$. همچنین چندجمله‌های مینیمال T_W و T چندجمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کنند. اگر $W_1, W_2,\dots, W_k$ زیرفضاهای ناوردا تحت T باشند و $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$، و اگر $f_i(x)$ چندجمله‌ای مشخصهٔ T_{W_i} و $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصهٔ T باشد، آنگاه $f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x)$.

قضیهٔ زیر فوراً قضیهٔ کیلی-هامیلتون را به‌دست می‌دهد.

تعمیم قضیهٔ کیلی-هامیلتون. چندجمله‌ای مشخصهٔ یك عملگر خطی $T : V\to V$ بر چندجمله‌ای مینیمال آن قابل قسمت است و با آن درعوامل اول مشترك است.

اثبات: طبق قضیهٔ گراسمان و آنچه که در بالا گفتیم، کافی است

چندجمله‌ای مینیمال را به شکل $p(x)=p_1^r(x)$ فرض کنیم که $p_1(x)$ یك چندجمله‌ای اول و r یك عدد طبیعی است. با استقرا روی $\dim V$ عمل می‌کنیم. برای $\dim V=1$ مطلب بدیهی است. فرض می‌کنیم برای فضاهای با بعد کمتر از $\dim V$ قضیه درست باشد. حال بردار $\alpha\in V$ را که $p(x)$ رتبهٔ آن است درنظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $B=\{\alpha, T(\alpha), \dots, T^{k-1}(\alpha)\}$ که درآن $k=\deg p(x)$. زیرفضایی را که توسط B تولید می‌شود به W نشان می‌دهیم. اگر $W=V$، آشکار است که چندجمله‌ای مشخصهٔ T همان $p(x)$ خواهد بود. پس فرض می‌کنیم که $\dim W<\dim V$ و داریم $\dim V/W<\dim V$. حال توجه می‌کنیم که چندجمله‌ایهای مینیمال $T_W: W\to W$ و $T: V/W\to V/W$ به‌ترتیب به‌شکل $p_1^{r_1}(x)$ و $p_1^{r_2}(x)$ اند و با فرض استقرا، چندجمله‌ای‌های مشخصهٔ T_W و $\bar{T}$ به ترتیب به شکل $p_1^{s_1}(x)$ و $p_1^{s_2}(x)$ هستند. درنتیجه، چندجمله‌ای مشخصهٔ T که حاصلضرب آنهاست، به شکل $p_1^{s}(x)$ است و با توجه به‌اینکه درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال از بعد فضا بیشتر نیست خواهیم داشت $r\leqslant s$.

توجه: علت اینکه اثبات فوق بر اثبات قضیهٔ کیلی-هامیلتون کتابهای درسی جبر خطی برتری دارد این است که اثباتهای کتب درسی معمولاً به شکل‌های زیرند: عده‌ای با استفاده از اینکه هر هیأت دارای یك هیأت جبری-بسته است، از اول هیأت را جبری-بسته فرض‌می‌کنند و آشکار است که بریك نتیجهٔ خارج از جبرخطی متکی‌اند. دستهٔ دیگر مانند [۴] با استفاده از نظریهٔ ماتریسها و دترمینانها روی یك حلقهٔ جابجایی آن را اثبات می‌کنند و ضعف این روش با توجه به‌استفاده از نظریهٔ فوق آشکار است و بالاخره دسته‌ای هم مانند [۸] با استفاده از قضیهٔ تجزیهٔ دوری قضیهٔ فوق را نتیجه گرفته‌اند. این روش هم با توجه به استفاده از قضیهٔ تجزیهٔ دوری اشکال خاص خود را دارد.

قضیهٔ بعدی که درصدد ارائهٔ اثباتی ساده برای آن هستیم، قضیهٔ تجزیهٔ دوری است که همهٔ کتابهای درسی آن را اساسیترین قضیهٔ جبر خطی نامیده‌اند. در قضیهٔ زیر اگر $T: V\to V$ یك عملگر خطی باشد و $\alpha\in V$، آنگاه زیرفضای T- دوری تولید شده توسط α عبارت است از

$$Z(\alpha, T)=\{f(T)\alpha : f(x)\in F[x]\}.$$

قضیهٔ تجزیهٔ دوری. فرض کنیم $T: V\to V$ یك عملگر خطی باشد. آنگاه بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ وجود دارند به‌طوری که $V=\sum_{i=1}^{k}\oplus Z(\alpha_i, T)$ و به‌ازای هر $i\geqslant 1$، $p_{i+1}(x)\mid p_i(x)$ که درآن $p_i(x)$ رتبهٔ α_i است. به‌علاوه، k، $p_1, p_2, \dots, p_k$ یکتا هستند.

اثبات قضیهٔ فوق در منابع به شکل زیر است. عده‌ای، مانند [۱۰]، با تعریف $f(x)\alpha=f(T)\alpha$، V را به صورت یك مدول با مولد متناهی روی حلقهٔ $F[x]$ درنظر می‌گیرند و بعد با استفاده از قضیه‌ای از نظریهٔ مدولها این قضیه را به‌دست می‌آورند. عده‌ای دیگر اثبات قضیهٔ مربوطه در نظریهٔ مدولها را به‌زبان جبر خطی برگردانده‌اند، مانند [۸] که دقیقاً برگردان اثباتهای [۱۴] و [۱۵] را به‌دست داده است. عده‌ای دیگرهم، مانند [۳]، با استفاده از فضاهای دوگان و ضرب داخلی آن را اثبات کرده‌اند. بالاخره دسته‌ای‌هم با توجه به‌اینکه کاربرد اساسی این قضیه درتعیین صورت ژوردان یك‌ماتریس است سعی کرده‌اند ازاین قضیه اجتناب کنند و صورت‌ژوردان یك ماتریس را با روشهای پیچیدهٔ دیگری به‌دست آورند، مانند [۵] و [۷] و [۱] و [۱۶] و [۶].

دراینجا اثباتی از این قضیه عرضه می‌کنیم که به‌نظر ما از همهٔ اثباتهای موجود ساده‌تر است.

اثبات قضیهٔ تجزیهٔ دوری: فرض کنیم $p_1(x)$ چندجمله‌ای مینیمال T و $\alpha_1\in V$ برداری باشد که رتبهٔ آن $p_1(x)$ است. حال قرارمی‌دهیم $V_1=Z(\alpha_1, T)$ وزیرفضایی‌مانند W، ناوردا تحت T، می‌یابیم به طوری که $V=V_1\oplus W$. آنگاه با استقرا روی $\dim V$ اثبات تمام‌می‌شود. برای این‌منظور فرض‌می‌کنیم W یك زیرفضای ماکسیمال ناوردا تحت T باشد به طوری که $W\cap V_1=(0)$. ادعا می‌کنیم که $V=V_1\oplus W$، زیرا اگر $\alpha\in V$, $\alpha\notin V_1+W$ آنگاه نشان می‌دهیم که به‌تناقض می‌رسیم. برای این منظور فرض می‌کنیم $f(x)$ یك چندجمله‌ای تکین با کمترین‌درجه‌باشد که $f(T)\alpha\in V_1+W$، پس $\gamma\in W$، $\beta\in V_1$ وجود دارد که $f(T)\alpha=\beta+\gamma$. آشکار است که $f(x)\mid p_1(x)$. درنتیجه $p_1(x)=f(x)g(x)$ و $g(T)\beta=g(T)\gamma=0$. اما $p_1(x)\mid g(x)h(x)$ پس $\beta=h(T)\alpha_1$ یعنی $f(x)\mid h(x)$. حال خواهیم داشت $\beta=f(T)\delta$ که در آن $\delta\in V_1$ و در نتیجه $f(T)(\alpha-\delta)=\gamma\in W$ و $\alpha-\delta\notin W$. قرارمی‌دهیم $\alpha-\delta=u$ وزیرفضایی راکه توسط W و $u, T(u), \dots, T^{k-1}(u)$ (که در آن $k=\deg f$) تولید می‌شود به W' نشان می‌دهیم. آشکار است که W' تحت T ناورداست و $W\subsetneqq W'$. پس $W'\cap V_1\neq(0)$. حال فرض کنیم $0\neq w+\varphi(T)u\in W'\cap V_1$ که در آن $w\in W$ و $\deg\varphi\leqslant k-1<\deg f$. درنتیجه

$$\varphi(T)(\alpha-\delta)\in V_1+W$$

یا $\varphi(T)\alpha\in V_1+W$ که یك تناقض است.

توجه: اثبات یکتایی k و $p_1, \dots, p_k$ تقریباً بدیهی است و به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. سرانجام برای اینکه دلیلی برای ارائهٔ آخرین قضیهٔ این مقاله آورده باشیم، خاطرنشان می‌کنیم که هرگاه‌دوماتریس $m\times n$ مانند A و B هم‌ارزسطری باشند آنگاه دستگاههای $AX=0$ و $BX=0$ جوابهای یکسان دارند. این موضوع را تقریباً تمام‌کتابهای جبر خطی ذکر کرده‌اند وچیزی است که فقط از تعریف هم‌ارز سطری ناشی می‌شود. مطلبی که‌گرچه ساده است ولی به‌آشکاری موضوع قبل نیست، عکس آن است؛ یعنی اینکه اگر $AX=0$ و $BX=0$ جوابهای یکسان داشته باشند آیا A و B هم‌ارز سطری‌اند؟ به‌این موضوع‌درمیان کتابهای‌جبرخطی‌موجودفقط [۸] درصفحهٔ ۵۸ اشاره‌کرده واثبات آن را به‌بعدموکول کرده‌است ولی درصفحات بعدکتاب اثبات آن به‌صراحت‌ذکرنشده‌است. باتوجه‌به‌اینکه یکی‌ازهدفهای‌اصلی جبر خطی‌حل‌دستگاه‌معادلات خطی است وموضوع ذکرشده هم مربوط

به‌این قسمت‌است، بدون شك این موضوع باید به‌صورت یك‌قضیه یا تمرینی‌در کتابهای‌درسی جاداشته‌باشد به‌خصوص‌وقتی که عکس آن که‌مطلبی کاملاً بدیهی‌است‌درهمهٔ کتابهای جبرخطی‌وجود دارد.

درقضیهٔ زیر نیازی به‌متناهی بودن ابعاد V و W نیست.

قضیه. اگـر V و W دو فضای برداری روی هیـأت F بـاشند و $A, B : V \to W$ دوعملگر خطی باشند، آنگاه $\ker A = \ker B$ اگـر و تنها اگـر یك عملگر وارون‌دار $T : W \to W$ وجود داشته باشد به طوری که $B = TA$.

اثبات: فرض می‌کنیم کـه $\ker A = \ker B$ و C یك پایه برای $\ker A = \ker B$ باشد و $C \cup D$ پایه‌ای برای V باشد. آشکاراست که $\{A(\alpha) : \alpha \in D\}$ و $\{B(\alpha) : \alpha \in D\}$ مجموعه‌هایی مستقل خطی در W هستند. حـال پـایـه‌هـای $A(D) \cup S$ و $B(D) \cup S'$ را برای W چنان درنظر می‌گیریم که $|S| = |S'|$ ($|S|$ یعنی عدد اصلی مجموعـهٔ S) و عملگر $T : W \to W$ را طوری تعریف می‌کنیم که

$$T : S \to S',\ T(A(\alpha)) = B(\alpha),\ \forall \alpha \in D$$

دوسویی باشد. آشکار است که $B = TA$ و T وارون‌دارند. اثبات عکس بدیهی است.

نتیجه. اگر A و B دوماتریس $m \times n$ روی هیأت F باشند به‌طوری که $AX = 0$ و $BX = 0$ جوابهای یکسان داشته‌باشند، آنگاه A و B هم‌ارز سطری‌اند.

اثبات: $A, B : F^n \to F^m$ دو عملگـر خطـی‌انـد کـه $\ker A = \ker B$. پس‌طبق‌قضیهٔ‌قبل یك‌ماتریس وارون‌دار $m \times m$ چون P وجود دارد به‌طوری که $B = PA$.

نتیجه. اگـر A و B دو ماتریس نامتناهی روی هیأت F بـاشند به‌طوری که $AX = 0$ و $BX = 0$ جوابهای‌یکسان داشته‌باشند، آنگاه A و B هم‌ارز سطری‌اند (بدین معنی‌که یك‌ماتریس وارون‌دار P وجود دارد که $B = PA$).

اثبات: مانند نتیجه قبل.

مراجع

1. R. Brualdi, " The jordan canonical form: an old proof," *Amer. Math. Monthly*, (3)**94** (1987) 257-267.
2. P.M. Cohn, *Algebra*, Vol I, John-Wiley, 1974.
3. C.W. Curtis, *Linear Algebra*, Springer, 1984.
4. D. Fearnley-Sander, "Hermann Grassman and the creation of linear algebra," *Amer. Math. Monthly*, **86** (1979) 809-817.
5. A.F. Fillipov, "A short proof of the jordan form," *Moscow Univ. Math. Bull.*, **26** (1971) 70-71.
6. R. Fletcher and Sorensen, "An algorithmic derivation of the jordan canonical form," *Amer. Math. Monthly*, **90** (1985) 12-16.
7. A. Galperin and Z. Waksman, "An elementary approach to jordan theory," *Amer. Math. Monthly*, **87** (1981) 728-732.
8. K.Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Inc, 1971.
9. H. G. Jacob, "Another proof of the rational decomposition theorem," *Amer. Math. Monthly*, **80** (1973) 1131-1134.
10. N. Jacobson, *Basic Algebra*, I, Freeman, 1985.
11. I. Kaplansky, *Linear Algebra and Geometry*, Chelsea, 1974.
12. O.A.S. Karamzadeh, "On the primary decomposition theorem," To appear, *Int. J. Math. Edu. Science. Tech* (1988).
13. K. Nomizu, *Fundamentals of Linear Algebra*, McGraw-Hill, 1966.
14. R.Rado, "A proof of the basis theorem for finitely generated abelian groups," *J. Lon. Math. Soc.*, **26** (1951) 74-75.
15. W. Wong, "Finitely generated modules over PID," *Amer. Math. Monthly*, **69** (1962) 398-400.
16. H. Väliaho, "An elementary approach to the jordan form of a matrix," *Amer. Math. Monthly*, **93** (1986) 711-714.

* امیدعلی کرمزاده، دانشگاه اهواز

پولیا، حل مسأله، و آموزش*

آلن شوئنفلد*
ترجمهٔ سعید ذاکری

سال ۱۹۴۵ در عرصهٔ حل مسأله یك نقطهٔ عطف و در عین حال سالی پرآشوب بود. در این سال بود که کتاب تفکر بارآور ماکس ورتهایمر، که یك بررسی کلاسیك از موضوع حل مسأله است، برای اولین بار به‌زبان انگلیسی منتشر شد. همچنین رساله‌ای در باب روانشناسی ابداع در حوزهٔ ریاضیات[1] ژاك آدامار به‌طبع رسید. به‌این کتابها باید رسالهٔ کارل دانکر به‌نام درباب حل مسأله را هم افزود. همهٔ اینها در زمانی صورت می‌گرفت که تعلیم ریاضیات در مدارس عمدتاً مبتنی برمشق و تمرین بود، چراکه براساس "نظریهٔ پیوندها"ی تداعی‌گرایان قرارداشت [۱۶]. لکن شیوهٔ مشق و تمرین به‌زیر سؤال رفته بود. گشتالتیها[2] به‌رهبری ورتهایمر مدعی بودند که‌این نوع تعلیم جوهرهٔ تفکرریاضی را به کلی نابودمی‌کند. اعتقاد آنها براین بودکه یادگیری طوطی‌وار از ارزشی برخوردار نیست و اگر شاگردان مطالب را بی‌آنکه بفهمند به‌خاطربسپارند، به‌بطن ریاضیاتی که مطالعه می‌کنند نخواهند رسید. با کمال تأسف، گشتالتیها هیچ نظریه‌ای در مورد فراگیری یا تعلیم نداشتند، زیرا فکرمی‌کردند که همهٔ "اعمال" واقعی در ضمیر ناخودآگاه انسان به‌وقوع می‌پیوندد. به‌همین دلیل بودکه آنها توصیه‌های عملی انگشت شماری برای تعلیم در کلاس داشتند. افزون براین، گشتالتیها به‌نوبهٔ خود مورد انتقاد رفتارگرایان بودند؛ گروه اخیر ادعا می‌کردند "عقل" و "تفکر" ساختارهای بی‌فایده‌ای هستند، و همهٔ رفتارها (چه ریاضی و چه جزآن) را می‌توان به‌یاری زنجیره‌هایی‌از محرك - پاسخ توضیح داد.

در تعارض با چنین بلاتکلیفی روانشناختی و آموزشی بود که مهمترین کتاب حل مسألهٔ دوران با به‌عرصه گذاشت. چنانکه در بخش بعد اشاره خواهیم کرد، چگونه حل کنیم[1] در واقع نخستین میدان تاخت و تاز پولیا در دنیای حل مسأله نبود. اما این کتاب، بی‌چون و چرا، جایگاهی حساس احراز کرد. چگونه حل کنیم، هم برای مؤلفش و هم برای دنیای حل مسأله، نقطهٔ تحولی رارقم زد. برای پولیا این کتاب سرآغاز یك دورهٔ چندین جلدی‌درباب ماهیت تفکر ریاضی بود، مبحثی که در سالهای بعد زندگی او موضوع اصلی کارش شد. به‌دنبال چگونه حل کنیم، در ۱۹۵۴ دو جلد ریاضیات و استدلال مسوجه، و در ۱۹۶۲ و ۱۹۶۵ دو جلد اکتشاف ریاضی[2] انتشار یافت. این کتاب موجب تمایز دو دورهٔ تاریخی در محدودهٔ آموزش ریاضی و دنیای حل مسأله شد: حل مسأله پیش از پولیا و حل مسأله پس از او. از آن به‌بعد، تأثیر پولیا برمطالعهٔ تفکر ریاضی وبررسی کلی تفکر بارآور چشمگیر بوده‌است. یکی‌ازاهداف اصلی این نوشتار پیگیری ایده‌های اساسی درآثار پولیا، و دیگری ردیابی تأثیر آن ایده‌ها بر پژوهشهای بعدی درباب ماهیت تفکرریاضی است.

پولیا و "رهگشایی[3] نوین"

علایق پولیا به‌ماهیت تفکرریاضی واصول آموزش ریاضی‌ازهمان گامهای‌نخستین او نمایان بود. ثمرهٔ‌چنین علایقی، قبلاً در۱۹۲۵، به‌دست آمده بود، و آن هنگامی‌بودکه پولیا و سگو کتاب مسألهٔ برجستهٔ خود را تحت عنوان مسائل و قضایایی از آنالیز [تألیف کردند. ترجمهٔ انگلیسی این کتاب در ۱۹۷۲ منتشر شد. این کتاب نقطهٔ شروع مناسبی برای توصیف‌کارپولیاست، زیرا درسرآغاز آن می‌خوانیم:

> آموزش خوب چیست؟ دادن مجال به شاگرد است از طریقی منظم و اصولی، به نحوی که مطالب را خودش کشف کند.

این کتاب دو موضوع عمدهٔ آموزشی را مطرح می‌کند که پولیا نیم‌قرن به‌دنبال آنها بود. این دو موضوع، که درکارهای پولیا با یکدیگر عجین‌شده‌اند، ترتیب (یا اسلوبمندی) و کشف اندکشف

---

۱. این کتاب را انتشارات دنا با عنوان روانشناسی ابداع درریاضیات و به ترجمهٔ عباس مخبر در سال ۱۳۶۷ منتشر کرده است. نقدی از این کتاب درهمین‌شمارهٔ نشر ریاضی آمده است. ضمناًمشخصات کتابشناسی اصل این کتاب و سایر کتابها و رسالاتی که در این مقاله نام برده شده، در فهرست مراجع مقاله آمده است. [م]

۲. روانشناسی گشتالت (Gestalt) یا هیکل بینی، که در ۱۹۱۲ به‌وسیله ورتهایمر در آلمان پایه‌گذاری شد، با سازمان دادن فرایندهای‌ذهنی انسان سروکار دارد. واژهٔ آلمانی گشتالت به‌معنی الگو، شکل، هیأت وهیکل‌است. روانشناسان گشتالتی عقیده داشتند که انسان و حیوان الگوها را همچون یك‌کل واحد و سازمان یافته درك می‌کنند. [م]

---

۱. این کتاب را مؤسسهٔ کیهان در سال ۱۳۶۶ به‌ترجمهٔ احمد آرام و با عنوان چگونه مسأله را حل کنیم منتشر کرده است. قبلاً هم به ترجمهٔ هوشنگ شریف‌زاده در مجلهٔ یکان چاپ شده‌است. [م]

۲. این کتاب را پروین شهریاری با عنوان خلاقیت ریاضی ترجمه کرده و انتشارات فاطمی آن را در سال ۱۳۶۶ منتشر کرده است. [م]

۳. این کلمه، ترجمهٔ Heuristics و Heuristic (در حالت اسمی) است که معادل جاافتاده‌ای درزبان فارسی ندارد وشاید "رهیابی"، "یافت‌شناسی"، "رهیافت‌شناسی"، "رهبرد شناسی" واحیاناً "علم اکتشاف" هم بتوان گفت.

اسلوبمند ریاضیات، و توصیف اسلوبمند یك "روش" (به سبك دکارت) برای کشف و ابداع. دوجلد مسائل وقضایایی از آنالیز در وهلهٔ نخست با موضوع اول سروکار دارد. پولیا و سگو در این کتاب در جستجوی آن‌اند که از طریق مسائلی که به‌دقت‌مرتب شده‌اند، ساختارحوزه‌های‌مشخصی از ریاضیات را آشکار سازند- یا به قول خودشان "ما برآنیم که از طریق مسائلی در برخی حوزه‌های مهم آنالیز که به‌طرزی اصولی مرتب شده‌اند، دانشجویان پیشرفتهٔ ریاضیات را به‌روشها و ابزارهای تفکر و پژوهش مستقل عادت دهیم" [۸، مقدمه، ص شش]. تا به‌امروز، هر کس که با این کتابهای حل مسأله کار کرده‌است، برمفاهیم اولیهٔ ریاضیات پیشرفته مهارت یافته، تعدادی مسألهٔ جالب توجه حل کرده، و احتمالاً برای‌پژوهش جدی آماده شده است. با این همه، باز بایدبه‌خاطر داشت که ساختار ریاضی همهٔ آن‌چیزی نیست که پولیا به‌آن‌توجه داشت. هرچندکه دوجلد مسائل اساساً آثاری توصیفی‌اند، روشن است که در تحریر آنها پولیا "روش" [دکارتی] را مد نظر داشته است. در دیباچهٔ ویرایش نخست آلمانی آن (۱۹۲۵)، مؤلفین چند توصیه درباب‌تفکر بارآور، ونکات‌زیر را دربارهٔ به‌کارگیری آنها عرضه کرده‌اند:

> ما قواعدی کلی نمی‌شناسیم که بتوان آنها را برای دستیابی به‌سودمندترین نظام تفکر تجویز کرد. حتی در حالتی که بتوان چنین قواعدی را تنظیم کرد، چندان مفید فایده نخواهند بود... [زیرا] این قوانین باید در گوشت و خون شخص جذب شود و بی‌هیچ تلاش آگاهانه‌ای به‌کار رود... حل مستقل مسائل مبارز طلب خیلی بیشتر از نصایحی که در زیر می‌آید مددکارخواننده خواهد بود، هرچندکه این توصیه‌ها به‌عنوان‌نقطهٔ‌شروع کار ضرری نخواهند داشت. [۸، مقدمه،ص هفت]

بیست‌سال‌بعدپولیا در کتابی به‌همین مطلب بازگشت. او دست به‌کارتحقیق در باب تاریخ ابداع ریاضی شد، که ثمره‌اش دوجلد کتاب ریاضیات و استدلال موجه بود. او این بار به‌توصیه‌های خشك و خالی بسنده نکرد، و به سبك‌گفتار در روش راه بردن عقل[1] دکارت، که یك بررسی درون نگرانه از "روش" است، شروع به مطالعهٔ الگوهای تفکر بارآوری کردکه او (و احیاناً دیگران) را در حل مسائل ریاضی یاری می‌کرد. احتمالاً با تنبه ازناکامی گفتار دکارت و اطلاع از تاریخچهٔ مطالعات بودکه پولیا روش معتدلتری در پیش گرفت. روش او بررسی مفهوم رهگشایی بود. به‌گفته خودش: "هدف رهگشایی عبارت است از بررسی روشها و قواعد کشف و ابداع. صفت "رهگشا" به‌هرچیز که "به‌کشف کمك کند" اطلاق می‌شود. استدلال رهگشا استدلالی است که قطعی و سرراست تلقی نمی‌شود، بلکه تنها استدلالی گذرا و موجه است که هدفش کشف راه حل مسألهٔ مورد نظر است". [۹، صص ۱۱۲-۱۱۳]

چگونه حل‌کنیم ارائه‌کنندهٔ چارچوبی کلی برای‌حل مسأله، و راهنماییهایی در مورد ریزه‌کاریهای لازم برای پیاده کردن آن است. این چارچوب کلی، توصیفی چهار مرحله‌ای از فرایند حل مسأله ارائه می‌کند: فهم مسأله، طرح نقشه، اجرای نقشه، باز نگریستن به‌عقب. ریزه‌کاریهای مذکور همان توصیه‌های رهگشای پولیا، یا به‌قول خودش، "رهگشایی نوین" اوست. استراتژیهای رهگشا قواعدی سرانگشتی هستندکه به‌کمك آنها می‌توان راهی به‌سوی حل مسائل دشوار باز کرد. به‌عنوان مثال، استراتژیهایی رهگشا وجود دارندکه برای فهم مسأله (تمرکز برروی مجهول‌و داده‌ها، رسم نمودار و...)، برای طرح نقشه (بهره‌گیری ازمسائل وابسته و مشابه، بازنگریهای پیاپی و...)، و نیز برای یافتن راه حل وامتحان کردن آن، به‌کارمی‌آیند. "واژه‌نامهٔ‌کوچك‌رهگشایی"، که چکیده‌ای الفبایی ازروشها و نکات تاریخی، و در برگیرندهٔ هستهٔ اصلی چگونه حل کنیم است، نکاتی‌ظریف و استادانه به‌دست می‌دهد.

پولیا،همچون گشتالتیها، عمیقاً به ساختار ریاضی‌توجه‌داشت‌و درون نگری را به‌عنوان ابزار اولیهٔ بصیرت ریاضی به‌کار می‌گرفت. اما، برخلاف آنها، عمیقاً به‌کندوکاواین منابع بصیرت‌در وجود خودش پرداخت. به‌عنوان شاهدی براین تمایز، می‌توان بحث کلاسیك دانکر درباره مسألهٔ سیزده را در نظر گرفت: "چرا همهٔ اعداد شش رقمی به‌شکل $abcabc$ بر ۱۳ بخش پذیرند؟". دانکر، به‌عنوان یك گشتالتی تمام عیار، می‌گفت که مشکل مسأله وقتی ازمیان‌می‌رودکه این‌حقیقت که همهٔ این‌گونه اعدادبر ۱۰۰۱ بخش پذیرند "ازضمیرناخودآگاه انسان خارج شود و به‌ظهور برسد". اما متأسفانه، او دربارهٔ اینکه چگونه یا چرا این حقیقت خاص می‌تواند از ضمیر ناخودآگاه انسان خارج شود، چیزی نمی‌گفت. به‌عکس، "رهگشایی‌نوین" پولیا، به‌عنوان محملی‌برای چنین‌بصیرتهایی در نظر گرفته شده بود. پولیا مایل بود بداندکه چگونه می‌توانیم به‌مسألهٔ سیزده بپردازیم، به‌طوری‌که به‌درستی بتوانیم انتظار داشته باشیم که‌عامل ۱۰۰۱ راکشف کنیم؟ دراینجا سه راه ممکن ذکر می‌شود، که نمونهٔ سه نوع از استراتژیهای رهگشای پولیا هستند.

شرایط مسأله‌راجستجوکنید.

عدد $abcabc$ داده شده است. خوب، این عدد واقعاً چیست؟ کوتاهنوشتی است در پایهٔ ۱۰ برای عدد

$$\begin{aligned}10^5a+10^4b+10^3c+10^2a+10b+c\\ =100100a+10010b+1001c\\ =1001(100a+10b+c)\end{aligned}$$

که‌عامل ۱۰۰۱ راکه تاکنون "درپردهٔ اسرار بود" ظاهر می‌سازد.

یك حالت خاص را امتحان کنید.

یك عدد سه رقمی دلخواه abc را انتخاب می‌کنیم و آن‌را دوبار می‌نویسیم. مثلاً ۲۹۴ را انتخاب می‌کنیم و عدد ۲۹۴۲۹۴ را می‌سازیم. اگر این عدد را با صدای بلند بخوانیم چه می‌شود؟

دویست و نود و چهارهزار و دویست و نودوچهار

و همین به ما الهام می‌کندکه بنویسیم

---

۱. این رساله را اولین بار مرحوم محمد علی فروغی به‌فارسی‌ترجمه کرده و درکتاب سیرحکمت در اروپا آورده است. [۴]

$$۲۹۴(۱۰۰۰)+۲۹۴=۲۹۴(۱۰۰۱)$$

وکار تمام است.

حالتهای ساده را درنظر بگیرید وسعی کنید الگویی بیابید. یکی از شاگردانم در کلاس پیشنهاد کرد که ساده‌ترین عددسه‌رقمی، یعنی $abc=۰۰۱$، را امتحان کنیم. با این انتخاب، عدد $abcabc=۰۰۱۰۰۱$ به‌دست می‌آید.

انتخاب بعدی او، $abc=۰۰۲$، عدد ۲۰۰۲ را حاصل کرد؛ بعد ۳۰۰۳، و همین طور تا آخر. بدین ترتیب معلوم شد که هرعدد به‌شکل $abcabc$ یك عامل ۱۰۰۱ دارد.

چگونه حل کنیم: به‌سبکی مقدماتی، در جستجوی چنین ایده‌هایی است. کندوکاو مبسوطتر و عمیقتر اینها را می‌توان در دو جلد ریاضیات واستدلال موجه یافت: استقرا و قیاس در ریاضیات (جلد ۱) و الگوهای استنباط موجه (جلد ۲). پولیا نظرات فلسفی و آموزشی عمده‌اش را در این دوجلد، که سرشار از شواهد تاریخی در باب بصیرت و ابداع ریاضی است، به‌دقت بیان کرده است. در یك کلام، می‌توان این نظرات را چنین خلاصه کرد: "حقایق ریاضی را ابتدا حدس می‌زنند و بعد ثابت می‌کنند، و هرجملهٔ این کتاب می‌کوشد نشان دهد که روند طبیعی چنین است. اگر فراگیری ریاضیات براکتشاف در ریاضیات مؤثر بوده‌است، باید به‌شاگرد فرصتی دهیم تا آن نوع مسائلی را حل کند که در آنها ابتدا باید حدس بزند و بعد حکم ریاضی مناسبی را ثابت کند". [۱۰، ص ۱۶۰]

از جنبهٔ فلسفی، پولیا در حال تبیین دیدگاهی تجربه‌گرایانه از ریاضیات بوده دیدگاهی که ریاضیات را همچون علوم طبیعی، یك رشتهٔ علمی متشکل از کشفها تلقی می‌کند. او عقیده داشت که ریاضیات، علی‌رغم آنچه که ممکن است به‌نظر برسد، یك علم صرفاً استنتاجی نیست که با چند اصل موضوع آغاز شود و همه چیز را به نحو اجتناب ناپذیری برپایهٔ آنها بنا کند. به‌نظر او، "از دید یك فیلسوف نسبتاً آزاد اندیش، فرایند آگاهانهٔ کسب معرفت گاهی باید به‌تمامی همچون یك بازی حدس زدن بنماید... نتیجهٔ کارخلاقهٔ یك ریاضیدان همانا استدلالی دقیق است، یك اثبات است، اما این استدلال موجه و حدس زدن است که موجب کشف اثبات می‌شود". [۱۰، ص ۱۵۸]. شواهد تاریخی بیشماری این ادعاها را تأیید می‌کنند، از جمله روش ابتکاری اویلر برای جمعبندی سری $\sum 1/n^2$؛ تعمیمهای نیوتن ازحرکت پرتابه به مدار سیارات؛ استقرا در هندسهٔ فضایی، از جمله برخی تعمیمهای فرمول اویلر، $V-E+F=2$، برای چندوجهیها؛ پیشرفتهایی در نظریهٔ اعداد، ریاضیات فیزیکی، ونظریهٔ احتمال. هرچند که موضوع بحث ما دراینجا حل مسأله است نه معرفت شناسی، باید توجه داشت که این اکتشافات نهایتاً اهمیت فلسفی نیز داشته‌اند. نظرگاههای ریاضی پولیا هماهنگ با نظریات علمی کارل پوپر بود، که عقیده داشت پیشرفت معرفت علمی منحصر به تلنبار کردن "حقایق" عینی نیست. پولیا وپوپر شاگرد مشترکی داشتند به‌نام ایمره لاکاتوش. لاکاتوش درکتاب اثباتها و ابطالها که یکی از جذابترین کتابهای ریاضی و فلسفی است که تاکنون نوشته شده، تاریخچهٔ فرمول اویلر را پی‌می‌گیرد. بررسی تاریخی او نشان می‌دهد که ریاضیدانها به هنگام ضرورت، تعاریف اساسی (مانند تعریف "چند وجهی")را، درپرتو شواهد تجربی جدید ــ مثلاً وقتی که قضیه‌ای که هرکس آن را درست می‌پندارد غلط ازآب در می‌آید ــ تغییر می‌دهند. به‌این ترتیب، ریاضیات هم مثل علوم تجربی در قبال "داده‌ها" از خود واکنش نشان می‌دهد. همان طور که دانشمندان علوم تجربی در فرضیه‌ها تجدید نظر می‌کنند، ریاضیدانها نیز تعریفها را مورد تجدیدنظر قرار می‌دهند.

به‌مسألهٔ آموزش بازگردیم. دوجلد ریاضیات و استدلال موجه علاوه بر مطالب فلسفی، حاوی طیفی از مسائل دشوار است که خوانندگان از طریق آنها می‌توانند با مباحثی که پولیا مطرح می‌کند درگیر شوند. پولیا در این زمینه می‌نویسد: "کتاب برای شاگردانی در نظر گرفته شده است که می‌خواهند توانایی‌ها و استعدادهای خود را گسترش دهند، و نیز برای خوانندگان کنجکاوی که می‌خواهند در مورد استدلال موجه و رابطه‌های نه‌چندان پیش‌پاافتادهٔ آن با ریاضیات چیزی یاد بگیرند. امیدوارم مطالب مورد علاقهٔ معلمان را از قلم نینداخته باشم، اما با این مطالب بیشتر به‌طورغیرمستقیم برخورد شده است. امیدوارم این خلأ را روزی پر کنم". [۱۰: ص ۱۶۰]

کوشش او برای پرکردن آن خلأ ده سال بعد با انتشاردوجلد اکتشاف ریاضی (۱۹۶۲ و ۱۹۶۵) به بار نشست. همچنانکه پیتر هیلتن در مقدمهٔ چاپ ارزان قیمت یك جلدی اکتشاف ریاضی (۱۹۸۰) اشاره می‌کند، "این کتاب به‌طرز بارزی برای نیازهای همهٔ معلمان و شاگردان علاقه‌مند در سطوح... دبیرستان یا اوایل دانشگاه مناسب است". متن این کتاب، مانند کتابهای قبلی پولیا، پیرومنطق حاکم برمحتوای آن است، و درآن بار تحقیق بردوش شاگرد گذارده شده است: دراین کتاب، شاگرد مطالب راازطریق کارکردن با رشته‌ای از "مسائل جالب و پرارزش" می‌آموزد؛ و بالاخره همچون دیگرکتابهای پولیا، شاگردی که همهٔ مسائل آن را حل کند، در حقیقت به‌میزان زیادی با ریاضیات ناب و زیبا دمساز می‌شود. اکتشاف ریاضی حاوی مجموعه‌ای غنی از مسائل است، از ترسیمهای هندسی به‌کمك خط‌کش و پرگار گرفته تا جبر، بازگشت، و کاربردهای اصل برهمنهی. شاگردی که به حل این مسائل مبادرت ورزد، برخی از فنون مهم را چنان فرامی‌گیرد که به‌ساختار ریاضیات مورد بحث پی می‌برد و راهی مناسب برای مطالعهٔ مطالب در پیش می‌گیرد. این کتاب همچنین توصیفهایی نظری از فرایند حل مسأله را همراه با تمرینهای تکمیلی عرضه می‌کند، به‌گونه‌ای که شاگرد به‌جای آنکه صرفاً ریاضیات بخواند، با ریاضیات "زندگی می‌کند". جان کلام آنکه اکتشاف ریاضی یك اثر کلاسیك است. خود من این کتاب را در کلاسهایی که برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی و نیز معلمان ریاضیات دبیرستانها برگزار می‌کنم بسیار لازم می‌بینم. کتاب مزبور نمایانگر آخرین و تکامل یافته‌ترین شکل جریان فکری پولیاست، که به‌موضوعهایی که او طی فعالیت علمی خود بدان پرداخت، یعنی ساختار ریاضیات و ماهیت اکتشاف ریاضی، برمی‌گردد. چندین جلد کتاب او دراین مباحث ــ دوکتاب مسأله که با همکاری سگو نوشته است، چگونه حل کنیم، دوجلد ریاضیات واستدلال موجه، و دوجلد اکتشاف ریاضی ــ نشان دهندهٔ وسعت دید و قدرت خارق‌العادهٔ پولیاست.

دانش رهگشایی و حل مساله پس‌از ۱۹۴۵

این بخش به بررسی پیشرفتهای حاصل شده در دانش حل مسائل ریاضی پس‌از ۱۹۴۵ اختصاص دارد. از آنجا که حل مسأله و آموزش مقوله‌ای همگانی است، به‌این پیشرفتها باید از دوبعد نگریست: یکی تأثیر جهانی کارواندیشه‌های پولیا، و دیگری تکامل پژوهشهای مربوط به‌حل مسأله، به‌عنوان شاخه‌ای از تحقیقات‌علمی.

شواهد تأثیر جهانی کارهای پولیا بیشمارند. مثلاً، شورای ملی معلمان ریاضیات آمریکا در دستورکار (۱۹۸۰) توصیه کرده است که "حل مسأله در سرلوحهٔ برنامهٔ ریاضیات مدارس در دههٔ ۱۹۸۰ قرار گیرد". برای کمك به‌تحقق چنین هدفی، سالنامهٔ ۱۹۸۰ این شورا [۴] به حل مسأله در ریاضیات مدارس اختصاص یافت؛ در سالنامه‌ها و انتشارات بعدی این شورا هم موضوعات مشابهی دنبال شد. برای کمك به‌رواج این نظرات، در داخل جلد سالنامهٔ ۱۹۸۰ الگوی چهار مرحله‌ای حل مسأله به‌نقل از چگونه حل‌کنیم نقش بسته بود. علاوه براین، همهٔ مقالات سالنامه به واقع براساس اندیشه‌های پولیا نوشته شده بود. خلاصه آنکه، "حل مسأله" در آموزش ریاضیات یعنی، حل مسأله به‌سبك پولیا. و پیشرفت حل مسأله را به دشواری می‌توان منحصر به‌آموزش ریاضیات دانست؛ و هر پیشرفتی در این زمینه، کم و بیش جنبهٔ عام خواهد یافت. درپنج سال گذشته کارهای پولیا در باب حل مسأله در نشریاتی چون مجلهٔ علوم سیاسی آمریکا، مجلهٔ سالانهٔ روانشناسی، هوش مصنوعی، کامپیوتر و شیمی، کامپیوتر و آموزش، فرایندهای استدلال، رهبری آموزشی، آموزش عالی، تعلیم بشر، و بسیاری مجلات دیگر نقل شده است. تأثیر جهانی کارهای او واقعاً آشکار است.

درمقابل، وضعیت علمی استراتژیهای رهگشا مشکوك ونامعلوم است[۱]ـ آیا از این استراتژیها واقعاً استفاده می‌شود؟ آیا به‌کار می‌آیند؟ آیامی‌شودآنها راآموخت؟ از یك سو، چنین استراتژیهایی ظاهراً اعتبار بسیار زیادی‌دارند. واکنش خودم را دراین‌مورد مثال می‌آورم. حدود ده دوازده سال پیش، من به‌عنوان یك ریاضیدان در حال‌کسب تجربه در میان آثار و نوشته‌های پولیا درباب تفکر ریاضی گشت وگذار می‌کردم. هرچه بیشتر آنها را می‌خواندم، شگفتی‌ام بیشتر می‌شد. صفحه پشت صفحه، پولیا فنونی را برای حل مسأله توضیح می‌داد که من قبلاً یادگرفته بودم در ریاضیات از آنها استفاده‌کنم ـ هرچندکه آنها را هرگز کسی به‌من نیاموخته بود!. در نوشته‌های پولیا دوچیز را تشخیص می‌دادم، هم‌روشهایی که خود من در ریاضیات به‌کارمی‌بردم، و هم راههایی که‌ازطریق آنها دربارهٔ ریاضیات فکر می‌کردم. اغلب ریاضیدانها، و مربیان ریاضیات، در این تشخیص با من اتفاق نظر داشتند. همگان دقیقاً احساس می‌کردندکه سخنان پولیا درست است.

لکن درواقع چنین نبود. به‌بیانی دیگر، به‌اندازهٔ‌کافی شواهد تجربی در دست بودکه این فکر را القاکند که یك چیز در این میان اشتباه یا از قلم افتاده است. تحت‌تأثیر مطالبی که اوایل دههٔ ۱۹۷۰ خوانده‌بودم، به‌سراغ چندکارشناس حل‌مسأله‌دردانشکده‌های ریاضی، که دانشجویان‌را برای مسابقهٔ‌پاتنام یاالمپیادهای گوناگون سرپرستی می‌کردند، رفتم. نظر آنها کاملاً هماهنگ و صریح بود: نصایح پولیا به درد مسأله حل‌کنهای تازه‌کارنمی‌خورد. آنها به من گفتندکه شاگردان با خواندن‌کتابهای‌پولیا یاد نمی‌گیرندچطور مسأله حل کنند. تجربه آنها را قانع‌کرده بودکه شاگردان وقتی یاد می‌گیرند مسأله حل‌کنند که (با اندوختهٔ اولیه‌ای از استعداد) تعداد زیادی مسأله‌حل‌کنند. نوشته‌های درباب آموزش ریاضی‌هم دلخوش‌کننده‌تر ازاین نبود. نوشته‌های ریاضی مالامال ازتعالیمی بودکه برای آموزش حل مسأله از طریق رهگشایی طراحی شده بود، و این تا حدود زیادی بدان خاطر بودکه عقاید پولیا بسیار درست به‌نظر می‌رسید. باکمال تأسف، نتایج این‌امرـخواه درسطوح پایین، درجبر، درحساب‌دیفرانسیل وانتگرال، وخواه مثلاً درنظریهٔ اعداد ـ همگی مأیوس‌کننده بودند؛ و نظرات مربیان‌پاتنام والمپیاد را تأیید می‌کردند. مطالعات پی در پی تنها در مواردی نتایج "امیدوارکننده" به‌بار آوردندکه معلم وشاگردان به‌یك اندازه به تعلیم مایل بودند (مثلاً مواردی‌که برای معلم در قبال یك برنامهٔ درسی جدید، حقوقی مقرر شده بود)، اما حتی در این موارد هم (درصورت وجود!) بهبود وضع حل‌مسأله، روند غالب نبود. به‌رغم همهٔ اشتیاقی‌که به روش پولیا نشان داده می‌شد، هیچ سند روشنی در دست نبود که معلوم کند آیا شاگرد واقعاً در نتیجهٔ تعلیمات رهگشایانه چیز بیشتری آموخته است، یا اینکه آیا هیچ مهارت کلیی برای حل‌مسأله کسب کرده است‌که در موارد تازه به‌کارآید یا نه. بالاخره، پژوهشگران رشتهٔ هوش مصنوعی ایده‌های پولیا را به‌صورتی علمی موردکندوکاو قرار دادند. نیوول و سایمن در کتاب کلاسیکشان تحت عنوان حل مسأله به‌توسط بشر [۷] ظهور برنامه‌ای‌کامپیوتری به‌نام مسأله حل کن عام را شرح می‌دهند. مسأله حل‌کن عام برای حل مسائلی در منطق صوری، شطرنج، و "حساب رمزی" (که شبیه به‌رمز ـ نوشته‌هاست، منتها در آن حروف نقش عدد را دارند) طراحی شد. مسأله حل‌کن عام خیلی شسته و رفته شطرنج بازی می‌کرد، خیلی خوب مسائل حساب رمزی را حل می‌کرد، و از عهدهٔ اثبات تقریباً همهٔ ۵۰ قضیهٔ ابتدای کتاب اصول ریاضیات راسل ووایتهد برمی‌آمد ـ همهٔ‌اینها را تمام‌وکمال انجام می‌داد، و با این‌کار انسان را متقاعد می‌کردکه‌استراتژیهای حل مسألهٔ آن بسیار نیرومندند. امااکنون برای پژوهشگران‌هوش مصنوعی، موقعیتی تجربی‌برای‌اثبات فراهم آمده است. ازنظرآنها: نظریهٔ تو درست است اگر (متخصص سخت‌گیر هوش مصنوعی ممکن است اضافه‌کند: و تنها اگر) برنامه‌ای حاضر وآماده‌داشته باشی‌که نظریه‌ات در قالب آن عرضه شود و مسائلی راکه ادعا می‌کنی در توان آن‌نظریه است حل‌کند. در قبال چنین‌معیارهایی، رهگشایی به‌سبك پولیا ناقص‌ازآب درآمد. یکی از پژوهشگران برجستهٔ هوش مصنوعی این مطلب را بی‌پرده چنین گفته است: "ما سعی‌کردیم برنامه‌های حل مسأله را با روش رهگشای پولیا بنویسیم، اما این برنامه‌ها راه به‌جایی نبرد؛ روشهای دیگری را امتحان‌کردیم و موفق شدیم. به‌این ترتیب این‌گمان در ما به‌وجود آمدکه استراتژیهایی‌که او توضیح می‌دهد بیشتر عارضی‌اند تا واقعی ـ وحتی اگر واقعی باشند، اهمیتشان خیلی‌کمتراز روشهایی

۱. پاره‌ای از مطالب این‌بخش از [۱۳] اقتباس شده است، که درآنجا می‌توان این مطالب را با جزئیات بیشتری یافت. خوانندهٔ‌مشتاق می‌تواند شواهد کاملی از نظرات ارائه شده در اینجا را درکتاب من تحت عنوان حل مسائل ریاضی [۱۲] بیابد.

است که ما در برنامه‌هایمان به‌کار می‌گیریم.»

حاصل سخن آنکه: از اواسط تا اواخر دههٔ ۱۹۷۰، هم در زمینهٔ هوش مصنوعی و هم در آموزش ریاضیات، دلایلی تجربی به‌دست آمد که توانایی مبانی رهگشایی عرضه شده توسط پولیا را زیر سؤال می‌برد. در ده‌سال گذشته، برخی جنبه‌های دانش رهگشایی به‌تدریج ارزش خود را نشان داده است. یکی از دلایل این امر آن بود که برخی "فنون کلی حل مسأله" که به‌وسیلهٔ متقدمین پژوهشگران هوش مصنوعی مطرح شده بود، مطابق انتظار نتیجه ندادند؛ و دلیل دیگر آنکه خود هوش مصنوعی (و به‌طور کلی، علوم شناختی) موجباتی فراهم آورد که به‌وسیلهٔ آنها می‌شد ایده‌های پولیا را تدقیق و اجرا کرد. آنچه که متعاقباً می‌آید، بررسی برخی پیشرفتهایی است که از اواسط دههٔ ۱۹۷۰ تاکنون حاصل شده‌است. برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر، منابع [۱۲]، [۱۳] از شوئنفلد، و [۱۵] از سیلور را ببینید.

توصیفهای پولیا از استراتژیهای حل مسأله تا حد معینی درست بود. اگر شما ازقبل می‌دانستید که چگونه آن استراتژیها را به‌کار گیرید، می‌توانستید آنها را در لابلای نوشته‌های پولیا تشخیص دهید. به‌همین دلیل بود که ریاضیدانها نسبت به‌کار پولیا احساس همدلی داشتند. اما هرگاه بخواهیم مسائل را از فاصلهٔ نزدیکتری بنگریم (یعنی با جزئیات بیشتری تحلیل کنیم)، باید بگوییم که توصیفهای پولیا در مورد حل مسأله، برای کسانی که با آن استراتژیها آشنایی ندارند و چگونگی پیاده‌کردن آنها را نمی‌دانند، جزئیاتی کافی عرضه نمی‌کرد. توضیحات پولیا درمورد استراتژیها حکم برچسب‌هایی را داشت که دسته‌هایی از استراتژیهای مرتبط را رده‌بندی می‌کرد. یك مثال این نکته را روشن خواهد کرد. موضوع اصلی آن است که وقتی شما یك "استراتژی" رهگشا را به‌دقت در نظر بگیرید، خواهیددید که خود این استراتژی از چندین فن حل مسألهٔ مربوط به‌هم، اما اساساً متفاوت، ترکیب شده است. مثلاً استراتژی "امتحان کردن حالتهای خاص" را در نظر بگیرید:

ممکن است بخواهید برای فهم بهتر یك مسالهٔ ناآشنا چند حالت خاص را امتحان کنید. این کار ممکن است برایتان الهام بخش مسیر یا کارایی یك راه حل باشد.

اکنون راه حل سه‌مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید.

مسألهٔ ۱. برای سری $\sum_{K=1}^{n} K/(K+1)$ یك عبارت شسته و رفته بیابید.

مسألهٔ ۲. $P(x)$ و $Q(x)$ را دوچند جمله‌ای با ضرایب یکسان ولی با "ترتیب وارونه" بگیرید:

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

و

$$Q(x)=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\dots+a_0x^n.$$

چه رابطه‌ای بین ریشه‌های $P(x)$ و $Q(x)$ وجود دارد؟ جواب خود را ثابت کنید.

مسألهٔ ۳. اعداد حقیقی a_0 و a_1 مفروض‌اند. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-2}+a_{n-1}),\quad n\geqslant 2$$

آیا این دنباله همگراست؟ اگر چنین است، به چه مقداری؟

جزئیات حل اینها را به‌شما وا می‌گذارم. لکن، ملاحظات زیر مهم‌اند. در مسألهٔ ۱، حالتهای خاصی که به‌حل مسأله کمك می‌کنند، مواردی است که پارامتر صحیح n متوالیاً مقادیر ۱، ۲، ۳، ... را اختیار می‌کند؛ با این کار الگویی کلی به‌ذهن می‌رسد که به کمك استقرا می‌توان آن را تأیید کرد. با این حال، اگر بخواهید آزمودن حالات خاص را برای مسألهٔ ۲ هم به‌همین روش انجام دهید، به‌دردسر خواهیدافتاد: اگر بخواهید حالات $n=1,2,3,\dots$ را امتحان کنید، کلاهتان پس معرکه خواهد بود! معلوم می‌شود که حالات خاص مناسب برای $P(x)$ و $Q(x)$ در مسألهٔ ۲ انتخاب چند جمله‌ایهایی است که به سادگی تجزیه شوند. مثلاً اگر فرض کنید

$$P(x)=(2x+1)(x+4)(3x-2)$$

در می‌یابید که "وارون" آن، یعنی Q، به‌سادگی تجزیه می‌شود. ریشه‌های P و Q به‌سادگی قابل مقایسه‌اند، و حکم (که از راه دیگری می‌توان آن را به‌بهترین وجه ثابت کرد) اثبات خواهد شد. در مسألهٔ ۳ هم حالات خاصی که موجب تسهیل حل مسأله می‌شوند، ماهیت متفاوتی دارند. اگر مقادیر $a_0=0$ و $a_1=1$ را انتخاب کنید، می‌توانید در این حالت خاص نتیجه را به‌دست آورید. الگوی ظاهر شده در این حالت خاص، آنچه را که در حالت کلی رخ می‌دهد به‌شما الهام خواهد کرد و (به‌ویژه اگر شکل مناسبی برای مسأله رسم کنید!) به‌حل مسألهٔ اصلی منجر خواهد شد.

هریك از این مسائل نمونهٔ ردهٔ بزرگی از مسائل، و مثالی از استراتژیهای متفاوتی برای امتحان کردن حالات خاص است. به بیان دیگر:

استراتژی ۱. برای مسائلی که در آنها یك پارامتر صحیح n نقشی مهم ایفا می‌کند، امتحان کردن مقادیر متوالی $n=1,2,3,\dots$، می‌تواند در جستجوی یك الگو مفید باشد.

استراتژی ۲. در مسائلی که با ریشه‌های چند جمله‌ایها سروکار دارند، امتحان کردن چند جمله‌ایهایی که به سادگی تجزیه می‌شوند ممکن است مفید باشد.

استراتژی ۳. در مسائل مربوط به دنباله‌ها یا سریهایی که به‌طور بازگشتی تعریف می‌شوند، امتحان کردن مقادیر اولیهٔ ۰ و ۱ (اگر چنین انتخابی به‌کلیت فرایند تحت بررسی لطمه نزند) ممکن است مفید باشد.

ناگفته پیداست که این سه‌استراتژی همهٔ استراتژیهای مربوط به "حالتهای خاص" را در بر نمی‌گیرند. در این حد از تحلیل ـ حدی از تحلیل که برای اجرای این استراتژیها لازم است ـ می‌توان یك دوجین استراتژی دیگر پیدا کرد. چنین وضعیتی تقریباً برهمهٔ استراتژیهای پولیا حاکم است. نتیجه آنکه، بیست‌واندی "استراتژی نیرومند" عنوان‌شده در چگونه حل کنیم، درحقیقت از دویست‌سیصد استراتژی "ضعیفتر" اما عملاً مفید تشکیل یافته‌است. این استراتژیها را می‌توان یاد داد ـ امازیاد بودن تعداد آنها خودمشکل تازه‌ای

می‌آفریند. شما باید بدانید از این سیصد تکنیکی که بالقوه در اختیار دارید، کدام یک را در چه مواقعی می‌توان به کار بست. اگر ندانید که چگونه از روشها استفاده کنید، "دانستن" روش درست کمک چندانی نخواهد کرد. برای فهم مشکل به‌ماجرای زیر توجه کنید.

چند سال پیش، عمداً مسألهٔ

$$\int \frac{xdx}{x^2-9}$$

را به‌عنوان اولین سؤال امتحانی در بارهٔ روشهای انتگرالگیری به شاگردانم دادم، به این قصد که روحیهٔ آنها را در ابتدای امتحان تقویت کرده باشم. به کمک جانشانی $u=x^2-9$، که انتظار داشتم شاگردان از آن استفاده کنند، می‌توان کلک مسأله را در عرض چند ثانیه کند. نیمی از شاگردان مسأله را حل کرده بودند، و شروع کارشان خوب بود. منتها یک‌چهارمشان از روش درست اما وقت‌گیر تجزیه به کسرهای جزئی استفاده کرده بودند ــ و چون این مسأله خیلی وقتشان را گرفت، نمرهٔ خوبی از امتحان نیاوردند. نیمی از باقی کسانی که مسأله را حل کرده بودند، از جانشانی پرطمطراق $x=3\sin\theta$ استفاده کرده بودند ــ که البته این هم درست بود، اما چندان وقت‌گیر بود که به‌کلی از بقیه عقب افتادند و امتحان را خراب کردند. جالب است بدانیم شاگردانی که مسأله را از راههای دشوارتری حل کرده بودند نشان دادند که نسبت به آنهایی که از روش ساده‌تر استفاده کرده بودند "بیشتر" می‌دانند، یا دست‌کم مباحث دشوارتر ریاضیات را بلدند. اما این راهم نشان دادند که "تنها آنچه می‌دانی مهم نیست، اینکه چگونه وچه موقع از معلوماتت استفاده کنی هم اهمیت دارد". راه حلی که درست باشد مسلماً زیباست، اما راه حلی که مناسب هم باشد خیلی بهتر است.

لحن این جملهٔ آخر خیلی خوشبینانه‌است. حقیقت آن است که اغلب اعمال‌ما اشتباه است. یعنی اکثر حدسهای ما ــ وقتی می‌خواهیم مسائل واقعی را حل کنیم ــ درست از آب در نمی‌آید. این امر طبیعی است؛ اگرچنین نمی‌بود، مسأله دیگر تمرینی بیش نبود. خصلت ویژهٔ مسأله حل‌کنهای خوب آن است که تا ابد به‌دنبال حدسهای اشتباه خود نمی‌روند. آنها قادرند که روشهای نامطلوب را کنار بگذارند و (مآلاً!) به‌مسیری که کارساز به‌نظر می‌رسد گام بگذارند. پژوهشهای جاری مؤید آن است که قسمت اعظم فرایند مطلوب حل مسأله، مرکب است از توانایی تشخیص و ارزیابی آنچه شخص هنگام‌کار با مسائل انجام می‌دهد، و به‌کارگرفتن بیشترین منابع حل مسأله. این پژوهشها همچنین نشان می‌دهند که شاگردان در این زمینه خیلی کم تجربه‌اند، شاید به این خاطر که تقریباً هیچ وقت در مورد "تخصیص منابع هنگام تفکر" صحبتی به‌میان نیامده است. لکن شواهدی در دست است که نشان‌می‌دهد وقتی آماده‌کردن شاگردان برای حل مسأله همراه با توجه به‌چنین مسائلی باشد ــ مثلاً وقتی شاگردان تشویق شوند در بارهٔ مطالبی چون "چکار می‌کنید؟ چرا این‌کار را می‌کنید؟ این کار در حل مسأله چه کمکی به‌شما می‌کند؟" فکر کنند ــ توانایی آنها در حل مسأله به‌نحو بارزی بالا خواهد رفت. (اصطلاح فنی برای "تخصیص منابع" در تفکر که در این پاراگراف به‌کار رفته است، فراشناخت است. برای آشنایی کلی با این مبحث و جزئیات بیشتر آن، در صورت تمایل می‌توانید به‌فصلی در [۱۴] تحت‌عنوان "این همه جنجال برسر فراشناخت چیست؟" رجوع کنید.)

در یک کلام، شواهد تجربی به‌دست آمده در ده سال اخیر نشان می‌دهند که روشهای شهودی پولیا ــ دست‌کم وقتی به‌کمک جزئیات برگرفته شده از ابزارهای علوم شناختی عینیت بیشتری پیداکنند، می‌توانند درست باشند. بنابراین در قلمرو ریاضیات اوضاع به سود پولیا پیش رفته است. و در قلمرو هوش‌مصنوعی هم باید گفت که‌وضع به‌همین منوال بهتر شده است. دردههٔ ۱۹۷۰ پژوهشگران هوش مصنوعی برروی استراتژیهای نیرومندی که به زمینهٔ حل مسأله بستگی نداشت، مثل "تحلیل میانه ـ انتها" سرمایه‌گذاری کردند؛ به‌استراتژیهای وابسته به‌زمینه، چون رهگشایی ریاضی بهای چندانی داده نشد. اما استراتژیهای‌مستقل از زمینه نقشی‌راکه قرار بود ایفاکنند نکردند، به‌طوری که‌پژوهش درباب علوم شناختی اکنون برروی استراتژیهای حل مسأله‌ای که به‌موضوع گره خورده باشد ــ مانند استراتژیهای حل مسأله در شاخه‌های خاصی از ریاضیات ــ متمرکز گردیده‌است. ممکن است درآینده‌ای نزدیک بتوانیم برنامه‌هایی کامپیوتری تهیه‌کنیم که استراتژیهای رهگشا به‌سبک پولیا را اجراکنند. اگرعرصهٔ پژوهش به‌آنجاکشیده شود ــ که احتمالاً در ده بیست سال آینده چنین خواهد شد ــ روشهای شهودی پولیا برای حل مسأله می‌تواند به‌عنوان بخشی از مبانی یک "دانش تفکر" واقعی به‌کار آید.

مراجع

1. R. Descartes, Rules for the direction of the mind (E. S. Haldane and G. R. I. Ross, translators), In Great Books of the Western World, Vol. 31, Encyclopedia Brittanica Inc., Chicago, 1952.
2. K. Duncker, On problem solving, Psychological Monographs, 58, No. 5, American Psychological Association, Washington, D.C.
3. J. Hadamard, An essay on the psychology of invention in the mathematical field, Princeton University Press, Princeton, 1945.
4. S. Krulik (ed.), Problem solving in school mathematics, 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1980.
5. I. Lakatos, Proofs and Refutations, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
6. An Agenda for Action, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1980.
7. A. Newell and H. Simon, Human Problem Solving, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.
8. G. Pólya and G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Springer, Berlin, 1925. An English version, Problems and Theorems in Analysis I (D. Aeppli, trans.), was published by Springer, New York, 1972.
9. G. Pólya, How to Solve It, Princeton University Press, Princeton, 1945.
10. ——, Mathematics and Plausible Reasoning, 2 vols., Princeton University Press, Princeton, 1954.
11. ——, Mathematical Discovery, Wiley, New York, vol. 1,

1962, vol. 2, 1965; combined paperback edition, 1981.
12. A. Schoenfeld, Mathematical Problem Solving, Academic Press, New York, 1985.
13. ——, Confessions of an accidental theorist, in For the Learning of Mathematics, February, 1987.
14. A. Schoenfeld (ed.), Cognitive Science and Mathematics Education, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1987.
15. E. A. Silver (ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1988.
16. E. L. Thorndike, The Psychology of Arithmetic, Macmillan, New York, 1922.
17. M. Wertheimer, Productive Thinking, Harper and Row, New York, 1945/ 1959.

• Alan H.Schoenfeld, "Pólya, problem solving, and education," *Mathematics Magazine*, (5) **60** (1987) 283-291.

* آلن شوننفلد، دانشگاه برکلی آمریکا

چند مسأله•

ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی

در اینجا، چند مسأله و راهنمای حل آنها را از کتاب پولیا وسگو به‌نام مسائل و قضایایی از آنالیز I می‌آوریم.

۱. فرض کنید تابع $f(x)$ در بازهٔ $(0, 1)$ یکنوا باشد. f لزوماً در نقاط $x=0$ و $x=1$ کراندار نیست. با وجود این فرض کنید انتگرال ناسرهٔ $\int_0^1 f(x)\,dx$ وجود داشته باشد. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

(ص۵۲)

راهنمایی: فرض کنید f صعودی باشد (در غیر این صورت $-f(x)$ را در نظر بگیرید) در این صورت

$$\int_0^{1-1/n} f(x)\,dx\leqslant\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n}$$

$$\leqslant\int_{1/n}^1 f(x)\,dx.$$

شرط یکنوا-صعودی بودن تابع، تنها در همسایگی نقاط تکین الزامی است.

(ص۲۳۶)

۲. با تجدید آرایش عاملهای حاصلضرب بینهایت عاملی

$$P_{1,1}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots$$

حاصلضرب بینهایت عاملی

$$P_{p,q}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2p}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{2q+1}\right)\times\cdots$$

را به‌دست می‌آوریم که در آن بلوکهای متشکل از p عامل بزرگتر از ۱ بعد از بلوکهای متشکل از q عامل کوچکتر از ۱ می‌آیند (عاملهای هم نوع به‌همان ترتیب "طبیعی" باقی می‌مانند.) نشان دهید که

$$P_{p,q}=\sqrt{\frac{p}{q}}$$

(ص۳۰)

راهنمایی: تعریف کنید

$$R_n=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}.$$

در این صورت

$$R_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\frac{1}{R_n}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

پس $R_n\sim\sqrt{n/2\pi}$، و بنابراین حاصلضرب نخستین $m(p+q)$ عامل $P_{p,q}$ برابر است با

$$\frac{R_{mp}}{R_{mq}}\sim\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2}.$$

(ص۲۰۷)

۳. مطلوب است تابع $f(x)$ با مقادیر مثبت به‌طوری که در هر زیربازهٔ متناهی از $[0, \infty)$ انتگرالپذیر و کراندار باشد و انتگرال $\int_0^\infty [f(x)]^\alpha\,dx$ به ازای $\alpha=1$ همگرا، و به ازای سایر مقادیر حقیقی α واگرا باشد. (ص۷۸)

راهنمایی: فرض کنید $a_1, a_2, a_3, \ldots$، دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد که $\sum a_n$ همگرا و به‌ازای هر $\beta<1$، $\sum a_n^\beta$ واگرا باشد. علاوه بر این فرض کنید $a_n<1/2$. برای مثال می‌توان a_n را به‌صورت زیر انتخاب کرد

$$a_n=\frac{1}{n(\log n)^2},\qquad n=3, 4, \cdots$$

به‌ازای $n=1, 2, 3, \ldots$ قرار دهید

$$f(x)=\begin{cases}a_n, & n-1\leqslant x<n-a_n^2\\ 1/a_n, & n-a_n^2\leqslant x<n.\end{cases}$$

و مشاهده کنید که

$$\int_{n-1}^n f(x)\,dx<2a_n.$$

$$\frac{1}{2}a_n^{\alpha}+a_n^{2-\alpha} < \int_{n-1}^{n}[f(x)]^{\alpha}\,dx.$$

(ص۲۶۲)

۴. نشان دهید که به‌ازای هر تابع تحلیلی $f(z)=f(x+iy)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(x+iy)|^2=4|f'(x+iy)|^2.$$

(ص۱۱۵)

راهنمایی: قرار دهید

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y).$$

اگر مشتقات جزئی u و v را با نمادهای u_x، u_y، u_{xx} و ... نشان دهیم، از مشتقگیری نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2+v^2)=2(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}+vv_{xx})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+v^2)=2(u_y^2+v_y^2+uu_{yy}+vv_{yy}).$$

(ص۳۱۲)

۵. کسر اعشاری

$$\theta=0{,}1234567891011121314\ldots$$

(درج پشت سر هم اعداد طبیعی) معرف یک عدد گنگ است. اعداد

$$n\theta-[n\theta],\qquad n=1,2,3,\ldots$$

در بازهٔ $[0,1]$ همه‌جا چگال‌اند. نشان دهید که مجموعهٔ متشکل از اعداد

$$10^n\theta-[10^n\theta],\qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

نیز در $[0,1]$ همه‌جا چگال است. (ص۸۹)

راهنمایی: عدد $10^n\theta-[10^n\theta]$ با ضرب کردن کسر اعشاری داده شده در 10^n و حذف کردن ارقام واقع در سمت چپ ممیز به‌دست می‌آید. فرض کنید $\alpha=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ یک کسر اعشاری متناهی را نمایش دهد. n را طوری انتخاب کنید که $10^n\theta-[10^n\theta]$ با ارقام $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ شروع شود و بعد از آن r صفر بیاید. در این‌صورت

$$|10^n\theta-[10^n\theta]-\alpha|<\frac{1}{10^{k+r}}.$$

(ص۲۸۱)

۶. فرض کنید که عدد

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

گنگ است. ثابت کنید که تنها نقطهٔ حدی مجموعهٔ

$$n!\,e-[n!\,e],\qquad n=1,2,3,\ldots$$

نقطه صفر است. (ص۸۹)

راهنمایی: سری تیلر e عبارت است از

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!},\quad 0<\theta_n<1.$$

بنابراین

$$n!\,e=n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots+1+\frac{e^{\theta_n}}{n+1}.$$

به‌ازای $n\geqslant 2$ داریم

$$\frac{e^{\theta_n}}{n+1}<\frac{e}{n+1}<1.$$

از این‌رو $n!\,e-[n!\,e]=e^{\theta_n}/(n+1)<3/(n+1)$. (ص۲۸۱)

۷. دنبالهٔ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ از اعداد حقیقی را چنان بنا کنید که سری

$$a_1^l+a_2^l+a_3^l+\cdots$$

به‌ازای $l=5$ واگرا باشد ولی به‌ازای هر عدد صحیح، مثبت، و فرد متفاوت با ۵ همگرا باشد. (ص۴۱)

راهنمایی: جوابهای صحیح دستگاه دو معادلهٔ سه مجهولی

$$\begin{cases}u+2v+3w=0\\ u+8v+27w=0\end{cases}$$

را به‌دست می‌آوریم. داریم

$$u=5,\qquad v=-4,\qquad w=1.$$

توجه می‌کنیم که

$$u+32v+243w=120.$$

اکنون به‌ازای $m=1,2,3,\ldots$ تعریف می‌کنیم:

$$a_{10m-9}=a_{10m-8}=a_{10m-7}=a_{10m-6}=a_{10m-5}=m^{-1/5}$$
$$a_{10m-4}=a_{10m-3}=a_{10m-2}=a_{10m-1}=-2m^{-1/5},$$
$$a_{10m}=3m^{-1/5}$$

و

$$a_1^l+a_2^l+\cdots+a_n^l=s_n^{(l)}.$$

در این‌صورت داریم:

$$S_{10m}^{(1)}=S_{10m}^{(3)}=0,$$

$$S_{10m}^{(5)}=120\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

مشاهده می‌کنیم که سری مورد نظر به ازای $l=1$ و $l=3$ همگراست ولی به‌ازای $l=5$ به $+\infty$ واگراست. این سری به‌ازای $l>5$ همگرای مطلق است. (ص۲۲۳)

• G. Pólya, G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis 1*, Second printing, Springer - Verlag, New York, 1976.

تحقیق و خلاقیت

شاپور اعتماد*

روانشناسی *ابداع در ریاضیات*. نوشتهٔ ژاك آدامار. ترجمهٔ عباس مخبر. تهران، دنا، ۱۳۶۷. ۱۷۲ ص.

وقتی سخن از ابداع و روانشناسی ابداع به‌میان می‌آید توجه ما به مفهوم خلاقیت و راز و رمز آن معطوف می‌شود. ساده‌ترین راه این است که به‌سراغ خود افراد خلاق برویم و در مورد رمز موفقیتشان از خودشان سؤال کنیم. ولی شاید بهتر باشد به جای آنکه خود از آنان سؤال کنیم، به گفتگوی آنان گوش فرادهیم:

شاعر: "شما چگونه کار می‌کنید، ممکن است کمی دربارهٔ نحوهٔ کارکردنتان صحبت کنید؟"

عالم: "[والله] چه عرض کنم، نمی‌دانم... صبحها از خانه بیرون می‌روم و مدتی قدم می‌زنم."

شاعر: "عجب، جالب است. حتماً دفترچهٔ یادداشتی هم با خود می‌برید که هروقت فکری به‌ذهنتان خطور کرد در آن بنویسید."

عالم: "نه این کار را نمی‌کنم."

شاعر: "واقعاً این کار را نمی‌کنید؟"

عالم: "آخر می‌دانید، فکر چیز خیلی نادری است."

این حرفهای پیش‌پاافتاده درحقیقت از گفتگوی دو تن از برجسته‌ترین افراد این قرن دربارهٔ فرایند خلاقیت برگزیده شده است. شاعر ما شاعر فرانسوی پل والری است و عالم ما فیزیکدان قرن، آلبرت اینشتین است. این گفتگو، اگر به‌زبان سینمایی امروز سخن گوییم، به‌کمك دوربین (وصدابردار) مخفی‌فیلمبرداری شده‌است. با این فرق که نقش دوربین را عده‌ای ایفا می‌کردند که برخی از آنان در سال ۱۹۳۷ برای شرکت در کنگره‌ای در مرکز سنتز پاریس حضور یافتند. موضوع کنگره مسألهٔ ابداع بود: پل‌والری در زمینهٔ شعر سخنرانی کرد، دوبروی و بائسر در زمینهٔ فیزیك، و آدامار در زمینهٔ ریاضیات. مطلبی که آدامار در این کنگره بیان کرد بعدها در سال ۱۹۴۳، به مناسبت ایراد یك سلسله سخنرانی دراین‌باره، به کتاب موردبحث یعنی *روانشناسی ابداع در ریاضیات* تبدیل شد، که در سال ۱۹۴۵ به‌زبان انگلیسی منتشر شد و اکنون ترجمهٔ فارسی آن در اختیار ماست.

***

این کتاب در اوج موفقیت فلسفهٔ پوزیتیویستی یعنی مکتب تجربه‌گرایی منطقی نوشته شده است. مکتبی که فلسفه را چیزی جز فلسفهٔ علم نمی‌داند و درکار بررسی علم نیز آگاهانه ازطرح مسألهٔ کشف و ابداع، به‌دلیل "روانشناختی بودن این فرایندها" پرهیز می‌کند و همهٔ تلاش خود را صرف بررسی ساختار منطقی نظریات یا منطق علم می‌کند ــ به زبان مصطلح درآن زمان، زمینهٔ کشف[1] را رها می‌کند وتنها به‌زمینهٔ توجیه[2] می‌پردازد. اما آدامار در بحث خود کمترین اعتنایی به‌این‌جو فلسفی ندارد چون منبع الهام اوتأملات یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان و فیلسوفان علم قرن یعنی‌هانری پوآنکاره است. این تأملات را پوآنکاره دراوائل قرن(۱۹۰۸) طی یك سخنرانی برای انجمن روانشناسی فرانسه بیان می‌کند و از نظرمضمون مشابه اظهارنظری است که هلمهولتز در اواخر قرن گذشته(۱۸۹۲) بیان داشته است.

کتاب با قسمت نتیجه‌گیری آن، شامل ده فصل است. فصل اول در توجیه روش درون‌نگرانه[3] و بررسی انتقادی نظریه‌های

1. context of discovery 2. context of justification
3. introspective

متداول در آن زمان است ـ نظریهٔ فرنولوژی گال، نظریهٔ روانشناختی سوریو، نظریهٔ مایه در مورد خوابهای ریاضی، نظریهٔ مبتنی بر نظر خواهی از ریاضیدانان (پرسشنامه‌ای که عده‌ای ریاضیدان با همکاری چند تن از روانشناسان در سال ۱۹۰۲ تنظیم کرده بودند). با آنکه آدامار نتیجهٔ این نظرخواهی را منفی براورد می‌کند، نظریه‌ای را که پوآنکاره در واکنش به‌این پرسشنامه ابراز می‌کند کاملاً می‌پذیرد. پس از ذکر شهادت پوآنکاره وی شواهد افراد دیگری را در رشته‌های متفاوت ارائه می‌کند: گاوس، خودنویسنده، هلمهولتز، موتسارت، والری، دوگورمن. در فصل دوم، به‌بحث دربارهٔ بخشی از ذهن تحت عنوان "ناخودآگاه" می‌پردازد. در فصل سوم به‌نقش ناخودآگاه در کشف علمی اشاره می‌کند و سپس در فصول چهارم، پنجم و ششم مراحل مختلف کشف یا ابداع را مورد بحث قرار می‌دهد. درفصل هفتم انواع ذهن ریاضی و در فصل هشتم موارد استثنایی و برجستهٔ شهود ریاضی معرفی می‌شود. در فصل نهم، نویسنده نکاتی عمومی در مورد شکل گیری جهت تحقیق ارائه می‌کند. کتاب شامل سه‌ضمیمه است: پرسشنامهٔ سال ۱۹۰۲، پاسخهای مکتوب اینشتین، و مطلبی تاریخی درمورد حساب دیفرانسیل و انتگرال. پرسشنامهٔ مذکور اخیراً در نشریه ماتماتیکال اینتلیجنسر از نو به‌چاپ رسیده و پرسشنامهٔ جدیدی هم به‌تقلید از آن تنظیم‌شده است. [۶]

کتاب پر است از حکایتهای جالب و نکات خواندنی. اظهارات دست اول ریاضیدانان، فیزیکدانان، هنرمندان، و اظهار نظرهای نظریه‌پردازان مبحث خلاقیت به‌طور کلی، از جنبه‌های برجستهٔ کتاب به‌شمار می‌آید. نقل برخی از نظرها بیجا نیست[۱]: "ما از ابداع سخن می‌گوییم، حال آن‌که سخن گفتن از کشف صحیحتر است... کشف مؤید پدیده، قانون، یا موجودی است که از قبل وجود داشته ولی ناشناخته مانده است. کریستف کلمب آمریکا را کشف کرد، آمریکا قبل از او وجود داشت؛ ولی فرانکلین برقگیر را اختراع کرد، برقگیر پیش از او وجود نداشت." (ص۹) "ولی ثابت شده‌است که چنین تمایزی چندان روشن نیست. توریچلی مشاهده کرد که اگر لولهٔ بسته‌ای را وارونه در ظرف جیوه فرو کنیم، جیوه تا ارتفاع معینی بالا خواهد آمد. این یك کشف بود، اما وی با این کار فشارسنج را اختراع کرد." (ص۹) به‌این ترتیب اکتشاف و اختراع به‌یکدیگر مربوط‌اند. نام کتاب "روانشناسی ابداع در ریاضیات است و نه روانشناسی ابداع ریاضی"، چون ابداع ریاضی فقط یکی از انواع ابداع است. (ص۱۰) "هنر از آزادی بیشتری برخوردار است زیرا هنرمند فقط با تخیل خود هدایت می‌شود، ولذا کارهای هنری حقیقتاً ابداع محسوب می‌شوند در حالی که در ریاضیات ما بیشتر خادم هستیم تا مخدوم؛ گرچه حقیقت هنوز برما ناشناخته است ولی از قبل وجود دارد و ناگزیر راهی را که باید با بیراهه‌هایش طی کنیم برما تحمیل می‌کند." (ص۱۱) "پدیده‌ای که مسلم است و قطعیت مطلق آن را می‌توانم تضمین کنم این است: ظهور ناگهانی و آنی راه حل یك مسأله، درست در لحظهٔ از خواب پریدن." (ص۲۰) مهمترین پرسش پرسشنامه "به‌تکوین کشف مربوط می‌شود... [ولی] از ریاضیدانان فقط درباره موفقیتهایشان سؤال شده است در حالی که دانستن دلایل شکست [های آنان‌هم] دست کم به‌همان اندازه‌اهمیت دارد." (ص۲۲) "آنچه برای روانشناس جالب است نه‌خودقضیهٔ [ریاضی] بلکه‌شرایط ابداع آن‌است." (ص ۱ و ص ۲۴) موتسارت به‌سراغ نبوغ نمی‌رفته است بلکه نبوغ به سراغ او می‌آمده است (صص ۲۸–۲۹). برای والری، ابداع لحظه‌ای است که توصیف آن بسیار دشوار است، ابداع "مانند بارقه‌ای است از نور"، حالت آن بیشتر خیرگی است تا اشراق (ص۲۹). هاوسمن می‌گوید آفرینش امری خلق‌الساعه و غیرارادی است. (ص۳۰) به‌اعتقاد نیکل اکتشاف نه منطق می‌شناسد نه استدلال؛ اکتشاف، تصادف محض است، فرایندی دارویتی است. (ص۳۱) واژهٔ لاتینی "cogito" (فکر کردن) از نظر ریشه شناسی به‌معنای "باهم تکان‌دادن" است؛ "intelligo" (هوش) هم به‌معنای "برگزیدن" است. (صص ۴۱–۴۲) ابداع، ترکیب کردن افکار است، تشخیص است ـ انتخاب است: ابداع کردن یعنی انتخاب کردن (ص۴۲)؛ آفریدن یعنی تدیده گرفتن ترکیبهای بی‌ثمر. "افکار خلاق... غالباً ناگهانی، پس از تلاشهای ذهنی عظیم، و در حالت خستگی ذهنی همراه با آسودگی جسمی، پدیدار می‌شود." (فریدریش، ص ۴۷) ابداع، اشراق است. مشاهدات نشان می‌دهد که ماهیت فرایند اشراق با کار خودآگاه یکسان نیست؛ اشراق به‌طور آنی و بدون کمترین تلاش دست می‌دهد. (ص۵۰) نبوغ چیزی جز صبر و حوصله نیست (ص۵۸) "برای آنکه چیزی ابداع کنیم باید به‌آن فکر نکنیم" (سوریو، ص ۶۲) کسانی که به‌طور افراطی به‌فکر خود ایمان دارند نمی‌توانند ابداع کنند (برنار، ص ۶۲)

می‌بینیم تنوع نظریات در زمینهٔ مبحث خلاقیت، حتی در آن زمان هم بی‌اندازه است. در این میان آدامار از نظریه‌ای دفاع می‌کند که واضع آن هانری پوآنکاره است. وچنانکه قبلاً گفتیم، نخست در یك سخنرانی در اوایل قرن بیان شد. مبنای نظریهٔ پوآنکاره را روشی درون نگرانه تشکیل می‌دهد. او در سخنرانی خود نخست به‌ذکر چند نمونهٔ مختلف در زمینهٔ تجربهٔ ذهنی شخص خود در مورد مسائل و قضایای مختلف ریاضی می‌پردازد، خصوصیات این تجارب ذهنی را در لحظهٔ ابداع به‌کمك الفاظی چون ایجاز، ناگهانی بودن، قطعیت آنی، غیرمنتظره بودن و غیره توصیف می‌کند. او برمبنای این توصیفها این فرضیه را پیش می‌کشد که کار ذهن آدمی را نمی‌توان به‌فعالیتی که درهنگام هوشیاری انجام می‌دهد محدود کرد. به‌قول اینشتین "قلم من از خودم باهوش‌تر است". در نتیجه برای ذهن علاوه برضمیر خودآگاه جزء دیگری تحت عنوان ناخودآگاه قائل می‌شود. و ابداع را نتیجهٔ نهایی فعالیت همین جزء اخیر می‌داند که از نظر روانی همچون اشراق ظهور می‌کند:

"اولاً: شگفت‌آورترین امر همین وقوع اشراق ناگهانی است، که به‌روشنی مبین فعالیتی ناخودآگاه و مسبوق به آن است. به‌نظر من، نقش این فعالیت ناخودآگاه در ابداع ریاضی انکارناپذیر است. وقتی کسی سخت سرگرم حل مسأله‌ای دشوار است، اغلب اوقات از تلاش اول

---

۱. نظرهایی که در زیر نقل می‌شود، گاهی مطابق با متن فارسی کتاب نیست. روی هم رفته، انتشارات دنا در ویراستاری ترجمهٔ فارسی این کتاب کوتاهی کرده است.

خود نتیجهٔ خوبی نمی‌گیرد. در نتیجه مدتی استراحت می‌کند و بعد دوباره کار را از سر می‌گیرد. نیم‌ساعت اول، مثل سابق، چیزی پیدا نمی‌کند؛ ولی پس از آن ناگهان فکری اساسی به‌ذهنش خطور می‌کند.

شاید ادعا شود که کار آگاهانه به‌دلیل این وقفه مثمر ثمر واقع شده است و استراحت، عامل بازیابی حضور ذهن و توانایی آن بوده است. لیکن محتملتر این است که در طول این استراحت فعالیت ناخودآگاه به کار خود ادامه داده باشد و نتیجهٔ این کار بعداً بر [محقق]... مکشوف شده باشد... این الهامهای ناگهانی... همواره پس از چند روز تلاش مصرانه و مطلقاً بی‌نتیجه رخ می‌دهند... بنابراین، این تلاشها آنقدر هم که تصور می‌شود بی‌ثمر نیستند؛ بلکه در به راه انداختن ماشین ناخودآگاه تأثیر دارند و در صورت فقدان چنین تلاشهایی این ماشین نه به حرکت درمی‌آید و نه محصولی می‌دهد.

ضرورت مرحلهٔ دوم کار آگاهانه، یعنی پس از الهام، اکنون بهتر معلوم می‌شود. لازم است که نتایج این الهام سروسامان داده شود، و پیامدهای بلاواسطهٔ آنها استنتاج شود، مرتب شود، و اثباتها به رشتهٔ کلام درآید، و در درجهٔ اول صحت و سقم نتایج حاصله مورد تحقیق قرار گیرد. قبلاً از احساس یقین مطلقی که همراه الهام دست می‌دهد سخن گفتم؛ در مواردی که توصیف کردم این احساس به‌هیچ‌وجه کاذب نبود و معمولاً هم نیست. ولی فکر نکنید که این قاعده‌ای است بدون استثناء؛ بسیاری از اوقات هم این احساس ما را فریب می‌دهد... من به‌خصوص در مورد افکاری که صبحها و شبها در رختخواب و در حالت نیمه‌خواب به‌سراغم می‌آیند متوجه این امر شده‌ام.

[بسیار خوب] واقعیات ما همین امور هستند؛ حال این واقعیتها چه نظرهایی را بر ما تحمیل می‌کنند. [نخست] اینکه ناخودآگاه، نقش مهمی در آفرینش ریاضی ایفا می‌کند؛ این نکته نتیجهٔ مستقیم مطالب ماست. لیکن معمولاً تصور می‌شود که ضمیر ناخودآگاه [دستگاهی] کاملاً خودکار است. اما دیدیم که فعالیت ریاضی کاری صرفاً مکانیکی نیست، کاری نیست که ماشین بتواند انجام دهد ــ هر اندازه هم که ماشینی کامل باشد. مسأله صرفاً کاربرد قواعد نیست، مسأله این نیست که کلیهٔ ترکیبهای ممکن طبق قوانینی ثابت به دست داده شود. ترکیباتی که بدین گونه به‌دست آیند بسیار پرشمار، بیفایده و پرزحمت‌اند. کار حقیقی مبدع عبارت است از انتخاب از میان این ترکیبات به‌طوری که ترکیبات بی‌ثمر را حذف کند، و چه بسا برای آنکه اصلاً زحمت چنین کاری را به خود ندهد، و قواعدی هم که باید راهنمای این انتخاب واقع شوند بسیار ظریف و لطیف‌اند. بیان دقیق آنها عملاً امری محال است؛ چون آنها را بیشتر احساس می‌کنیم تا بیان... تحت چنین شرایطی، چگونه می‌توان دستگاهی را تصور کرد که این قواعد را به‌طور مکانیکی به‌کار بندد؟

در نتیجه نخستین فرضیه‌ای که مطرح می‌شود این است که: ضمیر ناخودآگاه به‌هیچ وجه شأنی کمتر از ضمیر خودآگاه ندارد؛ ضمیر ناخودآگاه هم صرفاً [دستگاهی] خودکار نیست؛ آن هم صاحب قوهٔ تشخیص است؛ صاحب انسجام و ظرافت است، می‌داند که چگونه انتخاب کند، چگونه کشف کند. چه دارم می‌گویم؟ می‌گویم که ناخودآگاه روش کشف را بهتر از ضمیر خودآگاه می‌داند، چون در جایی پیروز می‌شود که دیگری شکست خورده است. در یک کلام، آیا ضمیر ناخودآگاه برتر از ضمیر خودآگاه نیست؟ اهمیت کامل این پرسش را همهٔ شما می‌دانید...

آیا واقعیتهایی که ارائه کردم ما را ناگزیر می‌کند که به‌این سؤال پاسخ مثبت دهیم؟ من به‌سهم خود اعتراف می‌کنم که به‌هیچ وجه دلم نمی‌خواهد آن را بپذیرم. پس واقعیتها را از نو بررسی می‌کنیم تا ببینیم با تبیین دیگری سازگار هستند یا نه.

مسلم است که ترکیباتی که طی نوعی اشراق ناگهانی، پس از مدتی طولانی فعالیت ناخودآگاه، در ذهن حضور می‌یابند روی‌هم‌رفته ترکیباتی سودمند و پربار هستند.... آیا می‌توان از این امر نتیجه گرفت که ضمیر ناخودآگاه بر مبنای شهود ظریفی... فقط همین ترکیبات سودمند را پدید آورده است یا آنکه ترکیبات متعدد دیگری را هم پدید آورده است که به‌دلیل جالب نبودن نشان به‌خودآگاه ما نفوذ نکرده‌اند؟

بر مبنای این دید دوم، همهٔ ترکیبات گوناگون در اثر خودکار بودن ضمیر ناخودآگاه تشکیل می‌شود، لیکن فقط ترکیبات جالب به‌قلمرو خودآگاه نفوذ می‌کنند. خود این امر هم باز بسیار رازآمیز است. به‌چه علت از میان هزاران محصول فعالیت ناخودآگاه برخی از این آستانه معین درمی‌گذرند در حالی که مابقی به‌آن نمی‌رسند؟ آیا این امتیاز امری صرفاً تصادفی است؟ به‌هیچ وجه... به طور کلی پدیده‌های ممتاز ناخودآگاه، پدیده‌هایی که قابلیت نفوذ به‌خودآگاه را دارند، پدیده‌هایی هستند که به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم به نحوی بسیار اساسی بر حساسیت عاطفی ما تأثیر می‌گذارند.

شاید این توسل به‌حساسیت عاطفی در مورد اثباتهای ریاضی که فقط برای ذهن می‌تواند جالب باشد، شگفت‌آور به‌نظر آید. اما این به‌معنای آن است که احساس زیبایی ریاضی را فراموش کنیم ــ احساس هماهنگی اعداد و اشکال، احساس ظرافت هندسی. این احساس، احساسی حقیقتاً زیباشناختی است که همهٔ ریاضیدانان واقعی از آن با خبرند، و بدون شک با حساسیت عاطفی ارتباط دارد... بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که ترکیبات سودمند دقیقاً زیباترین ترکیبات هستند... به این ترتیب همین حساسیت عاطفی است که نقش دستگاه ظریفی را که قبلاً از آن سخن گفتم ایفا می‌کند، و همین امر به‌کفایت روشن می‌کند که چرا کسی که فاقد آن است

هرگز آفریننده‌ای حقیقی نخواهد بود."[۹]

به‌این ترتیب می‌توانیم شش فصل اول کتاب آدامار را به‌این صورت خلاصه کنیم. برای آنکه به واقعیات فرایند ابداع دست یابیم لازم‌است که ــ برخلاف نظر روانشناسان رفتارگرای متهم ازمکتب پوزیتیویسم ــ تجارب ذهنی خود را به‌حساب آوریم. یعنی باید به‌روش درون‌نگرانه‌متوسل شویم. برمبنای واقعیات به‌دست آمده به‌کمك این روش، می‌توان فرایند ابداع را به‌چهار مرحله تقسیم‌بندی کرد. مرحلهٔ نخست مرحله‌ای تدارکاتی است که عالم آگاهانه تلاش می‌کند مسأله‌ای را حل کند. این تلاش به‌نتیجه‌ای نمی‌رسد و عالم ازهرگونه تلاشی دست می‌کشد و تظاهر به‌غفلت می‌کند. لیکن این تغافل شکل ظاهر مرحلهٔ دیگری است که‌می‌توان آن را مرحلهٔ فترت خواند: در این مرحله ذهن از کار نمی‌ایستد بلکه به‌فعالیت خود ادامه می‌دهد. لیکن فعالیتی که اکنون جریان دارد آگاهانه نیست بلکه ناآگاهانه است. در پرتو این نکته ذهن ما دیگر موجودی بسیط نیست بلکه مرکب است. به‌سخن دیگر، ذهن معادل خودآگاهی نیست بلکه افزون براین شامل ناخودآگاه هم می‌شود. کاری که ناخودآگاه انجام می‌دهد این است که انواع واقسام ترکیبهایی راکه خودآگاه نادیده گرفته‌است فراهم کند. ولی ناخودآگاه کارش صرفاً تکثیر ترکیبات نیست بلکه در عین حال به‌تمیز و تشخیص آنها نیز می‌پردازد. شواهد این امور چیست؟ از یك سو مدت قابل توجه این فعالیت ناخودآگاه‌است، و از سوی دیگر، سرعت حصول نتیجهٔ آن. ناخودآگاه کلیهٔ ترکیباتی راکه به‌ذهن خودآگاه خطور نمی‌کند در نظرمی‌گیرد، ولی در عین ایجاد انبوه این ترکیبات، ترکیب حقیقی را باز می‌شناسد و انتخاب می‌کند، چون حقیقت زیباست. واسطهٔ ارتباط ناخودآگاه و خودآگاه همین زیبایی است نه حقیقت. این مرحلهٔ سوم اشراق است. در لحظهٔ اشراق، احساسی که به‌ما دست‌می‌دهد احساس‌شگفت زدگی است. احساس خودانگیختگی است، احساس افسون شدگی است، چون نتیجه‌ای که ناخودآگاه به خودآگاه ارائه می‌کند اثری هنری است. اما درست است که علم هنر است ولی هنر که علم نیست. یقینی که همراه اشراق دست می‌دهد فریبنده است چون مدیون زیبایی است. اکنون باید نشان داد که آنچه زیباست حقیقت هم دارد. این مرحلهٔ نهایی، یا مرحلهٔ‌چهارم را پوآنکاره مرحلهٔ‌تحقیق‌می‌نامد وطی آن، کارخودآگاه‌باخصایص منحصر به‌آن، توجه، انضباط، و دقت، ازسر گرفته می‌شود.

***

اکنون بیش از هشتاد سال از سخنرانی پوآنکاره و بیش از چهل سال از سخنرانیها و چاپ کتاب آدامار می‌گذرد. در این مدت برخی از روانشناسان به‌بررسی این فرضیه‌ها پرداخته‌اند. نخستین صورتبندی این نظریهٔ چند مرحله‌ای خلاقیت، در سال ۱۹۲۶، توسط گراهام‌والاس‌انجام‌گرفت [۱۰]. دردههٔ ۵۰،عده‌ای از روانشناسان پیرومکتب فروید تلاش کردند تا پشتیبانی نظری برای آن فراهم کنند. نخستین‌بررسی تجربی چند مرحله‌ای بودن خلاقیت‌توسط‌کاترین پاتریك‌انجام‌گرفته است که آدامار در کتاب خود به‌آن اشاره می‌کند. لیکن روش تجربی پاتریك برگزارش دانشمندان، نقاشان و شاعران استوار است. به‌این معنی که‌از آنها خواسته می‌شود تاضمن‌کار، سیر تفکرات خود را به‌زبان آورند. نتایج حاصله ظاهراً مؤید نظریهٔ چند مرحله‌ای خلاقیت بوده‌است لیکن دلایل‌محکمی درتأیید دورهٔ فترت ارائه نمی‌شود. از دههٔ ۵۰ به بعد به طور منقطع این فرضیه به صورت آزمایشگاهی مورد مطالعه قرارگرفته است، و تلاش شده است که به‌طور دقیقتری به خصوصیات دورهٔ فترت توجه شود ولی روی هم رفته شواهد آزمایشگاهی در این زمینه متناقض بوده است.[۸،۷]

نظریه‌ای که‌پوآنکاره ارائه‌کرده‌است نظریه‌ای‌است‌درموردسیر تکوین آفرینش ریاضی و نه در مورد آفرینندگی به‌طور کلی. بحثهای جدید در مورد خلاقیت با سخنرانی گیلفورد دربارهٔ خلاقیت آغاز می‌شود [۱] و همچنان ادامه دارد. اما موضوع این مبحث جدید در روانشناسی رفتار با آنچه پوآنکاره در نظر داشت کاملاً فرق دارد. دراینجا صحبت ازخصوصیات شخصیت خلاق برای تشخیص فرد خلاق است. انگیزهٔ مطالعاتی که از این دیدگاه انجام گرفته است بیشتر معطوف است به‌مسألهٔ مدیریت استعداد در مقیاس اجتماعی، وگیلفورد در مورد بیان ضرورت آن بسیار صریح است:"مهمترین دلیل [کنونی ضرورت تحقیق‌دربارهٔ مسألهٔ خلاقیت] این است که ما سرگرم مبارزه‌ای حیاتی برای بقای شیوهٔ زندگی خود درجهان هستیم. جنبهٔ نظامی این مبارزه، به خاطر مسابقهٔ شدید برای ساختن سلاحهای جدید و استراتژیهای جدید، آهنگ شدیدتری را برای اختراع ایجاب می‌کند..." [۲] پوآنکاره تلاش می‌کرد تا برای فلسفهٔ علم خود، وضع گرایی، زمینه‌ای روانشناختی فراهم‌کند در حالی که‌گیلفورد سعی‌می‌کند برای روانشناسی خود ضرورتی نظامی دست و پا کند.

با این همه، در جریان نظریه پردازیهای مختلفی که از این دیدگاه انجام می‌پذیرد، در اواخر دههٔ ۵۰ دو مفهوم روانشناختی شکل می‌گیرد ــ یکی مفهوم "تفکر واگرا" است و دیگری مفهوم "تفکر همگرا"، و روانشناسان این دیدگاه، خلاقیت را برحسب خصوصیات‌تفکر واگرا تبیین می‌کنند. ویژگیهای تفکر واگرا عبارت است از انعطاف‌پذیری، سعهٔ صدر، فقدان پیشداوری و غیره، در حالی که ویژگیهای‌تفکرهمگرا عبارت است از فقدان‌دید انتقادی، پذیرش راه حلهای موجود، تنگ نظری وغیره. این زمان مقارن‌است باشکل‌گیری نهایی‌نظریات توماس‌کوهن‌دربارهٔ تصویر جدیدی ازعلم ازطریق بررسی دقیق تاریخ علم. کتاب او درسال۱۹۶۲ تحت‌عنوان ساختار انقلابهای‌علمی به‌چاپ‌می‌رسد. [۳] از نظر فلسفی، کتاب او واکنشی است به‌تصویر پوزیتیویستی علم و فلسفهٔ علم پوپر. منبع الهام کتاب، سوای تاریخ علم، تاریخ تحولات اجتماعی، روانشناسی تکوینی پیاژه، فلسفهٔ علم‌لودویك فلك، آرای فلسفی کواین، و غیره، است. لیکن مهمترین مفهوم کتاب، یعنی مفهوم سرمشق، یا پارادایم، در واکنش به‌مفاهیم روانشناختی "تفکر واگرا" و "تفکرهمگرا" شکل می‌گیرد. [۴] کوهن در کتاب خود به‌طورضمنی از دیدکاملاً متفاوتی به مسألهٔ کشف واقعیات و ابداع نظریات می‌نگرد. در مقایسه با نظریهٔ روانشناختی، کتاب در درجهٔ اول واکنشی است جامعه شناختی به مسألهٔ خلاقیت علمی. مضمون کتاب پاسخی است به این پرسش که علم از نظر تاریخی چگونه تحول می‌یابد. پاسخ او صریح است: کدام علم؟ به اعتقاد او سیرتحول علم امری خطی نیست بلکه مراحل مختلفی دارد. در بین این مراحل تحولی، دومرحله شکل

بسیار معینی دارند: یکی مرحلهٔ علم متعارف[1] دیگری مرحلهٔ علم غیرمتعارف[2]. مرحلهٔ نخست بردوره‌های بلند و پایدار یك مبحث جاافتاده دلالت می‌کند مانند نجوم بطلمیوسی، فیزیك ارسطویی، فیزیك نیوتنی وغیره. در حالی که مرحلهٔ دوم بر تحولات اساسی این‌مباحث دلالت می‌کند مانند انقلاب کوپرنیکی، انقلاب اینشتینی و امثال آنها. رفتار جامعهٔ علمی و اعضای آن در این دومرحلهٔ مختلف کاملاً متفاوت است. برخلاف تصور روانشناسان که خصایصی از قبیل "ذهن انتقادی"، "حساسیت به مسأله"، "توانایی ارزیابی" وغیره برای تفکر واگرا قائل‌می‌شوند، اومعتقد است که عالم در دورهٔ علم متعارف درحوزهٔ کار خود از هیچ یك از این خصوصیات برخوردار نیست و خودصاحبنظران مبحث هم هیچگاه چنین انتظاری از محققین و شاگردان خود ندارند. درحقیقت اگر بخواهیم به‌زبان روانشناسان سخن گوییم خصایصی که برای عالم متعارف می‌توان برشمرد خصایصی است که کاملاً مشخصهٔ متفکر همگراست: "فقدان دید انتقادی" و "تنگ نظری" خصوصیت بارز عالم متعارف است. به‌اعتقادکوهن این امر به‌هیچ وجه به معنای نقطهٔ ضعف عالم متعارف نیست، بلکه درست به‌عکس، این امرمبین تعهد او به تعلیمات و آموخته‌های خود است. اما یکی‌از خصوصیات برجستهٔ علم کشف واقعیات جدید و ابداع نظریات جدید است. این کشف وابداع را، اگرمنحصر به‌مواردی منفرد و موضعی بود، طبعاً می‌شد با توسل به روانشناسی فرد تبیین کرد. لیکن اگر توجه خودرا تنها به‌خلاقیت این یاآن عالم معطوف کنیم، استمراراین پدیده نادیده انگاشته‌می‌شود.خصوصیت برجستهٔ علم این است که کشف و ابداع جزء لاینفك آن به‌شمار می‌آید ـ کشف و ابداع دائم تکرار می‌شود. مضافاً براین، کشف وابداع وقایعی منفرد نیستند چون معمولاً بایدیدهٔ کشفهای همزمان و ابداعهای همزمان مواجه هستیم ـ اینکه چند عالم در یك زمان کشف واحدی می‌کنند. همین تکرار و همزمانی است که کوهن‌را وا می‌دارد تا به‌روانشناسی جمع متوسل شود و ارتباط جامعه شناختی جامعهٔ علمی را با اعضای خود تحلیل کند. کشف و ابداع میسر است به‌این دلیل که جامعهٔ علمی در حوزهٔ کار خود تنگ نظر است ـ این تنگ نظری مکانیسم مولدکشف وابداع است. عالم متعارف با محدود بودن میدان دیدش این امکان را می‌یابد که آنچه را نباید رخ دهد ببیند. کشف یك واقعیت توجه به‌امری خلاف انتظار است: کشف اکسیژن، کشف اشعهٔ X و غیره. به‌قول لند، مخترع دوربینهای پولارویدِ، کشف عبارت است‌از "توقف ناگهانی حماقت". گاهی هم ناشی از تسلیم در برابراصرار خود واقعیت است. کلاین درواکنش به‌یك سلسله آثار در آزمایشهای جریانهای خنثی درفیزیك بالاانرژی برای‌همکاران خودمی‌نویسد که نمیدانم چگونه این آثار را بزدایم. ازسوی دیگر ابداع نظریه‌های متعدد برای تبیین داده‌هایی واحد کار دشواری نیست لیکن جامعهٔ علمی معمولاً ازاین‌کار پرهیز می‌کند و تا زمانی که با بحران علمی قابل توجهی مواجه نشده است این‌کاررا تشویق نمی‌کند. کشف‌وابداع به‌این‌ترتیب‌واسطهٔ ضروری‌میان‌علم‌متعارف وعلم‌غیرمتعارف به‌شمار می‌آید. نبوغ عالم در دورهٔ علم متعارف متوجه حفظ سنت علمی مربوطه است: او سعی می‌کند که برای نظریهٔ واحد کاربردهای متعدد بیابد در حالی که در دورهٔ تحول علمی برای داده‌هایی ثابت با نظریه‌های متعدد سروکاردارد. امکان این‌واسطه ازطریق شکل گرفتن جامعهٔ علمی تأمین‌می‌شود ـ خلاقیت علمی بیشتر مدیون جامعه شناسی جامعهٔ علمی است تا روانشناسی عالم.

این نظریات گوناگون را در مورد خلاقیت به‌این دلیل مورد بحث قراردادیم که اکنون درجامعهٔ ما زمینهٔ توجه بیشتری به‌مسأله تحقیق فراهم شده است. لیکن به‌نظر می‌آید که تصور جاری بسیار خام باشد ودرآن نیازهای علمی صرف دست بالارا نداشته باشد. در نتیجه این نگرانی وجود خواهد داشت که دربهترین حالت، مسألهٔ مدیریت استعداد جانشین تدابیر اساسی برای تأمین امکانات و تسهیلات برای شکل گیری جامعهٔ علمی شود. توجه به‌ماهیت کارعلمی، و تفکردربارهٔ آن، لااقل ازسوی خودمحققین، شاید تا اندازه‌ای مانع تصمیم گیریهای نسنجیده شود. لیکن در عین حال، محدودیت بحث مذکور هم باید برای همگان روشن شده باشد. این محدودیت از یك سو مربوط می‌شود به‌تحلیل مباحث بالا در ارتباط با رشته‌های مختلف و ضرورت بررسی تطبیقی آنها: اینکه آیا سیر تحول ریاضیات بیشتر شبیه است به سیر تحول هنریا سیر تحول علوم طبیعی؟ اینکه فرق تحول علمی با تحول تکنولوژیك چیست؟ چرا می‌توان اختراع و تکنولوژی داشت ولی ابداع و علم نداشت؟ وبسیاری پرسشهای دیگر. از سوی دیگر، در طول بحث‌مذکور تأکید ما همواره برخصوصیاتی بود که‌تمایزمیان آدمیان‌را برجسته می‌کرد، به‌این‌دلیل که‌درزندگانی روزانه وجوه تمایز ما آشکارتر از وجوه اشتراك ماست. ولی نباید فراموش کردکه بحث اصلی خلاقیت به‌همین وجوه اشتراك آدمیان مربوط می‌شود ـ خلاقیت به‌عنوان خصیصهٔ فطری آدمی: به‌عنوان سدی دربرابر گرایشهای گوناگون به‌تسخیر ذهن آدمی. اینکه به‌قول هومبولت، و به نقل از چامسکی، چگونه می‌توان از وسیله‌ای محدود استفاده‌ای نامحدودکرد. اما ارتباط میان‌این‌نوع خلاقیت باخلاقیت به‌معنای متعارف کلمه یکی از دشوارترین مسائل معرفت آدمی است، که سابقه‌ای بسیارطولانی دارد.

***

در پایان، با توجه به لفظ "روانشناسی" در عنوان کتاب آدامار تذکر دونکته لازم‌است. ازاین‌دونکته یکی به‌روانشناسان‌ودیگری به‌مدرسان مربوط می‌شود. آدامارکتاب خودرا با یك سلسله انتقادات شدیداللحن به‌نظریهٔ فرنولوژی گال شروع می‌کند (علیرغم اشارهٔ شکاکانه‌ای که درقسمت نتیجه‌گیری به آن‌می‌کند). اگر آدامار روانشناس بوداحتمالاً لحن‌شدیدتری‌هم به‌کارمی‌برد. لیکن باید توجه داشت که نظریهٔ گال نظریه‌ای است که در سطوح مختلف مطالعات مربوط به مغز دارای کاربرد است و در دههٔ کنونی، لااقل ازسوی بخشی از محققین، تحت‌عنوان عضو شناسی جدید، احیاشده‌است (اینکه‌مغزدارای عضوهای‌متعدداست‌ومعماری ونحوهٔ کارآن‌حاصل‌عضوبندی‌همین اعضای ذهنی است)[۵]. نکتهٔ دوم مربوط می‌شود به‌تعلیم ریاضیات. بدیهی است که اگر ما از مکانیسم ناخودآگاه اطلاع بیشتری داشتیم می‌توانستیم ازآن‌برای این امر بهره جوییم. ولی فقدان این اطلاع تا حدودی از طریق

1. normal science · 2. extraordinary science

تلاشهای ریاضیدان برجستهٔ دیگری چون پولیا جبران شده است. آثار او تقریباً همزمان با آثار آدامار به‌چاپ رسیده است و ترجمهٔ فارسی دوتا ازمعروفترین آنها، چگونه مسأله‌حل کنیم (ترجمهٔ احمد آرام) و خلاقیت ریاضی (ترجمهٔ پرویز شهریاری) منتشرشده است.

مراجع

1. J. P. Guilford," Creativity,"*The American Psychologist*, 5 (1950) 444-454.
2. J. P. Guilford," Traits of creativity," in H. H. Anderson, *Creativity and its Cultivation*, Harper & Rows, (1959) 142-161.
3. T. S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago University Press, (1962).
4. T. S. Kuhn,"The essential tension: tradition and innovation in scientific research," in T. S. Kuhn, *The Essential Tension*, The University of Chicago Press, (1977) 225-239, originally published in 1959.
5. E. Lesky," Structure and function in Gall." *Bulletin of the History of Medicine*, (4) **44** (1971) 297-314.
6. A. Muir," The psychology of mathematical creativity," *The Mathematical Intelligencer*, (1) **10** (1988) 33-38.
7. R. Olton and D. Johnson,"Mechanism of incubation in creative problem-solving," *American Journal of Psychology* (4) **89** 617-630.
8. R. Olton, "Experimental studies of incubation: searching for the elusive," *Journal of Creative Behaviour*, (1)**13** (1979) 9-22.
9. H. Poincaré "Mathematical creation, " in J. R. Newman, *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, **4** (1956) 2041-50.
10. G. Wallas, *The Art of Thought*, New York: Harcourt, Brace (1926).

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

• شاپور اعتماد، انجمن حکمت و فلسفه

انتشارکتابهای "ریاضیات پیش دانشگاهی" آغاز شد

مرکز نشر دانشگاهی انتشار مجموعهٔ کتابهای "ریاضیات پیش دانشگاهی" را آغاز کرد. از این سری تاکنون کتابهای زیر در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفته است:

- اعداد : گویا وگنگ
- مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (جلد اول)
- مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (جلد دوم)

کتابهای زیر نیز تا آخر تابستان وارد بازار کتاب خواهد شد:

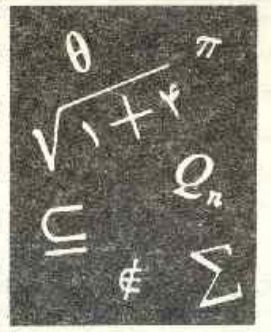
- مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا (جلد چهارم)
- ریاضیات انتخاب

این مجموعه شامل ۳۳ جلد کتاب است که برخی از آنها به مسائل کنکورها و مسابقات ریاضی معروف جهان می‌پردازد و در بقیه، مباحث گوناگون ریاضی به‌زبان غیرتخصصی عرضه می‌شود. نویسندگان این کتابها، اکثراً ازریاضیدانان تراز اول جهان‌هستند. اصل انگلیسی این مجموعه که با عنوان New Math. Library به‌وسیلهٔ جامعهٔ ریاضی آمریکا انتشار یافته، بارها تجدید چاپ‌شده و با استقبال گسترده‌ای روبرو گشته است.

هدف ازانتشار ترجمهٔ فارسی این کتابها این است که‌مجموعه‌ای از مطالب خواندنی ریاضی‌دراختیار دانش‌آموزان و علاقه‌مندان ورود به‌دانشگاه، دانشجویان‌سالهای اول ودوم ونیز کلیهٔ علاقه‌مندان ریاضیات که حرفه و رشتهٔ اصلی آنان ریاضی نیست، قرار گیرد.

فهرست عناوین ۳۲ جلد ازکتابهای این مجموعه به‌قرار زیر است (در ترجمهٔ فارسی، شمارهٔ ردیف مجموعهٔ انگلیسی حفظ شده است):

۱. اعداد:گویا وگنگ
۲. حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟
۳. آشنایی با نابرابریها
۴. نابرابریهای هندسی
۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا (جلداول)
۶. دانستنیهایی از اعداد بزرگ
۷. استفاده از بینهایت
۸. تبدیلهای هندسی (جلداول)
۹. کسرهای مسلسل
۱۰. گراف وکاربردهای آن
۱۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (جلداول)
۱۲. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (جلد دوم)
۱۳. گوشه‌هایی از تاریخ ریاضیات کهن
۱۴. گروه و نمودار آن
۱۵. ریاضیات انتخاب
۱۶. از فیثاغورس تا اینشتین
۱۷. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا (جلد دوم)
۱۸. نخستین مفاهیم توپولوژی
۱۹. بازنگری در هندسه
۲۰. دعوت به‌نظریهٔ اعداد
۲۱. تبدیلهای هندسی (جلد دوم)
۲۲. آشنایی با تحلیل رمز، به‌روش ریاضی
۲۳. ابتکار در ریاضیات
۲۴. تبدیلهای هندسی (جلد سوم)
۲۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا(جلدسوم)
۲۶. روشهای ریاضی در علوم
۲۷. المپیادهای بین‌المللی ریاضی (جلد اول)
۲۸. ریاضیات بازیها
۲۹. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا(جلدچهارم)
۳۰. نقش ریاضیات در علوم
۳۱. المپیادهای بین‌المللی ریاضی (جلددوم)
۳۲. معماهای ابوالهول و دیگر داستانهای ریاضی



فهرست گزیده‌ای از فیلمهای ریاضی

فیلم آموزشی ریاضی، ابزار سودمندی در شناساندن مفاهیم ریاضی و اشاعهٔ ریاضیات است. در اینجا، همچنانکه در یکی از شماره‌های گذشتهٔ نشر ریاضی وعده کرده بودیم، فهرست گزیده‌ای از فیلمهای آموزشی ریاضی در سطوح و زمینه‌های مختلف می‌آید. برخی از این فیلمها از ارزش بسیار زیادی چه از نظر بیان مفاهیم ریاضی و چه از نظر هنر فیلمسازی برخوردارند. تهیهٔ حداقل تعدادی از این فیلمها به وسیلهٔ یکی از دانشگاهها یا نهادهای ذیربط و تدارک یک فیلمخانهٔ ریاضی، اقدامی ضروری است.

الف) مفاهیم عمومی

A LINE IS A LINE IS A LINE

(۵ دقیقه، سیاه و سفید). تهیه کننده: *URS GRAF*

DANCE SQUARED

(۴ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *NFBC*

HOW DO YOU COUNT?

(۱۲ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *IFB*

LINES-VERTICAL AND HORIZONTAL

(۱۳ دقیقه، رنگی). برندهٔ ۶ جایزه. تهیه کننده: *NFBC*

MODMATH

(۱۴٫۵ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *IFB , RESOBEL*

NOTES ON A TRIANGLE

(۵ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *NFBC*

RYTHMETIC

(۹ دقیقه، رنگی). برندهٔ ۱۰ جایزه. تهیه کننده: *NFBC*

SPHERES

(۸ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *NFBC*

THE IDEA OF NUMBERS

(۱۴ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *VEF*

ب) جبر

(A PLUS B) SQUARED

(۱۰ دقیقه، سیاه و سفید). تهیه کننده: *IFB*

AXIOMS IN ALGEBRA

(۱۳ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *VEF*

EQUATIONS IN ALGEBRA

(۱۱ دقیقه، رنگی). تهیه کنندگان:

BRUCE & KATHARIN CORNWELL

FORMULAS IN MATHEMATICS

(۱۰ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *VEF*

LANGUAGE OF ALGEBRA

(۱۶ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *VEF*

PROPORTION AT WORK

(۱۲ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *VEF*

ج) هندسه

ASPECTS OF SYMMETRY

(۱۸ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *PETER ROBINSON*

CAROMS

(۹٫۵ دقیقه، رنگی). مشاور: *CHANDLER DAVIS*

CENTRAL PERSPECTIVITIES

(۱۳٫۵ دقیقه، رنگی). مشاور: *SEYMOUR SCHUSTER*

CENTRAL SIMILARITIES

(۱۰ دقیقه، رنگی). برندهٔ جوائز:

CINE GOLDEN EAGLE, INTERNATIONAL SCIENTIFIC FILM FESTIVAL.

مشاوران: *H.S.M. COXETER, DANIEL PEDOE*

CIRCLE CIRCUS

(۷ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *IFB*

CONGRUENT TRIANGLES

(۷ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *IFB*

CURVES OF CONSTANT WIDTH

(۱۶ دقیقه، رنگی). مشاور: *J.D.E. KONHAUSER*

DIHEDRAL KALEIDOSCOPES

(۱۳ دقیقه، رنگی). مشاور: *H.S.M. COXETER*

DRAGON FOLD...

(۷٫۵ دقیقه، رنگی). تهیه کننده:

BRUCE & KATHARINE CORNWELL

EQUIDECOMPOSABLE POLYGONS

(۱۰٫۵ دقیقه، رنگی). مشاور: *J.D.E. KONHAUSER*

GEOMETRIC VECTORS

(۱۷ دقیقه، رنگی). مشاوران:

WILLIAM MOSER, SEYMOUR SCHUSTER

INVERSION

(۱۲ دقیقه، رنگی). مشاور: *DANIEL PEDOE*

ISOMETRIES

(۲۶ دقیقه، رنگی). برندهٔ جایزهٔ *CINE GOLDEN EAGLE*

مشاوران: *SEYMOUR SCHUSTER, W.O.J. MOSER*

JOURNEY TO THE CENTER OF A TRIANGLE

(۸٫۵ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *IFB*

NEWTON'S EQUAL AREAS

(۸ دقیقه، رنگی). تهیه کنندگان:

BRUCE & KATHARINE CORNWELL, ALFRED BORK

ORTHOGONAL PROJECTION

(۱۳ دقیقه، رنگی). مشاور: *DANIEL PEDOE*

POSSIBLY SO, PYTHAGORAS

(۱۴ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *IFB*

PROJECTIVE GENERATION OF CONICS

(۱۶ دقیقه، رنگی). مشاور: *SEYMOUR SCHUSTER*

SIMILAR TRIANGLES

(۷٫۵ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *IFB*

SIMILAR TRIANGLES IN USE

(۱۱ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *IFB*

SYMMETRY

(۱۱ دقیقه، رنگی). برندهٔ جایزهٔ: *CINE GOLDEN EAGLE*

تهیه کننده: *PHILIPS STAPP*

SYMMETRIES OF THE CUBE

(۱۳٫۵ دقیقه، رنگی). برندهٔ جوایز:

VENICE - PADUA FESTIVAL, CINE GOLDEN EAGLE

مشاوران: *H.S.M. COXETER , W.O.J. MOSER*

THE HYPERCUBE

(۹٫۵ دقیقه، رنگی). برندهٔ دو جایزه. تهیه کننده:

BANC HOFF STRUSS

THE SEVEN BRIDGES OF KONIGSBERG

(۴ دقیقه، رنگی). تهیه کننده:

BRUCE & KATHARINE CORNWELL

TRIO FOR THREE ANGLES

(۸ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *IFB*

د) توپولوژی

FLY LORENS

(۱۴ دقیقه، رنگی). تهیه کننده:

INSTITUT FURDEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM

LIMIT CURVES AND CURVES OF INFINITE LENGTH

(۱۴ دقیقه، رنگی، صامت). تهیه کننده:

THE TOPOLOGY FILMS PROJECT

LIMIT SURFACES AND SPACE FILLING CURVES

(۱۰٫۵ دقیقه، رنگی، صامت). تهیه کننده:

THE TOPOLOGY FILMS PROJECT

REGULAR HOMOTOPIES IN THE PLANE (PART I)

(۱۴ دقیقه، رنگی). تهیه کننده:

EDUCATION DEVELOPEMENT CENTER FOR THE TOPOLOGY FILMS

REGULAR HOMOTOPIES IN THE PLANE (PART II)

(۱۸٫۵ دقیقه، رنگی). تهیه کننده:

EDUCATION DEVELOPEMENT CENTER FOR THE TOPOLOGY FILMS

SIERPINSKI'S CURVE FILLS SPACE

(۴٫۵ دقیقه، رنگی). تهیه کننده:

THE TOPOLOGY FILMS PROJECT

SPACE FILLING CURVES

(۲۵٫۵ دقیقه، رنگی). برندهٔ ۵ جایزه. تهیه کننده:

EDUCATION DEVELOPEMENT CENTER FOR THE TOPOLOGY FILMS

SPHERE EVERSIONS

(۷٫۵ دقیقه، رنگی، صامت). تهیه کننده:

THE TOPOLOGY FILMS PROJECT

THE BUTTERFLY CATASTROPHE

(۴٫۵ دقیقه، رنگی، صامت). تهیه کننده:

THE TOPOLOGY FILMS PROJECT

THE PLANAR DOUBLE PENDULUM

(۲۸ دقیقه، رنگی). تهیه کننده:

INSTITUT FURDEN WISSENSCHAFTLICHEN FILM

TURNING A SPHERE INSIDE OUT

(۲۳ دقیقه، رنگی). برندهٔ دو جایزه. تهیه کننده:

EDUCATION DEVELOPEMENT CENTER FOR THE TOPOLOGY FILMS

ZOOMS ON SELF - SIMILAR FIGURES

(۸ دقیقه، رنگی). تهیه کننده: *THE TOPOLOGY FILMS PROJECT*

تهیهٔ این فیلمها از طریق مؤسسهٔ زیر امکان‌پذیر است:

INTERNATIONAL FILM BUREAU INC.
332 SOUTH MICHIGAN AVE.,
CHICAGO, IL. 60604 - 4382
U.S.A

اخبار و گزارشها

دو نقره و سه برنز

تیم دانش‌آموزان ایرانی در سی‌اُمین المپیاد جهانی ریاضی که در برونشویک آلمان غربی برگزار شد، با کسب ۱۴۷ امتیاز مقام چهاردهم را در بین ۵۱ کشور شرکت کننده احراز کرد. نکتهٔ جالب و امیدوارکننده این است که تیم ایران در سه باری که در این مسابقه شرکت جسته، سیری صعودی پیموده است: در المپیاد بیست و هشتم (کوبا) با ۷۰ امتیاز مقام بیست و ششم و در المپیاد بیست و نهم (استرالیا) با ۸۶ امتیاز مقام هیجدهم را کسب کرده است.

در المپیاد امسال، دانش‌آموزان ایرانی ۲ مدال نقره و ۳ مدال برنز گرفته‌اند. برندگان مدالهای نقره، محمدجابر بران از تبریز و مهدی رضایی از تهران، و برندگان مدالهای برنز، محمدعلی خجسته‌پور از شیراز، امیرعباس عابدی از تهران، و شهریار مختاری‌شرقی از مشهد هستند. ضمناً کورش علیانی عضو دیگر تیم نیز لوحهٔ افتخار گرفته است.

کار تدوین واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار به پایان رسید

کار تدوین مفصلترین واژه‌نامهٔ انگلیسی- فارسی در زمینهٔ ریاضی و آمار، که بیش از ۸۰۰۰ اصطلاح را دربردارد، به پایان رسید. متن اولیهٔ این واژه‌نامه به‌وسیلهٔ انجمن ریاضی ایران تهیه شده و حاصل سالها بررسی، و نظرخواهی از اهل فن است. این متن را هیأتی از نمایندگان انجمن و مرکز نشر دانشگاهی در دو سال گذشته با تشکیل بیش از ۱۸۰ جلسهٔ ۴ ساعته تکمیل و تصحیح کرده است. لیست کامپیوتری واژه‌نامه در دست تهیه است و پس از آخرین تصحیحات به چاپ سپرده خواهد شد. انتظار می‌رود انتشار این واژه‌نامه نقطهٔ عطفی در استانداردسازی واژه‌های ریاضی و آمار، و اصولا در تقویت زبان ریاضی فارسی، باشد.

جایزهٔ عبدالسلام

پروفسور عبدالسلام فیزیکدان معروف و رئیس مرکز بین‌المللی فیزیک نظری در تریست ایتالیا، جایزه‌ای برای پژوهشگران جوان علوم پایه در کشورهای جهان سوم تعیین کرده است. این جایزه در برخی از این کشورها هر سال به یکی از بهترین محققان جوان در یکی از چهار رشتهٔ پایهٔ ریاضی، زیست‌شناسی، شیمی، و فیزیک داده می‌شود (هر چهار سال یکبار، نوبت یکی از این رشته‌هاست). مبلغ این جایزه هزار دلار است و اعطای آن تاکنون در کشورهای پاکستان، سوریه، مراکش و مصر معمول شده و به قرار اطلاع، از سال ۱۹۸۹ ایران نیز مشمول آن شده است. گفته می‌شود سازمان انرژی اتمی ایران متقبل شده است که برای برندگان ایرانی، هزار دلار بر مبلغ جایزه بیفزاید.

در هر کشور، برای هر یك از رشته‌های چهارگانه کمیته‌ای تشکیل

می‌شود تا نامزدهای دریافت جایزه را تعیین کند. این کمیته، که اعضای آن را پروفسور عبدالسلام تعیین می‌کند، گزارش کار خود را به "کمیتهٔ مشاوران" می‌دهد تا انتخاب نهایی انجام گیرد. نامزدها معمولا باید کمتر از سی و پنج سال داشته باشند ولی در شرایط خاص، کمیته می‌تواند این شرط را تعدیل کند. نامزدها باید مقیم کشور خود بوده و بیشتر کارهای پژوهشی‌شان را در کشور خود انجام داده باشند. ارزیابی نامزدها براساس کل کارهای علمی آنان و یا کاری که خاص این جایزه ارائه کرده باشند، انجام می‌شود.

به قرار اطلاع، کمیتهٔ معرفی نامزدهای علوم ریاضی با توجه به تمام جوانب تصمیم گرفته برای سال ۱۹۸۹ کسی معرفی نشود و اولین انتخاب برای ۱۹۹۰ صورت گیرد، ولی امیدوار است برقراری این جایزه از هم اکنون بر تحرك علمی پژوهشگران جوان کشور بیفزاید. این کمیته شیوهٔ معرفی نامزدها و جزئیات دیگر را بعداً اعلام خواهد کرد.

کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در ۱۹۹۰

کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان که هر چهار سال یك بار تشکیل می‌شود، اجلاس بعدی خود را از ۲۱ تا ۲۹ اوت ۱۹۹۰ در شهر کیوتوی ژاپن برگزار خواهد کرد.

اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان (IMU) امکانات ویژه‌ای برای کمك مالی به ریاضیدانان زیر ۳۵ سال از کشورهای جهان سوم که در کارهای پژوهشی فعالیت درخشانی دارند، تدارك دیده است تا هزینهٔ سفر و اقامت آنان را برای شرکت در کنگره تأمین کند. متقاضیان باید تقاضانامه، شرح احوال علمی، و یك نسخه از انتشارات علمی خود را قبل از اول ژانویهٔ ۱۹۹۰ برای دبیر اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان ارسال کنند.

نشانی هیأت اجرایی کنگره به قرار زیر است:

ICM-90
Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University
Kitashirakawa Sakyo-ku
Kyoto 606; Japan

نشانی دبیر IMU نیز به قرار زیر است:

Secretariat of IMU
Department of Mathematics

University of Helsinki
Hallituskatu 15
SF-00100 Helsinki, Finland

درگذشت مارشال هاروی استون[1]

مارشال استون ریاضیدان نامدار در ژانویهٔ ۱۹۸۹ درگذشت. استون در سال ۱۹۰۳ در شهر نیویورك زاده شد و در ۱۶ سالگی وارد دانشگاه هاروارد شد و در سال ۱۹۲۶ از همانجا درجهٔ دکتری خود را دریافت کرد. استاد راهنمای او بیرکهوف بود. وقتی او در سال ۱۹۳۸ به‌عنوان ریاضیدان محقق به عضویت آکادمی ملی علوم آمریکا درآمد، فقط ۳۵ سال داشت. استون در سال ۱۹۲۹ شروع به تحقیق دربارهٔ امکان غیرکراندار بودن عملگرهای خود الحاق در فضای هیلبرت کرد که حاصل آن کتاب ششصد صفحه‌ای *تبدیلات خطی در فضای هیلبرت و کاربرد آنها در آنالیز* است که یکی از منابع کلاسیك و مهم ریاضیات قرن بیستم به شمار می‌رود.

مارشال استون در شاخه‌های مختلف علوم ریاضی تحقیقات ارزنده‌ای کرد و آثاری ارزشمند از خود به جای گذاشت. او دستاوردهای مهمی در آنالیز تابعی، نظریهٔ عملگرها، مکانیك کلاسیك و مکانیك کوانتومی، جبر باناخ، نظریهٔ گروهها و کاربردهای آن و کاربردهای جبر بول در توپولوژی دارد و از قضایای معروف او می‌توان "تعمیم قضیهٔ وایراشتراس در تقریب توابع پیوسته به‌وسیلهٔ چند جمله‌ایها" و "وجود یك تناظر یك بیك بین تمام فضاهای هاسدورف فشرده و برخی از حلقه‌ها" را نام برد.

گردهمایی مشترك انجمن ریاضی آمریکا و انجمن ریاضی لندن

از ۲۹ ژوئن تا ۲ ژوئیهٔ ۱۹۹۲ در شهر کیمبریج انگلستان اجلاس مشترك دو انجمن ریاضی پر سابقه و فعال، انجمن ریاضی لندن و انجمن ریاضی آمریکا، برگزاری خواهد شد. در این گردهمایی پنج سخنرانی به توسط ریاضیدانان انگلیسی و آمریکایی ایراد می‌شود. برگزاری مجالس ویژه و ارائهٔ مقالات مشترك، از جمله برنامه‌های این کنفرانس است. هدف عمدهٔ این گردهمایی بررسی همکاری دو انجمن ریاضی و گسترش آن است.

کنفرانس مرزهای فیزیك، تکنولوژی پیشرفته، و ریاضیات

به‌مناسبت بیست و پنجمین سال برگزاری کنفرانس "مرزهای فیزیك، تکنولوژی پیشرفته، و ریاضیات"، از طرف مرکز بین‌المللی فیزیك نظری در شهر تریست ایتالیا کنفرانسی از ۳۱ اکتبر تا ۳ نوامبر ۱۹۸۹ برگزار می‌شود. عنوان کنفرانس "مروری بر ۲۵ سال گذشته با نگاهی به آینده در فیزیك، تکنولوژی پیشرفته، و ریاضیات" است. دانشمندان معروفی چون آرنولد، فادیف، واینبرگ و پولیاکوف، میهمان این کنفرانس خواهند بود.

خبرنامهٔ UME[2]

این خبرنامه به توسط سه انجمن معتبر ریاضی در آمریکا یعنی AMS، MAA، و SIAM تدارك دیده شده و اولین شمارهٔ آن در ماه مارس ۱۹۸۹ منتشر شده است. هدف اصلی این نشریه انعکاس اخبار و نظریات دربارهٔ بررسی دوبارهٔ نظام آموزش ریاضی در سطح لیسانس و چگونگی دگرگونی و اصلاح آن می‌باشد و در واقع به استقبال ریاضیات قرن بیست و یکم میلادی رفته است. این نشریه در اولین سال انتشار به‌طور رایگان برای تمام اعضای این سه انجمن ارسال می‌شود. برای تهیهٔ این نشریه می‌توان با یکی از انجمنهای فوق مکاتبه کرد.

برندگان جایزهٔ کیوتو در سال ۱۹۸۸

جایزهٔ کیوتو که در سال ۱۹۸۴ به وسیلهٔ کازو ایناموری[1] صنعتگر انساندوست ژاپنی پایه‌گذاری گردید همه ساله به سه نفر در سه رشته: تکنولوژی پیشرفته، علوم پایه، هنرهای خلاق و علوم اخلاقی، اعطا می‌شود و مبلغ آن در حدود ۳۴۰۰۰۰ دلار است. در بین سه برندهٔ سال ۱۹۸۸، دو نفر به خاطر کارهایی در زمینهٔ علوم ریاضی این جایزه را دریافت کرده‌اند که عبارت‌اند از چامسکی و مك کارتی.

چامسکی که استاد دانشگاه ام.آی.تی است، برندهٔ این جایزه در رشتهٔ علوم پایه شده است. او یکی از پیشروان علم زبانشناسی نوین است. دستاورد تحقیقات او "نظریهٔ دستور زایا" است که در آن، همزمان از روانشناسی، نظریهٔ اطلاع، فیزیولوژی اعصاب و کامپیوتر استفاده می‌کند. اساس این نظریه بر این مفهوم استوار است که زبانهای مختلف بشر با وجود تنوع سطحی، دارای ویژگیهای مشترك عمیقی هستند. پروفسور چامسکی توانسته است نظریهٔ خود را به یك مدل که با پارامترهای ریاضی فرمولبندی شده است، تبدیل کند. این نظریه می‌تواند اساسی برای نظریه‌های جدید اتوماتونها و زبانشناسی ریاضی باشد.

دیگر برندهٔ جایزه کیوتو، جان مك کارتی است. او از پیشروان علوم کامپیوتر است که در رشتهٔ تکنولوژی پیشرفته این جایزه را به خود اختصاص داده است. مك کارتی در سال ۱۹۵۱ دکتری خود را در ریاضی از دانشگاه پرینستون گرفت و یکی از محققین اصیل سیستمهای خودمجری[2] و یکی از طرفداران تز توانایی انسان در ابداع هوش مصنوعی است. تحقیقات او در زمینهٔ اتوماتونها (با همکاری کلود شانون) در سال ۱۹۵۶، در طراحی سیستمهای خودکنترل[3] و آدموارهای مصنوعی تأثیر اساسی داشت. یکی از مسائلی که در هوش مصنوعی بروز کرد وجود نقصی ذاتی در زبانهای قراردادی برنامه‌سازی بود که روی عملیات عددی پایه‌گذاری شده‌اند. در حقیقت، این زبانها احتیاجات روز افزون کاربردهای هوش مصنوعی را برآورده نمی‌کنند. پروفسور مك کارتی زبان برنامه‌سازی جدید لیسپ[4] را پایه‌گذاری کرده است که مقدمه‌ای است برای پردازشهای نمادین[5]. شاید مهمترین کار مك کارتی بنیانگذاری سیستم "استفادهٔ همزمان از کامپیوتر"[6]

1. Marshall Harvy Stone
2. Undergraduate Mathematics Education

1. Kazou Inamory
2. self-governing
3. self-controlled
4. Lisp
5. symbolic processing
6. time sharing

است که منشأ پیشرفت سیستمهای کامپیوتری است که سرتاسر کرهٔ زمین را تحت نفوذ خود درآورده‌اند.

جایزهٔ بوخر

انجمن ریاضی آمریکا هر پنج سال یکبار به مؤلف یا مؤلفان بهترین مقاله‌ای که در دورهٔ پنجساله در زمینهٔ آنالیز نوشته شده باشد جایزه‌ای به نام جایزهٔ بوخر اعطا می‌کند. مبلغ این جایزه ۴۰۰۰ دلار است. در سال ۱۹۸۹ ریچارد شوئن از دانشگاه استنفرد آمریکا به خاطر مقاله‌اش دربارهٔ کاربرد معادلات دیفرانسیل جزئی در هندسهٔ دیفرانسیل این جایزه را دریافت کرده است.

جوایز جامعهٔ ریاضی آمریکا (MAA) در سال ۱۹۸۸

مجلات *مانتلی*، *مگزین*[1]، و *کالج ماتماتیکس*[2] سه تا از نشریات جامعهٔ ریاضی آمریکا هستند که عمدتاً به ریاضیات دورهٔ کارشناسی می‌پردازند و شامل مقالات توصیفی در تمامی زمینه‌های ریاضی، مطالبی در زمینهٔ آموزش ریاضیات، فلسفهٔ و تاریخ ریاضی و نقد و بررسی کتاب هستند. جامعهٔ ریاضی آمریکا هر سال به بهترین مقالات این سه مجله جوایزی اعطا می‌کند که عبارت‌اند از جایزهٔ لِستِر فورد (برای بهترین مقالات *مانتلی*) جایزهٔ کارل آلندورفر (برای بهترین مقالات مگزین) و جایزهٔ جورج پولیا (برای بهترین مطالب *کالج ماتماتیکس*). در سال ۱۹۸۸ برندگان این جوایز به قرار زیر بودند.

۱. جایزهٔ لِستِر فورد به مقالات زیر تعلق گرفت:

J., Eppersson, "On the Runge example," *Amer. Math. Monthly*, (4) **94**(1987).
S., Wagon, "Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle," *Amer. Math. Monthly* (7) **94** (1987).

۲. جایزهٔ کارل آلندورفر به مقالات زیر داده شد:

B., Bradon, "Polya's geometric picture of complex integrals," *Math. Mag.* (5) **60** (1987).
S., Galovich, "Products of sines and cosines," *Math. Mag.* (2) **60** (1987).

۳. جایزهٔ جورج پولیا به مقالات زیر اهدا شد:

D. M., Luciano and G. D. Prichett, "From Caesar ciphers to public- key cryptosystems," College Math. J. (1) **18** (1987).
V. F., Rickey, "Issac Newton: man, myth, mathematics," College Math. J. (4) **18** (1987).

صفحهٔ تصویری از مرتبهٔ ۱۰ وجود ندارد؟!

اخیراً نوع جدیدی از اثباتهای ریاضی پا به عرصه گذارده‌اند که از ایجاز و سایر ویژگیهای "شعرگونهٔ" اثباتهای سنتی برخوردار نیستند: اثباتهای کامپیوتری. به عنوان مثال، در سال ۱۹۷۶، هکن[1] و اپل[2] با یك برنامهٔ کامپیوتری در مدت زمانی حدود هزار و دویست ساعت توانستند ۱۴۸۲ گراف را بررسی کرده و اعلام کنند که پاسخ به مسألهٔ کهنسال "چهاررنگ" مثبت است. یعنی، با چهاررنگ می‌توان هر نقشه‌ای را طوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو قطعهٔ مجاور همرنگ نباشند.

در نوامبر ۱۹۸۸ اعلام شد که مسألهٔ قدیمی دیگری نیز اثبات کامپیوتری را پذیرا شده است. کلمنت لم[3] و همکاران ریاضیدان او در دانشگاه کونکوردیا[4]ی کانادا با صرف در حدود ۳۰۰۰ ساعت وقت سوپرکامپیوتر بسیار سریع CRAY-1 اعلام کردند که مثالی دربارهٔ یك حدس گاوس را مورد بررسی قرار داده‌اند.

پیش از بیان این حدس لازم است صفحهٔ تصویری را معرفی کنیم.

فرض کنید P مجموعه‌ای ناتهی به نام مجموعهٔ "نقاط" و L مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های P به نام "خطوط" باشد به‌طوری که

از هر دو نقطه یك و تنها یك خط مرور کند،

هر دو خط یك و تنها یك نقطهٔ مشترك داشته باشند، و

چهار نقطه وجود داشته باشند که از هیچ سه‌تای آنها خطی مرور نکند.

با این شرایط (P,L) را یك "صفحهٔ تصویری" می‌نامند. می‌توان ثابت کرد که اگر تعداد نقاط واقع بر یکی از خطوط صفحهٔ تصویری مفروضی چون S، n+۱، n>۱، باشد برای هر خط دیگری از S این تعداد همین است. عدد طبیعی n مرتبهٔ S نام دارد.

حدس گاوس این است: *یك صفحهٔ تصویری متناهی از مرتبهٔ n وجود دارد اگر و تنها اگر n توانی از یك عدد اوّل باشد.*

البته به ازای هر توانی از یك عدد اول یك صفحهٔ تصویری وجود دارد. و دربارهٔ اعداد مرکب تنها قضیهٔ وجودی، قضیهٔ براك ـ رایز است که می‌گوید: اگر ۲(mod۴) یا n=۱، در آن صورت صفحهٔ تصویری از مرتبهٔ n وجود ندارد مگر اینکه n را بتوان به صورت مجموع دو مربع صحیح نمایش داد. بنابراین، به ازای n=۶ صفحهٔ تصویری وجود ندارد. پس کوچکترین عدد مرکبی که می‌توانست برای حدس گاوس مثال ناقضی فراهم آورد همانا n=۱۰ است. حال لم با آزمودن در حدود صدتریلون حالت مختلف ممکن نشان داده است که چنین صفحهٔ تصویری نیز وجود ندارد. وجود چنین صفحهٔ تصویری معادل است با وجود یك ماتریس ۰ و ۱، ۱۱۱×۱۱۱ که هر سطر آن می‌باید ۱۱ تا یك داشته باشد و هر دو سطر آن نیز فقط در یکی از این ۱ های یازده‌گانه مشترك باشند.

چنین "اثبات"هایی لااقل می‌توانند موقتاً التیامی بر احساس عجز انسان در مقابل مسائل کهنسال و سخت جان ریاضی تلقی شوند و از طرف دیگر شهود ما را نیز در راه درك چنین مسائلی تقویت نمایند. در هر صورت، چنین اثباتهایی پیامدهای فرهنگی و اجتماعی ویژه‌ای نیز خواهند داشت.

---

1. *Mathematics Magazine*
2. *The college Mathematics Journal*

---

1. Haken
2. Appel
3. Clement W. H. Lam
4. Concordia

دو مرکز نوپای تحقیقات ریاضی و فیزیک نظری در ایران

در این شماره از مسؤولان دو مرکز نوپای تحقیقات ریاضی و فیزیک نظری در ایران خواسته‌ایم که خوانندگان نشر ریاضی را با مؤسسات خود آشنا کنند. یکی از این دو، سازمان درحال تأسیس "مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات" است که طرح تأسیس آن در سال ۶۶ به تصویب شورای گسترش آموزش عالی رسید و در فروردین ماه سال جاری مسؤولی برای اجرای این طرح انتخاب شد که امیدواریم تأسیس این مرکز عملا تحقق پیدا کند. و دیگر، "مرکز فیزیک تئوری و ریاضی"، یکی از ارگانهای سازمان انرژی اتمی ایران است که در اواخر سال ۶۶ تشکیل شده و به فعالیتهای پژوهشی در زمینهٔ فیزیک نظری و ریاضی مشغول است.

مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات

۱. اهل معرفت می‌دانند که مفهوم "علم" در زمان ما — یعنی در نیمهٔ آخر قرن بیستم — تحول اساسی یافته و از لحاظ موضوع و روش با گذشته تفاوتهای بنیادی دارد. بدون شك این انقلاب عظیم علمی از دو سرچشمه نشأت گرفته است:

اول: فیزیك نظری با ظهور مکانیك نسبیتی و کوانتومی و خواص حرکتی و رفتار انرژی محورِ ذرّات بنیادی، یکباره اساس ارسطویی حاکم بر تفکر نیوتنی را به‌کناری زده و ماهیّت "مدل گونه" یافته است، آن هم مدلهای ریاضی برای پدیده‌های عینی خارجی؛

دوم: ریاضیات از اواخر قرن نوزدهم با ظهور نظریهٔ مجموعه‌ها خود را از مقولهٔ "کم" خلاص نمود و با ابداعات اساسی گودل و تارسکی و دیگران به صورت علم بررسی مدلهای نظری برای علوم درآمد. آنچه در هندسهٔ دیفرانسیل (خمینه‌ها) و در جبر و در آنالیز تابعی و... تحقق یافته است حقیقتاً تنها به یك انفجار عظیم شبیه است و بس.

تحولات فوق‌الذکر آنقدر اساسی و موفق است که همهٔ پهنهٔ وسیع علوم را فراگرفته است و امروز منتهای سعی و کعبهٔ آمال دانشمندان در هر رشته این است که برای علم خود از روش ریاضی استفاده کنند. لذا به جرئت می‌توان گفت که امروز و درآینده ریاضیات و فیزیك نظری و علوم کامپیوتر نظری (که بخشی از ریاضیات محسوب می شود) زبان، محتوی و روش علوم را معیّن می کنند.

۲. ایران عزیز، این سرزمین دلاوران و دانشمندان و قهرمانان همواره مهد علم و دانش بوده است و به‌خصوص پس از اسلام دورانهای پرشکوهی از شکوفایی علمی را پشت سرگذاشته است. مسلم این سابقهٔ نورانی است که به ما امروز جرئت می‌دهد که بگوییم باید ایران اسلامی را سرزمین علم و دانش و نوابغ بشریت نماییم. چند سالی است که جمعی از ریاضیدانان و فیزیکدانان برجستهٔ کشور درصدد بوده‌اند تا مرکزی برای تحقیقات و مطالعات اساسی و پیشرفته در این دو شعبه از معارف "مادر" تأسیس کنند. پس از تلاش فراوان و با همت برادر گرامی آقای دکتر فرهادی وزیر محترم فرهنگ و آموزش عالی، در تاریخ ۷ر۶ر۶۶ تأسیس چنین مرکزی به تصویب شورای گسترش آموزش عالی رسید. و در تاریخ ۲۷ر۱ر۶۸ مسؤولی برای اجرای طرح انتخاب شد.

به طور کلی، اهداف اصلی مرکز تحقیقات فیزیك نظری و ریاضی، مطابق اساسنامهٔ این مرکز عبارت‌اند از

- انجام تحقیقات در زمینه‌های فیزیك نظری و ریاضیات به طور مستقل و همچنین با همکاری سایر مراکز علمی داخل و خارج کشور؛
- کمك به انتشار نتایج تحقیقات ارزندهٔ علمی در رشته‌های فیزیك و ریاضی؛
- ایجاد ارتباط فعال و سازنده و متقابل علمی با سایر مراکز و جوامع علمی پژوهشی در داخل و خارج کشور از طریق برگزاری سمینار، مبادلهٔ محقق و اجرای پروژه‌های تحقیقاتی مشترك جهت دستیابی به مرزهای دانش در زمینه‌های یاد شده؛
- همکاری با دانشگاهها و مؤسسات آموزش عالی کشور در امر آموزش و پژوهش در مقطع دکترای رشته‌های فیزیك نظری و ریاضیات؛
- ایجاد زمینه‌های مناسب به منظور جذب ریاضیدانان و فیزیکدانان ایرانی مقیم خارج از کشور؛
- ایجاد تسهیلات به منظور استفاده از فرصت مطالعاتی دانشگاهیان در مرکز.

۳. اگرچه در آغاز راه هستیم لیکن لطف الهی بسیار است و همت بزرگان علم و شوق طلاب علوم در این دو رشته وافر، لذا باید به جمیع دوستداران علم و معرفت تولد این مولود سعید را تبریك گفت.

امیدواریم در آینده شاهد دستاوردهای علمی ارزنده باشیم. آمین رب‌العالمین

العبدالفانی

محمد جواد ا. لاریجانی، رئیس مرکز

مرکز فیزیك تئوری و ریاضی ـ سازمان انرژی اتمی ایران

فعالیتهای پژوهشی سازمان انرژی اتمی ایران در زمینهٔ فیزیك نظری و ریاضی از ۳ سال پیش با تصویب یك طرح پژوهشی فیزیك نظری آغاز گردید و به تدریج توسعه یافت. در اواخر سال ۶۶ با گسترش این فعالیت و پشتیبانی ریاست سازمان، مرکز فیزیك تئوری و ریاضی سازمان انرژی اتمی ایران تشکیل گردید و پژوهشهای نظری فیزیك و ریاضی به عنوان بخشی مستقل از فعالیتهای تحقیقاتی سازمان مورد توجه قرار گرفت. در این مدت کوتاه تقریباً ۱۵ طرح پژوهشی به اجرا درآمده و در حدود ۲۰ مقالهٔ تحقیقاتی در مجلات معتبر بین‌المللی چاپ شده. درحال حاضر ۲۰ نفر با این مرکز همکاری دارند: ۵ ریاضیدان (۱ دانشیار ـ ۲ استادیار ـ ۱ مربی و یك دانشجوی فوق‌لیسانس) و ۱۵ فیزیکدان (۲ استاد ـ ۴ دانشیار ـ ۶ استادیار ـ یك مربی و ۲ دانشجوی دورهٔ دکتری).

مرکز دارای یك شورای علمی است که دربارهٔ مسائل علمی مرکز، پذیرش اعضای جدید، تصویب طرحها، پذیرش تقاضاهای مسافرت به خارج، و تعیین سیاست علمی مرکز اظهار نظر کرده تصمیم می‌گیرد.

اعضای جدید مرکز یا به عنوان محققان ارشد پذیرفته می‌شوند (در این مورد، معیار فعالیت مستمر پژوهشی متقاضیان است) یا به عنوان محققان جوان. فعالیت پژوهشی اعضا در پایان هر سال ارزیابی می‌گردد و در صورت تأئید، قرارداد پژوهشی برای سال بعد تمدید می‌گردد. معیار عمدهٔ ارزشیابی شورا چاپ مقاله در یك نشریهٔ معتبر علمی است.

از کارهای جانبی مرکز از برگزاری نخستین کنفرانس مرکز در آبانماه ۱۳۶۷ درراسر می‌توان نام برد که با شرکت ۱۳۰ نفر از استادان و محققان و دانشجویان دورهٔ فوق‌لیسانس و دکتری و ارائهٔ تقریباً ۳۰ مقاله برگزار گردید. بیش از نیمی از این مقالات توسط محققان مرکز ارائه گردید. در این کنفرانس ۶ نفر از محققان صاحب نام ایرانی خارج از کشور نیز شرکت داشتند. از دیگر کارهای جانبی مرکز می‌توان از برگزاری ۲ سلسله درس پیشرفته در زمینه‌های هندسهٔ دیفرانسیل توسط دکتر امیر حسین اسدی از انستیتوماکس پلانك بن و نظریهٔ احتمال توسط دکتر اعتمادی از دانشگاه ایلینوی نام برد.

مرکز فیزیك تئوری و ریاضی امیدوار است با اقبال بیشتری از سوی محققان فعال کشور روبرو شود.

محمد لامعی، سرپرست مرکز

گزارشی از
بیستمین کنفرانس ریاضی کشور

منوچهر میثاقیان

ساختمانهای استوار و قدیمی دانشگاه تهران، خاطرات بسیاری را در ذهن تداعی می‌کند. سرسرای بزرگ دانشکدهٔ علوم درعصر روز ششم فروردین‌ماه ۱۳۶۸ مملو از جمعیت است؛ کار ثبت نام متقاضیان شرکت در کنفرانس شروع شده‌است. خستگی ازسراپای مجریان اصلی برگزاری کنفرانس می‌بارد. دیدن دکتر للهی و دکتر صاحب جهرمی دوتن ازمدعوین کنفرانس برایم بسیارهیجان‌انگیز و جالب توجه‌است. سالها پیش در همین دانشگاه تهران تدریس می‌کردند و جان تازه‌ای به‌پیکر نیم‌مرده و فرسودهٔ ریاضیات آن زمان دمیده بودند. اینان به‌همراه تنی چند ازهمکاران دیگرشان تحولی دربنیان آموزش وبرنامهٔ ریاضیات آن زمان دانشگاه‌تهران پدید آوردند.

در روز آغاز کنفرانس به‌دلیل تأخیری که در افتتاح آن پیش آمده‌است، در میان خیل شرکت‌کنندگان به‌دنبال چهره‌های آشنا می‌گردم. تنی‌چند از پیشگامان ریاضیات ایران‌را می‌بینم که‌خستگی سالهای دور و دراز وگاه نامهربانیها وقدرناشناسیهای نسل‌جوان، چهرهٔ آنان را شکسته‌است. دکترعلی‌افضلی‌پور را با همان هیبت گذشته و موهای سفیدش، اما چهره‌ای شکسته که‌گذر زمان را در خود دارد، برای لحظه‌ای می‌بینم که وارد ساختمان گروه ریاضی، یعنی جایی که حدود چهل‌سال را درآنجا گذرانیده‌است، می‌شود. فوراً به‌گذشتهٔ ریاضیات وکارهای او و همعصرانش در این زمینه می‌اندیشم؛ اولین کتاب آنالیز مختلط، و نخستین کتابهای مدون آمار و احتمال، کاراوست. تربیت نسلهای پی‌درپی افرادی که اینك چرخ ریاضیات ایران را می‌گردانند به‌دست او وسایر همکارانش صورت گرفته‌است. بی‌هیچ‌تردیدی‌رنج به‌سامان‌رسانیدن ریاضیات این‌مرز وبوم را دکتر افضلی‌پورها تحمل کرده‌اند و چه حیف که کنفرانس ازکنار او وسایرین با بی‌مهری گذشت وآنها تنهای تنها درمراسم خسته‌کننده وطولانی افتتاح کنفرانس با حوصله وآرامش نشستند.

کنفرانس با سخنرانیها وپیامهای مقامات رسمی که حدود دو ساعت به‌طول انجامید شروع به‌کارکرد و نکتهٔ قابل‌توجه در این پیامها، تأکیدهمهٔ مسؤلان بربی‌بهایا کم‌بهابودن علوم پایه‌به‌خصوص ریاضیات درکشورما بود وهمه، استادان و انجمن‌ریاضی‌ایران را برای ایجاد تحرك و پویایی در ریاضیات به‌همکاری فراخواندند و این در حالی است که همه می‌دانند انجمن ریاضی چگونه در تاروپود ناگشودنی مقررات دست‌وپاگیرآزادی فعالیت دست‌وپا می‌زند. رئیس‌دولت تا آنجا پیش رفت که‌گفت کنفرانس ازدولت برای چاپ کتابها و نشریات ریاضی تقاضای سوبسید کند! اما اگر دولت محدودیت‌کاغذ را دست‌کم برای دانشگاهها بردارد تاهیچ دانشگاهی برای چاپ یك‌کتاب یا یك نشریهٔ صد صفحه‌ای آنچنان دچار دردسر نشودکه از خیر انتشارات بگذرد، نیازی به‌تقاضای سوبسید نخواهد بود. گرچه به‌دبیرانجمن ریاضی‌ایران در انتهای مراسم افتتاحیه فرصت اندکی‌داده شد تا پیام وگزارشی‌ارائه‌کند، اما پیام او نه شامل دستاورد تازه‌ای از کارهای انجمن بود و نه اشاره‌ای به‌کارهای دیگران داشت و این درحالی بودکه در محل کنفرانس نمایشگاهی ازکتابها و نشریاتی ترتیب داده شده بودکه برهیچ‌یك نام انجمن ریاضی ایران دیده نمی‌شد.

آشفتگی و سردرگمی در برگزاری نخستین سخنرانیها که در بعد از ظهر روزهفتم فروردین‌ماه آغازمی‌شد، نبودن رئیس برای جلسات سخنرانی، آماده نبودن وسایل کمك‌آموزشی برای‌برگزاری سمینارها، از نابسامانیها وکاستیهای کنفرانس در روز اول بودکه ناشی از کثرت شرکت کنندگان، کمی کادر اجرایی برگزاری کنفرانس و شاید عدم شرکت فعال شورای اجرایی انجمن‌ریاضی دربرگزاری کنفرانس بود. درکنفرانس بیستم بیش‌از ۸۰۰ نفرثبت‌نام کرده‌بودندکه با احتساب همراهان، کلاً بیش‌از ۱۲۰۰ نفر درآن حضور داشته‌اند؛ واین خود در طی بیست‌سال برگزاری کنفرانس ریاضی درایران بی‌نظیراست. این کنفرانس ویژگیهای دیگری نیز داشت که دست‌کم طی ده سال اخیر مشابه نداشته است. از جمله برای نخستین‌بار چکیدهٔ مقالات ارائه شده در کنفرانس به‌هنگام ثبت‌نام دراختیار شرکت‌کنندگان گذاشته شده بود. محل اسکان و اقامت شرکت‌کنندگان بسیارخوب‌بود. تعداد قابل‌ملاحظه‌ای مدعو خارجی‌حضور داشتندکه ده‌نفرشان‌از ریاضیدانان‌ایرانی‌مقیم‌خارج بودند وچهرهٔ آشناتر آنان دکترفضل‌الله رضا بود. درمیان‌مدعوین

خارجی تبار، شاید چهرهٔ چندان سرشناس و درخشانی نبود و در مورد مدعوین ایرانی تبار هم وسواس ودقت چندانی صورت نگرفته بود. ویژگی دیگر این کنفرانس که حائز اهمیت فراوان است و در کنفرانسهای گذشته به‌چشم نمی‌خورد بررسی و پذیرش مقالات ارائه شده به کنفرانس بود و آن گونه که در گزارشها آمده بود از ۱۲۰ مقالهٔ ارائه شده، ۲۰ مقاله فاقد ارزش تشخیص داده شده بود، و این کار درمقایسه با سالهای قبل گامی به‌جلو باید محسوب شود.

ویژگی دیگر این کنفرانس حضور تعداد زیادی از دبیران ریاضی کشور بود ولی متأسفانه در هیچ‌یك از گزارشهای افتتاحیه واختتامیه، نامی از دبیران به‌عنوان شرکت کننده برده نشد. بی‌توجهی به‌دبیران ریاضی کشور در کنفرانسها امر رایجی بوده‌است. واین در حالی است که بدون تردید بنیان ریاضیات در دبیرستانها پی‌ریزی می‌شود. البته ناگفته نماند که مراسم و میز گردی پیرامون مسابقات ریاضی دانش‌آموزان ومسائل مربوط به کتابها و آموزش ریاضیات دبیرستانی در طی کنفرانس برگزار شد و در مراسم افتتاح، وزیر آموزش و پرورش هم سخن راند، اما تصور من این است که دانشگاهیان همواره با دبیران رفتاری منفرعنانه داشته‌اند.

از میان سخنرانیهای عمومی که من حضور داشته‌ام می‌توانم از سخنرانیهای دکتر رضا، دکتر للهی و دکتر هدایت به‌نیکی یاد کنم. درواقع صحبت آنان به‌گونه‌ای بود که هرفرد حاضر درجلسه بینشی به دست می‌آورد. برعکس، سخنرانی دکتر شهیدی کاملاً تخصصی به‌نظر می‌آمد.

دکتر رضا که سخن خود را با شعرمعروف و جاودانی حکیم فردوسی: "به‌نام خداوند جان و خرد..." آغاز کرد، معتقد بود برای کشورما کم‌خرج‌ترین و سهل‌الوصولترین رشتهٔ تحقیق در رقابت بادنیای خارج، رشتهٔ ریاضی است؛ وی ابتدا سخنان نصیحت گونه‌ای خطاب به‌جوانان در زمینهٔ پژوهش ایراد کرد وسپس با بیان یك مسألهٔ پژوهشی و حل آن، به‌طورساده و عینی یك نوع شیوهٔ تحقیق را به‌شنوندگان آموزش داد.

دکتر للهی به‌طور گویا و قابل فهمی رابطهٔ شاخه‌ای از ریاضیات محض را با برنامه‌نویسی کامپیوتر نشان داد و به‌آسانی همه‌را متقاعد ساخت که نظریهٔ مجرد رسته‌ها چگونه می‌تواند مبنایی برای برنامه‌نویسی کامپیوتر به‌حساب آید. در همین زمینه از آقای دکتر للهی پرسیدم که آیا هنوز گمان دارد که کامپیوتر ابزار و وسیله‌ای در خدمت ریاضیات محض و ریاضیدانان است؟ و او با احتیاط پاسخ داد که مواردی پیش می‌آید که مرز این دو قابل تشخیص نیست. درحالی که وقتی همین سؤال را از دکتر صاحب پرسیدم، بی‌هیچ درنگی گفت که کامپیوتر جزئی از ریاضیات محض است! سؤال دیگری که از همین دونفر پرسیدم، به‌کارگیری کامپیوتر در آموزش مدارس بود. دکتر للهی آن‌را درحال‌حاضر نه مفید می‌دانست ونه باصرفه. او استدلال می‌کرد که یك متخصص برجسته در فرانسه طی یك‌سال ۲۰۰۰ سطر برنامه می‌نویسد وحدود ۱۵۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ فرانك در ماه حقوق می‌گیرد؛ در عین حال یك برنامهٔ مربوط به‌آموزش حد-تابع بین ۱۰۰,۰۰۰ تا ۲۰۰,۰۰۰ سطرنیاز دارد. بنابراین تهیه و ترجمهٔ این برنامه‌ها قطعاً به‌صرفه نیست، مگراینکه ابتدا در دانشگاهها به‌تربیت متخصص بپردازیم. به‌علاوه جامعهٔ ما هنوز به‌اندازه‌ای که اروپا و امریکا نیازمند کامپیوتراست، نه به‌کامپیوتر مجهزاست و نه به‌آن نیازمند است. برعکس دکترصاحب راهایی کامپیوتر به‌مدارس را مفید و اجتناب‌ناپذیر می‌دانست. سؤال دوم یعنی استفاده ازکامپیوتر درآموزش مدارس را با دکترهدایت نیز درمیان گذاشتم، ایشان درعین‌حال که آن را مفید و اجتناب‌ناپذیر می‌دانست، اجرای آن را درکشور ما عملی نمی‌دید. و مشکل را نه در برنامه نویسی (نرم‌افزار = دستورگان) بلکه در تعمیر و نگهداری (سخت‌افزار = افزارگان) کامپیوتر می‌دید. ازدکترهدایت همچنین پرسیدم که آیا تصور می‌کنید در دههٔ آینده ریاضیات گسسته، گرایش مسلط ریاضیات است؟ و ایشان پاسخ داد با توجه به‌ارتباط و نزدیکی بیش ازحدکامپیوتر با ریاضیات، آینده ازآن ریاضیات گسسته‌است!

سؤالی هم از دکتر شهیدی کردم. کار دکتر شهیدی در زمینهٔ L-تابعها در نظریهٔ اعداد است. از او پرسیدم که آیا فکر می‌کنید دریکی دو سال آینده فرضیهٔ ریمان حل‌شود؟ ایشان پاسخ داد که اخیراً ادعاهایی در این‌باره شده است، از جمله دبرانژ تابستان گذشته ادعا کرده بود که آن را ثابت کرده‌است اما بعداً اشتباه او را پیدا کردند. و ایشان معتقد بود که حل فرضیهٔ ریمان درگرو حل مسائل کلیتری در L-تابعهاست، و به‌این زودیها امکان‌پذیر نیست.

در حاشیهٔ کنفرانس جلسه‌ای نیز با حضور علاقه‌مندان به‌جبر و جبردانان کشور تشکیل‌شد. در این جلسه که بدون نتیجه پایان پذیرفت، گروهی ازجبردانان درصدد تشکیل یك هستهٔ جبر برآمده بودند؛ دراین جلسه برنامهٔ درسهای جبردانشگاهی مخصوصاً دورهٔ فوق لیسانس به‌شدت مورد انتقاد قرار گرفت.

موضوع جالب توجه دیگری که در این کنفرانس به‌چشم می‌خورد، همکاری فعالانه و جدی مرکز فیزیك تئوری و ریاضی سازمان انرژی اتمی ایران بود که هم هزینه‌های مسافرت واقامت پنج‌نفر از ریاضیدانان مدعو درکنفرانس را تقبل کرده بود و هم اقدام به‌برپایی یك دوره کلاس فشرده در زمینهٔ هندسهٔ دیفرانسیل فضاهای چهاربعدی کرده بود که با اقبال روبرو شد. سخنران این دوره، دکترامیرحسین اسدی بود.

کنفرانس سرانجام دربعد از ظهر روز دهم فروردین‌ماه با جلسه‌ای با عنوان مجمع عمومی انجمن‌ریاضی‌ایران پایان گرفت. دراین مجمع، مسؤولیت بازرس‌انجمن برای‌یك‌دورهٔ یکسالهٔ دیگر تمدید گردید. آقای دکتر رجبعلی‌پور طی گزارشی که قاعدتاً می‌بایست به بررسی و نقد بیست سال کنفرانس بپردازد، به‌تکرار همان تاریخچه‌ای پرداخت که بیشتر در نشریات متعدد چاپ شده بود.

قطعنامهٔ کنفرانس ازجمله برتجهیز اصولی کتابخانه‌های ریاضی و اهمیت دادن به پژوهش در ریاضیات تکیه داشت و از مسؤلان می‌خواست تا توجه بیشتری به‌ریاضیات درکشورداشته باشند.

کنفرانس بیستم‌را علی‌رغم اشکالات وکاستیهایش باید کنفرانس خوبی به‌حساب آورد و آن‌را نقطهٔ عطفی در کنفرانسهای ریاضی کشور دانست. اینك در آستانهٔ برگزاری بیست ویکمین کنفرانس ریاضی کشورو بیستمین‌سال تأسیس‌انجمن ریاضی ایران باید چشم به‌راه توفیق بیشتری برای ریاضیات‌ایران‌باشیم وامید داشته‌باشیم درکنفرانس آینده چشم ما به‌فعالیتها و انتشارات انجمن ریاضی ایران روشن شود!

NASHR-I RYAZY

A Mathematics Journal

of

Iran University Press

Volume 2, Number 2, August 1989

Nashr-i Ryazy is published by Iran University Press, three times a year: April, August, and December. The main objectives of the Jouranl are to present:

- new advances in mathematics;
- cultural, philosophical, and historical aspects of mathematics, as well as its applications;
- educational problems of mathematics, specifically those concerning higher education in Iran.

Some of the articles in each issue are written by Iranian mathematicians, and some are translations of expository articles selected from foreign sources.

The annual subscription rates including air mail postage are: Middle East £12, Europe & Asia £13, North America & Far East £15.

To subscribe, please send your name, address, and a check to Iran University Press, 85 Park Avenue, Tehran 15134, Iran.

در شماره‌های آینده می‌خوانید

اثباتهای ریاضی: پیدایش شك موجه	جینا کولاتا
از مثلث تا خمینه	شینگ شن چرن
الگوریتم کارمارکار	گیلبرت استرنگ
پرینکیپیای نیوتن	ریچارد وستفال
پوانکاره و توپولوژی	پاول آلکساندروف
میراث فون نویمان	بری سیپرا